

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**Διηχητική ροή σε συμμετρικό προφίλ λεπτού πτερυγίου υπό
μηδενική γωνία, σύμφωνα με το μοντέλο των Διηχητικών Μικρών**

Διαταραχών (TSD Model)

υπό

Παπαντώνη Ηλία

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2013

© 2013 Παπαντώνης Ηλίας

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτρης Βαλουγεώργης
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Παναγιώτης Τσιακάρας
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τόσο για τη στήριξη που μου παρέχουν στις επιλογές μου, όσο και για την υπομονή τους στη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών γενικότερα. Στη συνέχεια, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση για την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του και την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου και όχι μόνο. Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Ομότιμο Καθηγητή κ. Νικόλαο Βλάχο για την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του σε θέματα αεροδυναμικής, που μου αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον για τις σπουδές μου, αλλά και για το γεγονός ότι στάθηκε κάτι παραπάνω από παιδαγωγός σε λάθος πράξεις μου. Ακόμα, να ευχαριστήσω τον κ. Αναστάσιο Ποτέα για την πολύτιμη βοήθεια του στη συγγραφή της εργασίας και τον κ. Διονύσιο Βερναρδάκη για τη βοήθεια και τη στήριξη σε όλη τη διάρκεια ενασχόλησης με την εργασία. Τέλος, θα ήθελα να ζητήσω συγγνώμη από όσους αδίκησα με τη συμπεριφορά μου και τις πράξεις μου.

Παπαντώνης Ηλίας

**Διηχητική ροή σε συμμετρικό προφίλ λεπτού πτερυγίου υπό
μηδενική γωνία, σύμφωνα με το μοντέλο των Διηχητικών Μικρών
Διαταραχών (TSD Model)**

ΠΑΠΑΝΤΩΝΗΣ ΗΛΙΑΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2013

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Καθηγητής Υπολογιστικής
Ρευστομηχανικής

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική μελετάμε τη διηχητική ροή σε συμμετρικό προφίλ υπό μηδενική γωνία, με βάση το μοντέλο διηχητικών μικρών διαταραχών. Η ιδέα στηρίζεται στο γεγονός πως σε μια ροή με ταχύτητα $0,8 - 1,2 \text{ Mach}$ εάν παρεμβληθεί ένα σώμα, αυτό θα την διαταράξει. Γίνεται μια προσπάθεια να παρουσιαστεί το θέμα όσο το δυνατό πληρέστερα βιβλιογραφικά. Παρατίθενται οι κύριες εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο και οι απαραίτητες συνοριακές συνθήκες για την επίλυσή τους. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στις συνθήκες που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε την ροή που έρχεται από το περιβάλλον στο μελετώμενο σύστημά μας, ή αλλιώς Far Field συνθήκες. Παρουσιάζεται η αριθμητική ανάλυση των κύριων εξισώσεων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Συμπεριλαμβάνονται αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων, τόσο δημοσιευμένα, όσο και μέσα από τη χρησιμοποίηση κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και γίνεται ανάλυση αυτών, αλλά και σύγκριση μεταξύ τους.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη.....	5
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	8
1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο.....	10
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	12
1.3 Οργάνωση Διπλωματικής εργασίας.....	13
Κεφάλαιο 2 Εξισώσεις της θεωρίας των Διχηθικών Μικρών Διαταραχών.....	15
2.1 Υπόβαθρο και Προέλευση των TSD εξισώσεων.....	15
2.1.1 Υπόβαθρο και Προέλευση των TSD εξισώσεων στη μορφή $[K - (\gamma + 1)\phi_\chi]\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$	15
2.1.2 Υπόβαθρο και προέλευση των TSD εξισώσεων στη μορφή $[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2\phi_\chi]\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$	18
2.2 Ανάλυση των εξισώσεων διχηθικών μικρών διαταραχών.....	20
2.3 Συμπεράσματα.....	25
Κεφάλαιο 3 Συνοριακές Συνθήκες και Far field Conditions.....	26
3.1 Αναλυτική έκφραση των συνοριακών συνθηκών και των Far field conditions.....	26
3.2 Εναλλακτική έκφραση των συνοριακών συνθηκών και του Far Field.....	29
3.3 Συμπεράσματα.....	34
Κεφάλαιο 4 Αριθμητική Ανάλυση.....	35
4.1 Διακριτοποίηση και επίλυση της εξίσωσης $[K - (\gamma + 1)\phi_\chi]\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$	36
4.1.1 Δημιουργία πλέγματος για το υπολογιστικό πεδίο.....	37
4.1.2 Διακριτοποίηση κύριων εξισώσεων.....	38
4.1.3 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και του Far Field.....	42
4.1.4 Επαναληπτική λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων κατά Murman & Cole.....	43
4.1.5 Συντηρητικό σχήμα και τεχνητό ιξώδες.....	44
4.1.6 Επίλυση της εξίσωσης διχηθικών μικρών διαταραχών (transonic small disturbance) με τη μέθοδο χαλάρωσης (relaxation).....	47

4.1.7 Επίλυση της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών με χρονικά εξαρτώμενο βήμα [14].....	50
4.2 Διακριτοποίηση και επίλυση της εξίσωσης $\left[(\mathbf{1} - \mathbf{M}_\infty^2) \phi_x - \frac{\gamma+1}{2} \mathbf{M}_\infty^2 \phi_x^2 \right]_x + [\phi_y]_y = \mathbf{0}$	51
4.2.1 Δημιουργία ανομοιόμορφου πλέγματος.....	52
4.2.2 Διακριτοποίηση σε ανομοιόμορφο πλέγμα [16].....	54
4.2.3 Διατύπωση σε συντηρητική μορφή.....	58
4.2.4 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο μελετώμενο σώμα	60
4.2.5 Εφαρμογή της συντηρητικής μορφής στην περιοχή κατάντη του σώματος.	61
4.2.6 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο Far Field	62
4.2.7 Μέθοδος χαλάρωσης για την επίλυση της διακριτοποιημένης μορφής της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών (2.15).....	65
4.3 Συμπεράσματα.....	69
Κεφάλαιο 5 Αποτελέσματα	70
5.1 Αποτελέσματα από τη μέθοδο επίλυσης με χρονικά εξαρτώμενο βήμα [14].....	71
5.2 Αποτελέσματα με βάση τη μέθοδο S.L.O.R. (Successive Line Over-Relaxation).....	74
5.3 Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Siedel βάση της εξίσωσης (2.15)	77
5.4 Συμπεράσματα.....	86
Κεφάλαιο 6 Σύνοψη Διπλωματική ζεργασίας.....	87
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	89
Βιβλιογραφία.....	98

Κατάλογος Σχημάτων

(αριθμός σχήματος, περιγραφή, σελίδα εύρεσης)

Σχήμα 2.01 : Τυπική διηχητική ροή σε λεπτό πτερύγιο [1]	19
Σχήμα 2.02 : Σχήμα των λύσεων της φχ[16]	25
Σχήμα 2.03 : Πεδίο εξάρτησης και Πεδίο Επιρροής [16]	26
Σχήμα 2.04 : Αναπαράσταση των περιοχών ροής στο πτερύγιο [16]	27
Σχήμα 3.01 : Αναπαράσταση της εφαπτόμενης ροής στο σώμα [16]	31
Σχήμα 3.02 : Μελετώμενο σώμα ή σχισμή [16]	32
Σχήμα 3.03 : Περιπτώσεις των τιμών του γραμμικού ολοκληρώματος [16]	33
Σχήμα 3.04 : Περιοχή μεταβολής του δυναμικού κατάντη του σώματος [16]	34
Σχήμα 3.05 : Χαρακτηριστικές γραμμές και οι κατευθύνσεις τους στα σύνορα [16]	36
Σχήμα 4.01 : Υπολογιστικό πεδίο και συνοριακές τιμές για το μοντέλο των διηχητικών μικρών διαταραχών [15]	40
Σχήμα 4.02 : Σχήμα πεπερασμένων διαφορών [13]	43
Σχήμα 4.03 : Υπολογισμός ροής με πεπερασμένες διαφορές σε συντηρητική μορφή [6]	46
Σχήμα 4.04 : Αλγεβρικά επεκταμένο πλέγμα για την επίλυση της TSD εξίσωσης [16]	55
Σχήμα 4.05 : Τοποθέτηση της σχισμής στο πλέγμα [16]	55
Σχήμα 4.06 : Μισοί κόμβοι χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της TSD εξίσωσης [16]	57
Σχήμα 4.07 : Γραφική αναπαράσταση της παραγώγου F [16]	58
Σχήμα 4.08 : Κρουστικό σημείο [16]	61
Σχήμα 4.09 : Διαχείριση των κόμβων πάνω από τη σχισμή [16]	62
Σχήμα 4.10 : Διαχείριση των κόμβων στην κατάντη περιοχή [16]	63
Σχήμα 4.11 : Για υπερηχητική ροή, η εξίσωση (4.42) ορίζεται από αυτούς τους κόμβους [16]	65
Σχήμα 4.12 : Στο πάνω όριο μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της χαρακτηριστικής γραμμής [16]	65
Σχήμα 4.13 : Χαρακτηριστική της κλίσης : $-1-A$ [16]	66

Σχήμα 5.01 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης – C_p πάνω στο πτερύγιο [14]	73
Σχήμα 5.02 : Ηχητική γραμμή πάνω στο πτερύγιο	74
Σχήμα 5.03 : Το πεδίο ταχύτητας [14]	74
Σχήμα 5.04 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p για συντηρητικό και μη συντηρητικό σχήμα [15]	76
Σχήμα 5.05 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p από Murman και Cole (1971) [1]	77
Σχήμα 5.06 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p στα συντηρητικά και μη συντηρητικά σχήματα του Murman [2]	78
Σχήμα 5.07 : Διαφοροποίηση του συντελεστή πίεσης σε διάφορες ταχύτητες [13]	78
Σχήμα 5.08 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p σε διαφορετικής πυκνότητας υπολογιστικά πεδία.	80
Σχήμα 5.09 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,8$ και $\delta = 0,06$	80, 86
Σχήμα 5.10 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,8$ και $\delta = 0,6$	81
Σχήμα 5.11 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,85$ και $\delta = 0,06$	81, 87
Σχήμα 5.12 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,86$ και $\delta = 0,06$	82, 87
Σχήμα 5.13 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,9$ και $\delta = 0,06$	83, 88
Σχήμα 5.14 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,85$ και $\delta = 0,1$	83
Σχήμα 5.15 : Κατανομές C_p σε αεροτομή κυκλικού τόξου $K \leq 0,81$	84
Σχήμα 5.16 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,95$, $\delta = 0,06$ και $K = 0,63$	84
Σχήμα 5.17 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,97$, $\delta = 0,06$ και $K = 0,38$	85
Σχήμα 5.18 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,99$, $\delta = 0,06$ και $K = 0,12$	85
Σχήμα 5.19 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,81$ και $\delta = 0,06$	86
Σχήμα 5.20 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,82$ και $\delta = 0,06$	86
Σχήμα 5.21 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,83$ και $\delta = 0,06$	87
Σχήμα 5.22 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,84$ και $\delta = 0,0$	87
Σχήμα 5.22 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,84$ και $\delta = 0,06$	87
Σχήμα 5.23 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,87$ και $\delta = 0,06$	88
Σχήμα 5.24 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,88$ και $\delta = 0,06$	88
Σχήμα 5.25 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,89$ και $\delta = 0,06$	88

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να μελετήσουμε το θέμα της διηχητικής ροής ρευστού (αέρα) σε πτερύγιο συμμετρικό, σε ιδανικές συνθήκες. Ιδανικές συνθήκες εννοούμε το πτερύγιο να βρίσκεται σε ανοικτό περιβάλλον, με μηδενική γωνία επίθεσης στην ροή του ρευστού, το οποίο ρευστό με τη σειρά του είναι ιδανικό. Διηχητική είναι η ροή που συμβαίνει σε ταχύτητες της τάξης των 0,8 – 1,2 Mach. Η μελέτη του φαινομένου γίνεται με τη χρησιμοποίηση του μοντέλου των διηχητικών μικρών διαταραχών (transonic small disturbance, TSD). Η ιδέα πίσω από τη χρησιμοποίηση αυτού του μοντέλου βρίσκεται στην απλή θεώρηση ότι καθώς η ροή αναπτύσσεται, αν κάτι παρεμβληθεί στην πορεία της θα την διαταράξει. Η παρεμβολή αυτή στην περίπτωση μας είναι φυσικά το συμμετρικό πτερύγιο. Η διαταραχή αναπτύσσεται και κάθετα στην ροή, αλλά και κατά μήκος της, στην περιοχή γύρω από το πτερύγιο[16].

Πρωτοπόροι στη χρησιμοποίηση του συγκεκριμένου μοντέλου επίλυσης ήταν οι Murman και Cole το 1971 [1]. Η ιδέα της χρησιμοποίησης του μοντέλου ήταν πιο παλιά, όμως υπήρχε δυσκολία στον τρόπο επίλυσης της βασικής εξίσωσης[1,15,16]. Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι η εξίσωση αλλάζει σχήμα καθώς αναπτύσσεται η ροή κατά μήκος του πτερυγίου. Η εξίσωση στις υποηχητικές ταχύτητες έχει σχήμα ελλειπτικό, ενώ στις υπερηχητικές έχει σχήμα υπερβολικό. Στην περίπτωση που συναντάμε ηχητική ταχύτητα τότε η εξίσωση παίρνει παραβολικό σχήμα, ενώ έχουμε και την περίπτωση εμφάνισης κρουστικού κύματος. Στο επαναστατικό τους άρθρο οι Murman και Cole διακρίτοποιούν διαφορετικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της βασικής εξίσωσης, ανάλογα με την περίπτωση στην οποία βρισκόμαστε. Με την εύρεσή τους αυτή, μπόρεσαν και άνοιξαν το δρόμο στη μελέτη εξισώσεων που αλλάζουν σχήμα κατά τη διάρκεια του φαινομένου το οποίο περιγράφουν.

Πριν τους Murman και Cole, υπήρχαν διάφορες θεωρητικές και υπολογιστικές μέθοδοι για τη μελέτη της ροής στο συγκεκριμένο εύρος ταχυτήτων. Για να αναφέρουμε μερικές, η πιο κύρια θεωρητική προσέγγιση στο πρόβλημα, είναι η μέθοδος του οδογράφου (hodograph method). Σε αυτήν οι εξισώσεις για τη συμπιεστή ροή μελετώνται στο εύρος των ταχυτήτων, που οι παράγοντες τους είναι γραμμικοί [1]. Παρά την ποικιλία αναλυτικών λύσεων που παίρνουμε από τη συγκεκριμένη μέθοδο, έχουμε δύο μεγάλα μειονεκτήματα. Πρώτον, δε μπορεί το σχήμα του πτερυγίου να δοθεί από πριν και δεύτερον, δεν έχουμε κάποιο τρόπο μεταχείρισης των κρουστικών κυμάτων [1].

Παράλληλα με τους Murman – Cole στο πρόβλημα της διηχητικής ροής, είχαν δουλέψει και οι Magnus – Yoshihara. Στο άρθρο που δημοσίευσαν το 1970 προσπάθησαν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα συνδυαστικής ροής μαζί με τα

κρουστικά κύματα. Το κατέφεραν αυτό διαφοροποιώντας τις εξισώσεις μη-σταθερής συμπιεστής ροής κατάντη στο χρόνο μέχρι να επιτευχθεί σταθερή κατάσταση. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι εξισώσεις αυτές είναι υπερβολικού τύπου. Για την επίτευξη αυτού στηρίχτηκαν αποκλειστικά σε δεδομένα προηγούμενων μελετών για τη μη σταθερή ροή με κρουστικά κύματα [1,15]. Παρά τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα, οι υπολογισμοί είναι τεράστιοι, χρονοβόροι και έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον, υπάρχουν δυσκολίες στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του μελετώμενου σώματος (περυγίου)[1].

Γενικότερα, αν προσπαθήσουμε να καταγράψουμε ιστορικά τα γεγονότα έχουμε τα εξής : Μέχρι το 1970 οι επιστήμονες μπορούσαν να λύσουν την εξίσωση TSD μόνο στο υποηχητικό κομμάτι της. Ο μόνος τρόπος που υπήρχε για την ανάλυση και μελέτη της διηχητικής ροής ήταν η εξίσωση του Euler, πράγμα που σημαίνει μεγάλο κόστος στην υπολογιστική ισχύ. Το 1971 ήρθε το άρθρο των Murman – Cole και άλλαξε τα δεδομένα. Μέχρι το 1972 μπορούσαμε να υπολογίσουμε και διηχητική ροή σε πτερύγια με ανυψωτική γωνία επίθεσης [16]. Το 1973 ο Murman παρατήρησε ότι το σχήμα που χρησιμοποιούνταν στο άρθρο του 1971, δε διατηρούσε τη μάζα στα κρουστικά κύματα κατά την αριθμητική επίλυση. Έτσι, το 1974 δημοσίευσε νέα μελέτη που διόρθωνε την παλιά του προσπάθεια [2,15,16].

Βάση των γεγονότων λοιπόν, αξίζει να αναφέρουμε ότι χρειάστηκε πολύ χρόνος για να επιτευχθεί μια ικανοποιητική λύση, σε ένα εν τέλει φαινομενικά απλό πρόβλημα. Όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης προήλθαν από τον Oswatitsch [15]. Η λύση που δίνεται από τους Murman – Cole στηρίχτηκε, όπως αναφέρθηκε, στη διακριτοποίηση ανάλογα με τον τύπο της εξίσωσης στο δεδομένο κόμβο που μελετάται (ελλειπτικό - υπερβολικό). Η εξίσωση μπορεί σε όλη την έκταση του φαινομένου να εντοπίζει και να μεταχειρίζεται τα κρουστικά κύματα με φυσικό τρόπο [1,2].

Πρέπει να σημειωθεί ότι η βασική εξίσωση των διηχητικών μικρών διαταραχών (transonic small disturbance) εμπεριέχει μια προσέγγιση όσον αφορά στην ακρίβεια, αλλά είναι πολύ απλή τόσο στη χρησιμοποίησή της, όσο και στην έκφραση των συνοριακών συνθηκών [14]. Άξιο αναφοράς είναι ακόμα το γεγονός ότι η μελέτη αυτού του μοντέλου ενδείκνυται πλέον μόνο για ιστορικούς και για καθαρά εκπαιδευτικούς λόγους. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι το συγκεκριμένο θέμα εντοπίζεται σε πολλά βιβλία υπολογιστικών μεθόδων. Σήμερα τα περισσότερα προβλήματα που εμφανίζονται στον πραγματικό κόσμο λύνονται με τις εξισώσεις πλήρους δυναμικού (Full Potential Equations) [16]. Ωστόσο, δεν παύει το μοντέλο που μελετάμε να είναι ένα καλό σημείο να ξεκινήσει κάποιος για την πλήρη κατανόηση του φαινομένου και μια καλή πρώτη προσέγγισή του.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Υπάρχει πληθώρα συγγραμμάτων και άρθρων που μπορεί να βρει κάποιος σχετικά με τη θεωρία των εξισώσεων διηχητικών μικρών διαταραχών. Το συγκεκριμένο αντικείμενο ενδείκνυται για την εισαγωγή κάποιου τόσο στη μελέτη της αεροδυναμικής, όσο και στη μελέτη των υπολογιστικών μεθόδων και της αριθμητικής ανάλυσης.

Η βασική βιβλιογραφική πηγή είναι αναμφισβήτητο το επαναστατικό για την εποχή του άρθρο των Murman και Cole το 1971 [1]. Εκεί γίνεται η πρώτη ανάλυση και επίλυση εξισώσεων που αλλάζουν τύπο στη διάρκεια του φαινομένου, καθώς μεταβαίνουν από ελλειπτική σε υπερβολική μορφή. Άμεση συνέχεια έχουμε με το άρθρο του Murman το 1974 [2] που ήρθε να διορθώσει τη μελέτη που παρουσιάστηκε στο [1], με την εισαγωγή της συντηρητικής μορφής στην εξίσωση προς αριθμητική επίλυση. Μια γρήγορη και περιεκτική μελέτη και παρουσίαση αυτών των πραγμάτων που συναντάμε στα [1] και [2], μπορούμε να βρούμε στην αναφορά του F. Ali [13].

Μια σε βάθος μελέτη του φαινομένου, η οποία δε στέκεται μόνο στη θεωρία των διηχητικών μικρών διαταραχών, συναντάμε στο κομμάτι σημειώσεων του Jameson σχετικά με την αεροδυναμική [6]. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να συνεχίσει τη μελέτη της διηχητικής ροής συνιστάται να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη βιβλιογραφική πηγή.

Από τη μεριά των συγγραμμάτων ξεχωρίζουμε αυτά των Titus, Petrila [14] και των Niyogi, Laha και Chakrabartty [15]. Στα βιβλία τους παρουσιάζονται γενικότερα οι υπολογιστικές μέθοδοι. Στο κεφάλαιο της μελέτης των διηχητικών μικρών διαταραχών συναντάμε μια σε βάθος παρουσίαση του θέματος. Επίσης, έχουμε και την αναφορά σε διαφορετικές μεθόδους επίλυσης, σε σύγκριση με την υπόλοιπη βιβλιογραφία.

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στις σημειώσεις του μαθήματος ‘High Speed’ του πανεπιστημίου της Georgia των Ηνωμένων Πολιτειών (Georgia Institute of Technology) [16]. Σε αυτή τη βιβλιογραφική αναφορά έχουμε μια πλήρη παρουσίαση του φαινομένου τόσο από μαθηματικής και φυσικής άποψης, όσο και από υπολογιστικής άποψης.

Η βιβλιογραφία που παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία, θα μπορούσε να χωριστεί σε δύο κατηγορίες, σχετικά με την μορφή των κύριων εξισώσεων των διηχητικών μικρών διαταραχών. Οι κύριες εξισώσεις που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία διαφέρουν ως προς τη μορφή, όμως αποτελούν διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου πράγματος. Στην πρώτη κατηγορία έχουμε πηγές που ακολουθούν την εξίσωση στη μορφή που παρουσιάζεται στις πηγές [1,2] (όπως για παράδειγμα οι [14],[15]) και στη δεύτερη κατηγορία έχουμε πηγές που επιλύουν την εξίσωση σε μια

άλλη της μορφή όπως αυτή παρουσιάζεται από την πηγή [6] (όπως για παράδειγμα οι [16],[17]). Αυτό γίνεται φανερό στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Από ελληνικής μεριάς, έχουμε το βιβλίο του κυρίου Γιώργου Μπεργελέ «Υπολογιστική Ρευστομηχανική» [10]. Στην ανάλυση της διηχητικής ροής στο βιβλίο του, ο συγγραφέας χρησιμοποιεί στοιχεία και από τις δύο κατηγορίες που μόλις αναφέραμε.

1.3 Οργάνωση Διπλωματικής εργασίας

Το υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας χωρίζεται κυρίως σε τρεις απλές βασικές ενότητες που καταλαμβάνουν τα κεφάλαια 2 – 4. Συγκεκριμένα :

Στο κεφάλαιο 2 ασχολούμαστε με τις εξισώσεις των διηχητικών μικρών διαταραχών (TSD equations). Ενδεικτικό είναι να αναφέρουμε πως περιγράφουμε δύο μορφές των εξισώσεων αυτών. Παρουσιάζουμε τη θεωρία που χρειαζόμαστε τόσο για την ανάλυση, όσο και για την κατανόηση των εξισώσεων. Βλέπουμε την προέλευσή τους και εξηγούμε τους διάφορους όρους που συναντάμε και την φυσική τους σημασία. Επίσης, παρατηρούμε το πώς αλλάζουν σχήμα οι εξισώσεις στη διάρκεια του φαινομένου, αλλά και ποιο είναι το κριτήριο που μας οδηγεί σε αυτή την κατηγοριοποίηση.

Στο κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες που ισχύουν μακριά από το μελετώμενο σύστημά μας ή αλλιώς Far Field συνθήκες. Εδώ μελετάμε τις συνθήκες με τις οποίες η ροή μπαίνει στο σύστημά μας από το περιβάλλον. Η έκφραση των Far-Field συνθηκών έχει προκύψει κατά κύριο λόγο ύστερα από την αναλυτική λύση των εξισώσεων TSD. Ακόμα αναφέρονται και μελετώνται διάφορες άλλες εκφράσεις των συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στην βιβλιογραφία.

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύσσουμε τα σχήματα της διακριτοποίησης που εφαρμόζουμε καθώς και τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε αποτελέσματα και στις δύο μορφές εξισώσεων που αναλύουμε. Χρησιμοποιούμε διαφορετικά σχήματα διακριτοποίησης ανάλογα σε ποιο κόμβο βρισκόμαστε στο πεδίο της ροής. Εξηγούμε τη διαδικασία δημιουργίας τόσο ομοιόμορφου πλέγματος, όσο και ανομοιόμορφου. Δίνουμε τη μέθοδο δημιουργίας συντηρητικού σχήματος εξισώσεων και εξηγούμε τη χρησιμότητά του. Κύρια αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τη μορφοποίηση του προβλήματος, είναι η μέθοδος χαλάρωσης. Χρησιμοποιούμε και αναλύουμε τις μεθόδους SLOR (Successive Line Over Relaxation), Gauss-Siedel, ενώ γίνεται και μία αναφορά σε time stepping scheme, προσπαθώντας με αυτό τον τρόπο να καλύψουμε σε βάθος όλη τη βιβλιογραφία και τις διάφορες περιπτώσεις που συναντάμε.

Στα υπόλοιπα κεφάλαια συναντάμε τα εξής :

Στο κεφάλαιο 5 έχουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων που παίρνουμε από τη διαδικασία την οποία περιγράψαμε πιο πάνω. Γίνεται ανάλυση και σύγκριση με αυτά της βιβλιογραφίας, αλλά και σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων που αναφέρθηκαν.

Στο κεφάλαιο 6 έχουμε τα τελικά συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας, αλλά και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και ενσωμάτωση του εν λόγω προβλήματος στη διδασκαλία των Υπολογιστικών Μεθόδων στην Ενεργειακή Περιοχή.

Κεφάλαιο 2 Εξισώσεις της θεωρίας των Διηχητικών

Μικρών Διαταραχών

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύουμε και περιγράφουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο των διηχητικών μικρών διαταραχών. Στη βιβλιογραφία συναντάμε δύο είδη αυτών των εξισώσεων. Διαφέρουν ωστόσο μόνο στη μορφή ενός όρου, όχι όμως και στις ιδιότητες συνολικά. Η διαφορά αυτή έχει να κάνει περισσότερο με τις θεωρήσεις τόσο σε συντεταγμένες όσο και στην αναλυτική έκφραση ορισμένων όρων.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου που ακολουθεί, έχουμε το υποκεφάλαιο 2.1 να μας δίνει το υπόβαθρο και την προέλευση των κύριων εξισώσεων, ενώ στο υποκεφάλαιο 2.2 έχουμε την ανάλυση αυτών, ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει ορισμένα από τα βασικά τους γνωρίσματα.

2.1 Υπόβαθρο και Προέλευση των TSD εξισώσεων

2.1.1 Υπόβαθρο και Προέλευση των TSD εξισώσεων στη μορφή

$$[K - (\gamma + 1)\phi_{\chi}] \phi_{\chi\chi} + \phi_{\gamma\gamma} = 0$$

Οι εξισώσεις των διηχητικών μικρών διαταραχών προκύπτουν ως ένα κομμάτι μιας συστηματικής (ασυμπτωτικής) ανάπτυξης των εξισώσεων πλήρους δυναμικού των αερίων. Η παράμετρος που λαμβάνουμε υπόψη στην ανάλυση των εξισώσεων, είναι η αναλογία του πάχους του σώματος που παρεμβάλλεται στη ροή. Στην περίπτωση μας εδώ, αυτό το σώμα είναι το πτερύγιο και ο λόγος του πάχους προς το μήκος του πτερυγίου συμβολίζεται με δ . Όπως έχει αναφερθεί στην εισαγωγή, καταφέρνουμε να παρουσιάσουμε τη ροή σαν μικρές διαταραχές σε μια ομοιόμορφη παροχή ρευστού (αέρα). Για να αποκτήσουμε μια πρώτη σωστή προσέγγιση στην εξίσωση, θεωρούμε ότι ο αριθμός Mach, που υπολογίζεται στην κυρίως μάζα του επερχόμενου ρεύματος αέρα (Mach freestream number), προσεγγίζει τη μονάδα (1) [1]. Αυτό το νούμερο το συμβολίζουμε με M_{∞} . Ο υποεκθέτης ∞ υποδηλώνει ποσότητα που έρχεται στο μελετώμενο σύστημα μας, από το περιβάλλον. Η τάση των

διαταραχών να επεκτείνονται πλευρικά λαμβάνεται υπόψη με τη χρήση μιας κλιμακούμενης συντεταγμένης :

$$\tilde{y} = \delta^{1/3} y \quad (2.1)$$

(Σε ορισμένες πηγές στη βιβλιογραφία συναντάμε και τον τύπο $\tilde{y} = M_\infty^{1/2} \delta^{1/2} y$ [10]. Αυτό έχει να κάνει αποκλειστικά με τον τρόπο χρησιμοποίησης της μεταβλητής και τη μορφή των βασικών TSD εξισώσεων που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση. Περισσότερα αναλύονται στα κεφάλαια που ακολουθούν.)

Σε αυτό το σημείο, εισάγουμε την παράμετρο K . Με αυτό συμβολίζουμε την διηχητική παράμετρο ομοιότητας. Έχουμε ότι :

$$K = (1 - M_\infty^2) / \delta^{2/3} \quad (2.2)$$

Εδώ αξίζει να αναφερθεί ότι οι δύο μικρές παράμετροι του προβλήματος, δ και $1 - M_\infty$, συναρτώνται έτσι ώστε η παράμετρος K να είναι $O(1)$ και σε αυτό το πλαίσιο προκύπτει η παραπάνω σχέση που περιγράφει την διηχητική ροή. Οι τάξεις μεγέθους των διαφόρων διαταραχών, της παραμέτρου ομοιότητας κ.α., προκύπτουν έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής για ιδανική και αστρόβιλη συμπίεστη ροή ενώ ταυτόχρονα οι δύο μικρές παράμετροι του προβλήματος, ο λόγος όψεως δ του πτερυγίου και η απόκλιση του Mach, $1 - M_\infty$, από την μονάδα να ικανοποιούν την σχέση (2.2). Η μοντελοποίηση αυτή είναι συμβατή με τις σχέσεις Rankine-Hugoniot που ικανοποιούν τα κρουστικά κύματα (shockwaves) [1]. Για ευκολία στον τρόπο κατανόησης των παραπάνω, παρουσιάζεται το ανάπτυγμα των εξισώσεων για την περίπτωση που έχουμε συμμετρικό προφίλ πτερυγίου σε μηδενική γωνία επίθεσης από την επερχόμενη ροή η οποία θεωρείται διδιάστατη. Οι ποσότητες ροής είναι :

$$\begin{aligned} q_x / U &= 1 + \delta^{2/3} u + \dots, & q_y / U &= \delta v + \dots \\ P / P_\infty &= 1 + \delta^{2/3} p + \dots, & \rho / \rho_\infty &= 1 + \delta^{2/3} \sigma + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου $u = u(x, \tilde{y}; K)$, $v = v(x, \tilde{y}; K)$ και ανάλογα για την πίεση και την πυκνότητα. Τα u , v είναι ποσότητες που αντιπροσωπεύουν την διαταραχή του πεδίου ταχυτήτων στη x και στη y κατεύθυνση αντίστοιχα. Η τάξη μεγέθους του q_y / U τροποποιείται από την κατάσταση της εφαιπόμενης ροής στο πτερόγιο. Οι πιο πάνω εξισώσεις αντικαθίστανται στις εξισώσεις συνέχειας, διατήρησης ορμής και διατήρησης εντροπίας (περνώντας με φυσικό τρόπο στα shock waves), λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις των ωστικών κυμάτων. Τελικά, καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κίνησης, που αποτελούν το σύστημα εξισώσεων μας [1]:

$$\text{Νόμος του Bernoulli } p = \gamma \sigma = -\gamma u \quad (2.4)$$

Διάνυσμα ροής μάζας $\rho q_x / \rho_\infty U = 1 + \delta^{4/3} [Ku - (\gamma + 1) u^2 / 2] + \dots$

$$\rho q_y / (\rho_\infty U) = \delta v + \dots \quad (2.5)$$

$$\text{Διηχητικές Εξισώσεις } [Ku - (\gamma + 1) u^2 / 2]_x + v_{\bar{y}} = 0 \quad (2.6 \text{ a})$$

$$v_x - u_{\bar{y}} = 0 \quad (2.6\text{b})$$

Η πρώτη από τις διηχητικές εξισώσεις είναι μια διηχητική μορφή της εξίσωσης συνέχειας, ενώ η τελευταία από τις διηχητικές εξισώσεις πιο πάνω δείχνει ότι η ροή αυτής της τάξης (και της δεύτερης τάξης επίσης) είναι αστρόβιλη [1]. Όσα οστικά κύματα συμβαίνουν πάνω σε λεπτές αεροτομές (μελετώμενα πτερύγια) στη διηχητική ροή είναι επαρκώς ασθενή ώστε να μην δώσουν σημαντική στροβιλότητα και να ισχύει η θεωρία αστρόβιλης ροής. Σε αυτό το σημείο εισάγουμε ένα δυναμικό ταχυτήτων [1] :

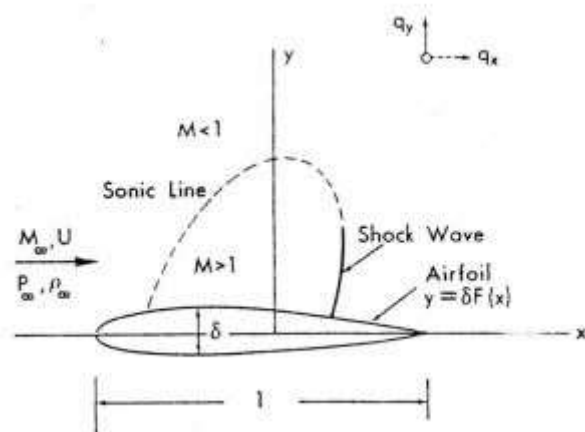
$$u = \phi_x, v = \phi_{\bar{y}} \quad (2.7)$$

Το κάνουμε αυτό για να επωφεληθούμε από τα πλεονεκτήματα που προσφέρει για τον υπολογισμό μιας απλής συνάρτησης. Το σύστημα μας αντικαθίσταται πλέον από την βασική διηχητική εξίσωση [1]:

$$\left[K\phi_x - (\gamma + 1) \phi_x^2 / 2 \right]_x + \phi_{\bar{y}\bar{y}} = 0 \quad (2.8)$$

ή διαφορετικά

$$\left[K - (\gamma + 1)\phi_x \right] \phi_{xx} + \phi_{\bar{y}\bar{y}} = 0 \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.01 : Τυπική διηχητική ροή σε λεπτό πτερύγιο [1]

2.1.2 Υπόβαθρο και προέλευση των TSD εξισώσεων στη μορφή

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2 \phi_x] \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

Οι εξισώσεις πλήρους δυναμικού των αερίων είναι :

$$(\rho \phi_x)_x + (\rho \phi_y)_y = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1 + \frac{(\gamma+1)}{2} M_\infty \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{V^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.11)$$

Όπου ρ έχουμε την πυκνότητα του ρευστού (αέρα), ϕ το δυναμικό των ταχυτήτων στις x και y κατευθύνσεις, u και v οι ταχύτητες στις x και y κατευθύνσεις αντίστοιχα και γ είναι κλασσικά ο λόγος C_p/C_v . Να επαναλάβουμε πως ο υποεκθέτης ∞ αναφέρεται σε ποσότητα που έρχεται από το περιβάλλον στο μελετώμενο σύστημα. Μπορούμε να απαλείψουμε τη ρητή εμφάνιση της πυκνότητας από τις δύο αυτές σχέσεις και να καταλήξουμε στην παρακάτω οιονεί-γραμμική μορφή της εξίσωσης πλήρους δυναμικού [16] :

$$(a^2 - u^2)\phi_{xx} - 2uv\phi_{xy} + (a^2 - v^2)\phi_{yy} = 0 \quad (2.12)$$

Η εξίσωση αυτή είναι οιονεί-γραμμική γιατί είναι γραμμική στις παραγώγους της ϕ_{xx} , ϕ_{xy} και ϕ_{yy} . Φυσικά, είναι μη γραμμική στο ϕ . Είναι αυτή η μη γραμμικότητα που μας επιτρέπει να μοντελοποιούμε ωστικά κύματα, ένα πολύ μη-γραμμικό φαινόμενο [16]. Σύμφωνα με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, μπορούμε να δείξουμε ότι, η εξίσωση αυτή είναι [2,16] :

ελλειπτική αν $(u^2 + v^2)/a^2 < 1$,

υπερβολική αν $(u^2 + v^2)/a^2 > 1$ και

παραβολική αν $(u^2 + v^2)/a^2 = 1$

Σε αυτό το σημείο, ορίζουμε το συντελεστή πίεσης C_p στην επιφάνεια του μελετώμενου πτερυγίου ως εξής [16] :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\gamma}{2}M_\infty^2} = \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma - 1}{\frac{\gamma}{2}M_\infty^2} \quad (2.13)$$

Μας ενδιαφέρει η λύση των κύριων εξισώσεων σε όλη τη περιοχή ανάμεσα στο πτερόγιο και το άπειρο. Εξαιτίας της μη γραμμικότητας των κύριων εξισώσεων καταφεύγουμε στην επίλυση με αριθμητικές μεθόδους. Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε ότι θεωρούμε πως οι τοπικές ταχύτητες u και v δε διαφέρουν σημαντικά στις τιμές

τους από τις αντίστοιχες ταχύτητες που έρχονται από το περιβάλλον [16]. Αυτή τη θεώρηση τη χρησιμοποιούμε για την συνολική απλοποίηση του προβλήματος και των κύριων εξισώσεων.

