ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ: ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΑΡΤΙΔΑΣ

υπό

ΚΩΦΟΥ ΑΓΓΕΛΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Λυμπερόπουλος Γεώργιος

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού
Βόλος, Ιούνιος, 2018

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής: Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος

(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής: Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής: Δρ. Γεώργιος Σαχαρίδης

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τους ανθρώπους που με άμεσο ή με έμμεσο τρόπο συνέβαλλαν στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο, για την πολύτιμη βοήθεια του, την καθοδήγησή του, την υπομονή του και τον χρόνο που αφιέρωσε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Γεώργιο Κοζανίδη και κ. Γεώργιο Σαχαρίδη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω από τα βάθη της ψυχής μου τους γονείς μου, Στέργιο και Μαρία για την αμέριστη υποστήριξη, ηθική και υλική, αλλά και την αγάπη που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και συνεχίζουν να μου παρέχουν. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την αδελφή μου, Σταυρούλα για τη συμπαράσταση που μου έχει προσφέρει και συνεχίζει να μου προσφέρει, ενώ παράλληλα μέσα από τις επιτυχίες της μου ανοίγει νέους ορίζοντες και μου δίνει κίνητρα για να συνεχίσω την προσπάθεια μου. Αφιερώνω την παρούσα διπλωματική εργασία στην οικογένεια μου.

Κωφός Άγγελος

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΑΡΤΙΔΑΣ

ΚΩΦΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2018

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος, Καθηγητής

Περίληψη :

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί το πρόβλημα μεγέθους παρτίδας υπό στοχαστική ζήτηση. Στόχος του συγκεκριμένου ζητήματος είναι να εξασφαλίσει το βέλτιστο συνδυασμό μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, απαντώντας αποτελεσματικά σε δύο ερωτήματα: Ποιο πρέπει να είναι το μέγεθος της παρτίδας παραγωγής και ποια χρονική στιγμή πρέπει να παραγάγουμε. Παράλληλα η λήψη των παραπάνω αποφάσεων πρέπει να συνδράμει στην επίτευξη των οικονομικών στόχων μιας επιχείρησης.

Ωστόσο, μια επιχείρηση τίθεται αντιμέτωπη με ορισμένες δυσκολίες στην προσπάθεια της να αναπτύξει αποτελεσματικά τον σχεδιασμό της παραγωγής. Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι ποσότητες παραγωγής είναι αποτέλεσμα της έκφρασης των ζητήσεων, οι οποίες με την πάροδο του χρόνου ποικίλουν. Για την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας εφαρμόζουμε δύο στρατηγικές παραγωγής, την Στατική και την Στατική-Δυναμική. Η διαφορά τους υπόκειται στο γεγονός πως η πρώτη θεωρεί σταθερές ποσότητες παραγωγής, ενώ η δεύτερη μεταβλητές. Οι περίοδοι εγκατάστασης της παράγωγης και στις δύο καθορίζονται εκ' των προτέρων. Επιπλέον σε κάθε στρατηγική επιβάλουμε δύο κριτήρια μέτρησης της απόδοσης, τα όποια εφαρμόζονται στις ανεκπλήρωτες ζητήσεις, το «penalty cost» και το «β_c service level». Η μεθοδολογία με την επιβολή του περιορισμού «β_c service level» μελετάται και για την περίπτωση όπου έχουμε πολλαπλά προϊόντα και έναν πόρο με περιορισμένη χωρητικότητα. Τέλος τα παραπάνω προβλήματα επιλύονται με τη συμβολή του προγράμματος MATLAB.

Περιεχόμενα:

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή

1.1. Θεωρητικό Υπόβαθρο

Ο προγραμματισμός της παραγωγής καλείται να απαντήσει αποτελεσματικά σε δύο κομβικά ερωτήματα : πότε και ποια ποσότητα πρέπει να παραγάγουμε προκείμενου να επιτευχθεί ο βέλτιστος συνδυασμός προσφοράς και ζήτησης, ελαχιστοποιώντας παράλληλα το συνολικό κόστος.

Η παραπάνω ενέργεια αποτελεί μία από τις σημαντικότερες λειτουργίες που οφείλει να αναπτύξει μια παραγωγική μονάδα προκείμενου να εξασφαλίσει την βιωσιμότητα της σε βάθος χρόνου. Ως προγραμματισμό λοιπόν ορίζουμε τον σχεδιασμό απόκτησης πόρων και πρώτων υλών, καθώς και την οργάνωση των παραγωγικών δραστηριοτήτων που απαιτούνται για τη μετατροπή των πρώτων υλών σε τελικά προϊόντα, ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση των πελατών για έναν συγκεκριμένο αριθμό χρονικών περιόδων, ενός ορίζοντα, με τον πιο αποτελεσματικό ή οικονομικό τρόπο. Στο βιομηχανικό περιβάλλον, τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν σε αυτό το πεδίο αφορούν τη λήψη αποφάσεων σχετικά με:

- το μέγεθος των παρτίδων των διαφόρων προϊόντων που πρόκειται να παραχθούν ή να επεξεργαστούν,
- το χρόνο στον οποίο πρέπει να παραχθούν οι παρτίδες,
- το μηχάνημα ή την εγκατάσταση στην οποία πρέπει να πραγματοποιηθεί η παραγωγή,
- την αλληλουχία των παρτίδων παραγωγής.

Στόχος του σχεδιασμού παραγωγής είναι επομένως η λήψη αποφάσεων που να βελτιστοποιούν τη σχέση μεταξύ οικονομικών στόχων, όπως η ελαχιστοποίηση του κόστους ή η μεγιστοποίηση της συμβολής στην κερδοφορία και ο λιγότερο απτός στόχος της ικανοποίησης των πελατών. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, τα συστήματα παραγωγής γίνονται ολοένα και πιο εξελιγμένα με στόχο να αυξήσουν τόσο την παραγωγικότητα όσο και την ευελιξία των παραγωγικών διαδικασιών.

Ωστόσο ο προγραμματισμός τίθεται αντιμέτωπος με ορισμένες δυσκολίες στην προσπάθεια του να αναπτυχθεί αποτελεσματικά. Ο λόγος είναι ότι οι ποσότητες παραγωγής είναι αποτέλεσμα της έκφρασης των ζητήσεων, οι όποιες με την πάροδο του χρόνου ποικίλουν. Επομένως απαιτείται μια διαρκής προσπάθεια προσαρμογής στα νέα δεδομένα, καθώς η επιχείρηση καλείται σε πραγματικό χρόνο να λάβει τις κατάλληλες αποφάσεις προκείμενου να αντισταθμίσει την αβεβαιότητα της. Συνεπώς, η ανάγκη για ταχεία απόκριση στις αλλαγές της ζήτησης από την αγορά ή τον πελάτη προσφέρουν τα κίνητρα για την δημιουργία κατάλληλων μοντέλων σχεδιασμού παραγωγής που να μπορούν να αντιπροσωπεύουν και να εκμεταλλεύονται την ευελιξία της παραγωγικής διαδικασίας, χωρίς να χάνουν τη συνολική παραγωγικότητα.[5]

Η απόφαση συνεπώς που καλείται να πάρει ένας οργανισμός σχετικά με το πώς θα αντιδράσει στην έκβαση των ζητήσεων κρίνεται υψίστης σημασίας. Στην πραγματική ζωή προκείμενου να ξεκινήσει η παραγωγική διαδικασία θα πρέπει προηγουμένως να ολοκληρωθεί η ρύθμιση των πόρων που απαιτούνται (setup), η οποία προϋποθέτει χρόνο αλλά και κόστος για την εγκατάσταση. Κατά συνέπεια η επιχείρηση είναι αναγκασμένη να προχωρήσει στην πρόβλεψη των ζητήσεων προκείμενου να εξοικονομήσει setup. Η εμφάνιση των ζητήσεων στην επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να έχει δύο μορφές την ντετερμινιστική και την στοχαστική. Κατά την ντετερμινιστική, η ζήτηση θεωρείται γνωστή και σταθερή ποσότητα, σε αντίθεση με την στοχαστική οπού μεταβάλλεται. Στην πρώτη περίπτωση οδηγούμαστε στην δημιουργία σχεδίων παραγωγής οπού δεν ανταποκρίνονται στις πραγματικές διακυμάνσεις της ζήτησης σε κάθε χρονική περίοδο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην απουσία ανατροφοδότησης πρόβλεψης σφάλματος. Επομένως λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, στον επιχειρησιακό σχεδιασμό παραγωγής αποκτούν ιδιαίτερη εφαρμογή τα δυναμικά μοντέλα μεγέθους παρτίδας κατά τα οποία οι ζητήσεις και οι ποσότητες παραγωγής ποικίλουν ανάλογα με την χρονική περίοδο.

Στην πλειονότητα της βιβλιογραφίας το πρόβλημα του μεγέθους παρτίδας αντιμετωπίζεται για την περίπτωση όπου όλα τα δεδομένα είναι γνωστά εκ' των προτέρων. Αντίθετα στην πράξη μια βιομηχανία εφαρμόζει συνήθως μια διαδικασία πρόβλεψης δημιουργώντας μια ντετερμινιστική χρονοσειρά των αναμενόμενων μελλοντικών ζητήσεων. Η αβεβαιότητα λαμβάνεται υπόψη διατηρώντας ένα ποσό αποθέματος ασφαλείας. Επομένως η διαχείριση των αποθεμάτων αναδεικνύεται ως ακόμα μια από τις σημαντικές λειτουργίες σε ένα παραγωγικό σύστημα. Εάν η ζήτηση ήταν γνωστή τότε η επιχείρηση θα μπορούσε να παραγάγει ακριβώς την ποσότητα που αντιστοιχεί . Ωστόσο τώρα με τη διατήρηση αποθεμάτων, της δίνεται η δυνατότητα να αποσυνδέσει το παραγωγικό σύστημα από τη ζήτηση και να αντιμετωπίσει τις παρουσιαζόμενες διαφορές μεταξύ προσφοράς και ζήτησης. Το ποσό αυτό υπολογίζεται κατά κύριο λόγο με την εφαρμογή κανόνων δανεισμένων από την θεωρία του σταθερού αποθέματος (π.χ. η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά της διάρκεια της επικίνδυνης περιόδου πολλαπλασιάζεται με μία ποσότητα της τυπικής κανονικής κατανομής). Ωστόσο με αυτό τον τρόπο είναι σχεδόν αδύνατο να επιτευχθεί ο στόχος εξυπηρέτησης της επιχείρησης. Παράλληλα η χρησιμοποίηση αποθεμάτων ασφαλείας ανεξάρτητα από το χρόνο υπό δυναμικές συνθήκες εγκυμονεί τον κίνδυνο κατά τη διάρκεια του χρόνου υστέρησης η ζήτηση να ξεπεράσει την ποσότητα του αποθέματος και να βρεθεί η επιχείρηση σε έλλειψη. Το αποτέλεσμα αυτό θα εκθέσει την μονάδα και θα την επιβαρύνει με σημαντικές κυρώσεις κόστους (penalty cost). [4]

1.2. Επιχειρησιακή Έρευνα

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μέρος της Επιχειρησιακής Έρευνας, επομένως κρίνεται σημαντικό να παραθέσουμε τον ορισμό της.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Research) είναι ο κλάδος της επιστήμης με αντικείμενο την εύρεση λύσεων με σκοπό την λήψη αποφάσεων. Οι λύσεις αυτές κατά κανόνα είναι «βέλτιστες» ως προς τα δεδομένα του προβλήματος, συνήθη δε παραδείγματα της αποτελούν: η βέλτιστη κατανομή πόρων και οι βέλτιστες μεταφορές π.χ. επιλογή τροφών για σίτιση του στρατού με ελάχιστο κόστος. Το βέλτιστο της λύσης ορίζεται ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια όπως ελάχιστο κόστος, μέγιστη ευστάθεια, ελάχιστος χρόνος αναμονής ή διεκπεραίωσης, συνδυασμός κέρδους με ρίσκο κτλ. Συχνά στις εφαρμογές, τα δεδομένα του προβλήματος είναι ελλιπή και οι "βέλτιστες" αποφάσεις λαμβάνονται υπό συνθήκη αβεβαιότητας.

Η χαρακτηριστική διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι:

1. Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος.
2. Η αξιοποίηση της δομής του μαθηματικού μοντέλου για επινόηση κατάλληλων αλγορίθμων βελτιστοποίησης.
3. Η αριθμητική λύση με τη χρήση υπολογιστή.

1.3. Ιστορική Αναδρομή

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως η Επιχειρησιακή Έρευνα εμφανίστηκε τα πρώτα χρόνια του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου. Κατά τη διάρκεια του πολέμου οι Άγγλοι, οι Σοβιετικοί και οι Αμερικανοί, επινόησαν μαθηματικούς τρόπους προκείμενου να λάβουν βέλτιστες αποφάσεις σχετικά με πρόβλεψη κινήσεων εχθρικών υποβρυχίων, την διαχείριση πληροφοριών από ραντάρ, βέλτιστης κατανομής πόρων κ.τ.λ.. Από τις τότε στρατιωτικές επιχειρήσεις καθιερώθηκε και ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα. Στην συνέχεια ο κλάδος αξιοποιήθηκε από εταιρίες, βιομηχανίες, εργοστάσια, κυβερνήσεις και επιχειρήσεις όλων των ειδών. Από τον 19^{ο} αιώνα μέχρι σήμερα παρατηρείται μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη η οποία ευνοήθηκε από την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών οπού καθιστούν δυνατή την παροχή πληθώρας πληροφοριών.[1]

Συγκεκριμένα η έρευνα σχετικά με το μέγεθος των παρτίδων παραγωγής χρονολογείται από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα και έχει διατυπωθεί ένας μεγάλος αριθμός διαφορετικών προβλημάτων, ενώ παράλληλα έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες προσεγγίσεις μοντελοποίησης. Αρχικά ο Scarf το 1960 παρουσίασε τη βέλτιστη λύση των πολιτικών τύπου (s, S), ο υπολογισμός των σταθερών βέλτιστων παραμέτρων της (s, S) πολιτικής διερευνήθηκε στη συνέχεια από τους Veinott και Wagner το 1965. Ωστόσο παρόλο που η μορφή της βέλτιστης πολιτικής ήταν γνώστη εδώ και πολύ καιρό, ο υπολογισμός των μη σταθερών παραμέτρων πολιτικής (s, S) εξακολουθούσε να παραμένει ένας υπολογιστικός στόχος. Αργότερα το 1985 ο Askin πρότεινε μια μέθοδο για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, η οποία ήταν μια επέκταση του κλασικού αλγορίθμου Silver-Meal [1973] σε μία στοχαστική εκδοχή. Στη συνέχεια οι Bookbinder και Tan εισήγαγαν ένα πλαίσιο που περιελάμβανε τρία είδη πολιτικών στατική αβεβαιότητα, στατική δυναμική αβεβαιότητα και δυναμική αβεβαιότητα, και προκάλεσαν μια σειρά από συνεχείς εργασίες, όπως των Sox [1997], Vargas [2009] που επικεντρώθηκαν στην πολιτική στατικής αβεβαιότητας. Αντίθετα οι Tarim και Kingsman [2006], και Rossi et al. [2012] εστίασαν στη στρατηγική στατικής δυναμικής αβεβαιότητας[2].

Επίσης ο Zipkin (2000) περιέγραψε κάποιες πολιτικές που χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη, όπως το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας, όπου η ζήτηση είναι σταθερή με την πάροδο του χρόνου, και το μοντέλο δυναμικής οικονομικής ποσότητας που ενσωματώνει χρονικά μεταβαλλόμενες ζητήσεις για μεμονωμένες εγκαταστάσεις. Βέβαια, και στις δύο περιπτώσεις, η ζήτηση θεωρείται πως δεν υπόκειται σε αβεβαιότητα.

Επιπλέον από τις έρευνες που αναφέραμε εμφανίστηκαν στην βιβλιογραφία και αρκετές παραλλαγές του προβλήματος, όπως οι περιορισμοί «service level». Οι Tempelmeier και Derstroff το 1996 πρότειναν μια ευρετική προσέγγιση για την επιλογή του μεγέθους παρτίδας στο δυναμικό πολυεπίπεδο και στο πρόβλημα πολλαπλών προϊόντων, όπου υπήρχαν πολλαπλοί αλλά περιορισμένοι πόροι, καθώς και χρόνοι στησίματος. Επομένως το πρόβλημα της περιορισμένης δυναμικότητας με την συνδρομή της χαλάρωσης Lagrange αποσυντέθηκε σε αρκετά προβλήματα ενός μόνο προϊόντος και απεριόριστης δυναμικότητας από τη λύση των οποίων προκύπτουν κατώτατα όρια για την αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης του κόστους. Σε μία μεταγενέστερη του μελέτη ο Tempelmeier (1997) πρότεινε μια προσέγγιση περιορισμένων πόρων για την επιλογή μεγέθους παρτίδας κατά τον προγραμματισμό απαιτούμενων υλικών (MRP), όπου υπάρχει συνεργασία μεταξύ του πρότυπου σχεδιασμού παραγωγής και των συστημάτων ελέγχου. Στην προσέγγιση αυτή το πρόβλημα επιλογής μεγέθους παρτίδας υποκαθίσταται από ένα δυναμικό, πολυεπίπεδο, πολλαπλών προϊόντων και περιορισμένων πόρων πρόβλημα, όπου υπάρχουν παράλληλα και χρόνοι στησίματος.

Κλείνοντας οι Buschkühl et al. το 2010 πραγματοποίησαν μια ανασκόπηση των μοντελοποιήσεων αλλά και των διαφορετικών αλγορίθμων των τελευταίων τεσσάρων δεκαετιών για το δυναμικό πρόβλημα μεγέθους παρτίδας, όταν υπάρχουν περιορισμοί δυναμικότητας. Παράλληλα επισήμαναν πως απομένουν να επιλυθούν ακόμα αρκετά πρακτικά προβλήματα παρά το γεγονός πως οι ήδη υπάρχοντες βέλτιστες λύσεις εφαρμόζονται στη βιομηχανία. [3]

1.3. Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Στην συγκεκριμένη ενότητα περιγράφουμε συνοπτικά τα κεφάλαια που δομούν την διπλωματική εργασία. Εκτός του παρόντος κεφαλαίου όπου μας παρέχει εισαγωγικές πληροφορίες και ορισμένες βιβλιογραφικές πηγές, η εργασία δομείται σε πέντε επιπρόσθετα κεφάλαια. Η ακόλουθη δομή εστιάζει στην απλούστευση των εννοιών του θέματος καθώς και στην όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση της συλλογιστικής πορείας με την οποία πραγματοποιήθηκαν τα βήματα για την διεκπεραίωση της.

