



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΖΥΓΩΝ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

Διπλωματική Εργασία

Αναστάσιος Τσιρανίδης

Επιβλέπων Καθηγητής:

Γεώργιος Σταμούλης

Βόλος 2019



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΖΥΓΩΝ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

Διπλωματική Εργασία

Αναστάσιος Τσιρανίδης

Επιβλέπων Καθηγητής:

Γεώργιος Σταμούλης

Βόλος 2019



UNIVERSITY OF THESSALY
SCHOOL OF ENGINEERING
DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND
COMPUTER ENGINEERING

MODEL ORDER REDUCTION OF TRANSFER
MATRICES ON ELECTRICAL POWER GRIDS

Diploma Thesis

Anastasios Tsiranidis

Supervisor:

Stamoulis George

Volos 2019

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με το πέρας της εργασίας αλλά και των ετών φοίτησης μου θα ήθελα να προβώ σε κάποιες ευχαριστίες για την συμβολή στην επίτευξη των στόχων μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους μου τους διδάσκοντες για την καθοδήγηση όλα αυτά τα χρονιά, τον καθηγητή κύριο Σταμούλη Γεώργιο για την ανάθεση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε για την παρούσα διπλωματική, καθώς επίσης τον κύριο Πιπή Κωνσταντίνο για την καθοδήγηση στην πορεία της εργασίας και τον Χαράλαμπο Αντωνιάδη, υποψήφιο διδάκτορα, ο οποίος με ανεχόταν σχεδόν κάθε εβδομάδα το τελευταίο εξάμηνο για την εξέλιξη και την εκπόνηση της εργασίας.

Θα ήταν άδικο να παραλείψω τους φίλους που στάθηκαν πλάι μου όλα αυτά τα χρόνια. Κάποιοι από αυτούς ήταν από την αρχή των σπουδών μου, άλλοι έφυγαν και με άλλους γνωρίστηκα όσο περνούσαν τα χρονιά. Το θέμα είναι πως όλοι μαζί συνέβαλλαν, ο καθένας με τον τρόπο του, στο να μείνουν αυτά τα χρονιά αλησμόνητα, εύχομαι πραγματικά τα καλύτερα για όλους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω εγκάρδια την οικογένεια μου διότι χωρίς αυτούς δεν θα είχα φτάσει ως εδώ. Η ηθική υποστήριξη, η αγάπη και κυρίως η υπομονή τους ήταν για μένα αναπόσπαστο κομμάτι για την ολοκλήρωση των σπουδών μου. Χάριν στις προσπάθειες και τους αγώνες τους έμαθα και εγώ να αγωνίζομαι προκειμένου να επιτύχω τους δικούς μου στόχους.

Αναστάσιος Τσιρανίδης

Βόλος, 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το μοντέλο μείωσης τάξης είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται πολύ στα συστήματα ελέγχου, στην ανάλυση μηχανολογικών δομών και στην σχεδίαση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Στον τομέα των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, χρησιμοποιείται προκειμένου να βελτιστοποιήσει και να επιταχύνει τις προσομοιώσεις για την μελέτη πυκνωτών μεγάλης χωρητικότητας, γραμμών μεταφοράς και άλλες μελέτες. Η προσομοίωση μεγάλων δικτύων με λεπτομερείς αναπαραστάσεις των γραμμών μεταφοράς υπόκειται σε υπέρμετρο υπολογιστικό κόστος αν δεν εφαρμοστούν οι τεχνικές μείωσης.

Στην παρούσα εργασία συγκρίνονται τρεις μέθοδοι για την αναπαραγωγή μειωμένων μοντέλων από δυναμικά συστήματα, είτε τύπου με μοναδική είσοδο και μοναδική έξοδο(Single Input – Single Output, SISO), είτε πολλών εισόδων και πολλών εξόδων(Multiple Input Multiple Output, MIMO), τα οποία παρουσιάζουν μεγάλο αριθμό από κρίσιμες συχνότητες. Η πρώτη μέθοδος είναι η Low Rank Choleski Factor – ADI (LRCF), η οποία είναι χρήσιμη για περιγραφικά συστήματα μεγάλης κλίμακας, λαμβάνοντας υπόψη την αραιή μορφή των πινάκων μεταφοράς στον χώρο κατάστασης. Η δεύτερη μέθοδος είναι η Vector Fitting (VF) που βασίζεται στην αντιστοιχία της απόκρισης συχνότητας του αρχικού συστήματος έτσι ώστε να παράγει μια ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς για το νέο σύστημα. Η τρίτη και τελευταία μέθοδος αποτελεί έναν συνδυασμό των δύο προηγούμενων και αποσκοπεί στην διατήρηση της παθητικότητας των νέων συστημάτων.

Οι αποδόσεις των τριών τεχνικών συγκρίνονται σύμφωνα με το σφάλμα μοντελοποίησης και την υπολογιστική προσπάθεια. Για την παρουσίαση της εφαρμογής και την σύγκριση των μεθόδων, οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν πάνω σε τέσσερα συστήματα δοκιμής, τα οποία έχουν παραχθεί από το αρχικό σύστημα. Τα συστήματα αυτά διαφέρουν μόνο στο αριθμό των Π-ισοδύναμων κυκλωμάτων με τα οποία έχουν μοντελοποιηθεί οι γραμμές μεταφοράς.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται μέσα από πίνακες και γραφικές παραστάσεις, συγκρίνοντας τις αποδόσεις όλων των μεθόδων για κάθε σύστημα δοκιμής. Ο σκοπός είναι τα νέα μοντέλα, μικρότερης διάστασης, να έχουν την δυνατότητα για την αποτύπωση των δυναμικών συμπεριφορών των αρχικών συστημάτων, πάνω σε ένα εύρος συχνοτήτων με υψηλή ακρίβεια.

ABSTRACT

The Model Order Reduction (MOR) is a helpful tool used in control systems, analysis of mechanical structures and VLSI design. In the field of electrical power systems, it contributes to the optimization and acceleration of the simulations related to studies of large capacitor banks, transmission line energization etc. The simulation of large-scale networks with more detailed representation of the transmission lines can lead to expensive CPU effort if model order reduction methods are not used.

The present thesis compares three techniques for achieving reduced order models of dynamical systems. This comparison is implemented in either single input – single output (SISO) or multiple input – multiple output (MIMO) types of systems with a large number of resonant peaks. The first method used is Low Rank Choleski Factor – ADI (LRCF) that is useful to large-scale descriptor systems, considering state space equations and the sparsity of transfer matrices. The second method is Vector Fitting (VF), which is based on the fitting of frequency response of the main system in order to create an equivalent transfer function. The last method is a combination of the previous two aiming at preserving the passivity of the reduced models.

The performances of these three methods are compared with respect to modeling error and computational effort. For the presentation of the application and the method comparison, simulations were carried out in four test systems, which were obtained from the original system. These test systems vary only to the number of PI-cascaded circuits that were used to model each transmission line.

The results are presented through tables and graphical plots comparing the performance of every method applied for each test system. The main objective is the reduced models that have much smaller dimensions, to have the potential to copy the dynamic behaviors of the original test system over a wide range of frequencies with high precision.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ευχαριστίες	iv
Περίληψη	v
Abstract	vi
Πίνακας περιεχομένων.....	vii
Κεφάλαιο 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Γενικά στοιχεία για μεθόδους μείωσης τάξης μοντέλου.....	1
1.2 Ιστορική αναδρομή.....	2
1.3 Περιγραφή προβλήματος και συμβολή της διπλωματικής εργασίας.....	3
1.4 Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας	5
Κεφάλαιο 2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΗΕ.....	6
2.1 Ορισμός ΣΗΕ.....	6
2.2 Γραμμές μεταφοράς.....	6
2.3 Μοντελοποίηση και προσομοίωση στα ΣΗΕ.....	11
2.4 Μαθηματικό υπόβαθρο.....	11
2.4.1 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.....	12
2.4.2 Χώρος κατάστασης.....	12
2.4.3 Συνάρτηση μεταφοράς από τις εξισώσεις κατάστασης.....	15
2.4.4 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα.....	16
2.4.5 Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς.....	16
2.4.6 Ευστάθεια στο χώρο κατάστασης.....	17
2.4.7 Βαθμός πολυπλοκότητας μιας εξίσωσης.....	18
Κεφάλαιο 3 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.....	19
3.1 RLC συστήματα βαθμού πολυπλοκότητας 2 και η μείωση τους σε βαθμού πολυπλοκότητας 0.....	19
3.2 Μοντέλο μείωσης τάξης (Model Order Reduction- MOR).....	22
3.2.1 Μέθοδος Low Rank Choleski Factor(LRCF).....	22

3.2.2 Vector Fitting(VF).....	25
3.2.3 Υβριδική μέθοδος(LRCF + VF).....	27
3.3 Συστήματα δοκιμής	27
3.4 Σφάλμα μεθόδων.....	29
Κεφάλαιο 4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	30
4.1 Αποτελέσματα SISO.....	30
4.1.1 VF.....	31
4.1.2 LRCF.....	32
4.1.3 Υβριδική μέθοδος.....	34
4.1.4 Συζήτηση αποτελεσμάτων.....	35
4.2 Αποτελέσματα MIMO.....	36
4.2.1 LRCF	37
4.2.2 VF.....	38
4.2.3 Υβριδική μέθοδος	40
4.2.4 Συζήτηση αποτελεσμάτων.....	40
Κεφάλαιο 5 ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	41
5.1 Συμπεράσματα	41
5.2 Μελλοντικές επεκτάσεις.....	41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	43
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	44
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α Αναπαράσταση ενός RLC κυκλώματος.....	45
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β Δεδομένα συστήματος	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

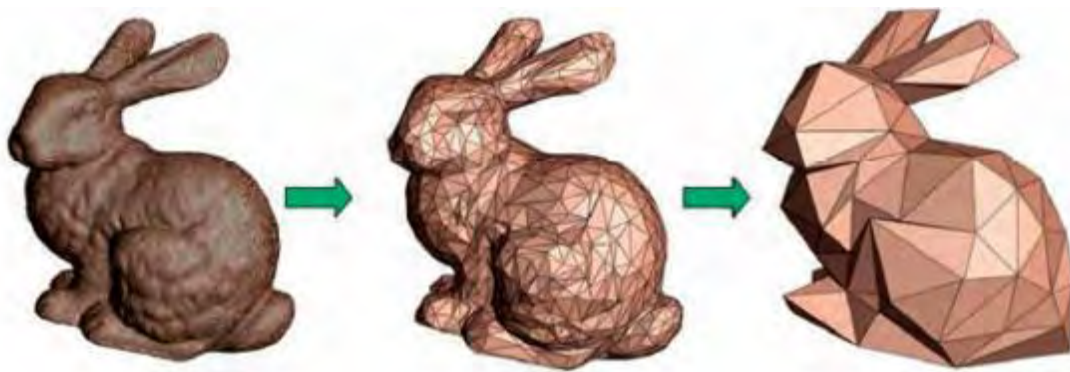
1.1 Γενικά στοιχεία για μεθόδους μείωσης τάξης μοντέλου

Η μείωση τάξης μοντέλου(model order reduction, MOR), ήταν το έναυσμα στο πλαίσιο της θεωρίας συστημάτων και ρύθμισης ως μια μέθοδος απλοποίησης υψηλής τάξης δυναμικών μοντέλων, που η περιγραφή τους αποτελείται από μεγάλο αριθμό εξισώσεων και μεταβλητών (συνήθως από μερικές δεκάδες μέχρι δισεκατομμύρια). Τα αποτελέσματα των μεθόδων ονομάζονται μοντέλα μειωμένης τάξης (Reduced Order Models, ROMs) τα οποία περιγράφονται από εμφανές μικρότερο αριθμό εξισώσεων και μεταβλητών, χωρίς όμως να μεταβάλλονται οι βασικές ιδιότητες του αρχικού, πλήρους μοντέλου (Full Order Model, FOM), με γνώμονα την συμπεριφορά εισόδου-εξόδου[4]. Σήμερα, η μείωση τάξης των μοντέλων είναι ένας επιτυχής τομέας της έρευνας τόσο στα συστήματα ελέγχου όσο και στην αριθμητική ανάλυση, γεγονός που έχει τεράστιο αντίκτυπο στις μεθόδους αυτές συνδυάζοντας διαφορετικές τεχνικές και απόψεις με σκοπό την ραγδαία ανάπτυξη του κλάδου.

Με μια διαφορετική οπτική, η ανάγκη για μια απλοποίηση των δυναμικών συστημάτων είναι ζωτικής σημασίας. Τέτοιες απλοποιήσεις χρειάζονται προκειμένου να περατωθούν προσομοιώσεις σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και περιορισμένο αποθηκευτικό χώρο, αλλά με αξιόπιστα αποτελέσματα. Σε κάποιες περιπτώσεις, υπάρχει ανάγκη για on-line προβλέψεις της συμπεριφοράς ενός συστήματος με αποδεκτή υπολογιστική ταχύτητα, έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα για βελτιστοποίηση των διεργασιών και των προϊόντων.

Πρωτεύον θέμα για την μέθοδο μείωσης τάξης είναι ταχύτατη σύλληψη των σημαντικότερων χαρακτηριστικών μιας δομής. Αυτό σημαίνει ότι στα πρώιμα στάδια της διεργασίας, οι πιο βασικές ιδιότητες του αρχικού μοντέλου πρέπει ήδη να παρουσιαστούν με μια μικρότερη προσέγγιση. Έπειτα υπάρχει ένα κριτήριο τερματισμού της διεργασίας μείωσης, όπου όλες οι αναγκαίες ιδιότητες του αρχικού μοντέλου πρέπει να ληφθούν υπόψη με επαρκή ακρίβεια με αυτοματοποιημένες διαδικασίες [1].

Η εικόνα 1 αναπαριστά την έννοια αυτή, με έναν ευκολονόητο τρόπο, επιδεικνύοντας ότι μερικές φορές χρειάζεται πολύ λίγη πληροφορία για την περιγραφή ενός μοντέλου. Αυτό το παράδειγμα με τις εικόνες του Stanford Bunny, δείχνει ότι ακόμα και με λίγες όψεις, ο λαγός αναγνωρίζεται.



Εικόνα 1.Εικονογράφηση του μοντέλου μείωσης τάξης [4].

1.2 Ιστορική αναδρομή

Στην ιστορία των μαθηματικών παρατηρείται μια επιθυμία για την προσέγγιση περίπλοκων συναρτήσεων με μια πιο απλή σύνθεση. Το 1807 ο Fourier (1768-1830) δημοσίευσε την ιδέα για την προσέγγιση μιας συνάρτησης μέσω μερικών τριγωνομετρικών ορών. Στην γραμμική άλγεβρα το πρώτο βήμα στον τομέα μείωσης τάξης μοντέλου ήρθε από τον Lanczos (1893-1974). Έψαχνε έναν τρόπο για να μειώσει έναν πίνακα σε τριδιαγώνια μορφή. Ο W.E. Arnoldi κατάλαβε ότι ένας ίσως μικρότερος πίνακας θα ήταν μια καλή προσέγγιση για τον αρχικό πίνακα [1]. Οι ιδέες των δύο παραπάνω ήταν ήδη βασισμένες στο γεγονός ότι οι υπολογισμοί αυτοί χρειάζονται υπολογιστική δύναμη. Το πρόβλημα όμως, ήταν πως αυτές οι διεργασίες μείωσης θα γίνονταν αυτοματοποιημένες.

