Μαγικά, Λατινικά, Ορθογώνια τετράγωνα, *Sudoku* και *KenKen* στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Πτυχιακή Εργασία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Παρασκευόπουλος Αναστάσιος

Επιβλέποντες:

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1. Μαθηματικό Περιεχόμενο

1.1. Μαγικά Τετράγωνα

Μαγικό τετράγωνο ονομάζεται ένα τετράγωνο χωρισμένο σε γραμμές, στήλες και συμπληρωμένο από ακέραιους αριθμούς. Προϋποθέσεις για να θεωρηθεί ένα τέτοιο τετράγωνο «μαγικό», είναι:

1.οι αριθμοί που καταγράφονται στο τετράγωνο να είναι όλοι διαφορετικοί και

2.τα αθροίσματα των αριθμών που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, στην ίδια στήλη και στις διαγώνιους να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Απλό παράδειγμα μαγικού τετραγώνου με τρεις γραμμές και στήλες:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

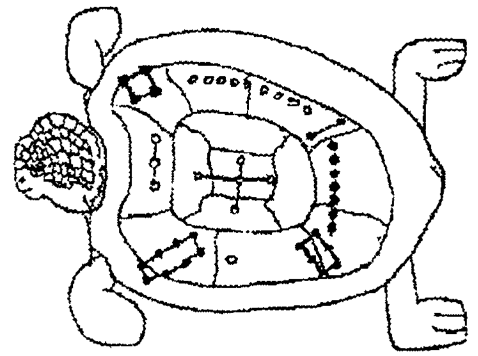
(Άθροισμα: 15)

Το παραπάνω τετράγωνο θα το ονομάζουμε «3^{ης} τάξης», επειδή έχει ακριβώς 3 γραμμές και 3 στήλες.

Τα μαγικά τετράγωνα ήταν γνωστά στους Κινέζους μαθηματικούς ήδη από το 650 π.Χ. και στους Άραβες από αρχές του 7^{ου} αι. μ.Χ., όταν κατέκτησαν το Βορειοδυτικό τμήμα του λεγόμενου κράτους των Ινδών και ήρθαν σε επαφή με τα ινδικά μαθηματικά και την αστρονομία.

Οι μελέτες πάνω στα μαγικά τετράγωνα ήταν διαδεδομένες κατά τη χρυσή εποχή του Ισλάμ στην Περσία (9^{ος} – 12^{ος} αι.) και αιτία φαίνεται να υπήρξε η διάδοση του σκακιού στην περιοχή.

Στην κινέζικη λογοτεχνία, το «Χειρόγραφο του ποταμού Lo» (650 π.Χ.) διηγείται το πώς ο βασιλιάς Yu επιχειρώντας να διοχετεύσει το νερό από μια μεγάλη πλημμύρα στη θάλασσα βρήκε μια χελώνα. Η χελώνα είχε σχεδιασμένο ένα περίεργο σχήμα στο καβούκι της: ένα τετράγωνο χωρισμένο 3x3 με κυκλικές βούλες που θύμιζαν αριθμούς. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε σειρά, στήλη και διαγώνιο ήταν το ίδιο, 15, το οποίο είναι επίσης ο αριθμός των ημερών των 24 κύκλων του κινέζικου ηλιακού έτους. Σύμφωνα με την ιστορία, αργότερα, οι άνθρωποι μπόρεσαν να αξιοποιήσουν αυτό το σχήμα με έναν τρόπο ώστε να ελέγξουν το ποτάμι και να προστατευτούν από τις πλημμύρες.



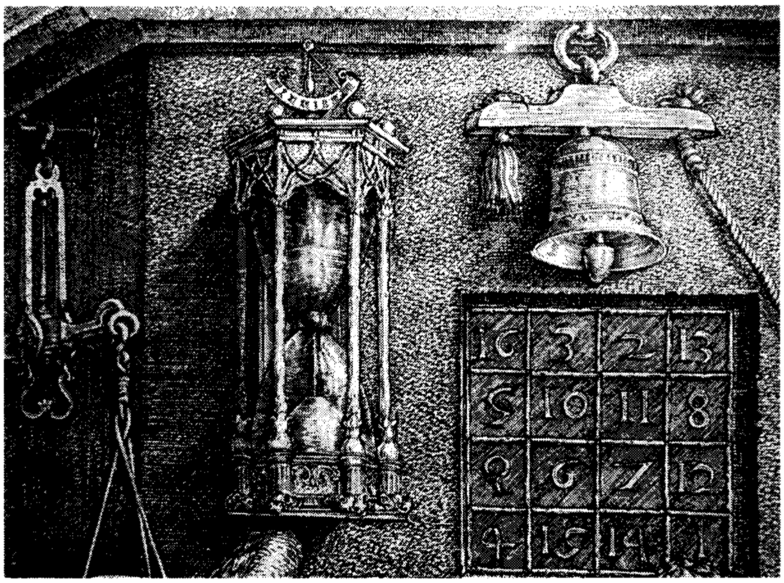
Οι ισλαμιστές μαθηματικοί στην Αραβία ασχολούνταν με τα μαγικά τετράγωνα από τον $7^{ο}$ αι. Ήρθαν σε πρώτη επαφή με αυτά, όταν ερεύνησαν την ινδική κουλτούρα και ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και την αστρονομία τους. Μπορεί ωστόσο η ιδέα να προήλθε από την Κίνα.

Στην Ινδία, το $3^{ης}$ τάξης μαγικό τετράγωνο χρησιμοποιούταν σε τελετουργίες από τον $6^{ο}$ π.Χ. αιώνα μέχρι και σήμερα. Το ακόλουθο μαγικό τετράγωνο βρίσκεται σε ένα διάσημο ινδικό ναό.

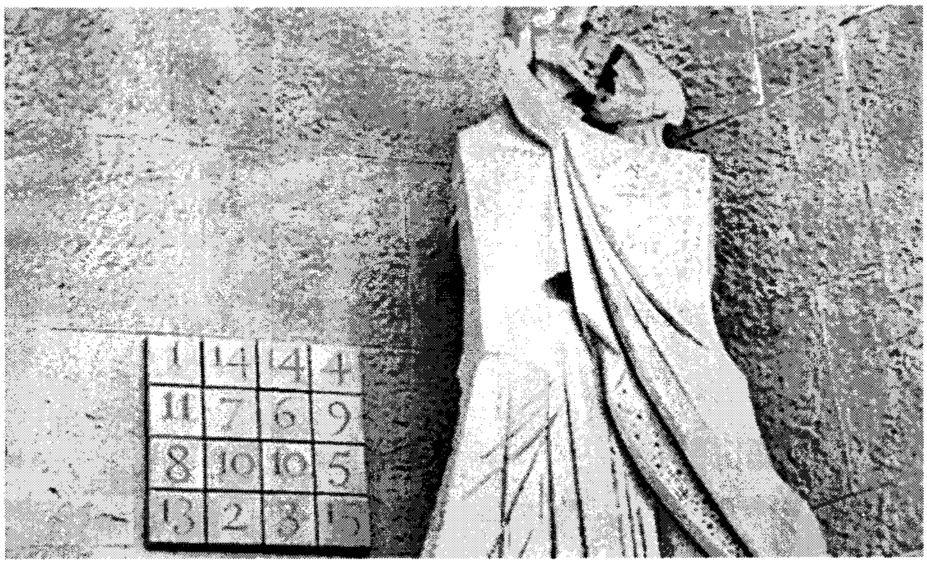
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Στο τετράγωνο, όχι μόνον κάθε σειρά, στήλη και διαγώνιος, αλλά και κάθε 2x2 υπο-τετράγωνο, κάθε γνώμονας 3x3, οι «πλήρεις» διαγώνιοι (12+8+5+9, 1+11+16+6, 2+12+15+5, 14+2+3+15 κλπ) και οι δύο μεσαίοι αριθμοί των εξωτερικών σειρών και στηλών (12+1+6+15, 2+16+11+5) έχουν άθροισμα 34.

Ένα πολύ γνωστό μαγικό τετράγωνο εμφανίζεται, για πρώτη φορά (1514) στην ευρωπαϊκή τέχνη, στο γλυπτό *Melencolia I του Α.* Dürer. Το άθροισμά του είναι 34 και, η χρονιά που κατασκευάστηκε απεικονίζεται στα μεσαία τετράγωνα της κάτω γραμμής. Οι δύο άλλοι αριθμοί, το 4 και το 1, αντιπροσωπεύουν τα αρχικά του καλλιτέχνη.