- Στο Κεφάλαιο 2 αρχικά παραθέτουμε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος μεγέθους παρτίδας ενός προϊόντος χωρίς περιορισμό δυναμικότητας (SIULSP) ενώ παράλληλα ορίζονται οι μαθηματικοί συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται. Επιπλέον αναλύουμε τα κριτήρια μέτρησης της απόδοσης ενός προβλήματος καθώς και τις τρεις στρατηγικές αντιμετώπισης της αβεβαιότητας.
- Στο Κεφάλαιο 3 αναλύουμε την μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων μεγέθους παρτίδας υπό αβέβαιη ζήτηση με την εφαρμογή «penalty cost». Η λύση τους επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της Στατικής Στρατηγικής και της Στατικής-Δυναμικής Στρατηγικής.
- Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφουμε τον τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων μεγέθους παρτίδας υπό αβέβαιη ζήτηση με την εφαρμογή του περιορισμού «β_c service level».Ο συγκεκριμένος περιορισμός ανταποκρίνεται περισσότερο αποτελεσματικά στην πραγματικότητα σε σύγκριση με την εφαρμογή του «penalty cost». Πάλι οδηγούμαστε στην λύση μέσω της εφαρμογής της Στατικής Στρατηγικής και της Στατικής-Δυναμικής Στρατηγικής.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε μία επέκταση της μεθόδου επίλυσης των προβλημάτων μεγέθους παρτίδας υπό αβέβαιη ζήτηση. Συγκεκριμένα θεωρούμε την περίπτωση όπου παράγονται πολλαπλά προϊόντα σε έναν πόρο με περιορισμένη χωρητικότητα. Παράλληλα επιβάλουμε τον περιορισμό «β_c service level».
- Στο Κεφάλαιο 6 παραθέτουμε την σύνοψη της διπλωματικής εργασίας και τα τελικά συμπεράσματα στα όποια καταλήξαμε.

Κεφάλαιο 2 : Βασικές Έννοιες

2.1. Ακέραιος Προγραμματισμός

Τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία ανήκουν στην κατηγορία Μεικτού Ακέραιου Προγραμματισμού, επομένως κρίνεται σημαντικό να αναλύσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο του.

Ο Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming) περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές. Ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού μπορεί κατ' επέκταση να είναι γραμμικό ή μη γραμμικό.

Όταν μελετάμε κάποια περίπτωση όπου ορισμένες από τις μεταβλητές ενός προβλήματος περιορίζονται σε ακέραιες τιμές και άλλες όχι, τότε έχουμε ένα πρόβλημα Μεικτού Ακέραιου προγραμματισμού (Mixed Integer Programming). Αντίθετα όταν όλες οι μεταβλητές περιορίζονται σε ακέραιες τιμές, έχουμε ένα πρόβλημα Αμιγώς Ακέραιου Προγραμματισμού (Pure Integer Programming).

2.2. Βασικό Μοντέλο Μεγέθους Παρτίδας

Στο μαθηματικό μοντέλο που ακολουθεί (single-item uncapacitated lot sizing problem) χρησιμοποιούμε τον δείκτη t, (για τον οποίο ισχύει 1≤ t ≤ T) για να αντιπροσωπεύουμε τις διακριτές χρονικές περιόδους, ενώ με T ορίζουμε την τελική περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού. Ο στόχος μας είναι να βρεθούν τα μεγέθη παρτίδων q_t (t = 1,2,….,T) που να ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος, δηλαδή το άθροισμα των setup και holding cost, ενώ υπόκεινται στους περιορισμούς της ζήτησης.

<u>Μοντέλο SIULSP:</u>

<u>Minimize:</u> $C = \sum_{t=1}^{T}(s * \gamma_t + h * I_t^n)$

<u>Subject to:</u>

$I_t^n = I_0^n + \sum_{j=1}^{t}(q_j - d_j)$ t = 1,2,….,T

$q_t - M * \gamma_t \leq 0$ t = 1,2,..,T

$q_t \geq 0$ t = 1,2…..,T

$I_t^n \geq 0$ t = 1,2,….,T

$\gamma_t \in \{0, 1\}$ t = 1,2,….,T

Όπου:

- d_t : η ντετερμινιστική καθαρή ζήτηση την περίοδο t (πρόβλεψη ζήτησης)
- h : holding cost
- s : setup cost
- I_t^n : το καθαρό απόθεμα στο τέλος της περιόδου t
- M : μεγάλος θετικός αριθμός
- q_t : το μέγεθος παρτίδας την περίοδο t
- T : το μήκος του χρονικού ορίζοντα σχεδιασμού
- y_t : δυαδική μεταβλητή, $y_t=1$ εάν ισχύει $q_t>0$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι επιχειρήσεις προβλέπουν τη ζήτηση για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και προβαίνουν στην εξασφάλιση κατάλληλου αποθέματος για να καλυφτεί. Ωστόσο η ύπαρξη του αποθέματος προκαλεί κόστη στην επιχείρηση, τα οποία περιλαμβάνουν : κόστος αποθηκευτικού χώρου, δεσμευμένου κεφαλαίου, ασφάλισης αποθέματος, απαρχαίωσης αποθέματος και το κόστος χειρισμού του κατά την αποθήκευση και τη μεταφορά του. Όλα όσα αναφέραμε συνοψίζονται στον όρο holding cost.

Αντίθετα ο όρος setup cost σχετίζεται με την εκκίνηση του εξοπλισμού της παραγωγής. Περιλαμβάνει : το κόστος παραγγελίας, προετοιμασίας της παραγωγής, του προγραμματισμού, τη μετακίνηση του υλικού εκκίνησης, την αλλαγή της ρύθμισης των πόρων από ένα είδος προϊόντος σε ένα άλλο και τη δοκιμή των πρώτων μονάδων παραγωγής, ώστε να είναι βέβαιο ότι ο εξοπλισμός έχει ρυθμιστεί σωστά.

Ο πρώτος περιορισμός εκφράζει την ικανοποίηση της ζήτησης σε κάθε περίοδο και για αυτόν το λόγο ονομάζεται περιορισμός της διατήρησης (stock balance). Αντίθετα ο δεύτερος περιορισμός αναγκάζει την δυαδική μεταβλητή y_t στην περίοδο t να λάβει την τιμή 1 όταν υπάρχει θετική παραγωγή σε εκείνη την περίοδο (production setup).

Παράλληλα αξίζει να αναφέρουμε πως η βέλτιστη λύση του προβλήματος έχει την ιδιότητα πως οποιοδήποτε μέγεθος παρτίδας μπορεί να καλύψει έναν ολοκληρωμένο αριθμό ζητήσεων περιόδων. Επομένως το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής και να επιλυθεί σχετικά εύκολα.

2.3. Κριτήρια Απόδοσης

2.3.1. Penalty Cost

Αρχικά κρίνεται σημαντικό να διατυπώσουμε τον ορισμό των «backorders» και «penalty costs»:

- Backorder: μία παραγγελία για ένα αγαθό ή μία υπηρεσία που δεν μπορεί να εκπληρωθεί την τρέχουσα χρονική στιγμή λόγω έλλειψης διαθέσιμων προμηθειών. [10]
- Penalty Costs: το κόστος έλλειψης, μη ικανοποίησης της ζήτησης. Αν εξαντληθούν τα αποθέματα ενός προϊόντος, τότε η επιχείρηση είναι υπο-χρεωμένη να ακυρώσει την παραγγελία χάνοντας με τον τρόπο αυτό κέρδος αλλά και φήμη. Εάν επιθυμούμε να προσδιορίσουμε κατά προσέγγιση το μέγεθος του τότε πρέπει να εξετάσουμε αρκετές παραμέτρους, όπως απώλειας πελατείας, απώλειας πωλήσεων, ποινών αποζημίωσης και διαφορών στο συμβόλαιο.[10]

Μία συνηθισμένη προσέγγιση για την αντιμετώπιση των «backorders» στην περίπτωση τυχαίας ζήτησης είναι να εισαχθούν «penalty costs» στην αντικειμενική συνάρτηση ενός μοντέλου βελτιστοποίησης και να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός μεταξύ των «setup-holding-penalty costs». Από οικονομική άποψη αποτελεί μια «κομψή» προσέγγιση. Ωστόσο προϋποθέτει ο προγραμματιστής να είναι σε θέση να προσδιορίσει τη βέλτιστη αξία του «penalty cost» ώστε να αντικατοπτρίζει αποτελεσματικά τη μη επιθυμία του πελάτη να περιμένει την παράδοση της παραγγελίας του. Δεδομένου ότι το κόστος είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο να προσδιοριστεί ποσοτικά, στην πράξη συνήθως εφαρμόζονται τεχνικά μέτρα απόδοσης. Τα μέτρα αυτά έχουν το πλεονέκτημα πως οι τιμές τους προσδιορίζονται άμεσα από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων. [11]

2.3.2. Περιορισμοί Service Level

Στην συνέχεια διατυπώνονται οι περιορισμοί service level, αν και από αυτούς στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται μόνο ο «β_c service level», κρίνεται σημαντικό να τους αναφέρουμε.

- α service level: Αυτό το κριτήριο υπολογίζει την πιθανότητα πως η ζήτηση για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μπορεί να καλυφθεί με την διαθέ-σιμη ποσότητα στην αρχή του διαστήματος. Εάν το προς εξέταση χρονικό διάστημα είναι ο χρόνος παράδοσης (ή ένας κύκλος παραγγελίας) τότε χρησιμοποιείται ο όρος «α_c service level».[11]

$$\boxed{\alpha_c = P\{I_t^n \geq 0\} = P\{Y^{(t)} \leq Q^{(t)}\}}$$

Όπου: $Y^{(t)}$: η συσσωρευμένη ζήτηση από την περίοδο 1 έως t
$Q^{(t)}$: η συσσωρευμένη ποσότητα παραγωγής από την περίοδο 1 έως t

- <u>β service level:</u> Συσχετίζει τη συνολική ποσότητα των «backorders» με την αναμενόμενη συνολική ζήτηση κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Στα στοχαστικά συστήματα αποθέματος υπό στάσιμες συνθήκες συνήθως λαμβάνεται υπόψη ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος των ποσοστών πλήρωσης. Ωστόσο το κριτήριο μπορεί να υπολογιστεί και για έναν πεπερασμένο αριθμό περιόδων. Αυτό ονομάζεται «β_t service level» πεπερασμένου ορίζοντα και είναι μια τυχαία μεταβλητή που προσεγγίζει την σταθερή τιμή του β, αυξάνοντας το χρόνο.[12]

$$\boxed{\beta_t = 1 - \frac{E\{B^{(t)}\}}{E\{Y^{(t)}\}}}$$

Όπου: $E\{Y^{(t)}\}$: η συσσωρευμένη ζήτηση από την περίοδο 1 έως t
$E\{B^{(t)}\}$: οι backorders για την χρονική περίοδο

Για μικρές χρονικές περιόδους το β_t μπορεί να παρουσιάσει σημαντική μεταβλητότητα. Τέλος υπάρχει και το «β_c service level», το οποίο συνδέει τα backorders μέσα σε ένα κύκλο αναπλήρωσης με τη ζήτηση που εμφανίζεται σε αυτόν τον κύκλο. Το κριτήριο μπορεί να υπολογιστεί μόνο αν είναι γνωστό το μήκος του κύκλου. Για παράδειγμα αν είναι προγραμματισμένες δύο παραγγελίες παραγωγής στις περιόδους 3 και 6, τότε ο χρόνος κάλυψης κυμαίνεται από την περίοδο 3 έως 5 και χρησιμοποιούμε τις ζητήσεις εκείνων των περιόδων καθώς και τις backorders που εμφανίζονται στις ίδιες περιόδους.

Είναι σημαντικό να το τονίσουμε πως το β_c ως περιορισμός είναι πιο «αυστηρός» από το β_t, διότι απαιτεί την επίτευξη του στόχου σε κάθε κύκλο. Μία «κακή» απόδοση σε έναν κύκλο δεν μπορεί να αντισταθμιστεί σε άλλο κύκλο, κάτι που θα ήταν δυνατό με το κριτήριο β_t .

Ο β_c μπορεί να εκφραστεί σε όρους συσσωρευμένων backorders και συσσωρευμένων ζητήσεων. Για δυο διαδοχικούς κύκλους παραγγελιών (i-1) και (i) που τελειώνουν στις περιόδους τ_{i-1} και τ_i. [11]

$$\boxed{\beta_c = 1 - \frac{E\{B^{(\tau_i)}\} - E\{B^{(\tau_i - 1)}\}}{E\{Y^{(\tau_i)}\} - E\{Y^{(\tau_i - 1)}\}}}$$

Όπου ο αριθμητής περιγράφει τα καθαρά backorders που συνέβησαν πρόσφατα στον κύκλο i και ο παρονομαστής την αντίστοιχη ζήτηση.

- γ service level: Είναι ένα κριτήριο απόδοσης που βασίζεται στο χρόνο και στην ποσότητα, δηλαδή δεν αντικατοπτρίζει μόνο το ποσό των backorders αλλά και τους χρόνους αναμονής τους.

2.4. Στρατηγικές Αντιμετώπισης της Αβεβαιότητας

Για να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά το πρόβλημα της τυχαίας και δυναμικής ζήτησης με την πάροδο του χρόνου, έχουν διατυπωθεί αρκετές εναλλακτικές πολιτικές. Οι πολιτικές αυτές διατυπώνουν κανόνες σχετικά με το μέγεθος παρτίδας και τη χρονική περίοδο όπου θα λάβει χώρα η παραγωγή.

2.4.1. Δυναμική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Η συγκεκριμένη στρατηγική θεωρεί :

- μεταβλητές περιόδους αναπλήρωσης
- μεταβλητά μεγέθη παρτίδας.

Η έρευνα σχετικά με τη δυναμική ζήτηση εμφανίστηκε για πρώτη φόρα από τους Wagner-Whitin (1958), το οποίο αποτελεί ένα ευρέως διαδεδομένο μοντέλο μεγέθους παρτίδας. Στη συνέχεια ο Scarf (1960) διατύπωσε τη βέλτιστη πολιτική ελέγχου για τα προβλήματα μεγέθους παρτίδας υπό στοχαστική ζήτηση. Η βέλτιστη αυτή πολιτική εφαρμόζεται για την περίπτωση των δυναμικών ζητήσεων με «setup cost» και γραμμικά «holding και backorder costs», με απεριόριστη δυναμικότητα. Κατά τη διαδικασία προσδιορίζονται δύο κρίσιμες παράμετροι για κάθε χρονική περίοδο: το κατώτατο επίπεδο (re-order level) και το μέγιστο επίπεδο (order up-to level), τα όποια συμβολίζονται με (s_t,S_t) (για t = 1,2, ..., T)[6],[7]. Ο υπεύθυνος λήψης των αποφάσεων παρατηρεί το επίπεδο του αποθέματος στο ξεκίνημα της περιόδου και δίνει εντολή για παραγωγή όταν είναι χαμηλότερο από το «re-order level» με σκοπό να αναπληρωθεί μέχρι το «order up-to level». Εάν η στάθμη του αποθέματος βρίσκεται πάνω από το «re-order level» τότε δεν δίνεται εντολή για παραγωγή.[2]

Κατά συνέπεια η απόφαση για παραγωγή ή όχι λαμβάνεται σε κάθε χρονική περίοδο. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως τόσο ο χρόνος, όσο και η ποσότητα των παραγγελιών γίνονται γνωστά μόνο στις περιόδους αναπλήρωσης με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν σημαντική μεταβλητότητα.

Παράλληλα η εύρεση των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών απόφασης (s_t,S_t) αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως κάποιος πρέπει να υπολογίσει αναδρομικά τη συνεχή συνάρτηση κόστους προκείμενου να καθορίσει τα βέλτιστα “re-order level” και “order-up-to level” για κάθε περίοδο εντός του ορίζοντα σχεδιασμού. Μία επιλογή είναι να χρησιμοποιηθεί δυναμικός προγραμματισμός, ο οποίος περιλαμβάνει τον αναδρομικό υπολογισμό μιας συνάρτησης συνεχούς κόστους[8]. Επιπλέον μια εναλλακτική προσέγγιση, η οποία είναι εφαρμόσιμη με τη χρήση διακριτής κατανομής ζήτησης, είναι να χρησιμοποιηθούν σενάρια. Σε αυτή την περίπτωση, εφαρμόζεται ένα στοχαστικό πρότυπο προγραμματισμού πολλαπλών σταδίων, όπου κάθε στάδιο αντιστοιχεί σε μια περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού. Κατά τη διαδικασία λαμβάνεται μια απόφαση σχετικά με το μέγεθος παραγωγής της πρώτης περιόδου, έπειτα περιμένουμε την εμφάνιση της ζήτησης στο μέλλον και στη συνέχεια πραγματοποιείται μια άλλη επιλογή μεγέθους με βάση την παρατηρούμενη ζήτηση. Ωστόσο, η διαδικασία που προκύπτει είναι ακόμα πολύπλοκη, καθώς υπάρχει ένα ευρύ φάσμα πιθανών επιπέδων αποθέματος που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ο στόχος του μοντέλου βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κόστους όλων των αποφάσεων αναπλήρωσης που έχουν ληφθεί. Μια ποικιλία μελετών ασχολήθηκε με αυτό το ζήτημα όπως των Veinott και Wagner (1965), του Ehrhardt(1979), Federgruen και Zipkin (1984) κ.α. Ωστόσο, οι περισσότερες από αυτές αντιμετωπίζουν το πρόβλημα υπό σταθερή ζήτηση και ανεπαρκή ορίζοντα προγραμματισμού. Τέλος, έχουν αναπτυχθεί και μερικές μελέτες που προτείνουν ευρετικές μεθόδους για τον υπολογισμό των παραμέτρων της στρατηγικής δυναμικής αβεβαιότητας.[2]

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως αν και η στρατηγική δυναμικής αβεβαιότητας είναι βέλτιστη από πλευράς κόστους, από πρακτική άποψη διαθέτει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Εκτός από το γεγονός πως δεν λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς της παραγωγικής ικανότητας, εξαιτίας της αβεβαιότητας σε σχέση με το χρονοδιάγραμμα και την υψηλή μεταβλητότητα των μεγεθών παρτίδας, είναι δυνατόν να προκαλέσει σημαντική νευρικότητα προγραμματισμού.

