

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Τομέας Δομοστατικής**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ  
ΠΑΝΩ ΣΕ ΓΕΦΥΡΑ ΜΕ ΑΝΩΜΑΛΙΑ  
ΚΑΤΑΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗ  
ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ**

**Φοιτήτρια**

**Επιβλέπων**

**Ιωάννα-Μαρία Κοπάνου**

**Δημήτρης Σοφιανόπουλος**

**Καθηγητής Π.Θ.**

**Βόλος, Ιούνιος 2019**

## **Ευχαριστίες**

Πρώτα από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας μου, Καθηγητή Δημήτριο Σοφιανόπουλο, για την πολύτιμη καθοδήγηση του, την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες θα πρέπει να απευθύνω και στον Ομότιμο Καθηγητή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ κ. Γεώργιο Μιχάλτσο για την βοήθεια που μου προσέφερε.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους(ες) μου για την ψυχολογική υποστήριξη τους, καθώς και την μητέρα μου που με υπομονή και κουράγιο συνέβαλε στην ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

I. – Μ. Κοπάνου

## Πίνακας Περιεχομένων

Περιεχόμενα	Σελίδα
<b>Σκοπός, Αντικείμενο και Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας</b>	1
<b>Κεφάλαιο 1: Συνεχή Ελαστικά Συστήματα και Κινούμενα Φορτία</b>	2
1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία – Συνοπτική Ανασκόπηση	2
1.2 Μοντέλα Κινουμένων Οχημάτων (αυτοκινήτων)	5
1.3 Παράμετροι Επιρροής	10
<b>Κεφάλαιο 2: Ανωμαλία Καταστρώματος σε Οδό ή Γέφυρα</b>	12
2.1 Ανωμαλία Καταστρώματος σε Οδό	12
2.1.1 Παραδοχές	12
2.1.2 Μαθηματική Διατύπωση	12
2.2 Ανωμαλία Καταστρώματος σε Γέφυρα	16
2.2.1 Υποθέσεις – Παραδοχές	16
2.2.2 Μαθηματική έκφραση του προβλήματος	17
2.2.3 Η δύναμη κρούσης	19
<b>Κεφάλαιο 3: Επίλυση του Δυναμικού Προβλήματος και Αριθμητικά Αποτελέσματα – Σχολιασμός</b>	22
3.1 Επίλυση του Δυναμικού Προβλήματος	22
3.2 Παράμετροι Εισόδου	25
3.2.1 Τύπος ανωμαλίας	25
3.2.2 Το όχημα	26
3.2.3 Δοκός – γέφυρα	26
3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Σχολιασμός	26
3.3.1 Υπολογισμός κρίσιμων ταχυτήτων	27
3.3.2 Υπολογισμός συντεταγμένων και χρόνων	27
3.3.3 Δυναμική απόκριση της γέφυρας	28
<b>Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα</b>	35
<b>Βιβλιογραφία</b>	37
<b>Παράρτημα: Προγράμματα <i>Mathematica</i></b>	40

## Σκοπός, Αντικείμενο και Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία αφορά την δυναμική απόκριση απλουστευμένου μοντέλου ολόσωμης γέφυρας, υπό κινούμενο όχημα σταθερής ταχύτητας, το οποίο προσομοιάζεται ως μονοβάθμιο σύστημα ελατηρίου – απόσβεσης δύο μαζών. Η ιδιαιτερότητα – συνεισφορά της Εργασίας – έγκειται στην παρουσία κάποιας ανωμαλίας κατά μήκος του καταστρώματος της γέφυρας, συγκεκριμένης θέσης και γεωμετρίας, και στην επιρροή της στην δυναμική απόκριση της γέφυρας. Η γραμμικοποιημένη δυναμική ανάλυση που εφαρμόστηκε (με απόσβεση) θεωρεί την δυνατότητα πλήρους ή μη επαφής του οχήματος (με εκτόξευση του και κατόπιν κρούσης του) με τη γέφυρα – ανάλογα με την γεωμετρία αυτής, τη θέση της αλλά και την σταθερή ταχύτητα κίνησης του οχήματος, και καταδεικνύει την επιρροή διαφόρων παραμέτρων στην όλη απόκριση. Η παρουσία της ανωμαλίας (είτε συνήθους είτε εξεζητημένης γεωμετρίας) οδηγεί είτε σε συνεχή είτε σε ασυνεχή μέσω εκτόξευσης – άλματος του οχήματος κατά μήκος του φορέα, με αποτέλεσμα έντονη διαφοροποίηση της απόκρισης ανάλογα με τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα.

Η Εργασία απαρτίζεται από τέσσερα (4) επί μέρους Κεφάλαια, που έχουν το παρακάτω περιεχόμενο:

- Κεφάλαιο 1: Συνεχή Ελαστικά Συστήματα και Κινούμενα Φορτία
- Κεφάλαιο 2: Ανωμαλία Καταστρώματος σε Οδό ή Γέφυρα
- Κεφάλαιο 3: Επίλυση του Δυναμικού Προβλήματος  
και Αριθμητικά Αποτελέσματα - Σχολιασμός
- Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Στο τέλος της Εργασίας παρατίθεται η σχετική Βιβλιογραφία, αλλά και Παράρτημα, το οποίο περιέχει τα προγράμματα (υπό μορφή εντολών) του λογισμικού *Mathematica*, που χρησιμοποιήθηκε για την απόκτηση αριθμητικών αποτελεσμάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συνεχή Ελαστικά Συστήματα και Κινούμενα Φορτία

### 1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία – Συνοπτική Ανασκόπηση

Τα τελευταία 150 χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί και δημοσιευθεί πολλές εργασίες και μελέτες, που αφορούν στην δυναμική απόκριση αρχικά σιδηροδρομικών γεφυρών, και αργότερα οδοφόρων γεφυρών, υπό την επιρροή κινουμένων φορτίων. Μια εκτενής βιβλιογραφική αναφορά επί του θέματος, μέχρι το 1970, μπορεί να βρεθεί στο πασίγνωστο βιβλίο του Frýba <sup>[1]</sup>.

Δύο πρώιμες συμβολές στο εν λόγω επιστημονικό πεδίο οφείλονται στους ερευνητές Stokes <sup>[2]</sup> και Zimmermann <sup>[3]</sup>. Λίγο αργότερα, ο Krylov <sup>[4, 5]</sup> έδωσε μια ολοκληρωμένη λύση στο πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς μια απλά εδραζόμενης πρισματικής ράβδου, η οποία υπόκειται στην διέλευση κατά μήκος της μιας σταθερής δύναμης, κινούμενης με σταθερή ταχύτητα. Λίγα έτη μετά ο Timoshenko <sup>[6]</sup> επέλυσε το ίδιο πρόβλημα, αλλά για μια αρμονικά παλλόμενη (κάθετα στον κεντροβαρικό άξονα της ράβδου) δύναμη. Μια ακόμα πρωτοποριακή μελέτη πάνω σε αυτό το θέμα παρουσιάστηκε το 1934 από τον Inglis <sup>[7]</sup>, κατά την οποία πολλές παράμετροι λήφθηκαν υπόψη. Το 1951, δόθηκε αναλυτική λύση στο προηγούμενο πρόβλημα από τον Hillerborg <sup>[8]</sup>, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier.

Όλες ανεξαιρέτως οι προαναφερθείσες εργασίες βασίστηκαν στη γραμμικοποιημένη δυναμική ανάλυση, και το κινούμενο φορτίο προσομοιάστηκε πολύ απλά (και μάλλον διαισθητικά) από τους ερευνητές. Στόχος τους, εν ολίγοις, ήταν να συγκρίνουν τα μέγιστα δυναμικά εντατικά και παραμορφωσιακά μεγέθη με τα αντίστοιχα στατικά, με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό κάποιου *δυναμικού συντελεστή φόρτισης / μεγέθυνσης* (*dynamic load – dynamic amplification factor*), ο οποίος θα πολλαπλασίαζε τα στατικά μεγέθη για τον τελικό – ακόμα στατικό – σχεδιασμό.

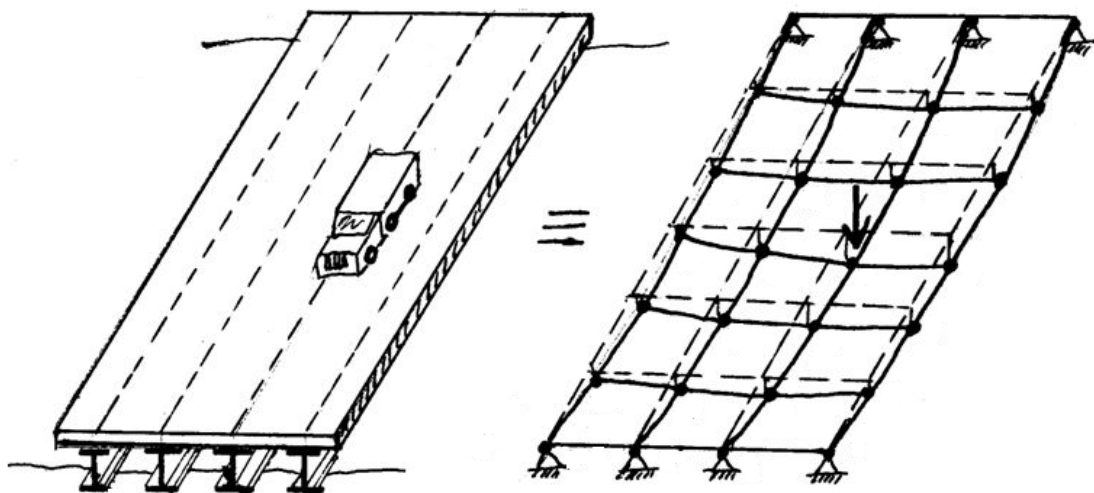
Όμως, όπως είναι ευρύτατα αποδεκτό, η δυναμική απόκριση μιας κατασκευής, ακόμα και στην ελαστική περιοχή, είναι – ανάλογα με το υλικό – είτε ήπια είτε έντονα μη γραμμική, ενώ υφίσταται και η πιθανότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ της κατασκευής και του αιτίου δυναμικής διέγερσης αυτής. Κανείς μπορεί να διαπιστώσει την παρατήρηση αυτή, μελετώντας – κατά την πάροδο των ετών – τις εργασίες διαφόρων ερευνητών <sup>[9-23]</sup>. Υπήρξαν φυσικά και πειραματικές μελέτες, σχετιζόμενες με κατά καιρούς προταθείσες μεθόδους ανάλυσης. Πλην όμως, η οποιαδήποτε πειραματική διάταξη, για να προσομοιάσει με ακρίβεια τη δυναμική απόκριση ενός ελαστικού συστήματος υπό κινούμενα φορτία, θα πρέπει να είναι σχετικά ρεαλιστικής κλίμακας (πράγμα ιδιαίτερα

δύσκολο), και προς τούτο θα πρέπει να πραγματοποιηθεί σε εργαστήρια που διαθέτουν τέτοιες δυνατότητες [24].

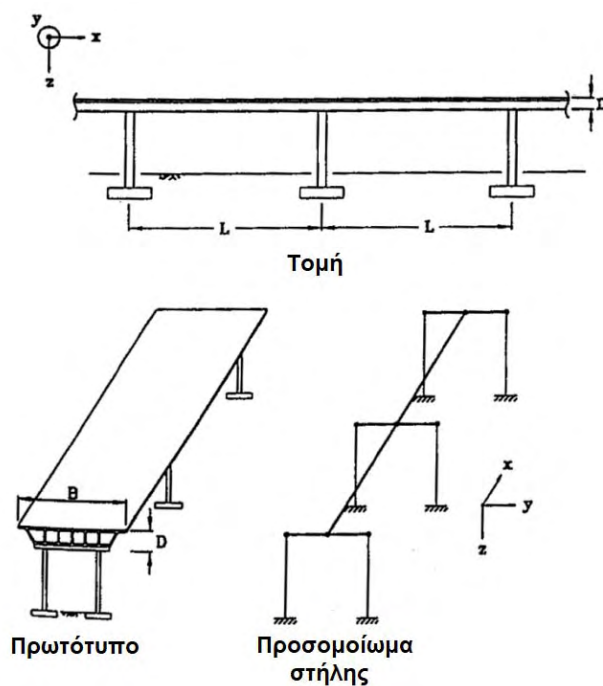
Σε κάθε περίπτωση, το όλο πρόβλημα έχει απασχολήσει ερευνητικά πολλούς φορείς κατά το παρελθόν, στο πλαίσιο κρατικά ή/και ιδιωτικά χρηματοδοτούμενων ερευνητικών προγραμμάτων [25-28]. Η περαιτέρω αναφορά δεν κρίνεται εδώ αναγκαία, αλλά είναι εύκολα προσβάσιμη για τον εκάστοτε ενδιαφερόμενο, μέσω του διαδικτύου.

Η συνήθης αναλυτική πρακτική συνεχίζει – σε κάποιο βαθμό – να θεωρεί την γέφυρα ως ένα συνεχές ελαστικό σύστημα (με έμφαση στην αμφιέριστη δοκό) δύο διαστάσεων και το κινούμενο όχημα ως σταθερό κατακόρυφο φορτίο με σταθερή ταχύτητα. Πλην όμως, προφανώς το κατάστρωμα μιας ολόσωμης γέφυρας είναι επιφανειακός φορέας (που στηρίζεται σε κύριες δοκούς και διαδοκίδες), το δε όχημα σίγουρα μια σύνθετη κατασκευή, η οποία μέσω των ελαστικών έρχεται σε επαφή με το κατάστρωμα μέσω τεσσάρων τουλάχιστον μικρών επιφανειών συμμετρικά διατεταγμένων σε κάτοψη, με τον άξονα συμμετρίας παράλληλο με την διεύθυνση κίνησης. Για την προσομοίωση του καταστρώματος έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι, όπως της ισοδύναμης εσχάρας (grillage method) ή της στήλης (spine method) και άλλες, η αποτελεσματικότητα μιας εκάστου εξαρτάται από την μορφή και το είδος της γέφυρας.

Χαρακτηριστικά σκαριφήματα, τα οποία αποτυπώνουν τις δύο αυτές μεθόδους προσομοίωσης φαίνονται στα Σχήματα 1.1 και 1.2.



Σχήμα 1.1 Μέθοδος ισοδύναμης εσχάρας



Σχήμα 1.2 Μέθοδος στήλης

Αμφότερες οι μέθοδοι, έχουν ενσωματωθεί σε μοντέρνα λογισμικά δομοστατικής ανάλυσης (π.χ. SAP 2000, Staad Pro), και σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελούν μια αξιόπιστη σχεδιαστική πλατφόρμα για ολόσωμες γέφυρες.

Από τα παραπάνω Σχήματα πάντως, είναι εύλογο να παρατηρήσει κανείς ότι η προσομοίωση μιας κύριας δοκού ως αμφιέριστης (με ή χωρίς ενδιάμεσες ελαστικές στηρίξεις τύπου ελατηρίου) τελικά δεν είναι τόσο αφελής ή εκτός πραγματικότητας. Περισσότερο ακριβής θα ήταν φυσικά η προσομοίωση της γέφυρας μέσω συνεχούς δοκού πολλών ανοιγμάτων (ανάλογα με τις θέσεις στήριξης κατά μήκος αυτής), οι δε στηρίξεις να διαθέτουν την απαραίτητη εκτατική και στροφική δυσκαμψία, ανάλογα με την κατασκευαστική δομή της γέφυρας. Πάντως, το μοντέλο της απλής αμφιέριστης μπορεί κάλλιστα να οδηγήσει σε αρχικά σημαντικά αποτελέσματα, που στη συνέχεια να ενσωματωθούν σε πιο ακριβείς αναλύσεις. Το όλο επιστημονικό θέμα άπτεται του σχεδιασμού και ανάλυσης γεφυρών, που εκφεύγει σε μεγάλο βαθμό των σκοπών της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας. Προτείνεται, πέραν της βιβλιογραφίας (που δίνεται στο τέλος), ο αναγνώστης να αποτανθεί στον κάτωθι διαδικτυακό σύνδεσμο, που θα τον οδηγήσει σε περαιτέρω εμβάθυνση.

<http://www.dot.ca.gov/des/techpubs/manuals/bridge-design-practice/page/bdp-4.pdf>

Αναφορικά με τα κινούμενα οχήματα, η δυσκολία προσομοίωσης τους οφείλεται στο γεγονός ότι εξαρτάται από μεγάλο αριθμό παραγόντων, και επιπρόσθετα από την αναγνώριση της επιρροής αυτών στην εν γένει δυναμική συμπεριφορά της φέρουσας κατασκευής. Για τον λόγο αυτό, στο επόμενο εδάφιο δίνεται αναφορά στα μοντέλα κινουμένων οχημάτων.

## **1.2 Μοντέλα Κινουμένων Οχημάτων (αυτοκινήτων)**

Τα οχήματα που χρησιμοποιούνται για τις επίγειες μεταφορές (προσωπικού και εμπορευμάτων) ανά την υφήλιο χωρίζονται, ως γνωστόν, σε δύο μεγάλες κατηγορίες.

Η 1<sup>η</sup>, που δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, είναι τα σιδηροδρομικά οχήματα (συρμοί), για τα οποία έχουν κατά καιρούς προταθεί διάφορα μοντέλα πολλών βαθμών ελευθερίας, η αναφορά στα οποία δεν αφορά το αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

Η 2<sup>η</sup> κατηγορία όμως, τα αυτοκίνητα (είτε επιβατηγά είτε φορτηγά) παρουσιάζουν διάφορα κοινά χαρακτηριστικά αλλά και μεγάλες διαφορές, ανάλογα με το μέγεθος τους, την χρήση τους, την τεχνολογία της μηχανής και τη χρήση καυσίμου, τις ταχύτητες που μπορούν (και σε μερικές περιπτώσεις που επιτρέπεται) να αναπτύξουν, την τεχνολογία των ελαστικών κλπ.

Στα αυτοκίνητα (εξαιρουμένων κάποιων στρατιωτικών οχημάτων) η κίνηση μεταδίδεται μέσω διαφόρων μηχανολογικών τεχνικών και διατάξεων σε ζεύγη ελαστικών τροχών, που είναι διατεταγμένα στο εμπρόσθιο, μερικές φορές στο μεσαίο, και σίγουρα στο οπίσθιο τμήμα τους. Οι τροχοί αυτοί, κάποιες εν γένει μικρής μάζας, περιστρέφονται πάνω στο οδόστρωμα συνδεδεμένα με το υπόλοιπο όχημα μέσω του συστήματος ανάρτησης/απόσβεσης. Λόγω προφανούς συμμετρίας κατά τον διαμήκη άξονα (δηλαδή αυτόν κάθετα με την διεύθυνση της κίνησης) η συνήθης πρακτική έχει οδηγήσει στην προσομοίωση του μισού οχήματος. Αν αυτό είναι το κλασσικό ΙΧ όχημα, η προσομοίωση απλουστεύεται ακόμα περισσότερο, και πραγματοποιείται στο 1/4 του οχήματος. Αν όμως πρόκειται για βαρέα οχήματα μεταφοράς εμπορευμάτων, τότε τα προταθέντα προσομοιώματα είναι περισσότερο σύνθετα.

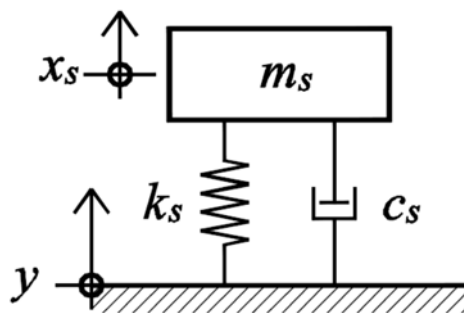
Στα απλά μοντέλα, αγνοείται (λόγω μικρού μεγέθους) η μάζα των τροχών, και λαμβάνεται υπόψη μόνο η μάζα του υπερκείμενου κυρίου μέρους του οχήματος, ενώ στα σύνθετα μοντέλα αμφότερες οι μάζες λαμβάνονται υπόψη, και μάλιστα συνδέονται μεταξύ τους μέσω γραμμικών ελατηρίων και αποσβεστήρων ταλάντωσης (ανάρτηση),



ενώ σε μερικά από αυτά θεωρείται και η περιστροφική αδράνεια της μάζας συνήθως μόνο του κυρίου οχήματος (λόγω μεγάλου μεγέθους).

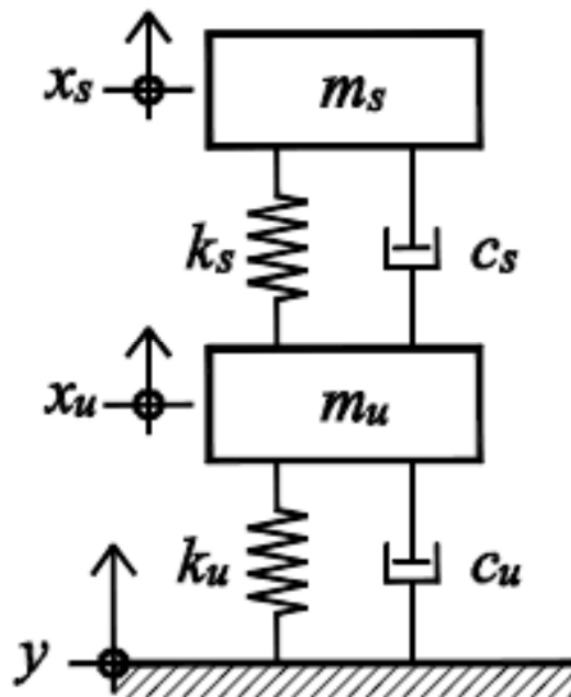
Αρχικά, η δυναμική επιρροή της κίνησης οχημάτων πάνω σε ευθύγραμμες δοκούς (που αντιπροσώπευαν μια απλή προσομοίωση γέφυρας) μελετήθηκε μέσω της κλασσικής θεώρησης «σταθερού φορτίου με σταθερή ταχύτητα), όπου αγνοήθηκε η αλληλεπίδραση μεταξύ του οχήματος και της ράβδου. Στη συνέχεια όμως, αναπτύχθηκαν τα παρακάτω τέσσερα προσομοιώματα κινούμενου αυτοκινήτου, τα οποία απεικονίζονται στα Σχήματα 1.3 – 1.6.

Αναλυτικότερα, στο Σχήμα 1.3 φαίνεται το κλασσικό μοντέλο, που διαθέτει έναν μοναδικό βαθμό ελευθερίας (αγνοώντας την παρουσία των τροχών και την επιρροή τους στην κίνηση). Στο εν λόγω προσομοίωμα,  $m_s$  είναι η μάζα του κύριου σώματος του αυτοκινήτου, ενώ  $k_s$ ,  $c_s$  είναι η δυσκαμψία και η απόσβεση της ανάρτησης αντίστοιχα. Ο βαθμός ελευθερίας χαρακτηρίζεται από την κατακόρυφη δυναμική μετακίνηση  $x_s$ , ενώ ο άξονας αναφοράς  $y$  σχετίζεται με την κατακόρυφη μετατόπιση του οδοστρώματος (το τελευταίο ισχύει και για τα υπόλοιπα, πιο σύνθετα μοντέλα). Το οδοστρώμα, ή γενικότερα η κατασκευή πάνω στην οποία κινείται το όχημα μπορεί να αλληλεπιδρά με αυτό ή όχι. Όταν πρόκειται περί κλασσικής χερσαίας οδού η αλληλεπίδραση γενικά αμελείται, ενώ όταν πρόκειται περί οδοστρώματος γέφυρας συμβαίνει το αντίθετο. Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, που αφορούν τα μοντέλα αυτά, περιέχουν την μετατόπιση  $y$  και την ταχύτητα  $\dot{y}$  ανεξάρτητα σε σχέση με την τραχύτητα του οδοστρώματος ως συνάρτηση του χρόνου, και όχι σαν αποτέλεσμα κάποιου εξωτερικού αιτίου δυναμικής διέγερσης (που στην περίπτωση μας είναι η κίνηση του οχήματος αυτή καθαυτή). Στο τέλος της παρουσίασης των μοντέλων παρατίθενται και οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης τους.



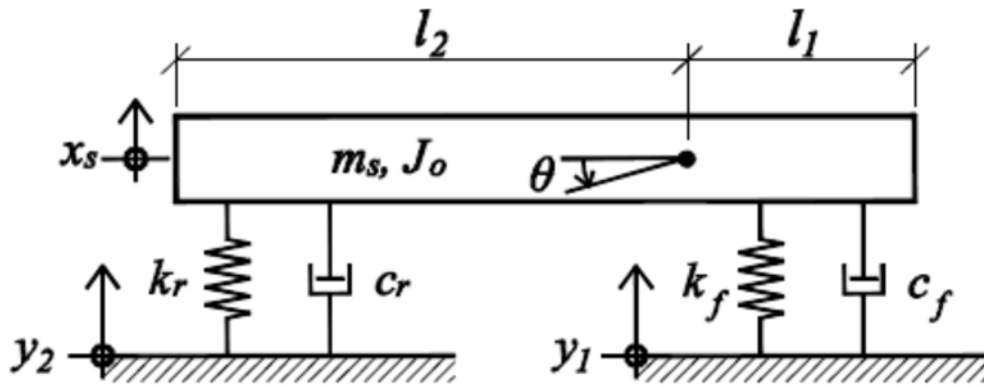
Σχήμα 1.3. Το απλούστερο μονοβάθμιο μοντέλο οχήματος (αυτοκινήτου) – M1

Το επόμενο, το αποκαλούμενο προσομοίωμα 1/4 οχήματος (QCM, Quarter Car Model), διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, καθόσον σε αυτό περιέχονται δύο συγκεντρωμένες μάζες, αυτή του ενός τροχού  $m_u$  και αυτή του κυρίως σώματος του οχήματος  $m_s$ . Και οι δύο αυτές μάζες θεωρείται ότι συνδέονται με το οδόστρωμα κίνησης μέσω συστήματος ελατηρίου/αποσβεστήρα με τιμές  $k_u, c_u$  και  $k_s, c_s$  ως ανωτέρω. Στο μοντέλο αυτό οι βαθμοί ελευθερίας χαρακτηρίζονται από τις κατακόρυφες μετακινήσεις των μαζών  $x_u, x_s$  σύμφωνα με το Σχήμα 1.4.



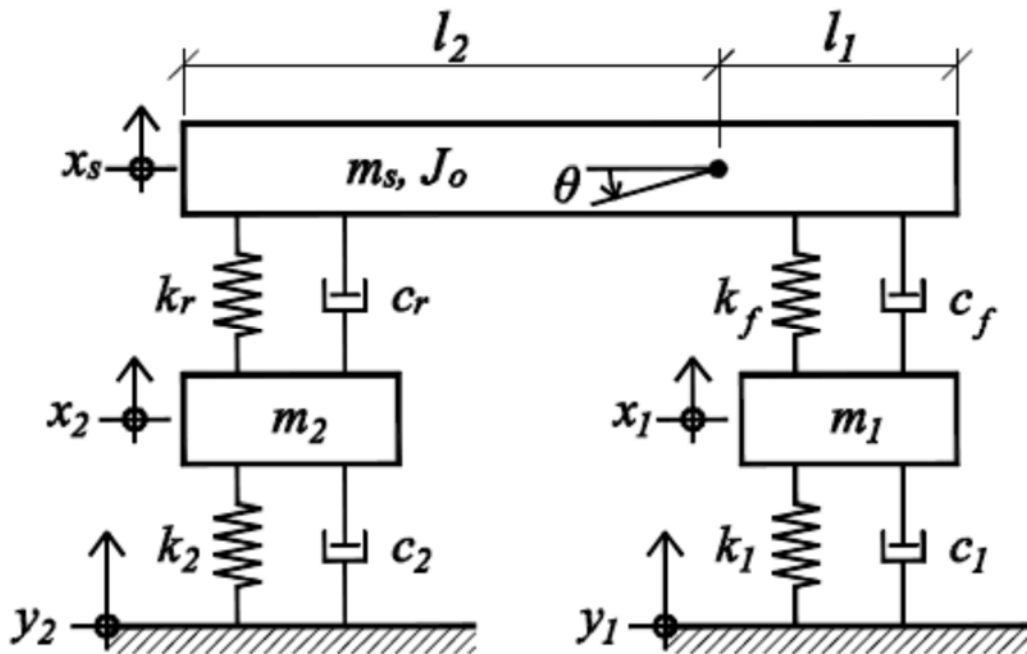
Σχήμα 1.4 Διβάθμιο μοντέλο 1/4 οχήματος (αυτοκινήτου) – M2

Το αμέσως επόμενο μοντέλο, που αποκαλείται προσομοίωμα μισού οχήματος (Half Car Model-HCM), που παρατίθεται στο Σχήμα 1.5, διαθέτει και αυτό δύο βαθμούς ελευθερίας, αλλά αναφέρεται τόσο στο εμπρόσθιο όσο και στο οπίσθιο σύστημα ανάρτησης (front, rear), ενώ λαμβάνεται υπόψη και η περιστροφική αδράνεια της μάζας του υπερκείμενου σώματος του αυτοκινήτου  $J_o$ , η οποία σε περίπτωση βαρέος οχήματος είναι καθοριστικός παράγον της όλης δυναμικής απόκρισης.



