



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

***Διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών με τη
χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού σε μαθητές
Δημοτικού Σχολείου 6 – 9 ετών με μαθησιακές
δυσκολίες στα μαθηματικά, που φοιτούν σε
Τμήματα Ένταξης***

Διδακτορική διατριβή

Ευθύμιος Γκούμας

ΒΟΛΟΣ 2017



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

***Διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών με τη
χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού σε μαθητές
Δημοτικού Σχολείου 6 – 9 ετών με μαθησιακές
δυσκολίες στα μαθηματικά, που φοιτούν σε
Τμήματα Ένταξης***

Ευθύμιος Γκούμας

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΒΟΛΟΣ 2017

Η Διδακτορική Διατριβή κατατέθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα
Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Ιούλιος 2017

Τριμελής επιστημονική επιτροπή

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης**, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Διαμάντω Φιλιππάτου, Επίκουρη καθηγήτρια, Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο
Δυτικής Μακεδονίας

Εξεταστική Επιτροπή

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Φιλιππάτου Διαμάντω, Επίκουρη Καθηγήτρια, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε. Φλώρινας, Πανεπιστήμιο Δυτικής
Μακεδονίας

Αντωνίου Φαίη, Επίκουρη Καθηγήτρια, Τμήμα Φ.Π.Ψ., Ε.Κ.Π.Α.

Πόταρη Δέσποινα, Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.

Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	1
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	9
Προλογικό σημείωμα	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - Εισαγωγή στην προβληματική της έρευνας	15
1.1. Δομή του συγγράμματος	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - Μαθησιακές δυσκολίες	25
2.1. Μαθησιακές δυσκολίες: Προσδιορισμός όρων	27
2.1.1. Οι επικρατέστεροι ορισμοί για τις μαθησιακές δυσκολίες	29
2.1.2. Διάγνωση των μαθησιακών δυσκολιών	33
2.1.3. Μοντέλα κατηγοριοποίησης των Μαθησιακών Δυσκολιών	37
2.2. Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά	39
2.2.1. Κατηγοριοποίηση – Οι τύποι μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά	42
2.2.2. Ανασκόπηση της φύσης των μαθηματικών δυσκολιών	45
2.2.3. Δυσαριθμησία	46
2.3. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών	51
2.3.1. Δομικά στοιχεία και απαιτήσεις στη μάθηση των μαθηματικών	57
2.3.2. “Η γλώσσα” των μαθηματικών	62
2.4. Ανίχνευση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	64
2.5. Αντιμέτωπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	67
2.5.1. Διδακτικές τεχνικές για την αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Χειραπτικά υλικά (manipulatives)	83
3.1. Εννοιολογικές οριοθετήσεις – Αποσαφήνιση των όρων	85
3.1.1. Χειραπτικά υλικά	85
3.1.2. Δυνητικά χειραπτικά υλικά	86
3.2. Χειραπτικά υλικά και μαθηματικά – Ιστορική επισκόπηση	87
3.2.1. Χειραπτικά υλικά και θεωρίες μάθησης	88
3.2.2. Μαθηματική κατανόηση και αναπαράσταση με τα χειραπτικά υλικά	94
3.2.3. Χειραπτικά υλικά και στάσεις για τα μαθηματικά	97
3.2.4. Χειραπτικά υλικά και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών	99
3.3. Ερευνητική επισκόπηση για τη χρήση των χειραπτικών υλικών	109

3.4. Χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών – Συνδυασμός φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών	121
3.5. Εκπαιδευτικοί και χειραπτικά υλικά	127
3.5.1. Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα χειραπτικά υλικά	134
3.5.2. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών στη χρήση των χειραπτικών υλικών	136
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Μεθοδολογία της έρευνας	149
4.1. Σκοπός της έρευνας	151
4.2. Επιλογή της μεθόδου	152
4.3. Σύνθεση και τρόπος επιλογής του δείγματος	157
4.4. Είδος και δομή των μέσων συλλογής των δεδομένων και των δοκιμασιών αξιολόγησης	159
4.5. Σταθμισμένες δοκιμασίες – Ανιχνευτικά εργαλεία	162
4.5.1. Τεστ ΖΑΡΕΚΙ	162
4.5.2. Εργαλείο ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από Εκπαιδευτικούς) – Κλίμακα 6	163
4.6. Άτυπες δοκιμασίες	164
4.6.1. Δοκιμασίες αξιολόγησης με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα	164
4.6.2. Ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών	165
4.6.3. Συνέντευξη με τους εκπαιδευτικούς	167
4.6.4. Λίστα ελέγχου βασικών δεξιοτήτων για τα μαθηματικά	169
4.6.5. Γνωματεύσεις από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ.	170
4.6.6. Φύλλα Παρατήρησης	171
4.7. Στατιστική ανάλυση	172
4.8. Πορεία της έρευνας - Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα με τη χρήση των χειραπτικών υλικών	172
i. Συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς	172
ii. Καθορισμός των βασικών μαθηματικών εννοιών της παρέμβασης	176
iii. Τα χειραπτικά υλικά	181
iv. Υποστήριξη των εκπαιδευτικών	184
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Αποτελέσματα	193
5.1. Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων – Λάθη των μαθητών	195
5.1.1. Από την αξιολόγηση του τεστ Α	196
5.1.2. Από την αξιολόγηση του τεστ Β	198
5.2. Ανάλυση ποσοτικών δεδομένων	199

5.2.1. Το τεστ ΖΑΡΕΚΙ	199
5.2.2. Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων	201
5.2.3. Το ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών	207
5.2.4. Το ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τον Εκπ/κό)	222
5.3. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων – Λάθη των μαθητών πριν την παρέμβαση	225
5.4. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων – Λάθη των μαθητών μετά την παρέμβαση	232
5.5. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων – Αντιλήψεις εκπαιδευτικών και μαθητών	246
5.6. Περιγραφή Μελετών Περίπτωσης	250
5.6.1. Μαθησιακό προφίλ των μαθητών	252
5.6.2. Στοιχεία πριν από την παρέμβαση	257
i. Από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ.	257
ii. Από τη χορήγηση του τεστ ΖΑΡΕΚΙ	260
iii. Από τη χορήγηση του ΑΜΔΕ	262
iv. Από τη χορήγηση του τεστ Α με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα	264
v. Από τη χορήγηση του τεστ Β με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα	264
5.6.3. Στοιχεία από την καταγραφή παρατηρήσεων των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων κατά τη διάρκεια της παρέμβασης	268
5.6.4. Στοιχεία μετά από την παρέμβαση	278
i. Λίστα ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων	279
ii. ΑΜΔΕ -Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπ/κούς	280
iii. Γνωματεύσεις ΚΕ.Δ.Δ.Υ. – Επαναξιολόγηση	282
iv. Παρατηρήσεις εκπαιδευτικών	284
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – Συζήτηση – Συμπεράσματα	291
6.1. Κατακλείδα	321
6.2. Εκπαιδευτικές συνέπειες	324
6.3. Περιορισμοί της έρευνας	327
6.4. Ερευνητικές προεκτάσεις	328
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	331
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	365

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1. Υπο-Τύποι των Μαθησιακών Δυσκολιών στα Μαθηματικά (Geary, 2004).....	44
Πίνακας 2. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών, (Bley & Thornton, 1995)	55
Πίνακας 3. Τα στάδια μάθησης του Bruner	92
Πίνακας 4. Αποτελέσματα του τεστ ΖΑΡΕΚΙ	201
Πίνακας 5. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των πέντε (5) τομέων των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων για κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	202
Πίνακας 6. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας των πέντε (5) τομέων των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων για κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση...	203
Πίνακας 7. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των 10 επιμέρους ερωτήσεων που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	206
Πίνακας 8. Το κριτήριο t-test (Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας) των 10 επιμέρους ερωτήσεων που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	207
Πίνακας 9. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν τις στάσεις και τις αντιλήψεις τους σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	209
Πίνακας 10. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας των ερωτήσεων που αφορούν στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού πριν και μετά την παρέμβαση	210
Πίνακας 11. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τις πηγές (pair1-pair6).....	213

Πίνακας 12. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair 7 –12)	215
Πίνακας 13. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τους ανασταλτικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση του χειραπτικού και του ψηφιακού υλικού (pair13 έως pair17)	217
Πίνακας 14. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπ/κών σχετικά με τη βοήθεια του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18 - 19), πριν και μετά την παρέμβαση	219
Πίνακας 15. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τις πηγές (pair1 έως pair6), τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair7 έως pair12), τους ανασταλτικούς παράγοντες σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair13-pair17), και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18-pair19), με τη χρήση χειραπτικού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	221
Πίνακας 16. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν το Test AMΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς) πριν και μετά την παρέμβαση	223
Πίνακας 17. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t, βαθμοί ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν το Test AMΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς) πριν και μετά την παρέμβαση	224

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1: Απεικόνιση των σταδίων της διδασκαλίας CRA	81
Σχήμα 2: Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των πέντε (5) κατηγοριών των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις οποίες καταγράφηκε η επίδοση κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	204
Σχήμα 3: γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν την επάρκεια και κατάρτισή τους (pair 1 έως pair 4) σχετικά με τη χρήση του χειραπτικού και του ψηφιακού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	211
Σχήμα 4: γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair5 έως pair8) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	212
Σχήμα 5: Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη χρήση πηγών (pair1 έως pair6), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	214
Σχήμα 6: Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής της χρήσης χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair7-pair12) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.....	216
Σχήμα 7: Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τους ανασταλτικούς παράγοντες σχετικά με τη χρήση του χειραπτικού και του ψηφιακού υλικού (pair 13 έως pair 17) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	218
Σχήμα 8: Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν κατά πόσο το χειραπτικό και το ψηφιακό υλικό (καθένα ξεχωριστά) βοηθούν αποτελεσματικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair 18 – pair 19), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση	219

Ευχαριστίες

Με την αποπεράτωση αυτής της επίπονης αλλά τόσο δημιουργικής προσπάθειας για τη συγγραφή της διατριβής μου, οφείλω να ανακαλέσω από τη μνήμη μου και να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με ενέπνευσαν, με καθοδήγησαν και με συνόδευσαν σε όλη αυτή τη διαδικασία όλα αυτά τα χρόνια.

Στον καθηγητή, Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη, ο οποίος υπήρξε ο εμπνευστής μου και ο καθοδηγητής σε όλη αυτή την προσπάθεια, οφείλω τη “σύλληψη” αυτού του εγχειρήματος αλλά και την αποπεράτωσή του με τη συνεχή του ενθάρρυνση και επιστημονική υποστήριξη. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε και η φιλία με την οποία με περιβάλλει όλα αυτά τα χρόνια, αποτελούν για εμένα την πολυτιμότερη παρακαταθήκη και το σημαντικότερο απόκτημα από όλη αυτή τη συνεργασία.

Την Επίκουρη Καθηγήτρια, Αμάντα Φιλιππάτου, για την πολύπλευρη και σημαντική βοήθειά της, την άρτια επιστημονική της καθοδήγηση στον ευαίσθητο χώρο της Ειδικής Αγωγής, την εμπιστοσύνη και τη φιλία με την οποία με περιέβαλε συμβάλλοντας στην πνευματική αλλά και ψυχική μου ενδυνάμωση.

Τον Καθηγητή, Χαράλαμπο Λεμονίδη, που από την πρώτη στιγμή πίστεψε σε εμένα και στο δύσκολο εγχείρημά μου και στον οποίο βρήκα την επιστημονική επάρκεια, την υποστήριξη και καθοδήγηση, στοιχεία που με βοήθησαν να οριοθετήσω το πλαίσιο της εργασίας μου.

Τους αξιότιμους Καθηγητές, Δέσποινα Πόταρη και Χαράλαμπο Σακονίδη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κώστα Χατζηκυριάκου και την Επίκουρη Καθηγήτρια Φαίη Αντωνίου που αποτελούν τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής των οποίων οι παρατηρήσεις και επισημάνσεις ήταν πολύτιμες και ουσιαστικές.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου, Μίκα, και τα δυο μου παιδιά, Παναγιώτη και Βασίλη, για την ηθική και ψυχολογική στήριξη που μου παρείχαν.

Δεν μπορώ να μην αναφερθώ στην εξαιρετική φίλη μου, Ζωή Κρόκου, σχολική σύμβουλο και συνάδελφο, στην ανεκτίμητη υποστήριξη και βοήθεια της οποίας οφείλω την ολοκλήρωση αυτού του πονήματος.

Ευχαριστώ τον φίλο, συνάδελφο και συνεργάτη, Βασίλη Σταυρόπουλο, για τη βοήθειά του στην καταγραφή και επεξεργασία των ποσοτικών στοιχείων της ερευνητικής μελέτης.

Ευχαριστώ τον Σπύρο Φερεντίνο, πρώην σχολικό σύμβουλο, ο οποίος με καθοδήγησε στον τρόπο διεξαγωγής της έρευνάς μου και με βοήθησε στη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων.

Δε θα μπορούσα να μην αναφερθώ και να μην ευχαριστήσω ολόψυχα τους συναδέλφους των Τμημάτων Ένταξης και των γενικών τάξεων που δέχθηκαν να συμμετέχουν και να βοηθήσουν, για να πραγματοποιηθεί και να ολοκληρωθεί αυτή η έρευνα, τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα και τους/τις διευθυντές/τριες των σχολικών μονάδων που επισκέφτηκα, των οποίων ο υποστηρικτικός και ενισχυτικός ρόλος ήταν καταλυτικός.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω σε όλους τους φίλους μου, που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια, που πίστεψαν σε εμένα και στις ικανότητές μου και με ενθάρρυναν σε κάθε δυσκολία.

ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ερευνητική μελέτη ασχολείται με τις δυσκολίες στη μαθηματική κατανόηση που εμφανίζουν μαθητές των Α' έως και Δ' τάξεων δημοτικού σχολείου, που φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης (Τ.Ε.) και εστιάζει, κυρίως, στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και ψηφιακών) υλικών στο Τ.Ε. αλλά και στη γενική τάξη. Η χρήση του διδακτικού υλικού αποσκοπούσε στην υποστήριξη της μαθηματικής διδασκαλίας με την αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, για να διευκολυνθεί η κατανόησή τους από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά που συμμετείχαν στην έρευνα.

Στο δείγμα των μαθητών της έρευνας χορηγήθηκαν σταθμισμένες και άτυπες δοκιμασίες πριν τη διδακτική παρέμβαση, με σκοπό να επισημανθούν το είδος και το μέγεθος των δυσκολιών τους στα μαθηματικά και να καθοριστούν οι μαθηματικοί τομείς της παρέμβασης. Αντίστοιχα, από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα συμπληρώθηκε ένα ερωτηματολόγιο και δόθηκαν συνεντεύξεις στον ερευνητή, για να ανιχνευτούν οι στάσεις και αντιλήψεις τους απέναντι στα μαθηματικά και ειδικότερα στη χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία τους. Οι εκπαιδευτικοί συμπλήρωσαν επίσης μια Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων και την κλίμακα 6 του Ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ για κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης για ένα διδακτικό έτος, ο ερευνητής σε τακτές συναντήσεις ή και κατόπιν αιτήματος των εκπαιδευτικών, τους υποστήριζε με έντυπο υλικό και πληροφορίες σχετικά με την εξοικείωση των μαθητών με τα χειραπτικά υλικά και την αποτελεσματική χρήση τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας, μέσα από την ανάλυση των ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων που συλλέχθηκαν, έδειξαν ότι η χρήση των χειραπτικών (φυσικών και ψηφιακών) υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών, βελτίωσε τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών που εμφανίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, τόσο στα Τ.Ε. όσο και στη γενική τάξη. Επίσης, το συγκεκριμένο διδακτικό υλικό έδειξε ότι μπορεί να αποτελέσει το κίνητρο για την αλλαγή των στάσεων και πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών τόσο απέναντι στα μαθηματικά όσο και στη διδασκαλία και υποστήριξη μαθητών με μαθηματικές

δυσκολίες. Η αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών μέσα στη γενική τάξη, από όλους τους μαθητές, με την εφαρμογή διαφοροποιημένων διδακτικών προσεγγίσεων, ενίσχυει τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών σε βασικές μαθηματικές έννοιες και συνεισφέρει στην ένταξη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες.

Η παρούσα έρευνα με τίτλο: *«Διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού σε μαθητές δημοτικού σχολείου 6-9 ετών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, που φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης»* εγκρίθηκε με το αριθμ. πρωτ. Φ15/227/15323/Γ1/24-02-2011 έγγραφο της Διεύθυνσης Σπουδών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης του Υπουργείου Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων. Οι σχολικές μονάδες διεξαγωγής της έρευνας και τα Τμήματα Ένταξης, που συμπεριλαμβάνονται σε αυτές, βρίσκονται μέσα στα γεωγραφικά πλαίσια του Νομού Φθιώτιδας.

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή στην προβληματική της έρευνας

1.1 Δομή του συγγράμματος

20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σε μια εποχή που η παιδεία αποτελεί απαραίτητο και αναγκαίο εφόδιο για όλους, η αδυναμία ορισμένων μαθητών να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σχολείου λαμβάνει διαστάσεις ενός σοβαρού προβλήματος σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο. Οι μαθησιακές δυσκολίες, που παρουσιάζουν ορισμένοι μαθητές στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι οποίοι αν και έχουν φυσιολογική νοημοσύνη, έχουν τις ίδιες ευκαιρίες μάθησης με τους συμμαθητές τους και δεν παρουσιάζουν σοβαρά αισθητηριακά ή συναισθηματικά προβλήματα, τους οδηγούν σε καθημερινή αποτυχία, απογοήτευση και πολλές φορές σε περιθωριοποίηση ή παραίτηση από τη μαθησιακή διαδικασία. Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί μοιάζουν ανήμποροι να διαχειριστούν το πρόβλημα λόγω ανεπαρκούς γνώσης και κατάρτισης.

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά είναι πολυσύνθετα και έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης από πολλούς συγγραφείς και ερευνητές (Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008· Fuchs et al 2008· McNeil, 2007· Mazzocco, & Thompson, 2005· Αγαλιώτης 2004· Geary, 2004· Fuchs & Fuchs 2001· Bley & Thorton 1995· Lerner 1993· Τρούλης 1992). Σύμφωνα με τον Geary (2004) και τους Bryant, Gersten, Scammacca και Chavez (2008), το 5% έως 10% των μαθητών του δημοτικού σχολείου έχουν κάποια μορφή μαθησιακής δυσκολίας σε έναν ή περισσότερους μαθηματικούς τομείς. Πολλοί επιστήμονες, στην προσπάθειά τους να συνεισφέρουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος, έθεσαν στο ερευνητικό τους μικροσκόπιο όλες τις διαδικασίες που προσδιορίζουν και καθορίζουν την επιτυχή και απρόσκοπτη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και λειτουργιών. Ως λύση, πολλές ερευνητικές μελέτες, για να υποστηρίξουν πιο αποτελεσματικά τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, έχουν αρχίσει να μετατοπίζονται από την παραδοσιακή προσέγγιση αποκατάστασης των δυσκολιών στην παρεμβατική προσέγγιση (Fuchs, Fuchs, Craddock, Hollenbeck & Hamlett, 2008· Woodward, 2006· Williams, 2001· Jitendra et al., 1998). Κάθε προσέγγιση παρέμβασης επικεντρώνεται στην έγκαιρη αναγνώριση και υποστήριξη των μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες και στην επιλογή της

κατάλληλης διδακτικής μεθόδου, ώστε να ενισχυθεί η μαθηματική κατανόηση των συγκεκριμένων μαθητών.

Τα προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, εντοπίζονται κυρίως στα πρώτα σχολικά χρόνια, κατά τα οποία έρχονται σε επαφή με τις βασικές μαθηματικές έννοιες και τα μαθηματικά σύμβολα. Η αδυναμία έγκαιρης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και οι συνεπακόλουθες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με την πάροδο του χρόνου, οδηγούν τους μαθητές στη σχολική αποτυχία στα μαθηματικά και στην αναζήτηση της υποστήριξής τους μέσα στο σχολικό πλαίσιο. Η ανίχνευση των μαθησιακών δυσκολιών είναι μια διαδικασία που εμπλέκει τους εκπαιδευτικούς, τους γονείς αλλά και τις αρμόδιες υπηρεσίες. όπως το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. Η αντιμετώπισή τους συνήθως γίνεται μέσα στα Τμήματα Ένταξης (Τ.Ε.) - σε όσα σχολεία έχουν ιδρυθεί και στελεχωθεί – με τη φοίτηση των μαθητών σε αυτά σε συγκεκριμένες ώρες και ημέρες. Εύκολα δημιουργείται ο προβληματισμός πώς οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, και όχι μόνο, υποστηρίζονται σε όσα δημοτικά σχολεία δε λειτουργούν Τ.Ε. και ακόμη περισσότερο με ποιον τρόπο, μέσα στα Τ.Ε. ενισχύεται η μαθηματική τους κατανόηση.

Στη διεθνή βιβλιογραφία ο όρος μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, είτε αναφέρεται σε ειδικές μαθησιακές δυσκολίες, όπως η δυσαριθμησία (Price & Ansari, 2013· Szűcs & Goswami, 2013· Shalev, 2004· Newman, 1997) είτε σε εκτεταμένες γενικές μαθηματικές δυσκολίες (Carpenter, 2008), αφορά ένα ευρύ πεδίο γνωστικών λειτουργιών που μπορεί να είναι ελλειμματικές, όπως: η έννοια των αριθμών (De Smedt, Noël, Gilmore & Ansari, 2013· Dowker, 2005), η λεκτική και οπτική μνήμη εργασίας (Swanson, 2011), η επεξεργασία του χώρου (Bryant, 2005· Rourke, 1993), ο μαθηματικός υπολογισμός (Uttal, 2003· Geary, Hamson, & Hoard, 2000), οι δεξιότητες απαρίθμησης (Ojose & Sexton, 2009· Clements, 1999), οι βασικές μαθηματικές έννοιες (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004· Pasnak et al., 1996), η εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών (Fuchs et al., 2004· Chao, Stigler, & Woodward, 2000), η αυτόματη ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων (Gersten, Jordan, & Flojo, 2005· Geary, 2004), η εκμάθηση και εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων (Burns, 2008· Bolyard & Moyer-

Packenham, 2006) και η επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Geary, 2006· Garcia, Jimenez, & Hess, 2006· Baker & Beisel, 2001· Rivera, 1997).

Η αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά απαιτεί ειδικά σχεδιασμένη διδασκαλία, προσαρμοσμένη στις ιδιαίτερες ανάγκες του μαθητή. Μπορεί να αρχίζει σε οποιαδήποτε στάδιο της σχολικής ηλικίας, με την επισήμανση ότι ο πρώιμος εντοπισμός των μαθησιακών δυσκολιών οδηγεί και στην έγκαιρη και αποτελεσματική αντιμετώπισή τους. Θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά και τους στόχους των μαθητών και να εφαρμόζονται αποτελεσματικές εκπαιδευτικές τεχνικές, όπως προκύπτουν από τα πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα. Σε μια εκτενή ερευνητική επισκόπηση σχετικά με την εφαρμογή τεχνικών διδασκαλίας που αποσκοπούν στην υποστήριξη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, αναφέρονται: η αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών (Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Gersten, et al., 2009· Steedly, 2008· Jitendra & Hoff, 1996), η υποστήριξη της ευχερούς χρήσης και ανάκλησης των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Tolar, Fuchs, Fletcher, Fuchs & Hamlett, 2016· Kosko, & Wilkins, 2010· Gersten, Jordan, & Flojo, 2005· Αγαλιώτης, 2004), η διδασκαλία των μαθηματικών που εκτείνεται από τις συγκεκριμένες στις αφηρημένες έννοιες (Berkas, & Pattison, 2007· Anstrom, 2006· Butler, Miller, Crehan, Babbitt & Pierce, 2003· Keller, 1993·), η διδακτική στρατηγικών μέτρησης και υπολογισμού (Bolyard & Moyer-Packenham, 2006· Geary, 2004· Jordan, Hanich, & Uberti, 2003· Geary, Hamson & Hoard, 2000) και η διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007· Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004· Miller & Mercer, 1997).

Οι περισσότεροι από τους προαναφερόμενους ερευνητές υποστηρίζουν την ενίσχυση της μαθηματικής γνώσης μέσω της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών και προτείνουν ότι όλοι οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους μαθηματική κατανόηση. Οι προτεινόμενες λύσεις, για να ξεπεραστεί η αφαιρετικότητα του συμβολικού συστήματος των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έχουν κατά κάποιο τρόπο συνδεθεί με την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης και την αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών, φυσικών και δυνητικών ως απτά εκπαιδευτικά υλικά και αποτελεσματικά διδακτικά εργαλεία (Beckett, McIntosh, Byrd &

McKinney, 2011· McNeil & Jarvin, 2007· Castro, 2006· Arcavi, 2003· Cass, Cates & Smith, 2003· Moyer, 2001· Fuson & Briars, 1990). Ειδικότερα για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει την επίδραση της χρήσης χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αναφέροντας στις μελέτες τους, ότι βοηθούν στη δημιουργία εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται (Gersten et al., 2009· Steedly, 2008· Puchner, Taylor, O'Donnell & Fick, 2008), διευκολύνουν τον αλγεβρικό συλλογισμό (Suh & Moyer, 2007), βελτιώνουν τη μαθηματική σκέψη και την επικοινωνία των μαθητών (Kosko & Wilkins, 2010) και οδηγούν τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σε μια πολυαισθητηριακή και ενεργητική πορεία στη μάθηση (Steedly, 2008).

Αν και η υποστήριξη των μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες αποτελεί στόχο κάθε εκπαιδευτικού, στην πράξη καθίσταται πολύ δύσκολη. Οι γνωστικές απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών σε συνδυασμό με τον περιορισμένο διδακτικό χρόνο που διατίθεται για τους συγκεκριμένους μαθητές και η έλλειψη κατάλληλου διδακτικού υλικού, που θα διευκολύνει τη μαθηματική κατανόηση, δυσχεραίνουν το εκπαιδευτικό έργο και τις προσπάθειες των εκπαιδευτικών να αναπτύξουν και να εφαρμόσουν διδακτικές μεθόδους που θα βελτιώνουν τις μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών τους.

Η συγκεκριμένη μελέτη εστιάζει το ενδιαφέρον της στην ανίχνευση και στην αποτελεσματική αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών που εμφανίζουν οι μαθητές στην απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών, με τη χρήση και αξιοποίηση υλικών, που αναπαριστούν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και διευκολύνουν την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης. Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, η υποστήριξη των μαθητών αυτών, υλοποιείται κυρίως στα Τμήματα Ένταξης στα οποία φοιτούν οι μαθητές είτε με εισήγηση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. είτε του εκπαιδευτικού της τάξης και του Σχολικού Συμβούλου Ειδικής Αγωγής.

Επιπλέον, η επικοινωνία με τους εκπαιδευτικούς των Τμημάτων Ένταξης, αναδεικνύει την έλλειψη εκπαιδευτικού υλικού που να υποστηρίζει τη διδακτική πρακτική, στην προσπάθεια που καταβάλλουν καθημερινά, για να αναπτύξουν την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών για τους μαθητές τους και να κατορθώσουν να επιτύχουν τον στόχο της επανένταξής τους στη γενική τάξη. Έτσι, η

πρώιμη ανίχνευση των μαθησιακών δυσκολιών και η αποτελεσματική υποστήριξή τους στα Τ. Ε. αποτελούν τις βασικές πτυχές της έγκαιρης αντιμετώπισής τους με στόχο την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών.

Η διδακτική παρέμβαση, που επιχειρείται με τη συγκεκριμένη έρευνα, διαφοροποιείται από αντίστοιχες έρευνες, τόσο ως προς τη χρονική διάρκεια της παρέμβασης, όσο και ως προς τη διδακτική υποστήριξη των μαθητών που συμμετείχαν, κυρίως μέσα στα Τμήματα Ένταξης αλλά και στη γενική τάξη. Επίσης, η ταυτόχρονη παρατήρηση και μελέτη της μαθησιακής πορείας των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και στα δύο εκπαιδευτικά πλαίσια, εμπλέκοντας εκτός από τον ερευνητή και τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων, δίνουν μια πολύπλευρη και ουσιαστική εικόνα των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης και της επίδρασης της χρήσης χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών.

Επιπλέον, αποσκοπεί στην υποστήριξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας που ακολουθείται στα Τμήματα Ένταξης και κατ' επέκταση στις γενικές τάξεις, με την εφαρμογή ενός εκπαιδευτικού προγράμματος, που βασίζεται στη χρήση και εφαρμογή φυσικού και ψηφιακού χειραπτικού υλικού, για την αναπαράσταση βασικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα εξελίσσεται στη διάρκεια ενός διδακτικού έτους, αρχικά με τη διερεύνηση των μαθηματικών δυσκολιών των συμμετεχόντων μαθητών, μέσω της χορήγησης ανιχνευτικών δοκιμασιών και της καταγραφής των παρατηρήσεων των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων και στη συνέχεια με την παροχή επιλεγμένων χειραπτικών υλικών και κατάλληλων Φύλλων Εργασίας στοχεύοντας στην ενίσχυση της κατανόησης προκαθορισμένων μαθηματικών εννοιών.

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα υποστηρίζονταν από τον ερευνητή σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με προγραμματισμένη και τακτική επικοινωνία ανά δεκαπενθήμερο, σε έκτακτες συναντήσεις όταν απαιτούνταν αλλά και με την παροχή έντυπου υλικού (φύλλα εργασίας, έντυπα οδηγιών, φύλλα παρατήρησης) για την ορθή εφαρμογή και αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών.

Με βάση όσα προαναφέρθηκαν γίνεται εύκολα σαφές ότι η συγκεκριμένη ερευνητική προσπάθεια έρχεται να καλύψει ένα κενό που υπάρχει στον ελληνικό κι όχι μόνο, εκπαιδευτικό χώρο, στην υποστήριξη των μαθητών με μαθησιακές

δυσκολίες στα μαθηματικά, προτείνοντας την εφαρμογή ενός εκπαιδευτικού προγράμματος, διάρκειας ενός σχολικού έτους, που βασίζεται στην ευέλικτη χρήση των χειραπτικών υλικών ως διδακτικών εργαλείων για την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, από τους μαθητές που παρακολουθούν όχι μόνο στα Τ.Ε. αλλά και στις γενικές τάξεις με σκοπό την επίτευξη αυξημένων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Δίνεται, λοιπόν, η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς των Τμημάτων Ένταξης αλλά και των γενικών τάξεων, να γνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν φυσικά και δυνητικά χειραπτικά υλικά στη διδακτική των μαθηματικών και να αναστοχαστούν ως προς τη διδακτική τους αξία και την επίτευξη των εκπαιδευτικών στόχων για τους οποίους επιλέχθηκαν. Η κατάλληλη επιλογή και προγραμματισμένη εφαρμογή των υλικών από τους εκπαιδευτικούς ως εύχρηστα και αξιόπιστα εργαλεία, τα οποία μπορούν να τα αξιοποιήσουν είτε σαν μέσο αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών είτε σε μια διδακτική διαδικασία “εξοικείωσης” με την αφηρημένη φύση των μαθηματικών συμβόλων, μπορεί να οδηγήσει στην αποτελεσματική αντιμετώπιση των μαθηματικών δυσκολιών και στην ενίσχυση της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών. Ταυτόχρονα, φιλοδοξεί να προσδώσει στους εκπαιδευτικούς την ευκαιρία να βελτιώσουν και να αναπροσαρμόσουν τις διδακτικές μεθόδους που εφαρμόζουν και να τους οδηγήσει σε μια πορεία μετατόπισης από την παραδοσιακή και μετωπική διδασκαλία σε μια διαφοροποιημένη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, ενθαρρύνοντας την ενεργητική μάθηση των μαθητών μέσα από εμπράγματα δραστηριότητες με τη χρήση των χειραπτικών υλικών.

1.1. Δομή του συγγράμματος

Η ερευνητική μελέτη παρουσιάζεται σε έξι κεφάλαια, συμπεριλαμβανομένου του παρόντος.

Στο συγκεκριμένο αυτό, προλογικό, κεφάλαιο αναφερόμαστε στους προβληματισμούς που αναπτύχθηκαν, ώστε να δομηθεί η συγκεκριμένη έρευνα. Αναφέρονται συνοπτικά τα ερευνητικά δεδομένα που στοιχειοθετούν την αναγκαιότητα αυτής της ερευνητικής προσπάθειας αλλά και οι επιστημονικές απόψεις, που αφορούν την υποστήριξη της μαθηματικής διδασκαλίας με τη χρήση

χειραπτικών υλικών, οι οποίες διέπουν, αλλά και οριοθετούν τη συγκεκριμένη έρευνα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής της ερευνητικής μελέτης γίνεται μια εκτενής αναφορά στις Μαθησιακές Δυσκολίες. Ειδικότερα, το 1^ο υποκεφάλαιο ξεκινά με την κριτική παρουσίαση των ορισμών που κατά καιρούς έχουν δοθεί για τις μαθησιακές δυσκολίες, των τρόπων διάγνωσής τους αλλά και των κυριότερων μοντέλων, που έχουν αναπτυχθεί για μια εναργέστερη κατηγοριοποίηση των μαθητών που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες και για μια πιο εμπεριστατωμένη προσέγγιση αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών. Στο 2^ο υποκεφάλαιο, αναφερόμαστε στις μαθησιακές δυσκολίες στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Αρχικά γίνεται κατηγοριοποίηση των μαθηματικών δυσκολιών και μια ανασκόπηση της φύσης τους, με μια ιδιαίτερη αναφορά στη δυσαριθμησία, η οποία αποτελεί ειδική μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά και συγκεντρώνει πολλά από τα χαρακτηριστικά των μαθητών που συμμετέχουν στην έρευνά μας. Στα επόμενα υποκεφάλαια, αναλύονται οι παράγοντες πρόκλησης και τα δομικά στοιχεία των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά και αναφέρονται διδακτικές τεχνικές και τρόποι αντιμετώπισής τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναφερόμαστε στην παιδαγωγική διάσταση των χειραπτικών υλικών. Αρχικά, γίνεται μια ιστορική επισκόπηση για τη χρήση των υλικών στα μαθηματικά και αποσαφηνίζονται οι όροι χειραπτικά και δυνητικά υλικά μέσα από ορισμούς που έχουν καταγραφεί σε πολυάριθμες ερευνητικές μελέτες. Στο 2^ο υποκεφάλαιο αναφερόμαστε στη σύνδεση των χειραπτικών υλικών με τα μαθηματικά. Ειδικότερα, γίνεται αναφορά στις θεωρίες μάθησης που υποστηρίζουν τη χρήση των διδακτικών υλικών και την αξιοποίησή τους στην αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και τη μαθηματική κατανόηση. Επίσης, επισημαίνεται η επίδρασή τους στην αλλαγή των στάσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και αναφέρεται η σύνδεσή τους με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του δημοτικού σχολείου και με τις μαθηματικές έννοιες που δύνανται να υποστηρίξουν.

Στα τρία επόμενα υποκεφάλαια γίνεται μια εκτεταμένη ερευνητική επισκόπηση για τη χρήση των φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών και του συνδυασμού τους στη διδακτική πράξη. Το έκτο υποκεφάλαιο αναφέρεται στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση των χειραπτικών υλικών αλλά και στον σημαντικό ρόλο

που διαδραματίζουν οι ίδιοι για την αποτελεσματική αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα ερευνητικά δεδομένα που παρατίθενται αναδεικνύουν την αναγκαιότητα της κατάρτισης των εκπαιδευτικών για την ορθή αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών ως διδακτικά εργαλεία και τη σημαντικότητα της τακτικής επιμόρφωσής τους, ώστε να προετοιμάζονται επαρκώς για τη χρήση τους. Απώτερος στόχος είναι να διαφανεί μέσα από τη γνωστική επάρκεια που θα αποκτήσουν και την βεβαιότητα της ορθής αξιοποίησής τους η μεταστροφή των πιθανών αρνητικών αντιλήψεών τους τόσο για τα μαθηματικά όσο και για τα χειραπτικά υλικά.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στη μεθοδολογία της έρευνας. Περιγράφεται ο σκοπός της έρευνας, οι στόχοι που επιθυμούμε να επιτευχθούν με την αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών και τα υποθετικά ερωτήματα που τέθηκαν και ανιχνεύονται μέσα από την έρευνα. Επίσης, καταγράφεται η μέθοδος που ακολουθήθηκε, η περιγραφή του δείγματος και πληροφορίες για την επιλογή του, ενώ γίνεται αναλυτική αναφορά στο είδος και τη δομή των μέσων συλλογής των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν. Παρουσιάζονται οι τυπικές και άτυπες δοκιμασίες που χορηγήσαμε στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα αλλά και στους εκπαιδευτικούς των Τμημάτων Ένταξης και των γενικών τάξεων που φοιτούσαν οι συγκεκριμένοι μαθητές. Τέλος, περιγράφεται αναλυτικά και η πορεία της έρευνας (η χρονική διάρκεια του εκπαιδευτικού προγράμματος, οι φάσεις της διδακτικής παρέμβασης, ο τρόπος και τα μέσα υποστήριξης των εκπαιδευτικών, η συλλογή των ερευνητικών δεδομένων), καθώς και η μέθοδος της στατιστικής ανάλυσης των ποσοτικών δεδομένων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, έτσι όπως προέκυψαν από την ανάλυση των ποιοτικών και των ποσοτικών δεδομένων. Αρχικά, γίνεται η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων που παρήχθησαν από τις άτυπες δοκιμασίες και τις καταγραφές των εκπαιδευτικών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ακολουθεί η ανάλυση και ο σχολιασμός των ποσοτικών δεδομένων. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά των υποθέσεων που διατυπώθηκαν και ενισχύεται η σαφήνιά τους με τη χρήση οπτικοποιήσεων με τη μορφή πινάκων και γραφημάτων. Στη συνέχεια, γίνεται η καταγραφή των γνωστικών παρανοήσεων και ελλείψεων των μαθητών στους μαθηματικούς τομείς,

που εξετάζει η ερευνητική προσπάθεια πριν την παρέμβαση και τη χρήση των χειραπτικών υλικών και η εννοιολογική αλλαγή που επήλθε μετά την παρέμβαση μέσα από την παράθεση των ποιοτικών δεδομένων. Επίσης, παρατίθενται τα ποσοτικά αποτελέσματα από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου που συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς πριν την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης και επιχειρείται η ανάλυση των δεδομένων που αφορούν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τα χειραπτικά υλικά. Γίνεται αναφορά στις πηγές από όπου αντλούν υλικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών, στους μαθηματικούς τομείς που μπορούν να υποστηρίξουν με τα χειραπτικά υλικά, καθώς και στους παράγοντες που δρουν ανασταλτικά στην ευχερή χρήση και στην αξιοποίησή τους στη διδακτική πράξη. Τέλος, περιγράφουμε αναλυτικά τρεις μελέτες περίπτωσης αντιπροσωπευτικές του συνόλου των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και αναδεικνύουν τη μαθησιακή τους πορεία πριν, κατά και μετά τη διδακτική παρέμβαση που επιχειρήθηκε με τη χρήση των χειραπτικών υλικών.

Στο τελευταίο, έκτο, κεφάλαιο αυτής της ερευνητικής εργασίας, συζητούνται τα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τα δεδομένα προηγούμενων ερευνών, όπως αναφέρονται στη βιβλιογραφία που συνοδεύει αυτό το πόνημα. Επιχειρείται να εξαχθούν συμπεράσματα που να προωθούν τη χρήση και αποτελεσματική αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών για τη διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, την καλλιέργεια της μαθηματικής κατανόησης στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά με την υποστήριξη διδακτικών υλικών, ενώ δίνεται μια διαφορετική οπτική των συγκεκριμένων διδακτικών εργαλείων μέσα από μια ποιοτική και διαφοροποιημένη προσέγγιση, η οποία αποβλέπει στην υποβοήθηση των εκπαιδευτικών να ενισχύσουν το οπλοστάσιο των στρατηγικών, που μπορούν να διδαχθούν και να αξιοποιήσουν οι μαθητές τους.

Τέλος, αναφέρονται οι εκπαιδευτικές συνέπειες της ερευνητικής προσπάθειας, οι περιορισμοί της έρευνας, αλλά και οι ευκαιρίες και ανάγκες που προκύπτουν για επόμενες ερευνητικές μελέτες.

Κεφάλαιο 2. Μαθησιακές δυσκολίες

2.1. Μαθησιακές δυσκολίες: Προσδιορισμός όρων	27
2.1.1. Οι επικρατέστεροι ορισμοί για τις μαθησιακές δυσκολίες	29
2.1.2. Διάγνωση των μαθησιακών δυσκολιών	33
2.1.3. Μοντέλα κατηγοριοποίησης των Μαθησιακών Δυσκολιών	37
2.2. Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά	39
2.2.1. Κατηγοριοποίηση – Τύποι μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά	42
2.2.2. Ανασκόπηση της φύσης των μαθηματικών δυσκολιών	45
2.2.3. Δυσαριθμησία	46
2.3. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών	51
2.3.1. Δομικά στοιχεία και απαιτήσεις στη μάθηση των μαθηματικών	57
2.3.2. “Η γλώσσα” των μαθηματικών	62
2.4. Ανίχνευση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	64
2.5. Αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	67
2.5.1. Διδακτικές τεχνικές για την αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά	72

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

2.1. Μαθησιακές Δυσκολίες: Προσδιορισμός όρων

Τα τελευταία χρόνια, στην Ελλάδα και τον Δυτικό Κόσμο υπάρχει αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τα παιδιά, που αν και το νοητικό τους δυναμικό είναι σε φυσιολογικά επίπεδα, αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στη μάθηση και στην απόκτηση σχολικών δεξιοτήτων. Η παρουσία μαθητών¹ που παρά την τυπική τους νοημοσύνη αδυνατούν να επιτύχουν τις αναμενόμενες επιδόσεις, αποτελεί ένα σύνθετο φαινόμενο που έχει επιχειρηθεί να διασαφηνιστεί ερευνητικά. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών, ένας σημαντικός και αυξανόμενος αριθμός μαθητών αδυνατεί να ανταποκριθεί στις σχολικές απαιτήσεις, στο αναμενόμενο για την ηλικία τους επίπεδο επίδοσης, σε ένα ή περισσότερα σχολικά γνωστικά αντικείμενα (Παντελιάδου & Μπότσας 2007· Fletcher et al, 2007· Αγαλιώτης 2004· Geary, 2006, 2004· Fletcher, Morris, & Lyon, 2003). Η χαμηλή επίδοση των παιδιών, έχει σαν αποτέλεσμα τη μη επίτευξη των εκπαιδευτικών αντικειμενικών στόχων. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως “*σχολική αποτυχία*” και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της σημερινής εκπαίδευσης.

Η σχολική αποτυχία είναι, αναμφίβολα, ένα πολυσύνθετο φαινόμενο, που κατά καιρούς έχει συνδεθεί με καταστάσεις όπως: 1) η ατομική παθολογία (π.χ. καθυστερήσεις στην ανάπτυξη, ψυχοσυναισθηματικές δυσκολίες, δυσλειτουργίες ψυχολογικών διεργασιών), 2) η κοινωνική προέλευση (π.χ. οικογενειακό περιβάλλον φτωχό σε ερεθίσματα που δεν ευνοεί τη νοητική εξέλιξη), 3) το είδος της αλληλεπίδρασης μεταξύ παιδιού και περιβάλλοντος (π.χ. αναποτελεσματικές ρυθμίσεις του σχολείου σε σχέση με τις πραγματικές ανάγκες του παιδιού) (Καΐλα, 1995).

Στη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών εστιάζεται συχνά στις δυσκολίες μάθησης που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στο σχολείο και ιδιαίτερα στο φαινόμενο της σχολικής αποτυχίας. Στην προσπάθειά τους να περιγράψουν, να ερμηνεύσουν και να προτείνουν λύσεις, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα λεξιλόγιο, που οδηγεί τελικά σε μεγαλύτερη

¹ Για την αποφυγή των διπλών τύπων ο/η εκπαιδευτικός και ο/η μαθητής/τρια, στο κείμενο όπου «ο εκπαιδευτικός» και «ο μαθητής» θα αναφέρονται και στα δυο γένη.

σύγχυση. Πολλές φορές οι Μαθησιακές Δυσκολίες θεωρούνται η μοναδική συνθήκη που οδηγεί στη σχολική αποτυχία, γι' αυτό και ο όρος "*Μαθησιακές Δυσκολίες*", συχνά συγχέεται με τον όρο "*σχολική αποτυχία*", ο οποίος είναι εξαιρετικά ευρύτερος και πολυδιάστατος. Ο όρος "*Μαθησιακές Δυσκολίες*", αν και αναφέρεται σε συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών αναγκών, στην πράξη χρησιμοποιείται ελαστικά, πολυσυλλεκτικά και με ιδιαίτερη ευκολία με αποτέλεσμα να αλλοιώνεται το περιεχόμενό του (Παντελιάδου, 2000).

Οι Hallahan και Mercer (2001) διέκριναν έξι περιόδους σε μια αναλυτική εξέταση της πορείας του πεδίου των Μαθησιακών Δυσκολιών κατά τους δύο τελευταίους αιώνες: (α) την περίοδο της *ευρωπαϊκής θεμελίωσης* (1800 - 1920), όπου οι έρευνες εστιάζουν στη νευρολογία και τη λειτουργία του εγκεφάλου, (β) την περίοδο της *αμερικανικής θεμελίωσης* (1920 - 1960), με κύριο εκφραστή τον νευρολόγο Orton και την ερευνητική προσπάθεια προσανατολισμένη στην τάξη και στο σχολικό περιβάλλον, (γ) της *αφετηρίας των Μαθησιακών Δυσκολιών* (1960 - 1975), μιας και για πρώτη φορά γίνεται απόπειρα ορισμού των Μαθησιακών Δυσκολιών από τον Samuel Kirk (1963) και ταυτόχρονου αποκλεισμού παιδιών που ανήκουν σε άλλες ομάδες μειονεξίας όπως η τύφλωση, η κώφωση και η νοητική καθυστέρηση, (δ) η περίοδος της *σταθεροποίησης* (1975 - 1985), όπου η επιστημονική έρευνα στρέφεται στην ανάπτυξη νέων τεχνικών και προσεγγίσεων της διδασκαλίας και γενικότερα στην παρέμβαση για την αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών και (ε) την περίοδο της *αμφισβήτησης* και των *ταραχών* (1985 - 2000) όπου κυριαρχούν οι επιστημονικές αντιπαραθέσεις σχετικά με τα εργαλεία ανίχνευσης των μαθησιακών δυσκολιών και την ένταξη των παιδιών στο σχολείο, καθώς και πλήθος αμφισβητήσεων για αυτή καθεαυτή την ύπαρξη των μαθησιακών δυσκολιών. Από το 2000 μέχρι και σήμερα, συνεχίζονται οι επιστημονικές αντιπαραθέσεις στο πεδίο των Μαθησιακών Δυσκολιών, ενώ αναζητείται μια σαφής επιστημονικά θεμελίωση των αιτίων που προκαλούν μαθησιακές δυσκολίες και η έρευνα στρέφεται στην έγκαιρη παρέμβαση παρά στη διάγνωση. Αυτή η περίοδος, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η περίοδος του *αναστοχασμού* (Κρόκου, 2011) ή της *αποδόμησης* και *επανοικοδόμησης* (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007).

Ο όρος “*Μαθησιακές Δυσκολίες*” (ΜΔ) αναφέρεται σε μια σχετικά ετερογενή ομάδα δυσκολιών που έχουν άμεση σχέση, αλλά κυρίως επηρεάζουν, τη σχολική επίδοση. Πολλοί επιστήμονες προσπάθησαν να δώσουν έναν ορισμό για τις μαθησιακές δυσκολίες που να είναι ευρύτερα αποδεκτός, χωρίς όμως, ακόμα και μέχρι σήμερα, να υπάρχει η επιθυμητή συναίνεση στο περιεχόμενο του ορισμού (Little, Akin-Little, & Richards, 2006).

Κεντρική θέση σε κάθε ορισμό που έχει διατυπωθεί για τις μαθησιακές δυσκολίες κατέχει η έννοια της “*χαμηλής επίδοσης*”. Συγκεκριμένα, από την πρώτη στιγμή που εμφανίστηκε ο όρος το βασικό διακριτικό γνώρισμα της ομάδας μαθητών στην οποία αναφέρεται ήταν η απρόσμενη σχολική αποτυχία και οι δυσκολίες στη μάθηση (Fletcher, Morris, & Lyon, 2003). Ο όρος “*Μαθησιακές Δυσκολίες*” για πρώτη φορά εμφανίζεται το 1963 στο Σικάγο, σε μια συνάντηση εκπαιδευτικών και γονέων παιδιών με προβλήματα στη μάθηση, από τον ψυχολόγο Samuel Kirk. Έκτοτε έχουν διατυπωθεί πολλοί ορισμοί που έχουν χρησιμοποιηθεί για χρόνια, όμως εξακολουθούν να υπάρχουν διαφωνίες σε επιμέρους σημεία. Οι μαθησιακές δυσκολίες είναι ένας πολυδιάστατος και πολυκαθοριζόμενος όρος, με πολλαπλές εκδηλώσεις και συμπτωματολογία που μεταβάλλεται από ηλικία σε ηλικία (Lerner, 1993· Τζουριάδου 1995).

2.1.1. Οι επικρατέστεροι ορισμοί για τις Μαθησιακές Δυσκολίες

Η πρώτη διατύπωση ενός ορισμού για τον όρο “*Μαθησιακές Δυσκολίες*” εμφανίζεται το 1963 από τον Samuel Kirk ψυχολόγο και ειδικό παιδαγωγό :

«Πρόσφατα χρησιμοποίησα τον όρο “Μαθησιακές Δυσκολίες” για να περιγράψω μια ομάδα παιδιών που έχουν διαταραχές στη γλώσσα, στον λόγο, στην ανάγνωση και στις δεξιότητες, τις σχετικές με την κοινωνική αλληλεπίδραση. Σ’ αυτήν την ομάδα, δεν περιλαμβάνω παιδιά που έχουν αισθητηριακές μειονεξίες όπως η τύφλωση ή η κώφωση ... Επίσης, εξάίρεσα από την ομάδα αυτή, τα παιδιά που έχουν γενικευμένη νοητική καθυστέρηση» (Kirk, 1962, στο Παντελιάδου & Μπότσα, 2007: 6) ή για να προσδιορίσει *«μια καθυστέρηση ή διαταραχή της ανάπτυξης σε μία ή περισσότερες λειτουργίες του γραπτού ή του προφορικού λόγου (όπως είναι η ανάγνωση, η γραφή, η*

ορθογραφία, η κατανόηση) ή και των μαθηματικών, εξαιτίας κάποιας πιθανής εγκεφαλικής δυσλειτουργίας ή διαταραχών συμπεριφοράς και συναισθημάτων». Κατά τον Kirk, αυτές «οι μαθησιακές δυσκολίες δεν οφείλονται σε νοητική ή αισθητηριακή υστέρηση του παιδιού ή σε αρνητικούς πολιτιστικούς ή κοινωνικούς παράγοντες» (Kirk, 1962, στο Πόρποδας 2003: 17).

Είναι η πρώτη φορά που αναφέρεται ο όρος “Μαθησιακές Δυσκολίες” και που αποκλείονται από αυτές αισθητηριακές μειονεξίες. Ένας από τους πρώτους πιο κοινά αποδεκτούς ορισμούς που στοιχεία του έχουν ενσωματωθεί σε όλους τους μεταγενέστερους, είναι αυτός που διατυπώθηκε από την Bateman (1965). Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό :

«Παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες είναι εκείνα που παρουσιάζουν μια παιδαγωγικά σημαντική διακύμανση ανάμεσα στο νοητικό τους δυναμικό και στο πραγματικό επίπεδο επίδοσης, η οποία συνδέεται με βασικές διαταραχές στη μαθησιακή διαδικασία. Οι διαταραχές αυτές μπορεί να οφείλονται, όχι όμως απαραίτητα, σε εμφανή δυσλειτουργία του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος. Δεν μπορεί να αποδοθούν δευτερογενώς σε νοητική καθυστέρηση, εκπαιδευτική ή πολιτισμική αποστέρηση, σοβαρές συναισθηματικές διαταραχές ή αισθητηριακές βλάβες».

Στον Νόμο 101-476 των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (ΗΠΑ) με θέμα “Ατομα με Δυσκολίες Εκπαίδευσης” (Individuals with Disabilities Education Act, 1990), εμπεριέχεται ένας από τους πιο διαδεδομένους ορισμούς των Μαθησιακών Δυσκολιών:

Ο όρος “παιδιά με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες” σημαίνει εκείνα τα παιδιά που έχουν μία διαταραχή σε μία ή περισσότερες από τις βασικές ψυχολογικές διεργασίες που αφορούν την κατανόηση ή τη χρήση του προφορικού ή γραπτού λόγου. Μπορεί να εκδηλωθούν ως διαταραχές στην προφορική κατανόηση, στη σκέψη, στον λόγο, στην ανάγνωση, στη γραφή, στην ορθογραφία ή στην εκτέλεση μαθηματικών πράξεων. Εμπεριέχουν συνθήκες, όπως αντιληπτικές διαταραχές, εγκεφαλική βλάβη, ελαφρά εγκεφαλική δυσλειτουργία, δυσλεξία και αναπτυξιακή

αφασία. Στις μαθησιακές δυσκολίες δεν εντάσσονται εκείνα τα προβλήματα μάθησης τα οποία είναι πρωταρχικά το αποτέλεσμα οπτικών, ακουστικών, ή κινητικών ανεπαρκειών, νοητικής υστέρησης, συναισθηματικής διαταραχής ή αρνητικές επιδράσεις από περιβαλλοντικά, πολιτιστικά ή οικονομικά αίτια (Νόμος 101-476: 331).

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να χαρακτηριστεί και παιδαγωγικός, αφού επικεντρώνεται και δίνει έμφαση στις δυσκολίες που εμφανίζονται στις σχολικές επιδόσεις. Έτσι, οι Μαθησιακές Δυσκολίες καθιερώθηκαν ως κατηγορία ειδικής εκπαίδευσης και ξεκίνησε η επιστημονική έρευνα που αποσκοπούσε στη δημιουργία και υλοποίηση εξειδικευμένων εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Ο πιο πρόσφατος, αναθεωρημένος και πληρέστερος ορισμός των Μαθησιακών Δυσκολιών, ο οποίος είναι και ο ευρύτερα αποδεκτός, ανήκει στην Κοινή Εθνική Επιτροπή Μαθησιακών Δυσκολιών/National Joint Committee on Learning Disabilities (NJCLD) των ΗΠΑ (1988: 1).

Η μελέτη του Hammil (1990) στην αναζήτηση ενός ευρύτερα αποδεκτού ορισμού όρισε ως κριτήρια αποκλεισμού από την ομάδα των Μαθησιακών Δυσκολιών τις αισθητηριακές ανεπάρκειες, τη νοητική υστέρηση, τις εξωγενείς επιρροές (π.χ. πολιτισμικές διαφορές, ανεπαρκής ή ακατάλληλη εκπαίδευση) και τα συναισθηματικά προβλήματα ή τα προβλήματα συμπεριφοράς (Κρόκου, 2011). Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό:

«Οι Μαθησιακές Δυσκολίες είναι ένας γενικός όρος που αναφέρεται σε μια ανομοιογενή ομάδα διαταραχών, οι οποίες εκδηλώνονται με σημαντικές δυσκολίες στην πρόσκτηση και χρήση ικανοτήτων ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης, γραφής, συλλογισμού ή μαθηματικής ικανότητας. Οι διαταραχές αυτές είναι εγγενείς στο άτομο, αποδίδονται σε δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος και μπορεί να υπάρχουν σε όλη τη διάρκεια της ζωής του...»

Με τις Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να συνυπάρχουν προβλήματα σε συμπεριφορές αυτοελέγχου, κοινωνικής αντίληψης και κοινωνικής αλληλεγγύης. Αυτά τα προβλήματα ωστόσο δεν συνιστούν από μόνα τους Μαθησιακές Δυσκολίες. Αν και οι Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να εμφανίζονται μαζί με άλλες καταστάσεις μειονεξίας (π.χ.

αισθητηριακή βλάβη, νοητική καθυστέρηση, σοβαρή συναισθηματική διαταραχή) ή να δέχονται την επίδραση εξωτερικών παραγόντων, όπως είναι οι πολιτισμικές διαφορές και η ανεπαρκής ή ακατάλληλη διδασκαλία, αυτές δεν είναι το άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω καταστάσεων ή εξωτερικών επιδράσεων» (NJCLD, 1988: 1).

Από τη μελέτη του παραπάνω ορισμού προκύπτουν αρκετά στοιχεία για τη φύση των Μαθησιακών Δυσκολιών: (1) Πρόκειται για μια ετερογενή ομάδα διαταραχών, που εκδηλώνονται με μια σειρά από δυσκολίες και χαρακτηριστικά, που διαφέρουν από άτομο σε άτομο και δυσκολεύουν την εφαρμογή μιας κατάλληλης και αποτελεσματικής διδακτικής παρέμβασης. (2) Οφείλονται σε ενδογενείς παράγοντες (δυσλειτουργίες του κεντρικού νευρικού συστήματος), παρά σε εξωτερικούς όπως το περιβάλλον ή το εκπαιδευτικό σύστημα. Αναγνωρίζεται λοιπόν η βιολογική βάση του προβλήματος. (3) Διαφοροποιούνται από άλλες καταστάσεις μειονεξίας, αν και μπορεί να συνυπάρχουν μαζί τους. Η παραδοχή αυτή αναγνωρίζει την ταυτόχρονη ύπαρξη προβλημάτων όπως μαθησιακών δυσκολιών και συναισθηματικών διαταραχών. (4) Οι Μαθησιακές Δυσκολίες χαρακτηρίζονται από μια απρόσμενη απόκλιση του νοητικού δυναμικού του μαθητή και της σχολικής του επίδοσης, είτε με την απόκλιση του δείκτη νοημοσύνης, είτε με την απόκλιση του λεκτικού από τον πρακτικό δείκτη νοημοσύνης. (5) Οι Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να υπάρχουν σε όλη τη διάρκεια της ζωής του ατόμου (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007· Fletcher, Morris, & Lyon, 2003· Παντελιάδου, 2000· Lerner, 1993).

Ο τελευταίος ορισμός ο οποίος έχει ενσωματωθεί στη Συνθήκη για την Εκπαίδευση Ατόμων με Αναπηρίες των ΗΠΑ (Kavale & Forness, 2000: 241), είναι περισσότερο περιγραφικός και δεν κάνει αναφορές σε αιτιολογικούς παράγοντες. Σύμφωνα μ' αυτόν:

«οι μαθησιακές δυσκολίες αναφέρονται σε διαταραχές σε μια ή περισσότερες από τις βασικές ψυχολογικές διεργασίες που εμπεριέχονται στη χρήση του προφορικού ή γραπτού λόγου, οι οποίες έχουν ως συνέπεια “ατελή” ικανότητα ακουστικής αντίληψης, σκέψης, λόγου, ανάγνωσης, γραφής, ορθογραφίας, μαθηματικών ικανοτήτων. Ο όρος περιλαμβάνει περιπτώσεις όπως αντιληπτική ανεπάρκεια,

εγκεφαλική βλάβη, ελάχιστη εγκεφαλική δυσλειτουργία, δυσλεξία και αναπτυξιακή αφασία. Στον όρο δεν εμπεριέχονται περιπτώσεις παιδιών των οποίων το πρόβλημα είναι αποτέλεσμα οπτικής, ακουστικής ή κινητικής ανεπάρκειας, νοητικής καθυστέρησης ή προέρχονται από δυσμενείς περιβαλλοντικές, πολιτισμικές ή οικονομικές συνθήκες».

Ο παραπάνω ορισμός, όπως και αντίστοιχοι προηγούμενοι καθιέρωσαν την περιοχή των μαθησιακών δυσκολιών ως μια κατηγορία ειδικής εκπαίδευσης και αποτέλεσαν το πλαίσιο για τη δημιουργία ειδικών εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Τα άτομα με Μαθησιακές Δυσκολίες, αντιμετωπίζουν διαφορετικά προβλήματα, όπως φαίνεται από τους διάφορους ορισμούς. Οι νευροβιολογικές δυσλειτουργίες, ο ανομοιογενής τύπος ανάπτυξης της διανοητικής ικανότητας, οι δυσκολίες σε ακαδημαϊκά έργα, καθώς και η ασυμφωνία μεταξύ νοητικού δυναμικού και σχολικής επίδοσης, οριοθετούν τις ατομικές γνωστικές ανεπάρκειες κάθε μαθητή και επηρεάζουν ένα ευρύ φάσμα των μαθησιακών αντικειμένων.

Στην παρούσα έρευνα ο όρος "μαθησιακές δυσκολίες" χρησιμοποιείται για να δηλώσει μαθητές με διαγνωσμένες ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά αλλά και μαθητές που εμφανίζουν δυσκολίες μάθησης που επηρεάζουν και την μαθηματική τους επίδοση.

2.1.2. Διάγνωση των μαθησιακών δυσκολιών

Ο παραπάνω ορισμός των μαθησιακών δυσκολιών του Hammil θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως λειτουργικός ορισμός, αφού μετατρέπει αφηρημένες έννοιες σε ειδικούς όρους και δεν προσδιορίζει μόνο το εννοιολογικό περιεχόμενο των μαθησιακών δυσκολιών και την αιτιολογία τους, αλλά κατά κάποιον τρόπο καθορίζει και τον τρόπο αξιολόγησης και τη διάγνυσή τους. Επίσης αποτελεί έναν διαγνωστικό και αιτιολογικό ορισμό που περιγράφει τα συμπτώματα σε σχέση με αίτια που προσδιορίζονται ή συμπεραίνονται (Gaddes & Edgell, 1994).

Σύμφωνα με την Τζουριάδου (1995), ως μειονεκτήματα θεωρούνται η έλλειψη έγκυρων κριτηρίων αξιολόγησης των ψυχολογικών διεργασιών και τα προβλήματα που συνδέονται με τη μέτρηση της νοητικής ικανότητας, έτσι ώστε να καθοριστεί η διακύμανση, καθώς και τα προβλήματα εύρεσης κριτηρίων σχετικά με τον καθορισμό του βαθμού σοβαρότητας της μαθησιακής δυσκολίας. Το πιο δύσκολο

κριτήριο λειτουργικότητας είναι οι ψυχολογικές διεργασίες, οι οποίες αναφέρονται στην προσοχή, τη διάκριση, τη μνήμη, την αισθητηριακή ολοκλήρωση και την επίλυση προβλημάτων.

Η Lerner (1993) επισημαίνει ως κοινά στοιχεία μεταξύ των ορισμών που έχουν διατυπωθεί για τις Μαθησιακές Δυσκολίες: (α) τη νευρολογική δυσλειτουργία, (β) τον ανομοιογενή τύπο ανάπτυξης, (γ) τις δυσκολίες σε ακαδημαϊκά και μαθησιακά έργα, (δ) την απόκλιση νοητικού δυναμικού και σχολικής επίδοσης και (ε) τον αποκλεισμό άλλων αιτιών.

Σύμφωνα με τον ορισμό των Μαθησιακών Δυσκολιών, η δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος είναι πιθανό αίτιο της εμφάνισης διαταραχών μάθησης. Όπως αναφέρει η Lerner (1993), η νευρολογική δυσλειτουργία είναι δύσκολο να διαπιστωθεί με έναν εξωτερικό ιατρικό έλεγχο και καθορίζεται με την παρατήρηση της συμπεριφοράς του ατόμου. Ωστόσο, τα τελευταία ερευνητικά ιατρικά δεδομένα για τη διερεύνηση της δυσλεξίας, αποδεικνύουν ότι πρόκειται για μια διαταραχή με νευρολογική βάση και αρκετά αποδεικτικά στοιχεία επιβεβαιώνουν την υπόθεση της εγκεφαλικής δυσλειτουργίας (Reid, 2005· Πόρποδας, 1997).

Η αναφορά της Lerner (1993) για ανομοιογενή τύπο ανάπτυξης ως στοιχείου για την ύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών, σχετίζεται με τη διανοητική ικανότητα του ατόμου, μια σύνθετη λειτουργία της οποίας οι επιμέρους ικανότητες (συνιστώσες) δεν αναπτύσσονται με ομαλό και φυσιολογικό τρόπο. Η ανομοιογενής ανάπτυξη των στοιχείων της διανοητικής ικανότητας (π.χ. γνωστικές ελλείψεις, γλωσσική ικανότητα και επικοινωνία, μνήμη κ.ά.) εμφανίζονται ως συμπτώματα μαθησιακών δυσκολιών. Επίσης, οι *«σημαντικές δυσκολίες στην πρόσκτηση και χρήση ικανοτήτων ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης, γραφής, συλλογισμού ή μαθηματικής ικανότητας»*, που αναφέρονται στον παραπάνω ορισμό, επισημαίνονται από τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στην ολοκλήρωση ακαδημαϊκών και μαθησιακών έργων.

Ένα κοινό στοιχείο των ορισμών, που αποτελεί το κυριότερο διαγνωστικό κριτήριο για τις Μαθησιακές Δυσκολίες, είναι η απόκλιση του νοητικού δυναμικού και της σχολικής επίδοσης του μαθητή, η ασυμφωνία δηλαδή, του τι ο μαθητής είναι ικανός να μάθει και τι μαθαίνει στην πραγματικότητα. Η αδυναμία

καθορισμού διαφορετικών ποιοτικά χαρακτηριστικών στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες διαμόρφωσε αυτό το κριτήριο. Αν και αρχικά αντιμετωπίστηκε με θετικό τρόπο από τους ερευνητές θεωρώντας ότι εξασφαλίζει τη διάγνωση των Μαθησιακών Δυσκολιών κάθε μαθητή και τη διαφοροποίησή τους από άτομο σε άτομο, συνεισφέροντας στην επιλογή της κατάλληλης εκπαιδευτικής υποστήριξης και του κατάλληλου σχολικού πλαισίου για τη φοίτηση του μαθητή (Kavale & Forness, 2000· Meyer, & Felton, 1999), τα τελευταία χρόνια αρκετοί ερευνητές αμφισβητούν και αντιμετωπίζουν με δυσπιστία και σκεπτικισμό το κριτήριο της απόκλισης (Vaughn, & Fuchs, 2003· Vellutino, Scanlon & Tanzman, 1998).

Το κριτήριο της χαμηλής σχολικής επίδοσης και η απόκλισή του από το νοητικό δυναμικό του μαθητή από μόνο του δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των μαθησιακών δυσκολιών, αφού υπάρχουν και άλλοι εξωγενείς επιδραστικοί παράγοντες για να παρουσιάζει ένας μαθητής χαμηλή επίδοση, όπως η ακατάλληλη διδασκαλία, η έλλειψη κινήτρων και ενδιαφέροντος, ψυχολογικοί και συναισθηματικοί παράγοντες κ.ά. Ο προσδιορισμός του νοητικού δυναμικού ενός ατόμου και το επίπεδο των ικανοτήτων του βασίζονται συνήθως σε μετρήσεις που γίνονται με τα τεστ νοημοσύνης και τα τεστ γνωστικών δεξιοτήτων. Τα τελευταία χρόνια πληθαίνουν οι ερευνητικές απόψεις που αμφισβητούν την εγκυρότητα και αξιοπιστία των τεστ νοημοσύνης ασκώντας σοβαρές κριτικές (Vaughn, & Fuchs, 2003). Οι περισσότερες από αυτές εστιάζουν: α) στον τρόπο μέτρησης της νοημοσύνης και στον τύπο της νοημοσύνης που αξιολογούν (Sternberg & Grigorenko, 2002), β) στον τρόπο υπολογισμού της απόκλισης και τον εντοπισμό του μεγέθους της (Scruggs & Mastropieri, 2002) και γ) στην αμφισβητούμενη ακρίβεια των μετρήσεων της νοημοσύνης που συνήθως εξαρτώνται από το χορηγούμενο τεστ και ελλοχεύουν κινδύνους ρατσιστικών και πολιτισμικών προκαταλήψεων (Lerner, 1993). Επίσης, επισημαίνεται η αδυναμία των τεστ νοημοσύνης να αξιολογήσουν παράγοντες που έχει αποδειχθεί ότι επηρεάζουν τις Μαθησιακές Δυσκολίες, ενώ αντίθετα οι δοκιμασίες τους περιλαμβάνουν στοιχεία που επηρεάζουν το μέγεθος της απόκλισης (Kavale & Forness, 2000). Η Μόττη-Στεφανίδη (1999) επισημαίνει στην αναφορά της για το τεστ νοημοσύνης WISC, ότι ακόμα και στα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, ένας χαμηλότερος λεκτικός δείκτης

μπορεί να συνδέεται με χαμηλή σχολική επίδοση και να μην αντιπροσωπεύει το πραγματικό νοητικό δυναμικό του μαθητή.

Σύμφωνα με τους Gaddes & Edgell (1994), τα δεδομένα, που συλλέγονται από τη χορήγηση του τεστ νοημοσύνης WISC, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση, όχι όμως και για την κατηγοριοποίηση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες. Οι κλίμακες νοημοσύνης Wechsler μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο του επιπέδου της γνωστικής λειτουργίας ενός παιδιού σε σχέση με τους τυπικούς μαθητές, ενώ τα επιμέρους τεστ παρέχουν μια πληρέστερη γνωστική ανάλυση κάθε μαθητή και βοηθούν στην επιλογή της διδακτικής προσέγγισης για την αποκατάσταση του μαθησιακού προβλήματος.

Εκτός από το νοητικό δυναμικό, το άλλο σκέλος για το κριτήριο της απόκλισης, αναφέρεται στο επίπεδο επίδοσης και αναφέρεται στην τρέχουσα επίδοση ενός μαθητή σε μια γνωστική περιοχή. Αν και παρατηρείται έλλειψη σταθμισμένων τεστ σε αρκετές περιοχές των μαθησιακών δυσκολιών, υπάρχουν αρκετές επιφυλάξεις σε ότι αφορά τα τεστ που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των επιδόσεων των μαθητών σε επιμέρους γνωστικές περιοχές, όπως η Γλώσσα και τα Μαθηματικά (Lerner, 1993).

Το τελευταίο στοιχείο, που απορρέει από τον ορισμό των Μαθησιακών Δυσκολιών, είναι αυτό του αποκλεισμού άλλων αιτιών (π.χ. αισθητηριακών βλαβών, νοητικής υστέρησης, σοβαρής συναισθηματικής διαταραχής ή περιβαλλοντικών προβλημάτων), που μπορεί να συνυπάρχουν με τις μαθησιακές δυσκολίες. Όπως αναφέρουν οι Kavale & Forness (2000), η περιγραφική ενσωμάτωση του όρου του “αποκλεισμού” στον ορισμό, εξυπηρετούσε την ανάγκη να διαχωριστούν οι Μαθησιακές Δυσκολίες και να ερευνηθούν ως μια ξεχωριστή και διακριτή κατηγορία από τις άλλες κατηγορίες της ειδικής εκπαίδευσης. Η ανίχνευση όλων των παραμέτρων που επηρεάζουν τη σχολική επίδοση και που επιτείνουν ή συνοδεύουν τις πιθανές μαθησιακές δυσκολίες του μαθητή, ερευνώνται μέσα από τη διαδικασία της διαφορικής διάγνωσης, όπως αναφέρεται στο Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders (DSM - IV), (American Psychiatric Association, 1995). Η διαφορική διάγνωση θα ελέγξει τα αισθητηριακά ελλείμματα, τη νοητική υστέρηση, σοβαρές συναισθηματικές διαταραχές, την

έλλειψη ευκαιριών, την ανεπαρκή διδασκαλία, τις επιδράσεις πολιτιστικών παραγόντων κ.ά.

Στην Ελλάδα σήμερα η διαγνωστική διαδικασία ακολουθεί δύο διακριτές οδούς: (α) Η διάγνωση πρώτου βαθμού πραγματοποιείται από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη και οδηγεί στην εκτίμηση της σχολικής επίδοσης του παιδιού. Θεωρείται διάγνωση πρώτου βαθμού διότι εκτιμά ικανότητες που είναι απαραίτητες για τη σχολική μάθηση και οδηγεί στην κατάρτιση ενός εκπαιδευτικό - θεραπευτικού προγράμματος μέσω σταθμισμένων τεστ και συστηματικής παρατήρησης της συμπεριφοράς· (β) Η διάγνωση δευτέρου βαθμού συντελείται από ψυχολόγο, ο οποίος χρησιμοποιεί σταθμισμένα ψυχολογικά κριτήρια για την εκτίμηση της νοητικής ικανότητας, της μνήμης και της αντίληψης (Παντελιάδου, 2011· Πολυχρονοπούλου, 2012).

Σχετικά με τις δυσκολίες μάθησης στα Μαθηματικά, η διάγνωση συνήθως γίνεται λίγο πριν το τέλος της Α' τάξης Δημοτικού και μετά το προγραφικό και προαναγνωστικό στάδιο ή και στη Β' ή στη Γ' τάξη.

2.1.3. Μοντέλα κατηγοριοποίησης των Μαθησιακών Δυσκολιών

Στην ερευνητική βιβλιογραφία τη σχετική με τις μαθησιακές δυσκολίες, επισημαίνεται πλήθος ερευνών που κατηγοριοποιούν τις μαθησιακές δυσκολίες. Οι Fletcher, Lyon, Fuchs, & Barnes (2007) στην έρευνά τους αναφέρουν τέσσερα μοντέλα κατηγοριοποίησης των μαθησιακών δυσκολιών: (α) *το μοντέλο της απόκλισης μεταξύ νοητικής ικανότητας και επίδοσης*, (β) *το μοντέλο της υπο-επίδοσης*, (γ) *το μοντέλο των ενδοατομικών διαφορών* και (δ) *το μοντέλο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας*. Σε προγενέστερο χρόνο οι Fletcher, Morris, & Lyon (2003) αναφέρουν το μοντέλο επίλυσης προβλήματος σαν μια πρώιμη μορφή του μοντέλου της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, ενώ ενσωματώνουν το μοντέλο απόκλισης νοητικής ικανότητας και επίδοσης και το μοντέλο της υπο-επίδοσης στο ευρύτερο μοντέλο των ενδοατομικών διαφορών.

Το μοντέλο των ενδοατομικών διαφορών υποστηρίζει ότι οι αποκλίσεις, που εμφανίζει ένα άτομο ως προς τις ικανότητές του, αποτελούν τη βάση των μαθησιακών δυσκολιών (Kavale & Forness, 2000). Για τις μετρήσεις των νευροψυχολογικών λειτουργιών και της επεξεργασίας των πληροφοριών, στηρίζεται

στη χρήση ψυχομετρικών τεστ και τεστ νοημοσύνης. Οι ενδοατομικές διαφορές διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο και αποτελούν έναν σαφή δείκτη της απόκλισης ανάμεσα στη νοητική ικανότητα και την απρόσμενη υπο-επίδοση. Ως εκ τούτου, ένας μαθητής με μαθησιακές δυσκολίες μπορεί να τα καταφέρνει σε αρκετές γνωστικές περιοχές, ενώ σε κάποιες άλλες μεγαλύτερης σπουδαιότητας εμφανίζει χαμηλή επίδοση και οδηγείται στη σχολική αποτυχία (Κρόκου, 2011). Το μοντέλο της απόκλισης μεταξύ νοητικής ικανότητας και επίδοσης, οδηγεί σε ορισμούς και κατηγοριοποιήσεις των μαθησιακών δυσκολιών μέσα από μια διαδικασία συνεχών αξιολογήσεων με τη χορήγηση σταθμισμένων τεστ, τα αποτελέσματα των οποίων θα καθορίσουν τη διδακτική παρέμβαση που θα εφαρμοστεί και που εκτιμάται να είναι πιο αποτελεσματική (Fletcher, Morris, & Lyon 2003).

Το μοντέλο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας (Individuals with Disabilities Education Act [IDEA], 2004) ή της επίλυσης προβλήματος (Vaughn & Fuchs, 2003) θεωρεί μεγάλης σημασίας την αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών μέσα από στοχευμένες και διαβαθμισμένες διδακτικές παρεμβάσεις, ενώ αγνοεί τις κατηγοριοποιήσεις των μαθησιακών δυσκολιών, τις ενδοατομικές διαφορές των μαθητών και δε θεωρεί απαραίτητη τη γνώση των αιτιών που προκαλούν τις μαθησιακές δυσκολίες για την αντιμετώπισή τους (Fletcher, Morris, & Lyon 2003). Αποτελεί μια προσέγγιση, που εστιάζει στο ποια παρέμβαση είναι πιο αποδοτική και προσπαθεί να βελτιώνει τις συμπεριφορές που οδηγούν στον προσδιορισμό των μαθησιακών δυσκολιών. Προσανατολίζεται κυρίως στο αποτέλεσμα της διδακτικής παρέμβασης, έτσι όπως αυτό αποτιμάται από την ανταπόκριση του μαθητή.

Οι Fletcher, Morris και Lyon (2003) σε μια κριτική θεώρηση των δύο μοντέλων διαπίστωσαν τη συμβατότητά τους ως προς τη θεώρηση των μαθησιακών δυσκολιών. Στο μοντέλο των ενδοατομικών διαφορών και της απόκλισης, η κατηγοριοποίηση των μαθησιακών δυσκολιών γίνεται μέσα από μια συνεχή διαδικασία αξιολόγησης του μαθητή μέσω της χορήγησης τεστ και έχει συγχρονικό χαρακτήρα, αφού αξιολογεί την ίδια χρονική στιγμή πολλές ικανότητες. Στο μοντέλο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, η κατηγοριοποίηση αποκτά πιο ποιοτικά χαρακτηριστικά, που προέρχονται από τα αποτελέσματα των διδακτικών παρεμβάσεων, ενώ η προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος έχει διαχρονικό

χαρακτήρα, αφού αξιολογεί τις ίδιες ικανότητες σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (Κρόκου, 2011).

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αποτελούν μια ανομοιογενή ομάδα, οι οποίοι διαφοροποιούνται στους τομείς ή γνωστικές περιοχές που εμφανίζουν δυσκολίες, αλλά και στον βαθμό δυσκολίας που αντιμετωπίζουν στη μάθηση των διάφορων γνωστικών αντικειμένων. Ως εκ τούτου, δε φαίνεται να υπάρχει μια κοινή συμπτωματολογία που να χαρακτηρίζει όλους τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Πόρποδας, 2003). Η ανομοιογένεια των μαθησιακών δυσκολιών δυσχεραίνει την κατηγοριοποίησή τους. Κάθε άτομο/μαθητής έχει έναν μοναδικό συνδυασμό ικανοτήτων και αδυναμιών ο οποίος επηρεάζει την επίδοσή του στα διάφορα γνωστικά αντικείμενα (Fletcher, Morris, & Lyon 2003).

2.2. Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά

Οι μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά αποτελούν τη λιγότερο μελετημένη γνωστική περιοχή. Η έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο έχει δώσει όμως αρκετά στοιχεία για τη σχέση επιμέρους ή γενικών δεξιοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση, τόσο μεταξύ τους όσο και σε συγκεκριμένες αντιληπτικές και γνωστικές ικανότητες (Burns, 2007· McNeil, 2007· Sternberg, & Grigorenko, 2004· Αγαλιώτης, 2004). Η βιβλιογραφία μας εφοδιάζει με ένα ευρύ πεδίο γνωστικών λειτουργιών, οι οποίες είναι πιθανόν να είναι ελλειμματικές στους μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες. Έτσι, μπορεί να αποτελούν συνέπεια του ελλείμματος στην επίγνωση του αριθμού (De Smedt, Noël, Gilmore & Ansari, 2013· Piazza et al., 2010· Rubinsten & Henik, 2005), στη λεκτική και οπτική μνήμη εργασίας (Swanson, 2011· Geary, 2004), στην επεξεργασία του χώρου (Rourke & Conway 1997· Rourke, 1993), στη λειτουργία της προσοχής (Swanson, 2011· Ashkenazi, Rubinsten & Henik, 2009) στην ανασταλτική λειτουργία (Swanson, 2011) και στη φωνολογική ικανότητα (Swanson & Sachse-Lee, 2001). Τα στοιχεία αυτά δεν αφορούν μόνο μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αλλά συνεισφέρουν στη γενικότερη κατανόηση της φυσιολογικής πορείας ανάπτυξης των μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων αλλά και στην καταγραφή και ερμηνεία του συνόλου των δυσκολιών, που παρουσιάζουν οι μαθητές στα μαθηματικά (Carpenter, 2008).

Οι συγκεκριμένοι μαθητές, μέσα από τα ερευνητικά δεδομένα, φαίνεται να εμφανίζουν είτε γενικευμένες δυσκολίες στη μάθηση των μαθηματικών είτε να επηρεάζονται μόνο σε ορισμένους τομείς του μαθηματικού συλλογισμού. Συνήθως οι δυσκολίες τους εντοπίζονται στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, στην εκμάθηση και ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων, στην κατανόηση και αποτελεσματική χρήση των αλγόριθμων των πράξεων και στον μαθηματικό συλλογισμό για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Steedly, 2008). Οι δυσκολίες αυτές μπορεί να συνδέονται με ανεπάρκειες σε αντιληπτικές και γνωστικές λειτουργίες, όπως η ικανότητα ταξινόμησης, αντιστοίχισης, σχέσεων στο χώρο ανάκλησης (McNeil, 2007) αλλά και διαταραχές στην ανάπτυξη του λόγου (Lerner, 1993). Ακόμη, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στην επιλογή των κατάλληλων αρχών, για να επιλύουν προβλήματα μαθηματικού συλλογισμού.

Η πολυπλοκότητα και σοβαρότητα του φαινομένου των μαθησιακών δυσκολιών και της σχολικής αποτυχίας επιβεβαιώνονται από τα ερευνητικά δεδομένα των τελευταίων δεκαετιών. Έως και τις αρχές της δεκαετίας του 1990, οι ερευνητικές προσπάθειες μελέτης και εκπαιδευτικής αντιμετώπισης των μαθησιακών δυσκολιών, ήταν προσανατολισμένες και εστίαζαν κυρίως στα γλωσσικά μαθήματα και στις δυσκολίες στην ανάγνωση (ειδική διαταραχή της ανάγνωσης-δυσλεξία) (Fuchs & Fuchs 2002· Αγαλιώτης, 2000). Η μελέτη των δυσκολιών στα μαθηματικά τύχαινε μικρότερης προσοχής και σχεδόν πάντα βρισκόταν στη σκιά της μελέτης των γλωσσικών θεμάτων (Ramma & Gowramma, 2002). Στη συνέχεια όμως, παρατηρείται αυξανόμενο ενδιαφέρον και αρκετά μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα για τους μαθητές που παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, αφού αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα πολυπληθείς ομάδες του μαθητικού πληθυσμού (Fletcher et al., 2007· Geary, 2006). Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη της έρευνας σχετικά με τα μαθηματικά είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με εκείνη που αναφέρεται στις μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση (Παντελιάδου, 2011).

Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί σε αιτίες όπως: (1) η σημασία της ανάγνωσης και της γραφής για τη γενικότερη ακαδημαϊκή επιτυχία, (2) η πολυσύνθετη φύση των μαθηματικών και η ποικιλομορφία στην επίδοση, που καθιστούν δύσκολη την υιοθέτηση γενικών κριτηρίων για το αναμενόμενο επίπεδο κατανόησης, (3) οι

παρατηρούμενες αλλαγές στη φύση και το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, που απαιτούν αλλαγές και στα κριτήρια αξιολόγησης και (4) η βαθιά ριζωμένη αντίληψη ότι αντίθετα με τα λάθη στην ανάγνωση και τη γραφή, τα λάθη στα μαθηματικά και η συνακόλουθη αποτυχία είναι κάτι το αποδεκτό και ίσως αναμενόμενο, πιθανόν λόγω της φύσης του αντικειμένου (Αγαλιώτης, 1999). Ανεξάρτητα από το ποια από τις παραπάνω αιτίες ισχύει και επαληθεύει τα ερευνητικά δεδομένα, γεγονός παραμένει ότι υπάρχει ανάγκη για περισσότερη έρευνα στον χώρο των μαθησιακών δυσκολιών και της σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά.

Ο Geary (2004), σε μια επισκόπηση μελετών σε Αμερική, Ευρώπη και Ισραήλ, αναφέρει ότι το 5% έως 8% των παιδιών σχολικής ηλικίας, έχουν κάποια μορφή μνημονικού ή γνωστικού ελλείμματος, που παρεμβαίνει στην ικανότητά τους να μαθαίνουν τις έννοιες ή τις διαδικασίες σε έναν ή περισσότερους μαθηματικούς τομείς. Επίσης, από το σύνολο των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, περίπου το 50% αντιμετωπίζει δυσκολίες στη μάθηση των μαθηματικών (Fuchs & Fuchs 2001· Geary & Hoard, 2001), ενώ περίπου το 50% αυτών εμφανίζει μαθησιακές δυσκολίες, συνδυαστικά, στα μαθηματικά και στις γλωσσικές δεξιότητες (Ramma & Gowramma, 2002). Σε μια άλλη μελέτη των Shalev και των συνεργατών του (2001), περίπου το 3% έως 6% του γενικού μαθητικού πληθυσμού στο Ισραήλ θεωρείται ότι παρουσιάζει μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Οι δυσκολίες των παιδιών στα μαθηματικά δυσχεραίνουν το εκπαιδευτικό έργο και οδηγούν στη σχολική αποτυχία στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, δημιουργώντας σημαντικές αποκλίσεις κυρίως μεταξύ επάρκειας και απόδοσης στα μαθηματικά. Τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον αφορά στις πρώιμες μαθηματικές δυσκολίες σε μαθητές, δηλαδή από τα πρώτα χρόνια της σχολικής τους φοίτησης. Στη μελέτη των Bryant, Gersten, Scammacca και Chavez (2008) επισημαίνεται ότι 5% έως 10% παιδιών σχολικής ηλικίας εμφανίζουν μαθηματικές δυσκολίες και αυτές οι μαθηματικές δυσκολίες (π.χ. σε υπολογισμούς και επίλυση προβλημάτων) είναι ένας αναγνωρισμένος τύπος μαθησιακών δυσκολιών (Individuals with Disabilities Education Improvement Act of, 2004).

Ο μεγαλύτερος αριθμός ερευνών σχετικά με τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, αφορούν κυρίως στην αριθμητική και στην έννοια του αριθμού

(Dowker, 2005), ενώ τελευταία προστίθενται μελέτες που αναφέρονται στην επίλυση προβλημάτων (Fuchs et al, 2008· Mazzocco & Thompson, 2005· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Fuchs & Fuchs, 2002) και στη χρήση στρατηγικών (Torbeys, Verschaffel, & Chesquiere, 2004).

Σύμφωνα με τους Geary, Bailey και Hoard (2009), η συγκρότηση και η κατανόηση της έννοιας των αριθμών (number sense) περιλαμβάνουν την έμμεση αντίληψη των παιδιών για το απόλυτο και το σχετικό μέγεθος των συνόλων των αντικειμένων και των συμβόλων (αριθμών), που αντιπροσωπεύουν την ποσότητα αυτών των συνόλων. Εκδηλώνονται με την ικανότητα εντοπισμού της αριθμητικής τιμής, η οποία σχετίζεται με μικρές ποσότητες και μπορεί να παρέχει τη βάση για την πρώιμη μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο (Geary, 2006· Dehaene, Piazza, Pinel, Cohen, 2003).

2.2.1. Κατηγοριοποίηση - Οι τύποι των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά

Με γνώμονα τα γνωστικά ελλείμματα καθώς και τα χαρακτηριστικά που εμφανίζουν, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε πολλές υποομάδες (Augustiniak et al, 2005). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατηγοριοποίηση των Μαθησιακών Δυσκολιών στη μελέτη του Geary (2004), όπου διακρίνονται τρεις υποτύποι (βλ. Πίνακα 1):

1. *Μαθητές με προβλήματα στη χρήση των διαδικασιών* (procedural subtype) (π.χ. στρατηγικών ή αλγόριθμων των πράξεων). Χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα είναι η χρήση εξελικτικά ανώριμων διαδικασιών (π.χ. χρονοβόρων στρατηγικών μέτρησης, που χρησιμοποιούνται από νεότερους μαθητές, όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα), τα συχνά λάθη στην εκτέλεση των διαδικασιών, η πιθανή εξελικτική αργοπορία κατανόησης των εννοιών της διαδικασίας, οι δυσκολίες στην ακολουθία των πολλαπλών βημάτων σε πολύπλοκες διαδικασίες (π.χ. στη διαίρεση).

Βελτιώνονται από τάξη σε τάξη, αλλά η επίδοσή τους είναι όμοια με την επίδοση μικρότερων παιδιών με φυσιολογική εξέλιξη. Η δυσκολία αυτή συνδέεται με δυσλειτουργία του αριστερού εγκεφαλικού ημισφαιρίου. Επίσης δεν είναι ξεκάθαρη η συνύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών και στην ανάγνωση.

2. *Μαθητές με προβλήματα στη σημασιολογική μνήμη (semantic memory subtype).*

Το κύριο γνωστικό χαρακτηριστικό τους είναι η χαμηλή συχνότητα στην ανάκτηση βασικών αριθμητικών δεδομένων, δηλαδή στη γνώση και στην ευχερή ανάκληση των αποτελεσμάτων των πράξεων με δύο μονοψήφιους αριθμούς. Παρουσιάζουν ένα υψηλό ποσοστό λαθών στην ανάκληση αριθμητικών δεδομένων (π.χ. ανακαλούν το 4 στο πρόβλημα $2 + 3$, επειδή το 4 ακολουθεί στην απαρίθμηση το 2 και το 3) και ο χρόνος ανάκλησης σωστών απαντήσεων είναι μη συστηματικός (μπορεί να είναι μεγάλος). Δείχνει να είναι ένα κληρονομικό έλλειμμα που εμποδίζει και την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.

Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας σημειώνουν μικρή βελτίωση από τάξη σε τάξη, η επίδοσή τους είναι ποιοτικά διαφορετική από αυτή των κανονικών παιδιών και συνήθως παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες και στην ανάγνωση με φωνολογικά ελλείμματα. Η δυσκολία τους συνδέεται με δυσλειτουργίες του αριστερού εγκεφαλικού ημισφαίριου.

3. *Μαθητές με προβλήματα στην οπτικοχωρική αντίληψη (visuospatial subtype).*

Οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν δυσκολίες και σημειώνουν χωρικά λάθη στην αναπαράσταση αριθμητικών πληροφοριών και σχέσεων. Συνήθως κάνουν λάθη στην τοποθέτηση αριθμών στη θέση των ψηφίων στις στήλες των μονάδων, δεκάδων και εκατοντάδων στις κάθετες πράξεις, καθώς και στη θέση των ψηφίων σε πολυψήφιους αριθμούς που αποτελούνται από τα ίδια ψηφία (π.χ. 358-583).

Η δυσκολία αυτή συνδέεται με δυσλειτουργία του δεξιού εγκεφαλικού ημισφαίριου. Επίσης, σύμφωνα με τον Geary (2004), δε φαίνεται να συνδέεται με τις ειδικές αναγνωστικές δυσκολίες, τουλάχιστον με τις μορφές αυτών των δυσκολιών που χαρακτηρίζονται από φωνολογικά ελλείμματα.

ΥΠΟ-ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ				
Πηγή: David C. Geary, 2004. <i>Mathematics and Learning Disabilities. Journal of Learning Disabilities</i> , 37 (1), 4-15				
Γνωστικά χαρακτηριστικά	Νευροψυχολογικά χαρακτηριστικά	Γενετικά χαρακτηριστικά	Αναπτυξιακά χαρακτηριστικά	Συσχέτιση με δυσκολίες ανάγνωσης
Μαθητές με προβλήματα στη χρήση των διαδικασιών (Procedural Subtype)				
Συχνή χρήση σχετικά ανώριμων αναπτυξιακών διαδικασιών (που χρησιμοποιούνται δηλαδή από νεότερους μαθητές) Συχνά λάθη κατά την εκτέλεση των διαδικασιών Πιθανή αργοπορία κατανόησης των εννοιών της διαδικασίας Δυσκολίες στην ακολουθία πολλαπλών βημάτων σε πολύπλοκες διαδικασίες	Είναι ασαφές, αν και ορισμένα στοιχεία υποδεικνύουν μια δυσλειτουργία του αριστερού ημισφαιρίου και, σε ορισμένες περιπτώσεις, (ειδικά για τα προβλήματα προσδιορισμού αλληλουχίας) μία προμετωπιαία δυσλειτουργία	Ασαφές	Εμφανίζουν, σε πολλές περιπτώσεις, μια αναπτυξιακή καθυστέρηση (δηλαδή, επίδοση παρόμοια με εκείνη των νεότερων τυπικής επίδοσης μαθητών, που συχνά βελτιώνεται με την ηλικία και την τάξη)	Ασαφές
Μαθητές με προβλήματα στη σημασιολογική μνήμη (Semantic Memory Subtype)				
Δυσκολίες ανάκτησης μαθηματικών δεδομένων Υψηλό ποσοστό λαθών στην ανάκληση αριθμητικών δεδομένων Ο χρόνος ανάκλησης σωστών απαντήσεων είναι μη συστηματικός	Φαίνεται να σχετίζεται με δυσλειτουργία του αριστερού ημισφαιρίου, ενδεχομένως, στις οπίσθιες περιοχές για μια μορφή ελλείμματος ανάκτησης και στις προμετωπιαίες περιοχές Πιθανή υποφλοιώδης συμμετοχή	Φαίνεται να είναι κληρονομικό έλλειμμα	Φαίνεται να παρουσιάζουν μια αναπτυξιακή διαφορά (οι γνωστικές επιδόσεις και τα χαρακτηριστικά διαφέρουν από εκείνα των νεότερων τυπικών μαθητών και δεν αλλάζουν ουσιαστικά με την ηλικία ή την τάξη)	Φαίνεται ότι συνδυάζεται με φωνολογικά ελλείμματα
Μαθητές με προβλήματα στην οπτικο-χωρική αντίληψη (Visuospatial Subtype)				
Εμφανίζουν δυσκολίες και σημειώνουν χωρικά λάθη στην αναπαράσταση αριθμητικών πληροφοριών και σχέσεων Συχνή παρερμηνεία ή παρανόηση των χωρικών εκπροσωπούμενων πληροφοριών.	Φαίνεται να σχετίζεται με δυσλειτουργία του δεξιού ημισφαιρίου και ειδικότερα στις οπίσθιες περιοχές του δεξιού ημισφαιρίου, αν και μπορεί να εμπλέκεται επίσης και ο βρεγματικός φλοιός του αριστερού ημισφαιρίου	Ασαφές, αν και οι γνωστικές επιδόσεις και τα χαρακτηριστικά είναι κοινά με ορισμένες γενετικές διαταραχές (π.χ., σύνδρομο Turner)	Ασαφές	Δε φαίνεται να υπάρχει συσχέτιση

Πίνακας 1. Υπο-Τύποι των Μαθησιακών Δυσκολιών στα Μαθηματικά

2.2.2. Ανασκόπηση της φύσης των μαθηματικών δυσκολιών

Η πολυπλοκότητα του πεδίου των μαθηματικών καθιστά αποθαρρυντική την αναζήτηση τυχόν συνδεδεμένων μαθησιακών δυσκολιών. Οι ικανότητες σε οποιαδήποτε δεδομένη γνωστική περιοχή των μαθηματικών θα εξαρτηθούν από μια εννοιολογική κατανόηση του πεδίου και τη γνώση της διαδικασίας που υποστηρίζει την ενεργή λύση προβλημάτων (Geary, 1994). Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα παράδειγμα, στο οποίο η διδασκαλία εστιάζει στην εκμάθηση της εννοιολογικής θεμελίωσης (ο επαναλαμβανόμενος αριθμός του συστήματος είναι το 10) και στις σχετικές διαδικαστικές δεξιότητες, όπως η μεταφορά από τη στήλη των δεκάδων στη στήλη των μονάδων στην επίλυση πολύπλοκων αριθμητικών πράξεων (π.χ. στην αφαίρεση του 129 από το 243) (Fuson & Kwon, 1992).

Κατά την εξέταση της φύσης της γνωστικής ανάπτυξης που σχετίζεται με τις μαθηματικές δυσκολίες των μικρών μαθητών, ερευνητές (Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez 2008· Fuchs, Fuchs, & Hollenbeck, 2007· Jordan, Kaplan, Oláh, & Locuniak, 2006· Geary, 1990, 1993) μελέτησαν τα στοιχεία της “έννοιας του αριθμού” (number sense), την οποία καθόρισαν ως «μετακίνηση από την αρχική ανάπτυξη των βασικών τεχνικών μέτρησης σε πιο εξελιγμένες κατανοήσεις του μεγέθους των αριθμών, των αριθμητικών σχέσεων, των σχημάτων, των πράξεων και της θεσιακής αξίας» (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000: 129).

Οι Jordan et al (2006) προσδιόρισαν τα βασικά στοιχεία της έννοιας του αριθμού, τα οποία περιελάμβαναν την *καταμέτρηση* (π.χ. τις αρχές της πληθικότητας και της σταθερής ακολουθίας), την *επίγνωση του αριθμού* (π.χ. διάκριση της ποσότητας, μέτρηση ακολουθιών), τον *μετασχηματισμό των αριθμών* (π.χ. πρόσθεση και αφαίρεση, λεκτικοί και μη λεκτικοί υπολογισμοί) και την *εκτίμηση* (π.χ. το μέγεθος μιας ομάδας).

Σχετικά με τη συγκρότηση της έννοιας του αριθμού και την ικανότητα για απαρίθμηση, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες είναι πιθανό να παρουσιάζουν αδυναμίες σε βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως η ταξινόμηση, η σειροθέτηση και η διατήρηση. Αυτές οι αδυναμίες δεν αποτελούν χαρακτηριστικό μόνο στα πρώτα

σχολικά βήματα των μαθητών αλλά είναι εμφανείς και σε μεγαλύτερες τάξεις (Geary et al., 2000). Η κατανόηση του πώς οι μαθητές με πιθανές μαθηματικές δυσκολίες αποδίδουν στα παραπάνω στοιχεία συγκρινόμενοι με τους τυπικούς μαθητές, μπορεί να μας ενημερώσει για μαθηματικές παρεμβάσεις που στοχεύουν στην πρόληψη και την αποκατάσταση. Η έρευνα έχει προσδιορίσει τις προγνωστικές μεταβλητές των μαθηματικών δυσκολιών (Jordan et al., 2006· Fuchs et al., 2005· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Geary, Hamson, & Hoard, 2000· Geary, 1990), καθώς τα γνωστικά προβλήματα ανάπτυξης εκδηλώνονται με δυσκολίες στην κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων (π.χ. το μέγεθος, η αλληλουχία, η βάση του 10), στην επίλυση των προβλημάτων, στη χρήση αποτελεσματικών μετρήσεων και στρατηγικών υπολογισμού (π.χ., η μέτρηση προς τα πάνω, ο διπλασιασμός + 1) και στην επίλυση αριθμητικών συνδυασμών (δηλαδή, αριθμητικών δεδομένων) (Bryant et al., 2008). Η αριθμητική επίγνωση, η ανάγνωση, η εργαζόμενη μνήμη, η ταχύτητα επεξεργασίας και η οπτικο-χωρική αντίληψη, έχουν αναφερθεί ως πιθανοί δείκτες των ποιοτικών διαφορών μεταξύ ομάδων μαθητών που διαφέρουν στον βαθμό χαμηλής μαθηματικής επίδοσης (Johnson, Humphrey, Mellard, Woods, & Swanson, 2010· Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent, & Numtee, 2007).

Όσον αφορά στην ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων, οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα στη μετάβασή τους από την εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών σε στρατηγικές πιο σύνθετες και αποτελεσματικές (Geary, 2004). Επίσης, προβλήματα εμφανίζονται στην απόκτηση της δεξιότητας για τη διατήρηση στη μνήμη και την αυτόματη ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Cirino et al., 2007· Gersten et al., 2005).

2.2.3. Δυσαριθμησία

Το 1961, στο περιοδικό Archives of Neurology, ο Αμερικανός ερευνητής R. Cohn δημοσίευσε ένα άρθρο, όπου υιοθέτησε και πρότεινε για πρώτη φορά τον όρο “*δυσαριθμησία*” (dyscalculia), για να περιγράψει την ειδική εκείνη κατάσταση κατά την οποία ένας μαθητής εμφανίζει ανεξήγητα δυσκολίες στην πρόσκτηση μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, παρά την

απουσία οποιουδήποτε εμφανούς προβλήματος και οι οποίες είναι πιθανό να οφείλονται σε δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος. Από το 1961 και μετά, μια σειρά ερευνών, δημοσιεύσεων και προγραμμάτων στοχεύουν στη διερεύνηση αυτής της μαθησιακής δυσκολίας και των χαρακτηριστικών της (Αγαλιώτης, 2004).

Για πρώτη φορά συστηματική αξιολόγηση της Ειδικής Διαταραχής Αριθμητικών Δεξιοτήτων (Specific disorder of arithmetical skills) έγινε το 1974 από τον Τσέχο νευροψυχολόγο Kosc, ο οποίος χρησιμοποίησε τον όρο *“Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία”* την οποία και όρισε ως εξής: *«Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία είναι μια διαταραχή των μαθηματικών ικανοτήτων, που έχει τις ρίζες της σε μια γενετική ή εκ γενετής διαταραχή εκείνων των τμημάτων του εγκεφάλου που είναι τα άμεσα ανατομικο-φυσιολογικά υποστρώματα της ωρίμανσης των μαθηματικών ικανοτήτων, ανάλογα με την ηλικία, χωρίς μια ταυτόχρονη διαταραχή της γενικής νοητικής λειτουργίας»* (Kosc, 1974: 167). Ο ίδιος, χρησιμοποίησε επίσης, τον όρο *Ψευδοδυσαριθμησία/ Pseudodyscalculia* προκειμένου να αναφερθεί σε περιπτώσεις μη-τυπικής ανάπτυξης αριθμητικών δεξιοτήτων, οι οποίες οφείλονται σε εξωγενείς παράγοντες, όπως η ανεπαρκής διδασκαλία.

Η δυσαριθμησία είναι ένας γενικός όρος, που χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στις διάφορες συνθήκες που προκαλούν συγκεκριμένες δυσκολίες με τα μαθηματικά, όπως η αναπτυξιακή δυσαριθμησία, η μαθηματική αναπηρία, η αριθμητική μαθησιακή δυσκολία και η διαταραχή αριθμητικών δεδομένων, μεταξύ άλλων όρων.

Η αναπτυξιακή δυσαριθμησία, είναι μια κατάσταση που επηρεάζει την ικανότητα να αποκτηθούν αριθμητικές ικανότητες. Οι μαθητές με δυσαριθμησία, μπορούν να έχουν δυσκολία στην κατανόηση απλών αριθμητικών εννοιών, δεν έχουν μια διαισθητική κατανόηση των αριθμών και έχουν προβλήματα μάθησης αριθμητικών γεγονότων και διαδικασιών. Ακόμα κι αν παράγουν μια σωστή απάντηση ή χρησιμοποιούν μια σωστή μέθοδο, μπορούν να το κάνουν μηχανικά και χωρίς αυτοπεποίθηση (DfES 2001, στο Emerson & Babbie, 2010).

Η αναπτυξιακή δυσαριθμησία χαρακτηρίζεται από δυσκολίες που αφορούν τη δυσχερή πρόσκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων παρά την παρουσία τυπικής νοημοσύνης, συναισθηματικής σταθερότητας, πρόσφορης διδασκαλίας και

κινητοποίησης για μάθηση (Shalev, 2004). Περιγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία σαν ειδική μαθησιακή δυσκολία της νοητικής αναπαράστασης και του νοητικού μη συμβολικού χειρισμού αριθμητικών μεγεθών. Η αιτιολογία της, παρότι σύνθετη και πολυπαραγοντική, έχει συνδεθεί στενά με γενετική προδιάθεση και κάποιας μορφής δυσλειτουργία του ιδιαίτερα σύνθετου εγκεφαλικού μηχανισμού που υποστηρίζει τις μαθηματικές δεξιότητες (Shalev, 2004· Shalev et al., 2001). Πρόσφατα οι Szűcs και Goswami (2013) περιγράφουν την αναπτυξιακή δυσαριθμσία ως μια κατάσταση σταθερά χαμηλής μαθηματικής επίδοσης που έχει αναπτυξιακή προέλευση και η οποία σχετίζεται με κάποιο είδος γνωστικών λειτουργιών ή και αναπαραστάσεων. Αναφέρουν ότι εμφανίζεται, όταν συνυπάρχει κίνητρο για τη μελέτη των μαθηματικών και τυπική πρόσβαση στην κατάλληλη μαθηματική εκπαίδευση. Η έρευνά τους προτείνει ότι οι περισσότεροι μαθητές, που εμφανίζουν αδυναμίες στα μαθηματικά, δεν παρουσιάζουν αναπτυξιακή δυσαριθμσία.

Οι Price και Ansari (2013) στην έρευνά τους προτείνουν τη διάκριση της αναπτυξιακής δυσαριθμσίας σε πρωτογενή και δευτερογενή. Η πρωτογενής αναπτυξιακή δυσαριθμσία συνοδεύεται από σοβαρές μαθηματικές δυσκολίες, οι οποίες προκαλούνται, σύμφωνα με τους ερευνητές, από αναπτυξιακή έκπτωση της νευρολογικής βάσης της επεξεργασίας αριθμητικών μεγεθών. Οι μαθητές που έχουν μαθηματικές δυσκολίες εξαιτίας άλλων παραγόντων, όπως προβλήματα στη μνήμη εργασίας, προβλήματα προσοχής και συμπεριφοράς, ανεπαρκή σχολική φοίτηση κ.ά. θεωρείται ότι έχουν δευτερογενή αναπτυξιακή δυσαριθμσία.

Οι επιμέρους δεξιότητες που εμφανίζονται ελλειμματικές σε μαθητές με αναπτυξιακή δυσαριθμσία (ξεχωριστά ή σε συνδυασμό), από γνωστική άποψη, αφορούν: την ικανότητα αναπαράστασης λεκτικών συμβόλων (συχνά εμφανίζεται και σαν αδυναμία ανάκλησης βασικών αριθμητικών δεδομένων), τις επιτελικές λειτουργίες προγραμματισμού και επαγωγικής σκέψης, και την ικανότητα οπτικοχωρικής επεξεργασίας και εκτίμησης (Geary et al., 2000).

Τα χαρακτηριστικά της αναπτυξιακής δυσαριθμσίας, διαφέρουν ανάλογα με την ηλικία και το φύλο του μαθητή. Γενικά όμως, περιγράφονται σαν δυσκολίες στη μάθηση και ανάκληση αριθμητικών δεδομένων, στην εκτέλεση νοητικών υπολογισμών, αριθμητικών πράξεων, επίλυσης προβλημάτων, κ.ά. Ο Newman

(1997), συνοψίζοντας και ομαδοποιώντας τα ευρήματα διαφόρων ερευνών, αναφέρει τα κυριότερα χαρακτηριστικά της. Σύμφωνα με αυτή την καταγραφή, τα παιδιά με δυσαριθμησία:

- παρουσιάζουν τουλάχιστον κανονική γλωσσική ανάπτυξη (προφορικός λόγος, ανάγνωση, γραφή), καλή οπτική μνήμη γραπτών λέξεων και ικανοποιητική επίδοση σε γνωστικά αντικείμενα χωρίς απαιτήσεις μαθηματικής ικανότητας,
- παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών του χρόνου και του προσανατολισμού στον χώρο,
- εμφανίζουν αδυναμίες στη μνήμη προσώπων και τη χρήση χρημάτων· κάνουν λάθη στην ανάκληση ονομάτων,
- δυσκολεύονται στην ανάκληση χρονοδιαγραμμάτων και γεγονότων σε ακολουθία,
- σημειώνουν παραλείψεις, προσθήκες, αντιμεταθέσεις και αντικαταστάσεις στη γραφή και στην ανάγνωση αριθμών,
- αδυνατούν να κατανοήσουν και να ανακαλέσουν μαθηματικές έννοιες, τύπους και αλγόριθμους, καθώς και να απομνημονεύσουν βασικά αριθμητικά δεδομένα,
- δεν κατακτούν τον νοερό υπολογισμό των πράξεων,
- δυσκολεύονται να σχηματίζουν εσωτερικές νοητικές αναπαραστάσεις και δεν πετυχαίνουν στην ανάπτυξη στρατηγικού σχεδιασμού.

Ο αυτόνομος χαρακτήρας της δυσαριθμησίας, σκιαγραφείται ως μια ομάδα διάχυτων διαταραχών στην απόκτηση των μαθηματικών ικανοτήτων, που διακρίνονται με σαφή τρόπο από τις υπόλοιπες μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και οι οποίες αποδίδονται σε προβλήματα του κεντρικού νευρικού συστήματος και όχι σε μειωμένη νοημοσύνη ή σε ακατάλληλη σχολική φοίτηση (Ramma & Gowramma, 2002). Η δυσαριθμησία επηρεάζει όλο το φάσμα των μαθηματικών γνώσεων από τις προμαθηματικές έννοιες μέχρι την επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με την Badian (1983), μπορεί να επικεντρώνεται σε μια περιοχή των μαθηματικών, οπότε και χαρακτηρίζεται ανάλογα (π.χ. αλεξία και αγραφία αριθμών, χωρική δυσαριθμησία, αναριθμησία, δυσαριθμησία προσοχής

και ακολουθιών). Τα παιδιά με δυσαριθμησία παρουσιάζουν συχνά μια ακαμψία στο γνωστικό τους προφίλ (cognitive style) και έχουν μια εμμονή στη χρήση συγκεκριμένων μαθηματικών προτύπων π.χ. στη χρήση αντικειμένων (ξυλάκια) κατά την εκτέλεση πράξεων και δεν προχωρούν στο εικονιστικό και συμβολικό επίπεδο (Πόρποδας, 2003). Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές με δυσαριθμησία παρουσιάζουν αδυναμίες στη βραχυπρόθεσμη και στην εργαζόμενη μνήμη, ιδιαίτερα για υλικό που παρουσιάζεται οπτικά, στην αποκωδικοποίηση μαθηματικών πληροφοριών επίσης οπτικά δοσμένων, ενώ παρουσιάζουν καλά αναπτυγμένες λεκτικές ικανότητες (Αγαλιώτης, 2004· Shalev et al., 2001). Οι Ramma και Gowramma (2002) στη μελέτη τους αναφέρουν τους παρακάτω παράγοντες που σχετίζονται με τη δυσαριθμησία:

- καθυστέρηση στην κατάκτηση των εννοιών της σειροθέτησης, διατήρησης και ταξινόμησης,
- προσκόλληση του μαθητή στη χρήση των δαχτύλων στην αρίθμηση και την εύρεση αριθμητικών αποτελεσμάτων,
- αδυναμία ανάκλησης μαθηματικών εννοιών που έχουν διδαχθεί ή προαπαιτούμενων γνώσεων και δεξιοτήτων,
- δυσκολία διατήρησης και ανάκλησης από τη μνήμη αριθμητικών δεδομένων
- αργή επεξεργασία πληροφοριών,
- διαχρονική αδυναμία στην επεξεργασία των στοιχείων που εμπεριέχονται στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα,
- ελλείμματα στην επεξεργασία πληροφοριών, στην προσοχή, στον οπτικο-χωρικό σχεδιασμό, στην επεξεργασία ακουστικών ερεθισμάτων, στη μνήμη καθώς και στον οπτικο-κινητικό συντονισμό,
- εμφάνιση φοβίας και υψηλών επιπέδων άγχους για τα μαθηματικά.

Ο όρος Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά μπορεί να θεωρείται συνώνυμος με τον όρο Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία, αλλά είναι διακριτός, όταν χρησιμοποιείται και για αναφορά στην ευρύτερη κατηγορία των μαθηματικών δυσκολιών. Σύμφωνα με τους Rubinsten και Henik (2009), είναι σκόπιμο ο όρος Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά να χρησιμοποιείται ως 'ομπρέλα', ενώ ο όρος Αναπτυξιακή

Δυσαριθμησία να αποδίδεται στα εγγενή ελλείμματα, όπως τα ελλείμματα στην επίγνωση του αριθμού.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά δεν είναι πάντα απαραίτητο να συμβαδίζουν με προβλήματα στην ανάγνωση και τη γραφή. Ως εκ τούτου, ανάμεσα στα παιδιά με δυσαριθμησία εντοπίζονται μικρότερες υπο-ομάδες, όπως τα παιδιά που παρουσιάζουν ταυτόχρονα δυσκολίες στα μαθηματικά και στην ανάγνωση-γραφή, τα παιδιά με ταυτόχρονες δυσκολίες στα μαθηματικά και στη γραφή και τα παιδιά που εμφανίζουν δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά (Ramma & Gowramma, 2002). Επίσης, τα γνωστικά ελλείμματα που αναφέρονται στη νοητική αναπαράσταση της γνώσης και κυρίως σε συμβολικό επίπεδο, καθώς και στη λεκτική μνήμη, είναι πολύ πιθανό να υποδηλώνουν και γλωσσικά ελλείμματα των μαθητών. Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), μετά από γνωστικές και νευροψυχολογικές μελέτες, φαίνεται ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά διαφοροποιούνται στον τρόπο σκέψης σε σχέση με τους μαθητές οι οποίοι παρουσιάζουν δυσκολίες τόσο στα μαθηματικά όσο και στην ανάγνωση και γραφή.

Αξίζει τέλος, να σημειωθεί ότι η δυσαριθμησία - όπως και η δυσλεξία - είναι σύνδρομο, δηλαδή σύνολο χαρακτηριστικών που συνυπάρχουν. Επομένως, η ανίχνευση σε κάποιον μαθητή μίας μόνο από τις παραμέτρους που συνήθως περιλαμβάνονται στις σχετικές περιγραφές δεν αποτελεί επαρκή συνθήκη να συνδεθεί το άτομο αυτό με το φαινόμενο και να καταταχθεί στη σχετική κατηγορία (Αγαλιώτης, 2004).

2.3. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών

Οι Miller και Mercer (1998) και ο Κολιάδης (2002) αναφέρουν ότι το μοντέλο επεξεργασίας των πληροφοριών μάς παρέχει το πλαίσιο για να εξετάσουμε και να ερμηνεύσουμε τα προβλήματα μάθησης των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες. Η θεωρία αυτή ερμηνεύει το ποια πληροφορία αποκτάται και με ποιον τρόπο. Στα θεμελιώδη στοιχεία της περιλαμβάνονται η προσοχή, οι αισθήσεις, η αντίληψη, η βραχυπρόθεσμη μνήμη, η μακροπρόθεσμη μνήμη και η αντίδραση (απόκριση). Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά συχνά παρουσιάζουν προβλήματα που συμβάλλουν στη χαμηλή τους επίδοση, τα οποία σχετίζονται με

την επεξεργασία των πληροφοριών. Τέτοια προβλήματα είναι η διάσπαση της προσοχής, οι αντιληπτικές διαταραχές (δυσκολίες οπτικοχωρικές και ακουστικής επεξεργασίας), τα προβλήματα μνήμης, προσληπτικού και εκφραστικού λόγου, οι αδυναμίες αφηρημένου συλλογισμού, οι κινητικές δυσκολίες και άλλα ελλείμματα στην επεξεργασία των πληροφοριών.

Συνοψίζοντας τα στοιχεία από έρευνες (Dowker, 2005· Fuchs & Fuchs, 2002· Kavale, & Forness, 2000· Miller & Mercer, 1998· Lerner, 1993) μπορεί να γίνει μια ταξινόμηση των παραγόντων που προκαλούν δυσκολίες στη μάθηση των μαθηματικών σε: (1) *Ενδογενείς – ατομικούς παράγοντες*: όπως συναισθηματικοί παράγοντες (π.χ. συναισθηματικές διαταραχές, στάση προς το γνωστικό αντικείμενο, άγχος), ψυχοκινητικοί (έλλειψη μαθησιακής ετοιμότητας, διαταραχές στην οπτικο-χωρική αντίληψη), γνωστικοί (ελλιπής νοητική ικανότητα, δυσκολίες στην αναγνώριση συμβόλων, στη γλωσσική ικανότητα και επικοινωνία, στη μνήμη, σε γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, ελλείψεις στις βασικές μαθηματικές γνώσεις), (β) *Εξωγενείς – περιβαλλοντικούς παράγοντες*: όπως το κοινωνικό και οικονομικό επίπεδο της οικογένειας, το στερημένο μαθησιακό περιβάλλον, η ανεπαρκής διδασκαλία, η ύλη των μαθηματικών, οι διαφορές των δύο φύλων και (γ) *Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες*, όπως η δυσαριθμησία κ.ά. Ωστόσο, από τους ερευνητές επισημαίνεται ότι ο κάθε μαθητής είναι μοναδικός και δε θα εμφανίσουν όλα τα παιδιά που έχουν μαθησιακές δυσκολίες τα ίδια χαρακτηριστικά.

Έχουν γίνει προσπάθειες από πολλούς ερευνητές (Miller & Mercer 1998· Miller & Mercer 1997· Bley & Thornton 1995· Lerner 1993), για να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο διάφορα χαρακτηριστικά επηρεάζουν τη μαθησιακή ικανότητα των παιδιών με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες σε διάφορους γνωστικούς τομείς (Αγαλιώτης, 2004). Όπως επισημαίνουν πολλοί μελετητές των μαθησιακών δυσκολιών στα Μαθηματικά (Fuchs & Fuchs, 2002· Miller & Mercer 1998· Bley & Thornton 1995), πολλοί ενδογενείς παράγοντες επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών. Μια προσεκτική μελέτη του περιεχομένου των κατηγοριών στις οποίες καταλήγουν οι παραπάνω ερευνητές σε μια προσπάθεια σύνθεσης των συμπερασμάτων τους, επισημαίνει τη σημασία των παρακάτω ειδικών δυσκολιών και προβλημάτων: (1) αντιληπτικές δυσκολίες, (2) αδυναμίες λεπτής κινητικότητας και οπτικο-κινητικού συντονισμού, (3) μνημονικά προβλήματα, (4) δυσκολίες

ολοκλήρωσης, (5) αδυναμίες προσληπτικού και εκφραστικού λόγου, (6) αδυναμίες αφηρημένης σκέψης, (7) ελλειμματική προσοχή, (8) διαταραχές γνωστικού ύφους, (9) ανεπαρκείς γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές και (10) συναισθηματικές διαταραχές.

Στον Πίνακα 2, που ακολουθεί, αποτυπώνονται οι παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών καθώς και τα χαρακτηριστικά των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά με βάση κυρίως τη σχετική αναφορά των Bley και Thornton (1995).

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΤΩΝ
Δυσκολίες οπτικής αντίληψης	αντίληψη μορφής πλαισίου	<ul style="list-style-type: none"> • αδυναμία συγκέντρωσης της προσοχής • σε ένα φύλλο εργασίας χάνουν το σημείο όπου εργάζονται • δεν ολοκληρώνουν την εργασία τους • διαβάζουν λάθος πολυψήφιους αριθμούς
	διάκριση αντιληπτικών μορφών	<ul style="list-style-type: none"> • δε διακρίνουν σωστά τα σύμβολα των αριθμών και πράξεων (π.χ. το + με το x) • δε διακρίνουν σχήματα, νομίσματα, δείκτες του ρολογιού • αποδίδουν καθρεπτικά μονοψήφιους αριθμούς (π.χ. το 6 ως 9 ή το 3 με το ε) • αντιστρέφουν τη σειρά των ψηφίων πολυψήφιων αριθμών (π.χ. το 12 ως 21)
	χωρο-χρονική οργάνωση	<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολεύονται με τον χειρισμό εννοιών, όπως πάνω, κάτω, εμπρός, πίσω, πριν, μετά... • τοποθετούν αριθμούς σε λάθος στήλη (Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες) • δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σημασία της θεσιακής αξίας • μεταφέρουν λάθος ψηφίο στην επόμενη στήλη (π.χ. άθροισμα 15: κρατούν 1 και μεταφέρουν το 5) • μεταφέρουν κρατούμενα σε λάθος στήλη • δεν τηρούν τη σωστή ακολουθία ενεργειών κατά την εφαρμογή αλγορίθμων • δυσκολεύονται να γράφουν τους αριθμούς πάνω στη γραμμή του τετραδίου • δυσκολεύονται στη σύγκριση πολυψήφιων αριθμών
Δυσκολίες ακουστικής αντίληψης		<ul style="list-style-type: none"> • σύγχυση όρων ή λέξεων που μοιάζουν φωνολογικά (π.χ. βάζω και βγάζω) • δυσκολεύονται στην επίλυση προφορικών ασκήσεων και προβλημάτων
Αδυναμίες λεπτής κινητικότητα και οπτικο-κινητικού συντονισμού		<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολεύονται να χειριστούν χειροπιαστά υλικά • γράφουν αργά και κάνουν πολλά λάθη κατά τη γραφή αριθμών • δεν μπορούν να προσαρμόσουν το μέγεθος των αριθμητικών ψηφίων στον διαθέσιμο χώρο
Προβλήματα μνήμης	βραχυπρόθεσμη μνήμη	<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολεύονται να διατηρήσουν στη μνήμη αριθμούς • δεν μπορούν να συγκρατήσουν πληροφορίες κατά την επίλυση προβλημάτων • κάνουν λάθη στην αντιγραφή ασκήσεων • ξεχνούν τα βήματα ενός αλγόριθμου
	μακροπρόθεσμη μνήμη	<ul style="list-style-type: none"> • αδυνατούν να αυτοματοποιήσουν τα βασικά αριθμητικά δεδομένα • δυσκολεύονται στην ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων
	μνήμη ακολουθιών	<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολία στη λεκτική έκφραση της ώρας και στη μέτρηση χρημάτων • δεν μπορούν να επιλύσουν σύνθετα προβλήματα ή ασκήσεις με πολλά βήματα

Δυσκολίες ολοκλήρωσης		<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολίες στην ταξινόμηση και εύρεση ομοιοτήτων/διαφορών (π.χ. μονοί/ζυγοί) • δυσκολίες στην ανάγνωση πολυψήφιων αριθμών (αδυναμία ομαδοποίησης ανά τρία) • δυσκολία στην εύρεση της κατάλληλης πράξης στην επίλυση προβλημάτων • δυσκολίες στη μέτρηση ανά 2,3 ... και στην έναρξη μέτρησης από τυχαίο αριθμό
Αδυναμίες λόγου	προσληπτικού λόγου	<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολεύονται στη σύνδεση των αριθμητικών όρων (π.χ. προσθετός, μείον...) • δεν μπορούν να εκτελέσουν οδηγίες που περιλαμβάνουν όρους (π.χ. βρες το άθροισμα) • προβληματίζονται με έννοιες που εκφράζονται με ποικιλία όρων (π.χ. συν, και, βάζω) • δυσκολία στα προβλήματα στη μετάφραση πληροφοριών σε νοητικές αναπαραστάσεις
	εκφραστικού λόγου	<ul style="list-style-type: none"> • αδυνατεί να εκφράσει με προφορικό μαθηματικό λόγο, αυτό που σκέφτεται • αποφεύγει τις προφορικές απαντήσεις ιδιαίτερα όταν πρέπει να τις δώσει γρήγορα • αποδίδει καλύτερα στα γραπτά απ' ότι στα προφορικά • δυσκολεύεται στην προφορική περιγραφή του αλγόριθμου/στρατηγικής που ακολουθεί
Αδυναμίες αφηρημένης σκέψης		<ul style="list-style-type: none"> • δυσκολία στην κατανόηση των ιδιοτήτων των πράξεων (π.χ. αντιμεταθετική) • αδυναμία στην κατανόηση μαθηματικών συμβόλων (π.χ. $< = >$) • δυσκολίες στη σύγκριση μεγεθών και ποσοτήτων και στην επίλυση προφορικών προβ/των • λειτουργούν πολύ καλύτερα με τη χρήση χειροπιαστών αντικειμένων
Ελλειμματική προσοχή		<ul style="list-style-type: none"> • αδυναμία συγκέντρωσης στο προς μάθηση αντικείμενο • αργός ρυθμός προόδου και εμφάνιση πολλών λαθών και υπερκινητικότητα
Διαταραχές γνωστικού ύφους		<ul style="list-style-type: none"> • αδυναμία επεξεργασίας των κατάλληλων πληροφοριών για την επίλυση προβλημάτων • βιασύνη και παρορμητικότητα στην ολοκλήρωση εργασιών
Ανεπαρκείς γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές		<ul style="list-style-type: none"> • αδυνατούν να ξεχωρίσουν τις πληροφορίες στα προβλήματα (π.χ. γνωστά- άγνωστα) • δε διαβάζουν επανειλημμένα, παραφράζουν ή αναπαριστούν τα προβλήματα • δυσκολία στην επιλογή της κατάλληλης πράξης για την επίλυση του προβλήματος • δεν ελέγχουν την ορθότητα των ενεργειών τους για τη λύση του προβλήματος • αδυνατούν να επιλέξουν τις κατάλληλες τεχνικές/στρατηγικές ανάλογα με την περίπτωση
Συναισθηματικά προβλήματα		<ul style="list-style-type: none"> • εμφανίζουν αρνητική στάση στο μάθημα των μαθηματικών • παρουσιάζουν ιδιαίτερο άγχος ή φοβία στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών

Πίνακας 2. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών (Bley & Thornton, 1995)

Όλες οι παραπάνω συμπεριφορές δεν είναι παρά μόνο ενδεικτικές και θα μπορούσαν να συμπληρωθούν από τις εμπειρίες των εκπαιδευτικών με μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Αν και τα παραπάνω χαρακτηριστικά έχουν αναφερθεί ως αιτίες Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά, τα παιδιά που τα εμφανίζουν δε διεκδικούν την αποκλειστικότητα κάποιων αρνητικών γνωστικών χαρακτηριστικών, αλλά μάλλον παρουσιάζουν ποιοτικές και ποσοτικές διαφορές σε σύγκριση με τον τυπικό μαθητικό πληθυσμό ως προς αυτά τα χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια, τα παιδιά με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά παρουσιάζουν κοινές δυσκολίες με τα άλλα παιδιά, αλλά σε εντονότερο βαθμό, ή χρησιμοποιούν τις ίδιες τεχνικές με πολύ διαφορετικό και συνήθως αναποτελεσματικό τρόπο. Το γεγονός ότι τα παραπάνω χαρακτηριστικά εμφανίζονται σε ποικιλία συνδυασμών, βαθμών και τύπων δυσκολεύει την οργανωμένη μελέτη και ιδιαίτερα την αποτελεσματική αντιμετώπισή τους (Αγαλιώτης, 2004).

Αρκετές μελέτες έχουν περιγράψει μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες που παρουσίασαν ελλείμματα και σε μαθηματικούς υπολογισμούς και στην επίλυση προβλημάτων (Cawley, Miller, & School, 1987· Englert, Culatta, & Horn, 1987· Scruggs & Masterpieiri, 1986), καθώς και στην εκτέλεση συγκεκριμένων μαθηματικών στρατηγικών (Swanson & Rhine, 1985). Οι Cawley και Miller (1989) ανέφεραν ότι μαθητές 8 και 9 ετών, προσδιορίζονται ως μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες που εκτελούν μαθηματικές ασκήσεις στο επίπεδο της Α' τάξης σε υπολογισμούς και εφαρμογές. Οι Fleischner, Garnett και Shepherd (1982) βρήκαν ότι μαθητές ηλικίας 10 ετών με μαθησιακές δυσκολίες ολοκλήρωναν βασικές προσθέσεις όχι καλύτερα από μαθητές 8 ετών χωρίς μαθησιακές δυσκολίες. Οι Cawley, Parmar, Yan και Miller (1996) επισημαίνουν στις ερευνητικές μελέτες τους, ότι ενώ οι τυπικοί μαθητές μαθαίνουν τις μαθηματικές έννοιες με ένα συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αποκτούν δεξιότητες σε μια "τμηματική" ακολουθία και έχουν χαμηλότερα ποσοστά διατήρησης από τους συνομηλίκους τους χωρίς δυσκολίες. Αυτά τα προβλήματα διατήρησης αυξάνονται, καθώς οι έννοιες δυσκολεύουν. Συγκεκριμένα, οι Miles και Forcht (1995) αναφέρουν ότι πολλοί μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες κατέδειξαν προβλήματα, όταν συνάντησαν για πρώτη φορά αλγεβρικές έννοιες, λόγω της συμβολικής ή αφηρημένης σκέψης που εμπλέκεται. Οι Baroody και Hume (1991) υπενθυμίζουν

ότι οι περισσότεροι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν είναι νοητικά ανάπηροι, αλλά απαιτούν διδασκαλία που να είναι σχεδιασμένη στον τρόπο που τα παιδιά σκέφτονται και μαθαίνουν. Η διδασκαλία θα πρέπει να επικεντρωθεί: 1) στην κατανόηση των εννοιών, 2) στη μάθηση που είναι ενεργή και σκόπιμη, 3) στη σύνδεση της τυπικής διδασκαλίας με την άτυπη γνώση και 4) στην ενθάρρυνση του προβληματισμού και της συζήτησης. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία των μαθηματικών για όλα τα παιδιά, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων με μαθησιακές δυσκολίες, θα πρέπει: α) να προωθεί ένα ευρύ φάσμα των μαθηματικών εννοιών, που υπερβαίνουν τον υπολογισμό και περιλαμβάνουν τη γεωμετρία και τα κλάσματα, β) να ευνοεί την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών σε στοχευμένες μαθηματικές δραστηριότητες, που έχουν νόημα για τους ίδιους, γ) να ενθαρρύνει και να αξιοποιεί τις δυνάμεις των παιδιών και τις άτυπες γνώσεις τους και δ) να ενθαρρύνει τους μαθητές να δικαιολογούν, να συζητούν και να συγκρίνουν ιδέες και στρατηγικές.

2.3.1. Δομικά στοιχεία και απαιτήσεις στη μάθηση των Μαθηματικών

Μια γενική θεωρητική παραδοχή που αποδέχονται πολλοί ερευνητές, είναι ότι η μαθηματική ικανότητα αποτελείται από πολλαπλές ικανότητες που έχουν διδαχθεί και μαθευτεί με έναν ιεραρχικό τρόπο (Dowker, 2005· Aunola, Leskinen, Lerkkanen, & Nurmi, 2004· Geary, 1994). Δηλαδή, βασικές δεξιότητες, όπως η κατανόηση του περισσότερο/λιγότερο σε μικρές ποσότητες και η μέτρηση, είναι προαπαιτούμενα για την επίλυση βασικών αριθμητικών στόχων (π.χ. $3+4=7$), πρώτα μέσω διαδικασιών καταμέτρησης και αργότερα με την άμεση ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων από τη μακρόχρονη μνήμη (Mazzocco & Thompson, 2005· Geary et al., 2000). Πιο σύνθετες μαθηματικές δεξιότητες, όπως ο υπολογισμός πολυψήφιων αριθμών και η επίλυση προβλημάτων, διευκολύνονται από την εκμάθηση των βασικών αριθμητικών πράξεων, την ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων, την εννοιολογική κατανόηση της θεσιακής αξίας και του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης καθώς και των κανόνων υπολογισμού (Geary, 2004· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003).

Η προσπάθεια συστηματικής μελέτης των επιμέρους γνώσεων και δεξιοτήτων που πρέπει να κατακτήσουν οι μαθητές, προκειμένου να θεωρηθούν πετυχημένοι

στη γνωστική περιοχή των μαθηματικών, έχει οδηγήσει σε διάφορες κατηγοριοποιήσεις της μαθηματικής γνώσης (Goldman & Hasselbring, 1998). Όλες αυτές οι κατηγοριοποιήσεις αναγνωρίζουν σταθερά τη σημασία και τον ρόλο κάποιων βασικών δομικών στοιχείων, τα οποία κατά τον Andersson (2008) είναι: 1) η διατήρηση και ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων, 2) η μάθηση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών, 3) η χρήση στρατηγικών μέτρησης, 4) ο γραπτός υπολογισμός και η χρήση αλγορίθμων και 5) η επίλυση προβλημάτων.

