

**ΠΜΣ Εφαρμοσμένης Οικονομικής  
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**

**Διπλωματική Εργασία**

**ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΓΑΠΗΣ**

**Αθηνά-Ζώη Βασιλείου Δεσλή**

**Επιβλέπων Καθηγητής: Επίκουρος Καθηγητής Λουκάς Ζαχείλας**

**Βόλος 2016**

## **Υπεύθυνη Δήλωση Πρωτοτυπίας Διπλωματικής Εργασίας**

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Βόλος, Ιούνιος 2016

Στους γονείς μου,  
και στον επιβλέποντα καθηγητή μου  
κ. Λουκά Ζαχείλα

# Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ABSTRACT .....	6
<b>Κεφάλαιο 1</b> .....	<b>7</b>
<b>1. Εισαγωγή</b> .....	<b>7</b>
1.1 Γραφική απεικόνιση των ιστοριών αγάπης .....	8
1.2 Τα μοντέλα .....	11
1.3 Δυναμικά Συστήματα - Μοντέλα ODE .....	13
1.4 Ατομικά χαρακτηριστικά: λήθη, ανταπόκριση και έλξη.....	15
1.5 Από τα άτομα στα ζευγάρια .....	21
<b>Κεφάλαιο 2</b> .....	<b>23</b>
<b>2. Δυναμικά συστήματα: Η περίπτωση των απλών γραμμικών μοντέλων</b> .....	<b>23</b>
2.1 Ιστορική αναδρομή.....	23
2.2 Γραμμικά μοντέλα αγάπης .....	25
2.3 Ιδιότητες του μοντέλου.....	28
2.4 Συνέπειες σε επίπεδο κοινωνίας .....	30
2.5 Συμπεράσματα.....	34
<b>Κεφάλαιο 3</b> .....	<b>35</b>
<b>3. Μοντέλα προσποίησης (Bluffing models)</b> .....	<b>35</b>
3.1 Προτεινόμενο μοντέλο .....	36
3.2 Συρανό ντε Μπερζεράκ και Ρωζάνη .....	42
3.2.1 Η ιστορία.....	42
3.2.2 Το μοντέλο .....	44
3.2.3 Συμπεράσματα.....	49
3.3 Η Πεντάμορφη και το Τέρας ( The Beauty and the Beast) .....	51
3.3.1 Η ιστορία.....	51
3.3.2 Το μοντέλο .....	52
3.3.3 Συμπεράσματα.....	53
3.4 Περηφάνια και Προκατάληψη.....	54
3.4.1 Η ιστορία.....	54
3.4.2 Το μοντέλο .....	55
3.4.3 Συμπεράσματα.....	56
<b>Κεφάλαιο 4</b> .....	<b>58</b>
<b>4. Κυκλικά δυναμικά συστήματα σε ρομαντικές σχέσεις</b> .....	<b>58</b>
4.1 Εισαγωγή .....	58

4.2	Ανασκόπηση παλαιότερων υποδειγμάτων .....	59
4.3	Συνέργεια και κυκλικά δυναμικά συστήματα .....	63
4.4	Λάουρα και Πετράρχης .....	65
4.4.1	Η ιστορία .....	65
4.4.2	Το μοντέλο .....	68
4.4.3	Αργοί –γρήγοροι οριακοί κύκλοι .....	77
4.4.4	Συμπεράσματα.....	80
<b>Κεφάλαιο 5</b> .....		82
<b>5.</b>	<b>Το μοντέλο «Λάουρα και Πετράρχης»</b> .....	82
5.1	Εισαγωγή .....	82
5.2	Ανάλυση του μοντέλου με το E&F Chaos .....	83
5.2.1	Αρχικές συνθήκες.....	83
5.2.2	Παράμετρος $\alpha_2$ .....	87
5.2.3	Παράμετρος $\beta_2$ .....	91
5.2.4	Παράμετρος $\beta_1$ .....	92
5.3	Τροποποιημένο μοντέλο.....	97
5.3.1	1 <sup>η</sup> περίπτωση $Ah = 0.6$ .....	99
5.3.2	2 <sup>η</sup> περίπτωση $Ah > 1.8$ .....	100
<b>Κεφάλαιο 6</b> .....		102
<b>6.</b>	<b>Συμπεράσματα</b> .....	102
<b>Βιβλιογραφία</b> .....		104

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των δυναμικών μοντέλων αγάπης σε συνεχή χρόνο. Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορα δυναμικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για τη μελέτη και την πρόβλεψη των ρομαντικών σχέσεων. Τα μοντέλα που περιγράφουν μια ιστορία αγάπης μπορεί να είναι γραμμικά ή μη γραμμικά και να περιλαμβάνουν δύο ή τρεις διαφορετικές εξισώσεις. Διαφορετικές μεταβλητές και παράμετροι έχουν χρησιμοποιηθεί για την παρουσίαση των ατομικών χαρακτηριστικών, όπως είναι η λήθη, η ανταπόκριση και η έλξη. Ανάμεσα στα μοντέλα, ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα μοντέλα στα οποία ένα άτομο μπορεί να εξαπατήσει για κάποιο χρονικό διάστημα τον σύντροφό του προκειμένου να μεταβάλει τη συμπεριφορά του καθώς και τα δυναμικά μοντέλα με κυκλική συμπεριφορά. Ένα από αυτά είναι αυτό που περιγράφει την ρομαντική σχέση της Λάουρα με τον Πετράρχη για το οποίο ακολουθεί μια μελέτη για την ευαισθησία των τιμών των παραμέτρων και πώς μπορούν να αλλάξουν την πορεία της σχέσης. Η εργασία κλείνει με κάποια γενικά συμπεράσματα αναφορικά με την ανάλυση των δυναμικών μοντέλων αγάπης.

## **ABSTRACT**

The purpose of this work is the study of the dynamical models of love in continuous time. The following are various love dynamical models, which are used for studying and predicting the evolution of a romantic relationship. The proposed models can be linear or nonlinear and composed with two or three differential equations. Different variables and parameters have been used to represent individual characteristics such as oblivion, return and appeal. Among these models, bluffing models and cyclic dynamics in romantic relationships are more interesting. One of them is the dynamical model that describes the love story between Laura and Petrarch for which we study the sensitivity of the parameters values and how can change the evolution of the love story. Finally, the thesis closes with some general conclusions regarding the analysis of dynamical models of love stories.

# Κεφάλαιο 1

## 1. Εισαγωγή

Οι ανθρώπινες σχέσεις έχουν απασχολήσει όσο οτιδήποτε άλλο την κοινωνία. Επιστήμες όπως η φιλοσοφία, η κοινωνιολογία, η ψυχολογία κ.ά. έχουν ασχοληθεί ιδιαίτερα για την εξήγηση των διαπροσωπικών σχέσεων. Τα τελευταία χρόνια, με πρώτο τον Strogatz το 1988 με το άρθρο του “*Love Affairs and Differential Equations*”, έχει ξεκινήσει η μελέτη των ανθρώπινων σχέσεων με μία πιο μαθηματική προσέγγιση προκειμένου να γίνει η καταγραφή αλλά και η πρόβλεψη της πορείας μίας σχέσης στο χρόνο.

Η εξέλιξη με το χρόνο μιας διαπροσωπικής σχέσης μπορεί να αποτυπωθεί διαγραμματικά. Η ιδέα για κάτι τέτοιο είναι σχετικά μη ρεαλιστική γιατί υποθέτει ότι το ενδιαφέρον (αισθήματα) ενός ατόμου για ένα άλλο μπορεί να αποτυπωθεί σε μία μόνο μεταβλητή. Έτσι, μια ιστορία αγάπης αντιπροσωπεύεται από δύο διαγράμματα, που δείχνουν την εξέλιξη μέσα στο χρόνο των συναισθημάτων για κάθε σύντροφο. Η ίδια ιστορία μπορεί να παρουσιασθεί πιο συνοπτικά με μία καμπύλη που δείχνει την ταυτόχρονη εξέλιξη των συναισθημάτων σε ένα δυοδιάστατο χώρο. Στην ακατάληπτη γλώσσα των δυναμικών συστημάτων, αυτή η καμπύλη ονομάζεται τροχιά και ξεκινά από το σημείο που αντιπροσωπεύει τα αρχικά συναισθήματα των δύο ατόμων. Μια σειρά από τροχιές που ξεκινούν από διαφορετικές αρχικές συνθήκες ονομάζονται στατικό πορτραίτο και είναι ένα πολύ αποτελεσματικό εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις επιπτώσεις των διάφορων παραγόντων που επηρεάζουν το ζευγάρι (για παράδειγμα οι εξωσυζυγικές σχέσεις).

Στη μελέτη των ρομαντικών σχέσεων, τα στατικά πορτραίτα είναι δύσκολο να βρεθούν από άμεση παρατήρηση των ατόμων, όμως μπορούν εύκολα να παραχθούν με τη βοήθεια μαθηματικών μοντέλων. Έτσι, πρώτα γίνεται η παρουσίαση μιας μικρής έρευνας των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν ακολουθούμενη από τα κύρια χαρακτηριστικά τους. Στα επόμενα μοντέλα, η χρονική εξέλιξη της συσχέτισης ενός ατόμου υποδεικνύεται από την ανισορροπία μεταξύ της φθοράς, λόγω της λήθης, και της αναγέννησης, λόγω της ανταπόκρισης των ατόμων. Αυτό οδηγεί φυσιολογικά στην αντίληψη της ανταπόκρισης στην εμφάνιση και στην αγάπη, τα οποία είναι τα βασικά συστατικά των μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν. Αυτές οι έννοιες επιτρέπουν στα ασφαλή άτομα να καθοριστούν επίσημα ως εκείνα με αυξανόμενη ανταπόκριση στην αγάπη και αβίαστα άτομα ως εκείνα με συναρτήσεις αντίδρασης που δεν επηρεάζονται από την εμπλοκή του ίδιου του ατόμου.



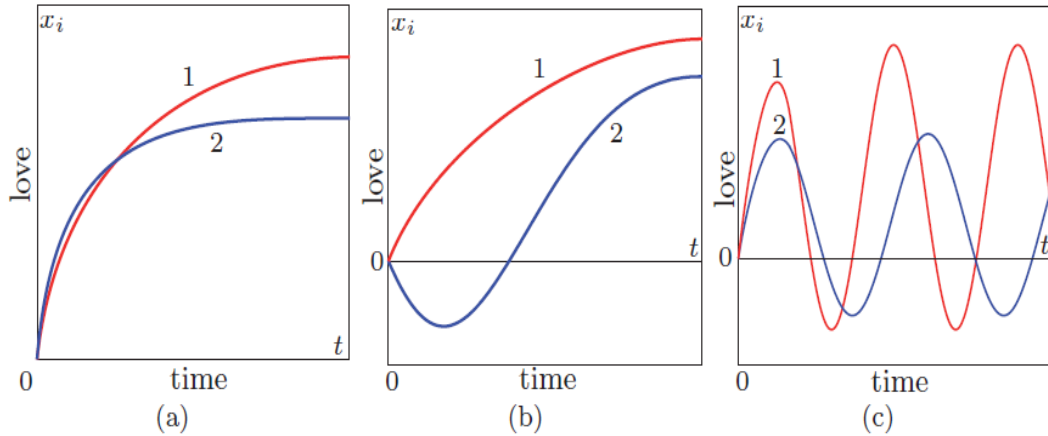
## 1.1 Γραφική απεικόνιση των ιστοριών αγάπης

Οι προσπάθειες για την αυστηρό καθορισμό της αγάπης είναι αναρίθμητες και μπορούν να βρεθούν σε διάφορα επιστημονικά πεδία, συγκεκριμένα στη ψυχολογία, στην ανθρωπολογία και στην κοινωνιολογία. Σε αυτές τις μελέτες, η αγάπη συχνά αντιλαμβάνεται εννοιολογικά ως ένα σύνολο συμπεριφορών, για παράδειγμα η προσκόλληση, η φροντίδα και ο έρωτας, όπως συζητήθηκε από τον Bowlby (1969) στον απολογισμό του στη θεωρία της προσκόλλησης (*Attachment theory*), ή ως πάθος, τρυφερότητα και δέσμευση στη θεωρία που προτάθηκε από τον Stenberg (1986). Από τις τρεις αυτές διαστάσεις, η προσκόλληση είναι αυτή που έχει λάβει τις μεγαλύτερες διαστάσεις, γιατί πιστεύεται ότι επηρεάζει και την ερωτική διάσταση.

Παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει γενική συμφωνία μεταξύ των διαφορετικών μελετών γύρω από τον προσδιορισμό των συναισθημάτων, ποιοτικές δηλώσεις παρατηρούνται πολύ συχνά ακόμα στην καθημερινή ζωή και γλώσσα, οι οποίες αποκαλύπτουν συγκρίσεις σε σχέση με το χρόνο. Για παράδειγμα: «την αγαπούσα όλο και περισσότερο», ή σε σχέση με άλλα άτομα, για παράδειγμα: «της αρέσω περισσότερο εγώ». Το είδος της εμπλοκής δύο ατόμων έχει επίσης και πρόσημο, για παράδειγμα «δεν την αγαπώ πλέον, στην πραγματικότητα την μισώ», με το μηδέν να υποδηλώνει την αδιαφορία.

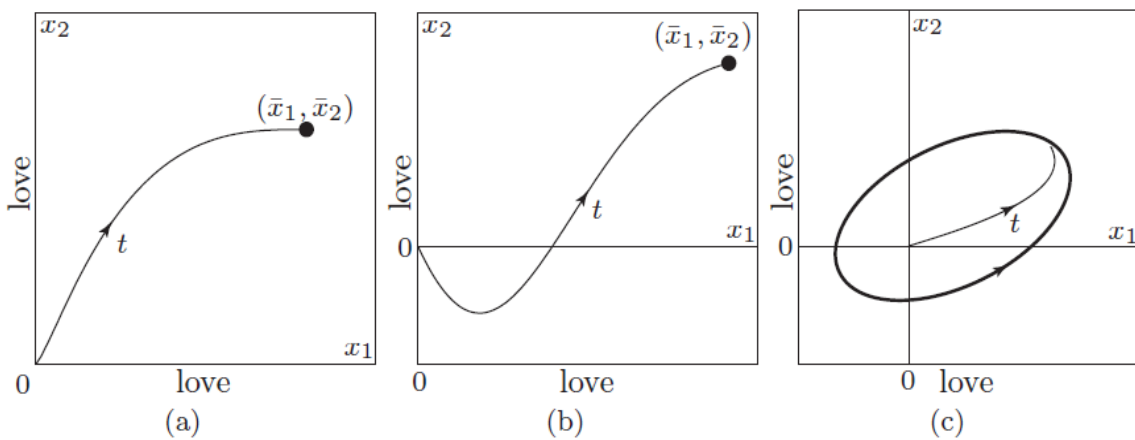
Αν γίνει η υπόθεση ότι τα συναισθήματα ενός ατόμου για τον άλλον μπορούν να μετρηθούν με ένα πραγματικό αριθμό, τότε η ιστορία αγάπης μεταξύ δύο ατόμων (για παράδειγμα 1=αυτή, 2=αυτός) μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο διαγράμματα που δείχνουν την εξέλιξη στο χρόνο των δικών της και δικών του συναισθημάτων ( $x_1(t)$  και  $x_2(t)$ ). Αν  $t = 0$  είναι ο χρόνος στον οποίο η ιστορία αγάπης ξεκινάει και τα άτομα είναι άγνωστα μεταξύ τους ( $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ), τα δύο διαγράμματα ξεκινούν από την αρχή του χώρου  $(t, x)$ .

Στο διάγραμμα 1.1 παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές ιστορίες αγάπης. Η πρώτη είναι πολύ απλή: τα δύο άτομα εμπλέκονται όλο και περισσότερο, όσο περνάει ο χρόνος και αργά ή γρήγορα, για παράδειγμα μετά από λίγους μήνες, θα φτάσουν σε ένα σημείο  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  στο οποίο παραμένουν για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, ιδανικά για πάντα. Η δεύτερη ιστορία είναι όμοια με την πρώτη μακροχρόνια, αλλά όχι αρχικά όπου ο άντρας είναι ανταγωνιστικός ( $x_2 < 0$ ). Τέλος, το τρίτο ζευγάρι καμπυλών παρουσιάζει μία σχετικά άγρια ιστορία στην οποία αυτή έχει αξιοσημείωτα και επαναλαμβανόμενα πάνω και κάτω, τα οποία εισάγουν και τον άντρα σε ένα παρόμοιο αλλά λιγότερο ανώμαλο μοτίβο.



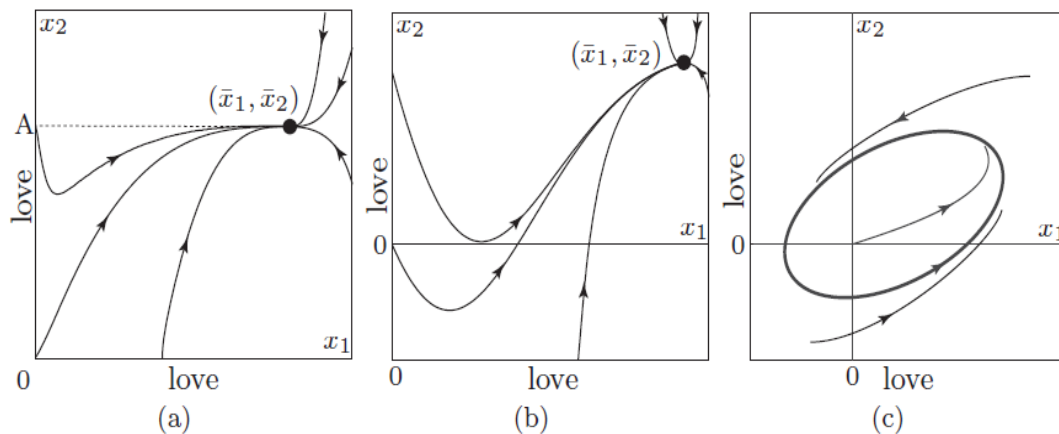
Διάγραμμα 1.1 Τρεις ερωτικές ιστορίες που ξεκινούν από το στάδιο της πλήρους αδιαφορίας.

Κάθε ιστορία μπορεί να παρουσιασθεί πιο συνοπτικά με ένα μόνο διάγραμμα που δείχνει την ταυτόχρονη εξέλιξη των  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  στο χώρο των συναισθημάτων. Τα τρία σχήματα του διαγράμματος 1.2 δείχνουν τις ίδιες ιστορίες που περιγράφονται στο 1.1. Τα γραφήματα σε αυτά τα διαγράμματα ονομάζονται **τροχιές** στη γλώσσα της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων. Αν οι 1 και 2 είναι αρχικά αδιάφοροι ο ένας στον άλλον, η τροχιά ξεκινάει από την αρχή  $t=0$  και αναπτύσσεται στο χρόνο όπως δείχνει το βέλος. Η ταχύτητα με την οποία το σημείο  $(x_1(t), x_2(t))$  κινείται κατά μήκος της τροχιάς δεν είναι σταθερή, επειδή η ανάπτυξη των ιστοριών αγάπης χαρακτηρίζεται συχνά από επιταχύνσεις και μεταπτώσεις. Συγκεκριμένα, τα συναισθήματα τείνουν για  $t \rightarrow \infty$  προς ένα σημείο  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , όπως στο διάγραμμα 1.1.a, και στο (1.1.b), που η τροχιά πρέπει να επιβραδύνει όταν πλησιάζει το σημείο  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , γνωστό και ως σημείο ισορροπίας.