2.4.2. Στατική-Δυναμική Στρατηγική Αβεβαιότητας

<u>Η συγκεκριμένη στρατηγική θεωρεί :</u>

- σταθερές περιόδους αναπλήρωσης
- μεταβλητά μεγέθη παρτίδας.

Μία διαφορετική οπτική αντιμετώπισης της αβεβαιότητας της ζήτησης είναι να καθοριστούν εκ των προτέρων οι περίοδοι παραγωγής, αλλά να αποφασίσουμε το πραγματικό μέγεθος παρτίδας μόνο αφού παρατηρηθεί η ζήτηση των προηγούμενων περιόδων. Επομένως οι ποσότητες αναπλήρωσης είναι τυχαίες μεταβλητές αφού εξαρτώνται από τη μη ντετερμινιστική εξέλιξη των ζητήσεων.[9] Για να επιτευχθεί αυτό ο υπεύθυνος για τη λήψη των αποφάσεων ορίζει το «order-up-to-level» για κάθε αναπλήρωση, το όποιο αντιπροσωπεύει το κατώτατο επίπεδο μέχρι το οποίο επιτρέπεται να φτάσει το απόθεμα. Είναι συνηθισμένο στη βιβλιογραφία το «order-up-to-level» να δηλώνεται ως S, για το λόγο αυτό η πολιτική συχνά χαρακτηρίζεται ως (R,S). Η συγκεκριμένη πολιτική είναι λιγότερο συντηρητική σε σύγκριση με τη στρατηγική στατικής αβεβαιότητας και άρα είναι δυνατόν να αντισταθμίσει αποτελεσματικότερα την αβεβαιότητα. Το γεγονός πως επιτυγχάνεται ένα καθορισμένο χρονοδιάγραμμα παραγγελιών καθιστά τη στατική δυναμική στρατηγική ιδιαίτερα ελκυστική στο σχεδιασμό απαιτήσεων υλικών.[2]

2.4.3. Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Η συγκεκριμένη στρατηγική θεωρεί :

- σταθερές περιόδους αναπλήρωσης
- σταθερά μεγέθη παρτίδας.

Κατά τη Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας, οι περίοδοι καθώς και οι ποσότητες παραγωγής προσδιορίζονται εκ' των προτέρων (αναπληρώσεις στην αρχή του χρονικού ορίζοντα) και συνεπώς το πλήρες σχέδιο παραγωγής είναι ανεξάρτητο από την ζήτηση. Στη βιβλιογραφία συνήθως η ρύθμιση του χρόνου δηλώνεται ως R και η ποσότητα παραγωγής ως Q. Για το λόγο αυτό συχνά χαρακτηρίζεται ως πολιτική (R, Q). Το γεγονός πως το πρόγραμμα παραγωγής παραμένει αμετάβλητο απαλείφει τις πιθανότητες να εμφανιστεί νευρικότητα στο σχεδιασμό. Ωστόσο η αβεβαιότητα θα πρέπει να απορροφηθεί μέσω της διαστασιολόγησης των μεγεθών παρτίδας. Είναι προφανές πως η στρατηγική αυτή είναι η πιο δαπανηρή σε σύγκριση με τις προηγούμενες, όμως μας παρέχει τη δυνατότητα να προβλέψουμε πλήρως τις απαιτήσεις δυναμικότητας και να ορίσουμε ένα πλήρως σταθερό περιβάλλον παραγωγής. Κατά συνέπεια καθίσταται ελκυστική σε βιομηχανικά περιβάλλοντα που χαρακτηρίζονται από χαμηλό βαθμό ευελιξίας. Κλείνοντας αξίζει να αναφέρουμε πως ο Vargas (2009) απέδειξε πως όταν οι ζητήσεις εισέρχονται με κανονική κατανομή, παρέχουν έναν απλό αλλά αποτελεσματικό αλγόριθμο λύσης, χάρη στις ιδιότητες της κατανομής.[2]

Στην συνέχεια της διπλωματικής εργασίας επικεντρωνόμαστε στις στρατηγικές: Στατικής Δυναμικής Αβεβαιότητας και Στατικής Αβεβαιότητας.

Κεφάλαιο 3 : Penalty Cost

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύουμε το πρόβλημα μεγέθους παρτίδας ενός προϊόντος με την εφαρμογή «penalty cost», για την αντιμετώπιση του προβλήματος εφαρμόζουμε τις στρατηγικές: Στατικής Αβεβαιότητας και Στατικής Δυναμικής Αβεβαιότητας.

Για την εφαρμογή των σχεδίων υποθέτουμε έναν ορίζοντα παραγωγής αποτελούμενο από Τ περιόδους, με αμοιβαία ανεξάρτητες τυχαίες ζητήσεις D_t (t= 1,2,…,T), για τις οποίες γνωρίζουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_{Dt}(d)$ (t= 1,2,…,T). Παράλληλα θεωρούμε ότι οι εντολές αναπλήρωσης μπορούν να δοθούν στο τέλος των περιόδων (t= 0,1,…,T-1), με σταθερό «setup cost» που συμβολίζεται με s, ενώ οι ποσότητες θα είναι διαθέσιμες στο ξεκίνημα της επόμενης περιόδου. Το «holding cost» ανά μονάδα ποσότητας συμβολίζεται με h. Τέλος η ποσότητα των «backorder» ελέγχεται από το κόστος ποινής που συμβολίζεται με π.

3.1. Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Αρχικά υπενθυμίζουμε πως στη συγκεκριμένη μέθοδο οι αποφάσεις σχετικά με τις περιόδους και τις ποσότητες παραγωγής λαμβάνονται εκ' των προτέρων για ολόκληρο τον ορίζοντα σχεδιασμού.

Προκειμένου να καταστεί δυνατή η εφαρμογή της στρατηγικής ορίζουμε τους παρακάτω όρους:

- $Q^{(t)} = \sum_{j=1}^{t} q_j$ (3.1), δηλώνει τη συσωρευτική ποσότητα παραγωγής από την περίοδο 1 έως την t.
- $Y^{(t)} = \sum_{j=1}^{t} D_j$ (3.2), δηλώνει τη συσωρευτική ζήτηση από την περίοδο 1 έως την t, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y(t)}(y)$.

Το μοντέλο επομένως για το πρόβλημα μας είναι το εξής[13] :

Μοντέλο $\mathbf{SSIULSP}_{\pi}^{q}$:

Minimize: $E\{C\} = \sum_{t=1}^{T}(s * \gamma_t + h * E\{I_t^p\} + \pi * E\{I_t^f\})$

Subject to:

$Q^{(t-1)} \leq Q^{(t)}$ t = 1,2,….,T

$Q^{(t)} - Q^{(t-1)} \leq M * \gamma_t$ t = 1,2,….,T

$\gamma_t \in \{0, 1\}$ t = 1,2,….,T

$Q^{(t)} \geq 0$ t = 1,2,….,T

Όπου:

- $I_t^p = [Q^{(t)} - Y^{(t)}]^+ = max(0, Q^{(t)} - Y^{(t)})$, δηλώνει το απόθεμα σε κάθε περίοδο.
- $I_t^f = [Y^{(t)} - Q^{(t)}]^+ = max(0, Y^{(t)} - Q^{(t)})$, δηλώνει τις "backlog" στο τέλος της περιόδου t.
- M : μεγάλος θετικός αριθμός.

Το πρόβλημα μας είναι ένα πρόγραμμα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού με μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, για την επίλυση του θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ελάχιστης διαδρομής.

3.1.1. Μεθοδολογία

Στόχος: Πρέπει να βρούμε ένα πρόγραμμα για την παραγωγή που να περιγράφεται ως μία ακολουθία των αθροιστικών ποσοτήτων παραγωγής $Q^{(t)}$, οι οποίες θα εμφανίζονται στην αρχή μιας περιόδου (t = 1,2, ..., T), προτού όμως αφιχθούν οι ζητήσεις, έτσι ώστε η αντικειμενική συνάρτηση να ελαχιστοποιείται. Από την στιγμή που προσδιορίσουμε τις βέλτιστες συσωρευτικές ποσότητες παραγωγής $Q^{(t)}$, τότε τα βέλτιστα μεγέθη παρτίδας μπορούν να υπολογιστούν εύκολα μέσω του ακολούθου τύπου: $q_t = Q^{(t)} - Q^{(t-1)}$

Θεωρούμε δύο διαδοχικές περιόδους παραγωγής i και j, την περίοδο i η αθροιστική ποσότητα παραγωγής ανέρχεται σε $Q^{(ij)}$, ενώ η επόμενη αναπλήρωση είναι προγραμματισμένη μετά από (j-i) περιόδους. Το αναμενόμενο συνολικό κόστος, δηλαδή τα κόστη setup, holding και backorder που προκύπτουν κατά τη διάρκεια του διαστήματος (i, i + 1, ..., j-1), ορίζεται από τον παρακάτω τύπο[14]:

$$E\{C(Q^{(ij)})\} = s + \sum_{t=i}^{j-1} \left[h * \int_{y=0}^{Q^{(ij)}} (Q^{(ij)} - y) * f_{Y^{(t)}} dy + \pi * \int_{y=Q^{(ij)}}^{\infty} (y - Q^{(ij)}) * f_{Y^{(t)}} dy \right] \quad (3.3)$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως το αναμενόμενο κόστος εκφράζει την τιμή που θα προέκυπτε εάν εκτελέσουμε το πείραμα άπειρες φορές και υπολογίζαμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Συνεπώς αντιλαμβανόμαστε πως αντικατοπτρίζει αποτελεσματικά το συνολικό κόστος της παραγωγής.

Στην συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τη βέλτιστη τιμή του $Q^{(ij)}$, όπου προκύπτει με τη διαδικασία που ακολουθεί. Ωστόσο προηγουμένως πρέπει να υπενθυμίσουμε τους ορισμούς της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης.

$$F(a) = P(D \leq a) = \int_{x=0}^{a} f(x)\, dx, \qquad f(a) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

Για να υπολογιστεί το ελάχιστο της συνάρτησης $G(Q)$ ως προς το Q υπολογίζουμε τα εξής : $\frac{dG(Q)}{dQ} = 0$, $\frac{dG^2(Q)}{dQ^2} > 0$

$$\frac{dG(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[h * \int_{y=0}^{Q}(Q-y) * f_{Y(t)}dy + \pi * \int_{y=Q}^{\infty}(y-Q) * f_{Y(t)}dy\right] =$$

$$= h * \int_{y=0}^{Q} 1 * f(y)\,dy + \pi * \int_{y=Q}^{\infty}(-1) * f(y)dy$$

$$= h * F(Q) - \pi * [1 - F(Q)]$$

$$\frac{dG^2(Q)}{dQ^2} = (h+\pi) * f(Q) \geq 0$$

Επομένως η βέλτιστη ποσότητα Q προκύπτει από τη σχέση:

$$h * F(Q) - \pi * +\pi * F(Q) = 0 \quad \rightarrow \quad F(Q) = \frac{\pi}{\pi+h}$$

Η βέλτιστη τιμή λοιπόν για το $Q^{(ij)}$προκύπτει από τον τύπο :

$$\boxed{\sum_{t=i}^{j-1} F_{Y^{(t)}}\left({Q_{opt}}^{(ij)}\right) = (j-i) * \left(\frac{\pi}{\pi+h}\right) \quad (3.4)}$$

Στο σημείο αυτό προκείμενου να γίνει κατανοητή η μεθοδολογία υπολογισμού των βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής, θεωρούμε πως δύο διαδοχικές περίοδοι παραγωγής είναι οι t=3 και t=5, δηλαδή i=3 και j=5. Εφαρμόζουμε τον τύπο (3.4) και προκύπτει :

$$\sum_{t=3}^{4} F_{Y^{(t)}}\left({Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) = F_{Y(3)}\left({Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) + F_{Y(4)}\left({Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) = (5-3) * \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow$$

$P\left(Y^{(3)} \leq {Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) + P\left(Y^{(4)} \leq {Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) = 2 * \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow$ (μέσω της σχέσης (2))

$$P\left(D_1 + D_2 + D_3 \leq {Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) + P\left(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \leq {Q_{opt}}^{(3\,5)}\right) = 2 * \frac{\pi}{\pi+h} \quad (3.5)$$

Θεωρούμε πως οι ζητήσεις $D_{(t)}$ (t = 1,2, ..., T) ακολουθούν την κανονική κατανομή και κάθε μεμονωμένη ζήτηση έχει μέση τιμή μ_i και τυπική απόκλιση σ_i. Παράλληλα πρέπει να τονίσουμε πως η αβεβαιότητα στο πρόβλημα μας εκφράζεται μέσω της τυπικής απόκλισης της ζήτησης κάθε περιόδου.

Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, το άθροισμα και επομένως η μέση τιμή, μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων παρατηρήσεων, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή, ανεξαρτήτως από το ποια κατανομή ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Κατά συνέπεια στο παράδειγμα μας ισχύει το εξής:

- $D_1+D_2+D_3 \sim N\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}\right)$
- $D_1+D_2+D_3+D_4 \sim N\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma_4^2}\right)$

Παρατηρούμε πως η πιθανότητα $P\left(D_1+D_2+D_3 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$ είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα $P\left(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$. Ο λόγος είναι πως το άθροισμα $(D_1+D_2+D_3)$ σαν αριθμός είναι μικρότερο από το $(D_1+D_2+D_3+D_4)$ και άρα ισχύει η σχέση που διαπιστώσαμε. Συνεπώς μπορώ να πραγματοποιήσω τις ακόλουθες δύο αντικαταστάσεις στην σχέση (3.5) που θα με βοηθήσουν να καταλήξω σε δύο ακρότατα:

1) Εάν αντικαταστήσω στην εξίσωση (5) τον όρο $P\left(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$ με $P\left(D_1+D_2+D_3 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$, τότε θα προκύψει η εξής ανισότητα:

$2 * P\left(D_1+D_2+D_3 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right) > 2 * \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow \ P\left(D_1+D_2+D_3 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right) > \frac{\pi}{\pi+h}$

Από την ανισότητα μπορούμε να καταλήξουμε στην ελάχιστη τιμή που είναι δυνατόν να λάβει το Q_{opt}. Για να καταφέρουμε να μετατρέψουμε την ανισότητα σε ισότητα θα πρέπει να μικρύνουμε την παραπάνω πιθανότητα και αρά να μειώσουμε το Q_{opt} σε Q_{min}. Συνεπώς :

$P(D_1+D_2+D_3 \leq \ Q_{min}) = \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow P\left(Y^{(3)} \leq \ Q_{min}\right) = \frac{\pi}{\pi+h}$

$\rightarrow Q_{min} = F^{-1}_{Y(3)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$(3.6)

2)Αντίθετα αν αντικαταστήσω στην εξίσωση (3.5) τον όρο $P\left(D_1+D_2+D_3 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$ με $P\left(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right)$, θα τότε θα προκύψει η εξής ανισότητα:

$2 * P\left(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right) < 2 * \frac{\pi}{\pi+h} \ \rightarrow$

$P\left(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq Q_{opt}{}^{(3\,5)}\right) < \frac{\pi}{\pi+h}$

Αντίστοιχα από αυτή την ανισότητα μπορούμε να καταλήξουμε στην μέγιστη τιμή που είναι δυνατόν να λάβει το Q_{opt} Για να καταφέρουμε να μετατρέψουμε την ανισότητα σε ισότητα θα πρέπει να μεγαλώσουμε την παραπάνω πιθανότητα και αρά να αυξήσουμε το Q_{opt} σε Q_{max}. Συνεπώς :

$P(D_1+D_2+D_3+D_4 \leq \ Q_{max}) = \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow P\left(Y^{(4)} \leq \ Q_{max}\right) = \frac{\pi}{\pi+h} \rightarrow$

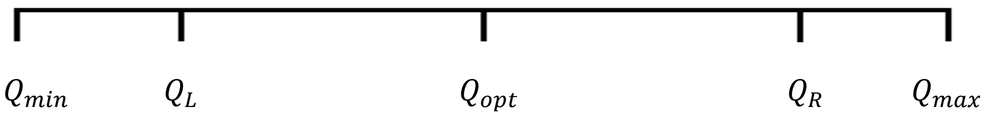
$Q_{max} = F^{-1}_{Y(4)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$ (3.7)

Γενικεύουμε τις παραπάνω σχέσεις για οποιοδήποτε i και j, προκείμενου να παρουσιάσουμε τη μορφή που έχουν στο κώδικα που γράψαμε.

$$Q_{min} = F^{-1}_{Y(i)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right), \quad Q_{max} = F^{-1}_{Y(j-1)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$$

Πλέον γνωρίζουμε πως το Q_{opt} ανήκει στο διάστημα $[\,Q_{min}, Q_{max}]$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της χρυσής τομής προκειμένου να οδηγηθούμε στην ακριβή τιμή του Q_{opt} .