Καθεμιά από αυτές τις κατηγορίες, για να κατακτηθεί, θέτει ορισμένες γνωστικές απαιτήσεις:

1. *Η διατήρηση και ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων.* Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα (Β.Α.Δ.) μπορεί να είναι: (α) αριθμητικά δεδομένα, κυρίως αθροίσματα και διαφορές μονοψήφιων αριθμών (π.χ. $6+2=8$, $10-6=4$), (β) μαθηματικοί όροι (π.χ. άθροισμα, συν, πλην), (γ) μαθηματικά σύμβολα (π.χ. +, x, :) και (δ) μαθηματικοί τύποι (π.χ. οι τύποι των εμβαδών), τα οποία εμπλέκουν όλα τα είδη της μνήμης (εργαζόμενη - βραχυπρόθεσμη, μακροπρόθεσμη, μνήμη ακολουθιών κ.λπ.) σε αυτή τη διαδικασία με στόχο την αυτοματοποιημένη χρήση των παραπάνω στοιχείων (Αγαλιώτης, 2004). Η αυτοματοποίηση στην ανάκληση των Β.Α.Δ. είναι πολύ σημαντική στα πλαίσια της εκτέλεσης σύνθετων εργασιών (όπως οι πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς και η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων), καθώς δε δεσμεύεται ένα σημαντικό μέρος της προσοχής και της βραχυπρόθεσμης μνήμης και ο μαθητής μπορεί να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις ενός περίπλοκου μαθηματικού έργου (Andersson, 2008). Το ίδιο σημαντικό για την ολοκλήρωση μαθηματικών ενεργειών είναι και η κατανόηση και αποτελεσματική συγκράτηση μαθηματικών όρων, συμβόλων και τύπων.

2. *Η μάθηση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών.* Παραδείγματα μαθηματικών εννοιών είναι ο αριθμός, η πρόσθεση, οι έννοιες σύγκρισης (π.χ. περισσότερο, λιγότερο), η θεσιακή αξία κ.λπ. Λόγω της δυνατότητας που προσφέρουν στο παιδί να προσαρμόζει σε νέες καταστάσεις όσα έχει ήδη μάθει, οι έννοιες συνιστούν το κύριο στοιχείο της συμβολικής δύναμης των μαθηματικών (Miller & Mercer, 1997). Η εννοιολογική ανάπτυξη προϋποθέτει την κατασκευή σχέσεων ανάμεσα σε παλιές και νέες πληροφορίες από τον ίδιο τον μαθητή. Η κατασκευή αυτή έχει προσωπικό χαρακτήρα και εξαρτάται από την προηγούμενη

γνώση, την εμπειρία και τη στάση του μαθητή προς το γνωστικό αντικείμενο. Επομένως, ο μαθητής πρέπει να έχει όσο το δυνατόν πιο ενεργητικό ρόλο σε κατάλληλες μαθησιακές συνθήκες, προκειμένου να επισημάνει και να συνθέσει τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των εννοιών (Hanich et al., 2001). Επίσης, ένα άλλο στοιχείο των εννοιών σχετίζεται με την αλυσιδωτή τους σύνδεση και την ανάγκη να ελέγχεται ο βαθμός στον οποίο ο μαθητής έχει κατακτήσει τις “προϋποτιθέμενες” ή “χαμηλότερης τάξης” έννοιες, πριν διδαχθεί μια καινούργια, “υψηλότερης τάξης” έννοια. Για παράδειγμα, προϋπόθεση της κατανόησης της σημασίας του “κρατούμενου” στην πρόσθεση είναι η κατάκτηση της έννοιας της θεσιακής αξίας (Ostad, 1998). Η κατανόηση της θεσιακής αξίας βοηθά τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις αριθμητικές σχέσεις και το “πώς” και “γιατί” των διαδικασιών υπολογισμού (Van de Walle, 2004).

3. *Η χρήση στρατηγικών μέτρησης.* Η ανάπτυξη της υπολογιστικής ευχέρειας βασίζεται στη χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης και υπολογισμού (Bryant et al., 2008). Στην αρχική εκμάθηση των αριθμητικών πράξεων, π.χ. της πρόσθεσης, τα παιδιά συνήθως μετρούν και τους δυο προσθετέους (π.χ. 5+3). Αυτή η διαδικασία μέτρησης μερικές φορές εκτελείται με τη βοήθεια των δακτύλων “στρατηγική μέτρησης με τα δάχτυλα” και μερικές φορές χωρίς αυτά, “στρατηγική λεκτικής μέτρησης” (Siegler & Shrager, 1984). Ταυτόχρονα, με τη χρήση ή όχι των δακτύλων, μπορούν να εφαρμόσουν και δύο άλλες στρατηγικές: α) τη “στρατηγική μέτρησης όλων” (π.χ. για το άθροισμα 4+3 μέτρηση και των δύο προσθετέων ξεκινώντας από το 1) και β) τη “στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω” (π.χ. ο μαθητής στο άθροισμα 4+3, απαριθμεί μετά το (4). Καθώς οι μαθητές υπολογίζουν με τη χρήση των παραπάνω στρατηγικών, αναπτύσσονται αναπαραστάσεις στη μακρόχρονη μνήμη για τα βασικά δεδομένα. Οι αναπαραστάσεις αυτές επιτρέπουν στους μαθητές την αυτόματη ανάκλησή τους σε αποτελέσματα αριθμητικών πράξεων (π.χ. αυτόματη απάντηση του 7 στην ερώτηση “πόσο κάνει 4+3;”), καθώς και την ανάλυση αθροισμάτων σε μερικά αθροίσματα που μπορούν να ανακληθούν αυτόματα (π.χ. στο άθροισμα 6+7 υπολογίζει εύκολα το μερικό άθροισμα 6+6 και ύστερα προσθέτει 1 ακόμη) (Geary, 2004· Siegler & Shrager, 1984). Η ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων απαιτεί τη μετάβαση από την εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών σε πιο σύνθετες στρατηγικές, καθώς και

στην ικανότητα για αυτόματη ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Cirino et al., 2007· Gersten et al., 2005).

4. *Ο γραπτός υπολογισμός και η χρήση αλγορίθμων.* Η ανάπτυξη της κατανόησης των σχέσεων εντός και μεταξύ των αριθμητικών πράξεων (αρχές υπολογισμού), είναι μια προϋπόθεση για τον ακριβή και αποτελεσματικό υπολογισμό πολυψήφιων και την επίλυση προβλημάτων (Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002· Geary, 1994). Οι αλγόριθμοι αποτελούν ένα βασικό τμήμα της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τον Τρούλη (1992: 79), «αλγόριθμος είναι μια σειρά κανόνων, ορισμένη με ακρίβεια, που δείχνει πώς θα επιτύχουμε καθορισμένες πληροφορίες εξόδου, με βάση δοσμένες πληροφορίες εισόδου ύστερα από ένα καταληκτικό αριθμό πράξεων». Στη μαθηματική πρακτική, παραδείγματα αλγορίθμων είναι τα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούνται κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων. Η μνήμη παίζει καίριο ρόλο στην ικανότητα χρήσης αλγορίθμων σε πιο σύνθετο επίπεδο μιας και αποτελούνται από πολλά βήματα με αυστηρή ακολουθία (García, Jiménez & Hess, 2006). Αν και ως προς τη φύση τους συνιστούν συγκεκριμένη ακολουθία ενεργειών, κατά την εφαρμογή τους στο πλαίσιο εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, οι αλγόριθμοι εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό και από τις οπτικο-χωρικές ικανότητες του παιδιού. Η σωστή αντίληψη της σειράς των ψηφίων, της θεσιακής αξίας, η έναρξη της εκτέλεσης της πράξης από το σωστό σημείο στον χώρο, η τοποθέτηση των ψηφίων στις σωστές στήλες και η μεταφορά των ψηφίων ανώτερης τάξης (κρατούμενα), προϋποθέτουν την απρόσκοπτη λειτουργία της χωρικής αντίληψης (Geary, 1994).

5. *Η επίλυση προβλημάτων.* Η επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά είναι «η διαδικασία εύρεσης των ζητούμενων μιας δήλωσης ή πρότασης η οποία περιγράφει ποσοτικές σχέσεις μεταξύ διαφόρων στοιχείων, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που υπάρχουν στην πρόταση (πρόβλημα), αλλά και άλλα στοιχεία και προτάσεις των οποίων την αλήθεια και ισχύ ήδη γνωρίζουμε» (Εξαρχάκος, 1993: 47). Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), τα στάδια από τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος είναι: α) *η μετάφραση*, δηλαδή η μετατροπή των στοιχείων του προβλήματος, με τη σειρά που εμφανίζονται σε αυτό, σε νοητική αναπαράσταση, β) *η ολοκλήρωση*, δηλαδή ο συνδυασμός όλων των επιμέρους αναπαραστάσεων σε μια περιεκτική, συνολική νοητική εικόνα του προβλήματος, γ) *ο σχεδιασμός*, δηλαδή η επινόηση και

ο έλεγχος ενός σχεδίου επίλυσης, μιας στρατηγικής προσέγγισης των ζητούμενων, και δ) η *εκτέλεση*, δηλαδή η μετατροπή του σχεδίου σε συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις και η εύρεση του αποτελέσματος. Τα τρία πρώτα από τα παραπάνω στάδια έχουν έναν ποιοτικό χαρακτήρα και στοχεύουν στη δημιουργία μιας μαθηματικής αναπαράστασης των ενεργειών και των σχέσεων που περιγράφονται στο πρόβλημα. Το τέταρτο στάδιο είναι ποσοτικό και αποσκοπεί στην παρουσίαση της λύσης σε αριθμητική μορφή.

Η αναπαράσταση και επίλυση των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων προϋποθέτει διάφορα είδη γνώσης: (α) τη *γλωσσική γνώση*, που αφορά την κατανόηση της σημασίας των λέξεων που περιέχονται σε ένα πρόβλημα και στοιχειοθετούν την περιγραφή της κατάστασης που περιγράφεται (Αγαλιώτης, 2004), (β) την *πραγματολογική γνώση*, δηλαδή τη γνώση των πληροφοριών που απορρέουν από την περιγραφή του “περιβάλλοντος” του προβλήματος. Το συγκεκριμένο είδος γνώσης έχει άμεση σχέση με τον εντοπισμό των άσχετων πληροφοριών σε ένα πρόβλημα (Parmar, Cowley & Frazita, 1996), (γ) τη *γνώση υποδειγμάτων προβλημάτων*, που απαιτεί την αναγνώριση της ομοιότητας των προβλημάτων με άλλα ίδιου είδους και την εφαρμογή συγκεκριμένης διαδικασίας επίλυσης (Fuchs & Fuchs, 2002), (δ) τη *γνώση στρατηγικών επίλυσης*, δηλαδή την ικανότητα επεξεργασίας των δεδομένων του προβλήματος, τον εντοπισμό του ζητούμενου και της εφαρμογής ενός σχεδίου επίλυσης (Fuchs et al., 2008) και (ε) τη *γνώση των αλγόριθμων*, δηλαδή της ακολουθίας των βημάτων που οδηγούν στην επίλυση μιας πράξης (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004).

Σύμφωνα με τον Geary (1994), για τα παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σημαντικές παράμετροι της επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων είναι: (1) η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων, (2) το επίπεδο κατάκτησης του μαθηματικού λεξιλογίου και (3) ο βαθμός επιβάρυνσης της βραχυπρόθεσμης μνήμης από τους όρους και την έκταση του προβλήματος. Με την προϋπόθεση ότι οι υπολογιστικές δεξιότητες και το λεξιλόγιο των παιδιών βελτιώνονται με την πάροδο του χρόνου και τη σχετική εκπαίδευση, οι μνημονικές απαιτήσεις του προβλήματος αποκτούν προοδευτικά μεγαλύτερη σημασία. Ένας τρόπος μείωσης της επιβάρυνσης της βραχυπρόθεσμης μνήμης είναι η βελτίωση της αναγνωστικής ταχύτητας, καθώς,

σύμφωνα με σχετικές έρευνες, η ταχύτητα ανάγνωσης αυξάνει τον αριθμό των συγκρατούμενων λέξεων (Παντελιάδου & Αντωνίου, 2008· Geary, 1994).

2.3.2. Η “γλώσσα” των μαθηματικών

Οι περιοχές του εγκεφάλου που χρησιμοποιούνται για τη μάθηση του μαθηματικού γνωστικού υλικού, όπως οι αριθμοί, οι αριθμητικές πράξεις, οι μαθηματικοί τύποι, οι γραφικές παραστάσεις, τα σχήματα κ.ά., είναι οι ίδιες που χρησιμοποιούνται και για την ανάγνωση και την ορθογραφία (Γκούμας, 2009). Ειδικότερα, δυσκολίες που εμφανίζονται τόσο στη γραπτή γλώσσα όσο και στη γλώσσα των μαθηματικών, μπορεί να σχετίζονται με τις ομοιότητες που υπάρχουν και στις δύο περιοχές γνώσης:

- και οι δύο γλώσσες αποτελούν μορφές επικοινωνίας, όπου τα σύμβολα με τα οποία αναπαριστώνται είναι συμβατικά αποδεκτά και πολιτισμικά καθορισμένα,
- και οι δύο γλώσσες έχουν τέτοια δομή που απαιτούν ικανότητες σειροθέτησης και ακολουθίας για την αποτελεσματική χρήση τους,
- και στις δύο γλώσσες για να συντελεσθεί η μάθηση και η απομνημόνευση, απαιτείται κατάκτηση του προφορικού λόγου σε ικανοποιητικό επίπεδο,
- και για τις δύο γλώσσες η άμεση μνήμη είναι σημαντική (Fuchs & Fuchs, 2002).

Η εργασία των Bryant, Bryant και Hammill (2000) αναλύει και ερμηνεύει τη φράση, “έχει δυσκολία με τη μαθηματική γλώσσα”. Η μαθηματική γλώσσα είναι εννοιολογικά πυκνή, δηλαδή οι μαθητές πρέπει ταυτόχρονα να κατανοήσουν την έννοια μαθηματικών συμβόλων και λέξεων, επειδή στα μαθηματικά, αντίθετα από την ανάγνωση, οι συναφείς ενδείξεις είναι περιορισμένες ή ανύπαρκτες. Προτείνεται, στο πλαίσιο εφαρμογής αποτελεσματικών εκπαιδευτικών παρεμβάσεων, το μαθηματικό λεξιλόγιο (π.χ. άθροισμα, διαφορά, προσθετός, μειωτός κ.ά.) καθώς και τα αφηρημένα σύμβολα (π.χ. $<$, $>$, $+$), να προσδιορίζονται και να διδάσκονται συγκεκριμένα για κάθε μάθημα, σύμφωνα με τις βασικές διδακτικές αρχές (π.χ. σαφής διδασκαλία, παραδείγματα και καθοδηγημένη πρακτική) (Rivera, 1997).

Οι γλωσσικές δεξιότητες είναι πολύ σημαντικές στη μαθηματική επίδοση, επειδή τα μαθηματικά σύμβολα εκφράζουν αριθμητικές γλωσσικές έννοιες. Η χρήση της γλώσσας είναι απαραίτητη για τους υπολογισμούς και τα λεκτικά

αριθμητικά προβλήματα. Οι γλωσσικές δεξιότητες στον μαθηματικό υπολογισμό, απαιτούνται για να συστηματοποιήσουν την ανάκληση και τη χρήση πολλών βημάτων, κανόνων και αριθμητικών δεδομένων. Η αυξανόμενη δυσκολία των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων σε κάθε σχολική βαθμίδα μεγαλώνει και τις απαιτήσεις σε αναγνωστικό επίπεδο (Γκούμας, 2009). Οι άσχετες αριθμητικές και γλωσσικές πληροφορίες στα προβλήματα προκαλούν σύγχυση σε πολλούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004). Επιπλέον, οι δυσκολίες ανάγνωσης που εμφανίζουν πολλοί μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, παρεμποδίζουν τη δυνατότητά τους να κατανοήσουν και να λύσουν λεκτικά αριθμητικά προβλήματα (Stanovich & Siegel, 1994).

Η παρουσία και η συνύπαρξη ελλειμμάτων στην ανάγνωση και στον υπολογισμό επιφέρουν επίμονες δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων (Hanich & Jordan, 1997). Όπως καταδεικνύεται στις προηγούμενες μελέτες (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004· Geary & Hoard, 2001), κάθε ένα από τα ποσοτικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του κειμένου (δηλ., μήκος λέξης, αριθμός προτάσεων, λέξεις ανά πρόταση και αριθμός ρημάτων) αυξάνει τη δυσκολία επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων.

Τα μαθηματικά κείμενα διαφέρουν σημαντικά από τα συνηθισμένα κείμενα. Η πιο σημαντική διαφορά αφορά τη χρησιμοποίηση στο κείμενο της μαθηματικής-συμβολικής γλώσσας, παράλληλα με τη φυσική γλώσσα. Οι διαφορές αυτές προσδίδουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά στην ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων. Η προηγούμενη έρευνα έχει καταδείξει τα αρνητικά αποτελέσματα που έχουν στην επίδοση στα μαθηματικά, το εκτενές κείμενο (μεγάλος αριθμός λέξεων στην εκφώνηση προβλημάτων), το περιεχόμενο της ιστορίας που περιγράφεται (οικεία ή μη), η μορφή διατύπωσης της εκφώνησης, οι σύνθετες προτάσεις, καθώς και τα σύνθετα προβλήματα και η ύπαρξη περιττών πληροφοριών (Geary & Hoard, 2001· Κολέζα, 2000· McLeod & Crump, 1978).

Συμπερασματικά, τα μαθηματικά έχουν τη δική τους «γλώσσα», τον δικό τους λόγο και τρόπο έκφρασης. Αυτός ο λόγος, ιδιαίτερα σημαντικός για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος, δεν αναπτύσσεται αυθόρμητα και αβίαστα από τους μαθητές. Μαθαίνεται σε ένα πλαίσιο συμμετοχής σε μια κοινότητα όπου οι έμπειροι και ειδικοί (οι εκπαιδευτικοί ή ακόμη και οι μαθητές με υψηλές

μαθηματικές επιδόσεις) μεταφράζουν, μοντελοποιούν, επαναδιατυπώνουν, ενθαρρύνουν και προκαλούν τη συμβολή των μαθητευόμενων στη σχολική πρακτική των μαθηματικών. Σε μια τέτοια αντίληψη, η μετάβαση από τη μια γλώσσα στην άλλη (ή, καλύτερα, από τον έναν λόγο στον άλλο) αναδεικνύεται σε κυρίαρχο πόλο μάθησης και διδασκαλίας και ο εκπαιδευτικός σε οδηγό λόγου στην τάξη των μαθηματικών (Σακονίδης, 2007).

2.4. Ανίχνευση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά

Η πρόωπη ανίχνευση οδηγεί στην έγκαιρη διδακτική παρέμβαση για την άμβλυνση των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Η ετερογένεια των Μαθησιακών Δυσκολιών και η πολυσυλλεκτικότητα του ορισμού τους, καθώς και η φύση και εξέλιξη των διαγνωστικών πρακτικών που έχουν καθιερωθεί θέτουν αρκετά ζητήματα, όπως είναι αυτό της εγκυρότητας (Geary, 2004).

Δυστυχώς και στη χώρα μας, η ανίχνευση ενός μαθητή με υποψία μαθησιακών δυσκολιών και η περαιτέρω παραπομπή του συμβαίνει πολύ συχνά με μεγάλη καθυστέρηση και συνήθως αποκλείει την έγκαιρη και αποτελεσματική αντιμετώπισή τους, πριν αυτή εδραιωθεί και προκαλέσει σημαντικό χάσμα στη μάθηση. Τα ευρήματα από τη σχετική έρευνα υποδεικνύουν ότι δυσκολίες που σχετίζονται με την αριθμητική ικανότητα, αν δεν αντιμετωπιστούν έγκαιρα και με κατάλληλο τρόπο, παραμένουν τόσο κατά τη φοίτηση στο σχολείο όσο και κατά την ενήλικη ζωή (Sullivan, 2005· Heiman & Precel, 2003). Οι αλληπάλληλες ματαιώσεις και η ψυχολογική επιβάρυνση με αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά που επιφέρουν οι δυσκολίες στη μάθηση, είναι πολύ δύσκολο να αναστραφούν με μη έγκαιρη και κατοπινή υποστήριξη (Geary, 2004). Συμπεραίνεται λοιπόν, ότι ο έγκαιρος εντοπισμός των παιδιών που ανήκουν σε ομάδες υψηλού κινδύνου για την εμφάνιση μαθησιακών δυσκολιών, αλλά κυρίως η άμεση παροχή ειδικά σχεδιασμένης παρεμβατικής διδασκαλίας, συνιστά σήμερα τον πιο αποτελεσματικό τρόπο αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών ιδιαίτερα στα σημαντικά γνωστικά αντικείμενα, όπως είναι η γλώσσα και τα μαθηματικά.

Αν και η αιτιολογία για την ύπαρξη Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά αποδίδεται πιο συχνά σε γενετικούς ή/και νευροβιολογικούς παράγοντες, η

ανίχνευση και διάγνωση της όποιας διαταραχής και των δυσκολιών που συνεπάγονται, βασίζεται στην εκτίμηση απλών μαθηματικών δεξιοτήτων (Fuchs & Fuchs, 2002). Ένα συχνά παρατηρούμενο διαγνωστικό ζήτημα αφορά τη διάκριση μεταξύ αναπτυξιακής δυσαριθμησίας και γενικών αδυναμιών στην αριθμητική (Szűcs & Goswami, 2013). Σύμφωνα με τους ισχύοντες ορισμούς η διαφοροποίηση βασίζεται στις σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις από τις προσδοκώμενες, σύμφωνα με την ηλικία, τη νοημοσύνη και την παρεχόμενη εκπαίδευση. Η προσέγγιση αυτή προϋποθέτει αφενός σαφή προσδιορισμό του τι συνιστά *“σημαντικά χαμηλότερη”* επίδοση και αφετέρου περιγραφή του τι συνιστά τυπική επίδοση ανάλογα με την ηλικία. Η αξιολόγηση της μαθηματικής επίδοσης συνδέεται κυρίως με το περιεχόμενο της διδασκαλίας και οι τεχνικές αξιολόγησης βασίζονται σε ανεπίσημες (μη τυποποιημένες διαδικασίες) που πραγματοποιούνται συνήθως από τον εκπαιδευτικό (π.χ. δοκιμασίες αναφοράς σε κριτήριο απόδοσης, αξιολόγηση διαμέσου του Αναλυτικού Προγράμματος, ποιοτική ή γνωστική ανάλυση των λαθών των μαθητών και αξιολόγηση με βάση τον φάκελο του υλικού).

Με βάση τα ερευνητικά στοιχεία από τον τομέα της αξιολόγησης των μαθηματικών δυσκολιών, μπορεί να υποστηριχθεί ότι ο πιο ασφαλής τρόπος προσέγγισης της αξιολόγησης είναι αυτός που στηρίζεται στη συνεχή παρακολούθηση του μαθητή, με στόχο την άμεση αντιμετώπιση των αναγκών του μέσα από διαδικασίες ανεπίσημων ή μη τυποποιημένων αξιολογήσεων (Αγαλιώτης, 2004). Αρκετοί ερευνητές (Geary et al., 2007· Geary, 2004· Bryant & Rivera, 1998· Miller & Mercer 1997) προτρέπουν τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν αυτή την προσέγγιση αποδεχόμενοι τη σημασία της. Η ανεπίσημη και επαναλαμβανόμενη αξιολόγηση σε βάθος χρόνου και οι τεχνικές της θα πρέπει να αντιμετωπίζονται σαν ένα σημαντικό τμήμα των γνώσεων και των δεξιοτήτων όλων των εκπαιδευτικών και ειδικότερα των εκπαιδευτικών οι οποίοι υποστηρίζουν μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (όπως οι εκπαιδευτικοί των Τμημάτων Ένταξης), που προσαρμόζουν τους διδακτικούς στόχους και καταρτίζουν υποστηρικτικά εκπαιδευτικά προγράμματα.

Από τη χορήγηση σταθμισμένων δοκιμασιών δεν είναι δυνατόν να προκύψουν όλες οι πληροφορίες που απαιτούνται για α) την εξασφάλιση ενός κατάλληλου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, β) την επιλογή των κατάλληλων διδακτικών μεθόδων, γ) τη συνεχή παρακολούθηση και εκτίμηση της επίδοσης του μαθητή ή δ)

την εκτίμηση της καταλληλότητας και αποτελεσματικότητας των διδακτικών παρεμβάσεων. Η χορήγηση των δοκιμασιών αυτών, λόγω της φύσης τους, είναι δυνατόν να γίνει μια ή δυο φορές τον χρόνο και άρα δεν είναι σίγουρο ότι ανιχνεύουν την τυπική συμπεριφορά του παιδιού σε βάθος χρόνου και για μεγάλο χρονικό διάστημα. Επίσης, λειτουργώντας συνήθως με βάση ένα δίπολο (“σωστό-λάθος” ή “επιτυχία-αποτυχία”), προσπαθούν να προσδιορίσουν αυτό που έχει ήδη κατακτήσει ο μαθητής, χωρίς να εστιάζουν στους λόγους που οδηγούν στις συγκεκριμένες απαντήσεις. Η λήψη τεκμηριωμένων διδακτικών αποφάσεων δε θα είναι δυνατή, αν δε διερευνηθούν και επισημανθούν ακριβώς, οι αιτίες που οδηγούν τον μαθητή να σκέπτεται με τον συγκεκριμένο αναποτελεσματικό τρόπο στα σχολικά έργα και στις γνωστικές απαιτήσεις (Kavale & Forness, 2000).

Όπως αναφέρεται στον Αγαλιώτη (2004: 149), οι Baroody και Ginsburg (1991) υποστηρίζουν ότι για να είναι αποτελεσματική η αξιολόγηση των Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά πρέπει να πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- να ελέγχει τόσο την επίσημη όσο και την ανεπίσημη μαθηματική γνώση του μαθητή,
- να προσφέρει μια ακριβή περιγραφή των δυνατοτήτων και αδυναμιών του μαθητή ως προς τη μαθηματική γνώση,
- να ελέγχει ειδικά την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα με την οποία ο μαθητής χρησιμοποιεί τις μαθηματικές δεξιότητες,
- να επικεντρώνεται στον έλεγχο της κατοχής εννοιών και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων,
- να προσδιορίζει τις στρατηγικές και τις διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο μαθητής για την αντιμετώπιση των απαιτήσεων του μαθήματος,
- να περιλαμβάνει μια ανάλυση των λαθών που εμφανίζονται στην εργασία του παιδιού,
- να εξετάζει την ικανότητα του μαθητή, να επωφελείται από τη διδασκαλία, καθώς και την ετοιμότητά του για την κατάκτηση νέων γνώσεων,
- να ελέγχει τις μεταγνωστικές δυνατότητες και αδυναμίες του,
- να παίρνει υπόψη της τους συναισθηματικούς παράγοντες και τις πεποιθήσεις του,
- να εξετάζει τη φύση της διδασκαλίας που δέχεται ο μαθητής.

Οι παραπάνω αξιολογικοί στόχοι δεν μπορούν να επιτευχθούν από μια αξιολόγηση των Μαθησιακών Δυσκολιών που στόχο έχει την κατηγοριοποίηση του μαθητή. Απαιτούνται κατάλληλες τεχνικές αξιολόγησης, που θα εστιάζουν στον πραγματικό πυρήνα της σκέψης του παιδιού, τόσο από άποψη περιεχομένου όσο και από άποψη διαδικασιών, για να διαμορφωθεί μια σταθερή βάση καταρτισμού υποστηρικτικών προγραμμάτων (Montague, 1996).

2.5. Αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα Μαθηματικά

Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες μάθησης, είναι επιτακτική η ανάγκη μιας ειδικά σχεδιασμένης διδασκαλίας που θα λαμβάνει υπόψη της τις ιδιαίτερες ανάγκες του παιδιού. Στην ουσία πρόκειται για παροχή ειδικής αγωγής, αφού ειδική αγωγή ενός παιδιού είναι ακριβώς *«κάθε επιπλέον βοήθεια ή κατά οποιοδήποτε τρόπο διαφορετική από εκείνη που παρέχεται γενικά στα συνηθισμένα παιδιά της ηλικίας του μέσα στο κοινό σχολείο»* (Πολυχρονοπούλου, 2012· The Warnock Report, 1978). Σε μια ανασκόπηση των ερευνητικών μελετών που εστιάζουν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά, ο Αγαλιώτης (2004) αναφέρεται στις παρακάτω γενικές αρχές που μπορεί να αποτελέσουν στόχους προγραμμάτων αντιμετώπισης:

1. *Η ανάγκη της αξιόπιστης εκπαιδευτικής αξιολόγησης και του σεβασμού των δεδομένων της κατά την επιλογή των διδακτικών στόχων.* Η αξιολόγηση ορίζεται ως *«η συστηματική διαδικασία συλλογής κατάλληλων εκπαιδευτικών πληροφοριών, ώστε να ληφθούν νομικές και εκπαιδευτικές αποφάσεις για την παροχή υπηρεσιών ειδικής εκπαίδευσης»* (Garcia, Jimenez & Hess, 2006: 274). Σύμφωνα με αυτή την άποψη, απαιτείται η επισήμανση των πραγματικών αναγκών του μαθητή, του ακριβούς σημείου δυσλειτουργίας και του είδους των λαθών στην εργασία του, ώστε η επιλογή της διδασκαλίας και των διδακτικών τεχνικών να στοχεύει στην αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών του (Geary, 2004).
2. *Η εξασφάλιση της ενεργητικής συμμετοχής του μαθητή.* Ο βασικότερος παράγοντας για την επιτυχία ενός προγράμματος αντιμετώπισης των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά είναι η ενεργητική συμμετοχή του μαθητή σε δραστηριότητες που παρακινούν το ενδιαφέρον του (Rivera, 1997). Ο

Lock (1996: 44) επισημαίνει τη σημασία της χρήσης παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή των μαθητών για τη διατήρηση του ενδιαφέροντος κατά τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων και τονίζει ότι «η διδακτική διαδικασία προχωρεί ανεμπόδιστα, όταν η κατάκτηση συγκεκριμένων γνωστικών στόχων αποκτήσει προσωπικό νόημα για τον μαθητή...».

3. *Ο σεβασμός της ακολουθίας των τρόπων αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης.* Σύμφωνα με τον Bruner (1960) κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ενεργητικής κατασκευής της γνώσης, η μάθηση πραγματοποιείται σε τρία (3) στάδια: το *πραξιακό* (concrete), το *εικονιστικό* (representational ή pictorial) και το *συμβολικό ή αφηρημένο* (abstract ή symbolic).

Στο 1^ο στάδιο (πραξιακό), ο μαθητής χρησιμοποιεί συγκεκριμένα αντικείμενα (δάχτυλα, ξυλάκια, άβακες κ.ά.), για να εκτελέσει αριθμητικές πράξεις, στη συνέχεια, στο 2^ο στάδιο (εικονιστικό) μπορεί να χρησιμοποιήσει εικόνες, σχήματα, διαγράμματα και στο τέλος, να περάσει στο συμβολικό επίπεδο και στον αφηρημένο τρόπο γραφής των αριθμών. Στη συγκεκριμένη ακολουθία η πορεία δεν είναι πάντα γραμμική και ίσως χρειαστεί η αναδίπλωση σε προηγούμενο στάδιο για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης (Martin & Towers, 2016). Είναι πολύ σημαντικό να κατανοηθούν η αντιστοιχία και οι σχέσεις μεταξύ των τριών σταδίων, ώστε να μην προσληφθούν από τον μαθητή ως τρεις ασύνδετες μεταξύ τους διαδικασίες και η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο να εμπεριέχει τη μαθηματική έννοια που διδάσκεται, για να θεωρηθεί η διδασκαλία επιτυχημένη (Gersten et al., 2005).

4. *Η ειδική μέριμνα για τη διδασκαλία εννοιών, κανόνων και ιδιοτήτων.* Τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο απαιτούν μεγάλο μνημονικό δυναμικό. Οι μνημονικές αδυναμίες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες καθιστούν αναγκαία την προσαρμογή της διδασκαλίας με σκοπό την καλύτερη εκμετάλλευση του χρόνου τους. Η παροχή γνώσεων που θα έχουν τις περισσότερες δυνατές εφαρμογές, κάνουν τη διδασκαλία γενικών αρχών, κανόνων και ιδιοτήτων απαραίτητο συστατικό κάθε διδακτικού παρεμβατικού προγράμματος (Rivera, 1997). Για παράδειγμα, η κατάκτηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό βοηθά στη μνημονική αποφόρτιση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και διευκολύνει την

κατάκτηση “μηχανιστικών” τμημάτων της μαθηματικής γνώσης, όπως τα βασικά αριθμητικά δεδομένα.

5. *Η συνεχής παρακολούθηση της προόδου και η παροχή άμεσης ανατροφοδότησης στον μαθητή.* Κάθε παρεμβατικό διδακτικό πρόγραμμα πρέπει να τυγχάνει συνεχούς ελέγχου και αξιολόγησης. Η στενή παρακολούθηση της προόδου του μαθητή και η άμεση ανατροφοδοτική παρέμβαση με παροχή διορθωτικών υποδείξεων αναφορικά με τα λάθη του, συμβάλλουν αποφασιστικά στη βελτίωση της επίδοσής του (Miller & Mercer, 1998). Σε μια τέτοια πορεία, αυτό που φαίνεται να έχει μεγαλύτερη σημασία, δεν είναι το τι έκανε ο μαθητής ως ποσοστό επιτυχίας, αλλά το ποιες διαδικασίες ακολούθησε (Λεμονίδης, 1994).
6. *Η ευελιξία στη χρήση διδακτικών μεθόδων και η προσαρμογή τους στο μαθησιακό ύψος του μαθητή.* Η ανομοιογένεια, την οποία παρουσιάζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ως προς τα μαθησιακά τους χαρακτηριστικά, επιβάλλει τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας και τη χρήση μιας ποικιλίας διδακτικών μεθόδων, προσεγγίσεων και δραστηριοτήτων (Αγαλιώτης, 2004). Η υποχρέωση όλων των μαθητών να ακολουθήσουν ένα σχεδιασμένο πρόγραμμα σπουδών, είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της προσαρμογής τους στο πρόγραμμα σπουδών παρά της προσαρμογής του προγράμματος σπουδών στους μαθητές. Οι μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες χρειάζονται συχνά μεθόδους που διαφέρουν από αυτές που τα τυπικά σχολεία παρέχουν (Miller & Mercer, 1997). Τα περισσότερα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες, χρειάζονται προσαρμογές ή τροποποιήσεις στα κείμενα, τα υλικά, τις μεθόδους διδασκαλίας, τα τεστ και τις εργασίες. Ανεξάρτητα από τον τρόπο που οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά, απαιτείται η εξατομίκευση της διδακτικής τους προσέγγισης, για να αντιμετωπιστούν επαρκώς οι μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Cirino et al., 2007· Bateman, 1992).
7. *Η επιδίωξη της αυτοματοποίησης στη χρήση διαδικασιών και δεδομένων.* Βασική αρχή κάθε εκπαιδευτικού προγράμματος για την αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, αποτελεί η αναγνώριση της αυτοματοποιημένης χρήσης διαδικασιών και δεδομένων (Miller & Mercer, 1997). Η αυτοματοποίηση των αριθμητικών δεδομένων απελευθερώνει την

προσοχή και τη μνήμη, ώστε να αφιερωθούν στην κατάκτηση υψηλότερων στόχων, αυξάνει την ακρίβεια και την ταχύτητα απόκρισης σε μαθηματικά έργα και ενισχύει την αυτοπεποίθηση του μαθητή (Geary, 2004).

8. *Η συστηματική εξοικείωση με τη γλώσσα των μαθηματικών.* Τα μαθηματικά έχουν τη δική τους γλώσσα, όπως προαναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 2.3.2, και η εξοικείωση των μαθητών με τη γλώσσα των μαθηματικών πρέπει να είναι αυτόνομος διδακτικός στόχος κάθε εκπαιδευτικού προγράμματος αντιμετώπισης των ΜΔ. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να συνεκτιμώνται και τυχόν αναγνωστικά προβλήματα στο επίπεδο της αποκωδικοποίησης των λέξεων και κατανόησης του λεξιλογίου (Πόρποδας, 2003). Ειδικότερα, η κατανόηση του μαθηματικού λεξιλογίου, δηλαδή των μαθηματικών όρων (άθροισμα, μειωτέος κ.ά.), λέξεων και φράσεων επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τη δυνατότητα του μαθητή να δομεί το αριθμητικό σύστημα και να επιλύει προβλήματα, οπότε πρέπει να αποτελεί πρωταρχικό σκοπό κάθε διδακτικής παρέμβασης (Rivera, 1997).
9. *Η απόκτηση στρατηγικών μάθησης.* Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες εμφανίζουν αδυναμίες στη χρήση στρατηγικών στη μαθηματική διαδικασία. Είναι επομένως ανάγκη να διδάσκονται κατάλληλες στρατηγικές μάθησης με στόχο: (α) την ενίσχυση της μνημονικής ικανότητας, (β) την οργανωμένη προσέγγιση κάθε νέας μαθηματικής γνώσης και (γ) την ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων (Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquiere, 2004). Όπως αναφέρουν οι Rivera και Smith (1997), οι στρατηγικές πρέπει να διδάσκονται με σαφήνεια, να καλύπτουν άμεσες πρακτικές ανάγκες των μαθητών και να ελέγχονται ή να αναθεωρούνται συχνά. Οι στρατηγικές στις οποίες ο μαθητής ανταποκρίνεται καλύτερα, θα πρέπει να διευρύνονται μέσω πρακτικής εξάσκησης σε όσο το δυνατόν περισσότερες και πιο ενδιαφέρουσες για τον μαθητή καταστάσεις, με στόχο τη σταδιακή αποσύνδεση των χαρακτηριστικών των ασκήσεων εφαρμογής από την ίδια τη στρατηγική (Shalev, 2004).
10. *Η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων.* Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία σκέψης που προϋποθέτει την κατάκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων, και κυρίως των αριθμητικών διαδικασιών (πράξεις) και

δεδομένων (Geary, 2006). Δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια μορφή πρακτικής εφαρμογής για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, αλλά να αποτελεί σημαντικό και ιδιαίτερο στόχο κάθε διδακτικού προγράμματος για τα μαθηματικά, προτάσσοντας τις δεξιότητες κατανόησης και επεξεργασίας των στοιχείων του προβλήματος και τη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης (Bryant et al., 2008). Η προφορική παρουσίαση των προβλημάτων, η δημιουργία προβλημάτων με εικόνες ή σκίτσα (εικονοπροβλήματα), η εξάσκηση σε προβλήματα με μικρό αναγνωστικό κείμενο και μόνο με τους απαραίτητους όρους και η χρήση στρατηγικών επίλυσης με λέξεις-κλειδιά μπορούν να μετριάσουν τα τυχόν αναγνωστικά προβλήματα που συνοδεύουν τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Fuchs & Fuchs, 2002).

Επίσης, η προβληματική κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα θα πρέπει να συνδέεται με την καθημερινή ζωή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, π.χ. καθημερινές συναλλαγές, αθλητισμό, συλλογές κ.ά. (Πόρποδας, 2003). Στο πλαίσιο της υποστήριξης της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές όπως: η χρήση χειροπιαστών υλικών για την αναπαράσταση του προβλήματος, η απόδοση του νοήματος με άλλα λόγια (παράφραση) και η επινόηση προβλημάτων (Αγαλιώτης, 2004).

11. *Η υποστήριξη της γενίκευσης της μάθησης.* Είναι χαρακτηριστικό των μαθηματικών δυσκολιών η αδυναμία της χρήσης μιας αποκτημένης γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια. Η γενίκευση της μάθησης είναι σημαντική για τη μαθηματική αγωγή του μαθητή (Fuchs & Fuchs, 2002). Η αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων με ποικίλους τρόπους, υλικά και μεθόδους, βοηθά τον μαθητή να συνειδητοποιήσει ότι οι μαθηματικές του γνώσεις συνδέονται με την καθημερινή του ζωή. Οι διάφορες μεταφορικές εκφράσεις μιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. για την πρόσθεση: προσθήκη, αύξηση, κέρδος, περισσότερο κ.ά.) θα πρέπει να τονίζονται ιδιαίτερα και να επιδιώκεται η σύνδεσή τους με τη γενική μορφή της έννοιας (Bryant, 2005). Επίσης, η παρουσίαση των μαθηματικών γνώσεων σαν ένα μέσο για την αντιμετώπιση των καθημερινών αναγκών του μαθητή και όχι ως αυτοσκοπού, μέσα από την επιλογή προβλημάτων σχετικών με τα ενδιαφέροντά του (π.χ. με το μπάσκετ), είναι ένας πρόσφορος τρόπος για την εισαγωγή μαθηματικών

εννοιών και δεξιοτήτων, όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, τα ποσοστά κ.λπ. (Αγαλιώτης, 2004).

12. *Η προώθηση της θετικής στάσης του μαθητή προς τα μαθηματικά.* Η επανειλημμένη σχολική αποτυχία, που συνήθως βιώνουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, έχει ως αποτέλεσμα να επηρεάζονται οι στάσεις, οι πεποιθήσεις και τα κίνητρά τους και να δημιουργείται ένα είδος φοβίας απέναντι σε αυτά (Garcia, Jimenez, & Hess, 2006). Σύμφωνα με τους Miller & Mercer (1997), για να τονωθεί το αυτοσυναισθημα και να βελτιωθεί η αυτοεικόνα των μαθητών, απαιτείται: (α) η εμπλοκή του μαθητή στη διαμόρφωση των στόχων του παρεμβατικού προγράμματος, (β) η αποφυγή των αποτυχιών του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία, με την αξιολόγηση των προϋποτιθέμενων γνώσεων του μαθητή και την απλοποίηση ή και προσαρμογή των διδακτικών στόχων του μαθήματος, (γ) η επισήμανση της αξίας της χρήσης των μαθηματικών σε πραγματικές καθημερινές ανάγκες του μαθητή, (δ) η έμπρακτη έκφραση της εμπιστοσύνης του εκπαιδευτικού στις ικανότητες του μαθητή, (ε) η ανάδειξη της οργανωμένης προσπάθειας για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων, (στ) η θετική στάση του εκπαιδευτικού απέναντι στα μαθηματικά και (ζ) η ενίσχυση του μαθητή την ώρα που εργάζεται σε μαθηματικές εργασίες.

2.5.1. Διδακτικές τεχνικές για την αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης στα Μαθηματικά

Η αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά μπορεί να ξεκινήσει σε οποιαδήποτε φάση της σχολικής ηλικίας, επισημαίνοντας ότι όσο πιο γρήγορα εντοπιστούν τόσο πιο αποτελεσματική αυτή θα είναι. Πριν την οποιαδήποτε διδακτική παρέμβαση, θα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί η σχέση του μαθητή με τους αριθμούς, με έμφαση στην ουσιαστική κατανόηση των αριθμητικών εννοιών και τη σύνδεση των μαθηματικών του σχολείου με την καθημερινή ζωή του μαθητή (Καραγιαννάκης, 2012). Επιπρόσθετα, η παρέμβαση θα πρέπει να στοχεύει, αφενός στην κάλυψη κενών και παρερμηνειών από προηγούμενες γνώσεις μέσω της χρήσης ποικιλίας εναλλακτικών μεθόδων προσαρμοσμένων στο γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή και αφετέρου, να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του

Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών. Η διδασκαλία θα πρέπει να ακολουθεί μια πολυαισθητηριακή προσέγγιση, η οποία θα συμπεριλαμβάνει απτικά, οπτικά και ακουστικά ερεθίσματα. Επιτρέποντας στον μαθητή να αλληλεπιδράσει βιωματικά με το κατάλληλο εποπτικό υλικό, να εκφράσει τις ιδέες του και τις δυσκολίες του, καλλιεργείται το έδαφος για την εμβάθυνση της υπάρχουσας μαθηματικής γνώσης αλλά και για την ανακάλυψη νέας (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014).

Η έρευνα των Grouws και Cebulla (2000) προτείνει για την υποστήριξη της μαθηματικής διδασκαλίας:

- την έμφαση στη μαθηματική σημασία των εννοιών, συμπεριλαμβανομένου του πώς η ιδέα, η έννοια ή η δεξιότητα συνδέεται με πολλούς τρόπους και με άλλες μαθηματικές ιδέες με λογική συνέπεια και γνωστικό τρόπο. Έτσι, για την αφαίρεση, τονίζουν το αντίστροφο, ή “undoing”, την αντίθετη σχέση δηλαδή, μεταξύ αυτής και της πρόσθεσης.
- τη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στην τάξη, στο οποίο οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν νοήματα. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν σημαντικά μαθηματικά, τόσο σε περιβάλλοντα που είναι στενά συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις της ζωής, όσο και σε εκείνα που είναι καθαρά μαθηματικά. Η αφαιρετικότητα ενός μαθησιακού περιβάλλοντος και το πώς οι μαθητές σχετίζονται με αυτό, πρέπει να είναι σωστά ρυθμισμένα, να παρακολουθούνται στενά και να είναι προσεκτικά επιλεγμένα. Θα πρέπει επίσης να εξετάζονται τα ενδιαφέροντα και το υπόβαθρο των μαθητών.
- σαφείς συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων μαθησιακών αντικειμένων. Ως παράδειγμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, η συλλογή δεδομένων σε μια δημοσκόπηση για μια κοινωνική μελέτη.
- παρακολούθηση των νοημάτων των μαθητών και της κατανόησής τους στη διδασκαλία, αφού οι αντιλήψεις τους για την ίδια ιδέα ποικίλλουν.

Η αντιμετώπιση των μαθηματικών μαθησιακών δυσκολιών απαιτεί τον σχεδιασμό ενός προγράμματος σπουδών, που λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά και τους στόχους των μαθητών, χρησιμοποιώντας αποτελεσματικές εκπαιδευτικές τεχνικές με βάση τα πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα. Οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί έχουν αρχίσει να προσδιορίζουν τις πιο αποτελεσματικές πρακτικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε μια εκτενή αναζήτηση της βιβλιογραφίας,

οι Mastropieri, Scruggs και Shiah (1991) εντόπισαν 30 μελέτες που επισήμαναν τις εκπαιδευτικές τεχνικές για τα μαθηματικά που βοηθούσαν περισσότερο τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Χαρακτηριστικά αναφέρουν: (α) την εφαρμογή, επίδειξη, μοντελοποίηση των μαθηματικών εννοιών καθώς και τη διαδικασία ανατροφοδότησης, (β) την παροχή ενίσχυσης για οικοδόμηση της μαθηματικής ευχέρειας (fluency building), (γ) τη χρήση μιας ιεραρχημένης ακολουθίας διδασκαλίας που εκτείνεται από τις συγκεκριμένες στις αφηρημένες έννοιες, (δ) τη θέσπιση μαθησιακών στόχων, (ε) τον συνδυασμό της επίδειξης με το μόνιμο μαθηματικό πρότυπο, (ζ) την εφαρμογή της φωναχτής σκέψης (think aloud) κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, (η) τη διδασκαλία στρατηγικών για τον υπολογισμό και την επίλυση προβλημάτων και (θ) τη χρήση υπολογιστών για την υποστήριξη της διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), οι αρχές που προαναφέρθηκαν θα πρέπει να διέπουν κάθε πρόγραμμα αντιμετώπισης των Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά και να συνοδεύονται από τεχνικές υποστήριξης στις βασικές αριθμητικές έννοιες και δεξιότητες, στη χρήση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Β.Α.Δ.), στην εκτέλεση των πράξεων και στην επίλυση των προβλημάτων.

Στις βασικές αριθμητικές έννοιες και δεξιότητες, όπως η ταξινόμηση, η σειροθέτηση, η διατήρηση, η μέτρηση και η θεσιακή αξία, προτείνεται: η χρήση μεγάλης ποικιλίας υλικών για εξάσκηση (Clements, 1999), η ενεργοποίηση όλων των αντιληπτικών διόδων του μαθητή διαμέσου των αισθήσεων (Puchner et al., 2009), η αναπαράσταση των εννοιών διαδοχικά με πραξιακό-εικονιστικό-συμβολικό τρόπο (Steedly, 2008), η προοδευτική αύξηση των αντικειμένων για ταξινόμηση και σειροθέτηση (Grouws et al., 2000), η λεκτική υποστήριξη των ενεργειών με κατάλληλο λεξιλόγιο (Bryant et al., 2000) και η ενθάρρυνση του μαθητή (Ojose & Sexton, 2009).

Οι Geary, Hamson και Hoard (1999, 2000), στις μελέτες τους με μαθητές της Α' και Β' τάξης του δημοτικού, οι οποίοι εμφάνιζαν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, επισήμαναν συστηματικά λάθη σχετικά με τη διάταξη των αντικειμένων ενός συνόλου που δινόταν για μέτρηση/υπολογισμό. Οι μαθητές επέμεναν στη διάταξη και απαρίθμηση των αντικειμένων τοποθετημένα σε μια

συγκεκριμένη κατεύθυνση. Από τα δεδομένα των ερευνών τους προκύπτει ότι οι μαθητές σημειώνουν λάθη στην απαρίθμηση λόγω ελλειμμάτων ή δυσκολιών στην εργαζόμενη μνήμη. Οι Jordan et al. (2006) προσδιόρισαν τα βασικά στοιχεία της κατανόησης της έννοιας των αριθμών, τα οποία περιελάμβαναν την καταμέτρηση (π.χ. τις αρχές της πληθικότητας και της σταθερής σειράς), την επίγνωση των αριθμών (π.χ. διάκριση της ποσότητας, σύγκριση αριθμών, μέτρηση ακολουθιών) και την εκτίμηση (π.χ. του μεγέθους ενός συνόλου). Συνολικά τα ευρήματα της έρευνάς τους έδειξαν ότι τα γνωστικά ελλείμματα των μαθητών στην προσχολική ηλικία, εκδηλώνονται με δυσκολίες στην κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων (π.χ. το μέγεθος, την αλληλουχία) υποδηλώνοντας ότι θα απαιτηθούν κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις για την αποφυγή περαιτέρω εκπαιδευτικής καθυστέρησης των μαθητών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Στη διδασκαλία των βασικών αριθμητικών δεδομένων που αποσκοπεί στην αυτοματοποίησή τους και την άμεση ανάκληση από τη μνήμη, προτείνεται η παρουσίασή τους σε ομάδες με βάση κάποιο κοινό χαρακτηριστικό και η σύνδεση των αποτελεσμάτων με αντικείμενα ή καταστάσεις και γεγονότα από τις προσωπικές εμπειρίες των παιδιών (Kosko, & Wilkins, 2010). Στην εκτέλεση των πράξεων από πολλούς ερευνητές (Cope, L., 2015· Bellonio, 2012· Hunt, et al., 2011· Boggan, et al., 2010· Ojose, & Sexton, 2009· Kelly, 2006· Sebesta, et al., 2004· Clements, D. H., 1999) προτείνεται η αναπαράσταση των αριθμών με χειραπτικά υλικά για την κατανόηση της σύνθεσης και της ανάλυσης της δεκάδας, η οποία διευκολύνει την εκτέλεση της αλγοριθμικής διαδικασίας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (“κρατούμενο” και “δανεικό”).

Η κατανόηση της σύνδεσης συμβολικών ενεργειών και υλικών πράξεων με συγκεκριμένο και ημισυγκεκριμένο/εικονιστικό (γραμμές, σχήματα κ.ά.) υλικό, είναι ο βασικός παράγοντας από τον οποίο εξαρτάται η απρόσκοπτη εκμάθηση του αλγόριθμου των πράξεων (Gersten, et al., 2009). Τέλος, στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικές τεχνικές, όπως: α) η εξοικείωση με το λεξιλόγιο και τα αριθμητικά σύμβολα των προβλημάτων, β) η εξάσκηση στην αναγνώριση και κατηγοριοποίηση των πληροφοριών του προβλήματος (επισήμανση του ζητούμενου, αγνόηση περιττών πληροφοριών), γ) η

παράφραση (έκφραση του προβλήματος με άλλα λόγια), δ) η οπτικοποίηση των δεδομένων με τη χρήση συγκεκριμένων υλικών, διαγραμμάτων, σχεδίων και εικόνων ε) η δραματοποίηση του προβλήματος και στ) η διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης, που συμβάλλουν στη συστηματοποίηση της διαδικασίας και την αύξηση της αποτελεσματικότητας (Kelly, 2006).

Επειδή η έρευνα έχει δείξει ότι η εξάσκηση στις γνωστικές στρατηγικές μπορεί να βελτιώσει την απόδοση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα (Boggan et al., 2010), αυτοί οι μαθητές ίσως ωφεληθούν από την εξάσκηση που δίνει έμφαση στις στρατηγικές αναπαράστασης του προβλήματος. Η δυνατότητα να απεικονιστεί και να επαναδιατυπωθεί ένα πρόβλημα, καθώς επίσης και να γίνουν υποθέσεις για τη λύση του είναι κρίσιμες πτυχές της αποτελεσματικής επίλυσης προβλήματος και πρέπει να τεθούν στη διάθεση των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες, ώστε να γίνουν αποτελεσματικοί λύτες προβλημάτων (Kelly, 2006).

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας, η χρήση εξωτερικών (οπτικών) αναπαραστάσεων (εικόνων, σχημάτων, διαγραμμάτων κ.λπ.) έχει σημαντικά πλεονεκτήματα (Hall, 1998). Οι εικόνες και τα σχήματα είναι εκφραστικά μέσα, τα οποία προσανατολίζουν και οργανώνουν τη σκέψη διευκολύνοντας με αυτόν τον τρόπο τη διαδικασία της μάθησης. Ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, μια οπτική αναπαράσταση, εκτός του ότι συμβάλει στην πληρέστερη κατανόηση του προβλήματος μέσα από μια συνοπτική παρουσίαση της πληροφορίας, αποτυπώνει επίσης τα ενδιάμεσα βήματα της σκέψης του λύτη, διευκολύνοντας έτσι διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης (Brunning et al., 1999). Οι τεχνικές αναπαράστασης, που επιτρέπουν την αποτελεσματική μετάφραση ή την ερμηνεία των πληροφοριών στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα, είναι γνωστό ότι διευκολύνουν την επίλυσή τους (Jitendra & Hoff, 1996).

Ενδιαφέρουσα άποψη πάνω στο θέμα της αναπαράστασης της γνώσης και των σταδίων που μεσολαβούν μεταξύ των ενεργειών πάνω στα αντικείμενα, και των σκέψεων με τα βασικά σύμβολα, διατυπώνεται από τους Van Eyr και Heshusius (1986). Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι η εκμάθηση της εκτέλεσης πράξεων και η πρώτη προσέγγιση μαθηματικών εννοιών δεν μπορεί να γίνει παρά μόνο διαμέσου του φυσικού χειρισμού και των διευθετήσεων χειροπιαστού υλικού. Οι

φυσικοί χειρισμοί και διευθετήσεις (υλικές πράξεις) ακολουθούνται από το στάδιο των αντιληπτικών πράξεων, στο οποίο το συγκεκριμένο-τρισδιάστατο υλικό είναι προσιτό στο παιδί, αλλά δε χρησιμοποιείται. Το παιδί προσπαθεί να εκτελέσει πράξεις νοερά διαμέσου της οπτικοποίησης και της φαντασίας και αν δυσκολευτεί έχει στη διάθεσή του το υλικό. Στο επόμενο στάδιο το παιδί φαντάζεται το υλικό (που έχει αποσυρθεί) και εκτελεί την πράξη. Ακολουθεί το στάδιο των λεκτικών πράξεων, όπου η εσωτερική ανακατασκευή της πραγματικότητας αναπαρίσταται με λέξεις στηρίζοντας αποφασιστικά την κατανόηση. Στο τελικό στάδιο της συμβολοποίησης, οι μαθηματικές ιδέες εκφράζονται με σύμβολα και τύπους. Οι Van Erp και Heshusius (1986) προτείνουν τη μετάφραση των συμβόλων σε όσο το δυνατόν περισσότερες μορφές και είδη αναπαράστασης (υλικά, εικόνες, σχέδια κ.λπ.) πριν τη χρήση τους για την εύρεση αποτελεσμάτων.

Η Lewis (1989) σχεδίασε μια διδασκαλία με στόχο την υποστήριξη της νοεράς αναπαράστασης προβλημάτων σύγκρισης. Τα διαγράμματα που προτείνει στηρίζονται στο μοντέλο της αριθμογραμμής. Ο μαθητής κάθε φορά που ένα δεδομένο εμφανίζεται στην εκφώνηση το προσθέτει στην αριθμογραμμή. Σύμφωνα με την ερευνήτρια, τέτοιου είδους σταδιακά εξελισσόμενα διαγράμματα επιτρέπουν τον εύκολο έλεγχο της ορθότητας της εσωτερικής αναπαράστασης. Τη χρήση αριθμογραμμών υιοθέτησαν και οι Venger και Gorbov (1993) για την κατανόηση του μεγέθους ενός αριθμού και την επίλυση απλών προσθετικών προβλημάτων. Μέσα από το χτίσιμο της αριθμογραμμής επιχειρήθηκε η εισαγωγή των αριθμών και η εισαγωγή της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως κίνηση, δεξιά και αριστερά αντίστοιχα της αριθμογραμμής.

Οι Carpenter και Moser (1984) περιέγραψαν ευδιάκριτες στρατηγικές που συμπεριλαμβάνουν τον υπολογισμό και ονομάζονται *υλικές στρατηγικές (material strategies)*. Τα παιδιά χρησιμοποιούν χειροπιαστά αντικείμενα (δηλ. δάχτυλα ή φυσικά αντικείμενα), για να αντιπροσωπεύσουν φυσικά τους ακέραιους αριθμούς του προβλήματος και κατόπιν τα μετρούν για να φθάσουν σε ένα ποσό.

Ο Norman (1989) εκτίμησε ότι η γνωστική διαδικασία και οι νοητικές δραστηριότητες των ανθρώπων γίνονται πάντα με τη μεσολάβηση εργαλείων και είναι προσανατολισμένες στα αντικείμενα, ανεξάρτητα με το τι είδους τεχνάσματα ή φυσικά διαθέσιμα εργαλεία μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς στις γνωστικές

δραστηριότητες. Στην περίπτωση των μαθηματικών υπάρχουν πολλά παραδείγματα στα οποία μπορεί κανείς να εισαγάγει καθαρά μαθηματικές έννοιες, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αντικείμενα ως μέσα διαμεσολάβησης. Με αυτά τα αντικείμενα είναι δυνατόν να κατανοήσει κανείς αφηρημένες έννοιες ως σημαντικές από πρακτική άποψη και πλευρές των αντικειμένων ως γνωρίσματα που είναι απαραίτητα να παρατηρηθούν από οποιονδήποτε χρησιμοποιεί τα αντικείμενα μέσα σε ένα πρακτικό περιβάλλον.

Για παράδειγμα, στα ιαπωνικά σχολεία το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου εξηγείται και διδάσκεται απλώς με τη βοήθεια του *“μοντέλου του κομμένου χαρτιού”* (με αυτή τη μέθοδο μπορεί κανείς να παράγει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κόβοντας τη μια πλευρά του παραλληλογράμμου και προσαρμόζοντας την άλλη πλευρά. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου). Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ένα κομμάτι χαρτί ως ένα είδος διαμεσολάβησης, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για να βρούμε το εμβαδόν. Έτσι, οι μαθητές καταλαβαίνουν εύκολα την πραγματική φύση των μαθηματικών εννοιών με την κατάλληλη διαμεσολάβηση.

Οι Gersten et al. (2009) διενέργησαν οκτώ έρευνες που βασίστηκαν σε συστάσεις για τη δημιουργία αποτελεσματικών παρεμβατικών προγραμμάτων. Σύμφωνα με αυτές τα προγράμματα παρέμβασης θα πρέπει: (1) να επιζητούν τον εντοπισμό των μαθητών που πιθανόν να παρουσιάσουν δυσκολίες στα μαθηματικά και να παρέχουν αποτελεσματικές μεθόδους για μαθητές που προσδιορίζονται ως ομάδα υψηλού κινδύνου, (2) να δίνουν μεγαλύτερη προσοχή στην εις βάθος επεξεργασία των ακέραιων αριθμών από την πρώιμη σχολική ηλικία (νηπιαγωγείο) παρέχοντας κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό (3) να προσφέρουν σαφή και συστηματική διδασκαλία των μαθηματικών σε όλη τη διάρκειά τους, (4) να περιλαμβάνουν τη διδασκαλία που βασίζεται σε κοινές υποκείμενες δομές για την επίλυση των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, (5) να παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να εργαστούν με οπτικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών, (6) να εστιάζουν στην αυτοματοποίηση και άμεση ανάκτηση από τη μνήμη των βασικών αριθμητικών δεδομένων, (7) να παρακολουθούν και να αξιολογούν διαρκώς την εξέλιξη των μαθητών που δέχονται υποστηρικτική διδασκαλία και (8) να

περιλαμβάνουν στρατηγικές κινήτρων για τους μαθητές από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Σύμφωνα με την πέμπτη σύσταση των ερευνητών, ένα από τα πιο κοινά προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, είναι η δυνατότητα να συνδέουν αφηρημένα σύμβολα με οπτικές αναπαραστάσεις. Προτείνεται ότι στη διδασκαλία στην κανονική τάξη, οι αναπαραστάσεις θα πρέπει να επιτονίζονται διαρκώς και να παρουσιάζονται συστηματικά, ώστε να διευκολυνθεί η μετάβαση της μάθησης από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Η διδακτική τεχνική CRA (Concrete / συγκεκριμένο – Representational / εικονιστικό – Abstract / αφηρημένο) είναι ίσως το πιο κοινό παράδειγμα της διδασκαλίας των μαθηματικών που ενσωματώνει οπτικές αναπαραστάσεις. Η τεχνική CRA στην πραγματικότητα αναφέρεται σε μια απλή ιδέα που βασίζεται στα τρία στάδια του Bruner (enactive – iconic – symbolic). Έχει αποδειχθεί ότι είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος για τη διδασκαλία μαθηματικών σε μαθητές με ειδικές ανάγκες (Berkas, & Pattison, 2007· Butler et al, 2003).

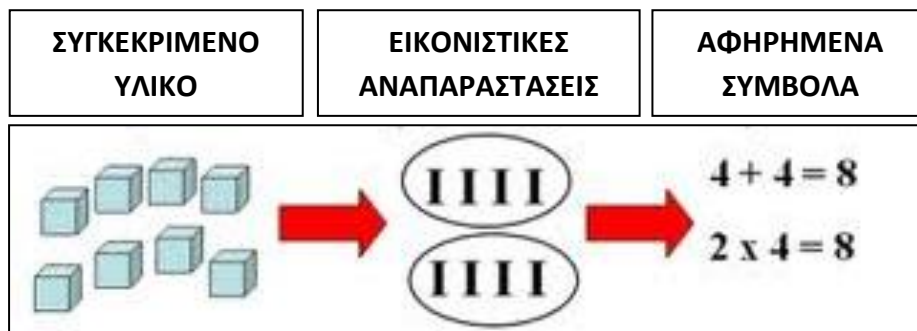
Η CRA είναι μία τρίπτυχη εκπαιδευτική στρατηγική με την οποία ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί πρώτα συγκεκριμένα υλικά (όπως χρωματιστές μάρκες, ράβδους δεκαδικής βάσης, γεωμετρικά σχήματα, τετράγωνα μοτίβα, ή κύβους), για να διαμορφώσει τη μαθηματική έννοια που πρέπει να μάθει, μετά καταδεικνύει την έννοια και την αναπαριστά (όπως ο σχεδιασμός εικόνων), και τέλος, δίνει την αφηρημένη ή συμβολική μορφή της (όπως αριθμούς, σημειογραφία, ή μαθηματικά σύμβολα).

Συνοπτικά, η περιγραφή των ενεργειών σε κάθε στάδιο περιλαμβάνει:

- **Συγκεκριμένο στάδιο/ concrete stage:** το στάδιο της μάθησης στο οποίο οι μαθητές εργάζονται μόνο με τα χειραπτικά υλικά, για να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Keller, 1993· Sowel, 1989· Schultz, 1986). Σε αυτό το στάδιο η διδασκαλία προχωρά μέσω μιας ακολουθίας στην οποία κάθε μαθηματική έννοια αρχικά μοντελοποιείται με συγκεκριμένα υλικά. Ερευνητικές μελέτες δείχνουν «ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν τα συγκεκριμένα υλικά αναπτύσσουν πιο ακριβείς και πιο ολοκληρωμένες νοητικές αναπαραστάσεις, και συχνά δείχνουν περισσότερα κίνητρα και εστιασμένη στον στόχο

συμπεριφορά, για να κατανοήσουν τις μαθηματικές ιδέες, και ακόμη περισσότερο να τις εφαρμόσουν σε καταστάσεις της ζωής τους» (Anstrom, 2006). Στο συγκεκριμένο επίπεδο, η διδασκαλία περιλαμβάνει τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Οι δάσκαλοι που χρησιμοποιούν αυτήν την εκπαιδευτική προσέγγιση καθορίζουν εάν οι μαθητές καταλαβαίνουν τι έχουν διδαχθεί πριν προχωρήσουν στο επόμενο στάδιο. Σε μερικές περιπτώσεις επιτρέπουν στους μαθητές να συνεχίσουν να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά για να καταδείξουν την κατανόησή τους στο αναπαραστατικό και στο αφηρημένο στάδιο (Moreno, & Duran, 2004).

- **Αναπαραστατικό στάδιο/ representational stage:** επίσης, αποκαλείται “εικονιστικό” και είναι το στάδιο στο οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν εικόνες με τον ίδιο τρόπο με τα χειραπτικά υλικά, τα οποία μπορεί ή και όχι να είναι παρόντα. Είναι επίσης το στάδιο στο οποίο οι μαθητές μπορεί να παρακολουθούν τον χειρισμό των χειραπτικών αντί να το κάνουν μόνοι τους (Keller, 1993· Sowel, 1989· Schultz, 1986). Στο στάδιο της αναπαραστάσης, η μαθηματική έννοια διαμορφώνεται στο ημισυγκεκριμένο επίπεδο που μπορεί να συνεπάγεται τον σχεδιασμό εικόνων που αναπαριστούν συγκεκριμένα αντικείμενα (π.χ., κύκλοι, τελείες, ετικέτες, εικόνες σε στάμπες που αποτύπωνονται για καταμέτρηση). Σε αυτό το στάδιο, ο μαθητής θα σχεδιάσει εικόνες που αναπαριστούν τα χειραπτικά που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως. Αυτές οι εικόνες βοηθούν τον μαθητή να απεικονίσει τις μαθηματικές πράξεις κατά την επίλυση προβλημάτων. Ο δάσκαλος πρέπει να εξηγήσει τη σχέση μεταξύ των εικόνων και των συγκεκριμένων αντικειμένων και να παρέχει στον μαθητή πολλές ευκαιρίες να εξασκηθεί μέχρι να λύσει τα προβλήματα μόνος του (Anstrom, 2006).
- **Αφηρημένο στάδιο/ abstract:** το στάδιο στο οποίο δεν υπάρχουν χειραπτικά ή εικονική βοήθεια παρά μόνο σύμβολα. Οι μαθητές χειρίζονται τα σύμβολα χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές έννοιες που έμαθαν στα προηγούμενα στάδια (Keller, 1993· Sowel, 1989· Schultz, 1986). Σε αυτό το στάδιο, η μαθηματική έννοια διαμορφώνεται σε αφηρημένο επίπεδο, χρησιμοποιώντας μόνο τους αριθμούς, τη σημειογραφία και τα μαθηματικά σύμβολα.



Σχήμα 1. Απεικόνιση των σταδίων της διδασκαλίας CRA

Αυτή η εκπαιδευτική προσέγγιση ωφελεί όλους τους μαθητές, αλλά έχει αποδειχθεί ότι είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική με τους μαθητές που έχουν δυσκολίες στα μαθηματικά, κυρίως επειδή κινείται σταδιακά από πραγματικά αντικείμενα σε εικόνες και, στη συνέχεια, σε σύμβολα (Anstrom, 2006).

Κεφάλαιο 3. Χειραπτικά υλικά (manipulatives)

3.1. Εννοιολογικές οριοθετήσεις – Αποσαφήνιση των όρων	85
3.1.1. Χειραπτικά υλικά	85
3.1.2. Ψηφιακά/δυναμικά χειραπτικά υλικά	86
3.2. Χειραπτικά υλικά και μαθηματικά - Ιστορική επισκόπηση	87
3.2.1. Χειραπτικά υλικά και θεωρίες μάθησης	88
3.2.2. Μαθηματική κατανόηση και αναπαράσταση με χειραπτικά υλικά	94
3.2.3. Χειραπτικά υλικά και στάσεις για τα μαθηματικά	97
3.2.4. Χειραπτικά υλικά και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών	99
3.3. Ερευνητική επισκόπηση για τη χρήση των χειραπτικών υλικών	109
3.4. Χρήση δυναμικών χειραπτικών υλικών - Συνδυασμός φυσικών και δυναμικών χειραπτικών υλικών	120
3.5. Εκπαιδευτικοί και χειραπτικά υλικά	127
3.5.1. Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα χειραπτικά υλικά	133
3.5.2. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών στη χρήση των χειραπτικών υλικών	135

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

3.1. Εννοιολογικές οριοθετήσεις - Αποσαφήνιση των όρων

3.1.1. Χειραπτικά υλικά/ manipulatives

Ο John van de Walle και οι συνεργάτες του (2012) ορίζουν ένα μαθηματικό εργαλείο, ως «... κάθε αντικείμενο, εικόνα ή σχέδιο που αναπαριστά μια έννοια ή πάνω στο οποίο η σχέση με αυτή την έννοια μπορεί να υπαγορεύεται. Τα χειραπτικά υλικά είναι φυσικά αντικείμενα που οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν, για να απεικονίσουν και να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες».

Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο των Εποπτικών Αρχών των Μαθηματικών/*National Council of Supervisors of Mathematics-NCSM* (2013), τα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιούνται στις τάξεις «είναι φυσικά αντικείμενα που τα χειρίζονται οι μαθητές είτε μεμονωμένα είτε σε μικρές ομάδες». Αποτελούν «αντικείμενα που απευθύνονται σε διάφορες αισθήσεις και τα οποία μπορεί να αγγίξουν, να μετακινήσουν, να τακτοποιήσουν ή αλλιώς να χειριστούν τα παιδιά» (Kelly, 2006: 185). Είναι ένας τρόπος που κάνει τη μαθηματική μάθηση πιο ουσιαστική για τους μαθητές (Stein & Bovalino, 2001), καθώς «είναι υλικά σχεδιασμένα να αναπαριστούν ρητά και συγκεκριμένα μαθηματικές ιδέες που είναι αφηρημένες» (Moyer, 2001: 177).

Τα χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι σε μια ποικιλία μορφών και συχνά ορίζονται ως «φυσικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία διδασκαλίας για να εμπλέξουν τους μαθητές σε χειραπτική μάθηση των μαθηματικών» (Boggan, Harper, & Whitmire, 2010: 2). Η Kelly (2006: 185) αναφέρει ότι ο όρος, «χειραπτικά», θα πρέπει να ορίζεται ως οποιαδήποτε απτά αντικείμενα, εργαλεία, μοντέλα, ή μηχανισμοί, που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν μια σαφή και βαθιά κατανόηση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος ή θεμάτων και κατά την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων.

Τα φυσικά χειραπτικά υλικά κυμαίνονται από χαμηλού κόστους απλά, καθημερινά αντικείμενα, όπως κουμπιά, συνδετήρες, οδοντογλυφίδες, ντόμινο, χρήματα, αλυσίδες, κάρτες, χάρακες, ζάρια, χαρτί μελιμετρέ, άδεια κουτιά αυγών,

δοχεία μετρήσεων, κουτιά, μέχρι και πιο σύνθετα και δομημένα αντικείμενα, όπως οι αριθμομηχανές, οι δίχρωμοι μετρητές (two-color counters), οι ράβδοι δεκαδικών (decimal tiles), τα σχήματα (pattern blocks), οι ράβδοι Cuisenaire, οι ράβδοι δεκαδικής βάσης (base ten blocks), οι γεωπίνακες, τα τάνγκραμς, τα αλγεβρικά πλακάκια (algebra tiles) και τα πεντόμινο (Bellonio, 2012).

Οι εικονιστικές (pictorial) στατικές αναπαραστάσεις χειραπτικών υλικών είναι στατικά μοντέλα που βοηθούν τους μαθητές να οπτικοποιούν τις μαθηματικές έννοιες. Η σχεδίαση μιας εικόνας μπορεί να είναι χρήσιμη, όταν ο μαθητής θέλει να αποκτήσει μια καλύτερη κατανόηση του προβλήματος, εφόσον είναι δυνατή η οπτική αναπαράσταση του προβλήματος ή το πρόβλημα ενσωματώνει μια φυσική κατάσταση, γεωμετρικά σχήματα ή μετρήσεις. Είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι ένα φυσικό χειραπτικό μπορεί να αναπαρασταθεί και ως εικονιστικό χειραπτικό (δημιουργώντας ένα σχέδιο), όμως ως εικόνα δεν έχει την απτικότητα και τις δυναμικές ιδιότητες του φυσικού χειραπτικού υλικού (Marzano, 2010).

3.1.2. Ψηφιακά/δυναμικά χειραπτικά υλικά/ Virtual or digital manipulatives

Τα ψηφιακά ή δυναμικά χειραπτικά υλικά ορίζονται ως «μια διαδραστική, διαδικτυακή οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικείμενου που δίνει ευκαιρίες στους μαθητές για την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης» (Hunt, Nipper, & Nash, 2011· Goldsby, 2009· Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002). Τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά έχουν επίσης οριστεί ως «υπολογιστική απόδοση των κοινών μαθηματικών χειραπτικών και εργαλείων» (Dorward, 2002: 329). «Τα ψηφιακά χειραπτικά είναι συχνά δυναμικά οπτικά/εικαστικά αντίγραφα των φυσικών χειραπτικών (όπως οι ράβδοι δεκαδικής βάσης, τα τάνγκραμς, οι γεωπίνακες κ.ά.) που βρίσκονται στο διαδίκτυο, ως μικροεφαρμογές ή μικρότερες εκδόσεις προγραμμάτων εφαρμογών με επιπλέον χαρακτηριστικά» (Reimer & Moyer, 2005: 6). Οι χρήστες μετακινούν το ποντίκι του υπολογιστή, ώστε να χειριστούν αυτά τα δυναμικά, οπτικά αντικείμενα. Η ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται δυναμικά χειραπτικά υλικά τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα στη διαδραστική διδασκαλία των μαθηματικών (Moyer-Packenham, Salkind, & Bolyard, 2008· Moyer et al., 2000).

Τα δυνητικά χειραπτικά υλικά είναι ουσιαστικά αντίγραφα των φυσικών χειραπτικών υλικών που διατίθενται στο διαδίκτυο με τη μορφή του υπολογιστικών μικροεφαρμογών με επιπλέον χαρακτηριστικά. Μπορούν να αναπτύξουν τις δεξιότητες οπτικοποίησης των μαθητών, συνδέοντας λέξεις, εικόνες και σύμβολα ταυτόχρονα. Η διαφορά ενός ψηφιακού/δυνητικού και ενός εικονιστικού χειραπτικού υλικού είναι ότι το πρώτο είναι δυναμικό και το δεύτερο στατικό. Ο κύριος παράγοντας που διαφοροποιεί τα φυσικά από τα δυνητικά χειραπτικά υλικά είναι ότι τα δυνητικά είναι δύο διαστάσεων, ενώ τα φυσικά υλικά είναι τρισδιάστατα (Core, 2015).

Τα ψηφιακά ή δυνητικά χειραπτικά υλικά έχουν δύο πλεονεκτήματα: (1) την καταγραφή, την αναπαραγωγή, την αλλαγή και την προβολή δράσεων, που ενθαρρύνουν την πραγματική εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών και (2) την άμεση σχέση μεταξύ του αντικειμένου και της συμβολικής αναπαράστασης (Clements, 1999).

3.2. Χειραπτικά υλικά και μαθηματικά - Ιστορική επισκόπηση

Οι αλλαγές τα τελευταία χρόνια όσον αφορά την προσέγγιση στη μαθηματική παρέμβαση έχουν αυξήσει την ανάγκη για έρευνα, η οποία προσδιορίζει αποτελεσματικές μεθόδους για τη διδασκαλία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Η έρευνα δείχνει ότι τα φυσικά και τα δυνητικά χειραπτικά υλικά είναι αποτελεσματικά εργαλεία διδασκαλίας. Ωστόσο, κάθε τύπος χειραπτικών έχει τη δική του μοναδική εσωτερικότητα που επηρεάζει τη μάθηση συγκεκριμένων εννοιών.

Από τους αρχαίους χρόνους, οι άνθρωποι πολλών διαφορετικών πολιτισμών, χρησιμοποιούσαν φυσικά αντικείμενα, για να τους βοηθήσουν να λύνουν καθημερινά μαθηματικά προβλήματα. Αρχαίοι πολιτισμοί σε όλο τον κόσμο, έχουν χρησιμοποιήσει φυσικά αντικείμενα και εικόνες, για να αναπαραστήσουν μαθηματικές έννοιες και να λύσουν καθημερινά μαθηματικά προβλήματα. Οι αρχαίοι πολιτισμοί της Νοτιοδυτικής Ασίας χρησιμοποιούσαν πίνακες μέτρησης, που ήταν ξύλινοι ή πήλινοι δίσκοι που καλύπτονταν από ένα λεπτό στρώμα άμμου. Οι χρήστες των δίσκων μέτρησης έφτιαχναν σύμβολα στην άμμο που να αντιστοιχούν στην απογραφή ή οτιδήποτε άλλο μπορούσε να χρειαστεί να

μετρήσουν. Οι αρχαίοι Ρωμαίοι δημιούργησαν τον πρώτο άβακα με βάση τους πίνακες μέτρησης. Ο άβακας φτιαχνόταν από κόκκους ή πέτρες, που μετακινούνταν σε αυλάκια στην άμμο ή σε τραπέζια από ξύλο, πέτρα, ή μέταλλο. *«Ο κινέζικος άβακας, ο οποίος εμφανίστηκε αιώνες αργότερα, μπορεί να ήταν μια προσαρμογή του ρωμαϊκού άβακα»* (Core, 2015: 11). Οι Μάγια και οι Αζτέκοι είχαν συσκευές που έγιναν από αρμαθιές καλαμποκιού σε σειρά ή σύρματα, που τεντώθηκαν σε ένα ξύλινο πλαίσιο μέτρησης. Οι Ίνκας, είχαν επίσης τη δική τους μέθοδο υπολογισμού με χορδές από κόμπους που ονόμαζαν «quipu» (γκουιπού) (Core, 2015).

Οι πρώτες επίσημες χρήσεις των χειραπτικών υλικών στη μαθηματική εκπαίδευση εμφανίζονται στα τέλη της δεκαετίας του 1800, όταν και εμφανίστηκε η εφεύρεση των πρώτων αληθινών χειραπτικών-κινητών αντικειμένων, που απευθυνόταν σε πολλές διαφορετικές αισθήσεις και είχαν σχεδιαστεί ειδικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Το 1837, ο Γερμανός εκπαιδευτικός Friedrich Froebel παρουσίασε το πρώτο νηπιαγωγείο του κόσμου. *«Σχεδίασε τα υλικά για εκπαιδευτικό παιχνίδι γνωστά ως Froebel Gifts ή Frobelgaben, τα οποία περιελάμβαναν γεωμετρικά δομικά στοιχεία (τουβλάκια) και μπλοκ για δραστηριότητες με σχήματα»* (Froebel, 2009). Στη συνέχεια, στις αρχές του 1900, η Ιταλίδα παιδαγωγός Μαρία Μοντεσσόρι συνέχισε με την ιδέα ότι τα χειραπτικά υλικά είναι σημαντικά για την εκπαίδευση. Σχεδίασε διάφορα υλικά για να βοηθήσει μαθητές δημοτικού να μάθουν τις βασικές ιδέες των μαθηματικών. *«Από τις αρχές του 1900, ήταν απαραίτητο για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά και θεωρούνται αναγκαία για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε επίπεδο δημοτικού σχολείου»* (Boggan, Harper, & Whitmire, 2010: 2).

3.2.1. Χειραπτικά υλικά και θεωρίες μάθησης

Υπάρχει εκτεταμένη θεωρητική υποστήριξη για τη χρήση των χειραπτικών. Η σημαντικότερη θεωρητική λογική για τη χρήση των επεμβατικών υλικών σε μια μορφή εργαστηριακού-τύπου έχει αποδοθεί στις εργασίες των Piaget, Bruner και Dienes. Καθένας αντιπροσωπεύει τη γνωστική άποψη της εκμάθησης, μια θέση που διαφέρει ουσιαστικά από τις θεωρίες που ήταν κυρίαρχες στην εκπαιδευτική

ψυχολογία κατά τη διάρκεια του πρώτου μέρους του εικοστού αιώνα. Η σύγχρονη γνωστική ψυχολογία δίνει μεγάλη έμφαση στη διάσταση της “διαδικασίας” της μάθησης και ενδιαφέρεται τόσο για το “πώς” τα παιδιά μαθαίνουν όσο και με το “τι” είναι αυτό που μαθαίνουν (Post, 1981). Το έργο αξιόλογων θεωρητικών της μάθησης, όπως ο Piaget, ο Dienes και ο Bruner, υποστηρίζει τη χρήση των φυσικών χειραπτικών υλικών.

Συνηγορία για τη χρήση των χειραπτικών υλικών απορρέει από τις θεωρίες μάθησης του Piaget, του Bruner, του Vygotsky και της Montessori, καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν και οικοδομούν τη γνώση, όταν μετακινούνται από συγκεκριμένες εμπειρίες στην αφηρημένη σκέψη (McNeil & Jarvin, 2007). Σύμφωνα με αυτούς τους πρώτους θεωρητικούς, τα παιδιά δεν έρχονται στον κόσμο με την ικανότητα της αφηρημένης σκέψης. Αντ’ αυτού, τα παιδιά πρέπει να κατασκευάσουν αφηρημένες έννοιες μέσω της αλληλεπίδρασής τους με συγκεκριμένα αντικείμενα στο περιβάλλον. Υπάρχουν δύο θεμελιώδεις ιδέες που συμμερίζονται αυτοί οι θεωρητικοί. Η πρώτη ιδέα που μοιράστηκαν οι ίδιοι από κοινού, είναι ότι η χρήση συγκεκριμένων υλικών είναι ένα σημαντικό στάδιο για τους μαθητές, καθώς θα αναπτύσσουν την κατανόηση των νέων εννοιών. Δεύτερον, κάθε θεωρητικός πιστεύει στο όφελος των εκπαιδευόμενων από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον τους με αυθεντικούς τρόπους (Cope, 2015).

Ο Piaget (1952), όπως αναφέρει ο Cope (2015), πρότεινε ότι οι σκέψεις, η γλώσσα και οι δράσεις των νεότερων και των ενηλίκων διαφέρουν τόσο σε ποσότητα όσο και σε ποιότητα. Σύμφωνα με τον Piaget (1971), οι μαθητές κινούνται μέσα από τέσσερα στάδια της πνευματικής ανάπτυξης (αισθησιοκινητικό, της προλογικής νόησης, των συγκεκριμένων λογικών - νοητικών ενεργειών και των τυπικών λογικών - αφαιρετικών ενεργειών), ενώ η μάθηση εμπλέκεται είτε προσθέτοντας νέα στοιχεία στα υπάρχοντα ψυχολογικά πλαίσια (αφομοίωση) ή αναπτύσσοντας ή εξελίσσοντας νέες γνωστικές δομές (προσαρμογή). Ο Κολιάδης (2007) αναφέρει ότι ο Piaget διαπιστώνει ότι τα παιδιά δεν είναι διανοητικά αρκετά ώριμα, για να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, αν οι εκπαιδευτικοί τους παρουσιάζουν τις έννοιες μόνο εγγράφως (με λέξεις, αριθμούς και σύμβολα). Σύμφωνα με τον Piaget, τα παιδιά χρειάζονται αρκετές εμπειρίες με συγκεκριμένα υλικά και σχέδια, προκειμένου να μάθουν αφηρημένες έννοιες. Ο ερευνητής

πίστευε ότι όσο τα παιδιά ωριμάζουν έως την εφηβεία τους η ανάγκη τους για συγκεκριμένες εμπειρίες ελαττώνεται, αλλά δεν παύει ποτέ. Η θεωρία του Piaget προτείνει ότι τα παιδιά πρέπει να χειρίζονται τα φυσικά αντικείμενα και στη συνέχεια θα πρέπει να ενθαρρύνονται να σκεφθούν την έννοια των αποτελεσμάτων των φυσικών ενεργειών τους (Baroody, 1989).

Στη θεωρία του Vygotsky είναι κεντρικός ο ρόλος της διαμεσολάβησης και των εργαλείων στη σκέψη (Vygotsky, 1960). Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή, η σκέψη δεν είναι παράσταση που εδράζεται στον νου αλλά αποτέλεσμα της συνεργασίας ανάμεσα σε πρόσωπα, πραγματικά αντικείμενα, εργαλεία και παρεμβαλλόμενα μέσα. Από αυτή την άποψη, σε περίπτωση που κάποιος αλλάζει τον τρόπο μεσολάβησης ή το εργαλείο, εμφανίζονται διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, η δραστηριοποίηση της μνήμης με ένα κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι είναι εντελώς διαφορετική από την ανάλογη εργασία που δεν περιλαμβάνει τα συγκεκριμένα αντικείμενα. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη χαρτιού και μολυβιού δεν επεκτείνει την ικανότητα της μνήμης κάποιου, αλλά αλλάζει τη φύση του έργου (Cope, 2015).

Ο Dienes (1960) πρότεινε ότι οι μαθητές των οποίων η μαθηματική κατανόηση στηρίζεται ακλόνητα σε εμπράγματα εμπειρίες, θα είναι πιο πιθανό να κάνουν συνδέσεις μεταξύ του κόσμου στον οποίο ζουν και του αφηρημένου κόσμου των μαθηματικών. Χρησιμοποιεί τα στάδια μάθησης του Piaget για να εξερευνήσει τη διαδικασία της μάθησης και τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Τονίζει την ανάγκη για ποικίλες εμπειρίες και μεταβλητές κατά την άσκηση μιας μαθηματικής έννοιας. Η χρήση των χειραπτικών υλικών επιτρέπει στους μαθητές να προχωρήσουν μέσα από τα φυσικά στάδια της μάθησης και τους βοηθά στην οικοδόμηση της μαθηματικής δομής στο μυαλό τους. Ο ρόλος του δασκάλου είναι να κρατάει ανοικτή επικοινωνία και να κατασκευάζει δραστηριότητες που μεταφέρουν τους μαθητές μέσα από τα στάδια της μάθησης.

Ο Dienes (1971) δίνει τέσσερις αρχές να ακολουθήσουν. Πρώτη είναι η «*Δυναμική Αρχή/Dynamic Principle*», σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι μια κυκλική διαδικασία που αρχίζει με το άτυπο παιχνίδι, προχωρά στο δομημένο παιχνίδι, εξελίσσεται σε μια αφαιρετική κατανόηση και συνεχίζει με μια επανεφαρμογή αυτών των αφαιρέσεων σε πιο εξελιγμένα παιχνίδια και τη μάθηση.

Σύμφωνα την «*Αρχή της Αντιληπτικής Μεταβλητότητας/Perceptual Variability Principle*», οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από τους δασκάλους τους, όταν τους εκθέτουν την ίδια έννοια πολλές φορές, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών. Έτσι, οι μαθητές θα αναπτύξουν μια καλύτερη κατανόηση της έννοιας, κάνοντας τις συνδέσεις μεταξύ αυτών των διαφορετικών εμπειριών.

Η «*Αρχή της Μαθηματικής Μεταβλητότητας/Mathematical Variability Principle*», ορίζει ότι οι εκπαιδευτικοί, οι οποίοι παρουσιάζουν πολλά παραδείγματα μιας έννοιας στους μαθητές τους, όταν κρατούν σταθερές τις σχετικές μεταβλητές και συστηματικά αλλάζουν τις άσχετες μεταβλητές, θα είναι πιο πιθανόν να έχουν μαθητές που είναι σε θέση να γενικεύουν σχετικά με την έννοια.

Τέλος, με την «*Αρχή της Εποικοδόμησης/Constructivity Principle*», οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει πάντα να παρέχουν στους μαθητές τους την ευκαιρία να συνεργαστούν με συγκεκριμένες μορφές των εννοιών, πριν αναλύσουν τις αφηρημένες μορφές των εννοιών.

Παρότι υπάρχει σύγκλιση μεταξύ των περισσότερων μελετών του Bruner και εκείνων των Piaget και Dienes, ο Bruner απομακρύνθηκε από τον Piaget στην πεποίθησή του ότι η ετοιμότητα για μάθηση εξαρτάται περισσότερο από την αποτελεσματική διδασκαλία και τις μαθησιακές εμπειρίες από ότι όταν ο μαθητής φτάσει σε μια συγκεκριμένη ηλικία. Ο Bruner (1966) υποστηρίζει ότι «[...]κάθε θέμα μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά σε κάποια νοητικά ξεκάθαρη μορφή σε κάθε παιδί και σε κάθε στάδιο της ανάπτυξής του».

Ο Bruner (1966) πρότεινε ότι για τους μαθητές η κατανόηση μιας έννοιας, προχωρά μέσα από τρία στάδια/επίπεδα πολυπλοκότητας της σκέψης (βλ. Πίνακα 1). Το πραξιακό/enactive, όπου αναπαριστά την έννοια με συγκεκριμένα αντικείμενα (χειραπτικά υλικά όπως δάχτυλα, ξυλάκια, κύβους κ.λπ.), το εικονιστικό (iconic ή pictorial), όπου χρησιμοποιεί εικόνες, ζωγραφιές, σχέδια, γραμμές κ.ά. και τέλος το συμβολικό/symbolic, όπου χρησιμοποιεί αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα, όπως τα ψηφία των αριθμών. Ο Bruner, στα τρία στάδια που εξελίσσεται η σκέψη, αναφέρεται στη μάθηση μέσα από συγκεκριμένες εμπειρίες, ως «εμπράγματη πραξιακή/enactive», τη μάθηση μέσα από την οπτική αναπαράσταση ως "εικονιστική/iconic" και τη μάθηση μέσα από αφηρημένα σύμβολα ως «συμβολική/symbolic» (Cope, 2015).

Στάδιο συγκεκριμένων χειρισμών	Εικονιστικό στάδιο (αναπαραστάσεις)	Αφηρημένο στάδιο
Μια μαθηματική έννοια εισάγεται με χειραπτικά υλικά (manipulatives) και οι μαθητές εξερευνούν την έννοια χρησιμοποιώντας τα υλικά σε στοχευμένες δραστηριότητες.	Μια μαθηματική έννοια αναπαριστάται χρησιμοποιώντας εικόνες συνδυαστικά με τα χειραπτικά υλικά (manipulatives) του προηγούμενου σταδίου· οι μαθητές δείχνουν πώς μπορούν να απεικονίζουν και να επικοινωνούν την έννοια σε ένα εικονιστικό επίπεδο.	Μαθηματικά σύμβολα (αριθμοί, σύμβολα πράξεων, κ.λπ.) χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την έννοια στη συμβολική γλώσσα· οι μαθητές δείχνουν την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μαθηματικών.

Πίνακας 3. Τα στάδια μάθησης του Bruner

Οι ιδέες των Piaget, Bruner και Montessori συνεχίζουν να εμπνέουν τους εκπαιδευτικούς, ακόμη και σήμερα, για να χρησιμοποιήσουν τα χειραπτικά υλικά στις τάξεις τους. Επιπλέον, αρκετοί σύγχρονοι ερευνητές έχουν επινοήσει νέες θεωρίες που παρέχουν πειστικές δικαιολογίες για τη χρήση των χειραπτικών υλικών.

Κάνοντας μια σύντομη επισκόπηση αυτών των θεωριών (McNeil, 2007) και αναφερόμενοι σε πιο γενικό επίπεδο, τα χειραπτικά υλικά παρέχουν στους μαθητές μια πρόσθετη πηγή για χρήση στην εκμάθηση των μαθηματικών. Όταν στους μαθητές παρέχονται πολλές πηγές, είναι πολύ πιο πιθανό να αποδίδουν στα μαθηματικά σε βέλτιστα επίπεδα (Sternberg & Grigorenko, 2004). Με τη χρήση τόσο παραδοσιακών όσο και εμπράγματων μεθόδων διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός είναι πιθανόν να απευθυνθεί σε ένα μεγαλύτερο φάσμα μαθητών.

Τα χειραπτικά υλικά τείνουν να προκαλούν φυσική δράση, η οποία έχει αποδειχθεί ότι ενισχύει τη μνήμη και την κατανόηση (Martin & Schwartz, 2005· Glenberg, Gutierrez, Levin, Japuntich, & Kaschak, 2004). Για παράδειγμα, ο Glenberg και οι συνεργάτες του (2004) ανέπτυξαν μια αναγνωστική παρέμβαση για μαθητές, στην οποία εμπλέκονται χειραπτικά υλικά και σχετίζεται άμεσα με την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων για την κατανόηση του κειμένου. Στην παρέμβαση τα παιδιά κλήθηκαν να διαβάσουν το κείμενο και στη συνέχεια να χειριστούν τα αντικείμενα, για να προσομοιώσουν τις δράσεις που περιγράφονται στο κείμενο. Τα παιδιά, που συμμετείχαν σε αυτή την παρέμβαση, εμφάνισαν καλύτερη μνήμη και κατανόηση της ανάγνωσης, από τα παιδιά που διάβαζαν απλά

το κείμενο δύο φορές. Οι προαναφερθείσες θεωρίες (και τα εμπειρικά δεδομένα που τις υποστηρίζουν) βοηθούν να διευκρινιστεί μια ισχυρή θεωρητική βάση για τη χρήση των χειραπτικών στην τάξη.

Η γνωστική επιστήμη έχει επηρεάσει την εκπαιδευτική έρευνα, προτείνοντας θεωρητικά μοντέλα που εξηγούν την κωδικοποίηση των πληροφοριών μεταξύ συστημάτων αναπαράστασης. Για παράδειγμα, η Διπλή Θεωρία Κωδικοποίησης/*Dual Coding Theory - DCT*, που προτάθηκε από ερευνητές στον τομέα της εκπαιδευτικής ψυχολογίας και βασίζεται στη Γνωστική Θεωρία επεξεργασίας της Πληροφορίας, αναφέρει ότι οι πληροφορίες για τη μνήμη επεξεργάζονται και αποθηκεύονται από δύο διασυνδεδεμένα συστήματα και σύνολα κωδικών (Clark & Paivio, 1991). Αυτά τα σύνολα των κωδικών περιλαμβάνουν οπτικούς και λεκτικούς κωδικούς, που μπορεί να αντιπροσωπεύουν γράμματα, αριθμούς ή λέξεις. Σύμφωνα με τη θεωρία DCT, παρουσιάζονται στους μαθητές τόσο οι οπτικοί όσο και οι λεκτικοί κώδικες, που είναι λειτουργικά ανεξάρτητοι και έχουν αθροιστικές επιπτώσεις στην ανάκλησή τους.

Η θεωρία της βιωματικής εκπαίδευσης περιστρέφεται γύρω από την ιδέα ότι η μάθηση ενισχύεται, όταν οι μαθητές αποκτούν γνώσεις μέσω ενεργών διεργασιών που τους εμπλέκουν (Hartshorn & Boren, 1990). Τα χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι το κλειδί για τη δημιουργία αποτελεσματικών, ενεργητικών, συμμετοχικών μαθημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς βοηθούν τους μαθητές να μάθουν, επιτρέποντάς τους να μεταβούν από τις συγκεκριμένες εμπειρίες στην αφηρημένη λογική (Ross & Kurtz, 1993· Heddens, 1986).

Η χρήση των χειραπτικών υλικών βοηθά τους μαθητές να *‘ακονίσουν’* τις μαθηματικές δεξιότητες σκέψης. Σύμφωνα με τους Stein και Bovalino (2001: 357), *«τα χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι σημαντικά εργαλεία, για να βοηθήσουν τους μαθητές να σκέφτονται και να αιτιολογούν με πιο σημαντικούς τρόπους. Δίνοντας στους μαθητές συγκεκριμένους τρόπους για να συγκρίνουν και να χειρίζονται ποσότητες, όπως χειραπτικά υλικά σαν τα πρότυπα σχημάτων (pattern blocks), τα πλακίδια και τους κύβους, μπορούν να ενισχυθούν στην ανάπτυξη καλά θεμελιωμένης, διασυνδεδεμένης κατανόησης των μαθηματικών ιδεών»*. Για να αποκτήσουν μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών ιδεών, οι μαθητές χρειάζονται να είναι σε θέση να ενσωματώνουν και να συνδέουν μια ποικιλία από έννοιες με

πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Ο Clements (1999) αποκαλεί αυτό το είδος της βαθιάς κατανόησης *“ολοκληρωμένη – συμπαγή”* γνώση. Η αποτελεσματική χρήση των χειραπτικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να συνδέουν τις ιδέες και να ενσωματώσουν τις γνώσεις τους, έτσι ώστε να αποκτήσουν μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Οι εκπαιδευτικοί διαδραματίζουν καίριο ρόλο στην παροχή βοήθειας στους μαθητές χρησιμοποιώντας τα χειραπτικά υλικά με επιτυχία, έτσι ώστε να περνούν μέσα από τα τρία στάδια της μάθησης και να καταλήγουν σε μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

3.2.2. Μαθηματική κατανόηση και αναπαράσταση με τα χειραπτικά υλικά

Η διδασκαλία των μαθηματικών είναι μια σύνθετη διαδικασία που επιχειρεί να κάνει τις αφηρημένες έννοιες απτές, τις δύσκολες ιδέες κατανοητές και τα πολύπλευρα προβλήματα επιλύσιμα (Steedly, Dragoo, Arafeh, & Luke, 2008). Η μαθηματική κατανόηση περιλαμβάνει τη διαδικασία ανάπτυξης εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών. Στην πραγματικότητα, ένα από τα πέντε αυτά πρότυπα της διαδικασίας που ορίζεται από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών/*National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*, είναι η αναπαράσταση (NCTM, 2000). Στις Αρχές και Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά/*Principles and Standards for School Mathematics – PSSM* αναφέρεται ότι όλοι οι μαθητές θα πρέπει να *“δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για την οργάνωση, καταγραφή και την επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν μεταξύ των μαθηματικών αναπαραστάσεων για την επίλυση των προβλημάτων και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να διαμορφώνουν και να ερμηνεύουν τα φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα”* (Moyer, Ulmer, & Anderson, 2012).

Αυτό σημαίνει ότι οι οπτικές ή εικονικές αναπαραστάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο. Μια εσωτερική αναπαράσταση είναι το νόημα που δίνει ένα άτομο σε μαθηματικές ιδέες ή διαδικασίες, συμπεριλαμβάνοντας τους τρόπους αναπαράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος, τη γλώσσα τους και τις οπτικές εικόνες τους (Goldin & Shteingold, 2001). Μια εξωτερική αναπαράσταση είναι κάτι έξω από το νου, που

αντιπροσωπεύει μια μαθηματική ιδέα, η οποία συνήθως περιλαμβάνει σύμβολα ή σημάδια, όπως οι γραφικές παραστάσεις και εξισώσεις, οι οποίες είναι παραδείγματα των εξωτερικών αναπαραστάσεων (Puchner et al., 2008).

Είναι σημαντικό πως δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ μιας εξωτερικής αναπαράστασης και μιας εσωτερικής. Ως εκ τούτου, ακόμη κι αν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί μια κατάλληλη εξωτερική αναπαράσταση, για να διδάξει μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα, η επιθυμητή εσωτερική αναπαράσταση δε σχηματίζεται αυτόματα στο μυαλό του μαθητή. Μια εξωτερική αναπαράσταση είναι χρήσιμη μόνο στον βαθμό που οι άνθρωποι θα την καταλάβουν εσωτερικά (Goldin & Shteingold, 2001).

Κατά την περιγραφή των διαφόρων μορφών αναπαράστασης, οι Kosko και Wilkins (2010) προσδιορίζουν τα χειραπτικά υλικά, δηλαδή τα συγκεκριμένα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν μια εξωτερική αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας, ως συγκεκριμένες αναπαραστάσεις που θα πρέπει να ακολουθούνται από εικονιστικές παραστάσεις και, στη συνέχεια, από προφορικές και γραπτές περιγραφές. Οι τελευταίες αυτές μορφές αναπαράστασης θεωρούνται κρίσιμες για τη σύνδεση της άτυπης μαθηματικής γνώσης με αφηρημένες παραστάσεις και αντιλήψεις. Απομονώνοντας τις άτυπες κατανοήσεις ενός μαθητή που σχηματίζονται μέσω της χρήσης των χειραπτικών υλικών από το να μιλάμε και να γράφουμε για τις έννοιες με τα επίσημα αφηρημένα σύμβολα (π.χ. οι αριθμοί) μειώνεται η πιθανότητα βαθύτερης κατανόησης για τον μαθητή.

Οι Kosko και Wilkins (2010) αναφέρουν ότι ο Bruner βρήκε μέσα από μια σειρά από λεπτομερείς παρατηρήσεις των παιδιών ότι συγκεκριμένα υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη μιας βαθιάς κατανόησης ορισμένων μαθηματικών εννοιών. Η περιγραφόμενη μέθοδος περιλαμβάνει τη μετάβαση από τον χειρισμό των συγκεκριμένων υλικών για τη δημιουργία εικόνων της αντίληψης της έννοιας από τον μαθητή, και, τέλος, για την ανάπτυξη ή υιοθέτηση κάποιας μορφής συμβολικής αναπαράστασης της ιδέας, με σκοπό τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στην αφηρημένη κατανόηση.

Μια από τις πιο δύσκολες πτυχές στη χρήση των χειραπτικών υλικών (manipulatives) είναι ένα κοινό διδακτικό δίλημμα: συχνά ο εκπαιδευτικός βλέπει πολύ καθαρά πώς η εξωτερική αναπαράσταση απεικονίζει την ιδέα που προσπαθεί

να διδάξει, αλλά δεν μπορεί να φανταστεί ότι ο μαθητής δεν είναι εύκολο να σχηματίσει μια ακριβή εσωτερική αναπαράσταση από το χειραπτικό υλικό. Οι εκπαιδευτικοί, συχνά λανθασμένα, υποθέτουν ότι το χειραπτικό υλικό θα δημιουργήσει την ίδια εσωτερική αναπαράσταση και για τον μαθητή. Ωστόσο, η μάθηση των μαθηματικών είναι μια εποικοδομητική διαδικασία και οι καλοί εκπαιδευτικοί συνειδητοποιούν ότι «αν ο μαθητής δίνει πίσω το ίδιο πράγμα που ο δάσκαλος του έδωσε, ο μαθητής πιθανόν δεν καταλαβαίνει» (Moyer & Jones, 2004: 22).

Οι Gersten et al. (2009) υποστηρίζουν ότι τα παρεμβατικά υλικά θα πρέπει να περιλαμβάνουν ευκαιρίες για τους μαθητές, να εργαστούν με οπτικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών και οι υπεύθυνοι της παρέμβασης θα πρέπει να είναι καταρτισμένοι στη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών. Οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν ότι ένα από τα πιο κοινά προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, είναι η δυνατότητα να συνδέουν αφηρημένα σύμβολα με οπτικές αναπαραστάσεις. Επίσης, επισημαίνουν ότι στη διδασκαλία στην τάξη, οι αναπαραστάσεις δεν υπερτονίζονται αρκετά ούτε παρουσιάζονται συστηματικά, για να διευκολυνθεί η ανάπτυξη της μάθησης για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Ο σκοπός της χρήσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων (π.χ. χειραπτικά υλικά, σχέδια, μαθηματικοί πίνακες, κ.λπ.) στην εκπαίδευση είναι να βοηθήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη εσωτερικών αναπαραστάσεων. Εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών είναι: α) οι λεκτικές / συντακτικές εικόνες, β) οι νοητικές εικόνες, γ) η τυπική χρήση γραφικών συμβόλων και δ) οι συναισθηματικές εικόνες, συμπεριλαμβανομένων συναισθημάτων, στάσεων, πεποιθήσεων και αξιών (Goldin & Shteingold, 2001). Καθώς αναπτύσσεται η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τον μαθητή, μεγαλώνει η δύναμη και η ευελιξία των εσωτερικών αναπαραστάσεων του. Οι μαθητές, που έχουν αναπτύξει μόνο μερικά εσωτερικά συστήματα των αναπαραστάσεων, συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση νέων εννοιών (Lamon, 2001).

Ο Marzano (2010) ορίζει την αναπαράσταση στα μαθηματικά, ως τη δυνατότητα δημιουργίας, ερμηνείας, χρήσης και αντανάκλασης εικόνων στο μυαλό,

στο χαρτί, στα χέρια ή με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων. Η οπτικοποίηση παρέχει σε κάποιους μαθητές την ευκαιρία να δουν τα φυσικά αντικείμενα και τις εικονικές αναπαραστάσεις με νόημα και να τις συνδέσουν με αφηρημένες μαθηματικές έννοιες στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών. Ο Van Garderen (2006), στην έρευνά του για τη χρήση χειραπτικών και δυνητικών υλικών σε μαθητές διαφόρων επιπέδων επίδοσης, τόνισε τη σημασία των μαθηματικών απεικονίσεων με τα υλικά.

3.2.3. Χειραπτικά υλικά και στάσεις για τα μαθηματικά

Τα μαθηματικά ήταν ανέκαθεν ένα θέμα που πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν με μια αυξανόμενη άρνηση, καθώς προχωρούν στις σχολικές τάξεις. Οι Ojose και Sexton (2009: 4) αναφέρουν ότι *«κατά μέσο όρο, οι μαθητές αγαπούν τα μαθηματικά και τις επιστήμες στο δημοτικό, αλλά αντιπαθούν και τα δύο θέματα περισσότερο στο γυμνάσιο και το λύκειο»*. Δήλωσαν επίσης, ότι *«από το σύνολο των μαθημάτων, τα μαθηματικά είναι το λιγότερο αγαπητό μάθημα»*.

Υπάρχει μια γενική φοβία που σχετίζεται με την εκμάθηση των μαθηματικών. *«Θα ήταν υποτιμητικό να πω ότι ακόμη και οι ενήλικοι φοβούνται τα μαθηματικά πάρα πολύ»* (Ojose & Sexton, 2009: 4). Η εκπαιδευτική οπτική θα πρέπει να είναι σχετική με το πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αλλάξουν αυτήν την αντίληψη και να φέρουν την απαραίτητη αποδοχή στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών.

Στην έρευνά της η Finlayson (2014) συμπεραίνει ότι το στιλ διδασκαλίας των εκπαιδευτικών είναι η κύρια αιτία του μαθηματικού άγχους. Όταν ο εκπαιδευτικός επικεντρώνεται στην ολοκλήρωση του προγράμματος σπουδών με ταχείς ρυθμούς, δίνει έμφαση στην απομνημόνευση, στη γνώση και στην εφαρμογή τύπων αντί στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, χρησιμοποιεί μόνο το σχολικό εγχειρίδιο και δεν υποστηρίζει τη μαθηματική κατανόηση για όλους τους μαθητές, τότε ευθύνεται για τη μαθηματική αποτυχία και τη συνακόλουθη φοβία για τα μαθηματικά.

Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προσπαθούν να βρουν τρόπους για να συμμετέχουν ενεργά οι μαθητές τους, όχι μόνο στην κατανόηση των εννοιών, αλλά και να δημιουργούν στοιχεία διασκέδασης και παρακίνησης, έτσι ώστε να αυξάνεται το ενδιαφέρον τους. Ένα μεγάλο μέρος του προβλήματος της *“αποστροφής”* για τα μαθηματικά δε θα ήταν τόσο σαφές, αν οι μαθητές, από τα

πρώτα βήματα της μαθηματικής γνώσης, ήταν εφοδιασμένοι με τα απαραίτητα εργαλεία, που κάνουν τις έννοιες των μαθηματικών λιγότερο αφηρημένες (Ojose, 2008). Αυτός είναι ο κύριος προβληματισμός της έρευνάς μας, δηλαδή αν οι μαθητές χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά, για να τους βοηθήσουν να συνδέσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες, τότε οι πιθανότητες είναι ότι θα υπάρχουν λιγότερο φοβικοί αποδέκτες της μαθηματικής γνώσης. Ενήλικες και παιδιά, στη συνέχεια, θα είναι φανερό πόσο απολαμβάνουν τα μαθηματικά και ότι η στάση αυτή θα έχει μια θετική αλυσιδωτή επίδραση από τη μια γενιά στην άλλη (Beckett, et al., 2011). Η χρήση των χειραπτικών υλικών έχει γίνει ένας τρόπος για τη συμμετοχή μαθητών σε ένα είδος διασκεδαστικής μάθησης που ενισχύει τα κίνητρα των μαθητών. Τα χειραπτικά υλικά είναι επίσης χρήσιμα στους μαθητές, για τη μετατροπή αφηρημένων ιδεών σε συγκεκριμένες, επιφέροντας έτσι την εννοιολογική κατανόηση (Ojose & Sexton, 2009).

Σύμφωνα με τους Cawley et al., (2001), ένα άλλο ζήτημα είναι αυτό της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά, τη στιγμή μάλιστα που σχετίζονται με δοκιμασίες αξιολόγησης (τεστ). Οι μαθητές δεν μπορούν να αποδίδουν καλά στα τεστ για διάφορους λόγους. Ένας από αυτούς τους λόγους είναι η πιθανότητα ότι ποτέ δε μαθαίνουν την ύλη στο επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης. Η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών συνήθως γίνεται με έναν προκαθορισμένο τρόπο και αποσκοπεί στη μάθηση για την επίτευξη της επίδοσης. Η παραδοχή αυτής της μελέτης είναι ότι αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν τη διδασκαλία ενδιαφέρουσα για τους μαθητές μέσω της έκθεσής τους σε εμπράγματα χειραπτικά υλικά, οι μαθητές θα μάθουν την ύλη αρκετά καλά και θα έχουν επιτύχει την εννοιολογική κατανόηση. Αυτό στη συνέχεια θα οδηγήσει σε καλύτερη απόδοση και σε επιτεύγματα στα μαθηματικά (Cawley et al., 2001).

Σύμφωνα με τον Ojose (2008), η έκθεση των μαθητών σε εμπράγματα μάθηση με τη χρήση χειραπτικών υλικών θα οδηγήσει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και συνεπώς θα αυξήσει την γνωστική ανάπτυξή τους. Πολλοί ερευνητές (Hunt et al., 2011· Vinson et al., 1997· Van de Walle, 1973) αναφέρουν μια σύνδεση μεταξύ της χρήσης των χειραπτικών υλικών και τη μείωση των επιπέδων μαθηματικού άγχους των μαθητών.

3.2.4. Χειραπτικά υλικά και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

α) Χειραπτικά υλικά και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

Σε εκπαιδευτικό πλαίσιο, η μαθηματική γνώση οικοδομείται μέσα από την κατανόηση και τη μάθηση εννοιών, διαδικασιών και την επίλυση προβλημάτων. Η διδασκαλία τους αποτελεί κυρίαρχο στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για τα μαθηματικά και αφιερώνεται πολύς χρόνος για τη μάθησή τους σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Τα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του συλλογισμού, στην καλλιέργεια ικανοτήτων και δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος και στην απόκτηση από τους μαθητές εμπιστοσύνης στον εαυτό τους για αυτές τις ικανότητες (Σακονίδης, 2007). Η γνώση, σύμφωνα με τους γνωστικούς ψυχολόγους, διακρίνεται σε *δηλωτική*, που για τα μαθηματικά περιλαμβάνει πληροφορίες, έννοιες, γενικεύσεις και σχήματα και σε *διαδικαστική*, που αναφέρεται στη δράση του ατόμου μέσα στον κόσμο, δηλαδή στον τρόπο επικοινωνίας και παρέμβασης ως αποτέλεσμα της συστηματικής διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 1998) και περιλαμβάνει κυρίως τις αλγοριθμικές διαδικασίες για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Από τους βασικούς στόχους των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι α) η κατανόηση της έννοιας των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης) με φυσικούς αριθμούς και β) η εκτέλεση των αλγορίθμων των πράξεων.

Το νέο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) της υποχρεωτικής εκπαίδευσης που συνέταξε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Υ.Α.21072α/Γ2, Υ.Α.21072β/Γ2), ανακοινώθηκαν με τα ΦΕΚ 303Β και 304Β στις 13-03-2003. Σύμφωνα με το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου δίνεται «...ιδιαιτέρη έμφαση στην ανακαλυπτική-ερευνητική μάθηση καθώς και στη θεωρία του εποικοδομητισμού. Κατά τη μεθοδολογική προσέγγιση της γνώσης αξιοποιούνται τα τρία στάδια της ανθρώπινης σκέψης (Bruner): το πραξιακό, το εικονικό και το συμβολικό». Ειδικότερα στις μικρές τάξεις Α' και Β' προτείνεται η «χρήση της αριθμογραμμής και του αριθμητηρίου (άβακα)», η

«παρουσίαση των αριθμών με αντικείμενα, με συστοιχίες κουκίδων, ζάρια ...», η «χρήση άτυπων εμπειρικών στρατηγικών», η «εισαγωγή δραστηριοτήτων με εποπτικά μέσα», παιχνίδια με «καρτέλες στις οποίες υπάρχουν αναπαραστάσεις με εικόνες, σύμβολα και λέξεις...», ο «σχηματισμός αριθμητικών μοτίβων», η «χρήση κατάλληλου υλικού (κυθάκια, ξυλάκια, αριθμητήριο)», η «χρήση της ζυγαριάς», η «χρήση κατάλληλου υλικού που έχει ομαδοποιηθεί με βάση την πεντάδα και τη δεκάδα (δίχρωμο αριθμητήριο, κουτιά με κρύπτες)», ο «σχηματισμός απλών σχημάτων με κομμάτια του παζλ (τάνγκραμ)», η «χρήση υλικών μέσων (αντικείμενα για καταμέτρηση, δάχτυλα για τον έλεγχο των βημάτων, χρήση του μέτρου)», η «χρήση κατάλληλου διδακτικού υλικού» κ.ά.

Με βάση το Α.Π.Σ. των μαθηματικών σχεδιάστηκαν και τυπώθηκαν τα νέα σχολικά εγχειρίδια για όλες τις τάξεις του δημοτικού. Η φιλοσοφία των νέων σχολικών βιβλίων ακολουθεί τη θεωρία του Bruner και ειδικότερα υπηρετεί το δεύτερο στάδιο της ανθρώπινης σκέψης που κατά τον ερευνητή ονομάζεται εικονιστικό (pictorial ή iconic). Στηρίζονται στη βασική παιδαγωγική και διδακτική αρχή ότι κάποιος μαθαίνει καλύτερα, όταν ενεργοποιείται το ενδιαφέρον του για τη μάθηση μέσα από τη δημιουργία των κατάλληλων κινήτρων και όταν έχει να αντιμετωπίσει μια κατάσταση – πρόβλημα στην οποία εμπλέκεται ενεργά και με τρόπο βιωματικό. Οι μαθηματικές δραστηριότητες αναλύονται σε σχέση με τις ικανότητες που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές, όταν εμπλέκονται σε αυτές (Πόταρη, 2007). Ο μαθητής δεν μπορεί να είναι παθητικός δέκτης των πληροφοριών που μεταδίδει ο εκπαιδευτικός, αλλά πρέπει να προβληματίζεται και να ανακαλύπτει τη νέα γνώση. Αυτό σημαίνει ότι η διδασκαλία πρέπει να παρέχει στον μαθητή ερεθίσματα κατάλληλα να τον ενεργοποιήσουν για τη διαδικασία της μάθησης (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης & Πνευματικός, 2006). Έτσι, στις σελίδες των σχολικών εγχειριδίων της Α΄ τάξης Δημοτικού συναντάμε την αναπαράσταση των αριθμών με ποικίλους τρόπους, πριν μεταβούμε στην εκμάθηση των αφηρημένων και συμβολικών μορφών που αποτελούν οι αριθμοί.

Όπως αναφέρουν οι συγγραφείς στην εισαγωγή του βιβλίου του δασκάλου της Α΄ Δημοτικού (σελ. 9), η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο γίνεται χρησιμοποιώντας α) πραγματικά αντικείμενα (δίχρωμο αριθμητήριο, δάχτυλα, ζάρια κ.λπ.), β) εικόνες με αναπαραστάσεις αντικειμένων, δαχτύλων κ.λπ. γ)

αναπαραστάσεις με τη χρήση συμβόλων σε οργανωμένη μορφή (ζάρι) ή όχι (σκόρπιες κουκκίδες, γραμμούλες), οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα καταμέτρησης, δ) αναπαραστάσεις με τη χρήση συμβόλων, οι οποίες δεν παρέχουν τη δυνατότητα καταμέτρησης (αριθμοί-λέξεις και ψηφία)».

Στο παράρτημα του βιβλίου παρέχονται κάρτες αριθμών και υλικά που μοντελοποιούν και αναλύουν την αξία και τις σχέσεις των ψηφίων στους αριθμούς, όπως οι κύβοι (αναπαριστούν τις μονάδες, λωρίδες που αποτελούνται από 10 κύβους για τις δεκάδες κ.λπ.) και ο “μετρητής” που κατασκευάζεται από τους μαθητές. Στην αρχή οι μαθητές έχουν την ανάγκη να αναπαραστήσουν τους αριθμούς με αντικείμενα (αισθητοποίηση των αριθμών), τα οποία δίνουν έμφαση στην προσθετική ανάλυση των αριθμών και οδηγούν τους μαθητές προοδευτικά από τις διαδικασίες υπολογισμού με αντικείμενα προς διαδικασίες πιο αφηρημένες, οι οποίες εκτελούνται νοερά (Λεμονίδης, 2003).

Στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, μία από τις τέσσερις βασικές διεργασίες (σελ. 10-11) για την υλοποίηση των διδακτικών στόχων του προγράμματος, είναι η διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων. Σύμφωνα με την πρόταση των εμπειρογνομόνων που κατάρτισαν το πρόγραμμα η χρήση τεχνουργημάτων (*artifacts*), απτικών και ψηφιακών, και η σταδιακή μετατροπή τους σε νοητικά εργαλεία βοηθούν στην ενσωμάτωση αφηρημένων εννοιών, όπως ο αριθμός ή η αξία θέσης.

Στη δομή του Προγράμματος Σπουδών, τονίζεται, «η επιλογή και χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων ως μέσων διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων» (σελ. 12). Στην ανάλυση της πρότασης (σελ. 28) επισημαίνεται ότι «Η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ. χειραπτικών μοντέλων, τεχνολογικών εργαλείων, λογισμικού κ.λπ.) δε διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης. Αφενός μεν πολλοί μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση εργαλείων, αφετέρου τα εργαλεία δεν ενσωματώνονται συνήθως λειτουργικά στη διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα. Με τα εργαλεία επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να

αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν γεωμετρικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους.

Οι μαθητές κυρίως με τα χειραπτικά υλικά αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Τα ψηφιακά εργαλεία ενισχύουν αυτές τις συνδέσεις, καθώς εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις α) μαθηματικού φορμαλισμού, β) κειμενικού λόγου, γ) μαθηματικών αναπαραστάσεων – γραφικών, σχηματικών, πινάκων κ.λπ. δ) προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά – ιδιότητες». Στην αναλυτική περιγραφή των μαθηματικών ενοτήτων των προτεινόμενων Προγραμμάτων Σπουδών, αναφέρονται και απεικονίζονται πλήθος χειραπτικών και δυναμικών υλικών για όλες τις τάξεις και περιγράφονται οι δραστηριότητες που μπορούν να υποστηριχτούν από τον εκπαιδευτικό.

Επίσης, σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα πολλών χωρών η χρήση των χειραπτικών υλικών εντάσσεται από τα πρώτα χρόνια της σχολικής φοίτησης (ενδεικτικά National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, 2000 για τις Η.Π.Α., Common Curriculum Framework for Mathematics, 2006 για τον Καναδά κ.ά.). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τις αρχές και τα πρότυπα του Εθνικού Συμβουλίου των Δασκάλων των Μαθηματικών/ National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, 2000) τα χειραπτικά υλικά πρέπει να χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία και σε μια ευρεία ποικιλία θεμάτων στα μαθηματικά:

- ταξινόμηση: μια προμαθηματική ικανότητα, που βοηθά στην κατανόηση μαθηματικών προτύπων και λειτουργιών
- διάταξη/σειροθέτηση: μια προμαθηματική ικανότητα, που ενισχύει την κατανόηση των αριθμών και άλλες ικανότητες που σχετίζονται με τα μαθηματικά
- διάκριση προτύπων: το θεμέλιο για την κατασκευή μαθηματικών γενικεύσεων
- αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων και την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ τους

- *πραγματοποίηση μετρήσεων*: χρησιμοποιώντας πρότυπες ή μη μονάδες και εφαρμογή σε δισδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα
- *κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης*
- *κατανόηση των μαθηματικών πράξεων*: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση
- *αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών πράξεων*
- *διερεύνηση και περιγραφή των χωρικών σχέσεων* (επιφάνεια, εμβαδόν)
- *εντοπισμός και περιγραφή των διαφόρων μορφών της συμμετρίας*
- *ανάπτυξη και αξιοποίηση της χωρικής μνήμης*
- *μάθηση και πειραματισμό με τις μετατροπές*
- *συμμετοχή στην επίλυση προβλημάτων*
- *αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών με μια ποικιλία τρόπων*
- *σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών εννοιών*
- *επικοινωνία μαθηματικών ιδεών με αποτελεσματικό τρόπο.*

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τον πυρήνα της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Χρησιμεύουν ως χρήσιμοι οδηγοί για τον εκπαιδευτικό και περιλαμβάνουν τους σκοπούς και τους στόχους του κάθε μαθήματος, τις ασκήσεις και δραστηριότητες. Σύμφωνα με τον Carnine (1991), οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να καλύψουν πάρα πολλά θέματα σε ένα έτος. Αυτό ίσως είναι αποτέλεσμα του σπειροειδούς προγράμματος σπουδών, που έχει ως σκοπό να προσθέσει διαδοχικό βάθος αντί επιφανειακής κάλυψης των θεμάτων κάθε έτος, όμως λόγω της ποσότητας των εννοιών που παρουσιάζονται, το αποτέλεσμα είναι η ανεπαρκής κάλυψη πολλών θεμάτων χρόνο με τον χρόνο (Engelmann, Carnine, & Steely, 1991). Οι εκπαιδευτικοί μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες πρέπει να αξιολογήσουν τα μαθηματικά επίπεδα των μαθητών και να χρησιμοποιήσουν αυτές τις πληροφορίες ως οδηγό, μαζί με το εξατομικευμένο πρόγραμμα εκπαίδευσης του μαθητή, για να καθοριστεί το γνωστικό πεδίο και η ακολουθία για τον σχεδιασμό ενός εξατομικευμένου εκπαιδευτικού προγράμματος. Στην πραγματικότητα εξετάζοντας το εγχειρίδιο μάλλον σαν οδηγό παρά σαν καθοριστή της καθημερινής διδασκαλίας ικανοποιεί καλύτερα τις ανάγκες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες (Schmalz, 1990).

Τα σχολικά εγχειρίδια, όταν συνδυάζονται με τα χειραπτικά υλικά που είναι διαθέσιμα για τη μαθηματική διδασκαλία, υποστηρίζουν το πραξιακό επίπεδο της μαθηματικής γνώσης και αν προσαρμοστούν κατάλληλα από τους εκπαιδευτικούς, ενισχύουν τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Lambert, 1996).

β) Χειραπτικά υλικά και μαθηματικές έννοιες

Με τη μακροχρόνια χρήση των χειραπτικών στα μαθηματικά, οι εκπαιδευτικοί έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές έχουν πολλά οφέλη στις ακόλουθες γενικές περιοχές (Heddens, Sebesta & Martin, 2004· Picciotto, 1998):

- στην έκφραση της μαθηματικής σκέψης
- στη συζήτηση μαθηματικών ιδεών και εννοιών
- στη συσχέτιση πραγματικών καταστάσεων με μαθηματικό συμβολισμό
- στη συνεργατική εργασία
- στην αποκλίνουσα σκέψη για την εύρεση μιας ποικιλίας από τρόπους για την επίλυση των προβλημάτων
- στην έκφραση προβλημάτων και λύσεων χρησιμοποιώντας μια ποικιλία μαθηματικών συμβόλων
- στη δημιουργία παρουσιάσεων
- στην ανάληψη της ευθύνης από τους μαθητές των μαθησιακών εμπειριών τους
- στην απόκτηση εμπιστοσύνης στις ικανότητές τους να βρίσκουν λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας μεθόδους, που ανακαλύπτουν οι ίδιοι χωρίς να στηρίζονται σε οδηγίες από τον εκπαιδευτικό (The Access Center, 2004).

Μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν χειραπτικά σε συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα είναι πιο πιθανό να βελτιώσουν τις μαθηματικές τους επιδόσεις από ότι οι μαθητές που δεν έχουν την ευκαιρία να εργαστούν με τα χειραπτικά. Μετά υπάρχουν κάποιοι συγκεκριμένοι τομείς στους οποίους η έρευνα δείχνει ότι τα χειραπτικά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα:

Μέτρηση: Μερικά παιδιά χρειάζεται να χρησιμοποιούν χειραπτικό υλικό, για να μάθουν να μετρούν, όπως κουμπιά, χάντρες, ξυλάκια, κύβους κ.ά. (Clements, 1999).

Θεσιακή Αξία: Η χρήση των χειραπτικών αυξάνει την κατανόηση των μαθητών για τη θεσιακή αξία (Phillips, 1989).

Υπολογισμός: Στη μάθηση υπολογιστικών δεξιοτήτων οι μαθητές τείνουν να κατακτούν και να διατηρούν αυτές τις δεξιότητες πληρέστερα, όταν τα χειραπτικά υλικά χρησιμοποιούνται ως μέρος της μαθηματικής τους εκπαίδευσής (Carroll & Porter, 1997).

Επίλυση Προβλημάτων: Η χρήση χειραπτικών έχει αποδειχθεί ότι βοηθά τους μαθητές να μειώσουν τα λάθη τους και αυξάνει τις επιδόσεις τους στα τεστ που χρειάζεται να λύσουν λεκτικά αριθμητικά προβλήματα (Clements, 1999· Carroll & Porter, 1997).

Κλάσματα: Οι μαθητές που έχουν στη διάθεσή τους κατάλληλα υλικά για να τους βοηθήσουν να μάθουν τα κλάσματα, όταν δοκιμάστηκαν σε αυτές τις έννοιες ξεπέρασαν μαθητές, οι οποίοι βασίζονται μόνο στα βιβλία (Jordan, Miller, & Mercer, 1998).

Αναλογίες: οι μαθητές, που έχουν κατάλληλα υλικά για να τους βοηθήσουν να μάθουν τα κλάσματα, έχουν επίσης βελτιωθεί σημαντικά, όταν δοκιμάστηκαν σε αναλογίες σε σχέση με εκείνους που δεν τα χρησιμοποιούν (Jordan, Miller, & Mercer, 1998).

Αλγεβρικές Ικανότητες: οι αλγεβρικές ικανότητες περιλαμβάνουν την ικανότητα να αναπαριστούν αλγεβρικές εκφράσεις, να ερμηνεύουν τέτοιες εκφράσεις, να κάνουν τις συνδέσεις μεταξύ των εννοιών κατά την επίλυση γραμμικών εξισώσεων και να επικοινωνούν με αλγεβρικές έννοιες. Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν εποπτικό υλικό στις τάξεις τους, έχουν υψηλότερες αλγεβρικές ικανότητες από εκείνους που δεν χρησιμοποιούν χειραπτικό υλικό (Chappell & Strutchens, 2001).

Τα χειραπτικά υλικά έχουν επίσης δείξει ότι παρέχουν ένα ισχυρό θεμέλιο στους μαθητές για την κατανόηση των ακόλουθων μαθηματικών εννοιών (The Access Center, 2004):

- αριθμητικές σχέσεις
- μέτρηση
- δεκαδικοί
- αριθμητικές βάσεις

- ποσοστά
- πιθανότητες
- στατιστική

Η Burns θεωρεί ότι τα χειραπτικά υλικά είναι απαραίτητα για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές σε όλα τα επίπεδα. Βρίσκει ότι τα χειραπτικά βοηθούν να γίνουν οι μαθηματικές έννοιες προσιτές σχεδόν σε όλους τους μαθητές, ενώ παράλληλα προσφέρουν άφθονες ευκαιρίες, ώστε να βοηθηθούν άμεσα οι μαθητές, για να κατανοήσουν γρήγορα τις έννοιες που διδάσκονται. Η έρευνα δείχνει ότι η χρήση των χειραπτικών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη διδασκαλία ατόμων με χαμηλές επιδόσεις και μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες (Ruzic & O'Connell, 2001· Marsh & Cooke, 1996).

Η Burns (2007: 38) παρέχει τέσσερις λόγους για τους οποίους τα χειραπτικά υλικά είναι θεμελιώδους σημασίας για τη διδασκαλία των μαθηματικών: *«βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν αφηρημένες ιδέες, παρέχουν στους μαθητές τρόπους να δοκιμάζουν και να επαληθεύουν τις ιδέες τους, είναι χρήσιμα εργαλεία για την επίλυση των προβλημάτων, και κάνουν τη μάθηση των μαθηματικών πιο ελκυστική και ενδιαφέρουσα μεταφέροντας τα μαθηματικά από τις ανοικτές σελίδες των βιβλίων και τα τετράδια εργασιών»*. Αυτές οι ιδέες εμφανίζονται επανειλημμένα στην έρευνα και σχολιάζονται στοχαστικά σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας (National Research Council, 2001: 73) καταλήγει στην επανεξέταση της έρευνας σχετικά με τον ρόλο των χειραπτικών, με την ακόλουθη δήλωση: *«Τα στοιχεία δείχνουν, εν ολίγοις, ότι τα χειραπτικά υλικά μπορούν να προσφέρουν πολύτιμη υποστήριξη στη μάθηση των μαθητών, όταν οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν στο πέρασμα του χρόνου με τους μαθητές βοηθώντας τους να οικοδομήσουν δεσμούς μεταξύ του αντικειμένου, του σύμβολου και της μαθηματικής ιδέας που αναπαριστά»*.

Η Burns (2007: 28) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά θα έπρεπε να είναι μια διασκεδαστική εμπειρία και μια ενίσχυση της επιθυμίας εξερεύνησης θεμάτων με καινοτόμες στρατηγικές και λιγότερη απογοήτευση. *«Τα μαθηματικά εργαλεία μπορούν να οικοδομήσουν τα θεμέλια για την κατανόηση εννοιών, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να προετοιμάσουν μια αφηρημένη κατανόηση»*. Τα χειραπτικά υλικά μπορούν να γίνουν εκείνα τα μαθηματικά εργαλεία για να χτίσουν γερά

θεμέλια στη μαθηματική γνώση (Moyer & Reimer, 2005· Hiebert, 1997). Ο Picciotto (1993), προτείνει ότι τα χειραπτικά υλικά επιτρέπουν στους μαθητές να αισθάνονται πιο άνετα στο μάθημα στην τάξη. Επίσης, δίνουν την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να δείξουν στους μαθητές τους διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να λύσουν ένα πρόβλημα. Η Jones (1986) αναφέρει ότι τα χειραπτικά ενισχύουν την προώθηση της εικονικής μάθησης στην τάξη και βοηθούν τους μαθητές να έχουν αυτοπεποίθηση για την αύξηση της μάθησης.

