

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΜΕ
ΠΟΛΥΜΕΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΣΕ ΤΡΙΧΟΕΙΔΗ ΑΓΩΓΟ**

υπό

ΠΑΡΑΣΚΕΥΟΠΟΥΛΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2019

© 2019 Παρασκευόπουλος Δημήτριος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Μαρία Βλαχομήτρου
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Χαραλάμπους Γεώργιος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Νίκο Πελεκάση για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Επίσης, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην Δρ. Μαρία Βλαχομήτρου. Η βοήθεια, οι συμβουλές, αλλά και η ψυχολογική υποστήριξη που μου προσέφερε, ήταν απαραίτητα για την επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας μου. Ευχαριστώ εξ' ίσου και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Χαραλάμπους για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας και την συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Αναστασία και Παναγιώτη, αλλά και όλους τους φίλους μου για τη συνεχή αγάπη και υποστήριξη που μου παρείχαν σε όλη τη διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής.

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΜΕ
ΠΟΛΥΜΕΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΣΕ ΤΡΙΧΟΕΙΔΗ ΑΓΩΓΟ**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2019

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης, Καθηγητής Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία γίνεται μία προσπάθεια για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς μιας μικροφουσαλίδας με ελαστικό, πολυμερικό κέλυφος όταν βρίσκεται μέσα σε κλειστό αγωγό και ταλαντώνεται υπό την επίδραση μιας ακουστικής διαταραχής. Ο κύριος στόχος της εργασίας είναι η παρατήρηση της ιδιοσυχνότητας της φουσαλίδας και οι μεταβολές που εκείνη υφίσταται, καθώς το μέγεθος του αγωγού πλησιάζει το μέγεθός της φουσαλίδας και το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής μεγαλώνει. Αρχικά, παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή, καθώς και οι εφαρμογές που βρίσκουν οι μικροφουσαλίδες γενικότερα στον ιατρικό τομέα. Στη συνέχεια, αναφέρονται και αναλύονται οι θεωρητικές σχέσεις και οι παραδοχές που χρησιμοποιήθηκαν στην συγκεκριμένη μελέτη. Κατανοείται, έτσι, το θεωρητικό υπόβαθρο για την υπολογιστική προσομοίωση που πραγματοποιείται στα επόμενα κεφάλαια. Το τρίτο κεφάλαιο της εργασίας έχει ως στόχο, την επεξήγηση της κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε για τις προσομοιώσεις καθώς και τον τρόπο με τον οποίο αυτό επιλύεται. Ταυτόχρονα, γίνεται και μια σύντομη αναφορά στην ανάλυση Fourier που χρησιμοποιείται σε ένα τμήμα της εργασίας. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις. Πρώτα η φουσαλίδα μελετάται κατά την ταλάντωσή της σε μη περιορισμένη ροή και στη συνέχεια περιορίζεται μέσα σε κλειστό αγωγό. Από τα αποτελέσματα είναι φανερό ότι η ακτίνα του αγωγού έχει μεγάλη επίδραση στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας και στο πλάτος της ταλάντωσής της, ενώ το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής δεν επηρεάζει αισθητά την συγκεκριμένη φουσαλίδα που μελετάται στην εργασία. Τέλος εξάγονται τα συμπεράσματα από αυτή τη μελέτη και προτείνονται περιοχές για περαιτέρω έρευνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Ιστορική Αναδρομή	2
1.2 Λειτουργία μικροφουσαλίδων Contrast Agents	3
1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	5
1.4 Οργάνωση της εργασίας	8
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	9
2.1 Σχέσεις και παραδοχές	9
2.2 Περιγραφή της διάταξης	15
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	16
3.1 Κατασκευή Πλέγματος – Ελλειπτική μέθοδος	16
3.2 Αριθμητική Επίλυση	21
3.3 Ανάλυση με FFT	24
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ	25
4.1 Φυσαλίδα σε μη περιορισμένη ροή	25
4.1.1 Απόκριση με FEM	25
4.2 Φυσαλίδα μέσα σε αγωγό	30
4.2.1 Απόκριση με FEM	30
4.2.2 Απόκριση από FFT ανάλυση της πίεσης	44
4.2.3 Απόκριση με χρήση BEM	51
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	53
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	55

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<i>Πίνακας 2.1</i> Ιδιότητες φυσαλίδας	14
<i>Πίνακας 3.1</i> Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου ποινής.....	20
<i>Πίνακας 4.1</i> Ιδιοσυχνότητες φυσαλίδας ως προς τη μεταβλητή α , όπως προέκυψαν από την ανάλυση με FEM.	39
<i>Πίνακας 4.2</i> Ιδιοσυχνότητες φυσαλίδας ως προς τη μεταβλητή α , όπως προέκυψαν από την ανάλυση της χρονοσειράς της πίεσης με FFT..	46
<i>Πίνακας 4.3</i> Σύγκριση ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν από ανάλυση της πίεσης και προσομοίωση με FEM.....	50

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 2.1 Διάταξη που μελετήθηκε. Φυσαλίδα μέσα σε αγωγό.....	9
Σχήμα 2.2 Σχηματική απεικόνιση της διάταξης που επιλύεται υπολογιστικά.....	9
Σχήμα 2.3 Σχηματική απεικόνιση του ροϊκού πεδίου φυσαλίδας που υποβάλλεται σε ακουστική διαταραχή.....	15
Σχήμα 3.1 Υπολογιστικό πεδίο	16
Σχήμα 3.2 Φυσικό πεδίο	16
Σχήμα 3.3 Αριθμητικό πλέγμα για αγωγό με $\alpha = 2 \rightarrow Rt = 2Ro, LRo = 16$	17
Σχήμα 3.4 Αριθμητικό πλέγμα για αγωγό με $\alpha = 8 \rightarrow Rt = 8Ro, LRo = 16$	17
Σχήμα 3.5 Σημεία μέτρησης πίεσης για την ανάλυση με FFT.....	24
Σχήμα 4.1 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	26
Σχήμα 4.2 Μεγέθυνση στην τελευταία κορυφή του σχήματος 4.1.....	27
Σχήμα 4.3 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	28
Σχήμα 4.4 Μεγέθυνση στην τελευταία κορυφή του σχήματος 4.3.....	28
Σχήμα 4.5 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της μικροφυσαλίδας για συχνότητα $f = 38.6 \text{ MHz}$ σε αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για δύο διαφορετικές τιμές του πλάτους της διαταραχής.	29
Σχήμα 4.6 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	31
Σχήμα 4.7 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος	

διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	32
Σχήμα 4.8 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	32
Σχήμα 4.9 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	33
Σχήμα 4.10 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	33
Σχήμα 4.11 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	34
Σχήμα 4.12 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	34
Σχήμα 4.13 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	35
Σχήμα 4.14 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$).Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.	35

Σχήμα 4.15 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 13.6 \text{ MHz}$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε	36
Σχήμα 4.16 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 30.2 \text{ MHz}$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε	37
Σχήμα 4.17 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 36.9 \text{ MHz}$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε	37
Σχήμα 4.18 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 25.3 \text{ MHz}$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε .38	
Σχήμα 4.19 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$ και για διαφορετικές τιμές του $\alpha = R\tau R_0$. Η κάθε καμπύλη είναι σχεδιασμένη στην ιδιοσυχνότητα που προκύπτει για κάθε αγωγό. Οι συχνότητες είναι εκφρασμένες σε MHz.	39
Σχήμα 4.20 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας σε διαφορετικές συχνότητες για αγωγό με $\alpha=1.5$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon=0.5$. (α) Λίγο κάτω από την ιδιοσυχνότητα ($f=12.1 \text{ MHz}$), (β) στην ιδιοσυχνότητα ($f=13.6 \text{ MHz}$), (γ) λίγο πάνω από την ιδιοσυχνότητα ($f=15.1 \text{ MHz}$), (δ) μακριά από την ιδιοσυχνότητα ($f=22 \text{ MHz}$).....	40
Σχήμα 4.21 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας με τις νέες ιδιότητες για αγωγό με $\alpha = 3$ και για συχνότητα εξωτερικής διαταραχής $f = 4.5 \text{ MHz}$	41
Σχήμα 4.22 Μεγέθυνση στις τελευταίες κορυφές που σχηματίζονται στο σχήμα 4.21. .	41
Σχήμα 4.23 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$	42
Σχήμα 4.24 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 2.5$	43
Σχήμα 4.25 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 3.5$	43
Σχήμα 4.26 Μεγέθυνση στις κορυφές του σχήματος 4.27.....	44

Σχήμα 4.27 Απόκριση φουσαλίδας από FFT ανάλυση πίεσης. Αγωγός με $\alpha = 8$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$. Οι συχνότητες της διαταραχής έχουν μονάδες MHz.(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz]).....	44
Σχήμα 4.28 Μεγέθυνση στις κορυφές του σχήματος 4.29.....	45
Σχήμα 4.29 Απόκριση φουσαλίδας από FFT ανάλυση πίεσης. Αγωγός με $\alpha = 1.5$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$. Οι συχνότητες της διαταραχής έχουν μονάδες MHz. .(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])	45
Σχήμα 4.30 Σύγκριση, στην ιδιοσυχνότητα ($f_{\text{διαταραχής}} = 38.4 \text{ MHz}$), της απόκρισης της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ και για τρεις διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε . .(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])	46
Σχήμα 4.31 Σύγκριση, στην ιδιοσυχνότητα ($f_{\text{διαταραχής}} = 14.2 \text{ MHz}$), της απόκρισης της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ και για τρεις διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε . .(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])	47
Σχήμα 4.32 Απόκριση φουσαλίδας σε αγωγό με $\alpha = 3$ για πέντε διαφορετικές τιμές του πλάτους ε . Από πάνω προς τα κάτω οι ομάδες κορυφών που σχηματίζονται είναι για $\varepsilon = 4$, $\varepsilon = 3$, $\varepsilon = 1.5$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.5$	47
Σχήμα 4.33 Μορφοποίηση του σχήματος 4.32 με διαφορετικούς χρωματισμούς για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε . .(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz]).....	48
Σχήμα 4.34 Σύγκριση απόκρισης φουσαλίδας για $\varepsilon = 0.5$ και για διαφορετικές τιμές α του αγωγού. Κάθε φορά η καμπύλη σχεδιάζεται στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα του εκάστοτε αγωγού. Στο υπόμνημα αναφέρεται η τιμή $Rt = \alpha Ro$, καθώς και η συχνότητα της διαταραχής που δίνει την ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας (σε MHz). .(Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz]).....	49
Σχήμα 4.35 Επέκταση πάνω στο σχήμα 4.34. Προστέθηκαν οι αντίστοιχες καμπύλες αλλά για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους ε	50
Σχήμα 4.36 Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας με τη μεταβολή του λόγου $1/\alpha$.. Σύγκριση μεθόδου συνοριακών στοιχείων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία. Για την προσομοίωση ισχύει $L/Ro=16$	51
Σχήμα 4.37 Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας με τη μεταβολή της μεταβλητής α .. Σύγκριση μεθόδου συνοριακών στοιχείων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία. Για την προσομοίωση ισχύει $L/Ro=16$	52

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την ανάπτυξη της ιατρική επιστήμης είναι η μελέτη και η απεικόνιση των οργάνων του ανθρώπινου σώματος. Αποτελούσαν πάντα πρόκληση για τους επιστήμονες και για αυτό έχουν δημιουργηθεί αρκετές τεχνολογίες που σκοπό έχουν να λύσουν τέτοιου είδους προβλήματα. Οι ακτίνες X ανακαλύφθηκαν από τον Γερμανό φυσικό Wilhelm Röntgen το 1895. Η απεικόνιση με ακτίνες X ήταν η πρώτη μέθοδος η οποία εφαρμόστηκε για διαγνωστική απεικόνιση στην ιατρική. Επειδή όμως ανήκουν στις ιονίζουσες ακτινοβολίες προκαλούν βλάβες στο σώμα και καταστροφή των ιστών. Αν και χρησιμοποιούνται ευρέως ακόμα και σήμερα, έστω και με μεγαλύτερη ασφάλεια, η επικίνδυνη φύση τους δεν έχει αλλάξει.

Η απεικόνιση με χρήση ραδιοϊσοτόπων, υποκατηγορία της οποίας είναι το λεγόμενο PET-Scan, βασίζεται επίσης στην ανίχνευση ακτινών γ μετά από διάσπαση ενός ραδιοφαρμάκου σε επιλεγμένες περιοχές στον οργανισμό. Όπως φαίνεται όμως, ραδιενέργεια έχουμε και σε αυτή την περίπτωση. Μια τεχνική απεικόνισης η οποία δεν ενέχει καθόλου ακτινοβολία είναι οι υπέρηχοι. Οι υπέρηχοι αποτελούν σήμερα μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους απεικόνισης στην ιατρική, καθώς πρόκειται για μια μη επεμβατική μέθοδο, χωρίς παρενέργειες. Επίσης, έχουν μικρότερο κόστος από τις ακτίνες X και παρέχουν την δυνατότητα για δημιουργία εικόνας σε πραγματικό χρόνο. Εξαιτίας όμως των χαμηλής-ενέργειας ακουστικών κυμάτων που χρησιμοποιούνται, ορισμένες φορές υπάρχουν δυσκολίες στην διαπέραση των στρώσεων των ιστών του σώματος, με αποτέλεσμα να μην είναι ευκρινής η προς εξέταση περιοχή.

Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα μπορούν να δώσουν οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast-Agent. Οι μικροφουσαλίδες αποτελούνται από αέριο, συνήθως διαλυτό στο αίμα το οποίο περιβάλλεται από ένα λεπτό ελαστικό κέλυφος. Το κέλυφος επιτρέπει την ασφαλή μεταφορά των μικροφουσαλίδων στο επιθυμητό σημείο χωρίς να υποστούν αλλοιώσεις. Με τη χρήση τους, αυξάνεται η επανασκένδαση του ηχητικού σήματος λόγω της συμπιεστότητας του αερίου που περιέχεται με αποτέλεσμα την μεγιστοποίηση της αντίθεσης με το ηχητικό σήμα

που παράγουν τα όργανα και οι ιστοί και τελικά την καλύτερη και πιο ευκρινή απεικόνιση της περιοχής που εξετάζεται.

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Την παρατήρηση για την αύξηση του υπερηχητικού σήματος έκανε τυχαία ο Dr. Claude Joyner στα τέλη του 1960. Κατά τη διάρκεια μιας μελέτη για την καρδία, έκανε έγχυση πράσινης βαφής ινδοκυανίνης ταυτόχρονα με ένα καρδιογράφημα m [1]. Αυτό που παρατήρησε ήταν ότι κάθε έγχυση της βαφής προκαλούσε παροδική αύξηση του υπερηχητικού σήματος. Αρχικά, θεωρούνταν ότι αυτή η αύξηση οφείλεται στη φύση της βαφής. Περαιτέρω έρευνα όμως από τους Dr. Raymond Gramiak και Dr. Pravin Shah [2] και Kramkeu et al [3] έδειξε ότι δεν ευθυνόταν η βαφή, αλλά φυσαλίδες, οι οποίες είχαν σχηματιστεί στην άκρη του καθετήρα που χρησιμοποιούσαν.

Αρχικά, για τη διάγνωση με χρήση υπέρηχων χρησιμοποιούνταν αιωρήματα φυσαλίδων μέσα σε βιο-συμβατά υγρά, όπως είναι η πράσινη ινδοκυανίνη και η δεξτερόζη. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι μίξη αλατούχου διαλύματος με λίγο από το αίμα του ασθενούς είχε ως αποτέλεσμα μεγαλύτερης διάρκειας αυξημένη αντίθεση, κάτι το οποίο οδήγησε και στη δημιουργία ενός από τα πρώτα Contrast Agents, του Albunex®. Στη συνέχεια όμως επειδή τα αποτελέσματα in-vivo δεν ήταν ικανοποιητικά, δημιουργήθηκαν νέα Contrast Agents τα οποία περιείχαν αέρια με μεγαλύτερο μοριακό βάρος, έτσι ώστε να μειωθεί η διάχυση του αερίου μέσω του τοίχους της φυσαλίδας στο αίμα. Μάλιστα, ενώ παλαιότερα τα υλικά αυτά δεν μπορούσαν να αποθηκευτούν και έπρεπε να προετοιμάζονται ακριβώς πριν τη χρήση τους, πλέον τα πιο σύγχρονα Agents παρέχουν τη δυνατότητα αποθήκευσης σε μορφή σκόνης μέσα σε αλατούχο διάλυμα [4].

1.2 Λειτουργία μικροφουσαλίδων Contrast Agents

Οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent είναι φουσαλίδες οι οποίες περιβάλλονται εξωτερικά από ελαστικό κέλυφος από πολυμερές, λιπίδιο ή πρωτεΐνη, ενώ στο εσωτερικό τους περιέχουν ένα αδρανές αέριο που συνήθως χαρακτηρίζεται από υψηλή πυκνότητα, υψηλό μοριακό βάρος και χαμηλή διαλυτότητα. Η διάμετρός τους κυμαίνεται από 1 μέχρι 10 μm κάτι το οποίο τους επιτρέπει ανεμπόδιστη κίνηση από την περιοχή στην οποία θα γίνει η έγχυση μέσω του κυκλοφορικού συστήματος. Ακριβώς λόγω του μεγέθους τους καθώς και λόγω του μικρού αριθμού που εισέρχεται στο σώμα κάθε φορά μπορούν να χρησιμοποιούνται με ασφάλεια, καθώς ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος για τυχόν ανεπιθύμητες συνέπειες όπως, για παράδειγμα, η πνευμονική εμβολή. Εξαιτίας του κελύφους, οι φουσαλίδες μεταφέρονται σχετικά αναλλοίωτες στην επιθυμητή περιοχή με το μεγαλύτερο μέρος του αερίου να μην διαχέεται στο αίμα. Επίσης, το μέγεθος των ξεχωριστών φουσαλίδων δεν επιτρέπει την διόδο τους μέσω των ενδοαγγειακών συνόρων και έτσι απεικονίζουν πραγματικά, μόνο το εσωτερικό των αγγείων [5].

Προς το παρόν, τέτοιες μικροφουσαλίδες χρησιμοποιούνται κυρίως για την ενίσχυση του υπερηχητικού σήματος, με αποτέλεσμα την ευκρινέστερη απεικόνιση ακόμα και πολύ μικρών αγγείων. Όταν διαταράσσεται το πεδίο της πίεσης, η μικροφουσαλίδα εκτελεί ταλάντωση και εκπέμπει, έτσι, ένα ισχυρό σήμα πίεσης λόγω σκέδασης. Το σήμα αυτό, είναι δυνατό να αναλυθεί και να εξαχθεί το φάσμα συχνοτήτων ταλάντωσης [6]. Αν η διαταραχή είναι μικρή, το φάσμα αποτελείται μόνο από τη συχνότητα της διαταραχής, ενώ αν η διαταραχή είναι αρκετά μεγάλη, τότε το φάσμα περιέχει και επιπλέον υπεραρμονικές η υποαρμονικές συχνοτήτες. Συνεπώς, αν κανείς μελετήσει αυτό το φάσμα συχνοτήτων, γίνεται δυνατή η ταυτοποίηση των μικροφουσαλίδων και ο διαχωρισμός του σήματος που εκπέμπουν από αυτό που εκπέμπουν τα υπόλοιπα όργανα του σώματος κατά τη διάρκεια των υπερήχων.

Ένας σημαντικός παράγοντας ο οποίος κάνει ακόμα πιο εύκολη την ταυτοποίηση των εν λόγω σωματιδίων, είναι η ιδιοσυχνότητά τους. Όταν οι μικροφουσαλίδες βρίσκονται σε κατάσταση συντονισμού, το πλάτος ταλάντωσής τους καθώς και το επανασκεδαζόμενο σήμα πίεσης που επιστρέφουν είναι μέγιστο, με αποτέλεσμα σε εκείνο το σημείο να μεγιστοποιείται η διαφορά μεταξύ των διαφόρων σημάτων και να αυξάνεται η αντίθεση.

Επίσης, η κατάρρευση της μικροφουσαλίδας είναι ένα φαινόμενο που έχει μεγάλη σημασία, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους για να βοηθήσει τον τομέα της ιατρικής. Αν είναι γνωστός ο συνδυασμός πιέσεων και συχνοτήτων που οδηγούν στην κατάρρευση, τότε γίνεται δυνατή η επιλεκτική έγχυση φαρμάκων μέσω της φουσαλίδας σε πολύ συγκεκριμένες μη υγιείς περιοχές του σώματος [8]. Με αυτόν τον τρόπο, μειώνονται στο ελάχιστο οι ανεπιθύμητες παρενέργειες της εκάστοτε θεραπείας. Για παράδειγμα, η χημειοθεραπεία εφαρμόζεται σε ασθενείς με καρκίνο και έχει πολύ σοβαρές επιπτώσεις για τον οργανισμό. Αν καταστεί δυνατό το φάρμακο να τροφοδοτείται στοχευμένα με μικροφουσαλίδες στην πάσχουσα περιοχή, τότε όχι μόνο η θεραπεία θα ήταν ταχύτερη, αλλά και ο ασθενής θα υπέφερε λιγότερο.

Αντίστοιχης σημασίας είναι και οι πιέσεις-συχνότητες ασφαλείας, έτσι ώστε να μην εμφανιστεί κατάρρευση. Σε αρκετές εφαρμογές στην ιατρική [7], οι φουσαλίδες είναι δυνατό να προσκολληθούν σε κύτταρα και λόγω των ταλαντώσεων που εκτελούν, να δημιουργηθεί ένα ροϊκό πεδίο το οποίο με τη σειρά του βοηθάει στη δημιουργία πόρων στα κύτταρα (sonoporation). Έτσι, αυξάνεται η απορροφητικότητα των κυττάρων σε φάρμακα ή πρωτεΐνες και η εκάστοτε θεραπεία είναι αποτελεσματικότερη.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι φανερό ότι η μελέτη του φάσματος συχνοτήτων των μικροφουσαλίδων είναι ιδιαίτερα σημαντική και μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη νέων εφαρμογών και δυνατοτήτων. Για να γίνουν όλα αυτά, όμως, πραγματικότητα, πρέπει να υπάρξει μια σύνδεση ανάμεσα στις διάφορες ιδιότητες που έχουν οι εκάστοτε μικροφουσαλίδες (ακτίνα, μέτρο ελαστικότητας, πάχος μεμβράνης, υλικό μεμβράνης) και στη συμπεριφορά που εκείνες εμφανίζουν για διαφορετικές πιέσεις και συχνότητες.

1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η εισαγωγή των ελαστικών κελυφών για την σταθεροποίηση των μικροφουσαλίδων μέσα στον οργανισμό [9], έχει κάνει εφικτή τη χρήση τους ως contrast agents για την ιατρική απεικόνιση με χρήση υπερήχων. Μέχρι σήμερα, οι έρευνες και οι μελέτες που αφορούν την αλληλεπίδραση των μικροφουσαλίδων με τους υπερήχους έχουν προχωρήσει πολύ [10]. Επίσης, ήδη έχουν αναπτυχθεί τεχνικές για την καλύτερη ανάλυση των απεικονίσεων σε πιο δυσπρόσιτες περιοχές του σώματος, όπως ο εγκέφαλος, με τη χρήση μόνο μίας μικροφουσαλίδας [11][12].

Προηγούμενες μελέτες χαρακτηρίζουν την απόκριση των μικροφουσαλίδων μελετώντας μεγάλο αριθμό ταυτόχρονα και βγάζουν συμπεράσματα για τη συνολική απόκριση του δείγματος [13][14]. Όταν ακολουθείται τέτοια μέθοδος, όμως, δεν γίνεται κατανοητή η συμπεριφορά που έχει κάθε ξεχωριστή φουσαλίδα και χάνεται, έτσι, ένα μεγάλο κομμάτι χρήσιμων πληροφοριών, όπως η ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας ή τα χαρακτηριστικά της διαταραχής που οδηγούν σε κατάρρευση. Επίσης, οι περισσότερες μελέτες που έχουν γίνει, τοποθετούν τη φουσαλίδα σε περιβάλλον μη περιορισμένης ροής [15-19]. Καθώς, όμως, η φουσαλίδα εκτελεί μη γραμμική ταλάντωση και τα αγγεία στα οποία βρίσκεται έγκλειστη είναι μικρά σε σχέση με το μέγεθος της, η φυσική συχνότητά της επηρεάζεται σημαντικά [20-22]. Γι' αυτό καθίσταται σημαντική η μελέτη της συμπεριφοράς της φουσαλίδας όταν βρίσκεται υπό την επίδραση των τοιχωμάτων ενός αγωγού.

Από τους πρώτους που ερευνήσαν το συγκεκριμένο φαινόμενο ήταν οι Oguz και Prosperetti [20] και οι Sassaroli και Hynynen[23-24]. Χρησιμοποιώντας μια γραμμική προσεγγιστική μέθοδο και υποθέτοντας ότι η μικροφουσαλίδα δεν περικλειόταν από ελαστικό περίβλημα, προέβλεψαν τη μείωση της φυσικής συχνότητας της φουσαλίδας, όταν η τελευταία βρίσκεται μέσα σε αγωγό με σταθερά τοιχώματα και αυξάνεται το μέγεθός της σε σχέση με το μέγεθος του αγωγού.