Μέθοδος Χρυσής Τομής:



Στην μέθοδο εφαρμόζουμε την εξής επαναληπτική διαδικασία:

$fib = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180$

Error =0.0001

For i = 1 : T

    For j = i+1 : T+1

        $frac = (j-i) * \frac{\pi}{\pi+h}$

        $Q_{min} = F^{-1}_{Y(i)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$

        $Q_{max} = F^{-1}_{Y(j-1)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$

        While ($\mathrm{Q_{max}} - \mathrm{Q_{min}}) > \mathrm{Error}$

            $Q_L = \mathrm{Q_{max}} - \frac{(\mathrm{Q_{max}} - \mathrm{Q_{min}})}{fib}$

            $Q_R = \mathrm{Q_{min}} + \frac{(\mathrm{Q_{max}} - \mathrm{Q_{min}})}{fib}$

            $F_L = \sum_{t=i}^{j-1} F_{Y(t)}\,(Q_L)$

```
        If  F_L < frac  then
            Q_min = Q_L
        Else
            Q_R = Q_max
        End
    End
    Q_opt(i, j − 1) = Q_max
  End
End
```

Με την παραπάνω διαδικασία περιορίζουμε συνεχώς τα όρια του διαστήματος στο οποίο ανήκει το ${Q_{opt}}^{(i\,j)}$ έως ότου να ταυτιστούν. Η τελική τιμή που θα λάβουν τα δύο όρια θα είναι η βέλτιστη, ενώ καταλήγουμε σε $\frac{(T+1)*T}{2}$ βέλτιστα ${Q_{opt}}^{(i\,j)}$.

Από την στιγμή που έχουμε αναλύσει την μέθοδο υπολογισμού των βέλτιστων αθροιστικών ποσοτήτων παραγωγής ($Q_{opt}^{(ij)}$), μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του αναμενόμενου βέλτιστου κόστους που αντιστοιχεί σε αυτές, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$E\left\{C\left(Q_{opt}^{(ij)}\right)\right\} = s + \sum_{t=i}^{j-1}\left[\, h * \left\{Q_{opt}^{(ij)} - E\{Y^{(t)}\} + G_{Y^{(t)}}^{1}\left(Q_{opt}^{(ij)}\right)\right\} + \pi * G_{Y^{(t)}}^{1}\left(Q_{opt}^{(ij)}\right)\right] \quad (3.8)$$

$G_{Y(t)}^{1}$: first order loss function της τυχαίας μεταβλητής Y σε σχέση με την ποσότητα Q. Η συνάρτηση εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό ελλειμμάτων που είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε έναν κύκλο παραγωγής. Όταν οι ζητήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή (το όποιο και έχουμε υποθέσει στο πρόβλημα μας) τότε η $G_{Y(t)}^{1}$ μπορεί να προσδιοριστεί από την παρακάτω σχέση:

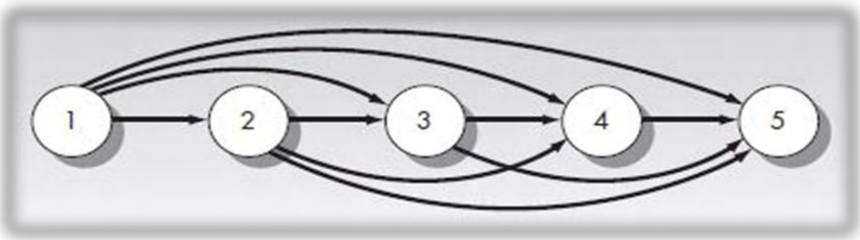
$$G_{Y(t)}^{1} = [f(z) - z(1 - F(z))] * \sigma \quad , \quad \text{όπου} \quad z = \frac{Q_{opt}^{(ij)} - \mu}{\sigma}$$

Μέθοδος Ελάχιστης Διαδρομής:

Στο σημείο αυτό έχουμε υπολογίσει το αναμενόμενο κόστος για κάθε δυνατό συνδυασμό μεταξύ των i και j, δηλαδή γνωρίζουμε το αναμενόμενο κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε απόφαση που μπορούμε να πάρουμε σχετικά με το χρόνο και την ποσότητα παραγωγής. Ωστόσο απομένει να βρούμε τον βέλτιστο συνδυασμό παραγωγής, αυτόν δηλαδή με το χαμηλότερο συνολικό κόστος. Αυτό θα καταστεί δυνατό μέσω της αντιμετώπισης του προβλήματος αναπλήρωσης ως ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής με T+1 κόμβους (1,2, ..., T +1).

Μία καμπύλη που αρχίζει από τον κόμβο i και καταλήγει στον κόμβο j (i<j, 2≤j≤T+1), δηλώνει ότι η διαθέσιμη ποσότητα παραγωγής στην αρχή της περιόδου i είναι δυνατόν να καλύψει τη ζήτηση από την περίοδο i έως την περίοδο j-1. Η επόμενη παραγωγή είναι προγραμματισμένη για την περίοδο j.

Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1, απομονώνουμε από το χρονικό ορίζοντα τις 5 πρώτες περιόδους. Γίνεται αντιληπτό πως για να οδηγηθούμε από την περίοδο 1 στην περίοδο στην περίοδο 5 μπορούμε να ακολουθήσουμε διαφορετικές διαδρομές. Για παράδειγμα μπορούμε να μεταβούμε από την περίοδο 1 στην 3 και στην συνέχεια να καταλήξουμε στην 5. Ωστόσο πρέπει να βρούμε το συνδυασμό μετάβασης από την περίοδο 1 στην 5 με το χαμηλότερο κόστος.



Σχήμα 3.1: Αναπαράσταση του δικτύου συντομότερης διαδρομής

Για την εύρεση του «βέλτιστου» μονοπατιού θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Wagner-Whitin.

Μέσω της εξίσωσης (8) διαθέτουμε ήδη έναν πίνακα (T*T) με $\frac{(T+1)*T}{2}$ στοιχεία, τα οποία αντιπροσωπεύουν το κόστος $C_{opt}^{(i\ j)}$, το οποίο και δηλώνει το αναμενόμενο συνολικό κόστος που θα προκύψει εάν παραγάγω την περίοδο i για να καλύψω μέχρι και την ζήτηση της περιόδου j-1. Για παράδειγμα το στοιχείο $C_{opt}^{(1\ 3)}$ εκφράζει το «setup cost» λόγω της παραγωγής στην περίοδο 1, το «holding cost» λόγω του αποθέματος που δημιουργήθηκε εξαιτίας παραγωγής περισσότερων μονάδων από την ζήτηση της περιόδου 1 καθώς και τυχόν «penalty cost» που μπορεί να προέκυψαν εξαιτίας ανικανοποίητης ζήτησης.

Στον αλγόριθμο λοιπόν εφαρμόζουμε τα εξής βήματα[15]:

Θεωρούμε διαδοχικά προβλήματα t περιόδων (t=1,2,…,T) και για κάθε πρόβλημα υπολογίζουμε τις μεταβλητές:

- ${Z_t}^*$: ελάχιστο κόστος προβλήματος t περιόδων
- j_t^* : τελευταία περίοδος παραγωγής στο πρόβλημα των t περιόδων

$${Z_0}^* = 0$$

$$j_0^* = 1$$

For t = 1 : T

$${Z_t}^* = \min_{i=j_{t-1,\dots t}^*}\left\{{Z_{i-1}}^* + C_{opt}^{(i\,t)}\right\}$$

$$j_t^* = \arg\ \min_{i=j_{t-1,\dots t}^*}\left\{{Z_{i-1}}^* + C_{opt}^{(i\,t)}\right\}$$

End

Αφού έχουμε προσδιορίσει τις μεταβλητές j_t^* , μπορούμε να προχωρήσουμε στο τελικό βήμα του προβλήματος, δηλαδή να υπολογίσουμε τις παρτίδες παραγωγής[15].

t=T

While $t \neq 1$

$a = j_t^*$

If $a \neq 1$ then

$b = j_t^* - 1$

$c = j_b^*$

Else

$b = 1$

$c = 1$

$Q_{opt}^{(c\,b)} = 0$

End

$Q_a = Q_{opt}^{(a\,t)} - Q_{opt}^{(c\,b)}$

t=b

End

Η λύση του **Μοντέλου SSIULSP$_\pi^q$** υπό στοχαστική ζήτηση, με την εφαρμογή της Στατικής Στρατηγικής Αβεβαιότητας είναι ο πίνακας Q_t (t=1,2,…,T).

Αξίζει να αναφέρουμε πως η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί με το ίδιο τρόπο για την περίπτωση του περιορισμού «a_p service level» εάν θέσουμε $a_p = \frac{\pi}{\pi+h}$

3.1.2. Αποτελέσματα

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα MATLAB (matrix laboratory). Τα δεδομένα μας ήταν τα εξής:

- T = 10 (μήκος του ορίζοντα προγραμματισμού)
- μ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30] (μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο)
- σ = [10 30 20 40 30 10 30 30 10 30] (τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο)

Αξίζει να υπενθυμίσουμε πως τα κόστη h και π είναι ανά μονάδα προϊόντος.

- s = 100, h = 1 , π = μεταβάλλεται

Penalty Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
24	129	0	0	171	0	0	0	115	0	0
21	127	0	0	169	0	0	0	114	0	0
18	124	0	0	167	0	0	0	113	0	0
15	121	0	0	164	0	0	0	112	0	0
12	116	0	0	161	0	0	0	111	0	0
9	111	0	0	156	0	0	0	109	0	0
9	102	0	0	149	0	0	0	107	0	0
3	85	0	0	138	0	0	0	103	0	0
1	68	0	0	0	160	0	0	0	0	0

- s = 100, π= 9 , h = μεταβάλλεται

Holding Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
9	20	55	0	55	63	0	0	80	0	0
8	21	56	0	57	64	0	0	81	0	0
7	22	58	0	59	65	0	0	82	0	0
6	23	61	0	60	66	0	0	84	0	0
5	24	64	0	63	67	0	0	85	0	0
4	25	67	0	65	69	0	0	87	0	0
3	27	71	0	69	71	0	0	90	0	0
2	29	77	0	134	0	0	0	106	0	0
1	111	0	0	157	0	0	0	110	0	0

- h = 1, π= 9 , s = μεταβάλλεται

Setup Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
700	315	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	111	0	0	226	0	0	0	0	0	0
400	111	0	0	226	0	0	0	0	0	0
200	111	0	0	157	0	0	0	110	0	0
100	111	0	0	157	0	0	0	110	0	0
70	33	87	0	148	0	0	0	110	0	0
40	33	87	0	80	79	0	0	99	0	0
10	33	87	0	80	66	0	34	59	0	47

3.1.3. Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα στα όποια καταλήξαμε από τις παραπάνω μετρήσεις αν και είναι προφανή, κρίνεται σημαντικό να τα αναφέρουμε:

1) Καθώς αυξάνεται η τιμή του «penalty cost (π)» παράγονται περισσότερες μονάδες. Ο λόγος είναι πως πρέπει να εμφανιστούν όσο το δυνατόν λιγότερες ανεκπλήρωτες παραγγελίες, για να αποφύγουμε τις αντίστοιχες ποινές.
2) Καθώς αυξάνεται η τιμή του «holding cost (h)» παράγονται λιγότερες μονάδες προϊόντος, ενώ έχουμε και πιο συχνή παραγωγή σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ο λόγος είναι ο προφανής, η διατήρηση αποθέματος είναι δαπανηρή και επομένως την αποφεύγουμε.
3) Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του «setup cost (s)» οδηγούμαστε στην δημιουργία μεγαλύτερων ποσοτήτων προκειμένου να παραγάγουμε με μικρότερη συχνότητα. Ο λόγος είναι πως η εκκίνηση της παραγωγής κρίνεται δαπανηρή και επομένως την περιορίζουμε.

3.2. Στατική-Δυναμική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Στην συγκεκριμένη στρατηγική βασιζόμενοι στις προβλέψεις που πραγματοποιήσαμε στο ξεκίνημα του ορίζοντα σχεδιασμού, καθορίζουμε εκ' των προτέρων τις περιόδους παραγωγής τ_j με τα αντίστοιχα μήκη κύκλων παραγωγής, καθώς και τα «order-up-to levels» S_{τ_j} (j = 1,2,..,m). Ωστόσο στην περίοδο παραγωγής τ_j, οι πραγματικές ποσότητες παραγωγής q_{τ_j} προσδιορίζονται μόνο όταν οι ζητήσεις μέχρι την περίοδο τ_{j-1} παρατηρηθούν. [11]

Προκειμένου να καταστεί δυνατή η εφαρμογή της στρατηγικής ορίζουμε:

- $Y^{(i,t)} = \sum_{k=i}^{t} D_k$, η συσωρευτική ζήτηση από την περίοδο i έως την t, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y^{(i,t)}}$.

Είναι εμφανές πως η αθροιστική ζήτηση ορίζεται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε στρατηγική. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός πως στην Στατική αθροίζονται οι ζητήσεις από την πρώτη περίοδο έως την τρέχουσα t.

Το μαθηματικό μοντέλο όταν επιβάλλονται «penalty cost» είναι το εξής:

Μοντέλο SSIULSP$_\pi$:

Minimize: $$E\{C\} = E\left\{\sum_{t=1}^{T}(s * \gamma_t + h * I_t^P + \pi * I_t^f)\right\}$$

Subject to:

$I_t^P - I_t^f = I_0^P - I_0^f + \sum_{j=1}^{t}(q_j - D_j)$ t = 1,2,….,T

$q_t - M * \gamma_t \leq 0$ t = 1,2,..,T

$q_t, I_t^P, I_t^f \geq 0$ t = 1,2…..,T

$\gamma_t \in \{0, 1\}$ t = 1,2,….,T

Δεδομένου ότι οι ζητήσεις κάθε περιόδου είναι τυχαίες, το φυσικό απόθεμα I_t^P καθώς και το «backlog» I_t^f είναι επίσης τυχαίες μεταβλητές. Πάλι το πρόβλημα μας είναι ένα πρόγραμμα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού με μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και για την επίλυση του θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ελάχιστης διαδρομής.

3.2.1. Μεθοδολογία

<u>Στόχος:</u> Πρέπει να υπολογίσουμε τα βέλτιστα «order-up-to levels» S_{τ_j}, καθώς και τις περιόδους παραγωγής τ_j, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος. Από την στιγμή που προσδιορίσουμε αυτές τις μεταβλητές, η κάθε ποσότητα παραγωγής q_{τ_j} υπολογίζεται ως η διαφορά μεταξύ των προκαθορισμένων S_{τ_j} και του καθαρού αποθέματος στο ξεκίνημα εκείνης της περιόδου. Είναι σημαντικό να τονίσουμε πως οι πραγματικές ποσότητες q_{τ_j} είναι τυχαίες μεταβλητές, καθώς εξαρτώνται από τις ζητήσεις που προέκυψαν από την τελευταία αναπλήρωση μέχρι την τωρινή.

Υπο κανονικές συνθήκες, το προκαθορισμένο «order-up-to level» S_{τ_j} θα είναι μεγαλύτερο από το καθαρό απόθεμα ($I^n_{\tau_{j-1}}$,) στο τέλος της περιόδου τ_{j-1} και κατά συνέπεια η πραγματική ποσότητα που θα παραχθεί (ή παραγγελθεί), θα είναι θετική. Όμως, τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο το καθαρό απόθεμα $I^n_{\tau_{j-1}}$,να είναι μεγαλύτερο από το προκαθορισμένο S_{τ_j}. Σε αυτή την περίπτωση η πραγματική ποσότητα q_{τ_j} μέσω της σχέσης που αναφέραμε γίνεται αρνητική. Η εμφάνιση αρνητικής ποσότητας σε θεωρητικό επίπεδο ισοδυναμεί με επιστροφή προϊόντων στο προμηθευτή ή με αρνητική παραγωγή, βέβαια αυτό το γεγονός χαρακτηρίζεται ως μη ρεαλιστικό. Επομένως στην περίπτωση όπου ισχύει $S_{\tau_j} < I^n_{\tau_{j-1}}$, αποφασίζουμε να μην παραγάγουμε (ή παραγγείλουμε) και να ξεκινήσει ο επόμενος κύκλος αναπλήρωσης με αρχικό απόθεμα $I^n_{\tau_{j-1}}$,. Ωστόσο υποθέτουμε ότι η εμφάνιση αυτού του ενδεχόμενου είναι σπάνια και επομένως η επίδραση της στο απόθεμα κρίνεται αμελητέα.[11]

Θεωρούμε δύο διαδοχικές περιόδους παραγωγής i, j (i < j), και το «order-up-to level» S_{ij}. Το αναμενόμενο συνολικό κόστος, δηλαδή τα κόστη setup, holding και backorder που προκύπτουν κατά τη διάρκεια του διαστήματος (i, i + 1, ..., j-1), ορίζεται από τον παρακάτω τύπο[16]:

$$E\{C(S_{ij})\} = s + \sum_{t=i}^{j-1}\left[h * \int_0^{S_{ij}}(S_{ij} - y) * f_{Y(i,t)} * dy + \pi \int_{S_{ij}}^{\infty}(y - S_{ij}) * f_{Y(i,t)} * dy\right] \quad (3.9)$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία που αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα σχετικά με την εύρεση της βέλτιστης τιμής του S_{ij} καταλήγουμε στον τύπο:

$$\sum_{t=i}^{j-1} F_{Y(i,t)}\left({S_{ij}}^{opt}\right) = (j - i) * \left(\frac{\pi}{\pi + h}\right) \quad (3.10)$$

Όπου: $F_Y(S) = P(Y \leq S)$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Y.

Στο σημείο αυτό, καλούμαστε να προσδιορίσουμε το διάστημα στο όποιο ανήκει η ποσότητα ${S_{ij}}^{opt}$ στην προσπάθεια να προσδιορίσουμε με ακρίβεια την τιμή της. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι παρόμοια με αυτήν της Στατικής. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δυο βρίσκεται στο γεγονός πως η αθροιστική ζήτηση σε κάθε στρατηγική ορίζεται διαφορετικά. Συνεπώς καταλήγουμε στους παρακάτω τύπους:

$$\boxed{S_{min} = F^{-1}_{Y(i,i)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right), \quad S_{max} = F^{-1}_{Y(i,j-1)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)}$$

Επομένως το S_{opt} ανήκει στο διάστημα $[S_{min}, S_{max}]$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη μέθοδο της χρυσής τομής προκειμένου να οδηγηθούμε στην ακριβή τιμή του S_{opt} .