Οι Thompson και Lambdin (1994) θεώρησαν τα συγκεκριμένα υλικά κατάλληλα για δύο λόγους: (1) επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να έχουν λόγο για κάτι συγκεκριμένο, να συζητούν πώς να σκέφτονται για τα υλικά και τη σημασία των διαφόρων ενεργειών με αυτά και (2) παρέχουν κάτι πάνω στο οποίο μπορούν να δράσουν οι μαθητές. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν *«πρέπει να δοθεί έμφαση σε αυτό που οι εκπαιδευτικοί θέλουν οι μαθητές να μάθουν, σε αντίθεση με ό,τι οι εκπαιδευτικοί θέλουν οι μαθητές να κάνουν»*. *«Τα συγκεκριμένα υλικά μπορεί να είναι μια αποτελεσματική βοήθεια στη σκέψη των μαθητών και για την επιτυχία της διδασκαλίας. Όμως, η αποτελεσματικότητα εξαρτάται από το τι προσπαθούν να επιτύχουν»* (Thompson & Lambdin, 1994: 556). Επειδή οι εκπαιδευτικοί έχουν την τάση να σκέφτονται τα μαθηματικά ως απομονωμένους κανόνες για τον χειρισμό συμβόλων και όχι ένα συνεκτικό σύνολο, οι παρανοήσεις των μαθητών που βγαίνουν στην επιφάνεια, όταν χρησιμοποιούν τα συγκεκριμένα υλικά θεωρείται ως αδυναμία των υλικών από τους δασκάλους (Hall, 1998).

Οι Roy και Roy (2006) εξηγούν ότι τα χειραπτικά υλικά είναι παντού γύρω μας από τις *«...πινακίδες στον δρόμο μέχρι τα ρολόγια των παππούδων μας...»*. Οι ερευνητές παρέχουν αρκετά παραδείγματα από διάφορες μελέτες, στις οποίες έχουν εφαρμόσει τη χρήση των χειραπτικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Ο Battle (2007: 5) πιστεύει ότι *«ο ρόλος μας ως ενήλικες είναι να βοηθάμε κάθε παιδί να αναγνωρίζει τις μαθηματικές καταστάσεις στις δραστηριότητές του και να ενισχύουμε τα παιδιά να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους και τις εμπειρίες τους σε κάθε πρόβλημα που συμβαίνει»*. Αυτές οι δραστηριότητες εμπλέκουν εργαλεία που χρησιμοποιούνται ως χειραπτικά υλικά και τα οποία βοηθούν τους μαθητές να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις.

Η Lee (2007) αναφέρει μια σειρά προτάσεων σχετικά με τη χρήση χειραπτικών υλικών στην τάξη σαν ένα διασκεδαστικό και ευχάριστο εργαλείο μάθησης. Χαρακτηριστικά περιγράφει: «...όταν θέλετε να διδάξετε στα παιδιά σχετικά με τα χρήματα τι κάνετε; Βγάζετε μερικά κέρματα και λογαριασμούς και εξηγείτε πόσο αξίζει καθετί και πώς σχετίζονται μεταξύ τους. Αυτή είναι μια πρακτική προσέγγιση για να διδάξετε την αξία του χρήματος χρησιμοποιώντας χειραπτικά υλικά» (Lee, 2007: 3).

Η μελέτη των Kosko και Wilkins (2010) έδειξε μια στατιστικά θετική σχέση μεταξύ της συχνότητας της χρήσης χειραπτικών υλικών και της μαθηματικής επικοινωνίας. Είτε αυτή η σχέση είναι γνωστική ή του περιβάλλοντος ή και τα δύο, υπάρχει εμπειρική απόδειξη ότι η χρήση χειραπτικών υλικών, η μαθηματική γραφή και η μαθηματική συζήτηση, παρέχουν ευκαιρίες για μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών με αυτά της δικής τους μελέτης, δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εφαρμόσουν αυτές τις πρακτικές μέσα στις τάξεις τους και σε παρόμοια επίπεδα συχνότητας.

Η Steedly (2008) αναφέρει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ή χαμηλής μαθηματικής επίδοσης έχουν δείξει ότι μια δομημένη προσέγγιση που τους επιτρέπει να είναι ενεργοί στη μάθηση, τους βοηθά να καταλάβουν τις έννοιες και τους αλγόριθμους των πράξεων και να είναι επιτυχημένοι. Τα χειραπτικά υλικά τους δίνουν μια πολυαισθητηριακή και ενεργητική πορεία στη μάθηση.

Ένας μεγάλος αντίκτυπος από τη χρήση των χειραπτικών υλικών βρίσκεται στη βελτίωση της σκέψης των μαθητών. Μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να δημιουργήσουν μια εσωτερική αναπαράσταση των εξωτερικών εννοιών που διδάσκονται (Puchner, Taylor, O'Donnell & Fick, 2008). Επιπλέον, ενισχύουν τους μαθητές με τον αλγεβρικό συλλογισμό και τη σχεσιακή σκέψη (Suh & Moyer, 2007). Ένας σημαντικός τομέας που κάνει επιτυχημένη τη χρήση των χειραπτικών υλικών είναι η επικοινωνία που αναπτύσσεται στη διάρκεια του μαθήματος. Αρχικά, τα χειραπτικά υλικά δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς και στους μαθητές να επικοινωνούν τις σκέψεις τους εκφράζοντας κάτι συγκεκριμένο (Moyer, 2001). Στη διάρκεια αυτής της περιόδου οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εξερευνήσουν τη σκέψη των μαθητών και να τους καθοδηγήσουν στην κατάκτηση της μαθηματικής έννοιας.

3.3. Ερευνητική επισκόπηση για τη χρήση των χειραπτικών υλικών

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, οι ερευνητές έχουν μελετήσει τη χρήση των χειραπτικών υλικών σε πολλά διαφορετικά επίπεδα και σε διάφορες χώρες (Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Castro, 2006· Kelly, 2006· Cain-Caston, 1996). Οι περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι η μαθηματική επίδοση αυξάνει, όταν τα χειραπτικά υλικά χρησιμοποιούνται με σωστό τρόπο (Clements, 1999· Clements & Battista, 1990· Canny, 1984· Suydam, 1984· Driscoll, 1981· Fennema, 1972, 1973). Πολλές μελέτες δείχνουν επίσης, ότι το χειραπτικό υλικό βελτιώνει στα παιδιά τη μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη διατήρηση των μαθηματικών εννοιών και ότι η χρήση των χειραπτικών για μεγάλο χρονικό διάστημα παρέχει περισσότερα οφέλη από ότι η βραχυπρόθεσμη χρήση (Sowell, 1989).

Η Kelly (2006) μελέτησε την αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών στην διδασκαλία επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων στις μικρές τάξεις του δημοτικού σχολείου. Υποστηρίζει ότι τα χειραπτικά υλικά μπορούν να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση των προβλημάτων, όταν οι εκπαιδευτικοί που τα χρησιμοποιούν είναι καταρτισμένοι στη χρήση τους και οι μαθητές τα χρησιμοποιούν ως γνωστικά εργαλεία, που διευκολύνουν την αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος και υποστηρίζουν τη διαδικασία επίλυσής του.

Πολλές μελέτες που δημοσιεύθηκαν μεταξύ του 1970 και του 1990 υποστήριξαν τη χρήση των χειραπτικών υλικών στα μαθηματικά. Οι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές, που χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά κατά τη διάρκεια της μαθηματικής διδασκαλίας, ξεπερνούν συνήθως σε απόδοση τους μαθητές που δεν τα χρησιμοποιούν (Sowell, 1989· Suydam, 1986).

Πολυάριθμες είναι οι μελέτες που έχουν εξετάσει την αποτελεσματικότητα των εξειδικευμένων χειραπτικών υλικών για να διδάξουν συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα. Τα ευρήματα σημειώνουν ότι *«όταν οι μαθητές εκτίθενται στην εμπράγματη μάθηση σε εβδομαδιαία και όχι σε μηνιαία βάση, έχει αποδειχθεί ότι σε ένα ποσοστό 72% είναι σε ένα ανώτερο επίπεδο στα μαθηματικά* (Wenglinsky, 2000: 16). Οι Cramer et al., (2002) συνέκριναν την επίδοση 1.600 μαθητών δημοτικού στην εκμάθηση των κλασμάτων με και χωρίς τη χρήση χειραπτικών

υλικών. Βρήκε ότι οι μαθητές, που χρησιμοποίησαν χειραπτικά υλικά, είχαν υψηλότερες μέσες βαθμολογίες στο τέλος του μαθήματος, καθώς και υψηλότερες τιμές διατήρησης των πληροφοριών. Η έρευνα των Cain-Caston (1996) δείχνει ότι η χρήση χειραπτικών υλικών συμβάλλει στη βελτίωση του μαθησιακού περιβάλλοντος των μαθηματικών μέσα στην τάξη.

Η ερευνητική επισκόπηση πολλών ερευνών δείχνει ότι η χρήση συγκεκριμένων υλικών μπορεί να παράγει ουσιαστική κατανόηση των συμβολικών συστημάτων και να αυξήσει την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών. Σε μια περιεκτική ανασκόπηση της αυτενεργής μάθησης στα μαθηματικά από το νηπιαγωγείο μέχρι μεγαλύτερες τάξεις, οι Suydam και Higgins (1977) ανέφεραν ότι στις 11 από τις 23 μελέτες που ανέλυσαν, βρήκαν σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών που ευνοούν τη χρήση των χειραπτικών υλικών, δύο μελέτες που δεν προτείνουν τη χρήση τους και δέκα μελέτες που δεν ανέφεραν σημαντικές διαφορές μεταξύ της χρήσης και της μη χρήσης τους. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση χειραπτικών υλικών παράγει μεγαλύτερη κατανόηση από όταν αυτά δεν χρησιμοποιούνται.

Ο Parham (1983) ανέλυσε 64 μελέτες και έλαβε 171 αποτελέσματα στη σύγκριση της χρήσης ή της μη χρήσης των χειραπτικών υλικών με τη μαθηματική απόδοση των μαθητών. Η ανάλυσή του αποδεικνύει ένα μεγάλο μέγεθος της επίδρασης που ευνοεί τη διδακτική τους αξιοποίηση.

Σε μια πιο πρόσφατη μετα-ανάλυση εξήντα (60) μελετών (από το νηπιαγωγείο μέχρι το λύκειο), που συνέκρινε τα αποτελέσματα της χρήσης υλικών με τα αποτελέσματα μιας πιο αφηρημένης διδασκαλίας, η Sowell (1989) κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι τα χειραπτικά υλικά είναι αποτελεσματικά, όταν χρησιμοποιούνται στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου και ιδιαίτερα σε μικρές τάξεις. Η μελέτη της αναφέρει ότι η διδασκαλία με συγκεκριμένα υλικά για ένα χρόνο ή και περισσότερο βελτιώνει τις μαθηματικές επιδόσεις και συνεπώς, η μακροχρόνια χρήση των συγκεκριμένων διδακτικών υλικών από εκπαιδευτικούς γνώστες της ορθής αξιοποίησής τους βελτιώνει τις επιδόσεις και τις στάσεις των μαθητών.

Σχετικά με τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών σε μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, πολλοί

ερευνητές (Steen, Brooks, & Lyon, 2006· Gersten, Jordan, & Flojo, 2005· Moyer & Jones, 2004· Moyer, 2002) αναφέρουν ότι τα χειραπτικά υλικά και οι μαθηματικές εμπειρίες που απορρέουν από τη χρήση τους, έχουν θετική επίδραση στη μαθηματική μάθηση και ενισχύουν την εννοιολογική κατανόηση, καθώς ενεργοποιούν τους μαθητές (Ojose & Sexton, 2009· Berch, 2005), ενισχύουν την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών (Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005· Funkhouser, 1995), προωθούν την αυτόνομη σκέψη (Kelly, 2006· Wisniewski & Smith, 2002) και είναι αποτελεσματικά στη διδασκαλία των μαθηματικών (Fuchs, et al., 2006· Dowker, 2005).

Ο Funkhouser (1995) στην έρευνά του μελέτησε την εφαρμογή διδακτικών υλικών, και συγκεκριμένα τα πλαίσια του 5 και του 10, για να διδάξει τις βασικές αριθμητικές έννοιες σε παιδιά ηλικίας νηπιαγωγείου και Α' τάξης με μαθησιακές δυσκολίες. Μετά το τέλος της διδακτικής του παρέμβασης όλοι οι μαθητές κατανόησαν τις αριθμητικές σχέσεις από το 0 έως το 10.

Η έρευνα δείχνει ότι η συστηματική χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων και των χειραπτικών υλικών μπορεί να οδηγήσει σε στατιστικά σημαντικά ή ουσιαστικά σημαντικά θετικά αποτελέσματα στη μαθηματική επίδοση. Στη μετα-ανάλυση των Gersten et al. (2009) αναφέρονται τέσσερις μελέτες που χρησιμοποίησαν οπτικές αναπαραστάσεις, για να βοηθήσουν να ανοίξει ο δρόμος για τους μαθητές, για να κατανοήσουν την αφηρημένη εκδοχή της αναπαράστασης (Woodward, 2006· Jitendra et al., 1998· Wilson & Sindelar, 1991· Walker & Poteet, 1989). Για παράδειγμα, μία από τις μελέτες διδάσκει πώς οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν τις οπτικές αναπαραστάσεις, όπως τις αριθμογραμμές, για την κατανόηση των μαθηματικών δεδομένων (Woodward, 2006). Οι τέσσερις μελέτες έδειξαν οφέλη στα μαθηματικά δεδομένα και τις πράξεις (Woodward, 2006) και την επάρκεια επίλυσης προβλημάτων (Jitendra et al., 1998· Wilson & Sindelar, 1991· Walker & Poteet, 1989) και μπορούν να παράσχουν αποδεικτικά στοιχεία ότι η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων σε διδακτικές παρεμβάσεις αποτελούν αποτελεσματικές τεχνικές. Επίσης, τρεις από τις μελέτες χρησιμοποίησαν χειραπτικά υλικά στα πρώιμα στάδια της διδασκαλίας, για την ενίσχυση της κατανόησης των βασικών μαθηματικών εννοιών και των πράξεων. Για παράδειγμα, οι Darch et al. (1984) χρησιμοποίησαν συγκεκριμένα μοντέλα, όπως ομάδες κουτιών, για να διδάξουν τους κανόνες για τα

προβλήματα πολλαπλασιασμού. Ομοίως, οι Fuchs, Fuchs, Craddock et al. (2008) χρησιμοποίησαν εποπτικό υλικό στη διδασκαλία τους, με στόχο να διδάξουν δύσκολες έννοιες που παρατηρήθηκαν στην τάξη. Σε μια άλλη μελέτη, οι Fuchs, Seethaler et al. (2008) χρησιμοποίησαν τα συγκεκριμένα υλικά και ανέδειξαν τον ρόλο που παίζουν, για να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την υποκείμενη μαθηματική δομή κάθε τύπου προβλήματος. Σε όλες αυτές τις μελέτες, τα χειραπτικά υλικά ήταν μία πτυχή ενός σύνθετου εκπαιδευτικού προγράμματος. Οι τρεις μελέτες έδειξαν σε μεγάλο βαθμό σημαντικές και θετικές επιπτώσεις και παρέχουν αποδεικτικά στοιχεία, ότι η χρήση των χειραπτικών μπορεί να είναι χρήσιμη στα αρχικά στάδια μιας παρέμβασης, για τη βελτίωση της επάρκειας στην επίλυση προβλημάτων.

Οι Raphael, Sowell και Wahlstrom (1989) στην έρευνά τους αναφέρουν μελέτες που δείχνουν μια συσχέτιση της μαθηματικής επίδοσης των μαθητών με την εμπειρία των εκπαιδευτικών στη χρήση των χειραπτικών. Σε μια άλλη μελέτη, ο Olkun (2003) αξιολογεί μαθητές Γ' και Δ' Δημοτικού στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά σχήματα και δυνητικά χειραπτικά υλικά γεωμετρίας. Ο ερευνητής αναφέρει τη θετική επίδραση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) στη γεωμετρική κατανόηση. Η Williams (2001) χρησιμοποίησε στη μελέτη της κέρματα ως χειραπτικό υλικό, που θα βοηθούσε μαθητές της Β' τάξης να κατανοήσουν προσθέσεις, χρησιμοποιώντας το σύμβολο (+) της πρόσθεσης. Η ερευνήτρια καταλήγει ότι σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές χρειάζονται εικόνες που να ενσωματώνουν τα μαθηματικά σύμβολα και να τους βοηθούν στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης. Ο Krech (2000) χρησιμοποίησε σοκολάτες ως χειραπτικό υλικό για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Αυτή η προσέγγιση εισάγει την ανακαλυπτική μάθηση στους μαθητές και τους επιτρέπει να εξερευνήσουν, διαμέσου εμπράγματων δραστηριοτήτων, την έννοια του κλάσματος. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος του Krech, οι μαθητές ήταν ικανοί να μεταφέρουν μια οπτική εικόνα στο μυαλό τους για μελλοντική χρήση.

Οι Bushell και Fueyo (1998) προτείνουν ότι είναι μεγάλη ανάγκη για τη χρήση φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών στη διδακτική πράξη, επειδή είναι ένα βασικό συστατικό του Αναλυτικού Προγράμματος στα μαθηματικά. Προτάσσουν την αριθμογραμμή σαν βασικό υλικό της διδασκαλίας των μαθηματικών, αφού

επιτρέπει στους μαθητές να συσχετίζουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Υποστηρίζουν ότι αν οι μαθητές μπορούν να δουν οποιουσδήποτε δύο αριθμούς στην αριθμογραμμή, τότε μπορούν να τους παραλληλίζουν και να καθορίζουν τις διαφορές μεταξύ τους.

Η μελέτη του Moch (2001) έδειξε ότι οι μαθητές απολαμβάνουν τη μάθηση, έχοντας την ευκαιρία να ανακαλύψουν και να σκεφτούν μέσα από δραστηριότητες με τη χρήση χειραπτικών υλικών. Στην ερευνά του, εκπαιδευτικοί και μαθητές βρήκαν αυτόν τον τύπο εκπαιδευτικού εργαλείου να έχει ενδιαφέρον στην τάξη και να αποτελεί μια καλή μαθησιακή εμπειρία.

Οι Raymond και Leinenbach (2000: 303) μελέτησαν την επίδραση της χρήσης των χειραπτικών υλικών σε μαθηματικές έννοιες. Τα αποτελέσματα της έρευνας «[...]επιβεβαίωσαν τις πεποιθήσεις των ερευνητών ότι μια εμπράγματο ενεργή προσέγγιση στα μαθηματικά είναι το καλύτερο μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών».

Οι Wearne και Hiebert (1988) βρήκαν ότι οι μαθητές θα ήθελαν να χρησιμοποιήσουν τα χειραπτικά υλικά με έναν “παπαγαλίστικο” τρόπο, με ελάχιστη ή καμία κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, που εμπλέκονται στις διαδικασίες. Στους 29 μαθητές της έρευνας Γ’ και Δ’ τάξης διδάχθηκαν δεκαδικές έννοιες χρησιμοποιώντας τις ράβδους δεκαδικής βάσης. Στους περισσότερους μαθητές “δημιουργήθηκαν συνδέσεις μεταξύ των ράβδων και των συμβόλων” που τους βοήθησαν να κατανοήσουν τις δεκαδικές έννοιες.

Ο Hall (1998) ανέφερε ότι τα συγκεκριμένα υλικά θα μπορούσαν να είναι χρήσιμα λόγω της ευκολίας της περιγραφής των δράσεων στα φυσικά αντικείμενα, σε αντίθεση με τις πράξεις με σύμβολα και επειδή οι μαθητές μπορούν να παρακινηθούν σε μια διαδικασία από μια τέτοια περιγραφή. Κατέληξε ότι η *Θεωρία της Διαδικαστικής Αναλογίας* δείχνει πώς μπορούν να μεταφερθούν αυτές οι διαδικασίες με συγκεκριμένα υλικά για να δημιουργήσουν έναν γραπτό αλγόριθμο. Η Θεωρία, σύμφωνα με τον ερευνητή, τονίζει ότι η μεταφορά αυτή συνεπάγεται κατ' αναλογία, υποκατάσταση και απλούστευση, παρά τη δημιουργία ενός συστήματος συμβόλων από το τίποτα.

Οι μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες και οι μαθητές χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά, έχουν δείξει ότι μια δομημένη προσέγγιση τους επιτρέπει να είναι

ενεργοί στη μάθησή τους και τους βοηθά να καταλαβαίνουν έννοιες και αλγόριθμους και να πετυχαίνουν. Τα χειραπτικά υλικά τους εισάγουν σε μια πολυαισθητηριακή και ενεργητική πορεία μάθησης (Witzel, 2007).

Σε μια αναζήτηση της βιβλιογραφίας εντοπίστηκαν πέντε μελέτες για τη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας με τη χρήση φυσικών χειραπτικών υλικών στους μαθητές που έχουν μαθηματικές μαθησιακές δυσκολίες. Σε δύο μελέτες των Butler, Miller, Crehan, Babbitt και Pierce (2003) και Witzel, Mercer και Miller (2003), οι μαθητές με ήπιες έως μέτριες μαθηματικές δυσκολίες, που συμμετείχαν στη διδασκαλία με τη χρήση φυσικών χειραπτικών υλικών, σημείωσαν σημαντικά υψηλότερη επιτυχία από ό, τι οι μαθητές που δεν τα είχαν χρησιμοποιήσει. Ομοίως, τα αποτελέσματα από τις τρεις μελέτες στις οποίες συμμετείχαν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, ανέφεραν ότι οι επιδόσεις βελτιώθηκαν, όταν οι μαθητές συμμετείχαν στη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών υλικών (Cass, Cates, Smith, & Jackson, 2003· Moch, 2001· Maccini & Hughes, 2000).

Αρκετές σύγχρονες μελέτες δείχνουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες μπορούν να επωφεληθούν από τη χρήση των χειραπτικών υλικών περισσότερο από τους τυπικούς μαθητές (Butler, Miller, Crehan, Babbitt, & Pierce, 2003· Cass, Cates, Smith, & Jackson, 2003· Witzel, Mercer, & Miller, 2003· Maccini & Hughes, 2000· Marsh & Cook, 1996). Σύμφωνα με τους Marzano (2010) και Van Garderen (2006), ένα στοιχείο που διακρίνει τους μαθητές υψηλής και χαμηλής επίδοσης είναι η ικανότητά τους να αναπαριστούν τις μαθηματικές έννοιες. Επιπλέον, ο Arcavi (2003) αναφέρει ότι οι μαθητές, οι οποίοι δημιουργούν, ερμηνεύουν, αξιοποιούν και προβληματίζονται με χειραπτικές και εικονιστικές αναπαραστάσεις, μπορούν ευκολότερα να συνδέσουν αυτές τις αναπαραστάσεις με αφηρημένες έννοιες και στη συνέχεια να αναπτύξουν μεγαλύτερη κατανόηση των μαθηματικών θεμάτων.

Οι Cramer, Post & DelMas (2002) περιγράφουν τέσσερις τρόπους όπου τα χειραπτικά υλικά διευκόλυναν την ανάπτυξη της κατανόησης του κλάσματος από τους μαθητές: 1) οι μαθητές χρησιμοποίησαν το υλικό, για να αναπτύξουν τις νοητικές εικόνες της έννοιας του κλάσματος, 2) η σύγκριση των χειραπτικών αντικειμένων βοήθησε τους μαθητές να σχηματίζουν σωστές μεθόδους για να συγκρίνουν κλασματικά μεγέθη, 3) οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά

ως αναφορά για να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους, και 4) στους μαθητές, που χρησιμοποίησαν χειραπτικά υλικά, εμφανίστηκαν λιγότερες παρανοήσεις.

Οι Marsh και Cook (1996) μελέτησαν τη χρήση των ράβδων Cuisenaire ως υποστηρικτικό υλικό για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων σε τρεις μαθητές Γ' τάξης με μαθησιακές δυσκολίες. Οι μαθητές δεν είχαν μόνο μεγαλύτερη επιτυχία στην επιλογή της σωστής πράξης, όταν χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά, αλλά συνέχισαν να βελτιώνονται και μετά την απόσυρση αυτών.

Οι Cass, Cates, Smith, και Jackson (2003) χρησιμοποίησαν μελέτες περίπτωσης για τη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας της περιμέτρου και του εμβαδού, χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό και συγκεκριμένα τους γεωπίνακες (geoboards). Οι συμμετέχοντες στη μελέτη ήταν τρεις μαθητές Δ' δημοτικού με μαθησιακές δυσκολίες, των οποίων βελτιώθηκε η ικανότητά τους να επιλύουν γεωμετρικά προβλήματα.

Στην επισκόπηση των Miller, Butler και Lee (1998) συνεξετάζεται πλήθος ερευνών που χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Στη μελέτη τους οι Peterson, Mercer και O'Shea (1988) σύγκριναν την αποτελεσματικότητα δύο μεθόδων διδασκαλίας για τη θεσιακή αξία σε τάξεις με μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Στη μία δίδαξαν τη θεσιακή αξία ακολουθώντας τη διαδικασία CRA (**C**oncrete-**R**epresentational-**A**bstract / συγκεκριμένο-εικονιστικό-αφηρημένο), ενώ στην άλλη με την τυπική διδασκαλία. Η πειραματική ομάδα διδάχθηκε τρία μαθήματα με τη χρήση χειραπτικών υλικών, τρία μαθήματα με τη χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων και τρία μαθήματα αφηρημένης διδασκαλίας. Οι στατιστικές σημαντικές διαφορές ευνοούν την πειραματική ομάδα και δείχνουν καλύτερα αποτελέσματα με τη χρήση των υλικών.

Η Steedly (2008) στην έρευνά της χρησιμοποίησε τη μέθοδο διδασκαλίας CRA. Στο πρώτο στάδιο αυτής της στρατηγικής χρησιμοποίησε χειραπτικά υλικά για τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών, ενώ στο δεύτερο στάδιο εικόνες και σχέδια πριν τη μετάβαση στο αφηρημένο στάδιο των συμβόλων. Τα αποτελέσματα έδειξαν οφέλη στη μαθηματική κατανόηση των μαθητών και ιδιαίτερα από το στάδιο της χρήσης των υλικών. Οι Λεμονίδης και Ηλιάδου (2016) εφάρμοσαν τη διδακτική μέθοδο CRA για τη διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθητές της ΣΤ' τάξης.

Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές είχαν αποκτήσει μια εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων.

Οι Miller και Mercer (1993) εξέτασαν την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας CRA στη διδασκαλία προσθέσεων και υπολογισμού χρημάτων και καθόρισαν πόσα μαθήματα απαιτήθηκαν σε κάθε επίπεδο προτού να μπορέσουν οι μαθητές να μεταφέρουν τις δεξιότητες σε αφηρημένα προβλήματα. Πέντε μαθητές που προσδιορίστηκαν με μαθησιακές δυσκολίες συμμετείχαν στην έρευνα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ακολουθία CRA ήταν αποτελεσματική για την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων μετά από πέντε 20λεπτα μαθήματα σε κάθε στάδιο. Τρεις από τους μαθητές κατάφεραν να μεταβούν στο αφηρημένο επίπεδο από το πρώτο στάδιο της διδασκαλίας, ενώ οι άλλοι δύο στο δεύτερο στάδιο.

Ο Funkhouser (1995) μελέτησε τη χρήση των επεμβατικών συσκευών για να διδάξει τις βασικές αριθμητικές έννοιες σε παιδιά ηλικίας νηπιαγωγείου και Α' τάξης με μαθησιακές δυσκολίες, χρησιμοποιώντας πλαίσια του 5 και του 10. Η διδακτική παρέμβαση διήρκεσε τέσσερις (4) εβδομάδες και στο τέλος όλοι οι μαθητές κατανόησαν τις αριθμητικές σχέσεις από το 0 έως το 10.

Οι Wisniewski και Smith (2002) μελέτησαν την επίδραση ενός χειραπτικού εργαλείου (Touch Math) για την αναπαράσταση των αριθμών, σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά που φοιτούσαν σε Τμήματα Ένταξης. Μετά από 14 εβδομάδες η χρήση του υλικού βελτίωσε τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών.

Οι Cass et al. (2003) διερεύννησαν την επίδραση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία της περιμέτρου και σε δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων εμβαδού σε τρεις μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι μαθητές διδάχτηκαν ένας προς έναν την επίλυση περιμέτρου και επιφάνειας, χρησιμοποιώντας τον γεωπίνακα *«με μοντελοποίηση, καθοδηγούμενη πρακτική και ανεξάρτητη πράξη»*. Η εκπαίδευση αποσκοπούσε και στη μεταφορά των δεξιοτήτων στην επίλυση προβλημάτων, με μολύβι και χαρτί. Η χρήση των χειραπτικών υλικών επέτρεψε στους μαθητές να κάνουν λιγότερα λάθη. Τους άρεσε η απτική μορφή της εργασίας με το χειραπτικό υλικό και δήλωσαν ότι έκανε τα προβλήματα *“να ζωντανεύουν”*. Η μελέτη επίσης έδειξε ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών είχε *“... αποτελέσματα στην μακροπρόθεσμη διατήρηση των δεξιοτήτων που διδάχτηκαν”*.

Η Smith (2008) μελέτησε τα οφέλη από την πολυαισθητηριακή διδασκαλία των μαθηματικών σε 12 μαθητές που φοιτούν σε τρία (3) Τμήματα Ένταξης. Οι μαθητές διδάχθηκαν για αρκετούς μήνες χρησιμοποιώντας χειραπτικά υλικά με στόχο την ανάπτυξη στρατηγικών για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το χειραπτικά υλικά και συγκεκριμένα η χρήση των ράβδων δεκαδικής βάσης, βελτίωσε σημαντικά τις επιδόσεις των μαθητών κυρίως στις στρατηγικές επίλυσης και στον υπολογισμό.

Ο Battle (2007) ερεύνησε την επίδραση των χειραπτικών υλικών σε μαθητές χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά. Η έρευνά του εστίασε σε μια ομάδα μαθητών από δύο διαφορετικές τάξεις, όπου στη μία εφαρμόζονταν η παραδοσιακή διδασκαλία και στην άλλη (πειραματική) η χρήση χειραπτικών υλικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική διαφορά, προς όφελος της πειραματικής ομάδας, στο επίπεδο της γνώσης για την πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών.

Τα χειραπτικά υλικά μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αξιοποιήσουν την πρακτική στον πραγματικό κόσμο της γνώσης τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του φαινομένου είναι η εργασία των Carraher, Carraher και Schliemann (1985) «*Μαθηματικά στους δρόμους και στα σχολεία*». Η έρευνα διεξήχθη με παιδιά που πωλούσαν αγαθά σε λαϊκές αγορές της Βραζιλίας. Αυτά τα παιδιά είχαν καλές επιδόσεις σε μαθηματικά προβλήματα που παρουσιάζονται στο οικείο-πλαίσιο αγοραπωλησιών στον δρόμο, αλλά παραδόξως, δεν ήταν σε θέση να λύσουν τα ίδια ακριβώς προβλήματα που παρουσιάζονταν σε μια τυπική διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη. Από τη δημοσίευση της μελέτης τους, οι περισσότεροι ερευνητές έχουν αρχίσει να εξετάζουν προσεκτικά πώς το πλαίσιο επηρεάζει την κατανόηση των παιδιών για τα μαθηματικά. Η αναδυόμενη συναίνεση είναι ότι τα παιδιά (και οι ενήλικες) θα επωφεληθούν από πλαίσια που θα τους επιτρέψουν να αξιοποιήσουν την πρακτική, στον πραγματικό κόσμο της γνώσης τους (Rittle-Johnson & Koedinger, 2005· Baranes, Perry & Stigler, 1989· Kotovsky, Hayes, & Simon, 1985). Τα χειραπτικά υλικά συχνά σχεδιάζονται για να συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο της γνώσης των παιδιών.

Τα χειραπτικά υλικά δεν μπορούν να θεωρηθούν πάντα αποτελεσματικά. Ο Metz (1995) αναφέρει ότι η αισθητηριακή φύση τους κάνει τα χειραπτικά φαινομενικά “πραγματικά”. Συνδέονται με κάποια διαισθητική και αυτενεργή

κατανόηση και ως εκ τούτου είναι χρήσιμα. Υπάρχουν, ωστόσο, προβλήματα με την άποψη αυτή. Πρώτον, δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι οι έννοιες μπορούν να “διαβαστούν” με τα χειραπτικά. Δηλαδή, τα φυσικά αντικείμενα δεν μπορεί να υφίστανται ουσιαστικό χειρισμό χωρίς να διευκρινίζονται και να αναλύονται οι έννοιες (Ball, 1992). Δεύτερον, ακόμη και αν τα παιδιά αρχίζουν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των χειραπτικών υλικών και των μαθηματικών ιδεών, οι φυσικές ενέργειες που εκτελούνται με τα συγκεκριμένα χειραπτικά μπορεί και να οδηγούν σε διαφορετικές νοητικές ενέργειες από αυτές που θέλουμε οι μαθητές μας να μάθουν. Για παράδειγμα, στην έρευνα του ο Gravemeijer (1991) βρήκε μια αναντιστοιχία μεταξύ των μαθητών που χρησιμοποιούσαν την αριθμογραμμή για να εκτελέσουν προσθέσεις. Κατά την πρόσθεση 5+4, οι μαθητές που βρίσκονται στο 5, υπολογίζουν «ένα, δύο, τρία, τέσσερα» και διαβάζουν την απάντηση. Αυτό δεν τους βοηθά να λύσουν το πρόβλημα νοερά. Για να το κάνουν θα πρέπει να μετράνε «έξι, επτά, οκτώ, εννέα» και ταυτόχρονα στις μετρήσεις να εννοούν ότι το 6 είναι 1, το 7 είναι 2, και ούτω καθεξής. Αυτές οι δράσεις είναι εντελώς διαφορετικές. Οπότε, ο ίδιος ερευνητής διαπίστωσε ότι κατά την επίλυση μιας αριθμητικής πράξης οι εξωτερικές δράσεις των μαθητών και οι αντιστοιχίσεις των αριθμών στον άβακα δεν ταιριάζουν πάντα με τη νοερή δραστηριότητα την οποία ο εκπαιδευτικός απαιτεί από εκείνους, για να επιλύσουν την πράξη χωρίς τη χρήση των υλικών.

Ως εκ τούτου, αν και τα χειραπτικά υλικά έχουν σημαντική θέση στη μάθηση, η φυσική τους κατάσταση δε μεταφέρει πάντα το νόημα της μαθηματικής ιδέας. Οι μαθητές μπορεί γνωστικά να απαιτούν συγκεκριμένα υλικά για να κατασκευάσουν αρχικά μια έννοια, όμως θα πρέπει να αντανakλούν τις δράσεις τους με τα χειραπτικά υλικά για να το επιτύχουν. Σημαντική είναι εδώ η συμβολή των εκπαιδευτικών, οι οποίοι θα μπορούν να συνδυάζουν τις αναπαραστάσεις των μαθητών τους με τις μαθηματικές ιδέες και θα τους βοηθούν να αναπτύξουν αυξημένη κατανόηση και έτσι θα οικοδομήσουν τις δικές τους μαθηματικές αναπαραστάσεις. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Ball (1992: 47), «*Αν και η κιναισθητική εμπειρία μπορεί να ενισχύσει την αντίληψη και τη σκέψη, η κατανόηση δεν ταξιδεύει μέσα από τις άκρες των δακτύλων και μέχρι το βραχίονα*».

Μέσα από μια προσεκτικότερη μελέτη της βιβλιογραφίας μας εντοπίζονται μελέτες μέσα από τις οποίες διαφαίνεται ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών όχι

μόνο μπορεί να είναι αναποτελεσματική, αλλά επίσης, μπορεί να είναι επιζήμια για τη μαθηματική μάθηση και επίδοση σε ορισμένες περιπτώσεις (Amaya, Uttal, O'Doherty, Liu, & DeLoache, 2007· McNeil, Uttal, Jarvin, & Sternberg, 2007). Υπάρχουν διάφορες θεωρίες που εξηγούν γιατί τα χειραπτικά υλικά δε βοηθούν (και μπορεί ακόμη και να εμποδίζουν) τη μάθηση των μαθητών και δεν ενισχύουν τη μαθηματική απόδοση. Κατ' αρχάς, οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν, εν αγνοία τους και χωρίς πρόθεση, να είναι η πηγή του προβλήματος. Συγκεκριμένα, είναι πιθανόν τα ίδια τα χειραπτικά υλικά να είναι ευεργετικά για τη μάθηση των μαθητών, αλλά οι εκπαιδευτικοί να αδυνατούν να τα χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά (Moyer, 2001· Smith, 1996). Οι εκπαιδευτικοί μπορεί να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά για διασκέδαση ή απλά για να προσθέσουν ποικιλία στις τάξεις τους, αντί να τα χρησιμοποιούν για να εμπλέξουν τους μαθητές με τις μαθηματικές έννοιες. Μπορεί να θεωρούν ότι τα χειραπτικά υλικά θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά όχι για να διδάξουν στους μαθητές τις έννοιες και τις μαθηματικές διαδικασίες.

Η Moyer (2001) διερεύνησε πώς και γιατί δέκα (10) εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούσαν το υλικό στις τάξεις τους. Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν τα χειραπτικά υλικά να είναι διασκέδαση και ανταμοιβή, αλλά αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν την αξία τους ως εργαλεία για τη μάθηση των μαθηματικών. Τα ευρήματα δείχνουν την τάση των μαθητών να βλέπουν τα χειραπτικά υλικά σαν *“ώρα για παιχνίδι”*. Μολονότι η Moyer δεν ερεύνησε άμεσα πώς αυτές οι συμπεριφορές επηρεάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα, η ίδια προτείνει ότι η συσχέτιση μεταξύ χειραπτικών υλικών και διασκέδασης μπορεί να παρεμποδίσει τη μάθηση, γιατί *“υποτιμά τη δυναμική των υλικών αυτών ως αναπαραστάσεις για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών”* (Moyer, 2001: 181).

Τα ευρήματα της Moyer συμφωνούν και με αυτά της Smith (1996), σύμφωνα με τα οποία, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι καλύτερο να διδάσκονται μέσω της αφήγησης, δηλαδή, με την εισαγωγή των απαραίτητων διαδικασιών βήμα-βήμα για την επίλυση προβλημάτων, την επανάληψη των διαδικασιών αυτών σε σαφή γλώσσα, δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία να εξασκήσουν τις διαδικασίες αυτές, και την παροχή ανατροφοδότησης, όταν είναι απαραίτητο. Αντίθετα, η αποτελεσματική χρήση των χειραπτικών υλικών

προϋποθέτει οι εκπαιδευτικοί να αποδεχτούν τις προσπάθειες διδακτικής μεταρρύθμισης που δίνουν έμφαση στην εμπράγματη μάθηση. Κοντολογής, η βασική ιδέα κι εδώ είναι ότι τα χειραπτικά υλικά είναι ευεργετικά, αλλά μόνο αν οι εκπαιδευτικοί τα αποδεχτούν και τα χρησιμοποιήσουν σωστά, ως εργαλεία για την κατασκευή της γνώσης και όχι ως παιχνίδια (McNeil, 2007).

Επίσης, τα ίδια τα χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι η πηγή του προβλήματος, επειδή απαιτούν διπλή εκπροσώπηση. Δηλαδή, ένα δεδομένο χειραπτικό υλικό πρέπει να χρησιμοποιείται όχι μόνο ως αντικείμενο αλλά και ως σύμβολο μιας μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας. Δυστυχώς, υπάρχουν τουλάχιστον τρία εμπόδια για τη διπλή εκπροσώπηση: (α) οι αδιαφανείς αντιστοιχίσεις μεταξύ των χειραπτικών και των εννοιών ή διαδικασιών που συμβολίζουν, (β) οι περιορισμένοι γνωστικοί πόροι των παιδιών που δυσκολεύουν την κατανόηση των αντιστοιχίσεων και την αναπαράσταση με τα υλικά και (γ) η τάση των παιδιών να αντιστέκονται στις αλλαγές σ' ένα αυστηρά δομημένο εκπαιδευτικό πλαίσιο (Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997).

Τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τα συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά ποικίλουν. Σε μελέτες των Resnick και Omanson (1987) και του Labinowicz (1985), η χρήση των κύβων δεκαδικής βάσης (base-ten blocks) έδειξε μικρή επίδραση στη μάθηση των παιδιών. Σε αντίθεση, τόσο οι Fuson και Briars (1990) όσο και οι Hiebert και Wearne (1992) αναφέρουν θετικά αποτελέσματα από τη χρήση των κύβων δεκαδικής βάσης. Οι διαφορές στα αποτελέσματα των ερευνών οφείλονται στη φύση της ενασχόλησης των μαθητών με τα συγκεκριμένα υλικά και τον προσανατολισμό τους προς τα υλικά σε σχέση με τα μαθηματικά σύμβολα και τις αριθμητικές τιμές. Καθοριστικό ρόλο έπαιξε η καθοδήγηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς για τη χρήση των χειραπτικών υλικών, καθώς και η προετοιμασία της διδασκαλίας για την αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών που διδάχτηκαν με τη χρήση των κύβων δεκαδικής βάσης.

Σε γενικές γραμμές, πάντως, οι ασάφειες σε μερικά από τα ευρήματα της έρευνας που δείχνουν μικρή ή και μηδαμινή επίδραση της χρήσης των χειραπτικών υλικών στη μαθηματική κατανόηση των μαθητών, δεν υπονομεύουν τη γενική συναίνεση ότι τα χειραπτικά υλικά είναι πολύτιμα εκπαιδευτικά εργαλεία.

3.4. Χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών – Συνδυασμός φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών

Σαν αποτέλεσμα των καινοτομιών στην τεχνολογία, με την επικράτηση του διαδικτύου και την όλο και μεγαλύτερη διαθεσιμότητα των υπολογιστών στις σχολικές τάξεις και στα σπίτια, αναδύεται μια αυξανόμενη προσέγγιση για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών χρησιμοποιώντας χειραπτικά υλικά και υπολογιστές. Αυτή η καινούργια προσέγγιση ουσιαστικά δημιουργεί μια νέα κατηγορία χειραπτικών που καλούνται *δυνητικά* ή *ψηφιακά χειραπτικά υλικά/virtual manipulatives*, καθώς οι νέες δυνατότητες ή εργαλεία για τα προγράμματα υπολογιστών χρησιμοποιούν εικονικές αναπαραστάσεις (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002).

Όσον αφορά τα δυνητικά χειραπτικά υλικά, αυτά τα εργαλεία έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν δεξιότητες οπτικοποίησης στους μαθητές, συνδέοντας λέξεις, εικόνες και σύμβολα ταυτόχρονα. Έτσι, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια σταθερή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Moyer-Packenham & Westenskow, 2012).

Τα δυνητικά ή ψηφιακά χειραπτικά υλικά είναι μια έκδοση των φυσικών χειραπτικών υλικών που υπάρχουν στην οθόνη ενός υπολογιστή παρά σε ένα τραπέζι. Ο χρήστης μετακινεί το δυνητικό χειραπτικό υλικό χρησιμοποιώντας το ποντίκι ή το πληκτρολόγιο. Σήμερα, τα δυνητικά χειραπτικά υλικά μοντελοποιούνται πάνω σε συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά, που συνήθως χρησιμοποιούνται στα σχολεία, όπως τα πρότυπα σχημάτων (pattern blocks), τα τάνγκραμς, οι ράβδοι κλασμάτων, οι γεωπίνακες, οι κύβοι δεκαδικής βάσης, οι ράβδοι Cuisenaire κ.ά. Όταν κάθε αντικείμενο είναι διαθέσιμο μέσω διαδικτύου, μπορεί να θεωρείται δυνητικό. Εντούτοις, η ικανότητά τους να χρησιμοποιούνται αλληλεπιδραστικά – δηλαδή, να επιτρέπουν στον χρήστη να εμπλέκει και να ελέγχει τις φυσικές ενέργειες των αντικειμένων – συνδυάζεται με τη δυνατότητα ότι προσφέρονται για ανακάλυψη και κατασκευή μαθηματικών αρχών και σχέσεων και έτσι διακρίνονται ως δυνητικά χειραπτικά. Ένα από τα μεγαλύτερα επιχειρήματα για τη χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών σε σχέση με τα φυσικά χειραπτικά, είναι ότι έχουν τη δυνατότητα να συνδέουν την κίνηση και τη δράση και στο

πραξιακό (με τα χειραπτικά υλικά) και στο συμβολικό επίπεδο ταυτόχρονα (Suh & Moyer, 2007· Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002).

Αυτή η μορφή χειραπτικών υλικών βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των φυσικών και συμβολικών αναπαραστάσεων, που δεν μπορούν να γίνουν διαφορετικά λόγω της γνωστικής υπερφόρτωσης που μπορεί να συμβεί, ενώ οι μαθητές προσπαθούν να παρακολουθούν τις ενέργειές τους με τα φυσικά χειραπτικά υλικά και τις συμβολικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με αυτές τις ενέργειες (Suh & Moyer, 2007). Άλλο όφελος των δυνητικών χειραπτικών αποτελεί και η προσβασιμότητα τους εκτός σχολείου, αφού τα βρίσκουν στο διαδίκτυο όπου και υπάρχουν σχετικές ιστοσελίδες (Moyer, Bolyard & Spikell, 2002). Η μελέτη των Suh και Moyer (2007) αναφέρει ότι η χρήση των δυνητικών χειραπτικών ή συνδυασμού φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών βελτιώνει την επίδοση, καλύπτει τόσο το περιεχόμενο όσο και τη διδασκαλία σε ένα αφηρημένο επίπεδο και μπορεί ακόμη να βελτιώσει τις στάσεις απέναντι στη μάθηση των μαθηματικών.

Το ίδιο ισχύει και για την αποκλειστική χρήση των φυσικών χειραπτικών υλικών. Τα δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές καλύπτουν την ίδια ποσότητα περιεχομένου ή και περισσότερο, χρησιμοποιώντας φυσικά χειραπτικά υλικά από εκείνους που δε χρησιμοποιούν (Johnson, 1993· Raphael et al., 1989). Δείχνουν επίσης, ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών σχετίζεται και με τη βελτίωση της επίδοσης, η οποία είναι ιδιαίτερα εμφανής σε μαθητές με χαμηλές επιδόσεις (Suh & Moyer, 2007· Cain-Caston, 1996· Sowell, 1989).

Οι Moyer-Packenham, Westenskow και Salkind (2013) πραγματοποίησαν μια μετα-ανάλυση για την αξιολόγηση της επίδρασης των δυνητικών χειραπτικών στη μαθηματική μάθηση. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων, που λήφθηκαν από 29 μελέτες, απέδωσε ένα μέτριο έως μέσο μέγεθος επίδρασης σε σύγκριση με τη χρήση άλλων μεθόδων διδασκαλίας. Όταν τα δυνητικά χειραπτικά υλικά είχαν χρησιμοποιηθεί μόνα τους ως το κύριο εργαλείο της διδασκαλίας και σε σύγκριση με διδασκαλίες χρήσης φυσικών χειραπτικών υλικών ή με την παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη, οι μέσες βαθμολογίες αποτελέσματος είχαν μια μικρή διαφορά. Η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων τους προτείνει ότι τα δυνητικά χειραπτικά έχουν αρκετούς περιορισμούς, αλλά παρέχουν στους μαθητές μια

δημιουργική παραλλαγή, ταυτόχρονη σύνδεση εικόνας και συμβόλων, αποτελεσματική ακρίβεια και κίνητρα μάθησης.

Οι Reimer και Moyer (2005) διερεύνησαν την απόδοση 19 μαθητών Δ' τάξης κατά τη διάρκεια 2 εβδομάδων στα κλάσματα χρησιμοποιώντας δυνητικά χειραπτικά υλικά. Πάνω από τους μισούς μαθητές βελτιώθηκαν στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Σε μια άλλη μελέτη σε 19 μαθητές της Β τάξης, οι Moyer, Bolyard και Spikell (2002) παρατήρησαν ότι οι ψηφιακοί κύβοι δεκαδικής βάσης επέτρεψαν στους μαθητές να επιδείξουν πιο εξελιγμένες στρατηγικές και εννοιολογικές εξηγήσεις για τη θεσιακή αξία. Οι Bolyard και Moyer-Packenham (2006) μελέτησαν τη χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών σε 99 μαθητές της ΣΤ' τάξης στη μάθηση της πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων. Οι μαθητές έδειξαν σημαντικά κέρδη στην επίδοση και οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα δυνητικά χειραπτικά υλικά μπορούν να υποστηρίξουν τη μάθηση αυτών των εννοιών.

Οι Suh, Moyer και Heo (2005) ανέφεραν ότι κατά τη χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών, οι μαθητές υψηλότερης επίδοσης ήταν πιο αποτελεσματικοί και χρησιμοποιούσαν περισσότερο νοητικές διεργασίες για την εύρεση απαντήσεων, ενώ οι μαθητές χαμηλότερης επίδοσης ήταν πιο μεθοδικοί στη χρήση τους και περισσότερο εξαρτημένοι από την αξιοποίηση των οπτικών μοντέλων, όταν μετέβαιναν από το εικονιστικό στο συμβολικό στάδιο.

Τρεις μελέτες ανέφεραν θετικά αποτελέσματα σε μαθητές που λαμβάνουν ειδικές υπηρεσίες εκπαίδευσης και χρησιμοποιούν δυνητικά χειραπτικά υλικά και δύο από τις μελέτες αυτές επισήμαναν ότι οι μαθητές με τη χρήση δυνητικών χειραπτικών υλικών ξεπέρασαν τους μαθητές, οι οποίοι δεν έκαναν χρήση αυτών (Suh & Moyer - Packenham, 2008). Συνοπτικά, στο σύνολο των μελετών που ταυτοποιήθηκε ότι χρησιμοποιήθηκαν τα χειραπτικά υλικά σε μαθητές με διαφορετικές ικανότητες, διαφαίνεται ότι οι μαθητές με μαθησιακές μαθηματικές δυσκολίες ωφελήθηκαν από τη χρήση τους.

Οι Suh και Moyer (2007) συνέκριναν τη χρήση φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών σε μαθητές Γ' τάξης που μάθαιναν αλγεβρικές έννοιες. Και οι δύο τύποι των χειραπτικών υλικών σχετίστηκαν με υψηλότερες επιδόσεις και μεγαλύτερη ευελιξία στην αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών. Οι Steen,

Brooks και Lyon (2006) συνέκριναν την ακαδημαϊκή επίδοση μιας ομάδας μαθητών Α' τάξης που χρησιμοποίησαν δυνητικά χειραπτικά υλικά για την πρακτική στη διδασκαλία της γεωμετρίας (πειραματική ομάδα) και σε μια άλλη ομάδα που δε χρησιμοποίησαν υλικό (ομάδα ελέγχου). Συνολικά, 31 μαθητές επιλέχθηκαν τυχαία είτε στην πειραματική είτε στην ομάδα ελέγχου. Η επίδοση μετρήθηκε με δοκιμασίες για τις Α' και Β' τάξεις, οι οποίες ήταν βασισμένες στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των τάξεων αυτών. Η πειραματική ομάδα βελτιώθηκε σημαντικά στις δοκιμασίες, ενώ η ομάδα ελέγχου παρουσίασε σημαντική βελτίωση μόνο στη δοκιμασία για την Α' τάξη. Ο εκπαιδευτικός της πειραματικής ομάδας σημείωσε επίσης, ότι οι μαθητές έδειξαν αυξημένα κίνητρα και αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο στην εργασία τους.

Εκτός από τη μελέτη τους με τους ψηφιακούς κύβους δεκαδικής βάσης, οι Moyer, Bolyard και Spikell (2002) ανέφεραν επίσης ένα *project* σε μια τάξη νηπιαγωγείου από 18 μαθητές. Οι μαθητές είχαν εμπλακεί σε ένα τριήμερο μάθημα για τα σχήματα. Την πρώτη ημέρα χρησιμοποιήθηκαν ξύλινα πρότυπα σχημάτων (pattern blocks), τη δεύτερη ημέρα χρησιμοποιήθηκαν ψηφιακά πρότυπα σχημάτων και την τρίτη ημέρα σχημάτισαν ελεύθερα τα σχήματα σε χαρτί. Όταν χρησιμοποίησαν τα ψηφιακά στοιχεία, οι περισσότεροι μαθητές δημιούργησαν πιο πολύπλοκα σχήματα και χρησιμοποίησαν περισσότερο τα μπλοκ. Οι ερευνητές σημειώνουν επίσης ότι οι μαθητές της Β' τάξης, στη βασική μελέτη των κύβων δεκαδικής βάσης, έδειξαν πιο εξελιγμένες στρατηγικές μετά τη χρήση των δυνητικών χειραπτικών υλικών.

Ο Ball (1992) σημείωσε ότι ένα χειραπτικό δεν μπορεί από μόνο του να φέρει τις προβλεπόμενες σημασίες και χρήσεις και δεν εγγυάται ότι η χρήση του θα οδηγήσει αυτόματα στη μαθηματική γνώση. Συχνά, η ερμηνεία των μαθητών μιας αναπαράστασης μπορεί να διαφέρει από αυτή που παρουσιάζεται από τον εκπαιδευτικό. Οι εκπαιδευτικοί μπορεί να προσδοκούν ότι οι μαθηματικές ιδέες ενσωματώνονται στα συγκεκριμένα υλικά και τις ενέργειες με αυτά «για να απορροφηθεί από τους πορώδεις και άψυχους μαθητές» (Hall, 1998: 41).

Η ερευνητική βιβλιογραφία σχετικά με την αποτελεσματική διδασκαλία με τη χρήση των χειραπτικών υλικών θεωρείται ως «*διφορούμενη στην καλύτερη περίπτωση*» (Thompson, 1994: 557). Στις μελέτες στις οποίες τα οφέλη των μαθητών ήταν

μεγαλύτερα, οι παρεμβάσεις με τη χρήση χειραπτικών υλικών έγιναν από ερευνητές ή εκπαιδευτικούς με μακροχρόνια εκπαίδευση στα υλικά.

Η επίδοση των μαθητών με τα χειραπτικά υλικά μπορεί να υπερβαίνει τις επιδόσεις των μαθητών χωρίς χειραπτικά (Raphael & Wahlstrom 1989· Sowell, 1989). Οι επιδόσεις των μαθητών συσχετίζονται με την εμπειρία και την τεχνογνωσία του εκπαιδευτικού σχετικά με τη χρήση τους (Sowell, 1989). Η «σχέση μεταξύ χειραπτικών υλικών και των προβλεπόμενων αναφορών τους μπορεί να μην είναι διαφανής για τα παιδιά» (Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997: 40). Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιούν το υλικό, αλλά αποτυγχάνουν να συνδέσουν τη χρήση των χειραπτικών υλικών με την έννοια σε πιο παραδοσιακές μαθηματικές μορφές. Άλλες μελέτες με μαθητές πρώτης σχολικής ηλικίας είχαν τα ίδια συμπεράσματα (Fuson & Briars, 1990· Resnick & Omanson, 1987).

Η εκπαιδευτική έρευνα στα μαθηματικά έχει καταδείξει τα οφέλη της διδασκαλίας των μαθηματικών, η οποία χρησιμοποιεί μια ποικιλία από τις αναπαραστατικές φόρμες. Οι αναπαραστάσεις μπορεί να περιλαμβάνουν χειραπτικά υλικά, εικόνες, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, καταστάσεις πραγματικής ζωής (Moyer, Ulmer, & Anderson, 2012) ή δυνητικά χειραπτικά υλικά (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002). Αν και περιορισμένα, η έρευνα δείχνει ότι μπορεί να υπάρχει ένα πλεονέκτημα στον συνδυασμό της χρήσης των φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών στην εκπαίδευση. Σε μια μετα-ανάλυση, οι Moyer, Westenskow και Salkind (2011) εντόπισαν 26 περιπτώσεις για το μέγεθος της επίδρασης της διδασκαλίας που συνδυάζει τη χρήση των φυσικών και δυνητικών χειραπτικών. Όταν η διδασκαλία με συνδυασμένη χρήση υλικών συγκρίθηκε με διδασκαλίες που χρησιμοποίησαν μόνο δυνητικά χειραπτικά, μόνο φυσικά χειραπτικά υλικά και παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο συνδυασμός της χρήσης φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών μπορεί να είναι επωφελής για τη μαθηματική απόδοση των μαθητών.

Τα φυσικά και δυνητικά χειραπτικά υλικά έχουν διακριτά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα (π.χ. πολλά δυνητικά χειραπτικά έχουν σαφείς συμβολικές εικονογραφικές συνδέσεις, ενώ τα φυσικά χειραπτικά περιλαμβάνουν τις αισθήσεις αφής). Αρκετοί ερευνητές έχουν αναφέρει ότι η εσωτερικότητα κάθε τύπου χειραπτικού υλικού έχει οδηγήσει σε παραλλαγές της μάθησης μοναδικές για το

είδος του κάθε χειραπτικού (Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005· Izydorczak 2003). Όπως προτείνεται από τους Behr et al. (1983), ενώ ένα χειραπτικό μπορεί να είναι το πιο αποτελεσματικό εργαλείο για να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία μιας έννοιας, μπορεί, όταν χρησιμοποιείται για να διδάξει μια διαφορετική έννοια, να εμποδίζει τη μάθηση των μαθητών. Προτείνουν ότι απαιτείται περισσότερη έρευνα για να προσδιορίσει ποια χειραπτικά υλικά θα διευκολύνουν περισσότερο την εκμάθηση της κάθε έννοιας.

Η χρήση των δυνητικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά μπορεί να είναι ένας σημαντικός τρόπος για τα παιδιά να εκφράσουν τη μαθηματική σκέψη τους. Η χρήση των δυνητικών αναπαραστάσεων ως εναλλακτική λύση για τους μαθητές, ώστε να σκεφτούν σχετικά με τις έννοιες των μαθηματικών, υποστηρίζεται περαιτέρω από την έρευνα για την πολλαπλή νοημοσύνη και τα διαφορετικά στυλ μάθησης των μαθητών (Marzano, 2010· Gardner, 1997). Αν και η χρήση συγκεκριμένων (ή φυσικών) χειραπτικών υλικών βρίσκεται σε καλό επίπεδο στα βασικά μαθηματικά του δημοτικού σχολείου ως εκπαιδευτικού εργαλείου (Martin, Svihla, & Smith, 2012· Uribe-Florez & Wilkins, 2010· Moyer & Jones, 2004· Moyer & Bolyard, 2002· Raphael & Wahlstrom, 1989· Sowell, 1989· Suydam, 1985), έχει δοθεί λιγότερη προσοχή στη χρήση των δυνητικών αναπαραστάσεων, ως μέρος της καθημερινής διδασκαλίας των μαθηματικών (Marzano, 2010).

Αρκετές μελέτες συνέκριναν τη χρήση των φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η Brown (2007) διεξήγαγε ένα πείραμα για να διαπιστώσει αν οι μαθητές που χρησιμοποίησαν ψηφιακά χειραπτικά υλικά θα είχαν καλύτερες επιδόσεις από μαθητές που χρησιμοποίησαν φυσικά χειραπτικά υλικά. Τα υποκείμενα στη μελέτη της ήταν 48 μαθητές της ΣΤ' τάξης σε ένα δημόσιο αστικό σχολείο. Τα αποτελέσματά της έδειξαν ότι οι μαθητές που έλαβαν διδασκαλία με φυσικά χειραπτικά υλικά πήγαν καλύτερα από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν δυνητικά χειραπτικά υλικά, αλλά ότι και οι δύο τύποι των χειραπτικών υλικών ενίσχυσαν το μαθησιακό περιβάλλον. Η ερευνήτρια σημειώνει σαν πλεονέκτημα των δυνητικών χειραπτικών υλικών ότι απαιτούν λιγότερο χρόνο στη χρήση τους.

Στη μελέτη στην τάξη τους, οι Reimer και Moyer (2005) διερεύνησαν τα δυνητικά χειραπτικά υλικά, αναφέροντας την αυξημένη επιτυχία της χρήσης τους στη

διδασκαλία κλασμάτων συγκριτικά με τη διδασκαλία με χαρτί και μολύβι. Επισημαίνουν ότι *“ένα πλεονέκτημα των δυνητικών χειραπτικών υλικών είναι ότι παρέχουν μια σύνδεση μεταξύ δυναμικών εικόνων και αφηρημένων συμβόλων”* (σελ. 10-11). Άλλες μελέτες, όπως αυτές των Olkun (2003) και Dorward και Heal (1999), δείχνουν ότι τα δυνητικά χειραπτικά υλικά είναι τόσο ελκυστικά και παρέχουν εξίσου ισχυρή επίδραση στη μαθηματική κατανόηση, όπως κάνουν και τα φυσικά.

Η εργασία των Hunt, Nipper και Nash (2011) συνέκρινε τα αποτελέσματα μιας τριετούς μελέτης κατά την οποία 78 εκπαιδευτικοί μεσαίων τάξεων (Γ' και Δ') χρησιμοποίησαν φυσικά και δυνητικά χειραπτικά για τη μελέτη ακεραίων και κλασμάτων. Στην έρευνά τους συνέκριναν κάθε είδος χειραπτικού για την ευκολία στη χρήση του και την αποδοτικότητά του στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που υποστηρίζουν. Στα αποτελέσματα της μελέτης τους αναδεικνύεται η προτίμηση των εκπαιδευτικών στα φυσικά χειραπτικά υλικά, οι οποίοι τα θεωρούν πιο εύκολα στη χρήση τους και πιο χρήσιμα για τη δημιουργία εννοιολογικής κατανόησης. Συνοπτικά η μελέτη έδειξε ότι: 1. Η ενσωμάτωση και των δύο τύπων χειραπτικών υλικών στη μαθηματική διδασκαλία δε βοηθά μόνο την εννοιολογική κατανόηση, αλλά αποτελεί και μια ισχυρή παιδαγωγική στρατηγική· 2. Τα φυσικά χειραπτικά φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικά· 3. Οι μαθητές βρήκαν πιο εύκολα στη χρήση τα φυσικά χειραπτικά υλικά, αλλά πιο δύσκολα διαθέσιμα από τα δυνητικά· 4. Η σειρά της χρήσης των χειραπτικών υλικών φαίνεται πως επηρεάζει την εννοιολογική κατανόηση και τη μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Συνίσταται, η χρήση πρώτα των φυσικών και στη συνέχεια των δυνητικών χειραπτικών υλικών· 5. Αφού πραγματοποιηθεί η εννοιολογική κατανόηση με τη χρήση των φυσικών χειραπτικών υλικών, η επακόλουθη χρήση των δυνητικών υλικών φαίνεται πως διευκολύνει τη γεφύρωση με το αφηρημένο.

3.5. Εκπαιδευτικοί και χειραπτικά υλικά

Η ποιότητα της εφαρμογής μιας διδακτικής πρακτικής επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις επιπτώσεις της στη μάθηση των μαθητών. Η αξία της χρήσης χειραπτικών υλικών στη διερεύνηση μιας έννοιας δεν εξαρτάται μόνο από το αν χρησιμοποιούνται, αλλά και από τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται από

τους μαθητές. Επομένως, διδακτικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν τη χρήση τους, θα ωφελήσουν τους μαθητές, μόνο αν ο εκπαιδευτικός ξέρει πότε και πώς να χρησιμοποιεί αυτή τη διδακτική πρακτική.

Σύμφωνα με τις θέσεις του Εθνικού Συμβουλίου των Εποπτικών Αρχών των Μαθηματικών/ National Council of Supervisors of Mathematics-NCSM, προκειμένου να αναπτύξει κάθε μαθητής μαθηματικές γνώσεις, θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να ενσωματώσουν συστηματικά τη χρήση χειραπτικών και δυναμικών υλικών στη διδασκαλία τους σε όλες τις τάξεις. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, όταν οι εκπαιδευτικοί:

- Καταλάβουν ότι τα χειραπτικά υλικά δεν είναι παιχνίδια, αλλά ισχυρά εργαλεία μάθησης που οικοδομούν εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών
- Χρησιμοποιούν την εκπαιδευτική έρευνα, για να καθοδηγηθούν στην εκπαιδευτική χρήση τους
- Αναγνωρίζουν την πρόοδο των μαθητών μέσα από διαφορετικά επίπεδα επάρκειας, όσο χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά, προτού αξιολογήσουν πλήρως τις επιπτώσεις τους (Grouws & Cebulla, 2000).

Στο παρελθόν, όπως ο Shulman (1986) υποστηρίζει, παραμελούνταν η γνώση του περιεχομένου εστιάζοντας αντ' αυτού στην παιδαγωγική. Ωστόσο, καθώς η προσοχή στρέφεται στη *"γνώση του περιεχομένου"* χρειάζεται να παρέχουμε πολλές ευκαιρίες μάθησης για τους εκπαιδευτικούς για να εξετάσουν τα παιδαγωγικά ζητήματα ενσωματωμένα στην εκμάθηση του περιεχομένου συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών. Η καλή και κακή χρήση των χειραπτικών υλικών από τους εκπαιδευτικούς ώθησαν τους ερευνητές να εστιάσουν σε περαιτέρω μελέτη. Οι ερευνητές συνειδητοποίησαν ότι *«οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται υποστήριξη λήψης αποφάσεων σχετικά με τη χρήση χειραπτικών υλικών, συμπεριλαμβανομένου του πότε και πώς να τα χρησιμοποιούν, για να βοηθηθούν οι ίδιοι και να βοηθήσουν τους μαθητές τους να σκέφτονται τις μαθηματικές ιδέες στενότερα»* (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008: 316).

Η ανάλυση των σημείων τομής ανάμεσα στον στόχο του περιεχομένου, στο συγκεκριμένο είδος χειραπτικού υλικού, στον ακριβή τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί και στη διαδικασία αισθητοποίησης της αναπαράστασης, είναι απαραίτητη. Προτείνεται η εκτενής σύσταση για τη χρήση χειραπτικών υλικών να

συνοδεύεται από προσεκτικά σχεδιασμένες επιμορφωτικές προσπάθειες που να βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τα δυνατά και αδύνατα σημεία των υλικών και τη θεωρία που υποστηρίζει διδακτικά τη χρήση τους. Πράγματι, στην επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, δινόταν μεγαλύτερη έμφαση στην προσεκτική σύνδεση της παιδαγωγικής και του περιεχόμενου για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών παρά στη χρήση διδακτικών εργαλείων, όπως τα χειραπτικά υλικά, για τη αναπαράστασή τους. Οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν πόσο ελκυστικές είναι οι *"εμπράγματα δραστηριότητες"* στο δημοτικό και στο πλαίσιο αυτό οποιαδήποτε διδακτική πρακτική σχετική με τη χρήση των χειραπτικών υλικών μπορεί να είναι πολύ πιο ευπρόσδεκτη και διαρκής από ότι άλλες πρακτικές. Μια χρήσιμη δραστηριότητα για τη διδακτική αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών και την εξοικείωση των εκπαιδευτικών με αυτά, θα μπορούσε να είναι η ανάλυση σεναρίων που αφορούν τη σύνδεση μεταξύ της παιδαγωγικής, του γνωστικού περιεχόμενου και της μάθησης, φροντίζοντας να συμπεριληφθούν και ακατάλληλα σενάρια χρήσης χειραπτικών υλικών καθώς και κάποια που δεν περιλαμβάνουν χειραπτικά υλικά, ώστε να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν ότι η παροχή χειραπτικών υλικών δεν οδηγεί αυτόματα στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

Η τυπική επαγγελματική ανάπτυξη για τους εκπαιδευτικούς στο δημοτικό σχολείο τονίζει την κατασκευή της διδασκαλίας γύρω από μια σειρά από κεντρικά θέματα. Τα θέματα αυτά περιλαμβάνουν: α) τη βαθιά γνώση των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο των μαθηματικών που διδάσκουν (Ma, 1999)· β) την κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς των εκπαιδευτικών αρχών και των κανόνων που απαιτούνται για την ποιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών (NCTM, 2000)· γ) την κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς για το πώς να κάνουν την παιδαγωγική πρακτική να κινείται σε ένα μάθημα, έτσι ώστε η γνωστική αναζήτηση να παραμένει σε υψηλά επίπεδα για όλους τους μαθητές (Hill, Rowan & Ball 2005).

Η Catherine Kelly, μέλος του Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών της Montana, δήλωσε ότι *«οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν πότε, γιατί και πώς να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τα χειραπτικά υλικά στην τάξη, καθώς και να έχουν ευκαιρίες για να παρατηρούν άμεσα τις επιπτώσεις που καθιστούν δυνατή τη μάθηση μέσα από την εξερεύνηση με συγκεκριμένα αντικείμενα»* (Kelly, 2006: 187).

Η διδασκαλία με χειραπτικά υλικά τείνει να είναι πολύ ελκυστική για τους εκπαιδευτικούς. Ο συνδυασμός αυτής της προσέγγισης με ορισμένες σχετικά δύσχρηστες συνήθειες της παραδοσιακής διδασκαλίας φαίνεται να έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη και διδασκαλία μαθημάτων που δεν ήταν εφικτό να πετύχουν. Απαιτούνται περισσότερες από μία παρεμβάσεις, οι οποίες πρέπει να συνοδεύονται από αντίστοιχες δραστηριότητες, για να επιφέρουν μια ουσιαστική αλλαγή στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση των χειραπτικών υλικών (Potari & Georgiadou, 2009· Remillard & Geist, 2002· Saxe, Gearhart, & Nasir, 2001).

Ερευνητικά ευρήματα (Ενδεικτικά: Van de Walle et al., 2012· Gersten et al., 2009· Moyer, 2004· Ambrose, 2002· Clements & McMillen, 1996· Johnson, 1993· Ball, 1992· Sowell, 1989) υποστηρίζουν τη χρήση των χειραπτικών στα μαθηματικά ως τρόπο για να βοηθήσουν τους μαθητές να σχηματίσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις, όμως πολλοί εκπαιδευτικοί δεν τα χρησιμοποιούν. Οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν τον απαραίτητο χρόνο που πρέπει να επενδύσουν και τα φτωχά αποτελέσματα ως λόγους για τους οποίους δεν ενσωματώνουν τα χειραπτικά υλικά στα μαθήματα μαθηματικών (Sherman & Richardson, 1995). Επίσης, χρησιμοποιούν συχνά τα χειραπτικά με ένα διαδικαστικό τρόπο, καθοδηγώντας τους μαθητές να εφαρμόσουν ένα χειραπτικό υλικό με έναν συγκεκριμένο τρόπο για να βρουν τη σωστή απάντηση. Τέτοια χρήση εμποδίζει αντί να βοηθά την εννοιολογική μάθηση (Goldsby, 2009).

Όταν οι εκπαιδευτικοί εξετάζουν τη χρήση των χειραπτικών υλικών, θα πρέπει να επικεντρώνονται σε αυτό που θέλουν οι μαθητές τους να μάθουν και να καταλάβουν και όχι σε αυτό που θέλουν οι μαθητές τους να κάνουν (Thompson, 1994). Πριν από τη χρήση των χειραπτικών υλικών στην τάξη, είναι σημαντικό να γίνει μια προκαταρκτική εργασία με τους εκπαιδευτικούς, καθώς είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να είναι εξαιρετικά εξοικειωμένοι με τα χειραπτικά εργαλεία που χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία τους. Θα πρέπει να γνωρίζουν τις διαφορετικές χρήσεις τους και τις ερμηνείες που οι μαθητές μπορεί να δώσουν. Πρέπει να είναι έτοιμοι για τις διάφορες απορίες που θα προκύψουν και να είναι προετοιμασμένοι για τις διάφορες ή/και εναλλακτικές σκέψεις που μπορεί να έχουν οι μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει επίσης να βεβαιωθούν ότι τα χειραπτικά μοντελοποιούν σωστά την έννοια που διδάσκεται. Ένα πρόσθετο αποτέλεσμα αυτής της

προετοιμασίας, εκτός από τη μάθηση των μαθητών, είναι η βελτιωμένη στάση τους προς τα μαθηματικά και τα υψηλότερα επίπεδα επίτευξης (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Moyer, 2001· Clements & McMillen, 1996· Thompson, 1994· Balka, 1993). Τέλος, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να εμπιστεύονται την απόφασή τους να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά, να είναι πρόθυμοι να αναλύσουν τα αποτελέσματα και να κάνουν τις απαραίτητες προσαρμογές (Johnson, 1993).

Ο Clements (1999: 47) αναφέρει: *«Παρά το γεγονός ότι τα χειραπτικά υλικά έχουν σημαντική θέση στη μάθηση, η φυσικότητά τους δε μεταφέρει την έννοια της μαθηματικής ιδέας. Συχνά μπορούν να χρησιμοποιηθούν με έναν συνήθη τρόπο. ... Οι μαθητές μπορούν να απαιτούν συγκεκριμένα υλικά για την κατασκευή μιας αρχικής έννοιας, αλλά θα πρέπει να προβληματιστούν σχετικά με τις δράσεις τους με τα χειραπτικά υλικά για να το πράξουν».*

Ο χρόνος αλληλεπίδρασης με τα χειραπτικά υλικά επηρεάζει την επιτυχία των μαθητών στο δημοτικό. Μια δύσκολη πρόκληση στη διδασκαλία με τα υλικά αυτά είναι να αποφασιστεί πόσος χρόνος πρέπει να δοθεί για τη χρήση τους. Η μελέτη της Sowell (1989) δείχνει ότι το χρονικό διάστημα που δίνεται για τη διαδικασία της διδασκαλίας με τα χειραπτικά υλικά σχετίζεται με τη μαθηματική επίτευξη και προτείνει να είναι ένα σχολικό έτος ή περισσότερο. Αυτή η διαπίστωση στη μεταανάλυση της Sowell σε συνδυασμό με τις επισημάνσεις και άλλων ερευνητών (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Kelly, 2006· Moyer, 2004· Moyer & Jones, 2004), αποτέλεσε δείκτη εφαρμογής του εκπαιδευτικού προγράμματος και της δικιάς μας έρευνας. Κατ' αρχάς, χρειάζεται να οργανωθεί έτσι ο χρόνος από τους εκπαιδευτικούς και να δομηθούν οι κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές να «γνωρίσουν» τα χειραπτικά, να τα χειριστούν και να εξοικειωθούν μαζί τους (Moyer, 2004· Johnson, 1993· Moser, 1986), καθώς θα πρέπει να έχουν το χρόνο για να σκεφτούν, να διερευνήσουν και να αναλύσουν (Kilpatrick, Swafford, & Findel, 2001· Clements & McMillen, 1996· Johnson, 1993· Heddens, 1986). Πόσος χρόνος χρειάζεται, θα πρέπει να καθορίζεται από τον εκπαιδευτικό. Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά μπορεί να χρειαστούν πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα στο συγκεκριμένο στάδιο (Clements & McMillen, 1996). Η χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς σχετίζεται με την προηγούμενη εμπειρία τους

σχετικά με τα χειραπτικά υλικά (Moyer & Jones, 2004). Η κατανόηση της χρήσης τους από τους μαθητές εξαρτάται από τη διδασκαλία (Uttal et al., 1997· Fuson & Briars, 1990). Μια ακατάλληλη συσχέτιση των χειραπτικών υλικών και των εννοιών μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα δεδομένα και να ενισχύσει παρανοήσεις (Roberts, 2007).

Η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών αλλά και με τον εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια της εφαρμογής και αξιοποίησης των χειραπτικών υλικών, είναι ένα βασικό συστατικό για την επιτυχία της χρήσης τους. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ακούνε και να επεξεργάζονται τα σχόλια και τις ερωτήσεις των μαθητών, να αξιολογούν την κατανόησή τους και την ανάγκη τους για γνωστική αναδόμηση των μαθηματικών εννοιών (Johnson, 1993· Ball, 1992· Thornton, 1986). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουν και να δημιουργούν ευκαιρίες για τους μαθητές να αντανakλούν προφορικά τις σκέψεις τους, να δικαιολογούν τις ενέργειές τους και να αναλύουν τα λάθη τους με τους συμμαθητές και τον δάσκαλό τους, καθώς μέσα από αυτή τη διαδικασία μπορεί να βοηθηθούν για να γίνει η σύνδεση μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου σταδίου (Moyer, 2001· Boulton-Lewis, 1998· Clements & McMillen, 1996· Heddens, 1986· Thornton, 1986). Είναι επίσης σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να ρωτούν τους μαθητές ερωτήσεις, που να εστιάζουν στα σημαντικά, να παρακινούν το ενδιαφέρον τους και να τους καθοδηγούν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (Ambrose, 2002· Heddens, 1986· Thornton, 1986)· αντί για ερωτήσεις που ξεκινούν με το "τι", οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να ρωτούν ερωτήσεις που αρχίζουν με το "γιατί" και το "πώς" (Heddens, 1986), έτσι ώστε να καθοδηγούν τον τρόπο σκέψης τους παραγωγικά ή επαγωγικά.

Οι Moyer και Jones (2004) διερεύνησαν τη διδακτική χρήση των χειραπτικών υλικών σε 10 εκπαιδευτικούς. Τα αποτελέσματά τους από τις παρατηρήσεις στην τάξη, τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών και τη συμπλήρωση του σχετικού ερωτηματολογίου από τους εκπαιδευτικούς, αποκάλυψαν ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν σε ποσοστό 70% τα χειραπτικά υλικά στα μαθήματά τους και σταδιακά περιόρισαν τη χρήση τους, ενώ τα παιδιά χρησιμοποίησαν τα υλικά και για αυτοέλεγχο προηγούμενης γνώσης. Όλοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά πολύ περισσότερο από πριν. Η μεγαλύτερη συχνότητα στη χρήση τους φαίνεται να συσχετίζεται με την προηγούμενη εμπειρία

τους και με τη μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση που αισθάνθηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν τον σκοπό των χειραπτικών υλικών ως μια ανταμοιβή, μια αλλαγή ρυθμού, ως συγκεκριμένα εργαλεία εμπλουτισμού και ενίσχυσης της γνώσης ή για διασκέδαση. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα *«επιτρέποντας στους μαθητές κάποια προτίμηση στην επιλογή των μαθηματικών εργαλείων, είναι ένα μικρό βήμα στην ενθάρρυνση της υπευθυνότητας για τη δική τους μάθηση»* (σελ. 20).

Στην έρευνα των Crawford και Brown (2003) συμμετείχαν 11 εκπαιδευτικοί που θα έβλεπαν και θα αξιολογούσαν ψηφιακά χειραπτικά υλικά ιστοσελίδων. Οι εκπαιδευτικοί βρήκαν ότι τα δυναμικά χειραπτικά υλικά κέρδισαν την προσοχή των μαθητών και τους ενέπλεξαν σε παραγωγική εργασία. Θέματα ανησυχίας για τους εκπαιδευτικούς ήταν: η αδυναμία να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών κατά τη χρήση των χειραπτικών, οι ασαφείς οδηγίες στη χρήση τους και η έλλειψη άμεση ανατροφοδότηση, η οποία σχετίζεται με τη χρήση και την έλλειψη της ικανότητας των εκπαιδευτικών να αναλύσουν τα πλεονεκτήματα ή τις αδυναμίες των μαθητών, για να παρέχουν εξατομικευμένες εργασίες. Οι εκπαιδευτικοί είδαν τα υλικά αυτά ως υποστηρικτικά των νέων διδακτικών προσεγγίσεων, *«γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ των βασικών διαδικασιών που αφορούν γνώσεις και της ενίσχυσης της ικανότητας του μαθητή να αντιληφθεί την εννοιολογική κατανόηση που οδηγεί προς δεξιότητες σκέψης ανώτερης τάξης»* (Crawford & Brown, 2003: 173).

Ο Quinn (1998) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι τα χειραπτικά υλικά βοηθούν στη *«μετατόπιση των εκπαιδευτικών από διανομείς γνώσης σε βοηθούς μάθησης»* (σελ. 237). Από την έρευνά του συμπεραίνεται: 1. Η εκμάθηση της χρήσης των χειραπτικών υλικών στους εκπαιδευτικούς τους παρέχει τη γνώση για την ορθή χρήση τους· 2. Η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών μέσα από τη χρήση των υλικών ενισχύει τις διδακτικές τεχνικές και την εμπράγματη μάθηση και διδασκαλία· 3. Οι εκπαιδευτικοί ανησυχούν για την επάρκεια του διδακτικού χρόνου και την έλλειψη πειθαρχίας στην τάξη την ώρα της χρήσης των υλικών· 4. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί απαιτούν εξειδικευμένη κατάρτιση για την αποτελεσματική χρήση των υλικών.

3.5.1. Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα χειραπτικά υλικά

Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την αξία των χειραπτικών υλικών έχουν αναφερθεί σε διάφορες μελέτες (Ενδεικτικά: Gersten et al., 2009· Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Suh & Moyer, 2007· Moyer & Jones, 2004· Moyer, 2001· Thompson, 1994· Heddens, 1986). Οι απόψεις τους σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών βρίσκονται στις δικές τους υποθέσεις και εμπειρίες σχετικά με τα μαθηματικά και την εκπαίδευση. Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση και τη γνωστική ψυχολογία ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να μετατοπιστούν από την απομνημόνευση γεγονότων και αλγορίθμων προς τη διδασκαλία, που εμπλέκει τους μαθητές στην κατασκευή της μαθηματικής έννοιας (Cobb, 1994). Ωστόσο, η προηγούμενη εκπαιδευτική κατάρτιση ορισμένων εκπαιδευτικών, με έμφαση στους υπολογισμούς, τις διαδικασίες, τους κανόνες, τους τύπους και τους αλγόριθμους, διαφέρει ριζικά από τις τρέχουσες γνωστικές θεωρίες, καθώς και με τις αρχές και τα πρότυπα για τα μαθηματικά (NCTM, 2000) και συγκρούονται με την τάση προς τη διδασκαλία για εννοιολογική κατανόηση. Συχνά τα χειραπτικά θεωρούνται ως αντικείμενα για παιχνίδι, κατάλληλα μόνο για μικρότερους μαθητές και ως εκ τούτου δεν έχουν αξιοπιστία για την εφαρμογή σε μαθηματικά υψηλότερου επιπέδου (Tooke, Hyatt, Leigh, Snyder, & Borda, 1992). Επιπλέον, κάποιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά ως ανταμοιβές για την κατάλληλη συμπεριφορά των μαθητών. *«Οι εκπαιδευτικοί, που βλέπουν τα χειραπτικά υλικά σαν σπατάλη χρόνου ή δευτερεύοντα στο σοβαρό έργο της μάθησης των μαθηματικών, θα ενθαρρύνουν ακούσια τους μαθητές τους να χρησιμοποιούν αυτά τα υλικά για παιχνίδι αντί για τη μαθηματική μάθηση ή κατανόηση»* (Moyer & Jones, 2004: 21).

Με την επίδειξη του πώς να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά ως διδακτικά εργαλεία για καλύτερη μαθηματική κατανόηση, οι εκπαιδευτικοί *‘ανοίγουν τις πόρτες της κατάκτησης των εννοιών’* σε πολλούς μαθητές, οι οποίοι δυσκολεύονται με τα αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα. Συχνά αυτές οι δυσκολίες μπορεί να ελαχιστοποιηθούν ή να αποφευχθούν πλήρως με την απλή χρήση διαφορετικών εμπράγματων αναπαραστάσεων πριν από τη χρήση αφηρημένων συμβόλων, δίνοντας έτσι στους μαθητές την ευκαιρία κατασκευής μιας σταθερής εννοιολογικής

βάσης για την υψηλότερη οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης. Η επικοινωνία της αξίας των αναπαραστάσεων και η σημασία του να είναι σε θέση να κινηθούν μεταξύ των διαφόρων αναπαραστατικών συστημάτων (πραξιακό / εικονιστικό / συμβολικό), συμπεριλαμβανομένων και των χειραπτικών υλικών, των οπτικών εικόνων και των αφηρημένων συμβόλων, βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών.

Οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά βελτιώνονται, όταν διδάσκονται με συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά που παρέχονται από εκπαιδευτικούς-γνώστες της χρήσης τους (Sowell, 1989). Ωστόσο, τα χειραπτικά υλικά δεν εγγυώνται πάντα την επιτυχία (Baroody, 1989). Οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποιούν συχνά ως έναν τρόπο, για να ανασχηματίσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, χωρίς ιδιαίτερο προβληματισμό σχετικά με τη χρήση τους για την αναπαράσταση των μαθηματικών ιδεών ή για άλλες πτυχές της διδασκαλίας τους, που πρέπει να αλλάξουν (Grant et al., 1996). Τόσο οι εκπαιδευτικοί, όσο και οι γονείς, συχνά πιστεύουν ότι κάθε μεταρρύθμιση στον τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών, αναφέρει ότι το *“συγκεκριμένο”* είναι καλό και το *“αφηρημένο”* είναι κακό. Αντιθέτως, τα επαγγελματικά πρότυπα προτείνουν οι μαθητές να έχουν ένα ευρύ φάσμα κατανόησης και εργαλείων (Ball, 1992). Συνοπτικά, αν και η έρευνα θα μπορούσε να υποδηλώνει το να αρχίζει η διδασκαλία από το *“συγκεκριμένο”*, προειδοποιεί επίσης ότι τα χειραπτικά υλικά δεν επαρκούν για να εγγυηθούν την ουσιαστική μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Clements, 1999).

Οι Puchner, Taylor, O'Donnell και Fick (2008) πραγματοποίησαν μια μελέτη πεδίου, στην οποία ανέλυσαν τη χρήση των χειραπτικών υλικών σε μαθήματα μαθηματικών, που αναπτύχθηκαν και διδάχθηκαν από τέσσερις ομάδες εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι τέσσερις ερευνητές αποφάσισαν να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά, αντί να μελετούν τα εκπαιδευτικά αποτελέσματα των μαθητών. Η μελέτη διαπίστωσε ότι σε τρία από τα τέσσερα μαθήματα η χρήση των χειραπτικών υλικών μετατράπηκε σε αυτοσκοπό και όχι σε ένα εργαλείο μάθησης, και ότι κατά το τέταρτο μάθημα η χρήση τους εμπόδισε παρά βοήθησε τη μάθηση των μαθητών. Οι ερευνητές πιστεύουν ότι αυτό συνέβη λόγω της *«βαθιά ριζωμένης εστίασης των*

εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών, όχι στη διαδικασία αλλά στο αποτέλεσμα» (σελ. 323).

Τα χειραπτικά υλικά μπορεί πραγματικά να παρεμποδίσουν τη μάθηση (Ambrose, 2002), παρόλο που διαφέρουν σε χρησιμότητα, καθώς πολλοί εκπαιδευτικοί δεν πιστεύουν ότι ο συγκεκριμένος τύπος υλικών ή ο τρόπος που ενσωματώνονται στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι αυτό που κάνει τη μεγάλη διαφορά (Sherman & Richardson, 1995). Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συχνά τα χειραπτικά υλικά με διαδικαστικό τρόπο, καθοδηγώντας τους μαθητές να εφαρμόσουν ένα υλικό με ένα συγκεκριμένο τρόπο, για να παραχθεί η σωστή απάντηση. Η χρήση αυτή περισσότερο παρακωλύει παρά βοηθά στην εννοιολογική μάθηση (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008).

3.5.2. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών στη χρήση των χειραπτικών υλικών

Ο ρόλος των εκπαιδευτικών είναι κρίσιμης σημασίας για τη διαπραγμάτευση και τον καθορισμό της ποιότητας των αλληλεπιδράσεων μέσα στην τάξη. Η κατασκευή της γνώσης των μαθητών βασίζεται στις εμπειρίες τους σχετικά με αυτές τις αλληλεπιδράσεις, όπου οι μαθητές καθορίζουν πώς και ποια μαθηματική γνώση κατασκευάζεται (Cobb & Steffe, 1983). Στην ιδανική περίπτωση, στην τάξη των μαθηματικών του εικοστού πρώτου αιώνα, τον έλεγχο των μαθηματικών εργαλείων και οι αποφάσεις να τα χρησιμοποιούν, θα πρέπει να μοιράζονται σε ένα καθοδηγητικό πλαίσιο. Ωστόσο, η πρόσβαση σε αυτά τα εργαλεία είναι συχνά αποκλειστική υπόθεση του εκπαιδευτικού.

Η βαθμιαία ένταξη των διδακτικών υλικών στη μαθηματική διδασκαλία έφερε μια νέα δυναμική στους “ρόλους” των εκπαιδευτικών και των μαθητών - δηλαδή, την ευθύνη κάθε ατόμου για τη συμμετοχή του στη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τους ρόλους τους εδώ και πολλά χρόνια, δηλαδή, να διδάξουν τους κανόνες και τις μαθηματικές διαδικασίες (Moyer, 2004). Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τους ρόλους τους μετά από την εκμάθηση των κανόνων των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί συνεχώς επιβεβαιώνουν τους ρόλους τους διακριτικά και απροκάλυπτα ασκώντας έλεγχο και περιορισμό στις επιλογές των μαθητών (Moyer & Jones, 2004). Αντίθετα, η παροχή επιλογών στους μαθητές

προσκαλεί τους εμπλεκόμενους εκπαιδευτικούς και μαθητές να αναλάβουν διαφορετικούς ρόλους, οι παράμετροι των οποίων δεν είναι σαφώς καθορισμένοι.

Το μοίρασμα επιλογών στην τάξη των μαθηματικών είναι μια νέα δυναμική για κάποιους εκπαιδευτικούς, που βλέπουν τους εαυτούς τους να εγκαταλείπουν τον έλεγχο της μάθησης για τους μαθητές, και με αυτόν τον τρόπο τη μετατόπιση του καθιερωμένου ρόλου τους ως «ειδικοί». Το επίπεδο της επιλογής που επιτρέπεται στους μαθητές στις μαθηματικές τάξεις είναι άμεσα συνδεδεμένο με την ποσότητα του ελέγχου που ασκούν οι εκπαιδευτικοί σε αυτό το περιβάλλον (Moyer & Jones, 2004).

Οι εκπαιδευτικοί που επιδιώκουν την αυτονομία των μαθητών είναι πιο πιθανό να παρέχουν στους μαθητές τους μια επιλογή. Είναι λιγότερο πιθανό να επικρίνουν ή να επικοινωνούν με οδηγίες τύπου “πρέπει”, “κάνε” και συνολικά φαίνεται πως μιλούν λιγότερο στην εκπαιδευτική διαδικασία, σε σχέση με εκείνους τους εκπαιδευτικούς που επιδιώκουν τον έλεγχο και την καθοδήγηση στη μαθησιακή διαδικασία (Deci & Ryan, 1987· Deci et al., 1981). Στην τάξη των μαθηματικών, ένας εκπαιδευτικός, που προάγει την πνευματική αυτονομία, ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στην κοινότητα της τάξης και να αξιοποιήσουν τις δικές τους δυνατότητες κατά τη λήψη των μαθηματικών κρίσεων και αποφάσεων (Yackel & Cobb, 1996).

i. Λάθη των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών υλικών

Η Smith (2009), δήλωσε ότι υπάρχουν πιθανώς πολλοί λανθασμένοι τρόποι για τη διδασκαλία με χειραπτικά υλικά, όπως και για τη διδασκαλία χωρίς αυτά. Τα μαθηματικά χειραπτικά υλικά πρέπει να είναι κατάλληλα για τους μαθητές και να επιλέγονται για την επίτευξη των συγκεκριμένων σκοπών και των στόχων του μαθηματικού προγράμματος. «*Η πολυπλοκότητα των υλικών που παρέχονται θα αναπτύξει τη σκέψη των παιδιών και θα ενισχύσει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών*” (Boggan, Harper & Whitmire, 2010: 3).

Οι Durmus & Karakirik (2006: 4) συμφωνούν ότι «*τα χειραπτικά υλικά θα πρέπει να χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με διερευνητικές και επαγωγικές προσεγγίσεις*» και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι «*... τα περισσότερα χειραπτικά υλικά στα*

μαθηματικά απλά προωθούν την εφαρμογή της προσέγγισης 'μάθηση με μοντέλο'» Durmus & Karakirik (2006: 6).

Τα χειραπτικά υλικά θεωρούνται ένα σημαντικό στοιχείο της προετοιμασίας των εκπαιδευτικών. Οι Puchner, Taylor, O'Donnell και Fick (2008) στην εργασία τους κάνουν πολυάριθμες αναφορές στη χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία στην τάξη και επιτονίζουν τη σημασία της προετοιμασίας των εκπαιδευτικών για τη χρήση τους. Οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εργαστούν για να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τις συνδέσεις μεταξύ των χειραπτικών υλικών ή άλλων εργαλείων με τη μαθηματική έννοια που διδάσκονται. Τα χειραπτικά υλικά είναι ένα εργαλείο διδασκαλίας που μπορεί να είναι πολύ ελκυστικό για τους εκπαιδευτικούς μαθηματικών. Ωστόσο, δεν είναι ένα «*αλάθητο*» εργαλείο, καθώς πολλά λάθη μπορούν να γίνουν, ενώ τα χρησιμοποιούν στη διδασκαλία.

Ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη που έχουν αναφερθεί στην έρευνα, είναι ότι τα χειραπτικά υλικά δεν είναι διαφανή, πράγμα που σημαίνει ότι οι μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται χρησιμοποιώντας τα χειραπτικά υλικά δεν είναι αυτομάτως κατανοητές και ορατές από τους μαθητές (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Moyer, 2001· Thompson, 1994· Cobb, Yackel, & Wood, 1992· Ball, 1992). Στη μελέτη του ο Meira (1998) διερευνά την έννοια της “*διαφάνειας*” των χειραπτικών υλικών. Σύμφωνα με τον ερευνητή «*η διαφάνεια των συσκευών προκύπτει από την ίδια τη διαδικασία της χρήσης τους, δηλαδή είναι κάτι που αναδύεται ξανά σε κάθε συγκεκριμένο πλαίσιο και δημιουργείται κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας μέσω συγκεκριμένων μορφών χρήσης τους*» (σελ. 139). Σε αντίθεση με αναλύσεις που μπορούν να αποδώσουν βαθμούς διαφάνειας στις φυσικές συσκευές (και να καθορίσουν την έκταση στην οποία μια συσκευή μπορεί να προωθήσει τη γνωστική αποδοτικότητα), ο ερευνητής προτείνει (α) ότι η διαφάνεια των εκπαιδευτικών συσκευών είναι κάτι που επιτυγχάνεται μέσω μιας διαδικασίας χρήσης και (β) ότι η διαδικασία αυτή επηρεάζεται από τη συμμετοχή των χρηστών σε συγκεκριμένες κοινωνικοπολιτιστικές πρακτικές, όπως αυτές στις τάξεις των μαθηματικών (Meira, 1998). Η άποψη για τη διαφάνεια που αναπτύσσεται εδώ, προκαλεί τη μεταφορά της τεχνητής γέφυρας, στην οποία οι υλικές απεικονίσεις θεωρούνται σύνδεσμος μεταξύ της διαισθητικής γνώσης των

μαθητών του φυσικού κόσμου και της μαθηματικής τους γνώσης (που λαμβάνεται ως αφηρημένη) ή μεταξύ τομέων εντός των ίδιων των μαθηματικών. Τα χειραπτικά υλικά προκαλούν συζήτηση και τη στηρίζουν ταυτόχρονα δίνοντας την ευκαιρία να 'δείξεις' με αυτά τη σκέψη σου.

Τα χειραπτικά υλικά δημιουργήθηκαν από ανθρώπους που γνώριζαν ήδη τις μαθηματικές έννοιες που ήθελαν να διδάξουν με αυτό τον τρόπο. Οι εκπαιδευτικοί συχνά 'βλέπουν' τη μαθηματική ιδέα που προορίζονταν για τα χειραπτικά υλικά και θεωρούν ότι και οι μαθητές μπορούν εύκολα να 'δουν' το ίδιο πράγμα. Ωστόσο, οι μαθητές μπορούν να 'δουν' άλλες έννοιες στα ίδια αυτά χειραπτικά (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Moyer, 2001· Ball, 1992).

Επειδή οι μαθητές μπορούν να 'δουν' άλλες έννοιες που υπάρχουν στα χειραπτικά υλικά, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γίνουν εξαιρετικά εξοικειωμένοι με αυτά, όταν τα χρησιμοποιούν. Πρέπει να γνωρίζουν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις, τις οποίες μπορεί να υποστηρίξει κάθε υλικό και να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν πότε οι μαθητές τα χρησιμοποιούν για την αναπαράσταση διάφορων μαθηματικών εννοιών, αντί της μιας για την οποία μπορεί να έχουν κατασκευαστεί ή να προορίζονται (Thompson, 1994). Συμβαίνει, επίσης, ότι πολλοί μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη σχέση μεταξύ των φυσικών χειραπτικών υλικών και της έννοιας των μαθηματικών που μαθαίνουν. Επίσης, δε 'βλέπουν' μια διαφορετική αναπαράσταση και δεν παρατηρούν καμία σύνδεση. Τότε, το χειραπτικό υλικό γίνεται ακόμη ένα πράγμα που πρέπει να μάθουν, αντί για ένα βοήθημα στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται (Kilpatrick, Swafford, & Findel, 2001). Σύμφωνα με τις Suh & Moyer (2007), η απώλεια της σύνδεσης μπορεί να οφείλεται σε μια γνωστική υπερφόρτωση κατά την εργασία με τα χειραπτικά υλικά και τα σύμβολα ταυτόχρονα, τα οποία οι μαθητές αδυνατούν να παρακολουθούν σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Επίσης, μπορεί να οφείλεται σε εκπαιδευτικούς που δεν τα χρησιμοποιούν αποτελεσματικά. Αυτοί δεν μπορούν να καθοδηγούν τους μαθητές στις έννοιες (Heddens, 1986) ή δεν μπορούν να κατανοήσουν τη χρήση των εν λόγω χειραπτικών από μόνα τους (Ball, 1992).

Η επικοινωνία είναι ένα άλλο μέρος που οι εκπαιδευτικοί κάνουν λάθη κατά τη διδασκαλία με τα χειραπτικά υλικά. Πρέπει να δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να επικοινωνούν για την κατανόησή τους και να προβληματιστούν σχετικά με το τι

κάνουν με τα χειραπτικά υλικά. Αυτό θα τους επιτρέψει να επισημοποιήσουν την κατανόησή τους για τις έννοιες που μαθαίνουν και θα δείξουν στον εκπαιδευτικό τυχόν παρεξηγήσεις ή παρανοήσεις τους που πρέπει να αντιμετωπιστούν (Moyer, 2001· Heddens, 1986). Σύμφωνα με τον Resnick (1983), οι μαθητές θα προσπαθήσουν να βγάλουν νόημα από αυτό που μαθαίνουν, ακόμη και χωρίς το σύνολο των πληροφοριών που έχουν στη διάθεσή τους. Ως αποτέλεσμα, μπορεί να καταλήξουν σε λανθασμένες, ελλειπείς και μερικές φορές λανθασμένες θεωρίες. Η έλλειψη επικοινωνίας θα σήμαινε ότι αυτές οι θεωρίες μπορεί να μη διορθωθούν ποτέ.

Μια άλλη κακή χρήση των χειραπτικών υλικών στην τάξη των μαθηματικών είναι, όταν επιλέγονται ως μέθοδος υπολογισμού αντί για ένα εργαλείο για την κατανόηση (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Kilpatrick & Swafford, 2002· Kilpatrick, Swafford, & Findel, 2001). Επίσης, οι εκπαιδευτικοί, πολλές φορές, δεν μπορούν να σκεφτούν αρκετά προσεκτικά για το πώς τα χειραπτικά θα βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν την έννοια (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008). Μελέτες δείχνουν επίσης, ότι όταν οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά με ένα προκαθορισμένο τρόπο, μπορεί να τα απομακρύνουν από τον σκοπό της χρήσης τους κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Όταν συμβαίνει αυτό, αντί για την κατανόηση της έννοιας, οι μαθητές μαθαίνουν άλλη μια διαδικασία, η οποία βλάπτει τη μάθηση της βασικής έννοιας που διδάσκεται (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Thompson, 1994).

Ακόμη ένα συνηθισμένο λάθος που συζητιέται στην επισκόπηση των ερευνών, είναι η έλλειψη χρόνου που δίνεται στους μαθητές για να δουλέψουν με τα υλικά (Kilpatrick, Swafford, Findel, 2001· Clements & McMillen, 1996· Heddens, 1986). Σύμφωνα με την Moyer (2001), οι μαθητές χρειάζεται να είναι εξαιρετικά εξοικειωμένοι με τα χειραπτικά υλικά προκειμένου να μαθαίνουν αποτελεσματικά και να αποφεύγουν την υπερφόρτωση. Αυτή η εξοικείωση μπορεί να γίνει μόνο όταν υπάρχει επαρκής ποσότητα χρόνου.

Ένας αριθμός μελετών που παρατίθενται από τον Van de Walle et al. (2012) δείχνουν ότι η διδασκαλία με χειραπτικά υλικά, που ακολουθεί ένα μοτίβο του «*κάνε αυτό που κάνω*», είναι μια από τις πιο διαδεδομένες κακές χρήσεις τους. Οι Stein και Bovalino (2001), για παράδειγμα, προτείνουν τρία βασικά χαρακτηριστικά

για τα μαθήματα που χρησιμοποιούν επιτυχώς τα χειραπτικά υλικά και που αποφεύγουν αυτήν την παγίδα. Καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι 1) οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν εκτενή εκπαίδευση στη χρήση των χειραπτικών 2) οι εκπαιδευτικοί να προετοιμάζονται στη χρήση τους ολοκληρώνοντας τις ίδιες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που θα ζητήσουν από τους μαθητές τους και 3) οι εκπαιδευτικοί να προετοιμάσουν την τάξη για τις δραστηριότητες, με την οργάνωση των μαθητών σε ομάδες, την προετοιμασία των υλικών και της σκέψης των μαθητών.

Παρόμοια ευρήματα σχετικά με τη σημασία των αποτελεσματικών διδακτικών στρατηγικών κατά τη διδασκαλία με τα χειραπτικά υλικά εμφανίζονται στην έκθεση του Ινστιτούτου για τις Εκπαιδευτικές Επιστήμες/ Institute for Education Sciences του 2009, σχετικά με την παρέμβαση στα μαθηματικά (Gersten et al., 2009). Η έκθεση αναφέρει ότι *«η έρευνα δείχνει ότι η συστηματική χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων και των χειραπτικών μπορεί να οδηγήσει σε στατιστικά σημαντικό ή ουσιαστικά σημαντικά θετικά κέρδη στη μαθηματική επίδοση»* (σελ. 30-31). Η έκθεση οδηγεί στη συζήτηση για τη σημασία της μετάβασης από τα συγκεκριμένα αντικείμενα, σε οπτικές αναπαραστάσεις και στη συνέχεια σε αφηρημένη σημειογραφία. Παρέχει μια συνοπτική παρουσίαση των στοιχείων που υποστηρίζουν τη χρήση των χειραπτικών υλικών, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που υποστηρίζουν τη "συγκεκριμένο - εικονιστικό - αφηρημένο" μέθοδο (CRA) διδασκαλίας. Η μέθοδος αυτή, όπως προαναφέρθηκε, στηρίζεται στην εποικοδομιστική άποψη του Bruner της ενεργής/εικονιστικής/συμβολικής εξέλιξης στη μάθηση και παρέχει τη βάση για ένα αποτελεσματικό πλαίσιο για τη διδασκαλία με τα χειραπτικά. Κάτω από αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί αρχίζουν με δραστηριότητες με συγκεκριμένα χειραπτικά, στη συνέχεια οδηγούν τους μαθητές στη μετάβασή τους στη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων (σχέδια), και, τέλος, στη μετάβαση στη χρήση αφηρημένων μαθηματικών συμβόλων (αριθμοί).

Ο Hattie (2012: 15) αναφέρει ότι *«όταν οι εκπαιδευτικοί βλέπουν τη μάθηση να συμβαίνει ή να μη συμβαίνει, παρεμβαίνουν με υπολογισμένους και σημαντικούς τρόπους. Συγκεκριμένα, παρέχουν στους μαθητές πολλές ευκαιρίες και εναλλακτικές λύσεις για την ανάπτυξη στρατηγικών μάθησης και βαθιά επίπεδα μάθησης κάποιου περιεχόμενου ή τομέα, οδηγώντας τους να οικοδομήσουν*

εννοιολογική κατανόηση αυτής της μάθησης, την οποία μαθητές και εκπαιδευτικοί στη συνέχεια θα τη χρησιμοποιήσουν στο μέλλον». Σχετικά με τη δύναμη της ισορροπίας στην τάξη: «Υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ της ομιλίας, ακοής και δράσης των εκπαιδευτικών και υπάρχει μια παρόμοια ισορροπία μεταξύ της ομιλίας, ακοής και δράσης των μαθητών» (National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM, 2013: 15). Τα χειραπτικά υλικά παρέχουν τη βάση γύρω από την οποία οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μπορούν να μιλήσουν, να ακούσουν και να πράξουν. Άλλη έρευνα από τον Hattie καταλήγει στο συμπέρασμα ότι, όταν οι μαθητές δε μαθαίνουν, δε χρειάζονται «κάτι περισσότερο», αλλά μάλλον χρειάζονται «κάτι διαφορετικό» (Hattie, 2009: 83).

Η απόφαση για το αν πρέπει οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά στη διδασκαλία τους δεν είναι σαφής. Πριν οι ίδιοι αξιολογήσουν την πραγματική αξία των χειραπτικών, θα πρέπει να ανακαλύψουν τους μηχανισμούς με τους οποίους αυτά επηρεάζουν τη μαθηματική επίδοση. Με βάση τα διαθέσιμα στοιχεία και τις τρέχουσες θεωρίες, προτείνεται στους εκπαιδευτικούς να ελαχιστοποιηθεί η χρήση των χειραπτικών, ώστε να είναι (α) πολύ συγκεκριμένη και πλούσια σε αντιληπτικές λεπτομέρειες και / ή (β) η εξοικείωση των παιδιών με τα υλικά σε εξωσχολικά πλαίσια (π.χ. παιχνίδια) (McNeil, 2007). Όπως επεσήμαναν οι McNeil et al. (2007), πολλά από τα επίσημα χειραπτικά συστήματα (π.χ. οι ράβδοι δεκαδικής βάσης) είναι πλούσια σε αντιληπτικές λεπτομέρειες. Όταν χρησιμοποιούνται αυτά τα απλά χειραπτικά υλικά, μπορεί να είναι ευκολότερο για τους μαθητές να τα δουν ως μαθηματικά εργαλεία και να επικεντρωθούν στις βασικές μαθηματικές έννοιες.

Είναι επίσης σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να επιτρέπουν στους μαθητές τους να έχουν ελεύθερο χρόνο για να εξοικειωθούν με τα χειραπτικά υλικά. Αφού οι μαθητές έχουν διερευνήσει τα χειραπτικά, «τα υλικά παύουν να είναι παιχνίδια και αναλαμβάνουν τη θέση που τους αρμόζει στο πρόγραμμα σπουδών» (Smith, 2009: 17). Οι Seefeldt και Wasik (2006) πιστεύουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρέχουν στα παιδιά ευκαιρίες να εργαστούν με τα υλικά με ανοιχτού τύπου στόχους που δεν έχουν συγκεκριμένα καθορισμένο σκοπό. Έτσι δίνουν στα παιδιά την ευκαιρία να εξερευνήσουν τα δικά τους ερωτήματα και να δημιουργήσουν μια ποικιλία απαντήσεων. «Οι εμπειρίες αυτές βοηθούν τα παιδιά να σκέφτονται για

τον κόσμο τους με εναλλακτικούς τρόπους και να τους βοηθήσει να καταλάβουν ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι για την επίλυση προβλημάτων. Η παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε προβλήματα είναι μια στρατηγική ουσιαστικής σημασίας στα μαθηματικά» (Seefeldt & Wasik, 2006: 250).

Επίσης, προτείνεται οι εκπαιδευτικοί να έχουν χρόνο να χτίζουν ρητές γέφυρες, ανάμεσα στις άτυπες έννοιες που τα παιδιά οικοδομούν, όταν χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά και των μαθηματικών εννοιών που αναπαριστούν. Έτσι, ένας από τους πρωταρχικούς στόχους των εκπαιδευτικών θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη μαθημάτων, που θα βοηθούν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαισθητικής και επίσημης γνώσης. Γεφυρώνοντας το χάσμα ανάμεσα στη διαισθητική καθημερινή κατανόηση των μαθητών για τα μαθηματικά και τις κατανοήσεις τους από τις αντίστοιχες συμβολικές αναπαραστάσεις τους, είναι μία από τις πιο σημαντικές προκλήσεις που έχουν να αντιμετωπίσουν οι εκπαιδευτικοί σήμερα (Uttal, 2003).

ii. Αρχές ορθής χρήσης των χειραπτικών υλικών στην τάξη

Ένα από τα βασικά στοιχεία για την επιτυχή εφαρμογή ενός προγράμματος μαθηματικών με τη χρήση χειραπτικών υλικών, είναι η προετοιμασία των μαθητών να χρησιμοποιούν συγκεκριμένα αντικείμενα στη μαθηματική εξερεύνηση και την επίλυση προβλημάτων, κάτι που συχνά παραβλέπεται. Η Kelly (2006) προτείνει δέκα βασικά βήματα για την ορθή χρήση των χειραπτικών στην τάξη:

1. Σαφή κριτήρια και διατήρηση κανόνων συμπεριφοράς με τα χειραπτικά υλικά

Οι μαθητές πρέπει να έχουν σαφώς καθορισμένα κριτήρια για την αποτελεσματική διαχείριση και τη χρήση των χειραπτικών υλικών στην τάξη. Χωρίς ένα σαφές σύνολο προσδοκιών, οι μαθητές μπορούν να κάνουν κακή χρήση των υλικών και οι εκπαιδευτικοί θα ματαιωθούν και θα απογοητευτούν και πιθανότατα να διακόψουν τη χρήση τους στην τάξη. Οι κανόνες για τις συγκεκριμένες δραστηριότητες που ενσωματώνουν χειραπτικά υλικά πρέπει να εντάσσονται με σαφήνεια από τον δάσκαλο, να ανακοινώνονται στην τάξη και να επαναβεβαιώνονται επανειλημμένα, κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Εν ολίγοις, οι μαθητές πρέπει να καθοδηγούνται ουσιαστικά για να

χρησιμοποιήσουν και να κατανοήσουν τον σκοπό των χειραπτικών υλικών για τον συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο.

2. Σαφής αναφορά και ρύθμιση του σκοπού των χειραπτικών στο μάθημα των μαθηματικών. Είναι σημαντικό να επισημαίνεται ότι τα περισσότερα χειραπτικά υλικά στα μαθηματικά είναι πολύχρωμα, δελεαστικά και μοιάζουν πιο πολύ με αυτά που οι μαθητές θεωρούν ως “παιχνίδια”. Δεδομένου ότι αυτό είναι φυσικό να συμβεί, είναι πρωταρχικής σημασίας οι εκπαιδευτικοί συνειδητά να διευκολύνουν την κατανόηση της διαφοράς μεταξύ μαθηματικού χειραπτικού υλικού ή εργαλείου και παιχνιδιού. Αν αυτό γίνει προσεκτικά και αποτελεσματικά κατά την έναρξη του σχολικού έτους, οι μαθητές θα είναι λιγότερο πιθανό να κάνουν κακή χρήση.
3. Διευκόλυνση της συνεργατικής και εταιρικής εργασίας για την ενίσχυση της μαθηματικής γλωσσικής ανάπτυξης. Η φύση της χρήσης των χειραπτικών ενθαρρύνει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Το να μάθουν να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα αποτελεσματικά, αποτελεί ένα ισχυρό θεμέλιο για την εννοιολογική κατανόηση και τη χρήση αφηρημένων μαθηματικών δεξιοτήτων στην καθημερινή ζωή. Επίσης, βοηθά τους μαθητές να αισθάνονται μαθηματικά ικανοί, καθώς καταφέρνουν όλο και περισσότερο να αρθρώσουν, τόσο προφορικά όσο και γραπτά, τις διαδικασίες της μαθηματικής σκέψης τους. Η συνεργατική εργασία με τα χειραπτικά υλικά στην κατασκευή μαθηματικών εννοιών παρέχει την ευκαιρία στον μαθητή να διερευνήσει στρατηγικές και από τη θέση του παρατηρητή αλλά και του συμμετέχοντα.
4. Παροχή εισαγωγικού χρόνου στους μαθητές για ελεύθερη εξερεύνηση.
Οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να εξοικειωθούν με τα χειραπτικά υλικά, να ανακαλύψουν τις ιδιότητες και τους περιορισμούς τους και να πειραματιστούν με αυτά σε διάφορα πλαίσια. Αυτό, επίσης, ενθαρρύνει τη συνεργατική εργασία, την ανάπτυξη της γλώσσας και την ανάληψη κινδύνων. Η ελεύθερη εξερεύνηση δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν το δικό τους νόημα και να αναπτύξουν εμπιστοσύνη στη χρήση των χειραπτικών υλικών, για να ενισχύσουν τη μαθηματική κατανόησή τους.

5. Συχνά και σαφή μοντέλα χειραπτικών υλικών.

Η μοντελοποίηση θα βοηθήσει τους μαθητές να δουν πώς ένα συγκεκριμένο χειραπτικό υλικό μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές αρχίζουν να μαθαίνουν σχετικά με την τυπική μέτρηση και τη μη τυπική με αυθαίρετες μονάδες μέτρησης, είναι απαραίτητο να έχουν μια μεγάλη ποικιλία χειραπτικών υλικών (ράβδους Cuisenaire, συναρμολογούμενους κύβους, συνδετήρες, μολύβια, κ.λπ.), με τα οποία θα μετρήσουν αντικείμενα που χρησιμοποιούνται συνήθως (γραφεία, περβάζια πίνακα κιμωλίας, περβάζια παραθύρων, κ.λπ.). Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα αναπτύξουν πραγματική αίσθηση των αριθμών για τη μέτρηση. Ως μέσο για την ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών, η Marilyn Burns (1997:53) υποδηλώνει ότι «οι εκπαιδευτικοί περιλαμβάνουν όσο το δυνατόν τη μέτρηση στη διδασκαλία των μαθηματικών, σαν να είναι το θεμέλιο πάνω στο οποίο χτίζεται η ισχυρή μαθηματική κατανόηση».

6. Ενσωμάτωση μιας ποικιλίας τρόπων για να χρησιμοποιηθεί κάθε χειραπτικό.

Προσφέροντας στους μαθητές διαφορετικούς τρόπους για να δουν το ίδιο πρόβλημα και δείχνοντάς τους πώς να χρησιμοποιούν το ίδιο χειραπτικό υλικό εναλλακτικά, θα διασφαλίσει ότι οι περισσότεροι απ' αυτούς θα αποκτήσουν μια βαθύτερη και πλουσιότερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και θα ενισχύσουν την καθημερινή χρήση τους.

7. Υποστήριξη και σεβασμός της χρήσης χειραπτικών από όλους τους μαθητές.

Η αρχή της ισότητας (NCTM, 2000) αναφέρει σαφώς ότι οι υψηλές προσδοκίες και η ισχυρή υποστήριξη για όλους τους μαθητές, θα πρέπει να είναι εμφανείς στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η μοντελοποίηση και η χρήση των χειραπτικών υλικών από τους εκπαιδευτικούς με την ταυτόχρονη έκφραση θετικών συναισθημάτων, αυξάνει την πιθανότητα της χρήσης τους από τους μαθητές στην κατάκτηση δεξιοτήτων και την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

8. Εξασφάλιση διαθεσιμότητας και προσβασιμότητας στα υλικά.

Προκειμένου να διευκολυνθεί η χρήση των χειραπτικών υλικών σε οποιοδήποτε επίπεδο, τα επιλεγμένα ή απαιτούμενα χειραπτικά υλικά θα πρέπει να αποθηκεύονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι προσβάσιμα σε όλους τους

μαθητές, αρκετά πλούσια (σε αριθμό) για να επιτρέπεται σε κάθε μαθητή να έχει πρόσβαση σε ένα πλήρες σύνολο, και να επισημαίνονται κατάλληλα με σαφείς οδηγίες.

9. Υποστήριξη της αυτενέργειας και της ευρηματικότητας των μαθητών.

Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενισχύουν τις ικανότητες των μαθητών να εξερευνούν και να δοκιμάζουν. Αυτό διευκολύνει την ευρύτητα σκέψης και τη δημιουργικότητα. Τα χειραπτικά υλικά είναι φυσικοί αγωγοί για την επιτυχή, διαδραστική κατασκευή της γνώσης.

10. Καθιέρωση μιας αξιολογικής διαδικασίας με βάση την επίδοση.

Αφού η χρήση χειραπτικών υλικών βασίζεται στην κατασκευή ή την εκτέλεση μιας ενέργειας με ένα από αντικείμενο ή ένα σύνολο αντικειμένων, η ανακάλυψη του τι γνωρίζουν οι μαθητές θα πρέπει επίσης να βασίζεται στην ενεργό παρατήρηση των εκπαιδευτικών και σε ένα σύνολο κριτηρίων για τα αναμενόμενα αποτελέσματα ή, συνήθως, σε ένα εργαλείο αξιολόγησης με τη μορφή ρουμπρίκας. Αυτή η αξιολογική διαδικασία απαιτεί δεξιότητες παρατήρησης, δέσμευση χρόνου και πολλή υπομονή από τον εκπαιδευτικό.

Ο Core (2015), στη μελέτη του για τη χρήση των χειραπτικών υλικών, αναφέρει μια σειρά από συστάσεις στους εκπαιδευτικούς για την ορθή και αποτελεσματική χρήση τους. Σύμφωνα με τον ερευνητή, τα χειραπτικά υλικά χρειάζεται να ενισχύουν τους στόχους του μαθήματος, να απεικονίζουν σωστά την πραγματική μαθηματική διαδικασία ή έννοια και πρέπει να έχουν κινούμενα μέρη, τα οποία οι μαθητές θα χρησιμοποιούν για να απεικονίσουν τη μαθηματική ιδέα ή διαδικασία. Επίσης, οι μαθητές, θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν μια ποικιλία από χειραπτικά υλικά, όταν οι δάσκαλοί τους εισάγουν για πρώτη φορά μια νέα μαθηματική διαδικασία ή μια έννοια, χρειάζονται σαφείς οδηγίες για το πώς θα χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά, πρέπει να αλληλεπιδρούν με τα χειραπτικά υλικά, προκειμένου να αναπτύξουν μια κατανόηση της μαθηματικής διαδικασίας ή έννοιας και θα χρειαστούν σαφείς οδηγίες σχετικά με τη χρήση των μεταγνωστικών δεξιοτήτων τους. Ο ίδιος ερευνητής επισημαίνει ότι η μαθηματική διαδικασία ή η έννοια που απεικονίζεται από τα χειραπτικά υλικά, πρέπει να συνδέεται με την αναπαράσταση της μαθηματικής διαδικασίας ή της έννοιας με το

μολύβι και χαρτί, ότι ο δάσκαλος θα πρέπει να δίνει σε κάθε μαθητή τη δυνατότητα για ατομική εξερεύνηση με τα χειραπτικά και ότι θα πρέπει να υπάρχει μια σταδιακή απομάκρυνση των μαθητών από τη χρήση των χειραπτικών υλικών, καθώς αναπτύσσουν και κατανοούν τη μαθηματική διαδικασία ή έννοια (Core, 2015).

Κεφάλαιο 4. Μεθοδολογία της έρευνας

4.1.	Σκοπός της έρευνας	151
4.2.	Επιλογή της μεθόδου	152
4.3.	Σύνθεση και τρόπος επιλογής του δείγματος	157
4.4.	Είδος και δομή των μέσων παραγωγής των δεδομένων και των δοκιμασιών αξιολόγησης	159
4.5.	Σταθμισμένες δοκιμασίες – Ανιχνευτικά εργαλεία	162
4.5.1.	Τεστ ΖΑΡΕΚΙ	162
4.5.2.	Εργαλείο ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από Εκπαιδευτικούς) – Κλίμακα 6	163
4.6.	Άτυπες δοκιμασίες	164
4.6.1.	Δοκιμασίες αξιολόγησης με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα	164
4.6.2.	Ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών	165
4.6.3.	Συνέντευξη με τους εκπαιδευτικούς	167
4.6.4.	Λίστα ελέγχου βασικών δεξιοτήτων για τα μαθηματικά	169
4.6.5.	Γνωματεύσεις από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ.	170
4.6.6.	Φύλλα Παρατήρησης	171
4.7.	Στατιστική ανάλυση	172
4.8.	Πορεία της έρευνας - Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα με τη χρήση των χειραπτικών υλικών	172
i.	Συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς	172
ii.	Καθορισμός των βασικών μαθηματικών εννοιών της παρέμβασης	176
iii.	Τα χειραπτικά υλικά	181
iv.	Υποστήριξη των εκπαιδευτικών	184

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται: (1) ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα (2) η επιλογή της μεθόδου, (3) η σύνθεση και ο τρόπος επιλογής του δείγματος και (4) το είδος και η δομή των μέσων συλλογής των δεδομένων και των δοκιμασιών αξιολόγησης.

Η έρευνα συνδυάζει την ποσοτική με την ποιοτική προσέγγιση (μεικτή μέθοδος).

4.1. Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της μελέτης είναι να ερευνηθεί η επίδραση της χρήσης χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών σε μαθητές 6-9 ετών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, οι οποίοι φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης. Ως εκ τούτου, η βασική υπόθεση της έρευνας είναι ότι *«θα υπάρξει σημαντικά υψηλότερη συμμετοχή και επίδοση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, λόγω της χρήσης των χειραπτικών και δυνητικών υλικών στη διδασκαλία και την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών»*. Ο όρος *“επίδοση”* αναφέρεται όχι μόνο ως αριθμητική αποτύπωση σε μαθηματικές δοκιμασίες, αλλά και ως ενδείξεις κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, όπως αυτές μπορούν να εκφραστούν μέσα από διάφορων μορφών αναπαραστάσεις. Από την παραπάνω υπόθεση προκύπτουν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, θα υπάρξει σημαντική βελτίωση στην κατανόηση προμαθηματικών και βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά;
2. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, θα υπάρξει σημαντική βελτίωση της επίδοσης στην αλγοριθμική διαδικασία και την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά;
3. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, θα υπάρξει σημαντική βελτίωση της επίδοσης στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά;

4. Μετά τη διδακτική παρέμβαση, θα υπάρξει αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά;
5. Ποιες αλλαγές στη μαθησιακή συμπεριφορά και τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών θα επέλθουν, όταν το περιβάλλον της μαθηματικής διδασκαλίας μεταβάλλεται είτε στο Τμήμα Ένταξης είτε στη γενική τάξη με την ελεύθερη πρόσβασή τους στη χρήση των υλικών ;

4.2. Επιλογή της μεθόδου

Η εκπαιδευτική έρευνα παραδοσιακά ακολούθησε το εμπειρικό *“αντικειμενικό επιστημονικό μοντέλο”* (Burns, 1997), στο οποίο χρησιμοποιούνται ποσοτικές μέθοδοι συλλογής δεδομένων, ανάλυσης και τρόποι απολογισμού. Στη δεκαετία του 1960 υπήρξε μια κίνηση προς την κατεύθυνση μιας πιο εποικοδομιστικής προσέγγισης που αξιοποίησε μεθόδους που ήταν *“ποιοτικές, νατουραλιστικές και υποκειμενικές”* (Mackenzie & Knipe, 2006).

Πρόσφατα, είναι πιο αποδεκτές και κοινές οι ερευνητικές προσεγγίσεις που χαρακτηρίζονται ως μεικτές μέθοδοι, οι οποίες έχουν γίνει πιο περίπλοκες στον σχεδιασμό και πιο ευέλικτες στην εφαρμογή τους. Μια προσέγγιση μεικτής μεθόδου στην έρευνα είναι αυτή που περιλαμβάνει τη συλλογή και αριθμητικών πληροφοριών (π.χ. σχετικά με τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν), καθώς και κειμενικές πληροφορίες (π.χ. σε συνεντεύξεις και συζητήσεις σε ομάδες), έτσι ώστε η τελική βάση δεδομένων να αντιπροσωπεύει τόσο ποσοτικές όσο και ποιοτικές πληροφορίες (Mackenzie & Knipe, 2006).

Οι ερμηνευτικές/εποικοδομιστικές προσεγγίσεις στην έρευνα έχουν την πρόθεση της κατανόησης *“του κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας”* (Cohen & Manion, 1994: 36), γεγονός που υποδηλώνει ότι *“η πραγματικότητα είναι κοινωνικά δομημένη”* (Mertens, 2005). Ο διερμηνευτικός/εποικοδομιστής ερευνητής έχει την τάση να επικαλείται τις *“απόψεις των συμμετεχόντων για την κατάσταση που μελετάται”* και αναγνωρίζει τον αντίκτυπο στην έρευνα των δικών τους υπόβαθρων και εμπειριών. Το ερμηνευτικό/εποικοδομιστικό παράδειγμα λειτουργεί γενικά με τη χρήση ποιοτικών μεθόδων (Burns, 1997· Cohen & Manion, 1994). Ο

εποικοδομιστής ερευνητής είναι πιο πιθανό να βασίζεται σε ποιοτικές μεθόδους συλλογής δεδομένων και ανάλυσης ή σε έναν συνδυασμό και των δύο: και των ποιοτικών και των ποσοτικών μεθόδων (μεικτές μέθοδοι). Ποσοτικά δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με έναν τρόπο, που υποστηρίζει τα ποιοτικά δεδομένα και δίνει βάθος στην περιγραφή (Mackenzie & Knipe, 2006).

Σύμφωνα με τον Gorard (2004: 4), οι συνδυαστικές ή μεικτές μέθοδοι έρευνας έχουν χαρακτηριστεί ως *“στοιχείο κλειδί για τη βελτίωση των κοινωνικών επιστημών, συμπεριλαμβανομένης της εκπαιδευτικής έρευνας”*, με την έρευνα να ενισχύεται με τη χρήση μιας ποικιλίας μεθόδων. Ο Gorard (2004: 4) υποστηρίζει ότι η μεικτή μέθοδος έρευνας *«απαιτεί ένα μεγαλύτερο επίπεδο δεξιοτήτων... μπορεί να οδηγήσει σε λιγότερη σπατάλη δυνητικά χρήσιμων πληροφοριών και... δημιουργεί ερευνητές με αυξημένη ικανότητα να κάνουν κατάλληλες κριτικές όλων των τύπων της έρευνας»*.

Σχεδόν αναπόφευκτα σε κάθε παράδειγμα, για να είναι πλήρως αποτελεσματική η έρευνα, πρέπει να εφαρμοστούν και οι δύο προσεγγίσεις. Είναι υπερβολικά φτωχή η έρευνα, η οποία αποφεύγει τη χρήση και των δύο: και των ποιοτικών και των ποσοτικών ερευνητικών προσεγγίσεων. Παραδείγματα, τα οποία προτείνουν φανερά μεικτές μεθόδους προσέγγισης, επιτείνουν το ερώτημα για να καθοριστούν οι μέθοδοι ανάλυσης της συλλογής δεδομένων που θα εφαρμοστούν, τον τρόπο συλλογής ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων και την ενσωμάτωση των δεδομένων σε διαφορετικά στάδια της έρευνας (Creswell, 2014).

Κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες, η ποιοτική μέθοδος, ένα νέο ερευνητικό πρότυπο που αναφέρεται ευρέως ως παράδειγμα ερμηνευτικής έρευνας, έχει αρχίσει να κυριαρχεί στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η Merriam (1998) ανιχνεύει τις φιλοσοφικές ρίζες αυτού του παραδείγματος με την ερμηνευτική σχολή σκέψης που θεωρεί ότι η εκπαίδευση είναι μια διαδικασία και το σχολείο μια βιωματική εμπειρία. Αυτό το πρότυπο παρέχει μια γενική προοπτική για τη γνώση και την έρευνα που επιτρέπει στους μελετητές να επιλέξουν συγκεκριμένες μεθόδους για συγκεκριμένα έργα (Cobb, 2007). Υπάρχει μια αυξανόμενη τάση για τους ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση να χρησιμοποιούν ποιοτικές προσεγγίσεις. Όπως ο Silver (2004: 155) αναφέρει, *«[...] θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι οι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν κατά τις τελευταίες*

δεκαετίες ανεγείρει ένα μνημείο στις ποιοτικές μεθόδους έρευνας και τη μη πειραματική λειτουργία της έρευνας».

Όπως συμβαίνει με όλες τις έρευνες στον τομέα της εκπαίδευσης, υπάρχουν διαφορετικές ερμηνείες και ορισμοί για την ποιοτική έρευνα. Εναλλακτικά μπορεί να έχει τη μορφή της νατουραλιστικής έρευνας, έρευνας πεδίου, μελέτης περίπτωσης, συμμετοχικής παρατήρησης και εθνογραφίας (Merriam, 1998). Σύμφωνα με τον Creswell (2008), οι ποιοτικοί ερευνητές συλλέγουν στοιχεία στον τομέα, δε φέρνουν τα άτομα σε μια σκηνοθετημένη κατάσταση και συλλέγουν δεδομένα από μόνοι τους με την εξέταση των εγγράφων και της συμπεριφοράς ή με συνεντεύξεις των συμμετεχόντων. Ο ερευνητής εστιάζει στις έννοιες που οι συμμετέχοντες κατέχουν σχετικά με το πρόβλημα ή ζήτημα. Για παράδειγμα, σε μια τάξη μαθηματικών, τα δεδομένα συλλέγονται όσο οι μαθητές αλληλεπιδρούν σε μικρές ομάδες, κατά τη διάρκεια των συζητήσεων σε ολόκληρη την τάξη, όσο χρησιμοποιούν υλικά και άλλα μέσα, όσο αλληλεπιδρούν με τον δάσκαλο, ή εργάζονται ατομικά. Σε ποιοτικές προσεγγίσεις, οι ερευνητές θεωρούνται ως μέσα συλλογής δεδομένων και έχουν έναν σημαντικό ρόλο.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της ποιοτικής έρευνας είναι ότι παρέχει βάθος και λεπτομέρεια μέσω των άμεσων τιμών και περιγραφών των καταστάσεων, των γεγονότων, των αλληλεπιδράσεων και των παρατηρούμενων συμπεριφορών (Labuschagne, 2003). Τα δεδομένα μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση ανοικτού τύπου (κωδικοποίησης) (Cohen, Manion & Morrison, 2011), στην οποία τα δεδομένα μπορούν να αναλυθούν σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που θέτει ο ερευνητής.

