

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ STENTS ΜΕΣΩ
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΟΚΟΥ ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ**

υπό

ΕΙΡΗΝΗΣ ΝΤΙΝΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Τίτλου Σπουδών

2019

© 2019 Ειρήνη Ντίνα

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής :

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Δημήτριος Σοφιανόπουλος
Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Βασιλική Κατσαρδή
Επίκουρος Καθηγήτρια, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Θεοφάνης Γραμμένος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ' όλα επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Καθηγητή κ. Σοφιανόπουλο Δημήτριο για την πολύτιμη βοήθεια, υποστήριξη και συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης και ολοκλήρωσης της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την ενθάρρυνση και την στήριξη που μου προσέφερε όλο το χρονικό διάστημα συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας.

Ντίνα Ειρήνη

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ STENTS ΜΕΣΩ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΟΚΟΥ ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ

Ντίνα Ειρήνη

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2019

Επιβλέπων Καθηγητής: Σοφιανόπουλος Δημήτριος, Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα Εργασία παρουσιάζεται μία απλή αλλά άκρως αποτελεσματική προσεγγιστική μέθοδος προσομοίωσης της συμπεριφοράς των stents μέσω θεώρησης του μοντέλου δοκού επί ελαστικού εδάφους. Μετά από συνοπτική αναφορά στις εν λόγω ιατρικές εφαρμογές (από πλευράς τάσεων της αγοράς και μηχανικής συμπεριφοράς-χαρακτηριστικών) καταγράφεται και αναλύεται διεξοδικά το προαναφερθέν μοντέλο. Μορφώνονται οι σχετικές εξισώσεις ισορροπίας, αδιαστατοποιούνται κατάλληλα και το όλο μη γραμμικό πρόβλημα συννοριακών τιμών δύο σημείων 4^{ης} τάξης επιλύεται αριθμητικά μέσω της μεθόδου Galerkin. Τα ληφθέντα αποτελέσματα βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με ήδη υπάρχοντα και προτείνεται και το πλαίσιο μελλοντικής έρευνας επί του όλου επιστημονικού θέματος.

ABSTRACT

In the present Thesis, a simple but very efficient approximate technique is presented, in order to simulate the behavior of stents via a beam-on-elastic-foundation approach. After an overview on the related medical applications (as far as market trends and mechanical characteristics-response are concerned), the aforementioned simulation is established and analyzed. The associated equilibrium equations are formulated, and, after proper nondimensionalization, the 4th order nonlinear two-point boundary value problem at hand is tackled via the method of Galerkin. The results obtained are found in very good agreement with both existing theoretical and experimental ones, while a framework of future investigations is proposed.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο : Γενικά περί των Stents	1
1.1 Ορολογία	1
1.2 Κατάταξη - Είδη	1
1.2.1 Υλικά	2
1.2.2 Μορφή – Σχήμα.....	4
1.2.3 Βιομηχανική Κατεργασία και Παραγωγή.....	6
1.2.4 Γεωμετρία.....	8
1.2.5 Πρόσθετα.....	17
1.3 Περιληπτικά Συμπεράσματα.....	17
Κεφάλαιο 2ο : Μηχανικές Ιδιότητες και Συμπεριφορά	18
Μεταλλικών Stents.....	18
2.1 Γενικές Επισημάνσεις.....	18
2.2 Μηχανικές Ιδιότητες των Μεταλλικών Stents	18
2.2.1 Χαρακτηριστικά των Υλικών.....	18
2.2.2 Εισαγωγικά Στοιχεία.....	20
2.2.3 Περιγραφή κάποιων πειραματικών διατάξεων	21
Κεφάλαιο 3ο : Προσομοίωση Μηχανικής Συμπεριφοράς Stents	35
μέσω Μοντέλου Δοκού επί Ελαστικής Θεμελίωσης.....	35
3.1 Σκοπός – Αντικείμενο	35
3.2 Μόρφωση του Προσομοιώματος – Εξισώσεις.....	35
3.3 Αδιαστατοποίηση της Διέπουσας Διαφορικής Εξίσωσης.....	38
3.4 Αριθμητική Επίλυση - Συμπεράσματα	40
3.4.1 Συνοπτική Αναφορά στις σχετικές μεθόδους	41
3.4.2 Μεθοδολογία – Λογισμικό - Αριθμητικά Αποτελέσματα	44
3.4.3 Συμπεράσματα και Προτάσεις για μελλοντική Έρευνα	48
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	50
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	52

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1 Κατάταξη των stents	2
Σχήμα 1.2 Υλικά των stents	4
Σχήμα 1.3 Strecker Stent κατασκευασμένο από πλεγμένο σύρμα τανταλίου	4
Σχήμα 1.4 Cook GRII stent	5
Σχήμα 1.5 Μορφές των Stents	5
Σχήμα 1.6 Symphony stent	6
Σχήμα 1.7 WallStent	6
Σχήμα 1.8 aSpire stent	7
Σχήμα 1.9 Μέθοδοι βιομηχανικής παραγωγής	8
Σχήμα 1.10 Esophacoil: Stent σπείρας από κορδέλα Nitinol	9
Σχήμα 1.11 Crossflex stent (από ανοξείδωτο χάλυβα)	9
Σχήμα 1.12 Cook ZA stent	10
Σχήμα 1.13 Palmaz stent	12
Σχήμα 1.14 NIR stent	12
Σχήμα 1.15 SMART stent	13

Σχήμα 1.16 AVE S7 stent	13
Σχήμα 1.17 ACS Multilink stent	13
Σχήμα 1.18 BeStent	14
Σχήμα 1.19 Navius ZR1 stent	14
Σχήμα 1.20 Γεωμετρία των stents	15
Σχήμα 1.20β Γεωμετρία των stents	16
Σχήμα 1.21 Κάποια πρόσθετα των stents	17
Σχήμα 2.1 Φωτογραφία και σχηματικό διάγραμμα του δείγματος. Φαίνονται οι θέσεις που μετρήθηκαν διάμετρος και το μήκος του stent κατά τη διάρκεια του πειράματος, ενώ το stent απεικονίζεται στην αφόρτιστη κατάσταση (μηδενικές πιέσεις)	21
Σχήμα 2.2 Stent υπό εσωτερική πίεση χωρίς ή με παρεμπόδιση αξονικής (αλλά όχι ακτινικής) παραμόρφωσης	23
Σχήμα 2.3 Πειραματική διάταξη για την επιβολή εξωτερικής πίεσης στο stent	24
Σχήμα 2.4 Πειραματική καμπύλη $eR - p$	26
Σχήμα 2.5 Καμπύλη $eR - ea$	27
Σχήμα 2.6 Σχέση $D - p$	28
Σχήμα 2.7 Σχέση $\lambda - p$	28
Σχήμα 2.8 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος τμήματος μισής στροφής της έλικας	30
Σχήμα 2.9 Πρώτη πειραματική διάταξη	33
Σχήμα 2.10 Δεύτερη πειραματική διάταξη	33

Σχήμα 3.1 Stent ως ισοδύναμο λεπτότοιχο δοχείο πίεσης και ως δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης	36
Σχήμα 3.2 WallStent εντός αγγείου με ανεύρυσμα	37
Σχήμα 3.3 Ενεργός διατομή του stent, που οδηγεί στον υπολογισμό της δυσκαμψίας	37
Σχήμα 3.4 Μεταβολή της ακτίνας του stent με τη θέση κατά μήκος αυτού (περίπτωση 1)	47
Σχήμα 3.5 Μεταβολή της ακτίνας του stent με τη θέση κατά μήκος αυτού (περίπτωση 2)	48

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 2.1 Ιδιότητες υλικού δημοφιλών μεταλλικών Stents 19

Πίνακας 2.2 Παράμετροι – Χαρακτηριστικά του Wallstent 22

Κεφάλαιο 1ο : Γενικά περί των Stents

1.1 Ορολογία

Ο όρος *stent* μπορεί να μεταφραστεί σαν «ένας εύκαμπτος σωλήνας που εισάγεται σε κάποιο αιμοφόρο αγγείο», αν και μια πιο επιστημονική προσέγγιση θα ήταν «αγγειακή ενδοαυλική πρόσθεση» ή «ενδοπρόσθεση». Επειδή η ακριβής ελληνική μονολεκτική ή περιφραστική απόδοση του όρου εκφεύγει των σκοπών της παρούσας Διατριβής, σε ό,τι ακολουθεί η αναφορά θα γίνεται στον αυτούσιο όρο *stent(s)*. Επίσης, απαντάται συχνά και η έκφραση «μοσχεύματα ενδοπροσθέσεων» (stent grafts).

Η εφαρμογή των stents, όπως θα περιγραφεί παρακάτω, είναι θέμα της Επιστήμης της Ιατρικής (και ιδιαίτερα της Αγγειοχειρουργικής), που όμως άπτεται σε μεγάλο βαθμό και με την Επιστήμη της Μηχανικής. Λόγω του γεγονότος αυτού, το περιεχόμενο της παρούσας θα εστιαστεί στη μηχανική συμπεριφορά των stents, με την απαιτούμενη κατά περίπτωση αναφορά σε άλλες Επιστήμες, η οποία θα κρατηθεί σε ένα αυστηρά ελάχιστο πλαίσιο.

1.2 Κατάταξη - Είδη

Υφίστανται διάφορα κριτήρια για την κατάταξη των stents. Στην παρούσα διατριβή θα παρουσιαστεί η πλέον δόκιμη κατάταξη (με βάση χαρακτηριστικά μηχανικής και σχεδιασμού), η οποία θεωρεί ως σπουδαιότερους παράγοντες αυτούς που φαίνονται, υπό μορφή διαγράμματος ροής, στο Σχήμα 1.1. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για τα υλικά κατασκευής (materials), την μορφή (form), τον τρόπο βιομηχανικής παραγωγής (fabrication), την γεωμετρία (geometry) και τις προσθήκες (additions). Το σημείο εκκίνησης που επιλέγεται είναι τα υλικά που χρησιμοποιούνται, και υφίσταται διάκριση μεταξύ stents που επεκτείνονται είτε αφ' εαυτά (self-expandable, **SX**) είτε μέσω μπαλονιού (balloon-expandable, **BX**). Από εκεί, η κατάταξη διακλαδίζεται στις μορφές των υλικών (όπως φύλλα – sheets, σύρματα – wires ή σωλήνες – tubes). Ακολουθούν οι μέθοδοι παραγωγής και κατεργασίας, όπως κοπή με laser ή με εκτόξευση νερού και άλλες τεχνικές. Κατόπιν, λαμβάνεται υπ' όψη η τεράστια γκάμα γεωμετρικών διαμορφώσεων (σχημάτων) που έχουν κατά καιρούς επινοηθεί και σχεδιαστεί, και η κατάταξη τελειώνει με πρόσθετα των stents, όπως μοσχεύματα (grafts), ακτινοσκοπικούς δείκτες (radiopaque markers) και επενδύσεις

(επικαλύψεις – coatings). Στην τρέχουσα κατάταξη έχουν συμπεριληφθεί πάνω από 100 εμπορικά stents, τα περισσότερα εκ των οποίων χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη αγγειοχειρουργική και εν γένει επεμβατική ιατρική.



Σχήμα 1.1 Κατάταξη των stents

1.2.1 Υλικά

Τα υλικά για μεταλλικά stents, τα οποία επεκτείνονται είτε μέσω μπαλονιού είτε μόνα τους, θα πρέπει να διαθέτουν εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση και βιοσυμβατότητα (biocompatibility). Θα πρέπει επίσης να είναι επαρκώς ακτινοσκιερά και να δημιουργούν ελάχιστα τεχνουργήματα (artifacts) σε μαγνητική τομογραφία (MRI).

Ειδικότερα, τα **BX** stents κατασκευάζονται από υλικά τα οποία μπορούν να παραμορφωθούν πλαστικά μέσω της εμφύσησης (φουσκώματος) ενός μπαλονιού. Μετά δε το ξεφούσκωμα του μπαλονιού το stent παραμένει στη επεκταθείσα μορφή του, εκτός από μια μικρή οπισθοδρόμηση (recoil), που οφείλεται στο ελαστικό μέρος της παραμόρφωσης. Συνεπώς, το ιδεώδες υλικό για τον συγκεκριμένο τύπο stents θα πρέπει να έχει χαμηλή τάση διαρροής (για να είναι παραμορφώσιμο υπό διαχειρίσιμες πιέσεις μπαλονιού), υψηλό μέτρο ελαστικότητας (προς ελαχιστοποίηση της οπισθοδρόμησης) αλλά και υψηλή ενδοτράχυνση (work-hardening), με σκοπό την

ασφαλή ανάληψη επαναλαμβανόμενων πλαστικών παραμορφώσεων προς επίτευξη αυξημένης αντοχής.

Τα **BX** stents κατασκευάζονται στην αποκαλούμενη «μικρή διάμετρο» (παραδοτέα διαμόρφωση), έτσι ώστε μετά το ξεφούσκωμα του μπαλονιού να λάβουν τις επιθυμητές διαστάσεις εντός του αγγείου στη θέση τοποθέτησης.

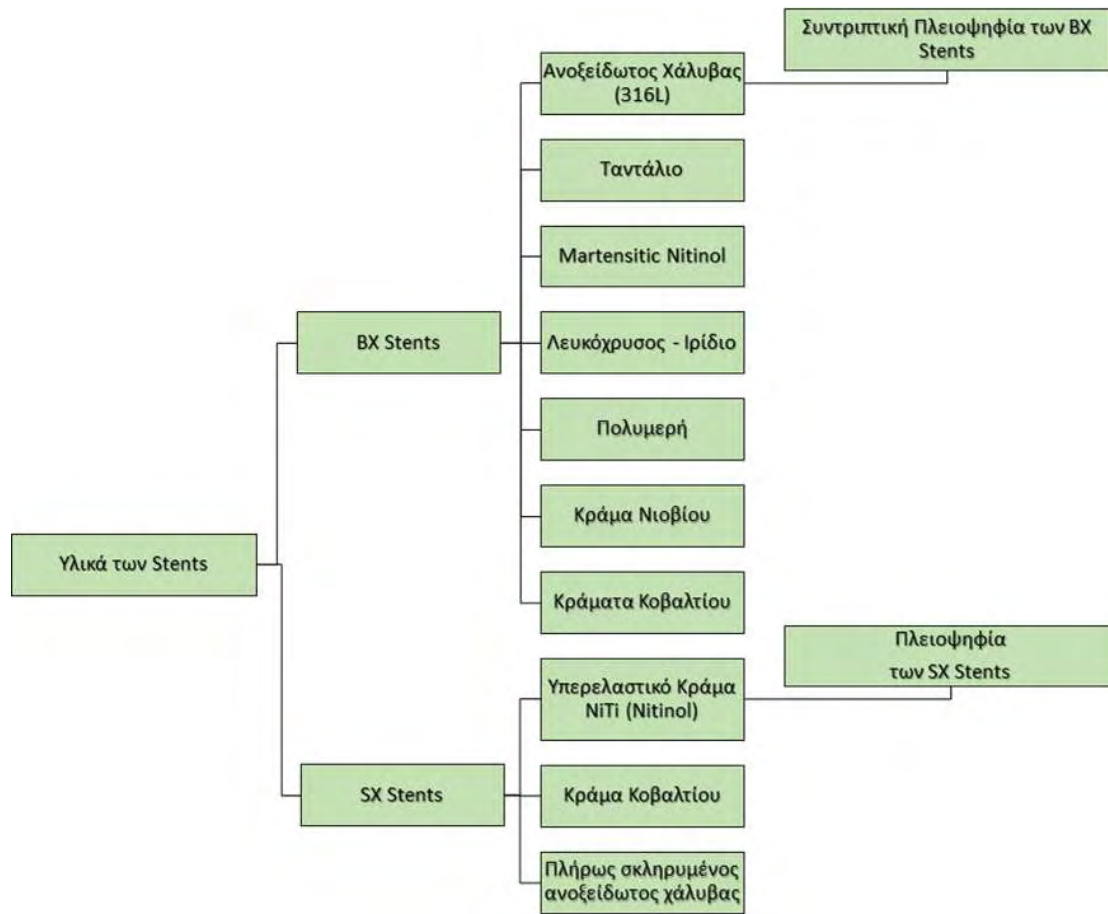
Αντίθετα, τα **SX** stents κατασκευάζονται στην επεκτεταμένη διαμόρφωση, και κατόπιν πιέζονται και περιορίζονται σε ένα σύστημα παράδοσης. Μετά την αποδέσμευση από το σύστημα αυτό επεκτείνονται μόνα τους και καταλήγουν στην επιθυμητή διάμετρο. Άρα, η λειτουργία τους βασίζεται στις ελαστικές ιδιότητες του υλικού τους. Ιδεατά, το υλικό των **SX** stents θα πρέπει να έχει μικρό μέτρο ελαστικότητας και μεγάλη τάση διαρροής, προς επίτευξη μεγάλων ελαστικών παραμορφώσεων. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επιρροή μνήμης-μορφής (shape-memory effect) κραμάτων Νικελίου-Τιτανίου (NiTiInol). Εδώ, μεγάλες ανηγμένες παραμορφώσεις μπορούν να επιτευχθούν είτε μέσω υπερελαστικότητας είτε μέσω θερμικής μνήμης (thermal memory) του υλικού.

Το πλέον διαδεδομένο υλικό των stents είναι ο ανοξείδωτος χάλυβας (stainless steel), τυπικά 316L, ένα ιδιαίτερα αντιδιαβρωτικό υλικό με μικρή περιεκτικότητα σε άνθρακα και πρόσθετα από μολυβδαίνιο και νιόβιο. Στην πλήρως ανοπτησμένη (annealed) κατάσταση του, ο ανοξείδωτος χάλυβας είναι εύκολα παραμορφώσιμος και ως εκ τούτου το πρότυπο υλικό των **BX** stents. Στην πλήρως κατυνόμενη κατάσταση του πάντως, εμφανίζει επαρκή ελαστικότητα για ορισμένους τύπους **SX** stents.

Εναλλακτικά υλικά για **BX** stents αποτελούν το ταντάλιο, κράματα πλατίνας, κράματα νιόβιου και κράματα κοβαλτίου. Αυτά χρησιμοποιούνται για καλύτερη συμπεριφορά στη ραδιενέργεια, για μεγαλύτερη αντοχή, βελτιωμένη αντοχή σε διάβρωση, καλύτερη συμβατότητα σε μαγνητική τομογραφία ή για επιτυχή συνδυασμό των δυνατοτήτων αυτών. Αποτέλεσμα είναι η δυνατότητα μικρότερων διατομών παράδοσης.

Όπως προαναφέρθηκε, υλικά για **SX** stents θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα μεγάλων ανηγμένων ελαστικών παραμορφώσεων. Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο σχετικό υλικό είναι το κράμα SMA NiTiInol (SMA = Shape Memory Alloy, κράμα μνήμης μορφής/σχήματος), το οποίο μπορεί να ανακτήσει ελαστικές παραμορφώσεις μέχρι του ποσοστού του 10% (υπερελαστική συμπεριφορά). Η περιορισμένη ελαστική περιοχή κάποιων πιο συμβατικών υλικών (όπως ανοξείδωτου χάλυβα [Z-stent]) ή κάποιων κραμάτων κοβαλτίου [WallStent]) αποτελούν κάποιες περιορισμένης

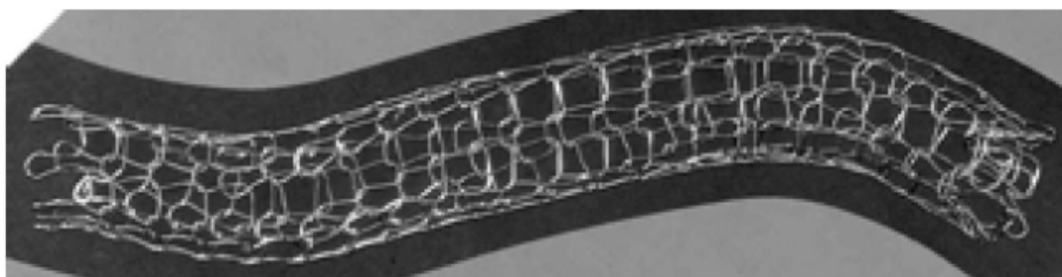
εφαρμοσιμότητας λύσεις, οπότε δεν είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς. Στο διάγραμμα ροής του Σχήματος 1.2 παρουσιάζονται συνοπτικά όσα αναφέρθηκαν στο παρόν εδάφιο.



Σχήμα 1.2 Υλικά των stents

1.2.2 Μορφή – Σχήμα

Τα stents μπορούν να κατασκευαστούν από ελάσματα (sheet), σύρματα (wire, στρογγυλά ή επίπεδα) ή υπό σωληνωτή μορφή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό που απεικονίζεται στο φωτογραφικό υλικό του Σχήματος 1.3.



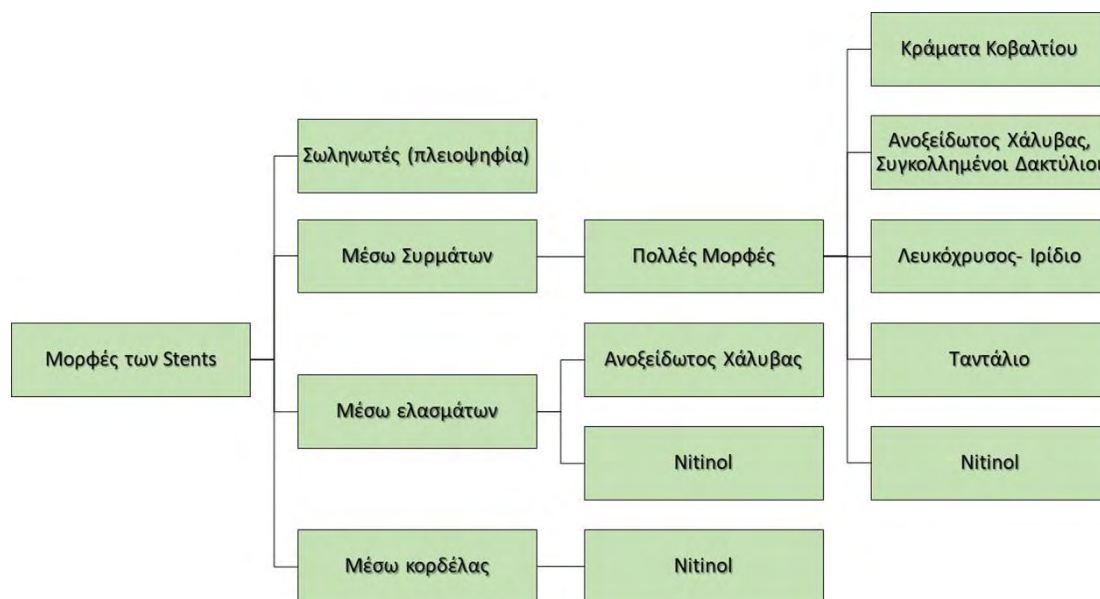
Σχήμα 1.3 Stretcher Stent κατασκευασμένο από πλεγμένο σύρμα τανταλίου

Μια μεγάλη πλειοψηφία τόσο των **SX** όσο και των **BX** stents κατασκευάζονται είτε από σύρματα είτε σωληνωτά. Κάποιες εξαιρέσεις αποτελούν stents από μεταλλικά ελάσματα, όπως για παράδειγμα το Cook GRII, που αποτελείται από ελάσματα ανοξείδωτου χάλυβα με αξονική ενίσχυση άνω και με ακραίους κόμβους από χρυσό (Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4 Cook GRII stent

Η συγκεκριμένη μορφή πρέπει να υποστεί διαμόρφωση ώστε να λάβει σχήμα σωλήνα. Οι συνδέσεις μπορεί να είναι συγκολλητές ή μέσω ειδικής μηχανολογικής διεργασίας. Ο επιμερισμός των stents αναφορικά με τη μορφή τους δίνονται γραφικά στο Σχήμα 1.5, που ακολουθεί.



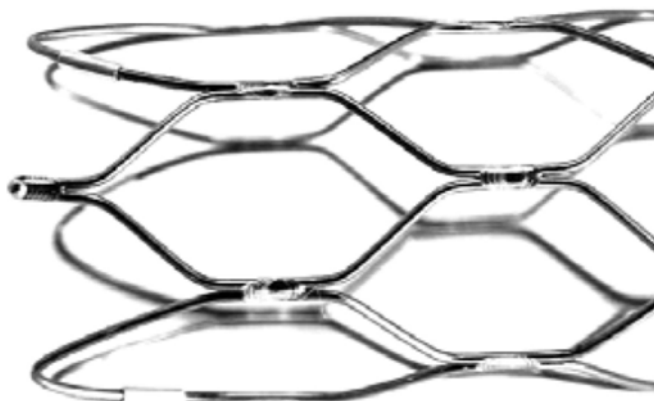
Σχήμα 1.5 Μορφές των Stents

1.2.3 Βιομηχανική Κατεργασία και Παραγωγή

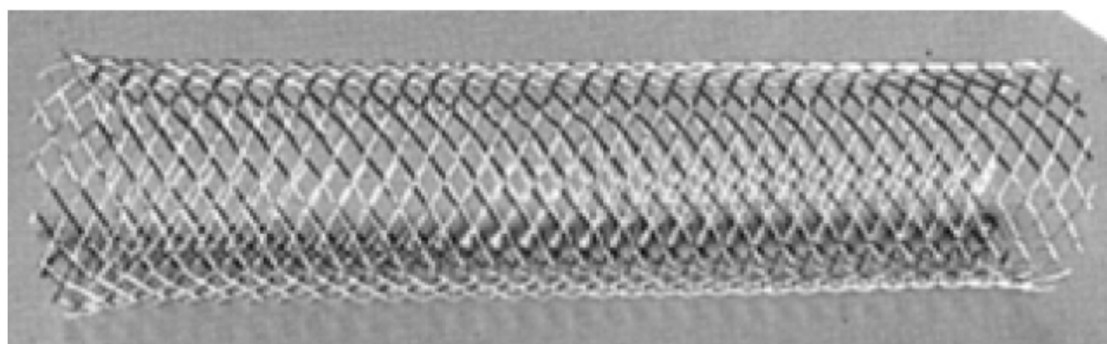
Η επιλογή του είδους της βιομηχανικής παραγωγής – κατεργασίας των stents εξαρτάται από τη μορφή και το σχήμα αυτών (ως προηγούμενη ενότητα). Τα σύρματα μπορούν να μορφωθούν σε stents με διάφορους τρόπους και χρήση συμβατικών τεχνικών, όπως συσπείρωση (τύλιγμα, coiling), περίπλεξη (πλεξίδα, braiding) ή πλέξη (knitting). Το απλούστερο σχήμα ενός stent είναι η σπείρα (coil), και όλα τα stents αυτού του σχήματος κατασκευάζονται από Nitinol και είναι **SX**.