Οι θεμελιώδεις μέθοδοι στον τομέα μείωσης τάξης μοντέλου δημοσιεύτηκαν στις δεκαετίες του 80 και του 90 του περασμένου αιώνα. Το 1981 ο Moore δημοσίευσε την μέθοδο Truncated Balanced Realization (TBR), το 1984 έγινε η δημοσίευση του περίφημου paper Hankel-norm reduction από τον Glover. Το 1987 προτάθηκε η Proper Orthogonal Decomposition (POD) από τον Sirovich. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι αναπτύχθηκαν στην θεωρία ελέγχου και συστημάτων. Το 1990 αναπτύχθηκε η μέθοδος υπολογισμού των υποχώρων του Kreyol. Το 1995 δημοσιεύτηκε άλλη μια θεμελιώδης μέθοδος που βασίστηκε στην μέθοδο Arnoldi, ονομάστηκε PRIMA.

Τα πρόσφατα χρόνια, όλο και περισσότερη έρευνα πραγματοποιείται πάνω στον συγκεκριμένο τομέα, με αποτέλεσμα να υπάρχουν ποικίλες μέθοδοι σε διαθεσιμότητα.

Κάποιες έχουν δημιουργηθεί για καθολική χρήση, ενώ άλλες είναι κατασκευασμένες και μόνο για συγκεκριμένες εφαρμογές [8].

1.3 Περιγραφή του προβλήματος και συμβολή της διπλωματικής εργασίας

Το μοντέλο μείωσης τάξης χρησιμοποιείται ευρέως σε βαθμωτά και πολυμεταβλητά συστήματα ελέγχου, στην ανάλυση διαταραχών σε μηχανολογικές δομές και στην σχεδίαση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (VLSI). Οι προσομοιώσεις μέσω υπολογιστών που εκτελούνται στις παραπάνω διεργασίες έχουν εγκαθιδρυθεί για μια ποικιλία προβλημάτων προκειμένου να διευκολύνουν την δουλειά τους οι μηχανικοί και οι σχεδιαστές. Κατά αυτόν τον τρόπο νέα προϊόντα σχεδιάζονται γρηγορότερα, με παραπάνω αξιοπιστία και χωρίς την ανάγκη δημιουργίας ακριβών προτύπων [1].

Στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας τα μοντέλα που αναπτύσσονται απαιτούν λεπτομερή σχεδιασμό συμπεριλαμβάνοντας και τυχόν διαφορετικές τιμές στις κρίσιμες συχνότητες των αποκρίσεων μέσα σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Η όλο και αυξανόμενη απαίτηση για λεπτομερή σχεδιασμό σε περιπλοκά συστήματα επιβαρύνει τους μηχανικούς αλλά και τους μαθηματικούς που ασχολούνται με την έρευνα στον τομέα της αριθμητικής ανάλυσης και της μηχανικής. Οι ρεαλιστικές προσομοιώσεις συνεπάγονται με ελάχιστο αριθμό απόκλισης από το πραγματικό μοντέλο, δηλαδή το σφάλμα πρέπει να είναι μηδαμινό έτσι ώστε να υπάρχει μια πλήρη αντιστοιχία μεταξύ αρχικού συστήματος και παραγόμενου μοντέλου.

Ένας άλλος παράγοντας που λαμβάνεται υπόψη είναι ο χρόνος της CPU. Ένα λεπτομερές μοντέλο ενός συστήματος μεγάλης κλίμακας για να περιγραφεί εξ ολοκλήρου δαπανείται αρκετός χρόνος από τον επεξεργαστή του συστήματος. Το γεγονός αυτό έχει γίνει και αντικείμενο μελέτης των ερευνητών, καθώς καλούνται να αναπτύξουν τεχνικές και μεθόδους πάνω στην μείωση της τάξης. Επίσης, οι υπολογιστές και οι επεξεργαστές γίνονται ολοένα και πιο γρήγοροι, η αύξηση της υπολογιστικής δύναμης συνδέεται και με την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων. Στα ΣΗΕ οι επαναληπτικές μέθοδοι, με τους πίνακες που χαρακτηρίζουν το σύστημα ως δεδομένο, είναι αυτές που χρησιμοποιούνται περισσότερο για αυτό και η ανάπτυξή τους έχει σπουδαία σημασία.

Ένα αποδεκτό μειωμένης τάξης μοντέλο (Reduced Order Model, ROM) πρέπει να έχει μειωμένη διάσταση στο διάνυσμα καταστάσεων και να είναι σε θέση να αναπαράγει

την προσομοιωμένη απόκριση εισόδου – εξόδου του αρχικού συστήματος σε επιθυμητά όρια ακρίβειας, καθώς απαιτείται ιδιαίτερα μικρότερη υπολογιστική προσπάθεια. Στην παραπάνω προσπάθεια πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο χρόνος του επεξεργαστή που χρειάζεται για την αναπαραγωγή του νέου μοντέλου, καθώς δεν πρέπει να είναι υπερβολικός έτσι ώστε όλη η διαδικασία βελτιστοποίησης να μην καθίσταται κοστοβόρα.

Οι κυρίες συνεισφορές της παρούσας διπλωματικής είναι:

- Η παρουσίαση των αποδόσεων τριών μεθόδων μείωσης τάξης μοντέλου στις γραμμές μεταφοράς των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, σε RLC μορφή, μεγάλης κλίμακας
- Δοκιμές στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας με παρουσίαση γραφικών παραστάσεων
- Μελέτη ενός συστήματος με 34 ζυγούς για πρακτική, με όλα τα δεδομένα να περιέχονται στην εργασία, μαζί με οκτώ συστήματα δοκιμής που περιγράφουν (descriptor models) το σύστημα για μελέτη μεταβατικής κατάστασης.

Η πρώτη μέθοδος είναι μια παραλλαγή της γνωστής μεθόδου Choleski, η οποία χρησιμοποιείται για αραιά συστήματα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων. Η ιδιαιτερότητα είναι η χρήση και η επιλογή συγκεκριμένων παραμέτρων έτσι ώστε να επιτευχθεί η γρηγορότερη σύγκλιση της μεθόδου όταν αυτή εφαρμόζεται σε RLC κυκλώματα. Η δεύτερη μέθοδος είναι η Vector Fitting (VF), με την οποία υπολογίζεται το μειωμένο μοντέλο από την απόκριση συχνότητας του συστήματος μέσω της συνάρτησης μεταφοράς. Η τρίτη μέθοδος είναι ένας συνδυασμός των δύο παραπάνω μεθόδων, καθώς επιλέγοντας τα κατάλληλα κριτήρια παράγεται το νέο μοντέλο, διατηρώντας την παθητικότητα του.

Οι πίνακες εξισώσεων που καλούνται να ελαττωθούν ως προς την διάσταση μοντελοποιούν τις γραμμές μεταφοράς του συστήματος των 34 ζυγών. Θεωρούνται ως Π-ισοδύναμα κυκλώματα με σταθερές παραμέτρους. Η παρουσίαση των γραμμών μεταφοράς, από έναν μεγάλο αριθμό RLC Π-συνδεδεμένων κυκλωμάτων με πολλές κρίσιμες συχνότητες στην απόκριση συχνότητας του συστήματος, εκτείνεται σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων.

1.4 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας και στις γραμμές μεταφοράς γενικά. Παρουσιάζεται επίσης, το μαθηματικό υπόβαθρο που κρίνεται αναγκαίο για την μελέτη των τεχνικών μείωσης, όπως έννοιες της γραμμικής άλγεβρας και των συστημάτων ελέγχου.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η μεθοδολογία των τριών τεχνικών. Παρουσιάζονται αναλυτικά τα αλγοριθμικά βήματα και το σφάλμα που χρησιμοποιήθηκε για την κάθε μέθοδο, έτσι ώστε να γίνουν πλήρως κατανοητές. Επίσης, γίνεται αναφορά και στα περιγραφικά συστήματα δοκιμής που χρειάστηκαν για την διαδικασία μείωσης τάξης με την λεπτομερή παρουσίαση τους.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναλύει τα αποτελέσματα των μεθόδων. Η συγκριτική μελέτη των αλγορίθμων πραγματοποιείται με βάση την διάσταση του νέου ελαττωμένου μοντέλου σε σχέση με το αρχικό, με την χρήση των πινάκων σύγκρισης και οι γραφικές παραστάσεις διευκολύνουν την πλήρη κατανόηση της τεχνικής.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται μια σύνοψη της όλης μελέτης. Με τα συμπεράσματα κάθε μεθόδου και την ανάλυση των αποτελεσμάτων καθώς και προτείνονται επιπλέον μελλοντικές προοπτικές πάνω στους αλγορίθμους μείωσης τάξης των μοντέλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

2.1 Ορισμός ΣΗΕ

Ένας ορισμός που θα μπορούσε να αποδοθεί για το σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ) είναι ως το σύνολο των ηλεκτρολογικών και μηχανολογικών εγκαταστάσεων και εξοπλισμού που χρησιμοποιούνται για τροφοδότηση ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα σύνολο καταναλωτών. Οι εγκαταστάσεις και ο εξοπλισμός αυτός αποτελούνται από γεννήτριες, μετασχηματιστές και γραμμές μεταφοράς τα οποία αποτελούν βασικές συνιστώσες για την παραγωγή, την μεταφορά και την διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας.

2.2 Γραμμές μεταφοράς

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη των Γραμμών Μεταφοράς (ΓΜ, Transmission Lines-TL). Μια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από αγωγούς φάσεων, μονωτήρες και αγωγούς προστασίας. Οι αγωγοί φάσεων αναρτώνται από πύργους, οι οποίοι είναι απλού ή διπλού κυκλώματος. Βασική λειτουργία των ΓΜ είναι η μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας από τους σταθμούς παραγωγής προς τα κέντρα κατανάλωσης, με τις όσο δυνατόν λιγότερες απώλειες. Υπάρχουν τρία είδη γραμμών μεταφοράς:

- i. Εναέριες ΓΜ
- ii. Υπόγειες και υποβρύχιες ΓΜ
- iii. Οι ΓΜ με πρόβλεψη κατάλληλου περιβλήματος των αγωγών.

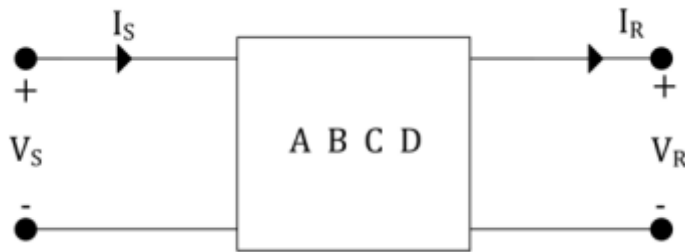
Η εναέρια σύνδεση πραγματοποιείται μέσω αγωγών, ενώ η υπόγεια σύνδεση καλωδίων με ένα ειδικό περίβλημα για να μη παραμένουν εκτεθειμένοι οι αγωγοί που βρίσκονται στο εσωτερικό. Η βασική διαφορά των δύο ειδών είναι στα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά, οι εναέριες ΓΜ παρουσιάζουν επαγωγικά φορτία ενώ οι υπόγειες μεγάλη χωρητική αντίδραση. Οι ΓΜ με πρόβλεψη κατάλληλου περιβλήματος συνήθως χρησιμοποιούνται όταν πρέπει να γίνει μετατροπή μιας εναέριας γραμμής σε υπόγεια ή το αντίστροφο. Τοποθετούνται δηλαδή σε μικρές αποστάσεις, όπου οι συνδέσεις των καλωδίων διαπερνούν από σήραγγες ή σωλήνες οχετών [11].

Οι τρεις βασικές ηλεκτρικές παράμετροι μιας ΓΜ, ανά μονάδα μήκους (m) είναι:

- r : Η εν σειρά αντίσταση μετριέται σε Ohm/m
- L : Η εν σειρά επαγωγή μετριέται σε Henry/m
- C : Η εγκάρσια χωρητικότητα μετριέται σε Farad/m

Η μοντελοποίηση της γραμμής προϋποθέτει την γνώση των παραπάνω παραμέτρων. Για την επιλογή του κατάλληλου ισοδύναμου κυκλώματος, εξίσου βασική παράμετρος είναι το μήκος (l) της γραμμής που καθορίζει το μέγεθος της χωρητικότητας της αντίδρασης, δηλαδή το μέγεθος των απωλειών ρεύματος προς τη γη.

Απεικόνιση ΓΜ ως δίθυρο:



Εικόνα 2. Αναπαράσταση ΓΜ ως δίθυρο [πηγή: google].

Παρατηρώντας την παραπάνω εικόνα και από τον νομό τάσεων και ρευμάτων του Kirchhoff έχουμε:

$$V_S = AV_R + BI_R \quad (2.1)$$

$$I_S = CV_R + DI_R \quad (2.2)$$

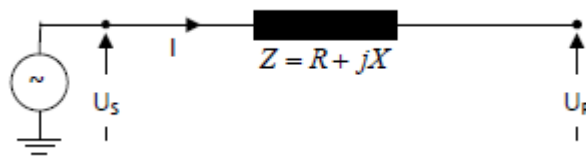
Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Με βάση το μήκος της γραμμής οι ΓΜ χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες [11]:

I. Γραμμές μικρού μήκους ($l < 80\text{km}$)

Οι ΓΜ αυτές ονομάζονται μικρού μήκους, οι απώλειες ρεύματος αμελητέες και δεν κρίνεται απαραίτητη η επίδραση της χωρητικότητας της γραμμής.



Εικόνα 3. Π-ισοδύναμο κύκλωμα γραμμής μικρού μήκους.

Οι εξισώσεις του παραπάνω κυκλώματος είναι:

$$V_S = V_R + ZI_R \quad (2.3)$$

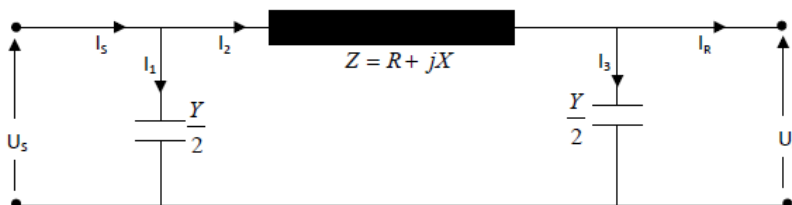
$$I_S = I_R$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

II. Γραμμές μεσαίου μήκους ($80\text{km} < l < 240\text{km}$)

Στις γραμμές μεσαίου μήκους το ισοδύναμο κύκλωμα τροποποιείται κατάλληλα ώστε να περιλαμβάνεται η χωρητικότητα της γραμμής.



Εικόνα 4. Π-ισοδύναμο γραμμής μεσαίου μήκους.

