

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία

**Προσέγγιση εύρωστης βελτιστοποίησης σε σύστημα
αποθεμάτων ενός σταδίου**

υπό

ΓΩΓΟΥΛΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Π.Θ, 2016

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

2018

© 2018 Γώγουλος Αριστοτέλης

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Παντελής
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Σαχαρίδης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, καθηγητή κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Επίσης, ευχαριστώ την σύζυγό μου και τους γονείς μου για την κατανόησή της καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην κόρη μου Νεφέλη.

Αριστοτέλης Γώγουλος

**Προσέγγιση εύρωστης βελτιστοποίησης σε σύστημα
αποθεμάτων ενός σταδίου**

ΓΩΓΟΥΛΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2018

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος, Καθηγητής,

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 2	Προσέγγιση της εύρωστης βελτιστοποίησης	4
2.1	Εύρωστη βελτιστοποίηση-Θεωρία	4
2.2	Η εύρωστη προσέγγιση (Robust Approach)	6
Κεφάλαιο 3	Εφαρμογή στο πρόβλημα παραγγελίας ενός τύπου προϊόντος σε μια μηχανή	7
3.1	Γενικά	7
3.2	Εφαρμογή σε μηχανή παραγωγής ενός τύπου προϊόντος με ή χωρίς περιορισμούς	7
3.3	Παραδείγματα	10
3.4	Συμπεράσματα	16
Κεφάλαιο 4	Εφαρμογή στο πρόβλημα παραγγελίας δύο τύπων προϊόντων σε μια μηχανή	19
4.1	Γενικά	19
4.2	Παραδείγματα	20
4.3	Συμπεράσματα	35
Παράρτημα		37
Βιβλιογραφία		42

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Για περισσότερα από 50 χρόνια, η προσπάθεια για βελτιστοποίηση της αλυσίδας εφοδιασμού (supply chain) είναι συνεχής και πολλές ενδιαφέρουσες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί με πολύ καλά θεωρητικά αποτελέσματα. Οι Clark και Scarf (1960) πρώτοι απέδειξαν την βελτιστότητα σε πολιτικές αποθεμάτων με δυναμικό προγραμματισμό. Παρόλο που ο δυναμικός προγραμματισμός είναι θεωρητικά μεγάλου μεγέθους αποτελεσματικός, δεν μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα σε πραγματικά προβλήματα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο πρόβλημα αναπτύχθηκαν τεχνικές με στοχαστικά πρότυπα και κατανομές πιθανοτήτων, ωστόσο και αυτές είναι δύσκολο να εφαρμοστούν στην πράξη.

Ο Zipkin (2000) περιέγραψε διάφορες απλές πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων (policies) όπως μοντέλα ποσότητας παραγγελίας (order quantity models) που είναι πολύ πρακτικά και εφαρμόσιμα. Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι ότι για πολύ πεπλεγμένα προβλήματα εφοδιαστικής αλυσίδας είναι απαραίτητο να γίνουν κάποιες προσεγγίσεις για να λυθούν. Γενικά, στον δυναμικό προγραμματισμό υποθέτουμε την πλήρη γνώση των κατανομών και επομένως περιορίζεται η πρακτικότητα των μεθόδων.

Ειδικότερα, η προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η έλλειψη πληροφοριών στον έλεγχο των αποθεμάτων ή παραγωγής έγινε από τον Scarf (1958) που έλαβε υπόψη τις χειρότερες προβλέψεις για μια περίοδο και ένα στάδιο. Ακολούθησαν διάφορες μέθοδοι και αλγόριθμοι με καλά αποτελέσματα. Ένας όρος που εισήχθη τότε ήταν ο όρος “Robust optimization” μιας μεθοδολογίας βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζει το πρόβλημα της αβεβαιότητας των

δεδομένων με εγγύηση της εφικτότητας και βελτιστότητας. Ο Soyster (1973) ανέπτυξε μια θεωρία όπου έπαιρνε την χειρότερη πρόβλεψη, που πάντα ήταν εφικτή αλλά με υψηλό ποσοστό προστασίας. Λόγω της συντηρητικότητας του προβλήματος του Soyster (1973), ο Ben-Tal και ο Nemirovski (2000) πρότειναν μία λιγότερο συντηρητική μέθοδο. Έτσι, το βασικό εμπόδιο σε αυτά τα προβλήματα ήταν η συντηρητικότητα. Ο Bertsimas και ο Thiele (2006) ανέπτυξαν μια μέθοδο που αντιμετωπίζει την τυχαιότητα της ζήτησης με ντετερμινιστικό τρόπο και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα, έχοντας ως υπόβαθρο τη θεωρία “Price of Robustness” των Bertsimas και Sim (2004). Το αποτέλεσμα είναι να καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όταν δεν έχουμε σταθερά κόστη στις παραγγελίες, ενώ όταν έχουμε σταθερά κόστη, το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται σε πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού.

Η εργασία αυτή ασχολείται αποκλειστικά με την τελευταία μέθοδο όπου γίνεται εφαρμογή πάνω σε μια μηχανή που παράγει ή δύο τύπους προϊόντων με ή χωρίς περιορισμούς στην δυναμικότητα της μηχανής. Στο παράρτημα δίδονται οι αντίστοιχοι κώδικες για τις λύσεις των προβλημάτων.

Συγκεκριμένα εξετάζονται αναλυτικά τα παρακάτω:

- Η μέθοδος Robust Optimization Approach σε μηχανή παραγωγής με και χωρίς περιορισμούς στην δυναμικότητά της.
- Ανάλυση παραδειγμάτων σε μηχανή παραγωγής ενός τύπου προϊόντος-Εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Ανάλυση παραδειγμάτων σε μηχανή παραγωγής δύο τύπων προϊόντων-Εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στις επιλύσεις των προβλημάτων λόγω της πολυπλοκότητας των προβλημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα λογισμικά επίλυσης Matlab και το Excel.

Κεφάλαιο 2 Προσέγγιση της εύρωστης βελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανάλυση της δομής της εύρωστης προσέγγισης που ανέπτυξαν ο Bertsimas και ο Sim (2004) που είναι απαραίτητο υπόβαθρο για την κατανόηση της εργασίας των Bertsimas και Thiele (2006).

2.1 Εύρωστη βελτιστοποίηση

Για να ορίσουμε το πρόβλημα της εύρωστης βελτιστοποίησης (Robust optimization) πρέπει να ορίσουμε αρχικά την δομή αβεβαιότητας. Ξεκινώντας από την βασική μορφή του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{s.t} \quad & Ax \leq b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned} \tag{1.1}$$

Θεωρούμε ότι τα στοιχεία όπου υπάρχει αβεβαιότητα είναι αυτά του πίνακα A . Συμπληρωματικά, αν τα διανύσματα b , c επηρεάζονται από την αβεβαιότητα, τότε η μορφή του προβλήματος είναι ως εξής:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}' \bar{x} \\ \text{s.t} \quad & \bar{A} \bar{x} \geq \bar{0} \\ & \bar{l} \leq \bar{x} \leq \bar{u} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Στον πίνακα \bar{A} συμπεριλαμβάνονται τα στοιχεία αβεβαιότητας b , c με τον εξής τρόπο: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -c & b \\ 0 & -A & b \end{pmatrix}$, και αντίστοιχα τα υπόλοιπα, $\bar{x} = (z, x, y)$, $\bar{c} = (1, 0, 0)$, $\bar{l} = (-M, 1, 1)$, $\bar{u} = (M, u, 1)$ με M έναν μεγάλο σταθερό αριθμό.

Σύμφωνα με την τελευταία μορφοποίηση, μας ενδιαφέρουν τα στοιχεία του \bar{A} πίνακα και τα μοντελοποιούμε με τον παρακάτω τρόπο σύμφωνα με την μορφοποίηση των Betsimas και Sim (2004). Κάθε αβέβαιος συντελεστής a_{ij} είναι ανήκει σε ένα διάστημα με κέντρο την ονομαστική τιμή \bar{a}_{ij} και ήμισυ μήκος \hat{a}_{ij} αλλά δεν είναι γνωστή ακριβώς η τιμή του. Όσο πιθανόν είναι όλοι οι συντελεστές να είναι στις ονομαστικές τιμές, τόσο πιθανόν είναι να είναι στις χειρότερες τιμές δηλαδή στις ακραίες τιμές. Έτσι για μην έχουμε αναίτια αύξηση κόστους δεν παίρνουμε την χειρότερη περίπτωση αλλά μια περίπτωση που συνδυάζει την συντηρητικότητα με τη προσαρμοστικότητα. Δημιουργούμε την ποσοστιαία απόκλιση του κάθε συντελεστή από την ονομαστική του τιμή $z_{ij} = (a_{ij} - \bar{a}_{ij}) / \hat{a}_{ij}$ με τιμές $[-1, 1]$. Έτσι εισάγουμε τη συνολική απόκλιση των συντελεστών, η οποία δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποια όρια Γ , τα οποία δεν είναι απαραίτητα ακέραια:

$$\sum_{(i,j) \in J} |z_{ij}| \leq \Gamma \quad (1.3)$$

με J το σετ των δεικτών των συντελεστών που είναι κάτω από αβεβαιότητα. Το Γ ανήκει στο διάστημα $[0, |J|]$, με $\Gamma=0$ την ονομαστική περίπτωση και με $\Gamma=|J|$ την χειρότερη περίπτωση.

