ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ: ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχήματος με Αβέβαιη Ζήτηση Παραδιδόμενων και Επιστρεφόμενων Προϊόντων

Διπλωματική Εργασία

Υπό

Γρηγοριάδου Ελένης

Επιβλέπων: Δρ. Παντελής Δημήτριος

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, Οκτώβριος 2015

Εξεταστική Επιτροπή

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Δημήτριος Παντελής Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Παντελή για το ενδιαφέρον του, τις συμβουλές του και την καθοδήγηση του καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της πτυχιακής μου εργασίας.

Έπειτα, οφείλω ευχαριστίες και στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, καθηγητές κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο και κ. Γεώργιο Κοζανίδη για την συμμετοχή τους, τις πολύτιμες συμβουλές και τις εύστοχες υποδείξεις τους.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την παρούσα εργασία στην οικογένεια μου και στους φίλους μου για τη συμπαράσταση και την υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης ενός οχήματος με αβέβαιη ζήτηση παραδιδόμενων και επιστρεφόμενων προϊόντων, με στόχο την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κόστους διαδρομής (π.χ. απόσταση, κατανάλωση καυσίμου). Η ζήτηση του κάθε πελάτη είναι αβέβαιη, με γνωστή όμως κατανομή. Το όχημα ξεκινά από μια αποθήκη, επισκέπτεται τους πελάτες σύμφωνα με προκαθορισμένη σειρά έχοντας τη δυνατότητα ανεφοδιασμού από την αποθήκη για την ικανοποίηση της ζήτησής τους καθώς και την επιστροφή στην αποθήκη για την εκφόρτωση των επιστρεφόμενων προϊόντων και την φόρτωση νέων. Η βέλτιστη στρατηγική που λαμβάνει χώρα καθορίζει πότε το όχημα θα επιστρέψει στην αποθήκη και τις ποσότητες που θα φορτώσει. Οι αποφάσεις αυτές προσδιορίζονται αναλυτικά μέσω ενός αλγορίθμου στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού. Επίσης προσδιορίζονται και μέσω ενός ευρετικού αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος με πολύ λιγότερες υπολογιστικές απαιτήσεις. Τέλος, οι δύο αυτοί αλγόριθμοι συγκρίνονται μέσω αριθμητικών πειραματικών δοκιμών από όπου προκύπτει ότι η αύξηση του κόστους από την εφαρμογή του ευρετικού αλγορίθμου είναι ικανοποιητικά μικρή στις περισσότερες περιπτώσεις.

Abstract

This thesis studies the problem of finding the optimal routing of a single vehicle that starts its route from a depot and picks up from and delivers different products to N customers that are served according to a predefined customer sequence. The vehicle is allowed during its route to return to the depot to unload returned products and restock with new products. For each customer the demands for the products that are delivered by the vehicle and the quantity of the products that is returned to the vehicle are discrete random variables with known joint distribution. Our objective is to determine the strategy that minimizes the expected cost of the route (e.g. distance, fuel consumption). This optimal strategy specifies when the vehicle must return to the depot and the quantities to be loaded. These decisions are analytically determined by a stochastic dynamic programming algorithm. We also propose a heuristic algorithm with considerably less computational requirements. These two algorithms are compared through numerical experiments indicating that the heuristic algorithm provides near-optimal solutions in most cases.

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε πληροφορίες εισαγωγικού χαρακτήρα που δίνουν το κίνητρο και το υπόβαθρο αυτής της διπλωματικής εργασίας, παραθέτουμε μια ανασκόπηση της σχετικής με την εργασία βιβλιογραφίας και περιγράφουμε συνοπτικά τις βασικές ενότητες της διπλωματικής εργασίας καθώς και το υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε.

1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο

Στη συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία κίνητρο αποτέλεσε η ενδελεχής εντρύφηση σε ότι αφορά την Επιχειρησιακή Έρευνα και συγκεκριμένα στο κομμάτι της δρομολόγησης ενός οχήματος με στόχο την βέλτιστη πολιτική που εξυπηρετεί τους πελάτες. Έπειτα και η αρμονική συνύπαρξη μεταξύ θεωρίας και πράξης εξάπτει το ενδιαφέρον.

Το γνωστικό υπόβαθρο της παρούσας διπλωματικής στηρίζεται στην επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας, η οποία ασχολείται με τη βελτιστοποίηση της απόδοσης ενός συστήματος. Ειδικότερα, πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη λειτουργία του υπό μελέτη συστήματος.

1.2 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Το υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας καταλαμβάνεται από τα Κεφάλαια 2-7. Συγκεκριμένα:

- Στο Κεφάλαιο 2 παρατίθεται το γνωστικό υπόβαθρο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.
- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια αναλυτική περιγραφή του προβλήματος, παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο, οι εξισώσεις, τα βασικά βήματα του αλγορίθμου επίλυσης καθώς επίσης και οι μεταβλητές που το απαρτίζουν.
- Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφεται η αναλυτική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος για ένα και δύο διαφορετικά είδη προϊόντων αντίστοιχα.
- Στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται η ευρετική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος για δύο διαφορετικά είδη προϊόντων.
- Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σύγκρισης των δύο μεθόδων (οι μεταξύ τους αποκλίσεις) με την δημιουργία διαγραμμάτων
- Τα τελικά συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας και κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.

1.3 Υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε

Το MATLAB είναι ένα υπολογιστικό πρόγραμμα για υψηλής απόδοσης αριθμητικούς υπολογισμούς. Ξεκίνησε ως ένα πρόγραμμα ''Εργαστηρίου Πινάκων'' που είχε σκοπό να παρέχει αλληλεπιδρώσα προσπέλαση στις βιβλιοθήκες Linpack και Eispack. Από τότε έχει αναπτυχθεί αρκετά, για να γίνει ένα ισχυρότατο εργαλείο στην οπτικοποίηση, στον προγραμματισμό, στην έρευνα, στην επιστήμη των μηχανικών καθώς και στις επικοινωνίες. Παρέχει στο χρήστη ένα διαδραστικό περιβάλλον με χιλιάδες ενσωματωμένες συναρτήσεις, κατάλληλες για την υλοποίηση απαιτητικών υπολογιστικών αναλύσεων, γραφημάτων καθώς επίσης και για την παραγωγή διαφόρων animations. Επιπλέον, το Matlab προσφέρει τη δυνατότητα επέκτασης σε ποικίλα πεδία εφαρμογών με την αξιοποίηση της υψηλού επιπέδου γλώσσας προγραμματισμού την οποία διαθέτει σε όλες τις εκδόσεις του.

Το Matlab αποτελεί ένα εξελιγμένο υπολογιστικό εργαλείο, το οποίο μπορεί να βρει εφαρμογή σε διάφορους τομείς της επιστήμης αλλά βέβαια και της πράξης, όπως για παράδειγμα τη μηχανική, την ιατρική, τις θετικές επιστήμες (Μαθηματικά– Φυσική), την οικονομία καθώς και γενικά τη βιομηχανική παραγωγή. Μάλιστα, το φάσμα των εφαρμογών του συγκεκριμένου πακέτου λογισμικού διευρύνεται συνεχώς και περισσότερο, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τις πολλαπλές δυνατότητες του, όπως: υψηλή απόδοση και ταχύτητα υπολογιστικών αναλύσεων, δυνατότητα προσομοίωσης φυσικών συστημάτων, δυνατότητα υλοποίησης αλγορίθμων, υψηλής ποιότητας γραφικές απεικονίσεις και animations καθώς και φιλικότητα προς το χρήστη και διαδραστικό χαρακτήρα.

Οι ενσωματωμένες συναρτήσεις του λογισμικού παρέχουν τα απαραίτητα πακέτα εργαλείων για υπολογισμούς γραμμικής άλγεβρας, ανάλυσης δεδομένων, επεξεργασίας σημάτων, αριθμητικές λύσεις κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Οι περισσότερες από τις προαναφερόμενες συναρτήσεις εφαρμόζουν την πλέον πρόσφατη και εξελιγμένη γνώση στον κάθε τομέα επιστήμης. Επίσης ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να αναπτύξει τις δικές του συναρτήσεις, κάνοντας χρήση της δικής του γλώσσας προγραμματισμού. Από τη στιγμή που θα αναπτυχθούν οι συναρτήσεις αυτές, λειτουργούν ως ενσωματωμένες συναρτήσεις του εν λόγω λογισμικού. Επίσης παρέχονται από το Matlab πολλές προαιρετικές εργαλειοθήκες, οι οποίες προορίζονται για την ανάπτυξη ειδικών εφαρμογών.

Όλα τα παραπάνω χαρακτηριστικά καθιστούν το Matlab όλο και πιο δημοφιλές ανάμεσα σε σπουδαστές, φοιτητές, τεχνικούς και μηχανικούς.

Κεφάλαιο 2-Βασικές Έννοιες

2.1 Γενικά Περί Επιχειρησιακής Έρευνας

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι μια επιστήμη που ασχολείται με την εφαρμογή προηγμένων αναλυτικών μεθόδων πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στις επιχειρήσεις, με στόχο τη βέλτιστη λήψη αποφάσεων.

Αν και αναφορές σε μοντέλα-τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας υπάρχουν από την αρχή του αιώνα μας, είναι γενικά παραδεκτό ότι η αρχή της σαν επιστήμη προσδιορίζεται στη διάρκεια του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου. Ακριβώς λόγω του πολέμου, υπήρχε άμεση ανάγκη για την κατανομή των λιγοστών πόρων στις διάφορες στρατιωτικές εξορμήσεις. Έτσι, αρχικά στην Αγγλία και στη συνέχεια στις ΗΠΑ και τον Καναδά, συγκροτήθηκαν ομάδες επιστημόνων με σκοπό την πραγματοποίηση επιστημονικών ερευνών στις στρατιωτικές επιχειρήσεις, -research on (military) operations-. Αυτές ήταν οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών.

Η αξιοσημείωτη επιτυχία τους είχε ως αποτέλεσμα να γίνουν γρήγορα ευρέως αποδεκτές, να πολλαπλασιαστούν και να εμπλακούν στην επίλυση πάσης φύσεως στρατιωτικών προβλημάτων, όπως την τοποθέτηση των ραντάρ στην Αγγλία για τον αντιαεροπορικό έλεγχο του νησιού, ως τον προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών, τον εντοπισμό και βομβαρδισμό των εχθρικών υποβρυχίων, κλπ. Μάλιστα, ακριβώς λόγω της ποικιλίας των προβλημάτων που αντιμετώπιζαν, η διασπορά των επιστημονικών ειδικοτήτων σε αυτές τις ομάδες ήταν τόσο μεγάλη, που μια από τις πρώτες που αναπτύχθηκε από το φυσικό P.M.S Blackett (βραβείο Nobel 1948) έγινε ευρέως γνωστή ως «το τσίρκο Blackett».

Η βιομηχανική έκρηξη που ακολούθησε το τέλος του πολέμου έφερε στην επιφάνεια πολύπλοκα προβλήματα. Την περίοδο εκείνη παρατηρήθηκε ραγδαία αύξηση νέων επιχειρήσεων με συνέπεια ποικίλα νέα προβλήματα στη βιομηχανία εξαιτίας του καταμερισμού των διοικητικών δράσεων σε πολλά τμήματα όπως το τμήμα παραγωγής, πωλήσεων, μάρκετινγκ καθώς και οικονομικές υπηρεσίες. Σύντομα, πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν στις στρατιωτικές ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών και τώρα απασχολούνταν σε θέσεις κλειδιά στον ιδιωτικό ή τον ερευνητικό τομέα, διαπίστωσαν ότι τα νέα προβλήματα ήταν σε γενικές γραμμές αυτά που είχαν αντιμετωπίσει και κατά τη διάρκεια του πολέμου, απλά το πεδίο εφαρμογής είχε αλλάξει. Τα άτομα αυτά μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1950 κατάφεραν να καθιερώσουν τη χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας σ' ένα σημαντικό αριθμό μεγάλων οργανισμών, επιχειρήσεων και βιομηχανιών.

Στη συνέχεια, αφενός μεν η γρήγορη ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών (πολλά από τα πιο γνωστά εργαλεία της Ε.Ε όπως π.χ. ο γραμμικός και δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών αναμονής, η θεωρία αποθεμάτων, κλπ. αναπτύχθηκαν λίγο πριν το 1960), αφετέρου δε η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οδήγησαν στη ραγδαία διάδοση της Επιχειρησιακής Έρευνας. Στις μέρες μας, είναι απίθανο να υπάρχει επιχείρηση, βιομηχανία, κρατική υπηρεσία και οργανισμός παροχής υπηρεσιών –ανεξαρτήτως μεγέθους- που να μην κάνει χρήση κάποιας/ων τεχνικής/κών Επιχειρησιακής Έρευνας.

Τα προβλήματα που μπορεί να αντιμετωπίσει και να επιλύσει η επιχειρησιακή έρευνα είναι:
- Προγραμματισμός του έργου.
- Βελτιστοποίηση του δικτύου.
- Παγκοσμιοποίηση.
- Διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας.
- Προβλήματα μεταφοράς.

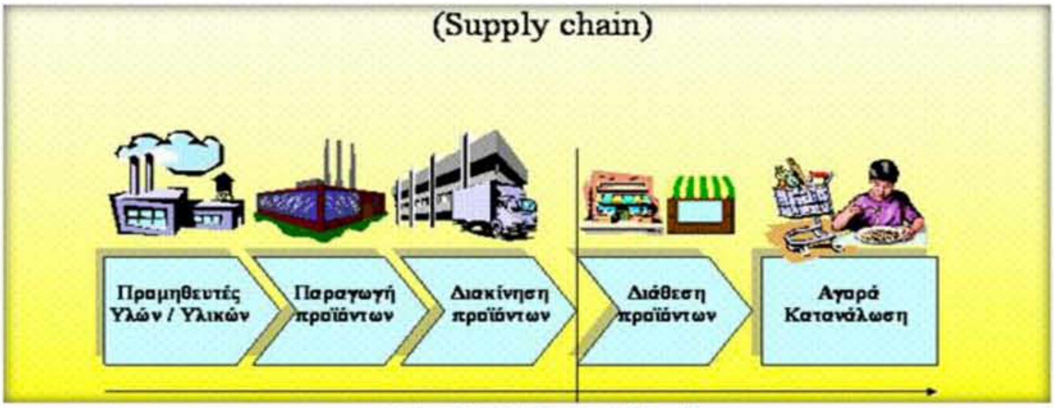
2.2 Εφοδιαστική αλυσίδα

Μια εφοδιαστική αλυσίδα είναι ένα σύνολο από οργανώσεις που συνδέονται άμεσα με μία ή περισσότερες ανοδικές (upstream) και καθοδικές (downstream) ροές προϊόντων, υπηρεσιών, χρηματοοικονομικών υπηρεσιών και πληροφοριών από μια πηγή σε έναν πελάτη.

Ο όρος «Εφοδιαστική Αλυσίδα» εισήχθηκε από τον Keith Oliver ο οποίος τον χρησιμοποίησε σε μια συνέντευξη του το 1982 στο Financial Times. Ουσιαστική άνθιση γνώρισε στα μέσα του 1990, όταν ξεκίνησε να εμφανίζεται όλο και πιο συχνά σε άρθρα και βιβλία. Στις αρχές του 1990 κατείχε ήδη εξέχουσα θέση στον τομέα των οικονομικών επιστημών.