Υπάρχει αναλυτική προσεγγιστική σχέση για την εξακρίβωση της ιδιοσυχνότητας φουσαλίδας η οποία όμως βασίζεται πάνω σε μια μη περιορισμένη ροή. Καθώς όμως τα αγγεία του αίματος έχουν διάμετρο 4-8μm και η διάμετρος της φουσαλίδας είναι σε παρόμοια μεγέθη,

μπορεί κανείς να κατανοήσει ότι η ροή είναι σαφώς περιορισμένη και ασκεί σημαντική επίδραση πάνω στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε από τους Tsiglifis και Pelekasis [25] και de Jong et al [26-27] προκύπτει, από την επίλυση του γραμμικού προβλήματος ανιζώδους και αστροβίλης ροής γύρω από σφαιρική φουσαλίδα με τη μέθοδο των γραμμικών διαταραχών, η παρακάτω αναλυτική σχέση για την ιδιοσυχνότητα φουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος:

$$\omega_0 = -\frac{\mu_s}{\rho R_0^2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho R_0^3} \left[3\gamma(2\sigma + P_{st}R_0) - 2\sigma + \frac{2\chi}{1-\nu} \right]} = 2\pi f_0 \quad (1.1)$$

Όπου μ_s το ιξώδες της μεμβράνης, ρ η πυκνότητα του ρευστού, R_0 η ακτίνα της φουσαλίδας, γ η πολυτροπική σταθερά του αερίου, σ η επιφανειακή τάση, P_{st} η στατική πίεση του ρευστού, χ το επιφανειακό μέτρο ελαστικότητας και τέλος ν ο λόγος Poisson. Η σχέση αυτή χρησιμοποιήθηκε και από την παρούσα εργασία, έτσι ώστε να υπολογιστεί η ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας σε μη περιορισμένη ροή. Η τιμή που βρέθηκε (36.8 MHz), αποτελεί μια βάση για περαιτέρω σύγκριση με τα υπολογιστικά αποτελέσματα στα επόμενα κεφάλαια.

Κατά τους Oguz και Prosperetti [20] προκύπτει η παρακάτω προσεγγιστική σχέση, η οποία περιγράφει την ιδιοσυχνότητα μιας φουσαλίδας που βρίσκεται, όμως, σε μη περιορισμένη ροή.

$$\frac{f}{f_0} = \frac{a}{\sqrt{\frac{L}{R_0} - \frac{4}{3a^2} + 2\frac{\Delta L}{R_0}}} \quad (1.2)$$

Όπου με $\frac{f}{f_0}$ έχουμε το λόγο των συχνοτήτων της φουσαλίδας σε περιορισμένη προς μη περιορισμένη ροή, $a = \frac{R_0}{R_t}$, με R_t την ακτίνα του αγωγού και ΔL ένας παράγοντας που προστίθεται στο συνολικό μήκος αγωγού, έτσι ώστε να ληφθεί υπόψιν η επίδραση της μάζας ρευστού που βρίσκεται εκτός του αγωγού. Για το ΔL ισχύει ότι: $\Delta L = 1.22R_t$. Η παραπάνω σχέση βασίζεται στην υπόθεση ότι το μέγεθος της φουσαλίδας είναι μεγάλο σε σχέση με την ακτίνα του αγωγού.

Σύμφωνα με την ίδια εργασία, προτείνεται η παρακάτω σχέση 1.3 για τον υπολογισμό της συχνότητας μιας φουσαλίδας, η οποία βρίσκεται έγκλειστη μέσα σε αγωγό:

$$\omega = -\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \right)^2 \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right)} \quad (1.3)$$

Ο όρος $\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}$ αντικατοπτρίζει την επίδραση του εγκλεισμού στη συχνότητα της φυσαλίδας. Περαιτέρω, P_{G_0} είναι οι μεταβολές της πίεσης που ασκεί το αέριο εντός της φυσαλίδας στη μεμβράνη και χ_{MR} το μέτρο επιφανειακής διαστολής Mooney-Rivlin για την επιφάνεια. Στη σχέση 1.3 ο όρος $\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \right)^2 \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right)}$ εκφράζει τη συχνότητα της φυσαλίδας, ενώ ο όρος $-\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}$ εκφράζει την απόσβεση της ταλάντωσής της λόγω της επίδρασης του αγωγού, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψιν και τα φυσικά της χαρακτηριστικά.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά της ακουστικής απόκρισης επαληθεύτηκαν και στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας του κ. Χρυσοστομίδη [28].

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν ο λόγος $\frac{R_t}{R_0} \rightarrow \infty$, τότε το $\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \rightarrow 1$ και η φυσαλίδα ανακτά την ιδιοσυχνότητα που έχει σε μη περιορισμένη ροή:

$$\omega_0 = -\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \pm i \sqrt{\left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \right)^2} \quad (1.4)$$

Γενικότερα, οι πειραματικές έρευνες που έχουν διεξαχθεί μέχρι στιγμής, έχουν συμπεράνει ότι όταν η φυσαλίδα βρίσκεται εγκλειστη μέσα σε αγωγό, επηρεάζεται σημαντικά το πεδίο ροής γύρω της [29][30], καθώς και η ακουστική της απόκριση [31]. Επίσης, από έρευνες οπτικής απεικόνισης, έχει αποδειχθεί ότι το πλάτος ταλάντωσης μιας φυσαλίδας μειώνεται υπό την παρουσία τοιχωμάτων [32-34].

1.4 Οργάνωση της εργασίας

Στην παρούσα εργασία γίνεται προσπάθεια να κατανοηθεί καλύτερα η συμπεριφορά μιας μικροφυσαλίδας με πολυμερικό κέλυφος η οποία ταλαντώνεται μέσα σε έναν αγωγό. Η φυσαλίδα εκτελεί μόνο ταλάντωση εξαιτίας της ακουστικής διαταραχής που της επιβάλλεται. Οι μεταβλητές οι οποίες είναι καίριας σημασίας στη συγκεκριμένη μελέτη είναι η ακτίνα του αγωγού καθώς και το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής.

Αρχικά, γίνεται αριθμητική προσομοίωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για μια φυσαλίδα η οποία βρίσκεται σε ελεύθερη ροή, δηλαδή τα τοιχώματα του αγωγού είναι αρκετά μακριά ώστε να μην επηρεάζουν την ταλάντωση και διεγείρεται από μια επιβαλλόμενη ακουστική διαταραχή. Αυτό γίνεται έτσι ώστε να κατανοηθεί καλύτερα η συμπεριφορά της εν λόγω φυσαλίδας όταν δεν βρίσκεται μέσα σε κάποιον αγωγό και περαιτέρω για να υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης για τις επόμενες δοκιμές στις οποίες η μικροφυσαλίδα είναι έγκλειστη.

Στη συνέχεια, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, έγινε και πάλι αριθμητική προσομοίωση της μικροφυσαλίδας, αλλά αυτή τη φορά μέσα σε κλειστό αγωγό μεγάλου μήκους, από την οποία βλέπουμε την απόκριση που εκείνη έχει για τις διαφορετικές τιμές της συχνότητας της επιβαλλόμενης ακουστικής διαταραχής, του πλάτους της διαταραχής και της ακτίνας του αγωγού. Το σημαντικό σε αυτές τις δοκιμές είναι να εξαχθεί ένα συμπέρασμα για την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας καθώς και το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί, καθώς αυτά τα δύο μεγέθη αποτελούν κρίσιμους παράγοντες στις ιατρικές εφαρμογές.

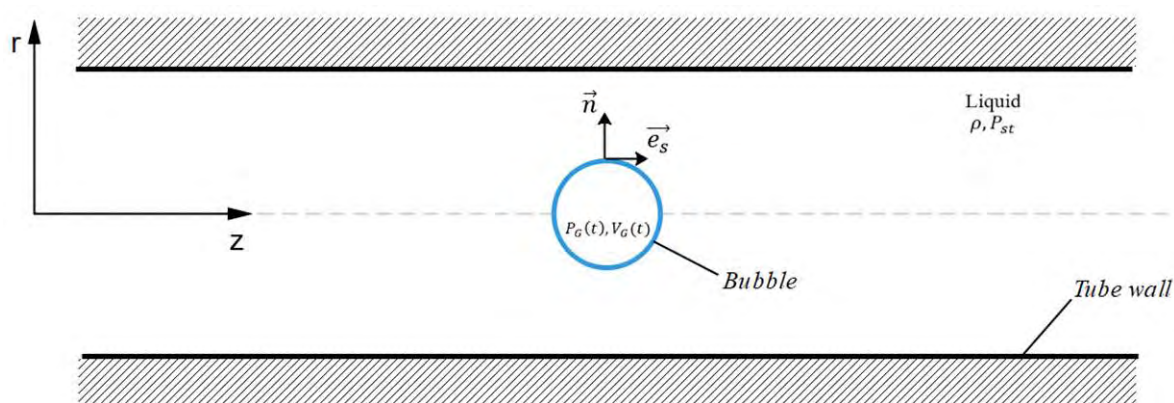
Για περαιτέρω ανάλυση, από τον ίδιο κώδικα εξαχθήκαν και δεδομένα πίεσης-χρόνου για τη φυσαλίδα σε ένα συγκεκριμένο σημείο του αγωγού. Χρησιμοποιώντας ανάλυση FFT, προέκυψαν διαγράμματα πλάτους-συχνότητας από τα οποία μπορεί να εξακριβωθεί η συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας.

Τέλος, επαναλαμβάνοντας την αντίστοιχη προσομοίωση αλλά αυτή τη φορά με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (BEM), εξαχθήκαν αποτελέσματα έτσι ώστε να επικυρωθεί περαιτέρω η εγκυρότητα των δύο προηγούμενων μεθόδων και να υπάρξει μια πιο ολοκληρωμένη σύγκριση μεταξύ των τριών.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

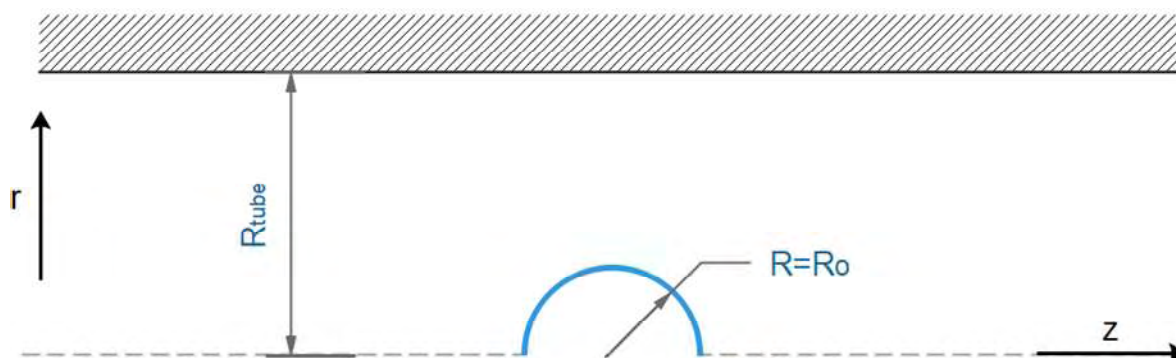
2.1 Σχέσεις και παραδοχές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στη συγκεκριμένη μελέτη εξετάζεται η απόκριση μιας φυσαλίδας η οποία περιβάλλεται από πολυμερικό κέλυφος και βρίσκεται μέσα σε αγωγό με σταθερά τοιχώματα και μήκος αρκετά μεγαλύτερο από την ακτίνα της φυσαλίδας. Η φυσαλίδα εκτελεί μόνο ταλάντωση υπό την επίδραση συνημιτονοειδούς ακουστικής διαταραχής και η όλη διάταξη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.1 Διάταξη που μελετήθηκε. Φυσαλίδα μέσα σε αγωγό.

Για την απλούστευση του προβλήματος και την ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου, θεωρείται ότι υπάρχει συμμετρία ως προς τον άξονα z και τελικά το πρόβλημα το οποίο λύνεται διαμορφώνεται τελικά όπως στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Σχηματική απεικόνιση της διάταξης που επιλύεται υπολογιστικά.

Για την υπολογιστική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται ορισμένες σχέσεις και παραδοχές. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου γίνεται προσπάθεια για την πλήρη αναφορά και επεξήγηση των θεωρητικών σχέσεων και εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα.

Αρχικά, η φυσαλίδα θεωρείται ότι έχει ακτίνα R_0 και ότι η ακτίνα του αγωγού είναι R_t όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2. Η φυσαλίδα επίσης είναι βυθισμένη μέσα σε ασυμπίεστο υγρό με πυκνότητα ρ και ιξώδες μ , καθώς έχει επιφανειακή τάση σ . Η αδιαστατοποίηση των μεταβλητών έγινε ως εξής. Ως χαρακτηριστικό μήκος θεωρείται η ακτίνα της φυσαλίδας R_0 . Παίρνοντας ως δεδομένο ότι ως ω_f θεωρείται η ιδιοσυχνότητα της εξωτερικής ακουστικής διαταραχής, η χαρακτηριστική ταχύτητα ορίζεται ως $\omega_f R_0$ και ο χρόνος αδιαστατοποιείται σύμφωνα με την ποσότητα $\frac{1}{\omega_f}$. Ως χαρακτηριστική πίεση θεωρείται η ποσότητα $\rho \omega_f^2 R_0^2$ και επίσης, θεωρείται ότι μακριά από τα τοιχώματα επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση P_{st} .

Για την περιγραφή της ροής στο πρόβλημα, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes (Σχέση 2.1) καθώς και η εξίσωση της συνέχειας (Σχέση 2.2) και παρατίθενται παρακάτω σε αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\vec{u} = (u_r, u_z, 0) \text{ και}$$

$$Re = \frac{\rho \omega_f^2 R_0^2}{\mu} \text{ ο αριθμός Reynolds για την ροή που περιβάλλει την φυσαλίδα.}$$

Επίσης, ο όρος λόγω βαρύτητας στις εξισώσεις Navier-Stokes θεωρείται αμελητέος για οριζόντιους αγωγούς γι' αυτό και αγνοείται.

Η κινηματική συνθήκη στην διεπιφάνεια της φυσαλίδας ορίζεται ως:

$$u_r = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.3)$$

και η ταχύτητα της ροής στα τοιχώματα του αγωγού θεωρείται μηδενική, άρα:

$$u_r(r = a) = 0, \quad u_z(r = a) = 0 \quad (2.4)$$

Όπου $a = \frac{R_t}{R_0}$ η αδιάστατη ακτίνα του αγωγού.

Στον άξονα συμμετρίας z και για τα τμήματα που βρίσκονται εκτός της φυσαλίδας ισχύει η παρακάτω κινηματική συνθήκη:

$$u_r(r = 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.5)$$

Στη διεπιφάνεια, η κίνηση των σωματιδίων περιγράφεται με τη χρήση της λαγκραντζιανής μεταβλητής ξ , η οποία συνδέεται με το μήκος τόξου της διεπιφάνειας με τη σχέση 2.6:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.6)$$

Όσον αφορά την πίεση, για την κατάσταση ισορροπίας χρησιμοποιείται η εξίσωση Young-Laplace:

$$P_G(t = 0) = P_{st} + \frac{2}{We} \quad (2.7)$$

Όπου έχουμε P_G η πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας, P_{st} η (ατμοσφαιρική) πίεση που επικρατεί μακριά από τα τοιχώματα και $We = \frac{\rho \omega_f^2 R_0^2}{\sigma}$ ο αριθμός Weber, ο οποίος συγκρίνει τις δυνάμεις αδράνειας με τις δυνάμεις της επιφανειακής τάσης.

Στο εσωτερικό της φυσαλίδας η πίεση μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο και η μεταβολή θεωρείται αδιαβατική. Θεωρούμε επίσης την πυκνότητα και το ιξώδες του αερίου που βρίσκεται στο εσωτερικό αμελητέα, καθώς το ίδιο ισχύει και για τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ της φυσαλίδας και του ρευστού που την περιβάλλει. Σύμφωνα με αυτά ισχύει ότι:

$$P_G(t = 0)V_G^\gamma(t = 0) = P_G(t)V_G^\gamma(t) \quad (2.8)$$

Με V_G συμβολίζεται ο όγκος της φυσαλίδας και γ είναι η σταθερά του αερίου.

Καθώς το κέλυφος της φυσαλίδας είναι από πολυμερές υλικό, ισχύει ο γραμμικός καταστατικός νόμος neo – Hookean. Οι τάσεις δίνονται από τις σχέσεις 2.9 και 2.10:

$$t_{ss}^H = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\lambda_\varphi} [\lambda_s^2 - 1 + \nu(\lambda_\varphi^2 - 1)] \quad (2.9)$$

$$t_{\varphi\varphi}^H = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\lambda_s} [\lambda_\varphi^2 - 1 + \nu(\lambda_s^2 - 1)] \quad (2.10)$$

Όπου E είναι το αδιάστατο μέτρο ελαστικότητας, ν ο λόγος Poisson και $\lambda_s, \lambda_\varphi$ είναι οι παραμορφώσεις στις δύο κύριες κατευθύνσεις.

$$E = \frac{\chi}{\rho\omega_f^2 R_0^3} \quad (2.11)$$

Με χ το επιφανειακό μέτρο διαστολής για το οποίο ισχύει:

$$\chi = 3G_{3D}\delta \quad (2.12)$$

Ως G_{3D} ορίζεται το μέτρο διάτμησης της μεμβράνης και δ είναι το πάχος του κελύφους γύρω από τη φυσαλίδα.

Το ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας σε αδιάστατη μορφή παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\left(-P\underline{I} + \frac{1}{Re}\underline{\tau}_l\right) \cdot \vec{n} + P_G \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n})\vec{n}}{We} + \overline{\Delta F} = \frac{2k_m}{We}\vec{n} + \overline{\Delta F} \quad (2.13)$$

Όπου έχουμε τους εξής συμβολισμούς:

\underline{I} : Μοναδιαίος τανυστής τάσεων του υγρού

$\underline{\tau}_l$: Αποκλίνων τανυστής τάσεων του υγρού

$\vec{\nabla}_s$: Επιφανειακή κλίση

k_m : Μέση καμπυλότητα

$\overline{\Delta F}$: Δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια λόγω εξωδοελαστικών ιδιοτήτων της μεμβράνης

\vec{n} : Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια

Η δύναμη $\overline{\Delta F}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta F} &= \Delta F_n \cdot \vec{n} + \Delta F_t \cdot \vec{e}_s = \\ &= \left[k_s \tau_{ss} + k_\varphi \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial S} (rq) \right] \vec{n} - \left[\frac{\partial \tau_{ss}}{\partial S} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} (\tau_{ss} - \tau_{\varphi\varphi}) + k_s q \right] \vec{e}_s\end{aligned}\quad (2.14)$$

Όπου περαιτέρω έχουμε τις διατμητικές τάσεις q , το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην επιφάνεια \vec{e}_s , το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια \vec{n} και τις καμπυλότητες στις δύο κύριες κατευθύνσεις k_s και k_φ .

$$k_s = \frac{r_\xi z_{\xi\xi}}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}} - \frac{z_\xi r_{\xi\xi}}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}}\quad (2.15)$$

$$k_\varphi = \frac{z_\xi}{r(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}}\quad (2.16)$$

$$\vec{e}_s = \frac{r_\xi}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}} \vec{e}_r + \frac{z_\xi}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}} \vec{e}_z\quad (2.17)$$

$$\vec{n} = \frac{z_\xi}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}} \vec{e}_r + \frac{r_\xi}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}} \vec{e}_z\quad (2.18)$$

$$q = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r m_s) - m_\varphi \right]\quad (2.19)$$

Στη σχέση 2.19 με m_s και m_φ συμβολίζονται οι ροπές κάμψης στις δύο κύριες διευθύνσεις που παίρνουν τιμές:

$$m_s = \frac{k_b}{\lambda_\varphi} (K_s + \nu K_\varphi)\quad (2.20)$$

$$m_\varphi = \frac{k_b}{\lambda_s} (K_\varphi + \nu K_s)\quad (2.21)$$

με k_b το μέτρο δυσκαμψίας του κελύφους, ν , όπως αναφέρθηκε ήδη είναι ο λόγος Poisson και ως K_s και K_φ έχουμε τις καμπτικές τάσεις στην εφαπτομενική και στην αξιμούθια διεύθυνση αντίστοιχα για τις οποίες ισχύουν:

$$K_s = \lambda_s k_s - k_s^R \quad (2.22)$$

$$K_\varphi = \lambda_\varphi k_\varphi - k_\varphi^R \quad (2.23)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα k_s^R και k_φ^R , αναφέρονται στην αδιάστατη ακτίνα καμπυλότητας στις κύριες διευθύνσεις, εκεί που η μεμβράνη δεν δέχεται καμπτικές ροπές. Καθώς το σχήμα μας είναι σφαιρικό, ισχύει ότι: $k_s^R = k_\varphi^R = 1$.

Τέλος για την επιφανειακή κλίση k_m έχουμε ότι:

$$k_m = \frac{k_s + k_\varphi}{2} \quad (2.24)$$

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται εφικτή η προσομοίωση της φυσαλίδας με πολυμερικό κέλυφος μέσα στον αγωγό. Το κύριο μέλημα της εργασίας, είναι να προσφέρει μια καλύτερη κατανόηση για την επιρροή που έχει το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής καθώς και η ακτίνα του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της μικροφυσαλίδας και το πλάτος ταλάντωσης που εκείνη εκτελεί. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη της φυσαλίδας μένουν κατά κύριο λόγο σταθερά κατά τη διάρκεια αυτής της μελέτης, έτσι ώστε να υπάρχει μια βάση για την σύγκριση μεταξύ των διαφορετικών μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν.

Ορισμένα από αυτά τα χαρακτηριστικά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

$R_o [\mu m]$	$\delta [\mu m]$	$k_b [N \cdot m]$	$\sigma [N/m]$	$G_s [Pa]$	γ	$\mu_s [Pa \cdot s]$
1.5	0.05	$1.25 \cdot 10^{-14}$	0	$300 \cdot 10^6$	1.07	0.048

Πίνακας 2.1 Ιδιότητες φυσαλίδας

Για το ρευστό έξω από τη φυσαλίδα θεωρούνται οι παρακάτω τιμές:

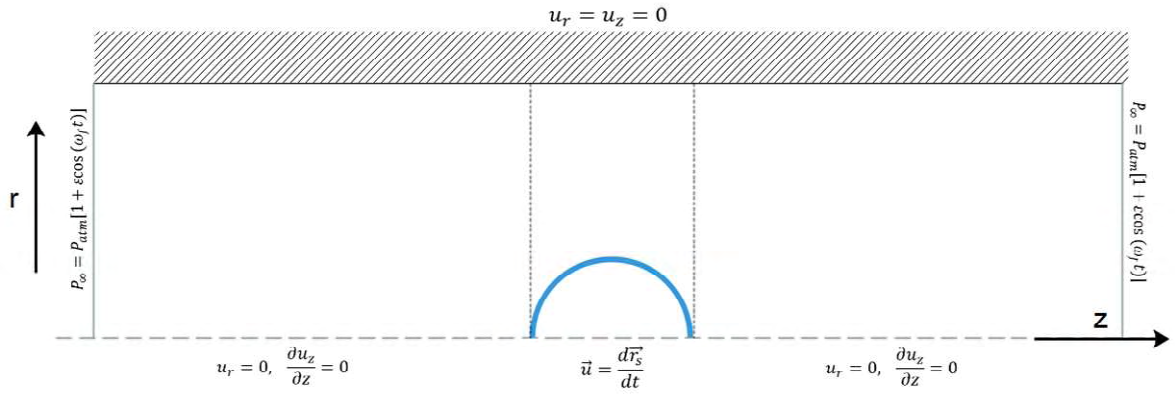
Ιξώδες: $\mu = 0,001 [Pa \cdot s]$

Πυκνότητα: $\rho = 998 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$

Λόγος Poisson: $\nu = 0.5$

2.2 Περιγραφή της διάταξης

Όπως αναφέρθηκε, στο πρόβλημα που επιλύεται, φυσαλίδα βρίσκεται μέσα σε αγωγό και ταλαντώνεται υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής με πλάτος ε και συχνότητα ω_f . Το πεδίο ταχυτήτων είναι αδιατάρακτο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3 Σχηματική απεικόνιση του ροϊκού πεδίου φυσαλίδας που υποβάλλεται σε ακουστική διαταραχή.

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα με πολύ μεγαλύτερο μήκος κύματος από το μέγεθος της φυσαλίδας. Έτσι, μπορεί να υποθεθεί με ακρίβεια ότι η πίεση παραμένει σταθερή σε μια περιοχή κοντά στη φυσαλίδα (πάνω στον άξονα z) και ότι είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Η κυματική εξίσωση που περιγράφει την διαταραχή έχει ως εξής:

$$P = P_{st} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{L/R_0}\right) \cos(\omega_f t) \right] \quad (2.25)$$

Οι εξισώσεις και οι παραδοχές που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα 2.1 περιγράφουν τη ροή, ενώ οι συνοριακές συνθήκες μακριά από τη φυσαλίδα κατά την αξονική διεύθυνση έχουν την παρακάτω μορφή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3.

$$z = 0: P \rightarrow P_{\infty} = P_{atm} [1 + \varepsilon \cos(\omega_f t)], \quad \vec{u} \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

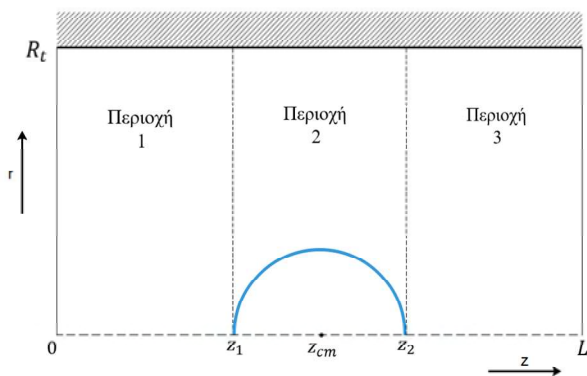
$$z \rightarrow \infty: P \rightarrow P_{\infty} = P_{atm} [1 + \varepsilon \cos(\omega_f t)], \quad \vec{u} \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

Με αυτό τον τρόπο, μελετάται η επίδραση του πλάτους ε και της μείωσης της ακτίνας του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας.