Επίσης, συγκόλληση σε συγκεκριμένα σημεία μετά τη διαδικασία της μόρφωσης των συρμάτων παράγει stents κλειστού κελιού (closed-cell) όπως το *Symphony* (**SX** Nitinol), που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.6. Η διαδικασία αυτή αυξάνει την διαμήκη συν τοις άλλοις και την διαμήκη ευστάθεια του stent.

Το πιο κοινό **SX** stent που κατασκευάζεται από πλεξίδες συρμάτων κράματος κοβαλτίου είναι το WallStent, που φαίνεται στο Σχήμα 1.7. Αυτή η μέθοδος επιτρέπει συνεχή παραγωγή, δηλαδή τα stents μπορούν να κοπούν στο επιθυμητό μήκος από ένα μακρύ πλέγμα συρμάτων μορφής εύκαμπτου σωλήνα.



Σχήμα 1.6 Symphony stent



Σχήμα 1.7 WallStent

Η πλειοψηφία των στεφανιαίων και των αορτικών stents παράγονται μέσω κοπής με laser τέτοιων σωλήνων. Τυπικά, χρησιμοποιούνται lasers Nd:YAG, που επιτρέπουν πλάτος εντομών μικρότερο των 20μm. Πολύπλοκα μοτίβα μπορούν να παραχθούν με τον τρόπο αυτό, μέσω σωλήνων με διάμετρο που ξεκινά από 0.5 mm.

Τα **BX** stents κόβονται στην πτυχωμένη κατάσταση τους (ή σχεδόν σε αυτή), και απαιτούν μόνο απομάκρυνση μετά το κόψιμο και κάποια επιφανειακή κατεργασία, όπως π.χ. ηλεκτρικό γυάλισμα. Αυτά αναφέρονται ως balloon-mounted ή unmounted για πτύχωση με το χέρι.

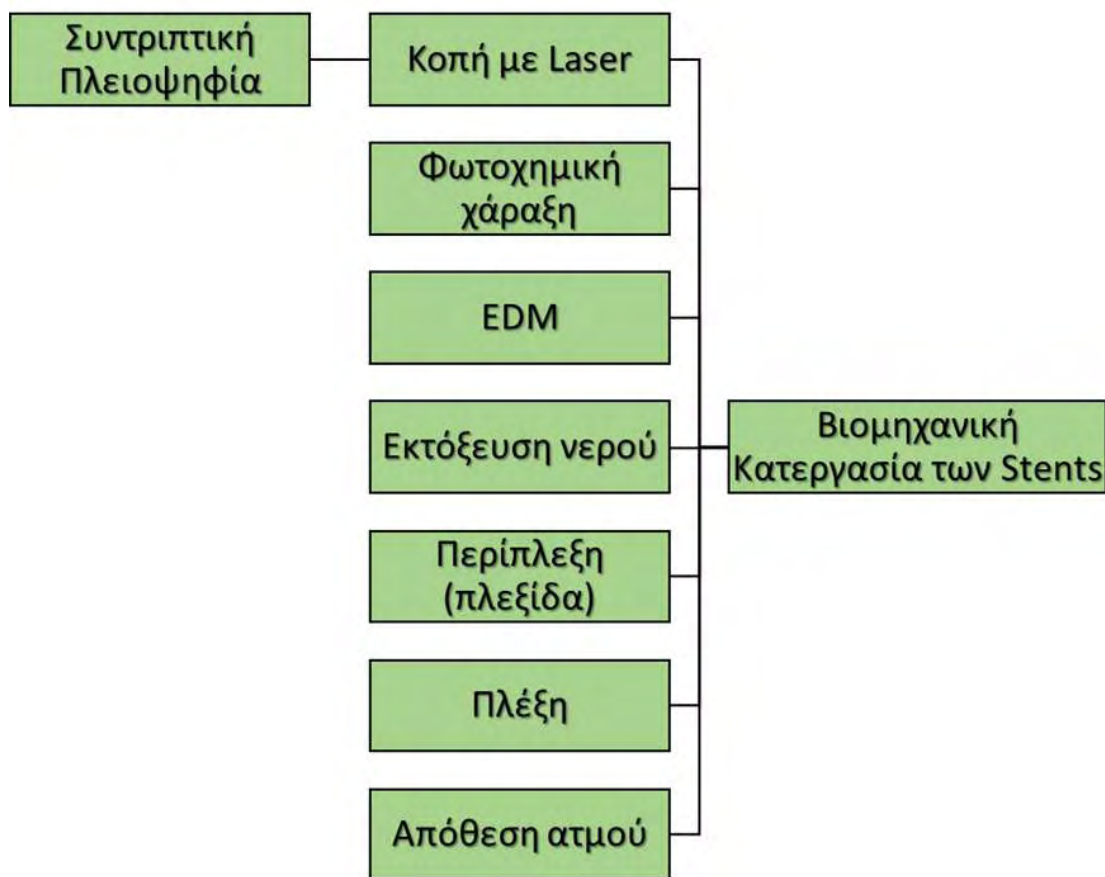
Αντίθετα, τα **SX** Nitinol stents μπορούν να κοπούν είτε στη «μικρή» τους διαμόρφωση (που απαιτείται μετά επέκταση και ρύθμιση σχήματος) είτε στην επεκτεταμένη τους κατάσταση. Και στις δύο περιπτώσεις χρειάζεται απομάκρυνση και γυάλισμα. Κατά συνέπεια, δεν μπορούν να παραδοθούν unmounted.

Η κοπή με laser δημιουργεί μια ζώνη που έχει επηρεαστεί από θερμότητα κατά μήκος της κοπής, που πρέπει να αφαιρεθεί για καλύτερες επιδόσεις των stents. Τέτοιο φαινόμενο δεν παρατηρείται πάντως σε μια άλλη μέθοδο κοπής, αυτή της εκτόξευσης νερού. Το νερό περιέχει και κάποια τραχέα πρόσθετα (abrasive additives) για προφανείς λόγους. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μέχρι στιγμής σε stents από ανοξείδωτο χάλυβα.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα μέθοδος βιομηχανικής κατεργασίας και παραγωγής είναι η φωτοχημική χάραξη (photochemical etching). Αυτή εφαρμόζεται σε stents από ανοξείδωτο χάλυβα με χαρακτηριστικούς τύπους που εμπορικά βρίσκονται ως LP, NIR, Endotex και aSpire (διαφορετικών εταιρειών παραγωγής). Ο τύπος aSpire καταδεικνύεται στο Σχήμα 1.8, ενώ συνοπτικά τα περιεχόμενα της τρέχουσας ενότητας φαίνονται στο γράφημα του Σχήματος 1.9. Στο τελευταίο αναφέρονται απλά και άλλες δύο μέθοδοι, που έχουν αναπτυχθεί πρόσφατα, η EDM (Electrical Discharge Machining, Μηχανική κατεργασία ηλεκτρικής εκκένωσης) και η απόθεση ατμού (vapor deposition).



Σχήμα 1.8 aSpire stent



Σχήμα 1.9 Μέθοδοι βιομηχανικής παραγωγής των stents

1.2.4 Γεωμετρία

Η αρχική (χρονολογικά παλιότερη) κατάταξη των stents με βάση τη γεωμετρία τους ήταν είτε αυλακωτού σωλήνα (slotted tube) είτε σπείρας (coil). Η 1^η από αυτές διέθετε εξαιρετική ακτινική αντοχή αλλά μικρή ευκαμψία. Το αντίθετο συνέβαινε για τη 2^η. Λόγω του γεγονότος αυτών των αντικρουόμενων επιταγών σχεδιασμού, αναπτύχθηκε μια πλειάδα γεωμετριών των stents, σε ένα πολύ ανταγωνιστικό περιβάλλον, με απώτερο σκοπό την επίτευξη του βέλτιστου συνδυασμού αντοχής και ευκαμψίας. Η πορεία αυτής της εξέλιξης τεκμηριώνεται στον κλάδο γεωμετρίας του χάρτη σχεδιασμού του Σχήματος 1.20.

Έγινε επιλογή κατάταξης των γεωμετριών των stents σε πέντε (5) υψηλού επιπέδου κατηγορίες: σπείρας (coil), ελικοειδούς σπείρας (helical spiral), υφαντού (woven), μεμονωμένων δακτυλίων (individual rings) και διαδοχικών δακτυλίων (sequential rings). Κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές συμπληρώνεται με κατάλληλες εξυγενισμένες υποκατηγορίες, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Σπείρα (coil)

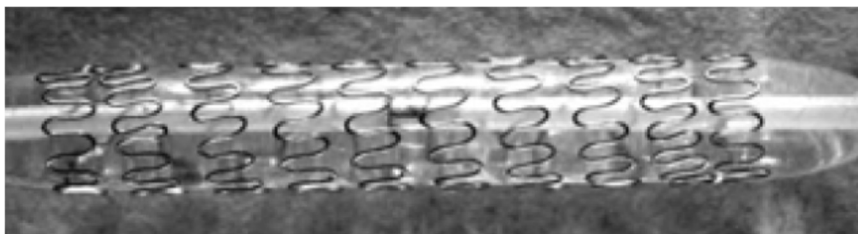
Είναι πολύ κοινή σε μη αγγειακές εφαρμογές (όπως πχ. στον οισοφάγο), καθώς ο σχεδιασμός της γεωμετρίας αυτής επιτρέπει την ανακτησιμότητα (retrievability) μετά την εμφύτευση. Πρόκειται για πολύ εύκαμπτα stents, αλλά μειωμένης αντοχής. Η μικρή δυνατότητα επέκτασης τους οδηγεί σε σχετικά μεγάλες διατομές. Στο Σχήμα 1.10 εμφανίζεται ένα παράδειγμα ενός τέτοιας γεωμετρίας οισοφαγικού stent (InStent Esophacoil).



Σχήμα 1.10 Esophacoil: Stent σπείρας από κορδέλα Nitinol

Ελικοειδής σπείρα

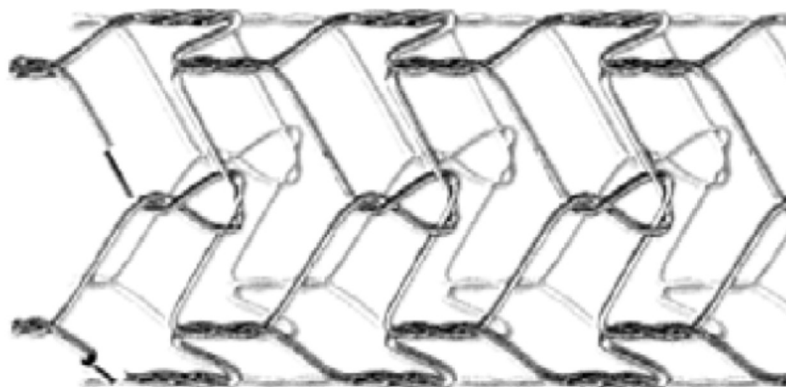
Αυτή η γεωμετρία γενικά προτιμάται λόγω της ευκαμψίας της. Με καθόλου ή ελάχιστα εσωτερικά σημεία σύνδεσης, διαθέτει πολύ μεγάλη ευκαμψία αλλά στερείται διαμήκους στήριξης. Για το λόγο αυτό, ένα τέτοιο stent μπορεί να υποβληθεί σε επιμήκυνση ή συμπίεση κατά την παράδοση και ανάπτυξη του, με αποτέλεσμα ακανόνιστα μεγέθη κελιών. Με εφαρμογή κάποιων εσωτερικών συνδέσμων, θυσιάζεται ένα ποσοστό ευκαμψίας υπέρ της διαμήκους ευστάθειας επιπρόσθετου ελέγχου του μεγέθους των κελιών. Το Crossflex stent, που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.11, αποτελεί παράδειγμα stent με γεωμετρία ελικοειδούς σπείρας και ελάχιστα εσωτερικά σημεία σύνδεσης.



Σχήμα 1.11 Crossflex stent (από ανοξείδωτο χάλυβα)

Υφαντό

Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει μια ποικιλία σχεδίων – μορφών, που κατασκευάζονται από ένα ή και περισσότερα νήματα σύρματος. Συχνά χρησιμοποιείται η μορφή πλεξίδας (braided) για *SX* stent (ως Σχήμα 1.7). Εδώ υφίσταται το πλεονέκτημα εξαιρετικής κάλυψης και ασφάλειας, πλην όμως υπάρχει κίνδυνος σημαντικής μείωσης του μήκους κατά την επέκταση. Η ακτινική αντοχή ενός τέτοιου είδους stent εξαρτάται επίσης σε υψηλό βαθμό από οποιαδήποτε στερέωση των άκρων του. Σχετικά παραδείγματα αποτελούν το Strecker stent (Σχήμα 1.3) και το Cook ZA stent, που φαίνεται στο Σχήμα 1.12. Πρόκειται για ένα *SX* stent κατασκευασμένο πλεκτό από σύρματα Nitinol, με χαρακτηριστικούς χρυσούς δείκτες τύπου μανικιού (sleeve-type gold markers).



Σχήμα 1.12 Cook ZA stent

Μεμονωμένοι Δακτύλιοι

Μεμονωμένοι δακτύλιοι σχήματος Z χρησιμοποιούνται συνήθως για να (υπο)στηρίξουν μοσχεύματα και άλλες ενδοπροσθέσεις. Μπορεί να συρραφούν ένα-ένα ή να συνδεθούν με το υλικό του μοσχεύματος κατά τη διάρκεια της παραγωγής. Αυτό πάντως το σχήμα δεν χρησιμοποιείται τυπικά μόνο του σε stents αιμοφόρων αγγείων.

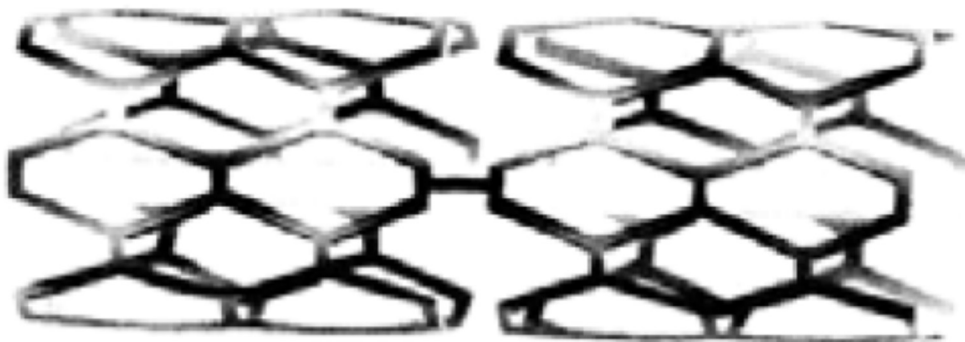
Διαδοχικοί Δακτύλιοι

Η κατηγορία αυτή περιγράφει stents που περιλαμβάνουν μια σειρά επεκτάσιμα δομικά μέλη σχήματος Z (που καλούνται struts, αντηρίδες), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω άλλων στοιχείων (που καλούνται γέφυρες ή αρθρώσεις ή κόμβοι). Ο εν λόγω τύπος κατασκευής αντιπροσωπεύει την πλειοψηφία των εμπορικά διαθέσιμων stents (περίπου το 70%). Η συγκεκριμένη κατηγορία δύναται να

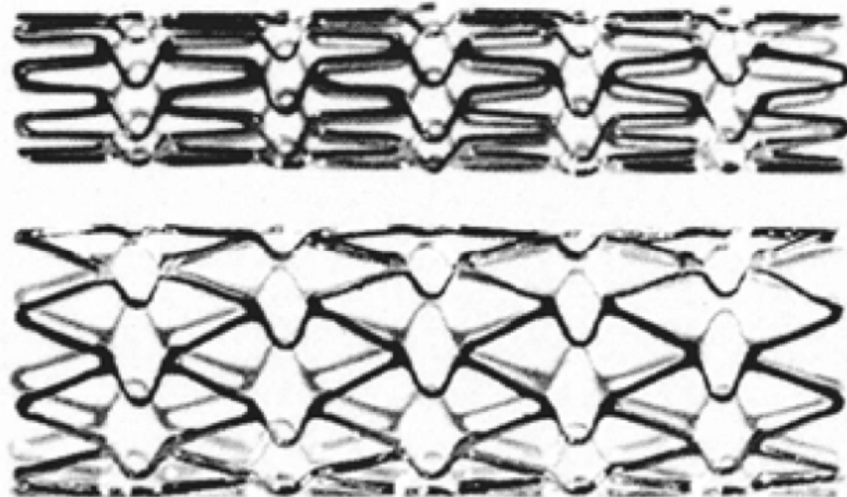
εξευγενιστεί περαιτέρω, περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα μέλη/στοιχεία και την φύση των κελιών που προκύπτουν, ως εξής:

- *Κανονική σύνδεση*: Περιγράφει στοιχεία γέφυρας που περιλαμβάνουν συνδέσεις σε όλα τα σημεία καμπής της περιμέτρου ενός δομικού μέλους.
- *Περιοδική σύνδεση*: Εδώ τα στοιχεία γέφυρας περιλαμβάνουν συνδέσεις σε ένα υποσύνολο των σημείων καμπής της περιμέτρου. Τα σημεία αυτά με τα μη συνδεδεμένα παρόμοια σημεία επαναλαμβάνονται με κάποιο δεδομένο πρότυπο (pattern).
- *Σύνδεση κορυφής – κορυφής ή κορυφής – κοιλάδας (peak-peak, peak-valley)*: Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις θέσεις που τα στοιχεία γεφύρωσης συνδέουν γειτονικά δομικά μέλη. Ο πρώτος όρος αφορά συνδέσεις των εξωτερικών ακτίνων, και ο δεύτερος των εσωτερικών ακτίνων των σημείων καμπής των εν λόγω μελών.
- *Κλειστό κελί*: Πρόκειται περί κατασκευής διαδοχικών δακτυλίων, όπου όλα τα εσωτερικά σημεία καμπής των δομικών μελών συνδέονται με στοιχεία γεφύρωσης. Τυπικά τούτο επιτυγχάνεται με κανονικές συνδέσεις κορυφής – κορυφής. Κάποια αρχικά σχέδια με κελιά μορφής σχισμής (slotted cells), όπως το Palmaz stent (Σχήμα 1.13) αποδείχτηκαν ικανοποιητικής αντοχής, αλλά χωρίς ευκαμψία. Μεταγενέστερες μορφές σχεδιασμού, όπως το NIR stent (Σχήμα 1.14) οδήγησαν σε βελτιώσεις προσθέτοντας έναν εύκαμπτο σύνδεσμο (flex-connector). Αυτά τα στοιχεία σχήματος U, V, S ή N παραμορφώνονται πλαστικά κατά τη διάρκεια της κάμψης, επιτρέποντας είτε τον διαχωρισμό είτε την εμφώλευση (nest-together) των γειτονικών δομικών στοιχείων, για ευκολότερη αντιμετώπιση αλλαγών μορφής. Έτσι επιτυγχάνεται ομοιόμορφη επιφάνεια και βέλτιστη κρηπίδωση (scaffolding), με κάποια πάντως απώλεια της ευκαμψίας.
- *Ανοιχτό κελί*: Εδώ κάποια ή ακόμα και όλα τα εσωτερικά σημεία καμπής των δομικών στοιχείων δεν συνδέονται με στοιχεία γεφύρωσης. Τούτο επιτρέπει περιοδικές συνδέσεις κορυφής – κορυφής, κορυφής – κοιλάδας και συνδέσεις μεταξύ των μέσων των αντηρίδων (mid-strut to mid-strut), καθώς επίσης και αναρίθμητους υβριδικούς συνδυασμούς. Σε αυτή τη γεωμετρία των ανοιχτών κελιών, τα μη συνδεδεμένα μέλη συνεισφέρουν στην διαμήκη ευκαμψία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα των περιοδικών συνδέσεων κορυφής μπορούν να παρατηρηθούν στο **SX** SMART stent (Σχήμα 1.15) και στο **BX** AVE S7

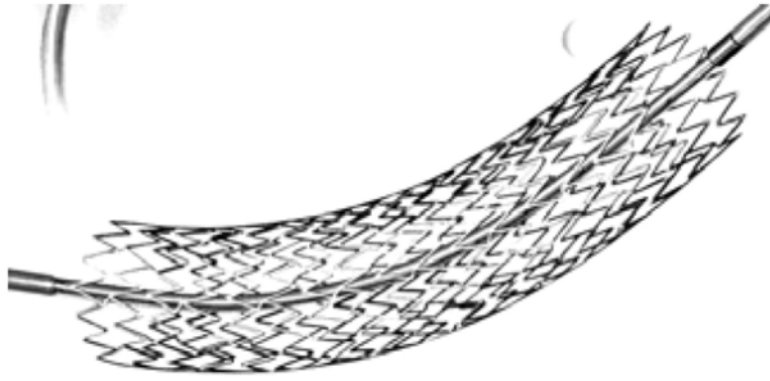
stent (Σχήμα 1.16). Η σύνδεση κορυφής – κοιλάδας (όπως π.χ. στο ACS Multilink stent του Σχήματος 1.17) πρακτικά απαγορεύει την εκ των προτέρων μείωση του μήκους και εξασφαλίζει εξαιρετική ευθυγράμμιση, πλην όμως οι σύνδεσμοι χρησιμοποιούν υλικό, το οποίο θα μπορούσε αλλιώς να ενταχθεί στα δομικά στοιχεία, ενώ είναι μικρότερης αντοχής από τη σύνδεση κορυφής – κορυφής. Πέραν αυτών των δύο τύπων συνδέσεων, υπάρχουν παραδείγματα και άλλων εναλλακτικών, όπως το BeStent (**BX**, Σχήμα 1.18), που διαθέτει συνδέσεις μέσω αντηρίδων, και τέλος το Navius ZR1 (Σχήμα 1.19), το οποίο λόγω της μορφής του δεν μπορεί να κατηγοριοποιηθεί.



