



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ**  
**ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ**  
**ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ»**

**Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου με χρήση**  
**Βαθμολογικών συναρτήσεων και Κανόνων Ροών**

**Νικόλαος Ι. Παναγιώτου**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Επιβλέπων: Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου  
Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

**Λαμία, 2017**





**UNIVERSITY OF THESSALY**  
**SCHOOL OF SCIENCE**  
**INTERDEPARTMENTAL POSTGRADUATE PROGRAM IN**  
**« INFORMATICS AND COMPUTATIONAL**  
**BIOMEDICINE »**

**DIRECTION**  
**«COMPUTATIONAL MEDICINE AND BIOLOGY»**

**Non parametric control charts based on**  
**Rank-type Statistics and Runs-rules**

By  
**Nikolaos I. Panayiotou**

**Master Thesis**

Supervisor: Ioannis S. Triantafyllou  
Assistant Professor UTH

**Lamia, Greece, 2017**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ**  
**ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ**  
**ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ»**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**  
**«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΙΑΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΒΙΟΛΟΓΙΑ»**

**Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου με χρήση**  
**Βαθμολογικών συναρτήσεων και Κανόνων Ροών**

**Νικόλαος Ι. Παναγιώτου**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Επιβλέπων: Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου  
Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

**Λαμία, 2017**

## «Υπεύθυνη Δήλωση μη λογοκλοπής και ανάληψης προσωπικής ευθύνης»

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, και γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα και ενυπογράφως ότι η παρούσα εργασία με τίτλο «Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου με χρήση Βαθμολογικών συναρτήσεων και Κανόνων Ροών» αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές από τις οποίες χρησιμοποίησα δεδομένα, ιδέες, φράσεις, προτάσεις ή λέξεις, είτε επακριβώς (όπως υπάρχουν στο πρωτότυπο ή μεταφρασμένες) είτε με παράφραση, έχουν δηλωθεί κατάλληλα και ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Λαμία, 30/11/2017

Ο ΔΗΛΩΝ

Υπογραφή

**Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου με χρήση  
Βαθμολογικών συναρτήσεων και Κανόνων Ροών**

**Non parametric control charts based on Rank-type  
Statistics and Runs-rules**

Νικόλαος Ι. Παναγιώτου

**Τριμελής Επιτροπή**

**Επιβλέπων:** Ιωάννης Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

**Μέλος:** Χαρίλαος Σανδαλίδης, Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

**Μέλος:** Βασίλειος Δρακόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.





*Στην οικογένειά μου*



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Ιωάννη Τριανταφύλλου, αρχικά γιατί δέχθηκε να αναλάβει την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής, κυρίως όμως διότι η καθοδήγησή του υπήρξε καθοριστική σε όλα τα στάδια της: επιλογή θέματος, μελέτη αντικειμένου, επεξεργασία στοιχείων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Επίκουρους Καθηγητές κ. Χαρίλαο (Χάρη) Σανδαλίδη και κ. Βασίλειο Δρακόπουλο, τους ευχαριστώ για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη της διπλωματικής καθώς και για τις παρατηρήσεις και τα σχόλια τους που συνέβαλλαν στη διαμόρφωση της τελικής μορφής της.

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες που είχα κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, καθώς η παρούσα διπλωματική αποτέλεσε το επιστέγασμα όλων των γνώσεων που μου προσέφεραν. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μεταπτυχιακούς φοιτητές, για την ενθάρρυνση καθώς και για τις ανταλλαγές απόψεων και τη σημαντική βοήθειά τους σε όλα τα στάδια των κοινών σπουδών μας.

Τέλος, δε μπορώ να μην αναφερθώ στην οικογένεια μου που ήταν δίπλα μου σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τους χρωστάω ένα μεγάλο Ευχαριστώ!



## Περίληψη

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος για την παρακολούθηση μια παραγωγικής διεργασίας στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας είναι η εφαρμογή διαγραμμάτων ελέγχου. Αποτελούν το βασικό στατιστικό εργαλείο, το οποίο χρησιμοποιείται αρχικά για τον εντοπισμό ελαττωμάτων και στη συνέχεια για τη βελτίωση της ποιότητας ενός προϊόντος και κατ'επέκταση όλης της παραγωγικής διαδικασίας. Σκοπός είναι η έγκαιρη ανίχνευση της «αφύσικης» συμπεριφοράς μιας διεργασίας.

Τα διαγράμματα ελέγχου *Shewhart* είναι από τα πλέον διαδεδομένα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού  $X$  των προϊόντων που παράγονται από μια παραγωγική διαδικασία. Τα διαγράμματα *Shewhart* είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μεσαίων και μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου της παραγωγικής διεργασίας, οπότε και δίνουν σήμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αλλά δεν είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Για να βελτιωθεί η ευαισθησία τους χρησιμοποιούνται πρόσθετοι κανόνες χαρακτηρισμού μιας διεργασίας εκτός ελέγχου οι οποίοι βασίζονται στη Θεωρία Ροών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία στο **1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια του Στατιστικού Έλεγχου Ποιότητας, παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή και περιγράφεται ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου με τις κατηγοριοποιήσεις του. Στο **2<sup>ο</sup>** και **3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα κυριότερα διαγράμματα ελέγχου, τα παραμετρικά και τα μη παραμετρικά, αντίστοιχα. Τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου κατασκευάζονται βάσει της υπόθεσης της κανονικότητας της διεργασίας. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, δεν εξαρτώνται από την κατανομή που διέπει τη διεργασία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμη και όταν η κατανομή δεν είναι γνωστή. Στο **4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** εισάγουμε και μελετάμε ένα νέο κανόνα ροών για το *Shewhart* διάγραμμα ελέγχου που προτείνουν στην εργασία τους οι Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009), για την κατασκευή του οποίου χρησιμοποιούν την αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση *Wilcoxon*. Με την χρήση υπολογιστικού προγράμματος προσομοίωσης, παράγουμε αποτελέσματα τα οποία συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην παραπάνω καθώς και σε άλλες εργασίες.

**Λέξεις-κλειδιά:** *ARL, Shewhart, CUSUM, EWMA, Σ.Ε.Δ, παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, FAR, αθροιστική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση Wilcoxon, προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση Wilcoxon, κανόνες ροών.*

## Abstract

Control Charts, also known as *Shewhart* Charts, are the most popular statistical tool - out of seven- which are used widely for monitoring a production process in Statistical Quality Control. They primarily identify defects and improve the quality of a product and in an effect the entire production process. Their main aim is to detect the "abnormal" behavior of a process on time.

*Shewhart* control charts are widely used as the statistical tool for monitoring a critical quantity of a measurable X characteristic of products produced by a production process. They are sensitive so as to detect medium to large out of control displacements of the production process, but are not sensitive enough to detect small shifts. In order to improve their sensitivity, we use additional out-of-control process characterization rules based on Run Theory.

Chapter 1 is an introduction to the concept of Statistical Quality Control. Historical data are reviewed and a typical control chart with its categorizations is described.

Chapter 2 and Chapter 3 presents the main control charts, the parametric and the non-parametric or distribution-free charts. Parametric control charts are constructed based on the assumption of process regularity. Non-parametric control charts are not depending on the process distribution and can be used even when the distribution is not known.

Chapter 4 introduces and study a new sensitizing Runs Rule for the *Shewhart* control charts proposed by Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009) based on *Wilcoxon* rank-sum statistic. Applying appropriate simulation code, several results are produced and compared to the corresponding outcomes of several competitive control charts already established in the literature.

**Keywords :** *ARL, Shewhart, CUSUM, EWMA, SPC, parametric control chart, non-parametric or distribution-free control chart, FAR, Wilcoxon rank-sum statistic, Wilcoxon signed – rank statistic, runs rules.*





## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	xiii
Abstract .....	xv
Περιεχόμενα .....	xvii
Κατάλογος Πινάκων .....	xix
Κατάλογος Σχημάτων .....	xxi
Κατάλογος Συντομογραφιών .....	xxiii

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

1.1 Εισαγωγή .....	1
1.2 Η έννοια της ποιότητας και οι διαστάσεις της.....	1
1.3 Ιστορική αναδρομή .....	3
1.4 Διοίκηση Ολικής Ποιότητας.....	9
1.5 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας: οι βασικές κατηγορίες.....	11
1.6 Τα 7 Κυριότερα Εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών.....	13
1.6.1 Διάγραμμα Ελέγχου.....	14
1.6.2 Ιστόγραμμα ή Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων.....	15
1.6.3 Φύλλο Ελέγχου.....	16
1.6.4 Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων .....	17
1.6.5 Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος .....	18
1.6.6 Διάγραμμα Pareto .....	18
1.6.7 Διάγραμμα Διασποράς.....	19

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

2.1 Εισαγωγή .....	21
2.2 Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου .....	21
2.3 Βασικές Έννοιες σχετικά με τα Διαγράμματα Ελέγχου .....	23
2.3.1 Κατασκευή-Περιγραφή ενός Τυπικού Διαγράμματος Ελέγχου.....	23
2.3.2 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου .....	26
2.3.3 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου .....	27
2.3.4 Αναγνώριση μοτίβων.....	28
2.3.5 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου .....	29
2.3.6 Φάση I και Φάση II.....	30
2.4 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Μεταβλητές.....	31
2.4.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή .....	32
2.4.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά.....	35

2.5	Διαγράμματα Ελέγχου τύπου <i>Shewhart</i> για Ιδιότητες.....	39
2.5.1	Διαγράμματα ελέγχου $p$ και $np$ .....	39
2.5.2	Διαγράμματα ελέγχου $c$ .....	41
2.5.3	Διάγραμμα ελέγχου $u$ .....	41
2.6	Διαγράμματα Ελέγχου Συσσωρευμένου Αθροίσματος.....	42
2.6.1	Διάγραμμα Tabular CUSUM.....	43
2.6.2	Τυποποιημένο διάγραμμα CUSUM.....	44
2.7	Διαγράμματα Ελέγχου Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου.....	44
2.7.1	Διάγραμμα ελέγχου με Κινητούς Μέσους.....	46

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

3.1	Εισαγωγή.....	47
3.2	Ορισμός, Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου.....	48
3.3	Ορολογία και Προβλήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου.....	49
3.4	Μονομεταβλητά Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου.....	51
3.4.1	Διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>Shewhart</i> .....	53
3.4.2	Διαγράμματα ελέγχου Συσσωρευμένου Αθροίσματος.....	65
3.4.3	Διαγράμματα ελέγχου Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου.....	68

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Ένα Νέο Μη Παραμετρικό Διάγραμμα Ελέγχου με χρήση Βαθμολογικής συνάρτησης τύπου Wilcoxon και Κανόνα Ροής

4.1	Εισαγωγή.....	71
4.2	Ο Έλεγχος Wilcoxon.....	72
4.3	Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών.....	73
4.4	Εφαρμογή Κανόνα ροής στο Μη Παραμετρικό Διάγραμμα Ελέγχου των Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009).....	76
4.4.1	Το Διάγραμμα ελέγχου $B-T-K$ .....	77
4.4.2	Αλγόριθμος Προσομοίωσης.....	80
4.5	Απόδοση του Διαγράμματος Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$ .....	84
4.6	Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Διάγραμμα Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$ .....	85
4.7	Σύγκριση του Διαγράμματος Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$ με άλλα ανταγωνιστικά Διαγράμματα.....	87

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Σύνοψη

5.1	Σύνοψη.....	91
-----	-------------	----

Βιβλιογραφία.....	95
-------------------	----

## Κατάλογος Πινάκων

1.1	Οι «πατέρες» της ποιότητας και η προσφορά τους .....	10
1.2	Παράδειγμα Φύλλου Ελέγχου .....	17
3.1	Τιμές άνω ορίου ελέγχου του διαγράμματος SR για καθορισμένο FAR και για δείγματα μεγέθους $n = 4, 5$ και $6$ .....	56
3.2	Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού του διαγράμματος των Janacek και Meikle (1997) .....	60
4.1	Δείγμα αναφοράς και εξεταζόμενα τυχαία δείγματα .....	79
4.2	Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού ( <i>FAR</i> ) για δοσμένες παραμέτρους σχεδιασμού .....	83
4.3	Το μέσο μήκος ροής ( <i>ARL</i> ) του προτεινόμενου διαγράμματος για διαφορετικές μετατοπίσεις του μέσου και αρχική κατανομή $N(0,1)$ ή <i>Γάμμα</i> (3,1) .....	84
4.4	Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού ( <i>FAR</i> ) για δοσμένες παραμέτρους σχεδιασμού .....	86
4.5	Το μέσο μήκος ροής ( <i>ARL<sub>out</sub></i> ) για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή $N(0,1)$ .....	87
4.6	Το μέσο μήκος ροής ( <i>ARL<sub>out</sub></i> ) για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή <i>Γάμμα</i> (3,1) .....	88



## Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Ενεπίγραφή στήλη της Ελευσίνας .....	4
1.2	Οι τρεις επιγραφές της Θάσου .....	5
1.3	Οι φάσεις της Διαδικασίας Παραγωγής .....	12
1.4	Παράδειγμα Διαγράμματος Ελέγχου .....	14
1.5	Παράδειγμα Ιστογράμματος .....	16
1.6	Παράδειγμα Διαγράμματος Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων .....	17
1.7	Παράδειγμα Διαγράμματος Αιτίας-Αποτελέσματος .....	18
1.8	Παράδειγμα Διαγράμματος Pareto .....	19
1.9	Παράδειγμα Διαγράμματος Διασποράς ή Σκεδασμού .....	20
2.1	Τυπικό Διάγραμμα ελέγχου .....	22
2.2	Διάγραμμα Ελέγχου με προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B .....	26
2.3	Διάφοροι τύποι μοτίβων διαγραμμάτων ελέγχου .....	29
3.1	Γραφική απεικόνιση του 1-από-1, 2-από-2 <i>KL</i> και 2-από-2 <i>DR</i> διαγράμματος ελέγχου .....	57
4.1	Γραφική απεικόνιση των διαγραμμάτων ελέγχου 2-από-2 και 2-από-3.....	74
4.2	Γραφική απεικόνιση <i>ARL</i> του προτεινόμενου διαγράμματος για διαφορετικές μετατοπίσεις του μέσου και αρχική κατανομή $N(0,1)$ , <i>Γάμμα</i> (3,1).....	85
4.3	Γραφική απεικόνιση <i>ARL<sub>out</sub></i> - Μετατόπισης για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή $N(0,1)$ .....	89
4.4	Γραφική απεικόνιση <i>ARL<sub>out</sub></i> - Μετατόπισης για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή <i>Γάμμα</i> (3,1) .....	89



## Κατάλογος Συντομογραφιών

<b>α.σ.κ.</b>	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
<b>α.ο.ε. (UCL)</b>	Άνω όριο ελέγχου στο διάγραμμα ελέγχου <i>Upper control limit</i>
<b>κ.ο.ε. (LCL)</b>	Κάτω όριο ελέγχου στο διάγραμμα ελέγχου <i>Lower control limit</i>
<b>κ.ά.</b>	Και άλλα
<b>ΜΣΕΔ (NSPC)</b>	Μη Παραμετρικός Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών <i>Nonparametric Statistical Process Control</i>
<b>π.χ.</b>	Παραδείγματος χάριν
<b>π.Χ.</b>	Προ Χριστού
<b>ΣΕΔ (SPC)</b>	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών <i>Statistical Process Control</i>
<b>τ.μ.</b>	Τυχαία μεταβλητή ή τυχαίες μεταβλητές
<b>AR</b>	Ποσοστό συναγερμού <i>Alarm Rate</i>
<b>ARL</b>	Μέσο Μήκος Ροής <i>Average Run Length</i>
<b>ARL<sub>out</sub></b>	Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής <i>Out of control average run length</i>
<b>ARL<sub>in</sub></b>	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής <i>In control average run length</i>
<b>CL</b>	Κεντρική γραμμή στο διάγραμμα ελέγχου <i>Center line</i>
<b>CUSUM</b>	Συσσωρευμένο άθροισμα <i>Cumulative sum</i>
<b>EWMA</b>	Εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος <i>Exponentially weighted moving average</i>
<b>FAR</b>	Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού <i>False alarm rate</i>

<b>GSR statistic</b>	Ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση <i>Grouped signed- rank statistic</i>
<b>GSR-CUSUM</b>	<i>GSR-CUSUM</i> διάγραμμα βασισμένο στην ομαδοποιημένη Προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση <i>GSR-CUSUM chart based on grouped signed- rank statistic</i>
<b>GSR-EWMA</b>	<i>GSR-EWMA</i> διάγραμμα βασισμένο στην ομαδοποιημένη Προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση <i>GSR-EWMA chart based on grouped signed- rank statistic</i>
<b>HL</b>	<i>Hodges-Lehmann</i>
<b>IC</b>	Διεργασία εντός ελέγχου <i>In-control</i>
<b>LSL</b>	Κάτω όριο προδιαγραφών στο διάγραμμα ελέγχου <i>Lower specification limit</i>
<b>MW</b>	<i>Mann-Whitney</i>
<b>MRL</b>	Διάμεσος του μήκους ροής <i>Median of the run length</i>
<b>OOC</b>	Διεργασία εκτός ελέγχου <i>Out-of-control</i>
<b>RL</b>	Μήκος ροής <i>Run length</i>
<b>SDRL</b>	Τυπική απόκλιση του μήκους ροής <i>Standard deviation of the run length</i>
<b>SL</b>	<i>Shewhart-Lepage</i>
<b>SC</b>	<i>Shewhart-Cucconi</i>
<b>TQM</b>	Διοίκηση Ολικής Ποιότητας <i>Total Quality Management</i>
<b>USL</b>	Άνω όριο προδιαγραφών στο διάγραμμα ελέγχου <i>Upper specification limit</i>
<b>WSR statistic</b>	Προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του <i>Wilcoxon</i> <i>Wilcoxon signed – rank statistic</i>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

### 1.1 Εισαγωγή

Ο ορισμός της ποιότητας είναι διαφορετικός για τον καταναλωτή απ'ότι για τον παραγωγό. Για τον καταναλωτή η έννοια της ποιότητας αναφέρεται στο ενδεχόμενο ότι το προϊόν ή υπηρεσία, σε συνάρτηση με το κόστος αγοράς, εξυπηρέτησης, συντήρησης και αισθητικής, ικανοποιεί τις ανάγκες και τις προσδοκίες του. Ο παραγωγός από την άλλη μεριά με τον όρο ποιότητα, με δεδομένη την αναμενόμενη ζήτηση και το κόστος, απευθύνεται στη δυνατότητα της διαδικασίας της παραγωγής να συμμορφωθεί με τις προδιαγραφές του προϊόντος.

Η σύνθεση των παραπάνω επισημάνσεων οδήγησε στην αναζήτηση επιχειρησιακών τακτικών για την επίτευξη της βέλτιστης δυνατής ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η στρατηγική ή φιλοσοφία που επιζητεί τη συνεχή βελτίωση στην ποιότητα εκτέλεσης όλων των διεργασιών, προϊόντων και υπηρεσιών, σε μια επιχείρηση ονομάζεται Διοίκηση Ολικής Ποιότητας (*Total Quality Management, TQM*).

Στο πλαίσιο της διασφάλισης της ποιότητας, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*), ο οποίος αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Οι κύριοι στόχοι του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων, η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων (Αντζουλάκος (2009)).

### 1.2 Η έννοια της ποιότητας και οι διαστάσεις της

Εκκινώντας με την έννοια της ποιότητας, από ετυμολογικής πλευράς, προέρχεται από τη λατινική λέξη “*qualis*”, που σημαίνει «όπως πραγματικά είναι κάτι» (Dale & Cooper (1992)). Ο όρος «ποιότητα» προκαλεί συχνά σύγχυση διότι ερμηνεύεται με διαφορετικό τρόπο,

ανάλογο με την οπτική γωνία από την οποία παρατηρείται κάθε φορά. Αν και η αξία της ποιότητας κατέχει πρωτεύουσα θέση μέσα στους οργανισμούς και τις επιχειρήσεις, μέχρι σήμερα δεν έχει υπάρξει ένας ενιαίος ορισμός που να έχει γίνει αποδεκτός εξ 'ολοκλήρου από όλους όσους ασχολούνται με τη συγκεκριμένη έννοια. Ορισμένοι από τους πιο γνωστούς και αποδεκτούς ορισμούς της ποιότητας, οι οποίοι προέρχονται από διακεκριμένους ειδικούς στο χώρο της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας, δίνονται ακολούθως.

- «Ποιότητα είναι η ικανοποίηση των αναγκών του πελάτη». Επίσης κατά τον ίδιο θεωρητικό «ποιότητα» συνιστά η μείωση των μεταβολών που παρατηρούνται στις διαδικασίες (Deming (1982)).
- «Ποιότητα είναι η καταλληλότητα προς χρήση (*Fitness for use*)» (Juran (1981)).
- «Ποιότητα είναι η συμμόρφωση του προϊόντος στις απαιτήσεις του πελάτη». (*Conformance to requirements*) (Crosby (1979)).
- «Ποιότητα είναι το σύνολο των χαρακτηριστικών του προϊόντος και των υπηρεσιών, που σχετίζονται με αποτελεσματικές, ολοκληρωμένες τεχνικές και διευθυντικές διαδικασίες, για την καθοδήγηση των συντονισμένων ενεργειών των ανθρώπων, των μηχανών και των πληροφοριών, που θα διασφαλίσουν την ικανοποίηση του πελάτη» (Feigenbaum, Λογοθέτης (1992)).
- «Ποιότητα είναι η απώλεια που προξενεί στην κοινωνία ένα προϊόν ή υπηρεσία από τη στιγμή της αποστολής του» (Taguchi (1982)).

Ένας επίσημος και ταυτόχρονα πολύ περιεκτικός ορισμός περιέχεται στο πρότυπο EN ISO8402 «Διαχείριση της Ποιότητας και Διασφάλιση της Ποιότητας – Λεξιλόγιο», ο οποίος έχει υιοθετηθεί και από τον Ελληνικό Οργανισμό Τυποποίησης (ΕΛ.Ο.Τ.). Ορίζεται λοιπόν ως ποιότητα το σύνολο των χαρακτηριστικών μιας οντότητας που της αποδίδουν την ικανότητα να ικανοποιεί εκφρασμένες και συνεπαγόμενες ανάγκες (Στεφανάτος (2000)).

Έχει δοθεί και ένας πιο μοντέρνος ορισμός, σύμφωνα με τον οποίο η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της ανεπιθύμητης μεταβλητότητας.

Η πλειονότητα των ορισμών για την ποιότητα ώθησαν τον Garvin (1987) στον καθορισμό οκτώ διαστάσεων της ποιότητας, οι οποίες συνοπτικά περιγράφονται ακολούθως:

1. απόδοση (*performance*): το προϊόν κάνει τη δουλειά για την οποία προορίζεται; Κάνει τη δουλειά καλύτερα από άλλα ομοειδή προϊόντα;
2. ιδιαίτερα/δευτερεύοντα χαρακτηριστικά (*features*): ποιες είναι οι επιπρόσθετες δυνατότητες του προϊόντος;

3. συμμόρφωση στις προδιαγραφές (*conformance to standards*): το προϊόν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε ο σχεδιαστής του;
4. αξιοπιστία (*reliability*): το προϊόν χρειάζεται συχνή επισκευή;
5. ανθεκτικότητα στο χρόνο και τη χρήση (*durability*): η διάρκεια ζωής του προϊόντος είναι μεγάλη;
6. δυνατότητα και χαρακτηριστικά υποστήριξης (*serviceability*): πόσο γρήγορη και οικονομική είναι η επισκευή του προϊόντος στην περίπτωση που εμφανιστεί βλάβη;
7. αισθητική (*aesthetics*): πόσο ικανοποιητικό είναι από άποψη εμφάνισης (χρώμα, σχήμα, περιτύλιγμα, κτλ.) το προϊόν;
8. διαισθητική/υποκειμενική ποιότητα (*perceived quality*): ποια είναι η φήμη της εταιρείας, καλή ή κακή;

Οι διαστάσεις αυτές, βάσει των οποίων ο καταναλωτής αξιολογεί τα προϊόντα, καθορίζουν την τελική ποιότητα ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας και σχετίζονται με την ποιότητα σχεδιασμού μιας διαδικασίας παραγωγής προϊόντος. Ανάλογα με τις προτεραιότητες κάθε επιχείρησης, δίνεται έμφαση στον έλεγχο ποιότητας των αντίστοιχων διαστάσεων ποιότητας.

### 1.3 Ιστορική αναδρομή

Η έννοια της ποιότητας δεν αποτελεί πρόσφατη αναζήτηση. Αναζήτηση ανθρώπινη, από τους αρχαίους χρόνους ήταν συνώνυμη με την αρετή, τη συνεχή βελτίωση, το "αίεν αριστεύειν". Οι ρίζες της, όπως αποδεικνύεται από τα κείμενα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας και τις ενεπίγραφες στήλες φθάνουν βαθιά στη αρχαιότητα. Στην Αρχαία Ελλάδα λειτουργούσε ένας μηχανισμός ελέγχου της ποιότητας και πιστοποίησης, όλων των τότε παραγόμενων και προσφερόμενων προϊόντων, τόσο στον τόπο παραγωγής τους όσο και στην αγορά. Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι τα χρησιμοποιούμενα πρότυπα, κάλυπταν όλο το φάσμα των προϊόντων, από τα μέταλλα και τα κράματά τους μέχρι και τα γεωργικά προϊόντα, τρόφιμα και ποτά, όπως ο άκρατος οίνος, το ελαιόλαδο, το σιτάρι, το κριθάρι κ.ά.

Η ανακάλυψη στην Ελευσίνα της ενεπίγραφης στήλης του 4ου αιώνα π.Χ. (βλ. Σχήμα 1.1), απέδειξε την ύπαρξη του αρχαιότερου ευρωπαϊκού προτύπου που είναι χαραγμένο σε μαρμάρινη πλάκα και δίνει τεχνικές και χημικές προδιαγραφές για τη σύνθεση των ορειχάλκινων συνδέσμων πόλων και εμπολίων των κίωνων της Φιλώνειας Στοάς, ενός κτίσματος που θα αναγειρόταν μπροστά στο Τελεστήριο της Ελευσίνας. Το πρότυπο αυτό

βρίσκεται πολύ κοντά στη σημερινή αντίληψη περί προτύπου (Παπαργύρης και Παπαργύρης (2010)).



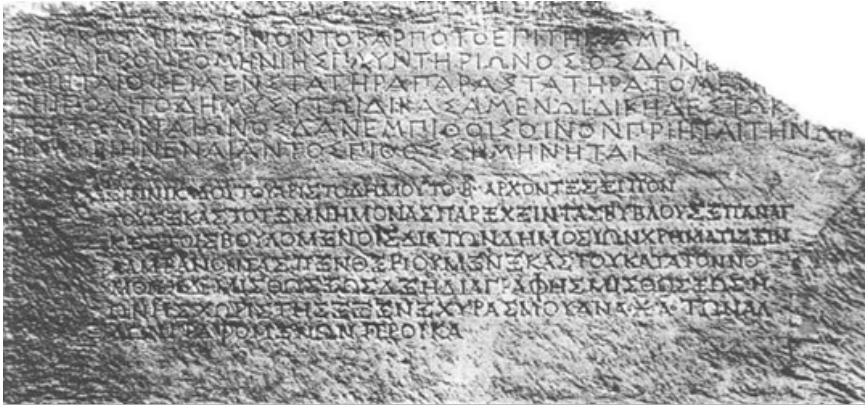
Σχήμα 1.1 Ενεπίγραφή στήλη της Ελευσίνας

Δύο αιώνες αργότερα, η περίφημη φράση «Εύρηκα» του Αρχιμήδη (287 π.Χ.-212 π.Χ.) αφορούσε μια φυσική αρχή που ανακάλυψε στην προσπάθεια του να βρει μια μέθοδο ελέγχου της ποιότητας (γνήσιος χρυσός ή όχι) για την κορώνα που είχε παραγγείλει ο βασιλιάς των Συρακουσών σε χρυσοχόο τον οποίο υποπτευόταν ότι νόθευε το χρυσάφι με χαλκό.

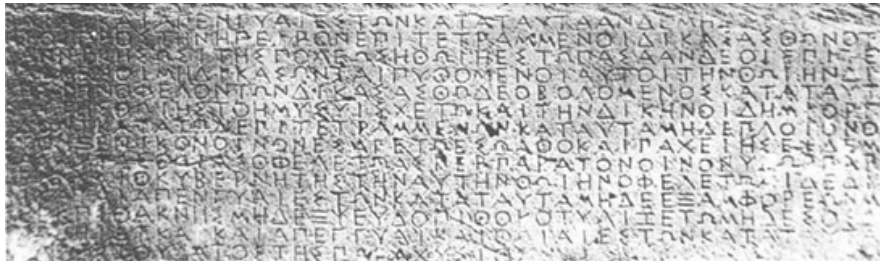
Παράδειγμα εφαρμογής του ποιοτικού ελέγχου στα τρόφιμα, αποτελούν οι σωζόμενες τρεις επιγραφές της Θάσου του 4ου αιώνα π.Χ. (βλ. Σχήμα 1.2), χαραγμένες σε μαρμάρινες πλάκες, οι οποίες αποτελούσαν νόμους-οδηγίες και πρότυπα τα οποία καθόριζαν το εμπόριο και τη διακίνηση του οίνου και έκαναν λόγο για την ύπαρξη του ελέγχου και της πιστοποίησης της ποιότητάς του. Σε μια από αυτές αναφέρεται, μεταξύ άλλων: για όποιον αγοράζει κρασί σε πιθάρια, η αγορά θα είναι έγκυρη μόνον εάν τα πιθάρια έχουν σημανθεί, δηλαδή μόνον εάν φέρουν κατάλληλο σήμα (πιθανόν σφραγίδα) που να δηλώνει την ποιότητα και τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου σ' αυτά κρασιού (Πρασιανάκης (2016)).



(α)



(β)



(γ)

**Σχήμα 1.2** Οι τρεις επιγραφές της Θάσου

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Αριστοτέλης στο έργο του *Αθηναίων Πολιτεία* αναφέρει ότι η Πολιτεία όριζε με κλήρο δέκα Αγορανόμους, που έπρεπε να επιβλέπουν τα διακινούμενα στην αγορά αγαθά ώστε να είναι "καθαρά και ακίβδηλα", δηλαδή να τηρούν τους όρους της υγιεινής και να είναι ανόθευτα. Στις περιπτώσεις νοθείας επιβάλλονταν αυστηρά πρόστιμα τόσο στον παραγωγό όσο και στον έμπορο. Υπήρχαν, επίσης δέκα Μετρονόμοι που ήταν υπεύθυνοι για όλα τα μέτρα και τα σταθμά που χρησιμοποιούνταν στην αγορά και όφειλαν να μεριμνούν ώστε να ανταποκρίνονται στα πρότυπα μέτρα και σταθμά, που φυλάσσονταν στην Θόλο, ένα κτίριο της Αρχαίας Αγοράς. Τέλος, υπήρχαν και οι Σιτοφύλακες, δεκαπέντε στον Πειραιά και είκοσι στην Αθήνα, ορισμένοι πάντα από την Πολιτεία με κλήρο, οι οποίοι

έπρεπε να ελέγχουν ποιοτικά το σιτάρι και το κριθάρι πριν σταλούν για άλεσμα. Όφειλαν επίσης να ελέγχουν τους αρτοπώλες ώστε ο πωλούμενος άρτος να έχει το προβλεπόμενο από το νόμο βάρος (Βαρουφάκης (1996) και Camp (2004)).

Ο Έλεγχος Ποιότητας, συνεχίζει να εξελίσσεται δια μέσου των αιώνων. Το 1875 ο Frederick Taylor εισήγαγε την έννοια «Επιστημονική Διαχείριση» (*Scientific Management*), σύμφωνα με την οποία οι εργαζόμενοι οπωσδήποτε θα έκαναν λάθη, αλλά οι επιθεωρητές στο τέλος της γραμμής παραγωγής θα έπρεπε να εντοπίζουν τα ελαττωματικά προϊόντα πριν αυτά φύγουν από το εργοστάσιο και η πληρωμή των εργατών θα χαμήλωνε για κάθε κομμάτι που θα έπρεπε να καταστραφεί ή να ανακατασκευαστεί. Αν ένας εργαζόμενος παρήγαγε πολλά ελαττωματικά προϊόντα τότε τον απέλυαν (Montgomery (2009)).

Αυτή η φιλοσοφία της διοίκησης ταίριαζε ικανοποιητικά στις διαδικασίες της γραμμής συναρμολόγησης που αναπτύχθηκε από τον Henry Ford και εφαρμόστηκε σε όλη την Αμερική τόσο στον ιδιωτικό όσο και στο δημόσιο τομέα. Η φιλοσοφία του Taylor επίσης, διευκόλυνε τα κύματα των μεταναστών (πολλοί από τους οποίους δεν μπορούσαν να διαβάσουν, να γράψουν, να μιλήσουν αγγλικά, ή συχνά ακόμη και να επικοινωνήσουν μεταξύ τους), να βρουν δουλειά στα αμερικανικά εργοστάσια.

Ο William Edwards Deming, Αμερικανός φυσικός, εργαζόταν στην Ηλεκτρική Εταιρεία του Σικάγο (*Western Electric's Hawthorne plant*), στα τέλη της δεκαετίας του '20. Στη Hawthorne (σε ευθυγράμμιση με το μοντέλο του Taylor), οι εργαζόμενοι πληρώνονταν σύμφωνα με τον αριθμό των κομματιών που παρήγαγαν κάθε μέρα. Η ποιότητα της δουλειάς δεν ήταν μέλημα των εργαζομένων.

Αργότερα, στα εργαστήρια της Bell στο New Jersey, ο Deming συνάντησε τον Walter A. Shewhart, έναν Στατιστικό ο οποίος ήταν ο καθοδηγητής των προσπαθειών της εταιρείας για την βελτίωση της αξιοπιστίας των τηλεφώνων. Ο Shewhart είχε αναπτύξει μια μεθοδολογία για να βελτιώσει την απόδοση των εργατών και το αποτέλεσμα της παραγωγής, μετρώντας το ποσοστό στο οποίο τα αντικείμενα που παράγονται, είναι μέσα στα αποδεκτά όρια της διαφοροποίησης. Η μέθοδος του Shewhart δείχνει αυτή τη διαφοροποίηση γραφικά και την ονόμασε διάγραμμα στατιστικού ελέγχου (*Statistical Control chart*). Την ανακάλυψή του αυτή τη μοιράστηκε με τον Deming, τον νεαρό προστατευόμενό του.