Σχήμα 1.5. Μοντέλο μισού οχήματος δύο βαθμών ελευθερίας – M3

Το πιο εξυγενισμένο πάντως προσομοίωμα είναι αυτό το μισού οχήματος με τέσσερις (4) βαθμούς ελευθερίας (βλ. Σχήμα 1.6). Αυτό, ονομαζόμενο ως μοντέλο αναπήδησης (pitch-bounce), συντίθεται από τρία στερεά σώματα: Το σώμα του κυρίως οχήματος (μέσω της μάζας  $m_s$  και της περιστροφικής της αδράνειας του  $J_o$ ), και από δύο τροχούς, με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , με αντίστοιχες τιμές αναρτήσεων σε δυσκαμψία και απόσβεση, τόσο σε σχέση με το οδόστρωμα όσο και με την μάζα του κύριου οχήματος.



Σχήμα 1.6 Μοντέλο μισού οχήματος τεσσάρων βαθμών ελευθερίας – M4

Αν θεωρηθεί ότι η απόκριση του υπόβαθρου κίνησης του οχήματος χαρακτηρίζεται από μια χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση  $y(t)$ , οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης των μοντέλων είναι οι ακόλουθες (με την τελεία να υποδηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο):

Για το M1

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = c_s \dot{y} + k_s y \quad (1.1)$$

Για το M2

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s - c_s \dot{x}_u + k_s x_s - k_s x_u = 0 \quad (1.2\alpha)$$

$$m_u \ddot{x}_u - c_s \dot{x}_s + (c_s + c_u) \dot{x}_u - k_s x_u + (k_s + k_u) x_u = k_u y + c_u \dot{y} \quad (1.2\beta)$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται και με την ακόλουθη μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ x_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_u y + c_u \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Για το M3

$$m_s \ddot{x}_s + (c_f + c_r) \dot{x}_s + (c_f l_1 - c_r l_2) \dot{\theta} + (k_f + k_r) x_s + (k_f l_1 - k_r l_2) \theta = c_f \dot{y}_f + c_r \dot{y}_r + k_f y_f + k_r y_r \quad (1.4\alpha)$$

$$J \ddot{\theta} + (c_f l_1 - c_r l_2) \dot{x}_s + (c_f l_1^2 + c_r l_2^2) \dot{\theta} + (k_f l_1 - k_r l_2) x_s + (k_f l_1^2 - k_r l_2^2) \theta = c_f \dot{y}_f l_1 - c_r \dot{y}_r l_2 + k_f y_f l_1 - k_r y_r l_2 \quad (1.4\beta)$$

ή μητρικά ως

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f + c_r & c_f l_1 - c_r l_2 \\ c_f l_1 - c_r l_2 & c_f l_1^2 + c_r l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f + k_r & k_f l_1 - k_r l_2 \\ k_f l_1 - k_r l_2 & k_f l_1^2 - k_r l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_f \dot{y}_f + c_r \dot{y}_r + k_f y_f + k_r y_r \\ c_f \dot{y}_f l_1 - c_r \dot{y}_r l_2 + k_f y_f l_1 - k_r y_r l_2 \end{Bmatrix} \quad (1.4\gamma)$$

Για το M4

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_f + c_1) \dot{x}_1 - c_f \dot{x}_s - l_1 c_f \dot{\theta} + (k_f + k_1) x_1 - k_f x_s - l_1 k_f \theta = c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 \quad (1.5\alpha)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_r + c_2) \dot{x}_2 - c_r \dot{x}_s + l_2 c_r \dot{\theta} + (k_r + k_2) x_2 - k_r x_s + l_2 k_r \theta = c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 \quad (1.5\beta)$$

$$m_s \ddot{x}_s - c_f \dot{x}_1 - c_r \dot{x}_2 + (c_f + c_r) \dot{x}_s + (l_1 c_f - l_2 c_r) \dot{\theta} - k_f x_1 - k_r x_2 + (k_f + k_r) x_s + (l_1 k_f - l_2 k_r) \theta = 0 \quad (1.5\gamma)$$

$$J \ddot{\theta} - l_1 c_f \dot{x}_1 + l_2 c_r \dot{x}_2 + (l_1 c_f - l_2 c_r) \dot{x}_s + (l_1^2 c_f + l_2^2 c_r) \dot{\theta} - l_1 k_f x_1 + l_2 k_r x_2 + (l_1 k_f - l_2 k_r) x_s + (l_1^2 k_f + l_2^2 k_r) \theta = 0 \quad (1.5\delta)$$

και ισοδύναμα, υπό μορφή συστήματος

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_s \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f + c_1 & 0 & -c_f & -l_1 c_f \\ 0 & c_r + c_2 & -c_r & l_2 c_r \\ -c_f & -c_r & c_f + c_r & l_1 c_f - l_2 c_r \\ -l_1 c_f & l_2 c_r & l_1 c_f - l_2 c_r & l_1^2 c_f + l_2^2 c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_s \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f + k_1 & 0 & -k_f & -l_1 k_f \\ 0 & k_r + k_2 & -k_r & l_2 k_r \\ -k_f & -k_r & k_f + k_r & l_1 k_f - l_2 k_r \\ -l_1 k_f & l_2 k_r & l_1 k_f - l_2 k_r & l_1^2 k_f + l_2^2 k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_s \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 \\ c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.5\epsilon)$$

Συνδυασμοί, σύνθετοι αλλά και απλουστευμένοι, των παραπάνω μοντέλων έχουν κατά καιρούς αναφερθεί, αλλά στα πλαίσια της παρούσας θα δοθεί έμφαση στα προσομοιώματα εκείνα, τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης μεταξύ οχήματος και υποστρώματος κίνησης αυτού. Σημειώνεται ότι τα τέσσερα (4) αυτά μοντέλα έχουν με επιτυχία ενσωματωθεί στο λογισμικό MatLab (Simulink) [29].

Επιπρόσθετα, και σε άμεση σχέση με τις ισχύουσες Ευρωπαϊκές Διατάξεις για τις φορτίσεις γεφυρών λόγω κυκλοφορίας, ο αναγνώστης μπορεί να αποτανθεί στο περιεχόμενο του Ευρωκώδικα 1, Δράσεις επί των κατασκευών - Μέρος 2: Φορτία στις γέφυρες οφειλόμενα στην κυκλοφορία [30], για περαιτέρω πληροφόρηση. Όμως, τα μοντέλα οχημάτων εκεί δεν έχουν καμιά σχέση με τη δυναμική ανάλυση της παρούσας Εργασίας, και ως εκ τούτο απλά αναφέρονται μόνο βιβλιογραφικά.

Η γραμμικοποιημένη ανάλυση (με ή χωρίς απόσβεση) απλών γραμμικών φορέων υπό κινούμενα φορτία μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του Α.Ν. Κουνάδη [31], με βάση τη διαδικασία χωριζόμενων μεταβλητών και την ορθογωνικότητα μορφών ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης.

### 1.3 Παράμετροι Επιρροής

Από τα τρία σύνολα βασικών παραμέτρων που επηρεάζουν την δυναμική απόκριση της γέφυρας, ήτοι

- παράμετροι γέφυρας (καμπτική αντίσταση, υλικό κατασκευής, διαστάσεις),
- παράμετροι οχήματος (μάζες, δυσκαμψίες ελατηρίων και ταχύτητα κίνησης),

- ποιότητα οδοστρώματος, (τραχύτητα, ανωμαλίες)

το τρίτο σύνολο έχει αποτελέσει αντικείμενο μελετών σχετικά πρόσφατα. Από αυτές, το μεγαλύτερο μέρος ασχολείται με την επιρροή της τραχύτητας του καταστρώματος, και αρκετά λιγότερες εργασίες πραγματεύονται την επιρροή της ανωμαλίας τόσο στα οχήματα όσο και στη γέφυρα.

Μεταξύ των τελευταίων, θα πρέπει να αναφερθούν οι εργασίες των Chomprooming και Yener (1995) <sup>[32]</sup>, που εξέτασαν την επίδραση των ανωμαλιών της επιφάνειας των οδοστρωμάτων και της επιβράδυνσης του οχήματος στην δυναμική της γέφυρας, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των γραμμών, όπου επίσης καταδείχτηκε η επιρροή των ανωμαλιών στην αναπήδηση του οχήματος, αλλά και αυτή των Al-Duaij κ.α. (1999) <sup>[33]</sup>, η οποία ασχολήθηκε με την αναπτυσσόμενη μέγιστη επιτάχυνση μιας γέφυρας ενός ανοίγματος εξαιτίας της κίνησης ενός οχήματος σε ομοιόμορφα και μη καταστρώματα γεφυρών.

Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εργασίες των Michaltsos και Konstandakopoulos (2000) <sup>[34]</sup>, όπου μελετήθηκε η επιρροή μιας ανωμαλίας οδοστρώματος και των παραγόμενων κρουστικών δυνάμεων στη δυναμική της γέφυρας (με την υπόθεση συνεχούς επαφής οχήματος – οδοστρώματος), αλλά και αυτή του Pesterer (2004) <sup>[35]</sup>, στην οποία αναπτύχθηκε μια τεχνική για την πρόβλεψη των δυναμικών δυνάμεων επαφής, οι οποίες αναπτύσσονται λόγω διέλευσης οχήματος πάνω από μια ανωμαλία. Τέλος, μνημονεύεται επίσης και η εργασία των Stancioiu κ.α. (2008) <sup>[36]</sup>, η οποία ερευνά την επίδραση που έχει η αναπήδηση ενός κινούμενου ταλαντωτή στις δονήσεις μιας δοκού.

Στην παρούσα Εργασία, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Εισαγωγή, εξετάζεται η επίδραση της ύπαρξης ανωμαλίας σε οδόστρωμα αρχικά και σε κατάστρωμα γέφυρας στη συνέχεια, τόσο στην απόκριση του οχήματος όσο και σε αυτή της γέφυρας, θεωρώντας μη συνεχή επαφή οχήματος - υποστρώματος και εν συνεχεία εκ νέου επαφής μετά την αναπήδηση - προσγείωση (άλμα του οχήματος). Επιλέγεται με επέκταση του μοντέλου *MI* και η όλη ανάλυση είναι γραμμικοποιημένη δυναμική, όπως κατά κόρον έχει χρησιμοποιηθεί σε παρόμοια προβλήματα.

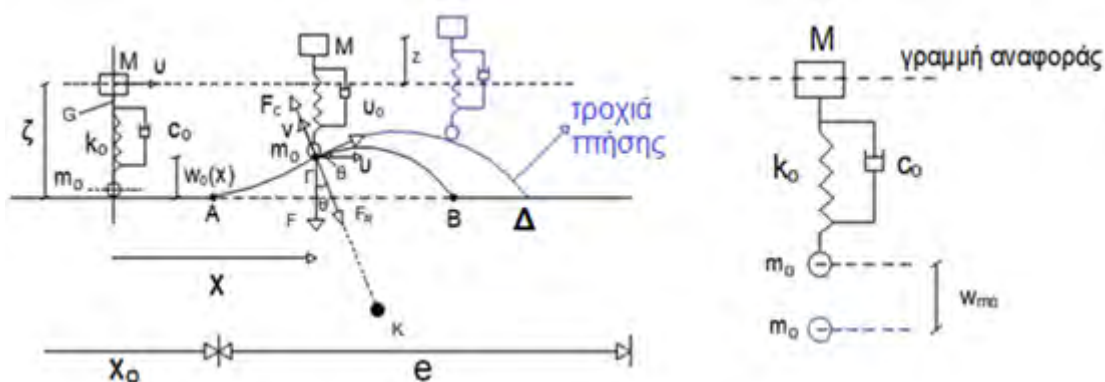
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ανωμαλία Καταστρώματος σε Οδό ή Γέφυρα

### 2.1 Ανωμαλία Καταστρώματος σε Οδό

#### 2.1.1 Παραδοχές

Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

Το μοντέλο οχήματος που επιλέγεται είναι το  $MI$ , σύμφωνα με τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 1.. Πρόκειται για ένα προσομοίωμα ενός βαθμού ελευθερίας, στο οποίο η μάζα  $m_0$  είναι αυτή του τροχού, η μάζα  $M$  είναι αυτή του υπερκείμενου μέρους του οχήματος και  $k_0$ ,  $c_0$  είναι η δυσκαμψία και η απόσβεση της ανάρτησης, που συνδέει τις μάζες αυτές. Το όχημα θεωρείται ότι κινείται αρχικά επί επίπεδου οδοστρώματος με σταθερή ταχύτητα  $u_x$ , και κατά την χρονική στιγμή  $t = 0$  συναντά μια ανωμαλία της μορφής  $w = w_0(x)$ , σύμφωνα με το Σχήμα 2.1. Επειδή το μήκος της ανωμαλίας είναι γενικά μικρό, η ταχύτητα  $u_x$  θεωρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της διέλευσης του συστήματος μαζών-ελατηρίου πάνω από αυτή.



Σχήμα 2.1 Ανωμαλία οδοστρώματος  $AB$ , επί του οποίου κινείται ένα απλό μοντέλο οχήματος

Το προσομοίωμα του οχήματος μπορεί είτε να βρίσκεται σε επαφή με την οδό, και κατ' επέκταση και με την επιφάνεια (γραμμή) της ανωμαλίας, είτε να απογειωθεί, ακολουθώντας τροχιά όμοια με ενός εκτοξευόμενου βλήματος, και τελικά να προσγειωθεί σε κάποιο σημείο  $\Delta$ , ανάλογα με την τιμή της ταχύτητας  $u_x$ .

Κατά τη διάρκεια της πτήσης η μάζα  $m$  του τροχού θα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση κρεμάμενη από την μάζα  $M$ , η τροχιά δε της τελευταίας θα θεωρηθεί ως γραμμή αναφοράς της ταλάντωσης της  $m$ .

#### 2.1.2 Μαθηματική διατύπωση

Η συνολική δύναμη που ασκείται επί της οδού θα ισούται με

$$F = M(g - \ddot{z}) + m_o(g - \ddot{w}_o) \quad (2.1)$$

Λαμβάνοντας ισορροπία των δυνάμεων στο σημείο Γ του Σχήματος 2.1, προκύπτει ότι:

$$M\ddot{z} = -k_o(z - w_o) - c_o(\dot{z} - \dot{w}_o) \quad (2.2)$$

οπότε, συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εκφράσεις λαμβάνουμε

$$F = (M + m_o)g + (k_o z - c_o \dot{z}) - (k_o w_o - c_o \dot{w}_o + m_o \ddot{w}_o) \quad (2.3)$$

όπου

$$w_o = 0 \quad \text{για} \quad x \leq x_o \quad \text{ή} \quad x_o + e \leq x \quad (2.4\alpha)$$

ενώ

$$w_o = w_o(a) \quad \text{για} \quad x_o \leq x \leq x_o + e \quad (2.4\beta)$$

Αντίθετα, επειδή ισχύει  $\dot{w}_o(x) = 0$ , η εξίσωση (2.2) μπορεί να γραφεί ως:

$$\ddot{z} + 2\beta_o \dot{z} + \gamma_o^2 z = \gamma_o^2 w_o \quad (2.5\alpha)$$

με

$$2\beta_o = \frac{c_o}{M}, \quad \gamma_o^2 = \frac{k_o}{M} \quad (2.5\beta)$$

Έχοντας ως αρχικές συνθήκες  $z(0) = \dot{z}(0) = 0$  και με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Duhamel, η λύση της εξίσωσης (2.5) γράφεται ως:

$$z(t) = \frac{1}{\omega_o} \int_0^t e^{-\beta_o(t-\tau)} \gamma_o^2 w_o \sin \omega_o(t - \tau) d\tau = \frac{\gamma_o^2 w_o}{\omega_o(\beta_o^2 + \omega_o^2)} \left[ \omega_o - e^{-\beta_o t} (\omega_o \cos \omega_o t + \beta_o \sin \omega_o t) \right] \quad (2.6\alpha)$$

όπου

$$\omega_o = \sqrt{\gamma_o^2 - \beta_o^2} \quad (2.6\beta)$$

Προκύπτει άμεσα ότι

$$\dot{z}(t) = \frac{\gamma_o^2 w_o}{\omega_o} e^{-\beta_o t} \sin \omega_o t \quad (2.7)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (2.6β) και (2.7) στην έκφραση της δύναμης F (2.3) αυτή τελικά γίνεται:

$$F = (M + m_o)g + \frac{2k_o(\gamma_o^2 - \beta_o^2)}{\gamma_o^2} w_o - \frac{\gamma_o^2 w_o}{\omega_o} e^{-\beta_o t} \left[ \frac{k_o}{(\beta_o^2 + \omega_o^2)} (\omega_o \cos \omega_o t + \beta_o \sin \omega_o t) + c_o \sin \omega_o t \right] \quad (2.8\alpha)$$



Κατά τη διέλευση της μάζας  $m_o$  πάνω στην ανωμαλία, αποκτά, σύμφωνα με το Σχήμα 2.1, μια εφαπτομενική ταχύτητα  $u_o$ , η οποία προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u_o = u_x \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1+w_o'^2}} \quad (2.8\beta)$$

Η ακτίνα καμπυλότητας της ανωμαλίας προσδιορίζεται από τη σχέση:  $R_o = \frac{(1+w_o'^2)^{3/2}}{w_o''}$  και έτσι, η φυγόκεντρος επιτάχυνση που αναπτύσσεται προκύπτει ως:

$$\gamma_c = \frac{u_o^2}{R_o} = \frac{u_x^2}{(1+w_o'^2)} \cdot \frac{w_o''}{(1+w_o'^2)^{3/2}} \quad (2.9\alpha)$$

ή τελικά:

$$\gamma_c = u_x^2 \cdot \frac{w_o''}{(1+w_o'^2)^{5/2}} \quad (2.10)$$

Η αναπτυσσόμενη κεντρομόλος δύναμη, στην οποία οφείλεται η παρεκτροπή του οχήματος από τον δρόμο γράφεται ως  $F_c = (M + m_o)\gamma_c$  ή ισοδύναμα:

$$F_c = (M + m_o)u_x^2 \cdot \frac{w_o''}{(1+w_o'^2)^{5/2}} \quad (2.11)$$

Η δύναμη που ασκείται στη μάζα λόγω του βάρους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_R = F \cos \vartheta = \frac{F}{(1+w_o'^2)^{1/2}} \quad (2.12)$$

Επομένως, η συνθήκη που εξασφαλίζει την ασφαλή διέλευση του οχήματος στην ανωμαλία, χωρίς να χαθεί η επαφή μεταξύ του τροχού του οχήματος και της επιφάνειας του δρόμου, προκύπτει ως:

$$F_R \geq F_c \quad (2.13)$$

με την συνολική δύναμη που επιδρά στον δρόμο να δίνεται από την (2.8).

Από την εξίσωση (2.13) μπορεί να υπολογιστεί η πρώτη κρίσιμη ταχύτητα  $u_{1cr}$ , η οποία καθορίζει τη συμπεριφορά του οχήματος.

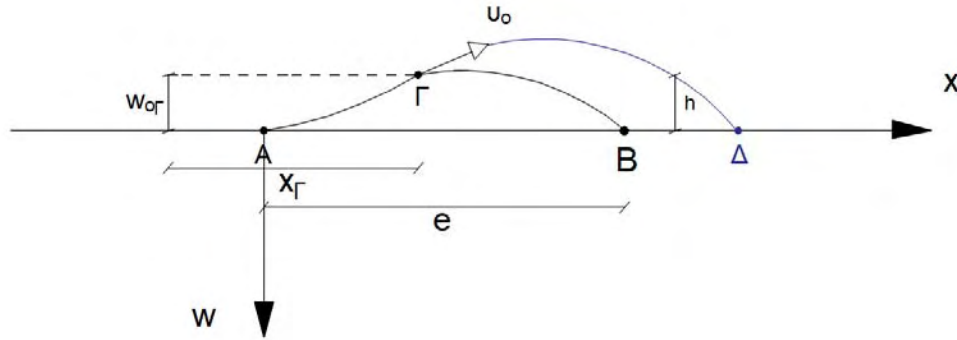
Επιπρόσθετα, από την εν λόγω εξίσωση, για γνωστή τιμή της ταχύτητας  $u_x > u_{1cr}$ , μπορεί να προσδιοριστεί ο χρόνος  $t_{cr}$  και το σημείο  $\Gamma$  στο οποίο το όχημα χάνει την επαφή με το έδαφος, μέσω της σχέσης:  $x_\Gamma = t_{cr} * u_x$ .

Στο σημείο  $\Gamma (x_\Gamma, w_\Gamma)$ , το όχημα χάνει την επαφή με το έδαφος και ακολουθεί τροχιά όμοια με αυτή ενός εκτοξευόμενου βλήματος με αρχική ταχύτητα  $u_o$  και υπό αρχική γωνία  $\vartheta_\Gamma$ , όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 2.2.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την τροχιά του οχήματος, σε παραμετρική μορφή, ορίζονται από τις σχέσεις:

$$x = x_{\Gamma} + u_0 t \cos \theta_{\Gamma} \quad (2.14\alpha)$$

$$h = w_{o\Gamma} + u_0 t \sin \theta_{\Gamma} - \frac{gt^2}{2} \quad (2.14\beta)$$



Σχήμα 2.2 Η τροχιά που ακολουθεί ένα όχημα κινούμενο με ταχύτητα μεγαλύτερη της  $u_{2cr}$

Ένα όχημα κινούμενο με μεγαλύτερη ταχύτητα από μια τιμή, εξαρτώμενη από το σχήμα της ανωμαλίας, θα προσγειωθεί πέρα από το σημείο B, που είναι το σημείο όπου τελειώνει η ανωμαλία. Αυτή η ταχύτητα αποτελεί σημαντικό παράγοντα και θα ονομάζεται στο εξής «δεύτερη κρίσιμη ταχύτητα»  $u_{2cr}$ .

Απαλείφοντας τον χρόνο  $t$  από τις εξισώσεις (2.14) προκύπτει:

$$h = w_{o\Gamma} + (x - x_{\Gamma}) \tan \theta_{\Gamma} - \frac{g(x - x_{\Gamma})^2}{2u_0^2 \cos^2 \theta_{\Gamma}} \quad (2.15)$$

Θέτοντας  $x=e$  και  $h=0$ , από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει η δεύτερη κρίσιμη ταχύτητα ως:

$$u_{2cr} = \frac{(e - x_{\Gamma})\sqrt{g}}{\sqrt{2(e - x_{\Gamma}) \tan \theta_{\Gamma} + 2w_{o\Gamma}}} \quad (2.16)$$

Το όχημα θα προσγειωθεί στο σημείο Δ τη χρονική στιγμή  $t_{\Delta}$ , η οποία λαμβάνεται ως η λύση από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$h(t_{\Delta}) = w_{\Gamma} + u_0 t_{\Delta} \sin \theta_{\Gamma} - \frac{gt_{\Delta}^2}{2} \quad , \quad u_x < u_{2cr} \quad (2.17\alpha)$$

$$w_{\Gamma} + u_0 t_{\Delta} \sin \theta_{\Gamma} - \frac{gt_{\Delta}^2}{2} = 0 \quad , \quad u_x > u_{2cr} \quad (2.17\beta)$$

Έτσι, το σημείο Δ, στο οποίο προσγειώνεται το όχημα, προσδιορίζεται ως εξής:

$$x_{\Delta} = u_x t_{\Delta} \quad (2.18\alpha)$$

$$h_{\Delta} = w_o(t_{\Delta}) \quad , \quad u_x < u_{2cr} \quad (2.18\beta)$$

$$h_{\Delta} = 0 \quad , \quad v_x > v_{2cr} \quad (2.18\gamma)$$

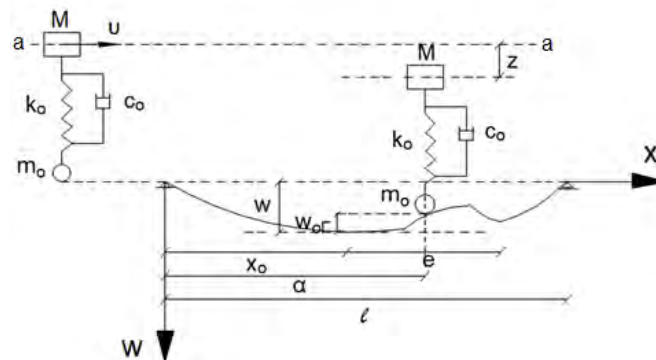
## 2.2 Ανωμαλία Καταστρώματος σε Γέφυρα

### 2.2.1 Υποθέσεις - Παραδοχές

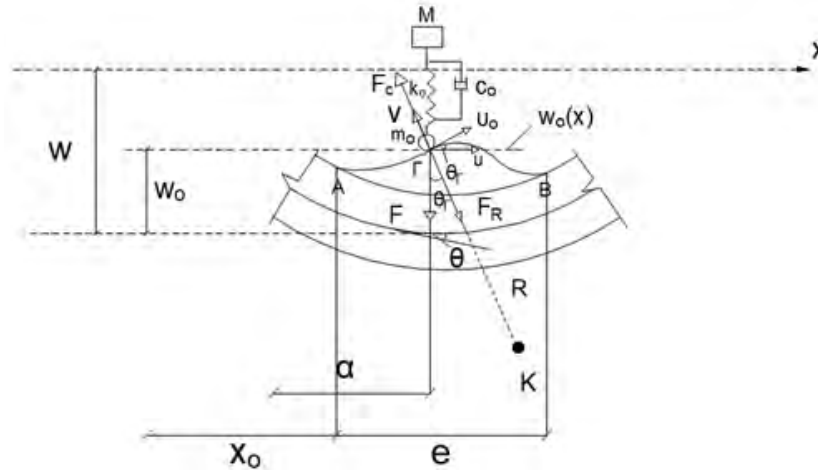
Πέραν των υποθέσεων και παραδοχών της παραγράφου 2.1.1, για την περίπτωση της ανωμαλίας πάνω στο κατάστρωμα μιας γέφυρας, θεωρούνται και τα ακόλουθα:

- Στο κατάστρωμα μιας απλά εδραζόμενης δοκού ενιαίας διατομής, που αναπαριστά τη γέφυρα, υπάρχει μια ανωμαλία μήκους  $e$ , η οποία ξεκινά από το σημείο A ( $x = x_A$ ) και καταλήγει στο σημείο B ( $x = x_A + e$ ), με τη μορφή της να προσδιορίζεται από την έκφραση  $w = w_o(x)$ , όπως και προηγούμενα.
- Το προσομοίωμα του οχήματος, που υιοθετήθηκε πριν, ισχύει και εδώ, και κινείται επί της γέφυρας με σταθερή ταχύτητα.
- Η μάζα  $M$ , πριν το όχημα εισέλθει στη γέφυρα, κινείται στο επίπεδο  $a$ - $a$ , από το οποίο μετρούνται οι μετατοπίσεις της.
- Η μάζα  $m_o$  εισέρχεται ομαλά στην ανωμαλία, δηλαδή χωρίς την εμφάνιση δυνάμεων κρούσης.
- Η ανωμαλία έχει μικρό μέγεθος, οπότε η παρουσία της επί της δοκού δεν αλλοιώνει τα χαρακτηριστικά της γέφυρας (ροπή αδρανείας  $I_y$  και μάζα ανά μονάδα μήκους  $m$ ).
- Οι κρίσιμες ταχύτητες  $v_{1cr}$  και  $v_{2cr}$  μπορούν να προσδιορισθούν από τις εξισώσεις (2.13) και (2.16) αντίστοιχα.