Βασικό στοιχείο της ποιοτικής έρευνας αποτελεί η παρατήρηση. Περιλαμβάνει τη συλλογή ποιοτικών πληροφοριών, σχετικά με ανθρώπινες ενέργειες και συμπεριφορές σε κοινωνικές δραστηριότητες και εκδηλώσεις, σε ένα πραγματικό κοινωνικό περιβάλλον, όπως η διδασκαλία στην τάξη και τη μάθηση (Cohen, et al., 2011). Υπάρχουν δύο κύριες στρατηγικές παρατήρησης: η συμμετοχική και η μη συμμετοχική παρατήρηση (Johnson & Christensen, 2012· Cohen, Manion & Morrison 2011· Bryman, 2008). Η συμμετοχική παρατήρηση είναι όταν ο ερευνητής γίνεται μέρος της ομάδας μελέτης και συμμετέχει στις καθημερινές κοινωνικές δραστηριότητες του εν λόγω κοινωνικού συστήματος, ώστε να κατανοήσει τα

πραγματικά συναισθήματα και τις εμπειρίες των φαινομένων, ενώ παράλληλα κρατά σημειώσεις για τις δράσεις και τις συμπεριφορές των συμμετεχόντων. Ο παρατηρητής, ως συμμετέχων, μπορεί να ενημερώσει τους συμμετέχοντες της μελέτης για την παρουσία του στην κοινωνική δραστηριότητα (Cohen, Manion & Morrison, 2011· Bryman, 2008).

Αντιθέτως, η τεχνική της *μη συμμετοχικής* παρατήρησης εμπλέκει τον ερευνητή στο να κάθεται ή να στέκεται στο πλάι, ενώ οι κοινωνικές δραστηριότητες, όπως η διδασκαλία και η μάθηση λαμβάνουν χώρα τόσο εντός όσο και εκτός της αίθουσας διδασκαλίας (Cohen, Manion & Morrison, 2011· Bryman, 2008). Η ανάλυση των εγγράφων είναι μια μορφή συλλογής ποιοτικών πληροφοριών από μια πρωτογενή ή αρχική πηγή γραπτών, έντυπων και καταγεγραμμένων υλικών που απαντούν στις ερωτήσεις της έρευνας ή στην ερμηνεία των μελετών περίπτωσης (Creswell, 2009). Τα έγγραφα παρέχουν αποδείξεις για αυθεντικές ή πραγματικές δραστηριότητες, που αναλαμβάνονται από τα ανθρώπινα όντα σε κοινωνικές οργανώσεις και στην ανθρώπινη σκέψη. Τα έγγραφα μπορούν να περιλαμβάνουν γράμματα, σχέδια, μοντέλα, καθημερινά χρονοδιαγράμματα, προσωπικά ημερολόγια, αναφορές και φωτογραφίες των δραστηριοτήτων (Punch, 2009).

Ένα από τα δυνατά σημεία της ποιοτικής έρευνας είναι ότι η συμπεριφορά των συμμετεχόντων καταγράφεται στο φυσικό περιβάλλον, με όλες τις παραμέτρους που εμπλέκονται. Η ποιοτική έρευνα είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμη για την σε βάθος μελέτη μιας μικρής ομάδας ανθρώπων (Sharma, 2013).

Στην παρούσα έρευνα, λόγω της ιδιαιτερότητας και της ανομοιογένειας της φύσης των μαθησιακών δυσκολιών στο ευρύ πεδίο της μαθηματικής γνώσης, είναι θεμιτό να μην αποτυπώσουμε την πορεία και την εξέλιξη των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη διδακτική παρέμβαση, μόνο με την ανάλυση ποσοτικών και κυρίως ποιοτικών δεδομένων. Κάθε μαθητής που συμμετέχει στην έρευνα διαφοροποιείται στην ηλικία, το φύλο, το μαθησιακό του προφίλ, το κοινωνικό και οικογενειακό του υπόβαθρο, αλλά κυρίως στη φύση των μαθησιακών δυσκολιών και στον τρόπο πρόσκτησης της μαθηματικής γνώσης. Κοινή μεταβλητή αποτελεί η φοίτησή τους στο Τμήμα Ένταξης, ως μια προσπάθεια υποστήριξης της μαθησιακής διαδικασίας στον τομέα των μαθηματικών.

Με σκοπό την όσο το δυνατόν εκτενέστερη και ουσιαστικότερη έκθεση των εννοιολογικών αλλαγών που επέφερε η χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών, επιλέξαμε την αξιοποίηση συγκεκριμένων μελετών περίπτωσης από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, λαμβάνοντας υπόψη παραμέτρους που τους ταξινομούν και τους κατηγοριοποιούν ανάλογα με τη φύση των δυσκολιών μάθησης, τη συχνότητα των μαθηματικών λαθών, τη σύγκριση της επίδοσής τους στις δοκιμασίες που τους χορηγήθηκαν πριν και μετά την παρέμβαση και το μαθησιακό τους προφίλ.

Η Μελέτη Περίπτωσης ως ερευνητική στρατηγική χρησιμοποιείται σε πολλά ερευνητικά πεδία και θεωρείται μια ιδιαίτερα δύσκολη και απαιτητική ερευνητική στρατηγική. Η ανάδειξη της ποιοτικής μεθοδολογίας έδωσε τη δυνατότητα στους ερευνητές να την αξιοποιούν όλο και περισσότερο (Yin, 2011: 28). Οι Crowe et al. (2011) αναφέρουν ότι στη μελέτη περίπτωσης με κατάλληλες ερωτήσεις που αφορούν συνήθως στο “πώς”, το “γιατί” και το “τι”, μελετάται σε βάθος κάθε θέμα, δίνοντας έμφαση στην περιγραφή, την ανάλυση και τη σύνθεση με σκοπό τη σκιαγράφηση και τον διαφωτισμό των πολλαπλών πτυχών του.

Εστιάζοντας την προσοχή σε έναν συγκεκριμένο μαθητή για παράδειγμα, αποσκοπούμε στην απεικόνιση της συνθετότητας που τον χαρακτηρίζει, τη σύλληψη της μοναδικότητάς του, την κατανόηση των ρητών και άρρητων δομών του, την περιγραφή της λειτουργίας και των δράσεων που τον διέπουν και τελικά την ενσωμάτωση και αλληλεπίδρασή του με άλλα πλαίσια (Anisimova & Thomson, 2012· Yin, 2011· Πηγιάκη, 2004).

Διάφορες τυπολογίες εμφανίζονται στη βιβλιογραφία αναφορικά με τα είδη μελέτης περίπτωσης (Cohen et al., 2008), γεγονός που σηματοδοτεί αφενός τον ευέλικτο χαρακτήρα της και αφετέρου την ικανότητά της να ανταποκρίνεται σε διαφορετικά ερευνητικά πεδία και σε διαφορετικούς ερευνητικούς σκοπούς (Crowe et al., 2011).

Στην παρούσα έρευνα θα προχωρήσουμε σε μια συλλογική μελέτη περίπτωσης/ *collective case study*, η οποία σύμφωνα με τον Stake (1995), αφορά στη μελέτη πολλών περιπτώσεων, είτε ταυτόχρονα είτε διαδοχικά, προκειμένου να αποκτήσει ο ερευνητής ευρύτερη θέαση των πτυχών ενός συγκεκριμένου θέματος. Σύμφωνα με τον Yin (2011), μια περιγραφική μελέτη περίπτωσης/ *descriptive case study* μπορεί

να προσφέρει εξηγήσεις, περιγραφές και δυνατότητα διερεύνησης της περίπτωσης εντός του καθημερινού πλαισίου στο οποίο αυτή υπάρχει και λειτουργεί.

Ο Stake (1995) υποστηρίζει ότι ο ρόλος του ερμηνευτή σε μια μελέτη περίπτωσης είναι ο βασικότερος, καθώς είναι αυτός που αναλαμβάνει να διευκρινίσει, να αποσαφηνίσει και να εισχωρήσει σε βάθος στις περιγραφές και τις ποικίλες ερμηνείες που συλλέγει, έτσι ώστε, αφού τις επεξεργαστεί βασιζόμενος στις δικές του επιστημονικές θεωρήσεις, να τις παραδώσει εμπλουτισμένες στους αναγνώστες του. Με άλλα λόγια, ο ερμηνευτής προσφέρει στους αναγνώστες υλικό για να προβούν εκείνοι στις δικές τους ερμηνείες πέραν ενδεχομένως αυτής του ίδιου του ερευνητή.

4.3. Σύνθεση και τρόπος επιλογής του δείγματος

α. Μαθητές

Η έρευνα ξεκίνησε τον Μάιο του 2012 και ολοκληρώθηκε τον Ιούνιο του 2013, σε εικοσιένα (21) Τμήματα Ένταξης Δημοτικών Σχολείων της ευρύτερης περιοχής της Φθιώτιδας. Οι 62 συμμετέχοντες μαθητές (30 αγόρια και 32 κορίτσια) επιλέχτηκαν μέσα από μια διαδικασία ελέγχου, η οποία βασίστηκε στις κρίσεις των εκπαιδευτικών της τάξης και των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης στα οποία φοιτούσαν οι μαθητές, καθώς και στις διαγνώσεις από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. για όσους από αυτούς είχαν αξιολογηθεί. Επίσης, η επιλογή της ηλικίας των 6 έως 9 ετών για τους μαθητές του δείγματος έγινε αφενός, γιατί σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα τότε διδάσκονται οι βασικές μαθηματικές έννοιες και κατακτούνται οι βασικές μαθηματικές γνώσεις.

Όλοι οι μαθητές των δημοτικών σχολείων, που συμμετείχαν στην έρευνα, φοιτούσαν σε Τμήματα Ένταξης για την ενίσχυση των μαθηματικών και όχι μόνο ικανοτήτων τους. Η ηλικία τους κυμαινόταν από τα 6 έως 9 έτη, δηλαδή από την Α' μέχρι την Δ' τάξη. Η φοίτησή τους στα Τμήματα Ένταξης ήταν απόρροια είτε της εισήγησης του οικείου ΚΕ.Δ.Δ.Υ. (33 μαθητές) είτε πρότασης του εκπαιδευτικού της τάξης με τη σύμφωνη γνώμη της σχολικής συμβούλου ειδικής αγωγής (29 μαθητές). Σύμφωνα με την ισχύουσα νομοθεσία: «Σε καμιά περίπτωση δεν αποκλείεται μαθητής από το Τμήμα Ένταξης, αν οι γονείς του επιθυμούν τη φοίτησή του σε αυτό,

ακόμα κι αν δεν έχει διάγνωση από τις αρμόδιες διαγνωστικές υπηρεσίες. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί σχετική εισήγηση από τον Σχολικό Σύμβουλο Ειδικής Αγωγής.» (Υπ. Απόφαση 27922/Γ6/08-03-2007). Οι μαθητές διαφοροποιούνται στις ικανότητες καθώς και το πολιτιστικό υπόβαθρο, με τους περισσότερους να προέρχονται από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα. Όλοι οι μαθητές ήταν ελληνικής καταγωγής, εκτός από οχτώ (8) μαθητές που ήταν αλβανικής καταγωγής, αλλά είχαν γεννηθεί στην Ελλάδα και φοιτούσαν στο σχολείο από την Α' τάξη.

Στους 33 μαθητές που αξιολογήθηκαν από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. χορηγήθηκε το ψυχομετρικό τεστ WISC III και η συνολική τους επίδοση τους τοποθετεί στο χαμηλό έως οριακό φυσιολογικό επίπεδο νοητικής λειτουργίας. Για την αξιολόγηση της μαθηματικής τους επάρκειας τους χορηγήθηκε το Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης, στο οποίο η γενική τους απόδοση τους κατατάσσει στο χαμηλό επίπεδο σε σχέση με τη μέση απόδοση μαθητών της ίδιας ηλικίας και φύλου. Γενικότερα, οι μαθητές σύμφωνα με τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. χαρακτηρίζονται με γενικευμένες μαθησιακές δυσκολίες στη διαχείριση μαθηματικών εννοιών και σχέσεων και γνωστικές δυσκολίες που στις περισσότερες των περιπτώσεων συνδυάζονται και με το γλωσσικό επίπεδο και ειδικότερα την αναγνωστική ικανότητα. Οι υπόλοιποι μαθητές, οι οποίοι δεν είχαν γνωματεύσεις από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. φοιτούσαν στα Τμήματα Ένταξης μετά από εισήγηση το εκπαιδευτικού της τάξης και τη σύμφωνη γνώμη των γονέων και της Σχολικής Συμβούλου Ειδικής Αγωγής και Εκπαίδευσης.

β. Εκπαιδευτικοί

Οι εκπαιδευτικοί που στελέχωναν τα παραπάνω εικοσιένα (21) τμήματα, ήταν μόνιμοι ή αναπληρωτές, εξειδικευμένοι στην Ειδική Αγωγή, οι μεν μόνιμοι κυρίως με την κατοχή διπλώματος Διευτούς Μετεκπαίδευσης στην Ειδική Αγωγή, οι δε αναπληρωτές ήταν απόφοιτοι του Πανεπιστημιακού Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Στα δώδεκα (12) από τα 21 Τμήματα Ένταξης δίδασκαν μόνιμοι εκπαιδευτικοί με οργανική θέση και στα υπόλοιπα εννιά (9) Τμήματα Ένταξης αναπληρωτές εκπαιδευτικοί. Επίσης, συμμετείχαν στην έρευνα και εικοσιένα (21) εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων που φοιτούσαν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

4.4. Είδος και δομή των μέσων παραγωγής των δεδομένων και των δοκιμασιών αξιολόγησης

Σύμφωνα με τον Βάμβουκα (1993), η ερευνητική στρατηγική, που χρησιμοποιείται σε κάθε επιστημονική έρευνα, εξαρτάται από τη φύση του θέματος που εξετάζεται και από τον σκοπό της διερεύνησης. Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις ερευνών, όπως η παρούσα, που δε στοχεύουν μόνο στην ανίχνευση του είδους και του τρόπου λειτουργίας των μεταβλητών μιας κατάστασης, αλλά προσπαθούν επιπλέον να προσφέρουν κάποιες ερμηνείες για τη συγκεκριμένη μορφή της κατάστασης και ακόμη να προτείνουν κάποια μέτρα για τον αποτελεσματικό χειρισμό της. Σε αυτήν την περίπτωση μιλάμε για *διαγνωστική-περιγραφική έρευνα* (Βάμβουκας, 1993).

Μια έρευνα με σκοπούς διαγνωστικούς-περιγραφικούς απαιτεί μια ιδιαίτερη τακτική ως προς τον τρόπο και τα μέσα συλλογής των δεδομένων. Όταν στο στόχαστρο της αναζήτησης βρίσκονται το νόημα, η δομή και η πηγή πολύπλοκων μορφών ανεπιθύμητης συμπεριφοράς, καθώς και η λήψη συγκεκριμένων υποστηρικτικών μέτρων, δεν αρκεί μόνο π.χ. η συστηματική παρατήρηση (που οδηγεί σε καταγραφές χωρίς διευκρινίσεις) και δεν αρμόζει π.χ. η χρήση αυστηρά προκαθορισμένων κριτηρίων αξιολόγησης.

Αυτό που χρειάζεται είναι η άμεση επαφή και επικοινωνία μεταξύ ερευνητή και συμμετεχόντων στην έρευνα, ώστε να κατανοηθούν και να προσδιοριστούν η ακριβής φύση του προβλήματος και οι προσφορότερες λύσεις του. Βασική επιδίωξη του ερευνητή, είναι η ανάπτυξη στο πλαίσιο της ερευνητικής διαδικασίας, ενός κλίματος οικειότητας και εμπιστοσύνης, που βοηθά τους συμμετέχοντες να νιώσουν άνετα και να εκθέσουν ελεύθερα τον τρόπο σκέψης και δράσης τους, σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο θέμα (Βάμβουκας, 1993). Αυτή η ελεύθερη συμπεριφορά των συμμετεχόντων στην έρευνα είναι απαραίτητη για την ανίχνευση, αξιολόγηση και λεπτομερή ανάλυση των πραγματικών δεδομένων της κατάστασης.

Ως αξιολόγηση θεωρείται η διαδικασία μετατροπής των δεδομένων, τα οποία συγκεντρώθηκαν με τη χρήση κάποιου διαγνωστικού ή ανιχνευτικού εργαλείου, σταθμισμένου ή μη, σε πληροφορίες που αφορούν την επίδοση των μαθητών (Brown & Hirschfeld, 2008). Στόχος της αρχικής αξιολόγησης είναι ο εκπαιδευτικός

να αποκτήσει όσο το δυνατόν πληρέστερη εικόνα για τις γνώσεις, τα ατομικά χαρακτηριστικά των μαθητών του στην τάξη και τους παράγοντες που αλληλεπιδρούν με αυτά και επηρεάζουν τη μάθησή τους (Φιλιππάτου, 2013: 71).

Ο Swanson (1991), όπως αναφέρει ο Αγαλιώτης (2004: 148), επισημαίνει ότι «ο όρος αξιολόγηση στον χώρο της εκπαίδευσης, αναφέρεται σε μια οργανωμένη και σκόπιμη διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί μετρήσεις και δεδομένα με τρόπο που ορίζει κάποια συγκεκριμένη θεωρία, προκειμένου να απαντήσει σε ουσιώδη παιδαγωγικά ερωτήματα». Ειδικότερα, στο πλαίσιο της εκπαίδευσης των παιδιών με ειδικές ανάγκες, λέγοντας “αξιολόγηση” εννοούμε τη συστηματική διαδικασία συγκέντρωσης εκπαιδευτικά σημαντικών πληροφοριών σχετικών με τον μαθητή, με στόχο τη λήψη νομικών και διδακτικών αποφάσεων σχετικά με την παροχή εκπαιδευτικής υποστήριξης (Αγαλιώτης 2004, σελ. 148). Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), η αξιολόγηση δε θα πρέπει να συγχέεται με τη “διάγνωση”, η οποία έχει ως στόχο την κατάταξη ή μη του μαθητή σε μια από τις κατηγορίες ειδικών αναγκών. Η αξιολόγηση είναι μια ευρύτερη διαδικασία που λαμβάνει μεν υπόψη της τη διάγνωση, αλλά ενδιαφέρεται πολύ περισσότερο για τη διαπίστωση μαθησιακών δυνατοτήτων και αδυναμιών, για την οργάνωση και παρακολούθηση εξατομικευμένων διδακτικών προγραμμάτων και για την ποιοτική εξέταση της διδασκαλίας. Επίσης, η αξιολόγηση δε θα πρέπει να συνδέεται αποκλειστικά με τη χρήση των διαφόρων τυποποιημένων δοκιμασιών (test). Αυτές οι δοκιμασίες προσφέρουν αξιόλογες αλλά σε καμία περίπτωση επαρκείς πληροφορίες για τη λήψη αποφάσεων σχετικών με τη διδακτική υποστήριξη των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες. Για τον λόγο αυτό, κατά την αξιολόγηση χρησιμοποιείται ποικιλία διαδικασιών και μέσων ανάλογα με τον επιδιωκόμενο στόχο.

Όσον αφορά ειδικά την αξιολόγηση των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, οι Baroody και Ginsburg (1991) υποστηρίζουν ότι για να είναι αποτελεσματική θα πρέπει να πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- να ελέγχει τόσο την επίσημη όσο και την ανεπίσημη μαθηματική γνώση του παιδιού
- να προσφέρει μια ακριβή περιγραφή των δυνατοτήτων κι των αδυναμιών του παιδιού ως προς τη μαθηματική γνώση

- να ελέγχει ειδικά την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα με την οποία το παιδί χρησιμοποιεί τις μαθηματικές δεξιότητες
- να επικεντρώνεται στον έλεγχο της κατοχής εννοιών και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων
- να προσδιορίζει τις στρατηγικές και τις διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο μαθητής για την αντιμετώπιση των απαιτήσεων του μαθήματος
- να περιλαμβάνει μια ανάλυση των λαθών που εμφανίζονται στην εργασία του μαθητή.

Για τη συγκέντρωση συγκεκριμένων στοιχείων αναφορικά με όλες τις παραπάνω παραμέτρους απαιτείται ευελιξία στις διαδικασίες και προσαρμοστικότητα στα εργαλεία αξιολόγησης, στοιχείο που μπορεί να εξασφαλιστεί με τη χρήση της ανεπίσημης ή μη τυποποιημένης αξιολόγησης.

Σύμφωνα με τους Bryant και Rivera (1998), η επιβεβαίωση ή η τεκμηρίωση της ύπαρξης μαθησιακών δυσκολιών γίνεται από τον εκπαιδευτικό και οι μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξή της είναι: (α) η παρατήρηση, (β) η αξιολόγηση με οριζόντια χρήση κριτηρίου απόδοσης, (γ) η αξιολόγηση μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, (δ) η ποιοτική ή γνωστική ανάλυση των λαθών των μαθητών και η (ε) αξιολόγηση με βάση τον φάκελο υλικού. Γίνεται έλεγχος αν και κατά πόσο ο μαθητής κατέχει τις επιμέρους γνώσεις και δεξιότητες. Πρόκειται με άλλα λόγια, για έλεγχο της ποιότητας και της ποσότητας των προαπαιτούμενων ή προϋποτιθέμενων γνώσεων και δεξιοτήτων, οι οποίες θεωρούνται ως ο ισχυρότερος προγνωστικός δείκτης της σχολικής επίδοσης, διότι η έλλειψή τους αποτελεί τη συνηθέστερη άμεση αιτία προβλημάτων μάθησης και προσαρμογής ή ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών.

Για την ανίχνευση των μαθησιακών δυσκολιών των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα χρησιμοποιήσαμε τυπικές και άτυπες δοκιμασίες, τις οποίες και χορηγήσαμε σε όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, με στόχο την όσο το δυνατόν λεπτομερέστερη καταγραφή και προσδιορισμό των δυνατοτήτων και αδυναμιών κάθε μαθητή. Η συμπλήρωση των δοκιμασιών από τους μαθητές, προσδιορίζει σε μεγάλο βαθμό το εύρος και το είδος των μαθησιακών τους δυσκολιών στα μαθηματικά και καθορίζει τη μορφή και τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

4.5. Σταθμισμένες δοκιμασίες – Ανιχνευτικά εργαλεία

4.5.1. Τεστ ΖΑΡΕΚΙ

Πρόκειται για ένα σταθμισμένο τεστ που αξιολογεί τις μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών από τη Β΄ μέχρι και την Δ΄ Δημοτικού. Αποτελεί την ελληνική έκδοση του NUCALC, μιας νευροψυχολογικής δοκιμασίας για την αριθμητική επεξεργασία και την ικανότητα υπολογισμού των παιδιών, το οποίο αναπτύχθηκε από μια πολλαπλών ειδικοτήτων ερευνητική ομάδα και έχει χρησιμοποιηθεί σε παρόμοιες μελέτες στη Γαλλία, την Ελβετία και τη Βραζιλία (Dellatolas von Aster, Willadino-Braga, Meier, & Deloche, 2000).

Το τεστ NUCALC είναι ένα διεθνώς αναγνωρισμένο εργαλείο, που βοηθά στη διαφορική ανίχνευση των αδυναμιών στις περιοχές της μαθηματικής επεξεργασίας και του αριθμητικού υπολογισμού και συμβάλλει στη διάγνωση των μαθηματικών διαταραχών. Η στάθμιση της ελληνικής έκδοσης του NUCALC με την ονομασία “ΖΑΡΕΚΙ” έγινε το 2004 από ομάδα ερευνητών. Κατάλληλα εκπαιδευμένα πρόσωπα μπορούν να το διαχειριστούν και μπορεί να ανιχνεύσει τις μαθηματικές δυσκολίες (Koumoula et al., 2004).

Το τεστ ΖΑΡΕΚΙ περιλαμβάνει 12 υπο-τεστ, που καλύπτουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων όσον αφορά την επεξεργασία μαθηματικών δεδομένων ανιχνεύοντας τα ελλείμματα των παιδιών. Το τεστ χωρίζεται στις ακόλουθες δραστηριότητες (υπο-τεστ): 1) *Απαρίθμηση κηλίδων*, 2) *Μέτρηση προς τα πίσω*, 3) *Υπαγόρευση αριθμών*, 4) *Νοερός υπολογισμός*, 5) *Ανάγνωση αριθμών*, 6) *Αντιστοίχιση οπτικά δοσμένων αριθμών με τις θέσεις τους πάνω σε κάθετο άξονα*, 7) *Μνήμη αριθμών*, 8) *Προφορική σύγκριση*, 9) *Αντιληπτική εκτίμηση ποσότητας*, 10) *Εκτίμηση ποσότητας ανάλογα με το πλαίσιο*, 11) *Επίλυση προβλήματος* και 12) *Γραπτή σύγκριση αριθμών*.

Το συγκεκριμένο ανιχνευτικό εργαλείο απευθύνεται σε μαθητές των Β΄, Γ΄ και Δ΄ τάξεων του δημοτικού σχολείου. Τη συγκεκριμένη δοκιμασία χορηγήσαμε σε 49 μαθητές της έρευνας που φοιτούσαν στις παραπάνω τάξεις με στόχο να ανιχνεύσουμε τις μαθηματικές δυσκολίες τους μέσα από τις απαντήσεις τους στα επιμέρους 12 υπο-τεστ, τα οποία καλύπτουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων, όσον αφορά την επεξεργασία μαθηματικών δεδομένων.

4.5.2. Εργαλείο ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από Εκπαιδευτικούς) – Κλίμακα 6)

Το εργαλείο για την ανίχνευση των μαθησιακών δυσκολιών (ΑΜΔΕ) (βλ. Παράρτημα, έντυπο 2), κατασκευάστηκε και σταθμίστηκε το 2007 από το Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στο πλαίσιο του έργου «Κατασκευή και στάθμιση 12 διερευνητικών – ανιχνευτικών εργαλείων (κριτηρίων) των μαθησιακών δυσκολιών» του Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ ΙΙ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Έχει ως στόχο την αρχική αναγνώριση εκείνων των μαθητών ηλικίας 8 έως 15 ετών, που είναι πιθανόν να έχουν Μαθησιακές Δυσκολίες. Οι δεξιότητες/συμπεριφορές που αξιολογούνται δεν εστιάζουν αποκλειστικά στον χώρο του γραπτού λόγου, αλλά καλύπτουν και τις περιοχές του προφορικού λόγου, του συλλογισμού και των μαθηματικών. Το ΑΜΔΕ παρουσιάζει το πλήρες εύρος των χαρακτηριστικών συμπεριφορών και προβλημάτων που εμφανίζουν οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, έτσι όπως έχουν καταγραφεί στην επιστημονική βιβλιογραφία και στην κλινική έρευνα. Η ιδιαίτερη αξία του είναι ότι μπορεί να συμπληρωθεί από όλους τους εκπαιδευτικούς με βάση τη γνώση και την παρατήρηση των μαθητών τους. Με αυτό τον τρόπο, η αρχική αναγνώριση των Μαθησιακών Δυσκολιών γίνεται στο πλαίσιο της καθημερινής σχολικής πράξης, έγκαιρα, έγκυρα και αξιόπιστα πριν από οποιαδήποτε παραπομπή σε διαγνωστικές υπηρεσίες. Μέσα από την αξιοποίηση του εργαλείου οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να εστιάσουν σε συγκεκριμένες δεξιότητες και συμπεριφορές των μαθητών τους και να κατανοήσουν καλύτερα τις δυσκολίες τους, ώστε να αρχίσει η κατάλληλη εκπαιδευτική παρέμβαση (Παντελιάδου & Σιδερίδης, 2007).

Το ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς των γενικών τάξεων και των Τμημάτων Ένταξης για όλους τους μαθητές πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με τη χρήση των χειραπτικών υλικών, δίνοντας μια συγκεντρωτική εικόνα των δεξιοτήτων τους σε βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, όπως καθορίζονται από την Κλίμακα 6 του ανιχνευτικού εργαλείου που αναφέρεται στα μαθηματικά, καθώς και της αλλαγής που επήλθε στην κατανόησή τους μετά από τη διδακτική παρέμβαση μέσα από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τ.Ε και των γενικών τάξεων.

4.6. Άτυπες δοκιμασίες

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2003), οι γνωστικές δοκιμασίες «[...] δε χρειάζεται να είναι μια συλλογή από ασκήσεις δεξιοτήτων χαμηλού επιπέδου» (Van de Walle, 2003:72). Η αξιολόγηση της μάθησης των μαθηματικών πρέπει να είναι συνεκτικά συνδεδεμένη με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Van de Walle (2004) υποστηρίζει ότι μέσα σε ένα καλά δομημένο τεστ «[...] μπορείς να βρεις πολύ περισσότερες πληροφορίες για τους μαθητές, από τον απλό αριθμό των σωστών ή των λάθους απαντήσεων». Επομένως, πλαισιώσαμε τα προαναφερόμενα σταθμισμένα τεστ με άτυπες δοκιμασίες με στόχο την ανίχνευση και αξιολόγηση του ευρύτερου συνόλου των συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων, οι οποίες απαιτούνται για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των διαδικασιών από τους μαθητές της έρευνάς μας.

4.6.1. Δοκιμασίες αξιολόγησης με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η αξιολόγηση μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών αποτελεί μια διευρυμένη μορφή της αξιολόγησης με αναφορά στο κριτήριο απόδοσης. Κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι χρησιμοποιεί το ίδιο το περιεχόμενο του Αναλυτικού Προγράμματος και τους στόχους που αυτό περιλαμβάνει, για τον έλεγχο της επίδοσης του μαθητή. Ως συνήθεις σκοποί της διενέργειας αξιολογήσεων με τη συγκεκριμένη μέθοδο θεωρούνται: (α) η διαπίστωση του επιπέδου λειτουργίας (επίδοσης) του μαθητή στο πλαίσιο του Αναλυτικού Προγράμματος με βάση το οποίο διδάσκεται, (β) ο προσδιορισμός των δυνατοτήτων και των αδυναμιών του κατά γνωστική περιοχή (μάθημα) και (γ) η συλλογή δεδομένων για την αποτίμηση της προόδου του μαθητή (Jones, 1997).

Μια μελέτη του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών (Α.Π.Σ.) κάθε τάξης θέτει τους στόχους της διδασκαλίας των επιμέρους εννοιών και αποτελεί τη βάση του προγράμματος της επόμενης τάξης στο πλαίσιο της σπειροειδούς διάταξης της ύλης. Με στόχο να ανιχνευθούν ποιοι από τους στόχους που τίθενται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα κατακτήθηκαν από τους μαθητές, κατασκευάστηκαν από τον ερευνητή δύο δοκιμασίες αξιολόγησης που βασίστηκαν στο Α.Π.Σ. της Α' και Β' τάξης (βλ. Παράρτημα, έντυπα 3 και 4). Τις συγκεκριμένες δοκιμασίες χορηγήσαμε στην πρώτη

φάση της έρευνας με σκοπό να ανιχνευθούν τυχόν αδυναμίες ή ελλείψεις των παιδιών σε βασικές μαθηματικές έννοιες και δραστηριότητες. Οι ασκήσεις, που περιλάμβαναν οι δύο δοκιμασίες, βασίστηκαν στους γενικούς στόχους που θέτει το Α.Π.Σ. σε κάθε τάξη στο μάθημα των μαθηματικών και ειδικότερα στις ευρύτερες ενότητες: (α) αριθμοί και πράξεις, (β) μετρήσεις, (γ) γεωμετρία και (δ) επίλυση προβλήματος.

Στην κατασκευή του κριτηρίου αξιολόγησης, που αποτέλεσε εργαλείο παραγωγής των δεδομένων της παρούσας έρευνας, χρησιμοποιήθηκε η ιεραρχία των μαθησιακών στόχων που προκύπτει από το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου. Λέγοντας ιεραρχία, εννοούμε έναν κατάλογο, που περιλαμβάνει τις χαμηλότερης τάξης ή απλούστερες και τις υψηλότερης τάξης ή συνθετότερες έννοιες και δεξιότητες, σε μια λογική ακολουθία, με κριτήριο, το ποια γνωστικά στοιχεία αποτελούν τις προϋποθέσεις για την εξέλιξη των διαφόρων εννοιών και την τελική κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Underhill, Uprichard, & Heddens, 1980). Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκαν οι μαθησιακοί στόχοι του σχετικού τμήματος με την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων με ακέραιους αριθμούς, με την προσθήκη ενός τμήματος ελέγχου ορισμένων βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως η διατήρηση του αριθμού ή η θεσιακή αξία. Έγινε προσπάθεια, ώστε κάθε δραστηριότητα να ελέγχεται σε πραξιακό, εικονιστικό και συμβολικό επίπεδο.

4.6.2. Ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών

Για τη διερεύνηση του τέταρτου ερευνητικού ερωτήματος, τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χρήση ειδικού ερωτηματολογίου (βλ. Παράρτημα, έντυπο 5) που κατασκευάστηκε από τον ερευνητή μελετώντας ή/και συνδυάζοντας στοιχεία από άλλα εργαλεία (Gagnon & Maccini, 2007). Το ερωτηματολόγιο απευθυνόταν στους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν στα Τμήματα Ένταξης των σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα, ενώ το ίδιο ερωτηματολόγιο χορηγήσαμε και στους εκπαιδευτικούς των τμημάτων των γενικών τάξεων, όπου φοιτούσαν οι μαθητές και μαθήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα. Αρχικά, δοκιμάστηκε πιλοτικά σε δύο εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής που διδάσκουν σε δύο Τμήματα Ένταξης και οι οποίοι δε συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, με στόχο τον εντοπισμό

ασαφειών και μη κατανοητών όρων ή δυσκολιών στην επιλογή απάντησης, ιδιαίτερα στις κλειστές ερωτήσεις, όπου οι απαντήσεις είναι προκαθορισμένες. Ύστερα από τη συγκεκριμένη φάση, έγιναν οι κατάλληλες τροποποιήσεις και το εργαλείο πήρε την τελική του μορφή, όπως επισυνάπτεται στο Παράρτημα.

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη περιλαμβάνει δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελείται από προσωπικές πληροφορίες για τους εκπαιδευτικούς, όπως το φύλο, την ηλικία, τις σπουδές και την εμπειρία τους. Το δεύτερο μέρος αποτελείται από μια σειρά ερωτήσεων σε κλίμακα Likert, με στόχο να μετρήσει πόσο συχνά οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί προσαρμόζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών στις ανάγκες των μαθητών και πόσο χρησιμοποιούν υλικά που αναφέρονται στο Πρόγραμμα Σπουδών ή μη, για να υποστηρίξουν τη διδακτική διαδικασία και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Οι επτά ερωτήσεις του πρώτου μέρους του ερωτηματολογίου έχουν σκοπό τη συλλογή δημογραφικών στοιχείων των εκπαιδευτικών και είναι κλειστού τύπου (διαζευκτικές, πολλών εναλλακτικών απαντήσεων, πολλαπλών απαντήσεων).

Οι πρώτες δέκα ερωτήσεις του δεύτερου μέρους αφορούν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και είναι κλειστού τύπου. Στις ερωτήσεις 1 έως 10 οι συμμετέχοντες καλούνται να δηλώσουν τον βαθμό συμφωνίας τους με τις προτάσεις που διατυπώνονται σε μια πεντάβαθμη κλίμακα τύπου Likert (Καθόλου, Λίγο, Μέτρια, Πολύ, Πάρα πολύ). Οι ερωτήσεις 11 και 12 είναι κλειστού τύπου και αφορούν το βαθμό δυσκολίας και το βαθμό σημαντικότητας των μαθηματικών για τους μαθητές, σύμφωνα με την άποψη των εκπαιδευτικών. Η ερώτηση 13 είναι κλειστού τύπου με πολλές εναλλακτικές απαντήσεις και αφορά τις διδακτικές ώρες που αφιερώνουν οι εκπαιδευτικοί για τα μαθηματικά.

Οι ερωτήσεις 14 έως 20 αναφέρονται στον σχεδιασμό της διδασκαλίας των μαθηματικών, τη στοχοθεσία που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί και τα στοιχεία (π.χ. προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών) που λαμβάνουν υπόψη για τις τυχόν προσαρμογές της διδασκαλίας. Οι ερωτήσεις 21 έως 30 σχετίζονται με τις μεθόδους, τις πρακτικές, τα υλικά και τις τυχόν προσαρμογές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στις παραπάνω ερωτήσεις, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να δηλώσουν τη συχνότητα χρήσης των πρακτικών που

διατυπώνονται, σε μια πεντάβαθμη κλίμακα τύπου Likert (Ποτέ, Σπάνια, Μερικές φορές, Συχνά, Πολύ συχνά). Η ερώτηση 31 είναι εναλλακτικών απαντήσεων και αφορά τις πηγές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι ερωτήσεις 32 και 33 αφορούν τον βαθμό χρήσης των χειραπτικών και των ψηφιακών υλικών από τους εκπαιδευτικούς για την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών. Οι ερωτήσεις 34 και 35 είναι εναλλακτικών απαντήσεων και αφορούν τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις ενότητες των μαθηματικών, που μπορούν αποτελεσματικά να υποστηριχτούν από τη χρήση χειραπτικών ή ψηφιακών υλικών αλλά και τους περιορισμούς στη χρήση τους στη σχολική τάξη. Τέλος, η ερώτηση 36 είναι ανοιχτού τύπου και οι εκπαιδευτικοί μπορούν, αν το επιθυμούν να δηλώσουν τους προβληματισμούς τους σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών και δυνητικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η διαδικασία διανομής των ερωτηματολογίων ξεκίνησε πριν την παρέμβαση τον Φεβρουάριο του 2012 και ολοκληρώθηκε τον Απρίλιο του 2012. Επίσης, χορηγήθηκε και στους αναπληρωτές εκπαιδευτικούς που ανέλαβαν υπηρεσία για το σχολικό έτος 2012-2013 στα Τμήματα Ένταξης των σχολικών μονάδων που συμμετείχαν στην έρευνα. Το ίδιο ερωτηματολόγιο χορηγήσαμε και μετά το τέλος της παρέμβασης στους εκπαιδευτικούς, ώστε να αποτυπωθούν οι τυχόν αλλαγές στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αλλά και σχετικά με τη χρήση του χειραπτικού υλικού στην εκπαιδευτική διαδικασία.

4.6.3. Συνέντευξη με τους εκπαιδευτικούς

Βασικός στόχος μας στην παρούσα μελέτη ήταν να διερευνήσουμε τους αποτελεσματικούς τρόπους χρήσης των χειραπτικών υλικών στην τυπική διδασκαλία των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Στο πλαίσιο αυτής της διαδικασίας ερευνάται και η φύση των αλληλεπιδράσεων, οι οποίες αναπτύχθηκαν με το υλικό κυρίως για τους μαθητές. Ένα σημαντικό στοιχείο παρατήρησης σε αυτή τη μελέτη είναι το πώς οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν το υλικό και κατ' επέκταση πώς οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά σε σχέση με τις οδηγίες των εκπαιδευτικών.

Για αυτόν τον λόγο πραγματοποιήσαμε συνεντεύξεις με όλους τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα. Στις αρχές του Σεπτεμβρίου του 2012 και αφού είχε καθορισθεί ο αριθμός των μαθητών που θα πάρουν μέρος στην έρευνα, οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν σε μια μαγνητοφωνημένη ημιδομημένη συνέντευξη 30 λεπτών. Σκοπός της συνέντευξης ήταν να προσδιορίσουμε τις βασικές πληροφορίες σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούν οι ίδιοι στη διδασκαλία των μαθηματικών, τη χρήση ή μη χειραπτικών ή άλλων υλικών και κυρίως τις μεθόδους και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν στη διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών στους μαθητές που υποστηρίζουν στα Τμήματα Ένταξης που διδάσκουν.

Ένα αρχικό πρωτόκολλο συνέντευξης αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια πιλοτικής μελέτης με δύο εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής που διδάσκουν σε Τμήματα Ένταξης και οι οποίοι δε συμμετείχαν στην έρευνα. Το πρωτόκολλο αυτό αφού τροποποιήθηκε, υλοποιήθηκε με την εθελοντική συμμετοχή των εκπαιδευτικών.

Έγινε ο προσδιορισμός και η επιλογή των ερωτήσεων ανοικτού τύπου και εξασφαλίστηκε η απλότητα και σαφήνεια τους με την αποφυγή εξειδικευμένων και δυσνόητων επιστημονικών όρων.

Με τις ερωτήσεις της συνέντευξης αποσκοπούσαμε στο να διερευνήσουμε τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τη φύση των μαθηματικών και της διδασκαλίας τους, για τους τρόπους υποστήριξης της εκπαιδευτικής διαδικασίας, για τη χρήση υλικών στην αναπαράσταση και στην οπτικοποίηση μαθηματικών εννοιών και τις προβλέψεις τους για την αποτελεσματικότητα της χρήσης των υλικών αλλά και για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων από τους μαθητές.

Το ερωτηματολόγιο της συνέντευξης (βλ. Παράρτημα, έντυπο 6) αποτελούταν από τρία σκέλη: το πρώτο σκέλος είχε έξι ερωτήσεις, οι οποίες αφορούσαν προσωπικά δεδομένα κάθε συνεντευξιζόμενου όπως φύλο, σπουδές, διδακτική εμπειρία κ.ά. Το δεύτερο σκέλος περιελάμβανε οχτώ ερωτήσεις, οι οποίες επικεντρώνονταν στις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Το τρίτο και τελευταίο σκέλος περιείχε πέντε ερωτήσεις σχετικές με τη χρήση χειραπτικών και δυνητικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών.

Οι συνεντεύξεις επαναλήφθηκαν τροποποιημένες τόσο στη διάρκεια όσο και στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης με βάση τις μεταγενέστερες παρατηρήσεις στην τάξη και την πορεία της εκπαιδευτικής παρέμβασης.

4.6.4. Λίστα ελέγχου βασικών δεξιοτήτων για τα μαθηματικά

Με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.), αναπτύχθηκε από τον ερευνητή μια λίστα ελέγχου βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων (βλ. Παράρτημα, έντυπο 7) στα μαθηματικά, για να καταγραφούν ευρύτερα οι μαθησιακές ελλείψεις/αδυναμίες των μαθητών στα μαθηματικά. Οι 42 ερωτήσεις της λίστας καλύπτουν το σύνολο των μαθηματικών δεξιοτήτων, που αποτελούν στόχους του Α.Π.Σ. και κατανέμονται σε πέντε τομείς μαθηματικών εννοιών: (α) Προμαθηματικές έννοιες (Ερωτήσεις 1-5), (β) Μαθηματικές έννοιες (Ερωτήσεις 6-18), (γ) Πράξεις (Ερωτήσεις 19-33), (δ) Επίλυση προβλημάτων (Ερωτήσεις 34-40) και (ε) Γεωμετρία (Ερωτήσεις 41-42). Η λίστα συμπληρωνόταν κατάλληλα τόσο από τον εκπαιδευτικό της γενικής τάξης όσο και από τον εκπαιδευτικό του καθενός από τα Τμήματα Ένταξης. Ταυτόχρονα, σε δεύτερη φάση και εκτός σχολικού ωραρίου υλοποιήσαμε συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς της τάξης και των Τμημάτων Ένταξης και καταγράψαμε πληροφορίες σχετικά με τις μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα. Τα ποσοτικά και κυρίως τα ποιοτικά στοιχεία που παρήχθησαν, κατηγοριοποιήθηκαν και αποτέλεσαν μαζί με τα στοιχεία από τις γνωματεύσεις (όπου υπήρχαν) τη βάση για τον προσδιορισμό του μαθησιακού προφίλ κάθε μαθητή. Μετά τη λήξη της διδακτικής παρέμβασης η λίστα ελέγχου συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς και καταγράφηκαν οι αλλαγές στην κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών ύστερα από τη χρήση του χειραπτικού υλικού.

Η εσωτερική αξιοπιστία της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων σύμφωνα με τους δείκτες εσωτερικής αξιοπιστίας Cronbach' Α των 5 τομέων (διαστάσεων) ήταν οι εξής:

- ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ, 0,7
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ, 0,84
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ, 0,64

- ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ, 0,81
- ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 0,51

Σύμφωνα με τους George & Mallery (2003), τιμές του δείκτη αξιοπιστίας Alpha του Cronbach μεγαλύτερες ή ίσες του 0,9 θεωρούνται υπέροχες, τιμές μεταξύ 0,8 και 0,9 θεωρούνται καλές, τιμές μεταξύ 0,7 και 0,8 θεωρούνται αποδεκτές, τιμές μεταξύ 0,6 και 0,7 θεωρούνται οριακά αποδεκτές, τιμές μεταξύ 0,5 και 0,6 θεωρούνται φτωχές και τιμές κάτω από 0,5 θεωρούνται απαράδεκτες. Επομένως, οι ευρεθείσες τιμές, εφόσον στη μεγάλη πλειοψηφία τους (4 στις 5) είναι μεγαλύτερες του 0,6, θεωρούνται αποδεκτές, Μία μόνο τιμή (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 0,51) είναι φτωχή και οφείλεται στο γεγονός ότι ο συγκεκριμένος τομέας περιέχει 2 μόνο ερωτήσεις. Ο συγκεκριμένος μαθηματικός τομέας, αν και είχε σχεδιαστεί να ερευνηθεί με τη χρήση κατάλληλων χειραπτικών και δυνητικών υλικών, τελικά αποδυναμώθηκε στην εξέλιξη της παρέμβασης, αφού η διδασκαλία στα Τ.Ε. προτάσσει τις αριθμητικές έννοιες έναντι των γεωμετρικών, δίνοντας μεγαλύτερο βάρος στην εκμάθηση των Β.Α.Δ. και των αλγορίθμων των πράξεων.

4.6.5. Γνωματεύσεις από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. (Κέντρο Διαφοροδιάγνωσης Διάγνωσης και Υποστήριξης)

Την εισήγηση για εγγραφή και φοίτηση των μαθητών στην κατάλληλη σχολική μονάδα ή άλλο εκπαιδευτικό πλαίσιο ή πρόγραμμα Ειδικής Αγωγής και Εκπαίδευσης καθώς και την παρακολούθηση και αξιολόγηση της εκπαιδευτικής πορείας τους, αρμόδια διαγνωστική υπηρεσία είναι το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. Η αξιολόγηση πραγματοποιείται από τη διεπιστημονική ομάδα του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. (Εκπαιδευτικό Α/θμιας ή και Προσχολικής Εκπαίδευσης, Ψυχολόγο, Κοινωνικό Λειτουργό, Λογοθεραπευτή, Εργοθεραπευτή, κ.λπ.), οι οποίοι εκδίδουν γνωμάτευση με τον ορισμό και την περιγραφή της δυσκολίας που έχει ο μαθητής και προτείνουν συγκεκριμένες προτάσεις για την αποτελεσματικότερη υποστήριξη του μαθητή εντός και εκτός σχολικού πλαισίου. Συγκεκριμένα, προτείνεται το σχολικό πλαίσιο στο οποίο είναι καλύτερα να φοιτήσει ο μαθητής (Ειδικό Σχολείο, Τμήμα Ένταξης, στη γενική τάξη με παράλληλη στήριξη ή σε πρόγραμμα ενισχυτικής διδασκαλίας).

Για τους 33 μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνα και είχαν αξιολογηθεί από το οικείο ΚΕ.Δ.Δ.Υ., το οποίο εισηγήθηκε και τη φοίτησή τους στο Τμήμα Ένταξης, προχωρήσαμε σε μια καταγραφή των στοιχείων που περιγράφουν την εκπαιδευτική αξιολόγησή τους και ειδικότερα την αξιολόγηση της Μαθηματικής Επάρκειας (Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης), όπως αυτή αποτυπώνεται στη γνωμάτευση. Επίσης, λάβαμε υπόψη και τις προτεινόμενες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις της διεπιστημονικής ομάδας του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. για τον προσδιορισμό των δραστηριοτήτων που θα ολοκληρώσει κάθε μαθητής. Οι 18 από τους 33 μαθητές της έρευνας επαναξιολογήθηκαν από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. και μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης σε μεταγενέστερο χρόνο είτε αυτό είχε προκαθοριστεί μετά την αρχική αξιολόγηση είτε πριν από τη μετάβασή τους στο γυμνάσιο.

4.6.6. Φύλλα Παρατήρησης

Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση χειραπτικών υλικών, χορηγήσαμε σε όλους τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα, κατάλληλα Φύλλα Παρατήρησης (βλ. Παράρτημα, έντυπο 8) με σκοπό να καταγραφεί η μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών της έρευνας κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης των Φύλλων Εργασίας και της ολοκλήρωσης των μαθηματικών ασκήσεων.

Οι εκπαιδευτικοί των Τμημάτων Ένταξης κατέγραφαν τις παρατηρήσεις τους από την πρώτη επαφή των μαθητών με τα υλικά, τις αντιδράσεις τους στον τρόπο χρήσης τους και κάθε πληροφορία που αφορούσε την επίδραση των υλικών στη διαδικασία της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονταν. Απαιτήσή μας δεν ήταν η συμπλήρωση του Φύλλου Παρατήρησης αυτού καθαυτού αλλά η τήρηση αρχείου παρατηρήσεων για τους μαθητές βάσει των αξόνων που συζητήσαμε με τους εκπαιδευτικούς, αφού σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί τηρούσαν και δικό τους ημερολόγιο. Ταυτόχρονα, όταν ο ερευνητής επισκεπτόταν τα Τ.Ε. ηχογραφούσε τη διδακτική διαδικασία όπου οι μαθητές χρησιμοποιούσαν το υλικό και κατέγραφε τις παρατηρήσεις του. Στόχος ήταν η ανάδειξη των θετικών ή αρνητικών στοιχείων που προκύπτουν από την εφαρμογή των χειραπτικών υλικών και την αλληλεπίδρασή τους με τους μαθητές των Τ.Ε. στην ενίσχυση της μαθηματικής κατανόησης.

4.7. Στατιστική Ανάλυση

Για τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα SPSS 2.0.

Για την ανάλυση των δεδομένων, πραγματοποιήθηκε περιγραφική και επαγωγική στατιστική. Η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το τυπικό σφάλμα του μέσου χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή των ποσοτικών μεταβλητών. Οι απόλυτες (N) και οι σχετικές (%) συχνότητες χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή των ποιοτικών μεταβλητών. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν ραβδογράμματα μέσων τιμών. Ακόμη χρησιμοποιήθηκαν τεστ που ανιχνεύουν τις δυσκολίες στα μαθηματικά συγκριτικά με τη χρονολογική ηλικία των μαθητών.

Για τη σύγκριση μέσων τιμών δύο επαναληπτικών μετρήσεων (πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση) ως προς μια εξαρτημένη μεταβλητή εφαρμόστηκε ο στατιστικός έλεγχος T-test για εξαρτημένα ή κατά ζεύγη δείγματα (Paired Samples Test).

Τα επίπεδα σημαντικότητας ήταν αμφίπλευρα και η στατιστική σημαντικότητα τέθηκε στο 0,05.

4.8. Πορεία της έρευνας – Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα με τη χρήση των χειραπτικών υλικών

Μετά τον καθορισμό των συμμετεχόντων της έρευνας και την κατάρτιση του μαθησιακού τους προφίλ, με την έναρξη της σχολικής χρονιάς 2012-2013 ξεκίνησε και η διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικών και δυνητικών υλικών.

ι. Συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς

Η διδακτική παρέμβαση θα εφαρμοζόταν από τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν στα προεπιλεγμένα Τμήματα Ένταξης (Τ.Ε.) των σχολείων για μία ακαδημαϊκή χρονιά. Οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών στη μαθηματική εκπαίδευση, εκπορεύονται από τις δικές τους υποθέσεις και τις εμπειρίες τους από την αξιοποίηση υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών (Moyer & Jones, 2004). Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση και τη γνωστική ψυχολογία ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να μετατοπιστούν από τη

διδασκαλία που ζητά την απομνημόνευση γεγονότων και αλγορίθμων προς τη διδασκαλία που εμπλέκει τους μαθητές στην κατασκευή της μαθηματικής έννοιας (Cobb, 1994 Cobb, Yackel, & Wood, 1992 Peterson, Fennema, & Carpenter, 1989). Ωστόσο, η προηγούμενη εκπαιδευτική κατάρτιση ορισμένων εκπαιδευτικών, που δίνει έμφαση στους υπολογισμούς, τις πράξεις, τους κανόνες και τους αλγόριθμους, διαφέρει ριζικά από τις τρέχουσες γνωστικές θεωρίες και συγκρούεται με τις σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση. Στην οργάνωση του εκπαιδευτικού μας προγράμματος και στις αρχές Σεπτεμβρίου, κάθε εκπαιδευτικός, συμμετείχε σε μια μαγνητοσκοπημένη, ημι-δομημένη συνέντευξη η οποία διήρκεσε 30 λεπτά.

Πριν την εφαρμογή του εκπαιδευτικού προγράμματος, πραγματοποιήσαμε με όλους τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. που συμμετείχαν στην έρευνα, σε ομάδες, δύο τρίωρες συναντήσεις, στις οποίες έγινε επίδειξη της χρήσης των υλικών και συζητήσεις για τον τρόπο εισαγωγής του στην εκπαιδευτική διαδικασία και συμφωνήθηκε ο τρόπος και ο χρόνος της εκπαιδευτικής παρέμβασης. Κατά τη διάρκεια των συζητήσεων, οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν λεκτικά κάποια ανησυχία σχετικά με το ποιος θα είναι ο ρόλος τους σε ένα περιβάλλον, όπου οι μαθητές θα είχαν περισσότερες μαθησιακές επιλογές. Η παροχή επιλογών στην τάξη των μαθηματικών είναι μια νέα δυναμική για κάποιους εκπαιδευτικούς που επιθυμούν, ακολουθώντας τα σύγχρονα επιστημονικά δεδομένα, να εγκαταλείπουν τον έλεγχο της μάθησης, και με αυτόν τον τρόπο την αλλαγή του καθιερωμένου ρόλου τους ως "ειδήμονες". Οι Moyer και Jones (2004) επισημαίνουν ότι το επίπεδο της επιλογής που επιτρέπεται στους μαθητές στις μαθηματικές τάξεις είναι άμεσα συνδεδεμένο με την ποσότητα του ελέγχου που ασκούν οι εκπαιδευτικοί σε αυτό το περιβάλλον.

Ουσιαστικά και η διδασκαλία και η μάθηση στην τάξη περιλαμβάνουν τη διαπραγμάτευση των διαφόρων πτυχών του μαθησιακού ελέγχου που ασκείται από τον εκπαιδευτικό. Για κάποιους εκπαιδευτικούς, οι αποφάσεις για τη χρήση ή μη χειραπτικών υλικών βασίζονται στο μέγεθος του ελέγχου που πιστεύουν ότι θα είναι σε θέση να διατηρήσουν στην τάξη τους. Για άλλους, η χρήση χειραπτικών υλικών βασίζεται στην αντίληψή τους για τη χρησιμότητα κάθε διδακτικού εργαλείου. Για παράδειγμα, ενώ οι εκπαιδευτικοί μπορεί να δουν ένα μοιρογνωμόνιο ως ένα απαραίτητο εργαλείο για τη μέτρηση των γωνιών, δεν

μπορούν να δουν ότι οι ράβδοι κλασμάτων είναι σημαντικές για την κατανόηση των πράξεων με κλάσματα (Moyer & Jones, 2004).

Είναι σκόπιμο να επισημάνουμε ότι στόχος της παρούσας μελέτης ήταν να διερευνήσει τρόπους για εκπαιδευτικούς και μαθητές, σχετικούς με τη χρήση των χειραπτικών υλικών στην τυπική διδασκαλία των μαθηματικών καθώς και τη φύση των αλληλεπιδράσεων που δημιουργούνται με τα υλικά, όταν το μαθησιακό περιβάλλον αλλάζει, για να δώσει στους μαθητές *"ελεύθερη πρόσβαση"*, ή μια επιλογή για το πότε και πώς να χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά.

Αν και ενδιαφερόμαστε για το συνολικό πλαίσιο των αλληλεπιδράσεων στην τάξη, ο κύριος φακός παρατήρησης σε αυτήν τη μελέτη είναι πάνω στους μαθητές και την επίδραση των υλικών στη μαθηματική τους κατανόηση, στους εκπαιδευτικούς και τις χρήσεις των χειραπτικών υλικών και με έναν δευτερεύοντα φακό επικεντρωθήκαμε στο πώς οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά σε σχέση με τις οδηγίες των εκπαιδευτικών. Επιλέξαμε να πλαισιώσουμε αυτές τις αλληλεπιδράσεις, περιγράφοντας τα περιβάλλοντα μάθησης στα Τ.Ε. αλλά και τις γενικές τάξεις, όπου διδάσκονται τα μαθηματικά, καταγράφοντας το τι τα άτομα που συμμετέχουν (εκπαιδευτικοί και μαθητές) σε αυτά τα περιβάλλοντα λένε και κάνουν και να παρατηρήσουμε τις συμπεριφορές, δηλαδή, τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα αντιλαμβάνονται τον ρόλο που παίζουν σε αυτές τις αλληλεπιδράσεις. Τα αποτελέσματα εστιάζουν άμεσα σε συγκεκριμένες χρήσεις των χειραπτικών υλικών από τους εκπαιδευτικούς, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές έχουν την επιλογή για τη χρήση των υλικών αυτών και, ως εκ τούτου, παράγουν σημαντικές ενδείξεις για την αξιοποίηση και τον έλεγχο των στοιχείων από τους εκπαιδευτικούς στο περιβάλλον των μαθηματικών και των αυθόρμητων χρήσεων από τους μαθητές των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων για να μεσολαβήσουν στη δική τους μάθηση.

Στις συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς, εξηγήσαμε τον σκοπό και τους στόχους της εκπαιδευτικής παρέμβασης και ταυτόχρονα παρουσιάσαμε τα φυσικά χειραπτικά υλικά και τα χειραπτικά υλικά σε δυνητικό περιβάλλον που θα χρησιμοποιηθούν καθώς και τους τρόπους αξιοποίησής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Υλοποιήθηκαν στην πράξη δειγματικές χρήσεις των υλικών σε βασικές μαθηματικές έννοιες, συζητήθηκαν οι παρατηρήσεις και οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα υλικά και δρομολογήθηκε η προμήθεια και ο εξοπλισμός των

Τμημάτων Ένταξης με τα υλικά. Μερικοί από τους εκπαιδευτικούς, κυρίως οι αναπληρωτές, ανέφεραν ότι είχαν έρθει στη διάρκεια των σπουδών τους σε επαφή με τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών υλικών, ενώ οι περισσότεροι από τους μόνιμους εκπαιδευτικούς ανέφεραν ότι δεν είχαν καμία προηγούμενη ενδοϋπηρεσιακή εκπαίδευση σχετική με διαφοροποιημένες προσεγγίσεις στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, όπως ανέφερε η Ελένη: *«Είχαμε αρκετά μαθήματα μαθηματικών και πρακτικές, όπου θα μαθαίναμε να χρησιμοποιούμε χειραπτικά υλικά και διάφορα αντικείμενα στην τάξη»*. Ωστόσο, όπως χαρακτηριστικά είπε η Γεωργία: *«Στο παρελθόν είχαμε... κουτιά με ξύλινα αντικείμενα, αλλά ειλικρινά, δεν ξέραμε πώς και γιατί χρησιμοποιούνταν»*.

Ένα μεγάλο μέρος των φυσικών χειραπτικών υλικών (όλα τα ντόμινο πράξεων και τα απλά ντόμινο, τα πλαίσια του 5 και του 10, οι κάρτες πράξεων και οι αριθμογραμμές) κατασκευάστηκαν από τον ερευνητή και δόθηκαν στα Τμήματα Ένταξης. Επίσης, κάθε σχολική μονάδα ανέλαβε το οικονομικό κόστος του εξοπλισμού κάθε Τμήματος Ένταξης με το απαραίτητο χειραπτικό υλικό από το εμπόριο (τις ράβδους Cuisenaire, τις ράβδους δεκαδικής βάσης, τη ζυγαριά μέτρησης, το ταμπλό θεσιακής αξίας, τους άβακες, τους γεωπίνακες, τις ράβδους κλασμάτων, τα ζάρια πράξεων, τις αριθμογραμμές, κ.ά.).

Ειδικότερα για τα χειραπτικά υλικά σε δυνητικό περιβάλλον, παρουσιάστηκαν οι αντίστοιχες ιστοσελίδες (National Library of Virtual Manipulatives-NLVM και Phet Colorado) και πιο συγκεκριμένα οι δραστηριότητες που προσιδιάζουν τους άβακες, τους κύβους δεκαδικής βάσης, τη ζυγαριά μέτρησης και τις ράβδους Cuisenaire, όπου οι μαθητές εξασκούνταν συμπληρωματικά στην αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών μετά τη χρήση των φυσικών χειραπτικών υλικών. Ταυτόχρονα, εγκαταστάθηκαν στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές των Τμημάτων Ένταξης τα λογισμικά του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τα μαθηματικά της Α' - Β' και Γ' - Δ' Δημοτικού, ώστε να χρησιμοποιηθούν συγκεκριμένες εφαρμογές τους στην ψηφιακή υποστήριξη της διδασκαλίας.

Αφού επισημάνθηκαν οι τυχόν αλλαγές στη σύνθεση των Τμημάτων Ένταξης με την προσθήκη ή αφαίρεση μαθητών, επικαιροποιήθηκε ο τελικός πίνακας των συμμετεχόντων στην έρευνα. Σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς καθορίσαμε τις βασικές μαθηματικές έννοιες, καθώς και τις αντίστοιχες ενότητες/κεφάλαια των

διδασκικών εγχειριδίων που θα διδαχτούν με την υποστήριξη του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού.

Στο σημείο αυτό κρίθηκε σκόπιμο σε δύο (2) σχολικές μονάδες στις οποίες υπήρχαν τμήματα Α' και Β' τάξης με σημαντικό αριθμό μαθητών και μαθητριών (δύο ή περισσότερους) που παρακολουθούν το Τμήμα Ένταξης του σχολείου τους, να συμμετάσχουν στην έρευνα χρησιμοποιώντας το υλικό μέσα στην τάξη (με προσεγγίσεις διαφοροποιημένης διδασκαλίας) και από όλους τους μαθητές και μαθήτριες – συμπεριλαμβανομένων και των παιδιών του Τ.Ε. - στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών. Όλα τα Τ.Ε. εφοδιάστηκαν με το απαιτούμενο χειραπτικό υλικό είτε αγοράζοντας το τυποποιημένο υλικό είτε με την παροχή του κατασκευασμένου υλικού από τον ερευνητή.

ii. Καθορισμός των βασικών μαθηματικών εννοιών της παρέμβασης

Είναι γνωστό ότι ο μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά ανεξαρτήτως πρωτογενούς αιτιολογίας εκδηλώνονται μέσω της ύπαρξης λαθών στην εργασία του μαθητή, δηλαδή στην εκτέλεση πράξεων και στην επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με κάποιες παλιότερες απόψεις, τα αριθμητικά λάθη είναι ένα μη αναμενόμενο περιστατικό της μαθησιακής διαδικασίας, που μπορεί να οφείλεται είτε στη μη απόκτηση κάποιας σειράς ενεργειών από τον μαθητή είτε στην αδυναμία κατανόησης του νοήματός τους (Αγαλιώτης, 2004). Τα λάθη είναι αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής διαδικασίας (Bouvier, 1989) και είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα ισχυρό διαγνωστικό εργαλείο, το οποίο θα μας προσφέρει ένα *‘παράθυρο’* στον εννοιολογικό κόσμο του παιδιού (Τουμάσης, 1994).

Η αντιμετώπιση των λαθών ως συστατικών της μαθησιακής διαδικασίας, που, αν χρησιμοποιηθούν σωστά, μπορούν να προσφέρουν χρήσιμες πληροφορίες για τη βελτίωση της διδασκαλίας, είναι δυνατόν να επηρεάσει θετικά και το όλο κλίμα διαχείρισης της αποτυχίας στην τάξη. Κι αυτό, γιατί ο εκπαιδευτικός που πιστεύει ότι τα παιδιά τα οποία κάνουν συστηματικά τα ίδια λάθη πιθανότατα δεν είναι αδιάφορα ή απρόσεκτα, αλλά απλώς στηρίζονται σε έναν διαφορετικό τρόπο σκέψης και αντίληψης των μαθηματικών εννοιών, θα βρεθεί απέναντι στο ενδιαφέρον έργο της αναζήτησης του συγκεκριμένου λάθους. Αντίθετα, εκείνος που θεωρεί ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα απροσεξίας ή έλλειψης εξάσκησης θα

επαναλαμβάνει ξανά και ξανά το μονότονο έργο της διδασκαλίας της ίδιας έννοιας ή διαδικασίας (Αγαλιώτης, 2004).

Μέσα από τη διαδικασία ανίχνευσης των μαθησιακών δυσκολιών των μαθητών, που αποτέλεσαν τους συμμετέχοντες της έρευνας και ειδικότερα μέσα από τις άτυπες και σταθμισμένες δοκιμασίες, όπως και από τις συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια των εκπαιδευτικών, καθορίστηκαν και οι τομείς των μαθηματικών στους οποίους θα στοχεύει η διδακτική παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικών και δυνητικών υλικών. Από την ανάλυση των λαθών των μαθητών κυρίως στις άτυπες δοκιμασίες με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Α' και της Β' τάξης, που σκοπό είχαν να καταγράψουν τις μαθηματικές αδυναμίες ή ανεπάρκειες των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες που θα έπρεπε να έχουν κατακτήσει, καθώς και από την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων που προέκυψαν από τη χορήγηση της σταθμισμένης δοκιμασίας ΖΑΡΕΚΙ, καταγράφηκαν αρχικά οι γνωστικές περιοχές των μαθηματικών που δυσκολεύουν τους μαθητές της έρευνας και αποτελούν παράγοντες δυσκολίας για την κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών.

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), οι σωστές ή οι λανθασμένες απαντήσεις είναι άμεσα προϊόντα του ιδιαίτερου τρόπου με τον οποίο κάθε παιδί συγκρίνει και συνδυάζει τις εμπειρίες και τις ιδέες του, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο μαθαίνει, ανεξαρτήτως των παραγόντων που τον έχουν διαμορφώσει. Ο δάσκαλος που πιστεύει ότι τα παιδιά τα οποία κάνουν συστηματικά τα ίδια λάθη πιθανότατα δεν είναι αδιάφορα ή απρόσεκτα, αλλά απλώς στηρίζονται σε έναν διαφορετικό τρόπο σκέψης και αντίληψης των μαθηματικών εννοιών, θα βρεθεί απέναντι στο ενδιαφέρον έργο της αναζήτησης της ταυτότητας του συγκεκριμένου λάθους και του τρόπου ενίσχυσης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή με στόχο τη γρήγορη εξάλειψη του λάθους. Έτσι, σε δεύτερη φάση μέσα από τη συμπλήρωση από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα του διαγνωστικού εργαλείου ΑΜΔΕ και τις παρατηρήσεις που καταγράφηκαν από τις συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια, ολοκληρώθηκε η επεξεργασία των δεδομένων που παρήχθησαν από τη συμπλήρωση των δοκιμασιών και τις αναφορές των εκπαιδευτικών, κατηγοριοποιήθηκαν οι μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών και έγινε η τελική επιλογή των μαθηματικών εννοιών που θα αποτελέσουν το αντικείμενο της διδακτικής παρέμβασης.

Οι βασικές μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες που καθορίστηκαν για να αποτελέσουν το ερευνητικό πεδίο της διδακτικής παρέμβασης και αξιολόγησης/αποτίμησης της χρήσης των χειραπτικών και των δυνητικών υλικών ήταν:

- **Η ευχέρεια στην εύρεση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.)**

Η ακριβής και ταχεία ανάκληση των Β.Α.Δ. (δηλαδή των αποτελεσμάτων των πράξεων με δύο μονοψήφιους αριθμούς στην πρώτη εικοσάδα) από τη μνήμη, είναι μια θεμελιώδης προϋπόθεση για την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο, οι αδυναμίες της μνήμης, της διάκρισης, του εκφραστικού λόγου και της τήρησης ακολουθιών, που συχνά χαρακτηρίζουν τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά, καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολη την ευχερή χρήση αυτών των στοιχείων της μαθηματικής γνώσης (Bley & Thornton, 1995). Στην ύπαρξη δυσκολιών με τα Β.Α.Δ. συμβάλλει σημαντικά και η αναποτελεσματική χρήση των στρατηγικών που συνήθως εφαρμόζονται για την εύρεσή τους.

Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2004), τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά δεν κατέχουν έναν επαρκή αριθμό Β.Α.Δ. σε επίπεδο αυτοματισμού (απομνημόνευση και ανάκληση στην εκτέλεση πράξεων), με αποτέλεσμα να επηρεάζει αρνητικά την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν πράξεις και να λύνουν προβλήματα, οδηγώντας τους εναλλακτικά στο απόλυτο σταμάτημα των ενεργειών, σε τυχαίες απαντήσεις, στη δραματική αύξηση του χρόνου που απαιτείται στην εύρεση αθροισμάτων και ταυτόχρονη άγνοια άλλων στοιχείων, όπως τα κρατούμενα.

Θεωρείται ότι ένας λόγος για τον οποίο η γρήγορη ανάκτηση των αριθμητικών δεδομένων είναι σημαντική, είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν πραγματικά να κατανοήσουν κάθε είδους ερμηνεία σχετικά με τις αριθμητικές έννοιες ή τις διάφορες προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων, εκτός κι εάν αυτόματα γνωρίζουν ότι $6 + 4$ κάνει 10, ότι ο διπλασιασμός του 8 κάνει 16 και ούτω καθεξής. Με άλλα λόγια, μαθητές οι οποίοι εξακολουθούν να είναι αργοί χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά τους για να μετρήσουν έναν αριθμητικό συνδυασμό όπως το $7 + 8$ ή 3×2 , είναι πιθανόν να είναι εντελώς εκτός μαθησιακού ρυθμού, όταν οι δάσκαλοι υποθέτουν ότι μπορεί να ανακτήσουν εύκολα αυτές τις πληροφορίες και να

χρησιμοποιήσουν την υπόθεση αυτή ως βάση για να εξηγήσουν έννοιες απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων ή για την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων (Gersten, 2005).

Οι Robinson et al. (2002) πρότειναν ότι οι παρεμβάσεις για τους μαθητές με φτωχή γνώση αριθμητικών συνδυασμών θα πρέπει να περιλαμβάνουν δύο πτυχές: (α) παρεμβάσεις για να βοηθήσουν στην οικοδόμηση πιο γρήγορης ανάκτησης πληροφοριών και (β) εναρμονισμένη διδασκαλία για όποια από τις περιοχές των αριθμητικών εννοιών δεν έχουν αναπτυχθεί στους μαθητές.

- Η σωστή εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων

Τα συστηματικά αλγοριθμικά λάθη αποτελούν τη δεύτερη μεγαλύτερη πηγή αποτυχίας στα μαθηματικά για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Η ανάλυση της φύσης αυτών των λαθών οδηγεί στη διαπίστωση ότι δεν είναι αποτέλεσμα πλήρους έλλειψης γνώσης ή ανικανότητας εκμάθησης της συγκεκριμένης σειράς ενεργειών που πρέπει να εκτελεστούν σε μια πράξη, αλλά αποτελούν προϊόντα κάποιου λανθασμένου σκεπτικού που έχει τις ρίζες του στη μη κατάκτηση προϋποτιθέμενων γνώσεων και στην ατυχή χρήση κανόνων (Αγαλιώτης, 2004).

Αποτελεί την περισσότερο διευρυμένη κατηγορία λαθών, ίσως επειδή οι σχετικές δεξιότητες έχουν πολλές και άμεσες πρακτικές εφαρμογές. Ο Αγαλιώτης (2004: 208), με βάση μια επισκόπηση σχετικών ερευνών του Spriers (1987), προτείνει έξι βασικές κατηγορίες με τριάντα, συνολικά, επιμέρους περιπτώσεις λαθών: (1) *Λάθη σχετικά με τη θεσιακή αξία*, όπως π.χ. αδυναμία διάκρισης του μεγαλύτερου μεταξύ δύο αριθμών με τα ίδια ψηφία, καθρεφτικές ή αμοιβαίες αντιστροφές (564 γραμμένο ως 465) κ.λπ., (2) *Λάθη με τα ψηφία*, όπως π.χ. αντικατάσταση ψηφίου με άλλο (36+47 γραμμένο σαν 36+41), (3) *Λάθη με τα κρατούμενα και τα δανεικά*, όπως π.χ. παράλειψη του κρατούμενου, τοποθέτηση δανεικού σε λάθος στήλη, αδυναμία δανεισμού από 0 κ.λπ., (4) *Λάθη με τα βασικά δεδομένα και τον ρόλο του μηδενός (0)*, (5) *Αλγοριθμικά λάθη*, όπως π.χ. εκτέλεση μόνο ενός τμήματος του αλγορίθμου, σύγχυση ως προς τη σειρά των ενεργειών, πλήρης αδυναμία εκτέλεσης κ.λπ., (6) *Λάθη με τα σύμβολα*, όπως π.χ. σύγχυση των συμβόλων των πράξεων και εκτέλεση άλλης πράξης. Μια πιθανή εξήγηση λαθών, όπως: η εκτέλεση πρόσθεσης αντί για αφαίρεση (και το αντίθετο), παρά την κατανόηση και τη διάκριση των

εννοιών των πράξεων, η εκτέλεση μιας πράξης από αριστερά προς τα δεξιά, η τοποθέτηση αριθμών σε λάθος στήλη, η σύγχυση των αριθμητικών ψηφίων και συμβόλων πράξεων κατά την ανάγνωση και τη γραφή κ.ά., βρίσκεται στις παρατηρήσεις ερευνητών, όπως οι Geary, Hoard και Hamson (1999), οι οποίοι αναφέρουν ότι υπολογιστικά λάθη μπορεί να προέλθουν και από δυσκολίες, οι οποίες αφορούν τη σωστή αντίληψη και διάκριση μέσα στον χώρο της διάταξης και της μορφής των αριθμών και των πραξιακών συμβόλων που συμμετέχουν σε μια πράξη.

Μια γενική θεωρητική παραδοχή που αποδέχονται πολλοί ερευνητές, είναι ότι η μαθηματική ικανότητα αποτελείται από πολλαπλές δεξιότητες που έχουν διδαχθεί και έχουν μαθευτεί με έναν ιεραρχικό τρόπο (Dowker, 2005· Aunola, Leskinen, Lerkkanen, & Nurmi, 2004· Geary, 1994). Δηλαδή, βασικές δεξιότητες, όπως η κατανόηση του *“περισσότερο/λιγότερο”* σε μικρές ποσότητες και η μέτρηση, είναι προαπαιτούμενα για την επίλυση βασικών αριθμητικών συνδυασμών, πρώτα μέσω διαδικασιών καταμέτρησης και αργότερα με την άμεση ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων από τη μακρόχρονη μνήμη (Mazzocco & Thompson, 2005· Geary et al., 2000· Baroody & Wilkins, 1999). Πιο σύνθετες μαθηματικές δεξιότητες, όπως ο υπολογισμός πολυψήφιων αριθμών και η επίλυση προβλημάτων με τη σειρά τους, διευκολύνονται από την εκμάθηση των βασικών αριθμητικών πράξεων, την ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων, την εννοιολογική κατανόηση της θεσιακής αξίας και του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και των κανόνων υπολογισμού (Geary, 2004· Jordan, Hanich, & Uberti, 2003).

Οι Jordan, Hanich και Kaplan (2003) πραγματοποίησαν μια διαχρονική μελέτη σε 180 μαθητές. Στο τεστ που τους χορηγήθηκε, για να αξιολογήσει την επίδοσή τους σε μια σειρά από πρώιμες μαθηματικές έννοιες, ήταν και η θεσιακή αξία. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, οι μαθητές εμφάνιζαν σταθερά χαμηλότερη επίδοση σε σύγκριση με τον μέσο όρο των μαθητών. Κατέληξαν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά απαιτούν πρώιμη υποστήριξη στην έννοια της θεσιακής αξίας από τις πρώτες σχολικές τάξεις.

- Η επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων

Διάφορες μελέτες έχουν βρει συστηματικές διαφορές στα επίπεδα επίδοσης των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων (Moreno & Mayer, 1999· Lewis, 1989· Judd & Bilsky, 1989). Οι Judd και Bilsky (1989) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η κατανόηση είναι η σημαντικότερη πηγή δυσκολίας στα προβλήματα και ο τομέας ο οποίος εμφανίζει τις περισσότερες μεμονωμένες διαφορές στη μαθηματική επίδοση των παιδιών, επειδή τα παιδιά δεν έχουν ακόμα κατακτήσει την αυτοματοποίηση σχημάτων για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλήματος.

Οι δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων είναι πολύ έντονες στον πληθυσμό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι δυσκολίες αυτές κατά το μεγαλύτερο μέρος τους οφείλονται σε ανικανότητα μετατροπής των καταστάσεων που περιγράφονται στα προβλήματα σε νοητικές αναπαραστάσεις. Με λίγα λόγια, οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες και στα τέσσερα στάδια από τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος (μετάφραση, ολοκλήρωση, σχεδιασμός και εκτέλεση).

iii. Τα χειραπτικά υλικά

Τα χειραπτικά υλικά (βλ. Παράρτημα) που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούνταν από:

- **Αριθμογραμμές:** κάθετες και οριζόντιες 20βαθμης κλίμακας (0–20) και οριζόντιες 100βαθμης κλίμακας (0-100) (κυρίως χάρτινες μεζούρες που κολλήθηκαν στα θρανία του Τ.Ε. ή της γενικής τάξης των παιδιών). Παράλληλα, δημιουργήθηκαν τεχνητές αριθμογραμμές στα εσωτερικά σκαλιά των σχολείων και στα πλακάκια των τάξεων ή των Τ.Ε. για εξάσκηση. Οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιούν τις αριθμογραμμές, για να ανεβαίνουν (πρόσθεση) ή να κατεβαίνουν (αφαίρεση) από τους αντίστοιχους αριθμούς. Επιπροσθέτως, οι μαθητές μπορούν να εξασκηθούν διαδικτυακά στην ιστοσελίδα: http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_1_t_1.html και στο λογισμικό του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τα Μαθηματικά της Γ' και Δ' Δημοτικού στην εφαρμογή της αριθμογραμμής.

- **Ράβδοι Cuisenaire:** για την αναπαράσταση και την εκμάθηση των αριθμών 1-10 και των αριθμητικών σχέσεων που προκύπτουν από τη συσχέτιση των αριθμών χρησιμοποιήθηκαν οι ράβδοι Cuisenaire. Πρόκειται για ξύλινες ή πλαστικές

ράβδους σε διαφορετικά χρώματα που απεικονίζουν τους αριθμούς από το 1 έως το 10 με βάση το μέγεθός τους. Οι μαθητές μπορούν χρησιμοποιώντας τις ράβδους να διατάξουν, συγκρίνουν, αναλύσουν και συνθέσουν αριθμούς καταγράφοντας τις ενέργειές τους.

- **Κύβοι/Ράβδοι δεκαδικής βάσης** (Base Ten Blocks): για την αναπαράσταση μέχρι και τριψήφιων αριθμών, την υπέρβαση της δεκάδας, τη σύνθεση και ανάλυση της δεκάδας, καθώς και για την κατανόηση “κρατούμενων” και “δανεικών” στον αλγόριθμο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Πρόκειται για υλικό που απεικονίζει τις μονάδες με κυβάκια 1X1, τις δεκάδες με ράβδους 1X10 και τις εκατοντάδες με τετράγωνες πλάκες 10X10, ενώ η χιλιάδα είναι ένα κυβικό δεκατόμετρο. Όλα τα υλικά έχουν τη δυνατότητα να ενωθούν με κατάλληλες εσοχές στο σχήμα τους. Έτσι, 10 μικροί κύβοι (M) μπορούν να προσαρμοστούν σε μία δεκάδα κ.ο.κ. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε και πίνακας μαρκαδόρου, που απεικονίζει το υλικό σε κάθε θέση και το αντιστοιχίζει με τις M, Δ και E για την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων των αριθμών με τη βοήθεια των κύβων. Οι μαθητές μπορούν να απεικονίσουν τους αριθμούς ανάλογα με την αξιακή θέση των ψηφίων τους και κάνοντας πράξεις να κατανοήσουν την έννοια του “κρατούμενου” στην πρόσθεση με τη συμπλήρωση της δεκάδας και του “δανεικού” στην αφαίρεση με την ανάλυση της δεκάδας. Επιπροσθέτως, οι μαθητές μπορούν να εξασκηθούν διαδικτυακά στην ιστοσελίδα: <http://nlvm.usu.edu>

- **Ντόμινο:** χρησιμοποιήθηκαν τα απλά ντόμινο με κουκκίδες αλλά και ντόμινο πράξεων (πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού) διαβαθμισμένης δυσκολίας, κατασκευασμένα από μακετόχαρτο από τον ερευνητή για την πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών μέχρι το 20 και την εξάσκηση στα Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα (Β.Α.Δ.), καθώς και τον πολλαπλασιασμό. Επίσης, κατασκευάστηκαν και ντόμινο κουκκίδων για την κατανόηση της υπέρβασης της δεκάδας στην πρόσθεση και την εξάσκηση στη στρατηγική της ανάλυσης του $2^{ου}$ προσθετέου με στόχο τη συμπλήρωση της δεκάδας.

- **Ζυγαριά μέτρησης:** για τη σύγκριση αριθμών, τη σύνθεση αριθμών, την εύρεση του υπολοίπου ή του συμπληρώματος, τη λύση απλών εξισώσεων, τον πολλαπλασιασμό κ.ά. Πρόκειται για μια ζυγαριά που σε κάθε της σκέλος υπάρχουν 10 άγκιστρα με σημεία από το 1 έως το 10 και από όπου μπορούν να κρεμαστούν

πλακίδια. Η τοποθέτηση των πλακιδίων στα κατάλληλα άγκιστρα οδηγεί τη ζυγαριά σε ισορροπία, επαληθεύοντας έτσι την ορθότητα των αριθμητικών σχέσεων που εξετάζονται κάθε φορά. Οι μαθητές ανακαλύπτουν τη σύνθεση αριθμών ισορροπώντας τη ζυγαριά, βρίσκουν το συμπλήρωμα και εξασκούνται στην πρόσθεση, στην αφαίρεση και στον πολλαπλασιασμό.

- **Άβακες:** οριζόντιοι και κάθετοι για την πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών, την αντιμεταθετική ιδιότητα και τη θεσιακή αξία των ψηφίων μέχρι και 5ψήφιων αριθμών (κάθετος άβακας). Οι μαθητές απεικονίζουν στον άβακα αριθμούς και εξασκούνται στην κατανόηση της θεσιακής αξίας κάθε ψηφίου τους.

- **Πλαίσια του 5 και του 10:** για τη σύνθεση και ανάλυση αριθμών καθώς και για την υπέρβαση της δεκάδας. Πρόκειται για πλαίσια σε σειρά, όπου οι μαθητές τοποθετούν κατάλληλες πλάκες μεταβαίνοντας από το συμπλήρωμα του 5 στο συμπλήρωμα του 10.

- **Ζάρια:** κυβικά και πολυεδρικά για εξάσκηση στα Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα (Β.Α.Δ.). Με το ρίξιμο των ζαριών εξασκούνται στην πρόσθεση και την απόκτηση ευχέρειας στα Β.Α.Δ.

- **Γεωπίνακες:** για την ανακάλυψη και κατανόηση γεωμετρικών εννοιών, όπως το εμβαδόν, το τετραγωνικό μέτρο κ.ο.κ. Πρόκειται για τετράγωνα πλαίσια με ακίδες 5Χ5. Τα παιδιά με τη χρήση μικρών λάστιχων που τοποθετούν στις ακίδες, σχηματίζουν γεωμετρικά σχήματα και ασκούνται στο να υπολογίζουν την επιφάνειά τους (εμβαδόν) χωρίζοντάς τα με τα λαστιχάκια σε τετραγωνικές μονάδες.

- **Ράβδοι κλασμάτων** για την κατανόηση των εννοιών της ισοδυναμίας, τη σύγκριση κλασματικών μονάδων, τις πράξεις κλασμάτων. Πρόκειται για μια ακέραια μονάδα που χωρίζεται σε δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, έκτα, όγδοα, ένατα, δέκατα και δωδέκατα. Οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν τις κλασματικές μονάδες ανακαλύπτοντας τις διαφορές τους και την ισοδυναμία τους.

Ως **δυσνητικά υλικά** χρησιμοποιήθηκαν επιλεγμένοι διαδικτυακοί χώροι (National Library of Virtual Manipulatives N.L.V.M., National Council of Teachers of Mathematics Illuminations, Phet Colorado, Shodor Education Foundation Curriculum Materials), όπου υπάρχει πλήθος εκπαιδευτικών εφαρμογών, τις περισσότερες φορές σχετικές και ανάλογες με τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Επίσης,

επιλεγμένες εκπαιδευτικές δραστηριότητες/εφαρμογές (ράβδοι κλασμάτων, γεωπίνακας κ.ά.) από το ανοιχτό εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά της Γ' και Δ' Δημοτικού του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

iv. Εφαρμογή Εκπαιδευτικού Προγράμματος και Υποστήριξη των Εκπαιδευτικών

Από τον Οκτώβριο του 2012, όταν και ξεκίνησε η διδακτική παρέμβαση μέχρι και τη λήξη της τον Ιούνιο του 2013, υπήρξε συνεχής επικοινωνία του ερευνητή και υποστήριξη σε όλους τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν. Από τον Οκτώβριο μέχρι και τον Δεκέμβριο, ορίστηκε ο χρόνος της πρώτης επαφής και γνωριμίας των μαθητών με τη χρήση και αξιοποίηση των υλικών. Αρχικά, παραδόθηκαν στους εκπαιδευτικούς φύλλα με οδηγίες για τη χρήση και εξάσκηση των μαθητών με το κάθε μορφής χειραπτικό υλικό. Συνοδεύονταν από κατάλληλα Φύλλα Εργασίας (Φ.Ε.). (βλ. Παράρτημα, έντυπο 9), τα οποία περιελάμβαναν συγκεκριμένες δραστηριότητες διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων με την ταυτόχρονη χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών και ψηφιακών υλικών αφενός για την ορθή χρήση τους από τους μαθητές για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και αφετέρου για την αποφυγή της αντιμετώπισής τους ως παιχνίδια ή αντικείμενα για διασκέδαση. Κάθε Φ.Ε., που συνόδευε την γνωριμία και την πρώτη επαφή με τα αντίστοιχα χειραπτικά υλικά, ήταν διαρθρωμένο με δραστηριότητες βαθμιαίας αυξανόμενης δυσκολίας που στόχο είχαν την εξοικείωση των μαθητών με τα υλικά και την αξιοποίησή τους στην αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών που αντιστοιχούν. Έτσι, για την απόκτηση της ευχέρειας στην εύρεση και ταχεία ανάκληση από τη μνήμη των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.), οι δραστηριότητες των Φ.Ε. κατεύθυναν τους εκπαιδευτικούς στην αξιοποίηση κυρίως των πλαισίων του 5 και του 10 για τις μικρότερες ηλικίες και ειδικότερα τους μαθητές της Α' και Β' τάξης, των ράβδων Cuisenaire και της ζυγαριάς μέτρησης. Στόχο των εκπαιδευτικών αποτελούσε η αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών με τα υλικά όπως η σύνθεση και η υπέρβαση της δεκάδας και η εκμάθηση των αριθμητικών σχέσεων στην πρώτη δεκάδα. Σε δεύτερο στάδιο και αφού οι μαθητές είχαν κατανοήσει τη χρήση των υλικών, οι εκπαιδευτικοί, μέσα από την εφαρμογή των οδηγιών χρήσης κάθε υλικού που του είχε παρασχεθεί και σε τακτική επικοινωνία με τον ερευνητή, προχωρούσαν στη χρήση των υτόμινο με τα οποία οι

μαθητές εξασκούσαν με παιγνιώδη και ευχάριστο τρόπο στην αβίαστη εξάσκηση και αυτοματοποίηση των Β.Α.Δ. μέσα στην εικοσάδα. Οι εκπαιδευτικοί, ανάλογα με τη μαθησιακή ετοιμότητα των μαθητών προχωρούσαν στη συμπλήρωση των Φ.Ε. για το κάθε υλικό. Ταυτόχρονα, κατέγραφαν σε κατάλληλα Φύλλα Παρατήρησης (βλ. Παράρτημα, έντυπο 8) τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών της έρευνας κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης των Φ.Ε. και της ολοκλήρωσης των μαθηματικών ασκήσεων.

Οι εκπαιδευτικοί των Τμημάτων Ένταξης κατέγραφαν τις παρατηρήσεις τους από την πρώτη επαφή των μαθητών με τα υλικά, τις αντιδράσεις τους στον τρόπο χρήσης τους και κάθε πληροφορία που αφορούσε την επίδραση των υλικών στη διαδικασία της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονταν. Απαιτήσή μας δεν ήταν η συμπλήρωση του Φύλλου Παρατήρησης αυτού καθαυτού αλλά η τήρηση αρχείου παρατηρήσεων για τους μαθητές βάσει των αξόνων που συζητήσαμε με τους εκπαιδευτικούς, αφού σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί τηρούσαν και δικό τους ημερολόγιο.

Ο ερευνητής, σε τακτά χρονικά διαστήματα (συνήθως ανά 15νήμερο) επικοινωνούσε εξ αποστάσεως ή δια ζώσης με τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. Πιο συχνές ήταν οι επισκέψεις στα 11 Τ.Ε. της πόλης της Λαμίας. Οι εκπαιδευτικοί μετέφεραν τις απόψεις τους και τις καταγραφές τους στα Φύλλα Παρατήρησης, καθώς και τις πιο αξιοσημείωτες αντιδράσεις και συμπεριφορές των μαθητών κατά τη διάρκεια της χρήσης των χειραπτικών υλικών. Συχνά, όταν κρινόταν σκόπιμο, προγραμματιζόταν επίσκεψη του ερευνητή για την άμεση παρατήρηση των μαθητών.

Αφού οι εκπαιδευτικοί ολοκλήρωναν την εφαρμογή των χειραπτικών υλικών με τη συμπλήρωση των Φ.Ε. και την εξάσκηση των μαθητών σε αντίστοιχες ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων, σε επικοινωνία με τον ερευνητή και αφού αξιολογούνταν η διδακτική πρακτική και η αποτελεσματικότητα της χρήσης των υλικών, προχωρούσαμε στο επόμενο στάδιο και την αξιοποίηση και των άλλων υλικών. Έτσι, την επιτυχή και αποτελεσματική χρήση των ράβδων Cuisenaire, της ζυγαριάς μέτρησης, και των ντόμινο (απλών και πράξεων), για την ευχέρεια εύρεσης και ανάκτησης από τη μνήμη των Β.Α.Δ., ακολουθούσε η εξάσκηση με τα ζάρια και την αριθμογραμμή, καθώς και των σχετικών δυνητικών υλικών και των λογισμικών,

πάντα με την καθοδήγηση του ερευνητή μέσα από αναλυτικές οδηγίες που παρέχονταν σε όλη τη διάρκεια της εξοικείωσης με τα υλικά. Η συνεχής, πολύμορφη και πολυεπίπεδη προσέγγιση των αθροισμάτων και διαφορών των μονοψήφιων αριθμών στην πρώτη εικοσάδα, αποσκοπούσε στην αυτοματοποίηση και ευχερή ανάκληση από τη μνήμη των Β.Α.Δ.

Στην επόμενη φάση της διδακτικής παρέμβασης για την υποστήριξη των μαθηματικών εννοιών της σωστής εφαρμογής των αλγόριθμων των πράξεων και της επίλυσης των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, αξιοποιήθηκαν τα χειραπτικά υλικά της αριθμογραμμής και των ράβδων δεκαδικής βάσης. Πριν την εφαρμογή και χρήση των υλικών προηγήθηκαν συναντήσεις με όλους τους εκπαιδευτικούς όπου αναλύθηκε η ορθή χρήση των χειραπτικών υλικών κατά την αναπαράσταση των αριθμών και η αντιστοίχιση των εμπράγματων ενεργειών με την ακολουθία των αλγόριθμων των πράξεων. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στη χρήση των κύβων δεκαδικής βάσης για την κατανόηση της σύνθεσης της δεκάδας και τη δημιουργία “κρατούμενου” για την πρόσθεση και την ανάλυση της δεκάδας και τη δημιουργία “δανεικού” για την αφαίρεση. Για τα συγκεκριμένα υλικά παρασχέθηκαν και γραπτές οδηγίες για τη χρήση τους. Οι μαθητές συμπληρώνοντας τα αντίστοιχα Φ.Ε. εξασκούσαν στην αναπαράσταση έως και τριψήφιων αριθμών με τους κύβους δεκαδικής βάσης προσεγγίζοντας γνωστικά μαθηματικές έννοιες όπως η θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού και ιδιαίτερα της αλγοριθμικής διαδικασίας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Όσον αφορά τους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, σε διαρκή επικοινωνία με τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. αλλά και των γενικών τάξεων όταν απαιτούνταν, εστίασαμε την προσοχή μας στην κατανόηση των “δύσκολων” εννοιών του “κρατούμενου” στην πρόσθεση και του “δανεικού” στην αφαίρεση. Οι εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. υποστήριζαν τους μαθητές για την εκμάθηση της αλγοριθμικής διαδικασίας στην πρόσθεση με την αντίστοιχη απεικόνισή των ενεργειών τους με τη χρήση των υλικών και τη γραπτή επισήμανση του “κρατούμενου”, ενώ στην αφαίρεση χρησιμοποιώντας την τεχνική της αναδόμησης του μειωτέου και την αντίστοιχη μεταφορά του “δανεικού” από στήλη ανώτερης τάξης. Λόγω της σημαντικότητας της εκμάθησης των αλγορίθμων και της σκόπιμης μετάβασης από το πραξιακό επίπεδο στο συμβολικό, υπήρξε συνεχής επικοινωνία

με τους εκπαιδευτικούς, ώστε τα χειραπτικά υλικά να αξιοποιηθούν ως “γέφυρα” για την εκμάθηση και σωστή εφαρμογή της αλγοριθμικής διαδικασίας. Επίσης, υποστηρίχθηκε σε παράλληλη φάση με τους αλγόριθμους η επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Στις συναντήσεις και τη συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς, επισημάνθηκαν τα στάδια επίλυσης των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων κάνοντας ιδιαίτερη αναφορά στη “μετάφραση” και την “ολοκλήρωση” που αφορούν τη νοερή αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος. Επίσης, αναλύσαμε την επίλυση διαφόρων ειδών προβλημάτων με τη χρήση των υλικών μέσα από την προσπάθεια αναπαράστασης των δεδομένων τους με τα χειραπτικά υλικά και με τη βοήθεια της αριθμογραμμής (ειδικότερα στις έννοιες σύγκρισης “λιγότερο”, “περισσότερο”). Όταν οι εκπαιδευτικοί διαπίστωναν, κατέγραφαν και επιβεβαίωναν την επαρκή κατανόηση των μαθητών για την ορθή χρήση του συνόλου των χειραπτικών υλικών που χρησιμοποιήθηκαν, περνούσαμε στο στάδιο της ελεύθερης πρόσβασης στα υλικά για την ολοκλήρωση μαθηματικών δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων.

Στο σχεδιασμό του εκπαιδευτικού προγράμματος και μετά την εξοικείωση των μαθητών στη χρήση των χειραπτικών υλικών, προβλεπόταν και η ελεύθερη πρόσβαση στη χρήση τους από τους μαθητές. Σκοπός ήταν η αυτονόμηση των μαθητών στη διαδικασία της ολοκλήρωσης των μαθηματικών ενεργειών τους. Η ελεύθερη προσβασιμότητα στα υλικά μπορεί να επιτρέψει στους μαθητές να διαμορφώσουν τις δικές τους στρατηγικές λύσης και να προωθήσουν την αυτόνομη σκέψη και την εμπιστοσύνη στην εκμάθηση των μαθηματικών. Η έννοια της αυτονομίας υποδηλώνει μια εσωτερική έγκριση των πράξεων κάποιου ή τις επιλογές του. Οι μαθητές που είναι διανοητικά αυτόνομοι λαμβάνουν αποφάσεις για να ξεκινούν και να ρυθμίζουν τη συμπεριφορά τους, επιλέγοντας τα επιθυμητά αποτελέσματα καθώς και τον τρόπο επίτευξής τους (Deci & Ryan, 1987). Ως εκ τούτου, οι μαθητές που έχουν την αυτονομία να χρησιμοποιήσουν χειραπτικά υλικά θα έχουν την ευκαιρία να ξεκινήσουν και να ρυθμίζουν τις δικές τους μαθηματικές αποφάσεις, κρίσεις και συμπεριφορές, και με αυτόν τον τρόπο ασκούν κάποιο έλεγχο με τις εμπειρίες τους που καθορίζουν τι κατασκευάζουν μαθηματικά και με ποιον τρόπο (Moyer & Jones, 2004).

Για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, η ελεύθερη πρόσβαση ορίστηκε ως η ευκαιρία στους μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν και να χρησιμοποιήσουν τα υλικά που προσδιορίζονται ως αναγκαία για την παροχή βοήθειας και την υποστήριξη σε μαθηματικές καταστάσεις. Καθορίστηκε από τον ερευνητή σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς ο τρόπος και η διάρκεια της ελεύθερης πρόσβασης έτσι ώστε να διαφυλάσσεται η αξιοποίησή τους ως διδακτικά εργαλεία και να υποστηρίζεται η χρήση τους μόνο όταν είναι αναγκαία, ώστε να αποφεύγεται η “προσκόλληση” των μαθητών στα υλικά. Οι εκπαιδευτικοί τοποθέτησαν τα χειραπτικά υλικά πάνω ή κοντά στα θρανία των μαθητών, έτσι ώστε να είναι προσβάσιμα στους μαθητές για να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν. Από τον Ιανουάριο έως και τον Απρίλιο του 2013, συμφωνήθηκε με τους εκπαιδευτικούς να παρέχουν στους μαθητές (εκτός από εκείνους της Α΄ τάξης), ελεύθερη πρόσβαση στα χειραπτικά υλικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών στα Τ.Ε.

Πριν από την έναρξη της ελεύθερης πρόσβασης στα υλικά, στις αρχές του Ιανουαρίου, όλοι οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να κάνουν προβλέψεις για το πώς σκέφτονται ότι οι μαθητές τους θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα χειραπτικά υλικά τη στιγμή που θα είχαν το δικαίωμα της ελεύθερης επιλογής εκείνου ή εκείνων που θα τους βοηθούσε. Υπήρχαν ποικίλες αντιδράσεις: *«Έχω την εντύπωση ότι θα χρησιμοποιήσουν μόνο αυτό που τους έδειξα»* (Γεωργία) *«Νομίζω ότι τα κορίτσια θα διαλέξουν τη ζυγαριά... τους άρεσε πολύ, όταν τη δουλεύαμε»* (Γιώτα) *«Μου φαίνεται ότι θα θέλουν να δουλεύουν μόνο με αυτά...»* (Στάθης), *«Φοβάμαι ότι θα είναι ανήσυχοι και δε θα συγκεντρώνονται...»* (Ελένη).

Αν και όλοι οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τη βοήθεια των υλικών σε αυτό το προπαρασκευαστικό στάδιο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών προτάσσοντας την υποστήριξη στην αλγοριθμική διαδικασία και στην αυτοματοποίηση των Β.Α.Δ., πολλοί από τους εκπαιδευτικούς εξέφρασαν μια ανησυχία για την ελεύθερη χρήση των υλικών από τους μαθητές και την ταυτόχρονη διατήρηση της προσοχής τους για την εστίαση στους μαθηματικούς στόχους κάθε φορά. Οι απόψεις τους ανέδειξαν φόβους για άσκοπη χρήση των χειραπτικών υλικών και για προσκόλληση στα υλικά για την ολοκλήρωση ακόμα και απλών δραστηριοτήτων. Συμφωνήθηκε να υπάρχει ελεγχόμενη πρόσβαση στα

υλικά ανάλογα με το είδος και τη δυσκολία των μαθηματικών ασκήσεων. Η δημιουργία δομημένων Φ.Ε. για την εκμάθηση και εξάσκηση στην αποτελεσματική χρήση των χειραπτικών υλικών αποσκοπούσε και στη στοχευμένη και ουσιαστική χρήση τους. Επομένως κρίθηκε σκόπιμη, η παρώθηση των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς να αποφεύγουν την άσκοπη χρήση των χειραπτικών υλικών και να προσανατολίζονται στη σταδιακή απομάκρυνση από τα υλικά και τη χρήση τους μόνον όταν είναι απόλυτη ανάγκη για την υποστήριξή τους.

Σε μια ενδελεχή διερεύνηση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Α' και Β' τάξης του Δημοτικού Σχολείου, καταγράφηκαν από τον ερευνητή, όλες οι δραστηριότητες τόσο από τα Βιβλία των Μαθητών όσο και από τα Τετράδια των Εργασιών και ταυτόχρονα προτάθηκαν τα χειραπτικά ή δυνητικά υλικά που θα μπορούσαν να τις υποστηρίξουν. Η συγκεκριμένη καταγραφή (βλ. Παράρτημα, έντυπο 10) δόθηκε στους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. και οριοθέτησε ουσιαστικά τη χρήση των υλικών ανάλογα με τη μαθηματική δραστηριότητα που καλούταν ο μαθητής να ολοκληρώσει.

Μέσα από πολλαπλές παρατηρήσεις της διδασκαλίας, συζητήσεις, ανταλλαγές απόψεων και εξέταση των Φύλλων Παρατήρησης των διδασκόντων, αναπτύχθηκαν προφίλ, που περιγράφουν τον τρόπο που χρησιμοποιούν και ελέγχουν οι εκπαιδευτικοί τα χειραπτικά υλικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ακόμα και όταν οι μαθητές είχαν ελεύθερη πρόσβαση σε αυτά. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 3-4 μηνών «ελεύθερης πρόσβασης», όπου οι μαθητές είχαν κάποιο μέτρο ελέγχου στην επιλογή και χρήση κάποιων από τα διδακτικά εργαλεία των μαθηματικών, τα χειραπτικά υλικά χρησιμοποιήθηκαν αυθόρμητα και επιλεκτικά από τους μαθητές υπό τη διακριτική καθοδήγηση των εκπαιδευτικών. Κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πρόσβασης, οι εκπαιδευτικοί σε διαρκή επικοινωνία με τον ερευνητή για την εξέλιξη της διδακτικής παρέμβασης, χρησιμοποίησαν τις προτάσεις χρήσης του υλικού ανά τάξη (Α' ή Β') και ανά μαθηματικό κεφάλαιο και φρόντιζαν για τη σταδιακή απομάκρυνσή του και τη μετάβαση των μαθητών όπου και όταν ήταν εφικτό, στο εικονιστικό στάδιο μάθησης, με τη χρήση εικονιστικών παραστάσεων (κουκκίδων, γραμμών, σχεδίων) ή τη χρήση των εικόνων των διδακτικών εγχειριδίων σε συνδυασμό και αντιπαραβολή με τα χειραπτικά ή τα δυνητικά υλικά. Σε αυτό το στάδιο έγινε σαφές στους εκπαιδευτικούς η μετάβαση

των μαθητών στο συμβολικό επίπεδο και στην ευχερή χρήση των αφηρημένων αριθμητικών συμβόλων, όπως είναι οι αριθμοί.

Στο τελικό στάδιο της διδακτικής παρέμβασης, από τον Απρίλιο μέχρι και τη λήξη του διδακτικού έτους, υλοποιήθηκαν εβδομαδιαίες συναντήσεις με όλους τους εκπαιδευτικούς με σκοπό τη συνολική επεξεργασία των παρατηρήσεων και των καταγραφών για κάθε μαθητή, τη διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών για την εξέλιξη της διδακτικής παρέμβασης και την αποτελεσματικότητα της χρήσης των χειραπτικών υλικών και τελικά τη συμπλήρωση του αρχικού ερωτηματολογίου από τους εκπαιδευτικούς για την ανίχνευση της ενδεχόμενης μετατόπισης των αντιλήψεών τους σχετικά με τη χρήση των υλικών στη διδακτική πράξη.

Επίσης, στο τελικό στάδιο εφαρμογής του εκπαιδευτικού προγράμματος είχαμε στενή συνεργασία και με τις εκπαιδευτικούς των τμημάτων Α' και Β' τάξης που εφάρμοσαν το χειραπτικό υλικό στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών στις τάξεις τους. Οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί της Α' και Β' τάξης είχαν διαθέσιμα τα χειραπτικά υλικά στις τάξεις τους για όλους τους μαθητές και σε συνεργασία και διαρκή επικοινωνία με τον ερευνητή, επιχείρησαν την εφαρμογή μιας διαφοροποιημένης προσέγγισης της διδασκαλίας, δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να αξιοποιήσουν τα υλικά στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και εννοιών, όπως η υπέρβαση της δεκάδας, η αυτοματοποίηση των Β.Α.Δ., η κατανόηση της αλγοριθμικής διαδικασίας και των πιθανών λαθών που εμπεριέχει και η επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Οι εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων επιμορφώθηκαν από τον ερευνητή για τα στοιχεία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας και κατανόησαν την εφαρμογή μιας προσέγγισης στην οποία η αλλαγή του μαθησιακού περιβάλλοντος στη γενική τάξη δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τα χειραπτικά υλικά για την αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών σε ατομική ή ομαδική βάση με στόχο την ενίσχυση της μαθηματικής τους κατανόησης και την εξάσκηση των μαθηματικών τους δεξιοτήτων.

Ποιοτικές μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των συνεντεύξεων, των παρατηρήσεων και των δεδομένων κατά τη διάρκεια των δύο φάσεων της διδασκαλίας από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στη συγκεκριμένη έρευνα για το χρονικό διάστημα ενός σχολικού έτους που διήρκεσε η παρέμβαση.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης (Οκτώβριος - Δεκέμβριος), οι εκπαιδευτικοί σε δύο τρίωρες συναντήσεις, επιμορφώθηκαν από τον ερευνητή σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών στη μαθηματική διδασκαλία και ακολούθησαν τις οδηγίες που τους δόθηκαν αναφορικά με τη σταδιακή εξοικείωση των μαθητών με τα υλικά και τη διαδικασία της ορθής αξιοποίησής τους ως διδακτικά εργαλεία και την αποφυγή της χρήσης τους ως αντικείμενα για παιχνίδι ή διασκέδαση. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης φάσης (Ιανουάριο - Απρίλιο), σε συνάντηση με τον ερευνητή, συμφωνήθηκε με τους εκπαιδευτικούς να παρέχουν στους μαθητές ελεύθερη πρόσβαση στα υλικά και να ασκούν διακριτικό έλεγχο στην επιλογή και τη χρήση τους, στη διάρκεια της διδασκαλίας τους στα Τ.Ε. δίνοντάς τους τη δυνατότητα επιλογής των υλικών για την υποστήριξη των μαθηματικών τους ενεργειών χωρίς την καθοδήγηση των Φ.Ε. και μέσα από την καταγραφή των κεφαλαίων και των μαθηματικών δραστηριοτήτων που αναπτύσσονται στα Βιβλία των Μαθητών και τα Τετράδια Εργασιών της Α' και Β' τάξης. Τέλος, με τη λήξη της διδακτικής παρέμβασης συγκεντρώθηκαν τα ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα τη παρέμβασης.

Κεφάλαιο 5. Αποτελέσματα

5.1. Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων - Λάθη των μαθητών	195
5.1.1. Από την αξιολόγηση του τεστ Α	196
5.1.2. Από την αξιολόγηση του τεστ Β	198
5.2. Ανάλυση ποσοτικών δεδομένων	199
5.2.1. Το τεστ ΖΑΡΕΚΙ	199
5.2.2. Λίστα Ελέγχου Βασικών μαθηματικών Δεξιοτήτων	201
5.2.3. Το ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών	207
5.2.4. Το ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τον Εκπαιδευτικό)	222
5.3. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων - Λάθη των μαθητών πριν την παρέμβαση	225
5.4. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων - Λάθη των μαθητών μετά την παρέμβαση	232
5.5. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων – Στάσεις των εκπαιδευτικών και μαθητών	246
5.6. Περιγραφή των μελετών περίπτωσης	250
5.6.1. Μαθησιακό προφίλ των μαθητών	252
5.6.2. Στοιχεία πριν από την παρέμβαση	257
i. Από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ.	257
ii. Από τη χορήγηση του τεστ ΖΑΡΕΚΙ	260
iii. Από τη χορήγηση του ΑΜΔΕ	258
iv. Από τη χορήγηση του τεστ Α με βάση το Α. Π. Σ.	264
v. Από τη χορήγηση του τεστ Β με βάση το Α. Π. Σ.	264
5.6.3. Στοιχεία από την καταγραφή των παρατηρήσεων των εκπ/κών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων κατά τη διάρκεια της παρέμβασης	268
5.6.4. Στοιχεία μετά από την παρέμβαση	278
i. Λίστα ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων	279
ii. ΑΜΔΕ-Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπ/κούς	280
iii. Γνωματεύσεις ΚΕ.Δ.Δ.Υ. – Επαναξιολόγηση	282
iv. Παρατηρήσεις εκπαιδευτικών	284

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα δεδομένα της έρευνας, όπως προέκυψαν από τη χορήγηση των σταθμισμένων και άτυπων ανιχνευτικών εργαλείων της έρευνας. Αρχικά, γίνεται η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων που παρήχθησαν από τις άτυπες δοκιμασίες και τις καταγραφές των εκπαιδευτικών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ακολουθεί η ανάλυση και ο σχολιασμός των ποσοτικών δεδομένων, όπως προέκυψαν από τη στατιστική επεξεργασία. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά των υποθέσεων που διατυπώθηκαν και ενισχύεται η σαφήνιά τους με τη χρήση οπτικοποιήσεων με τη μορφή πινάκων και γραφημάτων. Στη συνέχεια, γίνεται η καταγραφή των γνωστικών παρανοήσεων και ελλείψεων των μαθητών στους μαθηματικούς τομείς που εξετάζει η ερευνητική προσπάθεια πριν την παρέμβαση και τη χρήση των χειραπτικών υλικών και η εννοιολογική αλλαγή που επήλθε μετά την παρέμβαση μέσα από την παράθεση των ποιοτικών δεδομένων. Τέλος, περιγράφονται αναλυτικά τρεις (3) μελέτες περίπτωσης αντιπροσωπευτικές του συνόλου των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και αναδεικνύουν τη μαθησιακή τους πορεία πριν, κατά και μετά τη διδακτική παρέμβαση που επιχειρήθηκε με τη χρήση των χειραπτικών υλικών, καθώς και την εξέλιξη της σκέψης των παιδιών στη διάρκεια της εφαρμογής του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού προγράμματος.

5.1. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων - Λάθη των μαθητών

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι εξήντα δύο (62) μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα φοιτούσαν στα Τμήματα Ένταξης (Τ.Ε.) των σχολείων τους. Στην πλειοψηφία τους οι 33 μαθητές (53%) άρχισαν να φοιτούν στο Τ.Ε., ύστερα από γνωμάτευση του οικείου ΚΕ.Δ.Δ.Υ., που προτείνει την υποστήριξη των μαθητών στο Τ.Ε. στη γλώσσα και στα μαθηματικά. Οι υπόλοιποι 28 μαθητές φοιτούσαν στο Τ.Ε. μετά από εισήγηση του εκπαιδευτικού της τάξης και τη σύμφωνη γνώμη τόσο της Σχολικού Συμβούλου Ειδικής Αγωγής όσο και των γονέων τους. Από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ.

Η υποστήριξή τους στο Τ.Ε. γινόταν ατομικά ή και ομαδικά με σκοπό την ενίσχυση των μαθηματικών γνώσεων, από τρεις (3) έως πέντε (5) ώρες την εβδομάδα, κυρίως

τις ώρες που διδάσκονταν το μάθημα των μαθηματικών στην τάξη τους. Όσον αφορά τους μαθητές που είχαν γνωμάτευση από το οικείο ΚΕ.Δ.Δ.Υ., τους χορηγήθηκε το Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης, από το οποίο και συλλέχθηκαν πληροφορίες σχετικά με τις μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών, ενώ στη γνωμάτευση προτάθηκαν και τρόποι αντιμετώπισης των μαθηματικών ελλείψεών τους.

Όλοι οι μαθητές στις γνωματεύσεις τους κατατάσσονται σε χαμηλό επίπεδο απόδοσης σε σχέση με εκείνες των μαθητών ίδιας ηλικίας και φύλου. Στις υποκλίμακες του τεστ παρουσίασαν αποδόσεις με στατιστικώς σημαντικές διαφορές εύρους τυπικών βαθμών. Οι γνωματεύσεις των μαθητών δείχνουν ότι έχουν ικανότητες στη γνώση των βασικών μαθηματικών εννοιών, οι οποίες είναι απαραίτητες για την απόκτηση της σχολικής μαθηματικής γνώσης, αλλά αντιμετωπίζουν κυρίως δυσκολίες στη διαχείριση μαθηματικών αλγορίθμων καθώς και στην αποτελεσματική επεξεργασία και στρατηγική επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Ταυτόχρονα, μετά τη διεπιστημονική εξέταση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. προτείνονται για τους μαθητές που αξιολογήθηκαν μέθοδοι παρέμβασης στα μαθηματικά που στοχεύουν στην απόκτηση ευχέρειας στην εκτέλεση των πράξεων αλλά και στην αποτελεσματική επεξεργασία των στοιχείων και των σχέσεων για την επίλυση των προβλημάτων.

Ακολουθεί η ανάλυση των δεδομένων που παρήχθησαν μετά από τη χορήγηση των ανιχνευτικών εργαλείων στους μαθητές της έρευνάς μας:

5.1.1. Από την αξιολόγηση του τεστ Α

Από την επεξεργασία των δεδομένων που προέκυψαν μετά τη χορήγηση του τεστ Α (με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα) φαίνεται ότι οι μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα επικεντρώνονται σε συγκεκριμένους τομείς της μαθηματικής γνώσης. Από τους 62 μαθητές της έρευνας τα υψηλότερα ποσοστά αποτυχίας μετρήθηκαν:

- σε νοερές οριζόντιες προσθέσεις και αφαιρέσεις μέσα στην πρώτη 20άδα, όπου 37 μαθητές (59%) στις προσθέσεις και 40 μαθητές (64%) στις αφαιρέσεις δεν μπόρεσαν να τις εκτελέσουν σωστά. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις ανέδειξαν την

αδυναμία αυτοματοποίησης των βασικών αριθμητικών δεδομένων και τη χρήση αναποτελεσματικών πρακτικών. Από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών και την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων στη διαδικασία επίλυσης των ασκήσεων του τεστ επισημάνθηκαν οι αδυναμίες των μαθητών στην ευχερή ανάκληση προσθέσεων και αφαιρέσεων μέσα στην πρώτη 20άδα και τη χρήση παγιωμένων και αναποτελεσματικών πρακτικών, όπως ο υπολογισμός με τα δάχτυλα.

- **στις κάθετες προσθέσεις και αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς**, όπου 53 μαθητές (85%) δεν μπόρεσαν να ολοκληρώσουν όλες τις πράξεις, με μεγαλύτερη δυσκολία να εμφανίζεται στις κάθετες αφαιρέσεις, οι οποίες αποτελούσαν τις μισές των πράξεων. Η δυσκολία επικεντρώθηκε στη χρήση των κρατουμένων για την πρόσθεση και των δανειζόμενων δεκάδων για την αφαίρεση. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι 26 μαθητές (42%) είχαν μία ή καμία σωστές εκτελέσεις πράξεων. Τα περισσότερα λάθη εμφανίστηκαν σε λανθασμένες ενέργειες κατά τη διαδικασία του αλγόριθμου. Ενδεικτικά, λάθη στη θεσιακή αξία, λάθη με τα ψηφία και κυρίως με το μηδέν (0), άγνοια του κρατουμένου ή του “δανεικού”, μεταφορά τους σε λάθος στήλη και σύγχυση των πράξεων, ήταν από τα προβλήματα που οδήγησαν τους μαθητές σε λάθος αποτέλεσμα.

- **στην επίλυση προβλημάτων**, όπου 48 μαθητές (77%) δεν κατάφεραν να λύσουν τουλάχιστον 3 από τα 6 προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με μία πράξη που τους δόθηκαν. Αξίζει να επιτονιστεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις (30 μαθητές) υπήρξε σωστή επιλογή της αριθμητικής πράξης, η οποία επιλύει το πρόβλημα αλλά ακολουθούσε η λανθασμένη εκτέλεση της πράξης. Επίσης, παρατηρήθηκε σε πολλές περιπτώσεις (19 μαθητές) αδυναμία κατανόησης μαθηματικών εννοιών, όπως οι λέξεις “περισσότερο” και “λιγότερο” που περιέχονταν σε δύο προβλήματα. Παρατηρήθηκαν λάθη στον τρόπο επεξεργασίας των δεδομένων του προβλήματος είτε με την αγνόηση λέξεων “κλειδιά” είτε με παρανόηση των πληροφοριών που δίνει το πρόβλημα. Κυρίως, καταγράφηκε η αδυναμία στο στάδιο της μετάφρασης του προβλήματος και της αναπαράστασης των δεδομένων του, ώστε να γίνει η σωστή επιλογή της πράξης που το επιλύει.

5.1.2. Από την αξιολόγηση του τεστ Β

Το Τεστ Β, που βασίστηκε στο Αναλυτικό Πρόγραμμα της Β' τάξης, χορηγήθηκε σε όλους τους μαθητές της έρευνας εκτός από αυτούς της Α' τάξης, δηλαδή σε 50 μαθητές. Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων προκύπτουν στοιχεία, τα οποία αναδεικνύουν τους τομείς της μαθηματικής γνώσης που δυσκολεύουν τους μαθητές. Έτσι, παρατηρήθηκαν πολλά λάθη:

- **Στην επίλυση των προβλημάτων.** Το τεστ περιελάμβανε εννέα (9) προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με διψήφιους αριθμούς. Κανείς δεν μπόρεσε να λύσει όλα τα προβλήματα. Οι 41 μαθητές (82%) κατόρθωσαν να επιλύσουν τουλάχιστον 3 προβλήματα. Από αυτούς οι 25 μαθητές κατανόησαν το πρόβλημα, επέλεξαν τη σωστή πράξη για την επίλυσή του, αλλά δεν κατάφεραν να την εκτελέσουν σωστά. Οι υπόλοιποι 16 αν και εκτέλεσαν σωστά τις πράξεις που επέλεξαν, δεν ήταν εκείνες που έδιναν λύση στο πρόβλημα. Τα εννέα (9) προβλήματα που χορηγήθηκαν περιλάμβαναν τις έννοιες “περισσότερο” και “λιγότερο”, ενώ υπήρχαν και δύο προβλήματα με περισσότερες από μία πράξεις.

- **Στην εκτέλεση κάθετων προσθέσεων και αφαιρέσεων.** Οι μαθητές κλήθηκαν να εκτελέσουν 6 κάθετες προσθέσεις διψήφιων και τριψήφιων αριθμών με και χωρίς κρατούμενο, καθώς και 6 αφαιρέσεις διψήφιων και τριψήφιων με και χωρίς δανεισμό δεκάδας. Οι 28 μαθητές (56%) δεν εκτέλεσαν σωστά τις προσθέσεις, ενώ κανένας μαθητής δεν έλυσε όλες τις αφαιρέσεις. Τα περισσότερα λάθη παρατηρήθηκαν στις αφαιρέσεις που χρειαζόταν δανεισμός δεκάδας από στήλη ανώτερης τάξης, ένα αλγοριθμικό στάδιο που φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές. Αντίστοιχα, τα περισσότερα λάθη έγιναν στις προσθέσεις με κρατούμενο.

- **Στη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού.** Καταγράφηκαν πολλά λάθη στην τοποθέτηση και αναγνώριση των ψηφίων ενός αριθμού ανάλογα με την αξιακή του θέση. Έτσι, 24 μαθητές (48%) δεν τοποθέτησαν τα ψηφία των αριθμών στη σωστή θέση (Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες) ανάλογα με την αξία τους. Από αυτούς οι 17 δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν την αξία κάθε ψηφίου στη θέση που βρίσκεται.

5.2. Ανάλυση ποσοτικών δεδομένων

Τα ποσοτικά δεδομένα συλλέχθηκαν από τη χορήγηση των ανιχνευτικών εργαλείων στους μαθητές και εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα. Ειδικότερα, του σταθμισμένου τεστ ΖΑΡΕΚΙ πριν από τη διδακτική παρέμβαση, της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων, της κλίμακας 6 του σταθμισμένου εργαλείου ΑΜΔΕ και του ερωτηματολογίου των εκπαιδευτικών πριν και μετά την εφαρμογή του εκπαιδευτικού προγράμματος.

Ακολουθεί η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων σε πίνακες και γραφήματα εφαρμόζοντας τον στατιστικό έλεγχο T-test για εξαρτημένα ή κατά ζεύγη δείγματα (Paired Samples Test), αφού τα δεδομένα προέρχονται από την ίδια ομάδα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση:

5.2.1. Το τεστ ΖΑΡΕΚΙ

Η σταθμισμένη δοκιμασία ΖΑΡΕΚΙ απευθύνεται σε μαθητές των Β', Γ' και Δ' τάξεων του δημοτικού σχολείου. Η δοκιμασία χορηγήθηκε σε 49 μαθητές της έρευνας που φοιτούσαν στις παραπάνω τάξεις. Τα αποτελέσματα για τους περισσότερους μαθητές επιβεβαίωσαν τις δυσκολίες τους στα μαθηματικά μέσα από τις απαντήσεις τους στα επιμέρους 12 υπο-τεστ, που καλύπτουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων, όσον αφορά την επεξεργασία μαθηματικών δεδομένων.

Με βάση τα στοιχεία των δημιουργών του ΖΑΡΕΚΙ και τις νόρμες του ανιχνευτικού εργαλείου τα σημεία τομής για κάθε τάξη είναι 28-30 για τη Β' τάξη, 38-40 για την Γ' τάξη και 48-50 για την Δ' τάξη. Η επίδοση λιγότερο ή ίσο με τα σημεία τομής ανά τάξη επισημαίνει την ύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά. Οι υποκλίμακες του τεστ που αθροίζονται για να υπολογιστεί η τελική επίδοση του μαθητή είναι α) ο νοερός υπολογισμός σε προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς, β) η ανάγνωση αριθμών, γ) η προφορική σύγκριση αριθμών, δ) η επίλυση προβλήματος και ε) η γραπτή σύγκριση αριθμών.

Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων, όπως φαίνονται στον Πίνακα 4, οι 34 από τους 49 μαθητές (69%) παρουσίασαν συνολική επίδοση κάτω από το σημείο τομής που αντιστοιχεί σε κάθε τάξη και επομένως με βάση το συγκεκριμένο τεστ παρουσιάζουν δυσκολίες στα μαθηματικά συγκριτικά με την ηλικία τους.

	1	2	3	4.1	4.2	4.3	5	6	7	8	9	10	11	12	
ΜΑΘΗΤΕΣ	Απαρίθμηση κηλίδων	Προφορική αντίστροφη μέτρηση	Καταγραφή υπαγορευμένων αριθμών	Νοερός υπολ/σμός/τροβ/των: Πρόσθεση	Νοερός υπολ/σμός/τροβ/των: Αφαίρεση	Νοερός υπολογισμός προβλ/των: Πολ/σμός	Ανάγνωση αριθμών	Αντιστοίχιση οπτικά δοσμένων αριθμών άξονα	Μνήμη αριθμών (στη σειρά & αντίστροφα)	Σύγκριση δύο αριθμών (προφορικά)	Αντιληπτική εκτίμηση ποσότητας	Εκτίμηση ποσότητας ανάλογα με το πλαίσιο	Λύση προβλημάτων αριθμητικής	Σύγκριση αριθμών σε μορφή ψηφίων (γραπτά)	ΣΥΝΟΛΟ
B03	3	1	2	0	0	0	8	10	16	0	0	10	2	16	26
B06	2	0	4	0	0	0	10	0	16	8	0	10	0	12	30
B12	4	0	9	4	0	0	4	6	30	6	0	10	0	16	30
B16	1	0	6	0	2	2	6	8	20	6	2	8	2	10	28
B22	3	0	4	0	0	0	8	4	24	6	6	12	0	16	30
B26	2	0	4	4	0	2	6	4	18	4	4	10	0	12	28
B29	4	2	12	8	0	0	6	12	16	4	0	10	0	12	30
B34	1	0	6	4	0	0	4	2	12	6	0	10	2	10	26
B35	4	0	9	0	2	2	6	8	10	4	0	10	0	10	24
B54	2	0	4	8	0	0	6	6	14	4	0	6	2	10	30
B55	3	1	2	3	2	0	6	8	10	4	0	10	4	10	29
B56	1	0	6	6	0	0	4	4	12	6	2	8	2	10	28
Γ08	2	0	4	0	0	0	12	0	16	8	0	10	0	12	32
Γ10	3	1	2	4	0	6	10	2	26	8	0	10	0	12	40
Γ18	4	0	9	4	0	0	4	6	30	6	0	10	0	16	30
Γ23	2	0	4	0	0	0	12	0	16	8	0	10	0	12	32
Γ24	1	0	6	8	0	2	6	6	14	8	2	8	4	10	38
Γ25	4	0	8	8	0	2	4	2	16	10	0	8	0	14	38
Γ31	3	2	4	10	0	6	2	2	12	8	4	6	2	12	40
Γ32	4	2	4	6	0	0	10	8	10	10	0	6	0	14	40
Γ37	1	0	4	8	0	2	6	8	16	12	0	6	0	10	38
Γ42	3	1	2	5	2	0	8	4	18	8	4	10	0	12	35
Γ46	1	0	6	0	2	2	6	8	20	12	2	8	2	14	38
Γ61	2	3	11	6	0	2	10	12	24	8	4	20	0	12	38
Δ04	2	1	14	6	4	0	8	10	14	12	4	10	2	16	48

Δ07	3	0	12	6	0	0	10	4	18	10	0	4	4	10	40
Δ19	4	2	16	8	0	4	12	6	18	14	4	18	0	12	50
Δ20	2	2	4	0	0	0	10	6	16	12	2	10	0	12	34
Δ33	3	0	4	0	0	0	8	4	24	6	6	12	0	16	30
Δ38	2	0	4	10	0	2	6	4	18	4	4	10	0	14	36
Δ39	4	2	4	6	0	0	10	6	24	14	2	4	0	18	48
Δ41	2	2	4	0	0	0	10	6	16	12	2	10	0	12	34
Δ58	3	0	6	5	2	0	8	2	16	8	2	8	0	12	35
Δ59	3	3	8	8	0	2	10	8	8	10	0	6	0	16	46

Πίνακας 4. Αποτελέσματα του τεστ ΖΑΡΕΚΙ. Οι σκιασμένες στήλες είναι αυτές που συνυπολογίζονται για το τελικό σκορ και δίνουν το τελικό άθροισμα

Η προσεκτικότερη μελέτη των αποτελεσμάτων του τεστ ΖΑΡΕΚΙ επιβεβαίωσε τις αρχικές εκτιμήσεις, όπως προέκυψαν μετά τη χορήγηση και των άτυπων δοκιμασιών που βασίστηκαν στα Αναλυτικά Προγράμματα της Α' και της Β' τάξης, σχετικά με τα ελλείμματα και τις γνωστικές αδυναμίες των υποκειμένων της έρευνας. Οι τομείς που οι μαθητές παρουσίασαν τη χαμηλότερη επίδοση ήταν: ο νοερός υπολογισμός προφορικών προβλημάτων (Πίνακας 4, ασκήσεις 4.1, 4.2 και 4.3) και η επίλυση απλών προβλημάτων με μία πράξη (Πίνακας 4, άσκηση 11). Επιπλέον και στις υπόλοιπες ασκήσεις το σύνολο των μαθητών είχε χαμηλή επίδοση αναδεικνύοντας γνωστικές ελλείψεις σε βασικά αριθμητικά δεδομένα.

5.2.2. Λίστα Ελέγχου Βασικών μαθηματικών Δεξιοτήτων

Από τη χορήγηση της Λίστας Ελέγχου Βασικών Δεξιοτήτων στα μαθηματικά επισημαίνονται ευρύτερα οι μαθησιακές ελλείψεις/αδυναμίες των μαθητών στα μαθηματικά. Η λίστα, η οποία συμπληρώθηκε τόσο από τον εκπαιδευτικό της γενικής τάξης όσο και από τον εκπαιδευτικό του Τμήματος Ένταξης, περιλαμβάνει τέσσερις (4) κατηγορίες/τομείς των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις οποίες καταγράφηκε η επίδοση κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού. Οι τέσσερις (4) τομείς αφορούν:

1. Προμαθηματικές έννοιες, όπως έννοιες του χώρου, έννοιες μεγέθους, σύγκριση μεγεθών, ταξινόμηση με βάση ένα μέγεθος ή χαρακτηριστικό
2. Μαθηματικές έννοιες, όπως απαγγελία, αναγνώριση, γραφή, σύγκριση και διάταξη αριθμών από το 1 έως το 100,
3. Πράξεις, όπως κατανόηση του αλγόριθμου προσθέσεων και αφαιρέσεων, εκτέλεση πράξεων, αντίληψη της σύνθεσης και ανάλυσης της δεκάδας, κατανόηση της αξιακής θέσης κάθε ψηφίου αριθμών, νοερή εκτέλεση πράξεων
4. Επίλυση προβλημάτων, όπως κατανόηση προβλήματος, εντοπισμός δεδομένων, επιλογή της κατάλληλης πράξης ή πράξεων, και

Στην ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων εφαρμόστηκε ο στατιστικός έλεγχος T-test για εξαρτημένα ή κατά ζεύγη δείγματα (Paired Samples Test), επειδή έχουμε δεδομένα από την ίδια ομάδα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Οι μαθητές βαθμολογήθηκαν με (0) για κάθε λανθασμένη απάντηση και με (1) για κάθε σωστή απάντηση. Και στις πέντε περιπτώσεις ανά τομέα μαθηματικών εννοιών, προ και μετά ελέγχου, η ανάλυση έδειξε ότι η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική καθόσον $p < 0,0001$ (πίνακας 6). Σε όλες τις περιπτώσεις, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5, υπήρξε μεγαλύτερο σκορ στον μεταέλεγχο.

Πίνακας 5. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των πέντε (5) τομέων των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Τιμή	Αριθμός ατόμων	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 1	PRE ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	,7935	62	,16583	,02106
	POST ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	1,000	62	,00000	,00000
Pair 2	PRE ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	,6266	62	,25104	,03188
	POST ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	1,000	62	,00000	,00000
Pair 3	PRE ΠΡΑΞΕΙΣ	,5581	62	,18277	,02321
	POST ΠΡΑΞΕΙΣ	,8731	62	,04304	,00547
Pair 4	PRE ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	,1935	62	,25489	,03237
	POST ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	,8641	62	,14032	,01782

Στις προμαθηματικές έννοιες (pair 1 στον Πίνακα 5), στον προέλεγχο βρέθηκε Μέση Τιμή 0,79, ενώ στον μεταέλεγχο βρέθηκε άριστη επίδοση με Μέση Τιμή 1,00. Στις μαθηματικές έννοιες αντίστοιχα είχαμε στον προέλεγχο 0,63 και στον μεταέλεγχο 1,00 (pair 2 στον πίνακα 5). Στον τομέα των πράξεων (pair 3 στον πίνακα 5), είχαμε πριν και μετά τη παρέμβαση αντιστοίχως 0,56 και 0,87, ενώ στην επίλυση προβλημάτων από 0,19 πριν την παρέμβαση (pair 4 στον πίνακα 5) είχαμε 0,86 μετά την παρέμβαση. Σε όλες τις περιπτώσεις υπήρξε καλύτερο σκορ στον μεταέλεγχο. Παρατηρούμε, ότι ειδικότερα στην επίλυση προβλημάτων, έναν τομέα στον οποίο επισημάνθηκαν οι περισσότερες αδυναμίες των μαθητών στο σύνολο των ανιχνευτικών δοκιμασιών, η διαφορά της Μέσης Τιμής πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση ήταν η μεγαλύτερη από κάθε άλλο τομέα (από 0,19 σε 0,86).