Ο Deming κατάλαβε ότι με κατάλληλη εκπαίδευση οι εργαζόμενοι είχαν τη δυνατότητα να κρατούν ο καθένας προσωπικά, κάρτες ελέγχου για τη δουλειά τους και έτσι να ελέγξουν την ποιότητα των αντικειμένων που στέλνουν στη γραμμή παραγωγής. Πίστευε, ότι οι

εργαζόμενοι πρέπει να επιμορφώνονται και να ενισχύονται έτσι ώστε να διαχειρίζονται τις διαδικασίες της δικής τους δουλειάς, με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ποιότητας του δικού τους αποτελέσματος. Με τον τρόπο αυτό η ακριβή και αναποτελεσματική επιθεώρηση στο τέλος της γραμμής παραγωγής θα μπορούσε να περιορισθεί ή και να εξαλειφθεί. Η υψηλή ποιότητα θα μπορούσε να καταστήσει το προϊόν φθηνότερο και όχι ακριβότερο.

Ο Shewhart επιπλέον έδειξε στον Deming μια κυκλική διαδικασία με τρία βήματα ώστε να επιβεβαιώνεται ευκολότερα η ολοένα και καλύτερης ποιότητας παραγωγή. Ο κύκλος του Shewhart, Προσδιορισμός χαρακτηριστικών – Παραγωγή – Επιθεώρηση (*Specification – Production – Inspection*), αναδείκνυε τον έλεγχο σε μια διαδικασία γένεσης αναθεωρημένων προδιαγραφών, καταργώντας το ρόλο του ως μηχανισμού προορισμένου για το τέλος της γραμμής παραγωγής. Ο Deming αργότερα τροποποίησε αυτό τον κύκλο των τριών βημάτων σε τέσσερα βήματα, που τώρα ονομάζεται κύκλος του Deming ή αλλιώς PDSA (*Plan-Do-Study-Act*) Cycle (αν και ο Deming πάντοτε αναφέρεται σε αυτόν ως κύκλο του Shewhart προς τιμήν του μέντορά του). Εφαρμόζοντας τις ιδέες του Shewhart σύμφωνα με την μέθοδο του Deming, οι Αμερικανοί κατασκευαστές μπορούσαν να παράγουν πολεμικό υλικό υψηλής ποιότητας.

Κατά τη διάρκεια του πολέμου, οι στατιστικές μέθοδοι για τον έλεγχο και τη βελτίωση της ποιότητας ενός προϊόντος κρίθηκαν απαραίτητες λόγω της έλλειψης εξειδικευμένου προσωπικού στον τομέα της παραγωγής. Ως αποτέλεσμα, το 1946 συστάθηκε η Αμερικανική Εταιρεία Ελέγχου Ποιότητας (*American Society for Quality Control, ASQC*), η οποία προωθούσε τη χρήση μεθόδων βελτίωσης της ποιότητας για όλα τα είδη των προϊόντων και των υπηρεσιών. Επίσης, προσέφερε συνέδρια και δημοσιεύσεις σε τεχνικά θέματα και εκπαιδευτικά προγράμματα στην πιστοποίηση της ποιότητας. Την ίδια χρονιά, το Τμήμα Οικονομικών και Επιστημονικών Υπηρεσιών του Αμερικανικού Τομέα Πολέμου (*Economic and Scientific Services Section of U.S. War Department*) κάλεσε τον Deming στην Ιαπωνία για να βοηθήσει τις δυνάμεις κατοχής να ξαναχτίσουν την ιαπωνική βιομηχανία. Επίσης, το 1946, μια ομάδα Ιαπώνων βιομηχάνων ίδρυσε ένα νέο οργανισμό, την Ένωση Ιαπώνων Επιστημόνων και Μηχανικών (*JUSE*), με σκοπό τη βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων της Ιαπωνικής βιομηχανίας. Κατά τη διάρκεια της περιόδου 1946-1949, ο Deming έδινε σεμινάρια Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στην ιαπωνική βιομηχανία. Εν τω μεταξύ, το 1948, ο G. Taguchi, αρχίζει τη μελέτη του Σχεδιασμού Πειραμάτων και τις εφαρμογές τους.

Το 1950 ο K. Ishikawa εισήγαγε το Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (*Cause and Effect Diagram*). Το 1951 ο A.V. Feigenbaum, που ήταν βασικό στέλεχος στον τομέα της ποιότητας στην General Electric, εξέδωσε την πρώτη έκδοση του βιβλίου του «*Total Quality Control*» και η Ιαπωνική Ένωση Επιστημόνων και Μηχανικών (*JUSE*) καθιέρωσε το βραβείο Deming (*Deming Prize*) για επιβράβευση σημαντικών επιτευγμάτων στον Έλεγχο Ποιότητας και τη μεθοδολογία του. Το 1954, η JUSE απηύθυνε μια πρόσκληση για διαλέξεις σε ένα άλλο Αμερικανό Στατιστικό, τον Joseph M. Juran και ο Βρετανός Στατιστικός E.S. Page (1954) εισήγαγε τα Διαγράμματα Συσσωρευμένου Αθροίσματος CUSUM (*Cumulative Sum*). Το 1957 εκδόθηκε το βιβλίο των J.M. Juran και F.M. Gryna με τίτλο «*Quality Control Handbook*» και το 1959, εισήχθησαν τα διαγράμματα EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) από τον S. Roberts (1959).

Το 1960, οι G.E.P. Box και J.S. Hunter (1961) έγραψαν μία θεμελιώδη εργασία για τους  $2^{k-p}$  παραγοντικούς σχεδιασμούς και ο K. Ishikawa εισήγαγε την έννοια του Κύκλου της Ποιότητας Ελέγχου (*Quality Control Circle*) στην Ιαπωνία. Ένα χρόνο αργότερα, σχηματίστηκε στη Μεγάλη Βρετανία το Εθνικό Συμβούλιο Ποιότητας και Παραγωγικότητας (*National Council for Quality and Productivity*) ως μέρος του Βρετανικού Συμβουλίου Παραγωγικότητας (*British Productivity Council*). Το 1969, αρχίζουν να εκδίδονται τα περιοδικά “*Quality Process*” και το “*Journal of Quality Technology*”. Γενικότερα, τη δεκαετία του 1960, εισήχθησαν μαθήματα Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας σε Πανεπιστημιακά προγράμματα βιομηχανικής Μηχανικής (*Industrial Engineering Academic Programs*).

Τη δεκαετία του 1970, ιδρύθηκε ο Βρετανικός Σύνδεσμος Ποιότητας (*British Quality Association*). Μεταξύ 1975 και 1978, άρχισαν να εμφανίζονται βιβλία με θέμα τον Σχεδιασμό Πειραμάτων που απευθύνονταν σε μηχανικούς και άλλους επιστήμονες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη της φιλοσοφίας της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας (*Total Quality Management, TQM*).

Τη δεκαετία 1980-1990, εισήχθησαν μέθοδοι Πειραματικών Σχεδιασμών και υιοθετήθηκαν από ένα ευρύ σύνολο οργανισμών που περιλάμβανε βιομηχανίες στον κλάδο των ηλεκτρονικών, της αεροδιαστημικής, των ημιαγωγών και των αυτοκινήτων. Επίσης, για πρώτη φορά εμφανίστηκαν στις Η.Π.Α. εργασίες και μελέτες του G. Taguchi με θέμα τον Σχεδιασμό Πειραμάτων. Το 1984, η Αμερικανική Στατιστική Ένωση (*American Statistical Association, ASA*) καθιέρωσε μία επιτροπή για την Ποιότητα και την Παραγωγικότητα (*Ad*



Hoc Committee on Quality and Productivity), η οποία αργότερα εξελίχθηκε σε ολόκληρο τομέα της ASA. Δύο χρόνια αργότερα, ο G.E.P. Box και άλλοι επιστήμονες επισκέφθηκαν την Ιαπωνία με σκοπό να τονίσουν τη χρησιμότητα των Πειραματικών Σχεδιασμών και άλλων στατιστικών μεθόδων. Το 1988, το Κογκρέσο των Ηνωμένων Πολιτειών καθιέρωσε το Εθνικό Βραβείο Ποιότητας “Malcolm Baldrige”.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1990, η Motorola εφάρμοσε το πρόγραμμα ποιότητας «έξι - σίγμα» (six-sigma), το οποίο άρχισε σιγά σιγά να διαδίδεται και σε άλλες βιομηχανίες. Επίσης, καθιερώθηκαν διάφορα Πρότυπα Ποιότητας, όπως για παράδειγμα το ISO 9000 της βιομηχανίας των Η.Π.Α.. Παράλληλα, παρατηρήθηκε σταθερή αύξηση των αιτούντων για το βραβείο ποιότητας “Malcolm Baldrige” και πολλές Πολιτείες των Η.Π.Α. βασίστηκαν στα κριτήρια του βραβείου αυτού για να υποστηρίξουν τα δικά τους βραβεία ποιότητας. Την ίδια περίοδο, οι στατιστικές τεχνικές, με έμφαση στα Διαγράμματα Ελέγχου και τον Σχεδιασμό Πειραμάτων, άρχισαν να γίνονται μέρος της βασικής εκπαίδευσης πολλών προπτυχιακών προγραμμάτων Μηχανικής. Επιπλέον, δημιουργήθηκαν απλά εργαλεία που εφαρμόστηκαν στη βιομηχανία και αναπτύχθηκαν διαγνωστικά εργαλεία για την ταχεία ταυτοποίηση της φύσης οποιουδήποτε σφάλματος. Δε θα πρέπει να παραλείψουμε ότι το 1997 η Αμερικανική Εταιρεία Ελέγχου Ποιότητας (*American Society for Quality Control, ASQC*) μετονομάστηκε σε Αμερικανική Εταιρεία Ποιότητας (*American Society for Quality, ASQ*).

Δέκα χρόνια, μετά την καθιέρωση Προτύπων ποιότητας, δηλαδή το 2000, γίνεται η δεύτερη αναθεώρηση της σειράς Προτύπων ISO 9000. Σε αυτή την δεκαετία οι διεργασίες βελτίωσης της ποιότητας επεκτείνονται και σε άλλους τομείς εκτός της βιομηχανίας συμπεριλαμβάνοντας μεταξύ άλλων τους τομείς της υγείας, της ασφάλειας και οικονομικές υπηρεσίες.

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αναπτύχθηκε ραγδαία τις τελευταίες δεκαετίες και η χρήση των μεθόδων του επεκτάθηκε σχεδόν σε όλο το φάσμα της βιομηχανίας. Σε αυτό βέβαια, βοήθησε και η ανάπτυξη της τεχνολογίας. Όπως αναφέρει και ο Ishikawa (1989), η καλή ποιότητα δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί χωρίς την κατάλληλη τεχνολογία.

## 1.4 Διοίκηση Ολικής Ποιότητας

Η Διοίκηση Ολικής Ποιότητας είναι μια φιλοσοφία, μια ολοκληρωμένη οργανωτική προσπάθεια που αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας σε κάθε επίπεδο. Στον Πίνακα 1.1

αναφέρονται οι «πατέρες» ή «γκουρού» της βελτίωσης της ποιότητας και η προσφορά τους στην εφαρμογή της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας, οι οποίοι την διαμόρφωσαν και οδήγησαν στην εξέλιξή της (Reid and Sanders (2010)).

**Πίνακας 1.1** Οι «πατέρες» της ποιότητας και η προσφορά τους (Reid and Sanders (2010))

Walter A. Shewhart	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Συνέβαλε στην κατανόηση της μεταβλητότητας των διεργασιών</li> <li>- Ανέπτυξε τη θεωρία των Στατιστικών Διαγραμμάτων Ελέγχου</li> </ul>
William E. Deming	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Τόνισε την ευθύνη της διοίκησης για την ποιότητα</li> <li>- Ανέπτυξε τα “14 σημεία” ώστε να κατευθύνει τις επιχειρήσεις στη βελτίωση της ποιότητας</li> </ul>
Joseph M. Juran	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Όρισε την ποιότητα ως “καταλληλότητα για χρήση” (<i>fitness for use</i>)</li> <li>- Ανέπτυξε την έννοια του κόστους ποιότητας</li> </ul>
Armand V. Feigenbaum	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Εισηγάγε την έννοια του συνολικού ποιοτικού ελέγχου</li> </ul>
Philip B. Crosby	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Επινόησε τη φράση “η ποιότητα είναι δωρεάν”</li> <li>- Εισηγάγε τη θεωρία των μηδενικών ελαττωμάτων</li> </ul>
Kaoru Ishikawa	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Αναγνώρισε την έννοια του “εσωτερικού πελάτη” (internal customer)</li> <li>- Ανέπτυξε τα διαγράμματα Αιτίου- Αποτελέσματος (cause-and-effect).</li> </ul>
Genichi Taguchi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Εστίασε στην ποιότητα του σχεδιασμού των προϊόντων</li> <li>- Ανέπτυξε τη συνάρτηση απώλειας της ποιότητας</li> </ul>

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό γνώρισμα της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας είναι η εστίαση της εταιρείας στους πελάτες της. Στόχος της είναι πρώτα να προσδιοριστούν οι ανάγκες των πελατών και στη συνέχεια να καλυφτούν. Η Διοίκηση Ολικής Ποιότητας αναγνωρίζει ότι ένα απόλυτα τέλειο προϊόν έχει μικρή αξία, αν δεν είναι αυτό που θέλει ο πελάτης. Ως εκ τούτου, μπορούμε να πούμε ότι η ποιότητα οδηγείται από τον πελάτη. Δεν είναι όμως πάντοτε εύκολο να καθοριστεί τι ακριβώς θέλει ένας πελάτης, επειδή τα γούστα και οι προτιμήσεις μεταξύ των πελατών διαφέρουν. Ένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα της

φιλοσοφίας της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας είναι η έμφαση στη συνεχή βελτίωση (*kaizen* όπως ονομάζεται από τους Ιάπωνες). Τα παραδοσιακά συστήματα λειτουργούσαν με βάση την υπόθεση ότι μόλις μια εταιρία επιτύχει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ποιότητας και είναι επιτυχής τότε δε χρειάζονται περαιτέρω βελτιώσεις. Η Διοίκηση Ολικής Ποιότητας απαιτεί από την εταιρεία να προσπαθεί συνεχώς να είναι καλύτερη μέσω της μάθησης και της επίλυσης προβλημάτων.

Για την επίλυση των θεμάτων που μελετά η Διοίκηση Ολικής Ποιότητας απαιτούνται ειδικά εργαλεία που βοηθούν στη λήψη σωστών αποφάσεων. Μερικά από αυτά τα εργαλεία προέρχονται από την περιοχή της Στατιστικής και χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση ποιοτικών προβλημάτων στις διεργασίες παραγωγής προϊόντων ή παροχής υπηρεσιών. Ο όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει το σύνολο των στατιστικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται από τους Μηχανικούς Ποιότητας ονομάζεται Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.

### **1.5 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας: οι βασικές κατηγορίες**

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των διεργασιών παραγωγής προϊόντων είναι η ύπαρξη φυσικής μεταβλητότητας (*natural variability*). Εκείνο που διαφοροποιεί τις διεργασίες ως προς την ποιότητα τους είναι η παρουσία της μεταβλητότητας και το μέγεθος της. Η φυσική μεταβλητότητα οφείλεται σε πολλούς παράγοντες που είναι αδύνατο να απαλειφθούν (π.χ. αλλαγές του εξωτερικού περιβάλλοντος, μικρές διαφοροποιήσεις μιας φυσικής πρώτης ύλης), και οι οποίοι ονομάζονται τυχαίες ή κοινές αιτίες (*random or common causes*). Η μεταβλητότητα αυξάνεται εξαιτίας της εμφάνισης και επίδρασης πρόσθετων παραγόντων που ονομάζονται συστηματικές ή ειδικές αιτίες (*assignable or special causes*). Οι συστηματικές αιτίες οφείλονται συνήθως σε μηχανικές ή ηλεκτρικές βλάβες, ελαττωματικές πρώτες ύλες και ανθρώπινα σφάλματα κατά τη ρύθμιση των μηχανών ή την εκτέλεση των εργασιών. Σε αντίθεση με τις τυχαίες αιτίες, οι συστηματικές αιτίες είναι δυνατόν να απαλειφθούν μετά από κατάλληλη διορθωτική παρέμβαση. Όταν μια διεργασία είναι απαλλαγμένη από την παρουσία και την επίδραση συστηματικών αιτιών, λέγεται ότι βρίσκεται σε κατάσταση ελέγχου (*in control, IC*) ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*). Σε αντίθετη περίπτωση, η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου (*out-of-control, OOC*).

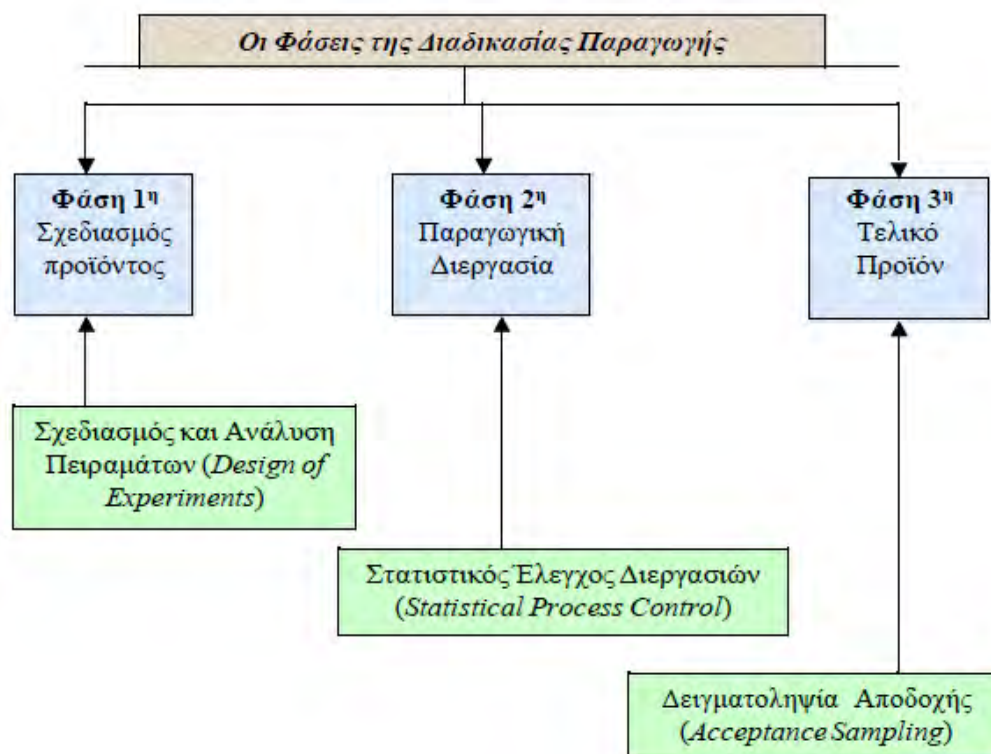
Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*) ορίζεται ως η χρήση στατιστικών μεθόδων στον έλεγχο και στη βελτίωση της ποιότητας στη βιομηχανική

παραγωγή (Burr (1976)). Συνεπώς, ο όρος Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας περιγράφει ένα σύνολο από στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να εντοπίσουν και να διαχειριστούν προβλήματα ποιότητας τόσο στην παραγωγική διαδικασία όσο και στο ίδιο το προϊόν (Reid and Sanders (2010)). Στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας είναι αφενός μεν να αναγνωρίζει και να θέτει εκτός διεργασίας τις συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας και αφετέρου να βελτιώνει τη διεργασία με μείωση της μεταβλητότητας των τυχαίων αιτίων, εξασφαλίζοντας έτσι την ποιότητα των διεργασιών.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, σύμφωνα με τον Montgomery (2009), μπορεί να χωριστεί στις επόμενες τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments),
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control, SPC),
- Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling).

Κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες αντιστοιχεί σε διαφορετική φάση της Παραγωγικής Διαδικασίας (βλ. Σχήμα 1.3): Σχεδιασμός Προϊόντος, Παραγωγική Διεργασία και Τελικό Προϊόν αντίστοιχα (Αντζουλάκος (2009)).



**Σχήμα 1.3** Οι φάσεις της Διαδικασίας Παραγωγής

## 1.6 Τα 7 Κυριότερα Εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ, *Statistical Process Control*) περιλαμβάνει διάφορα χρήσιμα στατιστικά εργαλεία για τον έλεγχο ποιότητας μιας διεργασίας, για την οποία είναι δυνατόν να υπάρξουν αριθμητικά δεδομένα είτε αυτή είναι παραγωγική διαδικασία είτε οικονομική λειτουργία, όπως προμήθειες, πωλήσεις ή διανομή. Χρησιμοποιεί στατιστικές μεθόδους για τον εντοπισμό και τον έλεγχο των συστηματικών αιτιών μεταβολής μιας διεργασίας, ώστε να προβλέψει σημαντικές αποκλίσεις, οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε μη συμμορφούμενα προϊόντα. Θεωρείται ως η σημαντικότερη μέθοδος Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας και έχει μελετηθεί εκτενώς.

Ο ΣΕΔ βασίζεται στον έλεγχο των λειτουργιών της παραγωγής και όχι στον έλεγχο του τελικού προϊόντος, με στόχο τη διασφάλιση της ποιότητας του προϊόντος πριν από τον τελικό έλεγχό του και την αποφυγή αυστηρών τελικών επιθεωρήσεων που αυξάνουν το κόστος ελέγχου ποιότητας. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του είναι η σταθεροποίηση της παραγωγής μέσα στα επιθυμητά όρια, έτσι ώστε να υπάρχει η απαιτούμενη ομοιομορφία στα παραγόμενα προϊόντα και η πρόληψη των λαθών της παραγωγικής διαδικασίας ώστε να αποφεύγεται ή τουλάχιστον να περιορίζεται η παραγωγή ελαττωματικών προϊόντων.

Το πιο σημαντικό από τα εργαλεία του ΣΕΔ είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου (*Control Chart*). Ο κύριος σκοπός τους είναι να ανιχνεύσουν τις βασικές αλλαγές καθώς και άλλες μη τυχαίες συμπεριφορές των δεδομένων, που μπορεί να σημαίνουν ότι μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου και απαιτείται η εφαρμογή διορθωτικών ενεργειών. Εκτός από τα Διαγράμματα Ελέγχου, άλλα σημαντικά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί για να βοηθήσουν τους οργανισμούς να κατανοήσουν καλύτερα και να βελτιώσουν τις διεργασίες τους, είναι τα εξής: το Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*), το Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (*Cause-and-Effect Sheet*), το Διάγραμμα Pareto (*Pareto Chart*), το Διάγραμμα Σκεδασμού (*Scatter Diagram*), το Ιστόγραμμα ή Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων (*Histogram or Stem-and-Leaf Plot*) και το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*). Όλα αυτά μαζί αποτελούν τα 7 σημαντικότερα εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασίας, γνωστά ως “*The magnificent 7*” (Snee (1990)). Εκτός των παραπάνω, έχουν αναπτυχθεί διαγράμματα τα οποία απευθύνονται σε πολυμεταβλητές διεργασίες, οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία σήμερα λόγω της αυξημένης πολυπλοκότητας των διεργασιών, με τα πολυμεταβλητά *Shewhart*, το Πολυμεταβλητό διάγραμμα Συσσωρευτικού Αθροίσματος (*Multivariate Cumulative Sum, MCUSUM*) και το Πολυμεταβλητό διάγραμμα Εκθετικά σταθμισμένου

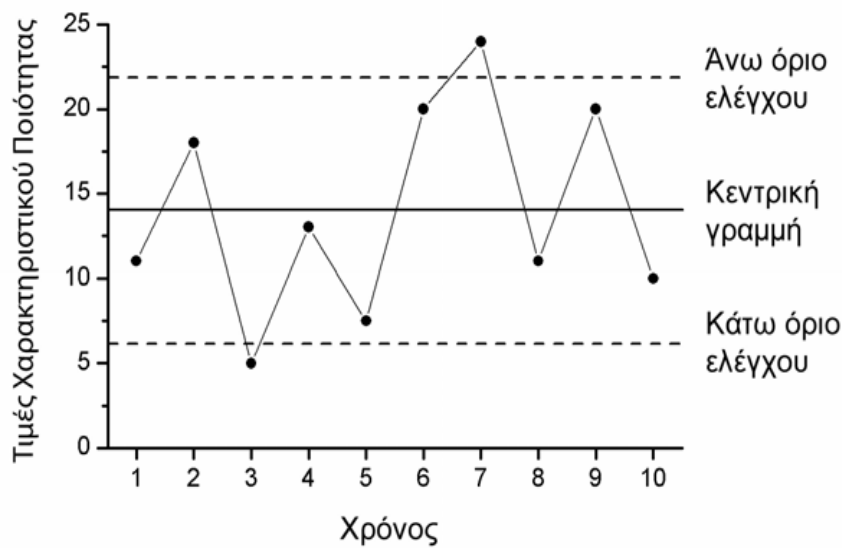
κινουμένου μέσου (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average, MEWMA*) διαγράμματα, να είναι τα σημαντικότερα αυτών (Mason and Young (2002)).

### 1.6.1 Διάγραμμα Ελέγχου

Τα Διαγράμματα Ελέγχου (*Control Chart*) δείχνουν τη μεταβολή μιας μέτρησης στο χρόνο. Τα σημεία μέτρησης απεικονίζονται σε ένα X-Y επίπεδο, με τον άξονα X να αντιπροσωπεύει συνήθως το χρόνο. Σκοπός των Διαγραμμάτων Ελέγχου είναι να δείξουν πότε μια διαδικασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου. Το Διάγραμμα Ελέγχου *Shewhart* είναι το πιο γνωστό Διάγραμμα Ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της κατανομής (συνήθως κανονική κατανομή) ενός χαρακτηριστικού των προϊόντων που παράγονται από μια παραγωγική διεργασία.

Για την περιγραφή του τρόπου κατασκευής και λειτουργίας ενός διαγράμματος ελέγχου, ας υποθέσουμε ότι σε μια παραγωγική διαδικασία ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X των προϊόντων που εξάγονται. Για το σκοπό αυτό λαμβάνουμε τυχαία δείγματα του προϊόντος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις αυτές, υπολογίζουμε την τιμή μιας κατάλληλα επιλεγμένης στατιστικής συνάρτησης που εκτιμά την υπό μελέτη κρίσιμη ποσότητα. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική παράσταση της στατιστικής συνάρτησης που έχει μετρηθεί ή υπολογισθεί με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος, έναντι του αύξοντα αριθμού του δείγματος αυτού.

Το Σχήμα 1.4 δείχνει ένα παράδειγμα ενός τυπικού Διαγράμματος Ελέγχου. Στο σχήμα, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές του χαρακτηριστικού ποιότητας που παρακολουθείται και οι οποίες έχουν παρασταθεί με σημεία τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) των τιμών του χαρακτηριστικού ποιότητας, όπως αυτή προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας ή την τιμή στόχο του προϊόντος. Οι δύο ακραίες γραμμές ονομάζονται “άνω” και “κάτω” όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*).



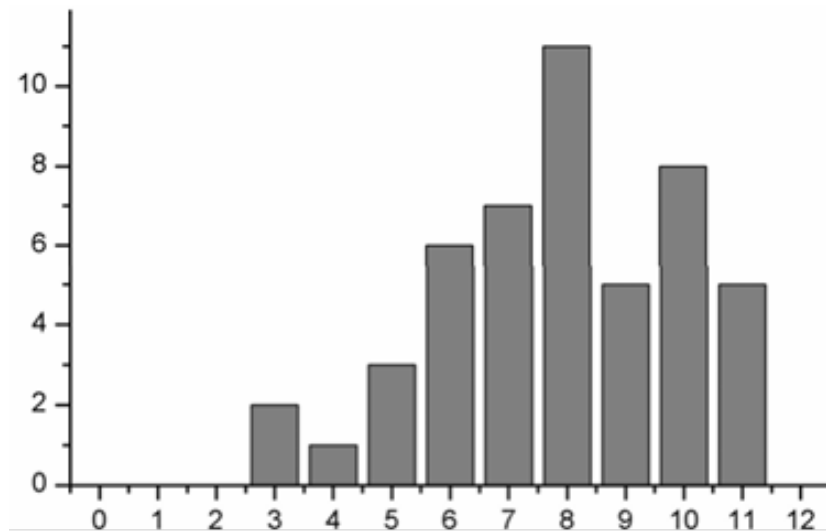
Σχήμα 1.4 Παράδειγμα Διαγράμματος Ελέγχου (*Control Chart*)

Όσο οι τιμές του χαρακτηριστικού ποιότητας εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία”, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δε χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, οπότε αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού (*alarm*) και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και, αν κριθεί απαραίτητο, να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

### 1.6.2 Ιστόγραμμα ή Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων

Το Ιστόγραμμα ή Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων (*Histogram or Stem-and-Leaf Plot*) είναι ένα εξειδικευμένο είδος ραβδογραμμάτων. Απεικονίζει γραφικά τη συχνότητα συγκεκριμένου μεγέθους, με σκοπό την αναγνώριση της κατανομής και διασποράς των τιμών του μεγέθους αυτού. Η μορφή του ιστογράμματος μιας σειράς δεδομένων μπορεί να μας δώσει ενδιαφέρουσες πληροφορίες για αυτά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα Ιστογράμματος είναι αυτό του Σχήματος 1.5. Για παράδειγμα, στις μετρήσεις ενός δείγματος όπου ελέγχεται η

διάμετρος ως χαρακτηριστικό ποιότητας ενός προϊόντος ο οριζόντιος άξονας θα μπορούσε να αναπαριστά τη διάμετρο και ο κάθετος άξονας την συχνότητα εμφάνισης.



Σχήμα 1.5 Παράδειγμα Ιστογράμματος (*Histogram*)

### 1.6.3 Φύλλο Ελέγχου

Η συλλογή στοιχείων σε μια διεργασία μπορεί συχνά να είναι αδόμητη. Η χρησιμότητα του φύλλου ελέγχου έγκειται στη συνοπτική παρουσίαση στοιχείων με τρόπο που διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων. Η συλλογή στοιχείων είναι σημαντική, διότι αποτελεί το σημείο εκκίνησης για στατιστική ανάλυση. Το Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*) είναι ένας πίνακας ή ένα έντυπο που χρησιμοποιείται για την καταγραφή της συχνότητας ή του αριθμού των εμφανίσεων ενός συγκεκριμένου γεγονότος (βλ. Πίνακας 1.2). Ενδεικτικά, ένα Φύλλο Ελέγχου μπορεί να περιλαμβάνει: το είδος, τη χρονική διάρκεια και τον αριθμό συγκεκριμένων συμβάντων, το κόστος και τα παρακολουθούμενα χαρακτηριστικά. Πλεονεκτήματα της χρήσης ενός Φύλλου Ελέγχου είναι ο συμπερασματικός τρόπος εμφάνισης των στοιχείων και η ευκολία στη χρήση. Επίσης, διευκολύνει στην αναγνώριση της αιτίας ενός προβλήματος ποιότητας, ενώ χρησιμοποιείται συνήθως παράλληλα με την καταχώρηση στοιχείων σε βάση δεδομένων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

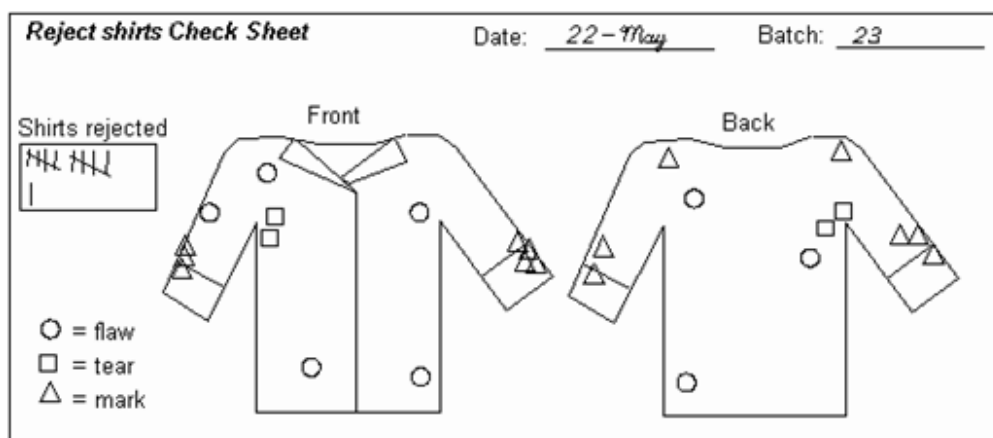


**Πίνακας 1.2** Παράδειγμα Φύλλου Ελέγχου (*Check Sheet*)

Προβλήματα στο υπηρεσιακό τηλεφωνικό δίκτυο ISPBX			
Περίοδος	Ιούνιος 2012		
Όνομα	Πέτρος Οικονόμου		
Οι βλάβες οφείλονται σε:			<b>Σύνολο</b>
A	Άγνοια χρήσης συσκευών από το χρήστη	IIIIII	6
B.	Χαλασμένη συσκευή	I	1
Γ.	Χαλασμένο καλώδιο συσκευής	II	2
Δ.	Καλωδίωση μέχρι τον καταναμητή	I	1
<b>Σύνολο</b>			10

#### 1.6.4 Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων

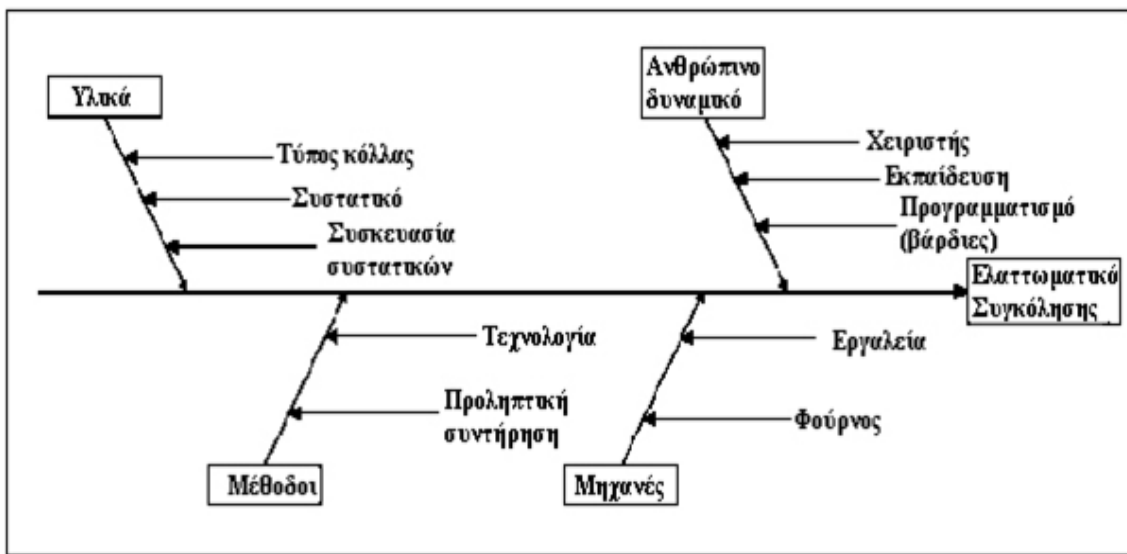
Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*) είναι ένα απλό οπτικό εργαλείο που βοηθά στη συλλογή και ανάλυση δεδομένων. Μπορεί να είναι ένα σχέδιο ή μια εικόνα που χρησιμοποιείται για να δείξει τα διάφορα ελαττώματα σε ένα προϊόν. Για παράδειγμα στο Σχήμα 1.6, στην κύρια όψη ενός προϊόντος σημειώνονται οι θέσεις (περιοχές) που εμφανίζονται τα ελαττώματα. Έτσι, το διάγραμμα αυτό βοηθάει στην ανίχνευση των συστηματικών αιτιών της παραγωγικής διαδικασίας που είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία αυτών των ελαττωμάτων.