Πηγαίνοντας πάλι στην οιονεί-γραμμική εξίσωση πλήρους δυναμικού που διατυπώθηκε πιο πάνω, απομονώνουμε το δεύτερο όρο, $-2uv\phi_{xy}$. Αυτός ο όρος μπορεί να γραφεί και ως εξής [16]:

$$\begin{aligned} 2uv\phi_{xy} &= 2(V_\infty + \phi_x) \phi_y \phi_{xy} = \\ &= V_\infty^2 \left(1 + \frac{\phi_x}{V_\infty}\right) \left(\frac{\phi_y^2}{V_\infty^2}\right)_x \cong 0 \end{aligned}$$

Έπειτα, εστιάζουμε στο συντελεστή του πρώτου όρου της εξίσωσης, το $a^2 - u^2$. Σημειώνοντας το γεγονός ότι η ταχύτητα του ήχου σχετίζεται με αυτή της ροής, βάση της εξίσωσης ενέργειας έχουμε:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2+v^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} + \frac{V_\infty^2}{2}$$

Μπορούμε τώρα να προσεγγίσουμε αυτόν τον όρο ως εξής:

$$\begin{aligned} a^2 - u^2 &= a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}(V_\infty^2 - u^2 - v^2) - u^2 \\ &= a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}V_\infty^2 \left[1 - \left(1 + \frac{\phi_x}{V_\infty}\right)^2 - \left(\frac{\phi_y}{V_\infty}\right)^2\right] - V_\infty^2 \left(1 + \frac{\phi_x}{V_\infty}\right)^2 \\ &\cong a_\infty^2 - V_\infty^2 - (\gamma+1)V_\infty^2 \left(\frac{\phi_x}{V_\infty}\right) \\ &= a_\infty^2 \left[1 - M_\infty^2 - (\gamma+1)M_\infty^2 \left(\frac{\phi_x}{V_\infty}\right)\right] \end{aligned}$$

Στις πράξεις μας πιο πάνω, αγνοήσαμε τις δεύτερες δυνάμεις των ταχυτήτων διαταραχής, επειδή έχουνε πάρα πολύ μικρές τιμές [16]. Παρόλα αυτά, έχουμε κρατήσει την πρώτη δύναμη του όρου ϕ_x/V_∞ . Αυτό γίνεται γιατί ο όρος $1 - M_\infty^2$ από μόνος του μπορεί να έχει μικρή τιμή στη διηχητική ροή. Έτσι, ο τελευταίος όρος της προσέγγισης που κάναμε πιο πάνω, μπορεί να είναι συγκρίσιμος σε μέγεθος με τον $1 - M_\infty^2$, και για αυτό δε μπορεί να αγνοηθεί [16].

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$a^2 - v^2 \cong a_\infty^2$$

Με αυτές τις πράξεις και τις προσεγγίσεις, η οιονεί-γραμμική μορφή της εξίσωσης πλήρους δυναμικού μετατρέπεται στην παρακάτω απλή μορφή:

$$\left[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2 \phi_\chi\right] \phi_{\chi\chi} + \phi_{yy} = 0 \quad (2.14)$$

Η οποία με τη σειρά της, έπειτα από αλγεβρικές πράξεις, μπορεί να γραφεί στην παρακάτω συντηρητική μορφή :

$$\left[(1 - M_\infty^2)\phi_\chi - \frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2\phi_\chi^2\right]_\chi + [\phi_y]_y = 0 \quad (2.15)$$

Αυτή είναι η εξίσωση των διχηθικών μικρών διαταραχών. Δώσαμε και την αποκλίνουσα μορφή της εξίσωσης, γιατί στην υπολογιστική ανάλυση συνηθίζεται να λύνεται αυτή, παρά η οιονεί-γραμμική μορφή [16]. Ακόμα, δεν πρέπει κάποιος να μπερδευτεί με τη μορφή αυτών των εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές, όπως και εκείνες από το κεφάλαιο 2.1.1, είναι διαφορετικές μορφές του ίδιου πράγματος. Περιγράφουν το ίδιο φαινόμενο. Χρησιμοποιούνται όμως, όπως γίνεται αντιληπτό, με διαφορετικές υποθέσεις και σε διαφορετικές συνθήκες. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στα παρακάτω κεφάλαια που αναλύεται η επίλυση του θέματος.

2.2 Ανάλυση των εξισώσεων διχηθικών μικρών διαταραχών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να ασχοληθούμε με τις εξισώσεις, τις οποίες αποδείξαμε στα πιο πάνω κεφάλαια. Θα εστιάσουμε αρχικά στην εξίσωση (2.9) και εν συνεχεία στην εξίσωση (2.14) .

Η εξίσωση (2.9) έχει τη μορφή να είναι τοπικά είτε κυματική εξίσωση (υπερβολική μορφή), συμβολίζοντας έτσι υπερηχητική ροή $\phi_\chi > K/(\gamma + 1)$, ή εξίσωση Laplace (ελλειπτική μορφή), συμβολίζοντας έτσι υποηχητική ροή $\phi_\chi < K/(\gamma + 1)$. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη μετατροπή παίζει ο μη γραμμικός όρος της εξίσωσης [1]. Οι τοπικές χαρακτηριστικές γραμμές του Mach έχουν κλήση:

$$(d\tilde{y}/dx) = \pm \left[(\gamma + 1)\phi_\chi - K\right]^{-1/2} \quad (2.16)$$

Η τοπική γωνία ροής δίνεται από τη σχέση :

$$\tan\theta = q_y/q_x = \delta v + \dots = \delta\theta + \dots \cong \theta \quad (2.17)$$

Για να έχουμε ολοκληρωμένες σχέσεις στις εξισώσεις διχηθικών μικρών διαταραχών (2.9) και (2.6), θα πρέπει να συμπεριλάβουμε μαζί και τις συνθήκες κρουστικών κυμάτων. Όμως, τα κρουστικά κύματα ήδη συμπεριλαμβάνονται μέσα στις εξισώσεις αυτές, με την εξής έννοια. Αν ολοκληρώσουμε αυτές τις διαφορικές σχέσεις κατά μήκος ενός κύματος σε (u,v), τότε καταλήγουμε στις σωστές κρουστικές σχέσεις αυτής της τάξης [1]. Αυτό σημαίνει ότι η εξισώσεις (2.6) είναι σε

συντηρητική ή αποκλίνουσα μορφή. Η αντίστοιχη μορφή των ολοκληρωμάτων στην επιφάνεια δίνει τα κρουστικά κύματα [1]:

$$\langle Ku - (\gamma + 1)u^2/2 \rangle (d\tilde{y})_s - \langle v \rangle (dx)_s = 0 \quad (2.18)$$

$$\langle v \rangle (d\tilde{y})_s + \langle u \rangle (dx)_s = 0$$

όπου το $\langle \rangle$ σηματοδοτεί το άλμα στην ποσότητα κατά μήκος του κρουστικού κύματος και ο υποεκθέτης s σηματοδοτεί ένα στοιχείο πάνω στην κρουστική επιφάνεια.

Οι καταστάσεις των κρουστικών κυμάτων (2.18) αποδίδουν εύκολα με τη σειρά τους μια κρουστική πολική αναπαράσταση [1]:

$$[K - (\gamma + 1)\bar{u}_s] \langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 = 0 \quad (2.19)$$

όπου το $\bar{u}_s = (u^{(2)} + u^{(1)})/2$ είναι ο μέσος όρος του u κατά μήκος του κρουστικού κύματος. Η γωνία του κρουστικού κύματος στο (x, \tilde{y}) πεδίο μετριέται με από το θ_s ,

$$\theta_s = dx/d\tilde{y} = -\langle v \rangle / \langle u \rangle \quad (2.20)$$

Για ένα κανονικό κρουστικό κύμα, $\langle v \rangle = 0$ και η εξίσωση (2.19) δίνει

$$\bar{u}_s = K/(\gamma + 1) \quad (2.21)$$

η οποία είναι η διηχητική μορφή της εξίσωσης του Prandtl [1]. Τέλος, να σημειώσουμε ότι,

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad (2.22)$$

μια συνθήκη που έρχεται ως επακόλουθο της συνέχειας στην εφαπτομενική ταχύτητα κατά μήκος των κρουστικών κυμάτων [1].

Όπως δείξαμε και στα πιο πάνω κεφάλαια οι διηχητικές εξισώσεις μικρών διαταραχών μπορούν να γραφούν με διάφορους τρόπους, αναλόγως με το πού θέλουμε να καταλήξουμε από τη χρησιμοποίησή τους. Παρόλα αυτά χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, καθώς δεν συντηρούνται όλες οι παραπάνω ποσότητες κατά μήκος των κυμάτων σε όλες τις μορφές των εξισώσεων. Για παράδειγμα από τις εξισώσεις (2.6) προκύπτει ότι:

$$[(Ku^2 - v^2)/2 - (\gamma + 1)u^3/3]_x + (uv)_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.23)$$

Αυτή η μορφή συνδέεται άμεσα με ένα γενικό ολοκλήρωμα τριβής [1].

Οι λύσεις που βασίζονται σε αυτή τη θεωρία στη διηχητική περιοχή συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα πειράματα που είχαν διεξαχθεί τότε (εποχή του Murman 1970-1971). Ο Spreiter με τη σειρά του, έδειξε ότι η επιλογή μιας διηχητικής παραμέτρου ομοιότητας ίση με

$$K_s = (1 - M_\infty^2)/(M^2\delta)^{2/3} \quad (2.24)$$

συσχετίζει τα δεδομένα για την τριβή στη πτέρυγα καλύτερα [1]. Το K είναι μια παράμετρος ομοιότητας με την έννοια ότι σε πειράματα για διάφορα άλλα σχετικά σώματα σε διαφορετικά πεδία (M_∞, δ) , δίνουν παραπλήσια αποτελέσματα για δεδομένα K . Κάποιοι από τους κανόνες ομοιότητας που βασίζονται στην διηχητική ανάπτυξη του φαινομένου (με την τροποποίηση του Spreiter) είναι [1]:

συντελεστής πίεσης στο σώμα

$$C_p(\chi) = (\delta/M_\infty)^{2/3} \bar{C}_p(\chi; K_S) \quad (2.25)$$

συντελεστής τριβής

$$C_D = (\delta^{5/3}/M_\infty^{2/3}) \bar{C}_D(K_S) \quad (2.26)$$

όπου τα \bar{C}_p, \bar{C}_D είναι γενικές σχέσεις για αεροτομές και πτερύγια δεδομένης συνάρτησης $F(\chi)$.

Αναφερόμενοι τώρα στις εξισώσεις (2.14), (2.15), έχουμε ότι τα πιο πάνω πράγματα που διατυπώθηκαν για την ανάλυση τις εξίσωσης (2.9) ισχύουν και εδώ, αλλά με διαφορετική διατύπωση προφανώς.

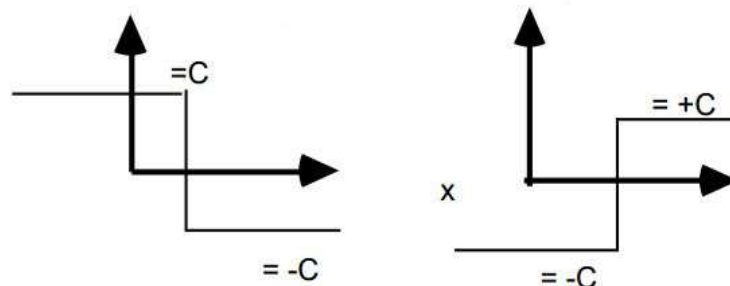
Οι εξισώσεις (2.14), (2.15) είναι προφανώς και αυτές μη γραμμικές. Αυτή η μη γραμμικότητα είναι που επιτρέπει την μορφοποίηση των κρουστικών κυμάτων. Για να δούμε το γιατί συμβαίνει αυτό θα θεωρήσουμε την παρακάτω εξίσωση, που είναι ίδια σε μορφή με την εξίσωση (2.15) [16]:

$$\left(\phi_\chi^2 \right)_\chi = 0 \quad (2.27)$$

Η εξίσωση αυτή έχει όπως γνωρίζουμε δύο λύσεις :

$$\phi_\chi = \pm C \quad (2.28)$$

όπου C είναι μια σταθερά. Αυτές οι δυο λύσεις μπορούν να συμβούν κατά μήκος ενός κρουστικού κύματος, όπως φαίνεται με το σχήμα 2.2 που ακολουθεί :



Σχήμα 2.02 : Σχήμα των λύσεων της ϕ_χ [16]

Αξίζει να τονίσουμε εδώ ότι, η ροή θα επιβραδυνθεί κατά μήκος του πρώτου κρουστικού κύματος του σχήματος, καθώς η ταχύτητα των διαταραχών αλλάζει σε τάξη μεγέθους από θετικές σε αρνητικές τιμές [16]. Τα κύματα αυτού του είδους εντάσσονται στην κατηγορία κρουστικών κυμάτων συμπίεσης. Το δεύτερο κύμα κατηγοριοποιείται σαν κύμα εκτόνωσης, κατά μήκος του οποίου η ταχύτητα της ροής αυξάνεται απότομα [16]. Με βάση αυτά καταλήγουμε στο γεγονός ότι οι εξισώσεις (2.14), (2.15) δίνουν κύματα συμπίεσης, καθώς και κύματα εκτόνωσης. Ωστόσο, επειδή τα κύματα εκτόνωσης δεν ακολουθούν το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, δε θα πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης που θα ακολουθήσει [16].

Ακριβώς όπως η εξίσωση (2.9), έτσι και η εξίσωση (2.14) μπορεί να είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική. Αν γράψουμε την εξίσωση (2.14) στη μορφή [16] :

$$A\phi_{\chi\chi} + \phi_{yy} = 0 \quad (2.29)$$

όπου,

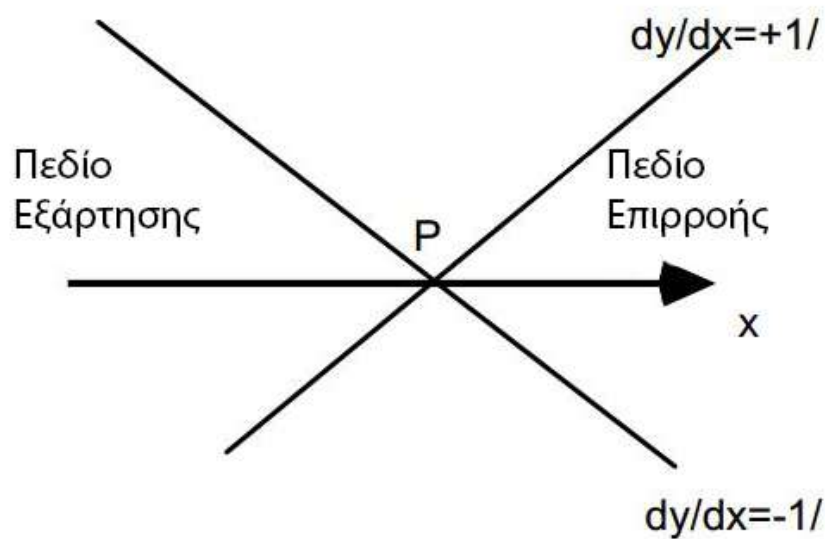
$$A = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2\phi_\chi \quad (2.30)$$

Για να δούμε πότε η εξίσωση αυτή αλλάζει σχήμα, αρκεί να βρούμε τις ρίζες της παρακάτω εξίσωσης, σύμφωνα με τη μαθηματική θεωρία των χαρακτηριστικών :

$$\left(\frac{dy}{d\chi}\right)_{\text{χαρακτηριστικό}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-A}} \quad (2.31)$$

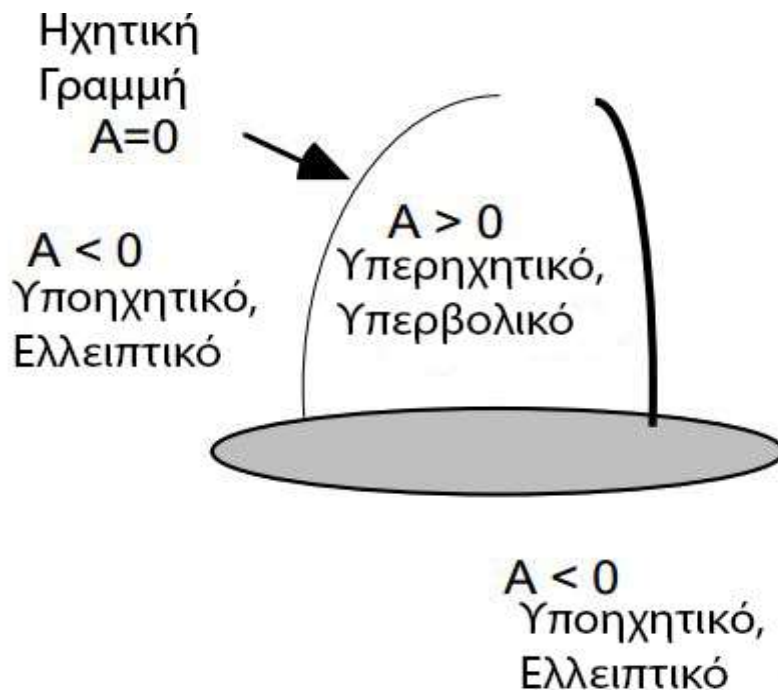
Σε αυτή την εξίσωση, όταν το A είναι θετικό δεν υπάρχουν πραγματικές χαρακτηριστικές γραμμές και η εξίσωση είναι ελλειπτική. Όταν το A είναι μηδέν, τότε η εξίσωση είναι παραβολική, με χαρακτηριστικές γραμμές παράλληλες στον άξονα y. Τέλος, όταν το A είναι αρνητικό, τότε υπάρχουν δύο χαρακτηριστικές ρίζες και η εξίσωση είναι υπερβολική [16].

Σε ένα οποιοδήποτε σημείο (έστω P) στο χώρο, αυτές οι δύο χαρακτηριστικές θα έχουν κλίσεις που θα είναι ίδια τάξης μεγέθους και αντίθετου πρόσημου και θα είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα χ, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Η περιοχή μπροστά από το σημείο P που περικλείεται από τις χαρακτηριστικές, ονομάζεται πεδίο εξάρτησης του σημείου P. Η περιοχή κατάντη του P, που περικλείεται από τις χαρακτηριστικές, επηρεάζεται από το P και ονομάζεται πεδίο επιρροής του P [16].



Σχήμα 2.03 : Πεδίο εξάρτησης και Πεδίο Επιρροής [16]

Γενικά στη διηχητική ροή, η ποσότητα A μπορεί να αλλάξει πρόσημο από σημείο σε σημείο. Έτσι όπως δείξαμε και πιο πάνω και για την εξίσωση (2.9), η εξίσωση (2.14) μπορεί να είναι ελλειπτική σε κάποιες περιοχές (υποηχητικές), παραβολική στις ηχητικές γραμμές (προσοχή εδώ στο ότι το ηχητικό κομμάτι είναι στην ουσία μια γραμμή και όχι μια περιοχή) και υπερβολική (υπερηχητική) στις άλλες περιοχές [6,16] :



Σχήμα 2.04 : Αναπαράσταση των περιοχών ροής στο περύγιο [16]

Σε οποιοδήποτε αριθμητικό σχήμα χρησιμοποιήσουμε για αυτό το φαινόμενο, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι αυτές οι τρεις περιοχές μπορούν να συνυπάρχουν στην διηχητική ροή. Το αριθμητικό σχήμα πρέπει να σχεδιαστεί κατάλληλα, έτσι ώστε το οποιοδήποτε σημείο P να εξαρτάται από όλα τα γειτονικά του όταν είναι στο ελλειπτικό πεδίο. Ακόμα, το αριθμητικό σχήμα πρέπει να εξασφαλίζει ότι το σημείο P εξαρτάται μόνο από το πεδίο εξάρτησης, που ορίσαμε πριν, στις υπερβολικές περιοχές. Τέλος, το αριθμητικό σχήμα πρέπει να ανιχνεύει την ηχητική γραμμή, όταν η εξίσωση είναι παραβολική και το κρουστικό κύμα κατά μήκος του οποίου η ροή είναι ασυνεχής.

2.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε και γνωρίσαμε τις κύριες εξισώσεις που περιγράφουν τη θεωρία των διηχητικών μικρών διαταραχών. Οι εξισώσεις αυτές δε διαφέρουν μεταξύ τους, παρά μόνο στη μορφή του πρώτου όρου. Επίσης στην περίπτωση των εξισώσεων της υποενότητας 2.1.1 χρησιμοποιήσαμε την κλιμακούμενη συντεταγμένη \tilde{y} , αντί της κανονικής συντεταγμένης y στις εξισώσεις του 2.1.2. Αυτό δεν επηρεάζει τόσο τη συσχέτιση των δύο αυτών μορφών μεταξύ τους. Ο όρος $[K - (\gamma + 1)\phi_\chi]$ της εξίσωσης (2.9) είναι ανάλογος του όρου $[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2\phi_\chi]$ της εξίσωσης (2.14). Οι εξισώσεις (2.9) και (2.14) είναι απλά διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου πράγματος.

Κεφάλαιο 3 Συνοριακές Συνθήκες και Far field Conditions.

Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρούμε να παρουσιάσουμε και να ερμηνεύσουμε τις συνοριακές συνθήκες που χρειάζονται στο πρόβλημά μας. Θα δώσουμε τον ορισμό και τη μορφή αυτών, όμως θα αποφύγουμε ακόμα να αναφερθούμε σε συγκεκριμένο υπολογιστικό πεδίο(κάτι το οποίο θα γίνει λεπτομερέστατα στο παρακάτω κεφάλαιο). Ακόμα, παρουσιάζουμε τα Far field conditions ή αλλιώς συνθήκες που ισχύουν μακριά από το μελετώμενο σύστημά μας και περιγράφουν τα μεγέθη που εισέρχονται σε αυτό. Αυτό το κάνουμε σε δύο στάδια. Ένα στο οποίο περιγράφουμε μαθηματικά αναλυτικά τις Far field συνθήκες και ένα στο οποίο δίνουμε μια πιο απλή εναλλακτική περιγραφή αυτών.

Παρά το ότι η αναλυτική περιγραφή των συνθηκών χρησιμοποιείται για την εξίσωση (2.9) [1,2,14,15] και η εναλλακτική απλή μορφή για την εξίσωση (2.15) [6,16,17] αυτό δεν είναι αναγκαίο. Στη βιβλιογραφία μπορούμε να συναντήσουμε και περιπτώσεις που χρησιμοποιείται η εναλλακτική μορφή για την εξίσωση (2.9) [10]. Αυτό συμβαίνει για τον απλούστατο λόγο, που έχουμε αναφέρει, το ότι οι εξισώσεις (2.9) και (2.15) είναι διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου πράγματος.

Στα υποκεφάλαια που ακολουθούν, έχουμε στο 3.1 την αναλυτική έκφραση των συνοριακών συνθηκών και του Far Field, ενώ στο 3.2 έχουμε την εναλλακτική μορφή αυτών.

3.1 Αναλυτική έκφραση των συνοριακών συνθηκών και των Far field conditions

Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε τον προσδιορισμό του προβλήματος που έχουμε, θα πρέπει να δηλώσουμε τις συνοριακές συνθήκες της εφαιπόμενης ροής. Με την πρώτη (και δεύτερη) προσέγγιση, οι συνθήκες μπορούν να εφαρμοστούν στην περιοχή του περυγίου για $\tilde{y} = 0$. Αυτές οι συνθήκες είναι [1,14,15] :

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{y}}(\chi, 0) &= F'(\chi), |\chi| < 1 \\ &= 0, |\chi| > 1\end{aligned}\tag{3.1}$$

όπου η μορφή του μελετώμενου σώματος, δίνεται από τη σχέση $y = \delta F(\chi)$. Οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό μιας μοναδικής, κατά συνθήκη, λύσης.

Η άλλη σημαντική πληροφορία που χρειαζόμαστε, το Far field, υπολογίζεται αν λάβουμε την εξίσωση (2.9) ως καθαρά ελλειπτική εξίσωση με μη γραμμικό δεξί μέλος ως εξής [1] :

$$L\phi \equiv K\phi_{\chi\chi} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = [(\gamma + 1)/2](u^2)_\chi \quad (3.2)$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Green για το L στο πάνω ημιεπίπεδο, επιτρέποντας τα κρουστικά κύματα κατά μήκος των κατευθύνσεων $u = \phi_\chi$, $v = \phi_{\tilde{y}}$ [1]. Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $\psi(\xi, \eta)$ συνεχή, με συνεχής πρώτες παραγώγους. Έτσι, για $\phi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ έχουμε [1]:

$$\iint_{\tilde{y} > 0} (\psi L\phi - \phi L\psi) d\xi d\eta = \int_{shock} \psi_s \{ \langle v \rangle d\xi - K \langle u \rangle d\eta \} - \int_{-\infty}^{\infty} (\psi\phi_\eta - \phi\psi_\eta)_{\eta=0} d\xi \quad (3.3)$$

Τώρα, ορίζοντας την $\psi(\xi, \eta; \chi, \tilde{y})$ να είναι η βασική λύση για όλο το πεδίο,

$$L_{\xi, \eta} \psi = \delta(\chi - \xi) \delta(\tilde{y} - \eta), \quad \psi = S(\xi - \chi, \eta - \tilde{y}) \quad (3.4)$$

και το ϕ να είναι η ροή που ικανοποιεί τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) γίνεται

$$\phi(\chi, \tilde{y}) = \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty d\xi \psi \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} + \int_{shock} \psi_s (K \langle u \rangle d\eta - \langle v \rangle d\xi) + \int_{-\infty}^\infty (\psi\phi_\eta - \phi\psi_\eta)_{\eta=0} d\xi \quad (3.5)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα ολοκληρώνεται κατά μέρη, λαμβάνοντας υπόψη ότι το u^2 μεταπηδά κατά μήκος του κρουστικού κύματος, δίνοντας [1]:

$$\phi(\chi, \tilde{y}) = - \iint_{\tilde{y} > 0} [\gamma + (1/2)] u^2 \psi_\xi d\xi d\eta + \int_{shock} \psi_s \{ [K \langle u \rangle - [\gamma + (1/2)] \langle u^2 \rangle] d\eta - \langle v \rangle d\xi \} + \int_{-\infty}^\infty (\psi\phi_\eta - \phi\psi_\eta)_{\eta=0} d\xi \quad (3.6)$$

Το ολοκλήρωμα του κρουστικού κύματος στην εξίσωση (3.6) φεύγει εντελώς από τις σχέσεις μας, εξαιτίας των συνθηκών που ορίζονται από τη σχέση (2.19), έτσι το πιο πάνω ολοκλήρωμα να μας δίνει για $\tilde{y} > 0$

$$\phi(\chi, \tilde{y}) = - \iint_{\tilde{y} > 0} \frac{\gamma+1}{2} u^2 \psi_\xi d\xi d\eta + \int_{-\infty}^\infty (\psi\phi_\eta - \phi\psi_\eta)_{\eta=0} d\xi \quad (3.7)$$

Τώρα ο συνοριακός όρος που περιλαμβάνει το ψ_η μπορεί να εξαλειφτεί με τη μέθοδο της ανάκλασης [1]. Ορίζεται ανακλώμενη θεμελιώδη λύση $\psi^*(\xi, \eta)$ τέτοια ώστε

$$L_{\xi, \eta} \psi^* = \delta(\chi - \xi) \delta(-\tilde{y} - \eta), \quad \psi^* = S(\xi - \chi, \eta + \tilde{y})$$

Μετά, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green στο ίδιο πεδίο (για $\tilde{y} > 0$) [1], αλλά με αντικατάσταση του ψ με ψ^* , έχουμε σχετικά με τη σχέση (3.7)

$$0 = - \iint_{\tilde{y} > 0} \frac{\gamma+1}{2} u^2 \psi_\xi^* d\xi d\eta + \int_{-\infty}^\infty (\psi^* \phi_\eta - \phi \psi_\eta^*)_{\eta=0} d\xi \quad (3.8)$$

Χρησιμοποιώντας $\psi^*(\xi, 0) = \psi(\xi, 0)$, $\psi_\eta^*(\xi, 0) = -\psi_\eta(\xi, \eta)$ και $\phi_\eta(\xi, 0) = F'(\xi)$ για $|\xi| < 1$, η πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (3.7) και (3.8) μας δίνει

$$\phi(\chi, \tilde{y}) = 2 \int_{-1}^{+1} F'(\xi) \psi(\xi, 0) d\xi - \frac{\gamma+1}{2} \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty d\xi u^2(\xi, \eta) [\psi_\xi + \psi_\xi^*] \quad (3.9)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.9) μπορεί να ολοκληρωθεί σε κομμάτια και οι συνοριακοί όροι εξαλείφονται για μια κλειστή αεροτομή ($F(\pm 1) = 0$) [1]. Η συμμετρία των ψ, ψ^* και u σχετικά με το η μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο διπλό ολοκλήρωμα έτσι ώστε

$$\phi(\chi, \tilde{y}) = -2 \int_{-1}^{+1} F(\xi) \psi_\xi(\xi, 0) d\xi - \frac{\gamma+1}{2} \iint_{-\infty}^\infty u^2(\xi, \eta) \psi_\xi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.10)$$

Τώρα η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (3.4) λαμβάνεται εύκολα από ένα κλιμακωτό μετασχηματισμό της λύσης για την εξίσωση του Laplace [1]

$$\psi = S(\chi - \xi, \tilde{y} - \eta) = 1/(2K^{1/2}\pi) \log[(\chi - \xi)^2 + K(\tilde{y} - \eta)]^{1/2}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη θεμελιώδη λύση στην εξίσωση (3.10), λαμβάνουμε την βασική διαφορική εξίσωση για αυτό το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \phi(\chi, \tilde{y}) = & \frac{1}{\pi K^{1/2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\chi - \xi}{(\chi - \xi)^2 + K\tilde{y}^2} F(\xi) d\xi + \\ & \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{2\pi K^{1/2}} \iint_{-\infty}^\infty \frac{(\chi - \xi)}{(\chi - \xi)^2 + K(\tilde{y} - \eta)^2} u^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.11)$$

Μια παρόμοια μέθοδο μπορούμε να ακολουθήσουμε και για την περίπτωση που το πτερύγιο μας (ή το μελετώμενο σώμα) έχει και άνωση εκτός από πάχος [1]. Το Far field της εξίσωσης (3.11) είναι επομένως για κλειστό σώμα

$$\phi(\chi, \tilde{y}) \cong (1/2\pi K^{1/2}) \mathfrak{D}\chi/(\chi^2 + K\tilde{y}^2) + \dots \quad (3.12)$$

όπου

$$\mathfrak{D} = \text{doublet strength (όρος δύναμης)} = 2 \int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi + \frac{\gamma+1}{2} \iint_{-\infty}^\infty u^2 d\xi d\eta \quad (3.13)$$

Ο όρος doublet strength αποτελείται από ένα συνήθη όρο ανάλογο στον όγκο του πτερυγίου και έχει μια μη γραμμική προσφορά, άγνωστη από πριν [1]. Στην αριθμητική διαδικασία αυτός ο όρος πρέπει να υπολογίζεται σαν ένας από τους αγνώστους του προβλήματος. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε άνωση.