<u>Μέθοδος Χρυσής Τομής:</u>

$fib = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180$

Error =0.0001

For i = 1 : T

    For j = i+1 : T+1

        $frac = (j-i) * \frac{\pi}{\pi+h}$

        $S_{min} = F^{-1}_{Y(i,i)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$

        $S_{max} = F^{-1}_{Y(i,j-1)}\left(\frac{\pi}{\pi+h}\right)$

        While $(\mathrm{S_{max}} - \mathrm{S_{min}}) > \mathrm{Error}$

            $S_L = \mathrm{S_{max}} - \frac{(\mathrm{S_{max}} - \mathrm{S_{min}})}{fib}$

            $S_R = \mathrm{S_{min}} + \frac{(\mathrm{S_{max}} - \mathrm{S_{min}})}{fib}$

            $F_L = \sum_{t=i}^{j-1} F_{Y(i,t)}(S_L)$

            If $F_L < frac$ then

                $\mathrm{S_{min}} = S_L$

Else

$S_R = S_{\max}$

End

End

$S_{opt}(i, j-1) = S_{\max}$

End

End

Από την στιγμή που έχουμε προσδιορίσει τις βέλτιστες αθροιστικές ποσότητες ${S_{ij}}^{opt}$, μπορούμε να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του αναμενόμενου βέλτιστου κόστους που αντιστοιχεί σε αυτές, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$E\{C({S_{ij}}^{opt})\} = s + \sum_{t=i}^{j-1}\left[h * \{{S_{ij}}^{opt} - E\{Y^{(i,t)}\} + G^1_{Y(i,t)}({S_{ij}}^{opt})\} + \pi * G^1_{Y(i,t)}({S_{ij}}^{opt})\right] \quad (3.11)$$

<u>Μέθοδος Ελάχιστης Διαδρομής:</u>

Το πρόβλημα και στην Στατική-Δυναμική Στρατηγική μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής με Τ+1 κόμβους (1,2,...Τ+1). Ένα άκρο που ξεκινάει από τον κόμβο i και τελειώνει στον κόμβο j (i<j, j<T+1), επιβεβαιώνει ότι η ποσότητα παραγωγής που είναι διαθέσιμη στο ξεκίνημα της περιόδου i καλύπτει τη ζήτηση από την περίοδο i μέχρι και την περίοδο j-1. Η επόμενη αναπλήρωση θα πραγματοποιηθεί στην περίοδο j.

Για την εύρεση του «βέλτιστου» μονοπατιού, θα χρησιμοποιήσουμε και σε αυτήν τη στρατηγική τον αλγόριθμο <u>Wagner-Whitin.</u> Ο προσδιορισμός των ελαχίστων κοστών και των περιόδων παραγωγής πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο.

${Z_0}^* = 0$

$j_0^* = 1$

For t = 1 : T

$\quad {Z_t}^* = \min_{i=j^*_{t-1},\dots t}\left\{{Z_{i-1}}^* + C^{(i\,t)}_{opt}\right\}$

$\quad j_t^* = \arg\ \min_{i=j^*_{t-1},\dots t}\left\{{Z_{i-1}}^* + C^{(i\,t)}_{opt}\right\}$

End

Πλέον έχουμε προσδιορίσει τις περιόδους αναπλήρωσης και μπορούμε να συνεχίσουμε με το τελικό βήμα του προβλήματος, δηλαδή τον προσδιορισμό των «order-up-to levels» S_{τ_j} .

```
t=T
While  t ≠ 1
   a =  j*_t
   If  a ≠ 1 then
         b =  j*_t − 1
   Else
         b = 1
   End
    S_a =  S_opt^(a t)
    t=b
End
```

Η λύση του $\mathbf{Μοντέλου\ SSIULSP_{\pi}}$ υπό στοχαστική ζήτηση, με την εφαρμογή της Στατικής-Δυναμικής Στρατηγικής Αβεβαιότητας είναι ο πίνακας S_t (t=1,2,…,T).

3.2.2. Αποτελέσματα

Τα δεδομένα ήταν τα εξής:

- T = 10 (μήκος του ορίζοντα προγραμματισμού)
- μ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30] (μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο)
- σ = [10 30 20 40 30 10 30 30 10 30] (τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο)

- s = 100, h = 1 , π = μεταβάλλεται

Penalty Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
24	129	0	0	120	134	0	0	142	0	0
21	127	0	0	118	131	0	0	139	0	0
18	124	0	0	115	128	0	0	135	0	0
15	121	0	0	111	123	0	0	131	0	0
12	116	0	0	107	119	0	0	125	0	0
9	111	0	0	101	112	0	0	118	0	0
6	102	0	0	93	103	0	0	107	0	0
3	108	0	0	0	87	0	0	89	0	0
1	69	0	0	0	61	0	0	60	0	0

- s = 100, π= 9 , h = μεταβάλλεται

Holding Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
9	20	50	10	50	50	15	0	40	27	0
8	21	52	11	53	52	16	0	42	29	0
7	22	55	13	56	55	18	0	45	31	0
6	23	63	0	60	58	20	0	48	33	0
5	24	67	0	65	61	22	0	51	37	0
4	25	71	0	70	65	26	0	55	42	0
3	27	77	0	77	70	31	0	60	50	0
2	29	85	0	86	96	0	0	79	0	57
1	111	0	0	101	112	0	0	118	0	0

- <u>h = 1, π= 9 , s = μεταβάλλεται</u>

Setup Cost	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
700	149	0	0	0	193	0	0	0	0	0
500	149	0	0	0	193	0	0	0	0	0
400	149	0	0	0	193	0	0	0	0	0
200	111	0	0	174	0	0	0	118	0	0
100	111	0	0	101	112	0	0	118	0	0
70	33	98	0	101	112	0	0	118	0	0
40	33	98	0	101	88	57	0	78	33	68
10	33	88	36	101	88	23	58	78	33	68

3.1.3. Συμπεράσματα

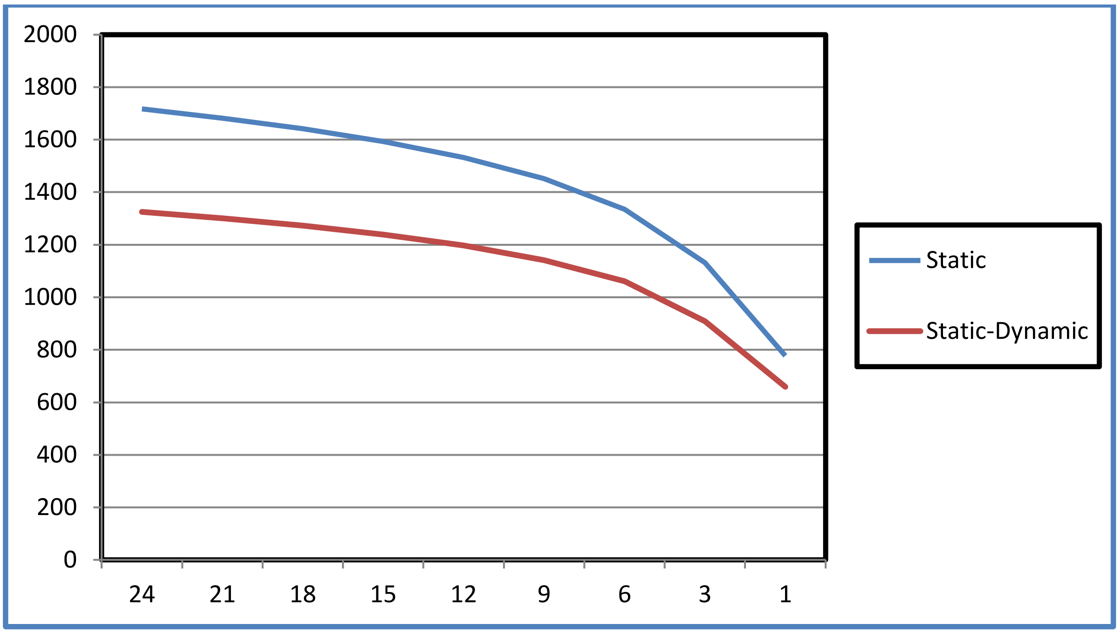
Τα παραπάνω αποτελέσματα, μας οδηγούν στα συμπεράσματα που καταλήξαμε στην Στατική Στρατηγική σχετικά με το πώς ανταποκρίνεται η παραγωγή ανάλογα με τις μεταβολές στα κόστη.

1) Καθώς αυξάνεται η τιμή του «penalty cost (π)» παράγουμε περισσότερες μονάδες.
2) Καθώς αυξάνεται η τιμή του «holding cost (h)» παράγουμε λιγότερες μονάδες προϊόντος, ενώ έχουμε και πιο συχνή παραγωγή σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση.
3) Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του «setup cost (s)» οδηγούμαστε στην δημιουργία μεγαλύτερων ποσοτήτων προκείμενου να παράγουμε με μικρότερη συχνότητα.

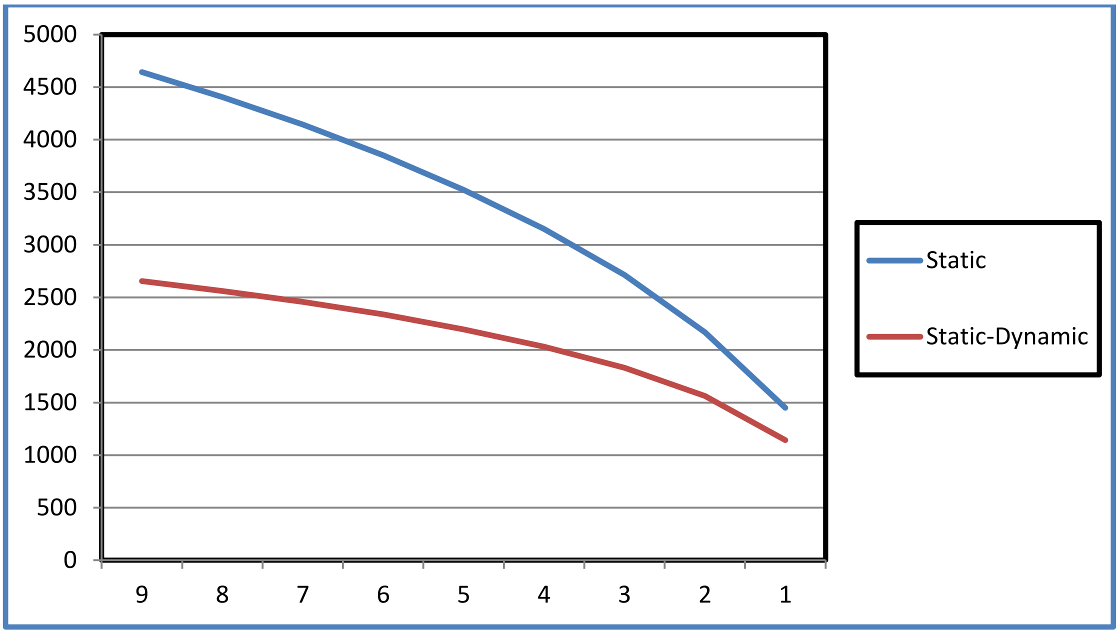
3.3. Σύγκριση μεταξύ Στρατηγικών

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα συνολικά αναμενόμενα κόστη για τις διάφορες μεταβολές τιμών που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

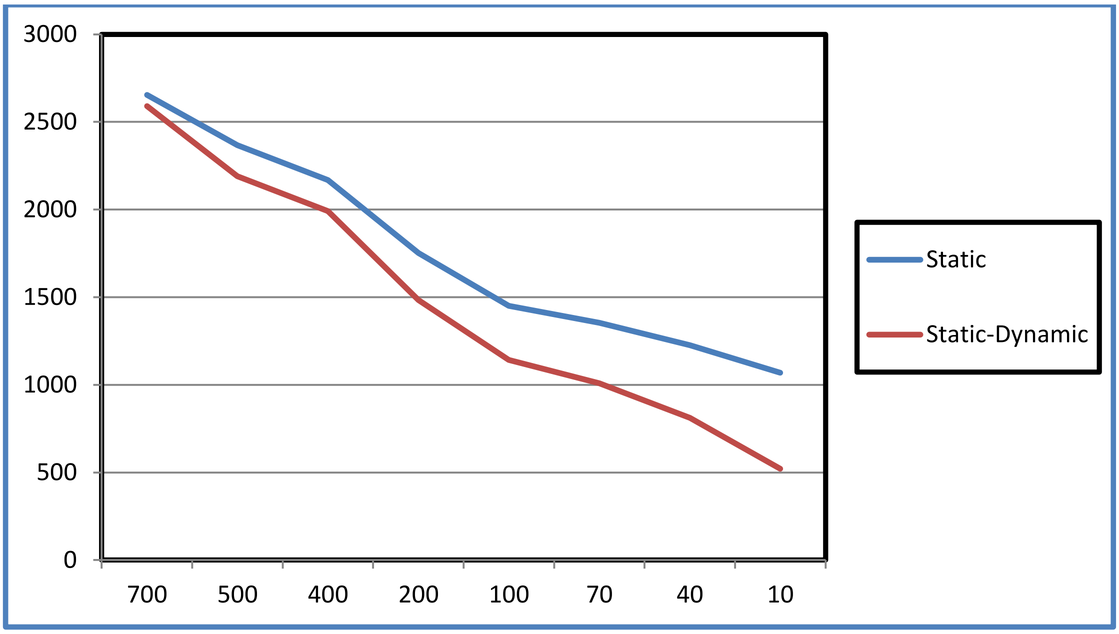
- s = 100, h = 1 , π = μεταβάλλεται



- s = 100, π= 9 , h = μεταβάλλεται



- <u>h = 1, π= 9 , s = μεταβάλλεται</u>



Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η Στατική Στρατηγική οδηγεί σε μεγαλύτερο κόστος, δεδομένου ότι οι περίοδοι και οι ποσότητες παραγωγής προσδιορίζονται εκ' των προτέρων και κατά συνέπεια δεν προσαρμόζονται στις ζητήσεις που εμφανίζονται. Ωστόσο μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε πλήρως τις απαιτήσεις δυναμικότητας και περιορίζονται οι πιθανότητες να παρουσιαστεί νευρικότητα στο πρόγραμμα παραγωγής.

Κεφάλαιο 4 : β_c Service Level

Στον παρόν κεφάλαιο επιλύουμε το πρόβλημα μεγέθους παρτίδας ενός προϊόντος με την εφαρμογή του περιορισμού «β_c service level», η επίλυση καθίσταται δυνατή μέσω της εφαρμογής των στρατηγικών: Στατικής Αβεβαιότητας και Στατικής Δυναμικής Αβεβαιότητας.

Υπενθυμίζουμε πως το συγκεκριμένο μέτρο συνδέει τα «backorders» σε έναν κύκλο αναπλήρωσης με την αντίστοιχη ζήτηση. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα «penalty costs» είναι δύσκολο να προσδιοριστούν, επομένως η συγκεκριμένη μέθοδος ανταποκρίνεται πιο αποτελεσματικά στην πραγματικότητα.

Το μαθηματικό πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι το εξής:[11]

$\underline{\boldsymbol{Μοντέλο\ SSIULSP_{\beta_c}}}$

<u>Minimize:</u> $Z = \sum_{t=1}^{T}(s * \gamma_t + h * E\{I_t^P\})$

<u>Subject to:</u>

$I_{t-1}^n + q_t - D_t = I_t^n$ t = 1,2,….,T (4.1)

$q_t - M * \gamma_t \leq 0$ t = 1,2,….,T (4.2)

$I_t^{f,Prod} = -[I_{t-1}^n + q_t]^-$ t = 1,2,….,T (4.3)

$I_t^{f,End} = -[I_t^n]^-$ t = 1,2,….,T (4.4)

$B_t = I_t^{f,End} - I_t^{f,Prod}$ t = 1,2,….,T (4.5)

$l_t = (l_{t-1} + 1) * (1 - \gamma_t)$ t = 1,2,….,T (4.6)

$l_0 = -1$

$\omega_t = \gamma_{t+1}$ t = 1,2,….,T-1 (4.7)

$\omega_T = 1$

$1 - \frac{E\{\sum_{j=t-l_t}^{t} B_j\}}{E\{\sum_{j=t-l_t}^{t} D_j\}} = \beta_c \quad t \in \{t \mid \omega_t = 1\}$

$q_t \geq 0$ t = 1,2,….,T

$\gamma_t \in \{0, 1\}$ t = 1,2,….,T

Όπου:

- D_t :η ζήτηση την περίοδο t
- I_t^n: το καθαρό απόθεμα στο τέλος της περιόδου t
- $I_t^{f,End}$: backlog στο τέλος της περιόδου t
- $I_t^{f,Prod}$: backlog αμέσως μετά την παραγωγή την περίοδο t
- B_t: οι backorders την περίοδο t
- l_t: ο αριθμός των περιόδων από την τελευταία παραγωγή πριν την περίοδο t
- γ_t: δυαδική μεταβλητή, $\gamma_t=1$ εάν ισχύει $q_t>0$
- M : μεγάλος θετικός αριθμός.
- h : holding cost
- s : setup cost
- T : το μήκος του χρονικού ορίζοντα σχεδιασμού
- $\omega_t = \begin{cases} 1, \; \text{όταν έχουμε παραγωγή την περίοδο } t+1 \\ 0, \text{οτάν δεν έχουμε παραγωγή την περίοδο } t+1 \end{cases}$
- I_t^P: το απόθεμα που έχουμε σε κάθε περίοδο t
  $E\{I_t^P\} = Q^{(t)} - E\{Y^{(t)}\} + G^1_{Y^{(t)}}(Q^{(t)})$
- $[x]^- = min\{0, x\}$

Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί το άθροισμα των «setup cost» και των αναμενόμενων «holding cost». Ο περιορισμός (4.1) είναι η εξίσωση ισορροπίας αποθέματος, όπου το καθαρό απόθεμα I_t^n είναι μια τυχαία μεταβλητή δεδομένου ότι εξαρτάται από την αβεβαιότητα της ζήτησης. Ο περιορισμός (4.2) ωθεί τη μεταβλητή γ_t να λάβει την τιμή 1 όταν έχουμε θετική ποσότητα παραγωγής. Ο περιορισμός (4.3) ορίζει το απόθεμα στο ξεκίνημα της περιόδου t, αμέσως μετά την αναπλήρωση. Επιπρόσθετα ο περιορισμός (4.4) περιγράφει τα «backlog» στο τέλος της περιόδου t, ο (4.5) υπολογίζει τα backorders την περίοδο t.