Πίνακας 6. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού *t*, βαθμοί ελευθερίας (*df*), αμφίπλευρο επίπεδο σημαντικότητας *Sig.* (2-tailed) και *effect size* (Cohen's *D*) των πέντε (5) τομέων των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Διαφορά	Τυπική Απόκλιση	<i>t</i>	<i>df</i>	<i>Sig.</i> (2- tailed)	Cohen's <i>D</i>
Pair 1	PRE ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ – POST ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	-,20645	,16583	-9,803	61	,000	2,490502
Pair 2	PRE ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ – POST ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ	-,37345	,25104	-11,713	61	,000	2,974825
Pair 3	PRE ΠΡΑΞΕΙΣ – POST ΠΡΑΞΕΙΣ	-,31505	,17625	-14,075	61	,000	2,789956
Pair 4	PRE ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ POST ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	-,67051	,23221	-22,736	61	,000	3,393639

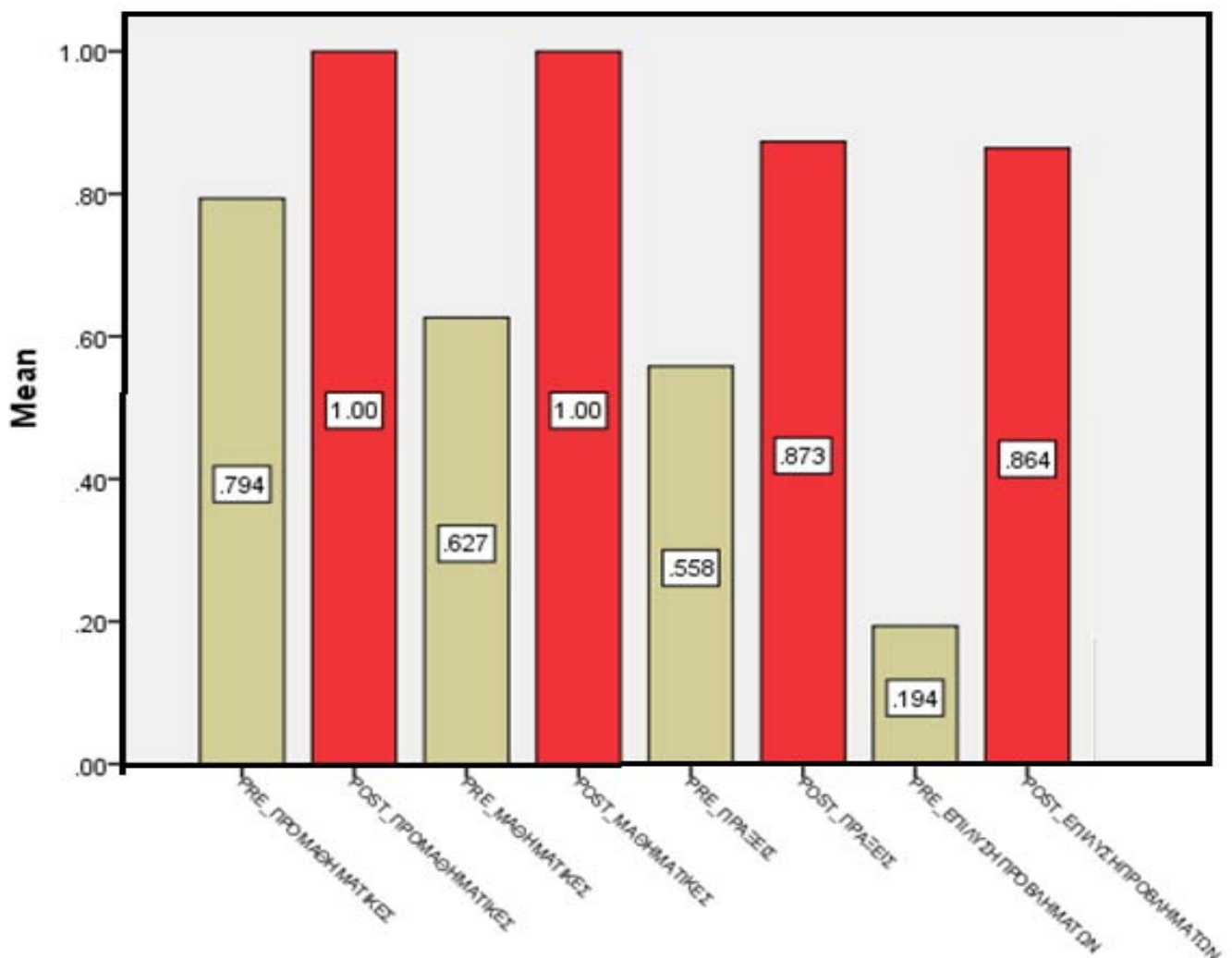
Προκειμένου να τύχουν επιβεβαίωσης τα ευρήματα του πίνακα 6 που αφορούν την στατιστικά σημαντική διαφορά στο ΠΡΙΝ και ΜΕΤΑ για κάθε ένα από τους παράγοντες, πραγματοποιήθηκε υπολογισμός του μεγέθους της επίδρασης - διαφοράς (*effect size*) με την βοήθεια του δείκτη Cohen's *D*. Σύμφωνα με τον Cohen (1988) τιμές του δείκτη 0.2, 0.5 και 0.8 δηλώνουν αντιστοίχως μικρή, μεσαία και μεγάλη επίδραση.

Όπως φαίνεται από τις τιμές του του δείκτη Cohen's *D* (τελευταία στήλη του πίνακα 6) σε όλες τις περιπτώσεις η τιμή του δείκτη είναι μεγαλύτερη από 0,8 άρα για κάθε παράγοντα το μέγεθος της επίδρασης (διαφοράς μέσων τιμών) είναι μεγάλο.

Παρατήρηση. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για όλους τους αντίστοιχους πίνακες σύγκρισης μέσων τιμών (πίνακες 8 , 10, 15 , 17)

Αμέσως παρακάτω εμφανίζεται το γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των πέντε (5) κατηγοριών των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις οποίες καταγράφηκε η επίδοση κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

Σχήμα 2. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των τεσσάρων (4) κατηγοριών των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις οποίες καταγράφηκε η επίδοση κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα του πίνακα 6 και του σχήματος 2, υπάρχει σημαντική βελτίωση και στους τρεις τομείς των μαθηματικών που αφορούν τα τρία πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, δηλαδή:

1. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικού (φυσικού και ψηφιακού) υλικού, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην κατανόηση προμαθηματικών και βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.
2. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικού (φυσικού και ψηφιακού) υλικού, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην αλγοριθμική διαδικασία και την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.
3. Μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικού (φυσικού και ψηφιακού) υλικού, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Στην ανάλυση των επιμέρους ερωτήσεων, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με τη χρήση των χειραπτικών και δυνητικών υλικών, όπως φαίνεται και στον πίνακα 8, παρατηρούμε ότι υπήρξε σε όλες τις περιπτώσεις σημαντική διαφοροποίηση (όλα τα επίπεδα σημαντικότητας ήταν μικρότερα του 0,0001). Πιο συγκεκριμένα: στην κατανόηση της λειτουργίας του μηδενός (0) κατά την εκτέλεση των πράξεων στον προέλεγχο είχαμε Μέση Τιμή 0,47, ενώ στον μεταέλεγχο Μέση Τιμή 0,98. Στην αντίληψη της έννοιας της δεκάδας, από 0,66 σε άριστη επίδοση με Μέση Τιμή 1,00.

Στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων ενός αριθμού, από 0,29 σε άριστη επίδοση με Μέση Τιμή 1,00. Σημαντική διαφοροποίηση είχαμε και στα λάθη στη θέση του αριθμού στις πράξεις, όπου από τη Μέση Τιμή 0,65 και πολλά λάθη πριν την παρέμβαση είχαμε Μέση Τιμή 0,03 και ελάχιστα λάθη μετά την παρέμβαση.

Στον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων μέσα στην πρώτη δεκάδα από τη Μέση Τιμή 0,44 πριν την παρέμβαση στην απόλυτη Μέση Τιμή 1,00 μετά την παρέμβαση.

Στον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων στην πρώτη εικοσάδα, από το 0,29 στο 0,94. Στις προσθέσεις και αφαιρέσεις με μονοψήφιους δεν υπήρξε μεγάλη διαφοροποίηση (από 0,89 σε 1,00 και από 0,84 σε 1,00 αντίστοιχα). Αντίθετα, σημαντική ήταν η διαφοροποίηση στις γραπτές προσθέσεις και

αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς όπου από το 0,40 και 0,19 πριν την παρέμβαση φτάσαμε στο 1,00 και 0,95 αντίστοιχα μετά την παρέμβαση (Πίνακας 7).

Πίνακας 7. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των 10 επιμέρους ερωτήσεων που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 1	Έχει κατανοήσει τη λειτουργία του 0 στην εκτέλεση των πράξεων PRE	,47	62	,503	,064
	Έχει κατανοήσει τη λειτουργία του 0 στην εκτέλεση των πράξεων POST	,98	62	,127	,016
Pair 2	Αντιλαμβάνεται την έννοια της δεκάδας PRE	,66	62	,477	,061
	Αντιλαμβάνεται την έννοια της δεκάδας POST	1,00	62	,000	,000
Pair 3	Γνωρίζει τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού (Μ, Δ, Ε) PRE	,29	62	,458	,058
	Γνωρίζει τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού (Μ, Δ, Ε) POST	1,00	62	,000	,000
Pair 4	Κάνει λάθη στη θέση του αριθμού στις πράξεις PRE	,65	62	,482	,061
	Κάνει λάθη στη θέση του αριθμού στις πράξεις POST	,03	62	,178	,023
Pair 5	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 - 10 PRE	,44	62	,500	,063
	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 - 10 POST	1,00	62	,000	,000
Pair 6	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 - 20 PRE	,29	62	,458	,058
	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 - 20 POST	,94	62	,248	,031
Pair 7	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με μονοψήφιους PRE	,89	62	,319	,041
	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με μονοψήφιους POST	1,00	62	,000	,000
Pair 8	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους PRE	,40	62	,495	,063
	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους POST	1,00	62	,000	,000
Pair 9	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με μονοψήφιους PRE	,84	62	,371	,047
	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με μονοψήφιους POST	1,00	62	,000	,000
Pair 10	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους PRE	,19	62	,398	,051
	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους POST	,95	62	,216	,027

Πίνακας 8. Το κριτήριο *t*-test [Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού *t*, βαθμοί ελευθερίας (*df*), επίπεδο σημαντικότητας *Sig.* (2-tailed) και *effect size* (Cohen's *D*) των 10 επιμέρους ερωτήσεων που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες κάθε μαθητή πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Διαφορά	Τυπική Απόκλιση	<i>t</i>	<i>df</i>	<i>Sig.</i> (2- tailed)	Cohen's <i>D</i>
Pair 1	Έχει κατανοήσει τη λειτουργία του 0 στην εκτέλεση των πράξεων PRE - POST	-.516	.504	-8.066	61	.000	1,619048
Pair 2	Αντιλαμβάνεται την έννοια της δεκάδας PRE - POST	-.339	.477	-5.590	61	.000	1,425577
Pair 3	Γνωρίζει τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού (Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες) PRE - POST	-.710	.458	-12.211	61	.000	3,100437
Pair 4	Κάνει λάθη στη θέση του αριθμού στις πράξεις PRE - POST	.613	.491	9.828	61	.000	-1,87879
Pair 5	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 μέχρι το 10 PRE - POST	-.565	.500	-8.892	61	.000	1,583919
Pair 6	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 μέχρι το 20 PRE - POST	-.645	.482	-10.531	61	.000	1,84136
Pair 7	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με μονοψήφιους PRE - POST	-.113	.319	-2.786	61	.007	0,689655
Pair 8	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους PRE - POST	-.597	.495	-9.502	61	.000	2,424242
Pair 9	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με μονοψήφιους PRE - POST	-.161	.371	-3.425	61	.001	0,862534
Pair 10	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους PRE - POST	-.758	.432	-13.825	61	.000	2,47557

5.2.3. Το ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 42 εκπαιδευτικοί και ειδικότερα 24 εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. και 18 εκπαιδευτικοί γενικών τάξεων, στις οποίες φοιτούσαν οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Από τους 24 εκπαιδευτικούς των Τ.Ε., οι 12 είναι μόνιμοι και οργανικά τοποθετημένοι στα Τ.Ε. των σχολείων τους, ενώ οι υπόλοιποι 12 είναι αναπληρωτές εκπαιδευτικοί κλάδου ΠΕ71 απόφοιτοι από το Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής. Οι 18 εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων είναι μόνιμοι εκπαιδευτικοί στα σχολεία τους. Πριν την έναρξη της παρέμβασης οι εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. συμμετείχαν σε δύο δίωρες συναντήσεις ενημέρωσης και γνωριμίας με το χειραπτικό υλικό. Σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης

υποστηρίζονταν από τον ερευνητή με διαρκή επικοινωνία και σναντήσεις σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Όταν καθορίστηκε και επικαιροποιήθηκε ο τελικός αριθμός των συμμετεχόντων μαθητών στην έρευνα, οι εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. και οι εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο που σκοπό είχε να ανιχνεύσει τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά, τον τρόπο διδασκαλίας τους και τη χρήση υλικών και μέσων που διευκολύνουν και υποστηρίζουν τη διδασκαλία τους. Το ίδιο ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε και μετά τη λήξη της παρέμβασης.

Στην ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων που συλλέχθηκαν εφαρμόστηκε ο στατιστικός έλεγχος T-test για εξαρτημένα ή κατά ζεύγη δείγματα (Paired Samples Test), επειδή έχουμε δεδομένα από την ίδια ομάδα πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Στον πίνακα 10, φαίνεται ότι σε όλες τις ερωτήσεις του Β' μέρους του ερωτηματολογίου, οι οποίες αφορούν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την επάρκειά τους να διδάξουν μαθηματικά, να προσαρμόζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, να εφαρμόζουν διαφοροποιημένες μαθηματικές προσεγγίσεις και να χρησιμοποιούν χειραπτικό ή ψηφιακό υλικό, η διαφοροποίηση που προέκυψε από την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων είναι στατιστικά σημαντική, αφού σε όλες τις περιπτώσεις προέκυψε $p < 0,0001$, επομένως μετά την παρέμβαση υπήρξε σημαντικά θετική αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά

Στην ανάλυση των επιμέρους ερωτήσεων, όπως φαίνεται και στον πίνακα 9, παρατηρούμε τα ζεύγη των ερωτήσεων όπου εντοπίζεται η διαφορά. Πιο συγκεκριμένα: διαφορά εντοπίζεται στις ερωτήσεις που αφορούν την κατάρτιση των εκπαιδευτικών για διαφοροποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών και την υλοποίησή της (ερωτήσεις pair 3 και 4), όπου η μέση τιμή στον προέλεγχο ήταν $M=2,10$ και $M=2,12$ αντίστοιχα και μετά την παρέμβαση ήταν $M=3,36$ και $M=3,52$ αντίστοιχα, καταδεικνύοντας μια σημαντική αλλαγή στις αντιλήψεις τους. Επιπρόσθετα μεγάλες διαφορές είχαμε και στις ερωτήσεις που αφορούν στη χρήση εποπτικών υλικών χειραπτικών ή δυναμικών υλικών και οπτικών αναπαραστάσεων (ερωτήσεις pair 5, 6, 7 και 8) όπου οι μέσες τιμές διαφοροποιήθηκαν από 3,40 σε

4,24 για το εποπτικό υλικό, από 2,45 σε 4,43 για το χειραπτικό υλικό, όπου είχαμε και τη μεγαλύτερη διαφορά, από 2,33 σε 3,90 για το ψηφιακό υλικό και από 3,60 σε 4,55 για τις οπτικές αναπαραστάσεις. Συνολικά θα λέγαμε, ότι η χρήση του χειραπτικού υλικού έδωσε την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να προσεγγίσουν τη μαθηματική γνώση μέσα από μια διαδικασία που φέρνει πιο κοντά τους μαθητές σε μια μορφή αυτενεργού, βιωματικής και ανακαλυπτικής μάθησης, μέσα από την αναπαράσταση βασικών μαθηματικών εννοιών με το υλικό.

Επομένως απαντώντας στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα θα λέγαμε ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση υπήρξε σημαντική θετική αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Πίνακας 9. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν τις αντιλήψεις τους σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

Paired Samples Statistics					
		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 1	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διδάξω μαθηματικά σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (ΜΔ) στα μαθηματικά PRE	2,67	42	,650	,100
	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διδάξω μαθηματικά σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (ΜΔ) στα μαθηματικά POST	3,64	42	,485	,075
Pair 2	Δυσκολεύομαι να βρίσκω τρόπους να βοηθήσω τους μαθητές μου στη διδασκαλία των μαθηματικών PRE	3,26	42	,587	,091
	Δυσκολεύομαι να βρίσκω τρόπους να βοηθήσω τους μαθητές μου στη διδασκαλία των μαθηματικών POST	2,38	42	,582	,090
Pair 3	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διαφοροποιήσω τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ PRE	2,10	42	,617	,095
	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διαφοροποιήσω τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ POST	3,36	42	,656	,101
Pair 4	Πραγματοποιώ διαφοροποιημένη διδασκαλία στους μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά PRE	2,12	42	,670	,103
	Πραγματοποιώ διαφοροποιημένη διδασκαλία στους μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά POST	3,52	42	,671	,104
Pair 5	Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό (εικόνες, σχήματα, κά) για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών PRE	3,40	42	,497	,077

	Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό (εικόνες, σχήματα, κά) για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών POST	4,24	42	,431	,067
Pair 6	Χρησιμοποιώ χειραπτικά υλικά (κυβάρια, γεωπίνακες, ντομινοκά) στη διδασκαλία των μαθηματικών PRE	2,45	42	,593	,091
	Χρησιμοποιώ χειραπτικά υλικά (κυβάρια, γεωπίνακες, ντομινοκά) στη διδασκαλία των μαθηματικών POST	4,43	42	,501	,077
Pair 7	Χρησιμοποιώ λογισμικά ή άλλο ψηφιακό υλικό στη διδασκαλία των μαθηματικών PRE	2,33	42	1,097	,169
	Χρησιμοποιώ λογισμικά ή άλλο ψηφιακό υλικό στη διδασκαλία των μαθηματικών POST	3,90	42	,726	,112
Pair 8	Ενισχύω την οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών για την καλύτερη κατανόησή τους PRE	3,60	42	,497	,077
	Ενισχύω την οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών για την καλύτερη κατανόησή τους POST	4,55	42	,504	,078

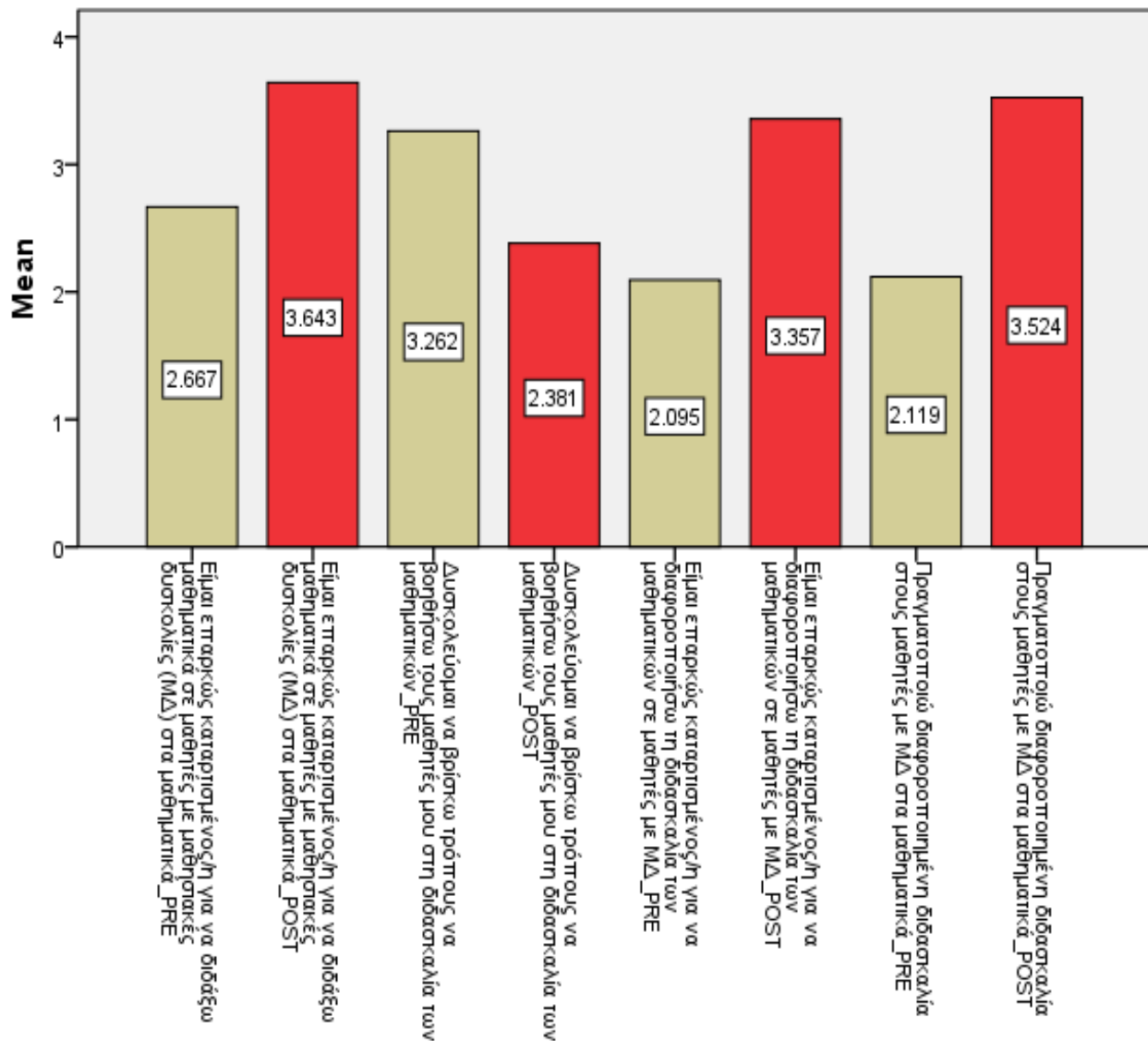
Πίνακας 10. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t , βαθμοί ελευθερίας (df), επίπεδο σημαντικότητας $Sig.$ (2-tailed) και $effect\ size$ (Cohen's D) των ερωτήσεων που αφορούν στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Διαφορά	Τυπική Απόκλιση	t	df	$Sig.$ (2- tailed)	Cohen's D
Pair 1	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διδάξω σε μαθητές με (ΜΔ) στα μαθηματικά PRE - POST	-,976	,604	-10,468	41	,000	1,709251
Pair 2	Δυσκολεύομαι να βρίσκω τρόπους να βοηθήσω τους μαθητές μου στη διδασκαλία των μαθ/κών PRE - POST	,881	,504	11,333	41	,000	-1,50556
Pair 3	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διαφοροποιήσω τη διδ/λία των μαθ/κών σε μαθητές με ΜΔ PRE - POST	-1,262	,497	-16,462	41	,000	1,979576
Pair 4	Πραγματοποιώ διαφοροποιημένη διδασκαλία στους μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά PRE - POST	-1,405	,665	-13,695	41	,000	2,087994
Pair 5	Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό (εικόνες, σχήματα, κά) για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών PRE - POST	-,833	,762	-7,083	41	,000	1,805783
Pair 6	Χρησιμοποιώ χειραπτικά υλικά (κυβάρια, γεωπίνακες, ντόμινοκα) στη διδασκαλία των μαθ/ικών PRE - POST	-1,976	,715	-17,905	41	,000	3,619744
Pair 7	Χρησιμοποιώ λογισμικά ή άλλο ψηφιακό υλικό στη διδασκαλία των μαθηματικών PRE - POST	-1,571	,887	-11,476	41	,000	1,722436
Pair 8	Ενισχύω την οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών για την καλύτερη κατανόησή τους PRE - POST	-,952	,697	-8,858	41	,000	1,898102

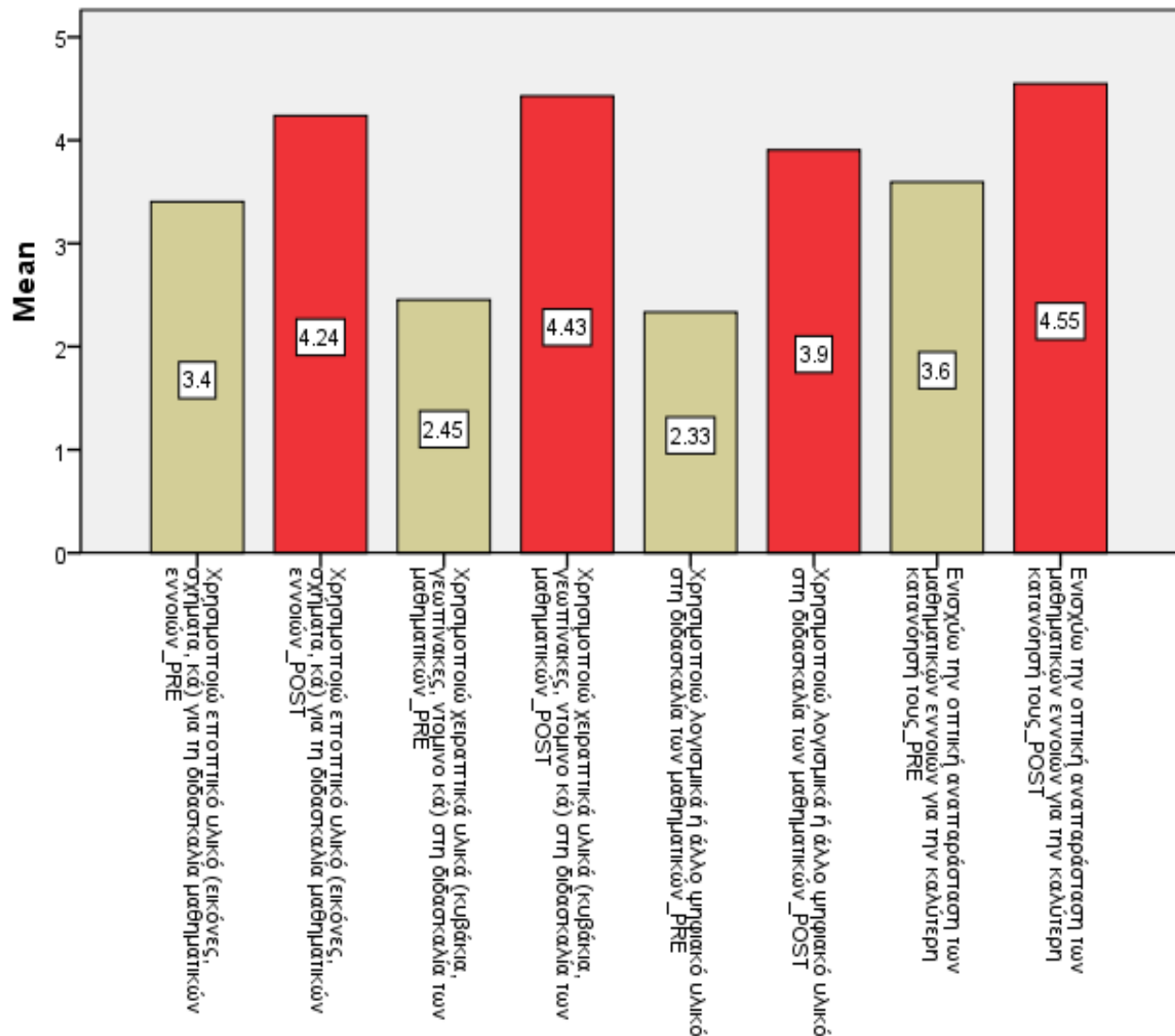
Αμέσως παρακάτω εμφανίζονται τα γραφήματα (Σχήμα 3: pair1 - pair4 και Σχήμα 4 pair5 - pair8) που περιλαμβάνουν τις μέσες τιμές των αντιλήψεων των

εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Σχήμα 3. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν την επάρκεια και κατάρτισή τους (pair1 έως pair4) σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Σχήμα 4. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair5 έως pair8) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Στον πίνακα 11 εμφανίζονται και τα υπόλοιπα δεδομένα του ερωτηματολογίου σχετικά με τους εκπαιδευτικούς. Έτσι, όσον αφορά τις πηγές από όπου οι εκπαιδευτικοί αντλούν υλικό για να υποστηρίξουν τη διδασκαλία των μαθηματικών στις τάξεις τους και στα Τμήματα Ένταξης, τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο, δείχνουν σημαντική μείωση της χρήσης των σημειώσεων από βοηθητικά βιβλία του εμπορίου (pair 2 - από $M=0,86$ στο $M=0,17$), της χρήσης ασκήσεων που έχουν χρησιμοποιήσει πιο παλιά (pair 3 - από 0,40 σε 0,02) ή την αξιοποίηση προτάσεων/υλικών από άλλους συναδέλφους (pair 4 - από 0,31 σε

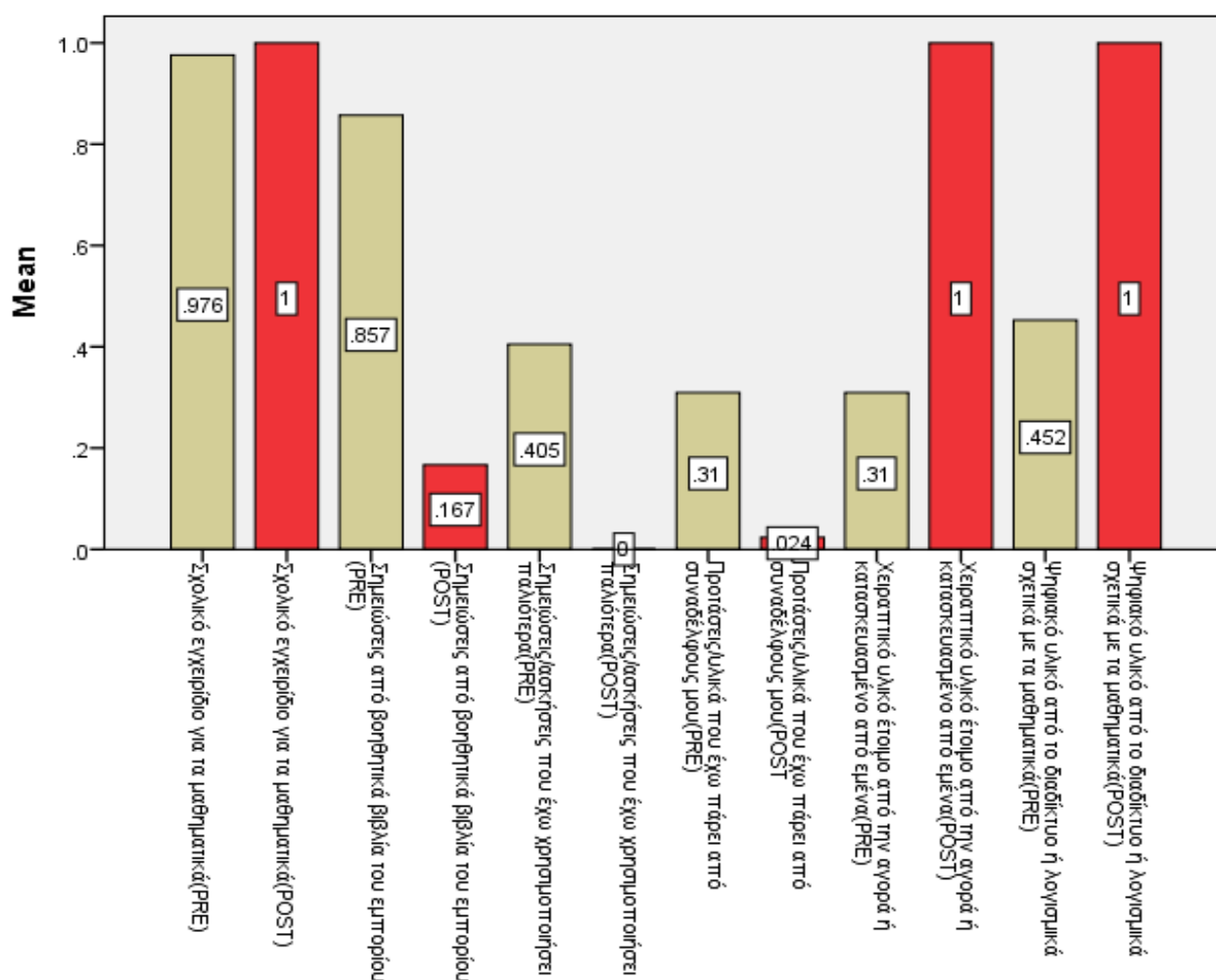
0,02), ενώ παρατηρείται μια πολύ μεγάλη διαφορά στη χρήση του χειραπτικού υλικού (pair 2 – από 0,31 στην άριστη μέση τιμή 1,00) και στη χρήση του ψηφιακού υλικού (pair 2 – από 0,45 σε 1,00). Ταυτόχρονα, αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της χρήσης του σχολικού εγχειριδίου (pair 1 – από 0,98 σε 1,00).

Πίνακας 11. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τις πηγές (pair1-pair6)

PairedSamplesStatistics					
		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 1	Σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθηματικά (PRE)	,98	42	,154	,024
	Σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθηματικά (POST)	1,00	42	,000	,000
Pair 2	Σημειώσεις από βοηθητικά βιβλία του εμπορίου (PRE)	,86	42	,354	,055
	Σημειώσεις από βοηθητικά βιβλία του εμπορίου (POST)	,17	42	,377	,058
Pair 3	Σημειώσεις/ασκήσεις που έχω χρησιμοποιήσει παλιότερα (PRE)	,40	42	,497	,077
	Σημειώσεις/ασκήσεις που έχω χρησιμοποιήσει παλιότερα (POST)	,00	42	,000	,000
Pair 4	Προτάσεις/υλικά που έχω πάρει από συναδέλφους μου (PRE)	,31	42	,468	,072
	Προτάσεις/υλικά που έχω πάρει από συναδέλφους μου (POST)	,02	42	,154	,024
Pair 5	Χειραπτικό υλικό έτοιμο από την αγορά ή κατασκευασμένο (PRE)	,31	42	,468	,072
	Χειραπτικό υλικό έτοιμο από την αγορά ή κατασκευασμένο (POST)	1,00	42	,000	,000
Pair 6	Ψηφιακό υλικό από το διαδίκτυο ή λογισμικά σχετικά με τα μαθ/κά (PRE)	,45	42	,504	,078
	Ψηφιακό υλικό από διαδίκτυο ή λογισμικά σχετικά με τα μαθ/κά (POST)	1,00	42	,000	,000

Αμέσως παρακάτω εμφανίζεται το γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού που αφορούν τις πηγές (pair1 έως pair6):

Σχήμα 5. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη χρήση πηγών (pair1 έως pair6), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Μεγάλη ήταν και η διαφοροποίηση των απόψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τις ενότητες των μαθηματικών που πιστεύουν ότι θα βοηθούσε η χρήση των χειραπτικών ή δυναμικών υλικών, όπως φαίνεται στον πίνακα 12. Στη συγκεκριμένη ερώτηση (ερώτηση 34 στο ερωτηματολόγιο, βλ. παράρτημα), η μεγαλύτερη διαφοροποίηση τιμών παρατηρήθηκε στην άποψη των εκπαιδευτικών σχετικά με τη βοήθεια των χειραπτικών υλικών στην εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων. Σε αυτόν τον τομέα, από τη μέση τιμή 0,02 πριν την παρέμβαση είχαμε μέση τιμή 0,98 στον μεταέλεγχο (pair 9 στον πίνακα 7). Σημαντική ήταν και η διαφοροποίηση των απόψεων σχετικά με ενότητες όπως: η επίλυση προβλημάτων (pair 12– από 0,31 σε 0,98), η έννοια του αριθμού (pair 7– από 0,50 σε 0,98), τα

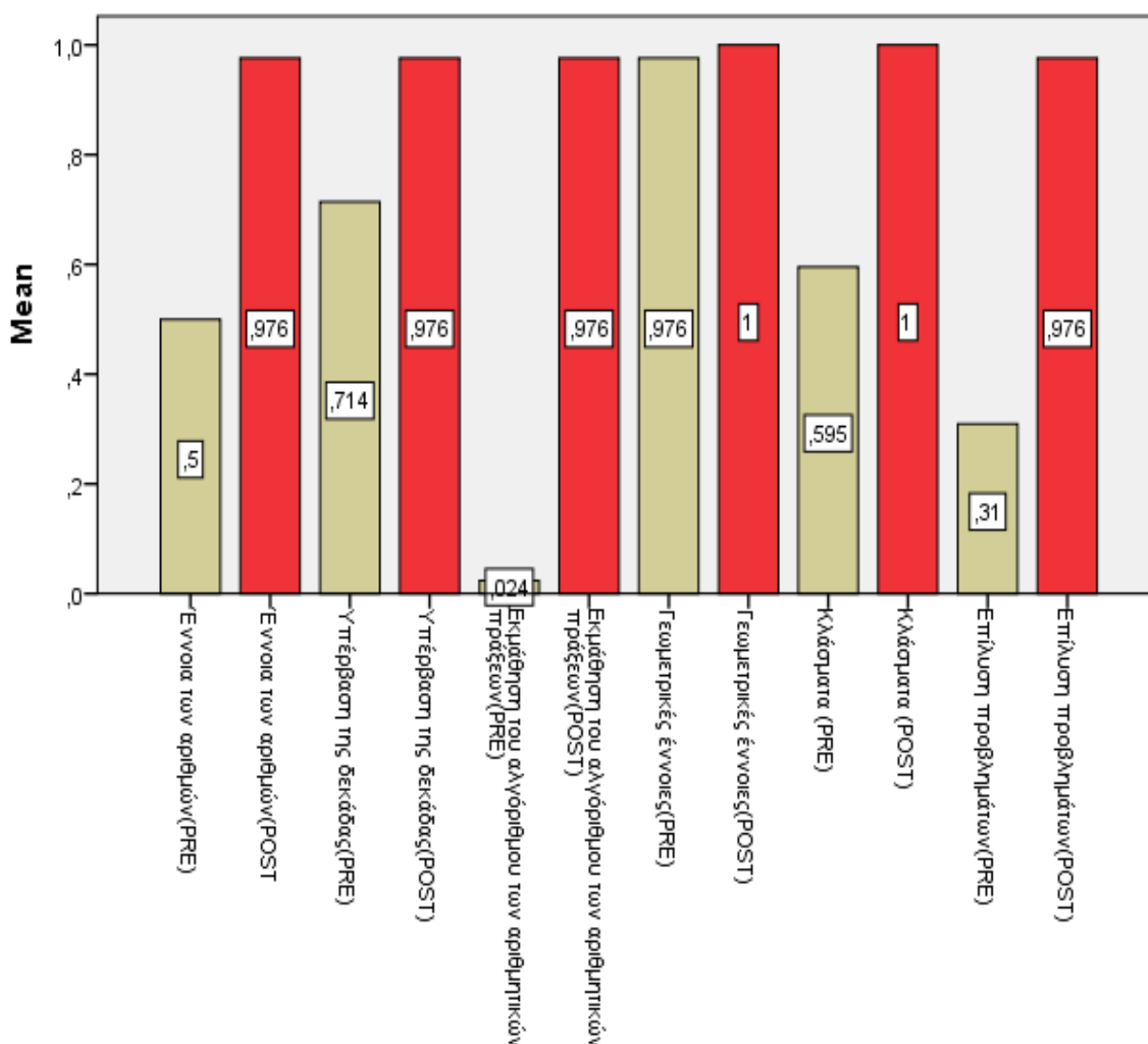
κλάσματα (pair 11– από 0,60 σε 1,00), ενώ μικρότερη ήταν η διαφορά στις μέσες τιμές στην ενότητα σχετικά με την υπέρβαση της δεκάδας (pair 8 – από 0,71 σε 0,98). Αντιθέτως, φαίνεται να μην επηρεάζεται από τη διδακτική παρέμβαση με το υλικό η άποψη των εκπαιδευτικών για τη βοήθεια των χειραπτικών σε γεωμετρικές έννοιες, η οποία και παραμένει σε υψηλά επίπεδα μέσων τιμών (pair 10 – από 0,98 σε 1,00).

Πίνακας 12. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού χειραπτικού (pair 7 – pair 12)

PairedSamplesStatistics					
		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 7	Έννοια των αριθμών(PRE)	,50	42	,506	,078
	Έννοια των αριθμών(POST)	,98	42	,154	,024
Pair 8	Υπέρβαση της δεκάδας(PRE)	,71	42	,457	,071
	Υπέρβαση της δεκάδας(POST)	,98	42	,154	,024
Pair 9	Εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων(PRE)	,02	42	,154	,024
	Εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων(POST)	,98	42	,154	,024
Pair 10	Γεωμετρικές έννοιες(PRE)	,98	42	,154	,024
	Γεωμετρικές έννοιες(POST)	1,00	42	,000	,000
Pair 11	Κλάσματα ...(PRE)	,60	42	,497	,077
	Κλάσματα ...(POST)	1,00	42	,000	,000
Pair 12	Επίλυση προβλημάτων(PRE)	,31	42	,468	,072
	Επίλυση προβλημάτων(POST)	,98	42	,154	,024

Αμέσως παρακάτω εμφανίζεται το γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με το εύρος της χρήσης χειραπτικού και ψηφιακού υλικού που αφορούν τους τομείς των μαθηματικών που μπορούν να υποστηρίξουν (pair 7 έως pair 12).

Σχήμα 6. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, που αφορούν τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής της χρήσης χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair7-pair12) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Μια άλλη πτυχή στη διδασκαλία των μαθηματικών, αφορά τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τους περιορισμούς που υπάρχουν στη χρήση ή μη των χειραπτικών υλικών στη σχολική διδακτική πράξη (Ερώτηση 35 στο ερωτηματολόγιο, βλ. παράρτημα). Όπως φαίνεται και στον πίνακα 13, πολύ ισχυρή παραμένει, πριν και μετά την παρέμβαση, η άποψη ότι ο διδακτικός χρόνος, που βάσει ωρολογίου προγράμματος διατίθεται για τη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί για τη χρήση υλικών (pair 14 – από 0,83 σε 0,93).

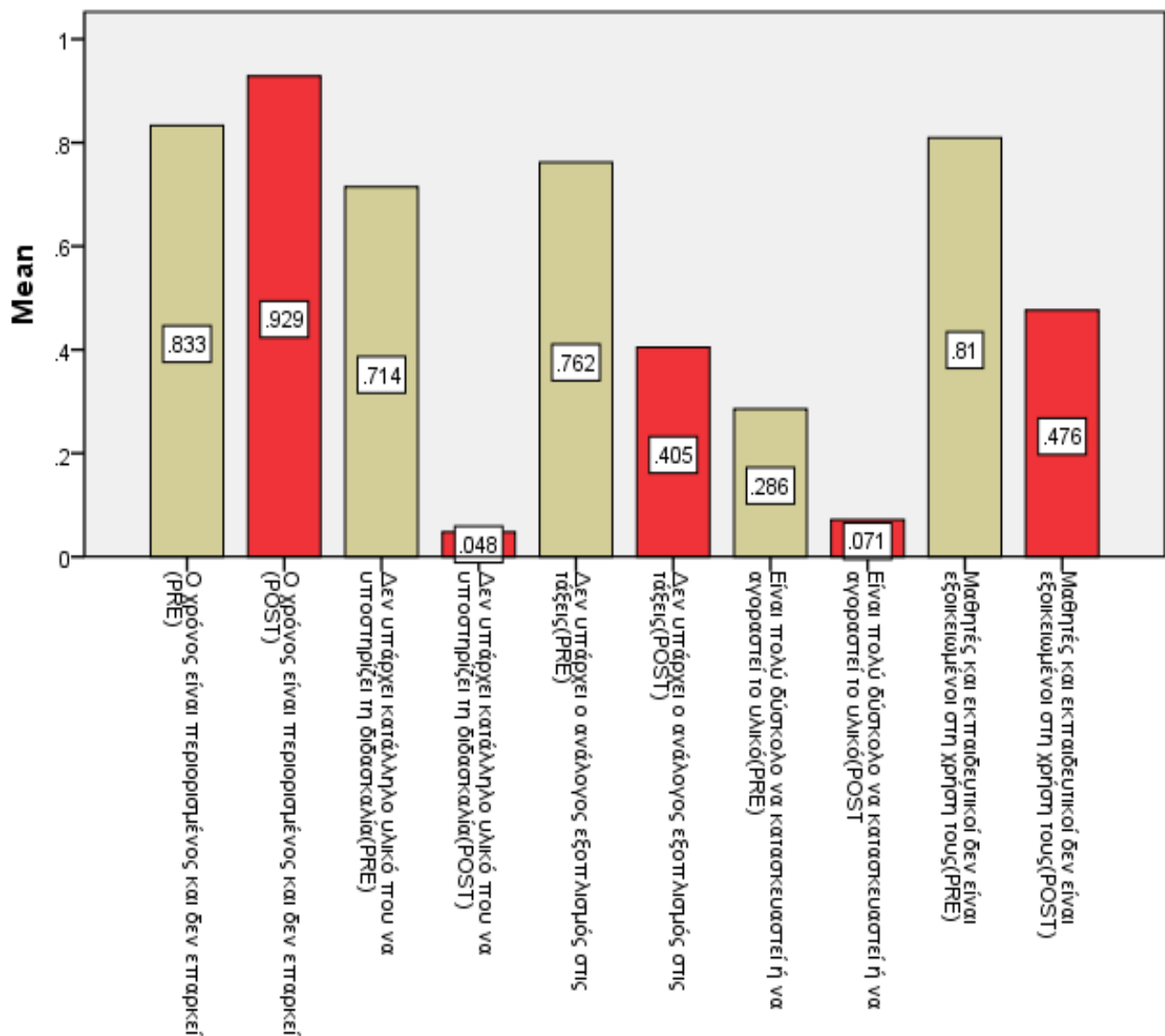
Μεγάλη διαφοροποίηση είχαμε στην άποψη ότι δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία (pair 15 – από 0,71 σε 0,05), αφού μετά την παρέμβαση φαίνεται να αλλάζει σημαντικά. Σημαντική είναι και η διαφορά που παρατηρήθηκε στις απόψεις της μη ύπαρξης κατάλληλου εξοπλισμού στις τάξεις (pair 16 – από 0,76 σε 0,40), της δυσκολίας να κατασκευαστεί ή και να αγοραστεί υλικό (pair 17 – από 0,29 σε 0,07) και του ότι οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους (pair 18 – από 0,81 σε 0,48).

Πίνακας 13. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τους ανασταλτικούς παράγοντες σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair13 έως pair17)

PairedSamplesStatistics					
		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 13	Ο χρόνος είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί(PRE)	,83	42	,377	,058
	Ο χρόνος είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί(POST)	,93	42	,261	,040
Pair 14	Δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία(PRE)	,71	42	,457	,071
	Δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία(POST)	,05	42	,216	,033
Pair 15	Δεν υπάρχει ο ανάλογος εξοπλισμός στις τάξεις(PRE)	,76	42	,431	,067
	Δεν υπάρχει ο ανάλογος εξοπλισμός στις τάξεις(POST)	,40	42	,497	,077
Pair 16	Είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί το υλικό(PRE)	,29	42	,457	,071
	Είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί το υλικό(POST)	,07	42	,261	,040
Pair 17	Μαθητές και εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους (PRE)	,81	42	,397	,061
	Μαθητές και εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους (POST)	,48	42	,505	,078

Αμέσως παρακάτω εμφανίζεται το γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τους ανασταλτικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη μαθηματική διδασκαλία (pair13-pair17).

Σχήμα 7. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, που αφορούν τους ανασταλτικούς παράγοντες σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair13 έως pair17) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



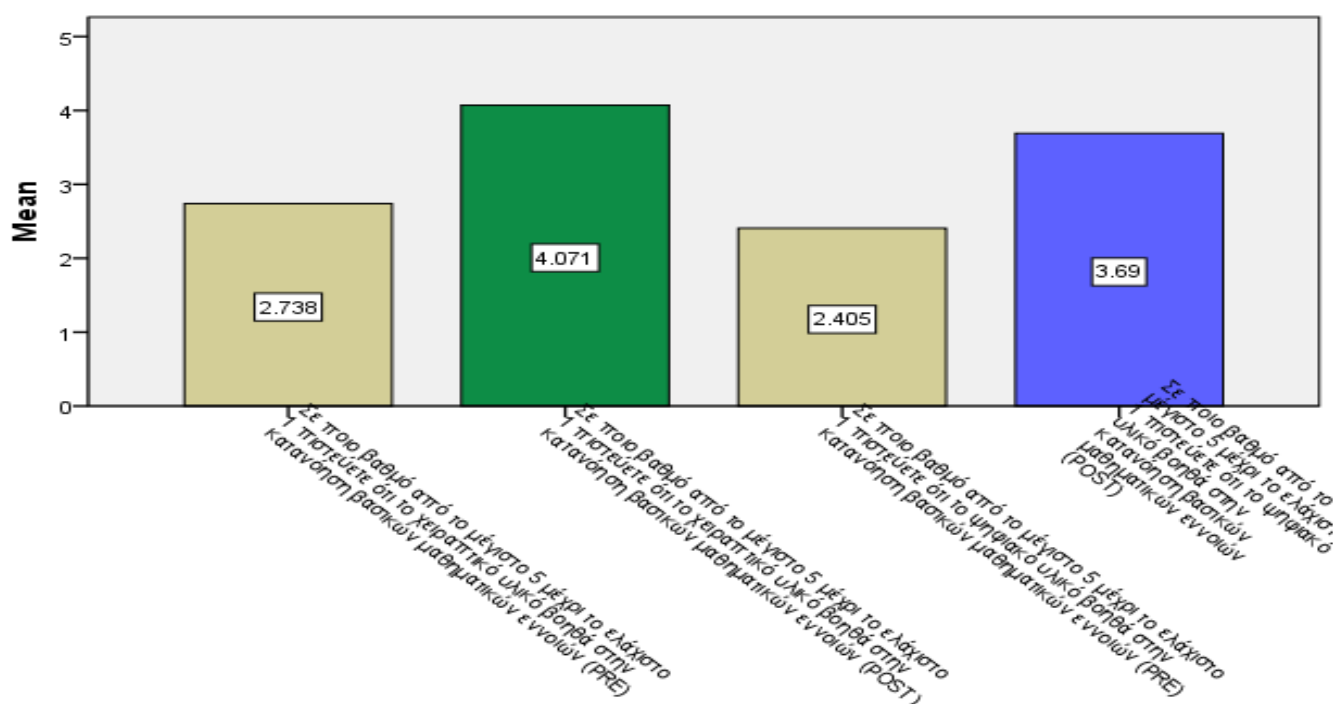
Επιπροσθέτως, όπως φαίνεται και στον πίνακα 14, στις ερωτήσεις αν το χειραπτικό και το ψηφιακό υλικό πιστεύουν ότι βοηθά στην κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών (Ερωτήσεις 32 και 33 του ερωτηματολογίου, βλ. παράρτημα), παρατηρήθηκε σημαντική διαφοροποίηση των μέσων τιμών πριν και μετά την παρέμβαση (pair 19– από $M=2,74$ σε $M=4,07$ για το χειραπτικό και pair 20– από $M=2,40$ σε $M=3,69$ για το ψηφιακό).

Πίνακας 14. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπ/κών σχετικά με τη βοήθεια του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18 - 19), πριν και μετά την παρέμβαση

		Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair18	Σε ποιον βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το χειραπτικό υλικό βοηθά την κατανόηση βασικών μαθ/κών εννοιών (PRE)	2,74	42	,497	,077
	Σε ποιον βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το χειραπτικό υλικό βοηθά την κατανόηση βασικών μαθ/κών εννοιών (POST)	4,07	42	,808	,125
Pair19	Σε ποιον βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το ψηφιακό υλικό βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθ/κών εννοιών (PRE)	2,40	42	,939	,145
	Σε ποιον βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το ψηφιακό υλικό βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθ/κών εννοιών (POST)	3,69	42	,841	,130

Το γράφημα που ακολουθεί περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη δυνατότητα του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού να βοηθά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18 - pair19), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Σχήμα 8. Γράφημα που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, που αφορούν κατά πόσο το χειραπτικό και το ψηφιακό υλικό (καθένα ξεχωριστά) βοηθούν αποτελεσματικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair 18 –pair 19), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση



Συνολικά, θα λέγαμε ότι η χρήση του χειραπτικού υλικού μέσα στα Τ.Ε. και στις σχολικές τάξεις, άλλαξε τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών απέναντί του και ανέπτυξε θετική διάθεση για την ένταξή του στην καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία για την υποστήριξη της διδασκαλίας των μαθηματικών, τόσο σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά όσο και στους τυπικούς μαθητές.

Στον πίνακα 15 παρατηρούμε ότι σχεδόν σε όλες τις ερωτήσεις υπήρξε σημαντική διαφοροποίηση των μέσων τιμών μετά την παρέμβαση, εφόσον τα αντίστοιχα sig είναι μικρότερα του 0,05.

Πιο συγκεκριμένα, υπήρξε στατιστικά σημαντική μείωση των μέσων τιμών στις παρακάτω ερωτήσεις, οι οποίες κυρίως αφορούν ορισμένες από τις πηγές και τους ανασταλτικούς παράγοντες: (1) σημειώσεις / ασκήσεις από βοηθητικά βιβλία· σημειώσεις/ ασκήσεις που έχω χρησιμοποιήσει παλιότερα· προτάσεις/υλικά που έχω πάρει από συναδέλφους μου· δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία· δεν υπάρχει ο ανάλογος εξοπλισμός στις τάξεις· είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί το υλικό· μαθητές και εκπ/κοί δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση τους.

Υπήρξε στατιστικά σημαντική αύξηση των μέσων τιμών σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις που αφορούν ορισμένες από τις πηγές (pair1, pair5, pair6), τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair7-pair12) και τη δυνατότητα του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού να βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18-pair19), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Εξαίρεση αποτελούν οι απόψεις για το «Σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθ/κά» και για τις «Γεωμετρικές έννοιες», όπου δεν υπήρξε σημαντική διαφοροποίηση των μέσων τιμών μετά την παρέμβαση εφόσον τα αντίστοιχα sig ήταν μεγαλύτερα από το 0,05.

Πίνακας 15. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t , βαθμοί ελευθερίας (df) ,επίπεδο σημαντικότητας $Sig.$ (2-tailed) και effect size (Cohen's D) των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς που αφορούν τις πηγές (pair1 έως pair6), τη βελτίωση του εύρους εφαρμογής του χειραπτικού και ψηφιακού υλικού χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair7 έως pair12), τους ανασταλτικούς παράγοντες σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού (pair13-pair17), και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (pair18-pair19), με τη χρήση χειραπτικού υλικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

		Μέση Διαφορά	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου	t	df	Sig. (2- tailed)	Cohen's D
Pair 1	Σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθ/κά (PRE) - (POST)	-,024	,154	,024	-1,000	41	,323	0,25974
Pair 2	Σημειώσεις/ ασκήσεις από βοηθητικά βιβλία (PRE) - (POST)	,690	,468	,072	9,564	41	,000	-1,88782
Pair 3	Σημειώσεις/ ασκήσεις που έχω χρησιμοποιήσει παλιότερα (PRE) - (POST)	,405	,497	,077	5,280	41	,000	-1,60966
Pair 4	Προτάσεις/υλικά που έχω πάρει από συναδέλφους μου (PRE) - (POST)	,286	,457	,071	4,050	41	,000	-0,93248
Pair 5	Χειραπτικό υλικό έτοιμο από την αγορά ή κατασκευασμένο (PRE) - (POST)	-,690	,468	,072	-9,564	41	,000	2,948718
Pair 6	Ψηφιακό υλικό από διαδίκτυο ή λογισμικά σχετικά με τα μαθ/κά (PRE) - (POST)	-,548	,504	,078	-7,045	41	,000	2,18254
Pair 7	Εννοια των αριθμών (PRE) - (POST)	-,476	,505	,078	-6,105	41	,000	1,454545
Pair 8	Υπέρβαση της δεκάδας (PRE) - (POST)	-,262	,445	,069	-3,814	41	,000	0,883797
Pair 9	Εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων (PRE) - (POST)	-,952	,216	,033	-28,636	41	,000	6,233766
Pair 10	Γεωμετρικές έννοιες (PRE) - (POST)	-,024	,154	,024	-1,000	41	,323	0,25974
Pair 11	Κλάσματα ...(PRE) - (POST)	-,405	,497	,077	-5,280	41	,000	1,609658
Pair 12	Επίλυση προβλημάτων (PRE) - (POST)	-,667	,477	,074	-9,055	41	,000	2,154341
Pair 13	Ο χρόνος είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί (PRE) - (POST)	-,095	,297	,046	-2,077	41	,044	0,31348
Pair 14	Δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία (PRE) - (POST)	,667	,526	,081	8,218	41	,000	-1,4442
Pair 15	Δεν υπάρχει ο ανάλογος εξοπλισμός στις τάξεις (PRE) - (POST)	,357	,618	,095	3,747	41	,001	-0,77586
Pair 16	Είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί το υλικό (PRE) - (POST)	,214	,565	,087	2,460	41	,018	-0,61281
Pair 17	Μαθητές και εκπ/κοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους (PRE) - (POST)	,333	,687	,106	3,146	41	,003	-0,73171
Pair18	Σε ποιο βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το χειραπτικό υλικό βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθ/κών εννοιών (PRE) - (POST)	-1,333	,928	,143	-9,308	41	,000	3,509235
Pair19	Σε ποιο βαθμό από το μέγιστο 5 μέχρι το ελάχιστο 1 πιστεύετε ότι το ψηφιακό υλικό βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών (PRE) - (POST)	-1,286	,742	,114	-11,230	41	,000	1,476817

5.2.4. Το ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τον Εκπαιδευτικό)

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το εργαλείο για την ανίχνευση των μαθησιακών δυσκολιών (ΑΜΔΕ) έχει ως στόχο την αρχική αναγνώριση εκείνων των μαθητών ηλικίας 8 έως 15 ετών, που είναι πιθανόν να έχουν Μαθησιακές Δυσκολίες. Οι δεξιότητες/συμπεριφορές που αξιολογούνται, δεν εστιάζουν αποκλειστικά στον χώρο του γραπτού λόγου, αλλά καλύπτουν και τις περιοχές του προφορικού λόγου, του συλλογισμού και των μαθηματικών. Το ΑΜΔΕ παρουσιάζει το πλήρες εύρος των χαρακτηριστικών συμπεριφορών και προβλημάτων που εμφανίζουν οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες, έτσι όπως έχουν καταγραφεί στην επιστημονική βιβλιογραφία και στην κλινική έρευνα.

Η ιδιαίτερη αξία του είναι ότι μπορεί να συμπληρωθεί από όλους τους εκπαιδευτικούς με βάση τη γνώση και την παρατήρηση των μαθητών τους. Με αυτό τον τρόπο, η αρχική αναγνώριση των Μαθησιακών Δυσκολιών γίνεται στο πλαίσιο της καθημερινής σχολικής πράξης, έγκαιρα, έγκυρα και αξιόπιστα πριν από οποιαδήποτε παραπομπή σε διαγνωστικές υπηρεσίες. Μέσα από την αξιοποίηση του εργαλείου, οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να εστιάσουν σε συγκεκριμένες δεξιότητες και συμπεριφορές των μαθητών τους και να κατανοήσουν καλύτερα τις δυσκολίες τους, ώστε να αρχίσει η κατάλληλη εκπαιδευτική παρέμβαση (Παντελιάδου & Σιδερίδης, 2007).

Χορηγήσαμε το συγκεκριμένο ανιχνευτικό εργαλείο και πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, ανιχνεύοντας μέσα από τις καταγραφές των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης και των γενικών τάξεων τις μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, αλλά και την όποια εννοιολογική αλλαγή επέφερε η χρήση και η αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών. Αν και το ΑΜΔΕ απευθύνεται σε μαθητές Γ' Δημοτικού και μεγαλύτερους, συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς και για τους μαθητές μικρότερων τάξεων καταγράφοντας τη μαθηματική συμπεριφορά τους στους τομείς των μαθηματικών που εξετάζει.

Πίνακας 16. Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών, που αφορούν το Τεστ ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς) πριν και μετά την παρέμβαση

PairedSamplesTest από ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς)			Μέση Τιμή	N	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα του Μέσου
Pair 1	Αργεί στην ολοκλήρωση υπολογισμών	PRE	2,84	62	1,601	,203
		POST	6,60	62	1,078	,137
Pair 2	Δυσκολεύεται στην ανάκληση βασικών μαθ/κών δεδομένων (αθροίσματα στη δεκάδα)	PRE	3,13	62	1,824	,232
		POST	6,77	62	1,093	,139
Pair 3	Κάνει λάθη υπερπτήρησης, μεταπτήρησης ή επανάληψης στη ανάκληση της προπαίδειας	PRE	1,92	62	1,507	,191
		POST	2,05	62	1,614	,205
Pair 4	Δυσκολεύεται να πει σωστά την ώρα	PRE	2,26	62	1,659	,211
		POST	2,35	62	1,680	,213
Pair 5	Δυσκολεύεται στη χρήση γεωμετρικών οργάνων	PRE	2,42	62	1,595	,203
		POST	2,47	62	1,627	,207
Pair 6	Αδυνατεί να κάνει χωροχρονική οργάνωση (π.χ. σειροθέτηση, κατανόηση της θεσιακής αξίας)	PRE	3,16	62	2,018	,256
		POST	7,19	62	,786	,100
Pair 7	Κάνει λάθη στο «δανεισμό» κατά την εκτέλεση πράξεων.	PRE	2,50	62	1,790	,227
		POST	6,34	62	,957	,122
Pair 8	Δυσκολεύεται στην εκτέλεση πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου	PRE	2,65	62	1,784	,227
		POST	6,18	62	,915	,116
Pair 9	Κάνει λάθη σε ασκήσεις που είχε λύσει σωστά σε προηγούμενο μικρό χρονικό διάστημα	PRE	3,18	62	2,012	,256
		POST	5,90	62	1,277	,162
Pair 10	Δυσκολεύεται με τα προβλήματα πολλών πράξεων	PRE	1,66	62	1,318	,167
		POST	5,21	62	1,189	,151
Pair 11	Δυσκολεύεται στην επιλογή της σωστής πράξης κατά την επίλυση προβλημάτων	PRE	2,19	62	1,513	,192
		POST	5,97	62	1,086	,138
Pair 12	Χρειάζεται εξωτερική καθοδήγηση κατά την επίλυση σύνθετων ασκήσεων και προβλημάτων	PRE	1,58	62	1,124	,143
		POST	5,34	62	1,055	,134
Pair 13	Θεωρεί σωστή την πρώτη απάντηση / λύση που δίνει (δεν ελέγχει την ορθότητά της)	PRE	1,94	62	1,389	,176
		POST	4,68	62	1,142	,145
Pair 14	Παραλείπει να αξιολογήσει και ελέγξει τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει	PRE	1,68	62	1,290	,164
		POST	4,56	62	1,210	,154
Pair 15	Χρησιμοποιεί ακατάλληλα κριτήρια για την εκτίμηση της ορθότητας μιας απάντησης	PRE	2,27	62	1,776	,226
		POST	4,76	62	1,169	,148
Pair 16	Δυσκολεύεται να συνδέσει αριθμητικούς όρους με το περιεχόμενο και τις συμβολικές τους αναπαραστάσεις	PRE	3,40	62	2,519	,320
		POST	7,23	62	,857	,109
Pair 17	Δυσκολεύεται στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων	PRE	1,66	62	1,173	,149
		POST	2,31	62	1,685	,214
Pair 18	Δυσκολεύεται στην κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων	PRE	2,26	62	1,629	,207
		POST	5,81	62	,846	,107
Pair 19	Δυσκολεύεται στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας	PRE	2,66	62	1,792	,228
		POST	5,82	62	,897	,114
Pair 20	Δυσκολεύεται να σκεφτεί αφαιρετικά (π.χ. χωρίς εικόνες, αντικείμενα)	PRE	2,34	62	1,599	,203
		POST	5,58	62	,950	,121

Πίνακας 17. Μέση διαφορά, τυπική απόκλιση, τιμές του στατιστικού t , βαθμοί ελευθερίας (df), επίπεδο σημαντικότητας $Sig.$ (2-tailed) και $effect$ size (Cohen's D) των ερωτήσεων στους εκπαιδευτικούς, που αφορούν το Τεστ ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς) πριν και μετά την παρέμβαση

		Μέση Διαφορά	Τυπική Απόκλιση	t	df	$Sig.$ (2- tailed)	Cohen's D
Pair 1	Αργεί στην ολοκλήρωση υπολογισμών	-3,758	1,112	-26,621	61	,000	2,807018
Pair 2	Δυσκολεύεται στην ανάκληση βασικών μαθ/κών δεδομένων (αθροίσματα στη δεκάδα)	-3,645	1,294	-22,175	61	,000	2,495715
Pair 3	Κάνει λάθη υπερπήδησης, μεταπήδησης ή επανάληψης στη ανάκληση της προπαίδειας	-,129	,461	-2,204	61	,031	0,083307
Pair 4	Δυσκολεύεται να πει σωστά την ώρα	-,097	,469	-1,625	61	,109	0,053908
Pair 5	Δυσκολεύεται στη χρήση γεωμετρικών οργάνων	-,048	,381	-1,000	61	,321	0,031037
Pair 6	Αδυνατεί να κάνει χωροχρονική οργάνωση (π.χ. σειροθέτηση, κατανόηση θεσιακής αξίας)	-4,032	1,547	-20,527	61	,000	2,874465
Pair 7	Κάνει λάθη στο «δανεισμό» κατά την εκτέλεση πράξεων.	-3,839	1,321	-22,888	61	,000	2,795777
Pair 8	Δυσκολεύεται στην εκτέλεση πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία του αλγόριθμου -	-3,532	1,302	-21,359	61	,000	2,615784
Pair 9	Κάνει λάθη σε ασκήσεις που είχε λύσει σωστά σε προηγούμενο μικρό χρονικό διάστημα	-2,726	1,580	-13,582	61	,000	1,653998
Pair 10	Δυσκολεύεται με τα προβλήματα πολλών πράξεων -	-3,548	1,263	-22,116	61	,000	2,83207
Pair 11	Δυσκολεύεται στην επιλογή της σωστής πράξης κατά την επίλυση προβλημάτων	-3,774	1,151	-25,815	61	,000	2,908811
Pair 12	Χρειάζεται εξωτερική καθοδήγηση κατά την επίλυση σύνθετων ασκήσεων και προβλημάτων ακόμα και όταν γνωρίζει τη λύση μεμονωμένων στοιχείων τους	-3,758	1,210	-24,447	61	,000	3,451124
Pair 13	Θεωρεί σωστή την πρώτη απάντηση / λύση που δίνει (δεν ελέγχει την ορθότητά της)	-2,742	1,292	-16,707	61	,000	2,165152
Pair 14	Παραλείπει να αξιολογήσει και ελέγξει τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει	-2,887	1,320	-17,228	61	,000	2,304
Pair 15	Χρησιμοποιεί ακατάλληλα κριτήρια για την εκτίμηση της ορθότητας μιας απάντησης	-2,484	1,364	-14,339	61	,000	1,691002
Pair 16	Δυσκολεύεται να συνδέσει αριθμητικούς όρους με το περιεχόμενο και τις συμβολικές τους αναπαραστάσεις (π.χ. τη λέξη «μεγαλύτερο» με το σύμβολο >)	-3,823	2,199	-13,686	61	,000	2,268957
Pair 17	Δυσκολεύεται στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων	-,645	1,147	-4,431	61	,000	0,454864
Pair 18	Δυσκολεύεται στην κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων	-3,548	1,375	-20,318	61	,000	2,868687
Pair 19	Δυσκολεύεται στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας	-3,161	1,296	-19,213	61	,000	2,350316
Pair 20	Δυσκολεύεται να σκεφτεί αφαιρετικά (π.χ. χωρίς εικόνες, αντικείμενα)	-3,242	1,339	-19,064	61	,000	2,542173

Από τον πίνακα 16 παρατηρούμε ότι σε όλες σχεδόν τις ερωτήσεις οι μέσες τιμές στο τεστ ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς) πριν την παρέμβαση ήταν μικρότερες από τις αντίστοιχες μετά την παρέμβαση και οι αντίστοιχες διαφορές (πίνακας 17) ήταν στατιστικά σημαντικές. Εξαίρεση απετέλεσαν οι ερωτήσεις «Δυσκολεύεται να πει σωστά την ώρα» και «Δυσκολεύεται στη χρήση γεωμετρικών οργάνων», όπου οι διαφορές πριν και μετά την παρέμβαση δεν ήταν στατιστικά σημαντικές ($\text{sig} > 0,05$).

Επομένως, απαντώντας στο 5^ο ερευνητικό ερώτημα, θα λέγαμε ότι η μαθησιακή συμπεριφορά και οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών διαφοροποιούνται σημαντικά με θετικό πρόσημο, όταν το περιβάλλον της μαθηματικής διδασκαλίας μεταβάλλεται είτε στο Τμήμα Ένταξης ή στη γενική τάξη με την ελεύθερη πρόσβαση στη χρήση των υλικών.

5.3. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων - Λάθη των μαθητών πριν την παρέμβαση

Μετά από την ολοκλήρωση των ανιχνευτικών δοκιμασιών και την καταγραφή των μαθηματικών αδυναμιών των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, παρατηρήθηκαν πολλές παρερμηνείες μαθηματικών εννοιών και μαθηματικά λάθη. Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων από τις ανιχνευτικές δοκιμασίες που χορηγήθηκαν και ειδικότερα τα τεστ Α' και Β' με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, το τεστ ΖΑΡΕΚΙ και στοιχεία από το ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ και τη Λίστα Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων ανέδειξε τις μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών της έρευνας, καθώς και τα σημαντικότερα λάθη που έκαναν στην ολοκλήρωση των μαθηματικών ασκήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, ακολουθεί η αναφορά στα λάθη και παρερμηνείες των μαθητών στους προαναφερθέντες τομείς μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων, που η παρούσα έρευνα εξετάζει :

1. Ευχέρεια στην εύρεση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.)

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά συνήθως εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση αριθμητικών συνδυασμών λόγω ανώριμων στρατηγικών μέτρησης (π.χ. μέτρηση όλων, μέτρηση με τα δάχτυλα), οι οποίες συμβάλλουν στις δυσκολίες ανάπτυξης μεθόδων υπολογιστικής ευχέρειας. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι

δυσκολίες με τους αριθμητικούς συνδυασμούς είναι ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες (Gersten et al., 2005· Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001· Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002) και αποτελούν σημαντικό παράγοντα για την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν αριθμητικές πράξεις και προβλήματα (Fuchs et al., 2005).

Οι 55 από τους 62 μαθητές (89%) που συμμετείχαν στην έρευνα, δεν είχαν κατακτήσει την ευχέρεια των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.), δηλαδή των αποτελεσμάτων στις προσθέσεις και αφαιρέσεις δύο μονοψήφιων αριθμών μέσα στην πρώτη εικοσάδα. Η αδυναμία αυτοματοποίησης των Β.Α.Δ. και της ευχερούς ανάκλησης αποτελεσμάτων έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων και τη χρήση αναποτελεσματικών στρατηγικών, όπως η χρησιμοποίηση των δαχτύλων (Geary, 2004). Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά παρουσιάζουν συχνά τέτοιας μορφής λάθη και χρησιμοποιούν τα δάχτυλα, όταν δεν μπορούν να ανακαλέσουν βασικά αριθμητικά δεδομένα, ακόμα και σε απλές προσθέσεις ή αφαιρέσεις κατά 1 (π.χ. $5+1$ ή $8-1$) (Griffin, 2004). Ενδεικτικά από τα Φύλλα Παρατήρησης:

Στην πρόσθεση $7+5$: «*Βάζω 7 στο μυαλό... (δείχνει το κεφάλι του)... και 5 στο χέρι... (ανοίγει 5 δάχτυλα)... λέμε 8, 9, 10, 11, 12... 12 κάνει!*»!

Επίσης, από τα δεδομένα των μαθητών διαφαίνεται έντονα η ανάγκη να αναπαραστήσουν τους αριθμούς κάθε πράξης προκειμένου να διευκολυνθούν στην εκτέλεσή της:

Στην αφαίρεση $13-6$: «*... Αφαίρεση θα κάνουμε... από τα 13 θα βγάλω 6... (σκέφτεται)... δεν μπορούμε...*» «*Και τι θα κάνουμε;*» «*Θα φτιάξουμε γραμμές... (παίρνει το μολύβι, και φτιάχνει 13 γραμμούλες στο θρανίο του)...*» «*Γιατί έφτιαξες γραμμές;*» «*Για να μπορώ να κάνω την αφαίρεση...*»

Επειδή η ευχέρεια και η ακρίβεια με τους αριθμητικούς συνδυασμούς απαιτούν την χρήση ώριμων στρατηγικών, η διδασκαλία και καθοδήγηση για τη χρήση στρατηγικών είναι σημαντική. Ο Siegler (1988: 835) περιέγραψε τα διαισθητικά οφέλη αυτού του τύπου διαφοροποιημένης διδασκαλίας ως εξής: «*Διδάσκοντας τα παιδιά να χρησιμοποιούν εφεδρικές στρατηγικές, τους παρέχει μεγαλύτερη*

ακρίβεια, περισσότερες ευκαιρίες για να μάθουν τη σωστή απάντηση [και]... μειώνει την πιθανότητα συμμετοχής σε εσφαλμένες απαντήσεις, που παράγονται από κακή εκτέλεση των στρατηγικών στο πρόβλημα».

Στην ευχέρεια εύρεσης των βασικών αριθμητικών δεδομένων επιδρά και η άγνοια βασικών στρατηγικών για τον υπολογισμό. Στην έρευνα τους οι Siegler και Shrager (1984) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν τα δάχτυλα στην εκτέλεση προσθέσεων, συνήθως δεν επιλέγουν να ξεκινήσουν από τον μεγαλύτερο προσθετέο χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα. Έτσι, στην πρόσθεση 3+8 ξεκινούν να ανεβαίνουν από το 3 μετρώντας 8 δάχτυλα, ενώ θα ήταν πιο εύκολο να μετρήσουν ξεκινώντας από το 8. Μια πιο ώριμη στρατηγική θα ήταν να αρχίσουν με το μεγαλύτερο 8, και να μετρήσουν άλλα 3, μια προσέγγιση που απαιτεί λιγότερη καταμέτρηση. Μερικά παιδιά μπορεί απλά να έχουν αυτόν τον συνδυασμό αποθηκευμένο στη μνήμη και να θυμούνται ότι κάνει 11. Η έρευνα των Siegler και Shrager μας υπενθυμίζει ότι ένας βασικός συνδυασμός αριθμητικής πράξης, (π.χ. $2 + 9$), «[...] είναι κάποια στιγμή στη ζωή ενός ατόμου ένα πολύπλοκο, δυνητικά ενδιαφέρον πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί. Μόνο με την επαναλαμβανόμενη χρήση θα γίνει μια ρουτίνα ένα "δεδομένο" που μπορεί εύκολα να ανακληθεί από τη μνήμη» (Siegler & Shrager, 1984:245). Πολύ συχνά παρατηρείται και η απარიθμηση από λάθος σημείο (π.χ. στην πρόσθεση $4+3$ ξεκινά να μετρά από το 4... 4, 5, 6), καθώς και η σύγχυση των πράξεων (κυρίως της πρόσθεσης με τον πολλαπλασιασμό, λόγω της σχετικής ομοιότητας των συμβόλων των δύο πράξεων) (Jordan & Hanich, 2003).

2. Η σωστή εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων

Τα λάθη που παρατηρήθηκαν στην εκτέλεση των αλγόριθμων των πράξεων, είναι η κατηγορία λαθών που έχει διερευνηθεί περισσότερο. Μπορεί να οφείλονται σε διάφορες ελλείψεις ή αδυναμίες. Έτσι διαπιστώθηκαν:

- *Λάθη στη θεσιακή αξία:* Σύμφωνα με τον Orton (1992), δυσκολίες στην κατάκτηση αυτής της έννοιας γίνονται συνήθως φανερές: (α) με τη δυσκολία του παιδιού να διακρίνει το μεγαλύτερο/μικρότερο μεταξύ δύο αριθμών, που αποτελούνται από τα ίδια ψηφία (π.χ. 152-125), (β) με την αδυναμία αναγνώρισης της αξίας ενός ψηφίου

ανάλογα με τη θέση του σε αριθμούς (π.χ. το 5 στους αριθμούς 25, 512 και 51), (γ) με την απόδοση αριθμών, όπως ακούγονται στην ανάγνωσή τους (π.χ. το 432 με τη μορφή 400302) και (δ) με την αδυναμία σχηματισμού του μεγαλύτερου ή του μικρότερου από δύο ή περισσότερα ψηφία (π.χ. με τα ψηφία 8, 2, 9 το 289 και το 982).

Η θεσιακή αξία και οι υπολογισμοί στο δεκαδικό σύστημα, αναμφισβήτητα είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες που πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως. Η κατανόηση της θεσιακής αξίας βοηθά τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις αριθμητικές σχέσεις και το *πώς* και το *γιατί* των διαδικασιών υπολογισμού (Van de Walle, 2004). Οι Jordan και Hanich (2000) βρήκαν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά είχαν φτωχότερη κατανόηση της θεσιακής αξίας συγκρινόμενοι με τους μαθητές τυπικής επίδοσης (Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Hanich et al., 2001· Jordan & Hanich, 2000).

Στην παρούσα μελέτη, 44 από τους 62 μαθητές (71%) έκαναν λάθη στη θεσιακή αξία, τοποθετώντας τα ψηφία τυχαία στις στήλες των Εκατοντάδων, Δεκάδων, Μονάδων (Ε, Δ, Μ), ενώ συχνό (18 στους 62 μαθητές- 29%) ήταν και το φαινόμενο της αδυναμίας διάκρισης του μεγαλύτερου μεταξύ δύο αριθμών με ίδια ψηφία (π.χ. 14 και 41). Επίσης, όπως φάνηκε από τη χορήγηση του τεστ ΖΑΡΕΚΙ, οι 21 από τους 49 μαθητές της έρευνας (43%) έκαναν λάθη στη γραφή αριθμών (π.χ. το 120 ως 10020).

- *Λάθη με το μηδέν (0)*: πολλοί ήταν οι μαθητές (33 από τους 62 –53%) που αντιλαμβάνονται το μηδέν (0) ως “*τίποτα*” ή αγνοούν την αξία του ως ψηφίο ενός αριθμού (θεσιακή αξία). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρούνται λάθη τόσο στην τοποθέτηση του σε στήλες θεσιακής αξίας, όπου το μηδέν (0) αγνοείται όσο και στην εκτέλεση των πράξεων. Έτσι:

στην πρόσθεση $34+20$: «0 και 4 ... 0 γράφουμε το 0... 3 και 2... 5... 50»

στην αφαίρεση $65-40$: «... 5 βγάζω το 0 μας κάνει 0... 6 βγάζω 4... 2... 20...».

- *Αλγοριθμικά λάθη – Λάθη με τα “κρατούμενα” και τα “δανεικά”*: Οι Geary, Hoard και Hamson (1999) αναφέρουν ότι υπολογιστικά λάθη μπορεί να προέλθουν και από δυσκολίες που αφορούν τη σωστή αντίληψη και διάκριση μέσα στον χώρο της

διάταξης και της μορφής των αριθμών και των πραξιακών συμβόλων που συμμετέχουν σε μια πράξη. Οι δυσκολίες αυτές αποδίδονται σε διαταραχές της οπτικο-χωρικής αντίληψης και οπτικο-κινητικής μνήμης και ολοκλήρωσης, οι οποίες είναι καίριο στοιχείο του προφίλ των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών. Επίσης, σε έρευνες συχνά αναφέρονται λάθη κατά την εκτέλεση των πράξεων, που προκύπτουν από σφάλματα στο δανεισμό δεκάδας κατά την αφαίρεση “δανεικό”, στην υπέρβαση της δεκάδας “κρατούμενο” κατά την πρόσθεση και στη λειτουργία του μηδενός (0) (Bryant, Bryant, & Hammil, 2000· Αγαλιώτης, 2000).

Σε όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρατηρήθηκαν λάθη στην εκτέλεση των αλγόριθμων των πράξεων. Ένας μικρός αριθμός μαθητών (οι 11 από τους 62 μαθητές –18%), ολοκλήρωσε κάθετες προσθέσεις με “κρατούμενο” και έκανε λάθη στις περισσότερες από τις αφαιρέσεις που κλήθηκε να εκτελέσει. Οι έννοιες “κρατούμενο” στην πρόσθεση, όταν υπάρχει υπέρβαση της δεκάδας και “δανεικό” στην αφαίρεση, όταν απαιτείται ο δανεισμός δεκάδας από μονάδα ανώτερης τάξης, αποτελούν έννοιες που δύσκολα κατανοούνται από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Σε κάθετες προσθέσεις :

$12+8=11$: «... 2 και 8 (μετράει με τα δάχτυλα)... 10... γράφω το 1 (στη θέση των μονάδων) και κρατάω το 0 (στη θέση των κρατούμενων)... κάτω και το 1... άρα 11!»

$34+19=413$: «... 9 και 4... 13 (γράφει το 13)... 3 και 1... 4... 413»

$23+3=76$... «3 και 3... 6... ένα το κρατούμενο... (το σημειώνει πάνω από το 2)... 2 οι 3... 6... κι ένα το κρατούμενο 7... 76»

$34+7=31$: «7 και 4... 11... γράφω 1 και το κρατούμενο (απλά το λέει)... κατεβάζω και το 3)

$176+15=281$: «... (άρχισε από αριστερά)... 1 από 0... 1, 7 από 1... 8, 6 και 5 (μετράει)... 11... γράφω το 1 και το κρατούμενο (σβήνει το 1 που είχε γράψει αριστερά και το κάνει 2)»

Σε κάθετες αφαιρέσεις :

$34-28=14$: «... 4 βγάζω 8... θα πω 8 βγάζω 4... 4... 3 βγάζω 2... (με δάχτυλα)... 1»

60-15=55: «... παίρνω 1 από το 6 (διαγράφει το 0 και γράφει από πάνω 10)...

10 βγάζω 5... 5, 6 βγάζω 1... 5... 55»

145-88=141: «... (άρχισε από αριστερά... κατεβάζει το 1 από το 145)... 8 βγάζω

4... 4... απ' το 5 θα κατέβω 8 αριθμούς... (σκέφτεται)... άμα το κάνουμε αυτό

θα βγει σύνολο 1....»

281-164=435: «... (σβήνει το 1 στο 281, γράφει από πάνω 11 και το κυκλώνει)... 4

και 1... 5... 8 βγάζω 6... (μετράει στα δάχτυλα 8,7,6...)... 3... 2 και 1 κι ένα το

κρατούμενο... 4... 435»

Ειδικότερα, στις κάθετες αφαιρέσεις, κανένας από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, δεν μπόρεσε να τις εκτελέσει χωρίς λάθη, σε όλες τις δοκιμασίες στις οποίες υποβλήθηκε. Από την επεξεργασία των δεδομένων των μαθητών προέκυψαν λάθη στην αντιστροφή των ψηφίων (αφαίρεση του ψηφίου του μειωτέου από το ψηφίο του αφαιρετέου), παράλειψη του “δανεικού”, τοποθέτηση του “δανεικού” σε λάθος θέση, δανεισμό εκεί που δε χρειάζεται και αδυναμία δανεισμού από το μηδέν (0).

3. Η επίλυση προβλημάτων

Οι δυσκολίες και τα λάθη που παρατηρούνται στην επίλυση προβλημάτων έχουν άμεση σχέση με τα λάθη που εντοπίστηκαν και στους προηγούμενους τομείς, αφού η επίλυσή τους απαιτεί την ικανότητα εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων που απαιτούνται. Η επίλυση των αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων έχει θεωρηθεί σημαντικός τομέας του ελλείμματος στα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Miller & Mercer, 1997· Mercer & Miller, 1992). Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία είτε με την αναπαράσταση του προβλήματος είτε με τον προσδιορισμό των σχετικών πληροφοριών, παράλληλα με δυσκολίες στην ανάγνωση, τον υπολογισμό και τον προσδιορισμό των πράξεων (Parmar, Cawley & Frazita, 1996).

Επίσης, σύμφωνα με τους Παντελιάδου και Μπότσα (2007), οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες αντιμετωπίζουν έντονα προβλήματα στη γενίκευση, δηλαδή, στην αναγνώριση της ομοιότητας του προβλήματος με άλλα του ίδιου είδους τα οποία και κατηγοριοποιούν, εφαρμόζοντας συγκεκριμένη διαδικασία

επίλυσης. Οι μαθητές αυτοί δυσκολεύονται πολύ στην κατηγοριοποίηση αυτή των προβλημάτων. Οι Fuchs et al. (2008) αναφέρουν ότι, εκτός από τα σύνθετα προβλήματα, δυσκολεύονται να κατηγοριοποιήσουν ακόμα και προβλήματα που σχετίζονται άμεσα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Οι Fuchs και Fuchs (2002) συνέκριναν τις επιδόσεις μαθητών σε τρεις τύπους προβλημάτων: απλά προβλήματα, σύνθετα προβλήματα που περιλάμβαναν και άσχετες πληροφορίες και προβλήματα καθημερινότητας με άσχετες πληροφορίες. Και στις τρεις κατηγορίες οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες εμφάνισαν μεγάλα ελλείμματα κι αδυναμίες. Σύμφωνα με τους ίδιους, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά παρουσιάζουν έντονα μεταγνωστικά προβλήματα, που αφορούν συνήθως την λανθασμένη πρόβλεψη, τη χαμηλή παρακολούθηση και αυτορρύθμιση και τη μη ορθή αξιολόγηση του αποτελέσματος (Desoete, Herbert, Royers & Buysse, 2001).

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, από τα αποτελέσματα των δοκιμασιών που ολοκλήρωσαν, φαίνεται να παρουσιάζουν πολλές δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων. Στις δοκιμασίες με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Α' και της Β' τάξης και στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ υπήρχαν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και δύο σύνθετα προβλήματα. Στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ, οι 26 από τους 49 μαθητές (53%) δεν μπόρεσαν να λύσουν σωστά κανένα πρόβλημα, ενώ μόνο 4 μαθητές έλυσαν τα 4 από τα 6 προβλήματα του τεστ. Οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών ήταν τυχαίες όσον αφορά τις πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος. Επίσης, 45 από τους 62 μαθητές (73%) δεν κατανόησαν τις έννοιες *“περισσότερο”* και *“λιγότερο”* που περιείχονταν στην εκφώνηση των προβλημάτων. Η ύπαρξη συνοδών μαθησιακών δυσκολιών και στη γλώσσα δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές σχετικά με την κατανόηση των προβλημάτων. Επίσης, παρατηρήθηκε η προσκόλληση μαθητών σε λέξεις κλειδιά, ενδεικτικές της πράξης που έπρεπε να επιλέξουν. Για παράδειγμα:

Στο πρόβλημα: «Ο φούρνος της γειτονιάς πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες. Την Τρίτη πούλησε 5 περισσότερες. Πόσες τυρόπιτες πούλησε την Τρίτη;»

«... αφαίρεση θα κάνουμε... σίγουρα»

«Πώς το ξέρεις;»

«... αφού λέει [πούλησε], κύριε...»

«... 5 τυρόπιτες πούλησε... αφού το γράφει...» ή

Στο πρόβλημα: «Η Ελένη και η μαμά φτιάχνουν μπισκότα. Η μαμά έφτιαξε 38 μπισκότα και η Ελένη 15. Πόσα έφτιαξαν και οι δύο μαζί;»

«Μου φαίνεται ότι θα κάνουμε αφαίρεση...»

«Γιατί;»

«... γιατί είναι πρώτο το μεγάλο το 38 και μετά το 15... γι' αυτό...»

Στο πρόβλημα: «Ο Πέτρος είχε 3 μήλα. Η Άννα του έδωσε 5 μήλα. Πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα;»

«... θα έχει 2 μήλα...»

«Πώς το βρήκες;»

«Εύκολα... έκανα αφαίρεση... αφού λέει [έδωσε]...»

Στο πρόβλημα: «Στο ψυγείο υπάρχουν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 κι ο αδερφός μου 5. Πόσα έμειναν στο ψυγείο;»

«... πρόσθεση θα κάνω... 14 και 3 και 5... ωχ! Πώς θα τα κάνω και τα τρία μαζί ;»

«... αφαίρεση θα κάνουμε... αφού λέει ότι έφαγα 3... έτσι θα γράψω 14 βγάλω 3... (το γράφει)...»

5.4. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων - Λάθη των μαθητών μετά την παρέμβαση

Μια διδακτική παρέμβαση σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά πρέπει να αποσκοπεί στην ευχέρεια και ακρίβεια των βασικών αριθμητικών δεδομένων, στην εξέλιξη ώριμων και αποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης, στην ανάπτυξη ορισμένων από τις θεμελιώδεις αρχές της μαθηματικής γνώσης, όπως ο υπολογισμός και η σύγκριση μεγεθών και στην ικανότητα επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Τα ερευνητικά δεδομένα (Ενδεικτικά: Goldsby, 2009· Roberts, 2007· Moyer & Jones, 2004· Moyer, 2001· Kilpatrick, Swafford, Findel, 2001) δεν προτείνουν έναν τρόπο οικοδόμησης της μαθηματικής επάρκειας στους μικρούς μαθητές. Ουσιαστικά υποδεικνύουν ότι ορισμένες διαφοροποιημένες διδακτικές προσεγγίσεις, θα μπορούσαν να λειτουργήσουν καλύτερα σε μερικές υποομάδες μαθητών (Fuchs et al., 2004). Επειδή η ευχέρεια και η ακρίβεια με τους

αριθμητικούς υπολογισμούς απαιτούν τη χρήση ώριμων στρατηγικών, η διδασκαλία και η καθοδήγηση για τη χρήση στρατηγικών είναι κρίσιμη.

Η ανάγκη για διαφοροποιημένη παρέμβαση τονίζεται επίσης από τα ευρήματα των Gersten et al. (2004), ότι στα μικρά παιδιά η ικανότητα μέτρησης και η αίσθηση των αριθμών αναπτύσσονται σχετικά ανεξάρτητα. Οι μετα-αναλύσεις των Baker, Gersten και Lee (2002) και των Gersten et al. (2009) έχουν δείξει πολλές υποσχόμενες κατευθύνσεις: τη χρήση δομημένης συνεργατικής διδασκαλίας, τη χρήση πολλών αναπαραστάσεων και τη χρήση χειραπτικού υλικού. Πολλές από αυτές τις μελέτες έχουν ασχοληθεί μόνο με αριθμητικούς υπολογισμούς ή μαθηματικά προβλήματα.

Οι μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνα, έδειξαν να επηρεάζονται από τη διδακτική παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικού υλικού και να κατανοούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Αυτό περιγράφεται και στις προαναφερόμενες μελέτες περίπτωσης σε ατομικό επίπεδο. Φαίνεται πως η αναπαράσταση με το υλικό, βοήθησε τους μαθητές να προχωρήσουν σε εννοιολογική κατανόηση και να διορθώσουν ή να απαλείψουν πολλά από τα λάθη τους στα μαθηματικά.

Σχετικά με την ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων, τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά αφορούν στη μετάβασή τους από την εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών σε πιο σύνθετες στρατηγικές, καθώς και στην ικανότητα για αυτόματη ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007).

Από τα στοιχεία των συνεντεύξεων με τους εκπαιδευτικούς και τα Φύλλα Παρατήρησης που συμπληρώθηκαν τόσο στο Τ.Ε. όσο και στη γενική τάξη, καταγράφηκε πλούσιο υλικό που αναδεικνύει τον τρόπο σκέψης των μαθητών την ώρα της διδακτικής αξιοποίησης του χειραπτικού υλικού, καθώς και την εννοιολογική αλλαγή, η οποία παρατηρήθηκε στις δράσεις και μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών. Ειδικότερα, κατανέμοντας τα ποιοτικά στοιχεία της διδακτικής παρέμβασης στους τρεις τομείς της μαθηματικής γνώσης που εξετάσαμε, επιλέχθηκαν χαρακτηριστικοί διάλογοι των μαθητών με τον ερευνητή και τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα, οι οποίοι αναδεικνύουν την

πορεία της σκέψης των μαθητών μέσα από τη χρήση του χειραπτικού υλικού στην ολοκλήρωση αριθμητικών υπολογισμών και πράξεων καθώς και στην επίλυση προβλημάτων.

1. Ευχέρεια στην εύρεση και ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.)

Στον συγκεκριμένο τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης σπουδαίο ρόλο παίζει η χρήση από τους μαθητές στρατηγικών μέτρησης και υπολογισμού. Οι τυπικοί μαθητές, όταν κάνουν προσθέσεις με δύο μονοψήφιους αριθμούς (π.χ. $4 + 3$), χρησιμοποιούν συνήθως τη μέτρηση με τα δάχτυλα (*στρατηγική απαρίθμησης δαχτύλων*). Σύμφωνα με τους Παντελιάδου και Μπότσα (2007), ταυτόχρονα με τη χρήση ή όχι των δαχτύλων, μπορούν να εφαρμόσουν και δύο άλλες στρατηγικές εύρεσης αθροισμάτων: α) τη *στρατηγική της απαρίθμησης όλων* (π.χ. ο μαθητής ξεκινά να μετρά από το 1 για να βρει το άθροισμα $4+3$) και β) τη *στρατηγική συνέχισης της απαρίθμησης* (π.χ. ο μαθητής ξεκινά να αριθμεί από το 4, για να βρει το άθροισμα $4+3$).

Ταυτόχρονα, η χρήση των στρατηγικών μέτρησης έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αναπαραστάσεων στη μνήμη για τα βασικά αριθμητικά δεδομένα. Μόλις σχηματιστούν αυτές οι αναπαραστάσεις στη μακροπρόθεσμη μνήμη, υποστηρίζουν τη χρήση διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων που βασίζονται στη μνήμη. Η πιο συνηθισμένη απ' αυτές είναι η *άμεση ανάκληση* αριθμητικών δεδομένων και η *ανασύνθεση*.

Με την άμεση ανάκληση τα παιδιά δηλώνουν μια απάντηση που συνδέεται με την μακροπρόθεσμη μνήμη, όταν το πρόβλημα παρουσιάζεται, όπως με το να λένε οκτώ (8), όταν τους ζητηθεί να απαντήσουν στο «πόσο κάνει $5+3$ ». Η *ανασύνθεση*, περιλαμβάνει την ανακατασκευή της απάντησης με βάση την ανάκτηση ενός μερικού αθροίσματος. Για παράδειγμα, το πρόβλημα $6+7$ θα μπορούσε να λυθεί με την ανάκτηση της απάντησης $6+6$ και στη συνέχεια προσθέτοντας 1 στο μερικό άθροισμα (Siegel, 1989).

Οι Torbeyn, Verschaffel και Ghesquiere (2004) επισημαίνουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά χρησιμοποιούν στρατηγικές “*επιφανειακής επεξεργασίας*”, όπως οι στρατηγικές μέτρησης με τα δάχτυλα, χωρίς να μπορούν να

τις εξελίσσουν σε “στρατηγικές βαθιάς επεξεργασίας”. Αντιθέτως, οι τυπικοί μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές, οι οποίες σταδιακά εξελίσσονται από στρατηγικές «επιφανειακής επεξεργασίας» σε στρατηγικές «βαθιάς επεξεργασίας». Δυστυχώς οι μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά καθυστερούν σε αυτή τη μετάβαση. Συνεχίζουν να βασίζονται στη μέτρηση με τα δάχτυλα και μετά από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, με μεγάλη δυσκολία προχωρούν στην ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων, ενώ σημειώνουν και πολλά υπολογιστικά λάθη, όσον αφορά την ακρίβεια αλλά και την ταχύτητα στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων (Geary, 2004).

Σημαντική είναι, στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται, η κατανόηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, κυρίως στην αποτελεσματική χρήση της στρατηγικής μέτρησης προς τα πάνω, αφού οι μαθητές ξεκινούν από τον μεγαλύτερο αριθμό. Από το υλικό, οι ράβδοι Cuisenaire και ο οριζόντιος άβακας βοήθησαν τους μαθητές της έρευνας, να κατανοήσουν ότι η αλλαγή της σειράς των προσθετέων σε ένα άθροισμα μπορεί να οδηγήσει σε ταχύτερη ολοκλήρωση της πρόσθεσης:

Για παράδειγμα, στο άθροισμα $5+3$ με τις ράβδους:

«Κυρία κοίτα!... πριν είχαμε το 5 (δείχνει τη ράβδο) και το 3 (δείχνει τη ράβδο) και βρήκαμε 8. Τώρα ανάποδα, πρώτα το 3 και μετά το 5 και βρήκαμε πάλι 8! »

Στην άσκηση στο τεστ Β' με τη συμπλήρωση των συμβόλων ($>$ $=$ $<$) στο $7+3$ ____ $3+7$:

Κ: (παίρνει τον οριζόντιο άβακα)... 7 (μετράει)... και 3... μας κάνει 10...

Ε: Κάνε από κάτω και το άλλο...

Κ: Για να δούμε... μετρώ 3... και άλλα 7 από την άλλη... 10 βρήκαμε το ίδιο... είναι ίσα, είναι σαν να γράφουμε τα νούμερα ανάποδα...!

Η Μαρία επέμενε να κάνει τις προσθέσεις με τη σειρά που είναι γραμμένες, δηλαδή, ξεκινώντας πολλές φορές από τον μικρότερο αριθμό (π.χ. $3+7=10$ κι όχι $7+3$ που είναι πιο πρακτικό). Με την αριθμογραμμή λοιπόν:

Ε: Για να δούμε τι λέει η άσκηση Μαρία...

Μ: Λέει να βρούμε $3+8$... (παίρνει την αριθμογραμμή του 20)... πάμε στο 3 (βάζει το δάχτυλό της στο 3) και μετράμε... 4, 5, ... 11... φτάσαμε στο 11.

Ε: Να το κάνουμε και ανάποδα τώρα, δηλαδή $8+3$;

Μ: *Ναι... πάμε στο 8... θα ανεβούμε 3... 9, 10, ... 11... πάλι 11 βρήκαμε...*

Ε: *Ποιο σου φαίνεται πιο εύκολο;*

Μ: *Να ξεκινήσουμε από το 8 και να ανεβούμε 3...*

Το χειραπτικό υλικό έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να “ξεφύγουν” από την παγιωμένη και αναποτελεσματική στρατηγική της μέτρησης δαχτύλων και να υπολογίζουν απλά αθροίσματα και διαφορές με έναν δημιουργικό και αναπαραστατικό τρόπο, που τους βοήθησε να κατανοήσουν την έννοια των αριθμών. Η ζυγαριά μέτρησης, οι ράβδοι Cuisenaire, τα ντόμινο πράξεων και η αριθμογραμμή, μέσα από τα Φύλλα Εργασίας και την άμεση καταγραφή των αριθμητικών αποτελεσμάτων στο χαρτί, οδήγησε σταδιακά τους μαθητές της έρευνας να αυτοματοποιήσουν τα βασικά αριθμητικά δεδομένα, κυρίως στην πρώτη δεκάδα και σε εκτενέστερο χρόνο στην εικοσάδα. Ταυτόχρονα, άρχισαν να χρησιμοποιούν όλο και λιγότερο τα δάχτυλά τους στον υπολογισμό. Σύμφωνα με αναφορές εκπαιδευτικών του Τ.Ε. και των γενικών τάξεων:

«Μέσα από τη συχνή και καθημερινή εξάσκηση σε πράξεις με τη ζυγαριά, η μαθήτριά έκανε λιγότερα λάθη στους υπολογισμούς, αλλά μερικές φορές χρησιμοποιούσε και τα δάχτυλά της. Τώρα υπολογίζει προσθέσεις και αφαιρέσεις στη Δεκάδα, χωρίς να σημειώνει λάθη και χρησιμοποιεί όλο και λιγότερο τα δάχτυλά της, όταν δυσκολεύεται να υπολογίσει».

«Με τις ράβδους κατάφερε να ξεφύγει από την τεχνική των δαχτύλων και να αντιμετωπίσει τους αριθμούς συμβολικά και αυτοματοποιημένα».

«Άρχισε να μη χρησιμοποιεί τα δάχτυλα, στα οποία έδειχνε εμμονή ακόμα και στα αθροίσματα και διαφορές κατά ένα».

«Η χρήση της ζυγαριάς ήταν ένα ευχάριστο και ξεκούραστο μέσο εκτέλεσης των πράξεων, που τον βοήθησε αρκετά στην κατανόηση του συμπληρώματος και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Η χρήση του συγκεκριμένου εποπτικού υλικού τον βοήθησε στην εκτέλεση πράξεων με δυο και τρεις προσθετέους (ο μαθητής από την αρχή της χρονιάς δυσκολευόταν στην πρόσθεση περισσότερων από δύο αριθμούς)».

«Ο μαθητής μέσα από αυτές τις εργασίες εξασκήθηκε ακόμη περισσότερο στους νοερούς υπολογισμούς προσθέσεων και αφαιρέσεων (πριν χρησιμοποιούσε αρκετά τα δάχτυλά του) και στην εύρεση συνόλων για τον σχηματισμό οποιουδήποτε αριθμού στην εικοσάδα».

«Νομίζω ότι ήταν ο πιο διασκεδαστικός τρόπος, για να κάνει προσθέσεις μέσα στην 20άδα και να εξασκείται στην επανάληψη και αυτοματοποίηση των ΒΑΔ».

2. Η σωστή εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων

Η απεικόνιση των αριθμητικών δεδομένων με το υλικό βοήθησε τα παιδιά στη γρήγορη και σωστή επίλυση των πράξεων παρακάμπτοντας προβλήματα όπως: η κατανόηση της αξίας του μηδενός (0), η σύγχυση πράξεων ή η παραβίαση της θεσιακής αξίας. Ο άυλος δανεισμός (τα παιδιά δανείζονται "κάτι" στον μειωτέο και το επιστρέφουν στον αφαιρετέο) κατά τη διάρκεια της αφαίρεσης με κρατούμενο, από το ψηφίο της διπλανής τάξης και το "κρατούμενο" στην πρόσθεση έλαβαν υλική υπόσταση με τη βοήθεια των ράβδων δεκαδικής βάσης και διόρθωσαν σε έναν πολύ μεγάλο βαθμό τα αλγοριθμικά λάθη των μαθητών στη συγκεκριμένη ενέργεια, μιας και τα παιδιά μπορούσαν να παρατηρήσουν την ανάλυση και τη σύνθεση της δεκάδας με χειροπιαστό τρόπο (Γκούμας, 2008).

Οι μαθητές της έρευνας με τη χρήση του χειραπτικού υλικού φαίνεται πως κατάφεραν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες, που εμπλέκονται στον αλγόριθμο προσθέσεων και αφαιρέσεων με προεξέχουσα την κατανόηση του "κρατούμενου" και του "δανεικού". Αν και οι περισσότεροι μαθητές έκαναν λάθη στη θεσιακή αξία των ψηφίων των αριθμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, με τη βοήθεια του υλικού έδειξαν να κατανοούν την αξία κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό. Η απεικόνιση των αριθμών με τη βοήθεια των κύβων δεκαδικής βάσης επέτρεψε στους μαθητές να τοποθετούν σωστά τα ψηφία διψήφιων και τριψήφιων αριθμών στις στήλες των Μονάδων (Μ), Δεκάδων (Δ) και Εκατοντάδων (Ε):

Η Βασιλική στην τοποθέτηση του 11 και του 26 σε στήλες Μ, Δ, Ε έχει βάλει το 11 στις Μονάδες:

E: Δείξε μου με τα κυβάκια το 26.

B: (αρχίζει να μετράει τα κυβάκια)... 26... ορίστε κύριε!

E: Σαν πολλά δεν είναι, Βασιλική; Πώς αλλιώς μπορούμε να τα δείξουμε;

B: (σκέφτεται) Α!... να πάρουμε αυτό (δείχνει τη Δ) και άλλα... (μετράει από το 11 ως το 26)... περίμενε κύριε... θα πάρω κι άλλο (παίρνει 2^η Δ)... και άλλα... 6! (Διορθώνει στην άσκηση το 26 και μετά και το 11)

Σύμφωνα με τις αναφορές του εκπαιδευτικού της τάξης και της εκπαιδευτικού του Τ.Ε.: «Με την καθημερινή εξάσκηση στην αναπαράσταση αριθμών με κύβους κατάφερε να συμπληρώνει ασκήσεις χωρίς βοήθεια και λάθη. Η χρήση κύβων βοήθησε τη Βασιλική στο να κατανοεί πλέον τη θεσιακή αξία των ψηφίων 2ψήφιων και 3ψήφιων αριθμών ξεχωρίζοντας πλέον με ευκολία τις Μ και Δ, που έπρεπε να υπολογίζει σε προσθέσεις-αφαιρέσεις».

Επίσης, να κατανοούν την έννοια του μηδενός (0):

Ο Ευθύμης μαθητής της Γ' τάξης, δυσκολευόταν να καταλάβει την αξία κάθε ψηφίου στη θέση που βρίσκεται μέσα στον αριθμό. Ιδιαίτερη δυσκολία είχε με το 0, που δεν του έδινε καμία σημασία με αποτέλεσμα να μην το βάζει σε καμία θέση (π.χ. στο 100 έβαλε το 1 στις Μ). Όταν έφτασε στο 40:

E: Για να δούμε πού θα βάλουμε το 40...

EY: έχει μόνο 4... θα το βάλουμε εδώ στο τέλος... (στις Μ)

E: Δείξε μου το 40 με τους κύβους

EY: Είναι 10... (δείχνει μια Δ)... και 10... 4 τέτοια... πώς τα είπαμε;

E: Σωστά! Πού είναι η στήλη τους;

EY: Εδώ... (στις Δ – βάζει εκεί το 4)...

E: Μονάδες έχουμε;

EY: Όχι! να βάλω το 0;

Στις κάθετες προσθέσεις οι μαθητές με τη βοήθεια των κύβων δεκαδικής βάσης για την αναπαράσταση των προσθετέων συνειδητοποίησαν την υπέρβαση της δεκάδας και τη δημιουργία ενός “κρατούμενου” που πρέπει να μεταφέρεται στην ανώτερη στήλη.

Στην κάθετη πρόσθεση $43 + 28$, ο Θανάσης:

Θ: ... λοιπόν θα πάρουμε για το 43... 4 δεκάδες και 3 μονάδες... (βάζει τους κύβους δίπλα στην κάθετη πράξη) και για το 28... 2 δεκάδες και 8 μονάδες...

Ε: Πολύ καλά! Ας κάνουμε τώρα την πρόσθεση!

Θ: ...4 και 2... 6 δεκάδες... 3 και 8... (τα βάζει όλα μαζί και τα μετράει)... 11 είναι... με 11 όμως φτιάχνουμε μία δεκάδα και μας μένει και ένα... άρα... οι δεκάδες είναι 7 και 1 μονάδα... 71!

Ε: Πολύ καλά, Θανάση! Πάμε να κάνουμε και την πρόσθεση τώρα...

Θ: ... είπαμε 3 και 8... 11... (σκέφτεται)... φτιάξαμε μια δεκάδα... αυτό είναι το κρατούμενο που γράφουμε, κύριε;

Ε: Ναι! Φτιάξαμε μια δεκάδα και τη βάζουμε με τις δεκάδες

Θ: Τώρα κατάλαβα...! Γι' αυτό το κρατούμενο το βάζουμε δίπλα και πάνω...!

Στην κάθετη πρόσθεση $64 + 36$, ο Δημήτρης:

Δ: 6 και 4... 9... όχι 10... γράφουμε τη μονάδα από πάνω και κάτω το 0.

Ε: Γιατί γράφουμε τη μονάδα από πάνω;

Δ: Για να μην την ξεχάσουμε...

Ε: Τι είναι αυτή η μονάδα;

Δ: Δεν ξέρω!

Ε: Πάμε να το κάνουμε με τα κυβάκια.

Δ: (αναπαριστά τους προσθετέους με Δ και Μ... και μετράει) 6 και 4... έχουμε κι εδώ 10 κυβάκια

Ε: Τι μπορούμε να τα κάνουμε; Βάλ' τα στη σειρά, τι σου θυμίζουν;

Δ: (σκέφτεται)... Α! είναι ένα από αυτά τα μεγάλα!

Ε: Αυτό, λοιπόν, δείχνει η μονάδα που έγραψες.

Δ: Αυτό θα το μετρήσω μαζί με τα άλλα... 6...7, 8, 9 και 1... 10!

Στην κάθετη πρόσθεση $34 + 19$, ο Παναγιώτης:

Ε: Πολύ καλά, Παναγιώτη. Μέτρησέ τα τώρα...

Π: 3 μεγάλα και 1... 4 μεγάλα...

Ε: Πόσα έχει το καθένα;

Π: (μετράει ξανά)... 10

Ε: Πώς να τα ονομάσουμε;

Π: Θα τα πούμε Δεκάρια!

Ε: Ωραία Δεκάρια ή Δεκάδες.

Π: Έχουμε 4 Δεκάρια και (μετράει)... 13 μικρά... άρα 413

Ε: Για κοίταξε τα μικρά... μπορούμε να φτιάξουμε κανένα Δεκάρι;

Π: (τα κοιτάζει)... νομίζω, ναι... (βάζει δέκα το ένα δίπλα στο άλλο) κι άλλο

Δεκάρι... τώρα έχω 5 Δεκάρια και 3 μικρά, άρα 53!

Ε: Ας τα βάλουμε και στον πίνακα στις στήλες που πρέπει.

Όπως φάνηκε στα αποτελέσματα των δοκιμασιών, ο αλγόριθμος της αφαίρεσης ήταν πολύ δύσκολο να κατανοηθεί από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Η συνήθης αλγοριθμική διαδικασία της αφαίρεσης στη γενική τάξη διδάσκει στους μαθητές τον δανεισμό μιας δεκάδας από τις δεκάδες ή από μονάδα ανώτερης τάξης για να γίνει η αφαίρεση και η μεταφορά της στον αφαιρετέο, όπου προστίθεται με τις δεκάδες του αφαιρετέου. Αυτή είναι η τεχνική των “*ίσων ποσοτήτων*”, η οποία είναι πολύ δύσκολο να κατανοηθεί από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, λόγω της μηχανικής φύσης της. Με τη χρήση του χειραπτικού υλικού και κυρίως των κύβων δεκαδικής βάσης και με την αναπαράσταση του μειωτέου με τους κύβους, οι μαθητές κατανόησαν τον δανεισμό της δεκάδας και την ανάλυσή της σε μονάδα κατώτερης αξίας με την τεχνική “*της αναδόμησης του μειωτέου*”, που αντιστοιχεί σε ενέργειες του “*πραγματικού κόσμου*”. Έτσι:

Στην κάθετη αφαίρεση 34-28 :

Θ: Θα πάρουμε ξανά τα κυβάκια... 34... άρα 3 δεκάδες και 4 μονάδες (τα βάζει)...
τώρα θα πάρω 28...

Ε: Πρόσεχε, Θανάση...! Εδώ έχουμε αφαίρεση... θα βγάλουμε...

Θ: Α! Ναι! Θα βγάλουμε... δύο δεκάδες (τις βγάζει)... όπα!... δεν γίνεται είναι 8...

Ε: Τι μπορούμε να κάνουμε;

Θ: (σκέφτεται)... έχουμε και τη δεκάδα... μπορούμε να την κάνουμε 10 κυβάκια
(μετράει)... σύνολο 14... τώρα μπορώ να βγάλω 8... (τα βγάζει)... μένουν 6!

Ε: Πολύ ωραία ! Να κάνουμε και την αφαίρεση τώρα;

Θ: ... 4 βγάζω 8... είπαμε δεν γίνεται...

Ε: Θυμήσου τι έκανες πριν που δεν είχες αρκετά κυβάκια για να βγάλεις...

Θ: Α! Ναι!... θα πάρω μια δεκάδα... (τον βοήθησα να σβήσει το 3 και να γράψει από πάνω 2)... και οι μονάδες θα γίνουν 10 και 4... 14... 14 βγάζω 8... είπαμε 6... γράφω το 6... 2... 2 δε θα πω τώρα;... 2 βγάζω 2... 0

Στην αφαίρεση 44-15:

Σ: Απ' το 4 να βγάλω 5 ;... δεν μπορώ... ???

Ε: Έχεις και το διπλανό 4... τις δεκάδες. Μήπως μπορείς να κάνεις κάτι μ' αυτές;

Σ: (σκέφτεται)... μήπως να πάρω μία... (δείχνει τις ράβδους/δεκάδες) και να την κάνω μικρά;

Ε: Για δείξε μου, τι θέλεις να κάνεις.

Σ: Θα πάρω μια απ' τις 4 και θα μείνουν 3... (με βοήθεια διαγράφει το 4 και γράφει 3 από πάνω)... τώρα έχω (μετράει)... 14... τώρα μπορώ να βγάλω το 5... (βγάζει 5 κυβάκια)... και μένουν 9... συνεχίζει στις Δ... 3 βγάζω 1... 2... όλο μαζί 29...!

Στην κάθετη αφαίρεση 60-15

Ε: Λοιπόν, Δημήτρη, έλα να κάνουμε την αφαίρεση.

Δ: Λοιπόν... 60... έχουμε 6 δεκάδες... 60... θα πάρουμε 6 δεκάδες (παίρνει 6 ράβδους)... ωραία... τώρα έχουμε αφαίρεση, άρα θα βγάλουμε... πόσα θα βγάλουμε... 15... δηλαδή 1 δεκάδα... (τη βγάζει) και 5 μονάδες... ωχ! Δεν έχω μονάδες... τι κάνω τώρα;

Ε: Θυμήσου τι κάνουμε στην αφαίρεση...

Δ: Δανειζόμαστε από τις δεκάδες και γράφουμε το 1 σε κύκλο!

Ε: Πάρε λοιπόν μία δεκάδα... τι μπορείς να κάνεις μ' αυτή;

Δ: ... (παίρνει μια δεκάδα)... θα τη χωρίσω σε 10 κομμάτια κι έτσι θα έχω περισσότερες μονάδες... τώρα έχω 5 δεκάδες και 10 μονάδες... τώρα θα βγάλω 15... 1 δεκάδα και 5 μονάδες... και μου έμειναν 4 δεκάδες δηλαδή 40 και 5 μονάδες... 45

Ε: Να γράψουμε και στο χαρτί τι κάναμε;

Δ: Ναι!... δανείστηκα μια δεκάδα... οι 6 έγιναν 5 (διαγράφει το 6 και γράφει από πάνω το 5) και οι μονάδες μου έγιναν 10... (βάζει πάνω από το 0 το 10)... 10

βγάζω τα 5 είπαμε 5... ναι αφού 5 και 5 είναι το 10... (γράφει το 5)... στις δεκάδες τώρα... 5 που έχουμε βγάζω μία... 4... 45 βρήκαμε!

Πολλά είναι τα σχόλια των εκπαιδευτικών, τόσο των γενικών τάξεων όσο και των εκπαιδευτικών των Τ.Ε., τα οποία συναινούν στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των μαθητών στις μαθηματικές πράξεις με τη χρήση του χειραπτικού υλικού:

«... διδάσκουν τα μαθηματικά με μια πραγματική υπόσταση... οι αριθμοί αποκτούν οντότητα και έτσι καταλαβαίνουν πολύ πιο εύκολα πώς γίνονται οι πράξεις...».

«Κατάλαβε για πρώτη φορά τι είναι το κρατούμενο στην πρόσθεση και πώς δανειζόμαστε στην αφαίρεση, όταν δε γίνεται...».

«Με τους κύβους, κατάλαβε τη σύνθεση της δεκάδας και το σπάσιμο (ανάλυση) σε μονάδες, πράγμα που την έκανε να κατανοήσει πώς να ολοκληρώνει κάθετες προσθέσεις και αφαιρέσεις. Τη βοήθησε πιο πολύ ο τρόπος με τη διαγραφή των ψηφίων του μειωτέου...».

«Με τους κύβους βοηθήθηκε πολύ στους αλγόριθμους της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και έμαθε να χρησιμοποιεί το κρατούμενο και το δανεικό, όπως και οι υπόλοιποι μαθητές, αν και στην αφαίρεση έδειχνε ιδιαίτερη προτίμηση στην αναδόμηση του μειωτέου».

3. Η επίλυση προβλημάτων

Σύμφωνα με τον Bryant (2005), σε δεξιότητες που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων, οι μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά παρουσιάζουν προβλήματα στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας και ιδιαίτερα, όταν συνυπάρχουν και μαθησιακές δυσκολίες στη γλώσσα. Οι συγκεκριμένοι μαθητές κατά την επίλυση των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων δυσκολεύονται ιδιαίτερα στην κατανόησή τους, στο να εντοπίζουν την άσχετη πληροφορία, όταν αυτή υπάρχει στην εκφώνηση του προβλήματος (Fuchs & Fuchs, 2002), στον εντοπισμό του ζητούμενου ιδιαίτερα όταν αυτό παρουσιάζεται στην αρχή κι όχι στο τέλος του προβλήματος (Garcia, Jimenez, & Hess, 2006) και στην επιλογή της σωστής πράξης, που το επιλύει (Rivera, 1997). Ειδικά στην περίπτωση που στη διαδικασία επίλυσης του

προβλήματος απαιτούνται πολλά βήματα, οι μαθητές με ΜΔ χρειάζονται εξωτερική καθοδήγηση, για να φτάσουν σε σωστό αποτέλεσμα (Geary, 2004).

Σύμφωνα με τους Παντελιάδου και Μπότσα (2007: 52), ένας άλλος τομέας όπου οι μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά αντιμετωπίζουν έντονα προβλήματα είναι στη γενίκευση. Πολύ συχνά, η ανάκληση από τη μνήμη μιας συγκεκριμένης διαδικασίας επίλυσης ενός σύνθετου λεκτικού αριθμητικού προβλήματος προϋποθέτει την αναγνώριση της ομοιότητας της επίλυσής του με άλλα όμοια προβλήματα. Οι μαθητές αυτοί δυσκολεύονται πολύ στην κατηγοριοποίηση αυτή των προβλημάτων. Σύμφωνα με τους Fuchs et al. (2008), εκτός από τα σύνθετα προβλήματα, δυσκολεύονται να κατηγοριοποιήσουν ακόμα και προβλήματα που σχετίζονται άμεσα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές με ΜΔ παρουσιάζουν έντονα μεταγνωστικά προβλήματα (Fuchs & Fuchs, 2002). Επισημαίνονται συνήθως με τη διάσπαση προσοχής και τη χαμηλή αυτορρύθμιση στη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης, αλλά και με την αδυναμία ελέγχου της ορθότητας του αποτελέσματος (Parmar, Cawley & Frazita, 1996). Σχετικά με την αξιολόγηση του αποτελέσματος, οι Parmar και Signer (2005) αναφέρουν ότι οι μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά παραλείπουν συστηματικά να ελέγξουν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν μετά την επίλυση ενός προβλήματος, ενώ λαμβάνουν ως σωστή την πρώτη απάντηση που δίνουν, χωρίς να την επανεξετάσουν ή χρησιμοποιούν ακατάλληλα κριτήρια για την ορθότητα των απαντήσεών τους.

Πολλά από τα στοιχεία που μας δίνει η έρευνα (Ενδεικτικά: Cirino, Fuchs, Elias, Powell & Schumacher, 2015· Fuchs, Seethaler et al., 2008· Smith, 2008· Kelly, 2006· Kroesbergen & Van Luit, 2003· Baker & Beisel, 2001· Marsh & Cook, 1996) παρατηρήθηκαν και στους μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη. Η δυσκολία στην κατανόηση των προβλημάτων φαίνεται από τις περιγραφές των εκπαιδευτικών των Τ.Ε., που κατέγραφαν τις παρατηρήσεις τους την ώρα που οι μαθητές προσπαθούσαν για την επίλυσή τους.

Από τα αποτελέσματα του τεστ ZAPEKI και των δύο δοκιμασιών με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα που χορηγήθηκαν στους μαθητές, επιβεβαιώνεται η αδυναμία των μαθητών να ακολουθήσουν τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος, ώστε να οδηγηθούν στην επίλυσή του. Η χρήση του χειραπτικού υλικού κατά την

επίλυση προβλημάτων, βοήθησε τους μαθητές να εικονοποιήσουν τα προβλήματα, να δραματοποιήσουν την κατάσταση που περιγράφεται, να επισημάνουν άσχετες πληροφορίες, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες (π.χ. περισσότερο, λιγότερο...), να αξιολογήσουν λέξεις-κλειδιά που μπερδεύουν και να εκτελέσουν την/τις πράξη/πράξεις που οδηγούν στην επίλυσή τους:

Στο πρόβλημα: «Μέσα σε ένα καλάθι είναι 14 μήλα. Ανβάλω ακόμη 3 μήλα πόσα θα είναι τα μήλα μέσα στο καλάθι;»

Μ: (κάνει χούφτα το χέρι της)... λοιπόν... έχω εδώ 14 μήλα... θαβάλω 14 κυθάκια (τα μετράει)... θαβάλω τώρα και άλλα 3... για να τα μετρήσω... 17

Ε: Πολύ καλά! Ας το γράψουμε τώρα...

Μ: (γράφει το 14 και το 3 και κάνει την πρόσθεση)

Στο πρόβλημα: «Ο φούρνος της γειτονιάς πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες. Την Τρίτη πούλησε 5 περισσότερες. Πόσες τυρόπιτες πούλησε την Τρίτη;»

Ε: Διάβασε το πρόβλημα...

Μ: (το διαβάζει)... λέει για το φούρνο... πούλησε 13 τυρόπιτες... θα τις δείξω... (παίρνει μία ράβδο Δεκάδας και τρεις κύβους)... 10 και 3... 13... την Τρίτη 5 περισσότερες... θα πάρω κι άλλα 5... για να δω πόσα είναι (μετρά)... 8 και 10... 18 τυρόπιτες πούλησε...

Ε: Τι πράξη θα γράψουμε;

Μ: Πρόσθεση ...

Στο πρόβλημα: «Ο Βαγγέλης μάζευε χρήματα στον κουμπαρά του. Όταν τον άνοιξε, είχε συγκεντρώσει 50 €. Πήγε σ' ένα μεγάλο κατάστημα με παιχνίδια και αγόρασε ένα επιτραπέζιο με 25 €. Πόσα ευρώ του έμειναν;»

Ε: Ας πούμε ότι εγώ έχω το κατάστημα κι εσύ ήρθες να αγοράσεις...

Μ: Δεν έχω λεφτά...

Ε: Πάρε τις ράβδους...

Μ: Ωραία, έχω 50... δηλαδή 5 μεγάλα... τι λέει πόσο κάνει το παιχνίδι... 25... θα σου δώσω (σκέφτεται)... 10, 20, 30... δεν έχω 5...

Ε: Τι μπορείς να κάνεις;

Μ: (σκέφτεται)... να θα πάρω αντί για το μεγάλο 10 μικρά...(το κάνει)... τώρα θα σου δώσω 10, 20 και 5... 25... για να δω τι μου έμεινε... (μετρά)... 10, 20,... 25

Ε: Να γράψουμε την πράξη που κάναμε;

Μ: Ναι... αφού δώσαμε, κάναμε αφαίρεση.

Στο πρόβλημα: «Στο ψυγείο υπήρχαν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 και ο αδερφός μου 5. Πόσα ροδάκινα έμειναν στο ψυγείο;»

Μ: Λοιπόν... ήταν 14 ροδάκινα... (βάζει μια Δεκάδα και 4 κυβάκια στο τραπέζι)... έφαγα 3... τα παίρνω (βγάζει 3)... έφαγε κι ο αδερφός μου, ο Νίκος, άλλα 5, τα βγάζω κι αυτά... ωχ! δεν έχω... θα αλλάξω τη δεκάδα με δέκα μικρά... τώρα μπορώ να τα βγάλω... έμειναν 6... 6 ροδάκινα...

Ε: Να το κάνουμε και με αριθμούς... με πράξεις

Μ: Ναι! Αφαίρεση θα κάνω... πήρα, έφαγα... (γράφει κάθετα $14-3$ και το λύνει)... 11 βρήκα... έφαγε κι ο Νίκος 5... 14... όχι... 11 βγάζω 5... (λύνει την αφαίρεση με δανεισμό)... 6

Ε: Για να το λύσουμε και με άλλον τρόπο. Πόσα φάγατε εσύ κι ο Νίκος μαζί;

Μ: Εγώ 3 και ο Νίκος 5... μαζί... (παίρνει κυβάκια)... 8... 8 φάγαμε...

Ε: Πόσα έμειναν;

Μ: Θα βγάλω... 14 βγάζω 8... (γράφει την πράξη κάθετα και τη λύνει)... 6... πάλι 6 βρήκα...

Από τις συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων σχετικά με την μαθησιακή αντιμετώπιση προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου, καταγράφηκαν πολλές απόψεις που σχετίζονται με τη μορφή του προβλήματος, τον κειμενικό λόγο που χρησιμοποιείται, καθώς και το περιεχόμενό του.

«Δυσκολεύεται να καταλάβει τι λέει το πρόβλημα, γιατί δεν μπορεί να το διαβάσει με ευκολία».

«Λύνει πιο εύκολα προβλήματα που έχουν εικόνα της κατάστασης που περιγράφεται, όπως σήμερα με τα αβγά που έσπασαν...».

«Όταν ο άγνωστος του προβλήματος είναι στην αρχή, όλα τα παιδιά – όχι μόνο ο Δημήτρης – δυσκολεύονται...».

«Κατανοεί και λύνει με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα που έχουν εικόνες για την κατάσταση που περιγράφουν...».

5.5. Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων – Αντιλήψεις εκπαιδευτικών και μαθητών

Πολλές ήταν οι απόψεις που καταγράφηκαν στις συναντήσεις του ερευνητή με τους εκπαιδευτικούς στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης μέχρι τη λήξη του διδακτικού έτους αλλά και στις συνεντεύξεις τους. Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί των Τμημάτων Ένταξης αποτυπώνουν έντονα στις απόψεις τους την ανάγκη τους για βοηθητικό υλικό στο υποστηρικτικό έργο τους. Σύμφωνα με όσα δήλωσαν, με τη βοήθεια του χειραπτικού υλικού μπόρεσαν να προσεγγίσουν βασικές μαθηματικές έννοιες με έναν πιο ελκυστικό και δημιουργικό τρόπο για τους μαθητές, οι οποίοι εκτελούσαν τις δραστηριότητες με μεγάλη ευχαρίστηση.

Οι μαθητές με τη βοήθεια των Φύλλων Εργασίας και την κατάλληλη υποστήριξη από τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. εξασκήθηκαν στη χρήση των υλικών και αναπαριστούσαν με ευκολία τις μαθηματικές έννοιες, προσεγγίζοντας με ανακαλυπτικό τρόπο τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Ταυτόχρονα οι εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων, στις αναφορές τους, αναγνώρισαν τη βελτίωση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στην επίδοσή τους στην τάξη και στην αλλαγή της μαθησιακής συμπεριφοράς που επέδειξαν οι συγκεκριμένοι μαθητές στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επιπροσθέτως, οι δύο εκπαιδευτικοί, που χρησιμοποίησαν για έναν περίπου μήνα το υλικό στη γενική τάξη, επισήμαναν την απρόσκοπτη αποδοχή του υλικού από όλους τους μαθητές, την αύξηση του ενδιαφέροντος για τη χρήση του αλλά και την επιτακτική ανάγκη της επιμόρφωσής τους για την ορθή χρήση του μέσα από διαφοροποιημένες προσεγγίσεις της διδακτικής πρακτικής.

Από την επεξεργασία των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στο ερωτηματολόγιο προκύπτουν σημαντικά ευρήματα:

Πρώτον, όσον αφορά την επάρκεια της κατάρτισής τους στη διδασκαλία των μαθηματικών και τη διαχείριση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, φαίνεται καθαρά ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών ενίσχυσε αφενός την αυτοπεποίθησή τους σχετικά με την διδασκαλία των μαθηματικών αλλά πολύ περισσότερο τις ικανότητές τους για τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας, ώστε

να μπορούν να την προσαρμόζουν σύμφωνα με τις απαιτήσεις και δυνατότητες κάθε μαθητή. Η αξιοποίηση του υλικού στις δύο γενικές τάξεις για το χρονικό διάστημα ενός έτους και από όλους τους μαθητές, κατέδειξε την ανάγκη όλων των μαθητών για την αναπαράσταση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από διαφοροποιημένες προσεγγίσεις, που τους εμπλέκουν ενεργά σε εμπράγματα μαθηματικές δραστηριότητες.

Δεύτερον, και σε σχέση με τη χρήση των υλικών, μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης είναι εμφανής η μετατόπιση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών. Η προσκόλληση σε παγιωμένες διδακτικές μεθόδους, που αποσκοπούν στη συνεχή εξάσκηση και αναποτελεσματική ολοκλήρωση αριθμητικών ασκήσεων, με ελάχιστη έως και περιορισμένη χρήση υποστηρικτικών “εργαλείων” που χαρακτήριζε τη διδασκαλία τους, έδωσε τη θέση της στην αντίληψη ότι η χρήση εκπαιδευτικών υλικών, που βοηθούν στην αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών, βελτιώνουν τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών και έγινε βασικό στοιχείο της διδακτικής τους πρακτικής.

Τρίτον, και σχετικά με τις πηγές από τις οποίες αντλούσαν στοιχεία για τη διδασκαλία τους, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους, το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί το κύριο στοιχείο της διδασκαλίας τους, ενώ μετά την επαφή με το υλικό μειώνεται δραστικά η χρήση εξωσχολικών υλικών και σημειώσεων/ασκήσεων και ενισχύεται η χρήση των φυσικών και δυνητικών υλικών.

Τέταρτον, όσον αφορά τις μαθηματικές ενότητες και έννοιες που θα βοηθούσε η χρήση των χειραπτικών, φαίνεται ότι υπήρξε μεγάλη διαφοροποίηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών στις έννοιες που θα μπορούσαν να υποστηριχτούν με τη χρήση υλικών. Πριν την παρέμβαση οι γεωμετρικές έννοιες, τα κλάσματα και η έννοια των αριθμών αποτελούσαν τις βασικές έννοιες που σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς μπορούν να διδαχτούν αποτελεσματικά με τη χρήση βοηθητικών εργαλείων (π.χ. σχήματα και στερεά, αντικείμενα που αναπαριστούν την ακέραια μονάδα, εικόνες που αναπαριστούν ποσότητες κ.ά.). Μετά την παρέμβαση και την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών με την υλική αναπαράσταση διευρύνθηκε το πεδίο των μαθηματικών εννοιών που θα βοηθούσε η χρήση των φυσικών και δυνητικών χειραπτικών υλικών με την προσθήκη μαθηματικών εννοιών και

διαδικασιών, όπως η υπέρβαση της δεκάδας, η αλγοριθμική διαδικασία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και η επίλυση προβλημάτων.

Τέλος, σημαντική ήταν και η διαφοροποίηση των απαντήσεων σχετικά με τους περιοριστικούς παράγοντες της χρήσης των υλικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η χρήση των υλικών επιβεβαίωσε τις αρχικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών ότι ο διδακτικός χρόνος των μαθηματικών είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί για την ένταξη ανακαλυπτικών δραστηριοτήτων με τη χρήση εκπαιδευτικών εργαλείων. Είναι ευδιάκριτο ότι η ύλη των μαθηματικών, όπως κατανέμεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και εξελίσσεται στο διδακτικό πρόγραμμα, δεν αφήνει πολλά χρονικά περιθώρια διδακτικής ευελιξίας στους εκπαιδευτικούς, ώστε να εφαρμόσουν νέες διδακτικές τεχνικές και προσεγγίσεις διαφοροποιημένης διδασκαλίας με τη χρήση χειραπτικών υλικών. Η γνωριμία των εκπαιδευτικών με το υλικό που χρησιμοποιήθηκε και η εφαρμογή του στην πράξη, άλλαξε τις απόψεις τους σχετικά με τη μη ύπαρξη κατάλληλου υλικού που να υποστηρίζει τη μαθηματική διδασκαλία και ότι δεν υπάρχει ανάλογο υλικό ή είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί. Επίσης, αντιλήψεις, όπως ότι μαθητές και εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους, μετά τη διδακτική παρέμβαση αναδομήθηκαν.

