

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΩΝ ΑΕΡΑ ΜΕ  
ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΜΕΣΑ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΑΓΩΓΟ ΜΕ ΤΗΝ  
ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

υπό

**ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΙΔΗ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ**

Διπλωματούχου Σχολής Ικάρων (ΣΙ) Μηχανικών, 2014

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

2018

© 2018 Χρυσοστομίδης Αλέξανδρος

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής  
(Επιβλέπων)

Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Βασίλης Μποντόζογλου  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Βλαχομήτρου Μαρία  
Χημικός Μηχανικός, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση, για την εμπιστοσύνη του στο πρόσωπό μου, την ανάθεση του συγκεκριμένου θέματος και την καθοδήγηση προς τη διαμόρφωση του τελικού προϊόντος. Επίσης, είμαι ευγνώμων στο μέλος της εξεταστικής επιτροπής της μεταπτυχιακής εργασίας μου, κ. Μποντόζογλου Βασίλειο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας και την αξιολόγησή της. Στο έτερο μέλος της εξεταστικής επιτροπής, κα. Βλαχομήτρου Μαρία, οφείλω επιπλέον ευχαριστίες για τον υπολογισμό αποτελεσμάτων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την ειδική περίπτωση της ενότητας 4.4, που μου επέτρεψε την - ενδιαφέρουσα από ερευνητικής πλευράς - σύγκριση των δύο μεθόδων και την αξιολόγηση της ορθότητας της παρούσας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδακτικό προσωπικό και τη γραμματεία του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για την καλή διάθεση, το ενδιαφέρον και την βοήθεια που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, παρά τις δυσκολίες της εποχής σε εκπαιδευτικά μέσα.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την ανιδιοτελή αγάπη και υποστήριξή τους με κάθε τρόπο όλα αυτά τα χρόνια. Ως ελάχιστη ένδειξη σεβασμού και εκτίμησης αφιερώνω την μεταπτυχιακή μου εργασία στους κοντινούς μου συγγενείς.

«Η Ιθάκη σ' έδωσε τ' ωραίο ταξίδι.  
Χωρίς αυτήν δεν θάβγαινες στον δρόμο.  
Άλλα δεν έχει να σε δώσει πια.

Κι αν πτωχική την βρεις, η Ιθάκη δεν σε γέλασε.  
Έτσι σοφός που έγινες, με τόση πείρα,  
ήδη θα το κατάλαβες η Ιθάκες τι σημαίνουν.»

**Κωνσταντίνος Π. Καβάφης**

# **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ**

**ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ  
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

**ΕΠΙΛΟΓΟΣ**

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται αρχικά μια πρώτη αναφορά και κατηγοριοποίηση των διαθέσιμων υπολογιστικών μεθόδων στο κεφάλαιο 1, όπου παρουσιάζεται ακόμα μία ανασκόπηση της διαδικασίας εξέλιξής τους. Επίσης, εισάγονται οι μαθηματικές βάσεις που είναι κοινές σε όλες τις μεθόδους και δίνεται μία περιγραφή του εύρους των εφαρμογών που αντιμετωπίζονται μέσω επίλυσης με ηλεκτρονικό υπολογιστή, επικεντρώνοντας κυρίως στη μελέτη της συμπεριφοράς των μικροφυσαλίδων.

Στο κεφάλαιο 2, αναλύεται η αριθμητική τεχνική των συνοριακών στοιχείων και παρουσιάζεται η μετατροπή των εξισώσεων δυναμικού από διαφορική σε ολοκληρωτική μορφή, σύμφωνα με αυτήν. Στις τελευταίες, εξετάζονται οι ιδιομορφίες των πυρήνων τους όταν επιχειρείται ολοκλήρωση στα σημεία των πηγών του δυναμικού και εισάγεται ο τρόπος μεταχείρισης των ισχυρώς ιδιόμορφων. Κατά τα ανωτέρω, το πρόβλημα της ταλάντωσης των μικροφυσαλίδων σε αγωγούς μοντελοποιείται μαθηματικά, οι εξισώσεις της ροής δυναμικού διατυπώνονται ολοκληρωτικά και, στο κεφάλαιο 3, εφαρμόζεται πάνω τους διακριτοποίηση από τα πεπερασμένα στοιχεία για να οδηγηθεί το σύστημα σε μορφή ικανή προς επίλυση μέσω υπολογιστή.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, εκτελείται παραμετρική μελέτη της ιδιοσυχνότητας μίας μικροφυσαλίδας λιπιδίου μέσω σε αγωγό ως προς τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος και τις σχετικές διαστάσεις μήκους. Μελετάται αρχικά το απλουστευμένο μοντέλο της ατρίβους υποθέσεως, που συναντάται στη βιβλιογραφία, και εξελίσσεται στη συνέχεια με την προσθήκη ιξώδους στο κέλυφος της φυσαλίδας. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται τόσο μεταξύ των δύο μοντέλων, όσο και με δεδομένα που πάρθηκαν από έρευνες των πεπερασμένων στοιχείων που συνυπολογίζουν την ύπαρξη ιξώδους και στο περιβάλλον ρευστό. Στο τέλος της εργασίας εξάγονται συμπεράσματα ως προς την χρησιμότητα, ακρίβεια και αποδοτικότητα της μεθόδου.

## Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ.....	1
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1
1.2 ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ.....	2
1.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	8
1.4 ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ .....	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ .....	16
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	16
2.2 Επίλυση του γενικού προβλήματος .....	17
2.3 Ιδιόμορφα Ολοκληρώματα .....	22
2.4 Διατύπωση του προβλήματος.....	28
2.5 Ολοκληρωτική διατύπωση.....	38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.....	44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ....	48
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	48
4.2 Επιλογή μεγέθους πλέγματος.....	48
4.3 Ταλάντωση χωρίς τριβές.....	51
4.4 Φαινόμενα απόσβεσης.....	53
ΕΠΙΛΟΓΟΣ .....	59
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	61



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

<b>Εικόνα 1</b> Βαβυλωνιακός δίσκος από πηλό YBC 7289 (κατασκευή 1800 - 1600 π.Χ.). Η προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 αποτελείται από 4 εξηνταδικούς όρους, το οποίο είναι ακριβές έως 6 δεκαδικά ψηφία. $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$ .....	2
<b>Εικόνα 2</b> Στατική ανάλυση τάσεων σε Airbus A320 μέσω πεπερασμένων στοιχείων.....	3
<b>Εικόνα 3</b> Ανάλυση σχήματος σταγόνας με χρήση συνοριακών στοιχείων. Η σταγόνα αποτελείται από ένα διάλυμα πολυκαπρολακτόνης 8% κατά βάρος σε μίγμα διχλωρομεθάνιου/ τολουόλιου 75/25. Οι καμπύλες αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές i)21.4, ii)21.42, iii)21.43, iv)21.44.....	5
<b>Εικόνα 4</b> Στάδια κατάρρευσης φυσαλίδων λόγω της σπηλαίωσης που προκαλείται σε υψηλές συχνότητες.....	6
<b>Εικόνα 5</b> Επιλεκτική παγίδευση σωματιδίων σε φυσαλίδες. Υλοποιείται από την ύπαρξη μικρο-ροής δίπλα από τη φυσαλίδα σε συνδυασμό με τις δυνάμεις Bjerknes ως δευτερεύων έλεγχος. Παρουσιάζονται στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς συνδυασμούς σωματιδίων και συχνοτήτων ταλάντωσης.....	8
<b>Εικόνα 6</b> Χωρική διακριτοποίηση τυχαίου σχήματος μέσω πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων.....	9
<b>Εικόνα 7</b> Διακριτοποίηση επιφάνειας στοιχείου. Εμφανίζονται το πλέγμα και οι κόμβοι σύμφωνα με τις τεχνικές: a) Πεπερασμένες διαφορές b) Πεπερασμένα στοιχεία.....	12
<b>Εικόνα 8</b> Κατηγοριοποίηση αριθμητικών μεθόδων ως προς το είδος των συναρτήσεων u και w.....	15
<b>Εικόνα 9</b> Ένας όγκος ελέγχου V που περικλείεται από μία επιφάνεια S.....	19
<b>Εικόνα 10</b> Σύμβαση για τα σημεία πηγής (source points) και τα σημεία πεδίου (field points).....	20
<b>Εικόνα 11</b> Περιοχή υπολογισμού γύρω από μία γωνία.....	27
<b>Εικόνα 12</b> Διάταξη της φυσαλίδας μέσα στον αγωγό.....	29
<b>Εικόνα 13</b> Αρχικές συνθήκες στο όριο του αξονοσυμμετρικού συστήματος. Το σύστημα συντεταγμένων έχει επίσης προστεθεί.....	31
<b>Εικόνα 14</b> Διάγραμμα πειραματικών δεδομένων (τελείες) και προβλέψεων για τα μοντέλα hooke (1, μπλε καμπύλη), neo-Hookean (2, κόκκινη καμπύλη) και Mooney-Rivlin (3, πράσινη καμπύλη).....	34
<b>Εικόνα 15</b> Χαρακτηριστικά μεγέθη που περιγράφουν το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα.	48

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

<b>Διάγραμμα 1</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ και χρόνος επίλυσης του προβλήματος, ως προς τον αριθμό στοιχείων πλέγματος με λόγο $R_0/R_t=0.4$ και $L/R_t = 8$ για επιφανειακό μέτρο διάτμησης $G_s=160$ MPa.....	51
<b>Διάγραμμα 2</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους $G_s=40$ MPa. Περίπτωση για λόγο $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος .....	52
<b>Διάγραμμα 3</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους $G_s=40$ MPa. Αντιπροσέγγιση των περιπτώσεων για λόγους $L/R_t = 8$ και $L/R_t = 10$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος. ....	53
<b>Διάγραμμα 4</b> Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας μίας φουσαλίδας μέσα σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας $R_t$ ως προς το λόγο $R_0/R_t$ με λόγο $L/R_t = 8$ για τις μεθόδους των πεπερασμένων και των συνοριακών στοιχείων. Παρουσιάζονται καμπύλες για τέσσερις διαφορετικές τιμές του μέτρου διάτμησης για τα πεπερασμένα στοιχεία μαζί με μία μόνο χαρακτηριστική από τα συνοριακά για διασφάλιση της ευκρίνειας των αποτελεσμάτων. ....	54
<b>Διάγραμμα 5</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , για τέσσερις διαφορετικές τιμές του μέτρου διάτμησης του κελύφους. Περίπτωση για λόγο $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος. ....	55
<b>Διάγραμμα 6</b> Προσθήκη της περίπτωσης για λόγο $L/R_t = 10$ στο διάγραμμα 5. Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος .....	56
<b>Διάγραμμα 7</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους $G_s=40$ MPa. Περίπτωση της εικόνας για λόγο $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος. ....	57
<b>Διάγραμμα 8</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους $G_s=40$ MPa. Περίπτωση της εικόνας για λόγο $L/R_t = 10$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος. ....	57
<b>Διάγραμμα 9</b> Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους $G_s=320$ MPa. Περίπτωση της εικόνας για λόγο $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος. ....	58

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<b>Πίνακας 1</b> Τιμές των φυσικών μεταβλητών του συστήματος που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα.....	49
<b>Πίνακας 2</b> Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας μίας φυσαλίδας μέσα σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας $R_t$ ως προς το λόγο $R_0/R_t$ με $L/R_t = 8$ και $G_s=160$ MPa.....	50

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η σημασία ενός φυσικού φαινομένου για τον άνθρωπο εξαρτάται από δύο παραμέτρους: α) το βαθμό οφέλους (ή ζημίας) που προκαλεί και β) την πιθανότητας εμφάνισης του. Πρώτα στη λίστα είναι αυτά με τη μεγαλύτερη επίδραση και συχνότητα εφαρμογής στις διεργασίες και τελευταία τα πιο ασήμαντα και ασυνήθιστα. Φαινόμενα που σχετίζονται με την ύπαρξη φυσαλίδων απαντώνται κατά κόρον στη φύση και την τεχνολογία, γιατί η δημιουργία τους εμπλέκει και τις τέσσερις βασικές καταστάσεις της ύλης, με πολύ απλούς μηχανισμούς αλλαγής φάσης, ιονισμού κ.α. Έτσι η μελέτη της απόκρισης τους σε διαταραχές και συγκεκριμένα των χαρακτηριστικών ταλάντωσής τους, είναι απαραίτητη για την ερμηνεία των φαινομένων που τις εμπριέχουν και την αξιοποίησή τους εν συνεχεία σε πρακτικούς σκοπούς.

Συχνά, η επίλυση φυσικών προβλημάτων με τρόπο αναλυτικό δεν είναι εφικτή, λόγω ιδιαιτεροτήτων που παρουσιάζονται στις εξισώσεις που τα περιγράφουν. Ακόμη συχνότερα, η εύρεση των αναλυτικών λύσεων δεν είναι πρακτική, από τη σκοπιά του χρόνου και των υπολογιστικών πόρων που απαιτούνται. Έχει γίνει πια αντιληπτό ότι η αντιμετώπιση των προβλημάτων της μηχανικής με τρόπο προσεγγιστικό επαρκεί για τις απαιτήσεις του σύγχρονου κόσμου. Προς αυτό το σκοπό, αναπτύχθηκαν διάφορες τεχνικές αριθμητικής επίλυσης των διεπουσών εξισώσεων του συστήματος, καθεμία με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Η παρούσα εργασία μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη. Το πρώτο αφορά κυρίως τη θεωρία και περιέχει την κατηγοριοποίηση των διαθέσιμων υπολογιστικών μεθόδων, τα πεδία στα οποία βρίσκουν εφαρμογή και τις μαθηματικές βάσεις που είναι κοινές σε όλες τις μεθόδους. Στο δεύτερο μέρος, επικεντρωνόμαστε στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς. Προστίθεται στα προηγούμενα η διαδικασία επίλυσης των γενικών προβλημάτων ροής δυναμικού μέσω αυτής, γίνεται η μαθηματική μοντελοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος ιδιοσυχνοτήτων και, τέλος, η διατύπωσή του σε ολοκληρωτική μορφή. Το τρίτο μέρος, που περιέχει τα κεφάλαια 3 και 4, ασχολείται με την μετατροπή των διεπουσών εξισώσεων σε μορφή πινάκων για την κατασκευή του κώδικα επίλυσης σε fortran και παρουσιάζει τα αποτελέσματα και συμπεράσματα από τις επαναληπτικές εκτελέσεις του.

## Σκοπός

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη συμπεριφορά μικροφυσαλίδων σε πληθώρα διαταραχών με τη χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Εξετάζονται οι φυσαλίδες λιπιδίων που περιέχονται σε αγωγούς πεπερασμένου μήκους με ελεύθερα άκρα. Η μελέτη αυτή της απόκρισης του συστήματος σε δυναμικές ή στατικές εισόδους θα πραγματοποιηθεί μέσω της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων, λόγω των μεγάλων πλεονεκτημάτων που προσφέρει στην μείωση των απαιτούμενων υπολογιστικών πόρων, σε σχέση με την ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων. Όπως συμβαίνει γενικά σε ατριβείς ροές με ελεύθερη επιφάνεια, η προσέγγισή τους οδηγεί στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm 1<sup>ου</sup> ή 2<sup>ου</sup> είδους. Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η έρευνα της φυσικής συχνότητας των μικροφυσαλίδων για ταλαντώσεις όγκου μέσω της εξέτασης των ποσοτήτων στο όριο του συστήματος και η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους ως προς την ακρίβεια και την αποδοτικότητά τους. Για το λόγο αυτό θα διεξαχθεί παραμετρική ανάλυση των ατριβών ταλαντώσεων της φυσαλίδας υπό διαφορετικές ιδιότητες κελύφους, διαστάσεις και χωρική διακριτοποίηση. Τα αποτελέσματα έχουν ενδιαφέρον σε εφαρμογές που κυμαίνονται από βιολογικά συστήματα και την ταλάντωση φυσαλίδων στη ροή αίματος έως μηχανικά συστήματα και τη χρήση μικροφυσαλίδων ως εργαζόμενο μέσο σε μικροσυσκευές που διακινούν ρευστό.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ

## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

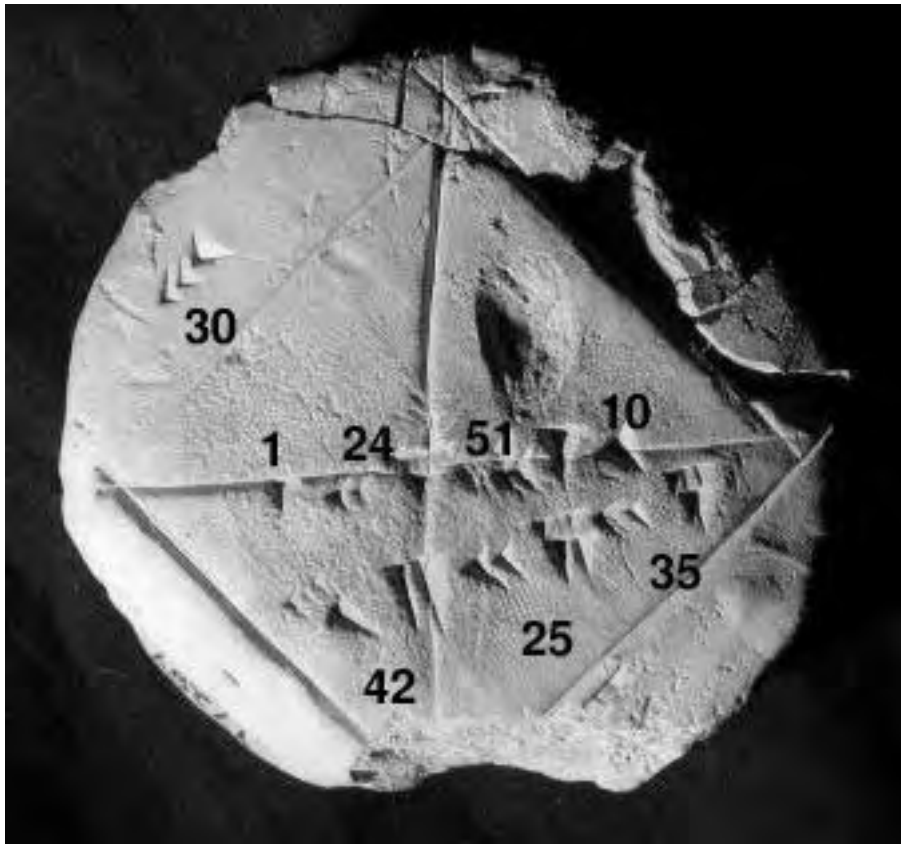
Το κύριο χαρακτηριστικό της σύγχρονης εποχής είναι η αλματώδης ανάπτυξη της τεχνολογίας. Αυτή προκύπτει ως αποτέλεσμα της προόδου στον τομέα της έρευνας (scientific research) που επέτρεψε ουσιαστικά την επίλυση προβλημάτων τα οποία δεν ήταν δυνατόν να προσεγγιστούν με τις τεχνικές του παρελθόντος. Η αδυναμία εύρεσης λύσεων ακριβείας σε ορισμένα φυσικά προβλήματα ή η υψηλή πολυπλοκότητά τους καθιστούσαν αποτρεπτική την αναλυτική αντιμετώπισή τους. Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα έγινε λοιπόν σαφής η ανάγκη εύρεσης νέων μεθόδων προσέγγισης των μέχρι τότε άλυτων προβλημάτων.

Η ανάπτυξη επήλθε με τη συνειδητοποίηση ότι η εύρεση προσεγγιστικών λύσεων επαρκεί στην αντιμετώπιση τους, καθιστώντας έτσι εφικτή την ανάθεση των προβλημάτων σε Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές. Συνεχίζεται κατά αυτόν τον τρόπο μία μακρά παράδοση πρακτικών μαθηματικών υπολογισμών, οι ρίζες της οποίας φτάνουν ως την αρχαία Βαβυλώνα και τον δίσκο YBC 7289, ο οποίος δίδει μία εξηναδική αριθμητική προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του δύο ως το μήκος της διαγώνιου του μοναδιαίου τετραγώνου της εικόνας 1.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι αριθμητικές μέθοδοι ερευνήθηκαν πριν την παραγωγή του πρώτου Η/Υ. Βασίζονταν στην αριθμητική παρεμβολή (interpolation) με το χέρι σε μεγάλους τυπωμένους πίνακες. Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα οι Η/Υ υπολογίζουν τις απαιτούμενες συναρτήσεις αντ' αυτού. Παρόλα αυτά, είναι οι ίδιοι αυτοί τύποι παρεμβολής που συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται ως μέρος των αλγορίθμων λογισμικού επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

Ειδικότερα, οι Η/Υ έδωσαν τη δυνατότητα να εφαρμοστούν διαδικασίες διακριτοποίησης των μεταβλητών ενός προβλήματος αναλυτικά ώστε να επιτευχθούν έπειτα αριθμητικές επιλύσεις. Είναι γνωστό ότι η αναζήτηση λύσεων σε διακριτά σημεία του χώρου ή του χρόνου μειώνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Πρώτος ο Fredholm [1] το 1903 υπέδειξε την ύπαρξη λύσεων σε ολοκληρωτικές εξισώσεις στη βάση μίας διαδικασίας διακριτοποίησης, όπου και έγινε η αρχή του ορισμού των θεμελιωδών προβλημάτων οριακών τιμών της θεωρίας δυναμικού με την εφαρμογή τέτοιων εξισώσεων. Τα πρώτα χρόνια ωστόσο η χρήση ολοκληρωτικών εξισώσεων είχε περιοριστεί στην θεωρητική διερεύνηση

της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων σε προβλήματα μαθηματικής φυσικής.



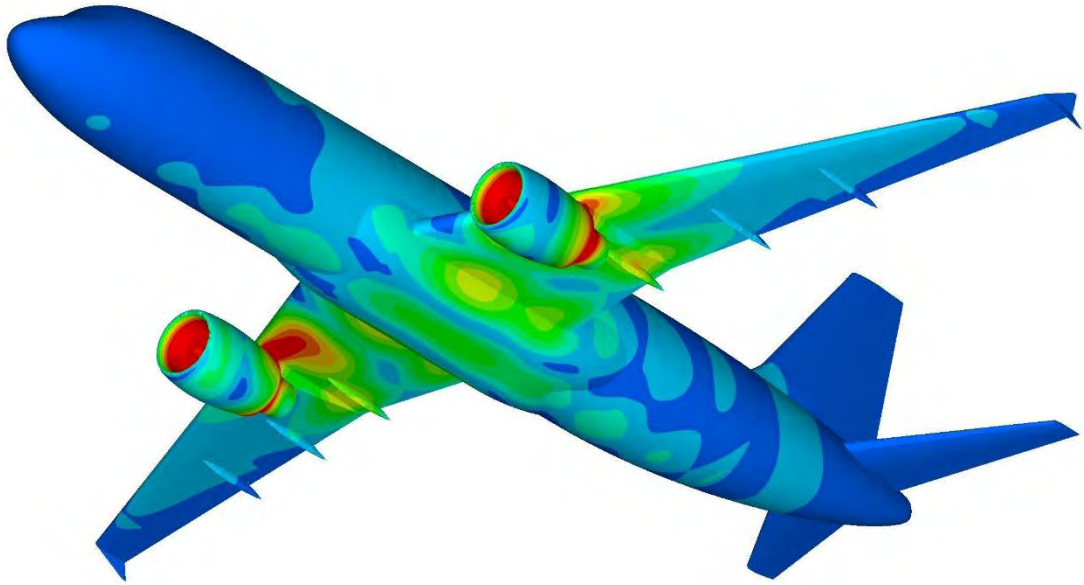
Εικόνα 1 Βαβυλωνιακός δίσκος από πηλό YBC 7289 (κατασκευή 1800 - 1600 π.Χ.). Η προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 αποτελείται από 4 εξηναδικούς όρους, το οποίο είναι ακριβές έως 6 δεκαδικά ψηφία.  $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$

Κάνοντας χρήση κάποιας εκ των αριθμητικών τεχνικών επιστρέφονται δεδομένα όχι για όλο το χώρο και χρόνο αλλά για κάποια διακριτά σημεία μόνο. Από εκεί και πέρα με αριθμητική παρεμβολή ή μαθηματική μεταχείριση, όπως θα δειχθεί μετέπειτα, ευρίσκονται οι τιμές παντού.

## 1.2 ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Η αριθμητική ανάλυση βρίσκει εφαρμογή σε όλα τα πεδία της μηχανικής και των φυσικών επιστημών, αλλά τον 21<sup>ο</sup> αιώνα επίσης στις Επιστήμες Ζωής (Life Sciences) και ακόμα και στις Τέχνες (Arts) έχουν υιοθετηθεί στοιχεία των επιστημονικών υπολογισμών. Οι Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις συναντώνται στη μηχανική των ουράνιων σωμάτων (πλανητών, αστερών, γαλαξιών). Η Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα είναι σημαντική στην ανάλυση δεδομένων. Οι Στοχαστικές

Διαφορικές Εξισώσεις και οι Αλυσίδες Markov είναι απαραίτητες στη μοντελοποίηση ζωντανών κυττάρων στη Φαρμακευτική και Βιολογία. Η συνεχής αύξηση της επεξεργαστικής ισχύος των Η/Υ τα τελευταία χρόνια υποδέχτηκε από τον επιστημονικό κόσμο ως ένα χρήσιμο εργαλείο στην αντιμετώπιση των φυσικών προβλημάτων. Ο σύγχρονος ερευνητής είναι σε θέση να επιλύσει προβλήματα μεγάλης πολυπλοκότητας αντιμετωπίζοντας τα αριθμητικά.