Διάγραμμα 1.2: οι ιστορίες του διαγράμματος 1.1 στο χώρο των συναισθημάτων

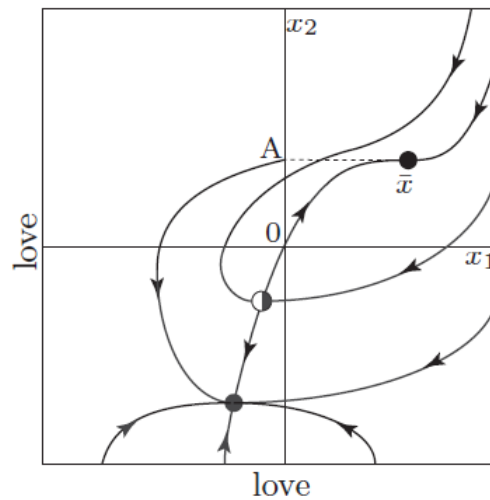
Για διάφορους λόγους, μπορεί να είναι ενδιαφέρον να γίνει η περιγραφή της εξέλιξης των συναισθημάτων ξεκινώντας από μία αρχική συνθήκη. Αυτό μπορεί να γίνει, πρακτικά, παίρνοντας έναν κατάλληλο αριθμό τροχιών στο χώρο των συναισθημάτων ξεκινώντας από διαφορετικά σημεία  $(x_1(0), x_2(0))$ , όπως φαίνεται, για παράδειγμα, στο διάγραμμα 1.3, για τις τρεις ιστορίες που ήδη αναφέρθηκαν πιο πάνω. Εάν οι τροχιές του φασικού πορτραίτου είναι επαρκείς σε νούμερο και σωστά διανεμημένες, είναι εύκολο να φανταστεί κάποιος πώς θα εξελιχθεί η ιστορία από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη/κατάσταση.



Διάγραμμα 1.3: φασικά πορτραίτα για τρία διαφορετικά παραδείγματα. Οι αρχικές τροχιές είναι αυτές του διαγράμματος 1.2.

Το φασικό πορτραίτο επιτρέπει να γίνει η πρόβλεψη των επιπτώσεων των μικρών αλλά σχετικών διαταράξεων που συμβαίνουν στο ζευγάρι. Για παράδειγμα, ας γίνει η υπόθεση ότι το ζευγάρι που περιγράφεται στο διάγραμμα 1.2a έχει ήδη φτάσει στην ισορροπία  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  και ότι το ένα από τα δύο άτομα, για παράδειγμα το άτομο 1, έχει μία εξωσυζυγική κρυφή σχέση. Σαν αποτέλεσμα, τα συναισθήματα  $x_1$  πέφτουν απότομα, από το  $\bar{x}_1$  στο 0, ενώ τα συναισθήματα  $x_2$  παραμένουν στο  $\bar{x}_2$ . Έτσι, όταν η κρυφή σχέση τελειώσει, τα συναισθήματα είναι  $(0, \bar{x}_2)$  και όχι  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Το φασικό πορτραίτο του 1.3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει τις συνέπειες της εξωσυζυγικής σχέσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η νέα τροχιά που ξεκινά από το σημείο A του διαγράμματος 1.3a κινείται προς το σημείο  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Ωστόσο, υπάρχει μία προσωρινή πτώση της εμπλοκής του ατόμου 2. Με άλλα λόγια, όσο στο ζευγάρι υπάρχει ακόμα το ενδιαφέρον, το σοκ της εξωσυζυγικής σχέσης έχει αρνητικές επιπτώσεις βραχυχρόνια, αλλά οι αρνητικές επιδράσεις θα απορροφηθούν μακροχρόνια. Φυσικά, σε διαφορετικά ζευγάρια, παρόμοιες καταστάσεις θα μπορούσαν να έχουν διαφορετικές επιπτώσεις, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.4 όπου η παράνομη σχέση

ωθεί μία μετακίνηση από ένα θετικό ρομαντικό καθεστώς σε ένα μόνιμο αρνητικό (ανταγωνιστικό) καθεστώς.



Διάγραμμα 1.4: το φασικό πορτραίτο ενός ζευγαριού με δύο εναλλακτικά στατικά μοτίβα. Τα μαύρα σημεία δείχνουν ευσταθή ισορροπία, ενώ το μισό μαύρο είναι σαγματικό σημείο.

Τα φασικά πορτραίτα όπως αυτά στα διαγράμματα 1.3 και 1.4 μπορούν εύκολα να παρατηρηθούν στη Φυσική και στη Χημεία μέσα από συνεχείς και ακριβείς μετρήσεις των μεταβλητών που απασχολούν κάθε φορά. Σε άλλα πεδία, όπως στη Βιολογία, στα Οικονομικά και στην Κοινωνιολογία (συγκεκριμένα στη μελέτη των διαπροσωπικών σχέσεων), οι παρατηρήσεις είναι σπάνιες και συχνά ανακριβή δείγματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι τροχιές του φασικού πορτραίτου μπορούν να αποκτηθούν μόνο από κατάλληλη ερμηνεία των λίγων διαθέσιμων πληροφοριών.

## 1.2 Τα μοντέλα

Τα φασικά πορτραίτα μπορούν να παραχθούν από μαθηματικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται στα βασικά χαρακτηριστικά του ζευγαριού. Από τη μία, αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να εξαχθούν έπειτα από ανάλυση μιας σύντομης συζήτησης μεταξύ των συντρόφων, όπως έγινε, για παράδειγμα, από τον Gottman (2002). Από την άλλη, ακολουθώντας την κλασική προσέγγιση της ψυχολογίας, τα χαρακτηριστικά του ζευγαριού μπορούν να αναγνωρισθούν μέσα από την περιγραφή ενός σημαντικού αριθμού από γεγονότα που εμπλέκεται το ζευγάρι, τα οποία γίνονται γνωστά μέσα από τους δύο συντρόφους, από μέλη της οικογένειάς τους ή

και από φίλους. Αν ακολουθηθούν αυτές οι προσεγγίσεις, το μοντέλο μπορεί να γίνει μόνο για ζευγάρια που ήδη υπάρχουν, το οποίο, προφανώς, αποτελεί ένα σοβαρό μειονέκτημα, καθώς το πιο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η ανάπτυξη μοντέλων που θα προβλέπουν την υποθετική εξέλιξη ιστοριών αγάπης μεταξύ ατόμων που ακόμα δεν έχουν γίνει ζευγάρι. Προφανώς, αυτό το φιλόδοξο έργο μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εάν ένα μοντέλο μπορεί να χτιστεί στη βάση των ψυχοσωματικών χαρακτηριστικών (στη συνέχεια αναφέρονται ως τον τρόπο που αντιδρούν τα άτομα στην αγάπη και στην έλξη τους για ένα άλλο άτομο), τα οποία, όντας αυστηρά προσωπικά, μπορούν να αναγνωρισθούν εκ των προτέρων, ακόμα δηλαδή και στην απουσία του συντρόφου. Αν, σύμφωνα με τη θεωρία της προσκόλλησης, γίνει η υπόθεση ότι τα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης συμπεριφοράς καθορίζονται κατά τον πρώτο χρόνο της ζωής του ατόμου, τότε η εξέλιξη μιας ρομαντικής σχέσης είναι προκαθορισμένη.

Ωστόσο, στην πραγματική ζωή, τα ζευγάρια επηρεάζονται από πολλά και απρόβλεπτα γεγονότα λόγω των διαταραχών του κοινωνικού περιβάλλοντος. Έτσι, η εξέλιξη μιας ερωτικής ιστορίας μπορεί να αποκλίνει από την πορεία που είχε προκαθορίσει η συμπεριφορά και τα χαρακτηριστικά των ατόμων. Επειδή είναι προφανώς αδύνατο να μοντελοποιηθούν τα απρόβλεπτα γεγονότα, στην παρακάτω μελέτη γίνεται η υπόθεση ότι τα ζευγάρια ζουν την αγάπη τους με την απουσία σχετικών εξωτερικών παραγόντων.

Τα μαθηματικά μοντέλα που είναι ικανά να εξάγουν φασικά πορτραίτα όπως αυτά που φαίνονται στο διάγραμμα 1.3, είναι πολλά σε αριθμό και διαφορετικής φύσεως. Για παράδειγμα, κάποιο θα μπορούσε να μιμηθεί τη συμπεριφορά των δύο ατόμων χωρίζοντας την καθημερινή τους ζωή σε μια σειρά από στοιχειώδεις περιόδους: μερικές στιγμές που ζουν χωριστά, μερικές στιγμές οικογενειακής ζωής και μερικές τρυφερότητας. Σε αυτά τα μοντέλα, που μερικές φορές ονομάζονται Individual Based Models (IBMs), η ζωή του ζευγαριού μπορεί να παρουσιασθεί εικονικά με μεγάλη λεπτομέρεια με την ελπίδα ότι θα εξάγει αξιόπιστα αποτελέσματα. Ωστόσο, πειράματα σε άλλα πεδία, όπως η βιολογία και τα οικονομικά, δείχνουν ότι τα αποτελέσματα είναι σχετικά εύθραυστα γιατί είναι συχνά ευαίσθητα σε συγκεκριμένες περιόδους. Έτσι δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι τα IBM μοντέλα δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ποτέ για την προσομοίωση της εξέλιξης μιας ερωτικής σχέσης.

Διαφορετικά είδη υπολογιστικών μοντέλων έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο αριθμό ερευνών προκειμένου να προβλέψουν την εξέλιξη των ερωτικών σχέσεων. Στις πιο σχετικές έρευνες, ένα μοντέλο που ονομάζεται RELATE προτάθηκε και χρησιμοποιήθηκε για εξομοιώσεις. Ένα τέτοιο μοντέλο εξάγει δυαδικούς πίνακες που αναπαριστούν διαφορετικές διαπροσωπικές σχέσεις. Προφανώς, είναι ένα δυναμικό μοντέλο αλλά είναι περισσότερο περίπλοκο και

λιγότερο κατανοητό από τα μοντέλα ODE (Ordinary Differential Equations) τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

### 1.3 Δυναμικά Συστήματα - Μοντέλα ODE

Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για να παράγουν φασικά πορτραίτα όπως αυτά του διαγράμματος 1.3 είναι βασισμένα σε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και είναι γνωστά ως ODE μοντέλα. Αυτά τα μοντέλα, εισήχθησαν από τον Νεύτωνα τον 17<sup>ο</sup> αιώνα για να περιγράψουν τη δυναμική των μηχανικών συστημάτων και αποτελούνται από έναν ( $n$ ) αριθμό διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ dx_2(t)/dt &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ dx_n(t)/dt &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Όπου  $x_i(t)$  και  $dx_i(t)/dt$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι  $n$  σχετικές μεταβλητές και οι παράγωγοί τους, και οι  $n$  συναρτήσεις  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  που εξαρτώνται από τα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Στη συνέχεια, το μοντέλο (1.1) γράφεται συνήθως πιο συνοπτικά ως

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.2}$$

Όπου  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  και το  $\dot{x}(t)$  αντικαθιστά το  $dx(t)/dt$ . Δοθείσης της αρχικής συνθήκης  $x(0)$ , οι εξισώσεις (1.1) μπορούν να ολοκληρωθούν για να παράγουν την εξέλιξη της κατάστασης, δηλαδή  $x(t)$  για  $t \geq 0$ . Στην πραγματικότητα, οι εξισώσεις (1.1) μπορούν να ολοκληρωθούν αντίστροφα στο χρόνο και έτσι να αναπαράγουν το παρελθόν του συστήματος. Μεγαλύτερης τάξης συστήματα παρατηρούνται εάν οι πρώτοι παράγωγοι της εξίσωσης (1.1) αντικατασταθούν επίσημα από κλασματικής τάξης παραγώγους. Αυτού του είδους τα μοντέλα ονομάζονται «μοντέλα κλασματικής τάξης» και έχουν, επίσης, προταθεί στη μελέτη των ρομαντικών σχέσεων. Ωστόσο, αυτά τα μοντέλα δεν θα απασχολήσουν την παρούσα μελέτη, καθώς η σχέση τους με τη δυναμική της αγάπης δεν έχει υποστηριχθεί ακόμα από λογικά θεωρητικά επιχειρήματα.

Σε ένα μεγάλο αριθμό συνεισφορών της βιβλιογραφίας, φαίνεται πως το μοντέλο (1.1) μπορεί

εννοιολογικά να ικανοποιηθεί και υποθετικά να διαχωριστεί από τη γενική θεωρία της στοχαστικής διαδικασίας (Bellomo and Carbonaro, 2006) ή από πολύ γενικές αρχές. Ωστόσο, αυτές οι προσεγγίσεις δεν είναι πολλά υποσχόμενες, αν ο στόχος της μελέτης είναι η δημιουργία μοντέλου για συγκεκριμένες ιστορίες αγάπης.

Εναλλακτικά, το μοντέλο (1.1) μπορεί να παραγωγηθεί, υποθέτοντας ότι οι δύο σύντροφοι είναι ορθολογικοί και θέλουν να μεγιστοποιήσουν τη χρησιμότητά τους. Αυτή η ιδέα, η οποία είναι πολύ δημοφιλής στα οικονομικά και στο μάρκετινγκ, οδηγεί φυσιολογικά στη δημιουργία του προβλήματος αριστοποίησης, η λύση του οποίου είναι ένα σετ εξισώσεων όπως το (1.1). Στη μελέτη των ερωτικών σχέσεων, η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιήθηκε από τον Hartl και Mehlmann (1984), οι οποίοι μοντελοποίησαν το διάσημο Ιταλό ποιητή Πετράρχη ως έναν ορθολογικά εθισμένο στην αγάπη του για τη Λάουρα. Η ανάλυσή τους δίνει επίσημη στήριξη στην μελέτη του Jones (1995), ο οποίος ανακάλυψε τις αναταραχές στη σχέση του ποιητή και της αγαπημένης του. Πιο πρόσφατα, ο Rey (2010) ακολούθησε επιτυχώς την ίδια προσέγγιση για να βρει την καλύτερη λύση μεταξύ του κόστους της φθοράς μιας σχέσης και του κόστους για να κρατηθεί ζωντανή.

Η προσέγγιση του Rey εστιάζει στη φάση της συζυγικής διάλυσης και μάλιστα, η έρευνά του ξεκινά από τη στιγμή που τα συναισθήματα των συντρόφων είναι στο ανώτερο σημείο τους, ενώ δε γίνεται αναφορά στην εξέλιξη της σχέσης από τη στιγμή που γνωρίζονται. Μία ενδιαφέρουσα προέκταση στην περίπτωση που η συζυγική διάλυση μπορεί να περιέχει μία γενετική συνιστώσα μπορεί να βρεθεί στο Zhou et al. (2014), ενώ η επιρροή της κοινωνίας εξετάζεται από τους Bauso et al. (2014).

Η προσέγγιση της παρούσας εργασίας είναι, όμως, λιγότερο ρεαλιστική. Εάν οι μεταβλητές  $x_i(t)$  θεωρηθούν ως οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα άτομα, οι εξισώσεις (1.1) μπορούν να παρουσιαστούν ως εξισώσεις ισορροπίας στις οποίες οι συναρτήσεις  $f_i$  είναι οι διαφορές μεταξύ των ροών παραγωγής και κατανάλωσης. Τα πιο απλά μοντέλα (πολλές φορές ονομάζονται μινιμαλιστικά) είναι αυτά με  $n = 2$ , όπου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  δείχνουν την εμπλοκή του κάθε ατόμου με το σύντρόφό του. Τα μοντέλα με  $n > 3$  ονομάζονται σύνθετα.

Τα απλά μοντέλα αποτελούνται από δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, μία για κάθε σύντροφο. Δηλαδή:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{1.3}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

όπου  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , είναι μία μέτρηση της αγάπης του ατόμου  $i$  για τον σύντροφο  $j$  ( $j \neq i$ ). Στη συνέχεια,  $x_i(t)$  ονομάζεται η εμπλοκή, ή πιο συχνά τα συναισθήματα. Τα απλά μοντέλα είναι μία απλούστευση της πραγματικότητας επειδή: πρώτον, η αγάπη είναι ένα σύνθετο συναίσθημα που αποτελείται από διαφορετικά συναισθήματα (πάθος, φιλία, έλξη κλπ) και έτσι είναι δύσκολο να παρουσιασθεί μόνο μέσα από μία μεταβλητή και δεύτερον, οι τάσεις και τα συναισθήματα που προέρχονται από την κοινωνική ζωή του ατόμου δεν μπορούν να συμπεριληφθούν σε μία μόνο εξίσωση. Με άλλα λόγια, σε ένα απλό μοντέλο, λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο ατόμων, ενώ ο υπόλοιπος κόσμος μένει παγωμένος και δεν συμμετέχει στην εξέλιξη της σχέσης.

#### 1.4 Ατομικά χαρακτηριστικά: λήθη, ανταπόκριση και έλξη

Οι συναρτήσεις  $f_i$  στο μοντέλο (1.3) είναι η διαφορά μεταξύ των ροών αγάπης που δημιουργούνται και των ροών αγάπης που καταναλώνονται. Οι παραγόμενες ροές είναι απλά οι αντιδράσεις των ατόμων  $i$  στη φροντίδα που προσδοκούν από το σύντροφο  $j$ . Μερικές από αυτές τις προσδοκίες είναι ανεξάρτητες από τα συναισθήματα  $x_j$  του ατόμου  $j$  και η ανταπόκριση σε αυτά ονομάζεται ανταπόκριση στην έλξη  $R_i^A$  (A: appeal). Οι υπόλοιπες προσδοκίες είναι συναρτήσεις των συναισθημάτων  $x_j$  και η ανταπόκριση σε αυτά ονομάζεται ανταπόκριση στην αγάπη  $R_i^L$  (L: love). Η ροή κατανάλωσης δημιουργείται λόγω της φυσικής διαδικασίας της λήθης και παρουσιάζεται ως  $O_i$ . Συνοψίζοντας, οι δύο δεξιές πλευρές της εξίσωσης (1.3) παίρνουν τη μορφή:

$$f_i = R_i^A + R_i^L - O_i \tag{1.4}$$

όπου οι τρεις μεταβλητές πρέπει να προσδιορισθούν περαιτέρω.



Η διαδικασία της λήθης μπορεί εύκολα να μελετηθεί εξετάζοντας την ακραία περίπτωση ενός ατόμου το οποίο έχει εγκαταλειφθεί (ή έχει χωρίσει) από το σύντροφό του, το οποίο συνεπάγεται  $R_i^A = R_i^L = O_i$ . Αν υποθέσουμε ότι, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.5, σε τέτοιες συνθήκες το  $x_i(t)$  φθίνει εκθετικά κατά  $a_i$ , ο οποίος ονομάζεται συντελεστής λήθης, πρέπει να γράψουμε

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) \quad (1.5)$$

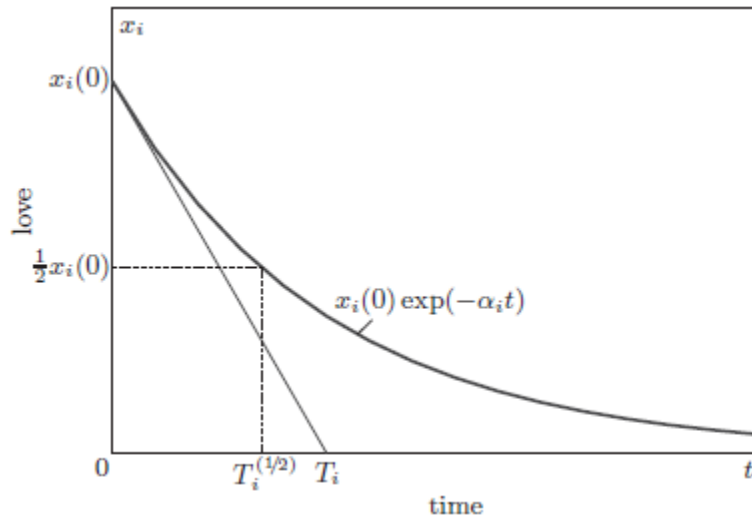
το οποίο σημαίνει ότι η ροή κατανάλωσης εξαρτάται γραμμικά από το  $x_i$ , οπότε  $O_i = a_i x_i$ . Η ίδια υπόθεση γραμμικότητας γίνεται συνήθως στη Φυσική και στη Χημεία για όλες τις ροές κατανάλωσης. Πιο σύνθετες μορφές για τη ροή της λήθης  $O_i$  είναι επίσης πιθανές, για παράδειγμα στην περίπτωση που μία γυναίκα εμπλέκεται με δύο άντρες και τότε θα ξεχνά πιο γρήγορα αυτόν με τον οποίο εμπλέκεται λιγότερο. Αξίζει να σημειωθεί πως ο συντελεστής λήθης, ο οποίος αναμφισβήτητα είναι ένα ατομικό χαρακτηριστικό, είναι ισχυρά εξαρτώμενος από την κουλτούρα του πληθυσμού στον οποίο ανήκει το άτομο. Η λύση της εξίσωσης (1.5)

$$x_i(t) = x_i(0) \exp(-a_i t)$$

γράφεται συνήθως στη μορφή

$$x_i(t) = x_i(0) \exp(-t/T_i)$$

όπου  $T_i = 1/a_i$  είναι ο παράγοντας χρόνος και έχει την απλή γραφική αναπαράσταση του διαγράμματος (1.5).