Συμπερασματικά, η χρήση του φυσικού και ψηφιακού χειραπτικού υλικού κυρίως στα Τμήματα Ένταξης, αλλά και στη γενική τάξη από τους εκπαιδευτικούς, επηρέασαν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, οι οποίοι, όπως φαίνεται τόσο από τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν μετά την παρέμβαση, αλλά και από τα όσα κατέθεσαν στις συνεντεύξεις τους, ξεπέρασαν τις όποιες αντιρρήσεις τους και αμφισβητήσεις της αποτελεσματικότητας των χειραπτικών υλικών και εξέφρασαν την ικανοποίησή τους για τη χρήση τους και την αποτελεσματικότητά τους. Ταυτόχρονα, αναδείχτηκαν και οι προθέσεις τους να εντάξουν το υλικό στην καθημερινή διδακτική πρακτική τους. Η ανάγκη υποστήριξης της διδασκαλίας τους με εκπαιδευτικό υλικό, που να διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών, φάνηκε στον τρόπο με τον οποίο εκφράστηκαν από τις πρώτες ημέρες της χρήσης του:

«Είναι ότι πρέπει για μια αλλαγή ρυθμού στα μαθηματικά ... αντί της καθημερινής διάλεξης, κάνεις ένα διάλειμμα από τη ρουτίνα. Σκέφτεσαι ότι τα μαθηματικά μπορεί να είναι διασκεδαστικά και όχι βαρετά».

«Διδάσκουν πραγματικά μαθηματικά με έναν διασκεδαστικό απόηχο».

«Νόμιζα ότι το υλικό αυτό είναι μόνο για διασκέδαση, αλλά τελικά μαθαίνουν πραγματικά μαθηματικά».

«Τα χρησιμοποιώ σχεδόν όλη την ώρα, όσο περισσότερο μπορώ».

«Τους δίνει κάτι που μπορούν να βλέπουν, να πιάνουν και να δουλεύουν μόνοι τους ή μαζί με άλλους ... δε χρησιμοποιούν μόνο χαρτί και μολύβι».

Επίσης, σημαντική ήταν η αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις και επιστημονικές των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης και των γενικών τάξεων. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

«Έδειξε μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και συμμετείχε πολύ περισσότερο στην εργασία της τάξης».

«Γενικά, με το υλικό μπόρεσε να αποκτήσει αυτοπεποίθηση γεγονός που συνοδεύτηκε με αλλαγή στάσης και μέσα στην τάξη όπου αισθανόταν πιο σίγουρη και συμμετείχε στις εκπαιδευτικές δραστηριότητες».

«Για πρώτη φορά στα μαθηματικά ζήτησε να σηκωθεί στον πίνακα να κάνει την πρόσθεση!».

Χρήσιμα συμπεράσματα προέκυψαν και από την ένταξη και αξιοποίηση του υλικού σε δύο γενικές τάξεις, όπου το υλικό ήταν διαθέσιμο για όλους τους μαθητές συμπεριλαμβανομένων και των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί των τάξεων βρήκαν πολύ υποστηρικτικό το υλικό για τους μαθητές. Οι αριθμογραμμές στα θρανία, η ζυγαριά μέτρησης, οι ράβδοι Cuisenaire, τα ντόμινο και οι κύβοι δεκαδικής βάσης χρησιμοποιήθηκαν με ευχαρίστηση από όλους τους μαθητές, ενώ οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αναλάμβαναν πρωτοβουλίες επίδειξης του υλικού στους συμμαθητές τους. Το χειραπτικό υλικό συνδυάστηκε με τις εργασίες των σχολικών εγχειριδίων και ενέπλεξε ενεργητικά όλους τους μαθητές σε εμπράγματα δραστηριότητες και

συνεργατική μάθηση. Οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με τους εκπαιδευτικούς, υπό το πρίσμα της αξιοποίησης του χειραπτικού υλικού ως διδακτικό εργαλείο για την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, είχαν συνεργατικό και ανακαλυπτικό χαρακτήρα και οδήγησαν στην ενίσχυση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και των αριθμητικών πράξεων και ανέπτυξαν τις δεξιότητες επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Συμπερασματικά, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικού υλικού μεταβάλλει το μαθησιακό περιβάλλον είτε της τάξης είτε του Τμήματος Ένταξης, σε ένα πεδίο ανακαλυπτικής μάθησης που προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπαραστήσουν και να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και να κατακτήσουν τη μαθηματική γνώση.

5.6. Περιγραφή Μελετών Περίπτωσης

Στη συγκεκριμένη έρευνα επιλέξαμε τρεις (3) μελέτες περίπτωσης με σκοπό να καλυφθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερο πεδίο δράσεων και γνώσης, ώστε να αποτυπωθεί το μέγεθος των αλλαγών τόσο στον τρόπο σκέψης όσο και στις επιδόσεις των μαθητών που συμμετείχαν μετά την παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικού υλικού. Οι συγκεκριμένοι μαθητές επιλέχτηκαν, καθώς εκπροσωπούν ομάδες μαθητών που παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά μέσα από την επεξεργασία όλων των στοιχείων που συλλέχθηκαν από τους εκπαιδευτικούς των Τμημάτων Ένταξης (Τ.Ε.), των γενικών τάξεων, από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. και από τις δοκιμασίες που τους χορηγήθηκαν.

Η **πρώτη** μελέτη περίπτωσης προέρχεται από μια ομάδα 16 μαθητών της Β' και Γ' τάξης, που εμφάνισαν παρόμοια μαθησιακή συμπεριφορά λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία που συλλέχτηκαν τόσο από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης και των γενικών τάξεων όσο και από τις επιδόσεις στις σταθμισμένες και άτυπες δοκιμασίες που συμπλήρωσαν. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων, τους ομαδοποιεί στο επίπεδο των επιδόσεων στα τεστ, αλλά και στο είδος των δυσκολιών μάθησης που εμφανίζουν αναλογιζόμενοι τις ομοιότητες στην εκτέλεση των ασκήσεων και τα είδη των λαθών που διέπραξαν. Επίσης, οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν εξεταστεί από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. και οι διαγνώσεις τους

ανέδειξαν ένα κοινό πεδίο ελλείψεων και αδυναμιών προτείνοντας συγκεκριμένους και παρόμοιους τρόπους αντιμετώπισης.

Η **δεύτερη** μελέτη περίπτωσης, που επιλέχτηκε για να αναλυθεί, αφορά έναν από τους 12 μαθητές της Α' τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα. Για τους μαθητές της Α' τάξης η φοίτησή τους στο Τμήμα Ένταξης (Τ.Ε.) ξεκινά μετά τον Ιανουάριο του διδακτικού έτους, όταν και τελειώνει το προγραφικό και προαναγνωστικό στάδιο, ενώ στα μαθηματικά έχουν ήδη διδαχθεί τις προμαθηματικές έννοιες. Η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών αποτελεί μια ιδιαίτερη ομάδα, επειδή οι όποιες μαθηματικές δυσκολίες βρίσκονται σε πρώιμο στάδιο και η διδακτική παρέμβαση κρίνεται σημαντική για την εκπαιδευτική πορεία των μαθητών. Τα στοιχεία που περιγράφουν τις γνωστικές αδυναμίες των μαθητών αυτής της ηλικίας προέρχονται κυρίως από τη φοίτησή τους στο νηπιαγωγείο.

Η **τρίτη** μελέτη περίπτωσης που εξετάζεται, αφορά μια μαθήτριά από τους 12 μαθητές της Δ' τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα. Ένας σημαντικός αριθμός μαθητών που βρίσκεται στα Τ.Ε. των γενικών σχολείων για την υποστήριξη γλωσσικών και μαθηματικών αδυναμιών τους, φοιτά σε μεγάλες τάξεις και συναθροίζει μαθηματικά ελλείμματα από μικρότερες τάξεις. Αυτή η ομάδα είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία μαθητών, αφού οι εκπαιδευτικές τους ανάγκες είναι σημαντικές, αν αναλογιστεί κανείς τις μαθηματικές απαιτήσεις των μεγαλύτερων τάξεων και την επιβάρυνση του γνωστικού τους φορτίου με νέες μαθηματικές έννοιες σημαντικές στην μαθησιακή τους πορεία. Σύμφωνα με έρευνες (Anstrom, 2006· Fuchs, & Fuchs 2002· Miller και Mercer, 1997· Cawley, Parmar, Yan, & Miller, 1996· Cawley & Miller, 1989· Swanson & Rhine, 1985· Fleischner, Garnett, & Shepherd, 1982) το γνωστικό επίπεδο των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά βρίσκεται δύο χρόνια πίσω τοποθετώντας τις μαθηματικές τους δεξιότητες στο επίπεδο μαθητών της Β' τάξης.

Επιπροσθέτως, η φοίτησή τους στο Τ.Ε. από μικρότερη ηλικία και η αδυναμία ένταξής τους στη γενική τάξη και στον κανονικό ρυθμό μάθησης, επιτείνει τα όποια προβλήματα τους, μιας και η σπειροειδής διάταξη της ύλης και οι υπερβολικές γνωστικές απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά δεν επιτρέπουν την κάλυψη του *‘χαμένου εδάφους’*, πολύ περισσότερο όταν η υποστήριξη των μαθηματικών δεξιοτήτων γίνεται σε διαφορετικό χώρο (π.χ. στο

Τ.Ε.) και ιδιαίτερα, όταν αυτό συμβαίνει την ώρα που η γενική τάξη διδάσκεται μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. στις περιπτώσεις αυτών των μαθητών επιφορτίζονται με την ευθύνη ενίσχυσης των μαθηματικών ικανοτήτων τους με τρόπο άμεσο και αποτελεσματικό, με στόχο την όσο το δυνατόν πληρέστερη και εκτενέστερη κάλυψη των διδακτικών τους αναγκών στα μαθηματικά. Στην τρίτη μελέτη περίπτωσης γίνεται προσπάθεια να σκιαγραφηθεί η εκπαιδευτική πορεία μιας μαθήτριας πριν, κατά και μετά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με το χειραπτικό υλικό, που εκπροσωπεί τους μαθητές της Δ' τάξης, δηλαδή, τους μεγαλύτερους ηλικιακά μαθητές της έρευνάς μας.

5.6.1. Μαθησιακό προφίλ των μαθητών

1^η Μελέτη Περίπτωσης

Ο Αντώνης, είναι μαθητής της Γ' τάξης σε δημοτικό σχολείο της Λαμίας. Σύμφωνα με τα στοιχεία που συλλέχτηκαν από τη συνέντευξη με τη δασκάλα της τάξης του, είναι ένα πολύ ήσυχο και συνεργάσιμο παιδί. Πρόσχαρος και αγαπητός δημιουργεί εύκολα φιλίες και έχει καλές σχέσεις με όλα τα παιδιά της τάξης. Στη διάρκεια του μαθήματος είναι πάντα ήσυχος και προσεκτικός, όμως πολύ σπάνια αναλαμβάνει την πρωτοβουλία να σηκώσει το χέρι του και να απαντήσει ακόμα και σε απλές ασκήσεις, που γνωρίζει τη λύση τους. Αποδίδει πολύ καλύτερα σε ατομικό επίπεδο. Έχει άγχος για τα μαθήματα, όμως έχει μεγάλη βοήθεια από τη δασκάλα μέσα στην τάξη. Οι συμμαθητές του στην κανονική τάξη αναγνωρίζουν καθημερινά τα προβλήματά του και έχει πλήρη αποδοχή, όπως και βοήθεια από αυτούς. Πολλές φορές του δείχνουν τι να κάνει και προσπαθούν να τον βοηθούν, όταν δυσκολεύεται. Αυτό φαίνεται ότι τις περισσότερες φορές τον ικανοποιεί, αν και δεν είναι λίγες οι φορές που δείχνει να τον ενοχλεί η βοήθεια. Σύμφωνα με τη δασκάλα της τάξης, αφενός η ελλιπής κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών στις σχέσεις των αριθμών και του αλγόριθμου των πράξεων και αφετέρου οι αυξημένες απαιτήσεις σε νοητικό επίπεδο της διδακτικής ύλης των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών, δυσκολεύουν τον Αντώνη στην επίτευξη των μαθηματικών στόχων. Οι γονείς του αποδέχονται τη δυσκολία του, αλλά δεν μπορούν να τον βοηθήσουν

είτε λόγω επαγγελματικών υποχρεώσεων (κυρίως του πατέρα) είτε λόγω της αδυναμίας τους να τον υποστηρίξουν στα μαθηματικά.

Οι περισσότερες δυσκολίες του, ειδικά στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, επισημάνθηκαν στο δεύτερο τρίμηνο της δευτέρας τάξης, όταν ο Αντώνης δυσκολευόταν να ακολουθήσει τον ρυθμό μάθησης των συμμαθητών του. Η δασκάλα της τάξης ενημέρωσε τους γονείς του μαθητή, οι οποίοι συμφώνησαν, αφού και οι ίδιοι είχαν διαπιστώσει μια δυσκολία στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και μια σημαντική καθυστέρηση στην ολοκλήρωση των σχολικών εργασιών. Επιπλέον, επισήμαναν και αρκετά στοιχεία, που δείχνουν να αντιδρά με φοβία τις φορές που πρέπει να ασχοληθεί με τα μαθηματικά και τα οποία τους οδήγησαν να ζητήσουν την αξιολόγηση του μαθητή από το οικείο ΚΕ.Δ.Δ.Υ. Η γνωμάτευση εκδόθηκε από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. τον Μάρτιο του 2012, δηλαδή δύο μήνες μετά την πρώτη επισήμανση των δυσκολιών του Αντώνη. Σύμφωνα με τη γνωμάτευση ο Αντώνης *παρουσιάζει σοβαρές ενδείξεις για «...στοιχεία άγχους και συνοδές μαθησιακές δυσκολίες»*. Η εισήγηση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. προτείνει τη φοίτησή του στο Τ.Ε. του σχολείου του για τρεις (3) ώρες την εβδομάδα, ώστε να υποστηριχτεί στα μαθηματικά.

Ο Αντώνης φοιτά στο Τμήμα Ένταξης του σχολείου του από το τέλος της δευτέρας τάξης. Από τα στοιχεία που κατέθεσε η εκπαιδευτικός του Τ.Ε., περιγράφονται επαρκώς οι μαθηματικές αδυναμίες του κυρίως στους τομείς της εκτέλεσης πράξεων και της επίλυσης προβλημάτων. Είναι προσκολλημένος σε αναποτελεσματικές στρατηγικές, όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα, ακόμα και σε απλές προσθέσεις ή αφαιρέσεις. Συχνά μπερδεύει τα σύμβολα των πράξεων, ενώ σε δύσκολες πράξεις με διψήφιους αριθμούς, δίνει τυχαίες απαντήσεις και δείχνει δυσφορία. Δε διακρίνει το μεγαλύτερο και το μικρότερο στη σύγκριση αριθμών και δεν χρησιμοποιεί το κατάλληλο σύμβολο. Δεν έχει αυτοματοποιήσει τις πράξεις μέσα στην πρώτη 20άδα, γεγονός που τον κάνει να μετρά συνεχώς με τα δάχτυλα. Δεν έχει κατανοήσει τη χρήση του κρατούμενου σε κάθετες προσθέσεις και πολύ περισσότερο τον δανεισμό της δεκάδας σε κάθετες αφαιρέσεις, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ολοκληρώσει τις αντίστοιχες ασκήσεις, αφού δεν μπορεί να κατανοήσει τον αλγόριθμο των βασικών μαθηματικών πράξεων. Τέλος,

δυσκολεύεται στην κατανόηση των δεδομένων λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων και στην επίλυσή τους.

2^η Μελέτη Περίπτωσης

Ο Δημήτρης είναι μαθητής της πρώτης τάξης σε περιφερειακό σχολείο της Λαμίας σε μια αγροτική περιοχή. Από το δημόσιο νηπιαγωγείο στο οποίο φοιτούσε, είχε δείξει ότι δυσκολευόταν να ακολουθεί τον ρυθμό πρόσκτησης της γνώσης των άλλων παιδιών της ηλικίας του. Σε γνωστικό επίπεδο υπολειπόταν σε σχέση με τα άλλα παιδιά γεγονός που οδήγησε την οικογένεια, με την παρακίνηση της νηπιαγωγού, να προγραμματίσει και να υλοποιήσει συνάντηση με το ΚΕ.Δ.Δ.Υ., στο οποίο εξετάστηκε ο μαθητής από διεπιστημονική ομάδα, η οποία και γνωμάτευσε προβλήματα λόγου και γενικευμένες μαθησιακές δυσκολίες για τον Δημήτρη (2011). Η εισήγηση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. πρότεινε την επαναφοίτηση του μαθητή στο νηπιαγωγείο «... προκειμένου να αποκτήσει την ψυχο-κοινωνικο-συναισθηματική ωριμότητα και αρτιότερη γνωστική ανάπτυξη που απαιτεί η φοίτησή του στην Α' Δημοτικού». Σε εφαρμογή της εισήγησης, ο Δημήτρης φοίτησε και την επόμενη χρονιά στο νηπιαγωγείο. Επαναπρογραμματίστηκε έλεγχος μετά από δύο χρόνια.

Σύμφωνα με τις περιγραφές της δασκάλας της Α' τάξης, που ήταν ενήμερη για την επαναφοίτηση του μαθητή στο νηπιαγωγείο και τις δυσκολίες του, πρόκειται για ένα προσεγμένο παιδί με αναπτυγμένες τις κοινωνικές του δεξιότητες σε ικανοποιητικό βαθμό. Είναι έξυπνος, με πολύ καλή αντίληψη και νοητικό επίπεδο. Συνήθως είναι χαρούμενος και προσιτός, πάντα ανήσυχος και κινητικός, ενώ δυσκολεύεται να συγκεντρώσει την προσοχή του σε δραστηριότητες, που δεν του είναι ευχάριστες, γεγονός που παρεμποδίζει τη διαδικασία της μάθησης. Όταν χρειάζεται να ολοκληρώσει τις εργασίες του κουράζεται εύκολα και βρίσκει τρόπους να σταματήσει την οποιαδήποτε προσπάθεια. Φαίνεται να μην ενοχλείται από κάποια προβλήματα λόγου που εμφανίζει κατά την εκφορά λέξεων. Η αδυναμία συγκέντρωσής του κατά τη διάρκεια του μαθήματος δημιούργησε αρκετά μαθησιακά κενά ιδιαίτερα στο μάθημα των μαθηματικών. Ο Δημήτρης χρειάζεται συνεχώς καθοδήγηση από τον δάσκαλο κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των ασκήσεων, καθώς η έντονη διάσπαση προσοχής που παρουσιάζει δεν τον αφήνει να συγκεντρωθεί. Το αποτέλεσμα είναι να σημειώνονται αρκετά και σοβαρά λάθη κατά

τους υπολογισμούς. Θεωρεί πάντα σωστή την πρώτη λύση που δίνει και μόνο μετά την παρέμβαση της δασκάλας του ξαναελέγχει το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγει. Μπορεί να λύνει απλά προβλήματα με βοήθεια για τον εντοπισμό των πράξεων.

Η αδυναμία του να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις της τάξης τον οδήγησε στην πρόταση της δασκάλας του να φοιτήσει στο Τ.Ε. του σχολείου για ενίσχυση και των γλωσσικών και των μαθηματικών του δεξιοτήτων, με τη σύμφωνη γνώμη της σχολικής συμβούλου ειδικής αγωγής. Η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. ήταν αναπληρώτρια εκπαιδευτικός, απόφοιτος του Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, η οποία τα τρία τελευταία χρόνια υπηρετεί στο συγκεκριμένο σχολείο. Στη συνέντευξη που μας έδωσε και στην περιγραφή της μαθησιακής συμπεριφοράς του, επιβεβαίωσε τις μαθηματικές αδυναμίες του Δημήτρη. Απαγγέλει και γράφει σωστά τους αριθμούς μέχρι το 100. Μπορεί να εκτελεί προσθέσεις και αφαιρέσεις με μικρούς αριθμούς. Δεν υπολογίζει νοερά, αλλά χρησιμοποιεί συνεχώς τα χέρια του (βάζει τον 1^ο προσθετέο στο μυαλό του και τον 2^ο στα δάχτυλα, από όπου αρχίζει και μετράει). Δείχνει προθυμία να ολοκληρώσει τις εργασίες του, αλλά ματαιώνεται εύκολα, όταν καταλαβαίνει ότι δεν μπορεί να τις εκτελέσει.

3^η Μελέτη Περίπτωσης

Η Τριανταφυλλιά είναι ένα συμπαθητικό και περιποιημένο παιδί. Έχει κάποια προβλήματα λόγου και ομιλίας που δυσχεραίνουν αρκετά τις επιδόσεις της στην τάξη και της ενισχύουν το συναίσθημα της χαμηλής αυτοπεποίθησης. Είναι αποδεκτή από τους συμμαθητές της, ενώ έχει και πολύ καλές φίλες, που τη βοηθούν μέσα στην τάξη. Στο μάθημα των μαθηματικών σπάνια συμμετέχει, παρόλο που παρακινείται από τη δασκάλα της και έχει και την ενθάρρυνση των συμμαθητών της. Δεν παίρνει πρωτοβουλίες για να απαντήσει ακόμα και σε εύκολες ασκήσεις. Της αρέσει η γεωμετρία και κάθε φορά που ασχολείται με σχήματα χαίρεται να χρησιμοποιεί τον χάρακα και τον γνώμονα. Είναι ήσυχη στη διάρκεια του μαθήματος και αντιγράφει απλά τις ασκήσεις και τις λύσεις τους από τη διπλανή συμμαθήτριά της. Η δασκάλα της είναι ιδιαίτερα υποστηρικτική με την Τριανταφυλλιά και όταν έχει χρόνο πάντα προσπαθεί να τη βοηθήσει εκεί που δυσκολεύεται. Γίνεται προσπάθεια να κατανοήσει βασικές μαθηματικές έννοιες και να μπορεί να εκτελεί με ευχέρεια πράξεις και να επιλύει απλά προβλήματα. Η

πρώτη επισήμανση των δυσκολιών της στα μαθηματικά ανιχνεύτηκε από την εκπαιδευτικό (αναπληρώτρια) που δίδασκε, όταν η Τριανταφυλλιά ήταν στη δευτέρα τάξη. Η αδυναμία της να ακολουθήσει τον μαθησιακό ρυθμό της τάξης και οι γνωστικές ελλείψεις της σε βασικές μαθηματικές έννοιες, οδήγησαν την εκπαιδευτικό να έρθει σε συνεννόηση με τους γονείς της και τελικά να προγραμματιστεί έλεγχος από το οικείο ΚΕ.Δ.Δ.Υ., ο οποίος και πραγματοποιήθηκε την επόμενη σχολική χρονιά, όταν η μαθήτρια φοιτούσε στην τρίτη τάξη. Προτάθηκε η φοίτηση της μαθήτριας στο Τ.Ε. για τρεις (3) ώρες την εβδομάδα για την ενίσχυση των μαθηματικών της γνώσεων.

Η Τριανταφυλλιά φοιτά στο Τ.Ε. του σχολείου της από τα μέσα της Γ' δημοτικού, αμέσως μετά την εισήγηση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. Από τις πληροφορίες που μας έδωσε η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. περιγράφονται όλες οι αδυναμίες της μαθήτριας, κυρίως στην εκτέλεση πράξεων και την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Φαίνεται να έχει μια επιφανειακή γνώση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκεται και με εξαίρεση τις γεωμετρικές έννοιες που δείχνει να έχει κατανοήσει, υστερεί στην κατανόηση και απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών, που απαιτούνται για την κατάκτηση δεξιοτήτων ανώτερου επιπέδου. Η διδακτική πορεία της, μέχρι την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης, αποσκοπούσε στην κάλυψη της ύλης του σχολικού εγχειριδίου με προσπάθειες επίλυσης των ασκήσεων που δεν είχε ολοκληρώσει στο μάθημα των μαθηματικών. Οι περιορισμένες μαθηματικές δεξιότητες της Τριανταφυλλιάς δυσκολεύουν την ολοκλήρωση των ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου.

Ακόμα κι όταν δε χρειάζεται, επιμένει να χρησιμοποιεί αναποτελεσματικές στρατηγικές για τον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων, όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα ή η αρίθμηση όλων. Από τα βασικά αριθμητικά δεδομένα γνωρίζει τα αθροίσματα στη δεκάδα και τα αθροίσματα όμοιων στην εικοσάδα, π.χ. $6+6$, $7+7$ κ.λπ.), όπως και τα αποτελέσματα της προπαίδειας μέχρι το 20. Κατανοεί απλά λεκτικά αριθμητικά προβλήματα μιας πράξης και συνήθως επιλέγει σωστά την πράξη που τα επιλύει, βασιζόμενη σε λέξεις του προβλήματος που τη βοηθούν (λέξεις – κλειδιά). Είναι χαρούμενη, όταν φεύγει από την τάξη για το Τ.Ε. και έχει δημιουργήσει μια πολύ καλή σχέση με την εκπαιδευτικό του Τ.Ε. η οποία την υποστηρίζει και τη βοηθά.

5.6.2. Στοιχεία πριν από την παρέμβαση

Και στις τρεις μελέτες περίπτωσης τα δεδομένα, που προέκυψαν από την ολοκλήρωση των σταθμισμένων και άτυπων δοκιμασιών από τους μαθητές πριν από την παρέμβαση, επιβεβαιώνουν τις μαθηματικές τους αδυναμίες. Στα επόμενα υποκεφάλαια, θα παρουσιάσουμε τα γενικά και ειδικά χαρακτηριστικά των μαθητών όπως παρουσιάζονται από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. και αναδείχτηκαν μέσα από τις απαντήσεις τους στα τεστ που τους χορηγήθηκαν. Τα δεδομένα προήλθαν από τη συμπλήρωση των τεστ Α' και Β' με βάση το Α.Π.Σ. και των σταθμισμένων τεστ ΖΑΡΕΚΙ και ΑΜΔΕ.

Η παρατήρηση της προσπάθειας των μαθητών να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητες των δοκιμασιών, οδήγησε στην καταγραφή των ποιοτικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών τους δυσκολιών η οποία επικεντρώθηκε στις μαθηματικές έννοιες που δεν είχαν κατανοήσει. Έτσι, διασαφηνίστηκε η πορεία του τρόπου σκέψης τους με τα δικά τους λόγια. Η γλαφυρότητα της περιγραφής τους ενδυναμώνει τις επιλογές των εκπαιδευτικών ως προς τα χειραπτικά υλικά, αλλά και το πώς θα έπρεπε να αναπροσαρμοστεί η διδασκαλία. Επιλέχτηκαν αποσπάσματα από τον τρόπο που εργάστηκαν στη διάρκεια της συμπλήρωσης των ασκήσεων και ειδικότερα σχετικά με τους τρεις μαθηματικούς τομείς που καθορίστηκαν πριν την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης για να υποστηριχτούν με τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Έτσι, καταγράφονται τα λάθη των μαθητών που αφορούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που είτε δεν είχαν κατανοηθεί είτε δεν μπορούσαν να ολοκληρώσουν, ώστε να αποτελέσουν στόχο της διδακτικής παρέμβασης και να υποστηριχτούν με τη χρήση και αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών. Πιο συγκεκριμένα μέσα από την επιλογή των διαλόγων που παραθέτονται σηματοδοτούνται οι μαθηματικές αδυναμίες των τριών μαθητών, οι οποίες εμφανίζονται στο σύνολο των μαθητών που εκπροσωπούν και παρουσιάζουν παρόμοια χαρακτηριστικά.

i. Από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ.

1^η Μελέτη: Σύμφωνα με τη γνωμάτευση του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. ο Αντώνης, «αν και είναι ένα παιδί που λειτουργεί νοητικά σε φυσιολογικό επίπεδο σε σχέση με άλλα παιδιά της

ηλικίας του, έχει περισσότερο αναπτυγμένη την πρακτική/ μη λεκτική νοημοσύνη από ότι τη λεκτική». Όπως προκύπτει από την παρατήρηση της συμπεριφοράς του κατά τη διάρκεια της εξέτασης, ο Αντώνης φαίνεται ότι «υπολείπεται ως προς το εύρος γενικών γνώσεων και ως προς την ικανότητα για μαθηματικούς υπολογισμούς». Από την αξιολόγηση της μαθηματικής επάρκειας (του χορηγήθηκε το Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης), «η απόδοσή του κατατάσσεται σε χαμηλό φυσιολογικό επίπεδο, σε σχέση με εκείνη των μαθητών ίδιας ηλικίας και φύλου. Στις υποκλίμακες παρουσίασε απόδοση με στατιστικώς σημαντικές διαφορές εύρους τυπικών βαθμών. Άρα, ο γενικός δείκτης δεν περιγράφει επαρκώς το σύνολο των μαθηματικών ικανοτήτων.

Στο ενδοατομικό του προφίλ παρατηρούνται υψηλές επιδόσεις στην κλίμακα του «Λεξιλογίου», ενώ χαμηλή είναι η επίδοσή του στις κλίμακες «Υπολογισμοί» και «Επίλυση Προβλημάτων». Η απόδοσή του στις κλίμακες δείχνει δυσκολίες στη χρήση των μαθηματικών εννοιών, των αριθμητικών αλγορίθμων και της στρατηγικής επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Ο Αντώνης παρουσιάζει απόδοση στο χαμηλό φυσιολογικό επίπεδο στις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες σε σχέση με τη μέση φυσιολογική απόδοση. Έχει κατακτήσει επαρκώς τις πρώιμες απαραίτητες μαθηματικές έννοιες, αλλά δυσκολεύεται στην επεξεργασία των αριθμητικών εννοιών και σχέσεων.

2^η Μελέτη : Η πρώτη διάγνωση για τον Δημήτρη πραγματοποιήθηκε, όταν φοιτούσε στο νηπιαγωγείο και εισηγούνταν την επαναφοίτησή του σε αυτό. Σύμφωνα με τη γνωμάτευση «δυσκολεύεται να αναγνωρίσει και να διακρίνει γράμματα και αριθμούς. Αντιλαμβάνεται τις έννοιες των ποσοτήτων και το «περισσότερα – λιγότερα», μπορεί να καταμετρά, αλλά δυσκολεύεται να αντιστοιχίσει με αριθμητικά σύμβολα ή να τα γράψει». Οι γενικευμένες δυσκολίες του και στον γλωσσικό τομέα προέτασαν την ανάγκη για επαναφοίτηση του μαθητή στο νηπιαγωγείο για την πληρέστερη γνωστική του ανάπτυξη. Εξετάστηκε ξανά από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. στο μέσο της πρώτης τάξης. Από την αξιολόγηση της μαθηματικής του επάρκειας (του χορηγήθηκε το Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης), «η απόδοσή του κατατάσσεται σε χαμηλότερο επίπεδο σε σχέση με εκείνες των μαθητών ίδιας ηλικίας και φύλου». Είχε χαμηλή επίδοση και στις κλίμακες

«Υπολογισμοί» και «Επίλυση προβλημάτων». Σύμφωνα με τη γνωμάτευση: «Η απόδοση του Δημήτρη στις κλίμακες, δείχνει ότι έχει ικανότητες στη γνώση των βασικών μαθηματικών εννοιών, που είναι απαραίτητες για την απόκτηση της σχολικής μαθηματικής γνώσης, αλλά αντιμετωπίζει δυσκολίες στη διαχείριση μαθηματικών αλγορίθμων, καθώς και στην αποτελεσματική επεξεργασία και στρατηγική επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων». Ταυτόχρονα, προτείνεται εξάσκηση στις οπτικοχωρικές δεξιότητες, στη σύγκριση μεγεθών και ποσοτήτων, στους αριθμητικούς υπολογισμούς, στην κατανόηση και τον χειρισμό της μαθηματικής έννοιας και στην ενίσχυση της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών με εποπτικό υλικό. Η γνωμάτευση προτείνει τη φοίτηση του Δημήτρη στο Τ.Ε. από την αρχή της Β' τάξης, όταν και ξεκίνησε η παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικού υλικού.

3^η Μελέτη : Η Τριανταφυλλιά αξιολογήθηκε από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. τον Φεβρουάριο του 2011, όταν φοιτούσε στην τρίτη τάξη. Η γενική περιγραφή της γνωμάτευσης σχετικά με τις μαθηματικές ικανότητές της αναφέρει: «Στο ενδοατομικό προφίλ σε μια κλίμακα (λεξιλόγιο) είχε απόδοση οριακά στο μέσο φυσιολογικό επίπεδο, ενώ σε δυο (υπολογισμοί & επίλυση προβλημάτων) είχε απόδοση σαφώς στο χαμηλό επίπεδο. Αυτό σημαίνει πως διαθέτει μετρίως ανεπτυγμένη τη λεξιλογική ικανότητα μαθηματικών εννοιών και έντονες δυσκολίες στις ικανότητες χρήσης των αριθμητικών αλγορίθμων και στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον γενικό δείκτη της συγκεκριμένης δοκιμασίας (Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης), κατατάσσεται στο αδύναμο επίπεδο μαθηματικής επάρκειας, ανώτερο του 10% των παιδιών ίδιας ηλικιακής ομάδας. Χαρακτηρίζεται με αδύναμη απόδοση». «...παρατηρείται επάρκεια στις έννοιες ψηλά, χαμηλά, περισσότερα, λιγότερα, κ.τ.λ., στην ταξινόμηση αντικειμένων σε ομάδες βάσει ενός ή δυο κριτηρίων, στην εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών, στη συσχέτιση στοιχείων δυο συνόλων με την «ένα προς ένα» αντιστοίχιση, στη μέτρηση μη συνεχών ποσοτήτων με συγχρονισμένο και δομημένο τρόπο, μέτρηση με κυθάκια, καταμέτρηση αντικειμένων χωρίς τη χρήση δακτύλων και χρήση των αριθμών μέχρι το είκοσι σε καθημερινές καταστάσεις. Αδυναμίες παρατηρούνται στις ικανότητες σειροθέτησης και χρήσης λέξεων αρίθμησης». Από τη γνωμάτευση

προτείνεται «[...] εξάσκηση και καλλιέργεια των οπτικοχωρικών ικανοτήτων, του συλλογισμού, της κατασκευής μαθηματικών μοντέλων, της ανάπτυξης μαθηματικού συλλογισμού, του χειρισμού μαθηματικών εργαλείων, της αναπαράστασης μαθηματικών εννοιών, της διαχείρισης των μαθηματικών συμβόλων και τύπων και χρήση βοηθητικών εργαλείων των μαθηματικών».

ii. Από τη χορήγηση του τεστ ΖΑΡΕΚΙ

1^η Μελέτη: Στον Αντώνη χορηγήσαμε το τεστ ΖΑΡΕΚΙ, τον Οκτώβριο του 2012. Σύμφωνα με τη στάθμιση του τεστ, το σημείο τομής για την ηλικία του, είναι η επίδοση του μαθητή σε συγκεκριμένες ασκήσεις του τεστ, με συνολική βαθμολόγηση από 38 έως 40. Η συνολική επίδοσή του στο τεστ ήταν 38, η οποία βρίσκεται κάτω από το σημείο τομής και επιβεβαιώνει την ύπαρξη δυσκολιών στα μαθηματικά. Σε όλες τις υποκλίμακες του τεστ η επίδοσή του ήταν χαμηλή. Πιο συγκεκριμένα τα περισσότερα λάθη διαπιστώθηκαν στον νοερό υπολογισμό οριζόντιων προσθέσεων, αφαιρέσεων και πολλαπλασιασμού. Ενδεικτικά:

Στην πρόσθεση $13+19$:

A: Μπορώ να πω $9+3$ (μετράει με τα δάχτυλα από το 9)... κάνει 12... και 1 και 1... 13, 14. Το βρήκα 14 κάνει!

Στην αφαίρεση $24-17$:

A: Έχουμε 24 βγάζω 17... θα πούμε 7 έξω 4... (δείχνει 7 δάχτυλα και κλείνει τα 4)... μένουν 3... (το σημειώνει στο θρανίο)... 2 βγάζω 1... 1... (το γράφει)... 13 μας κάνει!

Αντίστοιχα δυσκολίες συνάντησε και στην επίλυση των προβλημάτων (άσκηση 11).

Ενδεικτικά:

Στο πρόβλημα: «Ο Πέτρος έχει μερικές μπίλιες. Δίνει τις 6 στην Άννα. Τώρα του έμειναν 7. Πόσες είχε πριν να δώσει μπίλιες στην Άννα;»

A: Έδωσε 6 μπίλιες στην Άννα... αφαίρεση θα κάνουμε! ...7 ... (δείχνει 7 δάχτυλα)... έξω 6... (κλείνει τα 6 δάχτυλα)... 1 μπίλια είχε!

Η διαχείριση των ασκήσεων του τεστ ανέδειξε λάθη σε όλες τις υποκλίμακες επισημαίνοντας τις μαθηματικές ελλείψεις του Αντώνη.

2^η Μελέτη: Στον Δημήτρη χορηγήσαμε το τεστ ΖΑΡΕΚΙ με την έναρξη της Β' τάξης. Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων φαίνεται η αδυναμία του, κυρίως στην εκτέλεση πράξεων. Στις οριζόντιες προσθέσεις ρώτησε: «... να βάζω ή να βγάζω;» και προσπάθησε να τις λύσει με τα δάχτυλα. Στους διψήφιους αριθμούς δυσκολεύτηκε και συνήθως έδινε τυχαίες απαντήσεις. Φάνηκε να θέλει να αναπαραστήσει τους αριθμούς, γιατί στην πρόσθεση $15+12$, αφού προσπάθησε να χρησιμοποιήσει τα δάχτυλά του είπε: «να φτιάξω γραμμούλες;» και έφτιαξε με το μολύβι 15 και 12 γραμμούλες στο τετράδιο. Στις αφαιρέσεις με διψήφιους δεν μπορούσε να δείξει με τα δάχτυλα τους αριθμούς και προσπάθησε να βάλει μαζί με τα δάχτυλα και άλλα υλικά:

Στην αφαίρεση 24-17:

Δ: ...δεν ξέρω... δεν έχω 17 δάχτυλα τι να κάνω;... Το βρήκα! Θα βάλω πράγματα...

Ε: Τι εννοείς;

Δ: Να! Θα βάλω το μολύβι, την κασετίνα, τη γόμα...

Ο Δημήτρης έκανε αρκετά λάθη στην ανάγνωση των αριθμών και ειδικότερα στους πολυψήφιους, όπου φάνηκε να μην μπορεί να τους αναγνωρίζει και διάβασε το 1900 ως δεκαεννέα διακόσια ή εκατόν δεκαεννέα, το 305 ως τριάντα πέντε, το 6485 ως εξακόσια τέσσερα ογδόντα πέντε.

Στην επίλυση των προβλημάτων: «Ο Πέτρος έχει 12 μπίλιες. Δίνει τις 5 στη φίλη του την Άννα. Πόσες μπίλιες του έμειναν;»

Δ: (Ανοίγει τα δέκα δάχτυλά του... βάζει και την ξύστρα και το μολύβι)... τώρα είναι 12... έδωσε 5... (κρύβει 5 δάχτυλα)... μένουν 1, 2, 3... 7

Δυσκολεύτηκε πολύ στα υπόλοιπα προβλήματα του τεστ στα οποία έδινε τυχαίες απαντήσεις.

3^η Μελέτη: Η Τριανταφυλλιά στο τεστ συγκέντρωσε σκορ 35 τη στιγμή που το σημείο τομής για τη συγκεκριμένη τάξη είναι 48-50. Η επίδοσή της την κατατάσσει σε χαμηλότερο επίπεδο από τον μέσο όρο και επιβεβαιώνει τις μαθηματικές της αδυναμίες. Στον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων στερείται της χρήσης στρατηγικών μέτρησης, όπως το να ξεκινά από τον μεγαλύτερο προσθετέο

σε προσθέσεις (π.χ. 5+8) ή να ανεβαίνει από τον αφαιρετέο σε αφαιρέσεις (π.χ. 12-9) και συχνά χρησιμοποιεί τα δάχτυλά της. Απαντά γρήγορα σε απλά αθροίσματα μέσα στη δεκάδα και γνωρίζει την προπαίδεια του 2 και του 3 μέχρι το 20. Κάνει αρκετά λάθη στην ανάγνωση και γραφή πολυψήφιων αριθμών, όπου φαίνεται ότι δεν μπορεί να διαβάσει 4ψήφιους και 5ψήφιους αριθμούς (1007 ως εκατό... επτά ή 35201 ως τριακόσια πενήντα δύο... μηδέν... ένα).

Στην επίλυση των προβλημάτων του τεστ απάντησε γρήγορα στο 1^ο πρόβλημα: «Ο Πέτρος έχει 12 μπίλιες. Δίνει τις 5 στη φίλη του την Άννα. Πόσες μπίλιες του έμειναν;»:

T: (σκέφτεται λίγο)... 8 του έμειναν!

E: Πώς το βρήκες;

T: 12 κατεβαίνω 5... αφού 5 έδωσε... 12, 11, 10, 9, 8...

Δυσκολεύτηκε πολύ σε προβλήματα, όπου ο άγνωστος είναι στην αρχή π.χ. «Ο Πέτρος έχει μερικές μπίλιες. Δίνει τις 6 στην Άννα. Τώρα του έμειναν επτά. Πόσες είχε πριν να δώσει μπίλιες στην Άννα;» :

T: ... 12 είχε...

E: Πώς το βρήκες;

T: Αφού το λέει στο προηγούμενο πρόβλημα...

iii. Από τη χορήγηση του ΑΜΔΕ

1^η Μελέτη: Η συμπλήρωση του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ (Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τον Εκπαιδευτικό) τόσο από τη δασκάλα της τάξης όσο και από την εκπαιδευτικό του Τ.Ε. ανέδειξε τις αδυναμίες του Αντώνη στην ολοκλήρωση υπολογισμών, τη δυσκολία ανάκλησης βασικών μαθηματικών δεδομένων ακόμα και μέσα στη δεκάδα, την εκτέλεση πράξεων και την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων. Τα αποτελέσματα, που προκύπτουν από τη συμπλήρωση του εργαλείου ΑΜΔΕ, μπορούν να ερμηνευθούν με βάση τη βαθμολόγησή του σε κάθε κλίμακα, ενώ δίνεται η δυνατότητα περιγραφής ενός ποιοτικού προφίλ των δυσκολιών του μαθητή και να επισημανθούν κατά τη διαγνωστική διαδικασία οι επιμέρους δυσκολίες του. Όσον αφορά στην πιθανότητα ύπαρξης μαθησιακών δυσκολιών στον μαθητή, ανάλογα με την προβλεπτική τιμή ο

μαθητής εντάσσεται σε μια από τρεις περιπτώσεις: «Πολύ πιθανό», «Ενδεχομένως» και «Απίθανο» (Παντελιάδου & Σιδερίδης, 2007).

Η απόδοση του Αντώνη στο συγκεκριμένο τεστ ήταν 69 με Μέσο Όρο (Μ.Ο.) 3,45. Η απόδοση αυτή σύμφωνα με τις νόρμες του συγκεκριμένου εργαλείου αντιστοιχεί για την ηλικία και το φύλο του στο 42^ο Εκατοστημόριο, το οποίο κατατάσσει τον μαθητή στην κατηγορία «Πολύ Πιθανό» για την ύπαρξη δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά.

2^η Μελέτη: Για τον μαθητή χορηγήθηκε και το ΑΜΔΕ, αν και δεν είναι στην ομάδα-στόχο του ανιχνευτικού εργαλείου (από Γ' Δημοτικού – Γ' Γυμνασίου), για να αποτυπωθεί και η ενδεχόμενη αλλαγή στην επίδοσή του στους τομείς που εξετάζονται. Από την Ανίχνευση των Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς επιβεβαιώνονται οι αδυναμίες του μαθητή σε βασικούς τομείς της μαθηματικής γνώσης, όπως η ολοκλήρωση υπολογισμών, η αδυναμία ανάκλησης βασικών μαθηματικών δεδομένων, η αδυναμία χωροχρονικής οργάνωσης (π.χ. σειροθέτηση, κατανόηση της σημασίας της θεσιακής αξίας), η δυσκολία στην εκτέλεση πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου, η δυσκολία στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων ή στην επιλογή της σωστής πράξης και γενικότερα στη δυσκολία κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας. Σε όλους αυτούς τους τομείς, σύμφωνα με την καταγραφή των εκπαιδευτικών στο ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ, η κατάταξη του μαθητή με βάση την επίδοσή του κυμαινόταν σε πολύ χαμηλά επίπεδα στην κλίμακα Likert, που χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο εργαλείο.

3^η Μελέτη: Από τη συμπλήρωση του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ από τους εκπαιδευτικούς του Τ.Ε. και της γενικής τάξης φαίνεται ότι η Τριανταφυλλιά υστερεί στην ολοκλήρωση αριθμητικών υπολογισμών, κάνει πολλά λάθη στον "δανεισμό" κατά την εκτέλεση πράξεων, δυσκολεύεται στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου των πράξεων, δυσκολεύεται με τα προβλήματα πολλών πράξεων και την επιλογή της κατάλληλης πράξης, χρειάζεται εξωτερική καθοδήγηση κατά την επίλυση σύνθετων ασκήσεων και προβλημάτων, θεωρεί σωστή την πρώτη απάντηση/λύση που δίνει και δεν ελέγχει την ορθότητά της, παραλείπει να αξιολογήσει και να ελέγξει τα αποτελέσματα, στα οποία καταλήγει και γενικά

δυσκολεύεται να σκεφτεί αφαιρετικά (π.χ. χωρίς εικόνες, αντικείμενα). Η επίδοσή της στο συγκεκριμένο ανιχνευτικό εργαλείο ήταν 68 με Μ.Ο. 3,4 που αντιστοιχεί για την ηλικία και το φύλο της στο 45^ο Εκατοστημόριο που παραπέμπει στην Πολύ Πιθανή (ΠΠ) ύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά.

iv. Από τη χορήγηση του τεστ Α με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Δε χορηγήσαμε το τεστ Α στους μαθητές της 1^{ης} και 3^{ης} μελέτης περίπτωσης, αφού ως μαθητές μεγαλύτερων τάξεων θα συμπλήρωναν το τεστ Β με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Β' τάξης.

2^η Μελέτη: Στη συμπλήρωση των ασκήσεων του τεστ Α παρατηρήθηκαν αρκετές μαθηματικές αδυναμίες του Δημήτρη αφού:

- δυσκολεύτηκε σε αρκετά σημεία της συμπλήρωσης των αριθμών στη σειρά από το 1 έως το 50 με βασικότερο στοιχείο την αντιστροφή των ψηφίων των αριθμών στη σωστή σειρά της αριθμογραμμής π.χ. συμπλήρωσε 13, 23 στη θέση των 31, 32 και 43, 53, 63, στη θέση των 34, 35, 36 ή 83, 93 στη θέση των 38, 39
- δυσκολεύτηκε στην ανάγνωση των αριθμών, διάβασε το 97 ως 79 και το 19 ως 91
- έκανε λάθη στη συμπλήρωση του επόμενου και προηγούμενου δοσμένων αριθμών
- στις οριζόντιες προσθέσεις φαίνεται να μην κατανοούσε τη διεργασία της πρόσθεσης, ενώ χρησιμοποιώντας τα δάχτυλα προσπάθησε να λύσει κάποιες από τις πράξεις όπως:
 $9+8...$ «από το 9 να πάω στο 8... άρα 1» και
 $4+7...$ «από το 4 να πάω στο 7... 2», και
- δεν μπόρεσε να εκτελέσει τις οριζόντιες αφαιρέσεις και έκανε συνέχεια λάθη στη μέτρηση χρησιμοποιώντας τα δάχτυλα.

Σε γενικές γραμμές, ο Δημήτρης δυσκολεύεται στην εκτέλεση των κάθετων πράξεων και έκανε αρκετά λάθη στην ανάγνωση των αριθμών.

Στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων διάβασε τα προβλήματα χωρίς να κατανοήσει το περιεχόμενο ή το τι πρέπει να κάνει για να τα επιλύσει με αποτέλεσμα να δίνει τυχαίες απαντήσεις.

ν. Από τη χορήγηση του τεστ Β με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Δεν χορηγήσαμε το τεστ Β στη 2^η μελέτη περίπτωσης, αφού ήταν μαθητής της Α' τάξης.

1^η Μελέτη: Ο Αντώνης, πριν την παρέμβαση, συμπλήρωσε το Τεστ Β, που κατασκευάστηκε από τον ερευνητή και βασίστηκε στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) της Δευτέρας τάξης. Από την επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων που συλλέχτηκαν στη συγκεκριμένη δοκιμασία παρατηρήσαμε προβλήματα σε βασικές μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν στη συγκεκριμένη τάξη. Ειδικότερα:

Στη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού, φάνηκε η έλλειψη κατανόησης της αξίας κάθε ψηφίου στη θέση που βρίσκεται (Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες) σε έναν αριθμό. Επίσης, η αγνόηση του μηδενός (0) ως ψηφίο με θεσιακή αξία (στους δύο αριθμούς 100 και 109, όπου και δε γράφτηκε στις αντίστοιχες στήλες).

Στη χρήση των συμβόλων ισότητας και ανισότητας ($=$ $>$), παρατηρήθηκε αδυναμία διάκρισης του μεγαλύτερου μεταξύ δύο αριθμών με τα ίδια ψηφία. Έτσι, αποτυπώθηκε στην αντίστοιχη άσκηση το 98 ίσο με το 89 και το 25 ίσο με το 52, ενώ το 5+5 ταυτίστηκε με το 55.

Στην εκτέλεση κάθετων προσθέσεων και αφαιρέσεων, αν και εκτέλεσε σωστά τις προσθέσεις χωρίς υπέρβαση δεκάδας και κρατούμενα, μπερδεύτηκε και δεν εκτέλεσε σωστά τις υπόλοιπες. Έδειξε να γνωρίζει την έννοια και τη χρήση των κρατούμενων ως στοιχείο του αλγόριθμου της πράξης, αλλά τα χρησιμοποιεί είτε με λάθος τρόπο είτε σε λάθος σημείο.

Για παράδειγμα, στην κάθετη πρόσθεση $43 + 28$:

Α: Λοιπόν, θα πούμε... 3 και 8... (ανεβαίνει από το 3 μετρώντας 8 δάχτυλα)... 11... για να θυμηθώ ... γράφω το 11 και ένα το κρατούμενο... (γράφει το 1 δίπλα στην πράξη και το κυκλώνει)... τώρα 4 και 2... (με τα δάχτυλα)... 6... το γράφω κι αυτό... Ωχ! πολύ μεγάλο... 611 κάνει !

Στις αφαιρέσεις επίσης γνωρίζει την έννοια του δανεισμού της δεκάδας από ανώτερη τάξη ως κρατούμενο που πρέπει να το μεταφέρει στον αφαιρετέο, όμως δείχνει να μην έχει κατανοήσει τη συγκεκριμένη ενέργεια στην εκτέλεση της αφαίρεσης.

Π.χ. στην κάθετη αφαίρεση 145 – 88:

A: *Απ' το 5 βγάζω 8... δε γίνεται... ένα το κρατούμενο... 8 βγάζω 5... (με τα δάχτυλα)... 3... (γράφει το 3)... το κρατούμενο θα το βάλω στο 4, στο 8 και στο 1... (γράφει το 1 πάνω από κάθε αριθμό)...*

Στην επίλυση προβλημάτων, ο Αντώνης διάβασε κάθε πρόβλημα δυνατά και χωρίς πολλή σκέψη εκτέλεσε την πράξη που θεωρούσε ότι το λύνει. Φαίνεται να δυσκολεύεται να επεξεργαστεί τα δεδομένα κάθε προβλήματος, ώστε να οδηγηθεί στη λύση του. Αντιθέτως, δεν αναγνωρίζει παράλογα αποτελέσματα ακόμα κι αν του το δείχνουν. Έτσι, στο πρόβλημα: «*Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;*» αποφάσισε πολύ βιαστικά να κάνει πρόσθεση:

A: *Θα προσθέσω το 19 με το 11... (γράφει κάθετα την πρόσθεση)... 9 και 1... 10... αυτό το θυμάμαι... θα γράψω το 0 και θα έχω και ένα κρατούμενο... (το γράφει δίπλα στην πράξη και το κυκλώνει)... τώρα 1 και 1... 2 και το κρατούμενο... 3... 30 είναι...*

E: *Όλα τα παιδιά είναι 19 και τα κορίτσια θα είναι 30;*

A: *Ναι! Αφού βρήκαμε ότι είναι περισσότερα...*

Στα προβλήματα με τις έννοιες περισσότερο – λιγότερο δείχνει να μην κατανοεί τη σημασία των λέξεων και να την αντιστοιχεί στην κατάλληλη πράξη. Στα σύνθετα προβλήματα της δοκιμασίας εκτιμάται ότι έδωσε τυχαίες απαντήσεις.

3^η Μελέτη: Η Τριανταφυλλιά πριν την παρέμβαση συμπλήρωσε το τεστ Β που ανιχνεύει την κατάκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων που με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) θα πρέπει να έχει κάθε μαθητής που τελειώνει τη Β' τάξη. Από την ανάλυση των δεδομένων αναδεικνύονται οι δυσκολίες της μαθήτριας:

- στη θεσιακή αξία των ψηφίων των αριθμών όπου φαίνεται να αγνοεί την αξία του μηδενός (0) (στους αριθμούς 109 και 100 το παρέλειψε εντελώς). Δείχνει να βάζει τυχαία τους αριθμούς, χωρίς να σκέφτεται την αξία τους.
- στην άσκηση 8 του τεστ και τις κάθετες προσθέσεις συμπλήρωσε γρήγορα και σωστά αυτές που δεν είχαν υπέρβαση της δεκάδας (48+31, 54+35, 274+325). Στις

πράξεις που έπρεπε να υπερβεί τη δεκάδα και να υπολογίσει το «κρατούμενο» έγραφε το (1) και το κύκλωνε είτε χωρίς να το προσθέτει (π.χ. $43+28 = 61$) είτε προσθέτοντάς το σε λάθος στήλη ($176+15 = 281$). Φαίνεται πως έχει μια επιφανειακή γνώση του αλγόριθμου της πρόσθεσης, γνωρίζει μηχανικά, αλλά δεν έχει κατανοήσει την έννοια του “κρατούμενου” κι έτσι το χρησιμοποιεί τυχαία και αναποτελεσματικά.

- στις κάθετες αφαιρέσεις της ίδιας άσκησης, όπου δεν χρειαζόταν να δανειστεί (39-25 και 68-46), έκανε τις αφαιρέσεις σωστά χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά της. Στις υπόλοιπες είτε αντέστρεφε τους αριθμούς (π.χ. στην αφαίρεση $34-28 = 14$: «4 βγάζω 8 δεν γίνεται θα πω 8 βγάζω 4 ...») είτε έδινε τυχαία αποτελέσματα (π.χ. στην αφαίρεση $120-15 = 115$: «... 0 βγάζω 5... 5... 2 βγάζω 1... 1... κάτω και το 1... 115»). Δε γνωρίζει τον αλγόριθμο της αφαίρεσης και πολύ περισσότερο τη διαδικασία «δανεισμού» από στήλη ανώτερης τάξης (π.χ. τις δεκάδες), ώστε να μπορέσει να ολοκληρώσει την πράξη.
- στην επίλυση των προβλημάτων του τεστ δυσκολεύτηκε να αξιολογήσει τα δεδομένα κάθε προβλήματος. Συνήθως απαντούσε τυχαία στην επιλογή της πράξης και δεν αξιολογούσε την ορθότητα του αποτελέσματος.

Στο πρόβλημα: «Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;»

Τ: ... Πρόσθεση θα κάνουμε... (γράφει κάθετα $19 + 11$)... 9 και 1... 10... (γράφει το 10)... 1 και 1... 2... 21 είναι τα κορίτσια (διάβασε το 210 σαν 21)

Ε: Αφού όλα τα παιδιά ήταν 19... τα κορίτσια θα είναι 21 δηλαδή, περισσότερα;

Τ: Κάποιο λάθος έκανα... θα την ξανακάνω την πρόσθεση

Οι έννοιες “περισσότερο” ή “λιγότερο” στην εκφώνηση των προβλημάτων αγνοούνται.

Στο πρόβλημα: «Ο Τάκης και ο Νίκος μετρούσαν τις τάπες τους. Ο Τάκης μέτρησε 27 τάπες. Ο Νίκος είχε 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη. Πόσες τάπες έχουν και οι δύο μαζί;»

Τ: ... πρόσθεση θα κάνουμε...

Ε: Γιατί;

Τ: ... 27 έχει ο Τάκης και 8 ο Νίκος... θα τα προσθέσουμε...

Ε: Διάβασε ξανά το πρόβλημα. Πόσες τάπες λέει ότι έχει ο Νίκος;

Τ: (διαβάζει)... 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη... Αααα! Το κατάλαβα... πάλι πρόσθεση θα κάνω...

Στα σύνθετα προβλήματα (με περισσότερες από μια πράξεις) δυσκολεύεται στην κατανόηση των άγνωστων στοιχείων.

Στο πρόβλημα: «Ο Γιάννης πήγε στο κυλικείο του σχολείου και κοίταξε τον κατάλογο με τα προϊόντα. Ήθελε να φάει μια τυρόπιτα και να πιει και ένα χυμό. Έχει 3 ευρώ. Του φτάνουν;»

Τ: Θέλει μια τυρόπιτα (κοιτάζει τον κατάλογο)... 1 ευρώ και έναν χυμό... ένα είκοσι ευρώ... Ε: Πόσο κάνουν αυτά τα δύο μαζί;

Τ: ... θα τα προσθέσω... (γράφει το 120 και το 1 κάθετα)... 0 και 1... 1... κάτω και το 2 κάτω και το 1... 121 κάνει!

5.6.3. Στοιχεία από την καταγραφή παρατηρήσεων των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων κατά τη διάρκεια της παρέμβασης

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο καταγράφουμε τον τρόπο χρήσης των χειραπτικών υλικών από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις που εμφανίστηκαν, όταν τα υλικά αξιοποιούνταν για την αναπαράσταση βασικών μαθηματικών εννοιών και υποστήριζαν την κατανόηση των μαθητών. Δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις περιπτώσεις που η χρήση των χειραπτικών υλικών βοήθησε τους μαθητές να διερευνήσουν τις έννοιες και διαδικασίες και ενίσχυσε την εννοιολογική τους κατανόηση.

1^η Μελέτη: Η διδακτική παρέμβαση για τον Αντώνη ξεκίνησε με την έναρξη της τρίτης τάξης και συνεχίστηκε μέχρι το τέλος του διδακτικού έτους. Η παρουσία του χειραπτικού υλικού στο Τ.Ε. σύμφωνα με την εκπαιδευτικό, τον χαροποίησε και του κίνησε την περιέργεια. Η ζυγαριά ήταν το υλικό που φάνηκε μέσα από τη χρήση ότι του άρεσε περισσότερο να δουλεύει. Επέλεγε να χρησιμοποιεί τις κάρτες με τις ασκήσεις και να βρίσκει το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη ζυγαριά. Στα Φύλλα Εργασίας (Φ.Ε.) κατέγραφε με ευκολία τις λύσεις και εξασκούσαν στην κατανόηση

και εκμάθηση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.). Συμπληρώνοντας τα αθροίσματα του 5, 6, 7, 8, 9, 10 στη ζυγαριά με διαφορετικούς τρόπους, όταν συμπλήρωνε το 9 και έγραφε τους πιθανούς συνδυασμούς στο Φ.Ε. ανακάλυψε ένα «μαθηματικό μοντέλο»:

A: ... Ααααα...! Κυρία κάτι είδα...

E: Τι είδες, Αντώνη, για πες μου...

A: Να, εδώ που βρίσκω 9... το ένα κατεβαίνει και το άλλο ανεβαίνει...
(παρατηρεί ότι σε κάθε άθροισμα κατεβαίνει ο ένας προσθετέος κατά ένα και ανεβαίνει ο άλλος κατά ένα: $7+2$, $6+3$...)

E: Πράγματι...! Για να δούμε, γίνεται το ίδιο και με το 10...

Δυσκολεύτηκε με τη χρήση της ζυγαριάς, στις ασκήσεις που ζητούσαν το συμπλήρωμα ενός αριθμού,. Εύκολα αναζήτησε και βρήκε άλλο υλικό για να το λύσει.

Για παράδειγμα στην άσκηση $6 + \underline{\quad} = 10$:

A: Δεν μπορώ να το βρω, κυρία, με τη ζυγαριά! Να πάρω τη... γραμμή (δείχνει την αριθμογραμμή που είναι τοποθετημένη στην κορυφή του θρανίου του)

E: Και βέβαια, Αντώνη ! Αριθμογραμμή τη λένε... μια γραμμή με αριθμούς !

A: (Βάζει τα δάχτυλα στους αριθμούς και μετράει)... το βρήκα... 4 είναι!

E: Πώς το βρήκες, Αντώνη;

A: Εύκολο... είπα απ' το 6 ως το 10... 6... 7,8,9,10... 4 ανέβηκα... άρα είναι 4!

Μετά την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης, κάθε φορά που ερχόταν στο Τ.Ε. αναζητούσε το υλικό και έδειχνε ιδιαίτερη διάθεση να λύνει ασκήσεις με τη χρήση του. Το υλικό που χρησιμοποίησε περισσότερο, και σύμφωνα με την εκπαιδευτικό του Τ.Ε. τον βοήθησε πολύ για να κατανοήσει μαθηματικές έννοιες και λειτουργίες, ήταν οι ράβδοι δεκαδικής βάσης.

Πρόκειται για υλικό που απεικονίζει την έννοια κάθε αριθμού αναπαριστώντας τις Μονάδες (Μ), τις δεκάδες (Δ) και τις Εκατοντάδες (Ε). Η αναπαράσταση κάθε αριθμού βοηθά στην κατανόηση της δομής του. Οι ράβδοι έδωσαν την ευκαιρία στον Αντώνη να κατανοήσει την ανάλυση και τη σύνθεση της δεκάδας.

Τοποθετώντας αριθμούς στον Πίνακα Θεσιακής αξίας (βλ. στο Παράρτημα, Κύβοι Φ.Ε. 1 – Ασκ. 2) στο 11 έβαλε 11 κυβάκια (μονάδες) στη στήλη των μονάδων:

A: (Πήρε 11 κυβάκια)...

E: Μπορείς, Αντώνη, να δείξεις το 11 με άλλον τρόπο;

A: (σκέφτεται)... *Ναι! Κυρία! Θα βάλω αυτό το μακρύ (δείχνει τη Δεκάδα) που μοιάζει με kitkat! Άμα μετρήσεις και αυτό 10 έχει (αναγνώριση της δεκάδας) (Έβαλε 1 στις Δ και 1 στις Μ).*

Εργάστηκε εύκολα και αποτελεσματικά με τις ράβδους στα αθροίσματα και τις διαφορές μέχρι το 10. Οι κύβοι τον βοήθησαν πολύ να κατανοήσει την υπέρβαση της δεκάδας, καθώς και την έννοια και τη χρήση του κρατούμενου στις προσθέσεις. Στην κάθετη πρόσθεση $16 + 8$ αναπαριστά τους αριθμούς με τους κύβους, το 16 με 1 δεκάδα και 6 μονάδες και το 8 με 8 μονάδες (κυβάκια).

A: *Λοιπόν, θα μετρήσουμε τα μικρά... 1, 2, 3... 14... (σκέφτεται)... (βάζει τα κυβάκια στη σειρά και μετράει, μόλις φτάνει τα 10)... με τα 10 όμως φτιάχνουμε 1 τέτοιο... (δείχνει τη δεκάδα)*

E: Πολύ σωστά παρατηρήσεις! Και τι θα κάνουμε τώρα;

A: *Θα το βάλουμε μαζί με το άλλο (τη δεκάδα) και θα έχουμε 2!... Κυρία, είναι σαν το κρατούμενο... αυτό που το βάζουμε με το 1 και το κυκλάκι!!*

E: Σωστά, Αντώνη, όταν συμπληρώνουμε 10, δηλαδή μια δεκάδα, τότε έχουμε ένα κρατούμενο.

Στις κάθετες αφαιρέσεις αρχικά αναπαριστούσε με τους κύβους και τον μειωτέο και τον αφαιρετέο. Όταν κατανόησε τη λειτουργία της αφαίρεσης, και με τη βοήθεια της εκπαιδευτικού του Τ.Ε., άρχισε να αναπαριστά με τους κύβους τον μειωτέο και να αφαιρεί τον αφαιρετέο. Ολοκλήρωσε εύκολα αφαιρέσεις χωρίς δανεισμό δεκάδας χρησιμοποιώντας με ευκολία το υλικό. Με τη βοήθεια των κύβων κατανόησε την έννοια του δανεισμού δεκάδας από ανώτερη τάξη.

Για παράδειγμα, στην κάθετη αφαίρεση $53 - 28$:

A: *Έχουμε 53... θα πάρω 5 δεκάδες (παίρνει πέντε ράβδους) και 1,2,3 κυβάκια (μονάδες)... λοιπόν... πρέπει να θγάλω τώρα... 8 μονάδες... δεν μπορώ... έχω μόνο 3...!*

Ε: Δεν έχεις μόνο κυβάκια! Έχεις και δεκάδες!

Α: (σκέφτεται)... το βρήκα! Θα πάρω μια δεκάδα που έχει 10 κυβάκια... (παίρνει 10 κυβάκια και τα ενώνει στη ράβδο)... τώρα έχω 10 και 3... 13 κυβάκια! Μπορώ να βγάλω... πόσα είπαμε... 8... (βγάζει από τα 13 τα οκτώ)... έμειναν 5...!! Βγάζω και 2 δεκάδες... μένουν 2... (τα γράφει)... 25.

Ε: Έλα, να το δείξουμε και στην πράξη τώρα!

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού του Τ.Ε., ο Αντώνης κατανόησε την εκτέλεση της αφαίρεσης με τη μέθοδο της “αναδόμησης του μειωτέου”, σύμφωνα με την οποία δανειζόμαστε μία δεκάδα από ανώτερη τάξη μειώνοντας κατά μία (1) τις δεκάδες και αυξάνοντας κατά δέκα (10) τις μονάδες. Στη συγκεκριμένη μέθοδο ο δανεισμός της δεκάδας αντιστοιχεί στην πραγματικότητα, αφού η ίδια διαδικασία είναι γνωστή σε παρόμοιες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σε συναλλαγές με χρήματα. Όταν κατάλαβε ότι με το χειραπτικό υλικό και ιδιαίτερα με τους κύβους δεκαδικής βάσης διευκολύνεται πολύ στην εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων, ρώτησε την εκπαιδευτικό του Τ.Ε., αν μπορεί να παίρνει τους κύβους στην τάξη του, όταν θα λύνει τις ασκήσεις των μαθηματικών.

Η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. και η εκπαιδευτικός της γενικής τάξης, ενθουσιάστηκαν με τη χρήση του χειραπτικού υλικού, τόσο για τα αποτελέσματα που διαπίστωσαν στους μαθητές που τα εφάρμοσαν όσο και με τη δυνατότητα που τους έδινε το υλικό, για την ανάλυση μαθηματικών εννοιών και την ολοκλήρωση μαθηματικών δραστηριοτήτων με ουσιαστικό τρόπο. Συνέχισαν και μετά την παρέμβαση τη χρήση του υλικού επιζητώντας τρόπους και μέσα για να το εμπλουτίσουν και να το εντάξουν σε περισσότερες και συνθετότερες μαθηματικές έννοιες όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί.

2^η Μελέτη: Από την περιγραφή των εκπαιδευτικών για τον Δημήτρη, όπως καταγράφηκαν στις συνεντεύξεις τους, σκιαγραφείται το μαθησιακό προφίλ του Δημήτρη στα μαθηματικά. Έτσι περιγράφεται ως ένας μαθητής που αντιλαμβάνεται τις αδυναμίες του χωρίς να ενοχλείται και να νιώθει άσχημα. Είναι πάντα κινητικός μέσα στην τάξη ή το Τ.Ε. με αποτέλεσμα να αποσπάται η προσοχή του και να μην μπορεί να συγκεντρωθεί σε έναν μαθησιακό στόχο. Πηγαίνει κάθε φορά στο Τ.Ε. ανέκφραστος και προσπαθεί να ολοκληρώσει τις ασκήσεις του. Συχνά κινείται μέσα

στην τάξη και ασχολείται με άλλα πράγματα που αποσπούν την προσοχή του. Όταν δεν κατανοεί κάποιες ασκήσεις, συνηθίζει να δίνει τυχαίες απαντήσεις, χωρίς να τις αξιολογεί. Στην εκτέλεση των πράξεων (προσθέσεων και αφαιρέσεων) μέσα στην πρώτη εικοσάδα, χρησιμοποιεί τα δάχτυλά του, ενώ δείχνει ενδιαφέρον να απεικονίζει τους αριθμούς στο τετράδιό του είτε με γραμμές και κυκλάκια είτε με σχολικά αντικείμενα, που συμπληρώνουν τα δάχτυλά του.

Με την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης τον Οκτώβριο, άλλαξε και η στάση του απέναντι στα μαθηματικά. Σύμφωνα με την εκπαιδευτικό του Τ.Ε. «Από την έναρξη της παρέμβασης με το υλικό έδειξε ιδιαίτερη προσοχή και μείωσε κατά πολύ τη συχνή διάσπαση που τον χαρακτήριζε είτε κινούμενος διαρκώς μέσα στην τάξη είτε ασχολούμενος με άλλα άσχετα πράγματα». Μόλις είδε το υλικό έδειξε αμέσως ενδιαφέρον να το χρησιμοποιήσει. Η χρήση των ράβδων βοήθησε αρκετά το μαθητή, να δημιουργεί σύνολα αριθμών ακόμη και μέσα στην 20άδα. Με τη συμπλήρωση των Φ.Ε. κατέγραφε τα ζευγάρια των αριθμών αρχικά στην πρώτη δεκάδα. Το σημαντικό ήταν ότι παρέμενε συγκεντρωμένος δουλεύοντας με το υλικό και μειώνοντας κατά πολύ την κινητικότητά του. «Η χρήση της ζυγαριάς ήταν ένα ευχάριστο και ξεκούραστο μέσο εκτέλεσης των πράξεων, που τον βοήθησε αρκετά στην κατανόηση του συμπληρώματος και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Η χρήση του συγκεκριμένου υλικού τον βοήθησε στην εκτέλεση πράξεων με δυο και τρεις προσθετέους (ο μαθητής από την αρχή της χρονιάς δυσκολευόταν στην πρόσθεση περισσότερων από δύο αριθμούς)» μας λέει η δασκάλα του Τ.Ε. «Η χρήση της ζυγαριάς τον βοήθησε να βρίσκει το αποτέλεσμα σε απλές προσθέσεις. Απλές προσθέσεις με μικρό αριθμό τον δεύτερο προσθετέο, π.χ. $4+2$, $5+1$, $7+3$, τις εκτελούσε μόνος του χωρίς βοήθεια. Αντίθετα προσθέσεις όπου ο $2^{ος}$ προσθετέος ήταν μεγαλύτερος από τον $1^{ο}$, τον δυσκόλευαν αρκετά, με αποτέλεσμα να αλλάζουμε τη σειρά των αριθμών (εισαγωγή και εξάσκηση στη έννοια της αντιμεταθετικής ιδιότητας). Δυσκολευόταν επίσης να σχηματίσει την πρόσθεση, όταν του δίναμε το αποτέλεσμα. Αντίθετα, σε απλές προσθέσεις με δύο προσθετέους έβρισκε τη λύση με τη χρήση της ζυγαριάς».

Το υλικό που άρεσε περισσότερο στον Δημήτρη ήταν τα ντόμινο. «Οι δραστηριότητες με τη χρήση των NTOMINO πραγματοποιήθηκαν με μεγάλη ευχαρίστηση και ενδιαφέρον από τον Δημήτρη και τον βοήθησαν να συγκεντρώνει

την προσοχή του, χωρίς να σημειώνει λάθη από απροσεξία». Ζητούσε να παίρνει τα ντόμινο, κυρίως αυτά με τις προσθέσεις και να τα ενώνει επαναλαμβάνοντας πολλές φορές τα αθροίσματα των αριθμών μέσα στην πρώτη εικοσάδα. Η ζυγαριά, ο άβακας και τα ντόμινο τον βοήθησαν να αυτοματοποιήσει βασικά αριθμητικά δεδομένα μέσα στην πρώτη εικοσάδα: «... έμαθε γρήγορα τα ζευγάρια των αριθμών στη δεκάδα και έμαθε εύκολα τα όμοια μέχρι το 20 (6+6, 7+7...)». Επίσης, με τη χρήση της αριθμογραμμής κατάφερνε να λύνει προσθέσεις και αφαιρέσεις μέχρι το 100.

Ο Δημήτρης δυσκολευόταν αρκετά στην ονομασία και τη γραφή τριψήφιων αριθμών (έκανε λάθη στη θεσιακή αξία των ψηφίων, όπως αντιστροφή ή παράλειψη ψηφίων). Χρησιμοποιώντας τους κύβους δεκαδικής βάσης με τη μορφή παιχνιδιού κατανόησε αρκετά γρήγορα τι σημαίνει Μονάδα, Δεκάδα και Εκατοντάδα. Έπαψε να κάνει λάθη στη γραφή και ονομασία τριψήφιων αριθμών. Στους κύβους έγραφε πάνω από τις ράβδους και τα πλαίσια τους αριθμούς (π.χ. 4 Δ = 40, 2 Ε = 200 κ.λπ). Στην τοποθέτηση του 11 στον πίνακα θεσιακής αξίας έβαλε κυβάρια μόνο στις μονάδες:

Ε: Για ξανακοίταξέ το, Δημήτρη, μήπως μπορούμε να το κάνουμε και με άλλον τρόπο;

Κ: (ξανακοιτάζει τους κύβους, παίρνει τη Δ, κουμπώνει και μετρά τα κυβάρια και λέει) μπορούμε να βάλουμε ένα τέτοιο που έχει 10, άρα ένα εδώ... (στις Δ)... 10 και ένα εδώ (στις Μ)... 11.

Μετά την εξάσκηση με τους κύβους μπορούσε εύκολα να προσθέτει αριθμούς χρησιμοποιώντας τον κλασικό αλγόριθμο με κρατούμενα.

Στην κάθετη πρόσθεση 16+8:

Δ: ... θα πάρω 16... ένα δέκα (παίρνει μια ράβδο/δεκάδα) και... 6 κουτάκια (κύβοι/μονάδες)... κι άλλα 8... για να δούμε πόσα έχω τώρα... (μετρά)... έχω 14... θα πάρω 10 και θα κάνω ένα από αυτά... τώρα έχω δύο... 2 Δέκα και 4 μικρά... όλα μαζί 24...

Ε: Έλα, να το κάνουμε και στο τετράδιο... (Έγραψε την πράξη κάθετα και έγραψε και το κρατούμενο στις Δεκάδες)

Στην αφαίρεση, αν και δυσκολεύτηκε αρχικά, κατανόησε την απεικόνιση των αριθμών με τις ράβδους και αντιστοίχισε τις ενέργειες στον αλγόριθμο της αφαίρεσης, ώστε να δανείζεται και να αναλύει αριθμούς.

Στην αφαίρεση $25 - 9$:

Δ: Να βγάλω από το 25 το 9;

Ε: Σωστά! Πώς θα το κάνεις;

Δ: Έχω 25... δηλαδή δύο μεγάλα και 5 μικρά...

Ε: Ωραία...! Συνέχισε...

Δ: Θα βγάλω 9... (σκέφτεται)... Πώς να βγάλω 9... δεν γίνεται...

Ε: Σκέψου τι θα μπορούσαμε να κάνουμε;

Δ: ...

Ε: Μπορούμε να πάρουμε μια δεκάδα και να την κάνουμε μονάδες;

Δ: Α! Ναι! Ένα τέτοιο είναι 10 μικρά... μπορώ να τα αλλάξω.

Ε: Συνέχισε...!

Δ: Τώρα έχω 15... βγάζω τα 9... (τα απομακρύνει)... μου έμεινε ένα μεγάλο και 6 μικρά δηλαδή 16!

Ε: Ας το κάνουμε και στο τετράδιο τώρα...

Στην επίλυση προβλημάτων ο Δημήτρης δυσκολευόταν να κατανοήσει τι ζητάει το πρόβλημα, ιδιαίτερα όταν ο άγνωστος ήταν στην αρχή του προβλήματος. Από την ώρα που άρχισε να χρησιμοποιεί το υλικό, τον βοήθησε πολύ η αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος και η εκτέλεση των πράξεων:

Στο πρόβλημα: «Η Ελένη θέλει να φτιάξει με τη μητέρα της μπισκότα. Η μαμά της έφτιαξε 38 μπισκότα. Η Ελένη έφτιαξε 15 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξαν και οι δυο μαζί;»

Δ: Λοιπόν τι λέει το πρόβλημα... έφτιαξε 38 μπισκότα... θα πάρω 3 δεκάδες (παίρνει 3 ράβδους)... και 8 μονάδες... (παίρνει 8 κυβάκια)... θα βάλω και τα άλλα... 1 δεκάδα και 5 μονάδες...

Ε: Τι θα κάνουμε τώρα;

Δ: Θα τα βάλουμε μαζί... θα κάνουμε πρόσθεση... (μετρά)... 3 και 1... 4 δεκάδες και... 8 και 5... 13 μονάδες... θα κάνουμε ότι και πριν... με 10 θα φτιάξουμε μια δεκάδα ακόμα... τώρα είναι (μετρά)... 5 οι δεκάδες και 3 τα μικρά... 53

Ε: Γράψε την πρόσθεση στο φύλλο.

Δ: (Γράφει το 38 και το 15 από κάτω)... τι κάναμε...; 8 και 5... 13... με τα 13 φτιάξαμε ένα μεγάλο (γράφει το 1 και το βάζει σε κύκλο) και... έμειναν 3 (το γράφει στις μονάδες)... 3 και 1... 4... και ένα το κρατούμενο 5... 53 βρήκαμε...

Ε: Τι μπορούμε να κάνουμε;

Δ: Κάτι με αυτά (δείχνει τα μικρά)... είναι πολλά...

Στο πρόβλημα: «Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 43 επιβάτες. Στη στάση κατέβηκαν 18 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες συνέχισε το λεωφορείο;»

Δ: (Διαβάζει το πρόβλημα)... είχε 43 επιβάτες... θα βάλω 4 δεκάδες και 3 κουτάκια... λέει κατέβηκαν από το λεωφορείο, βγήκαν... θα τα βγάλω... 1 δεκάδα (τη βγάζει) και... πάλι δεν έχω... θα πάρω ένα μεγάλο πάλι (αφήνει τη δεκάδα και βάζει 10 μονάδες)... τώρα μπορώ... (βγάζει και 8 μονάδες)... έμειναν στο λεωφορείο (σκέφτεται) 25 επιβάτες.

Ε: Τι πράξη θα γράψουμε στο φύλλο;

Δ: Αφαίρεση... βγάζω...

Ο Δημήτρης εκτέλεσε την αφαίρεση, κάνοντας ότι έκανε με το υλικό (αναδόμηση του μειωτέου).

3^η Μελέτη: Η διδακτική παρέμβαση για την Τριανταφυλλιά ξεκίνησε, όταν φοιτούσε στην Δ' δημοτικού. Η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. αναφέρει ότι όταν είδε τα χειραπτικά υλικά (τις αριθμογραμμές, τα ντόμινο, τους άβακες, τη ζυγαριά κ.λπ.), έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ρωτούσε, αν θα μπορούσε να παίζει με αυτά. Συμπλήρωνε με ευχαρίστηση τα Φ.Ε. των υλικών. Η κατάκτηση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.) στην πρώτη δεκάδα, τη διευκόλυναν να ολοκληρώνει τις ασκήσεις γρήγορα και σωστά. Με την αριθμογραμμή, τις ράβδους Cuisenaire και τον οριζόντιο άβακα, εξασκήθηκε στην κατανόηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας και την εφαρμογή της σε αθροίσματα, σαν στρατηγική μέτρησης από τον μεγαλύτερο προσθετέο. Στην αριθμογραμμή επίσης, εξασκήθηκε στην εκτέλεση αφαιρέσεων, επιλέγοντας να ανεβαίνει από τον αφαιρετέο στον μειωτέο αντί να κατεβαίνει από τον μειωτέο, όταν η διαφορά τους είναι μικρή (π.χ. 13-9).

Τα ντόμινο των πράξεων τη βοήθησαν να γράφει και να επαναλαμβάνει τα Β.Α.Δ. στην πρώτη εικοσάδα, διαδικασία που τη βοήθησε να αυτοματοποιήσει αθροίσματα και να αποφεύγει τη χρήση των δαχτύλων της. Με τη ζυγαριά έβρισκε πολύ εύκολα τα αθροίσματα και δούλεψε περισσότερο με αθροίσματα τριών αριθμών, καθώς και με τις κάρτες πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ίσων ποσοτήτων (π.χ. 3×5 ως $5 + 5 + 5$) για την εξάσκηση στην προπαίδεια. Επίσης, στη ζυγαριά και την αριθμογραμμή κατανόησε την εύρεση του συμπληρώματος ενός αριθμού.

Η αδυναμία της στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων και την εφαρμογή του αλγόριθμου σε προσθέσεις και αφαιρέσεις με “κρατούμενο” και “δανεικό” μας οδήγησε στην εκτεταμένη χρήση των κύβων δεκαδικής βάσης, υλικού που αναπαριστά τα αριθμητικά μεγέθη και την αξία θέσης κάθε ψηφίου των αριθμών. Με τους κύβους και την εξάσκηση στην αναπαράσταση των αριθμών, η Τριανταφυλλιά κατανόησε τη θεσιακή αξία των αριθμών και συμπλήρωσε σωστά τους πίνακες.

Έτσι στο 109 και την τοποθέτησή του στις στήλες θεσιακής αξίας:

Τ: ... έχουμε ένα μεγάλο (δείχνει την Εκατοντάδα) και 9 μικρά... θα βάλουμε 1 εδώ... (δείχνει τις Ε) και 1 εδώ... (δείχνει τις Μ)...

Ε: Και στις Δεκάδες;

Τ: ... (σκέφτεται)... θα βάλουμε το (0)...

Η αναπαράσταση των αριθμών με τους κύβους δεκαδικής βάσης βοήθησε την Τριανταφυλλιά και στην εκτέλεση των κάθετων προσθέσεων, στις οποίες είχε αρκετές δυσκολίες, όπως καταγράφηκε στις δοκιμασίες που ολοκλήρωσε πριν την παρέμβαση.

Στην κάθετη πρόσθεση $56 + 27$:

Τ: Για το 56 θα πάρω 5 δεκάδες και 6 μονάδες... για το 27... 2 δεκάδες και 7 μονάδες... τώρα θα προσθέσω... 6 και 7... (μετράει)... 13 μονάδες... για να δω τι κάναμε πριν (κοιτάζει την άσκηση στο Φ.Ε. που εικονοποιεί την πρόσθεση με τους κύβους)... θα πάρουμε 10 μονάδες και θα φτιάξουμε μια δεκάδα... (βάζει μια δεκάδα ακόμα)... έμειναν 3 μονάδες...

Ε: Γράψε τις μονάδες... η δεκάδα που έφτιαξες είναι το κρατούμενο... το

γράφουμε στη στήλη των δεκάδων, για να μην το ξεχάσουμε...

T: (βάζει το 1 πάνω από τις δεκάδες)... 5 και 2... 7 δεκάδες... και 1 ακόμα...

το κρατούμενο... 8... βρήκα 83...

Με την εξάσκηση στη χρήση του “κρατούμενου” σε κάθετες προσθέσεις η Τριανταφυλλιά κατανόησε τον αλγόριθμο της πρόσθεσης. Στον συγκεκριμένο τομέα αναφέρεται και η δασκάλα της γενικής τάξης, που έχει την Τριανταφυλλιά για δεύτερη συνεχόμενη χρονιά, η οποία όπως παρατηρεί : «... άρχισε να λύνει κάθετες προσθέσεις με κρατούμενο με μεγαλύτερη ευκολία ... μπερδεύεται σε πολυψήφιους αριθμούς...». Στις κάθετες αφαιρέσεις, όπως φάνηκε και από τα τεστ που συμπλήρωσε, εμφανίζονται και τα περισσότερα λάθη και αδυναμίες της μαθήτριάς στην εφαρμογή του αλγόριθμου, όταν χρειάζεται δανεισμός από ψηφίο ανώτερης τάξης.

Στην αφαίρεση 50 – 24 :

T: Για το 50 θα πάρω 5 δεκάδες... για το 24...

E: Δε θα πάρεις για το 24... είναι αφαίρεση... θα βγάλεις...

T: Ααα! Ναι,... μπερδεύτηκα... θα βγάλω... δεν έχω μονάδες από πού θα τα βγάλω;

E: Κοίταξε τι κάναμε στο παράδειγμα της αφαίρεσης πριν...

T: (κοιτάζει το παράδειγμα)... εντάξει θα πάρω μια δεκάδα και θα την κάνω 10 μονάδες...

E: Να το δείξουμε και στην πράξη μας αυτό; Πόσες είναι τώρα οι Δεκάδες;

T: ... είναι 4 οι δεκάδες... (με την υπόδειξη της εκπαιδευτικού σβήνει το 5 και γράφει από πάνω το 4)... τώρα θα βγάλω 10 έξω 4... 6... 4 βγάλω 2... 2... 26 βρήκα...

E: Όταν δεν έχουμε μονάδες, παίρνουμε... δανειζόμαστε από τις δεκάδες...

Το μαθηματικό πεδίο, στο οποίο συγκεντρώνονται οι περισσότερες από τις δυσκολίες των μαθητών της έρευνας, είναι η επίλυση προβλημάτων. Στον συγκεκριμένο τομέα, η Τριανταφυλλιά παρουσίασε αρκετές αδυναμίες στα προκαταρκτικά τεστ που αφορούν κυρίως την κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος και την επιλογή της σωστής πράξης που το επιλύει. Με τη βοήθεια του χειραπτικού υλικού γινόταν αναπαράσταση των στοιχείων κάθε προβλήματος

και ανάλυση των καταστάσεων που περιγράφονται. Έτσι, σε προβλήματα που η Τριανταφυλλιά δυσκολευόταν να κατανοήσει, με το υλικό μπόρεσε να επεξεργαστεί τα δεδομένα τους και να τα επιλύσει.

Στο πρόβλημα: «Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;», η Τριανταφυλλιά είπε:

Τ: Λοιπόν, πόσα είναι τα παιδιά... 19... παίρνω 1 δεκάδα και 9 μονάδες... τα 11 είναι αγόρια... (μεταφέρει πιο δίπλα 1 δεκάδα και 1 μονάδα)... έμειναν 8... αυτά είναι τα κορίτσια... 8!

Ε: Έλα, να κάνουμε και την αφαίρεση τώρα...

Παρόμοια και στο διαφορετικής δομής επόμενο πρόβλημα: «Ο Τάκης και ο Νίκος μετρούσαν τις τάπες τους. Ο Τάκης μέτρησε 27 τάπες. Ο Νίκος είχε 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη. Πόσες τάπες έχουν και οι δύο μαζί;», η Τριανταφυλλιά είπε:

Τ: Ο Τάκης έχει 27 τάπες... παίρνω 2 δεκάδες και 7 μονάδες... ο Νίκος έχει 8 περισσότερες... θα πάρω κι άλλα 8... 7 και 8... (μετρά)... 15... θα φτιάξω με τα 10 μία δεκάδα... 3 δεκάδες και 5 μονάδες... 35 έχουν...

Ε: Όχι, έχουν... 35 έχει ο Νίκος... αυτό θρήκες... και πόσα έχουν και οι δυο μαζί;

Τ: ... ο Τάκης έχει 27... ο Νίκος θρήκαμε ότι έχει 35... θα τα θάλουμε μαζί και θα το θρούμε...

Η αναπαράσταση των δεδομένων και η δραματοποίηση του προβλήματος βοηθούν στην κατανόηση και την επίλυσή του. Στο πρόβλημα με το κυλικείο, για παράδειγμα, η αναπαράσταση των τιμών με τα ψεύτικα κέρματα και χαρτονομίσματα του ευρώ βοήθησε την Τριανταφυλλιά να καταλάβει τη δεκαδική έκφραση του ευρώ (το 1,20 ως 1 ευρώ και 20 λεπτά) και να απαντήσει σωστά στο πρόβλημα. Επίσης, σε προβλήματα που ο άγνωστος ήταν στην αρχή, όπως το πρόβλημα με τον Πέτρο και την Άννα που προαναφέρθηκε, η μαθήτριά κατάφερε να τα απεικονίσει με το υλικό και να κατανοήσει τον τρόπο επίλυσής τους.

5.6.4. Στοιχεία μετά από την παρέμβαση

Μετά τη λήξη της διδακτικής παρέμβασης, με το τέλος του διδακτικού έτους 2012-2013, συγκεντρώθηκαν όλα τα δεδομένα που αφορούσαν τους μαθητές και

τον τρόπο που εργάστηκαν στη διάρκεια της χρονιάς με τη χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών. Τα δεδομένα προήλθαν από τη συμπλήρωση της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων, του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ (Κλίμακα 6 για τα μαθηματικά), από τις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. σε όσους μαθητές υπήρχε επαναξιολόγηση και από τις γενικότερες παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων, όπως καταγράφηκαν στα Φύλλα Παρατήρησης και αναφέρθηκαν στην επικοινωνία με τον ερευνητή.

ι. Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων

1^η Μελέτη: Μετά την παρέμβαση, οι εκπαιδευτικοί της γενικής τάξης και του Τ.Ε. συμπλήρωσαν για κάθε μαθητή που συμμετείχε στην έρευνα τη Λίστα Ελέγχου των Βασικών Δεξιοτήτων για τα Μαθηματικά, αναδεικνύοντας τις αλλαγές και την ενδεχόμενη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές μετά τη χρήση του χειραπτικού υλικού. Οι καταγραφές τους για τον Αντώνη επισήμαναν: α) την περαιτέρω κατανόηση μαθηματικών εννοιών σύγκρισης, όπως το "περισσότερο – λιγότερο" μετά τη χρήση και την αντιστοίχιση τους στην αριθμογραμμή· β) την απόκτηση ευχέρειας στη σύγκριση αριθμών μέχρι το 100 και την τοποθέτηση του κατάλληλου συμβόλου ανισότητας· γ) την κατανόηση της αξίας κάθε ψηφίου ενός αριθμού ανάλογα με τη θέση του (θεσιακή αξία), με την αναπαράσταση των αριθμών με τους κύβους· δ) τη σταδιακή αποφυγή αναποτελεσματικών πρακτικών, όπως η χρήση των δαχτύλων σε μαθηματικούς υπολογισμούς· ε) την επιτυχή εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων με διψήφιους και πολυψήφιους αριθμούς, αφού κατανόησε την έννοια της υπέρβασης της δεκάδας (κρατούμενο) στην πρόσθεση και του δανεισμού δεκάδας από μονάδα ανώτερης τάξης (δανεικό) στις αφαιρέσεις και στ) την επεξεργασία των δεδομένων και τον εντοπισμό της κατάλληλης πράξης στην επίλυση απλών προβλημάτων.

2^η Μελέτη: Η πορεία του Δημήτρη μετά το τέλος της παρέμβασης καταγράφηκε συμπληρωματικά με τη Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων που συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς του Τ.Ε. και της γενικής τάξης, καθώς και από τις συνεντεύξεις που έδωσαν από κοινού οι δύο εκπαιδευτικοί. Από την επεξεργασία των δεδομένων που συλλέχθηκαν, φαίνεται ότι ο Δημήτρης κατάφερε

να ξεπεράσει αρκετά από τα προβλήματα που είχε με βασικές μαθηματικές έννοιες και πράξεις.

Από τη συμπλήρωση της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων μετά τη διδακτική παρέμβαση, φαίνεται ότι: (α) μπορεί να αναγνωρίζει, να γράφει, να συγκρίνει και να διατάσσει τους αριθμούς μέχρι το 100· (β) κατανόησε τη λειτουργία του (0) στην εκτέλεση πράξεων· (γ) κατανόησε τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού· (δ) υπολογίζει νοερά προσθέσεις και αφαιρέσεις μέσα στη δεκάδα χωρίς να χρησιμοποιεί δάχτυλα ή άλλα υλικά· (ε) εκτελεί γραπτά προσθέσεις και αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς· (στ) κατανοεί τα ζητούμενα σε απλά λεκτικά αριθμητικά προβλήματα και (ζ) εντοπίζει την πράξη που πρέπει να κάνει για την επίλυσή τους.

3^η Μελέτη: Οι εκπαιδευτικοί του Τ.Ε. και της γενικής τάξης, μετά τη διδακτική παρέμβαση κατέγραψαν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με τη βελτίωση των επιδόσεων της Τριανταφυλλιάς, συμπληρώνοντας ξανά τη Λίστα Ελέγχου Βασικών Δεξιοτήτων για τα μαθηματικά. Από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών προκύπτει μεγάλη βελτίωση της Τριανταφυλλιάς σε τομείς των μαθηματικών, όπως: η θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού, η κατανόηση του μηδενός (0) στην εκτέλεση πράξεων, ο νοερός υπολογισμός προσθέσεων και αφαιρέσεων μέσα στην πρώτη εικοσάδα, η σταδιακή απομάκρυνση από τη χρήση αναποτελεσματικών πρακτικών μέτρησης, όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα, η εκτέλεση γραπτών προσθέσεων και αφαιρέσεων με μονοψήφιους και πολυψήφιους αριθμούς και η κατανόηση και επίλυση απλών και σύνθετων λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων.

ii. Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από τους Εκπαιδευτικούς (ΑΜΔΕ)

Στο ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ, παρά την σημαντικά καλύτερη επίδοση των μαθητών στις τιμές του τεστ μετά την παρέμβαση, σύμφωνα με τις νόρμες του συγκεκριμένου ανιχνευτικού εργαλείου, κατατάσσονται και πάλι στην κατηγορία της Πολύ Πιθανής (ΠΠ) ύπαρξης μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά. Παρόλα αυτά, δίνεται έμφαση στη βελτίωση που εμφάνισαν οι μαθητές στις 20 υποενότητες που εξετάζει το συγκεκριμένο εργαλείο και που δείχνει τη μικρή ή και μεγάλη σε κάποιες περιπτώσεις ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών στα

μαθηματικά, ακόμα κι αν δεν εξαλείφει παντελώς τις μαθηματικές τους αδυναμίες και ελλείψεις.

1^η Μελέτη: Στη συμπλήρωση του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ, στον γενικό δείκτη του τεστ, ο μαθητής, από την τιμή 69 με Μ.Ο. 3,5, που κατατάχθηκε πριν την παρέμβαση στο 42^ο Εκατοστημόριο, μετά την παρέμβαση σημείωσε σημαντική βελτίωση, δηλαδή, βρέθηκε στην τιμή 119 με Μ.Ο. 5,95, που αντιστοιχεί για την ηλικία και το φύλο του στο 75^ο Εκατοστημόριο. Ο μαθητής κατατάσσεται ξανά στην κατηγορία για «Πολύ Πιθανή» ύπαρξη δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά, αλλά θα πρέπει να επισημάνουμε τη σαφώς καλύτερη επίδοση του μαθητή σε τομείς όπως, η ταχύτερη ολοκλήρωση υπολογισμών (από το 2 που αντιστοιχεί στο «συχνά» στο 8 που αντιστοιχεί στο «σπάνια» στην κλίμακα Likert), η ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (από το 2 στο 7), η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και η ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου και η επιλογή της σωστής πράξης κατά την επίλυση προβλημάτων.

2^η Μελέτη: Όσον αφορά το ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ, που όπως είπαμε χορηγήθηκε άτυπα στον μαθητή, οι μεγαλύτερες αλλαγές που παρατηρήθηκαν και που βελτίωσαν τις επιδόσεις του Δημήτρη, αφορούν σύμφωνα με τις απόψεις των εκπαιδευτικών στα: (α) «Αργεί στην ολοκλήρωση υπολογισμών» (μεταφορά στην κλίμακα Likert του εργαλείου, από το 1-πάντα στο 7-σπάνια)· (β) «Δυσκολεύεται στην ανάκληση βασικών μαθηματικών δεδομένων (αθροίσματα στη δεκάδα)» (από το 2-συχνά στο 7-σπάνια)· (γ) «Κάνει λάθη στον «δανεισμό» κατά την εκτέλεση πράξεων» (από το 1-πάντα στο 6-μερικές φορές)· (δ) «Δυσκολεύεται στην εκτέλεση πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου» (από το 1-πάντα στο 6-μερικές φορές) και (ε) «Δυσκολεύεται στην κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων» (από το 2-συχνά στο 6-μερικές φορές). Βελτίωση υπήρξε και στους υπόλοιπους τομείς των μαθηματικών, που εξέτασε το ΑΜΔΕ.

3^η Μελέτη: Η συμπλήρωση του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ, μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης τον Ιούνιο του 2013, και από τους δύο εκπαιδευτικούς, μας δίνει αρκετά στοιχεία για την αλλαγή στις μαθηματικές επιδόσεις της μαθήτριας. Στον γενικό δείκτη του τεστ, από την τιμή 68 με Μ.Ο. 3,4, που την κατέταξε στο 45^ο

Εκατοστημόριο, μετά την παρέμβαση απέδωσε 120 με Μ.Ο. 6, που αντιστοιχεί στο 74^ο Εκατοστημόριο για την ηλικία και το φύλο της, που και πάλι παραπέμπει στην πολύ πιθανή ύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών, όμως δείχνει τη βελτίωση στις επιδόσεις της. Εδώ, θα πρέπει να σταθούμε στην επίδοση της Τριανταφυλλιάς σε τομείς, όπως: (α) στα λάθη στον δανεισμό κατά την εκτέλεση των πράξεων (από το 1 που αντιστοιχεί στο «*πάντα ή σχεδόν πάντα*» στο 7 που αντιστοιχεί στο «*σπάνια*» στην κλίμακα Likert, που χρησιμοποιεί το ανιχνευτικό εργαλείο)· (β) στη δυσκολία εκτέλεσης πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου (από το 2 που αντιστοιχεί στο «*συχνά*» στο 6 που αντιστοιχεί στο «*μερικές φορές*»)· (γ) στη δυσκολία με τα προβλήματα πολλών πράξεων (από το 1 που αντιστοιχεί στο «*πάντα ή σχεδόν πάντα*» στο 6 που αντιστοιχεί στο «*μερικές φορές*»)· (δ) στην ανάγκη εξωτερικής καθοδήγησης κατά την επίλυση σύνθετων ασκήσεων και προβλημάτων (από το 1 που αντιστοιχεί στο «*πάντα ή σχεδόν πάντα*» στο 7 που αντιστοιχεί στο «*σπάνια*»)· (ε) στην παράλειψη αξιολόγησης και ελέγχου των αποτελεσμάτων στα οποία καταλήγει (από το 1 που αντιστοιχεί στο «*πάντα ή σχεδόν πάντα*» στο 7 που αντιστοιχεί στο «*σπάνια*») και (στ) στη δυσκολία κατανόησης των λεκτικών προβλημάτων (από το 3 που αντιστοιχεί στο «*συχνά*» στο 7 που αντιστοιχεί στο «*σπάνια*»).

iii. Γνωματεύσεις ΚΕ.Δ.Δ.Υ. – Επαναξιολόγηση

Στο χρονικό διάστημα που διεξήχθη η διδακτική παρέμβαση, δεν πραγματοποιήθηκε επαναξιολόγηση του μαθητή της 2^{ης} μελέτης περίπτωσης από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ.

1^η Μελέτη: Μετά τη λήξη της παρέμβασης, ο Αντώνης συνέχισε με την ίδια εκπαιδευτικό και στην Δ' τάξη. Αυτό βοήθησε στη συνέχιση της χρήσης του υλικού τόσο στο Τ.Ε. όσο και στην τάξη, όταν αυτό ήταν χρονικά εφικτό. Η διαπίστωση της εκπαιδευτικού ότι με το υλικό κατάφερε να κατανοήσει μαθηματικές έννοιες και να βελτιώσει την επίδοσή του, οδήγησε στην υποστήριξή του με το υλικό και την επόμενη χρονιά σε συνεργασία με το Τ.Ε. Ο Αντώνης επαναξιολογήθηκε από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ. μετά από τρία χρόνια, όταν βρισκόταν στην ΣΤ' Δημοτικού (2015). Του χορηγήθηκε το Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης, στο οποίο με την

απόδοσή του κατατάσσεται «στον μέσο όρο επίδοσης σε σχέση με τους μαθητές της ίδιας ηλικίας. Ο γενικός δείκτης στην επαναξιολόγηση περιγράφει επαρκώς τις μαθηματικές δεξιότητες, επειδή δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στις κλίμακες μέτρησης («Λεξιλόγιο», «Υπολογισμοί» και «Επίλυση προβλημάτων»). Συνεπώς, έχει κατακτήσει επαρκώς το επίπεδο των βασικών μαθηματικών εννοιών, γνωρίζει και εφαρμόζει με επιτυχία τον μηχανισμό μαθηματικών αλγόριθμων και τύπων, ενώ επεξεργάζεται κατάλληλα τα στοιχεία και τις σχέσεις μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, στο ενδοατομικό του προφίλ παρατηρείται σχετική δυσκολία διαχείρισης αλγόριθμων με δεκαδικούς, κλάσματα, ποσοστά, καθώς και δυσκολία διαχείρισης σύνθετων δεδομένων και σχέσεων σε μαθηματικά προβλήματα». Η αξιολόγηση περιγράφει βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων του Αντώνη, που συνοδεύεται με μείωση της φοβίας και του άγχους για τα μαθηματικά.

3^η Μελέτη: Η μαθήτρια επαναξιολογήθηκε από το ΚΕ.Δ.Δ.Υ., όταν φοιτούσε στην ΣΤ' τάξη και πριν την είσοδό της στο γυμνάσιο. Από την αξιολόγηση της μαθηματικής επάρκειας (Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης), «... η γενική απόδοσή της την κατατάσσει σε χαμηλό επίπεδο σε σχέση με τη μέση απόδοση μαθητών ίδιας ηλικίας. Δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά απόδοσης στις υποκλίμακες του τεστ (λεξιλόγιο, υπολογισμοί, επίλυση προβλημάτων) και αυτό σημαίνει πως διαθέτει ισομερώς ανεπτυγμένες μαθηματικές ικανότητες. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούνται σχετικά ελλείμματα στη λεξιλογική ικανότητα μαθηματικών εννοιών (βασικές μαθηματικές έννοιες), στην ικανότητα χρήσης των αριθμητικών αλγορίθμων και στρατηγικών επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, προκειμένου να παράγει τον απαιτούμενο μαθηματικό συλλογισμό για την κατάλληλη επεξεργασία δεδομένων και σχέσεων απλών μαθηματικών προβλημάτων».

Γενικότερα, όπως καταγράφεται και στις γνωματεύσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ., η μαθηματική επίδοση και των δύο παιδιών είναι σαφώς βελτιωμένη από την πρώτη αξιολόγηση της μαθηματικής τους επάρκειας.

iv. Παρατηρήσεις εκπαιδευτικών

1^η Μελέτη: Από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι η μαθησιακή συμπεριφορά του Αντώνη σε σχέση με τα μαθηματικά βελτιώθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση. Η δασκάλα της τάξης του αναφέρει ότι:

«Μέσα στην τάξη φαίνεται πιο σίγουρος και συμμετοχικός ακόμη και σε ασκήσεις που δεν είναι εύκολο να τις λύσει. Νιώθει μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση».

«Με τη χρήση του υλικού αισθάνεται πιο σίγουρος. Πολλές φορές αναφέρεται στο χειραπτικό υλικό και ζητά να μπορεί να το έχει μαζί του την ώρα των μαθηματικών στην κανονική τάξη».

«Συχνά, όταν κάνουμε κάποιες πράξεις στον πίνακα, θέλει να σηκωθεί αυτός να τις κάνει. Μάλλον, θέλει να δείξει και στους υπόλοιπους ότι μπορεί...!».

Στο Τμήμα Ένταξης, ο Αντώνης, από τα πρώτα Φ.Ε. με την εξάσκηση του υλικού, έδειξε περισσότερο ενδιαφέρον. Πολύ συχνά σύμφωνα με την εκπαιδευτικό του Τ.Ε., εκδήλωνε την ευχαρίστησή του, για να χρησιμοποιεί το υλικό και έδειχνε ιδιαίτερη προτίμηση στις ράβδους, τη ζυγαριά, τα ντόμινο και τους κύβους. Πολύ συχνά χρησιμοποιούσε την αριθμογραμμή, που ήταν τοποθετημένη στην κορυφή του θρανίου. Η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. αναφέρει:

«Ερχόταν πιο χαρούμενος κάθε φορά και το πρώτο πράγμα που ρωτούσε ήταν τι θα κάνουμε σήμερα.»

«Πολύ συχνά, όταν ερχόταν η ώρα για να επιστρέψει στην τάξη του, ρωτούσε αν θα μπορούσε να μείνει για μια ώρα ακόμη, για να κάνει κι άλλες ασκήσεις. Όταν του έλεγα όχι, έφευγε θυμωμένος...».

«Η συνεχής εξάσκηση με το υλικό και κυρίως με τη ζυγαριά και τις ράβδους τον βοήθησαν να αποκτήσει ευχέρεια στον υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων μέσα στη δεκάδα. Σπάνια χρησιμοποιούσε τα δάχτυλα στον υπολογισμό».

«Με τους κύβους κατάφερε να καταλάβει τι σημαίνει κρατούμενο και δανεικό. Δε βιαζόταν να κάνει τις πράξεις και ήταν πιο προσεκτικός στους υπολογισμούς».

«Όταν λύναμε προβλήματα, συνδύαζε τη χρήση του υλικού και κατά κάποιον τρόπο δραματοποιούσε το πρόβλημα δείχνοντας -κυρίως με τους κύβους- τι λέει το πρόβλημα».

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων μετά την παρέμβαση και τα όσα ανέφεραν οι εκπαιδευτικοί του Αντώνη, φαίνεται πως η γενική εικόνα του μαθητή στα μαθηματικά εξακολουθεί να παραμένει σε χαμηλότερα επίπεδα από το μέσο όρο των μαθητών της τάξης του. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι μαθηματικές αδυναμίες του δυσκόλευαν και δυσκολεύουν την κατάκτηση πιο σύνθετων μαθηματικών γνώσεων σε έναν πολύ απαιτητικό τομέα γνώσης, όπως είναι τα μαθηματικά. Η σπειροειδής διάταξη της ύλης δεν επιτρέπει κενά ή απώλειες στη γνωστική πορεία του μαθητή, ενώ κάθε παρέμβαση, όσο στοχευμένη και να είναι, δεν μπορεί να αναπληρώσει το χαμένο έδαφος σε ένα γνωστικό πεδίο, όπου η προϋπάρχουσα γνώση καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την πρόσκτηση της καινούργιας γνώσης. Η εξέλιξη του Αντώνη μέσα από τη χρήση του χειραπτικού υλικού τον οδήγησε στην κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, κυρίως για την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων και την επίλυση προβλημάτων.

2^η Μελέτη: Από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών συνάγεται το συμπέρασμα ότι ο Δημήτρης άλλαξε στη διάρκεια της χρονιάς και μετά τη διδακτική παρέμβαση, τη στάση του απέναντι στα μαθηματικά και περιόρισε πολύ τη διάσπαση προσοχής, που τον χαρακτήριζε, όταν έπρεπε να ολοκληρώσει διδακτικά έργα. Χαρακτηριστικές είναι οι φράσεις των εκπαιδευτικών:

«Με το υλικό κατάφερε πολλά πράγματα, που δε θα μπορούσε με τον παραδοσιακό τρόπο. Μπόρεσε να κατανοήσει έννοιες, όπως κρατούμενο και δανεικό, κατάφερε να συνθέτει εύκολα και να αναλύει τη δεκάδα, να ανεβαίνει και να κατεβαίνει στην αριθμογραμμή και να επιλύει απλά μαθηματικά προβλήματα εικονοποιώντας τα στοιχεία τους».

«Όταν ξεκινήσαμε να δουλεύουμε με το υλικό, ενθουσιάστηκε.! Ήταν σαν να βρήκε κάτι, που το περίμενε καιρό».

«Με τη χρήση του υλικού, ο Δημήτρης κατάφερε να ολοκληρώνει πράξεις με κρατούμενα και δανεικά και το κυριότερο να χρησιμοποιεί και τον κλασικό αλγόριθμο των πράξεων, όταν πριν δεν μπορούσε να τον κατανοήσει».

«Κατανόησε την αντιμεταθετική ιδιότητα και τη χρήση της στον υπολογισμό αθροισμάτων, όπου χρειάζεται να ξεκινάμε από τον μεγαλύτερο αριθμό για την υπέρβαση της δεκάδας».

«Μόλις κατανόησε τις έννοιες του κρατούμενου και του δανεικού, έκανε τις προσθέσεις και αφαιρέσεις με τον κλασικό αλγόριθμο, βάζοντας τα κρατούμενα στη σωστή θέση και κάνοντας αναδόμηση του μειωτέου στην αφαίρεση, όπως ακριβώς και με τους κύβους».

«Του έδωσε την ευκαιρία να κατανοήσει το μέγεθος των αριθμών δοκιμάζοντας...».

Συνοψίζοντας, θα πρέπει να τονίσουμε ότι η εννοιολογική αλλαγή στον Δημήτρη σε αρκετές από τις μαθηματικές έννοιες που επεξεργαστήκαμε με τη βοήθεια του υλικού, επιτεύχθηκε γιατί το χειραπτικό υλικό, του έδωσε την ευκαιρία της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών στην πράξη και μέσα από αυτή την κατανόηση μαθηματικών εννοιών που δεν είχαν κατακτηθεί με την παραδοσιακή διδασκαλία, όπως η θεσιακή αξία, οι αλγόριθμοι των πράξεων και ιδιαίτερα οι «άυλες» έννοιες, «κρατούμενο» και «δανεικό», όπως και η επίλυση απλών αριθμητικών προβλημάτων. Επίσης, η συχνή ενασχόληση με τα υλικά που αναπαριστούν τα βασικά αριθμητικά δεδομένα, όπως οι ράβδοι Cuisenaire, η ζυγαριά, ο άβακας και τα ντόμινο, εξάσκησε πολύ τις μαθηματικές δεξιότητες του Δημήτρη και αυτοματοποίησε σε μεγάλο βαθμό την ανάκληση αθροισμάτων στην πρώτη εικοσάδα χωρίς τη χρήση των δαχτύλων ή άλλων υλικών.

3^η Μελέτη: Οι παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών με το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, όπως καταγράφηκαν στις συνεντεύξεις τους, καταδεικνύουν την αλλαγή στη στάση και την επίδοση της Τριανταφυλλιάς για τα μαθηματικά. Η εκπαιδευτικός του Τ.Ε. αναφέρει:

«Τη φετινή χρονιά με τη βοήθεια του χειραπτικού και του ψηφιακού υλικού, οι ώρες στο Τ. Ε. έγιναν πιο δημιουργικές και πιο αποτελεσματικές για την Τριανταφυλλιά. Η

χρήση του υλικού άρχισε να κεντρίζει την προσοχή της και της δημιούργησε κίνητρο για να δουλέψει».

«Με τη βοήθεια των υλικών κατάφερε να ξεπεράσει την εμμονή της, να πραγματοποιεί με τα δάχτυλα ακόμα και απλές πράξεις».

«Με το υλικό κατανόησε τη θεσιακή αξία και τις μαθηματικές έννοιες και μπόρεσε να επιλύσει μαθηματικά προβλήματα αναπαριστώντας τα βασικά τους στοιχεία».

«Με τη χρήση του χειραπτικού υλικού καταφέραμε να καλύψουμε αρκετό από το «χαμένο» έδαφος στα μαθηματικά».

Αντίστοιχα, η εκπαιδευτικός της γενικής τάξης αναφέρει:

«Τις ώρες που η Τριανταφυλλιά βρίσκεται στην τάξη την ώρα των μαθηματικών, δείχνει περισσότερο ενδιαφέρον στο μάθημα και προσπαθεί να λύνει τις ασκήσεις μαζί με τους άλλους μαθητές».

«Έρχεται συχνά και μου λέει ότι μπορεί να λύνει ασκήσεις κι εκείνη. Δε φοβάται να σηκώσει το χέρι της, για να λύσει ασκήσεις στον πίνακα».

«Σε μία αφαίρεση με δανεισμό έδειχνε στη συμμαθήτριά της, που κάθεται μαζί, την τεχνική της αναδόμησης του μειωτέου και πώς τη λύνει. Γενικά, στέκεται πιο σίγουρη μέσα στην τάξη, κάτι που καταλαβαίνουν και οι συμμαθητές της».

Δε σημαίνει ότι η παρέμβαση με τη χρήση του χειραπτικού υλικού κάλυψε τις μαθηματικές αδυναμίες της Τριανταφυλλιάς, αλλά σίγουρα και σύμφωνα με τις απόψεις των εκπαιδευτικών της τάξης και του Τ.Ε. τόνωσε την αυτό-εικόνα της μαθήτριας και τη στάση της για τα μαθηματικά.

Κεφάλαιο 5. Συζήτηση - Συμπεράσματα

6.1. Κατακλείδα	321
6.2. Εκπαιδευτικές συνέπειες	324
6.3. Περιορισμοί της έρευνας	327
6.4. Ερευνητικές προεκτάσεις	328

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα της χρήσης χειραπτικών και δυνητικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών σε μαθητές 6-9 ετών, με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, οι οποίοι φοιτούν σε Τ[μήματα] Έ[νταξης] δημοτικών σχολείων. Η επιλογή της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας, βασίστηκε σε ερευνητικά δεδομένα (Anstrom, 2006· Fuchs, & Fuchs 2002· Cawley, Parmar, Yan, & Miller, 1996· Cawley, Miller, & School, 1987· Scruggs & Masterpieri, 1986· Swanson & Rhine, 1985· Fleischner, Garnett, και Shepherd, 1982), τα οποία συνδέουν τη μαθηματική υποεπίδοση των μαθητών, που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, με μια καθυστέρηση δύο ετών σε σχέση με την επίδοση των μαθητών που δεν αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Η μαθηματική κατανόηση των μαθητών αυτών εξετάζεται υπό το πρίσμα συγκεκριμένων μεταβλητών, όπως οι μαθησιακές δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν, τα είδη των λαθών που κάνουν, η μέθοδος διδασκαλίας που δέχονται, αλλά και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων για τη διδασκαλία με τη χρήση των χειραπτικών υλικών.

Πρωταρχικός στόχος της έρευνας ήταν να ανιχνευτούν οι μαθηματικές δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές των Α' - Δ' τάξεων του δημοτικού σχολείου, που συμμετέχουν στην έρευνα και να κατηγοριοποιηθούν τα λάθη τους σε συγκεκριμένους τομείς της μαθηματικής γνώσης. Η διερεύνηση των δυσκολιών των μαθητών περιελάμβανε τη συμπλήρωση διαγνωστικών τεστ σταθμισμένων ή μη, συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών των Τ. Ε. και των γενικών τάξεων, στις οποίες δηλώνονται οι ελλείψεις ή και αδυναμίες των μαθητών που συμμετέχουν στην έρευνα και τις παρατηρήσεις του ερευνητή και των εκπαιδευτικών, ως προς το είδος και το εύρος των δυσκολιών των μαθητών. Επίσης, για τη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα για τα μαθηματικά και τη χρήση χειραπτικών υλικών, τους χορηγήθηκε πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση ειδικά κατασκευασμένο ερωτηματολόγιο από τον ερευνητή.

Η στατιστική ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων και η εννοιολογική αλλαγή που διαφαίνεται από την καταγραφή των ποιοτικών δεδομένων πριν και μετά τη

διδασκαλία παρέμβαση, επιβεβαιώνει την αρχική υπόθεση της έρευνας, ότι η χρήση χειραπτικών υλικών ως εργαλεία στη διδασκαλία των μαθηματικών θα επηρεάσει θετικά και θα βελτιώσει σημαντικά τις επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με πολυάριθμες έρευνες που έγιναν σε διάφορες τάξεις δημοτικού σχολείου και σε διάφορες χώρες και δείχνουν ότι η μαθηματική κατανόηση ενισχύεται με τη χρήση χειραπτικών υλικών (Bellonio, 2012· Moyer, Westenskow και Salkind, 2011· Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Gersten et al., 2009· Smith, 2008· Bryant, et al., 2008· Brown, 2007· Williams, 2001· Clements, 1999· Carroll & Porter, 1997· Sowell, 1989· Suydam & Higgins, 1977· Fennema, 1972, 1973) και δυνητικών υλικών (Moyer-Packenham & Westenskow, 2012· Suh & Moyer, 2007· Reimer και Moyer, 2005· Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002· Cain-Caston, 1996).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε, ότι η παρούσα ερευνητική μελέτη διαφοροποιείται από τις προαναφερόμενες αντίστοιχες έρευνες, ως προς τη χρονική διάρκεια της παρέμβασης και ως προς τη διδακτική υποστήριξη τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν κυρίως μέσα στα Τμήματα Ένταξης αλλά και στη γενική τάξη. Σε όλη τη διάρκεια του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού προγράμματος υπήρξε διαρκής στήριξη των εκπαιδευτικών μέσα από βραχείες επιμορφωτικές συναντήσεις με τον ερευνητή, οι οποίες εστίαζαν στην ορθή και αποτελεσματική χρήση και εφαρμογή των χειραπτικών υλικών. Επίσης, η ταυτόχρονη παρατήρηση και μελέτη της μαθησιακής πορείας των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και στα δύο εκπαιδευτικά πλαίσια, εμπλέκοντας εκτός από τον ερευνητή και τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων, δίνει μια πολύπλευρη και ουσιαστική εικόνα των αποτελεσμάτων της διδακτικής παρέμβασης και της επίδρασης της χρήσης χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών.

Η συγκεκριμένη ερευνητική προσπάθεια έρχεται να καλύψει ένα κενό που υπάρχει στον ελληνικό κι όχι μόνο, εκπαιδευτικό χώρο, στην υποστήριξη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, προτείνοντας την εφαρμογή ενός εκπαιδευτικού προγράμματος που βασίζεται στην ευέλικτη αλλά όχι άναρχη χρήση των χειραπτικών υλικών ως διδακτικών εργαλείων για την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, τόσο

στα Τ.Ε. όσο και στις γενικές τάξεις, μέσα από οργανωμένες διαφοροποιημένες προσεγγίσεις, επιτυγχάνοντας αυξημένα μαθησιακά αποτελέσματα.

Τα διερευνητικά ερωτήματα, που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης έρευνας, σκοπό είχαν να καταδείξουν την αξία των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών και την επίδρασή τους στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών, καθώς και στην αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών.

Ακολουθεί συζήτηση των αποτελεσμάτων ανά ερευνητικό ερώτημα:

Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Διερευνάται, αν μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην κατανόηση προμαθηματικών και βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Η επεξεργασία των δεδομένων που συλλέχτηκαν πριν την παρέμβαση, από τις άτυπες και σταθμισμένες δοκιμασίες που χορηγήθηκαν στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά της παρούσας έρευνας, συμφωνεί με τα ευρήματα άλλων ερευνών για τις αδυναμίες και ελλείψεις τους σε προμαθηματικές έννοιες, όπως η ταξινόμηση, η σειροθέτηση, η διατήρηση και η διάταξη των αριθμών (Ojose & Sexton, 2009· Παντελιάδου και Μπότσας 2007· Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004· Kroesbergen & Van Luit, Johannes, 2003· Carnine, 1997), τα ελλείμματά τους στη θεμελιώδη κατανόηση των αριθμών και των μεγεθών που αντιπροσωπεύουν (Landerl, Bevan, & Butterworth, 2003· Geary, Hoard, & Hamson, 1999· Koontz & Berch, 1996) και στην απόκτηση δεξιοτήτων απαρίθμησης / μέτρησης (Ojose & Sexton, 2009· Battle, 2007· Gersten, Jordan & Flojo, 2005· Clements, 1999· Fueyo & Bushell, 1998).

Τα αντιληπτικά ελλείμματα οπτικής διάκρισης, διάκρισης μορφής-πλαισίου και χωρικής οργάνωσης, καθώς και οι δυσκολίες αφαιρετικού συλλογισμού και εκφραστικού λόγου που συχνά εμφανίζουν οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες (Bley & Thorton, 1995), τους δυσκολεύουν στην ομαδοποίηση αντικειμένων με βάση κοινά χαρακτηριστικά και στη διάκριση και τη χωροχρονική οργάνωση (Bryant, 2005· Berch, 2005· Griffin, 2004) κυρίως στην προσχολική ηλικία. Στις άτυπες δοκιμασίες με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών που χορηγήθηκαν στους

μαθητές της έρευνάς μας και ειδικότερα στις ασκήσεις που αφορούν τη διάταξη των αριθμών, τις χρονικές ακολουθίες και την αναγνώριση και σύγκριση αριθμητικών ποσοτήτων, παρατηρήθηκαν πολλά λάθη τα οποία αναφέρονται στα αποτελέσματα σχετικών ερευνών και αφορούν τις δυσκολίες τους όπως: α) στην κατανόηση της έννοιας των αριθμών (Geary, Bailey, & Hoard, 2009· Fuchs, et al., 2006· Dowker, 2005· Berch, 2005· Griffin, 2004· Geary, Hoard, & Hamson, 1999· Burns, 1997· Funkhouser, 1995) β) στην αριθμητική και στον υπολογισμό (Tobia, Fasola, Lupieri, & Marzocchi, 2016· Rubinsten, & Henik, 2005· Uttal, 2003· Geary, Hamson, & Hoard, 2000) και γ) στις έννοιες της ποσότητας και του μεγέθους (πολύ/λίγο, μεγάλο/μικρό) και της χρονικής ακολουθίας (πριν/μετά) (Pasnak et al., 1996· Malabonga, Pasnak, Hendricks, Southard, & Lacey 1995· Pasnak, 1987).

Σε αντίστοιχο επίπεδο, κυμάνθηκαν και οι απαντήσεις των μαθητών στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ, όπου καταγράφηκαν λάθη των μαθητών στην απαρίθμηση ποσοτήτων (κηλίδων) (39 από τους 49 μαθητές - 80%), και στην εκτίμηση ποσότητας ανάλογα με το πλαίσιο (43 από τους 49 μαθητές - 88%). Επίσης, οι αδυναμίες των μαθητών σε προμαθηματικές έννοιες αναφέρονται και στις γνωματεύσεις των ΚΕ.Δ.Δ.Υ. για όσους μαθητές αξιολογήθηκαν αλλά και στις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών.

Τα ποιοτικά δεδομένα, που καταγράφηκαν στα Φύλλα Παρατήρησης από τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων και αφορούν την κατανόηση των προμαθηματικών εννοιών, δείχνουν τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών και την ενίσχυση της κατανόησης της έννοιας των αριθμών και στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών, όπως η σειροθέτηση, η ταξινόμηση, η σύγκριση, η διάταξη, η ακολουθία των αριθμών και η σύγκριση αριθμητικών μεγεθών και έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τα αντίστοιχα ερευνητικά δεδομένα (Geary, Bailey, & Hoard, 2009· Fuchs, et al., 2006· Dowker, 2005· Bryant, 2005· Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004· Chao, Stigler, & Woodward, 2000· Pasnak et al., 1996· Malabonga, Pasnak, Hendricks, Southard, & Lacey 1995· Venger & Gorbov, 1993· Pasnak, 1987).

Σε μια επισκόπηση των ερευνών, που μελέτησαν τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, με τη χρήση χειραπτικών υλικών (Smith, 2008· Steedly, 2008· Burns, 2008· Battle, 2007· Gersten, Jordan & Flojo, 2005· Uttal, 2003· Kroesbergen & Van Luit, 2003· Chao, Stigler & Woodward, 2000· Bushell, Fueyo, 1998) και δυνητικών υλικών (Moyer-

Packenham & Westenskow, 2012· Suh & Moyer, 2007· Steen, Brooks & Lyon, 2006· Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002), καταγράφονται αποτελέσματα που έρχονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα ευρήματα της παρούσας μελέτης και αποδεικνύουν τη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών και την ενίσχυση της κατανόησης των βασικών μαθηματικών εννοιών.

Από την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας, όπως προέκυψαν από τις άτυπες και σταθμισμένες δοκιμασίες που χορηγήθηκαν στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών. Στις συγκεκριμένες έννοιες, όπως φάνηκε και από την επεξεργασία των απαντήσεών τους στις άτυπες δοκιμασίες Α' και Β' αλλά και σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών τους, τόσο στη γενική τάξη όσο και στα Τμήματα Ένταξης, όπως αποτυπώθηκαν στις συνεντεύξεις τους αλλά και από τη συμπλήρωση της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων, παρατηρήθηκαν λάθη, που ευθυγραμμίζονται με τα δεδομένα πολλών σχετικών ερευνών, κυρίως από τους μαθητές των μικρών τάξεων και ειδικότερα: α) στην κατανόηση εννοιών, όπως το μέγεθος, το ύψος, το μήκος, το βάρος, (Geary, Bailey & Hoard, 2009· Hanich et al., 2001)· β) στην κατανόηση και τη χρήση εννοιών σύγκρισης π.χ. μεγαλύτερο-μικρότερο, περισσότερο-λιγότερο (Ojose & Sexton, 2009· Jordan & Montani, 1997)· γ) στη διάταξη αριθμών σε αύξουσα και φθίνουσα κλίμακα (π.χ. ανά 2 ανά 5 και ανά 10), (Smith, 2008· Geary, 2004)· δ) στη σύγκριση αριθμών και στην κατανόηση και χρήση των συμβόλων ισότητας/ανισότητας (Cirino et al., 2015· Jordan et al., 2006· Berch, 2005) και, ε) στην ανάγνωση και γραφή των αριθμών (Gersten, Jordan & Flojo, 2005· Chao, Stigler & Woodward, 2000· Russell & Ginsburg, 1984). Η επεξεργασία του τεστ ZAPEKI, επιβεβαίωσε τις αδυναμίες των μαθητών, αφού δεν ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητες: στην προφορική αντίστροφη μέτρηση (39 από τους 49 μαθητές - 80%), στην καταγραφή υπαγορευμένων αριθμών (34 από τους 49 μαθητές - 69%), στην αντιληπτική εκτίμηση ποσότητας (42 από τους 49 μαθητές - 86%) και στην αντιστοίχιση οπτικά δοσμένων αριθμών σε άξονα (38 από τους 49 μαθητές - 78%).

Οι παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση και εφαρμογή των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, όπως καταγράφηκαν στις συνεντεύξεις τους και στα Φύλλα Παρατήρησης,

επισημαίνουν τη βελτίωση της κατανόησης των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά σε βασικές μαθηματικές έννοιες και συντάσσονται με τα συμπεράσματα των αντίστοιχων ερευνών (Bellonio, 2012· Moyer-Packenham & Westenskow, 2012· Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Gersten et al., 2009· Smith, 2008· Bryant, et al., 2008· Suh & Moyer, 2007· Clements, 1999· Rivera, 1997· Okamoto, & Case, 1996· Cain-Caston, 1996· Mercer, & Miller, 1992· Post, 1981). Η εννοιολογική αλλαγή και η βελτίωση της κατανόησης των βασικών μαθηματικών εννοιών που επέφερε η χρήση των χειραπτικών υλικών στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ενισχύουν τα ερευνητικά δεδομένα και αναδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της χρήσης τους, αφού διαφοροποιούν το εκπαιδευτικό περιβάλλον των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων και δημιουργούν ένα διδακτικό πλαίσιο, όπου μαθητές και εκπαιδευτικοί ενεργοποιούνται σε μια διαδικασία ανακάλυψης και ουσιαστικής κατανόησης της μαθηματικής γνώσης. Συστατικό του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο οποίο εξελίχθηκαν οι πορείες μάθησης των μαθητών στα Τμήματα Ένταξης και στις γενικές τάξεις κατά τη διάρκεια της παρούσας έρευνας, ήταν η ενσωμάτωση φυσικών και ψηφιακών μορφών χειραπτικών υλικών στη διαδικασία. Παρότι δε στοχεύαμε στη μελέτη αυτής ακριβώς της παραμέτρου, θεωρούμε ότι η οργανική σχέση μεταξύ των δύο μορφών χειραπτικού υλικού συνέβαλε στην αναδιαμόρφωση του διδακτικού πλαισίου με την προσθήκη διδακτικών εργαλείων πολύπλευρης αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης

Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Διερευνάται, αν μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, υπήρξε σημαντική βελτίωση της επίδοσης στην αλγοριθμική διαδικασία και την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Τα περισσότερα προβλήματα των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά σχετικά με την ανάπτυξη των αριθμητικών δεξιοτήτων, αφορούν: α) στη μετάβασή τους από την εφαρμογή απλών στρατηγικών αριθμητικών υπολογισμών σε πιο σύνθετες στρατηγικές (Fuchs et al., 2004· Chao, Stigler, & Woodward, 2000), β) στην ικανότητα για αυτόματη ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007·

Gersten, Jordan, & Flojo, 2005· Geary, 2004), γ) στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων των αριθμών (Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez 2008· Fuson & Briars, 1990) και δ) στην εκμάθηση και εφαρμογή των αλγόριθμων των αριθμητικών πράξεων (Burns, 2008· Tournaki, Bae & Kerekes, 2008· Bolyard & Moyer-Packenham, 2006).

α. Στρατηγικές

Επειδή η ευχέρεια και η ακρίβεια με τους αριθμητικούς συνδυασμούς απαιτούν τη χρήση ώριμων στρατηγικών, η διδασκαλία και καθοδήγηση για τη χρήση στρατηγικών είναι σημαντική. Ο Siegler (1988: 835) περιέγραψε τα διαισθητικά οφέλη αυτού του τύπου διαφοροποιημένης διδασκαλίας ως εξής: *«Διδάσκοντας τα παιδιά να χρησιμοποιούν εφεδρικές στρατηγικές, τους παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια, περισσότερες ευκαιρίες για να μάθουν τη σωστή απάντηση [και]... μειώνει την πιθανότητα συμμετοχής σε εσφαλμένες απαντήσεις, που παράγονται από κακή εκτέλεση των στρατηγικών στο πρόβλημα».*

Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά είναι οι δυσκολίες σε αριθμητικούς υπολογισμούς (Gersten et al., 2005· Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002· Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001), οι οποίες αποτελούν σημαντικό παράγοντα στην απόκτηση της ικανότητάς τους να εκτελούν αριθμητικές πράξεις (Fuchs et al., 2005). Η ευχέρεια και η ακρίβεια στους αριθμητικούς υπολογισμούς απαιτούν τη χρήση κατάλληλων στρατηγικών (Fuchs et al., 2004· Chao, Stigler, & Woodward, 2000).