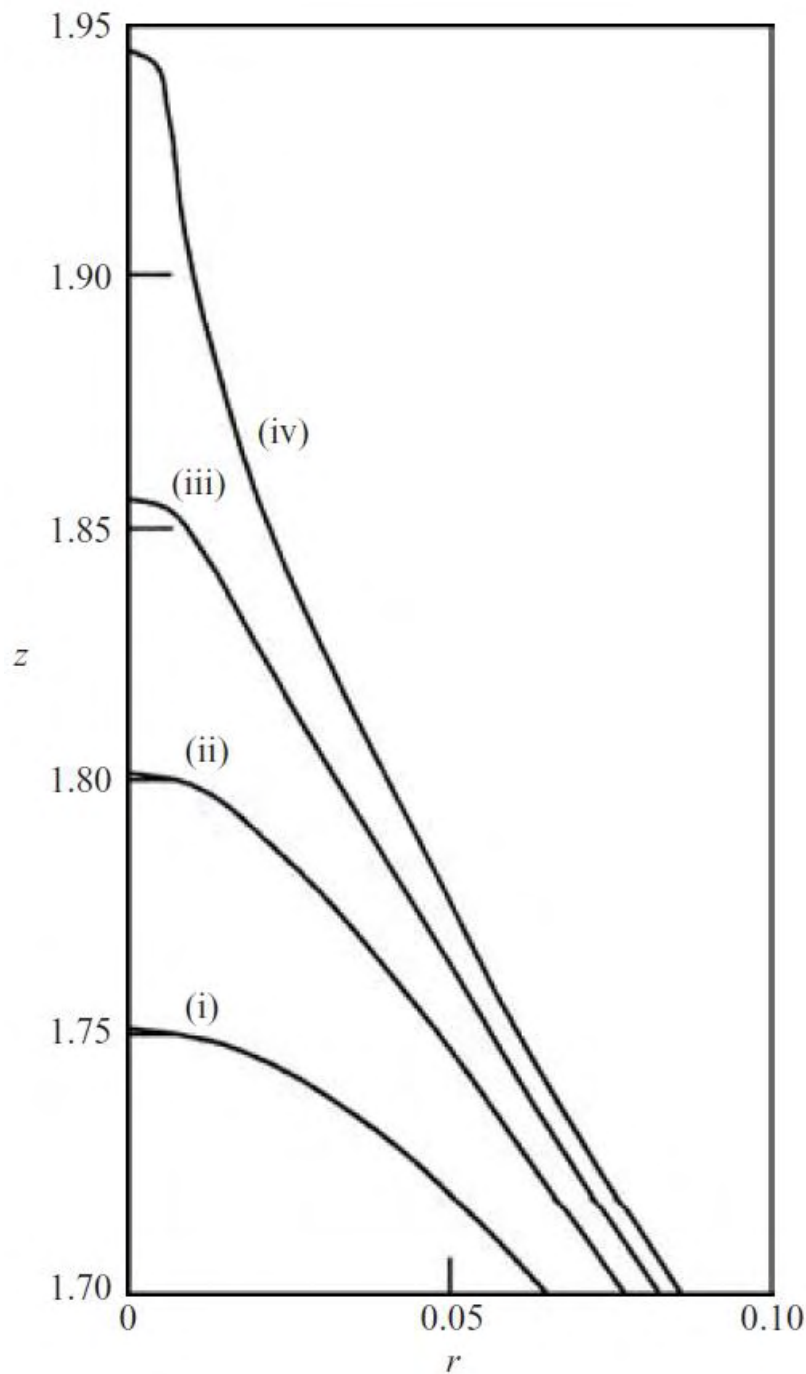
Εικόνα 2 Στατική ανάλυση τάσεων σε Airbus A320 μέσω πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων έχει πια καθιερωθεί ως μία σημαντική εναλλακτική τεχνική στις επικρατούσες αριθμητικές μεθόδους ανάλυσης στη μηχανική συνεχών μέσων. Από τις κυριότερες εφαρμογές της είναι για την επίλυση ενός εύρους προβλημάτων όπως τη θερμοκρασιακή διάχυση, ορισμένους τύπους κίνησης ρευστών, τη ροή σε πορώδη μέσα, την ηλεκτροστατική και διάφορα άλλα τα οποία μπορούν να γραφούν ως μία συνάρτηση δυναμικού και των οποίων η διέπουσα εξίσωση είναι η κλασική εξίσωση Laplace ή Poisson. Όλα τα ανωτέρω αποτελούν προβλήματα δυναμικού και μπορούν εν γένει να αναλυθούν οικονομικά και αποδοτικά κάνοντας χρήση των Συνοριακών Στοιχείων.

Αναφορικά, η αριθμητική ανάλυση χρησιμοποιείται εκτενώς στην σχεδίαση τεχνικών ηλεκτροπεριστροφής, η οποία αποτελεί μία ευθεία, οικονομική και ξεχωριστή μέθοδο παραγωγής μικροϊνών διαμέτρου 100nm ή μικρότερες. Για να επιτευχθεί αυτό, διαλύματα πολυμερών ηλεκτροπεριστρέφονται σε εντάσεις πεδίου της τάξης του  $1\text{kVcm}^{-1}$ . Η ηλεκτρική δύναμη οδηγεί στη δημιουργία ενός τζετ ρευστού από την κορυφή των σταγόνων του πολυμερούς. Αυτό το τζετ αφού



εκταθεί σε μήκος 1 έως 5 εκατοστών, κάμπτεται σε ένα σύνθετο σχήμα, κατά το οποίο οι ηλεκτρικές τάσεις το τεντώνουν και το λεπταίνουν κατά πολύ μεγάλους λόγους. Έπειτα εξατμίζεται ο διαλύτης και απομένουν έτσι στερεές μικροϊνες. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης βρίσκει εφαρμογή σε πληθώρα πεδίων όπως την κατασκευή ηλιακών πανιών και καθρεφτών στο διάστημα, τον ψεκασμό φυτοφαρμάκων σε καλλιέργειες, την σχεδίαση μικροαεροδυναμικών κατασκευών, τις βιοιατρικές εφαρμογές κ.α. Όπως γίνεται κατανοητό από την εικόνα 3 το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό ως προς τον άξονα ύψους z. Μολονότι το προκύπτον γράφημα δείχνει απλούστερο σε σχέση με άλλα τρισδιάστατα μοντέλα (εικόνα 2), οφείλει να σημειωθεί η τεράστια σημασία της αναφερθείσας προσέγγισης στην ακρίβεια και την εξοικονόμηση πόρων κατά την διεξαγωγή μιας παραμετρικής μελέτης σταγόνων με μεταβαλλόμενες ποσότητες στην σύσταση τους, την γωνία επαφής με το στήριγμα και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

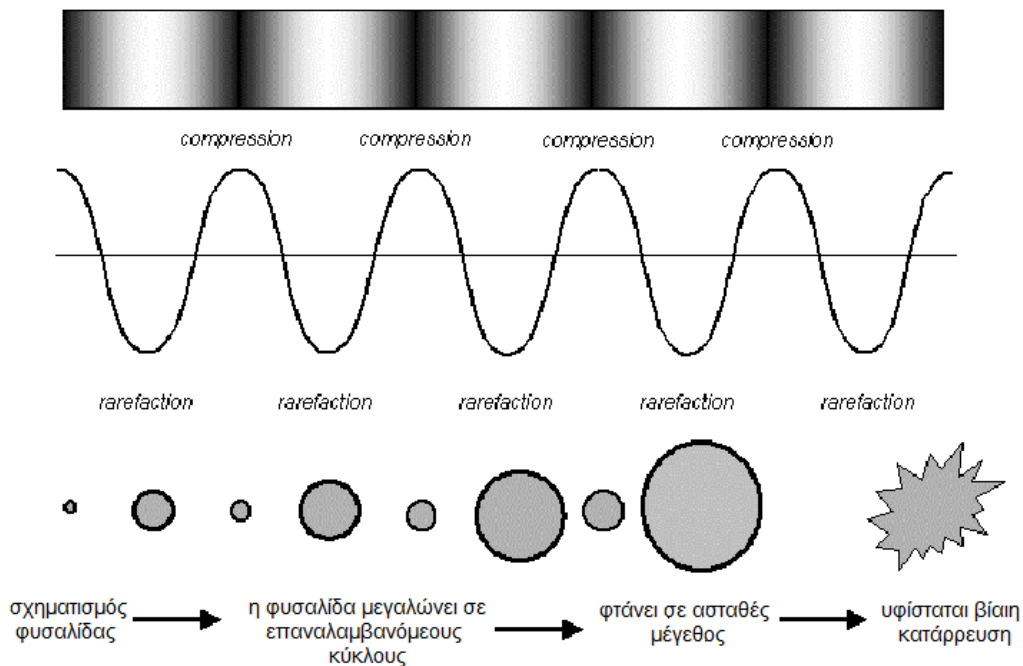


Εικόνα 3 Ανάλυση σχήματος σταγόνας με χρήση συνοριακών στοιχείων. Η σταγόνα αποτελείται από ένα διάλυμα πολυκαπρολακτόνης 8% κατά βάρος σε μίγμα διχλωρομεθάνιου/ τολουόλιου 75/25. Οι καμπύλες αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές i) 21.4ms, ii) 21.42ms, iii) 21.43ms, iv) 21.44ms.

Αναφορικά με το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, η πρόβλεψη του σχήματος και της ευστάθειας υγρών σφαιρών υπό την παρουσία διαφόρων δυναμικών πεδίων συγκεντρώνει μεγάλο ενδιαφέρον στη μηχανική των ρευστών και τη θεωρητική φυσική. Τέτοιου είδους πεδία προκαλούν επιφανειακή ενέργεια, ενέργεια αντίστροφη της απόστασης, που περιλαμβάνει βαρυτικές και ηλεκτροστατικές ενέργειες και, τέλος, περιστροφική ενέργεια. Ένα ή περισσότερα

από τα πεδία αυτά μπορεί να συναντάται σε μία πληθώρα εφαρμογών, από θεωρίες σχηματισμού ουράνιων σωμάτων μέχρι υπολογισμούς πυρηνικής σχάσης που βασίζονται στο μοντέλο υγρής σταγόνας της πυρηνικής συνοχής.

Περαιτέρω, η δυναμική των φυσαλίδων έχει απασχολήσει ερευνητές πολυφασικών ροών, όπως στη μελέτη του φαινομένου της σπηλαιώσης (εικόνα 4). Πριν την κατανόηση του, το φαινόμενο αυτό ήταν υπεύθυνο για πολυδάπανες ζημιές στον τομέα της ναυπηγικής κατά το σχηματισμό φυσαλίδων ατμού στις προπέλες των πλοίων που επέτρεπαν την ελεύθερη περιστροφή τους και τέλος την πρόκληση βλάβης στον κινητήρα. Παρόμοια κατάσταση συναντώταν σε αντλίες ρευστού οποιασδήποτε χρήσης και σε άλλες εφαρμογές της υδραυλικής. Η εύρεση της απόκρισης των δημιουργούμενων φυσαλίδων σε ακουστικές διαταραχές καθορίζει το σημείο αλλαγής φάσης και επιτρέπει τον έλεγχό του.



Εικόνα 4 Στάδια κατάρρευσης φυσαλίδων λόγω της σπηλαιώσης που προκαλείται σε υψηλές συχνότητες

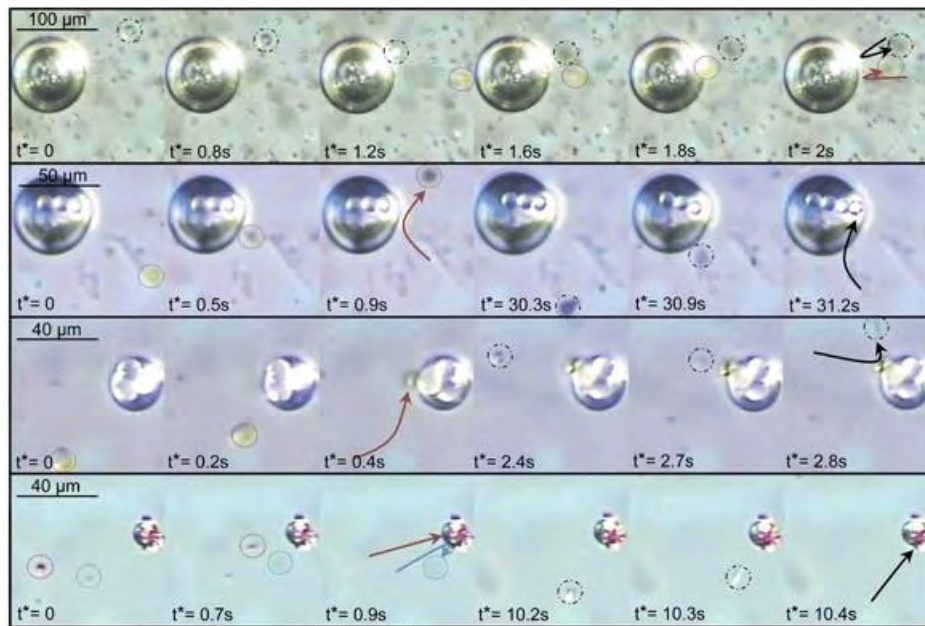
Φαινόμενα σπηλαιώσης συμβαίνουν επίσης σε πλήρως περιορισμένα υγρά, δηλαδή υγρά που περικλείονται από στερεά όρια. Παρότι αυτές οι περιπτώσεις έχουν λάβει μικρότερο ενδιαφέρον στη βιβλιογραφία, συναντώνται πολύ συχνά στη φύση και στην τεχνολογία. Παραδείγματα αποτελούν οι εφαρμογές σε τομείς της Γεωλογίας [2], για προφανείς λόγους, οι διεργασίες σε πορώδη υλικά [3] και στην Βιολογία [4]. Πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα της δυναμικής φυσαλίδων σε κλειστούς χώρους, αποτελούν τα φαινόμενα σπηλαιώσης σε κορμούς δένδρων. Αυτά τα φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο στη φυσιολογία τους. Η υδροδυναμική

σπηλαίωση προκαλείται κυρίως από υψηλές ταχύτητες ρευστού, όπως στην περίπτωση των προπελών που αναφέρθηκε παραπάνω, που οδηγούν σε επακόλουθη πτώση πίεσης, σύμφωνα με το νόμο Bernoulli. Ωστόσο, στους κορμούς δένδρων η ροή νερού είναι πολύ αργή, η ισχυρή τάση προς ατμοποίηση, όμως, προκαλεί ραγδαία πτώση της εσωτερικής πίεσης και το σχηματισμό φυσαλίδων κατά τους ίδιους μηχανισμούς. Οι φυσαλίδες αυτές ταλαντώνονται και εκπέμπουν ακουστικά σήματα, κυρίως στην υπερηχητική περιοχή.

Για να γίνει αντιληπτή η σημασία της μελέτης των φυσικών ιδιοτήτων των φυσαλίδων, αξίζει να σημειωθεί το πλήθος δημοσιεύσεων διάφορων εφαρμογών τους σε επιστημονικά περιοδικά. Ενδεικτικά, η διέγερση με υπερήχους των μικροφυσαλίδων εντός των αιμοφόρων αγγείων, που έχει προταθεί για μεγάλο εύρος κλινικών εφαρμογών, μελετήθηκε μεταξύ άλλων από τους Neo W. Jang, Sheryl M. Gracewski, Diane Dalecki, Ben Abrahamsen, Travis Buttaccio, και Robert Halm και δημοσιεύθηκε στο 'Journal of the Acoustical Society of America' τον Ιούλιο του 2009, όπου παρουσιάζεται επίσης η διεξαγωγή αντίστοιχου πειράματος κατά την έρευνα. Ο Οργανισμός Μεταδιδακτορικών Επιστημών και ο Εθνικός Οργανισμός Φυσικών Επιστημών της Κίνας, χρηματοδότησαν την έρευνα της φυσικής συχνότητας ταλάντωσης μικροφυσαλίδων σε ελαστικούς αγωγούς, για την μελέτη του κινδύνου ρήξης της μεμβράνης του ενδοθηλίου στα μικροαγγεία του εγκεφάλου και τα αποτελέσματα συμπεριλήφθηκαν στο υλικό του Παγκόσμιου Συμβουλίου «Medical Physics and Biomedical Engineering που έλαβε χώρα 26-31 Μαΐου, 2012, στο Πεκίνο» (World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering May 26-31, 2012, Beijing, China). Οι φυσικές ταλαντώσεις φυσαλίδων αερίου σε κοιλότητες νερού παρουσιάστηκαν σε μία πρόσφατη δημοσίευση στο 'Journal of Sound and Vibration 420' του 2018 από τους Alexander A. Doinikov και Philippe Marmottant, όπου πρότειναν την γενίκευση του μοντέλου του Drysdale [5] εισάγοντας την επίδραση ιξώδους απόσβεσης στο στερεό τοίχωμα.

Περαιτέρω, το πολύ ενδιαφέρον υδροδυναμικό φαινόμενο της έλξης/απόθησης ταλαντευόμενων φυσαλίδων σε φάση/εκτός φάσης, που οφείλεται στις δυνάμεις 'Bjerknes', μελετήθηκε από τους Νικόλαο Πελεκάση και Ιωάννη Τσαμόπουλο [6] μέσω μίας υβριδικής μεθόδου πεπερασμένων-συνοριακών στοιχείων. Κατάφεραν την ποσοτική και λεπτομερή περιγραφή των φαινομένων που εμπλέκονται, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε εύρος πεδίων, από την σχεδίαση παγίδων φυσαλίδων σε αγωγούς ρευστών (εικόνα 5) έως βιολογικούς τομείς και την επίδραση χαμηλής συχνότητας υπερήχων σε βιολογικούς ιστούς υπό την παρουσία πόρων αερίου. Άλλο σημαντικό φαινόμενο σε βιολογικά συστήματα αποτελεί η δυναμική κατάρρευση μικροφυσαλίδων αερίου με ελαστικό κέλυφος (contrast agents) που υποβάλλονται σε ακουστικές διαταραχές και μελετήθηκε από τους ερευνητές Κωνσταντίνο Τσιγκλιφή και Νικόλαο Πελεκάση [7] υπό την οικονομική

χρηματοδότηση της υποτροφίας ‘ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ’ του Ελληνικού Υπουργείου Παιδείας.



Εικόνα 5 Επιλεκτική παγίδευση σωματιδίων σε φυσαλίδες. Υλοποιείται από την ύπαρξη μικρο-ροής δίπλα από τη φυσαλίδα σε συνδυασμό με τις δυνάμεις Bjerknes ως δευτερεύων έλεγχος. Παρουσιάζονται στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς συνδυασμούς σωματιδίων και συχνοτήτων ταλάντωσης.

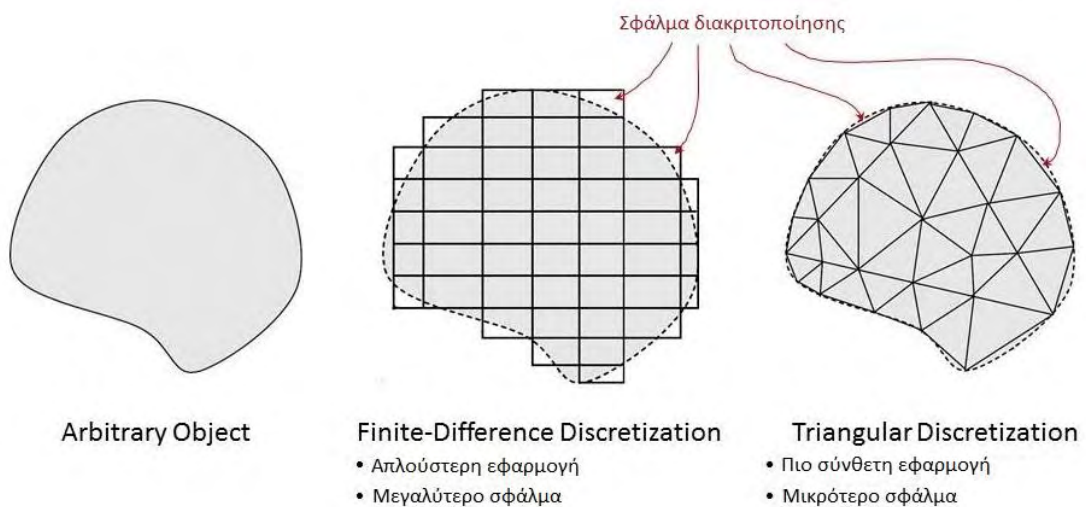
### 1.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μεγάλη αύξηση του ενδιαφέροντος γύρω από τις τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης. Αυτές βασίζονται στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων εξισώσεων ή συστήματος εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικό πρόβλημα. Η πρώτη ευρέως διαδεδομένη προσεγγιστική μέθοδος ήταν οι πεπερασμένες διαφορές, η οποία προσεγγίζει τις διέπουσες εξισώσεις ενός προβλήματος κάνοντας χρήση τοπικών αναπτυγμάτων, συνήθως μέσω σειρών Taylor.

Αυτή η μέθοδος είναι μεν προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Αυτό όμως το μειονέκτημα ξεπεράστηκε τα τελευταία χρόνια χάρη στη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου ήταν τόσο μεγάλη, που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται στην έρευνα και στην βιομηχανία για τον υπολογισμό και τη μελέτη διάφορων κατασκευών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία εξέλιξη των μητρωϊκών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και αναπτύχθηκε από διάφορους σπουδαίους επιστήμονες όπως ο Ιωάννης Αργύρης, ο Ρέι Κλαφ, ο Βάλτερ Ριτζ, ο Μπόρις Γκαλέρκιν και άλλοι.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει προσελκύσει την προσοχή των αναλυτών κυρίως λόγω τις ιδιότητας της να χωρίζει το συνεχές μέσο σε μία ακολουθία στοιχείων, τα οποία μπορούν να συσχετιστούν με φυσικά σώματα. Η διαθέσιμη βιβλιογραφία στα πεπερασμένα στοιχεία είναι ήδη εκτενής και περιλαμβάνει προβλήματα δομικών κατασκευών [8], ροών ρευστών [9], κ.α.



Εικόνα 6 Χωρική διακριτοποίηση τυχαίου σχήματος μέσω πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων

Η τεχνική βασίζεται ορισμένες φορές σε αρχές μεταβλητότητας ή πιο γενικά σε εκφράσεις ζυγισμένων παραμενοσών. Το μεγάλο ενδιαφέρον που συγκεντρώθηκε γύρω από τη μέθοδο στις αρχές του 1960, είχε δύο σημαντικά επακόλουθα: 1) σήμανε το ξεκίνημα ενασχόλησης με τις υπολογιστικές τεχνικές, 2) αποτέλεσε το ερέθισμα για ουσιαστική έρευνα σε βασικές φυσικές αρχές, όπως τεχνικές μεταβλητότητας και ζυγισμένων παραμενοσών.

Το πρώτο αποτελεί φυσική συνέπεια της εμφάνισης νέων, ισχυρών υπολογιστών 2<sup>ης</sup> γενιάς οι οποίοι ήταν ικανοί να λύσουν προβλήματα μηχανικής που περιλάμβαναν μεγάλα ποσά αριθμητικών χειρισμών και αποθήκευσης. Για λίγο, η συνεχής εξέλιξη στην τεχνολογία υπολογιστών, συμπεριλαμβανομένης της εισαγωγής υπολογιστών 3<sup>ης</sup> γενιάς, απέσπασε την προσοχή των ερευνητών από την ανάπτυξη μαθηματικών τεχνικών, δηλαδή το σημείο (2) παραπάνω. Αυτές οι τεχνικές εντοπίζονται στην - πριν των υπολογιστών εποχή - και περιλαμβάνουν

διαφορετικούς τρόπους επίλυσης των διεπουσών εξισώσεων ενός προβλήματος, όπως την παράθεση Galerkin, τα ελάχιστα τετράγωνα, τη μετάβαση ή μεταφορά πινάκων, το συνδυασμό διαφορετικών τεχνικών κ.α. Ευτυχώς δεν ξεχάστηκαν και επανήλθαν στο προσκήνιο στη βιβλιογραφία των πεπερασμένων στοιχείων, συνήθως με άλλη ονομασία, όπως τα πεπερασμένα στοιχεία Galerkin, ορισμένους τρόπους χρονικής ολοκλήρωσης, κ.α.

Μία άλλη σημαντική εξέλιξη στις προσεγγιστικές τεχνικές αποτέλεσε η μελέτη μικτών μεθόδων και η συνειδητοποίηση ότι τα φυσικά προβλήματα μπορούν να εκφραστούν και να λυθούν με πληθώρα διαφορετικών τρόπων αναλόγως των εξισώσεων που προσεγγίζονται. Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν θεμελιώδη σημασία στην εφαρμογή των διαφορετικών αριθμητικών τεχνικών σε υπολογιστή.

Οι τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων θεωρούνταν, μέχρι προσφάτως, ένα ξεχωριστό είδος αναλυτικών μεθόδων και δεν μπορούσαν να συσχετιστούν με τις προσεγγιστικές. Έγιναν γνωστές στην Ευρώπη μέσω του έργου Ρώσων συγγραφέων όπως οι Muskhelishvili, Mikhlin, Kupradze και Smirnov αλλά δεν ήταν δημοφιλείς στους μηχανικούς τις εποχής. Πρόδρομο αυτού του έργου αποτέλεσε η εργασία του Kellogg [10] ο οποίος εφάρμοσε ολοκληρωτικές εξισώσεις στην επίλυση προβλημάτων τύπου Laplace. Οι τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στη Μηχανική Ρευστών και σε γενικά προβλήματα δυναμικού ως ‘πηγαία’ μέθοδος, η οποία είναι μία μέθοδος ‘έμμεσης’ ανάλυσης και αυτό γιατί οι άγνωστοι δεν είναι οι φυσικές μεταβλητές του προβλήματος.

Είναι δύσκολο να αναφερθεί το ποιος ήταν ο πρώτος που πρότεινε την ‘άμεση’ μέθοδο ανάλυσης. Απαντάται σε διαφορετική μορφή στο βιβλίο του Kupradge [11]. Φαίνεται δίκαιο, ωστόσο, από τη σκοπιά της Μηχανικής (Engineering) να θεωρήσουμε ότι η μέθοδος προήλθε από το έργο των Cruse και Rizzo [12] στην ελαστοστατική. Η άμεση μέθοδος είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Από τις αρχές του 60’ μία μικρή ομάδα ερευνητών στο πανεπιστήμιο του Σαουθάμπτον εργάστηκε στην εφαρμογή ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επίλυση προβλημάτων ανάλυσης τάσεων. Δυστυχώς, η παρουσίαση του προβλήματος, η δυσκολία ορισμού της κατάλληλης συνάρτησης Green και, παράλληλα, η εμφάνιση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων συνέβαλαν στη μείωση της σημασίας αυτού του έργου. Στις αρχές του 70’ οι τελευταίες εξελίξεις στα πεπερασμένα στοιχεία άρχισαν να βρίσκουν το δρόμο τους στη διατύπωση οριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και συνέβαλαν στην ανάπτυξη των Γενικών Κυρτών Στοιχείων. Ακόμη όμως, το πόσο αποδοτικά συσχετίζει κανείς τις οριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις με άλλες προσεγγιστικές τεχνικές παρέμενε άγνωστο. Αυτό επιτεύχθηκε από τον Brebbia ο οποίος τη δεκαετία του 1970 εργάστηκε πάνω στη σχέση διαφορετικών

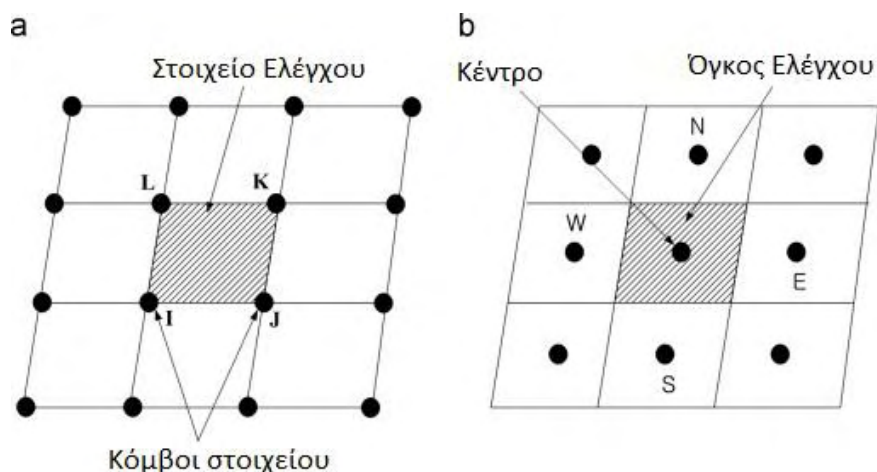
προσεγγιστικών μεθόδων. Κύριο στοιχείο αποτελεί ο ορισμός της κοινής βάσης που διέπει όλες τις θεμελιώδεις τεχνικές ώστε να γίνουν κατανοητές οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται σε καθεμιά και να μπορούν έτσι να συνδυαστούν μεταξύ τους.