**Σχήμα 1.6** Παράδειγμα Διαγράμματος Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*)

### 1.6.5 Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος

Αιτία είναι μια κατάσταση η οποία τελικά παράγει ένα αποτέλεσμα. Το Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (*Cause-and-Effect Sheet*), αναπαριστά τις σχέσεις μεταξύ ενός αποτελέσματος και του πιθανού αιτίου που το επηρεάζει. Σκοπός του είναι ο εντοπισμός των συνιστωσών των χαρακτηριστικών ποιότητας και των διαφόρων σχέσεων και αλληλεξαρτήσεων. Παράδειγμα Διαγράμματος Αιτίας-Αποτελέσματος είναι αυτό του Σχήματος 1.7. Τα διαγράμματα αυτά αναφέρονται και ως διαγράμματα Ishikawa (από τον Kaoru Ishikawa που τα εισήγαγε το 1943) ή και ως διαγράμματα Fishbone (ψαροκόκαλου).

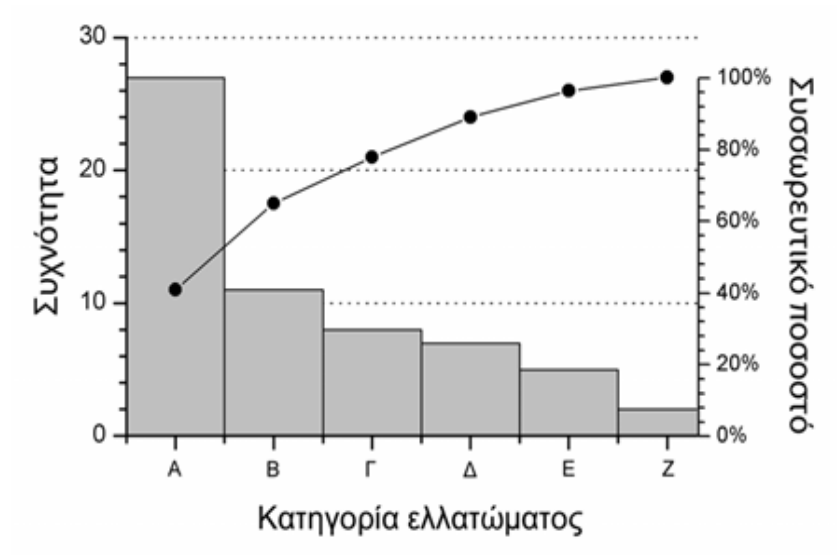


Σχήμα 1.7 Παράδειγμα Διαγράμματος Αιτίας-Αποτελέσματος  
(*Cause-and-Effect Sheet*)

### 1.6.6 Διάγραμμα Pareto

Η χρήση του Διαγράμματος Pareto (*Pareto Chart*) γίνεται συνήθως σε συνδυασμό με το Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος και στηρίζεται στην αρχή του Pareto που λέει ότι: το 80% ενός προβλήματος οφείλεται μόνο στο 20% των πιθανών αιτιών, ενώ μόνο το 20% του συγκεκριμένου προβλήματος οφείλεται στο 80% των πιθανών αιτιών. Η φιλοσοφία δηλαδή αυτού του εργαλείου είναι ότι πρέπει να συγκεντρώνουμε τις προσπάθειές μας για τη βελτίωση της ποιότητας στα λίγα αλλά ζωτικά αίτια του εκάστοτε προβλήματος και να μη σπαταλούμε πολύτιμο χρόνο με τα πολλά και ασήμαντα. Έτσι η ανάλυση Pareto έχει ως

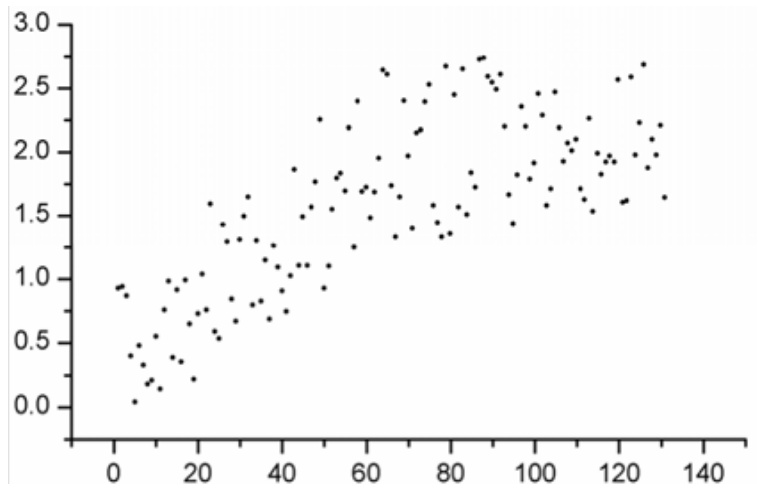
σκοπό να διαχωρίσει τις σημαντικές πλευρές ενός προβλήματος από τις λιγότερο σημαντικές. Το Σχήμα 1.8 δείχνει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα Διαγράμματος *Pareto*.



Σχήμα 1.8 Παράδειγμα Διαγράμματος Pareto (*Pareto Chart*)

### 1.6.7 Διάγραμμα Διασποράς

Το Διάγραμμα Διασποράς ή Σκεδασμού (*Scatter Diagram*) είναι ένα γράφημα για την ανάλυση των σχέσεων μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η μια μεταβλητή απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα και η άλλη σχεδιάζεται στον κατακόρυφο άξονα. Αν οι μεταβλητές είναι συσχετισμένες, τότε τα σημεία στο γράφημα ακολουθούν την πορεία μιας γραμμής ή καμπύλης. Τα δεδομένα συλλέγονται σε ζεύγη  $(x_i, y_i)$  και απεικονίζονται σε ένα απλό διάγραμμα, όπως αυτό του Σχήματος 1.9. Χρησιμοποιείται για να εξετάσει τις σχέσεις αιτίας-αποτελέσματος και για την αναζήτηση βαθύτερων αιτιών στα επισημασμένα προβλήματα. Για παράδειγμα, θα μπορούσε η μια μεταβλητή να αντιπροσωπεύει την θερμοκρασία του τήγματος μιας διεργασίας συγκόλλησης και η άλλη μεταβλητή το ποσοστό ελαττωματικών που βρέθηκαν στο συγκεκριμένο δείγμα. Ανάλογα με την συσχέτιση που θα προκύψει (θετική, αρνητική, απροσδιόριστη) προκύπτει και κατά πόσο επηρεάζει η θερμοκρασία του τήγματος τα προϊόντα συγκόλλησης.



**Σχήμα 1.9** Παράδειγμα Διαγράμματος Διασποράς  
ή Σκεδασμού (*Scatter Diagram*)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

### 2.1 Εισαγωγή

Ο κύριος στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η άμεση ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι, ώστε να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες πριν κατασκευαστεί μεγάλο πλήθος προϊόντων που δεν είναι συμμορφωμένα (*non conforming*) με τις προδιαγραφές. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, η πιο διαδεδομένη τεχνική που χρησιμοποιείται είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου Διεργασιών (*control charts*), τα οποία μπορούν να ανιχνεύσουν σε πραγματικό χρόνο τις ειδικές αιτίες Μεταβλητότητας (*on-line process-monitoring*). Επίσης, μπορούν να εκτιμήσουν τις παραμέτρους μιας παραγωγικής διαδικασίας, να προσδιορίσουν την ικανότητα μιας διεργασίας και να παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη βελτίωσή της. Συνεπώς, τα Διαγράμματα Ελέγχου αποτελούν, εάν όχι το σημαντικότερο εργαλείο, ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών, διότι μειώνουν τη Μεταβλητότητα όσο το δυνατόν περισσότερο, δεδομένου ότι η αυτή δεν μπορεί να εξαλειφθεί τελείως.

### 2.2 Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες κλάσεις:

**A.** στα **διαγράμματα ελέγχου ποσοτικών μεταβλητών** (*variable control charts*), όπου το υπό εξέταση χαρακτηριστικό (που θα παρίσταται από τη τυχαία μεταβλητή  $X$ ) μπορεί να μετρηθεί και να εκφραστεί ποσοτικά ως ένας αριθμός ή σε κάποια συνεχή κλίμακα μέτρησης. Στην περίπτωση αυτή τα διαγράμματα ελέγχου συνήθως παριστάνουν γραφικά τα μέτρα κεντρικής τάσης (όπως συμβαίνει στο διάγραμμα  $\bar{X}$  τύπου *Shewhart*) και τα μέτρα διασποράς (όπως στην περίπτωση του διαγράμματος  $R$ ).

**B.** στα **διαγράμματα ελέγχου ποιοτικών μεταβλητών** (*attribute control charts*), όπου το υπό εξέταση χαρακτηριστικό μπορεί να πάρει δύο δυνατές τιμές: ελαττωματικό και μη ελαττωματικό, χαρακτηρισμός που στη γενικευμένη περίπτωση άπτεται στην παρουσία ή όχι

κάποιας συγκεκριμένης ιδιότητας (*attribute*). Σημαντικότεροι εκπρόσωποι των διαγραμμάτων τύπου *Shewhart* αυτής της κατηγορίας είναι τα διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων τύπου *p* (*p-charts*), τα διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων τύπου *c* και τα διαγράμματα ελέγχου για το μέσο αριθμό ελαττωμάτων τύπου *u* (*c-charts* και *u-charts* αντίστοιχα).

Εάν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό, τότε αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (*univariate control charts*). Αν οι μετρήσεις αφορούν περισσότερα χαρακτηριστικά, τότε αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (*multivariate control charts*).

Όταν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν κάποια γνωστή κατανομή, τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου** (*parametric control charts*). Αντίθετα, εάν δε γνωρίζουμε ποια κατανομή ακολουθούν οι μετρήσεις που λαμβάνονται, τότε αναφερόμαστε σε **μη παραμετρικά (ή ελεύθερα κατανομής) διαγράμματα ελέγχου** (*non parametric or distribution free control charts*).

Στην περίπτωση που οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή *t* είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο *t-1*, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (*control charts for autocorrelated processes*). Αν οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες** (*control charts for uncorrelated processes*).

Τέλος, αν από την παραγωγική διαδικασία λαμβάνουμε μία μέτρηση (παρατήρηση) σε κάθε χρονική στιγμή, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις** (*control charts for individual observations*). Αντίθετα, εάν τα δείγματα μετρήσεων που λαμβάνονται από την παραγωγική διαδικασία είναι μεγαλύτερα της μονάδας ( $n > 1$ ), τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για δείγματα ή ομάδες** (*control charts for rational subgroups*).

Εάν τα σημεία που σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου βασίζονται μόνο σε πληροφορίες που δίνει μόνο το πιο πρόσφατο δείγμα, αγνοώντας τις πληροφορίες που περιέχονται σε προηγούμενα δείγματα, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (*control charts without memory*). Σε αυτή την κατηγορία ταξινομούνται τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* (*Shewhart-type control charts*), τα οποία χρησιμοποιούνται κυρίως όταν οι αλλαγές του μέσου επιπέδου που ανιχνεύουμε είναι

μεγάλες, όταν το μέγεθος δείγματος είναι τουλάχιστον δύο και όταν είναι γνωστή η κατανομή πιθανότητας των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται το διάγραμμα. Τα διαγράμματα *Shewhart* δεν είναι κατάλληλα για μικρές μετατοπίσεις του μέσου, είναι πιο αποτελεσματικά για μετατοπίσεις του μέσου της τάξης μεταξύ  $1.5\sigma$  και  $2\sigma$  ή μεγαλύτερες.

Αντίθετα, εάν τα σημεία που σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου βασίζονται τόσο σε πληροφορίες που δίνει το πιο πρόσφατο δείγμα, όσο και σε πληροφορίες που προέρχονται από προγενέστερα δείγματα, αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου με μνήμη** (*control charts with memory*). Σε αυτή την δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου ή διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* (*Cumulative Sum, CUSUM-type control charts*) και τα διαγράμματα ελέγχου για τον εκθετικά σταθμισμένο κινούμενο μέσο ή διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* (*Exponentially Weighted Moving Average, EWMA type control charts*), τα οποία χρησιμοποιούνται κυρίως όταν οι αλλαγές του μέσου επιπέδου που ανιχνεύουμε είναι μικρές (Montgomery (2009)).

Τα διαγράμματα *CUSUM* είναι χρήσιμα όταν είναι γνωστή η κατανομή πιθανότητας των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται στο διάγραμμα. Όταν είναι άγνωστη η κατανομή πιθανότητας των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται στο διάγραμμα, τότε τα πλέον κατάλληλα διαγράμματα είναι τα *EWMA*.

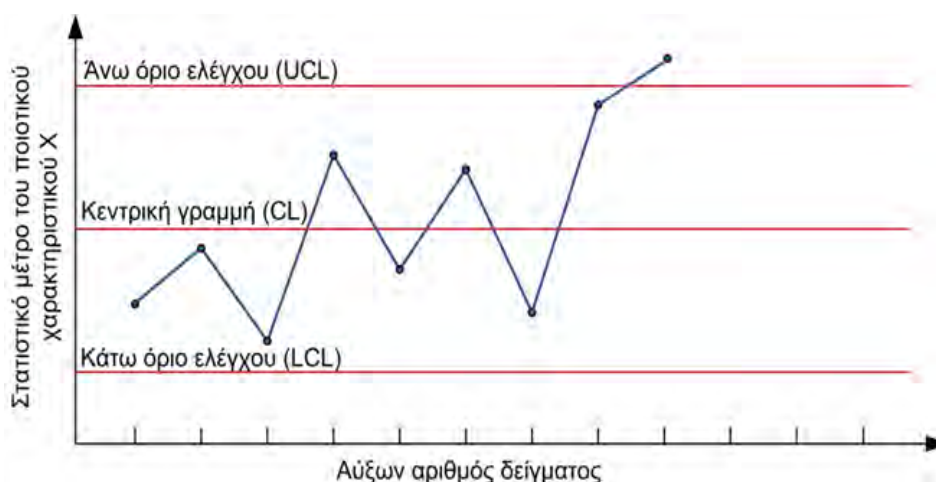
## 2.3 Βασικές Έννοιες σχετικά με τα Διαγράμματα Ελέγχου

### 2.3.1 Κατασκευή-Περιγραφή ενός Τυπικού Διαγράμματος Ελέγχου

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου είναι τεχνικές που βασίζονται σε μια γνωστή κατανομή, δηλαδή η διεργασία θεωρείται πως ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή (συνήθως την Κανονική). Αυτό σημαίνει ότι οι στατιστικές ιδιότητες των διαγραμμάτων αυτών είναι ακριβείς, μόνο αν ικανοποιείται η παραπάνω υπόθεση. Το πιο γνωστό παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου είναι το διάγραμμα τύπου *Shewhart*. Παρά το γεγονός ότι έχουν αναπτυχθεί πολλά και συνεχώς επινοούνται νέα διαγράμματα ελέγχου που ενσωματώνουν διαφορετικές τεχνικές ανίχνευσης της μη φυσικής μεταβλητότητας, στην κατασκευή όλων ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- α. παρατήρηση και συλλογή των μετρήσεων των χαρακτηριστικών του υπό εξέταση προϊόντος
- β. υπολογισμός της μέσης τιμής ενός κατάλληλου για την εκάστοτε διεργασία στατιστικού μέτρου  $W$
- γ. υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του προαναφερθέντος στατιστικού μέτρου
- δ. υπολογισμός του άνω (*upper control limit* ή *UCL*) και του κάτω (*lower control limit* ή *LCL*) ορίου ελέγχου του διαγράμματος, που προσδιορίζουν το εντός ελέγχου διάστημα
- ε. γραφική αναπαράσταση ενός προκαθορισμένου στατιστικού μέτρου που περιγράφει τα υπό μελέτη χαρακτηριστικά
- στ. αν υπάρχουν σημεία στο γράφημα που κείτονται εκτός των ορίων ελέγχου, γίνεται διερεύνηση της αιτίας και εφόσον αυτή είναι μη τυχαία, προσπάθεια απαλοιφής της. Διαφορετικά επαναπροσδιορίζονται τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ώστε να συμπεριλάβουν και αυτά τα σημεία
- ζ. γραφική αναπαράσταση του στατιστικού μέτρου όπως αυτό διαμορφώνεται μετά την κάθε νέα παρατήρηση.

Μετά την ολοκλήρωση των παραπάνω βημάτων η γραφική απεικόνιση του στατιστικού μέτρου ενός χαρακτηριστικού  $X$  (που έχει υπολογιστεί από τα δεδομένα ενός δείγματος) προς τον αύξοντα αριθμό του παρατηρούμενου δείγματος ή τον χρόνο λήψης του, θα έχει μορφή παρεμφερή με αυτήν του Σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου.



Η μέση τιμή του στατιστικού του υπό έλεγχο χαρακτηριστικού  $X$  όσο αυτό βρίσκεται σε κατάσταση εντός ελέγχου, αναπαρίσταται γραφικά από την κεντρική γραμμή (*center line*). Τα άνω (*UCL*) και κάτω (*LCL*) όρια ελέγχου είναι έτσι επιλεγμένα ώστε αν η διεργασία βρίσκεται σε εντός ελέγχου κατάσταση, σχεδόν όλα τα σημεία του διαγράμματος να βρίσκονται εντός αυτών. Η εμφάνιση ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου είναι ένδειξη ότι η διεργασία έχει βρεθεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση και χρήζει περαιτέρω μελέτης και ανάληψης διορθωτικής δράσης.

Για την κατασκευή των παραπάνω διαγραμμάτων, χρησιμοποιείται συνήθως το μοντέλο ορίων  $L$  σίγμα που τοποθετεί τα όρια ελέγχου σε απόσταση  $L$  μονάδων τυπικής απόκλισης  $\sigma_w$  από την κεντρική γραμμή  $\mu_w$ , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - L\sigma_w$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι δημοφιλέστερη επιλογή για την απόσταση  $L\sigma$  των ορίων από την κεντρική γραμμή, είναι τρεις μονάδες τυπικής απόκλισης ( $3\sigma$ ), και το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως μοντέλο τριών σίγμα (*three sigma control chart*). Αν ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή  $\mu$  του υπό μελέτη χαρακτηριστικού, τότε χρησιμοποιούμε το δειγματικό μέσο  $\bar{X}$  για την εκτίμησή της και το διάγραμμα ελέγχου παίρνει τη μορφή:

$$UCL = \mu_{\bar{x}} + 3\sigma_{\bar{x}}$$

$$CL = \mu_{\bar{x}}$$

$$LCL = \mu_{\bar{x}} - 3\sigma_{\bar{x}}$$

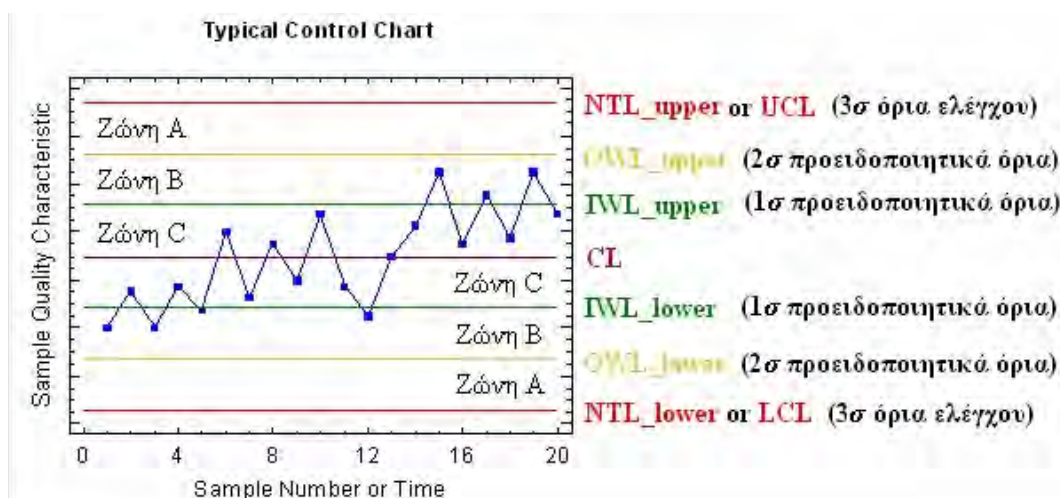
Για το μοντέλο των τριών σίγμα που περιγράφεται με τις παραπάνω σχέσεις, γνωρίζουμε ότι αν η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $\bar{X}$  είναι κανονική και η διεργασία είναι εντός ελέγχου, τότε η πιθανότητα να πάρει η  $\bar{X}$  τιμή εκτός των ορίων ελέγχου ή ισοδύναμα το διάγραμμα ελέγχου να δώσει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου είναι ίση με 0.0027. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι το  $\bar{X}$  διάγραμμα ( $\bar{X}$ -chart) παράγει λανθασμένο συναγερμό με πιθανότητα 0.27%. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εκτός ελέγχου κατάσταση σημαίνει ότι ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπισθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω και αυτό

μεταφράζεται σε αύξηση των παραγόμενων προϊόντων που δεν ικανοποιούν τις απαιτήσεις (Τριανταφύλλου (2009)).

Είναι προφανές ότι ο τρόπος λειτουργίας των διαγραμμάτων ελέγχου προσομοιάζει τη φιλοσοφία όπου στηρίζονται οι έλεγχοι υποθέσεων. Η βασική τους διαφορά είναι ότι οι έλεγχοι υποθέσεων εξετάζουν την ικανοποίηση κάποιων υποθέσεων ενώ τα διαγράμματα ελέγχου μελετούν την απόκλιση από τη θεωρούμενη εντός ελέγχου κατάσταση. Επίσης οι έλεγχοι υποθέσεων μπορούν να ανιχνεύσουν μόνο παρατεινόμενες και εδραιωμένες αλλαγές στη μέση τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού, κάτι που δεν είναι ο κανόνας στις συνήθεις παραγωγικές διεργασίες. Αντιθέτως, είναι συχνό το φαινόμενο εμφάνισης μιας σποραδικής ή και μοναδικής αύξησης της μέσης τιμής εκτός των ορίων ελέγχου, που μπορεί να ανιχνευθεί και να αντιμετωπιστεί μόνο με τη χρήση κατάλληλων διαγραμμάτων ελέγχου (Μαυρουδής (2012)).

### 2.3.2 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου με σκοπό την πιο έγκαιρη ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία. Τα εξωτερικά προειδοποιητικά όρια (*Outer warning limits*, OWL) σχεδιάζονται σε απόσταση  $2\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (βλ. Σχήμα 2.2). Τα εσωτερικά προειδοποιητικά όρια (*Inner warning limits*, IWL) σχεδιάζονται σε απόσταση  $1\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (βλ. Σχήμα 2.2). Τα όρια που βρίσκονται σε απόσταση  $3\sigma$  από την κεντρική γραμμή ονομάζονται φυσικά όρια ανοχής της διεργασίας (*Natural tolerance limits*, NTL).



Σχήμα 2.2 Διάγραμμα Ελέγχου με προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες Α, Β, Γ

Τα όρια ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια (εσωτερικά και εξωτερικά) χωρίζουν το διάγραμμα σε τρεις ζώνες. Η χρήση των προειδοποιητικών ορίων αυξάνει και κατ' επέκταση βελτιώνει την ευαισθησία (*sensitivity*) του διαγράμματος ελέγχου, διότι εντοπίζονται γρηγορότερα πιθανές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διαδικασίας, αλλά οδηγεί επίσης σε αυξημένο κίνδυνο εσφαλμένων συναγερωμών/σημάτων (Montgomery (2009)).

### 2.3.3 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται συνήθως μαζί με τους κανόνες ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*), οι οποίοι περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου χωρίς την ύπαρξη απαραίτητως κάποιου σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου, όπως αναφέρονται από τον Montgomery (2009), είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A).
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω- κάτω”.
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι τέσσερις πρώτοι κανόνες είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules* (Western Electric (1956)). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι παραπάνω κανόνες μπορούν να φανούν χρήσιμοι ώστε να ανιχνεύσουμε γρηγορότερα τις εκτός ελέγχου διεργασίες. Ωστόσο, η ταυτόχρονη χρήση πολλών από αυτούς τους κανόνες μπορεί να προκαλέσει λανθασμένους συναγερωμούς, με αποτέλεσμα να έχουμε λανθασμένες διακοπές της παραγωγικής διαδικασίας, οι οποίες θα γίνονται με σκοπό να βρεθούν οι ειδικές αιτίες που προκάλεσαν την εκτός ελέγχου κατάσταση. Τελικά, κάτι τέτοιο θα επιφέρει αύξηση του κόστους της παραγωγής.

### 2.3.4 Αναγνώριση μοτίβων

Αν τα προκαταρκτικά δείγματα συλλέγονται από μια σταθερή διεργασία η σειρά των σημείων στο διάγραμμα ελέγχου θα παρουσιάζει ένα φυσικό (κανονικό (*normal*)) μοτίβο (βλ. Σχήμα 2.3(α)), το οποίο χαρακτηρίζεται από μια διακύμανση των σημείων γύρω από την μέση τιμή έχοντας τα περισσότερα σημεία πλησιέστερα στην κεντρική γραμμή, μερικά σημεία απλωμένα και να προσεγγίζουν τα όρια ελέγχου και κανένα από τα σημεία (ή τουλάχιστον ένα πολύ σπάνιο σημείο) που υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου. Από την άλλη πλευρά, εάν τα προκαταρκτικά δείγματα λαμβάνονται από μια ασταθή διεργασία, η σειρά των σημείων του διαγράμματος θα εκθέτουν σχεδόν πάντα ένα αφύσικο μοτίβο.

Το *Statistical Quality Control Handbook* της Western Electric επισημαίνει διάφορους τύπους αφύσικων μοτίβων που μπορεί να εμφανιστούν σε μια ασταθή διεργασία. Μεταξύ αυτών, υπάρχουν επτά αφύσικα μοτίβα, τα οποία συνήθως παρατηρούνται στα διαγράμματα ελέγχου. Αυτά είναι (βλ. Σχήμα 2.3 β-η):

(β) το μοτίβο έλλειψης μεταβλητότητας (*stratification*), στο οποίο τα σημεία του διαγράμματος κινούνται με τεχνητό τρόπο γύρω από την κεντρική γραμμή χωρίς να υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη μεταβλητότητα,

(γ) το συστηματικό μοτίβο (*systematic*), όταν μια σειρά σημείων στο διάγραμμα ελέγχου δεν παρουσιάζει οποιοδήποτε κυκλικό μοτίβο, αλλά ακόμα εμφανίζεται να είναι προβλέψιμη σε ένα συστηματικό (περίπου) τρόπο,

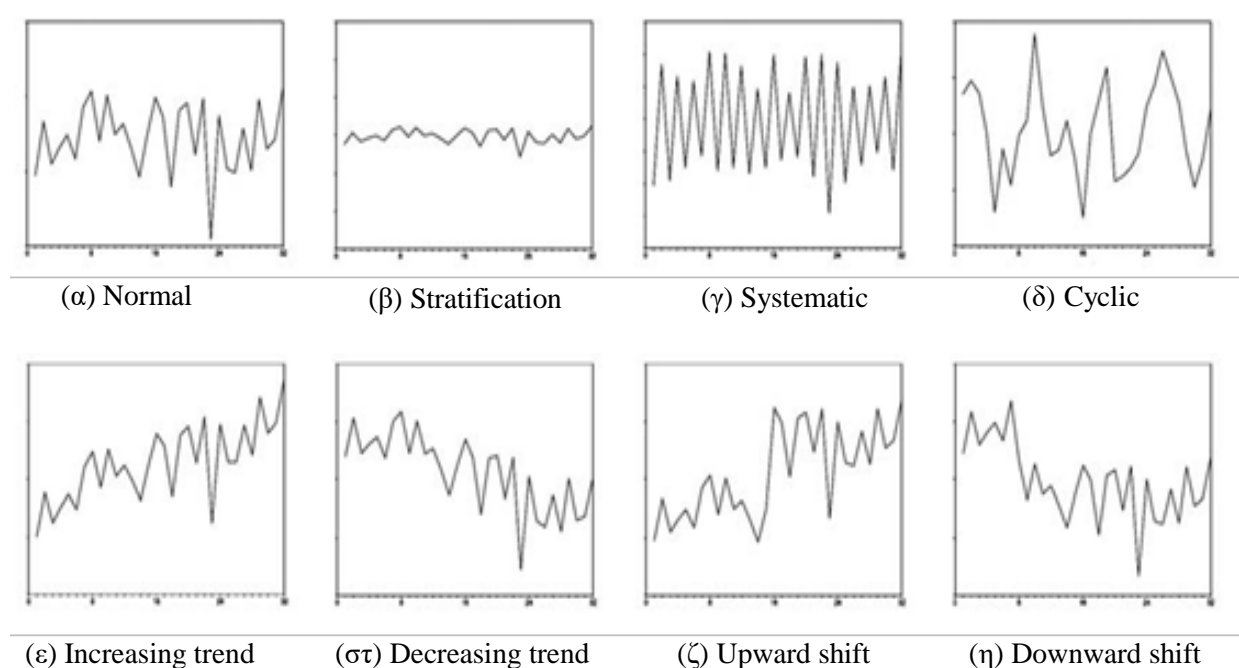
(δ) το κυκλικό μοτίβο (*cyclic*), που αντιπροσωπεύεται από μια ημιτονοειδή μορφή, με τις σύντομες ανοδικές και καθοδικές τάσεις στα δεδομένα που εμφανίζονται επανειλημμένα,

(ε) το μοτίβο αυξανόμενης τάσης (*increasing trend*), το οποίο αποτελείται από μια σειρά σημείων που δείχνουν μια βαθμιαία ανοδική μεταβολή στο μέσο όρο,

(στ) το μοτίβο μειούμενης τάσης (*decreasing trend*), το οποίο περιέχει μια σειρά σημείων που αντιπροσωπεύουν μια βαθμιαία καθοδική μεταβολή στο μέσο όρο,

(ζ) το μοτίβο ανοδικής μεταβολής (*upward shift*), το οποίο περιέχει μια σειρά σημείων που παρουσιάζει απότομη αλλαγή από ένα χαμηλότερο επίπεδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά και

(η) το μοτίβο καθοδικής μεταβολής (*downward shift*), αποτελείται από μια σειρά σημείων που έχει μια απότομη αλλαγή από ένα υψηλότερο επίπεδο σε ένα χαμηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά.



**Σχήμα 2.3** Διάφοροι τύποι μοτίβων διαγραμμάτων ελέγχου

Άλλα αφύσικα μοτίβα είναι ειδικές ή μικτές μορφές δύο ή περισσότερων αυτών των επτά κύριων τύπων αφύσικων μοτίβων (Gauri and Chakraborty (2008)).

### 2.3.5 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου

Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από το μέσο μήκος ροής (*Average Run Length, ARL*) του διαγράμματος. Το *ARL* είναι ο αναμενόμενος μέσος αριθμός συνεχόμενων σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εμφανιστεί ένα σημείο (το πρώτο σημείο) εκτός των ορίων ελέγχου. Όταν η μέση τιμή και η διακύμανση της διεργασίας είναι γνωστές, τότε το μήκος ροής  $N$  ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p$ , όπου  $p$  είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς το μέσο μήκος ροής ενός  $\bar{X}$ -διαγράμματος είναι ίσο με:  $ARL = \frac{1}{p}$ .

Η τιμή του *ARL* όταν μία διεργασία είναι εντός ελέγχου, καλείται εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*in-control Average Run Length, ARL<sub>in</sub>*). Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε το μοντέλο των τριών σίγμα για την

κατασκευή του  $\bar{X}$  - διαγράμματος, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, δεδομένου ότι η κατανομή του δειγματικού μέσου είναι κανονική, είναι:  $ARL_{in} = \frac{1}{0,027} = 370$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η μέση τιμή ή η διακύμανση της διεργασίας που μελετάμε, δεν είναι γνωστή, τότε πρέπει να την (ή τις) εκτιμήσουμε με τη βοήθεια των δεδομένων που διαθέτουμε. Κατά συνέπεια τα όρια ελέγχου του διαγράμματος που θα κατασκευασθεί θα στηρίζονται στις παραπάνω εκτιμήσεις.

Όταν μία διεργασία βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου, χρησιμοποιούμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*out of control Average Run Length, ARL<sub>out</sub>*), το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$ARL_{out} = \frac{1}{1 - \beta},$$
 αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του

διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίση με  $\beta$ , οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα  $1-\beta$ . Το  $ARL_{out}$  δηλώνει τον αναμενόμενο μέσο αριθμό συνεχόμενων δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η αλλαγή της διεργασίας από τη στιγμή που αυτή συνέβη. Στην πράξη θέλουμε να έχουμε μεγάλο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) και μικρό εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{out}$ ).

Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*False Alarm Rate, FAR*) είναι η πιθανότητα να παράγει ένα διάγραμμα ελέγχου σήμα ότι η διεργασία μετατοπίστηκε σε εκτός ελέγχου κατάσταση, ενώ στην πραγματικότητα παραμένει εντός ελέγχου. Δύο διαγράμματα ελέγχου μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια των εκτός ελέγχου μέσων μηκών ροής τους ( $ARL_{out}$ ), έχοντας όμως εξασφαλίσει ότι τα εντός ελέγχου μέσα μήκη ροής τους ( $ARL_{in}$ ) ή οι πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού είναι (σχεδόν) ίσα. Με άλλα λόγια, αν δύο διαγράμματα ελέγχου σχεδιασθούν με τέτοιο τρόπο ώστε η απόδοση τους να είναι σχεδόν ίδια κατά τη διάρκεια της εντός ελέγχου λειτουργίας, τότε η συγκριτική τους αξιολόγηση μπορεί να επιτευχθεί με τη σύγκριση των  $ARL_{out}$  που παρουσιάζουν (Τριανταφύλλου (2009)).

### 2.3.6 Φάση I και Φάση II

Στην εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου, δύο διαφορετικές φάσεις έχουν χρησιμοποιηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία: η Φάση I και η Φάση II (Woodall (2000)). Στη Φάση I, βασικός στόχος είναι ο έλεγχος παρελθοντικών δεδομένων, προκειμένου να διαπιστωθεί αν προέρχονται από εντός ελέγχου διεργασία ή όχι. Όταν η διαδικασία βρεθεί εντός ελέγχου, τότε μια συνήθης πρακτική είναι η εκτίμηση των παραμέτρων της με τη

βοήθεια ενός δείγματος αναφοράς και χρήση αυτών για τον καθορισμό των ορίων ελέγχου που θα χρησιμοποιηθούν στη Φάση II. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*). Γενικά κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων, ο διαχειριστής της διεργασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο κανείς να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που τα δεδομένα συλλέχθηκαν (Ρακιτζής (2008)).

Στη Φάση II, σκοπός είναι ο έλεγχος μελλοντικών δεδομένων ώστε να διαπιστωθεί αν η διεργασία συνεχίζει να παραμένει εντός ελέγχου ή αν έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Η πιο συνήθης μέθοδος για τη λήψη απόφασης είναι η εφαρμογή ενός διαγράμματος ελέγχου. Κάθε νέα παρατήρηση ή δείγμα παρατηρήσεων ελέγχεται και με τη βοήθεια συγκεκριμένων κανόνων διαπιστώνεται αν η κατάσταση της υπό παρακολούθηση διεργασίας έχει αλλάξει ή έχει μείνει σταθερή (Τριανταφύλλου (2009)).

Έτσι ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει έγκαιρα μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Επίσης ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό. Το *ARL* συμβάλει στην αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στη Φάση II (Ρακιτζής (2008)).

## 2.4 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Μεταβλητές

Πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούν να εκφραστούν υπό τους όρους μιας αριθμητικής μέτρησης. Ένα απλό μετρήσιμο ποιοτικό χαρακτηριστικό όπως η διάσταση, το βάρος, ή ο όγκος καλείται μεταβλητή (*variable*) (Montgomery (2009)). Τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών αναπτύχθηκαν το 1930 και χρησιμοποιούνται τόσο στη βιομηχανία όσο και σε πολλές επιστημονικές περιοχές. Ο έλεγχος του δειγματικού μέσου γίνεται συνήθως με τα διαγράμματα ελέγχου για τους μέσους, δηλ. το  $\bar{X}$  διάγραμμα. Ο έλεγχος της διασποράς της διεργασίας μπορεί να ελεγχθεί είτε με ένα διάγραμμα ελέγχου για την τυπική απόκλιση, δηλαδή το *S* διάγραμμα, ή ένα διάγραμμα ελέγχου για το εύρος, ήτοι το *R* διάγραμμα. Για την παρουσίαση των διαγραμμάτων της ενότητας αυτής βασιζόμαστε στους συγγραφείς Montgomery (2009), Mitra (2008), Γεωργακάκος (2002) και Αντζουλάκος (2009).

### 2.4.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή

Τα διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή (*control charts for the process mean*) χρησιμοποιούνται με σκοπό την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής του συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ , με την προϋπόθεση ότι η διακύμανση παραμένει σταθερή σε όλη τη διαδικασία.

Θεωρούμε ότι η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  είναι κανονική με γνωστές παραμέτρους, συμβολικά  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Εάν  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$  είναι ένα τυχαίο δείγμα του χαρακτηριστικού  $X$  με μέγεθος  $n$ , τότε ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2/n$ , συμβολικά  $\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  και επιπλέον είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής  $\mu$  (του χαρακτηριστικού  $X$ ). Συνεπώς, τα  $3\sigma$  όρια ελέγχου ενός διαγράμματος για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  είναι τα ακόλουθα

<b><math>\bar{X}</math> Διάγραμμα με <math>3\sigma</math> όρια ελέγχου για δείγματα - Φάση II</b>
$UCL = \mu + A \cdot \sigma$ $CL = \mu$ $LCL = \mu - A \cdot \sigma$

όπου  $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ . Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος αυτού είναι Φάσης II, διότι η μέση τιμή  $\mu$

και η διακύμανση  $\sigma^2$  του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  είναι γνωστά.

Σε ορισμένες περιπτώσεις όταν το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής, κτλ.), μιλούμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις (*individuals observations*). Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί Κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  και  $\sigma$  γνωστά. Το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής για μεμονωμένες παρατηρήσεις δίνεται από το ακόλουθο πλαίσιο



$\bar{X}$ Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις - Φάση II
--

$$UCL = \mu + 3 \cdot \sigma$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - 3 \cdot \sigma$$

Στο διάγραμμα απεικονίζονται πλέον οι μεμονωμένες παρατηρήσεις  $X_i, i \geq 1$ .

Στην πραγματικότητα, όμως, η μέση τιμή  $\mu$  και η διακύμανση  $\sigma^2$  του χαρακτηριστικού  $X$  δεν είναι γνωστά και πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε  $m$  **ανεξάρτητα** προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}), 1 \leq i \leq m$ , για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες  $\mu$  και  $\sigma$ , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου (συνήθως  $m = 20$  έως  $25$  και  $n = 4$  έως  $6$ ). Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί την Κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  και  $\sigma$  άγνωστα. Ως εκτίμηση του  $\mu$  έχουμε τη στατιστική συνάρτηση  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  και ως εκτίμηση του  $\sigma$  έχουμε τις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις:  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ ,  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$  και  $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$ . Επομένως ανάλογα με την εκτίμηση που χρησιμοποιούμε για την τυπική απόκλιση προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή.

Χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο R** και παίρνοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την ποσότητα  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την ποσότητα  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ , τα όρια ελέγχου του διαγράμματος για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  έχουν τη μορφή

$\bar{X}$ Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου <b>Μέθοδος R - Φάση I</b>
---

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R}$$

όπου η σταθερά  $A_2$  υπολογίζεται από τον τύπο  $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$ .

Χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο S** και παίρνοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την ποσότητα  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την ποσότητα  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$ , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  είναι τα εξής

<b><math>\bar{X}</math> Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Μέθοδος S - Φάση I</b>
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \cdot \bar{S}$
$CL = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \cdot \bar{S}$

όπου η σταθερά  $A_3$  υπολογίζεται από τον τύπο  $A_3 = \frac{3}{c_4 \cdot \sqrt{n}}$ .

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο S<sup>2</sup>** και παίρνοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την ποσότητα  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την ποσότητα  $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$ , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  έχουν τη μορφή

<b><math>\bar{X}</math> Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Μέθοδος S<sup>2</sup> - Φάση I</b>
$UCL = \bar{\bar{X}} + A \cdot \sqrt{\bar{S}^2}$
$CL = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - A \cdot \sqrt{\bar{S}^2}$

όπου η σταθερά  $A$  υπολογίζεται από τον τύπο  $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ .

## 2.4.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

Τα διαγράμματα ελέγχου για την διασπορά (*control charts for the process variability dispersion*) χρησιμοποιούνται με σκοπό την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ , το οποίο είναι συνεχές. Θεωρούμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  είναι κανονική με γνωστή την τυπική απόκλιση  $\sigma$  ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ). Εάν  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$  είναι ένα τυχαίο δείγμα του χαρακτηριστικού  $X$  με μέγεθος  $n$ , τότε για τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)} = \max\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$$

ισχύει ότι  $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma \cdot d_2$  και  $\sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma \cdot d_3$ , όπου  $d_2$  και  $d_3$  είναι ποσότητες που εξαρτώνται από το μέγεθος δείγματος  $n$ .

- **R διάγραμμα ελέγχου**

Ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος  $R_i$  των δειγμάτων που αποτελεί μέτρο διασποράς της  $X$ . Το μοντέλο τριών σίγμα θα έχει όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή τα ακόλουθα

<b>R Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση II</b>
$UCL = \mu_{R_i} + 3 \cdot \sigma_{R_i} = (d_2 + 3d_3)\sigma$
$CL = \mu_{R_i} = d_2 \sigma$
$LCL = \mu_{R_i} - 3 \cdot \sigma_{R_i} = (d_2 - 3d_3)\sigma$

Θέτοντας  $D_1 = d_2 - 3d_3$  και  $D_2 = d_2 + 3d_3$ , τα 3σ όρια ελέγχου ενός διαγράμματος για τη διασπορά του χαρακτηριστικού  $X$  είναι τα ακόλουθα

<b>R Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση II</b>
$UCL = D_2 \cdot \sigma$
$CL = d_2 \cdot \sigma$
$LCL = D_1 \cdot \sigma$

Όταν  $n \leq 6$  , τότε το  $D_1 < 0$ . Στην περίπτωση αυτή και επειδή δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικά όρια ελέγχου, θέτουμε  $D_1 = 0$ .

• **S διάγραμμα ελέγχου**

Θέτοντας  $W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$  ,  $1 \leq i \leq m$ , έχουμε ότι

$$\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma \cdot c_4 \text{ και } \sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \cdot \sqrt{1 - c_4^2} .$$

Επομένως ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού  $X$  μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου οι απεικονιζόμενες ποσότητες θα είναι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις  $S_i$  που είναι το πιο σύνηθες μέτρο διασποράς της  $X$ . Το μοντέλο τριών σίγμα θα έχει όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις

<b>S Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση II</b>
$UCL = \mu_{S_i} + 3 \cdot \sigma_{S_i} = (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma$
$CL = \mu_{S_i} = c_4 \cdot \sigma$
$LCL = \mu_{S_i} - 3 \cdot \sigma_{S_i} = (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma$

Θέτοντας  $B_5 = (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})$  και  $B_6 = (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})$  , τα 3σ όρια ελέγχου ενός διαγράμματος για τη διασπορά του χαρακτηριστικού  $X$  είναι τα ακόλουθα

<b>S Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση II</b>
$UCL = B_6 \cdot \sigma$
$CL = c_4 \cdot \sigma$
$LCL = B_5 \cdot \sigma$

Όταν  $n \leq 5$  , τότε το  $B_5 < 0$ . Στην περίπτωση αυτή και επειδή δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικά όρια ελέγχου, θέτουμε  $B_5 = 0$ .

- $S^2$  διάγραμμα ελέγχου

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, 1 \leq i \leq m,$$

για την οποία ισχύει ότι  $\mu_{S_i} = E(S_i^2) = \sigma^2$  και  $\frac{(n-1) \cdot S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ .

Οπότε έχουμε  $P\left(\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$

Επομένως ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση  $S_i^2$  που είναι ένα μέτρο διασποράς της  $X$ . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

$S^2$ Διάγραμμα με όρια ελέγχου Πιθανότητας $\alpha$ - Φάση II
$UCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$
$CL = \sigma^2$
$LCL = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$

Συνήθως η ποσότητα  $\sigma$  είναι άγνωστη επομένως θα πρέπει να εκτιμηθεί παίρνοντας τυχαία προκαταρκτικά δείγματα. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε  $m$  ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , για να εκτιμήσουμε το  $\sigma$ , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί την κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο R** και παίρνοντας ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  την ποσότητα  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος για τη τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  έχουν τη μορφή

<b>R Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = D_4 \cdot \bar{R}$
$CL = \bar{R}$
$LCL = D_3 \cdot \bar{R}$

όπου  $D_3 = 1 - 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$  και  $D_4 = 1 + 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$ . Όταν  $n \leq 6$ , τότε το  $D_3 < 0$ . Στην περίπτωση αυτή και επειδή δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικά όρια ελέγχου, θέτουμε  $D_3 = 0$ .

Χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο S** και παίρνοντας ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  την ποσότητα  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$ , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος για τη τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού  $X$  έχουν τη μορφή

<b>S Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = B_4 \cdot \bar{S}$
$CL = \bar{S}$
$LCL = B_3 \cdot \bar{S}$

όπου  $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$  και  $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$ . Όταν  $n \leq 5$ , τότε το  $B_3 < 0$ , οπότε θέτουμε  $B_3 = 0$ .

Χρησιμοποιώντας τη **Μέθοδο S<sup>2</sup>** και παίρνοντας ως εκτίμηση της διακύμανσης  $\sigma^2$  την ποσότητα  $\hat{\sigma}^2 = \bar{S}^2$  τότε τα όρια ελέγχου του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

<b>S<sup>2</sup> Διάγραμμα με όρια ελέγχου</b>
<b>Πιθανότητας α - Φάση I</b>
$UCL = \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$
$CL = \sigma^2$
$LCL = \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$

## 2.5 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου *Shewhart* για Ιδιότητες

Τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων (*attributes control charts*) χρησιμοποιούνται όταν τα δεδομένα μας δεν αφορούν μετρήσιμες μονάδες αλλά ποσότητες με δυο πιθανά αποτελέσματα της μορφής ναι ή όχι. Το χαρακτηριστικό της ποιότητας που μας ενδιαφέρει είναι είτε οι ελαττωματικές μονάδες, είτε τα ελαττώματα μιας μονάδας. Το μέγεθος του δείγματος μπορεί να είναι σταθερό ή και να μεταβάλλεται. Για να χαρακτηρίσουμε ένα προϊόν ως **ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο** (*defective or non conforming*) θα πρέπει τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του να βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών, τότε και λέμε ότι το προϊόν αυτό παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι ελαττωματικές χαρακτηρίζονται οι μονάδες που θεωρούνται εντελώς αποτυχημένες, δηλαδή δεν καλύπτουν τις προϋποθέσεις λόγω παρουσίας ελαττωμάτων, ενώ ελαττώματα είναι οι ατέλειες ή τα μη συμμορφούμενα χαρακτηριστικά τα οποία προκαλούν δυσλειτουργία στις μονάδες και τις εμποδίζουν να προσαρμοστούν στις προδιαγραφές. Τέλος αναφέρουμε πως μια μονάδα μπορεί να παρουσιάσει πολλά ελαττώματα και μάλιστα όχι του ίδιου τύπου.

Το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, όπως και το πλήθος των ελαττωμάτων ενός προϊόντος, είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται **ιδιότητες** (*attributes*) (Αντζουλάκος (2009)).

### 2.5.1 Διαγράμματα ελέγχου $p$ και $np$

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει στα  $p$  και  $np$  διαγράμματα ελέγχου είναι αντίστοιχα το ποσοστό και ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων. Λέγοντας ποσοστό προϊόντων εννοούμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων προς το συνολικό αριθμό των παραγόμενων προϊόντων. Για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων αρχικά επιλέγονται  $m$  προκαταρκτικά δείγματα ισομεγέθη ή μη. Πρακτικά τα δείγματα της παραγωγής δεν μπορεί να είναι τα ίδια κάθε μέρα διότι επηρεάζει και ο παράγοντας κόστος κατά τον οποίο μπορεί το μέγεθος του δείγματος μπορεί να μειωθεί για οικονομικούς λόγους ή αντίστοιχα λόγω του ότι η επιθεώρηση των προϊόντων δεν είναι δαπανηρή μπορεί ή διοίκηση να αυξήσει το μέγεθος του δείγματος.

Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό  $p$  των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διαδικασίας είναι άγνωστο και ότι επιλέγουμε  $m$  **ανεξάρτητα** τυχαία δείγματα με μεγέθη

$n_1, n_2, \dots, n_m$  αντίστοιχα. Θα συμβολίσουμε με  $X_{ij}, i \geq 1, 1 \leq j \leq n_i$  την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με το αν το  $j$  προϊόν του δείγματος  $i$  είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή  $X_{ij}$  έχουμε ότι  $X_{ij} \sim B(1, p)$ , ενώ για την ποσότητα

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

που δηλώνει το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα έχουμε ότι  $X_i \sim B(n_i, p)$ .

Για την τυχαία μεταβλητή  $W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}, 1 \leq i \leq m$  που δηλώνει το ποσοστό των

ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα ισχύει ότι  $\mu_{w_i} = p$  και  $\sigma_{w_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n_i}, 1 \leq i \leq m$ .

Χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$  ως εκτίμηση της ποσότητας

$p$  έχουμε ότι τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του  $p$  διαγράμματος ελέγχου (για μεταβλητό μέγεθος δείγματος) είναι:

<b><math>p</math> Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_i}}$
$CL = \bar{P}$
$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_i}}$

ενώ αντίστοιχα του  $np$  διαγράμματος ελέγχου είναι:

<b><math>np</math> Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = n_i \bar{P} + 3\sqrt{n_i \bar{P}(1-\bar{P})}$
$CL = n_i \bar{P}$
$LCL = n_i \bar{P} - 3\sqrt{n_i \bar{P}(1-\bar{P})}$



### 2.5.2 Διαγράμματα ελέγχου $c$

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει στα  $c$  διαγράμματα είναι το συνολικό πλήθος των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης. Η βασική υπόθεση είναι ότι ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων μιας μονάδας ακολουθεί την κατανομή *Poisson* και σύμφωνα με αυτήν την υπόθεση, η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο μιας μονάδας επιθεώρησης θα πρέπει να είναι πολύ μικρή. Έτσι το πλήθος  $X$  των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο  $c$ , δηλαδή  $X \sim P(c)$ .

Για να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του πλήθους των ελαττωμάτων των μονάδων, υποθέτουμε ότι έχουμε  $m$  ανεξάρτητες μονάδες επιθεώρησης. Έστω η στατιστική συνάρτηση  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , που δηλώνει το πλήθος των ελαττωμάτων στην  $i$  μονάδα επιθεώρησης. Θέτοντας  $\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$  έχουμε ότι  $E(\bar{C}) = c$ .

Χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $\bar{C}$  ως εκτίμηση της ποσότητας  $c$ , δηλαδή  $\hat{c} = \bar{C}$ , έχουμε ότι τα  $3\sigma$  όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του  $C$  διαγράμματος ελέγχου δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο:

<b><math>c</math> Διάγραμμα με <math>3\sigma</math> όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$
$CL = \bar{C}$
$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$

### 2.5.3 Διάγραμμα ελέγχου $u$

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει στα  $u$  διαγράμματα είναι η αναλογία των ελαττωματικών ανά δείγμα, ή αλλιώς ο μέσος αριθμός των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης σε κάθε δείγμα. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο αριθμός  $X$  των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο  $c$ . Η βασική διαφορά με το  $C$  διάγραμμα ελέγχου είναι ότι στα  $u$  διαγράμματα ελέγχου μπορούμε να έχουμε δείγματα μεγέθους μεγαλύτερου της μιας μονάδας επιθεώρησης.

Υποθέτοντας ότι από την παραγωγή επιλέγουμε  $m$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη  $n_1, n_2, \dots, n_m$  μονάδες επιθεώρησης αντίστοιχα, έστω τα  $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Συμβολίζουμε  $X_{ij}$ ,  $i \geq 1$  και  $1 \leq j \leq n_i$ , την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της  $j$  μονάδας επιθεώρησης στο  $i$  δείγμα. Για την τυχαία μεταβλητή  $X_{ij}$  έχουμε ότι  $X_{ij} \sim P(c)$ , ενώ για την

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων στο  $i$  δείγμα έχουμε ότι  $X_i \sim P(n_i c)$ . Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης στο  $i$  δείγμα που μας δίνεται από την τυχαία μεταβλητή  $U_i = \frac{X_i}{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , για την οποία ισχύει:  $\mu_{U_i} = c$  και  $\sigma_{U_i}^2 = \frac{c}{n_i}$ .

Χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$  ως εκτίμηση της ποσότητας  $c$ ,

δηλαδή  $\hat{c} = \bar{U}$ , έχουμε ότι τα  $3\sigma$  όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του  $u$  διαγράμματος ελέγχου (για μεταβλητό μέγεθος δείγματος) είναι:

<b><math>u</math> Διάγραμμα με <math>3\sigma</math> όρια ελέγχου</b>
<b>Φάση I</b>
$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$
$CL = \bar{U}$
$LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$

## 2.6 Διαγράμματα Ελέγχου Συσσωρευμένου Αθροίσματος

Για να αυξήσουμε την ικανότητα των διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μικρών επίμονων μετατοπίσεων, ο Page (1954) εισήγαγε τα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένου αθροίσματος (*Cumulative Sum control charts, CUSUM*). Τα *CUSUM* διαγράμματα χρησιμοποιούν πληροφορία των πρόσφατων και των παρελθόντων δειγμάτων. Το γεγονός

αυτό καθιστά τα διαγράμματα αυτά αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στις παραμέτρους της διεργασίας.

Θεωρούμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  είναι Κανονική, συμβ.  $X \sim N(\mu_0, \sigma)$ . Επιλέγοντας τυχαία δείγματα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , του χαρακτηριστικού  $X$ , με μέγεθος  $n \geq 1$  το καθένα, ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\mu_0, \sigma^2/n$ .

Τα *CUSUM* διαγράμματα είναι αποδοτικά στις περιπτώσεις μεμονωμένων παρατηρήσεων και ενσωματώνουν άμεσα όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των παρατηρήσεων, γιατί παριστάνουν τα σωρευτικά αθροίσματα (*cumulative sum*)  $C_i$  των διαφόρων δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο  $\mu_0$ .

### 2.6.1 Διάγραμμα Tabular CUSUM

Στο Tabular *CUSUM* διάγραμμα είναι απαραίτητος ο υπολογισμός δύο σωρευτικών αθροισμάτων για κάθε τιμή ελέγχου. Οι θετικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το άνω σωρευτικό άθροισμα  $C_i^+$  (*one sided upper cusum*), ενώ οι αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το κάτω σωρευτικό άθροισμα  $C_i^-$  (*one sided lower cusum*), σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$C_i^+ = \max[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-]$$

με  $1 \leq i \leq m$  και αρχικές τιμές  $C_i^+ = C_i^- = 0$ .

Τα αθροίσματα  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  υπολογίζονται από τις διάφορες τιμές των τιμών  $X_i$  από την μέση τιμή  $\mu_0$ , εφόσον αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή αναφοράς  $K \geq 0$  (*reference ή allowance value*). Κάθε φορά που οι διαφορές γίνονται αρνητικές, το άθροισμα ( $C_i^+$  ή  $C_i^-$ ) μηδενίζεται για να ξαναρχίσει να αυξάνεται όταν οι διαφορές γίνουν ξανά μεγαλύτερες του μηδενός. Στο Tabular *CUSUM* διάγραμμα τα αθροίσματα  $C_i^+$  και  $C_i^-$  σχεδιάζονται ως διαφορετικές στήλες πάνω και κάτω από τη μέση τιμή. Η τιμή αναφοράς  $K$  δεν σχεδιάζεται στο Tabular *CUSUM*. Το όριο ελέγχου που σχεδιάζεται στο διάγραμμα είναι το διάστημα

απόφασης  $H$  (*decision interval*). Το ανώτερο  $H^+$  και το κατώτερο  $H^-$  σχεδιάζονται με δύο ευθείες γραμμές παράλληλες προς το μέσο  $\mu_0$ . Η τιμή του διαστήματος απόφασης υποδεικνύει τα ανώτερα επιτρεπτά όρια των αθροισμάτων  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  και επιλέγεται να είναι  $H = 5\sigma$ . Θέτουμε  $H = h\sigma$ ,  $K = k\sigma = \frac{\delta}{2}\sigma$ ,  $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$ , όπου  $k$  είναι το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί,  $\mu_0$  η τιμή στόχος (μέση τιμή),  $\mu_1$  η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου (η ανώτατη επιτρεπτή τιμή των δειγμάτων ελέγχου). Η επιλογή της παραμέτρου  $k$  εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί (Montgomery (2009)).

## 2.6.2 Τυποποιημένο διάγραμμα CUSUM

Σε μερικές περιπτώσεις είναι προτιμότερο να τυποποιείται η μεταβλητή  $X_i$  πριν τον υπολογισμό των συσσωρευμένων αθροισμάτων. Ορίζεται η μεταβλητή  $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$  η οποία αποτελεί την τυποποιημένη τιμή της  $X_i$ . Τα άνω και κάτω συσσωρευμένα αθροίσματα για το τυποποιημένο διάγραμμα *CUSUM* (*Standardized CUSUM chart*) μετασχηματίζονται ως εξής:

$$C_i^+ = \max[0, Y_i - k + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max [0, -k - Y_i + C_{i-1}^-]$$

με  $1 \leq i \leq m$  και αρχικές τιμές  $C_i^+ = C_i^- = 0$ .

Τα τυποποιημένα διαγράμματα *CUSUM* έχουν δύο πλεονεκτήματα:

- Πολλά διαγράμματα *CUSUM* με τις ίδιες τιμές των  $h$  και  $k$ .
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της μεταβλητότητας της διεργασίας.

## 2.7 Διαγράμματα Ελέγχου Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου

Το Διάγραμμα Ελέγχου με εκθετικά σταθμισμένο κινούμενο μέσο (*Exponentially Weighted Moving Average Control chart, EWMA*) αποτελεί μια καλή εναλλακτική των *Shewhart* διαγραμμάτων ελέγχου όταν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις. Τα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* παρουσιάστηκαν από τον Roberts (1959) και μελετήθηκαν αρχικά και με λεπτομέρεια από τον Crowder (1987, 1989) και τους Lucas and Saccucci (1990). Έχουν μη περιορισμένη και μη ομοιόμορφη μνήμη αφού λαμβάνουν πληροφορίες

από όλα τα προηγούμενα δείγματα και το καθένα από αυτά έχει διαφορετική βαρύτητα. Η απόδοση του *EWMA* διαγράμματος ελέγχου είναι προσεγγιστικά ισοδύναμη με αυτή του *CUSUM* διαγράμματος ελέγχου και κατά κάποιο τρόπο είναι ευκολότερα στην κατασκευή και λειτουργία. Το πλεονέκτημα τους έναντι των *CUSUM* είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Ο εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος (*exponentially weighted moving average, EWMA*) ορίζεται από τη σχέση:  $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$ , όπου  $x_i$  είναι οι παρατηρήσεις και  $\lambda \in (0,1)$  είναι μια σταθερά, η οποία καλείται συντελεστής βαρύτητας (*weighting factor*) και η τιμή εκκίνησης  $z_0$  είναι η μέση τιμή (τιμή στόχος)  $z_0 = \mu_0$  (Montgomery(2009)). Η κατασκευή του *EWMA* διαγράμματος απαιτεί τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της  $z_i$ . Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις  $x_i$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διασπορά  $\sigma^2$  τότε η διασπορά των  $z_i$  είναι:  $\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2i}]$

Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του *EWMA* διαγράμματος είναι:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

όπου  $L$  το εύρος των ορίων και  $\mu_0$  η τιμή στόχος. Παρατηρείται ότι  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}] \xrightarrow{i \uparrow} 1$ . Αυτό σημαίνει ότι από ένα σημείο και πέρα, τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και οι προηγούμενες σχέσεις μετατρέπονται ως εξής:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

Τα άνω και κάτω όρια αποκτούν μια σταθερή τιμή και στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται ως δυο ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους. Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση

που οι παρατηρήσεις είναι μεμονωμένες. Για την κατασκευή ενός EWMA διαγράμματος απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων  $\lambda$  και  $L$ . Όσον αφορά την επιλογή του  $\lambda$  συνίσταται χρήση μικρών τιμών για την ανίχνευση μικρών αλλαγών στη διαδικασία, ήτοι  $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ , ενώ για το  $L$  χρησιμοποιείται συνήθως η τιμή  $L = 3$ .

### 2.7.1 Διάγραμμα ελέγχου με Κινητούς Μέσους

Αποτελεί ένα εναλλακτικό διάγραμμα ελέγχου του EWMA διαγράμματος που βασίζεται σε ένα απλό, μη σταθμισμένο κινητό μέσο (*moving average*). Υποθέτουμε ότι έχουν συλλεχθεί  $x_1, x_2, \dots$  μεμονωμένες παρατηρήσεις. Ο κινητός μέσος διαρκείας (*span*)  $w$  στο χρόνο  $i$ , για  $i \geq w$  δίνεται από τη σχέση

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-w+1}}{w}$$

Δηλαδή στην χρονική περίοδο  $i$ , η παλαιότερη παρατήρηση διαγράφεται και προστίθεται η πιο καινούργια. Η σχέση του μεγέθους της μεταβολής που θέλουμε να ανιχνεύσουμε και του  $w$ , είναι αντιστρόφως ανάλογη. Η διασπορά των  $M_i$  είναι  $Var(M_i) = \sigma^2 / w$ . Ως εκ τούτου, αν  $\mu_0$  η τιμή στόχος, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου είναι:

$$UCL = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}}$$

και για  $0 < i < w$  η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου είναι:

$$UCL = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{i}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{i}}$$

Αν τα  $M_i$  υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

### 3.1 Εισαγωγή

Τα μη παραμετρικά ή ελεύθερα κατανομής διαγράμματα ελέγχου (*non-parametric or distribution-free control charts*), όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν ιδιότητες που δεν εξαρτώνται από την κανονικότητα ή κάποια άλλη συγκεκριμένη παραμετρική κατανομή. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος «μη παραμετρικά» δεν δηλώνει ότι στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων αυτών δεν περιλαμβάνονται παράμετροι και κατά συνέπεια ο όρος «ελεύθερα κατανομής» φαίνεται να προσδιορίζει καλύτερα τη φύση των διαγραμμάτων αυτών. Για την ανάπτυξη και θεωρητική μελέτη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιούνται κατά βάση οι κλασικές μη παραμετρικές τεχνικές συμπερασματολογίας που αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά το πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων όταν η κατανομή δεν έχει καθορισθεί (Τριανταφύλλου (2009)).

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται τα σημαντικότερα μονομεταβλητά (*univariate*) ή μονοδιάστατα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τα οποία είναι: τύπου *Shewhart*, τύπου *CUSUM* και τύπου *EWMA* και δεν δίνεται έμφαση στα λεγόμενα πολυμεταβλητά (*multivariate*) μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, είναι τα αντίστοιχα των μονομεταβλητών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, για την περίπτωση κατά την οποία οι παρατηρήσεις που συλλέγονται είναι πολυδιάστατες. Για τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση μιας διεργασίας η οποία περιλαμβάνει περισσότερα του ενός μετρήσιμα χαρακτηριστικά ή ένα διάνυσμα συγκεκριμένου πλήθους μετρήσιμων χαρακτηριστικών, δεν υποθέτουν συγκεκριμένη πολυδιάστατη κατανομή για τα δεδομένα και χρησιμοποιούν ειδικές τεχνικές του κλάδου της μη παραμετρικής Στατιστικής, αλλά τις εφαρμόζουν σε πολυδιάστατα δεδομένα (Qiu and Hawkins (2003)). Ο κύριος σκοπός των πολυμεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου είναι, να ελέγξουν έγκαιρα, αν κάποια στατιστική παράμετρος (δηλαδή κάποιο διάνυσμα παραμέτρων) της πολυδιάστατης κατανομής των δεδομένων παρέμεινε ίδια ή μεταβλήθηκε.

### 3.2 Ορισμός, Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου

Στο Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών με τον όρο μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, εννοούμε ένα διάγραμμα ελέγχου στο οποίο η κατανομή του μήκους ροής, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ), καθώς και η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ( $FAR$ ) είναι ίδιες και σταθερές για όλες τις συνεχείς κατανομές που είναι πιθανό να ακολουθούν τα δεδομένα. Επομένως, τα συγκεκριμένα στατιστικά χαρακτηριστικά του διαγράμματος δεν εξαρτώνται από το είδος της (συνεχούς) κατανομής την οποία ακολουθούν τα δεδομένα που συλλέγονται (Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001)). Με άλλα λόγια, στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου δεν απαιτείται κάποια συγκεκριμένη κατανομή για τις παρατηρήσεις και είναι αυτό που αποτελεί ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα τους.

Επίσης, ένα ακόμη πλεονέκτημα των συγκεκριμένων διαγραμμάτων είναι ότι, η φύση και η στατιστική δομή τους τα καθιστά εξαιρετικά ανθεκτικά στις έκτροπες παρατηρήσεις (*outliers*) που είναι πιθανό να υπάρχουν καθώς και στις περιπτώσεις που ο υπό μελέτη πληθυσμός ακολουθεί λοξή ή με βαριές ουρές (*heavy-tailed*) κατανομή, δηλαδή, όταν οι παρατηρήσεις στην ουρά της κατανομής έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα απ' ότι θα είχαν στην Κανονική κατανομή. Αυτό συμβαίνει, κυρίως επειδή οι μη παραμετρικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου, συντελούν ώστε αυτά να μην επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από τυχόν έκτροπες και ακραίες τιμές, χαρακτηριστικό που δεν παρουσιάζουν τα κλασικά παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* και *CUSUM* (Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001)). Ακόμη, στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου, δεν χρησιμοποιούνται εκτιμήσεις των άγνωστων στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις, αλλά τα όρια ελέγχου συνήθως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις τιμές διατεταγμένων παρατηρήσεων, σε αντίθεση με τα κλασικά παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, στα οποία απαιτείται η εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων  $\mu$  και  $\sigma$  της Κανονικής κατανομής που υποτίθεται ότι ακολουθούν τα δεδομένα.