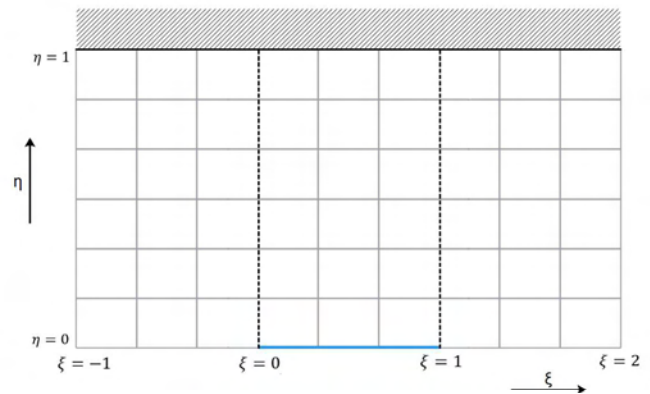
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

3.1 Κατασκευή Πλέγματος – Ελλειπτική μέθοδος

Το πλέγμα το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος κατασκευάστηκε με την ελλειπτική τεχνική. Η ελλειπτική τεχνική κατασκευής πλέγματος αν και απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, ενδείκνυται για περιπτώσεις που οι παραμορφώσεις είναι έντονες και αποφέρει μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς. Ο τρόπος που λειτουργεί, έχει ως εξής: Για να μπορέσει να μετατραπεί ικανοποιητικά το φυσικό πεδίο στο υπολογιστικό, για κάθε συντεταγμένη του υπολογιστικού πεδίου, λύνεται μια μερική διαφορική εξίσωση.

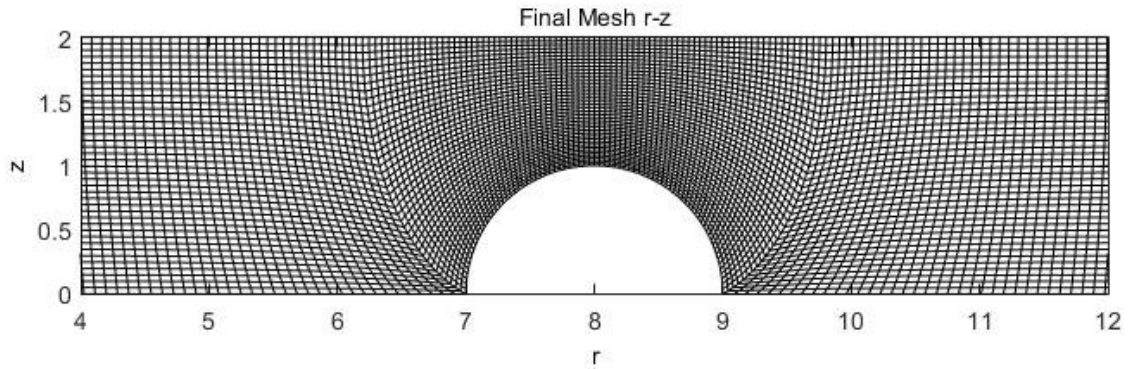


Σχήμα 3.2 Φυσικό πεδίο

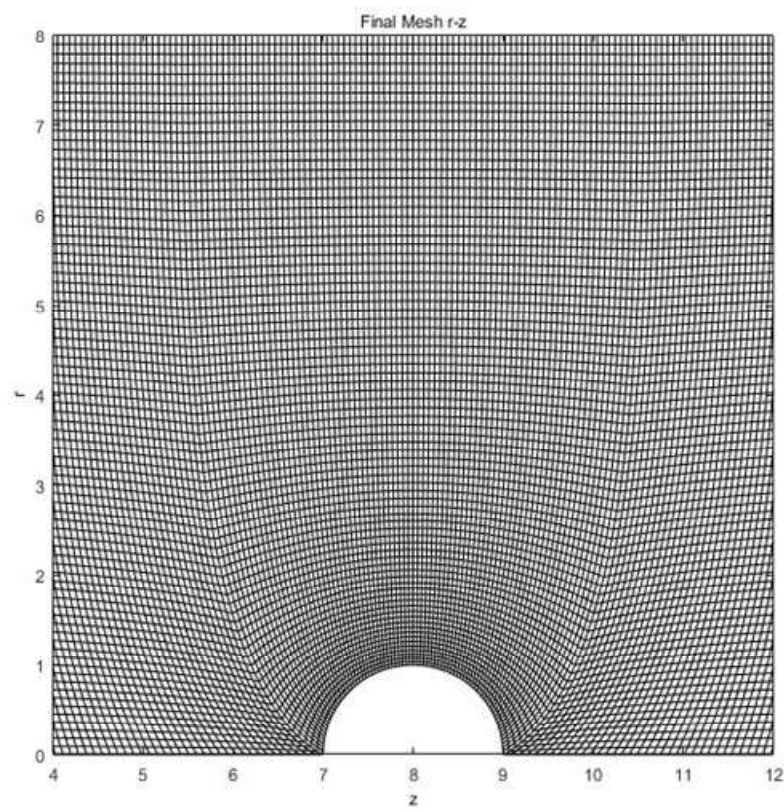


Σχήμα 3.1 Υπολογιστικό πεδίο

Οι διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι ένας συνδυασμός σταθμισμένων συναρτήσεων, σκοπός των οποίων είναι, να ελέγχουν την πυκνότητα, την ομαλότητα και την ορθογωνιότητα του πλέγματος. Επομένως, εκείνες είναι που επηρεάζουν την ποιότητα του υπολογιστικού πλέγματος που θα προκύψει και κατά συνέπεια κρίνουν και την ακρίβεια των υπολογισμών. Η εργασία βασίζεται σε έναν οιονεί-ελλειπτικό μετασχηματισμό όπως αναπτύχθηκε από τους Vlachomitrou – Pelekasis [35], ο οποίος έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να ακολουθήσει ικανοποιητικά μεγάλες παραμορφώσεις του όγκου ελέγχου, απαιτώντας όμως την ελάχιστη δυνατή ανακατασκευή του πλέγματος. Δύο από τα πλέγματα που προέκυψαν από τις δοκιμές παρουσιάζονται παρακάτω:



Σχήμα 3.3 Αριθμητικό πλέγμα για αγωγό με $\alpha = 2 \rightarrow R_t = 2R_o, \frac{L}{R_o} = 16$



Σχήμα 3.4 Αριθμητικό πλέγμα για αγωγό με $\alpha = 8 \rightarrow R_t = 8R_o, \frac{L}{R} = 16$

Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται προσπάθεια για περαιτέρω ανάλυση της ελλειπτικής τεχνικής κατασκευής πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε.

Αρχικά, το πεδίο επίλυσης χωρίζεται σε τρία επιμέρους τμήματα όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 3.2. Στη συνέχεια, το πλέγμα δημιουργείται από αριστερά προς τα δεξιά και

για την αρχή κάθε περιοχής, χρησιμοποιούνται ως οριακές συνθήκες οι συντεταγμένες στο τέλος της προηγούμενης. Δηλαδή, το πλέγμα κατασκευάζεται από $z = 0$ μέχρι $z = z_1$, στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τα σημεία της γραμμής $z = z_1$ ως οριακές συνθήκες και κατασκευάζεται η περιοχή 2 μέχρι $z = z_2$ και με τον αντίστοιχο τρόπο δημιουργείται και το πλέγμα στην περιοχή 3.

Το σχήμα της φυσαλίδας στην αρχή περιγράφεται από την σχέση:

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{(z - z_{cm})^2}{R_{eq}^2} = 1 \quad (3.1)$$

Όπου R_{eq} η αδιάστατη ακτίνα της φυσαλίδας.

Η αρχική συνθήκη για να ξεκινήσει η κατασκευή του πλέγματος είναι για $b=0$ και θεωρείται η παρακάτω λύση:

$$r = r_{\infty}\eta \quad (3.2)$$

$$z = \begin{cases} \xi z_1 + z_1, & -1 \leq \xi \leq 0 \\ \xi(z_2 - z_1) + z_1, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \xi(z_{\infty} - z_2) + 2z_2 - z_{\infty}, & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Όπου $r_{\infty} = \alpha$, $z_2 = z_1 + 2R_{eq}$, $z_{\infty} = \frac{L}{R_0}$

Στη συνέχεια το πλέγμα κατασκευάζεται σταδιακά και μέχρι $b = R_{eq}$, όπου το σχήμα είναι σφαιρικό και αποτελεί την αρχή για την μετέπειτα επίλυση της ροής.

Άρα γίνεται ο μετασχηματισμός $(r, z, t) \xrightarrow{|J|} (\eta, \xi, t)$ και όπου $|J|$ έχουμε την ιακωβιανή του μετασχηματισμού για την οποία ισχύει:

$$|J| = r_{\eta}z_{\xi} - r_{\xi}z_{\eta}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad -1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.4)$$

Οι συντεταγμένες των κόμβων στο υπολογιστικό πεδίο προσδιορίζονται με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων 3.5 και 3.6.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_{\xi}^2 + z_{\xi}^2}{r_{\eta}^2 + z_{\eta}^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \vec{\nabla}_{\xi} = 0 \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση δημιουργεί τις η -καμπύλες οι οποίες έχουν σταθερό ξ και είναι σχεδόν κάθετες στην επιφάνεια. Στη συγκεκριμένη σχέση έγκειται και η κύρια διαφορά από τη συνηθισμένη ελλειπτική μεθοδολογία. Ο όρος $\sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}}$ εξασφαλίζει όσο γίνεται την καθετότητα των η -καμπυλών στη διεπιφάνεια. Το ε_1 αποτελεί μια εμπειρική παράμετρο η οποία καθορίζει την ομαλότητα του πλέγματος σε σχέση με την καθετότητα και παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1.

Η τιμή του καθορίζεται με δοκιμή και σφάλμα ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα και στην προκειμένη περίπτωση παίρνει την τιμή $\varepsilon_1 = 0.1$.

Η εξίσωση 3.6 παράγει αντίστοιχα τις ξ -καμπύλες που είναι όσο το δυνατόν παράλληλες προς τη διεπιφάνεια και πρέπει να είναι ικανές να ακολουθούν τις παραμορφώσεις που εκείνη έχει.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \eta = 0 \quad (3.6)$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις λύνονται με τη βοήθεια της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Galerkin και τελικά μετασχηματίζονται στις:

$$\iint \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} B_i dr dz + L_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\iint \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} B_i dr dz \quad (3.8)$$

Με B_i συμβολίζονται οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης προκύπτουν ορισμένοι επικαμπύλιοι όροι, οι οποίοι μηδενίζονται έτσι ώστε να εγγυάται η ορθογωνιότητα των καμπυλών στα σύνορα του πλέγματος.

Στα σύνορα έχουμε γνωστές συντεταγμένες, άρα δεν γράφουμε τις εξισώσεις πλέγματος. Αντί για αυτές χρησιμοποιούμε την τιμή της εκάστοτε συντεταγμένης ως ουσιαστική οριακή συνθήκη. Έτσι τελικά στα σύνορα εφαρμόζονται οι παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\xi = 1 \rightarrow z = 0 \quad (3.9)$$

$$\xi = 2 \rightarrow z = z_{\infty} = \frac{L}{R_0} \quad (3.10)$$

$$\eta = 0 \rightarrow r = \begin{cases} 0, & -1 \leq \xi \leq 0 \text{ και } 1 \leq \xi \leq 2 \\ b\sqrt{1 - (z - z_{cm})^2}, & 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\eta = 1 \rightarrow r = r_{\infty} = a \quad (3.12)$$

Επίσης, χρησιμοποιείται η μέθοδος της ποινής στα σύνορα καθώς πρέπει να γίνει έλεγχος της κατανομής των κόμβων. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος εφαρμόζεται μόνο για την κινούμενη διεπιφάνεια (όπου $\eta = 0$) και στις καμπύλες $\xi = 0$ και $\xi = 1$. Συνεπώς, στα συγκεκριμένα σημεία η εξίσωση 3.7 παίρνει τη μορφή:

$$\iint \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_{\xi}^2 + z_{\xi}^2}{r_{\eta}^2 + z_{\eta}^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \vec{\nabla}_{\xi} \cdot \vec{\nabla} B_i dr dz + L \int \frac{\partial B_i}{\partial \xi} \sqrt{w_1 r_{\xi}^2 + w_2 z_{\xi}^2} d\xi = 0 \quad (3.13)$$

Όπου έχουμε επιπλέον:

L : Παράμετρος ποινής με τιμές $L = O(10^3 - 10^5)$

w_1, w_2 : Βάρη για τα οποία ισχύει: $w_1 + w_2 = 2$

Τα βάρη επιλέγονται με δοκιμή και σφάλμα ανάλογα με το πρόβλημα που επιλύεται. Στην περίπτωση που μελετάται στην παρούσα εργασία έχουν επιλεγθεί οι τιμές που παρουσιάζονται στον πίνακα παρακάτω:

	L	w₁
$\eta = 0$	10^3	1
$\xi = 0$	10^3	0.5
$\xi = 1$	10^3	0.5

Πίνακας 3.1 Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου ποινής

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί και ο κανόνας της αλυσίδας, ο οποίος χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν οι χωρικές και χρονικές παράγωγοι των μεταβλητών που αναφέρθηκαν παραπάνω.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \eta_r \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_r \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.16)$$

Για τα $\eta_r, \eta_z, \xi_r, \xi_z$ ισχύει ότι: $\eta_r = \frac{z\xi}{|J|}, \eta_z = -\frac{r\xi}{|J|}, \xi_r = -\frac{z\eta}{|J|}, \xi_z = \frac{r\eta}{|J|}, drdz = |J|d\eta d\xi$

Για να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός του σχήματος της διεπιφάνειας της φουσαλίδας, χρησιμοποιείται το ισοζύγιο δυνάμεων που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα (Σχέση 2.13). Για την επίλυση του ισοζυγίου, χρησιμοποιούνται αντίστοιχα Galerkin FEM. Εξαιτίας όμως της ύπαρξης μιας τέταρτης τάξης χωρικής παραγώγου, η διακριτοποίηση εδώ πραγματοποιείται με κυβικές συναρτήσεις splines. Το ισοζύγιο δυνάμεων δεν εφαρμόζεται ως φυσική οριακή συνθήκη. Αντίθετα, μέσω αυτού, υπολογίζεται το σχήμα στη διεπιφάνεια και στη συνέχεια το σχήμα που προκύπτει χρησιμοποιείται ως ουσιαστική συνοριακή συνθήκη για τη δημιουργία του πλέγματος.

3.2 Αριθμητική Επίλυση

Όπως αναφέρθηκε ήδη, για την αριθμητική επίλυση του συστήματος που προκύπτει από τις εξισώσεις που παρατέθηκαν παραπάνω, χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Galerkin. Παρακάτω γίνεται μια πιο εκτενής περιγραφή του τρόπου που αυτή εφαρμόζεται

Αρχικά, για την χρονική ολοκλήρωση του προβλήματος, χρησιμοποιείται το πλήρως άρρητο σχήμα Euler. Για την προσομοίωση της ταχύτητας χρησιμοποιούνται διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange, ενώ για την πίεση χρησιμοποιούνται διγραμμικές. Αυτό συμβαίνει, διότι έτσι αποφεύγονται οι αριθμητικές διαταραχές που προκύπτουν από τη μη ικανοποίηση του κριτηρίου ευστάθειας που περιγράφεται από τους Babuska [37-38] και

Brezi[39]. Συνεπώς, οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας μετατρέπονται στις εξισώσεις 3.17 και 3.18:

$$\iiint B_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{e}_k dV + \iiint B_i (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \cdot \vec{e}_k dV + \iiint B_i \vec{\nabla} p \cdot \vec{e}_k dV - \frac{1}{Re} \iiint \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{B}_i \vec{e}_k dV = 0 \quad (3.17)$$

$$\iiint B_{l,i} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV = 0 \quad (3.18)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνεται παραγωγικά η εξίσωση (3.17) και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \iiint B_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{e}_k dV + \iiint B_i (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \cdot \vec{e}_k dV - \iiint p \vec{\nabla} (B_i \vec{e}_k) dV + \frac{1}{Re} \iiint \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{\nabla} (B_i \vec{e}_k) dV \\ + \oint B_i \vec{N} \cdot \left(p \underline{\underline{I}} - \frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{e}_k \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Όπου έχουμε:

B_i : Διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

$B_{l,i}$: Διγραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

$dV = r dr dz d\theta$: Διαφορικός όγκος

\vec{e}_k : αναφέρεται στα \vec{e}_r, \vec{e}_z ώστε να προκύψουν οι συνιστώσες του ισοζυγίου ορμής στις r και z κατευθύνσεις.

$dA = r dS d\theta$

Η εξίσωση 3.19 δεν γράφεται στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας καθώς εκεί υπάρχει ανάγκη για επίλυση τέταρτης τάξης χωρικής παραγώγου, κάτι το οποίο είναι αδύνατο με τις συναρτήσεις βάσεις που χρησιμοποιούνται. Γι' αυτό το λόγο αντί για την εξίσωση 3.19, επιβάλλουμε την εξίσωση κινηματικής συνθήκης στη διεπιφάνεια (Σχέση 2.3) ως αναγκαία οριακή συνθήκη.

Στο τέλος της ενότητας 3.1 αναφέρεται ότι για τον υπολογισμό του σχήματος της διεπιφάνειας χρησιμοποιείται το ισοζύγιο δυνάμεων. Το ισοζύγιο για να μπορέσει να επιλυθεί, πρώτα διακριτοποιείται ως εξής με συναρτήσεις βάσης κυβικών splines:

$$\int b_i \left(-p \underline{\underline{I}} + \frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}}_l \right) \cdot \vec{n} dS + \int b_i P_G \cdot \vec{n} dS - \int b_i \frac{2k_m}{We} \vec{n} dS + \int b_i \overline{\Delta F} dS = 0 \quad (3.20)$$

Με: $dS = \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} d\xi$ το μήκος ολοκλήρωσης.

Και b_i οι μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης splines.

Για την αντιμετώπιση της μη γραμμικότητας των εξισώσεων που προκύπτουν χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson. Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου λύνεται ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{J} \cdot \underline{dC} = \underline{R} \quad (3.21)$$

Όπου:

\underline{R} : Διάνυσμα των υπολοίπων

\underline{dC} : Διάνυσμα αγνώστων

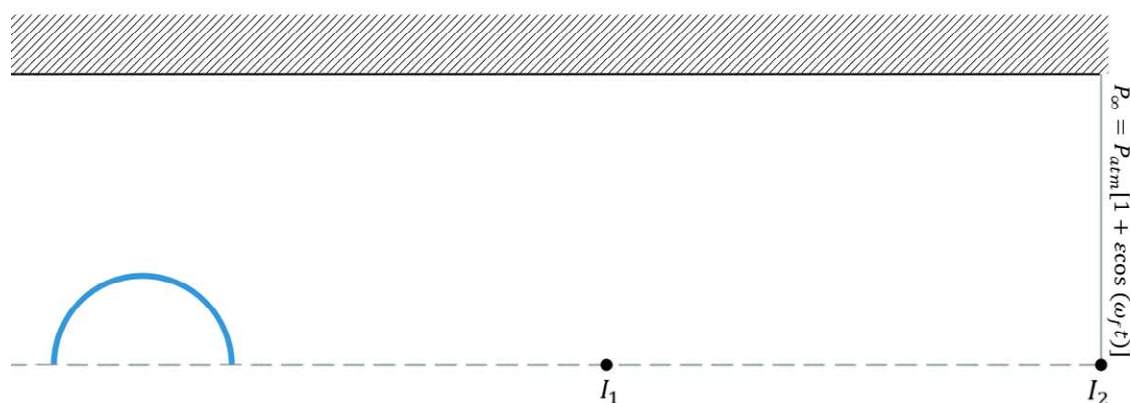
Στο διάνυσμα των αγνώστων συμπεριλαμβάνονται το σχήμα της φουσαλίδας, οι πιέσεις του ρευστού και του εσωτερικού της φουσαλίδας, καθώς και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας.

\underline{J} : Ιακωβιανή του μετασχηματισμού (σε μορφή Arrow)

Ο πίνακας \underline{J} προκύπτει από την παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους.

3.3 Ανάλυση με FFT

Για το τρίτο μέρος της παρούσας εργασίας, εξαχθήκαν από τον κώδικα που εκτελέστηκε δεδομένα πίεσης-χρόνου σε συγκεκριμένο σημείο του αγωγού, έτσι ώστε να γίνει πάνω σε αυτά ανάλυση Fourier.. Η πίεση μετρήθηκε σε δύο διαφορετικά σημεία I_1 και I_2 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.5 Σημεία μέτρησης πίεσης για την ανάλυση με FFT

Η πίεση στο σημείο I_2 , αναπαριστά την πίεση στην έξοδο του αγωγού και θεωρείται ως P_∞ . Στη συνέχεια, υπολογίζεται η διαφορά $P(I_1) - P(I_2)$ η οποία πρακτικά περιγράφει τη διαταραχή της πίεσης σε εκείνο το σημείο (I_1). Τα δεδομένα αυτά, αρχικά διαστατοποιούνται και έπειτα, μέσω του προγράμματος Origin, μετασχηματίζεται η χρονοσειρά της πίεσης, που εξάχθηκε, στο πεδίο της συχνότητας με ανάλυση FFT (Fast Fourier Transform). Τα διαγράμματα που παράγονται (πλάτος – συχνότητα) εμφανίζουν τη συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας ως μια κορυφή (peak) όπου παρατηρείται και το μέγιστο πλάτος. Τέτοιου είδους διαγράμματα εμφανίζονται και αναλύονται εκτενώς στην ενότητα 4.2.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

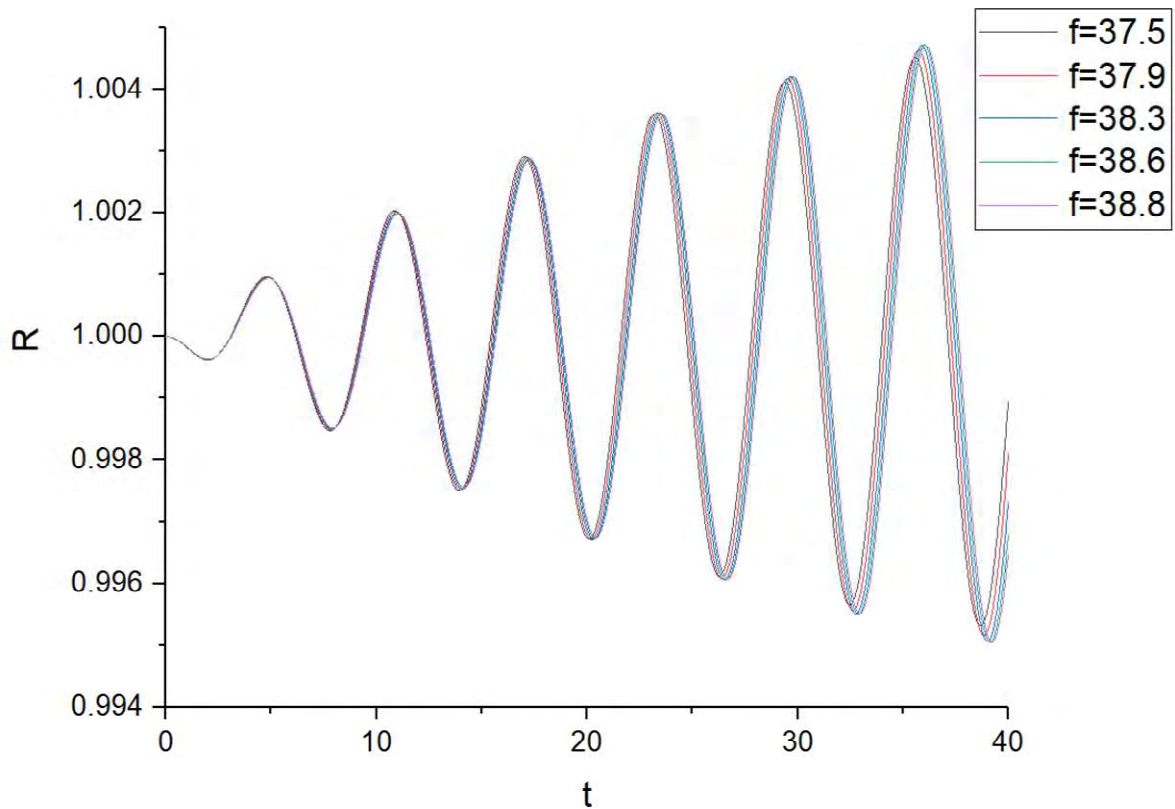
4.1 Φυσαλίδα σε μη περιορισμένη ροή

4.1.1 Απόκριση με FEM

Αρχικά, πριν μελετηθεί η συμπεριφορά της φυσαλίδας ενώ βρίσκεται μέσα σε αγωγό, γίνεται προσομοίωση για την απόκρισή της σε μη περιορισμένη ροή. Αυτό γίνεται εφικτό αν κανείς υποθέσει για την ακτίνα του σωλήνα Rt : $Rt \rightarrow \infty$. Οι προσομοιώσεις αυτές είναι σημαντικές, καθώς θέτουν μια βάση για σύγκριση με τις μετέπειτα δοκιμές και βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση της επιρροής που έχει ο αγωγός στην ταλάντωση της φυσαλίδας.