#### 1.4 ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Τα περισσότερα προβλήματα Μηχανικής που εκφράζονται σε διαφορική μορφή μπορούν να λυθούν μόνο κατά έναν προσεγγιστικό τρόπο λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Οι πιο γνωστές τεχνικές – Πεπερασμένες Διαφορές και Πεπερασμένα στοιχεία – αν και φαντάζουν διαφορετικές, επιτυγχάνουν τον ίδιο σκοπό ελαττώνοντας τους άπειρους βαθμούς ελευθερίας ενός συνεχούς συστήματος σε ένα πεπερασμένο σετ. Κάνοντας το παραπάνω, το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί αριθμητικά και καθίσταται ικανό για επίλυση μέσω Η/Υ. Στις πεπερασμένες διαφορές ορίζεται μία σειρά από κόμβους στους οποίους η διακριτή εκδοχή της διαφορικής εξίσωσης ικανοποιείται. Στα πεπερασμένα στοιχεία η διαφορική εξίσωση ή το εσωτερικό της γινόμενο ικανοποιείται κατά μία μέση έννοια σε μία περιοχή ή στοιχείο. Οι δύο τεχνικές διακριτοποιούν το εσωτερικό καθώς και τα όρια της περιοχής υπό εξέταση. Από την άλλη, η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων βασίζεται στη διακριτοποίηση του εξωτερικού ορίου και μόνο. Οι τρεις τεχνικές σχετίζονται στενά αν επικεντρωθεί κάποιος στην προσέγγιση που πραγματοποιείται.

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι συχνά πιο αποδοτική από άλλες μεθόδους, συμπεριλαμβανομένων των πεπερασμένων στοιχείων, σε όρους υπολογιστικών πόρων για προβλήματα με μικρό λόγο επιφάνεια/όγκο. Λειτουργεί κατασκευάζοντας ένα πλέγμα στην επιφάνεια που μοντελοποιείται (εικόνα 7). Ο τρόπος κατανομής των κόμβων αποτελεί σημαντικό στάδιο στη διαδικασία επίλυσης καθώς η λάθος επιλογή του εισάγει άμεσα ένα πρώτο σφάλμα στους υπολογισμούς (εικόνα 6).





Εικόνα 7 Διακριτοποίηση επιφάνειας στοιχείου. Εμφανίζονται το πλέγμα και οι κόμβοι σύμφωνα με τις τεχνικές: a) Πεπερασμένες διαφορές b) Πεπερασμένα στοιχεία.

Εξ' ορισμού, η επιλογή της εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων σε ένα πρόβλημα συνεπάγεται κατά κανόνα τη διαφοροποίηση του τελικού αποτελέσματος από την αναλυτική λύση. Η απόκλιση αυτή λόγω της προσεγγιστικής μεθόδου εμφανίζεται προφανώς με τη μορφή συνάρτησης και ονομάζεται Απομένουσα (Residual) ή συνάρτηση Σφάλματος (Error). Το ευκαίιο θα ήταν να είχε παντού μηδενική τιμή, το εφικτό όμως είναι να μηδενιστεί κατά μία 'μέση' έννοια και αυτό επιτυγχάνεται με διαφορετικό τρόπο για κάθε μέθοδο. Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε κατά το δυνατόν το σφάλμα στο όριο και στον εσωτερικό χώρο. Για το λόγο αυτό τα σφάλματα μπορούν να κατανεμηθούν και ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει αυτό παράγει διαφορετικές μορφές προσεγγιστικών μεθόδων.

Κατά την προσπάθεια επίλυσης κάποιου φυσικού προβλήματος οι διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ) που προκύπτουν είναι ελλειπτικού, παραβολικού ή υπερβολικού τύπου. Οι ΔΕ ελλειπτικού τύπου δεν έχουν καμία πραγματική χαρακτηριστική καμπύλη και επομένως οι λύσεις τους δεν μπορούν να περιέχουν ασυνεχείς παραγώγους πουθενά. Αυτό σημαίνει ότι είναι κατάλληλες για την περιγραφή προβλημάτων σε κατάσταση ισορροπίας, στις οποίες όλες οι ασυνέχειες έχουν απαλειφθεί. Από την άλλη, οι ΔΕ παραβολικού τύπου χρησιμοποιούνται για την περιγραφή μίας ευρείας οικογένειας προβλημάτων της φυσικής που εξελίσσονται με τον χρόνο, όπως η διάχυση θερμότητας και η ακουστική διάδοση. Ωστόσο αν και υπό γενικές υποθέσεις έχουν λύσεις σε κάθε χρονική στιγμή, οι μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις έχουν λύσεις για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα και μπορεί να οδηγήσουν σε απροσδιοριστίες σε πεπερασμένο χρόνο. Όσον αφορά στις ΔΕ υπερβολικού τύπου, αυτές περιγράφουν πολλές από τις εξισώσεις της μηχανικής και οι λύσεις τους είναι «κυματοειδείς». Μία διαταραχή στα δεδομένα μιας υπερβολικής ΔΕ δεν θα γίνει αισθητή από κάθε σημείο του χώρου μονομιάς, σε

αντίθεση με τις ελλειπτικού και παραβολικού τύπου. Οι διαταραχές τους έχουν μία πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης και ταξιδεύουν κατά μήκος των χαρακτηριστικών της εξίσωσης.

Έστω ότι ασχολούμαστε με ελλειπτικές εξισώσεις και τις αναπαριστούμε με έναν διαφορικό τελεστή  $L$ , τέτοιο ώστε:

$$L(u) = b \quad \text{στο } V \quad (1)$$

Ο τελεστής  $L$  ορίζεται ως μία διαδικασία η οποία όταν εφαρμοστεί στη συνάρτηση  $u$  επιστρέφει μία άλλη συνάρτηση  $b$ . Με  $V$  συμβολίζουμε το χωρικό τομέα, που περιγράφεται από τις συντεταγμένες  $x_i (i = 1,2,3)$ .

Παίρνοντας την ομογενή εκδοχή της (1), έχουμε:

$$L(u) = 0 \quad \text{στο } V \quad (2)$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο όπως παρακάτω:

$$\int_{\Omega} L(u)w dV = 0 \quad (3)$$

Η  $w$  ονομάζεται συνάρτηση βάρους. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη την (3) έως ότου απαλειφθούν όλες οι παράγωγοι του  $u$ , καταλήγουμε στην «ανάστροφη» μορφή του εσωτερικού γινομένου, από όπου φαίνονται οι οριακές συνθήκες του. Η ακριβής λύση της (1) μπορεί να προσεγγισθεί από ένα σύνολο συναρτήσεων  $\varphi_k(x)$ , ώστε:

$$u = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k + \alpha_0 \quad (4)$$

όπου  $a_k$  είναι απροσδιόριστοι παράμετροι και  $\varphi_k$  γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις που επιλέγονται ώστε να ικανοποιήσουν συγκεκριμένες δοσμένες συνθήκες σε σχέση με τις οριακές συνθήκες και το βαθμό ελευθερίας. Ο συντελεστής  $\alpha_0$  υπάρχει για να ικανοποιήσει το μη ομογενές τμήμα των οριακών συνθηκών.

Συμβολίζοντας με  $u_0$  την ακριβή λύση της (1) και  $u$  την προσεγγιστική, προκύπτει μία συνάρτηση σφάλματος  $R$ :

$$R = L(u) - b \neq 0 \quad (5)$$

Εάν η συνάρτηση  $u$  δεν ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες προκύπτουν δύο άλλα είδη συναρτήσεων σφάλματος, αυτή των ουσιαστών οριακών συνθηκών  $R_1$  και αυτή των φυσικών  $R_2$ . Στην προσπάθεια να ελαχιστοποιηθούν κατά το δυνατόν τα σφάλματα στο εσωτερικό και το όριο της εξεταζόμενης περιοχής, παράγονται διαφορετικά είδη προσεγγιστικών μεθόδων ανάλογα με τον τρόπο που κατανομούνται τα σφάλματα.

Όπως φαίνεται από την εικόνα 8, όταν χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, προκύπτει η μέθοδος ζυγισμένων παραμενουσών και ειδικότερα η μέθοδος Galerkin στην οποία οι συναρτήσεις  $u$  και  $w$  απαρτίζονται από το ίδιο σύνολο συναρτήσεων  $\varphi_i$ .

Περαιτέρω η μέθοδος ζυγισμένων παραμενουσών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει τις οριακές συνθήκες επιτρέποντας έτσι μόνο την μερική ικανοποίησή τους και, πιο σημαντικά, τη χρήση ενός συνόλου συναρτήσεων με λιγότερους περιορισμούς. Η μέθοδος ασθενούς ορισμού είναι η κατάλληλη για την περίπτωση στην οποία απαιτείται η προσέγγιση της διέπουσας εξίσωσης και των φυσικών οριακών συνθηκών.

Σε αντίθεση με τις δύο παραπάνω μεθόδους που μεταχειρίζονται συναρτήσεις που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες (ή κάποιες εξ' αυτών) και είναι προσεγγιστικές στον εσωτερικό χώρο, θα μπορούσαν να προταθούν συναρτήσεις που θα ικανοποιούν τις διέπουσες εξισώσεις και θα ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες μόνον προσεγγιστικά. Αυτό δίνει το έναυσμα για οριακούς ορισμούς και, πιο συγκεκριμένα, την τεχνική του ιδιόμορφου οριακού ολοκληρώματος με την οποία θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

- i) όταν οι προσεγγιστικές συναρτήσεις  $u$  επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν τις διέπουσες εξισώσεις, δηλαδή,  $L(u)=0$ . Σημειώνεται ότι εάν οι ίδιες συναρτήσεις χρησιμοποιηθούν για τα  $u$  και  $w$ , αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση βάρους επίσης ικανοποιεί τις διέπουσες εξισώσεις, δηλαδή,  $L(w)=0$ .
- ii) όταν η συνάρτηση βάρους ικανοποιεί τις διέπουσες εξισώσεις  $L(w)$ .

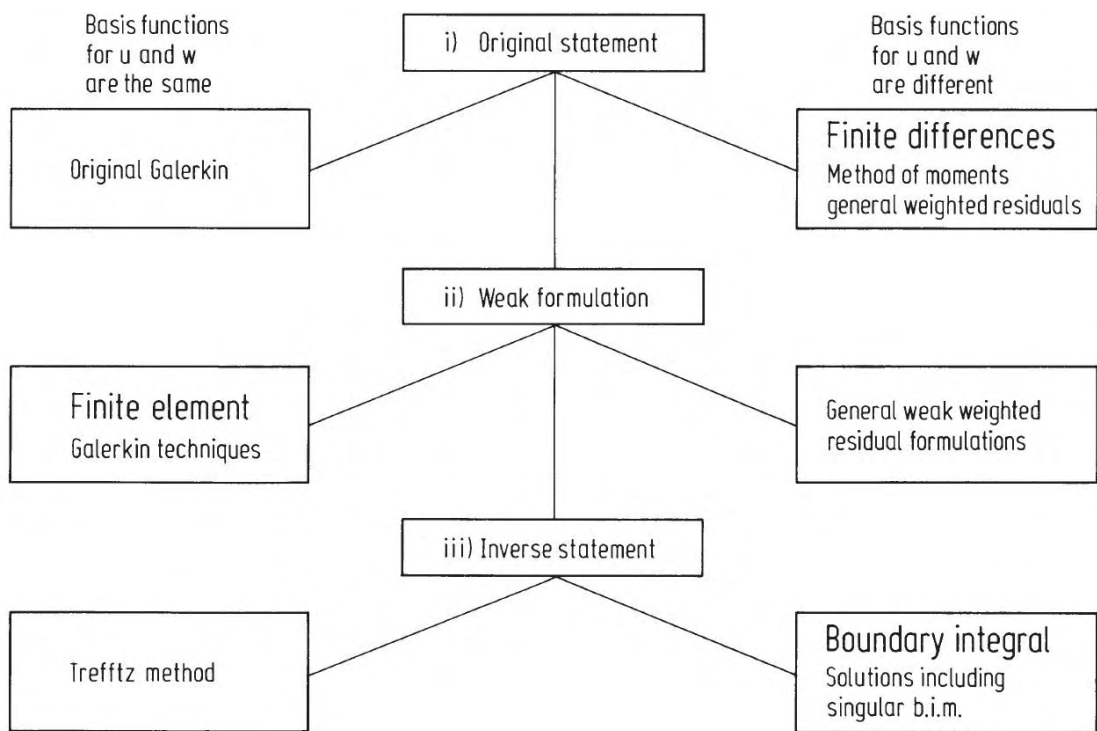
Ένας συνηθισμένος τρόπος κατηγοριοποίησης των προσεγγιστικών μεθόδων λαμβάνει ως βάση το είδος των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την συνάρτηση βάρους  $w$  και την προσεγγιστική  $u$ . Όπως φαίνεται από την εικόνα 8, οι κύριες μέθοδοι της μηχανικής διαφοροποιούνται ως ακολούθως:

- (1) **Πεπερασμένες διαφορές.** Εδώ συναντάμε διαφορετικές συναρτήσεις για τις  $u$ ,  $w$  με τις τελευταίες να εμφανίζονται με τη μορφή δέλτα dirac.

(2) **Πεπερασμένα στοιχεία.** Είναι σύνηθες σε αυτή την τεχνική να χρησιμοποιούνται ίδιες συναρτήσεις για τις  $u$ ,  $w$  ώστε να προκύπτουν συμμετρικοί πίνακες κατά την επίλυση.

(3) **Συνοριακά στοιχεία.** Τα συνοριακά στοιχεία βασίζονται γενικά στην αντίστροφη σχέση. Ως συνάρτηση βάρους  $w$  χρησιμοποιούν ένα σύνολο συναρτήσεων που απαλείφει τα ολοκληρώματα στον εσωτερικό χώρο και καθιστά το πρόβλημα σε οριακών συνθηκών μόνο. Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να είναι μοναδιαίες από την εφαρμογή δέλτα  $\delta$  σε συγκεκριμένα σημεία είτε κανονικές όπως στην περίπτωση αυτών που προκύπτουν από την επίλυση της ομογενούς εξίσωσης.

Άλλες αριθμητικές τεχνικές όπως οι μέθοδοι Galerkin και Trefftz μπορούν να συμπεριληφθούν εύκολα στο διάγραμμα της εικόνας 8. Επιπλέον τεχνικές όπως μικτές, υβριδικές και τεχνικές διατήρησης ενέργειας μπορούν να κατηγοριοποιηθούν επίσης όπως παραπάνω.



Εικόνα 8 Κατηγοριοποίηση αριθμητικών μεθόδων ως προς το είδος των συναρτήσεων  $u$  και  $w$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολύ συχνά, προβλήματα ροής δυναμικού μεταχειρίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας διαφορικές εξισώσεις. Η ύπαρξη λύσεων σε αυτές τις εξισώσεις αποδείχθηκε πρώτα από τον Fredholm. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου και δεύτερου είδους προκύπτουν από τη μοντελοποίηση αρμονικών συναρτήσεων ως δυναμικά μονού και διπλού στρώματος αντίστοιχα. Οποιαδήποτε αρμονική συνάρτηση μπορεί να αντικατασταθεί από μία κατανομή δυναμικού και, αντίστροφα, οποιοδήποτε δυναμικό αποτελεί αρμονική συνάρτηση [13, 14]. Έτσι, κατά τη διατύπωση προβλημάτων οριακών τιμών της θεωρίας δυναμικού, είναι αποδοτική η αντικατάσταση της αρμονικής συνάρτησης από ένα μονού ή διπλού στρώματος δυναμικό που παράγεται από μία συνεχή κατανομή πηγών στο όριο του συστήματος, με την προϋπόθεση αυτά τα δυναμικά να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες που αφορούν τη συνάρτηση που προσεγγίζεται. Αυτή η διαδικασία οδηγεί στο σχηματισμό ολοκληρωτικών εξισώσεων οι οποίες καθορίζουν τις τιμές των πυκνοτήτων των πηγών. Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να διακριτοποιηθούν και να επιλυθούν αριθμητικά και οι λύσεις στα εσωτερικά σημεία μπορούν να υπολογιστούν μετέπειτα από τα οριακά δεδομένα μέσω αριθμητικής παρεμβολής.

Ένα πρώτο μειονέκτημα των δυναμικών μονού και διπλού στρώματος είναι η εισαγωγή πυκνοτήτων πηγών οι οποίες συνήθως δεν έχουν καμία φυσική σχέση με το πρόβλημα. Αυτό μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας την άμεση διατύπωση της μεθόδου οριακών στοιχείων, όπου οι τιμές της συνάρτησης και της κάθετης παραγώγου της στο όριο, παίζουν το ρόλο των συναρτήσεων πηγής στην παραγωγή της συνάρτησης  $u$  σε όλο το χώρο του συστήματος.

Ωστόσο πλεονέκτημα της άμεσης διατύπωσης, ιδιαίτερα βολικό στο παρόν πρόβλημα μικροφυσαλίδων, αποτελεί η έλλειψη του περιορισμού για την οριακή επιφάνεια να είναι Liapunov (ομαλή). Στην ουσία μπορεί να εφαρμοστεί στις πιο γενικές Kellogg επιφάνειες.

Προβλήματα ροής δυναμικού που περιέχουν κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας υπόκεινται επίσης σε ολοκληρωτική διατύπωση, με πρόσθετη δυσκολία τον ορισμό οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια.

Γενικά σε ολοκληρωτικούς υπολογισμούς, το δυναμικό και όλες οι άλλες ποσότητες που περιγράφουν τη ροή στο σύνολο του όγκου μπορούν να δοθούν σε όρους των αντίστοιχων οριακών τους τιμών. Έτσι, η διακριτοποίηση στο εσωτερικό του συστήματος αποφεύγεται και το πρόβλημα μειώνεται κατά μία διάσταση. Αυτή

η σημαντική ιδιότητα μαζί με τη δυνατότητα των ολοκληρωτικών ορισμών να ικανοποιούν συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, μέσω της χρήσης κατάλληλων δυναμικών μονού και διπλού στρώματος, συνιστούν ένα μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με συμβατικές αριθμητικές τεχνικές όπως οι πεπερασμένες διαφορές και τα πεπερασμένα στοιχεία.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη διαμόρφωση της ταχύτητας της επιφάνειας μικροφουσαλίδων και την εύρεση της συχνότητας ταλάντωσής τους που αποτελεί πρόβλημα σταθερής ροής δυναμικού. Ως προβλήματα σταθερού δυναμικού θεωρούμε αυτά που περιγράφονται από την εξίσωση Laplace (ή Poisson). Όσον αφορά στα γραμμικά προβλήματα όπως το παρόν, μπορούν να διατυπωθούν μέσω της εφαρμογής της τρίτης ταυτότητας Green [13], που αναπαριστά μία αρμονική συνάρτηση ως την υπέρθεση ενός δυναμικού μονού στρώματος με ένα διπλό στρώμα. Λαμβάνοντας το πεδιακό σημείο πάνω στο όριο προκύπτει μία ολοκληρωτική εξίσωση που συσχετίζει μόνο οριακές τιμές και κάθετες παραγώγους της αρμονικής συνάρτησης. Σημειώνεται ότι το πρόβλημα δυναμικού της μικροφουσαλίδας χαρακτηρίζεται από αξονική συμμετρία, γεγονός που θα ληφθεί υπόψιν για την απλούστευση των υπολογισμών.

## 2.2 Επίλυση του γενικού προβλήματος

Όπως έχει αναφερθεί, ασχολούμαστε με τη γραμμική δισδιάστατη και τρισδιάστατη ροή δυναμικού σταθερής κατάστασης. Οι διέπουσες μερικές διαφορικές εξισώσεις τέτοιων προβλημάτων είναι ελλειπτικού τύπου (Εξίσωση Laplace ή Poisson) και σχετίζονται με τα απλούστερα μαθηματικά μοντέλα υδραυλικής ροής και ροής θερμότητας, ηλεκτρισμού, κ.α. Καθεμία από αυτές τις διαφορικές εξισώσεις πρέπει να ικανοποιείται από μία συνάρτηση δυναμικού  $\phi$  (ηλεκτρικό ή υδραυλικό δυναμικό ή δυναμικό θερμοκρασίας), η χωρική βαθμίδα της οποίας σχετίζεται μέσω μίας παραμέτρου αγωγής ή διαπερατότητας γραμμικά με μία ροή (πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, ταχύτητα ροής ρευστού ή ροή θερμότητας αντίστοιχα).

Η διατύπωση λύσεων σε προβλήματα της θεωρίας δυναμικού σε όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων εμφανίζεται σε παλαιότερα κείμενα, αλλά μόλις προσφάτως παρουσιάστηκε μία μετατροπή αυτής της προσέγγισης σε μία γενική διαδικασία αριθμητικής επίλυσης.

Το γενικό πρόβλημα το οποίο καλούμαστε να λύσουμε μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως: Μία ομογενής περιοχή ( $V$ ) με ισοτροπική διαπερατότητα ( $k$ ) που δεσμεύεται από μία επιφάνεια ( $S$ ), στο ένα τμήμα της οποίας το δυναμικό στο όριο

δίνεται και η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας (ροή) είναι  $q$  στο υπόλοιπο  $S$ . Πηγές, ή καταβόθρες, εντάσεως  $\psi$  ανά μοναδιαία επιφάνεια ή όγκο, μπορούν επίσης να υπάρχουν στο εσωτερικό του  $V$  (εικόνα 9).

Καλούμαστε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα της ροής και το δυναμικό που υπάρχει σε κάθε σημείο εντός του  $V$  ή πάνω στο  $S$ . Αναφερόμενοι σε ένα ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x_i, i = 1, 2$  στις δύο διαστάσεις και  $i = 1, 2, 3$  στις τρεις διαστάσεις) η εξίσωση συνέχειας για τη ροή σε κάθε σημείο, εκτός από τις πηγές και τις καταβόθρες, είναι η εξίσωση Laplace η οποία πρέπει να ικανοποιείται από το δυναμικό  $\varphi(x)$  σε κάθε σημείο  $(x_i)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (6)$$

Οι αντίστοιχοι συντελεστές του διανύσματος της ταχύτητας της ροής  $u_i(x)$  δίνονται ανά περίπτωση από το νόμο Darcy, το νόμο Ohm, το νόμο Fourier, κτλ., ως

$$u_i(x) = -k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \quad (7)$$

Εάν όλα τα οριακά δυναμικά δίνονταν γύρω από το  $S$  (πρόβλημα Dirichlet που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1) θα είχαμε:

$$\varphi(x_0) = g(x_0) \quad x_0 \text{ επάνω στο } S \quad (8)$$

Ενώ εάν όλες οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας δίνονταν πάνω στο όριο  $S$  (πρόβλημα Neumann που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1), θα είχαμε:

$$q(x_0) = h(x_0) \quad x_0 \text{ επάνω στο } S \quad (9)$$

όπου

$$q(x_0) = u_1 n_1 + u_2 n_2 = u_i(x_0) n_i(x_0)$$

με  $n_i(x_0)$  συμβολίζονται οι συντελεστές του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος προς τα έξω στο σημείο  $x_0$ . Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 1, το πιο γενικό πρόβλημα μικτών οριακών συνθηκών θα έχει είτε τα  $\varphi, q$  ορισμένα σε τμήματα του  $S$ , ή μία συνθήκη που τα συσχετίζει.

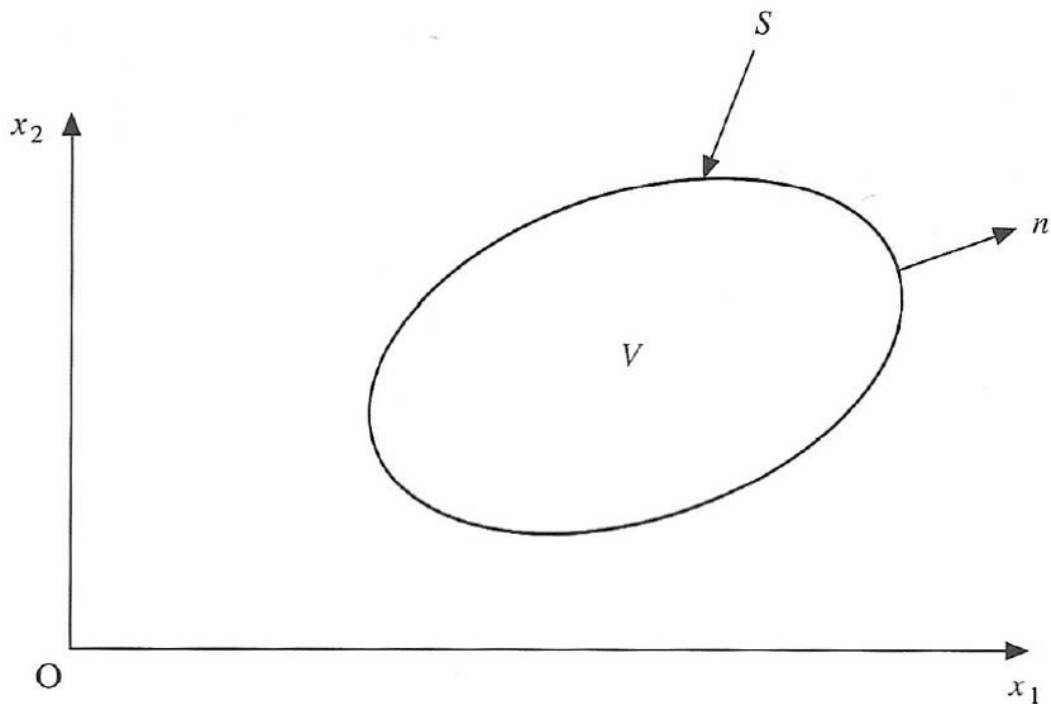
Προτού αναλογιστούμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης (6) θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλη η ακόλουθη ανάλυση είναι ευθέως εφαρμόσιμη σε ομογενείς ανισοτροπικές περιοχές για τις οποίες η ποσότητα  $k$  θα είναι ένας τανυστής δευτέρας τάξης  $k_{ij}$ . Η γενίκευση της εξίσωσης ροής γίνεται:

$$u_i(x) = -k_{ij} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \quad (10)$$

η οποία οδηγεί στην εξίσωση συνέχειας, μέσω  $\partial u_i(x) / \partial x_i = 0$

$$k_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (11)$$

για χωρικά σταθερό  $k_{ij}$ .