3.2 Εναλλακτική έκφραση των συνοριακών συνθηκών και του Far

Field

Θα ξεκινήσουμε με την έκφραση των συνθηκών στο σύνορο του σώματος. Σε οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια του σώματος, η ροή πρέπει να είναι εφαπτόμενη στο σώμα [2,16]. Ορίζουμε κύριο διάνυσμα ταχύτητας \vec{V} . Για να ισχύει αυτό, η κλίση του διανύσματος ταχύτητας πρέπει να είναι ίση με την κλίση του σώματος [16] :

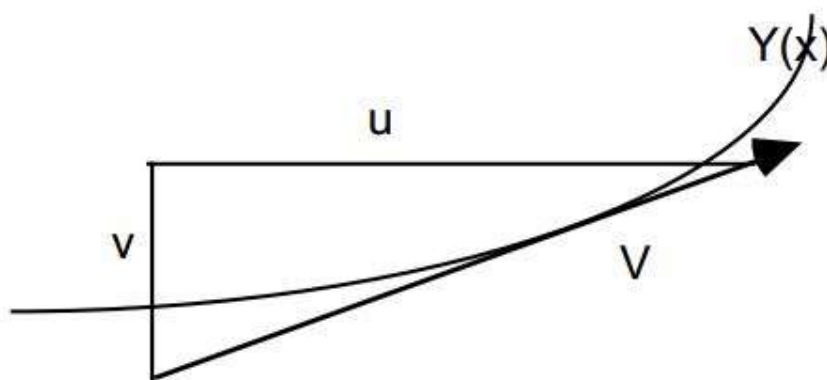
$$\frac{v}{u} = \frac{\phi_y}{V_\infty + \phi_x} = \frac{dY}{dX}$$

ή αλλιώς

$$\phi_y = (V_\infty + \phi_x) \frac{dY}{dX} = V_\infty \left(1 + \frac{\phi_x}{V_\infty} \right) \frac{dY}{dX}$$

Αγνοώντας τη συμβολή της ταχύτητας διαταραχής σε σύγκριση με τη μονάδα, λαμβάνουμε την παρακάτω συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του σώματος [16] :

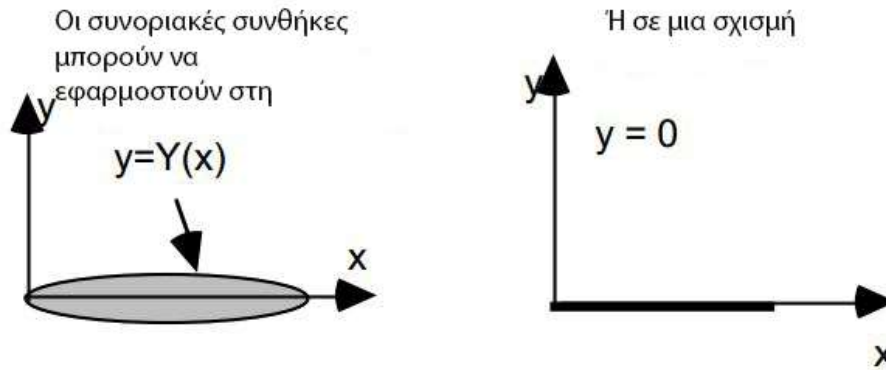
$$\phi_y \approx V_\infty \frac{dY}{dX} \quad (3.14)$$



Σχήμα 3.01 : Αναπαράσταση της εφαπτόμενης ροής στο σώμα [16]

Στην ερώτηση, πού θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη συνοριακή συνθήκη, έχουμε δύο επιλογές. Αυτή η συνοριακή συνθήκη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είτε στην πραγματική επιφάνεια του μελετώμενου σώματος (πτερόγιο), είτε σε μια σχισμή κατά μήκος της γραμμής που βρίσκεται το σώμα, στον άξονα των x . Η δεύτερη επιλογή κάνει τη διαδικασία επίλυσης πιο εύκολη γιατί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, αντί για ένα

καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων που επεκτείνεται γύρω από το σώμα [16]. Δεδομένου των πραγμάτων που έχουμε θεωρήσει στη θεωρία μικρών διαταραχών, αυτές οι δύο προσεγγίσεις φαίνονται να είναι ισοδύναμες. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η σχισμή είναι μια ασυνέχεια, κατά μήκος της οποίας το δυναμικό ϕ της ταχύτητας διαταραχής και οι παράγωγοί της ως προς y είναι ασυνεχή [16].



Σχήμα 3.02 : Μελετώμενο σώμα ή σχισμή [16]

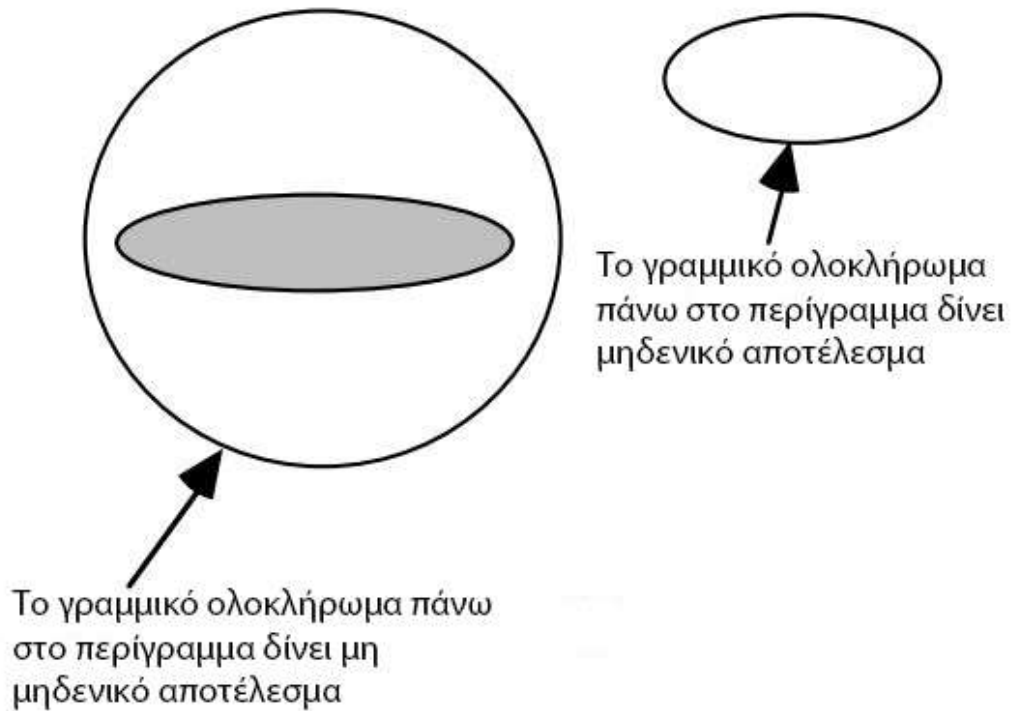
Τώρα θα ασχοληθούμε με τις συνοριακές συνθήκες κατάντη του μελετώμενου σώματος, στην περιοχή που ακολουθεί κατά μήκος αμέσως μετά. Θεωρούμε ένα πτερύγιο σε γωνία επίθεσης ως προς τη ροή τέτοια, που να δημιουργεί άνωση. Τότε, σε μια πιθανή ροή, το αντίστοιχο γραμμικό ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει και το πτερύγιο θα δίνει ένα μη μηδενικό αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ως κυκλοφορία, το οποίο και αναπαριστούμε με το σύμβολο Γ [16].

$$\oint_{\text{το πτερύγιο}} \vec{V} d\vec{S} = \Gamma \quad (3.15)$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα το $d\vec{S}$ είναι ένα διάνυσμα απειροελάχιστου ευθυγράμμου τμήματος, επαπτόμενο στο περίγραμμα. Αν στο περίγραμμα δεν περιλαμβάνεται το πτερύγιο, τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes το παραπάνω γραμμικό ολοκλήρωμα γίνεται ισοδύναμο με το παρακάτω επιφανειακό ολοκλήρωμα [16]:

$$\oint_{\text{μέσα το πτερύγιο}} \vec{V} d\vec{S} = \iint_{\text{μέσα στο περίγραμμα}} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (3.16)$$

Εδώ το \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη μελετώμενη περιοχή.



Σχήμα 3.03 : Περιπτώσεις των τιμών του γραμμικού ολοκληρώματος [16]

Τώρα θα συνδυάσουμε το πάνω ολοκλήρωμα με το δυναμικό της ταχύτητας. Η ποσότητα που ολοκληρώνεται μπορεί να γραφτεί ως εξής [16]:

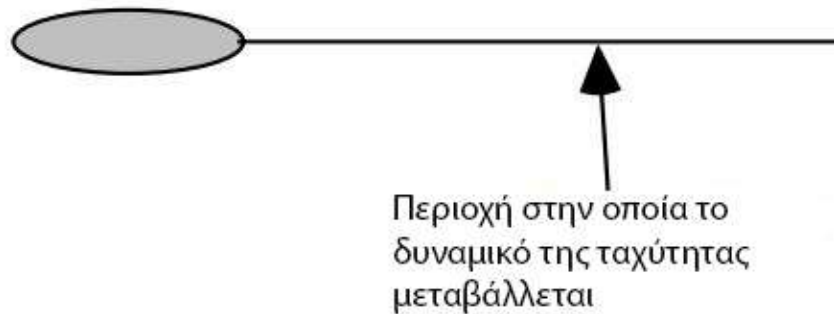
$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{S} \\
 &= (\phi_x \vec{i} + \phi_y \vec{j}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j}) \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \\
 &= d\phi
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Έτσι η κυκλοφορία στην εξίσωση (3.15) σχετίζεται με τη μεταβολή στο δυναμικό ταχύτητας (ή με τη μεταβολή στο δυναμικό διαταραχών) [16]:

$$\int_{\substack{\text{περίγραμμα που} \\ \text{συμπεριλαμβάνει το} \\ \text{πτερύγιο}}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \Delta\phi \tag{3.18}$$

Η μεταβολή στην τιμή του δυναμικού της ταχύτητας ϕ υπονοεί ότι δεν είναι σχέσεις που έχουν μια μόνο τιμή [16]. Κάπου στο x - y πεδίο, οι σχέσεις αυτές έχουν μια ραγδαία μεταβολή στην τιμή τους, σε μια ποσότητα ίση με τη κυκλοφορία Γ . Η περιοχή ωστόσο που συμβαίνει αυτή η μεταβολή, μπορεί να επιλεγεί με τρόπο που

να μας συμφέρει [16]. Στην ανάλυσή μας, παρακάτω, θα θεωρήσουμε ότι η μεταβολή αυτή ξεκινάει στην άκρη που τελειώνει το πτερύγιο (ή το μελετώμενο σώμα) και τελειώνει κατάντη στο άπειρο.



Σχήμα 3.04 : Περιοχή μεταβολής του δυναμικού κατάντη του σώματος [16]

Τώρα θα ασχοληθούμε με τις συνοριακές συνθήκες στο Far Field. Όλοι οι αριθμητικοί υπολογισμοί αναγκαστικά πρέπει να γίνουν σε ένα πεπερασμένο πεδίο. Έτσι θα πρέπει να προσδιορίσουμε συνοριακές συνθήκες, οι οποίες συνάδουν με τη φυσική της ροής που μελετάμε, συνιστάται να αποφύγουμε την υπερανάλυση των συνθηκών αυτών. Ο προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών είναι διαφορετικός για υποηχητική ροή από το περιβάλλον ($M_\infty < 1$) και για υπερηχητική ροή από το περιβάλλον ($M_\infty > 1$) [16].

Υποηχητική ροή από το περιβάλλον:

Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα διαταραχών εξαλείφεται στο σύνορο του Far Field και το δυναμικό της ροής ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση του δυναμικού της ταχύτητας [16]:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (3.19)$$

Πάνω στη γραμμή που βρίσκεται το πτερύγιο μπορούμε να τοποθετήσουμε μια δίνη δύναμης Γ (όπως ορίσαμε για την κυκλοφορία πιο πάνω), η οποία εισάγει την παρακάτω διαταραχή [16] :

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{y}{x} \right) \quad (3.20)$$

Αυτή η έκφραση φαίνεται να ικανοποιεί την εξίσωση (3.19). Οι αποστάσεις των x και y πρέπει να μετρηθούν από εκεί που τοποθετήθηκε η δίνη [16]. Μακριά από το πτερύγιο οι διαταραχές ταχύτητας μηδενίζονται και το δυναμικό ταχύτητας δίνεται από τη σχέση [10,16]

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (3.21)$$

όπου θ η γωνία του διανύσματος θέσης ως προς τον άξονα των x .

Υπερηχητική ροή από το περιβάλλον:

Χωρίζουμε τις συνθήκες εδώ σε συνθήκες ανάντη και κατόντη συνόρων .

Ανάντη σύνορα: Εδώ θέτουμε το ϕ ίσο με μηδέν σε αυτό το σύνορο [16]

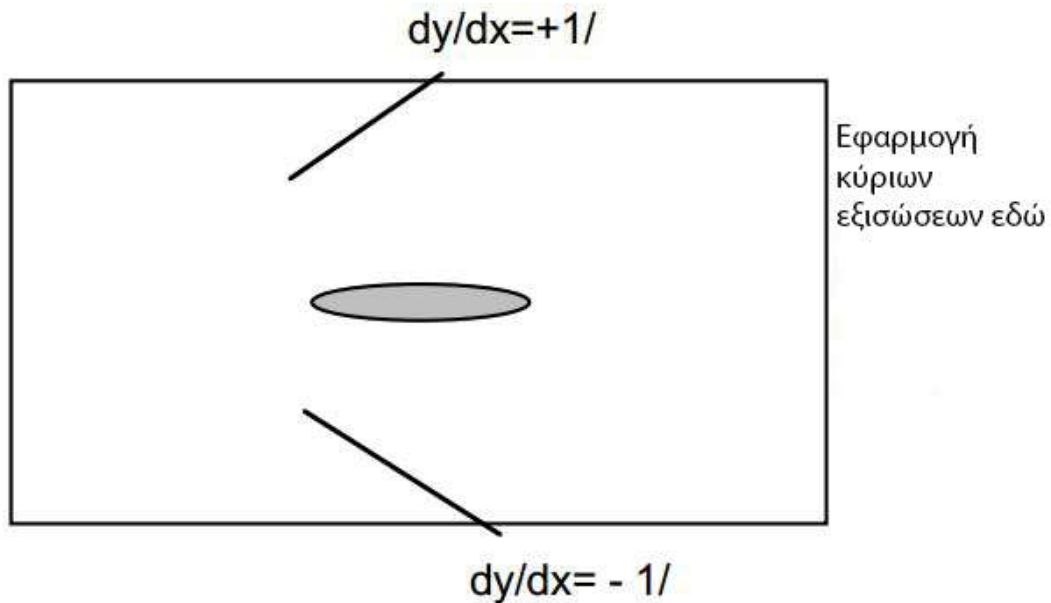
Κατόντη σύνορα: Σε αυτό το σύνορο δεν συνιστάται να προσδιορίσουμε συνοριακές συνθήκες, γιατί η πληροφορία στην υπερηχητική ροή μπορεί να περάσει μόνο κατόντη. Με άλλα λόγια, η συμπεριφορά του ϕ καθορίζεται από τη ροή πάνω στο πτερύγιο μόνο. Για αυτό, θα πρέπει να καθορίσουμε το ϕ από τις μη γραμμικές κύριες εξισώσεις ή τη γραμμική μορφή (3.19) που δώσαμε πιο πάνω [16].

Πλευρικά σύνορα: Σε αυτά τα σύνορα, η γραμμική μορφή της εξίσωσης δυναμικού ελέγχεται για το αν φτάνει στις σωστές συνοριακές συνθήκες. Από τη μαθηματική θεωρία των χαρακτηριστικών, η εξίσωση έχει δύο χαρακτηριστικές και δύο αντίστοιχες συνθήκες συμβατότητας που πρέπει να ικανοποιούνται κατά μήκος των χαρακτηριστικών [16]. Αυτές είναι :

$$\text{Χαρακτηριστική 1 : } \frac{dy}{dx} = + \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} , \phi = \text{σταθερό} \quad (3.22)$$

$$\text{Χαρακτηριστική 2 : } \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} , \phi = \text{σταθερό} \quad (3.23)$$

Η εξίσωση (3.22) αντιστοιχεί σε μια χαρακτηριστική που ξεκινάει από το εσωτερικό της ροής και εκτείνεται προς τα πάνω και προς τα έξω εφαρμόζεται στο πάνω σύνορο. Η εξίσωση (3.23) αντιστοιχεί σε μια χαρακτηριστική με αρνητική κλίση, που ξεκινάει από το εσωτερικό της ροής και εκτείνεται προς τα κάτω και προς τα έξω στο κάτω σύνορο.



Σχήμα 3.05 : Χαρακτηριστικές γραμμές και οι κατευθύνσεις τους στα σύνορα [16]

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών θα μπορούσε να εφαρμοστεί και για την επίλυση του ϕ στο κατάντη σύνορο. Όμως είναι πολύ πιο εύκολο να λυθούν οι κύριες εξισώσεις εκεί, με μία διαδικασία όμοια με αυτή που ακολουθούμε για την επίλυση στο εσωτερικό του πεδίου [16].

3.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε και αναλύσαμε τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες Far Field που περιγράφουν και ορίζουν το πρόβλημά μας. Είδαμε τόσο συνθήκες που χρησιμοποιούνται από την εξίσωση (2.9), όσο και συνθήκες που χρησιμοποιούνται από την εξίσωση (2.15). Αναφέρουμε όμως για άλλη μια φορά, ότι αυτό δεν προϋποθέτει πως οι συνθήκες που περιγράφονται στο υποκεφάλαιο 3.2 δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα και από την εξίσωση (2.9) για παράδειγμα. Τέτοια περίπτωση έχουμε στη βιβλιογραφική αναφορά [10].

Κεφάλαιο 4 Αριθμητική Ανάλυση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων ((2.9) , (2.14)) που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και την επίλυση αυτών. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια και για τις δυο βασικές εξισώσεις. Αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω βασικά βήματα :

- a) Επιλογή σημείων, που τα ονομάζουμε κόμβους, στο πεδίο των $x-\tilde{y}$ ή $x-y$, ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης που εξετάζουμε. Το σύνολο αυτών το σημείων το ονομάζουμε πλέγμα (υπολογιστικό πλέγμα) και εκεί γίνεται η επίλυση των κύριων εξισώσεων. Η περιοχή που μας ενδιαφέρει για το κτίσιμο του πλέγματος είναι γύρω από το πτερύγιο που μελετάμε σε ικανοποιητικά μεγάλη απόσταση. Αυτό είναι επιθυμητό γιατί οι διαταραχές από το πτερύγιο είναι αισθητές σε μεγάλες αποστάσεις προς όλες τις κατευθύνσεις. Μια μέση απόσταση που μελετάμε είναι συνήθως 5 με 6 φορές το μήκος του πτερυγίου [16]. Ορισμένες φορές όμως έχει παρατηρηθεί ότι μπορεί να χρειαστεί και πεδίο με 10 -12 φορές το μήκος του πτερυγίου, αναλόγως της ακρίβειας και της σύγκλισης που επιτυγχάνεται με τον τρόπο επίλυσης [16]. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρειάζεται να χτίσουμε ενδείκνυται να είναι ομοιογενές κοντά στο πτερύγιο και ανομοιογενές όσο πιο μακριά προχωράμε στους κόμβους. Συνηθίζεται όμως για ευκολία να χρησιμοποιείται και αμιγώς ομοιογενές πλέγμα. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε και τις δύο περιπτώσεις.
- b) Αφού δημιουργήσουμε το πεδίο μας, προχωράμε με τη διαδικασία της διακριτοποίησης των κύριων εξισώσεων που έχουμε.
- c) Επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων του προηγούμενου βήματος για την αριθμητική τιμή του ϕ στους κόμβους. Αυτό επιτυγχάνεται φυσικά με επαναληπτικές διαδικασίες ξεκινώντας με κάποια αρχική πρόβλεψη για τη λύση στους κόμβους. Η διαδικασία κατά την οποία το ϕ συγκλίνει στην τελική του λύση από την αρχική πρόβλεψη και ικανοποιεί την διακριτοποιημένη μορφή που παίρνουμε από το (b) είναι γνωστή ως μέθοδος χαλάρωσης (relaxation procedure) [16].
- d) Μόλις λάβουμε τις τιμές του ϕ σε όλους τους κόμβους, μπορούμε να καταλήξουμε και στις τιμές των άλλων ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Αυτές μπορεί να είναι οι ταχύτητες διαταραχής, η κατανομή της πίεσης C_p στην επιφάνεια ή το σύνολο των υπερηχητικών σημείων που συναντάμε για παράδειγμα. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως post-processing step [16].

Παρακάτω ,θα δούμε σε βάθος και αναλυτικά το κάθε βήμα. Θα ασχοληθούμε, όπως προαναφέρθηκε, και με τις δύο μορφές εξισώσεων που συναντάμε. Να σημειωθεί, πως δεν είναι απαραίτητο να περιμένουμε την επαναληπτική διαδικασία (που επιλέγουμε) να συγκλίνει για να προχωρήσουμε και στη συλλογή των

υπόλοιπων στοιχείων που μπορεί να μας ενδιαφέρουν. Μπορούμε να λάβουμε και ενδιάμεσα δεδομένα και να δούμε πως αυτά συγκλίνουν με τα αναμενόμενα [16].

Η οργάνωση του κεφαλαίου δεν διαφέρει από τα υπόλοιπα που είδαμε μέχρι τώρα. Έχουμε δύο βασικά υποκεφάλαια, τα 4.1 και 4.2 τα οποία στις υποενότητες τους αναλύουν αριθμητικά και προετοιμάζουν για επίλυση τις εξισώσεις (2.9) και (2.14) αντίστοιχα, στις κατάλληλες τους μορφές. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην ανάγκη χρησιμοποίησης συντηρητικού σχήματος για την επίλυση των εξισώσεων αυτών.

4.1 Διακριτοποίηση και επίλυση της εξίσωσης

$$[K - (\gamma + 1)\phi_\chi]\phi_{\chi\chi} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την εξίσωση (2.9). Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράψαμε πιο πάνω, θα επιχειρήσουμε να φτάσουμε στην επίλυση της εξίσωσης και του προβλήματος, με σκοπό τη συλλογή των δεδομένων και των στοιχείων που επιθυμούμε (δυναμικό ταχύτητας, κατανομής πίεσης C_p κ.α.). Η εξίσωση (2.9) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση που πριν το paper των Murman και Cole το 1971 δεν είχε μελετηθεί αριθμητικά [1]. Αναφορές σε συστήματα πεπερασμένων διαφορών για μερικές διαφορικές εξισώσεις δείχνουν τις ανομοιότητες που υπάρχουν σε εξισώσεις καθαρά ελλειπτικές ή καθαρά υπερβολικές. Για τις εξισώσεις Laplace (ελλειπτικές) χρησιμοποιούμε σχήμα κεντρικών διαφορών για να προσεγγίσουμε τις παραγώγους. Από την άλλη, οι παράγωγοι στον χ άξονα για τις κυματικές εξισώσεις (υπερβολικές) προσεγγίζονται με σχήμα ανάντη διαφορών. Στις υπερβολικές εξισώσεις, ενδείκνυται η χρήση άρρητου σχήματος ανάντη πεπερασμένων διαφορών. Αυτό συμβαίνει γιατί στο ρητό σχήμα χρειάζεται να υπάρχει ένα περιορισμός στο μέγεθος του βήματος από κόμβο σε κόμβο (Courant – Friedrichs – Lewis criterion), σε αντίθεση με το άρρητο που δε χρειάζεται. [1,2,9]

Ένα σύστημα μικτών διαφορών έχει δημιουργηθεί για να ικανοποιήσει τις πεπερασμένες διαφορές της εξίσωσης (2.9). Η συγκεκριμένη αριθμητική διαδικασία ήταν μια εντελώς καινούρια και επαναστατική για τα τότε χρονικά, μέθοδος για την επίλυση των μικτών ελλειπτικών-υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων [1]. Σε κάθε κόμβο στο πεδίο που δημιουργούμε, υπολογίζουμε την ταχύτητα ϕ_χ και ελέγχεται για να καθοριστεί αν στο σημείο αυτό η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική. Τότε, το κατάλληλο ελλειπτικό ή υπερβολικό σχήμα διαλέγεται για αυτό τον κόμβο [1,2,10,14,15]. Η μετάβαση αυτή στις εξισώσεις μας γίνεται με τη βοήθεια ενός συντελεστή, που μηδενίζεται αναλόγως την περίπτωση [6,10,15,16]. Περισσότερα για αυτό όμως αναλύουμε στις παρακάτω ενότητες.

4.1.1 Δημιουργία πλέγματος για το υπολογιστικό πεδίο

Το πεδίο που χρησιμοποιούμε για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων είναι ημιάπειρο και χρειάζεται επεξεργασία ώστε να γίνει πεπερασμένο και να γίνουν οι υπολογισμοί. Όμως, στην πράξη, στη βιβλιογραφία συναντάμε πολλούς συγγραφείς που μετατρέπουν το πεδίο σε ένα, κατά προσέγγιση, μεγάλο πεπερασμένο ορθογώνιο, με τη μια του πλευρά πάνω στον x άξονα. Το συγκεκριμένο πεδίο χωρίζεται από ένα δίκτυο ευθειών $x = i \Delta x$ και $\tilde{y} = j \Delta \tilde{y}$. Τα κενά του πλέγματος που δημιουργείται, $\Delta x, \Delta \tilde{y}$ είναι ίσα μεταξύ τους, δημιουργώντας έτσι ομοιόμορφο πεδίο, με τα $i, j = 1, 2, 3, 4 \dots$ [15,14,13]. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι προτιμάται για πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα η χρησιμοποίηση ανομοιόμορφου πεδίου, προσέχοντας πάντα το υπολογιστικό κόστος. Για λόγους όμως κυρίως ευκολίας στην επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται το ομοιόμορφο πεδίο [15]. (Σε παρακάτω κεφάλαιο αναλύουμε τη δημιουργία ανομοιόμορφου πεδίου, μαζί με τη διακριτοποίηση σε αυτό.)

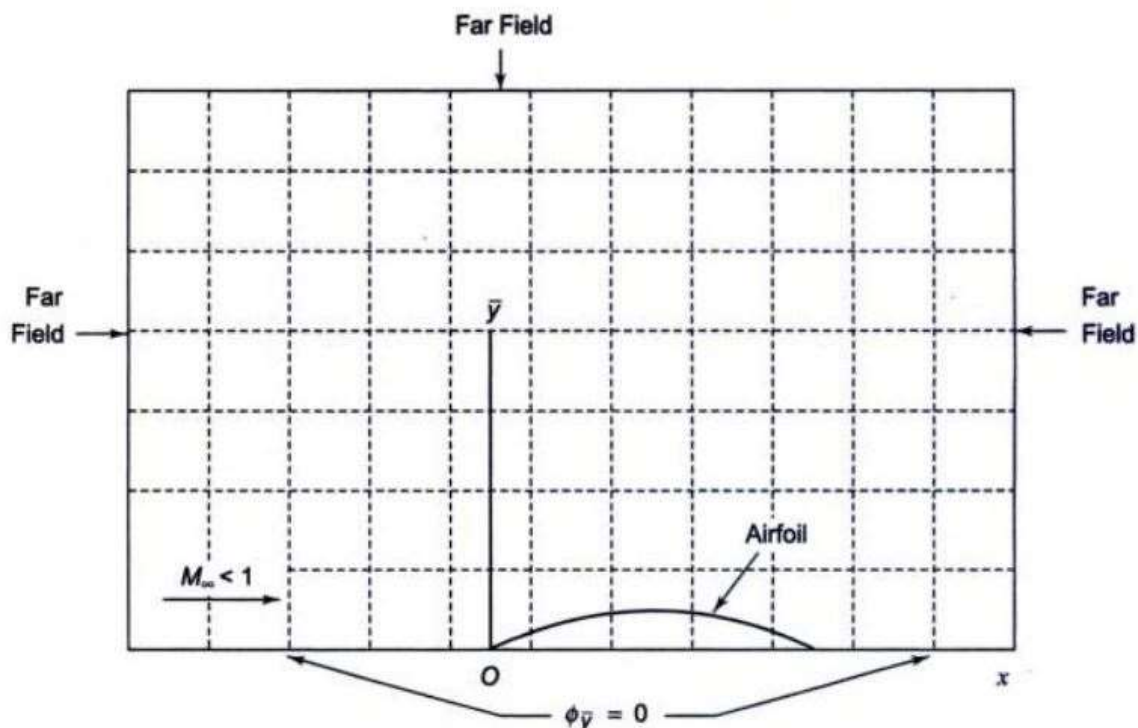
Στο αρχικό paper των Murman και Cole [1], οι κόμβοι στη x διεύθυνση πάνω στο πτερύγιο τοποθετούνται ομοιόμορφα. Στο πεδίο πριν και μετά το πτερύγιο, είχε χρησιμοποιηθεί μια εκτεταμένη συντεταγμένη ξ της μορφής

$$\xi + d = (x + c)^{-1}$$

Αντίστοιχα στο y έχουμε μια εκτεταμένη συντεταγμένη η της μορφής

$$\eta + b = (\tilde{y} + a)^{-1}$$

Οι σταθερές a, b, c, d διαλέγονται με τρόπο που να βοηθάει το πεδίο και τους υπολογισμούς. Η συγκεκριμένη αντίστροφη επέκταση των συντεταγμένων έγινε εξαιτίας της συμπεριφοράς του ϕ στο Far Field [1]. Το συγκεκριμένο πεδίο δε χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς μας σε αυτή την εργασία, αλλά αναφέρθηκε για καθαρά βιβλιογραφικό σκοπό.



Σχήμα 4.01 : Υπολογιστικό πεδίο και συνοριακές τιμές για το μοντέλο των δημητικών μικρών διαταραχών [15]

4.1.2 Διακριτοποίηση κύριων εξισώσεων

Ξεκινώντας από την κύρια εξίσωσή μας στη μορφή $[K\phi_\chi - (\gamma + 1)\phi_\chi^2/2]_\chi + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$, σχέση (2.8), έχουμε ότι το δυναμικό της ταχύτητας διαταραχών ϕ σχετίζεται με τις συνιστώσες ταχύτητας u, v με τις σχέσεις :

$$\phi_\chi = \frac{u - u_\infty}{\delta^{2/3} u_\infty}, \quad \phi_{\tilde{y}} = \frac{v - v_\infty}{\delta v_\infty} \quad [10,14,15] \quad (4.1)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι για ροή σε μηδενική πρόσπτωση, το v_∞ απαλείφεται. Ακόμα σε μεγάλες αποστάσεις από το περύγιο, οι συνιστώσες του δυναμικού της ταχύτητας διαταραχών πρέπει να απαλείφονται :

$$\phi_\chi, \phi_{\tilde{y}} \rightarrow 0, \text{ για } \sqrt{\chi^2 + \tilde{y}^2} \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

Από τη συμμετρία που ισχύει για τη ροή στο περύγιο, είναι αρκετό να βρούμε λύση στο ημίπειρο πεδίο που ορίσαμε πιο πάνω, για $\tilde{y} \geq 0$. Η συνθήκη συμμετρίας $\phi_{\tilde{y}} = 0$ πρέπει να εφαρμοστεί για $\tilde{y} = 0, 0 > \chi > 1$ [15,13].

Οι συνιστώσες του δυναμικού της ταχύτητας διαταραχών ϕ_x, ϕ_y υπολογίζονται με κεντρικές διαφορές σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\phi_x|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}), \phi_y|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \quad (4.3)$$

όπου ο υποεκθέτης $i + \frac{1}{2}$ δίνει προφανώς την τιμή για σημείο μεταξύ των κόμβων $(i+1, j)$ και (i, j) . Αντίστοιχα έχουμε και για τους άλλους υποεκθέτες [2,15,14,10,13].

Σε ένα υποηχητικό σημείο, όπου οι κύριες εξισώσεις (2.8), (2.9) είναι ελλειπτικού τύπου, έχουμε διακριτοποίηση με κεντρικές διαφορές της μορφής :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(K\phi_x - \frac{\gamma+1}{2}\phi_x^2 \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(K\phi_x - \frac{\gamma+1}{2}\phi_x^2 \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[(\phi_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\phi_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (4.4)$$

Οπότε με τις εκφράσεις (4.3), η εξίσωση (4.4) γράφεται :

$$\left[K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right] \left[\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] = 0 \quad (4.5)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.5) είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας. Ορίζουμε τώρα την ποσότητα $(V_e)_{i,j}$ ως εξής :

$$(V_e)_{i,j} = K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.6)$$

Μπορεί να αποδειχτεί από την ανάλυση ευστάθειας κατά von Neumann, ότι αν ο συντελεστής $(V_e)_{i,j}$ είναι θετικός σε ένα υποηχητικό σημείο, τότε η σχέση (4.5) είναι ευσταθής.