Ένα άλλο γνωστό 4ης τάξης τετράγωνο απεικονίζεται στο γλυπτό "Passion façade" του A. Gaudi στην Sagrada Familia της Βαρκελώνης.



Το άθροισμα του τετραγώνου είναι 33, που είναι η ηλικία του Χριστού, όταν έζησε «τα Πάθη Του».

Το 1300, ο βυζαντινός Μ. Μοσχόπουλος έγραψε μια μαθηματική διατριβή σχετική με τα μαγικά τετράγωνα, στηριγμένη στον Άραβα μαθηματικό Al-Buni. Στην πραγματεία του αυτή δεν αναφέρθηκε στον μυστικισμό που περιέβαλε το συγκεκριμένο θέμα. Όμως, δεν ήταν ο πρώτος Ευρωπαίος που έγραψε για τα μαγικά τετράγωνα. Σε ένα ισπανικό χειρόγραφο, γραμμένο τη δεκαετία του 1280, αναφέρεται ότι κάθε μαγικό τετράγωνο αντιπροσώπευε έναν πλανήτη, όπως και στην ισλαμική λογοτεχνία. Στην Ιταλία του 14ου αιώνα, ο Paolo Dagomari αναφέρεται στα μαγικά τετράγωνα ως χρήσιμες βάσεις για την επινόηση μαθηματικών ερωτήσεων και παιχνιδιών και δεν αναφέρει καμία μαγική χρήση. Ονομάζει ένα 6x6 Τετράγωνο «Ηλιακό» και ένα 9x9 «Σεληνιακό» και αναφέρει ότι χρησιμοποιούνται για αστρονομικούς υπολογισμούς.

Τα μαγικά τετράγωνα των τάξεων 3 έως 9 αντιστοιχίζονται σε 7 πλανήτες και περιγράφονται ως μέσα για να γίνει επίκληση στην επιρροή των πλανητών και των αγγέλων τους (ή δαιμόνων) κατά τη διάρκεια μαγικών τελετών. Η άσκηση τέτοιων λατρειών που στηρίζονταν στα τετράγωνα απαιτούσε αυτά να είναι από υλικό το οποίο αντιπροσωπεύει τον αντίστοιχο πλανήτη. Για παράδειγμα, το 3x3 τετράγωνο που αντιστοιχεί στον Κρόνο πρέπει να έχει χαραχτεί σε πλάκα από μόλυβδο. Η συγκεκριμένη τελετουργία λεγόταν ότι βοηθάει τις γυναίκες κατά τη διάρκεια ενός δύσκολου τοκετού.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι για να κατασκευαστεί ένα μαγικό τετράγωνο ανάλογα με την τάξη στην οποία ανήκει. Προφανώς, δεν μπορεί να κατασκευαστεί μαγικό τετράγωνο 2ης τάξης, γιατί η διαγώνιος και, λόγου χάρη, η μία στήλη θα έχουν έναν κοινό προσθετέο και ένα διαφορετικό. Οι κατηγορίες στις οποίες διακρίνονται οι μέθοδοι είναι:

1. Μέθοδοι για μαγικά τετράγωνα περιττής τάξης
2. Μέθοδοι για μαγικά τετράγωνα διπλά άρτιας τάξης
3. Μέθοδοι για μαγικά τετράγωνα άρτιας τάξης

Όσον αφορά τις πρώτες δύο μεθόδους, ο σχεδιασμός ακολουθεί απλή λογική μέθοδο. Η σταθερά του αθροίσματος μαγικού τετραγώνου που έχει ψηφία 1...v^2, υπολογίζεται από τον τύπο: $\frac{v\cdot(v^2+1)}{2}$ (v= τάξη του μαγικού τετραγώνου). Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαγικό τετράγωνο περιττής τάξης ξεκινώντας από το μεσαίο κελί της πρώτης γραμμής με τον αριθμό 1.

Παράδειγμα. Να κατασκευάσουμε μαγικό τετράγωνο 3ης τάξης, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1, 2, ..., 9. Ξεκινάμε τοποθετώντας τον αριθμό 1 στο μεσαίο κελί της πρώτης γραμμής.

	1	

Θέλουμε να γράψουμε τον προοδευτικά επόμενο αριθμό στο κελί που βρίσκεται μία θέση πάνω και μία θέση δεξιά από το «1». Επειδή δεν υπάρχει άλλη γραμμή πάνω από το 1 πηγαίνουμε στην τελευταία (3η) γραμμή και μία θέση δεξιά από τη στήλη που βρισκόμαστε γράφουμε τον αριθμό «2».

	1	
		2

Και πάλι, θέλουμε να τοποθετήσουμε τον προοδευτικά επόμενο αριθμό μία θέση πάνω και μία θέση δεξιά από το κελί που έχουμε σταματήσει. Αυτή τη φορά μπορούμε να πάμε μία πάνω, αλλά δεν μπορούμε να πάμε μία δεξιά. Γι' αυτό, γράφουμε στην πρώτη στήλη τον αριθμό «3».

	1	
3		
		2

Παρατηρούμε ότι το κελί που βρίσκεται μία θέση πάνω και μία θέση δεξιά από τον αριθμό που έχουμε σταματήσει, είναι «πιασμένο». Συνεπώς, γράφουμε τον προοδευτικά επόμενο αριθμό ακριβώς από κάτω.

	1	
3		
4		2

Σε περίπτωση που φτάσουμε σε αυτήν τη συνθήκη, να θέλουμε, δηλαδή, να γράψουμε τον επόμενο αριθμό στο ακριβώς από κάτω κελί, και βρισκόμαστε στην τελευταία γραμμή, γράφουμε τον αριθμό στην πρώτη γραμμή της ίδιας στήλης. Ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες το αποτέλεσμα θα είναι:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Για να κατανοήσουμε τη λογική πίσω από αυτήν τη μέθοδο χρειάζεται να παρατηρήσουμε τη διαγώνιο με τους «μεσαίους» της αλληλουχίας (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9): Οι 4, 5, 6 έχουν άθροισμα 15 και βρίσκονται στη διαγώνιο. Το ίδιο θα γινόταν και αν το μαγικό τετράγωνο που κατασκευάζαμε ήταν μεγαλύτερης τάξης. Η μεσαία στήλη έχει το 5, που είναι το μεσαίο νούμερο της αλληλουχίας, το 1, το μικρότερο, και το 9, το μεγαλύτερο. Με παρόμοιο τρόπο σχηματίζονται όλες οι γραμμές, καθώς ο συνδυασμός των τριών ψηφίων γίνεται έτσι ώστε να δημιουργούνται όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί του αθροίσματος 15 με τρείς προσθετέους. Βασικό στη διαδικασία αυτή είναι το σημείο εκκίνησης. Σκοπός της τοποθέτησης του 1 στη συγκεκριμένη θέση είναι να παρουσιαστούν οι μεσαίοι αριθμοί (4, 5, 6) στη διαγώνιο, γιατί αναγκαστικά θα έχουμε διαδοχικούς αριθμούς σε μία από τις δύο διαγώνιους εφόσον πηγαίνουμε με πορεία πάνω και δεξιά. Εάν ξεκινούσαμε από οποιοδήποτε άλλο σημείο (ακολουθώντας τη συγκεκριμένη πορεία) οι δύο διαγώνιοι θα είχαν διαφορετικό άθροισμα, καθώς οι μεσαίοι αριθμοί θα είχαν μετατοπιστεί και τη θέση τους μπορεί να είχαν άλλοι (πχ 1, 2, 3). Ωστόσο, οι γραμμές και οι στήλες του τετραγώνου θα είχαν πάλι το ίδιο άθροισμα. Γίνεται και να ακολουθήσουμε διαφορετική πορεία εκτός από πάνω και δεξιά.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μαγικό τετράγωνο 3^{ης} τάξης, το οποίο δεν θα περιέχει απαραίτητα τους αριθμούς 1...9, ως εξής:

Παίρνουμε 3 φυσικούς αριθμούς α,β,γ έτσι ώστε: $0<α<β<γ-α$, α διάφορο του 2β. Οι περιορισμοί αυτοί είναι απαραίτητοι για να υπάρχει διαφορετικό νούμερο σε κάθε κελί.

γ+α	γ-β-α	γ+β
γ+β-α	γ	γ-β+α
γ-β	γ+β+α	γ-α

Οι περιορισμοί που πήραμε ήταν για να μην υπάρχει κελί το οποίο θα περιέχει το 0, και να μην υπάρχουν ίδια ψηφία σε διαφορετικά κελιά, καθώς θα μπορούσαν να επηρεαστούν τα: γ-β-α και γ-β+α. Ταυτόχρονα, η συγκεκριμένη τοποθέτηση μας δίνει άθροισμα στις σειρές, τις στήλες και τις διαγώνιους το 3γ.