Με τις εξής εξισώσεις:

$Y=j\omega CL$: χωρητική αντίδραση της γραμμής

$$V_S = \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) V_R + I_R Z \quad (2.5)$$

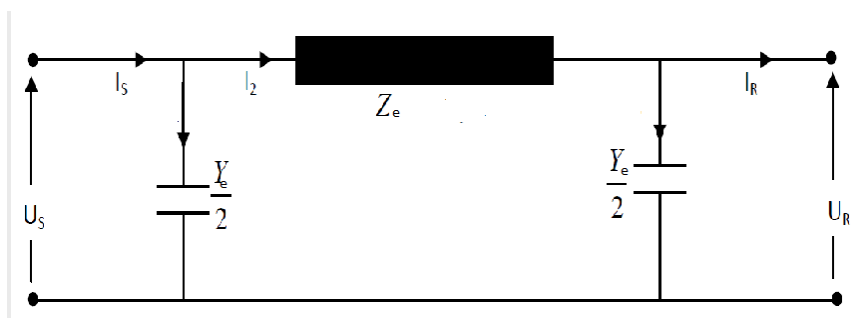
$$I_S = V_R Y \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) + \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) I_R \quad (2.6)$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ZY}{2} + 1 & Z \\ Y \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) & \frac{ZY}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

III. Γραμμές μεγάλου μήκους ($l > 240\text{km}$)

Στην περίπτωση αυτή δεν δύναται η αναπαράσταση των γραμμών με την χρήση συγκεντρωμένων παραμέτρων. Χρειάζεται η υπόθεση ότι κάθε στοιχειώδης τιμή της γραμμής παρουσιάζει αντίσταση, επαγωγή και χωρητική αντίδραση.



Εικόνα 5. Π-ισοδύναμο γραμμής μεγάλου μήκους.

$Z = z l$: Συνολική εν σειρά συνθέτη αντίσταση γραμμής (Ω)

$Z_c = \sqrt{z/y}$: Χαρακτηριστική αντίδραση γραμμής

$Y = y l$: Συνολική εγκάρσια συνθέτη αγωγιμότητα γραμμής (S)

$y = r + j\omega L$: Εγκάρσια αγωγιμότητα γραμμής ανά μονάδα μήκους

$\gamma = \sqrt{zy}$: Σταθερά διάδοσης

Θέτοντας:

$$Z_e = Z \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l} \quad (2.8)$$

$$\frac{Y_e}{2} = \frac{Y}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\left(\frac{\gamma l}{2}\right)} \quad (2.9)$$

$$V_S = V_R \cosh(\gamma l) + Z_c I_R \sinh(\gamma l) \quad (2.10)$$

$$I_S = V_R \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_c} + I_R \cosh(\gamma l)$$

Σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_c \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_c} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.3 Μοντελοποίηση και προσομοίωση στα ΣΗΕ

Η μοντελοποίηση των ΣΗΕ απαιτεί λεπτομερή σχεδιασμό του κάθε εργαλείου έτσι ώστε να παράγει ακριβή αποτελέσματα αλλά απαιτείται εκτενέστερος χρόνος στην CPU, γεγονός που τροφοδοτεί τους ειδικούς για την βελτίωση των τεχνικών MOR[3]. Οι λόγοι που οδήγησαν στην προσομοίωση των ΣΗΕ είναι οι εξής :

- Το μέγεθος του αρχικού συστήματος είναι τόσο μεγάλο που δεν δύναται να προσομοιωθεί σε λογικά χρονικά όρια.
- Η επιθυμία για βελτιστοποίηση ενός συστήματος και αρκετών προσομοιώσεων που χρειάζεται να πραγματοποιηθούν οι οποίες είναι ακριβές για το αρχικό σύστημα
- Η απομόνωση συγκεκριμένων ιδιοτήτων ενός ΣΗΕ χωρίς την ανάλυση των υπολοίπων στοιχείων του δικτύου.
- Ανάλυση ευστάθειας. Γνωρίζοντας ότι το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές κρίνεται αναγκαίο και το νέο σύστημα να είναι ευσταθές.

Για την πλήρη κατανόηση των παραπάνω, πρέπει να ληφθεί υπόψη η προσομοίωση ως πειραματική μέθοδος η οποία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την μεγάλη ακρίβεια του μοντέλου ενός εξεταζόμενου συστήματος, καθώς και η επιλογή συνιστωσών για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Με άλλα λόγια, δεν απαιτείται μόνο η βελτιστοποίηση της μεθόδου – αλγορίθμου στην εκάστοτε περίπτωση, αλλά και η σωστή χρήση των κυκλωματικών μοντέλων για την αναπαράσταση των επιμέρους στοιχείων του συστήματος.

Η προσομοίωση των ΣΗΕ χωρίζεται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- Σταθερής κατάστασης (steady state), όπου γίνεται η μελέτη ροής φορτιού.
- Ταχέων μεταβατικών φαινομένων (transient stability), για την μελέτη σφαλμάτων και μεταβολών κατά την διακοπτική λειτουργία του δικτύου.
- Αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας (power market), για την εξυπηρέτηση λειτουργιών της αγοράς (τιμολόγηση παραγομένης ενέργειας κλπ.).

2.4 Μαθηματικό υπόβαθρο

Από την θεωρία συστημάτων αυτομάτου ελέγχου η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου προκειμένου να περιγράψει ένα φυσικό σύστημα αποτελεί έναν βασικό παράγοντα. Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια αναφορά σε ορισμούς στον κλάδο των

μαθηματικών έτσι ώστε να κατανοηθούν οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική.

2.4.1 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

Η παρούσα διπλωματική επικεντρώνεται στα Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα συστήματα (ΓΧΑ, Line Time Invariant systems - LTI), τόσο στην θεωρία όσο και στην πράξη. Με την βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων είναι δυνατόν να μετασχηματιστούν τα συστήματα αυτά από φυσικά μοντέλα σε μαθηματικά.

Έστω τα σήματα $x_1(t), x_2(t), x(t)$:

- Γραμμικό ονομάζεται το σύστημα όταν με δοθέντα τα δύο σήματα $x_1(t), x_2(t)$ και τις σταθερές a, b ισχύει:

$$f(ax_1(t) + bx_2(t)) = af(x_1(t)) + bf(x_2(t))$$

για οποιαδήποτε τιμή των a, b , δηλαδή η χρονική απόκριση του γραμμικού συνδυασμού δύο εισόδων είναι ίση με την επιμέρους χρονική τους απόκριση. Η παραπάνω σχέση, χαρακτηρίζεται ως σχέση υπέρθεσης και γενικεύεται για τον κάθε συνδυασμό πεπερασμένου αριθμού εισόδων.

- Χρονικά αναλλοίωτο ή χρονικά αμετάβλητο ονομάζεται ένα σύστημα αν και μόνο αν, οι χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου αντιστοιχούν και σε χρονικές ολισθήσεις του σήματος εξόδου δηλαδή:

$$y(t) = f\{x(t)\} \leftrightarrow y(t - t_0) = f\{x(t - t_0)\} \quad \forall t_0 \in R$$

2.4.2 Χώρος κατάστασης

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο να παρουσιαστούν κάποιες έννοιες των δυναμικών συστημάτων καθώς αποτελούν θεμέλιο για την επίλυση των αλγορίθμων που θα χρησιμοποιηθούν.

Κατάσταση ενός συστήματος ορίζεται ως ένα σύνολο εσωτερικών μεταβλητών του με τις οποίες παρακολουθείται το σύστημα, προκειμένου να επιτύχουμε την σωστή περιγραφή του στο πεδίο του χρόνου. Οι προαναφερθείσες μεταβλητές ονομάζονται *μεταβλητές κατάστασης (state variables)* και ο ευκλείδειος χώρος που δημιουργείται από αυτές ονομάζεται *χώρος κατάστασης (state space)*. Ο μαθηματικός ορισμός των μεταβλητών κατάστασης $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ προσδιορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός μεταβλητών, τέτοιων ώστε αν είναι γνωστές οι τιμές τους σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0 , να καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος και για μελλοντικές χρονικές στιγμές $t \geq t_0$ [9].

Έστω το παρακάτω σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων (Multiple Inputs – Multiple Outputs, MIMO). Είναι εφικτό να εκφραστούν οι m είσοδοι, οι p εξόδοι και οι n μεταβλητές κατάστασης ως διανύσματα:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Οι εξισώσεις κατάστασης που περιγράφουν το σύστημα, με n διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης συνδέοντας το διάνυσμα εισόδου $u(t)$ με το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$, είναι της μορφής:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

με την f να αποτελεί ένα στηλοδιάνυσμα με n στοιχεία.

Το διάνυσμα εξόδου $y(t)$ εκφράζεται από τα διανύσματα εισόδου $u(t)$ και κατάστασης $x(t)$, με εξίσωση εξόδου της μορφής:

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

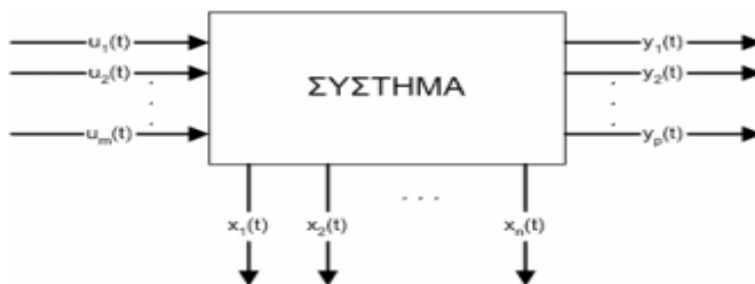
με την g να αποτελεί ένα στηλοδιάνυσμα με p στοιχεία.

Αρχικές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης είναι οι τιμές του διανύσματος $x(t)$ για $t=t_0$ (συνήθως $t_0 = 0$) με τον εξής συμβολισμό:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, οι εξισώσεις κατάστασης, η εξίσωση εξόδου και οι αρχικές συνθήκες αποτελούν την περιγραφή ενός δυναμικού συστήματος στο χώρο κατάστασης με την μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}$$



Εικόνα 6. MIMO σύστημα [πηγή: google].

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτο(ΓΧΑ), η περιγραφή του γίνεται από ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Τότε η μορφή των εξισώσεων κατάστασης είναι:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Οπού $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ είναι ο πίνακας του συστήματος, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ είναι ο πίνακας εισόδου, $\mathbf{C} \in R^{p \times n}$ ο πίνακας εξόδου και ο απευθείας πίνακας $\mathbf{D} \in R^{p \times m}$.

2.4.3 Συνάρτηση μεταφοράς από τις εξισώσεις κατάστασης

Ως συνάρτηση μεταφοράς (transfer function) ενός ΓΧΑ συστήματος καλείται το πηλίκο του μετασχηματισμού της κατά Laplace εξόδου ως προς της κατά Laplace εισόδου με μηδενικές αρχικές συνθήκες [9]. Ένα συνήθης συμβολισμός είναι:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Εφόσον είναι γνωστές οι εξισώσεις κατάστασης (2.12), (2.13), παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των σχέσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \Leftrightarrow \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \Leftrightarrow \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}(x(0) + BU(s)) \end{aligned}$$

Ομοίως και για την εξίσωση εξόδου:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Οπότε η συνάρτηση μεταφοράς εισόδου εξόδου ισούται:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Leftrightarrow$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.14)$$

Με το βαθμό του αριθμητή μικρότερο από τον βαθμό του παρονομαστή προκειμένου να είναι εφικτή η υλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων πεπερασμένης διάστασης, ειδάλλως είναι αδύνατη η υλοποίηση και η περιγραφή αυτών των συστημάτων στον χώρο κατάστασης με την χρήση αυτών των εξισώσεων.

2.4.4 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Δύο επιπλέον έννοιες του χρειάζεται να αναπτυχθούν είναι η εκλεγχιμότητα (controllability) και η παρατηρησιμότητα (observability) των συστημάτων. Με την χρήση των διανυσμάτων των δύο εννοιών ένα αρχικό σύστημα ανάγεται σε ένα νέο μικρότερης διάστασης. Συγκεκριμένα:

- Ένα σύστημα είναι *ελέγξιμο* αν η κατάσταση του μια χρονική στιγμή t_0 υπάρχει πεπερασμένη χρονική στιγμή $t_1 > t_0$ τέτοια ώστε για κάθε διάνυσμα κατάστασης $x(t_0)$ να υπάρχει είσοδος $u(t)$ με $t \in [t_0, t_1]$ το οποίο δύναται να οδηγήσει την $x(t_0)$ σε οποιαδήποτε επιθυμητή κατάσταση $x(t_1)$. Το σύστημα είναι ελέγξιμο αν η παραπάνω συνθήκη εφαρμόζεται για κάθε t_0 .
- Η κατάσταση ενός συστήματος είναι παρατηρήσιμη μια δεδομένη χρονική στιγμή t_0 , εφόσον υπάρχει πεπερασμένη t_1 , έτσι ώστε γνωρίζοντας την είσοδο στο διάστημα $[t_0, t_1]$ και την αντίστοιχη έξοδο να υπάρχει δυνατότητα να υπολογιστεί η κατάσταση $x(t_0)$. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν η παραπάνω συνθήκη εφαρμόζεται για κάθε t_0 [9].

2.4.5 Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να αναλυθεί και ως εξής:

$$H(s) = \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{s - p_j}$$

όπου p_j είναι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή εκεί που ο παρονομαστής ισούται με το μηδέν, R_j είναι το υπόλοιπο (residue) του κάθε πόλου. Οι πόλοι είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος $-A^{-1}$. Στην πραγματικότητα, αν ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων π.χ. E είναι μη-μοναδιαίος, ισχύει ότι:

$$-A^{-1} = E\Lambda E^{-1}$$

με τον διαγώνιο πίνακα Λ να περιέχει τις ιδιοτιμές λ_j . Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην συνάρτηση μεταφοράς παίρνουμε:

$$H(s) = -C^T E (I + s\Lambda)^{-1} E^{-1} A^{-1} B.$$

Εφόσον οι πίνακες B, C διαθέτουν μια στήλη (σύστημα με μοναδιαία είσοδο) τότε:

$$H(s) = \sum_{j=1}^n \frac{l_j^T r_j}{1 + s \lambda_j}$$

με l_j r_j να αποτελούν τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα, αντίστοιχα.

Παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντική σχέση αναμεσά στους πόλους και στις ιδιοτιμές ενός συστήματος. Αν ένα πραγματικό σύστημα παράγει ένα αλγεβρικό και διαφορικό σύστημα, έπειτα χρειάζεται να λυθεί απλά ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Εφόσον οι πόλοι εμφανίζονται και στην εξίσωση της συνάρτησης μεταφοράς υπάρχει μια δυνατή συσχέτιση αναμεσά στους δύο παράγοντες και συνεπώς αναμεσά στο σύστημα και στους πόλους. Γενικά, αν μια συνάρτηση μεταφοράς σχεδιάζεται με γνώμονα τον φανταστικό άξονα, οι πόλοι με μικρό φανταστικό μέρος καθορίζουν την συμπεριφορά της (οπότε και του συστήματος) για μικρές τιμές συχνοτήτων. Συνεπώς οι πόλοι με μεγαλύτερο φανταστικό μέρος, χρειάζονται για μια καλύτερη προσέγγιση σε υψηλότερες συχνότητες. Οπότε μια επιτυχής τεχνική ελάττωσης αποσκοπεί στην σύλληψη πόλων με μικρό φανταστικό μέρος περισσότερο και την παραμέληση πόλων με μικρό υπόλοιπο.[4]

2.4.6 Ευστάθεια στο χώρο κατάστασης

Υπάρχουν δύο τυπικοί ορισμοί για τον έλεγχο ευστάθειας στο χώρο κατάστασης:

I.Ορισμός 1:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

με $u(t) = 0$ (ελεύθερη είσοδος), το σύστημα είναι *ευσταθές* αν για κάθε πεπερασμένη αρχική συνθήκη $x(0)$ υπάρχει αριθμός $M(x(0))$ τέτοιος ώστε:

$$\|x(t)\| < M \quad \forall t > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

όπου $\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ είναι το μέτρο του διανύσματος κατάστασης για ελεύθερη είσοδο.