Από την άλλη, σε ένα υπερηχητικό σημείο (i, j) , έχουμε σχήμα ανάντη διαφορών, αφού οι εξισώσεις μας είναι υπερβολικού τύπου :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(K\phi_x - \frac{\gamma+1}{2}\phi_x^2 \right)_{i-\frac{1}{2},j} - \left(K\phi_x - \frac{\gamma+1}{2}\phi_x^2 \right)_{i-\frac{3}{2},j} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[(\phi_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\phi_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (4.7)$$

Την σχέση αυτή μπορούμε να την ξαναγράψουμε ως εξής :

$$\left[K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x} \right] \left[\frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] = 0 \quad (4.8)$$

Σαν αποτέλεσμα της χρησιμοποίησης των ανάντη διαφορών σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι η εξίσωση είναι πρώτης τάξης ακρίβειας και γραμμικά σταθερή σε υπερβολικά σημεία στα οποία η ποσότητα $(V_h)_{i,j}$ είναι αρνητική [10,15,2]. Η ποσότητα $(V_h)_{i,j}$ ορίζεται ως :

$$(V_h)_{i,j} = K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x} \quad (4.9)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι $(V_h)_{i,j} = (V_e)_{i-1,j}$

Προχωρώντας στην επίλυση του αλγεβρικού συστήματος των διακριτοποιημένων εξισώσεων που ορίσαμε πιο πάνω με επαναληπτικές μεθόδους, μπορεί να έχουμε την εμφάνιση δύο ακόμα περιπτώσεων, ανάλογα με τις τιμές των ποσοτήτων $(V_e)_{i,j}$ και $(V_h)_{i,j}$. Κατά τη διάρκεια μιας επανάληψης στην επίλυση, σε κάθε κόμβο (i,j) υπολογίζουμε την ποσότητα $(V_e)_{i,j}$. Αν ισχύει ότι $(V_e)_{i,j} > 0$, τότε η ροή σε εκείνο το σημείο είναι υποηχητική (η εξίσωση (2.8) είναι ελλειπτικού τύπου) και χρησιμοποιούμε την εξίσωση (4.5). Αν έχουμε $(V_e)_{i,j} < 0$ και $(V_h)_{i,j} < 0$, τότε η ροή στο σημείο είναι υπερηχητική (η εξίσωση (2.8) είναι υπερβολικού τύπου) και χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.8). Για την περίπτωση που η ροή αποκτά ηχητική ταχύτητα, καθώς αυξάνει από την υποηχητική στην υπερηχητική, φτάνουμε σε ένα σημείο όπου ισχύει $(V_e)_{i,j} < 0$ και $(V_h)_{i,j} > 0$. Αυτό το σημείο είναι παραβολικό και ούτε η (4.5), αλλά ούτε και η (4.8) είναι σταθερές [15]. Η εξίσωση (2.8) γίνεται παραβολική και ο συντελεστής $(V_e)_{i,j}$ λαμβάνει την τιμή 0, οπότε το αντίστοιχο σχήμα διαφορών είναι

$$\left[\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] = 0 \quad (4.10)$$

Διαφορετικά, όταν η ροή επιβραδύνεται και μεταβαίνει από υπερηχητική σε υποηχητική δια της ηχητικής γραμμής, φτάνουμε σε ένα σημείο όπου ισχύει ότι :

$$(V_e)_{i,j} > 0 \text{ και } (V_h)_{i,j} < 0 \quad (4.11)$$

και η διακριτοποίηση σε αυτή την περίπτωση είναι τοπικά ευσταθής. Το σημείο αυτό ονομάζεται κρουστικό σημείο και εκεί έχουμε ασυνέχεια εξαιτίας κρουστικού κύματος. Σύμφωνα με τους Murman και Cole σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.5) [2,10,15,13]

Ανακεφαλαιώνοντας, θα μπορούσαμε να γράψουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο των κυρίων εξισώσεων και τη διακριτοποίηση για να γίνουν πιο εμφανή στον αναγνώστη [14] :

Για το ελλειπτικό σχήμα :

$$(\phi_\chi)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}, (\phi_{\chi\chi})_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

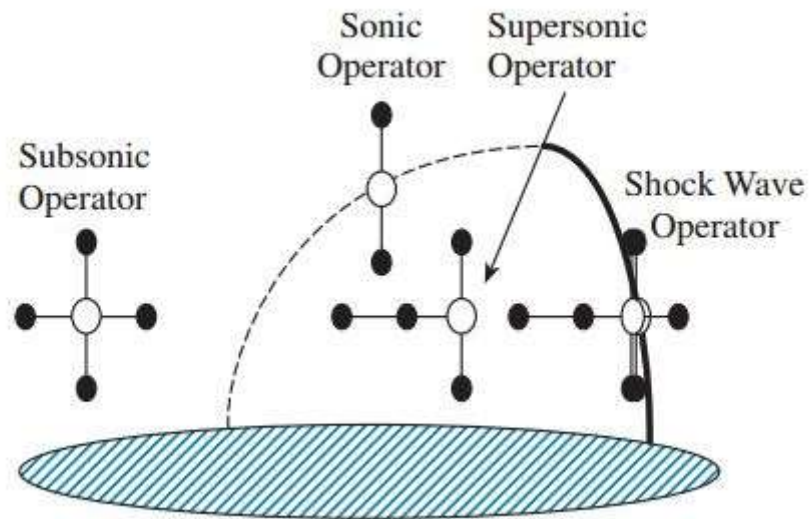
Για το υπερβολικό σχήμα :

$$(\phi_\chi)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x}, (\phi_{\chi\chi})_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{\Delta x^2}$$

Και στις δύο περιπτώσεις :

$$(\phi_{\tilde{y}\tilde{y}})_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta\tilde{y}^2}$$

Στην περίπτωση του $(\phi_{\tilde{y}\tilde{y}})_{i,j}$ έχουμε διαφορική διατύπωση για την πρώτη υπολογιστική σειρά [14,15,1,2,13,16], όμως περισσότερα για αυτό θα δώσουμε στο παρακάτω κεφάλαιο για τις συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 4.02 : Σχήμα πεπερασμένων διαφορών [13]

4.1.3 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και του Far Field

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε και αναλύουμε τις συνοριακές συνθήκες στη μορφή που χρειαζόμαστε για την αριθμητική επίλυση των κύριων εξισώσεων. Οι συνθήκες που περιγράφουμε είναι αυτές που αναλύσαμε στην ενότητα 3.1 του κεφαλαίου 3.

Η εφαπτόμενη συνοριακή συνθήκη (3.1) στο σύνορο $\tilde{y} = 0$ μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας την παρακάτω προσεγγιστική μορφή :

$$\left(\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}\right)_{i,0} = \frac{2}{\Delta\tilde{y}} \left(\frac{\phi_{i,1} - \phi_{i,0}}{\Delta\tilde{y}} - \phi_{\tilde{y}}|_{i,0} \right) \quad (4.12)$$

Σε αυτή τη σχέση, η τιμή του $\phi_{\tilde{y}}|_{i,0}$ λαμβάνεται από τη (3.1), με το όριο του σώματος να τοποθετείται στο $j = 0$. Επιπλέον, στο $\tilde{y} = 0$, εκτός σώματος έχουμε ότι $\phi_{\tilde{y}}|_{i,0} = 0$ [15]. Ακόμα, μπορούμε να συναντήσουμε τη σχέση (4.12) με τη μορφή :

$$\left(\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}\right)_{i,1} = \frac{1}{\Delta\tilde{y}} \left(\frac{\phi_{i,2} - \phi_{i,1}}{\Delta\tilde{y}} - \phi_{\tilde{y}}|_{\tilde{y}=0} \right) \quad (4.13)$$

όπου, το όριο του σώματος τοποθετείται στο $j = 1$, και αντίστοιχα στον οριζόντιο άξονα έχουμε ότι $\phi_{i,0} = \phi_{i,1} - \Delta\tilde{y}\phi_{\tilde{y}}|_{\tilde{y}=0}$. [2,14]

Για την εφαρμογή των Far Field συνθηκών έχουμε τη σχέση (3.12) :

$$\phi(\chi, \tilde{y}) \cong (1/2\pi K^{1/2}) \mathfrak{D}\chi / (\chi^2 + K\tilde{y}^2) + \dots$$

με το $\mathfrak{D} = \text{doublet strength (ζεύγος δύναμης)} = 2 \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi + \frac{\gamma+1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} u^2 d\xi d\eta$

Το \mathfrak{D} μπορούμε ακόμα να το συναντήσουμε και στη μορφή $\mathfrak{D} = 2\delta \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi + \frac{\gamma+1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} u^2 d\xi d\eta$, όπου το προφίλ $\delta F(\chi)$ τοποθετείται μεταξύ των $-1 \leq \chi \leq 1$ [15]. Η παραγόμενη ολοκληρωτική σχέση διακριτοποιείται και λύνεται μαζί με τις άλλες σχέσεις που αναλύσαμε πιο πάνω [15]. Ακόμα, μπορούμε το ολοκλήρωμα να το λύσουμε και αριθμητικά χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου [1]. Το ολοκλήρωμα και η σχέση του Far Field πρέπει να επαναπροσδιορίζονται σε κάθε επανάληψη [1,15,14]. Επιπλέον, στη βιβλιογραφία έχουμε παρατηρήσει ότι το \mathfrak{D} μπορούμε να το υπολογίσουμε και με τη μορφή :

$$\mathfrak{D} = \sum_i \sum_j (\phi_x)_{i,j}^2 \Delta\chi \Delta\tilde{y}$$

το οποίο το υπολογίζουμε σε κάθε επανάληψη, όπως αναφέραμε και πιο πάνω [14].

Το εξωτερικό σύνορο του υπολογιστικού πεδίου που ορίσαμε στην ενότητα 4.1.1, λαμβάνεται σε απόσταση 3 με 4 φορές το μήκος του πτερυγίου, για να πάρουμε

καλή ακρίβεια. Αλλιώς, στο εύρος της διηγητικής ταχύτητας οι διαταραχές φαίνεται να εξασθενούν με καλή ακρίβεια σε απόσταση κοντά στις 6 με 7 φορές το μήκος του πτερυγίου [15].

4.1.4 Επαναληπτική λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων κατά

Murman & Cole

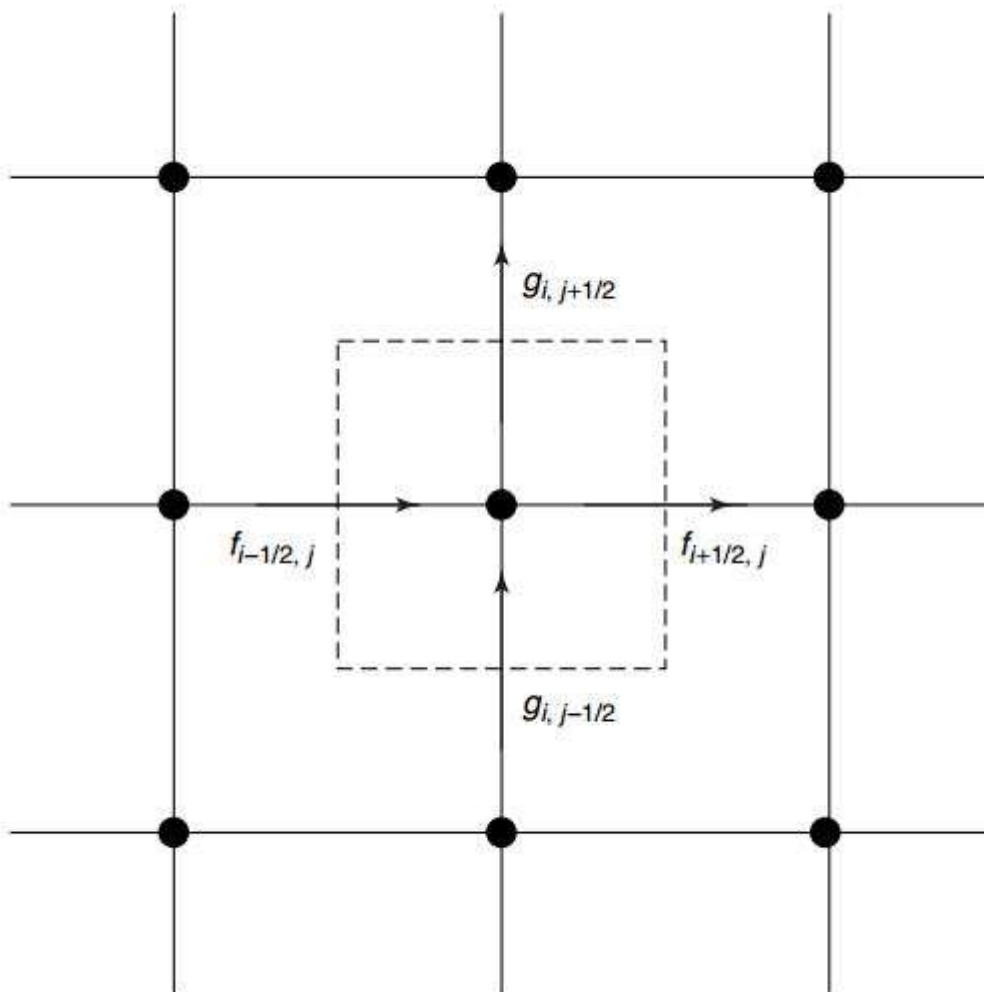
Οι Murman και Cole το 1971 έλυσαν τις διακριτοποιημένες εξισώσεις με τη μέθοδο χαλάρωσης (successive line over relaxation ή για συντομία SLOR), σαρώνοντας το υπολογιστικό πεδίο, από τα αριστερά προς τα δεξιά, σε κάθετες γραμμές [1]. Το συγκεκριμένο σχήμα είναι μια γενίκευση του κλασσικού σχήματος των SLOR, προσαρμοσμένο στις διακριτοποιημένες διηγητικές εξισώσεις. Οι λεπτομέρειες του παρουσιάζονται στην παρακάτω υποενότητα, μαζί με το συντηρητικό σχήμα των εξισώσεων προς επίλυση. Στο n -οστό βήμα της επανάληψης, η τιμή των $(V_e)_{i,j}$ και $(V_h)_{i,j}$ υπολογίζεται και ανάλογα με το πρόσημό τους, διαλέγουμε την κατάλληλη εξίσωση ((4.5), (4.8) ή (4.10)). Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι να επιτευχθεί επιθυμητή ακρίβεια.

Οι δυο ερευνητές στα αποτελέσματά τους παρατήρησαν τα εξής. Οι αριθμητικές λύσεις που υπολογίστηκαν με το πιο πάνω σχήμα που εξαρτάται από τον τύπο των εξισώσεων, δείχνει να έχει καλή συμφωνία με τις διαθέσιμες λύσεις για συνεχή ροή (υποηχητική και υπερηχητική) χωρίς κρουστικά κύματα. Ακόμα, τα αποτελέσματα με κρουστικά κύματα δείχνουν και αυτά να έχουν καλή συμφωνία, με τα διαθέσιμα για τότε, πειραματικά δεδομένα. Όμως, η μεταβολή στην πίεση κατά μήκος του κύματος στην επιφάνεια του πτερυγίου, δείχνει να είναι λιγότερη από την αναμενόμενη θεωρητική τιμή για ένα κανονικό κρουστικό κύμα. Το πρόβλημα αυτό διορθώθηκε μεταγενέστερα από τον Murman το 1974 [2], μέσω ενός συντελεστή κύματος (shock point operator όπως τον ονόμασε [2]), κάνοντας το σχήμα έτσι συντηρητικό. Το αρχικό σχήμα που είχαν χρησιμοποιήσει οι ερευνητές αποδείχθηκε πως ήταν μη συντηρητικό δίνοντας έτσι ανακριβή στοιχεία, μέσω του αριθμητικού σφάλματος αποκοπής. Για το λόγο αυτό, στην παρακάτω υποενότητα αναλύουμε το συντηρητικό σχήμα.

4.1.5 Συντηρητικό σχήμα και τεχνητό ιξώδες

Όταν το αριθμητικό μας σχήμα δεν είναι συντηρητικό, τότε δημιουργούνται ανακριβή δεδομένα μέσω του σφάλματος αποκοπής, τα οποία οδηγούν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, για αξιόπιστα δεδομένα το αριθμητικό σχήμα πρέπει να είναι συντηρητικό [15].

Όπως έδειξαν ο Jameson (1978) και οι Lax και Wendroff(1960) η γενική μέθοδος κατασκευής μιας προσεγγιστικής διαφοράς στο συντηρητικό νόμο της μορφής $f_x + g_y = 0$, είναι η διατήρηση της ισορροπίας στη ροή σε κάθε κελί του πλέγματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα [6].



Σχήμα 4.03 : Υπολογισμός ροής με πεπερασμένες διαφορές σε συντηρητική μορφή [6]

Αυτό οδηγεί στο σχήμα της μορφής :

$$\frac{F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \quad (4.14)$$

όπου τα F και G συγκλίνουν στα f και g στο όριο που το πλάτος του πλέγματος τείνει στο μηδέν. Στους ορισμούς των F και G επιτρέπεται κάποιο εύρος, αφού είναι απαραίτητο να ισχύει ότι $F = f + O(\Delta x)$ και $G = g + O(\Delta y)$ [6]. Στην κατασκευή τώρα των προσεγγιστικών διαφορών, μπορούμε πλέον να εισάγουμε τον όρο του τεχνητού ιξώδους στη μορφή :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

δεδομένου ότι τα P και Q είναι της τάξης του Δx . Τότε, με βάση όλα αυτά, το σχήμα των διαφορών είναι μια προσέγγιση στον τροποποιημένο νόμο διατήρησης :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + P) + \frac{\partial}{\partial y}(g + Q) = 0$$

το οποίο ανακτά τη μορφή του αρχικού νόμου διατήρησης, όταν το πλάτος του πλέγματος τείνει στο μηδέν [6,15].

Αυτού του είδους η μορφοποίηση, μας προσφέρει ένα γενικό οδηγό στο πώς να δημιουργούμε σχήματα διαφορών σε συντηρητική μορφή. Ο κυρίαρχος όρος στο λάθος διακριτοποίησης που εισάγεται από τις ανάντη διαφορές, μπορεί να θεωρηθεί ως τεχνητό ιξώδες. Από την άλλη, μπορούμε να αντιστρέψουμε αυτή την ιδέα σε όφελός μας. Αντί να χρησιμοποιήσουμε ένα μετατροπέα στο σχήμα των διαφορών για να εισάγουμε το τεχνητό ιξώδες, μπορούμε απευθείας και ρητά να προσθέσουμε το τεχνητό ιξώδες, το οποίο θα παράγει το πεδίο των ανάντη διαφορών στο σχήμα που περιγράφουμε, στα υπερηχητικά σημεία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια προσέγγιση με κεντρικές διαφορές στη διαφορική εξίσωση σε συντηρητική μορφή. Τότε, η συντηρητική μορφή θα διατηρηθεί αν και εφόσον το εισαγόμενο από εμάς ιξώδες είναι και αυτό σε συντηρητική μορφή. Η επίδραση του ιξώδους είναι απλά να αλλάζει τις διατηρούμενες ποσότητες ανάλογα με το πλάτος του υπολογιστικού πλέγματος, Δx , ενώ αυτή μηδενίζεται όσο πυκνώνει το πλέγμα με αποτέλεσμα να διατηρούνται η αρχική περιγραφή του προβλήματος [6]. Συμπεριλαμβάνοντας μια συνάρτηση αλλαγής μορφής στο ιξώδες για να το κάνουμε να εξαφανιστεί στην υποηχητική περιοχή, μπορούμε να συνεχίσουμε να λαμβάνουμε ακριβή αναπαράσταση κρουστικών κυμάτων, από την αλλαγή στα σχήματα διαφορών.

Το μόνο που μένει τώρα είναι η εύρεση ενός συγκλίνοντος επαναληπτικού σχήματος για την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση. Ας υποθέσουμε ότι στην (n+1) επανάληψη το υπόλοιπο $R_{i,j}$ στο σημείο $i\Delta x, j\Delta y$ εκτιμάται από το αποτέλεσμα του $\phi_{i,j}^{(n)}$ στη n-οστή επανάληψη του

σχήματος διαφορών. Τότε η διόρθωση $C_{i,j} = \phi_{i,j}^{(n+1)} - \phi_{i,j}^{(n)}$ υπολογίζεται λύνοντας μια εξίσωση της μορφής :

$$NC + \sigma R = 0 \quad (4.15)$$

όπου το N είναι διακριτός γραμμικός τελεστής και το σ είναι μια κλιμακούμενη συνάρτηση. Στη μέθοδο χαλάρωσης, το N περιορίζεται σε μια κάτω τριγωνική ή συμπαγή τριγωνική μορφή έτσι ώστε τα στοιχεία του C να καθορίζονται διαδοχικά. Στην ανάλυση ενός τέτοιου σχήματος, είναι χρήσιμο να κάνουμε μια αναλογία με ένα χρονικά εξαρτώμενο σχήμα. Το υπόλοιπο R είναι μια προσέγγιση του $L\phi$, όπου L είναι ο τελεστής που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση. Αν θεωρήσουμε ότι το C αναπαριστά το $\Delta t\phi_t$, όπου το t είναι μια τεχνητή συνιστώσα του χρόνου, και ο διαφορικός τελεστής D είναι μια προσέγγιση του $N\Delta t$, τότε η εξίσωση (4.15) είναι μια προσέγγιση της :

$$D\phi_t + \sigma L\phi = 0 \quad (4.16)$$

Έτσι, σύμφωνα με αυτή την αναλογία, πρέπει να διαλέξουμε το N με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να είναι μια συγκλίνουσα χρονικά εξαρτώμενη διαδικασία [6].

Με αυτή την προσέγγιση που μόλις περιγράψαμε, η μορφοποίηση της μεθόδου χαλάρωσης για την επίλυση της διηχητικής ροής, συμπυκνώνεται σε τρία βασικά βήματα :

- Κατασκευή κεντρικών διαφορών για τη διαφορική εξίσωση
- Πρόσθεση του αριθμητικού ιξώδους για την παραγωγή της επιθυμητής κατεύθυνση πόλωσης στην υπερηχητική περιοχή
- Εισαγωγή χρονικά εξαρτώμενων όρων για την ενσωμάτωση της εξίσωσης σταθερών συνθηκών σε μια συγκλίνουσα χρονικά εξαρτώμενη διαδικασία.

Οι μέθοδοι που περιγράψαμε πιο πάνω κρίνονται εκ του αποτελέσματος ως εξαιρετικά αξιόπιστες [6]. Το μόνο μειονέκτημά τους είναι ίσως το ότι αργεί να επέλθει σύγκλιση. Για να μπορέσουμε να επιταχύνουμε τη σύγκλιση, μπορούμε να μεγαλώσουμε την τάξη του διαφορικού τελεστή διαμορφώνοντας ανάλογα την τάξη του τελεστή N [6].

4.1.6 Επίλυση της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών (transonic small disturbance) με τη μέθοδο χαλάρωσης (relaxation)

Οι βασικές ιδέες που αναπτύξαμε στην παραπάνω υποενότητα , μπορούν να εφαρμοστούν με την επίλυση της εξίσωσης των διηχητικών μικρών διαταραχών (2.9)

$$\left[K - (\gamma + 1)\phi_\chi \right] \phi_{\chi\chi} + \phi_{\bar{y}\bar{y}} = 0$$

Η διαχείριση της εξίσωσης των μικρών διαταραχών απλοποιείται από το γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές γραμμές είναι τοπικά συμμετρικές στην χ κατεύθυνση. Έτσι, η επιθυμητή κατεύθυνση πόλωσης μπορεί να εισαχθεί απλά αλλάζοντας στις ανάντη διαφορές στη χ κατεύθυνση, σε όλα τα υπερηχητικά σημεία [6]. Για να διατηρήσουμε τη συντηρητική μορφή, χρειάζεται προσοχή στη μέθοδο που ακολουθούμε για την αλλαγή στο σχήμα των εξισώσεων. Η διακριτοποίηση δεν αλλάζει από αυτή που δείξαμε στην υποενότητα 4.1.2, όμως αλλάζει ο τρόπος γραφής, έκφρασης και διαχείρισης των συνολικών εξισώσεων.

Έστω $p_{i,j}$ μια έκφραση κεντρικών διαφορών στο σημείο $i\Delta\chi, j\Delta y$ για τις παραγώγους στον χ άξονα [6,15] :

$$p_{i,j} = V_{i,j} \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta\chi^2} \quad (4.17)$$

όπου το $V_{i,j}$:

$$V_{i,j} = K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\chi} \quad (4.18)$$

ενώ έχουμε προφανώς και $V_{i-1,j}$:

$$V_{i-1,j} = K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta\chi} \quad (4.19)$$

Εύκολα με μια πρώτη ματιά, ο αναγνώστης μπορεί να διακρίνει πως η σχέση (4.18) είναι ίδια με τη σχέση (4.6) ή αλλιώς $V_{i,j} = (V_e)_{i,j}$. Επίσης, η σχέση (4.19) είναι ίδια με τη σχέση (4.9). Ο λόγος που επιλέγουμε το διαφορετικό συμβολισμό είναι καθαρά βιβλιογραφικός και για λόγους καλύτερης κατανόησης της διαδικασίας κατάστρωσης του συντηρητικού σχήματος των εξισώσεων προς επίλυση.

Ακόμα, έστω $q_{i,j}$ είναι η έκφραση σε κεντρικές διαφορές του $\phi_{\bar{y}\bar{y}}$:

$$q_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta\bar{y}^2} \quad (4.20)$$

Ορίζουμε μεταβατική μεταβλητή μ , η οποία έχει τιμή μονάδα στα υπερηχητικά σημεία και τιμή μηδέν στα υποηχητικά σημεία, ως εξής [6,15]:

$$\mu_{i,j} = 0 \text{ αν } V_{i,j} > 0 \quad (4.21)$$

$$\mu_{i,j} = 1 \text{ αν } V_{i,j} < 0 \quad (4.21)$$

Τότε, με βάση αυτά που διατυπώσαμε, το αρχικό σχήμα των Murman και Cole [1], μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$p_{i,j} + q_{i,j} - \mu_{i,j}(p_{i,j} - p_{i-1,j}) = 0 \quad (4.22)$$

Έστω,

$$P = \Delta\chi \frac{\partial}{\partial\chi} \left[K\phi_\chi - (\gamma + 1) \phi_\chi^2 / 2 \right] = \Delta\chi V \phi_{\chi\chi}$$

όπου, το V είναι ο γραμμικός συντελεστής που ορίσαμε στην εξίσωση (4.18). Τότε, οι επιπρόσθετοι όροι είναι μια προσέγγιση ως προς τη σχέση :

$$-\mu \frac{\partial P}{\partial\chi} = -\mu \Delta\chi V \phi_{\chi\chi\chi} \quad (4.23)$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως τεχνητό ιξώδες της τάξης $\Delta\chi$, το οποίο προστίθεται σε όλα τα σημεία στη υπερηχητική περιοχή. Αφού ο συντελεστής $-V$ του $\phi_{\chi\chi\chi} = u_{\chi\chi}$ είναι θετικός στην υπερηχητική περιοχή, είναι φανερό ότι το τεχνητό ιξώδες αποτελεί έναν όρο παραπλήσιο με τους όρους ιξώδους στην εξίσωση Navier-Stokes[6,15].

Επίσης, αφού ο όρος του τεχνητού ιξώδους δεν είναι ακόμα σε συντηρητική μορφή (το μ δεν είναι σταθερό), το αποτέλεσμα των υπολογισμών δε συγκλίνει σε σωστή ασθενή λύση (δε φαίνονται τα ασθενή κρουστικά κύματα) [6,15]. Για να διορθωθεί αυτό, αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να γράψουμε τον όρο του ιξώδους σε συντηρητική μορφή, σαν $\frac{\partial}{\partial\chi}(\mu P)$. Αυτό μας οδηγεί στο συντηρητικό σχήμα του Murman(1974) [2] :

$$p_{i,j} + q_{i,j} - \mu_{i,j}p_{i,j} + \mu_{i-1,j}p_{i-1,j} = 0 \quad (4.24)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι, σε ένα υποηχητικό σημείο ισχύει όπως δείξαμε $\mu_{i,j} = \mu_{i-1,j} = 0$, ενώ στα υπερηχητικά σημεία $\mu_{i,j} = \mu_{i-1,j} = 1$. Ακόμα, στα παραβολικά σημεία ισχύει $\mu_{i-1,j} = 0$ και $\mu_{i,j} = 1$, και στα κρουστικά σημεία $\mu_{i-1,j} = 1$ και $\mu_{i,j} = 0$ (η ταχύτητα ροής μετά από ένα κρουστικό σημείο είναι υποηχητική), οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι [6,15]:

$$q_{i,j} = 0 \quad (4.25)$$

και

$$p_{i,j} + p_{i-1,j} + q_{i,j} = 0 \quad (4.26)$$

Οι μη γραμμικές εξισώσεις (4.24), (4.25) και (4.26) λύνονται με μία γενίκευση της μεθόδου γραμμής χαλάρωσης για ελλειπτικές εξισώσεις, που ονομάζουμε (SLOR: successive line over relaxation) [6,15]. Η μέθοδος εκφράζεται σε όρους διόρθωσης $C_{i,j}$ και όρους υπολοίπου $R_{i,j}$. Όταν ολοκληρωθεί και ο n-οστός κύκλος της επαναληπτικής διαδικασίας, οι τιμές του $\phi_{i,j}^n$ είναι γνωστές σε όλα τα πλεγματικά σημεία του υπολογιστικού πεδίου. Τα υπόλοιπα $R_{i,j}$ εκτιμώνται από την αντικατάσταση των $\phi_{i,j}^n$, στη θέση των $\phi_{i,j}$ στο αριστερό μέλος της σχετικής εξίσωσης (4.24), έτσι ώστε να πάρουμε [15]:

$$R_{i,j} = \text{residual} = q_{i,j}^n + (1 - \mu_{i,j})p_{i,j}^n + \mu_{i-1,j}p_{i-1,j}^n \quad (4.27)$$

όπου προφανώς,

$$q_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

και με τον ίδιο τρόπο εκφράζονται και τα $p_{i,j}^n$ και $p_{i-1,j}^n$. Οι διορθώσεις $C_{i,j}$ ορίζονται ως :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + C_{i,j} \quad (4.28)$$

Ορίζουμε τώρα το $\bar{\phi}_{i,j}$ σαν τις προσωρινές τιμές που παίρνουμε από το σχήμα γραμμών του Gauss – Siedel, σαρώνοντας τις κάθετες γραμμές από τα αριστερά προς τα δεξιά, ως εξής[15] :

$$\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + (1 - \mu_{i,j}) \left[K - (\gamma + 1) \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\bar{\phi}_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \mu_{i-1,j} V_{i-1,j}^n \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i-2,j}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (4.29)$$

Σε αυτό το σημείο, εισάγουμε την παράμετρο ω που ονομάζουμε συντελεστή χαλάρωσης (over-relaxation parameter), η οποία συνδέει τις νέες τιμές $\phi_{i,j}^n$, με τις παλιές μέσω :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \omega(\bar{\phi}_{i,j} - \phi_{i,j}^n) \text{ ή αλλιώς } \bar{\phi}_{i,j} = \phi_{i,j}^n + \frac{1}{\omega} C_{i,j} \quad (4.30)$$

Για υποηχητική ροή έχουμε ότι, $1 \leq \omega \leq 2$. Να σημειώσουμε ότι σε ένα υπερηχητικό σημείο, το $\mu_{i,j}$ είναι μονάδα και δε χρησιμοποιούνται προσωρινές τιμές και η εξίσωση (4.29) γίνεται ένα τυπικό σχήμα εξισώσεων υπερβολικού τύπου [6,15]. Επίσης, αξίζει να αναφέρουμε ότι στις περιπτώσεις που το $\omega=1$ έχουμε καθαρό σχήμα εξισώσεων Gauss-Seidel και όταν $\omega < 1$ έχουμε υπο-χαλάρωση (under-relaxation) [16]. Τώρα, με απαλοιφή του $\bar{\phi}_{i,j}$ από την (4.29) με βάση την (4.30), λαμβάνουμε το SLOR σχήμα για τις άγνωστες διορθώσεις $C_{i,j}$ [6,15] :

$$R_{i,j} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{\Delta\tilde{y}^2} + (1 - \mu_{i,j})V_{i,j}^n \frac{-\frac{2}{\omega}C_{i,j} + C_{i-1,j}}{\Delta\chi^2} + \mu_{i-1,j}V_{i-1,j}^n \frac{C_{i,j} - 2C_{i-1,j} + C_{i-2,j}}{\Delta\chi^2} +$$

Το επαναληπτικό σχήμα (4.30) συμπεριφέρεται στην υποηχητική περιοχή σαν ένα κλασσικό σχήμα για συστήματα εξισώσεων που λαμβάνονται από τη διακριτοποίηση ελλειπτικών εξισώσεων. Στην υπερηχητική περιοχή, συμπεριφέρεται σαν σχήμα που ξεκινάει από τα αριστερά προς τα δεξιά, όπως όλα τα τυπικά σχήματα που λαμβάνουμε από τη διακριτοποίηση εξισώσεων υπερβολικού τύπου [15]. Χρειάζεται προσοχή στην επιλογή των επαναληπτικών σχημάτων για την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων που λαμβάνουμε από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων μικτού ελλειπτικού – υπερβολικού τύπου, αλλιώς μπορεί να προκύψει ασυνέχεια κλίσης στο αποτέλεσμα στο παραβολικό σημείο [6].

4.1.7 Επίλυση της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών με χρονικά εξαρτώμενο βήμα [14]

Όπως δείξαμε, οι διαφορετικές διακριτοποιήσεις της εξίσωσης (2.9) στις διάφορες ζώνες, επιβάλλονται από τα διαφορετικά πεδία εξάρτησης. Στην ελλειπτική περίπτωση, αυτό είναι όλο το υπολογιστικό πεδίο και ο κόμβος για τις νέες τιμές περιβάλλεται από αυτούς που φέρουν παλιές τιμές. Από την άλλη, στην υπερβολική περίπτωση, το πεδίο εξάρτησης είναι μόνο η γωνία μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών γραμμών διαμέσου του κόμβου και η νέα τιμή χρησιμοποιεί μόνο αυτούς που βρίσκονται ανάντη [14].

Το διακριτοποιημένο σύστημα εξισώσεων που δείξαμε στην υποενότητα 4.1.2 (όσο και στην ανακεφαλαίωση αυτής), το λύνουμε εδώ επαναληπτικά, λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου. Αν δηλώσουμε σε κάθε βήμα το σύστημα να λύνει για $L\phi = 0$, τότε φέρνουμε στο πρόβλημά μας την εξίσωση

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = L\phi$$

η οποία διακριτοποιείται στο χρόνο ως εξής :

$$\phi^{(n+1)} = \phi^{(n)} + \Delta t \cdot L\phi^{(n)}$$

Το χρονικό βήμα επιλέγεται να είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε υπολογιστική σταθερότητα. Ακόμα, επιλέγουμε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνουμε σε μια σταθερή λύση [14].

4.2 Διακριτοποίηση και επίλυση της εξίσωσης διηχητικής ροής για

$$\text{ανομοιόμορφο πλέγμα } \left[(1 - M_\infty^2) \phi_x - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \phi_x^2 \right]_x + [\phi_y]_y = 0$$

Σε αυτό το κομμάτι θα ασχοληθούμε με την εξίσωση (2.15). Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα ίδια με αυτά που περιγράψαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 4. Υπενθυμίζουμε για ακόμη μια φορά στον αναγνώστη, πως η εξίσωση (2.15) αποτελεί μια διαφορετική έκφραση της σχέσης (2.9), που διακριτοποιήσαμε και επιλύσαμε στις παραπάνω υποενότητες. Για αυτό το λόγο, ότι περιγράψαμε πριν, ισχύουν και εδώ. Έτσι θα προσπαθήσουμε να αποφύγουμε τις αβίαστες επαναλήψεις και θα παρουσιάσουμε επιπλέον πράγματα και δεδομένα στη κατάστρωση του προβλήματος, παρουσιάζοντας με αυτό τον τρόπο στον αναγνώστη μια σφαιρική άποψη σχετικά με την επίλυση των εξισώσεων διηχητικών μικρών διαταραχών. Εδώ χρειάζεται το ανομοιόμορφο πλέγμα διότι υπάρχει η μικρή παράμετρος $1 - M_\infty^2$ οπότε οι μεταβολές στην y κατεύθυνση κοντά στο πτερύγιο είναι πιο έντονες. Επίσης, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στις παρακάτω υποενότητες, διατηρούνται οι συμβολισμοί των ποσοτήτων που μελετάμε, ώστε να είναι εύκολο να γίνει η οποιαδήποτε αντιστοιχία με τη προηγούμενη διαδικασία που περιγράψαμε.

Η διηχητική εξίσωση των μικρών διαταραχών (2.15) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω απλή μορφή [16]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (4.32)$$

όπου

$$P = (1 - M_\infty^2) \phi_x - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \phi_x^2$$

$$Q = \phi_y$$

Αυτός ο απλός συμβολισμός θα μας βοηθήσει στην εργασία που ακολουθεί στις παρακάτω υποενότητες. Επίσης, είναι φανερός και ο συσχετισμός με τους συμβολισμούς $p_{i,j}$ (για το P) και $q_{i,j}$ (για το Q) .