Παράδειγμα: Για α=4, β=7, γ=14, (οπότε 3·γ=42)

18	3	21
17	14	11
7	25	10

«Διπλά άρτια» τάξη σημαίνει ότι το ν που προσδιορίζει τον αριθμό των γραμμών και των στηλών είναι πολλαπλάσιο του 4. Η μέθοδος κατασκευής ενός μαγικού τετραγώνου διπλά άρτιας τάξης ξεκινάει από τις διαγώνιους.

Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να σημειώσουμε νοερά σε όλα τα κελιά τους αριθμούς προοδευτικά ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω. Από αυτά που έχουμε σημειώσει γράφουμε εκείνα που ανήκουν στις δύο διαγώνιους.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Κατασκευάζοντας πρώτα τις διαγώνιους έχουμε συγκεντρώσει τους «μεγάλους» αριθμούς στο κάτω μέρος του τετραγώνου και τους «μικρούς» στο πάνω μέρος. Για να ισορροπήσουμε τα αθροίσματα, ξεκινάμε από το τέλος και ακολουθούμε αντίθετη πορεία γράφοντας τα στοιχεία που παραλείψαμε την πρώτη φορά.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
16	3	2	16

1.2 Λατινικά τετράγωνα

Λατινικό τετράγωνο ονομάζεται ένα τετράγωνο χωρισμένο σε γραμμές και στήλες που είναι συμπληρωμένο με σύμβολα. Προϋπόθεση για να ονομάζεται ένα τέτοιο τετράγωνο, «λατινικό»: Πρέπει όλα τα σύμβολα να εμφανίζονται ακριβώς μία φορά σε κάθε γραμμή και στήλη.

Α	Β	Γ
Β	Γ	Α
Γ	Α	Β

Η ονομασία «λατινικό τετράγωνο» είναι εμπνευσμένη από μαθηματικές εργασίες του Leonard Euler , ο οποίος χρησιμοποιούσε λατινικούς χαρακτήρες ως σύμβολα.

Το παραπάνω λατινικό τετράγωνο έχει γραφτεί στην «ελαττωμένη μορφή» του. Ελαττωμένη ονομάζεται εκείνη η μορφή η οποία έχει παρατεταγμένα τα στοιχεία στην πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη με τη φυσική σειρά τους. Ένα λατινικό τετράγωνο που δεν βρίσκεται σε ελαττωμένη μορφή είναι:

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Εδώ αντί για λατινικούς χαρακτήρες ο συμβολισμός γίνεται με αριθμούς. Εφόσον η ακολουθία: «1, 2, 3» δεν εμφανίζεται στην πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, το τετράγωνο δεν θεωρείται «ελαττωμένης μορφής».

Γράφοντας τα στοιχεία ενός λατινικού τετραγώνου με τη μορφή [r,c,s] όπου r = σειρά, c = στήλη, s = σύμβολο, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το παραπάνω τετράγωνο με τη μορφή: {[1,1,3],[1,2,1],[1,3,2],[2,1,2],[2,2,3],[2,3,1],[3,1,1],[3,2,2],[3,3,3]} Παράδειγμα λατινικών τετραγώνων ίδιας τάξης ξεκινώντας από την ελαττωμένη μορφή. Για το πρώτο τετράγωνο (με τα γράμματα), αν καθρεφτίσουμε τα σύμβολα, μας δίνει:

Α	Β	Γ
Β	Γ	Α
Γ	Α	Β

Γ	Β	Α
Α	Γ	Β
Β	Α	Γ

Γ	Α	Β
Β	Γ	Α
Α	Β	Γ

Η μέθοδος αυτή μπορεί να μας δώσει και άλλα τετράγωνα ίδιας κλάσης αν η αντανάκλαση πραγματοποιηθεί με διαγώνιες εναλλαγές. Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε όλα τα πιθανά τετράγωνα μιας κλάσης «παίζοντας» με τη μέθοδο καταγραφής [r,c,s]. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα [r,c,s] και να αντικαταστήσουμε τα σύμβολα με [c,r,s], το οποίο θα δίνει: [1,1,3],[2,1,1],[3,1,2],[1,2,2],[2,2,3],[3,2,1],[1,3,1],[2,1,2],[3,3,3]}

Και αν αντικαταστήσουμε τα 1,2,3 με Α,Β,Γ έχουμε [c,r,s]:

Γ	Β	Α
Α	Γ	Β
Β	Α	Γ

Όσον αφορά στις 5 πρώτες τάξεις λατινικών τετραγώνων έχουμε:

ν	Τετράγωνα σε «ελαττωμένη μορφή»	Συνολικά
1	1	1
2	1	2
3	1	12
4	4	576
5	56	161280

1.3. Ορθογώνια Λατινικά Τετράγωνα

Είναι δυνατό να συνδυάσουμε δύο λατινικά τετράγωνα στοιχίζοντάς τα παράλληλα. Εφόσον το κάθε ζευγάρι των συμβόλων υπάρχει ακριβώς μία φορά σε ολόκληρο το τελικό τετράγωνο, τότε το ονομάζουμε «ορθογώνιο λατινικό».

Παράδειγμα:

Α	Β	Γ
Β	Γ	Α
Γ	Α	Β

α	γ	β
β	α	γ
γ	β	α

Στοιχίζοντας παράλληλα τα δύο αυτά λατινικά τετράγωνα μας δίνεται:

Αα	Βγ	Γβ
Ββ	Γα	Αγ
Γγ	Αβ	Βα

Παρατηρούμε ότι το κάθε πιθανό ζευγάρι εμφανίζεται από μία φορά.

Τα ορθογώνια λατινικά τετράγωνα ήταν γνωστά πριν από τον Euler. Όπως περιγράφεται από τον Donald Knuth, η κατασκευή ενός ορθογωνίου λατινικού τετραγώνου 4^{ης} τάξης δημοσιεύθηκε από τον James Ozanam το 1725 σαν ένας γρίφος με χαρτιά. Το πρόβλημα ήταν:

Να τοποθετηθούν όλες οι κάρτες A, K, Q, J, συνολικά 16 έτσι ώστε σε κάθε στήλη και σειρά να υπάρχει ακριβώς μία φορά η κάθε φιγούρα και το κάθε σύμβολο (♠♥♦♣) .

Υπάρχουν παραπάνω από μία λύσεις για το πρόβλημα.

Παράδειγμα:

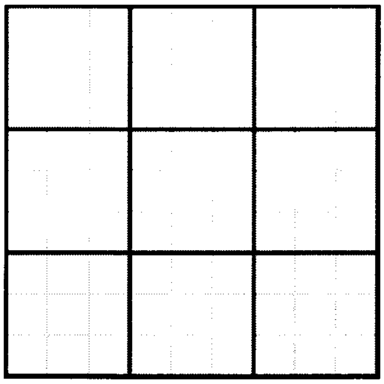
A♠ K♥ Q♦ J♣
Q♣ J♦ A♥ K♠
J♥ Q♠ K♣ A♦
K♦ A♣ J♠ Q♥

Ο Leonard Euler ασχολήθηκε λεπτομερώς με τα ορθογώνια λατινικά τετράγωνα, διαλέγοντας τα σύνολα να είναι S= {A,B,C...}, και T= {α,β,γ...}, δηλαδή κεφαλαίοι λατινικοί χαρακτήρες και μικροί ελληνικοί χαρακτήρες, δίνοντάς τους έτσι την ονομασία «Graeco-latin squares». Στη δεκαετία του 1780, ο Euler παρουσίασε μεθόδους κατασκευής ορθογώνιων λατινικών τετραγώνων με τάξη περιττού αριθμού ή πολλαπλάσιου του 4. Παρατήρησε ότι δεν υπάρχει τετράγωνο 2^{ης} τάξης και καθώς δεν μπόρεσε να κατασκευάσει τετράγωνο 6ης τάξης υπέθεσε ότι δεν υπάρχει για άρτια τάξη (εκτός από τα πολλαπλάσια του 4). Πραγματικά, το 1901, ο Gaston Tarry μέσω μιας προσπάθειάς του να εξετάσει όλα τα πιθανά ορθογώνια λατινικά τετράγωνα, έφτασε στο αποτέλεσμα ότι, όντως, δεν υπάρχουν τετράγωνα 6ης τάξης. Το 1959 οι R. C. Bose και S. S. Shrikhande κατασκεύασαν τετράγωνα 22ης τάξης απορρίπτοντας την εικασία του Euler. Στη συνέχεια, ο E. T. Parker βρήκε ένα ορθογώνιο λατινικό τετράγωνο 10ης τάξης με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή. Τον Απρίλιο του 1959 οι Bose, Shrikhande, και Parker, παρουσίασαν την εργασία τους αποδεικνύοντας ότι η υπόθεση του Euler ήταν λανθασμένη για κάθε ν≥10. Συνεπώς, υπάρχουν ορθογώνια λατινικά τετράγωνα τάξης ν>2 εκτός από ν=6.