Διάγραμμα 1.5 Το ενδιαφέρον του συντρόφου φθίνει εκθετικά ύστερα από το διαχωρισμό:

$T_i = 1/a_i$  είναι ο παράγοντας χρόνος και  $T_i^{(1/2)}$  είναι η μισή ζωή.

Επειδή  $x_i(T_i) = x_i(0) \exp(-1) = 0.37x_i(0)$  μπορούμε να πούμε ότι ο παράγοντας χρόνος  $T_i$  είναι ένας καλός δείκτης για το πόσος χρόνος χρειάζεται για να ξεχάσει «πρακτικά» κάποιος τον πρώην σύντροφο. Ένας παρόμοιος δείκτης, ο οποίος συχνά χρησιμοποιείται στη Φυσική και τη Βιολογία, είναι ο δείκτης μισής-ζωής και είναι ο χρόνος  $t = T_i^{(1/2)}$  στον οποίο το  $x_i(t)$  είναι το μισό της αρχικής τιμής  $x_i(0)$ . Έτσι,

$$\exp\left(-\frac{T_i^{(1/2)}}{T_i}\right) = \frac{1}{2}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$T_i^{(1/2)} = T_i \log 2 = 0.69T_i.$$

Επειδή η εμπειρία έχει δείξει πως ο χρόνος που χρειάζεται για να ξεχαστεί ένας πρώην σύντροφος μπορεί να ποικίλει από μερικές βδομάδες έως μερικά χρόνια, μπορούμε να πούμε

ότι η τυπική διάρκεια μιας ερωτικής ιστορίας στην οποία η διαδικασία της λήθης παίζει καθοριστικό ρόλο πρέπει να είναι στην ίδια χρονική διάρκεια. Έτσι, τα απλά μοντέλα που χρησιμοποιούνται δεν μπορούν να περιγράψουν σχέσεις πολύ μικρής διάρκειας, για παράδειγμα ένα σαββατοκύριακο, ή πολύ μακροχρόνιες σχέσεις, για παράδειγμα σχέσης που κρατούν μια ζωή.

Η έλξη  $A_{j/i}$  του ατόμου  $j$  που γίνεται αντιληπτή από το άτομο  $i$  έχει διάφορους παράγοντες  $A_{j/i}^h$  όπως τη σωματική έλξη, την ευφυΐα, την εκπαίδευση, την ηλικία, τον πλούτο και άλλους, που είναι ανεξάρτητοι των συναισθημάτων  $x_j$ . Αν  $\lambda_i^h$  είναι το βάρος που το άτομο  $i$  δίνει στον  $h$  παράγοντα της έλξης του συντρόφου, μπορεί να προσδιορισθεί η έλξη του  $j$  (που γίνεται αντιληπτή από τον  $i$ ) ως

$$A_{j/i} = \sum_h \lambda_i^h A_{j/i}^h$$

Έτσι, η έλξη ενός ατόμου δεν είναι ένα απόλυτο χαρακτηριστικό του ατόμου αλλά μάλλον μία τιμή που γίνεται αντιληπτή από τον μελλοντικό ή τον τωρινό σύντροφο. Στη συνέχεια, για συντομία, η έλξη  $A_{j/i}$  θα περιγράφεται ως  $A_j$ .

Η ροή του ενδιαφέροντος  $R_i^A$  που δημιουργείται από το άτομο  $i$  από την έλξη του συντρόφου, λαμβάνεται από τον πολλαπλασιασμό  $A_j$  με τον παράγοντα  $\gamma_i$  που δείχνει την ανταπόκριση του ατόμου  $i$  στην έλξη

$$R_i^A = \gamma_i A_j = \gamma_i \sum_h \lambda_i^h A_{j/i}^h \quad (1.6)$$

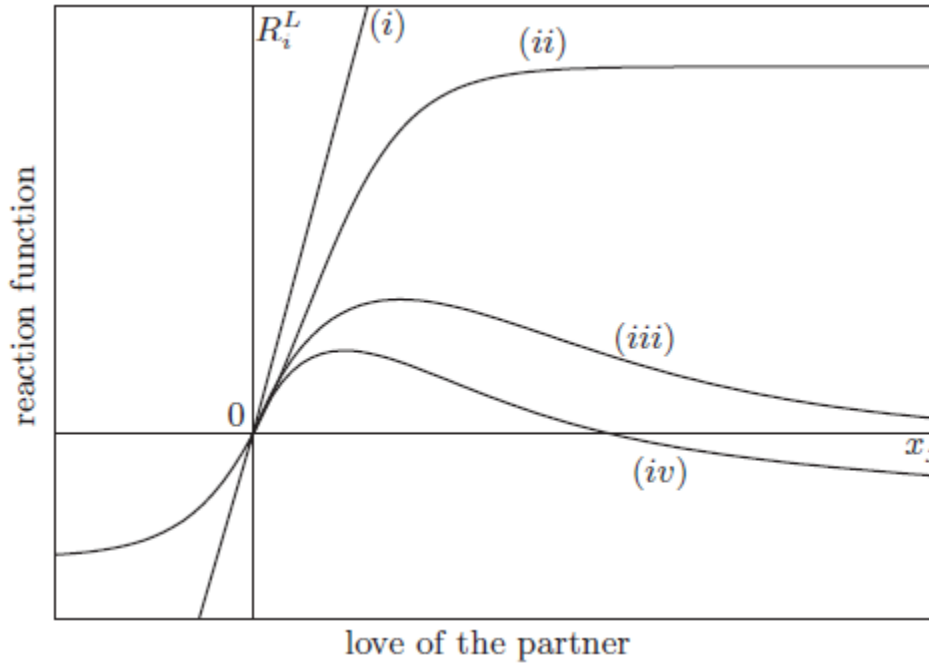
Σε πολλά μοντέλα, γίνεται η υπόθεση ότι όλοι οι όροι του (1.6) είναι αμετάβλητοι στο χρόνο γιατί σε πολλές αληθινές ιστορίες αγάπης η έλξη, τα βάρη και η ανταπόκριση δε μεταβάλλονται αξιοσημείωτα στο χρόνο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ανταπόκριση στην έλξη του μοντέλου (1.4) είναι απλά σταθερή. Ωστόσο, σε άλλες περιπτώσεις, η ερωτική ιστορία πρέπει να χωριστεί σε ένα αριθμό τμημάτων, που το κάθε ένα να χαρακτηρίζεται από σαφείς τιμές ανταπόκρισης στην έλξη. Για παράδειγμα, η διάσημη ιστορία αγάπης μεταξύ της

Scarlett O'Hara και του Rhett Butler στο «Όσα παίρνει ο άνεμος», πρέπει να χωριστεί σε δύο μέρη, σε ένα πριν και σε ένα μετά τον εμφύλιο πόλεμο, γιατί κατά τη διάρκεια του πολέμου υπάρχουν αλλαγές στην κατάσταση της Scarlett και του Rhett: αυτός γίνεται πολύ πλούσιος, ενώ η Scarlett έρχεται αντιμέτωπη με μεγάλες μειώσεις στην οικονομική της κατάσταση.

Η ανταπόκριση στην αγάπη  $R_i^L$  του ατόμου  $i$  πρέπει προφανώς να εξαρτάται από το  $x_j$ . Σύμφωνα με τις μελέτες της ψυχολογίας της αγάπης, τα άτομα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: στα ασφαλή και στα ανασφαλή άτομα. Τα **ασφαλή άτομα** έχουν θετικά διανοητικά μοντέλα του εαυτού τους και των άλλων και οι ρομαντικές τους σχέσεις χαρακτηρίζονται από τρυφερότητα και αμοιβαίο σεβασμό. Ανταποκρίνονται θετικά στην αγάπη του συντρόφου τους και δε φοβούνται εάν κάποιος δεθεί συναισθηματικά μαζί τους. Έτσι, τα ασφαλή άτομα χαρακτηρίζονται από αυξανόμενη ανταπόκριση, η οποία είναι

$$\frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} > 0$$

Σε μια ακραία περίπτωση, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι η ανταπόκριση  $R_i^L$  αυξάνεται γραμμικά με το  $x_j$  όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.6. Αλλά, πιο ρεαλιστικά, το  $R_i^L(x_j)$  είναι θετικό (αρνητικό), αυξανόμενο, κοίλα (κυρτά) και οριοθετείται για θετικές (αρνητικές) τιμές του  $x_j$ , όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.6 με την καμπύλη (ii). Η οριοθέτηση των συναρτήσεων αντίδρασης ερμηνεύει τους ψυχοφυσιολογικούς μηχανισμούς που αποτρέπουν τους ανθρώπους να φτάσουν σε υψηλά επίπεδα στρες. Σε αντίθεση, τα **ανασφαλή άτομα**, όπως αυτά που υποδεικνύονται με τις καμπύλες (iii) και (iv) στο διάγραμμα 1.6, έχουν φθίνουσες συναρτήσεις αντίδρασης για τιμές του  $x_j$  πάνω από κάποιο όριο. Έτσι, τα ανασφαλή άτομα αντιδρούν όλο και λιγότερο στην υψηλή πίεση και εμπλοκή με το σύντροφο επειδή δεν αισθάνονται άνετα όταν νιώθουν εξαρτημένοι και πολύ κοντά σε άλλους.



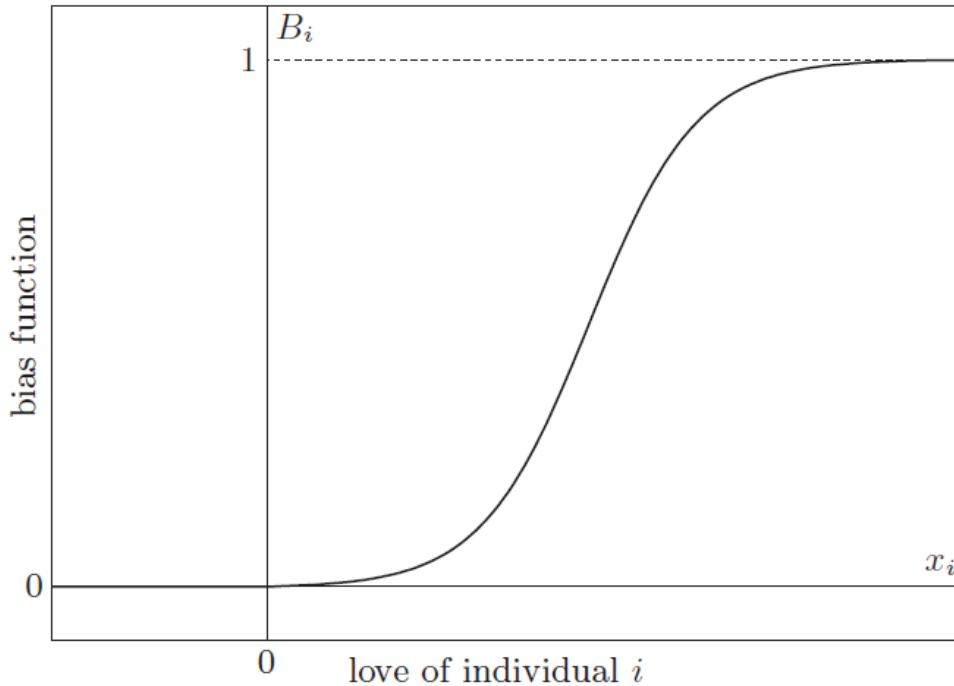
Διάγραμμα 1.6 Παραδείγματα συναρτήσεων αντίδρασης  $R_i^L(x_j)$  από ασφαλή άτομα ((i) και (ii)) και από ανασφαλή άτομα ((iii) και (iv)).

Όπως είναι γνωστό, οι αντιδράσεις των ατόμων μπορούν να ενισχυθούν από την αγάπη. Για παράδειγμα, οι μητέρες έχουν μία προκατειλημμένη εικόνα για την ομορφιά των παιδιών τους. Αυτού του είδους το φαινόμενο, που ονομάζεται *συνέργεια*, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά σε μια μελέτη της αντίληψης της φυσικής έλξης (Simpson et al.1996) η οποία συγκρίνει άτομα τα οποία εμπλέκονται σε μια ρομαντική σχέση με άτομα που δεν εμπλέκονται σε αυτή. Παρόλο που δεν υπάρχει κάποια έρευνα που να υποδεικνύει την ύπαρξη συνέργειας στην αντίδραση της αγάπης του συντρόφου, μπορούμε λογικά να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις αντίδρασης  $R_i^L$  μπορούν να επαυξηθούν από την αγάπη. Είναι επίσης γνωστό, ότι οι συναρτήσεις αντίδρασης μπορούν να εξασθενήσουν με την αγάπη. Για παράδειγμα, τα πλατωνικά άτομα μειώνουν την αντίδρασή τους στη σωματική έλξη του συντρόφου, όσο πιο πολύ εμπλέκονται στη σχέση. Προκειμένου να γίνει η ίδια μεταχείριση όλων των υποθέσεων με την ίδια σημειογραφία και για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση, τα άτομα που παρουσιάζουν *συνέργεια* ή είναι *πλατωνικά* ονομάζονται *προκατειλημμένα*. Έτσι, οι αντιδράσεις στην έλξη και στην αγάπη των προκατειλημμένων ατόμων περιγράφονται ως

$$R_i^A(x_i) = (1 + b_i^A B_i^A(x_i)) \gamma_i A_j$$

$$R_i^L(x_i, x_j) = (1 + b_i^L B_i^L(x_i)) R_i^L(0, x_j)$$

όπου  $R_i^L(0, x_j)$  είναι η αντίδραση στην αγάπη ενός τελείως αδιάφορου ατόμου. Οι συναρτήσεις  $B_i^A(x_i)$  και  $B_i^L(x_i)$  είναι μηδέν για  $x_i \leq 0$  και αυξανόμενες από 0 έως 1 και αρχικά είναι κυρτές και έπειτα κοίλες για  $x_i > 0$  όπως φαίνονται στο διάγραμμα 1.7. Οι σταθερές παράμετροι  $b_i^A$  και  $b_i^L$  είναι οι συντελεστές προκατάληψης και λαμβάνουν την τιμή μηδέν για τα μη προκατειλημμένα άτομα και θετικές τιμές για τα άτομα με συνέργεια, ενώ το  $b_i^A$  είναι αρνητικό για τα άτομα που αναπτύσσουν πλατωνικά συναισθήματα.



Διάγραμμα 1.7 Η καμπύλη μιας τυπικής συνάρτησης  $B_i(x_i)$

### 1.5 Από τα άτομα στα ζευγάρια

Μέχρι τώρα έχουν συζητηθεί τα βασικά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των ατόμων. Εάν αυτά τα χαρακτηριστικά ενσωματωθούν στο μοντέλο (1.4), όλες οι σημαντικές ιδιότητες της εξέλιξης μιας ερωτικής σχέσης του ζευγαριού μπορούν να εξαχθούν από το φασικό πορτραίτο που παράγεται από το μοντέλο.

Μερικές από αυτές τις ιδιότητες ασχολούνται την αρχική φάση της ερωτικής σχέσης, για παράδειγμα, αν και τα δύο άτομα αναπτύσσουν αμέσως θετικά συναισθήματα (διάγραμμα 1.2a) ή όχι (διάγραμμα 1.2b). Άλλες ιδιότητες ασχολούνται με την μακροχρόνια συμπεριφορά του ζευγαριού η οποία αναγνωρίζεται από τα όρια  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  για  $t \rightarrow \infty$ . Συγκεκριμένα, τις περισσότερες φορές έχει ενδιαφέρον να γνωρίζουμε εάν το ζευγάρι μπορεί να έχει εκρηκτική (χωρίς όρια) συμπεριφορά για κάποιες αρχικές συνθήκες, ή εάν το ζευγάρι τείνει σε μια ισορροπία (στατικό καθεστώς), όπως στα διαγράμματα 1.2a,b ή αν τείνει σε μία κλειστή τροχιά που ονομάζεται κύκλος (περιοδικό καθεστώς) όπως στο διάγραμμα 1.2c. Παρουσιάζει ενδιαφέρον αν το ζευγάρι έχει ένα μοναδικό ασυμπτωτικό καθεστώς ή εάν υπάρχουν εναλλακτικά καθεστάτα όπως στο διάγραμμα 1.4. Τέλος, μερικές ιδιότητες αναφέρονται στη συμπεριφορά των ζευγαριών για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Η πιο σχετική ιδιότητα ανάμεσα στις άλλες είναι η θετικότητα, το γεγονός δηλαδή, ότι μη αρνητικά αρχικά συναισθήματα εγγυώνται ότι τα μελλοντικά συναισθήματα δεν μπορούν να είναι αρνητικά.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση των ιδιοτήτων ενός ζευγαριού που μπορούν να εξαχθούν από την ανάλυση ενός μαθηματικού μοντέλου. Τα άτομα μπορούν να χωριστούν σε ασφαλή και τα ανασφαλή καθώς και σε αυτά με προκαταλήψεις ή χωρίς και έτσι μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες. Εάν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν και διαφορές ανάμεσα σε γυναίκες και άντρες, θα πάρουμε δεκαέξι κατηγορίες με την καθεμία να έχει ξεχωριστές ιδιότητες. Επιπλέον, αν επιθυμούμε να γίνει διάκριση μεταξύ οριοθετημένων και χωρίς όρια αντιδράσεων και αργότερα, μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών συναρτήσεων, ο τελικός κατάλογος με πιθανά ζευγάρια θα ήταν τόσο μεγάλος που θα αποθάρρυνε οποιαδήποτε προσπάθεια συστηματικής μελέτης. Για αυτό το λόγο, είναι καλύτερο η ανάλυση να περιοριστεί σε ομογενή ζευγάρια, δηλαδή ζευγάρια με ομοειδή χαρακτηριστικά, τα οποία συναντώνται και πιο συχνά στην πραγματική ζωή.

## Κεφάλαιο 2

### 2. Δυναμικά συστήματα: Η περίπτωση των απλών γραμμικών μοντέλων

#### 2.1 Ιστορική αναδρομή

Η πρώτη προσπάθεια μοντελοποίησης αλλά και πρόγνωσης της πορείας των ανθρώπινων σχέσεων και συναισθημάτων έγινε από τον Strogatz το 1988. Σκοπός του Strogatz ήταν να προτείνει μία διαφορετική προσέγγιση για τα συστήματα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η προσέγγιση συνδύαζε τα μαθηματικά με ένα θέμα που ήταν ήδη στο μυαλό των φοιτητών του: η εξέλιξη σε σχέση με το χρόνο μιας ερωτικής ιστορίας μεταξύ δύο ανθρώπων.