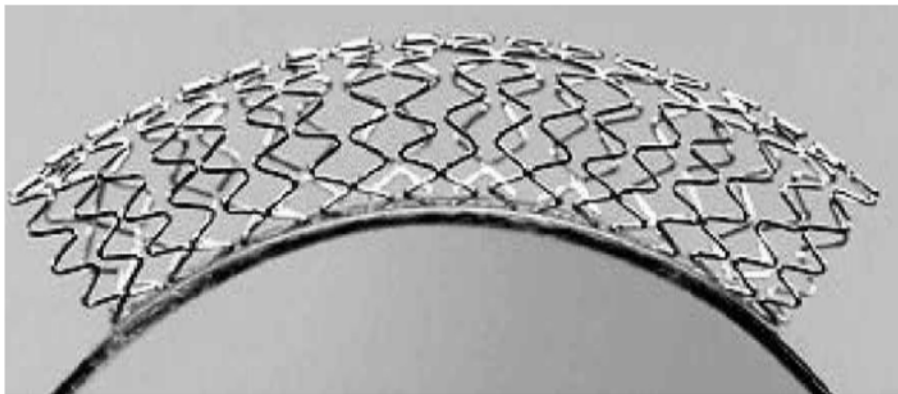
Σχήμα 1.13 Palmaz stent



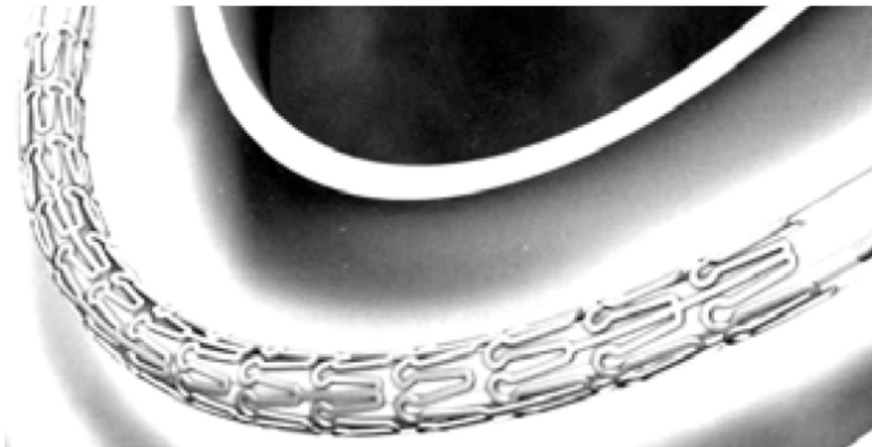
Σχήμα 1.14 NIR stent



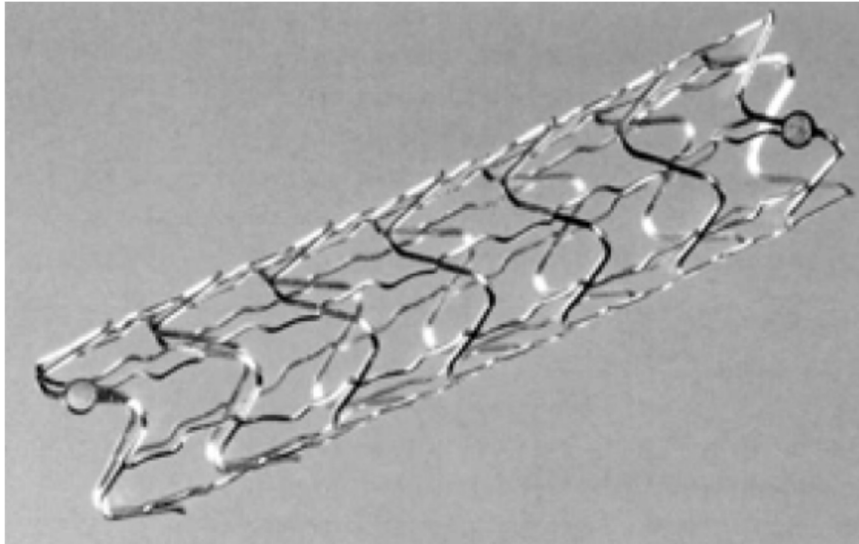
Σχήμα 1.15 SMART stent



Σχήμα 1.16 AVE S7 stent



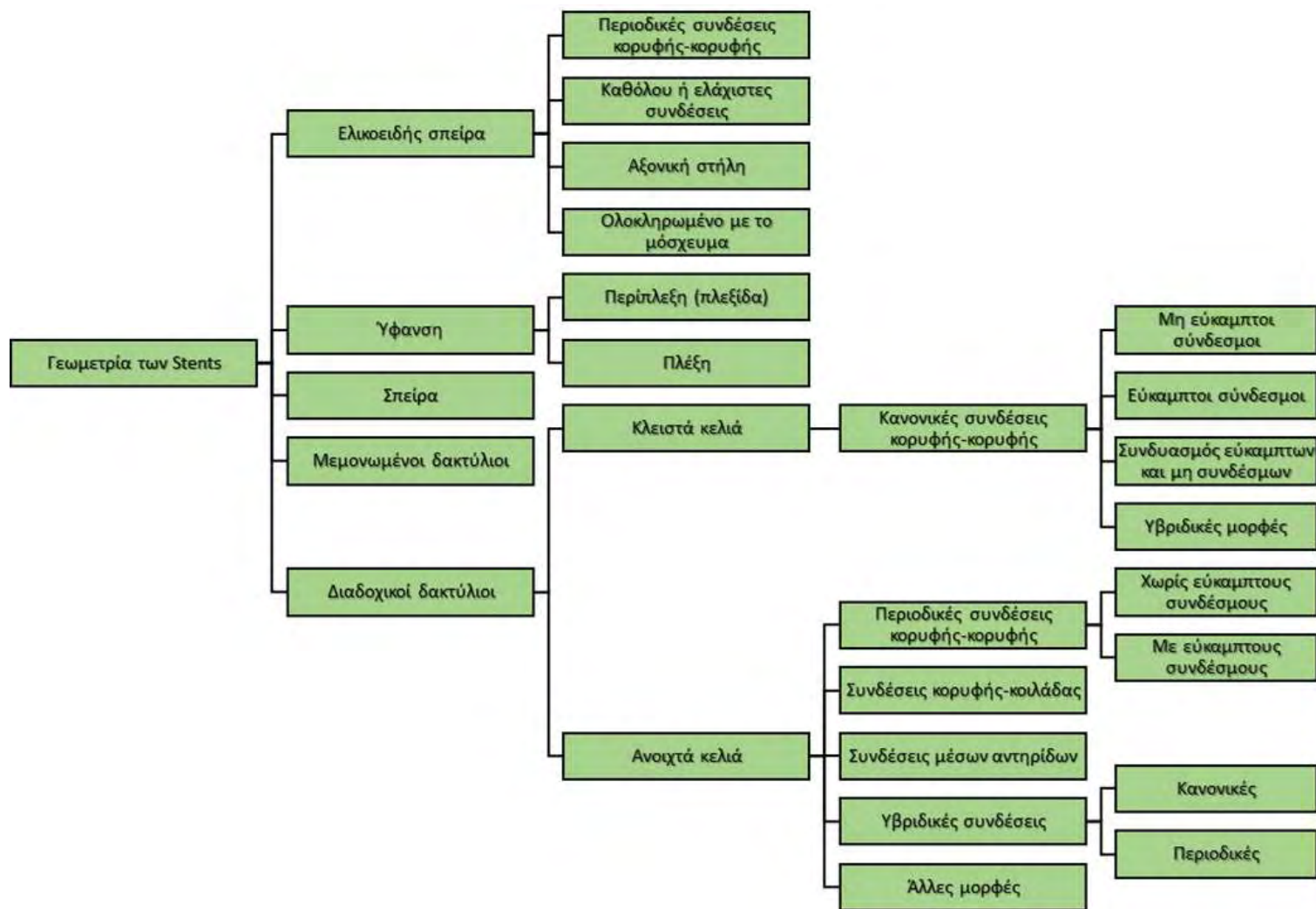
Σχήμα 1.17 ACS Multilink stent



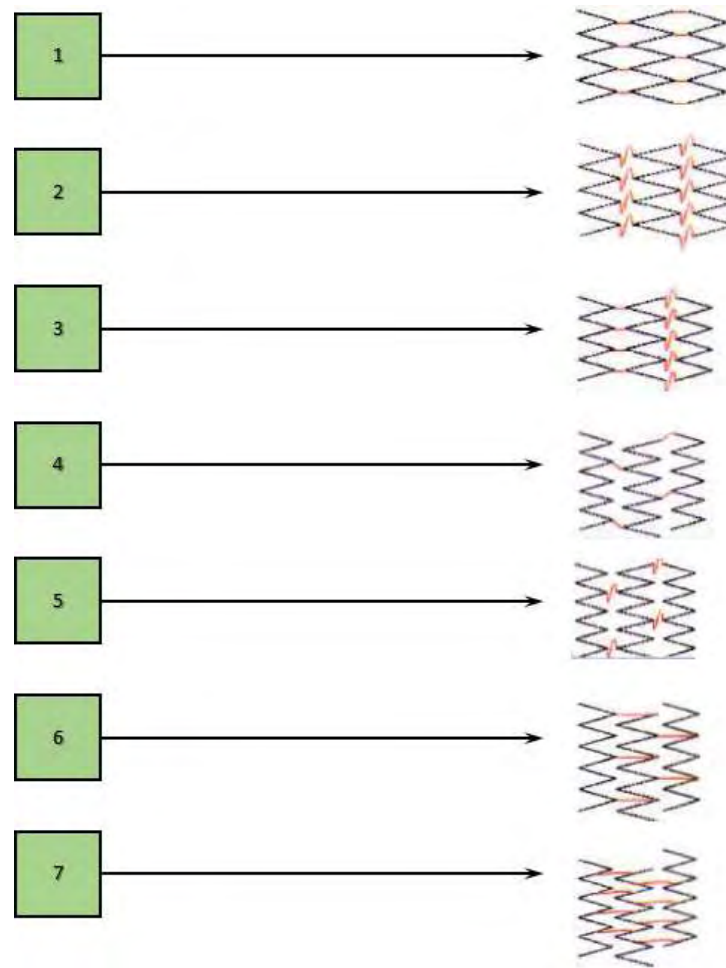
Σχήμα 1.18 BeStent



Σχήμα 1.19 Navius ZR1 stent



Σχήμα 1.20 Γεωμετρία των stents

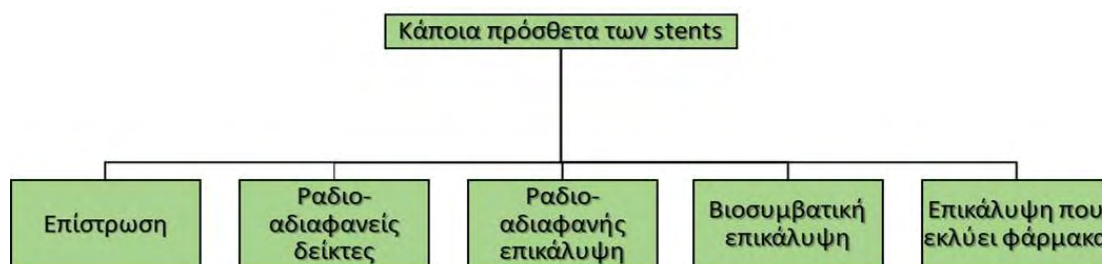


Σχήμα 1.20β Γεωμετρία των stents

1.2.5 Πρόσθετα

Η τελική κατάσταση, που βρίσκεται ένα stent πριν τη χρήση του σε αγγεία, χαρακτηρίζεται και από διάφορα πρόσθετα στοιχεία, όπως η τελική επικάλυψη του υλικού είτε η παρουσία κάποιων markers (δεικτών). Αυτά εξυπηρετούν διάφορους σκοπούς, αλλά εδώ θα επικεντρωθούμε σε θέματα ακτινοδιαγνωστικότητας (radiopacity).

Ειδικότερα, τα stent με υλικό τον ανοξείδωτο χάλυβα ή το Nitinol είναι μερικές φορές δύσκολα ορατά φθοριοσκοπικά, όταν είναι μικρά σε διαστάσεις. Για να βελτιωθεί η ορατότητα τους σε ακτίνες X, συχνά κάποιοι δείκτες συνδέονται με τα stents. Αυτοί είναι συνήθως από χρυσό, λευκόχρυσο ή ταντάλιο, και είναι είτε «μανίκια» πρεσαρισμένα πάνω σε κάποια αντηρίδα, είτε κάποια ηλωτά στοιχεία. Ηλεκτρολυτικές διαδικασίες επίσης χρησιμοποιούνται για περαιτέρω βελτίωση. Στο απλουστευμένο διάγραμμα του Σχήματος 1.21 φαίνονται οι μέχρι στιγμής διαδικασίες που σχετίζονται με την εν λόγω βελτίωση, χωρίς άλλες λεπτομέρειες αναφοράς.



Σχήμα 1.21 Κάποια πρόσθετα των stents

1.3 Περιληπτικά Συμπεράσματα

Προκύπτει το εξής ερώτημα με βάση όλα αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω: Οι τόσο πολύ διαφορετικές μορφές των stents βασίζονται σε επιστημονικές τεκμηριώσεις ή σε θέματα που άπτονται σε ευρεσιτεχνίες και αγορές; Παρόλο το γεγονός ότι στο περιεχόμενο του τρέχοντος Κεφαλαίου δεν υπήρξε καμιά άμεση αναφορά σε κατασκευαστικό οίκο κάποιου stent, η αναζήτηση σχετικών πληροφοριών διαδικτυακά οδήγησε σε δημοσιεύσεις ιατρικού περιεχομένου και όχι απτόμενου της Μηχανικής. Κατά συνέπεια, η αναγκαιότητα κάποιας επιστημονικής συνεισφοράς επί της μηχανικής συμπεριφοράς των stents φαίνεται επίκαιρη, και προς τούτο σκοπεύει η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή.

Κεφάλαιο 2ο : Μηχανικές Ιδιότητες και Συμπεριφορά

Μεταλλικών Stents

2.1 Γενικές Επισημάνσεις

Οι μηχανικές ιδιότητες και η σχετική απόκριση των μεταλλικών stents έχει αποτελέσει αντικείμενο μεγάλου αριθμού δημοσιεύσεων και ερευνών, ο μεγαλύτερος αριθμός των οποίων – δυστυχώς - δεν είναι ελεύθερα προσβάσιμες μέσω του HEAL-Link, γεγονός που υπήρξε σημαντικό εμπόδιο στην εκπόνηση της παρούσας Διατριβής. Παρά ταύτα, και με την αρωγή μελών της Ιατρικής Σχολής του ΠΘ, η πληροφόρηση επί του όλου επιστημονικού αντικειμένου ήταν άκρως ικανοποιητική και θα αντικατοπτριστεί στο περιεχόμενο που ακολουθεί.

2.2 Μηχανικές Ιδιότητες των Μεταλλικών Stents

2.2.1 Χαρακτηριστικά των Υλικών

Το υλικό κατασκευής μπορεί να είναι είτε καθαρό (αμιγές) είτε κράμα με κάποια ποσοστιαία περιεκτικότητα κάποιων επί μέρους υλικών. Οι εν λόγω βασικές ιδιότητες κατά συνέπεια είναι: Σύσταση υλικού, μέτρο ελαστικότητας, αντοχή σε εφελκυσμό, οριακή αντοχή, επιμήκυνση λόγω εφελκυσμού (%), λόγος Poisson, αντοχή (τάση) διαρροής, ισοεντροπικός συντελεστής σκληρότητας και πυκνότητα μάζας. Για κάποια δημοφιλή μεταλλικά stents, ο Πίνακας 2.1 περιέχει αριθμητικά τις εν λόγω ιδιότητες. Αυτός παρατίθεται στην επόμενη σελίδα.

Λόγω της μεγάλης ποικιλίας, ο Πίνακας αυτός είναι άκρως ενδεικτικός, αλλά σε μεγάλο βαθμό ανταποκρίνεται στο σκοπό της παρούσας.

Υλικό	Ποσοστιαία % Σύνθεση/Σύσταση	Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	Εφελκυστική Αντοχή (MPa)	Οριακή Αντοχή (MPa)	Επιμήκυνση (%)	Λόγος Poisson	Όριο Διαρροής (MPa)	Ισοεντροπικός συντελεστής σκληρότητας (GPa)	Πυκνότητα (kgf/m ³)
Ανοπτησμένος Ανοξειδωτός Χάλυβας 316L	17 Cr, 12 Ni, 2.5 Mo, < 0.03 C, αναλογικά Fe	193	260	550	50	0.30	300	2	7850
Nitinol (Shape Memory Alloy austenite)	55 Ni , 45 Ti	83	195 – 690	960	25 – 50	0.30	560	1	6478
Ταντάλιο	Αμιγές	185	165	205	40	0.35	170	-	1669
Elgiloy (Κράμα Co – Cr – Mo) θερμικά κατεργασμένο σε 525 ⁰ C για πέντε ώρες	40 Co, 20 Cr, 7 Mo, 15.5 Ni, 1 Be, 0.15 C, αναλογικά Fe	190	690	1020	38	0.226	520	-	8300

Πίνακας 2.1 Ιδιότητες υλικού δημοφιλών μεταλλικών Stents

2.2.2 Εισαγωγικά Στοιχεία

Η ανάλυση και ο σχεδιασμός των μεταλλικών stents με βάση τις αρχές της Μηχανικής έχει κατά το παρελθόν πραγματοποιηθεί (και συνεχίζει να πραγματοποιείται) μέσω διαφόρων μεθόδων και τεχνικών. Υφίσταται σημαντικός όγκος προηγούμενων αλλά και πρόσφατων εργασιών, οι οποίες έχουν δημοσιευθεί στην διεθνή βιβλιογραφία και αφορούν το όλο επιστημονικό θέμα, με τα προβλήματα ελεύθερης προσβασιμότητας που προαναφέρθηκαν.

Πιο συγκεκριμένα, κάποιες από τις εν λόγω εργασίες βασίζονται σε προσεγγιστικά μοντέλα (όπως π.χ. Lashkove and Azhari, 1997), ενώ άλλες στην εμπειρική συσχέτιση με πειράματα.

Παλαιότερα, οι Fallone et al. (1998), Rogers et al. (1999) και Dumoulin and Cochelin (2000) ανέλυσαν την πλαστική παραμόρφωση δύσκαμπτων stents με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης, η ίδια μέθοδος εφαρμόστηκε τόσο από τους Etave et al. (2001) όσο και από τους Migliavacca et al. (2002) για την εύρεση των μηχανικών ιδιοτήτων στεφανιαίων stents, ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει τόσο η μελέτη όσο και οι βιβλιογραφικές αναφορές της δημοσίευσης των Ιαπώνων Daishuke et al. (2008). Παρόμοιες αριθμητικές αναλύσεις μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων COMSOL παρουσιάστηκαν και από τους Ghosh et al. (2011).

Από πλευράς κατ' αρχήν αντίληψης περί των πλέον σημαντικών μηχανικών χαρακτηριστικών των μεταλλικών stents αλλά και σύνδεσης με τα ευρήματα οποιασδήποτε μορφής αναλυτικών ή/και προσεγγιστικών λύσεων, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον τα πειραματικά αποτελέσματα που κατά καρούς έχουν αναφερθεί (αλλά και οι σχετικές διατάξεις οργάνων, οι αντίστοιχες παραδοχές και οι πιθανές απλουστεύσεις). Στην εισαγωγή της εργασίας των Wang and Ravi-Chandar (2004a) παρατίθεται μια συνοπτική αναφορά σε κάποιες πειραματικές μελέτες (με τις αντίστοιχες αναφορές, έως τη χρονολογία δημοσίευσης) όπου διαπιστώθηκαν τα ακόλουθα:

(1) Τα φορτία επί των stents δεν εφαρμόζονταν με τρόπο συνεπή προς την πίεση που αυτά δέχονται όταν έχουν εισαχθεί σε αγγεία (in vivo).

(2) Περιπτώσεις επιβολής σημειακών ή περιφερειακών φορτίων σε stents κατά τη διάρκεια πειραμάτων μπορεί να οδηγήσουν σε σχέσεις φορτίου – διαμέτρου, η οποία όμως δεν ανταποκρίνεται στο συζευγμένο πρόβλημα αρτηρίας-stent ή στην πραγματική ροή του αίματος.

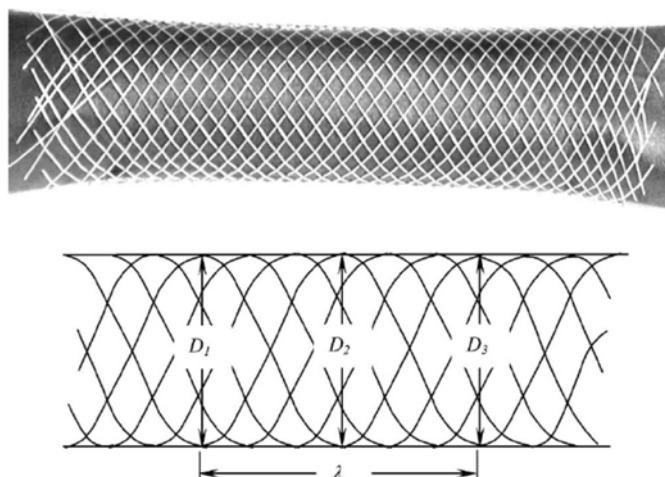
(3) Οι περισσότερες διατάξεις αφορούσαν την επιβολή μόνο εξωτερικής πίεσης στο stent, με τη δυνατότητα επανασχεδιασμού τους για επιβολή και εσωτερικής πίεσης. Όμως, το μέσο επιβολής της πίεσης (συνήθως κάποιος εύκαμπτος λαστιχένιος σωλήνας) διαθέτει την δική του δυσκαμψία, η οποία θα πρέπει να μετράται και αφαιρείται κάθε φορά από αυτή του stent. Επίσης, επειδή τα συρμάτινα stents επιδεικνύουν μεταβαλλόμενη δυσκαμψία κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης τους, οδηγείται κανείς σε ένα πολύπλοκο μη γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα (inverse problem) για τον υπολογισμό της εν λόγω δυσκαμψίας.

2.2.3 Περιγραφή κάποιων πειραματικών διατάξεων

Στο παρόν εδάφιο περιγράφονται δύο άκρως ενδιαφέρουσες πειραματικές διατάξεις, οι οποίες έχουν εφαρμοστεί για τη μέτρηση της μηχανικής συμπεριφοράς των stents, σε περιβάλλον που προσομοιάζει με επιτυχία τις πραγματικές συνθήκες. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ερμηνεύονται κατόπιν με βάση τις αρχές της Μηχανικής. Η πρώτη διάταξη αφορά ένα «γυμνό» Wallstent από ανοξείδωτο χάλυβα και η δεύτερη ένα Nitinol Wallstent (αμφότερα **SX**).

1^η Πειραματική Διάταξη [Wang and Ravi-Chandar (2004α)]

Το stent του Σχήματος 2.1 χρησιμοποιήθηκε σαν δείγμα για την ανάπτυξη συσκευής εκτίμησης της σχέσης εσωτερικής πίεσης – διαμέτρου όσο και εξωτερικής πίεσης – διαμέτρου. Είναι κατασκευασμένο από σύρμα τυλιγμένο σε ελικοειδή μορφή και πλεγμένο σε σχήμα απλού κύματος.



Σχήμα 2.1 Φωτογραφία και σχηματικό διάγραμμα του δείγματος. Φαίνονται οι θέσεις που μετρήθηκαν διάμετρος και το μήκος του stent κατά τη διάρκεια του πειράματος, ενώ το stent απεικονίζεται στην αφόρτιστη κατάσταση (μηδενικές πιέσεις)

Τα σημεία που συναντώνται τα σύρματα δεν είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους, αλλά συγκρατούνται μέσω μόνο της τριβής. Αποτελείται από 36 σύρματα διαμέτρου $170\mu\text{m}$ το καθένα, σε απλή ελικοειδή μορφή (18 έλικες από κάθε πλευρά). Οι παράμετροι και τα χαρακτηριστικά του δείγματος περιέχονται στον Πίνακα 2.2.

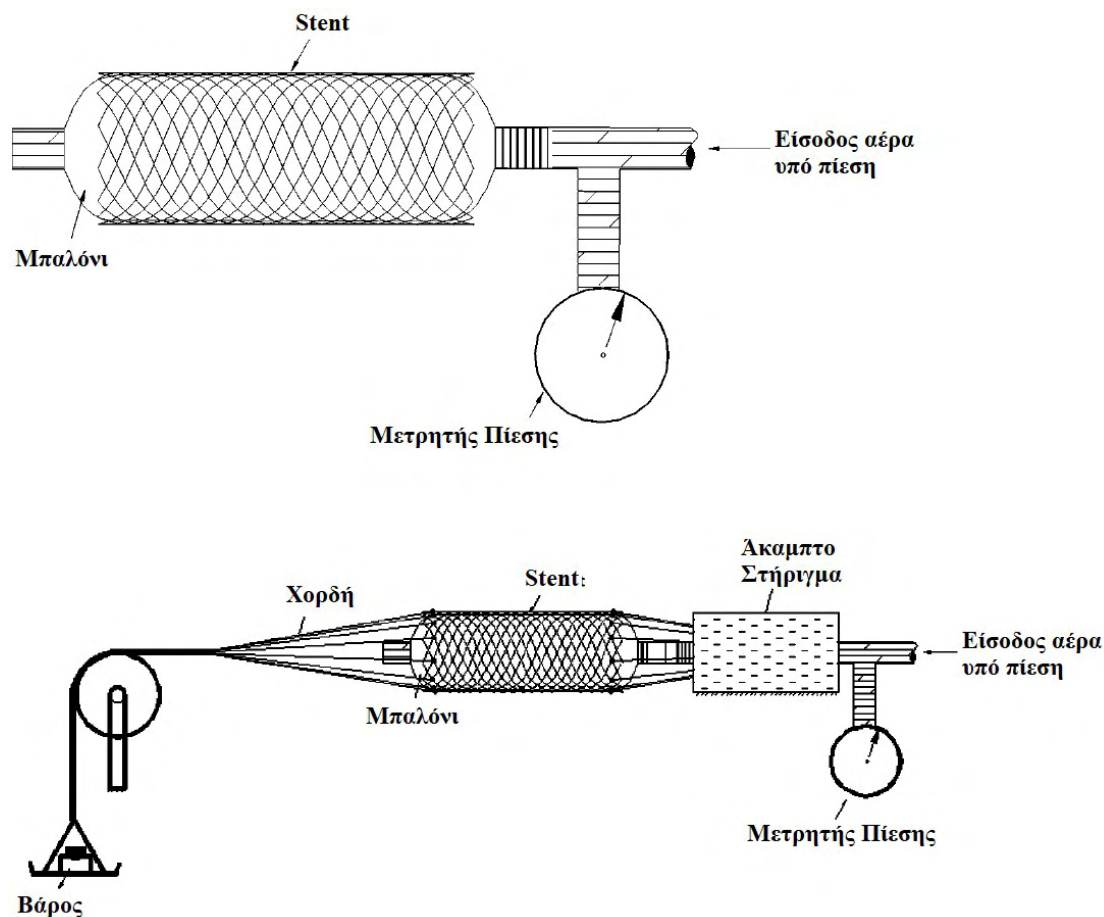
Πίνακας 2.2 Παράμετροι – Χαρακτηριστικά του Wallstent

n	Αριθμός Συρμάτων	36
E	Μέτρο Ελαστικότητας	193 GPa
G	Μέτρο Διάτμησης (στην ελαστική περιοχή)	74.2 GPa
d	Διάμετρος σύρματος	$170\mu\text{m}$
a_0	Γωνία κορυφής της έλικας υπό μηδενικές πιέσεις	34^0
r_0	Ακτίνα του stent υπό μηδενικές πιέσεις	0.01 m
L	Μήκος του stent	0.08 m

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, στις άκρες του stent η πλέξη είναι χαλαρή, αυτές δε οι άκρες ενσωματώνονται στα τοιχώματα του αγγείου (στην πράξη), προσφέροντας επαρκή αγκύρωση και σταθερή θέση του stent. Η περιοχή των άκρων δεν συμμετείχε στο πείραμα, καθόσον η πίεση εφαρμόστηκε σε μήκος περίπου 70 mm και οι αλλαγές του μήκους μετρήθηκαν σε ένα μήκος 40 mm περί το μέσο του stent.