Ο μέγιστος αριθμός τετραγώνων/λύσεων τάξης ν δεν μπορεί να ξεπερνά το ν-1, και το ανώτατο αυτό όριο εκπληρώνεται, όταν το ν είναι πρώτος αριθμός υψωμένος σε δύναμη. Ο ελάχιστος αριθμός Τετραγώνων είναι 2, εκτός αν ν= 1,2, οπότε είναι 1.

1.4. Sudoku

Το Sudoku είναι ένα 9x9 τετράγωνο και επομένως αποτελείται από 81 «κελιά». Όπως και τα λατινικά τετράγωνα, έτσι και το Sudoku συμπληρώνεται από σύμβολα, αριθμούς, οι οποίοι εμφανίζονται ακριβώς μία φορά σε κάθε σειρά και στήλη.



Το τετράγωνο που δίνεται στην αρχή δεν είναι άδειο. Κάποια από τα κελιά είναι δοσμένα στον λύτη, με στόχο ο γρίφος να έχει μία και μοναδική λύση. Σκοπός του γρίφου είναι να συμπληρωθούν όλα τα κελιά. Ένα συμπληρωμένο Sudoku είναι, πράγματι, ένα λατινικό τετράγωνο $9^{ης}$ τάξης. Στο Sudoku, όμως, υπάρχει ένας επιπλέον περιορισμός: Διαιρείται σε 9 περιοχές-υποτετράγωνα όπου ισχύει και πάλι ο ίδιος κανόνας· τα 9 ψηφία πρέπει να εμφανίζονται ακριβώς μία φορά σε κάθε υποτετράγωνο.

Παρόλο που χρησιμοποιούμε αριθμούς για να συμπληρώσουμε τα κελιά, ένα παιχνίδι Sudoku δεν απαιτεί τη χρήση μαθηματικών πράξεων για την επίλυσή του.

Το πρώτο παιχνίδι Sudoku που εμφανίστηκε, επινοήθηκε από τον αρχιτέκτονα H. Garns και δημοσιεύθηκε στο περιοδικό «Dell Pencil Puzzles and Word Games», το 1979, με το όνομα «Number Place»(«Τοποθέτηση αριθμών»). Το 1984, εμφανίστηκε σε ένα περιοδικό στην Ιαπωνία, από όπου πήρε το όνομα «Sudoku», που σημαίνει κάτι σαν «μόνοι αριθμοί». Σήμερα, οι Δυτικοί αναφέρονται στο παιχνίδι με την ιαπωνική του ονομασία, και οι Ιάπωνες με την αγγλική του ονομασία. Το 2004 η εφημερίδα «Times» και το 2005 η «Daily Telegraph» άρχισαν να δημοσιεύουν γρίφους Sudoku και σύντομα ακολούθησαν πολλές άλλες εφημερίδες στον κόσμο. Έκτοτε, έχουν δημοσιευτεί μαθηματικά περιοδικά, βιβλία και έχουν αναρτηθεί ιστοσελίδες, blogs αποκλειστικά για το Sudoku, και έχουν πραγματοποιηθεί διαγωνισμοί και τουρνουά.

Το σύνολο των λατινικών τετραγώνων $9^{ης}$ τάξης που μπορεί να κατασκευαστούν είναι: 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600. Το σύνολο των Sudoku που μπορεί να κατασκευαστούν, λόγω του περιορισμού των 9 περιοχών είναι μικρότερο: 6.670.903.752.021.072.936.960. Ο ελάχιστος αριθμός ψηφίων που μπορούν να τοποθετηθούν ως δεδομένα σε ένα Sudoku για να υπάρχει μόνο μία δυνατή λύση, σύμφωνα με τον G.Royle, είναι 17.

	1							9
			3			8		
						6		
				1	2	4		
7		3						
5								
8			6					
				4			2	
			7				5	

Το παραπάνω Sudoku έχει μία και μοναδική λύση.

Ο G. McGuire απέδειξε ότι δεν υπάρχει μοναδική λύση σε Sudoku με 16 δεδομένα κελιά, και οι Royle κ. ά. βρήκαν ένα που έχει μόνο δύο λύσεις:

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

5	6	2	3	$^{8}9$	$^{9}8$	4	7	1
$^{8}9$	4	$^{9}8$	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	$^{8}9$	$^{9}8$	6
3	5	$^{8}9$	1	$^{9}8$	4	6	2	7
$^{9}8$	7	4	2	6	3	1	$^{8}9$	5
2	1	6	$^{8}9$	5	7	3	4	$^{9}8$
6	$^{9}8$	1	5	4	2	7	3	$^{8}9$
7	2	5	6	3	$^{8}9$	$^{9}8$	1	4
4	$^{8}9$	3	$^{9}8$	7	1	5	6	2

Αντίθετα, ο μέγιστος αριθμός δεδομένων κελιών που μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα παραπάνω από μία λύση είναι 77:

$^{1}2$	$^{2}1$	3
4	5	6
7	8	9
$^{2}1$	$^{1}2$	4

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Για να επιλυθεί ένας γρίφος Sudoku, υπάρχουν διάφορες στρατηγικές, τις οποίες ο καθένας αναπτύσσει ατομικά. Ο λύτης μπορεί να εξετάσει μια συγκεκριμένη σειρά στήλη, γραμμή, ή υποτετράγωνο, παρατηρώντας, εάν εκεί λείπει κάποιο νούμερο, το οποίο αποκλείεται εύκολα από τα γειτονικά του.

Παράδειγμα:

	2		1	7	8		3	
	4		3		2		9	
1								6
		8	6		3	5		
3								4
		6	7		9	2		
9								2
	8		9		1		6	
	1		4	3	6		5	

Στο κόκκινο υποτετράγωνο, είναι φανερό ότι ο αριθμός 2 θα γραφτεί στο κελί ανάμεσα στο 9 και το 1, επειδή αποκλείεται από όλα τα υπόλοιπα της ίδιας περιοχής.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ασχοληθούμε, εκτός από τα υποτετράγωνα, με τις γραμμές και τις στήλες. Όμως, η παραπάνω στρατηγική δεν αρκεί για τα πιο δύσκολα Sudoku. Στον παρακάτω γρίφο, εξετάζουμε πού θα μπει ο αριθμός 8 στο κάτω δεξιά υποτετράγωνο. Παρατηρώντας τα δύο κυκλωμένα 8άρια, αποκλείονται ορισμένες περιοχές.

		3				9		
			9			6		
		8	5		4		3	
8		2						
	1		3		7		8	
						4		6
	6		4		5	1		
		4			3	8		
		9	1			3		

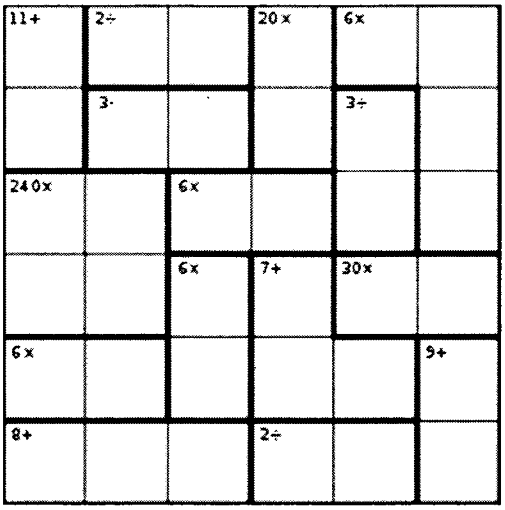
Στη σημειωμένη σειρά ο αριθμός 8 δεν υπάρχει και, παρατηρώντας τα 8άρια που είναι δοσμένα, μπορεί να τοποθετηθεί μόνο σε ένα κελί.

Εναλλακτικά, ο λύτης μπορεί να αξιοποιήσει τη μέθοδο της «δοκιμής και της απόρριψης» σημειώνοντας σε ένα κελί κάποιο πιθανό νούμερο και συνεχίζοντας από εκεί. Η μέθοδος αυτή μπορεί, προφανώς, να οδηγήσει σε λάθη.