Εικόνα 9 Ένας όγκος ελέγχου  $V$  που περικλείεται από μία επιφάνεια  $S$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (6), η οποία αποτελεί βασικό μέρος της μετέπειτα ανάλυσης, συσχετίζει το δυναμικό  $\varphi(x)$  που παράγεται σε ένα σημείο πεδίου  $x_i$  από μία μοναδιαία πηγή  $e(\xi)$  που βρίσκεται στο σημείο  $\xi$ . Παρόλο που η αρχή του συστήματος συντεταγμένων  $\xi_i$  είναι όμοια με αυτή των  $x_i$  είναι απολύτως



αναγκαίο να διατηρηθεί το καθένα για συγκεκριμένο σκοπό. Έτσι, η κλασσική μοναδιαία λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$\varphi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \xi)e(\xi) \quad (12)$$

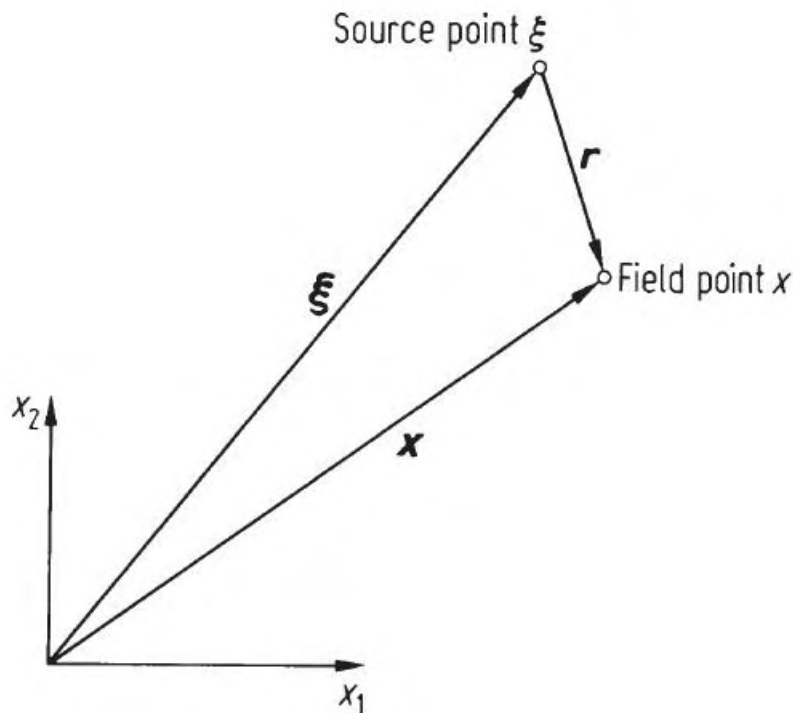
όπου

$$G(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi k} \ln r \quad \text{και} \quad G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{r} \quad (13)$$

για δισ- και τρισδιάστατα προβλήματα αντίστοιχα με το  $r$  να είναι η απόσταση μεταξύ των  $\mathbf{x}$  και  $\xi$ . Οπότε στις δύο διαστάσεις, για παράδειγμα, έχουμε:

$$r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 = (x - \xi)_i(x - \xi)_i = y_i y_i \quad (14)$$

αν  $y_i = (x - \xi)_i$ . Το  $G(\mathbf{x}, \xi)$  είναι μία συνάρτηση «δύο σημείων» που περιέχει τις συντεταγμένες  $(\mathbf{x}, \xi)$  δύο σημείων και εφόσον ορισμένες φορές θα παραγωγίσουμε, ή θα ολοκληρώσουμε, ως προς  $\mathbf{x}$  και άλλες ως προς  $\xi$ , μια διαφοροποίηση θα πρέπει να διατηρηθεί μεταξύ τους.



Εικόνα 10 Σύμβαση για τα σημεία πηγής (source points) και τα σημεία πεδίου (field points)

Μία απλή μοναδιαία πηγή που βρίσκεται σε ένα σημείο πηγής  $\xi$  στο χώρο (εικόνα 10), παράγει σε ένα σημείο πεδίου  $\mathbf{x}$  το Νευτώνιο δυναμικό

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi r(\xi, x)} \quad (15)$$

Αυτό το δυναμικό είναι μία συνεχής συνάρτηση του  $x$ , παραγωγίσιμη σε όλους τους βαθμούς, παντού εκτός από το σημείο πηγής  $\xi$ .

Ομοίως, μία διακριτή κατανομή απλών πηγών με εντάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ , που βρίσκονται στα σημεία  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , αντίστοιχα, παράγει το Νευτώνιο δυναμικό

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N \sigma(\xi_n) \frac{1}{4\pi r(\xi_n, x)} \quad (16)$$

στο σημείο  $x$ . Ξανά, το δυναμικό είναι συνεχής συνάρτηση του  $x$ , μαζί με τις παραγώγους της όλων των βαθμών, παντού εκτός από όταν το  $x$  συμπίπτει με κάποιο από τα σημεία πηγής  $\xi_n$ . Το αντίστοιχο του Νευτώνιου δυναμικού για τις δύο διαστάσεις είναι το λογαριθμικό δυναμικό

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\xi, x)} \quad (17)$$

Το λογαριθμικό δυναμικό μπορεί να προκύψει είτε αρχίζοντας από δισδιάστατα δυναμικά πεδία που επενεργούν σε μία γραμμική πηγή ή ολοκληρώνοντας το Νευτώνιο δυναμικό για μία γραμμική πηγή στο  $\xi$ .

Παραγωγίζοντας τη σχέση (12) ως προς  $x_i$  προκύπτουν οι συντελεστές του διανύσματος ροής δυναμικού, το οποίο αποτελεί την ταχύτητα,

$$u_i(x) = -k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_i}{r^2} e(\xi) \quad (18)$$

( =  $\frac{1}{4\pi} \frac{y_i}{r^3} e(\xi)$  στις τρεις διαστάσεις )

Εάν με  $n_i(x)$  συμβολίσουμε τους συντελεστές ενός μοναδιαίου διανύσματος στο  $x_i$  που ορίζει την κάθετη κατεύθυνση προς τα έξω σε ένα στοιχείο ως προς τον όγκο ελέγχου, η ταχύτητα  $q(x)$  κατά τη διεύθυνση του  $n$  θα είναι:

$$q(x) = u_i n_i = \frac{y_i n_i}{2\pi r^2} e(\xi) = \frac{y_1 n_1 + y_2 n_2}{2\pi r^2} e(\xi) = F(x, \xi) e(\xi) \quad (19)$$

όπου

$$F(x, \xi) = \frac{(x - \xi)_i n_i(x)}{2\pi r^2} = \frac{y_i n_i(x)}{2\pi r^2} \quad (20)$$

( =  $\frac{y_i n_i}{4\pi r^3}$  στις τρεις διαστάσεις )

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που το  $G(x, \xi)$  είναι συμμετρικό στους όρους του  $(x, \xi)$ , το  $F(x, \xi)$  είναι αντισυμμετρικό και αλλάζει πρόσημο με την εναλλαγή των  $x, \xi$ . Επίσης, καθώς  $x_i \rightarrow \xi_i$  (δηλαδή, καθώς τα σημεία πεδίου και πηγής συμπίπτουν) και οι δύο ιδιόμορφες εκφράσεις απειρίζονται. Η πρώτη έκφραση, που περιλαμβάνει το  $\ln r$  (ή το  $1/r$  στις τρεις διαστάσεις), είναι μόνο «ασθενώς απροσδιόριστο» όταν ολοκληρώνεται κατά μήκος μίας γραμμής (ή επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις) και θα δειχθεί ότι η απροσδιοριστία άρεται όταν μία τέτοια συνάρτηση ολοκληρώνεται κατά μήκος της με το συνηθισμένο τρόπο. Ωστόσο, η δεύτερη έκφραση,  $F(x, \xi)$ , που περιλαμβάνει μία απροσδιοριστία της τάξης  $1/r$  (ή  $1/r^2$  στις τρεις διαστάσεις) είναι «ισχυρώς απροσδιόριστο» όταν ολοκληρώνεται κατά μήκος μίας γραμμής (ή επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις) μέσω του ιδιόμορφου σημείου και δεν μπορεί να ολοκληρωθεί επιτυχώς κατά τον ίδιο τρόπο. Τέτοιες ιδιόμορφες συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο σε όλες τις μεθόδους συνοριακών στοιχείων και, όπως θα δειχθεί αργότερα, διασφαλίζουν τη διαγώνια κυριαρχία των προκυπτουσών μητρικών εξισώσεων.

### 2.3 Ιδιόμορφα Ολοκληρώματα

Για να δείξουμε τον τρόπο άρσης της απροσδιοριστίας θα ξεκινήσουμε από τη βασική διέπουσα εξίσωση για την περίπτωση που έχουμε μία καθορισμένη κατανομή πηγών στην περιοχή  $V$ . Αυτή προκύπτει εφαρμόζοντας τον λαπλασιανό τελεστή στην εξίσωση (1) και θέτοντας όπου  $b = \psi(x)$  την κατανομή των πηγών,

$$k \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_i} = -\psi(x) \quad (21)$$

Η  $G(x, \xi)$  είναι τώρα μία συνάρτηση δύο σημείων ορισμένη έτσι ώστε να είναι η λύση της εξίσωσης

$$k \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_i} + \delta(x, \xi) = 0 \quad (22)$$

Εδώ η  $\delta(\mathbf{x}, \xi)$  είναι η συνάρτηση δέλτα Dirac η οποία είναι μηδέν εκτός εάν όλοι οι αντιστοιχοί όροι  $x_i, \xi_i$  είναι ίσοι. Όταν  $x_i \equiv \xi_i$ , η  $\delta(\mathbf{x}, \xi)$  έχει την ιδιότητα να επενεργεί κρουστικά επί καλής συναρτήσεως, για παράδειγμα,

$$\int_V \varphi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}, \xi)dV(\mathbf{x}) = \varphi(\xi) \quad \text{με το } \xi \text{ εντός του } V \quad (23)$$

δηλαδή όταν το αριστερό γινόμενο αυτής της εξίσωσης ολοκληρώνεται στο  $V$ , η τιμή του  $\varphi(\xi)$  στο συγκεκριμένο σημείο  $x_i = \xi_i$  επιστρέφει ως το μόνο μη μηδενικό αποτέλεσμα. Στην εξίσωση (22) η συνάρτηση  $G$  πρέπει να είναι η μοναδική ιδιόμορφη λύση για το δυναμικό που παράγεται στο  $x_i$  από μία μοναδιαία πηγή που εφαρμόζεται στο σημείο  $\xi_i$  σε ένα άπειρο σώμα που δίνεται από την (12). Έτσι επιλύοντας την (22) με την παραπάνω απαίτηση προκύπτουν οι παρακάτω ιδιόμορφες λύσεις για δύο και τρεις διαστάσεις (στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η περίπτωση  $k=1$ ):

$$G_{2d} = \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad G_{3d} = \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{r}, \quad (24)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (21) με  $G$  και ολοκληρώνουμε κατά μέλη δύο φορές στον όγκο  $V$ . Αυτό θα οδηγήσει σε μία εξίσωση που εκφράζει το  $\varphi(\xi)$  σε όρους των οριακών τιμών στο  $S$  και παραγώγων του  $G$ . Έτσι, έχουμε:

$$\int_V \left( G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \right) dV = \int_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) n_i dS + \int_V \left( \varphi \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} \right) dV \quad (25)$$

όπου από τις εξισώσεις (22) και (23) ο τελευταίος όρος μειώνεται σε  $-\varphi(\xi)/k$ .

Έτσι αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (21), έχουμε:

$$\varphi(\xi) = k \int_S \left[ G(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_i} \right] n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$

$$+ \int_V G(\mathbf{x}, \xi) \psi(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (26)$$

Εάν όπως προωτέρα ορίσουμε

$$F(x, \xi) = -k \left[ \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x_i} \right] n_i(x) \quad (27)$$

και ανακαλέσουμε ότι η ροή της ποσότητας στην  $\varphi$  κατεύθυνση  $n_i$  είναι

$$q(x) = -k \left[ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right] n_i(x) \quad (28)$$

τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά ως

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \int_S [\varphi(x)F(x, \xi) - q(x)G(x, \xi)] dS(x) \\ + \int_V \psi(x)G(x, \xi) dV(x) \end{aligned} \quad (29)$$

όπου  $G(x, \xi)$  και  $F(x, \xi)$  αναπαριστούν τον ασθενώς και ισχυρά ιδιόμορφο πυρήνα της εξίσωσης (22). Η τελευταία σχέση (29) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το δυναμικό  $\varphi$  σε κάθε σημείο  $\xi$  γνωρίζοντας το δυναμικό και τη ροή του σε όλα τα σημεία στο όριο  $S$  και την καθορισμένη εσωτερική κατανομή πηγών  $\psi(x)$ .

Αν φανταστούμε τώρα το σημείο  $\xi_i$  να προσεγγίζει το όριο  $S$  από το εσωτερικό του  $V$ , τότε η εξίσωση (29) έρχεται στην οριακή τιμή, καθώς  $\xi \rightarrow \xi_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_0) = \int_S \varphi(x)F(x, \xi_0) dS(x) - \int_S q(x)G(x, \xi_0) dS(x) \\ + \int_V \psi(x)G(x, \xi_0) dV(x) \end{aligned} \quad (30)$$

Όλα τα ολοκληρώματα περιέχουν απροσδιοριστίες καθώς τα  $x$  και  $\xi_0$  συμπίπτουν, όμως θα δειχθεί μετέπειτα ότι αυτά που αφορούν το  $G$  χαρακτηρίζονται από ασθενή ιδιομορφία και μπορούν να υπολογιστούν χωρίς δυσκολία είτε αριθμητικά ή αναλυτικά. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα  $F$  είναι ισχυρά ιδιόμορφο και περιέχει μία ισχυρή απροσδιοριστία της τάξεως  $1/r$  στις δύο διαστάσεις και  $1/r^2$  στις τρεις. Συνεπώς ο εν λόγω όρος πρέπει να υπολογισθεί ως ολοκλήρωμα Cauchy.

Παράλληλα ο όρος στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης (30) προκύπτει από το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (22). Όμως όταν το πεδιακό σημείο πλησιάζει το όριο η τιμή του ολοκληρώματος δεν είναι  $\varphi(\xi_0)$  λόγω του ότι το ιδιόμορφο σημείο βρίσκεται στο σύνορο. Για τον υπολογισμό της συνεισφοράς αυτού του όρου γράφουμε:

$$\begin{aligned}
& \int_V \varphi(x) \delta(x, \xi_0) dV(x) = -k \int_V \varphi(x) \nabla^2 G(x, \xi_0) dV(x) = \\
& = -k \int_V [\varphi(x) - \varphi(\xi_0)] \nabla^2 G(x, \xi_0) dV(x) - k\varphi(\xi_0) \int_V \nabla^2 G(x, \xi_0) dV(x) \\
& = 0 - k\varphi(\xi_0) \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(x, \xi_0) dS(x) \Rightarrow \\
& \int_V \varphi(x) \delta(x, \xi_0) dV(x) = \varphi(\xi_0) \int_S F(x, \xi_0) dS(x)
\end{aligned} \tag{31}$$

Παρακάτω θα δειχθεί ότι

$$\int_S F(x, \xi_0) dS(x) = \frac{1}{2} \tag{32}$$

για ένα ομαλό επιφανειακό σημείο  $\xi_0$  που ανήκει στην επιφάνεια  $S$ . Πρέπει δε να σημειωθεί ότι προϋπόθεση για την ισχύ της παραπάνω σχέσης είναι η συνάρτηση δυναμικού  $\varphi(x)$  να ικανοποιεί κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας κατά Holder (Brebbia et al.) ώστε για επιφανειακό σημείο  $\xi_0$  να ισχύει ότι

$$k \int_V [\varphi(x) - \varphi(\xi_0)] \nabla^2 G(x, \xi_0) dV(x) = 0$$

Ο ακόλουθος απλός υπολογισμός του «ελεύθερου όρου»  $\frac{1}{2}$  στην εξίσωση (32) μπορεί να βοηθήσει τον αναγνώστη να κατανοήσει γιατί είναι απαραίτητο να γραφεί το ολοκλήρωμα που περιέχει το  $F$  κατ' αυτόν τον τρόπο. Το σχήμα 11 δείχνει ένα ομαλό τμήμα του ορίου  $S$  μίας διδιάστατης περιοχής κοντά στο  $\xi_0$  προσαναυξημένο κατά μία μικρή ημικυκλική περιοχή  $S_\varepsilon$ , ακτίνας  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ώστε να περικλείει το  $\xi_0$ , το οποίο βρίσκεται ουσιαστικά πάνω στο όριο. Θα υπολογίσουμε το ιδιόμορφο τμήμα του  $\oint_S \varphi(\xi_0) F(x, \xi_0) dS(x)$  που προκύπτει όταν  $\xi \rightarrow \xi_0$  στο  $S$  από το εσωτερικό του  $V$ . Έτσι, έχουμε:

$$F(x, \xi_0) = \frac{(x - \xi_0)_i}{2\pi r^2} n_i(x) = \frac{\bar{x}_i n_i}{2\pi r^2} = \frac{\bar{x}_i (\bar{x}_i / r)}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi \varepsilon}, \quad \bar{x}_i = x - \xi_0 \tag{33}$$

και  $dS(x) = \varepsilon d\theta$ , οπότε

$$\int_{S_\varepsilon} \varphi(\xi_0) F(x, \xi_0) dS(x) = \varphi(\xi_0) \int_0^\pi \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = \frac{1}{2} \varphi(\xi_0) \quad (34)$$

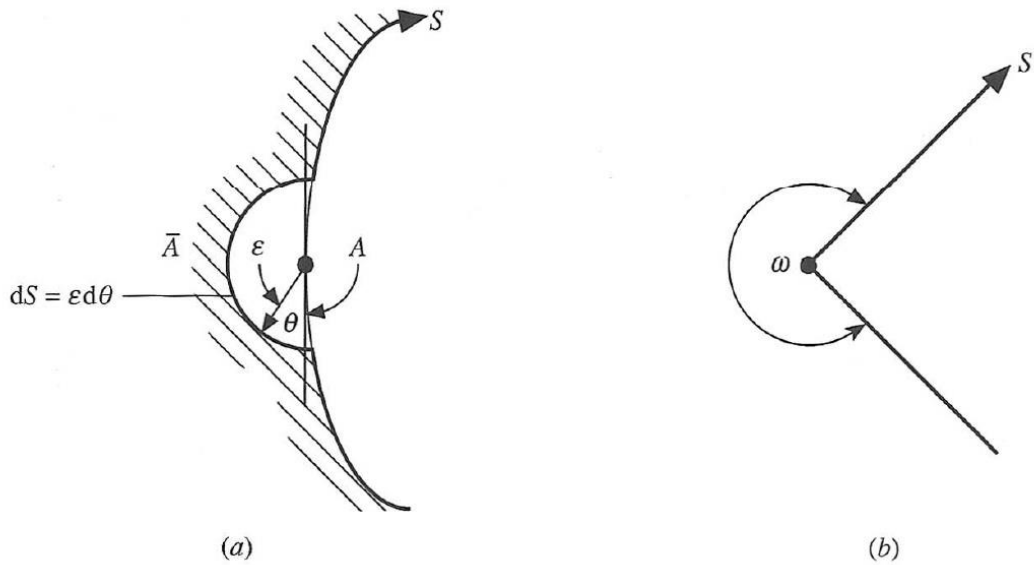
Η εξίσωση (31) οπότε λαμβάνει υπόψη αυτόν τον «ελεύθερο όρο» ξεχωριστά. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι αν το  $S$  δεν έχει μία μοναδική επαπτόμενη στο  $\xi_0$ , τότε τα όρια ολοκλήρωσης του «ελεύθερου όρου» δεν θα είναι από 0 έως  $\pi$  και ο συντελεστής του  $\varphi(\xi_0)$  δεν θα είναι  $\frac{1}{2}$ . Αυτή η κατάσταση μπορεί να προκύψει σε γωνίες ή ενώσεις γραμμικώς προσεγγισμένων συνοριακών στοιχείων. Για παράδειγμα, στην εικόνα 11 τα όρια ολοκλήρωσης είναι τώρα από 0 έως  $\omega$  και ο «ελεύθερος όρος» είναι  $(\omega/2\pi) \varphi(\xi_0)$ . Σε προβλήματα ροής δυναμικού στις τρεις διαστάσεις, ο «ελεύθερος όρος» μπορεί να υπολογισθεί κατά παρόμοιο τρόπο θεωρώντας ημισφαιρική περιοχή ακτίνας  $\varepsilon$  που να περικλείει το  $\xi_0$ . Τότε θα έχουμε  $G(x, \xi) = 1/(4\pi kr)$  και άρα  $F(x, \xi) = y_i n_i(x)/4\pi r^3$  έτσι ώστε, καθώς  $\xi \rightarrow \xi_0$ ,

$$F(x, \xi_0) = \frac{x_i n_i}{4\pi\varepsilon^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \quad (35)$$

και τώρα  $dS = 2\pi\varepsilon^2 \cos \theta d\theta$ , οπότε

$$\int_{\Delta S} \varphi(\xi_0) F(x, \xi_0) dS(x) = \varphi(\xi_0) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \varphi(\xi_0) \quad (36)$$

Και πάλι. Για την ισοδύναμη τρισδιάστατη περίπτωση που αντιστοιχεί στην εικόνα 11 ο «ελεύθερος όρος» ισούται με  $(\omega/4\pi) \varphi(\xi_0)$ , όπου  $\omega$  είναι τώρα η στερεά γωνία στο σημείο  $\xi_0$ .



Εικόνα 11 Περιοχή υπολογισμού γύρω από μία γωνία

Η αντικατάσταση της σχέσης (31) στην (30) οδηγεί στην οριακή ολοκληρωτική εξίσωση στη μορφή που θέλουμε:

$$\begin{aligned}
 c\varphi(\xi_0) = & \int_S \varphi(\mathbf{x})F(\mathbf{x}, \xi_0)dS(\mathbf{x}) - \int_S q(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \xi_0)dS(\mathbf{x}) \\
 & + \int_V \psi(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \xi_0)dV(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{37}$$

όπου  $c = \frac{1}{2}$  για ένα ομαλό σημείο στην επιφάνεια.

Κατά κανόνα η ταυτότητα αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις καθορισμένες οριακές τιμές και πηγές για να υπολογίσουμε τα εναπομείναντα άγνωστα οριακά δεδομένα. Αφού όλα τα οριακά δεδομένα γίνουν γνωστά (δηλαδή αμφότερα τα  $\varphi$ ,  $q$  γύρω από το  $S$ ) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση (29) για τον υπολογισμό του  $\varphi(\xi)$  σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του  $V$ . Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό σκέλος της παραπάνω σχέσης το οποίο περιέχει τον ισχυρώς ιδιόμορφο πυρήνα  $F$  και η ολοκλήρωσή του θα πρέπει να γίνει κατά Cauchy Principal Value (Banerjee & Butterfield [15], Brebbia Wrobel & Telles [16]). Στο πλαίσιο αυτό θα γίνει χρήση της σχέσης (34), όπως περιγράφεται παρακάτω στην ενότητα 2.5.



## 2.4 Διατύπωση του προβλήματος

Έχει δειχθεί ότι ιδιαίτερος απαιτητικά προβλήματα είναι εκείνα που σχετίζονται με θεωρητικές προβλέψεις των φαινομένων που παρατηρούνται σε ταλαντούμενες απλές ή σύνθετες σταγόνες. Πειραματικά δεδομένα έχουν εξαχθεί από διάφορους ερευνητές [17-20] που τοποθέτησαν υγρές σταγόνες σε ρευστά χωρίς άνοση ή σε περιβάλλον μειωμένης βαρύτητας στο διάστημα. Έτσι, οι συχνότητες των γραμμικών ταλαντώσεων που προβλέφθηκαν στα έργα [21,22] έχουν επαληθευθεί και παρατηρήθηκαν να μειώνονται με το τετράγωνο του πλάτους ταλάντωσης. Αυτό το τελευταίο φαινόμενο επεξηγήθηκε από τους Τσαμόπουλος και Brown [22,23] στην ασυμπτωτική τους ανάλυση που ισχύει για ελαφρώς μη γραμμικές ταλαντώσεις.