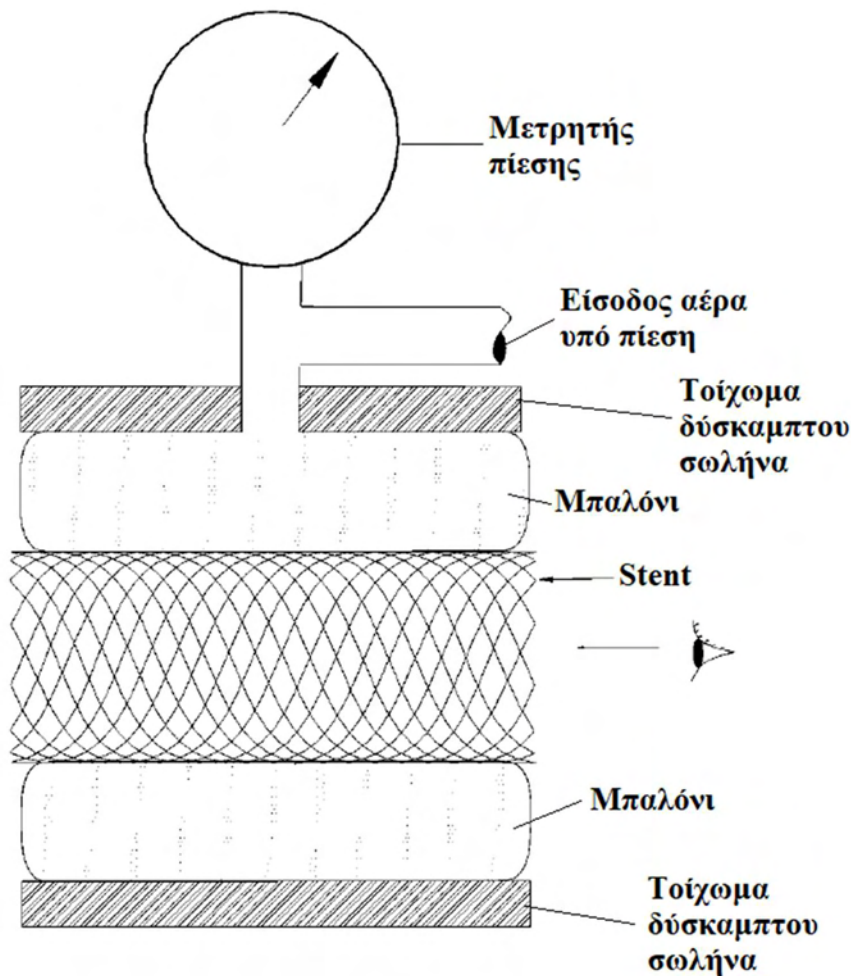
Με βάση το γεγονός ότι ένα τέτοιου είδους stent βρίσκεται μεταξύ δύο οριακών καταστάσεων: πλήρους κατάρρευσης και πλήρους ανάπτυξης, στο πείραμα το εύρος των πιέσεων που επιβλήθηκαν ήταν ανάλογο αυτών των καταστάσεων. Οι μετρήσεις δε πραγματοποιήθηκαν εντός του εύρους αυτού. Η σχηματική αναπαράσταση της διάταξης του πειράματος για το stent υπό εσωτερική πίεση απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2., όπου διακρίνεται μια σακούλα πολυαιθυλενίου που τοποθετήθηκε εσωτερικά του stent. Με σκοπό να εξαλειφθεί η αντίσταση του film πολυαιθυλενίου έναντι εμφύσησης αέρα, η σακούλα είχε πολλές πτυχώσεις, οπότε μετά την είσοδο του αέρα υπό πίεση απλά διογκώθηκε χωρίς το φιλμ να τεντωθεί. Επίσης, για την αποφυγή τριβής μεταξύ

σακούλας και stent (καθώς αυτό αναπτύσσεται, δηλαδή αυξάνεται η διάμετρος του και μειώνεται το μήκος του), τοποθετήθηκε διαμήκως μεταξύ stent και σακούλας ένα λεπτό λιπαρό οξικό φύλλο.



Σχήμα 2.2 Stent υπό εσωτερική πίεση χωρίς ή με παρεμπόδιση αξονικής (αλλά όχι ακτινικής) παραμόρφωσης

Η πειραματική διάταξη για την επιβολή εξωτερικής πίεσης αποτελείται από έναν δύσκαμπτο σωλήνα χαρτονιού, εντός του οποίου εισάγεται το stent, με κενά άνω και κάτω μεταξύ τους αμφίπλευρα στη διαμήκη διεύθυνση, τα οποία γεμίζουν με σακούλες πολυαιθυλενίου, σύμφωνα με το Σχήμα 2.3. Ίδια μέρη όπως στην προηγούμενη διάταξη λαμβάνεται για την αποφυγή αντίστασης έναντι εμφύσησης και τριβής.



Σχήμα 2.3 Πειραματική διάταξη για την επιβολή εξωτερικής πίεσης στο stent

Για τον προσδιορισμό της σχέσης πίεσης-διαμέτρου ήταν απαραίτητη στα πειράματα αυτά να μετράται η διάμετρος σε διαφορετικά επίπεδα πίεσης. Αυτό επιτεύχθηκε με δύο τρόπους, εξαρτώμενους από το είδος της επιβαλλόμενης πίεσης.

Στην περίπτωση εσωτερικής πίεσης η διαδικασία ήταν απ' ευθείας: Οι τιμές της πίεσης καταγράφηκαν από το μετρητή, μετά δε την πάροδο 3 – 5 λεπτών (για να σταθεροποιηθεί η πίεση σε κάθε δεδομένη τιμή της), φωτογραφήθηκε το παραμορφωμένο stent με χρήση ψηφιακής κάμερας υψηλής ανάλυσης (1600x1200 pixel). Μετρώντας τη διάμετρο του στα τρία σημεία του Σχήματος 2.1, υπολογίστηκε η μέση διάμετρος για τη συγκεκριμένη πίεση. Για ένα stent από σύρματα, η αξονική επιβράχυνση που αντιστοιχεί σε ακτινική επέκταση μπορεί να είναι σημαντική, οπότε η αλλαγή του μήκος μετρήθηκε μεταξύ 13 κόμβων στο μέσο του stent, με αρχική μεταξύ τους απόσταση 42 mm. Με το τρόπο αυτό αποκτήθηκε η πειραματική μηχανική συμπεριφορά υπό μορφή καμπύλης διαμέτρου – εσωτερικής πίεσης.

Αντίθετα, υπό εξωτερική πίεση, τα σημεία τομής μεταξύ των συρμάτων δεν ήταν διαθέσιμα προς παρατήρηση. Για το λόγο αυτό οι αλλαγές στη διάμετρο βρέθηκαν κοιτώντας αξονικά και μετρώντας το ορατό άνοιγμα. Οι αλλαγές του μήκους δεν ήταν δυνατόν να παρακολουθηθούν, αλλά λόγω του φαινομένου σύζευξης μεταξύ αξονικής και ακτινικής παραμόρφωσης (που θα συζητηθεί παρακάτω) οι μετρήσεις της ακτινικής χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της αντίστοιχης αξονικής παραμόρφωσης. Οι πραγματικές παραμορφώσεις ελήφθησαν από λογισμικό επεξεργασίας εικόνων (Adobe Photoshop), οι οποίες προήλθαν από μεγάλη μεγέθυνση του ορατού ανοίγματος (με ειδοκό φακό). Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής ήταν η επίτευξη χωρικής ακρίβειας 25 μm .

Σύζευξη παραμορφώσεων: Σύμφωνα με τα ανωτέρω, αυτή διαδραμάτισε πρωτεύοντα ρόλο στις σχετικές μετρήσεις. Η εν λόγω σύζευξη μπορεί να βρεθεί θεωρώντας ότι υπό μικρά φορτία που δρουν στο stent, η επιμήκυνση των συρμάτων είναι αμελητέα. Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα του stent ισούται με r και το αξονικό μήκος (κορυφές της έλικας) ισούται με λ , τότε το συνολικό μήκος του σύρματος περί μια και μοναδική κορυφή της έλικας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\ell = \sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2 r^2} \quad (2.1)$$

Κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης του stent, το συνολικό μήκος του σύρματος δεν μεταβάλλεται, οπότε οι αλλαγές της ακτίνας του r πρέπει να συνοδεύονται από αλλαγές του λ , σύμφωνα με την έκφραση (2.1). Αντί να χρησιμοποιηθούν τα λ και r , είναι προτιμητέο να γίνει χρήση των ανηγμένων αξονικών και ακτινικών παραμορφώσεων. Για τις μεγάλες μετατοπίσεις που παρατηρήθηκαν στο πείραμα, η πραγματική ανηγμένη ακτινική παραμόρφωση e_R και η αντίστοιχη αξονική e_a επιστρατεύτηκαν για τις μετρήσεις, μέσω των σχέσεων

$$e_R = \ln \frac{r}{r_0} \quad , \quad e_a = \ln \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.2)$$

οπότε, με βάση την (2.1) θα ισχύει τελικά ότι

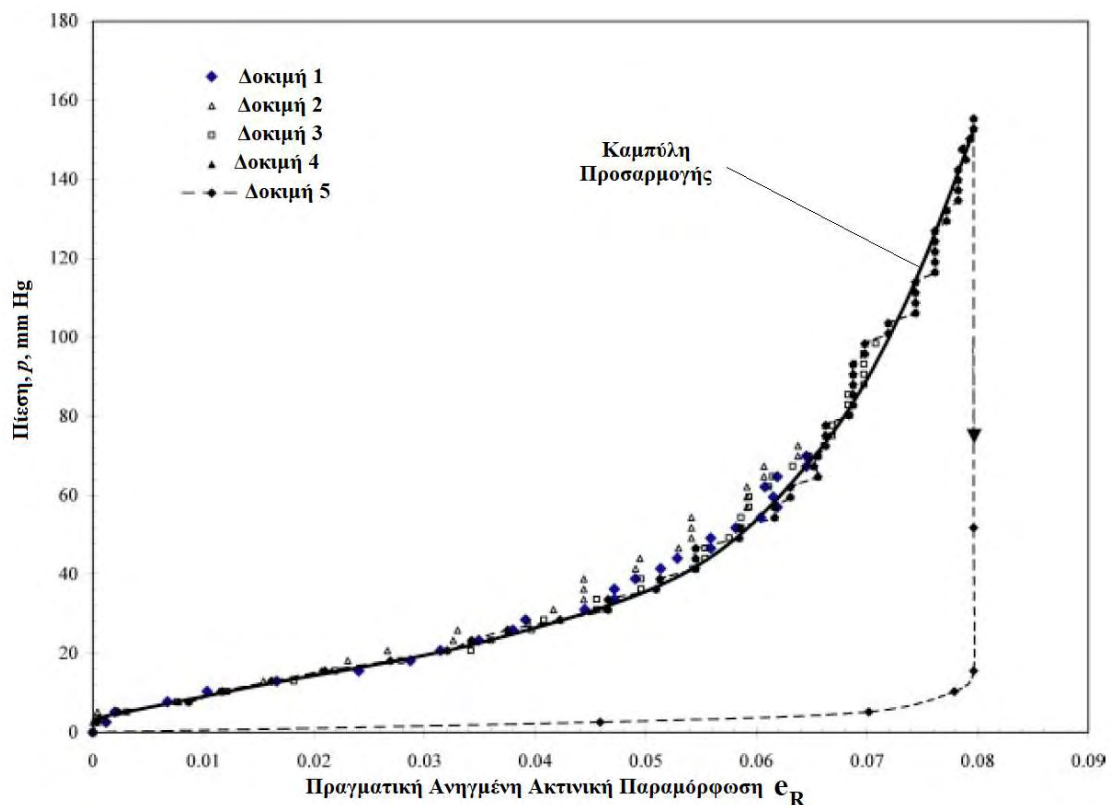
$$e_a = \frac{1}{2} \ln \frac{\ell^2 - 4\pi^2 r^2}{\ell_0^2 - 4\pi^2 r_0^2} \quad (2.3)$$

Άρα, από μια μέτρηση της τρέχουσας ακτίνας r , αμφότερες οι ανηγμένες αξονικές και ακτινικές παραμορφώσεις μπορούν να υπολογιστούν από τις δύο παραπάνω σχέσεις. Στα συνοπτικά αποτελέσματα που παρατίθενται ακολούθως και στην επίσης συνοπτική θεωρητική τους τεκμηρίωση – αντιστοίχιση, θα καταδειχτεί ότι η διαδικασία του 1^{ου} αυτού πειράματος διαθέτει πολύ μεγαλύτερη αποδοτικότητα

συγκρινόμενη με πειράματα μόνο υπό εσωτερική πίεση και χρήση των σχετικών αποτελεσμάτων για τον υπολογισμό της αξονικής παραμόρφωσης υπό εξωτερική πίεση στο stent.

Συνοπτικά πειραματικά αποτελέσματα:

Τα αποτελέσματα της σειράς των πειραμάτων, σύμφωνα με τα παραπάνω, κατέδειξαν ότι η προτεινόμενη διάταξη και μεθοδολογία μετρήσεων δουλεύει καλά για τον έρευνα της σχέσης πίεσης – διαμέτρου στα stents. Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται η μεταβολή της πραγματικής ανηγμένης ακτινικής παραμόρφωσης e_R συναρτήσει της εσωτερικής πίεσης p . Η σκέδαση των αποτελεσμάτων οφείλεται κύρια λόγω του τρόπου μέτρησης της πίεσης και του ελέγχου αυτής. Η καμπύλη αποφόρτισης (δοκιμή 5) διαφέρει κατά πολύ από την γραμμή τάσης της μεταβολής (trendline), γεγονός που αποδίδεται στην τριβή και την αλληλεπίδρασή της με την απόκριση του stent.

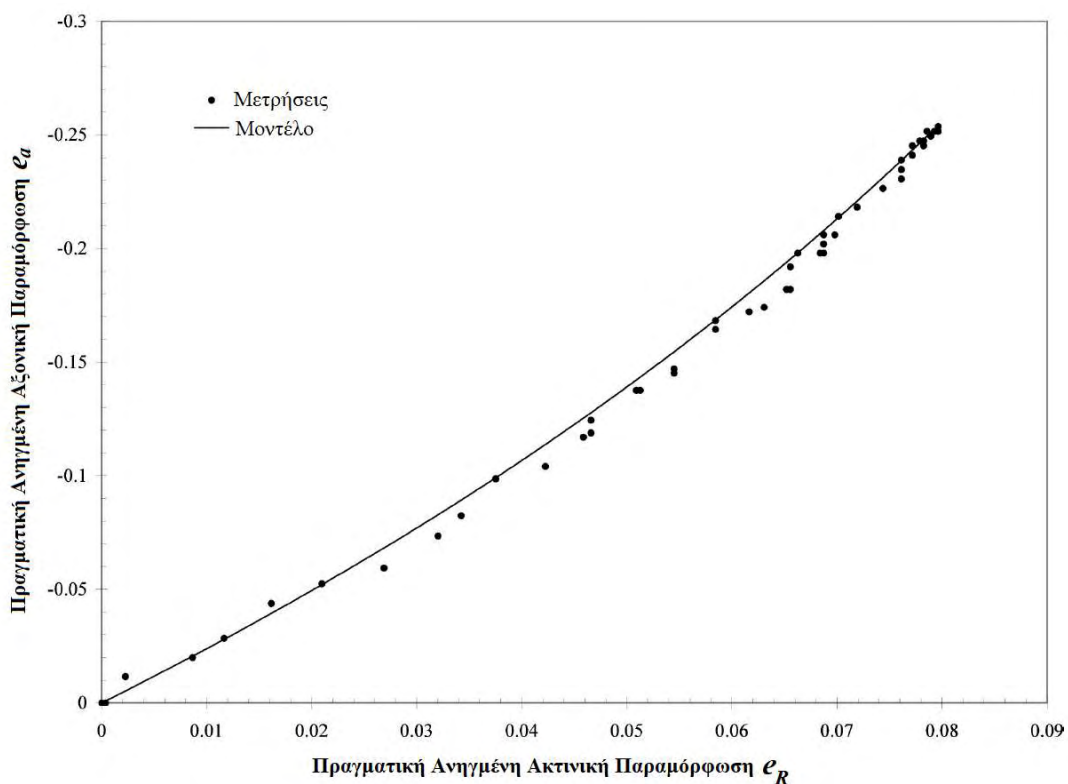


Σχήμα 2.4 Πειραματική καμπύλη $e_R - p$

Επιπρόσθετα, στο Σχήμα 2.5 φαίνεται η σχέση μεταξύ των πραγματικών αξονικών και ακτινικών ανηγμένων παραμορφώσεων, όπου η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο για την αξονική παραμόρφωση από την εξίσωση (2.4) με μετρηθείσες τιμές της διαμέτρου του stent.

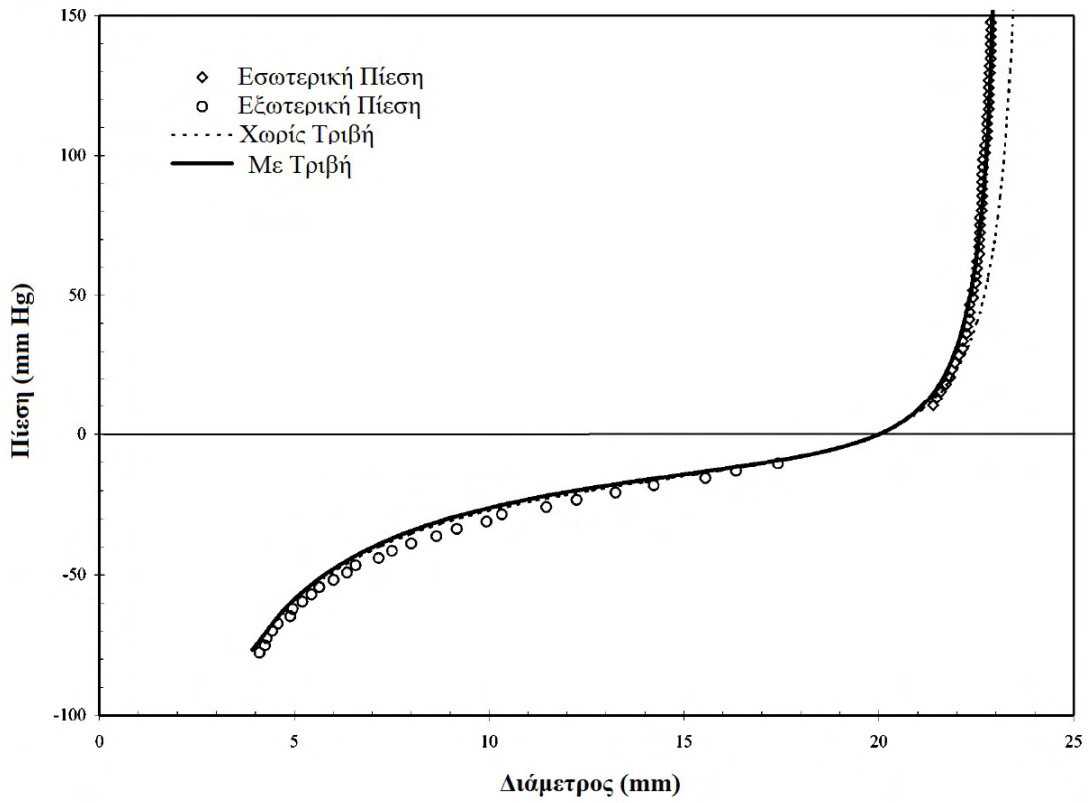
$$E_p = \frac{r_1}{r_2 - r_1} \Delta p \quad (2.4)$$

Εδώ E_p θεωρείται το μέτρο πίεσης-παραμόρφωσης, ενώ Δp είναι η αλλαγή της πίεσης που οδηγεί την ακτίνα από την τιμή r_1 στην τιμή r_2 . Η σχέση αυτή εν πολλοίς ποσοτικοποιεί την δυσκαμψία του τοιχώματος του αγγείου και του stent.

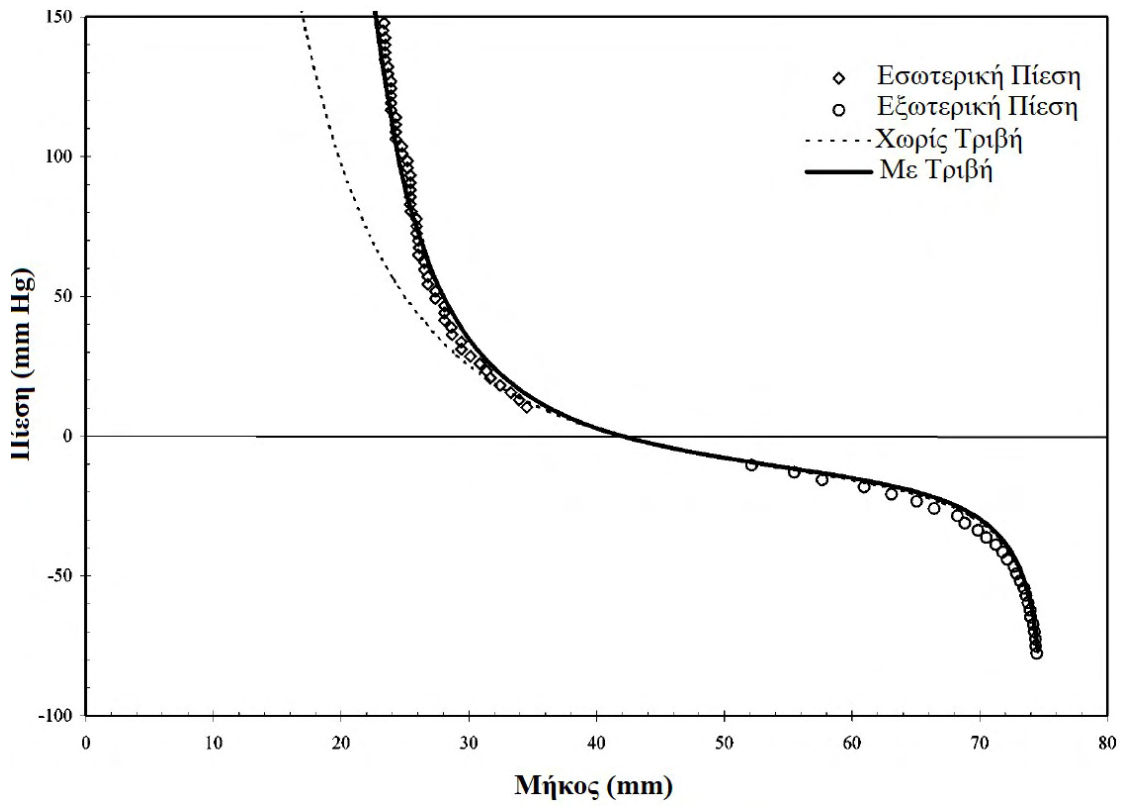


Σχήμα 2.5 Καμπύλη $e_R - e_a$

Αντίστοιχα, η σχέση διαμέτρου D με την πίεση p (εσωτερική και εξωτερική) απεικονίζονται στο Σχήμα 2.6, ενώ η σχέση του μήκους λ με την p φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Και στα δύο αυτά Σχήματα παρουσιάζεται και η καμπύλη των αναλυτικών μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά (ελικοειδούς ελατηρίου) θα παρουσιαστούν μετά.



Σχήμα 2.6 Σχέση D - p



Σχήμα 2.7 Σχέση λ - p

Προκαταρκτική θεωρητική ανάλυση

Το WallStent αποτελείται από πλεγμένα ελικοειδή σύρματα-ελατήρια, οπότε μπορούν να αναλυθούν με βάση τη θεωρία του Kirchhoff περί λυγηρών ράβδων (Xavier 2014). Όμως, υπάρχουν κάποια ζητήματα που πρέπει να προσεχθούν σε μια τέτοιας μορφής ανάλυση. Κατά πρώτον, η φόρτιση επί του stent δεν είναι κατά τον διαμήκη άξονα του, αλλά στις πλευρές, όπου βρίσκεται σε επαφή με τη σακούλα πολυαιθυλενίου σύμφωνα με την πειραματική διάταξη. Η διαφορά αυτή εύκολα μπορεί να ληφθεί υπ' όψη, με θεώρηση της ισορροπίας ενός ελατηρίου υπό πλευρική πίεση. Κατά δεύτερον, καθώς στο stent υφίστανται πολλά ελατήρια πλεγμένα μεταξύ τους, θα υπάρχει σίγουρα και κάποια αντίσταση λόγω τριβής (που δεν έχει υπολογιστεί ακόμα) κατά την ολίσθηση μεταξύ των συρμάτων σε επαφή. Όντως, αυτή η επαφή με τριβή (frictional contact) υπαγορεύει ότι το μήκος της σπείρας μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών πρέπει να παραμείνει σταθερό, κατά την αλλαγή της θέσης και της γωνίας της κορυφής όσο το stent παραμορφώνεται. Η συνθήκη αυτή οδηγεί στη ακόλουθη σχέση γεωμετρικής δέσμευσης

$$\frac{r}{\cos a} = \frac{r_0}{\cos a_0} \quad (2.5)$$

Τέλος, τα πλεγμένα σύρματα συνήθως παραμορφώνονται πλαστικά προς μόρφωση του ελικοειδούς τους σχήματος. Όμως, το Wallstent είναι απλά υφασμένο από ευθύγραμμα (ίσια) νήματα, και τα σύρματα δεν παραμορφώνονται πλαστικά. Στην πραγματικότητα, αν αφαιρεθεί κάποιο νήμα από το stent, επανέρχεται στην ευθυγραμμία λόγω ελαστικότητας, εκτός από τα σημεία «τομής» της πλέξης. Τούτο δεν έχει επιρροή στην ίδια την παραμόρφωση, παρά μόνο στην ευστάθεια αυτής.

Στο σημείο αυτό θα παρατεθεί περιληπτική η ανάλυση του ελατηρίου και το πως αυτή μπορεί να προσαρμοστεί στο stent, και κατόπιν θα συγκριθούν οι προβλέψεις του μοντέλου με τις μετρήσεις.