Η ιδέα του Strogatz ήταν η ανάλυση της ρομαντικής σχέσης μεταξύ του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας. Το έργο Ρωμαίος και Ιουλιέτα είναι μια καταθλιπτική ιστορία που έγραψε στην αρχή της καριέρας του ο Ουίλιαμ Σαίξπηρ το 1595 για δύο νεαρούς κατατρεγμένους εραστές που αντιμετωπίζουν τις διενέξεις μεταξύ των φεουδαρχικών οικογενειών τους, καταλήγουν στο θάνατο ως λύση για την ανεκπλήρωτη αγάπη τους. Ο Strogatz όμως έρχεται και ανατρέπει την κλασική ιστορία αγάπης των δύο νέων αλλάζοντας τα συναισθήματά τους και την ανταπόκριση του ενός για τον άλλον.

Σύμφωνα με την παραλλαγή του Strogatz, η Ιουλιέτα είναι ερωτευμένη με τον Ρωμαίο, αλλά ο Ρωμαίος είναι άστατος εραστής. Αυτό σημαίνει ότι όσο περισσότερο τον ερωτεύεται η Ιουλιέτα, τόσο πιο πολύ αρχίζει να την αποστρέφεται αυτός. Αλλά μόλις η Ιουλιέτα χάσει το ενδιαφέρον της για αυτόν, τα συναισθήματά του ξαναζωντανεύουν. Από την άλλη, η Ιουλιέτα μοιάζει να μιμείται τα συναισθήματα του αγαπημένου της. Η αγάπη της μεγαλώνει όσο υπάρχει ανταπόκριση, αλλά μετατρέπεται σε μίσος αν υπάρχει μίσος και από την πλευρά του Ρωμαίου.

Η παραπάνω ρομαντική σχέση μεταξύ του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας περιγράφεται με τη βοήθεια ενός απλού μοντέλου:

$$dr/dt = -a \cdot j$$

$$dj/dt = b \cdot r$$

Όπου:

$r(t)$  = η αγάπη / μίσος του Ρωμαίου για την Ιουλιέτα σε χρόνο  $t$

$j(t)$  = η αγάπη / μίσος της Ιουλιέτας για το Ρωμαίο σε χρόνο  $t$



Θετικές τιμές των  $r, j$  υποδηλώνουν θετικά συναισθήματα, δηλαδή αγάπη, ενώ αρνητικές τιμές των  $r, j$  υποδηλώνουν αρνητικά συναισθήματα, όπως είναι το μίσος. Οι παράμετροι  $a, b$  παίρνουν θετικές τιμές, ώστε να συμβαδίζει το μοντέλο με την ιστορία.

Το αποτέλεσμα του ειδυλλίου είναι λυπηρό καθώς προκύπτει ένας ατέρμων κύκλος από θετικά και αρνητικά συναισθήματα. Βέβαια, υπάρχουν ταυτόχρονα ίδια συναισθήματα στο ένα τέταρτο του χρόνου.

Μια πιθανή παραλλαγή είναι ένα πιο γενικό γραμμικό σύστημα, το οποίο είναι:

$$dr/dt = a_{11}r + a_{12}j$$

$$dj/dt = a_{21}r + a_{22}j$$

όπου οι παράμετροι  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) μπορούν να πάρουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές και δείχνει πώς μεταβάλλονται τα συναισθήματα του ενός σε σχέση με τα συναισθήματα του συντρόφου του. Το ρομαντικό στυλ της σχέσης των δύο συντρόφων θα προσδιοριστεί από την επιλογή που θα γίνει στο πρόσημο των παραμέτρων. Για παράδειγμα, η επιλογή  $a_{11}, a_{12} > 0$  χαρακτηρίζει κάποιον ως «υπερενθουσιώδη» σύντροφο, καθώς ενθαρρύνεται από τα συναισθήματα του συντρόφου του και ο ενθουσιασμός του επιτείνεται ακόμα περισσότερο από τα δικά του συναισθήματα, ενώ για  $a_{11} < 0$  και  $a_{12} < 0$  χαρακτηρίζει τον σύντροφο ως επιφυλακτικό, διότι αποθαρρύνεται από τα συναισθήματα του συντρόφου του. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η πρόγνωση της ερωτικής σχέσης μεταξύ διαφορετικών ρομαντικών στυλ, για παράδειγμα, τι μέλλον θα είχε η σχέση ενός υπερενθουσιώδη Ρωμαίου με μια επιφυλακτική Ιουλιέτα;

Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα μπορούσαν να προστεθούν, σύμφωνα με τον Strogatz, και περισσότερες μεταβλητές για να γίνει πιο ρεαλιστικό καθώς και μη γραμμικοί όροι για να αποτραπούν οι περιπτώσεις της αγάπης χωρίς όρια ή της πλήρης αποστροφής. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τους ποιητές, οι εξισώσεις θα πρέπει να είναι μη αυτόνομες.

## 2.2 Γραμμικά μοντέλα αγάπης

Η πιο απλή περίπτωση ζευγαριών είναι αυτά που αποτελούνται από ασφαλή και αμερόληπτα άτομα, τα οποία ονομάζονται **πρότυπα**. Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις αντίδρασης είναι γραμμικές, ενώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και μη γραμμικές συναρτήσεις, όπου απαιτείται. Η υπόθεση της γραμμικότητας απλουστεύει τη μελέτη, η οποία έτσι μπορεί να γίνει πολύ αναλυτική με τη δύναμη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Έπειτα από μια ιστορική αναδρομή των προσπαθειών για μελέτη που έχουν γίνει στο παρελθόν, πέντε ιδιότητες έχουν επισήμως εξαχθεί από το μοντέλο. Αυτές οι ιδιότητες είναι: η θετικότητα στις συμπεριφορές του ζευγαριού, η ομαλότητα στην εξέλιξη της ερωτικής ιστορίας, η σύγκλιση ως προς ένα ικανοποιητικό στατικό μοτίβο, η επιρροή της έλξης και η επιρροή της ανταπόδοσης πάνω στην ποιότητα της ρομαντικής σχέσης. Όλες αυτές οι ιδιότητες είναι συνεπείς ως προς την κοινή γνώμη πάνω στο πρόβλημα, δηλαδή οι ίδιες ιδιότητες μπορούν να εξαχθούν σε ικανοποιητικό βαθμό από εμπειρική διαπίστωση.

Τέλος, οι παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιούνται για να συζητηθεί η δομική ευστάθεια μιας κοινωνίας, δηλαδή την πιθανότητα να μην υπάρχει χωρισμός και δημιουργία νέων ζευγαριών σε μια κοινωνία. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η κοινωνία θα είναι ευσταθής, αν και μόνο αν η *n*-οστή πιο όμορφη γυναίκα είναι ζευγάρι με τον *n*-οστό πιο όμορφο άντρα. Το αποτέλεσμα διαχωρίζεται από τις καθαρά θεωρητικές αντιδράσεις και έρχεται σε συμφωνία με την εμπειρική διαπίστωση, η οποία δείχνει τον σημαντικό ρόλο της εμφάνισης και της έλξης σε μια κοινωνία.

Ο Sergio Rinaldi ροτείνει ένα μινιμαλιστικό μοντέλο που αποτελείται από δύο απλές διαφορικές εξισώσεις για να περιγράψει ένα δυναμικό μοντέλο αγάπης μεταξύ δύο ατόμων. Η εξίσωση λαμβάνει υπόψιν τρεις μηχανισμούς της ενδυνάμωσης και της φθοράς της αγάπης μεταξύ δύο ατόμων: (α) την ευχαρίστηση του να αγαπιέται κάποιος (ανταπόκριση/return), (β) την ανταπόκριση στην έλξη του συντρόφου (ένστικτο/instinct) και (γ) τη διαδικασία λήθης (λήθη/oblivion). Κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις της συμπεριφοράς των ατόμων, το μοντέλο είναι ένα θετικό γραμμικό σύστημα.

Το μοντέλο που είχε ήδη προταθεί από τον Strogatz είναι, σύμφωνα με τον Rinaldi, μη ρεαλιστικό, καθώς δεν λαμβάνει υπόψιν την έλξη μεταξύ δύο ατόμων. Έτσι, το μοντέλο του Strogatz δεν εξηγεί, για παράδειγμα, γιατί δύο άτομα που είναι εντελώς άγνωστα μεταξύ τους και αδιάφορα το ένα για το άλλο, μπορούν να αναπτύξουν ερωτική σχέση μεταξύ τους. Το

μοντέλο που πρότεινε ο Rinaldi το 1998 στο άρθρο του «*Love dynamics: The case of linear couples*», αν και συνεχίζει να είναι μινιμαλιστικό, είναι πιο ρεαλιστικό. Τρεις παράμετροι λαμβάνονται υπόψη: η λήθη, η ανταπόκριση και η έλξη για το σύντροφο. Αυτές οι τρεις παράμετροι θεωρούνται ανεξάρτητοι μεταξύ τους και δημιουργούνται από γραμμικές εξισώσεις. Το τελικό μοντέλο είναι ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα το οποίο θα είναι θετικό αν η έλξη των δύο ατόμων είναι θετική. Η υπόθεση του θετικού γραμμικού συστήματος μπορεί να δώσει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Μερικά από αυτά περιγράφουν την δυναμική διαδικασία του έρωτα, δηλαδή την διαμόρφωση των συναισθημάτων ξεκινώντας από την αδιαφορία, όταν δύο άτομα γνωρίζονται για πρώτη φορά και καταλήγοντας σε μια ρομαντική σχέση. Άλλα αποτελέσματα ενδιαφέρονται για το πώς μπορεί η εμφάνιση και η συμπεριφορά του κάθε ατόμου να επηρεάσει την ποιότητα της σχέσης.

Συνοψίζοντας, το μοντέλο που προτείνεται από τον Rinaldi, εκτός του ότι αποτελεί μία καλή μέθοδο για να κερδίσει το ενδιαφέρον των φοιτητών του, είναι ένα εργαλείο για να γίνει ο διαχωρισμός των γενικών ιδιοτήτων των δυναμικών της αγάπης από καθαρά εννοιολογικά επιχειρήματα.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο υπάρχουν δύο συγκεκριμένες μεταβλητές, μία για κάθε μέλος του ζευγαριού. Οι μεταβλητές είναι οι  $x_1$  και  $x_2$  και μετρούν την αγάπη του ατόμου 1 και 2 αντίστοιχα. Θετικές τιμές του  $x$  αντιπροσωπεύουν θετικά συναισθήματα, από φιλία μέχρι αγάπη και πάθος, ενώ αρνητικές τιμές του  $x$  αντιπροσωπεύουν αρνητικά συναισθήματα, όπως ανταγωνισμός και περιφρόνηση. Η περίπτωση του  $x = 0$  δηλώνει την αδιαφορία μεταξύ των ατόμων.

Το συγκεκριμένο μοντέλο που προτείνεται από τον Rinaldi είναι ένα μινιμαλιστικό μοντέλο, γιατί η αγάπη είναι μια σύνθεση πολλών διαφορετικών συναισθημάτων όπως είναι η φιλία, ο έρωτας, η εκτίμηση κ.λπ και μπορεί δύσκολα να αποτυπωθεί με μία μόνο μεταβλητή. Επίσης, τα άτομα δημιουργούν κοινωνικές σχέσεις και με τον υπόλοιπο κόσμο, ο οποίος μπορεί να επηρεάσει την πορεία της σχέσης. Έτσι, στο μοντέλο θεωρούμε ότι ο υπόλοιπος κόσμος είναι «παγωμένος» και δεν αναμιγνύεται στην εξέλιξη της σχέσης και οι μόνοι που αλληλεπιδρούν είναι τα δύο άτομα που συμμετέχουν στην σχέση.

Τα τρία φαινόμενα που εμφανίζονται στο μοντέλο είναι η λήθη, η ανταπόκριση και το ένστικτο. Η λήθη αυξάνεται, όταν χάνεται το ενδιαφέρον για τον σύντροφο και εξηγεί, για παράδειγμα, γιατί φθίνει το  $x_i$  μετά από το θάνατο ενός από τους δύο ή την αποξένωση του  $j$ ,  $j \neq i$ . Οι άλλες δύο μεταβλητές είναι πηγές ενδιαφέροντος και η ανταπόκριση αυξάνεται με

την αύξηση της αγάπης του συντρόφου ενώ η μεταβλητή του ενστίκτου είναι ευαίθητη στις μεταβολές της έλξης (φυσικής, λεκτικής, οικονομικής κλπ). Για την παρουσίαση του μοντέλου γίνονται επίσης κάποιες απλουστεύσεις. Αυτές είναι ότι η εμφάνιση και η προσωπικότητα των δύο ατόμων δεν διαφοροποιούνται με το χρόνο, ότι η συνέργεια είναι αμελητέα και ότι όλοι οι μηχανισμοί είναι γραμμικοί. Τότε το μοντέλο που δημιουργείται είναι το εξής:

$$\dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + \beta_1x_2(t) + \gamma_1A_2$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2x_2(t) + \beta_2x_1(t) + \gamma_2A_1$$

όπου οι  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  καθώς και η εμφάνιση  $A$  (appeal), είναι σταθερές θετικές παράμετροι.

Το μοντέλο είναι γραμμικό, επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\dot{x} = Ax + bu$  με  $u = 1$  και

$$A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \gamma_1 A_2 \\ \gamma_2 A_1 \end{vmatrix}$$

Αυτό το σύστημα είναι θετικό, γιατί ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας Metzler (μη αρνητικά στοιχεία στη δευτερεύουσα διαγώνιο) και το διάνυσμα  $b$  έχει μόνο θετικά στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι τα άτομα δε θα γίνουν ποτέ ανταγωνιστικά μεταξύ τους γιατί είναι εντελώς άγνωστα μεταξύ τους όταν γνωρίζονται ( $x(0) = 0$ ). Τα θετικά γραμμικά συστήματα έχουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες, ιδιαίτερα εάν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές είναι

$$\beta_1\beta_2 < \alpha_1\alpha_2$$

δηλαδή, το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν ο γεωμετρικός μέσος ανταπόκρισης στην αγάπη  $\sqrt{\beta_1\beta_2}$  είναι μικρότερος από τον γεωμετρικό μέσο της λήθης  $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ . Στην ανάλυση του μοντέλου θεωρείται ότι η παραπάνω υπόθεση ικανοποιείται.

### 2.3 Ιδιότητες του μοντέλου

Υποθέτοντας ότι ισχύει η συνθήκη  $\beta_1\beta_2 < \alpha_1\alpha_2$ , μπορεί να γίνει η υπόδειξη πέντε απλών, αλλά με ενδιαφέρον, ιδιοτήτων του μοντέλου. Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και η αγάπη από κάθε άτομο οριοθετείται. Επιπλέον, η θετική τιμή των  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  αποκλείει την πιθανότητα κυκλικής συμπεριφοράς και έτσι μπορεί κάποιος να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι το  $x_i(t)$  τείνει προς μία τιμή ισορροπίας  $\bar{x}_i$  η οποία θα είναι μη αρνητική καθώς το σύστημα είναι θετικό.

1. Η ισορροπία  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  του συστήματος είναι αυστηρά θετική, δηλαδή  $\bar{x}_i > 0, i = 1, 2$ .

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας μπορεί να γίνει εύκολα από την γενική ιδιότητα των θετικών συστημάτων η οποία λέει πως τα ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα έχουν αυστηρά θετική μη τετριμμένη ισορροπία. Η ισορροπία του συστήματος είναι:

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha_2\gamma_1A_1 + \beta_1\gamma_2A_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\alpha_1\gamma_2A_2 + \beta_2\gamma_1A_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$$

Έτσι, αν τα άτομα γνωριστούν για πρώτη φορά τη στιγμή  $t = 0$  ( $x(0) = 0$ ) θα αναπτύξουν θετικά συναισθήματα  $x_i(t)$  που θα τείνουν στη θετική ισορροπία.

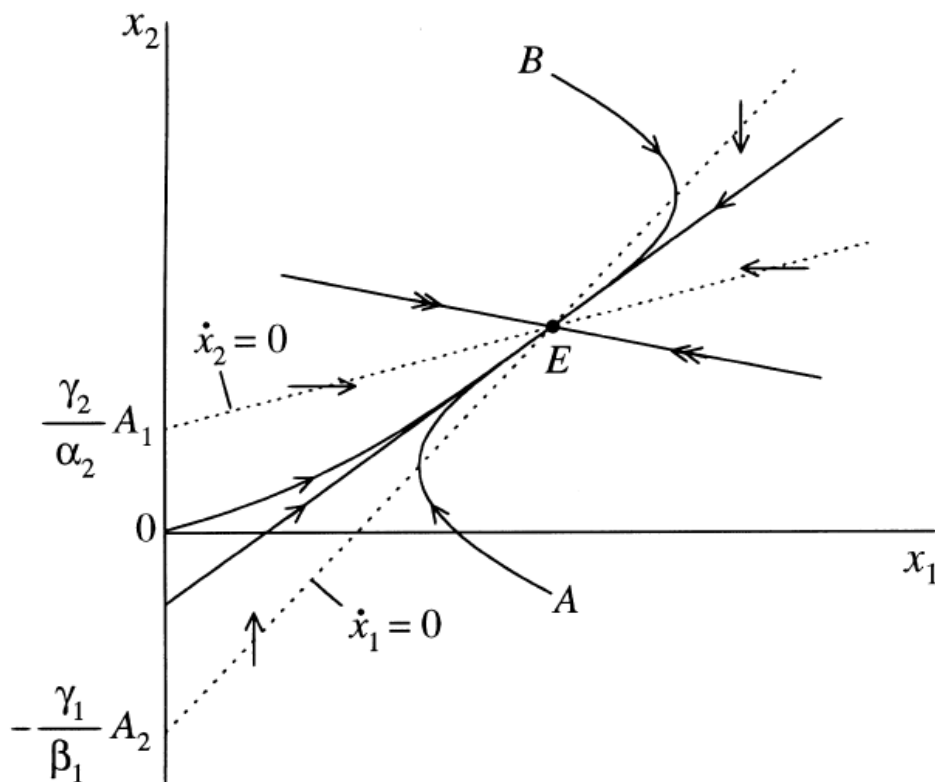
2. Η συνάρτηση  $x_i(t)$  που ανταποκρίνεται στην αρχική συνθήκη  $x(0) = 0$ , είναι γνωσίως αύξουσα, δηλαδή  $\dot{x}_i(t) > 0 \forall t, i = 1, 2$ .

Οι ισοκλινείς  $\dot{x}_i = 0$  είναι ευθείες γραμμές που δίνονται από τις σχέσεις

$$x_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}x_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1}A_2 \quad (\dot{x}_1 = 0)$$

$$x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}x_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}A_1 \quad (\dot{x}_2 = 0)$$

Αυτές οι ισοκλινείς, που φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα 2.1, τέμνονται στο σημείο E που αντιπροσωπεύει την αυστηρά θετική ισορροπία.



Διάγραμμα 2.1 Οι τροχιές (συνεχείς γραμμές) και οι ισοκλινείς (διακεκομμένες) του συστήματος. Οι ευθείες τροχιές αναγνωρίζονται από τις δύο ιδιοτιμές. Τα μονά και διπλά βέλη υποδεικνύουν αργή και γρήγορη κίνηση.