2.2 Η εύρωστη προσέγγιση (The Robust Approach)

Θεώρημα 1 (Bertsimas and Sim 2003): Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αβεβαιότητα (1.1) έχει το ακόλουθο εύρωστο, γραμμικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ \text{s.t. } & \sum_j \bar{a}_{ij} x_j + q_i \Gamma + \sum_{j:(i,j) \in J} r_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\ & q_i + r_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall (i,j) \in J \\ & -y \leq x \leq y, \quad l \leq x \leq u, \\ & q \geq 0, \quad r \geq 0, \quad y \geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Κεφάλαιο 3 Εφαρμογή στο πρόβλημα παραγγελίας ενός τύπου προϊόντος σε μια μηχανή

3.1 Γενικά

Γενικά σε οποιαδήποτε μηχανή παραγωγής, αυτό που μετράνε οι μηχανικοί παραγωγής είναι το τελικό στάδιο της παραγωγής των προϊόντων στις μηχανές για να αποτιμήσουν τη δυναμικότητα της μηχανής, με την προϋπόθεση ότι τα προηγούμενα στάδια έχουν βελτιστοποιηθεί ώστε να μην υπάρχει κενός χρόνος στις μηχανές. Στην εργασία αυτήν έχουμε πάρει τις παραδοχές ότι δεν υπάρχει κάποιος χρόνος σεταρίσματος της μηχανής ή συντήρησης ή οποιοσδήποτε άλλος κενός χρόνος που να επηρεάζει την παραγωγή.

3.2 Εφαρμογή σε μηχανή παραγωγής ενός προϊόντος με ή χωρίς περιορισμούς

Σε αυτήν την ενότητα θα εφαρμόσουμε το πλαίσιο της εύρωστης βελτιστοποίησης για παραγγελίες ενός τύπου προϊόντος σε διακριτές περιόδους του ενός μηνός και για ορίζοντα σχεδιασμού δώδεκα μηνών ($T=12$) και επανασχεδιασμού της παραγωγής στον χρόνο. Για την μορφοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον κάτωθι συμβολισμό:

x_k : διαθέσιμο στοκ στην αρχή της περιόδου k

u_k : μέγεθος παραγωγής στην αρχή της περιόδου k

w_k : ζήτηση κατά την διάρκεια της k περιόδου

όπου $k=0,1,2,\dots,11$. Μία βασική υπόθεση πάνω σε αυτές τις ποσότητες είναι ότι η ποσότητα των προϊόντων που παράγονται την περίοδο k παραδίδονται πριν την περίοδο $k+1$, δηλαδή έχουν χρόνο προπορείας ίσον με 0. Σε περίπτωση που τα διαθέσιμα προϊόντα είναι περισσότερα από την ζήτηση, το πλεόνασμα αποθηκεύεται, φυσικά με κόστος αποθήκευσης.

Το στοκ στην διάρκεια του χρόνου περιγράφεται με την μορφή $x_{k+1} = x_k + \sum_{i=0}^k (u_i - w_i) \quad \forall$

$k=0,1,2,\dots,11$.

Οι ζητήσεις w_k είναι τυχαίες μεταβλητές και εφαρμόζοντας την (1.3) έχουμε για κάθε k μια αβέβαιη παράμετρο η οποία παίρνει τιμές μεταξύ $\left[\bar{w}_k - \hat{w}_k, \bar{w}_k + \hat{w}_k \right]$ και με ποσοστιαία

απόκλιση από την ονομαστική της τιμή $z_k = \left(w_k - \bar{w}_k \right) / \hat{w}_k$ με τιμή που ανήκει στο $[-1,1]$. Ως

εκ τούτο έχουμε τον περιορισμό $\sum_{i=0}^k |z_i| \leq \Gamma_k$ για όλες τις περιόδους $k=0,1,2,\dots,11$. Εδώ

παρατηρούμε ότι το Γ_k μπορεί να αυξηθεί το πολύ μέχρι 1 σε κάθε περίοδο.

Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό είναι η συνάρτηση κόστους. Σε τέτοιου είδους προβλήματα το κόστος χωρίζεται σε δύο μέρη: στο κόστος παραγωγής $C(u_k)$, και στο κόστος αποθήκευσης/έλλειψης προϊόντων $R(x_k + u_k - w_k)$ το οποίο υπολογίζεται στο τέλος κάθε περιόδου και αυτό οφείλεται στο ότι στο τέλος κάθε περιόδου έχουμε την ακριβή ζήτηση. Οπότε έχουμε:

$$C(u) = \begin{cases} K + cu, & \text{if } u > 0 \\ 0, & \text{if } u = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$R(x) = \max(hx, -px)$$

με $u \geq 0$ έχουμε c το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος, $K \geq 0$ το σταθερό κόστος, h το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και p το κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα μικτού-ακέραιου προγραμματισμού που έχει την μορφή (Bertsimas and Thiele 2006):

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } \sum_{k=0}^{T-1} (cu_k + Kv_k + y_k) \\
 & \text{subject to } y_k \geq h \left(x_0 + \sum_{i=0}^k (u_i - w_i^-) + q_k \Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik} \right) \quad \forall k \\
 & y_k \geq p \left(-x_0 - \sum_{i=0}^k (u_i - w_i^-) + q_k \Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik} \right) \quad \forall k \quad (2.2) \\
 & q_k + r_{ik} \geq \hat{w}_i, \quad \forall k, \quad \forall i \leq k, \\
 & q_k \geq 0, \quad r_{ik} \geq 0, \quad \forall k, \quad \forall i \leq k, \\
 & 0 \leq u_k \leq Mv_k, \quad v_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \\
 & \text{όπου } M \text{ ένας μεγάλος αριθμός.}
 \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές q_k και r_{ik} ποσοτικοποιούν την ευαισθησία του κόστους με απειροελάχιστες μεταβολές σε παραμέτρους της εύρωστης βελτιστοποίησης. Ειδικότερα, για κάθε περίοδο k , το $q_k \Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik}$ αντιπροσωπεύει την χειρότερη απόκλιση της ζήτησης από την ονομαστική της τιμή υπό το ποσό της αβεβαιότητας. Παρατηρώντας το πρόβλημα μπορούμε να δούμε ότι είναι ένα πρόβλημα μικτού-ακέραιου προγραμματισμού εκτός από την ειδική περίπτωση όπου δεν έχουμε σταθερά κόστη στις παραγγελίες ($K=0$) όπου το πρόβλημα είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Για την λύση όμως του προβλήματος πρέπει να οριστούν τα Γ_k , που χωρίς αυτά δεν υπάρχει λύση για το πρόβλημα. Οπότε διαλέγουμε τα ποσά της αβεβαιότητας σύμφωνα με τον αλγόριθμο για ζητήσεις iid (Bertsimas and Thiele 2006):

$$\begin{aligned} & \text{minimize } c \frac{p-h}{p+h} \hat{w}(T-1) \Gamma(T-1) + \sum_{t=0}^{T-1} \{h X(t+1) + (h+p) f(X(t+1), M(t+1), S(t+1))\} \\ & \text{subject to } X(t+1) = \frac{p-h}{p+h} \hat{w}(t) \Gamma(t) \quad \forall t \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$0 \leq \Gamma(t) - \Gamma(t-1) \leq 1, \quad \forall t,$$

με την συνάρτηση f να έχει διατυπωθεί από τον Bertsimas & Popescu (2002) ως εξής:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{2} [-x + \sqrt{\sigma^2 + x^2}] & \text{if } x \geq \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\mu^2} \\ -x \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2} + \mu \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2} & \text{if } x \leq \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\mu^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{με } M(t+1) = \sum_{\tau=0}^t \bar{w}(\tau), \quad S(t+1) = \sqrt{\sum_{\tau=0}^t \sigma^2(\tau)}.$$

3.3 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτήν θα αυτήν θα εφαρμοστεί η εύρωστη βελτιστοποίηση σε μια μηχανής ενός τύπου προϊόντος με διάφορες τιμές στις παραμέτρους για την κατανόηση της μεθόδου και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Όσον αναφορά στις μηχανές, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιο σταθερό κόστος εκτός αν ορίζεται ρητά σε κάποια παραδείγματα. Επίσης στην εργασία αυτήν δεν λαμβάνονται υπόψη οι διακοπές της μηχανής λόγω βλάβης ή σεταρίσματος και χρησιμοποιούμε την ιδανική περίπτωση. Ομοίως ισχύει και για το κόστος παραγωγής ανά μονάδα όπου τα έξοδα για παραγωγή είναι σχεδόν μηδαμινά, εξαιρουμένου του κόστους για πρώτες ύλες που βελτιστοποιούνται σε προηγούμενα στάδια.