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες που συμμετείχαν, σχετικά με τις στρατηγικές μέτρησης και υπολογισμού που χρησιμοποιούν, έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα όλων των ερευνών, οι οποίες συνεξετάζουν τη διδασκαλία με την καθοδήγηση για τη χρήση ώριμων στρατηγικών (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007· Torbeyn, Verschaffel, & Ghesquiere, 2004· Geary, 2004· Robinson et al., 2002· Siegel, 1989· Siegler, 1988· Carpenter, & Moser, 1984) και οι οποίες δείχνουν τη σημαντικότητα της χρήσης των κατάλληλων στρατηγικών στην ενίσχυση της γνώσης και της ευχέρειας των αριθμητικών συνδυασμών. Έτσι, τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν από τις άτυπες και σταθμισμένες δοκιμασίες, που συμπλήρωσαν οι μαθητές της

έρευνάς μας, δείχνουν την προσκόλλησή τους στη χρήση των δαχτύλων ακόμη και στον υπολογισμό αθροισμάτων και διαφορών κατά ένα (π.χ. $8+1$ ή $9-1$) (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007· Torbeyn, Verschaffel, & Ghesquiere, 2004). Η γενικότερη χρήση των δαχτύλων από τους μαθητές της παρούσας μελέτης, ακόμη και σε αθροίσματα που είναι εύκολο να ανακτηθούν από τη μνήμη, όπως το $2+2$, επιβεβαιώνουν τα ευρήματα των Torbeyn, Verschaffel και Ghesquiere (2004), σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές, που παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, συνήθως εμμένουν στη χρήση στρατηγικών «επιφανειακής επεξεργασίας», όπως η “στρατηγική της μέτρησης προς τα πάνω” και η “στρατηγική της μέτρησης όλων”. Σε αριθμητικούς υπολογισμούς που υπερβαίνουν τη δεκάδα, παρατηρήθηκε και το φαινόμενο της χρήσης διαφόρων σχολικών αντικειμένων (γόμες, ξύστρες, μολύβια) επιπλέον των δαχτύλων των δύο χεριών για να αναπαραστήσουν τους αριθμούς.

Από την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, όπως καταγράφηκαν στη Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων και πιο συγκεκριμένα στην ερώτηση: “Χρησιμοποιεί τα δάχτυλα στην πρόσθεση ή αφαίρεση”, αλλά και από τα δεδομένα που συλλέχτηκαν και από τα στοιχεία που προέκυψαν από τα Φύλλα Παρατήρησης κυρίως των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, φαίνεται μια μεταστροφή των μαθητών σε πιο αποτελεσματικές στρατηγικές επιβεβαιώνοντας τα ερευνητικά δεδομένα (Suh & Moyer, 2007· Torbeyn, Verschaffel, & Ghesquiere, 2004· Geary, 2004· Boulton-Lewis, 1996· Carpenter & Moser, 1984) και διαφαίνεται η αντικατάσταση αναποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης με τη χρήση των δαχτύλων, με στρατηγικές μέτρησης, όπως η “μέτρηση προς τα πάνω” ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο προσθετέο με την κατανόηση της αντιμεταθετικής ιδιότητας στην πρόσθεση. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης, όπως διατυπώθηκαν στις συνεντεύξεις, η αναπαράσταση των αριθμών με τα χειραπτικά υλικά, η χρήση της αριθμογραμμής και των ράβδων Cuisenaire, τα πλαίσια του 5 και του 10 και οι κύβοι δεκαδικής βάσης, βοήθησαν στη σταδιακή αποδυνάμωση της χρήσης των δαχτύλων στους αριθμητικούς υπολογισμούς.

β. Ευχέρεια στην εύρεση και ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων

Μια θεμελιώδης προϋπόθεση για την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων είναι η ακριβής και ταχεία ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.) από τη μνήμη (Tolar, et al., 2016· Battle, 2007· Bolyard & Moyer-Packenham, 2006· Waycik, 2006· Kroesbergen & Van Luit, J., 2003). Ωστόσο, πιθανές αδυναμίες της μνήμης, της διάκρισης, του εκφραστικού λόγου και της τήρησης ακολουθιών, που συχνά χαρακτηρίζουν τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά, καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολη την ευχερή χρήση αυτών των στοιχείων της μαθηματικής γνώσης (Geary, 2004).

Σύμφωνα με τους Goldman και Pellegrino, (1987: 146), «... η γενική έννοια του αυτοματισμού των αριθμητικών δεδομένων είναι ότι, με την εκτεταμένη πρακτική, ειδικές δεξιότητες υπολογισμού μπορούν να φτάσουν σε ένα επίπεδο επάρκειας, όπου η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων είναι ταχεία και ακριβής με μικρό ή καθόλου συνειδητό έλεγχο..., ενώ η προσοχή μπορεί να διατεθεί για άλλες εργασίες ή διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένων ενεργειών ανώτερου επιπέδου ή ελέγχου των πράξεων».

Από τα στοιχεία που καταγράφηκαν στις δοκιμασίες που χορηγήθηκαν στους μαθητές της παρούσας μελέτης, φάνηκε η αδυναμία τους στην ευχέρεια εύρεσης των βασικών αριθμητικών δεδομένων, γεγονός που αναφέρεται και στα αποτελέσματα σχετικών ερευνών (Tolar, et al., 2016· Battle, 2007· Bolyard & Moyer-Packenham, 2006· Gersten, 2005) για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Τα ευρήματα από έρευνες σχετικές με την ευχέρεια ανάκλησης από τη μνήμη, των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Mazzocco & Thompson, 2005· Geary et al., 2000· Baroody & Wilkins, 1999), έχουν δύο τουλάχιστον εκπαιδευτικές επιπτώσεις, που βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Αφενός, τα ελλείμματα στην ανάκτηση αριθμητικών δεδομένων είναι ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Waycik, 2006· Skinner, Bamberg, Smith & Powell, 1993· Beirne-Smith, 1991), συμπέρασμα που συμφωνεί με τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν από την επεξεργασία των δεδομένων, που συλλέχτηκαν και από τους μαθητές της παρούσας μελέτης. Αφετέρου, η δεξιότητα της ευχερούς ανάκλησης των δεδομένων από τη

μνήμη, φαίνεται ότι έχει σημαντικό αντίκτυπο σε πιο σύνθετες μαθηματικές δεξιότητες, όπως στον πολυψήφιο υπολογισμό και την επίλυση προβλημάτων (Cirino, Fletcher, Ewing-Cobbs, Barnes, & Fuchs, 2007· Robinson et al., 2002), στοιχείο που επιβεβαιώθηκε και στα ευρήματα της δικής μας έρευνας. Αυτό δείχνει ότι η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να δίνει μεγαλύτερη έμφαση στην διδασκαλία αυτής της βασικής δεξιότητας στα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες.

Από τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε. αλλά και τους εκπαιδευτικούς των γενικών τάξεων, τόσο κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση του χειραπτικού υλικού, όσο και από την συμπλήρωση του ανιχνευτικού εργαλείου ΑΜΔΕ, του ερωτηματολογίου των εκπαιδευτικών, των συνεντεύξεων και της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων, συμφωνούν με τα ευρήματα ερευνών, τα οποία δείχνουν ότι η χρήση βοηθητικών διδακτικών υλικών, ενισχύει την αυτοματοποίηση και την ευχερή ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων από τη μνήμη, των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Smith, 2008· Witzel, 2007· Woodward, 2006· Wisniewski & Smith, 2002· Raymond & Leinenbach, 2000· Bushell & Fueyo, 1998· Funkhouser, 1995). Φαίνεται πως η χρήση των υλικών βοήθησε τους μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες, να αποκτήσουν αίσθηση των συμβολικών αριθμητικών παραστάσεων και να αυτοματοποιήσουν σε μεγάλο βαθμό βασικά αριθμητικά δεδομένα και την ανάκλησή τους από τη μνήμη.

Επίσης, η ποσοτική ανάλυση των δεδομένων καταδεικνύει τη μεγάλη αλλαγή στις επιδόσεις των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση (βλ. πίνακες 7 και 8). Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν και οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τους μαθητές της έρευνάς μας, όπως καταγράφηκαν στις συνεντεύξεις τους με τον ερευνητή, καταδεικνύοντας ότι η χρήση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, βελτίωσε τις επιδόσεις των μαθητών συμφωνώντας με τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών (Toptas, Celik & Karaca, 2012· Hunt, Nipper & Nash, 2011· Johnson, Humphrey, Mellard, Woods, & Swanson, 2010· Moyer-Packenham, Salkind & Bolyard, 2008). Ειδικότερα, η εξάσκηση και χρήση των χειραπτικών υλικών και κυρίως της ζυγαριάς μέτρησης, των ράβδων Cuisenaire, των ντόμινο πράξεων και της αριθμογραμμής και η ταυτόχρονη καταγραφή των ενεργειών τους στο χαρτί, οδήγησε στην ενίσχυση της αυτοματοποίησης των αριθμητικών συνδυασμών από

το 1 μέχρι το 20 και τη συνακόλουθη αποτελεσματική ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων από τη μνήμη.

γ. Κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων των αριθμών

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2004), η αναγνώριση της θεσιακής αξίας των ψηφίων που απαρτίζουν τους αριθμούς ως μαθηματικά σύμβολα, αναμφισβήτητα αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές έννοιες, που πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως, για να καταλάβουν τη δομή και λειτουργία του δεκαδικού συστήματος. Ο ερευνητής υποστηρίζει ότι η κατανόηση της θεσιακής αξίας βοηθά τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις αριθμητικές σχέσεις και το “πώς” και “γιατί” των διαδικασιών υπολογισμού. Δυστυχώς, ο χρόνος που αφιερώνεται στη διδασκαλία και εξάσκηση της έννοιας της δεκαδικής βάσης είναι περιορισμένος και αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να εμφανίζουν προβλήματα στη γνωστική περιοχή της θεσιακής αξίας (Bryant, Smith, & Bryant, 2008).

Σε μια ανασκόπηση ερευνών του Andersson (2008) σχετικά με τη θεσιακή αξία, μόνο τέσσερις (4) μελέτες έχουν συμπεριλάβει μετρήσεις της κατανόησης των μαθητών σχετικά με τη θεσιακή αξία και τη δεξιότητα ολοκλήρωσης υπολογισμών με πολυψήφιους αριθμούς σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Hanich et al., 2001· Jordan & Hanich, 2000· Russell & Ginsburg, 1984). Για τον Andersson, η απουσία σχετικών ερευνών δημιουργεί έκπληξη μιας και η θεσιακή αξία είναι μια βασική μαθηματική έννοια στην οποία στηρίζεται κατά πολύ η ολοκλήρωση πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Σε όλες τις μελέτες, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες εμφάνισαν σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τους τυπικούς μαθητές, κάτι που παρατηρήθηκε και στα στοιχεία που καταγράφηκαν και στη δική μας έρευνα σχετικά με τη θεσιακή αξία των ψηφίων των αριθμών.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας αντιστοιχούν στις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές σχετικά με τη θεσιακή αξία, που αναφέρει ο Orton (1992): α) στη διάκριση του μεγαλύτερου/μικρότερου μεταξύ αριθμών με τα ίδια ψηφία (π.χ. 152-125), β) στη διάκριση της αξίας του ίδιου ψηφίου σε διαφορετικές θέσεις (π.χ. του 5 στους αριθμούς 35,521, 256), γ) στη γραφή αριθμών, όπως το 432 ως 400302 και δ) στην αδυναμία σχηματισμού του μεγαλύτερου/μικρότερου αριθμού

με τη χρήση δοθέντων ψηφίων (π.χ. με τα 2, 8, 9). Η επεξεργασία των απαντήσεων τους στις δραστηριότητες του τεστ Β με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Β' τάξης και στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ αλλά και στη σχετική ερώτηση «Γνωρίζει τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού;» από τη Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων, δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές (45 στους 62 μαθητές - 73%) δυσκολεύονται στην αναγνώριση της αξίας των ψηφίων ανάλογα με τη θέση τους αλλά και στην τοποθέτηση πολυψήφιων αριθμών στις αξιακές στήλες (Μ=Μονάδες, Δ=Δεκάδες, Ε=Εκατοντάδες κ.λπ.). Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και σε κατάλληλα Φύλλα Εργασίας, οι μαθητές εξασκήθηκαν στη συγκεκριμένη δεξιότητα με τη χρήση κύβων δεκαδικής βάσης σε φυσική αλλά και σε ψηφιακή μορφή. Οι αρχικές αδυναμίες τους στη μαθηματική έννοια της θεσιακής αξίας, σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς, γρήγορα ξεπεράστηκαν. Ιδιαίτερη μνεία έγινε στην κατανόηση της θεσιακής αξίας του μηδενός (0), το οποίο οι περισσότεροι μαθητές το παραλείπουν θεωρώντας το ως "τίποτα".

Η βελτίωση της κατανόησης των μαθητών της έρευνάς μας σχετικά με τη θεσιακή αξία με την αξιοποίηση των κύβων δεκαδικής βάσης βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τα ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Puchner, Taylor, O'Donnell & Fick, 2008· Fuson & Briars, 1990). Οι Fuson και Briars (1990) στη μελέτη τους χρησιμοποίησαν κύβους δεκαδικής βάσης σε μια εκπαιδευτική προσέγγιση διδασκαλίας για την κατανόηση της θεσιακής αξίας. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους αντιστοιχούν με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας και δείχνουν ότι η χρήση των κύβων βοήθησε τους μαθητές: α) να κατανοήσουν την αξία των ψηφίων ανάλογα με τη θέση τους, β) να κατανοήσουν τη μορφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και γ) να διευκολυνθούν σε πράξεις έως τετραψήφιων αριθμών. Επίσης, πρόσφατα οι Puchner, Taylor, O'Donnell και Fick (2008) χρησιμοποίησαν την εκτεταμένη σημειογραφία (π.χ. $335=300+30+5$), κύβους δεκαδικής βάσης ($335 = 3E - 3Δ - 5M$) και λεκτικά σχήματα (τριακόσια τριάντα πέντε) για την κατανόηση της θεσιακής αξίας, διαδικασία που εφαρμόστηκε και στη διδακτική παρέμβαση της παρούσας μελέτης. Οι περισσότεροι από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά τους, όπως και οι μαθητές που συμμετείχαν στη δική μας έρευνα, χρησιμοποίησαν αποτελεσματικά τους κύβους δεκαδικής βάσης και

αναπαράστησαν τους αριθμούς τοποθετώντας τους με επιτυχία στις αντίστοιχες θέσεις τους.

δ. Εφαρμογή των αλγόριθμων των αριθμητικών πράξεων

Η ανάπτυξη της κατανόησης των σχέσεων εντός και μεταξύ των αριθμητικών πράξεων (αρχές υπολογισμού), είναι μια προϋπόθεση τόσο για τον ακριβή και αποτελεσματικό υπολογισμό πράξεων με πολυψήφιους, όσο και για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Jordan, Hanich, & Uberti, 2003· Geary, 2001). Σύμφωνα με έρευνες, η κατανόηση του αλγόριθμου των πράξεων και κυρίως της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Uribe-Florez, & Wilkins, 2010· Tournaki, Bae, & Kerekes, 2008· Zhou, & Peverly, 2005), προϋποθέτει την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων των αριθμών (Geary, 2004), της υπέρβασης της δεκάδας με το “κρατούμενο” (Wisniewski, & Smith, 2002) και του “δανεικού” δηλαδή του δανεισμού δεκάδας από ψηφίο ανώτερης τάξης (Van Luit & Van der Aalsvoort, 1985). Τα αλγοριθμικά λάθη, αποτελούν για τους μαθητές της παρούσας μελέτης, το συχνότερο φαινόμενο που εμφανίστηκε στις δοκιμασίες που υποβλήθηκαν πριν τη διδακτική παρέμβαση με το υλικό και συμφωνούν με τα συμπεράσματα ερευνών, που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά κάνουν πολλά λάθη στη διαδικασία του αλγόριθμου των πράξεων (Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008· Amaya, et al., 2007· Torbeyns, Verschaffel & Chesquiere, 2004· Van Luit, 1994· Siegler, & Shrager, 1984· Carpenter, & Moser, 1984).

Τα είδη των λαθών που εμφανίστηκαν στις δοκιμασίες ανίχνευσης των μαθησιακών δυσκολιών, που χορηγήθηκαν στου μαθητές της έρευνάς μας, επιβεβαιώνουν τα δεδομένα σχετικών ερευνών (Geary, 2004· Geary, Hoard & Hamson, 1999· Αγαλιώτης, 1997· Geary, 1994· Spiers, 1987) και αφορούν κυρίως λάθη στη θεσιακή αξία, στην παράλειψη “κρατούμενων” ή “δανεικών” ή στην τοποθέτησή τους σε λάθος στήλη, στην ελλιπή εκτέλεση του αλγόριθμου, στη σύγχυση των αλγοριθμικών βημάτων και των συμβόλων ή την εκτέλεση άλλης πράξης (Spiers, 1987). Μια πιθανή εξήγηση λαθών όπως: η εκτέλεση πρόσθεσης αντί για αφαίρεση (και το αντίθετο), παρά την κατανόηση και τη διάκριση των εννοιών των πράξεων, η εκτέλεση μιας πράξης από αριστερά προς τα δεξιά, η

τοποθέτηση αριθμών σε λάθος στήλη, η σύγχυση των αριθμητικών ψηφίων και συμβόλων πράξεων κατά την ανάγνωση και τη γραφή κ.ά., βρίσκεται στις παρατηρήσεις ερευνητών, όπως οι Geary, Hoard και Hamson (1999), οι οποίοι αναφέρουν ότι υπολογιστικά λάθη μπορεί να προέλθουν και από δυσκολίες που αφορούν: α) τη σωστή αντίληψη και διάκριση μέσα στον χώρο, β) τη διάταξη και τη μορφή των αριθμών και γ) των συμβόλων που συμμετέχουν σε μια πράξη.

Τα ερευνητικά δεδομένα των Bryant, Bryant και Hammil, (2000) και του Αγαλιώτη, (2000) αναφέρουν ότι τα συνηθέστερα και συχνότερα λάθη που κάνουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αφορούν ελλείψεις και αδυναμίες κατά την εκτέλεση των πράξεων, τα οποία προκύπτουν από σφάλματα στον δανεισμό δεκάδας κατά την αφαίρεση με το “δανεικό” και κατά την πρόσθεση στην υπέρβαση της δεκάδας με το “κρατούμενο”. Οι αναφορές των ερευνητών επιβεβαιώθηκαν και στην παρούσα μελέτη, αφού οι περισσότεροι μαθητές (82%) έκαναν λάθη στις κάθετες προσθέσεις με “κρατούμενο”, που κλήθηκαν να εκτελέσουν στα τεστ με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα και στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ, ενώ κανένας από τους μαθητές (100%) δεν ολοκλήρωσε τις κάθετες αφαιρέσεις με “δανεικό”.

Η υλική αναπαράσταση με τη βοήθεια των χειραπτικών υλικών, όπως παρατήρησαν οι εκπαιδευτικοί στις συνεντεύξεις τους και από την παρατήρηση των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, βοήθησε τους μαθητές της συγκεκριμένης μελέτης να κατανοήσουν για την πρόσθεση την υπέρβαση της δεκάδας και τη δημιουργία μιας νέας δεκάδας, που πρέπει να μεταφερθεί σε στήλη ανώτερης τάξης (το κρατούμενο) και στην αφαίρεση, τον δανεισμό μιας δεκάδας από ανώτερη τάξη και την ανάλυσή της σε μονάδες κατώτερης τάξης (το δανεικό). Οι έννοιες “κρατούμενο” και “δανεικό” αποτελούν μαθηματικές έννοιες, που αν και έχουν υλική υπόσταση, δεν είναι εύκολα “ορατές” από τους μαθητές και αποκτούν έναν “αδιαφανή” και συμβολικό χαρακτήρα στη διαδικασία επίλυσης μιας πρόσθεσης ή αφαίρεσης στα πλαίσια μιας παραδοσιακής διδασκαλίας (Geary, 2004). Οι συγκεκριμένες αναφορές για την επίδραση της εφαρμογής των υλικών στην κατανόηση του τρόπου εκτέλεσης των πράξεων συνάδει με τα αποτελέσματα και άλλων αντίστοιχων ερευνών (Witzel, 2007· Battle, 2007· Berkas, & Pattison, 2007· Witzel, Mercer, & Miller, 2003· Moch, 2001· Hall, 1998· Marsh & Cook, 1996· Fuson, Briars, 1990).

Στις μελέτες του Witzel (2007) και του Hall (1998) αναφέρεται ότι τα χειραπτικά υλικά είναι χρήσιμα στην κατανόηση της διαδικασίας μιας πράξης, λόγω της ευκολίας της περιγραφής των δράσεων με εμπράγματο τρόπο και της πολυαισθητηριακής και δομημένης προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών που παρέχουν, σε αντίθεση με τον συμβολικό τρόπο κάθε πράξης. Σύμφωνα με τους ερευνητές, η μεταφορά της διαδικασίας με τα υλικά συνεπάγεται κατ' αναλογία, υποκατάσταση και απλούστευση του αλγόριθμου της πράξης, σε αντιδιαστολή με τη μηχανική αποτύπωση βημάτων υπολογισμού σε ένα συμβολικό και αφηρημένο πεδίο. Τα συμπεράσματά τους επιβεβαιώθηκαν από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών της παρούσας έρευνας, τα οποία καταδεικνύουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες κατανοούν την αλγοριθμική διαδικασία μέσα από μια τέτοια περιγραφή και διαδικασία και οδηγούνται στη μαθηματική κατανόηση μέσα από μια ενεργητική πορεία μάθησης.

Η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών, φάνηκε από τα πρώτα Φύλλα Εργασίας για την εξάσκηση και γνωριμία με το χειραπτικά υλικά. Σημαντική ήταν η αξιοποίηση των κύβων δεκαδικής βάσης σε φυσική και ψηφιακή μορφή (National Library of Virtual Manipulatives), για την αναπαράσταση των αριθμών σε κάθετες προσθέσεις και αφαιρέσεις. Τα συγκεκριμένα υλικά αποτέλεσαν και το κύριο διδακτικό εργαλείο που έδωσε υλική απόσταση στις μαθηματικές έννοιες της συμπλήρωσης (κρατούμενο) και ανάλυσης (δανεικό) της δεκάδας και βοήθησε στην κατανόηση της διαδικασίας εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων (βλ. πίνακες 5 και 6 και σχήμα 2), έδειξε ότι, μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην αλγοριθμική διαδικασία και την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Κατά τη στατιστική επεξεργασία των ερευνητικών δεδομένων που συλλέξαμε, διαφάνηκε ότι η αξιοποίηση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη διδασκαλία της αλγοριθμικής διαδικασίας της πρόσθεσης και αφαίρεσης στους μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες, οι οποίοι συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη, έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τα δεδομένα ερευνητών (Cirino, et al., 2015·

Tournaki, Bae, & Kerekes, 2008· Smith, 2008· Burns, 2008· Berkas, & Pattison, 2007· Zhou & Peverly, 2005· Butler et al., 2003· Witzel, Mercer, & Miller, 2003· Cass, et al., 2003· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Moch, 2001· Maccini & Hughes, 2000· Marsh & Cook, 1996· Van Luit, 1994· Fuson, Briars, 1990), τα οποία δείχνουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες μπορούν να επωφεληθούν από τη χρήση των χειραπτικών υλικών στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των αλγοριθμικών βημάτων, που διέπουν τη διαδικασία των αριθμητικών πράξεων.

Τα ποιοτικά και τα ποσοτικά δεδομένα της έρευνάς μας, που προέκυψαν μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, ενδυναμώνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών στον τομέα της κατανόησης της αλγοριθμικής διαδικασίας και της εκτέλεσης των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Η έγκαιρη ανίχνευση των μαθηματικών δυσκολιών και η αντιμετώπισή τους με κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις στα Τ.Ε. μπορούν να οδηγήσουν στη βελτίωση της μαθηματικής απόδοσης των μαθητών, όπως αναδείχτηκε στην παρούσα έρευνα μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης. Η εξατομικευμένη υποστήριξη των μαθητών στα Τ.Ε. με τη χρήση των υλικών βελτίωσε σημαντικά την κατανόηση της αλγοριθμικής διαδικασίας από το σύνολο των μαθητών της έρευνας και συνέβαλε στην εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων. Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία σε ατομικό επίπεδο και με την κατάλληλη εκπαιδευτική υποστήριξη να διερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες, να ξεπεράσουν αναποτελεσματικές και χρονοβόρες στρατηγικές υπολογισμού, να αυτοματοποιήσουν αριθμητικά δεδομένα και να εφαρμόζουν τον αλγόριθμο των μαθηματικών πράξεων, δίχως να είναι πάντοτε απαραίτητη η αναδίπλωση της σκέψης των μαθητών στη χρήση των χειραπτικών υλικών κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με αλγοριθμικές διαδικασίες.

Τρίτο ερευνητικό ερώτημα: Διερευνάται, αν μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, υπήρξε βελτίωση της επίδοσης στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Η κύρια διάκριση μεταξύ των αριθμητικών υπολογισμών και της επίλυσης προβλημάτων είναι η προσθήκη της γλωσσικής πληροφορίας που απαιτεί από τα

παιδιά να δημιουργήσουν ένα μοντέλο προβλήματος. Ενώ ένα πρόβλημα υπολογισμού είναι έτοιμο για λύση (π.χ. $19+15$), ένα λεκτικό αριθμητικό πρόβλημα απαιτεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το κείμενο για να εντοπίσουν στοιχεία που λείπουν, να κατασκευάσουν αριθμητικές φράσεις και να αντλήσουν τον υπολογισμό του προβλήματος για την εύρεση των πληροφοριών που λείπουν (Fuchs, et al., 2008).

Τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα αποτελούν στόχους, που απαιτούν την ολοκλήρωση γλωσσικών και αριθμητικών δεξιοτήτων επεξεργασίας. Σύμφωνα με τους Riley και Greeno (1988), στα προβλήματα περιγράφεται μια κατάσταση μέσα στην οποία υπάρχει κάποια τροποποίηση, ανταλλαγή, ή συνδυασμός ποσοτήτων. Οι Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist και Reys (1980) υποστηρίζουν ότι η επίλυση προβλήματος από τα παιδιά προϋποθέτει σκέψη και ανάλυση και όχι απλά την αναζήτηση λέξεων-κλειδιά (όπως "έδωσε", "πούλησε" για την αφαίρεση) που υποδηλώνουν την πράξη. Οι απόψεις των συγκεκριμένων ερευνητών επιβεβαιώθηκαν και από τα δεδομένα της παρούσας μελέτης, όπου οι μαθητές μας στη διαδικασία επίλυσης των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων έψαχναν στο κείμενο τις λέξεις-κλειδιά, για να καθορίσουν την πράξη επίλυσης. Για να λύσουν τα προβλήματα, τα παιδιά πρέπει να έχουν αναπτύξει αρκετά τις λεκτικές δεξιότητες, καθώς επίσης και τη βασική ικανότητα υπολογισμού. Επιπλέον, *«το άτομο πρέπει να αναλύσει και να ερμηνεύσει πληροφορίες ως βάση για τις επιλογές και αποφάσεις»* (Cawley & Miller, 1989: 253).

Η επίλυση των αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων έχει θεωρηθεί σημαντικός τομέας του ελλείμματος των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Miller & Mercer, 1997· Mercer & Miller, 1992). Αυτό αναδείχτηκε και από τις ανιχνευτικές δοκιμασίες που χορηγήθηκαν στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά που συμμετείχαν στην έρευνά μας και στις δραστηριότητες επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία είτε με την αναπαράσταση του προβλήματος είτε με τον προσδιορισμό των σχετικών πληροφοριών, παράλληλα με δυσκολίες στην ανάγνωση, τον υπολογισμό και τον προσδιορισμό των διαδικασιών, στοιχεία που αναφέρονται και σε σχετικές έρευνες (Kong & Orosco, 2016· Manches, O'Malley

& Benford, 2010· Fuchs, Seethaler, Powell, Fuchs, Hamlett & Fletcher, 2008· Geary, 2006· Parmar, Cawley & Frazita, 1996).

Ειδικότερα, όσον αφορά τις δεξιότητες επίλυσης λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά έχουν προβλήματα στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας (Bryant, 2005· Baker & Beisel, 2001) κάτι που τονίζεται ιδιαίτερα όταν ταυτόχρονα αντιμετωπίζουν και Μαθησιακές Δυσκολίες στην ανάγνωση (Fuchs et al., 2006· Fuchs & Fuchs, 2002). Σε απόλυτη συμφωνία με τα ερευνητικά δεδομένα, οι μαθητές της έρευνάς μας, στη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων, παρουσίασαν συχνά δυσκολίες ιδιαίτερα στην κατανόηση του προβλήματος (Kelly, 2006· Geary, 2006), στον εντοπισμό των άσχετων πληροφοριών που μπορεί να υπάρχουν στο κείμενο του προβλήματος (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004· Parmar, Cowley & Frazita, 1996), στον εντοπισμό της άγνωστης πληροφορίας, όταν παρουσιάζεται στην αρχή και όχι στο τέλος του προβλήματος (Garcia, Jimenez, & Hess, 2006· Van Garderen, 2006) και στην επιλογή της σωστής πράξης για την επίλυση του προβλήματος (Rittle-Johnson & Koedinger, 2005· Rivera, 1997).

Ειδικότερα, όταν η διαδικασία επίλυσης αποτελείται από πολλά βήματα, συχνά οι μαθητές αυτοί χρειάζονται εξωτερική καθοδήγηση, για να φτάσουν στο σωστό αποτέλεσμα, ακόμη και αν γνωρίζουν τη λύση των μεμονωμένων στοιχείων του προβλήματος (Miller & Mercer, 1998· Bley & Thorton, 1995), γεγονός που διαπιστώθηκε και στους μαθητές της δικής μας έρευνας σύμφωνα με τις αναφορές των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης.

Σχετικά με την αξιολόγηση του αποτελέσματος, οι Parmar και Signer (2005) αναφέρουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά παραλείπουν συστηματικά να ελέγξουν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν μετά την επίλυση ενός προβλήματος και λαμβάνουν ως σωστή την πρώτη απάντηση που δίνουν χωρίς να την επανεξετάσουν, ενώ πολύ συχνά χρησιμοποιούν ακατάλληλα κριτήρια για την ορθότητα των απαντήσεών τους. Τα συμπεράσματα των ερευνητών (Fuchs et al., 2008· Παντελιάδου & Μπότσας, 2007· Parmar & Signer, 2005· Desoete, Herbert, Royers & Buysse, 2001) έρχονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, αφού σύμφωνα με τις καταγραφές των εκπαιδευτικών στο ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ οι 54 από τους 62 μαθητές (87%) θεωρούν σωστή την

πρώτη απάντηση και παραλείπουν να αξιολογήσουν το αποτέλεσμα, στο οποίο καταλήγουν.

Τα δεδομένα που αφορούν στις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, συλλέχτηκαν από τα τεστ με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Α' και Β' τάξης και από το τεστ ΖΑΡΕΚΙ (υποενότητα: Λύση προβλημάτων αριθμητικής). Οι περισσότερες έρευνες, που εξετάζουν την επίλυση προβλημάτων σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, χρησιμοποιούν απλά (μιας πράξης) αριθμητικά προβλήματα, όπως: «Ο Πέτρος έχει 7 μπίλιες. Η Μαρία του δίνει 5 μπίλιες ακόμα. Πόσες μπίλιες έχει τώρα ο Πέτρος;» (Hanich et al., 2001· Jordan & Hanich, 2000· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003· Jordan & Montani, 1997). Σε αντιστοιχία με τις σχετικές έρευνες, τα προβλήματα, που κλήθηκαν να επιλύσουν οι μαθητές της παρούσας μελέτης, ήταν απλά προβλήματα στις δοκιμασίες με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα, ενώ στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ υπήρχαν και προβλήματα με τον άγνωστο όρο στην αρχή.

Οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα ερευνών (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004· Garcia, Jimenez, & Hess, 2006· Rittle-Johnson & Koedinger, 2005· Maccini & Hughes, 2000· Fueyo & Bushell, 1998· Rivera, 1997), αφού 26 από τους 49 μαθητές (53%) δεν μπόρεσαν να λύσουν σωστά κανένα πρόβλημα στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ, οι 45 από τους 62 μαθητές (73%) δεν κατανόησαν τις έννοιες περισσότερο/λιγότερο που εμπεριέχονταν στην εκφώνηση των προβλημάτων και 52 από τους 62 μαθητές (84%) έκαναν λάθος στην επιλογή της πράξης, που επιλύει το πρόβλημα.

Η διδακτική παρέμβαση της παρούσας μελέτης, με την αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών για την αναπαράσταση των στοιχείων και την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, βρίσκεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των ερευνών του Geary (2004) και των Jordan και Hanich (2003), οι οποίοι υποδεικνύουν ότι είναι σημαντικό να παρέχονται άμεσες οδηγίες σχετικά με εννοιολογικές πτυχές της επίλυσης προβλημάτων, όπως η αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος και η ανάπτυξη σχεδίων επίλυσης. Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, με σκοπό την προώθηση της δεξιότητας επίλυσης προβλημάτων σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, οι παρεμβατικές διδακτικές προσεγγίσεις θα πρέπει να δίνουν έμφαση στην ευχέρεια υπολογισμών και την κατανόηση των αλγορίθμων

των πράξεων, διαδικασίες στις οποίες εστιάζει και η δική μας διδακτική παρέμβαση με τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Στην παρούσα μελέτη τα χειραπτικά υλικά αποτέλεσαν γνωστικά εργαλεία, που βοήθησαν τους μαθητές στην αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος αλλά και στην κατανόηση των αλγόριθμων των πράξεων στη διαδικασία επίλυσής του.

Ένας σημαντικός αριθμός ερευνών υποστηρίζει τη χρήση χειραπτικών υλικών (φυσικών και δυνητικών) στη διδασκαλία για την επίλυση προβλημάτων (Cirino, Fuchs, Elias, Powell & Schumacher, 2015· Tseng, Chang, Lou S-J, & Hsu, P-S 2013· Fuchs, Seethaler et al., 2008· Smith, 2008· Kelly, 2006· Kroesbergen & Van Luit, 2003· Cass, Cates, Smith, & Jackson, 2003· Baker & Beisel, 2001· Marsh & Cook, 1996). Τα αποτελέσματα των ερευνών δείχνουν σημαντική βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες σχετικά με την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων και συντάσσονται με τα αποτελέσματα και της δικής μας μελέτης. Όπως φαίνεται και από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων, στους πίνακες 5 και 6 και στο σχήμα 2, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων για τους μαθητές της έρευνάς μας με τη χρήση των χειραπτικών υλικών.

Η Smith (2008), στην έρευνα της, χρησιμοποίησε χειραπτικό υλικό για την υποστήριξη 12 μαθητών που φοιτούσαν σε Τμήματα Ένταξης, με στόχο την ανάπτυξη στρατηγικών για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το χειραπτικό υλικό και συγκεκριμένα η χρήση των ράβδων δεκαδικής βάσης βελτίωσε τις δεξιότητες των μαθητών, κυρίως στις στρατηγικές επίλυσης και στον υπολογισμό και αύξησε τις επιδόσεις τους στην κατανόηση των προβλημάτων μέσω της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών. Σε απόλυτη συμφωνία με τα αποτελέσματα της μελέτης της Smith βρίσκονται και τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, τα οποία δείχνουν σημαντική βελτίωση της μαθηματικής επίδοσης των μαθητών, όταν τα χειραπτικά υλικά εντάσσονται στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η επεξεργασία των ποιοτικών στοιχείων που προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης που συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη, αναδεικνύει τα οφέλη των μαθητών στο επίπεδο της μαθηματικής γνώσης από τη χρήση των υλικών και συνηγορεί με τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών (Swanson,

2011· Stricklan & Maccini 2010· Rittle-Johnson & Koedinger, 2005· Maccini & Hughes, 2000). Πιο συγκεκριμένα και σχετικά με τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων, η αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος και η δραματοποίησή του, όταν αυτό είναι δυνατό, βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες που αγνοούσαν και να σχεδιάζουν τη λύση του προβλήματος, επιλέγοντας συνήθως την κατάλληλη πράξη επίλυσής του. Ακόμα και στα προβλήματα που δεν ακολουθούν μια γραμμική ροή (π.χ. ο “άγνωστος” να βρίσκεται στο τέλος της εκφώνησης), οι μαθητές μπόρεσαν να οδηγηθούν στη λύση τους (De Corte & Verschaffel, 1995).

Ένα βασικό εύρημα της μελέτης των De Corte και Verschaffel (1995), σχετικά με την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, είναι ότι τα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, αλλά διαφέρουν ως προς τη σημασιολογική τους δομή, είναι δυνατόν να διαφέρουν πολύ στον βαθμό της δυσκολίας τους. Η δοκιμασία τους αποτελούνταν από οκτώ προβλήματα που ανήκουν στις τρεις κύριες κατηγορίες λεκτικών προβλημάτων: μεταβολής (αύξησης και ελάττωσης), σύνθεσης και σύγκρισης (περισσότερο και λιγότερο). Καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες υποδιαιρείται σε διαφορετικούς τύπους προβλημάτων, ανάλογα με το ποια είναι η άγνωστη ποσότητα. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι όταν το “άγνωστο” ζητούμενο του προβλήματος βρίσκεται στην αρχή της εκφώνησης, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δυσκολεύονται να το κατανοήσουν και να εκτελέσουν την κατάλληλη πράξη, κάτι που επιβεβαιώνεται και από τις έρευνες των Carpenter και Moser (1984) και Carpenter, Hiebert και Moser (1981). Με τις απόψεις των ερευνητών συντάσσονται και τα ευρήματα της δικής μας έρευνας, αφού στα δύο (2) προβλήματα αυτής της μορφής του τεστ ZAPEKI, όλοι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να τα λύσουν.

Επίσης, οι αναφορές των εκπαιδευτικών, όπως αποτυπώνονται στο ανιχνευτικό εργαλείο ΑΜΔΕ αλλά και στις συνεντεύξεις, που αφορούν τη μαθησιακή συμπεριφορά τους κατά την επίλυση προβλημάτων, δείχνουν την παράλειψη ελέγχου του αποτελέσματος και την ταυτόχρονη αποδοχή της πρώτης απάντησης ως σωστής, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τα ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Parmar & Signer, 2005· Desoete, Herbert, Royers & Buysse, 2001).

Η ανάλυση των δεδομένων (βλ. πίνακες 5 και 6 και σχήμα 2), από τη συμπλήρωση της Λίστας Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων στο σκέλος που αφορά την επίλυση προβλημάτων, έδειξε ότι μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Και σε αυτόν τον τομέα των μαθηματικών, το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, που εφαρμόσαμε στην έρευνά μας, αναδεικνύει τη χρήση των χειραπτικών υλικών ως αποτελεσματικά γνωστικά εργαλεία, που υποστηρίζουν αρχικά την εξωτερική και μετέπειτα την νοερή αναπαράσταση, την κατανόηση και τελικά την επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων μέσα από μια διδακτική παρέμβαση, που διήρκεσε ένα διδακτικό έτος. Έτσι, οργανώνεται ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον, που προσαρμόζει τη διδασκαλία στις ανάγκες και ικανότητες των μαθητών με στόχο την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Τέταρτο ερευνητικό ερώτημα: Διερευνάται αν υπήρξε μετά τη διδακτική παρέμβαση, αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, σχετικά με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Σε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, πολλές είναι οι μελέτες που ερευνούν τη χρήση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς (Hunt, Nirper, & Nash, 2011· Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Kosko, & Wilkins, 2010· Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Moyer, & Jones, 2004· Moyer, 2001· Clements, 1999· Heddens, 1997· Spungin, 1996· Ball, 1992· Baroody, 1989· Jones, 1986 κ.ά.).

Οι ερευνητές προτείνουν τη χρήση των υλικών ως εργαλεία, που διευκολύνουν τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών, με την προϋπόθεση της κατάλληλης χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς (Roberts, 2007· Castro, 2006· Wenglinisky, 2000· Uttal et al., 1997· Fuson & Briars 1990). Στην πορεία της παρούσας έρευνας, η προσέγγιση των εκπαιδευτικών με τα χειραπτικά υλικά έγινε μέσα από συναντήσεις με τον ερευνητή, όπου είχαν την ευκαιρία να δουν και να δοκιμάσουν τα υλικά σε

μαθηματικές δραστηριότητες. Από μόνες τους η παρουσία και η χρησιμοποίησή τους δεν εγγυώνται την αποτελεσματική μάθηση ούτε και την κατάκτηση μαθηματικών εννοιών, που δυσκολεύουν τους μαθητές.

Οι εκπαιδευτικοί έχουν την αποκλειστική ευθύνη της ορθής χρήσης των χειραπτικών μέσα στην τάξη τους κατά τη διάρκεια της μαθηματικής διδασκαλίας, καθώς και την υποχρέωση της αποτελεσματικής αξιοποίησής τους από τους μαθητές. Απαιτείται να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο θα εντάξουν αυτά τα εκπαιδευτικά εργαλεία στη διδασκαλία τους (Boggan, Harper, & Whitmire, 2010· Burns, 2008· McNeil, 2007· Ambrose, 2002· Quinn, 1998), να προετοιμάζονται για τη χρήση τους και να ενημερώνουν τους μαθητές τους για αυτή τη νέα προσέγγιση (Hunt, Nipper, & Nash, 2011· Kelly, 2006· Moyer & Jones, 2004· Remillard & Geist, 2002), έτσι ώστε να μην αντιμετωπίσουν τα υλικά ως παιχνίδια (Toptas, Celik & Karaca, 2012· Moyer, 2001· Sprungin, 1996) αλλά ως διδακτικά αντικείμενα για την αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών, με απώτερο σκοπό την οικοδόμηση της εννοιολογικής κατανόησης (Cope, 2015· Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008· Gellert, 2004).

Τα συμπεράσματά των Puchner, Taylor, O'Donnell και Fick, (2008) υποδηλώνουν ότι οι βαθιές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία είναι δύσκολο να ξεπεραστούν. Στην έρευνά τους, προτείνεται η ευρεία χρήση των χειραπτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία πρέπει να συνοδεύεται από προσπάθειες υποστήριξης των εκπαιδευτικών, στην ορθή διδακτική τους αξιοποίηση, ώστε να κατανοήσουν τα δυνατά και αδύνατα σημεία τους καθώς και τη θεωρία πίσω από αυτά. Στο πλαίσιο αυτής της ερευνητικής οπτικής, καταλαμβάνει σημαντικό μέρος της έρευνάς μας η διαρκής επικοινωνία (δια ζώσης και εξ αποστάσεως) και η υποστήριξη των εκπαιδευτικών τόσο των Τμημάτων Ένταξης όσο και των γενικών τάξεων σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με κατάλληλα Φύλλα Εργασίας και τη συνεχή παροχή οδηγιών για την ορθή χρήση και αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών με αποτελεσματικό τρόπο.

Οι Moyer και Jones (2004), στη μελέτη τους, εξέτασαν τις διδακτικές πρακτικές με τη χρήση χειραπτικών υλικών σε δέκα (10) εκπαιδευτικούς. Μέσα από πολλαπλές παρατηρήσεις της διδασκαλίας, συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς και τη συμπλήρωση ερωτηματολογίων, συμπεραίνουν ότι αν και στην αρχή υπήρξε

αρκετή αμφισβήτηση για την αποτελεσματικότητα των υλικών, κατά τη διάρκεια της χρήσης τους παρατηρήθηκε αλλαγή στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, οι οποίοι άρχισαν να εντάσσουν όλο και περισσότερο τα υλικά στη διδασκαλία τους. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξε και η παρούσα μελέτη, αφού όπως φαίνεται και από τους πίνακες 10 και 11 και τα σχήματα 3 και 4, οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας φαίνεται να αλλάζουν στάση σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών μετά τη χρήση τους στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι Boggan, Harper και Whitmire (2010) και οι Toptas, Celik και Karaca (2012) ερεύνουν τους δισταγμούς και τις αναστολές που έχουν οι εκπαιδευτικοί απέναντι στην ένταξη του χειραπτικού υλικού στη διδακτική πράξη κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα των μελετών τους έδειξαν ότι αν και οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την αξία των διδακτικών εργαλείων, δε βρήκαν ικανοποιητική την εφαρμογή τους στην πράξη και θεωρούν ότι δεν είναι καταρτισμένοι στη χρήση τους, ενώ προτείνουν σχετική επιμόρφωση πριν την πρακτική αξιοποίηση των υλικών, κάτι που διαφαίνεται και στα ευρήματα της έρευνάς μας από τα δεδομένα των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν από τους εκπαιδευτικούς (Πίνακας 13 και σχήμα 7).

Ειδικότερα, στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης, οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα, είτε διδάσκουν στα Τ.Ε. είτε στη γενική τάξη, συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο καταγράφοντας τις απόψεις τους για τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, τα μέσα και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν, την εμπειρία τους σχετικά με τα χειραπτικά υλικά, καθώς και τις αντιλήψεις τους για την αποτελεσματικότητα ή μη της χρήσης τους. Η ανάλυση των απαντήσεών τους συμφωνεί με τα ευρήματα των ερευνών (Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Puchner et al., 2008· Moyer, & Jones, 2004· Crawford & Brown, 2003· Smith, 1996) και δείχνει σε μεγάλο ποσοστό, για τους εκπαιδευτικούς της έρευνάς μας, την περιορισμένη χρήση εποπτικού και χειραπτικού (φυσικού και ψηφιακού) υλικού στη διδακτική διαδικασία, τη δυσκολία για τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας, ώστε να απευθύνεται σε όλους τους μαθητές και την έλλειψη εμπειρίας για την αντιμετώπιση μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά.

Επίσης, στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών προτάσσονται οι διδακτικές ενότητες των κλασμάτων και της γεωμετρίας ως τα πιο δημοφιλή γνωστικά πεδία

για την υποστήριξη της διδασκαλίας με τη χρήση χειραπτικών υλικών. Οι απαντήσεις τους συμφωνούν με πλήθος μελετών, που θεωρούν σημαντικά τα συγκεκριμένα γνωστικά πεδία των μαθηματικών, για να εξετάσουν τις επιπτώσεις της αξιοποίησης χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών τόσο στη διδασκαλία κλασματικών (Moyer, Ulmer & Anderson, 2012· Suh & Moyer-Packenham, 2008· Lett, 2007· Reimer, & Moyer, 2005· Cramer et al., 2002) όσο και γεωμετρικών εννοιών (Satsangi & Bouck, 2015· Allen, 2007· Steen, Brooks, & Lyon, 2006· Cass, Cates, Smith & Jackson, 2003· Olkun, 2003· Moch, 2001· Garrity, 1998· Prigge, 1978).

Πολλοί ερευνητές (Kelly, 2006· Gellert, 2004· Sprungin, 1996) τονίζουν την αξία και τον σημαντικό ρόλο του διδακτικού υλικού στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αλλά θεωρούν απαραίτητη την κατάλληλη προετοιμασία και τον προσεκτικό σχεδιασμό από την πλευρά των εκπαιδευτικών πριν την ένταξη των χειραπτικών υλικών στη διδακτική πράξη. Οι εκπαιδευτικοί της έρευνας έδωσαν συνεντεύξεις στον ερευνητή πριν την παρέμβαση, δίνοντας πληροφορίες για τον τρόπο που διδάσκουν τα μαθηματικά, τις μεθόδους και τεχνικές, που εφαρμόζουν στη διδασκαλία τους και τα μέσα και υλικά που χρησιμοποιούν στα Τ. Ε. και στις γενικές τάξεις.

Η πρώτη επαφή τους με τα χειραπτικά υλικά έγινε σε δύο τρίωρες επιμορφωτικές συναντήσεις με τον ερευνητή, όπου και ενημερώθηκαν για τον τρόπο και τον χρόνο της διδακτικής παρέμβασης και ήρθαν σε επαφή και γνωριμία με τα υλικά, φυσικά και ψηφιακά που θα χρησιμοποιηθούν. Στη διάρκεια των συναντήσεων είχαν την ευκαιρία να τα χρησιμοποιήσουν σε επιλεγμένες δραστηριότητες της μαθηματικής ύλης. Στόχος των ενημερωτικών συναντήσεων ήταν η συνειδητοποίηση των υλικών ως εργαλείων μάθησης και η αποτελεσματική χρήση τους στην αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών, που αποσκοπεί στη μετάβαση από το συγκεκριμένο, στο αφηρημένο και συμβολικό επίπεδο της μαθηματικής γνώσης (Bellonio, 2012· Gersten et al., 2009· Steedly, 2008· Fuchs, Fuchs, Craddock et al., 2008· Woodward, 2006· Arcavi, 2003· Jitendra et al., 1998· Wilson & Sindelar 1991· Walker & Poteet 1989· Heddens, 1986).

Ένας σημαντικός αριθμός ερευνών, που αφορούν τη χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών, εστιάζει στην επιμόρφωση και κατάρτιση των εκπαιδευτικών (Gersten et al., 2009· Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008·

Kelly, 2006· Hill, Rowan & Ball 2005· Moyer & Jones, 2004· Stein & Bovalino, 2001· Ma, 1999· Ball, 1992· Sowell, 1989 κ.ά) και τη διαρκή υποστήριξή τους (Van de Walle et al., 2012· Hattie, 2012· Moyer, 2004· Crawford & Brown, 2003· Kilpatrick & Swafford, 2002· Kilpatrick, Swafford, & Findel, 2001· Moyer, 2001· Grant et al, 1996· Thompson, 1994· Heddens, 1986) για την ορθή χρήση των χειραπτικών υλικών (Cope, 2015· Burns, 2008· Kelly, 2006· Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000). Σε πλήρη ευθυγράμμιση με τα ερευνητικά δεδομένα, σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, οι εκπαιδευτικοί τροφοδοτούνταν από τον ερευνητή με έντυπες οδηγίες χρήσης για κάθε υλικό και κατάλληλα Φύλλα Εργασίας, τα οποία περιείχαν ασκήσεις γνωριμίας και εξάσκησης με το χειραπτικό υλικό, καθώς και συγκεκριμένες δραστηριότητες διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων με την ταυτόχρονη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού.

Ένας από τους στόχους της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνηθεί αν με τη χρήση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών για τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών, υπάρχει αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης αλλά και των εκπαιδευτικών των γενικών τάξεων, σχετικά με την αξιοποίησή τους στην καθημερινή διδακτική πρακτική. Υποθέτουμε ότι θα υπάρξει θετική ανταπόκριση των εκπαιδευτικών στην εισαγωγή αυτών των υλικών κατά τη διδασκαλία, όπως έχει επισημανθεί και από σχετικές έρευνες (Tortas, Celik & Karaca, 2012· Hunt, Nipper, & Nash, 2011· Boggan, Harper & Whitmire, 2010· Kelly, 2006· Moyer & Jones, 2004· Quinn, 1998· Van de Walle, 1973 κ.ά.).

Ο Quinn (1998) στην έρευνά του σε 28 εκπαιδευτικούς μελέτησε την αλλαγή των αντιλήψεών τους σχετικά με τη χρήση χειραπτικών υλικών στη μαθηματική διδασκαλία. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, μετά το τέλος της έρευνας, κατέδειξαν με τις απόψεις τους την αλλαγή των αντιλήψεών τους απέναντι στα χειραπτικά υλικά και πολλοί από αυτούς τα θεωρούν πια απαραίτητη προϋπόθεση μιας επιτυχημένης διδασκαλίας στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καταδεικνύουν την αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση και αξιοποίηση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών. Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων έδειξε ότι μετά τη διδασκαλία με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και ψηφιακών) υλικών υπήρξε σημαντικά θετική αλλαγή των

αντιλήψεων των εκπαιδευτικών (πίνακας 9 και σχήμα 3), σχετικά με τη χρήση των υλικών στη διδασκαλία σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Ένας από τους ανασταλτικούς παράγοντες της εκτενούς χρήσης των διδακτικών υλικών στη μαθηματική διδασκαλία, που οι έρευνες αναδεικνύουν, είναι η έλλειψη επαρκούς διδακτικού χρόνου για την ένταξη και αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών (Goldsby, 2009· Moyer, 2001· Kilpatrick, Swafford, & Findel, 2001· Clements & McMillen, 1996· Sherman, & Richardson, 1995· Simon, & Schifter, 1991· Ball, 1990· Heddens, 1986· Trueblood, 1986). Τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών συμφωνούν με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, αφού από την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, όπως αποτυπώθηκαν στα ερωτηματολόγια πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, προκύπτει ότι η έλλειψη επαρκούς διδακτικού χρόνου αποτελεί τον κύριο παράγοντα, που εμποδίζει τη χρήση των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Είναι αξιοσημείωτο ότι η συγκεκριμένη παράμετρος της έλλειψης διδακτικού χρόνου δεν άλλαξε από τα δεδομένα πριν και μετά την παρέμβαση, γεγονός που ενισχύθηκε από τις αναφορές των εκπαιδευτικών και στις συνεντεύξεις τους, όπου και επισήμαναν ότι η πρακτική εφαρμογή των υλικών απαιτεί περισσότερο χρόνο για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ακόμη, από την επεξεργασία και ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων (βλ. πίνακα 14 και σχήμα 8) εξάγεται το συμπέρασμα ότι ανασταλτικοί παράγοντες στην αξιοποίηση των υλικών είναι επίσης η ελλιπής εξοικείωση με τη χρήση τους από μαθητές και εκπαιδευτικούς, στοιχείο που και η ερευνητική ανασκόπηση αναφέρει (Toptas, Celik, & Karaca, 2012· Roberts, 2007· Hill, Rowan & Ball, 2005· Remillard & Geist, 2002· Saxe, Gearhart, & Nasir, 2001) και η έλλειψη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού για την υποστήριξη της διδασκαλίας (Grouws & Cebulla, 2000· Clements, 1999· Uttal et al., 1997· Hollingsworth, 1990).

Στην ελεύθερη γραπτή ανάπτυξη των προβληματισμών των εκπαιδευτικών της έρευνάς μας σχετικά με τη χρήση των υλικών αναδείχτηκε και η αντίληψη της αναποτελεσματικότητάς τους στη διδασκαλία. Αρκετοί ερευνητές (McNeil, 2007· Amaya, Uttal, O'Doherty, Liu, & DeLoache, 2007· McNeil, Uttal, Jarvin, & Sternberg, 2007· Moyer, 2001· Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997· Smith, 1996) παρατηρούν στις μελέτες τους τις αρνητικές αντιλήψεις που εκφράζουν και οι εκπαιδευτικοί της

παρούσας έρευνας, σχετικά με την αποτελεσματικότητα της χρήσης των υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα των ερευνών τους συγκλίνουν στην άποψη ότι η αναποτελεσματική χρήση των χειραπτικών μπορεί να οφείλεται, αφενός στην αδυναμία των εκπαιδευτικών να τα χρησιμοποιούν με ορθό τρόπο αποδίδοντάς τους περισσότερο διασκεδαστικό και λιγότερο παιδαγωγικό ρόλο (Moyer, 2001· Raymond & Leinenbach, 2000· Smith, 1996) και αφετέρου στην αδιαφάνεια των αντιστοιχίσεων μεταξύ των υλικών και των εννοιών που συμβολίζουν (Hill, Rowan, & Ball, 2005· Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997).

Όσον αφορά την έλλειψη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού για την υποστήριξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι απόψεις των εκπαιδευτικών μετά την παρέμβαση διαφοροποιούνται και δείχνουν ότι η επαφή και γνωριμία με το υλικό οδήγησαν στην αλλαγή της άποψης, ότι δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό ή είναι δύσκολο να βρεθεί, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τα ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Grouws & Cebulla, 2000· Clements, 1999· Uttal et al., 1997· Hollingsworth, 1990).

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, που εφαρμόσαμε στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, ακολούθησε μια πορεία ενεργοποίησης των εκπαιδευτικών, οι οποίοι συμμετείχαν σε μια διδακτική προσέγγιση διαφοροποίησης της διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Εκτός από την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών, σημαντική ήταν και η άμεση αξιοποίηση τους στη διδασκαλία των μαθηματικών στα Τ.Ε. καθόλη τη διάρκεια του διδακτικού έτους με τη στήριξη του ερευνητή, γεγονός που επέφερε σημαντική μετατόπιση των αντιλήψεών τους για τη χρήση τους. Έτσι, τα αποτελέσματα της μελέτης μας, όπως φαίνεται και από τις απαντήσεις τους μετά το τέλος της παρέμβασης και από τις παρατηρήσεις του ερευνητή, δείχνουν ότι η διαρκής υποστήριξη και ενίσχυση των εκπαιδευτικών με κατάλληλα υλικά, στο πλαίσιο ενός δομημένου εκπαιδευτικού προγράμματος, μπορούν να επιφέρουν αλλαγές σε παγιωμένες στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Πέμπτο ερευνητικό ερώτημα: Διερευνάται ποιες αλλαγές στη μαθησιακή συμπεριφορά και τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών επέρχονται, όταν το

περιβάλλον της μαθηματικής διδασκαλίας μεταβάλλεται είτε στο Τμήμα Ένταξης ή στη γενική τάξη με την ελεύθερη πρόσβασή τους στη χρήση των υλικών.

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα γνωστικό αντικείμενο, το οποίο πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν με φόβο και συγκρατημένη αισιοδοξία, για το αν θα μπορούν να τα καταφέρουν (Ojose & Sexton, 2009). Οι Richardson και Suinn στη μελέτη τους, επισημαίνουν ότι το μαθηματικό άγχος χαρακτηρίζεται από «... φόβο για τη μαθηματική επίδοση και συνδέεται με καθυστερημένη απόκτηση βασικών μαθηματικών και αριθμητικών εννοιών και με φτωχή μαθηματική επάρκεια» (Richardson & Suinn, 1972:553). Ο Ashcraft αναφέρει, ότι «αν και δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί ποιοι παράγοντες κάνουν τους μαθητές να αισθάνονται ανήσυχοι, όταν έρχονται αντιμέτωποι με τα μαθηματικά, οι μαθητές με υψηλότερο μαθηματικό άγχος δείχνουν μια ισχυρή τάση να αποφεύγουν την εκμάθηση των μαθηματικών, κρατούν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και έχουν χαμηλή αυτοπεποίθηση, όταν κάνουν μαθηματικά» (Ashcraft, 2002: 184).

Οι μαθηματικές αδυναμίες των μαθητών που συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη, είχαν επισημανθεί από τους εκπαιδευτικούς στην τάξη και στις περισσότερες περιπτώσεις επιβεβαιώθηκαν από τις αξιολογήσεις του ΚΕ.Δ.Δ.Υ. (για 33 από τους μαθητές της έρευνας) και τη συνακόλουθη εισήγησή τους για φοίτηση στα Τμήματα Ένταξης. Οι αναφορές των εκπαιδευτικών της γενικής τάξης, όπως καταγράφηκαν στις συνεντεύξεις τους, περιγράφουν με λεπτομέρεια τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών της έρευνας στο πλαίσιο της τάξης, ιδιαίτερα στη διδακτική ώρα των μαθηματικών, όπου και εμφανίζουν τις αδυναμίες τους. Η επισήμανση των μαθηματικών τους ελλείψεων συγκριτικά με τους υπόλοιπους μαθητές της τάξης, σκιαγραφεί τα χαρακτηριστικά του μαθησιακού τους προφίλ, όσον αφορά τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά και τη συμπεριφορά τους στη διάρκεια της μαθηματικής διδασκαλίας.

Οι περιγραφές των εκπαιδευτικών, συμφωνούν με τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται σε αντίστοιχες έρευνες (Beckett, et al., 2011· Ojose & Sexton, 2009· Ojose, 2008· Cates & Rhymer, 2003) και αφορούν στάσεις και συμπεριφορές των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες σε μια παραδοσιακή σχολική τάξη, όπως η έλλειψη κινήτρων για μάθηση (Ojose & Sexton, 2009), η χαμηλή αυτοεκτίμηση

(Cates & Rhymer, 2003) και η συνεχόμενη αποτυχία στις μαθηματικές δραστηριότητες (Geist, 2010· Ojose, 2008). Έτσι, οι συγκεκριμένοι μαθητές, όπως αναφέρεται από τους εκπαιδευτικούς, έχουν έναν παθητικό ρόλο μέσα στην τάξη, δύσκολα αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες στη διδακτική διαδικασία και συνήθως χαρακτηρίζονται αρνητικά από τους συμμαθητές τους σχετικά με τις μαθηματικές τους ικανότητες (Wright & Miller, 1981) .

Η μετάβασή τους από τη γενική τάξη στο Τμήμα Ένταξης και η ταυτόχρονη επισήμανση των γνωστικών αδυναμιών που αυτή επιφέρει, αποτελούν έναν σημαντικό παράγοντα συναισθηματικής φόρτισης και επιβάρυνσης που αποδυναμώνει το αίσθημα της αυτοεκτίμησης των μαθητών μέσα στη γενική τάξη. Από την άλλη η εξατομίκευση της διδασκαλίας που εφαρμόζεται στο Τ.Ε. και η έλλειψη γνωστικής σύγκρισης με τους υπόλοιπους μαθητές ενισχύουν το αυτοσυναισθημα του μαθητή και δημιουργούν θετική διάθεση για την πρόσκτηση της γνώσης. Οι εκπαιδευτικοί των Τ.Ε. αναφέρουν στις συνεντεύξεις τους τη διαφορετική συμπεριφορά των μαθητών και τη θετική διάθεση που είχαν, όταν πήγαιναν στο Τ. Ε.

Η στάση του μαθητή προς τα μαθηματικά, δηλαδή η θετική ή αρνητική διάθεση, που δείχνει για το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες, που μπορούν να επηρεάσουν τις μαθηματικές του επιδόσεις (Browder, et al., 2008), καθώς *«δεν μπορεί κανείς να επιτύχει σε κάτι που μαθαίνει, παρά μόνο αν διατηρεί μια θετική σχέση με αυτό»* (Charlot, 1993: 41). Συγκεκριμένα για τα μαθηματικά, η Montague (1992) αναφέρει ότι υπάρχει θετική συνάφεια μεταξύ στάσεων και επίδοσης. Ειδικότερα για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά η συνεχής αποτυχία να ακολουθήσουν τον μαθησιακό ρυθμό της τάξης, επιφορτίζει την αρνητική στάση τους απέναντι σε ένα γνωστικό αντικείμενο, που δυσκολεύονται να ανταποκριθούν (Baker, Gersten, & Lee, 2002).

Η ένταξη των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στα Τ.Ε. επέφερε και ταυτόχρονη αλλαγή της στάσης των μαθητών, οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα, απέναντι στα μαθηματικά, επαληθεύοντας τα ευρήματα ερευνών (Kontas, 2016· Boggan, Harper, & Whitmire, 2010· Steedly, Dragoo, Arafteh, & Luke, 2008· Suh & Moyer, 2007· Kroesbergen & Van Luit, 2003· Xin & Jitendra, 1999·

Clements, 1999· Sowell, 1989· Suydam, 1986), τα οποία δείχνουν ότι η αποτελεσματική χρήση των χειραπτικών υλικών επηρεάζει τις στάσεις των μαθητών. Σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς των Τ.Ε., η παρουσία και μόνο των υλικών κέντρισε το ενδιαφέρον του συνόλου των μαθητών, οι οποίοι άρχισαν να εκτελούν τις εργασίες τους με μεγαλύτερη διάθεση και ευχαρίστηση.

Η χρήση τους με την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών και η εξάσκηση στα Φύλλα Εργασίας ενίσχυσαν την κατανόηση των μαθητών σε βασικές μαθηματικές έννοιες και τόνωσαν την αυτοπεποίθησή τους για τη μαθηματική τους επίδοση. Αξιοσημείωτη ήταν η επιθυμία που εξέφρασαν αρκετοί από αυτούς, να πάρουν μαζί τους στη γενική τάξη το υλικό. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων επισημαίνουν στις αναφορές τους στις συνεντεύξεις την αλλαγή της μαθησιακής συμπεριφοράς των μαθητών, οι οποίοι έγιναν πιο ενεργητικοί και συμμετοχικοί στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η ανάλυση των ποιοτικών αποτελεσμάτων, που προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών των Τ.Ε. και των γενικών τάξεων σχετικά με τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, προσθέτει στα έως τώρα ερευνητικά δεδομένα στοιχεία που προέρχονται από μια ολοκληρωμένη διδακτική παρέμβαση, μέσα από την οποία, εκτός από τα μαθησιακά αποτελέσματα επήλθαν αλλαγές και στις στάσεις των μαθητών απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Η εναλλαγή του μαθησιακού περιβάλλοντος, με την παρουσία των μαθητών τόσο στο Τ.Ε. όσο και στη γενική τάξη, αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα της παρούσας έρευνας, καθώς υπήρξε αμφίπλευρη παρατήρηση της εξέλιξης της μαθησιακής συμπεριφοράς τους πριν και μετά την εφαρμογή του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού προγράμματος.

i. Κατακλείδα

Η χρήση των μαθηματικών και του συμβολικού τους συστήματος είναι ευρύτατη και αποφασιστικής σημασίας στο πλαίσιο της ανθρώπινης δραστηριότητας. Οι μαθηματικές δεξιότητες έχουν γίνει όλο και πιο σημαντικές τόσο για τη σχολική επιτυχία όσο και για την κοινωνική καταξίωση και την οικονομική ευμάρεια σε μια τεχνολογικά προσανατολισμένη κοινωνία. Αν και τα περισσότερα παιδιά κατανοούν τα μαθηματικά χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα (Geary, 2004), ωστόσο υπάρχει ένας

σημαντικός αριθμός μαθητών που εμφανίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και σύμφωνα με έρευνες αφορούν το 5% έως 8% του μαθητικού πληθυσμού (Geary, 2004· Ramma & Gowramma, 2002· Fuchs & Fuchs 2001· Geary & Hoard, 2001). Οι συγκεκριμένοι μαθητές, αν δεν ανιχνευθούν έγκαιρα και δεν υποστηριχτούν από διαφοροποιημένες διδακτικές παρεμβάσεις (Puchner et al., 2009· Geary et al., 2007· Grouws et al., 2000· Rivera, 1997), θα οδηγηθούν με βεβαιότητα στη σχολική αποτυχία (Sullivan, 2005· Geary, 2004· Heiman & Precel, 2003).

Λαμβάνοντας υπόψη τον αυξανόμενο αριθμό των μαθητών με ειδικές ανάγκες, που φοιτούν σήμερα σε γενικές τάξεις (Παντελιάδου & Μπότσας, 2007), είναι επιτακτική η ανάγκη να τους παρέχονται αποτελεσματικές στρατηγικές για την όσο το δυνατόν απρόσκοπτη πρόσβαση στο αναλυτικό πρόγραμμα της γενικής εκπαίδευσης.

Η συγκεκριμένη ερευνητική μελέτη αποτελεί ένα παράδειγμα ολοκληρωμένου εκπαιδευτικού προγράμματος, η στοχοθεσία του οποίου καλύπτει ένα διδακτικό τρίγωνο με κέντρο τη μαθηματική γνώση και κορυφές του τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς και το μαθησιακό περιβάλλον. Έτσι, μέσα από τη διδακτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε, χρησιμοποιώντας τα χειραπτικά υλικά α) αξιολογήσαμε την επίδρασή τους στη διαδικασία μέσα από την οποία μαθαίνουν οι μαθητές, που εμφανίζουν μαθηματικές δυσκολίες, β) ανιχνεύσαμε την επιρροή των υλικών αυτών στην αλλαγή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών απέναντι στα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο και στον σχεδιασμό διδακτικών προσεγγίσεων με τη χρήση διδακτικών εργαλείων που διαφοροποιούν την εκπαιδευτική διαδικασία τόσο σε δομές ειδικής αγωγής όσο και στο γενικό σχολείο και γ) καταγράψαμε πώς η αλλαγή του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, με την αξιοποίηση και χρήση των χειραπτικών υλικών στο επίπεδο του Τ.Ε. αλλά και συνοδευτικά στη γενική τάξη, επηρεάζει τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και συνεισφέρει στην υλοποίηση της ένταξής τους στο γενικό εκπαιδευτικό πλαίσιο, κάτι που αποτελεί και τον σημαντικότερο στόχο της υποστήριξης που δέχονται στα Τ.Ε., στα οποία φοιτούν. Η τριμερής ανάπτυξη της παρούσας έρευνας η οποία εμπλέκει τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς και το μαθησιακό περιβάλλον, μέσω της ανάλυσης των στόχων και της σύνθεσης των

αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την παρατήρηση και αποτύπωση της σκέψης των μαθητών σχετικά με τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών, τη διαφοροποιεί από ερευνητικές μελέτες που εστιάζουν σε μεμονωμένους κάθε φορά στόχους και της προσδίδει τον χαρακτήρα και τη δομή ενός εκπαιδευτικού προγράμματος παρέμβασης που σκοπό έχει την υποστήριξη και οργάνωση της διδασκαλίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική πράξη.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, όπως και σε άλλες που προαναφέρθηκαν, καταδεικνύουν ότι η διδασκαλία με την αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών (φυσικών ή/και ψηφιακών), με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, υποστηρίζει τη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση, διευκολύνει την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, ενεργοποιεί όλους τους μαθητές και μπορεί να είναι μια αποτελεσματική και εφικτή επιλογή για τους εκπαιδευτικούς. Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων της παρούσας έρευνας έδειξε ότι, μετά τη διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικού υλικού, υπήρξε σημαντική βελτίωση στην κατανόηση προμαθηματικών και βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (πίνακας 5 και 6 και σχήμα 2).

Η παρούσα μελέτη α) υπογραμμίζει τη σημασία της κιναισθητικής μάθησης για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά· β) υποστηρίζει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες μπορούν σταθερά να ενταχθούν σε τάξεις γενικής εκπαίδευσης γ) προτείνει ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να μάθουν μαθηματικά χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό δ) δείχνει ότι η μαθηματική διδασκαλία μπορεί να έχει στοιχεία διασκέδασης και απόλαυσης, ταυτόχρονα με τη χρήση και αξιοποίηση του υλικού για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και ε) υποδηλώνει την ανάγκη για τους εκπαιδευτικούς να αναγνωρίσουν τη σημασία και τον αντίκτυπο των εμπράγματων δραστηριοτήτων και των χειραπτικών υλικών για τους μαθητές σε όλες τις τάξεις.

Τα αποτελέσματα αυτής της διδακτικής παρέμβασης αποδεικνύουν ότι οι διαφορετικές οπτικές αναπαραστάσεις, είτε με φυσικά είτε με δυνητικά χειραπτικά υλικά, μπορούν να είναι αποτελεσματικές εκπαιδευτικές στρατηγικές για την υποστήριξη των μαθητών, οι οποίοι μπορούν να διδαχθούν μαθηματικά καλύτερα μέσω της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών. Η ποιότητα της εφαρμογής μιας διδακτικής πρακτικής επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τις επιπτώσεις της στην

μάθηση των μαθητών. Τα χειραπτικά υλικά, όταν εντάσσονται στη διδασκαλία των μαθηματικών και χρησιμοποιούνται με τον κατάλληλο τρόπο και σε επιλεγμένες μαθηματικές δραστηριότητες, δίνουν στους μαθητές αφενός μια πολυαισθητηριακή εμπειρία μάθησης και αφετέρου περαιτέρω δυνατότητες, ώστε να εννοιολογούν αυτές τις εμπειρίες, καθώς και να τις επικοινωνούν με άλλους, επιτρέποντάς τους με αυτούς τους τρόπους να είναι ενεργοί και όχι αφανείς μαθητές.

Τα αποτελέσματα, που καταγράφηκαν μετά την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, στην οποία αξιοποιήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν χειραπτικά υλικά στο εκπαιδευτικό πλαίσιο των Τμημάτων Ένταξης αλλά και των γενικών τάξεων, έδειξαν την εννοιολογική αλλαγή των μαθητών και τη βελτίωση των ικανοτήτων τους για την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί των γενικών τάξεων και των Τμημάτων Ένταξης αύξησαν τη χρήση των χειραπτικών υλικών φυσικών και δυνητικών στις διδακτικές πρακτικές τους. Η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού που συνέβαλε θετικά στην επίτευξη των μαθησιακών στόχων, η διαφοροποίηση της διδασκαλίας και η προσαρμογή της στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών, η ενεργοποίηση του ενδιαφέροντός τους για συμμετοχή και συνεργασία σε ανακαλυπτικές δραστηριότητες, η ενθάρρυνση και η προτροπή για την αναπαράσταση και την ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και η παροχή ευκαιριών στους εκπαιδευτικούς να εφαρμόσουν διδακτικές τεχνικές και προσεγγίσεις για τη βελτίωση του τρόπου διδασκαλίας τους, αναδεικνύουν τη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση σε ένα Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα, το οποίο στηρίζεται στους άξονες και στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά.

ii. Εκπαιδευτικές συνέπειες

Σύμφωνα με τους Boggan, Harper & Whitmire (2010:2), «το θεμέλιο για τη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών είναι εγκατεστημένο στα πρώτα χρόνια της σχολικής φοίτησης». Είναι σημαντικό οι μαθητές από την εισαγωγή τους στο σχολικό πλαίσιο να έρχονται σε επαφή με μια ποικιλία τρόπων και υλικών στην κατασκευή και οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης. Η εκπαιδευτική έρευνα, όπως προαναφέρθηκε, δείχνει την αξία της μάθησης που συμβαίνει, όταν οι μαθητές

κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους μαθηματική κατανόηση, που συχνά επιτυγχάνεται και μέσω της χρήσης των χειραπτικών υλικών. Η χρήση των χειραπτικών υλικών ως διδακτικά εργαλεία και όχι ως παιχνίδια ή αντικείμενα για διασκέδαση, διευκολύνει τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και υποστηρίζει την εκπαιδευτική διαδικασία.

Απώτερος στόχος της ερευνητικής αυτής προσπάθειας είναι να συνειδητοποιηθεί η σημαντικότητα της αξιοποίησης των χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, όχι μόνο στο στενό εκπαιδευτικό πλαίσιο των Τμημάτων Ένταξης αλλά και στις γενικές τάξεις, όπου αυτοί οι μαθητές φοιτούν. Ενώ τα παιδιά μπορούν να θυμούνται πληροφορίες, που διδάσκονται μέσα από διδακτικά εγχειρίδια και διαλέξεις, η βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η δυνατότητα να μεταφέρουν και να εφαρμόζουν τις γνώσεις σε νέες καταστάσεις, απαιτεί μάθηση που βασίζεται στην άμεση και συγκεκριμένη εμπειρία. Ένας σημαντικός λόγος για εμπράγματη μάθηση, λοιπόν, είναι ότι επιτρέπει στους μαθητές να δημιουργήσουν λειτουργική αντίληψη για τα μαθηματικά και την ικανότητα να αυτενεργούν και να ανακαλύπτουν, δηλαδή, να γίνουν ανεξάρτητοι μαθητές και στοχαστές.

Είναι επίσης σημαντικό να σημειωθεί, ότι τα παιδιά δεν μπορούν να μάθουν μαθηματικά απλά με τον χειρισμό φυσικών αντικείμενων. Η προώθηση της αυτόνομης σκέψης των μαθητών απαιτεί μια μετατόπιση για τους εκπαιδευτικούς, από τη ρουτίνα της παραδοσιακής διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών σε μια προθυμία για την εφαρμογή διδακτικών τεχνικών με στόχο να ενθαρρύνονται όλοι οι μαθητές να σκεφτούν και να βγάλουν νόημα από τα μαθηματικά για τον εαυτό τους. Προωθώντας μαθηματικά μαθησιακά περιβάλλοντα με διαφοροποιημένες διδακτικές προσεγγίσεις, όπου οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν τις μαθηματικές έννοιες, απαιτεί σημαντικές αλλαγές στα μαθησιακά πλαίσια, τα σενάρια και τους ρόλους τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών. Η παροχή της δυνατότητας στους μαθητές για την επιλογή των μαθηματικών εργαλείων που θα υποστηρίξουν την κατανόηση των εννοιών, αποτελεί ένα μικρό βήμα για την ενθάρρυνση της ευθύνης για τη δική τους μάθηση.

Η ποιότητα της εφαρμογής μιας διδακτικής πρακτικής επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις επιπτώσεις της στην μάθηση των μαθητών. Η αξία της χρήσης χειραπτικού υλικού στη διερεύνηση μιας έννοιας, για παράδειγμα, δεν εξαρτάται μόνο από το αν τα χειραπτικά υλικά χρησιμοποιούνται, αλλά και για τον τρόπο που χρησιμοποιούνται με τους μαθητές. Όταν χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρακολουθούν στενά τους μαθητές, να τους βοηθούν να ανακαλύψουν και να επικεντρώνονται στις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται και να τους καθοδηγούν να οικοδομήσουν γέφυρες από τις συγκεκριμένες εργασίες με το υλικό στην αντίστοιχη εργασία με τα σύμβολα. Η έμφαση στη μαθηματική σημασία των εννοιών συμπεριλαμβανομένου του πώς η ιδέα, η έννοια ή η δεξιότητα συνδέεται με πολλούς τρόπους και με άλλες μαθηματικές ιδέες με λογική συνέπεια και γνωστικό τρόπο, καθώς και η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στην τάξη, στο οποίο οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν νοήματα και να κατανοούν μαθηματικές έννοιες, πρέπει να αποτελούν στόχους σε μια αποτελεσματική διδακτική προσέγγιση. Η κατάλληλη χρήση των χειραπτικών υλικών μπορεί να είναι συστατικό μιας ολοκληρωμένης διδασκαλίας των μαθηματικών.

Στην Ελλάδα, αν και με τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το δημοτικό σχολείο, υπήρξε μια “στροφή” προς την εμπειρική και ανακαλυπτική μάθηση με την ένταξη ποικίλων αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών σύμφωνα με τα τρία στάδια ανάπτυξης της μάθησης του Bruner (πραξιακό – εικονιστικό – συμβολικό), εντούτοις τα σχολικά εγχειρίδια που παρήχθησαν, περιέχουν ποικίλες εικονιστικές αναπαραστάσεις και προτάσσουν ελάχιστα το χειραπτικό (φυσικό και ψηφιακό) υλικό μέσα από το Παράρτημα των βιβλίων ή τη χρήση του διαδικτύου.

Επίσης, δεν υπάρχει από την πλευρά της πολιτείας μια αξιολογή προσπάθεια, η οποία θα αφορά την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε νέα μοντέλα διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συνεχώς να επαναπροσδιορίζουν τις προτεραιότητες στη διδασκαλία τους, ερμηνεύοντας τις αδυναμίες των μαθητών τους μέσα από το πρίσμα της εκμάθησης μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, οι οποίες θα τους βοηθούν να εμβαθύνουν στη μελέτη τους προσφέροντας πιο λειτουργικές προεκτάσεις και χρήσεις της νεοπροσληφθείσας γνώσης.

Η ανάγκη να υπάρξουν περισσότερες έρευνες στον ελληνικό εκπαιδευτικό χώρο, οι οποίες θα ελέγχουν τη συμβολή της χρήσης και αξιοποίησης χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών στη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση, θεωρείται επιβεβλημένη, για να είναι δυνατή η αποτελεσματική εφαρμογή των υπαρχόντων αναλυτικών προγραμμάτων και η συμπλήρωση τυχόν αδυναμιών ή και παραλείψεων. Επίσης, θα πρέπει να αξιοποιούνται παράλληλα και διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης από όλους τους μαθητές και ειδικότερα από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Τέτοιες θα μπορούσαν να είναι οι προσεγγίσεις διαφοροποιημένης διδασκαλίας στις γενικές τάξεις με την προσθήκη των χειραπτικών υλικών ως διδακτικών εργαλείων που ενεργοποιούν όλους τοθους μαθητές και κυρίως εκείνους με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

iii. Περιορισμοί της έρευνας

Στη συγκεκριμένη έρευνα έχουν τεθεί κάποιοι περιορισμοί. Στους περιορισμούς της παρούσας μελέτης θα μπορούσε να αναφερθεί ο μικρός αριθμός των συμμετεχόντων. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι αυτό ήταν αποτέλεσμα του περιορισμένου αριθμού των μαθητών που εμφανίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά και που φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης και της ανομοιογένειας του ηλικιακού εύρους (από την Α' μέχρι και την ΣΤ' τάξη).

Επειδή η μελέτη διεξήχθη κυρίως σε Τμήματα Ένταξης, ένας άλλος περιορισμός ήταν ότι η έρευνα επικεντρώθηκε μόνο σε αυτή την ομάδα των μαθητών και δεν χρησιμοποίησε μία πειραματική σχεδίαση με μια ομάδα ελέγχου των μαθητών. Υπάρχουν αρκετοί ανασταλτικοί παράγοντες που καθιστούν αδύνατη τη δημιουργία μιας πειραματικής και μιας ομάδας ελέγχου για ερευνητικά συμπεράσματα και συσχετίσεις, όπως η διαφορετική ηλικία και το αντίστοιχο νοητικό επίπεδο των μαθητών, η ανομοιογένεια των μαθηματικών αδυναμιών τους και ελλείψεων λόγω της φύσης των μαθησιακών δυσκολιών, καθώς και ο μικρός αριθμός μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά που βρίσκονται στην ίδια τάξη του γενικού σχολείου.

Μέσα στους περιορισμούς της παρούσας έρευνας συμπεριλαμβάνεται και η ομάδα των μαθητών της Α' τάξης των δημοτικών σχολείων. Στην συγκεκριμένη

ηλικιακή ομάδα δεν εφαρμόστηκε η διδακτική παρέμβαση στο ίδιο χρονικό διάστημα με τους υπόλοιπους μαθητές, διότι για να μπορούν οι συγκεκριμένοι μαθητές να συμμετέχουν στη συμπλήρωση των ανιχνευτικών δοκιμασιών, θα πρέπει να έχουν ολοκληρώσει την απαραίτητη διδασκαλία προγραφικών και προμαθηματικών εννοιών, που συμπίπτει με την έναρξη του β' διδακτικού τριμήνου, στις αρχές του Ιανουαρίου. Στους μαθητές της Α' τάξης οι δοκιμασίες χορηγήθηκαν τον Φεβρουάριο και ξεκίνησε ταυτόχρονα και η διδακτική παρέμβαση σε όσους μαθητές φοιτούσαν στα Τμήματα Ένταξης.

Ο γεωγραφικός παράγοντας επίσης, θα μπορούσε να ενταχθεί στους περιορισμούς της παρούσας έρευνας μιας και οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα προέρχονται από τα Τμήματα Ένταξης της Περιφερειακής Ενότητας Φθιώτιδας, οπότε, θεωρητικά, δεν αντιπροσωπεύουν τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά από διαφορετικές περιοχές της Ελλάδας.

iv. Ερευνητικές προεκτάσεις

Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας αφήνουν σημαντικά ερωτήματα που θα πρέπει να μελετηθούν περαιτέρω.

Ένας από τους πρωταρχικούς στόχους της έρευνας ήταν και η διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών με τη χρήση χειραπτικών (φυσικών και δυνητικών) υλικών. Το συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών, αν και είχε συμπεριληφθεί στα αρχικά Φύλλα Εργασίας και αποτελούσε και ένα σημαντικό τμήμα των υλικών (γεωπίνακες, τάνγκραμς, πλακάκια σχημάτων κ.ά.), τελικά δεν κατέστη δυνατόν να ερευνηθεί. Η φοίτηση στο Τμήμα Ένταξης προτάσσει την προσπάθεια κάλυψης μαθησιακών ελλείψεων που έχουν σχέση με αριθμητικές δεξιότητες και η απόκτηση των οποίων βοηθούν τους μαθητές να παρακολουθήσουν το τμήμα γενικής αγωγής. Οι μαθηματικές ενότητες που συνήθως επιβάλλεται να υποστηριχτούν, αφορούν κατά κύριο λόγο τις αριθμητικές μαθηματικές έννοιες, την εκμάθηση των αλγόριθμων των τεσσάρων πράξεων, την επίλυση προβλημάτων και δευτερευόντως την κατανόηση γεωμετρικών εννοιών. Η γεωμετρία λοιπόν, και η υποστήριξη της διδασκαλίας των εννοιών της με τη χρήση διδακτικών υλικών θα ήταν παιδαγωγικά ενδιαφέρον να είναι αντικείμενο μιας μελλοντικής ερευνητικής προσπάθειας.

Μια άλλη παράμετρος, που θα μπορούσε να ερευνηθεί περισσότερο, είτε αυτόνομα είτε συμπληρωματικά, αφορά στη χρήση και αξιοποίηση των δυνητικών χειραπτικών υλικών. Στην παρούσα έρευνα, μέσα από επιλεγμένες ιστοσελίδες και διαδικτυακές εφαρμογές ψηφιακών υλικών, η αξιοποίησή τους ήταν συμπληρωματική, παράλληλα ή διαδοχικά με τα αντίστοιχα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιήσαμε και με την ίδια διαδικασία. Από τα ποιοτικά δεδομένα που συλλέχθηκαν από τους εκπαιδευτικούς, φαίνεται να μη θεωρούνται η πρώτη επιλογή τους κυρίως εξαιτίας της έλλειψης του κατάλληλου ηλεκτρονικού εξοπλισμού των Τ.Ε. αλλά και λόγω της ευχρηστίας των φυσικών χειραπτικών υλικών.

Ο συνδυασμός των δύο μορφών αναπαράστασης ενίσχυσε τη μαθηματική κατανόηση των μαθητών, όπου αυτό ήταν δυνατό, αφού κάποια Τμήματα Ένταξης δεν είχαν τη δυνατότητα χρήσης ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η ευρύτερη αξιοποίηση των δυνητικών χειραπτικών υλικών αποτελεί αντικείμενο πολυάριθμων μελετών (Moyer-Packenham & Westenskow, 2012· Hunt, Nipper & Nash, 2011· Moyer, Westenskow & Salkind, 2011· Suh & Moyer, 2007· Reimer & Moyer, 2005· Suh, Moyer & Heo, 2005· Izydorczak, 2003· Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002) και θα συνέβαλε ερευνητικά η μελέτη τους για την κατανόηση των μαθηματικών, αφού στο διαδίκτυο υπάρχει μια πολυάριθμη και συνεχώς αυξανόμενη βάση δεδομένων με σχετικές εφαρμογές, που καλύπτουν τους περισσότερους μαθηματικούς τομείς.

Μια άλλη μεταβλητή που θα μπορούσε να μελετηθεί περισσότερο, είναι και η ένταξη των χειραπτικών υλικών μέσα στη γενική τάξη και η αξιοποίησή τους από το σύνολο των μαθητών με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Η συγκεκριμένη παράμετρος ερευνήθηκε σε μικρή διάρκεια από την παρούσα μελέτη θέλοντας να ανιχνεύσει τη στάση όλων των μαθητών απέναντι στο χειραπτικό υλικό, στην καθημερινή διδασκαλία των μαθηματικών. Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας με την παροχή υλικού διαθέσιμου σε όλους τους μαθητές για την υποστήριξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών αποτελεί μια διδακτική προσέγγιση, που προσαρμόζει το διδακτικό πλαίσιο στις μαθησιακές ανάγκες του συνόλου των μαθητών χωρίς να απαιτείται η μετακίνηση και συμπληρωματική διδασκαλία τους στα Τμήματα Ένταξης, και θα προσέφερε χρήσιμα και σημαντικά ερευνητικά συμπεράσματα.

Από τη βιβλιογραφική επισκόπηση και το πλήθος των αντίστοιχων ερευνών, συνάγεται το συμπέρασμα ότι απαιτείται περαιτέρω έρευνα και για τη χρήση των χειραπτικών υλικών σε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού σχολείου και σε συνθετότερες μαθηματικές έννοιες (π.χ. κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί) αλλά και στο γυμνάσιο. Επίσης, υπάρχει η ανάγκη η έρευνα να επικεντρωθεί στην τεχνογνωσία και κατάρτιση της χρήσης χειραπτικών υλικών από εκπαιδευτικούς και μαθητές, ώστε να αποκτήσουν γνώσεις σχετικά με τις μεθόδους και τις πρακτικές, που είναι δυνατό να αναπαραχθούν και να υποστηρίξουν τη διδασκαλία των μαθηματικών. Τέλος, θα ήταν ενδιαφέρον σε μελλοντικές έρευνες να δημιουργηθούν ομάδα(ες) ελέγχου με τη συμμετοχή μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ώστε να εξασφαλιστεί ισχυρότερη εσωτερική εγκυρότητα και να επιτευχθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Ελληνόγλωσση

- Αγαλιώτης, Ι. (2004). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά*. Αθήνα, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.
- Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά: Αιτιολογία, Αξιολόγηση, Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Αγαλιώτης, Ι. (1999). Η σημασία της γνωστικής ανάλυσης των λαθών, στην περίπτωση καταρτισμού υποστηρικτικών διδακτικών προγραμμάτων, για παιδιά με δυσκολίες μάθησης στην Αριθμητική. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 109, 26-34.
- Αγαλιώτης, Ι. (1997). *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην αριθμητική των μαθητών των Ειδικών Τάξεων*. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπισή τους από τους εκπαιδευτικούς. Διδακτορική διατριβή. Αθήνα.
- Βάμβουκας, Μ. (1993). *Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Bouvier, A. (1989). Το δικαίωμα στο λάθος. *Ευκλείδης Γ'*, 21, 69-86.
- Bruner, J. S. (1960). *Η διαδικασία της παιδείας* (μετ. Χ. Κληρίδη). Αθήνα: εκδόσεις Καραβία.
- Γκούμας, Ε., (2008). *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης των μαθητών και μαθητριών των Τμημάτων Ένταξης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και η συσχέτιση τους με δυσκολίες ανάγνωσης. Διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικού υλικού*. Διπλωματική εργασία, Παν/μιο Θεσσαλίας.
- Charlot, B. (1993). Η σχολική αποτυχία στα Μαθηματικά και η κοινωνική σχέση με τη γνώση (μετ. Π. Γιαννακάκη). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 73, 39-44.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K., (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*, Μεταίχμιο, Αθήνα, 2008.
- De Corte, E. & Verschaffel, L. (1995). Δεξιότητες των παιδιών και διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων. Στο Βοσνιάδου, Σ. (Επιμ.). *Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. Μαθηματικών (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. ΥΠΕΠΘ – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε στις 17 Φεβρουαρίου, 2017, από www.pi-schools.gr.
- Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών* (γ' έκδ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα
- Καΐλα, Μ. (1995). *Η σχολική αποτυχία*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

- Καραγιαννάκης, Γ. (2012). *Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες*. Αθήνα: Διερευνητική Μάθηση.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Εκδ. Leader Books.
- Κολιάδης, Ε. (2002). *Γνωστική Ψυχολογία, Γνωστική Νευροεπιστήμη και Εκπαιδευτική Πράξη*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.
- Κολιάδης, Ε. (2007). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη (τόμ. Γ')*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.
- Κρόκου, Ζ., (2011). *Ανάπτυξη και παραγωγή προκριματικού εργαλείου ανίχνευσης των αναγνωστικών δυσκολιών στο δημοτικό σχολείο για την καλύτερη αντιμετώπισή τους*. Διδακτορική διατριβή. Αθήνα.
- Λεμονίδης, Χ. (1994). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής*. Θεσσαλονίκη: εκδ. Κυριακίδη.
- Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.
- Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α. Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ. (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής (Βιβλίο Δασκάλου)*. Εκδόσεις ΟΕΔΒ
- Λεμονίδης, Χ. (2017). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.
- Ματσαγγούρας Η. (1998). *Στρατηγικές Διδασκαλίας*, τόμ. Β'. Αθήνα: εκδ. Gutenberg.
- Μόττη - Στεφανίδη Φ., (1993) *Αξιολόγηση της Νοημοσύνης Παιδιών Σχολικής Ηλικίας και Εφήβων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Παντελιάδου, Σ. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες και εκπαιδευτική πράξη. Τι και γιατί*. Ελληνικά Γράμματα. Αθήνα.
- Παντελιάδου, Σ. (2011). *Μαθησιακές Δυσκολίες και Εκπαιδευτική Πράξη. Τι & γιατί*. Αθήνα: Πεδίο.
- Παντελιάδου, Σ., & Μπότσας, Γ. (2007). *Μαθησιακές Δυσκολίες. Βασικές Έννοιες και Χαρακτηριστικά*. Βόλος: Γράφημα.
- Παντελιάδου, Σ., & Σιδερίδης, Γ., (2007). *Ανίχνευση Μαθησιακών Δυσκολιών από Εκπαιδευτικούς. Κατασκευή και στάθμιση 12 διερευνητικών ανιχνευτικών εργαλείων (κριτηρίων) των μαθησιακών δυσκολιών*. ΕΠΕΑΕΚ, Υποέργο 3, Παν/μιο Θεσσαλίας.
- Παντελιάδου, Σ., & Αντωνίου, Φ. (2008). *Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες*. Βόλος: Γράφημα.
- Πηγιάκη Π., (2004). *Εθνογραφία: Η μελέτη της ανθρώπινης διάστασης στην κοινωνική και παιδαγωγική έρευνα*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

- Πολυχρονοπούλου, Σ. (2012). *Παιδιά και Έφηβοι με Εκπαιδευτικές ανάγκες και Δυνατότητες*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Πόρποδας, Κ. (1997). *Δυσλεξία. Η ειδική διαταραχή του γραπτού λόγου*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.
- Πόρποδας, Κ. (2003) *Διαγνωστική αξιολόγηση και αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών στο δημοτικό σχολείο (Ανάγνωση, Ορθογραφία, Δυσλεξία, Μαθηματικά)*. Έκδοση στο πλαίσιο υλοποίησης του έργου ΕΠΕΑΕΚ 200-2006 του ΥΠΕΠΘ. Πάτρα 2003.
- Πόταρη, Δ. (2007). Ο μετασχηματισμός της δραστηριότητας σε μαθηματική στα νέα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού. Έρευνα και Πράξη 20-21 σελ. 44-51.
- Σακονίδης, Χ. (2007). *Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά*. Στο Ε. Χοντολίδου. Κλειδιά και Αντικλειδιά: Διδασκαλία και αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ Ανακτήθηκε Μάρτιος 12, 2017 από: <http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/3091/897.pdf>
- Τζουριάδου, Μ. (1995). *Παιδιά με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες*. Θεσ/νίκη: εκδ. «Προμηθεύς».
- Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Τριανταφυλλίδης, Τ. (2005). (Μετ. – Επιμ.). Van de Walle. J. *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Αθήνα: Τυπωθήτω.
- Τρούλης, Γ. (1992). *Τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Υ.Α. 21072α/Γ2 (ΦΕΚ Τεύχος Β' αρ. φύλλου 303/13-03-2003)
- Υ.Α. 21072β/Γ2 (ΦΕΚ Τεύχος Β' αρ. φύλλου 304/13-03-2003)
- Φιλιππάτου, Δ. (2013). Ο ρόλος της αξιολόγησης στη διαφοροποιημένη διδασκαλία. Στο Σ. Παντελιάδου & Δ. Φιλιππάτου (Επιμ.), *Διαφοροποιημένη Διδασκαλία. Θεωρητικές προσεγγίσεις & Εκπαιδευτικές Πρακτικές*, σσ. 60-98. Αθήνα: Πεδίο.

Ξενόγλωσση

- Allen, C. (2007). An action based research study on how using manipulatives will increase students' achievement in Mathematics. *Online Submission*, ERIC Number: ED499956
- Amaya, M. M., Uttal, D. H., O'Doherty, K. D., Liu, L. L., & DeLoache, J. S. (2007). Two-digit subtraction: Examining the link between concrete and abstract representations of knowledge. Στο McNeil, N. (2007). When theories don't add up: disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice*, 46, 309-316.

- Ambrose, R. C. (2002). Are we overemphasizing manipulatives in the primary grades to the detriment of girls? *Teaching Children Mathematics*, 9 (1), 16-21.
- Americans with Disabilities Act of 1990, P.L. 101-336, 42 U.S.C. § 12101 et seq.
- American Psychiatric Association, *Diagnostical and Statistical Manual of Mental Disorders*, Washington DC, ed. American Psychiatric Association, forth Ed., 1995.
- Andersson, U. (2008). Mathematical Competencies in Children With Different Types of Learning Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 100, (1), 48-66.
- Antoniou, F. (2006). *Improving Reading Comprehension in Students with Special Educational Needs*. Germany: Shaker Verlag.
- Anisimova, T. & Thomson, S.B. (2012). Using multi-method research methodologies for more informed decision making. *JOAAG*, 7 (1), 96-104.
- Anstrom, T. (2006). *Supporting Students in Mathematics Through the Use of Manipulatives*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος, 11, 2016, από: <http://bit.ly/2s9eOCC>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Directions in Psychological Science*, 11, 181–185.
- Ashkenazi, S., Rubinsten, O., & Henik, A. (2009). Attention, automaticity, and developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, 23(4), 535–540.
- Augustiniak, K., Murphy, J. & Kester Phillips, D. (2005). Psychological Perspectives in Assessing Mathematics Learning Needs. *Journal of Instructional Psychology*, 32(4), 277-286.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699–713.
- Badian, N. A. (1983). Dyscalculia and nonverbal disorders of learning. In H. R. Myklebust (Ed.) *Progress in learning disabilities*, 5, 235-264.
- Baker, J.D. & Beisel, R. W. (2001). An Experiment in Three Approaches to Teaching Average to Elementary School Children. *School Science and Mathematics*, 101(1), 23-31.
- Baker, S., Gersten, R., & Lee, D. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *The Elementary School Journal*, 103, 51–73.
- Ball, D. (1992). Magical hopes. Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16, (2), 14–18, & 46–47.
- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal of Research in Mathematics Education*, 21, 132-144.

- Balka, D. S. (1993). Making the connections in mathematics via manipulatives. *Contemporary Education*, 65 (1), 19-23.
- Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, 6, 287–318.
- Baroody, A. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *The Arithmetic Teacher*, 37 (2), 4-5.
- Baroody, A., & Hume, J. (1991). Meaningful mathematics instruction: The case of fractions. *Remedial and Special Education*, 12, 54–68.
- Baroody, A. & Wilkins, J. L. (1999). The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts. Στο Copley J. V. (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 48–65). Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 5 2016:
<https://scholar.vt.edu/access/content/.../EarlyNumber.pdf>
- Bateman, B. (1965). An educator's view of the diagnostic approach to learning disorders. Στο J. Hellmuth (ed) *Learning Disorders*, 1. Seattle, WA: Special Child Publications.
- Bateman, B. (1992). Learning disabilities: The changing landscape. *Journal of Learning Disabilities*, 25, 29-36.
- Battle, T. (2007). Infusing Math manipulatives: The key to an increase in academic achievement in the mathematics classroom: *Increase in academic achievement*, 1-29. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 11 2016 από : <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED498579.pdf>
- Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *The Qualitative Report*, 13 (4), 544-559. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 11 2016 από : <http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol13/iss4/2>
- Beckett, P. F., McIntosh, D., Byrd, L. A., & McKinney, S. E. (2011). Action research improves math instruction. *Teaching Children Mathematics*, 17(7), 398–401.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. Στο R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (σσ. 91-125). New York: Academic Press. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 9 2016 από:
http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/83_1.html
- Beirne-Smith, M. (1991). Peer tutoring in arithmetic for children with learning disabilities. *Exceptional Children*, 57, 330–337.
- Bellonio, J. L. (2012). *Multi-Sensory Manipulatives in Mathematics: Linking the Abstract to the Concrete*. Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 21, 2016, από: Yale-New Haven Teaching Institute:
<http://teachersinstitute.yale.edu/curriculum/units/2001/6/01.06.12.x.html>

- Berch, D.B., (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333-339
- Berkas, N., & Pattison, C. (2007). Manipulatives: More than a special education intervention. *NCTM News Bulletin*. Ανακτήθηκε Ιούλιος 20, 2016, από: <http://bit.ly/2rtm8l2>
- Bley, N. S., & Thornton, C. A. (1995). *Teaching Mathematics to Students with Learning Disabilities*. Austin, TX: Pro-Ed.
- Bolyard, J. J. & Moyer-Packenham, P. S. (2006). The impact of virtual manipulatives on student achievement in integer addition and subtraction. *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Yucatán, Mexico*. Ανακτήθηκε Ιούνιος 15, 2016, από: <http://bit.ly/2rLCeNW>
- Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3, 1–6.
- Boulton-Lewis, G.M. (1996). Children' s Strategy Use and Interpretations of Mathematical Representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 219-237 ISSN 0364-0213.
- Brown, S. E. (2007). *Counting blocks or keyboards? A comparative analysis of concrete versus virtual manipulatives in elementary school mathematics concepts*. Marygrove College. Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 10 2016 από: <https://www.scribd.com/document/39698567/09>
- Browder, D. M., Spooner, F., Ahlgrim-Delzell, L., Harris, A., & Wakeman, S. Y., (2008). A meta-analysis on teaching mathematics to students with significant cognitive disabilities. *Exceptional Children*, 74(4), 407-432.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Στο Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. *Delta Journal of Education*, 5(1),10-19.
- Bruning, R., Schraw, G. & Ronning, R. (1999). *Cognitive Psychology and Instruction*, Merrill: Prentice Hall.
- Burns, M. (1997). Seven ways to build number sense. *Instructor*, 51-55.
- Burns, M. (2007). *About teaching mathematics: A K–8 resource* (3rd Edition). Sausalito, California, USA: Math Solutions Publications.
- Burns, M. (2008). Response to Intervention. An Alignment Guide for *Do The Math*. Scholastic, Professional Paper, 1-21

- Bushell, Jr. D., Fueyo, V. (1998). Using numberline procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low performing first graders. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 31(3) 417-430.
- Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18 (2), 99-111.
- Bryant, D., Bryant, B. & Hammill, D. (2000). Characteristic behaviours of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (2), 168-177.
- Bryant, D. P. (2005). Commentary on early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 340-345.
- Bryant, B. & Rivera, D. (1998). Educational Assessment of Mathematics Skills and Abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, (1), 57-68 DOI: 10.1177/002221949703000105
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N. & Chavez, M.M. (2008). Mathematics Intervention for First and Second Grade Students With Mathematics Difficulties. *Remedial and Special Education*, 29 (1), 20-32, DOI: 10.1177/0741932507309712
- Bryman, A. (2008). Social research methods (3rd ed.). NY: Oxford University Press. ISBN 978-0-19-920295-9.
- Cain-Caston, M. (1996). Manipulative queen [Electronic version]. *Journal of Instructional Psychology*, 23 (4), 270-274.
- Carnine, D. (1991). Curricular interventions for teaching order thinking to all students: Introduction to the special series. *Journal of Learning Disabilities*, 24, 261-269.
- Carnine, D. (1997). Instructional design in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30(2), 130–141.
- Carpenter, T.P, Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M., & Reys, R. (1980). Solving word problems: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, 28(1), 8-12.
- Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). The effect of problem structure on first-graders' initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27–39 Ανακτήθηκε Μάιος 22, 2015, από: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED180840.pdf>
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 179-202.

- Carpenter, T. (2008). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. *American Educational Research Association*, 26, 499-531.
- Carraher, T. N., Carraher, D., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29.
- Carroll, W. M., & Porter, D. (1997). Invented Strategies Can Develop Meaningful Mathematical Procedures. *Teaching Children Mathematics*, 3(7), 370-374. ISSN: ISSN-1073-5836
- Cass, M., Cates, D., Smith, M., & Jackson, C. (2003). Effects of manipulative instruction solving area and perimeter problems by students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18, 112-120. doi: 10.1111/1540-5826.00067
- Castro, M. A. (2006). Preparing elementary preservice teachers to use mathematics curriculum materials. *The Mathematics Educator*, 16(2), 14-24.
- Cates, G. L., & Rhymer, K. N. (2003). Examining the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance: An instructional hierarchy perspective. *Journal of Behavioral Education*, 12(1), 23-24.
- Cawley, J.F., Miller, J.H. (1989). Crosssectional comparisons of the mathematical performance of children with learning disabilities: Are we on the right track toward comprehensive programming? *Journal of Learning Disabilities*, 22(4), 250-254.
- Cawley, J., Parmar, R. S., Foley, T. E., Salmon, S., & Roy, S. (2001). Arithmetic performance of students: Implications for standards and programming. *Exceptional Children*, 67(3), 311-328.
- Chao, S-J, Stigler, J. W. & Woodward, J. A. (2000). The Effects of Physical Materials on Kindergartners, Learning of Number Concepts. *Cognition and Instruction*, 18(3), 285 - 316
- Chappell, M. F. & Strutchens, M. E. (2001). Creating connections: Promoting algebraic thinking with concrete models. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(1), 20-25.
- Cirino, P. T., Fletcher, J. M., Ewing-Cobbs, L., Barnes, M. A., & Fuchs, L. S. (2007). Cognitive arithmetic differences in learning difficulty groups and the role of behavioral inattention. *Learning Disabilities Research and Practice*, 22(1), 25-35.
- Cirino, P. T., Fuchs, L. S., Elias, J. T., Powell, S. R., & Schumacher, R. F., (2015). Cognitive and Mathematical Profiles for Different Forms of Learning Difficulties *Journal of Learning Disabilities*, 48(2), 156 -175. DOI: 10.1177/0022219413494239

- Clark, J. M., & Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, 3(3), 149-210.
- Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking “concrete” manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 270-279.
- Clements, D. H. (1999). “Concrete” manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45–60.
- Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), 83-94.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Cobb, P. (2007). Foundations 1. Putting Philosophy to Work: Coping With Multiple Theoretical Perspectives. In F. K. Lester(, Jr Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1-38). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 12, 2015, από: <http://bit.ly/2qQPuxa>
- Cobb, P. (1994). Constructivism in mathematics and science education. *Educational Researcher*, 23 (7), 4.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Routledge.
- Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education*. (4th ed.) London: Routledge.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). Abingdon, Oxon, NY: Routledge. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 15 2016 από: <http://bit.ly/2saa27G>
- Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. *Delta Journal of Education*, 5(1), 10-19.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics*, 33(2), 111-144.
- Crawford, C., & Brown, E. (2003). Integrating Internet-based mathematical manipulatives within a learning environment. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 22, 169–180.
- Creswell, J. W., (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. (4nd ed.) Thousand Oaks: Sage. ISBN 978-1-4522-2610-1 (pbk.) Ανακτήθηκε Ιανουάριος 10, 2017, από : <http://bit.ly/2rtZ6Rx>

- Crowe, S., Cresswell, K., Robertson, A., Huby, G., Avery, A. and Sheikh, A., (2011). The case study approach, *BMC Medical Research Methodology*, DOI: 10.1186/1471-2288-11-100 Ανακτήθηκε Μάιος 17, 2016 από:
<https://bmcmedresmethodol.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2288-11-100>
- Darch, C., Carnine, D., & Gersten, R. (1984). Explicit instruction in mathematics problem solving. *Journal of Educational Research*, 77(6), 351–359.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1987). The support of autonomy and the control of behavior. *Journal of Personality and Social Psychology*, 53(6), 1024- 1037.
- Dehaene S, Piazza M, Pinel P, Cohen L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20 (3/4/5/6), 487–506.
- Dellatolas, G., von Aster, M., Willadino- Braga, L., Meier, M., & Deloche, G. (2000). Number processing and mental calculation in school children aged 7 to 10 years: A transcultural comparison. *European Child and Adolescent Psychiatry*, 9(2), 102– 110
- Desoete, A., Royers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and Mathematical Problem Solving in Grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34(5), 435-449.
- De Smedt, B., Noël, M. P., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). The relationship between symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing and the typical and atypical development of mathematics: a review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 48–55.
- Dockrell, J. & McShane, J. (1993). Children's Learning Difficulties Στο Ι. Αγαλιώτης, *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά* Αθήνα, 2004, Ελληνικά Γράμματα.
- Dorward, J., & Heal, R. (1999). National Library of Virtual Manipulatives for Elementary and Middle Level Mathematics. WebNet 99 -*World Conference on the WWW and Internet*, 1999(1), 1510-1512.
- Dorward, J. (2002). Intuition and research: Are they compatible? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 329-332.
- Dowker, A. (2005). Early Identification and Intervention for students with Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 324-332.
- Department for Education and Skills (DfES) (2001), *Guidance to Support Pupils with Dyslexia and Dyscalculia (DfES 0521/2001)*. London: DfES, Στο Emerson, J., & Babbie, P. (2010). The Dyscalculia Assessment.
- Department for Education (DfE) (2013). *Mathematics programmes of study: Key stages 1 and 2: National Curriculum in England*. Reference: DFE-00180-2013

- Dienes, Z. P. (1971). An Example of the Passage from the Concrete to the Manipulation of Formal Systems. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 337-52. DOI: 10.1007/BF00302302
- Dunlap, W. P. & Brennan, A. H. (1979). Developing Mental Images of Mathematical Processes. *Learning Disability Quarterly*, 2(2), 89-96.
- Durmus, S. & Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *The Turkish Journal of Educational Technology*. 5(1). Ανακτήθηκε Μάιος 17, 2016 από: <http://www.tojet.net/articles/5112.htm>
- Emerson, J., & Babbie, P. (2010). *The Dyscalculia Assessment*. Great Britain: Bell & Bain Ltd.
- Engelmann, S., Carnine, D., & Steely, D. G. (1991). Making connections in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 24(5), 292-303.
- Englert, C. S., Culatta, B. E., & Horn, D. G. (1987). Influence of irrelevant information in addition word problems on problem solving. *Learning Disability Quarterly*, 10, 29–36.
- Ernest, P., (1985). The Number Line as a Teaching Aid. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 411-424.
- Faggella, K., & Hayes, M. (1988). Counting on math: developing math skills with young children. First Teacher Press: Bridgeport, Ct. Στο T. Battle, (2007). Math manipulatives: The key to an increase in academic achievement in the mathematics classroom: *Increase in academic achievement*, 1-29.
- Finlayson, M. (2014). Addressing math anxiety in the classroom. *Improving Schools*, 17, (1), 99–115. DOI: 10.1177/1365480214521457
- Fleischner, J.E., Garnett, K., & Shepherd, M.J. (1982). Proficiency in arithmetic basic fact computation of learning disabled and nondisabled children. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 4, 47–55.
- Fletcher, J. M., Morris, R. D., & Lyon, G. R. (2003). Classification and definition of learning disabilities: An integrative perspective. Στο H. L. Swanson, K. R. Harris, & S. Graham (Eds), *Handbook of learning disabilities* (σσ. 30-56). New York: Guilford Press.
- Fletcher, J. M., Lyon, G. R., Fuchs, L. S., & Barnes, M. A. (2007). *Learning Disabilities. From Identification to Intervention*. New York, NY: The Guilford Press. Ανακτήθηκε Ιούνιος 10, 2015, από : <http://bit.ly/2sKsBMK>
- Frobel, F. (2009). In Wikipedia, the free encyclopedia. Ανακτήθηκε Φεβρουάριος 8 2016 από: http://en.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Fr%C3%B6bel

- Fuchs, L. & Fuchs, D. (2002). Mathematical Problem Solving Profiles of students with mathematics disabilities with and without co-morbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 35(6), 563-573.
- Fuchs, L., Fuchs, D., Hamlett, C., Lambert, W., Stuebing, K., & Fletcher, J. (2008). Problem Solving and Computational Skill: Are They Shared or Distinct Aspects of Mathematical Cognition. *Journal Education Psychology* 100(1): 30–47. doi:10.1037/0022-0663.100.1.30.
- Fuchs, L. & Fuchs, D. (2001). Principles for the Prevention and Intervention of Mathematics Difficulties. *Learning Disabilities and Research & Practice*, 16(2), 85-95.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Prentice, K. (2004). Responsiveness to Mathematical Problem-Solving Instruction: Comparing Students at Risk of Mathematics Disability With and Without Risk of Reading Disability. *Journal of Learning Disabilities*, 37(4) 293– 306.
- Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 97, 493–513.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., & Hollenbeck, K. N. (2007). Extending responsiveness to intervention to mathematics at first and third grade. *Learning Disabilities Research and Practice*, 22(1), 13–24.
- Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third- grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children*, 74(2), 155–173.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Craddock, C., Hollenbeck, K. N., & Hamlett, C. L. (2008). Effects of small-group tutoring with and without validated classroom instruction on at-risk students' math problem solving: Are two tiers of prevention better than one? *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 491–509.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatsneider, C. & Fletcher, J. M. (2006). The Cognitive Correlates of Third-Grade Skill in Arithmetic, Algorithmic Computation, and Arithmetic Word Problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43.
- Funkhouser, C. (1995). Developing number sense and basic computational skills in students with special needs. *School Science and Mathematics*, 95(5), 236-239.
- Fuson, K. C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, 63, 491–506.

- Fuson, K. C., Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 21, 180–206.
- Gaddes W. H. & Edgell D. (1994). *Learning disabilities and brain function: A neuropsychological approach*. New York: Springer - Verlag. Ανακτήθηκε Απρίλιος 14 2013 από : <https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=eazVBwAAQBAJ&oi>
- Gagnon, J. C., & Maccini, P. (2007). Teacher-reported use of empirically validated and standards-based instructional approaches in secondary mathematics. *Remedial and Special Education*, 28(1), 43-56.
- Garcia, A. I., Jimenez, J. E., & Hess, S. (2006). Solving Arithmetic Problems: An Analysis of Difficulty in Children Arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities*, 39(3) 270-281.
- Gardner, H. (1997). Fostering diversity through personalized education: Implications of a new understanding of human intelligence. *Prospects*, 27(3), 347–363. DOI:10.1007/BF02736635
- Garrity, C. (1998). Does the Use of Hands-on Learning with Manipulatives improve the Tests score of Secondary Education Geometry Students. Dissertation, *Online Submission*, Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 21, 2015, από ERIC: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED422179.pdf>
- Geary, D.C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.
- Geary, D. C., Hamson, C. O. & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 236-263.
- Geary, D. C. (2006). Learning Disabilities in arithmetic: Problem-solving differences and cognitive deficits. *Handbook of learning disabilities* (199-212). Ανακτήθηκε Οκτώβριος 26, 2015, από: <http://web.missouri.edu/~gearyd/LDHandBk03.pdf>
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2001). Numerical and Arithmetical deficits in learning – disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology*, 15(7), 635-647.
- Geary, D. C. (1990). A componential analysis of an early learning deficit in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 33, 386–404.
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345–362.
- Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

- Geary, D.C., Hoard, M. K & Hamson, C. O., (1999). Numerical and arithmetical cognition: Patterns of Functions and Deficits in Children at Risk for a Mathematical Disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 213-239.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78, 1343–1359.
- Geary, D.C., Bailey, D.H. & Hoard, M.K. (2009). Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability With a Simple Screening Tool: The Number Sets Test. *Journal Psychoeducational Assessment*, 27 (3): 265–279. DOI: 10.1177/0734282908330592
- Geist, E. (2010). The anti-anxiety curriculum: Combating math anxiety in the classroom. *Journal of Instructional Psychology*, 37(1), 24–29.
- Gellert, U. (2004). Didactic Material Confronted with the concept of Mathematical Literacy. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 163–179.
- George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference*. Boston: Allyn & Bacon.
- Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–304.
- Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics; Response to intervention (RTI) for elementary and middle schools* (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 17, 2016, από: <http://bit.ly/2qQRbuK>
- Gersten, R., Chard, D., Griffiths, R., Katz, R., & Bryant, D. (2003). *Methods and materials for reaching students in early and intermediate mathematics*. Paper presented at the Council for Exceptional Children, Seattle, WA.
- Gersten, R., Chard, D., Jayanthi, M., Baker, S., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). *A Meta-analysis of Mathematics Instructional Interventions for Students with Learning Disabilities: A Technical Report*. Los Alamitos, CA: Instructional Research Group. Ανακτήθηκε Απρίλιος 12, 2015, από: <http://bit.ly/2s9QeSg>

- Glenberg, A. M., Gutierrez, T., Levin, J. R., Japuntich, S., & Kaschak, M. P. (2004). Activity and imagined activity can enhance young children's reading comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 96, 424–436.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. Στο A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (σσ. 1 - 23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldman, S. & Hassellbring, T. (1997). Achieving Meaningful Mathematics Literacy for Students with Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30(2), 198-208
- Goldman, S. R., & Pellegrino, J. W. (1987). Information processing and educational microcomputer technology: Where do we go from here? *Journal of Learning Disabilities*, 20, 144–154.
- Gravemeijer, K. P. E. (1991) An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives, in L. Streefland (Ed.) *Realistic Mathematics Education in Primary School* (57-76). Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Griffin, S. (2004). Building number sense with number worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 173–180.
- Grouws, D. A., Cebulla, K. J. (2000). *Improving Student Achievement in Mathematic*. International Academy of Education, Educational Practice Series-4. Ανακτήθηκε Μάιος 9, 2015, από: <http://bit.ly/2qYKISY>
- Hall, N. (1998). Concrete representations and the procedural analogy theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 17, 33–51.
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: A synthesis of 800+ meta-analyses on achievement*. London: Routledge. Ανακτήθηκε Ιούλιος 20, 2016, από: <http://bit.ly/2rXr3SX>
- Hattie, J. A. C. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. New York: Routledge. Ανακτήθηκε Ιανουάριος 10, 2017, από: <http://bit.ly/1tKyzGC>
- Hallahan, D. P., & Mercer, C. D. (2001). *Learning Disabilities: Historical Perspectives*. Washington, DC: Office of Special Education Programs, U.S. Department of Education. Ανακτήθηκε Μάιος 17, 2015, από: <http://www.lidaofky.org/LD/LD%20Historical%20Perspectives.pdf>
- Hammill, D. D. (1990). On defining learning disabilities: An emerging consensus. *Journal of Learning Disabilities*, 23, 74 – 84.

- Hanich, L. B., Jordan, N. C., (1997). Achievement-Related Beliefs of Third-Grade Children With Mathematics and Reading Difficulties, *Journal of Educational Research*, 97 (5), 24-48
- Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning disabilities. *Journal of Educational Psychology*, 93, 615–626.
- Hartshorn, R. & Boren, S. (1990). *Experiential learning of mathematics: Using manipulatives*. ERIC Clearinghouse on Rural Education and Small Schools. Ανακτήθηκε Απρίλιος 12, 2014, από: <https://www.ericdigests.org/pre-9217/math.htm>
- Heddens, J. W. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33, 14–17.
- Heddens, J. W. (1997). *Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives*. Ανακτήθηκε 20, 2006, από: <http://bit.ly/2rujtOt>
- Heiman, T., & Precel, K. (2003). Students with learning disabilities in higher education. *Journal of Learning Disabilities*, 36, 248-258.
- Hiebert, J., Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for research in mathematics education (Reston, VA)*, 22, 98–122.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects o teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371-406.
- Hirschhorn, D. B., & Senk, S. (1992). Calculators in the UCSMP curriculum for grades 7 and 8. Στο J. T. Fey & C. R. Hirsch (Eds.), *Calculators in mathematics education 1992 yearbook* (σσ. 79-90). Reston: VAQ National Council of Teachers of Mathematics.
- Hollingsworth, C. 1990. Maximizing implementation of manipulatives. *Arithmetic Teacher*, 37(9), 27-41.
- Hunt, A, Nipper, K., & Nash, L., (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective Than the Other?. *Current Issues in Middle Level Education*, 16(2), 1-6.
- Individuals with Disabilities Education Improvement Act of, 2004.
- Izydorczak, A.E. *A study of virtual manipulatives for elementary mathematics*. Ph.D. thesis, State University of New York at Buffalo. Ανακτήθηκε Ιούνιος 20, 2015, από: <https://www.learntechlib.org/p/122892>

- Jitendra, A. K., & Hoff, K. (1996). The effects of schema-based instruction on mathematical word problem solving performance of students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 29, 422-431.
- Jitendra, A. K., Griffin, C. C., McGoey, K., Gardill, M. C., Bhat, P., & Riley, T. (1998). Effects of mathematical word problem solving by students at risk or with mild disabilities. *The Journal of Educational Research*, 91(6), 345-355.
- Johnson, K. A. (1993). Manipulatives allow everyone to learn mathematics. *Contemporary Education*, 65(1), 10-11.
- Johnson, B., & Christensen, L. (2008). Educational research: Quantitative, qualitative and mixed approaches (3rd ed.). Los Angeles, CA: Sage. Ανακτήθηκε Μάιος 12, 2015, από: <http://bit.ly/1G1pjKw>
- Johnson, E. S., Humphrey, M., Mellard, D. F., Woods, K., & Swanson, H. L. (2010). Cognitive processing deficits and students with specific learning disabilities: A selective metaanalysis of the literature. *Learning Disability Quarterly*, 33(1), 3-18.
- Jones, S. (1986). The role of Manipulatives in introducing and developing mathematical concepts in elementary and middle grades. Ανακτήθηκε Ιανουάριος 20, 2006, από: http://resourceroom.net/math/Jones_mathmanip.html
- Jones, E.D., Wilson, R., & Bhojwani, S. (1997). Mathematics Instruction for Secondary Students with Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 30(2), 151-163.
- Jordan, L., Miller, M. D. & Mercer, C. D. (1998). The Effects of Concrete to Semiconcrete to Abstract Instruction in the Acquisition and Retention of Fraction Concepts and Skills. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal*, 9(3), 115-122 ISSN: ISSN-1046-6819
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77(1), 153-175.
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74, 834-850.
- Jordan, N., & Hanich, L. (2003). Characteristics of children with moderate mathematics deficiencies: A longitudinal perspective. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18, 213-221.
- Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second grade children with different forms of LD. *Journal of Learning Disabilities*, 33, 567-578.

- Jordan, N. C., Kaplan, D., & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 586–597.
- Judd, T. P., & Bilsky, L. H. (1989). Comprehension and memory in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and non-retarded individuals. *Journal of Educational Psychology*, 81, 541– 546.
- Karagiannakis, G., & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa Battery: A Tool for Identifying Students' Mathematical Learning Profiles. *Health Psychology Report*, 2(4), DOI: 10.5114/hpr.2014.46329.
- Kavale, K. A., & Forness, S. R. (2000). What Definitions of Learning Disability Say and Don't Say: A Critical Analysis. *Journal of Learning Disabilities*, 33(3), 239-256. DOI: 10.1177/002221940003300303
- Keller, J. D. (1993). Go figure! The need for manipulatives in problem solving. *Contemporary Education*, 65, 12-15.
- Kelly, C. A. (2006). Using Manipulatives in Mathematical Problem Solving: A Performance-Based Analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(2), 184-193.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findel, G. (2001). Teaching for mathematical proficiency. Στο *Adding it up: Helping children learn mathematics* (313-368). Ανακτήθηκε Φεβρουάριος 21, 2012, από: <https://www.nap.edu>
- Kilpatrick, J. & Swafford, J. (Eds.) (2002). *Helping children learn mathematics*. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Research Council. Washington, DC: National Academy Press. Ανακτήθηκε Φεβρουάριος 21, 2012, από: <https://www.nap.edu/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics>
- Kirk, S. A. (1962). *Educating exceptional children*. Boston: Houghton Mifflin. Στο Παντελιάδου, Σ., & Μπότσας, Γ. (2007). *Μαθησιακές Δυσκολίες. Βασικές Έννοιες και Χαρακτηριστικά*. Βόλος: Γράφημα.
- Kong, J. E., & Orosco, M. J. (2016). Word-Problem-Solving Strategy for Minority Students at Risk for Math Difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 39(3), 171–181, DOI: 10.1177/0731948715607347
- Kontas, H. (2016). The Effect of Manipulatives on Mathematics Achievement and Attitudes of Secondary School Students. *Journal of Education and Learning*, 5 (3), 215-228.
- Koontz K. L, Berch D. B. (1996). Identifying simple numerical stimuli: Processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children. *Mathematical Cognition*, 2, 1–23.

- Kosc. (1974). Developmental Dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7(3), 164–177.
- Kosko, K. W. & Wilkins, J. L. M. (2010). Mathematical Communication and Its Relation to the Frequency of Manipulative Use. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2) (79) ISSN 1306-3030
- Kotovskiy, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from the tower of Hanoi. *Cognitive Psychology*, 17, 248–294.
- Koumoula, A., Tsironi V., Stamouli V., Bardani I., Siapati S., Graham A., Kafantaris I., Charalambidou I., Dellatolas G. & von Aster M. (2004). An Epidemiological Study of Number Processing and Mental Calculation in Greek Schoolchildren. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (5), 377-388.
- Krech, B. (2000). Math: Model with Manipulatives. *Instructor* 109 (7), 6 – 19.
- Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education*, 24(2), 97-114.
- Labinowicz, E. (1985). *Learning from students: new beginnings for teaching numerical thinking*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley. Στο Grouws, D. A., Cebulla, K. J. (2000). *Improving Student Achievement in Mathematic* International Academy of Education, Educational Practice Series-4
- Labuschagne, A. (2003). Qualitative Research - Airy Fairy or Fundamental? *The Qualitative Report*, 8(1), 100-103. Ανακτήθηκε Μάρτιος 8, 2014 από: <http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol8/iss1/7>
- Lambert, M. A. (1996). Mathematics Textbooks, Materials, and Manipulatives. *LD Forum*, 21(2), 41-45.
- Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Landerl K, Bevan A, Butterworth B. (2003). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93, 99–125.
- Lee, L. (2007). Learning math and loving it with manipulatives and games. *Christian, Education, Family & Parenting*, 1-7.
- Lemonidis, Ch. Hliadou, Th. (2016). Effects of remedial instruction on 6th grade students with and without difficulties in fractions. *Biennial Meeting of EARLI SIG 3 - Conceptual Change*, Florina, Greece.

- Lerner, J. (1993). *Learning disabilities: Theories, Diagnosis & Teaching Strategies*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Lett, S. W. (2007). Using manipulative materials to increase student achievement in mathematics. Ανακτήθηκε Απρίλιος 21, 2014, από: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499262.pdf>
- Lewis, A.B. (1989). Training Students to Represent Arithmetic Word Problems, *Journal of Educational Psychology*, 81(4), 521-531.
- Lin, C. (2010). Web-based instruction on preservice teachers' knowledge of fraction operations. *School Science and Mathematics*, 110(2), 59-71.
- Little, S. G., Akin-Little, A., & Richards, T. L. (2006). Learning disorders. Στο J. E. Fisher & W. T. O'Donohue (Eds.), *Practitioner's guide to evidence-based psychotherapy* (σσ. 368-376). New York: Springer.
- Lock, R. (1996). Adapting Mathematics Instruction in the General Education Classroom for Students with Mathematics Disabilities. *LD Forum*, 38-47.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Erlbaum. Στο Puchner, L., Taylor, A., O' Donnell, B., & Fick, K. (2008). Teacher learning and mathematics manipulatives: A collective case study about teacher use of manipulatives in elementary and middle school mathematics lessons. *School Science and Mathematics*, 108(7), 313-325.
- Maccini, P., & Hughes, C. A. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 15(1), 10-21.
- Mackenzie, N. & Knipe, S. (2006). Research dilemmas: Paradigms, methods and methodology. *Issues In Educational Research*, 16(2), 193-205.
- Malabonga, V., Pasnak, R., Hendricks, C., Southard, M., & Lacey, S. (1995). Cognitive gains for kindergartners instructed in seriation and classification. *Child Study Journal*, 25, 79-96.
- Manches, A., O'Malley, C., & Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: A comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers & Education* 54, 622-640.
- Mazzocco, M. M. M., & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice*, 20, 142-155.
- Marsh, L. G. & Cooke, N. L. (1996). The effects of using manipulatives in teaching math problem solving to students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 11(1), 58-65.

- Martin, T., & Schwartz, D. L. (2005). Physically distributed learning: Adapting and reinterpreting physical environments in the development of fraction concepts. *Cognitive Science*, 29, 587-625.
- Martin, T., Svihla, V., & Smith, C. P. (2012). The role of physical action in fraction learning. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 1-17.
- Martin, L. & Towers, J. (2016). Folding back and growing mathematical understanding: a longitudinal study of learning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 5(4), 281-294.
- Marzano, R. J. (2010). Representing knowledge nonlinguistically. *Educational Leadership*, 67(8), 84-86.
- McLeod, T. & Crump, W. (1978). The Relationship of Visuospatial Skills and Verbal Ability to Learning Disabilities in Mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 11 (4), 146-163.
- McNeil, N. (2007). When theories don't add up: disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice*, 46, 309-316.
- McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L., & Sternberg, R. J. (2007). Should you show me the play money? Concrete objects both hurt and help performance on math problems. *Learning and Instruction* 19, 171-184.
- Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121-142
- Mercer, C. D., & Miller, P. S. (1992). Teaching students with learning problems to acquire, understand, and apply basic math facts. *Remedial and Special Education*, 13(3), 19-35.
- Merriam, S. (1998). Qualitative research and case study applications in education. San Francisco: Josey-Bass.
- Mertens, D. M. (2005). Research methods in education and psychology: Integrating diversity with quantitative and qualitative approaches. *Education Journal*, 2(2), 50-57.
- Meyer, M.S. & Felton, R.H. (1999). Repeated reading to enhance fluency: Old approaches and new directions. *Annals of Dyslexia*, 49, 283-306.
- Metz, K. E. (1995) Reassessment of developmental constraints on children's science instruction, *Review of Educational Research*, 65, 93-127.
- Miles, D.D., & Forcht, J.P. (1995). Mathematics strategies for secondary students with learning disabilities or mathematics deficiencies: A cognitive approach. *Intervention in School and Clinic*, 31, 91-96.
- Miller, S., & Mercer, C. (1997). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 47-56.

- Miller, S. P., & Mercer, C. D. (1993). Using data to learn about concrete, semiconcrete-abstract instruction for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 8, 89-96.
- Miller, S., & Mercer, C. (1998). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. Στο D. Rivera (Ed), *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities* (σσ. 81 – 96). Austin, TX: Pro- Ed.
- Miller, S. P., Butler, F. M., Lee, K. (1998). Validated Practices for Teaching Mathematics to Students With Learning Disabilities: A Review of Literature. *Focus on Exceptional Children*, 31(1), 1-24.
- Moch, P. (2001). Manipulatives Work! *Educational Forum* 66 (1), 81-87 Ανακτήθηκε 20, 2006, από: https://www.researchgate.net/publication/233436695_Manipulatives_Work
- Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 25, 230-248.
- Moreno, R., & Mayer, R. E. (1999). Multimedia - supported metaphors for meaning making in mathematics. *Cognition and Instruction*, 17, 215–248.
- Moreno, R., & Duran, R. (2004). Do multiple representations need explanations? The role of verbal guidance and individual differences in multimedia mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, 96(3), 492-503.
- Moyer, P., Bolyard, J., & Spikell, M. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics* 8(6), 372-377.
- Moyer, P. S. (2001) Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175–197.
- Moyer, P. S., & Jones, M. G. (2004). Controlling choice: Teachers, students, and manipulatives in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics*, 104(1), 16-31.
- Moyer, P. S., Reimer, K. (2005). Third-Graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Moyer, P. S., Niezgoda, D., & Stanley, J. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematical representations. Στο W. J. Masalski & P. C. Elliott (Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments: Sixty seventh yearbook* (σσ. 17-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Moyer-Packenham, P.S., Salkind, G., & Bolyard, J.J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education* [Online serial], 8(3). Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 25, 2015 από: {HYPERLINK "http://bit.ly/2rXZLMs"}
- Moyer, P. S., Ulmer, L. A. & Anderson, K. L. (2012). Examining Pictorial Models and Virtual Manipulatives for Third-Grade Fraction Instruction. *Journal of Interactive Online Learning*. 11(3), 103-120.
- Moyer-Packenham, P. S., & Westenskow, A., (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 4(3), 35-50.
- National Association for the Education of Young Children. Ανακτήθηκε Ιανουάριος 20, 2017, από: <https://www.naeyc.org/>
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, Washington, DC: National Academy Press. Ανακτήθηκε Μάρτιος 11, 2015, από: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.487.9364&rep=rep1&type=pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Library of Virtual Manipulatives (2015). Ανακτήθηκε Ιούλιος 21, 2016, από: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_172_g_2_t_3.html?open=activities
- National Library of Virtual Manipulatives. {HYPERLINK "http://nlvm.usu.edu"}
- National Council of Supervisors of Mathematics NCSM, (2013). *Improving Student Achievement in Mathematics by Using Manipulatives with Classroom Instruction*. The National Council of Supervisors of Mathematics Improving Student Achievement Series No. 11.
- Norman, D. A. (1989). Cognitive artifacts Στο *Κοινωνιογνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες των Φυσικών και Λογικομαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο*. (Επιμ. Γ. Παπαμιχαήλ). Αθήνα, Gutenberg- Ψυχολογία.
- Ojose, B. (2008). Applying Piaget's theory of cognitive development to mathematics instruction. *The Mathematics Educator*, 18(1), 26–30.