Σύμφωνα με τους Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001) το βασικότερο μειονέκτημα που παρουσιάζουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου είναι η πολυπλοκότητα και η δυσκολία που υπάρχει στην επίλυση ορισμένων μαθηματικών τύπων και ολοκληρωτικών εκφράσεων που σχετίζονται με αυτά, αποτέλεσμα το οποίο καθιστά μάλλον αναγκαία τη



χρήση, ειδικού περιβάλλοντος αριθμητικών υπολογισμών ή προσομοίωσης. Εκτός από αυτό, αρκετά συχνά, στις πρακτικές εφαρμογές αυτών των διαγραμμάτων, απαιτείται η χρήση ειδικών στατιστικών πινάκων, οι οποίοι περιέχουν αναλυτικά κατανομές πιθανότητας συγκεκριμένων διακριτών τυχαίων μεταβλητών. Για αυτούς τους ειδικούς πίνακες, δεν υπάρχει πάντοτε διαθέσιμη βιβλιογραφία για να μπορέσει κανείς να τη χρησιμοποιήσει, προκειμένου να υλοποιήσει πρακτικά τα συγκεκριμένα διαγράμματα.

Παράλληλα, η γνώση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου και γενικότερα του κλάδου της Απαραμετρικής Στατιστικής δεν χαρακτηρίζεται ευρεία στη διεθνή βιβλιογραφία, αφού η κλασική Παραμετρική Στατιστική έχει διδαχθεί πολύ πιο αναλυτικά και διεξοδικά σε σύγκριση με την Απαραμετρική Στατιστική. Έτσι, προκύπτει το συμπέρασμα ότι ορισμένοι επιστήμονες σήμερα, δεν θα έχουν αφομοιώσει ικανοποιητικά όλες εκείνες τις στατιστικές και πιθανοθεωρητικές έννοιες που απαιτούνται για την χρήση και την πρακτική εφαρμογή των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου (Das (2009)).

Ένα ακόμη μειονέκτημα για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, είναι ότι δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα και άμεσα το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{out}$ , αφού αυτή η ποσότητα δεν είναι ίδια και σταθερή για όλες τις συνεχείς κατανομές, αλλά διαφέρει από κατανομή σε κατανομή και κατά συνέπεια αν η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου και δεν είναι γνωστή η νέα συνεχής κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα, στο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου δε μπορεί να υπολογιστεί ή τουλάχιστον, να εκτιμηθεί ικανοποιητικά. Ένα τελευταίο μειονέκτημα, είναι ότι συνήθως απαιτούν τη συλλογή αρκετών δειγμάτων ή τη συλλογή ενός αρχικού δείγματος μεγάλου μεγέθους και αυτό μπορεί να προκαλέσει σημαντική δαπάνη χρόνου και κυρίως, μεγάλο οικονομικό κόστος.

### **3.3 Ορολογία και Προβλήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου**

Στον Παραμετρικό Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας ενδιαφερόμαστε για την κατασκευή διαγραμμάτων που ανιχνεύουν τις αλλαγές στο μέσο της διεργασίας (*process mean*) ή/και στη μεταβλητότητα της διεργασίας (*process variation*), όπως το εύρος (*range*), η διακύμανση (*variance*) και η τυπική απόκλιση (*standard deviation*). Στην μη παραμετρική στατιστική, γενικότερα, εξετάζουμε την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης (*location*) ή/και της παραμέτρου κλίμακας (*scale parameter*) της κατανομής της διεργασίας. Η παράμετρος θέσης είναι π.χ. η μέση τιμή (*mean*) ή η διάμεσος (*median*) ή κάποιο ποσοστημόριο της κατανομής,

τα τελευταία είναι ιδιαίτερα ελκυστικά όταν η κατανομή αναμένεται να είναι ασύμμετρη (*skewed, asymmetric*).

Στο Μη Παραμετρικό Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας, έμμεσα, υποθέτουμε ότι πολλές διεργασίες ακολουθούν:

α) ένα **μοντέλο θέσης** (*location model*), με μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F(x, \theta)$ , όπου  $\theta$  είναι μια άγνωστη παράμετρος θέσης ή

β) ένα **μοντέλο κλίμακας** (*scale model*), με α.σ.κ.  $F(x/\tau)$ , όπου  $\tau > 0$  είναι η άγνωστη παράμετρος κλίμακας ή πιο γενικά,

γ) το **μοντέλο θέσης - κλίμακας** (*location-scale model*), με α.σ.κ.  $F((x - \theta)/\tau)$ , όπου  $\theta$  και  $\tau$  είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις μοντέλων, το πρόβλημα είναι ο εντοπισμός των  $\theta$  και  $\tau$  (ή και των δύο), βάσει τυχαίων δειγμάτων που συλλέγονται (συνήθως) σε ισαπέχοντα χρονικά σημεία. Στους συνήθεις υπολογισμούς της κατανομής του μήκους ροής η  $F$  υποτίθεται ότι είναι η α.σ.κ.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην μη παραμετρική στατιστική, για τις μεταβλητές, η  $F$  υποτίθεται ότι είναι μια αυθαίρετη συνεχής α.σ.κ. Μολονότι το μοντέλο θέσης - κλίμακας φαίνεται να είναι ένα φυσικό μοντέλο προς εξέταση, μιας και παραλληλίζει τη κανονική περίπτωση με άγνωστους αμφοτέρωτα το μέσο και τη διακύμανση, το μεγαλύτερο μέρος της έως σήμερα διαθέσιμης βιβλιογραφίας του Μη Παραμετρικού Στατιστικού Έλεγχου Διεργασίας (ΜΣΕΔ) (*Non parametric Statistical Process Control, NSPC*) αναφέρεται στο μοντέλο θέσης και ελάχιστα στο μοντέλο κλίμακας ή στο μοντέλο θέσης-κλίμακας (Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001)).

Όπως στον Παραμετρικό Έλεγχο Ποιότητας, έτσι και στο Μη Παραμετρικό, υπάρχουν δύο διακριτές Φάσεις. Στη Φάση I (*Phase I*), γίνεται εκτίμηση των ορίων ελέγχου, όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου, με σκοπό τα όρια αυτά να χρησιμοποιηθούν για τη μελλοντική παρακολούθηση της διεργασίας. Στη Φάση II ή Φάση Παρακολούθησης (*Phase II or Monitoring Phase*), χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου της Φάσης I για να διαπιστώσουμε εάν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, όταν συλλέγονται μελλοντικά δείγματα. Όταν οι εντός ελέγχου παράμετροι, που ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε, είτε είναι γνωστές (ιστορικά) είτε μπορούν να προσδιοριστούν αναφερόμαστε στην περίπτωση γνωστών προτύπων ή Περίπτωση  $K$  ("*standards-known*" case or *Case K*). Όμως, υπάρχουν και περιπτώσεις που δεν υπάρχει αρκετή διαθέσιμη πληροφορία και ως εκ τούτου οι παράμετροι δεν είναι γνωστές και πρέπει να εκτιμηθούν, πράγμα που γίνεται στη Φάση I.

Αυτό αναφέρεται ως περίπτωση άγνωστων προτύπων ή Περίπτωση  $U$  (“*standards-unknown case or Case U*”). Στη δεύτερη περίπτωση, οι παράμετροι εκτιμώνται από κάποια δεδομένα αναφοράς (*reference data*), όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην Περίπτωση  $U$ , γίνεται πρώτα ανάλυση Φάσης I και μετά ξεκινά η ανάλυση Φάσης II, ενώ αυτό δε γίνεται στην Περίπτωση  $K$ . Τέλος, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις  $U$  και  $K$ , υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες διαγραμμάτων: τα διαγράμματα τύπου *Shewhart*, *CUSUM* και *EWMA* (Chakraborti (2011)).

### 3.4 Μονομεταβλητά Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

Στα μονομεταβλητά (ή μονοδιάστατα) διαγράμματα απεικονίζονται οι μετρήσεις ενός μόνο ποιοτικού χαρακτηριστικού. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, έχουν αναπτυχθεί περισσότερα διαγράμματα για την παρακολούθηση της θέσης μιας συνεχούς διεργασίας, ενώ ελάχιστα είναι διαθέσιμα για την κλίμακα. Στην περίπτωση  $K$ , η κατασκευή των διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης βασίζεται σε δύο κυρίως μη παραμετρικούς ελέγχους: τον προσημικό έλεγχο (*sign test or SN test*) και τον προσημικό βαθμολογικό έλεγχο του *Wilcoxon* (*Wilcoxon’s signed-rank test or SR test*). Ο προσημικός βαθμολογικός έλεγχος του *Wilcoxon* είναι σχεδόν τόσο αποτελεσματικός όσο και ο έλεγχος για τη μέση τιμή (*t-test*), ακόμα και αν η κατανομή είναι κανονική. Ωστόσο, ο *SN* έλεγχος είναι πιο αποτελεσματικός από τον *SR*, όταν η κατανομή είναι συμμετρική και έχει παχιές ουρές, όπως η διπλή εκθετική. Επίσης, ο *SN* έλεγχος εφαρμόζεται σε όλα τα ποσοστημόρια (*percentiles*), ενώ ο *SR* έλεγχος προτείνεται μόνο για τη διάμεσο (*50th percentile or second quartile Q2*).

Στην πρόσφατη βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετά μονομεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, τα οποία βασίζονται σε διάφορες μη παραμετρικές μεθόδους. Για παράδειγμα, οι Human, Chakraborti and Smit (2010) παρουσίασαν μια σειρά από μονόπλευρα και δίπλευρα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που βασίζονται στην προσημική στατιστική συνάρτηση και σε κανόνες ροών (*Shewhart-Type Sign Charts with Runs-Type Signaling Rules*). Οι Chakraborti and Eryilmaz (2007) παρουσίασαν μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που βασίζονται στην προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση και σε κανόνες ροών (*Shewhart-Type Signed-Rank Charts with Runs-Type Signaling Rules*) ως απλές παραλλαγές του δίπλευρου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου (*Shewhart-Type Signed-Rank Chart*) που είχε προτείνει ο Bakir το 2004 για την παρακολούθηση της διάμεσου (παράμετρος θέσης). Επιπλέον, οι

Amin, Reynolds and Bakir (1995) ανέπτυξαν ένα προσημικό διάγραμμα τύπου *CUSUM* (*CUSUM-type Sign chart*), οι Bakir and Reynolds (1979) ένα προσημικό βαθμολογικό διάγραμμα τύπου *CUSUM* για τη διάμεσο (*CUSUM-type Signed-Rank chart*) και οι Amin and Searcy (1991) ένα διάγραμμα τύπου *EWMA* που βασίζεται στον έλεγχο SR (*EWMA-type Signed Rank chart*). Τα παραπάνω διαγράμματα είναι διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης και χρησιμοποιούνται στην Περίπτωση *K*.

Αντίστοιχα διαγράμματα Φάσης II έχουν προταθεί και για την Περίπτωση *U*. Συγκεκριμένα, οι Janacek and Meikle (1997) παρουσίασαν ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* Φάσης II (*Shewhart-type precedence chart*) που βασίζεται στη διάμεσο με όρια που υπολογίζονται με τη βοήθεια ενός εντός ελέγχου δείγματος αναφοράς και με την εφαρμογή στατιστικών ελέγχων προτεραιότητας (*precedence tests*), ενώ οι Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004) μελέτησαν το παραπάνω διάγραμμα, υπολογίζοντας το μέσο μήκος ροής του με τη βοήθεια μιας τεχνικής δέσμευσης και προτείνοντας ταυτόχρονα πρόσθετες γενικεύσεις του. Το 2010 οι Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras πρότειναν ένα βελτιωμένο διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* Φάσης II (*Shewhart-type Precedence chart with enhancement*), που και αυτό βασίζεται στους στατιστικούς ελέγχους προτεραιότητας. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, με βάση το δείγμα αναφοράς, προσδιορίζονται συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις, οι οποίες συνιστούν τα όρια ελέγχου του διαγράμματος. Η κατάσταση της διεργασίας κρίνεται από το εάν η παράμετρος θέσης διαδοχικών τυχαίων δειγμάτων της διεργασίας βρίσκεται μεταξύ των ορίων και από το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος που βρίσκονται εκτός των ορίων. Το 2009, οι ίδιοι συγγραφείς είχαν προτείνει τρία νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης II που βασίζονται στη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του *Wilcoxon*. Τέλος, οι Chakraborti and Van de Wiel (2008) παρουσίασαν ένα διάγραμμα τύπου *Shewhart* και ένα διάγραμμα τύπου *EWMA*, τα οποία βασίζονται στον έλεγχο των Mann Whitney-Wilcoxon (*Shewhart-type and EWMA-type Mann-Whitney-Wilcoxon Rank-Sum charts*).

Επιπρόσθετα, έχουν προταθεί και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης I για την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης στην Περίπτωση *U*. Συγκεκριμένα, οι Jones-Farmer, Jordan and Champ (2009) πρότειναν ένα διάγραμμα τύπου *Shewhart*, το οποίο βασίζεται στον απαραμετρικό έλεγχο Kruskal-Wallis και ονομάζεται διάγραμμα *mean-rank*. Οι Graham, Human and Chakraborti (2010) παρουσίασαν διάγραμμα τύπου *Shewhart*, το οποίο βασίζεται στον έλεγχο της διαμέσου (*median test*) και ονομάζεται διάγραμμα *median*. Από τα

παραπάνω γίνεται φανερό ότι υπάρχει πληθώρα μονομεταβλητών ή μονοδιάστατων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, τα οποία έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, γεγονός που συνιστά ερευνητικά ζωντανό το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο.

### 3.4.1 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* είναι τα πιο δημοφιλή διαγράμματα, εξαιτίας της απλότητας τους, της ευκολίας εφαρμογής τους, και του γεγονότος ότι είναι αρκετά αποτελεσματικά στην ανίχνευση μέτριων έως μεγάλων μετατοπίσεων. Τα μονόπλευρα διαγράμματα τύπου *Shewhart* έχουν την κεντρική γραμμή και ένα μόνο άνω ή κάτω όριο ελέγχου. Είναι πιο χρήσιμα όταν μας ενδιαφέρει μόνο η κατεύθυνση (ανοδική ή καθοδική) της μετατόπισης της παραμέτρου θέσης (όπως η διάμεσος). Αντίθετα, τα δίπλευρα διαγράμματα έχουν την κεντρική γραμμή, ένα άνω όριο και ένα κάτω όριο ελέγχου και χρησιμοποιούνται συνήθως για την ανίχνευση πιθανής μετατόπισης ή αλλαγής σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Για την παρουσίαση των διαγραμμάτων της ενότητας αυτής βασιζόμαστε κυρίως στις εργασίες των Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001), Chakraborti and Graham (2007), Chakraborti (2011) και Τριανταφύλλου (2009).

Για την περίπτωση που η τιμή της διαμέσου είναι γνωστή π.χ.  $\theta_0$  ή μπορεί να προσδιοριστεί (Περίπτωση *K*), οι Amin, Reynolds and Bakir (1995) παρουσίασαν ένα δίπλευρο μη παραμετρικό (μονοδιάστατο) διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της διαμέσου (παράμετρος θέσης), το οποίο βασίζεται στον προσημικό έλεγχο (*SN test*) και είναι γνωστό ως **διάγραμμα SN** (*SN chart*). Θεωρούμε ότι  $X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kn}$  είναι το  $k$  δείγμα ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), που αποτελείται από ανεξάρτητες παρατηρήσεις μεγέθους  $n > 1$ . Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα SN ονομάζεται προσημική συνάρτηση εντός των ομάδων (*within group sign statistics*) και έχει τη μορφή

$$SN_k = \sum_{i=1}^n \text{sign}(X_{ki} - \theta_0), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

όπου η  $\text{sign}(x)$  παίρνει τιμές 1, 0 ή -1 αν  $x > 0$ ,  $x = 0$  ή  $x < 0$ , αντίστοιχα.

Για τον προσδιορισμό των ορίων ελέγχου, είναι απαραίτητο να βρεθεί η κατανομή της συνάρτησης  $SN_k$ . Χρησιμοποιούμε τον τύπο  $SN_k = 2T_k - n$ , όπου  $T_k$  είναι η συνήθης προσημική στατιστική συνάρτηση ελέγχου, η οποία υπολογίζει τον αριθμό των δειγματικών παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του  $\theta_0$ . Αφού η εντός ελέγχου κατανομή της  $T_k$

είναι διωνυμική με παραμέτρους  $n$  και  $0.5$ , συνεπάγεται ότι η εντός ελέγχου κατανομή της  $SN_k$  είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν. Επομένως, τα όρια ελέγχου τύπου *Shewhart* και η κεντρική γραμμή του δίπλευρου μη παραμετρικού **διαγράμματος  $SN$**  είναι τα εξής

<b>Δίπλευρο Διάγραμμα <math>SN</math> Τύπου Shewhart (Περίπτωση <math>K</math>)</b>
$UCL = c$
$CL = 0$
$LCL = -c$

όπου  $c$  είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός μεταξύ του  $0$  και του  $n$  ( $0 \leq c \leq n$ ). Η διεργασία τίθεται εκτός στατιστικού ελέγχου εάν κάποιο σημείο της συνάρτησης  $SN_k$  βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, δηλαδή όταν ισχύει  $SN_k \leq -c$  ή όταν  $SN_k \geq c$ . Τυπικά, η σταθερά  $c$  προσδιορίζεται για προκαθορισμένο  $ARL_{in}$ , το οποίο στην Περίπτωση  $K$  είναι ίσο με το αντίστροφο του ποσοστού λανθασμένου συναγερμού ( $FAR$ ), δηλαδή  $ARL_{in} = 1/FAR$ .

Οι Amin, Reynolds and Bakir (1995) σύγκριναν το μέσο μήκος ροής του κλασσικού  $\bar{X}$  διαγράμματος με αυτό του διαγράμματος  $SN$  τύπου *Shewhart* για διάφορα μεγέθη μετατοπίσεων και διαφορετικές κατανομές. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν είναι ότι το διάγραμμα  $SN$  είναι πιο αποτελεσματικό, όταν η κατανομή δεν είναι συμμετρική ή είναι συμμετρική με παχιές ουρές. Ενώ, όταν η κατανομή είναι είτε κανονική είτε πλησιάζει την κανονική και έχει λεπτές ουρές, συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Γενικά, το βασικό πλεονέκτημα του διαγράμματος  $SN$  (και κατ' επέκταση όλων των μη παραμετρικών διαγραμμάτων) είναι ότι το  $FAR$  και  $ARL_{in}$  το παραμένουν σταθερά για όλες τις συνεχείς κατανομές. Αυτό δεν ισχύει για κανένα παραμετρικό διάγραμμα με συγκεκριμένη κατανομή συμπεριλαμβανομένου και του  $\bar{X}$  διαγράμματος.

Ο Bakir (2004) παρουσίασε ένα δίπλευρο μη παραμετρικό (μονοδιάστατο) διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της διάμεσου, το οποίο βασίζεται στον προσημικό βαθμολογικό έλεγχο του *Wilcoxon* ( $SR$  test) και είναι γνωστό ως **διάγραμμα  $SR$**  ( $SR$  chart). Θεωρούμε ότι οι  $|X_{k1} - \theta_0|, |X_{k2} - \theta_0|, \dots, |X_{kn} - \theta_0|$  είναι οι απόλυτες τιμές των αποκλίσεων των παρατηρήσεων του  $k$ -δείγματος από τη γνωστή εντός ελέγχου τιμή  $\theta_0$  της

διαμέσου (Περίπτωση  $K$ ) και ότι  $R_{ki}$  είναι ο βαθμός του  $|X_{ki} - \theta_0|$  ανάμεσα σε  $n$  απόλυτες αποκλίσεις. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα  $SR$  συμβολίζεται με  $SR_k$  και αναπαριστά τη διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των βαθμών (των απόλυτων τιμών) σε αντιστοιχία με τις θετικές και τις αρνητικές τιμές των αποκλίσεων. Η τιμή της υπολογίζεται μέσω του τύπου

$$SR_k = \sum_{i=1}^n \text{sign}(X_{ki} - \theta_0) \cdot R_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{όπου } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω στατιστική συνάρτηση  $SR$  συνδέεται γραμμικά με την προσημική βαθμολογική συνάρτηση του *Wilcoxon*  $W^+$  μέσω του τύπου  $SR = 2W^+ - (n \cdot (n+1)/2)$ , όπου  $W^+$  είναι το άθροισμα των βαθμολογιών των απόλυτων τιμών που αντιστοιχούν στις θετικές αποκλίσεις. Σύμφωνα με τους Gibbons and Chakraborti (2003), η συνάρτηση  $W^+$  είναι ελεύθερη κατανομής. Συνεπώς, ο ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση  $SR_k$  και το διάγραμμα  $SR$ . Επειδή η εντός ελέγχου κατανομή της  $SR_k$  είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, μία λογική επιλογή για το άνω και κάτω όριο είναι  $LCL = -UCL$ . Επομένως, τα όρια ελέγχου τύπου *Shewhart* και η κεντρική γραμμή του δίπλευρου μη παραμετρικού **διαγράμματος  $SR$**  είναι τα εξής

<b>Δίπλευρο Διάγραμμα <math>SR</math> Τύπου <i>Shewhart</i> (Περίπτωση <math>K</math>)</b>
$UCL = d$
$CL = 0$
$LCL = -d$

όπου  $d$  είναι ένας θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει  $1 \leq d \leq n \cdot (n+1)/2$ . Η τιμή του  $d$  επιλέγεται για προκαθορισμένο  $FAR$  ή ισοδύναμα για προκαθορισμένο  $ARL_m$ . Παρακάτω

παρατίθεται ο Πίνακας 3.1 που δίνει τις τιμές του άνω ορίου ελέγχου ( $UCL$ ) του διαγράμματος  $SR$  για καθορισμένο  $FAR$  ( $p_0^+$ ) και  $ARL_{in}$  ( $ARL_0^+$ ).

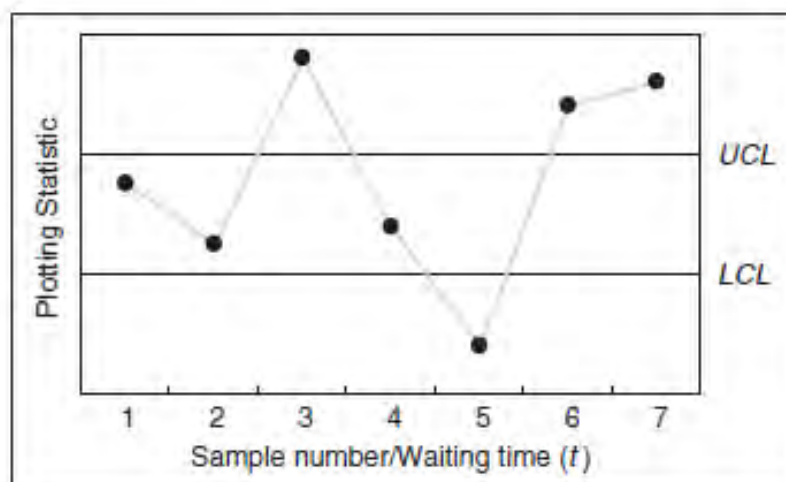
**Πίνακας 3.1** Τιμές άνω ορίου ελέγχου του διαγράμματος  $SR$  για καθορισμένο  $FAR$  και για δείγματα μεγέθους  $n = 4, 5$  και  $6$  (Bakir (2004))

$UCL$	$n = 4$		$n = 5$		$n = 6$	
	$ARL_0^+$	$p_0^+$	$ARL_0^+$	$p_0^+$	$ARL_0^+$	$p_0^+$
10	16	0.06250000	6.40	0.15625	4.57	0.218750
11	$\infty$	0.0	10.67	0.09375	6.40	0.156250
12			10.67	0.09375	6.40	0.156250
13			16.00	0.06250	9.14	0.109375
14			16.00	0.06250	9.14	0.109375
15			32.00	0.03125	12.80	0.781250
16			$\infty$	0.0	12.80	0.781250
17					21.33	0.046875
18					21.33	0.046875
19					32.00	0.031250
20					32.00	0.031250
21					64.00	0.015600
22					$\infty$	0.0

Οι Chakraborti and Eryilmaz (2007) πρότειναν δύο νέα δίπλευρα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της διάμεσου, τα οποία βασίζονται στον προσημικό βαθμολογικό έλεγχο του *Wilcoxon* ( $SR$  test) με την χρήση κανόνα ροών 2-από-2 (*k-of-k signaling rule*) τα οποία είναι γνωστά ως **διάγραμμα DR** (*DR chart*) και **KL** (*KL chart*). Το 2-από-2 *DR* διάγραμμα δίνει γραφική ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (*OOC*), αν και μόνο αν δύο οποιαδήποτε συνεχόμενα σημεία στο διάγραμμα ελέγχου πάρουν τιμές μεγαλύτερες από το α.ο.ε.  $UCL$  ή πάρουν τιμές μικρότερες από το κ.ο.ε.  $LCL$ . Το 2-από-2 *KL* διάγραμμα δίνει γραφική ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (*OOC*), αν δύο οποιαδήποτε συνεχόμενα σημεία βρεθούν είτε πάνω από το α.ο.ε.  $UCL$ , είτε κάτω από το κ.ο.ε.  $LCL$  ή ένα σημείο βρεθεί πάνω από το α.ο.ε.  $UCL$  και το αμέσως επόμενο σημείο βρεθεί κάτω από το κ.ο.ε.  $LCL$  (ή το αντίστροφο). Αυτή ακριβώς είναι και η βασική (γραφική) διαφορά μεταξύ του διαγράμματος *DR* και του διαγράμματος *KL*.



Στο Σχήμα 3.1 παρατηρούμε γραφικά, ότι για τα υπ' αριθμό 3,6 και 7 δείγματα ελέγχου, η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (για πρώτη φορά) με την χρήση κανόνα ροών 1-από-1, 2-από-2 για *KL* και 2-από-2 για *DR* διάγραμμα, αντίστοιχα.



**Σχήμα 3.1** Γραφική απεικόνιση του 1-από-1, 2-από-2 *KL* και 2-από-2 *DR* διαγράμματος ελέγχου

Τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου 2-από-2 *DR* και *KL*, εμφανίζουν τα ίδια πλεονεκτήματα, δηλαδή, παρουσιάζουν μικρότερη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) και μεγαλύτερο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) συγκριτικά με τα μη παραμετρικά *SR* διαγράμματα που πρότεινε ο Bakir (2004). Επίσης, για μικρές μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των παρατηρήσεων, εμφανίζουν μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{out}$ ) συγκριτικά με τα υπόλοιπα μη παραμετρικά καθώς και με τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, δηλαδή ανιχνεύουν πιο εύκολα και έγκαιρα αυτές τις μετατοπίσεις. Το μοναδικό μειονέκτημα που παρουσιάζουν, είναι ότι απαιτούν την συλλογή αρκετών ή πολλών δειγμάτων, κάτι που μπορεί να προκαλέσει μεγάλη δαπάνη χρόνου και κυρίως σημαντικό οικονομικό κόστος, ιδιαίτερα αν το μέγεθος του καθενός τυχαίου δείγματος που συλλέγεται είναι μεγάλο.

Το 2010 οι Human, Chakraborti and Smit παρουσίασαν μονόπλευρα και δίπλευρα μη παραμετρικά (μονοδιάστατα) διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που βασίζονται στην προσημική στατιστική συνάρτηση και στην εφαρμογή κανόνων ροών. Αυτά τα διαγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση όλων των ποσοστημορίων

(συμπεριλαμβανομένου και της διαμέσου). Για την κατασκευή τους, χρησιμοποιήθηκε η συνήθης προσημική συνάρτηση  $T_i = \sum_{j=1}^n I(X_{ij} > \theta_0)$ , η οποία μας δίνει τον αριθμό των παρατηρήσεων του  $i$ -στου δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από  $\theta_0$  (όπου  $\theta_0$  μια καθορισμένη τιμή-στόχος του ποσοστημόριου που παρακολουθούμε) με την ταυτόχρονη χρήση κανόνων ροών 1-από-1,  $k$ -από- $k$  ή  $k$ -από- $w$ . Παρόλο που τα  $k$  και  $w$  μπορούν θεωρητικά να πάρουν διάφορες τιμές, από πρακτική άποψη είναι σημαντικό τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν να μπορούν να εφαρμοστούν εύκολα, έτσι οι συγγραφείς επικεντρώθηκαν σε δύο συγκεκριμένα διαγράμματα: το 2-από-2 (δηλ.  $k = 2$ ) και το 2-από-3 (δηλ.  $k = 2, w = 3$ ). Τα συγκεκριμένα διαγράμματα για να δώσουν γραφική ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου απαιτούν την παρακολούθηση μόνο των τελευταίων δύο ή τριών σημείων.

Για να υπολογίσουν την κατανομή και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του μήκους ροής (π.χ. *ARL*, *SDRL*) χρησιμοποίησαν την μεθοδολογία εμφύτευσης σε πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα (*finite Markov chain embedding technique*). Αυτή η προσέγγιση είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για διακριτές στατιστικές σχεδίασης, πράγμα που συμβαίνει με τα μη παραμετρικά διαγράμματα. Για την κατασκευή ενός δίπλευρου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου, με την χρήση της μεθοδολογίας εμφύτευσης σε πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- α) κατατάσσουμε κάθε προσημική στατιστική συνάρτηση  $T_i$  (με βάση την τιμή της) σε μία από τρεις κατηγορίες ανάλογα με το αν βρίσκεται πάνω από το α.ο.ε. *UCL* ή κάτω από το κ.ο.ε. *LCL*, ή μεταξύ του κ.ο.ε. *LCL* και του α.ο.ε. *UCL*,
- β) ορίζουμε μια νέα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $Y_i$  που παίρνει τιμές ανάλογες με την ταξινόμηση των  $T_i$  σε μία από τις παραπάνω τρεις κατηγορίες, και
- γ) κατασκευάζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα για να υπολογίσουμε την κατανομή του μήκους ροής.

Για την κατασκευή ενός μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου, στο βήμα (α) ταξινομούμε κάθε προσημική στατιστική συνάρτηση  $T_i$  σε μία από δύο κατηγορίες ανάλογα με το αν βρίσκεται πάνω ή κάτω από το α.ο.ε. *UCL* (για κατασκευή άνω μονόπλευρου διαγράμματος) ή πάνω ή κάτω από το κ.ο.ε. *LCL* (για κατασκευή κάτω μονόπλευρου διαγράμματος). Τα βήματα (β) και (γ) είναι τα ίδια.

Τα πλεονεκτήματα των διαγραμμάτων ελέγχου που πρότειναν οι Human, Chakraborti and Smit (2010) είναι: (α) έχουν μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα σε σύγκριση με το αρχικό διάγραμμα 1-από-1 που πρότειναν οι Amin, Reynolds and Bakir (1995), (β) είναι εύχρηστα, (γ) προσφέρουν στον επαγγελματία μεγαλύτερη ευελιξία και πρακτικότητα στην φάση του σχεδιασμού, λόγω των τιμών  $FAR$  και  $ARL_m$  και (δ) η εφαρμογή των κανόνων ροών είναι εύκολη χρησιμοποιώντας τους ειδικούς πίνακες που παρέχονται από τους συγγραφείς.

Οι Janacek and Meikle (1997) πρότειναν την κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* που απεικονίζει τη διάμεσο του δείγματος που εξετάζεται από τη διεργασία. Υποθέτουμε ότι λαμβάνεται ένα δείγμα αναφοράς (*reference sample*) μεγέθους  $m$ , έστω  $X_1, X_2, \dots, X_m$  από την εντός ελέγχου (*IC*) διεργασία, δηλαδή ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από την εντός ελέγχου (αθροιστική) κατανομή  $F_x(x) = F(x)$ , όπου το μέγεθος  $m$  είναι συνήθως μεγάλο. Στη συνέχεια, εξάγονται από την παραγωγική διαδικασία τυχαία δείγματα (*test samples*) που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (και από το δείγμα αναφοράς) και ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν η παρατηρούμενη διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή όχι. Δηλαδή, αν  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα που λαμβάνεται από διεργασία με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F_Y(x) = G(x)$ , τότε ο στόχος είναι η γρήγορη ανίχνευση μιας πιθανής αλλαγής στην κατανομή της διεργασίας από  $F(x)$  σε  $G(x)$ . Στο διάγραμμα των Janacek and Meikle (1997), αντί να γίνει χρήση των δειγματικών μέσων, υπολογίζεται η δειγματική διάμεσος  $\delta$  του εξεταζόμενου τυχαίου δείγματος και συγκρίνεται με τα όρια ελέγχου, όπως αυτά έχουν καθορισθεί με βάση το δείγμα αναφοράς. Δεδομένου ότι η εντός ελέγχου κατανομή είναι άγνωστη, χρησιμοποιούνται ως όρια ελέγχου δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς,  $X_{1:m} \leq X_{2:m} \leq \dots \leq X_{m:m}$  και στη συνέχεια επιλέγουμε δύο συμμετρικά όρια ελέγχου, τα  $LCL = X_{\alpha:m}$  και  $UCL = X_{m-\alpha+1:m}$ .

Η παράμετρος σχεδιασμού,  $1 \leq a \leq m$ , προσδιορίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*), δηλαδή η πιθανότητα το διάγραμμα να παράγει λανθασμένο σήμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ , δηλαδή  $P(LCL < \delta < UCL / H_0) \geq 1 - f$ .