Στην ανάλυση που ακολουθεί παρακάτω, το πτερύγιο παρομοιάζεται με τη μορφή σχισμής στο υπολογιστικό πεδίο που θα ορίσουμε, όπως ακριβώς περιγράψαμε στην υποενότητα 3.1.2 . Αυτό, πέραν του ότι δίνει μια διαφορετική προοπτική στην ανάλυση μας, μας διευκολύνει και στους υπολογισμούς μας για την επίλυση.

4.2.1 Δημιουργία ανομοιόμορφου πλέγματος

Το πλέγμα που θα δημιουργήσουμε για τη μελετώμενη εξίσωση, είναι πολύ απλό παρά το γεγονός ότι είναι ανομοιόμορφο. Αυτό συμβαίνει για τον απλούστατο λόγο ότι έχουμε συνδέσει το περύγιο με την εξίσωση (2.15), με τη μορφή σχισμής, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, η οποία τοποθετείται κατά μήκος του άξονα των x .

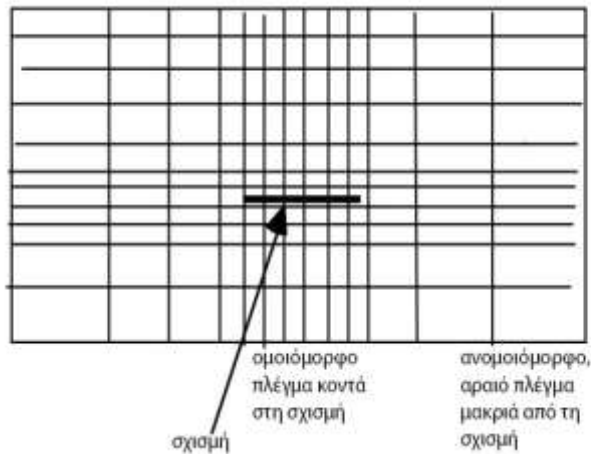
Για να μπορέσουμε να λάβουμε ακριβείς λύσεις, οι κόμβοι θα πρέπει να τοποθετηθούν σχετικά κοντά μεταξύ τους. Εμπειρικά, γνωρίζουμε ότι πρέπει να τοποθετηθούν τουλάχιστον 50 κόμβοι πάνω στη σχισμή [16]. Τοποθετούμε μόνο αυτούς τους κόμβους του πλέγματος ομοιόμορφα, με απόσταση $c/50$ μεταξύ τους [16], όπου c είναι το μήκος της σχισμής (συνηθίζεται στο σύνολο της βιβλιογραφίας να είναι ίσο με 1).

Αν χρησιμοποιήσουμε το ομοιόμορφο πλέγμα, που δημιουργήσαμε στις προηγούμενες υποενότητες, στην εξίσωση (2.15) με ότι θεωρήσαμε για αυτή (και όχι με ότι θεωρήσαμε στην υποενότητα 4.1.1 για το ομοιόμορφο χτίσιμο), τότε ένας πολύ γρήγορος υπολογισμός μας δείχνει ότι χρειαζόμαστε 400x400 κόμβους (160000) για ένα απλό πλέγμα 8 μήκους σχισμών τόσο στο πλάτος, όσο και στο ύψος [16]. Μπορούμε να αποφύγουμε την δημιουργία ενός τόσο μεγάλου πλέγματος, απλά μεγαλώνοντας σταδιακά, γεωμετρικά των κόμβων μεταξύ τους, τόσο στην x , όσο και στην y κατεύθυνση, μακριά από το περύγιο [16]. Αυτή άλλωστε είναι και η βασική ιδέα στο πεδίο των Murman και Cole (1971) [1], όπως και του Murman (1974) [2] στη συνέχεια. Έτσι λοιπόν, μακριά από το περύγιο χρησιμοποιούμε :

$$\Delta x_{\text{επόμενο}} = K_1 \Delta x_{\text{προηγούμενο}}$$

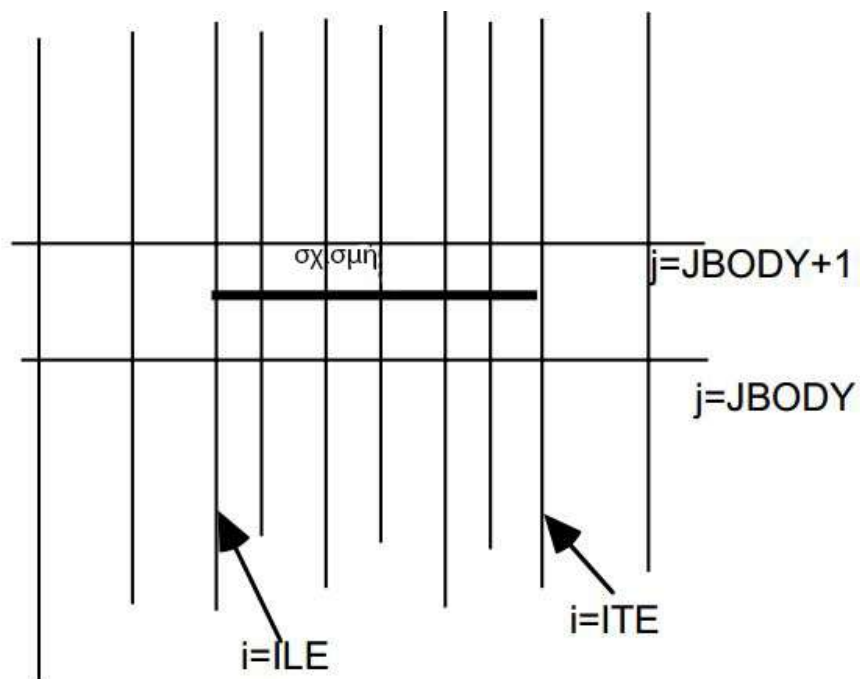
$$\Delta y_{\text{επόμενο}} = K_2 \Delta y_{\text{προηγούμενο}}$$

Εδώ τα K_1 , K_2 είναι παράγοντες επιμήκυνσης, με τιμές μεταξύ 1,05 και 1,15 [16]. όπως γίνεται αντιληπτό, μια μεγάλη τιμή στον παράγοντα επιμήκυνσης σημαίνει αντίστοιχα και λιγότερα πλεγματικά σημεία. Στον αντίποδα όμως, τόσο γρήγορα επιμηκυνόμενα πλέγματα θέτουν σε κίνδυνο την ακρίβεια της λύσης [2,16].



Σχήμα 4.04 : Αλγεβρικά επεκταμένο πλέγμα για την επίλυση της TSD εξίσωσης [16]

Για να μπορέσουμε παρακάτω να εκφράσουμε σωστά τις συνοριακές συνθήκες στο περύνιο, συνιστάται η σχισμή να τοποθετηθεί ανάμεσα σε δύο οριζόντιες γραμμές του πλέγματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.05 : Τοποθέτηση της σχισμής στο πλέγμα [16]

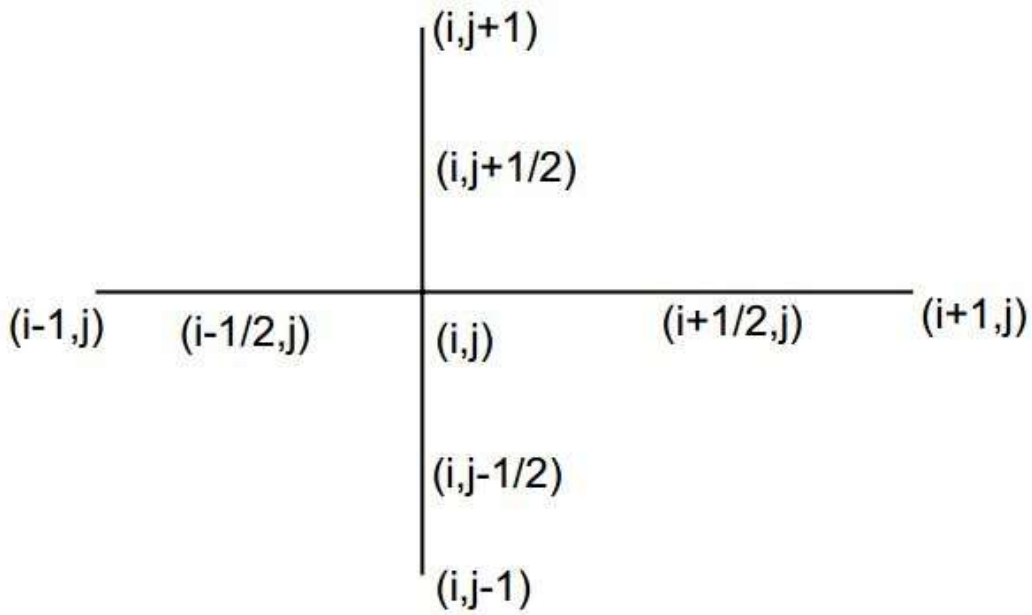
Να σημειώσουμε πως η σχισμή τοποθετείται κα ανάμεσα στις κάθετες γραμμές του πεδίου $i=ILE$ και $i=ITE$. Οι αριθμητικές τιμές των ILE , ITE , $JBODY$ μπορούν είτε να δίνονται δεδομένες από εμάς ή να υπολογίζονται κατά τη διάρκεια της δημιουργίας του πεδίου. Τα δεδομένα αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται μετά στη διαδικασία της διακριτοποίησης που θα ακολουθήσει [16].

4.2.2 Διακριτοποίηση σε ανομοιόμορφο πλέγμα [16]

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για να περιγράψουμε τις παραγώγους της συνάρτησης (2.15), σε μορφή τέτοια ώστε να μπορέσουμε να την επιλύσουμε αριθμητικά. Θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία των πεπερασμένων διαφορών από τα αναπτύγματα Taylor ώστε να γίνει πιο κατανοητή η διακριτοποίηση με βάση το ανομοιόμορφο πλέγμα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών ασχολείται με την κύρια μερική διαφορική εξίσωση που έχουμε, έναν όρο τη φορά. Αναπτύσσουμε κάθε όρο χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor. Η τάξη ακρίβειας καθορίζεται από τους πόσους όρους κρατάμε από τις σειρές. Βασικό κριτήριο για αυτή τη θεώρηση είναι ότι κάθε όρος της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι ομαλός, παραγωγίσιμος στο x και στο y στη γειτονιά του κόμβου (i,j) . Προσοχή χρειάζεται το γεγονός ότι αυτή η θεώρηση δεν ισχύει στην περίπτωση που στη γειτνίαση του κόμβου υπάρχουν κρουστικά κύματα [16].

Θεωρούμε τον όρο $\partial P / \partial x$ που εμφανίζεται στην εξίσωση 4.32 . Αυτή η παράγωγος υπολογίζεται, όπως γνωρίζουμε από τις υπολογιστικές μεθόδους, από την ανάπτυξη του P στους γειτονικούς κόμβους του (i,j) . Πιο συγκεκριμένα , αναπτύσσουμε το P στους μισούς κόμβους $(i + 1/2, j)$ και $(i - 1/2, j)$, γύρω στο κόμβο (i,j) [16]. Ο λόγος που γίνεται σε αυτούς τους μισούς κόμβους, είναι όπως αναφέραμε και πιο πάνω (υποενότητα 4.1.5) για να μπορέσει το σχήμα μας να παραμείνει συντηρητικό [2,6,10,13,15,16].



Σχήμα 4.06 : Μισοί κόμβοι χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της TSD εξίσωσης [16]

Αναλογιζόμενοι το γεγονός ότι ο μισός κόμβος $(i + 1/2, j)$ απέχει από τον κόμβο (i, j) απόσταση $(\Delta\chi_{i+1/2})/2$, μπορούμε να γράψουμε [16]:

$$P_{i+1/2,j} = P_{i,j} + \frac{\Delta\chi_{i+1}}{2} (P_{\chi})_{i,j} + \frac{(\Delta\chi_{i+1})^2}{8} (P_{\chi\chi})_{i,j} + O(\Delta\chi^3_{i+1}) \quad (4.33)$$

Να σημειώσουμε ότι έχουμε κόψει τη σειρά Taylor μετά τους τρεις πρώτους όρους. Αγνοώντας τους υπόλοιπους όρους σε μια άπειρη σειρά έχουμε τη δημιουργία υπολογιστικού λάθους, το γνωστό μας σφάλμα αποκοπής.

Ο όρος P στο $(i - 1/2, j)$ αναπτύσσεται γύρω από τον κόμβο (i, j) , δεδομένου ότι τα δύο αυτά σημεία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(\Delta\chi_i)/2$:

$$P_{i-1/2,j} = P_{i,j} - \frac{\Delta\chi_i}{2} (P_{\chi})_{i,j} + \frac{(\Delta\chi_i)^2}{8} (P_{\chi\chi})_{i,j} + O(\Delta\chi^3_i) \quad (4.34)$$

Αντικαθιστώντας τη (4.33) στην (4.34) παίρνουμε την έκφραση για τον πρώτο όρο $\partial P / \partial \chi$, της μερικής διαφορικής εξίσωσης (4.32):

$$(P_{\chi})_{i,j} = \frac{P_{i+1/2,j} - P_{i-1/2,j}}{\frac{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1}}{2}} - \left(\frac{\Delta\chi_{i+1} - \Delta\chi_i}{4} \right) (P_{\chi\chi})_{i,j} + O(\Delta\chi^2) \quad (4.35)$$

Αν κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.35) και αποκλείσουμε όλους τους άλλους όρους, τότε το σφάλμα αποκοπής θα είναι της

τάξης $\Delta\chi_i$, και η προσέγγιση πρώτης τάξης ακρίβειας. Αυτό ισχύει πράγματι όταν οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων $\Delta\chi_{i+1}$ και $\Delta\chi_i$ είναι εντελώς διαφορετικές [16]. Όταν οι αποστάσεις των κόμβων του πεδίου είναι ίδιες, τότε η προσέγγιση είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας. Στην περίπτωση μας, για το πεδίο που ορίσαμε στο 4.2.1, μπορούμε να πούμε πως είναι ελαφρώς εκτεταμένο, έτσι ώστε ο παράγοντας επιμήκυνσης να δίνεται από τη σχέση :

$$K_1 = 1 + O(\Delta\chi)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως το σφάλμα αποκοπής περιέχει μόνο τις δυνάμεις δεύτερης τάξης του πεδίου στα $\Delta\chi_{i+1}$ ή $\Delta\chi_i$. Με άλλα λόγια, σε ένα δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήμα, με ελαφρώς εκτεταμένους κόμβους, έχουμε :

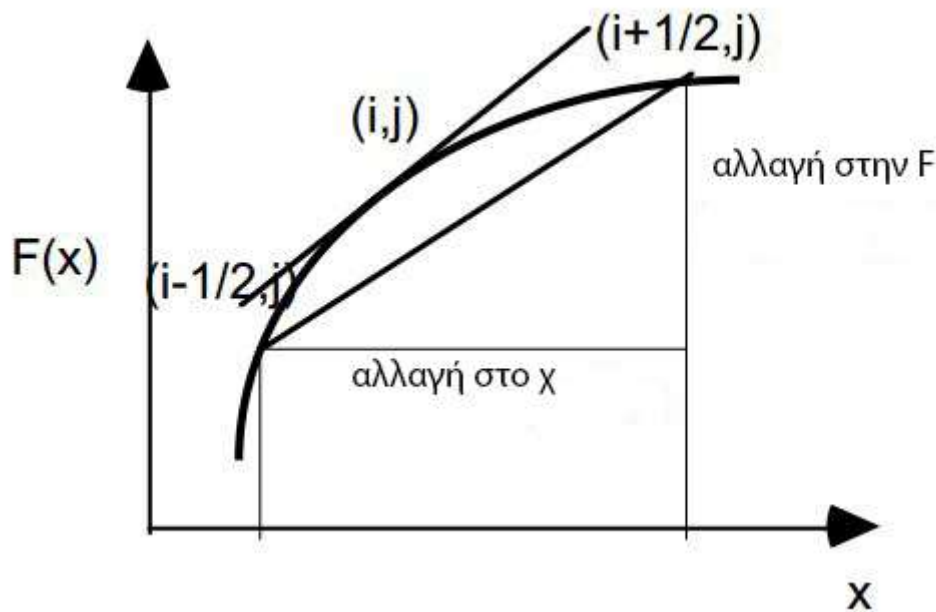
$$(P_\chi)_{i,j} = \frac{P_{i+\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{1}{2},j}}{\frac{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1}}{2}} \quad (4.36)$$

Όπως γνωρίζουμε, είναι πολύπλοκο να καταφεύγουμε συνέχεια στις σειρές Taylor κάθε φορά για την προσέγγιση της παραγώγου μιας εξίσωσης. Για αυτό και καταλήγουμε στον παρακάτω κανόνα [16] :

$$(\chi - \text{παράγωγος μιας } F)_{i,j} = \frac{F_{\text{δεξιά}} - F_{\text{αριστερά}}}{\text{Απόσταση κόμβων από τα δεξιά στα αριστερά}} \quad (4.37)$$

$$(y - \text{παράγωγος μιας } G)_{i,j} = \frac{G_{\text{πάνω}} - G_{\text{κάτω}}}{\text{Απόσταση κόμβων από πάνω προς τα κάτω}} \quad (4.38)$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε γραφικά τον κανόνα .



Σχήμα 4.07 : Γραφική αναπαράσταση της παραγώγου F [16]

Με αυτόν τον κανόνα μπορούμε να υπολογίσουμε το $\partial Q/\partial y$ στον κόμβο (i,j) , όπως επίσης και τις ποσότητες $P_{i\pm\frac{1}{2},j}$ [16] :

$$(Q_y)_{i,j} = \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}} - Q_{i,j-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j}{2}\right)}$$

$$P_{i+\frac{1}{2},j} = (1 - M_\infty^2) \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta \chi_{i+1}} - \frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta \chi_{i+1}} \right)^2$$

$$P_{i-\frac{1}{2},j} = (1 - M_\infty^2) \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta \chi_i} - \frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta \chi_i} \right)^2$$

$$Q_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y_{j+1}}$$

$$Q_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y_j}$$

Συνοψίζοντας, μιας δεύτερης τάξης ακρίβειας αριθμητική προσέγγιση της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών (4.32) είναι

$$\frac{P_{i+\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \chi_i + \Delta \chi_{i+1}} + \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}} - Q_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} = 0 \quad (4.39)$$

Η εξίσωση (4.39) ικανοποιεί τα σημεία που είναι υποηχητικά. Για τα σημεία που είναι υπερηχητικά, η εξίσωση μετατοπίζεται στα i σημεία αριστερά και δίνει [16]:

$$\frac{P_{i-\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta \chi_i + \Delta \chi_{i+1}} + \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}} - Q_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} = 0 \quad (4.40)$$

4.2.3 Διατύπωση σε συντηρητική μορφή

Σε αυτή την υποενότητα θα δώσουμε απευθείας τη συντηρητική μορφή της εξίσωσης (4.32). Οι λεπτομέρειες του συντηρητικού σχήματος, αλλά και η προέλευση του, έχουν αναλυθεί εκτενώς στην υποενότητα 4.1.5 .

Πριν δώσουμε το συντηρητικό σχήμα, επαναλαμβάνουμε κάποιους βασικούς όρους. Ορίζουμε τον μεταβατικό παράγοντα $\mu_{i,j}$, ο οποίος παίρνει τιμή μονάδα στα υπερηχητικά σημεία και τιμή μηδέν στα υποηχητικά. Θεωρούμε $A_{i,j}$ αριθμητικά ίσο με [16] :

$$A_{i,j} = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2 \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1}} \quad (4.41)$$

Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει ο αναγνώστης, το $A_{i,j}$ είναι το αντίστοιχο του $V_{i,j}$ που ορίσαμε στην υποενότητα 4.1.5 . Έτσι έχουμε και εδώ ότι

$$\mu_{i,j} = 0 \text{ αν } A_{i,j} > 0$$

και

$$\mu_{i,j} = 1 \text{ αν } A_{i,j} < 0$$

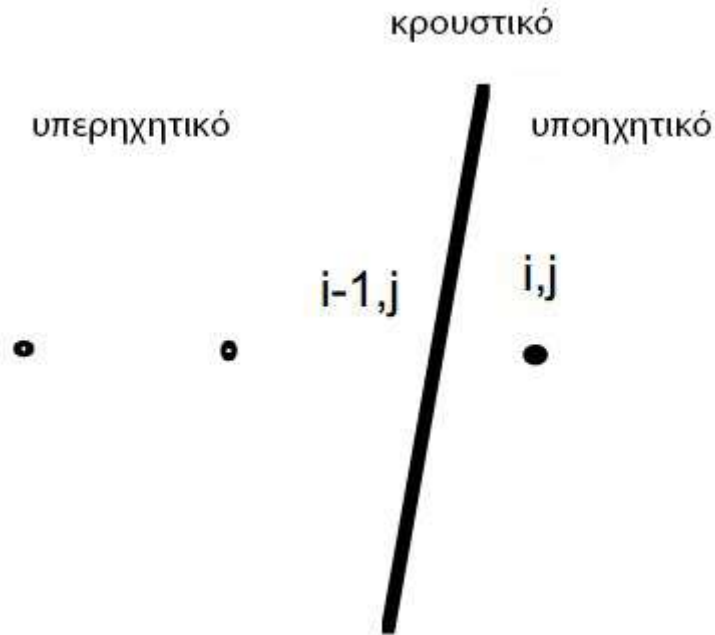
Έτσι η συντηρητική μορφή της εξίσωσης (4.32), σύμφωνα με το σχήμα του Murrman(1974) είναι [16]:

$$\frac{P_{i+\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i-1}} + \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}} - Q_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - \left[\mu_{i,j} \frac{P_{i+\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i-1}} - \mu_{i-1,j} \frac{P_{i-\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i-1}} \right] = 0 \quad (4.42)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (4.42) μετατρέπεται στη εξίσωση (4.39) στην υποηχητική περιοχή, όπου ισχύει ότι $\mu_{i,j}$ και $\mu_{i-1,j}$ είναι μηδέν. Επίσης, η εξίσωση (4.42) γίνεται ίση με την εξίσωση (4.40), όταν $\mu_{i,j}$ και $\mu_{i-1,j}$ είναι ίσα με μονάδα [16]. Άρα η συγκεκριμένη μορφή κρατάει τα κύρια χαρακτηριστικά των εξισώσεων που χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το συντηρητικό σχήμα του Murman :

- Το συντηρητικό σχήμα παραμένει πρώτης τάξης ακρίβειας στις υπερηχητικές περιοχές. Ένας μεγάλος αριθμός κελιών και πυκνό πλέγμα στην χ κατεύθυνση πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια [16].
- Όπως αναφέραμε και στο 4.1.5, θεωρούμε την περίπτωση που έχουμε $\mu_{i,j}$ μηδέν και $\mu_{i-1,j}$ ίσο με μονάδα. Αυτή η περίπτωση, όπως ήδη γνωρίζουμε συμβαίνει σε κρουστικό κύμα και το σημείο (i,j) είναι γνωστό σαν κρουστικό σημείο.



Σχήμα 4.08 : Κρουστικό σημείο [16]

Στο κρουστικό σημείο η εξίσωση (4.42) γίνεται [16] :

$$\frac{P_{i+\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}} - Q_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + \frac{P_{i-\frac{1}{2},j} - P_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} = 0 \quad (4.43)$$

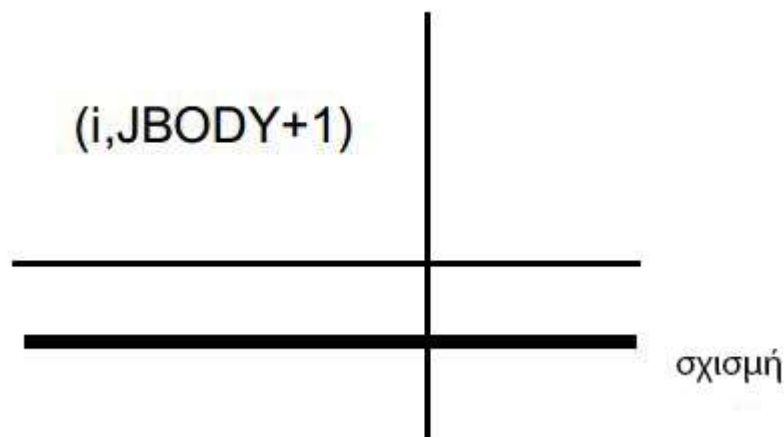
Επειδή το P περιέχει παραγώγους του ϕ , η παραπάνω προσέγγιση περιέχει τέσσερις κόμβους στη x κατεύθυνση ($((i-2, j), (i-1, j), (i, j), (i+1, j))$), ενώ στο κλασσικό σχήμα των Murman και Cole (19710 [1], είχε τρεις. Εξαιτίας αυτού, τα κρουστικά κύματα που ανιχνεύονται από το συντηρητικό σχήμα απεικονίζονται καλύτερα, αλλά φαίνονται και ελαφρώς πιο δυνατά από ότι πρέπει [2,16].

4.2.4 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο μελετώμενο σώμα

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην εκτέλεση των συνοριακών συνθηκών ξεκινώντας από το σώμα, ή αλλιώς από τη σχισμή που ορίσαμε ότι αναπαριστά το πτερύγιό μας. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε σαν κύρια εξίσωσή μας, μόνο τη σχέση (4.42) λόγω της ικανότητάς της να διατηρεί μάζα [16]. Ας θεωρήσουμε για αρχή ένα κόμβο πάνω από τη σχισμή, στην πλεγματική γραμμή $j = JBODY + 1$. Θα πρέπει να αποφεύγουμε να παίρνουμε παραγώγους του δυναμικού της ταχύτητας ϕ κατά μήκος του σώματος, επειδή η συνάρτηση και οι y παράγωγοί της είναι ασυνεχείς εκεί.

Στην εξίσωση (4.42), οι όροι που περιέχουν P δε χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί περιλαμβάνουν παραγώγους μόνο ως προς x . Αντίθετα οι όροι που περιέχουν Q , έχουν παραγώγους ως προς y για το δυναμικό της ταχύτητας και ασφαλώς χρειάζονται ειδική μεταχείριση. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.14) που είδαμε στο υποκεφάλαιο 3.2 έχουμε :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = V_{\infty} \frac{dY}{dX} \quad (3.14)$$



Σχήμα 4.09 : Διαχείριση των κόμβων πάνω από τη σχισμή [16]

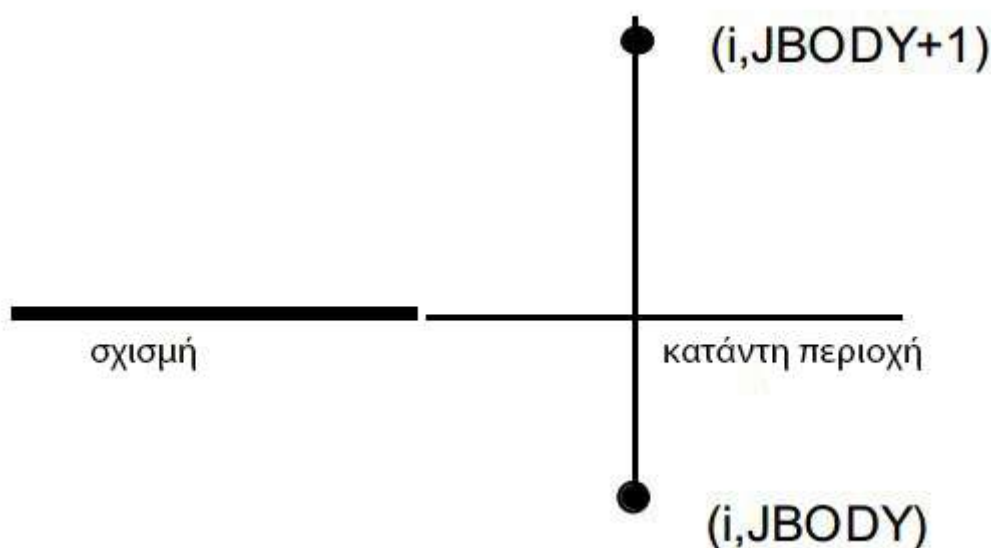
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.14) στην εξίσωση (4.42), έχουμε για τους όρους του Q ότι :

$$\frac{Q_{i,JBODY+3/2} - V_{\infty} \frac{dY}{dX} |_{i,UPPER}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \quad (4.44)$$

Μεταχειριζόμαστε τους κόμβους από κάτω από το σώμα ($j = JBODY$) με τον ίδιο τρόπο [16]. Να σημειώσουμε ότι, οι συνοριακές συνθήκες στο σώμα εμπεριέχονται στους υπολογισμούς μας με φυσικό τρόπο και επηρεάζουν τους υπολογισμούς μας.

4.2.5 Εφαρμογή της συντηρητικής μορφής στην περιοχή κατάντη του σώματος.

Όπως δείξαμε στο υποκεφάλαιο 3.2 , σε περιπτώσεις που έχουμε υπολογισμό σε περύνια με άνωση, το δυναμικό της ταχύτητας έχει ασυνέχεια ίση με την κυκλοφορία Γ , κατάντη του σώματος. Η περιοχή αυτή επιλέγεται να είναι από το τέλος του περυνγίου, μέχρι και το σύνορο του πλέγματος που έχουμε ορίσει. Κατά μήκος αυτής της περιοχής, το ϕ είναι ασυνεχές [16] .



Σχήμα 4.10 : Διαχείριση των κόμβων στην κατάντη περιοχή [16]

Θεωρούμε ένα κόμβο $(i, JBODY + 1)$, ακριβώς πάνω από την κατάντη περιοχή, όπως φαίνεται στο πάνω σχήμα. Πριν εφαρμόσουμε την εξίσωση (4.42) στον κόμβο αυτό, θα υπολογίσουμε την κυκλοφορία Γ ως εξής [16] :

$$\Gamma = \phi_{ITE, JBODY+1} - \phi_{ITE, JBODY} \quad (4.45)$$

Τώρα, οι όροι που εμπεριέχουν το Q στην εξίσωση (4.42) μπορούν να γραφτούν ως εξής :

$$\frac{Q_{i, JBODY+\frac{1}{2}} - Q_{i, JBODY-\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j} = \frac{\left(\frac{\phi_{i, JBODY+1} - \phi_{i, JBODY}}{\Delta y_{JBODY+1}} - \frac{\phi_{i, JBODY+1} - \phi_{i, JBODY-\Gamma}}{\Delta y_{JBODY}} \right)}{\Delta y_{JBODY+1} + \Delta y_{JBODY}} \quad (4.46)$$

Με άλλα λόγια, αντικαθιστούμε τη μεταβολή στο ϕ πριν τον υπολογισμό των y παραγώγων. Οι κόμβοι από κάτω της κατάντη περιοχής $(i, JBODY)$, υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο [16].

4.2.6 Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο Far Field

Στο υποκεφάλαιο 3.2 ορίσαμε τις κατάλληλες συνθήκες για το εξωτερικό σύνορο, τόσο για υποηχητικό, όσο και για υπερηχητικό αριθμό Mach από το περιβάλλον στο σύστημα. Συνοψίζουμε αυτές τις συνοριακές συνθήκες, στη διακριτοποιημένη τους μορφή, παρακάτω .

Υποηχητική ροή από το περιβάλλον στο σύστημα[16] :

Σε όλα τα σημεία των εξωτερικών συνόρων (ανάτη, κατάντη, πάνω και κάτω) , εφαρμόζεται η παρακάτω εξίσωση :

$$\phi_{Far Field} = \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{1 - M_{\infty}^2} \frac{y}{x} \right) \quad (4.47)$$

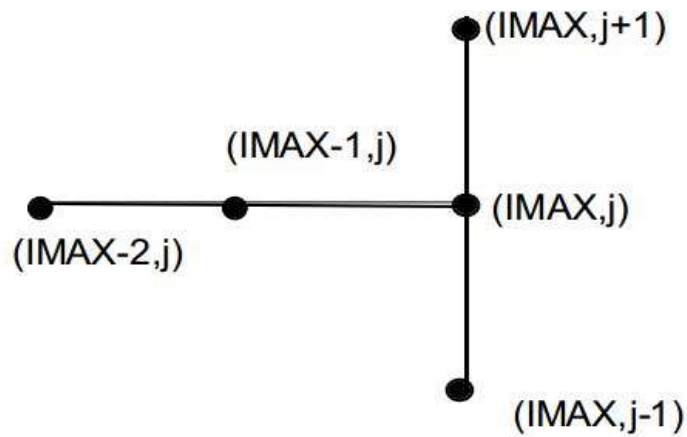
Εδώ το Γ είναι η κυκλοφορία ,που ορίσαμε με τη σχέση (4.45). Οι συντεταγμένες του Far Field μπορούν να υπολογιστούν από οποιοδήποτε σημείο αναφοράς του σώματος [16]. Η εξίσωση (4.47), ακριβώς όπως και η εξίσωση (3.12) για την περίπτωση μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης, υπολογίζεται και εφαρμόζεται σε κάθε επανάληψη, μόλις οι τιμές του ϕ υπολογιστούν στους εσωτερικούς κόμβους.

Υπερηχητική ροή από το περιβάλλον στο σύστημα, ανάτη όριο ($\iota=1$) [16] :

Αν ο αριθμός Mach της ροής από το περιβάλλον στο σύστημα, είναι μεγαλύτερος του 1, τότε οι επιπτώσεις του πτερυγίου δε μπορούν να γίνουν αισθητές στο ανάτη όριο. Σε τέτοιες περιπτώσεις θέτουμε το ϕ ίσο με μηδέν στο ανάτη όριο.

Υπερηχητική ροή από το περιβάλλον στο σύστημα, κατάντη όριο ($\iota=IMAX$) [16] :

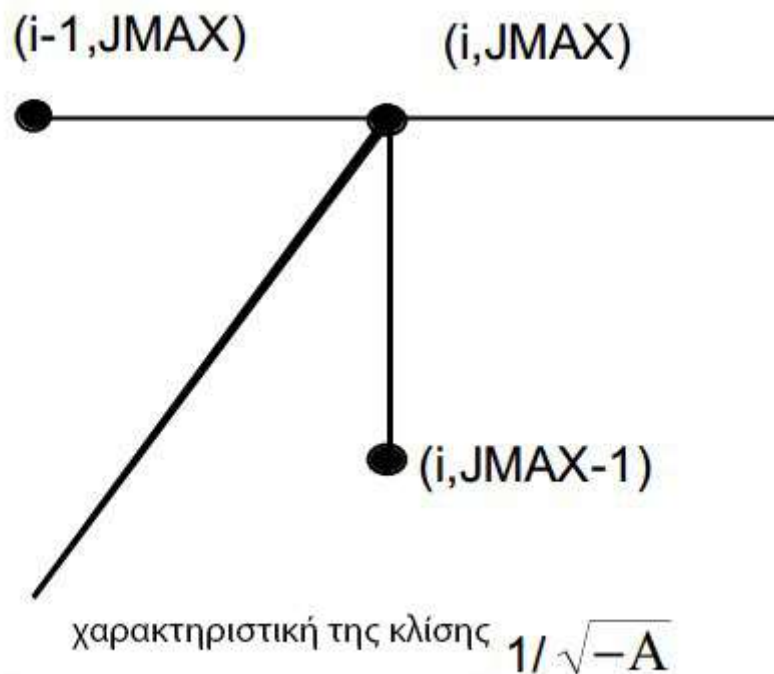
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο επιλογές. Μπορούμε είτε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις συμβατότητας από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (υποκεφάλαιο 3.2), ή απλά να εφαρμόσουμε τις κύριες εξισώσεις [16]. Λόγω ευκολίας στον τρόπο χρήσης, θα προτιμήσουμε να εφαρμόσουμε τις κύριες εξισώσεις με τη μορφή της εξίσωσης (4.42). Με άλλα λόγια, θα διαχειριστούμε το κατάντη όριο, όπως ένα οποιοδήποτε άλλο εσωτερικό σημείο. Δεν ορίζουμε καμία πληροφορία κατάντη, γιατί η εξίσωση (4.42) δε χρειάζεται καμία κατάντη πληροφορία, για το κατάντη όριο [16].