1.5. KenKen

Το 2004 ο Ιάπωνας μαθηματικός Tetsuya Miyamoto επινόησε μια παραλλαγή του Sudoku, που ονόμασε «KenKen» (賢 ken = εξυπνάδα).

Στόχος, όπως και στο Sudoku, είναι να συμπληρωθούν όλα τα κελιά. Σε κάθε σειρά και κάθε στήλη εμφανίζονται ακριβώς μια φορά οι αριθμοί 1,2,....ν, (ν= τάξη του τετραγώνου). Η διαφορά είναι ότι δεν υπάρχουν υποτετράγωνα, αλλά αντίστοιχες «περιοχές» που δεν έχουν ίδιο μέγεθος.



Οι στρατηγικές που ισχύουν για το Sudoku, μπορούν να εφαρμοστούν και στο KenKen. Η διαφορά είναι ότι οι περιοχές προσδιορίζονται από έναν αριθμό και μία πράξη· για τη συμπλήρωσή τους, απαιτείται ο λύτης να βρει όλους τους πιθανούς «συνδυασμούς» αριθμών (από 1...ν) για να κάνει την πράξη που αναφέρεται στην περιοχή και να φτάσει στο αποτέλεσμα που δίνεται. Για παράδειγμα, στο παραπάνω τετράγωνο, ο μόνος τρόπος να έχουμε αποτέλεσμα πρόσθεσης το 11, είναι το 5+6.

2. Διδασκαλία στην τάξη με KenKen

2.1. Η μέθοδος της επίλυσης προβλήματος

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα για τη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελούν σημείο προβληματισμού για εκπαιδευτικούς, καθηγητές και ερευνητές.

Πολλοί τάσσονται κατά των παραδοσιακών πρακτικών και υπέρ της μεθόδου επίλυσης προβλημάτων. Τον Απρίλιο του 2000, το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων των Μαθηματικών κυκλοφόρησε το Principles and Standards for School Mathematics. Στο έγγραφο αυτό, το NCTM εκθειάζει την μέθοδο της «επίλυσης προβλήματος», και συγκρίνει τη μέθοδο αυτή με τις δασκαλοκεντρικές προσεγγίσεις που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών ασκώντας σκληρή κριτική στις τελευταίες. Συγκεκριμένα, κάνει λόγο για αναγκαιότητα να «οικοδομούν όλοι οι μαθητές τη νέα μαθηματική γνώση μέσω της επίλυσης προβλημάτων», και χρησιμοποιεί ως επιχείρημα την προδιάθεση των παιδιών να ασχολούνται με καταστάσεις «προβληματικές», έτσι ώστε να μάθουν να αξιοποιούν τις γνώσεις που ήδη κατέχουν και, όντας σε μια κατάσταση εγρήγορσης, να βελτιώσουν τα εργαλεία που χρησιμοποιούν για την κατανόηση αυτών και παρόμοιων συνθηκών.

Ο Van de Walle υποστήριξε ότι, στις περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί δοκίμασαν να ακολουθήσουν αυτή τη μέθοδο, παρέμειναν σε αυτήν, καθώς οι δάσκαλοι και οι μαθητές ενθουσιάστηκαν πόλύ κατά την ενασχόλησή τους με προβλήματα. Επιπλέον, επέκρινε τη μέθοδο της παραδοσιακής διδασκαλίας στα Μαθηματικά, λόγω του ότι δεν θέτει ως βάσεις τις εμπειρίες των μαθητών, της απουσίας χειραπτικών υλικών, και της μη κατανόησης σε βάθος των εννοιών που πραγματεύονται τα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα, επικεντρώνεται στις ενέργειες του εκπαιδευτικού, κυρίως, και λιγότερο των μαθητών, οι οποίοι αφιερώνονται σε ανούσιες έννοιες, πράξεις και αλγορίθμους που, εφόσον δεν βρίσκονται αντιμέτωποι με κάποιο πρακτικό πρόβλημα, δεν νιώθουν ότι έχει νόημα η προσπάθειά τους. Εγκωμίασε τη σημασία που έχει η επίλυση προβλημάτων για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης ταυτίζοντάς τη με την πεμπτουσία των Μαθηματικών που έχει ως αποτέλεσμα την ουσιώδη και ενδιαφέρουσα ενασχόληση των παιδιών.

2.2. Το KenKen ως επίλυση προβλήματος

Τα προβλήματα προς επίλυση που μπορεί να παρουσιάσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη του είναι πραγματικά πολυάριθμα, αν εξετάσουμε όλη την ύλη στις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Το KenKen καλύπτει ένα κομμάτι του πρώτου μισού των σπουδών στο δημοτικό σχολείο και μπορεί να διδαχτεί ως ένα πρόβλημα προς επίλυση. Συγκεκριμένα, πραγματεύεται τις τέσσερις βασικές πράξεις, την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, και τη διαίρεση με αριθμούς που, στον πολλαπλασιαμό, μπορεί να φτάνουν μέχρι και το 500. Οικοδομεί λογική σκέψη και αναπτύσσει διανοητική επιμονή, αντοχή, και συγκέντρωση.

Η Lola May θεωρεί πως για να αποτελέσει το KenKen μια επιτυχή στρατηγική, θα πρέπει να στηρίζεται σε μια τάξη που δίνει χώρο στη μέθοδο της επίλυσης προβλημάτων. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να οδηγήσει τους μαθητές σε έναν ορισμένο τρόπο σκέψης. Τα παιδιά, δηλαδή, θα πρέπει να αναπτύξουν μόνοι τους λογική σκέψη και να μη φοβούνται να κάνουν λάθη, αλλά να βοηθούν ο ένας τον άλλο και να νιώθουν ότι εκείνοι ήταν που οδήγησαν στην επίλυση της «προβληματικής κατάστασης».

Ο ρόλος του δασκάλου, καθώς οι μαθητές θα λύνουν το γρίφο, είναι να τους δίνει χρόνο για να συζητήσουν, να προσπαθήσουν, να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους και να κατανοήσουν ότι η επιμονή είναι περισσότερο σημαντική από την ταχύτητά τους. Θα πρέπει να τους ρωτάει τους λόγους των επιλογών τους και σε καμία περίπτωση δεν θα τους δώσει τη λύση, επειδή μπορεί να απογοητευτούν πιστεύοντας ότι δεν είναι ικανοί να λύσουν το γρίφο μόνοι τους. Για να ξεπεράσουν τις αμφιβολίες τους χρειάζεται να μάθουν να δουλεύουν σε ομάδες, με την ενθάρρυνση του εκπαιδευτικού και να συνδιαλεχτούν για τη πιθανή λύση.

Αρχικά, φυσιολογικό θα είναι οι μαθητές να προσπαθούν να μαντέψουν πιθανές λύσεις στο γρίφο, αλλά όταν δουλέψουν σε ομάδες θα αμφισβητήσουν τις απαντήσεις που έχουν φτάσει και θα πιεστούν να μάθουν την ακολουθία επίλυσης του γρίφου, κάτι που θα αποτελέσει σημαντική δεξιότητα αργότερα, όταν θα αντιμετωπίζουν λεκτικά προβλήματα λογικής.

3. Η παρέμβασή μας

Η παρέμβαση που οργανώσαμε πραγματοποιήθηκε στη Γ' τάξη του 21ου δημοτικού σχολείου Βόλου και διήρκησε πέντε διδακτικές ημέρες από την Τρίτη 28 Απριλίου έως την Τετάρτη 6 Μαίου.

Οι στόχοι που θέσαμε ήταν:

1. Οι μαθητές να βελτιώσουν τις ικανότητές τους στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

2. Να εμπεδώσουν την αντιμεταθετική ιδιότητα σε πράξεις με τρεις παράγοντες.

3. Να εργαστούν ομαδικά αναπτύσοντας τη συνεργατικότητά τους.