Το πρόγραμμα επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε στα παραδείγματα είναι κατά κύριο λόγο το Matlab, όμως οι πίνακες των δεδομένων δημιουργήθηκαν μέσω excel όπου έγινε μορφοποίηση και με την εισαγωγή μόνο των παραμέτρων έχουμε άμεσα διαθέσιμους τους πίνακες προς εισαγωγή στο Matlab και μέσω της εντολής $x=intlinprog(f,intcon,A,b)$ για προβλήματα μικτού ακέραιου προγραμματισμού (όταν έχουμε σταθερά κόστη) είτε μέσω της εντολής $x=linprog(f,A,b)$ για γραμμικά προβλήματα (όταν δεν έχουμε σταθερά κόστη) λύνουμε τα προβλήματα.

Το πόσο της αβεβαιότητας Γ που πρέπει να βρούμε γίνεται μέσω Matlab και απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή επειδή υπάρχει η πιθανότητα να υπάρχουν παραπάνω από ένα τοπικά ελάχιστα με ίδια τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Η επίλυση του μέσω Matlab γίνεται από την εντολή $g=fmincon(fun,g0,A,b)$. Για τους τρόπους επίλυσης γίνεται ιδιαίτερη μνεία στο παράρτημα της εργασίας.

Σε όλα τα παραδείγματα ο χρονικός ορίζοντας είναι δώδεκα μήνες και με διακριτούς χρόνους ανά μήνα. Επίσης οι ζητήσεις είναι ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένες (iid). Επιπρόσθετα δεν υπάρχει αρχικό στοκ.

1^ο Σετ παραδειγμάτων

Τα παραδείγματα που εξετάζονται εδώ αφορούν τις επιπτώσεις που δημιουργούνται όταν έχουμε διαφορετικές τιμές στο κόστος αποθήκευσης και έλλειψης, όπως επίσης και όταν έχουμε διαφορετικές αποκλίσεις στην ζήτηση σε σχέση με την ονομαστική τιμή.

Επιλύοντας τα προβλήματα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\alpha) p=6, h=4, \bar{w}_k = 100, w_k = 20 \quad \forall k$$

Πίνακας 1. Αποτελέσματα του παραδείγματος 1

k	u_k	I_k	y_k
0	102,040	2,040	48,960
1	100,844	0,844	69,216
2	100,648	0,648	84,768
3	100,548	0,548	97,920
4	100,484	0,484	109,536
5	100,436	0,436	120,000
6	100,400	0,400	129,600
7	100,372	0,372	138,528
8	100,352	0,352	146,976
9	100,332	0,332	154,944
10	100,316	0,316	162,528
11	100,308	0,308	169,920

όπου $I_k = u_k - \bar{w}_k$.

Στα αποτελέσματα φαίνεται η παραγωγή σε προϊόντα να έχει φθίνουσα τιμή και προσεγγίζοντας προς την ονομαστική της τιμή όσο πιο μακριά είναι η πρόβλεψη, ενώ αντιθέτως το επιπρόσθετο κόστος y_k αυξάνει. Επίσης οι τιμές των q_k ισούνται με τις αποκλίσεις των περιόδων $q_k = w_k = 20$ και τα r_{ik} είναι ίσα με το μηδέν.

β) $p=6, h=4, \bar{w}_k = 100, w_k = 40 \forall k$

Όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με το προηγούμενο παράδειγμα εκτός από την απόκλιση στη ζήτηση. Λύνοντας το πρόβλημα βρίσκουμε:

Πίνακας 2. Αποτελέσματα του παραδείγματος 2

k	u_k	I_k	y_k
0	104,080	4,080	97,920
1	101,688	1,688	138,432
2	101,296	1,296	169,536
3	101,096	1,096	195,840
4	100,968	0,968	219,072
5	100,872	0,872	240,000
6	100,800	0,800	259,200
7	100,744	0,744	277,056
8	100,704	0,704	293,952

9	100,664	0,664	309,888
10	100,632	0,632	325,056
11	100,616	0,616	339,840

Παρατηρούμε ότι έχουμε μεγαλύτερες παραγωγές προϊόντων σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα λόγω ότι έχουμε μεγαλύτερη αβεβαιότητα στις ζητήσεις. Επίσης έχουμε μεγαλύτερα επιπρόσθετα κόστη και $q_k = w_k = 40$.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με δύο παραδείγματα όπου το $p=7$ και $p=9$ για να δούμε πως συμπεριφέρεται η μέθοδος.

$$\gamma) p=7, h=4, \bar{w}_k = 100, w_k = 20 \quad \forall k$$

Πίνακας 3. Αποτελέσματα του παραδείγματος 3

k	u_k	I_k	y_k
0	102,830	2,830	52,843
1	101,178	1,178	74,836
2	100,900	0,900	91,636
3	100,758	0,758	105,789
4	100,670	0,670	118,312
5	100,605	0,605	129,614
6	100,556	0,556	140,000
7	100,518	0,518	149,672
8	100,490	0,490	158,836
9	100,436	0,436	166,981
10	100,350	0,350	182,865
11	100,321	0,321	183,272

Εδώ βλέπουμε μια αύξηση στις τιμές του μεγέθους της παραγωγής και του επιπρόσθετου κόστους.

$$\delta) p=9, h=4, \bar{w}_k = 100, w_k = 20 \quad \forall k$$

Πίνακας 4. Αποτελέσματα του παραδείγματος 4

k	u_k	I_k	y_k
0	104,161	4,161	59,926
1	101,730	1,730	84,849

2	101,323	1,323	103,901
3	101,115	1,115	119,963
4	100,984	0,984	134,141
5	100,892	0,892	146,990
6	100,815	0,815	158,732
7	100,761	0,761	169,698
8	100,715	0,715	180,000
9	100,676	0,676	189,747
10	100,638	0,638	198,941
11	100,615	0,615	207,803

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε μια μεγαλύτερη αύξηση στις τιμές και συμπεραίνουμε ότι όσο μεγαλώνει το p , τόσο αυξάνεται και το μέγεθος παραγωγής και το επιπρόσθετο κόστος. Η περίπτωση που έχουμε $p=h$ είναι εύκολο εννοούμενο ότι θα καταλήξουμε στην ονομαστική περίπτωση.

Συμπερασματικά από το πρώτο σετ παραδειγμάτων καταλήγουμε στο ότι όσο αυξάνουμε την τιμή του κόστους έλλειψης τόσο μεγαλώνει ο αριθμός της εκάστοτε παραγωγής προϊόντων, όπως επίσης και το επιπρόσθετο κόστος. Την ακριβώς ίδια απόκριση έχουμε όταν παραμένουν οι παράμετροι ίδιοι και αυξήσουμε την απόκλιση της ζήτησης.

2^ο Σετ παραδειγμάτων

Σε αυτό το σετ παραδειγμάτων θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που έχουμε περιοδικότητα στις ζητήσεις είτε στην ονομαστική τιμή είτε στην απόκλιση αυτής, δηλαδή παραγωγή ενός προϊόντος που είναι εποχικό.

ε) Δεδομένα: $p=6, h=4, w_k = 20 \forall k$ και με \bar{w}_k σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα 5.

Πίνακας 5. Ονομαστικές τιμές των ζητήσεων ανά περίοδο

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\bar{w}_k	100	100	110	90	80	80	50	40	40	80	90	90

Επιλύοντας το πρόβλημα έχουμε:

Πίνακας 6. Αποτελέσματα παραδείγματος 5

k	u_k	I_k	y_k
0	102,804	2,804	67,300
1	101,893	1,893	112,739
2	111,204	1,204	141,635
3	90,658	0,658	157,428
4	80,149	0,149	161,020
5	80,770	0,770	179,517
6	50,357	0,357	188,102
7	40,233	0,233	193,706
8	40,240	0,240	199,468
9	80,382	0,382	208,654
10	90,500	0,500	220,660
11	91,105	1,105	247,186

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι το επιπρόσθετο κόστος αυξάνει σε μεγάλο βαθμό σε σχέση με το αν παρέμενε σταθερή η ονομαστική τιμή. Επίσης οι συντελεστές ευαισθησίας παραμένουν ίδιοι με τα προηγούμενα παραδείγματα, για την ακρίβεια $q_k = w_k = 20$ και r_{ik} είναι ίσον με το μηδέν.