Σύμφωνα με το Συμβούλιο των Επαγγελματιών Διαχείρισης Εφοδιαστικής Αλυσίδας (CSCMP), η διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας περιλαμβάνει το σχεδιασμό και τη διαχείριση όλων των δραστηριοτήτων που εμπλέκονται στην προμήθεια, τη μετατροπή και τη διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας. Περιλαμβάνει επίσης τις βασικές συνιστώσες του συντονισμού και της συνεργασίας με εταιρικά κανάλια, τα οποία μπορεί να είναι οι προμηθευτές, μεσάζοντες, τρίτοι πάροχοι υπηρεσιών και οι πελάτες. Στην ουσία, η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας ενσωματώνει την διαχείριση της προσφοράς και της ζήτησης εντός και μεταξύ των εταιρειών.

Ο αντικειμενικός λοιπόν σκοπός της Διαχείρισης της Εφοδιαστικής Αλυσίδας είναι η αύξηση της συνολικής κερδοφορίας κατά μήκος της αλυσίδας που συνεπάγεται την αύξηση της κερδοφορίας όλων των εταίρων της. Αυτό επιτυγχάνεται με την κατανόηση και ικανοποίηση των πελατειακών αναγκών στον απαιτούμενο χρόνο, και με την προσφορά προϊόντων υψηλής προστιθέμενης αξίας και ανταγωνιστικού κόστους. Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, απαραίτητα χαρακτηριστικά των εφοδιαστικών αλυσίδων που ανταγωνίζονται μέσα στο σύγχρονο παγκοσμιοποιημένο περιβάλλον είναι η ευελιξία και η ταχεία προσαρμοστικότητα τους στις δυναμικά μεταβαλλόμενες συνθήκες.



Σχήμα 2.1:Εφοδιαστική Αλυσίδα

2.3 Logistics

Η ετυμολογία του όρου προέρχεται από το γαλλικό ρήμα lager που σημαίνει τοποθετώ. Ο όρος logistics αρχικά χρησιμοποιήθηκε ως στρατιωτικός όρος που αφορούσε στη μεταφορά και την τοποθέτηση στρατευμάτων. Αργότερα απέκτησε ευρύτερη έννοια για να συμπεριλάβει και την οργάνωση των προμηθειών.

Σύμφωνα με τον Martin Christopher(2006), logistics είναι η διαδικασία της στρατηγικής διαχείρισης των προμηθειών, της κίνησης και αποθήκευσης πρώτων υλών, εξαρτημάτων και τελικών αποθεμάτων (και σχετικών πληροφοριών για τις ροές τους) μέσα στη επιχείρηση και τα κανάλια του Marketing με τέτοιο τρόπο, ώστε η τρέχουσα και η μελλοντική κερδοφορία να μεγιστοποιούνται με την εκπλήρωση των παραγγελιών σύμφωνα με τις αρχές της αποτελεσματικότητας του κόστους.

Η σημασία των Logistics καταδεικνύεται και ιστορικά, αλλά και η κρισιμότητα της επιτυχούς εφαρμογής τους βρίσκεται κρυμμένη σε κάθε σελίδα της ιστορίας (Β' Παγκόσμιος Πόλεμος). Σελίδες που θα μπορούσαν να είχαν γραφτεί εντελώς διαφορετικά, αν κάποιοι κάποτε αντιλαμβάνονταν την έννοια των logistics στη σωστή τους διάσταση και τους έδιναν την ανάλογη προσοχή.

Το Council of Logistics Management (CLM) θεωρεί πως τα logistics αποτελούν τμήμα των διαδικασιών μέσα σε μια εφοδιαστική αλυσίδα. Τα logistics μπορούν να θεωρηθούν ως η κατεύθυνση και το οργανωτικό πλαίσιο από το οποίο προκύπτει το σχέδιο ροής των προϊόντων και των πληροφοριών μέσα στην επιχείρηση. Η εφαρμογή των logistics επιδιώκει να συντονίσει όλες τις προσπάθειες που γίνονται σε κάθε κρίκο της αλυσίδας εφοδιασμού. Αποτελεί τμήμα της όλης διαδικασίας μιας εφοδιαστικής αλυσίδας και ενδιαφέρεται για την βελτιστοποίηση των ροών μέσα στην επιχείρηση έχοντας ως κύριο στόχο να φτάσει το προϊόν στον τελικό καταναλωτή.

2.4 Δρομολόγηση

Οι μεταφορές προσώπων και αγαθών, με όλα τα μέσα, χερσαία, υδάτινα, εναέρια, αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Εξυπηρετούν βασικές ανθρώπινες ανάγκες, συμβάλλουν στην παραγωγή και την ανάπτυξη, αλληλεπιδρούν με τη φύση και συνεπάγονται επιπτώσεις τόσο στο φυσικό και ανθρωπογενές περιβάλλον όσο και στην ποιότητα ζωής. Όπου υπάρχει ζωή έχει ως συνεπαγόμενο την κίνηση, δηλαδή μεταφορές και μετακινήσεις.

Η μεταφορά και η διανομή αποτελούν βασικά υποσύνολα της εφοδιαστικής αλυσίδας. Η δρομολόγηση, δηλαδή η προετοιμασία και ο σχεδιασμός της βέλτιστης διαδρομής μέσω ενός συνόλου πιθανών διαδρομών που ανήκουν σε ένα δίκτυο, εφαρμόζεται σε όλα τα πιθανά είδη δικτύων όπως δίκτυα υπολογιστών, τηλεφωνικά δίκτυα, τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, δίκτυα βιομηχανικής παραγωγής καθώς και οδικά δίκτυα.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με τη δρομολόγηση ενός οχήματος δεδομένης χωρητικότητας. Πιο αναλυτικά, εξετάζεται η διανομή προϊόντων και υπηρεσιών μέσω ενός οχήματος, με αβέβαιη ζήτηση και με σκοπό πάντα την ελαχιστοποίηση του κόστους διαδρομής. Λόγω της δυσμενούς κατάστασης της χώρας έχει επηρεαστεί και ο τομέας των μεταφορών, οπότε απαιτείται ένας συνεχής αγώνας για επιβίωση, βελτίωση και εξέλιξη.

2.5 Δρομολόγηση Οχημάτων

Η διαχείριση στόλου οχημάτων αποτελούσε πάντα έναν «πονοκέφαλο» για τις μεταφορικές και τις logistics εταιρείες. Σήμερα όμως που τα καύσιμα είναι ακριβά και οι αστοχίες απαγορεύονται, η ορθή διαχείριση στοχεύει όχι μόνο στην απρόσκοπτη λειτουργία, αλλά και στον περιορισμό του κόστους.

Η μεταφορά και διανομή προϊόντων είναι από τις σημαντικότερες δραστηριότητες της εφοδιαστικής αλυσίδας και συνήθως αντιστοιχούν στο μεγαλύτερο ποσοστό των δαπανών logistics μιας εμπορικής ή βιομηχανικής επιχείρησης. Η διανομή προϊόντων αφορά την εξυπηρέτηση, σε μια δεδομένη χρονική περίοδο, ενός συνόλου από πελάτες μέσω ενός πλήθους οχημάτων, τα οποία έχουν αφετηρία τους μια συγκεκριμένη τοποθεσία (λ.χ. μια αποθήκη),χρησιμοποιούνται από δεδομένο αριθμό οδηγών και πραγματοποιούν τις κινήσεις τους χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο οδικό δίκτυο.

Το πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων (Δ.Ο) αποτελεί ένα συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης ακέραιου προγραμματισμού που αποσκοπεί στην όσο το δυνατόν καλύτερη εξυπηρέτηση μεγάλου αριθμού πελατών με τη χρήση ενός στόλου οχημάτων. Προτάθηκε από τους Dantzig και Ramser το 1959 και είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα στον τομέα των μεταφορών και της διανομής. Στο πρόβλημα αυτό έχουμε τη διανομή προϊόντων σε διαφορετικούς πελάτες με τη χρήση ενός οχήματος με σκοπό την ικανοποίηση της εκάστοτε ζήτησης από τον κάθε πελάτη σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους διανομής των προϊόντων στους τελικούς πελάτες. Πολλές μέθοδοι έχουν προταθεί κατά καιρούς για την αναζήτηση λύσεων στο πρόβλημα αλλά συνήθως για σχετικά μικρού μεγέθους προβλήματα.

Οι Clarke και Wright το 1964 βελτίωσαν την προσέγγιση των προαναφερθέντων με την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικότερου τρόπου επίλυσης του προβλήματος. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 40 ετών έχει εισαχθεί ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών μοντέλων για διάφορες εκδόσεις VRP προβλημάτων και έχουν εφαρμοστεί αλγόριθμοι για την βέλτιστη και προσεγγιστική λύση τους.

Τα VRP αναφέρονται σε ένα στόλο οχημάτων που έχουν ως σημείο εκκίνησης μία ή περισσότερες αποθήκες με σκοπό να παραδώσουν ή να συγκεντρώσουν προϊόντα από Ν γεωγραφικά διάσπαρτες τοποθεσίες των πελατών εβδομαδιαία ή μερικές φορές ακόμη και σε καθημερινή βάση. Κάθε όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από την αποθήκη, επισκέπτεται ένα υποσύνολο πελατών, προσφέρει νέα προϊόντα ή συλλέγει ήδη υπάρχοντα από κάθε πελάτη και στο τέλος επιστρέφει στην αποθήκη. Εάν η ζήτηση του πελάτη για τα νέα προϊόντα υπερβαίνει το ποσό των προϊόντων που μεταφέρονται από το όχημα ή το ποσό ληγμένων προϊόντων του πελάτη υπερβαίνει το κενό του οχήματος, το όχημα πρέπει να διακόψει την πορεία του και να επιστρέψει στην αποθήκη για την ανανέωση του μεταφερόμενου φορτίου ή για την εκφόρτωση των ληγμένων προϊόντων. Ο υπολογισμός του κόστους περιλαμβάνει τα έξοδα μετακίνησης από τον ένα πελάτη στον άλλο και τα έξοδα ταξιδίου από τον πελάτη πίσω στην αποθήκη για ανεφοδιασμό ή εκφόρτωση.

Ο στόχος είναι συνήθως η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του ταξιδιού με σκοπό την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Είναι δυνατόν να εξετασθούν και άλλα κριτήρια βελτιστοποίησης για παράδειγμα η ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων ή των οδηγών που απαιτούνται για να εξυπηρετηθούν επαρκώς όλοι οι πελάτες και επίσης η ελαχιστοποίηση των κυρώσεων. Οι κυρώσεις συνήθως αναφέρονται σε καθυστερήσεις ή σε μερική εξυπηρέτηση των πελατών.

Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις, είναι αναγκαίο να μελετηθούν στοχαστικές μορφές των VRP, δηλαδή προβλήματα για τα οποία, εκ' των προτέρων, υπάρχει μια μερική γνώση του αριθμού των πελατών ή των απαιτήσεων των πελατών ή του συνολικού κόστους.

Δύο ενδιαφέρουσες παραλλαγές των VRP που έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία είναι τα εξής: (i) τα VRP με χρονικά παράθυρα στα οποία οι παραδόσεις των προϊόντων πρέπει να ολοκληρωθούν μέσα ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, δηλαδή η προθεσμία παράδοσης είναι περιορισμένη, και (ii) τα VRP (με ή χωρίς παράθυρα χρόνου) στα οποία τα οχήματα έχουν περιορισμένη φέρουσα ικανότητα. Τυπικές εφαρμογές των VRP είναι η παράδοση εμπορευμάτων σε σούπερ μάρκετ, η συλλογή στερεών αποβλήτων, η συλλογή μετρητών από υποκαταστήματα τραπεζών, ο καθαρισμός των δρόμων, τα συστήματα δρομολόγησης σχολικού λεωφορείου, η μεταφορά ατόμων με ειδικές ανάγκες, η δρομολόγηση των πωλητών και η δρομολόγηση των μονάδων συντήρησης.

2.6 Εξυπηρέτηση Πελατών

Στις μέρες μας, οι επιχειρήσεις έχουν πλέον αντιληφθεί ότι κέντρο της ύπαρξής τους είναι ο πελάτης και αυτό γιατί ακόμα και αν λειτουργούν τέλεια σε όλους τους τομείς μόνο αν ο πελάτης αγοράσει θα μπορέσουν να επιτύχουν πωλήσεις, κέρδη και έτσι τη συνέχιση της λειτουργίας τους.

Οι LaLonde και Zinser (1976) από πολύ παλιά είχαν περιγράψει την εξυπηρέτηση πελατών για τις εταιρίες ως συνδυασμό 3 πραγμάτων: 1) την ικανότητα να ικανοποιείς τις ανάγκες των πελατών, 2) την επιβεβαίωση μέσω μετρήσεων της απόδοσης τους στην ικανοποίηση των πελατών και 3) στο δέσιμο εταιρίας– πελάτη.

2.7 Πρόβλημα Περιπλανώμενου Πωλητή

Πρόκειται για ένα κλασσικό συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και μπορεί να περιγραφεί ως εξής: ένας πωλητής, ο οποίος πρέπει να επισκεφτεί τους πελάτες σε διαφορετικές πόλεις, θέλει να βρει την πιο σύντομη πορεία αρχίζοντας από την εγχώρια πόλη του και τελειώνοντας πίσω στην αφετηρία αφού επισκεφτεί κάθε πόλη ακριβώς μια φορά. Τυπικότερα: Έχοντας ως δεδομένα n κόμβους και τα κόστη που συνδέονται με κάθε ζευγάρι των κόμβων, βρείτε έναν κλειστό γύρο ελάχιστου συνολικού κόστους που περιέχει κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά.

Σκοπός του είναι να πουλήσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποσότητα από τα προϊόντα που μεταφέρει. Οι έννοιες «πόλεις» και «απόσταση» χρησιμοποιούνται για την καλύτερη δυνατή κατανόηση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα όμως αντικαθίστανται από ανάλογες έννοιες.

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή κατατάσσεται στην κατηγορία των προβλημάτων NP (Nondeterministic Polynomial) κλάσης. Ως πρόβλημα NP κλάσης εννοούμε το πρόβλημα το οποίο έχει πολυωνυμική επιβεβαίωση λύσης ή αλλιώς μη ντετερμινιστική πολυωνυμική πολυπλοκότητα χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα δεν λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή σε χρόνο που εξαρτάται πολυωνυμικά από το πλήθος των πόλεων που περιέχει σαν δεδομένο το πρόβλημα. Επομένως όταν αυξάνεται ο αριθμός των πόλεων ο απαιτούμενος χρόνος μεγαλώνει εκθετικά.

Διάφοροι αλγόριθμοι έχουν προταθεί για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Ωστόσο η πολυπλοκότητα επίλυσης είναι ιδιαίτερα εμφανής σε προβλήματα με μεγάλο εύρος δεδομένων καθώς αυξάνεται εμφανώς ο χρόνος επεξεργασίας τους. Επίσης αυτή η πολυπλοκότητα αποτελεί ταυτόχρονα και πρόκληση για την ανακάλυψη τεχνικών και μεθόδων που θα οδηγήσουν στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Έτσι δεν υφίσταται μέχρι στιγμής μια συγκεκριμένη μέθοδος επίλυσης αλλά μια τεράστια γκάμα μεθόδων που προσεγγίζουν τη λύση ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος.

Η μελέτη του προαναφερθέντος προβλήματος παίζει έναν αρκετά σημαντικό ρόλο σε διάφορες εφαρμογές. Στα πλαίσια των υπολογιστικών μαθηματικών, στη γενετική, στην ηλεκτρονική και στη ρομποτική μπορεί κανείς να ξεχωρίσει διάφορες παραλλαγές του προβλήματος του περιπλανώμενου πωλητή.