3. Αν αυξηθεί η ανταπόκριση στην αγάπη του συντρόφου ή στην εμφάνιση, δηλαδή το  $\beta_i$  ή το  $\gamma_i$  του ατόμου  $i$ , θα αυξηθεί η αγάπη και για τους δύο στην ισορροπία. Επιπλέον, η σχετική αύξηση  $\Delta x/\bar{x}$  είναι μεγαλύτερη για τον  $i$ .
4. Αν αυξηθεί το  $A_i$  του  $i$  τότε θα δώσει αύξηση στην αγάπη και των δύο ατόμων στην ισορροπία. Επιπλέον, η σχετική αύξηση  $\Delta x/\bar{x}$  είναι μεγαλύτερη για τον  $i$ .
5. Μία αύξηση στην ανταπόκριση της αγάπης δίνει αύξηση στον κυρίαρχο χρόνο σταθερότητας του συστήματος που τείνει στο άπειρο όταν το  $\beta_1\beta_2$  πλησιάζει το  $\alpha_1\alpha_2$ .

Οι πέντε παραπάνω παρατηρήσεις μπορούν εύκολα να ερμηνευτούν. Η πρώτη δηλώνει ότι τα άτομα με θετική έλξη μπορούν να δημιουργήσουν μια ευσταθή ρομαντική σχέση. Τα άτομα στην αρχή είναι εντελώς άγνωστα μεταξύ τους και έχουν συνεχώς αυξανόμενα συναισθήματα μέχρι να φτάσουν σε ένα σταθερό σημείο (παρατήρηση 2). Το επίπεδο της αγάπης που χαρακτηρίζει τη σχέση στο ευσταθές σημείο είναι υψηλότερο όσο υψηλότερη είναι η ανταπόκριση στην αγάπη και στην φυσική έλξη για τον σύντροφο (παρατήρηση 3&4). Επιπλέον, η αύξηση στην ανταπόκριση της αγάπης ενός από τα δύο άτομα αυξάνει ακόμα περισσότερο τα συναισθήματα του ίδιου του ατόμου, ενώ μία αύξηση στην εμφάνιση αυξάνει περισσότερο τα συναισθήματα του συντρόφου. Τέλος, τα ζευγάρια με μεγάλη ανταπόκριση του ενός στην αγάπη του άλλου αυξάνουν γρήγορα τα συναισθήματά τους στην αρχή της σχέσης, ενώ στη συνέχεια πιο αργά καθώς φτάνουν στο σταθερό τους σημείο (παρατήρηση 5). Αν μελετηθεί η τελευταία παρατήρηση σε σχέση με τις εξισώσεις της ισορροπίας που παρουσιάστηκαν πιο πάνω, εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ του χρόνου που χρειάζεται για να φτάσουν στην ισορροπία με την τελική ποιότητα της σχέσης. Έτσι, οι σχέσεις που εξελίσσονται πολύ γρήγορα αναμένεται να συσχετίζονται με φτωχές σε συναισθήματα ρομαντικές σχέσεις.

## 2.4 Συνέπειες σε επίπεδο κοινωνίας

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρουσιαστούν οι συνέπειες σε επίπεδο κοινωνίας. Για να γίνει αυτό, πρέπει να γίνει πρώτα η θεωρητική υπόθεση ότι η κοινωνία αποτελείται μόνο από ζευγάρια με ασφαλή άτομα. Ωστόσο, μιας και τα ασφαλή άτομα αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος ενός πληθυσμού, μπορούμε να ελπίζουμε ότι τα αποτελέσματα θα αποτυπώνουν, έστω ποιοτικά, μερικά από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά μιας πραγματικής κοινωνίας.

Σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη παρουσιασθεί, ένα άτομο  $i$  χαρακτηρίζεται από την έλξη, τη διαδικασία λήθης, τη συνάρτηση αντίδρασης και από το ένστικτο, δηλαδή από την τετράδα  $(A_i, a_i, \beta_i, \gamma_i)$ . Έτσι, σε μία κοινωνία που υπάρχουν  $N$  γυναίκες και  $N$  άντρες που δημιουργούν  $N$  ζευγάρια  $[A_1^n, a_1^n, \beta_1^n, \gamma_1^n; A_2^n, a_2^n, \beta_2^n, \gamma_2^n]$  όπου ο εκθέτης  $n = 1, 2, \dots, N$  είναι η σειρά κατάταξης του ζευγαριού. Για ευκολία, γίνεται η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν γυναίκες ή άντρες με την ίδια εμφάνιση ( $A$ ), δηλαδή  $A_i^n \neq A_i^k$ , για όλα τα  $h \neq k$ . Αυτό σημαίνει ότι τα ζευγάρια μπορούν να αριθμηθούν, για παράδειγμα, με φθίνουσα σειρά της εμφάνισης των

γυναϊκών. Για μαθηματική ευκολία γίνεται η υπόθεση ότι τα άτομα είναι ασφαλή, δηλαδή έχουν αυτοπεποίθηση, και ότι υπάρχει μόνο μία ισορροπία και πως όλα τα εύθραυστα ζευγάρια βρίσκονται στη θετική του ισορροπία  $E^+$ . Επιπρόσθετα, η ιδανική αυτή κοινωνία αποτελείται από ζευγάρια που βρίσκονται σε μία σταθερή και υψηλής ποιότητας ρομαντική σχέση.

Τέτοιου είδους κοινωνία θεωρείται ασταθής, εάν μία γυναίκα και ένας άντρας από διαφορετικά ζευγάρια αποφασίσουν ότι μπορούν να επωφεληθούν αν δημιουργήσουν ένα νέο ζευγάρι. Σε αντίθετη περίπτωση η κοινωνία θα είναι ευσταθής. Έτσι, ασταθής θα είναι μία κοινωνία όπου η δημιουργία νέων ζευγαριών και οι χωρισμοί είναι συχνοί. Γενικά, ένα άτομο  $i$  θα έχει πραγματικά πλεονέκτημα να αλλάξει σύντροφο εάν έτσι αυξάνεται και το  $\bar{x}_i$ . Ωστόσο, για να γίνει η πρόβλεψη της τιμής  $x_1[x_2]$  στην οποία μια γυναίκα [άντρας] θα φτάσει αν γίνει ζευγάρι με έναν νέο σύντροφο, θα πρέπει να γνωρίζει όλες τις πληροφορίες για τον άλλον. Η πρόβλεψη σε αυτήν την περίπτωση θα γίνει με περιορισμένες πληροφορίες.

Η επιλογή ενός φαινομενικά μελλοντικού καλύτερου συντρόφου γίνεται με κριτήριο την εξωτερική εμφάνιση και γίνεται η υπόθεση ότι η συμπεριφορά των διαφορετικών συντρόφων δεν διαφοροποιούνται ως προς το συντελεστή λήθης, ανταπόκρισης και ενστίκτου. Το μόνο που διαφοροποιείται μεταξύ των ατόμων είναι επομένως η εξωτερική εμφάνιση. Έτσι, η πραγματική ποιότητα  $x_1^+$  της ρομαντικής σχέσης για την γυναίκα του  $h$  ζευγαριού θα είναι  $x_1^+(A_1^h, a_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^h, a_2^h, \beta_2^h, \gamma_2^h)$  ενώ η ποιότητα της σχέσης που προβλέπει όταν σκεφτεί να κάνει μία νέα σχέση με τον  $k$  άντρα θα είναι  $x_1^+(A_1^h, a_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^k, a_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k)$ . Η πρόβλεψη της νέας σχέσης γίνεται φανερό ότι εστιάζει στο ρόλο της εμφάνισης και της έλξης το οποίο είναι ωστόσο λογικό γιατί η εμφάνιση είναι ο μοναδικός παράγοντας που εντοπίζεται εύκολα στην πραγματική ζωή.

Η πιο πάνω παρατήρηση συνοψίζεται ως εξής:

- Μία κοινωνία  $[A_1^n, a_1^n, \beta_1^n, \gamma_1^n; A_2^n, a_2^n, \beta_2^n, \gamma_2^n]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  είναι ασταθής αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι  $(h, k)$  για το οποίο

$$x_1^+(A_1^h, a_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^k, a_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k) > x_1^+(A_1^h, a_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^h, a_2^h, \beta_2^h, \gamma_2^h)$$

$$x_2^+(A_1^h, a_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k; A_2^k, a_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k) > x_1^+(A_1^k, a_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k; A_2^k, a_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k)$$

- Μια κοινωνία που δεν είναι ασταθής, χαρακτηρίζεται ως ευσταθής.



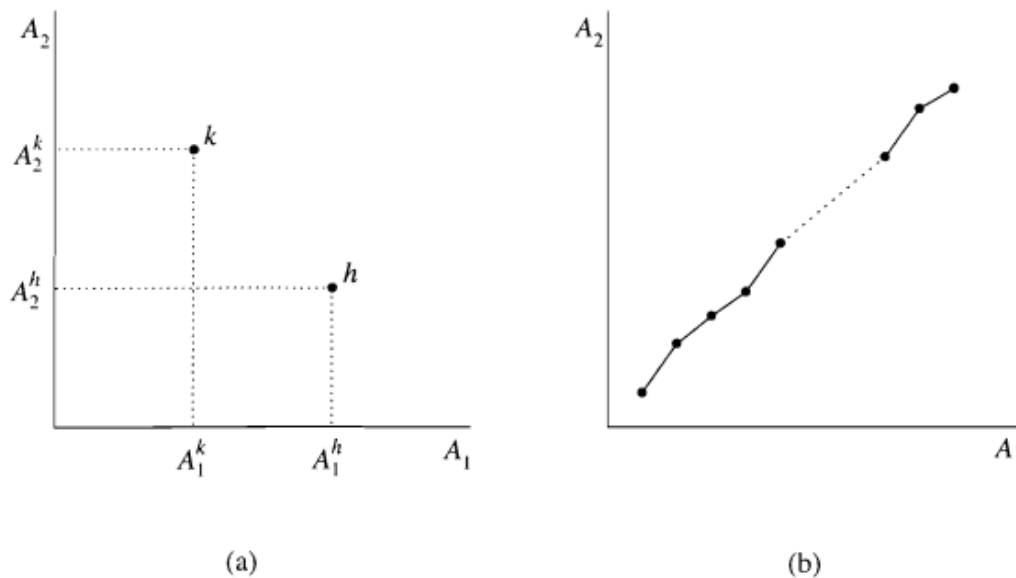
Έτσι, μπορεί τώρα να αποδειχθεί ότι οι ευσταθείς κοινωνίες χαρακτηρίζονται από την παρακάτω πολύ απλή αλλά θεμελιώδη ιδιότητα η οποία περιλαμβάνει μόνο την έλξη.

- Μία κοινωνία είναι ευσταθής αν και μόνο αν ο σύντροφος της  $n$  πιο ελκυστικής γυναίκας είναι ο  $n$  πιο ελκυστικός άντρας.

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας λαμβάνει υπόψιν πρώτα την προηγούμενη ιδιότητα η οποία υποδηλώνει ότι μία κοινωνία θα είναι ασταθής, αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι  $(h, k)$  για το οποίο

$$A_2^k > A_2^h \quad \text{και} \quad A_1^h > A_1^k$$

Η συνθήκη αυτή απεικονίζεται στο διάγραμμα 2.2α όπου το κάθε ζευγάρι αναπαρίσταται από ένα σημείο.



Διάγραμμα 2.2 Δομή του πληθυσμού στο χώρο του  $A$

Ας υποθέσουμε μια κοινωνία στην οποία ο σύντροφος της  $n$  πιο ελκυστικής γυναίκας είναι ο  $n$  πιο ελκυστικός άντρας. Μία τέτοια κοινωνία απεικονίζεται στο διάγραμμα (b), στο οποίο ξεκάθαρα φαίνεται ότι δεν υπάρχει ζευγάρι  $(h, k)$  που να ικανοποιεί τη παραπάνω συνθήκη.

Έτσι η κοινωνία είναι ευσταθής. Από την άλλη, ας υποθέσουμε μια κοινωνία όπου τα ζευγάρια έχουν παραταχθεί με φθίνοντα βαθμό εμφάνισης των γυναικών, για παράδειγμα

$$A_1^1 > A_1^2 > \dots > A_1^N$$

Μετά, αν συνδέσουμε το πρώτο σημείο  $(A_1^1, A_2^1)$  με το δεύτερο σημείο  $(A_1^1, A_2^1)$  με μια ευθεία γραμμή, και το δεύτερο με το τρίτο κ.ο.κ., έως ότου φτάσουμε στο τελευταίο σημείο  $(A_1^N, A_2^N)$ . Προφανώς όλες οι γραμμές που ενώνουν τα σημεία έχουν θετική κλίση αλλιώς θα υπήρχε τουλάχιστον ένα ζευγάρι που να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη και η κοινωνία θα ήταν ασταθής. Έτσι  $A_2^1 > A_2^2 > \dots > A_2^N$ . Αυτό, μαζί με τη προηγούμενη συνθήκη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η  $n$  πιο ελκυστική γυναίκα διατηρεί σχέση με τον  $n$  πιο ελκυστικό άντρα.

Έτσι, η κοινωνία θα είναι ασταθής, αν υπάρχει έστω ένα ζευγάρι που ο ομορφότερος εξωτερικά δεν είναι με την ομορφότερη. Για να είναι ευσταθής μια κοινωνία πρέπει η  $n$  πιο όμορφη γυναίκα να είναι ζευγάρι με τον  $n$  πιο όμορφο άντρα, ώστε να μην υπάρχει συμφέρον σε καμία από τις δύο πλευρές να αλλάξουν σύντροφο. Στην πραγματικότητα, όμως, η εμφάνιση δεν αναφέρεται μόνο στην εξωτερική εμφάνιση, αλλά και σε ένα σύνολο άλλων παραγόντων που μπορούν να προσδιορίσουν και να επηρεάσουν την εμφάνιση ενός ατόμου ως προς ένα άλλο. Για παράδειγμα, σημαντικά στοιχεία είναι η κοινωνική θέση, η περιουσία, η φυσική κατάσταση κ.ά. Έτσι, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ζευγάρια όπου μία πολύ όμορφη γυναίκα είναι με ένα άσχημο αλλά πλούσιο άντρα. Αυτό δεν σημαίνει ότι καταρρίπτεται η πιο πάνω υπόθεση, αντιθέτως ενισχύουν ακόμα περισσότερο τα κλασικά στερεότυπα.

## 2.5 Συμπεράσματα

Ο Rinaldi παρουσίασε ένα μινιμαλιστικό δυναμικό μοντέλο αγάπης που αποτελείται από δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η εξίσωση λαμβάνει υπόψη τρεις κύριους μηχανισμούς που οδηγούν στην αύξηση της αγάπης ή στη φθορά της: τη διαδικασία της λήθης, την επιθυμία κάποιος να αγαπιέται και την ανταπόκριση στην αγάπη του συντρόφου. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων συμπεριφοράς των ατόμων το μοντέλο προκύπτει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, θετικό, γραμμικό σύστημα που περιλαμβάνει κάποιες σημαντικές ιδιότητες.

Το μοντέλο προβλέπει ότι τα συναισθήματα μεταξύ δύο ατόμων ποικίλουν με μονότονο τρόπο: ξεκινούν από το μηδέν (αδιάφοροι μεταξύ τους) και φτάνουν σε ένα μέγιστο σημείο. Η τιμή του μέγιστου σημείου, δηλαδή η ποιότητα της ρομαντικής σχέσης στην ισορροπία, είναι μεγαλύτερη όταν η ανταπόκριση στην αγάπη και στην εμφάνιση είναι μεγαλύτερη. Το ίδιο ισχύει και όταν ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο σημείο είναι μεγαλύτερος. Όλες αυτές οι παρατηρήσεις έρχονται σε συμφωνία με τη παραδοσιακή θεώρηση της δυναμικής της αγάπης μεταξύ δύο ατόμων.

Οι παρατηρήσεις πάνω στο μοντέλο έγιναν με κύριο λόγο τον διαχωρισμό των χαρακτηριστικών κάτω από τα οποία τα ζευγάρια μιας κοινωνίας δεν έχουν τάση προς χωρισμό, είναι δηλαδή σταθερά. Η κινητήριος δύναμη στη δημιουργία μιας ερωτικής σχέσης είναι η εξωτερική εμφάνιση η οποία ταξινομεί τα άτομα μέσα σε μία κοινωνία. Με άλλα λόγια, όσο πιο όμοιοι είναι σε εμφάνιση οι σύντροφοι τόσο λιγότερες πιθανότητες έχουν να χωρίσουν.

Το μοντέλο όμως είναι μινιμαλιστικό κάτι το οποίο σημαίνει ότι δεν μελετά παράγοντες που θα μπορούσαν να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην πορεία μιας σχέσης, για παράδειγμα η ηλικία, η αλλαγή στη συμπεριφορά κ.ά που θα μπορούν να διαφοροποιηθούν σε βάθος χρόνου. Οι διαστάσεις του μοντέλου θα μπορούσαν να μεγαλώσουν υποθέτοντας ότι τα άτομα έχουν μία πιο σύνθετη συμπεριφορά ως προς τα συναισθήματα τους για ένα άλλο άτομο ή ακόμα και για μια ομάδα ατόμων. Αυτό μπορεί να συμβεί με τη δημιουργία ενός κατάλληλου διαφορικού μοντέλου.

## Κεφάλαιο 3

### 3. Μοντέλα προσποίησης (Bluffing models)

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων είναι η πιθανότητα πως μια πολύ μικρή (στα όρια του μη αντιληπτού) μεταβολή σε μία παράμετρο μπορεί να οδηγήσει σε ασυνέχειες στα συναισθήματα των συντρόφων. Με άλλα λόγια, μικρές ανακαλύψεις μπορούν να έχουν σημαντικές επιπτώσεις στις ερωτικές ιστορίες. Αυτές οι ασυνέχειες δεν είναι τίποτα άλλο παρά καταστροφικές διακλαδώσεις. Παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον γιατί σχετίζονται με μεγάλα συναισθήματα, τα οποία μπορούν να συνδέονται με δραματικές καταρρεύσεις ή ενθουσιώδεις εκρήξεις ενδιαφέροντος. Υποθετικά παραδείγματα της πρώτης περίπτωσης μπορούν να αποτελέσουν όλες οι σχέσεις που στηρίζονται στη σωματική επαφή, καθώς το ενδιαφέρον φθίνει με το χρόνο και έτσι σε κάποιο σημείο υπάρχει απροσδόκητος χωρισμός όταν χάνεται το ενδιαφέρον.

Δύο είναι οι ερωτικές ιστορίες οι οποίες ξεκάθαρα περιλαμβάνουν καταστροφικές διακλαδώσεις. Η πρώτη είναι «*Η Πεντάμορφη και το Τέρας*», το πιο διάσημο ευρωπαϊκό παραμύθι της Jeanne-Marie Leprince de Beaumont του 1756, το οποίο έχει γίνει ταινίες, μιούζικαλ και κινούμενα σχέδια, ανάμεσα σε αυτά και η ταινία του Walt Disney το 1991. Η δεύτερη είναι η ερωτική ιστορία μεταξύ της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι που περιγράφεται στο διάσημο αγγλικό μυθιστόρημα «*Περηφάνεια και Προκατάληψη*» της Austen το 1813.

Βασικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων είναι ότι υπάρχουν εναλλακτικές ευσταθείς καταστάσεις (alternative stable states, ASS). Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή στη Φυσική και στη Μηχανική εδώ και πολύ καιρό, αλλά πρόσφατα αναγνωρίστηκε ως πολύ σημαντική στη Βιολογία και σε άλλες κοινωνικές επιστήμες. Είναι, επομένως, φυσικό να περιμένουμε πως οι ASS υπάρχουν και είναι πολύ σημαντικές στις ερωτικές ιστορίες. Η ύπαρξη, αλλά όχι η σπουδαιότητα, των ASS στις ρομαντικές σχέσεις παρατηρήθηκε σε θεωρητικά άρθρα αφιερωμένα σε πρότυπα ζευγαριών αλλά και στη μελέτη των ταινιών «*Η Πεντάμορφη και το Τέρας*» και η «*Περηφάνεια και Προκατάληψη*». Η στρατηγικής σημασίας ASS τονίζεται με την εξαγωγή μιας πολύ γενικής και σημαντικής ιδιότητας: η προσωρινή απάτη μπορεί να ανταμείβει τις ερωτικές σχέσεις. Η ιδιότητα αυτή αναλύεται εκτενέστερα στην ιστορία αγάπης που περιγράφεται στο «*Συρανό ντε Μπερζεράκ*» του Ροστάντ (1897), το αριστούργημα της γαλλικής ρομαντικής λογοτεχνίας που αποτελεί ένα πραγματικό ύμνο στην προσωρινή εξαπάτηση.

### 3.1 Προτεινόμενο μοντέλο

Η πλειονότητα των μοντέλων που έχουν προταθεί στο παρελθόν για την περιγραφή των ερωτικών ιστοριών αποτελούνται από δύο διαφορικές εξισώσεις, μία για κάθε σύντροφο, όπως είναι:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), A_2) \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), A_1)$$

Σε αυτά τα μοντέλα, οι μεταβλητές  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  είναι τα συναισθήματα των ατόμων για το σύντροφό τους τη στιγμή  $t$ , ενώ οι  $A_1$  και  $A_2$  είναι η εμφάνισή τους. Η εμφάνιση (ή αλλιώς η έλξη αν θεωρήσουμε ότι η εμφάνιση σαν μεταβλητή δεν περιλαμβάνει μόνο την εξωτερική εμφάνιση αλλά περιλαμβάνει και μεταβλητές όπως η μόρφωση, ο πλούτος κ.λπ.), όπως και οι υπόλοιπες παράμετροι των φυσικών χαρακτηριστικών των ατόμων, υποθέτουμε ότι είναι χρονικά μεταβαλλόμενες. Οι θετικές τιμές στις μεταβλητές κυμαίνονται από απλή συμπάθεια έως και πάθος, ενώ οι αρνητικές τιμές υποδηλώνουν ανταγωνιστικότητα και περιφρόνηση.

Η έλξη ενός ατόμου  $i$  έχει πολλούς παράγοντες  $A_i^h$  όπως είναι η φυσική έλξη, το θάρρος, η μόρφωση, η ευαισθησία κ.ά, οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι από τα συναισθήματα  $x_i$ . Εάν  $\lambda_j^h$  είναι η σημασία που το άτομο  $j$  θα δώσει στον  $h$  παράγοντα της έλξης του/της συντρόφου του/της, μπορούμε να ορίσουμε την έλξη του  $i$  (που λαμβάνει από τον  $j$ ) ως

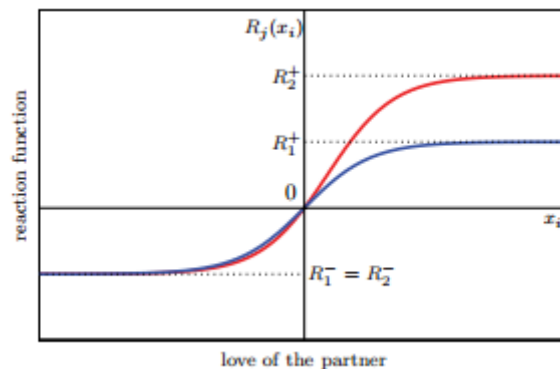
$$A_i = \sum_h \lambda_j^h A_i^h$$

Έτσι, η έλξη δεν είναι ένα απόλυτο χαρακτηριστικό του ατόμου, αλλά μάλλον μία μεταβλητή που λαμβάνει διαφορετικές τιμές τις οποίες λαμβάνει από τον τωρινό ή μελλοντικό σύντροφο.

Δύο άτομα όταν γνωρίζονται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι, συνήθως, αδιάφορα μεταξύ τους, δηλαδή  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Στη συνέχεια, τα συναισθήματα εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.1), όπου ο ρυθμός μεταβολής του  $f_i$  υπαγορεύεται

από την ανισορροπία μεταξύ της διαδικασίας της αναγέννησης των συναισθημάτων και της φθοράς.

Η διαδικασία της φθοράς ή αλλιώς κατανάλωσης, ονομάζεται διαδικασία λήθης. Όπως και σε όλα τα επιστημονικά πεδία, η απώλεια μειώνεται εκθετικά, δηλαδή  $\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t)$ , όπου το  $a_i$  ονομάζεται συντελεστής λήθης. Σε αντίθεση, η διαδικασία αναγέννησης των συναισθημάτων αποτελείται από την έλξη και από την ανταπόκριση στην αγάπη. Η ροή του ενδιαφέροντος που παράγεται από το άτομο  $j$  από την έλξη του συντρόφου του λαμβάνεται αν πολλαπλασιαστεί το  $A_i$  με τον παράγοντα  $\rho_j$  που δείχνει την ευαισθησία του ατόμου  $j$  στην έλξη/εμφάνιση, ενώ η δεύτερη διαδικασία αναγέννησης, η ανταπόκριση στην αγάπη του συντρόφου, περιγράφεται από την συνάρτηση  $R_j(x_i)$ . Συνήθως τα άτομα έχουν αυτοπεποίθηση και ονομάζονται ασφαλή και έτσι αντιδρούν θετικά στην αγάπη που εκδηλώνει ο σύντροφός τους. Ένα άτομο  $i$  που ανήκει στην πιο πάνω κατηγορία χαρακτηρίζεται από μία αυξανόμενη συνάρτηση  $R_i(x_j)$ . Προκειμένου να αποτυπώσουμε τα ψυχοφυσιολογικά όρια που έχουν όλα τα άτομα υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αντίδρασης οριοθετούνται όπως φαίνονται και στο διάγραμμα 3.1.



Διάγραμμα 3.1 Τυπικές συναρτήσεις αντίδρασης  $R_1(x_2)$  (μπλε) και  $R_2(x_1)$  (κόκκινη) από δύο ασφαλή άτομα.

Τελικά, το αναμενόμενο μοντέλο είναι

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t) + \rho_1 A_2 + R_1(x_2) \quad (3.2)$$

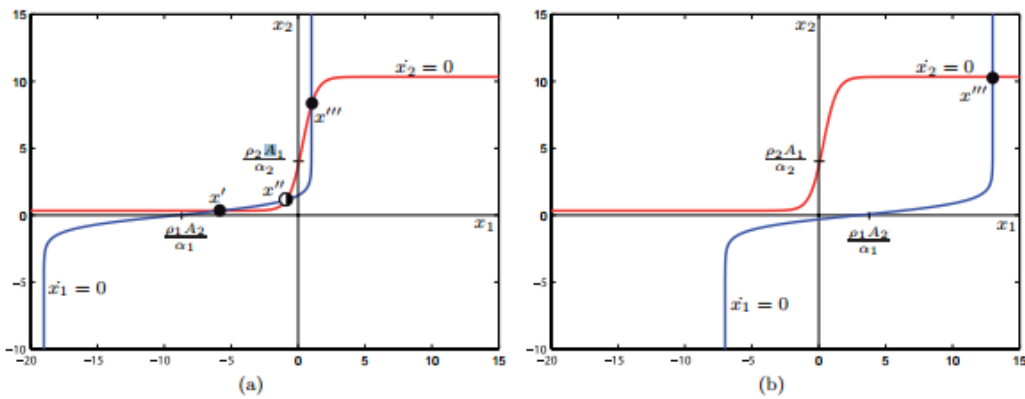
$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + \rho_2 A_1 + R_2(x_1)$$

### Εναλλακτικές ευσταθείς καταστάσεις και η προσωρινή απάτη.

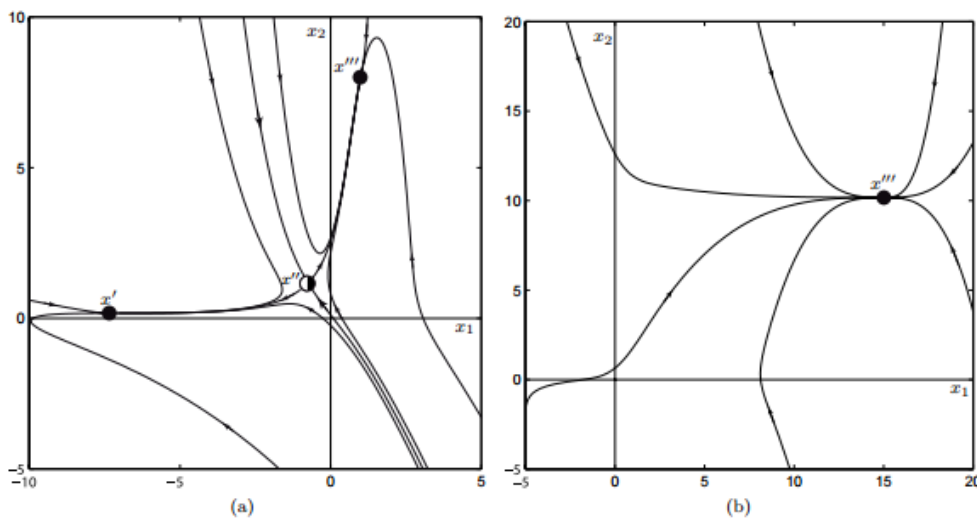
Οι δύο ισοκλινείς  $\dot{x}_1 = 0$  και  $\dot{x}_2 = 0$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$x_1 = \frac{\rho_1 A_2}{\alpha_1} + \frac{R_1(x_2)}{\alpha_1}, \quad x_2 = \frac{\rho_2 A_1}{\alpha_2} + \frac{R_2(x_1)}{\alpha_2}$$

και η μορφή τους φαίνεται στο διάγραμμα 3.2, όπου υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία ισορροπίας,  $x', x'', x'''$  με  $x' < x'' < x'''$ .



Διάγραμμα 3.2 Οι γραμμές  $\dot{x}_1 = 0$  και  $\dot{x}_2 = 0$  για τα  $R_1$  και  $R_2$  του διαγράμματος 1, για τιμές :  $\rho_1 = 0.5, \rho_2 = 1, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.3, A_1 = 1.05$  και στο (α)  $A_2 = -1.9$ : τρεις σημεία ισορροπίας,  $x', x'', x'''$  και στο (β)  $A_2 = 0.5$  : ένα σημείο ισορροπίας,  $x'''$ .



Διάγραμμα 3.3 Τροχιές στο χώρο των συναισθημάτων, (α) τιμές παραμέτρων όπως στο διάγραμμα 2α, (β) τιμές παραμέτρων όπως στο διάγραμμα 3.2β.

Η ιδέα της προσωρινής απάτης ή αλλιώς προσποίησης είναι πολύ απλή και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί στο διάγραμμα 3.3. Αν το ζευγάρι έχει συναρτήσεις αντίδρασης και παραμέτρους όπως στο διάγραμμα 3.3a, τα συναισθήματα αναπτύσσονται δυσμενώς προς την κατάσταση  $x'$  αν η σχέση ξεκινά από την κατάσταση της πλήρους αδιαφορίας. Ωστόσο, η εξέλιξη θα ήταν ευνοϊκή αν τα συναισθήματα αρχικά ήταν στη περιοχή της έλξης  $x''$ . Έτσι, η ιδέα να πειράξουμε τις αρχικές τιμές των συναισθημάτων, είναι κάτι που έρχεται αμέσως στο μυαλό. Η ιδέα αυτή μπορεί να γίνει πραγματικότητα μέσω της προσωρινής προσποίησης, δηλαδή να αυξηθεί για μια συγκεκριμένη στιγμή η έλξη από  $A_i$  σε

$$A_i^* = A_i + B_i$$

όπου το  $B_i$  είναι ένα μέτρο της προσωρινής απάτης. Αυτού του είδους η προσποίηση έχει ως αποτέλεσμα να ανεβάσει τις δύο ισοκλινείς. Πιο συγκεκριμένα, αν το άτομο 1 (2) προσποιείται (δηλαδή αν το  $A_1$  ( $A_2$ ) αυξάνεται) η ισοκλινής  $\dot{x}_2 = 0$  ( $\dot{x}_1 = 0$ ) στο διάγραμμα 3a κινείται προς τα πάνω (προς τα δεξιά). Έτσι, αν η προσποίηση είναι αρκετά δυνατή, το στατικό πορτραίτο ανταποκρίνεται στο νέο προσωρινό ζευγάρι  $(A_1^*, A_2^*)$  όπως στο διάγραμμα 3.3b, όπου τα συναισθήματα μπορούν να εξελιχθούν μόνο προς μία θετική κατάσταση  $x'''$ . Όταν η κατάσταση  $x'''$  πλησιάζεται, δηλαδή όταν η κατάσταση  $\bar{x}$  πλησιάσει τη  $x'''$ , η προσποίηση μπορεί να διακοπεί. Πράγματι, ξεκινώντας από μία κατάσταση  $\bar{x}$  με το ζευγάρι  $(A_1, A_2)$  τα συναισθήματα θα εξελιχθούν όπως στο διάγραμμα 3.3a κατά μήκος μίας τροχιάς που τείνει στην ευνοϊκή κατάσταση  $x'''$ .

Μια δεύτερη μορφή προσποίησης, πιο συνηθισμένη από την πρώτη, γίνεται κατανοητή όταν το άτομο  $i$  επίτηδες και συστηματικά τροποποιεί την συμπεριφορά του προκειμένου να δείξει στο σύντροφό του  $j$  μία προκατειλημμένη εντύπωση των συναισθημάτων του. Σε αυτήν την περίπτωση, η αντίδραση του  $j$  στην αγάπη του  $i$  δεν είναι η  $R_j(x_i)$ , όπως θα έπρεπε να είναι, αλλά  $R_j(x_i^*)$  όπου

$$x_i^* = x_i + B_i$$

Έτσι, οι δύο ισοκλινείς γίνονται

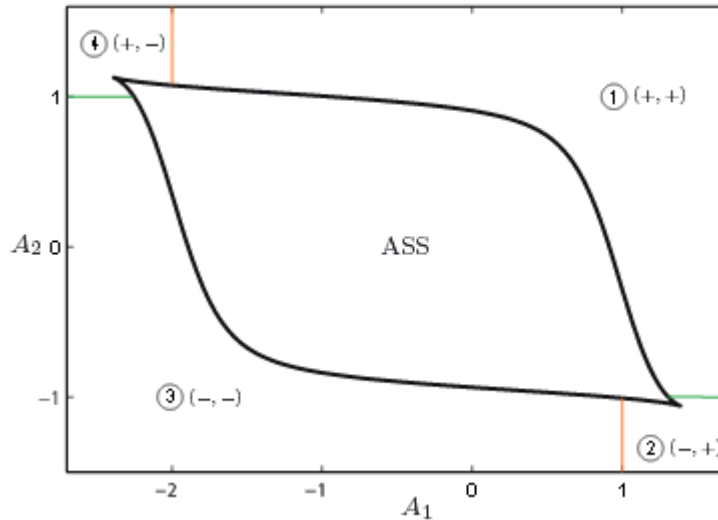


$$x_1 = \frac{\rho_1 A_2}{\alpha_1} + \frac{R_1(x_2 + B_2)}{\alpha_1}, \quad x_2 = \frac{\rho_2 A_1}{\alpha_2} + \frac{R_2(x_1 + B_1)}{\alpha_2}$$

Αν το άτομο 1 (2) υποκρίνεται, η καμπύλη  $\dot{x}_2 = 0$  ( $\dot{x}_1 = 0$ ) μετατοπίζεται προς τα αριστερά (προς τα κάτω) κατά την ποσότητα  $B_1$  ( $B_2$ ). Έτσι, οι δύο ισοκλινείς δεν κινούνται όπως στην προηγούμενη περίπτωση αλλά το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Όντως, αν η προσποίηση είναι αρκετά δυνατή, οι δύο καμπύλες τέμνονται μόνο σε ένα σημείο, όπως στο διάγραμμα 3.3b, και τα συναισθήματα κινούνται προς ένα θετικό μοτίβο. Διακόπτοντας την προσποίηση όταν η θετική κατάσταση έχει επιτευχθεί, επιτρέπει στο ζευγάρι να αναπτυχθεί φυσικά όπως στο διάγραμμα 3.3a κινούμενο προς μία επιθυμητή ευνοϊκή κατάσταση. Φυσικά, τα ίδια αποτελέσματα λαμβάνονται αν οι δύο μορφές απάτης πραγματοποιούνται την ίδια στιγμή.

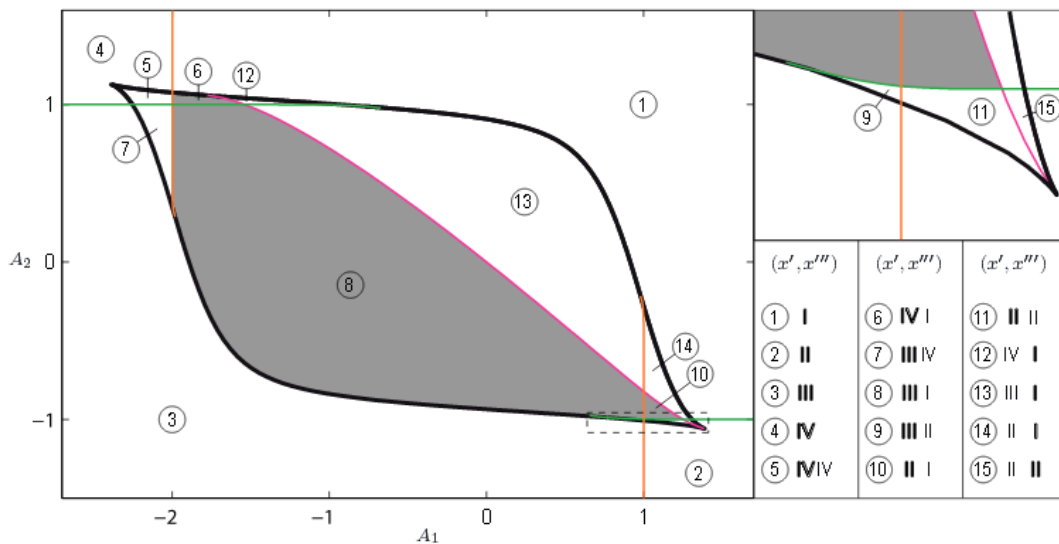
Προκειμένου να αποφασιστεί για ποια ζευγάρια η προσωρινή προσποίηση είναι ευνοϊκή, χωρίζουμε το σύνολο των ASS σε υποσύνολα ( $i$ ) που χαρακτηρίζονται από τα πρόσημα των συναισθημάτων για τις δύο εναλλακτικές ευσταθείς καταστάσεις  $x'$  και  $x'''$ . Έτσι, κάθε υποσύνολο ( $i$ ) χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος αριθμών οι οποίοι κυμαίνονται από I σε IV, που υποδηλώνουν σε ποιο τεταρτημόριο πέφτουν τα  $x'$  και  $x'''$ . Για παράδειγμα, η περίπτωση του διαγράμματος 3.3a ανταποκρίνεται στο υποσύνολο (II,I) γιατί το  $x'$  είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο ενώ το  $x'''$  είναι στο πρώτο τεταρτημόριο. Προκειμένου να συζητήσουμε τον όρο της προσωρινής απάτης πρέπει επίσης να υποδείξουμε για κάθε υποσύνολο ( $i$ ) ποιες από τις δύο ισορροπίες έχει μία λεκάνη έλξης περιλαμβάνοντας και την αρχική. Αυτό είναι απλό αν γράψουμε τον αντίστοιχο αριθμό με έντονα γράμματα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του διαγράμματος 3.3a, το υποσύνολο είναι (II,I) γιατί ξεκινώντας από την αρχή, δηλαδή από το σημείο της αδιαφορίας, το ζευγάρι αναπτύσσεται προς μία δυσμενή κατάσταση  $x'$ . Έτσι, (II,I) και (II,I) πρέπει να θεωρηθούν διαφορετικά υποσύνολα. Η διαίρεση μπορεί να γίνει με τη χρήση συνεχούς αλγορίθμου (Rinaldi et al., 2010) και το αποτέλεσμα φαίνεται στο διάγραμμα 3.5. Ζευγάρια με  $(A_1, A_2)$  στα υποσύνολα (12), (13), (14) εξελίσσονται από την κατάσταση της αδιαφορίας προς μία θετική ευνοϊκή κατάσταση  $x'''$ , γιατί ο δεύτερος αριθμός στο ζεύγος του είναι το I. Αυτό σημειώνει πως τα συγκεκριμένα ζευγάρια δεν χρειάζονται κάποια συγκεκριμένη βοήθεια ή τέχνασμα για να φτάσουν ένα θετικό μοτίβο. Αντιθέτως, ζευγάρια με  $(A_1, A_2)$  στα υποσύνολα (6), (8), (10) στα οποία ο δεύτερος αριθμός είναι το I (γκρι περιοχή του διαγράμματος) συγκλίνουν στο  $x'$  από την κατάσταση της αδιαφορίας και στο  $x'''$  μόνο αν τα αρχικά συναισθήματα είναι αρκετά υψηλά, όπως φαίνεται στο διάγραμμα

3.3α. Έτσι, τα ζευγάρια που βρίσκονται στην γκρι περιοχή του διαγράμματος χρειάζονται κάποιας μορφής προσωρινή προσποίηση για να φτάσουν στην πιο ευνοϊκή κατάσταση. Για αυτό το λόγο, η γκρι περιοχή του διαγράμματος ονομάζεται «περιοχή απάτης».