ζ) Σε αυτό το παράδειγμα θα αλλάξουμε μόνο w_k ανά περίοδο για να δούμε πως συμπεριφέρεται το μοντέλο. Δεδομένα: $p=6$, $h=4$.

Πίνακας 7. Ονομαστικές τιμές αποκλίσεις των ζητήσεων ανά περίοδο

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\bar{w}_k	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
w_k	20	25	30	30	40	30	5	5	5	10	10	10

Η λύση μας δίνει τα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 8. Αποτελέσματα παραδείγματος 6

k	u_k	u_k	y_k
0	102,040	2,040	48,960
1	101,565	1,565	86,520
2	101,693	1,693	127,152
3	100,802	0,802	146,400

4	100,605	0,605	160,920
5	100,545	0,545	174,000
6	100,500	0,500	186,000
7	100,465	0,465	197,160
8	100,440	0,440	207,720
9	100,415	0,415	217,680
10	100,395	0,395	227,160
11	100,385	0,385	236,400

Αξιοσημείωτο είναι εδώ να αναφερθούμε στον συντελεστή ευαισθησίας r_{ik} που σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις ήταν ίσον με το μηδέν ενώ εδώ το $r_{4k} = 10$ με $k=4$ έως 11. Σε άλλα αντίστοιχα προβλήματα, παρατηρήθηκε ότι το r_{ik} παίρνει τιμές από το μέγιστο της απόκλισης της ονομαστικής τιμής που έχουμε σε όλες τις περιόδους έως την τελευταία και η τιμή είναι ίδια γι αυτές. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το παράδειγμα 7.

η) Δεδομένα: $p=6, h=4$.

Πίνακας 9. Ονομαστικές τιμές αποκλίσεις των ζητήσεων ανά περίοδο

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\bar{w}_k	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
w_k	20	5	5	5	5	30	5	5	5	5	5	5

Αυτό μας δίνει τις παρακάτω τιμές στο r_{ik} και q_k

Πίνακας 10. Συντελεστές ευαισθησίας του παραδείγματος 7

r_{03}	r_{04}	r_{55}	r_{56}	r_{57}	r_{57}	r_{58}	r_{59}	r_{510}	r_{511}
15	15	10	10	10	10	10	10	10	10

3.4 Συμπεράσματα μεθόδου

Από τις λύσεις των παραδειγμάτων καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα όσον αναφορά τα αποτελέσματα της μεθόδου:

1. Ο αριθμός των προϊόντων που θα παραχθούν εξαρτάται από το μέσο διάστημα της ζήτησης σε κάθε περίοδο, δηλαδή από την αβεβαιότητα για την τιμή που

θα πάρει η ζήτηση. Υπό τον όρο ότι $p > h$ τότε θα παραχθούν περισσότερα προϊόντα από την ονομαστική του τιμή σε σύγκριση αν είχαμε μικρότερη απόκλιση ή λιγότερα αν έχουμε $p < h$.

2. Σε κάποιες ακραίες περιπτώσεις όπου το μέσο διάστημα είναι το μισό της ονομαστικής τιμής της ζήτησης κάποια προβλήματα δεν έχουν εφικτή λύση.
3. Αν το κόστος έλλειψης είναι αυξημένο σε σχέση με το κόστος αποθήκευσης, τότε όσο αυξάνει το p τόσο αυξάνει ο αριθμός των προϊόντων που παράγονται. Στην περίπτωση αυτήν δεν υπάρχει περιορισμός όσο αναφορά το κόστος ανά μονάδα αποθήκευσης ή έλλειψης, μέσα σε λογικά πλαίσια.
4. Το μέγεθος της παραγωγής δεν εξαρτάται από την περιοδικότητα στην ονομαστική της τιμή αλλά έχουμε μεγαλύτερο επιπρόσθετο κόστος αν έχουμε μεγαλύτερη ονομαστική τιμή.
5. Η μέθοδος μας αλλάζει τους συντελεστές ευαισθησίας r_{ik} από 0 σε >0 με $k=i, i+1 \dots T$, όταν για i περίοδο έχουμε την μέγιστη απόκλιση.
6. Οι συντελεστές ευαισθησίας q_k παίρνουν την μεγαλύτερη απόκλιση μέχρι την περίοδο k λόγω του περιορισμού $q_k + r_{ik} \geq \hat{w}_i \forall k, \forall i \leq k$ αν το r_{ik} ισούται με το μηδέν ή αν έχουμε σταθερή απόκλιση \hat{w}_k σε όλες τις περιόδους.
7. Αξιοσημείωτο είναι ότι το συνολικό επιπρόσθετο κόστος όπως αναφέρθηκε από τους Bertsimas and Thiele (2006) είναι $(2ph)/(p+h) * \sum_{k=0}^{T-1} A_k$ δηλαδή

$\sum_{k=1}^{T-1} y_k$. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπήρξε ταύτιση των δύο αυτών

εξισώσεων στα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4 Εφαρμογή στο πρόβλημα παραγωγής δύο τύπων προϊόντων σε μια μηχανή

4.1 Γενικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν οι πιθανές λύσεις μιας μηχανής παραγωγής δύο τύπων προϊόντων με και χωρίς περιορισμούς στην δυναμικότητα της μηχανής. Επιπρόσθετα, είναι λογικό εάν d είναι η μέγιστη δυναμικότητα της μηχανής, έκαστος οι βέλτιστες παραγωγές να είναι μικρότερες από την τιμή d , αν βελτιστοποιούνταν σαν μονού τύπου μηχανή παραγωγής. Κάνοντας την αντίστοιχη μορφοποίηση εδώ, το πρόβλημα παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } \sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{T-1} (c_j u_{jt} + K_j v_{jt} + y_{jt}) \\
 & \text{subject to } y_{jt} \geq h_j \left(x_{j0} + \sum_{i=0}^t (u_{ji} - \bar{w}_{ji}) + q_{jt} \Gamma_{jt} + \sum_{i=0}^t r_{jit} \right) \quad \forall t, j \\
 & \quad y_{jt} \geq p_j \left(-x_{j0} - \sum_{i=0}^t (u_{ji} - \bar{w}_{ji}) + q_{jt} \Gamma_{jt} + \sum_{i=0}^t r_{jit} \right) \quad \forall t, j \\
 & \quad q_{jt} + r_{jit} \geq \hat{w}_{ji}, \quad \forall t, j \quad \forall i \leq t \\
 & \quad q_{jt} \geq 0, \quad r_{jit} \geq 0, \quad \forall t, j \quad \forall i \leq t \\
 & \quad 0 \leq u_{jt} \leq M v_{jt}, \quad v_{it} \in \{0, 1\}, \quad \forall t, j \\
 & \quad \sum_{j=1}^n u_{jt} \leq d \quad \forall t
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου M ένας μεγάλος αριθμός και n ο αριθμός των προϊόντων.

Πριν πάμε στα παραδείγματα πρέπει να βρούμε τα $\Gamma_j(t)$ του κάθε προϊόντος σε κάθε περίοδο.

minimize

$$\sum_{j=1}^n \left(c_j \frac{p_j - h_j}{p_j + h_j} \hat{w}_j(T-1) \Gamma_j(T-1) + \sum_{t=0}^{T-1} \{h_j X_j(t+1) + (h_j + p_j) f(X_j(t+1), M_j(t+1), S_j(t+1))\} \right)$$

$$\text{subject to } X_j(t+1) = \frac{p_j - h_j}{p_j + h_j} \hat{w}_j(t) \Gamma_j(t) \quad \forall t, j \quad (4.2)$$

$$0 \leq \Gamma_j(t) - \Gamma_j(t-1) \leq 1, \quad \forall t, j$$

Με την μορφοποίηση αυτή λύνουμε εύκολα με τον αλγόριθμο του παραρτήματος με την μόνη διαφορά ότι βάζουμε και για τα άλλα προϊόντα τα αντίστοιχα στοιχεία.

4.2 Παραδείγματα

Για την εξαγωγή συμπερασμάτων, στο κεφάλαιο αυτό θα εξεταστεί μηχανή με δύο τύπους προϊόντων και με αντίστοιχο περιορισμό ή μη στην δυναμικότητά της μηχανής.