Η γεωμετρία, η σύμβαση αξόνων και μετατοπίσεων, καθώς και οι σχετικές δυνάμεις φαίνονται στα Σχήματα 2.3 και 2.4



Σχήμα 2.3 Μοντέλο οχήματος κινούμενο πάνω σε γέφυρα με ανωμαλία καταστρώματος



Σχήμα 2.4. Παραμορφώσεις και δυνάμεις στην περιοχή της ανωμαλίας

### 2.2.2 Μαθηματική έκφραση του προβλήματος

Οι εξισώσεις της παραγράφου 2.1.2 εξακολουθούν να ισχύουν, αφού η μορφή της ανωμαλίας είναι γεωμετρικά αρκετά μεγαλύτερη από τις παραμορφώσεις της δοκού. Πέραν τούτου, και με βάση όλες τις παραδοχές και υποθέσεις που προαναφέρθηκαν η διαφορική εξίσωση εξαναγκασμένης καμπτικής ταλάντωσης της δοκού, υπό την επιρροή μιας κινούμενης δύναμης \$F\$ (και αμελώντας διαμήκεις κινήσεις) δίδεται από τη γνωστή σχέση

$$EI_y w''''(x, t) + c\dot{w}(x, t) + m\ddot{w}(x, t) = F\delta(x - \alpha) \quad (2.19)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς \$x\$, η τελεία ως προς \$t\$ και \$\delta\$ είναι η συνάρτηση του Dirac. Η διαφορική αυτή εξίσωση μερικών παραγώγων, για μια αρχικά ηρεμούσα δοκό, σχετίζεται με τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες:

$$w(0, t) = w(\ell, t) = w''(0, t) = w''(\ell, t) \quad (2.20\alpha)$$

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0 \quad (2.20\beta)$$

Σύμφωνα με τα Σχήματα 2.3 και 2.4, και κάνοντας χρήση διαδικασίας ίδιας με αυτή της παραγράφου 2.1.2, βρίσκουμε ότι:

$$F = M(g - \ddot{z}) + m_0[g - (\ddot{w} - \ddot{w}_{o\Gamma})] = M(g - \ddot{z}) + m_0g - m_0\ddot{w} \quad (2.21\alpha)$$

ενώ από την ισορροπία των δυνάμεων στο σημείο \$\Gamma\$, προκύπτει ότι:

$$M\ddot{z} = -k_0[z - (w - w_0)] - c_0[\dot{z} - (\dot{w} - \dot{w}_0)] = -k_0z + k_0w - k_0w_0 - c_0\dot{z} + c_0\dot{w}$$

που λαμβάνει την μορφή

$$\ddot{z} + 2\beta_0\dot{z} + \gamma_0^2z = \gamma_0^2(w - w_0) + 2\beta_0\dot{w} \quad (2.21\beta)$$

με τα \$\beta\_0, \gamma\_0\$ να έχουν ήδη οριστεί στις σχέσεις (2.5β), ενώ ισχύει επίσης ότι

$$w_0(x) = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad \text{ή} \quad x \geq x_0 + e \quad (2.21\gamma)$$

$$w_o(x) = w_o(\alpha) \quad \text{για } x_o \leq x \leq x_o + e \quad (2.21\delta)$$

Η λύση της εξίσωσης (2.21β), με αρχικές συνθήκες  $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ , προκύπτει από το ολοκλήρωμα του Duhamel και είναι της μορφής

$$z(t) = \frac{1}{\omega_o} \int_0^t e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 w(x, \tau) - \gamma_o^2 w_o + 2\beta_o \dot{w}(x, \tau)] \sin \omega_o(t - \tau) d\tau \quad (2.22\alpha)$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibnitz, σύμφωνα με τον οποίο

$$G(x) = \int_0^x Q(x, t) dt \Rightarrow \frac{dG(x)}{dx} = Q(x, t) + \int_0^x \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt \quad (2.22\beta)$$

λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$z(t) = \frac{1}{\omega_o} \int_0^t e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 w(x, \tau) - \gamma_o^2 w_o + 2\beta_o \dot{w}(x, \tau)] [\omega_o \cos \omega_o(t - \tau) - \beta_o \sin \omega_o(t - \tau)] d\tau \quad (2.22\gamma)$$

Επομένως, η συνολική δύναμη F, σύμφωνα με την (2.12α) γράφεται ως:

$$F = (M + m_o)g + \Phi_{t_1}^{t_2}(x, t) \quad (2.22\delta)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Phi_{t_1}^{t_2} = & \frac{k_o}{\omega_o} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 w(x, \tau) - \gamma_o^2 w_o + 2\beta_o \dot{w}(x, \tau)] \sin \omega_o(t - \tau) d\tau + \\ & \frac{c_o}{\omega_o} \int_0^t e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 w(x, \tau) - \gamma_o^2 w_o + 2\beta_o \dot{w}(x, \tau)] [\omega_o \cos \omega_o(t - \tau) - \\ & \beta_o \sin \omega_o(t - \tau)] d\tau - k_o w(x, t) + k_o w_o(x) - c_o \dot{w}(x, t) - m_o \ddot{w}(x, t) \end{aligned} \quad (2.22\epsilon)$$

Εισάγοντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (2.19) προκύπτουν, κατά περίπτωση, οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις κίνησης:

$$\mathbf{\Gamma\iota\alpha \mathbf{v}_x \leq \mathbf{v}_{1cr} :}$$

$$EI_y w'''' + c\dot{w} + m\ddot{w} = [(M + m_o)g + \Phi_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha), \quad 0 \leq t \leq \ell/u_x \quad (2.23\alpha)$$

$$\mathbf{\Gamma\iota\alpha \mathbf{v}_x \geq \mathbf{v}_{1cr} :}$$

$$EI_y w'''' + c\dot{w} + m\ddot{w} = [(M + m_o)g + \Phi_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha), \quad 0 \leq t \leq X_\Gamma/u_x \quad (2.23\beta)$$

$$EI_y w'''' + c\dot{w} + m\ddot{w} = 0, \quad X_\Gamma/u_x \leq t \leq X_\Delta/u_x \quad (2.23\gamma)$$

$$EI_y w'''' + c\dot{w} + m\ddot{w}$$

$$\begin{aligned} = & [(M + m_o)g + \Phi_{t_\Delta}^t(x, t)]\delta(x - \alpha) + P_{imp}\delta(t - t_\Delta)\delta(x - x_\Delta), \\ & X_\Delta/u_x \leq t \leq \ell/u_x \end{aligned} \quad (2.23\delta)$$

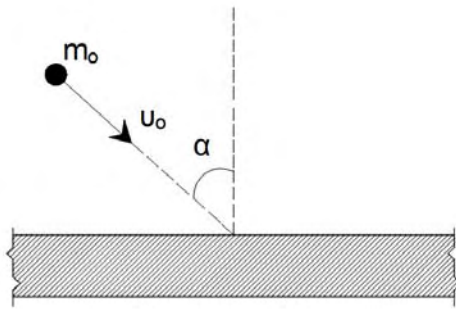
όπου  $t_\Gamma$  ο χρόνος που χρειάζεται η μάζα  $m_o$  για να φθάσει στο σημείο  $\Gamma$  (απώλεια επαφής με το κατάστρωμα),  $t_\Delta$  ο χρόνος που χρειάζεται η μάζα  $m_o$  για να προσγειωθεί στο σημείο  $\Delta$  (επανάκτηση επαφής), και  $P_{imp}$  η δύναμη κρούσης που ασκείται κατά την εκτόξευση τη χρονική στιγμή  $t$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\left. \begin{aligned} w_o &= 0, \quad t \leq x_\Gamma/u_x \quad \text{ή} \quad t \geq x_\Delta/u_x \\ w_o &= w_o(x), \quad x_\Gamma/u_x \leq t \leq x_\Delta/u_x \end{aligned} \right\} \quad (2.23\epsilon)$$

### 2.2.3 Η δύναμη κρούσης

Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία και τα περιεχόμενα του Σχήματος 2.5, η δύναμη κρούσης μιας μάζας  $m_o$  η οποία συγκρούεται με μια άκαμπτη πλάκα μεγαλύτερης μάζας από τη  $m_o$  είναι ουσιαστικά η αιφνίδια ορμή στον χρόνο  $\Delta t \rightarrow 0$ .



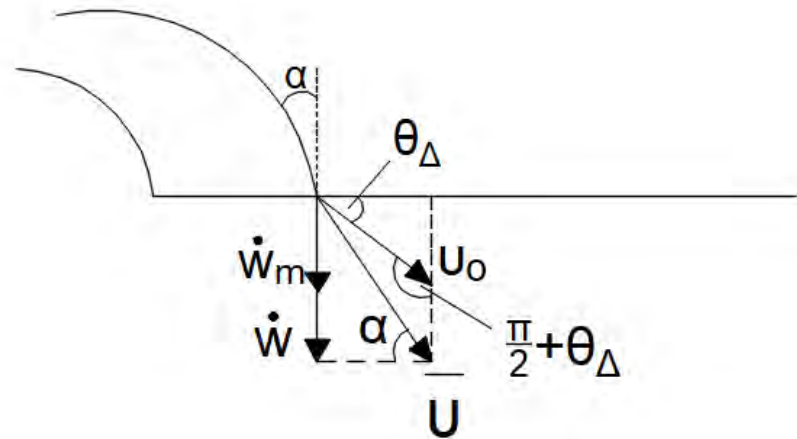
Σχήμα 2.5 Κρούση μάζας  $m_o$  με πλάκα μεγαλύτερης μάζας

Έτσι, ισχύει:

$$P_{imp} = (1 + \epsilon)\bar{u}m_o \cos \alpha \quad (2.24)$$

όπου  $\epsilon$  ένας συντελεστής που εκφράζει την παραμένουσα ενέργεια μετά την κρούση,  $\bar{u}$  η ταχύτητα της μάζας  $m_o$  τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης και  $\alpha$  η γωνία υπό την οποία η μάζα  $m_o$  συγκρούεται πάνω στην άκαμπτη πλάκα.

Η ταχύτητα  $\bar{u}$  υπολογίζεται ως η γεωμετρική συνισταμένη τριών συνιστωσών, που είναι (α) η ταχύτητα  $u_o$  της μάζας  $m_o$  στο τέλος της πτήσης της σε χρόνο  $t = t_\Delta = x_\Delta/u_x$ , (β) η ταχύτητα  $\dot{w}_m$  της μάζας  $m_o$  τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης λόγω της ταλάντωσης της, και (γ) η ταχύτητα της ταλαντούμενης δοκού  $\dot{w}(x_\Delta, t_\Delta)$  στο σημείο σύγκρουσης  $\Delta$ . Οι εν λόγω συνιστώσες απεικονίζονται στο Σχήμα 2.6, που έπεται.



Σχήμα 2.6 Ταχύτητα κρούσης και συνιστώσες αυτής

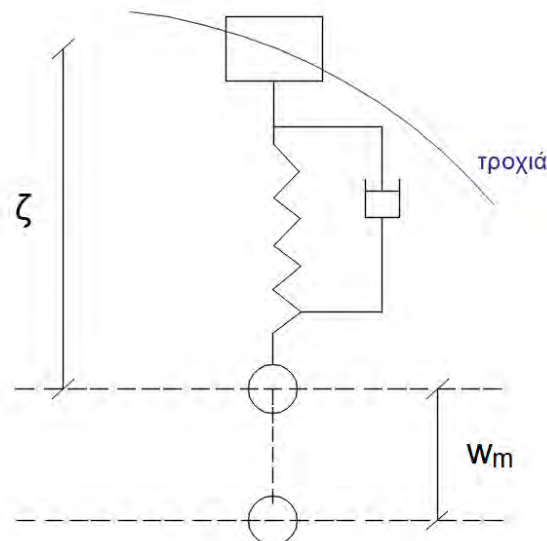
Λόγω του γεγονότος ότι η μάζα  $M$  ακολουθεί την προσδιορισμένη τροχιά, ενώ η μάζα  $m_o$ , λόγω του συστήματος ελατηρίου-αποσβεστήρα, εκτελεί ταλάντωση σε σχέση με τη μάζα  $M$ , όπως καταδεικνύεται στο Σχήμα 2.7, η εν λόγω ταλάντωση περιγράφεται από εξίσωση της μορφής

$$m_o \ddot{w}_m + k_o w_m + c_o \dot{w}_m = 0 \tag{2.25α}$$

με λύση

$$w_m(t) = e^{-\beta_o t} (D_1 \sin \omega_o t + D_2 \cos \omega_o t) \tag{2.25β}$$

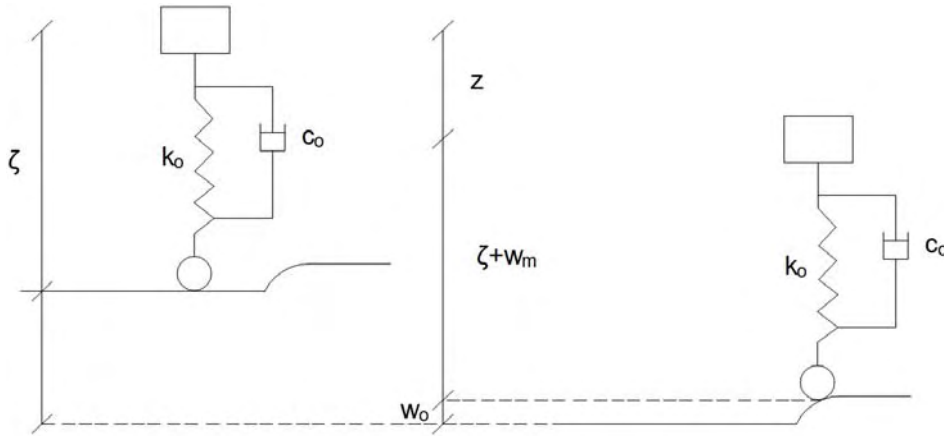
με τις ποσότητες  $\beta_o$ ,  $\gamma_o$ ,  $\omega_o$  να έχουν προσδιοριστεί προηγούμενα.



Σχήμα 2.7 Ταλάντωση της μάζας  $m_o$

Την χρονική στιγμή  $t_\Gamma$  (απώλεια επαφής) η αρχική απόσταση  $\zeta$  μεταξύ της  $M$  και  $m_o$  αλλάζει σε  $\zeta + w_m$ , σύμφωνα με το Σχήμα 2.8, και ισχύει η ακόλουθη σχέση:  $\zeta + w = z + \zeta + w_m + w_o$ , η οποία τελικά γράφεται ως:

$$w_m = w - w_o - z \quad (2.26)$$



Σχήμα 2.8 Η αλλαγή της απόστασης μεταξύ της  $M$  και της  $m_o$

Οι αρχικές συνθήκες της προαναφερθείσας ταλάντωσης είναι:

$$\left. \begin{aligned} w_m(0) &= w(x_\Gamma, t_\Gamma) - w_o(x_\Gamma) - z(t_\Gamma) \\ \dot{w}_m(0) &= \dot{w}(x_\Gamma, t_\Gamma) - \dot{z}(t_\Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

από τις οποίες βρίσκουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{\beta_o w(x_\Gamma, t_\Gamma) + \dot{w}(x_\Gamma, t_\Gamma) - \beta_o w_o(x_\Gamma) - \beta_o z(t_\Gamma) - \dot{z}(t_\Gamma)}{\omega_o} \\ D_2 &= w(x_\Gamma, t_\Gamma) - w_o(x_\Gamma) - z(t_\Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

και κατά συνέπεια

$$\dot{w}_m(t_\Delta) = e^{-\beta_o t_\Delta} [ -(\beta_o D_1 + \omega_o D_2) \sin \omega_o t_\Delta + (\omega_o D_1 - \beta_o D_2) \cos \omega_o t_\Delta ] \quad (2.29)$$

Αθροίζοντας γεωμετρικά τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας κρούσης, αυτή θα ισούται με

$$\bar{v} = \sqrt{v_o^2 + (\dot{w}_m + \dot{w})^2 + 2v_o(\dot{w}_m + \dot{w}) \sin \theta_\Delta} \quad (2.30\alpha)$$

δρόσα υπό γωνία

$$\hat{\alpha} = \arcsin \left[ \frac{v_o}{\bar{v}} \cos \theta_\Delta \right] \quad (2.30\beta)$$

ενώ η  $\theta_\Delta$  υπολογίζεται μέσω της σχέσης (2.15), και ισχύει ότι

$$\tan \theta_\Delta = \tan \theta_\Gamma - \frac{g(x_\Delta - x_\Gamma)}{v_o^2 \cos^2 \theta_\Gamma} \quad (2.30\gamma)$$



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Επίλυση του Δυναμικού Προβλήματος και Αριθμητικά Αποτελέσματα - Σχολιασμός

Στο τρέχον Κεφάλαιο παρουσιάζεται, σε πρώτο στάδιο, αναλυτικά η διαδικασία επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, που σχετίζονται με την απόκριση της δοκού, και έχουν παρουσιαστεί στο προηγούμενο Κεφάλαιο, δηλαδή των εξισώσεων (2.23). Σε δεύτερο στάδιο, παρατίθενται αριθμητικά αποτελέσματα και αυτά σχολιάζονται καταλλήλως.

#### 3.1 Επίλυση του Δυναμικού Προβλήματος

Αναζητούνται λύσεις χωριζόμενων μεταβλητών της μορφής

$$w(x, t) = \sum_n X_n(x)T_n(t) \quad (3.1)$$

στις οποίες  $X_n(x)$  είναι οι συναρτήσεις σχήματος της δοκού και  $T_n(t)$  είναι οι συναρτήσεις χρόνου που πρέπει να προσδιορισθούν.

Εισάγοντας την λύση  $w(x, t)$  της εξίσωσης (3.1) στις εξισώσεις (2.23), προκύπτουν τα ακόλουθα:

**Για  $v_x \leq v_{1cr}$  :**

$$EI_y \sum_n X_n'''' T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = [(M + m_o)g + G_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha),$$

$$0 \leq t \leq \ell/v_x \quad (3.2\alpha)$$

**Για  $v_x \geq v_{1cr}$  :**

$$EI_y \sum_n X_n'''' T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = [(M + m_o)g + G_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha)$$

$$0 \leq t \leq x_\Gamma/v_x \quad (3.2\beta)$$

$$EI_y \sum_n X_n'''' T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = 0$$

$$x_\Gamma/v_x \leq t \leq x_\Delta/v_x \quad (3.2\gamma)$$

$$EI_y \sum_n X_n'''' T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n$$

$$= [(M + m_o)g + G_{t_\Delta}^t(x, t)]\delta(x - \alpha) + P_{imp}\delta(t - t_\Delta)\delta(x - x_\Delta)$$

$$x_\Delta/v_x \leq t \leq \ell/v_x \quad (3.2\delta)$$

όπου

$$\begin{aligned}
G_{t_1}^{t_2}(x, t) = & \frac{k_o}{\omega_o} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 \sum_n X_n T_n(\tau) - \gamma_o^2 \sum_n A_n X_n + \\
& 2\beta_o \sum_n X_n \dot{T}_n(\tau)] \sin \omega_o(t - \tau) d\tau + \frac{c_o}{\omega_o} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\beta_o(t-\tau)} [\gamma_o^2 \sum_n X_n T_n(\tau) - \\
& \gamma_o^2 \sum_n A_n X_n + 2\beta_o \sum_n X_n \dot{T}_n(\tau)] [\omega_o \cos \omega_o(t - \tau) - \beta_o \sin \omega_o(t - \tau)] d\tau - \\
& k_o \sum_n X_n T_n + k_o \sum_n A_n X_n - c_o \sum_n X_n \dot{T}_n - m_o \sum_n X_n \ddot{T}_n
\end{aligned} \quad (3.2\varepsilon)$$

και

$$A_n = \frac{\int_{x_o}^{x_o+e} w_o(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} \quad (3.2\sigma\tau)$$

Με βάση τις γνωστές τιμές των συναρτήσεων σχήματος και των ιδιοσυχνοτήτων μιας αμφιέριστης δοκού ( $X_n = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ ,  $\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI}{m\ell^4}$ ), οι σχέσεις (3.2) γράφονται ως:

**Για  $v_x \leq v_{1cr}$  :**

$$\begin{aligned}
m \sum_n \omega_n^2 X_n T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = \\
[(M + m_o)g + G_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha) \quad 0 \leq t \leq \ell/v_x
\end{aligned} \quad (3.3\alpha)$$

**Για  $v_x \geq v_{1cr}$  :**

$$\begin{aligned}
m \sum_n \omega_n^2 X_n T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = \\
[(M + m_o)g + G_0^t(x, t)]\delta(x - \alpha), \quad 0 \leq t \leq x_\Gamma/v_x
\end{aligned} \quad (3.3\beta)$$

$$m \sum_n \omega_n^2 X_n T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = 0, \quad x_\Gamma/v_x \leq t \leq x_\Delta/v_x \quad (3.3\delta)$$

$$\begin{aligned}
m \sum_n \omega_n^2 X_n T_n + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m \sum_n X_n \ddot{T}_n = [(M + m_o)g + G_{t_\Delta}^t(x, t)]\delta(x - \alpha) \\
+ P_{imp} \delta(t - t_\Delta) \delta(x - x_\Delta), \quad x_\Delta/v_x \leq t \leq \ell/v_x
\end{aligned} \quad (3.3\varepsilon)$$

Κάνοντας χρήση των συνθηκών ορθογωνικότητας μορφών, και εφαρμόζοντας την κλασσική προσέγγιση της γραμμικής θεωρίας ταλαντώσεων (πολλαπλασιασμός επί  $X_k$  ( $k \neq n$ ) και ολοκλήρωση από 0 έως  $\ell$ ) προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις ως προς το εύρος ταλάντωσης  $T_n(t)$ , που ως γνωστόν έχει διαστάσεις μήκους:

**Για  $v_x \leq v_{1cr}$  :**

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + G_0^t(\alpha, t)] X_n(\alpha), \quad 0 \leq t \leq \ell/v_x \quad (3.4\alpha)$$

**Για  $v_x \geq v_{1cr}$  :**

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + G_0^t(\alpha, t)] X_n(\alpha), 0 \leq t \leq x_\Gamma / v_x \quad (3.4\beta)$$

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = 0, x_\Gamma / v_x \leq t \leq x_\Delta / v_x \quad (3.4\gamma)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n &= \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + G_{t_\Delta}^t(x, t)] X_n(\alpha) \\ &+ \frac{2}{m\ell} P_{imp} X_n(\alpha) \delta(t - x_\Delta / v_x), x_\Delta / v_x \leq t \leq \ell / v_x \end{aligned} \quad (3.4\delta)$$

με  $\alpha = v_x t$ .

Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις (3.4α-δ) δεν επιδέχονται κλειστών λύσεων. Πλην όμως, μπορεί κανείς να αναζητήσει προσεγγιστικές λύσεις [37]. Μια πρώτη από αυτές είναι αναμφίβολα εκείνη που το φορτίο απλουστεύεται ως  $P = \mathbf{M} * g$  και αγνοείται η παρουσία της ανωμαλίας ( $\mathbf{M} = M + m_o$ ). Τούτο οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση του εύρους ταλάντωσης:

$$\bar{T}_n(t) = \frac{2Mg}{m\ell(\omega_n^2 - \Omega_n^2)} \left( \sin \Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right), \Omega_n = \frac{n\pi v_x}{\ell} \quad (3.5)$$

Αν αυτή η λύση εισαχθεί στο δεξί μέλος των εξισώσεων (3.4), λαμβάνονται οι ακόλουθες εκφράσεις.

**Για  $v_x \leq v_{1cr}$  :**

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + R_0^t(\alpha, t)] X_n(\alpha), 0 \leq t \leq \ell / v_x \quad (3.5\alpha)$$

**Για  $v_x \geq v_{1cr}$  :**

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + R_0^t(\alpha, t)] X_n(\alpha), 0 \leq t \leq x_\Gamma / v_x \quad (3.6\beta)$$

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = 0, x_\Gamma / v_x \leq t \leq x_\Delta / v_x \quad (3.6\gamma)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \frac{c}{M} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n &= \frac{2}{m\ell} [(M + m_o)g + R_{t_\Delta}^t(x, t)] X_n(\alpha) + \frac{2}{m\ell} P_{imp} X_n(\alpha) \delta(t - x_\Delta / v_x) \\ &x_\Delta / v_x \leq t \leq \ell / v_x \end{aligned} \quad (3.6\delta)$$

όπου

$$\begin{aligned} R_{t_1}^{t_2}(x, t) &= \frac{k_o}{\omega_o} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\beta_o(t-\tau)} \left[ \gamma_o^2 \sum_k X_k(\alpha) \bar{T}_k(\tau) - \gamma_o^2 \sum_k A_k X_k(\alpha) + \right. \\ &2\beta_o \sum_k X_k(\alpha) \dot{\bar{T}}_k(\tau) \left. \right] \sin \omega_o(t - \tau) d\tau + \frac{c_o}{\omega_o} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\beta_o(t-\tau)} \left[ \gamma_o^2 \sum_k X_k(\alpha) \bar{T}_k(\tau) - \right. \\ &\gamma_o^2 \sum_k A_k X_k(\alpha) + 2\beta_o \sum_k X_k(\alpha) \dot{\bar{T}}_k(\tau) \left. \right] [\omega_o \cos \omega_o(t - \tau) - \beta_o \sin \omega_o(t - \tau)] d\tau - \\ &k_o \sum_k X_k(\alpha) \bar{T}_k(t) + k_o \sum_k A_k X_k(\alpha) - c_o \sum_k X_k(\alpha) \dot{\bar{T}}_k(t) - m_o \sum_k X_k(\alpha) \ddot{\bar{T}}_k(t) \end{aligned} \quad (3.6\epsilon)$$

$$X_k(\alpha) = \sin \Omega_n t, A_k = 0, t \leq \frac{x_o}{v_x} \quad \text{ή} \quad t \geq \frac{x_o + e}{v_x} \quad (3.6\sigma\tau)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων (3.6), με βάση τις ήδη γνωστές αρχικές συνθήκες, εκφράζονται μέσω του ολοκληρώματος Duhamel, και για  $\beta = \frac{c}{2m}$ ,  $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}$  γράφονται ως:

**Για  $v_x \leq v_{1cr}$  :**

$$T_n(t) = \frac{2}{m\ell\tilde{\omega}_n} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} [(M + m_o)g + R_0^t(\tau)] \sin \Omega_n t \cdot \sin \tilde{\omega}_n(t - \tau) d\tau,$$

$$0 \leq t \leq \ell/v_x \quad (3.7\alpha)$$

**Για  $v_x \geq v_{1cr}$  :**

$$T_n(t) = \frac{2}{m\ell\tilde{\omega}_n} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} [(M + m_o)g + R_0^t(\tau)] \sin \Omega_n t \cdot \sin \tilde{\omega}_n(t - \tau) d\tau,$$

$$0 \leq t \leq x_\Gamma/v_x \quad (3.7\beta)$$

$$T_n(t) = e^{-\beta t} (c_{1n} \sin \tilde{\omega}_n t + c_{2n} \cos \tilde{\omega}_n t), \quad x_\Gamma/v_x \leq t \leq x_\Delta/v_x \quad (3.7\gamma)$$

$$T_n(t) = e^{-\beta t} (d_{1n} \sin \tilde{\omega}_n t + d_{2n} \cos \tilde{\omega}_n t) + \frac{2}{m\ell\tilde{\omega}_n} \int_{t_\Delta}^t e^{-\beta(t-\tau)} [(M + m_o)g + R_{t_\Delta}^t(\tau)] \sin \Omega_n \tau \cdot \sin \tilde{\omega}_n(t - \tau) d\tau + \frac{2}{m\ell\tilde{\omega}_n} P_{imp} e^{-\beta(t-x_\Delta/v_x)} \sin \frac{\Omega_n x_\Delta}{v_x} \sin \tilde{\omega}_n \left( t - \frac{x_\Delta}{v_x} \right)$$

$$x_\Delta/v_x \leq t \leq \ell/v_x \quad (3.7\delta)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι σταθερές  $c_{1n}$ ,  $c_{2n}$ ,  $d_{1n}$ ,  $d_{2n}$  προσδιορίζονται εξισώνοντας τα  $w$  και  $\dot{w}$  τις χρονικές στιγμές  $t = t_\Gamma$  και  $t = t_\Delta$  αντίστοιχα. Επίσης, στις παραπάνω εξισώσεις οι ποσότητες  $t_\Gamma$ ,  $t_\Delta$ ,  $v_{cr}$ ,  $\theta_\Delta$  εμφανίζονται λόγω της ύπαρξης της ανωμαλίας στον δρόμο και προσδιορίζονται σύμφωνα με την παράγραφο 2.1.2.