Το βασικό πλεονέκτημα του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου αποτελεί το γεγονός ότι, εξαιτίας της χρήσης της διαμέσου του εξεταζόμενου τυχαίου δείγματος (αντί της μέσης τιμής του), δεν είναι ευαίσθητο σε πιθανά λάθη μετρήσεων και επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις που το υπό μελέτη μετρήσιμο χαρακτηριστικό περιλαμβάνει μια υποκειμενική αξιολόγηση ή ακόμη και διατάξιμα δεδομένα. Ο παρακάτω Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τις πιθανότητες λανθασμένου συναγερωμού για το διάγραμμα των Janacek and Meikle (1997), για διάφορες επιλογές των μεγεθών  $m$ ,  $n$  των δύο δειγμάτων και της παραμέτρου σχεδιασμού  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.2** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερωμού του διαγράμματος των Janacek και Meikle (1997)

		<i>Δείγμα αναφοράς μεγέθους <math>m</math></i>			
<i>n</i>	<i>a</i>	25	30	35	40
		<i>FAR</i>	<i>FAR</i>	<i>FAR</i>	<i>FAR</i>
5	1	0.0049	0.0031	0.0020	0.0014
	2	0.0196	0.0117	0.0054	0.0054
	3	0.0439	0.0278	0.0186	0.0131
	4	0.0826	0.0528	0.0357	0.0252
	5	0.1359	0.0877	0.0598	0.0425
7	1	0.0020	0.0011	0.0006	0.0004
	2	0.0089	0.0049	0.0029	0.0019
	3	0.0244	0.0137	0.0082	0.0052
	4	0.0517	0.0294	0.0179	0.0115
	5	0.0938	0.0542	0.0335	0.0217
9	1	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
	2	0.0048	0.0024	0.0013	0.0007
	3	0.0149	0.0075	0.0041	0.0024
	4	0.0348	0.0179	0.0099	0.0058
	5	0.0686	0.0360	0.0202	0.0121

Επεκτείνοντας την ιδέα των Janacek and Meikle (1997), οι Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004) μελέτησαν μία κλάση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart*, τα οποία χρησιμοποιούν ως όρια ελέγχου κατάλληλα επιλεγμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{\alpha:m}, X_{b:m}$  με  $1 \leq \alpha < b \leq m$ , του δείγματος αναφοράς. Αφού πρώτα έχουμε συλλέξει ένα τυχαίο δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  από τη διεργασία, υπολογίζεται η  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση  $Y_{j:n}$  και συγκρίνεται με τα όρια ελέγχου  $LCL = X_{\alpha:m}$  και  $UCL = X_{b:m}$ . Αν η τιμή της  $Y_{j:n}$  βρεθεί μεταξύ των ορίων ελέγχου, τότε η διεργασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου (*IC*), ενώ σε διαφορετική περίπτωση η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε

κατάσταση εκτός ελέγχου (*OOC*) και απαιτείται διερεύνηση για τις αιτίες που προκάλεσαν τη μετατόπιση. Η πιθανότητα ότι το προτεινόμενο διάγραμμα δεν παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση, μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης προτεραιότητας  $P_{(j)} = \sum_{i=1}^j M_i$ . Συγκεκριμένα, το συμβάν ότι η τιμή της  $Y_{j:n}$  βρίσκεται ανάμεσα στις διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$  είναι ισοδύναμο με το συμβάν ότι η συνάρτηση  $P_{(j)}$  παίρνει τιμές μεταξύ  $a$  και  $b-1$ . Συνεπώς ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$p = P(X_{a:m} < Y_{j:n} < X_{b:m}) = P(a < P_{(j)} < b-1)$$

Πράγματι, δεδομένου ότι η κατανομή είναι συνεχής, η ανίσωση  $Y_{j:n} < X_{b:m}$  ισχύει αν και μόνο αν το πολύ  $b-1$   $X$ -παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από την  $Y_{j:n}$ , ενώ με παρόμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση  $X_{a:m} < Y_{j:n}$  είναι αληθής αν και μόνο αν τουλάχιστον  $a$   $X$ -παρατηρήσεις είναι μικρότερες από την  $Y_{j:n}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα  $1 - p$  είναι η πιθανότητα το διάγραμμα να δώσει σήμα ότι η διεργασία μετατοπίστηκε σε εκτός ελέγχου κατάσταση (*OOC*). Ο προσδιορισμός των παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, j$  γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερού (*FAR*) να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ .

Από διάφορες αριθμητικές συγκρίσεις που έχουν γίνει από τους Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004), φαίνεται ότι το διάγραμμα 1-από-1 που προτείνουν υπερέχει ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου. Το βασικό μειονέκτημα του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι ότι η απόφαση βασίζεται σε μία μόνο διατεταγμένη παρατήρηση (διάμεσος ή κάποιο άλλο ποσοστημόριο). Το γεγονός αυτό έχει ως πιθανό αποτέλεσμα, ότι ενώ η συγκεκριμένη παρατήρηση μπορεί να βρίσκεται μεταξύ των ορίων ελέγχου, ταυτόχρονα το μεγαλύτερο πλήθος των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος να βρίσκεται εκτός των ορίων αυτών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το διάγραμμα θα δίνει σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου (*IC*), ενώ στην πραγματικότητα θα υπάρχει ισχυρή ένδειξη για το αντίθετο συμπέρασμα.

Το 2010 οι Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras για να βελτιώσουν το διάγραμμα ελέγχου προτεραιότητας 1-από-1 των Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004), το οποίο βασίζεται σε μια μόνο διατεταγμένη παρατήρηση, πρότειναν ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* Φάσης II (*Shewhart-Type Precedence Chart with*

*Enhancement*). Το νέο διάγραμμα λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο τη θέση της  $j$ -οστής διατεταγμένης παρατήρησης  $Y_{j:n}$  του εξεταζόμενου δείγματος ελέγχου (*test sample*), αλλά και το πλήθος  $R$  των παρατηρήσεων του που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου. Το διάγραμμα κρίνει ότι η παραγωγική διεργασία είναι εντός ελέγχου (*IC*), αν ικανοποιούνται οι δύο επόμενες συνθήκες  $LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL$  και  $R \geq r$ . Η διαδικασία που προτείνουν οι συγγραφείς μπορεί να θεωρηθεί ότι τρέχει ταυτόχρονα δύο διαγράμματα, ένα διάγραμμα ελέγχου προτεραιότητας 1-από-1 που σχεδιάζει την  $Y_{j:n}$  έναντι των ορίων ελέγχου  $LCL = X_{\alpha:m}$  και  $UCL = X_{b:m}$  ( $X_{\alpha:m}$ ,  $X_{b:m}$  διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς) και ένα διάγραμμα που σχεδιάζει το πλήθος των παρατηρήσεων  $R$  που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου  $LCL = 0$  και  $UCL = r$ . Αν η τιμή της  $Y_{j:n}$  ή του  $R$  βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, τότε η διεργασία κρίνεται ότι έχει μετατοπιστεί σε κατάσταση εκτός ελέγχου (*OOC*).

Οι συγγραφείς παρείχαν πίνακες για την εφαρμογή του διαγράμματος ελέγχου, με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, j, \alpha, b, r$  και για ορισμένες τυπικές τιμές των  $ARL_{in}$  και  $FAR$ . Εξέτασαν την απόδοση του διαγράμματός τους, συγκρίνοντας το  $ARL_{out}$ , καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι λειτουργεί καλύτερα από το παραμετρικό διάγραμμα  $\bar{X}$  *Shewhart* για δεδομένα που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή και ότι βελτιώνει το διάγραμμα έλεγχου προτεραιότητας 1-απο-1 των Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004).

Οι Chakraborti and Van de Wiel (2008) πρότειναν ένα διάγραμμα τύπου *Shewhart* Φάσης II, για τον έλεγχο μετατοπίσεων θέσης, με βάση την στατιστική συνάρτηση *Mann-Whitney* (*Mann-Whitney (MW) statistic*). Το διάγραμμα είναι βασισμένο στο *Mann-Whitney (MW)* έλεγχο, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον αθροιστικό βαθμολογικό έλεγχο του Wilcoxon (*Wilcoxon rank-sum test*) και είναι γνωστό ως **διάγραμμα MW**. Υποθέτουμε ότι λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m$ , έστω  $X_1, X_2, \dots, X_m$  από μια εντός ελέγχου διεργασία και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα (*test sample*) μεγέθους  $n$ , που λαμβάνεται από την ίδια παραγωγική διαδικασία. Τα δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν η παρατηρούμενη διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή όχι. Η στατιστική συνάρτηση *MW* που μετράει τον συνολικό αριθμό των ζευγών  $(X, Y)$  για τα οποία η παρατήρηση  $Y$  είναι μεγαλύτερη από την παρατήρηση  $X$ , μπορεί να γραφεί ως

$$M_{XY} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(X_i < Y_j) = \sum_{j=1}^n \{I(Y_j > X_1) + \dots + I(Y_j > X_m)\}$$

όπου η  $I(X_i < Y_j)$  έχει την τιμή 1 αν  $X_i < Y_j$  ή την τιμή 0 αν  $X_i \geq Y_j$ . Η  $M_{XY}$  παίρνει τιμές μεταξύ 0 και  $m \cdot n$  και οι μεγαλύτερες (μικρότερες) τιμές της  $M_{XY}$  δείχνουν μια θετική (αρνητική) μετατόπιση. Για την χάραξη του διαγράμματος  $MW$  τύπου *Shewhart* χρησιμοποιούμε την παραπάνω συνάρτηση  $M_{XY}$ . Το διάγραμμα παράγει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία όταν  $M_{XY} > U_{mn}$  ή  $M_{XY} < L_{mn}$ , όπου  $U_{mn}$  και  $L_{mn} = mn - U_{mn}$  είναι το άνω ( $UCL$ ) και το κάτω ( $LCL$ ) όριο ελέγχου αντίστοιχα.

Οι Chakraborti and Van de Wiel (2008) παρείχαν πίνακες για την εφαρμογή και την σύγκριση της απόδοσης του  $MW$  διαγράμματος. Διαπίστωσαν ότι το διάγραμμα  $MW$  τύπου *Shewhart* είναι πιο αποτελεσματικό από το διάγραμμα στατιστικών ελέγχων προτεραιότητας (τύπου *Shewhart*) σε ορισμένες περιπτώσεις.

Ο παραδοσιακός Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών ( $\Sigma EA$ ) περιλαμβάνει συχνά τη χρήση δυο ξεχωριστών διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση αλλαγών μιας διεργασίας, π.χ. ένα για το μέσο όρο και ένα για την τυπική απόκλιση. Οι Mukherjee and Chakraborti (2012) πρότειναν ένα ενιαίο διάγραμμα τύπου *Shewhart* Φάσης II για την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης και της παραμέτρου κλίμακας μιας συνεχούς κατανομής (*location-scale chart*), όταν είναι άγνωστες και οι δύο αυτές παράμετροι. Το προτεινόμενο διάγραμμα είναι γνωστό ως **διάγραμμα  $SL$**  (*Shewhart-Lepage (SL) control chart*) και συνδυάζει δύο δημοφιλείς μη παραμετρικές στατιστικές μεθόδους δοκιμασίας: τον αθροιστικό βαθμολογικό έλεγχο του Wilcoxon (*Wilcoxon rank-sum test*) και τον έλεγχο Ansari-Bradley (*Ansari-Bradley test*) για την παρακολούθηση των μεταβολών των παραμέτρων θέσης και κλίμακας αντίστοιχα.

Στην εργασία τους, οι Mukherjee and Chakraborti (2012) υλοποιώντας το  $SL$  διάγραμμα ελέγχου, κατασκεύασαν πίνακες με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού για την έγκαιρη ανίχνευση πιθανών μετατοπίσεων των παραμέτρων θέσης ή/και κλίμακας. Μελέτησαν τις ιδιότητες του διαγράμματος για διάφορα χαρακτηριστικά της κατανομής του μήκους ροής ( $RL$ ), συμπεριλαμβανομένου του μέσου όρου, της διαμέσου και ορισμένων εκατοστημορίων. Εξετάζοντας την επίδραση του μεγέθους  $m$  του δείγματος αναφοράς (Φάση I) στο εντός ελέγχου ( $IC$ )  $ARL$  και  $SDRL$ , απέδειξαν ότι απαιτούνται τουλάχιστον 100 έως 150 παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς όταν αυτό ακολουθεί την κανονική κατανομή και

περίπου 400 παρατηρήσεις όταν προέρχεται από κατανομή βαριάς ουράς (*heavy-tailed distribution*), έτσι ώστε το επιτευχθέν  $ARL_m$  να είναι κοντά στην τιμή-στόχο που προσδιόρισαν στην εργασία τους ως το 500. Συνοψίζοντας κατέληξαν ότι, το διάγραμμα *SL* παρακολουθεί μια παράμετρο θέσης και μια παράμετρο κλίμακας μιας συνεχούς κατανομής ταυτόχρονα σε ένα μόνο γράφημα, παρέχοντας αξιόπιστες γενικές ενδείξεις για τυχόν αλλαγή στη διεργασία και ειδικές ενδείξεις για μια μετατόπιση της παραμέτρου θέσης, κλίμακας ή και των δύο, ωστόσο, δεν απαιτεί κατά την πρακτική εφαρμογή του να γίνει η υπόθεση της κανονικότητας ή οποιασδήποτε άλλης κατανομής για την εγκυρότητα της απόφασης.

Το 2014 οι Chowdhury, Mukherjee and Chakraborti παρουσίασαν το **διάγραμμα *SC*** (*Shewhart-Cucconi (SC) chart*), το οποίο (όπως και το *SL* διάγραμμα) παρακολουθεί ταυτόχρονα πιθανή μεταβολή των παραμέτρων θέσης και κλίμακας μιας διεργασίας, χρησιμοποιώντας την στατιστική συνάρτηση *Cucconi*. Σε αντίθεση με το *SL* διάγραμμα, ο έλεγχος της ισότητας των δύο παραμέτρων θέσης και κλίμακας γίνεται με βάση τις έννοιες της κατάταξης και της κατάστασης.

Οι συγγραφείς παρείχαν πίνακες με την εφαρμογή του *SC* διαγράμματος για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού και σύγκριναν την απόδοση του με το *SL* διάγραμμα, καταλήγοντας στα εξής συμπεράσματα: (α) υπερέχει όταν υπάρχει μικρή μετατόπιση της παραμέτρου θέσης με ταυτόχρονη μετατόπιση της παραμέτρου κλίμακας, (β) μειονεκτεί όταν παρατηρείται μετατόπιση *μόνο* της παραμέτρου θέσης ενώ η παράμετρος κλίμακας παραμένει μέσα στα όρια ελέγχου ή όταν υπάρχει μια μετρίως μεγάλη μετατόπιση της παραμέτρου θέσης που συνοδεύεται από μετατόπιση της παραμέτρου κλίμακας και (γ) αν το μέγεθος μετατόπισης της παραμέτρου θέσης είναι μεγάλο, τότε και τα δύο διαγράμματα είναι εξίσου αποτελεσματικά. Εξετάζοντας την επίδραση του μεγέθους  $m$  του δείγματος αναφοράς (Φάση I) στην απόδοση του διαγράμματος, απέδειξαν ότι απαιτούνται τουλάχιστον 150 παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς ώστε το *SC* διάγραμμα να θεωρείται αξιόπιστο.

Ο Triantafyllou (2017) παρουσίασε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II, το οποίο επεκτείνοντας την ιδέα των Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2010) λαμβάνει υπόψη τη θέση δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων  $Y_{j:n}$ ,  $Y_{k:n}$  του δείγματος ελέγχου (*test sample*) καθώς και τον αριθμό  $R$  των παρατηρήσεων από το δείγμα ελέγχου που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου  $LCL = X_{\alpha:m}$  και  $UCL = X_{b:m}$ , όπου



$X_{\alpha:n}, X_{b:m}$  διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς. Το διάγραμμα κρίνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου (IC), αν ικανοποιούνται οι δύο επόμενες συνθήκες

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq Y_{k:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r, \text{ όπου } r \in \mathbb{Z}^+.$$

Αν η τιμή της  $Y_{j:n}$  ή της  $Y_{k:n}$  ή του  $R$  βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, τότε κρίνεται ότι η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε κατάσταση εκτός ελέγχου (OOC).

Από διάφορες αριθμητικές συγκρίσεις που έκανε ο συγγραφέας, φαίνεται ότι οι τιμές του  $ARL_{out}$  για το νέο διάγραμμα που προτείνει είναι μικρότερες των διαγραμμάτων ελέγχου που είχαν προτείνει το 2009 οι Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (τα οποία βασίζονταν στην χρήση ροών ή στη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του *Wilcoxon*). Αυτό υποδηλώνει την υπεροχή του προτεινόμενου διαγράμματος, μιας και καταφέρνει να ανιχνεύει ταχύτερα την μετατόπιση της διαδικασίας σε εκτός ελέγχου. Επίσης σύγκρινε την απόδοση του νέου διαγράμματος με το *SL* (*Shewhart-Lepage*) διάγραμμα των Mukherjee and Chakraborti (2012) και με το *SC* (*Shewhart-Cucconi*) διάγραμμα των Chowdhury, Mukherjee and Chakraborti (2014). Το προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου υπερέχει των δύο αυτών διαγραμμάτων σε όλες τις περιπτώσεις που η διεργασία ακολουθεί την κανονική κατανομή καθώς καταφέρνει να ανιχνεύσει οποιαδήποτε (μικρή, μεσαία ή μεγάλη) μετατόπιση της παραμέτρου θέσης ή/και κλίμακας. Όταν η διεργασία ακολουθεί την κατανομή Laplace υπερτερεί και των δύο διαγραμμάτων μόνο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της παραμέτρου θέσης, για τις υπόλοιπες περιπτώσεις μετατόπισης της παραμέτρου θέσης ή/και κλίμακας υπερέχει μόνο έναντι του *SL* διαγράμματος.

### 3.4.2 Διαγράμματα ελέγχου Συσσωρευμένου Αθροίσματος

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα, τύπου *CUSUM*, κρίνονται αρκετά σημαντικά στο Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας (*ΣΕΔ*), αφού μπορούν να ανιχνεύσουν αρκετά εύκολα και έγκαιρα μικρές ή πολύ μικρές μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα. Αυτό, είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημά τους όσον αφορά τις σύγχρονες εφαρμογές του ΣΕΔ. Τα διαγράμματα αυτά, δεν προϋποθέτουν κάποια συγκεκριμένη κατανομή για τις παρατηρήσεις που συλλέγονται, παρουσιάζουν την ίδια πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) και το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) για όλες τις πιθανές κατανομές που μπορεί να ακολουθούν τα δεδομένα, είναι αρκετά ανθεκτικά σε τυχόν έκτροπες παρατηρήσεις και ακόμη είναι σχετικά απλά και εύκολα στην

κατασκευή τους, αφού δεν περιλαμβάνουν ιδιαίτερα δύσκολες και πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις.

Από την άλλη πλευρά, τα διαγράμματα τύπου *CUSUM* μειονεκτούν στο ότι, οι στατιστικές συναρτήσεις (τ.μ.) που χρησιμοποιούνται, δε λαμβάνουν υπόψη τις ακριβείς αριθμητικές τιμές των παρατηρήσεων, αλλά μόνο τους βαθμούς και τα πρόσημα των παρατηρήσεων και κατά συνέπεια χάνεται σημαντική στατιστική πληροφορία από τα δείγματα που συλλέγονται. Ακόμη, τα διαγράμματα αυτά, συνήθως δεν καταφέρνουν να ανιχνεύσουν εύκολα και έγκαιρα πιθανές μεγάλες μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, όπως μπορούν να κάνουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Επίσης, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου, συνήθως απαιτούν την αρχική εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Αυτό ίσως να μην είναι αρκετά εύκολο ή εφικτό, ανάλογα με τη στατιστική μορφή που έχουν τα τυχαία δείγματα που συλλέγονται (στην περίπτωση που έχουμε ελλιπή, λογοκριμένα, περικομμένα ή μετατοπισμένα δεδομένα). Εκτός από αυτό όμως, η αρχική εκτίμηση των πληθυσμιακών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, ίσως να μην είναι πολύ ακριβής και αξιόπιστη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που το μέγεθος του αρχικού δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να ισχύουν τα γνωστά ασυμπτωτικά στατιστικά αποτελέσματα.

Μη παραμετρικά διαγράμματα *CUSUM* μπορούν να δημιουργηθούν με τη χρήση μη παραμετρικών στατιστικών ελέγχων, όπως είναι ο προσημικός έλεγχος  $SN_i$  ή η προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση Wilcoxon (*Wilcoxon signed rank statistic, WSR*) αντί του  $\bar{X}_i$ . Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές βαθμολογικές συναρτήσεις (*signed rank statistics*) είναι ιδιαίτερα δημοφιλή. Στην εργασία του Reynolds (1975), μελετώνται διαγράμματα *CUSUM* που βασίζονται σε προσημικούς διαδοχικούς βαθμούς (*signed sequential ranks*) των παρατηρήσεων. Ο Miller (1970) εισήγαγε έναν έλεγχο που χρησιμοποιεί την προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του Wilcoxon, ενώ οι McGilchrist and Woodyer (1975) πρότειναν ένα διάγραμμα *CUSUM* για τη μελέτη της διαμέσου της κατανομής βροχοπτώσεων που βασίζεται σε προσημικούς βαθμούς.

Οι Bakir and Reynolds (1979) πρότειναν ένα διάγραμμα *CUSUM* για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας, που βασίζεται στην ιδέα της βαθμολόγησης (*ranking*) των παρατηρήσεων εντός του δείγματος, στο οποίο ανήκουν. Η συγκεκριμένη ιδέα είχε αρχικά εφαρμοσθεί από τους Wilcoxon, Katti and Wilcox (1963) και Van der Laan (1966) για την

κατασκευή ενός ελέγχου για δύο διαδοχικά δείγματα. Οι Bakir and Reynolds (1979) πρότειναν διαγράμματα *CUSUM* χρησιμοποιώντας τη προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση *Wilcoxon*. Χρησιμοποιώντας το συσσωρευτικό άθροισμα σαν μια αλυσίδα *Markov*, ανέπτυξαν μια απλή μέθοδο για την εκτίμηση του *ARL* μιας κατανομής, με την προϋπόθεση ότι η κατανομή της προσημικής βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης *Wilcoxon* είναι γνωστή. Οι τιμές των *ARL* στην εργασία τους είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρατηρήσεων και όχι των δειγμάτων, που χρειάζονται για να δοθεί ένα σήμα.

Εκτός από τα διαγράμματα *CUSUM* που χρησιμοποιούν την προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του *Wilcoxon*, έχουν προταθεί και κάποια άλλα διαγράμματα *CUSUM*, τα οποία χρησιμοποιούν διαδοχικούς βαθμούς (*sequential ranks*). Τα διαγράμματα αυτά, έχουν προταθεί από τον McDonald (1990) και έχουν το χαρακτηριστικό ότι δε χρησιμοποιούν κάποιο αρχικό δείγμα, αλλά μόνο ένα τελικό. Σημειώνεται εδώ ότι, αυτό το διάγραμμα, ουσιαστικά απεικονίζει τους αθροιστικούς διαδοχικούς βαθμούς (*cumulative sequential ranks*) όλων των παρατηρήσεων που συλλέγονται, δηλαδή απεικονίζει τα μερικά αθροίσματα (*partial sums*) των διαδοχικών βαθμών που προκύπτουν από κάθε μία παρατήρηση που συλλέγεται και για αυτόν το λόγο, το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* (Αντζουλάκος (2009)).

Επίσης, και οι Bhattacharyya and Frierson (1981) πρότειναν άλλο ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου *CUSUM*, το οποίο χρησιμοποιεί ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου τους διαδοχικούς βαθμούς (*sequential ranks*). Το διάγραμμα αυτό χρησιμοποιείται στα πλαίσια του ΣΕΔ για έναν συγκεκριμένο σκοπό: για να ανιχνεύσει εύκολα και αρκετά έγκαιρα μία αλλαγή (αν φυσικά αυτή συμβεί) στην κατανομή που ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, στην βιβλιογραφία, αναφέρεται ότι αυτό το μη παραμετρικό διάγραμμα, εφαρμόζει τη στατιστική γνώση που υπάρχει σχετικά με το λεγόμενο πρόβλημα «αλλαγής σημείου» (*change point problem*) (ή αλλιώς με το πρόβλημα «ανίχνευσης» (*detection problem*)) στο ΣΕΔ (Zacks (1991)). Το διάγραμμα των Bhattacharyya and Frierson (1981), αποτελεί μία αρκετά χρήσιμη και ικανοποιητική εναλλακτική επιλογή για συγκεκριμένες εφαρμογές του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασίας σε περιπτώσεις που οι ερευνητές έχουν ως στόχο να ανιχνεύσουν μικρές ή πολύ μικρές μεταβολές των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Ο Yashchin (1992) πρότεινε ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* στο οποίο αναλύει το μήκος ροής (*RL*) καθώς και ορισμένα άλλα στατιστικά χαρακτηριστικά του

$RL$ , αντικαθιστώντας την άγνωστη κατανομή που ακολουθούν οι παρατηρήσεις με την εμπειρική (δειγματική) συνάρτηση κατανομής (*empirical distribution function*) ενός αρχικού τυχαίου δείγματος. Στην εργασία του, αναλύει διεξοδικά τα χαρακτηριστικά των στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου που χρησιμοποιεί εφαρμόζοντας κυρίως βασικές ιδιότητες ανεξίτητων *Markov* και επίσης παρουσιάζει αρκετά χρήσιμα στατιστικά αποτελέσματα, που προκύπτουν με χρήση προσομοίωσης.

### 3.4.3 Διαγράμματα ελέγχου Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου *EWMA* αποτελούν μία αρκετά καλή και χρήσιμη εναλλακτική επιλογή για όσους ασχολούνται συστηματικά με το ΣΕΔ, αν φυσικά ικανοποιούνται όλες οι βασικές υποθέσεις για την εφαρμογή και τη χρήση τους. Η στατιστική και πρακτική σπουδαιότητα αυτών των διαγραμμάτων, εντοπίζεται στην έγκαιρη ανίχνευση μικρών ή πολύ μικρών μετατοπίσεων των στατιστικών (πληθυσμιακών) παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις που συλλέγονται. Επίσης, το γεγονός ότι αυτά τα διαγράμματα είναι μη παραμετρικά, τα καθιστά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε κατανομή ακολουθούν τα δεδομένα.

Από την άλλη πλευρά, το πιο σημαντικό μειονέκτημα για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, είναι ότι συνήθως δεν καταφέρνουν να ανιχνεύσουν εύκολα μεγάλες μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, όπως μπορούν να κάνουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες. Εκτός από αυτό, ορισμένα από αυτά τα διαγράμματα ελέγχου, απαιτούν τη συλλογή μεμονωμένων παρατηρήσεων και όχι δειγμάτων, κάτι που ίσως να είναι πρακτικά δύσκολο ή και ανέφικτο. Ακόμη, η συλλογή ενός αρχικού τυχαίου δείγματος, συνήθως προκαλεί αυξημένο οικονομικό κόστος, ιδιαίτερα στην περίπτωση που το μέγεθός του είναι σχετικά μεγάλο. Σε κάθε περίπτωση πάντως, θεωρείται γενικά ότι, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* παίζουν σημαντικό ρόλο στον ΣΕΔ και ότι υπάρχουν ακόμη πολλές δυνατότητες εκτεταμένης μελλοντικής επιστημονικής έρευνας πάνω στα συγκεκριμένα διαγράμματα (Chakraborti, Bakir and Van Der Laan (2001)).

Οι Hackl and Ledolter (1991) πρότειναν διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* τα οποία εφαρμόζονται σε μεμονωμένες παρατηρήσεις και χρησιμοποιούν ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου τους τυποποιημένους βαθμούς (*standardized ranks*) των μεμονωμένων παρατηρήσεων. Παρουσίασαν αποτελέσματα προσομοίωσης που αποδεικνύουν, ότι το

συγκεκριμένο μη παραμετρικό διάγραμμα είναι αρκετά ανθεκτικό στις ακραίες τιμές και επίσης είναι αρκετά αποδοτικό και αποτελεσματικό σε μικρές μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων στην περίπτωση που η διεργασία βρεθεί εκτός στατιστικού ελέγχου (δηλαδή ανιχνεύει πολύ εύκολα και γρήγορα αυτές τις μικρές μετατοπίσεις).

Οι ίδιοι συγγραφείς, το 1992, παρουσίασαν μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* τα οποία χρησιμοποιούν τους διαδοχικούς βαθμούς μεμονωμένων παρατηρήσεων και το αρχικό τυχαίο δείγμα, συλλέγεται ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Η βασική διαφορά του συγκεκριμένου διαγράμματος από το αμέσως προηγούμενο διάγραμμα, είναι ότι σε αυτό χρησιμοποιούνται και απεικονίζονται γραφικά οι διαδοχικοί βαθμοί των μεμονωμένων παρατηρήσεων και όχι οι τυποποιημένοι βαθμοί τους, όπως συνέβαινε στο προηγούμενο διάγραμμα.

Εκτός από τα παραπάνω διαγράμματα τύπου *EWMA*, έχουν προταθεί και ορισμένα τα οποία χρησιμοποιούν τη γνωστή από την Απαραμετρική Στατιστική ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση (*grouped signed-rank, GSR statistic*). Τα διαγράμματα αυτά, προτάθηκαν από τους Amin and Searcy (1991), οι οποίοι στην ίδια εργασία προτείνουν επίσης, να χρησιμοποιείτε ταυτόχρονα με τη *GSR-EWMA* διαδικασία και ένα άλλο μη παραμετρικό διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς (δηλαδή της μεταβλητότητας) της διεργασίας.

Οι Zhou *et al.* (2009) εισήγαγαν ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* βασισμένο στη *MW* στατιστική συνάρτηση (*EWMA-MW*) για την ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία των Hawkins, Qiu and Kang (2003). Το διάγραμμα που πρότειναν, μπορεί να σχεδιαστεί εύκολα και αποδίδει καλά στην περίπτωση που οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστες, αρκεί κάποια ιστορικά δείγματα να είναι διαθέσιμα. Ύστερα από προσομοιώσεις, απέδειξαν ότι το *EWMA-MW* διάγραμμα έχει καλή απόδοση για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ανεξαρτήτως κατανομής. Επίσης, αποδίδει αρκετά ικανοποιητικά για τις μη κανονικές κατανομές και αποφεύγει μια μακρά ανάλυση της Φάσης I. Ωστόσο, υπάρχουν κάποια μειονεκτήματα όπως: το διάγραμμα έχει μειωμένη ευαισθησία στις ακραίες τιμές και είναι λιγότερο αποτελεσματικό, από τα αντίστοιχα παραμετρικά διαγράμματα, για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Ένα Νέο Μη Παραμετρικό Διάγραμμα Ελέγχου με χρήση Βαθμολογικής συνάρτησης τύπου Wilcoxon και Κανόνα Ροής

#### 4.1 Εισαγωγή

Πολλές φορές εφαρμόζουμε μια τεχνική ανάλυσης δεδομένων η οποία βασίζεται στην τάξη μεγέθους των παρατηρήσεων ενός δείγματος και όχι στις παρατηρήσεις αυτές καθαυτές. Οι βαθμοί (τάξεις μεγέθους, *ranks*) των δεδομένων προτιμώνται συχνά από τα ίδια τα δεδομένα για διάφορους λόγους. Ο πρώτος λόγος μπορεί να είναι ότι οι τιμές των παρατηρήσεων δεν έχουν νόημα από μόνες τους παρά μόνο όταν θεωρείται η διάταξή τους σε σχέση με τις υπόλοιπες παρατηρήσεις. Ο δεύτερος λόγος μπορεί να είναι ότι οι τιμές των παρατηρήσεων έχουν μεν νόημα από μόνες τους, αλλά η συνάρτηση κατανομής τους δεν είναι κανονική. Η Θεωρία Πιθανοτήτων, που απαιτείται για τον έλεγχο υποθέσεων με την χρήση στατιστικών συναρτήσεων που βασίζονται στις τάξεις μεγέθους των παρατηρήσεων, είναι σχετικά απλή και δεν εξαρτάται από την κατανομή από την οποία έχουν προέλθει οι παρατηρήσεις σε πολλές περιπτώσεις. Τα δεδομένα μπορεί να είναι μη αριθμητικά (καλό, καλύτερο, πολύ καλό) ή αριθμητικά (9.64, 8.45, κ.α.) και μπορεί να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα από το εάν ο πληθυσμός που προέρχονται είναι συνεχής, διακριτός ή μίγμα των δύο αυτών τύπων (Ξεκαλάκη (2001)).

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* δεν είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Η ευαισθητοποίησή τους για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων συνήθως επιτυγχάνεται με την υιοθέτηση κανόνων διακοπής που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών σχηματισμών (*patterns*) των αναπαριστάμενων στο διάγραμμα σημείων. Η εμφάνιση ενός ειδικού σχηματισμού σημείων δίνει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία. Τέτοιοι κανόνες εισήχθησαν και εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά το 1956 από την *Western Electric Company* (Ρακιτζής (2008)). Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε και μελετάμε έναν κανόνα ευαισθητοποίησης για το *Wilcoxon* διάγραμμα ελέγχου που προτάθηκε από τους Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009).

## 4.2 Ο Έλεγχος Wilcoxon

Ο έλεγχος του *Wilcoxon* είναι επίσης γνωστός και ως έλεγχος των *Mann-Whitney*. Μελετήθηκε για πρώτη φορά, για **ισομεγέθη** δείγματα, από τον *Wilcoxon* το 1945. Η περίπτωση δειγμάτων **διαφορετικού** μεγέθους μελετήθηκε από τους *Mann* και *Whitney* το 1947 και από τον *Wilcoxon* το 1949. Αυτό εξηγεί γιατί ο έλεγχος αυτός εμφανίζεται στην βιβλιογραφία με διαφορετικά ονόματα αν και συχνά αναφέρεται και ως έλεγχος *Wilcoxon-Mann-Whitney*.

Η συνήθης περίπτωση είναι αυτή που ο ερευνητής έχει δύο ανεξάρτητα δείγματα τα οποία προέρχονται από δύο πληθυσμούς, ενδεχομένως διαφορετικούς, και επιθυμεί να χρησιμοποιήσει έναν στατιστικό έλεγχο για να εξετάσει αν η μηδενική υπόθεση ότι οι δύο πληθυσμοί ταυτίζονται μπορεί να απορριφθεί. Δηλαδή, επιθυμεί να ανιχνεύσει διαφορές μεταξύ των δύο πληθυσμών με βάση τυχαία δείγματα από αυτούς τους πληθυσμούς. Εάν τα δείγματα αποτελούνται από δεδομένα σε διατεταγμένη κλίμακα (*ordinal scale*), η πιο ενδιαφέρουσα διαφορά είναι μία διαφορά στην θέση των δύο πληθυσμών. Τείνουν οι τιμές του ενός πληθυσμού να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές του άλλου πληθυσμού; Έχουν οι δύο πληθυσμοί ίσες διαμέσους; Είναι ίσες οι μέσες τιμές των πληθυσμών;

Ο έλεγχος *Wilcoxon* στηρίζεται στην συνένωση των δύο δειγμάτων σε ένα ενιαίο δείγμα, του οποίου οι τιμές διατάσσονται κατ' αύξουσα σειρά μεγέθους. Στις τιμές του προκύπτοντος δείγματος αντιστοιχίζονται βαθμοί από την μικρότερη στη μεγαλύτερη, ανεξάρτητα από τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται κάθε μία τιμή. Η στατιστική συνάρτηση που συνήθως χρησιμοποιούμε ως ελεγχοσυνάρτηση, είναι η αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon* (*Wilcoxon's rank-sum statistic*), που ορίζεται ως το άθροισμα των βαθμών που αντιστοιχούν σε εκείνες τις τιμές που προέρχονται από τον ένα από τους δύο πληθυσμούς. Εάν το άθροισμα αυτό είναι πολύ μικρό (ή πολύ μεγάλο), αυτό θα αποτελεί ένδειξη ότι οι τιμές που προέρχονται από αυτόν τον πληθυσμό τείνουν να είναι μικρότερες (ή μεγαλύτερες) από τις τιμές που προέρχονται από τον άλλο πληθυσμό. Επομένως, η μηδενική υπόθεση ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των πληθυσμών είναι εύλογο να απορριφθεί, όταν οι βαθμοί που σχετίζονται με το ένα δείγμα τείνουν να είναι υψηλότεροι από τους βαθμούς που σχετίζονται με το άλλο δείγμα (Ξεκαλάκη (2001)).