Το ερευνητικό ερώτημά μας είναι:

Μπορεί η ενασχόληση με το KenKen να βελτιώσει τις ικανότητες εκτέλεσης των τεσσάρων βασικών πράξεων των μαθητών, με βάση τα ποσοστά των σωστών απαντήσεών τους πριν και μετά την παρέμβαση;

Την πρώτη ημέρα δόθηκε στους μαθητές ένα διαγνωστικό τεστ, για να δούμε σε τι επίπεδο βρίσκονταν κατά την έναρξη της παρέμβασης. Το τεστ αυτό εξέταζε την ικανότητα των μαθητών να βρουν όλα τα πιθανα ζευγάρια που έχουν άθροισμα έναν δοσμένο αριθμό (π.χ. 12), και να κάνουν το ίδιο για γινόμενο. Επίσης, όσον αφορά την αφαίρεση και τη διαίρεση τους δίνονταν σχεδόν ολοκληρωμένες πράξεις με ζητούμενο το δεύτερο παράγοντα (π.χ. 5 - ; = 2) . Το ίδιο τεστ δόθηκε και στο άλλο τμήμα του σχολείου. Οι μαθητές του δικού μας τμήματος (Γ1) παρουσίασαν μέτρια προβλήματα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, ενώ το επίπεδο του Γ2 ήταν εμφανώς καλύτερο με λιγότερες ελλείψεις.

Τη δεύτερη ημέρα, έγινε παρουσίαση των κανόνων του KenKen με τη συνεισφορά του κύριου Χατζηκυριάκου.

Οι οδηγίες που τους δώσαμε γράφοντάς τες στον πίνακα ήταν:

Παρατήρησε το μεγάλο τετράγωνο που σου δίνω. Αποτελείται από 16 κουτάκια. Κάποια από αυτά έχουν γύρω τους μια πιο έντονη μαύρη γραμμή. Καθένα από αυτά τα μέρη θα τα λέμε κλουβιά.

Σε καθένα από τα κουτάκια αυτά θα βάλεις έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες.

Σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη θα βάλεις μόνο μια φορά τους αριθμούς αυτούς

Μέσα σε κάθε κλουβί υπάρχει ένας αριθμός και το σύμβολο μιας πράξης:

+ για την πρόσθεση

– για την αφαίρεση

× *για τον πολλαπλασιασμό*

÷ *για τη διαίρεση.*

Τους αριθμούς πρέπει να τους βάλεις έτσι ώστε σε κάθε κλουβί αν κάνεις την πράξη του κλουβιού με τους αριθμούς αυτούς (με όποια σειρά θέλεις) το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ο αριθμός του κλουβιού.

Στη συνέχεια, δείξαμε στα παιδιά τον τρόπο επίλυσης του KenKen, συμπληρώνοντας ένα χαμηλής δυσκολίας τετράγωνο 3x3. Έπειτα, τους ζήτησα να λύσουν, δουλεύοντας και συζητώντας στις ομάδες τους, ένα τετράγωνο ίδιου επιπέδου δυσκολίας, με σκοπό να αρχίσουν να εξοικειώνονται με τη μέθοδο επίλυσης. Το συγκεκριμένο τετράγωνο απαιτούσε μόνον την κατανόηση των βασικών κανόνων. Τέλος, τους παρουσίασα ένα KenKen 4x4, ίδιας, πάλι, δυσκολίας και τους ανέφερα τον επιπλέον αριθμό που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν (4) για να συμπληρώσουν τα κελιά. Τους δώσαμε τη δυνατότητα να εργάζονται στις ομάδες που ήταν τοποθετημένοι. Οι ομάδες αυτές είχαν οργανωθεί με σκοπό να υπάρχει ανομοιογένεια στα γνωστικά επίπεδα των μαθητών με σκοπό να υπάρχει εντός τους μια σχετική αλληλοβοήθεια.

Δύο παιδιά, ο Σπύρος και η Μαρία, κατάφεραν να λύσουν, με ελάχιστες διευκρινίσεις, και σε λίγο χρόνο, το πρώτο KenKen. Οι υπόλοιποι ακολούθησαν μετά από δέκα λεπτά με εξίσου σωστές απαντήσεις, ενώ υπήρχε κομμάτι του τμήματος που στάθηκε αδιάφορο καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας. Για να εμπεδώσουν όλοι τα βήματα που ακολουθήσαμε για να ολοκληρώσουμε τον γρίφο, σηκώσαμε τον Σπύρο, που ανήκε στους προχωρημένους μαθητές και φαινόταν ότι είχε καταλάβει τους κανόνες, να λύσει το KenKen στον πίνακα. Το δεύτερο KenKen δυσκόλεψε τα παιδιά περισσότερο από το προηγούμενο, αλλά μετά από συζήτηση μεταξύ τους, έξι από τους μαθητές έλυσαν το δεύτερο. Λόγω πίεσης του χρόνου αναγκαστήκαμε να σηκώσουμε τη Μαρία στον πίνακα και να μας εξηγήσει τι ακριβώς έκανε, χωρίς να δώσουμε χρόνο στους πιο «αργούς» να ολοκληρώσουν.

<u>Την τρίτη ημέρα</u>, οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε εκείνους που τους συνάρπασε το KenKen και σε εκείνους που τους άφησε αδιάφορους. Όλοι, όμως, προτιμούσαν να ασχοληθούμε με αυτό παρά με οτιδήποτε άλλο, πράγμα που βελτίωσε την αυτοπεποίθησή μου για την παρέμβαση που πραγματοποιούσα. Χρειάστηκε να ξεκινήσω το μάθημα υπενθυμίζοντας τους κανόνες. Η δυσκολία του KenKen ανέβηκε ένα επίπεδο και απαιτούσε μια παραπάνω δεξιότητα· να σημειώνουν νοερά κάποια νούμερα. Μόνο ένας, ο Σπύρος, μπόρεσε να το λύσει χωρίς βοήθεια, και του ζήτησα να το δείξει στην ομάδα του και σε μια άλλη ομάδα, ενώ προσπάθησα αρχικά να καθοδηγήσω τις άλλες ομάδες σε αυτό το συμπέρασμα. Τελικά, αυτή η ικανότητα αποδείχτηκε δύσκολη στο να οικοδομηθεί μέσα σε ένα τόσο μικρό χρονικό διάστημα από την πλειονότητα των παιδιών, αν και αυτή τη φορά παρατήρησα ότι όλοι είχαν κατανοήσει τους βασικούς κανόνες.

<u>Την τέταρτη ημέρα</u>, τούς έδωσα πάλι ένα KenKen μέτριας δυσκολίας, ευελπιστώντας να φτάσουν περισσότερα παιδιά στο επίπεδο του Σπύρου, ο οποίος απουσίαζε. Αυτή τη φορά, το KenKen το επέλεξα θέλοντας να αξιολογήσω τη βαθύτερη κατανόηση των κανόνων. Εκεί αντιμετώπισαν δυσκολία σχεδόν όλοι οι μαθητές. Μόνον ο Μάριος και ο Ανδρέας αναγνώρισαν ότι δεν υπήρχε κάποιος κανόνας που να λέει ότι στο ίδιο κλουβί δεν μπορεί

να μπει το ίδιο νούμερο δύο φορές. Προϋπόθεση είναι, όμως, αυτά τα νούμερα να τοποθετηθούν σε διαφορετική σειρά και στήλη. Όταν τους δόθηκε αυτή η επεξήγηση, τα περισσότερα παιδιά μπόρεσαν να λύσουν επιτυχώς το γρίφο.

Από τις διαφορετικές παρατηρήσεις που σημείωσα κατά τη διάρκεια της παρέμβασης συμπέρανα ότι ο τρόπος που σκέφτονται τα παιδιά μπορεί να απέχει πάρα πολύ από το ένα παιδί στο άλλο και, ότι μπορούν να βρούν πολλά διαφορετικά σημεία για να ξεκινήσουν να λύνουν ένα γρίφο, καθώς και διαφορετικές πορείες που μπορούν να ακολουθήσουν. Το KenKen (και το Sudoku, του οποίου αποτελεί παραλλαγή) έχει αυτό το χαρακτηριστικό που το κάνει διασκεδαστικό για όσους θελήσουν να ασχοληθούν μαζί του. Παράλληλα, η ενασχόληση με αυτό στα πλαίσια μιας ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας αποδίδει ευεργετικά αποτελέσματα, καθώς δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ανταλλάξουν ιδέες αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα από περισσότερες πτυχές.

Την πέμπτη ημέρα, δόθηκε και πάλι στους μαθητές ένα διαγνωστικό τεστ, όμοιο με το αρχικό, με τη διαφορά ότι το τελευταίο είχε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με τρεις όρους. Σε αυτές τις πράξεις, το τμήμα μου έδωσε πολύ καλύτερα ποσοστά απαντήσεων σε σχέση με το άλλο τμήμα. Αλλά αυτό ήταν το μόνο σημείο που το τμήμα μου υπερτερούσε, καθώς οι αποδόσεις του άλλου τμήματος σε αφαίρεση, διαίρεση, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με δύο όρους ανέβηκε, ενώ του δικού μου έμειναν στάσιμες.