2.8 Αβέβαιη Ζήτηση

Η ζήτηση είναι μονάδες που αφαιρούνται από τα αποθέματα, η αναπλήρωση είναι μονάδες που προστίθενται στα αποθέματα, το κόστος εκφράζει τις οικονομικές επιπτώσεις για τη διατήρηση ή μη των αποθεμάτων και οι περιορισμοί είναι περιστολές που επιβάλλονται στη ζήτηση και το κόστος από τη διοίκηση ή από συνθήκες του φυσικού περιβάλλοντος. Η συνηθέστερη υπόθεση για την κατανομή της ζήτησης είναι ότι η ζήτηση είναι σταθερή μέσα στο χρόνο. Η ζήτηση μπορεί επίσης να έχει μια εμπειρική κατανομή μέσα στο χρόνο που δεν είναι τυποποιημένη ή μπορεί να ακολουθεί κάποια ειδική κατανομή, όπως η διωνυμική κατανομή που ακολουθείται στην παρούσα εργασία, οπότε το σύστημα καλείται στοχαστικό. Μια άλλη υποδιαίρεση της γνώσης της μελλοντικής ζήτησης μπορεί να περιλαμβάνει τη βεβαιότητα, τον επιχειρηματικό κίνδυνο καθώς και την αβεβαιότητα.

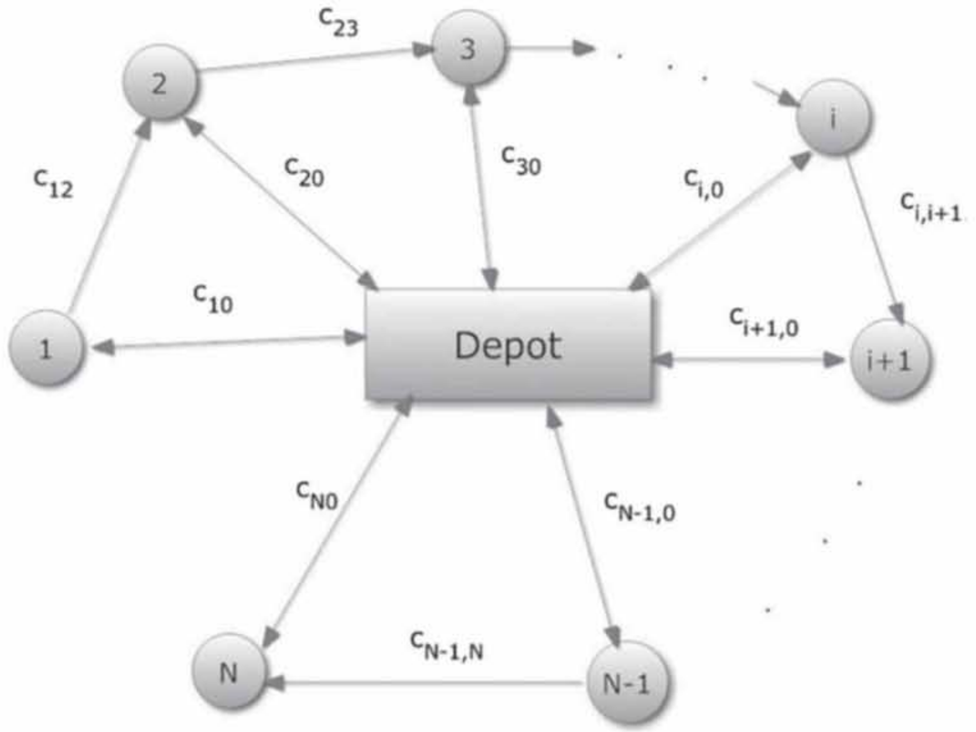
Όταν η μελλοντική ζήτηση είναι γνωστή με ακρίβεια επικρατούν συνθήκες βεβαιότητας στο εκάστοτε πρόβλημα. Αντίθετα, όταν είναι γνωστή η κατανομή της μελλοντικής ζήτησης, έχουμε ένα πρόβλημα δρομολόγησης κάτω από συνθήκες επιχειρηματικού κινδύνου. Αυτού του είδους οι πληροφορίες μπορεί να προέρχονται από αρχεία προηγούμενων ζητήσεων. Μια τελευταία περίπτωση θα μπορούσε να είναι η απόλυτη άγνοια της κατανομής της μελλοντικής ζήτησης.

Κεφάλαιο 3 Περιγραφή του προβλήματος

3.1 Ορισμός του προβλήματος

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, το οποίο έχει μελετηθεί από τους Pandelis et al. (2013) και αναλύεται παρακάτω. Η μελέτη έγκειται στην εύρεση της βέλτιστης διαδρομής ενός οχήματος το οποίο ξεκινά τη διαδρομή του από μία αποθήκη, φορτώνει από αυτή και παραδίδει K διαφορετικά προϊόντα σε N πελάτες οι οποίοι εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Πιο αναλυτικά, θεωρούμε ένα σύνολο κόμβων V = {0, 1, . . ., N} . Ο κόμβος 0 υποδηλώνει την αποθήκη (depot) των προϊόντων και οι κόμβοι {1, . . ., N} αντιστοιχούν στους πελάτες. Επιπλέον, υπάρχουν K διαφορετικού τύπου προϊόντα στην αποθήκη τα οποία πρέπει να παραδοθούν στους πελάτες προκειμένου να ικανοποιήσουν τις ανάγκες τους σε ζήτηση. Το ίδιο όχημα χρησιμοποιείται επίσης και για τα επιστρεφόμενα προϊόντα. Υποθέτουμε πως όλα τα προϊόντα έχουν το ίδιο μέγεθος. Οι πελάτες εξυπηρετούνται με τη σειρά 1, 2, . . ., N με ένα όχημα, το οποίο μπορεί να μεταφέρει οποιαδήποτε ποσότητα του προϊόντος i ∈ {1, . . . , K} υπό την προϋπόθεση να μην υπερβεί τη συνολική χωρητικότητα Q του οχήματος. Το όχημα ξεκινά τη διαδρομή του με συνολικό φορτίο προϊόντων μικρότερο ή ίσο με Q και γυρίζει στην κεντρική αποθήκη αφού έχει εξυπηρετήσει τις ζητήσεις όλων των πελατών. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής επιτρέπεται να επιστρέφει στην αποθήκη για να αφήνει τα επιστρεφόμενα προϊόντα και να τροφοδοτείται με καινούρια. Το οδικό δίκτυο απεικονίζεται στο παρακάτω.

Ορίζουμε ως $c_{j,j+1}$, όπου $j = 1, 2, \dots, N-1$, το κόστος μεταφοράς προϊόντων μεταξύ των πελατών j και j + 1, και ως c_{j0} ή c_{0j}, όπου j = 1, 2, . . . , N, το κόστος μεταφοράς προϊόντων από έναν πελάτη προς την αποθήκη και αντίστροφα. Σε αυτές τις δαπάνες συμπεριλαμβάνεται το κόστος μεταφοράς και κατά κύριο λόγο το κόστος του καυσίμου που θα καταναλώσει το όχημα για να καλύψει τις αποστάσεις μεταξύ πελατών ή τις αποστάσεις μεταξύ πελατών και αποθήκης. Υποθέτουμε ότι οι δαπάνες αυτές είναι συμμετρικές, $c_{i0} = c_{0i}$, όπου $i = 1, \dots, N$ και ικανοποιούν την ακόλουθη τριγωνική ανισότητα $c_{i,i+1} \leq c_{i0} + c_{0,i+1}$, όπου $i = 1, \dots, N-1$.



Σχήμα 3.1 : Οδικό δίκτυο για πεπερασμένο ορίζοντα

Η ζήτηση του πελάτη j, όπου j = 1,. . . N, για το προϊόν i, όπου i = 1,. . . , K, είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή ξ_i^j και η συνολική ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων από τον πελάτη j είναι επίσης μία διακριτή τυχαία μεταβλητή ψ^j. Υποθέτουμε ότι η από κοινού κατανομή πιθανότητας τόσο των ζητήσεων του κάθε πελάτη ξ_i^j όσο και της ποσότητας των επιστρεφόμενων προϊόντων ψ^j είναι γνωστή.

Οι πραγματικές ζητήσεις για νέα προϊόντα καθώς και η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων του κάθε πελάτη δεν είναι δεδομένες αλλά γίνονται γνωστές κατά την άφιξη του οχήματος στον πελάτη για πρώτη φορά. Εικάζουμε πως η συνολική ζήτηση και η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων του κάθε πελάτη δεν μπορούν να υπερβούν τη χωρητικότητα του οχήματος, δηλαδή, $\max_{j=1,2,\dots,N} \sum_{i=1}^{K} \xi_i^j \leq Q$ και $\max_{j=1,2,\dots,N} \psi^j \leq Q$. Επίσης, όταν το όχημα επισκεφτεί για πρώτη φορά τον πελάτη j θα πρέπει να ικανοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερες από τις απαιτήσεις του για νέα προϊόντα και να μαζέψει όσο το δυνατόν περισσότερα επιστρεφόμενα προϊόντα. Εάν ένα μέρος της ζήτησης δεν ικανοποιηθεί ή δεν υπάρχει αρκετός χώρος για όλα τα επιστρεφόμενα, το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, εφοδιάζεται με νέα ποσότητα προϊόντων, και επιστρέφει στον πελάτη για να ικανοποιήσει τη ζήτηση. Έπειτα από την ικανοποίηση της ζήτησης και του τελευταίου πελάτη και της συγκέντρωσης όλων των επιστρεφόμενων προϊόντων, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη.

Θεωρούμε z_i, $i = 1, 2, \ldots, K$ το φορτίο του προϊόντος i που έχει απομείνει στο όχημα μετά την πρώτη επίσκεψη στο χώρο του πελάτη και r, τον ελεύθερο χώρο. Τα z_i,r μπορούν να πάρουν θετικές και αρνητικές τιμές. Αρνητικές τιμές για τα z_i,r υποδηλώνουν την ύπαρξη ανικανοποίητης ζήτησης για το προϊόν i και την έλλειψη ελεύθερου χώρου για τα επιστρεφόμενα προϊόντα.

Ορίζουμε $z = \sum_{i=1}^{K} z_i^-$ με $z_i^- = \min\{0, z_i\}$, δηλαδή |z| είναι η συνολική ποσότητα που χρωστάει ο οδηγός του φορτηγού στον εκάστοτε πελάτη. Όταν $z = 0$ και r ≥ 0 (η ζήτηση για προϊόντα και ελεύθερο χώρο ικανοποιείται πλήρως), το όχημα έχει δύο επιλογές. Είτε το φορτηγό πηγαίνει στον επόμενο πελάτη αμέσως, είτε πηγαίνει στην αποθήκη, αφήνει τα επιστρεφόμενα, εφοδιάζεται με τα φορτία θ_i ,i= 1,2,...,K, από τα προϊόντα 1,2,...,K όπου $\sum_{i=1}^{K} \theta_i \leq Q$ και πηγαίνει στον επόμενο πελάτη. Όταν z <0 και/ή r ≤ 0 (η ζήτηση δεν ικανοποιείται πλήρως και έλλειψη άδειου χώρου για τα επιστρεφόμενα προϊόντα), το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, αφήνει τα επιστρεφόμενα και εφοδιάζεται με την οφειλόμενη ποσότητα $-z^-$ $= -\min\{0, z\}$. Τότε έχει τις ακόλουθες επιλογές: (i) είτε φορτώνει επιπλέον ποσότητες θ_i από τα προϊόντα 1,2,...,K, έτσι ώστε να παραμένει τουλάχιστον $-r^-$ ελεύθερος χώρος μετά την παράδοση της οφειλόμενης ποσότητας $-z^-$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{K} \theta_i \leq Q + \min(z^-, r^-)$, επιστρέφει τον πελάτη, ικανοποιεί τη ζήτηση αυτού και/ή παίρνει επιστρεφόμενα προϊόντα και έπειτα συνεχίζει στον επόμενο πελάτη,, (ii) πηγαίνει στον πελάτη, ικανοποιεί την οφειλόμενη ζήτηση και/ή παίρνει επιστρεφόμενα προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη όπου αδειάζει τα επιστρεφόμενα και εφοδιάζεται με τα φορτία θ_i των προϊόντων $1, \ldots, K$, όπου $\sum_{i=1}^{K} \theta_i \leq Q$, και προχωρά στο επόμενο πελάτη.

Στόχος μας είναι να καθορίσουμε μια στρατηγική δρομολόγησης του οχήματος η οποία να ελαχιστοποιεί το προσδοκώμενο συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου επισκέψεων.

3.2 Διατύπωση Εξισώσεων

Ορίζουμε τα διανύσματα $\bar{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_K]$, $\bar{\xi}^j = [\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots, \xi_K^j]$, και $\bar{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K]$ και συμβολίζουμε $f_j(\bar{z}, r)$ το ελάχιστο προσδοκώμενο κόστος, όταν η ποσότητα του προϊόντος i που απομένει στο όχημα μετά την επίσκεψη για πρώτη φορά στον j πελάτη, είναι ίσο με z_i και ο ελεύθερος χώρος ισοδυναμεί με r. Τότε, μια βέλτιστη στρατηγική δρομολόγησης μπορεί να υπολογιστεί από τις ακόλουθες εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού. Μετά την επίσκεψη στον τελευταίο πελάτη, έχουμε:

$$f_N(\bar{z}, r) = c_{N0} + 2c_{N0} * [1(\textstyle\sum_{i=1}^{K} z_i^- + r^- < 0)]. \tag{1}$$

Για $j = 1, 2, \ldots, N-1$ έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: Αν $z_1, z_2, \ldots, z_K,\ r \geq 0$, δηλαδή δεν χρωστάει τότε

$$f_j(\bar{z}, r) = \min\{Hj(\bar{z}, r), \mathrm{A_j}\} \tag{2}$$

- Περίπτωση 2: Αν $\sum_{i=1}^{K} z_i^- + \mathrm{r^-} < 0$, δηλαδή χρωστάει τότε

$$\mathrm{f_j(\bar{z}, r) = 2c_{j0} + \min\{\widetilde{H}j\big(\textstyle\sum_{i=1}^{K} z_i^-, r^-\big), A_j\big\}}, \tag{3}$$

Για $z_1, z_2, \ldots, z_K, r \geq 0$ ισχύει:

$$H_j(\bar{z}, r) = c_{j,j+1} + E f_{j+1}(\mathrm{\bar{z}} - \bar{\xi}^{\mathrm{j+1}}, r + \textstyle\sum_{\mathrm{i=1}}^{k} \mathrm{\min\big(z_i, \xi_i^{j+1}\big) - \psi^{j+1}}) \tag{4}$$

Για $\mathrm{z^- + r^-} < 0$ ισχύει:

$$\mathrm{\widetilde{H}j(z, \mathit{r}) = c_{j,j+1} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \leq Q + \min(z^-, r^-)} Ef_{j+1}(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}, Q + r^- -}$$

$$\textstyle\sum_{\mathrm{i=1}}^{k} \mathrm{(\theta_i - \min\big(\theta_i, \xi_i^{j+1}\big)) - \psi^{j+1})} \tag{5}$$

$$\mathrm{A_j = c_{j0} + c_{j+1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \leq Q} Ef_{j+1}(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}, Q -}$$

$$\textstyle\sum_{\mathrm{i=1}}^{k} \mathrm{(\theta_i - \min\big(\theta_i, \xi_i^{j+1}\big)) - \psi^{j+1})} \tag{6}$$

Τέλος, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος είναι:

$$\mathrm{f_0 = c_{1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \leq Q} Ef_1(\bar{\theta} - \bar{\xi}^1, Q - \textstyle\sum_{i=1}^{\mathit{k}} (\theta_i - \min(\theta_i, \xi_i^1)) - \psi^1).} \tag{7}$$

Στις σχέσεις (4) - (7) οι αναμενόμενες τιμές έχουν ληφθεί σε σχέση με το τυχαίο διάνυσμα της ζήτησης $\bar{\xi}^{\mathrm{j}}, \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{N}$, και τις τυχαίες μεταβλητές ψ^{j}, $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Ο πρώτος όρος μέσα στις αγκύλες στη σχέση (2) αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το φορτηγό θα πάει στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το φορτηγό θα επιστρέψει στην αποθήκη για να ανανεώσει το φορτίο του, πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Ο πρώτος όρος της αγκύλης της σχέσης (3) αντιστοιχεί στη περίπτωση της επιστροφής στην αποθήκη μια φορά για ανανέωση φορτίου προτού συνεχίσει στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στη περίπτωση της επιστροφής στην αποθήκη δύο φορές πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη.