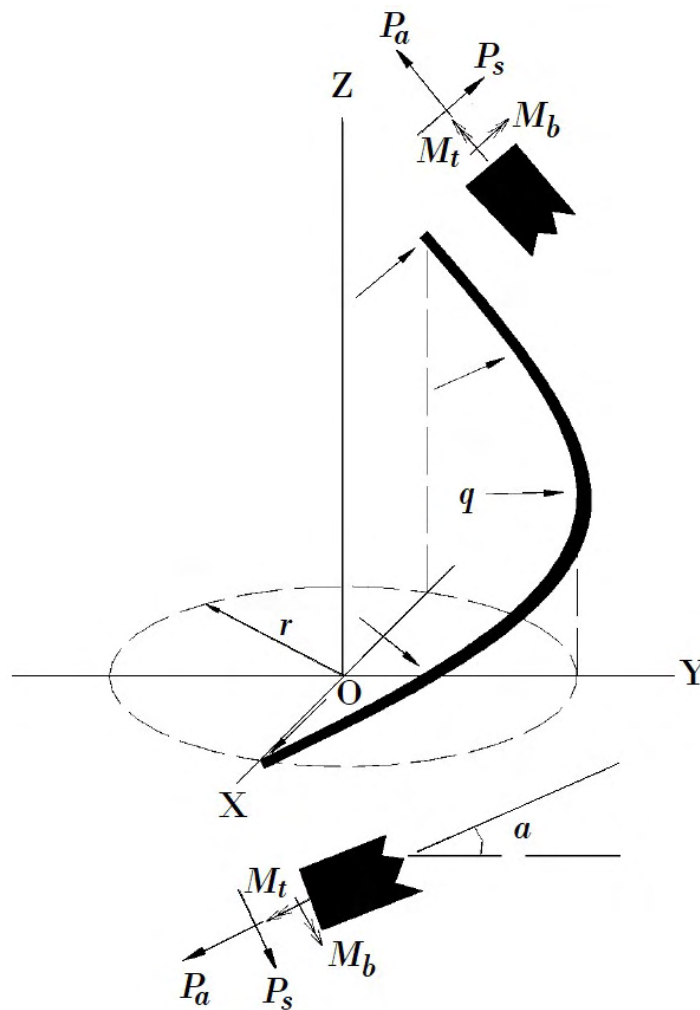
Κατ' αρχή, αν ορίσουμε ως r_0 την αρχική ακτίνα της έλικας και λ_0 την κλίση (ύψος στην κορυφή) της, τότε η αντίστοιχη κύρια αρχική καμπυλότητα και η αρχική συστροφή του ελατηρίου θα ισούνται με

$$\kappa_0 = \frac{\cos^2 a_0}{r_0}, \quad \tau_0 = \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \quad (2.6)$$

όπου $a_0 = \sin^{-1}(\lambda_0 / 2\pi r_0)$ είναι η γωνία της έλικας. Υπό την δράση της αξονικής δύναμης και της πίεσης p η έλικα μεταπίπτει σε μια νέα παραμορφωσιακή κατάσταση, που χαρακτηρίζεται από μια νέα ακτίνα r και ένα νέο ύψος λ , οπότε θα ισχύει ότι

$$\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{r}, \quad \tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}, \quad \alpha = \sin^{-1}(\lambda/2\pi r) \quad (2.7)$$

Θεωρούμε κατόπιν την ισορροπία ενός τμήματος μισής στροφής της έλικας, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8. Οι γενικευμένες δυνάμεις P_a, P_s, M_b, M_t είναι αντίστοιχα η αξονική, η τέμνουσα, η ροπή κάμψης και η ροπή συστροφής. Πρόκειται για συνιστώσες εφαπτομενικά και κάθετα της έλικας. Η πίεση p (εσωτερική ή εξωτερική) στο stent αναπαρίσταται ως ένα ισοδύναμο ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο q (ανά μονάδα μήκους).



Σχήμα 2.8 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος τμήματος μισής στροφής της έλικας

Η πίεση δρα πάνω σε μια ενεργό επιφάνεια $2\pi r\ell$, οπότε αντιστοιχεί σε μια δύναμη $2\pi r\ell p$ η οποία αναλαμβάνεται από τα n τον αριθμό σύρματα που μορφώνουν το stent, έκαστο μήκους ℓ . Άρα, η δύναμη ανά μονάδα μήκους σε κάθε σύρμα θα δίνεται από την έκφραση

$$q = \frac{2\pi r \lambda}{n \ell} p = \frac{2\pi r \sin a}{n} p \quad (2.8)$$

όπου $\sin a = \lambda/\ell$. Επιπρόσθετα, ορίζουμε ως F_x την εξωτερική δύναμη κατά μήκος του άξονα της έλικας, που οφείλεται στις δεσμεύσεις των άκρων (end constraints), η οποία ισούται με μηδέν εφόσον το stent είναι ελεύθερο να επιμηκύνεται ή να επιβραχύνεται. Εισάγοντας μια μη μηδενική τιμή της F_x επιτρέπει τον υπολογισμό της αξονικής δύναμης που απαιτείται, έτσι ώστε το stent να συγκρατείται σε κάποια τελική παραμορφωμένη θέση. Οι ισορροπίες δυνάμεων και ροπών οδηγούν στις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_a \cos a - P_s \sin a - \frac{qr}{\cos a} = 0 \quad (2.9)$$

$$P_a \sin a + P_s \cos a = F_x \quad (2.10)$$

$$r(P_a \sin a + P_s \cos a) + M_b \sin a - M_t \cos a - \frac{qr^2 \sin a}{\cos^2 a} = 0 \quad (2.11)$$

Τα σύρματα θεωρούνται (και ουσιαστικά είναι) εύκαμπτα, οπότε η απόκριση τους σε καμπτική και συστροφική ροπή μπορεί να εκφραστεί βάσει της θεωρίας δοκών των Bernoulli-Euler και της θεωρίας στρέψης του Coulomb, ως εξής:

$$M_b = EI(\kappa - \kappa_0) \stackrel{(2.6),(2.7)}{\cong} EI \left(\frac{\cos^2 \alpha}{r} - \frac{\cos^2 a_0}{r_0} \right) \quad (2.12)$$

$$M_t = GI_p(\tau - \tau_0) \stackrel{(2.6),(2.7)}{\cong} GI_p \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} - \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \right) \quad (2.13)$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας, G το μέτρο διάτμησης, I η ροπή αδρανείας της διατομής και I_p η πολική ροπή αδρανείας. Εδώ θεωρούνται σύρματα κυκλικής διατομής, οπότε (αν d η διάμετρος του σύρματος) $I_p = \pi d^4/32$. Απαλείφοντας τις γενικευμένες δυνάμεις P_a, P_s, M_b, M_t από τις εξισώσεις (2.9) – (2.12) λαμβάνουμε την παρακάτω έκφραση για την αξονική δύναμη F_z :

$$F_z = \frac{2\pi r^2 \sin^2 a}{n \cos^2 a} p - \frac{EI \sin a}{r} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{r} - \frac{\cos^2 a_0}{r_0} \right) + \frac{GI_p \cos a}{r} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} - \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \right) \quad (2.14)$$

Αν η δύναμη αυτή είναι ίση με μηδέν, τότε η σχέση μεταξύ της πίεσης και της ακτίνας του stent γράφεται ως:

$$p = \frac{n \cos^2 a}{2\pi r^2 \sin^2 a} \left[\frac{EI \sin a}{r} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{r} - \frac{\cos^2 a_0}{r_0} \right) - \frac{GI_p \cos a}{r} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} - \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \right) \right] \quad (2.15)$$

Οι αλλαγές της διαμέτρου συναρτήσει της πίεσης υπολογίζονται από την εξίσωση αυτή, ενώ οι αλλαγές του μήκους του stent βρίσκονται με βάση την εξίσωση (2.1).

Η ανάλυση που προηγήθηκε αμελεί την επιρροή της τριβής μεταξύ του stent και του περιβάλλοντος μέσου κατά τη διάρκεια των πειραμάτων. Υπάρχει όμως η δυνατότητα να ληφθεί η επιρροή αυτή υπ' όψη, με την θεώρηση ότι η δύναμη τριβής F_f που αναπτύσσεται κατά την επιμήκυνση ή επιβράχυνση του stent είναι ανάλογη με την κάθετη δύναμη. Συνεπώς, θα ισχύει προφανώς ότι

$$F_f = \mu A p \quad (2.16)$$

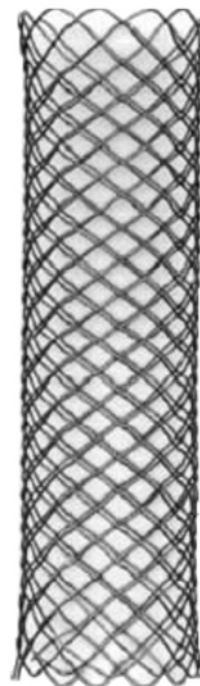
όπου μ είναι ο (άγνωστος) συντελεστής τριβής, $A = 2\pi r l$ η ονομαστική επιφάνεια επαφής και p η πίεση. Μειώνοντας στη συνέχεια την αξονική δύναμη με την ποσότητα της τριβής, ως άνω, η σχέση ακτίνας – πίεσης τελικά είναι:

$$p = \frac{n \cos^3 a_0}{2\pi r_0 (r_0^2 \sin^2 a - \mu n l r \cos^2 a_0)} \left[EI \frac{\sin a}{r} (\cos a - \cos a_0) - GI_p \frac{\cos a}{r} (\sin a - \sin a_0) \right] \quad (2.17)$$

Οι θεωρητικές καμπύλες που προκύπτουν από την εξίσωση (2.15) αλλά και την (2.7) με $\mu = 0.000001$ είναι αυτές που απεικονίζονται στα Σχήματα (2.6) και (2.7), καταδεικνύοντας την ακρίβεια της συσχέτισης τους με τα πειραματικά αποτελέσματα.

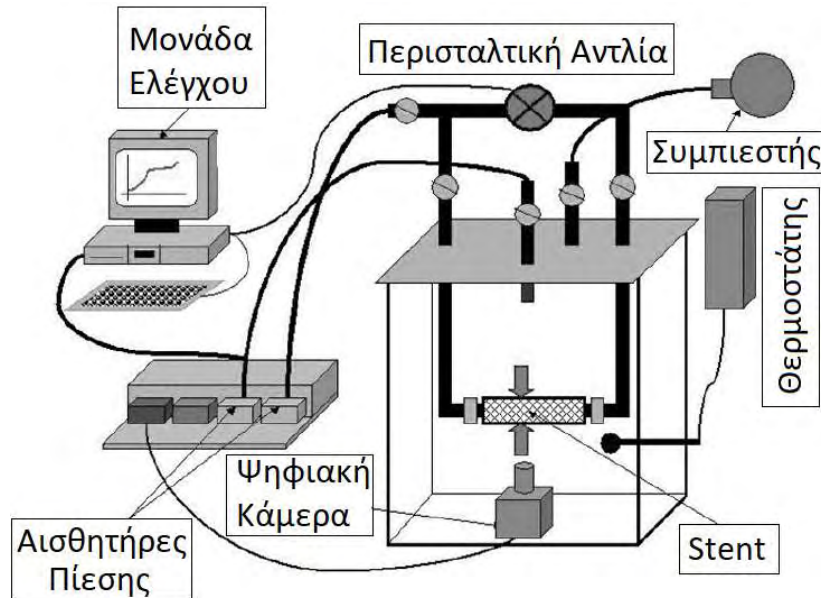
2^η Πειραματική Διάταξη [Hanus and Zahora (2005)]

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν τα πειράματα των Hanus και Zaborá (2005), που αφορούσαν την μέτρηση και σύγκριση των μηχανικών χαρακτηριστικών **SX σπειροειδών** Nitinol stents, του τύπου που φαίνεται παραπλεύρως, του ίδιου σχεδιασμού αλλά διαφόρων γεωμετριών. Οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν με σκοπό την κατά το δυνατόν εύρεση της σχέσης μεταξύ των μηχανικών χαρακτηριστικών των stents με την γεωμετρία και την κατασκευή του. Μια τέτοια σχέση – γενικά – παρέχει την δυνατότητα σχεδιασμού ενός stent κατά τρόπο που να προσαρμόζεται με τις ιδιότητες των ιστών των αγγείων (εντός των οποίων θα τοποθετηθούν) και κατ' επέκταση του ασθενούς.

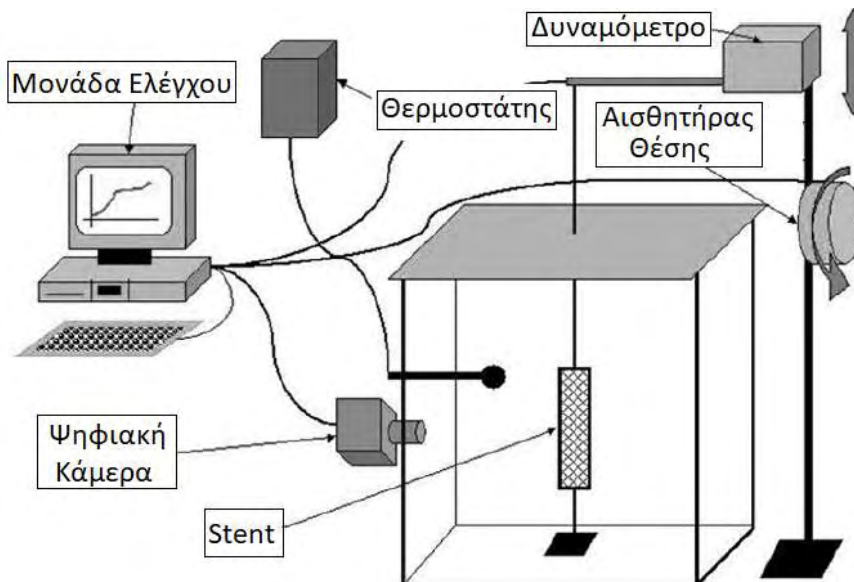


Το σύστημα μέτρησης, που θα περιγραφεί παρακάτω, επιτρέπει στατική ή δυναμική μέτρηση της παραμόρφωσης του stent ή του αγγείου, την παραγωγή καμπυλών τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων, και την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ stent και αγγείου για ακριβώς ορισμένες αιμοδυναμικές συνθήκες. Επίσης, δημιουργεί και μετρά μια καθορισμένη ακολουθία της πίεσης για την ακτινική παραμόρφωση και επιτρέπει την μέτρηση των δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά την διαμήκη (αξονική) παραμόρφωση του stent.

Δύο διατάξεις χρησιμοποιήθηκαν, και φαίνονται στα Σχήματα 2.9 και 2.10. Η πρώτη αφορά δυναμικές μετρήσεις (παραμόρφωση μέσω ακτινικής δύναμης) και η δεύτερη μετρήσεις παραμορφώσεων υπό αξονική δύναμη.



Σχήμα 2.9 Πρώτη πειραματική διάταξη



Σχήμα 2.10 Δεύτερη πειραματική διάταξη

Πιο συγκεκριμένα, η όλη συσκευή μέτρησης (και στις δύο διατάξεις) αποτελείται από ένα ερμητικά κλειστό κουτί από διαφανές ναλώδες πλαστικό, μέσα στο οποίο τοποθετείται το stent, και περιέχει απεσταγμένο νερό ή αέρα. Η θερμοκρασία

του νερού και γενικότερα του εσωτερικού του κουτιού μπορεί να κρατηθεί σταθερή ή πορεία μεταβολής του μπορεί να οριστεί μέσω ενός ψηφιακού θερμοστάτη μεγάλης ακρίβειας με εξωτερική κυκλοφορία και ψύξη, για γρήγορη απόκριση. Έτσι προσομοιώνεται τυπικά η θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος.

Το stent συνδέεται με το σύστημα των σωλήνων. Αυτό μπορεί να είναι είτε κλειστό είτε ανοικτό μέσω των βαλβίδων, έτσι ώστε η καθορισμένη πίεση να δρα στ τοίχωμα του stent εκ των έσω ή εκ των έξω. Η περισταλτική αντλία (ελεγχόμενη από H/Y) μπορεί να παράξει μια σειρά πιέσεων που μετράται σε απευθείας σύνδεση (on line) μέσω των αισθητήρων που συνδέονται με τον H/Y. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες περιγραφής, η μέθοδος μέτρησης της διαμέτρου του stent βασίζεται σε on line επεξεργασία των ψηφιακών εικόνων μέσω της κάμερας, και γενικότερα τα αποτελέσματα προέρχονται και από το λογισμικό Labview. Στο πλήρες κείμενο της εργασίας μπορεί ο αναγνώστης να βρει τόσο τη συσχέτιση των πειραμάτων με τη σχετική (απλοποιημένη πάντως) θεωρία όσο και την έκβαση των δοκιμών. Απλά αναφέρονται στο σημείο αυτό τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκιμών των Nitinol stents, για πιθανή μελλοντική χρήση σε επόμενο Κεφάλαιο.

Διάμετρος σύρματος	0.2 και 0.18 mm
Αριθμός πλέξεων σπειρών	12 αριστερά και 12 δεξιά
Απόσταση διαδοχικών σπειρών	25 mm και 28 mm
Διάμετρος / Μήκος stent	16 mm / 72 mm ή 12 mm / 77 mm
Θερμοκρασίες	20 ⁰ C και 37 ⁰ C

Συνοπτικά, επαληθεύτηκε η σπουδαιότητα της σχέσης μεταξύ της μεταβολής της διαμέτρου και της μεταβολής του μήκους του stent (όπως ακριβώς και στο προηγούμενο πείραμα), και καταδείχτηκε ότι η κατάλληλη επιλογή της διατομής του σύρματος οδηγεί στην απαιτούμενη δυσκαμψία του, η οποία αυξάνεται με τη θερμοκρασία.

Κεφάλαιο 3ο : Προσομοίωση Μηχανικής Συμπεριφοράς Stents μέσω Μοντέλου Δοκού επί Ελαστικής Θεμελίωσης

3.1 Σκοπός – Αντικείμενο

Το τρέχον Κεφάλαιο, το περιεχόμενο του οποίου αποτελεί την κύρια συνεισφορά της παρούσας Διατριβής, αναπτύσσεται η μαθηματική ανάλυση της απόκρισης ενός μεταλλικού stent, το οποίο υπόκειται σε αξονο-συμμετρικά φορτία στο μήκος του και με διάφορες συνοριακές συνθήκες. Τέτοιες καταστάσεις εισάγουν καμπτικές τάσεις στο stent και δεν μπορούν να επεξεργαστούν μέσω μοντέλου του stent, το οποίο χρησιμοποιείται για τον χαρακτηρισμό της σχέσης διαμέτρου-πίεσης υπό αξονικό ομοιόμορφο φορτίο.

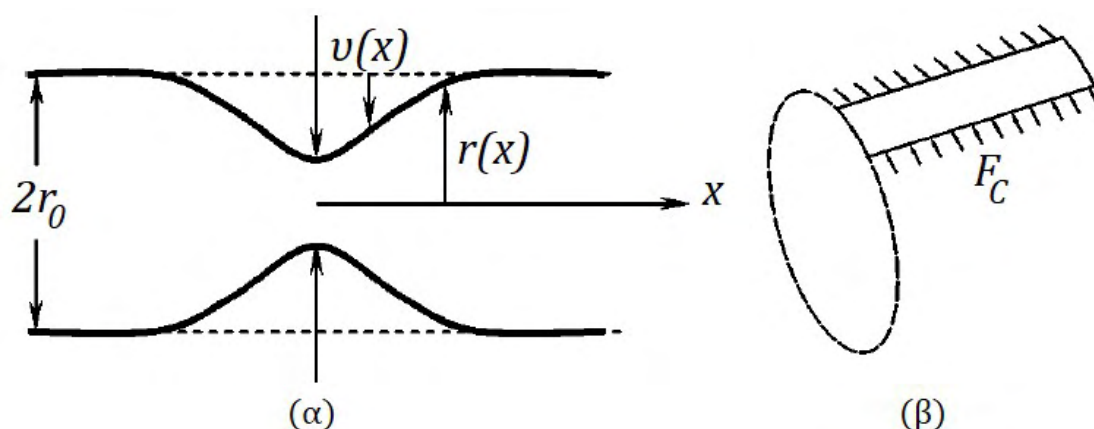
Η ανάλυση που παρουσιάζεται έχει ως βάση μια αναλογία μεταξύ ενός λεπτότοιχου δοχείου πίεσης (pressure vessel) και μιας δοκού επί ελαστικής θεμελίωσης. Επικεντρώνεται στη μόρφωση του προσομοιώματος, την εύρεση του έντονα μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων και στην επίλυσή του μέσω προηγμένων αριθμητικών τεχνικών. Η όλη προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της συζευγμένης συμπεριφοράς stent και αγγείου, αν οι μηχανικές ιδιότητες του αγγείου είναι γνωστές.

3.2 Μόρφωση του Προσομοιώματος – Εξισώσεις

Η βασική ιδέα που βρίσκεται πίσω από την ανάλυση του παρόντος Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: Το stent μπορεί να θεωρηθεί ως ένα λεπτότοιχο δοχείο πίεσης, που παρουσιάζει μια έντονα μη γραμμική σχέση πίεσης – διαμέτρου $p = f(r)$. Η απόκριση ενός τέτοιου δοχείου υπό αξονοσυμμετρικό φορτίο, το οποίο οδηγεί στην ανάπτυξη καμπτικών τάσεων, μπορεί να βρεθεί με αναλογία προς αυτή μιας ισοδύναμης δοκού επί ελαστικής θεμελίωσης (Timoshenko 1956). Αυτή η ισοδυναμία καταδεικνύεται στην μεσημβρινή (meridional) τομή του Σχήματος 3.1α.

Ας θεωρήσουμε ένα αξονοσυμμετρικό φορτίο που ασκείται στο stent (όπως τα βέλη στο Σχήμα 3.1). Το φορτίο αυτό αλλάζει την ακτίνα του stent, σε συνάρτηση της θέσης κατά μήκος του stent, έστω $r(x)$. Ισοδύναμα, αυτή η αλλαγή μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της μετατόπισης $v(x) = r(x) - r_0$, όπου r_0 είναι η ομοιόμορφη αρχική ακτίνα του αφόρτιστου stent. Το φορτίο καθαρά εισάγει μια καμπτική συνιστώσα στο όλο πρόβλημα. Ένα διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός τμήματος του stent φαίνεται στο Σχήμα 3.1β. Σε κάθε σημείο x κατά μήκος του stent, γεννιέται μια

περιφερειακή (circumferential) δύναμη F_C , ακριβώς λόγω της μεταβολής της ακτίνας. Στην περιφερειακή διεύθυνση οι δυνάμεις αυτές ισορροπούν, παρέχουν όμως μια συνιστώσα στην ακτινική διεύθυνση, που ανθίσταται στην σχετική (ακτινική) παραμόρφωση – μετατόπιση. Με τον τρόπο δε αυτό διατηρεί το stent την μεταβολή της ακτίνας του κατά μήκος. Η εν λόγω δύναμη μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη της αντίδρασης μιας ελαστικής θεμελίωσης, η οποία είναι – όπως προαναφέρθηκε – έντονα μη γραμμική.



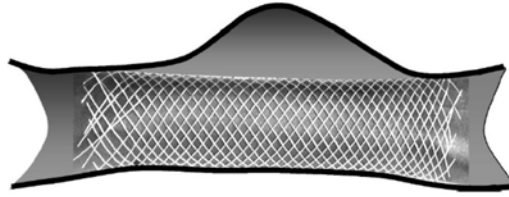
Σχήμα 3.1 Stent ως ισοδύναμο λεπτότοιχο δοχείο πίεσης και ως δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση καμπτικής ισορροπίας της ισοδύναμης δοκού επί ελαστικής θεμελίωσης ανά μονάδα μήκους μπορεί να γραφεί ως:

$$EI_{eff} \frac{d^4 r}{dx^4} + f(r) = p_a \quad (3.1)$$

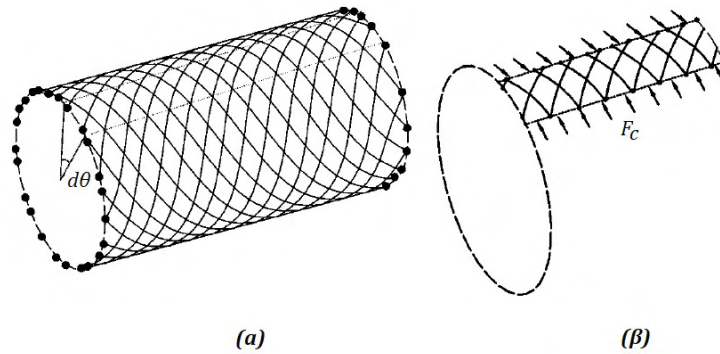
όπου p_a η επιβαλλόμενη πίεση και $f(r)$ η αντίσταση της ισοδύναμης ελαστικής θεμελίωσης. Τονίζεται εδώ ότι, για ένα τυπικό λεπτότοιχο δοχείο πίεσης, το E συνήθως αντικαθίσταται από το ισοδύναμο του σε επίπεδη ανηγμένη παραμόρφωση, λόγω της δέσμευσης έναντι αντίθετης καμπυλότητας (against anticlastic curvature). Όμως, στην περίπτωση μας, καθόσον τα σύρματα επιτρέπεται να δρουν ανεξάρτητα, δεν απαιτείται η αντικατάσταση αυτή. Το I_{eff} είναι η ενεργή δυσκαμψία του stent, που μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί. Εδώ, επικεντρώνεται η προσοχή σε ένα Wallstent (βλέπε Κεφάλαιο 2), που έχει εισαχθεί σε κάποιο αγγείο με ανεύρυσμα (Σχήμα 3.2), του οποίου η σχέση διαμέτρου – πίεσης έχει ήδη καταδειχθεί και επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους εποπτικούς, με τις σχετικές παραμέτρους να λαμβάνονται από το αντίστοιχο εδάφιο του προηγούμενου Κεφαλαίου της παρούσας.

$$p = \frac{n \cos^2 a}{2\pi r^2 \sin^2 a} \left[\frac{EI \sin a}{r} \left(\frac{\cos^2 a}{r} - \frac{\cos^2 a_0}{r_0} \right) - \frac{GI_p \cos a}{r} \left(\frac{\sin a \cos a}{r} - \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \right) \right] \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.2 WallStent εντός αγγείου με ανεύρυσμα

Στο Σχήμα 3.3α απεικονίζεται το πλέγμα των συρμάτων του stent, όπου τα άκρα τους φαίνονται ως τελείες. Από την επισκόπηση της λεπτής λωρίδας του Σχήματος 3.3β ως δοκού, ανά μονάδα μήκους υφίστανται $n/2\pi r$ σύρματα. Κάθε σύρμα αντιπροσωπεύει μια ελλειπτική διατομή με τον μεγάλο ημιάξονα ίσο με $\gamma/\sin a$ και τον μικρό ίσο με γ , όπου 2γ η διάμετρος της κυκλικής διατομής του σύρματος.