Σχήμα 4.11 : Για υπερηχητική ροή, η εξίσωση (4.42) ορίζεται από αυτούς τους κόμβους [16]

Υπερηχητική ροή, πάνω σύνορο ($j=JMAX$) :

Σε αυτό το σύνορο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για να φτάσουμε στην παρακάτω συνθήκη συμβατότητας, όπως αναλύσαμε στο υποκεφάλαιο 3.2



Σχήμα 4.12 : Στο πάνω όριο μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της χαρακτηριστικής γραμμής [16]

$$\phi = \text{σταθερο} \quad (4.48)$$

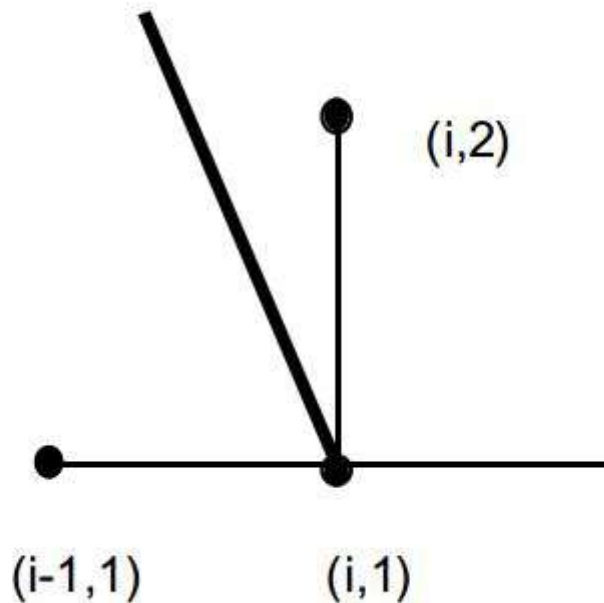
Έτσι, το ϕ στο σύνορο μπορεί να πάρει την τιμή του ϕ στο εσωτερικό, κατά μήκος όπως χαρακτηριστικής [16]. Όπως, επειδή η χαρακτηριστική μπορεί να μην περάσει ακριβώς μέσα από κάποιο εσωτερικό κόμβο, μπορεί να χρειαστεί να κάνουμε γραμμική παρεμβολή στο ϕ · όταν περνά ανάμεσα από δύο κόμβους.

Υπερηχητική ροή, κάτω σύνορο :

Διαχειριζόμαστε το σύνορο αυτό, όπως το πάνω σύνορο, χρησιμοποιώντας την παρακάτω συνθήκη συμβατότητας, που παίρνουμε από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

$$\phi = \text{σταθερο} \quad (4.49)$$

χαρακτηριστική της κλίσης : $-1/\sqrt{-A}$



Σχήμα 4.13 : Χαρακτηριστική της κλίσης : $-1/\sqrt{-A}$ [16]

4.2.7 Μέθοδος χαλάρωσης για την επίλυση της διακριτοποιημένης μορφής της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών (2.15)

Στρέφουμε την προσοχή μας στην εξίσωση (4.42) και στην επίλυσή της για κάθε εσωτερικό κόμβο. Επειδή το P είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του ϕ , η εξίσωση (4.42) είναι μια μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση που συνδέει το ϕ σε ένα κόμβο (i, j) με τους γειτονικούς του [16]. Το έργο επί της ουσίας είναι η ταυτόχρονη επίλυση πολλών μη γραμμικών εξισώσεων, για τον καθορισμό του ϕ στους εσωτερικούς κόμβους. Προφανώς και όπως δείξαμε και στις προηγούμενες υποενότητες, η απευθείας επίλυση του μη γραμμικού συστήματος είναι απαγορευτική, λόγω του μεγάλου αριθμού των κόμβων. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τις επαναληπτικές μεθόδους. Χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους, αντίστοιχες με τη Newton – Raphson μέθοδο για την εύρεση των ριζών σε μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις [16].

Θα δώσουμε κάποια στοιχεία, που χρησιμοποιήσαμε και στο υποκεφάλαιο 4.1, για να βοηθήσουμε τον αναγνώστη. Έστω n ο παράγοντας που δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων. Τότε ο συμβολισμός $\phi_{i,j}^n$, αναπαριστά την τιμή του ϕ , στον κόμβο (i, j) , στο τέλος της επανάληψης n . Αντίστοιχα το ίδιο συμβαίνει και στο $\phi_{i,j}^{n+1}$, απλά στο τέλος της επανάληψης $n+1$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\Delta\phi_{i,j}$, για να δείξουμε την αλλαγή στην τιμή του ϕ σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις :

$$\Delta\phi_{i,j} = \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n \quad (4.50)$$

Όταν η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει, τότε το $\Delta\phi_{i,j}$ θα γίνει μηδέν σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους, μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Την ίδια στιγμή, η εξίσωση (4.42) θα ικανοποιείται σε όλα τα εσωτερικά σημεία του υπολογιστικού πεδίου [16].

Αρχική υπόθεση στην τιμή του ϕ :

Πρέπει να ξεκινήσουμε την επαναληπτική διαδικασία με μερικές τιμές του ϕ στο εσωτερικό. Μια σωστή επαναληπτική διαδικασία θα συγκλίνει στο σωστό αποτέλεσμα, ανεξάρτητα της αρχικής μας υπόθεσης. Θέτουμε το $\phi_{i,j}$ ίσο με μηδέν στις αρχικές τιμές [16].

Γραμμικοποίηση της διακριτοποιημένης μορφής της εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών :

Το επόμενο βήμα στη διαδικασία χαλάρωσης είναι να φτάσουμε σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων για το $\Delta\phi$ · μια εξίσωση για κάθε εσωτερικό κόμβο. Αυτό το καταφέρνουμε με την παρακάτω διαδικασία. Θεωρούμε ένα όρο όπως τον $Q_{i,j+\frac{1}{2}}$, που εμφανίζεται στη διακριτοποιημένη μας μορφή. Αυτός ο όρος μπορεί να εκφραστεί ως εξής [16]:

$$Q_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = Q_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta\phi_{i,j+1} - \Delta\phi_{i,j}}{\Delta y_{j+1}} \quad (4.51)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε εκφράσει την άγνωστη ποσότητα Q σε όρους που είναι γνωστοί από την προηγούμενη επανάληψη n , και με άγνωστες τιμές του $\Delta\phi$ στους κόμβους. Μπορούμε παρόμοια να εκφράσουμε το Q στο μισό κόμβο $(i, j - \frac{1}{2})$ στην επανάληψη $n+1$, ως το άθροισμα δύο μελών, του Q στη n επανάληψη, συν μια έκφραση των $\Delta\phi$ [16].

Επίσης, θεωρούμε έναν όρο όπως τον P , στο μισό κόμβο $(i + \frac{1}{2}, j)$, στην επανάληψη $n+1$. Αυτόν τον όρο, μπορούμε να τον εκφράσουμε σε όρους του P σε γνωστές επαναλήψεις, όπως και σε εκφράσεις του $\Delta\phi$ [16]:

$$P_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = P_{i+\frac{1}{2},j}^n + A_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{\Delta\phi_{i+1,j} - \Delta\phi_{i,j}}{\Delta\chi_{i+1}} \quad (4.52)$$

Όταν κάθε όρος της εξίσωσης (4.42) εκφραστεί αναλόγως, με έναν γνωστό όρο της επανάληψης n και μία άγνωστη ποσότητα που περιέχει $\Delta\phi$, αφού χωρίσουμε την εξίσωση σε γνωστούς όρους στο δεξί μέλος και άγνωστους στο αριστερό μέλος, έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων :

$$B_{i,j}\Delta\phi_{i-2,j} + C_{i,j}\Delta\phi_{i-1,j} + D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} + E_{i,j}\Delta\phi_{i+1,j} + F_{i,j}\Delta\phi_{i,j-1} + G_{i,j}\Delta\phi_{i,j+1} = R_{i,j}^n \quad (4.53)$$

Όπου το $R_{i,j}$ όπως είδαμε και στο υποκεφάλαιο 4.1 ονομάζεται υπόλοιπο (residual), και είναι στην ουσία το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.42), υπολογισμένο στην προηγούμενη επανάληψη n . Οι συντελεστές B, C, D, E, F και G υπολογίζονται εύκολα ως εξής [16]:

$$B_{i,j} = A_{i-\frac{2}{3},j} \frac{\mu_{i-1,j}}{\Delta\chi_{i-1}(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})}$$

$$C_{i,j} = (1 - \mu_{i,j}) \frac{A_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})} - \mu_{i-1,j} \frac{1}{(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})} \left(\frac{A_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i} + \frac{A_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta\chi_{i-1}} \right)$$

$$D_{i,j} = -(1 - \mu_{i,j}) \frac{\left(\frac{A_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i} + \frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_{i+1}} \right)}{(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})} + \mu_{i-1,j} \frac{1}{(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})} \left(\frac{A_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_i} \right) - (F_{i,j} + G_{i,j})$$

$$E_{i,j} = (1 - \mu_{i,j}) \frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta\chi_{i+1}(\Delta\chi_i + \Delta\chi_{i+1})}$$

$$F_{i,j} = \frac{1}{\Delta y_j(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})}$$

$$G_{i,j} = \frac{1}{\Delta y_{j+1}(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})}$$

Η εξίσωση (4.53) μπορεί να γραφεί και σαν σύστημα εξισώσεων με τη μορφή πίνακα:

$$[M]\{\Delta\phi\} = \{R\} \quad (4.54)$$

όπου το M είναι ένας αραιός, κλιμακωτός πίνακας με έξι διαγώνιους, έναν για κάθε ένα από τους συντελεστές που μόλις περιγράψαμε πιο πάνω [16].

Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (4.54) :

Παρόλο που ο πίνακας M είναι αραιός με πολλά μηδενικά, παραμένει αρκετά μεγάλος για να τον αντιστρέψουμε με συμβατικές μεθόδους, όπως το σχήμα της απαλοιφής Gauss. Τέτοια σχήματα απαιτούν αριθμητικές πράξεις της τάξεως $O(N^3)$, όπου N είναι ο αριθμός των εξισώσεων. Αφού λύνουμε για $\Delta\phi$ σε αρκετές χιλιάδες κόμβους, το N είναι αρκετά μεγάλο και δε συνιστάται απευθείας αντιστροφή [16].

Αφού έχουμε κάνει ήδη διάφορες προσεγγίσεις στη παραγωγή των συντελεστών B,C,D,E,F και G, όπως το να διώξουμε όρους $\Delta\phi^2$, μπορούμε να κάνουμε επιπλέον προσεγγίσεις στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.54). Στόχος μας είναι να φτάσουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.54) στη τιμή μηδέν. Μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία επίλυσης αντικαθιστώντας τον πίνακα M στο αριστερό μέλος, με έναν πίνακα N, ο οποίος είναι εύκολος να τον αντιστρέψουμε και είναι πολύ σχετικός με τον M φυσικά. Δηλαδή προτιμάμε να λύσουμε τη σχέση [16] :

$$[N]\{\Delta\phi\} = \{R\} \quad (4.55)$$

Ποια κριτήρια χρησιμοποιούμε στην επιλογή του πίνακα N; Από την αριθμητική ανάλυση γνωρίζουμε ότι κάνει οποιοσδήποτε πίνακας n, αρκεί οι απόλυτες τιμές όλων των ιδιοτιμών του πίνακα $[I] - [N]^{-1}[M]$, να είναι μικρότερες τις μονάδας. Ορισμένοι πίνακες [N] που χρησιμοποιούνται συχνά, αναλύονται παρακάτω.

Point Jacobi scheme:

Σε αυτή την προσέγγιση, ο πίνακας [N] περιέχει μόνο διαγώνια στοιχεία του πίνακα [M]. Με άλλα λόγια λύνουμε [16] :

$$D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} = R_{i,j}$$

ή

$$\Delta\phi_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{D_{i,j}} \quad (4.56)$$

Το σχήμα point Jacobi συγκλίνει σε όλες τις περιπτώσεις, υπό την προϋπόθεση ότι ο αρχικός πίνακας M χαρακτηρίζεται από διαγώνια υπεροχή, όμως πολύ αργά. Σε μια τυπική διηχητική ροή με άνωση, πολλές χιλιάδες επαναλήψεις χρειάζονται συνήθως για το R και το $\Delta\phi$ να φτάσουνε στην τιμή μηδέν [16].

Σχήμα Gauss-Siedel :

Σε αυτό το σχήμα, το N είναι είτε ο κάτω τριγωνικός πίνακας του M, ή ο πάνω τριγωνικός. Αν επιλεγεί το κάτω τριγωνικό κομμάτι τότε λύνουμε [16]:

$$B_{i,j}\Delta\phi_{i-2,j} + C_{i,j}\Delta\phi_{i-1,j} + D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} + F_{i,j}\Delta\phi_{i,j-1} = R_{i,j}$$

ή

$$\Delta\phi_{i,j} = \frac{R_{i,j} - B_{i,j}\Delta\phi_{i-2,j} - C_{i,j}\Delta\phi_{i-1,j} - F_{i,j}\Delta\phi_{i,j-1}}{D_{i,j}} \quad (4.57)$$

Αν επιλεγεί το πάνω τριγωνικό κομμάτι ,λύνουμε [16]:

$$D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} + E_{i,j}\Delta\phi_{i+1,j} + G_{i,j}\Delta\phi_{i,j+1} = R_{i,j}$$

ή

$$\Delta\phi_{i,j} = \frac{R_{i,j} - E_{i,j}\Delta\phi_{i+1,j} - G_{i,j}\Delta\phi_{i,j+1}}{D_{i,j}} \quad (4.58)$$

Για υποηχητικές ροές, λειτουργούν τόσο η σχέση (4.57) όσο και η σχέση (4.58). Για διηχητικές ροές που η πληροφορία μεταφέρεται από τα ανάντη σημεία ((i-1,j),(i-2,j)) στα κατάντη, η σχέση (4.57) λειτουργεί, ενώ η σχέση (4.58) μπορεί να αποκλίνει [16].

Point Successive Over-Relaxation (S.O.R.) scheme:

Αυτή η μέθοδος, που αναπτύξαμε λεπτομερώς και στο υποκεφάλαιο 4.1, είναι πανομοιότυπη με τη μέθοδο Gauss – Siedel που αναπτύξαμε πιο πάνω, με τη διαφορά ότι το $R_{i,j}$ στο δεξί μέλος εδώ, πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα χαλάρωσης ω , με τιμές μεταξύ 1 και 2. Όπως είχαμε αναφέρει και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, στην υποενότητα 4.1.6 , όταν το $\omega=1$ τότε είναι εμφανές ότι έχουμε Gauss-Siedel σχήμα. Ο παράγοντας ω στο S.OR. σχήμα, συνηθίζεται να επιλέγεται μέσα από δοκιμή και σφάλμα, ανάλογα με τις συνθήκες που έχει δημιουργήσει ο κάθε αναγνώστης στην επίλυση του προβλήματος [16].

Successive Line Over-Relaxation (S.L.O.R.) scheme:

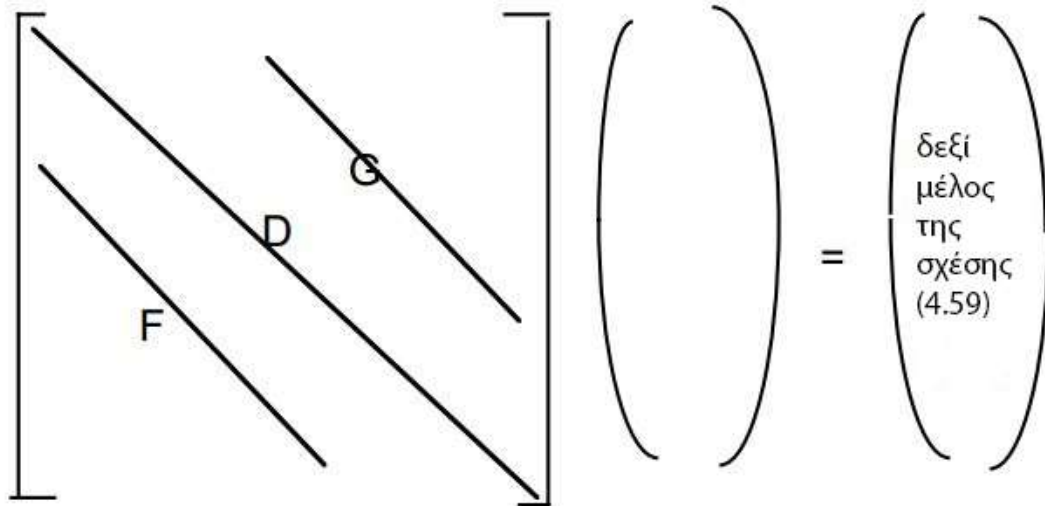
Σε αυτό το σχήμα, πέντε από τις έξι διαγώνιους του πίνακα M κρατούνται, και μόνο όρος που περιέχει το $E_{i,j}$ απαλείφεται. Το δεξί μέλος πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα χαλάρωσης, με τιμές μεταξύ 1 και 2. Έτσι λύνουμε [16] :

$$B_{i,j}\Delta\phi_{i-2,j} + C_{i,j}\Delta\phi_{i-1,j} + D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} + F_{i,j}\Delta\phi_{i,j-1} + G_{i,j}\Delta\phi_{i,j+1} = \omega R_{i,j}$$

ή

$$D_{i,j}\Delta\phi_{i,j} + F_{i,j}\Delta\phi_{i,j-1} + G_{i,j}\Delta\phi_{i,j+1} = \omega R_{i,j} - B_{i,j}\Delta\phi_{i-2,j} - C_{i,j}\Delta\phi_{i-1,j} \quad (4.59)$$

Στο SLOR σχήμα, λύνουμε για τις τιμές του $\Delta\phi$ σε όλους τους κόμβους, σε μία κάθετη πλεγματοειδή γραμμή, με το i =σταθερό, ακριβώς όπως περιγράψαμε στην υποενότητα 4.1.6. Όταν λύνουμε για το $\Delta\phi$ σε ένα (i,j) , οι τιμές $\Delta\phi$ των προηγούμενων $(i-1,j)$ και $(i-2,j)$ είναι γνωστές και μπορούν να έρθουν στο δεξί μέλος της εξίσωσης, όπως δείχνουμε στην (4.59). Το αποτέλεσμα είναι ένα τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων που συνδέουν το $\Delta\phi$ με τους κόμβους (i,j) , $(i,j-1)$ και $(i,j+1)$ [16]:



Το σύστημα το λύνουμε με τον αλγόριθμο Thomas .

Approximate factorization Methods:

Σε αυτή την προσέγγιση, ο πίνακας N που επιλέγουμε, είναι ένας πίνακας που εύκολα τροποποιείται σε μικρότερους (τριδιαγώνιους, άνω και κάτω τριγωνικούς) .Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι πολύ πιο γρήγορη από το SLOR σχήμα που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία, όμως είναι πολύ πιο δύσκολη στον προγραμματισμό. Ο αναγνώστης που επιθυμεί περισσότερα για τη μέθοδο, καλείται να μελετήσει το άρθρο των Ballhaus, Jameson και Albert στο AIAA Journal , 1978 [16].

4.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε την αριθμητική ανάλυση του προβλήματος και τη διαδικασία που ακολουθούμε για την αριθμητική επίλυσή του. Είδαμε το χτίσιμο υπολογιστικού πλέγματος τόσο ομοιομορφου, όσο και ανομοιομορφου. Η ανάλυση έγινε τόσο για την εξίσωση (2.9), όσο και για την εξίσωση (2.14) για την περίπτωση ανομοιομορφου πλέγματος. Επίσης, είδαμε τη δημιουργία του συντηρητικού σχήματος των εξισώσεων και τη μορφοποίηση του προβλήματος με βάση αυτό.

Κεφάλαιο 5 Αποτελέσματα

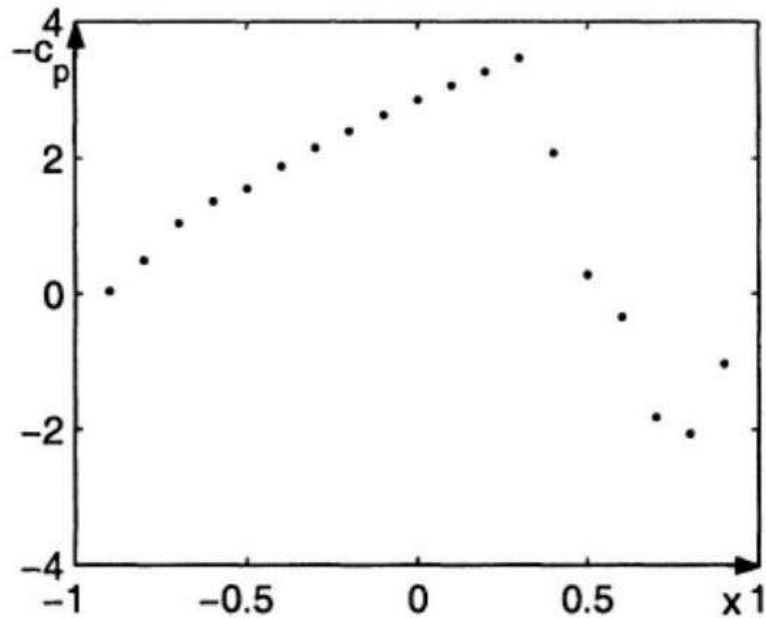
Σε όλα τα προηγούμενα κεφάλαια, μέχρι τώρα, είδαμε το φαινόμενο της διηχητικής ροής, την περιγραφή της με την εξίσωση των μικρών διηχητικών διαταραχών και τις διάφορες μορφές αυτής. Εστιάσαμε στην κατάστρωση των εξισώσεων σε μορφή τέτοια, ώστε να μπορούμε να τις λύσουμε αριθμητικά και να πάρουμε τα επιθυμητά για εμάς αποτελέσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε παρουσίαση των αποτελεσμάτων που παίρνουμε από τις πιο πάνω διαδικασίες που περιγράψαμε.

Παρουσιάζονται όλα τα αποτελέσματα που μπορεί να συναντήσει κάποιος, από οποιαδήποτε μέθοδο περιγράψαμε στα πιο πάνω κεφάλαια. Τα αποτελέσματα και τα σχήματα που δίνουμε εδώ είναι είτε δημοσιευμένα σε άρθρα και βιβλία μέσα από τη βιβλιογραφία, είτε μέσα από κώδικες που χρησιμοποιήσαμε. Οι γλώσσες προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκαν είναι, όπως ήδη περιγράψαμε, η Fortran και το Matlab .

Από τη μέχρι τώρα εμπειρία μας, στη χρησιμοποίηση, αλλά και στη κατάστρωση των κωδικών του προβλήματος, δεν υπάρχει ένα υπολογιστικό πεδίο που μπορεί να λειτουργήσει επαρκώς ο οποιοσδήποτε κώδικας. Το κάθε πεδίο πρέπει να είναι διαφορετικό και ο αριθμός των κόμβων αλλάζει από κώδικα σε κώδικα. Ακόμα και ορισμένοι συντελεστές αλλάζουν, όπως για παράδειγμα ο συντελεστής χαλάρωσης ω . Δε θα ήταν υπερβολικό να πούμε ότι ορισμένα από τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε είναι μετά από δοκιμή και σφάλμα, σε ένα εύρος τιμών βέβαια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η δημιουργία του πεδίου και των κόμβων. Αναφέραμε στο κεφάλαιο 4 ότι για την εξίσωση (2.9) χρειαζόμαστε ένα πεδίο της τάξεως των 3 με 4 μηκών πτερυγίου σε όλες τις κατευθύνσεις, και για την εξίσωση (2.15) είναι αρκετό ένα πεδίο 5 με 6 μήκη πτερυγίου. Αυτό μπορεί ,και στις δύο περιπτώσεις, να φτάσει ακόμα και στα 10 μήκη πτερυγίου αν το σχήμα μας δεν συγκλίνει επαρκώς. Έτσι για το λόγο αυτό, οι κώδικες είναι αρκετά ευαίσθητοι, όσο αφορά την αλλαγή διαφόρων δεδομένων που εισάγει ο χρήστης. Επίσης, έχει παρατηρηθεί το γεγονός ότι, σχήματα και κώδικες που λειτουργούν κανονικά και δίνουν σωστά αποτελέσματα, με βάση τη θεωρία και τη βιβλιογραφία, μετά την αλλαγή ενός δεδομένου, όπως το ω , να μην λειτουργούν καθόλου. Βέβαια υπάρχουν και κάποια δεδομένα, τα οποία είναι καθολικά για όλα τα σχήματα, όπως το πάχος δ και ο τύπος $F(x)$ του πτερυγίου.

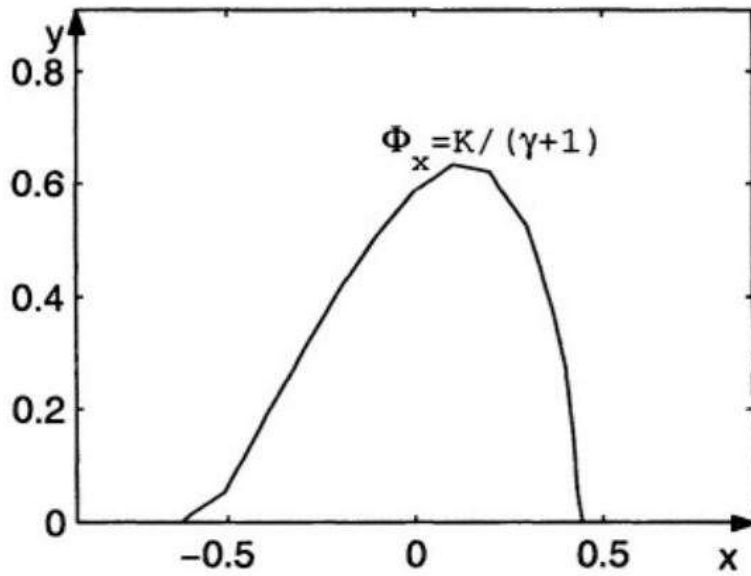
Στα υποκεφάλαια που ακολουθούν, εστιάζουμε περισσότερο στο συντελεστή πίεσης C_p και την κατανομή αυτού πάνω στο πτερύγιο. Ο συντελεστής C_p δίνεται από τον τύπο $C_p = -2u$. Τα σχήματα που ακολουθούν δείχνουν την κατανομή του $-C_p$, για να είναι πιο ευανάγνωστα. Ο λόγος που μας ενδιαφέρει αυτό είναι γιατί μέσω αυτού γίνεται πολύ εμφανές η καταγραφή του κρουστικού κύματος, αλλά και ο διαχωρισμός της υποηχητικής περιοχής από την υπερηχητική περιοχή.

5.1 Αποτελέσματα από τη μέθοδο επίλυσης με χρονικά εξαρτώμενο βήμα [14]



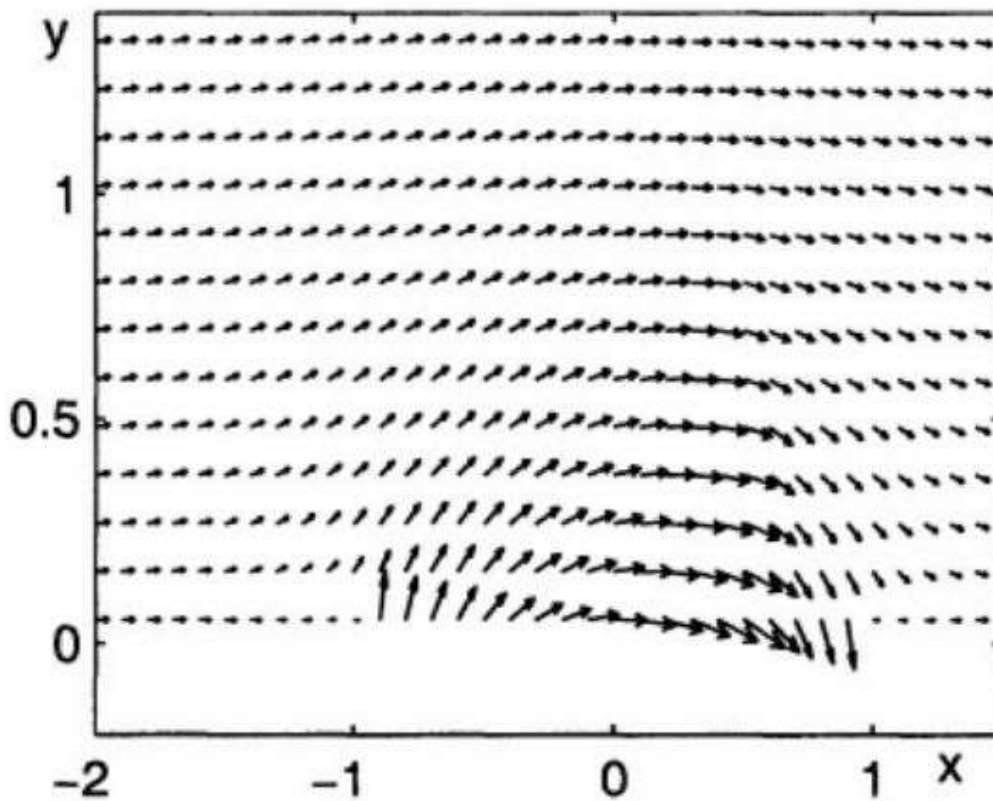
Σχήμα 5.01 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης $-C_p$ πάνω στο περύγιο [14]

Στο σχήμα 5.1 έχουμε την κατανομή του συντελεστή πίεσης $-C_p$ πάνω στο περύγιο. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το αρνητικό πρόσημο είναι γιατί έχουμε ότι ισχύει $C_p = -2u$. Είναι προφανές από το σχήμα η ραγδαία μεταβολή στο δεξί μέλος καθώς αναπτύσσεται η ροή πάνω στο περύγιο. Αυτό υποδηλώνει την εμφάνιση κρουστικού κύματος εκεί.



Σχήμα 5.02 : Ηχητική γραμμή πάνω στο πετρώγιο.

Στο σχήμα 5.2 έχουμε την εμφάνιση της ηχητικής γραμμής, μορφής $\phi_x = K/(\gamma + 1)$, πάνω στο πετρώγιο. Έξω από τη γραμμή έχουμε την υποηχητική περιοχή και μέσα από τη γραμμή έχουμε την υπερηχητική περιοχή.



Σχήμα 5.03 : Το πεδίο ταχύτητας [14]

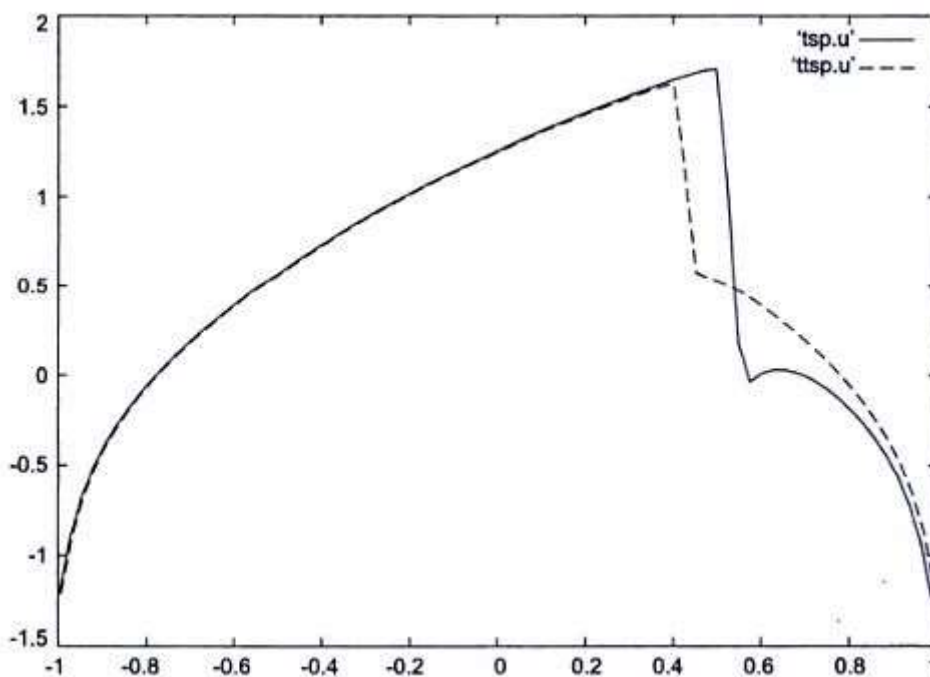
Στο σχήμα 5.3 έχουμε την απεικόνιση του πεδίου ταχύτητας στο πτερύγιο. Και εδώ φαίνεται η απεικόνιση του κρουστικού κύματος.

Οι υπολογισμοί και η ανάπτυξη του κώδικα, από τον οποίον προέκυψαν τα πιο πάνω σχήματα, έγιναν στο Matlab. Τα αποτελέσματα αυτά είναι δημοσιευμένα στο βιβλίο των Titus, και Petrilă [14]. Το υπολογιστικό πεδίο που χρησιμοποιήθηκε είναι το $[-5,6, 5,6] \times [0, \frac{7,5}{\sqrt{K}}]$. Χρησιμοποιήθηκαν 111 κόμβοι στην x κατεύθυνση και 62 στην y κατεύθυνση, σε 2000 επαναλήψεις. Το K είναι 1,3 και το γ είναι 1,4. Το δ είναι 0,006 και ο τύπος του πτερυγίου είναι $F(\chi) = 1 - \chi^2$ [14].

Ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης δεν είναι ο πιο γρήγορος και ακριβής, όμως είναι από τους πιο εύκολους για επίλυση.