### **3.2 Παράμετροι Εισόδου**

Τα δεδομένα – παράμετροι εισόδου, πάνω στα οποία βασίστηκαν οι αριθμητικές εφαρμογές έχουν ως ακολούθως:

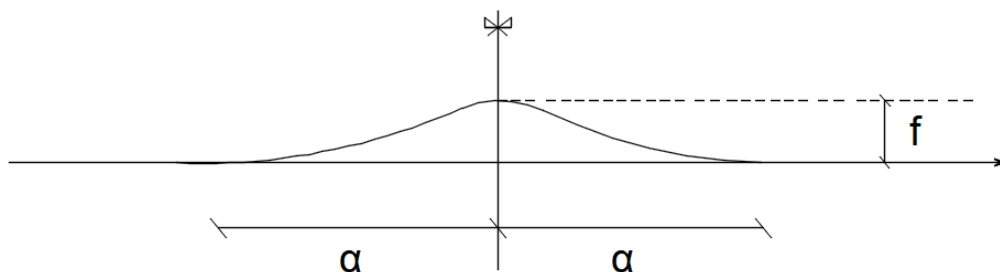
#### **3.2.1 Τύπος ανωμαλίας**

Ο τύπος της ανωμαλίας που χρησιμοποιήθηκε παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1, και η μορφή του περιγράφεται από την εξίσωση

$$w_o(x) = \frac{f}{\alpha^4} (x - x_o)^4 - \frac{4f}{\alpha^3} (x - x_o)^3 + \frac{4f}{\alpha^2} (x - x_o)^2 \quad (3.8)$$

Για τις ανάγκες της παρούσας δύο τύποι ανωμαλιών εισήχθησαν στην ανάλυση. Ο **τύπος 1**, που αντιπροσωπεύει μια συνήθη ανωμαλία, σχετίζεται με τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha = 2.50$  m και  $f = 0.10$  m, ενώ ο **τύπος 2** (αιχμηρή, μάλλον ασυνήθιστη)

μορφής ανωμαλία) χαρακτηρίζεται από  $a = 2.50$  m και  $f = 0.30$  m. Θεωρώντας τη θέση τους ανά κάθε τέταρτο του ανοίγματος της γέφυρας, μελετήθηκε η επιρροή τους στην συμπεριφορά της.



Σχήμα 3.1 Μορφή της ανωμαλίας

### 3.2.2 Το όχημα

Έχει αποδειχθεί<sup>[34]</sup> ότι για όχημα με μήκος μεταξονίου μικρότερο του ενός έκτου του ανοίγματος της γέφυρας, και χωρίς απώλεια της ακρίβειας, κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει το μοντέλο οχήματος ενός άξονα (αντί αυτού των δύο αξόνων). Στην εργασία έγινε χρήση του μοντέλου ενός ελαφρού οχήματος, με

$$M = 200 \text{ kg}, m_o = 20 \text{ kg}, k_o = 2000 \text{ dN/m}, c_o = 100 \text{ dN sec/m}$$

Η επιλεγείσα (σταθερή) ταχύτητα του οχήματος έγινε με γνώμονα τις τιμές των κρίσιμων ταχυτήτων  $v_{1cr}$  και  $v_{2cr}$  κατά περίπτωση.

### 3.2.3 Δοκός - γέφυρα

Το προσομοίωμα της γέφυρας είναι μια αμφιέριστη δοκός από ελαστικό ισότροπο υλικό (με μέτρο ελαστικότητας  $E = 2.1 \cdot 10^{10}$  dN/m<sup>2</sup>, με άνοιγμα  $\ell = 100$  m, ροπή αδρανείας στον ισχυρό άξονα (κάμψης – ταλάντωσης)  $I = 0.65$  m<sup>4</sup>, μάζα ανά μονάδα μήκους  $m = 1000$  kg/m και απόσβεση ανά μονάδα μήκους 6%.

## 3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Σχολιασμός

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα της εργασίας, και σχολιάζονται κατά περίπτωση. Όλοι οι υπολογισμοί και οι γραφικές παραστάσεις προήλθαν από το λογισμικό Mathematica<sup>[38]</sup>, ο κώδικας δε όλων των σχετικών υποπρογραμμάτων παρατίθεται στο τέλος της παρούσας υπό μορφή Παραρτήματος.

Δόθηκε έμφαση, μετά την προηγηθείσα θεωρητική επεξεργασία του παρόντος αλλά και του προηγούμενου Κεφαλαίου, στη μελέτη της επιρροής των ακόλουθων παραμέτρων στη δυναμική απόκριση της δοκού – προσομοιώματος γέφυρας:

- (α) Του σχήματος και της θέσης της ανωμαλίας (επί του οδοστρώματος ή του καταστρώματος της γέφυρας),
- (β) Των χαρακτηριστικών του μοντέλου του οχήματος (σταθεράς ελατηρίου, απόσβεσης), και
- (γ) Της κρίσιμης ταχύτητας με την οποία το όχημα συγκρούεται (ή όχι) με την γέφυρα μετά την είσοδο του στην ανωμαλία.

Τονίζεται επίσης ότι το προσομοίωμα του οχήματος θεωρείται ότι κινείται κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα της δοκού, ενώ για μεν την ταλάντωση της γέφυρας λαμβάνονται υπόψη οι έξι πρώτες κανονικές μορφές, για δε την ανάλυση σε σειρές της ανωμαλίας (εξισώσεις 3.2ε, 3.2στ) εξήντα μορφές.

### 3.3.1 Υπολογισμός κρίσιμων ταχυτήτων

Ανάλογα με τον τύπο της ανωμαλίας (1 ή 2), τα δεδομένα εισόδου που προαναφέρθηκαν και τις αντίστοιχες εξισώσεις, στον Πίνακα 3.1 παρατίθενται οι τιμές των κρίσιμων ταχυτήτων  $v_{1cr}$  και  $v_{2cr}$ , όπως αυτές ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 2.

*Πίνακας 3.1 Κρίσιμες ταχύτητες ανά τύπο ανωμαλίας (m/sec)*

Τύπος Ανωμαλίας	$v_{1cr}$	$v_{2cr}$
1	12.6162	15.2973
2	7.5173	8.9872

### 3.3.2 Υπολογισμός συντεταγμένων και χρόνων

Με βάση τις ως άνω υπολογισθείσες τιμές των κρίσιμων ταχυτήτων, επιλέγεται η ταχύτητα του μοντέλου του οχήματος  $v_x$ , και με βάση την τιμή αυτή υπολογίζονται οι θέσεις των σημείων Γ και Δ (που ορίστηκαν πριν) και οι χρονικές στιγμές που λαμβάνουν χώραν τα σχετιζόμενα φαινόμενα.

Πιο συγκεκριμένα, για την ανωμαλία **τύπου 1**, θεωρείται ότι το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_x = 14 \text{ m/s}$ , που σημαίνει ότι  $v_{1cr} < v_x < v_{2cr}$ . Ως εκ τούτου, βρέθηκε ότι το όχημα χάνει την επαφή του με το οδόστρωμα (ή κατάστρωμα) στο σημείο Γ με  $x_\Gamma = 2.495 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Gamma = 0.1997 \text{ sec}$ , και εν τέλει προσγειώνεται στο σημείο Δ (εντός της ανωμαλίας) με  $x_\Delta = 3.5666 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Delta = 0.25476 \text{ sec}$ .

Αν όμως επιλεγεί ταχύτητα οχήματος  $u_x = 25 \text{ m/s} > u_{2cr}$ , τότε η επαφή θα χαθεί στο σημείο Γ για  $x_\Gamma = 1.2549 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Gamma = 0.0502 \text{ sec}$  και μετά το όχημα θα προσγειωθεί στο σημείο Δ (πέραν της ανωμαλίας) σε θέση  $x_\Delta = 9.7268 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Delta = 0.3891 \text{ sec}$ .

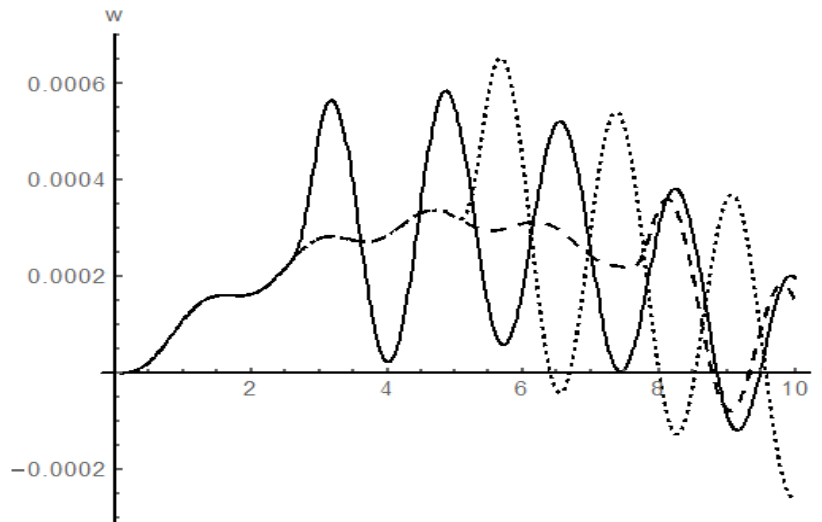
Με την ίδια λογική, για ανωμαλία **τύπου 2**, θεωρείται αρχικά ότι το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u_x = 14 \text{ m/s}$ , που σημαίνει ότι (βλ. Πίνακα 3.1)  $u_x > u_{2cr}$ . Τούτο οδηγεί σε απώλεια επαφής του οχήματος από το υπόστρωμα στο σημείο Γ με  $x_\Gamma = 1.2898 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Gamma = 0.09213 \text{ sec}$ , και προσγείωση του στο σημείο Δ (πέραν της ανωμαλίας) για  $x_\Delta = 9.1797 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Delta = 0.6557 \text{ sec}$ . Αν όμως επιλεγεί ταχύτητα του οχήματος  $u_x = 25 \text{ m/s} > u_{2cr}$ , προκύπτει πως το όχημα χάνει την επαφή του με το δάπεδο στο σημείο Γ σε θέση  $x_\Gamma = 1.1252 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Gamma = 0.04501 \text{ sec}$ , ενώ προκύπτει σε αυτή την περίπτωση πως το όχημα θα προσγειωθεί στο σημείο Δ (πέραν της ανωμαλίας) σε θέση  $x_\Delta = 24.9799 \text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t_\Delta = 0.9992 \text{ sec}$ .

### 3.3.3 Δυναμική απόκριση της γέφυρας

Οι παραπάνω δύο (2) τύποι ανωμαλιών, με τα ως άνω καταγεγραμμένα αποτελέσματα χρόνων και αποστάσεων, θεωρούνται ότι βρίσκονται πάνω στη γέφυρα με την αρχή τους Α (Σχήμα 2.1,  $x_0$ ) να τοποθετείται στα  $\ell/4$ ,  $\ell/2$ ,  $3\ell/4$  του ανοίγματος αυτής.

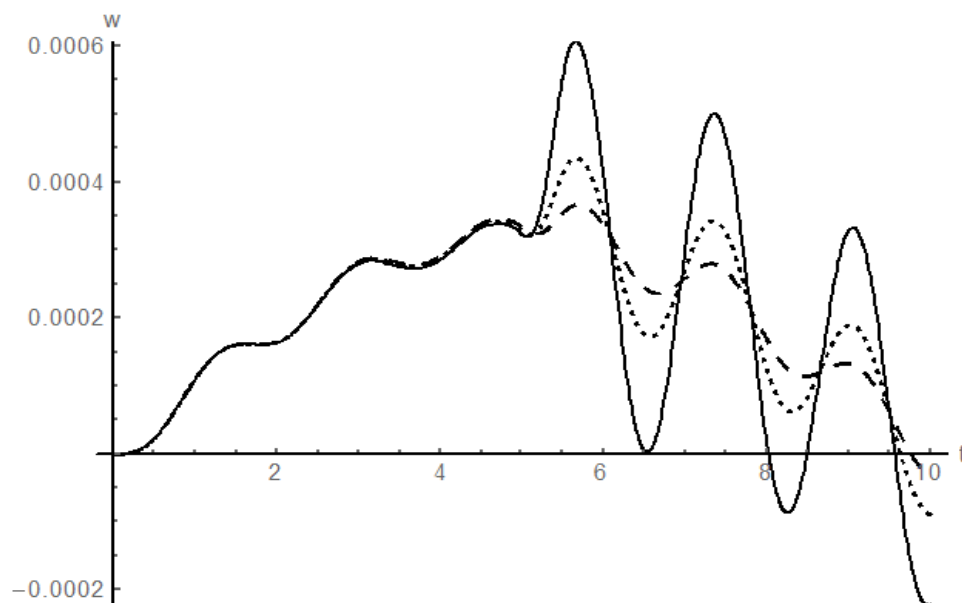
Για κάθε ένα από τους δύο τύπους ανωμαλίας, μελετήθηκε η επιρροή τους στη δυναμική απόκριση του προσομοιώματος της γέφυρας, ανάλογα με την τιμή της ταχύτητας κίνησης του οχήματος, ως άνω.

Αναλυτικότερα, για την ανωμαλία **τύπου 1**, στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται το δυναμικό βέλος κάμψης (σε m) στο μέσο του ανοίγματος της γέφυρας για τις ως άνω τρεις διαφορετικές θέσεις της ανωμαλίας, λόγω της κίνησης του οχήματος με σταθερή ταχύτητα  $u_x = 10 \text{ m/s} < u_{1cr}$ . Από τις καμπύλες αυτές φαίνεται ότι η ύπαρξη της ανωμαλίας επιδρά με εμφανή τρόπο στις παραγόμενες δυναμικές παραμορφώσεις, το μέγεθος των οποίων διαφοροποιείται ανάλογα με τη θέση της ανωμαλίας. Η ευμενέστερη θέση είναι αυτή που αντιστοιχεί σε  $x_0 = 3\ell/4$ , ενώ δυσμενέστερη προέκυψε αυτή που σχετίζεται με  $x_0 = \ell/2$ . Η ταλάντωση απεικονίζεται μέχρι τον χρόνο  $t = 10 \text{ sec}$ , που απαιτείται για να διανύσει το όχημα όλο το άνοιγμα της γέφυρας.



Σχήμα 3.2 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για τρεις διαφορετικές θέσεις ανωμαλίας τύπου 1:  $x_0 = \ell/4$  (—),  $x_0 = \ell/2$  (⋯),  $x_0 = 3\ell/4$  (-----) για το μοντέλο οχήματος της §3.2.2, με  $v_x = 10$  m/s

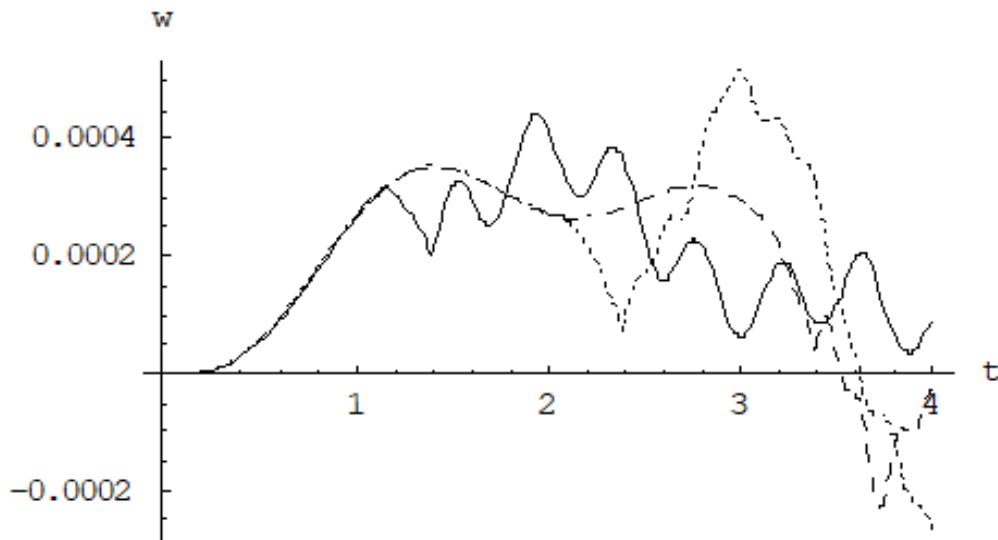
Στη συνέχεια εξετάζεται η επιρροή της δυσκαμψίας  $k_0$  του ελατηρίου του οχήματος στην απόκριση της γέφυρας, για την ίδια ως άνω υποκρίσιμη ταχύτητα του  $v_x = 10$  m/s με θέση της ανωμαλίας τύπου 1 στο μέσο του ανοίγματος. Τα σχετικά αποτελέσματα (δυναμικού βέλους κάμψης στο μέσο ως προς τον χρόνο διέλευσης) δίνονται στο Σχήμα 3.3, για τρεις τιμές της δυσκαμψίας  $k_0$ . Διαπιστώνεται άμεσα ότι τα πιο δύσκαμπτα ελατήρια του οχήματος οδηγούν σε δυναμικές παραμορφώσεις αυξημένες κατά περίπου 80%.



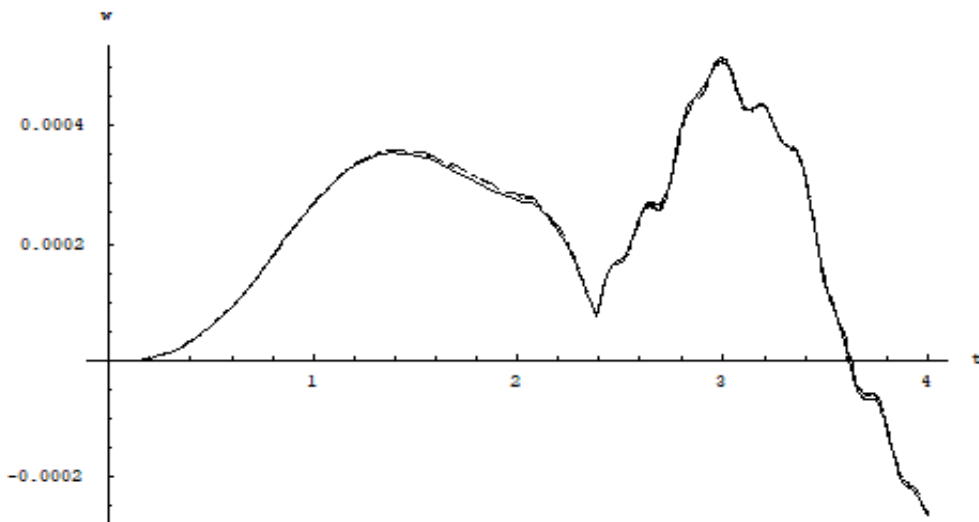
Σχήμα 3.3 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για ανωμαλία τύπου 1 στο μέσο της γέφυρας και τρεις τιμές της δυσκαμψίας του ελατηρίου του οχήματος:  $k_0 = 2000$  (—),  $k_0 = 1000$  (⋯),  $k_0 = 500$  (-----), με  $v_x = 10$  m/s



Αν επιλεγεί υπερκρίσιμη ταχύτητα οχήματος  $u_x = 25 \text{ m/s} > u_{2cr}$ , (και ανωμαλία τύπου 1 εκ νέου) αναζητούνται (όπως και για την υποκρίσιμη ταχύτητα) τόσο η επιρροή της θέσης της ανωμαλίας όσο και της σταθεράς του ελατηρίου του οχήματος στην δυναμική απόκριση. Τα σχετικά διαγράμματα  $[t, w(\ell/2, t)]$  παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.4 και 3.5 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.4 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για τρεις διαφορετικές θέσεις ανωμαλίας τύπου 1:  $x_0 = \ell/4$  (—),  $x_0 = \ell/2$  (.....),  $x_0 = 3\ell/4$  (-----) για το μοντέλο οχήματος της §3.2.2, με  $u_x = 25 \text{ m/s}$

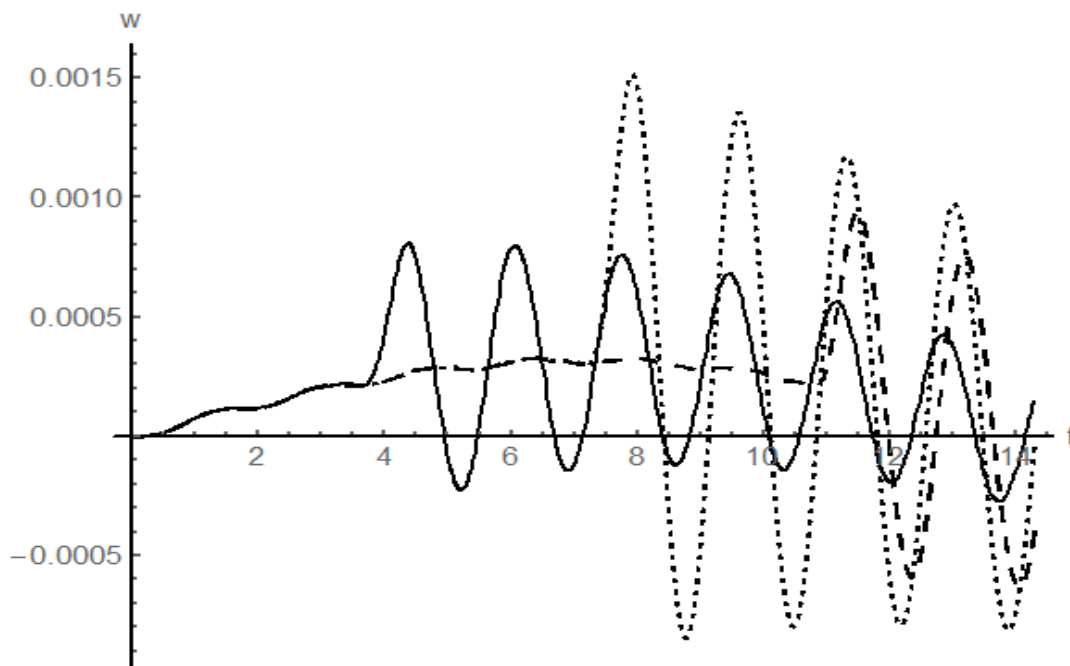


Σχήμα 3.5 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για ανωμαλία τύπου 1 στο μέσο της γέφυρας και τρεις τιμές της δυσκαμψίας του ελατηρίου του οχήματος:  $k_0 = 2000$  (—),  $k_0 = 1000$  (.....),  $k_0 = 500$  (-----), με  $u_x = 25 \text{ m/s}$

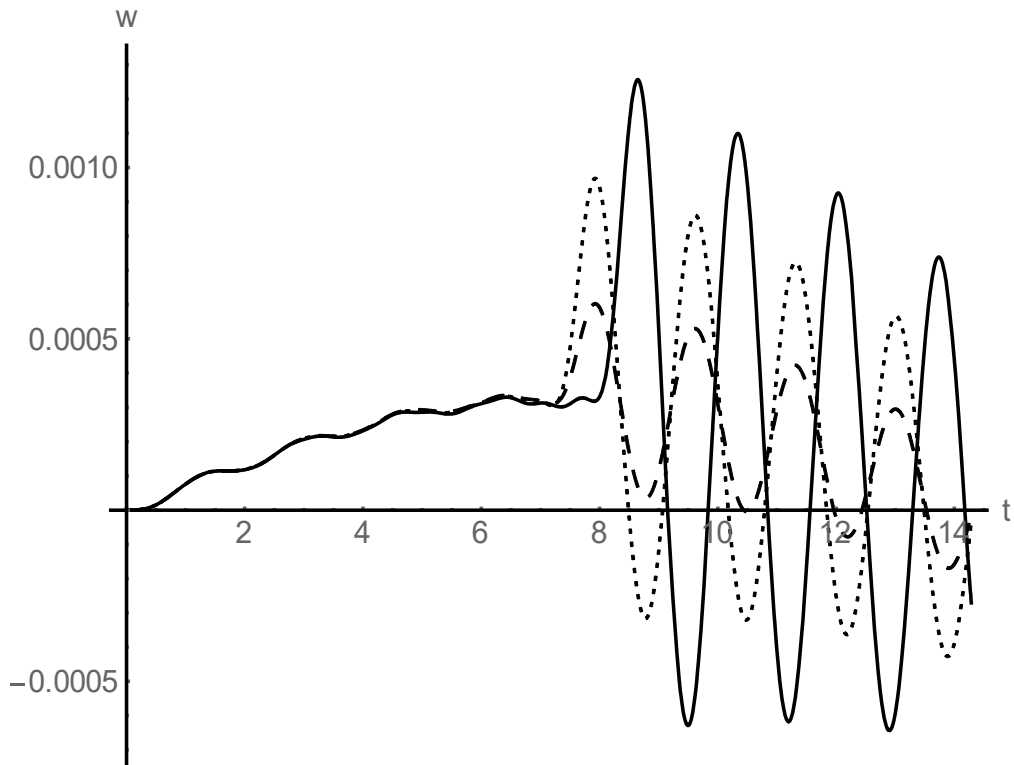
Από τα διαγράμματα του Σχήματος 3.4 παρατηρούμε ότι και πάλι η παρουσία της ανωμαλίας είναι αισθητή, όσον αφορά τις παραμορφώσεις που προκαλούνται στη γέφυρα. Διαπιστώνεται πως για ένα χρονικό διάστημα κοντά στα 0.339 sec, κατά το οποίο η γέφυρα εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση λόγω της πτήσης του οχήματος, μειώνεται η επιρροή της κρούσης του και ως εκ τούτου το εύρος των βελών της γέφυρας.

Αντίθετα, από το Σχήμα 3.5 βλέπουμε ότι η επιρροή της σταθεράς του ελατηρίου είναι αμελητέα. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν παραχθεί μέχρι χρόνο  $t = 4$  sec, που διαρκεί η κίνηση του οχήματος εντός της δοκού.

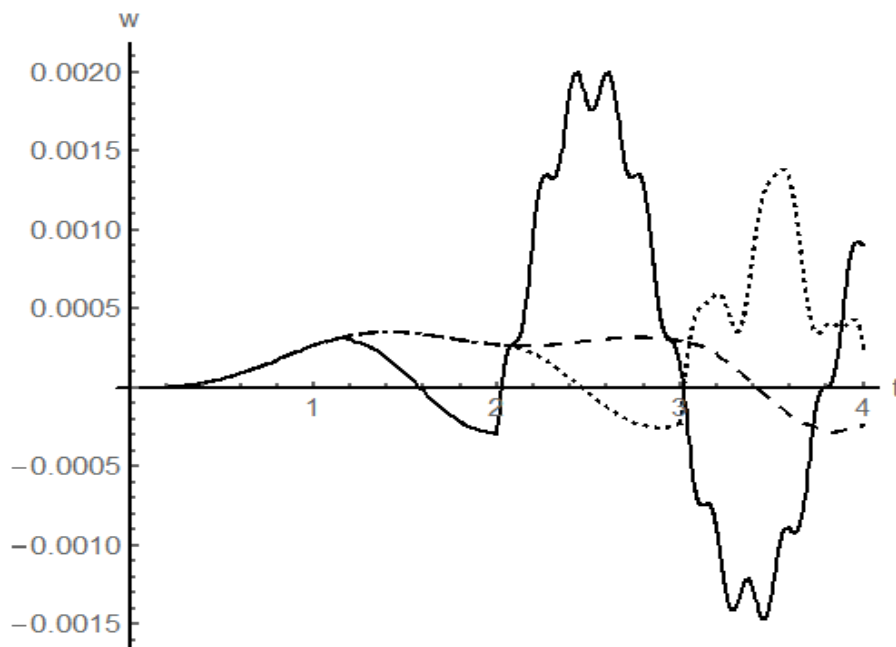
Με την ίδια λογική παράγονται αποτελέσματα για την περίπτωση της ανωμαλίας **τύπου 2**. Επιλέγονται δύο τιμές της ταχύτητας του οχήματος, μια υποκρίσιμη  $u_x = 7$  m/s  $< u_{1cr}$  και μια υπερκρίσιμη  $u_x = 25$  m/s  $> u_{2cr}$  και για αυτές εξετάζονται η επιρροή της θέσης της ανωμαλίας και της σταθεράς του ελατηρίου. Χαράσσονται στα διαγράμματα  $[t, w(\ell/2, t)]$  και αυτά απεικονίζονται στα Σχήματα 3.6, 3.7 για την υποκρίσιμη και στα Σχήματα 3.8 και 3.9 για την υπερκρίσιμη ταχύτητα.