Σχήμα 3.3 Ενεργός διατομή του stent, που οδηγεί στον υπολογισμό της δυσκαμψίας

Σύμφωνα με τις διαπιστώσεις αυτές, η ποσότητα I_{eff} ισούται με

$$I_{eff} = \frac{\pi \gamma^4}{4 \sin a} \frac{n}{2\pi r} = \frac{n \gamma^4}{8r \sin a} \quad (3.3)$$

Μετά από αντικαταστάσεις των διαφόρων εκφράσεων στην (3.2), τελικά αποκτάται η διαφορική εξίσωση (καμπτικής) ισορροπίας του μοντέλου δοκού επί μη γραμμικής ελαστικής θεμελίωσης ($I_p = \frac{\pi \gamma^4}{2}, I = I_p/2$):

$$E \frac{n \gamma^4}{8r \sin a} \frac{d^4 r}{dx^4} + \frac{n \cos^2 a}{2\pi r^2 \sin^2 a} \left[\frac{EI \sin a}{r} \left(\frac{\cos^2 a}{r} - \frac{\cos^2 a_0}{r_0} \right) - \frac{GI_p \cos a}{r} \left(\frac{\sin a \cos a}{r} - \frac{\sin a_0 \cos a_0}{r_0} \right) \right] = p_a \quad (3.4)$$

$$\frac{r}{\cos a} = \frac{r_0}{\cos a_0} \quad (3.5)$$

Η 4^η τάξης αυτή ιδιαιζόντως μη γραμμική διαφορική εξίσωση, για να επιλυθεί, απαιτείται να είναι γνωστές τέσσερις (4) συνοριακές συνθήκες. Αυτές φυσικά σχετίζονται με τον τρόπο «στήριξης» των άκρων του stent εντός του αγγείου.

Στην παρούσα, θα εξεταστούν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, πάκτωση (fixed), ελεύθερο άκρο (free) και υποχωρητική στήριξη (compliant).

Η 1^η περίπτωση σχετίζεται με τις συνοριακές συνθήκες

$$r = R, \frac{dr}{dx} = 0 \quad (3.5)$$

όπου R μια καθορισμένη τιμή της ακτίνας. Σημειωτέον ότι ένα «πακτωμένο» σημείο δεν είναι κατ' ανάγκη στο άκρο της «δοκού», αλλά σε οποιαδήποτε θέση εντός του ανοίγματος της.

Στη 2^η περίπτωση μηδενίζονται οι γενικευμένες δυνάμεις (τέμνουσα και ροπή, οπότε στο εν λόγω σύνορο θα ισχύει ότι:

$$\frac{d^2r}{dx^2} = \frac{d^3r}{dx^3} = 0 \quad (3.6)$$

ενώ η 3^η των περιπτώσεων είναι αρκετά πιο περίπλοκη.

Πιο συγκεκριμένα, ένα stent εντός κάποιου αιμοφόρου αγγείου θα πρέπει να στηρίζεται με τρόπο που να είναι απόλυτα συμβατός με τις παραμορφώσεις και την κλίση του αγγείου στα σημεία στήριξης. Άρα, οι κατάλληλες συνθήκες θα είναι

$$r_{stent} = r_{αγγείου}, \left. \frac{dr}{dx} \right|_{stent} = \left. \frac{dr}{dx} \right|_{αγγείου} \quad (3.7)$$

Η κατάλληλη εφαρμογή και αξιοποίηση τους όμως απαιτεί ιδιαίτερη γνώση της συμπεριφοράς των αγγείων, γεγονός εξαιρετικά δύσκολο και εξαρτώμενο από τις συνθήκες του κάθε ασθενούς αλλά και της αλληλεπίδρασης stent – αγγείου.

Χαρακτηριστικά, καθώς ένα stent που έχει πλήρως καταρρεύσει απομακρύνεται (τραβιέται προς τα έξω του καθετήρα), οι συνοριακές συνθήκες στο ένα άκρο είναι ελεύθερες και στο άλλο πάκτωση. Ανάλογα, αν το stent έχει αγκιστρωθεί στα τοιχώματα του αγγείου, τότε έχουμε πάκτωση – πάκτωση.

3.3 Αδιαστατοποίηση της Διέπουσας Διαφορικής Εξίσωσης

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την απόκριση του προσομοιώματος που προτείνεται εδώ, συνοδευόμενη από τις κατά περίπτωση συνοριακές συνθήκες αποτελεί ένα μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων, όπως προαναφέρθηκε.

Από τη μορφή της εν λόγω εξίσωσης, παρατηρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση $r(x)$ εμφανίζεται κατά κόρον στον παρονομαστή πολλών παραγόντων, η γωνιακή παραμόρφωση a είναι και αυτή συνάρτηση της $r(x)$ καθώς και ότι υπάρχει έντονη παρουσία πολλών παραμέτρων, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και σφάλματα αναφορικά με τις μονάδες. Για την απεμπλοκή από τα παραπάνω, εισάγονται οι αδιάστατες παράμετροι που ακολουθούν. Η αδιαστατοποίηση αποτελεί πάγια τακτική για την αντιμετώπιση πολυπαραμετρικών εξισώσεων γενικότερα, καθόσον οι λύσεις που προκύπτουν μπορούν – εκτός άλλων πλεονεκτημάτων – να αποτυπωθούν εύκολα και να συγκριθούν μεταξύ τους χωρίς εξάρτηση από τις τιμές των παραμέτρων με διαστάσεις κατά περίπτωση.

$$\rho = r/r_0 \Leftrightarrow r = \rho r_0 \quad (3.9\alpha)$$

$$s = x/r_0 \Leftrightarrow x = s r_0 \quad (3.9\beta)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma/r_0 \Leftrightarrow \gamma = \bar{\gamma} r_0 \quad (3.9\gamma)$$

$$\delta = I/r_0^4 \quad (3.9\delta)$$

$$\zeta = \frac{G I_p}{E r_0^4} = \frac{G \pi \bar{\gamma}^4 r_0^4}{E 2r_0^4} \Leftrightarrow \zeta = \pi G \bar{\gamma}^4 / 2E \quad (3.9\epsilon)$$

$$\bar{p}_a = p_a/E \quad (3.9\epsilon)$$

Αν το αρχικό (αφόρτιστο) μήκος του stent θεωρηθεί ίσο με L , τότε και αυτό αδιαστατοποιείται με βάση το r_0 , ήτοι $\bar{L} = L/r_0$.

Επίσης, από την αναλογία της σχέσης (3.5) προκύπτει ότι

$$\frac{\cos a}{r_0 \rho} = \frac{\cos a_0}{r_0} \Leftrightarrow \cos a = \rho \cos a_0 \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην διαφορική εξίσωση (3.4) λαμβάνουμε

$$n \bar{\gamma}^4 \rho'''' + \frac{4n}{\pi} \left[\delta \frac{\cos^4 a}{\rho^3} - \delta \frac{\cos^2 a \cos^2 a_0}{\rho^2} - \zeta \frac{\cos^4 a}{\rho^3} + \zeta \frac{\cos^3 a \sin a_0 \cos a_0}{\rho^2 \sin a} \right] = 8\rho \sin a \bar{p}_a \quad (3.11)$$

με τον τόνο να υποδηλώνει παραγωγή ως προς s : ' = d/ds

Όμως, από την (3.10) ισχύει ότι

$$\frac{\cos^4 a}{\rho^3} = \rho \cos^4 a_0 \quad (3.12\alpha)$$

$$\frac{\cos^2 a \cos^2 a_0}{\rho^2} = \cos^4 a_0 \quad (3.12\beta)$$

$$\frac{\cos^3 a \sin a_0 \cos a_0}{\rho^2 \sin a} = \rho \cos^4 a_0 \frac{\sin a_0}{\sin a} \quad (3.12\gamma)$$

ενώ επίσης

$$\frac{\sin a_0}{\sin a} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a_0}{1 - \cos^2 a}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a_0}{1 - \rho^2 \cos^2 a_0}} \cong$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 a_0} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos^2 a_0} \cos^2 a_0 \rho^2 + \frac{3}{8} \sqrt{1 - \cos^2 a_0} \cos^4 a_0 \rho^4 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin a_0}{\sin a} = \sin a_0 \left(\frac{1}{2} \cos^2 a_0 \rho^2 + \frac{3}{8} \cos^4 a_0 \rho^4 \right) \quad (3.13)$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$\frac{\cos^3 a \sin a_0 \cos a_0}{\rho^2 \sin a} = \rho \cos^4 a_0 \sin a_0 \left(\frac{1}{2} \cos^2 a_0 \rho^2 + \frac{3}{8} \cos^4 a_0 \rho^4 \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos^3 a \sin a_0 \cos a_0}{\rho^2 \sin a} = \rho^3 \sin a_0 \cos^6 a_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cos^2 a_0 \rho^2 \right) \quad (3.14)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.11) – (3.14), η ΔΕ που διέπει το πρόβλημα γίνεται

$$n\bar{\gamma}^4 \rho'''' + \frac{4n}{\pi} \left[(\delta - \zeta) \rho \cos^4 a_0 - \delta \cos^4 a_0 + \zeta \rho^3 \sin a_0 \cos^6 a_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cos^2 a_0 \rho^2 \right) \right]$$

$$= 8\rho \sin a \bar{p}_a \quad (3.15)$$

και

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 a_0} \cong 1 - \frac{1}{2} \cos^2 a_0 \rho^2 - \frac{1}{8} \cos^4 a_0 \rho^4 \quad (3.16)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω δύο σχέσεις, η τελική μορφή της προς επίλυσης διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$\rho'''' + \frac{4\xi^2}{\bar{\gamma}^4} \left[\rho(\delta - \zeta) - \delta + \zeta \rho^3 \sin a_0 \xi \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \xi \rho^2 \right) \right] = \frac{8\rho \bar{p}_a}{n\bar{\gamma}^4} \left(1 - \frac{1}{2} \xi \rho^2 - \frac{1}{8} \xi^2 \rho^4 \right) \quad (3.17\alpha)$$

όπου

$$\xi = \cos^2 a_0 \quad (3.17\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες, κατά περίπτωση, αδιαστατοποιούνται ανάλογα.

3.4 Αριθμητική Επίλυση - Συμπεράσματα

Το *μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων, ανώτερης (4^{ης}) τάξης* που περιγράφεται στις (3.17) επιδέχεται **μόνο** αριθμητικών λύσεων. Υφίστανται διάφορες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης τέτοιου είδους προβλημάτων, οι σπουδαιότερες εκ των οποίων περιγράφονται συνοπτικά εδώ. Τούτο προκειμένου τεκμηριωθεί η επιλογή της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα (Bailey et al. 1968, Hildebrand 1974, Agarwal 1986, Kounadis 1992, Keller 2018, Stoer and Burlisch 2002, Hellevik 2018).

3.4.1 Συνοπτική Αναφορά στις σχετικές μεθόδους

Η 1^η μέθοδος είναι αυτή της *στόχευσης* (shooting), η οποία είτε σαν απλή (single) είτε σαν πολλαπλή (multiple) βασίζεται στην μετατροπή του προβλήματος συνοριακών τιμών σε πρόβλημα αρχικών τιμών (initial value problem). Συνήθως, οι συνοριακές συνθήκες θεωρούνται ως πολυπαραγοντική συνάρτηση των αρχικών συνθηκών σε κάποιο σημείο εντός του διαστήματος – πεδίου ορισμού της προς αναζήτηση συνάρτησης. *Η εν λόγω μέθοδος έχει ως πλεονέκτημα το γεγονός ότι μπορεί να εκμεταλλευθεί με επιτυχία την ταχύτητα και την προσαρμοστικότητα των υφιστάμενων μεθόδων επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών. Στερείται όμως ευρωστίας σε σχέση με άλλες μεθόδους (όπως π.χ. πεπερασμένων διαφορών [finite difference] ή συνεγκατάστασης [collocation]) λόγω πιθανής αστάθειας των λύσεων (ανάλογα με το πρόβλημα, το οποίο από μόνο του μπορεί να είναι κατάλληλα δομημένο [well posed] αλλά και ευσταθές).*

Μια παραλλαγή της εν λόγω μεθόδου είναι αυτή της παρακολούθησης (chasing), η οποία είναι αποτελεσματική ιδιαίτερα σε γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων. Βασίζεται στην ιδέα καθορισμού ενός συνόλου βοηθητικών προβλημάτων που μπορούν να λυθούν για να βρεθούν οι αρχικές συνθήκες σε ένα από τα όρια. Μόλις προσδιοριστούν οι αρχικές συνθήκες, μπορούν να εφαρμοστούν οι συνήθεις μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών. Η συγκεκριμένη μέθοδος δύναται υπό συνθήκες να εφαρμοστεί και σε μη γραμμικά προβλήματα, αλλά απαιτεί μεγάλο όγκο μετασχηματισμών και συμβολικών διαδικασιών, χωρίς εξακριβωμένη εκ των προτέρων σύγκλιση.

Η “shooting” αλλά και η “chasing” μέθοδοι είναι ενσωματωμένες σε εμπορικό μαθηματικό λογισμικό, όπως για παράδειγμα στο *Mathematica*.

<https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveBVP.html>

Ειδικότερα, για τη μέθοδο “shooting” και τις εφαρμογές της για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, παρατίθενται τα ακόλουθα χρήσιμα links, χωρίς περαιτέρω αναφορά επί του περιεχομένου τους.

<https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/shooting-method>

<https://www.math.usm.edu/lambers/mat461/spr10/lecture25.pdf>

<https://www.cs.cmu.edu/~ph/859B/www/notes/ode/bvp.html>

<http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/Mathematica/ch7/shoot.html>

<https://gereshes.com/2019/01/14/an-introduction-to-shooting-methods/>

<https://www.scientific.net/SSP.235.31>

Η μέθοδος «συνεγκατάστασης» (*collocation*) έχει τύχει ευρύτατης εφαρμογής για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων, αλλά και αυτή – όπως και η μέθοδος στόχευσης – είναι εφαρμόσιμη ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Η φιλοσοφία πίσω από την εν λόγω μέθοδο βασίζεται στην εύρεση μιας προσεγγιστικής συνάρτησης που να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του προβλήματος, σε αντίθεση με τις προηγούμενες οι οποίες παράγουν λύσεις σε συγκεκριμένα διακριτά σημεία. Μια τέτοια διαδικασία θα μπορούσε να αποτελέσει μια ιδεώδη προσέγγιση, αλλά στερείται εφαρμοσιμότητας σε μη γραμμικά προβλήματα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (*finite difference*) βασίζεται στην διαίρεση του πεδίου ορισμού σε συγκεκριμένα πυκνά σημεία, και καταγράφει τις διαφορικές εξισώσεις εκεί, σε σχέση με σχετικές τιμές των παραμέτρων. Κατόπιν τις επιλύει αριθμητικά και τελικά οδηγεί σε μια προσεγγιστική λύση, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες συμβατότητας στα εν λόγω σημεία.

Ιδιαίτερη μνεία γίνεται στην εργασία του Α. Ν. Κουνάδη (1992), το περιεχόμενο της οποίας αφορά μια απλή και παράλληλα αποτελεσματική προσεγγιστική τεχνική επίλυσης μη γραμμικών προβλημάτων τόσο αρχικών όσο και συνοριακών τιμών. Η εν λόγω τεχνική, που έχει αποδειχθεί ότι διαθέτει πολύ καλή σύγκλιση και οδηγεί σε μοναδικότητα λύσεων, βασίζεται στη ακόλουθη θεώρηση – ανάπτυξη:

Έστω ένα πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών, που σχετίζεται με μια συνήθη διαφορική εξίσωση n τάξης ($n = 1, 2, \dots$) της μορφής

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \left. \begin{array}{l} x \in I \text{ για πρόβλημα αρχικών τιμών} \\ x \in [x_s, x_e] \in I \text{ για πρόβλημα συνοριακών τιμών} \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

η οποία υπόκειται σε ένα σύνολο n είτε αρχικών είτε συνοριακών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση προβλήματος αρχικών τιμών αυτές γράφονται ως:

$$y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n, x_0 \in I \quad (3.19\alpha)$$

όπου $x_0 \in I$ (συνήθως στην αρχή του πεδίου ορισμού, αλλά όχι δεσμευτικά), ενώ για πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων ως

$$\left. \begin{array}{l} g_j(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|_{x=x_s} = c_j \\ g_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|_{x=x_e} = c_k \\ j, k > 0, j + k = n \end{array} \right\} \quad (3.19\beta)$$

Εδώ, η πραγματική συνάρτηση $y(x)$ θεωρείται ότι διαθέτει n συνεχείς παραγώγους (δλδ. είναι C^n), ενώ οι μη γραμμικότητες της (3.18) μπορεί να είναι

συζευγμένοι όροι, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και δυνάμεις της $y(x)$ (αποκλειστικά ή συνδυασμένα) και των παραγώγων αυτής.

Η όλη προσεγγιστική διαδικασία, θεωρεί ότι, αφού μεταφερθούν όλοι οι μη γραμμικοί όροι στο δεξί μέλος της (3.18), η εν λόγω λαμβάνει την μορφή

$$L(y) = f \quad (3.20)$$

όπου

$$L = \Gamma^n + a_1(x)\Gamma^{n-1} + \dots + a_n(x)\Gamma^0 \quad (3.21)$$

με

$$\Gamma^k y = y^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.22\alpha)$$

και

$$\Gamma^0 y = y \quad (3.22\beta)$$

ενώ οι $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I (πιθανά σταθερές ή ίσες με μηδέν). Η $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ λαμβάνεται ως συνεχής πραγματική συνάρτηση με τις $1^{η}$ ς τάξης παραγώγους της να βρίσκονται σε ένα τετράγωνο διάστασης $n+1$.

Θέτοντας το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.20) ίσο με το μηδέν, αποκτάται η ακόλουθη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (που συχνά ονομάζεται ως «ανηγμένη» (reduced):

$$L(y) = 0 \quad (3.23)$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $y(x)$ είναι μια συνάρτηση πραγματικών τιμών με n συνεχείς παραγώγους, η μέθοδος υποθέτει ότι η λύση της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης (3.23) – υπό τις συνθήκες (3.19α) ή (3.19β) είναι γνωστή ή μπορεί άμεσα να βρεθεί. Η (3.23) συνεπώς, λόγω της (3.20), μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(i-1)}(x), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

Έστω y_0 η λύση του προβλήματος (3.23). Εισάγοντας αυτή στο δεξί μέλος της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.20), λαμβάνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση:

Έστω y_0 η λύση του προβλήματος (3.23). Εισάγοντας αυτή στο δεξί μέλος της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.20), λαμβάνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$L(y) = f(x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \quad (3.25)$$

Αν η y_p είναι η ειδική λύση της τελευταίας εξίσωσης, το γενικό της ολοκλήρωμα $y = y_0 + y_p$ αποτελεί μια πρώτη προσεγγιστική λύση $y = y_{(1)}$ του αρχικού μη γραμμικού

προβλήματος. Αν στη συνέχεια εισαχθεί η λύση αυτή στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.20) οδηγούμαστε στην παρακάτω μη ομογενή διαφορική εξίσωση

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $y(x)$ είναι μια συνάρτηση πραγματικών τιμών με n συνεχείς παραγώγους, η μέθοδος υποθέτει ότι η λύση της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης (3.23) – υπό τις συνθήκες (3.19α) ή (3.19β) είναι γνωστή ή μπορεί άμεσα να βρεθεί. Η (3.23) συνεπώς, λόγω της (3.20), μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(i-1)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

Έστω y_0 η λύση του προβλήματος (3.23). Εισάγοντας αυτή στο δεξί μέλος της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.20), λαμβάνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$L(y) = f(x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \quad (3.25)$$

Αν η y_p είναι η ειδική λύση της τελευταίας εξίσωσης, το γενικό της ολοκλήρωμα $y = y_0 + y_p$ αποτελεί μια πρώτη προσεγγιστική λύση $y = y_{(1)}$ του αρχικού μη γραμμικού προβλήματος. Αν στη συνέχεια εισαχθεί η λύση αυτή στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.20) οδηγούμαστε στην παρακάτω μη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$L(y) = f(x, y_{(1)}, y'_{(1)}, \dots, y_{(1)}^{(n-1)}) \quad (3.26)$$

που και αυτή (όπως άλλωστε και η (3.25)) υπόκειται στις συνθήκες (3.19α) ή (3.19β), ανάλογα με το είδος του προβλήματος.

Με την ίδια λογική, αναζητούνται υψηλότερης τάξης προσεγγιστικές λύσεις, για την επίτευξη της κατά το δυνατόν μεγαλύτερης ακρίβειας.

3.4.2 Μεθοδολογία – Λογισμικό - Αριθμητικά Αποτελέσματα

Το λογισμικό *Mathematica* επιλέχθηκε στη παρούσα για τις απαραίτητες αριθμητικές επιλύσεις, ενώ η μέθοδος που ακολουθήθηκε αποτελεί συνδυασμό της shooting, της chasing και της βασικής ιδέας που «κρύβεται» πίσω από την φιλοσοφία των μεθόδων Galerkin. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε συνοπτικά στο τέλος του προηγούμενου εδάφιου δεν είναι εφαρμόσιμη, λόγω της έντονης μη γραμμικότητας και ανώτερης τάξης της ΔΕ (3.17). Εδώ, θεωρείται ότι η προσεγγιστική της λύση δίνεται από μια πολυωνυμική συνάρτηση τέταρτου βαθμού, της μορφής

$$\rho(s) = \tau_4 s^4 + \tau_3 s^3 + \tau_2 s^2 + \tau_1 s + \tau_0 \quad (3.27)$$

Η εν λόγω ικανοποιεί τόσο τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Κατά συνέπεια, για τις πέντε προς υπολογισμό σταθερές $\tau_i, i = 0 - 4$ διατίθενται αρχικά τέσσερις συνθήκες.

Για τις ανάγκες τις παρούσας επιλέγονται συννοριακές συνθήκες δύο ειδών. Η 1^η θεωρεί πάκτωση – πάκτωση , και η 2^η πάκτωση αριστερά και ελεύθερο άκρο δεξιά, η τελευταία να αντιστοιχεί με την έξοδο του *stent* από τον καθετήρα. Με βάση αυτές έγινε ο υπολογισμός και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με υφιστάμενα τόσο αριθμητικά όσο και πειραματικά.

Αν αρχικά τεθεί ότι η αρχική και η τελική ακτίνα του *stent* ισούται με R (αδιαστατοποιημένη κατάλληλα), το αποτέλεσμα από το *Mathematica* της έκφρασης της συνάρτησης $\rho(s)$ για πάκτωση – πάκτωση είναι

```
ClearAll[ρ,s,τ4,τ3,τ2,τ1,τ0,p1,p2,p3,p4,R,rr]
ρ[s_]:=τ4*s^4+τ3*s^3+τ2*s^2+τ1*s+τ0
p1=ρ[0];
p2=ρ[1];
p3=ρ'[0];
p4=ρ'[1];
Solve[{p1==R,p2==R,p3==0,p4==0}]
rr=FullSimplify[τ4*s^4+τ3*s^3+τ2*s^2+τ1*s+τ0/.{τ0->R,τ1->0,τ3->-2 τ2,τ4->τ2}]/TraditionalForm
τ0
τ0+τ1+τ2+τ3+τ4
τ1
τ1+2 τ2+3 τ3+4 τ4
{{τ0->R,τ1->0,τ3->-2 τ2,τ4->τ2}}
```

$$\rho(s) = R + (s - 1)^2 s^2 \tau_2 \quad (3.28)$$

Για την 2^η περίπτωση, η σχετική λίστα του προγράμματος *Mathematica* είναι:

```
ClearAll[ρ, s, τ4, τ3, τ2, τ1, τ0, p1, p2, p3, p4, R]
ρ[s_]:= τ4*s^4 + τ3*s^3 + τ2*s^2 + τ1*s + τ0
p1 = ρ[0]
p2 = ρ'[0]
p3 = ρ''[1]
p4 = ρ'''[1]
Solve[{p1 == R, p2 == 0, p3 == 0, p4 == 0}]
rr = FullSimplify[ τ4*s^4 + τ3*s^3 + τ2*s^2 + τ1*s + τ0 /. {τ0 -> R, τ1 -> 0,
τ3 -> -((2 τ2)/3), τ4 -> τ2/6}] // TraditionalForm
τ0
τ1
2 τ2+6 τ3+12 τ4
6 τ3+24 τ4
```

$$\{\tau_0 \rightarrow R, \tau_1 \rightarrow 0, \tau_3 \rightarrow -(2\tau_2/3), \tau_4 \rightarrow \tau_2/6\}$$

$$R + 1/6 ((s-4)s+6) s^2 \tau_2$$

που οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση της $\rho(s)$:

$$\rho(s) = R + \frac{1}{6}((s-4)s+6)s^2\tau_2 \quad (3.29)$$

Σε αμφοτέρες τις περιπτώσεις, ο άγνωστος προς υπολογισμό είναι ο τ_2 , ο οποίος θα προκύψει από την μέθοδο *Galerkin*, η οποία, αν $L(\rho)$ είναι η τελεστική γραφή της διέπουσας ΔΕ, επιτάσσει την ισχύ του μηδενισμού της συνάρτησης σφάλματος (με βάση την ορθογωνικότητα):

$$\int_0^1 L(\rho) \rho ds = 0 \quad (3.30)$$

Από αυτή θα προκύψει η τιμή της παραμέτρου τ_2 κατά περίπτωση. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τα σχετικά *Mathematica Notebooks*, που περιέχονται στο Παράρτημα στο τέλος της παρούσας Διατριβής, και στις δύο περιπτώσεις οδηγούμαστε σε πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού ως προς τ_2 με σταθερούς μιγαδικούς συντελεστές.