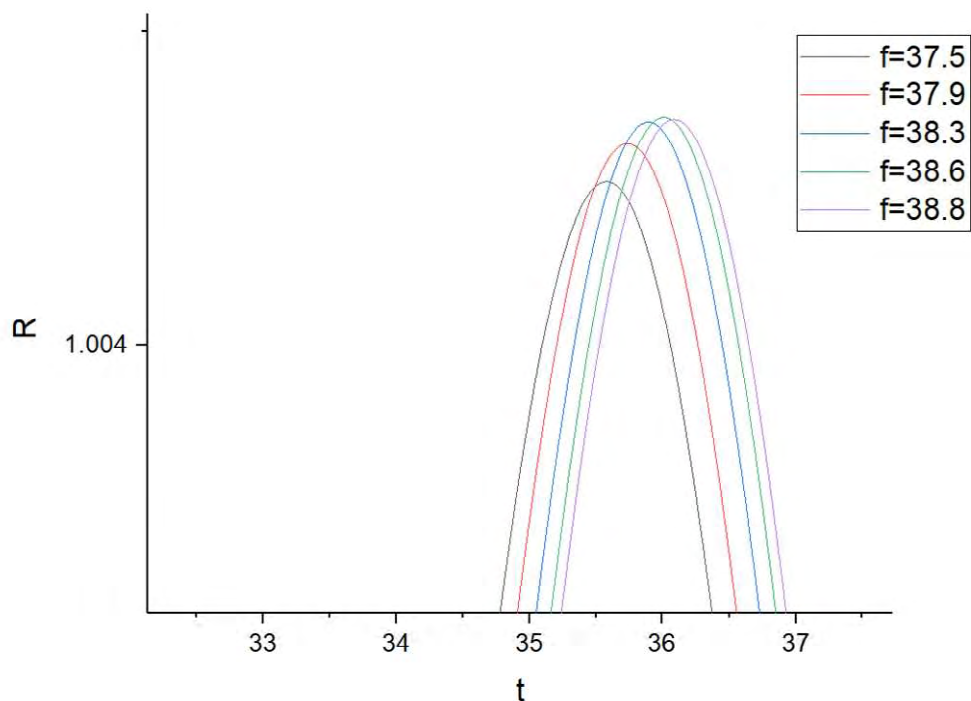
Στο σύνολο των δοκιμών, επιλέγεται να διατηρηθεί σταθερό μήκος αγωγού, καθώς και σταθερή ακτίνα φυσαλίδας με λόγο: $\frac{L}{R_0} = 16$. Η φυσαλίδα περιγράφεται από τις ιδιότητες που παρουσιάστηκαν και στον πίνακα 2.1, ενώ οι ιδιότητες της ροής φαίνονται κάτω από τον πίνακα 2.1. Κύριος στόχος της μελέτης είναι η παρατήρηση της μεταβολής της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας ανάλογα με το πλάτος της ακουστικής διαταραχής που της επιβάλλεται, καθώς και της ακτίνας του αγωγού όταν βρίσκεται σε περιορισμένη ροή. Η τιμή που αναμένεται να βρεθεί για την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας, όταν η τελευταία είναι ελεύθερη, είναι κοντά στην πρόβλεψη της θεωρητικής σχέσης 1.1, δηλαδή 36.8 MHz.

Για τον λόγο αυτόν, λοιπόν, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε στις ενότητες 2 και 3 γίνονται δοκιμές για την απόκριση της φυσαλίδας για διάφορες τιμές της συχνότητας και του πλάτους της επιβαλλόμενης ακουστικής διαταραχής. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα από τα διαγράμματα που εξαχθήκαν από τα αποτελέσματα, από το οποίο μπορεί κανείς να εξακριβώσει την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας για την προκειμένη περίπτωση της μη περιορισμένης ροής.



Σχήμα 4.1 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

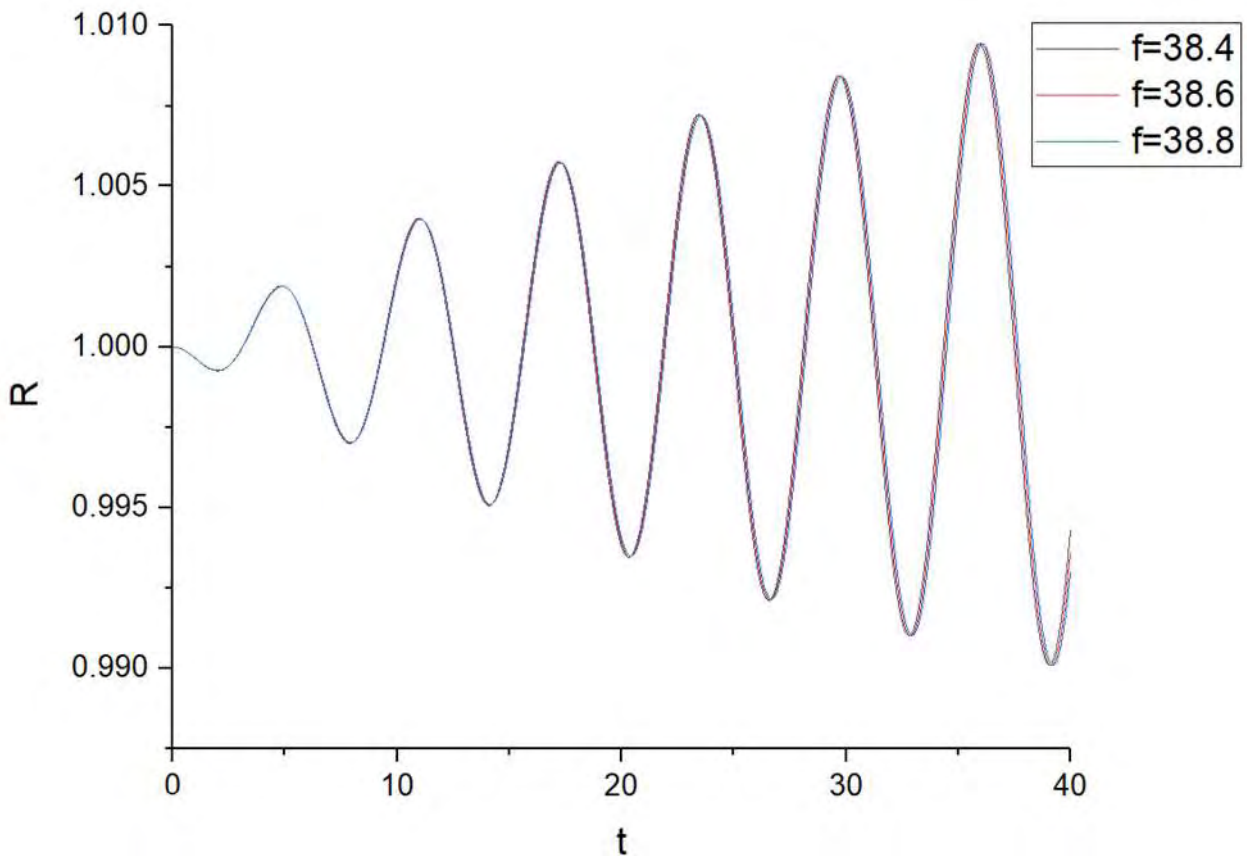
Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα στον κάθετο άξονα έχουμε την (αδιάστατη) ακτίνα της φυσαλίδας και στον οριζόντιο άξονα έχουμε τον (αδιάστατο) χρόνο. Η κάθε μία από τις καμπύλες, παρουσιάζει την απόκριση που έχει η φυσαλίδα σε μια ακουστική διαταραχή με συχνότητα (σε MHz) που φαίνεται στο υπόμνημα. Τα κομμάτια τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερη σημασία, είναι οι κορυφές οι οποίες σχηματίζονται, καθότι σε εκείνες η φυσαλίδα εκτελεί την ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος. Για να εξακριβωθεί η ιδιοσυχνότητα, αρκεί να γίνουν αρκετές δοκιμές, έτσι ώστε να βρεθεί το σημείο μετά από το οποίο η ακτίνα της φυσαλίδας αρχίζει να φθίνει. Σε εκείνο το σημείο η φυσαλίδα εκτελεί την ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος και εκείνη η συχνότητα αποτελεί την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας. Για να διακρίνεται πιο εύκολα το σημείο αυτό, παρατίθεται μια μεγέθυνση του διαγράμματος 4.1 στην τελευταία κορυφή.



Σχήμα 4.2 Μεγέθυνση στην τελευταία κορυφή του σχήματος 4.1

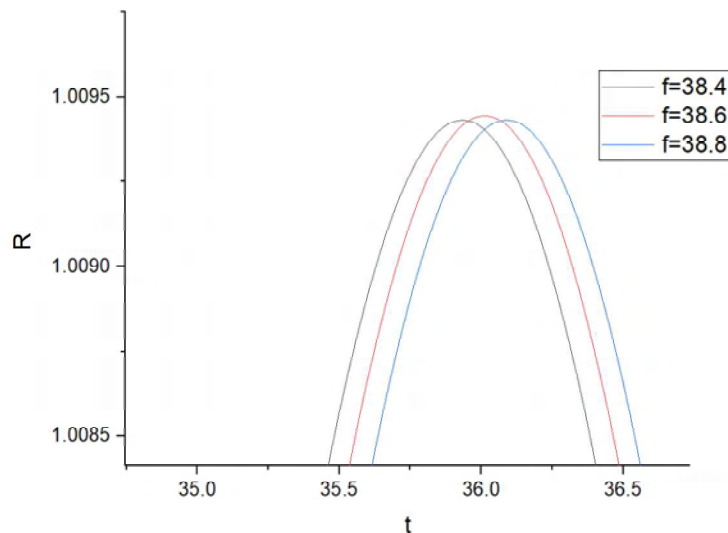
Από το σχήμα 4.2 μπορεί κανείς να διακρίνει την συχνότητα για την οποία αρχίζει η μείωση της (μέγιστης) ακτίνας της φυσαλίδας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι για διαταραχή με συχνότητα 38.6 MHz, άρα αυτή αποτελεί και την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας. Η τιμή αυτή φαίνεται ότι είναι αρκετά κοντά σε εκείνη που υπολογίστηκε από τη θεωρητική σχέση 1.1 (36.8MHz). Οι δοκιμές αυτές έγιναν για πλάτος της εξωτερικής διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$.

Η συγκεκριμένη μεταβλητή, όμως, είναι σημαντική και αξίζει να παρατηρηθεί η συμπεριφορά της φυσαλίδας και για μεγαλύτερα ε . Έτσι, παρακάτω παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα που έγιναν για προσομοιώσεις με $\varepsilon = 1$ για φυσαλίδα σε μη περιορισμένη ροή.



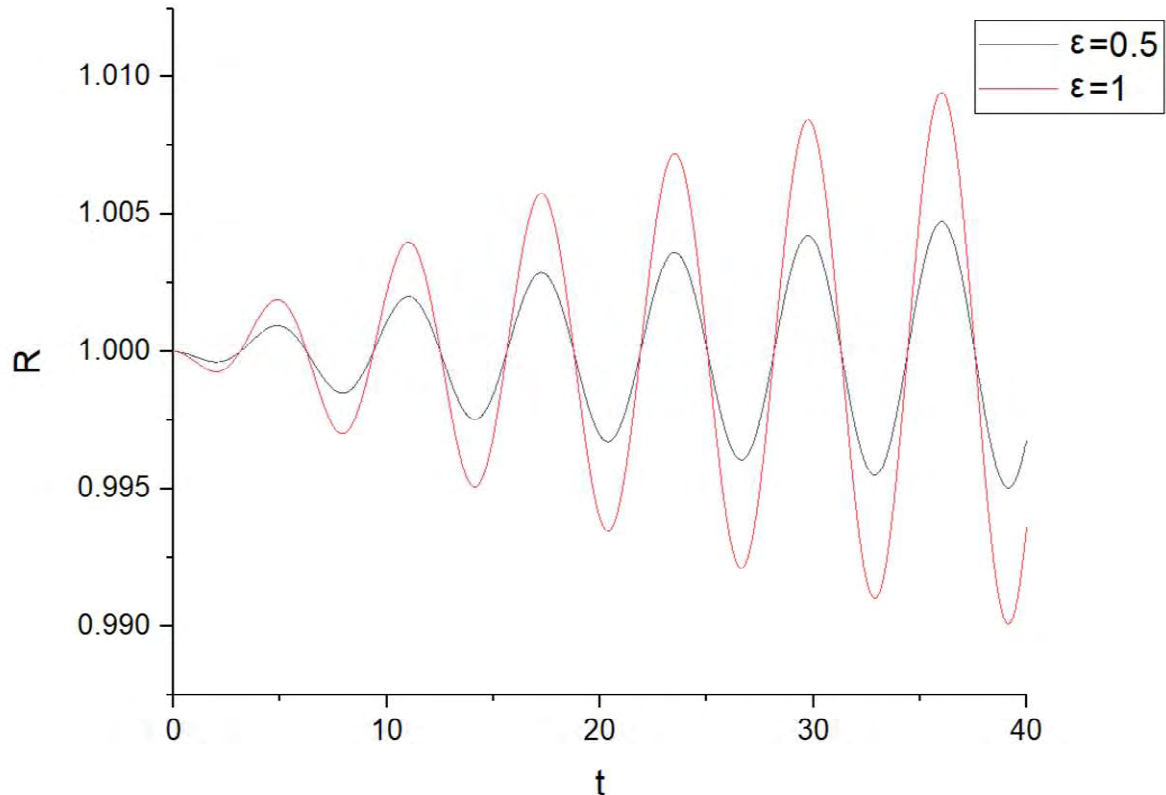
Σχήμα 4.3 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

Αντίστοιχα και σε αυτό το διάγραμμα η διαφορά στη συχνότητα της διαταραχής μεταξύ των δοκιμών είναι μικρή. Αυτό συμβαίνει, έτσι ώστε να διαπιστωθεί με ακρίβεια η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας. Η διαφορά αυτή καθιστά τη μεγέθυνση αναγκαία για να μπορεί κανείς με ακρίβεια να συμπεράνει την ιδιοσυχνότητα.



Σχήμα 4.4 Μεγέθυνση στην τελευταία κορυφή του σχήματος 4.3

Όπως φαίνεται και σε αυτή την περίπτωση έχουμε $f_o = 38.6 \text{ MHz}$. Αυτό σημαίνει ότι ο διπλασιασμός του πλάτους της διαταραχής δεν είχε καμία επίδραση πάνω στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας. Για να υποστηριχθεί περαιτέρω αυτό το αποτέλεσμα έγινε και το διάγραμμα για $f_o = 38.6 \text{ MHz}$, αλλά για τις δύο διαφορετικές τιμές του ε : $\varepsilon = 0.5$ και $\varepsilon = 1$.



Σχήμα 4.5 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της μικροφουσαλίδας για συχνότητα $f = 38.6 \text{ MHz}$ σε αγωγό με $\alpha \rightarrow \infty$ για δύο διαφορετικές τιμές του πλάτους της διαταραχής.

Σύμφωνα, λοιπόν, με το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι το πλάτος της διαταραχής ε δεν επηρέασε καθόλου την τιμή της ιδιοσυχνότητας, όσον αφορά τις δοκιμές της μη περιορισμένης ροής, ενώ όπως ήταν αναμενόμενο, αυξήθηκε η μέγιστη τιμή που φτάνει η ακτίνα της φουσαλίδας.

4.2 Φυσαλίδα μέσα σε αγωγό

4.2.1 Απόκριση με FEM

Στο δεύτερο μέρος των δοκιμών, η φυσαλίδα τοποθετήθηκε μέσα σε κλειστό αγωγό με αρκετά μεγάλο μήκος ως προς το μέγεθος της φυσαλίδας, ώστε να μην επηρεάζεται από αυτό η ταλάντωση της. Έγιναν πολλές προσομοιώσεις για διάφορους συνδυασμούς τιμών των R_t και ε . Καθώς ο όγκος των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από τις δοκιμές ήταν μεγάλος, αντίστοιχα μπορούν να σχεδιαστούν και πολλά διαγράμματα. Γι' αυτό το λόγο, παρουσιάζονται, επιλεκτικά, ορισμένα από τα διαγράμματα που περιέχουν τις περισσότερες πληροφορίες.

Οι προσομοιώσεις ξεκίνησαν για τιμή του πλάτους της διαταραχής $\varepsilon = 0.5$, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, και ακτίνα σωλήνα $\alpha = \frac{R_t}{R_o} = 8 \rightarrow R_t = 8R_o$. Για τέτοιες τιμές της ακτίνας του αγωγού είναι αναμενόμενο, η φυσαλίδα να συμπεριφέρεται παρόμοια με την περίπτωση που η ροή δεν είναι περιορισμένη. Στη συνέχεια, η μεταβλητή α σταδιακά ελαττώνεται μέχρι και την τιμή $\alpha = 1.5 \rightarrow R_t = 1.5R_o$. Όταν ολοκληρωθούν και οι δοκιμές για τον πιο στενό αγωγό, η διαδικασία ξεκινάει από την αρχή με το ε να αυξάνεται σταδιακά.

Συνολικά, έγιναν δοκιμές για τιμές των α και ε :

$$\varepsilon = 0.5 \rightarrow \alpha = 1.5, 2, 3, 4, 8$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \alpha = 1.5, 2, 3, 4, 8$$

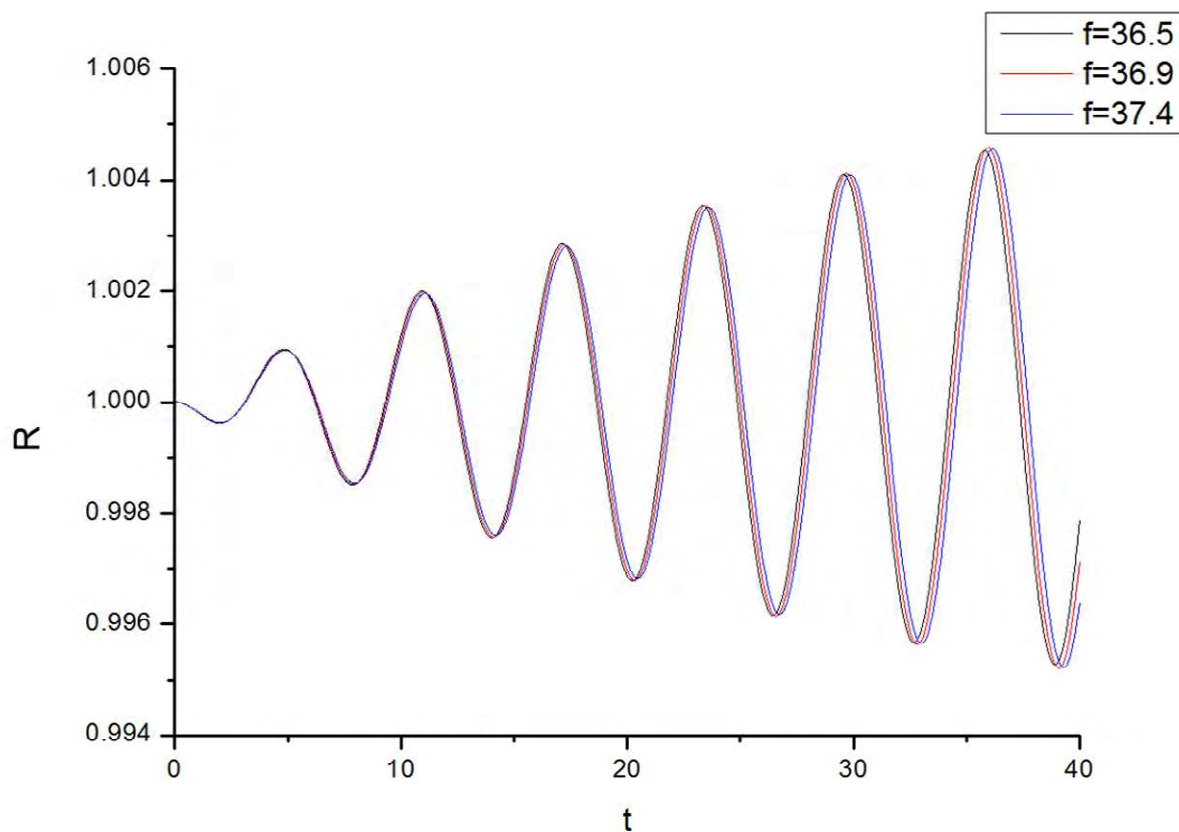
$$\varepsilon = 1.5 \rightarrow \alpha = 1.5, 2, 3, 4, 8$$

$$\varepsilon = 3 \rightarrow \alpha = 3$$

$$\varepsilon = 4 \rightarrow \alpha = 3$$

Το ε επιλέχθηκε να αυξηθεί περαιτέρω για μια μεσαία τιμή του λόγου α ($\alpha = 3$), έτσι ώστε να παρατηρηθεί αν υπάρχει οποιαδήποτε αλλαγή στη συμπεριφορά της φυσαλίδας για $\varepsilon > 1.5$. Για τιμή όμως $\varepsilon = 5$ ο κώδικας δεν κατάφερε να συγκλίνει σε λύση, ενώ ακόμα και για $\varepsilon = 4$ και για ορισμένες συχνότητες της εξωτερικής διαταραχής, δεν μπόρεσαν να εξαχθούν αποτελέσματα.

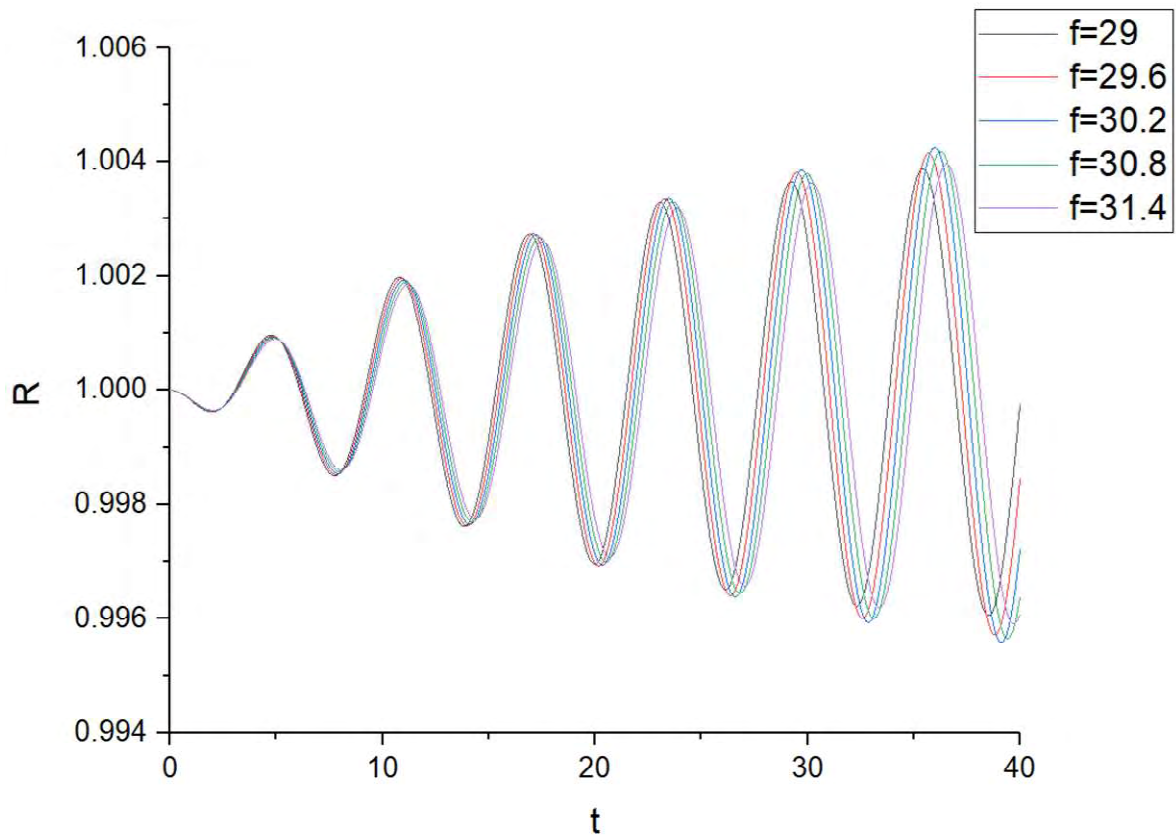
Για πλάτος της εξωτερικής διαταραχής $\varepsilon = 0.5$ επιλέγονται να παρουσιαστούν τα διαγράμματα για $\alpha = 1.5$, $\alpha = 4$ και $\alpha = 8$, καθώς αποτελούν τα όρια και μια ενδιάμεση στο πρόβλημα που επιλύεται και αρκούν για να παρατηρήσει κανείς την αλλαγή στην απόκριση της φουσαλίδας. Άρα έχουμε τα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 4.6 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

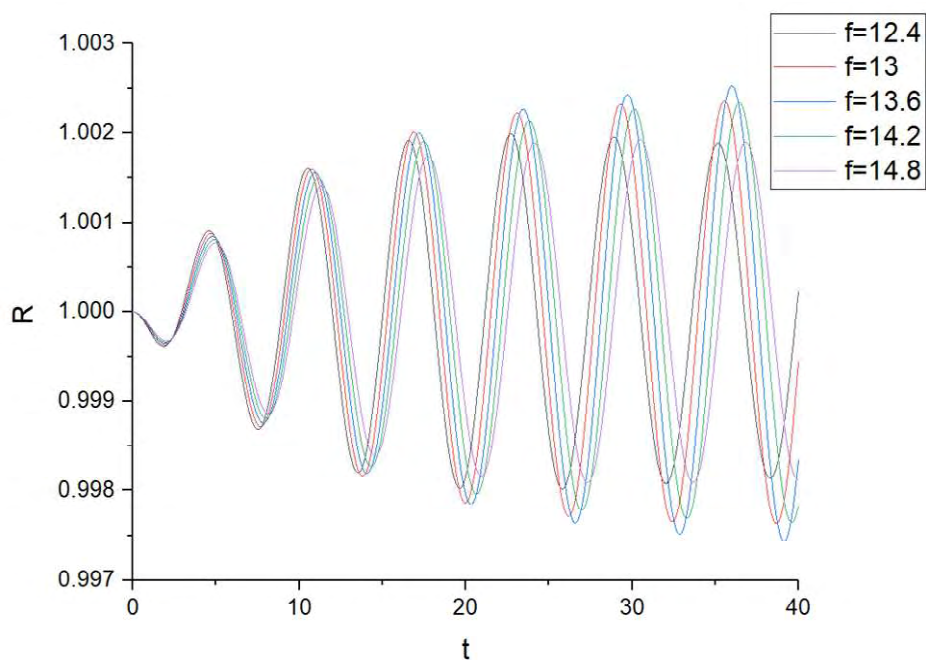
Όπως φαίνεται, η συχνότητα συντονισμού της μικροφουσαλίδας για $\alpha = 8 \rightarrow R_t = 8R_o$, βρίσκεται στα 36.9 MHz. Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη της μη περιορισμένης ροής, καθώς και της τιμής που προέβλεπε η θεωρητική σχέση 1.1 κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο.

Στη συνέχεια, το α υποδιπλασιάζεται ($\alpha = 4 \rightarrow R_t = 4R_o$) και η απόκριση της φουσαλίδας φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.7.