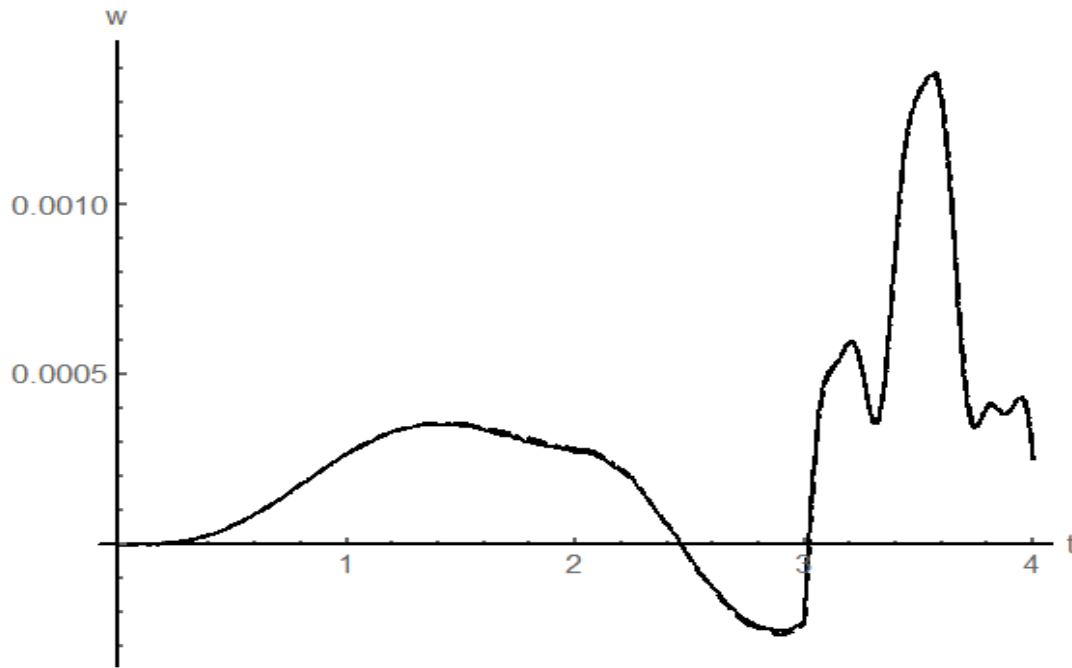
Σχήμα 3.6 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για τρεις διαφορετικές θέσεις ανωμαλίας τύπου 2:  $x_0 = \ell/4$  (—),  $x_0 = \ell/2$  (.....),  $x_0 = 3\ell/4$  (-----) για το μοντέλο οχήματος της §3.2.2, με  $u_x = 7$  m/s



Σχήμα 3.7 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για ανωμαλία τύπου 2 στο μέσο της γέφυρας και τρεις τιμές της δυσκαμψίας του ελατηρίου του οχήματος:  $k_0 = 2000$ (—),  $k_0 = 1000$ (.....),  $k_0 = 500$ (-----), με  $v_x = 7$  m/s



Σχήμα 3.8 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για τρεις διαφορετικές θέσεις ανωμαλίας τύπου 2:  $x_0 = \ell/4$ (—),  $x_0 = \ell/2$ (.....),  $x_0 = 3\ell/4$ (-----) για το μοντέλο οχήματος της §3.2.2, με  $v_x = 25$  m/s



Σχήμα 3.9 Δυναμικό βέλος κάμψης στο μέσο της γέφυρας για ανωμαλία τύπου 2 στο μέσο της γέφυρας και τρεις τιμές της δυσκαμψίας του ελατηρίου του οχήματος:  $k_0 = 2000$ (—),  $k_0 = 1000$ (.....),  $k_0 = 500$ (-----), με  $v_x = 25$  m/s

Για την υποκρίσιμη ταχύτητα, η επιρροή της παρουσίας της ανωμαλίας είναι εμφανέστατη. Οι παραμορφώσεις της γέφυρας αυξάνονται από 1.5 φορές (για  $x_0 = 3\ell/4$ ) έως και 3 φορές (για  $x_0 = \ell/2$ ) σε σχέση με αυτές στο μέσο της γέφυρας, όταν αυτή αποτελείται από ένα κατάστρωμα ομαλό. Η θέση της ανωμαλίας επίσης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, καθόσον δυσμενής είναι η παρουσία της περί το μέσο του ανοίγματος, ενώ πιο ευμενής περί τα τρία τέταρτα αυτού. Επίσης, παρατηρούμε ότι για την ανωμαλία τύπου 2 τα πιο δύσκαμπτα ελατήρια οδηγούν σε πολύ μεγαλύτερες αυξήσεις των παραμορφώσεων, της τάξης του 150%.

Αντίστοιχα, για την υπερκρίσιμη ταχύτητα, η ύπαρξη της ανωμαλίας στην γέφυρα επηρεάζει σημαντικά τις παραμορφώσεις που δημιουργούνται στη γέφυρα. Παρατηρείται πως για χρονικό διάστημα κοντά στα 0.9542 sec, δηλαδή καθώς η γέφυρα εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις λόγω της εκτόξευσης του οχήματος, δεν υπάρχει καμία μείωση όσον αφορά την επίδραση της πρόσκρουσης του οχήματος και το εύρος των παραμορφώσεων τη γέφυρας. Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας της μεγαλύτερης διάρκειας της εκτόξευσης του οχήματος, η επίδραση των ανωμαλιών (εκτός από το μέσον της γέφυρας) είναι μικρή, ενώ για  $x_0 > 3\ell/2$  η επιρροή των ανωμαλιών μπορεί να θεωρηθεί

αμελητέα. Τέλος, όπως και στην περίπτωση της ανωμαλίας τύπου 1, η επιρροή της αλλαγής της δυσκαμψίας των ελατηρίων είναι αμελητέα.

Στα διαγράμματα των τελευταίων τεσσάρων Σχημάτων ο άξονας των τετμημένων (δηλ. του χρόνου) φτάνει μέχρι την τιμή εξόδου του οχήματος από τη γέφυρα, ανάλογα με την ταχύτητα του, ήτοι 14.29 sec και 4 sec για τις δύο ταχύτητες αντίστοιχα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Με βάση τα προταθέντα μοντέλα οχήματος και γέφυρας, μελετήθηκε η επιρροή της κίνησης του οχήματος σε περίπτωση ύπαρξης μιας ανωμαλίας στο κατάστρωμα, και εξετάστηκε η περίπτωση ή μη αναπήδησης του, δηλαδή απώλειας επαφής με τη γέφυρα και κρούσης με αυτή σε μετέπειτα χρονική στιγμή. Η δυναμική ανάλυση εστιάστηκε στην καμπτική ταλάντωση της γέφυρας, και τα σπουδαιότερα συμπεράσματα που εξήχθησαν είναι τα ακόλουθα:

1. Υφίστανται δύο κρίσιμες τιμές του οχήματος  $u_{1cr}$ ,  $u_{2cr}$ , οι οποίες εξαρτώνται από το σχήμα της ανωμαλίας, και σε σχέση με την ταχύτητα του  $u_x$  οδηγούν σε τρεις διαφορετικές μορφές κίνησης αυτού. Πιο συγκεκριμένα, αν ισχύει  $u_x < u_{1cr}$ , τότε το όχημα βρίσκεται συνέχεια σε επαφή με το κατάστρωμα, αν  $u_{1cr} \leq u_x \leq u_{2cr}$  το όχημα απογειώνεται και κατόπιν προσγειώνεται εντός της ανωμαλίας και τέλος αν  $u_x > u_{2cr}$  η κρούση του οχήματος λαμβάνει χώραν μετά την ανωμαλία.
2. Η παρουσία της ανωμαλίας πάνω στη γέφυρα ασκεί σημαντική επιρροή στις παραγόμενες παραμορφώσεις της γέφυρας ακόμα και στις περιπτώσεις που το όχημα κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την  $u_{1cr}$ .
3. Εάν ένα όχημα κινείται πάνω στην γέφυρα με ταχύτητα μεγαλύτερη από  $u_{1cr}$  ή  $u_{2cr}$ , τότε χάνει την επαφή του με το δάπεδο και απογειώνεται ακολουθώντας μια τροχιά όπως αυτή ενός εκτοξευόμενου βλήματος. Οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις κρούσης σε αυτή την περίπτωση δημιουργούν πολύ μεγαλύτερες παραμορφώσεις στη γέφυρα σε σχέση με αυτές που προκαλούνται από την κίνηση του ίδιου οχήματος που διασχίζει την ίδια ανωμαλία χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η απώλεια επαφής με το κατάστρωμα της γέφυρας.
4. Οι τιμές που λαμβάνει η σταθερά του ελατηρίου  $k_0$  του μοντέλου του οχήματος επηρεάζουν σημαντικά τη δυναμική συμπεριφορά της γέφυρας. Τα «μαλακά» ελατήρια παράγουν μικρές ταλαντώσεις στη γέφυρα, ενώ τα πιο δύσκαμπτα ελατήρια μπορούν να αυξήσουν το πλάτος των ταλαντώσεων μέχρι και 80%.
5. Η θέση στην οποία βρίσκεται η ανωμαλία κατά μήκος της γέφυρας επιδρά σε σημαντικό βαθμό στις παραμορφώσεις που δημιουργούνται σε αυτήν. Όταν το

όχημα κινείται με υποκρίσιμες ταχύτητες οι περισσότερο δυσμενείς θέσεις εντοπίζονται κοντά στο μέσον του ανοίγματος της γέφυρας ενώ αντίθετα οι πιο ευμενείς θέσεις βρίσκονται στα  $3\ell/4$  της γέφυρας.

6. Όταν το όχημα κινείται με υπερκρίσιμες ταχύτητες οι δυσμενείς θέσεις παραμένουν οι ίδιες, αλλά το εύρος των ταλαντώσεων προκύπτει πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με προηγούμενως και η επιρροή των ανωμαλιών θεωρείται πρακτικά αμελητέα.

Για μελλοντική έρευνα προτείνονται τα εξής:

(α) Αδιαστατοποίηση της δυναμικής ανάλυσης, ώστε να δοθεί η δυνατότητα πολύ ευρύτερης παραμετρικής διερεύνησης αλλά και δημιουργίας δυναμικών γραμμών επιρροής (για οποιαδήποτε θέση κατά μήκος της γέφυρας) των εντατικών και παραμορφωσιακών δυναμικών μεγεθών, σε σχέση με τη θέση του οχήματος κατά μήκος του ανοίγματος,

(β) Χρήση πιο εξευγενισμένων μοντέλων οχήματος και γέφυρας με σκοπό την ακριβέστερη προσέγγιση του προβλήματος,

(γ) Εισαγωγή της επιρροής απότομης επιβράδυνσης του οχήματος, επειδή ο οδηγός αντιλαμβάνεται την παρουσία της ανωμαλίας, και

(δ) Εξέταση της χρήσης μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης (σε άμεση σχέση με τις μαθηματικές δυσκολίες, τον προγραμματισμό και τον εν γένει υπολογιστικό όγκο), αλλά και πιθανής εισαγωγής δυνάμεων επαφής μεταξύ οχήματος και καταστρώματος.

**Βιβλιογραφία**

- [1] Frýba, L., 1972, *Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads*. Groningen, Nordhoff International Publication Co.
- [2] Stokes, 1849, “G.G., Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 707-735.
- [3] Zimmermann, H., 1896, “Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last”, *Zentralblatt der Bauverwaltung*, [16, (23), 249-251], [23A, 257-260], [24, 264-266], [26, 288].
- [4] Krýlov, A.N., 1905, “*Mathematical collection of papers of the Academy of Sciences*”, St. Petersburg, 61.
- [5] Krýlov, A.N., 1905, “Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben”. *Mathematical Annalen*, 61, 211.
- [6] Timoshenko, S.P., 1922, “On the forced vibration of bridges”, *Philosophical Magazine*, Series 6, 43 1018.
- [7] Timoshenko, S., Young, D., H., 1948, “Advanced Dynamics”, McGraw-Hill Book Company, Inc. N. York.
- [8] Inglis, C.E., 1934, “*A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges*”, Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Hillerborg, A., 1951, “*Dynamic influences of smoothly running loads of simply supported girders*”, Kungl. Tekhn. Högs kolan, Stockholm.
- [10] Saller, H., 1921, “*Einfluss bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brücken*”, Kreidels Verlag, Berlin.
- [11] Jeffcott, H.H., 1929, “On the vibration of beams under the action of moving loads”. *Philosophical Magazine*, Series 7,8 (48), 66-67.
- [12] Steuding, H., “Die Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten I, II”. *Ingenieur Archiv*, 1934, 5(4), 275-305 / 1935, 6(4), 265-270.
- [13] Honda, H., Kajikawa, Y. and Kobori, T., 1982, “Spectra of road surface roughness on bridges”, *Journal of Structure Engineering ASCE*, 108(9).
- [14] Gillespi, T.D. and al, 1993 “*Effect of heavy vehicle characteristics on pavement response and performance*”, NCHRP, Rep. 353, Trans Res. Board (TRB), Washington D.C.



- [15] Green, M.F. and Cebon, D., 1994, “Dynamic response of highway bridges to heavy vehicle loads: theory and experimental validations”, *Journal of Sound and Vibration*, 170(1).
- [16] Green, M.F., Cebon, D., Cole, D.J., 1995, “Effects of Vehicle Suspension Design on Dynamics of Highway Bridges”, *Journal of Structural Engineering*, 121(2).
- [17] Zibdeh, H.S., Reckwitz, R., 1996, “Moving loads on Beams with general boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibrations*, 195(1).
- [18] Lee, H.P., 1996, “Dynamic response of a Beam with a moving mass”, *Journal of Sound and Vibrations*, 191(2)
- [19] Michaltsos, G.T., Sophianopoulos, D. and Kounadis, A.N., 1996, “The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam”, *Journal of Sound and Vibration*, 191(3), 357-362.
- [20] Xu, X., Xu, W., Genin, J., 1997, “A nonlinear moving mass problem”, *Journal of Sound and Vibrations*, 204(3)
- [21] Foda, M.A., Abduljabbar, Z., 1972, “A Dynamic Green Function Formulation for the response of a Beam structure to a moving Mass”, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 210(3).
- [22] Michaltsos G.T., 2001, “The influence of Centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, 247(2), 261-277
- [23] Michaltsos G.T. 2002, “Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to load moving with variable speeds”, *Journal of Sound and Vibration*, 258(2), 359-372.
- [24] Cantieri, R., 1991, “*Beitrag zur Dynamik von Strassenbrücken unter der überfahrt schwerer Fahrzeuge*”, Diss. ETH Nr 9505, Technische Hochschule, Zürich.
- [25] Am. Association of State, 12<sup>th</sup> edition, Hwy and transp. Officials (AASHTO), Washington D.C., 1977. “*Standard specifications for highway bridges*”.
- [26] Leonard, D., 1982, “*Damping and frequency measurements on eight bog girder bridges*”, Transport and Rd Res. Lab. Growthorne, TRRL, Lab. Re. 682, England.
- [27] Ministry of Transport. And Communications, Downsview, Ontario, Canada, 1983. *Ontario highway bridge design code*, Ontario

- [28] ISO/TC 108/WG9 Draft No 3c, Int. Organization for Standardization (ISO), Geneva, Switzerland, 1972. “*Proposals for generalized road inputs to vehicles*”.
- [29] Jockovic, M., Sarkic, A., Petronijevic, M., 2015, “*Models related to the moving load problem*”, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Congress of Serbian Society of Mechanics, Arandjelovac, June 15-17.
- [30] Ευρωκώδικας 1: Δράσεις επί των κατασκευών – Μέρος 2: Φορτία στις γέφυρες οφειλόμενα στην κυκλοφορία, ΕΛΟΤ EN 1991.02.
- [31] Κουνάδης, Α.Ν., 1989, “*Δυναμική των συνεχών ελαστικών συστημάτων*”, Συμμεών, Αθήνα.
- [32] Chompooming, K., Yener, M., 1995, “The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the method of lines”, *Journal of Sound and Vibration*, 183(4), 567-589.
- [33] Al-Duaij, J., Abdel-Roman, M., James P, R., 1999, “Maximum acceleration for the vibration of single span bridges with even and uneven decks”, *Dynamics and Control*, 9, 247-254.
- [34] Michaltsos, G.T., Konstantakopoulos, T.G., 2000, “Dynamic response of a bridge with surface deck irregularities”, *Journal of Vibration and Control*, 6, 667-689.
- [35] Pestener, A., Bergman, L., Tan, C., 2004, “A novel approach to the calculation of pothole-induced contact forces in MDOF vehicle models”, *Journal of Sound and Vibrations*, 275, 127-149.
- [36] Stancioiu, D., Ouyang, H., Mottershead, J., 2008, “Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment”, *Journal of Sound and Vibration*, 310, 1128-1140.
- [37] Kounadis, A.N., 1987, “Convergence, Uniqueness and error estimate of an approximate method for solving non-linear initial-value problems”, *Scient. Papers of NTUA*, V. 11 No 1, 13-20.
- [38] Wolfram Inc., Mathematica ver. 12 (2019), Program of doing mathematics with computers, USA.

## **Παράρτημα: Προγράμματα *Mathematica***

Στο παρόν Παράρτημα παρατίθενται οι εντολές των διαφόρων προγραμμάτων του λογισμικού *Mathematica*, που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της Διπλωματικής Εργασίας.

```

In[28]:= ClearAll[a, f, M, mo, k, c, β, γ, ωo, vx, VV, g,
  x, t, τ, F, w, w1, w2, ww, ww1, ww2, FD, FR, G1, G2]
a = 2.5;
f = 0.3;
M = 120;
mo = 5;
g = 10;
k = 120;
c = 40;
β =  $\frac{c}{2 * M}$ ;
γ =  $\sqrt{k / M}$ ;
ωo =  $\sqrt{(\beta^2 - \gamma^2)}$ ;
vx = 25;
VV = vx2;
w =  $\frac{f}{a^4} * (vx * t)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (vx * t)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (vx * t)^2$ ;
w1 =  $\frac{4 * f}{a^4} * (vx * t)^3 - \frac{12 * f}{a^3} * (vx * t)^2 + \frac{8 * f}{a^2} * (vx * t)$ ;
w2 =  $\frac{12 * f}{a^4} * (vx * t)^2 - \frac{24 * f}{a^3} * (vx * t) + \frac{8 * f}{a^2}$ ;

ww =  $\frac{f}{a^4} * (vx * \tau)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (vx * \tau)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (vx * \tau)^2$ ;
ww1 =  $\frac{4 * f}{a^4} * (vx * \tau)^3 - \frac{12 * f}{a^3} * (vx * \tau)^2 + \frac{8 * f}{a^2} * (vx * \tau)$ ;
ww2 =  $\frac{12 * f}{a^4} * (vx * \tau)^2 - \frac{24 * f}{a^3} * (vx * \tau) + \frac{8 * f}{a^2}$ ;

F = (M + mo) * g +  $\frac{2 * k * (\gamma^2 - \beta^2)}{\gamma^2} * w - \frac{\gamma^2 * w}{\omega o}$  *
   $\left( \frac{k}{\beta^2 + \omega o^2} * (\omega o * \text{Cos}[\omega o * t] + \beta * \text{Sin}[\omega o * t]) + c * \text{Sin}[\omega o * t] \right) * e^{-\beta * t}$ ;

FD = (M + mo) * VV *  $\frac{w2}{(1 + w1^2)^{5/2}}$ ;

FR =  $\frac{F}{(1 + w1^2)^{1/2}}$ ;

G1 = Plot[FD, {t, 0, 2 * a / vx}, AxesLabel -> {"t", "FD"},
  PlotStyle -> {Black}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],

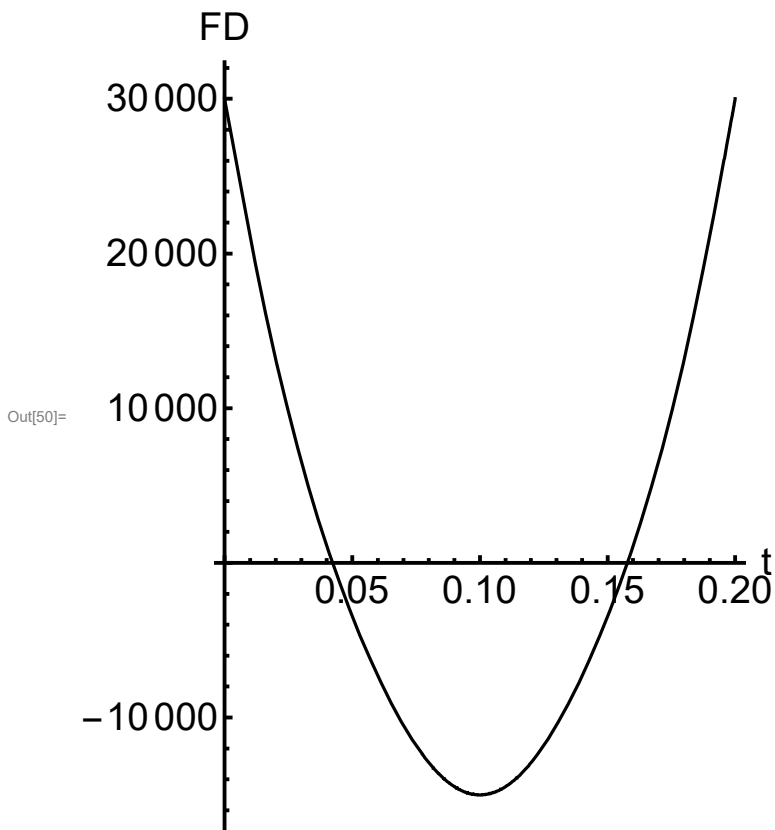
```

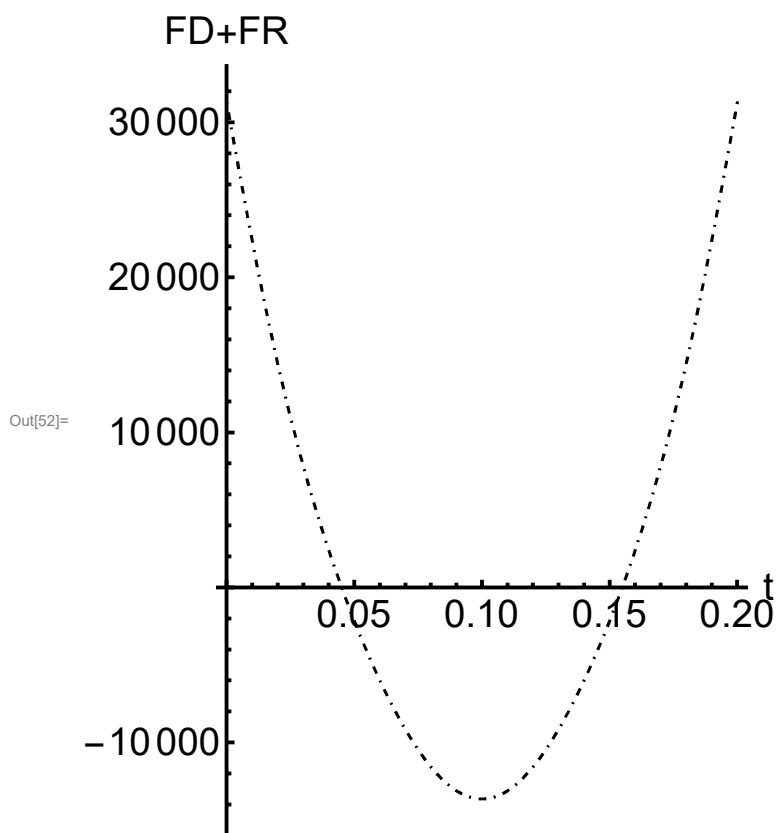
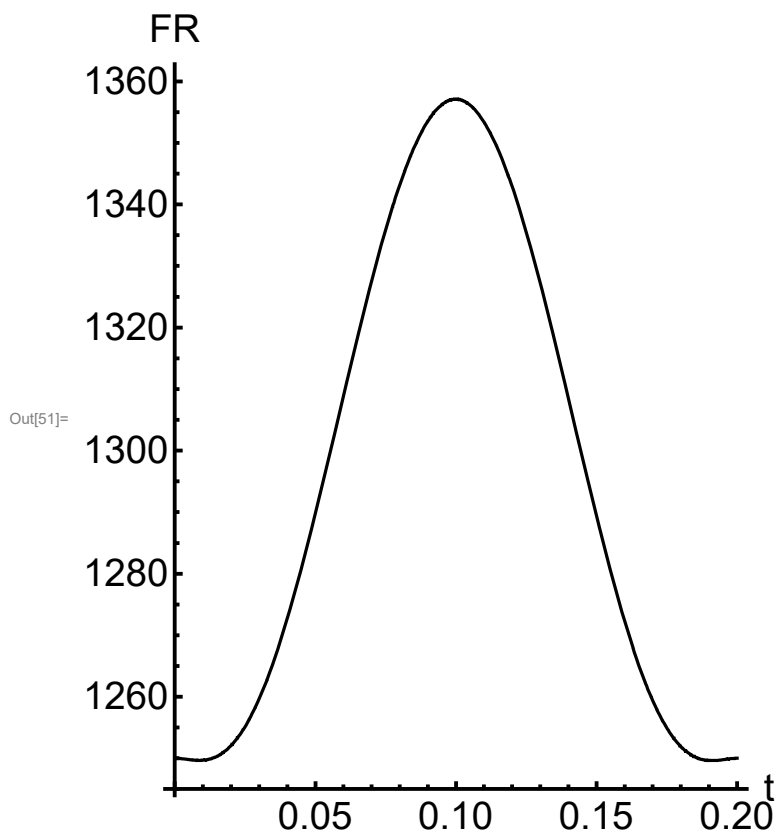
```

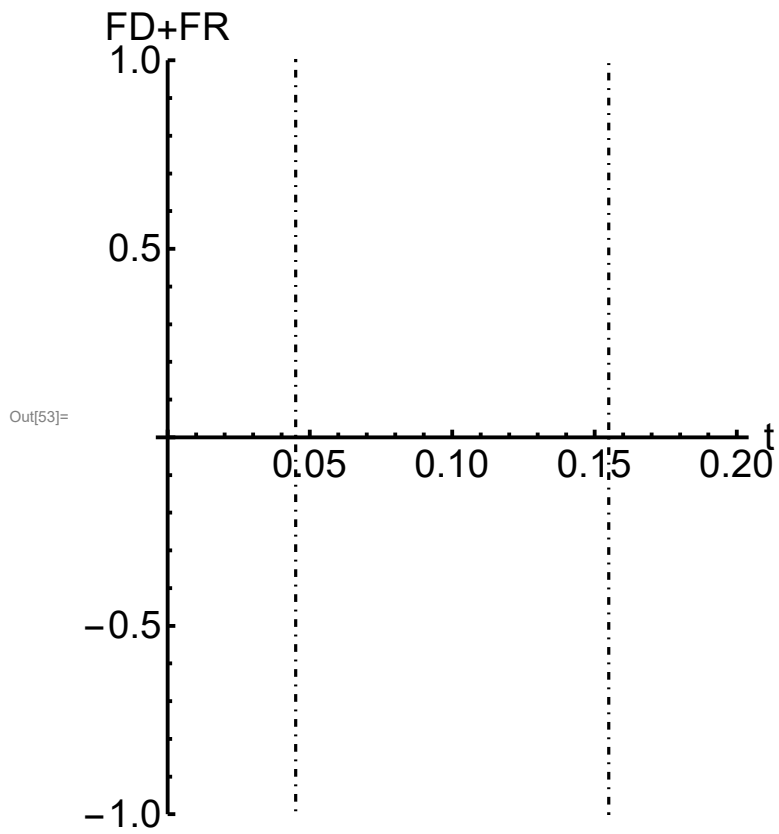
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
G2 = Plot[FR, {t, 0, 2 * a / vx}, AxesLabel -> {"t", "FR"},
PlotStyle -> {Black}, AspectRatio -> Full,
LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

Plot[(FD + FR), {t, 0, 2 * a / vx},
AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"t", "FD+FR"},
PlotStyle -> {Black, DotDashed}, AspectRatio -> Full,
LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
Plot[(FD + FR), {t, 0, 2 * a / vx}, AxesOrigin -> {0, 0},
AxesLabel -> {"t", "FD+FR"}, PlotRange -> {-1, 1},
PlotStyle -> {Black, DotDashed}, AspectRatio -> Full,
LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
tcr = FindRoot[FD + FR == 0, {t, 0}]