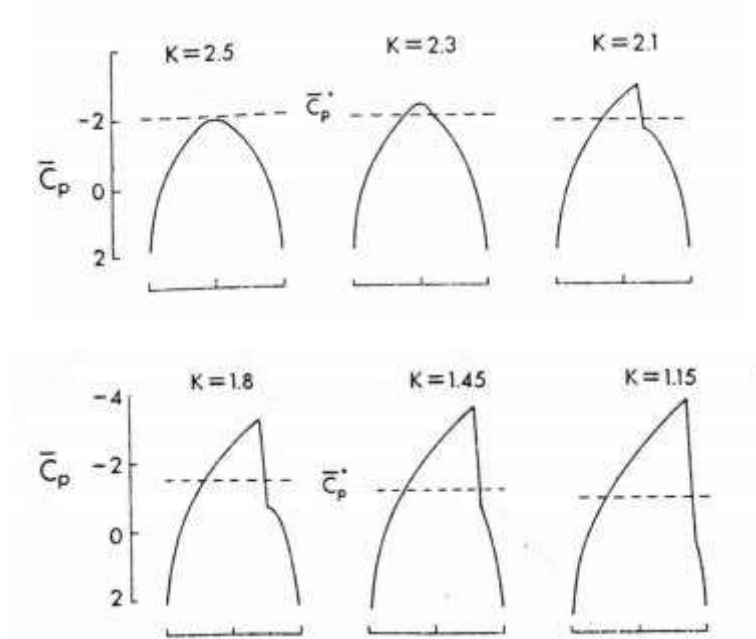
5.2 Αποτελέσματα με βάση τη μέθοδο S.L.O.R. (Successive Line Over-Relaxation)

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, με αυτά που λαμβάνουμε από τη βιβλιογραφική πηγή [15] και το πρόγραμμα tsp.f , γραμμένο σε Fortran. Ο συγκεκριμένος κώδικας είναι εξολοκλήρου γραμμένος με βάση τη διαδικασία που περιγράψαμε στο υποκεφάλαιο 4.1 και τις υποενότητες του. Υπολογίζει διηχητική ροή σε συμμετρικό προφίλ ,υπό μηδενική γωνία. Το δ είναι και εδώ 0,06 και το M_∞ είναι 0,85. Η μορφή του περυγίου είναι $F(\chi) = 1 - \chi^2$. Χρησιμοποιούμε 150 κόμβους στην y κατεύθυνση και 195 στη χ . Επίπεδο σύγκλισης 5×10^{-6} και όρια $[-3,01, 3,02]$ στην x κατεύθυνση και $[0, 3,1]$ στην y κατεύθυνση αντίστοιχα, σε ομοιόμορφο πλέγμα όπως περιγράψαμε στο 4.1 υποκεφάλαιο. Ο συντελεστής χαλάρωσης ορίζεται στο 1,85 και το σχήμα αυτό συγκλίνει σε 2177 επαναλήψεις. Στο σχήμα 5.4 που ακολουθεί, παρατηρούμε τα αποτελέσματα για την κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p , τόσο από το συντηρητικό (συνεχόμενη γραμμή), όσο και από το μη-συντηρητικό σχήμα (διακεκομμένη γραμμή). Σε αυτό το σχήμα βλέπουμε ότι το μη συντηρητικό σχήμα δίνει πιο ασθενές κρουστικό κύμα σε σύγκριση με το συντηρητικό σχήμα. Επίσης , φαίνεται να είναι και ανάντη μετατοπισμένο, γεγονός που καταδεικνύει και αυτό το υπολογιστικό λάθος. Ακόμα στην περιοχή 0,6 – 0,8 βλέπουμε την ανάκτηση από το συντηρητικό σχήμα, όπως είχε προβλεφθεί από τους Oswatitsch και Zierep(1960) [15] :



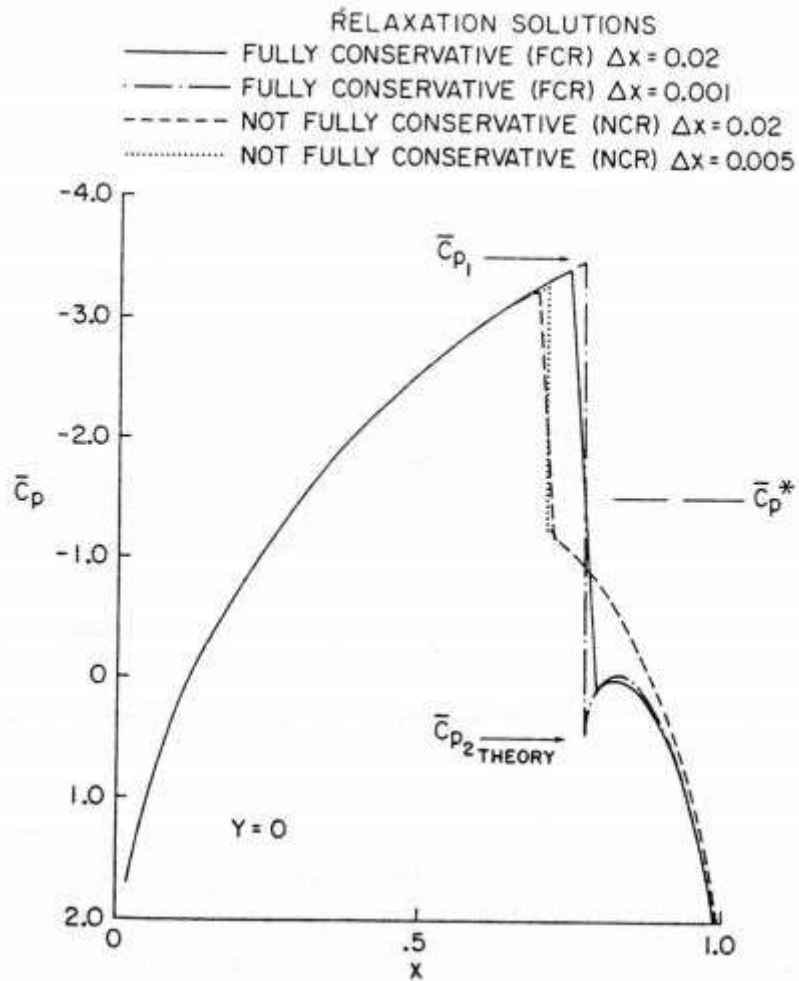
Σχήμα 5.04 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p για συντηρητικό και μη συντηρητικό σχήμα [15]

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα από το αρχικό paper των Murman και Cole(1971) [1]. Στη συγκεκριμένη εργασία τους χρησιμοποίησαν μη συντηρητικό σχήμα. Το πεδίο που χρησιμοποίησαν ήταν $[-5,6, 5,6] \times [0, \frac{7,5}{\sqrt{K}}]$ με αυξανόμενη απόσταση μεταξύ των κόμβων όσο απομακρυνόμαστε από το περυγίο. Έτσι στην x κατεύθυνση υπάρχουν 74 κόμβοι και στην y 41. Οι υπολογισμοί έγιναν με 400 επαναλήψεις (πρέπει να αναλογιστούμε τους τεχνολογικούς περιορισμούς της εποχής). Η εξίσωση του περυγίου και σε αυτή την περίπτωση ήταν η $F(x) = 1 - x^2$, με $y = \delta(1 - x^2)$. Στο σχήμα 5.5 που ακολουθεί βλέπουμε την κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p [1] :



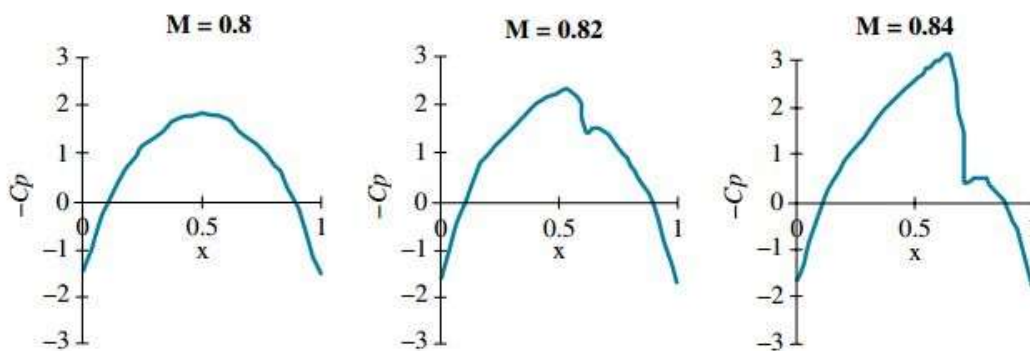
Σχήμα 5.05 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p από Murman και Cole (1971) [1]

Στον αντίποδα, όταν ο Murman διόρθωσε το σχήμα που παρουσιάστηκε από το paper του 1971 με αυτό που περιέγραφε το συντηρητικό του σχήμα το 1974, τα αποτελέσματα ήταν διαφορετικά και πιο σωστά. Αυτό διακρίνουμε και στο σχήμα 5.6 που ακολουθεί και δείχνει τη σύγκριση που είχε κάνει ο Murman με τα αποτελέσματα μεταξύ συντηρητικού και μη συντηρητικού σχήματος [2].



Σχήμα 5.06 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p στα συντηρητικά και μη συντηρητικά σχήματα του Murman [2]

Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της διαδικασίας που περιγράφουμε στο υποκεφάλαιο 4.1, για διαδοχικά αυξανόμενο M_∞ , ώστε να γίνει εμφανής η παρουσία του κρουστικού κύματος. Τα αποτελέσματα είναι για περύγιο με σχήμα κυκλικού τόξου και $\delta=0,6$.



Σχήμα 5.07 : Διαφοροποίηση του συντελεστή πίεσης σε διάφορες ταχύτητες [13]

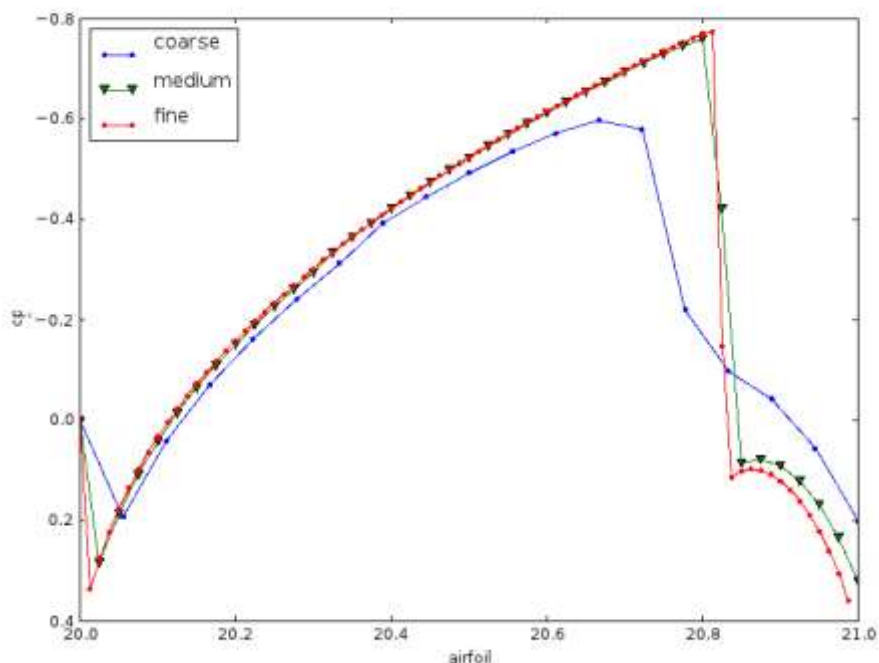
5.3 Αποτελέσματα με τη μέθοδο Gauss-Siedel βάση της εξίσωσης

(2.15)

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την επίλυση της εξίσωσης (2.15) $\left[(1 - M_\infty^2) \phi_x - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \phi_x^2 \right]_x + [\phi_y]_y = 0$.

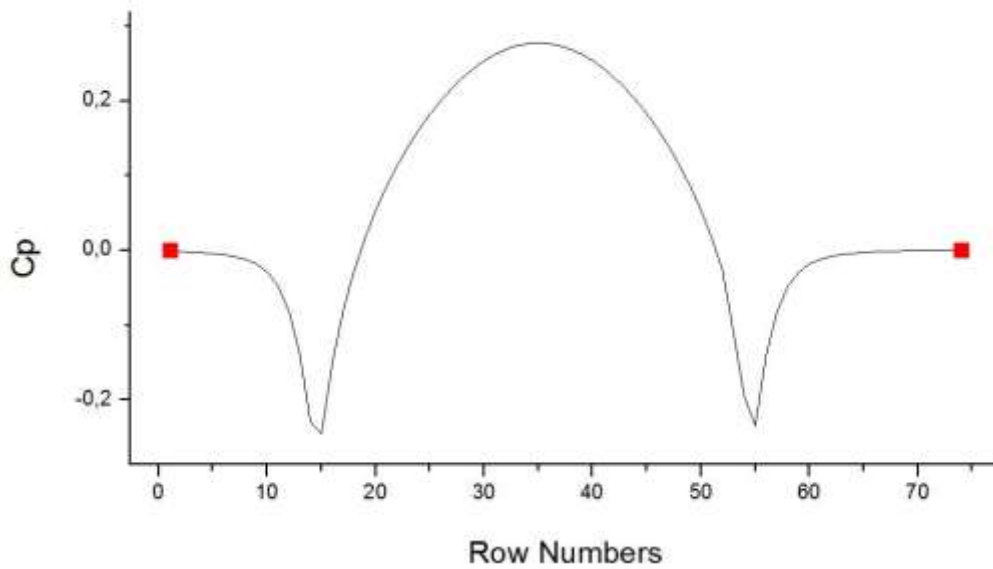
Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ, βασίζονται στη διαδικασία που αναπτύξαμε στο υποκεφάλαιο 4.2. Η διαφορά από το προηγούμενο υποκεφάλαιο, πέρα από τη μορφή της εξίσωσης, είναι και στη τιμή του συντελεστή χαλάρωσης ($\omega=1$). Για τη συλλογή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούμε δύο πρότυπους κώδικες.

Το σχήμα 5.8, μας δείχνει τα αποτελέσματα του κώδικα Fortran της Assembla [17], για διαφορετικής πυκνότητας υπολογιστικά πεδία (από αραιά σε πυκνά πλέγματα). Αναπαριστάται η κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p πάνω στο πτερύγιο. Και εδώ είναι προφανής η εμφάνιση από τους υπολογισμούς του κρουστικού κύματος. Οι υπολογισμοί έγιναν με επίπεδο σύγκλισης 5×10^{-6} και σε $M_\infty = 0,86$. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ανομοιόμορφο και έχουμε 59 κόμβους στην x κατεύθυνση και 20 κόμβους στην y αντίστοιχα. Επίσης, μας γίνεται σαφές και το ότι όσο πιο πυκνό είναι ένα πλέγμα, τόσο καλύτερα αποτελέσματα δίνει. Με άλλα λόγια, το σχήμα δεν προλαβαίνει να συλλάβει ακριβώς σε όλη την έκτασή του το κύμα που δημιουργείται.

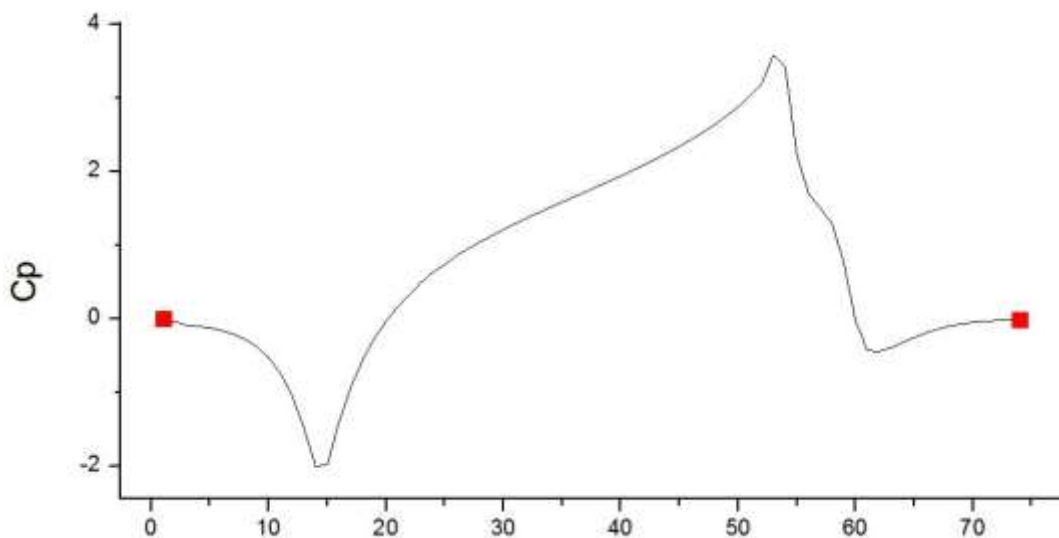


Σχήμα 5.08 : Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_p σε διαφορετικής πυκνότητας υπολογιστικά πεδία.

Στο σημείο αυτό, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση του προβλήματος. Ο κώδικας, που είναι σε γλώσσα Fortran, γράφτηκε αρχικά από τον Stephen M. Ruffin [16], και τροποποιήθηκε από εμάς για τις ανάγκες του προβλήματος. Ο κώδικας ακολουθεί τη διαδικασία που περιγράψαμε στο υποκεφάλαιο 4.2 . Το πεδίο που χρησιμοποιήσαμε έχει 74 κόμβους στη x κατεύθυνση και 15 στη y , σε ανομοιόμορφο πλέγμα. Το επίπεδο σύγκλισης είναι 10^{-3} και εκτελείται σε 1000 επαναλήψεις. Πάνω από το πτερύγιο έχουμε τοποθετήσει 40 κόμβους. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα αναμενόμενα με βάση τη βιβλιογραφία και έχουν καλή συμφωνία με αυτά που έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα.

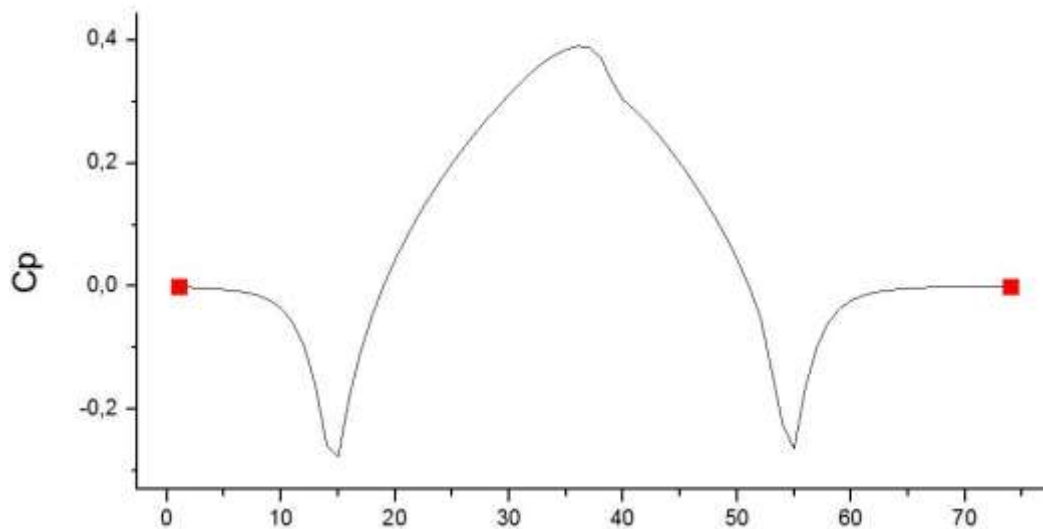


Σχήμα 5.09 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,8$ και $\delta = 0,06$

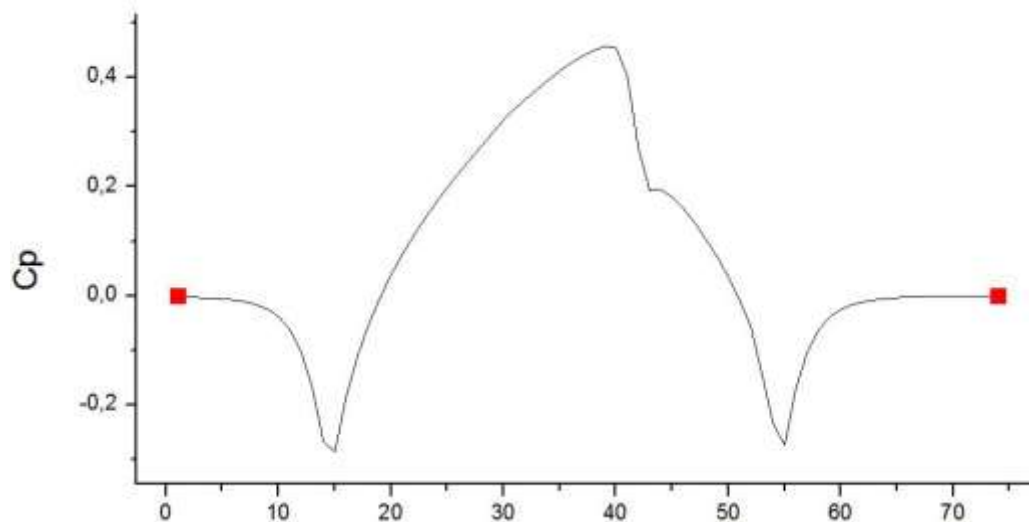


Σχήμα 5.10 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,8$ και $\delta = 0,6$

Στα παραπάνω σχήματα, 5.9 και 5.10, έχουμε την ανάπτυξη του φαινομένου σε ταχύτητα 0,8 Mach και διαφορετική αναλογία πάχους. Στο σχήμα 5.9 δεν έχουμε ακόμα την ανάπτυξη κρουστικού κύματος. Στο σχήμα 5.10 όμως, έχουμε την εμφάνιση κύματος. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το πάχος του σώματος επηρεάζει στην άμεση εμφάνιση του κύματος στη διηχητική περιοχή. Επίσης μια πρώτη σύγκριση με το σχήμα 5.7, δείχνει ότι τη σημασία του σώματος που μελετάμε. Στην περίπτωση του σχήματος 5.10, έχουμε προσεγγίσει το σώμα ως σχισμή που περιέχει περισσότερο πάχος από τις άλλες περιπτώσεις.



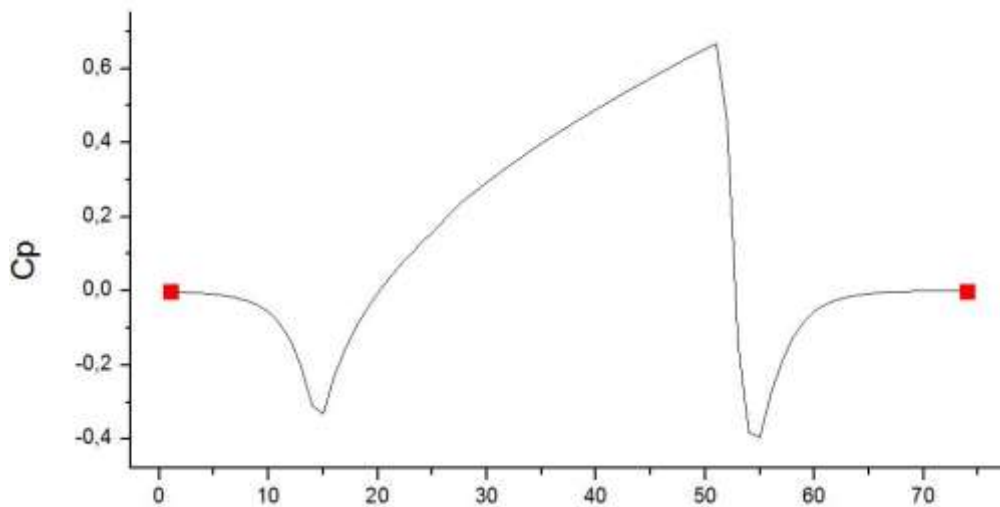
Σχήμα 5.11 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,85$ και $\delta = 0,06$



Σχήμα 5.12 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,86$ και $\delta = 0,06$

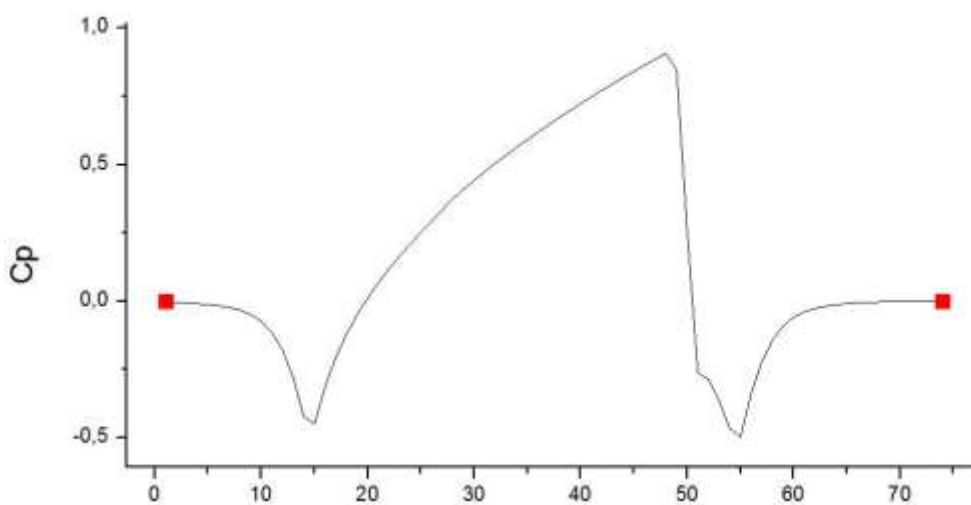
Στο σχήμα 5.11 παρατηρούμε την εμφάνιση ασθενούς κρουστικού κύματος. Η ταχύτητα 0,85 Mach είναι η ταχύτητα στην οποία εμφανίζονται κρουστικά κύματα στο μελετώμενο σώμα μας, με βάση τον κώδικα που χρησιμοποιούμε. Στην ταχύτητα 0,84 Mach το διάγραμμα είναι ίδιο με το σχήμα 5.9, δηλαδή δεν έχουμε κάποια εξέλιξη του φαινομένου. Στο σχήμα 5.12 βλέπουμε το φαινόμενο πλέον σε πλήρη

εξέλιξη, καθώς στην ταχύτητα 0,86 Mach είναι φανερό πως το αριθμητικό σχήμα μας εντοπίζει κρουστικά κύματα. Ενδιαφέρουσα είναι η σύγκριση του σχήματος 5.11, με το σχήμα 5.4 . Στο σχήμα 5.4 έχουμε καθαρά την εμφάνιση κρουστικού κύματος, ενώ στο σχήμα 5.11 έχουμε, όπως είπαμε, την εμφάνιση ασθενούς μόλις κρουστικού κύματος. Και τα δύο σχήματα έχουν γίνει με τις ίδιες συνθήκες. Μία πιθανή εξήγηση της διαφοράς μεταξύ των δύο διαγραμμάτων είναι η προσέγγιση που έχουμε κάνει στους υπολογισμούς μας, με το σώμα σαν σχισμή. Ακόμα, η διαφορά μπορεί και να οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούμε εδώ το σχήμα Gauss – Siedel με $\omega=1$, ενώ στο σχήμα 5.4 έχουμε $\omega=1,85$. Παρόλα αυτά, το σχήμα 5.12 μας δείχνει ότι η διαφορά αυτή γρήγορα εξαλείφεται.



Σχήμα 5.13 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,9$ και $\delta=0,06$

Στο σχήμα 5.13 βλέπουμε πλέον την εμφάνιση στους υπολογισμούς μας ενός πολύ δυνατού κρουστικού κύματος, το οποίο εκτείνεται μέχρι το τέλος του σώματος. Η ροή μας έχει ταχύτητα κοντά στην ηχητική και το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ φυσιολογικό.



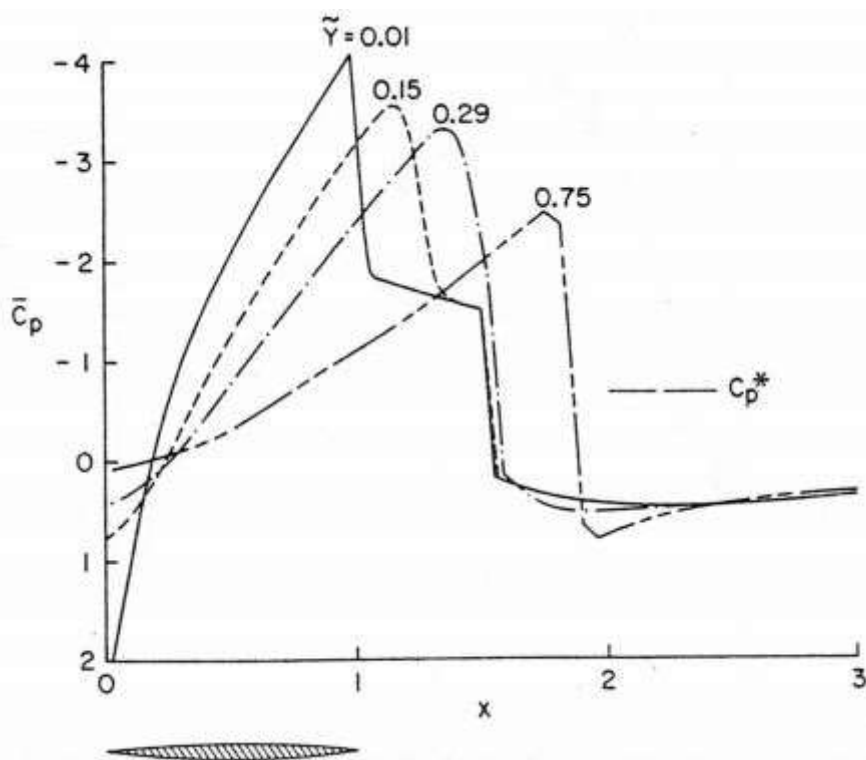
Σχήμα 5.14 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,85$ και $\delta=0,1$

Στο σχήμα 5.14 παρατηρούμε ότι και στο σχήμα 5.10. Σημαντικό εδώ είναι να προσέξουμε την ανάκτηση που φαίνεται να υπάρχει στους κόμβους 50-55.

Κρουστικά κύματα τύπου λάμδα :

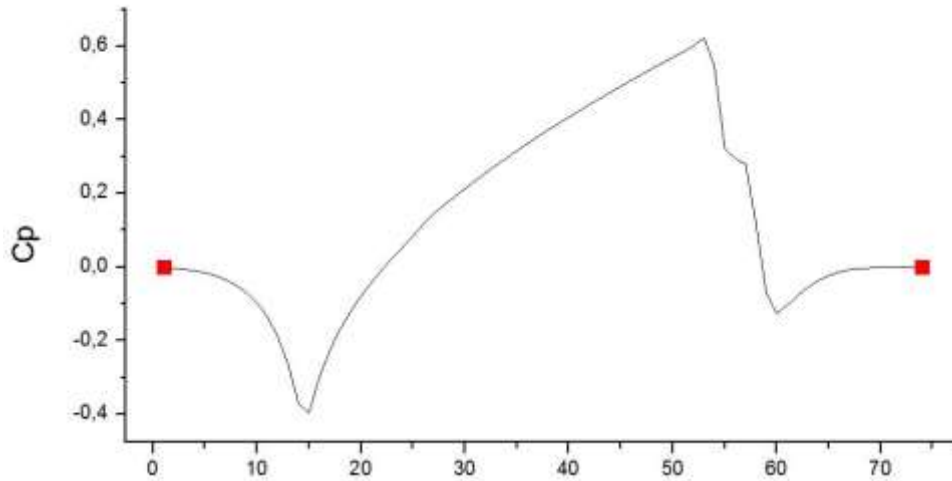
Θα αναφερθούμε τώρα σε μία ιδιομορφία στα αποτελέσματα, που παρατήρησε ο Murman στο δεύτερο άρθρο του [2] και παρατηρούμε και εμείς στα αποτελέσματά μας. Υπενθυμίζουμε πως το γεγονός ότι λύνουμε τον τύπο (2.15), δε σημαίνει πως δεν ισχύει η παράμετρος K της εξίσωσης (2.9).