Σχήμα 4.7 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

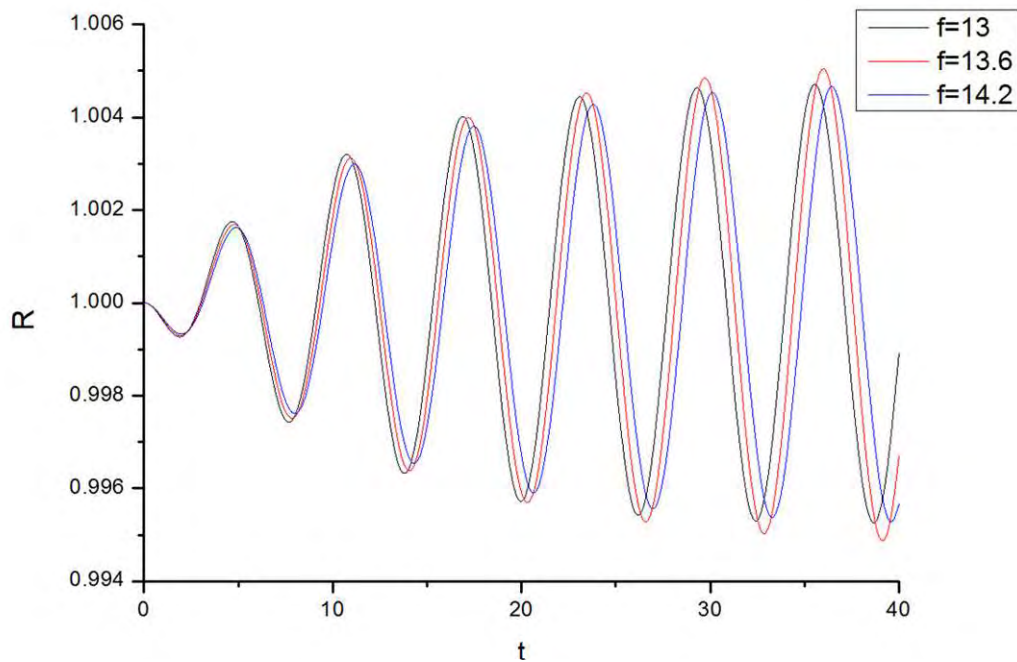
Συνεπώς, για τον αγωγό με ακτίνα $R_t = 4R_o$, η συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας βρίσκεται στα 30.2MHz. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό, αναμένεται περαιτέρω μείωση της για μικρότερες τιμές της ακτίνας του αγωγού. Πράγματι αυτό γίνεται φανερό για αγωγό με $\alpha = 1.5 \rightarrow R_t = 1.5R_o$.



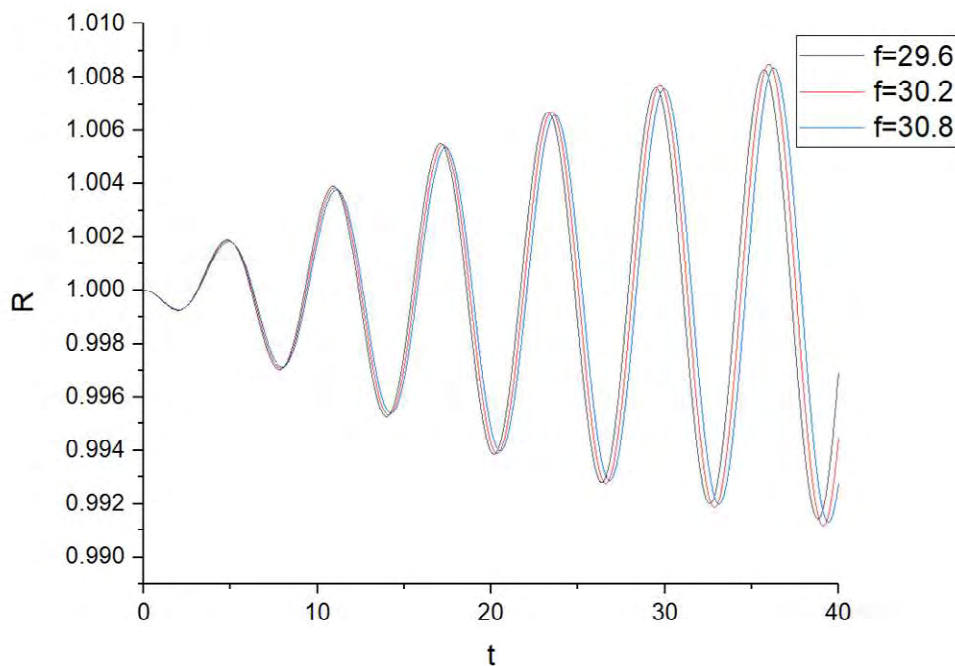
Σχήμα 4.8 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 0.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

Η συχνότητα διαταραχής που δίνει σε αυτή την περίπτωση τη μέγιστη ακτίνα της φυσαλίδας είναι 13.6 MHz. Όπως φαίνεται, η μείωση της συχνότητας συντονισμού γίνεται πιο ραγδαία όσο περισσότερο πλησιάζει η ακτίνα του αγωγού την ακτίνα της φυσαλίδας.

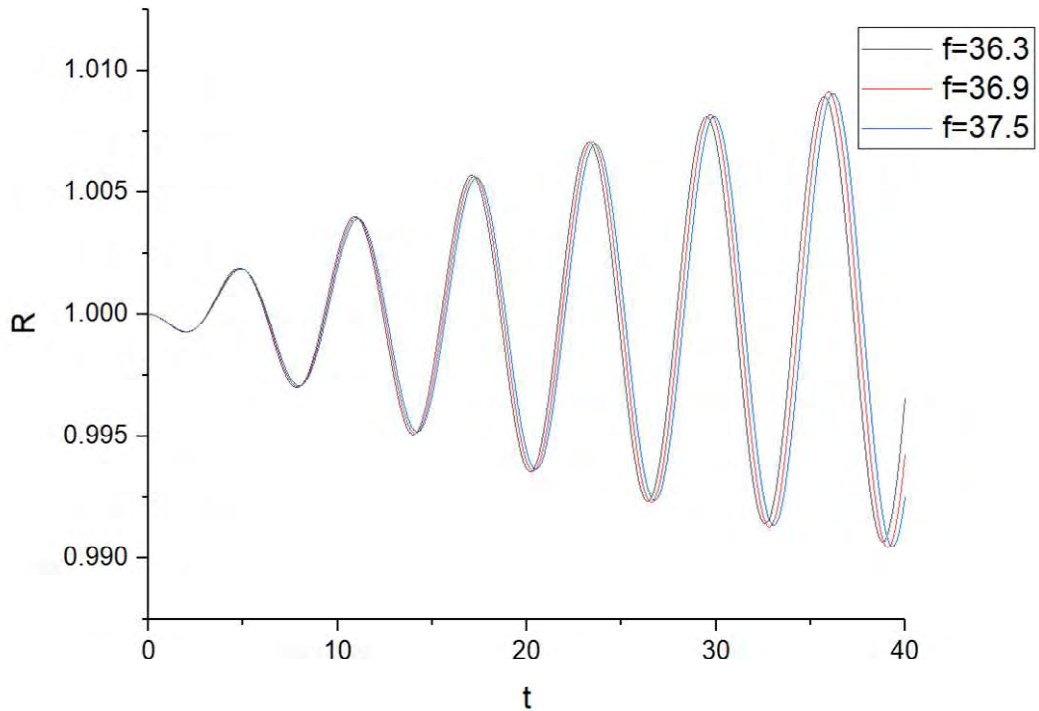
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 1$



Σχήμα 4.9 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.



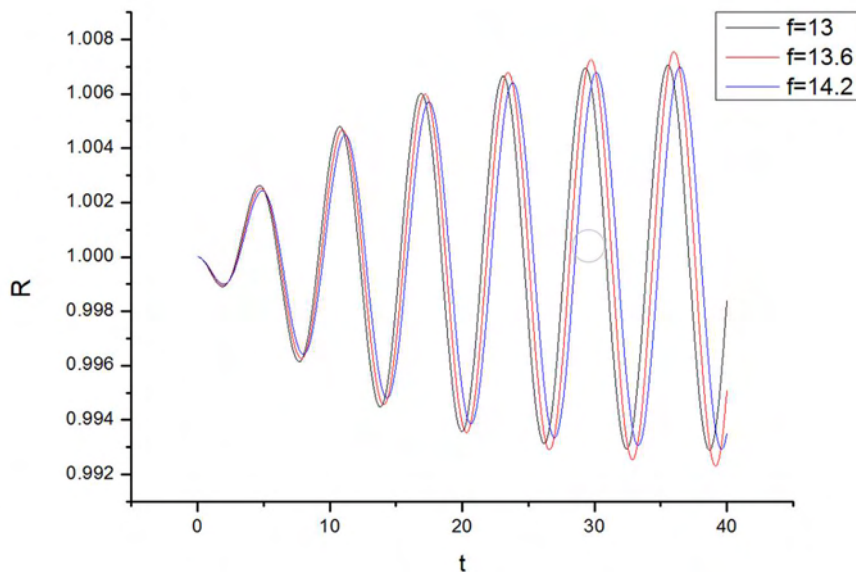
Σχήμα 4.10 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της 33 επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.



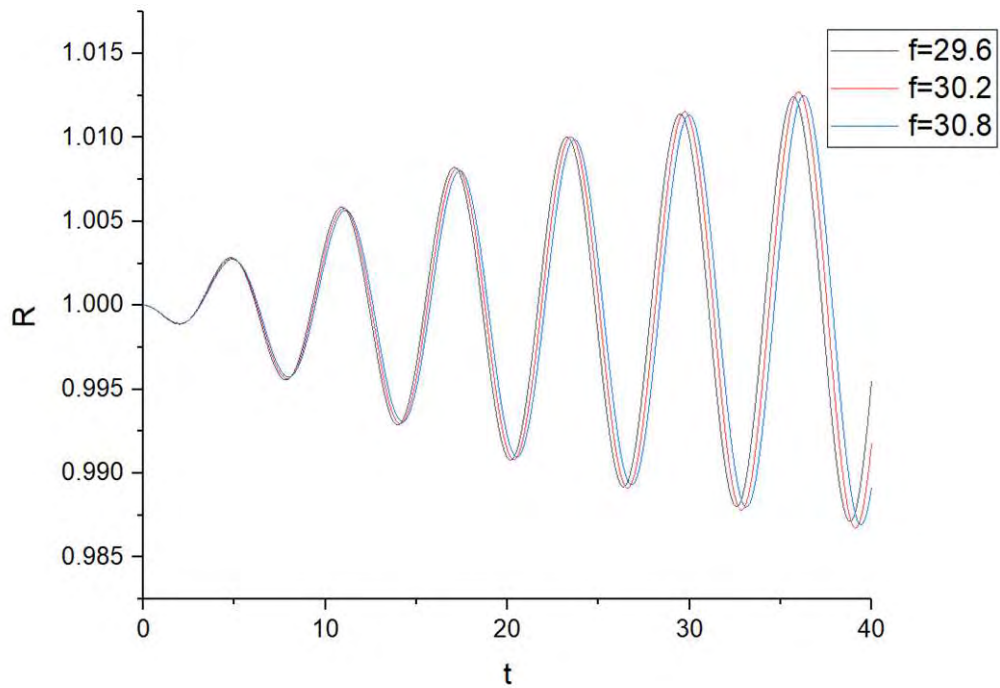
Σχήμα 4.11 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

Από τα διαγράμματα αυτά είναι φανερό πως το ε δεν επηρεάζει καθόλου τη συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας, άσχετα με το πώς αλλάζει η ακτίνα του σωλήνα. Αυτό πιθανώς ισχύει διότι οι τιμές του ε για τις οποίες διεξήχθησαν οι προσομοιώσεις είναι σχετικά μικρές και αν το ε αυξανόταν αρκετά να υπήρχαν μικρές αλλαγές στην συχνότητα συντονισμού.

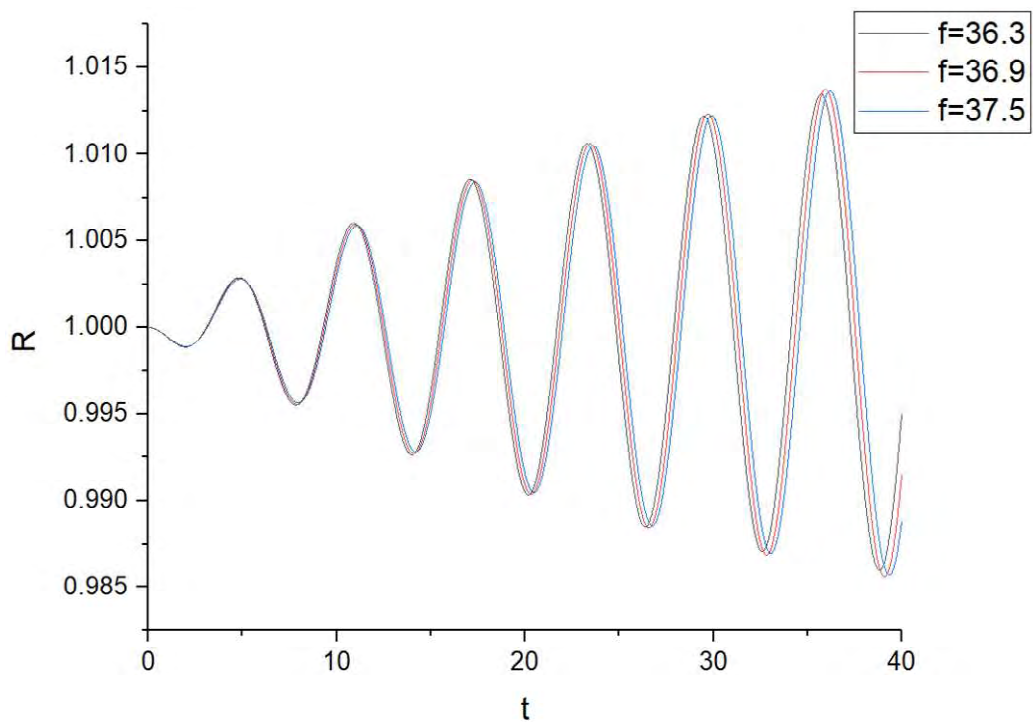
Για να συμπληρωθεί η εικόνα και να υποστηριχθεί περαιτέρω το συμπέρασμα που εξάχθηκε από τα προηγούμενα δεδομένα, έγιναν αντίστοιχες προσομοιώσεις για τιμή $\varepsilon = 1.5$. Τα γραφήματα παρατίθενται παρακάτω:



Σχήμα 4.12 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.



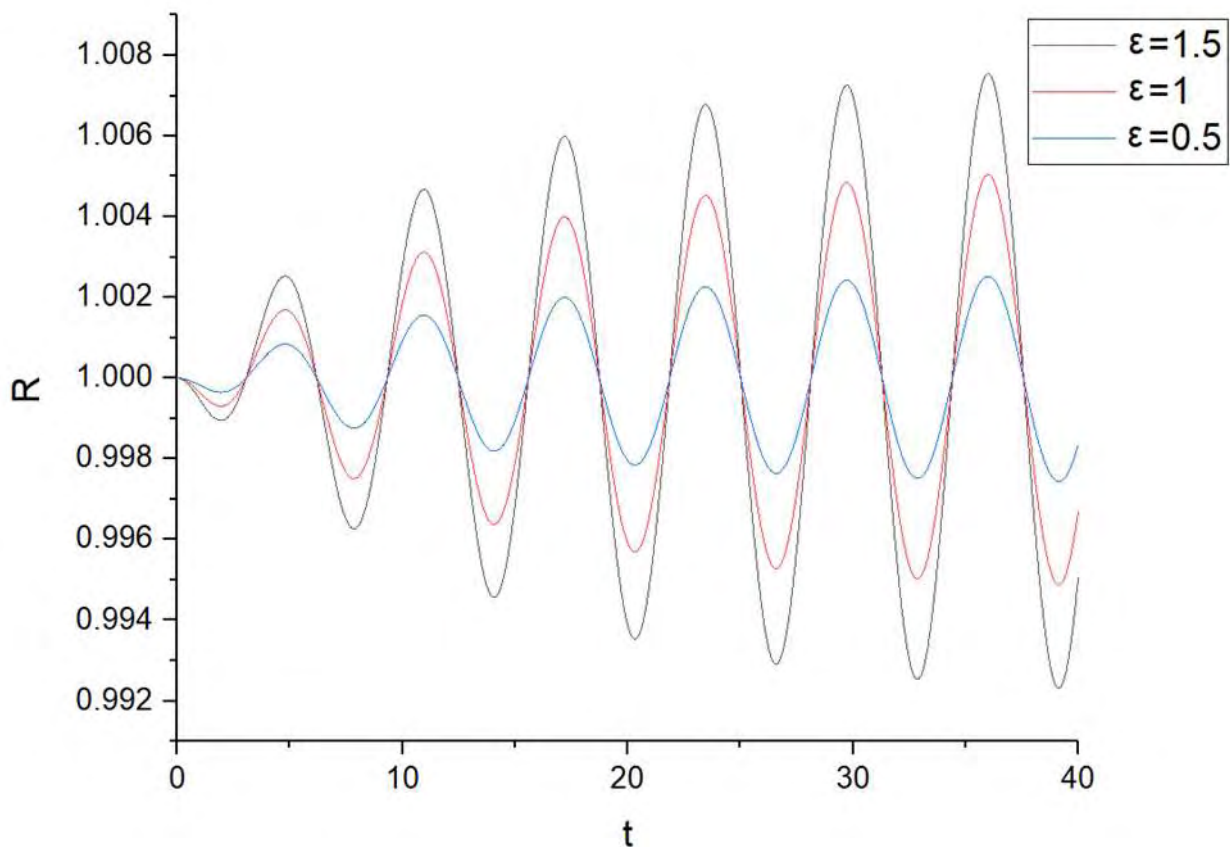
Σχήμα 4.13 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.



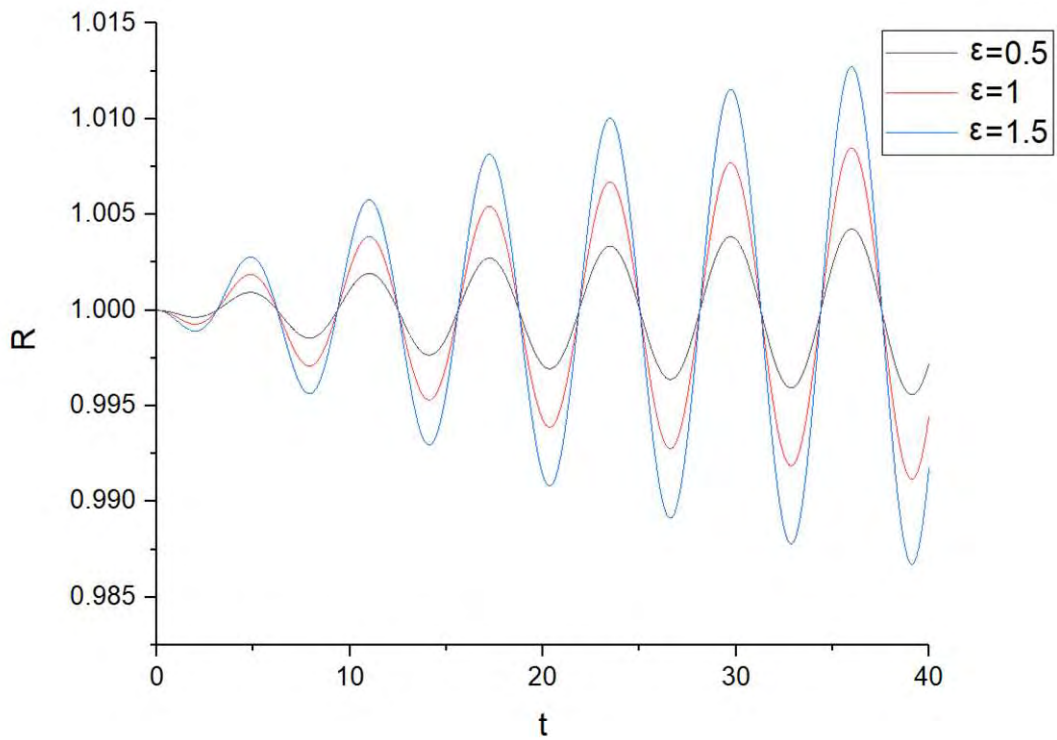
Σχήμα 4.14 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ για διαφορετικές συχνότητες της επιβαλλόμενης εξωτερικής διαταραχής (πλάτος διαταραχής: $\varepsilon = 1.5$). Στο υπόμνημα οι συχνότητες που παρουσιάζονται έχουν μονάδες MHz.

Ακόμα και για $\varepsilon = 1.5$ η συχνότητα συντονισμού δεν άλλαξε. Το μόνο που θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει στην προκειμένη περίπτωση είναι μια αύξηση στην αδιάστατη ακτίνα φυσαλίδας, όσο αυξάνεται το ε , που φαίνεται στον κάθετο άξονα.

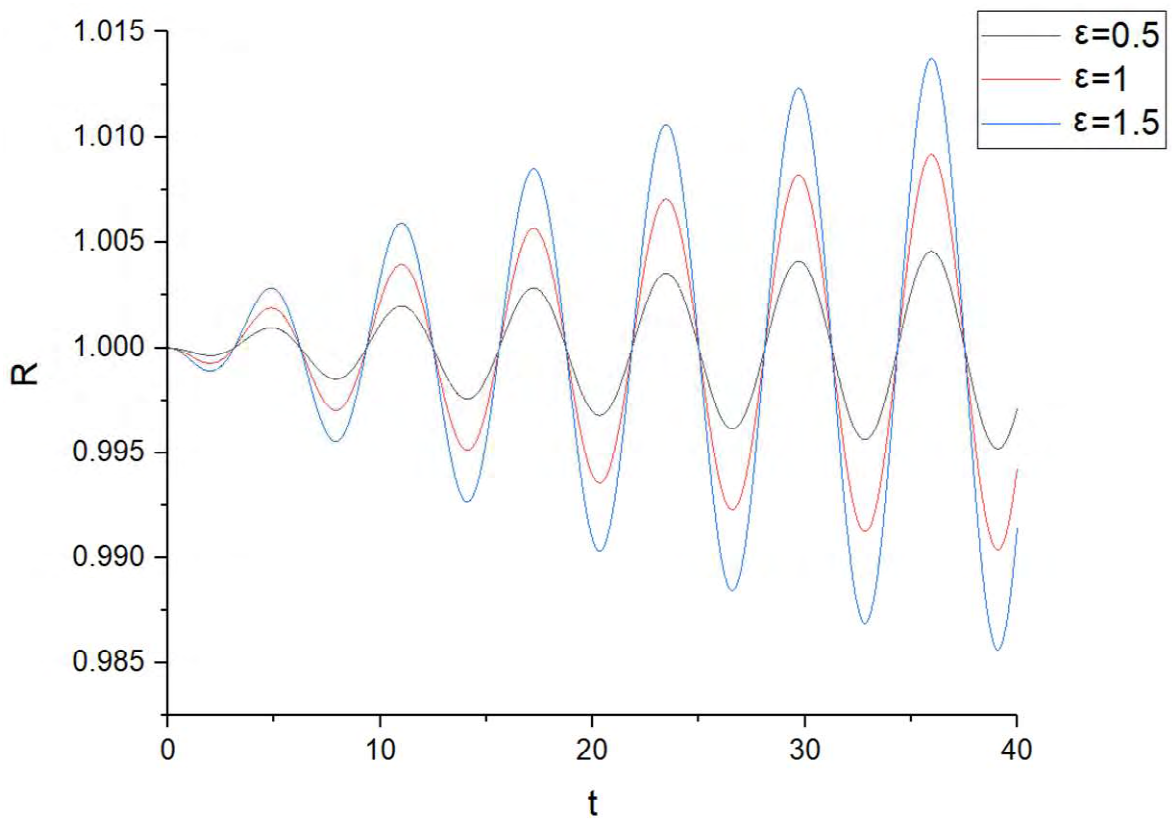
Είναι σημαντικό, για να μπορεί κανείς να κάνει μια πιο άμεση σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων, να σχεδιαστούν, στο ίδιο γράφημα, οι αποκρίσεις της φυσαλίδας, όταν ένα εκ των δύο μεγεθών a και ε παραμένει σταθερό, καθώς το άλλο μεταβάλλεται. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζονται αρχικά γραφήματα για τρεις τιμές του πλάτους της διαταραχής ε , σταθερή ακτίνα του αγωγού σε κάθε γράφημα και κάθε φορά οι καμπύλες αντιστοιχούν στη συχνότητα συντονισμού της εκάστοτε ακτίνας του αγωγού.



Σχήμα 4.15 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $a = 1.5$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 13.6$ MHz) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε .

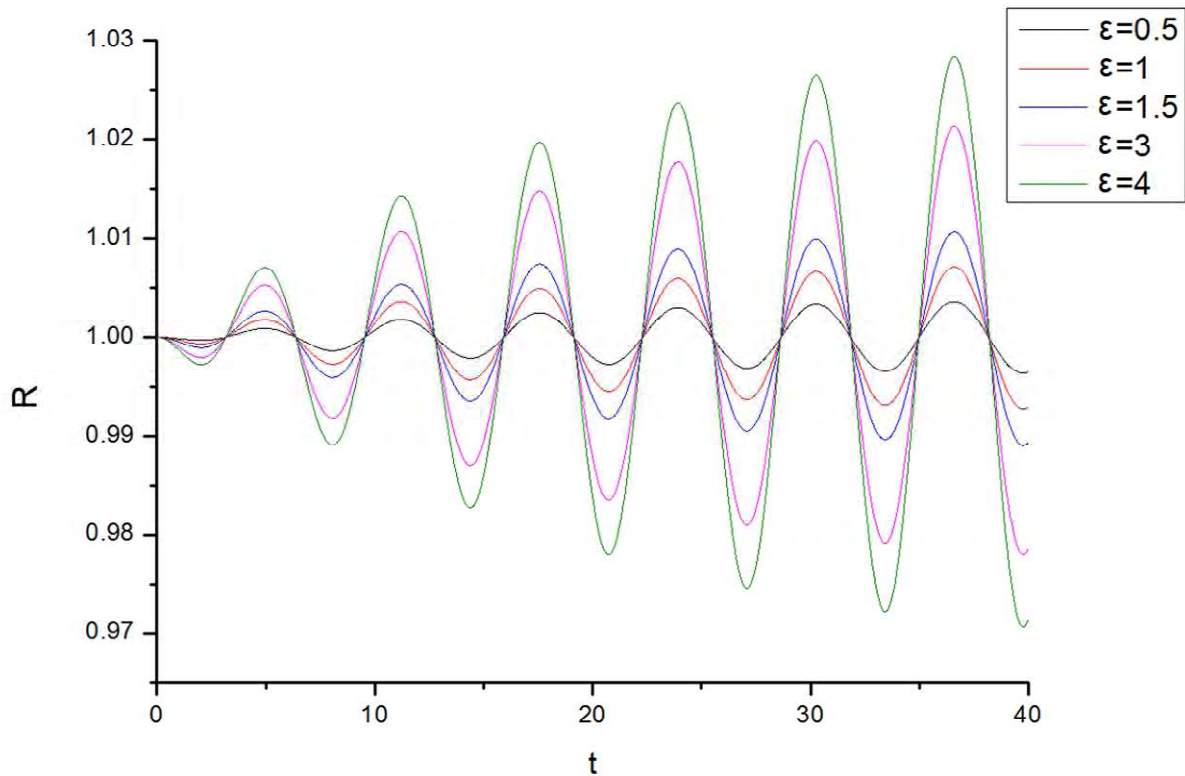


Σχήμα 4.16 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 4$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 30.2$ MHz) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ϵ .