```







Out[54]= {t → 0.0450095 + 0. i}

```

In[1]:= ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, bo, go, wo, vx, n, L,
  EJ, m, b, wn, w1, w2, w3, wn1, wn2, wn3, On, O1, O2, O3, t, t,
  y, f11, f12, f13, f21, f22, f23, An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1,
  w2, w3, w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, w, p1]
a = 2.5;
f = 0.3;
xo = 55;
wo =  $\frac{f}{a^4} * (x - xo)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - xo)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - xo)^2$ ;
M = 200;
mo = 20;
g = 10;
ko = 2000;
co = 100;
bo =  $\frac{co}{2 * M}$ ;
go =  $\sqrt{ko / M}$ ;
wo =  $\sqrt{(go^2 - bo^2)}$ ;
vx = 7;

L = 100;
EJ = 1.4 * 1010;
m = 1000;
b = 0.06;

wn =  $n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;
w1 =  $1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;
w2 =  $2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;
w3 =  $3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;

wn1 =  $\sqrt{w1^2 - b^2}$ ;
wn2 =  $\sqrt{w2^2 - b^2}$ ;
wn3 =  $\sqrt{w3^2 - b^2}$ ;
On =  $N\left[\frac{n * \pi * vx}{L}\right]$ ;

```



$$\Omega 1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Omega 2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Omega 3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Phi 1 n = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

$$\Phi 1 1 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 1 2 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 1 3 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau];$$

$$\Phi 2 n = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \frac{\Omega n}{\omega n} * \text{Sin}[\omega n * \tau];$$

$$\Phi 2 1 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \frac{\Omega 1}{\omega 1} * \text{Sin}[\omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 2 2 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \frac{\Omega 2}{\omega 2} * \text{Sin}[\omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 2 3 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \frac{\Omega 3}{\omega 3} * \text{Sin}[\omega 3 * \tau];$$

$$Y n = \text{Sin} \left[ \frac{n * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 1 = \text{Sin} \left[ \frac{1 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 2 = \text{Sin} \left[ \frac{2 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 3 = \text{Sin} \left[ \frac{3 * \pi * x}{L} \right];$$

$$A n = \frac{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_{x_0}^{x_0 + 2 * a} (\omega_0 * Y n) \, dx \right] \right]}{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^L Y n^2 \, dx \right] \right]};$$

$$Z n = \text{Sin}[\Omega n * y];$$

$$X n = \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

n1

$$I11 = \frac{2}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2

$$I12 = \frac{2}{m * L * \omega n2} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3

$$I13 = \frac{2}{m * L * \omega n3} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

w1 = ComplexExpand[Re[I11 \* Y1 + I12 \* Y2 + I13 \* Y3]];

x = L / 2

Plot[w1, {t, 0, L / vx}, AxesLabel -> {"t", "w1"},  
PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,  
LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],  
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]

n1

$$A31 = - \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right]$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 - \omega n 1) * \tau + \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ I33 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 - \omega n 1) * \tau + \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G31 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G32 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ O31 &= \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33); \end{aligned}$$

`ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]`  
`n2`

$$\begin{aligned} A31 &= -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\ A32 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Cos}[\omega_0 * \tau]; \\ A33 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Sin}[\omega_0 * \tau]; \\ I31 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right]; \\ I32 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right]; \end{aligned}$$

$$I33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O32 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]  
n3

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O33 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

$$x = L / 2$$

$$w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3;$$

```
Plot[w3, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w3"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]
n1
```

$$A61 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A62 = c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A63 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \operatorname{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) \, d\tau \right]; \\ I63 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G61 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \operatorname{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G62 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \operatorname{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G63 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right]; \\ O61 &= \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63); \end{aligned}$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O62]  
n2

$$\begin{aligned} A61 &= -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\ A62 &= c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Cos}[\omega_0 * \tau]; \\ A63 &= -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Sin}[\omega_0 * \tau]; \\ I61 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \operatorname{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right]; \\ I62 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \operatorname{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right]; \\ I63 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right]; \\ G61 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G62 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G63 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ O62 &= \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63); \end{aligned}$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$\begin{aligned} A61 &= -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\ A62 &= c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau]; \\ A63 &= -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau]; \\ I61 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G61 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ I62 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G62 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

$$\operatorname{Plot}[w6, \{t, 0, L/vx\}, \operatorname{AxesLabel} \rightarrow \{ "t", "w6" \},$$

$$\operatorname{PlotStyle} \rightarrow \{ \text{Black}, \text{Thick} \}, \operatorname{AspectRatio} \rightarrow \text{Full},$$

$$\operatorname{LabelStyle} \rightarrow \operatorname{Directive}[\operatorname{FontSize} \rightarrow 20, \operatorname{FontFamily} \rightarrow \text{"Arial"}],$$

$$\operatorname{AxesStyle} \rightarrow \text{Thick}, \operatorname{ImageSize} \rightarrow \text{Medium}]$$
  

$$\operatorname{ClearAll}[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O1, S1]$$

$$n1$$

$$A11 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi11 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi12 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi13 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi21 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi21 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$



$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O1 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O2]

n2

$$A11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O2 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O3]

n3

$$A11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \Phi_{11} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \Phi_{12} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \Phi_{13} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \Phi_{21} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \Phi_{22} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \Phi_{23} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O3 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

$$x = L / 2$$

```
w11 = ComplexExpand[Re [O1 * Y1 + O2 * Y2 + O3 * Y3]] ;
Plot[w11, {t, 0, L / vx}, AxesLabel -> {"t", "w11"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

$$w = w1 + w3 + w6 + w11;$$

```
p1 = Plot[w, {t, 0, L / vx}, AxesLabel -> {"t", "w"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, beta, gamma, omega, vx, n, L,
  EJ, m, beta, omega, omega1, omega2, omega3, omega_n1, omega_n2, omega_n3, Omega_n, Omega1, Omega2, Omega3, t, tau,
```

y,  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{13}$ ,  $\Phi_{21}$ ,  $\Phi_{22}$ ,  $\Phi_{23}$ , An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1,  
w2, w3, w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, w, p2]

a = 2.5;

f = 0.3;

xo = 50;

$$w_0 = \frac{f}{a^4} * (x - x_0)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - x_0)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - x_0)^2;$$

M = 200;

mo = 20;

g = 10;

ko = 1000;

co = 100;

$$\beta_0 = \frac{c_0}{2 * M};$$

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0 / M};$$

$$\omega_0 = \sqrt{(\gamma_0^2 - \beta_0^2)};$$

vx = 7;

L = 100;

EJ = 1.4 \* 10<sup>10</sup>;

m = 1000;

$\beta = 0.06$ ;

$$\omega_n = n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_1 = 1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_2 = 2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_3 = 3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n3} = \sqrt{\omega_3^2 - \beta^2};$$

$$\Omega_n = N \left[ \frac{n * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega 2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Omega 3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Phi 1 n = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

$$\Phi 1 1 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 1 2 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 1 3 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau];$$

$$\Phi 2 n = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \frac{\Omega n}{\omega n} * \text{Sin}[\omega n * \tau];$$

$$\Phi 2 1 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \frac{\Omega 1}{\omega 1} * \text{Sin}[\omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 2 2 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \frac{\Omega 2}{\omega 2} * \text{Sin}[\omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 2 3 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \frac{\Omega 3}{\omega 3} * \text{Sin}[\omega 3 * \tau];$$

$$Y n = \text{Sin} \left[ \frac{n * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 1 = \text{Sin} \left[ \frac{1 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 2 = \text{Sin} \left[ \frac{2 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 3 = \text{Sin} \left[ \frac{3 * \pi * x}{L} \right];$$

$$A n = \frac{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_{x_0}^{x_0+2*a} (\omega_0 * Y n) dx \right] \right]}{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^L Y n^2 dx \right] \right]};$$

$$Z n = \text{Sin}[\Omega n * y];$$

$$X n = \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

n1

$$I11 = \frac{2}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2

$$I12 = \frac{2}{m * L * \omega n2} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3

$$I13 = \frac{2}{m * L * \omega n3} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

w1 = ComplexExpand[Re [I11 \* Y1 + I12 \* Y2 + I13 \* Y3] ] ;

x = L / 2

Plot[w1, {t, 0, L / vx}, AxesLabel -> {"t", "w1"},  
 PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,  
 LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],  
 AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]

n1

$$A31 = - \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$\begin{aligned}
I33 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos} [ (\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right]; \\
G31 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos} [ (\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right]; \\
G32 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos} [ (\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right]; \\
G33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos} [ (\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right]; \\
O31 &= \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);
\end{aligned}$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]  
n2

$$\begin{aligned}
A31 &= -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\
A32 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos} [\omega_0 * \tau]; \\
A33 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin} [\omega_0 * \tau]; \\
I31 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos} [ (\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right]; \\
I32 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\
&\quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos} [ (\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right]; \\
I33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right]; \\ G31 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G32 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ G33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ O32 &= \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33); \end{aligned}$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]  
n3

$$\begin{aligned} A31 &= -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\ A32 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau]; \\ A33 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau]; \\ I31 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ I32 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \\ I33 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \quad \left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right]; \end{aligned}$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O33 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

$$x = L / 2$$

$$w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3;$$

```
Plot[w3, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w3"},
  PlotRange -> {-0.00025, 0.00025},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]
n1
```

$$A61 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A62 = c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A63 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$



$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O61 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]  
n2

$$A61 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A62 = c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A63 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O62 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$A61 = -c0 * \gamma 0^2 * \frac{\beta 0}{\omega 0^2 + \beta 0^2} * An * Xn;$$

$$A62 = c0 * \gamma 0^2 * \frac{\beta 0}{\omega 0^2 + \beta 0^2} * An * Xn * e^{-\beta 0 * \tau} * \text{Cos}[\omega 0 * \tau];$$

$$A63 = -c0 * \gamma 0^2 * \frac{\omega 0}{\omega 0^2 + \beta 0^2} * An * Xn * e^{-\beta 0 * \tau} * \text{Sin}[\omega 0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

```
Plot[w6, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w6"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O1, S2]
```

```
n1
```

$$A11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi11 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi12 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi13 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi21 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi22 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O1 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O2]  
n2

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O2 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O3]  
n3

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O3 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

$$x = L / 2$$

$$w11 = \text{ComplexExpand}[\text{Re}[O1 * Y1 + O2 * Y2 + O3 * Y3]];$$

```
Plot[w11, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w11"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

$$w = w1 + w3 + w6 + w11;$$

```
p2 = Plot[w, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w"},
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.005, 0.01}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, \beta o, \gamma o, \omega o, vx, n, L,
  EJ, m, \beta, \omega n, \omega 1, \omega 2, \omega 3, \omega n1, \omega n2, \omega n3, \Omega n, \Omega 1, \Omega 2, \Omega 3, t, \tau,
  y, \Phi 11, \Phi 12, \Phi 13, \Phi 21, \Phi 22, \Phi 23, An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1,
  w2, w3, w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, w, p3]
```

$$a = 2.5;$$

$$f = 0.3;$$

$$x_0 = 50;$$

$$w_0 = \frac{f}{a^4} * (x - x_0)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - x_0)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - x_0)^2;$$

$$M = 200;$$

$$m_0 = 20;$$

$$g = 10;$$

$$k_0 = 500;$$

$$c_0 = 100;$$

$$\beta_0 = \frac{c_0}{2 * M};$$

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0 / M};$$

$$\omega_0 = \sqrt{(\gamma_0^2 - \beta_0^2)};$$

$$v_x = 7;$$

$$L = 100;$$

$$EJ = 1.4 * 10^{10};$$

$$m = 1000;$$

$$\beta = 0.06;$$

$$\omega_n = n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_1 = 1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_2 = 2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_3 = 3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n3} = \sqrt{\omega_3^2 - \beta^2};$$

$$\Omega_n = N \left[ \frac{n * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega 3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v x}{L} \right];$$

$$\Phi 1 n = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

$$\Phi 1 1 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 1 2 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 1 3 = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau];$$

$$\Phi 2 n = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega n^2 - \Omega n^2)} * \frac{\Omega n}{\omega n} * \text{Sin}[\omega n * \tau];$$

$$\Phi 2 1 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 1^2 - \Omega 1^2)} * \frac{\Omega 1}{\omega 1} * \text{Sin}[\omega 1 * \tau];$$

$$\Phi 2 2 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 2^2 - \Omega 2^2)} * \frac{\Omega 2}{\omega 2} * \text{Sin}[\omega 2 * \tau];$$

$$\Phi 2 3 = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega 3^2 - \Omega 3^2)} * \frac{\Omega 3}{\omega 3} * \text{Sin}[\omega 3 * \tau];$$

$$Y n = \text{Sin} \left[ \frac{n * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 1 = \text{Sin} \left[ \frac{1 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 2 = \text{Sin} \left[ \frac{2 * \pi * x}{L} \right];$$

$$Y 3 = \text{Sin} \left[ \frac{3 * \pi * x}{L} \right];$$

$$A n = \frac{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_{x_0}^{x_0 + 2 * a} (\omega_0 * Y n) dx \right] \right]}{\text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^L Y n^2 dx \right] \right]};$$

$$Z n = \text{Sin}[\Omega n * y];$$

$$X n = \text{Sin}[\Omega n * \tau];$$

n1

$$I 1 1 = \frac{2}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n1} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2

$$I12 = \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n2} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3

$$I13 = \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

w1 = ComplexExpand[Re[I11 \* Y1 + I12 \* Y2 + I13 \* Y3]];

x = L / 2

Plot[w1, {t, 0, L / vx}, AxesLabel -> {"t", "w1"},  
 PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,  
 LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],  
 AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]

n1

$$A31 = - \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \right]$$



$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 - \omega n 1) * \tau + \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G31 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G32 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ G33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right]; \\ O31 &= \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33); \end{aligned}$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]  
n2

$$\begin{aligned} A31 &= -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n; \\ A32 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Cos}[\omega_0 * \tau]; \\ A33 &= \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Sin}[\omega_0 * \tau]; \\ I31 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right]; \\ I32 &= 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right]; \\ I33 &= -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right. \\ & \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 + \omega n 2) * \tau - \omega n 2 * t]) \, d\tau \right]; \end{aligned}$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O32 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]  
n3

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O33 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

$$x = L / 2$$

$$w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3;$$

```
Plot[w3, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w3"},
  PlotRange -> {-0.00025, 0.00025},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]
n1
```

$$A61 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A62 = c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A63 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O61 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]  
n2

$$A61 = -c0 * \gamma0^2 * \frac{\beta0}{\omega0^2 + \beta0^2} * An * Xn;$$

$$A62 = c0 * \gamma0^2 * \frac{\beta0}{\omega0^2 + \beta0^2} * An * Xn * e^{-\beta0*\tau} * \text{Cos}[\omega0 * \tau];$$

$$A63 = -c0 * \gamma0^2 * \frac{\omega0}{\omega0^2 + \beta0^2} * An * Xn * e^{-\beta0*\tau} * \text{Sin}[\omega0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O62 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$A61 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A62 = c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A63 = -c_0 * \gamma_0^2 * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

```
Plot[w6, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w6"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O1, S2]
```

```
n1
```

$$A11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi11 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi12 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi13 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi21 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi22 * \text{Sin}[\Omega1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O1 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O2]  
n2

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O2 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O3]  
n3

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O3 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

$$x = L / 2$$

$$w11 = \text{ComplexExpand}[\text{Re}[O1 * Y1 + O2 * Y2 + O3 * Y3]];$$

```
Plot[w11, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w11"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

$$w = w1 + w3 + w6 + w11;$$