Διάγραμμα 3.4 Περιοχή των ASS (εναλλακτικών σταθερών καταστάσεων) στο χώρο του A και τα πρόσημα των συναισθημάτων στις περιοχές (1), (2), (3) και (4) έξω από τις ASS.

Παράμετροι και συναρτήσεις όπως στο διάγραμμα 3.2.



Διάγραμμα 3.5: διαίρεση των ASS σε υποσύνολα (i),  $i = 5, \dots, 15$ .

Από τα παραπάνω, προκύπτουν μερικές παρατηρήσεις που ερμηνεύουν ή συμπληρώνουν τα ευρήματα τις προσωρινής απάτης.

- Η προσωρινή προσποίηση δε χρειάζεται να ξεκινά από την αρχή της σχέσης, όπως θα μπορούσε να συμβαίνει σε μία σχέση μέσω διαδικτύου. Ωστόσο, είναι δύσκολο να φανταστούμε πώς θα λειτουργούσε σε μία ήδη καθιερωμένη σχέση.
- Η προσποίηση μπορεί να είναι μονομερής χωρίς να μειωθεί η πιθανότητα επιτυχίας γιατί η γκρι περιοχή εγγυάται ότι είναι πάντα πιθανό να φτάσουμε τα σημεία της περιοχής (1) κινούμενοι οριζόντια ή κάθετα από οποιοδήποτε σημείο της γκρι περιοχής.
- Η προσωρινή προσποίηση δεν αφορά ζευγάρια που αποτελούνται από ελκυστικά άτομα γιατί στην περιοχή της προσποίησης τουλάχιστον ένας από τους δύο έχει αρνητική έλξη.
- Η προσωρινή προσποίηση δεν αφορά ζευγάρια με πολύ χαμηλή έλξη, δηλαδή ζευγάρια που ανήκουν στις περιοχές (2), (3), (4) του διαγράμματος 5 επειδή όταν διακοπεί η προσποίηση αυτά τα ζευγάρια τείνουν αδυσώπητα προς μία μη ικανοποιητική κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτές τις περιπτώσεις τα ζευγάρια μπορούν να υπάρχουν μόνο αν η προσποίηση υιοθετηθεί μόνιμα.
- Στην πραγματική ζωή, η γεωμετρική μορφή της περιοχής προσποίησης και η έλξη των ατόμων γίνονται αντιληπτές με μεγάλη αβεβαιότητα. Έτσι, δεν αποτελεί έκπληξη γιατί οι άνθρωποι με χαμηλή αυτοεκτίμηση έχουν μεγαλύτερη τάση να προσποιούνται όταν είναι ερωτευμένοι.

## 3.2 Συρανό ντε Μπερζεράκ και Ρωξάνη

### 3.2.1 Η ιστορία

Η ιστορία αγάπης μεταξύ της Ρωξάνης και του Συρανό αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα προσποίησης. Η ιστορία περιγράφεται στο «Συρανό ντε Μπερζεράκ», μια ηρωική κωμωδία του Edmond Rostand, ενός Γάλλου νεορομαντικού δραματικού ποιητή. Η πρώτη παράσταση του έργου το 1897 ήταν ένας πραγματικός θρίαμβος και σύντομα το έργο μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες και έχει εμπνεύσει πολλές ταινίες, με την πιο πετυχημένη να είναι αυτή του 1990 από τον Jean-Pau Rappeneau. Σήμερα, ο «Συρανό ντε Μπερζεράκ» θεωρείται ένα αριστούργημα την γαλλικής λογοτεχνίας για την αγάπη.

Για την παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου της ερωτικής ιστορίας του Συρανό και της Ρωξάνης, πρέπει πρώτα να γίνει η περιγραφή της ιστορίας.

Η ιστορία διαδραματίζεται στο Παρίσι, όπου ο Συρανό ντε Μπερζεράκ, ένας λαμπρός ποιητής και ξιφομάχος, ερωτεύεται παράφορα την όμορφη ξαδέρφη του, Ρωξάνη. Παρά τα λαμπρά χαρίσματά του, ο Συρανό θεωρεί τον εαυτό του πολύ άσχημο, καθώς έχει μία μεγάλη μύτη για την οποία πολλές φορές αυτοσαρκάζεται, και έτσι αποφασίζει να μη ρισκάρει να εκφράσει την αγάπη του στη Ρωξάνη. Μία μέρα η Ρωξάνη συναντά τον Συρανό και του αποκαλύπτει τον έρωτά της για τον γοητευτικό στρατιωτικό Κριστιάν. Όταν ο Συρανό συναντά τον Κριστιάν, τον ενθαρρύνει παρουσιάζοντας τα αισθήματα που τρέφει η Ρωξάνη. Ο Κριστιάν τρέφει επίσης συναισθήματα για αυτήν και ενώ αρχικά δείχνει ενθουσιασμένος τελικά απογοητεύεται γιατί ξέρει ότι δεν μπορεί να εξωτερικεύσει τα συναισθήματά του, καθώς θεωρεί τον εαυτό του πεζό. Έτσι, ο Συρανό έχει μια λαμπρή ιδέα, να γράψει αυτός στη Ρωξάνη γράμματα με την υπογραφή του Κριστιάν ο οποίος συμφωνεί προκειμένου να τον αγαπήσει η Ρωξάνη. Μία μέρα, ο Κριστιάν αποφασίζει ότι δεν χρειάζεται πλέον τη βοήθεια του Συρανό και ντροπιάζεται μπροστά στη Ρωξάνη, καθώς το μόνο που καταφέρνει να της πει είναι ότι την αγαπά. Η Ρωξάνη απογοητεύεται και τον διώχνει. Σε αυτό το σημείο ο Συρανό σκέφτεται μια άλλη κίνηση. Μέσα στο σκοτάδι, βάζει τον Κριστιάν να σταθεί στο μπαλκόνι της Ρωξάνης ενώ ο Συρανό έχει κρυφτεί και ψυθιρίζει στον Κριστιάν τι να πει. Η Ρωξάνη ανταποδίδει σε αυτή τη ρομαντική κίνηση και αποφασίζει να τον παντρευτεί.

Αμέσως μετά τον γάμο οι δρόμοι τους θα χωρίσουν, καθώς ο Κριστιάν πρέπει να πάει στον πόλεμο. Ο Συρανό ακολουθεί τον Κριστιάν στον πόλεμο για να τον προστατεύσει και συνεχίζει να γράφει ποιήματα προς την Ρωξάνη για λογαριασμό του. Κατά τη διάρκεια του πολέμου, ο Κριστιάν ανακαλύπτει τα κρυφά συναισθήματα του Συρανό και τον ρωτά να μάθει ποιον από τους δύο επιλέγει η Ρωξάνη. Όταν η Ρωξάνη έρχεται στον πόλεμο για να συναντήσει τον Κριστιάν αποκαλύπτει στο Συρανό ότι ερωτεύτηκε τον Κριστιάν από αυτά που της έγραφε και ότι θα τον αγαπούσε ακόμα και αν ήταν άσχημος. Τη στιγμή που ο Συρανό είναι έτοιμος να της αποκαλύψει την αλήθεια, ο Κριστιάν δέχεται ένα θανατηφόρο χτύπημα. Ο Συρανό αποφασίζει να κρατήσει κρυφό το μυστικό του και του ψυθιρίζει πως η Ρωξάνη τον αγαπά και αυτός πεθαίνει ευτυχισμένος, ενώ η Ρωξάνη παραμένει στην άγνοια.

Πενήντα χρόνια αργότερα, η Ρωξάνη ζει σε μία μονή όπου ο Συρανό την επισκέπτεται κάθε βδομάδα. Μία μέρα εμφανίζεται στη μονή περπατώντας αργά και έχοντας έκφραση πόνου στο πρόσωπό του γιατί του είχαν στήσει ενέδρα και τον είχαν χτυπήσει και ρίξει από ένα

ψηλό παράθυρο. Καθώς πέφτει η νύχτα, ο Συρανό ζητά από τη Ρωξάνη να διαβάσει το πρώτο γράμμα που της έγραψε ο Κριστιάν. Καθώς το δωμάτιο γίνεται τελείως σκοτεινό αυτός συνεχίζει να διαβάζει το γράμμα και έτσι αποκαλύπτεται σε αυτήν ότι ξέρει το γράμμα απ' έξω. Έτσι ανακαλύπτει η Ρωξάνη ότι ο άντρας που είχε ερωτευτεί όλη της τη ζωή είναι ακριβώς μπροστά της. Η Ρωξάνη του εξομολογείται ότι τον αγαπά και ότι δε μπορεί να τον χάσει, αλλά αυτός καταρρέει στην αγκαλιά της.

### 3.2.2 Το μοντέλο

Έπειτα από την περιγραφή της ερωτικής ιστορίας μεταξύ της Ρωξάνης και του Συρανό μπορούμε ποιοτικά, αλλά ικανοποιητικά, να αναπαραστήσουμε με μοντέλο την ιστορία παρέχοντας στις παραμέτρους κατάλληλες σταθερές τιμές. Μιας και ποσοτικά δεδομένα της ερωτικής ιστορίας δεν υπάρχουν, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι συνηθισμένες διαδικασίες ταυτοποίησης για τη μέτρηση των παραμέτρων. Αντιθέτως, είμαστε αναγκασμένοι να δώσουμε τιμές βασισμένοι πάνω σε καθαρά υποκειμενικές εκτιμήσεις. Υποθέτοντας ότι 1 είναι η Ρωξάνη και 2 ο Συρανό, η επιλογή που γίνεται είναι

$$\text{Ρωξάνη} \quad a_1 = 0.1 \quad \rho_1 = 0.5 \quad A_1 = 1.05 \quad R_1^+ = 1 \quad R_1^- = -1$$

$$\text{Συρανό} \quad a_2 = 0.3 \quad \rho_2 = 1 \quad A_2 = -1.9 \quad R_2^+ = 2 \quad R_2^- = -1$$

Οι παράμετροι  $R_i^-$  έχουν την ίδια τιμή και για τα δύο άτομα γιατί για αυτήν την παράμετρο λείπουν ακόμα και οι υποκειμενικές εκτιμήσεις. Σχετικά μικρές τιμές δόθηκαν στο συντελεστή λήθης  $a_i$  καθώς και η Ρωξάνη και ο Συρανό συνεχίζουν να κρατούν την αγάπη τους ακόμα και μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα από το χωρισμό τους (50 χρόνια). Ο συντελεστής λήθης της Ρωξάνης είναι μικρότερος από του Συρανό γιατί, όπως μπορεί κάποιος να υποθέσει, δεν είχε πολλές ευκαιρίες να ξεχάσει τον έρωτά της κλεισμένη σε ένα μοναστήρι, ενώ από την άλλη ο Συρανό είχε πολλές περισσότερες ευκαιρίες καθώς συνέχισε την κοινωνική του ζωή. Η μέγιστη αντίδραση  $R_2^+$  και η ευαισθησία  $\rho_2$  του Συρανό είναι υψηλότερες από τις αντίστοιχες της Ρωξάνης, καθώς αυτό μπορεί να καταλάβει κάποιος από τις πράξεις και τα λόγια του Συρανό. Τέλος, οι παράμετροι της έλξης έχουν αντίθετο

πρόσημο λόγω της αντίθεσης μεταξύ της χάρης της Ρωζάνης και της δυσάρεστης εμφάνισης του Συρανό που οφείλεται στην πολύ μεγάλη του μύτη. Τα  $A_1$  και  $A_2$  μπορούν να συγκριθούν με την έλξη του Κριστιάν  $A_2^*$ , η οποία υποθέτουμε ότι είναι 0.5.

Η ιστορία διαιρείται σε δύο φάσεις: τη φάση (ii) και (iii). Η φάση (ii) ξεκινά με τη συμφωνία μεταξύ του Κριστιάν και του Συρανό και τελειώνει με το θάνατο του πρώτου. Είναι μία περίοδος εξαπάτησης και προσποίησης, καθώς μπορεί να πει κάποιος ότι η ψυχή του Συρανό κρύβεται μέσα στο σώμα του Κριστιάν. Με άλλα λόγια, ο Κριστιάν καταφέρνει να αυξήσει με ένα τέχνασμα την έλξη του από  $A_2$  σε  $A_2^*$ . Η φάση (iii) ξεκινά από το θάνατο του Κριστιάν μέχρι την ανακάλυψη της αλήθειας από τη Ρωζάνη και είναι ουσιαστικά μία φάση χωρισμού, όπου μόνο η διαδικασία της λήθης είναι ενεργή.

Για λόγους σαφήνειας, μπορούμε να προσθέσουμε άλλες δύο εικονικές φάσεις που παρουσιάζονται ως φάση (i) και (iv). Στη φάση (i) υποθέτουμε ότι ο Κριστιάν δεν υπάρχει και ο Συρανό εκδηλώνει την αγάπη του στη Ρωζάνη, ενώ στη φάση (iv) ο Συρανό παραμένει ζωντανός μετά την ανακάλυψη της Ρωζάνης ότι αυτός κρύβεται πίσω από τα γράμματα του Κριστιάν όλα αυτά τα χρόνια. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του μοντέλου σε κάθε μία από τις τέσσερις φάσεις συζητούνται στη συνέχεια και συνοψίζονται στο διάγραμμα 3.6.

- Φάση (i): για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων, οι δύο ισοκλινείς  $\dot{x}_1 = 0$  και  $\dot{x}_2 = 0$  είναι όπως στο διάγραμμα 7i. Οι έλξεις ( $A_1, A_2$ ) του ζευγαριού βρίσκονται στην υποπεριοχή (10) της περιοχής προσποίησης. Αν ο Συρανό μπορούσε να εκφράσει τα συναισθήματα του στη Ρωζάνη, η ιστορία τους θα εξελισσόταν προς μία μη ευνοϊκή κατάσταση  $x'$ . Έτσι τελικά, ο Συρανό έπραξε σωστά που έκρυψε τα συναισθήματά του και συνεργάστηκε με τον Κριστιάν για να δημιουργήσει μια πιο υποσχόμενη φάση προσωρινής προσποίησης.
- Φάση (ii): οι καμπύλες λαμβάνονται από αυτές του διαγράμματος 3.6i αν απλά μετακινηθεί προς τα δεξιά η πρώτη κατά μία ποσότητα αντίστοιχη της προσποίησης  $B_2 = A_2^* - A_2$  η οποία ασκείται από τον Συρανό. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι ισοκλινείς τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο  $x'''$  στο πρώτο τεταρτημόριο. Έτσι, σε αυτή τη φάση, τα συναισθήματα κινούνται προς αυτό το σημείο και έρχονται πολύ κοντά σε αυτό όταν η προσποίηση διακόπτεται από το θάνατο του Κριστιάν.

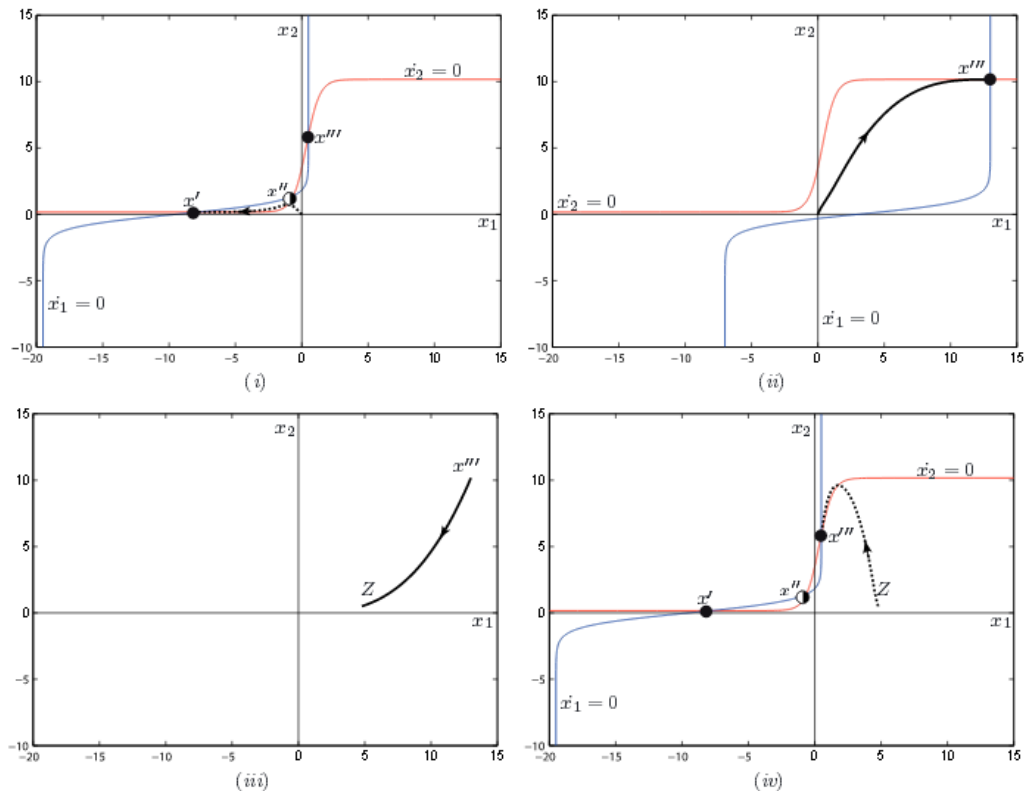
- Φάση (iii): κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης δεν υπάρχει καμία αντίδραση στην αγάπη και στην έλξη μιας και οι δύο εραστές έχουν χωριστεί. Έτσι, το ζευγάρι περιγράφεται από ένα μειωμένο μοντέλο

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t)$$

το οποίο υποδηλώνει ότι και τα δύο συναισθήματα συστηματικά μειώνονται (η τροχιά ξεκινά από το  $x'''$  και τείνει στην αρχή του διαγράμματος 7iii). Αυτή η εξέλιξη είναι πολύ αργή γιατί οι συντελεστές λήθης είναι πολύ μικροί. Έτσι, όταν η αλήθεια ανακαλύπτεται τυχαία από τη Ρωξάνη τα συναισθήματα των δύο ερωτευμένων είναι ακόμα σχετικά υψηλά όπως φαίνεται και από το τελικό σημείο Z της τροχιάς στο διάγραμμα 3.6iii.