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η αστρόβιλη, ατριβής και ασυμπίεστη κίνηση μίας φυσαλίδας αερίου βυθισμένη σε κυλινδρικό αγωγό σε περιβάλλον μηδενικής βαρύτητας (εικόνα 12). Η σταγόνα περιβάλλεται από ένα αραιό ρευστό που επικοινωνεί στα άκρα του με την ατμόσφαιρα. Άρα η κίνηση της είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον ρευστό και η ατριβής υπόθεση για το περιβάλλον ρευστό είναι φυσικά και μαθηματικά δικαιολογημένη όσο ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μεγάλος

$$Re = \frac{\rho\omega R_0^2}{\mu} \gg 1, \quad \mu < \frac{\mu_s}{R_0}$$

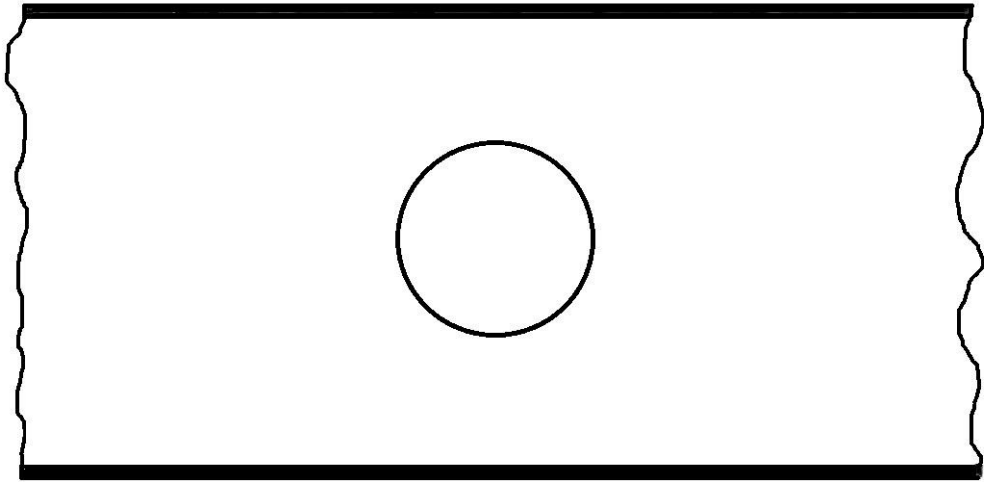
όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $\mu$ ,  $\mu_s$  το ιξώδες του περιβάλλοντος ρευστού και του κελύφους αντίστοιχα,  $\omega$  η εξωτερικά επιβαλλόμενη συχνότητα διαταραχής και  $R_0$  η ακτίνα ισορροπίας της μικροφυσαλίδας που βρίσκεται μέσα στον αγωγό. Εάν το μήκος του αγωγού ήταν άπειρο, τότε αλλαγές του όγκου της φυσαλίδας θα ήταν πιθανές μόνο μέσα σε ένα συμπιεστό ρευστό. Όμως επειδή εδώ το μήκος του αγωγού είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος του ήχου στο ρευστό, είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε την ασυμπίεστη υπόθεση έτσι ώστε το δυναμικό ταχύτητας να ικανοποιεί τη λαπλασιανή.

Με  $\rho$  συμβολίζουμε την πυκνότητα της σταγόνας και με  $\sigma$  την επιφανειακή τάση. Η επιφάνεια της σταγόνας περιγράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από την απόσταση από το κέντρο μάζας της,  $\tilde{r} = R_0 \mathcal{F}(\theta)$ , όπου  $R_0$  είναι η ακτίνα ισορροπίας της μικροφυσαλίδας και  $\mathcal{F}(\theta, t)$  η αδιάστατη ακτινική θέση της διεπιφάνειάς της με το περιβάλλον ρευστό σαν συνάρτηση της πολικής γωνίας  $\theta$ . Η επιφανειακή τάση  $\sigma$  χρησιμοποιείται για την αδιαστατοποίηση της πίεσης μέσα στη σταγόνα, ως  $P = \tilde{P} / (2\sigma / R_0)$ . Εφόσον λαμβάνονται υπόψιν μόνο

αξονοσυμμετρικές διαταραχές, το όριο μειώνεται σε μία καμπύλη, ονομαστικά, την παράγουσα καμπύλη της επιφάνειας της σταγόνας. Το κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω  $n$  δίδεται ως προς τα μοναδιαία διανύσματα σε σφαιρικές συντεταγμένες,  $e_r, e_\theta$ , όπως παρακάτω:

$$n = \frac{(\mathcal{F}e_r - \mathcal{F}_\theta e_\theta)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{F}^2 + \mathcal{F}_\theta^2} = n_r e_r + n_\theta e_\theta, \quad (38)$$

όπου  $\mathcal{F}_\theta = \partial \mathcal{F} / \partial \theta$ .



Εικόνα 12 Διάταξη της φυσαλίδας μέσα στον αγωγό

Οι αδιάστατες εξισώσεις και οριακές συνθήκες που περιγράφουν την δυναμική απόκριση της μικροφυσαλίδας είναι:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (0 \leq r \leq \mathcal{F}(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (39)$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2 + P = P_\infty \quad (0 \leq r \leq \mathcal{F}(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left( 1 + \frac{\mathcal{F}_\theta^2}{\mathcal{F}^2} \right)^{1/2} \quad (r = \mathcal{F}(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (41)$$

$$P_G - P_L = 2K_m \sigma + \Delta F_N \quad (r = \mathcal{F}(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (42\alpha, \beta)$$

$$\Delta F_T = 0$$

$$P = P_\infty, u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \pm \infty \quad (43)$$

$$u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad r = R_t \quad (44)$$

Η εξίσωση Laplace (39) και η εξίσωση Bernoulli (40) περιγράφουν την πίεση και την ταχύτητα παντού μέσα στον αγωγό και γύρω από τη φυσαλίδα. Η κινηματική εξίσωση (41) εφαρμόζεται στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας και συσχετίζει την ταχύτητα με το σχήμα της επιφάνειας. Το ισοζύγιο εφαπτομενικών και κάθετων τάσεων (42α,β) στην κάθετη και εφαπτομενική διεύθυνση εξισώνει τη διαφορά πίεσης μέσα και έξω από τη φυσαλίδα με την επιφανειακή τάση και τις παραμένουσες ιξωδοελαστικές τάσεις που προκαλούνται από το εξωτερικό κέλυφος. Εύκολα συμπεραίνεται ότι οι εφαπτομενικές τάσεις μηδενίζονται όταν οι ιξώδεις τάσεις από το υγρό είναι αμελητέες. Η εξίσωση (43) παρουσιάζει την υπόθεση ανεπηρέαστου ρευστού σε άπειρη απόσταση από τη φυσαλίδα και η εξίσωση (44) τη μηδενική διαπερατότητα του τοιχώματος του αγωγού ακτίνας  $R_t = R_0$ . Η αρχική κατάσταση του συστήματος σε συνθήκες ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned} r &= R_0 \\ V &= \vec{V}_0 = 0 \\ P_L &= P_{st} = P_a \\ P_G &= P_a + \frac{2\sigma}{R_0} + T_{ELAS} \end{aligned} \quad (45)$$

δηλαδή η πίεση του αερίου που περικλείει καθορίζεται από την πίεση του περιβάλλοντος ρευστού και την επιφανειακή τάση, λαμβάνοντας ότι οι παραμένουσες ελαστικές τάσεις ( $T_{ELAS}$ ) είναι ίσες με μηδέν. Το ρευστό που καλύπτει τον αγωγό έχει μηδενική αρχική ταχύτητα και πίεση ίση με την ατμοσφαιρική.

Υπό τη σκοπιά της θεωρίας ταλαντώσεων, το σύστημα που υπόκειται σε κάποια διαταραχή θα περιγράφεται από εξισώσεις που προκύπτουν από ταλαντώσεις των ποσοτήτων γύρω από τις παραπάνω τιμές, δηλαδή:

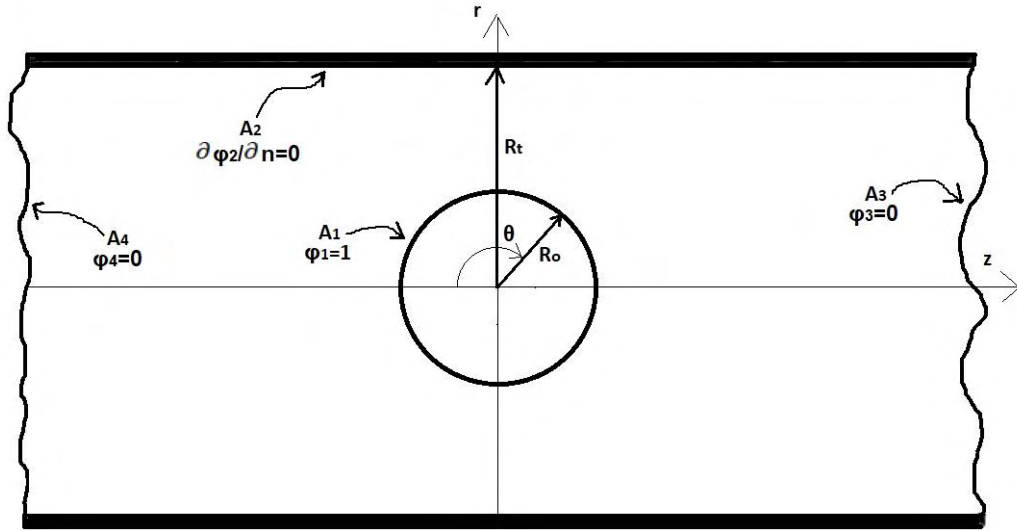
$$\begin{aligned} r &= R_0 + \varepsilon w_1, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon u_1 \\ \vec{V} &= \vec{V}_0 + \varepsilon \vec{V}_1 = \varepsilon \vec{V}\phi \\ P_L &= P_a + \varepsilon P_1 \\ P_G &= \left( P_a + \frac{2\sigma}{R_0} \right) + \varepsilon P_{G,1} \end{aligned} \quad (46)$$

διότι  $\vec{V}_1 = \vec{V}\phi$  και με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν και  $T_{ELAS} = 0$ . Με  $w(\theta_0)$ ,  $u(\theta_0)$  συμβολίζεται η ακτινική και γωνιακή μετατόπιση της επιφάνειας της

φυσαλίδας και  $\varepsilon$  το μέτρο της διαταραχής. Η εξίσωση (41) ξαναγράφεται για τη συνέχεια της κάθετης ταχύτητας στη γραμμική περιοχή και η εξίσωση (42α) ως:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \quad (47)$$

$$P_G^1 - P_L^1 = 2K_m^1 \sigma + \Delta F_N^1 \quad (48)$$



Εικόνα 13 Αρχικές συνθήκες στο όριο του αξονοσυμμετρικού συστήματος. Το σύστημα συντεταγμένων έχει επίσης προστεθεί.

Στη συνέχεια θα καταλήξουμε σε μία σχέση για τη φυσική συχνότητα της φυσαλίδας εργαζόμενοι πάνω στην τελευταία. Για το σκοπό αυτό θα υπολογίσουμε τις χρονικές μεταβολές των όρων της εξίσωσης (48) ξεχωριστά.

Παράλληλα το περικλειόμενο αέριο εκτελεί περίπου ισοθερμοκρασιακές ταλαντώσεις. Ξεκινώντας από την εξίσωση Poisson για την ισοθερμοκρασιακή μεταβολή ιδανικού αερίου, θα τη μεταχειριστούμε μαθηματικώς ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} P_G V^\gamma &= P_0 V_0^\gamma \Rightarrow P_G = P_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma \Rightarrow \frac{\partial P_G}{\partial t} = \left(\frac{\partial P_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t}\right) = \frac{P_0 V_0^\gamma (-\gamma)}{V^{\gamma+1}} \frac{\partial V}{\partial t} = \\ &= P_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma \frac{(-\gamma)}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{P_G (-\gamma)}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial P_G^1}{\partial t} = \frac{P_{G_0} (-\gamma)}{V_0} \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ &= -\frac{\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial w_{1,m=0}}{\partial t} = -\frac{\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial \varphi_{1,m=0}}{\partial r} \Rightarrow \\ &\frac{\partial P_G^1}{\partial t} = \frac{-\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial \varphi_{1,m=0}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \end{aligned} \quad (49)$$

όπου  $\gamma$  η πολυτροπική σταθερά του εσωτερικού αερίου για την οποία ισχύει  $1 \leq \gamma \leq 1,4$ ,  $V$  ο στιγμιαίος αδιάστατος όγκος της μικροφουσαλίδας και  $V_0$  αρχικός όγκος της μικροφουσαλίδας, ο οποίος για σφαίρα είναι:  $V_0 = \frac{4}{3}\pi$  (αδιάστατος). Για αδιαβατική μεταβολή του εσωτερικού αερίου ισχύει  $\gamma = 1.4$ , ενώ για ισόθερμη  $\gamma = 1$ .

Αυτή η συλλογιστική προϋποθέτει ότι ο γραμμικός όρος της συνάρτησης  $(\partial P_G / \partial V)$ , κατά τον υπολογισμό της χρονικής μεταβολής της πίεσης στο εσωτερικό της φουσαλίδας με τον κανόνα της αλυσίδας, εξαρτάται από την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής της ακτινικής μετατόπισης της διεπιφάνειας, ή αλλιώς από τον συντελεστή του μηδενικής τάξης πολυωνύμου Legendre. Αυτή η υπόθεση μπορεί να δικαιολογηθεί ως ακολούθως. Ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής πίεσης με τον όγκο καθορίζεται ουσιαστικά από τις θερμικές διεργασίες μέσα στη φουσαλίδα. Είναι γνωστό ότι, με εξαιρετική ακρίβεια, αυτές μπορούν να υπολογισθούν υποθέτοντας ότι η επιφανειακή θερμοκρασία της φουσαλίδας παραμένει αμετάβλητη, το οποίο διαχωρίζει το θερμικό πρόβλημα από το περιβάλλον ρευστό. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μεταβολές της πίεσης  $P_{G_0}$  που ασκεί το αέριο εντός της φουσαλίδας στην μεμβράνη, γίνονται αισθητές ακαριαία σε όλο τον όγκο του αερίου λόγω της αμελητέας πυκνότητάς του.

Για τον δεύτερο όρο, από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου ρευστού κοντά στη φουσαλίδα και του άλλου στο άπειρο, θα έχουμε για το αρχικά ακίνητο ρευστό:

$$\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + P_L^1 = 0 \quad (50)$$

θεωρώντας αμελητέες μεταβολές της πίεσης πολύ μακριά από την φουσαλίδα. Επιλέξαμε  $|\nabla \varphi|^2 = 0$  καθώς οι υπολογισμοί γίνονται για τη γραμμική περίπτωση με μικρό πλάτος ταλάντωσης και άρα μικρό  $|\nabla \varphi|$ . Ας σημειωθεί ότι στην γραμμική προσέγγιση στην οποία περιοριστήκαμε, η διαταραγμένη τιμή οποιασδήποτε ποσότητας πρώτης τάξεως μπορεί να υπολογιστεί στην αδιατάραχτη επιφάνεια ισορροπίας αντί της κινούμενης. Με παραγωγή ως προς το χρόνο και αφαιρώντας την μονάδα ως δείκτη των γραμμικών όρων και για ευκολία, έχουμε:

$$\frac{\partial P_L}{\partial t} = -\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (51)$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του όρου που περιέχει την καμπυλότητα της επιφανείας  $K_m^1$ ,

$$\begin{aligned} K_m &= K_m^0 + \varepsilon K_m^1 = \frac{1}{R_0} + \varepsilon \frac{(-1)}{2R_0^2} (w_{\theta\theta} + \cot \theta w_\theta + 2w) \Rightarrow \\ 2\sigma K_m^1 &= -\frac{\sigma}{R_0^2} (2w + w_{\theta\theta} + \cot \theta w_\theta) \Rightarrow \\ 2\sigma \frac{\partial K_m^1}{\partial t} &= -\frac{\sigma}{R_0^2} \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \cot \theta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} \right] \end{aligned}$$

με  $w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) P_n(\theta)$  για ταλαντώσεις σχήματος σε σφαιρική γεωμετρία. Στην παρακάτω ανάλυση, προκειμένου να υπολογίσουμε την μεταβολή της ιδιοσυχνότητας ταλαντώσεων όγκου σαν συνάρτηση του βαθμού του περιορισμού της μικροφυσαλίδας μέσα στον αγωγό, όπως αυτός εκφράζεται από τον λόγο  $R = R_t/R_0$ , θα θεωρήσουμε ότι το δυναμικό ταχύτητας  $\varphi$  και η ακτινική μετατόπιση  $w$  πάνω στην διεπιφάνεια κυριαρχούνται από την ιδιομορφή που περιγράφει μεταβολές όγκου  $P_0$  και θα επικεντρωθούμε στην χρονική μεταβολή των μέσων τιμών των παραπάνω μεταβλητών. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο όρος  $\left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \cot \theta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} \right]$  έχει μέση τιμή ίση με μηδέν στην επιφάνεια της φυσαλίδας για αρμονικές ανώτερες του  $P_0$ , τότε η εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$$2\sigma \frac{\partial K_m^1}{\partial t} = -\frac{2\sigma}{R_0^2} \frac{\partial w_{m=0}}{\partial t} = -\frac{2\sigma}{R_0^2} \frac{\partial \varphi_{m=0}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \quad (52)$$

όπου  $d_0 = w_m$  συμβολίζει την μέση τιμή της ακτινικής μετατόπισης  $w_m$ .

Τέλος για τις ελαστικές τάσεις στο κέλυφος, όταν αυτό ακολουθεί τον νόμο Hook ή τον καταστατικό νόμο Mooney-Rivlin, στο γραμμικό όριο ισχύει ότι:

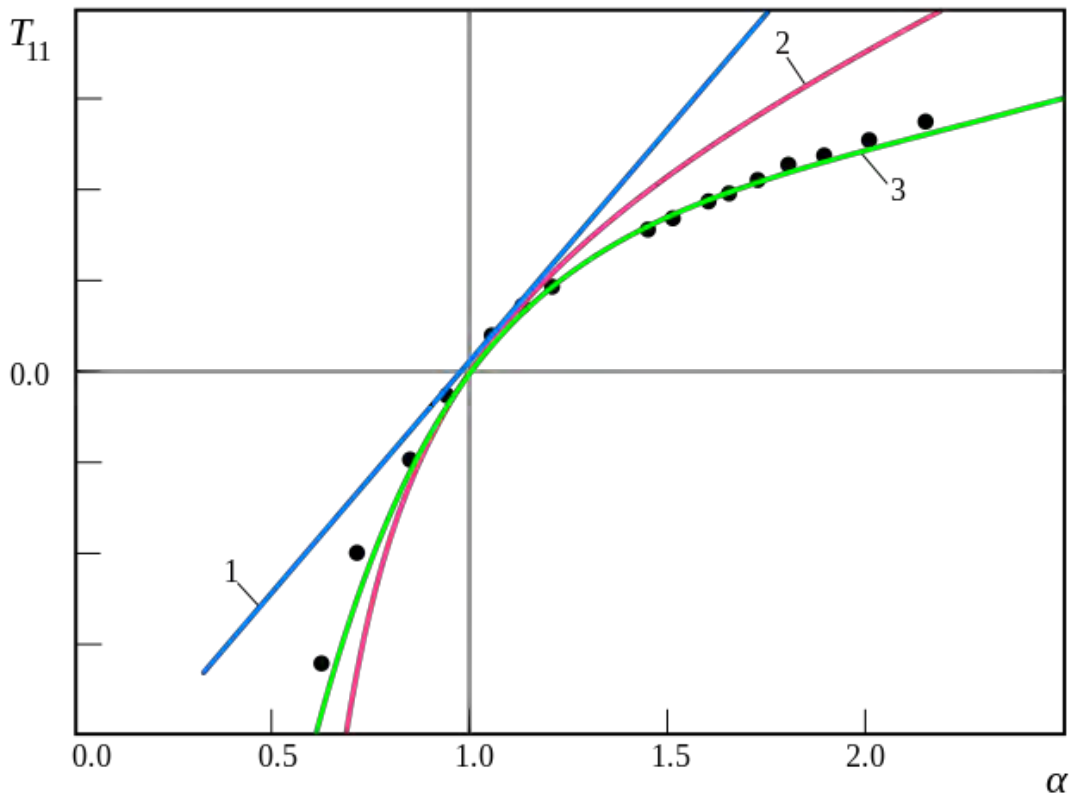
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta F_N}{\partial t} &= 2 \frac{\chi}{R_0^2} (2\dot{w} + \dot{u}_\theta + \dot{u} \cot \theta) \\ &+ 2 \frac{\mu_s}{R_0^2} (2\ddot{w} + \ddot{u}_\theta + \ddot{u} \cot \theta) + \frac{k_b}{R_0^4} [HH + H(1-v)](\dot{w} - \dot{\psi}) \end{aligned} \quad (53)$$

όπου  $u = \psi_\theta$  συμβολίζει την μετατόπιση στην κατεύθυνση  $\theta$  και  $H \equiv \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta}$ . Εάν επικεντρώσουμε στην μέση τιμή της χρονικής μεταβολής επάνω στην διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας και λάβουμε υπόψη ότι για τις σφαιρικές

αρμονικές ισχύει ότι,  $H(P_n) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial P_n}{\partial \theta} = -\lambda_n P_n = -n(n+1)P_n$ , προκύπτει η παρακάτω διαστατοποιημένη σχέση για γραμμική διαταραχή,

$$\frac{\partial \Delta F_N}{\partial t} = \frac{4\chi}{R_0^2} \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{4\mu_s}{R_0^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (54)$$

για τυπική ισοτροπική, ασυμπίεστη, λεπτή (ως προς την ακτίνα της φυσαλίδας) μεμβράνη σε κατάσταση ισορροπίας, με  $b=0$  για την neo-Hookean μεμβράνη της εικόνας 14 και με  $\chi = 3G_{MR} = 3G\delta$  το μέτρο επιφανειακής διαστολής Mooney-Rivlin για την επιφάνεια. Αυτός κρίνεται ο πιο κατάλληλος για την περιγραφή των ιξωδοελαστικών ιδιοτήτων του κελύφους για την περίπτωση των λιπιδίων. Όπως τα περισσότερα υλικά, το κέλυφος των λιπιδίων δεν αντιδρά στις εξωτερικές δυνάμεις μέσω μίας αμετάβλητης σταθεράς ελαστικότητας από το νόμο του Hooke. Απεναντίας, παρουσιάζουν μία μεταβαλλόμενη κλίση στο διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην εικόνα 14. Σε μεγάλες παραμορφώσεις ή σε απότομες μεταβολές της πίεσής τους, όπως στην περίπτωση των υπερήχων, η μεμβράνη των λιπιδίων είναι τέτοια ώστε η σταθερά ελαστικότητάς της να μικραίνει καθώς η παραμόρφωση μεγαλώνει.



Εικόνα 14 Διάγραμμα πειραματικών δεδομένων (τελείες) και προβλέψεων για τα μοντέλα hooke (1, μπλε καμπύλη), neo-Hookean (2, κόκκινη καμπύλη) και Mooney-Rivlin (3, πράσινη καμπύλη)

Ανακεφαλαιώνοντας, αντικαθιστώντας στο ισοζύγιο κάθετων τάσεων (49) για γραμμικές διαταραχές και αφού παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο έχουμε την γενική σχέση:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial w_{m=0}}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\sigma}{R_0^2} \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \cot \theta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} \right] \\
& + 2 \frac{\chi}{R_0^2} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial t} \cot \theta \right) + 2 \frac{\mu_s}{R_0^2} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cot \theta \right) \quad (55) \\
& + \frac{k_b}{R_0^4} [HH + H(1 - \nu)] \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

η οποία ισχύει στην αδιατάρακτη σφαιρική διεπιφάνεια. Η παραπάνω σχέση, σε συνδυασμό με την απαίτηση για μηδενική εφαπτομενική τάση (42β), την κινηματική συνθήκη (47) και τις συνοριακές συνθήκες (43,44) παρέχει την δυναμική συμπεριφορά της μικροφουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος για γραμμικές διαταραχές. Εναλλακτικά μπορεί να δώσει τις ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης της μικροφουσαλίδας μέσω της επίλυσης του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών.

Εισάγοντας την κινηματική συνθήκη στην σχέση (53), έχουμε:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial \varphi_{m=0}}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\sigma}{R_0^2} \left[ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \cot \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right] \\
& + 2 \frac{\chi}{R_0^2} \left( 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial t} \cot \theta \right) + 2 \frac{\mu_s}{R_0^2} \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cot \theta \right) \quad (56) \\
& + \frac{k_b}{R_0^4} [HH + H(1 - \nu)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right),
\end{aligned}$$

όπου  $H \equiv \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta}$  και  $H(P_n) = -\lambda_n P_n$  με  $\lambda_n \equiv n(n+1)$ .

Σε συνδυασμό με την χρονική εξάρτηση  $\varphi = e^{\omega t} \Phi(r, \theta)$ ,  $\psi = e^{\omega t} \Psi(r, \theta)$ , παίρνουμε:

$$-\frac{\gamma P_{G_0}}{V_0} A_0 \frac{\partial \varphi_{m=0}}{\partial r} + \rho \omega^2 \Phi = -\frac{\sigma}{R_0^2} \left[ 2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (57a)$$



$$+2 \frac{\chi}{R_0^2} \left( 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \dot{u}_\theta + \dot{u} \cot \theta \right) + 2 \frac{\mu_s}{R_0^2} \left( 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \omega^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \cot \theta \right) \\ + \frac{k_b}{R_0^4} [HH + H(1 - \nu)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \omega \Psi \right)$$

και ανάλογα για την εφαπτομενική συνιστώσα των τάσεων:

$$\frac{k_b}{R_0^4} (1 - \nu + H)(w - \Psi) - 2 \frac{\mu_s}{R_0^2} \omega [w + (1 + H)\Psi] \\ - \frac{\chi}{2R_0(1 - \nu^2)} [2(w + \Psi_{\theta\theta} + \Psi_\theta \cot \theta - \Psi \cot^2 \theta) - 2\nu(\Psi - w)] = 0 \quad (57\beta)$$

Για την διαχείριση της παραπάνω σχέσης απαιτείται η συσχέτιση της τιμής του δυναμικού  $\varphi$  με την παράγωγο κάθετα στην σφαιρική διεπιφάνεια  $\partial\varphi/\partial r$ , κάτι που γίνεται απλά για μία απομονωμένη σφαιρική φουσαλίδα, αλλά απαιτεί χρήση της μεθόδου συνοριακών στοιχείων για την γεωμετρία που μας απασχολεί στην παρούσα εργασία. Μάλιστα το συνολικό πρόβλημα αποτελείται από τις παραπάνω δύο σχέσεις για τις εφαπτομενικές και κάθετες τάσεις στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας σε συνδυασμό με την επίλυση της Λαπλασιανής στον χώρο του αγωγού που περιβάλλει την φουσαλίδα με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Έτσι προκύπτει ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών που θα δώσει όλες τις ιδιομορφές του προβλήματος σαν συνάρτηση της γεωμετρίας του αγωγού,  $R_0/R_t$ . Όμως η εν λόγω αριθμητική μεθοδολογία έχει απαιτήσεις από πλευράς υπολογιστικού χρόνου λόγω της ύπαρξης του τοιχώματος του αγωγού.

Προκειμένου να έχουμε μία αξιόπιστη προσεγγιστική απάντηση και σε ελάχιστο υπολογιστικό χρόνο για την ιδιοσυχνότητα αναπνοής λόγω ταλαντώσεων όγκου (breathing mode) στο όριο σχετικά μικρής ακτίνας της φουσαλίδας  $R_0$  σε σχέση με την ακτίνα του αγωγού  $R_t$ , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας  $\varphi$  είναι περίπου σταθερή στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας. Σαν αποτέλεσμα αρκεί να επικεντρώσουμε στην αρμονική μηδενικής τάξης για να υπολογίσουμε την εξέλιξη της ιδιοτιμής ταλαντώσεων όγκου,  $\omega_0$ , με την αύξηση του λόγου  $R_0/R_t$ . Στην περίπτωση αυτή η επίδραση του εφαπτομενικού ισοζυγίου τάσεων αποσυνδέεται από το κάθετο μιας και δεν έχει συνεισφορά στην ιδιομορφή μηδενικής τάξης  $P_0$ .