```
p3 = Plot[w, {t, 0, L/vx}, AxesLabel -> {"t", "w"},
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.02, 0.02]}, Thickness[0.003]},
  AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 20, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
Show[p1, p2, p3, AxesLabel -> {"t", "w"}]
```

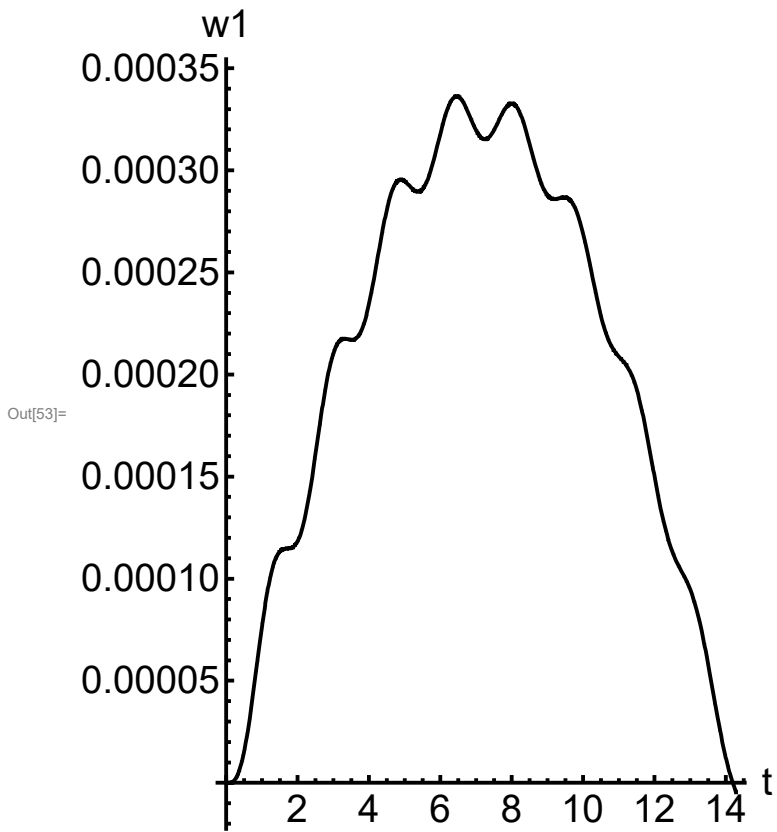
Out[45]= n1

Out[47]= n2

Out[49]= n3



Out[52]= 50

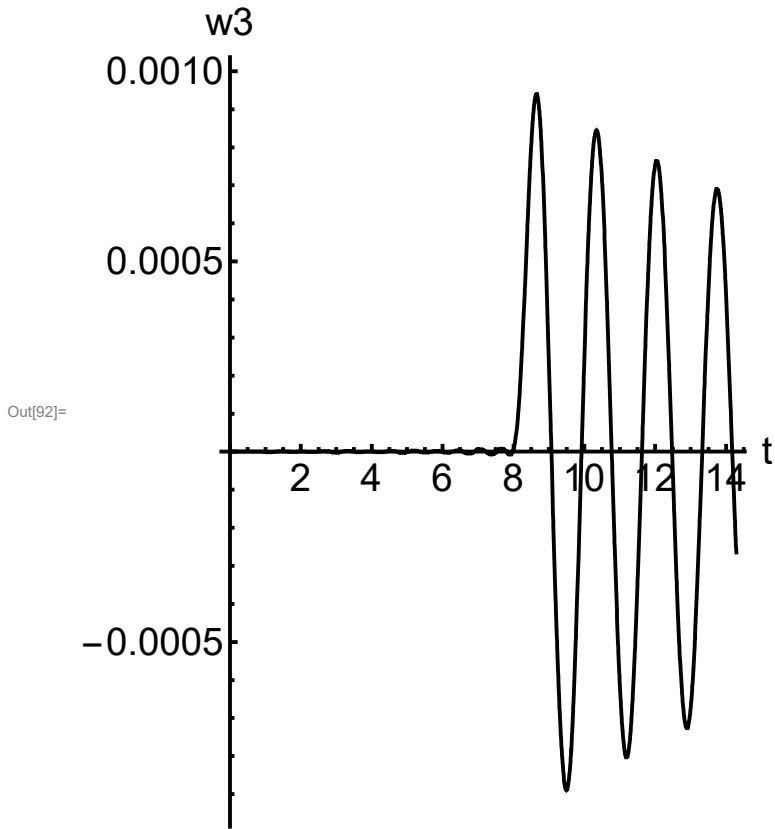


Out[55]= n1

Out[67]= n2

Out[79]= n3

Out[90]= 50

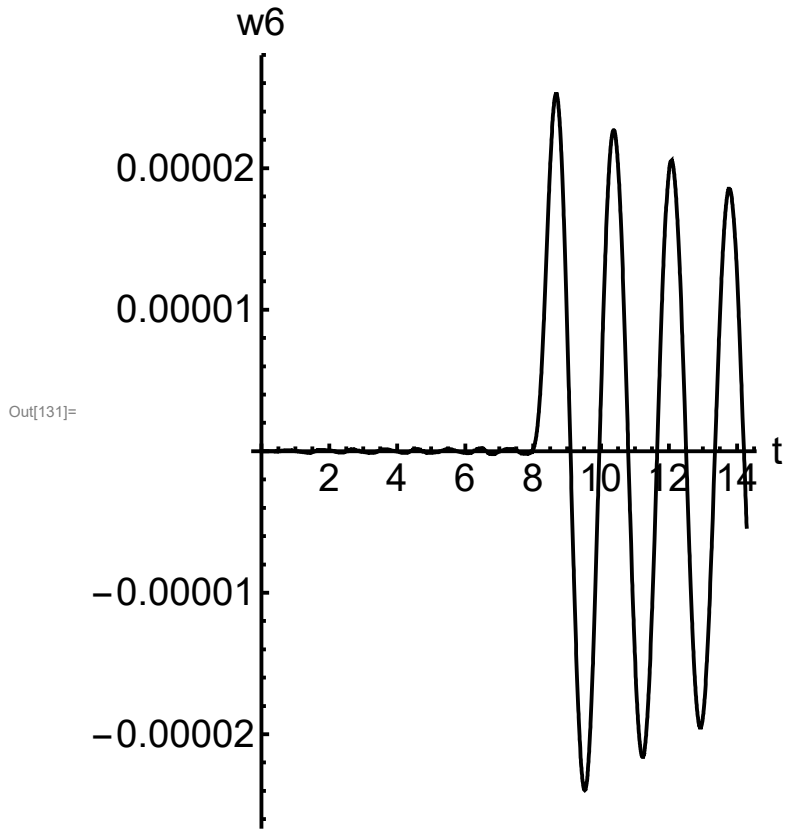


Out[94]= n1

Out[106]= n2

Out[118]= n3

Out[129]= 50

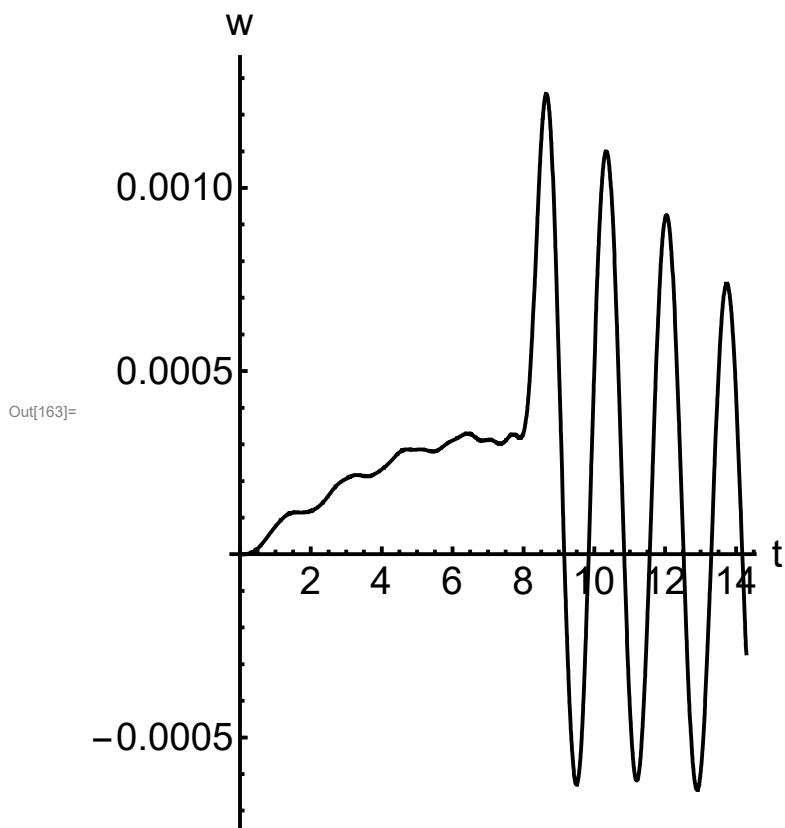
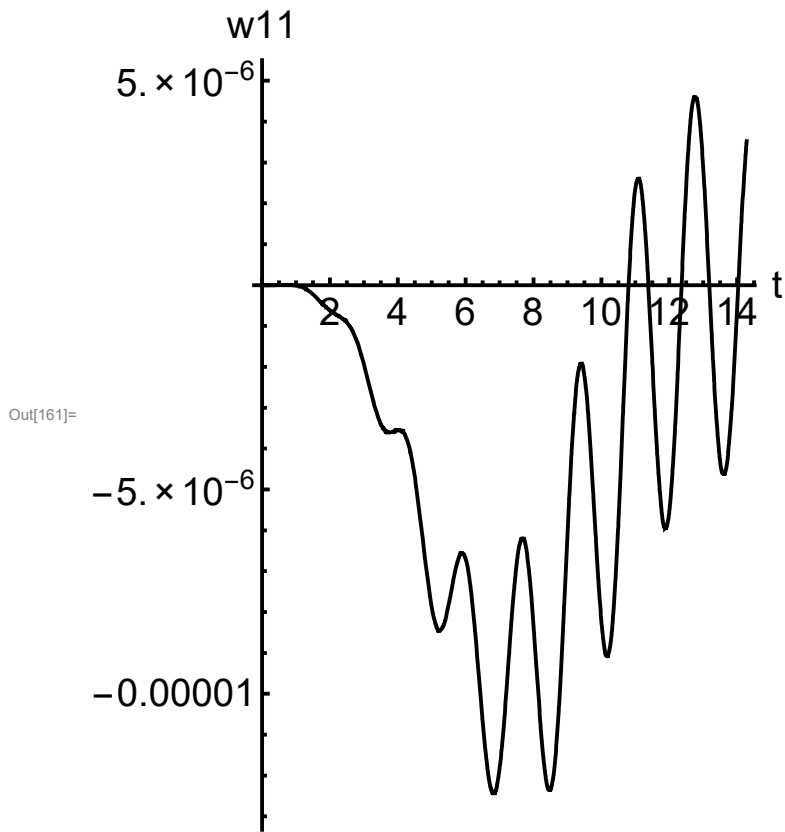


Out[133]= n1

Out[142]= n2

Out[151]= n3

Out[159]= 50

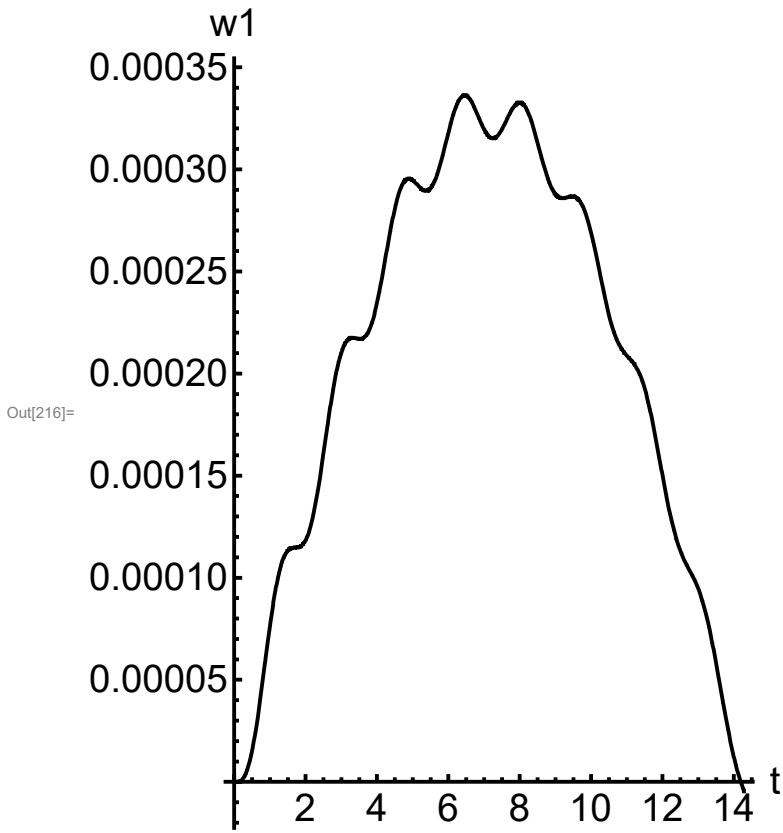


Out[208]= n1

Out[210]= n2

Out[212]= n3

Out[215]= 50

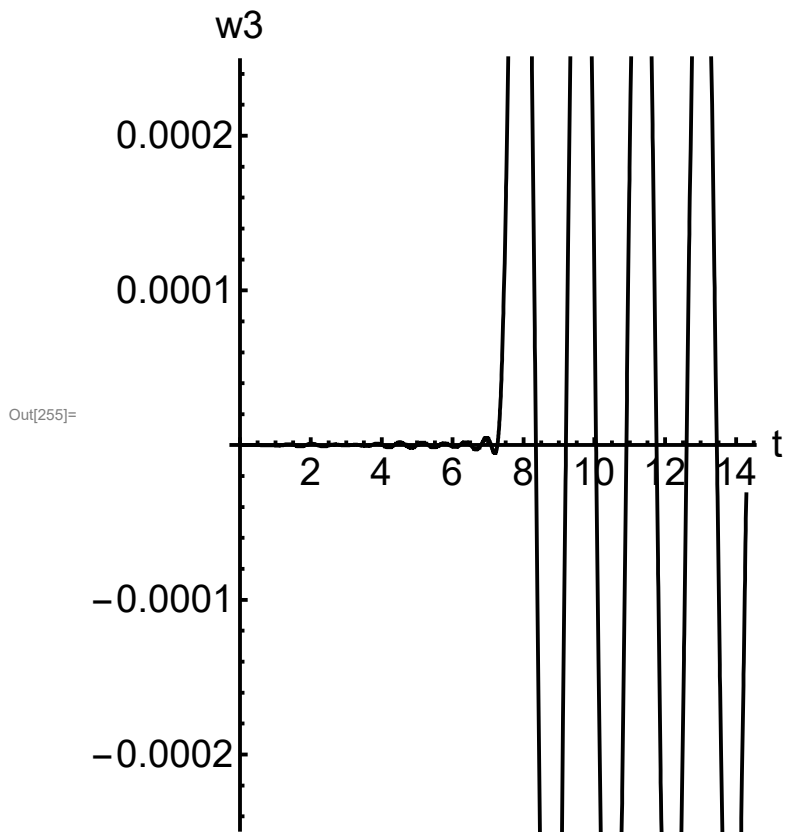


Out[218]= n1

Out[230]= n2

Out[242]= n3

Out[253]= 50

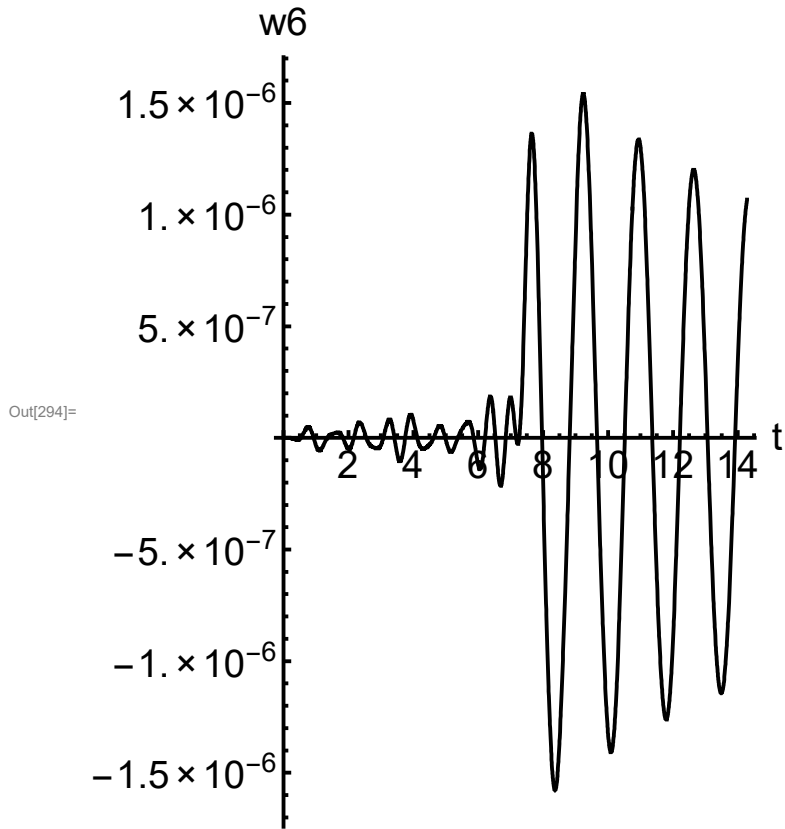


Out[257]= n1

Out[269]= n2

Out[281]= n3

Out[292]= 50

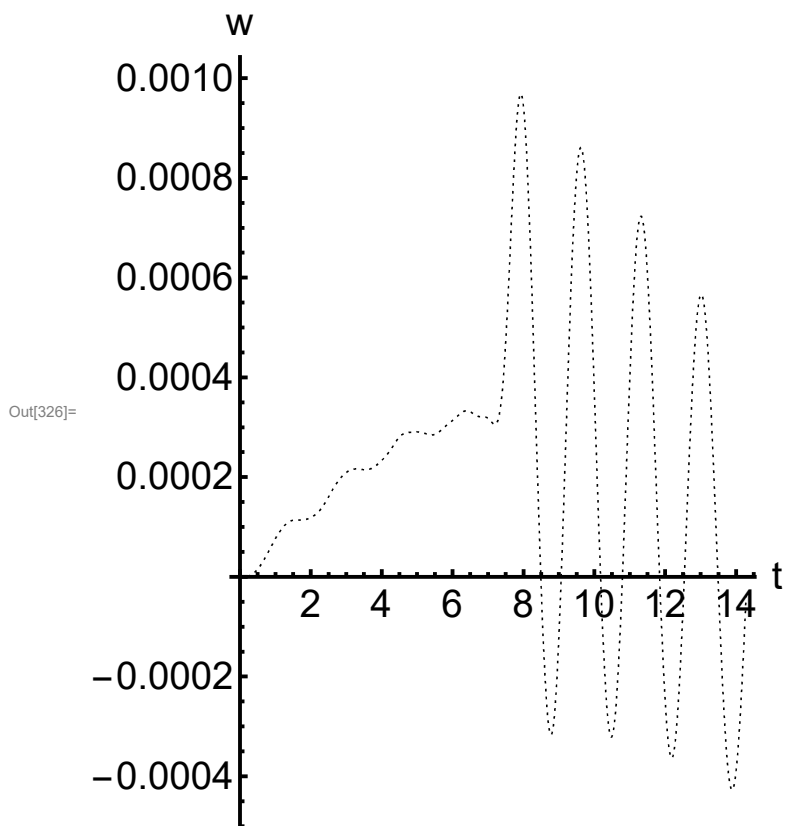
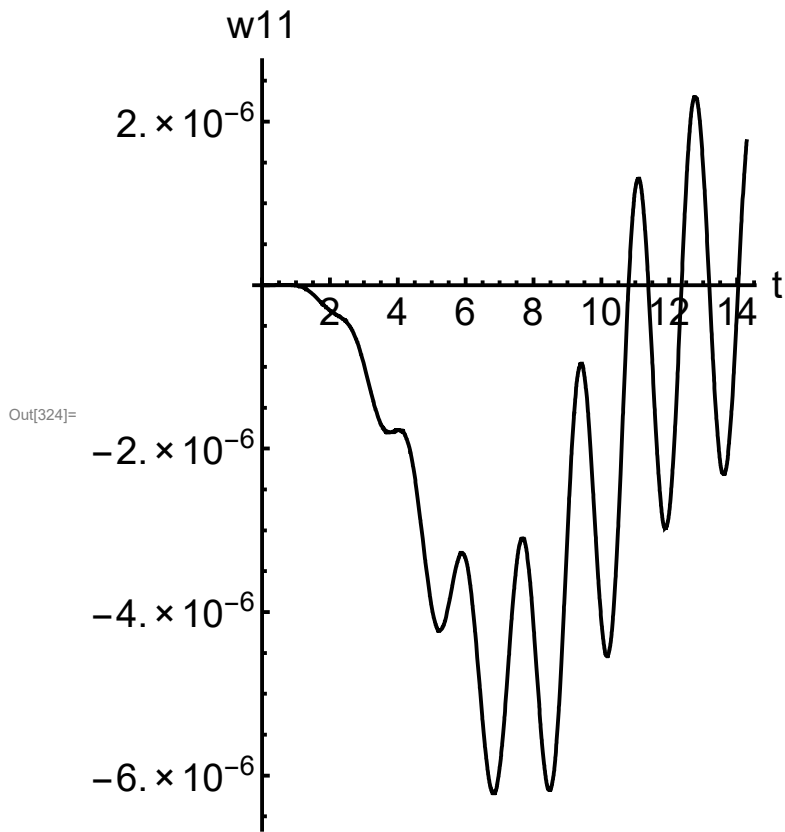


Out[296]= n1

Out[305]= n2

Out[314]= n3

Out[322]= 50



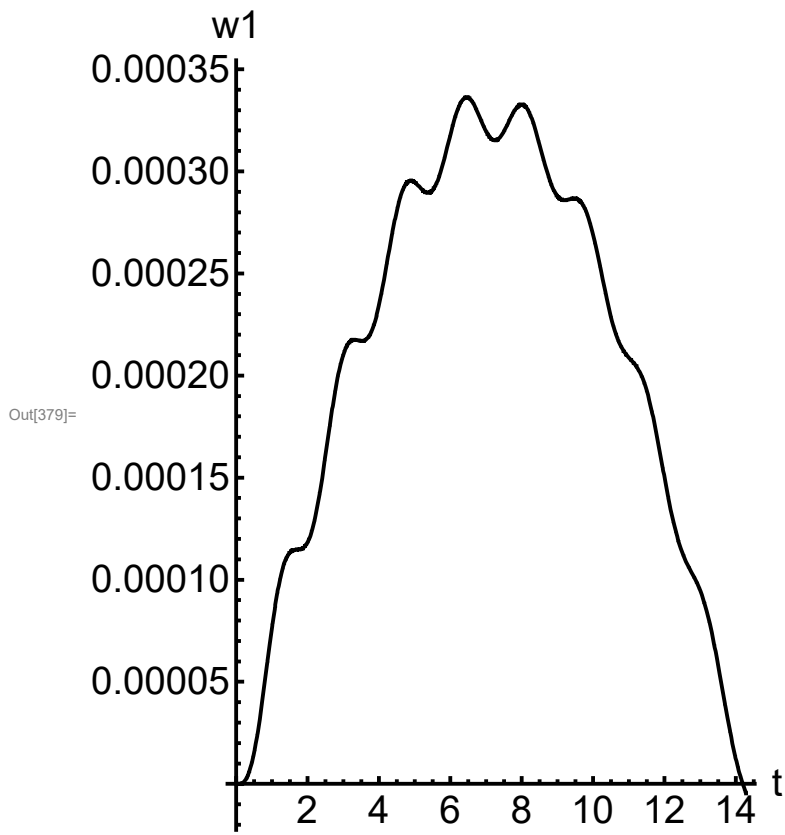
Out[371]= n1

Out[373]= n2



Out[375]= n3

Out[378]= 50

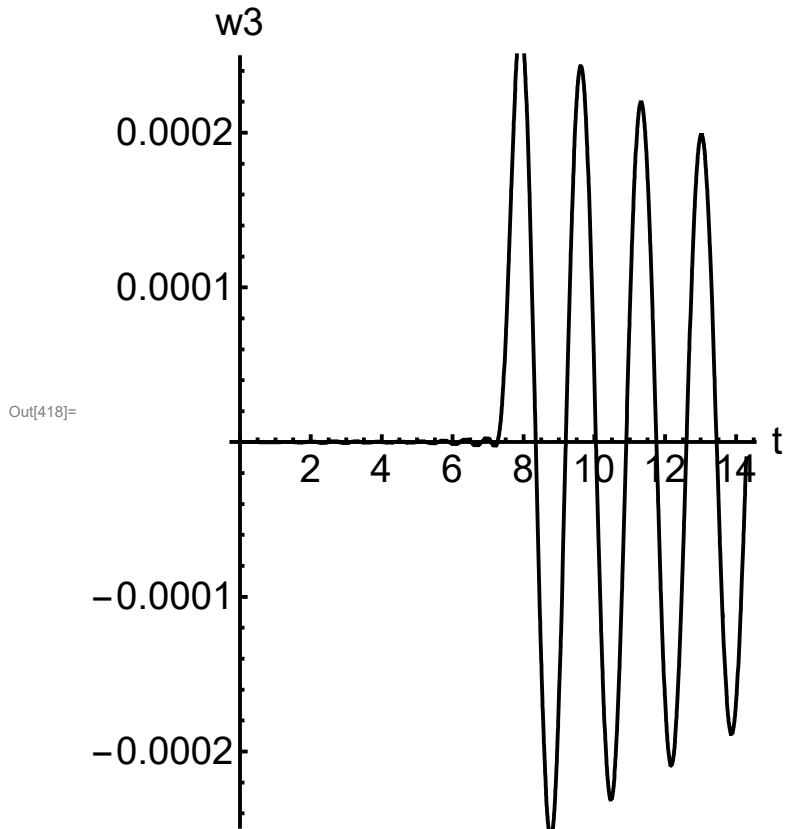


Out[381]= n1

Out[393]= n2

Out[405]= n3

Out[416]= 50

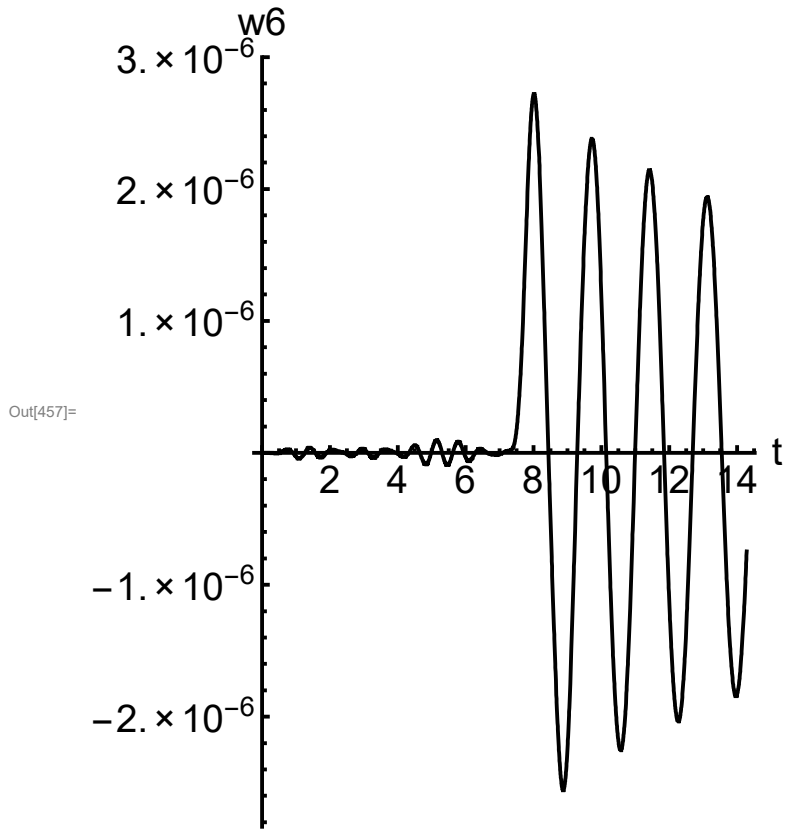


Out[420]= n1

Out[432]= n2

Out[444]= n3

Out[455]= 50

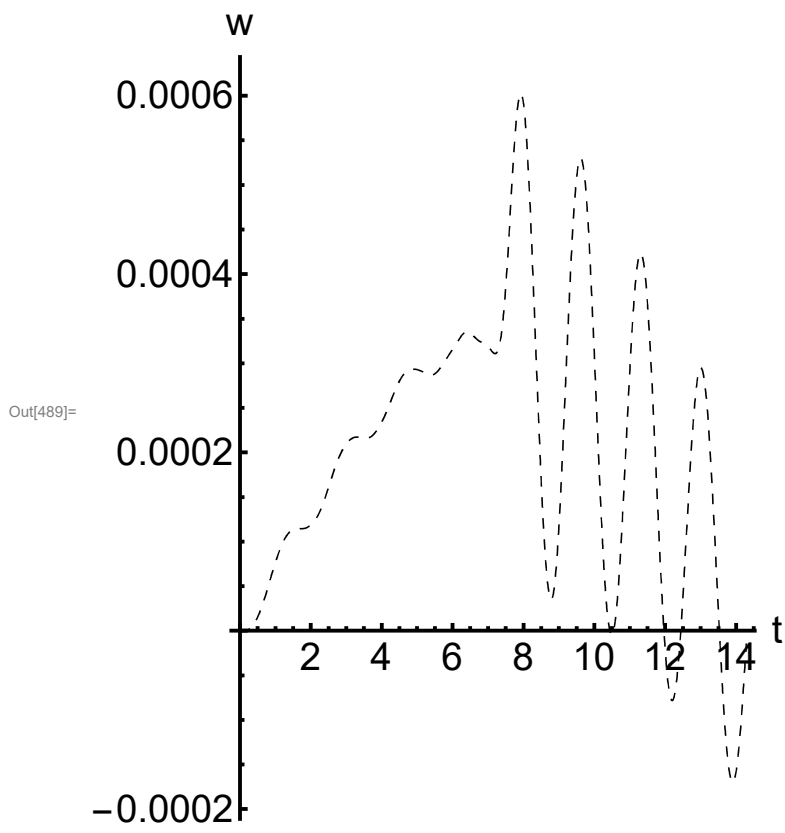
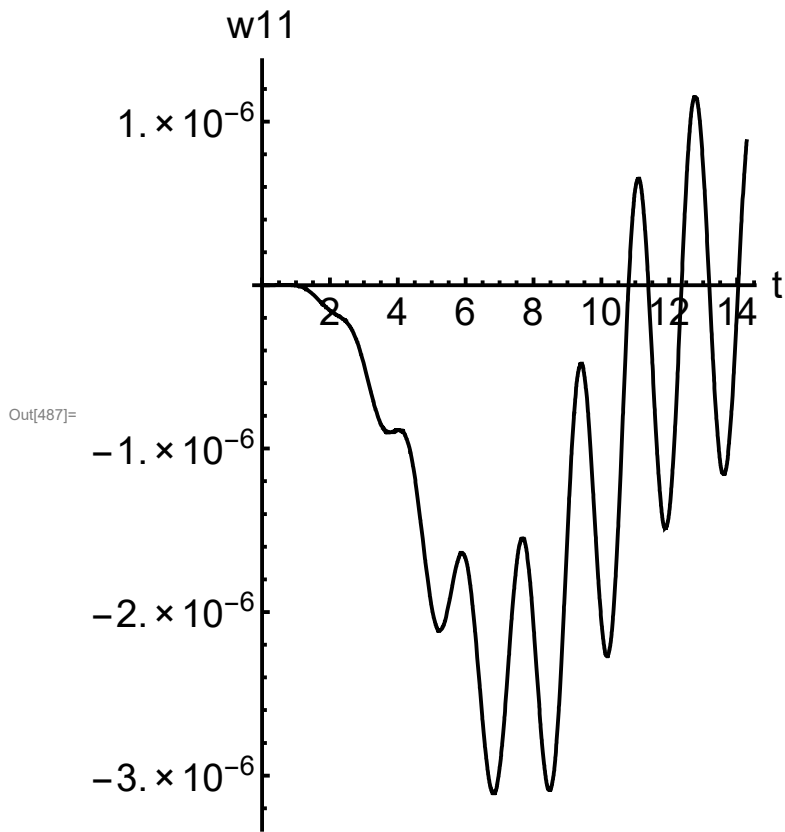


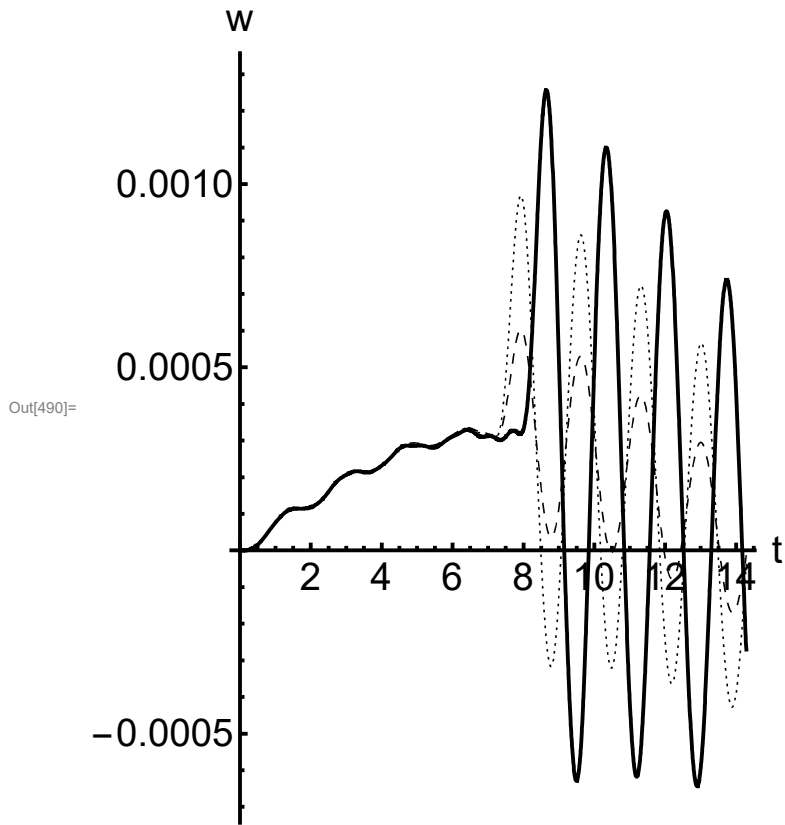
Out[459]= n1

Out[468]= n2

Out[477]= n3

Out[485]= 50





```
ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, beta, gamma, omega, vx, n, L, EJ,
  m, beta, omega, omega1, omega2, omega3, omega_n1, omega_n2, omega_n3, Omega, Omega1, Omega2, Omega3, t, tau, y, phi11,
  phi12, phi13, phi21, phi22, phi23, An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1, w2, w3,
  w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, W1, xc, xd, p1]
```

```
a = 2.5;
```

```
f = 0.1;
```

```
xo = 50;
```

```
xc = xo + 1.12524;
```

```
xd = xo + 24.9799;
```

$$wo = \frac{f}{a^4} * (x - xo)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - xo)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - xo)^2;$$

```
M = 200;
```

```
mo = 20;
```

```
g = 10;
```

```
ko = 2000;
```

```
co = 100;
```

$$\beta_0 = \frac{co}{2 * M};$$

$$\gamma_0 = \sqrt{ko / M};$$

$$\omega_0 = \sqrt{(\gamma_0^2 - \beta_0^2)};$$

```
vx = 25;
```

```
L = 100;
```

```
EJ = 1.4 * 1010;
```

```
m = 1000;
```

```
beta = 0.06;
```

$$\omega_n = n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_1 = 1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_2 = 2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_3 = 3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2} ;$$

$$\omega_{n3} = \sqrt{\omega_3^2 - \beta^2} ;$$

$$\Omega_n = N \left[ \frac{n * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Phi_{1n} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \text{Sin}[\Omega_n * \tau] ;$$

$$\Phi_{11} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] ;$$

$$\Phi_{12} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] ;$$

$$\Phi_{13} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] ;$$

$$\Phi_{2n} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \frac{\Omega_n}{\omega_n} * \text{Sin}[\omega_n * \tau] ;$$

$$\Phi_{21} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \frac{\Omega_1}{\omega_1} * \text{Sin}[\omega_1 * \tau] ;$$

$$\Phi_{22} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \frac{\Omega_2}{\omega_2} * \text{Sin}[\omega_2 * \tau] ;$$

$$\Phi_{23} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \frac{\Omega_3}{\omega_3} * \text{Sin}[\omega_3 * \tau] ;$$

$$Y_n = \text{Sin} \left[ \frac{n * \pi * x}{L} \right] ;$$

$$Y_1 = \text{Sin} \left[ \frac{1 * \pi * x}{L} \right] ;$$

$$Y2 = \text{Sin}\left[\frac{2 * \pi * x}{L}\right];$$

$$Y3 = \text{Sin}\left[\frac{3 * \pi * x}{L}\right];$$

$$A_n = \frac{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_{x_0}^{x_0+2*a} (\omega_0 * Y_n) dx\right]\right]}{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_0^L Y_n^2 dx\right]\right]};$$

$$Z_n = \text{Sin}[\Omega_n * y];$$

$$X_n = \text{Sin}[\Omega_n * \tau];$$

ClearAll[I11, I12, I13]

n1

I11 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n1} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2

I12 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n2} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3

I13 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$w1 = \text{ComplexExpand}[\text{Re}[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];$$

$$x = L / 2$$

Print["Plot1"]

Plot1 = Plot[w1, {t, 0, xc / vx},

  AxesLabel -> {"t", "w1"}, PlotRange -> Automatic,

  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,

  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],

  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]

n1

$$A_{31} = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$



$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O31 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]  
n2

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_2 - \omega_{n2}) * \tau + \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_2 - \omega_{n2}) * \tau + \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O32 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

`ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]`

n3

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_3 - \omega_{n3}) * \tau + \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_3 - \omega_{n3}) * \tau + \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_3 - \omega_{n3}) * \tau + \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_3 + \omega_{n3}) * \tau - \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_3 + \omega_{n3}) * \tau - \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_3 + \omega_{n3}) * \tau - \omega_{n3} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O33 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

$$x = L / 2$$

$$w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3;$$

```

Print["Plot2"]
Plot2 = Plot[w3, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w3"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]
n1

```

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * Cos[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * Sin[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * Cos[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * Cos[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * Cos[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * Cos[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * Cos[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * ComplexExpand \left[ \operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * Cos[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O61 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O62]  
n2

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O62 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

Print["Plot3"]