Τα δεδομένα αποτελούνται από δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα παρατηρήσεων. Έστω ότι  $X_1, X_2, \dots, X_m$  είναι το ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους  $m$  που προέρχεται από μια συνεχή κατανομή με αθροιστική συνάρτηση  $F_X(x)$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ένα δείγμα μεγέθους  $n$



από μια άλλη κατανομή  $F_Y(x)$ . Το ζητούμενο είναι ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης  $H_0 : F_X(x) = F_Y(x)$ , δηλαδή να εξετάσουμε αν οι δύο διεργασίες έχουν την ίδια κατανομή. Για έναν τέτοιο έλεγχο, θεωρούμε το δείγμα μεγέθους  $(n + m)$  που προκύπτει από την συνένωση των δυο δειγμάτων και στη συνέχεια αντιστοιχίζουμε στις τιμές του κοινού δείγματος τους βαθμούς (τάξεις μεγέθους) από 1 έως  $(n + m)$ . Ως στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο συνήθως χρησιμοποιείται η αθροιστική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon* που δίνεται από τον τύπο

$$W_R = \sum_{i=1}^m \text{Rank}(X_i),$$

που εκφράζει το άθροισμα των βαθμών (των τάξεων μεγέθους) που οι παρατηρήσεις  $X_1, X_2, \dots, X_m$  έχουν στο συνενωμένο δείγμα των  $(n + m)$  παρατηρήσεων.

Οι υποθέσεις που θα μπορούσε να ελέγξει κανείς, προκειμένου να ανιχνεύσει διαφορές μεταξύ των δύο πληθυσμών είναι οι εξής:

**Μονόπλευρος έλεγχος:** αν θεωρήσουμε ως μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) \leq F_Y(x)$  και ως εναλλακτική υπόθεση  $H_1 : F_X(x) > F_Y(x)$  δηλαδή αναμένουμε ότι υπό τη μηδενική υπόθεση το  $X$  δείγμα θα λάβει κυρίως τους μεγάλους βαθμούς. Συνεπώς θα έχουμε ένδειξη για απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης  $H_0$  έναντι της εναλλακτικής  $H_1$ , αν  $W_R \geq w$ , όπου  $w$  είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη κρίσιμη τιμή. Ανάλογα θα ισχύουν και στην περίπτωση που η μηδενική υπόθεση ήταν  $H_0 : F_X(x) \geq F_Y(x)$  και η εναλλακτική υπόθεση ήταν η  $H_1 : F_X(x) < F_Y(x)$ ,

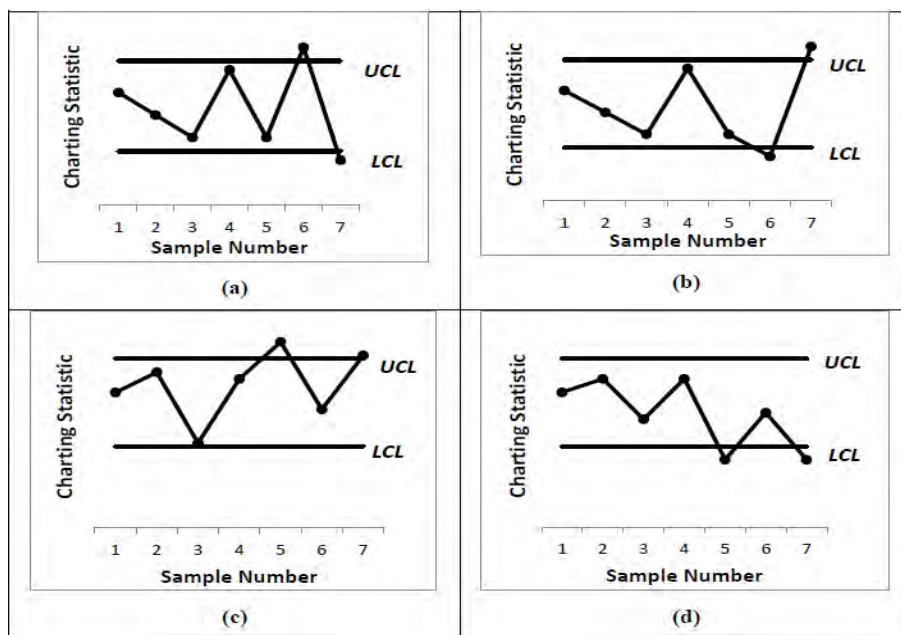
**Αμφίπλευρος έλεγχος:** αν η μηδενική υπόθεση ήταν  $H_0 : F_X(x) = F_Y(x)$  και η εναλλακτική υπόθεση ήταν η  $H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x)$ , θα είχαμε ένδειξη απόρριψης της  $H_0$  αν ίσχυε  $W_R \geq w_2$  ή  $W_R \leq w_1$ , όπου  $w_1 < w_2$  δύο κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές.

### 4.3 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου  $\mu$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$  (έως και  $1.5\sigma$ ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{out}$  του διαγράμματος ελέγχου *Shewhart* δεν είναι ικανοποιητικό (είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Στις εργασίες των Page (1955), Western Electric Company (1956), Roberts (1958), Bissell (1978) και Wheeler (1983) χρησιμοποιήθηκαν κανόνες ροών για να αυξήσουν την ευαισθητοποίηση του

διαγράμματος ελέγχου *Shewhart*. Οι κανόνες ευαισθητοποίησης περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Ο στόχος είναι να παρακολουθούμε την ακολουθία των διαδοχικών σημείων του διαγράμματος και στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου(*OO*). Αυτό μπορεί να συμβεί χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*) μιας και για να γίνει περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου με όρια  $3\sigma$ , ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα τις εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και **προειδοποιητικά όρια** εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.3.2 (βλ. Σχήμα 2.2). Εκτός της αύξησης της ευαισθησίας των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart*, οι κανόνες ροών χρησιμοποιούνται και για την ανίχνευση ειδικών μη τυχαίων σχηματισμών σημείων (*non-random patterns*) οι οποίοι συνήθως προκύπτουν παρουσία συγκεκριμένων ειδικών αιτιών μεταβλητότητας.

Στο Σχήμα 4.1 δίνονται, ως παραδείγματα, γραφικές αναπαραστάσεις δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζονται στον κανόνα ευαισθητοποίησης 2-από-2 και στον κανόνα 2-από-3. Σύμφωνα με τον κανόνα ροών 2-από-2, ένα διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας με την εμφάνιση δύο συνεχόμενων σημείων εκτός των ορίων ελέγχου. Αντίστοιχα, ο κανόνας ροών 2-από-3 παράγει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία όταν δύο από τρία συνεχόμενα σημεία ανιχνεύονται εκτός των ορίων ελέγχου.



Σχήμα 4.1 Γραφική απεικόνιση των διαγραμμάτων ελέγχου 2-από-2 και 2-από-3

Η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως καθιστά εξαιρετικά δύσκολο τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής  $ARL$  του διαγράμματος ελέγχου. Η πρώτη σημαντική εργασία που αντιμετώπισε το προαναφερθέν πρόβλημα με ενοποιητικό τρόπο ήταν των Champ and Woodall (1987) οι οποίοι μελέτησαν την απόδοση ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας διαδικασίας με την εισαγωγή ενός ή περισσότερων κανόνων ροών της μορφής  $w$ -από- $(w + v)$  με  $w > 1$  και  $v \geq 0$ . Το βασικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν είναι ότι η χρήση κανόνων ροών βελτιώνει την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας, αυξάνει όμως το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών με συνέπεια να διακόπτετε συχνά η παραγωγική διαδικασία ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχει λόγος. Αυτό είναι και το βασικό μειονέκτημα στην χρήση κανόνων ροών στα διαγράμματα έλεγχου. Ο Klein (2000) πρότεινε δύο διαγράμματα ελέγχου ως εναλλακτικά του  $\bar{X}$  διαγράμματος τα οποία βασίζονται στην χρήση κανόνων ροών (κανόνες 2-από-2 και 2-από-3) εφαρμόζοντας την μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Κύριο χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων που πρότεινε, είναι ότι το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών να είναι δεδομένο και δεν επηρεάζεται από την εφαρμογή των κανόνων ευαισθητοποίησης (Ρακιτζής (2008)).

Οι Khoo and Ariffin (2006) πρότειναν ένα βελτιωμένο διάγραμμα ελέγχου, το οποίο είναι ένας συνδυασμός του κλασικού κανόνα 1-από-1 και των  $w$ -από- $(w + v)$  κανόνων ροών. Το 2007 οι Koutras, Bersimis and Maravelakis έκαναν μια πλήρη επισκόπηση των έως τότε διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart* με πρόσθετους κανόνες που βασίζονται στη θεωρία των ροών και των σαρώσεων. Οι Chakraborti, Eryilmaz and Human (2009) πρότειναν μία νέα κλάση μη παραμετρικών διαγραμμάτων Φάσης II που βασίζονται στη στατιστική συνάρτηση προτεραιότητας με την εφαρμογή κανόνων ροών. Οι Zhang and Castagliola (2010) διερεύνησαν την εφαρμογή κανόνων ροών σε διαγράμματα *Shewhart*  $\bar{X}$  όταν οι παράμετροι της διαδικασίας είναι άγνωστες.

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται σε κανόνες ροών, παρουσιάζουν ικανοποιητικές και χρήσιμες στατιστικές ιδιότητες μιας και δεν υποθέτουν καμία συγκεκριμένη κατανομή για τις παρατηρήσεις που συλλέγονται. Τα χαρακτηριστικά απόδοσης τους ( $FAR$  και  $ARL_{in}$ ) δεν εξαρτώνται από την κατανομή των παρατηρήσεων και έχει επαληθευτεί ότι εμφανίζουν αρκετά μικρή πιθανότητα λανθασμένου συναγεργμού ( $FAR$ ) και σχετικά μεγάλο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) για διαφορετικούς

προτεινόμενους σχεδιασμούς. Δηλαδή, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου δίνουν σπάνια λανθασμένη στατιστική ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου, κάτι που είναι επιθυμητό και αναγκαίο στο ΣΕΔ. Επίσης, όταν η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (*OOC*), για προκαθορισμένες τιμές *FAR* ή *ARL<sub>in</sub>*, ανιχνεύουν πιο εύκολα και πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις των παραμέτρων της κατανομής των παρατηρήσεων σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου (Chakraborti and Eryilmaz (2007)).

Όμως, για να εφαρμοστούν τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου, θα πρέπει να δοθεί μία αρχική εκτίμηση της διαμέσου ή της μέσης τιμής της κατανομής των παρατηρήσεων όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου (*IC*). Επίσης, προϋποθέτουν τη συλλογή μεγάλου πλήθους τυχαίων δειγμάτων, κάτι που μπορεί να προκαλέσει δαπάνη χρόνου και σημαντικό οικονομικό κόστος, ιδιαίτερα αν το μέγεθος του κάθε δείγματος είναι μεγάλο.

#### **4.4 Εφαρμογή Κανόνα ροής στο Μη Παραμετρικό Διάγραμμα Ελέγχου των Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009)**

Μέχρι σήμερα, δεν έχουν εφαρμοσθεί κανόνες ροών στο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου που προτάθηκε από τους Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009) οι οποίοι χρησιμοποίησαν την αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon* (*Wilcoxon rank-sum statistic*) για να εξετάσουν αν μια διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση.

Σε αυτή την διπλωματική, προκειμένου να αυξήσουμε την ευαισθησία του προαναφερθέντος μη παραμετρικού διαγράμματος *Shewhart*, προτείνουμε την εφαρμογή ενός κανόνα ροής 2-από-3, σύμφωνα με τον οποίο έχουμε ένδειξη για εκτός έλεγχου διαδικασία όταν **δύο από τα τρία συνεχόμενα σημεία** βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου (*UCL*), είτε βρεθούν κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (*LCL*), είτε το ένα πάνω από το άνω όριο ελέγχου (*UCL*) και το άλλο κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (*LCL*) και αντίστροφα. Από το σημείο αυτό και μετά θα χρησιμοποιούμε, την συντομογραφία *B-T-K* όταν θα αναφερόμαστε στο διάγραμμα των Balakrishnan *et al.* (2009) και την *B-T-K-RR<sub>2-of-3</sub>* για το νέο διάγραμμα με ενσωματωμένο τον κανόνα ευαισθητοποίησης 2-από-3.

#### 4.4.1 Το Διάγραμμα ελέγχου B-T-K

Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* το οποίο προτάθηκε από τους Balakrishnan *et al.* (2009).

Έστω ότι  $X_1, X_2, \dots, X_m$  είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους  $m$  που προέρχεται από την εντός ελέγχου αθροιστική κατανομή  $F_X(x) = F(x)$  και ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούνται ως όρια ελέγχου του διαγράμματος δύο συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{a:m}, X_{b:m}$ , δηλαδή  $LCL = X_{a:m}$ ,  $UCL = X_{b:m}$ ,  $1 \leq a < b \leq m$ . Οι παράμετροι  $a, b$  είναι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος και ο προσδιορισμός τους επιτυγχάνεται μέσω δύο διαδικασιών. Η πρώτη διαδικασία απαιτεί την επίτευξη μιας συγκεκριμένης πιθανότητας λανθασμένου συναγερού, ενώ η δεύτερη στηρίζεται σε μια προκαθορισμένη τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ( $ARL_{in}$ ), συνήθως ίση με 370 ή 500.

Η κατασκευή του διαγράμματος βασίζεται στην έννοια της ροής (*run*) ίδιων συμβόλων (ή αποτελεσμάτων). Πιο συγκεκριμένα, ως ροή αποτελεσμάτων ίδιου τύπου ορίζουμε την εμφάνιση διαδοχικών (χωρίς διακοπή) όμοιων αποτελεσμάτων τα οποία ακολουθούνται και έπονται από διαφορετικά αποτελέσματα. Το πλήθος  $k$  (θετικός ακέραιος) των όμοιων στοιχείων μιας ροής ονομάζεται μήκος ροής. Για παράδειγμα, στην ακολουθία δύο (διαφορετικών) συμβόλων  $X, Y$ , που φαίνεται παρακάτω

X X Y Y Y X Y Y X X X X,

έχουμε διαδοχικά μία ροή των  $X$  μήκους 2, ακολουθούμενη από μία ροή των  $Y$  μήκους 3, μία ροή των  $X$  μήκους 1, μία ροή των  $Y$  μήκους 2 και τέλος μία ροή των  $X$  μήκους 4.

Ας υποθέσουμε ότι, μετά τον καθορισμό των ορίων ελέγχου  $LCL$ ,  $UCL$  συλλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη διεργασία και θέλουμε να εξετάσουμε αν παραμένει εντός ελέγχου ή αν έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Αν  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ένα εξεταζόμενο δείγμα μεγέθους  $n$  και  $F_Y(x) = G(x)$  η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής του, ο στόχος μας είναι να ανιχνεύσουμε μια πιθανή μετατόπιση της εντός ελέγχου κατανομής από  $F(x)$  σε  $G(x)$ , δηλαδή να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση  $H_0: F(x) = G(x)$  έναντι της αμφίπλευρης εναλλακτικής  $H_1: F(x) \neq G(x)$ . Η στατιστική συνάρτηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφασίζουμε αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή όχι, είναι μέσω του αθροίσματος των βαθμών (στο από κοινού δείγμα των  $X$  και  $Y$  παρατηρήσεων) των  $Y$  παρατηρήσεων που βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου

$LCL$ ,  $UCL$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η επιλογή αντιστοιχεί στη γνωστή αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon*. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι  $M_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$  εκφράζει το πλήθος των  $Y$  παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος που βρίσκονται μεταξύ της  $(i-1)$  και  $i$  διατεταγμένης παρατήρησης του  $X$  δείγματος. Με άλλα λόγια, τα  $M_i$  είναι τα μήκη των ροών των  $Y$  παρατηρήσεων μεταξύ διαδοχικών  $X$  παρατηρήσεων. Η προαναφερθείσα στατιστική συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$W = \sum_{i=a+1}^b W_i$$

όπου το  $W_i$  εκφράζει το άθροισμα των βαθμών των  $Y$  παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ των  $X_{(i-1)}$  και  $X_{(i)}$ . Μετά την υλοποίηση των αλγεβρικών πράξεων με τη βοήθεια των  $M_i$ , καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$W = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=a+1}^b M_i \right)^2 + \sum_{i=a+1}^b i M_i + \left( M_0 + a - \frac{3}{2} \right) \sum_{i=a+1}^b M_i .$$

Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $W$ , η διεργασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, εφόσον επαληθεύονται οι ακόλουθες δύο συνθήκες

$$W \leq w \quad \text{και} \quad M_0 \leq r_0 ,$$

όπου  $w$ ,  $r_0$  είναι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι το

$$\text{σύνολο τιμών της συνάρτησης } W \text{ είναι } R_W = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{n(n+2b-1)}{2} \right\} .$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία ελέγχου καθώς και η λογική που την διέπει. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 10$  και τυχαία εξεταζόμενα δείγματα μεγέθους  $n = 4$ . Επιλέγουμε κατάλληλες παραμέτρους σχεδιασμού  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $r_0 = 4$ ,  $w = 10$ , οι οποίες εξασφαλίζουν πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού 10% ( $FAR \leq 0.10$ ). Προκειμένου να αξιολογήσουμε την απόδοση του διαγράμματος, θεωρούμε την περίπτωση που οι εντός ελέγχου παρατηρήσεις προέρχονται από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$  (δηλαδή  $F(x) = x$ ,  $0 < x < 1$ ). Οι δύο πρώτες γραμμές του Πίνακα 4.1 παρουσιάζουν ένα διατεταγμένο δείγμα αναφοράς που παράγεται με προσομοίωση και το οποίο χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των ακόλουθων ορίων ελέγχου  $LCL = X_{1:10}$ ,  $UCL = X_{4:10}$ .

**Πίνακας 4.1** Δείγμα αναφοράς και εξεταζόμενα τυχαία δείγματα

<i>Δείγμα αναφοράς</i>	0.0547494	0.0915627	0.1925020	0.3298570	0.5872420
	0.6464540	0.7250190	0.7319490	0.8796790	0.9683790
<i>Εντός ελέγχου δείγμα</i>	0.1492300	0.3494970	0.6038480	0.6787060	
<i>Εκτός ελέγχου δείγμα</i>	0.000000007	0.000127800	0.127365000	0.144250000	

Αν υποθέσουμε ότι, αφού συλλέγεται το δείγμα αναφοράς, η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, τα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n = 4$  που εξάγονται θα προέρχονται από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ . Ένα τέτοιο δείγμα έχει παραχθεί με προσομοίωση και παρουσιάζεται στην τρίτη γραμμή του Πίνακα 4.1. Οι  $m + n = 14$  παρατηρήσεις του από κοινού διατεταγμένου  $(X, Y)$  δείγματος σχηματίζουν την ακόλουθη διαδοχή

$$X X Y X X Y X Y X Y X X X X$$

και οι ποσότητες  $M_i$  παίρνουν τις τιμές

$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 1, M_4 = 0, M_5 = 1, M_6 = 1, M_7 = 1, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0.$$

Η βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon* για  $a = 1, b = 4$  μπορεί να υπολογισθεί ως εξής

$$W = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^4 M_i \right)^2 + \sum_{i=2}^4 i M_i + (M_0 + a - \frac{3}{2}) \sum_{i=2}^4 M_i = 3,$$

ή απευθείας: μεταξύ της 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> παρατήρησης του δείγματος αναφοράς υπάρχει μόνο ένα  $Y$  (η 3<sup>η</sup> παρατήρηση στο διατεταγμένο δείγμα των 14 παρατηρήσεων) συνεπώς  $W = 3$ . Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η διεργασία δεν έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση, αφού  $W \leq 10 = w$  και  $M_0 = M_1 = 0 \leq 4 = r_0$ .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η διεργασία μετατοπίζεται στην κατανομή  $G(x) = x^{1/4}, 0 < x < 1$ . Χρησιμοποιώντας το προσομοιωμένο τυχαίο δείγμα που παρουσιάζεται στην τέταρτη γραμμή του Πίνακα 4.1, προκύπτει η ακόλουθη σειρά των  $X - Y$  παρατηρήσεων

$$Y Y X X Y Y X X X X X X X X$$

ενώ οι ποσότητες  $M_i$  δίνονται ως ακολούθως

$$M_1 = 2, M_2 = 0, M_3 = 2, M_4 = 0, M_5 = 0, M_6 = 0, M_7 = 0, M_8 = 0, M_9 = 0, M_{10} = 0.$$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης τύπου *Wilcoxon* είναι ίση με  $W = 11$  και μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι οι συνθήκες για εντός ελέγχου διεργασία δεν ικανοποιούνται μιας και έχουμε  $W = 11 > 10 = w$ . Συνεπώς, το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, στη συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης, πέτυχε να ανιχνεύσει τη μετατόπιση.

#### 4.4.2 Αλγόριθμος Προσομοίωσης

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα βήματα του αλγορίθμου προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό του μήκους ροής (*run length*) για το *B-T-K* διάγραμμα ελέγχου στο οποίο έχουμε εφαρμόσει τον κανόνα ροών 2-από-3. Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον αριθμητικού υπολογισμού MATLAB R2017a.

**Βήμα 1 :** Καθορίζουμε δύο κατανομές για τη συλλογή ενός δείγματος της Φάσης I (*δείγμα αναφοράς, reference sample*) και ενός δείγματος της Φάσης II (*δείγμα ελέγχου, test sample*), αντίστοιχα. Για την υπόθεση ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου (*IC*), οι δύο κατανομές είναι ίδιες (λέμε ότι η μετατόπιση είναι ίση με μηδέν ( $\delta = 0$ )). Για την υπόθεση ότι η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση (*OOC*), η κατανομή για το δείγμα της Φάσης II θεωρείται ότι έχει την ίδια μορφή με το δείγμα Φάσης I, αλλά με μετατόπιση της παραμέτρου θέσης κατά  $\delta$  μονάδες σε σχέση με το δείγμα του αρχικού πληθυσμού. Για παράδειγμα, το δείγμα Φάσης I μπορεί να προέρχεται από Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1, ενώ, στην περίπτωση που η διεργασία είναι *OOC*, το δείγμα Φάσης II μπορεί να προέρχεται από κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\neq 0$  και τυπική απόκλιση 1 (λέμε ότι η μετατόπιση  $\delta$  της μέσης τιμής (πaráμετρος θέσης), δεν είναι ίση με μηδέν ( $\delta \neq 0$ )). Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι ανάλογη διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για τον έλεγχο μετατόπισης της διασποράς της κατανομής που διέπει τη διεργασία.

**Βήμα 2 :** Προσδιορίζουμε το μέγεθος του δείγματος αναφοράς ( $m$ ), το μέγεθος του δείγματος ελέγχου της Φάσης II ( $n$ ), το πλήθος προσομοιώσεων ( $k$ ) και την παράμετρο ή τις παραμέτρους της κατανομής.

**Βήμα 3 :** Επιλέγουμε κατάλληλες παραμέτρους σχεδιασμού  $a, b, r_0, w$ . Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος ελέγχου καθορίζονται από δύο συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς,  $LCL = X_{a:m}$ ,  $UCL = X_{b:m}$ ,  $1 \leq a < b \leq m$ .



**Βήμα 4 :** Παραγωγή τυχαίου δείγματος αναφοράς της Φάσης I από την καθορισμένη κατανομή (βλ. Βήμα 1) και προσδιορισμός των ορίων ελέγχου  $LCL, UCL$ .

**Βήμα 5 :** Παραγωγή τυχαίου δείγματος ελέγχου της Φάσης II από την ίδια κατανομή με την Φάση I. Υπολογισμός του πλήθους  $M_0$  των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου που είναι μικρότερα του  $LCL = X_{a,m}$  και του πλήθους  $M_i, i = a+1, \dots, b$ , των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου που βρίσκονται ανάμεσα σε κάθε υποδιάστημα, που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς, του διαστήματος  $(X_{a,m}, X_{b,m})$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε την βαθμολογική συνάρτηση  $W$  της παραγράφου 4.4.1 και ελέγχουμε τις συνθήκες  $W \leq w$  και  $M_0 \leq r_0$ , οπότε καταγράφουμε σε πίνακα π.χ.  $T$  την τιμή 1 ή 0, αντίστοιχα, ανάλογα με το αν το δείγμα ικανοποιεί (εντός ελέγχου) ή όχι τις συνθήκες.

**Βήμα 6 :** Επανάληψη του Βήματος 5 για  $k$  φορές.

**Βήμα 7 :** Υπολογισμός και καταγραφή του πλήθους **συνεχόμενων** (χωρίς διακοπή) τριάδων αποτελούμενων από στοιχεία του πίνακα  $T$  της μορφής  $(T(i), T(i+1), T(i+2))$ ,  $i = 1, \dots, k-2$ , που **δεν** ικανοποιούν τον κανόνα 2-από-3 (όπως τον ορίσαμε στην παράγραφο 4.4). Αυτοί οι αριθμοί, που καταγράφονται σε πίνακα π.χ.  $RL$ , αποτελούν το μήκος ροής της κατανομής.

**Βήμα 8 :** Υπολογισμός της πιθανότητας λανθασμένου συναγερού  $FAR = 1 - \frac{\sum RL_i}{k-2}$

και της τιμής του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_{in} = \frac{1}{length(RL)} \sum RL_i$ .

**Παρατήρηση :** Για να υπολογίσουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{out}$ , στο Βήμα 5 παράγουμε το δείγμα της Φάσης II από μια κατανομή που έχει την ίδια μορφή με το δείγμα Φάσης I, αλλά με μετατόπιση της παραμέτρου θέσης κατά  $\delta$  μονάδες. Στη συνέχεια εκτελούμε τα υπόλοιπα βήματα του παραπάνω αλγόριθμου και στο Βήμα 8 η τιμή που θα υπολογίσουμε θα είναι το  $ARL_{out}$ .

Κάνοντας αντιστοίχιση των πέντε πρώτων βημάτων του αλγόριθμου προσομοίωσης στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου 4.4.1, θα έχουμε: στο Βήμα 1 για την υπόθεση  $IC$  το δείγμα ελέγχου καθώς και το δείγμα αναφοράς προέρχονται από την ομοιόμορφη

κατανομή στο  $(0,1)$  , στο Βήμα 2 έχουμε ένα διατεταγμένο δείγμα αναφοράς μεγέθους 10, ένα διατεταγμένο δείγμα ελέγχου μεγέθους 4 και πραγματοποιούμε μια προσομοίωση, άρα  $m = 10, n = 4, k = 1$ , στο Βήμα 3 έχουμε  $a = 1, b = 4, r_0 = 4, w = 10$ , για το Βήμα 4 προκύπτει ότι  $LCL = X_{1:10} = 0.0547494$  ,  $UCL = X_{4:10} = 0.3298570$  και στο Βήμα 5 μετά τον υπολογισμό του  $W$  και τον έλεγχο των δύο συνθηκών προκύπτει η τιμή 1.

Για να ελέγξουμε τα αποτελέσματα του αλγόριθμου προσομοίωσης κατασκευάζουμε τον Πίνακα 4.2. Οι δυο πρώτες στήλες είναι οι τιμές των πιθανοτήτων λανθασμένου συναγερμού ( $FAR$ ), για  $m = 40$  και 100, που υπάρχουν στον Πίνακα 4 της εργασίας των Balakrishnan *et al.* (2009). Οι δύο επόμενες στήλες είναι οι τιμές των  $FAR$ , για τις ίδιες παραμέτρους σχεδιασμού, που έχουν προκύψει από την εκτέλεση του παραπάνω αλγόριθμου, χωρίς τον κανόνα 2-από-3. Αξίζει να αναφερθεί ότι για κάθε αποτέλεσμα που εμφανίζεται στον επόμενο πίνακα καθώς και στους πίνακες των επόμενων παραγράφων, η προσομοίωση βασίστηκε σε παραγωγή 1.000 τυχαίων δειγμάτων αναφοράς, κάθε ένα εκ των οποίων δοκιμάστηκε με 100.000 δείγματα ελέγχου ( $k=100.000$  επαναλήψεις). Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4.2 τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την υλοποίηση του προτεινόμενου αλγόριθμου προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα για το υπό μελέτη διάγραμμα των Balakrishnan *et al.* (2009). Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει αριθμητικά την ορθότητα του αλγορίθμου προσομοίωσης που προτείνεται στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

**Πίνακας 4.2** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) για δοσμένες παραμέτρους σχεδιασμού

<i>n</i>	<i>r</i> <sub>0</sub>	<i>B-T-K</i>						<i>Αποτελέσματα του υπολογιστικού προγράμματος προσομοίωσης</i>					
		<i>m</i> = 40			<i>m</i> = 100			<i>m</i> = 40			<i>m</i> = 100		
		( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>	( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>	( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>	( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>
5	2	(7,11)	200	0.0471	(15,19)	150	0.0292	(7,11)	200	0.0480	(15,19)	150	0.0297
			40	0.0597		50	0.0464		40	0.0582		50	0.0465
			33	0.0900		33	0.0696		33	0.0889		33	0.0711
	3	(13,17)	90	0.0499	(15,19)	50	0.0201	(13,17)	90	0.0505	(15,19)	50	0.0201
			63	0.0601		33	0.0451		63	0.0590		33	0.0445
			58	0.0923		32	0.0857		58	0.0916		32	0.0850
	4	(16,20)	100	0.0249	(25,29)	60	0.0185	(16,20)	100	0.0246	(25,29)	60	0.0180
			72	0.0430		54	0.0323		72	0.0443		54	0.0316
			65	0.0987		53	0.0604		65	0.0998		53	0.0612
11	4	(7,12)	170	0.0443	(15,19)	78	0.0331	(7,12)	170	0.0429	(15,19)	78	0.0339
			100	0.0506		68	0.0499		100	0.0504		68	0.0512
			66	0.0978		53	0.0960		66	0.0983		53	0.0941
	6	(10,15)	170	0.0152	(18,22)	90	0.0143	(10,15)	170	0.0159	(18,22)	90	0.0144
			102	0.0471		79	0.0427		102	0.0463		79	0.0437
			79	0.0929		42	0.0873		79	0.0943		42	0.0873
	8	(15,20)	143	0.0472	(21,25)	100	0.0130	(15,20)	143	0.0454	(21,25)	100	0.0135
			115	0.0749		91	0.0457		115	0.0728		91	0.0451
			111	0.0961		48	0.0916		111	0.0975		48	0.0919
25	8	(5,8)	85	0.0496	(15,18)	155	0.0198	(5,8)	85	0.0477	(15,18)	155	0.0189
			70	0.0834		105	0.0498		70	0.0845		105	0.0513
			66	0.0966		73	0.0906		66	0.0937		73	0.0919
	14	(8,12)	150	0.0428	(28,31)	240	0.0166	(8,12)	150	0.0443	(28,31)	240	0.0156
			140	0.0567		187	0.0471		140	0.0574		187	0.0472
			120	0.0972		130	0.0960		120	0.0957		130	0.0964
	16	(12,16)	210	0.0444	(32,35)	240	0.0155	(12,16)	210	0.0441	(32,35)	240	0.0150
			190	0.0665		215	0.0431		190	0.0668		215	0.0417
			170	0.0998		148	0.0946		170	0.0969		148	0.0941

#### 4.5 Απόδοση του Διαγράμματος Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$

Στην παρούσα παράγραφο μελετάμε την απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος για εκτός ελέγχου μετατοπίσεις της διεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, με την εφαρμογή του προαναφερθέντος αλγορίθμου προσομοίωσης, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές: α) την τυποποιημένη Κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και β) την κατανομή  $\Gamma$ άμμα με παράμετρο κλίμακας ίση με 3 και παράμετρο μορφής ίση με 1, προχωρούμε στον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής για μικρές μετατοπίσεις της εκάστοτε κατανομής. Στον Πίνακα 4.3 αποτυπώνονται οι τιμές του μέσου μήκους ροής για διαφορετικές μετατοπίσεις της κατανομής που διέπει τη διεργασία.