Κεφάλαιο 4 Αναλυτική Μέθοδος Επίλυσης

Κατά την αναλυτική μέθοδο επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος στηριζόμενοι στο Δυναμικό Προγραμματισμό και κατ' επέκταση στις εξισώσεις που αναγράφονται παραπάνω ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία.

Ο αλγόριθμος ξεκινά από τον υπολογισμό του προσδοκώμενου κόστους του τελευταίου πελάτη σύμφωνα με την εξίσωση (1), έπειτα στον προτελευταίο και ούτω καθεξής. Αρχικά υπολογίζει το A_j σύμφωνα με την εξίσωση (6). Στη συνέχεια υπάρχουν δυο εναλλακτικές στην ''πορεία'' του αλγόριθμου.

Στην 1η περίπτωση, δηλαδή αν $z_1, z_2, \ldots, z_K,\ r \geq 0$ (δεν χρωστάει, έχει ικανοποιηθεί η ζήτηση), έχοντας το A_j, υπολογίζει το $H_j\ (\overline{z},\ r)$ σύμφωνα με την εξίσωση (4), τα οποία συγκρίνει μεταξύ τους και το ελάχιστο αυτών χρησιμοποιεί για να δημιουργήσει τον πίνακα $f_j(\overline{z}, r)$ σύμφωνα με την εξίσωση (2).

Στην 2η περίπτωση, δηλαδή αν $\sum_{i=1}^{K} z_i^- + r^- < 0$ (χρωστάει, υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση), έχοντας το A_j, ομοίως υπολογίζει το $\widetilde{H}j(z, r)$ σύμφωνα με την εξίσωση (5), τα οποία συγκρίνει μεταξύ τους και το ελάχιστο αυτών χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του πίνακα $f_j(\overline{z}, r)$ σύμφωνα με την εξίσωση (3).

Τέλος, έχοντας υπολογίσει τον πίνακα, βρίσκουμε το αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου σύμφωνα με την εξίσωση (7).

Κεφάλαιο 5 Ευρετική Μέθοδος Επίλυσης

Η επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με προγραμματισμό γίνεται ολοένα και δυσκολότερη όσο αυξάνει το μέγεθος του προβλήματος και συνήθως το να βρεθεί η συνολικά βέλτιστη λύση σε λογικό χρόνο είναι πρακτικά αδύνατο. Για να επιλυθούν προβλήματα αυτής της μορφής συχνά χρησιμοποιούνται διαφορετικές τεχνικές όπως η ευρετική μέθοδος που οδηγούν σε μια μη ολικά βέλτιστη, αλλά ικανοποιητική λύση. Ευρετική μέθοδος (heuristic method) λέγεται μια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων, η οποία βασίζεται σε μια σειρά προσεγγιστικών αποτελεσμάτων. Σκοπός αυτής είναι να δίνει ικανοποιητικές λύσεις σε μικρό χρονικό διάστημα. Μια λύση ενός ευρετικού αλγορίθμου γίνεται αποδεκτή αν ικανοποιεί κάποια κριτήρια όπως η ποιότητα της λύσης, δηλαδή η απόκλισή της από τη βέλτιστη, η ευκολία απόκτησης μιας λύσης, η λογική πάνω στην οποία στηρίζονται οι κανόνες του ευρετικού αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκαν για να οδηγηθούμε στη λύση κ.α. Για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν υπάρχει μόνο ένας ευρετικός αλγόριθμος που να δίνει κάποια λύση, αλλά έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι οι οποίοι συγκρινόμενοι μεταξύ τους, οδηγούν ολοένα και σε καλύτερες λύσεις.

Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιούμε μία ευρετική μέθοδο όπου πολλά είδη προϊόντων θα θεωρηθούν σαν ένα. Με αυτό τον τρόπο εισάγουμε την ύπαρξη ενός «υπερπροϊόντος» του οποίου η κατανομή της ζήτησης προκύπτει από την ''πρόσθεση'' της κατανομής των επιμέρους ζητήσεων. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε 2 είδη προϊόντων με ζητήσεις D_1 και D2 αντίστοιχα και με γνωστές κατανομές ζητήσεων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε συνολική ζήτηση $D_{total}=4$. Αυτό συμβαίνει όταν $P(D_1=0)$ και $P(D_2=4)$ ή $P(D_1=1)$ και $P(D_2=3)$ ή $P(D_1=2)$ και $P(D_2=2)$ ή $P(D_1=3)$ και $P(D_2=1)$ή $P(D_1=4)$ και $P(D_2=0)$, δηλαδή

$$P(D=4) = P(D_1=0)*P(D_2=4) + P(D_1=1)*P(D_2=3) + P(D_1=2)*P(D_2=2) + P(D_1=3)*P(D_2=1) + \\ +P(D_1=4) * P(D_2=0).$$

Η απόφαση που πρέπει να πάρει ο οδηγός του φορτηγού, δηλαδή το αν θα συνεχίσει στον επόμενο πελάτη ή θα επιστρέψει στην αποθήκη για την εκφόρτωση των επιστρεφόμενων προϊόντων και τη φόρτωση νέων, εξαρτάται από τη διαθέσιμη χωρητικότητα στο φορτηγό ή την ποσότητα που χρωστάει. Η βέλτιστη λοιπόν απόφαση που θα προκύψει από την επίλυση του προβλήματος με το γενικευμένο προϊόν, «υπερπροϊόν» όπως αναφέρθηκε παραπάνω, θα χρησιμοποιηθεί στην ευρετική επίλυση του εξεταζόμενου προβλήματος με τα πολλά προϊόντα.

Σύμφωνα με την ευρετική μέθοδο, οι ποσότητες από κάθε προϊόν που φορτώνονται όταν το όχημα πάει στην αποθήκη υπολογίζονται ως εξής: Στον προτελευταίο πελάτη το όχημα εφοδιάζεται ανάλογα με τις μέγιστες πιθανές ζητήσεις των προϊόντων. Για τα δύο προϊόντα ισχύει:

$\theta_1 = \mathrm{q}\frac{\mathrm{maxD\ 1}}{\mathrm{maxD\ 1+maxD\ 2}}$, στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο ακέραιο Ο ίδιος κανόνας ακολουθείται για τους υπόλοιπους πελάτες με μια νέα τροποποιημένη μέγιστη ζήτηση (effective maximum demand), η οποία θα ισούται με το άθροισμα της μέσης ζήτησης και μιας τυπικής απόκλισης της ζήτησης για το εκάστοτε προϊόν.

Κεφάλαιο 6 Σύγκριση Μεθόδων

6.1 Ανάλυση συγκριτικού αλγορίθμου

Σε αυτό το υποκεφάλαιο αρχικά επεξηγούνται αναλυτικά οι συναρτήσεις (κώδικες) για την περεταίρω κατανόηση του αλγορίθμου για δύο είδη προϊόντων καθώς και των επιστρεφόμενων που θα χρησιμοποιηθεί για την άντληση των αποτελεσμάτων της σύγκρισης των δύο μεθόδων.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση του προαναφερθέντος αλγορίθμου είναι οι εξής:

duosanena_function: υπολογίζει τις πιθανότητες των ζητήσεων, την αθροιστική πιθανότητα προσθέτοντας τις κατανομές των ζητήσεων των δύο προϊόντων στην συγκεκριμένη περίπτωση με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω καθώς επίσης και τη συνολική ζήτηση η οποία θα χρησιμοποιηθεί σε ακόλουθο αλγόριθμο.

duoproionta_function: υπολογίζει το συνολικό κόστος που προκύπτει από την αναλυτική επίλυση του προβλήματος, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τον υπολογισμό της ποσοστιαίας διαφοράς από το αποτέλεσμα της ευρετικής λύσης.

enaproion_function: υπολογίζει την απόφαση που θα πάρει ο οδηγός του φορτηγού, να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη ή να επιστρέψει στην αποθήκη, να αφήσει τα επιστρεφόμενα και να εκφορτώσει νέα προϊόντα για την ικανοποίηση του εκάστοτε πελάτη, στην περίπτωση που μεταφέρει ένα είδος προϊόντων.

pro2new_function: χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αποφάσεις, τις τροποποιεί καταλλήλως και υπολογίζει το συνολικό κόστος που προκύπτει από την ευρετική μέθοδο επίλυσης.

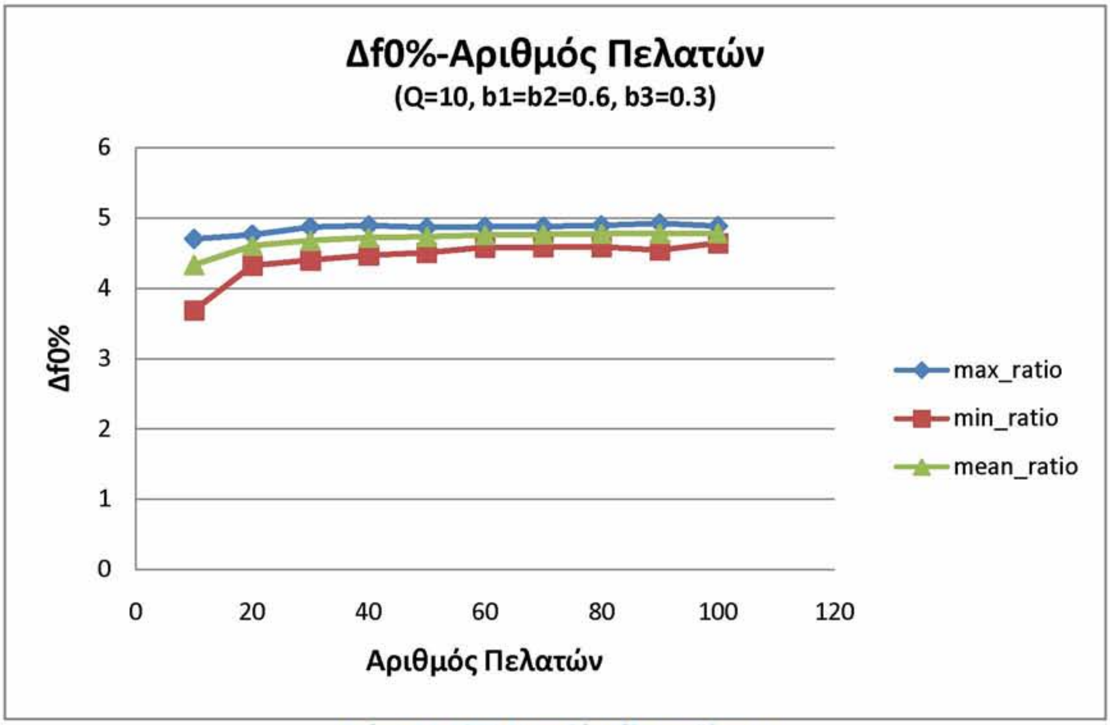
6.2 Σύγκριση ως προς τον αριθμό των πελατών

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση της αναλυτικής με την ευρετική μέθοδο. Οι ποσοστιαίες αποκλίσεις (max_ratio, min_ratio, mean_ratio) αποτυπώνονται σε κατάλληλα διαμορφωμένα διαγράμματα. Παρακάτω εξηγείται ο σχεδιασμός των γραφικών απεικονίσεων.

Θα δημιουργήσουμε 100 διαφορετικά σύνολα αποστάσεων με γεννήτρια τυχαίων ακεραίων αριθμών. Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιήθηκε συγκεκριμένο εύρος αποστάσεων. Συγκεκριμένα οι αποστάσεις μεταξύ των πελατών θα ανήκουν στο διάστημα μεταξύ δεκαοχτώ και είκοσι εφτά, ενώ οι αποστάσεις μεταξύ αποθήκης και πελατών θα ανήκουν στο διάστημα δεκαεννέα και είκοσι πέντε. Οι αποστάσεις που βρίσκονται ανάμεσα στα διαστήματα που προαναφέρθηκαν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Επίσης δεν συμπεριλαμβάνονται σε αυτά ακραίες τιμές των αποστάσεων όπου η βέλτιστη πολιτική είναι εμφανής. Για παράδειγμα δεν έχουμε περιπτώσεις όπου η αποθήκη είναι πολύ μακριά ή πολύ κοντά σε σχέση με τους πελάτες. Τα παρακάτω αποτελέσματα προέκυψαν από τη σύγκριση των μεθόδων για δύο είδη προϊόντων, με μέγιστη ζήτηση maxD1, maxD2 για το $1^{ο}$ και το $2^{ο}$ προϊόν αντίστοιχα. Επιλέγουμε επιπλέον διωνυμική κατανομή για τη ζήτηση, ίδια για όλους τους πελάτες με b1, b2 ο παράγοντας της ζήτησης για το $1^{ο}$ και το $2^{ο}$προϊόν αντίστοιχα καθώς και b3 για τα επιστρεφόμενα προϊόντα.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την ποσοστιαία διαφορά των δύο μεθόδων συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτοί θα είναι κατά κύριο λόγο το μέγεθος του μεταφερόμενου φορτίου Q, ο αριθμός των πελατών N, καθώς και ο παράγοντας b της διωνυμικής κατανομής. Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα έγιναν στο Excel.

Συγκεκριμένα, στο συγκεκριμένο τμήμα παρουσιάζονται με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων οι μέγιστες, μέσες και ελάχιστες αποκλίσεις που δημιουργούνται ανάμεσα στην αναλυτική και την ερευτική μέθοδο όσον αφορά τον αριθμό των πελατών. Φαίνεται ,δηλαδή σε ποιο βαθμό επηρεάζει η αύξηση του αριθμού των πελατών την ποσοστιαία διαφορά μεταξύ της αναλυτικής και της ευρετικής μεθόδου επίλυσης του αλγορίθμου.