Πρέπει να σημειωθεί ότι για απομονωμένη φουσαλίδα:

$$\varphi = \frac{w^2 \dot{w}}{r} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{w^2 \dot{w}}{r^2}$$

και συνεπώς για σφαιρική διεπιφάνεια της φουσαλίδας ισχύει ότι:

$$\frac{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle}{\langle \varphi \rangle} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{-1}{r}$$

όπου οι μέσοι όροι λαμβάνονται στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας. Καθώς μεγαλώνει ο λόγος  $R_0/R_t$  θεωρούμε ότι η συνάρτηση δυναμικού στην διεπιφάνεια κυριαρχείται από την ιδιομορφή μηδενικής τάξης, δηλαδή  $\varphi(r=1, \theta) \approx$  σταθερά την οποία αργότερα θέτουμε ίση με την μονάδα για την κανονικοποίηση του προβλήματος ιδιοτιμών που θέλουμε να επιλύσουμε. Παρ'όλα αυτά η ιδιοσυνάρτηση που αφορά ταλαντώσεις όγκου θα έχει εξάρτηση από την πολική γωνία  $\theta$  η οποία θα είναι ασθενής στην συνάρτηση δυναμικού και πιο έντονη στην κάθετη παράγωγο αυτής. Συνεπώς, προκειμένου να υπολογισθεί η  $\omega_0$  παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (58) με τον  $P_0$  με αποτέλεσμα να απλοποιείται σημαντικά η παραπάνω σχέση διότι οι όροι που περιέχουν παραγώγους ως προς  $\theta$  έχουν μηδενική συνεισφορά.

$$-\frac{3\gamma P_{G_0}}{R_0} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle + \rho \omega^2 \varphi_0 = -\frac{2\sigma}{R_0^2} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle + \frac{4\chi_{MR}}{R_0^2} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle + \frac{4\mu_s}{R_0^2} \omega \langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle \quad (58)$$

όπου  $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_0$ . Ακολουθώντας για την διευκόλυνση του υπολογισμού της  $\omega_0$  αδιαστατοποιούμε την  $\Phi = \varphi/\varphi_0$ , ώστε  $\Phi_0$  να είναι μονάδα στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας καθώς και την ακτινική συντεταγμένη μέσω της ακτίνας  $R_0$  θέτοντας

$$\langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle = -\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \rangle \frac{1}{R_0} \xrightarrow[\text{προς το εσωτερικό της φουσαλίδας}]{\text{η συντεταγμένη } \zeta \text{ αυξάνεται}} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rangle = -\langle \Phi_\zeta \rangle \frac{1}{R_0}$$

με  $\langle \Phi_\zeta \rangle > 0$ . Έτσι η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$\omega^2 + \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \frac{4\mu_s}{\rho R_0^3} \omega + \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left( \frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} \right) = 0 \quad (59)$$

Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς  $\omega_0$ , έχουμε:

$$\omega = \frac{\frac{-4\mu_s \langle \Phi_\zeta \rangle}{\rho R_0^3 \Phi_0} \pm \sqrt{\left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3}\right)^2 \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}\right)^2 - 4 \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3}\right)}}{2} \quad (60\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{2\mu_s \langle \Phi_\zeta \rangle}{\rho R_0^3 \Phi_0} \pm \sqrt{\left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3}\right)^2 \frac{1}{4} \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}\right)^2 - \frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3}\right)}$$

η οποία εκφράζει τη συχνότητα,  $\sqrt{\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0} \left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3}\right) - \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3}\right)^2 \frac{1}{4} \left(\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}\right)^2}$  και

την απόσβεση,  $-\frac{2\mu_s \langle \Phi_\zeta \rangle}{\rho R_0^3 \Phi_0}$ , της ταλάντωσης της φουσαλίδας εξαιτίας της ύπαρξης του αγωγού λαμβάνοντας υπόψιν τα φυσικά χαρακτηριστικά της. Η επίδραση του εγκλεισμού αντικατοπτρίζεται στον όρο  $\frac{\langle \Phi_\zeta \rangle}{\Phi_0}$  που θα υπολογιστεί στη συνέχεια με την επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος για την συνάρτηση δυναμικού, όπως αυτό εκφράζεται μέσω των σχέσεων (39), (43-44) σε συνδυασμό με την συνθήκη  $\Phi(r' = 1) = 1$ , που κανονικοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών που επιλύεται, με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Με την μεθοδολογία αυτή θα βρεθεί η ταχύτητα κάθετα στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας  $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} (\zeta = 1 - r' = 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} (\theta)$ , σαν συνάρτηση του λόγου  $R_0/R_t$ , και μέσω αυτής η μέση της τιμή προκειμένου να υπολογισθεί η ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$ . Ας σημειωθεί δε ότι όταν  $R = R_0/R_t \rightarrow 0$ , τότε  $\langle \Phi_\zeta \rangle / \Phi_0 \rightarrow 1$ , ανακτώντας έτσι την ιδιοσυχνότητα και απόσβεση ελεύθερης μικροφουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος.

$$\omega_0 = -\frac{2\mu_s}{\rho R_0^3} \pm i \sqrt{\left(\frac{4\chi_{MR}}{\rho R_0^3} + \frac{3\gamma P_{G_0}}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3}\right) - \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^3}\right)^2 \frac{1}{4}} \quad (60\gamma)$$

Στις επόμενες ενότητες δίνεται ο λόγος  $\frac{\omega_i}{\omega_{oi}} = \frac{2\pi f}{2\pi f_0} = \frac{f}{f_0}$ ,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  σαν συνάρτηση του λόγου ακτίνων μεταξύ της φουσαλίδας και του αγωγού.

## 2.5 Ολοκληρωτική διατύπωση

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι διέπουσες εξισώσεις σε διαφορική μορφή δίνονται από τις σχέσεις (39) και (43-44) σε συνδυασμό με την συνθήκη  $\Phi = 1$

στην διεπιφάνεια της φουσαλίδας. Στόχος της παρούσας προσέγγισης είναι να ορίσει εξαρχής το πρόβλημα σε όρους ποσοτήτων που ορίζονται στο όριο και μόνο. Για το λόγο αυτό, η τιμή του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια εισάγεται ως μία νέα ανεξάρτητη παράμετρος, η οποία σε συνδυασμό με την ταχύτητα κάθετα στη διεπιφάνεια,  $d\Phi/dn = d\Phi/dz$ , αποτελούν τις μόνες ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος;  $n, z$  αυξάνονται καθώς κινούμαστε προς το εξωτερικό του όγκου ελέγχου.

Μένει ακόμα να συσχετισθεί η κάθετη παράγωγος του δυναμικού με το δυναμικό στην ελεύθερη επιφάνεια. Αυτό γίνεται μέσω της εξίσωσης Laplace και σχηματικά μπορεί κανείς να γράψει αυτή τη σχέση ως:

$$L\left(\psi, \frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) = 0 \quad (61)$$

Η παραπάνω διατύπωση κάνει εμφανές το πλεονέκτημα της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων μιας και απαιτείται η διακριτοποίηση γραμμών, στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας, γεγονός που αναδεικνύει τον μονο-διάστατο χαρακτήρα του προβλήματος και την απλοποίηση της αριθμητικής επίλυσης.

Για να επιτευχθεί η συσχέτιση του δυναμικού ταχύτητας στην επιφάνεια της φουσαλίδας με την κάθετη ταχύτητα σε αυτήν, η λαπλασιανή αντικαθίσταται με μία ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση. Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας την τρίτη ταυτότητα του Green σύμφωνα με την άμεση μέθοδο της ενότητας 2.1 ως ακολούθως:

$$\alpha\varphi(\vec{x}') + \oint_A \varphi(\vec{x}) \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} dA(\vec{x}) = \oint_A \frac{\partial\varphi}{\partial n}(\vec{x}) \widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}') dA(\vec{x}) \quad (62)$$

όπου  $A$  είναι η επιφάνεια που περικλείει τον Όγκο Ελέγχου ο οποίος περιλαμβάνει την μικροφουσαλίδα, τον κυλινδρικό αγωγό και τα άκρα του.  $\widehat{G}$  είναι η ιδιόμορφη λύση της εξίσωσης Laplace στον ελεύθερο χώρο για αξονική συμμετρία, που υπόκειται σε μία σημειακή δύναμη στο σημείο πηγής  $x(r, \theta)$  στην επιφάνεια της φουσαλίδας και το  $\partial\widehat{G}/\partial n$  παριστάνει την κάθετη παράγωγο του  $\widehat{G}$  ως προς το κάθετο προς τα έξω διάνυσμα  $n$  λαμβανόμενο στα όρια του Όγκου Ελέγχου, σχήμα 13. Εάν το σημείο πεδίου βρίσκεται στο εσωτερικό (εξωτερικό) του Όγκου Ελέγχου, τότε ο συντελεστής άλματος  $\alpha$  ισούται με 1.0 (0.0). Αν όμως βρίσκεται στην επιφάνεια, τότε αυτός δίνεται από τη στερεά γωνία (μετρημένη σε πολλαπλάσια του  $4\pi$ ) υπό την οποία η περιοχή που καταλαμβάνει το ρευστό φαίνεται από εκείνο το σημείο (για παράδειγμα,  $\alpha = 1/2$  για μία ομαλή επιφάνεια).

Σε αυτή την περίπτωση το πεδιακό σημείο μπορεί να συμπίπτει με κάποιο από τα σημεία πηγών καθιστώντας έτσι τα ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης ιδιόμορφα. Όπως έχει ειπωθεί στην ενότητα 2.3, η απροσδιοριστία στον πυρήνα  $\widehat{G}$  είναι ασθενής και άρα ολοκληρώσιμη, ενώ ο πυρήνας  $\partial\widehat{G}/\partial n$  είναι ολοκληρώσιμος μόνο κατά έννοια κύριας τιμής Cauchy. Για να αρθεί αυτό το είδος της απροσδιοριστίας προσθαφαιρείται η τιμή του δυναμικού στο σημείο πεδίου και συνεχίζεται η επίλυση κατ' αντιστοιχία των όσων έχουν αναφερθεί στην ενότητα 2.3.

Για το πρόβλημά μας της εικόνας 13, η εξίσωση αναπτύσσεται σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων που αντιστοιχούν στα όρια του χώρου σε συνδυασμό με τις κατάλληλες εξισώσεις συνέχειας για τα σημεία συνάντησης των επιφανειών. Ενδεικτικά, όταν το σημείο πεδίου έρθει στην επιφάνεια 1, αρχικά υλοποιείται εξομάλυνση του ολοκληρώματος κύριας τιμής ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\int_A \varphi(\vec{x}) \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n(\vec{x})} dA(\vec{x}) &= \int_A [\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}') + \varphi(\vec{x}')] \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n(\vec{x})} dA(\vec{x}) \\
\begin{matrix} \vec{x}' = \vec{x}'_1 \\ \implies \end{matrix} \int_A \varphi(\vec{x}) \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n(\vec{x})} dA(\vec{x}) &= \int_{A_1} [\varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1)}{\partial n(\vec{x}_1)} dA(\vec{x}_1) \\
&+ \int_{A_2} [\varphi(\vec{x}_2) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}_2, \vec{x}'_1)}{\partial n(\vec{x}_2)} dA(\vec{x}_2) \\
&+ \int_{A_3} [\varphi(\vec{x}_3) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}_3, \vec{x}'_1)}{\partial n(\vec{x}_3)} dA(\vec{x}_3) \\
&+ \int_{A_4} [\varphi(\vec{x}_4) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}_4, \vec{x}'_1)}{\partial n(\vec{x}_4)} dA(\vec{x}_4) \\
&+ \varphi(\vec{x}'_1) \int_A \frac{\partial\widehat{G}(\vec{x}, \vec{x}'_1)}{\partial n(\vec{x})} dA(\vec{x})
\end{aligned} \tag{63}$$

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε στην ενότητα 2.3, βλ. εξισώσεις (27) και (36), το τελευταίο ιδιόμορφο ολοκλήρωμα γύρω από την κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο ελέγχου δίνει

$$\varphi(\vec{x}'_1) \int_A \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \varphi(\vec{x}'_1) \quad (64)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση (62) καθώς το πεδιακό σημείο πλησιάζει την ομαλή σφαιρική επιφάνεια 1 παίρνουμε, αφού αφαιρέσουμε τον προσδιορισμό του κάθετου διανύσματος θεωρώντας ότι όταν δεν είναι τονισμένο αφορά παραγωγή στα σημεία πηγής:

$$\begin{aligned} & \int_{A_1} [\varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_1) \\ & + \int_{A_2} [\varphi(\vec{x}_2) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_2) \\ & + \int_{A_3} [\varphi(\vec{x}_3) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_3) \\ & + \int_{A_4} [\varphi(\vec{x}_4) - \varphi(\vec{x}'_1)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_4) = \\ & = \int_{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1) \widehat{G}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_1) + \int_{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2) \widehat{G}(\vec{x}_2, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_2) \\ & + \int_{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3) \widehat{G}(\vec{x}_3, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_3) + \int_{A_4} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4) \widehat{G}(\vec{x}_4, \vec{x}'_1) dA(\vec{x}_4) \end{aligned} \quad (65)$$

Αντίστοιχα εκλέγονται οι σχέσεις μεταξύ του δυναμικού και της κάθετης παραγώγου του για τις επιφάνειες 2, 3, 4. Όταν όμως το σημείο πεδίου βρεθεί στα άκρα του αγωγού στα σημεία συνάντησης με τις επιφάνειες 3 και 4 οι οποίες αντιστοιχούν στα ανοικτά άκρα στην έξοδο και την είσοδο του αγωγού, τότε λαμβάνοντας υπόψιν ότι εκεί η επιφάνεια δεν είναι ομαλή αλλά με στερεά γωνία αυτή τη φορά ίση με  $\pi/4$ , η εξίσωση (62) ξαναγράφεται ως:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \varphi(\vec{x}'_2) + \int_{A_1} \varphi(\vec{x}_1) \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_1) + \int_{A_2} \varphi(\vec{x}_2) \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_2) \\
& + \int_{A_3} \varphi(\vec{x}_3) \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_3) + \int_{A_4} \varphi(\vec{x}_4) \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_4) = \\
& = \int_{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1) \widehat{G}(\vec{x}_1, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_1) + \int_{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2) \widehat{G}(\vec{x}_2, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_2) \\
& + \int_{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3) \widehat{G}(\vec{x}_3, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_3) + \int_{A_4} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4) \widehat{G}(\vec{x}_4, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_4)
\end{aligned}$$

και μετά την εξομάλυνση του ολοκληρώματος κύριας τιμής παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} [\varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}'_2)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_1) \\
& + \int_{A_2} [\varphi(\vec{x}_2) - \varphi(\vec{x}'_2)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_2) \\
& + \int_{A_3} [\varphi(\vec{x}_3) - \varphi(\vec{x}'_2)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_3) \\
& + \int_{A_4} [\varphi(\vec{x}_4) - \varphi(\vec{x}'_2)] \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_4) = \\
& = \int_{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_1) \widehat{G}(\vec{x}_1, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_1) + \int_{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_2) \widehat{G}(\vec{x}_2, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_2) \\
& + \int_{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_3) \widehat{G}(\vec{x}_3, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_3) + \int_{A_4} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\vec{x}_4) \widehat{G}(\vec{x}_4, \vec{x}'_2) dA(\vec{x}_4)
\end{aligned} \tag{66}$$

Η άμεση αυτή διατύπωση για τη λαπλασιανή οδηγεί εν τέλει στην αντιστροφή πίνακα, καθώς ο διαχωρισμός πινάκων που θα οδηγούσε σε μία επαναληπτική διαδικασία δεν είναι εφικτός για προβλήματα αυτού του είδους, όπως έχει αναφερθεί από τους Baker και Shelley [24]. Η αντιστροφή πινάκων εκτελείται ευρέως από τυποποιημένες ρουτίνες. Το κόστος της αντιστροφής, ωστόσο, αυξάνει με το  $n^3$ , όπου  $n$  είναι ο αριθμός των εξισώσεων που παράγονται από τη διακριτοποίηση στο χώρο. Το μέγεθος του πλέγματος που απαιτήθηκε για την

παρούσα εργασία παρέμεινε αρκετά μικρό και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ήταν υψηλή.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι συγκεκριμένες προσθήκες που πρέπει να γίνουν στην έως τώρα μελέτη ώστε να προκύψει το πρόβλημα ικανό προς επίλυση μέσω υπολογιστή. Εξαιτίας της ολοκληρωτικής διατύπωσης με ποσότητες ορισμένες στο όριο, διακριτοποίηση του χώρου απαιτείται σε μία μόνο διάσταση. Η απουσία περιοχών στην ελεύθερη επιφάνεια με ξαφνικές αλλαγές μας επιτρέπει την εισαγωγή πλέγματος ισόποσων αποστάσεων ως προς τη γωνία  $\theta$ .

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιήθηκε ανάπτυγμα πεπερασμένων στοιχείων για την αναπαράσταση των αγνώστων συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό, οι αντίστοιχες άγνωστες μεταβλητές  $(\varphi, \partial\varphi/\partial\eta)$  αντικαταστάθηκαν από ένα πεπερασμένο άθροισμα άγνωστων συντελεστών πολλαπλασιασμένων επί ένα σύνολο συναρτήσεων βάσης, οι οποίες είναι διάφορες του μηδενός μόνο σε μερικά στοιχεία στην περιοχή. Για κάθε σημείο χρησιμοποιούνται τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης Gauss. Αυτό εξασφαλίζει ότι οποιοδήποτε αριθμητικό σφάλμα οφείλεται κυρίως στο σφάλμα παρεμβολής των άγνωστων συναρτήσεων αντί της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Επιπλέον σημεία Gauss απαιτούνται για την ολοκλήρωση στα στοιχεία που περιέχουν ιδιομορφία.

Ως συναρτήσεις βάσης επιλέχθηκαν οι κυβικές B-splines, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε έως και τέσσερα στοιχεία το πολύ και εξασφαλίζουν τη συνέχεια της συνάρτησης μαζί με την πρώτη και δεύτερη παράγωγό της (Prenter 1975). Εφόσον  $B_i(\theta = \theta_j) \neq \delta_{ij}$ , οι συντελεστές  $\varphi_i, f_i$  στην αναπαράσταση B-splines

$$\begin{aligned}\varphi_k(\theta) &= \sum_{i=1}^{N_k+3} \varphi_i B_i(\theta) \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_k}(\theta) &= \sum_{i=1}^{N_k+3} f_i B_i(\theta)\end{aligned}\tag{67}$$

διαφέρουν από τις τιμές των άγνωστων συναρτήσεων στους κόμβους,  $N_k$  στον αριθμό. Επακόλουθα, αυτή η αναπαράσταση απαιτεί έναν επιπλέον πολλαπλασιασμό πινάκων ούτως ώστε να προκύψουν οι τιμές των συναρτήσεων στους κόμβους. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε φανταστικούς κόμβους έξω από την περιοχή εκφράζονται σε όρους των εσωτερικών κόμβων χρησιμοποιώντας της συνοριακές συνθήκες. Εφόσον οι B-splines εκτείνονται σε τέσσερα σημεία, παράγεται ένας πίνακας ζώνης με εύρος επτά και απαιτούνται επιπλέον υπολογισμοί για την κατασκευή του πίνακα του συστήματος. Αυτά τα μικρά μειονεκτήματα υπερκαλύπτονται από την αυξημένη ακρίβεια της λύσης. Αυτό

γιατί οι B-splines είναι ακριβείς  $O(h^4)$  και  $O(h^3)$  στην παρεμβολή μιας ομαλής συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου της αντίστοιχα.

Στην άμεση μέθοδο, μόνο μία επιπλέον συνάρτηση χρειάζεται να διακριτοποιηθεί και αυτή θα αφορά στην περιγραφή της γεωμετρίας του ορίου του συστήματος. Αυτή υπολογίστηκε για τις τέσσερις εξωτερικές επιφάνειες ως προς την πολική γωνία  $\theta$  για την επιφάνεια 1, και τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r, z$ , επιφάνειες 2,3,4, και οι συντελεστές της επιστράφηκαν μέσω των B-splines με όμοιο τρόπο όπως και πριν. Οι ιδιόμορφοι όροι ολοκληρώνονται με τον τρόπο που έχει αναφερθεί και οι εναπομείναντες ομαλοί όροι χρησιμοποιώντας κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss με μεταβαλλόμενα στον αριθμό σημεία Gauss.

Συμβολίζοντας με ανάλογο τρόπο με  $G_{ij}, F_{ij}$  το πυρήνα  $\tilde{G}$  και την κάθετη παράγωγό του αντίστοιχα, με τα  $i, j$  να δηλώνουν την επιφάνεια στην οποία ανήκουν τα σημεία πεδίου και πηγής αντιστοίχως, οι εξισώσεις της ενότητας 2.5 μπορούν να γραφούν πια σε μορφή έτοιμη προς επίλυση σε υπολογιστή. Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες της εικόνας 13 ( $\varphi_1 = 1, \partial\varphi_2/\partial n = 0, \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ ), η εξίσωση για την επιφάνεια 1 μετατρέπεται σε:

$$F_{11}\varphi_{1c} + F_{12}\varphi_{2c} = G_{11}f_{1c} + G_{13}f_{3c} + G_{14}f_{4c} \quad (68)$$

όπου ο δείκτης  $c$  χρησιμοποιήθηκε για να συμβολίσει τις τιμές των συντελεστών που περιγράφουν τις άγνωστες συναρτήσεις σε κάθε επιφάνεια, και που αποτελούν τη βάση της αριθμητικής ανάλυσης. Με όμοιο τρόπο, για τα σημεία πεδίου πάνω στις επιφάνειες 2, 3 και 4, οι πίνακες του συστήματος καταστρώνονται αντίστοιχα σύμφωνα με:

$$\begin{aligned} F_{21}\varphi_{1c} + F_{22}\varphi_{2c} &= G_{21}f_{1c} + G_{23}f_{3c} + G_{24}f_{4c} \\ F_{31}\varphi_{1c} + F_{32}\varphi_{2c} &= G_{31}f_{1c} + G_{33}f_{3c} + G_{34}f_{4c} \\ F_{41}\varphi_{1c} + F_{42}\varphi_{2c} &= G_{41}f_{1c} + G_{43}f_{3c} + G_{44}f_{4c} \end{aligned} \quad (69)$$

Όταν τα σημεία πεδίου βρεθούν στα άκρα της επιφάνειας 2 η σχέση:

$$F_{21}\varphi_{1c} + F_{22}\varphi_{2c} = G_{21}f_{1c} + G_{23}f_{3c} + G_{24}f_{4c} \quad (70)$$

γράφεται και από τις δύο πλευρές και συνεπώς πρέπει να αφαιρεθεί στην μία εξ'αυτών προκειμένου να έχουμε γραμμικώς ανεξάρτητο πρόβλημα σε μητροειδή μορφή. Σε αυτά τα δύο σημεία θα εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στην σύνδεση με τις πλάγιες επιφάνειες 3 και 4.

$$\begin{aligned} \Phi_2(z = -len) = \Phi_4(r = R) = 0, \quad \Phi_2(z = len) = \Phi_3(r = R) = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(z = -len) = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_4(r = R), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(z = len) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_3(r = R) \end{aligned} \quad (71\alpha,\beta)$$

όπου  $len = \frac{L/2}{R_0}$  και  $n$  συμβολίζει το κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του όγκου ελέγχου σε μία δεδομένη επιφάνεια. Με αυτό τον τρόπο θέλουμε να εξασφαλίσουμε τη συνέχεια του προβλήματος, σε όρους δυναμικού και κάθετης παραγώγου, στα σημεία ένωσης των ορίων. Με την παραπάνω μεθοδολογία μπορεί τελικά να παραχθεί μία πινακοειδής σχέση της μορφής  $F\varphi_1 = G \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_1$  η οποία μπορεί να συνδυασθεί με τα αναπτύγματα των  $\varphi$  και  $\partial \varphi / \partial n$  μέσω πολυωνύμων Legendre  $P_n$  για να συσχετίσει τους συντελεστές των δύο αυτών αγνώστων με την μορφή

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ \varphi_N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{N-1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_N \end{pmatrix} \quad (72)$$

Αντικατάσταση του παραπάνω πίνακα στις σχέσεις (58α,β) και ανάπτυγμα ως προς τα αξονοσυμμετρικά πολώνυμα Legendre δίνει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(\omega, R, \chi, \mu_s) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (73)$$

Υπολογισμός των ιδιοτιμών  $\lambda$  του πίνακα  $A$  και αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση δίνει την ιδιοσυχνότητα  $\omega$  όλων των ιδιομορφών και όχι μόνο αυτής που αντιστοιχεί σε ταλαντώσεις όγκου, όπου ο αντίστροφος  $1/\lambda_0$  παίζει τον ρόλο της παραμέτρου  $\frac{\langle \Phi_z \rangle}{\Phi_0} = \frac{\langle \Phi_n \rangle}{\Phi_0}$  της παρούσας μεθοδολογίας. Την διερεύνηση της εν λόγω προσέγγισης την αφήνουμε για μελλοντική εργασία λόγω του επί πλέον υπολογιστικού φόρτου που προϋποθέτει.