- Ojose, B. & Sexton, L. (2009). The Effect of Manipulative Materials on Mathematics Achievement of First Grade Students. *The Mathematics Educator*, 12(1), 3-14.
- Okamoto, Y., & Case, R. (1996). Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 61, 27-59.
- Olkun, S. (2003). Comparing computer verses concrete manipulatives in learning 2D geometry. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 22(1), 43-56.
- Orton, A. (1992). Learning Mathematics. Στο Ι. Αγαλιώτης, *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά: Ελληνικά Γράμματα*.
- Ostad, S. (1998). Developmental Differences in Solving Simple Arithmetic Word Problems and Simple Number-fact Problems: A Comparison of Mathematically Normal and Mathematically Disabled Children. *Mathematical Cognition*, 4(1), 1-19.
- Parham, J. L. (1983). A meta-analysis of the use of manipulative materials and student achievement in elementary school mathematics (Doctoral Dissertation). Ανακτήθηκε Μάιος 13, 2016, από: Pro Quest Diisertations and Thesis database. (UMI No. 8312477)
- Parmar, R. S., Cawley, J. R., & Frazita, R. R. (1996). Word problem-solving by students with and without math disabilities. *Exceptional Children*, 62, 415-429.
- Parmar, R.S., & Signer, B.R. (2005). Sources of Error in Constructing and Interpreting Graphs: A Study of Fourth- and Fifth-Grade Students with LD. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (3), 250-261.
- Pasnak, R. (1987). Acceleration of cognitive development of kindergartners. *Psychology in the Schools*, 24, 358-363.
- Pasnak, R., Hansbarger, A., Dodson, S. L., Hart, J. B., & Blaha, J. (1996). Differential results of instruction of the preoperational/concrete operational transition. *Psychology in the Schools*, 33, 70-83.
- Peterson, S. K., Mercer, C. D., & O'Shea, L. (1988). Teaching learning disabled students place value using the concrete to abstract sequence. *Learning Disabilities Research*, 4, 52-56.
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Humanities Press. Στο Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. *Delta Journal of Education*, 5(1).

- Piaget, J. (1971). *The Psychology of Intelligence*. Boston: Routledge and Kegan. Στο Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. *Delta Journal of Education*, 5(1).
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116 (1), 33–41.
- Picciotto, H. (1998). *Operation sense, tool-based pedagogy, curricular breadth: a proposal*. Ανακτήθηκε Ιούνιος 12, 2016, από: <http://www.mathedpage.org/early-math/early.html>
- Phillips, D. G. (1989). "The Development of Logical Thinking: A Three-Year Longitudinal Research Study." Paper presented at the 67th Annual Meeting of The National Council of Teachers of Mathematics, Orlando, Florida.
- Post, T. (1981). *The Role of Manipulative Materials in the Learning of Mathematical Concepts*. In Selected Issues in Mathematics Education (109-131).
- Potari, D. & Georgiadou-Kabouridis, B. (2009). A Primary Teacher's Mathematics Teaching: The Development of Beliefs and Practice in Different "Supportive" Contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12 (1), 7-25.
- Price, G. R. & Ansari, D., (2013). Dyscalculia: Characteristics, Causes, and Treatments. *Numeracy*, 6(1), Article 2. Ανακτήθηκε Ιούλιος 14, 2016, από: <http://scholarcommons.usf.edu/numeracy/vol6/iss1/art2/> DOI: 10.5038/1936-4660.6.1.2
- Prigge, G. R. (1978). The Differential Effects of the Use of Manipulative Aids on the Learning of Geometric Concepts by Elementary School Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9(5), 361-367.
- Puchner, L., Taylor, A., O'Donnell, B., & Fick, K. (2008). Teacher learning and mathematics manipulatives: A collective case study about teacher use of manipulatives in elementary and middle school mathematics lessons. *School Science and Mathematics*, 108 (7), 313-325.
- Quinn, R. J., (1998). The Influence of Mathematics Methods Courses on Preservice Teachers' Pedagogical Beliefs Concerning Manipulatives *The Clearing House*, 71(4), 236-238 Ανακτήθηκε Μάιος 11, 2016 από: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00098659809599368>

- Ramma, S., & Gowramma, P. I., (2002). A Systematic Procedure for Identifying and Classifying Children with Dyscalculia among Primary School Children in India. *Dyslexia*, 8, 67-85.
- Raphael, D. I., Sowel, E. & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-190.
- Raymond, A. M., & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: A story of one mathematics teacher's development. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 283–307.
- Reid, G. (2005). *Dyslexia and Inclusion. Classroom Approaches for Assessment. Teaching and Learning*. London: David Fulton Publishers Ltd.
- Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Remillard, J. T., & Geist, P. K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 7-34.
- Research on the Benefits of Manipulatives. (2015). Ανακτήθηκε Ιανουάριος 18, 2017, από: https://www.hand2mind.com/pdf/learning_place/research_math_manips.pdf
- Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220, 477-478.
- Resnick, L. B., Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In: Glaser, R., ed. *Advance in instructional psychology*, 3, 41–95. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale. *Journal of Counseling Psychology*, 19, 551–554.
- Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 49–101.
- Rittle - Johnson, B., & Koedinger, K. R. (2005). Designing knowledge scaffolds to support mathematical problem solving. *Cognition and Instruction*, 23, 313–349.
- Rivera, D. P. (1997). Mathematics Education and Students with Learning Disabilities: Introduction to the Special Series. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 2-19.
- Roberts, S. K. (2007). Not all manipulatives and models are created equal., *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13, 6–9.

- Robinson, C., Menchetti, B., & Torgesen, J. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 17, 81–89.
- Ross, R. & Kurtz, R. (1993). Making manipulatives work: A strategy for success. *The Arithmetic Teacher*, 40, 254–258.
- Roy, J. R., Roy, G. (2006). Numbers on the street. Marshall Cavendish Corporation: New York.
- Στο Battle, T. (2007). Math manipulatives: The key to an increase in academic achievement in the mathematics classroom: *Increase in academic achievement*, 1-29. *Student Achievement in Mathematic* International Academy of Education, Educational Practice Series-4
- Rubinsten, O. & Henik, A. (2005). Automatic activation of internal magnitudes: a study of developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, 19(5), 641–648.
- Rourke, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities*, 26, 214–226.
- Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 34–46.
- Russell, R. L., & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematical difficulties. *Cognition and Instruction*, 1, 217–244.
- Rust, A. L. (1999). A Study of the Benefits of Math Manipulatives versus Standard Curriculum in the Comprehension of Mathematical Concepts. An action Research Project Presented to the Department of Teacher Education of Johnson Bible College.
- Ruzic, R. & O'Connell, K. (2001). Manipulatives. *Enhancement Literature Review*, accessed at <http://www.cast.org/ncac/Manipulatives1666.cfm>.
- Satsangi, R. & Bouck, E.C. (2015). Using Virtual Manipulative Instruction to Teach the Concepts of Area and Perimeter to Secondary Students With Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 38(3), 174 –186 DOI: 10.1177/0731948714550101
- Saxe, G. B., Gearhart, M. & Nasir, N. S. (2001). Enhancing students' understanding of mathematics: A study of three contrasting approaches to professional support. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 55-79.
- Sebesta, L. M. & Martin, S. R. M. (2004). Fractions: building a foundation with concrete manipulatives. *Illinois Schools Journal*, 83(2), 3–23.
- Schultz, K. A. (1986). Representational models from the learners' perspective. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 52-55.

- Scruggs, T.E., & Mastropieri, M.A. (1986). Academic characteristics of behaviorally disordered and learning disabled children. *Behavioral Disorders*, 11, 184–190.
- Scruggs, T. E. & Mastropieri, M. A. (2002). On babies and bath – water: Addressing the problems of identification of LD. *Learning Disability Quarterly*, 25, 155 – 168.
- Siegel, L. S., & Ryan, E. B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. *Child Development*, 60, 973–980.
- Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choice in addition and subtraction: :How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Siegler, R. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so good students, and perfectionists. *Child Development*, 59, 833–851.
- Silver, E. S. (2004) Ella minnow pea: An allegory for our times? *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 154–156.
- Schmaltz, R. (1990). The mathematics textbook: How can it serve the standards? *Arithmetic Teacher*, 38(1), 14-16.
- Shalev, R. S. (2004). Developmental Dyscalculia, *Journal of Child Neurology*, 19, 765-771.
- Shalev, R. S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M., Badichi, N., Friedlander, Y. & Gross-Tsur, V. (2001). Developmental Dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, 34, 59-65.
- Sharma, S., (2013). *Qualitative approaches in mathematics education research: challenges and possible solutions* *Education Journal*, 2(2), 50-57.
- Sherman, H., & Richardson, L. (1995). Elementary school teachers' beliefs and practices related to teaching mathematics with manipulatives. *Educational Research Quarterly*, 18(4), 27-36.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14
- Simon, M. A., and D. Schifter. 1991. Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics* 22, 309-331.
- Skinner, C. H., Bamberg, H. W., Smith, E. S., & Powell, S. S. (1993). Cognitive cover, copy, and compare: Subvocal responding to increase rates of accurate division responding. *Remedial and Special Education*, 14(1), 49–56.
- Smith, J. P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 387–402.

- Smith, L. (2008). The effects of instructional consistency: Using manipulatives and teaching strategies to support resource room mathematics instruction. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal*, 15, 71-76.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 498-505.
- Spungin, R., (1996). Teaching Teachers to Teach Mathematics. *Journal of Education*, 178(1), 73-84.
- Stake R., (1995). *The art of case study research*. London: Sage.
- Stanovich, K. E. & Siegel, L. S. (1994). Phenotypic performance profile of children with reading disabilities: A regression based test of the phonological-core variable difference model. *Journal of Educational Psychology*, 86, 24-53.
- Stanovich, K. E. (2005). The Future of a mistake: Will Discrepancy Measurement continue to Make the Learning Disabilities Field a Pseudoscience? *Learning Disability Quarterly*, 28 (2), 103-106.
- Stein, M. K. & Bovalino, J. W. (2001). Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6 (6), 356-359.
- Steedly, K. (2008). Effective mathematics instruction. *National Dissemination Center for Children with Disabilities*, 3, 1-11.
- Steedly, K., Dragoo, K., Arafeh, S., & Luke, D. S. (2008). Effective Mathematics Instruction. *Evidence for Education*, 3 (1), Ανακτήθηκε Νοέμβριος 12, 2016, από: http://www.parentcenterhub.org/wp-content/uploads/repo_items/eemath.pdf
- Steen, K., Brooks, D., & Lyon, T. (2006). The impact of virtual manipulatives on first grade geometry instruction and learning. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 25(4), 373-391.
- Sternberg, R. J. & Grigorenko, E. L. (2002). Difference scores in the identification of children with LD. It's time to use a different method. *Journal of School Psychology*, 40(1), 65 – 83.
- Sternberg, R. J., & Grigorenko, E. L. (2004). Successful intelligence in the classroom. *Theory Into Practice*, 43, 274-280.
- Stodolsky, S. S. (1988). *The subject matters*. Chicago: University of Chicago Press, στο Ojose, B. & Sexton, L. (2009). The Effect of Manipulative Materials on Mathematics Achievement of First Grade Students. *The Mathematics Educator* 2009, 12 (1), 3-14

- Stricklan, T.K. & Maccini P. (2010). Strategies for Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities: Making Research to Practice Connections. *Intervention in School and Clinic* 46 (1) 38 –45.
- Sullivan, M. M. (2005). Teaching mathematics to college students with mathematics related learning disabilities: Report from the classroom. *Learning Disabilities Quarterly*, 28, 205-220.
- Suydam, M. N., Higgins, J.L. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research*. Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Suydam, M. N. (1985). *Research on instructional materials for mathematics*. Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 7, 2016, από: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED276569.pdf>
- Suh, J. M., Moyer, P. S., & Heo, H.-J. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *The Journal of Interactive Online Learning*, 3(4), 1-22.
- Suh, J. & Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155-173.
- Suh, J.M., & Moyer-Packenham, P.S. (2008). *Scaffolding special needs students' learning of fraction equivalence using virtual manipulatives*. In Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 297-304. PME, 2008.
- Swanson, H. L., & Rhine, B. (1985). Strategy transformations in learning disabled children's math performance: Clues to the development of expertise. *Journal of Learning Disabilities*, 18, 596–603.
- Swanson, H. L. & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79, 294–321
- Swanson, H. L. (2011). Working memory, attention, and mathematical problem solving: a longitudinal study of elementary school children. *Journal of Educational Psychology*, 103(4), 821–837.
- Swanson, H. L., & Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79, 294–321.

- Szűcs, D., & Goswami, U. (2013). Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 33–37.
- The Access Center, (2004). Research on the benefits of manipulatives, https://www.hand2mind.com/pdf/learning_place/research_math_manips.pdf
- The National Council of Supervisors of Mathematics (2013). *Improving Student Achievement in Mathematics by Using Manipulatives with Classroom Instruction*, 11.
- The Warnock Report (1978). Special Educational Needs Report of the Committee of Enquiry into the Education of Handicapped Children and Young People. London: Her Majesty's Stationery Office 197.
- Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Research into practice: Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, 41, 556–558.
- Thompson, P.W. (1992). Notations, conventions, and constraints: contributions of effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education* (Reston,VA),23, 123–147.
- Thornton, C. A. (1986). Special learners. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 38-41.
- Tobia, V., Fasola, A., Lupieri, A., & Marzocchi, G.M., (2016). Numerical Magnitude Representation in Children With Mathematical Difficulties With or Without Reading Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 49 (2), 115 –129, DOI: 10.1177/0022219414529335
- Tolar, T.D., Fuchs, L., Fletcher, J.M., Fuchs, D. & Hamlett, C.L. (2016). Cognitive Profiles of Mathematical Problem Solving Learning Disability for Different Definitions of Disability. *Journal of Learning Disabilities*, 49 (3) 240 – 256, DOI: 10.1177/0022219414538520
- Tooke, D. J., Hyatt, B., Leigh, M., Snyder, B., & Borda, T. (1992). Why aren't manipulatives used in every upper elementary and middle school mathematics classroom? *Middle School Journal*, 24, 61–62.
- Toptas V., Celik, S. & Karaca, T. (2012). Pedagogical Materials Use of Primary Grade Teachers in Mathematics Education. *Elementary Education Online*, 11 (4), 1121-1130.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., Chesquiere, P. (2004). Strategy Development in children with Mathematics Disabilities: Insights from the Choice/No Choice Method and the Chronological-age/Ability-Level-Math Design. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (3), 119-131.

- Tournaki, N., Bae, Y. S. & Kerekes, J. (2008). Rekenrek: A Manipulative Used to Teach Addition and Subtraction to Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal* 6 (2), 41-59.
- Trueblood, C. R. (1986). Hands on: Help for teachers. *Arithmetic Teacher* 33 (6), 48-51.
- Tseng, K.H., Chang, C.C. Lou S-J, & Hsu, P-S (2013). Using creative problem solving to promote students' performance of concept mapping. *International Journal Technol Des Educ* 23, 1093–1109. DOI: 10.1007/s10798-012-9230-8
- Underhill, R., Uprichard, A. & Heddens J. (1980). Diagnosing Mathematical Difficulties. Στο Ι. Αγαλιώτης, *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Uribe-Florez, L. J., & Wilkins, J. L. M. (2010). Elementary school teachers' manipulative use. *School Science and Mathematics*, 110 (7), 363-371.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.
- Uttal, D. H. (2003). *On the relation between play and symbolic thought: The case of mathematics manipulatives*. Contemporary Perspectives on Play in Early Childhood Education A Volume in: Contemporary Perspectives in Early Childhood Education, 97-114. Copyright © 2003 by Information Age Publishing, Inc. ISBN: 1-930608-31-4 (cloth), 1-930608-30-6 (paper)
- Van de Walle, J. A. (1973). Attitudes and perceptions of elementary mathematics possessed by third and sixth grade teachers as related to student attitude and achievement in mathematics. (Doctoral dissertation, Ohio State University, 1972). *Dissertations Abstracts International*, 33, 4254-A.
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson.
- Van Erp, J. & Heshusius, L. (1986). Action Psychology: Learning as the Interiorization of Action in Early Instruction of Mathematically Disabled Learners. *Journal of Learning Disabilities*, 19 (5) 274-279.
- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496-506.

- Van Luit, Johannes E. H.(1994). The effectiveness of structural and realistic arithmetic curricula in children with special needs. *European Journal of Special Needs Education*, 9 (1), 16-26.
- Van Luit, Johannes E. H. & Van der Aalsvoort, (1985). Learning subtraction in a special school: A self-instructional training strategy for educable mentally retarded children with arithmetic deficits. *Instructional Science* 14, 179-189.
- Vaughn, S., & Fuchs, L. S. (2003). Redefining learning disabilities as inadequate response to instruction: The promise and potential pitfalls. *Learning Disabilities: Research and Practice*, 18, 137 - 146.
- Vellutino, F., Scanlon, D. & Tanzman, M. (1998). The case of early intervention in diagnosing reading disability. *Journal of School Psychology*, 36, 367 – 397.
- Venger, A.L., Gorbov, S.F. (1993). Psychological foundations for an introductory course of mathematics for six years old, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 15 (1), p.p. 85-97.
- Vinson, B. M., Haynes, J., Brasher, J., Sloan, T., & Gresham, R. (1997). *A comparison of preservice teachers' mathematics anxiety before and after a methods class emphasizing manipulatives*. Paper presented at the Annual Meeting of the Midsouth Educational Research Association, Nashville, TN.
- Vygotsky, L. S. (1960). The development of higher mental functions Στο *Κοινωνιογνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες των Φυσικών και Λογικομαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο*. (Επιμ. Γ. Παπαμιχαήλ). Αθήνα: Gutenberg- Ψυχολογία.
- Walker, D. W., & Poteet, J. A. (1989). A comparison of two methods of teaching mathematics story problem-solving with learning disabled students. *National Forum of Special Education Journal*, 1, 44–51.
- Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 371–384.
- Wenglinsky, H. (2000). *How teaching matters: Bringing the classroom back into discussions of teacher quality*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Williams, R. L. (2001). The coin counting book. Charlesbridge Publishing: Watertown, MA Στο Battle, T. (2007). Math manipulatives: The key to an increase in academic achievement in the mathematics classroom: *Increase in academic achievement*, 1-29.
- Wilson, C. L., & Sindelar, P. T. (1991). Direct instruction in math word problems: Students with learning disabilities. *Exceptional Children*, 57 (6), 512–519.

- Wisniewski, Z., & Smith, D. (2002). How effective is touch math for improving students with special needs academic achievement on math addition mad minute timed tests? Indiana University South Bend. Ανακτήθηκε Ιούνιος 22, 2016, από: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED469445.pdf>
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research and Practice, 18*, 121–131
- Witzel, B. S. & Allsopp, D. (2007). Dynamic concrete instruction in an inclusive classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13* (4), 244-248.
- Wright, D. E., & Miller, L. D. (1981). *Math anxiety: A research report*. Ανακτήθηκε Ιούνιος 22, 2016, από: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED212465.pdf>
- Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly, 29* (4), 269–289.
- Xin, Y. P., & Jitendra, A. K. (1999). The effect of instruction in solving mathematical word problems for students with learning problems: A meta-analysis. *The Journal of Special Education, 32* (4), 207–225.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477.
- Yin, R. K. (2011). Applications of case study research. Sage publications, London, ISBN 978-1-4129-8916-9 (pbk)
- Zhou, Z. & Peverly, S. T., (2005). Teaching Addition and Subtraction to First Graders: A Chinese Perspective. *Psychology in the Schools, 42*(3), 121-135

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΣΧΟΛΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

α/α	ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	ΚΩΔΙΚΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ
1	1 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460086
2	2 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460090
3	6 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460138
4	7 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460139
5	8 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460093
6	9 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460140
7	14 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460136
8	19 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας – Τμήμα Ένταξης	9460274
9	22 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας (Ροδίτσας) – Τμήμα Ένταξης	9460126
10	23 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας (Μεγάλης Βρύσης) – Τμήμα Ένταξης	9460125
11	25 ^ο Δημοτικό Σχολείο Λαμίας (Ανθήλης) – Τμήμα Ένταξης	9460146
12	1 ^ο Δημοτικό Σχολείο Στυλίδος – Τμήμα Ένταξης	9460094
13	2 ^ο Δημοτικό Σχολείο Στυλίδος – Τμήμα Ένταξης	9460095
14	Δημοτικό Σχολείο Καμένων Βούρλων Αταλάντης – Τμήμα Ένταξης	9460024
15	Δημοτικό Σχολείο Αγίου Κωνσταντίνου Αταλάντης – Τμήμα Ένταξης	9460009
16	Δημοτικό Σχολείο Δομοκού – Τμήμα Ένταξης	9460055
17	Δημοτικό Σχολείο Μώλου – Τμήμα Ένταξης	9460044
18	Δημοτικό Σχολείο Μακρακώμης - Τμήμα Ένταξης	9460176
19	1 ^ο Δημοτικό Σχολείο Σπερχειάδας – Τμήμα Ένταξης	9460204
20	2 ^ο Δημοτικό Σχολείο Σπερχειάδας – Τμήμα Ένταξης	9460205
21	2 ^ο Δημοτικό Σχολείο Αταλάντης – Τμήμα Ένταξης	9460005

ΑΜΔΕ : Κλίμακα 6.

Μαθηματικά

Οδηγίες: Μετά από παρατήρηση της συμπεριφοράς του/της μαθητή/τριας κυκλώστε τον αριθμό που αντιστοιχεί στη συχνότητα εμφάνισής της (μόνο έναν αριθμό).

Όταν η συμπεριφορά εκδηλώνεται **πάντα** (ή σχεδόν πάντα), κυκλώστε το **1**.

Όταν η συμπεριφορά εκδηλώνεται **συχνά**, κυκλώστε το **2** ή το **3**.

Όταν η συμπεριφορά εκδηλώνεται **μερικές φορές**, κυκλώστε το **4** ή το **5** ή το **6**.

Όταν η συμπεριφορά εκδηλώνεται **σπάνια**, κυκλώστε το **7** ή το **8**.

Όταν η συμπεριφορά δεν εκδηλώνεται **ποτέ** (ή σχεδόν ποτέ), κυκλώστε το **9**.

Ο / Η μαθητής/τρια:

1. Αργεί στην ολοκλήρωση υπολογισμών.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Δυσκολεύεται στην ανάκληση βασικών μαθηματικών δεδομένων (αθροίσματα μέσα στην δεκάδα)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Κάνει λάθη υπερπήδησης, μεταπήδησης ή επανάληψης κατά την ανάκληση της προπαίδειας

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Δυσκολεύεται να πει σωστά την ώρα

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Δυσκολεύεται στη χρήση γεωμετρικών οργάνων

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Αδυνατεί να κάνει χωροχρονική οργάνωση (π.χ. σειροθέτηση, κατανόηση της σημασίας της θεσιακής αξίας).

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Κάνει λάθη στο «δανεισμό» κατά την εκτέλεση πράξεων.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Δυσκολεύεται στην εκτέλεση πράξεων λόγω αδυναμίας στην ακολουθία των βημάτων του αλγόριθμου.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

9. Κάνει λάθη σε ασκήσεις που είχε λύσει σωστά σε προηγούμενο μικρό χρονικό διάστημα.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. Δυσκολεύεται με τα προβλήματα πολλών πράξεων.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

11. Δυσκολεύεται στην επιλογή της σωστής πράξης κατά την επίλυση προβλημάτων

1 2 3 4 5 6 7 8 9

12. Χρειάζεται εξωτερική καθοδήγηση κατά την επίλυση σύνθετων ασκήσεων / προβλημάτων, ακόμα και όταν γνωρίζει τη λύση των μεμονωμένων στοιχείων τους.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

13. Θεωρεί σωστή την πρώτη απάντηση / λύση που δίνει (δεν ελέγχει την ορθότητά της).

1 2 3 4 5 6 7 8 9

14. Παραλείπει να αξιολογήσει και να ελέγξει τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

15. Χρησιμοποιεί ακατάλληλα κριτήρια για την εκτίμηση της ορθότητας μιας απάντησης.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

16. Δυσκολεύεται να συνδέσει αριθμητικούς όρους με το περιεχόμενο και τις συμβολικές τους αναπαραστάσεις (π.χ. τη λέξη «μεγαλύτερο» με το σύμβολο >).

1 2 3 4 5 6 7 8 9

17. Δυσκολεύεται στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

18. Δυσκολεύεται στην κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

19. Δυσκολεύεται στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

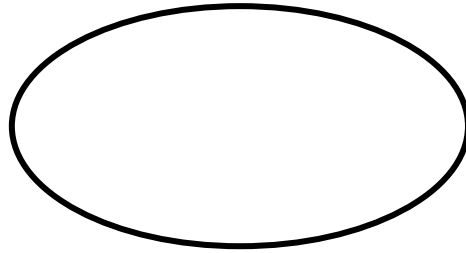
20. Δυσκολεύεται να σκεφτεί αφαιρετικά (π.χ. χωρίς εικόνες, αντικείμενα).

1 2 3 4 5 6 7 8 9

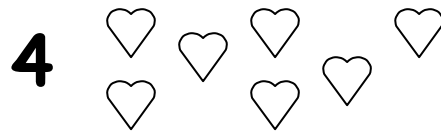
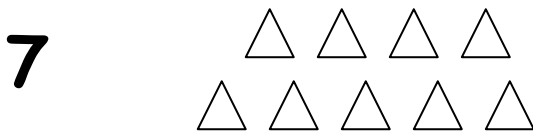
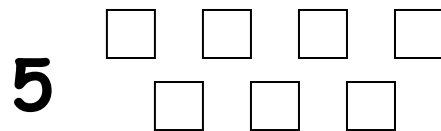
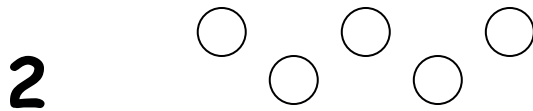
3. Τεστ διάγνωσης Α - με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

1. Ζωγραφίζω:

- 4 βόλους μέσα στη γραμμή
- 3 βόλους πάνω στη γραμμή
- 5 βόλους έξω από τη γραμμή



2. Βάζω σε κύκλο όσα λέει ο αριθμός



3. Συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν:

		3				7					12			15		
				30										21		
		33														
				37												50

4. Διαβάζω τους αριθμούς:

5 7 41 20 4 78 66 12 0 97 19

5. Κυκλώνω :

- το μεγαλύτερο

8 11

14 41

19 9

20 19

- το μικρότερο

9 17

15 16

20 10

18 14

6. Συμπληρώνω τους αριθμούς:

τέσσερα

έντεκα

δεκατέσσερα

δεκαεννιά

οχτώ

δώδεκα

τρία

δέκα

δεκαεφτά

ένα

7. Συμπληρώνω τους αριθμούς :

2	4	6							
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

5	10	15							
---	----	----	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

8. Βρίσκω τον προηγούμενο και τον επόμενο αριθμό:

___ 8 ___ ___ 10 ___ ___ 20 ___ ___ 25 ___

___ 39 ___ ___ 71 ___ ___ 60 ___ ___ 100 ___

9. Βάζω τα σύμβολα $>$ $=$ $<$ ανάμεσα στους αριθμούς:

41 14

56 48

17 71

10 $8+2$ 32 23 28 29 10 100

10. Βάζω στη σειρά τους αριθμούς από:

- τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: 3 45 21 15 8 12 17

- τον μεγαλύτερο στο μικρότερο: 12 59 21 4 32 23 7

11. Γράφω με τη σειρά:

- τις μέρες της εβδομάδας

Τρίτη Κυριακή Πέμπτη Σάββατο Παρασκευή Δευτέρα Τετάρτη

- Τι κάνω το πρωί:

Ξυπνώ πίνω γάλα φεύγω ντύνομαι πλένομαι

- τα νομίσματα

20 Λεπτά 1 Ευρώ 50 Λεπτά 10 Λεπτά 2 Ευρώ

12. Αντιστοιχίζω:

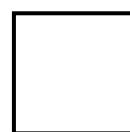
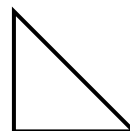
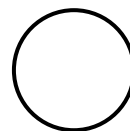
- Σχήμα και όνομα

τετράγωνο

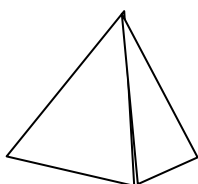
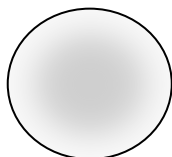
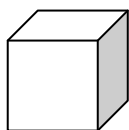
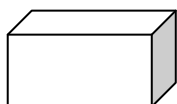
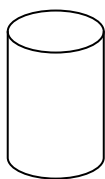
τρίγωνο

ορθογώνιο

κύκλος



- Στερεό και όνομα



Κύβος

πυραμίδα

ορθογώνιο
παραλληλεπίπεδο

κύλινδρος

σφαίρα

13. Πόσα χρήματα έχει κάθε παιδί;

Η Μαρία έχει



___ € ___ λεπτά

Ο Νίκος έχει



___ € ___ λεπτά

Η Άννα έχει



___ € ___ λεπτά

14. Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς:

$6 + 3 = \underline{\quad}$

$8 + 5 = \underline{\quad}$

$7 + 7 = \underline{\quad}$

$9 + 8 = \underline{\quad}$

$6 + \underline{\quad} = 10$

$10 + 9 = \underline{\quad}$

$3 + \underline{\quad} = 12$

$15 + 4 = \underline{\quad}$

$4 + 7 = \underline{\quad}$

15. Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς:

$7 - 3 = \underline{\quad}$

$8 - 2 = \underline{\quad}$

$9 - 5 = \underline{\quad}$

$12 - 4 = \underline{\quad}$

$10 - 6 = \underline{\quad}$

$11 - 3 = \underline{\quad}$

$9 - 8 = \underline{\quad}$

$16 - \underline{\quad} = 10$

$15 - 8 = \underline{\quad}$

16. Κάνω τις πράξεις:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ +7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ -29 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ -39 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ -40 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ -3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ -22 \\ \hline \end{array}$$

17. Λύνω τα προβλήματα:

Ο ταχυδρόμος έβαλε μέσα στον σάκο του 9 μεγάλους φακέλους και 7 μικρούς φακέλους. Πόσοι είναι όλοι οι φάκελοι μαζί;

Μέσα σε ένα καλάθι είναι 14 μήλα. Αν βάλω ακόμη 3 μήλα, πόσα θα είναι τα μήλα μέσα στο καλάθι;

Ο Γιώργος έχει 8 μπίλιες και ο Νίκος έχει 5 μπίλιες περισσότερες από τον Γιώργο. Πόσες μπίλιες έχει ο Νίκος;

Η Ελένη είχε 10 αυτοκόλλητα και έδωσε 4 από αυτά στη φίλη της Μαρία. Πόσα αυτοκόλλητα έχει τώρα η Ελένη;

Η Κατερίνα είχε 13 ευρώ. Αγόρασε ένα βιβλίο με 6 ευρώ. Πόσα χρήματα της έμειναν;

Ο Βαγγέλης έλυσε 8 ασκήσεις και η Αλέκα 3 λιγότερες. Πόσες ασκήσεις έλυσε η Αλέκα;

4. Τεστ διάγνωσης Β - με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Β΄τάξης

1. Συμπληρώνω τη σειρά με ό,τι ταιριάζει:

□ ○ □ ○ □ _ _ _ _ _

▲ □ ○ ▲ □ ○ _ _ _ _ _

+ + × × + + _ _ _ _ _

■ □ □ ■ □ □ ■ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

2. Γράφω και διαβάζω τους αριθμούς:

εβδομήντα □

τριάντα δύο □

ενενήντα ένα □

84

97

60

74

47

89

εξήντα τρία □

είκοσι οκτώ □

ογδόντα δύο □

3. Κατεβαίνω απ' το 20

20 □ □ □ □ □ 14 □ □ □ □ □ 8 □ □ □ □ □ □ □ □

4. Βάζω σε κύκλο τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 20

61 19 34 15 21 10 29 78 100 11

5. Χωρίζω τους αριθμούς σε μονάδες (Μ), δεκάδες (Δ), εκατοντάδες (Ε)

15

109

87

100

Ε	Δ	Μ
---	---	---

Ε	Δ	Μ
---	---	---

Ε	Δ	Μ
---	---	---

Ε	Δ	Μ
---	---	---

6. Βρίσκω τι δείχνει το 6 στους παρακάτω αριθμούς:

στο 1 2 **6** δείχνει _____

στο **6** 4 7 δείχνει _____

στο 2 **6** 4 δείχνει _____

7. Βάζω > = < ανάμεσα στους αριθμούς:

98 ○ 89

100 ○ 10

71 ○ 70

18 ○ 8 + 8

25 ○ 52

48 ○ 68

5 + 5 ○ 55

7+3 ○ 3+7

8. Κάνω τις πράξεις:

48	54	43	176	109	274
<u>+31</u>	<u>+35</u>	<u>+28</u>	<u>+15</u>	<u>+86</u>	<u>+325</u>

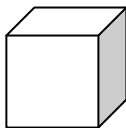
39	68	34	120	145	281
<u>-25</u>	<u>- 46</u>	<u>- 28</u>	<u>- 15</u>	<u>-88</u>	<u>- 164</u>

9. Ενώνω τις τελείες για να φτιάξω ένα:

τετράγωνο				τρίγωνο				ορθογώνιο			
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

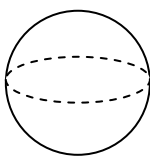
10. Αντιστοιχίζω γεωμετρικά στερεά και αντικείμενα

Πυραμίδα



Μπάλα

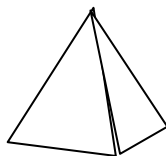
Κύβος



Ζάρι

Ορθογώνιο

Παραλληλεπίπεδο

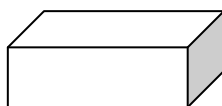


Ποτήρι

Κουτί τσίχλες

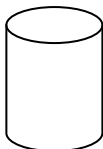
Σκεπή σπιτιού

Κύλινδρος



Χαρτί υγείας

Σφαίρα



Γόμα

Πορτοκάλι

11. Λύνω τα προβλήματα:

Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;

Η Ελένη θέλει να φτιάξει με τη μητέρα της μπισκότα. Η μαμά της έφτιαξε 38 μπισκότα. Η Ελένη έφτιαξε 15 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξαν και οι δυο μαζί;

Ο φούρνος της γειτονιάς πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες. Την Τρίτη πούλησε 5 περισσότερες. Πόσες τυρόπιτες πούλησε την Τρίτη;

Ο Βαγγέλης μάζευε χρήματα στον κουμπαρά του. Όταν τον άνοιξε είχε συγκεντρώσει 50 €. Πήγε σε ένα μεγάλο κατάστημα με παιχνίδια και αγόρασε ένα επιτραπέζιο με 25 €. Πόσα ευρώ του έμειναν;

Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 43 επιβάτες. Στη στάση κατέβηκαν 18 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες συνέχισε το λεωφορείο;

Η Δήμητρα ζυγίστηκε στη ζυγαριά και είδε ότι ήταν 32 κιλά. Ύστερα από μια εβδομάδα έχασε 3 κιλά. Πόσο ζυγίζει τώρα η Δήμητρα;

Ο Τάκης και ο Νίκος μετρούσαν τις τάπες τους. Ο Τάκης μέτρησε 27 τάπες. Ο Νίκος είδε ότι είχε 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη. Πόσες τάπες έχει ο Νίκος;

Στο ψυγείο υπήρχαν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 και ο αδερφός μου 5. Πόσα ροδάκινα έμειναν στο ψυγείο;

Ο Γιάννης πήγε στο κυλικείο του σχολείου και κοίταξε τον κατάλογο με τα προϊόντα. Ήθελε να φάει μια τυρόπιτα και να πιει και έναν χυμό. Έχει 3 ευρώ. Του φτάνουν;

Τοστ	1 €
Τυρόπιτα	1 €
Κουλούρι	50 Λ

5. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Το παρόν ερωτηματολόγιο αναφέρεται στις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί των Τμημάτων Ένταξης, αλλά και των εκπαιδευτικών των γενικών τάξεων όπου φοιτούν μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, για να διδάξουν βασικές μαθηματικές έννοιες. Ειδικότερα αναφέρεται στις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση και αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών και στην αποτύπωση των εμπειριών τους στη διδακτική πρακτική. Οι πληροφορίες που θα συγκεντρωθούν θα είναι απόρρητες και θα χρησιμοποιηθούν για την εκπόνηση της διδακτορικής μου διατριβής στ Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Σας ευχαριστώ για τη συμμετοχή σας
Ευθύμιος Γκούμας, Δάσκαλος στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση
makismika@yahoo.gr, τηλ. 6948805562

Α' ΜΕΡΟΣ

1. **ΦΥΛΟ :** Άνδρας ☐ Γυναίκα ☐
2. **ΗΛΙΚΙΑ :** 20-29 ☐ 30-39 ☐ 40-49 ☐ 50 και άνω ☐
3. **ΣΠΟΥΔΕΣ :**
Πτυχίο Παιδαγωγικής Ακαδημίας ☐
Πτυχίο Παιδαγωγικού Τμήματος/ Εξομοίωση..... ☐
Πτυχίο Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδ. Αγωγής..... ☐
Διετής Μετεκπαίδευση στην Ειδική Αγωγή..... ☐
Μεταπτυχιακό..... ☐
Διδακτορικό..... ☐
Άλλες σπουδές ☐
4. **ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:**
Μόνιμος/η – οργανική..... ☐
Μόνιμος/η – απόσπαση..... ☐
Αναπληρωτής/τρια..... ☐
Ωρομίσθιος/α..... ☐
5. **ΧΡΟΝΙΑ ΥΠΗΡΕΣΙΑΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΑΓΩΓΗ**
<1 ☐ 1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-15 ☐ 16 και άνω ☐
6. **ΧΡΟΝΙΑ ΥΠΗΡΕΣΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΑΓΩΓΗ**
<1 ☐ 1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-15 ☐ 16 και άνω ☐
7. **ΠΛΗΘΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ² ΜΕ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΕΧΕΤΕ ΣΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ ΣΑΣ**
1-2 ☐ 3-5 ☐ 5 και άνω ☐

² Για την αποφυγή των διπλών τύπων μαθητής ή μαθήτρια στο κείμενο η λέξη «μαθητής» θα αναφέρεται και στα δύο γένη

Β' ΜΕΡΟΣ

Συμπληρώνω τον πίνακα όπου : 1=καθόλου, 2=λίγο, 3=μέτρια, 4=πολύ, 5= παρά πολύ

Σημειώστε σε ποιον βαθμό συμφωνείτε με τις παρακάτω προτάσεις		1	2	3	4	5
1	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διδάξω μαθηματικά					
2	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διδάξω μαθηματικά σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (ΜΔ) στα μαθηματικά					
3	Χρειάζομαι υποστήριξη για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ					
4	Δυσκολεύομαι να βρίσκω τρόπους να βοηθήσω τους μαθητές μου στη διδασκαλία των μαθηματικών					
5	Απογοητεύομαι όταν δεν μπορώ να βοηθήσω τους μαθητές μου να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες					
6	Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι απαραίτητη για την επίτευξη των στόχων από όλους τους μαθητές					
7	Είμαι επαρκώς καταρτισμένος/η για να διαφοροποιήσω τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ					
8	Η εξατομικευμένη διδασκαλία των μαθηματικών είναι απαραίτητη για την επίτευξη των στόχων από όλους τους μαθητές					
9	Η φοίτηση στο Τμήμα Ένταξης βοηθά τους μαθητές με ΜΔ να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες					
10	Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών λαμβάνουν υπόψη τους και τους μαθητές με ΜΔ στην ύλη τους					

11. Με μέγιστο βαθμό **δυσκολίας** το 5 και ελάχιστο το 1, τι βαθμό θα βάζατε στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ;

12. Με μέγιστο βαθμό **σπουδαιότητας** το 5 και ελάχιστο το 1, τι βαθμό θα βάζατε στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ΜΔ;

13. Πόσες **διδασκτικές ώρες** αφιερώνετε για τη διδασκαλία των μαθηματικών:
Καμία ☐ 1-2 ώρες το μήνα ☐ 3-4 ώρες το μήνα ☐ 5 ώρες και άνω ☐

Συμπληρώνω τον πίνακα: 1=Ποτέ, 2=Σπάνια, 3=Μερικές φορές, 4=Συχνά, 5= Πολύ συχνά						
Σημειώστε πόσο συχνά χρησιμοποιείτε τα παρακάτω στοιχεία για το σχεδιασμό της διδασκαλίας των μαθηματικών στην τάξη σας		1	2	3	4	5
14	Χρησιμοποιώ τους στόχους των ΔΕΠΠΣ/ΑΠΣ για τα μαθηματικά					
15	Χρησιμοποιώ τους στόχους του ΕΕΠ που έχει προτείνει το ΚΕΔΔΥ για κάθε μαθητή με ΜΔ					
16	Φτιάχνω μόνος/η μου τους διδακτικούς στόχους οι οποίοι είναι διαφορετικοί για τους μαθητές με ΜΔ					
17	Διερευνώ μόνος/η μου τις προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών μου πριν τη διδασκαλία					
18	Λαμβάνω υπόψη μου τις προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών μου πριν τη διδασκαλία					
19	Λαμβάνω υπόψη τα ιδιαίτερα γνωστικά χαρακτηριστικά της κατηγορίας ΜΔ που ανήκει κάθε μαθητής					

20	Λαμβάνω υπόψη μου τα ενδιαφέροντα των μαθητών μου					
Σημειώστε πόσο συχνά χρησιμοποιείτε τις παρακάτω μεθόδους και υλικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών		1	2	3	4	5
21	Πραγματοποιώ εξατομικευμένη διδασκαλία στους μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά					
22	Πραγματοποιώ διαφοροποιημένη διδασκαλία στους μαθητές με ΜΔ στα μαθηματικά					
23	Εφαρμόζω την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία για να βοηθήσω τους μαθητές μου να κατανοήσουν τα μαθηματικά					
24	Χρησιμοποιώ ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας στους μαθητές ανάλογα με τις ικανότητές τους					
25	Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό (εικόνες, σχήματα, κάρτες) για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών					
26	Αναλύω τη διαδικασία εκτέλεσης μαθηματικών χειρισμών σε βήματα και τα διδάσκω ένα-ένα					
27	Παρουσιάζω φωναχτά την πορεία της σκέψης μου δρώντας υποδειγματικά ως πρότυπο για να φτάσω σε μια λύση					
28	Χρησιμοποιώ χειραπτικά υλικά (κυβάρια, γεωπίνακες, ντομινο κάρτες) στη διδασκαλία των μαθηματικών					
29	Χρησιμοποιώ λογισμικά ή άλλο ψηφιακό υλικό στη διδασκαλία των μαθηματικών					
30	Ενισχύω την οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών για την καλύτερη κατανόησή τους					

31. Ποια/ποιες από τις παρακάτω **πηγές** χρησιμοποιείτε στη διδασκαλία των μαθηματικών;

- Σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθηματικά..... ☐
- Σημειώσεις από βοηθητικά βιβλία του εμπορίου..... ☐
- Σημειώσεις/ασκήσεις που έχω χρησιμοποιήσει παλιότερα..... ☐
- Προτάσεις/υλικά που έχω πάρει από συναδέλφους μου..... ☐
- Χειραπτικό υλικό έτοιμο από την αγορά ή κατασκευασμένο από εμένα..... ☐
- Ψηφιακό υλικό από το διαδίκτυο ή λογισμικά σχετικά με τα μαθηματικά ☐

32. Σε ποιο βαθμό από το **μέγιστο 5** μέχρι το **ελάχιστο 1** πιστεύετε ότι το **χειραπτικό υλικό** βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών ☐

33. Σε ποιο βαθμό από το **μέγιστο 5** μέχρι το **ελάχιστο 1** πιστεύετε ότι το **ψηφιακό υλικό** βοηθά στην κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών..... ☐

34. Σημειώστε σε ποιες από τις παρακάτω ενότητες των μαθηματικών θα σας βοηθούσε η χρήση των χειραπτικών ή δυναμικών υλικών στην κατανόηση των μαθηματικών

- Έννοια των αριθμών..... ☐
- Υπέρβαση της δεκάδας..... ☐
- Εκμάθηση του αλγόριθμου των αριθμητικών πράξεων..... ☐
- Γεωμετρικές έννοιες..... ☐
- Κλάσματα ☐

Επίλυση προβλημάτων..... ☐

Άλλο (εξηγήστε με συντομία)..... ☐

35. Σημειώστε ποια από τα παρακάτω αποτελούν περιορισμούς στη χρήση χειραπτικού ή ψηφιακού υλικού στη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική πραγματικότητα

Ο χρόνος είναι περιορισμένος και δεν επαρκεί..... ☐

Δεν υπάρχει κατάλληλο υλικό που να υποστηρίζει τη διδασκαλία..... ☐

Δεν υπάρχει ο ανάλογος εξοπλισμός στις τάξεις..... ☐

Είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί ή να αγοραστεί το υλικό..... ☐

Μαθητές και εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι στη χρήση τους..... ☐

Άλλο (εξηγήστε με συντομία) ☐

36. Διατυπώστε ελεύθερα τους προβληματισμούς σας σχετικά με τη χρήση χειραπτικών υλικών για τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Ευχαριστώ πολύ!

6. ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

1. Φύλο
2. Έτη υπηρεσίας
3. Ποιες είναι οι σπουδές που έχετε κάνει μέχρι σήμερα;
4. Πόσα χρόνια διδάσκετε στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση;
5. Πόσα χρόνια διδάσκετε στο Τμήμα Ένταξης;
6. Θα μπορούσατε να μου δώσετε περιληπτικά μια εικόνα της επαγγελματικής σας πορείας μέχρι σήμερα
7. Ποια η άποψή σας για τα μαθηματικά;
8. Που οφείλονται οι δυσκολίες που συναντούν στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο οι μαθητές σας;
9. Τι σημαίνει για εσάς η μαθηματική γνώση; Πώς θεωρείτε ότι αυτή χτίζεται στους μαθητές σας;
10. Ποιες είναι οι πρακτικές και οι μέθοδοι που χρησιμοποιείτε για να βοηθήσετε τους μαθητές σας να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες;
11. Ποια από τα ακόλουθα είναι καθοριστικοί παράγοντες για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης; Επιλέξτε αυτά που θεωρείτε πιο σημαντικά και ταξινομήστε τα σε φθίνουσα σειρά: Εγγενείς/ Έμφυτες ικανότητες, Προσπάθεια, Κατανόηση, Μέθοδος μάθησης, Στρατηγική διδασκαλίας.
12. Τι σημαίνει για εσάς καλή διδασκαλία των μαθηματικών; Νομίζετε ότι κάτι τέτοιο γίνεται σήμερα στο ελληνικό σχολείο;
13. Πιστεύετε ότι τα σχολικά εγχειρίδια των τάξεων του δημοτικού σχολείου επαρκούν για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης; Πού υστερούν και πού υπερτερούν;
14. Πιστεύετε ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών υποστηρίζουν τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες;
15. Γνωρίζετε τα υλικά χειραπτικά ή ψηφιακά, που μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών; Αν ναι, ποια είναι η άποψή σας γι' αυτά;
16. Χρησιμοποιείτε υλικά στη διδακτική σας πρακτική για να βοηθήσετε τους μαθητές σας να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες;
17. Ποια από τα παρακάτω υλικά γνωρίζετε ή έχετε χρησιμοποιήσει; Αριθμογραμμές, Κύβοι δεκαδικής βάσης, Ράβδοι Cuisenaire, Ντόμινο, Άβακες, Ζυγαριά μέτρησης, Γεωπίνακες, Τάνγκραμ, Ράβδοι κλασμάτων, Πλαίσια του 5 και του 10, Ζάρια κοκ.
18. Ποια από τα παρακάτω ψηφιακά υλικά γνωρίζετε ή έχετε χρησιμοποιήσει; Λογισμικά μαθηματικών του Π.Ι., Ψηφιακές εφαρμογές για την υποστήριξη των μαθηματικών, Ιστοσελίδες ψηφιακού υλικού για τα μαθηματικά, Υπολογιστικά φύλλα κλπ.
19. Με βάση τη διδακτική σας εμπειρία πιστεύετε ότι είναι αναγκαία η χρήση υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών; Αν ναι, ποιος ή ποιοι οι λόγοι της περιορισμένης χρήσης τους στην ελληνική σχολική πραγματικότητα;

7. Λίστα Ελέγχου Βασικών Μαθηματικών Δεξιοτήτων

ΛΙΣΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όνοματεπώνυμο μαθητ_____

Τάξη: _____

Σχολείο: _____

Εκπαιδευτικός: _____

ΠΡΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ		ΝΑΙ	ΟΧΙ
1	Γνωρίζει στοιχειώδεις έννοιες χώρου: πάνω-κάτω, μέσα-έξω, μπροστά-πίσω κ.ά		
2	Προσδιορίζει τη θέση αντικειμένων μέσα στο χώρο		
3	Γνωρίζει τις έννοιες: μέγεθος, ύψος, μήκος, βάρος, χωρητικότητα		
4	Συγκρίνει: μεγαλύτερο-μικρότερο-ίσο, περισσότερο-λιγότερο, μακρύ-κοντό κλπ		
5	Ταξινομεί αντικείμενα με βάση ένα χαρακτηριστικό π.χ. μέγεθος, χρώμα, ...		
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ		ΝΑΙ	ΟΧΙ
6	Απαγγέλει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 20		
7	Απαγγέλει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100		
8	Αποδίδει το πλήθος (την ποσότητα) ενός συνόλου με αριθμό από το 1 έως το 10		
9	Αναγνωρίζει και γράφει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 20		
10	Αναγνωρίζει και γράφει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100		
11	Συγκρίνει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 20		
12	Διατάσσει τους αριθμούς 1-20 σε αύξουσα και σε φθίνουσα κλίμακα		
13	Συγκρίνει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100		

14	Τοποθετεί τα σύμβολα ισότητας και ανισότητας σε ζευγάρια αριθμών		
15	Απαγγέλει προφορικά την ακολουθία αριθμών 2-2, 5-5, 10-10 μέχρι το 100		
16	Βρίσκει τον προηγούμενο και τον επόμενο σε αριθμούς μέχρι το 100		
17	Τοποθετεί αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και αντίστροφα		
18	Διατάσσει γεγονότα σύμφωνα με τη χρονική τους εκτέλεση/σειρά		
ΠΡΑΞΕΙΣ		ΝΑΙ	ΟΧΙ
19	Έχει κατανοήσει τη λειτουργία του 0 στην εκτέλεση των πράξεων		
20	Αντιλαμβάνεται την έννοια της δεκάδας		
21	Γνωρίζει τη θεσιακή αξία των ψηφίων ενός αριθμού (Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες)		
22	Κάνει λάθη στη θέση του αριθμού στις πράξεις		
23	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 μέχρι το 10		
24	Χρησιμοποιεί τα δάχτυλα στην πρόσθεση ή αφαίρεση		
25	Υπολογίζει νοερά (πρόσθεση – αφαίρεση) από το 1 μέχρι το 20		
26	Χρησιμοποιεί το σύμβολο (+) με την ορολογία συν ή και		
27	Χρησιμοποιεί ανάλογο λεξιλόγιο στην πρόσθεση: βάζω, ενώνω, ανεβαίνω κλπ		
28	Χρησιμοποιεί το σύμβολο (-) με την ορολογία πλην ή μείον		
29	Χρησιμοποιεί ανάλογο λεξιλόγιο στην αφαίρεση: βγάζω, αφαιρώ, έξω κλπ		
30	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με μονοψήφιους		
31	Εκτελεί γραπτά προσθέσεις με διψήφιους/πολυψήφιους		
32	Εκτελεί γραπτά αφαιρέσεις με μονοψήφιους		

8. ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ

ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ:

ΟΝΟΜΑ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΤΑΞΗ: ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ:

(Καταγράψτε με σύντομα σχόλια τις παρατηρήσεις σας για κάθε μαθητή στη διάρκεια της παρέμβασης και για καθεμιά από τις παρακάτω ενότητες)

- 1. Αντίδραση του/της μαθητή/τριας στην πρώτη παρουσίαση και χρήση των υλικών**
(περιγράψω για κάθε υλικό ξεχωριστά: αριθμογραμμή, ράβδοι Cuisenaire, άβακες, ζυγαριά μέτρησης, ράβδοι δεκαδικής βάσης, ντόμινο)

- 2. Αυτοματοποίηση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων**

(Ανταπόκριση των μαθητών στη συμπλήρωση των προπαρασκευαστικών Φ.Ε. για τη χρήση των ράβδων Cuisenaire, των ντόμινο, των αβάκων και της ζυγαριάς)

3. Εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων

(Χρήση Στρατηγικών - Ανάκληση Β.Α.Δ. – Κατανόηση θεσιακής αξίας – Εκτέλεση πράξεων)

4. Επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων

Αναπαράσταση δεδομένων του προβλήματος - Λέξεις κλειδιά – Έννοιες περισσότερο/λιγότερο – Έλεγχος αποτελέσματος

5. Σχολιάστε την ανταπόκριση των μαθητών στην παρέμβαση. Διατυπώστε παρατηρήσεις σχετικά με τη χρήση των υλικών.

9. ΟΔΗΓΙΕΣ - ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΖΥΓΑΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ – (Οδηγίες για τον δάσκαλο)

Η Ζυγαριά Μέτρησης είναι ένα ελκυστικό διδακτικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση αριθμών, τη σύνθεση αριθμών, την εύρεση του υπολοίπου ή του συμπληρώματος, τη λύση απλών εξισώσεων, τον πολλαπλασιασμό κ.ά. Δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ανακαλύψουν σχέσεις μεταξύ των αριθμών επιβεβαιώνοντας ή απορρίπτοντας τις υποθέσεις τους με την ισορροπία ή όχι της ζυγαριάς. Πρόκειται για μια ζυγαριά που αποτελείται από δύο βραχίονες οι οποίοι διαβαθμίζονται με άγκιστρα από το 0 έως και το 10 από τα οποία μπορούν να κρεμαστούν πλακίδια/βάρη. Στις δύο όψεις των βραχιόνων οι αριθμοί απεικονίζονται με συμβολική (αριθμούς) αλλά και εικονιστική μορφή (με μήλα ή κουκκίδες) για τις μικρότερες ηλικίες. Οι δραστηριότητες στα Φ.Ε. είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και εξοικείωσης με το υλικό.

Στο **Φ.Ε. 1** οι μαθητές ισορροπούν τη ζυγαριά βρίσκοντας και γράφοντας τα αποτελέσματα που συνθέτουν τους αριθμούς στη δεκάδα

Στο **Φ.Ε. 2** βρίσκουν το συμπλήρωμα στις ασκήσεις και ανακαλύπτουν τις σχέσεις στις «οικογένειες» αριθμών (π.χ. $4 + 5 = 9$ άρα $9 - 4 = 5$ και $9 - 5 = 4$)

Στο **Φ.Ε. 3** οι μαθητές κάνουν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη βοήθεια της ζυγαριάς και,

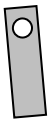
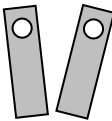
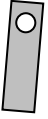
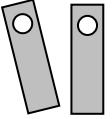
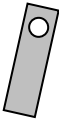
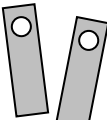
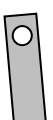
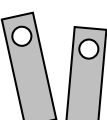

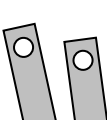

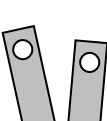
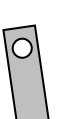
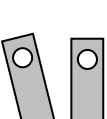
Στο **Φ.Ε. 4** βρίσκουν τα αθροίσματα με τρεις προσθετέους

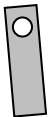
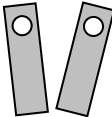
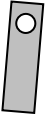
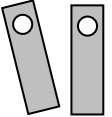
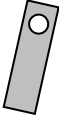
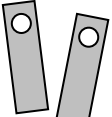
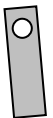
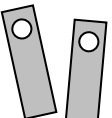
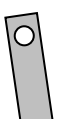
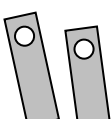
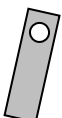
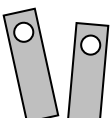
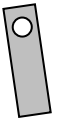
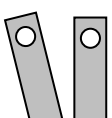
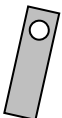
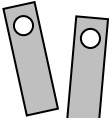
Σε όλα τα Φύλλα Εργασίας οι μαθητές πρέπει να αντιστοιχούν τις ενέργειές τους στο χαρτί γράφοντας τα αποτελέσματα και να τα απαγγέλουν προφορικά για την ενίσχυση της εκμάθησης των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων. Επίσης η ζυγαριά σκόπιμ είναι να συνδυαστεί με την επίλυση ασκήσεων από τα σχολικά εγχειρίδια όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο έντυπο (έντυπο 10 του Παραρτήματος).

ΖΥΓΑΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ Φ.Ε. 1

- Βάζω στη ζυγαριά τόσα, ώστε να ισορροπεί, όπως στο παράδειγμα

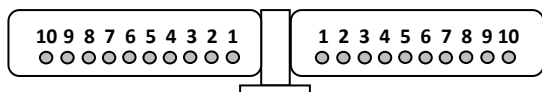
10 ●	9 ●	8 ●	7 ●	6 ●	5 ●	4 ●	3 ●	2 ●	1 ●	1 ●	2 ●	3 ●	4 ●	5 ●	6 ●	7 ●	8 ●	9 ●	10 ●
→ 5										→ 3 + 2									
→ 5										→ _ + _									
→ 6										→ _ + _									
→ 6										→ _ + _									
→ 6										→ _ + _									
→ 7										→ _ + _									

10 ●	9 ●	8 ●	7 ●	6 ●	5 ●	4 ●	3 ●	2 ●	1 ●		1 ●	2 ●	3 ●	4 ●	5 ●	6 ●	7 ●	8 ●	9 ●	10 ●
 → 7										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 7										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 8										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 8										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 8										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 8										 → <u> </u> + <u> </u>										
 → 9										 → <u> </u> + <u> </u>										

 → 9	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 9	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 9	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 10	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 10	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 10	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 10	 → <u> </u> + <u> </u>
 → 10	 → <u> </u> + <u> </u>

ΖΥΓΑΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ Φ.Ε. 2

- Με τη βοήθεια της ζυγαριάς συμπληρώνω τον αριθμό που λείπει:



$$4 + \underline{\quad} = 9$$

$$6 + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + 2 = 5$$

$$3 + \underline{\quad} = 7$$

$$\underline{\quad} + 7 = 10$$

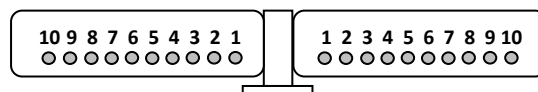
$$8 + \underline{\quad} = 9$$

$$2 + \underline{\quad} = 4$$

$$6 + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + 3 = 6$$

$$\underline{\quad} + 1 = 7$$



$$8 = \underline{\quad} + 4$$

$$10 = 5 + \underline{\quad}$$

$$7 + \underline{\quad} = 9$$

$$8 + \underline{\quad} = 10$$

$$9 = 6 + \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + 3 = 8$$

$$6 = 2 + \underline{\quad}$$

$$5 + \underline{\quad} = 7$$

$$8 = 1 + \underline{\quad}$$

$$9 + \underline{\quad} = 10$$

ΖΥΓΑΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ Φ.Ε. 3

- Κάνε τις προσθέσεις και με τη βοήθεια της ζυγαριάς

$$1 + 1 = \boxed{2}$$

$$2 + 2 = \boxed{}$$

$$4 + 1 = \boxed{}$$

$$2 + 5 = \boxed{}$$

$$6 + 2 = \boxed{}$$

$$1 + 5 = \boxed{}$$

$$8 + 1 = \boxed{}$$

$$1 + 9 = \boxed{}$$

$$3 + 5 = \boxed{}$$

$$3 + 2 = \boxed{}$$

$$4 + 3 = \boxed{}$$

$$7 + 3 = \boxed{}$$

$$5 + 1 = \boxed{}$$

$$6 + 3 = \boxed{}$$

$5 + 4 = \square$

$9 + 3 = \square$

$2 + 6 = \square$

$5 + 5 = \square$

$4 + 2 = \square$

$3 + 3 = \square$

$7 + 1 = \square$

$2 + 7 = \square$

$4 + 6 = \square$

$4 + 4 = \square$

$1 + 6 = \square$

$2 + 1 = \square$

$2 + 3 = \square$

$3 + 7 = \square$

$5 + 2 = \square$

$6 + 4 = \square$

- Κάνε τις αφαιρέσεις και με τη βοήθεια της ζυγαριάς

$$9 - 1 = \boxed{8}$$

$$9 - 2 = \boxed{}$$

$$8 - 5 = \boxed{}$$

$$10 - 5 = \boxed{}$$

$$9 - 3 = \boxed{}$$

$$6 - 3 = \boxed{}$$

$$7 - 1 = \boxed{}$$

$$9 - 5 = \boxed{}$$

$$10 - 2 = \boxed{}$$

$$3 - 2 = \boxed{}$$

$$9 - 4 = \boxed{}$$

$$7 - 3 = \boxed{}$$

$$5 - 1 = \boxed{}$$

$$6 - 3 = \boxed{}$$

$6 - 4$

$9 - 6 =$

$4 - 1 =$

$5 - 5 =$

$4 - 2 =$

$3 - 1 =$

$7 - 4 =$

$6 - 5 =$

$9 - 7 =$

$10 - 3 =$

$8 - 6 =$

$8 - 2 =$

$10 - 7 =$

$7 - 6 =$

$5 - 4 =$

$8 - 6 =$

ΖΥΓΑΡΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ Φ.Ε. 4

- Ισορροπώ τη ζυγαριά με τρία βάρáκια όπως στο παράδειγμα

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1										1 2 3 4 5 6 7 8 9 10									
→ 4										→ 2 + 1 + 1									
→ 1 + 2 + 3										→ _____									
→ 5										→ ____ + ____ + ____									
→ 1 + 4 + 2										→ _____									
→ 8										→ ____ + ____ + ____									
→ 2 + 3 + 4										→ _____									

- Κάνε τις προσθέσεις με τη βοήθεια της ζυγαριάς

$$1 + 2 + 1 = \square$$

$$1 + 2 + 4 = \square$$

$$2 + 2 + 1 = \square$$

$$2 + 3 + 4 = \square$$

$$1 + 4 + 3 = \square$$

$$5 + 1 + 2 = \square$$

$$4 + 1 + 4 = \square$$

$$3 + 2 + 2 = \square$$

$$6 + 2 + 1 = \square$$

$$3 + 3 + 4 = \square$$

$$2 + 5 + 3 = \square$$

$$7 + 1 + 2 = \square$$

$$1 + 6 + 1 = \square$$

$$3 + 1 + 6 = \square$$

$$2 + 5 + 2 = \square$$

$$4 + 1 + 5 = \square$$

Ράβδοι CUISENAIRE – (Οδηγίες για τον δάσκαλο)

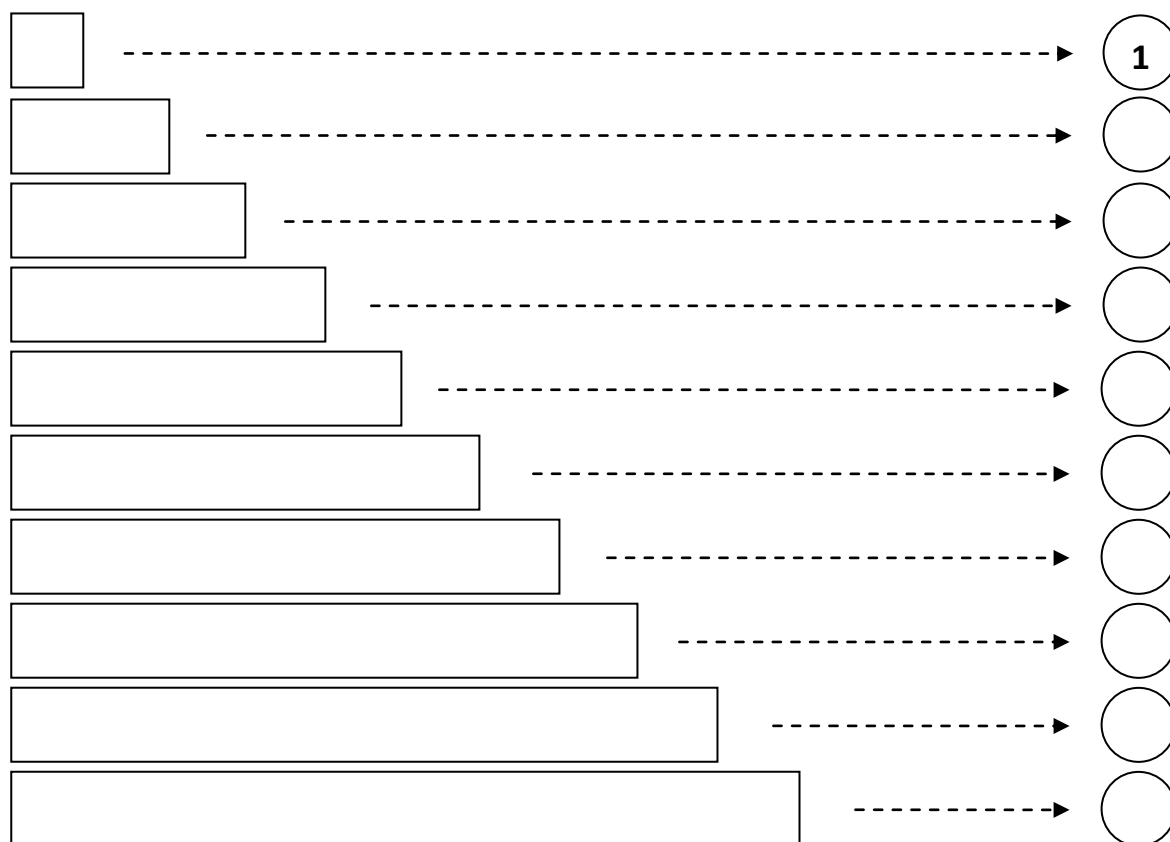
Οι ράβδοι CUISENAIRE αντιστοιχούν στους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10 και σε κάθε τους μορφή έχουν τα αντίστοιχα χρώματα για κάθε μεγεθος. Στόχος της χρήσης των συγκεκριμένων υλικών, είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές σχέσεις των αριθμών αρχικά στην πρώτη δεκάδα και στη συνέχεια μέχρι το 20.

Στις δραστηριότητες του **Φ.Ε. 1** θα πρέπει αρχικά κατανοήσουν την αντιστοίχιση των ράβδων με τους αριθμούς από το 1 έως το 10, θα εξασκηθούν στη σύνθεση και ανάλυση των αριθμών εκτελώντας προσθέσεις και αφαιρέσεις με τις ράβδους. Κάθε τους ενέργεια με τις ράβδους θα πρέπει να αποτυπώνεται και στο χαρτί και να εκφράζεται με λόγια. Στη συνέχεια συμπληρώνουν με όλους τους δυνατούς τρόπους τους αριθμούς από το 3 μέχρι το 10 χρησιμοποιώντας τις ράβδους και γράφουν όλους τους συνδυασμούς. Θα μπορούσαν συμπληρωματικά να χρησιμοποιηθούν και ασκήσεις από τα διδακτικά εγχειρίδια.

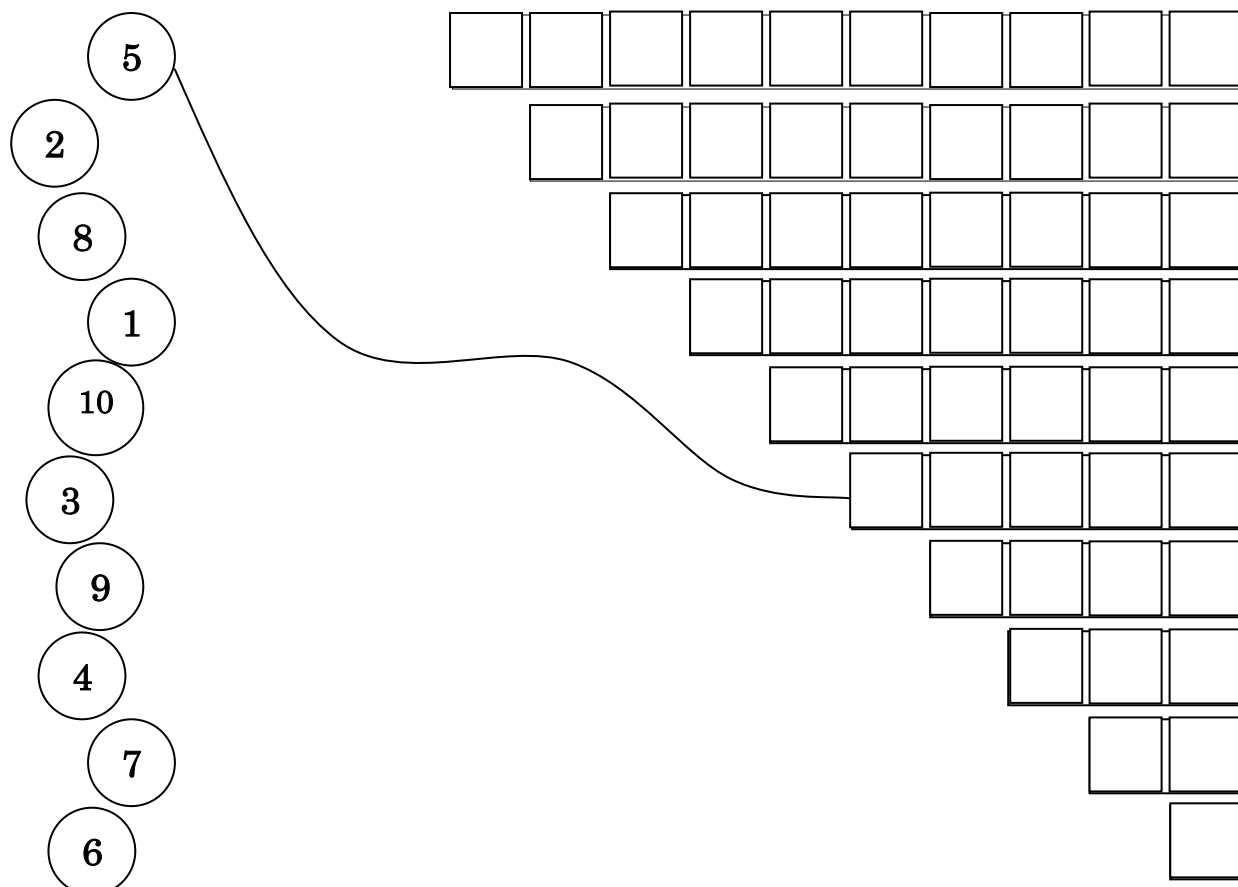
Στις δραστηριότητες του **Φ.Ε. 2** οι μαθητές εκτελούν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις χρησιμοποιώντας ο υλικό ή και τις διαγραμματισμένες μπάρες του Φ.Ε. που αντιστοιχούν στις ράβδους και γράφουν το αποτέλεσμα, Στη συνέχεια συμπληρώνουν την απάντηση στις προσθέσεις και αφαιρέσεις χρησιμοποιώντας τις ράβδους, Τέλος, συμπληρώνουν τη σύνθεση των αριθμών από το 11 έως το 17 με όλους του δυνατούς συνδυασμούς και επαναλαμβάνουν τα αθροίσματα.

Φ. Ε. 1 Ράβδοι CUISENAIRE

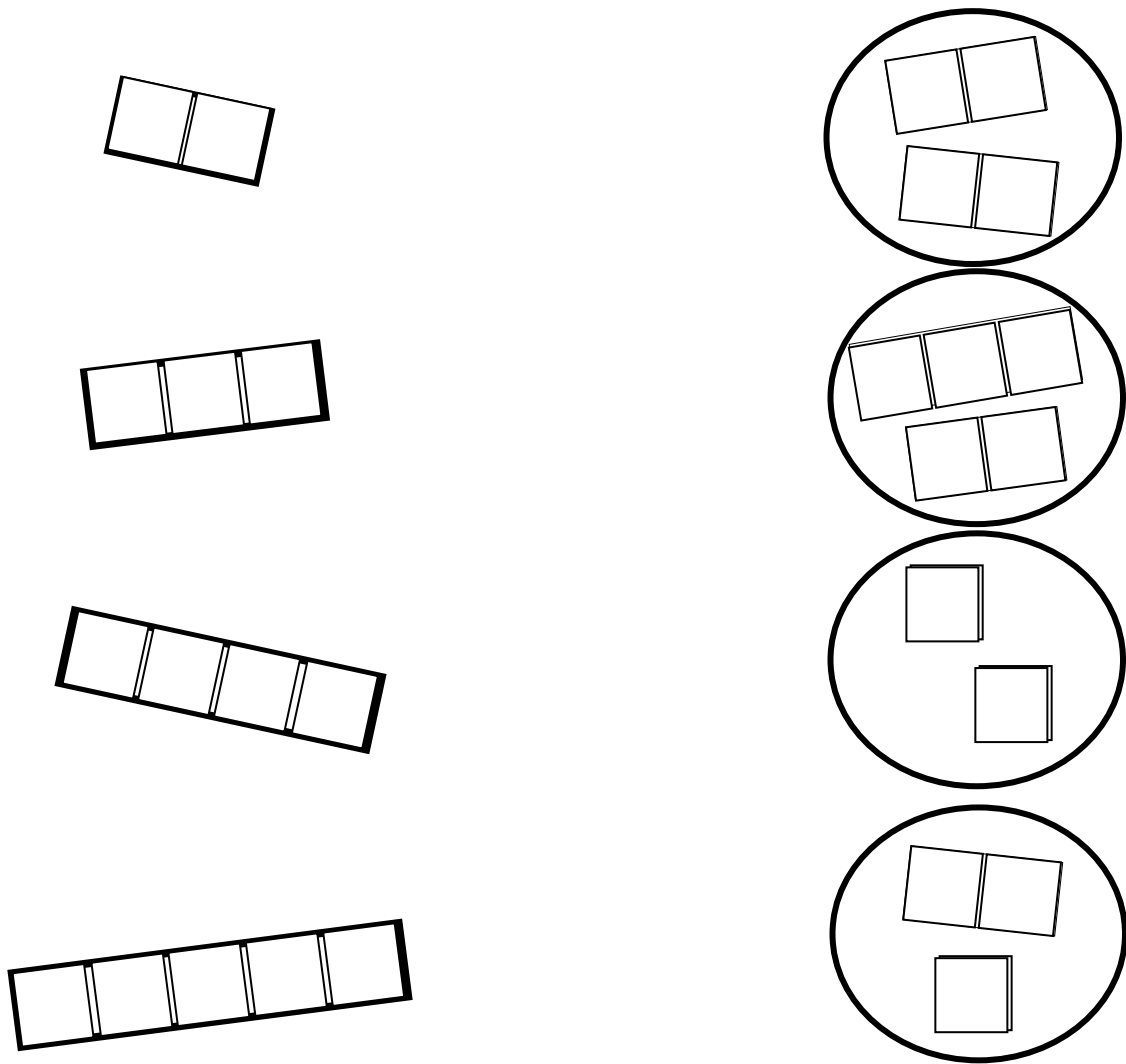
1. Βάλε τις ράβδους που ταιριάζουν και γράψε τους αριθμούς:



2. Μετρώ τα τετράγωνα και αντιστοιχίζω κάθε αριθμό με τη ράβδο που ταιριάζει



3. Ένωσε με γραμμές αυτά που είναι ίσα



4. Πόσο κάνει; Προσθέτω ράβδους και ... αριθμούς

$$\square + \square = \square$$

$$1 + 1 = 2$$

$$\text{shaded bar} + \text{shaded bar} = \text{shaded bar}$$

$$_ + _ = _$$

$$\square + \square = \square$$

$$_ + _ = _$$

$$\text{shaded bar} + \text{shaded bar} = \text{shaded bar}$$

$$_ + _ = _$$

$$\square + \square = \square$$

$$_ + _ = _$$

$$\text{shaded bar} + \text{shaded bar} = \text{shaded bar}$$

$$_ + _ = _$$

$$\square + \square + \square = \square$$

$$_ + _ + _ = _$$

5. Πόσο κάνει; Αφαιρώ ράβδους και ... αριθμούς

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$3 - 1 = 2$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$_ - _ = _$$

5. Πρόσθεση: βάλε τις ράβδους και βρες με πόσους τρόπους μπορείς να φτιάξεις:

- Το **3**

$$1 + 1 + 1 = 3$$

$$_ + _ = 3$$

$$_ + _ = 3$$

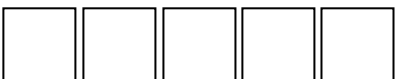
- Το **4**

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

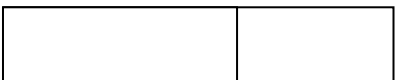
$$_ + _ = 4$$

$$_ + _ = 4$$

• To **5**



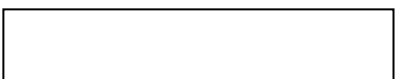
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 5$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 5$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 5$$

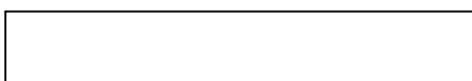
• To **6**



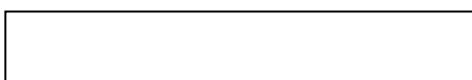
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 6$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 6$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 6$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 6$$

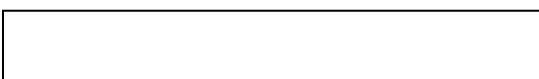


$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 6$$

• To **7**



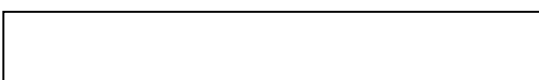
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 7$$



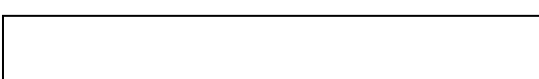
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 7$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 7$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 7$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 7$$

• To 8

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 8$$

• To 9

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

• To **10**

<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 10$$

Φ. Ε. 2 Ράβδοι CUISENAIRE

1. Χρησιμοποίησε τις ράβδους για να κάνεις τις προσθέσεις

$2 + 2 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$2 + 2 + 1 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$3 + 3 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$4 + 3 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$6 + 2 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$3 + 2 + 4 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$5 + 5 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Χρησιμοποίησε τις ράβδους για να κάνεις τις αφαιρέσεις:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$4 - 2 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$6 - 4 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$5 - 1 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$7 - 4 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$9 - 3 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$8 - 5 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$10 - 4 = \underline{\quad}$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

$10 - 8 = \underline{\quad}$

3. Με τη βοήθεια των ράβδων βρες το αποτέλεσμα των προσθέσεων:

$5 + 3 = \square$

$4 + 2 = \square$

$3 + 4 = \square$

$2 + 5 = \square$

$6 + 3 = \square$

$7 + 3 = \square$

$6 + 4 = \square$

$5 + 5 = \square$

$9 + 1 = \square$

$8 + 2 = \square$

$7 + 2 = \square$

$4 + 4 = \square$

$9 + 1 = \square$

$8 + 2 = \square$

$7 + 2 = \square$

$4 + 4 = \square$

4. Με τη βοήθεια των ράβδων βρες το αποτέλεσμα των αφαιρέσεων:

$10 - 3 = \square$

$9 - 2 = \square$

$10 - 4 = \square$

$7 - 5 = \square$

$10 - 7 = \square$

$7 - 3 = \square$

$9 - 4 = \square$

$8 - 3 = \square$

$10 - 2 = \square$

$8 - 2 = \square$

$10 - 1 = \square$

$9 - 5 = \square$

$10 - 5 = \square$

$8 - 5 = \square$

$7 - 2 = \square$

$9 - 7 = \square$

6. Σχηματίζω τους αριθμούς με τις ράβδους με πολλούς τρόπους

• To 11

										+		___ + ___ = 11
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	----------------

										+			___ + ___ = 11
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	----------------

										+				___ + ___ = 11
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	----------------

										+					___ + ___ = 11
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	----------------

										+						___ + ___ = 11
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	----------------

• To 12

										+			___ + ___ = 12
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	----------------

										+				___ + ___ = 12
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	----------------

										+					___ + ___ = 12
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	----------------

										+						___ + ___ = 12
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	----------------

										+							___ + ___ = 12
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	----------------

• To 13

										+				__+__=13
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	----------

										+					__+__=13
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	----------

										+						__+__=13
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	----------

										+							__+__=13
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	----------

• To 14

										+					__+__=14
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	----------

										+						__+__=14
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	----------

										+							__+__=14
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	----------

										+								__+__=14
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------

• To 15

										+					
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 15$$

									+					
--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 15$$

								+						
--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 15$$

• To 16

										+					
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 16$$

									+					
--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 16$$

							+						
--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 16$$

• To 17

										+								___ + ___ = 17
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------------

										+								___ + ___ = 17
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------------

• To 18

										+								___ + ___ = 18
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------------

										+								___ + ___ = 18
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------------

• To 19

										+								___ + ___ = 19
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	----------------

• To 20


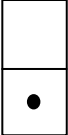
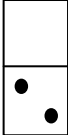
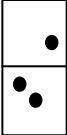
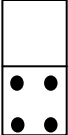
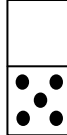
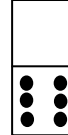
10 + 10 = 20

ΝΤΟΜΙΝΟ (κλασικό) – (Οδηγίες για τον δάσκαλο)


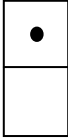

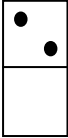
- Αντιστοιχίζω ντόμινο και αριθμούς

Π.χ.  → 1  → 5 κλπ.

- Φτιάχνω ομάδες με τα ντόμινο (ομάδα του 0, του 1, ...) **Φ.Ε.1**

Π.χ. η ομάδα του 0       

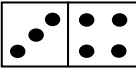
- Βάλε στη σειρά τα κομμάτια του ντόμινο (0, 1, 2, ... 6 κι αντίστροφα)

0  1  2  ή  κ.ο.κ.

Συνεχίζω μέχρι το 12 και αντίστροφα


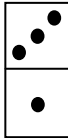
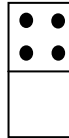
- Αντιστοιχίζω ντόμινο και πράξεις (τις γράφω). **Φ.Ε. 3**

(Καλό θα ήταν αρχικά να βγάλω τα κομμάτια με άθροισμα > του 10)

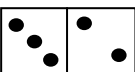
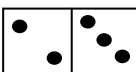
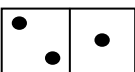
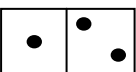
Π.χ.  → $3 + 4 = 7$ κλπ.

- Βάζω σε ομάδες τα κομμάτια του ντόμινο προσθέτοντας τις βουλίτσες.

(ομάδες: 0, 1, 2, 3, ... 12) **Φ.Ε. 2**

Π.χ. 4 :  ή  ή  κ.ο.κ.

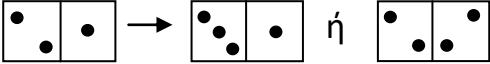
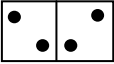
- Ένωσε τα κομμάτια που είναι ίσα και ίδια (αντιμεταθετικότητα)

Π.χ.  →  ή  →  κ.ο.κ.


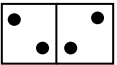
- Ένωσε τα κομμάτια που έχουν τον ίδιο αριθμό με βούλες

Π.χ.  με Κ.Ο.Κ.

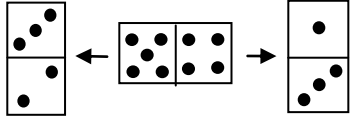
- Ένα περισσότερο. Ποιο έχει μια βούλα περισσότερη;

Π.χ.  ή  Κ.Ο.Κ.

- Ένα λιγότερο. Ποιο έχει μια βούλα λιγότερη;

Π.χ.  ή  Κ.Ο.Κ.

- **Σταυροδρόμια. Φ. Ε. 4** (Βάλε ένα κομμάτι στη μέση. Κοίταξε πόσες βούλες έχει σε κάθε όψη. Τοποθέτησε δύο άλλα κομμάτια σε κάθε πλευρά του μεσαίου ντόμινο με το ίδιο άθροισμα από βούλες)

Π.χ.  Κ.Ο.Κ.

Φ. Ε. 1 : Βάζω τα ντόμινο σε ομάδες (του 0, 1, 2, 3...)

0

1

2

3

4

5

6

Φ. Ε. 2 : Βάζω τα ντόμινο σε ομάδες (αθροίσματα)

0

1

2

3

4

5

6

7

8

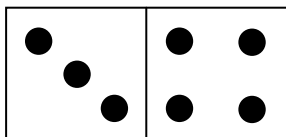
9

10

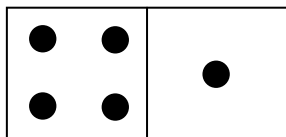
11

12

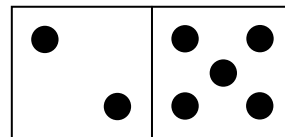
Φ. Ε. 3 : Γράφω την πράξη σε κάθε ντόμινο



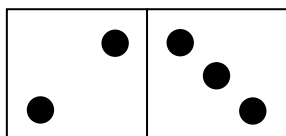
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



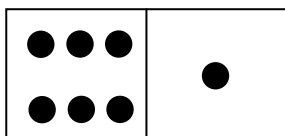
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



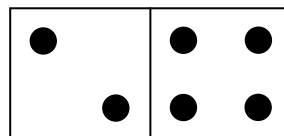
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



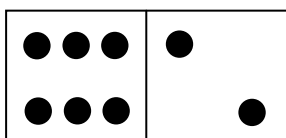
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



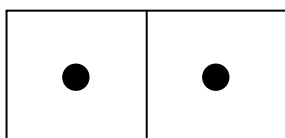
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



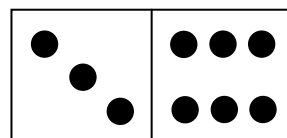
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



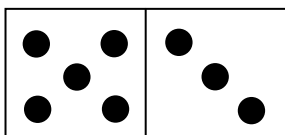
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



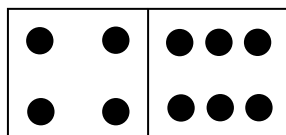
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



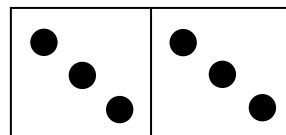
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



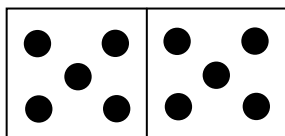
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



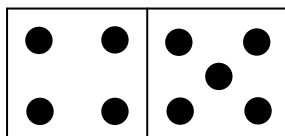
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



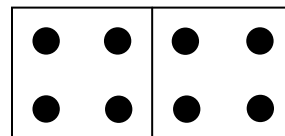
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

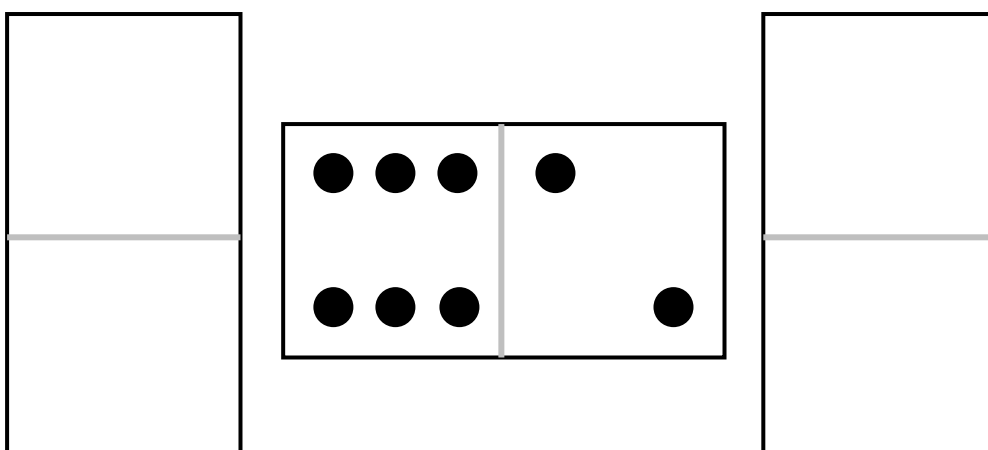
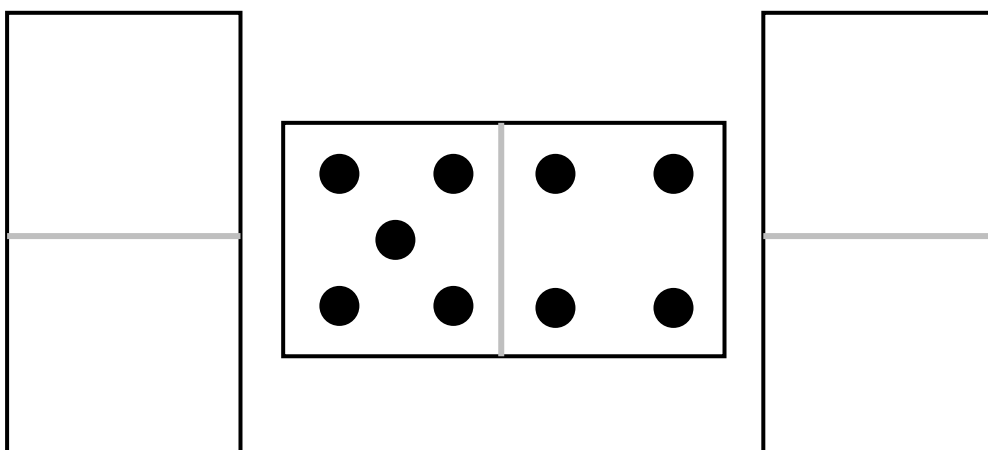
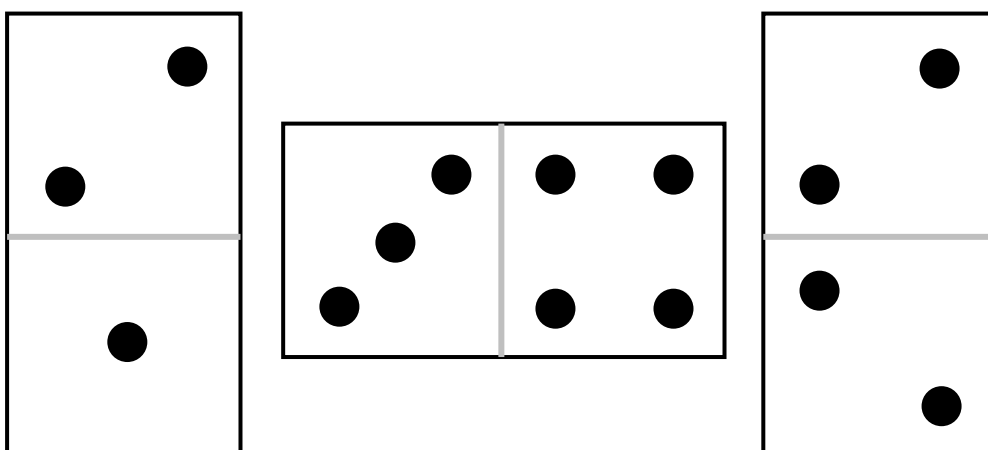


$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

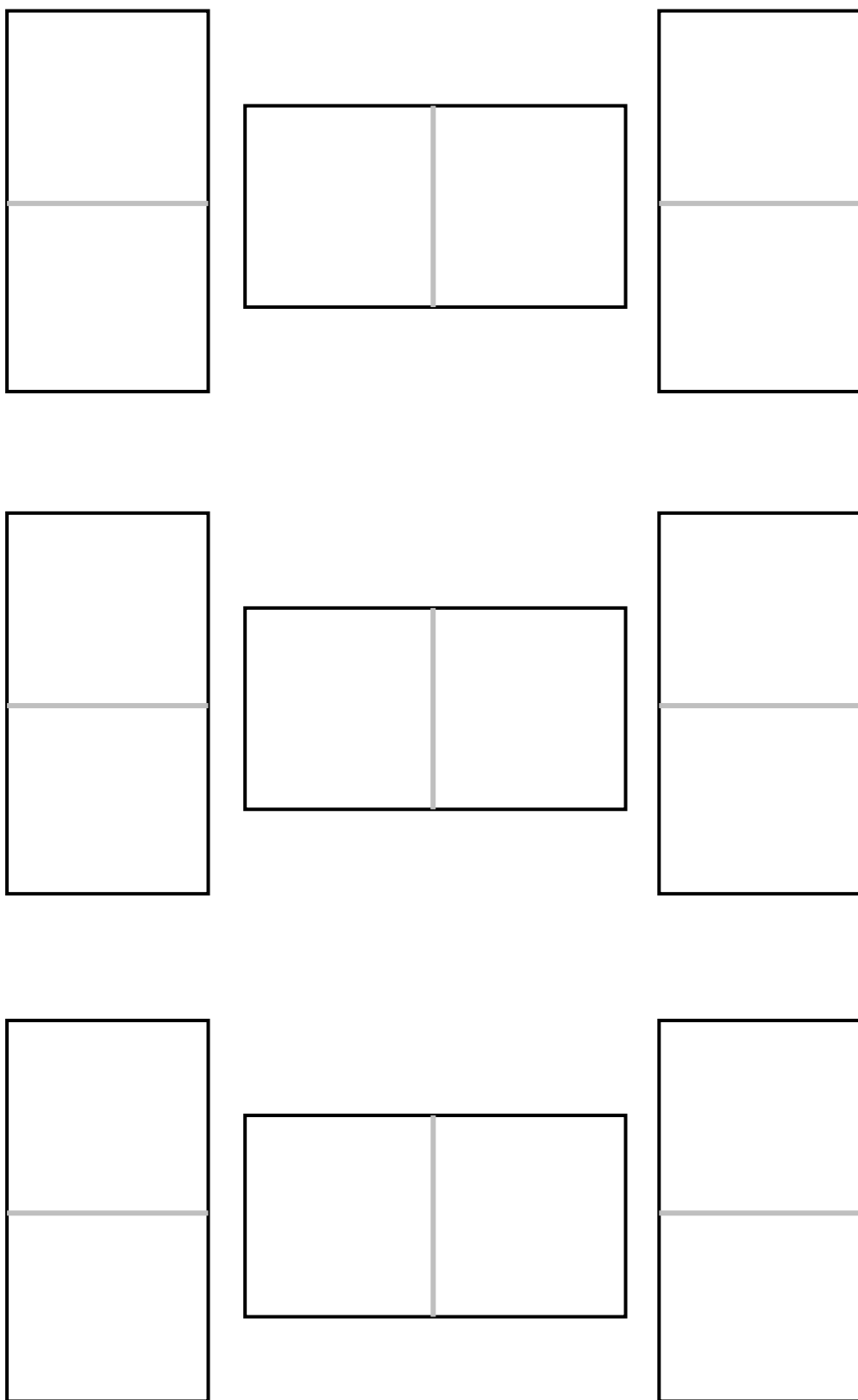


$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Φ.Ε. 4 : Φτιάχνω σταυροδρόμια όπως στο παράδειγμα



... κι άλλα σταυροδρόμια ...



ΚΥΒΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ – (Οδηγίες για τον δάσκαλο)

Οι κύβοι δεκαδικής βάσης (Base Ten Blocks) αποτελούν ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο για την αναπαράσταση των αριθμών. Αποτελούνται από μικρούς κύβους που αντιστοιχούν στις [Μ]ονάδες, ράβδους στις [Δ]εκάδες, τετράγωνες πλάκες 10X10 στις [Ε]κατοντάδες και έναν κύβο 10X10X10 στη [Χ]ιλιάδα. Μέσα από τη χρήση τους οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν εμπειρικά τις μαθηματικές έννοιες της θεσιακής αξίας, την υπέρβαση της δεκάδας, τη σύνθεση και ανάλυση της δεκάδας, καθώς και την κατανόηση των “κρατούμενων” και “δανεικών” στον αλγόριθμο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στο **Φ.Ε. 1** οι μαθητές αντιστοιχούν τους κύβους δεκαδικής βάσης σε Μ, Δ και Ε και τοποθετούν τους αριθμούς στις στήλες θεσιακής αξίας και αναπαριστούν αριθμούς. Επίσης εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις σε μια πρώτη επαφή με τη σύνθεση και την ανάλυση της δεκάδας.

Στο **Φ.Ε. 2** εκτελούν προσθέσεις με κρατούμενο και αφαιρέσεις με δανεικό αναπαριστώντας με τους κύβους διψήφιους αριθμούς.

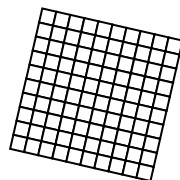
Στο **Φ.Ε. 3** οι μαθητές αναπαριστούν με τους κύβους τριψήφιους αριθμούς, εξασκούνται στη σύνθεση και την ανάλυση της δεκάδας και εκτελούν οριζόντιες προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Κατά τη συμπλήρωση των Φύλλων Εργασίας και ειδικότερα στην εξοικείωση με τις έννοιες «κρατούμενο» και «δανεικό» είναι σκόπιμο να εκτελείται γραπτά ο αλγόριθμος με τη χρήση των υλικών ώστε να κατανοείται η σύνθεση της δεκάδας και η συνακόλουθη επισήμνση του κρατούμενου, ενώ στην αφαίρεση η ανάλυση της δεκάδας και δημιουργία δανεικού με την τεχνική της «αναδόμησης του μειωτέου».

ΚΥΒΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ Φ. Ε. 1 ΘΕΣΙΑΚΗ ΑΞΙΑ

1. Αντιστοιχίζω

1



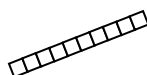
Δ = Δεκάδες

10



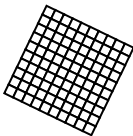
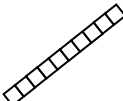

Ε = Εκατοντάδες

100

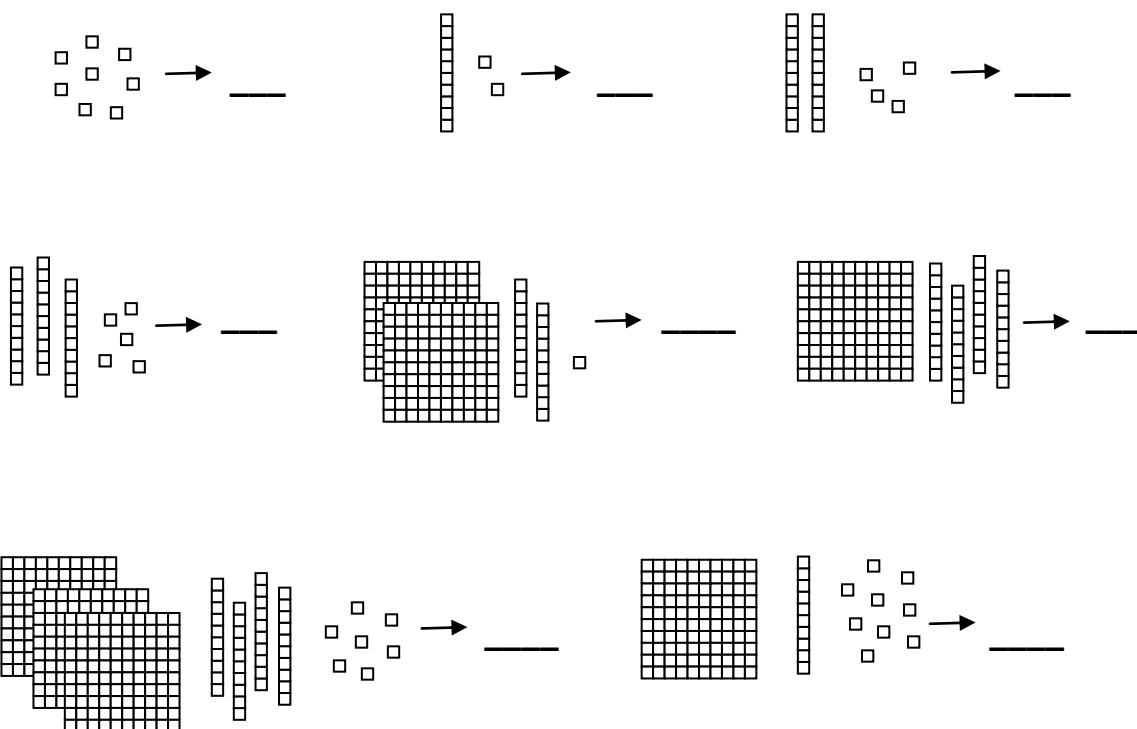


Μ = Μονάδες

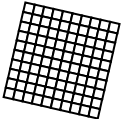
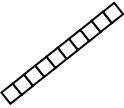

2. Σχηματίζω με κύβους και βρίσκω πόσα έχει κάθε αριθμός:

			
9			
11			
26			
10			
34			
20			
135			
69			
100			
142			
257			
109			

3. Βρίσκω τον αριθμό που έχει:



4. Δείχνω τους αριθμούς με τη βοήθεια των κύβων

			
14			
8			
29			
40			
127			
346			

	Ε Εκατοντάδες	Δ Δεκάδες	Μ Μονάδες
14			
8			
29			
40			
127			
346			

5. Χωρίζω τους αριθμούς σε Μ = μονάδες, Δ = δεκάδες, Ε = εκατοντάδες

56

134

305

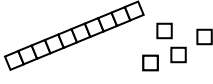
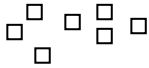
9

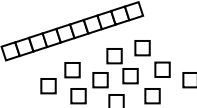
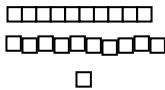
24

397

Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ

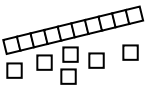

6. Κάνω τις προσθέσεις με τη βοήθεια των κύβων, όπως στο παράδειγμα:



$14 \rightarrow$ 
 $+ 7 \rightarrow$ 


 \rightarrow

 \rightarrow
 21

16	18	12	25	39	44
$+ 8$	$+ 5$	$+ 8$	$+ 6$	$+ 4$	$+ 9$

7. Κάνω τις αφαιρέσεις με τη βοήθεια των κύβων, όπως στο παράδειγμα:

$16 \rightarrow$ 
 $- 9 \rightarrow$ 


 \rightarrow

 \rightarrow
 7

14	13	12	25	30	44
$- 8$	$- 5$	$- 4$	$- 9$	$- 7$	$- 15$

ΚΥΒΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ Φ. Ε. 2

- Κάνω τις προσθέσεις με τη βοήθεια των κύβων:

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 + 13 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$= 37$$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 + 17 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$= 52$$

$$\begin{array}{r}
 72 \\
 + 14 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 + 25 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 + 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 56 \\
 + 27 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 + 36 \\
 \hline
 \end{array}$$

- Κάνω τις αφαιρέσεις με τη βοήθεια των κύβων:

$$\begin{array}{r} 47 \\ -14 \\ \hline \end{array}$$

= 33

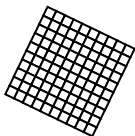
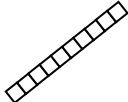

$$\begin{array}{r} 212 \\ -19 \\ \hline \end{array}$$

= 193

$\begin{array}{r} 48 \\ -24 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 64 \\ -22 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 22 \\ -9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 53 \\ -28 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \\ -19 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 50 \\ -24 \\ \hline \end{array}$
--	--	---	--	--	--

ΚΥΒΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ Φ. Ε. 3 – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 100

- Βρίσκω πόσα έχει κάθε αριθμός

			
100			
125			
106			
160			
178			
256			
817			

- Αναπαριστώ τους αριθμούς με τους κύβους στο θρανίο μου

134 218 359 645 967 300 304

- Προσθέτω με τους κύβους όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \\ 5 \end{array} = \begin{array}{c} \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ 12 \end{array}$$

$$7 + 5 = 12$$

$$8 + 6 = \underline{\quad}$$

$$6 + 5 = \underline{\quad}$$

$$9 + 4 = \underline{\quad}$$

$$8 + 7 = \underline{\quad}$$

- Κάνω τις προσθέσεις με τους κύβους όπως στο παράδειγμα:

$$27 + 15 = 42$$

$18 + 14 = \underline{\quad}$

$25 + 38 = \underline{\quad}$

$34 + 19 = \underline{\quad}$

$13 + 19 = \underline{\quad}$

$26 + 25 = \underline{\quad}$

$59 + 13 = \underline{\quad}$

$47 + 16 = \underline{\quad}$

$68 + 27 = \underline{\quad}$

- Κάνω τις αφαιρέσεις με τους κύβους όπως στο παράδειγμα:

$$35 - 18 = 17$$

$25 - 16 = \underline{\quad}$

$22 - 8 = \underline{\quad}$

$34 - 17 = \underline{\quad}$

$30 - 19 = \underline{\quad}$

$41 - 25 = \underline{\quad}$

$61 - 24 = \underline{\quad}$

$53 - 18 = \underline{\quad}$

$44 - 27 = \underline{\quad}$

10. ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ Α΄ & Β΄ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΥΠΟΣΤΗΡΙΧΘΟΥΝ ΜΕ ΤΟ ΥΛΙΚΟ

ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ Α΄ & Β΄ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΥΠΟΣΤΗΡΙΧΘΟΥΝ ΜΕ ΤΟ ΥΛΙΚΟ						
Α΄ ΤΑΞΗ						
ΚΕΦ.	ΣΕΛ	ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ		ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΧΡΗΣΗ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
			Β.Μ.	Τ.Ε.		
7	24-25	Πρόσθεση και ανάλυση των αριθμών μέχρι το 5 (I) Στόχοι: Να προσθέτουν αριθμούς με άθροισμα μέχρι το 5 Να βρίσκουν το συμπλήρωμα αθροισμάτων μέχρι το 5 Να αναλύουν αριθμούς μέχρι το 5 σε άθροισμα δύο όρων	1, 2, 3	1, 2, 4	Ζυγαριά, αριθμογραμμή, κύβοι δεκ. βάσης, ράβδοι Cuisenaire, πεντάδες	Ασκήσεις σύνθεσης και ανάλυσης του 3, 4, 5
9	30-31	Σύγκριση μεγεθών – Ορολογία Στόχοι: Να εξοικειωθούν με την ορολογία των διαστάσεων των μεγεθών Να μάθουν να διατάσσουν αντικείμενα με βάση τις διαστάσεις	4		Ράβδοι Cuisenaire και αριθμογραμμή	Αρίθμηση και σύγκριση μεγεθών με τις ράβδους και αντιστοιχία των μεγεθών στην αριθμογραμμή.
10 11	32-33 34-35	Οι αριθμοί από το 6 μέχρι το 10 (I) Οι αριθμοί από το 6 μέχρι το 10 (II) Στόχοι: Η άσκηση των μαθητών στην καταμέτρηση συλλογών μέχρι 10 Η υποβοήθηση να συγκροτήσουν μια πρώτη αντίληψη για τους 6-10	2, 3	1, 3, 4 2, 4	Κύβοι, πεντάδες, ζυγαριά, ράβδοι	Ανάλυση και σύνθεση των 6, 7, 8, 9 και 10. Ιδιαίτερη βάση στην κατανόηση ότι είναι 5 + 1, 2, 3 ...
12	36-37	Σύγκριση αριθμών – Τα σύμβολα =, >, < Στόχοι: Η άσκηση των μαθητών στη χρήση των συμβόλων όταν συγκρίνουν Η εμπέδωση της σειράς των αριθμών μέχρι το 10	1, 3	5, 6	Αριθμογραμμή, κύβοι, ζυγαριά, πεντάδες	Εξάσκηση στη σύγκριση αριθμών για την κατανόηση των εννοιών ίσο - μικρότερο – μεγαλύτερο και των συμβόλων τους
13	38-39	Πρόσθεση και ανάλυση των αριθμών μέχρι το 5 (II)	1, 3	1, 3	Ζυγαριά πεντάδες, ράβδοι	Σύνθεση και ανάλυση των 3, 4, 5
15	42-43	Προβλήματα Στόχοι: Εισαγωγή στην επίλυση προβλημάτων – Επιλογή και επεξεργασία πληροφοριών – εξάσκηση στην επεξεργασία δεδομένων	2, 3	1, 3, 4	Κύβοι, αριθμογραμμή	Αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος και λύση
18	50-51	Αθροίσματα μέχρι το 10 – Αντιμεταθετική ιδιότητα Στόχοι: Η άσκηση των μαθητών στον υπολογισμό αθροισμάτων μέχρι το 10 Εισαγωγή και άσκηση στην αντιμεταθετική ιδιότητα Στο βιβλίο του δασκάλου αναλύονται και οι στρατηγικές αρίθμησης με υλικό	1, 3, 4	1, 2, 5	Ζυγαριά, αριθμογραμμή, κύβοι, πεντάδες, άβακας	Εξάσκηση στη σύνθεση και ανάλυση αριθμών έως το 10 Αντιμεταθετικότητα
21	56-57	Προσθετική ανάλυση αριθμών από το 6 μέχρι το 10 Στόχοι: Η υποβοήθηση των μαθητών να κατανοήσουν την ανάλυση των αριθμών από το 6 μέχρι το 10 σε αθροίσματα δύο όρων Η εφαρμογή της ανάλυσης σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής	1, 3	2, 3, 4	Ζυγαριά, αριθμογραμμή, κύβοι, πεντάδες, άβακας, ράβδοι	Ανάλυση των αριθμών σε αθροίσματα δύο όρων με όλους τους δυνατούς τρόπους
22	58-59	Προβλήματα Στόχοι: Οι μαθητές ασκούνται στην απόκτηση της δεξιότητας να συλλέγουν τις πληροφορίες που τους δίνονται και να λύνουν το πρόβλημα	1, 3	1, 2, 3	Αριθμογραμμή, κύβοι, ζυγαριά	Εξάσκηση στις έννοιες λιγότερο περισσότερο και τη λύση προβ/των
25	64-65	Οι αριθμοί μέχρι το 50 Στόχοι: Η άσκηση των μαθητών στους διψήφιους μέχρι το 50. Η άσκηση στη μέτρηση και τον υπολογισμό ποσοτήτων ανά δέκα	1, 4	2, 3, 4, 5, 6, 7	Κύβοι, αριθμογραμμή, δεκάδες	Η πρώτη επαφή των παιδιών με τις δεκάδες και ειδικότερα στο Τ. Ε. με 431 μορφή των κύβων δεκαδικής βάσης. Αρκετή άσκηση με τους κύβους

28	70-71	Αφαίρεση με αφαιρετέο μικρό αριθμό Στόχοι: Εισαγωγή της έννοιας της πράξης και του συμβόλου της – Αφαίρεση ως υπόλοιπο, ως διαφορά και ως συμπλήρωμα	1, 3, 4	2, 3, 4	Κύβοι, αριθμογραμμή, δεκάδες	Η πρώτη επαφή με την αφαίρεση, Εξάσκηση σε αφαιρέσεις
30	74-75	Αφαίρεση με αφαιρετέο μεγάλο αριθμό Στόχοι: Κατανόηση αντιστροφής πρόσθεσης με αφαίρεση ($9-6=3$ αφού $6+3=9$) Παρουσίαση του μειωτέου σε οργανωμένη μορφή με βάση το 5	1, 3, 4	2, 3, 4, 5, 6	Κύβοι, αριθμογραμμή, δεκάδες, ντόμινο	Αφαιρέσεις με βάση το 5
31	76-77	Το συμπλήρωμα Στόχοι: Εισαγωγή της έννοιας της πράξης και του συμβόλου της – Αφαίρεση ως υπόλοιπο, ως διαφορά	1, 3, 4	2, 3, 5	Κύβοι, αριθμογραμμή, δεκάδες, ζυγαριά, ράβδοι	Συμπλήρωση αριθμών με τη ζυγαριά, τους κύβους, την αριθμογραμμή κλπ
33	12-13	Οργάνωση συλλογών – Αριθμοί μέχρι το 50 Στόχοι: Προετοιμασία των μαθητών για την ανάλυση των αριθμών σε Μ και Δ Άσκηση σε υπολογισμούς αθροισμάτων με βάση το 10 Άσκηση στην αντικατάσταση 10 Μ με μια ισοδύναμη μεγάλη μονάδα	1, 3, 4, 5	1, 2, 4	Κύβοι, δεκάδες, ζυγαριά; αριθμογραμμή	Στο Τ.Ε. υπάρχει άσκηση με τη χρήση των κύβων, εξάσκηση και με το υπόλοιπο υλικό
34	14-15	Μονάδες και δεκάδες (I) Στόχοι: Κατανόηση της αξίας των αριθμών σύμφωνα με τη θέση τους Άσκηση στην ανάλυση διψήφων αριθμών σε άθροισμα Δ και Μ Άσκηση στην εύρεση αποτελεσμάτων της μορφής $1n-v \dots 16-6$ κοκ	1, 2, 3	1, 2, 3, 4, 5	Κύβοι, δεκάδες, ζυγαριά; αριθμογραμμή	Εξάσκηση στη σύνθεση και ανάλυση Δ και στην απεικόνιση αριθμών σε Δ και Μ
35	16-17	Αθροίσματα με πολλούς όρους Στόχοι: Άσκηση σε αθροίσματα ως το 10 με περισσότερους από 2 προσθετέους Παρουσίαση της πρόσθεσης με την κάθετη μορφή	1, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6	Κύβοι, ράβδοι, ζυγαριά, αριθμογραμμή, δεκάδες	
38	22-23	Επαναληπτικό μάθημα	4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6	Κύβοι, ράβδοι, ζυγαριά, αριθμογραμμή, δεκάδες	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
39	26-27	Μονάδες και δεκάδες (II) Στόχοι: Άσκηση στην ονοματολογία του αριθμητικού συστήματος–γραφή Δ, Μ Άσκηση σε αθροίσματα μορφής $10 + v$, $1v - v$ κλπ	2, 3	1, 4, 5, 6	Κύβοι, δεκάδες, ζυγαριά; αριθμογραμμή	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
40	28-29	Γεωμετρικά σχήματα Στόχοι: να αναγνωρίζουν τα βασικά επίπεδα σχήματα, να αναγνωρίζουν στερεά σε καθημερινά αντικείμενα, να ομαδοποιούν σχήματα, να χαράζουν σε τετραγωνισμένο χαρτί	4		Γεωπίνακας ;	Δημιουργία σχημάτων στο γεωπίνακα ;
42	32-33	Προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας Στόχοι: Η παρουσίαση στους μαθητές της πρόσθεσης με τη μέθοδο της υπέρβασης της δεκάδας	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	Δεκάδες, άβακας, κύβοι, αριθμογραμμή,ζυγαριά ;	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού και επέκταση
43	34-35	Επαναληπτικό μάθημα	2, 4	1, 3, 5	Κύβοι, δεκάδες, ζυγαριά; αριθμογραμμή	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
45	38-39	Χαράξεις, παζλ και μωσαϊκά Στόχοι: Ανάπτυξη δεξιοτήτων ανάγνωσης και χρήσης γεωμετρικών σχημάτων και σύνθετων εικόνων – Η ενασχόληση με καταστάσεις τύπου παζλ και μάθηση ανασύνθεσης σχήματος στα συστατικά του μέρη – Άσκηση σε δεξιότητες οπτικής ανάλυσης και συμπλήρωσης σχημάτων	1	1, 3, 4	Τάγκραμ	Χρήση του τάγκραμ για την σύνθεση και ανάλυση σχημάτων – Ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ των κομματιών – Διαισθητική κατανόηση εμβαδού
46	40-41	Προσθέσεις και αφαιρέσεις 2ψηφίων και 1ψηφίων αριθμών Στόχοι: Εισαγωγή της πρόσθεσης και αφαίρεσης χωρίς κρατούμενο	1, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6	Κύβοι, αριθμογραμμή, ζυγαριά	Απεικόνιση των ασκήσεων με τη βοήθεια του υλικού

47	42-43	Η πρόσθεση και η αφαίρεση ως αντίστροφες πράξεις – Η υπέρβαση της δεκάδας Στόχοι: Άσκηση στην αφαίρεση με τη μέθοδο της υπέρβασης της δεκάδας	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	Κύβοι, αριθμογραμμή, ράβδοι, δεκάδες	Επίλυση ασκήσεων συμπληρώνοντας τη δεκάδα με το υλικό
48	44-45	Υπολογισμοί – Επιστροφή στην πεντάδα Στόχοι: Άσκηση στον υπολογισμό αθροισμάτων 2 αριθμών μεταξύ 5 και 9 με τη την «επιστροφή στην πεντάδα» – Υπολογισμός διπλών αθροισμάτων	1, 3	1, 2, 3, 4, 5	Κύβοι, αριθμογραμμή, Ζυγαριά, πεντάδες	Εξάσκηση στη μέθοδο με την ανάλυση των αριθμών σε 5 + ν
49	46-47	Πρόσθεση και αφαίρεση – Διψήφιοι και μονοψήφιοι Στόχοι: Άσκηση σε πράξεις με τη βοήθεια νοερών αναπαραστάσεων - Υπολογισμός «μεγάλων» διπλών αθροισμάτων – Υπολογισμός της αφαίρεσης με «πρόσθεση προς τα επάνω» π. χ. 13 - 9	4, 5	1, 2, 3, 4, 5	Δεκάδες, αριθμογραμμή, κύβοι	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού για την κατανόηση της μεθόδου
50	48-49	Προβλήματα	1, 2, 4	1, 2, 4	Κύβοι, αριθμογραμμή	Αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος και λύση
51	50-51	Επαναληπτικό μάθημα	1, 2, 3	1, 2, 3, 4, 5	Κύβοι, αριθμογραμμή, ράβδοι, δεκάδες	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
52	54-55	Οι αριθμοί μέχρι το 70 Στόχοι: Αναγνώριση και χρήση των αριθμών – 70 σε καταστάσεις καθ/νής ζωής Καταμέτρηση ανά 1 και ανά 5, γραφή με λέξεις, σύγκριση και διάταξη, ανάλυση σε Δ και Μ των αριθμών μέχρι το 70	1	1	Κύβοι, αριθμογραμμή, ράβδοι, δεκάδες	Εξάσκηση στην αναπαράσταση των αριθμών ως 70 - Ανάλυση σε Δ και Μ
53	56-57	Εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό Στόχοι: Εισαγωγή του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση Άσκηση στα πολλαπλάσια των αριθμών 2, 5, 10	1, 2, 4	3, 4, 5	Άβακας, ζυγαριά, κύβοι, πεντάδες, δεκάδες	Άσκηση στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
54	58-59	Μέτρηση μεγεθών Στόχοι: Μέτρηση μήκους, επιφάνειας, χωρ/τας με συμβατικές μονάδες Πρώτη επαφή με τις συμβατικές μονάδες όπως το μέτρο και το λίτρο	1, 3	1, 3, 5	Γεωπίνακας ; αριθμογραμμή	Διαισθητική κατανόηση εμβαδού και μήκους
55	60-61	Πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών (Ι) Στόχοι: Άσκηση των μαθητών στην πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων ως το 70 Άσκηση σε πράξεις χωρίς κρατούμενο με τη μέθοδο υπέρβασης της Δ	2, 4	5, 6	Κύβοι, αριθμογραμμή, δεκάδες	Επίλυση ασκήσεων συμπληρώνοντας τη δεκάδα με το υλικό
58	68-69	Οι αριθμοί μέχρι το 100 – Χρήμα Στόχοι: Η οργάνωση και επέκταση των γνώσεων των μαθ. σε αριθμ. ως το 100	3, 4	2, 3, 4, 6	Κύβοι, άβακας, δεκάδες	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού

Στο τέλος του βιβλίου του δασκάλου της Α' υπάρχουν οδηγίες αξιολόγησης της κατάκτησης των στόχων κάθε περιόδου για αυτοαξιολόγηση και για ετεροαξιολόγηση, καθώς και κριτήρια αξιολόγησης. Επίσης υπάρχουν φόρμες αξιολόγησης κάθε κριτηρίου με βαθμολόγηση από Α μέχρι Ε για χρήση από τον εκπαιδευτικό στην παρακολούθηση της πορείας κάθε μαθητή. Παρουσιάζονται οι στόχοι κάθε περιόδου και αξιολογείται ο βαθμός κατάκτησης κάθε στόχου.

Στο παράρτημα του β' τεύχους θα βρούμε:

- Εικόνες με τα κέρματα 1, 2, 5, 10, 20, 50 Λεπτών - 1€ και 2€
- Εικόνες με τα χαρτονομίσματα: 5, 10, 20, 50, 100 €
- Κύκλος με τους αριθμούς
- Συμμετρίες και σχήματα

Β' ΤΑΞΗ

Το βιβλίο του δασκάλου δίνει αναλυτικές οδηγίες για κάθε δραστηριότητα

ΚΕΦ.	ΣΕΛ	ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ		ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΧΡΗΣΗ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
			Β.Μ.	Τ.Ε.		
1	12-13	Τι έμαθα στην Α' τάξη		α, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας, δεκάδες	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
2	14-15	Φτιάχνω αριθμούς μέχρι το 100 και τους συγκρίνω Στόχοι: Να δίνουν αξία στα ψηφία των αριθμών – Να συγκρίνουν και να διατάσσουν αριθμούς μέχρι το 100 – Να χρησιμοποιούν εποπτικό υλικό για τον έλεγχο των εργασιών τους – Να βρίσκουν αθροίσματα/διαφορές «πατώντας στη δεκάδα» ή με την αριθμογραμμή		α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας, δεκάδες	Χρήση του υλικού για να απεικονίσουν αριθμούς και να κατανοήσουν τη θεσιακή αξία, στις πράξεις
3	16-17	Λύνω προβλήματα με ζωγραφική και παιχνίδια: Πολύ δύσκολη εισαγωγική δραστηριότητα στο Β.Μ. και γενικά δυσνόητη θεώρηση των προβλημάτων ! Στο Τ.Ε. οι ασκήσεις α, γ μπορούν να υποστηριχθούν από την αριθμογραμμή και τους κύβους.				
5	20-21	Λύνω προβλήματα – Τα βήματα που ακολουθώ Στόχοι: Να αξιοποιούν πληροφορίες ενός προβλ/τος που δίνονται σε εικόνα – Να υπολογίζουν με εκτίμηση – Να επαληθεύουν την πρόσθεση με αφαίρεση με εποπτικό υλικό – Να διαχειρίζονται την έννοια περισσότερο-λιγότερο		α, γ	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας, δεκάδες	Προτείνεται από τα προβλήματα η οπτικοποίηση του προβλήματος και η χρήση της αριθμογραμμής
6	22-23	Βρίσκω την αξία των ψηφίων στους διψήφιους Στόχοι: Να κατασκευάζουν διψήφιους – Να φτιάχνουν αριθ/κές αλυσίδες προσθέτοντας και αφαιρώντας δεκάδες – Να κάνουν νοερούς υπ/σμούς – Να λύνουν προβλήματα με περισσότερο-λιγότερο		α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας, δεκάδες, πίνακας 0-100	Ασκήσεις οπτικοποίησης Δ και Μ με άβακα και με κύβους. Άνοδος–κάθοδος με αριθμογραμμή. Η δ στο Τ.Ε. ?????
7	24-25	Βρίσκω το μισό και το ολόκληρο Στόχοι: Να βρίσκουν το μισό μιας ποσότητας ή ενός αριθμού – Να κάνουν δίκαιη μοιρασιά – Να αξιοποιούν το μισό για την εύρεση του ολόκληρου		α, β, γ, δ	Κύβοι, άβακας, δεκάδες, τάνγκραμ, γεωπίνακας	Εύρεση του μισού αριθμών και σχημάτων-κατανόηση της έννοιας μισό - ολόκληρο
	28-29	Επαναληπτικό μάθημα		α, β, ε, στ, ζ	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας, δεκάδες	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
9	30-31	Βρίσκω το μισό και το διπλάσιο στους αριθμούς 0-100: Η παρουσίαση των διδύμων στο Β.Μ. ελάχιστα βοηθά στην κατανόηση του μισού και του διπλάσιου, ενώ οι α, β στο Τ.Ε. θεωρούνται πολύ δύσκολες. Περίεργη προσέγγιση !!!				
10	32-33	Φτιάχνω διψήφιους αριθμούς με προϋποθέσεις Στόχοι: Να κατασκευάζουν διψήφιους με πρόσθεση και αφαίρεση χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές (πάτημα στη δεκάδα, συμπλήρωμα) – Διακρίνουν την αντιστροφή προσθ. και αφαίρεσης	1, 2, 3	β, γ, δ, ε	Αριθμογραμμή, κύβοι	Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής βρίσκουν διψήφιους με πρόσθεση και αφαίρεση
13	38-39	Γνωρίζω καλύτερα τα γεωμετρικά στερεά Στόχοι: Να μπορούν να διακρίνουν τα γεωμετρικά στερεά, να τα συσχετίζουν με τα γεωμετρικά σχήματα και να τα ονομάζουν	1, 2	β, γ	Τάνγκραμ, γεωπίνακας, διαφανή σχήματα, κύβοι ξύλινοι, αναπτύγματα στ.	Απεικόνιση των γεωμετρικών στερεών στο γεωπίνακα, με τα τάνγκραμ και τα σχήματα (ίσως πεντόμινο)

14	40-41	Φτιάχνω γεωμετρικά σχήματα Στόχοι: Να μπορούν να κατασκευάσουν ορθ. τρίγωνο, ορθ. παρ/μμο, τετράγωνο μη κανονικό πολύγωνο σε πλέγμα και με τάνγκραμ – Να ανακαλύψουν τις ίσες πλευρές του τετραγώνου Να αναγνωρίζουν πολύγωνα και ορθές γωνίες	1, 2	α, γ, δ	Τάνγκραμ, γεωπίνακας	Απεικόνιση των γεωμετρικών στερεών στο γεωπίνακα και με τα τάνγκραμ
18	50-51	Φτιάχνω διψήφιους αριθμούς με πρόσθεση ίδιων ή διαφορετικών αριθμών Στόχοι: Να είναι ικανοί να κάνουν νοερούς υπολογισμούς με ίδιους αριθμούς χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές – Να ταυτίσουν το σύμβολο του πολ/σμού με διαδοχικές προσθέσεις		α, β, γ	Κύβοι, άβακας, αριθμογραμμή, ζυγαριά	Απεικόνιση των διαδοχικών προσθέσεων και συσχέτιση με τον πολλαπλασιασμό
20	54-55	Ελέγχω, διορθώνω και συμπληρώνω προβλήματα Στόχοι: Να μπορούν να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός Προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία – Να αναγνωρίζουν ότι ένα πρόβλημα μπορεί να έχει μία, πολλές, καμία λύση	όλα	α, β, γ, δ	Κύβοι, αριθμογραμμή ...	Αναπαράσταση των στοιχείων των προβλημάτων και επίλυση
21	56-57	Λύνω σύνθετα προβλήματα (α) Στόχοι: Να μπορούν να λύνουν προβλήματα σύνθετα., εξισορρόπησης, με πολλές λύσεις – Να εκτιμούν πριν λύσουν – Να ελέγχουν την απάντηση	όλα	α, β, γ, δ	Κύβοι, αριθμογραμμή, ζυγαριά	Αναπαράσταση των στοιχείων των προβλημάτων και επίλυση
22	58-59	Αναλύω αριθμούς μέχρι το 100. Εισαγωγή στην προπαίδεια Στόχοι: Να μπορούν να αναλύουν ένα διψήφιο σε ίδιους όρους ως άθροισμα ή γινόμενο είτε με συμβολική μορφή είτε πραγματική ως άθροισμα	όλα	α, β, γ, δ	Κύβοι, αριθμογραμμή, ζυγαριά	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
23	60-61	Υπολογίζω με πολλούς τρόπους: Το συμπλήρωμα του 100 Στόχοι: Να μπορούν να κάνουν νοερούς υπολογισμούς με + και – ως το 100 – Να βρίσκουν τη διαφορά ενός διψήφιου με το συμπλήρωμα η διαδ/κη (-)	όλα	β, δ	Αριθμογραμμή, κύβοι	Εξάσκηση στο συμπλήρωμα του 100 στη ράβδο και με τους κύβους
	62-63	Επαναληπτικό μάθημα 16-23	3, 4	α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, ζυγαριά, γεωπίνακας	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
22-28	66-77	Προπαίδεια Στόχοι: Να μπορούν να μετρούν επιφάνειες χρησιμοποιώντας ως μονάδα άλλες μικρότερες μονάδες – Να κατανοούν διαισθητικά την έννοια εμβαδό –			Πεντάδες δεκάδες, κύβοι αριθμογραμμή, ζυγαριά, τετραγωνισμένο χαρτί	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού
31	10-11	Καλύπτω επιφάνειες Στόχοι: Οι μαθητές να μπορούν να μετρούν επιφάνειες χρησιμοποιώντας ως μονάδα άλλες μικρότερες επιφάνειες – Να κατανοούν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού		α, β, δ	Διαφανή σχήματα, γεωπίνακας	Εξάσκηση στη χρήση μικρότερης μονάδας για τον υπολογισμό του εμβαδού μιας επιφάνειας
34	18-19	Υπολογίζω με κάθετη πρόσθεση με κρατούμενο Στόχοι: Να κατανοήσουν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης με κρατούμενο – Να επαληθεύουν με τον κάθετο άβακα κάθετες προσθέσεις -	1, 2, 3	α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας	Χρήση του υλικού στις ασκήσεις για την κατανόηση του κρατούμενου
35	20-21	Υπολογίζω με κάθετη αφαίρεση με δανεικό (α) Στόχοι: Να κατανοήσουν τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με δανεικό – Να επαληθεύουν με τον κάθετο άβακα κάθετες αφαιρέσεις με δανεικό		α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας	Υποστήριξη των ασκήσεων του βιβλίου με το υλικό και χρήση για την κατανόηση

36	22-23	Υπολογίζω με κάθετη αφαίρεση με δανεικό (β) Στόχοι: Να κατανοήσουν τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με δανεικό που έχει επικρατήσει στη χώρα μας	2	α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή, άβακας	☺Από το βιβλίο προτείνεται η χρήση των κύβων του παραρτήματος
37	24-25	Λύνω σύνθετα προβλήματα (β) Στόχοι: Να οργανώνουν τις πληροφορίες του προβλήματος – Να επαληθεύουν	1,2	α, β, γ, δ, ε	Κύβοι, αριθμογραμμή	Απεικόνιση των στοιχείων του προβλήματος με το υλικό
41	37-38	Γνωρίζω τους αριθμούς μέχρι το 1000 Στόχοι: Να διαβάζουν και να γράφουν αριθμούς μέχρι το 1000 – Να συγκρίνουν και να διατάσσουν, να αναλύουν και να συνθέτουν – Να ανεβαίνουν και να κατεβαίνουν ανά 10, 50, 100	1,2	α, β, γ, δ, ε, στ	Κύβοι, άβακας	Χρήση κυρίως των κύβων (υπάρχει και στο βιβλίο)
43	40-41	Φτιάχνω τριψήφιους αριθμούς και τους συγκρίνω Στόχοι: Να βρίσκουν τους αριθμούς πριν και μετά από μια εκατοντάδα – να αναλύουν ένα τριψήφιο σε μονάδες, δεκάδες και εκατοντάδες	1, 2, 3	α, β, γ, δ, ε, στ	Κύβοι, άβακας	Υποστήριξη των ασκήσεων με τη χρήση του υλικού

Παράρτημα α' τεύχους:

- Κέρματα σε χαρτόνι 1, 2, 5, 10, 20, 50 λεπτών, 1€, 2€
- Ταγκραμ σήματα με εμφανή τα κομμάτια
- Σελίδα με κουκκίδες
- Γνώμονας και χάρακες
- Αριθμογραμμές
- Καρτέλες ψηφίων 0-9
- Γεωμετρικά σχήματα
- Τάγκραμ με χωρισμένα τα κομμάτια για κόψιμο και χρήση
- Ανάπτυγμα κύβου
- Κομμάτια για την κατασκευή ημερολογίου
- Κατασκευή ρολογιού με δείκτες