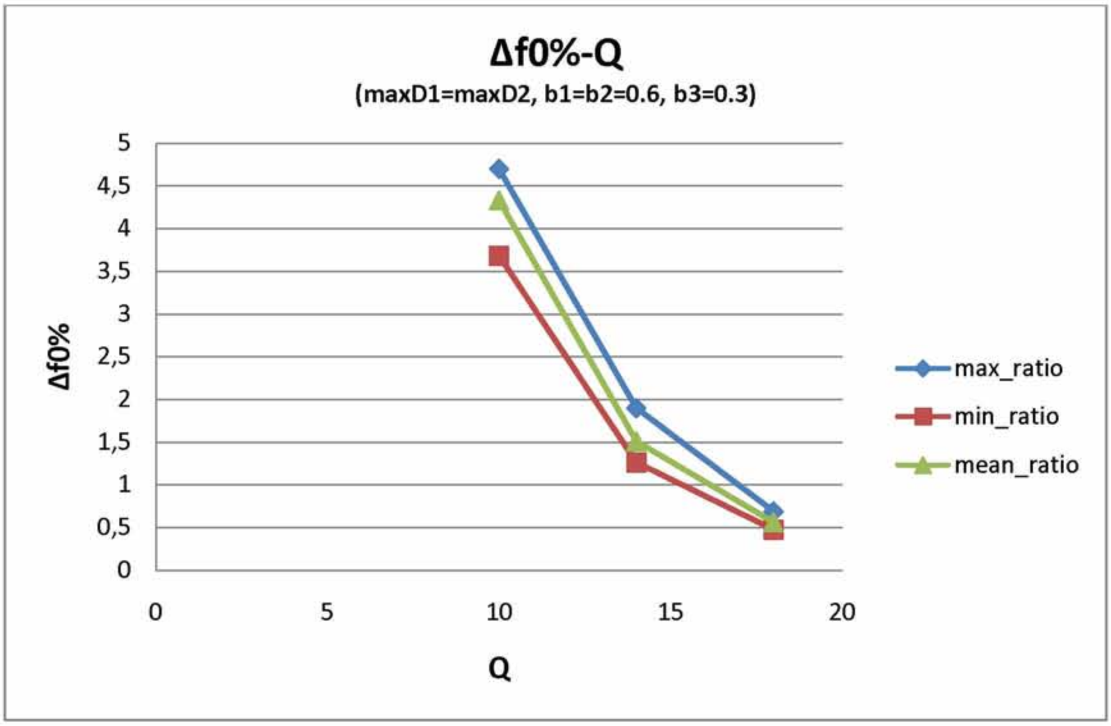
Σχήμα 6.1:Δf0%-N για δύο είδη προϊόντων

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα, η μέγιστη ποσοστιαία διαφορά χαρακτηρίζεται από μια ανοδική πορεία με αυξομειώσεις μέχρι τον αριθμό των 30 πελατών όπου και τείνει σε μια πιο σταθερή πορεία. Όσον αφορά την μέση τιμή της ποσοστιαίας διαφοράς διαπιστώνουμε ότι επικρατεί επίσης μία μικρή άνοδος αλλά φαίνεται να σταθεροποιείται νωρίτερα στον αριθμό των 40-50 πελατών με Δf0=4.5% περίπου. Τέλος, όσον αφορά την ελάχιστη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται μια πιο απότομη άνοδος μέχρι τον αριθμό των 60 πελατών και στη συνέχεια επικρατεί μια σταθεροποίηση με πολύ μικρές αυξομειώσεις.

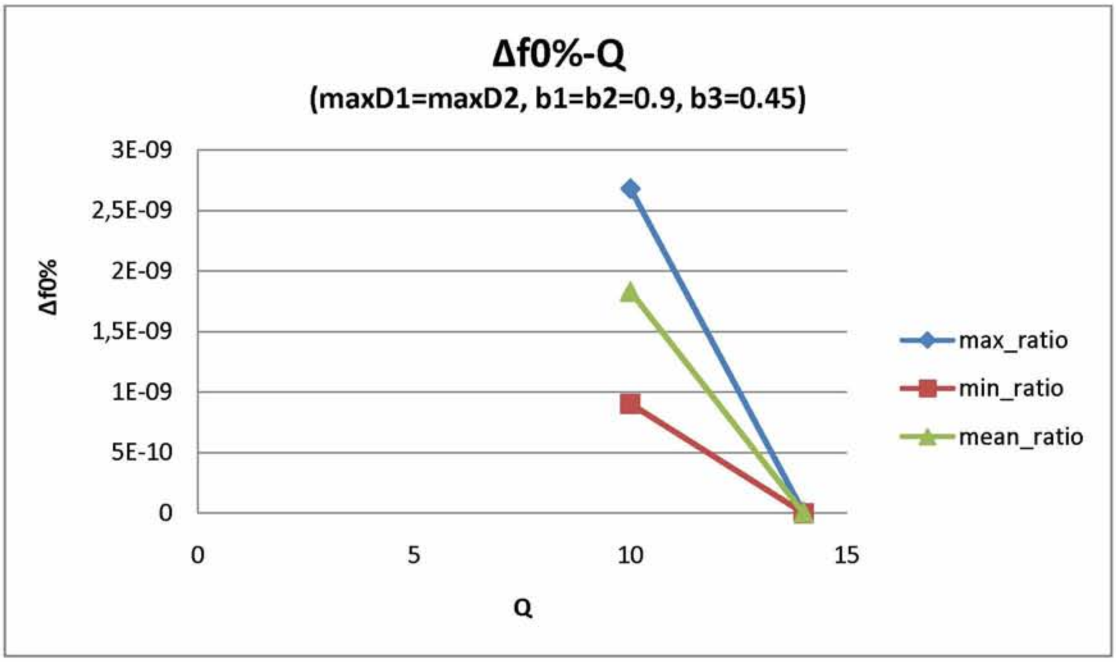
Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός των πελατών η ποσοστιαία διαφορά (Δf0%) των αποτελεσμάτων από τις δύο μεθόδους τείνει στην σταθεροποίηση.

6.3 Σύγκριση ως προς το συνολικό φορτίο

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται το Δf0% (ποσοστιαία διαφορά) σε σχέση με το συνολικό φορτίο με αλλαγές κάθε φορά σε διάφορες παραμέτρους. Οι εν λόγω παράμετροι θα είναι η μέγιστη ζήτηση και οι παράμετροι της διωνυμικής κατανομής(b1,b2,b3). Οι γραφικές παραστάσεις είναι φθίνουσες. Για τον ελάχιστο αριθμό πελατών παίρνουν την μέγιστη τιμή τους και σε μεγάλους αριθμούς πελατών το σφάλμα σχεδόν μηδενίζεται.

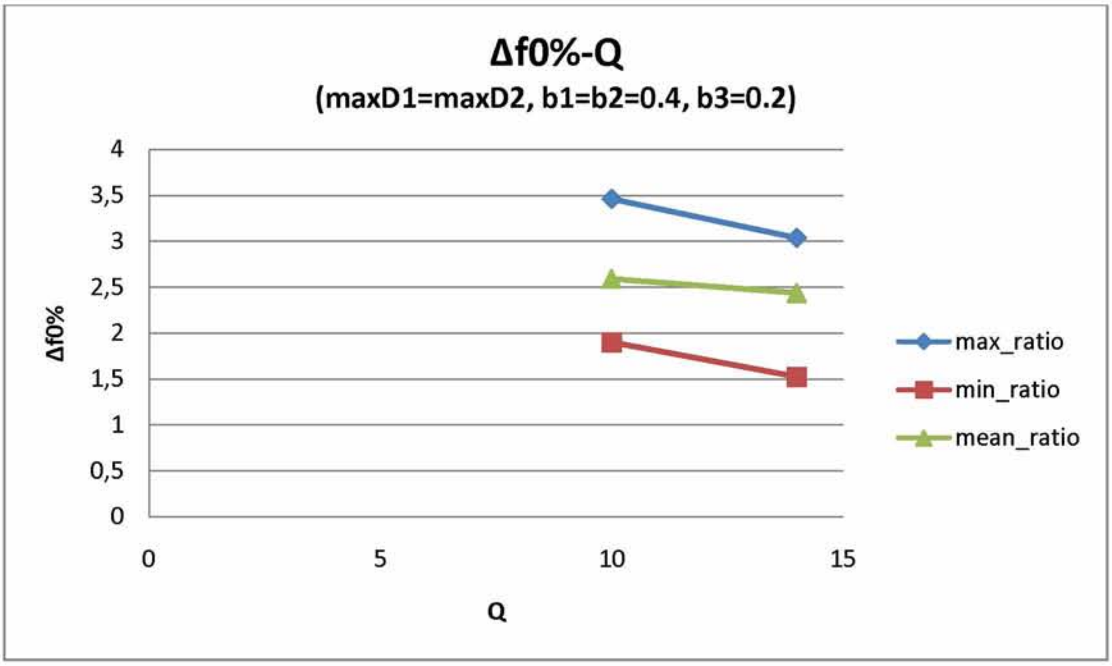


Σχήμα 6.2:Δf0%-Q για ίσες ζητήσεις

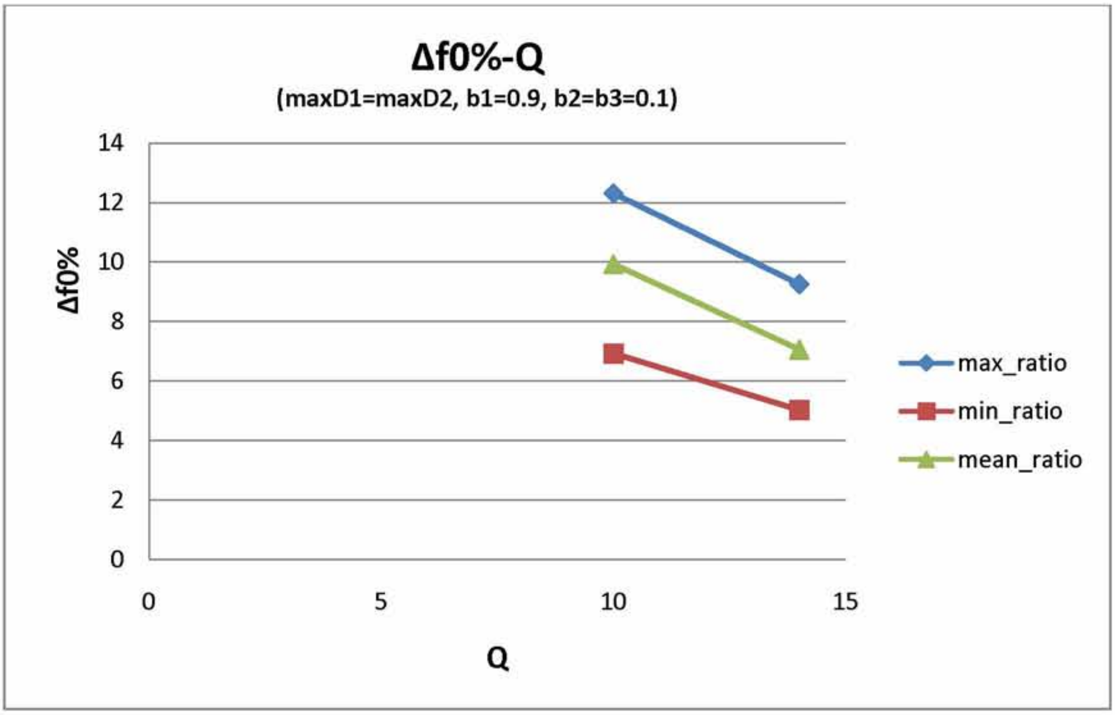


Σχήμα 6.3:Δf0%-Q για ίσες ζητήσεις

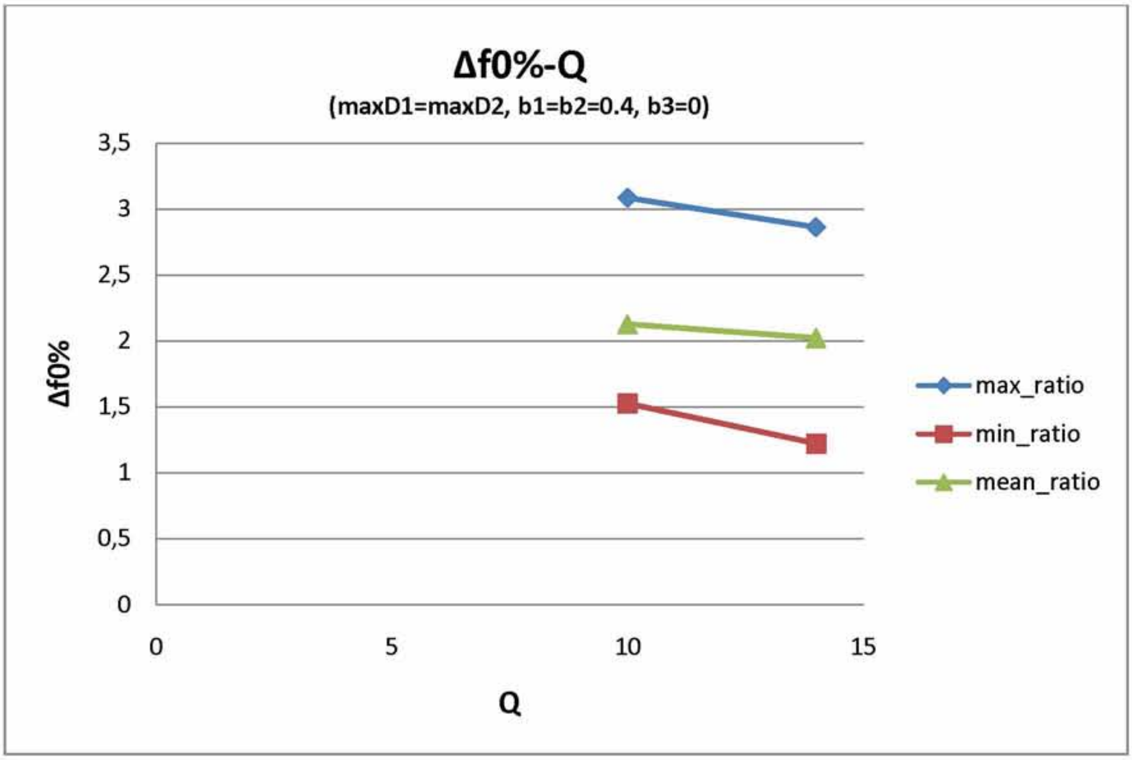
Επίσης, στο προηγούμενο διάγραμμα εξαιτίας της μεγάλης ζήτησης τόσο του προϊόντος 1 όσο και του προϊόντος 2 (b1=b2=0.9), πιθανότατα το φορτηγό παραδίδει όλα του τα προϊόντα σε κάθε πελάτη οπότε κρίνεται αναγκαίο κάθε φορά να πηγαίνει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Γι’ αυτό το λόγο οι αποκλίσεις των δύο μεθόδων τείνουν στο μηδέν.