```
Plot3 = Plot[w6, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w6"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O111, S1]

n1

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi11 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi12 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi13 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi21 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi22 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi23 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O111 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O112]

n2

$$A11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O112 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O113]

n3

$$A11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$



$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O113 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

$$x = L / 2$$

$$w11 = \text{ComplexExpand}[\text{Re}[O111 * Y1 + O112 * Y2 + O113 * Y3]];$$

Print["Plot4"]

$$\text{Plot4} = \text{Plot}[w11, \{t, 0, x_c / v_x\},$$

    AxesLabel → {"t", "w11"}, PlotRange → Automatic,

    PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,

    LabelStyle → Directive[FontSize → 20, FontFamily -> "Arial"],

    AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

$$W1 = w1 + w3 + w6 + w11;$$

Print["p1"]

$$p1 = \text{Plot}[W1, \{t, 0, x_c / v_x\},$$

    AxesLabel → {"t", "w"}, PlotRange → Automatic,

    PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,

```

LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

ClearAll[A1, A2, A3, B1, B2, B3, T1, T2, T3, TP1, TP2, TP3, W2, p2]
T1 = I11 + O31 + O61 + O111;
T2 = I12 + O32 + O62 + O112;
T3 = I13 + O33 + O63 + O113;
TP1 = D[T1, t];
TP2 = D[T2, t];
TP3 = D[T3, t];
t =  $\frac{xc}{vx}$ ;
B1 = T1;
B2 = T2;
B3 = T3;
A1 =  $\frac{TP1 + \beta * B1}{\omega n1}$ ;
A2 =  $\frac{TP2 + \beta * B2}{\omega n2}$ ;
A3 =  $\frac{TP3 + \beta * B3}{\omega n3}$ ;
x = L / 2
ClearAll[t]
W2 =  $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A1 * \text{Sin}\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B1 * \text{Cos}\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y1 +
 $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A2 * \text{Sin}\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B2 * \text{Cos}\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y2 +
 $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A3 * \text{Sin}\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B3 * \text{Cos}\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y3;
Print["p2"]
p2 = Plot[W2, {t, xc / vx, xd / vx},
  AxesLabel → {"t", "w"}, PlotRange → Automatic,
  PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,
  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

ClearAll[wwo, x, Two]
wwo = D[wo, x];

```

$x = xc;$

$Two = wwo;$

$ClearAll[x, t, WW2, \theta c, voc, TAN\theta d, \theta d, vo, V, \Phi, \epsilon, Pimp]$

$WW2 = ComplexExpand[Re[D[WW2, t]]];$

$\theta c = ArcTan[Two];$

$voc = vx * Cos[\theta c];$

$TAN\theta d = Two - \frac{2 * g * (xd - xc)}{2 * voc^2 * Cos[\theta c]^2};$

$\theta d = ArcTan[TAN\theta d];$

$vo = vx * Cos[\theta d];$

$t = xd / vx;$

$x = xd;$

$\epsilon = 0.95;$

$V = \sqrt{vo^2 + WW2^2 + 2 * vo * WW2 * Sin[\theta d]};$

$\Phi = ArcSin\left[\frac{vo}{V} * Cos[\theta d]\right];$

$Pimp = (1 + \epsilon) * V * mo * Cos[\Phi]$

$ClearAll[I11, I12, I13, W3, t, p3, r1]$

n1

$$I11 = \frac{2}{m * L * \omega n1} * \int_{xd/vx}^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + mo) * Sin[\Omega 1 * \tau] * Sin[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega n1} * Pimp * e^{-\beta * (t-xd/vx)} * Sin\left[\Omega 1 * \frac{xd}{vx}\right] * Sin\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xd}{vx}\right)\right];$$

n2

$$I12 = \frac{2}{m * L * \omega n2} * \int_{xd/vx}^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + mo) * Sin[\Omega 2 * \tau] * Sin[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega n2} * Pimp * e^{-\beta * (t-xd/vx)} * Sin\left[\Omega 2 * \frac{xd}{vx}\right] * Sin\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xd}{vx}\right)\right];$$

n3

$$I13 = \frac{2}{m * L * \omega n3} * \int_{x_d/v_x}^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_o) * \sin[\Omega 3 * \tau] * \sin[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega n3} * Pimp * e^{-\beta * (t-x_d/v_x)} * \sin\left[\Omega 3 * \frac{x_d}{v_x}\right] * \sin\left[\omega n3 * \left(t - \frac{x_d}{v_x}\right)\right];$$

```
W3 = W2 + ComplexExpand[Re[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];
```

```
x = L / 2
```

```
Print["p3"]
```

```
p3 = Plot[W3, {t, x_d/v_x, L/v_x},
```

```
  AxesLabel -> {"t", "w3"}, PlotRange -> Automatic,
```

```
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
```

```
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
```

```
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
Show[p1, p2, PlotRange -> All]
```

```
r1 = Show[p1, p2, p3, PlotRange -> All]
```

```
ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, beta, gamma_o, omega_o, vx, n, L, EJ,
  m, beta, omega_n, omega_1, omega_2, omega_3, omega_n1, omega_n2, omega_n3, Omega_n, Omega_1, Omega_2, Omega_3, t, tau, y, phi_11,
  phi_12, phi_13, phi_21, phi_22, phi_23, An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1, w2, w3,
  w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, W1, xc, xd, p1]
```

```
a = 2.5;
```

```
f = 0.1;
```

```
xo = 50;
```

```
xc = xo + 1.12524;
```

```
xd = xo + 24.9799;
```

$$wo = \frac{f}{a^4} * (x - xo)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - xo)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - xo)^2;$$

```
M = 200;
```

```
mo = 20;
```

```
g = 10;
```

```
ko = 1000;
```

```
co = 100;
```

$$\beta_o = \frac{co}{2 * M};$$

$$\gamma_o = \sqrt{ko / M};$$

$$\omega_o = \sqrt{(\gamma_o^2 - \beta_o^2)};$$

$$v_x = 25;$$

$$L = 100;$$

$$EJ = 1.4 * 10^{10};$$

$$m = 1000;$$

$$\beta = 0.06;$$

$$\omega_n = n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_1 = 1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_2 = 2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_3 = 3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}};$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2};$$

$$\omega_{n3} = \sqrt{\omega_3^2 - \beta^2};$$

$$\Omega_n = N \left[ \frac{n * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Omega_3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v_x}{L} \right];$$

$$\Phi_{1n} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \text{Sin}[\Omega_n * \tau];$$

$$\Phi_{11} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau];$$

$$\Phi_{12} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau];$$

$$\Phi_{13} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau];$$

$$\Phi_{2n} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \frac{\Omega_n}{\omega_n} * \text{Sin}[\omega_n * \tau];$$

$$\Phi_{21} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \frac{\Omega_1}{\omega_1} * \text{Sin}[\omega_1 * \tau];$$

$$\Phi_{22} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \frac{\Omega_2}{\omega_2} * \text{Sin}[\omega_2 * \tau];$$

$$\Phi_{23} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \frac{\Omega_3}{\omega_3} * \text{Sin}[\omega_3 * \tau];$$

$$Y_n = \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * x}{L}\right];$$

$$Y_1 = \text{Sin}\left[\frac{1 * \pi * x}{L}\right];$$

$$Y_2 = \text{Sin}\left[\frac{2 * \pi * x}{L}\right];$$

$$Y_3 = \text{Sin}\left[\frac{3 * \pi * x}{L}\right];$$

$$A_n = \frac{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_{x_0}^{x_0+2*a} (\omega_0 * Y_n) dx\right]\right]}{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_0^L Y_n^2 dx\right]\right]};$$

$$Z_n = \text{Sin}[\Omega_n * y];$$

$$X_n = \text{Sin}[\Omega_n * \tau];$$

ClearAll[I11, I12, I13]

n1

I11 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n1} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2

I12 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n2} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3

```

I13 =
  
$$\frac{2}{m * L * \omega n3} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

w1 = ComplexExpand[Re[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];
x = L / 2
Print["Plot5"]
Plot5 = Plot[w1, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w1"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

```

```

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]
n1

```

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right]$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 1} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O31 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]  
n2

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \operatorname{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 - \omega n 2) * \tau + \omega n 2 * t]) \, d\tau \right];$$

$$I33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \operatorname{Cos}[(\Omega 2 + \omega n 2) * \tau - \omega n 2 * t]) \, d\tau \right];$$



$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O32 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]  
n3

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O33 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

$x = L / 2$   
 $w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3;$   
Print["Plot6"]  
Plot6 = Plot[w3, {t, 0, xc / vx},  
AxesLabel -> {"t", "w3"}, PlotRange -> Automatic,  
PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,  
LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],  
AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]  
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]  
n1  
 $A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$   
 $A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$   
 $A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$   
 $I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O61 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O62]  
n2

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n2) * \tau - \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O62 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

Print["Plot7"]

Plot7 = Plot[w6, {t, 0, xc / vx},

  AxesLabel → {"t", "w6"}, PlotRange → Automatic,

  PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,

  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],

  AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O111, S1]

n1

$$A11 = - \frac{2 * k_o}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_0^t (e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O111 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O112]

n2

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O112 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O113]

n3

$$A11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * ko}{m * L * \omega n1} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * \sin[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \sin[\Omega 3 * \tau] * \sin[\omega n3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O113 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

$$x = L / 2$$

$$w11 = \text{ComplexExpand}[\text{Re}[O111 * Y1 + O112 * Y2 + O113 * Y3]];$$

Print["Plot8"]

```
Plot8 = Plot[w11, {t, 0, xc / vx}, AxesLabel -> {"t", "w11"},
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

$$W1 = w1 + w3 + w6 + w11;$$

Print["p1"]

```
p1 = Plot[W1, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.005, 0.01}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[A1, A2, A3, B1, B2, B3, T1, T2, T3, TP1, TP2, TP3, W2, p2]
```

$$T1 = I11 + O31 + O61 + O111;$$

$$T2 = I12 + O32 + O62 + O112;$$

$$T3 = I13 + O33 + O63 + O113;$$

$$TP1 = D[T1, t];$$

$$TP2 = D[T2, t];$$

$$TP3 = D[T3, t];$$

$$t = \frac{xc}{vx}$$

$$B1 = T1;$$

$$B2 = T2;$$

$$B3 = T3;$$

$$A1 = \frac{TP1 + \beta * B1}{\omega n1};$$

$$A2 = \frac{TP2 + \beta * B2}{\omega n2};$$



```

A3 = 
$$\frac{TP3 + \beta * B3}{\omega n3};$$

x = L / 2
ClearAll[t]
W2 = 
$$e^{-\beta*(t-xc/vx)} * \left( A1 * \sin\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B1 * \cos\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right) * Y1 +$$


$$e^{-\beta*(t-xc/vx)} * \left( A2 * \sin\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B2 * \cos\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right) * Y2 +$$


$$e^{-\beta*(t-xc/vx)} * \left( A3 * \sin\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B3 * \cos\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right) * Y3;$$

Print["p2"]
p2 = Plot[W2, {t, xc / vx, xd / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.005, 0.01}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[wwo, x, Two]
wwo = D[wo, x];
x = xc;
Two = wwo;

ClearAll[x, t, WW2,  $\theta c$ , voc, TAN $\theta d$ ,  $\theta d$ , vo, V,  $\Phi$ ,  $\epsilon$ , Pimp]
WW2 = ComplexExpand[Re[D[W2, t]]];
 $\theta c$  = ArcTan[Two];
voc = vx * Cos[ $\theta c$ ];
TAN $\theta d$  = 
$$Two - \frac{2 * g * (xd - xc)}{2 * voc^2 * Cos[\theta c]^2};$$

 $\theta d$  = ArcTan[TAN $\theta d$ ];
vo = vx * Cos[ $\theta d$ ];
t = xd / vx;
x = xd;
 $\epsilon$  = 0.95;

V = 
$$\sqrt{vo^2 + WW2^2 + 2 * vo * WW2 * Sin[\theta d]};$$


```

$$\Phi = \text{ArcSin}\left[\frac{v_0}{V} * \text{Cos}[\theta_d]\right];$$

$$P_{\text{imp}} = (1 + \epsilon) * V * m_0 * \text{Cos}[\Phi]$$

```
ClearAll[I11, I12, I13, W3, t, p3, r2]
```

```
n1
```

$$I_{11} = \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \int_{x_d/v_x}^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n1} * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * P_{\text{imp}} * e^{-\beta*(t-x_d/v_x)} * \text{Sin}\left[\Omega_1 * \frac{x_d}{v_x}\right] * \text{Sin}\left[\omega_{n1} * \left(t - \frac{x_d}{v_x}\right)\right];$$

```
n2
```

$$I_{12} = \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \int_{x_d/v_x}^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n2} * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * P_{\text{imp}} * e^{-\beta*(t-x_d/v_x)} * \text{Sin}\left[\Omega_2 * \frac{x_d}{v_x}\right] * \text{Sin}\left[\omega_{n2} * \left(t - \frac{x_d}{v_x}\right)\right];$$

```
n3
```

$$I_{13} = \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \int_{x_d/v_x}^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau + \frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * P_{\text{imp}} * e^{-\beta*(t-x_d/v_x)} * \text{Sin}\left[\Omega_3 * \frac{x_d}{v_x}\right] * \text{Sin}\left[\omega_{n3} * \left(t - \frac{x_d}{v_x}\right)\right];$$

```
W3 = W2 + ComplexExpand[Re[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];
```

```
x = L / 2
```

```
Print["p3"]
```

```
p3 = Plot[W3, {t, x_d / v_x, L / v_x},
```

```
  AxesLabel -> {"t", "w3"}, PlotRange -> Automatic,
```

```
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.005, 0.01}], Thickness[0.003]},
```

```
  AspectRatio -> Full,
```

```
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
```

```
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
Show[p1, p2, PlotRange -> All]
```

```

r2 = Show[p1, p2, p3, AxesLabel -> {"t", "w"},
  PlotRange -> All, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

ClearAll[a, f, wo, x, xo, M, mo, g, ko, co, βo, γo, ωo, vx, n, L, EJ,
  m, β, ωn, ω1, ω2, ω3, ωn1, ωn2, ωn3, Ωn, Ω1, Ω2, Ω3, t, τ, y, ϕ11,
  ϕ12, ϕ13, ϕ21, ϕ22, ϕ23, An, Yn, Y1, Y2, Y3, Zn, Xn, w1, w2, w3,
  w4, w5, w6, w7, w8, w9, w10, w11, w12, w13, w14, W1, xc, xd, p1]
a = 2.5;
f = 0.1;
xo = 50;
xc = xo + 1.12524;
xd = xo + 24.9799;
wo =  $\frac{f}{a^4} * (x - xo)^4 - \frac{4 * f}{a^3} * (x - xo)^3 + \frac{4 * f}{a^2} * (x - xo)^2$ ;
M = 200;
mo = 20;
g = 10;
ko = 500;
co = 100;
βo =  $\frac{co}{2 * M}$ ;
γo =  $\sqrt{ko / M}$ ;
ωo =  $\sqrt{(\gamma o^2 - \beta o^2)}$ ;
vx = 25;

L = 100;
EJ = 1.4 * 1010;
m = 1000;
β = 0.06;

ωn =  $n^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;

ω1 =  $1^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}}$ ;

```

$$\omega_2 = 2^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}} ;$$

$$\omega_3 = 3^2 * \pi^2 * \sqrt{\frac{EJ}{m * L^4}} ;$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2} ;$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\omega_2^2 - \beta^2} ;$$

$$\omega_{n3} = \sqrt{\omega_3^2 - \beta^2} ;$$

$$\Omega_n = N \left[ \frac{n * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_1 = N \left[ \frac{1 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_2 = N \left[ \frac{2 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Omega_3 = N \left[ \frac{3 * \pi * v_x}{L} \right] ;$$

$$\Phi_{1n} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \text{Sin}[\Omega_n * \tau] ;$$

$$\Phi_{11} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] ;$$

$$\Phi_{12} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] ;$$

$$\Phi_{13} = \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] ;$$

$$\Phi_{2n} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} * \frac{\Omega_n}{\omega_n} * \text{Sin}[\omega_n * \tau] ;$$

$$\Phi_{21} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} * \frac{\Omega_1}{\omega_1} * \text{Sin}[\omega_1 * \tau] ;$$

$$\Phi_{22} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_2^2 - \Omega_2^2)} * \frac{\Omega_2}{\omega_2} * \text{Sin}[\omega_2 * \tau] ;$$

```


$$\Phi_{23} = - \frac{2 * M * g}{m * L * (\omega_3^2 - \Omega_3^2)} * \frac{\Omega_3}{\omega_3} * \text{Sin}[\omega_3 * \tau];$$


$$Y_n = \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * x}{L}\right];$$


$$Y_1 = \text{Sin}\left[\frac{1 * \pi * x}{L}\right];$$


$$Y_2 = \text{Sin}\left[\frac{2 * \pi * x}{L}\right];$$


$$Y_3 = \text{Sin}\left[\frac{3 * \pi * x}{L}\right];$$


$$A_n = \frac{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_{x_0}^{x_0+2*a} (w_0 * Y_n) dx\right]\right]}{\text{ComplexExpand}\left[\text{Re}\left[\int_0^L Y_n^2 dx\right]\right]};$$


$$Z_n = \text{Sin}[\Omega_n * y];$$


$$X_n = \text{Sin}[\Omega_n * \tau];$$

ClearAll[I11, I12, I13]
n1
I11 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_1 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n1} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n2
I12 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_2 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n2} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

n3
I13 =

$$\frac{2}{m * L * \omega_{n3}} * \int_0^t \left( e^{-\beta * (t-\tau)} * (M + m_0) * \text{Sin}[\Omega_3 * \tau] * \text{Sin}[\omega_{n3} * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

w1 = ComplexExpand[Re[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];
x = L / 2
Print["Plot9"]
Plot9 = Plot[w1, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w1"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]

```

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O31]

n1

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_1 - \omega_{n1}) * \tau + \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_1 + \omega_{n1}) * \tau - \omega_{n1} * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O31 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33) ;$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O32]  
n2

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n ;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau] ;$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau] ;$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_2 - \omega_{n2}) * \tau + \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right] ;$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_2 - \omega_{n2}) * \tau + \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right] ;$$

$$I33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right] ;$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right] ;$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n2}} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega_2 + \omega_{n2}) * \tau - \omega_{n2} * t]) \, d\tau \right] \right] ;$$

$$G33 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega_{n1}} * \text{ComplexExpand} \left[ \right]$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 1 + \omega n 1) * \tau - \omega n 1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O32 = \sum_{n=1}^{45} (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33);$$

ClearAll[A31, A32, A33, I31, I32, I33, G31, G32, G33, O33]  
n3

$$A31 = -\frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n;$$

$$A32 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Cos}[\omega_0 * \tau];$$

$$A33 = \frac{k_0 * \gamma_0^2}{\omega_0} * \frac{\beta_0}{\omega_0^2 + \beta_0^2} * A_n * X_n * e^{-\beta_0 * \tau} * \text{Sin}[\omega_0 * \tau];$$

$$I31 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n 3) * \tau + \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I32 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n 3) * \tau + \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I33 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A33 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n 3) * \tau + \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G31 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A31 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n 3) * \tau - \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G32 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A32 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n 3) * \tau - \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$



```

G33 = -0.5 *  $\frac{2}{m * L * \omega n3}$  * ComplexExpand [
  Re [  $\int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A33 * \text{Cos} [(\Omega 3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) d\tau$  ] ] ;
O33 =  $\sum_{n=1}^{45}$  (I31 + I32 + I33 + G31 + G32 + G33) ;
x = L / 2
w3 = O31 * Y1 + O32 * Y2 + O33 * Y3 ;
Print["Plot10"]
Plot10 = Plot[w3, {t, 0, xc / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w3"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Thick}, AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O61]
n1
A61 = -co *  $\gamma o^2$  *  $\frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2}$  * An * Xn ;
A62 = co *  $\gamma o^2$  *  $\frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2}$  * An * Xn *  $e^{-\beta o * \tau}$  * Cos [ $\omega o * \tau$ ] ;
A63 = -co *  $\gamma o^2$  *  $\frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2}$  * An * Xn *  $e^{-\beta o * \tau}$  * Sin [ $\omega o * \tau$ ] ;
I61 = 0.5 *  $\frac{2}{m * L * \omega n1}$  * ComplexExpand [
  Re [  $\int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A61 * \text{Cos} [(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau$  ] ] ;
I62 = 0.5 *  $\frac{2}{m * L * \omega n1}$  * ComplexExpand [
  Re [  $\int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A62 * \text{Cos} [(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau$  ] ] ;
I63 = 0.5 *  $\frac{2}{m * L * \omega n1}$  * ComplexExpand [
  Re [  $\int_0^t e^{-\beta * (t-\tau)} * (A63 * \text{Cos} [(\Omega 1 - \omega n1) * \tau + \omega n1 * t]) d\tau$  ] ] ;
G61 = -0.5 *  $\frac{2}{m * L * \omega n1}$  * ComplexExpand [

```

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n1} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega1 + \omega n1) * \tau - \omega n1 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O61 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O62]  
n2

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega2 - \omega n2) * \tau + \omega n2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n 2) * \tau - \omega n 2 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n 2) * \tau - \omega n 2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 2} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \text{Cos}[(\Omega 2 + \omega n 2) * \tau - \omega n 2 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$O62 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

ClearAll[A61, A62, A63, I61, I62, I63, G61, G62, G63, O63]  
n3

$$A61 = -co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn;$$

$$A62 = co * \gamma o^2 * \frac{\beta o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Cos}[\omega o * \tau];$$

$$A63 = -co * \gamma o^2 * \frac{\omega o}{\omega o^2 + \beta o^2} * An * Xn * e^{-\beta o * \tau} * \text{Sin}[\omega o * \tau];$$

$$I61 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n 3) * \tau + \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G61 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A61 * \text{Cos}[(\Omega 3 + \omega n 3) * \tau - \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$I62 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\left. \text{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \text{Cos}[(\Omega 3 - \omega n 3) * \tau + \omega n 3 * t]) \, d\tau \right] \right];$$

$$G62 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n 3} * \text{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A62 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$I63 = 0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 - \omega n3) * \tau + \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$G63 = -0.5 * \frac{2}{m * L * \omega n3} * \operatorname{ComplexExpand} \left[ \right.$$

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^t e^{-\beta*(t-\tau)} * (A63 * \operatorname{Cos}[(\Omega3 + \omega n3) * \tau - \omega n3 * t]) \, d\tau \right];$$

$$O63 = \sum_{n=1}^{45} (I61 + I62 + I63 + G61 + G62 + G63);$$

$$x = L / 2$$

$$w6 = O61 * Y1 + O62 * Y2 + O63 * Y3;$$

Print["Plot11"]

Plot11 = Plot[w6, {t, 0, xc / vx},

  AxesLabel → {"t", "w6"}, PlotRange → Automatic,

  PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,

  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],

  AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O111, S1]

n1

$$A11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \Phi11 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega2 * \tau] * \Phi12 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_0^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * \operatorname{Sin}[\Omega3 * \tau] * \Phi13 * \operatorname{Sin}[\Omega1 * \tau] * \operatorname{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)]) \, d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 1 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O111 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O112]

n2

$$A11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = - \frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 2 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O112 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

ClearAll[A11, A12, A13, B21, B22, B23, O113]

n3

$$A11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 11 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 12 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$A13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 13 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B11 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \Phi 21 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B12 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \Phi 22 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$B13 = -\frac{2 * k_0}{m * L * \omega n 1} *$$

$$\int_0^t \left( e^{-\beta*(t-\tau)} * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \Phi 23 * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n 3 * (t - \tau)] \right) d\tau;$$

$$O113 = A11 + A12 + A13 + B11 + B12 + B13;$$

x = L / 2

w11 = ComplexExpand[Re [O111 \* Y1 + O112 \* Y2 + O113 \* Y3] ] ;

Print["Plot12"]

Plot12 = Plot[w11, {t, 0, xc / vx},

    AxesLabel -> {"t", "w11"}, PlotRange -> Automatic,

```

PlotStyle → {Black, Thick}, AspectRatio → Full,
LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

W1 = w1 + w3 + w6 + w11;
Print["p1"]
p1 = Plot[W1, {t, 0, xc/vx},
  AxesLabel → {"t", "w"}, PlotRange → Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.02, 0.02}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio → Full,
  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]

ClearAll[A1, A2, A3, B1, B2, B3, T1, T2, T3, TP1, TP2, TP3, W2, p2]
T1 = I11 + O31 + O61 + O111;
T2 = I12 + O32 + O62 + O112;
T3 = I13 + O33 + O63 + O113;
TP1 = D[T1, t];
TP2 = D[T2, t];
TP3 = D[T3, t];
t =  $\frac{xc}{vx}$ 
B1 = T1;
B2 = T2;
B3 = T3;
A1 =  $\frac{TP1 + \beta * B1}{\omega n1}$ ;
A2 =  $\frac{TP2 + \beta * B2}{\omega n2}$ ;
A3 =  $\frac{TP3 + \beta * B3}{\omega n3}$ ;
x = L / 2
ClearAll[t]
W2 =  $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A1 * \text{Sin}\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B1 * \text{Cos}\left[\omega n1 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y1 +
 $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A2 * \text{Sin}\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B2 * \text{Cos}\left[\omega n2 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y2 +
 $e^{-\beta * (t - xc/vx)}$  *  $\left( A3 * \text{Sin}\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] + B3 * \text{Cos}\left[\omega n3 * \left(t - \frac{xc}{vx}\right)\right] \right)$  * Y3;

```

```
Print["p2"]
p2 = Plot[W2, {t, xc / vx, xd / vx},
  AxesLabel -> {"t", "w"}, PlotRange -> Automatic,
  PlotStyle -> {Black, Dashing[{0.02, 0.02}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio -> Full,
  LabelStyle -> Directive[FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle -> Thick, ImageSize -> Medium]
```

```
ClearAll[wwo, x, Two]
```

```
wwo = D[wo, x];
```

```
x = xc; 17
```

```
Two = wwo;
```

```
ClearAll[x, t, WW2, θc, voc, TANθd, θd, vo, V, Φ, ε, Pimp]
```

```
WW2 = ComplexExpand[Re[D[W2, t]]];
```

```
θc = ArcTan[Two];
```

```
voc = vx * Cos[θc];
```

$$\text{TAN}\theta d = \text{Two} - \frac{2 * g * (x d - x c)}{2 * v o c^2 * \text{Cos}[\theta c]^2};$$

```
θd = ArcTan[TANθd];
```

```
vo = vx * Cos[θd];
```

```
t = xd / vx;
```

```
x = xd;
```

```
ε = 0.95;
```

$$V = \sqrt{v o^2 + W W 2^2 + 2 * v o * W W 2 * \text{Sin}[\theta d]};$$

$$\Phi = \text{ArcSin}\left[\frac{v o}{V} * \text{Cos}[\theta d]\right];$$

```
Pimp = (1 + ε) * V * mo * Cos[Φ]
```

```
ClearAll[I11, I12, I13, W3, t, p3, r3]
```

```
n1
```

$$I11 = \frac{2}{m * L * \omega n1} *$$

$$\int_{x d / v x}^t \left( e^{-\beta * (t - \tau)} * (M + m o) * \text{Sin}[\Omega 1 * \tau] * \text{Sin}[\omega n1 * (t - \tau)] \right) d\tau +$$



```

      2
      * Pimp * e-β*(t-xd/vx) * Sin[Ω1 *  $\frac{xd}{vx}$ ] * Sin[ωn1 * (t -  $\frac{xd}{vx}$ )]];
n2
I12 =  $\frac{2}{m * L * \omega n2}$  *
       $\int_{xd/vx}^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + mo) * \text{Sin}[\Omega 2 * \tau] * \text{Sin}[\omega n2 * (t - \tau)]) d\tau +$ 
       $\frac{2}{m * L * \omega n2}$  * Pimp * e-β*(t-xd/vx) * Sin[Ω2 *  $\frac{xd}{vx}$ ] * Sin[ωn2 * (t -  $\frac{xd}{vx}$ )]];
n3
I13 =  $\frac{2}{m * L * \omega n3}$  *
       $\int_{xd/vx}^t (e^{-\beta*(t-\tau)} * (M + mo) * \text{Sin}[\Omega 3 * \tau] * \text{Sin}[\omega n3 * (t - \tau)]) d\tau +$ 
       $\frac{2}{m * L * \omega n3}$  * Pimp * e-β*(t-xd/vx) * Sin[Ω3 *  $\frac{xd}{vx}$ ] * Sin[ωn3 * (t -  $\frac{xd}{vx}$ )]];
W3 = W2 + ComplexExpand[Re[I11 * Y1 + I12 * Y2 + I13 * Y3]];
x = L / 2
Print["p3"]
p3 = Plot[W3, {t, xd / vx, L / vx},
  AxesLabel → {"t", "w3"}, PlotRange → Automatic,
  PlotStyle → {Black, Dashing[{0.02, 0.02}], Thickness[0.003]},
  AspectRatio → Full,
  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle → Thick, ImageSize → Medium]
Show[p1, p2, PlotRange -> All]
r3 = Show[p1, p2, p3, PlotRange → All, AspectRatio → Full,
  LabelStyle → Directive[FontSize → 17, FontFamily -> "Arial"],
  AxesStyle → Thick, ImageSize -> Medium]
Show[r1, r2, r3, PlotRange → All]

```