- i. Στο πρώτο παράδειγμα θα συγκρίνουμε δύο προϊόντα με ακριβώς τις ίδιες παραμέτρους για να μπορέσουμε στην συνέχεια να δούμε πως συμπεριφέρεται η μέθοδος όταν αλλάζουμε αυτές.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = \bar{w}_{2t} = 100, \hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 20 \quad \forall t, h_1 = h_2 = 4, p_1 = p_2 = 6, d=400$. Οι συντελεστές $\Gamma_j(t)$ ισούνται:

Πίνακας 4.1. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,356	0,356
1	0,450	0,450
2	0,573	0,573
3	0,629	0,629

4	0,695	0,695
5	0,748	0,748
6	0,884	0,884
7	0,953	0,953
8	1,027	1,027
9	1,068	1,068
10	1,127	1,127
11	1,149	1,149

και αντίστοιχα οι βέλτιστες λύσεις του τύπου προϊόντος όπως είναι αναμενόμενο είναι ίδιες και ισούνται:

Πίνακας 4.2. Αποτελέσματα του παραδείγματος 1.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	101,427	1,427	101,427	1,427
1	100,576	0,576	100,576	0,576
2	100,489	0,489	100,489	0,489
3	100,226	0,226	100,226	0,226
4	100,262	0,262	100,262	0,262
5	100,213	0,213	100,213	0,213
6	100,242	0,242	100,242	0,242
7	100,235	0,235	100,235	0,235
8	100,136	0,136	100,136	0,136
9	100,161	0,161	100,161	0,161
10	100,135	0,135	100,135	0,135
11	100,188	0,188	100,188	0,188

- ii. Στο δεύτερο παράδειγμα θα συγκρίνουμε τα δύο ίδια προϊόντα με την μόνη διαφορά ότι έχουμε σταθερά κόστη στο σετάρισμα της μηχανής με $K_1 = 1000$ και $K_2 = 3000$. Οι συντελεστές $\Gamma_j(t)$ λόγω της μορφής της μεθόδου δεν εξαρτώνται από τα σταθερά κόστη σεταρίσματος και είναι ίδιοι με το προηγούμενο παράδειγμα, οπότε εδώ παραλείπονται.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = \bar{w}_{2t} = 100$, $\hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 20 \quad \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$,

$K_1 = 1000$, $K_2 = 3000$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.3. Αποτελέσματα του παραδείγματος 2.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	69,314	-30,685	150,685	50,685
1	209,166	109,166	0	-100
2	0	-100	220	120
3	196,420	96,420	0	-100
4	0	-100	202,903	102,903
5	197,618	97,618	0	-100
6	0	-100	196,217	96,217
7	195,107	95,107	0	-100
8	0	-100	197,136	97,136
9	198,509	98,509	0	-100
10	0	-100	156,912	56,912
11	138,859	38,859	81,140	-18,859

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι τα σταθερά κόστη σεταρίσματος επηρεάζουν την παραγωγή. Για σταθερά κόστη κοντά στις τιμές του κόστους έλλειψης ή αποθήκευσης δεν επηρεάζουν το μέγεθος παραγωγής. Επίσης σε κάποιες περιόδους παράγεται μόνο ένα από τα δύο προϊόντα και σε μεγαλύτερη ποσότητα για να καλύψει τις ανάγκες της επόμενης.

Σε αυτό το παράδειγμα θα λύσουμε το πρόβλημα με ντετερμινιστική προσέγγιση που έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } \sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{T-1} (c_j u_{jt} + K_j v_{jt} + y_{jt}) \\
 & \text{subject to } y_{jt} \geq h_j \left(x_{j0} + \sum_{i=0}^t (u_{ji} - w_{ji}^-) \right) \quad \forall t, j \\
 & \quad \quad \quad y_{jt} \geq p_j \left(-x_{j0} - \sum_{i=0}^t (u_{ji} - w_{ji}^-) \right) \quad \forall t, j \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq u_{jt} \leq M v_{jt}, \quad v_{jt} \in \{0,1\}, \quad \forall t, j
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι έχουμε σταθερό κόστος και θέλουμε να δούμε την διαφορά στα αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της εύρωστης λύσης.

Αν δεν είχαμε σταθερό κόστος είναι λογικό τα αποτελέσματα της ντετερμινιστικής λύσης θα είναι ίσες με τις ονομαστικές τιμές των προϊόντων ανά περίοδο.

Λύνοντας το πρόβλημα καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 4.4. Αποτελέσματα της ντετερμινιστικής λύσης του παραδείγματος 2.

t	$u'_{1,t}$	$I'_{1,t}$	$u'_{2,t}$	$I'_{2,t}$
0	78,333	-21,6667	141,666	41,66667
1	209,166	109,1667	0	-100
2	0	-100	220	120
3	200	100	0	-100
4	0	-100	220	120
5	200	100	0	-100
6	0	-100	205,833	105,8333
7	200	100	0	-100
8	0	-100	200	100
9	200	100	0	-100
10	0	-100	200	100
11	112,5	12,5	0	-100

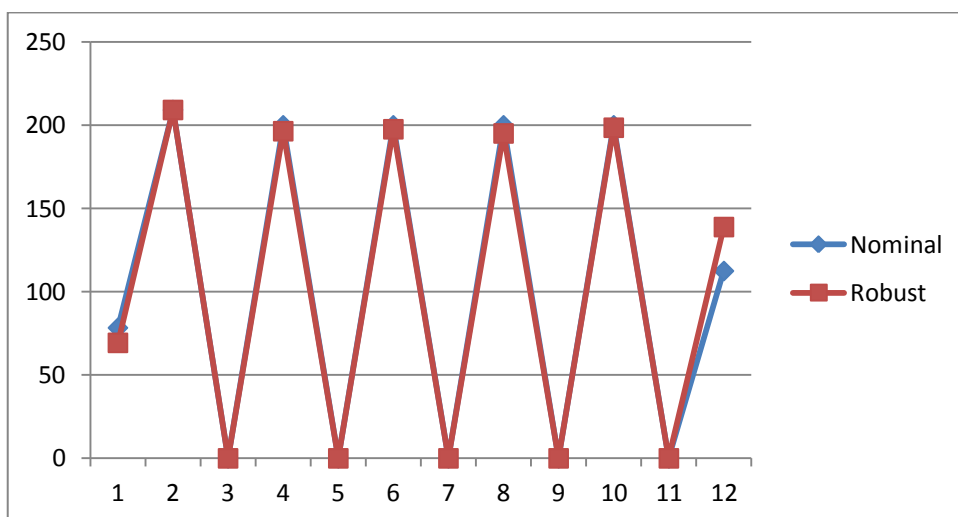
Στον πίνακα 4.5 φαίνονται οι διαφορές στα αποτελέσματα της εύρωστης με της ντετερμινιστικής λύσης.

Πίνακας 4.5. Διαφορές των αποτελεσμάτων της εύρωστης και της ντετερμινιστικής λύσης του παραδείγματος 2.

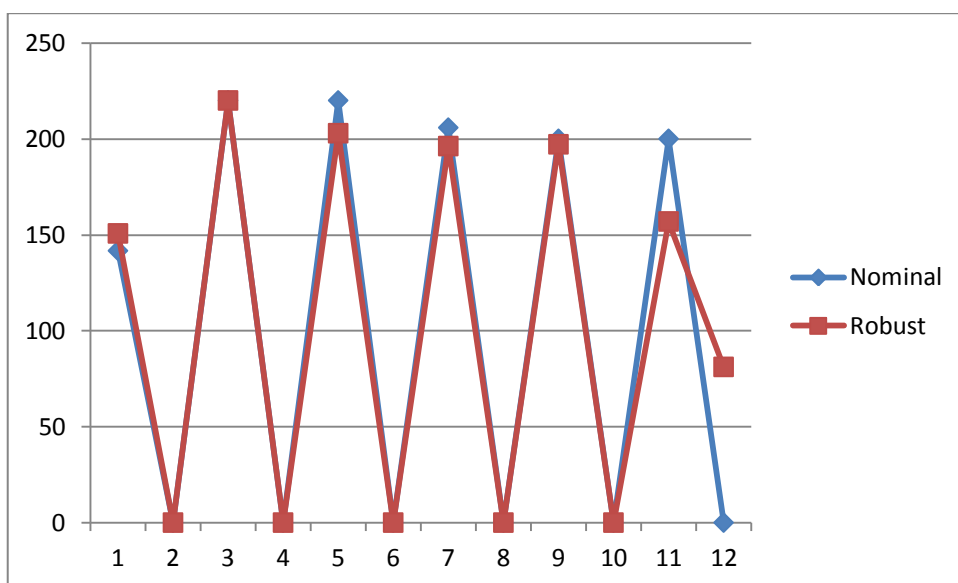
t	$u_{1,t} - u'_{1,t}$	$u_{2,t} - u'_{2,t}$
0	-9,019	9,019
1	0	0
2	0	0
3	-3,579	0
4	0	-17,096
5	-2,381	0
6	0	-9,616
7	-4,892	0
8	0	-2,863
9	-1,490	0
10	0	-43,087
11	26,359	81,140

Στα δύο παρακάτω διαγράμματα φαίνονται τα μεγέθη παραγωγής στο 1^ο και στο 2^ο προϊόν αντιστοίχως.