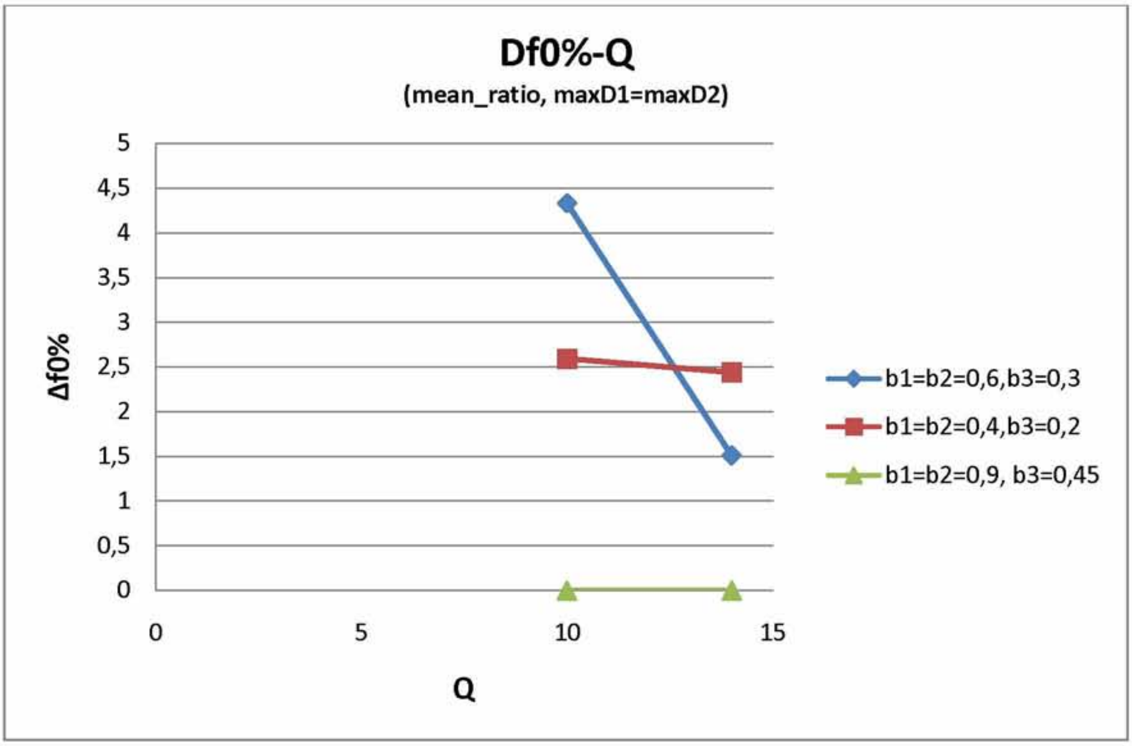
Σχήμα 6.4:Δf0%-Q για ίσες ζητήσεις



Σχήμα 6.5:Δf0%-Q για ίσες ζητήσεις



Σχήμα 6.6:Δf0%-Q για ίσες ζητήσεις

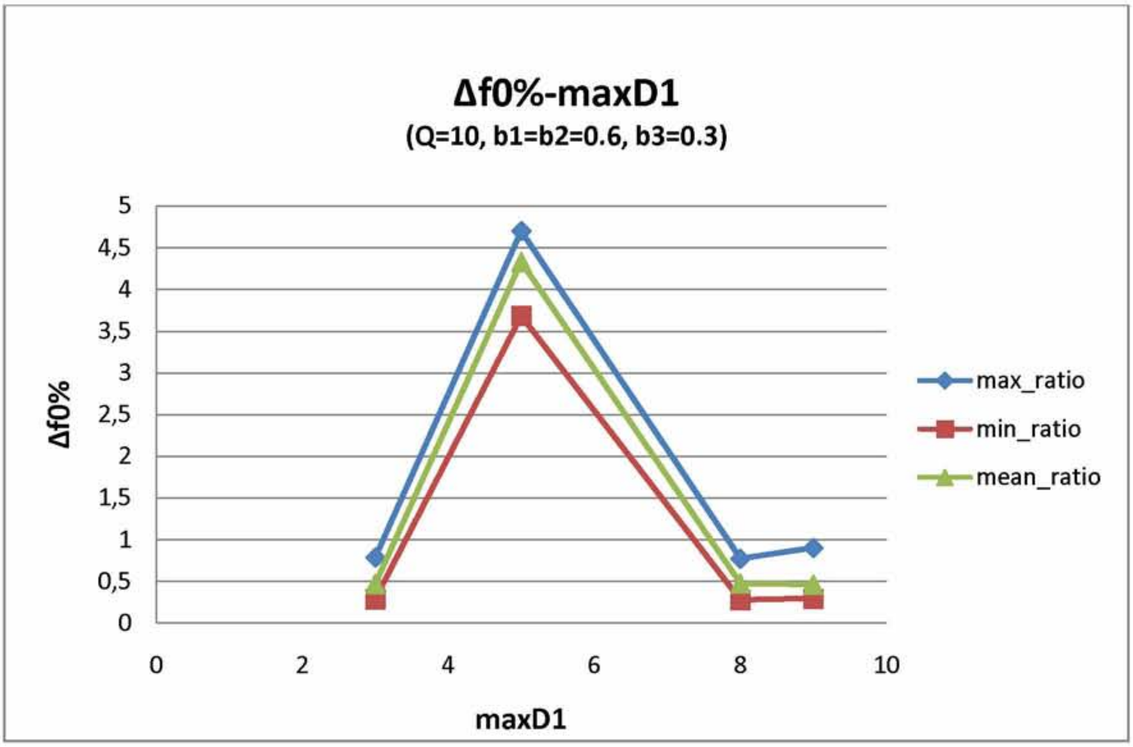


Σχήμα 6.7:Συγκριτικός Δf0%-Q για διάφορες τιμές των b1,b2,b3

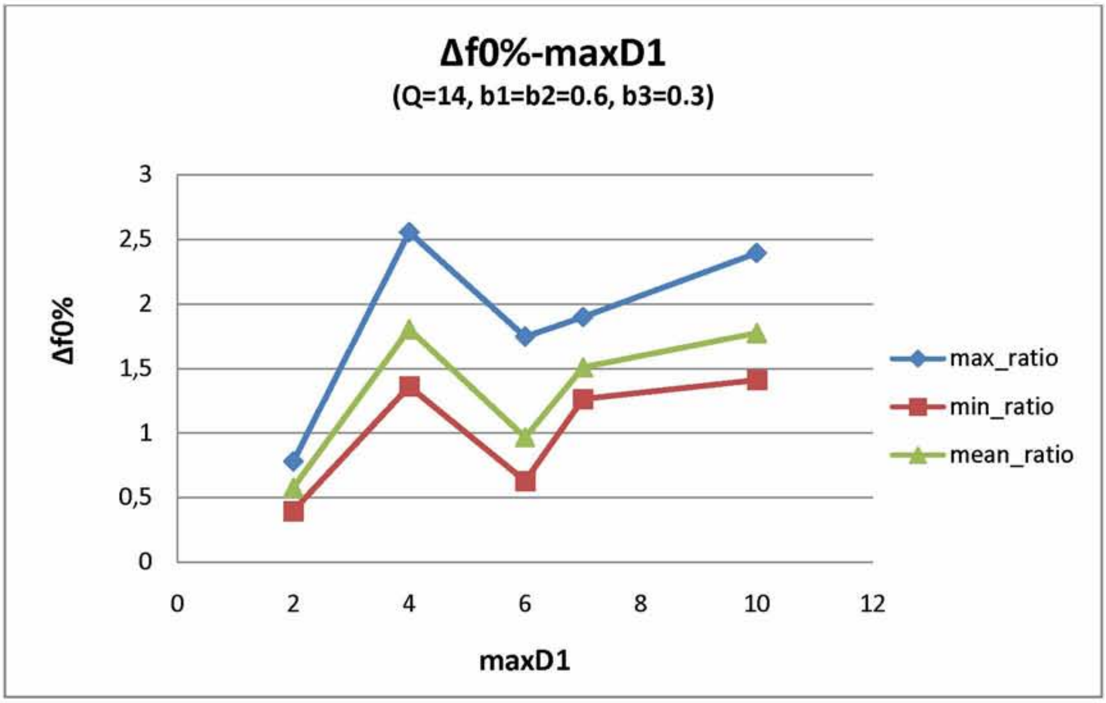
6.4 Σύγκριση ως προς τη μέγιστη ζήτηση του 1ου προϊόντος

Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε την συμπεριφορά που παρουσιάζει το Δf0% (ποσοστιαία διαφορά) συναρτήσει της μέγιστης ζήτησης του 1ου προϊόντος με διαφορετικές κάθε φορά παραμέτρους. Ισχύει ότι: maxD1+maxD2=Q. Οι εν λόγω παράμετροι θα είναι η μέγιστη ζήτηση και οι παράμετροι της διωνυμικής κατανομής (b1,b2,b3).

Στο Σχήμα 6.8 μπορούμε να διακρίνουμε πως για ίσες μέγιστες ζητήσεις maxD1=maxD2=5 υπάρχουν μεγάλες τιμές απόκλισης μεταξύ των μεθόδων (mean_ratio≈4.5%). Για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες ζητήσεις του εκάστοτε προϊόντος οι αποκλίσεις είναι αρκετά μικρές, τείνοντας προς το μηδέν.



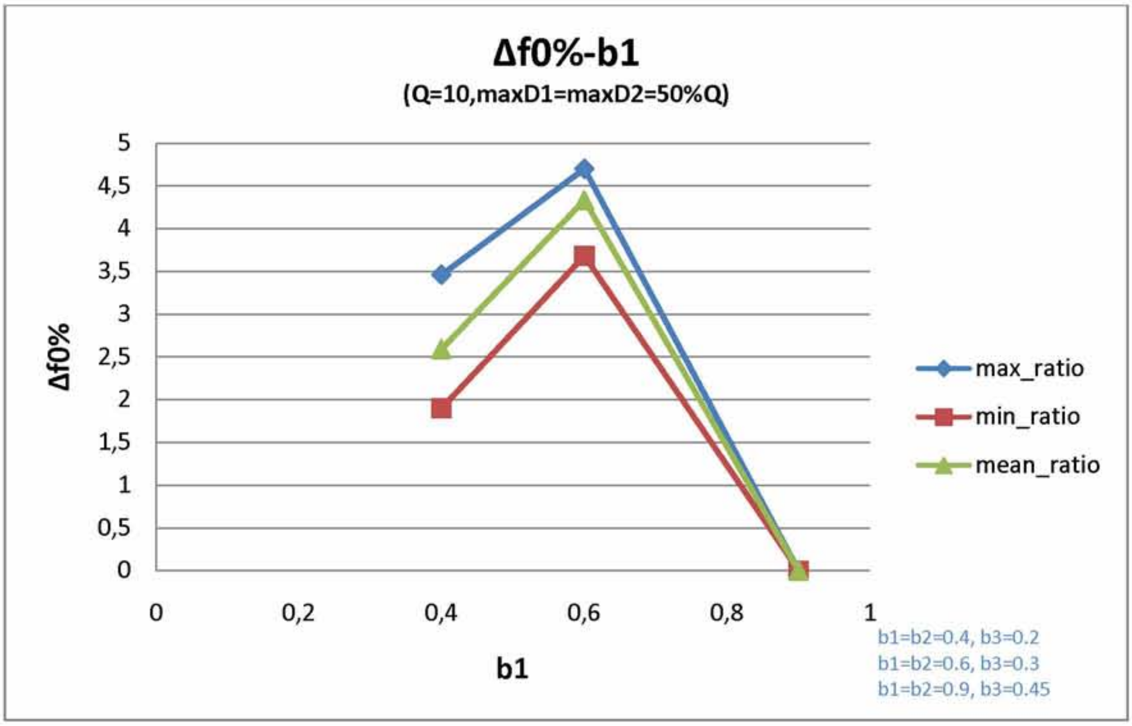
Σχήμα 6.8:Δf0%-maxD1 για Q=10 b1=b2=0.6 ,b3=0.3



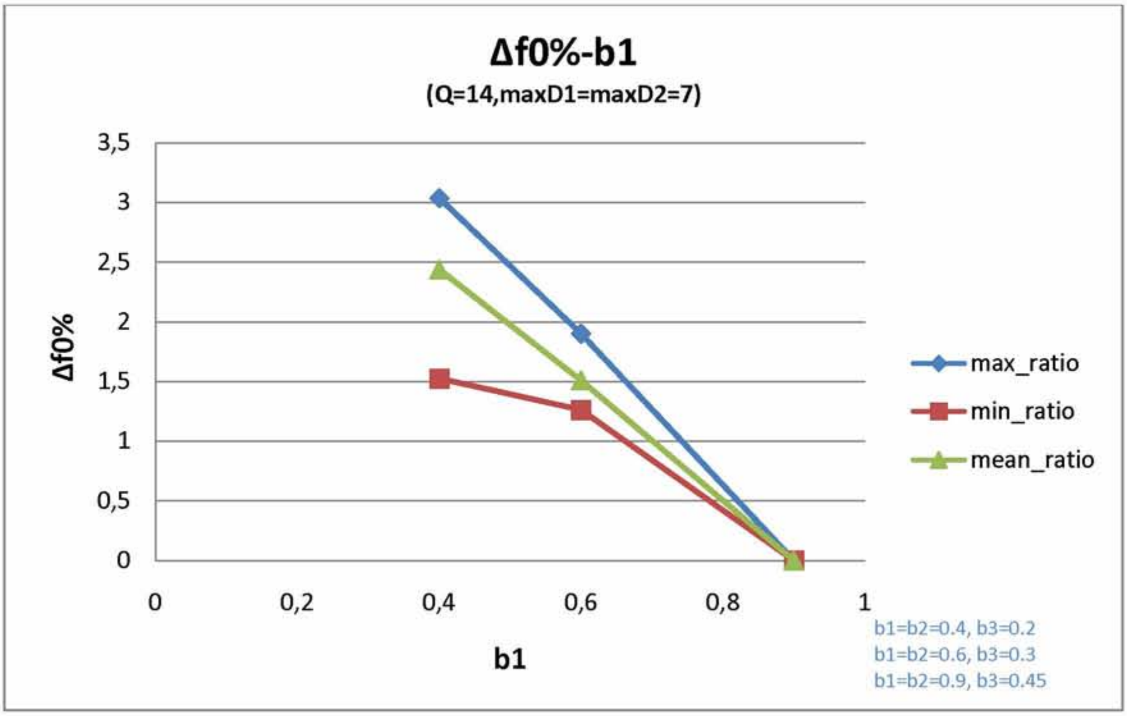
Σχήμα 6.9:Δf0%-maxD1 για Q=14,b1=b2=0.6 ,b3=0.3

6.5 Σύγκριση ως προς τον παράγοντα b της διωνυμικής κατανομής

Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε ποιό είναι το σφάλμα για δύο διαφορετικά είδη προϊόντων. Θεωρούμε ότι οι παράμετροι της διωνυμικής κατανομής b1,b2 θα έχουν τις ίδιες τιμές και για το b3 δηλαδή την παράμετρο ζήτησης των επιστρεφόμενων προϊόντων θα ισχύει: b3=(b1+b2)/4. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το b1, το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα αυξάνεται. Όμως λαμβάνει χώρα και ταύτιση των αποτελεσμάτων αναλυτικής και ευρετικής μεθόδου για μεγάλες παραμέτρους διωνυμικής κατανομής (b1=b2=0.9 και b3=0.45).



Σχήμα 6.10:Δf0%-b1 για maxD1=maxD2=50%Q



Σχήμα 6.11:Δf0%-b1 για maxD1=maxD2=7

Κεφάλαιο 7-Σύνοψη

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετήθηκε ενδελεχώς το πρόβλημα δρομολόγησης οχήματος με αβέβαιη ζήτηση παραδιδόμενων και επιστρεφόμενων προϊόντων. Αρχικά, παρουσιάστηκε ο αναλυτικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος με τις εξισώσεις που το απαρτίζουν. Στη συνέχεια, το ίδιο πρόβλημα επιλύθηκε και με μια ευρετική μέθοδο. Η ευρετική μέθοδος ,όπως ήταν αναμενόμενο, παρουσίασε αποκλίσεις συγκριτικά με την αναλυτική. Παρόλα αυτά επιβεβαιώθηκε ότι λύνει το πρόβλημά μας γρηγορότερα. Τέλος, έγιναν συγκρίσεις των δύο μεθόδων, τα αποτελέσματα των οποίων αποτυπώθηκαν σε σχήματα και διαγράμματα.

Ένα θέμα που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας είναι η γενίκευση του κώδικα για k διαφορετικά είδη μεταφερόμενων προϊόντων όσον αφορά την αναλυτική και την ευρετική μέθοδο. Θα μπορούσαμε επίσης να συγχωνεύσουμε ομάδες προϊόντων σε περισσότερα από ένα υποπροϊόντα.