II. Ορισμός 2:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

το οποίο είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, το σύστημα είναι ευσταθές αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο δηλαδή έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος [9].

2.4.7 Βαθμός πολυπλοκότητας μιας εξίσωσης

Μια τελευταία έννοια στην ενότητα αυτή του μαθηματικού υποβάθρου είναι ο βαθμός πολυπλοκότητας (index) των διαφορικών εξισώσεων. Θεωρείται ως τον ελάχιστο αριθμό βημάτων για να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός μιας αλγεβρικής διαφορικής εξίσωσης (Differential Algebraic Equation- DAE) σε συνήθη διαφορική εξίσωση (Ordinary Differential Equation- ODE) η οποία έχει βαθμό πολυπλοκότητας μηδέν (index-0) [10]. Για την πλήρη κατανόηση τους θα θεωρήσουμε δύο απλά παραδείγματα:

Έστω η εξίσωση

$$x(t) = g(t)$$

Είναι μια πρώτου βαθμού πολυπλοκότητας (index-1) αλγεβρική διαφορική εξίσωση, διότι χρειάζεται μια παραγωγή για να λάβουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$x'(t) = g'(t)$$

Για το σύστημα:

$$\begin{aligned}x_1 &= g(t) \\ x_2 &= x_1'\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση παίρνουμε: $x_2 = x_1' = g'(t)$. Έπειτα παραγωγίζοντας την δεύτερη εξίσωση: $x_2' = x_1'' = g''(t)$. Στην περίπτωση αυτή ο βαθμός πολυπλοκότητας είναι 2 (index-2) διότι χρειάστηκαν δύο παραγωγίσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 RLC συστήματα βαθμού πολυπλοκότητας 2 και η μείωση τους σε βαθμού πολυπλοκότητας 0

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μείωση της τάξης του μοντέλου. Οι τροποποιήσεις πραγματοποιήθηκαν προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος LRCF. Στο παράρτημα Α παρουσιάζεται η μεθοδολογία για ένα απλό κύκλωμα RLC.

Οι μέθοδοι MOR εφαρμόζονται σε ΓΧΑ συστήματα συμπεριλαμβάνοντας διαφορικές και αλγεβρικές εξισώσεις (DAEs) της μορφής:

$$T\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

όπου $x(t) \in R^n$ είναι το γενικευμένο διάνυσμα καταστάσεων $u(t) \in R^m$ το διάνυσμα εισόδου και $y(t) \in R^r$ το διάνυσμα εξόδου. Οι πίνακες $A, T \in R^{n \times n}$ με τον T μη-μηδενικό και τον A να είναι ο πίνακας του συστήματος, $B \in R^{n \times m}$ είναι ο πίνακας εισόδου, $C \in R^{r \times n}$ ο πίνακας εξόδου και ο απευθείας πίνακας $D \in R^{r \times m}$. Το διάνυσμα καταστάσεων $x(t) = [x_1^T \ x_2^T]^T$ περιέχει τις καταστάσεις $x_1(t) \in R^{n_1}$ και τις αλγεβρικές μεταβλητές $x_2(t) \in R^{n_2}$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή οι πίνακες T, A, B και C , μπορούν να γραφούν:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \ C_2]$$

όπου ο υποπίνακας $T_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ τετραγωνικός και περιέχει ένα τουλάχιστον μη-μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή. Ο πίνακας A αποτελείται από τους υποπίνακες: $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}, A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}, A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}, A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}, (n_1 + n_2 = n)$

Οι υποπίνακες $A_{21}, A_{12}, A_{22}, B_2, C_2$ έχουν την εξής δομή:

$$A_{12} = [A_{12}^1 \ A_{12}^2], \ A_{21} = \begin{bmatrix} A_{21}^1 \\ A_{21}^2 \end{bmatrix}, \ A_{22} = \begin{bmatrix} A_{22}^1 & A_{22}^2 \\ A_{22}^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_2^1 \\ B_2^2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [C_2^1 \ C_2^2]$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την δομή του A_{22} , οι μεταβλητές στο $x_2(t)$ γράφονται ως $x_2(t) = [x_{21}^T \ x_{22}^T]^T$, όπου $x_{21} \in R^{n_{21}}$ και $x_{22} \in R^{n_{22}}$ με $n_{21} + n_{22} = n_2$.

Στα συστήματα δοκιμής που χρησιμοποιήθηκαν ο A_{22} είναι μοναδιαίος πίνακας, ενώ ο A_{22}^1 όχι, γεγονός που υπάρχει δυνατότητα απαλοιφής Gauss στον $x_{21}(t)$:

$$x_{21}(t) = -[A_{22}^1]^{-1}[A_{21}^1 x_1(t) + A_{22}^2 x_{22}(t) + B_2^1 u(t)] \quad (3.3)$$

Εφόσον είναι γνωστό το $x_{21}(t)$ οι $n_{21} = \text{rank}(A_{22}) = \text{rank}(A_{21}^1)$ αλγεβρικές εξισώσεις μπορούν να ελαχιστοποιηθούν. Οι υπόλοιπες n_{22} αλγεβρικές και διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned} T_1 \dot{x}_1(t) &= \overline{A}_{11} x_1(t) + \overline{A}_{12} x_{22}(t) + \overline{B}_1 u(t) \\ 0 &= \overline{A}_{21} x_1(t) + \overline{A}_{22} x_{22}(t) + \overline{B}_2 u(t) \\ y(t) &= \overline{C}_1 x_1(t) + \overline{C}_2 x_{22}(t) + \overline{D}_a u(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου οι υποπίνακες με μειωμένες διαστάσεις είναι:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{11} &= A_{11} - A_{12}^1 [A_{22}^1]^{-1} A_{21}^1 \\ \overline{A}_{12} &= A_{12}^2 - A_{12}^1 [A_{22}^1]^{-1} A_{22}^2 \\ \overline{A}_{21} &= A_{21}^2 - A_{22}^3 [A_{22}^1]^{-1} A_{21}^1 \\ \overline{A}_{22} &= -A_{22}^3 [A_{22}^1]^{-1} A_{22}^2 \\ \overline{B}_1 &= B_1 - A_{12}^1 [A_{22}^1]^{-1} B_2^1 \\ \overline{B}_2 &= B_2^2 - A_{22}^3 [A_{22}^1]^{-1} B_2^1 \\ \overline{C}_1 &= C_1 - C_2^1 [A_{22}^1]^{-1} A_{21}^1 \\ \overline{C}_2 &= C_2^2 - C_2^1 [A_{22}^1]^{-1} A_{22}^2 \\ \overline{D}_a &= DC_2^1 [A_{22}^1]^{-1} B_2^1 \end{aligned}$$

Στην παρούσα εργασία οι n_{22} της εξίσωσης (3.1) δεν περιέχουν είσοδο $u(t)$, οπότε $B_2^2 = 0$. Επίσης, οι εξισώσεις δικτύου των DAE είναι οργανωμένες έτσι ώστε τα γινόμενα:

$$A_{22}^3 [A_{22}^1]^{-1} A_{22}^2 = 0$$

$$A_{22}^3 [A_{22}^1]^{-1} B_2^1 = 0$$

με αποτέλεσμα τους υποπίνακες $\overline{A}_{22}^2 = 0$ και $\overline{B}_2 = 0$ που βρίσκονται στην εξίσωση (3.4). Οπότε η εξίσωση (3.4) με τις $x_1(t)$ εναπομένοντες (αλγεβρικές) μεταβλητές διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} T_1 \dot{x}_1(t) &= \overline{A}_{11} x_1(t) + \overline{A}_{12}^2 x_{22}(t) + \overline{B}_1 u(t) \\ 0 &= \overline{A}_{21}^2 x_1(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$y(t) = \overline{C}_1 x_1(t) + \overline{C}_2^2 x_{22}(t) + \overline{D}_a u(t)$$

όπου οι υποπίνακες $T_1 \in R^{n_1 \times n_1}$, $\overline{A}_{21}^2 \in R^{n_{22} \times n_1}$ με $rank = n_{22}$. Οι εξισώσεις στην (3.5) αποτελούν ένα index-2 DAE σύστημα με $n_1 + n_{22}$ αλγεβρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι η φύση των index-2 DAE, από τα γνωστά μας συστήματα και οι περισσότερες αλγεβρικές εξισώσεις – καταστάσεις της (3.5), μπορούν να ελαχιστοποιηθούν από μαθηματικές διεργασίες στην μορφή index-0(ODE). Ο μετασχηματισμός αυτός είναι εφικτός διότι οι n_{22} καταστάσεις στο σετ των εξισώσεων δύναται να εκφραστούν ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $n_1 - n_{22}$ καταστάσεων, οι οποίες είναι πολύ πιο αποδοτικές [3].

Η ελαχιστοποίηση πάντα οδηγεί στο γέμισμα του πίνακα, το οποίο είναι αποδεκτό για αραιά RLC συστήματα που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Εφόσον, $n_R = [n_2 - rank(A_{22})]$ είναι μικρότερης τάξης του A_{22} , τότε οι αλγεβρικές μεταβλητές και καταστάσεις στην (3.5) αναλογούν στο index-0 μοντέλο συστήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{T} \tilde{\dot{x}}(t) &= \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \\ y(t) &= \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{D}_a u(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου, $\tilde{x}(t) \in R^{n_1 - n_R}$, οι πίνακες $\tilde{T}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}_a$ έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις με τον \tilde{T} μη-μοναδιαίο πίνακα. Με την μορφή της εξίσωσης (3.6) υπάρχει δυνατότητα για την χρήση της LRCF μεθόδου όπως αναλύεται στην ενότητα 3.2.1.

Τα αποτελέσματα της απόκρισης συχνότητας (frequency response) για την ενότητα 3.2.2 λαμβάνονται, θέτοντας $s = j\omega$, όπου ω είναι η συχνότητα σε rad/sec, ως εξής:

$$Y(s) = C(sT - A)^{-1}B + DU(s) = G(s)U(s) \quad (3.7)$$

όπου $G(s) \in R^{r \times m}$ είναι ο πίνακας μεταφοράς, του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος.

3.2 Μοντέλο μείωσης τάξης (Model Order Reduction - MOR)

Το πρόβλημα που ανάγεται είναι η προσέγγιση των εξισώσεων (3.1) ή (3.6) με ένα άλλο δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t) &= \hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}u(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}\quad (3.8)$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}(t) \in R^k, k \ll n$, είναι το ελαττωμένο τάξης διάνυσμα καταστάσεων, $\hat{\mathbf{y}}(t) \in R^r$ η έξοδος του και οι πίνακες $\hat{A} \in R^{k \times k}, \hat{B} \in R^{k \times m}, \hat{C} \in R^{r \times k}, \hat{D} \in R^{r \times m}$, χαρακτηρίζονται ως ελαττωμένοι πίνακες καταστάσεων. Παρακάτω γίνεται η παρουσίαση των τριών αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν.

3.2.1 Μέθοδος Low Rank Choleski Factor(LRCF)

Η μέθοδος αυτή έχει δημιουργηθεί προκειμένου να λειτουργεί σε μεγάλης διάστασης αραιούς πίνακες μεταφοράς των εξισώσεων κατάστασης [5]. Υπολογίζει τον πίνακα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας, όπου και οι δύο αυτοί πίνακες έχουν αποσυντεθεί σε χαμηλότερης τάξης μαζί με τις παραμέτρους της Choleski (Choleski factors). Το αποτέλεσμα αυτό δίνει προτεραιότητα στον πίνακα Hankel¹ του οποίου η αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών (Singular Value Decomposition, SVD) παράγει την σωστή διάσταση του ελαττωμένου μοντέλου σε δεδομένο σφάλμα ανοχής (tolerance error).

Επιπλέον, η μέθοδος απαιτεί την χρήση εναλλακτικών εμμέσων κατευθυνόμενων (alternating direction implicit, ADI) παραμέτρων, οι οποίες επηρεάζουν την σύγκλιση της μεθόδου και την ποιότητα του μειωμένου μοντέλου (Reduced Order Model, ROM). Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία αυτή είναι πραγματικές τιμές ίσες με τις συχνότητες συντονισμού που παρήχθησαν από τα γραφήματα της απόκρισης συχνότητας.

Υπάρχουν άπειρες αναπαραστάσεις που μπορούν να περιγράψουν την εξίσωση (3.8) [2]. Οι γενικές εκφράσεις είναι της μορφής:

$$\hat{A} = T_L^T A T_R, \quad \hat{B} = T_L^T B, \quad \hat{C} = C T_R, \quad \hat{D} = D \quad (3.9)$$

¹ 1: Πίνακας Hankel είναι ένας τετραγωνικός, συμμετρικός πίνακας του οποίου στα στοιχεία της κύριας αντιδιαγωνίου είναι ίσα, δηλαδή έστω ο πίνακας A με στοιχεία a_{ij} με $i < j$ ισχύει:
 $a_{i,j} = a_{i+k,j-k}, \quad k = 0, 1, \dots, j-i$

όπου και οι δύο πίνακες $T_L, T_R \in R^{n \times k}$, με το ζητούμενο να είναι να υπολογιστούν με διάφορες τεχνικές οι πίνακες αυτοί έτσι ώστε το μειωμένο μοντέλο να πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

Μέθοδος:

- Το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός του πίνακα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας P,Q, αντίστοιχα λύνοντας τις εξισώσεις Lyapunov [4]:

$$\begin{aligned} AP + PA^T &= -BB^T \\ A^T Q + QA &= -C^T C \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Το δεύτερο βήμα είναι ο υπολογισμός των Choleski factors. Λαμβάνοντας υπόψη την τελική λύση της επαναληπτικής διαδικασίας ως P η οποία έχει την μορφή ως γινόμενο των Choleski factors: $P_i = Z_i Z_i^*$ με το Z_i να έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{(-2p_1)}(A + \mu_1 I)^{-1} B \\ Z_i &= A_{\mu_i} Z_{i-1} (A + \mu_1 I)^{-1} B \end{aligned}$$

όπου $p_i = \text{real}(\mu_i) < 0, i = 2, 3, \dots, i_{\max}$ με i_{\max} ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και μ_i είναι οι ADI παράμετροι.

- Το τρίτο βήμα είναι η κατασκευή του μειωμένου μοντέλου τάξης $k \ll n$ μέσω της (3.9), όπου οι πίνακες T_L, T_R δίνονται[6]:

$$T_L = LY_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}, \quad T_R = UW_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$$

Οι πίνακες $Y_1, W_1, \Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ επιλέχθηκαν έτσι ώστε οι $k \ll n$, μεγαλύτεροι μοναδιαίοι όροι του Hankel, να διατηρηθούν στο νέο μοντέλο [4].