Οι περιορισμοί (4.6) και (4.7) ορίζουν δυο βοηθητικές μεταβλητές. Το l_t δηλώνει τον αριθμό των περιόδων από την τελευταία παραγωγή πριν την περίοδο t, δηλαδή το μήκος του κύκλου παραγωγής. Η συγκεκριμένη μεταβλητή λαμβάνει την τιμή 0 όταν έχουμε παραγωγή την περίοδο t ($\gamma_t = 1$), σε αντίθετη περίπτωση αυξάνεται κατά 1 μονάδα. Τέλος η ω_t γίνεται 1 όταν έχουμε παραγωγή την περίοδο t+1, αλλιώς γίνεται 0, η μεταβλητή μας ορίζει το τέλος ενός κύκλου παραγωγής.

4.1. Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Το παραπάνω μοντέλο είναι μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο δεν μπορεί να λυθεί με ένα κοινό τρόπο. Ωστόσο μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής.

4.1.1. Μεθοδολογία

Στόχος: Πρέπει να υπολογίσουμε τις βέλτιστές ποσότητες παραγωγής $q_{\tau t}^{opt}$ καθώς και τις περιόδους παραγωγής τ_j, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος. Παράλληλα όμως, θα πρέπει να ικανοποιείται ο περιορισμός «β_c service level» σε κάθε κύκλο αναπλήρωσης. Επομένως, η $q_{\tau t}^{opt}$ θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε να εγγυάται την επίτευξη του περιορισμού από την περίοδο τ έως την περίοδο t-1.

Έστω ότι έχουμε παραγωγή την περίοδο τ και θέλουμε να καλύψουμε την ζήτηση μέχρι την περίοδο (t-1). Η ελάχιστη ποσότητα παραγγελίας που απαιτείται για να εξασφαλιστεί το επιδιωκόμενο «β_c service level» ορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$q_{\tau t}^{opt}(\beta_c) = q_{\tau t} \left| 1 - \frac{E\{\sum_{i=\tau}^{t-1} B_i(q_{\tau t})\}}{E\{\sum_{i=\tau}^{t-1} D_i\}} = \beta c \right. \quad (4.8)$$

Η αριθμητική σχέση που προσδιορίζει το «β_c service level» είναι η εξής :

$$\beta_c = 1 - \frac{E\left\{\sum_{j=\tau}^{t-1} B_j\right\}}{E\left\{\sum_{j=\tau}^{t-1} D_j\right\}} \quad (4.9)$$

όπου $E\left\{\sum_{j=\tau}^{t-1} B_j\right\} = \sum_{j=\tau}^{t-1} G_{Y^{(j)}}^1\left(Q^{(j)}\right)$

$$G_{Y^{(t)}}^1 = [f(z) - z(1 - F(z))] * \sigma \quad , \quad \text{όπου} \quad z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Υπενθυμίζουμε πως η $G_{D^{(t)}}^1$ είναι η «first order loss function» και εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό ελλειμμάτων που είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε έναν κύκλο παραγωγής.

Το πρώτο βήμα για τον προσδιορισμό των $q_{\tau t}^{opt}$ είναι να υπολογίσουμε τις ακριβείς τιμές Q_{opt}. Ο υπολογισμός θα καταστεί δυνατός μέσω της μεθόδου της χρυσής τομής.

Μέθοδος Χρυσής Τομής:

Στην μέθοδο εφαρμόζουμε την εξής επαναληπτική διαδικασία:

$fib = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180$

Error =0.0001

For i = 1 : T

For j = i+1 : T+1

$\beta_{min} = 0$

$\beta_{max} = 1$

$\beta_L = 0$

$\mathrm{Q_{min}} = 0$

$\mathrm{Q_{max}} = 10^4$

While $[(\beta_c - \beta_{min}) > \mathrm{Error}]$ && $[(\beta_{max} - \beta_c) > \mathrm{Error}]$

$Q_L = \mathrm{Q_{max}} - \frac{(\mathrm{Q_{max}} - \mathrm{Q_{min}})}{fib}$

$\beta_L = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\mathrm{Q_L})}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\right\}}$

If $\beta_L < \beta_c$ then

$\mathrm{Q_{min}} = Q_L$

Else

$\mathrm{Q_{max}} = \mathrm{Q_{min}} + \frac{(\mathrm{Q_{max}} - \mathrm{Q_{min}})}{fib}$

End

$\beta_{min} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\mathrm{Q_{min}})}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\right\}}$

$\beta_{max} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\mathrm{Q_{max}})}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\right\}}$

End

$Q_{opt}(i, j-1) = \mathrm{Q_{max}}$

End

End

Η παραπάνω μεθοδολογία αποτελεί μια παραλλαγή της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε για την επιβολή «penalty cost». Κατά την διαδικασία αυτή μεταβάλλουμε συνεχώς το Q, έως ότου οι ανεκπλήρωτες παραγγελίες που θα αφήνει σε κάθε κύκλο να ικανοποιούν το «β_c service level» . Το Q στο τέλος κάθε επανάληψης είναι το βέλτιστο. Με το δείκτη i ορίζουμε την έναρξη ενός μήκος κύκλου παραγωγής, δηλαδή παράγουμε στην περίοδο i. Αντίθετα με το δείκτη j ορίζουμε το τέλος ενός κύκλου, δηλαδή καλύπτουμε την ζήτηση μέχρι την περίοδο j-1 . Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε ένα πινάκα ποσοτήτων παραγωγής με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς i-j, γνωρίζουμε πόση ποσότητα πρέπει να παραγάγουμε για οποιοδήποτε πρόγραμμα παραγωγής.

Με την παραπάνω διαδικασία υπολογίζουμε τις βέλτιστες ποσότητες Q_{opt}, στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του αναμενόμενου βέλτιστου κόστους που αντιστοιχεί σε αυτές, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$E\left\{C\left(Q_{opt}^{(ij)}\right)\right\} = s + \sum_{t=i}^{j-1}\left[\, h * \left\{Q_{opt}^{(ij)} - E\{Y^{(t)}\} + G_{Y^{(t)}}^{1}\left(Q_{opt}^{(ij)}\right)\right\}\right] \quad (4.10)$$

Πλέον έχουμε προσδιορίσει το αναμενόμενο κόστος για κάθε δυνατό συνδυασμό μεταξύ των i και j, υπό την εφαρμογή του περιορισμού «β_c service level». Απομένει να προσδιορίσουμε το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής, το όποιο για να προσδιοριστεί απαιτεί την εφαρμογή ενός δυναμικού προγράμματος προσδιορισμού των ελαχίστων κοστών. Και σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Wagner-Whitin όπου το πρόβλημα θα αναπαρασταθεί ως ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής με T+1 κόμβους (1,2, ..., T +1).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε την ισχυρή εξάρτηση του κάθε κόστους, από το πρόγραμμα παραγωγής που θα εφαρμόσουμε. Το απόθεμα μετά την παραγωγή σε μία περίοδο τ είναι ίσο νε το μέγεθος της παρτίδας συν το απόθεμα στο τέλος της προηγούμενης περιόδου τ-1. Ο τελευταίος όμως όρος εξαρτάται από την εξέλιξη των ζητήσεων και των ποσοτήτων παραγωγής κατά το χρονικό διάστημα από την περίοδο 1 έως την τ-1.Εάν για παράδειγμα η βέλτιστη διαδρομή είναι να μεταβούμε από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3, τότε το αναμενόμενο απόθεμα στο τέλος της περιόδου 2 θα είναι διαφορετικό από το απόθεμα που θα είχαμε εάν ο κόμβος 2 ανήκε στη βέλτιστη διαδρομή. Κατά συνέπεια η διαφορά στα αποθέματα θα οδηγούσε και σε διαφορετικά κόστη.

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι όμοια με εκείνη της Ενότητας 3.1.1..

Μέθοδος Ελάχιστης Διαδρομής:

Ορίζουμε και σε αυτήν την περίπτωση διαδοχικά προβλήματα t περιόδων (t=1,2,…,T) και για κάθε πρόβλημα υπολογίζουμε τις μεταβλητές:

- ${Z_t}^*$: ελάχιστο κόστος προβλήματος t περιόδων
- j_t^* : τελευταία περίοδος παραγωγής στο πρόβλημα των t περιόδων

$${Z_0}^* = 0$$

$$j_0^* = 1$$

For t = 1 : T

$${Z_t}^* = \min_{i=j_{t-1,\dots t}^*}\left\{{Z_{i-1}}^* + C_{opt}^{(i\ t)}\right\}$$

$$j_t^* = \arg\ \min_{i=j_{t-1,\dots t}^*}\left\{{Z_{i-1}}^* + C_{opt}^{(i\ t)}\right\}$$

End

t=T

While $t \neq 1$

$a = j_t^*$

If $a \neq 1$ then

$b = j_t^* - 1$

$c = j_b^*$

Else

$b = 1$

$c = 1$

$Q_{opt}^{(c\ b)} = 0$

End

$Q_a = Q_{opt}^{(a\ t)} - Q_{opt}^{(c\ b)}$

t=b

End

4.1.2. Αποτελέσματα

Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε, εισάγαμε τα παρακάτω δεδομένα:

- T = 10 (μήκος του ορίζοντα προγραμματισμού)
- μ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30] (μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο)
- σ = [10 30 20 40 30 10 30 30 10 30] (τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο)
- s = 100 (setup cost)
- h = 1 (holding cost)

β_c	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
0,95	112	0	0	145	0	0	0	89	0	0
0,9	97	0	0	128	0	0	0	81	0	0
0,85	86	0	0	117	0	0	0	75	0	0
0,8	78	0	0	107	0	0	0	70	0	0
0,75	71	0	0	99	0	0	0	65	0	0
0,7	64	0	0	91	0	0	0	61	0	0
0,65	59	0	0	84	0	0	0	57	0	0

4.1.3. Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στο προφανές συμπέρασμα πως καθώς μειώνουμε την τιμή του β_c, μειώνονται οι ποσότητες των παρτίδων παραγωγής. Ο λόγος είναι πως επιτρέπουμε να πραγματοποιηθούν όλο και περισσότερες ανεκπλήρωτες παραγγελίες.

4.2. Στατική-Δυναμική Στρατηγική Αβεβαιότητας

Όπως και στην περίπτωση της εφαρμογής «penalty cost», στην παρούσα ενότητα θα εφαρμόσουμε την πολιτική Στατικής-Δυναμικής Αβεβαιότητας κατά την όποια καθορίζουμε εκ' των προτέρων τις περιόδους αναπλήρωσης, όμως οι ποσότητες παραγωγής υπολογίζονται δυναμικά, έπειτα από την εμφάνιση των ζητήσεων των προηγούμενων περιόδων.

Η επίλυση του προβλήματος μεγέθους παρτίδας, και σε αύτη την πολιτική, θα επιτευχθεί μέσω της αναπαράστασης του, ως ένα πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής.

4.2.1. Μεθοδολογία

Στόχος: Πρέπει να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες ποσότητες S_{ij} (order-up-to levels), όπως επίσης και τις περιόδους αναπλήρωσης, με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος. Όταν επιτευχθεί ο υπολογισμός τους, τότε η κάθε ποσότητα παραγωγής q_{ij} υπολογίζεται ως η διαφορά μεταξύ των προκαθορισμένων S_{ij} και του καθαρού αποθέματος στο ξεκίνημα εκείνης της περιόδου. Κρίνεται σημαντικό να υπενθυμίσουμε πως οι πραγματικές ποσότητες (q_{ij}) είναι τυχαίες μεταβλητές, δεδομένου ότι εξαρτώνται από τις ζητήσεις που προέκυψαν από την τελευταία αναπλήρωση μέχρι την τωρινή. Ταυτόχρονα όμως, πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε κύκλο αναπλήρωσης ο περιορισμός «β_c service level» .

Ο προσδιορισμός των ποσοτήτων S_{ij}^{opt} είναι δυνατόν να επιτευχθεί μέσω του υπολογισμού του αντίστροφου της συνάρτησης «first order loss function» $\left[G^1_{Y(i,j-1)}\right]^{-1}(\beta_c)$, το όποιο καθορίζει την απαιτούμενη ποσότητα προκειμένου τα «backorders» να αντιστοιχούν στο β_c που έχουμε ορίσει. Η ποσότητα αυτή για την περίπτωση όπου έχουμε κανονική κατανομή μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία μέσω του προσεγγιστικού τύπου που έχουμε ορίσει παραπάνω.[17]

Για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων S_{ij}^{opt} , όπου το i και το j εκφράζουν δύο διαδοχικές περιόδους παραγωγής, θα εφαρμόσουμε μια παραλλαγή της μεθόδου χρυσής τομής.

Μέθοδος Χρυσής Τομής:

Εφαρμόζουμε την ακόλουθη επαναληπτική διαδικασία:

```
fib = (1+√5)/2 = 1.6180
Error =0.0001
For i = 1 : T
    For j = i+1 : T+1
        β_min = 0
        β_max = 1
        β_L = 0
        S_min = 0
        S_max = 10^4
        While [(β_c − β_min) > Error] && [(β_max − β_c) > Error]
            S_L = S_max − (S_max − S_min)/fib
            β_L = 1 − Σ_{t=i}^{j−1} G^1_{Y(it)}(S_L) / E{Σ_{t=i}^{j−1} Y_(it)}
            If β_L < β_c then
                S_min = S_L
            Else
                S_max = S_min + (S_max − S_min)/fib
            End
            β_min = 1 − Σ_{t=i}^{j−1} G^1_{Y(it)}(S_min) / E{Σ_{t=i}^{j−1} Y_(it)}
            β_max = 1 − Σ_{t=i}^{j−1} G^1_{Y(it)}(S_max) / E{Σ_{t=i}^{j−1} Y_(it)}
        End
        S_opt(i, j − 1) = S_max
    End
End
```

$$fib = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180$$

$$S_L = S_{\max} - \frac{(S_{\max} - S_{\min})}{fib}$$

$$\beta_L = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G^1_{Y(it)}(S_L)}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_{(it)}\right\}}$$

$$\beta_{min} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G^1_{Y(it)}(S_{\min})}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_{(it)}\right\}}$$

$$\beta_{max} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G^1_{Y(it)}(S_{\max})}{E\left\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_{(it)}\right\}}$$

Πλέον έχουμε προσδιορίσει τα βέλτιστα order-up-to levels ${S_{ij}}^{opt}$ για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς κύκλων παραγωγής και θα πρέπει να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των αντίστοιχων κοστών. Για τον υπολογισμό του, θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα συντομότερης διαδρομής με T+1 κόμβους (1,2,...T+1). Όταν ένα άκρο ξεκινάει από έναν κόμβο i και καταλήγει σε έναν κόμβο j (i<j, j<T+1), τότε η ποσότητα παραγωγής που είναι διαθέσιμη στο ξεκίνημα της περιόδου i καλύπτει τη ζήτηση από την περίοδο i μέχρι και την περίοδο j-1. Η επόμενη αναπλήρωση πραγματοποιείται την περίοδο j.

Όταν ξεκινάει ένας κύκλος παραγωγής την περίοδο i το απόθεμα είναι ίσο με ${S_{ij}}^{opt}$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε το απόθεμα που αντιστοιχεί σε έναν κλάδο που ξεκινάει από τον κόμβο i και τελειώνει στον κόμβο j, θα πρέπει να εξετάσουμε την εξέλιξη του μεταξύ του τέλους της περιόδου i και του τέλους της περιόδου j-1. Έστω λοιπόν ότι βρισκόμαστε σε μία τυχαία περίοδο t που ανήκει στο διάστημα [i, i+1,…., j-1], το απόθεμα I_t^P σε εκείνη την περίοδο θα είναι ίσο με τη διαφορά $\left({S_{ij}}^{opt} - Y^{(it)}\right)$,εάν η ζήτηση από την περίοδο i έως την t είναι $\left(Y^{(it)} < {S_{ij}}^{opt}\right)$, σε αντίθετη περίπτωση θα ισχύει $(I_t^P = 0)$.[17]

$$E\{I_t^P\} = \int_0^{{S_{ij}}^{opt}} \left({S_{ij}}^{opt} - y\right) * f_{Y^{(it)}}(y)dy\,, \quad t = i, i+1, \ldots, j-1 \qquad (4.11)$$

Ο παραπάνω τύπος ισοδυναμεί με :

$$E\{I_t^P\} = {S_{ij}}^{opt} - E\{Y^{(it)}\} + G^1_{Y^{(i\,t)}}\left({S_{ij}}^{opt}\right) \qquad (4.12)$$

Εάν αθροίσουμε όλες τις περιόδους t που ανήκουν σε έναν κύκλο που ξεκινάει την περίοδο i και τελειώνει την j-1, τότε θα προκύψει το απόθεμα που αντιστοιχεί σε αυτόν τον κύκλο. Στην συνέχεια αν πολλαπλασιάσουμε το απόθεμα με το «holding cost» και προσθέσουμε το «setup cost», θα προκύψει το αναμενόμενο συνολικό κόστος.[11]

$$E\{C({S_{ij}}^{opt})\} = s + \sum_{t=i}^{j-1}\left[h * \left\{{S_{ij}}^{opt} - E\{Y^{(i,t)}\} + G^1_{Y^{(i,t)}}\left({S_{ij}}^{opt}\right)\right\}\right] \qquad (4.13)$$

Μέσω του τύπου (4.12) μπορούμε να προσδιορίσουμε το αναμενόμενο κόστος για κάθε δυνατό συνδυασμό μεταξύ των i και j. Πλέον απομένει να προσδιορίσουμε το βέλτιστο συνδυασμό παραγωγής, εκείνον δηλαδή με το χαμηλότερο συνολικό κόστος. Για την εύρεση του θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Wagner-Whitin.