Λόγω του γεγονότος ότι στην υφιστάμενη βιβλιογραφία υπάρχουν περιορισμένης έκτασης αναλυτικά και πειραματικά αποτελέσματα, η προσεγγιστική διαδικασία που προαναφέρθηκε είχε σαν παραμέτρους εισόδου τις ακόλουθες (Wang and Ravi-Chandar 2004β):

$$r_0 = 10.66 \text{ mm}$$

$$R = 9.9 \text{ mm}$$

$$a_0 = 34^\circ = 0.593412 \text{ rad}$$

$$\gamma = 85\mu\text{m} = 0.085 \text{ mm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$G = 77 \text{ GPa}$$

$$p_a = 153 \text{ mmHg} = 1.3332236 \times 10^{-7} \text{ GPa}$$

$$I = \frac{\pi\gamma^4}{4} = 4.1 \times 10^{-4} \text{ mm}^4$$

Οι σχετικοί αδιάστατοι παράγοντες του προβλήματος, σύμφωνα με τα προηγηθέντα, λαμβάνουν τις ακόλουθες τιμές, οι οποίες είναι πολύ μικρές σε σχέση με τα κλασσικά προβλήματα δοκού επί ελαστικού εδάφους:

$$\xi = 0.6873$$

$$\bar{\gamma} = 0.00797$$

$$\zeta = 1.55344 \times 10^{-9}$$

$$\bar{p}_a = 8.881 \times 10^{-10}$$

$$I = 4.1 \times 10^{-5}$$

$$\delta = 3.1751 \times 10^{-9}$$

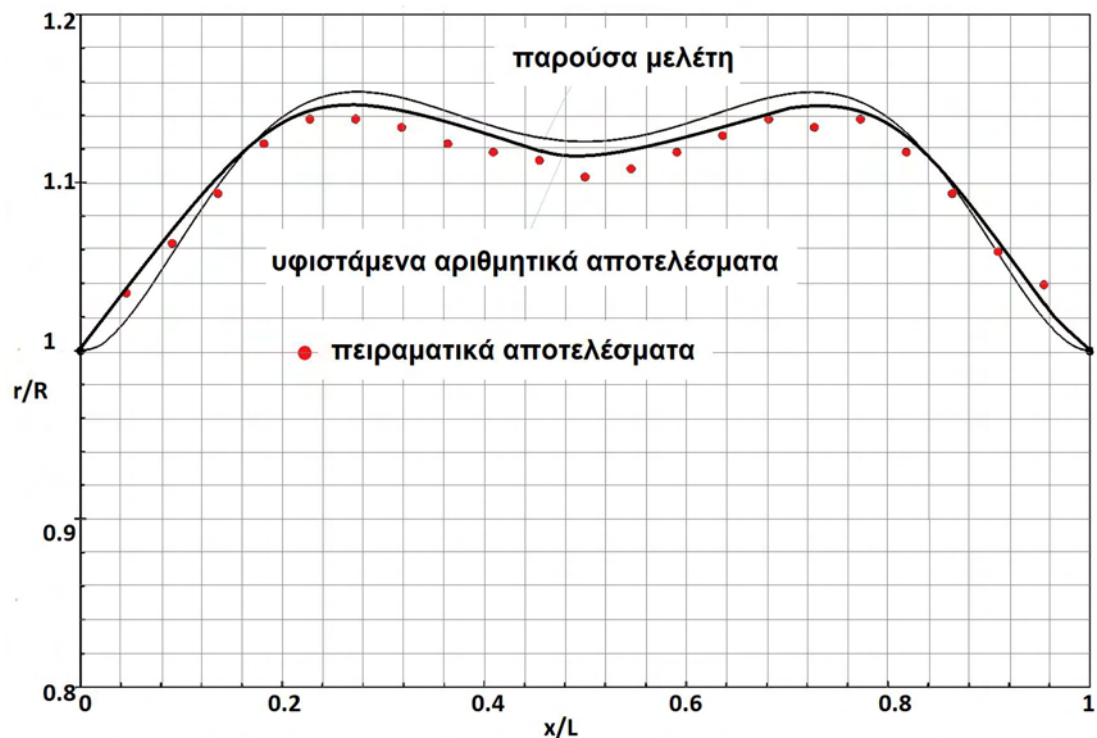
$$R = 0.929$$

Και στις δύο περιπτώσεις των συνοριακών συνθηκών, η 6^{ου} βαθμού πολυωνυμική εξίσωση ως προς τ_2 έχει δύο ζεύγη μιγαδικών συζυγών λύσεων και δύο ίσες και αντίθετες πραγματικές λύσεις. Από αυτές μόνο η θετική πραγματική ρίζα είναι φυσικά αποδεκτή και για το λόγο αυτό επιλέγεται στις εκφράσεις της $\rho(s)$ από τις σχέσεις (3.28) και (3.29).

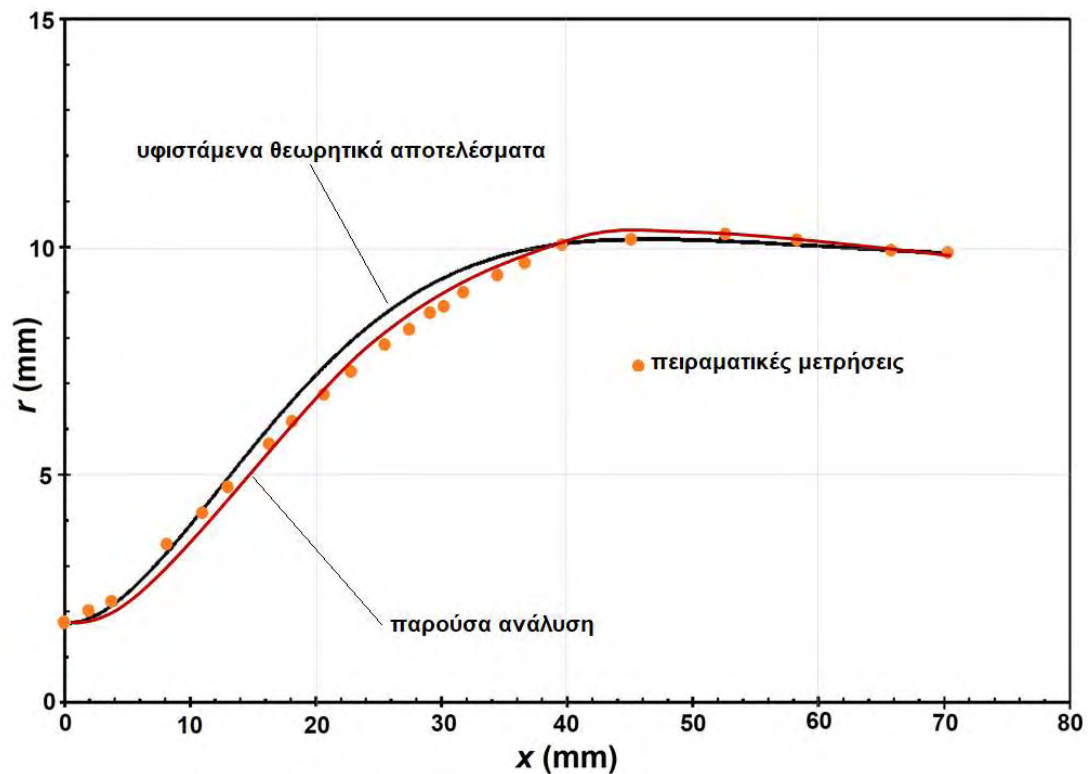
Για λόγους οικονομίας της ύλης και του μεγάλου όγκου των υπολογισμών, αυτοί δεν παρατίθενται συνημμένοι στο Παράρτημα, αλλά είναι στη διάθεση του αναγνώστη.

Τα σχετικά αποτελέσματα παρατίθενται γραφικά, για μεν την πρώτη περίπτωση στο Σχήμα 3.4, για δε την δεύτερη στο Σχήμα 3.5. Στα σχήματα αυτά εκτός από τη λύση που προέκυψε από την παρούσα ανάλυση παρουσιάζονται επίσης τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά αποτελέσματα (Wang and Ravi-Chandar 2004β), μετά από κατάλληλη ψηφιοποίηση και προσαρμογή κλίμακας.

Από το περιεχόμενο των ως άνω γραφημάτων, προκύπτει πολύ μεγάλη συμφωνία της ανάλυσης του παρόντος Κεφαλαίου με προηγούμενα ευρήματα, γεγονός που την καθιστά αξιόπιστη, παρόλο που είναι προσεγγιστική.



Σχήμα 3.4 Μεταβολή της ακτίνας του stent με τη θέση κατά μήκος αυτού (περίπτωση 1)



Σχήμα 3.5 Μεταβολή της ακτίνας του stent με τη θέση κατά μήκος αυτού (περίπτωση 2)

3.4.3 Συμπεράσματα και Προτάσεις για μελλοντική Έρευνα

Από την όλη ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτουν τα ακόλουθα βασικά συμπεράσματα:

Τα stents, αναφορικά με την μηχανική τους συμπεριφορά, αποτελούν ένα συνεχώς αναπτυσσόμενο επιστημονικό ζήτημα, το οποίο άπτεται συνδυασμού εξειδικευμένων γνώσεων Ιατρικής και Μηχανικής, γεγονός το οποίο δύσκολα συνδυάζεται.

Δυστυχώς, η τάση των κατά καιρούς επιστημονικών δημοσιεύσεων σχετίζεται με «διαφήμιση» προϊόντων και εταιρειών κατασκευής (εκτός λίγων εξαιρέσεων), με σκοπό την τεκμηρίωση του εκάστοτε προϊόντος στην αγορά, παρά με την παραγωγή αμιγούς επιστημονικής γνώσης.

Παρά ταύτα, η προσομοίωση της συμπεριφοράς των stents μέσω της θεώρησης δοκού επί ελαστικού εδάφους παραμένει επίκαιρη και χρήζει περαιτέρω επιστημονικής ενασχόλησης.

Στην παρούσα Διατριβή δείχτηκε η αποτελεσματικότητα της ως άνω προσομοίωσης μέσω μιας απλής, πλην όμως αξιόπιστης, προσεγγιστικής διαδικασίας

και συνδυάστηκε το υφιστάμενο μαθηματικό υπόβαθρο με υπάρχοντα αποτελέσματα, με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια.

Για μελλοντική έρευνα προτείνεται η χρήση εξευγενισμένων μεθόδων προσομοίωσης της συμπεριφοράς των stents που να συνδυάζεται με τις συνθήκες του εκάστοτε ασθενούς. Τούτο απαιτεί συνεργασία μεταξύ των κλάδων των επιστημών της Μηχανικής και της Ιατρικής, το οποίο ήδη έχει αποδειχθεί ότι οδηγεί σε καλύτερη καθημερινή υγεία.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Timoshenko, S. P., 1956, *Strength of Materials*, Part II, 3rd Ed., D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, pp. 124–128.
- Bailey, P.B., Shampine, L.F., Waltman, P.E., 1968, *Nonlinear Two Point Boundary Value Problems*, Academic Press, NY and London.
- Hildebrand, F.B., 1974, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Dover Publications, N.Y., USA.
- Stoer, J., Burlish, R., 1980, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Heidelberg.
- Agarwal, R.P., 1986, *Boundary Value Problems for Higher Order Differential Equations*, World Scientific, Philadelphia, PA, USA.
- Fallone, B. G., Wallace, S., and Gianturco, C., 1988, “Elastic Characteristics of the Self-Expanding Metallic Stents,” *Invest. Radiol.*, **23**, pp. 370–376.
- Kounadis, A.N., 1992, “An efficient and simple approximate technique for solving nonlinear initial and boundary-value problems,” *Computational Mechanics*, **9**, pp. 221–231.
- Loshakove, A., and Azhari, H., 1997, “Mathematical Formulation for Computing the Performance of Self-Expanding Helical Stents,” *Int. J. Med. Inf.*, **44**, pp. 127–133.
- Rogers, C., Tseng, D. Y., Squire, J. C., and Edelman, E. R., 1999, “Balloon-Artery Interactions During Stent Placement,” *Circ. Res.*, **84**, pp. 37–383.
- Dumoulin, C., and Cochelin, B., 2000, “Mechanical Behavior Modeling of Balloon-Expandable Stents,” *J. Biomech.*, **33**, pp. 1461–1470.
- Etave, F., Inet, G., Boivin, M., Boyer, J. C., Rioufol, G., and Thollet, G., 2001, “Mechanical Properties of Coronary Stents Determined by Using Finite Element Analysis,” *J. Biomech.*, **34**, pp. 1065–1075.
- Migliavacca, F., Petrini, L., Colombo, M., Auricchio, F. and Pietrabissa, R., 2002, “Mechanical Behavior of Coronary Stents Investigated through the Finite Element Method,” *J. Biomech.*, **35**, pp. 803–811.
- Wang, R., and Ravi-Chandar, K., 2004 α , “Mechanical Response of a Metallic Aortic Stent: I. Pressure-Diameter Relationship,” *ASME J. Appl. Mech.*, **71**, pp. 697–705.
- Wang, R., and Ravi-Chandar, K., 2004 β , “Mechanical Response of a Metallic Aortic Stent: II. A Beam-on-Elastic Foundation Model,” *ASME J. Appl. Mech.*, **71**, pp. 706–712.

- Hanus, J., Zahora, J., 2005, “Measurement and Comparison of Mechanical Properties of Nitinol Stents,” *Phys. Scr.*, **T118**, pp. 264–267.
- Daisuke, Y., Inoue, K., Narita, Y., 2008, “Understanding the Mechanical Properties of Self-Expandable Stents: A Key to Successful Product Development,” *Journal of Mechanical Engineering*, **54(6)**, pp. 471–485.
- Ghosh, P., DasGupta, K., Nag, D., Chanda, A., 2011, “Numerical Study on Mechanical Properties of Stents with Different Materials during Stent Deployment with Balloon Expansion,” Excerpt from the Proceedings of the 2011 COMSOL Conference in Bangalore, India.
- Xavier, A.L. Gr., 2014, “Static Kirchhoff Rods under the Action of External Forces: Integration via Runge-Kutta Method,” *Journal of Computational Methods on Physics*, Article ID 650365, 12 pages.
- Hellevik, L.F., 2018, *Numerical Methods for Engineers*, Department of Structural Engineering, Norwegian University of Science and Technology.
- Keller, H.B., 2018, *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, Latest Edition, Dover, N.Y. USA.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Λίστες προγραμμάτων *Mathematica*

Περίπτωση 1: Πάκτωση – Πάκτωση(MathML)

Εφαρμογή Συνοριακών Συνθηκών

Εφαρμογή Μεθόδου Galerkin - Παραγοντοποίηση για την εύρεση του τ_2

-

```
ClearAll[ρ, s, τ4, τ3, τ2, τ1, τ0, p1, p2, p3, p4, R, rr]
```

```
ρ[s_]:= τ4 * s4 + τ3 * s3 + τ2 * s2 + τ1 * s + τ0
```

```
p1 = ρ[0]
```

```
p2 = ρ[1]
```

```
p3 = ρ'[0]
```

```
p4 = ρ'[1]
```

```
Solve[{p1 == R, p2 == R, p3 == 0, p4 == 0}]
```

```
rr = FullSimplify[τ4 * s4 + τ3 * s3 + τ2 * s2 + τ1 * s + τ0 /. {τ0 → R, τ1 → 0, τ3 → -2τ2, τ4 → τ2}]
```

```
%//TraditionalForm
```

$$\tau_0$$
$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$
$$\tau_1$$
$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + 4\tau_4$$
$$\{\{\tau_0 \rightarrow R, \tau_1 \rightarrow 0, \tau_3 \rightarrow -2\tau_2, \tau_4 \rightarrow \tau_2\}\}$$
$$R + (s - 1)^2 s^2 \tau_2$$

ClearAll[$\xi, \alpha_0, R, s, \rho, \rho\rho, \xi, n, \gamma, \delta, \zeta, pa, pr1, pr2, pr3, pr4, DEFE, L1, Galer1, Galer2]$]

$$\xi = \cos^2(\alpha_0);$$

$$\rho\rho = R + (s - 1)^2 s^2 \tau^2;$$

$$\rho(s_) := R + (s - 1)^2 s^2 \tau^2$$

$$L1 = \rho^{(4)}(s)$$

$$pr1 = \frac{4\xi^2}{\gamma^4};$$

$$pr2 = \frac{8pa\rho\rho}{\gamma^4 n};$$

$$pr3 = \zeta\rho\rho^3 \left(\frac{3\xi\rho\rho^2}{8} + 0.5 \right) \sin(\alpha_0\xi) + \rho\rho(\delta - \zeta) - \delta;$$

$$pr4 = -\frac{1}{8}\xi^2\rho\rho^4 - 0.5\xi\rho\rho^2 + 1;$$

$$pr5 = pr2pr4;$$

$$DEFE = L1 + pr1pr3 - pr2pr4;$$

Galer1 = DEFE $\rho\rho$

Galer2 = FullSimplify $\left[\int_0^1 \text{Galer1 } ds \right];$

Collect[%, τ^2]

$$\begin{aligned} & 24\tau^2(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)(24\tau^2 - \frac{1}{n\gamma^4} 8pa(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)(1 \\ & \quad - 0.5(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)^2\text{Cos}[\alpha_0]^2 - \frac{1}{8}(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)^4\text{Cos}[\alpha_0]^4) \\ & \quad + \frac{1}{\gamma^4} 4\text{Cos}[\alpha_0]^4(-\delta + (\delta - \zeta)(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2) + \zeta(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)^3(0.5 \\ & \quad + \frac{3}{8}(R + (-1 + s)^2s^2\tau^2)^2\text{Cos}[\alpha_0]^2)\text{Sin}[\alpha_0\text{Cos}[\alpha_0]^2])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (5.79915436560441 \times 10^{-7} \text{pa}R + 7.732205951072047 \times 10^{-7} \text{pa}R \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 1.933051487768011 \times 10^{-7} \text{pa}R \text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 1.812235739251378 \times 10^{-8} i) nR \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 1.812235739251378 \times 10^{-8} i) nR \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 7.248943028059784 \times 10^{-7} nR \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 5.436707226635918 \times 10^{-7} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 2.174682904865221 \times 10^{-7} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 3.624471478502756 \times 10^{-8} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (6. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.812235739251378 \times 10^{-8} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 5.436707226635918 \times 10^{-7} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 2.174682904865221 \times 10^{-7} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.812235739251378 \times 10^{-8} nR \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (0.000009141185612904224 \text{pa} + 0.000025709584534183705 \text{pa} R^2 \\
& + 0.000009141185612904224 \text{pa} \text{Cos}[2. \alpha 0] + 0.00003427944604084132 \text{pa} R^2 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.000008569861510210331 \text{pa} R^2 \text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 8.034245166932408 \times 10^{-7} i) n R^2 \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 8.034245166932408 \times 10^{-7} i) n R^2 \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.000003427944604617039 n \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.000032136980671282345 n R^2 \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.000002285296403226056 n \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0000241027355016854 n R^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 5.71324100806514 \times 10^{-7} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.00000964109420031889 n R^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.000001606849033386481 n R^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (6. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 8.034245166932408 \times 10^{-7} n R^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.000002285296403226056 n \zeta \text{Sin}[\alpha 0 (2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0.0000241027355016854nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 5.71324100806514 \times 10^{-7}n\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 0.00000964109420031889nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 8.034245166932408 \times 10^{-7}nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(6. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^3 (0.0006660006659999774paR + 0.0006243756243730081paR^3 \\
& + 0.0006660006659999774paR\text{Cos}[2.\alpha 0] + 0.0008325008324973071paR^3\text{Cos}[2.\alpha 0] \\
& + 0.00020812520812432678paR^3\text{Cos}[4.\alpha 0] + (0. \\
& + 0.000019511738261656503i)nR^3\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.000019511738261656503i)nR^3\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.00024975024975043564nR\zeta\text{Sin}[1.\alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.0007804695304715059nR^3\zeta\text{Sin}[1.\alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.00016650016649999436nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0005853521478492719nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.00004162504162499859nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0002341408591416405nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.000039023476523313005nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.000019511738261656503nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.00016650016649999436nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0.0005853521478492719nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 0.00004162504162499859nR\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 0.0002341408591416405nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2)] \\
&+ 0.000019511738261656503nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(6. + 1.\text{Cos}[\alpha_0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (-0.012698412698413541pa + 0.019047619047618983paR^2 \\
& + 0.008928571428571175paR^4 + n(0.80000000000000007\gamma^4 \\
& + 0.002380952380952373\delta - 0.002380952380952373\zeta) \\
& + 0.01904761904761898paR^2 \text{Cos}[2. \alpha 0] + 0.011904761904760974paR^4 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.003174603174603385n\delta \text{Cos}[2. \alpha 0] - 0.003174603174603385n\zeta \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.0029761904761902436paR^4 \text{Cos}[4. \alpha 0] + 0.0007936507936508463n\delta \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& - 0.0007936507936508463n\zeta \text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 0.0002790178571428492i)nR^4 \zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.0002790178571428492i)nR^4 \zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.007142857142856673nR^2 \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.011160714285713524nR^4 \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.004761904761904745nR^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.008370535714285587nR^4 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0011904761904761862nR^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.0033482142857141906nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0005580357142856984nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0002790178571428492nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.004761904761904745nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.008370535714285587nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0011904761904761862nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0033482142857141906nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0002790178571428492nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (-0.5333333333333332paR + 0.2666666666666666paR^3 + 0.07500000000000002paR^5 \\
& + n(-0.0500000000000000044\delta + R(24.\gamma^4 + 0.10000000000000009\delta \\
& - 0.10000000000000009\zeta)) + 0.2666666666666666paR^3\text{Cos}[2.\alpha0] \\
& + 0.10000000000000009paR^5\text{Cos}[2.\alpha0] - 0.06666666666666665n\delta\text{Cos}[2.\alpha0] \\
& + 0.13333333333333333nR\delta\text{Cos}[2.\alpha0] - 0.13333333333333333nR\zeta\text{Cos}[2.\alpha0] \\
& + 0.0250000000000000022paR^5\text{Cos}[4.\alpha0] - 0.016666666666666663n\delta\text{Cos}[4.\alpha0] \\
& + 0.0333333333333333326nR\delta\text{Cos}[4.\alpha0] - 0.0333333333333333326nR\zeta\text{Cos}[4.\alpha0] + (0. \\
& + 0.00234375000000000008i)nR^5\zeta\text{Cos}[\alpha0(6. + \text{Cos}[\alpha0]^2)] - (0. \\
& + 0.00234375000000000008i)nR^5\zeta\text{Cos}[\alpha0(6. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.100000000000000009nR^3\zeta\text{Sin}[1.\alpha0\text{Cos}[\alpha0]^2] + 0.09375nR^5\zeta\text{Sin}[1.\alpha0\text{Cos}[\alpha0]^2] \\
& - 0.066666666666666665nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] - 0.0703125nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. \\
& - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] - 0.016666666666666663nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.028125000000000001nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.004687500000000000016nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0.0023437500000000008nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. + \text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
&+ 0.066666666666666665nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha0]^2)] + 0.0703125nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. \\
&+ 1. \text{Cos}[\alpha0]^2)] + 0.0166666666666666663nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
&+ 0.028125000000000001nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
&+ 0.0023437500000000008nR^5\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} (-8. paR^2 + 2. paR^4 + 0.34375paR^6 + nR((-1.375 + 1.375R)\delta - 1.375R\zeta) + 2. paR^4 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.3125paR^6 \text{Cos}[2. \alpha 0] - 1.25nR\delta \text{Cos}[2. \alpha 0] + nR^2(1.25\delta - 1.25\zeta) \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.109375paR^6 \text{Cos}[4. \alpha 0] - 0.4375nR\delta \text{Cos}[4. \alpha 0] + nR^2(0.4375\delta - 0.4375\zeta) \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& + 0.09375paR^6 \text{Cos}[6. \alpha 0] - 0.375nR\delta \text{Cos}[6. \alpha 0] + 0.375nR^2\delta \text{Cos}[6. \alpha 0] \\
& - 0.375nR^2\zeta \text{Cos}[6. \alpha 0] + 0.03125paR^6 \text{Cos}[8. \alpha 0] - 0.125nR\delta \text{Cos}[8. \alpha 0] \\
& + 0.125nR^2\delta \text{Cos}[8. \alpha 0] - 0.125nR^2\zeta \text{Cos}[8. \alpha 0] + 0.09375paR^6 \text{Cos}[10. \alpha 0] \\
& - 0.375nR\delta \text{Cos}[10. \alpha 0] + 0.375nR^2\delta \text{Cos}[10. \alpha 0] - 0.375nR^2\zeta \text{Cos}[10. \alpha 0] \\
& + 0.015625paR^6 \text{Cos}[12. \alpha 0] - 0.0625nR\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] + 0.0625nR^2\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] \\
& - 0.0625nR^2\zeta \text{Cos}[12. \alpha 0] + (0. + 0.0625i)nR^4\zeta \text{Cos}[\alpha 0(4. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.01171875i)nR^6\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. + 0.0625i)nR^4\zeta \text{Cos}[\alpha 0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. + 0.01171875i)nR^6\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.046875i)R(1. paR^5 + n(-4. \delta + 4. R\delta - 4. R\zeta)) \text{Cos}[4. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0] - (0. \\
& + 0.046875i)paR^6 \text{Cos}[12. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0] + (0. + 0.1875i)nR\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0] - (0. \\
& + 0.1875i)nR^2\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0] + (0. + 0.1875i)nR^2\zeta \text{Cos}[12. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.01171875paR^6Csc[2.\alpha0]^2 - 0.046875nR\delta Csc[2.\alpha0]^2 + 0.046875nR^2\delta Csc[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.046875nR^2\zeta Csc[2.\alpha0]^2 - 0.015625paR^6Cos[8.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.0625nR\delta Cos[8.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 - 0.0625nR^2\delta Cos[8.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.0625nR^2\zeta Cos[8.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 + 0.00390625paR^6Cos[16.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.015625nR\delta Cos[16.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 + 0.015625nR^2\delta Cos[16.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.015625nR^2\zeta Cos[16.\alpha0]Csc[2.\alpha0]^2 + 0.140625paR^6Csc[2.\alpha0]Sin[4.\alpha0] \\
& - 0.5625nR\delta Csc[2.\alpha0]Sin[4.\alpha0] + 0.5625nR^2\delta Csc[2.\alpha0]Sin[4.\alpha0] \\
& - 0.5625nR^2\zeta Csc[2.\alpha0]Sin[4.\alpha0] - (0. + 0.09375i)paR^6Sin[6.\alpha0] + (0. \\
& + 0.375i)nR\delta Sin[6.\alpha0] - (0. + 0.375i)nR^2\delta Sin[6.\alpha0] + (0. + 0.375i)nR^2\zeta Sin[6.\alpha0] - (0. \\
& + 0.09375i)paR^6Sin[10.\alpha0] + (0. + 0.375i)nR\delta Sin[10.\alpha0] - (0. + 0.375i)nR^2\delta Sin[10.\alpha0] \\
& + (0. + 0.375i)nR^2\zeta Sin[10.\alpha0] - 0.046875paR^6Csc[2.\alpha0]Sin[12.\alpha0] \\
& + 0.1875nR\delta Csc[2.\alpha0]Sin[12.\alpha0] - 0.1875nR^2\delta Csc[2.\alpha0]Sin[12.\alpha0] \\
& + 0.1875nR^2\zeta Csc[2.\alpha0]Sin[12.\alpha0] + 0.75nR^4\zeta Sin[1.\alpha0Cos[\alpha0]^2] \\
& + 0.46875nR^6\zeta Sin[1.\alpha0Cos[\alpha0]^2] - 0.5nR^4\zeta Sin[\alpha0(2. - 1.Cos[\alpha0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.3515625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - 0.125nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.140625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - 0.0234375nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0625nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + 0.01171875nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.5nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + 0.3515625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0625nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + 0.140625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.01171875nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (5.547018400164916 \times 10^{-9} \text{pa} + 7.396014467531131 \times 10^{-9} \text{pa} \cos[2. \alpha_0] \\
& + 1.849003561371631 \times 10^{-9} \text{pa} \cos[4. \alpha_0] + 1.110223024625156 \times 10^{-16} \text{pa} \cos[6. \alpha_0] \\
& + 2.775557561562891 \times 10^{-17} \text{pa} \cos[10. \alpha_0] - (0. \\
& + 2.012279232133096 \times 10^{-1} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (6. - 1. \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 3.122502256758253 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (8. - 1. \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (10. - 1. \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 2.775557561562891 \times 10^{-1} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (12. - 1. \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (14. - 1. \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 1.733445331719707 \times 10^{-10} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (6. + \cos[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (8. + \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 0.05003460427989127 i) n \zeta \cos[\alpha_0 (10. + \cos[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 4.85722573273506 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (12. + \cos[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 0.1334256114130435 i) n \zeta \cos[\alpha_0 (14. + \cos[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} i) n \zeta \cos[\alpha_0 (16. + \cos[\alpha_0]^2)] - (0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.016678201426630436i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(18. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 2.220446049250313 \times 10^{-16}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 1.73344297249578 \times 10^{-10}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.05003460427989131i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(10. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.1334256114130435i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(14. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.016678201426630436i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(18. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.110223024625156 \times 10^{-16}pa\text{Cos}[\alpha 0(6. + 2. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.665334536937734 \times 10^{-16}pa\text{Cos}[\alpha 0(10. + 2. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 5.551115123125783 \times 10^{-17}pa\text{Cos}[\alpha 0(14. + 2. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 4.336808689942018 \times 10^{-1} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(2. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 2.775557561562891 \times 10^{-17}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(4. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 5.724587470723463 \times 10^{-17}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 5.551115123125783 \times 10^{-17}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(8. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 5.551115123125783 \times 10^{-17}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(10. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0(12. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 5.204170427930421 \times 10^{-18} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0(14. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 4.336808689942018 \times 10^{-19} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0(18. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 2.220446049250313 \times 10^{-16} i) \text{paSin}[2. \alpha 0] + (0. \\
& + 5.551115123125783 \times 10^{-17} i) \text{paSin}[4. \alpha 0] - (0. \\
& + 2.775557561562891 \times 10^{-1} i) \text{paSin}[10. \alpha 0] \\
& + 6.933772667139237 \times 10^{-9} n \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 5.200329722399033 \times 10^{-9} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 2.080130956372272 \times 10^{-9} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 3.466888651160182 \times 10^{-10} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 1.040834085586084 \times 10^{-1} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(8. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-17} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(10. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 2.775557561562891 \times 10^{-17} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(12. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.387778780781445 \times 10^{-1} n \zeta \text{Sin}[\alpha 0(14. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.733445331719707 \times 10^{-10} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 1.387778780781445 \times 10^{-17} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(8. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 2.081668171172168 \times 10^{-1} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(10. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 3.469446951953614 \times 10^{-17} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(12. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 5.200330166488243 \times 10^{-9} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 2.080130956372272 \times 10^{-9} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.73344297249578 \times 10^{-10} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 5.551115123125783 \times 10^{-17} i) \text{paSin}[\alpha 0(10. + 2. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 5.551115123125783 \times 10^{-1} i) \text{paSin}[\alpha 0(14. + 2. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 4.336808689942018 \times 10^{-19} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 1.734723475976807 \times 10^{-1} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 5.204170427930421 \times 10^{-18} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(14. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 4.336808689942018 \times 10^{-1} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(18. + 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