Παρακάτω γίνεται μια συνοπτική αναπαράσταση του αλγορίθμου προκειμένου να βρεθούν οι παράμετροι ADI (Z) του LRCF

Αλγόριθμος Sparse Low Rank Choleski ADI

ΕΙΣΟΔΟΣ: Οι αρχικές Ιακωβιανές μήτρες (Jacobian matrices) $J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2$ και οι παράμετροι ADI $\mu^j, j = 1, 2, \dots, J$

ΕΞΟΔΟΣ: Οι παράμετροι ADI Z του $P = ZZ^T$

1) Λύση του X από την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_{1I} & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$2) \text{Θέτοντας } Z_1 = T_1 = \sqrt{(-2p_1)} X, \mu_i = \mu^{imodJ}$$

$$3) \text{Για } i=2,3,\dots,i_{max}$$

4)Λύση του X από την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_{1I} & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5) \text{Θέτοντας } T_i = \sqrt{-\frac{p_i}{-p_{i-1}}} (T_{i-1} - \gamma_i X)$$

$$6) Z_i = [Z_{i-1} \quad T_i]$$

7) Τέλος επανάληψης

Παρακάτω γίνεται συνοπτική αναπαράσταση του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του μειωμένου μοντέλου (Reduced Order Model ROM).

Αλγόριθμος Reduced Order system via Sparse LRCF-ADI

ΕΙΣΟΔΟΣ: Οι αρχικές Ιακωβιανές μήτρες (Jacobian matrices) $J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2$ και οι παράμετροι ADI $\mu^j, j = 1, 2, \dots, J$

ΕΞΟΔΟΣ: Οι ελαττωμένοι πίνακες κατάστασης $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$

1)Υπολογισμός των παραμέτρων ADI μ_i

2)Υπολογισμός των παραμέτρων της Choleski από τον πίνακα παρατηρησιμότητας και ελεγχξιμότητας (παραπάνω αλγόριθμος)

3)Υπολογισμός της SVD από την σχέση $U_c \Sigma U_b = Z_B Z_C$, Z_B, Z_C οι Choleski factors, με τις τιμές μοναδιαίες τιμές ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά.

4)Αφαίρεση από τον πίνακα των στοιχείων που βρίσκονται μετρά το k th μεγαλύτερο μοναδιαίο στοιχείο:

$$U_C^k = U_C(:, 1:k) \quad \Sigma_k = \Sigma(1:k, 1:k) \quad U_B^k = U_B(:, 1:k)$$

5)Υπολογισμός των μετασχηματισμών πινάκων T_L, T_R ως εξής:

$T_L = \widetilde{Z}_C U_C^k \Sigma_k^{-\frac{1}{2}}, T_R = \widetilde{Z}_B U_B^k \Sigma_k^{-\frac{1}{2}}$, με $\widetilde{Z}_C, \widetilde{Z}_B$ η πραγματική μορφή των Z_B, Z_C , αντίστοιχα.

6) Υπολογισμός $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$:

$$\hat{A} = \beta_1 - \beta_2 J_4^{-1} a_1$$

$$\hat{B} = \beta_1 - \beta_2 J_4^{-1} B_2$$

$$\hat{C} = C_1 T_R - \beta_3 a_1$$

$$\hat{D} = D_a - \beta_3 B_2$$

$$\text{με } \beta_1 = T_L^T J_1 T_R, \quad \beta_2 = T_L^T J_2, \quad \beta_3 = J_4^{-1} C_2, \quad a_1 = J_3 T_R$$

3.2.2 Μέθοδος Vector Fitting

Στο υποκεφάλαιο αυτό αναλύεται η δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εκπόνηση της διπλωματικής. Ο αλγόριθμος Vector Fitting (VF) είναι μια αριθμητική μέθοδος, η οποία έχει ως είσοδο μια ακολουθία από δείγματα της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος στο πεδίο της συχνότητας και παράγει ένα ΓΧΑ και ευσταθές σύστημα, του οποίου η απόκριση παραμένει όσο το δυνατόν παρόμοια με αυτή του αρχικού. Η σύγκλιση βασίζεται στην ακρίβεια των εκτιμήσεων των δειγμάτων αυτών τα οποία είναι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς [7].

Η ρητή συνάρτηση που βοηθά στην προσέγγιση της απόκρισης έχει την μορφή:

$$f(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - p_n} + d + sh \quad (3.11)$$

Έστω p_i είναι η άγνωστοι πόλοι και τα υπόλοιπα c_i μπορεί να είναι είτε πραγματικοί αριθμοί είτε συζυγείς μιγαδικοί της μορφής:

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{\pm j\varphi_n}$$

$$p_n = \sigma_n \pm j\omega_n$$

Το ζήτημα από την εξίσωση (3.11) λόγω της μη-γραμμικότητας της μπορεί να λυθεί ως ένα πρόβλημα ελάχιστων τετραγώνων σε δύο βήματα:

$$\left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + 1 \right\} Y(s) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + r_0^{(m)} \quad (3.12)$$

$$\tilde{z}^{(m)} = a^{(m+1)} = eig\{A^{(m)} - B^{(m)}C^{T(m)}\} \quad (3.13)$$

Στο πρώτο στάδιο η μέθοδος τοποθετεί επαναληπτικά ένα σετ αρχικών πόλων στις κατάλληλες θέσεις λύνοντας την εξίσωση (3.12) με γνωστούς πόλους $a_k^{(m)}$, το m δηλώνει τον αριθμό της επανάληψης. Αφού τα μηδενικά του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.12) προσεγγίσουν τους πόλους p_i της $f(s)$, υπολογίζονται με το πρόβλημα των ιδιοτιμών όπως περιγράφεται στην (3.13) με τους δεδομένους πίνακες A, B, C από τον χώρο κατάστασης. Οι νέοι πόλοι αντικαθίστανται, επιτυγχάνοντας ένα βελτιωμένο σετ μέχρι το $a_k^{(m)}$ να τείνει στο p_i . Έπειτα στο δεύτερο στάδιο της μεθόδου τα άγνωστα μηδενικά υπολογίζονται από την εξίσωση (3.12) θέτοντας: $\left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + 1 \right\} = 1$

Παρακάτω γίνεται συνοπτική αναπαράσταση του αλγορίθμου για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς του μειωμένου μοντέλου(Reduced Order Model ROM).

Αλγόριθμος Vector Fitting

ΕΙΣΟΔΟΣ: Το σετ αρχικών πόλων: a_k

ΕΞΟΔΟΣ: Η νέα συνάρτηση μεταφοράς; $\sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}_k}{s - a_k} + r_0$

1) Για $m = 1, 2, \dots, m_{max}$:

2) Κατασκευή της σχέσης $\left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + 1 \right\} Y(s) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + r_0^{(m)}$

3) Υπολογισμός των νέων πόλων από την λύση της παραπάνω σχέσης

4) Υπολογισμός των μηδενικών από την σχέση $\left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}^{(m)}_k}{s - a_k^{(m)}} + 1 \right\} = 1$

5) Αντικατάσταση των παλαιών πόλων από τους νέους

6) Τέλος επανάληψης

7) Επιλογή των κατάλληλων πόλων

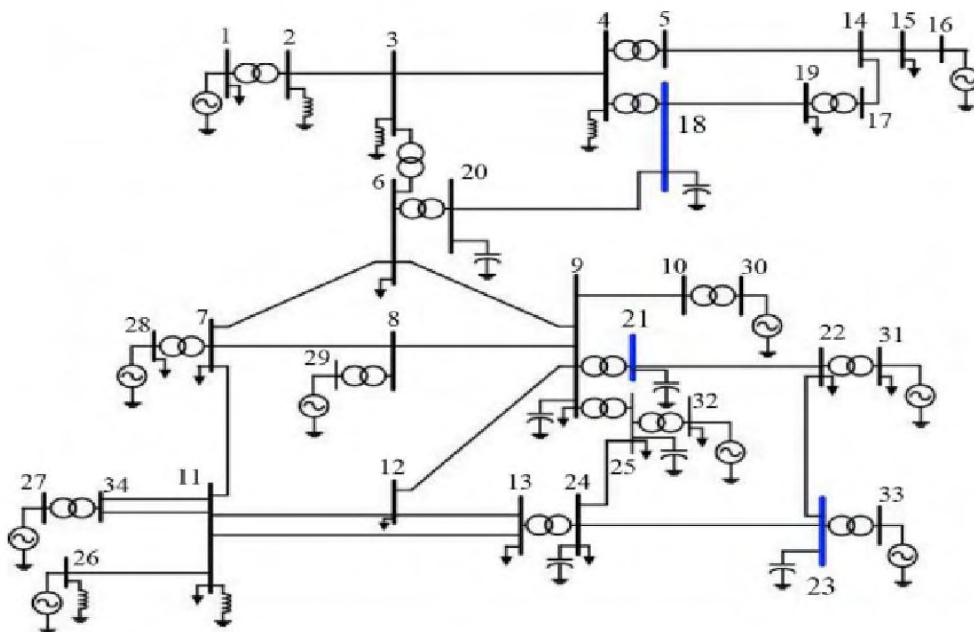
8) Εύρεση της r_j $j = 0, 1, 2, \dots, n$ λύνοντας την $\sum_{k=1}^N \frac{\tilde{r}_k}{s - a_k} + r_j \approx 1$

3.2.3 Υβριδική μέθοδος(LRCF+VF)

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο με την παρουσίαση των αλγορίθμων, θα γίνει μια μικρή αναφορά και για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μεθόδων που ονομάζεται υβριδική (hybrid) μέθοδος. Όπως προαναφέρθηκε η μέθοδος VF λαμβάνει ως είσοδο ένα σετ αρχικών πόλων, στην μέθοδο αυτή οι αρχικές εκτιμήσεις των πόλων υπολογίζονται από τα λιγότερο ακριβή μειωμένης τάξης μοντέλα που εξήχθησαν από την LRCF. Η μεθοδολογία αυτή, έχει ως γνώμονα την διατήρηση της συμμετρίας και της παθητικότητας του συστήματος. Ακόμα και αν το νέο μοντέλο δεν είναι παθητικό, αν για παράδειγμα θα παραχθεί ως μη-παθητικό από την LRCF, με την υβριδική μέθοδο μετατρέπεται σε παθητικό έτσι ώστε να μην υπάρξουν προβλήματα στα θέματα ευστάθειας [3].

3.3 Συστήματα δοκιμής

Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συστήματα δοκιμής (test systems) που χρησιμοποιήθηκαν για την μελέτη και την υλοποίηση των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Το βασικό σύστημα είναι ένα δίκτυο 34 ζυγών (34-bus, εικόνα 7), του οποίου τα RLC δεδομένα δίνονται στο παράρτημα Β. Όλες οι ΓΜ του συστήματος αναπαρίστανται σε Π-ισοδύναμα (PI-cascaded) κυκλώματα με ανεξάρτητες συχνότητες στις γραμμές, δημιουργώντας οκτώ περιγραφικά μοντέλα συστήματος.



Εικόνα 7. Μονογραμμικό διάγραμμα 34 ζυγών.

Οι διαφορικές – αλγεβρικές εξισώσεις των οκτώ συστημάτων δημιουργήθηκαν για περιπτώσεις μιας εισόδου – μιας εξόδου (Single Input – Single Output, SISO) και για πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων (Multiple Inputs, Multiple Outputs, MIMO), ποικίλοντας στον αριθμό των Π-ισοδυνάμων κυκλωμάτων δηλαδή:

- Για 10 Π-ισοδύναμα κυκλώματα έχουμε S10PI, M10PI, όπου S για SISO και M για MIMO
- Για 20 Π-ισοδύναμα κυκλώματα έχουμε S20PI, M20PI, όπου S για SISO και M για MIMO
- Για 40 Π-ισοδύναμα κυκλώματα έχουμε S40PI, M40PI, όπου S για SISO και M για MIMO
- Για 80 Π-ισοδύναμα κυκλώματα έχουμε S80PI, M80PI, όπου S για SISO και M για MIMO

Οι διαστάσεις από τα παραπάνω μοντέλα φαίνονται στον πίνακα 1 όπου με ρ συμβολίζεται η φασματική ακτίνα (μεγαλύτερη απολυτή τιμή των ιδιοτιμών των πινάκων (spectral radius)). Τα τέσσερα SISO συστήματα (S10PI, S20PI, S40PI, S80PI) έχουν ως είσοδο το ρεύμα στον ζυγό #21 και ως έξοδο την τάση στον ίδιο ζυγό. Ενώ στα τέσσερα MIMO συστήματα (M10PI, M20PI, M40PI, M80PI) ως είσοδοι λαμβάνονται τα ρεύματα στους ζυγούς #18, #21 και #23 και οι τάσεις στους αντίστοιχους ζυγούς ως έξοδοι².

Πίνακας 1. Στοιχεία των οκτώ συστημάτων.

Π-ισοδύναμα ανά ΓΜ	Ονόματα των SISO	Ονόματα των MIMO	n (εξισώσεις)	n ₁ (εξισώσεις)	Φασματική ακτίνα (ρ)
10	S10PI	M10PI	682	563	2×10^6
20	S20PI	M20PI	1182	1063	4×10^6
40	S40PI	M40PI	2182	2063	8×10^6
80	S80PI	M80PI	4182	4063	2×10^7

² Τα datasets είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα: <http://sites.google.com/site/rommes/software>

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση των ελαττωμένων τάξης μοντέλων για αυτά τα συστήματα δοκιμής όπως περιγράφονται στον πίνακα 1 τα οποία πρέπει να αναπαράγουν επαρκώς, για όλες τις διεργασίες, την συμπεριφορά εισόδου – εξόδου. Λόγω της $O(n^3)$ πολυπλοκότητας των μεθόδων, με n να συμβολίζεται ο αριθμός καταστάσεων, σε τέτοια μεγάλα – αραιά συστήματα μπορούν να εφαρμοστούν οι MOR μέθοδοι οι οποίες αξιοποιούν την δομή και το γεγονός ότι είναι αραιοί οι πίνακες των συστημάτων.

Η απόκριση στο πεδίο συχνότητας και στο πεδίο του χρόνου μαζί με την αναπαράσταση των πόλων (pole spectra) των αποτελεσμάτων των ελαττωμένων, ως προς την τάξη, μοντέλων περιγράφονται και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των αρχικών μοντέλων στο επόμενο κεφάλαιο.

3.4 Σφάλμα μεθόδων

Το σφάλμα που χρησιμοποιήθηκε για τις μεθόδους είναι η ριζά του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square, RMS), δηλαδή η τιμή του σφάλματος αναμεσά στην απόκριση συχνότητας του αρχικού συστήματος και του ελαττωμένου. Δίδεται από τον τύπο:

$$RMS\ ERROR = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_s} |(G_{ik} - \widehat{G}_{ik})|^2}{N_c N_s}}$$

όπου G_{ik} είναι η i -οστή τιμή της απόκρισης συχνότητας από την k -οστή συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού συστήματος. Ενώ \widehat{G}_{ik} είναι η αντίστοιχη ποσότητα του μειωμένου τάξης συστήματος, $N_c N_s$ είναι ο αριθμός των συναρτήσεων μεταφοράς και των δειγμάτων για την καθεμιά αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων που αναλυθήκαν στο προηγούμενως. Όλες οι εκτελέσεις πραγματοποιήθηκαν στον Η/Υ με το πρόγραμμα Matlab R2015a [12], τα τεχνικά χαρακτηριστικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2. Τεχνικά χαρακτηριστικά Η/Υ.

Λειτουργικό Σύστημα	Windows 10 Educational
CPU	Intel(R) Core(TM) i5 – 4210M @ 2.60GHz
Φυσική Μνήμη (RAM)	7.90 GB

4.1 Αποτελέσματα SISO

Για τα αποτελέσματα των συστημάτων με μοναδική είσοδο – μοναδική έξοδο ο πίνακας D στην εξίσωση κατάστασης (3.2) είναι μηδέν ($D=0$) καθώς δεν υπάρχει μεταβλητή εισόδου που να σχετίζεται με την έξοδο.