Βιβλιογραφία

D. G. Pandelis, C. C. Karamatsoukis, & E. G. Kuriakidis. (2013). Finite and infinite-horizon single vehicle routing problems with a predefined customer sequence and pickup and delivery. European Journal of Operational Research. 577-586.

G. B. Dantzig, J. H. Ramser. (1959). The truck dispatching problem. Management Sci. 6 80–91.

G. Clarke, J. W. Wright. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. Operational. Research. 12 568–581.

B. J. La Londe, P. H. Zinszer, Customer Service: Meaning and Measurement, National Council of Physical Distribution Management

A. Biran, M. Breiner. (2012). *MATLAB 6 για μηχανικούς* (3rd Edition). (Ν. Ι. Μάργαρης, Επιμ., Δ. Ι. Πεταλάς, & Ά. Δ. Δημητριάδης, Μεταφρ.) Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.

F. S. Hillier, G. J. Lieberman. (2010). *Inroduction to Operations Research* (Ninth Edition εκδ., Τόμ. International Edition). NewYork: McGraw-Hill Companies.

H. A.Taha. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα* (9η Έκδοση εκδ.). (Σ. Κατσαβούνης, Επιμ., & Α. Ι. Μάργαρης, Μεταφρ.) Αθήνα: Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.

S. Nahmias. (2013). *Productions & Operations Analysis* (6th edition εκδ.). New York: McGraw-Hill/Irwin.

www.mathworks.com. (n.d.).

Ν. Δ. Τσάντας, Π. Γ. Βασιλείου. (2000). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Παράρτημα

Παρακάτω υπάρχουν οι κώδικες όλων των εφαρμογών που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία για τη συγκέντρωση των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων.

```
% optimal routing strategy for k=1

%K=1 proion
%N:arithmos pelatwn
%Q: capacity of the vehicle
%c0=[6 7 8 7 5 4 8 6 5 8];%kostos metaforas apo apothiki ston pelath
%c=[9 6 9 5 7 10 9 8 9];%kostos metaforas apo pelath se pelath
%Q=10;
%N=10;
%D=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %zhthsh
%maxD=10
%RP=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %zhthsh se return products
%maxRP=10

%*********************************************
N=input('Please enter the number of costumers:');
Q=input('Please enter the capacity of the vihicle:');
maxD=input('Please enter the max demand of costumers:');
D=[0:maxD];
maxRP=input('Please enter the max demand of returned products:');
RP=[0:maxRP];

c0=randi([19,25],1,N);
c=randi([18,27],1,N-1);

for i=0:maxD
    k=factorial(maxD);
    l=factorial(i);
    m=10-i;
    h=factorial(m);
    p1(i+1)= (k/(l*h))*(0.4^i)*(0.6^(10-i));
    p2(i+1)= (k/(l*h))*(0.4^i)*(0.6^(10-i));
end
%********************************************
for z=-Q:Q                                              %z: h
posothta tou 1ou proiontos pou metaferetai
    for r=-Q:Q                                           %r:
empty space
        if (z+r)<=Q
            if z<0 || r<0                               % || <-
- or
                f(N,z+Q+1,r+Q+1) = 3*c0(N);
            else
                f(N,z+Q+1,r+Q+1) = c0(N);
            end
        end
    end
end
%*******************************************
for j=N-1:-1:1                                            %
auto to for th kleisei sto telos!!!!!!!!!
    A(j)=c0(j)+c0(j+1);
    mintheta = 1000000;
```

```
    for theta= 0:Q
        B = 0;
        for d=1:maxD+1
            for rp=1:maxRP+1
                B = B + f(j+1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1-(theta-
min(theta,D(d)))-RP(rp))*p1(d)*p2(rp);   % <-- den exei nohma dioti
uparxoun p1 vs p2
            end
        end
        if B < mintheta
            mintheta = B;
            opttheta1(j)= theta
        end
    end
    A(j) = c0(j)+c0(j+1) + mintheta;
%<-- upologizoume to A(j) gia kathe j pou orisame parapanw

                                                              %end no gia
to for j=N-1:-1:1<-- dioti me to idio j tha arxisei na kanei tis
idies epanalhpseis

   %case 1/ ypologismos Hj(pigainei ston epomeno pelati)

   for z=-Q:Q
    for r=-Q:Q
        if (z+r)<=Q
            if z>=0 && r>=0
                H1(j,z+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                for d=1:maxD+1
                   for rp=1:maxRP

H1(j,z+Q+1,r+Q+1)=H1(j,z+Q+1,r+Q+1)+f(j+1,z+Q+1-
D(d),r+Q+1+min(z,D(d))-RP(rp))*p1(d)*p2(rp);
                   end
                end
                f(j,z+Q+1,r+Q+1)=min( H1(j,z+Q+1,r+Q+1),A(j));

                %elegxos an tha paei prwta ston pelati h'sthn
apothiki na adeiasei rp kai na gemisei me loads theta

                if H1(j,z+Q+1,r+Q+1)<A(j)
                    g1(j,z+Q+1,r+Q+1) = 1;      % tha paei
kateutheian ston epomeno pelati
                else
                    g1(j,z+Q+1,r+Q+1) = 0;      % tha paei sthn
apothhkh...
                end

            else
                H2(j,z+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                mintheta1=1000000;
                zplin=min(z,0);
                rplin=min(r,0);

                for theta= 0:Q+min(zplin,rplin)
                    K=0;

                    for d=1:maxD
                        for rp=1:maxRP
```

```
                            K = K+ f(j+1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1+rplin-
(theta-min(theta,D(d)))-RP(rp))*p1(d)*p2(rp);
                        end
                    end

                    if K < mintheta1
                        mintheta1 = K;
                        opttheta2(j,z+Q+1,r+Q+1)= theta
                    end

                    H2(j,z+Q+1,r+Q+1)= H2(j,z+Q+1,r+Q+1)+ mintheta1;

                    f(j,z+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) + min(
H2(j,z+Q+1,r+Q+1),A(j));

                    if H2(j,z+Q+1,r+Q+1)< A(j)
                         g2(j,z+Q+1,r+Q+1) = 1; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,simplirwnei
me theta,epistrefei ston pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp kai next
customer
                    else
                         g2(j,z+Q+1,r+Q+1) = 0; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,epistrefei
stn pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp, 2o trip stin apothiki,afinei
rp,restock with theta and next customer
                    end
                end
            end
        end
    end
  end
end

%*******************************************************************

%ypologismos tou minimum total expected cost
f0 = c0(1);
mintheta2=1000000;
for theta= 0:Q
    V = 0;
    for d=1:maxD
        for rp=1:maxRP
            V = V + f(1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1-(theta-min(theta,D(d)))-
RP(rp))*p1(d)*p2(rp);
        end
    end
    if V < mintheta2
      mintheta2 = V;
      opttheta= theta
    end
end

f0 = c0(1) + mintheta2
```

```
%optimal routing strategy for k=2 different products

%K=2 proionta
%N:arithmos pelatwn
%Q: capacity of the vehicle

%c0=[6 7 8 7 5 4 8 6 5 8];%kostos metaforas apo apothiki ston pelath
%c=[9 6 9 5 7 10 9 8 9];%kostos metaforas apo pelath se pelath
%Q=10;
%N=10;
%D1=[0 1 2 3 4 5]; %zhthsh tou proiontos 1
%D2=[0 1 2 3 4 5]; %zhthsh tou proiontos 2
%RP=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %zhthsh se return products
%**********************************************
N=input('Please enter the number of costumers:');
Q=input('Please enter the capacity of the vihicle:');
maxD1=input('Please enter the max demand of costumers for product
1:');

maxD2=input('Please enter the max demand of costumers for product
2:');
maxRP=input('Please enter the max demand of returned products:');

D1=[0:maxD1];
D2=[0:maxD2];
c0=randi([19,25],1,N);
c=randi([18,27],1,N-1);

for i=0:maxD1
    k=factorial(maxD1);
    l=factorial(i);
    m=5-i;
    h=factorial(m);
    p1(i+1)= (k/(l*h))*(0.4^i)*(0.6^(maxD1-i));
end
for i=0:maxD2
    k=factorial(maxD2);
    l=factorial(i);
    m=5-i;
    h=factorial(m);
    p2(i+1)= (k/(l*h))*(0.4^i)*(0.6^(maxD2-i));
end

for i=0:maxRP
    k=factorial(maxRP);
    l=factorial(i);
    m=10-i;
    h=factorial(m);
    p3(i+1)= (k/(l*h))*(0.4^i)*(0.6^(maxRP-i));
end

%*********************************************
for z1=-Q:Q                                                      %z: h
posothta tou 1ou proiontos pou metaferetai
    for z2=-Q:Q
        for r=-Q:Q
%r: empty space
            if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q &&(z2+r)<=Q
                if z1<0 ||z2<0 || r<0
% || <-- or
                    f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 3*c0(N);
```

```
                else
                    f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = c0(N);
                end
            end
        end
    end
end
%*******************************************
for j=N-1:-1:1                                              %
auto to for th kleisei sto telos!!!!!!!!!

    mintheta = 1000000;

    for theta1= 0:Q
        for theta2 =0:Q - theta1
         B = 0;
         for d1=1:maxD1
             for d2=1:maxD2
                 for rp=1:maxRP
                     B = B + f(j+1,theta1+Q+1-D1(d1),theta2+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1-min(theta1,D1(d1)))-(theta2-min(theta2,D2(d2)))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);    % <-- den exei nohma dioti uparxoun
p1 vs p2
                 end
             end
         end
         if B < mintheta
             mintheta = B;
         end
        end
    end
    A(j) = c0(j)+c0(j+1) + mintheta;
%<-- upologizoume to A(j) gia kathe j pou orisame parapanw

                                                        %end no gia
to for j=N-1:-1:1<-- dioti me to idio j tha arxisei na kanei tis
idies epanalhpseis

   %case 1/ ypologismos Hj(pigainei ston epomeno pelati)

   for z1=-Q:Q
       for z2=-Q:Q
           for r=-Q:Q
               if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q
&&(z2+r)<=Q
                   if z1>=0 && z2>=0 && r>=0
                       H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                       for d1=1:maxD1
                           for d2=1:maxD2
                               for rp=1:maxRp

H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)+f(j+1,z1+Q+1-
D1(d1),z2+Q+1-D2(d2),r+Q+1+min(z1,D1(d1))+min(z2,D2(d2))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                               end
                           end
                       end


                        f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=min(
H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1),A(j));
```

```
                        %elegxos an tha paei prwta ston pelati h'sthn 
apothiki na adeiasei rp kai na gemisei me loads theta

                        if H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)<A(j)
                            g1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1;      % tha 
paei kateutheian ston epomeno pelati
                        else
                            g1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 0;      % tha 
paei sthn apothhkh...
                        end

                   else
                    H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                    mintheta1=1000000;
                    zplin=min(z1,0)+ min(z2,0);
                    rplin=min(r,0);

                    for theta1= 0:Q+min(zplin,rplin)
                      for  theta2 =0:Q+min(zplin,rplin) - theta1
                        K=0;

                        for d1=1:maxD1
                            for d2=1:maxD2
                                for rp=1:maxRP
                                    K = K+ f(j+1,theta1+Q+1-
D1(d1),theta2+Q+1-D2(d2),2*Q+1+rplin-(theta1-min(theta1,D1(d1)))-
(theta2-min(theta2,D2(d2)))-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                end
                            end
                        end

                        if K < mintheta1
                            mintheta1 = K;
                        end

                        H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)+ mintheta1;

                        f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) + min(
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1),A(j));

                        if H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)< A(j)
                            g2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1; %pigainei 
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,simplirwnei 
me theta,epistrefei ston pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp kai next 
customer
                        else
                            g2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 0; %pigainei 
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,epistrefei 
stn pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp, 2o trip stin apothiki,afinei 
rp,restock with theta and next customer
                        end
                      end
                    end
                   end
               end
           end
       end
   end
end
```

```
%*******************************************************************
*****
%ypologismos tou minimum total expected cost
f0 = c0(1);
mintheta2=1000000;

for theta1= 0:Q
  for  theta2 =0: Q - theta1
    V = 0;
    for d1=1:maxD1
        for d2=1:maxD2
            for rp=1:maxRP
                V = V + f(1,theta1+Q+1-D1(d1),theta2+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1-min(theta1,D1(d1))+theta2-min(theta2,D2(d2)))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
            end
        end
    end

    if V < mintheta2
      mintheta2 = V;
    end
  end
end

f0 = c0(1) + mintheta2
```

%mainprogram

```
%K=2 proionta
%N:arithmos pelatwn
%Q: capacity of the vehicle

%c0=[6 7 8 7 5 4 8 6 5 8];%kostos metaforas apo apothiki ston pelath
%c=[9 6 9 5 7 10 9 8 9];%kostos metaforas apo pelath se pelath
Q=10;
N=10;
D=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
maxD=10;
D1=[0 1 2 3 4 5 ]; %zhthsh tou proiontos 1
maxD1=5;
D2=[0 1 2 3 4 5 ]; %zhthsh tou proiontos 2
maxD2=5;
RP=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %zhthsh se return products
maxRP=10;
b1=0.6;
b2=0.6;
b3=0.3;
meanD1=maxD1*b1
meanD2=maxD2*b2
stdD1=sqrt(maxD1*b1*(1-b1));%<--- tupikh apoklish
stdD2=sqrt(maxD2*b2*(1-b2));


%*********************************************
for i=1:100

    c0=randi([19,25],1,N);
    c=randi([18,27],1,N-1);


    [ p1, p2, p3, p, D ] = duosanena_function( Q, D1, D2, maxD1,
maxRP, maxD2, b1, b2, b3 )

    f0= duoproionta_function( c, c0, D1, D2, RP, maxD1, maxD2, maxRP,
p1, p2, p3, Q, N )


    [ f1, g1, g2, opttheta1, opttheta2, opttheta]=
enaproion_function(c, c0, D, RP, maxD, maxRP, p, p3, Q, N )

   f2 = pro2new_function( c, c0, D1, D2,RP , maxD1, maxD2,maxRP,
meanD1, meanD2, stdD1, stdD2, g1, g2, p1 ,p2, p3, Q, N, opttheta1,
opttheta2,opttheta)



   a(i) = f2/f0;
   b(i)=(f2-f0)/f0*100; %posostiaia diafora

end

max_ratio= max(b)
min_ratio= min(b)
mean_ratio= mean(b)
```

%duosanena_function

```
function [ p1, p2, p3, p, D ] = duosanena_function( Q, D1, D2, maxD1,
maxRP, maxD2, b1, b2, b3 )

    p1=zeros(1,Q+1);
    p2=zeros(1,Q+1);
    p3=zeros(1,Q+1);  %swstooooo????


    for i=0:maxD1
       k=factorial(maxD1);
       l=factorial(i);
       m=maxD1-i;
       h=factorial(m);

       p1(i+1)= (k/(l*h))*(b1^i)*((1-b1)^(maxD1-i));

    end
    for i=0:maxD2
       k=factorial(maxD2);
       l=factorial(i);
       m=maxD2-i;
       h=factorial(m);

       p2(i+1)= (k/(l*h))*(b2^i)*((1-b2)^(maxD2-i));
    end

    for i=0:maxRP
       k=factorial(maxRP);
       l=factorial(i);
       m=maxRP-i;
       h=factorial(m);

       p3(i+1)= (k/(l*h))*(b3^i)*((1-b3)^(maxRP-i));
    end

    for d=0:Q
       p(d+1)=0;
        for d1=0:d
            d2=d-d1;
            p(d+1)=p(d+1) + p1(d1+1)*p2(d-d1+1) ;% pithanothta
genikeumenou proiontos %thewroume ta duo proionta san idia
        end
    end

 D=(0:max(D1)+max(D2));

end
```