Διάγραμμα 4.1. Αποτελέσματα παραγωγής μηχανής της εύρωστης και της ντετερμινιστικής λύσης του 1^{ου} προϊόντος



Διάγραμμα 4.2. Αποτελέσματα παραγωγής μηχανής της εύρωστης και της ντετερμινιστικής λύσης του 2^{ου} προϊόντος



- iii. Στο τρίτο παράδειγμα θα αλλάξουμε μόνο τα κόστη έλλειψης ανά προϊόν σε σχέση με το πρώτο παράδειγμα, $p_1 = 6$, $p_2 = 9$.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = \bar{w}_{2t} = 100$, $\hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 20 \forall t$, $p_1 = 6, p_2 = 9$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$,

$$K_j = 0$$

Οι συντελεστές $\Gamma_j(t)$ ισούνται:

Πίνακας 4.6. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,234	0,084
1	0,468	0,181
2	0,585	0,248
3	0,725	0,308
4	0,885	0,378
5	1,002	0,585
6	1,018	0,706
7	1,128	0,936
8	1,270	1,147
9	1,438	1,360
10	1,652	1,608
11	1,973	1,958

Τα αποτελέσματα των λύσεων δίνονται παρακάτω.

Πίνακας 4.7. Αποτελέσματα του παραδείγματος 3.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	100,937	0,937	100,653	0,653
1	100,837	0,837	100,740	0,740
2	100,465	0,465	100,516	0,516
3	100,562	0,562	100,565	0,565
4	100,637	0,637	100,532	0,532
5	100,470	0,470	100,598	0,598
6	100,030	0,030	100,929	0,929
7	100,474	0,474	101,765	1,765
8	100,567	0,567	101,622	1,622
9	100,669	0,669	101,639	1,639
10	100,857	0,857	101,908	1,908
11	101,284	1,284	102,689	2,689

Εδώ παρατηρούμε ότι αρχικά το προϊόν με το μεγαλύτερο κόστος έλλειψης είναι αρχικά στην ονομαστική του τιμή και καθώς περνάει ο χρόνος αυξάνει.

- iv. Στο παράδειγμα αυτό θα βάλουμε περιορισμό στην παραγωγή $d=200$. Οι συντελεστές $\Gamma_j(t)$ είναι ίδιοι με το προηγούμενο παράδειγμα.

Δεδομένα: $\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 100$, $\hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 20$, $p_1 = 6$, $p_2 = 9$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=200$, $K_j = 0$

Οι λύσεις του προβλήματος είναι:

Πίνακας 4.8. Αποτελέσματα του παραδείγματος 4.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	99,346	-0,654	100,653	0,653
1	99,259	-0,741	100,740	0,740
2	99,483	-0,517	100,516	0,516
3	99,534	-0,466	100,465	0,465
4	99,467	-0,533	100,532	0,532
5	98,401	-1,599	101,598	1,598
6	99,070	-0,93	100,929	0,929
7	98,234	-1,766	101,765	1,765
8	98,377	-1,623	101,622	1,622
9	98,360	-1,640	101,639	1,639
10	98,091	-1,909	101,908	1,908
11	97,310	-2,690	102,689	2,689

Όπως είναι αναμενόμενο η μηχανή θα παράγει περισσότερα προϊόντα του ακριβότερου προϊόντος σε σχέση με το κόστος έλλειψής του. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο εξής παράδειγμα έγινε προσπάθεια λύσης με διάφορα d μικρότερα από το άθροισμα των ονομαστικών τιμών των δύο προϊόντων και δεν υπήρξαν εφικτές λύσεις.

- v. Στο πέμπτο παράδειγμα θα έχουμε όλες τις παραμέτρους ίδιες εκτός από την απόκλιση από την ονομαστικές τους τιμές και ισούνται $\hat{w}_{1t} = 40$, $\hat{w}_{2t} = 20 \forall t$.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = \bar{w}_{2t} = 100$, $\hat{w}_{1t} = 40$, $\hat{w}_{2t} = 20 \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$,

$$K_j = 0$$

Οι συντελεστές $\Gamma_j(t)$ είναι:

Πίνακας 4.9. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,327	0,240
1	0,484	0,454
2	0,599	0,582
3	0,644	0,634
4	0,700	0,695
5	0,750	0,746
6	0,886	0,886
7	0,994	0,994
8	1,027	1,027
9	1,066	1,067
10	1,124	1,124
11	1,144	1,143

Τα αποτελέσματα δίνονται στο παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.10. Αποτελέσματα του παραδείγματος 5.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	102,621	2,621	100,963	0,963
1	101,256	1,256	100,856	0,856
2	100,919	0,919	100,509	0,509
3	100,355	0,355	100,208	0,208
4	100,453	0,453	100,244	0,244
5	100,400	0,400	100,206	0,206
6	100,485	0,485	100,557	0,557
7	100,865	0,865	100,432	0,432
8	100,263	0,263	100,132	0,132
9	100,314	0,314	100,158	0,158
10	100,461	0,461	100,230	0,230
11	100,057	0,057	100,077	0,077

vi. Εδώ θα αφήσουμε όλες τις παραμέτρους ίδιες με το προηγούμενο παράδειγμα εκτός από την ονομαστική των προϊόντων όπου θα είναι $\bar{w}_1 = 100$ και $\bar{w}_2 = 80$.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = 100, \bar{w}_{2t} = 80, \hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 20 \forall t, p_1 = p_2 = 6, h_1 = h_2 = 4, d=350,$

$$K_j = 0$$

Αρχικά βρίσκουμε τα $\Gamma_j(t)$:

Πίνακας 4.11. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,327	0,240
1	0,484	0,454
2	0,599	0,582
3	0,644	0,634
4	0,700	0,695
5	0,750	0,746
6	0,886	0,886
7	0,994	0,994
8	1,027	1,027
9	1,066	1,067
10	1,124	1,124
11	1,206	1,203

με τα εξής μεγέθη παραγωγής:

Πίνακας 4.12. Αποτελέσματα του παραδείγματος 6.

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	100,993	0,993	81,292	1,292
1	100,749	0,749	80,236	0,236
2	100,470	0,470	80,585	0,585
3	100,370	0,370	80,449	0,449
4	100,362	0,362	80,516	0,516
5	100,287	0,287	80,295	0,295
6	100,401	0,401	80,355	0,355
7	100,006	0,006	80,042	0,042
8	100,432	0,432	80,374	0,374
9	100,375	0,375	80,348	0,348

10	100,486	0,486	80,470	0,470
11	100,401	0,401	80,401	0,401

Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι δεν επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό η απόκλιση από το μέγεθος παραγωγής της μηχανής σε σχέση με τις ονομαστικές τιμές όταν αλλάζουν αυτές.

- vii. Στο παράδειγμα αυτό θα αλλάξουμε τις ονομαστικές τιμές των προϊόντων και τα κόστη έλλειψης ταυτόχρονα.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = 100$, $\bar{w}_{2t} = 80 \forall t$, $\hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 20$, $p_1 = 6$, $p_2 = 9$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$,

$$K_j = 0$$

Οι λύσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 4.13. Αποτελέσματα του παραδείγματος 7

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$u_{2,t}$
0	100,948	0,948	81,403	1,403
1	100,894	0,894	80,646	0,646
2	100,507	0,507	80,174	0,174
3	100,553	0,553	80,407	0,407
4	100,518	0,518	80,497	0,497
5	100,457	0,457	80,383	0,383
6	100,454	0,454	80,987	0,987
7	100,459	0,459	81,712	1,712
8	100,445	0,445	81,619	1,619
9	100,432	0,432	81,651	1,651
10	100,357	0,357	81,915	1,915
11	100,285	0,285	82,699	2,699

Εδώ βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο κόστος έλλειψης επηρεάζει την παραγωγή προς τον προϊόν που έχει αυτήν.

Μέχρι το προηγούμενο παράδειγμα αλλάζαμε μόνον ένα συντελεστή ώστε να δούμε πως συμπεριφέρεται η μέθοδος. Στα επόμενα θα βάλουμε πιο ρεαλιστικά δεδομένα που είναι ρεαλιστικά για επιχειρήσεις.

viii. Στο παράδειγμα θα εξετάσουμε την εποχικότητα των προϊόντων με σταθερή απόκλιση και με περιορισμό στο μέγεθος παραγωγής d .

Δεδομένα: $\hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 10 \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$, $K_j = 0$ και με ονομαστικές τιμές όπως φαίνονται στον πίνακα 4.12.