Πίνακας 3. Αποδόσεις μεθόδων για SISO συστήματα.

Μέθοδος	Δείκτης απόδοσης	S10PI (682)	S20PI (1182)	S40PI (2182)	S80PI (4182)
LRCF	Καταστάσεις (MOR)	158	203	288	399
	Χρόνος CPU(sec)	4.9	7.3	15.4	50.2
	Σφάλμα	0.0002	0.0006	0.0009	0.001
	ρ (rad/sec)	3.6×10^4	7.3×10^4	1.4×10^5	1.1×10^6
VF	Καταστάσεις (MOR)	152	206	297	394
	Χρόνος CPU (sec)	5.2	13.9	42.6	70.3
	Σφάλμα	0.0003	0.00005	0.00007	0.00007
	ρ (rad/sec)	5.8×10^4	7.3×10^4	1.5×10^5	2.9×10^5
Hybrid	Καταστάσεις (MOR)	152	206	297	394
	Χρόνος CPU (sec)	5.5	8.9	20.4	59.4
	Σφάλμα	0.0003	0.0006	0.0004	0.001
	ρ (rad/sec)	1.7×10^5	3.5×10^5	5.1×10^5	9.8×10^6

4.1.1 Vector Fitting

Όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως για την παραγωγή γραμμικών μοντέλων μειωμένης τάξης (Reduced Order Model, ROMs) τα οποία αντιστοιχούν στα γραφήματα των αποκρίσεων συχνότητας των αρχικών μοντέλων.

Οι προσομοιώσεις³ όλων των συστημάτων SISO χρειάστηκαν παρόμοιες προεργασίες και διαλογή των αρχικών παραμέτρων, δηλαδή τις εκτιμήσεις των πόλων, τον αριθμό των επαναλήψεων και την διάσταση k των ελαττωμένων μοντέλων. Επιπλέον, ένα σύστημα που έχει πολλές κρίσιμες συχνότητες στην απόκριση συχνότητας του χρειάζεται ένα μεγάλο αριθμό δειγμάτων, με αποτέλεσμα όταν αυξάνεται η ευκρίνεια της απόκρισης συχνότητας, για παραπάνω ακρίβεια στα αποτελέσματα της VF, να υπάρχει και αύξηση στον χρόνο της CPU.

Ο χρόνος της CPU, οι διαστάσεις του ROM, το σφάλμα και φασματική ακτίνα ρ είναι οι τέσσερις δείκτες απόδοσης, που φαίνονται στον πίνακα 3, για την σύγκριση των μεθόδων. Ο αριθμός των DAE εξισώσεων για τα συστήματα S10PI, S20PI, S40PI, S80PI δίνεται στις παρενθέσεις τους, ενώ ο αριθμός των αλγεβρικών μεταβλητών των συστημάτων είναι για όλα ίσος με 119.

Για το σύστημα S80PI το επιλεγμένο εύρος συχνότητας ($f, s = j2\pi f$) είναι από 10Hz μέχρι 10^5 Hz. Επίσης, λόγω των πολλών κρίσιμων συχνοτήτων ανά δεκάδες, οι αρχικές εκτιμήσεις πόλων επιλέχθηκαν διανεμόντας λογαριθμικά το φανταστικό μέρος των εκτιμώμενων πόλων στο παραπάνω εύρος [7]. Το σύστημα S80PI με 4182^4 εξισώσεις και 119 αλγεβρικές μεταβλητές, ο πίνακας που το περιγράφει είναι πολύ αραιός με μόνο 10261 μη-μηδενικά στοιχεία. Το μειωμένο μοντέλο, από την μέθοδο VF, έχει 394 καταστάσεις όπως φαίνεται στον πίνακα 3. Ακριβή ROMs αναπτυχθήκαν και για τα υπόλοιπα συστήματα S10PI, S20PI, S40PI με 152, 206 και 297 καταστάσεις αντίστοιχα.

Ολοκληρώνοντας, για την σύγκλιση της μεθόδου, βάσει του RMS σφάλματος, για τα τέσσερα συστήματα δοκιμής χρειάστηκαν από 7 ως 17 επαναλήψεις. Η ανοχή στην σύγκλιση ποικίλει στο εύρος 10^{-3} μέχρι 10^{-5} για RMS σφάλμα ανάλογα με το κάθε

³ Οι προσομοιώσεις για αυτή τη μέθοδο υλοποιήθηκαν με τα αρχεία Matlab(m-files) τα οποία είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα <http://www.en-ergy.sintef.no/Produkt/VECTFIT/index.asp>

⁴ Ο αριθμός αυτός είναι οι εξισώσεις του συστήματος μαζί με τις αλγεβρικές εξισώσεις. Για την εύρεση των καταστάσεων πρέπει να αφαιρεθούν οι αλγεβρικές εξισώσεις, δηλαδή το S80PI έχει $4182-119=4083$ καταστάσεις.

σύστημα δοκιμής. Σε όλους τους υπολογισμούς το εύρος συχνότητας που κινεί το ενδιαφέρον είναι αναμεσά στα 10Hz – 40kHz.

4.1.2 LRCF

Η μέθοδος απαιτεί την χρήση κάποιων παραμέτρων (ADI), των οποίων ο υπολογισμός και η χρήση τους έχουν επίδραση τόσο στην σύγκλιση της μεθόδου όσο και στην ποιότητα του μειωμένου μοντέλου [5]. Οι υπολογισμοί περατώθηκαν με την χρήση πολλών παραμέτρων ADI οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί με τις τιμές τους να είναι ίσες με τις κρίσιμες συχνότητες σε rad/sec από τα γραφήματα των αποκρίσεων συχνότητας. Επίσης, όσον αφορά τους υπολογισμούς, εκτελέστηκαν σε index-0 σύστημα που προήλθε από index-2 (DAE) των συστημάτων δοκιμής με το καθένα S10PI, S20PI, S40PI, S80PI να διαθέτει 682, 1182, 2182, 4182 μεταβλητές αντίστοιχα. Ο αριθμός των αλγεβρικών μεταβλητών είναι 119 και των πλεοναζόντων καταστάσεων 35 για όλα τα συστήματα που μελετήθηκαν.

Ο αριθμός των επαναλήψεων για καθένα από τα συστήματα δοκιμής, S10PI, S20PI, S40PI, S80PI ήταν 300, 300, 450, 600 αντίστοιχα. Με την τάξη του ROM να αποτελεί μια συνάρτηση της μικρότερης τιμής Hankel. Οι πόλοι του νέου μοντέλου συχνά ήταν αναληθείς και ασταθείς, δηλαδή οι συναρτήσεις μεταφοράς τους είχαν ελάχιστη επίδραση στην απόκριση συχνότητας, γεγονός που έκανε την απόρριψη τους ευκολότερη. Επιπλέον, γνωρίζοντας ότι η LRCF δεν εφαρμόζεται σε συστήματα με ασταθείς πόλους ή οριακά ευσταθείς, έγινε η χρήση μιας σταθεράς μετατόπισης $\alpha=-0.05$ όπως περιγράφεται στην [2] για όλα τα συστήματα δοκιμής. Συνεπώς οι παράμετροι ADI είναι διανύσματα της μορφής $p_{10}, p_{20}, p_{40}, p_{80}$ για τα , S10PI, S20PI, S40PI, S80PI αντίστοιχα.

Οι τιμές των παραμέτρων έχουν ως εξής:

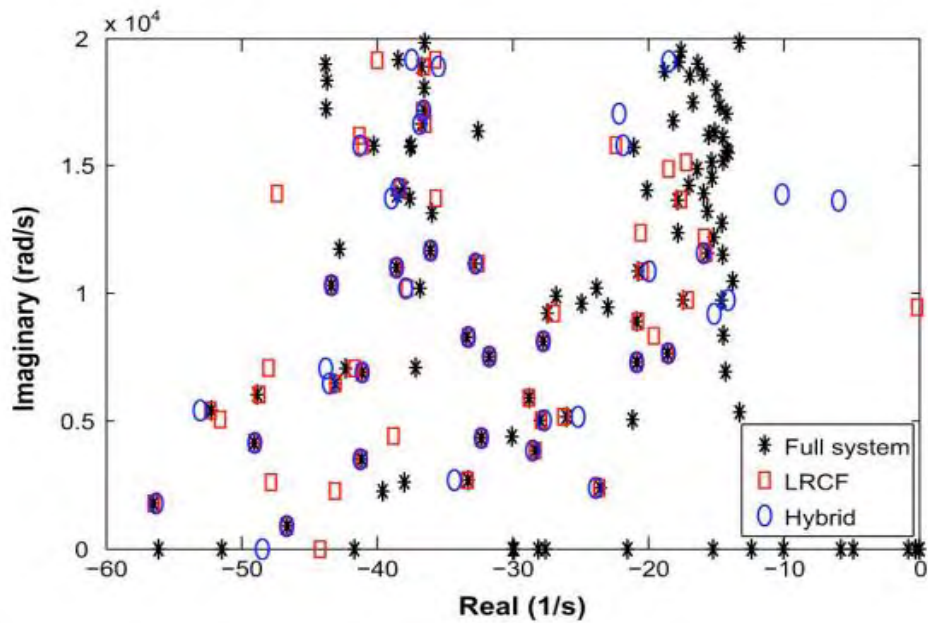
$$p_{10} = -[0.7 \ 1 \ 2.5 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T \times 10^4$$

$$p_{20} = -[0.7 \ 1 \ 2.5 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T \times 10^4$$

$$p_{40} = -[0.7 \ 2 \ 5 \ 6 \ 6.5 \ 7.4 \ 9]^T \times 10^4$$

$$p_{80}^1 = -[0.72 \ 0.75 \ 0.76 \ 1.08 \ 15.9]^T \times 10^4$$

$$p_{80}^2 = -[4 \ 6 \ 7 \ 9 \ 16 \ 17 \ 18.8 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 25 \ 26]^T \times 10^4 \quad \text{με } p_{80} = \left[p_{80}^1{}^T, p_{80}^2{}^T \right]^T$$



Εικόνα 8 .Διάγραμμα πόλων του S10PI και των ROMs που παρήχθησαν από LRCF και Hybrid. Το φάσμα κινείται μέχρι 2×10^4 rad/s με τους περισσότερους πόλους να έχουν τιμή στο πραγματικό μέρος περίπου ίση με -15.

Όπως φαίνεται στην εικόνα 8, στο γράφημα των πόλων, από την QR παραγοντοποίηση του ROM για το S10PI και τις 158 του καταστάσεις που αναπαρήχθησαν από την LRCF, οι πόλοι του συστήματος δείχνουν να αντιστοιχούν σε αρκετούς πόλους του το αρχικού συστήματος.

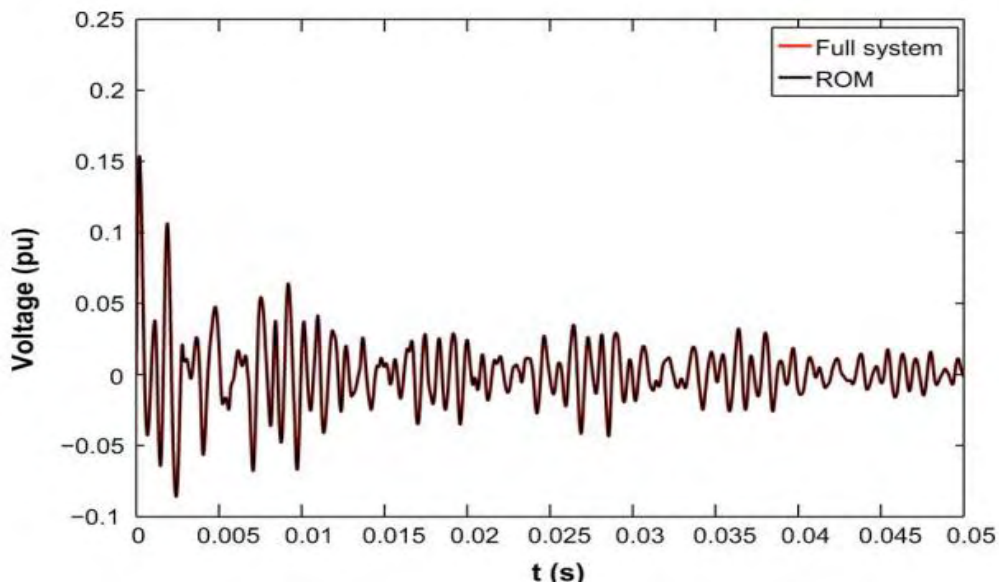
Σχολιάζοντας την εικόνα 10, με το διάγραμμα πλάτους του S80PI, φαίνεται η άψογη αντιστοίχιση της LRCF και της VF στα ROMs που παρήγαγαν. Με το RMS σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.001. Τέλος, είναι εμφανές ότι μέχρι τα 4×10^4 Hz (όπως δείχνει το βέλος στην εικόνα) υπάρχουν ελάχιστα κρίσιμα σημεία.

4.1.3 Υβριδική μέθοδος

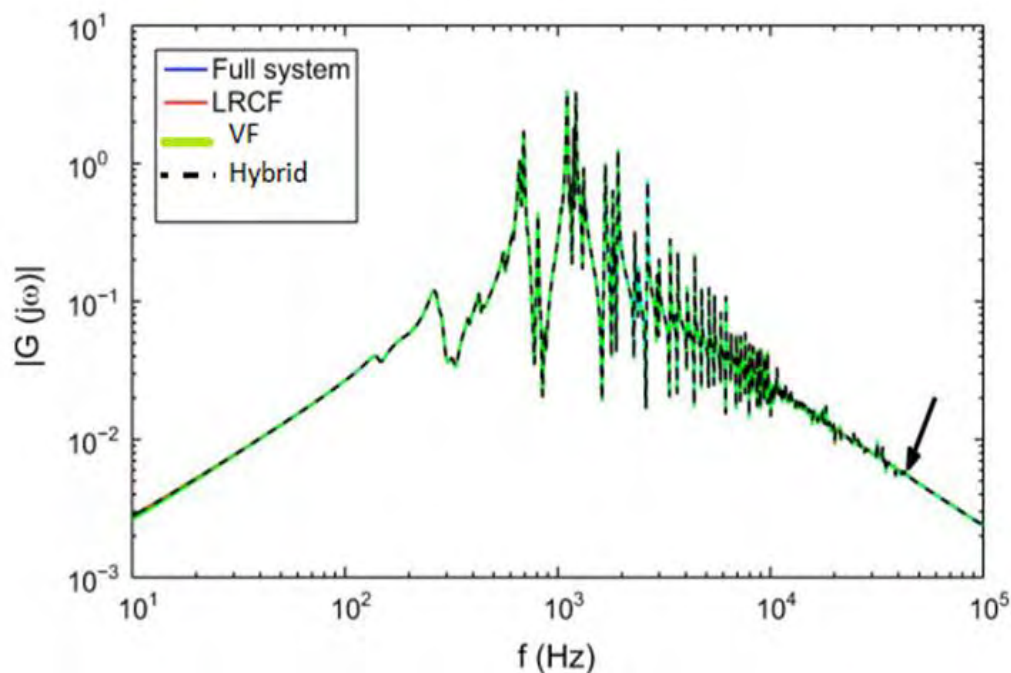
Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αναπαρήχθησαν από την υβριδική μέθοδο, η οποία συνδυάζει την εκτίμηση πόλων από την LRCF με το κατάλληλο ταίριασμα από την VF, παράγοντας ελαττωμένα μοντέλα που διατηρούν την παθητικότητα και την συμμετρία του αρχικού μοντέλου.