Ο Murman παρατήρησε πως αν το M_∞ αυξηθεί αρκετά (το K μειώνεται), το κρουστικό κύμα μετατοπίζεται πιο δεξιά στο σώμα και δημιουργείται μια επιπλέον «ουρά» προς το τέλος [2]. Το κρουστικό κύμα της «ουράς» έχει υπερηχητική κατάντη ροή και εξασθενεί κατά μήκος αυτής από τα κύματα εκτόνωσης που συμβαίνουν στην επιφάνεια του σώματος [2]. Ο Murman παρατήρησε ότι το φαινόμενο αυτό για $K \leq 0,81$ ($M_\infty = 0,935$). Στο σχήμα 5.15 βλέπουμε τις παρατηρήσεις του για τα κύματα τύπου λάμδα [2]:

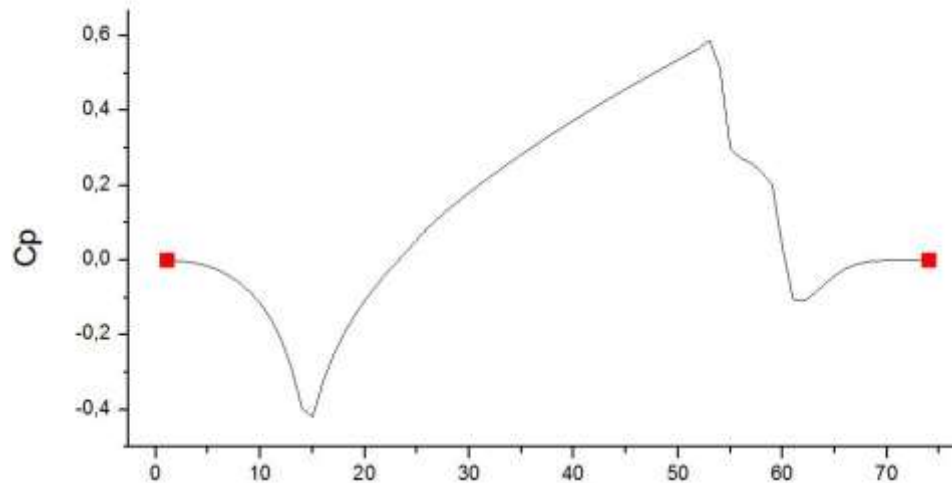


Σχήμα 5.15 : Κατανομές C_p σε αεροτομή κυκλικού τόξου $K \leq 0,81$

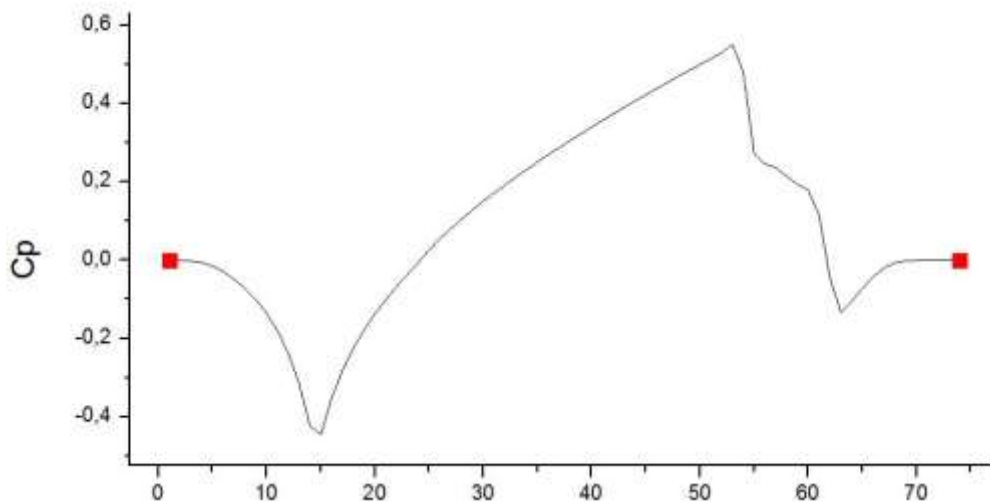
Πίσω στα αποτελέσματα του κώδικα που χρησιμοποιούμε, τέτοιου είδους κύματα συλλαμβάνουμε σε ταχύτητες από $M_\infty = 0,95$ ($K=0,63$) και μετά. Αυτή η μικρή διαφορά συμβαίνει λόγω της υπόθεσης του σώματος ως σχισμή. Επίσης, δεν είναι αμελητέα και η σύγκλιση στα αποτελέσματα των δύο σχημάτων. Τα αποτελέσματα του κώδικά μας παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 5.16 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,95$, $\delta=0,06$ και $K=0,63$



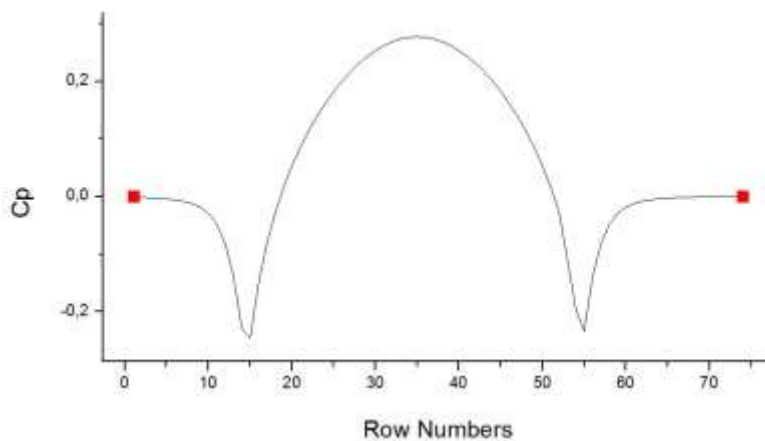
Σχήμα 5.17 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,97$, $\delta=0,06$ και $K=0,38$



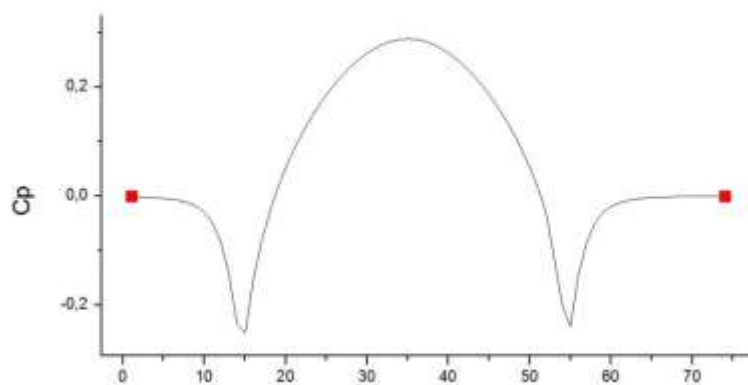
Σχήμα 5.18 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,99$, $\delta=0,06$ και $K=0,12$

Υπενθυμίζουμε πως το περύγιο σταματάει στον κόμβο 55 και είναι φανερή η εμφάνιση του κύματος τύπου λάμδα στο τέλος αυτού.

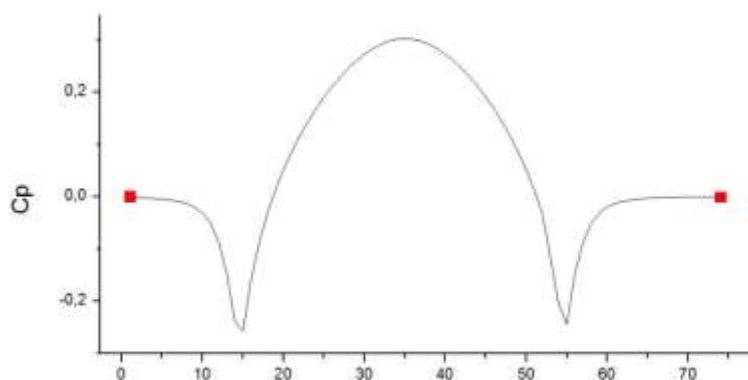
Τέλος, κλείνουμε το κεφάλαιο με την παρουσίαση σχημάτων που δείχνουν προοδευτικά την εξέλιξη του φαινομένου της διχητικής ροής, έως την εμφάνιση ισχυρού κρουστικού κύματος, όπως αυτά προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικά μας.



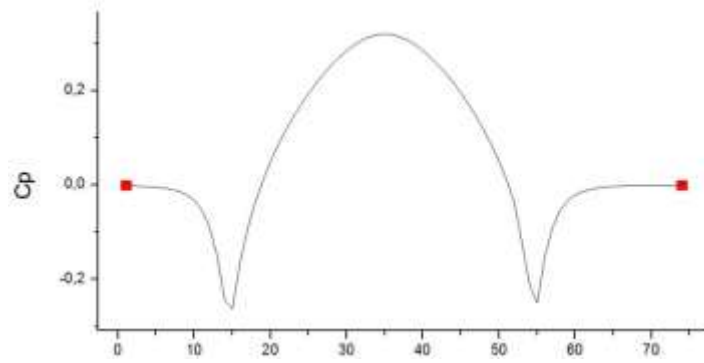
Σχήμα 5.09 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,8$ και $\delta = 0,06$



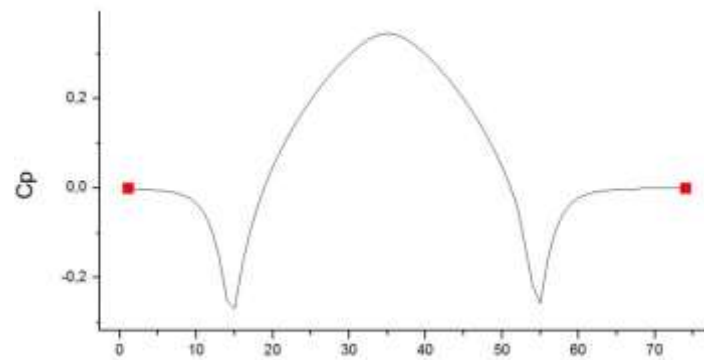
Σχήμα 5.19 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,81$ και $\delta = 0,06$



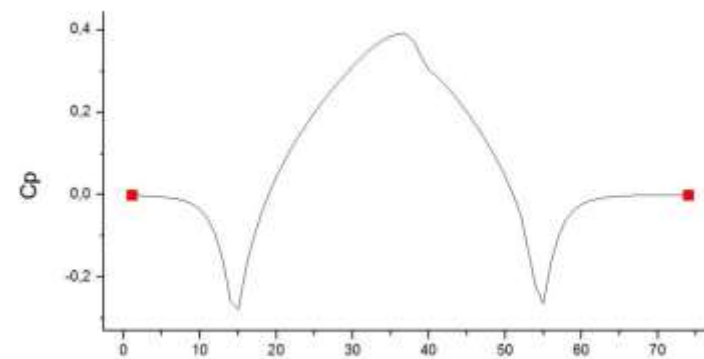
Σχήμα 5.20 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,82$ και $\delta = 0,06$



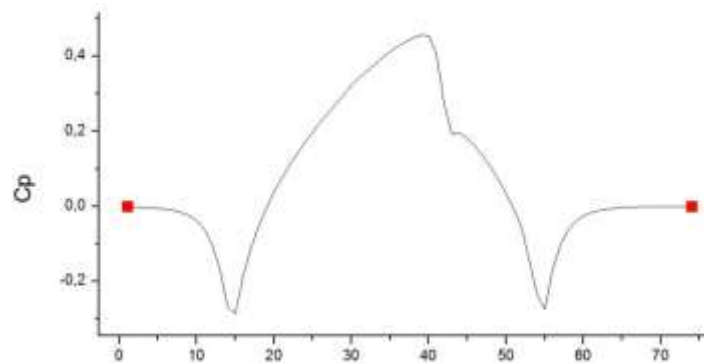
Σχήμα 5.21 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,83$ και $\delta = 0,06$



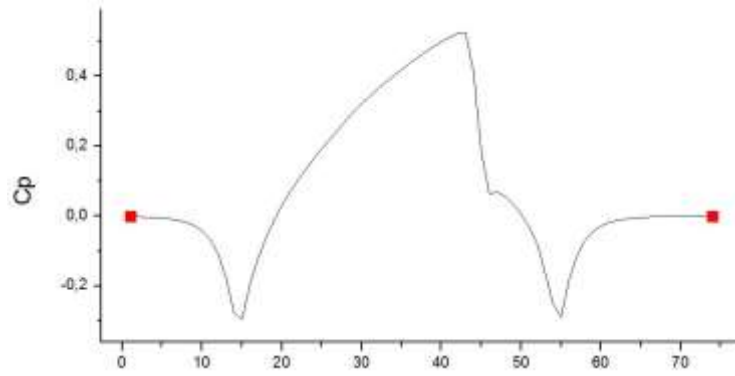
Σχήμα 5.22 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,84$ και $\delta = 0,06$



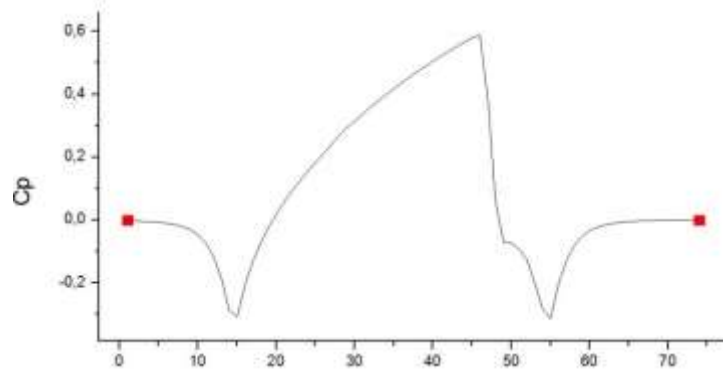
Σχήμα 5.11 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,85$ και $\delta = 0,06$



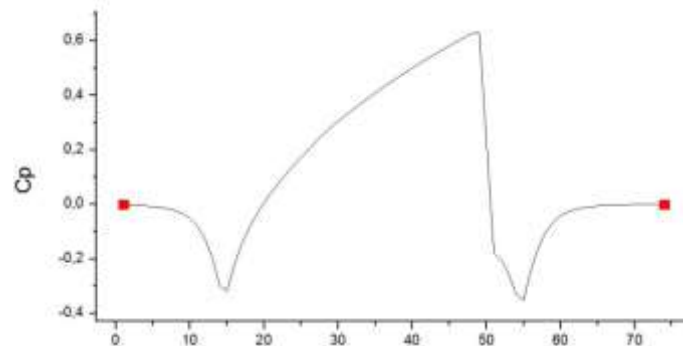
Σχήμα 5.12 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,86$ και $\delta = 0,06$



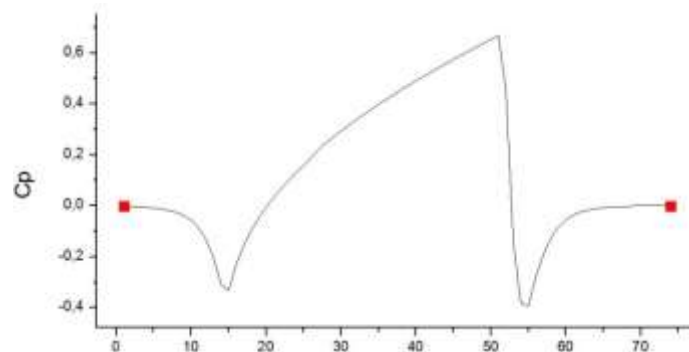
Σχήμα 5.23 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,87$ και $\delta = 0,06$



Σχήμα 5.24 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,88$ και $\delta = 0,06$



Σχήμα 5.25 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,89$ και $\delta = 0,06$



Σχήμα 5.13 : Κατανομή του C_p για $M_\infty = 0,9$ και $\delta = 0,06$

5.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα που δίνει η διαδικασία επίλυσης της διηγητικής ροής με βάση το μοντέλο των διηγητικών μικρών διαταραχών. Είδαμε αποτελέσματα από όλες τις μεθόδους επίλυσης που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Τα διαγράμματα της κατανομής του συντελεστή πίεσης C_p έδειξαν ότι συμπεράσματα προκύπτουν από την επίλυση. Επίσης, αποτελέσματα τόσο δημοσιευμένα, όσο και αποτελέσματα μέσα από την επίλυση του κώδικα που χρησιμοποιήσαμε, βοήθησαν στην καλύτερη κατανόηση του φαινομένου και στη δυνατότητα προβολής των κρουστικών κυμάτων. Τέλος, τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη χρησιμοποίηση του υπολογιστικού κώδικα σε γλώσσα Fortran, έχουν καλή συμφωνία με αυτά που έχουν δημοσιευθεί.

Κεφάλαιο 6 Σύνοψη Διπλωματικής εργασίας

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετήσαμε τη διηχητική ροή σε συμμετρικό προφίλ λεπτού πτερυγίου υπό μηδενική γωνία, σύμφωνα με το μοντέλο των διηχητικών μικρών διαταραχών. Έγινε μια παρουσίαση του θέματος σε βάθος, τόσο στη βιβλιογραφία, όσο και στο υπολογιστικό κομμάτι.

Παρουσιάσαμε την κύρια εξίσωση ,που περιγράφει το μοντέλο, σε όλες τις μορφές που μπορεί να συναντήσει ο αναγνώστης, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, είδαμε πως μπορούμε να συναντήσουμε δύο μορφές τις εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών, τη (2.9) : $[K - (\gamma + 1)\phi_\chi] \phi_{\chi\chi} + \phi_{\bar{y}\bar{y}} = 0$ και τη (2.15) : $[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1)M_\infty^2 \phi_\chi] \phi_{\chi\chi} + \phi_{\gamma\gamma} = 0$. Το αναφέραμε πολλές φορές μέσα στην εργασία, ότι αυτές οι δύο εξισώσεις είναι διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου πράγματος και κατά συνέπεια ίδιες. Ο διαχωρισμός έγινε για βιβλιογραφικούς και πρακτικούς λόγους.

Μελετήσαμε εκτενώς τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες Far Field που χρειαζόμαστε για το σωστό ορισμό του προβλήματος. Είδαμε τις διαφορετικές περιπτώσεις που μπορούμε να συναντήσουμε στη βιβλιογραφία, με βάση τη φυσική του προβλήματος, αλλά και με τις ανάγκες της κάθε μορφής της κύριας εξίσωσης διηχητικών μικρών διαταραχών.

Αναλύσαμε αριθμητικά και διακριτοποιήσαμε σε κατάλληλα υπολογιστικά πλέγματα τόσο τη (2.9), όσο και τη (2.15), στις κατάλληλες μορφές τους. Επίσης, αναλύσαμε αριθμητικά και διακριτοποιήσαμε και τις συνοριακές συνθήκες που χρειαζόμαστε. Ειδική αναφορά έγινε στην ανάγκη επίλυσης της συντηρητικής μορφής των διακριτοποιημένων εξισώσεων, λόγω της ιδιότητάς τους να ανιχνεύουν καλύτερα τα κρουστικά κύματα που εμφανίζονται στην εξέλιξη του φαινομένου, αλλά και στην καλύτερη απεικόνιση του υπερβολικού πεδίου. Η συντηρητική μορφή μελετήθηκε από τον Murman και χρησιμοποιήσαμε τη μορφή που της έδωσε ο Jameson. Παρουσιάσαμε πλέγματα τόσο ομοιόμορφα, όσο και ανομοιόμορφα.

Τα αποτελέσματα που είδαμε ήταν τόσο μέσα από τη βιβλιογραφία, όσο και από κώδικες που γράφτηκαν με βάση τη θεωρία και τη μέθοδο που αναλύσαμε. Είδαμε την εμφάνιση κρουστικών κυμάτων στις περιπτώσεις που εμφανίζονται μέσα από τα διαγράμματα της κατανομής του συντελεστή πίεσης Cp. Υπάρχει καλή συμφωνία μεταξύ υπολογισμένων αποτελεσμάτων και δημοσιευμένων αποτελεσμάτων.

Μελλοντικά, ένα θέμα που θα μπορούσε να μελετηθεί με βάση τη συγκεκριμένη εργασία είναι η μελέτη της περίπτωσης που έχουμε γωνία επίθεσης στη ροή. Τότε έχουμε και φαινόμενα άνωσης. Επίσης θα μπορούσε να δημιουργηθεί και μια πειραματική διάταξη και να μελετήσει και να συγκρίνει τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ. Ακόμα, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε και την περίπτωση που

το πτερύγιο έχει ατέλεια στην επιφάνεια του για να δούμε τη μετατόπιση του σημείου εμφάνισης του κρουστικού κύματος, αλλά και το σε ποιες ταχύτητες εμφανίζονται τα φαινόμενα της διηχητικής ροής. Η μελέτη διηχητικής ροής με το μοντέλο των διηχητικών μικρών διαταραχών σε θάλαμο και όχι σε ανοιχτό περιβάλλον, είναι ένα θέμα που συνδυάζεται άμεσα με αυτή την εργασία.

Τέλος, όπως αναφέραμε και μέσα στην εργασία, η μελέτη των διηχητικών μικρών διαταραχών γίνεται πλέον για εκπαιδευτικούς και ιστορικούς σκοπούς ή για μία γρήγορη εκτίμηση σε κάποιο πρόβλημα. Στις μέρες μας συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις πλήρους δυναμικού για τη μελέτη τέτοιων φαινομένων. Οπότε ένα ακόμα μελλοντικό θέμα προς εξέταση είναι η μελέτη των εξισώσεων πλήρους δυναμικού και η σύγκρισή τους με τις εξισώσεις διηχητικών μικρών διαταραχών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Δίνεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τα αποτελέσματα.(courtesy of Stephen M.Ruffin) :

```
!...2-D Transonic Small Disturbance Equation Solver.

!   Flow over a circular arc airfoil

      parameter(idim=160,jdim=130,ndim=5000)

      dimension phi(idim,jdim),a(idim,jdim),mu(idim,jdim),      &
&          x(idim,jdim),y(idim,jdim),dx(idim,jdim),dy(idim,jdim),&
&          amat(jdim),bmat(jdim),cmat(jdim),dmat(jdim),      &
&          dumm1(idim),dumm2(idim),rmax(ndim)

      real mu

      write(*,*) '2-D Transonic Small Disturbance Equation Solver'
      write(*,*) '(c) 2002, Stephen M. Ruffin'
      write(*,*) ' '

!...Input Parameters.....

      write(*,*) 'Enter Mach Number'
      read(*,*) fsmach

      write(*,*) 'Enter circular-arc-airfoil thickness ratio'
      read(*,*) th

      nmax = 1000

      imax = 74

      jmax = 14

      icst = 15

      dxmin = 0.025

      dymin = 0.03

      rmin = 1.0e-3

      gamma = 1.4

      qinf = 1.0

      rinf = 1.0

!.....

      open(unit=3,file='resid.dat',form='formatted')
```

```

write(6,*) ' ', N ', ' RESIDmax ', ' i at max ', ' j at max '
write(3,*) ' ', N ', ' RESIDmax ', ' i at max ', ' j at max '

ainf = 1.0/fsmach
pinf = 1.0/(gamma*fsmach**2)

!...Set Initial Conditions

do 10 i = 1,imax
do 10 j = 1,jmax
phi(i,j) = 1.0
10 continue

!...Generate Grid

call grid(dxmin,dymin,icst,icend,x,y,dx,dy,imax,jmax,idim,jdim)

do 30 n = 1,nmax

!...Compute A and MU

call aandmu(phi,a,mu,dx,fsmach,gamma,qinf,
&
& imax,jmax,idim,jdim)
do 20 i = 3,imax-1

!...Fill interior of diagonal matrices

call allmats(i,amat,bmat,cmat,dmat,phi,a,mu,dx,dy,
&
& fsmach,gamma,qinf,imax,jmax,idim,jdim)

!...Enforce B.C.'s through diagonal matrices

call bcmat(i,amat,bmat,cmat,dmat,x,dy,th,qinf,icst,icend,
&
& imax,jmax,idim,jdim)

!...Solve tridiagonal equation set

call scaltri(i,phi,amat,bmat,cmat,dmat,imax,jmax,idim,jdim)
20 continue

!...Compute residual

call resid(n,rmax,residm0,phi,a,mu,dx,dy,imax,jmax,idim,jdim,ndim)

if(rmax(n).le.rmin) go to 31
30 continue
31 continue

!...Write output

call output(phi,x,y,dx,dy,fsmach,gamma,qinf,rinf,pinf,
&

```

```

&          dumm1,dumm2,n,rmax,imax,jmax,nmax,ldim,jdim,ndim)
          close(3)
          stop
END
          subroutine grid(dxmin,dymin,icst,icend,          &
&          x,y,dx,dy,imax,jmax,ldim,jdim)
          dimension x(ldim,jdim),y(ldim,jdim),          &
&          dx(ldim,jdim),dy(ldim,jdim)
          y(1,1) = 0.0
          y(1,2) = dymin
          do 10 j = 3,jmax
          y(1,j) = y(1,j-1) + 2.0*(j-2)*dymin
10      continue
          do 20 i=2,imax
          do 20 j=1,jmax
          y(i,j) = y(1,j)
20      continue
          icend = icst + 1.0/dxmin      !40
          x(icst ,1) = 0.0
          x(icst-1,1) = -dxmin
          x(icend ,1) = 1.0
          x(icend+1,1) = 1.0 + dxmin
          do 30 i = icst-2,1,-1
          x(i,1) = x(i+1,1) - 2.0*(icst-1-i)*dxmin
30      continue
          do 31 i = icst+1,icend-1
          x(i,1) = x(i-1,1) + dxmin
31      continue
          do 32 i = icend+2,imax
          x(i,1) = x(i-1,1) + 2.0*(i-icend-1)*dxmin
32      continue
          do 33 i = 1,imax

```

```

do 33 j = 2,jmax
    x(i,j) = x(i,1)
33 continue
    do 40 i = 1,imax
do 40 j = 1,jmax-1
    dy(i,j) = y(i,j+1)-y(i,j)
40 continue
    do 50 j=1,jmax
do 50 i=1,imax-1
    dx(i,j) = x(i+1,j)-x(i,j)
50 continue
    return
END

subroutine aandmu(phi,a,mu,dx,fsmach,gamma,qinf,      &
&                imax,jmax,idim,jdim)
dimension phi(idim,jdim),a(idim,jdim),mu(idim,jdim),  &
&                dx(idim,jdim)
real mu
fsmach2 = fsmach**2
do 10 i = 1,imax
do 10 j = 1,jmax
if(i.eq.1) then
dphidx = (phi(2,j)-phi(1,j))/dx(1,j)
elseif(i.eq.imax) then
dphidx = (phi(imax,j)-phi(imax-1,j))/dx(imax-1,j)
else
dphidx = (phi(i+1,j)-phi(i-1,j))/(dx(i,j)+dx(i-1,j))
endif
a(i,j) = 1.0 - fsmach2 - (gamma+1.0)*fsmach2*dphidx/qinf
if(a(i,j).gt.0.0) then
mu(i,j) = 0.0
elseif(a(i,j).lt.0.0) then

```

```

        mu(i,j) = 1.0
    else
write(*,*) 'This cant be... A is exactly zero?'
        stop
    endif
10  continue
        return
END

subroutine allmats(i,amat,bmat,cmat,dmat,phi,a,mu,dx,dy, &
&
        fsmach,gamma,qinf,imax,jmax,idim,jdim)
dimension amat(jdim),bmat(jdim),cmat(jdim),dmat(jdim), &
&
        phi(idim,jdim),a(idim,jdim),mu(idim,jdim), &
&
        dx(idim,jdim),dy(idim,jdim)

real mu

do 10 j = 2,jmax-1
    dx1 = 2.0/(dx(i ,j)+dx(i-1,j ))
    dx2 = 2.0/(dx(i-1,j)+dx(i-2,j ))
    dy1 = 2.0/(dy(i ,j)+dy( i,j-1))
        amat(j) = dy1/dy(i,j-1)
    bmat(j) = -(1.0-mu(i,j))*a(i,j)*dx1*(1.0/dx(i,j)+1.0/dx(i-1,j)) &
&
        +mu(i-1,j)*a(i-1,j)*dx2/dx(i-1,j) &
&
        -dy1*(1.0/dy(i,j)+1.0/dy(i,j-1))
    cmat(j) = dy1/dy(i,j)
    dmat(j) = -(1.0-mu(i,j))*a(i,j)*dx1 &
&
        *(phi(i+1,j)/dx(i,j)+phi(i-1,j)/dx(i-1,j)) &
&
        -mu(i-1,j)*a(i-1,j)*dx2 &
&
        &*(-phi(i-1,j)*(1.0/dx(i-1,j)+1.0/dx(i-2,j))+phi(i-2,j)/dx(i-2,j))
10  continue
        return
END

subroutine output(phi,x,y,dx,dy,fsmach,gamma,qinf,rinf,pinf,&
&
        phis,up,n,rmax,imax,jmax,nmax,idim,jdim,ndim)

```

```

dimension phi(idim,jdim),x(idim,jdim),y(idim,jdim),          &
&          dx(idim,jdim),dy(idim,jdim),phis(idim),up(idim),  &
&          rmax(ndim)

character tab

tab = char(9)

gam1 = 0.5*(gamma-1.0)

gam2 = gamma/(gamma-1.0)

do 10 i=1,imax
phis(i) = phi(i,2)
10 continue

up(1) = (phis(2)-phis(1))/dx(1,2)

up(imax) = (phis(imax)-phis(imax-1))/dx(imax-1,2)

do 20 i=2,imax-1

up(i) = (phis(i+1)-phis(i-1))/(dx(i,2)+dx(i-1,2))

20 continue

open(unit=2,file='cp.dat',form='formatted')

write(*,*) ' '

write(*,*) ' ',' i ',' X ',' Cp '

write(2,*) ' ',' i ',' X ',' Cp '

do 30 i=1,imax

cps = -2.0*up(i)/qinf

u = qinf + up(i)

v = (phi(i,2)-phi(i,1))/(dy(i,1))

psisen = pinf*(1.0          &

&          -gam1*fsmach**2*((u**2+v**2)/qinf**2-1.0))**gam2

cpsisen = (psisen-pinf)/(0.5*rinf*qinf**2)

! write(*,*) 'x =',x(i,1),' cp =',cps,' cpsisen =',cpsisen

write(6,100) i,x(i,1),-cps

write(2,100) i,x(i,1),-cps

30 continue

100 format(1x,i5,2(es11.3))

! open(unit=3,file='RMS.dat',form='formatted')

```

```

! write(6,*) ' ', ' N ', ' RMSmax '
! write(3,*) ' ', ' N ', ' RMSmax '
! do 40 n = 1,nmax
! write(6,200) n,rmax(n)
! write(3,200) n,rmax(n)
! 40 continue
! 200 format(1x,i5,es11.3)
      write(1) imax,jmax
      write(1) ((x(i,j),i=1,imax),j=1,jmax),
&
&      ((y(i,j),i=1,imax),j=1,jmax)
      close(2)
! close(3)
      return
      END
      subroutine scaltri(i,qmat,amat,bmat,cmat,dmat,
&
&      imax,jmax,idim,jdim)
!...Scalar Tridiagonal Solver
      dimension qmat(idim,jdim),
&
&      amat(jdim),bmat(jdim),cmat(jdim),dmat(jdim)
      do 10 j = 2,jmax
      dumm = amat(j)/bmat(j-1)
      bmat(j) = bmat(j) - cmat(j-1)*dumm
      dmat(j) = dmat(j) - dmat(j-1)*dumm
10 continue
      qmat(i,jmax) = dmat(jmax)/bmat(jmax)
      do 20 j = jmax-1,1,-1
      qmat(i,j) = (dmat(j)-cmat(j)*qmat(i,j+1))/bmat(j)
20 continue
      return
      END
      subroutine bcmat(i,amat,bmat,cmat,dmat,x,dy,th,qinf,icst,icend,&
&      imax,jmax,idim,jdim)

```

```

dimension x(idim,jdim),dy(idim,jdim),
&
&          amat(jdim),bmat(jdim),cmat(jdim),dmat(jdim)
amat(jmax) = 0.0
bmat(jmax) = 1.0
cmat(jmax) = 0.0
dmat(jmax) = 1.0
if((i.ge.icst).and.(i.le.icend)) then
tau = 0.5*th
yc = (tau**2-0.25)/(2.0*tau)
r2 = 0.25 + yc**2
dummx = x(i,1) - 0.5
dydx = -dummx/sqrt(r2-dummx**2)
amat(1) = 0.0
bmat(1) = -1.0
cmat(1) = 1.0
dmat(1) = dy(i,1)*qinf*dydx
else
amat(1) = 0.0
bmat(1) = 1.0
cmat(1) = -1.0
dmat(1) = 0.0
endif
return
END
subroutine resid(n,rmax,residm0,phi,a,mu,dx,dy,imax,jmax,
&
&idim,jdim,ndim)
dimension phi(idim,jdim),a(idim,jdim),mu(idim,jdim),
&
&          dx(idim,jdim),dy(idim,jdim),rmax(ndim)
real mu
residm = 0.0
if(n.eq.1) residm0 = 1.0
iresid = 0

```



```

jresid = 0
do 10 i=3,imax-1
do 10 j=2,jmax-1
dx1 = 2.0/(dx(i ,j)+dx(i-1,j ))
dx2 = 2.0/(dx(i-1,j)+dx(i-2,j ))
dy1 = 2.0/(dy(i ,j)+dy( i,j-1))
dumm1 = (1.0-mu(i,j))*a(i,j)*dx1 &
& *(phi(i+1,j)/dx(i,j)-phi(i,j)*(1.0/dx(i,j)+1.0/dx(i-1,j))) &
& +phi(i-1,j)/dx(i-1,j))
dumm2 = mu(i-1,j)*a(i-1,j)*dx2 &
& *(phi(i,j)/dx(i-1,j)-phi(i-1,j)*(1.0/dx(i-1,j)+1.0/dx(i-2,j))) &
& +phi(i-2,j)/dx(i-2,j))
dumm3 = dy1*(phi(i,j+1)/dy(i,j) &
& -phi(i,j)*(1.0/dy(i,j)+1.0/dy(i,j-1))+phi(i,j-1)/dy(i,j-1))
residt = abs(dumm1 + dumm2 + dumm3)
residt = residt/residm0
if(residt.gt.residm) then
residm = residt
iresid = i
jresid = j
endif
10 continue
if(n.eq.1) then
residm0 = residm
residm = 1.0
endif
rmax(n) = residm
write(6,200) n,residm,iresid,jresid
write(3,200) n,residm,iresid,jresid
200 format(1x,i5,es11.3,i10,i10)
return
END

```

Βιβλιογραφία

1. “Calculations of plane steady transonic flows” , Murman , E.M. & Cole ,J.D. , American Institute of Aeronautics and Astronautics , issue 1 , pages 114-121 , ISSN : 0001-1452, (1971)
2. “Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods” , Murman ,E.M. , American Institute of Aeronautics and Astronautics, issue 5, pages 626-632 , ISSN : 0001-1452 ,(1974)
3. “Contribution to methods for calculating the flow about thin lifting wings at transonic speeds – Analytic expressions for the Far Field “ , Klunker , E.B. ,National Aeronautics and Space Administration , NASA TN D-6530, (1971)
4. “Studies in Transonic flow III , Inviscid drag at transonic speeds “, Murman , E.M. ,Cole , J.D. , NASA Ames Research Center, UCLA –ENG-7603, (1975)
5. “Relaxation methods for transonic flow about wing-cylinder combinations and lifting swept wings” , Frank R. Bailey ,NASA Ames Research Center, (1973)
6. “Compressible Flow” ,Stanford Notes, Chapter 11 “Aerodynamics” , Antony Jameson, Stanford University, Stanford , (2008)
7. “Solution of the Euler equations for two dimensional transonic flow by a multigrid method” , Anthony Jameson , Princeton University
8. “Spreadsheet Fluid Dynamics for Aeronautical Course Problems” , Etsuo Morishita , Yohei Iwata, Kentaro Yuki, Haruhiko Yoshida, University of Tokio, Japan, 0949-14X/91, Tempus Publications, (2000)
9. “Computations on transonic inviscid flows past thin airfoils” , Rui , M.S. Pereira University of Minho, Jitesh S.B., Gajjar University of Manchester, “ Recent Advances in Applied Mathematics” , ISSN : 1790-2769, ISBN : 978-960-474-138-0
10. “Υπολογιστική Ρευστομηχανική” , Γιώργος Μπεργελές , Εκδόσεις Συμεών, ISBN : 960-7888-69-3 , Έκδοση 4^η,(2006)
11. “Configuration Aerodynamics” , Chapter 7 Transonic aerodynamics of airfoils and wings, Mason , W.H. , (2006)
12. “Applied Computational Aerodynamics” , Appendix G , G.4 Tranfoil/TSFoil2, Mason, W.H., (1997)
13. “Steady Transonic Flow Past a Thin Airfoil” , Eight International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering,, Cairo ,Egypt, May 12-14 1998, Ali ,S.F., University of Arizona and Military Technical College, Cairo
14. “Basics of Fluid Mechanics and Introduction to Computational Fluid Dynamics” , Titus Petrilă, Damian Trif ,Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania, Chapter 7.3 “Transonic Flows” , Springer Science + Business Media , INC , (2005)
15. “Introduction to Computational Fluid Dynamics” , Pradip Niyogi, Sunil Kumar Chakrabartty, Manas Kumar Laha, Pearson Education India, ISBN: 9788177587647 ,(2005)

16. Lecture Notes, High Speed – Postgraduate course ,Dr. Ruffin , S.M. , Georgia Institute of Technology, North-Avenue, GA 30332, Atlanta ,(2013)
17. Assembla.com , Trans.f90 , κώδικας σε Fortran για την μελέτη της διηχητικής ροής με την εξίσωση μικρών διηχητικών διαταραχών ,
<https://subversion.assembla.com/svn/comp-aero/transonic/>