Πίνακας 4.14. Ονομαστικές τιμές των ζητήσεων ανά περίοδο ανά προϊόν

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{w}_1(t)$	50	60	70	85	95	100	180	200	170	90	80	60
$\bar{w}_2(t)$	50	55	80	90	100	160	190	170	130	70	65	50

Από το αλγόριθμο (4.2) βρίσκουμε τα $\Gamma_j(t)$

Πίνακας 4.15. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,268	0,272
1	0,458	0,466
2	0,592	0,604
3	0,725	0,742
4	0,871	0,896
5	0,985	1,011
6	1,049	1,021
7	1,163	1,137
8	1,296	1,275
9	1,449	1,430
10	1,640	1,624
11	1,934	1,922

Τα αποτελέσματα δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.16. Αποτελέσματα του παραδείγματος 8

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	50,524	0,524	50,354	0,354
1	60,398	0,398	55,002	0,002
2	70,232	0,232	80,138	0,138
3	85,264	0,264	90,122	0,122
4	95,296	0,296	100,099	0,099
5	100,219	0,219	180,695	20,695
6	180,031	0,031	169,968	-20,032
7	200,224	0,224	149,775	-20,225
8	170,258	0,258	151,040	21,040
9	90,307	0,307	70,395	0,395
10	80,396	0,396	65,463	0,463
11	60,604	0,604	50,663	0,663

Εδώ παρατηρούμε ότι σε μερικές περιόδους παράγονται πολύ παραπάνω προϊόντα σε σχέση με την ονομαστική τους τιμή για να καλύψουν την επόμενη περίοδο λόγω ότι έχουμε περιορισμό στην δυναμικότητα της μηχανής. Αυτό συμβαίνει στις προηγούμενες περιόδους όπου οι επόμενες έχει άθροισμα ονομαστικών τιμών των προϊόντων μεγαλύτερο από την δυναμικότητα της μηχανής.

ix. Εδώ θα εξετάσουμε το ίδιο παράδειγμα με το προηγούμενο αλλά με σταθερά κόστη

$$K_1 = K_2 = 260$$

Δεδομένα: $\hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 10 \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=350$ και με ονομαστικές τιμές όπως φαίνονται στον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος.

Η λύση μας έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 4.17. Αποτελέσματα του παραδείγματος 9

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	0	-50	105,356	55,356
1	181,155	121,155	0	-55
2	0	-70	164,667	84,667
3	164,241	79,241	0	-90
4	0	-95	105,693	5,693

5	157,454	57,454	160,428	0,428
6	139,115	-40,884	210,884	20,884
7	200,224	0,224	149,776	-20,224
8	170,258	0,258	179,741	49,741
9	90,307	0,307	0	-70
10	141,001	61,001	137,173	72,173
11	0	-60	0	-50

Οι λύσεις που μας δίνει το σύστημα είναι λογικές διότι το κόστος αποθήκευσης είναι μικρότερο σε σχέση με το σταθερό κόστος των προϊόντων οπότε προτιμάει το σύστημα να αποθηκεύσει τα προϊόντα από ότι να το παράγει εκείνη την περίοδο. Αυτό αλλάζει από περίοδο σε περίοδο και εξαρτάται από τα σταθερά κόστη των προϊόντων και των μεγεθών παραγωγής του κάθε προϊόντων στη κάθε περίοδο δηλαδή αν u^*h της περιόδου του κάθε προϊόντος είναι μεγαλύτερο από το K του προϊόντος.

- x. Εδώ θα εξεταστεί το παράδειγμα όπου οι ονομαστικές τιμές των προϊόντων έχουν αντίστροφες κινήσεις στην εποχικότητα.

Δεδομένα: $\hat{w}_{1t} = \hat{w}_{2t} = 10 \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=250$, $K_j = 0$ και με ονομαστικές τιμές όπως φαίνονται στον πίνακα 4.14.

Πίνακας 4.18. Ονομαστικές τιμές των ζητήσεων ανά περίοδο ανά προϊόν

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{w}_1(t)$	50	60	70	85	95	100	180	200	170	90	80	60
$\bar{w}_2(t)$	180	200	170	140	100	40	50	55	55	70	90	100

Βρίσκουμε τα $\Gamma_j(t)$ από τον αλγόριθμο (4.2).

Πίνακας 4.19. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,274	0,173
1	0,422	0,174
2	0,522	0,243

3	0,636	0,302
4	0,761	0,333
5	0,858	0,452
6	0,955	0,685
7	1,056	0,880
8	1,170	1,061
9	1,307	1,251
10	1,491	1,482
11	1,934	1,922

Οι λύσεις δίνονται στο παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.20. Αποτελέσματα του παραδείγματος 10

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	60,846	10,846	180,347	0,347
1	49,997	-10,002	200,002	0,002
2	70,201	0,201	170,137	0,137
3	85,228	0,228	140,118	0,118
4	95,248	0,248	100,061	0,061
5	100,194	0,194	40,237	0,237
6	180,195	0,195	56,058	6,058
7	200,201	0,201	49,798	-5,201
8	170,227	0,227	55,362	0,362
9	90,274	0,274	70,379	0,379
10	80,367	0,367	90,460	0,460
11	60,570	0,570	100,666	0,666

Αξιοσημείωτο εδώ είναι πως συμπεριφέρεται η μέθοδος με τον περιορισμό $d=250$.

Στις περιόδους 1 και 7 η μηχανή παραγωγής παράγει ακριβώς 250 ενώ για να καλυφθεί η υπολειπόμενη ποσότητα παράγονται περισσότερα προϊόντα στην προηγούμενη περίοδο.

- xi. Στο τελευταίο παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου αυξάνει η απόκλιση από την ονομαστική του κάθε προϊόντος σε σχέση με την πάροδο των περιόδων. Αυτό είναι λογικό στα πραγματικά παραδείγματα διότι όσο μεγαλύτερο περιόδων παραγωγής έχουμε τόσο αυξάνει η αβεβαιότητα.

Δεδομένα: $\bar{w}_{1t} = \bar{w}_{2t} = 100 \forall t$, $p_1 = p_2 = 6$, $h_1 = h_2 = 4$, $d=250$, $K_j = 0$ και με αποκλίσεις από τις ονομαστικές τιμές όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 4.17.

Πίνακας 4.21. Αποκλίσεις της ζήτησης των προϊόντων από την ονομαστική τους τιμή

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{w}_1(t)$	5	7	10	15	17	20	25	27	30	35	37	40
$\hat{w}_2(t)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	38	39	40

Αρχικά βρίσκουμε τα $\Gamma_j(t)$ λύνοντας τον αλγόριθμο (4.2).

Πίνακας 4.22. Συντελεστές $\Gamma_j(t)$ των προϊόντων

t	$\Gamma_1(t)$	$\Gamma_2(t)$
0	0,257	0,099
1	0,477	0,197
2	0,479	0,266
3	0,598	0,319
4	0,726	0,327
5	0,820	0,441
6	0,914	0,653
7	1,008	0,826
8	1,112	0,982
9	1,235	1,148
10	1,400	1,349
11	1,658	1,648

Έχοντας βρει τα $\Gamma_j(t)$ λύνουμε το πρόβλημα και βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 4.23. Αποτελέσματα του παραδείγματος 11

t	$u_{1,t}$	$I_{1,t}$	$u_{2,t}$	$I_{2,t}$
0	100,257	0,257	100,079	0,079
1	100,411	0,411	100,236	0,236
2	100,289	0,289	100,324	0,324
3	100,837	0,837	100,382	0,382
4	100,673	0,673	100,386	0,386
5	100,812	0,812	100,809	0,809
6	101,291	1,291	101,541	1,541

7	100,869	0,869	101,629	1,629
8	101,165	1,165	101,785	1,785
9	101,802	1,802	101,592	1,592
10	101,793	1,793	101,792	1,792
11	102,667	2,667	102,596	2,596

4.3 Συμπεράσματα

Από τις λύσεις των παραδειγμάτων καταλήγουμε στα συμπεράσματα όσον αναφορά τα αποτελέσματα της μεθόδου:

1. Αν έχουμε δυναμικότητα μηχανής αρκετά μικρότερη από το άθροισμα των ονομαστικών τιμών των προϊόντων δεν έχουμε εφικτή λύση. Για κοντινές τιμές σε πολλά παραδείγματα υπάρχει λύση.
2. Τα σταθερά κόστη επηρεάζουν τα μεγέθη παραγωγής και ιδιαίτερα το συνολικό κόστος. Σε περιόδους του χρονικού ορίζοντα η μηχανή δεν παράγει κάποιο προϊόν ενώ για να καλυφθεί η ζήτηση παράγεται μεγαλύτερη ποσότητα προϊόντων σε προηγούμενες περιόδους.
3. Το $\Gamma_j(t)$ του κάθε προϊόντος της αντίστοιχης περιόδου σε σχέση με το $\Gamma_{j+1}(t)$ του ίδιου προϊόντος, επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την απόκλιση του μεγέθους παραγωγής του κάθε προϊόντος από την ονομαστική τους τιμή.
4. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέσο διάστημα του προϊόντος έχουμε τόσο μεγαλύτερες είναι οι αποκλίσεις του μεγέθους παραγωγής από την ονομαστική τους τιμές.
5. Το προϊόν με το μεγαλύτερο κόστος έλλειψης ανά προϊόν έχει την μεγαλύτερη απόκλιση από την ονομαστική του τιμή στην παραγωγή και σε περιπτώσεις με περιορισμούς στην παραγωγή παράγονται περισσότερα προϊόντα και μειώνονται από το άλλο προϊόν.