Η LRCF αρχικοποιώντας το βήμα για την υβριδική χρειάστηκαν 200, 206, 297 και 394 επαναλήψεις για την παραγωγή των ROMs για τα συστήματα S10PI, S20PI, S40PI, S80PI αντίστοιχα. Ο αριθμός των επαναλήψεων ήταν κατά 30% λιγότερος από αυτόν που χρειάστηκε μονή της η LRCF, στη VF έπειτα χρειάστηκαν δύο επιπλέον επαναλήψεις, βελτιώνοντας τις εκτιμήσεις των πόλων και κατ' επέκταση την παραγωγή και το ταίριασμα αναμεσά στις αποκρίσεις του αρχικού συστήματος και του ROM.

Η εικόνα 8 δείχνει την θέση των πόλων του S10PI όπου παρατηρείται ότι το πραγματικό μέρος των περισσότερων πόλων να ισούται κατά προσέγγιση με -15 όταν το φανταστικό μέρος να φτάνει στα $2 \times 10^4 \text{ Hz}$. Ενώ στην εικόνα 9 αναπαρίσταται η γραφική παράσταση της εξόδου (τάση) όπου φαίνεται το σωστό ταίριασμα αναμεσά στον χρόνο προσομοίωσης για το αρχικό σύστημα και για το αντίστοιχο ROM με τις 394 καταστάσεις του μέσω της υβριδικής μεθόδου.



Εικόνα 9. Χρονική απόκριση για το S80PI τις 394 καταστάσεις του ROM από την υβριδική μέθοδο.



Εικόνα 10. Διάγραμμα πλάτους- συχνότητας της συνθέτης αντίστασης στον ζυγό #21 για τοS80PI και των ROMs που προέκυψαν από όλες τις μεθόδους.

4.1.4 Συζήτηση αποτελεσμάτων των SISO συστημάτων

Στον πίνακα 3 φαίνονται οι χρόνοι της CPU για τις μεθόδους που συγκρίθηκαν προκειμένου να αναπαραχθούν τα ROMs για τα SISO συστήματα. Επίσης, φαίνονται η τάξη και τα σφάλματα για κάθε μέθοδο. Η LRCF παρουσίασε τον λιγότερο χρόνο της CPU για όλα τα συστήματα δοκιμής. Συγκεκριμένα για το μικρότερο σύστημα, το S10PI, η μεταβολή στον χρόνο του επεξεργαστή ήταν αμελητέα και για τις τέσσερις μεθόδους. Επίσης η υβριδική μέθοδος είχε την δεύτερη καλύτερη απόδοση, όντας γρηγορότερη από την VF, για τα τρία μεγαλύτερα συστήματα δοκιμής, όπως επιβεβαιώνεται από τον πίνακα 3.

Αξίζει να σημειωθεί το γεγονός ότι πάρα τον μεγάλο αριθμό των κρίσιμων συχνοτήτων που διαθέτουν τα συστήματα δοκιμής, τα νέα συστηματικά μοντέλα δεν περιέχουν αρκετά σημεία από κρίσιμες συχνότητες. Αυτό ακριβώς επιβεβαιώνεται από την εικόνα 8 με το διάγραμμα των πόλων καθώς και από τον πίνακα 3 οπου φαίνονται οι φασματικές ακτίνες κάθε συστήματος δοκιμής.

4.2 Αποτελέσματα MIMO

Τα 4 συστήματα που θεωρήθηκαν για αυτήν την ενότητα είναι τα M10PI, M20PI, M40PI και M80PI όπου ο αριθμός των εξισώσεων του καθενός φαίνεται στον πίνακα 4. Οι μεταβλητές εσόδου για τα συστήματα αυτά είναι τα ρεύματα που εισέρχονται στους ζυγούς #18, #21 και #23, ενώ οι έξοδοι είναι οι τάσεις στους αντίστοιχους ζυγούς. Όπως και στα συστήματα SISO, έτσι και εδώ τα ROMs παρήχθησαν από τις τρεις μεθόδους (LRCF, VF, Hybrid) με τα αποτελέσματα να αναλύονται παρακάτω.

Τα σφάλματα των μοντέλων μετρήθηκαν πάνω σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων που ενδιαφέρουν και ταυτοχρόνως, λήφθηκαν υπόψη όλα τα στοιχεία της συνάρτησης μεταφοράς των οποίων η θέση ήταν στον άνω τριγωνικό πίνακα μεταφοράς $G(j\omega)$.

Πίνακας 4. Αποδόσεις μεθόδων για MIMO συστήματα.

Μέθοδος	Δείκτης απόδοσης	M10PI (682)	M20PI (1182)	M40PI (2182)	M80PI (4182)
LRCF	Καταστάσεις (MOR)	196	216	295	457
	Χρόνος CPU(sec)	11.6	14.7	23	78.2
	Σφάλμα	0.0001	0.0009	0.0007	0.0007
	ρ (rad/sec)	7.3×10^4	7×10^4	1.3×10^5	4.5×10^5
VF	Καταστάσεις (MOR)	196	216	302	459
	Χρόνος CPU (sec)	17.1	40.1	90.1	178.7
	Σφάλμα	0.0001	0.0007	0.0008	0.0005
	ρ (rad/sec)	3×10^5	5.7×10^5	6.2×10^5	5.7×10^5
Hybrid	Καταστάσεις (MOR)	196	216	302	457
	Χρόνος CPU (sec)	10	17.4	35.1	82.9
	Σφάλμα	0.00002	0.0001	0.0001	0.0004
	ρ (rad/sec)	1.8×10^5	1.4×10^5	1.4×10^5	6.7×10^6

4.2.1 LRCF

Όπως στα συστήματα SISO υπήρχε η ανάγκη για τον προσδιορισμό των παραμέτρων ADI έτσι και στα συστήματα MIMO χρειάζεται παρόμοιος προσδιορισμός. Για τις ανάγκες της εργασίας οι παράμετροι ADI είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους στα SISO συστήματα, καθώς επίσης ιδιά είναι και η σταθερά μετατόπισης $\alpha=0.05$ στις ιδιοτιμές των πινάκων, η οποία βοηθάει στην αποφυγή ασταθών πόλων του συστήματος.

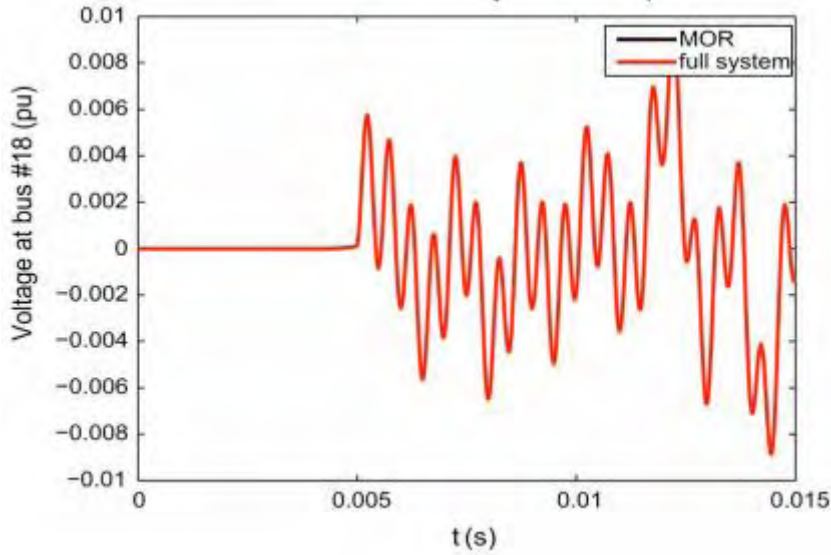
Για το σύστημα M80PI πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις και στο πεδίο του χρόνου, που περιείχαν τα σήματα εισόδου στους ζυγούς #18, #21 και #23, είναι της μορφής:

$$i_{18}(t) = \sin(\omega_1(t - t_1)) U(t - t_1)$$

$$i_{21}(t) = \sin(\omega_2(t - t_2)) U(t - t_2)$$

$$i_{23}(t) = \sin(\omega_3(t - t_3)) U(t - t_3)$$

Όπου $U(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση, $\omega_1 = 2 \times \pi \times 2000$ rad/sec, $\omega_2 = 2 \times \pi \times 750$ rad/sec και $\omega_3 = 2 \times \pi \times 150$ rad/sec. Οι χρονικές καθυστερήσεις των σημάτων εισόδου t_1 , t_2 και t_3 είναι 5ms, 3 ms και 1 ms αντίστοιχα με βήμα ολοκλήρωσης 10 ms. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν υπάρχει μεγάλος αριθμός εισόδων και εξόδων στα MIMO συστήματα τότε αυτό συνεπάγεται με πολύ χρόνο στην CPU και μεγάλες απαιτήσεις στην μνήμη για όλες τις μεθόδους MOR. Η παρακάτω εικόνα συγκρίνει τον χρόνο προσομοίωσης για το αρχικό σύστημα M80PI και το μοντέλο ROM από την LRCF, υποδεικνύοντας την ακριβή αντιστοιχία των δύο μοντέλων.

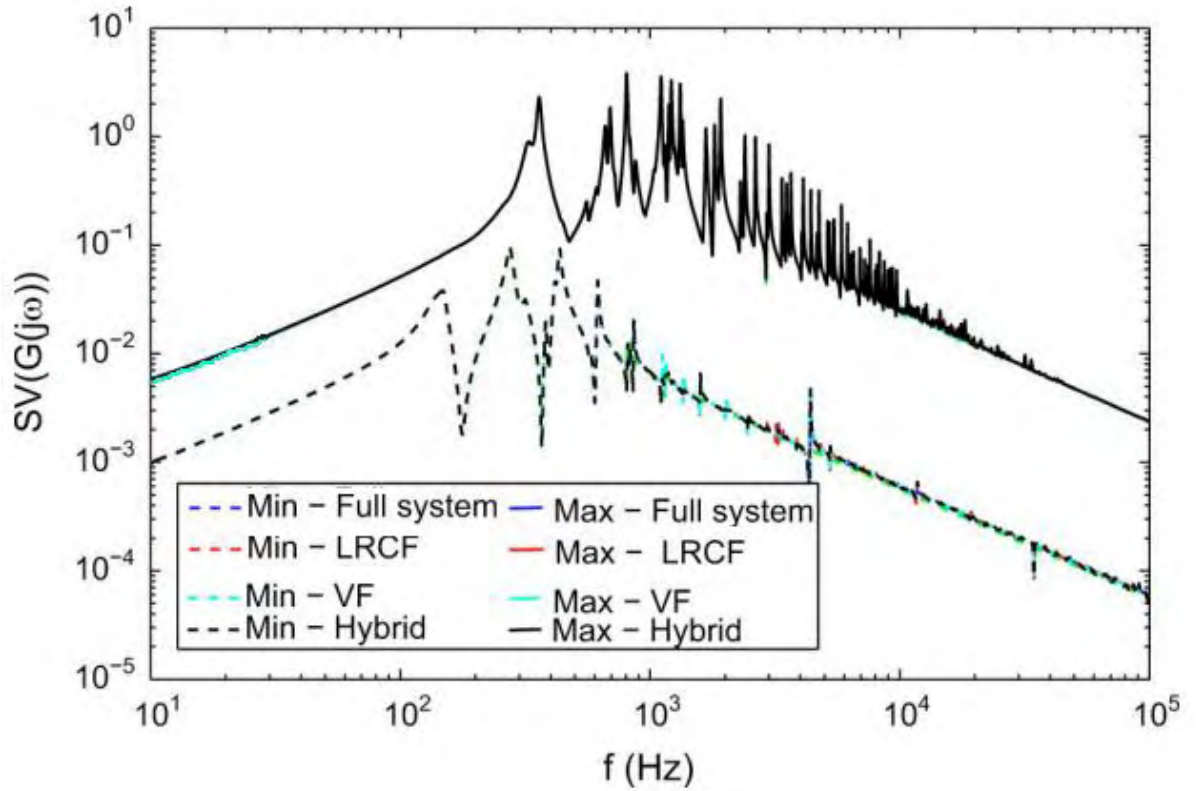


Εικόνα 11. Τάση του ζυγού #18 για το M80PI και του μειωμένου μοντέλου με τις 457 καταστάσεις του, όπως αναπτύχθηκε από την LRCF.

4.2.2 VF

Η απόκριση συχνότητας που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για τα συστήματα SISO, η ίδια χρησιμοποιήθηκε και για τα MIMO. Τοιουτοτρόπως, δημιουργήθηκαν έξι συναρτήσεις μεταφοράς $G_{ij}(j\omega)$, $i = 1,2,3$ και $j \geq i$ οι οποίες αντιστοιχούν στα στοιχεία του άνω τριγωνικού μέρους του πίνακα μεταφοράς $G(j\omega)$, ο οποίος είναι και συμμετρικός. Αυτές οι συναρτήσεις μεταφοράς έπειτα επιβάλλεται να μοιράζονται τον ίδιο αριθμό πόλων, γεγονός που αποτελεί πρόβλημα για τον πίνακα μεταφοράς έχοντας μια είσοδο και έξι διαφορετικές εξόδους:

$$G(j\omega) = [G_{11} \ G_{12} \ G_{13} \ G_{22} \ G_{23} \ G_{33}]^T$$



Εικόνα 12. Sigma γραφική παράσταση για το M80PI και τα ROMs που αναπτύχθηκαν από όλες τις μεθόδους.

Η παραπάνω γραφική παράσταση αξιολογεί την ποιότητα των MIMO ROMs, τα οποία παρήχθησαν από όλες τις μεθόδους, για τις ελάχιστες και τις μέγιστες μοναδικές τιμές (Singular Values, SV) των πινάκων μεταφοράς τους συναρτήσει της συχνότητας $SV_{max}(G(j\omega))$, $SV_{min}(G(j\omega))$ αντιστοίχα.

4.2.3 Υβριδική μέθοδος

Για την υβριδική μέθοδο χρησιμοποιήθηκαν 200 επαναλήψεις της LRCF για την δημιουργία αρχικών εκτιμήσεων των πόλων έτσι ώστε να αρχικοποιηθούν τα βήματα για την VF. Έπειτα, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με τα συστήματα SISO, τα ROMs μοντέλα της υβριδικής αναπτυχθήκαν με την χρήση δύο επαναλήψεων της μεθόδου VF επιτυγχάνοντας ξανά την ακριβή αντιστοιχία μεταξύ των παραγόμενων και των αρχικών μοντέλων.

Όπως γίνεται αντιληπτό από τον πίνακα 4, το πρώτο βήμα της μεθόδου (200 LRCF επαναλήψεις) παρήγαγε για το M80PI σύστημα ένα μοντέλο ROM με 457 καταστάσεις σε 39.6 δευτερόλεπτα, οι δύο VF επαναλήψεις μετά, για την βελτίωση των εκτιμήσεων της LRCF, χρειάστηκαν επιπλέον 42.3 δευτερόλεπτα. Συνεπώς ο συνολικός χρόνος της CPU για την ανάπτυξη του μοντέλου ήταν 82.9 δευτερόλεπτα. Ενώ στο μισό περίπου χρονικό διάστημα από το συγκεκριμένο, αναπτυχθήκαν οι 302 καταστάσεις για το σύστημα M40PI. Για την ανάπτυξη των δύο μικρότερων συστημάτων M10PI και M20PI σε λίγο χρονικό διάστημα σχετικά, αναπτυχθήκαν οι 196 και 216 καταστάσεις αντίστοιχα.