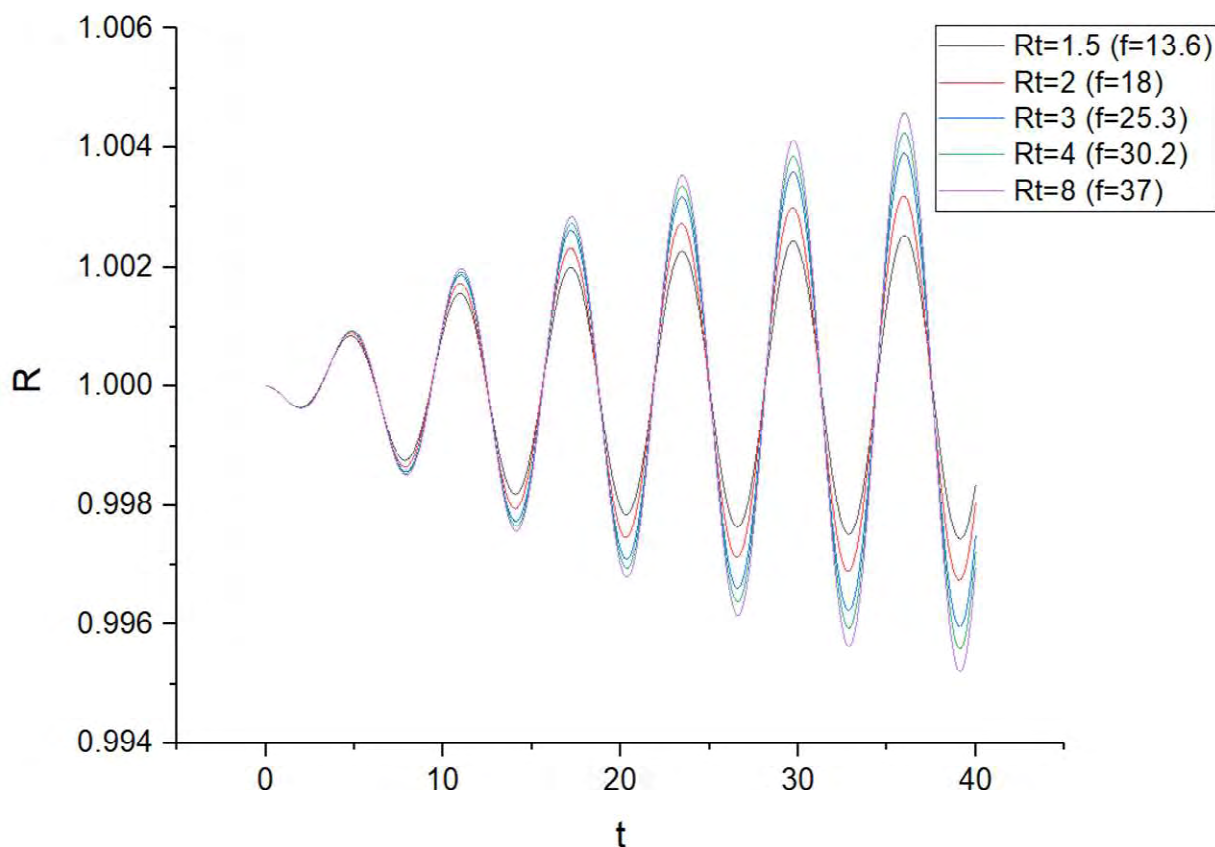
Σχήμα 4.17 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 36.9$ MHz) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ϵ .

Επιπλέον, επιλέχθηκε ο αγωγός με $\alpha = 3 \rightarrow R_t = 3R_o$ για τον οποίον έγιναν και προσομοιώσεις για μεγαλύτερες τιμές του ε . Το διάγραμμα του σχήματος 4.18 είναι το διάγραμμα που προέκυψε από τις δοκιμές. Ακόμα όμως και εδώ, η ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας δεν φαίνεται να επηρεάζεται από το πλάτος της διαταραχής που της επιβάλλουμε. Το μόνο που διαφέρει είναι και πάλι το μέγεθος της ακτίνας της.



Σχήμα 4.18 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ στην ιδιοσυχνότητα ($f = 25.3\text{MHz}$) για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε .

Τέλος, με σταθερό $\varepsilon = 0.5$ σχεδιάζεται η απόκριση της φουσαλίδας για τις διάφορες τιμές της ακτίνας αγωγού που χρησιμοποιήθηκαν και κάθε φορά στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα.



Σχήμα 4.19 Σύγκριση χρονικής εξέλιξης της ακτίνας της φουσαλίδας για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$ και για διαφορετικές τιμές του $\alpha = \frac{R_t}{R_o}$. Η κάθε καμπύλη είναι σχεδιασμένη στην ιδιοσυχνότητα που προκύπτει για κάθε αγωγό. Οι συχνότητες είναι εκφρασμένες σε MHz.

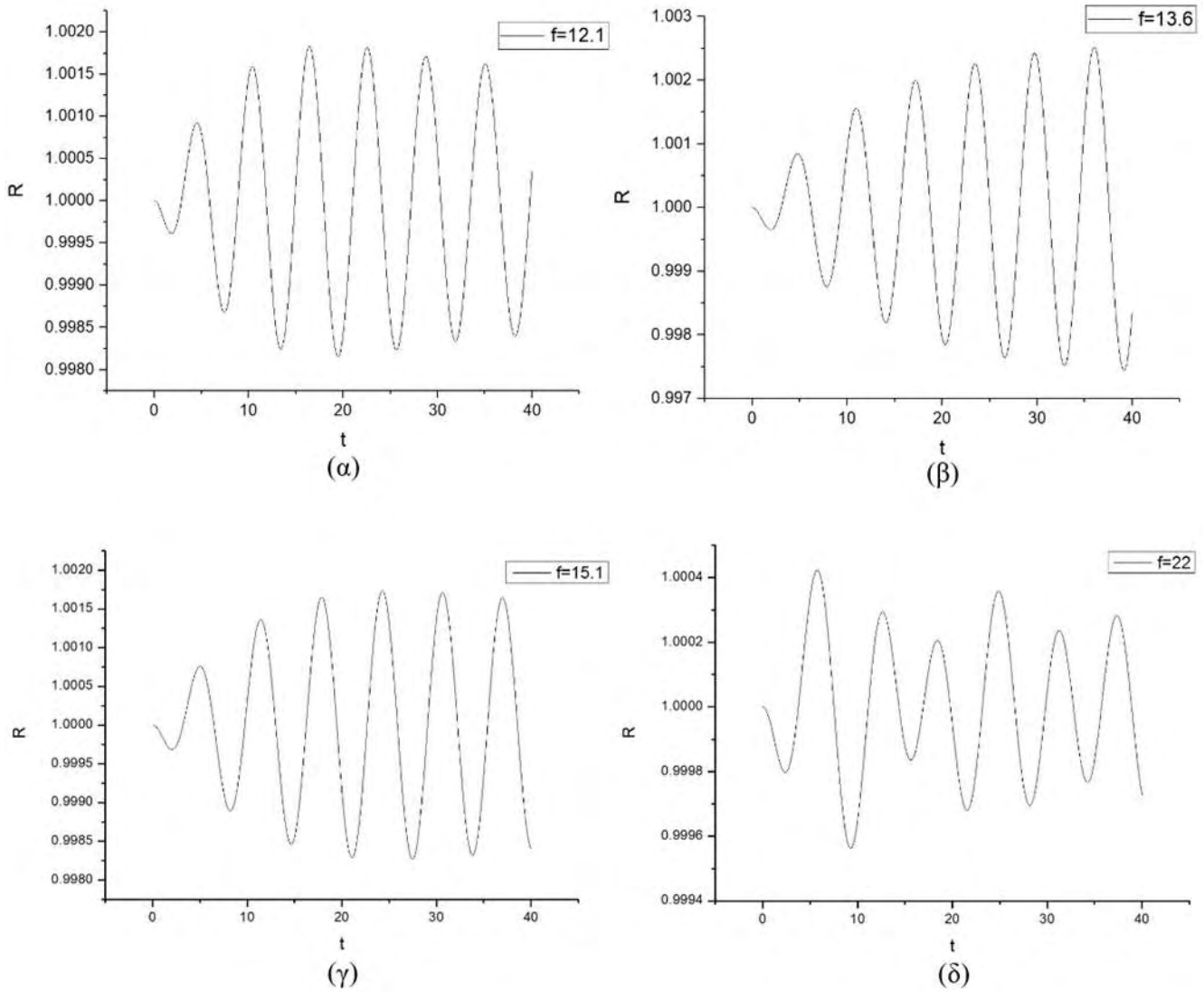
Τελικά, οι ιδιοσυχνότητες που βρέθηκαν για κάθε τιμή της μεταβλητής α είναι:

$\alpha = \frac{R_t}{R_o}$	1.5	2	3	4	8
f [MHz]	13.6	18	25.3	30.2	37

Πίνακας 4.1 Ιδιοσυχνότητες φουσαλίδας ως προς τη μεταβλητή α , όπως προέκυψαν από την ανάλυση με FEM.

Οι παραπάνω δοκιμές και τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν αφορούσαν κυρίως συχνότητες κοντά στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας για την εκάστοτε διάταξη. Έχει όμως ενδιαφέρον να παρατηρηθεί και η συμπεριφορά της φουσαλίδας, όταν η συχνότητα της διαταραχής που της επιβάλλεται αποκτά τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες της ιδιοσυχνότητας.

Για το λόγο αυτό παρουσιάζονται τα παρακάτω διαγράμματα για αγωγό με $\alpha = 1.5$.



Σχήμα 4.20 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φουσαλίδας σε διαφορετικές συχνότητες για αγωγό με $\alpha=1.5$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon=0.5$. (α) Λίγο κάτω από την ιδιοσυχνότητα ($f=12.1$ MHz), (β) στην ιδιοσυχνότητα ($f=13.6$ MHz), (γ) λίγο πάνω από την ιδιοσυχνότητα ($f=15.1$ MHz), (δ) μακριά από την ιδιοσυχνότητα ($f=22$ MHz).

Οι διαφορές στα παραπάνω διαγράμματα έγκεινται στο γεγονός ότι η ακουστική απόκριση της φουσαλίδας είναι το αποτέλεσμα δύο διαφορετικών ταλαντώσεων. Της σταθερής ταλάντωσης λόγω της διαταραχής ω_f , καθώς και μιας φυσικής ταλάντωσης στη φυσική συχνότητα ω_0 . Όταν τα δύο αυτά μεγέθη έχουν αρκετή διαφορά μεταξύ τους, τότε ανάλογα με το πιο είναι μεγαλύτερο, λαμβάνεται και διαφορετική απόκριση για τη φουσαλίδα. Αν το $\omega_0 > \omega_f$ (Σχήμα 4.20 α) τότε φαίνεται ότι οι σταθερές ταλαντώσεις επιτυγχάνονται ταχύτερα, ενώ, αν $\omega_0 < \omega_f$ (Σχήμα 4.20 γ, δ) οι δύο διαφορετικοί τύποι ταλάντωσης είναι πιο εμφανείς και το μέγιστο εμφανίζεται πιο σύντομα.

Για την ολοκλήρωση των προσομοιώσεων με πεπερασμένα στοιχεία (FEM), επιλέχθηκε να αλλάξουν ορισμένες ιδιότητες του κελύφους της φυσαλίδας, έτσι ώστε να παρατηρηθεί, εάν στη νέα περίπτωση υπάρχει επιρροή από το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής.

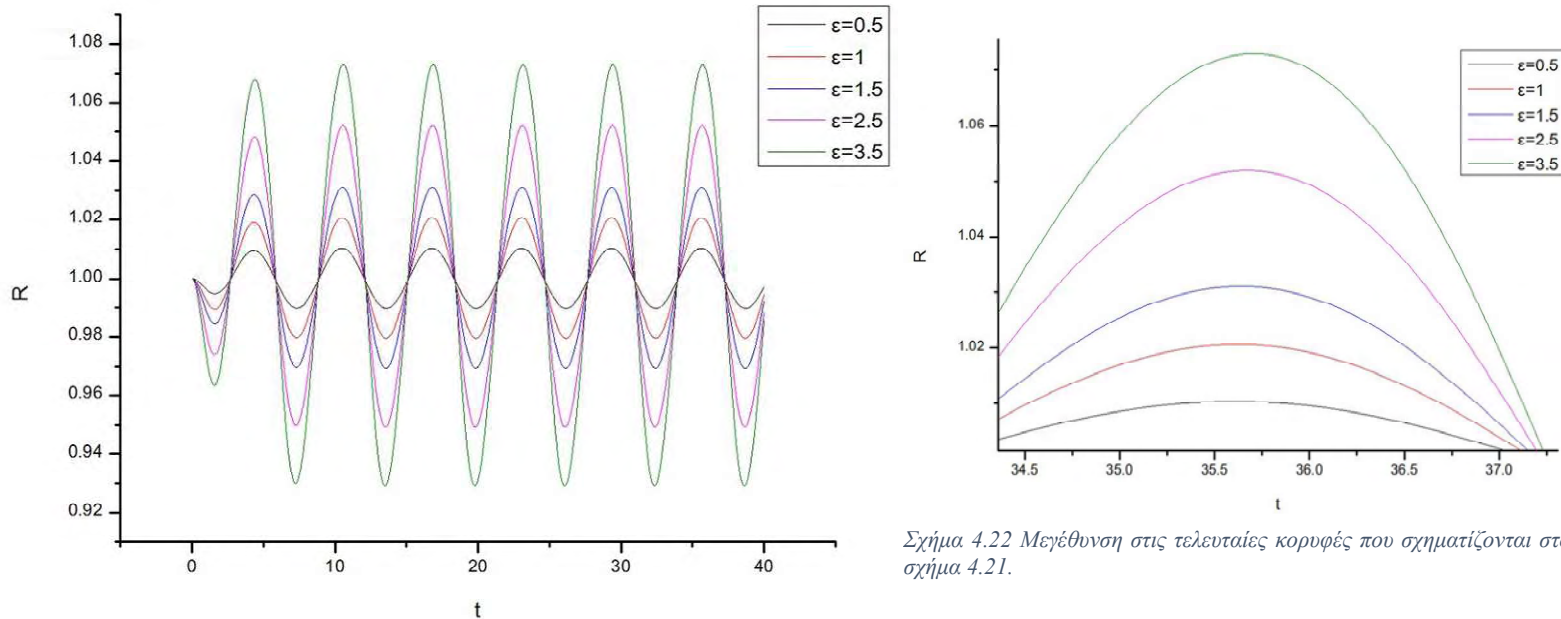
Για το σκοπό αυτό, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί για ακόμα μια φορά ο αγωγός με λόγο ακτινών $\alpha = 3 \rightarrow R_t = 3R_o$. Οι ιδιότητες του κελύφους, οι οποίες απέκτησαν νέες τιμές είναι οι εξής:

Μέτρο διάτμησης: $G_s = 300MPa \rightarrow G_s = 50MPa$

Ιξώδες κελύφους: $\mu_s = 0.048 Pa \cdot s \rightarrow \mu_s = 1 Pa \cdot s$

Πάχος κελύφους: $\delta = 50nm \rightarrow \delta = 15 nm$

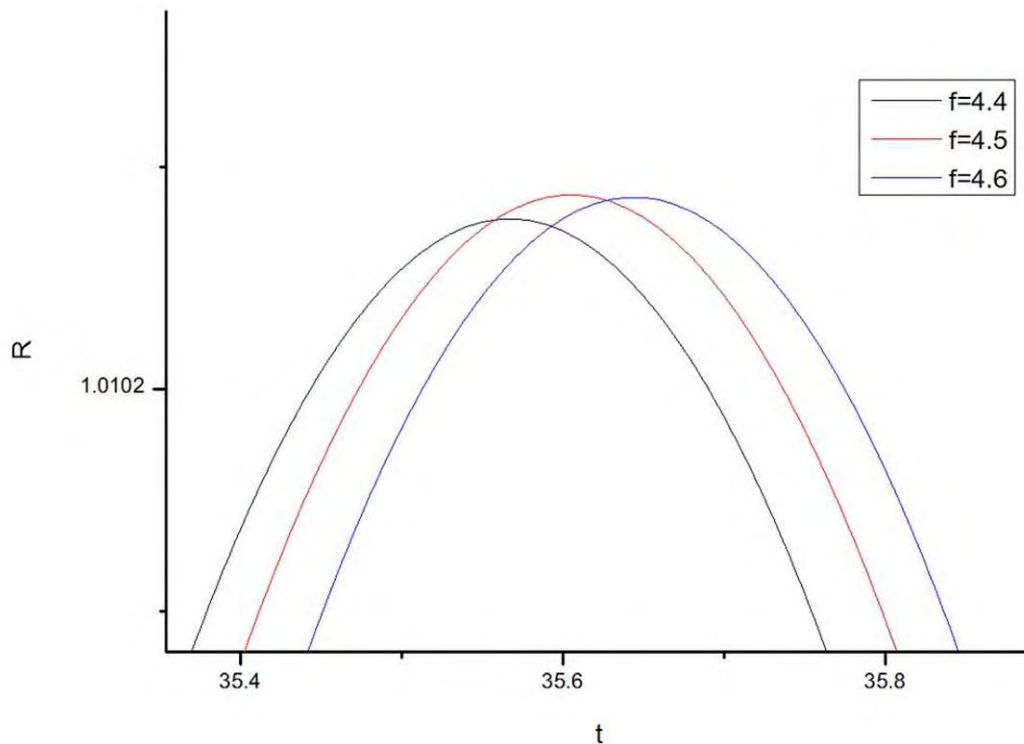
Σύμφωνα με τα παραπάνω έγιναν εκ νέου προσομοιώσεις της φυσαλίδας για πλάτη διαταραχής $\varepsilon = 0.5, \varepsilon = 1, \varepsilon = 1.5, \varepsilon = 2.5, \varepsilon = 3.5$. Αρχικά, για πλάτος $\varepsilon = 0.5$ βρέθηκε η συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας σε αυτές τις νέες συνθήκες, η οποία είναι $f = 4.5MHz$. Στη συνέχεια, με προοδευτική αύξηση του ε παρατηρήθηκαν ορισμένες μικρές αλλαγές σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα για συχνότητα διαταραχής $f = 4.5MHz$ και για τις τιμές του ε που αναφέρθηκαν παραπάνω:



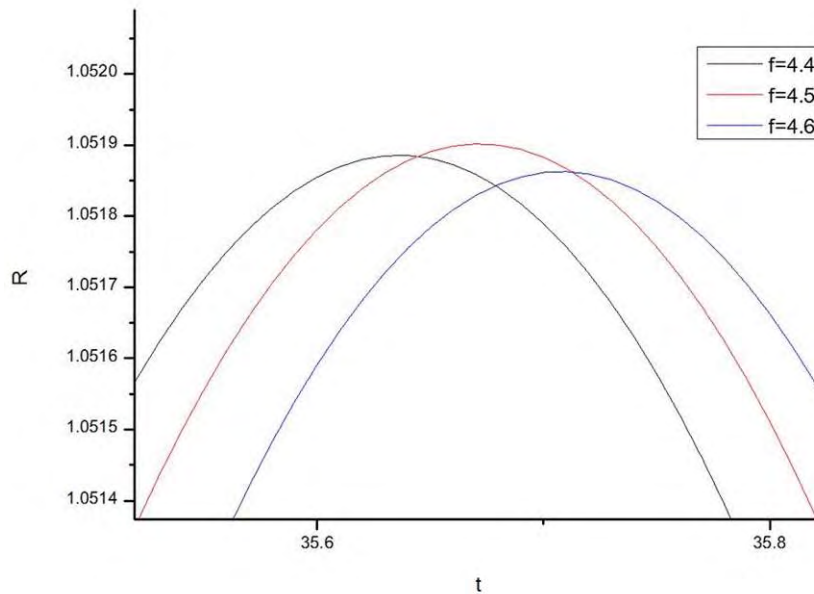
Σχήμα 4.22 Μεγέθυνση στις τελευταίες κορυφές που σχηματίζονται στο σχήμα 4.21.

Σχήμα 4.21 Χρονική εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας με τις νέες ιδιότητες για αγωγό με $\alpha = 3$ και για συχνότητα εξωτερικής διαταραχής $f = 4.5MHz$.

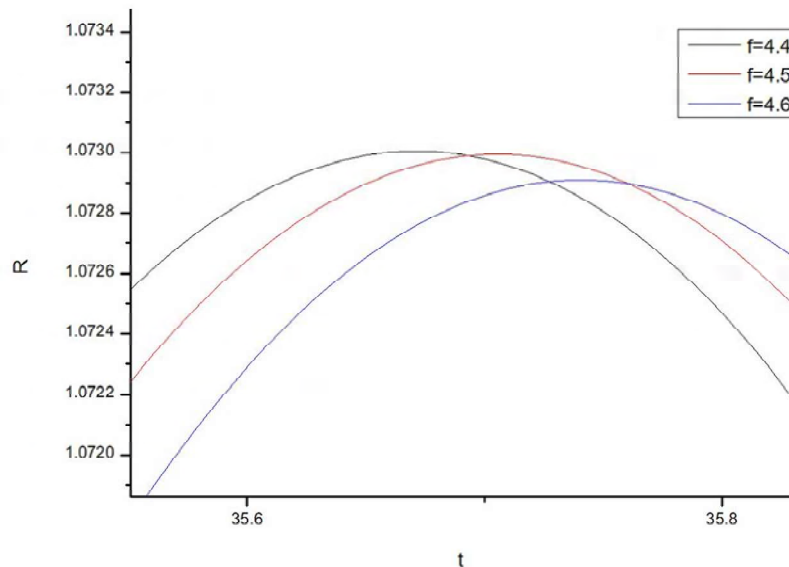
Από το διάγραμμα 4.22 φαίνεται πως υπάρχει μια μετατόπιση της κορυφής που δημιουργείται προς τα δεξιά, δηλαδή πιο μετά στο χρόνο. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα δεδομένα των προηγούμενων προσομοιώσεων, καθώς σε διαγράμματα όπως τα 4.15 - 4.19 οι κορυφές βρίσκονται ακριβώς η μία κάτω από την άλλη. Για να εξακριβωθεί αν υπάρχει κάποια αλλαγή στη συχνότητα συντονισμού, έγιναν δοκιμές για τα διαφορετικά πλάτη για συχνότητες διαταραχής $f = 4.4\text{MHz}$, $f = 4.5\text{MHz}$, $f = 4.6\text{MHz}$. Τρία από τα διαγράμματα που προέκυψαν παρουσιάζονται παρακάτω. Η μορφή των διαγραμμάτων ήταν παρόμοια με το σχήμα 4.21, αλλά έγινε μεγέθυνση στην τελευταία κορυφή, έτσι ώστε να είναι πιο ευδιάκριτη η διαφορά μεταξύ των τριών συχνοτήτων.



Σχήμα 4.23 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φουσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$.



Σχήμα 4.24 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 2.5$.



Σχήμα 4.25 Σύγκριση μέγιστης ακτίνας φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 3$ και για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 3.5$.

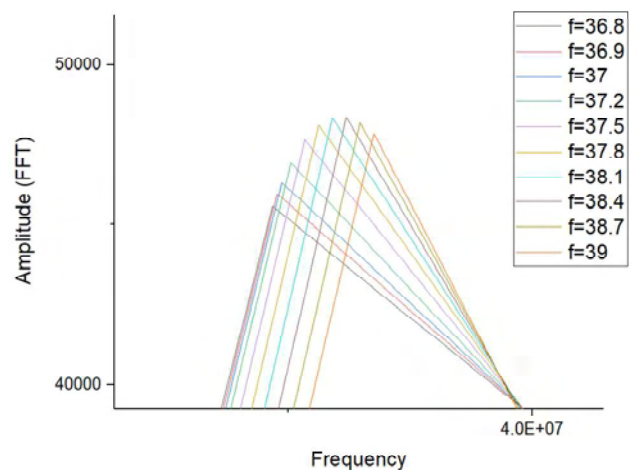
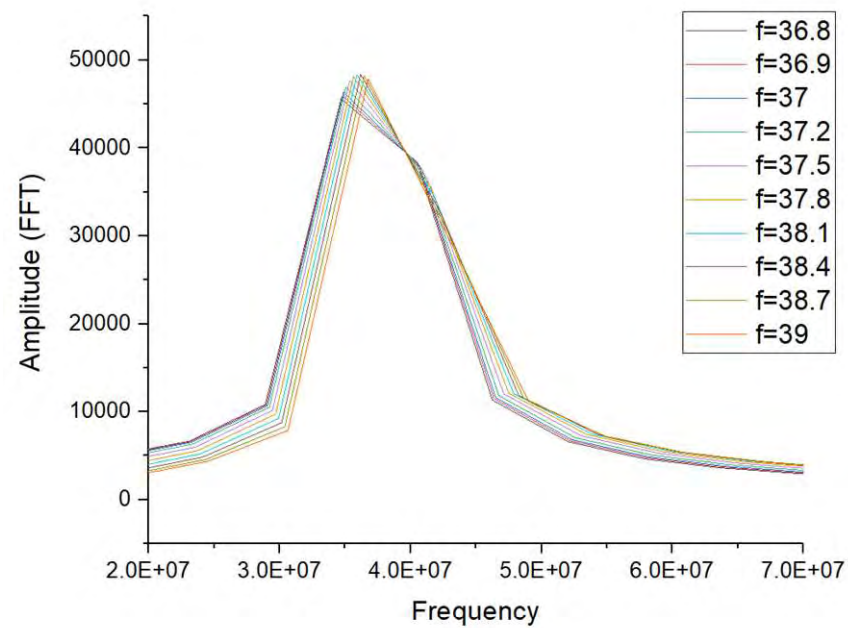
Όπως γίνεται φανερό από τα σχήματα 4.23 - 4.25 υπάρχει πραγματικά μια αλλαγή στη συχνότητα συντονισμού, η οποία είναι πιο έντονη και φτάνει να πέσει στα 4.4MHz, όταν το πλάτος διαταραχής έχει πλέον την τιμή $\varepsilon = 3.5$.