Περίπτωση 1: Πάκτωση – Ελεύθερο άκρο(MathML)

Εφαρμογή Συνοριακών Συνθηκών

Εφαρμογή Μεθόδου Galerkin - Παραγοντοποίηση για την εύρεση του τ_2

ClearAll[$\rho, s, \tau_4, \tau_3, \tau_2, \tau_1, \tau_0, p_1, p_2, p_3, p_4, dr_3, dr_2, rr, R$]

$$\rho[s_]:= \tau_4 * s^4 + \tau_3 * s^3 + \tau_2 * s^2 + \tau_1 * s + \tau_0$$

$$p_1 = \rho[0]$$

$$p_2 = \rho'[0]$$

$$p_3 = \rho''[1]$$

$$p_4 = \rho'''[1]$$

$$\text{Solve}[\{p_1 == R, p_2 == 0, p_3 == 0, p_4 == 0\}]$$

$$\text{rr} = \text{FullSimplify}[\tau_4 * s^4 + \tau_3 * s^3 + \tau_2 * s^2 + \tau_1 * s + \tau_0 /. \{\tau_0 \rightarrow R, \tau_1 \rightarrow 0, \tau_3 \rightarrow -\frac{2\tau_2}{3}, \tau_4 \rightarrow \frac{\tau_2}{6}\} // \text{TraditionalForm}$$

$$\tau_0$$

$$\tau_1$$

$$2\tau_2 + 6\tau_3 + 12\tau_4$$

$$6\tau_3 + 24\tau_4$$

$$\{\{\tau_0 \rightarrow R, \tau_1 \rightarrow 0, \tau_3 \rightarrow -\frac{2\tau_2}{3}, \tau_4 \rightarrow \frac{\tau_2}{6}\}\}$$

$$R + \frac{1}{6}((s - 4)s + 6)s^2\tau_2$$

ClearAll[$\xi, \alpha_0, R, s, \rho, \rho\rho, \xi, n, \gamma, \delta, \zeta, pa, pr_1, pr_2, pr_3, pr_4, \text{DEFE}, L_1, \text{Galer}_1, C$]

$$\xi = \text{Cos}[\alpha_0]^2;$$

$$\rho\rho = R + \frac{1}{6}((s - 4)s + 6)s^2\tau_2;$$

$$\rho[s_]:= R + \frac{1}{6}((s - 4)s + 6)s^2\tau_2$$

$$L_1 = \rho''''[s]$$

$$pr_1 = \frac{4\xi^2}{\gamma^4};$$

$$pr_2 = \frac{8\rho\rho pa}{n\gamma^4};$$

$$\text{pr3} = \rho\rho * (\delta - \zeta) - \delta + \zeta\rho\rho^3 \text{Sin}[\alpha 0 \xi] * (0.5 + \frac{3}{8} * \xi * \rho\rho^2);$$

$$\text{pr4} = 1 - 0.5\xi\rho\rho^2 - \frac{1}{8}\xi^2\rho\rho^4;$$

$$\text{pr5} = \text{pr2} * \text{pr4};$$

$$\text{DEFE} = \text{L1} + \text{pr1} * \text{pr3} - \text{pr2} * \text{pr4};$$

$$\text{Galer1} = \text{DEFE} * \rho\rho$$

$$\text{Galer2} = \text{FullSimplify} \left[\int_0^1 \text{Galer1} ds \right];$$

$$\text{Collect}[\%, \tau 2]$$

(*Αποτελέσματα*)

$$\begin{aligned} & 4\tau 2 \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 + s)s)\tau 2 \right) \left(4\tau 2 - \frac{1}{n\gamma^4} 8\text{pa} \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (-4 + s)s)\tau 2 \right) \right) \left(1 \right. \\ & \quad \left. - 0.5 \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 + s)s)\tau 2 \right)^2 \text{Cos}[\alpha 0]^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{8} \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 + s)s)\tau 2 \right)^4 \text{Cos}[\alpha 0]^4 \right) \\ & \quad \left. + \frac{1}{\gamma^4} 4 \text{Cos}[\alpha 0]^4 \left(-\delta + (\delta - \zeta) \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + s)s)\tau 2 \right) + \zeta \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 + s)s)\tau 2 \right)^3 \left(0.5 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{3}{8} \left(R + \frac{1}{6}s^2(6 + (-4 \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + s)s)\tau 2 \right)^2 \text{Cos}[\alpha 0]^2 \right) \text{Sin}[\alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^5 (0.008836781712598718paR \\
& + 0.011782375616798402paRCos[2.\alpha0] \\
& + 0.0029455939041996004paRCos[4.\alpha0] + (0. \\
& + 0.00027614942851871693i)nR\zeta Cos[\alpha0(6. \\
& + Cos[\alpha0]^2)] - (0. \\
& + 0.00027614942851871693i)nR\zeta Cos[\alpha0(6. \\
& + 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& + 0.011045977140748398nR\zeta Sin[1.\alpha0Cos[\alpha0]^2] \\
& - 0.008284482855561439nR\zeta Sin[\alpha0(2. \\
& - 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& - 0.003313793142224464nR\zeta Sin[\alpha0(4. \\
& - 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& - 0.0005522988570374339nR\zeta Sin[\alpha0(6. \\
& - 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& + 0.00027614942851871693nR\zeta Sin[\alpha0(6. \\
& + Cos[\alpha0]^2)] \\
& + 0.008284482855561439nR\zeta Sin[\alpha0(2. \\
& + 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& + 0.003313793142224464nR\zeta Sin[\alpha0(4. \\
& + 1. Cos[\alpha0]^2)] \\
& + 0.00027614942851871693nR\zeta Sin[\alpha0(6. \\
& + 1. Cos[\alpha0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (0.01890745420157203pa \\
& + 0.05317721494192085paR^2 \\
& + 0.01890745420157203pa\text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.07090295325589481paR^2\text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.017725738313973703paR^2\text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 0.00166178796693503i)nR^2\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.00166178796693503i)nR^2\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0070902953255894685n\zeta\text{Sin}[1. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.06647151867740153nR^2\zeta\text{Sin}[1. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.0047268635503930345n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.049853639008051065nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0011817158875982586n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.019941455603220415nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.00332357593387006nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.00166178796693503nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0047268635503930345n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 0.049853639008051065nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(2. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 0.0011817158875982586n\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 0.019941455603220415nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 0.00166178796693503nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha_0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0^2])) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (0.1901505901505904paR \\
& + 0.17826617826617808paR^3 \\
& + 0.1901505901505904paR\text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.23768823768823688paR^3\text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.05942205942205922paR^3\text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 0.005570818070818058i)nR^3\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.005570818070818058i)nR^3\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.07130647130647129nR\zeta\text{Sin}[1. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.22283272283272265nR^3\zeta\text{Sin}[1. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.047537647537647484nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.16712454212454178nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.011884411884411871nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.06684981684981675nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.011141636141636116nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.005570818070818058nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.047537647537647484nR\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
&+ 0.16712454212454178nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(2. \\
&+ 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
&+ 0.011884411884411871nR\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. \\
&+ 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
&+ 0.06684981684981675nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(4. \\
&+ 1. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
&+ 0.005570818070818058nR^3\zeta\text{Sin}[\alpha_0(6. \\
&+ 1. \text{Cos}[\alpha_0^2])) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (-0.5135802469135805pa \\
& + 0.7703703703703706paR^2 \\
& + 0.3611111111111112paR^4 \\
& + n(0.8000000000000002\gamma^4 \\
& + 0.09629629629629632\delta \\
& - 0.09629629629629632\zeta) \\
& + 0.7703703703703706paR^2 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.4814814814814819paR^4 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.12839506172839513n\delta \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& - 0.12839506172839513n\zeta \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.12037037037037049paR^4 \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& + 0.03209876543209878n\delta \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& - 0.03209876543209878n\zeta \text{Cos}[4. \alpha 0] + (0. \\
& + 0.011284722222222225i)nR^4 \zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 0.011284722222222225i)nR^4 \zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.2888888888888888nR^2 \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 0.4513888888888884nR^4 \zeta \text{Sin}[1. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 0.1925925925925928nR^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.3385416666666668nR^4 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0481481481481482nR^2 \zeta \text{Sin}[\alpha 0(4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.13541666666666663nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.022569444444444445nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.011284722222222225nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.1925925925925928nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.33854166666666668nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.0481481481481482nR^2\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.13541666666666663nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 0.011284722222222225nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2))] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^2 (-3.2paR + 1.6paR^3 + 0.44999999999999996paR^5 \\
& \quad + n(-0.3\delta + R(4.\gamma^4 + 0.6\delta - 0.6\zeta)) \\
& \quad + 1.6paR^3 \text{Cos}[2.\alpha 0] + 0.6paR^5 \text{Cos}[2.\alpha 0] \\
& \quad - 0.4n\delta \text{Cos}[2.\alpha 0] + 0.8nR\delta \text{Cos}[2.\alpha 0] \\
& \quad - 0.8nR\zeta \text{Cos}[2.\alpha 0] + 0.15paR^5 \text{Cos}[4.\alpha 0] \\
& \quad - 0.1n\delta \text{Cos}[4.\alpha 0] + 0.2nR\delta \text{Cos}[4.\alpha 0] \\
& \quad - 0.2nR\zeta \text{Cos}[4.\alpha 0] + (0. \\
& \quad + 0.014062499999999999i)nR^5\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& \quad + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& \quad + 0.014062499999999999i)nR^5\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& \quad + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] + 0.6nR^3\zeta \text{Sin}[1.\alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& \quad + 0.5625nR^5\zeta \text{Sin}[1.\alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& \quad - 0.4nR^3\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad - 0.421875nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad - 0.1nR^3\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad - 0.16875nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad - 0.028124999999999997nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& \quad - 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad + 0.014062499999999999nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& \quad + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + 0.4nR^3\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad + 0.421875nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad + 0.1nR^3\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad + 0.16875nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& \quad + 0.014062499999999999nR^5\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6.
\end{aligned}$$

$$+ 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} (-8. paR^2 + 2. paR^4 + 0.34375paR^6 + nR((-1.375 \\
& + 1.375R)\delta - 1.375R\zeta) + 2. paR^4 \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.3125paR^6 \text{Cos}[2. \alpha 0] - 1.25nR\delta \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + nR^2(1.25\delta - 1.25\zeta) \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.109375paR^6 \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& - 0.4375nR\delta \text{Cos}[4. \alpha 0] + nR^2(0.4375\delta \\
& - 0.4375\zeta) \text{Cos}[4. \alpha 0] + 0.09375paR^6 \text{Cos}[6. \alpha 0] \\
& - 0.375nR\delta \text{Cos}[6. \alpha 0] + 0.375nR^2\delta \text{Cos}[6. \alpha 0] \\
& - 0.375nR^2\zeta \text{Cos}[6. \alpha 0] + 0.03125paR^6 \text{Cos}[8. \alpha 0] \\
& - 0.125nR\delta \text{Cos}[8. \alpha 0] + 0.125nR^2\delta \text{Cos}[8. \alpha 0] \\
& - 0.125nR^2\zeta \text{Cos}[8. \alpha 0] \\
& + 0.09375paR^6 \text{Cos}[10. \alpha 0] \\
& - 0.375nR\delta \text{Cos}[10. \alpha 0] + 0.375nR^2\delta \text{Cos}[10. \alpha 0] \\
& - 0.375nR^2\zeta \text{Cos}[10. \alpha 0] \\
& + 0.015625paR^6 \text{Cos}[12. \alpha 0] \\
& - 0.0625nR\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] \\
& + 0.0625nR^2\delta \text{Cos}[12. \alpha 0] \\
& - 0.0625nR^2\zeta \text{Cos}[12. \alpha 0] + (0. \\
& + 0.0625i)nR^4\zeta \text{Cos}[\alpha 0(4. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.01171875i)nR^6\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - (0. + 0.0625i)nR^4\zeta \text{Cos}[\alpha 0(4. + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - (0. + 0.01171875i)nR^6\zeta \text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. + 0.046875i)R(1. paR^5 \\
& + n(-4. \delta + 4. R\delta - 4. R\zeta)) \text{Cos}[4. \alpha 0] \text{Csc}[2. \alpha 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (0. + 0.046875i)paR^6\text{Cos}[12.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0] \\
& + (0. + 0.1875i)nR\delta\text{Cos}[12.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0] - (0. \\
& + 0.1875i)nR^2\delta\text{Cos}[12.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0] + (0. \\
& + 0.1875i)nR^2\zeta\text{Cos}[12.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0] \\
& + 0.01171875paR^6\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.046875nR\delta\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.046875nR^2\delta\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.046875nR^2\zeta\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.015625paR^6\text{Cos}[8.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.0625nR\delta\text{Cos}[8.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.0625nR^2\delta\text{Cos}[8.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.0625nR^2\zeta\text{Cos}[8.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.00390625paR^6\text{Cos}[16.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.015625nR\delta\text{Cos}[16.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.015625nR^2\delta\text{Cos}[16.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& - 0.015625nR^2\zeta\text{Cos}[16.\alpha0]\text{Csc}[2.\alpha0]^2 \\
& + 0.140625paR^6\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[4.\alpha0] \\
& - 0.5625nR\delta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[4.\alpha0] \\
& + 0.5625nR^2\delta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[4.\alpha0] \\
& - 0.5625nR^2\zeta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[4.\alpha0] - (0. \\
& + 0.09375i)paR^6\text{Sin}[6.\alpha0] + (0. \\
& + 0.375i)nR\delta\text{Sin}[6.\alpha0] - (0. \\
& + 0.375i)nR^2\delta\text{Sin}[6.\alpha0] + (0. \\
& + 0.375i)nR^2\zeta\text{Sin}[6.\alpha0] - (0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.09375i)paR^6\text{Sin}[10.\alpha0] + (0. \\
& + 0.375i)nR\delta\text{Sin}[10.\alpha0] - (0. \\
& + 0.375i)nR^2\delta\text{Sin}[10.\alpha0] + (0. \\
& + 0.375i)nR^2\zeta\text{Sin}[10.\alpha0] \\
& - 0.046875paR^6\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[12.\alpha0] \\
& + 0.1875nR\delta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[12.\alpha0] \\
& - 0.1875nR^2\delta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[12.\alpha0] \\
& + 0.1875nR^2\zeta\text{Csc}[2.\alpha0]\text{Sin}[12.\alpha0] \\
& + 0.75nR^4\zeta\text{Sin}[1.\alpha0\text{Cos}[\alpha0]^2] \\
& + 0.46875nR^6\zeta\text{Sin}[1.\alpha0\text{Cos}[\alpha0]^2] \\
& - 0.5nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.3515625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.125nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.140625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& - 0.0234375nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. - 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.0625nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. + \text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.01171875nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. + \text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.5nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.3515625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(2. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.0625nR^4\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.140625nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(4. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)] \\
& + 0.01171875nR^6\zeta\text{Sin}[\alpha0(6. + 1.\text{Cos}[\alpha0]^2)]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\gamma^4} \tau^6 (0.0006301293242297371 \text{pa} \\
& + 0.0008401724323063877 \text{pa} \text{Cos}[2. \alpha 0] \\
& + 0.0002100431080765969 \text{pa} \text{Cos}[4. \alpha 0] \\
& - 1.084202172485504 \times 10^{-19} \text{pa} \text{Cos}[6. \alpha 0] \\
& + 2.710505431213761 \times 10^{-20} \text{pa} \text{Cos}[8. \alpha 0] \\
& + 1.35525271560688 \times 10^{-20} \text{pa} \text{Cos}[12. \alpha 0] - (0. \\
& + 1.6940658945086 \\
& \times 10^{-2} i) n \zeta \text{Cos}[3. \alpha 0 \text{Cos}[\alpha 0]^2] + (0. \\
& + 5.293955920339377 \times 10^{-23} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (2. \\
& - 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 1.084202172485504 \times 10^{-19} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 9.486769009248164 \times 10^{-20} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 5.421010862427522 \times 10^{-2} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] - (0. \\
& + 2.583450489125616 \times 10^{-20} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (8. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 1.6940658945086 \times 10^{-2} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (10. - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + (0. + 8.470329472543003 \times 10^{-21} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (12. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 2.541098841762901 \times 10^{-21} i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (14. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] + (0. \\
& + 0.000019691541382179177 i) n \zeta \text{Cos}[\alpha 0 (6. + \text{Cos}[\alpha 0]^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (0. \\
& + 3.896351557369781 \times 10^{-20}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(8. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 0.000011284311211069023i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(10. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 2.03287907341032 \times 10^{-20}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(12. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 0.000030091496562850728i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(14. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 3.981054852095211 \times 10^{-2} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(16. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 0.000003761437070356342i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(18. \\
& + \text{Cos}[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 1.626303258728256 \times 10^{-19}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(2. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 4.065758146820641 \times 10^{-20}i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 0.000019691541382179177i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] - (0. \\
& + 0.000011284311211069026i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(10. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 0.000030091496562850734i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(14. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha_0]^2)] + (0. \\
& + 0.000003761437070356342i)n\zeta\text{Cos}[\alpha_0(18.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& - 1.35525271560688 \times 10^{-20} \text{paCos}[\alpha 0(2. \\
& + 2. \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 6.776263578034403 \times 10^{-2} \text{ paCos}[\alpha 0(12. \\
& + 2. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 3.335192229813807 \times 10^{-2} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(2. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 1.01643953670516 \times 10^{-20} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(4. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 1.10114283143059 \times 10^{-20} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(6. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 2.286988957586611 \times 10^{-20} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(8. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 6.352747104407253 \times 10^{-21} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(10. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 5.929230630780102 \times 10^{-2} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(12. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) - (0. \\
& + 7.940933880509066 \times 10^{-2} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(14. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) - (0. \\
& + 5.293955920339377 \times 10^{-23} i)n\zeta\text{Cos}[\alpha 0(18. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha 0^2]) + (0. \\
& + 2.168404344971009 \times 10^{-19} i)\text{paSin}[2. \alpha 0] \\
& + (0. \\
& + 2.710505431213761 \times 10^{-20} i)\text{paSin}[4. \alpha 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (0. \\
& + 1.084202172485504 \times 10^{-19}i)pa\text{Sin}[6. \alpha 0] \\
& - (0. \\
& + 2.710505431213761 \times 10^{-2} i)pa\text{Sin}[8. \alpha 0] \\
& - (0. \\
& + 1.35525271560688 \times 10^{-20}i)pa\text{Sin}[12. \alpha 0] \\
& + 0.0007876616552872656n\zeta\text{Sin}[1. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& + 1.6940658945086 \\
& \times 10^{-21}n\zeta\text{Sin}[3. \alpha 0\text{Cos}[\alpha 0]^2] \\
& - 5.293955920339377 \times 10^{-23}n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 3. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.0005907462414654493n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.00023629849658618566n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 0.00003938308276435841n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& - 3.599890025830776 \times 10^{-2} n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(8. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 1.6940658945086 \times 10^{-2} n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(10. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 8.470329472543003 \times 10^{-2} n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(12. \\
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0]^2)] \\
& + 2.541098841762901 \times 10^{-21}n\zeta\text{Sin}[\alpha 0(14.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1. \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 0.000019691541382179177n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 1.084202172485504 \times 10^{-19}n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(8. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& - 8.470329472543003 \times 10^{-2} n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(10. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 1.01643953670516 \times 10^{-20}n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(12. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 8.131516293641283 \times 10^{-20}n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(14. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 8.470329472543003 \times 10^{-22}n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(16. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 6.140988867593677 \times 10^{-21}n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(18. \\
& + \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 0.0005907462414654494n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 0.0002362984965861856n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(4. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0^2]) \\
& + 0.000019691541382179163n\zeta \text{Sin}[\alpha 0(6. \\
& + 1. \text{Cos}[\alpha 0^2])] - (0. \\
& + 1.35525271560688 \times 10^{-20}i)pa \text{Sin}[\alpha 0(2. \\
& + 2. \text{Cos}[\alpha 0^2])] + (0. \\
& + 6.776263578034403 \times 10^{-21}i)pa \text{Sin}[\alpha 0(12.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& - 3.335192229813807 \times 10^{-21} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(2. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 2.541098841762901 \times 10^{-2} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(6. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& - 1.10114283143059 \times 10^{-20} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(8. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 7.199780051661553 \times 10^{-21} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(10. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 8.470329472543003 \times 10^{-2} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(12. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 8.99972506457694 \times 10^{-22} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(14. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]) \\
& + 5.293955920339377 \times 10^{-2} n \zeta \text{Sin}[\alpha_0(18. \\
& + 3. \text{Cos}[\alpha_0^2]))
\end{aligned}$$