%duoproionta_function

```
function y = duoproionta_function( c, c0, D1, D2, RP, maxD1, maxD2,
maxRP, p1, p2, p3, Q, N )

for z1=-Q:Q                                                    %z1: h
posothta tou 1ou proiontos pou metaferetai
    for z2=-Q:Q
        for r=-Q:Q
%r: empty space
            if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q &&(z2+r)<=Q
                if z1<0 ||z2<0 || r<0
% || <-- or
                    f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 3*c0(N);
                else
                    f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = c0(N);
                end
            end
        end
    end
end
%*******************************************
for j=N-1:-1:1                                                  %
auto to for th kleisei sto telos!!!!!!!!!

    mintheta = 1000000;

    for theta1= 0:Q
       for theta2 =0:Q - theta1
        B = 0;
        for d1=1:maxD1+1
            for d2=1:maxD2+1
                for rp=1:maxRP+1
                    B = B + f(j+1,theta1+Q+1-D1(d1),theta2+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1-min(theta1,D1(d1)))-(theta2-min(theta2,D2(d2)))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);    % <-- den exei nohma dioti uparxoun
p1 vs p2
                end
            end
        end
        if B < mintheta
            mintheta = B;
        end
       end
    end
    A(j) = c0(j)+c0(j+1) + mintheta;
%<-- upologizoume to A(j) gia kathe j pou orisame parapanw

                                                          %end no gia
to for j=N-1:-1:1<-- dioti me to idio j tha arxisei na kanei tis
idies epanalhpseis

   %case 1/ ypologismos Hj(pigainei ston epomeno pelati)

   for z1=-Q:Q
       for z2=-Q:Q
           for r=-Q:Q
```

```
                if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q
&&(z2+r)<=Q
                    if z1>=0 && z2>=0 && r>=0
                        H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                        for d1=1:maxD1+1
                            for d2=1:maxD2+1
                                for rp=1:maxRP+1

H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)+f(j+1,z1+Q+1-
D1(d1),z2+Q+1-D2(d2),r+Q+1+min(z1,D1(d1))+min(z2,D2(d2))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                end
                            end
                        end


                        f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=min(
H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1),A(j));

                        %elegxos an tha paei prwta ston pelati h'sthn
apothiki na adeiasei rp kai na gemisei me loads theta

                        if H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)<A(j)
                            g1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1;      % tha
paei kateutheian ston epomeno pelati
                        else
                            g1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 0;      % tha
paei sthn apothhkh...
                        end

                    else
                     H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                     mintheta1=1000000;
                     zplin=min(z1,0)+ min(z2,0);
                     rplin=min(r,0);

                     for theta1= 0:Q+min(zplin,rplin)
                       for  theta2 =0:Q+min(zplin,rplin) - theta1
                         K=0;

                         for d1=1:maxD1+1
                             for d2=1:maxD2+1
                                 for rp=1:maxRP+1
                                     K = K+ f(j+1,theta1+Q+1-
D1(d1),theta2+Q+1-D2(d2),2*Q+1+rplin-(theta1-min(theta1,D1(d1)))-
(theta2-min(theta2,D2(d2)))-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                 end
                             end
                         end

                         if K < mintheta1
                             mintheta1 = K;
                         end

                         H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)+ mintheta1;

                         f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) + min(
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1),A(j));

                         if H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)< A(j)
```

```
                              g2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,simplirwnei
me theta,epistrefei ston pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp kai next
customer
                         else
                              g2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 0; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,epistrefei
stn pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp, 2o trip stin apothiki,afinei
rp,restock with theta and next customer
                         end
                       end
                     end
                    end
                end
            end
        end
    end
end


%**********************************************************************
*****
%ypologismos tou minimum total expected cost
f0 = c0(1);
mintheta2=1000000;

for theta1= 0:Q
  for  theta2 =0: Q - theta1
    V = 0;
    for d1=1:maxD1+1
        for d2=1:maxD2+1
            for rp=1:maxRP+1
                V = V + f(1,theta1+Q+1-D1(d1),theta2+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1-min(theta1,D1(d1))+theta2-min(theta2,D2(d2)))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
            end
        end
    end

    if V < mintheta2
      mintheta2 = V;
    end
  end
end

f0 = c0(1) + mintheta2

y=f0;

end   %gia to function
```

%enaproion_function

```
function [f1, g1, g2, opttheta1, opttheta2, opttheta]=
enaproion_function(c, c0, D, RP, maxD, maxRP, p, p3, Q, N )


for z=-Q:Q                                                      %z: h
posothta tou 1ou proiontos pou metaferetai
    for r=-Q:Q                                                   %r:
empty space
        if (z+r)<=Q
            if z<0 || r<0                                       % || <-
- or
                f(N,z+Q+1,r+Q+1) = 3*c0(N);
            else
                f(N,z+Q+1,r+Q+1) = c0(N);
            end
        end
    end
end
%********************************************
for j=N-1:-1:1                                                    %
auto to for th kleisei sto telos!!!!!!!!!
    A(j)=c0(j)+c0(j+1);
    mintheta = 1000000;

    for theta= 0:Q
        B = 0;
        for d=1:maxD+1
            for rp=1:maxRP+1
                B = B + f(j+1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1-(theta-
min(theta,D(d)))-RP(rp))*p(d)*p3(rp);    % <-- den exei nohma dioti
uparxoun p vs p3
            end
        end
        if B < mintheta
            mintheta = B;
            opttheta1(j)= theta;
        end
    end
    A(j) = c0(j)+c0(j+1) + mintheta;
%<-- upologizoume to A(j) gia kathe j pou orisame parapanw

                                                          %end no gia
to for j=N-1:-1:1<-- dioti me to idio j tha arxisei na kanei tis
idies epanalhpseis

   %case 1/ ypologismos Hj(pigainei ston epomeno pelati)

   for z=-Q:Q
    for r=-Q:Q
        if (z+r)<=Q
            if z>=0 && r>=0
                H1(j,z+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                for d=1:maxD+1
                   for rp=1:maxRP+1
```

```
H1(j,z+Q+1,r+Q+1)=H1(j,z+Q+1,r+Q+1)+f(j+1,z+Q+1-
D(d),r+Q+1+min(z,D(d))-RP(rp))*p(d)*p3(rp);
                   end
                end
                f(j,z+Q+1,r+Q+1)=min( H1(j,z+Q+1,r+Q+1),A(j));

                %elegxos an tha paei prwta ston pelati h'sthn
apothiki na adeiasei rp kai na gemisei me loads theta

                if H1(j,z+Q+1,r+Q+1)<A(j)
                    g1(j,z+Q+1,r+Q+1) = 1;      % tha paei
kateutheian ston epomeno pelati
                else
                    g1(j,z+Q+1,r+Q+1) = 0;      % tha paei sthn
apothhkh...
                end

            else
                H2(j,z+Q+1,r+Q+1)=c(j);
                mintheta1=1000000;
                zplin=min(z,0);
                rplin=min(r,0);

                for theta= 0:Q+min(zplin,rplin)
                    K=0;

                    for d=1:maxD+1
                        for rp=1:maxRP+1
                            K = K+ f(j+1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1+rplin-
(theta-min(theta,D(d)))-RP(rp))*p(d)*p3(rp);
                        end
                    end

                    if K < mintheta1
                        mintheta1 = K;
                        opttheta2(j,z+Q+1,r+Q+1)= theta;
                    end

                    H2(j,z+Q+1,r+Q+1)= H2(j,z+Q+1,r+Q+1)+ mintheta1;

                    f(j,z+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) + min(
H2(j,z+Q+1,r+Q+1),A(j));

                    if H2(j,z+Q+1,r+Q+1)< A(j)
                         g2(j,z+Q+1,r+Q+1) = 1; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,simplirwnei
me theta,epistrefei ston pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp kai next
customer
                    else
                         g2(j,z+Q+1,r+Q+1) = 0; %pigainei
apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,epistrefei
stn pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp, 2o trip stin apothiki,afinei
rp,restock with theta and next customer
                    end
                end
            end
        end
    end
  end
end
```

```
%*********************************************************************
*****
%ypologismos tou minimum total expected cost
f01 = c0(1);
mintheta2=1000000;
for theta= 0:Q
    V = 0;
    for d=1:maxD+1
        for rp=1:maxRP+1
            V = V + f(1,theta+Q+1-D(d),2*Q+1-(theta-min(theta,D(d)))-
RP(d))*p(d)*p3(rp);
        end
    end
    if V < mintheta2
      mintheta2 = V;
      opttheta= theta;
    end
end

f01 = c0(1) + mintheta2

f1=f01;

end
```

%pro2new_function

```
function f2 = pro2new_function( c, c0, D1, D2,RP , maxD1,
maxD2,maxRP, meanD1, meanD2, stdD1, stdD2, g1, g2, p1 ,p2, p3, Q, N,
opttheta1, opttheta2, opttheta)
    %*****************************************************************


  for j=1:N-2
    for q=1:Q
        if meanD1>= meanD2
          n1=meanD1+stdD1;
          n2=meanD2+stdD2;
          theta1(j,q)= round(n1/(n1+n2)* q);
          theta2(j,q)= q-theta1(j,q);
        else
          n1=meanD1+stdD1;
          n2=meanD2+stdD2;
          theta2(j,q)=round(n2/(n1+n2)* q);
          theta1(j,q)=q-theta2(j,q);
        end
    end
  end

 %*********aneferetai ston proteleutaio pelati
      for q=1:Q
        if meanD1>= meanD2
            theta1(N-1,q)= round(maxD1/(maxD1+maxD2)* q);
            theta2(N-1,q)= q-theta1(N-1,q);
        else
            theta2(N-1,q)=round(maxD2/(maxD1+maxD2)* q);
            theta1(N-1,q)=q-theta2(N-1,q);
        end
      end


  for j=1:N-1
    for z1=-Q:Q
        for z2=-Q:Q
            for r=-Q:Q
%r: empty space
                  if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q
&&(z2+r)<=Q
                        if z1>=0 && z2>=0 && r>=0
                              g1new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=
g1(j,z1+z2+Q+1,r+Q+1);
                        elseif z1>=0 && z2>=0             %den xrwstame
                              g2new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=
g2(j,z1+z2+Q+1,r+Q+1);
                        else

g2new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=g2(j,min(0,z1)+min(0,z2)+Q+1,r+Q+1);

                        end
                  end
            end
        end
    end
```

```
  for z1=-Q:Q
        for z2=-Q:Q
            for r=-Q:Q
                if abs (z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q
&&(z2+r)<=Q
                    if z1<0 ||z2<0 || r<0
                        f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 3*c0(N);
                    else
                        f(N,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = c0(N);
                    end
                end
            end
        end
  end
  end

  for j=N-1:-1:1
        for z1=-Q:Q
            for z2=-Q:Q
                for r=-Q:Q
%r: empty space
                    if abs(z1+z2)<=Q &&(z1+z2+r)<=Q && (z1+r)<=Q
&&(z2+r)<=Q
                      if z1>=0 && z2>=0 && r>=0
                        %g1new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1 || 0;
                        if g1new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) == 1; % tha
paei sthn epomeno pelath ara tha upolisoume to H
                            H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = c(j);
                            for d1=1:maxD1+1
                                for d2=1:maxD2+1
                                    for rp=1:maxRP+1

H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) + f(j+1,z1+Q+1-
D1(d1),z2+Q+1-D2(d2),r+Q+1+min(z1,D1(d1))+min(z2,D2(d2))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                    end
                                end
                            end
                            f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=
H1(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1);
                        else %g1new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 0 tha
paei sthn apothiki kai meta ston epomeno pelath
                                K = 0;
                                for d1=1:maxD1+1
                                    for d2=1:maxD2+1
                                        for rp=1:maxRP+1
                                            K =K +
f(j+1,theta1(j,opttheta1(j))+Q+1-D1(d1),theta2(j,opttheta1(j))+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1(j,opttheta1(j))-
min(theta1(j,opttheta1(j)),D1(d1)))-(theta2(j,opttheta1(j))-
min(theta2(j,opttheta1(j)),D2(d2)))-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
%heta1(j,opttheta1(j))--> dioti afou tha gurisei sthn apothhkh tha
gemisei olh thn posothta pou xwraei(metrithike sto enaproion.m!!
                                        end
                                    end
                                end
                                A(j) = c0(j)+c0(j+1) + K;
                                f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)= A(j);
                        end
```

```
                    else
                        if g2new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)== 0;
%pigainei apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,

%epistrefei stn pelati,ikanopoiei zitisi,pairnei rp,
                                                                  %2o
trip stin apothiki,afinei rp,restock with theta and next customer
                            K = 0;
                               for d1=1:maxD1+1
                                   for d2=1:maxD2+1
                                       for rp=1:maxRP+1
                                           K =K +
f(j+1,theta1(j,opttheta1(j))+Q+1-D1(d1),theta2(j,opttheta1(j))+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta1(j,opttheta1(j))-
min(theta1(j,opttheta1(j)),D1(d1)))-(theta2(j,opttheta1(j))-
min(theta2(j,opttheta1(j)),D2(d2)))-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                       end
                                   end
                               end
                               A(j) = c0(j)+c0(j+1) + K;
                               f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) +
A(j);

                        else %g2new(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = 1
%pigainei apothiki,adeiazei rp,gemizei me thn ofeiloymeni posotita,

%simplirwnei me theta,epistrefei ston pelati,

%ikanopoiei zitisi,pairnei rp kai next customer

                            zplin = min(z1,0)+ min(z2,0);
                            rplin=min(r,0);
                            H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) = c(j);
                            V = 0;
                            %if zplin == -Q    %sigoura pige
adeios,xrwstouse Q
                                %for d1=1:maxD1+1
                                    %for d2=1:maxD2+1
                                        %for rp=1:maxRP+1
                                             %V = V + f(j+1,Q+1-
D1(d1),Q+1-D2(d2),2*Q+1-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                        %end
                                    %end
                                %end


%H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) + V;
                                %f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) +
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1);


                                for d1=1:maxD1+1
                                    for d2=1:maxD2+1
                                        for rp=1:maxRP+1
                                             V = V +
f(j+1,theta1(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1))+Q+1-
D1(d1),theta2(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1))+Q+1-D2(d2),2*Q+1+rplin-
(theta1(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1))-
min(theta1(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1)),D1(d1)))-
(theta2(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1))-
```

```
min(theta2(j,opttheta2(j,zplin+Q+1,r+Q+1)),D2(d2)))-
RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
                                          end
                                      end
                                  end


H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1) + V;
                                  f(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)=2*c0(j) +
H2(j,z1+Q+1,z2+Q+1,r+Q+1)


                           end
                       end
                     end
                 end
             end
         end
  end

  %auta pou vazw otan ksekinaw
  theta01=theta1(1,opttheta);
  theta02=opttheta-theta01;
  f0 = c0(1);
  G = 0;
  for d1=1:maxD1+1
       for d2=1:maxD2+1
            for rp=1:maxRP+1
                G = G + f(1,theta01+Q+1-D1(d1),theta02+Q+1-
D2(d2),2*Q+1-(theta01-min(theta01,D1(d1))+theta02-
min(theta02,D2(d2)))-RP(rp))*p1(d1)*p2(d2)*p3(rp);
            end
       end
   end
   f0 = c0(1) + G ;

   f2=f0;
   end
```