Αυτό σημαίνει πως το πλάτος διαταραχής έχει όντως μια επίδραση στη συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας. Η επίδραση αυτή, όμως, εξαρτάται κατά πολύ από το μέτρο διάτμησης, δηλαδή το πόσο μαλακό είναι το κέλυφος. Τα προηγούμενα κελύφη που μελετήθηκαν είχαν μεγάλο G_s με αποτέλεσμα να πρέπει να αυξηθεί κατά πολύ περισσότερο το ε , έτσι ώστε να μπορεί παρατηρηθεί αλλαγή στη συχνότητα συντονισμού.

4.2.2 Απόκριση από FFT ανάλυση της πίεσης

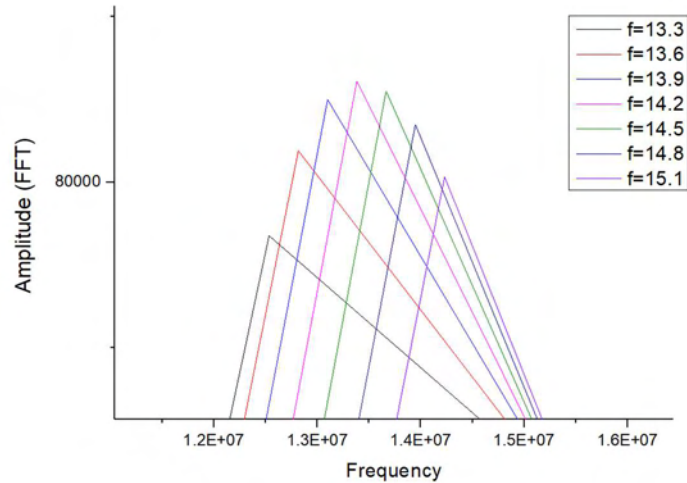
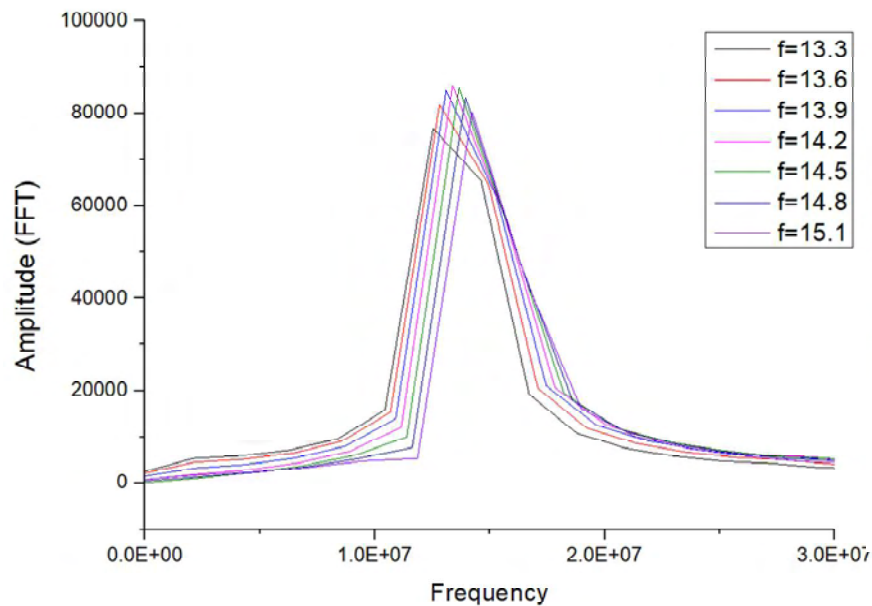
Στο τρίτο κομμάτι των δοκιμών, έγινε FFT ανάλυση σε δεδομένα πίεσης όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 3.3. Από αυτή την ανάλυση, εξάγονται διαστατοποιημένα διαγράμματα πλάτους – συχνότητας από τα οποία, επίσης, μπορεί κανείς να διαπιστώσει την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας σε κάθε περίπτωση.

Αρχικά, για να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο γίνεται δυνατός ο προσδιορισμός της ιδιοσυχνότητας, παρατίθενται τα διαγράμματα για $\varepsilon = 0.5$ και $\alpha = 1.5$, $\alpha = 8$.



Σχήμα 4.26 Μεγέθυνση στις κορυφές του σχήματος 4.27

Σχήμα 4.27 Απόκριση φυσαλίδας από FFT ανάλυση πίεσης. Αγωγός με $\alpha = 8$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$. Οι συχνότητες της διαταραχής έχουν μονάδες MHz. (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])



Σχήμα 4.28 Μεγέθυνση στις κορυφές του σχήματος 4.29

Σχήμα 4.29 Απόκριση φυσαλίδας από FFT ανάλυση πίεσης. Αγωγός με $\alpha = 1.5$ και πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$. Οι συχνότητες της διαταραχής έχουν μονάδες MHz. (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])

Στα διαγράμματα αυτά, έχουμε τη διαφορά ότι στον οριζόντιο άξονα βρίσκεται η συχνότητα σε Hz, ενώ στον κάθετο άξονα το πλάτος έχει μονάδες Pa. Η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε μια ξεχωριστή συχνότητα της εξωτερικής επιβαλλόμενης διαταραχής, όπως φαίνονται στο υπόμνημα. Στις κορυφές που σχηματίζονται, μπορεί κανείς, σε κάθε κορυφή, να βρει τις συντεταγμένες της από το γράφημα και συνεπώς τη συχνότητα στην οποία εντοπίζεται και με τι πλάτος. Έτσι, η συχνότητα στην οποία βρίσκεται η ψηλότερη κορυφή, αποτελεί και τη συχνότητα συντονισμού για τις συγκεκριμένες συνθήκες της προσομοίωσης.

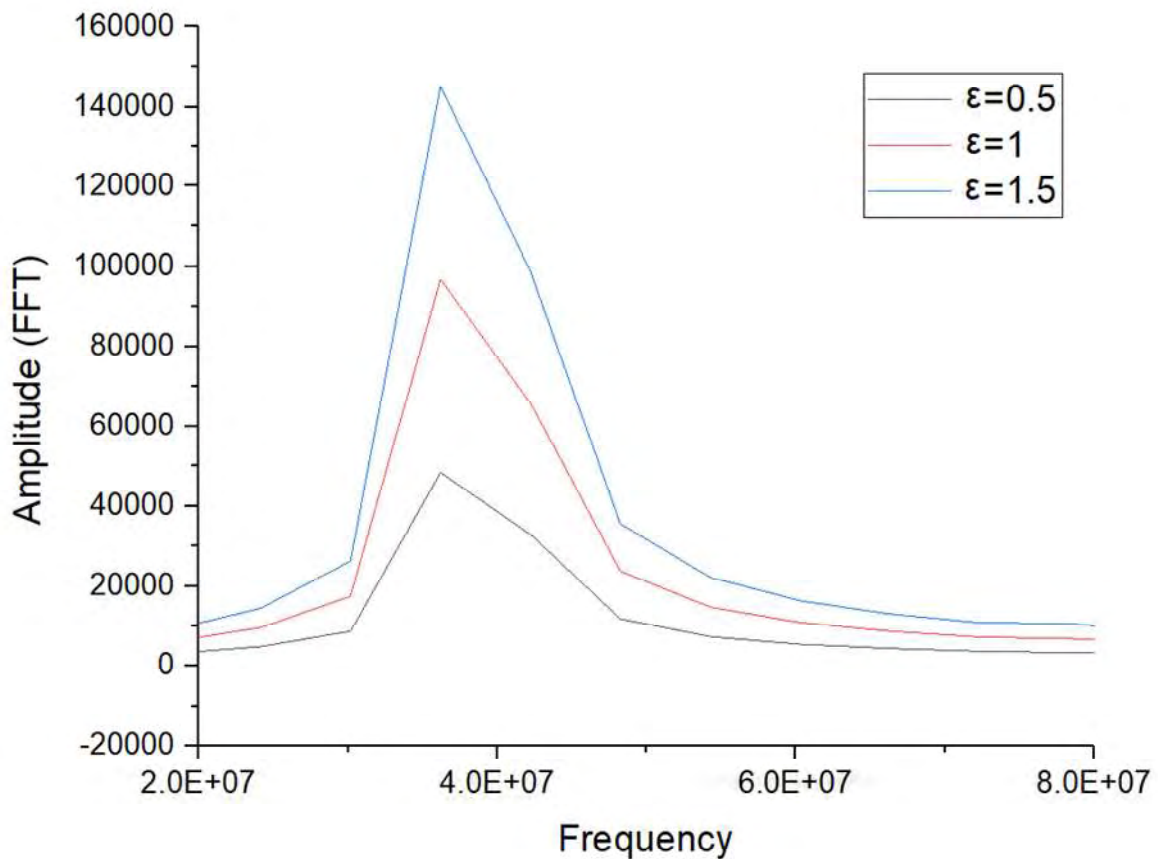
Θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι η συχνότητα διαταραχής που επιβάλλεται δεν αντιστοιχεί απόλυτα στην συχνότητα που έχει η φυσαλίδα σε κάθε προσομοίωση. Για παράδειγμα, για την κορυφή που φαίνεται στο σχήμα 4.28 και η οποία αντιστοιχεί σε συχνότητα διαταραχής $f = 14.2 \text{ MHz}$, η συχνότητα που παρατηρείται στη φυσαλίδα έχει την τιμή $f = 13.98 \text{ MHz}$ που αποτελεί και την ιδιοσυχνότητα στο συγκεκριμένο αγωγό. Αυτό οφείλεται σε υπολογιστικό σφάλμα και με πυκνωση του πλέγματος πιθανώς να εξαλειφόταν.

Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που προκύπτουν από την ανάλυση της πίεσης βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα:

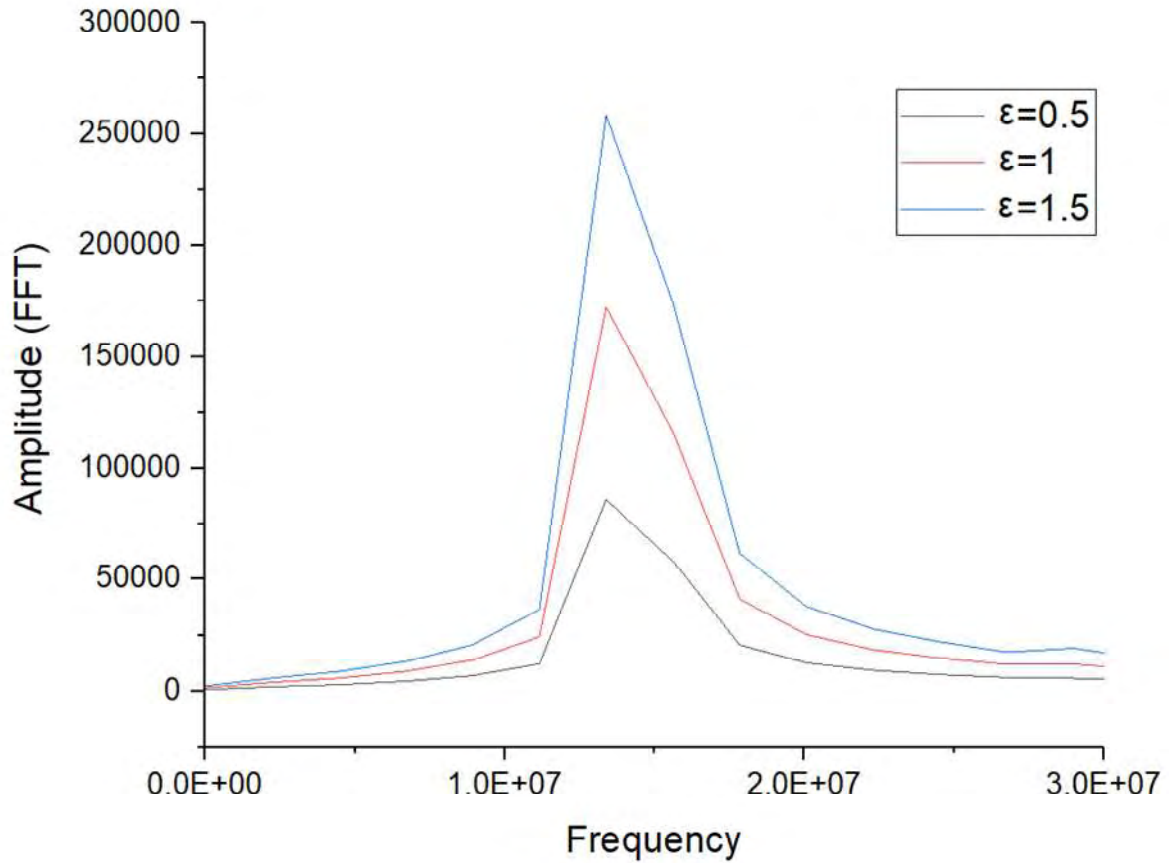
$\alpha = \frac{R_t}{R_o}$	1.5	2	3	4	8
f (FFT) [MHz]	13.98	17.81	24.69	29.59	36.19

Πίνακας 4.2 Ιδιοσυχνότητες φυσαλίδας ως προς τη μεταβλητή α , όπως προέκυψαν από την ανάλυση της χρονοσειράς της πίεσης με FFT..

Όσον αφορά την επίδραση του πλάτους της διαταραχής, και από αυτή τη μελέτη φαίνεται καθαρά ότι η μεταβλητή ε δεν επηρεάζει τη συχνότητα συντονισμού για καμία από τις τιμές που χρησιμοποιήθηκαν. Στα διαγράμματα 4.30 και 4.31 φαίνεται η απόκριση της φυσαλίδας για τρεις διαφορετικές τιμές του ε και για δύο ξεχωριστές ακτίνες αγωγού, όπως και προηγουμένως, $\alpha = 8$ και $\alpha = 1.5$.

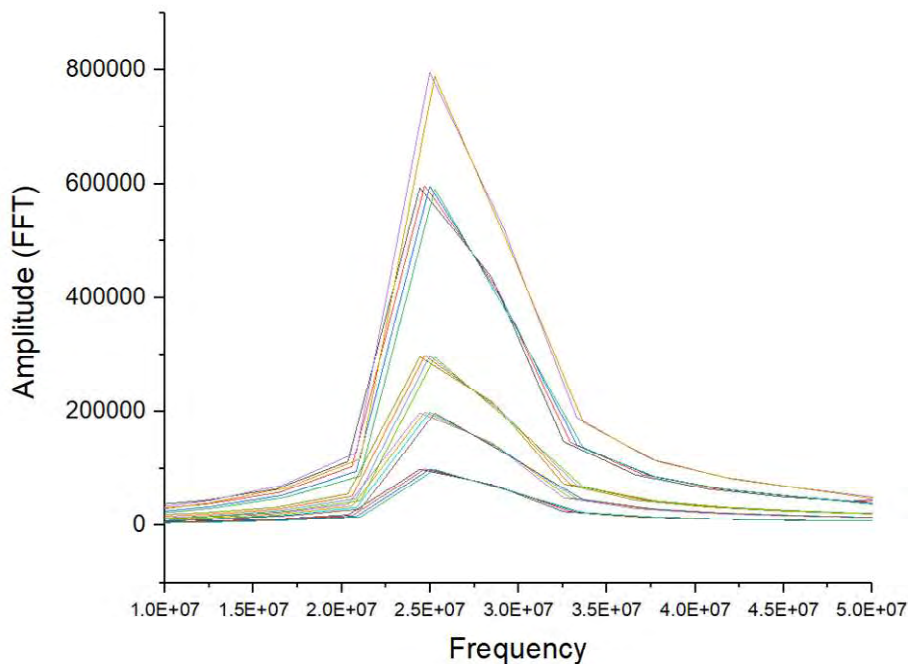


Σχήμα 4.30 Σύγκριση, στην ιδιοσυχνότητα ($f_{\text{διαταραχ}} = 38.4$ MHz), της απόκρισης της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 8$ και για τρεις διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε . (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])



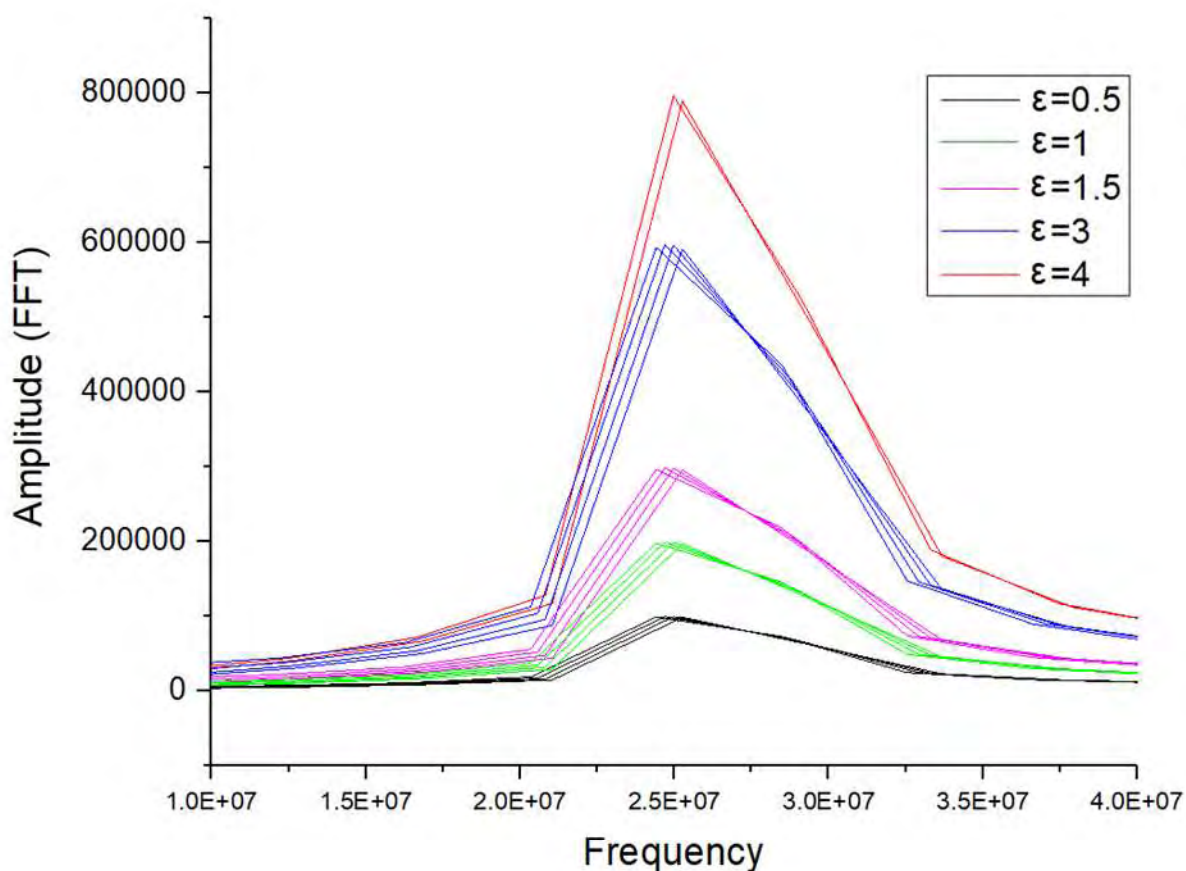
Σχήμα 4.31 Σύγκριση, στην ιδιοσυχνότητα ($f_{\text{διαταραχής}} = 14.2 \text{ MHz}$), της απόκρισης της φυσαλίδας για αγωγό με $\alpha = 1.5$ και για τρεις διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ϵ . (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])

Όπως φαίνεται από τις καμπύλες των διαγραμμάτων, η απόκριση της φυσαλίδας είναι ίδια για τις παραπάνω τιμές του ϵ . Στον αγωγό με $\alpha = 3$ έγιναν και πάλι περαιτέρω δοκιμές για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους και τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 4.32.



Σχήμα 4.32 Απόκριση φυσαλίδας σε αγωγό με $\alpha = 3$ για πέντε διαφορετικές τιμές του πλάτους ϵ . Από πάνω προς τα κάτω οι ομάδες κορυφών που σχηματίζονται είναι για $\epsilon = 4$, $\epsilon = 3$, $\epsilon = 1.5$, $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0.5$.

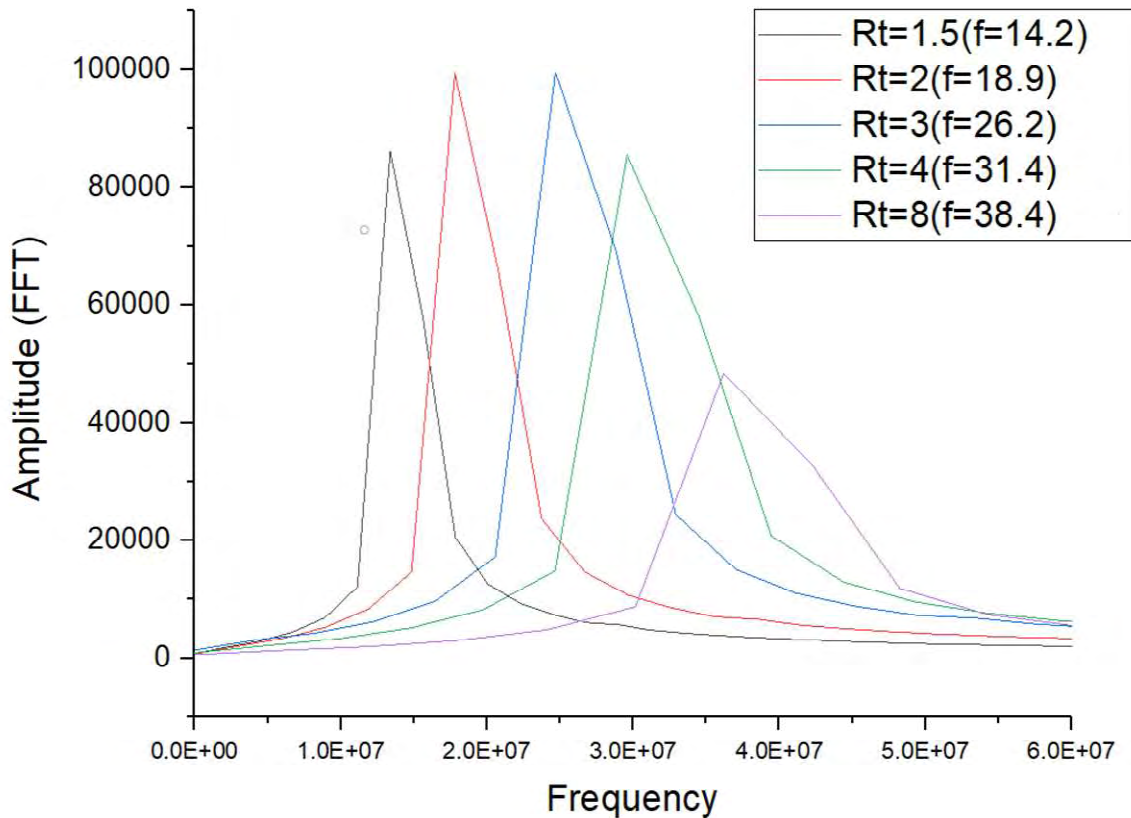
Κάθε μία από τις ομάδες κορυφών του γραφήματος ανταποκρίνεται σε μια συγκεκριμένη τιμή του πλάτους διαταραχής ε , ενώ σε κάθε ομάδα υπάρχουν 4 καμπύλες που αντιπροσωπεύουν τις συχνότητες διαταραχής, με τιμές από αριστερά προς τα δεξιά: $f = 25.9\text{MHz}$, $f = 26.2\text{MHz}$, $f = 26.5\text{MHz}$, $f = 26.8\text{MHz}$. Το σχήμα 4.32 μπορεί να μορφοποιηθεί έτσι ώστε να είναι λίγο πιο ευδιάκριτες οι ομάδες των κορυφών όπως παρακάτω.



Σχήμα 4.33 Μορφοποίηση του σχήματος 4.32 με διαφορετικούς χρωματισμούς για διαφορετικές τιμές του πλάτους διαταραχής ε . (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])

Αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι για όλα τα διαφορετικά ε , η κορυφή με το μεγαλύτερο πλάτος στην κάθε ομάδα είναι η δεύτερη ($f = 26.2\text{MHz}$) και γίνεται εμφανές ότι η αύξηση του ε δεν επηρεάζει τη συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας.