Η διαδικασία που παρουσιάζουμε στη συνέχεια για τον προσδιορισμό των ελαχίστων κοστών και των περιόδων παραγωγής είναι όμοια με εκείνη της Ενότητας 3.2.1..

Μέθοδος Ελάχιστης Διαδρομής:

$Z_0{}^* = 0$

$j_0^* = 1$

For t = 1 : T

$$Z_t{}^* = \min_{i=j_{t-1}^*,\dots t}\left\{Z_{i-1}{}^* + C_{opt}^{(i\ t)}\right\}$$

$$j_t^* = \arg\ \min_{i=j_{t-1}^*,\dots t}\left\{Z_{i-1}{}^* + C_{opt}^{(i\ t)}\right\}$$

End

t=T

While $t \neq 1$

$a = j_t^*$

If $a \neq 1$ then

$b = j_t^* - 1$

Else

$b = 1$

End

$S_a = S_{opt}^{(a\ t)}$

t=b

End

4.2.2. Αποτελέσματα

Στα αποτελέσματα που παραθέτουμε, εισάγαμε τα παρακάτω δεδομένα:

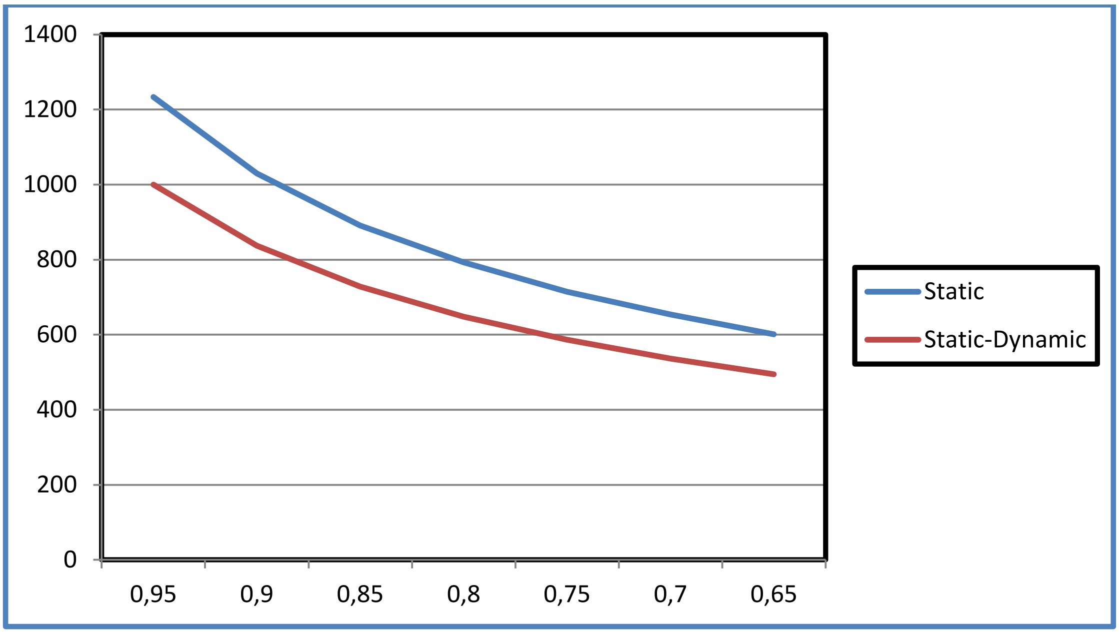
- T = 10 (μήκος του ορίζοντα προγραμματισμού)
- μ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30] (μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο)
- σ = [10 30 20 40 30 10 30 30 10 30] (τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο)
- s = 100 (setup cost)
- h = 1 (holding cost)

β_c	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
0,95	112	0	0	96	121	0	0	129	0	0
0,9	97	0	0	156	0	0	0	111	0	0
0,85	86	0	0	139	0	0	0	98	0	0
0,8	78	0	0	125	0	0	0	89	0	0
0,75	71	0	0	114	0	0	0	81	0	0
0,7	64	0	0	104	0	0	0	73	0	0
0,65	59	0	0	94	0	0	0	67	0	0

4.2.3. Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα μας οδηγούν στα ίδιο συμπέρασμα που καταλήξαμε και μέσω της Στατικής Στρατηγικής. Δηλαδή, καθώς μειώνεται η τιμή του «β_c service level», μειώνονται και οι ποσότητες των παρτίδων παραγωγής, καθώς επιτρέπουμε να πραγματοποιηθούν όλο και περισσότερες ανεκπλήρωτες παραγγελίες. Ωστόσο είναι σημαντικό να υπενθυμίσουμε πως τα παραπάνω αποτελέσματα είναι τα S_t (order-up-to levels), οι τελικές ποσότητες παραγωγής υπολογίζονται ως η διαφορά μεταξύ των «order-up-to levels» και του καθαρού αποθέματος στο ξεκίνημα κάθε περιόδου. Κατά συνέπεια οι ποσότητες παραγωγής είναι τυχαίες μεταβλητές, διότι εξαρτώνται από τις ζητήσεις που προέκυψαν από την τελευταία αναπλήρωση.

4.3. Σύγκριση μεταξύ Στρατηγικών



Το διάγραμμα επιβεβαιώνει το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή πως η Στατική Στρατηγική προκαλεί μεγαλύτερο κόστος, καθώς οι περίοδοι και οι ποσότητες παραγωγής προσδιορίζονται εκ' των προτέρων και κατά συνέπεια δεν προσαρμόζονται στις ζητήσεις που εμφανίζονται. Ωστόσο προσφέρει σταθερότητα, διότι έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τις ανάγκες μας για την παραγωγή.

Κεφάλαιο 5 : Πολλαπλά Προϊόντα

Έως τώρα έχουμε εξετάσει τα προβλήματα μεγέθους παρτίδας («lot sizing problems») για ένα προϊόν, στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε μια επέκταση του προβλήματος για την περίπτωση που παράγονται πολλαπλά προϊόντα. Παράλληλα θεωρούμε πως διαθέτουμε έναν πόρο με περιορισμένη χωρητικότητα.

Αξίζει να αναφέρουμε πως στην βιβλιογραφία μπορούμε να συναντήσουμε δύο ομάδες μοντέλων ανάλογα με την μοντελοποίηση του χρόνου. Η πρώτη είναι τα μοντέλα συνεχούς χρόνου τα οποία υποθέτουν στάσιμες ζητήσεις για όλα τα προϊόντα και συνδυάζουν την επιλογή μεγέθους παρτίδας και την απόφαση του χρονοδιαγράμματος (scheduling). Η δεύτερη ομάδα είναι τα μοντέλα διακριτού χρόνου τα οποία αποτελούν μια επέκταση του μοντέλου SIULSP που αναλύθηκε στην ενότητα 2.2.. Στην παρούσα ενότητα εμείς ασχολούμαστε με τα μοντέλα μεγέθους παρτίδας υπό περιορισμό χωρητικότητας (capacitated lot sizing problem, CLSP), τα όποια είναι επέκταση της δεύτερης κατηγορίας.[3]

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στην Στατική-Δυναμική Στρατηγική Αβεβαιότητας οι ποσότητες αναπλήρωσης είναι τυχαίες μεταβλητές, δεδομένου ότι δεν υπολογίζονται εκ' των προτέρων και εξαρτώνται από τις ζητήσεις που προέκυψαν από την τελευταία αναπλήρωση και έπειτα. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι δυνατόν να επηρεάσει αρνητικά την περίπτωση όπου λαμβάνεται περιορισμένη δυναμικότητα. Στην αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, η δυνατότητα σχεδιασμού ενός προγράμματος παραγωγής που μας επιτρέπει να προβλέψουμε πλήρως τους πόρους που χρειαζόμαστε κρίνεται σημαντικότερη από μια λύση που ενδεχομένως οδηγεί σε χαμηλότερο κόστος, αλλά μπορεί να μην είναι εφικτή. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως μόνο η Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας είναι σε θέση να μας προσφέρει σχέδια παραγωγής με προκαθορισμένες απαιτήσεις χωρητικότητας.[11]

Επομένως στη συνέχεια θεωρούμε ότι το πρόβλημα μεγέθους παρτίδας πολλαπλών προϊόντων βασίζεται στη Στατική Στρατηγική Αβεβαιότητας και κατ' επέκταση υποθέτουμε σταθερές περιόδους παραγωγής και προκαθορισμένα μεγέθη παρτίδας.

Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος αποτελεί μια επέκταση εκείνου που αναλύσαμε, ωστόσο τώρα έχουμε προϊόντα πλήθους K, που παράγονται σε ένα μόνο πόρο με περιορισμένη δυναμικότητα ανά περίοδο.

Μοντέλο SMICLSP^{q}:

Minimize: $C = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} (s_k * \gamma_{k,t} + h * I_{k,t}^{n})$

Subject to:

$I_{k,t}^{n} = I_{k,0}^{n} + \sum_{j=1}^{t} (q_{k,j} - d_{k,j})$ t = 1,2,….,T, k = 1,2,….,K

$q_{k,t} - M * \gamma_{k,t} \leq 0$ t = 1,2,..,T, k = 1,2,….,K

$\sum_{k=1}^{K} (t_k^b * q_{k,t} + t_k^r * \gamma_{k,t}) \leq b_t$ t = 1,2,….,T, k = 1,2,….,K

$q_{\kappa,t} \geq 0$ t = 1,2…..,T, k = 1,2,….,K

$I_{k,t}^{n} \geq 0$ t = 1,2,….,T, k = 1,2,….,K

$\gamma_{k,t} \in \{0, 1\}$ t = 1,2,….,T, k = 1,2,….,K

Όπου:

- t_k^b: ο χρόνος που απαιτείται για να παραχθεί μια μονάδα του προϊόντος k
- t_k^r: ο χρόνος που απαιτείται για την εγκατάσταση της παραγωγής (setup time)
- b_t: είναι η διαθέσιμη δυναμικότητα (σε μονάδες χρόνου) την περίοδο t
- $d_{k,t}$: η ντετερμινιστική καθαρή ζήτηση την περίοδο t, για το k προϊόν
- h : holding cost
- s : setup cost
- $I_{k,t}^{n}$: το καθαρό απόθεμα στο τέλος της περιόδου t, για το k προϊόν
- M : μεγάλος θετικός αριθμός
- $q_{k,t}$: το μέγεθος παρτίδας την περίοδο t, του προϊόντος k
- T : το μήκος του χρονικού ορίζοντα σχεδιασμού
- $\gamma_{k,t}$: δυαδική μεταβλητή, $\gamma_{k,t}$=1 εάν ισχύει $q_{k,t}$>0

Όπως ήδη έχουμε τονίσει, επειδή ο προσδιορισμός του «penalty cost» είναι δύσκολος και συναντάται κυρίως σε θεωρητικό επίπεδο, θα εφαρμόσουμε τον περιορισμό του «β_c service level».

Το ζήτημα επιλογής σχεδίου παραγωγής για κάθε προϊόν, με ταυτόχρονη ικανοποίηση του περιορισμού δυναμικότητας μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα μαθηματικό μοντέλο, με σκοπό να γίνει περισσότερο κατανοητό.

Θεωρούμε για κάθε προϊόν k, P_k εναλλακτικά σχέδια παραγωγής (k=1,2,…K), για έναν ορίζοντα προγραμματισμού T. Το κάθε πρόγραμμα παραγωγής n αποτελείται από έναν δεδομένο αριθμό περιόδων παραγωγής (setup) και τα αντίστοιχα μεγέθη παρτίδας, και πρέπει να καλύψει τις ζητήσεις για έναν αριθμό περιόδων. Παράλληλα θα πρέπει να μην παραβιάζεται ο περιορισμός του «β_c service level». Το πρόβλημα μας λοιπόν εστιάζεται στην επιλογή ενός σχεδίου παραγωγής για κάθε προϊόν, έτσι ώστε σε όλες τις περιόδους να τηρούνται οι περιορισμοί δυναμικότητας.[11]

Μοντέλο SMICLSP^{SPP}:

Minimize: $Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{P_k} c_{kn} * \delta_{kn}$

Subject to:

$\sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{P_k} \kappa_{knt} * \delta_{kn} \leq b_t$ t = 1,2,….,T (5.1)

$\sum_{n=1}^{P_k} \delta_{kn} = 1$ k = 1,2,….,K (5.2)

$\delta_{kn} \in \{0, 1\}$ k = 1,2,….,K, n=1,2,….,P_k

Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί το άθροισμα των αναμενόμενων κοστών των σχεδίων παραγωγής που επιλέγονται. Το δ_{kn} είναι μία δυαδική μεταβλητή που επιλέγει το πρόγραμμα παραγωγής n του προϊόντος k. Ο περιορισμός (5.1) διασφαλίζει την τήρηση του περιορισμού δυναμικότητας σε κάθε περίοδο t, όπου κ_{knt} είναι η απαίτηση δυναμικότητας την περίοδο t που προκύπτει για το πρόγραμμα παραγωγής n. Αντίθετα ο περιορισμός (5.2) δηλώνει ότι για κάθε προϊόν θα πρέπει να επιλέγει ακριβώς ένα σχέδιο παραγωγής.

5.1. Μεθοδολογία

Στόχος: Πρέπει να υπολογίσουμε τις βέλτιστες ποσότητες παραγωγής $q_{\tau t}^{opt}$, καθώς και τις περιόδους παραγωγής τ_j, προκείμενου να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος. Επίσης, θα πρέπει να ικανοποιείται ο περιορισμός του «β_c service level» σε κάθε κύκλο αναπλήρωσης. Συνεπώς, η κάθε ποσότητα παραγωγής θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη προκειμένου να εξασφαλίζει την ικανοποίηση του περιορισμού από την περίοδο τ, όπου λαμβάνει χώρα η παραγωγή, μέχρι την περίοδο t-1. Τέλος σε κάθε περίοδο του χρονικού ορίζοντα θα πρέπει να ικανοποιείται ο περιορισμός δυναμικότητας που έχουμε επιβάλλει.

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στο παρών κεφάλαιο, είναι πως ο συνδυασμός των βέλτιστων σχεδίων παραγωγής του κάθε προϊόντος (εκείνων που θα προέκυπταν εάν είχαμε ένα απλό πρόβλημα μεγέθους παρτίδας) πιθανόν να παραβιάζει το περιορισμό δυναμικότητας. Επομένως, καλούμαστε να επιβάλουμε σε κάθε προϊόν ένα πρόγραμμα που θα οδηγεί σε εφικτή λύση, δηλαδή που δεν θα παραβιάζει τον περιορισμό.

Το πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος, είναι να προσδιορίσουμε τις ποσότητες παραγωγής για κάθε πιθανό σχέδιο P_k, υπό το περιορισμό «β_c service level». Για τον προσδιορισμό ακολουθούμε την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία.

$fib = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180$

Error =0.0001

For k = 1 : K

  For i = 1 : T

    For j = i+1 : T+1

      $\beta_{min} = 0$

      $\beta_{max} = 1$

      $\beta_L = 0$

      $Q_{min} = 0$

      $Q_{max} = 10^4$

      While $[(\beta_c - \beta_{min}) > \text{Error}]$ && $[(\beta_{max} - \beta_c) > \text{Error}]$

        $Q_L = Q_{max} - \frac{(Q_{max} - Q_{min})}{fib}$

$$\beta_L = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\,Q_L)}{E\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\}}$$

If $\beta_L < \beta_c$ then

$$Q_{\min} = Q_L$$

Else

$$Q_{\max} = Q_{\min} + \frac{(\,Q_{\max} - Q_{\min})}{fib}$$

End

$$\beta_{min} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\,Q_{\min})}{E\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\}}$$

$$\beta_{max} = 1 - \frac{\sum_{t=i}^{j-1} G_{D(t)}^1(\,Q_{\max})}{E\{\sum_{t=i}^{j-1} Y_t\}}$$

End

$$Q_{opt}(k,i,j-1) = Q_{\max}$$

End

End

End

Με την παραπάνω διαδικασία, υπολογίζουμε για κάθε προϊόν και για κάθε πιθανό σχέδιο παραγωγής, τις βέλτιστες ποσότητες Q_{opt}. Όπως έχουμε αναφέρει και στο 4^{ο} κεφάλαιο, για να καταλήξουμε στη βέλτιστη τιμή του Q, μεταβάλλουμε διαρκώς την τιμή του, συμφωνά με την μέθοδο της χρυσής τομής, έως ότου οι ανεκπλήρωτες παραγγελίες που επιτρέπει σε κάθε κύκλο παραγωγής να ικανοποιούν τον περιορισμό «β_c service level».

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το αναμενόμενο κόστος για κάθε πιθανό πλάνο παραγωγής P_k, το οποίο δίνεται από τον τύπο (4.10) της 4^{ης} ενότητας. Παράλληλα προκείμενου να διευκολυνθεί η επιβολή του περιορισμού δυναμικότητας μετατρέπουμε τον πίνακα Q_{opt} σε q_{opt}, δηλαδή μετατρέπουμε τον πίνακα των αθροιστικών ποσοτήτων παραγωγής σε ένα πίνακα που περιέχει όλα τα πιθανά μεγέθη παρτίδας.

Πλέον έχουμε επιβάλει τον περιορισμό «β_c service level» και διαθέτουμε πίνακες που περιέχουν όλα τα πιθανά μεγέθη παρτίδας και τα αντίστοιχα κόστη. Επομένως με βάση αυτούς τους πίνακες βρισκόμαστε σε θέση να το δημιουργήσουμε κάθε δυνατό σχέδιο παραγωγής P_k. Ωστόσο, υπάρχει ο περιορισμός δυναμικότητας και είναι πιθανό κάποιο P_k να τον παραβιάζει και να οδηγεί σε ανέφικτη λύση, συνεπώς πρέπει να αποκλείσουμε εκείνα τα P_k.