4.2.4 Συζήτηση αποτελεσμάτων των MIMO συστημάτων

Ο πίνακας 4 παρουσιάζει μια συνολική εικόνα της απόδοσης από όλες τις μεθόδους. Λαμβάνοντας υπόψη τα δύο μικρότερα συστήματα δοκιμής (M10PI, M20PI) η LRCF είχε την καλύτερη απόδοση στον χρόνο CPU και η υβριδική την δεύτερη καλύτερη με ελάχιστη διαφορά από την πρώτη. Για τα δύο μεγαλύτερα συστήματα δοκιμής, ξανά η LRCF και η υβριδική είχαν ελάχιστη απόκλιση στην απόδοση τους σε σχέση με την VF η οποία υστερούσε των άλλων δύο. Είναι αξιοσημείωτο ότι η υβριδική μέθοδος και η LRCF για το μεγαλύτερο σύστημα δοκιμής έδειξαν πρακτικά την ίδια απόδοση. Ενώ η VF παρουσίασε την χειρότερη απόδοση και για τα τέσσερα συστήματα που αναλυθήκαν, τα αποτελέσματα του πίνακα 4 έδειξαν ότι όλα τα νέα μοντέλα είχαν σφάλμα μικρότερο του 0.001.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

5.1 Συμπεράσματα

Τρεις μέθοδοι—τεχνικές χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των πινάκων των συναρτήσεων μεταφοράς με μειωμένη διάσταση των περιγραφικών συστημάτων με αρκετά σημεία κρίσιμων συχνοτήτων για την μελέτη φαινομένων με υψηλές συχνότητες στα ΣΗΕ. Τέσσερα SISO και τέσσερα MIMO συστήματα δοκιμής χρειάστηκαν για την αξιολόγηση και εκτίμηση της απόδοσης της κάθε μεθόδου. Το μεγαλύτερο σύστημα δοκιμής περιείχε 4028 αποδοτικές καταστάσεις, 35 πλεονάζουσες καταστάσεις και 119 αλγεβρικές εξισώσεις.

Όλες οι μέθοδοι απέδωσαν ποιοτικά αποτελέσματα σε γενικές γραμμές, με την LRCF να χρησιμοποιεί την λιγότερη επεξεργαστική ισχύ και μνήμη. Η VF ήταν πολύ δαπανηρή για τα MIMO συστήματα, αλλά ο συνδυασμός των δύο μεθόδων, η υβριδική, αποδείχθηκε αποτελεσματική όπως και η LRCF, πλεονεκτώντας στην διατήρηση της παθητικότητας για το νέο μοντέλο. Επίσης η επιλογή των ADI παραμέτρων, στην LRCF, με τιμές ίσες των κρίσιμων συχνοτήτων αποδείχτηκε απλή και ταυτόχρονα αναγκαία για την μελέτη που πραγματοποιήθηκε.

Όσον αφορά τις προσομοιώσεις για το πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, όπως έγινε εμφανές από τις φασματικές ακτίνες των παραγόμενων μοντέλων, σε αρκετές περιπτώσεις ήταν περίπου εξήντα φορές μικρότερη από τις αντίστοιχες των συστημάτων δοκιμής. Γεγονός που έχει τεράστιο θετικό αντίκτυπο και στα δύο είδη προσομοιώσεων.

5.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Επεκτείνοντας την δουλειά για το μέλλον, θα ήταν σημαντικό η επιλογή των κατάλληλων κριτήριων τερματισμού και η εφαρμογή όλο και περισσότερο αξιόπιστων ορίων σφαλμάτων. Αυξάνοντας τις διαστάσεις των αρχικών μοντέλων, αυξάνονται και οι απαιτήσεις του υπολογιστικού συστήματος με αποτέλεσμα οι τεχνικές να καθίστανται ακριβές. Έτσι, για την προσέγγιση της απόκρισης συχνότητας των παραμέτρων των γραμμών μεταφοράς, προσθέτοντας επιπλέον RLC κυκλώματα στα περιγραφικά συστήματα, θα υπάρξει μεγάλη αύξηση των διαστάσεων τους. Με αυτές τις υψηλές τάξεις

των συστημάτων, τα ισοδύναμα κυκλώματα πρέπει αυτόματα να υπολογίζονται με ισχυρές MOR τεχνικές διότι η διεργασία αυτή είναι αρκετά κοπιαστική αν γίνει με την αλληλεπίδραση του μηχανικού.

Κλείνοντας, μια τελευταία επέκταση της παρούσας εργασίας θα ήταν η διατήρηση της παθητικότητας των νέων μειωμένων μοντέλων. Για αυτήν την επίτευξη, θα χρειαστεί η δημιουργία ενός συστήματος δεύτερης τάξης, από το αρχικό μοντέλο, με όσο το δυνατόν αξιόπιστα χαρακτηριστικά προκειμένου να υπάρχει βεβαιότητα για την διατήρηση της παθητικότητας και της RLC δομής του αρχικού συστήματος δοκιμής.

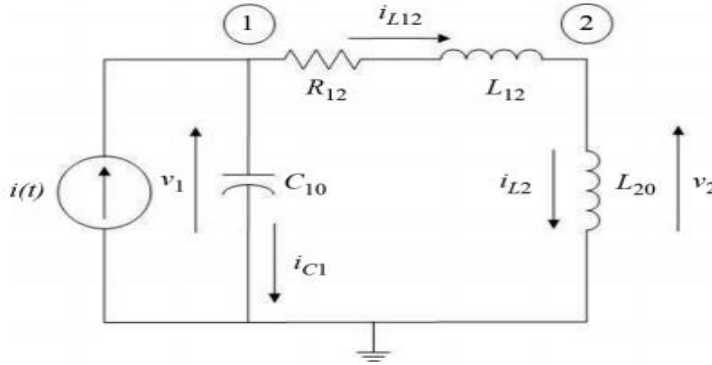
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Schilders, W.H.A., van der Vorst, H.A., Rommes, J., Model Order Reduction. Theory, Research Aspects and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [2] F. D. Freitas, J. Rommes, and N. Martins, “Gramian-based reduction method applied to large sparse power system descriptor models,” IEEE Trans. on Power Systems, vol. 23, no. 3, pp. 1258–1270, Aug. 2008.
- [3] F. D. Freitas, J. Rommes, N. Martins and S. L. Varricchio, “Reduced-order transfer matrices from RLC network descriptor models of electric power grids” IEEE Trans. on Power Systems, vol. 26, no. 4, pp. 1905–1916, Nov. 2011.
- [4] A. C. Antoulas, Approximation of Large-Scale Systems. Philadelphia, PA: SIAM, 2005.
- [5] T. Penzl, “A cyclic low-rank Smith method for large-scale Lyapunov equations,” SIAM J. Sci. Comput., vol. 2, no. 4, pp. 1401–1418, 2000
- [6] J. R. Li, “Model reduction of large linear systems via low rank system gramians,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Inst. Technol., Dept. Math., Cambridge, 2000
- [7] B. Gustavsen and A. Semlyen, “Rational approximation of frequency domain responses by Vector Fitting,” IEEE Trans. Power Del., vol. 14, no. 3, pp. 1052–1061, Jul. 1999.
- [8] Z. Bai, P. M. Dewilde, and R. W. Freund, “Reduced-order modeling,” Numerical Analysis Manuscript No. 02-4-13, Bell Laboratories, Mar. 2002
- [9] Distefano, J. (n.d.). FEEDBACK and CONTROL SYSTEMS. 2nd ed. pp. chapter 3, 5 and 20.
- [10] Stephen L. Campbell et al. Differential-algebraic equations. Scholarpedia, 3(8):2849 (2008).
- [11] Ν. Βοβός and Γ. Γιαννακόπουλος, *Ανάλυση Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας*, 1st ed. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 2008, pp. 34-36.
- [12] <https://www.mathworks.com>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ RLC ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ



Εικόνα 11. RLC κύκλωμα δύο κόμβων με μια πλεονάζουσα κατάσταση.

Το RLC κύκλωμα της εικόνας 12 χρησιμοποιήθηκε για την παρουσίαση της περιγραφικής αναπαράστασης ενός συστήματος όπως μελετήθηκε στην ενότητα 3.1. Το κύκλωμα αναπαρίσταται από έξι εξισώσεις αντί για οκτώ. Κάνοντας χρήση της εφαρμογής που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1, οι πίνακες του νομού Kirchhoff για το παραπάνω κύκλωμα είναι:

$$T_1 = \begin{bmatrix} C_{10} & 0 & 0 \\ 0 & L_{20} & 0 \\ 0 & 0 & L_{12} \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{12} \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Με } x_1(t) = [v_{c1} \ i_{L2} \ i_{L12}]^T, \quad x_{12} = [i_{c1} \ v_1]^T, \quad x_{22} = v_2.$$

Μεταβλητή εισόδου είναι η $u(t) = i(t)$ και $v_{c1} = v_1$ η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Οι μεταβλητές εξόδου είναι οι τάσεις των δύο κόμβων v_1, v_2 . Επιπλέον:

$$A_{21}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{22}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_{22}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}^2 = [0 \quad -1 \quad 1], A_{22}^3 = [0 \quad 0], B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^2 = 0, C_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον A_{22}^2, A_{22}^3 είναι μηδέν, ο ορός $\overline{A_{22}}$ είναι μηδέν στην εξίσωση 3.4. Παρομοίως και στην περίπτωση $B_2^2 = 0$ τότε ο $\overline{B_2}$ είναι κενός.

Το κύκλωμα έχει μια κατάσταση που είναι πλεονάζουσα λόγω της εν σειρά σύνδεσης των δύο πηνίων. Ως εκ τούτου, υπάρχουν δύο αποδοτικές καταστάσεις, μια λόγω του πυκνωτή και μια λόγω των πηνίων. Έτσι παρουσιάζεται σωστά από το περιγραφικό σύστημα διότι η τάξη του $rank(A_{22}) = 2$ και $rank(A_{21}^2) = 1$. Η τάξη του τελευταίου πίνακα είναι ίση με τον αριθμό των πλεοναζόντων καταστάσεων.

Η ελαχιστοποίηση των αλγεβρικών μεταβλητών και οι διεργασίες μείωσης των καταστάσεων παράγουν τον εξής χώρο κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} C_{10} & 0 \\ 0 & (L_{20} + L_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (L_{20} + L_{12})^{-1} & -R_{12}(L_{20} + L_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζονται τα δεδομένα του συστήματος 34 ζυγών που μελετήθηκε στην εργασία. Ο πίνακας 5 δείχνει την ονομαστική τάση V_N κάθε ζυγού σε kV. Επίσης σημειώνονται και οι τιμές των φορτίων. Το κάθε φορτίο μοντελοποιήθηκε με έναν βρόγχο συνδεδεμένο με πυκνωτή ή πηνίο. Η σύνδεση των πυκνωτών είναι παράλληλα ενώ των πηνίων σε σειρά.

Ο πίνακας 6 παρουσιάζει τα δεδομένα του κάθε Π-ισοδυνάμου κυκλώματος των ΓΜ, συμπεριλαμβάνοντας τους εισερχομένους και εξερχομένους ζυγούς. Οι παράμετροι κάθε ΓΜ είναι η αντίσταση R , η αυτεπαγωγή L και η χωρητικότητα C , οι οποίες αποτελούν τον κορμό του Π-ισοδυνάμου κυκλώματος. Οι παράμετροι R και L αποτελούν την εν σειρά σύνδεση του βρόγχου, ενώ η μισή χωρητικότητα τοποθετείται στο αρχικό πρώτο μισό του κυκλώματος και η άλλη μισή στο δεύτερο σημείο που ενώνεται με το επόμενο Π-κύκλωμα.

Στον πίνακα 7 φαίνονται τα στοιχεία και οι ζυγοί (εισερχόμενοι – εξερχόμενοι) που διαθέτουν τους μετασχηματιστές στο ΣΗΕ που μελετάται. Οι παράμετροι είναι η αντίσταση R και η άεργη αντίσταση X σε ποσοστιαίες τιμές με την βάση ισχύος τους να έχει την τιμή των 100MVA και βάση τάσης την ονομαστική τιμή κάθε ζυγού.

Πίνακας 5 .Δεδομένα φορτίων.

Ζυγός	Ονομαστική τάση(V _N) kV	Φορτίο		
		R(Ohm)	L(H)	C(μF)
1	20	26.071	-	-
2	750	-	-	-
3	750	-	-	-
4	750	-	-	-
5	500	-	-	-
6	500	89129	-	-
7	500	853.14	-	1.6649
8	500	-	-	-
9	500	108.92	0.199	-
10	500	-	-	-
11	500	89539	-	-
12	500	876.1	0.5038	-
13	500	558.26	-	0.00884
14	500	-	-	-
15	500	40.972	0.04242	-
16	500	-	-	-
17	500	-	-	-
18	345	-	-	-
19	345	42.278	0.0349	-
20	345	-	-	-
21	230	-	-	-
22	230	130.47	0.0854	-
23	230	-	-	-
24	230	28.911	0.01525	-
25	230	97.48	0.02857	-
26	500	-	-	-
27	20	-	-	-
28	20	226.5	-	-
29	20	-	-	-
30	20	66.302	-	-
31	20	267.17	-	-
32	20	10.11	0.01341	-
33	20	-	-	-
34	500	-	-	-

Πίνακας 6. Δεδομένα γραμμών μεταφοράς.

Από	Προς	R(Ohm)	L(H)	C(μF)
2	3	1.4372	0.055237	11.789
3	4	2.556	0.079916	13.312
5	14	1.0325	0.034484	0.67906
6	7	3.85	0.12865	2.5143
8	7	1.4	0.046221	0.90979
8	9	1.3	0.04337	0.85406
9	6	3.975	0.13342	2.6077
9	12	4.05	0.13581	2.6544
10	9	0.152	0.0041447	0.32502
11	7	4.3	0.1439	2.8134
12	11	2.55	0.084087	1.6471
12	13	5.625	0.20113	4.0474
13	11	7.05	0.25544	5.2383
14	15	0.355	0.011671	0.22982
14	17	0.5575	0.018568	0.15345
15	16	0.0875	0.0029178	0.057444
18	19	0.24162	0.0063145	0.67393
18	20	16.068	0.18312	5.9058
21	22	8.0461	0.11035	2.7184
23	22	12.196	0.16663	4.1305
23	24	12.617	0.17115	4.3096
25	24	23.059	0.31571	2.5562
26	11	8.2125	0.2897	5.1861
34	11	-	0.0033157	0.030112
34	11	-	0.0033157	0.030112

Πίνακας 7. Δεδομένα μετασχηματιστών.

Από	Προς	R (%)	X (%)
2	1	0.00126	0.49753
5	4	-	0.324
6	3	0.0005	0.3717
7	28	0.02733	1.612
8	29	-	1.4
10	30	-	1.0883
17	19	-	0.72
18	4	-	0.3
20	6	-	0.899
21	9	0.031	1.207
22	31	0.01673	1.1333
23	33	0.1	4.614
24	13	0.00873	0.3296
25	32	0.051	1.531
34	27	-	4.362
9	25	2.2507	13.642