Στην πρόσθεση συνολικά, ο αριθμός των μαθητών που δεν έκαναν ούτε ένα λάθος από το τμήμα μου (Γ1) μειώθηκε από 63% σε 38%. Το ίδιο έγινε και στο Γ2, όπου αρχικά το 72% των αλάνθαστων έπεσε στο 7%.

Στην αφαίρεση, στο Γ1 δεν παρατηρήθηκαν μεταβολές με το 75% των μαθητών να συμπληρώνουν σωστά τις πράξεις. Στο Γ2, το 36% που έκανε λάθη στις πράξεις του πρώτου τεστ, δεν έκανε κανένα στο δεύτερο.

Στον πολλαπλασιασμό συνολικά, μειώθηκε η απόδοση των μαθητών του Γ1, καθώς οι αλάνθαστοι μειώθηκαν από 25% σε 6% και το ποσοστό εκείνων που έκαναν 5 έως 9 λάθη αυξήθηκε από 25% σε 50%. Το Γ2 παρουσίασε μεγαλύτερη πτώση, καθώς το 14% που αρχικά απάντησε λανθασμένα, έγινε 100% στο δεύτερο τεστ.

Στη διαίρεση,όσον αφορά το Γ1, το 37,5%, που έκανε 1 με 2 λάθη, μειώθηκε και στο δεύτερο τεστ αυξήθηκαν οι μαθητές που έκαναν μέχρι 1 λάθος (το 25% έγινε 37%) αλλά και οι μαθητές που έκαναν παραπάνω από 4 λάθη (το 37,5% έγινε 44%). Στο Γ2 σημειώθηκε δραματική βελτίωση των απαντήσεων, καθώς το 64% των αλάνθαστων έγινε 100%.

Στο δεύτερο διαγνωστικό τεστ, στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν και σε πράξεις με τρεις όρους. Οι μαθητές του Γ1 αναλογικά δυσκολεύτηκαν λιγότερο από τους αντίστοιχους που δεν εκτέθηκαν στην παρέμβαση. Παρ' όλα αυτά, η γενικότερη απόδοση των τελευταίων αυξήθηκε περισσότερο από εκείνη των μαθητών που ασχολήθηκαν με τα KenKen.

Παρατηρώντας τις τιμές που μας έδωσε το πρώτο διαγνωστικό τεστ, είναι φανερό ότι το Γ2 βρισκόταν γνωστικά σε πολύ καλύτερο επίπεδο από το Γ1. Από τις 37 συνολικά απαντήσεις του πρώτου τεστ, κατά μέσο όρο, το Γ1 είχε 10 λανθασμένες απαντήσεις ενώ το Γ2 μόλις 3,4. Συνεπώς, δυστυχώς, δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο ερευνητικό μας ερώτημα.

4. Παράρτημα

Το πρώτο διαγνωστικό τεστ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

1. Το 1 και το 4 είναι ένα προσθετικό ζευγαράκι του 5, αφού

1 + 4 = 5 και 4 + 1 = 5

Ένα άλλο τέτοιο ζευγαράκι του 5 είναι το 2 και το 3, αφού

2 + 3 = 5 και 3 + 2 = 5.

2. Ποια είναι τα προσθετικά ζευγαράκια του 6;

1 + ☐ = ☐ + 1 = 6

☐ + ☐ = ☐ + ☐ = 6

☐ + ☐ = 6

3. Ποια είναι τα προσθετικά ζευγαράκια του 11;

1 + ☐ = 11

☐ + ☐ =

☐ + ☐ =

☐ + ☐ =

☐ + ☐ =

4. Μια παρεούλα του 6 είναι οι αριθμοί 1, 1, 4, αφού 1 + 1 + 4 = 6.

Να βρεις κι άλλες παρεούλες του 6.

$\square + \square + \square = 6$

$\square + \square + \square = 6$

$\square + \square + \square = 6$

5. Μια παρεούλα του 11 είναι οι αριθμοί 1, 2, 8, αφού 1 + 2 + 8 = 11.

Να βρεις κι άλλες παρεούλες του 11.

$\square + \square + \square = 11$

$\square + \square + \square = 11$

$\square + \square + \square = 11$

6. Το 1 και το 6 είναι πολλαπλασιαστικό ζευγαράκι του 6 αφού

$1 \times 6 = 6 \times 1 = 6$.

Ένα άλλο πολλαπλασιαστικό ζευγαράκι του 6 είναι το 2 και το 3, αφού

$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$.

7. Να βρεις τα πολλαπλασιαστικά ζευγαράκια

του 8

του 9

του 12

του 24.

$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$		$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
		$\square \times \square \quad 12$	$\square \times \square = 24$
		$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
			$\square \times \square = 24$
			$\square \times \square = 24$

8. Να βάλεις σε κάθε άδειο κουτάκι τον αριθμό που θα κάνει την αφαίρεση σωστή.

$5 - \boxed{2} = 3$	$3 - \square = 2$
$6 - \square = 2$	$11 - \square = 3$
$7 - \square = 4$	$9 - \square = 5$

9. Να βάλεις σε κάθε άδειο κουτάκι τον αριθμό που θα κάνει τη διαίρεση σωστή.

$8 : \boxed{2} = 4$	$4 : \boxed{} = 2$
$2 : \boxed{} = 2$	$6 : \boxed{} = 2$
$9 : \boxed{} = 3$	$12 : \boxed{} = 3$

Το δεύτερο διαγνωστικό τεστ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

10.Το 1 και το 4 είναι ένα προσθετικό ζευγαράκι του 5, αφού

1 + 4 = 5 και 4 + 1 = 5

Ένα άλλο τέτοιο ζευγαράκι του 5 είναι το 2 και το 3, αφού

2 + 3 = 5 και 3 + 2 = 5.

11.Ποια είναι τα προσθετικά ζευγαράκια του 7;

1 + ☐ = 7 ☐ + ☐ = 7

☐ + ☐ = 7 ☐ + ☐ = 7

☐ + ☐ = 7 ☐ + ☐ = 7

12.Ποια είναι τα προσθετικά ζευγαράκια του 13;

1 + ☐ = 13 ☐ + ☐ = 13

☐ + ☐ = 13

☐ + ☐ = 13

☐ + ☐ = 13

☐ + ☐ = 13

13.Μια παρεούλα του 7 είναι οι αριθμοί 2, 2, 3, αφού 2 + 2 + 3 = 7.

Να βρεις κι άλλες παρεούλες του 7.

$\square + \square + \square = 7$

$\square + \square + \square = 7$

$\square + \square + \square = 7$

14.Μια παρεούλα του 13 είναι οι αριθμοί 1, 4, 8, αφού 1 + 4 + 8 = 13.

Να βρεις κι άλλες παρεούλες του 13.

$\square + \square + \square = 13$

$\square + \square + \square = 13$

$\square + \square + \square = 13$

15.Το 1 και το 6 είναι πολλαπλασιαστικό ζευγαράκι του 6 αφού

$1 \times 6 = 6 \times 1 = 6$.

Ένα άλλο πολλαπλασιαστικό ζευγαράκι του 6 είναι το 2 και το 3, αφού

$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$.

16. Να βρεις τα πολλαπλασιαστικά ζευγαράκια

του 8

του 9

του 12

του 24.

$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$	$\square \times \square = 9$	$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
$\square \times \square = 8$		$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
		$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
		$\square \times \square = 12$	$\square \times \square = 24$
			$\square \times \square = 24$
			$\square \times \square = 24$

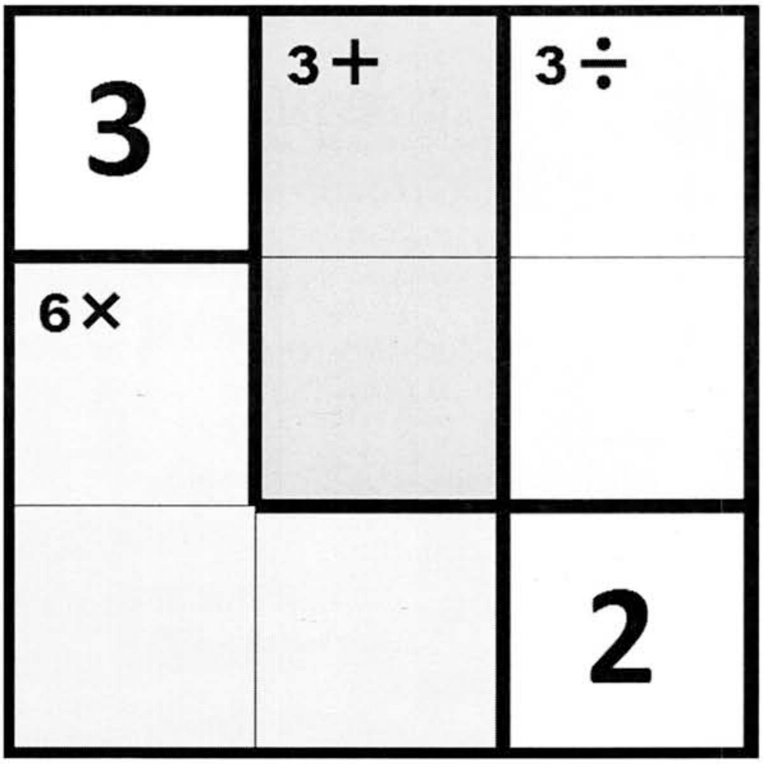
17. Να βάλεις σε κάθε άδειο κουτάκι τον αριθμό που θα κάνει την αφαίρεση σωστή.