6. Η αλλαγή στις ονομαστικές τιμές ανά περίοδο δεν επηρεάζει σημαντικά τις αποκλίσεις από την ονομαστική τιμή στο μέγεθος παραγωγής του κάθε προϊόντος.
7. Όταν έχουμε περιορισμό στη δυναμικότητα της μηχανής παραγωγής τότε σε κάποια προβλήματα παράγονται περισσότερα προϊόντα σε προηγούμενη περίοδο ώστε να καλυφθεί η ζήτηση στην ζητούμενη περίοδο και να έχουμε το ελάχιστο κόστος.
8. Όταν έχουμε σταθερά κόστη για την παραγωγή προϊόντων, τότε το προϊόν με το μεγαλύτερο σταθερό κόστος παραγγελίας θα έχει μεγαλύτερες αποκλίσεις στα μεγέθη παραγωγής σε σχέση με την αντίστοιχη ντετερμινιστική λύση.

Παράρτημα (Αλγόριθμος λύσης των προβλημάτων)

Το μαθηματικό μοντέλο που θέλουμε να λύσουμε είναι το (2.2-4.1) με την προϋπόθεση ότι έχει λυθεί αρχικά το (2.3-4.2) δηλαδή να έχουμε βρει τα ποσά αβεβαιότητας Γ_k . Έτσι τα ποσά αβεβαιότητας τα βρίσκουμε μέσω του matlab με τον παρακάτω αλγόριθμο, αλλά χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή διότι μπορεί να υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα στο σύστημα και να καταλήξουμε σε λάθος αποτελέσματα.

Αλγόριθμος εύρεσης των ποσών αβεβαιότητας Γ_k

Αρχικά εισάγουμε τις τιμές τη απόκλισης ζήτησης και ονομαστικής τιμής σε όλες τις περιόδους μέσω του excel με την μορφή διανύσματος ή με την παρακάτω μορφή:

```
>>wm=[100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100;];
```

```
>>wdev=[20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 20;];
```

*Τα στοιχεία αυτά είναι ενδεικτικά και εύκολα μπορούν να γίνουν import στο Matlab από excel μορφή.

Αντίστοιχα οι ονομαστικές τιμές της ζήτησης ανά περίοδο και οι αποκλίσεις των ζητήσεων ανά περίοδο. Εν συνεχεία εισάγουμε τις τιμές των κοστών αποθήκευσης/έλλειψης (h/p) και κόστος παραγωγής c.

```
>> p=6;
```

```
>> h=4;
```

```
>> c=0;
```

```
>> a=(p-h)/(p+h);
```

Όσο αναφορά τους περιορισμούς τους φτιάχνουμε στην μορφή $Ax \leq b$. Η μορφή $Aeq * x = beq$ που στο συγκεκριμένο πρόβλημα τους έχουμε βάλει λόγω ιδιομορφίας του Matlab. Αν προσέξει κάποιος τους 2 τελευταίους περιορισμούς, δεν συμπεριλαμβάνονται την μορφή (4.1) αλλά τους βάζουμε για να θέσουμε το Γ_k μεγαλύτερα του μηδενός και μικρότερα της μονάδας.

```
>>A =[-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 -1 1 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 -1 1 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 -1 1 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 -1 1 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 -1 1 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1;  
      1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0;  
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1;  
      -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
      1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

```
>>Aeq = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```



```
>>fun=@(g)sum(f(1:12))
```

Εδώ την αντικειμενική συνάρτηση την αντικειμενική συνάρτηση fun την έχουμε υπολογίσει με $c=0$.

Τελευταίο βήμα πριν υπολογίσουμε τα ζητούμενα είναι βάλουμε ένα σημείο g_0 όπου το σύστημα θα αρχίσει να ψάχνει για λύση. Αυτό το βάζουμε σε μορφή διανύσματος.

```
>>g0=[0.1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;];
```

Σε αυτό το σημείο πρέπει να προσεχθεί να βάλουμε κοντά στις αναμενόμενες τιμές γιατί αν βάλουμε αρκετά μακριά από τις αναμενόμενες τιμές μπορεί το σύστημα να υπολογίσει ένα τοπικό ελάχιστο με την ίδια αντικειμενική συνάρτηση αλλά με μεγαλύτερους αρκετά αριθμούς. προτείνεται να μπαίνει διαφορετικό του μηδενός το πρώτο στοιχείο λόγω ότι σε κάποια παραδείγματα έβγαζε με μεγάλο gap σε σχέση με την βέλτιστη λύση.

Αυτό που μας μένει είναι ο υπολογισμός που γίνεται μέσω της εντολής:

```
>>g=fmincon(fun,g0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

και μας δίνει τα βέλτιστα Γ_k σε μορφή διανύσματος.

Αλγόριθμος λύσης του προβλήματος μονού προϊόντος

Στην ενότητα αυτήν θα παρουσιάσουμε τον τρόπο που επιλύονται προβλήματα προσαρμοστικής βελτιστοποίησης μιας μηχανής ενός τύπου προϊόντος. Για ευκολία και λόγω του πεπερασμένου αριθμού περιόδων και γενικά στο ότι δεν κάνουμε σχεδιασμό πέρα του χρονικού ορίζοντα δώδεκα μηνών, το πρόβλημα λύνεται με την χρήση matlab με την ιδιαιτερότητα ότι οι πίνακες εισάγονται μέσω μορφοποιημένων φύλλων εργασίας excel που κατασκευάστηκαν για τον λόγο αυτόν.

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος λύσης δίνεται η μορφή που πρέπει να έχουμε το πρόβλημα ώστε να μπορεί να λυθεί μέσω του matlab και παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \min & f^T x \\ & x(\text{int con}) \\ & A * x \leq b \\ & A_{\text{eq}} * x = b_{\text{eq}} \\ & lb \leq x \leq ub \end{aligned}$$

Στο excel έγινε μορφοποίηση ώστε με την εισαγωγή μόνο των παραμέτρων c, p, h, x0 και Γ, μας δίνεται όλοι οι πίνακες ώστε να γίνει εισαγωγή κατευθείαν από το excel στο matlab. Ύστερα από την εισαγωγή των πινάκων εκτελούμε την εντολή $[x, fval]=\text{intlinprog}(f,\text{intcon},A,b,A_{\text{eq}},b_{\text{eq}},lb,ub)$ και μας υπολογίζει όλα τα στοιχεία και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Αλγόριθμος λύσης του προβλήματος πολλών τύπων προϊόντων

Αρχικά πρέπει να βρεθεί το Γ κάθε προϊόντος σε κάθε περίοδο και αυτό επιτυγχάνεται με την μόνη διαφορά ότι έχουμε ένα w_m και w_{den} όπου τα στοιχεία από 13 έως 24 είναι του δεύτερου προϊόντος και τροποποιούμε τους αντίστοιχους πίνακες για 24 στοιχεία του Γ, όπως και την τελική συνάρτηση.

Αφού βρέθηκαν τα στοιχεία Γ, το πρόβλημα λύθηκε με matlab, με τους πίνακες να τους πήραμε από μορφοποιημένο excel.

Βιβλιογραφία

- [1] Bertsimas, D., Thiele, A. 2006. A Robust Optimization Approach in Inventory Theory. *Operations Research*. 54(1). pp 150-168.
- [2] Ben-Tal, A., A. Nemirovski. 2000. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Math.Programming Ser.A*. pp 411–424.
- [3] Clark, A., H. Scarf. 1960. Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Sci*. 6(4). pp 475–490.
- [4] Soyster, A. L. 1973. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Oper.Res*. 21. pp 1154–1157.
- [5] Bertsimas, D., M. Sim. 2003. Robust discrete optimization and network flows. *Math.Programming Ser.B* . 98. pp 48-71.
- [6] Scarf, H. 1958. A min-max solution of an inventory problem. K. J. Arrow, S. Karlin, H. E. Scarf, eds. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford University Press, Stanford, CA, pp 201–209.
- [7] Zipkin, P. 2000. *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill Higher Education, Boston, MA.
- [8] Bertsimas, D., I. Popescu. 2002. On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach. *Oper.Res*. 50.pp 358–374
- [9] Bertsimas, D., M. Sim. 2004. The price of robustness. *Oper.Res*. 52.pp 35–53.