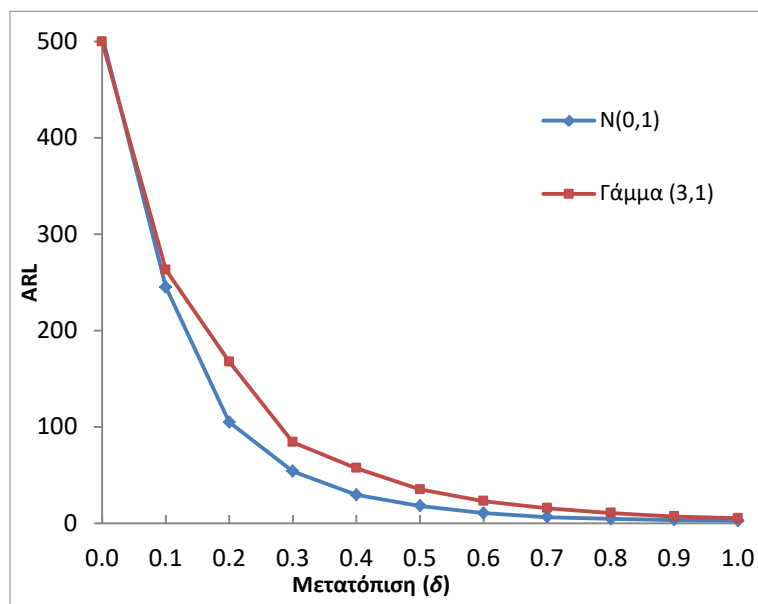
**Πίνακας 4.3** Το μέσο μήκος ροής ( $ARL$ ) του προτεινόμενου διαγράμματος για διαφορετικές μετατοπίσεις του μέσου και αρχική κατανομή  $N(0,1)$  ή  $\Gamma$ άμμα (3,1)

Μετατόπιση $\delta$	$N(0,1)$	$\Gamma$ άμμα (3,1)
0.0	506.09	499.78
0.1	245.17	263.02
0.2	105.07	167.72
0.3	54.11	84.34
0.4	29.59	57.34
0.5	18.25	35.30
0.6	10.74	23.17
0.7	6.61	15.93
0.8	4.74	10.91
0.9	3.50	7.19
1.0	2.78	5.45

Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνεται ως κατανομή αναφοράς που διέπει την εντός ελέγχου διεργασία, στη δεύτερη στήλη του Πίνακα 4.3, η Τυποποιημένη Κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και στη επόμενη στήλη η κατανομή  $\Gamma$ άμμα με παράμετρο κλίμακας ίση με 3 και παράμετρο μορφής ίση με 1. Το προτεινόμενο διάγραμμα  $B-T-K-RR_{2-of-3}$  δοκιμάζεται ως προς το πόσο γρήγορα ανιχνεύει την μετατόπιση του μέσου της διεργασίας για μέγεθος μετατόπισης  $\delta$  που εκτείνεται μέχρι και 1 μονάδα με βήμα 0.1 ( $\delta = 0 (0.1) 1$ ). Το νέο διάγραμμα έχει σχεδιασθεί κατά τέτοιον τρόπο ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι ίσο με (κατά

προσέγγιση) 500. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται από την πρώτη στήλη του Πίνακα 4.3, αν υποθέσουμε ότι ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί κατά 0.4 μονάδες, τότε το προτεινόμενο διάγραμμα χρειάζεται κατά μέσο όρο 29.59 δείγματα ελέγχου μέχρι να αναγνωρίσει την προαναφερθείσα μετατόπιση. Με άλλα λόγια, αν η διεργασία μετατοπισθεί κατά 0.4 μονάδες, τότε το νέο διάγραμμα θα χαρακτηρίσει ως εντός ελέγχου κατά μέσο όρο 29.59 δείγματα ελέγχου (που θα έπρεπε να χαρακτηρισθούν ως εκτός ελέγχου) έως ότου χαρακτηρίσει το πρώτο δείγμα ελέγχου ως εκτός.

Αν δημιουργήσουμε ένα γράφημα (βλ. Σχήμα 4.2) που να απεικονίζει την απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος για τις δύο συνεχείς κατανομές, προκύπτει το συμπέρασμα, ότι οι τιμές του  $ARL$  είναι σχεδόν ίσες αν και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το νέο διάγραμμα λειτουργεί λίγο καλύτερα υπό την Κανονική κατανομή. Η διαφορά μεταξύ των τιμών μπορεί να εξηγηθεί λόγω του σφάλματος προσομοίωσης.



**Σχήμα 4.2** Γραφική απεικόνιση  $ARL$  του προτεινόμενου διαγράμματος για διαφορετικές μετατοπίσεις του μέσου και αρχική κατανομή  $N(0,1)$ ,  $\Gamma(3,1)$

#### 4.6 Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Διάγραμμα Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τον σχεδιασμό του προτεινόμενου διαγράμματος ελέγχου. Συγκεκριμένα ο Πίνακας 4.4 περιλαμβάνει διάφορες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού του προτεινόμενου διαγράμματος, καθώς και την πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού ( $FAR$ ) που επιτυγχάνεται σε κάθε περίπτωση.

**Πίνακας 4.4** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού (*FAR*)  
για δοσμένες παραμέτρους σχεδιασμού

<i>Δείγμα αναφοράς μεγέθους m</i>										
<i>n</i>	<i>r</i> <sub>0</sub>	40			60			100		
		( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>	( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>	( <i>a,b</i> )	<i>w</i>	<i>FAR</i>
5	2	(7,11)	80	0.011	(15,18)	170	0.040	(23,27)	125	0.025
			30	0.054		60	0.056		48	0,087
	4	(13,17)	58	0.012	(18,23)	60	0.018	(18,22)	38	0.029
			30	0.067		40	0,064		30	0.093
10	3	(5,9)	100	0.011	(13,17)	180	0,083	(17,20)	120	0.024
			33	0.063		100	0,095		40	0.048
	6	(16,20)	210	0.021	(16,20)	90	0.010	(26,30)	90	0.020
			90	0.084		71	0.048		57	0.052

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 4.4, μπορούμε να κατασκευάσουμε διαγράμματα ελέγχου ελεύθερα κατανομής που πετυχαίνουν μια προκαθορισμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού  $f$ . Η χρήση μεγάλου πλήθους παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, a, b, w, r_0$  στο προτεινόμενο διάγραμμα προσφέρει την ευελιξία να σταθεροποιήσουμε ορισμένες από αυτές και στη συνέχεια να αναζητήσουμε τη βέλτιστη επιλογή για τις άλλες, ή εναλλακτικά για έναν αποδεκτό συνδυασμό τους που ικανοποιεί ορισμένες απαιτήσεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε συλλέξει δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 40$  και επιθυμούμε να εξετάσουμε τυχαία δείγματα μεγέθους  $n = 5$  που εξάγονται από τη διεργασία, τότε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ίση με  $f = 0.01$  (σχεδόν) μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας:

- α) την 7<sup>η</sup> και 11<sup>η</sup> μικρότερη παρατήρηση στο εξεταζόμενο δείγμα ( $a = 7, b = 11$ ),  $w = 80$  και  $r_0 = 2$  (με  $FAR = 0.011$ ) ή
- β) την 13<sup>η</sup> και 17<sup>η</sup> μικρότερη παρατήρηση στο εξεταζόμενο δείγμα ( $a = 13, b = 17$ ),  $w = 58$  και  $r_0 = 4$  (με  $FAR = 0.012$ ).

Παρόμοια πινακοποίηση των διαθέσιμων σχεδιασμών μπορεί να υλοποιηθεί στοχεύοντας σε μία ονομαστική τιμή μέσου μήκους ροής. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.4.2 του παρόντος, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου προκειμένου να επιτυγχάνεται κάθε φορά το επιθυμητό επίπεδο μέσου μήκους ροής.

#### 4.7 Σύγκριση του Διαγράμματος Ελέγχου $B-T-K-RR_{2-of-3}$ με άλλα ανταγωνιστικά Διαγράμματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα, για την εκτός ελέγχου απόδοση ( $ARL_{out}$ ) του προτεινόμενου διαγράμματος  $B-T-K-RR_{2-of-3}$ , που προκύπτουν από την σύγκρισή του με άλλα διαθέσιμα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, το προτεινόμενο διάγραμμα συγκρίνεται με το  $W_{min}$  διάγραμμα που έχουν εισαγάγει οι Koutras and Triantafyllou (2017), τα γνωστά ως  $W-CUSUM$  και  $W-EWMA$  διαγράμματα ελέγχου που έχουν θεμελιωθεί από τους Li *et al.* (2010), αλλά και το *Mann-Whitney* διάγραμμα ( $MW$  διάγραμμα) που έχει προταθεί από τους Chakraborti and van de Wiel (2008). Αξίζει να σημειωθεί ότι το  $W_{min}$  διάγραμμα έχει συγκριθεί με το αντίστοιχο μη παραμετρικό διάγραμμα των Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras (2009) (βλ. εργασία των Koutras and Triantafyllou (2017)) και έχει επαληθευτεί ότι υπερτερεί τόσο στην εντός ελέγχου όσο και στην εκτός ελέγχου απόδοσή του. Συνεπώς, για το ελεύθερο κατανομής διάγραμμα που προτείνεται στην παρούσα διπλωματική, εστιάζουμε στη συγκριτική του αξιολόγηση έναντι του  $W_{min}$  διαγράμματος.

**Πίνακας 4.5** Το μέσο μήκος ροής ( $ARL_{out}$ ) για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή  $N(0,1)$

Μετατόπιση $\delta$	$B-T-K-RR_{2-of-3}$	$W_{min}$	$MW$	$W-CUSUM$	$W-EWMA$ ( $\lambda=0.1$ )
0.0	506.09	501.66	502.48	498.64	502.94
0.25	79.11	100.82	428.03	333.45	321.52
0.50	18.25	25.59	292.77	107.19	103.15
1.00	2.78	3.52	86.57	13.04	14.29
1.50	1.00	1.33	28.52	6.25	7.52
2.00	1.00	1.03	11.08	4.32	5.30
3.00	1.00	1.00	2.93	2.90	3.64

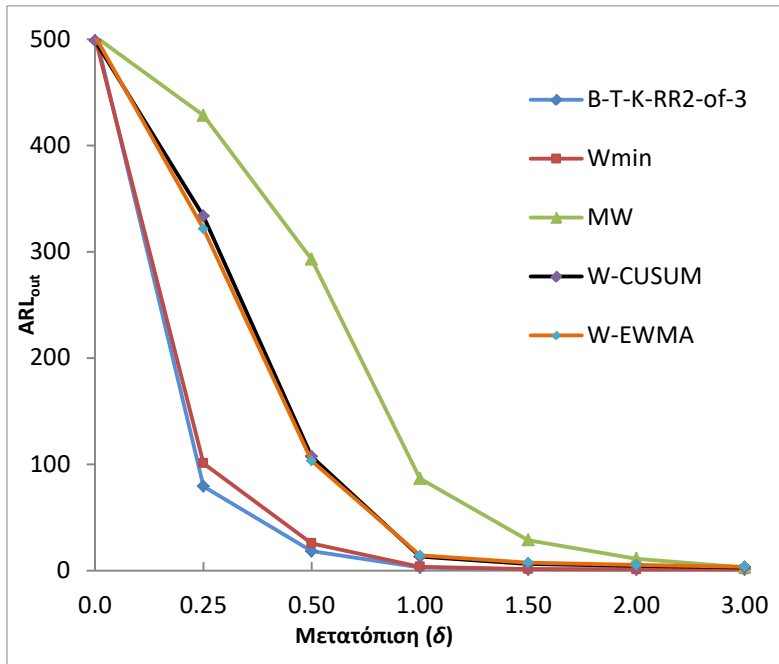
**Πίνακας 4.6** Το μέσο μήκος ροής ( $ARL_{out}$ ) για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή  $\Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha (3,1)$

Μετατόπιση $\delta$	$B-T-K-RR_{2-of-3}$	$W_{min}$	$MW$	$W-CUSUM$	$W-EWMA$ ( $\lambda=0.1$ )
0.0	499.78	501.66	498.25	502.17	501.13
0.25	121.2	140.79	601.43	381.02	340.50
0.50	35.3	43.72	427.29	109.54	103.00
1.00	5.45	6.21	148.28	10.34	11.79
1.50	2.03	1.74	48.16	5.34	6.50
2.00	1.00	1.06	18.22	3.81	4.75
3.00	1.00	1.00	3.35	2.72	3.41

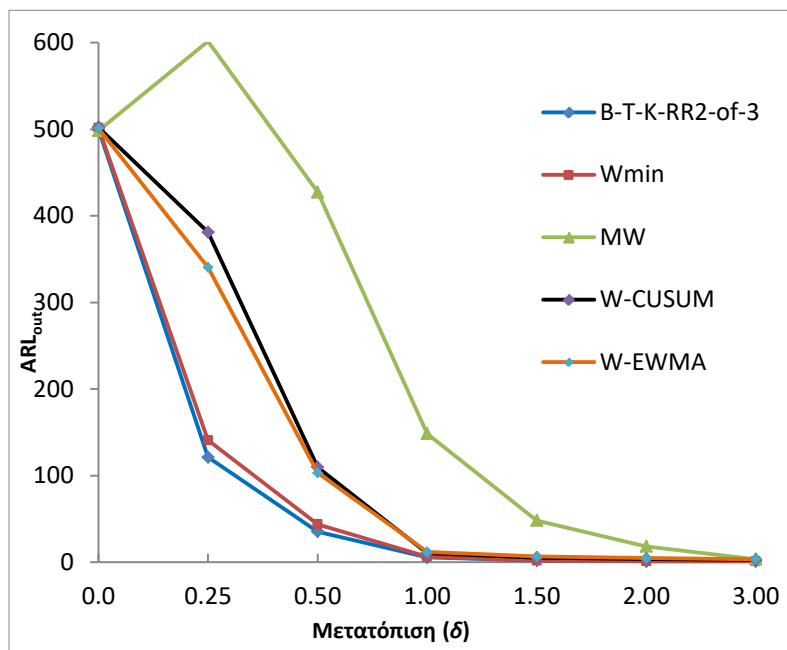
Οι Πίνακες 4.5 και 4.6 παρουσιάζουν την εκτός ελέγχου ( $ARL_{out}$ ) απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος έναντι τεσσάρων ανταγωνιστικών ελεύθερων κατανομής διαγραμμάτων ελέγχου που έχουν ήδη εισαχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Για τη σύγκριση των υπό μελέτη διαγραμμάτων, χρησιμοποιήθηκαν η Κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και η κατανομή  $\Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha (3,1)$  ως κατανομές αναφοράς, δηλαδή ως κατανομές που διέπουν την εντός ελέγχου διεργασία. Να σημειωθεί ότι οι προαναφερθείσες κατανομές έχουν χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της εκτός ελέγχου απόδοσης των αντίστοιχων διαγραμμάτων στις ερευνητικές εργασίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Συνεπώς, το κομμάτι των Πινάκων 4.5 και 4.6 που αφορά την απόδοση των ανταγωνιστικών διαγραμμάτων, έχει αντληθεί από τους αντίστοιχους πίνακες των πρωτότυπων εργασιών. Βάσει των αριθμητικών αποτελεσμάτων που περιλαμβάνονται στους παραπάνω πίνακες, είναι σαφές ότι η εκτός ελέγχου απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος υπερτερεί έναντι των υπολοίπων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες μετατοπίσεις από την αρχική κατανομή.

Τα αποτελέσματα των Πινάκων 4.5 και 4.6 απεικονίζονται και γραφικά με τα Σχήματα 4.3 και 4.4 όπου μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε ότι το προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου υπερέρχει των αντίστοιχων διαγραμμάτων, ανεξαρτήτως της κατανομής που εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση, καθώς πετυχαίνει να εντοπίσει τη μετατόπιση της παραμέτρου της κατανομής γρηγορότερα.





**Σχήμα 4.3** Γραφική απεικόνιση  $ARL_{out}$  - Μετατόπισης για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή  $N(0,1)$



**Σχήμα 4.4** Γραφική απεικόνιση  $ARL_{out}$  - Μετατόπισης για 5 διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου υπό την κατανομή  $\Gamma(3,1)$



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μελετήθηκαν τα Διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που αποτελούν το σημαντικότερο εργαλείο του Στατιστικού Έλεγχου Διεργασιών (ΣΕΔ) εστιάζοντας στα **μονομεταβλητά παραμετρικά και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου**. Πιο συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 1 προσδιορίστηκε η έννοια της «ποιότητας», παρουσιάστηκαν τα κύρια χαρακτηριστικά και υλοποιήθηκε μια σύντομη ιστορική αναδρομή για τον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας. Μεταξύ άλλων, σχολιάστηκαν τα επτά κύρια εργαλεία του ΣΕΔ.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίστηκε η έννοια του «παραμετρικού» διαγράμματος, παρουσιάστηκαν τα στάδια κατασκευής και αναφέρθηκαν αναλυτικά τα κυριότερα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* και συνοπτικά τα *CUSUM* και *EWMA* διαγράμματα. Έγινε ιδιαίτερη αναφορά στα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους.

Στο Κεφάλαιο 3 έγινε μια σύντομη παρουσίαση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων *CUSUM* και *EWMA* και εστίασαμε στην περιγραφή και ανάλυση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου *Shewhart* που χρησιμοποιούν: τη προσημική συνάρτηση, τη *Mann-Whitney* ή/και *Wilcoxon* συνάρτηση, την εμπειρική κατανομή αναφοράς, τις συναρτήσεις ροών και τις αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις τύπου *Wilcoxon*. Μελετήθηκαν διαγράμματα για τον έλεγχο της διαμέσου, το διάγραμμα προτεραιότητας και τα διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύθηκαν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που χρησιμοποιούν κανόνες ευαισθητοποίησης που βασίζονται στη Θεωρία ροών, με σχετική αναφορά στα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Έγινε περιγραφή της αθροιστικής βαθμολογικής συνάρτησης *Wilcoxon* και επικεντρωθήκαμε στην εργασία των Balakrishnan, Triantafyllou & Koutras (2009) οι οποίοι την χρησιμοποίησαν στο μη παραμετρικό διάγραμμα που πρότειναν. Στο προηγούμενο διάγραμμα ενσωματώθηκε ο κανόνας ροών 2-από-3 και μέσω κατάλληλων τεχνικών Προσομοίωσης διερευνήσαμε την απόδοση του νέου διαγράμματος για δύο διαφορετικές κατανομές των παρατηρήσεων και το συγκρίναμε, για την εκτός ελέγχου απόδοσή του ( $ARL_{out}$ ), με τέσσερα ανταγωνιστικά διαγράμματα που ήδη

έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η εκτός ελέγχου απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος υπερτερεί έναντι των υπολοίπων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες μετατοπίσεις από την αρχική κατανομή.

Ένας από τους κύριους στόχους του ΣΕΔ είναι να ανιχνεύει και να ελέγχει τις συστηματικές αιτίες μεταβολής μιας διεργασίας, ώστε να προβλέψει σημαντικές αποκλίσεις οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε μη συμμορφούμενα προϊόντα. Το πιο σημαντικό από τα εργαλεία του ΣΕΔ είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου (*Control Charts*). Ο κύριος στόχος τους είναι να εντοπίζουν τυχόν ειδικά αίτια μεταβλητότητας του υπό μελέτη χαρακτηριστικού και όσο το δυνατόν γρηγορότερα να δίνουν σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Τα Διαγράμματα Ελέγχου *Shewhart* μπορούν να εντοπίσουν μεγάλες και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της παραγωγικής διεργασίας, αλλά ένα μειονέκτημά τους είναι η αναποτελεσματικότητα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων.

Για να βελτιωθεί η ευαισθησία τους χρησιμοποιούνται πρόσθετοι κανόνες ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου οι οποίοι βασίζονται στη θεωρία ροών. Τέτοιοι κανόνες έχουν προταθεί και μελετηθεί από τους Page (1955), Western Electric Company (1956), Roberts (1958), Bissell (1978), Wheeler (1983) κ.α. Σκοπός των κανόνων ευαισθητοποίησης (κανόνες ροών) είναι να ανιχνευθούν αυτές οι μικρές μετατοπίσεις. Μπορούν να εφαρμοστούν σε παραμετρικά καθώς και σε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου.

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που συμπληρώνονται με κανόνες ευαισθητοποίησης που βασίζονται στη θεωρία ροών είναι ένα πεδίο για πιθανή επιστημονική έρευνα, καθώς η παραγωγή ερευνητικών εργασιών σε αυτό το πεδίο άρχισε τα τελευταία χρόνια. Ο Bakir (2004) πρότεινε ένα δίπλευρο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη προσημική βαθμολογική συνάρτηση του *Wilcoxon* (*Wilcoxon's signed-rank statistic*) που ενσωματώνει τον κανόνα ροής 1-από-1, το οποίο είναι γνωστό ως διάγραμμα *SR*. Το 2007 οι Chakraborti and Eryilmaz, για να βελτιώσουν το προηγούμενο διάγραμμα, πρότειναν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στον προσημικό βαθμολογικό έλεγχο, συμπληρωμένο με τους κανόνες ροών  $k$ -από- $k$  και  $k$ -από- $w$ , προκειμένου να μειωθεί το *FAR* και να αυξηθεί το  $ARL_{in}$  συγκριτικά με το *SR* διάγραμμα. Οι Human *et al.* (2010) πρότειναν τρία διαγράμματα με την εφαρμογή της προσημικής βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και του κανόνα ροών 1-από-1 ή του  $k$ -από- $k$  ή του  $k$ -από- $w$ , αντίστοιχα. Οι Chakraborti *et al.* (2009) πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη στατιστική

συνάρτηση προτεραιότητας συμπληρωμένα με κανόνες ευαισθητοποίησης. Οι Balakrishnan *et al.* (2010) πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου λαμβάνοντας υπόψη τη θέση μιας διατεταγμένης παρατήρησης (κανόνας ευαισθητοποίησης 1-από-1) από το δείγμα ελέγχου καθώς και το πλήθος των παρατηρήσεων μεταξύ των ορίων ελέγχου. Ορισμένες πρόσφατες εργασίες που συνεισφέρουν στο πεδίο αυτό είναι των Mukherjee *et al.* (2013), Malela-Majika *et al.* (2016) και Triantafyllou (2017).

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται σε κανόνες ροών, δεν υποθέτουν καμία συγκεκριμένη κατανομή για τα δείγματα ελέγχου που συλλέγονται και έχει αποδειχθεί ότι εμφανίζουν μικρή πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) και σχετικά μεγάλο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ). Όμως, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για μερικά μη-παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, π.χ. για το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στην προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση, απαιτείται η πρόσθετη παραδοχή της συμμετρίας, αυτό είναι επιπλέον της παραδοχής ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από μια συνεχή κατανομή.

Έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχουν πολλά περιθώρια μελλοντικής επιστημονικής και πρακτικής έρευνας πάνω στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, παρόλο που η βιβλιογραφία έχει σημειώσει τεράστια ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια. Ωστόσο, από πρακτική άποψη, η διαδικασία γραφικής απεικόνισής τους πρέπει να γίνει ακόμη πιο προσιτή στον επαγγελματία και για το σκοπό αυτό είναι ζωτικής σημασίας η ευκολία εφαρμογής τους με την χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων, όπως το Minitab, SAS, υλοποιήσεις στην R, κ.α. οι οποίες θα βοηθήσουν σε μεγάλο βαθμό αυτή την προσπάθεια. Όσον αφορά την επιστημονική έρευνα, πρέπει να γίνουν περισσότερες εργασίες σε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου για την ανάλυση της Φάσης I για διακριτά δεδομένα (Chakraborti (2011)). Συνεπώς, στα επόμενα χρόνια, αναμένονται νέα θεωρητικά και πρακτικά αποτελέσματα, σε ότι αφορά τη Στατιστική Θεωρία και τη γραφική ανάλυση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων, που θα συνεχίσουν να αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον γνωστικό αντικείμενο συστηματικής ενασχόλησης και επιστημονικής έρευνας για τους ερευνητές και τους επιστήμονες.



# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

- Camp, J. M. (2004). *Η Αρχαία Αγορά της Αθήνας: Οι ανασκαφές στην καρδιά της κλασικής πόλης*, Εκδόσεις MIET, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα (Μετάφραση Κλεώπα, Μ.).
- Αντζουλιάκος, Δ. (2009). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις Παραδόσεων του μαθήματος «Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας»*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς.
- Βαρουφάκης, Γ. (1996). *Αρχαία Ελλάδα και Ποιότητα*, Εκδόσεις Αίολος, Αθήνα.
- Γεωργακάκος, Γ. Σ. (2002). *Προηγμένα Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο Ποιότητας, Τόμος Α: Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας*, Εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Πάτρα.
- Λογοθέτης, Ν. (1992). *Μάνατζμεντ Ολικής Ποιότητας*, Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.
- Μαυρουδής, Ε. Β. (2012). *Έλεγχοι Διεργασιών Υψηλής Ποιότητας και Εφαρμογές στην Δειγματοληψία Αποδοχής*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Ξεκαλάκη, Ε. (2001). *Μη Παραμετρική Στατιστική*, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα. Ανακτήθηκε 29 Αυγούστου 2017 από <http://www2.stat-athens.aueb.gr/~exek/NPar-Statistics/index.html>
- Παπαργύρης, Α. και Παπαργύρης, Δ. (2010). *Ποιοτικός Έλεγχος Παραγωγής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Πρασιανάκης, Ν. Ι. *ΜΚΕ-Ποιότητα-Ανάπτυξη-Ασφάλεια-Πολιτισμός*, Εναρκτήρια Ομιλία στο 9<sup>ο</sup> Εθνικό Συνέδριο ΜΚΕ της ΕΛΕΜΚΕ, Εθνικό Ίδρυμα Μελετών – Αθήνα, 11 Νοεμβρίου 2016. Ανακτήθηκε 19 Ιουλίου 2017 από <http://hsnt.gr/wp-content/uploads/2016/11/9-A-0P.pdf>
- Ρακιτζής, Α. Χ. (2008). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Θεωρία Ροών και Σχηματισμών*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Στεφανάτος, Στ. (2000). *Ολική Ποιότητα*, τόμος Β', Εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Πάτρα.

Τριανταφύλλου, Ι. Σ. (2009). Συμβολή στη μελέτη ιδιοτήτων γήρανσης συστημάτων αξιοπιστίας και μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της Θεωρίας διατεταγμένων παρατηρήσεων, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

## Ξένη

- Amin, R. W. and Searcy, A. J. (1991). A Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **20**, 1049-1072.
- Amin, R. W., Reynolds Jr., M. R., and Bakir, S. T. (1995). Nonparametric quality control charts based on the sign statistic, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **24**, 1597-1623.
- Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C. (2010). Runs rules schemes for monitoring process variability, *Journal of Applied Statistics*, **37**, 1231-1247.
- Bakir, S. T. (2004). A Distribution-Free Shewhart Quality Control Chart Based on Signed-Ranks, *Quality Engineering*, **16**, 613-623
- Balakrishnan, N., Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2009). Nonparametric control charts based on runs and Wilcoxon-type rank-sum statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3177-3192.
- Balakrishnan, N., Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2010). A Distribution-Free Control Chart Based on Order Statistics, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **39**, Issue 20, 3652-3677.
- Bissell, A. F. (1978). An Attempt to Unify the Theory of Quality Control Procedures, *Bulletin in Applied Statistics*, **5**, 113-128.
- Bhattacharya, P.K. and Frierson, D. (1981). A nonparametric control chart for detecting small disorders, *Annals of Statistics*, **9**, 544-554.
- Burr, I. W. (1976). *Statistical Quality Methods*, Marcel Dekker, New York.
- Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart Control Charts with supplementary runs rules, *Technometrics*, **29**, 393-399.
- Chakraborti, S., van der Laan, P. and Bakir S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results, *Journal of Quality Technology*, **33**, 304-315.



- Chakraborti, S., van der Laan, P. and van de Wiel, M. A. (2004). A class of distribution-free control charts, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **53(3)**, 443-462.
- Chakraborti, S. and Eryilmaz, S. (2007). A Nonparametric Shewhart-Type Signed-Rank Control Chart Based on Runs, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **36**, Issue 2, 335-356.
- Chakraborti, S. and Graham, M.A. (2007). Nonparametric Control Charts, *Encyclopedia of Quality and Reliability*, John Wiley and Sons, New York.
- Chakraborti, S. and van de Wiel, M. A. (2008). A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic, In *Beyond Parametrics in Interdisciplinary Research: Festschrift in Honor of Professor P. K. Sen*, Institute of Mathematical Statistics Collections, **1**, 156-172.
- Chakraborti, S., Eryilmaz, S. and Human, S.W. (2009). A phase II nonparametric control chart based on precedence statistics with runs-type signaling rules, *Computational Statistics & Data Analysis*, **53(4)**, 1054-1065.
- Chakraborti, S. (2011). Nonparametric (Distribution-Free) Quality Control Charts, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 1-27, John Wiley and Sons, New York.
- Chowdhury, S., Mukherjee, A. and Chakraborti, S. (2014). A New Distribution-free Control Chart for Joint Monitoring of Unknown Location and Scale Parameters of Continuous Distributions, *Quality and Reliability Engineering International*, **30(2)**, 191-204.
- Crosby, P. B. (1979). *Quality is Free*, McGraw-Hill, New York.
- Crowder, S. V. (1987). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics*, **29**, 401-407.
- Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes, *Journal of Quality Technology*, **21**, 155-162.
- Dale, B. and Cooper, C. (1992). *Total quality and human resources: an executive guide*, Blackwell, Oxford.
- Das, N. (2009). A comparison study of three non-parametric control charts to detect shift in location parameters, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **41**, 799-807.
- Deming, E. (1982). *Quality, productivity and competitive positions*, MIT, MA.
- Feigenbaum, A. V. (1991). *Total quality control*, McGraw-Hill, New York.

- Garvin, D. A. (1987). Competing in the Eight Dimensions of Quality, *Harvard Business Review*, **65**, 101-109.
- Gauri, S. K. and Chakraborty, S. (2008). Feature Based Recognition of Control Chart Patterns: A Generalized Approach, *Quality Technology & Quantitative Management*, **5**, No. 3, 203-220.
- Gibbons, J. D. and Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference*, 4th Edition, Marcel Dekker, New York.
- Graham, M. A., Human, S. W. and Chakraborti, S. (2010). A Phase I nonparametric Shewhart-type control chart based on the median, *Journal of Applied Statistics*, **37**, 1795-1813.
- Hackl, P. and Ledolter, J. (1991). A Control Chart Based on Ranks, *Journal of Quality Technology*, **23**, 117-124.
- Hackl, P. and Ledolter, J. (1992). A New Nonparametric Quality Control Technique, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **21**, 423-443.
- Hawkins, D. M., Qiu, P. and Kang, C. W. (2003). The Change point Model for Statistical Process Control, *Journal of Quality Technology*, **35**, 355-366.
- Howell, J. M. (1952). Statistical Quality Control, *Mathematics Magazine*, **25**, 155-157.
- Human, S. W. , Chakraborti, S. and Smit, C. F. (2010). Nonparametric Shewhart-Type Sign Control Charts Based on Runs, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **39**, Issue 11, 2046-2062.
- Janacek, G. J. and Meikle, S. E. (1997). Control Charts Based on Medians, *The Statistician*, **46**, 19-31.
- Jones-Farmer, L. A., Jordan, V. and Champ, C. W. (2009). Distribution-Free Phase I Control Charts for Subgroup Location, *Journal of Quality Technology*, **41**, 317-330.
- Juran, J. M. (1981). *Management of Quality (course materials)*, CT: Juran Institute, Wilton.
- Khoo, M. B. C and Ariffin, K. N. (2006). Two improved runs rules for Shewhart X control chart, *Quality Engineering*, **18**, 173-178.
- Klein, M. (2000). Two alternatives to the Shewhart X control chart, *Journal of Quality Technology*, **32**, 427-431.
- Koutras, M. V., Bersimis, S. and Maravelakis, P. E. (2007). Statistical process control using Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **9**, 207-224.

- Koutras, M. V. and Triantafyllou, I. S. (2017). A general class of nonparametric control charts, *Quality and Reliability Engineering International*, *accepted for publication*.
- Li, S.Y., Tang, L.C. and Ng, S.H. (2010). Nonparametric CUSUM and EWMA control charts for detecting mean shifts, *Journal of Quality Technology*, **42**, 209-226.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements, *Technometrics*, **32**, 1-12.
- Malela-Majika, J.C., Chakraborti, S., Graham, M.A. (2016). Distribution-free Phase II Mann–Whitney control charts with runs-rules, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **86**, 723-735.
- Mason, R. L. and Young, J. C. (2002). *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, ASA, Siam.
- McDonald, D. (1990). A CUSUM procedure based on sequential ranks, *Naval Research Logistics*, **37**, 627-646.
- McGilchrist, C.A. and Woodyer, K.D. (1975). Note on a distribution-free CUSUM technique, *Technometrics*, **17**, 321-325.
- Miller, R.G., Jr. (1970). Sequential rank tests-one sample case, In *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.* (eds. Cam, L.L. et al.), University of California Press.
- Mitra, A. (2008). Control Charts for the Standard Deviation, *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*, John Wiley and Sons, New York.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Mukherjee, A. and Chakraborti, S. (2012). A Distribution-free Control Chart for the Joint Monitoring of Location and Scale, *Quality and Reliability Engineering International*, **28**, 335-352.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes, *Biometrika*, **41**, 100-115.
- Page, E. S. (1955). Control charts with warning lines, *Biometrika*, **42**, 243-257.
- Qiu, P. and Hawkins, D.M. (2003). A non parametric multivariate CUSUM procedure for detecting shifts in all directions, *Statistician*, **52**, 151-164.
- Reid, R. D. and Sanders, N. R. (2010). *Operations Management: An Integrated Approach*, 4th Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Reynolds, M.R., Jr (1975). A sequential signed-rank test for symmetry, *The Annals of Statistics*, **3**, 382-400.

- Roberts, S. W. (1958). Properties of control chart zone tests, *Bell Sys. Tech. J.*, **37**, 83-114.
- Roberts, S. W. (1959). Control chat Tests Based on Geometric Moving Averages, *Technometrics*, **42**, 97-102.
- Snee, R. D. (1990). Statistical Thinking and Its Contribution to Total Quality, *The American Statistician*, **44**, 116-121.
- Taguchi, G. (1982). *Introduction to Quality Engineering*, Asian Productivity Organization, Tokyo.
- Triantafyllou, I. S. (2017). Nonparametric control charts based on order statistics: some advances, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, to appear, DOI:10.1080/03610918.2017.1359283.
- Van der Laan, P. (1966). A sequential distribution-free two-sample grouped test with three possible decisions, *Statistica Neerlandica*, **20**, 31-41.
- Western Electric. (1956). *Statistical Quality Control Handbook*, AT&T, Chicago, IL.
- Wheeler, D. J. (1983). Detecting a shift in process average: Tables of the power function for X charts, *Journal of Quality Technology*, **15**, 155–170.
- Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods, *Biometrics Bulletin*, **1**, 80-83.
- Wilcoxon, F., Katti, S.K. and Wilcox R. (1963). *Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test*, American Cyanamid Co. and Florida State University, New York.
- Woodall, W. H. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control, *Journal of Quality Technology*, **32**, 341-350.
- Yashchin, E. (1992). Analysis of Cusum and other Markov-type control schemes by using empirical distributions, *Technometrics*, **34**, 54-63.
- Zacks, S. (1991). Detection and change-point problems, in *Handbook of Sequential Analysis*, Edited by B. K. Ghosh and P. K. Sen, Marcel Dekker, New York.
- Zhang, Y. and Castagliola, P. (2010). Run rules  $\bar{X}$  charts when process parameters are unknown, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **7(4)**, 381-399.
- Zhou, C., Zou, C., Zhang, Y. and Wang, Z. (2009). Nonparametric Control Chart Based on Change-Point Model, *Statistical Papers*, **50**, 13-28.