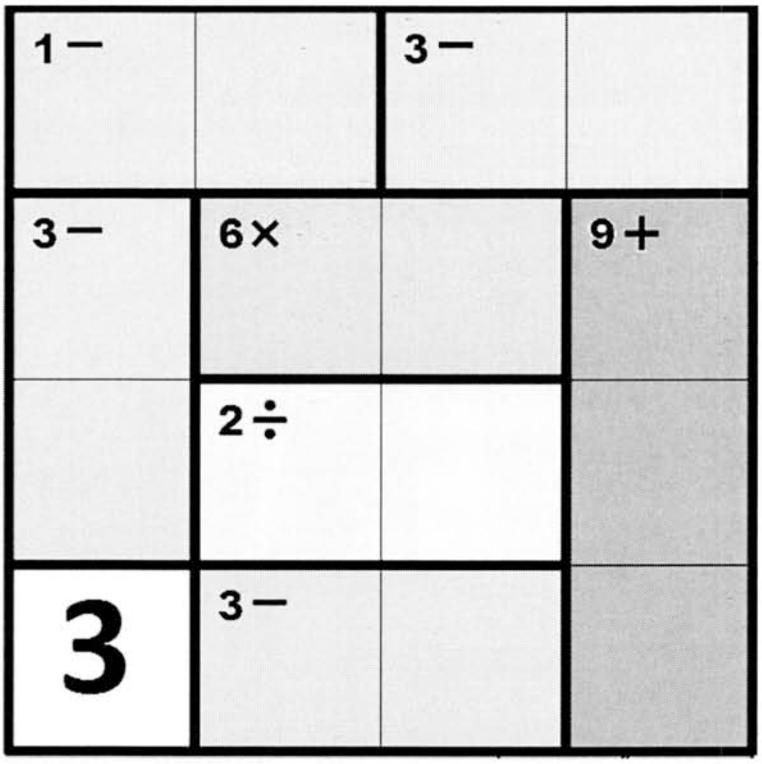
$7 - \boxed{4} = 3$	$6 - \square = 2$
$8 - \square = 2$	$12 - \square = 3$
$9 - \square = 4$	$9 - \square = 5$

18. Να βάλεις σε κάθε άδειο κουτάκι τον αριθμό που θα κάνει τη διαίρεση σωστή.

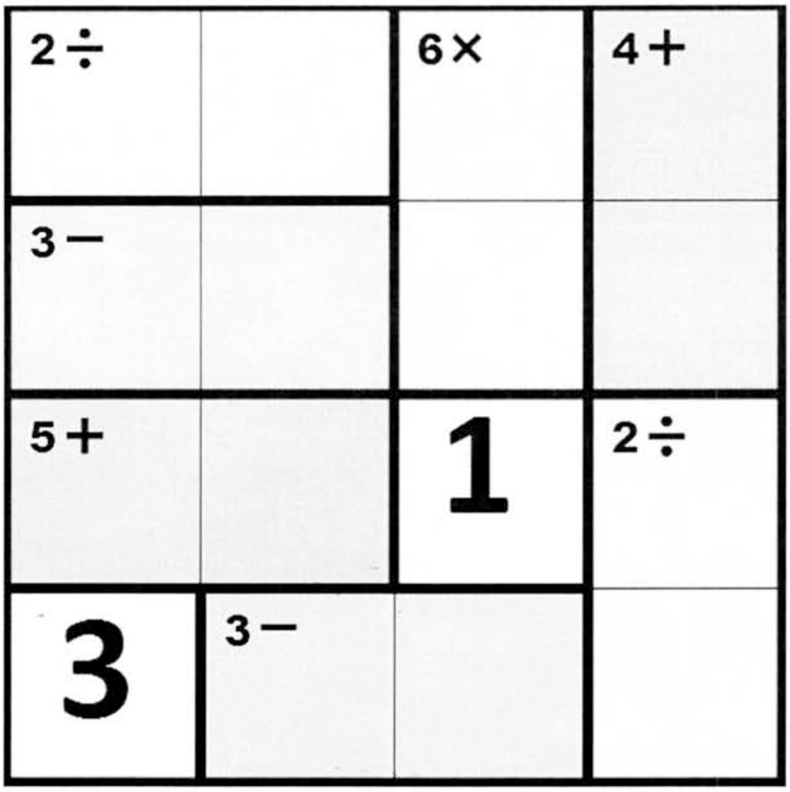
8 : $\boxed{2}$ = 4	8 : $\boxed{}$ = 2
4 : $\boxed{}$ = 2	3 : $\boxed{}$ = 3
10: $\boxed{}$ = 2	12 : $\boxed{}$ = 3

Τα KenKen της πρώτης μέρας:

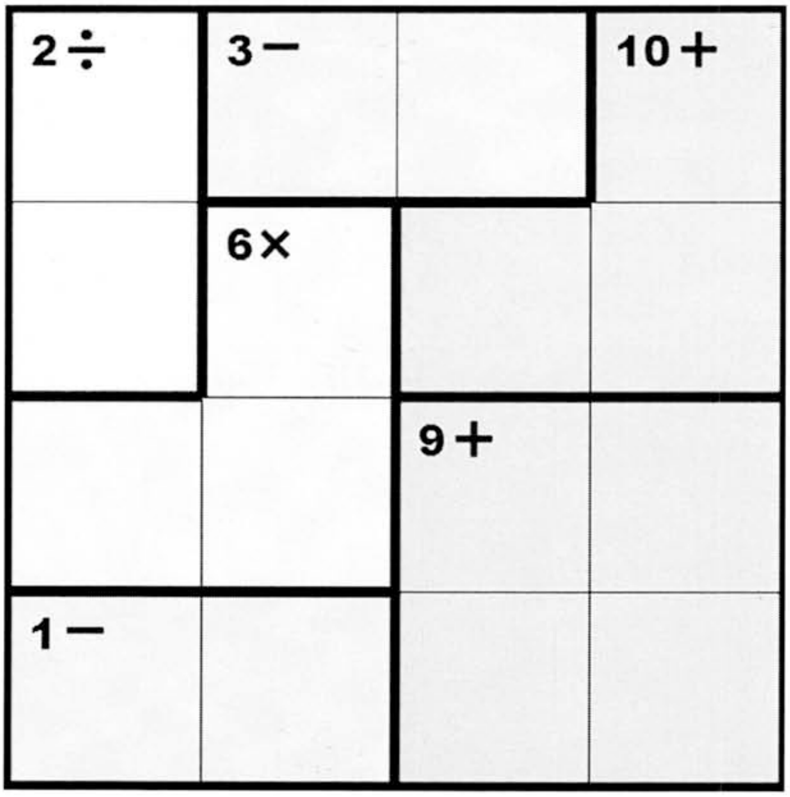




Το KenKen της δεύτερης ημέρας



Το KenKen της τρίτης ημέρας



5. Δικτυογραφία-Βιβλιογραφία

http://en.wikipedia.org/wiki/Latin_square

http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku

http://en.wikipedia.org/wiki/KenKen

http://www.kenkenpuzzle.com

http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

http://en.wikipedia.org/wiki/Graeco-Latin_square

http://stat-or.unc.edu/research/Current%20Reports/techpdf/TR_08_04.pdf

http://www.cs.virginia.edu/~robins/The_Science_Behind_SudoKu.pdf

http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=11&sid=10fdaa80-aae8-4bfe-a13b-7bdf3d97c857%40sessionmgr110&hid=118)

- J.A. Van de Walle, *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία,* Τυπωθήτω-Γιώργος Δαρδανός, Αθήνα, 2005.