Για την επιβολή του περιορισμού, δημιουργούμε αρχικά έναν πίνακα του όποιου τα στοιχεία θα περιέχουν για κάθε περίοδο, και πιθανό σχέδιο παραγωγής P_k, την δυναμικότητα που απαιτείται. Επομένως μέσω αυτής της διαδικασίας θα διαπιστώσουμε ποιοι συνδυασμοί ποσοτήτων και περιόδων παραγωγής οδηγούν σε ανέφικτη λύση. Ακολουθούμε λοιπόν την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία:

```
For i = 1 : T
   For j = i : T
      Sq(i,j) = Σ_{k=1}^{K} t_k^b * q_opt(k,i,j)
   End
End
Sg = Σ_{k=1}^{K} t_k^r
For i = 1 : T
   For j = i : T
      Con(i,j) = Sq(i,j) + Sg
   End
End
```

Παράδειγμα: το στοιχείο $Con(1,2)$ εκφράζει το άθροισμα των $Sq(1,2)$ και Sg, δηλαδή εκφράζει την δυναμικότητα που απαιτείται για να παράγουμε την περίοδο 1 και να καλύψουμε τη ζήτηση μέχρι την περίοδο 2. Το Sg δηλώνει το άθροισμα των χρόνων που απαιτούνται για την εγκατάσταση της παραγωγής κάθε προϊόντος, καθώς πραγματοποιείται παραγωγή την περίοδο 1. Αντίθετα το $Sq(1,2)$ περιέχει το άθροισμα των χρόνων που απαιτούνται για παραχθούν μια μονάδα κάθε προϊόντος k.

Πλέον γνωρίζουμε την δυναμικότητα που απαιτεί ο κάθε πιθανός συνδυασμός και πρέπει να διαπιστώσουμε ποιος από αυτούς είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί, δηλαδή ποιος υπερβαίνει την διαθέσιμη δυναμικότητα (b_t). Ακολουθούμε επομένως την παρακάτω διαδικασία:

```
For i = 1 : T
   For j = i : T
      If Con(i,j) ≤ b_i then
         For k = 1 : K
            P(k,i,j) = 1
         End
      End
   End
End
```

Με την παραπάνω διαδικασία δημιουργούμε για κάθε προϊόν k έναν πινάκα P, του όποιου τα αρχικά στοιχεία είναι μηδέν. Ο πίνακας P μας παρέχει την δυνατότητα να γνωρίζουμε ποιοι συνδυασμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν. Όταν ένα στοιχείο του πίνακα είναι μονάδα, τότε μπορεί να αποτελέσει μέρος της λύσης, σε αντίθετη περίπτωση όχι. Ωστόσο, είναι πιθανόν να παραβιάζεται ο περιορισμός δυναμικότητας επειδή δεν μπορούμε να παραγάγουμε τις απαιτούμενες ποσότητες για κάθε προϊόν, αλλά ίσως να μπορούμε να τις παραγάγουμε για λιγότερα από K προϊόντα. Συνεπώς, πρέπει και αυτές οι περιπτώσεις να «χαρακτηριστούν» στον πίνακα P με μονάδα.

Για να επιτύχουμε τον αποκλεισμό μόνο των ποσοτήτων που δεν μπορούν να παραχθούν, δημιουργούμε έναν πίνακα Q, στον οποίο εισάγουμε τις ποσότητες που παραβίασαν τον περιορισμό δυναμικότητας, μια χρονική στιγμή t. Στην συνέχεια ταξινομούμε τα στοιχεία του Q σε φθίνουσα σειρά και αποκλείουμε σταδιακά ποσότητες που οδηγούν σε παραβίαση. Εάν έπειτα από τον αποκλεισμό κάποιων ποσοτήτων παρτίδας ικανοποιηθεί ο περιορισμός δυναμικότητας, τότε οι υπόλοιπες παρτίδες χαρακτηρίζονται στον πίνακα P με μονάδα.

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε μια διαδικασία συμφώνα με την όποια ελέγχουμε σε ποιους συνδυασμούς μεταξύ των i και j ισχύει $P(k, i, j) = 0$. Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη τότε το κόστος $C_{opt}(k, i, j)$ λαμβάνει μια πολύ μεγάλη τιμή. Μέσω αυτής της διαδικασίας ολοκληρώνουμε την επιβολή του περιορισμού δυναμικότητας, καθώς οι συνδυασμοί που διαθέτουν άπειρο κόστος θα αποκλειστούν στη συνέχεια από την λύση μέσω της μεθόδου ελάχιστης διαδρομής.

Από την στιγμή που έχουμε εντοπίσει τις εφικτές παρτίδες παραγωγής και τις αντίστοιχες περιόδους, μπορούμε να προχωρήσουμε στο προσδιορισμό του βέλτιστου σχεδίου παραγωγής για κάθε προϊόν k, το όποιο θα προκύψει μέσω του αλγόριθμου Wagner-Whitin. Γενικά η μεθοδολογία δεν παρουσιάζει κάποια σημαντική διαφορά σε σχέση με εκείνη της ενότητα 4.1 και για το λόγο αυτό δεν παρατίθεται. Οι διαφορές εντοπίζονται στο γεγονός πως τώρα διαθέτουμε πολλαπλά προϊόντα και ότι αν προκύψει ελάχιστο κόστος που είναι άπειρο τότε η αντίστοιχη παρτίδα παραγωγής q μηδενίζεται. Η τελευταία περίπτωση είναι δυνατόν να εμφανιστεί όταν η διαθέσιμη δυναμικότητα b_t είναι πολύ περιοριστική και καλούμαστε να παραγάγουμε κάθε χρονική περίοδο t.

Τέλος, πρέπει να τονίσουμε πως στην περίπτωση όπου δεν μπορούν να παραχθούν όλα τα προϊόντα εξαιτίας της μικρής δυναμικότητας b_t, δίνουμε προτεραιότητα σε αυτά με το μικρότερο κόστος. Εάν για κάποια προϊόντα το κόστος είναι όμοιο, τότε την προτεραιότητα την δίνουμε σε αυτό με την μεγαλύτερη ποσότητα παραγωγής, εάν είναι εφικτό, προκείμενου να ικανοποιήσουμε μεγαλύτερο μέρος της ζήτησης.

5.2. Αποτελέσματα

Για τα αποτελέσματα που παραθέτουμε, εισάγαμε στο Matlab τα παρακάτω δεδομένα:

- T = 10 (μήκος του ορίζοντα προγραμματισμού)
- K=3 (πλήθος προϊόντων)
- μ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30 (μέση τιμή της ζήτησης ανά περίοδο)

  30 20 40 20 30 10 20 70 30 10

  10 40 30 50 60 30 40 50 50 20]
- σ = [20 50 10 50 50 10 20 40 20 30] (τυπική απόκλιση της ζήτησης ανά περίοδο)
- s = 100 (setup cost)
- h = 1 (holding cost)
- β_c=0,9 (β_c service level)
- t_k^b= [2 2 1.5] (ο χρόνος που απαιτείται για να παραχθεί μια μονάδα του προϊόντος k)
- t_k^r= [12 15 12] (ο χρόνος που απαιτείται για την εγκατάσταση της παραγωγής)
- b_t: είναι η διαθέσιμη δυναμικότητα (σε μονάδες χρόνου) την περίοδο t

- b_t: άπειρο

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	117,627	0	0	129,966	0	0	0	80,537	0	0
2	123,742	0	0	96,4653	0	0	0	93,094	0	0
3	117,627	0	0	166,423	0	0	0	105,47	0	0
$\boldsymbol{b_t}$	**698,177**	**0**	**0**	**741,498**	**0**	**0**	**0**	**544,482**	**0**	**0**

- b_t=700

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	117,627	0	0	55,106	74,860	0	0	80,537	0	0
2	100,755	0	59,514	0	59,939	0	0	93,094	0	0
3	117,627	0	0	55,106	111,317	0	0	105,479	0	0
$\boldsymbol{b_t}$	**652,203**	**0**	**134,027**	**216,871**	**475,575**	**0**	**0**	**544,482**	**0**	**0**

- b_t=600

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	38,047	79,579	0	55,106	74,860	0	0	80,537	0	0
2	43,422	57,332	59,513	0	59,939	0	0	93,094	0	0
3	35,111	82,515	0	55,106	111,317	0	0	105,479	0	0
$\boldsymbol{b_t}$	**254,606**	**436,597**	**134,027**	**216,871**	**475,575**	**0**	**0**	**544,482**	**0**	**0**

- b_t=500

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	38,047	79,579	0	55,106	58,475	0	53,793	0	43,129	0
2	43,422	57,332	59,513	0	59,939	0	0	57,582	35,512	0
3	35,111	82,515	0	55,106	79,686	0	77,308	0	59,804	0
$\boldsymbol{b_t}$	**254,606**	**436,597**	**134,027**	**216,871**	**395,356**	**0**	**247,547**	**130,164**	**285,989**	**0**

- b_t=400

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	38,047	72,623	6,957	55,106	50,995	23,866	0	37,408	43,129	0
2	43,422	57,332	59,514	0	44,393	0	15,546	57,582	35,512	0
3	35,112	65,643	16,872	55,106	57,857	53,46	0	45,676	59,804	0
b_t	**254,606**	**397,375**	**197,249**	**216,871**	**316,561**	**151,922**	**46,092**	**297,493**	**285,988**	**0**

- b_t=200

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	0	0	6,957	0	50,995	7,48	16,385	37,408	16,62	26,509
2	43,422	0	22,987	36,526	0	6,922	15,546	0	23,831	11,679
3	35,111	65,643	16,872	55,106	0	21,829	31,632	45,676	40,434	19,369
b_t	**166,512**	**110,464**	**124,196**	**182,712**	**113,989**	**100,546**	**150,31**	**167,329**	**180,556**	**144,433**

- b_t=100

Προϊόν	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
1	0	0	6,957	0	0	7,480	16,385	37,408	16,620	26,509
2	0	0	22,987	36,526	0	0	15,546	0	0	0
3	35,111	0	0	0	0	21,829	0	0	0	0
b_t	**64,667**	**0**	**86,888**	**88,053**	**0**	**71,703**	**90,863**	**86,815**	**45,241**	**65,019**

5.3. Συμπεράσματα

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας οδηγούν αρχικά στο προφανές συμπέρασμα πως καθώς η διαθέσιμη δυναμικότητα (b_t) μειώνεται, απαιτείται πιο συχνή εγκατάσταση της παραγωγής προκείμενου να καλύψουμε τις ζητήσεις. Ενώ, όταν η δυναμικότητα ελαττώνεται σε μεγάλο βαθμό, όπως συμβαίνει στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, είναι αδύνατο να καλύψουμε την ζήτηση των προϊόντων σε κάποιες περιόδους και αναπόφευκτα επιλέγουμε να παράγουμε τις παρτίδες που οδηγούν σε χαμηλότερο κόστος. Παράλληλα διαπιστώνουμε πως η μείωση του b_t οδηγεί σε απόκλιση από την βέλτιστη λύση, η οποία προκύπτει όταν το b_t είναι άπειρο. Τέλος, μέσω της εφαρμογή της Στατικής Στρατηγικής Αβεβαιότητας και της ανάπτυξης της συγκεκριμένης μεθόδου έχουμε την δυνατότητα να προβλέψουμε πλήρως τους πόρους που απαιτούνται για την παραγωγή. Στο παράδειγμα μας, επαρκεί το b_t να λάβει την τιμή 800 προκείμενου η λύση να είναι βέλτιστη.

Κεφάλαιο 6 : Σύνοψη και Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα μεγέθους παρτίδας υπό στοχαστική ζήτηση. Το συγκεκριμένο ζήτημα θέτει ως κύριο στόχο του να απαντήσει αποτελεσματικά σε δύο κομβικά ερωτήματα πότε και πόση ποσότητα πρέπει να παραγάγουμε για να επιτύχουμε το βέλτιστο συνδυασμό μεταξύ προσφοράς και ζήτησης. Παράλληλα η λήψη των παραπάνω αποφάσεων πρέπει να οδηγεί στην επίτευξη ορισμένων οικονομικών στόχων που μεταφράζονται είτε με την ελαχιστοποίηση του κόστους ή με την μεγιστοποίηση της συμβολής στην κερδοφορία.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων εφαρμόσαμε δύο στρατηγικές παραγωγής, την Στατική και την Στατική-Δυναμική. Η διαφορά τους υπόκειται στο γεγονός πως η πρώτη θεωρεί σταθερές ποσότητες παραγωγής, ενώ η δεύτερη μεταβλητές. Οι περίοδοι εγκατάστασης της παράγωγης και στις δύο καθορίζονται εκ' των προτέρων. Επίσης στις συγκεκριμένες στρατηγικές επιβάλαμε δύο κριτήρια μέτρησης της απόδοσης, τα όποια εφαρμόστηκαν στις ανεκπλήρωτες ζητήσεις, το «penalty cost» και το «β_c service level». Το πρόβλημα του περιορισμού «β_c service level» μελετήθηκε και για την περίπτωση όπου έχουμε πολλαπλά προϊόντα και έναν πόρο με περιορισμένη χωρητικότητα. Στη συνέχεια μοντελοποιήσαμε τα παραπάνω προβλήματα και προχωρήσαμε στην επίλυση τους, η όποια πραγματοποιήθηκε μέσω του προγράμματος MATLAB.

Τα αποτελέσματα, μας οδήγησαν στο συμπέρασμα πως η Στρατηγική Στατικής-Δυναμικής Αβεβαιότητας οδηγεί σε μικρότερο κόστος σε σύγκριση με την Στρατηγική Στατικής Αβεβαιότητας. Ο λόγος είναι ότι η ανάπτυξη της αποτελεί μια δυναμική διαδικασία, με αποτέλεσμα να υπάρχει μικρότερος κίνδυνος. Ωστόσο η συγκεκριμένη πολιτική είναι δύσκολο να εφαρμοστεί στην πράξη, καθώς τα πραγματικά μεγέθη παρτίδας και οι περίοδοι εγκατάστασης της παραγωγής, προκύπτουν δυναμικά έπειτα από την εμφάνιση των ζητήσεων των προηγούμενων περιόδων. Συνεπώς το γεγονός πως η ζήτηση είναι τυχαία ενδεχομένως οδηγεί σε μεγάλη διακύμανση των ποσοτήτων παραγωγής και σε ορισμένες ανεπιθύμητες συνέπειες.

Αρχικά, όταν σε μία εφοδιαστική αλυσίδα, η εγκατάσταση της παραγωγής ενός στοιχείου της εξαρτάται από τυχαίους παράγοντες, τότε η αβεβαιότητα επηρεάζει όλα τα επίπεδα της. Επομένως απαιτείται αναθεώρηση των αποφάσεων σχετικά με την παραγωγή σε όλη την αλυσίδα εφοδιασμού, καθώς και των παραγγελιών από τους εξωτερικούς προμηθευτές. Ωστόσο, αυτή η επίπτωση είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί μέσω της καθιέρωσης αποθεμάτων ασφαλείας.

Επιπλέον η τυχαία αλλαγή των μεγεθών παρτίδας μεταφράζεται σε τυχαίες απαιτήσεις πόρων, με αποτέλεσμα να προκαλείται νευρικότητα τον σχεδιασμό. Το πρόβλημα αυτό συνήθως δεν εμφανίζεται στα μηχανήματα που δεν είναι υπερφορτωμένα. Ωστόσο εάν η χωρητικότητα ενός μηχανήματος είναι υπερφορτωμένη, τότε το σχέδιο της παραγωγής είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί με αποτέλεσμα να χαθούν οι προβλεπόμενες ημερομηνίες λήξης. Παράλληλα είναι πιθανό σε μια βιομηχανία οι ποσότητες παραγωγής να είναι αμετάβλητες, όπως στις βιομηχανίες επεξεργασίας. Κλείνοντας, είναι πιθανό ο πόρος να συντελείται από ανθρώπους, με αποτέλεσμα η μεταβολή στο φόρτο εργασίας του να είναι δυσμενής από οικονομική άποψη ή απαγορευτική λόγω της εργασιακής συμφωνίας.

Βιβλιογραφία:

[1] Κολέτσος Ιωάννης & Σταγιάννης Δημήτριος. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Αθήνα, 2012, Εκδόσεις Συμεών

[2] Gozdem Dural-Selcuk, Onur A. Kilic, S. Armagan Tarim & Roberto Rossi. A comparison of non-stationary stochastic lot-sizing strategies, 2016

[3] Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S., & Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot sizing problems – a classification and review of solution approaches. OR Spectrum, 32(2),231–261

[4] Tunc, H., Kilic, O., Tarim, S. A., & Eksioglu, B. The cost of using stationary inventory policies when demand is non-stationary,2011, Omega, 39, 410–415

[5] Yves Pochet & Laurence A. Wolsey. Production Planning by Mixed Integer Programming, Springer,2006

[6] Iglehart, D. (1963). Dynamic programming and stationary analysis of inventory problems. In H. Scarf, D. Gilford, & M. Shelley, multistage inventory models and techniques. Stanford: Stanford University Press.

[7] Scarf, H. (1959). The optimality of (S,s) policies in the dynamic inventory problem. In K. Arrow, S. Karlin, & P. Suppes (Eds.), Mathematical methods in the social sciences (pp. 196–202). Stanford: Stanford University Press.

[8] Bollapragada, S., & Morton, T. (1999). Simple heuristic for computing nonstationary (s,S) policies. Operations Research, 47, 576–584.

[9] Bookbinder, J., & Tan, J.-Y. (1988). Strategies for the probabilistic lot-sizing problem with service-level constraints. Management Science, 34, 1096–1108.

[10] https://www.investopedia.com/

[11] Smith Tan II (2013). Handbook Stochastic Models Analysis Manufacturing System Operations, 313-344

[12] Chen, J., Lin, D., & Thomas, D. (2003). On the single item fill rate for a finite horizon. Operations Research Letters, 31, 119–123.

[13] Sox, C. (1997). Dynamic lot sizing with random demand and non-stationary costs. Operations Research Letters, 20, 155–164.

[14] Wagner, H., & Whitin, T. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, 5, 89–96.

[15] Γεώργιος Λυμπερόπουλος. Έλεγχος αποθεμάτων υπό γνωστή χρονικά μεταβαλλόμενη ζήτηση.

[16] Askin, R. (1981). A procedure for production lot sizing with probabilistic dynamic demand. AIIE Transactions, 13, 132–137.

[17] Tempelmeier, H. (2011). Inventory management in supply networks – problems, models, solutions (2nd edition).