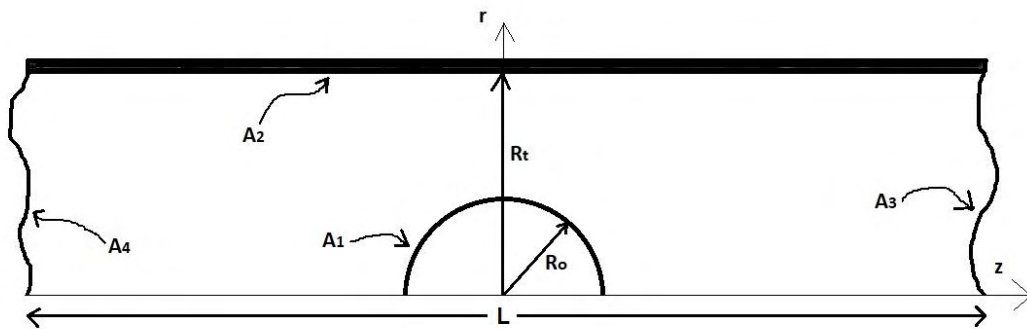
Εναλλακτικά, εισάγουμε τη θεώρηση που περιγράφηκε στην ενότητα (2.4) και οδήγησε στις εξισώσεις (60), θέτοντας  $\varphi(r = R) = 1$ . Οι εξισώσεις (68-69) και

71(α,β) σχηματίζουν ένα πρόβλημα σε μητροειδή μορφή που επιλύεται με αντιστροφή για να δώσει τις τιμές των συντελεστών των αγνώστων  $\Phi_2$ ,  $\partial\Phi_1/\partial n$ ,  $\partial\Phi_3/\partial n$  και  $\partial\Phi_4/\partial n$ . Κατόπιν υπολογίζεται το ανάπτυγμα της κατανομής  $\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}(\theta)$  στις σφαιρικές αρμονικές και ο συντελεστής του πολυωνύμου μηδενικής τάξης είναι η μέση τιμή  $\langle \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \rangle$  που θα ενταχθεί στην σχέση (60) για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας  $\omega_0$  χωρίς να απαιτείται η επίλυση διευρυμένου προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής της σχέσης (73).  $\zeta = n_1$  στην διεπιφάνεια της σφαίρας, όπου  $n_1$  δείχνει προς το εσωτερικό της σφαίρας,

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατάσταση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος της εικόνας 15 χαρακτηρίζεται από τρία χαρακτηριστικά μεγέθη μήκους: την ακτίνα της μικροφουσαλίδας  $R_0$ , την ακτίνα του αγωγού  $R_t$  και το μήκος του αγωγού  $L$ . Θα μπορούσε κανείς, έτσι, ορίζοντας δύο αδιάστατους λόγους να το περιγράψει. Η παρουσίαση μεγάλου αριθμού αποτελεσμάτων που να καλύπτουν όλο το εύρος τιμών κρίνεται μη πρακτική. Έτσι περιοριζόμαστε σε ορισμένα παραδείγματα που αποτυπώνουν με σαφήνεια τον τρόπο εξέλιξης του φαινομένου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μισή φουσαλίδα στο κάτω μέρος της εικόνας 15 είναι ισοδύναμη με την ολόκληρη φουσαλίδα τοποθετημένη στο κέντρο του αγωγού, λόγω της κατεύθυνσης του άξονα συμμετρίας συγγραμικά με τον άξονα του αγωγού.



Εικόνα 15 Χαρακτηριστικά μεγέθη που περιγράφουν το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα

### 4.2 Επιλογή μεγέθους πλέγματος

Αντικειμενικό σκοπό της παρούσας εργασίας αποτελεί η μείωση των υπολογιστικών πόρων που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων δυναμικού εν γένει. Αυτό άλλωστε είναι και το πλεονέκτημα της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων συγκριτικά με τεχνικές που διακριτοποιούν όλη την περιοχή ανάλυσης.

Σε πρώτο στάδιο ερευνήθηκε η επίδραση του αριθμού των στοιχείων ελέγχου στον υπολογισμό των λύσεων. Στόχος ήταν η βελτιστοποίηση του πλέγματος που θα εφαρμοστεί στην υπόλοιπη μελέτη. Προς αυτή την κατεύθυνση, μελετήθηκε αρχικά η ιδιοσυχνότητα μίας φουσαλίδας αερίου στο κέντρο ενός κυλινδρικού αγωγού γεμάτου με νερό, διεπιφανειακή τάση  $\sigma=0.072$  N/m, εφαρμόζοντας

διαφορετική χωρική διακριτοποίηση των εξωτερικών επιφανειών. Σε επόμενο στάδιο και στο πλαίσιο της γενικότερης προσπάθειας υπολογισμού της επίδρασης του επιφανειακού ιξώδους στην ιδιοσυχνότητα μικροφουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος, ως ταλαντωτής επιλέχθηκε μία μικροφουσαλίδα λιπιδίου με τα φυσικά χαρακτηριστικά που δίνονται στον πίνακα 1.

Ιδιότητες φουσαλίδας λιπιδίου	Ιδιότητες περιβάλλοντος μέσου
<p>Εξωτερική ακτίνα <math>R_0 = 3.6 \mu\text{m}</math>            Πάχος κελύφους <math>\delta = 10^{-9} \text{ m}</math>            Επιφανειακή τάση <math>\sigma = 0.051 \text{ N/m}</math>            Ιξώδες διαστολής στις <math>3\Delta \mu_{s,3d} = 20 \text{ Pa}\cdot\text{s}</math>            Πολυτροπικός εκθέτης αερίου <math>\gamma = 1.07</math></p>	<p>Στατική πίεση <math>P_{st} = 101325 \text{ Pa}</math>            Πυκνότητα <math>\rho = 998 \text{ kg/m}^3</math></p>

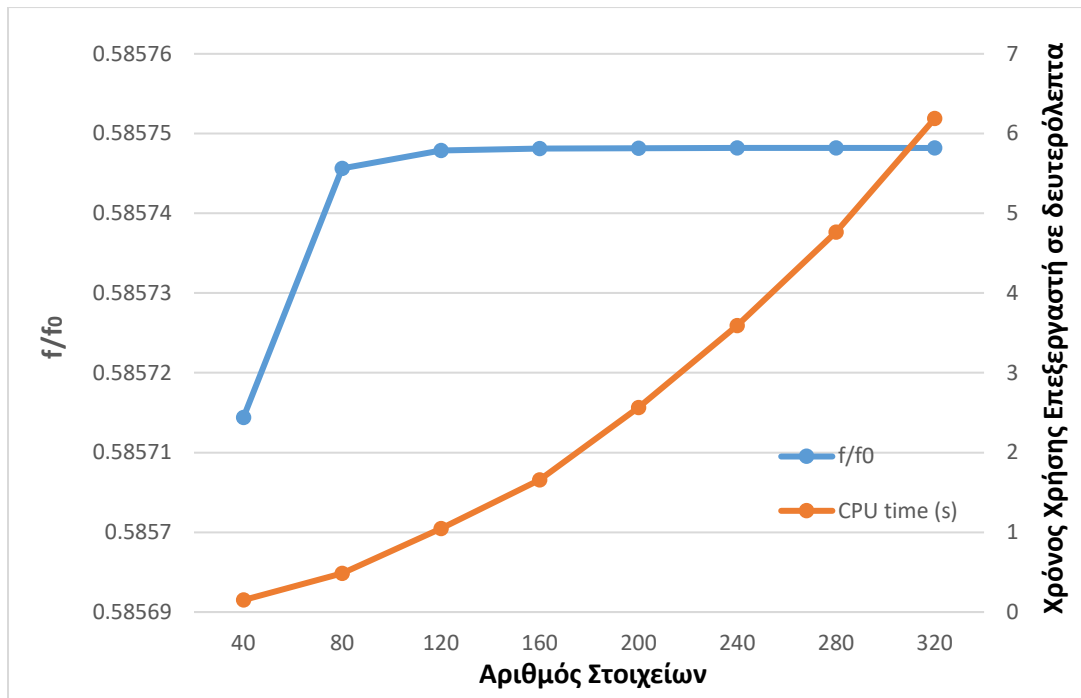
Πίνακας 1 Τιμές των φυσικών μεταβλητών του συστήματος που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα.

Με την μεθοδολογία που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία επιτεύχθηκε σημαντική αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων με μεγάλη μείωση του χρόνου επίλυσης. Το σύστημα των λύσεων παρουσίασε μικρή εξάρτηση από τον αριθμό των στοιχείων που εισήχθησαν, πράγμα ιδιαίτερος βολικό καθώς επιτρέπει έτσι την χρησιμοποίηση του μικρότερου μεγέθους πλέγματος κάθε φορά. Τα παραπάνω αντικατοπτρίζονται στα δεδομένα του πίνακα 2 ο οποίος παρουσιάζεται σε αυτή την μορφή, μόνον γιατί οι αντίστοιχες καμπύλες γραφήματος ήταν τόσο κοντά σε σημείο που δεν διακρίνονταν μεταξύ τους, ενισχύοντας τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Συγκρίνονται οι λύσεις από τις εκτελέσεις του κώδικα με εισαγωγή 40 και 320 στοιχείων ξεχωριστά για την περίπτωση με  $L/R_t = 8$  της εικόνας 15. Τα αποτελέσματα αφορούν τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φουσαλίδας ως προς τον λόγο ακτινών  $R_0/R_t$ . Παρατηρείται ότι διαφορά στις τιμές δεν υπάρχει μέχρι και το τρίτο δεκαδικό ψηφίο του αδιάστατου λόγου ιδιοσυχνοτήτων. Ωστόσο η χρήση του επεξεργαστή αυξήθηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό κατά την εφαρμογή πυκνού πλέγματος 320 στοιχείων (6.2 s χρήσης έναντι 0.16 s του αραιού).

<b>L/R<sub>t</sub>=8</b>	<b>f/f<sub>0</sub></b>	
<b>R<sub>0</sub>/R<sub>t</sub></b>	<b>Elements=40, CPU time=0.16 s</b>	<b>Elements=320, CPU time=6.2 s</b>
0.01	0.974995459	0.974997497
0.05	0.890831284	0.890839196
0.1	0.811129258	0.81114178
0.2	0.702000664	0.702020381
0.4	0.585714384	0.585748194
0.5	0.55598562	0.556026639
0.7	0.529213085	0.529385009
0.8	0.52555541	0.525991134
0.95	0.525059549	0.52610582

Πίνακας 2 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας μίας φυσαλίδας μέσα σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $R_t$  ως προς το λόγο  $R_0/R_t$  με  $L/R_t = 8$  και  $G_s=160$  MPa.

Για να στηριχθεί περισσότερο ο ισχυρισμός, ερευνήθηκε η διακύμανση των λύσεων σε συνάρτηση με τον αριθμό των στοιχείων στο όριο, της περίπτωσης με λόγο  $L/R_t = 8$ . Οι επαναλήψεις εκτελέστηκαν με λόγο ακτινών  $R_0/R_t = 0.4$  καθώς αυτός παρουσιάζει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, όπως θα δειχθεί παρακάτω, εξαιτίας της συμφωνίας των λύσεων που παρουσιάζει με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (διάγραμμα 4). Από το διάγραμμα 1 φαίνεται μία συνεχής αύξηση του λόγου  $f/f_0$  καθώς εισάγονται περισσότερα στοιχεία μέχρι μία τελική σταθεροποίησή του από τα 160 στοιχεία πλέγματος και πάνω. Ωστόσο, σε προσεκτικότερη ανάγνωση του γραφήματος παρατηρείται ότι η διακύμανση των λύσεων είναι της τάξεως του πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, ενώ παράλληλα ο χρόνος χρήσης του επεξεργαστή αυξάνεται με όλο και μεγαλύτερο ρυθμό καθώς προστίθενται και άλλα στοιχεία. Τελικά συμπεραίνεται ότι ο βέλτιστος αριθμός στοιχείων για τον κώδικα που αναπτύχθηκε είναι ο  $n = 80$  καθώς αποτελεί την ιδανική ισορροπία μεταξύ ακρίβειας και ταχύτητας των λύσεων. Αυτός θα χρησιμοποιηθεί στο υπόλοιπο της εργασίας.



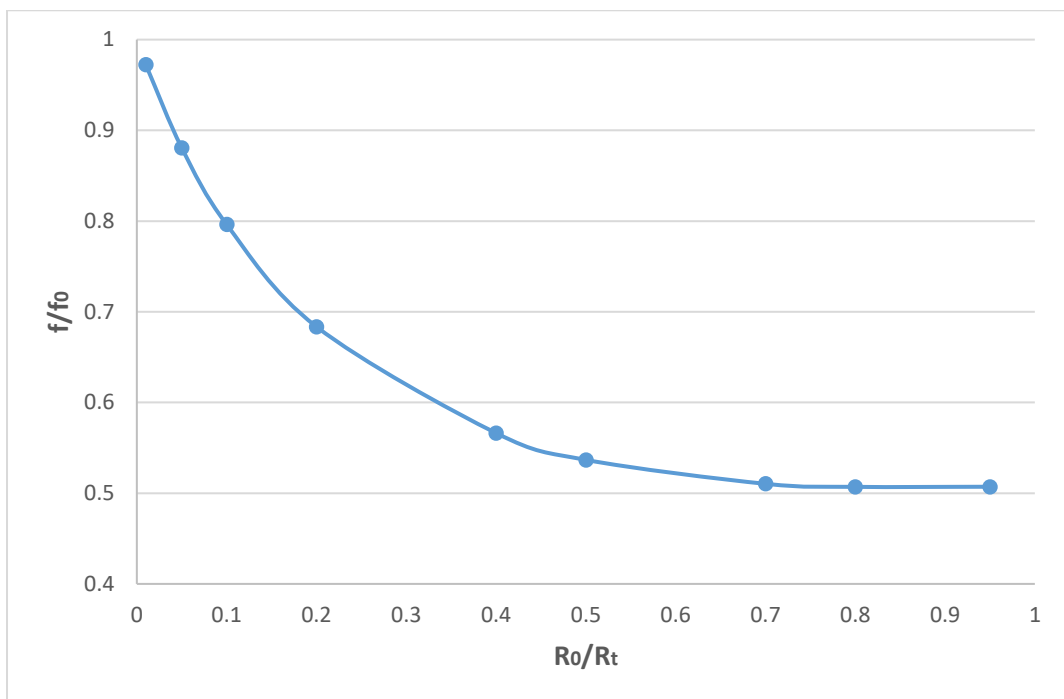
Διάγραμμα 1 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφυσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_i$  και χρόνος επίλυσης του προβλήματος, ως προς τον αριθμό στοιχείων πλέγματος με λόγο  $R_o/R_i=0.4$  και  $L/Rt = 8$  για επιφανειακό μέτρο διάτμησης  $G_s=160$  MPa.

### 4.3 Ταλάντωση χωρίς τριβές

Παρότι υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία πάνω στις μικρού πλάτους ταλαντώσεις όγκου μικροφυσαλίδων σε απεριόριστα υγρά, δίπλα σε επίπεδα όρια και ελεύθερες επιφάνειες, η περίπτωση φυσαλίδων περιορισμένων σε κανάλια και αγωγούς, δεν φαίνεται να έχει μελετηθεί στον ίδιο βαθμό. Ακόμη μικρότερη είναι η διαθέσιμη έρευνα πάνω στα φαινόμενα ιζώδους που λαμβάνουν χώρα κατά την κίνηση. Μολονότι οι κλίμακες πάνω στις οποίες εργαζόμαστε είναι της τάξης του ενός μικρομέτρου και οι ταχύτητες ροής σχετικά μικρές, ώστε τα ιζώδη φαινόμενα να μην είναι αμελητέα, συχνά λαμβάνεται ως βάση για τους υπολογισμούς η ατριβής περίπτωση όπως επιλέχθηκε και από τους Pelekasi & Tsamopoulos [6], Tsiglifi & Pelekasi [7] και Oğuz & Prosperetti [27]. Αυτή η απλοποίηση επιτρέπει την μελέτη με μεγαλύτερη σαφήνεια των αδρανειακών όρων της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας-υγρού, οι οποίοι είναι από τους κυρίαρχους στο σύστημα για μεγάλες σχετικά διαταραχές της πίεσης. Επίσης γίνεται πιο εύκολη η συσχέτιση των αποτελεσμάτων με αυτά για τα απεριόριστα μέσα και, τέλος, επιτρέπει την εφαρμογή σε περιπτώσεις όπου το ιζώδες είναι όντως αμελητέο, όπως σε συχνότητες ταλαντώσεων τόσο μεγάλες ώστε το πάχος του ιζώδους οριακού στρώματος να είναι πολύ μικρότερο από τον αγωγό.

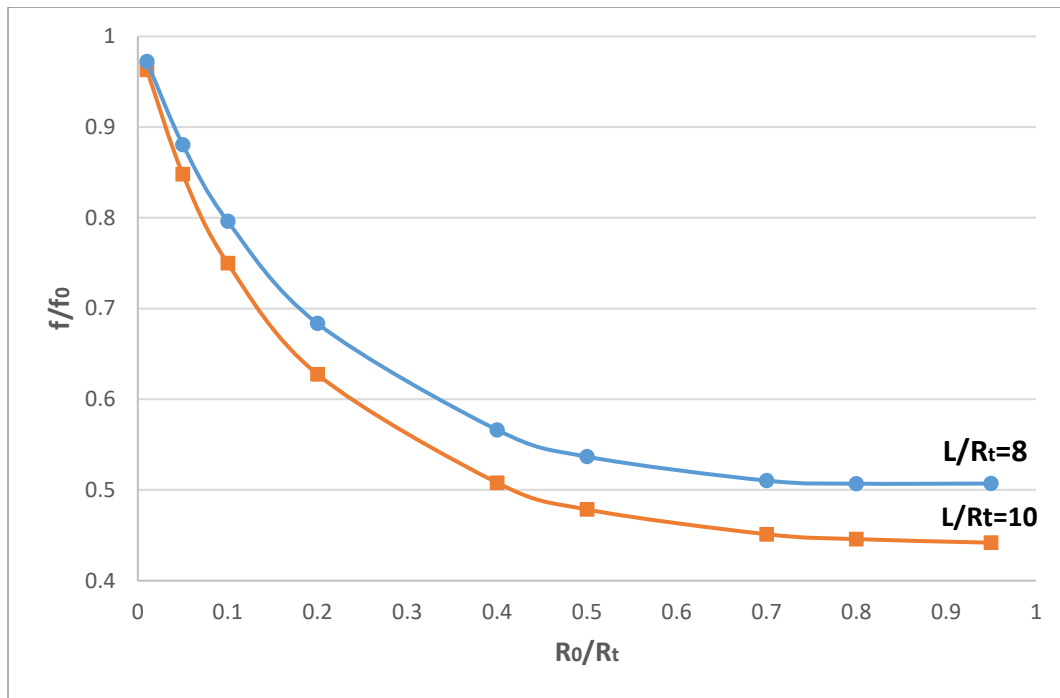


Κρίνεται δικαιολογημένη η χρήση της ανωτέρω μελέτης ως εφαλτήριο για την περαιτέρω διερεύνηση του φυσικού προβλήματος. Αυτό θα δώσει τη δυνατότητα του ελέγχου των υποθέσεων που θα γίνουν μετέπειτα. Επόμενο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι η αναπαραγωγή της συλλογιστικής που ακολουθήθηκε από τους Oğuz & Prosperetti. Χρησιμοποιώντας και πάλι τις τιμές του πίνακα 1, αμελώντας όμως το ιξώδες στην επιφάνεια, θα αναπαρασταθεί γραφικά η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας ως προς τον λόγο ακτινών  $R_0/R_t$ . Κατά τα συμπεράσματα της ενότητας 4.1, εφαρμόστηκε πλέγμα 80 σημείων στα όρια της εικόνας 15 και για λόγο  $L/R_t = 8$ . Ενδεικτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα 2.



Διάγραμμα 2 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφυσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$  ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους  $G_s=40\text{MPa}$ . Περίπτωση για λόγο  $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος

Σε αυτό το σημείο δεν είμαστε σε θέση να βγάλουμε συμπεράσματα για την μορφή της καμπύλης που προέκυψε, όσον αφορά στα ποιοτικά της στοιχεία, παρά μόνον ότι μια γενικά φθίνουσα πορεία ήταν αναμενόμενη λόγω της επίδρασης του εγκλεισμού. Μπορούμε ωστόσο να σημειώσουμε ότι ποσοτικά η προσέγγιση της μονάδας από την αριστερή πλευρά του γραφήματος είναι μία πρώτη ένδειξη ορθότητας των υπολογισμών, ενώ παράλληλα συμφωνεί με ανάλογη αριθμητική μελέτη των Oğuz & Prosperetti. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για  $L/R_t = 10$ , παίρνουμε μία δεύτερη καμπύλη στο διάγραμμα 3.



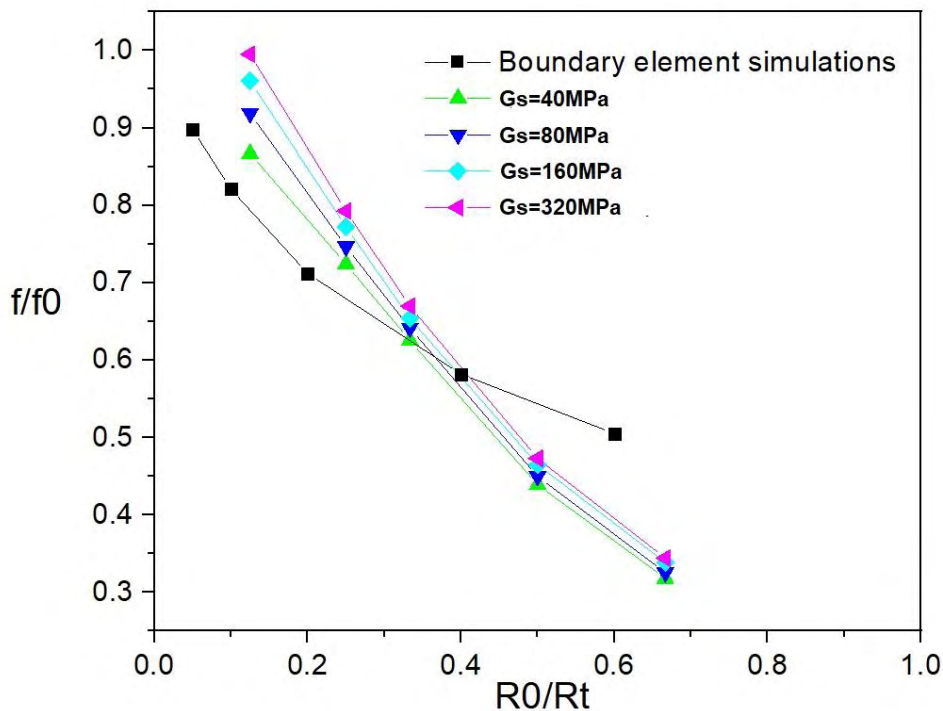
Διάγραμμα 3 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφυσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$  ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους  $G_s=40\text{MPa}$ . Αντιπαραβολή των περιπτώσεων για λόγους  $L/R_t = 8$  και  $L/R_t = 10$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος.

Από το παραπάνω διάγραμμα είναι εμφανής η επίδραση του λόγου του μήκους του αγωγού προς την ακτίνα του. Οι δύο καμπύλες έχουν κοινή αφετηρία από την τιμή 1 του κάθετου άξονα και η απόσταση μεταξύ τους μεγαλώνει καθώς πηγαίνουν προς τα δεξιά.

#### 4.4 Φαινόμενα απόσβεσης

Μία επόμενη παρατήρηση πάνω στις αριθμητικές προσεγγίσεις που ακολουθήθηκαν είναι ο μεγάλος βαθμός σύγκλισης των ολοκληρωτικών λύσεων της παρούσας εργασίας με τα αποτελέσματα που παρήχθησαν από επαναληπτική εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [26] όπου λαμβάνεται υπόψη το ιξώδες του περιβάλλοντος ρευστού. Η αντιπαραβολή τους στο διάγραμμα 4 δείχνει όμοια ποσοτικά αποτελέσματα μέχρι και λόγους  $R_0/R_t = 0.5$  με ταύτιση των αποτελεσμάτων για λόγους ακτινών γύρω στο 0.4 και ικανοποιητική σύγκλιση χαμηλότερα. Ποιοτικά, τα διαγράμματα παρουσιάζουν όμοια συμπεριφορά με την κλίση, ωστόσο, της καμπύλης των συνοριακών στοιχείων να μειώνεται πιο γρήγορα κατά μέτρο μιας και δεν λαμβάνει υπόψη την αντίσταση στην ταλάντωση της φυσαλίδας λόγω του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού που γίνεται περισσότερο αισθητή καθώς μεγαλώνει το μέγεθος της φυσαλίδας σε σχέση με την ακτίνα του

αγωγού. Πιο συγκεκριμένα για μεγαλύτερους λόγους ακτινών, οι καμπύλες απομακρύνονται με τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κοντά στο τοίχωμα να επικρατούν. Λόγω του άκαμπτου ορίου, ο σχηματισμός ιξώδους οριακού στρώματος μεταξύ της φυσαλίδας και του αγωγού θα επηρεάσει την ιδιοσυχνότητά της προσθέτοντας έναν επιπλέον παράγοντα απόσβεσης των ταλαντώσεων και αύξησης της περιόδου τους. Παράλληλα, ο μηδενικός όρος του χαρακτηριστικού πολωνύμου Legendre είναι ο κυρίαρχος σε ταλαντώσεις όγκου, δεν παύει ωστόσο η συνεισφορά των υπολοίπων στην εξέλιξη του φαινομένου, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα όπου περιγράφηκε η αριθμητική μεθοδολογία. Το γεγονός αυτό ίσως εξηγεί την διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων της παρούσας προσέγγισης και αυτών μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (βλ. παρακάτω διάγραμμα 4).

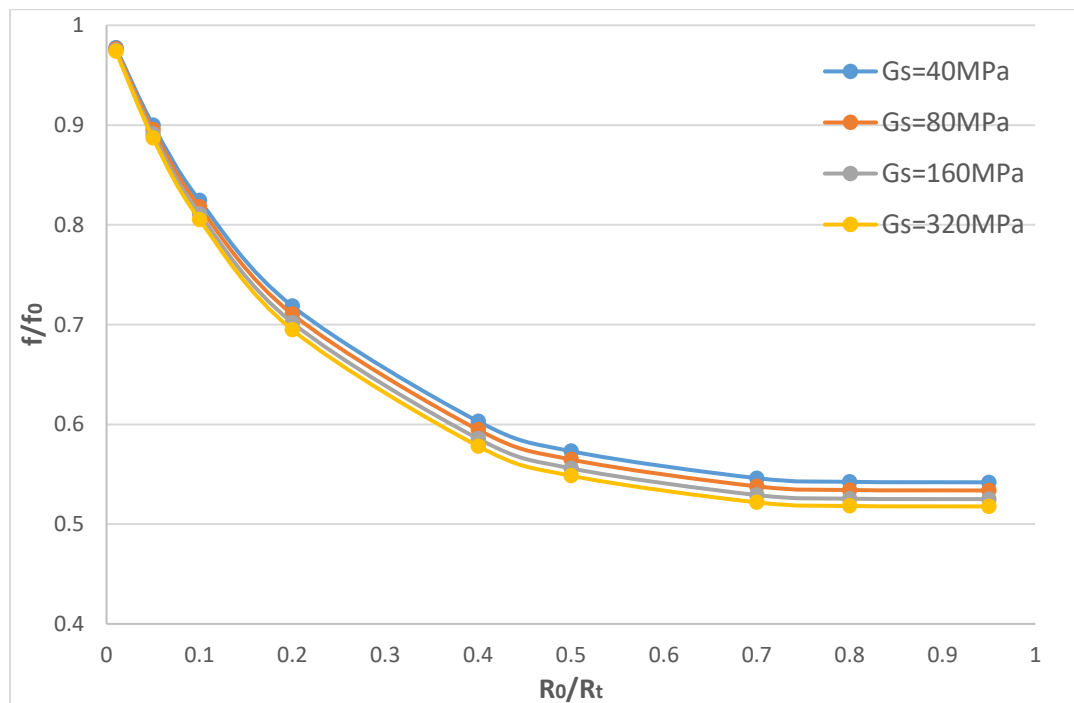


Διάγραμμα 4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας μίας φυσαλίδας μέσα σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $R_t$  ως προς το λόγο  $R_0/R_t$  με λόγο  $L/R_t = 8$  για τις μεθόδους των πεπερασμένων και των συνοριακών στοιχείων. Παρουσιάζονται καμπύλες για τέσσερις διαφορετικές τιμές του μέτρου διάτμησης για τα πεπερασμένα στοιχεία μαζί με μία μόνο χαρακτηριστική από τα συνοριακά για διασφάλιση της ευκρίνειας των αποτελεσμάτων.