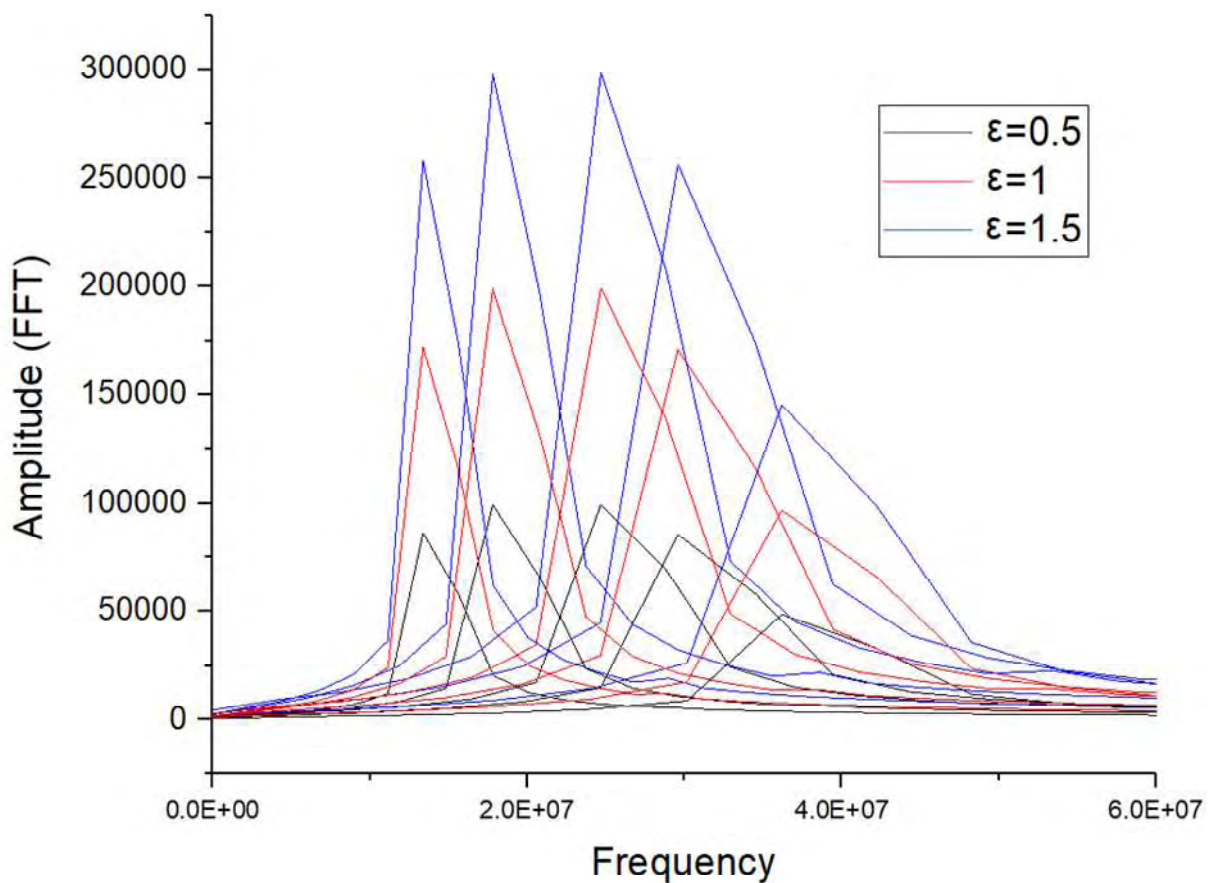
Επίσης, ενδιαφέρον έχει να προσέξει κανείς και σε αυτή την περίπτωση την απόκριση της φουσαλίδας στο ίδιο διάγραμμα για ίδιο ε , αλλά για διαφορετικές τιμές της ακτίνας του αγωγού. Ένα τέτοιο διάγραμμα παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 4.34 Σύγκριση απόκρισης φουσαλίδας για $\varepsilon = 0.5$ και για διαφορετικές τιμές α του αγωγού. Κάθε φορά η καμπύλη σχεδιάζεται στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα του εκάστοτε αγωγού. Στο υπόμνημα αναφέρεται η τιμή $R_t = \alpha R_0$, καθώς και η συχνότητα της διαταραχής που δίνει την ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας (σε MHz.). (Πλάτος [Pa] – Συχνότητα [Hz])

Από αυτό, είναι φανερή η μείωση της συχνότητας συντονισμού της φουσαλίδας όταν μειώνεται η ακτίνα του αγωγού στον οποίο βρίσκεται. Επίσης, η μεταβολή του πλάτους είναι πιο ευδιάκριτη σε αυτό το σχήμα και φαίνεται ότι παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές για δύο σχετικά μικρές τιμές της ακτίνας του αγωγού, δηλαδή για $\alpha = 2$ και $\alpha = 3$.

Τέλος, παρατίθεται ένα συνολικό γράφημα το οποίο αποτελείται από το προηγούμενο σχήμα 4.34, ενώ έχουν προστεθεί και οι αντίστοιχες καμπύλες στη συχνότητα συντονισμού κάθε αγωγού και για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους της διαταραχής ε .



Σχήμα 4.35 Επέκταση πάνω στο σχήμα 4.34. Προστέθηκαν οι αντίστοιχες καμπύλες αλλά για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους ϵ .

Οι συχνότητες συντονισμού που δίνει ως αποτέλεσμα η ανάλυση της πίεσης έχουν πολύ μικρή διαφορά σε σχέση με αυτές που βρέθηκαν στις προσομοιώσεις με FEM, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$a = \frac{R_t}{R_o}$	1.5	2	3	4	8
f (FEM) [MHz]	13.6	18	25.3	30.2	37
f (FFT) [MHz]	13.98	17.81	24.69	29.59	36.19

Πίνακας 4.3 Σύγκριση ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν από ανάλυση της πίεσης και προσομοίωση με FEM.

4.2.3 Απόκριση με χρήση BEM

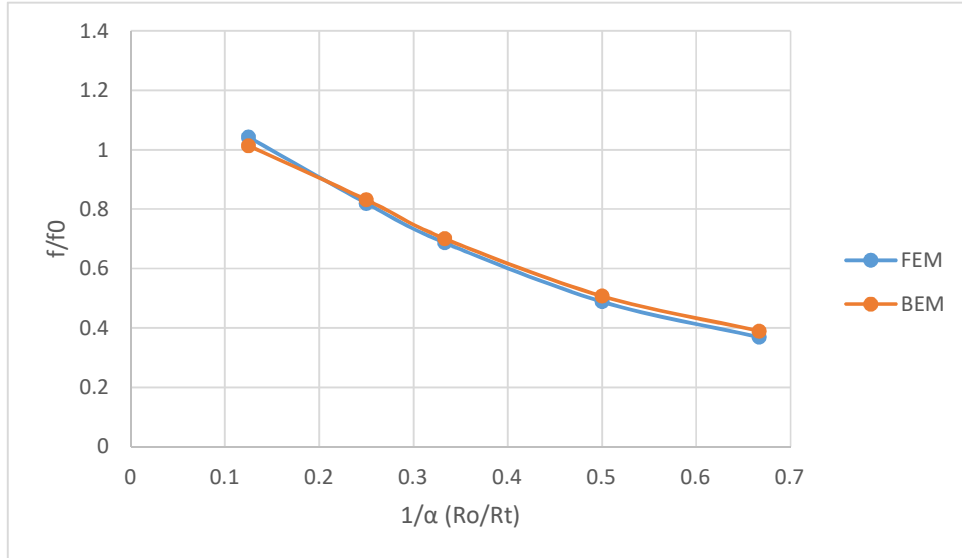
Στο τελευταίο μέρος των δοκιμών, γίνεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας με τη σχέση που προτείνει στην εργασία του ο Αλ. Χρυσστομίδης [28]. Πρόκειται για μια προσεγγιστική σχέση για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας μιας φυσαλίδας σε περιορισμένη ροή. Η συχνότητα της φυσαλίδας για περιορισμένη ροή, αν και αναφέρεται στο κεφάλαιο 1.3, ξαναγράφεται παρακάτω για τη διευκόλυνση του αναγνώστη:

$$\omega = -\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \right)^2 \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right)} \quad (4.1)$$

Ενώ η συχνότητα της φυσαλίδας για μικρή φυσαλίδα σε σχέση με τον αγωγό, δηλαδή $\frac{R_t}{R_0} \rightarrow \infty$, δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_0 = -\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \pm i \sqrt{\left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \right)^2} \quad (4.2)$$

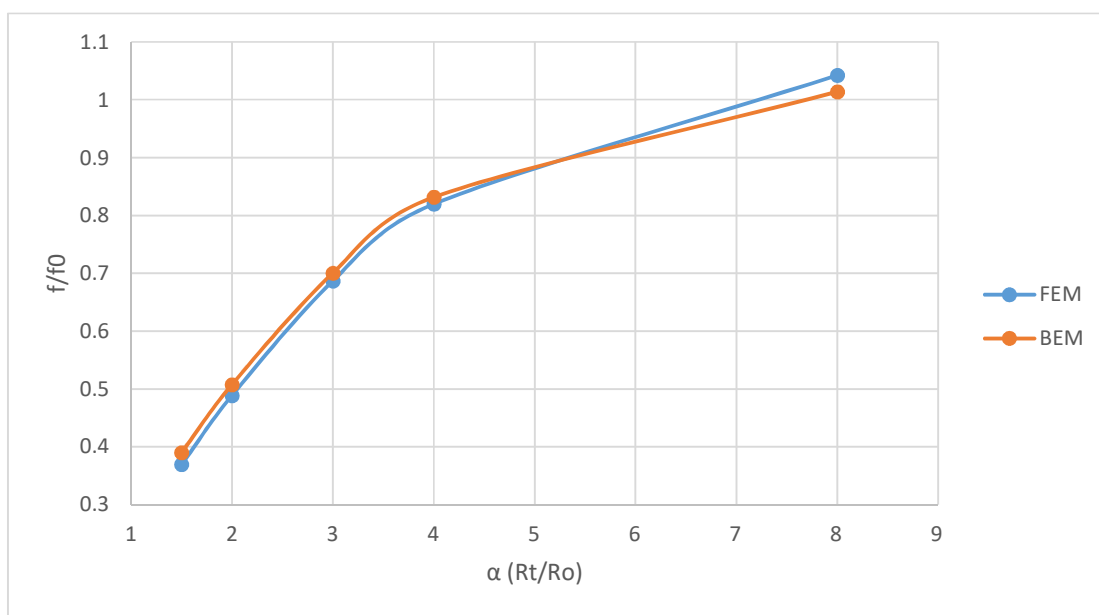
Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, το διάγραμμα που προέκυψε εφαρμόζοντας τη σχέση 4.1 για τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν και για την ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 4.36 Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας με τη μεταβολή του λόγου 1/α. Σύγκριση μεθόδου συνοριακών στοιχείων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία. Για την προσομοίωση ισχύει L/Ro=16.

Είναι φανερό ότι καθώς η ακτίνα του αγωγού μεγαλώνει, η συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας φτάνει πολύ κοντά στην τιμή που έχει όταν η ροή είναι μη περιορισμένη. Επίσης, παρατηρείται μια μικρή απόκλιση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων με τα δεδομένα της μελέτης, όταν η ακτίνα της φυσαλίδας γίνεται σημαντική σε σχέση με την ακτίνα του αγωγού.

Είναι χρήσιμο να παρουσιαστεί και το αντίστοιχο διάγραμμα, αλλά αυτή τη φορά με αντεστραμμένο τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή τη μεταβλητή α , καθώς έτσι είναι πιο ευκρινής η διαφορά που παρουσιάζουν οι δύο μέθοδοι.



Σχήμα 4.37 Μεταβολή της ιδιοσυχνότητας με τη μεταβολή της μεταβλητής α . Σύγκριση μεθόδου συνοριακών στοιχείων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία. Για την προσομοίωση ισχύει $L/Ro=16$.

Η απόκλιση είναι φανερό ότι είναι ελάχιστη. Παρόλα αυτά, το μέγιστό της παρατηρείται στη μεγαλύτερη ακτίνα του αγωγού ($\alpha = 8$). Εκεί φαίνεται ότι για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ο λόγος f/f_0 ξεπερνάει τη μονάδα, κάτι το οποίο μπορεί να οφείλεται και σε υπολογιστικό λάθος, καθώς θα περίμενε κανείς για τόσο μεγάλο αγωγό η φυσαλίδα να δίνει την ίδια απόκριση με αυτή στη μη περιορισμένη ροή.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά μικροφουσαλίδας με πολυμερικό κέλυφος (contrast agent) όταν ταλαντώνεται υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής και βρίσκεται σε περιορισμένη ροή μέσα σε αγωγό.

Αρχικά, με τις προσομοιώσεις της ταλάντωσης της φουσαλίδας για μη περιορισμένη ροή, βρέθηκε η ιδιοσυχνότητά της και συγκρίθηκε με εκείνη που προκύπτει από τη θεωρητική σχέση 1.1. Όπως φαίνεται, τα δύο αποτελέσματα έχουν μικρή διαφορά, που σημαίνει ότι το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε ήταν ακριβές.

Στη συνέχεια, όταν η φουσαλίδα τέθηκε μέσα στον αγωγό, παρατηρήθηκε η μεταβολή της ιδιοσυχνότητάς της καθώς η ακτίνα του αγωγού έτεινε στην ακτίνα της. Το αποτέλεσμα που εξάχθηκε είναι ότι, όταν η ακτίνα του αγωγού είναι αρκετά μεγάλη, τότε η φουσαλίδα συμπεριφέρεται σαν να είναι σε μη περιορισμένη ροή. Όταν όμως η ακτίνα του αγωγού μειώνεται, η συχνότητα συντονισμού της φουσαλίδας μειώνεται και αυτή αισθητά και μάλιστα φτάνει περίπου στο $1/3$ της αρχικής της τιμής όταν η ακτίνα του αγωγού είναι πλέον 1.5 φορές η ακτίνα της φουσαλίδας.

Όσον αφορά το πλάτος της επιβαλλόμενης διαταραχής, από τις δοκιμές που έγιναν, παρατηρήθηκε ότι δεν επηρεάζει αισθητά τη συχνότητα συντονισμού της φουσαλίδας, τουλάχιστον για το εύρος τιμών που χρησιμοποιήθηκε. Για τις διαφορετικές τιμές του πλάτους ε , το μόνο που φαίνεται να μεταβάλλεται είναι, όπως ήταν αναμενόμενο, η μέγιστη τιμή που λαμβάνει η ακτίνα της φουσαλίδας. Όταν, όμως, οι ιδιότητες της φουσαλίδας μεταβλήθηκαν, παρατηρήθηκε μια μεγαλύτερη επίδραση του πλάτους ε στην συχνότητα συντονισμού, που σημαίνει ότι τα πιο μαλακά κελύφη δέχονται πιο έντονα την επίδραση του πλάτους της διαταραχής και ότι για να γινόταν μια αλλαγή αισθητή, όσον αφορά την πρώτη φουσαλίδα, έπρεπε το πλάτος να αυξηθεί σε αρκετά μεγαλύτερες τιμές.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν περαιτέρω με την ανάλυση Fourier που πραγματοποιήθηκε σε δεδομένα πίεσης-χρόνου ενός σημείου του αγωγού. Στην ανάλυση αυτή, οι τιμές των συχνοτήτων συντονισμού που λήφθηκαν, για τις διάφορες τιμές του λόγου ακτίνα αγωγού προς ακτίνα φουσαλίδας α , έχουν πολύ μικρή απόκλιση από εκείνες που έδωσε

η προσομοίωση με FFT. Οι τιμές αυτές παρέμειναν ακριβώς ίδιες για όλα τα πλάτη διαταραχής που χρησιμοποιήθηκαν. Άρα η μελέτη της απόκρισης σε ακουστικές διαταραχές είναι αρκετά αξιόπιστη μέθοδος.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να συνεχιστούν αυτές μελέτες της απόκρισης των μικροφουσαλίδων, καθώς η σημασία τους, ειδικά για τον ιατρικό τομέα, είναι μεγάλη και έχουν ακόμα να προσφέρουν πολλά. Κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας, οι μεταβλητές που διερευνήθηκαν, καθώς και το εύρος τους, ήταν πολύ συγκεκριμένες και είναι δυνατό και χρήσιμο να δεχτούν περαιτέρω μελέτη. Το πλάτος της διαταραχής, για παράδειγμα, φαίνεται ότι είναι δυνατό να επηρεάζει περισσότερο τη συχνότητα συντονισμού της φυσαλίδας, αλλά για τιμές $\varepsilon > 4$. Σε τέτοιες τιμές του πλάτους, όμως, οι προσομοιώσεις που έγιναν δεν απέφεραν αποτελέσματα.

Επίσης, είναι σημαντικό να βρεθεί για κάθε τύπο φυσαλίδας, ανάλογα και με τα χαρακτηριστικά της, το εύρος των πιέσεων και συχνοτήτων για τα οποία η φυσαλίδα είναι σταθερή και τα αντίστοιχα για τα οποία καταρρέει. Με αυτό τον τρόπο, οι μικροφουσαλίδες, θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ακόμα περισσότερες εφαρμογές και θα επιφέρουν σημαντική ανάπτυξη στον κλάδο της ιατρικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Feigenbaum, H. *et al.* (1970) ‘Identification of ultrasound echoes from the left ventricle by use of intracardiac injections of indocyanine green.’, *Circulation*, 41(4), pp. 615–621. doi: 10.1161/01.CIR.41.4.615.
- [2] Gramiak, R. and Shah, P. (1968) ‘Echocardiography of the Aortic Root. : Investigative Radiology’, *Investigative Radiology*, 3(5), pp. 356–366.
- [3] Kremkau, F. *et al.* (1969) ‘Ultrasonic detection of cavitation at catheter tips’, *American Journal of ...*, 11(1), pp. 177–183.
- [4] Stride, E. P. and Coussios, C. C. (2010) ‘Cavitation and contrast: The use of bubbles in ultrasound imaging and therapy’, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 224(2), pp. 171–191. doi: 10.1243/09544119JEIM622.
- [5] Appis, A. W., Tracy, M. J. and Feinstein, S. B. (2015) ‘Update on the safety and efficacy of commercial ultrasound contrast agents in cardiac applications’, *Echo Research and Practice*, 2(2), pp. R55–R62. doi: 10.1530/erp-15-0018.
- [6] Hilgenfeldt, S., Lohse, D. and Zomack, M. (2002) ‘Sound scattering and localized heat deposition of pulse-driven microbubbles’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6), pp. 3530–3539. doi: 10.1121/1.429438.
- [7] Theoharis, S. and Blomley, M. (2006) ‘Gene Therapy and the Possible Value of Microbubble Ultrasound’, *Ultrasound*, 14(3), pp. 145–151. doi: 10.1179/174313406x120530.
- [8] Rouffiac, V. *et al.* (2006) ‘Combination of HIFU therapy with contrast-enhanced sonography for quantitative assessment of therapeutic efficiency on tumor grafted mice’, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 32(5), pp. 729–740. doi: 10.1016/j.ultrasmedbio.2006.02.1403.

- [9] Shah, P. M. *et al.* (2010) ‘Safety and efficacy of a new transpulmonary ultrasound contrast agent: Initial multicenter clinical results’, *Journal of the American College of Cardiology*, 16(2), pp. 316–324. doi: 10.1016/0735-1097(90)90580-i.
- [10] Sboros, V. (2008) ‘Response of contrast agents to ultrasound’, *Advanced Drug Delivery Reviews*, 60(10), pp. 1117–1136. doi: 10.1016/j.addr.2008.03.011.
- [11] Browning, R. J. *et al.* (2014) ‘In Vivo Acoustic Super-Resolution and Super-Resolved Velocity Mapping Using Microbubbles’, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 34(2), pp. 433–440. doi: 10.1109/tmi.2014.2359650.
- [12] Pezet, S. *et al.* (2015) ‘Transcranial functional ultrasound imaging of the brain using microbubble-enhanced ultrasensitive Doppler’, *NeuroImage*, 124, pp. 752–761. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.09.037.
- [13] Frinking, P. J. A. and De Jong, N. (1998) ‘Acoustic modeling of shell-encapsulated gas bubbles’, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 24(4), pp. 523–533. doi: 10.1016/S0301-5629(98)00009-X.
- [14] Shi, W. T. and Forsberg, F. (2000) ‘Ultrasonic characterization of the nonlinear properties of contrast microbubbles’, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 26(1), pp. 93–104. doi: 10.1016/S0301-5629(99)00117-9.
- [15] Plesset, M. S. (1977) ‘Bubble Dynamics and Cavitation’, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1), p. 145.
- [16] Prosperetti, A., Crum, A., Commander, K.W., 1988. Nonlinear bubble dynamics p + u. *J. Acoust. Soc. Am* 83, 502–514.
- [17] Khismatullin, D. B. (2004) ‘Resonance frequency of microbubbles: Effect of viscosity’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3), pp. 1463–1473. doi: 10.1121/1.1778835.
- [18] Feng, Z. C. and Leal, L. G. (2002) ‘Nonlinear Bubble Dynamics’, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29(1), pp. 201–243. doi: 10.1146/annurev.fluid.29.1.201.

- [19] Khabeev, N. S. (2006) ‘Resonance properties of soluble gas bubbles’, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(5–6), pp. 1022–1026. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.09.008.
- [20] Prosperetti, A. and Oguz, H. (1998) ‘The Natural Frequency of Oscillation of Gas Bubbles in Tubes’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(February), pp. 3301–3308.
- [21] Krasovitski, B. and Kimmel, E. (2002) ‘Gas bubble pulsation in a semiconfined space subjected to ultrasound’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(3), pp. 891–898. doi: 10.1121/1.1346683.
- [22] Broumas, A. R. *et al.* (2005) ‘Contrast-enhanced computed tomography and ultrasound for the evaluation of tumor blood flow’, *Investigative Radiology*, 40(3), pp. 134–147. doi: 10.1097/01.rli.0000152833.35744.7f.
- [23] Sassaroli, E. and Hynynen, K. (2005) ‘Resonance frequency of microbubbles in small blood vessels: A numerical study’, *Physics in Medicine and Biology*, 50(22), pp. 5292–5305. doi: 10.1088/0031-9155/50/22/006.
- [24] Sassaroli, E. and Hynynen, K. (2013) ‘Forced linear oscillations of microbubbles in blood capillaries’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4), pp. 2320–2320. doi: 10.1121/1.4780976.
- [25] Tsiglifis, K. and Pelekasis, N. A. (2005) ‘Nonlinear oscillations and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects’, *Physics of Fluids*, 17(10). doi: 10.1063/1.2083947.
- [26] de Jong, N. *et al.* (1992) ‘Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres: Theoretical considerations and some measurements’, *Ultrasonics*, 30(2), pp. 95–103. doi: 10.1016/0041-624X(92)90041-J.
- [27] De Jong, N., Bouakaz, A. and Frinking, P. (2002) ‘Basic acoustic properties of microbubbles’, *Echocardiography*, 19(3), pp. 229–240. doi: 10.1046/j.1540-8175.2002.00229.x.

- [28] Χρυσοστομίδης Αλέξανδρος ‘Μελέτη της ιδιοσυχνότητας μικροφουσαλίδων αέρα με ελαστικό κέλυφος μέσα σε κυλινδρικό αγωγό με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων’, Μεταπτυχιακή Εργασία στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, 2018.
- [29] Lauterborn, W. and Bolle, H. (1975) ‘Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary’, *Journal of Fluid Mechanics*, 72(2), pp. 391–399. doi: 10.1017/S0022112075003448.
- [30] Brujan, E. A. *et al.* (2001) ‘Dynamics of laser-induced cavitation bubbles near an elastic boundary’, *Journal of Fluid Mechanics*, 433, pp. 251–281. doi: 10.1017/S0022112000003347.
- [31] Zhao, S. *et al.* (2006) ‘Acoustic response from adherent targeted contrast agents’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(6), pp. EL63-EL69. doi: 10.1121/1.2364303.
- [32] Garbin, V. *et al.* (2007) ‘Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging’, *Applied Physics Letters*, 90(11). doi: 10.1063/1.2713164.
- [33] Caskey, C. F. *et al.* (2006) ‘Microbubble oscillation in tubes with diameters of 12, 25, and 195 microns’, *Applied Physics Letters*, 88(3), pp. 1–3. doi: 10.1063/1.2164392.
- [34] Qin, S. and Ferrara, K. W. (2007) ‘The Natural Frequency of Nonlinear Oscillation of Ultrasound Contrast Agents in Microvessels’, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 33(7), pp. 1140–1148. doi: 10.1016/j.ultrasmedbio.2006.12.009.
- [35] Vlachomitrou, M. and Pelekasis, N. (2009) ‘Nonlinear interaction between a boundary layer and a liquid film’, *Journal of Fluid Mechanics*, 638, pp. 199–242. doi: 10.1017/S0022112009990644.
- [36] Vlachomitrou, M. and Pelekasis, N. (2017) ‘Dynamic simulation of a coated microbubble in an unbounded flow: Response to a step change in pressure’, *Journal of Fluid Mechanics*, 822, pp. 717–761. doi: 10.1017/jfm.2017.301.

- [37] Babuška, I. (1973) ‘The Finite Element Method with {L}agrangian Multipliers’, *Numerische Mathematik*, 20, pp. 179–192.
- [38] Babuška, I. (1971) ‘Error-bounds for finite element method’, *Numerische Mathematik*, 16(4), pp. 322–333. doi: 10.1007/BF02165003.
- [39] Brezzi, F. (2017) ‘On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers’, *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2), pp. 129–151. doi: 10.1051/m2an/197408r201291.
- [40] Thomas, D. H. *et al.* (2018) ‘The effect of resonance on transient microbubble acoustic response: Experimental observations and numerical simulations’, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 143(3), pp. 1392–1406. doi: 10.1121/1.5026021.
- [41] Blomley, M. J. K. *et al.* (2001) ‘Microbubble contrast agents : a new era in ultrasound Clinical review Microbubble contrast agents : a new era in ultrasound’, *British Medical Journal*, 322(7296), pp. 1222–1225. doi: 10.1136/bmj.322.7296.1222.
- [42] Kooiman, K. *et al.* (2014) ‘Acoustic behavior of microbubbles and implications for drug delivery’, *Advanced Drug Delivery Reviews*. Elsevier B.V., 72, pp. 28–48. doi: 10.1016/j.addr.2014.03.003.
- [43] Hernot, S. and Klibanov, A. L. (2008) ‘Microbubbles in ultrasound-triggered drug and gene delivery’, *Advanced Drug Delivery Reviews*, 60(10), pp. 1153–1166. doi: 10.1016/j.addr.2008.03.005.
- [44] Tsigklifis, K. and Pelekasis, N. A. (2013) ‘Simulations of insonated contrast agents: Saturation and transient break-up’, *Physics of Fluids*, 25(3). doi: 10.1063/1.4794289.