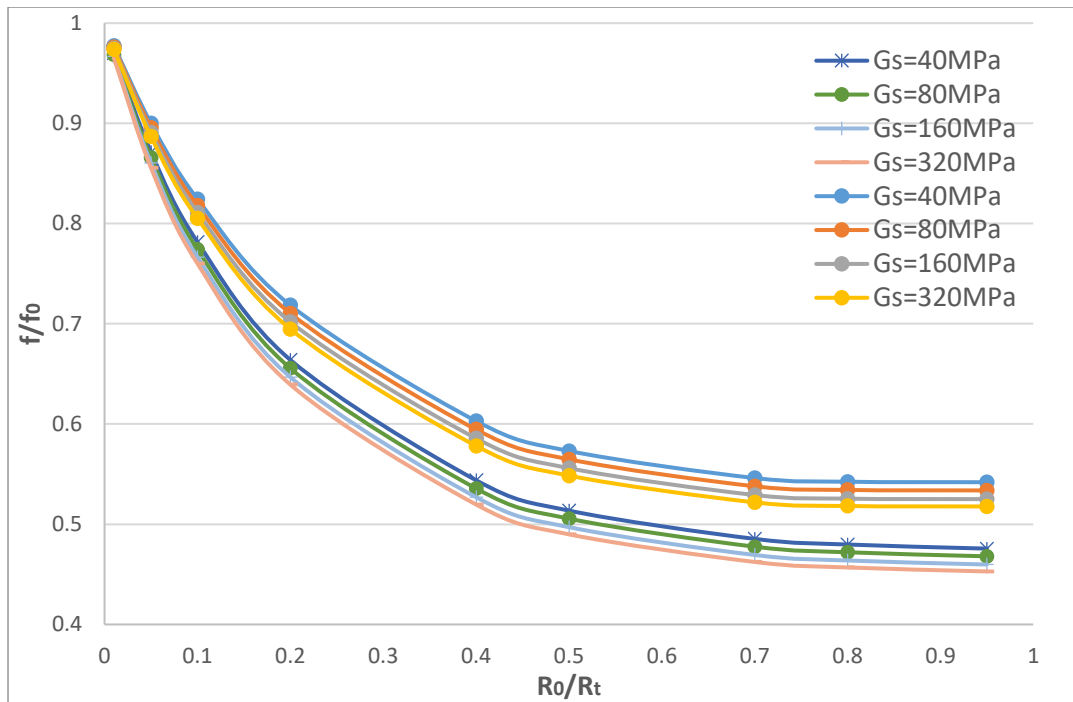
Προκειμένου να αντιμετωπίσει μερικώς τις παραπάνω εστίες αριθμητικού λάθους, η παρούσα μελέτη λαμβάνει υπόψιν και την επίδραση μη συντηρητικών δυνάμεων που αφαιρούν ενέργεια από το σύστημα, κυρίως λόγω του ιξώδους του κελύφους. Αυτό που απομένει στην μέχρι τώρα επίλυση είναι η εξέλιξη της μεθόδους ώστε να συνυπολογίζει τέτοιου είδους διεργασίες. Στις εφαρμογές που θα

ακολουθήσουν, το ιξώδες θα πάρει την χαρακτηριστική τιμή για τα λιπίδια του πίνακα 1 με τις υπόλοιπες τιμές ως έχουν. Έτσι, καθώς το σύστημα ήρθε πια στην τελική του μορφή, θα εκτελεστούν επίσης επαναλήψεις για διαφορετικές τιμές του μέτρου διάτμησης του ιξωδοελαστικού κελύφους  $G_s$ .

Τα διαγράμματα 5 και 6 δείχνουν αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για μικροφουσαλίδες λιπιδίων. Υπολογίστηκαν καμπύλες για τέσσερις τιμές του μέτρου επιφανειακής διαστολής  $\chi$ . Τα διαγράμματα δίνουν την αλλαγή στη φυσική συχνότητα ταλάντωσης της φουσαλίδας συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας της  $R_0/R_t$  για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $\chi$ . Παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο τιμές του λόγου του μήκους του αγωγού προς την ακτίνα του,  $L/R_t = 8$  (διάγραμμα 5) και  $L/R_t = 10$  (διάγραμμα 6).



Διάγραμμα 5 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$  ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , για τέσσερις διαφορετικές τιμές του μέτρου διάτμησης του κελύφους. Περίπτωση για λόγο  $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος.

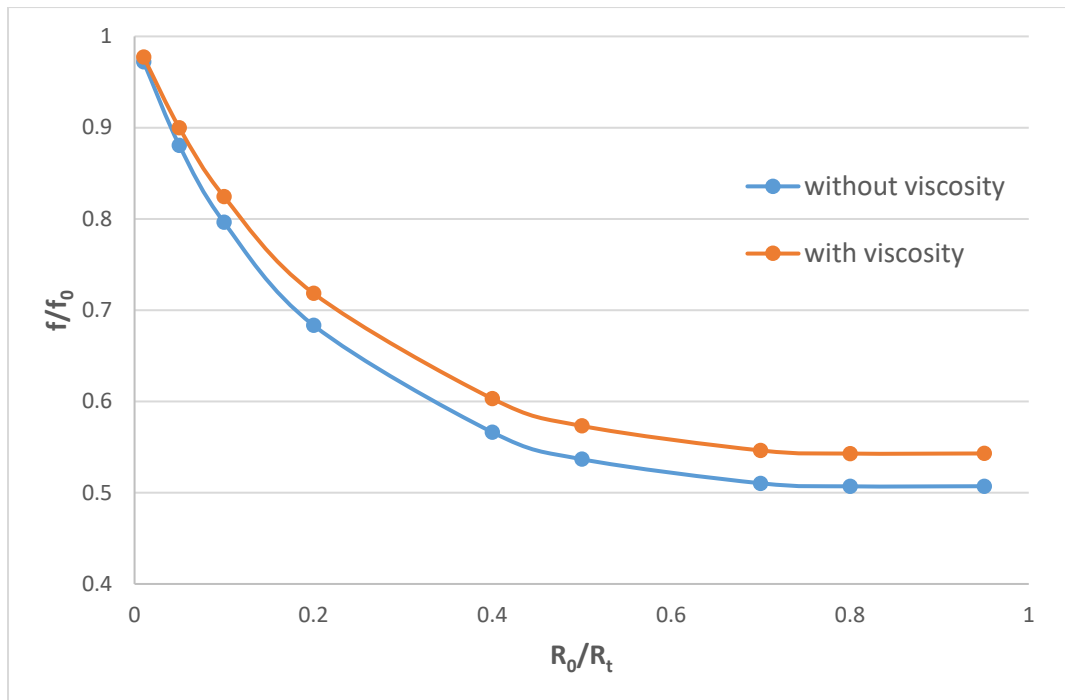


Διάγραμμα 6 Προσθήκη της περίπτωσης για λόγο  $L/R_t = 10$  στο διάγραμμα 5. Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος

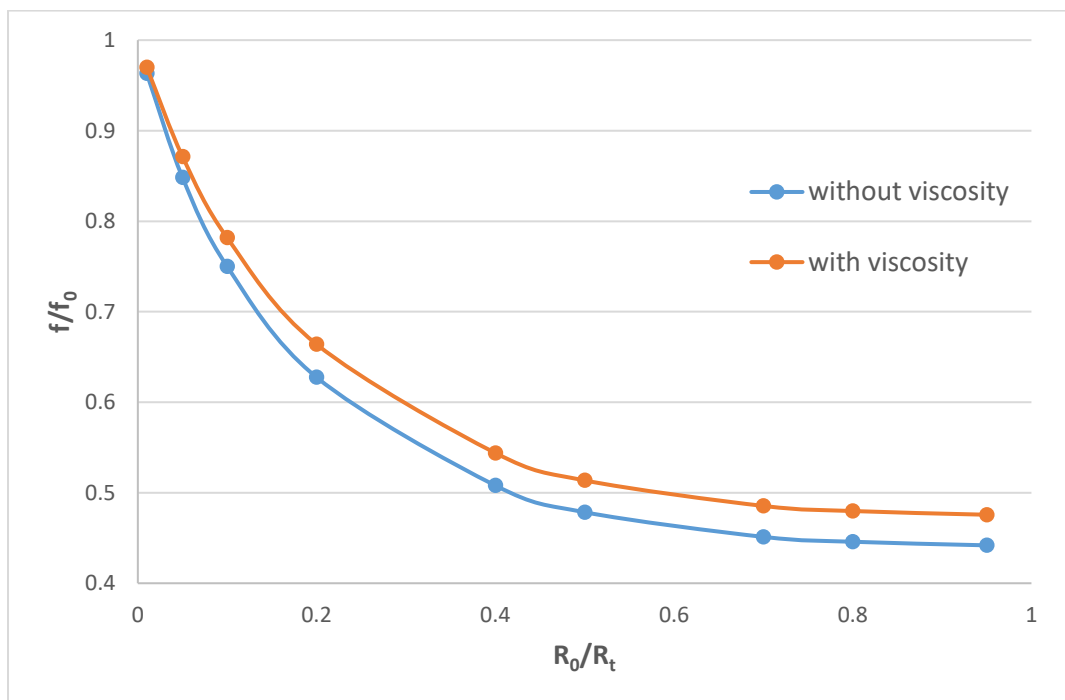
Το πρώτο εμφανές συμπέρασμα που εξάγεται από τα παραπάνω είναι ότι η επίδραση του αγωγού μπορεί να είναι μεγάλη. Από τα διάγραμμα 5 και 6, παρατηρούμε ότι μία φυσαλίδα πολύ μικρής ακτίνας ( $R_0/R_t \rightarrow 0$ ) ταλαντώνεται χωρίς να επηρεάζεται από τα τοιχώματα  $f/f_0 \cong 1$ . Ωστόσο η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας πέφτει αρχικά με πολύ γρήγορο ρυθμό, καθώς οι συναρτήσεις στρέφουν τα κοίλα προς τα άνω, και σταθεροποιείται στη συνέχεια γύρω από κάποια τιμή (περίπου στο μισό αυτής για απομονωμένη φυσαλίδα). Έτσι, για την πρώτη αύξηση κατά 10% της ακτίνας της φυσαλίδας παρατηρείται μία μείωση της ιδιοσυχνότητας κατά 20% τουλάχιστον. Για την επόμενη αύξηση 10% στην ακτίνα, η μείωση στην ιδιοσυχνότητα γίνεται περίπου 10% και συνεχίζει να πέφτει ο ρυθμός μέχρι το σημείο  $R_0/R_t = 0.7$ , όπου ουσιαστικά σταματά να μεταβάλλεται.

Από την άλλη, το μέτρο επιφανειακής διαστολής του ιξωδοελαστικού κελύφους φαίνεται να παίζει και εδώ (όπως και στις καμπύλες των πεπερασμένων στοιχείων του διαγράμματος 4) αμελητέο ρόλο στη μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας. Παρατηρούνται μικρές μεταβολές του λόγου των συχνοτήτων σε μεταβολή του μέτρου διάτμησης.

Η επίδραση της προσθήκης ιξώδους στην ατριβή προσέγγιση των H. N. Oğuz & A. Prosperetti, φαίνεται στα διαγράμματα 7-9 στα οποία αντιπαραβάλλονται τα αποτελέσματα από τις συνήθεις καμπύλες ιδιοσυχνοτήτων.

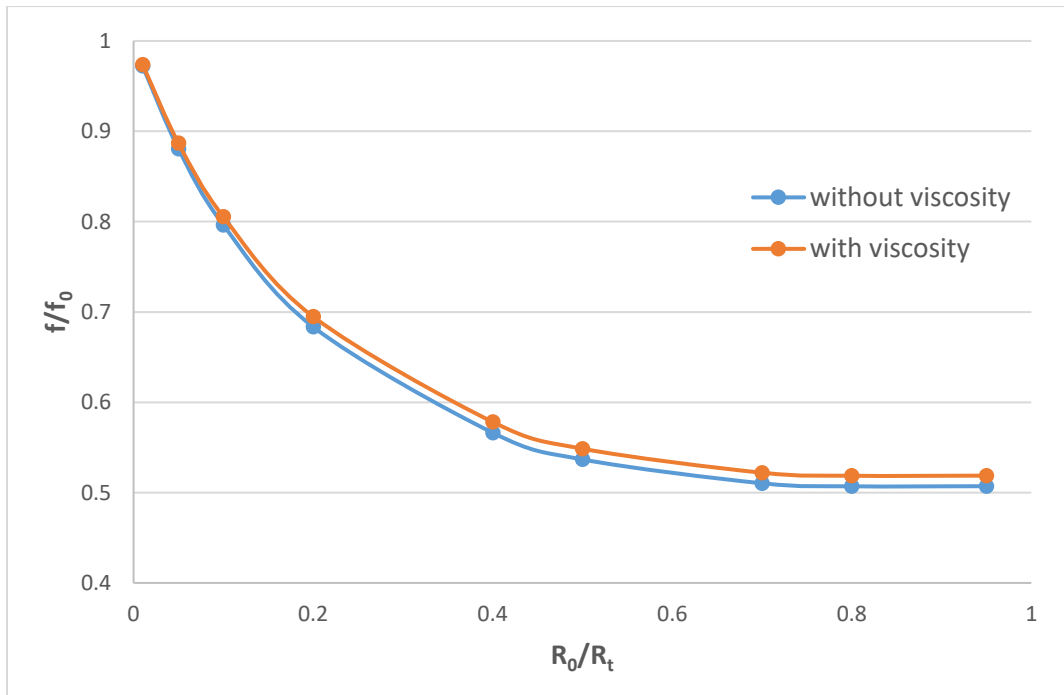


Διάγραμμα 7 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους  $G_s=40\text{MPa}$ . Περίπτωση της εικόνας για λόγο  $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος.



Διάγραμμα 8 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους  $G_s=40\text{MPa}$ . Περίπτωση της εικόνας για λόγο  $L/R_t = 10$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος.

Από τα διαγράμματα 7, 8 συμπεραίνεται ότι η εισαγωγή ιξώδους στο κέλυφος της μικροφουσαλίδας επιφέρει, πράγματι, διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων. Η απόσταση μεταξύ καμπύλων σε αυτά αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο λόγος ακτινών στο βαθμό που αυτός επηρεάζει τον λόγο  $\langle \Phi_z \rangle / \Phi_0$ . Παρατηρώντας ότι οι καμπύλες έχουν κοινή αρχή, η διαφοροποίηση τους στη συνέχεια αποκαλύπτει ότι η ιξωδοελαστική επιφάνεια επιδρά με το τοίχωμα του αγωγού καθυστερώντας την πτώση της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης.



Διάγραμμα 9 Η ιδιοσυχνότητα μίας μικροφουσαλίδας λιπιδίου που βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού αγωγού ακτίνας  $R_t$ , για τις προσεγγίσεις ιξώδους και ατριβούς ροής, ως προς το λόγο  $R_0/R_t$ , με μέτρο διάτμησης του κελύφους  $G_s=320\text{MPa}$ . Περίπτωση της εικόνας για λόγο  $L/R_t = 8$ . Αριθμός στοιχείων: 80. Χρόνος χρήσης επεξεργαστή: 0,48 sec/σημείο γραφήματος.

Από την περίπτωση του διαγράμματος 9 παρατηρείται αρχικά η μείωση της απόστασης μεταξύ των δύο καμπύλων σε σχέση με το διάγραμμα 7. Αναγνωρίζοντας ότι η καμπύλη για την ατριβή περίπτωση παρέμεινε η ίδια, η αύξηση του μέτρου διάτμησης οδηγεί σε μείωση της ιδιοσυχνότητας της μικροφουσαλίδας κατά την ύπαρξη τριβών στη ροή. Σε περαιτέρω αύξηση του μέτρου διάτμησης η καμπύλη της ιξώδους περίπτωσης θα συνεχίσει να πλησιάζει ασυμπτωτικά την ατριβή.

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, οι αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού βρίσκουν εφαρμογή σε καίριους τομείς της σύγχρονης τεχνολογίας. Ωστόσο, φυσικά προβλήματα προσεγγίστηκαν αριθμητικά πολύ πριν την ανάπτυξη των πρώτων υπολογιστών. Η εκτενής θεωρία που υπήρχε επάνω στις προσεγγιστικές μεθόδους βρήκε πρόσφορο έδαφος προς εφαρμογή στα ψηφιακά μέσα που ανακαλύφθηκαν ήδη από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα. Μέσα σε αυτό το περιβάλλον, η μελέτη της συμπεριφοράς των μικροφουσαλίδων έχει απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα εκτενώς, λόγω της πληθώρας των φαινομένων που σχετίζονται με αυτήν.

Οι διαθέσιμες αριθμητικές τεχνικές διαφέρουν ως προς την ακρίβεια και την ταχύτητά τους. Τα οριακά στοιχεία, με τα οποία ασχοληθήκαμε, βασίζονται στον ισχυρισμό ότι η κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να γίνει γνωστή παρακολουθώντας μόνο το όριο του με το περιβάλλον και τη ροή ποσοτήτων που γίνεται διαμέσου αυτού. Αυτό έρχεται ως απόρροια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss και επιτυγχάνει τη μείωση των διαστάσεων του προβλήματος κατά μία, ελαττώνοντας έτσι τους απαιτούμενους υπολογιστικούς πόρους.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε ο τρόπος προσέγγισης προβλημάτων ροής δυναμικού, μια οικογένεια στην οποία ανήκει και η ταλάντωση των φουσαλίδων. Για την ασυμπίεστη ροή στον αγωγό, το δυναμικό πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Αρχικά περιγράφηκε το πρόβλημα σε διαφορική μορφή και στη συνέχεια έγινε η μετατροπή του σε ολοκληρωτική μέσω της άμεσης μεθόδου και της τρίτης ταυτότητας Green. Σε αυτήν την εξίσωση Fredholm 1<sup>ου</sup> είδους, οι πυρήνες  $\hat{G}$  και  $\partial\hat{G}/\partial n$  παρουσίαζαν ιδιομορφίες κατά την ταύτιση των σημείων πεδίου και πηγής. Το ολοκλήρωμα του πρώτου είναι ασθενώς ιδιόμορφο και μπορεί να υπολογιστεί χωρίς δυσκολία είτε αριθμητικά ή αναλυτικά. Η ισχυρή ιδιομορφία του δεύτερου μεταχειρίστηκε σύμφωνα με τον τρόπο της ενότητας 2.3 και εξασφάλισε τη διαγώνια υπεροχή του πίνακα του συστήματος μετατρέποντάς τον έτσι σε καλά ορισμένο. Οι εξισώσεις δυναμικού αναπτύχθηκαν για κάθε μία εκ των τεσσάρων επιφανειών του αξονοσυμμετρικού προβλήματος και τα δύο σημεία ένωσης μετά από εξομάλυνση των ολοκληρωμάτων κύριας τιμής Cauchy.

Παράλληλα, για την εύρεση της συχνότητας ταλάντωσης της φουσαλίδας, οι εξισώσεις κίνησης της ενότητας 2.4 παρουσιάστηκαν στο όριο ατριβούς ροής μέσω της συνάρτησης δυναμικού ταχύτητας και στο όριο μικρών διαταραχών εξήχθη η γραμμικοποιημένη περιγραφή του προβλήματος όπου η κινηματική συνθήκη και το ισοζύγιο κάθετων τάσεων υλοποιούνται στην επιφάνεια σφαίρας. Το κέλυφος της φουσαλίδας μοντελοποιήθηκε ως ιξωδοελαστικό υλικό αμελητέου πάχους ως προς



την ακτίνα της μικροφυσαλίδας, με απόκριση στις εξωτερικές δυνάμεις κατά την περιγραφή Mooney-Rivlin, ώστε να προσεγγιστεί ακριβέστερα το φυσικό πρόβλημα. Κάνοντας χρήση απλοποιητικών παραδοχών σχετικά με την ιδιομορφή ταλαντώσεων όγκου βρέθηκε η σχέση (60) που δίνει την μεταβολή της ιδιοσυχνότητας για ταλαντώσεις όγκου με την μεταβολή του λόγου ακτινών μικροφυσαλίδας και αγωγού.

Στο κεφάλαιο 3 συνεχίστηκε η μετατροπή των ολοκληρωτικών εξισώσεων δυναμικού του κεφαλαίου 2 σε μορφή ικανή προς επίλυση με υπολογιστή. Εφαρμόστηκε η τεχνική Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων με συναρτήσεις βάσεις τις κυβικές B-splines, για τη μετατροπή των κινηματικών και δυναμικών συνοριακών συνθηκών από διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις αρχικών τιμών μόνο. Τέλος, συμπεριλήφθηκαν οι συνοριακές συνθήκες στο μέχρι τότε σύστημα εξισώσεων και αυτές, ως άθροισμα σταθερών συντελεστών πια, σχημάτισαν τον (καλά ορισμένο με διαγώνια υπεροχή) πίνακα του συστήματος.

Μία πρώτη παραμετρική μελέτη διεξήχθη στο κεφάλαιο 4 για την εύρεση του δυναμικού του κελύφους ως προς τον λόγο ακτινών της φυσαλίδας και του αγωγού και ως προς τον λόγο του μήκους του αγωγού προς την ακτίνα του ( $L/R_t$ ). Τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν σε μία δεύτερη παραμετρική μελέτη, αυτήν τη φορά για την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας με επιπλέον μεταβαλλόμενες ποσότητες τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος και συγκεκριμένα το μέτρο επιφανειακής διαστολής και το ιξώδες του κελύφους. Από αυτά, εξήχθησαν συμπεράσματα που φανερώνουν την επίδραση του εγκλεισμού και των φυσικών χαρακτηριστικών στην μείωση της φυσικής συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος με την αύξηση του σχετικού μεγέθους της φυσαλίδας, σε συμφωνία και με υπολογισμούς από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στον βαθμό που το μέγεθος της μικροφυσαλίδας δεν γίνεται συγκρίσιμο με την ακτίνα του αγωγού.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. I. FREDHOLM, *Acta Math.* 27, 365 (1903)
2. E. Roedder, R.J. Bodnar, Geologic pressure determinations from fluid inclusion studies, *Annu. Rev. Earth Planet Sci.* 8 (1980) 263–301.
3. D. Or, M. Tuller, Cavitation during desaturation of porous media under tension, *Water Resour. Res.* 38 (5) (2002) 1061.
4. M.T. Tyree, J.S. Sperry, Vulnerability of xylem to cavitation and embolism, *Annu. Rev. Plant Physiol. Plant Mol. Biol.* 40 (1989) 19–36.
5. C. Drysdale, A.A. Doinikov, P. Marmottant, Radiation dynamics of a cavitation bubble in a liquid-filled cavity surrounded by an elastic solid, *Phys. Rev. E* 95 (5) (2017) 053104.
6. N. A. Pelekasis and J. A. Tsamopoulos, *J. Fluid Mech.* (1993), vol. 254, pp. 467-527
7. Kostas Tsiglifis and Nikos A. Pelekasis, *Physics of Fluids* 23, 012102 (2011)
8. Brebbia, C. A., and Connor, J. J., *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, Butterworths, London, 1973.
9. Connor, J. J., and Brebbia, C. A., *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworths, London, 1976.
10. Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1953.
11. Kupradze, O. D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Daniel Davey & Co., New York, 1965.
12. Cruse, T. A, and Rizzo, F. 1., A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem, I, *J. Math. Anal. Appl.* 22, 244- 259 (1968).
13. Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1929.
14. Sternberg, W. J., and Smith, T. L., *The Theory of Potential and Spherical Harmonics*, University of Toronto Press, Toronto, 1944.
15. P. K. Banerjee, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, 1994
16. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, *Boundary Elements Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984

17. P. L. Marston and R. E. Apfel, *J. Colloid Interface Sci.* 68, 280 (1979)
18. M. C. Lee, I. A. Feng, D. D. Elleman, T. G. Wang, and A. T. Young, in *Proceedings Second International Colloquium on Drops and Bubbles*, edited D. H. Le Croisette (Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, (1982), p. 107.
19. E. Trinh, A. Zwern, and T. G. Wang, *J. Fluid Mech.* 115, 453 (1982).
20. J. R. Carruthers and L. R. Testardi, *Ann. Rev. Mater. Sci.* 13, 247 (1983).
21. J. W. S. Rayleigh, *Proc. R. Soc. London* 29, 71 (1879).
22. J. A. Tsamopoulos and R. A. Brown, *Phys. Fluids* 30, 27 (1987).
23. J. A. Tsamopoulos and R. A. Brown, *J. Fluid Mech.* 127, 519 (1983).
24. G. R. Baker and M. J. Shelley, *J. Comput. Phys.* 64, 112 (1986).
25. Prenter P. M., “*Splines and Variational Methods*”, Wiley-Interscience publications, (1975).
26. Βλαχομήτρου Μ. και Πελεκάσης Ν. Αλληλεπίδραση μικροφουσαλίδας με ελαστική επίστρωση με γειτονικό τοίχωμα – Επίδραση ακουστικών, ιξωδοελαστικών και διαμοριακών δυνάμεων, 2η Αναφορά Προόδου στο πλαίσιο ερευνητικού προγράμματος χρηματοδοτούμενου από το «ΙΔΡΥΜΑ ΣΤΑΥΡΟΣ ΝΙΑΡΧΟΣ».
27. H. N. Oğuz and A. Prosperetti: Oscillation of gas bubbles in tubes, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 103, No. 6, June 1998.
28. M. A. Jaswon and G. T. Symm, *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press Inc (London) Ltd, 1977