- Φάση (iv): σε αυτήν την υποθετική εκδοχή, ο Συρανό είναι ακόμα ζωντανός και ανταποκρίνεται στην αγάπη της Ρωξάνης. Έτσι, το μοντέλο είναι και πάλι αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη φάση με αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στο σημείο Z. Μιας και αυτό το σημείο είναι η πηγή της έλξης της θετικής ισορροπίας  $x'''$  (διάγραμμα 3.6iv), η Ρωξάνη και ο Συρανό τείνουν φυσικά, δηλαδή χωρίς την ανάγκη της προσποίησης, προς μία ικανοποιητική συναισθηματική κατάσταση. Αυτό το ευτυχισμένο τέλος δείχνει ότι η προσποίηση επιβράβευσε τελικά τον Συρανό και κέρδισε την αγάπη της Ρωξάνης.



Διαγράμμα 3.6 Οι καμπύλες  $\dot{x}_1 = 0$  και  $\dot{x}_2 = 0$  και οι τροχιές των συναισθημάτων σε κάθε μία από τις τέσσερις φάσεις της ιστορίας, (i) υποθετική περίοδος χωρίς προσποίηση, (ii) περίοδος προσποίησης, (iii) φάση χωρισμού και (iv) υποθετική μελλοντική φάση.

Μια κοινά αποδεκτή επιστημονική άποψη είναι τα μαθηματικά μοντέλα πρέπει να επικυρώνονται με δεδομένα που είναι ανεξάρτητα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκτίμηση των παραμέτρων. Φυσικά, αυτό είναι αδύνατο στη συγκεκριμένη περίπτωση γιατί δεν υπάρχουν τα απαραίτητα δεδομένα. Ο καλύτερος τρόπος για να επικυρωθεί το μοντέλο είναι μέσα από ποιοτικά επιχειρήματα τα οποία πρέπει να είναι ανεξάρτητα από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν μόνο δύο τέτοια επιχειρήματα, στην πραγματικότητα και τα δύο αδύναμα, θεωρείται εξαιρετική τύχη, στον τομέα των δυναμικών μοντέλων της αγάπης, που υπάρχουν.

Το πρώτο επιχειρήμα ενδιαφέρεται για το γεγονός ότι το μοντέλο τελικά υποστηρίζει την προσποίηση του Συρανό και τη θεωρεί επιτυχημένη. Όμως το έργο, τελειώνοντας με το θάνατο του Συρανό, δεν αναφέρει τίποτα για αυτό το θέμα ακόμα και όταν η Ρωξάνη αποκαλύπτει ένα σαφές ενδιαφέρον για το κοινό τους μέλλον όταν παρακαλάει να μην πεθάνει ο Συρανό. Έτσι πρέπει να στηριχτούμε στην εντύπωση ότι η πλειονότητα του κοινού



που έχει δει το έργο ή έχει διαβάσει την ιστορία συμφωνεί με το συμπέρασμα του μοντέλου. Αυτό προκύπτει από μια άλλη διασκευή του έργου με τίτλο «Ρωξάνη» που γυρίστηκε το 1987 κατά την οποία, προκειμένου να μην χαθεί η σπουδαιότητα της προσποίησης του Συρανό, ο ήρωας στο τέλος δεν πεθαίνει και η Ρωξάνη τον φιλά παρά την άσχημη εμφάνισή του.

Το δεύτερο επιχείρημα είναι η συμφωνία μεταξύ των ποσοτικών προβλέψεων του μοντέλου και των ποιοτικών δηλώσεων της Ρωξάνης, η οποία στην αρχή δηλώνει ερωτευμένη με την εμφάνιση του Κριστιάν, ενώ στη συνέχεια παραδέχεται ότι πλέον έχει ερωτευτεί την ψυχή του και όχι την εμφάνισή του. Η πρώτη δήλωση έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο γιατί στην αρχή της ιστορίας, για  $t = 0$ , είναι  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  και  $R_1(0) = R_2(0) = 0$ , έτσι ώστε

$$\dot{x}_1(0) = \rho_1 A_2^*$$

Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Ρωξάνη ξεκινά να δένεται ισχυρά με τον Κριστιάν, γιατί το  $A_2^*$  είναι υψηλό. Ωστόσο, είναι δίκαιο να πούμε ότι αυτό το επιχείρημα δεν είναι πολύ σημαντικό καθώς η συνθήκη  $R_1(0) = R_2(0) = 0$  εξασφαλίζει τα ίδια συμπεράσματα για οποιαδήποτε επιλογή στις συναρτήσεις αντίδρασης. Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τελική δήλωση της Ρωξάνης, δηλαδή πως η ψυχή του Κριστιάν είναι η πηγή της αγάπης της για αυτόν. Αυτό μπορεί να συγκριθεί με την πρόβλεψη του μοντέλου. Στο τέλος της φάσης (ii), ακριβώς πριν το θάνατο του Κριστιάν, το σύστημα βρίσκεται στην ισορροπία

$$x''' = (x_1''', x_2''')$$

του διαγράμματος 3.6ii, έτσι ώστε οι δύο ροές που γεννούν την αγάπη της Ρωξάνης είναι οι

$$\rho_1 A_2^* = \dots, \quad R_1(x_2''') = \dots$$

Καθώς η αντίδραση στην αγάπη είναι μεγαλύτερη από την αντίδραση στην εξωτερική εμφάνιση, το μοντέλο έρχεται σε συμφωνία με τη δήλωση της Ρωξάνης.

### 3.2.3 Συμπεράσματα

Τα άτομα που εμπλέκονται σε μια συναισθηματική κατάσταση συχνά τροποποιούν τη συμπεριφορά τους προκειμένου να παρουσιάσουν στον σύντροφό τους μια προκατειλημμένη εικόνα του ενδιαφέροντός τους. Αυτή η προσποίηση μπορεί να είναι προσωρινή, για παράδειγμα όταν κάποιος είναι ερωτευμένος, ή μόνιμη, για παράδειγμα μια σχέση μέσω διαδικτύου, όπου δεν γνωρίζονται στην πραγματικότητα τα δύο άτομα. Τα άτομα μπορεί να προσποιηθούν προκειμένου να αυξήσουν την ελκυστικότητά τους μέσα από διάφορα κρυφά τεχνάσματα. Επίσης, αυτή η μορφή προσποίησης μπορεί να είναι προσωρινή όπως στην ιστορία του Συρανό και της Ρωξάνης, ή μόνιμη, όπως η περίπτωση μιας αισθητικής επέμβασης.

Η ύπαρξη της προσποίησης στην κοινωνία μας είναι τόσο σχετική που κάποιος θα μπορούσε να οδηγηθεί την εικασία ότι για τον έναν ή για τον άλλο λόγο η προσποίηση είναι συχνά επιτυχημένη και επιβραβεύει αυτόν που την κάνει. Για την επίσημη υποστήριξη αυτής της υπόθεσης στηριχτήκαμε πάνω σε ένα μαθηματικό μοντέλο για όλες τις πιθανές τιμές στις παραμέτρους των συντρόφων. Το μοντέλο αποτελείται από δύο διαφορεικές εξισώσεις. Στο μοντέλο, γίνεται η υπόθεση ότι τα άτομα αντιδρούν θετικά στα συναισθήματα του συντρόφου τους.

Η ανάλυση του μοντέλου δείχνει ότι τα ζευγάρια που και οι δύο είναι πολύ ελκυστικοί θα οδηγηθούν εγγυημένα σε σχέσεις υψηλής συναισθηματικής ποιότητας ενώ ζευγάρια με χαμηλή ελκυστικότητα οδηγούνται σε μη ικανοποιητικές καταστάσεις. Σε αντίθεση, τα ζευγάρια με μέτριες εμφανίσεις έχουν δύο εναλλακτικά σταθερά σημεία. Το ένα από αυτά χαρακτηρίζεται από θετικά συναισθήματα και έτσι οδηγείται σε υψηλής ποιότητας συναισθηματική σχέση, ενώ στο άλλο το ένα από τα δύο άτομα υποφέρει καθώς ενοχλείται από τον σύντροφό του. Το μοτίβο στο οποίο ένα ζευγάρι με μέτρια εμφάνιση θα αρχίσει να ελκύεται εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του μοντέλου. Συγκεκριμένα, αν τα άτομα είναι αδιάφορα το ένα για το άλλο στην αρχή της σχέσης τους, τότε υψηλότερες τιμές στην εμφάνιση ανταποκρίνονται σε υψηλότερες πιθανότητες σύγκλισης σε ένα υψηλά ποιοτικό μοτίβο. Σε κάθε περίπτωση, η επιθυμητή κατάσταση είναι πάντοτε πιθανή υπό την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται στη βάση της έλξης όπου γενικά χαρακτηρίζονται από θετικά συναισθήματα. Έτσι, αν το ζευγάρι εγκλωβιστεί μέσα σε μία μη επιθυμητή κατάσταση ή συγκλίνει προς αυτή, το πρόβλημα είναι πώς να ξεφύγει από την παγίδα και να μεταπηδήσει στην επιθυμητή κατάσταση. Αυτό το πρόβλημα, που είναι πολύ κοινό σε συστήματα με περισσότερες από μία ευσταθείς καταστάσεις, συχνά λύνεται με την

εφαρμογή για κάποιο χρονικό διάστημα μιας κατάλληλης δύναμης που θα αναγκάσει το σύστημα να εισέλθει στη βάση της έλξης της επιθυμητής κατάστασης. Όταν αυτό έχει επιτευχθεί, η δύναμη μπορεί να διακοπεί γιατί οι ανεξέλεγκτες δυναμικές του συστήματος θα συγκλίνουν προς την επιθυμητή κατάσταση.

Αυτή η ανακάλυψη έχει εφαρμογές στην πραγματική ζωή και παρουσιάζει την προσωρινή προσποίηση ως ένα είδος θεραπείας που προτείνεται σε ζευγάρια που αλλιώς δε θα μπορούσαν να επιτύχουν μία ικανοποιητικά συναισθηματική σχέση. Από αυτό προκύπτουν και κάποιες ακόμα παρατηρήσεις, λιγότερο τεχνικές αλλά το ίδιο ενδιαφέρουσες. Πρώτον, η μονομερής προσωρινή προσποίηση είναι εικονικά το ίδιο υποσχόμενη όσο και η διμερής προσωρινή προσποίηση, ένα γεγονός που θα μπορούσε να έχει σημασία για τους ψυχοθεραπευτές οι οποίοι μάλλον αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην πρόταση προσωρινής προσποίησης και στους δύο συντρόφους. Δεύτερον, τα ζευγάρια με υψηλή ελκυστικότητα δεν παρουσιάζουν κανένα στρατηγικό ενδιαφέρον στην προσποίηση γιατί ήδη σίγουρο ότι θα φτάσουν την επιθυμητή κατάσταση σε κάθε περίπτωση. Αντιθέτως, τα ζευγάρια με πολύ χαμηλή ελκυστικότητα αναγκαστικά κινούνται προς τα πίσω σε ένα μη επιθυμητό μοτίβο όταν διακόπτεται η προσποίηση ενός ή και των δύο συντρόφων. Σε αυτά τα ζευγάρια, μόνο η μόνιμη προσποίηση θα μπορούσε να θεωρηθεί χρήσιμη.

Πολλές από τις γενικές αρχές που ανακαλύφθηκαν από την ανάλυση του μοντέλου μπορούν να εντοπιστούν στην ιστορία του Edmond Rost στο έργο του «Συρανό ντε Μπερζεράκ». Αυτό το έργο, που αποτελεί ύμνο στην προσωρινή προσποίηση, δείχνει πως ένα ζευγάρι μπορεί να φτάσει σε μία πολύ συναισθηματική σχέση παρά τα μεγάλα εμπόδια που μπορεί να αντιμετωπίζουν, για παράδειγμα τη χαμηλής ποιότητας εξωτερική εμφάνιση του ενός. Μιας και ο «Συρανό ντε Μπερζεράκ» κατάφερε να διαχωρίσει το μυαλό από το σώμα, η επιτυχημένη παρουσίασή του μέσα από ένα μαθηματικό μοντέλο, δίνει ελπίδα σε πιθανή μαθηματική ανάλυση άλλων σπουδαίων έργων όπου συζητείται ο ίδιος διαχωρισμός.

### 3.3 Η Πεντάμορφη και το Τέρασ (The Beauty and the Beast)

Ένα μαθηματικό μοντέλο προτείνεται από τον Rinaldi (Rinaldi et al. 2013) για την αναπαράσταση της ιστορίας του Walt Disney στο έργο «Η Πεντάμορφη και το Τέρασ». Η ανάλυση θα δείξει ότι υπάρχει μια ξαφνική έκρηξη συναισθημάτων η οποία αποκαλύπτεται από την ύπαρξη ενός σαγματικού σημείου διακλάδωσης στο μοντέλο. Το μοντέλο είναι σημαντικό γιατί ασχολείται με τις συνέπειες των καταστροφικών διακλαδώσεων σε συγκεκριμένες ερωτικές ιστορίες αλλά και γιατί ενισχύει τη θέση των ODE μοντέλων στην ανάλυση τέτοιων ιστοριών.

#### 3.3.1 Η ιστορία

«Η Πεντάμορφη και το Τέρασ» (The Beauty and the Beast) είναι ένα από τα πιο γνωστά ευρωπαϊκά παραμύθια. Η πιο διάσημη εκδοχή, γραμμένη από την Γαλλίδα Jeanne-Marie Leprince de Beaumont το 1756, έγινε ταινία, κινούμενα σχέδια αλλά και μιούζικαλ. Στη συγκεκριμένη ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί η ταινία κινουμένων σχεδίων του Walt Disney του 1991, η οποία αποτελεί μια εξαιρετική εκδοχή του παραμυθιού.

Η ιστορία ξεκινά με μια μικρή αναδρομή στα γεγονότα που έχουν συμβεί: για τιμωρία, ένας νεαρός πρίγκιπας μεταμορφώνεται από μία νεράιδα σε ένα άσχημο τέρας και θα μπορέσει να αποκτήσει ξανά την ανθρώπινη μορφή του μόνο αν μια νεαρή γυναίκα δηλώσει ρητά την αγάπη της για αυτόν. Η Πεντάμορφη, μια πολύ χαρούμενη και όμορφη κοπέλα, λαμβάνει την υπόσχεση από το Τέρασ ότι θα αντικαταστήσει τον πατέρα της, ο οποίος είναι πολύ γέρος για να αντέξει τη φυλάκιση. Οι φίλοι του τέρατος προτείνουν ότι η Πεντάμορφη είναι μια μοναδική ευκαιρία για αυτόν να ξανακερδίσει την αρχική του εμφάνιση. Έτσι, το Τέρασ, αρχίζει με το δικό του τρόπο να την ερωτεύεται. Αρχικά, την μεταφέρει από την φυλακή σε ένα πύργο στο κάστρο του σε ένα όμορφο δωμάτιο και στη συνέχεια την προσκαλεί για δείπνο, με έναν άξεστο τρόπο στην πραγματικότητα. Όμως η Πεντάμορφη αρνείται την πρότασή του με απέχθεια. Λίγο καιρό αργότερα, η Πεντάμορφη δέχεται επίθεση στο δάσος από μια αγέλη λύκων και σώζεται από το Τέρασ, που δείχνει μεγάλο θάρρος και πως είναι έτοιμος να θυσιάσει τη ζωή του για αυτήν. Η Πεντάμορφη τον ευχαριστεί και είναι η πρώτη φορά που δείχνει μια ελαφρώς λιγότερο εχθρική συμπεριφορά απέναντί του. Ενθαρρυσμένος από τη συμπεριφορά της, της δίνει πρόσβαση στην όμορφη βιβλιοθήκη του κάστρου, κάτι το οποίο εκτιμά ιδιαίτερω. Μετά από αυτήν την κίνηση η Πεντάμορφη αντιλαμβάνεται τον αλτρουισμό του Τέρατος και λίγο αργότερα, σε μια ειδυλλιακή σκηνή, δείχνει τα πρώτα

σημάδια δεσίματος με αυτόν. Η αναπόφευκτη μεταστροφή σε μία κατάσταση ανταποδοτικής αγάπης έχει ήδη ξεκινήσει και κλείνει με ένα χορό στο κάστρο όπου η Πεντάμορφη δείχνει ευτυχισμένη. Σε αυτό το σημείο η ιστορία τελειώνει με την Πεντάμορφη να είναι ευτυχισμένη μαζί του παρά την αποκρουστική εμφάνισή του. Το αποκορύφωμα του παραμυθιού είναι η τελευταία σκηνή όπου το Τέρας πεθαίνει στα χέρια της Πεντάμορφης, η οποία εξομολογείται τον έρωτά της για αυτόν προκαλώντας έτσι την μεταμόρφωσή του σε πρίγκηπα.

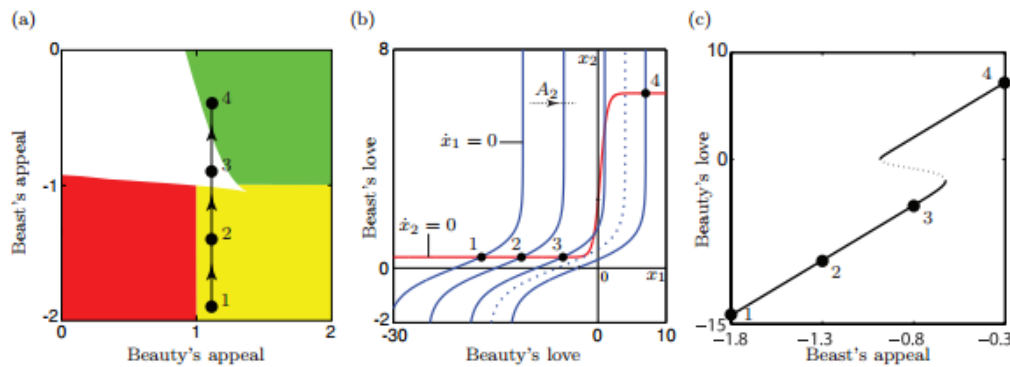
### 3.3.2 Το μοντέλο

Η ιστορία που μόλις περιγράφηκε μπορεί να παρουσιαστεί τέλεια με το μοντέλο (3.2), αν δοθούν στις παραμέτρους οι κατάλληλες τιμές με το σωστό πρόσημο για την έλξη του καθενός. Η έλξη της Πεντάμορφης  $A_1$  είναι σίγουρα υψηλή και παραμένει έτσι σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Η έλξη από το Τέρας (όπως εκλαμβάνεται από την Πεντάμορφη)  $A_2$  έχει μια αρνητική συνιστώσα εξαιτίας της αποκρουστικής φυσικής του εμφάνισης και μια θετική συνιστώσα εξαιτίας του αλτρουισμού του. Το αρνητικό μέρος είναι υψηλό και παραμένει σταθερό ενώ το θετικό μέρος αυξάνεται καθώς περνάει ο χρόνος και ανακαλύπτεται σταδιακά από την Πεντάμορφη έπειτα από μια σειρά γεγονότων που συνέβησαν αλλά δεν αναφέρθηκαν στην παραπάνω ιστορία για συντομία. Είναι θεμιτό επομένως να φανταστούμε ότι η εξέλιξη της ιστορίας οφείλεται στη διαφοροποίηση του  $A$  κατά τη διαδρομή που δείχνει το διάγραμμα 3.7α.

Στην αρχή της ιστορίας, λίγο μετά τη γνωριμία της Πεντάμορφης με το Τέρας, τα συναισθήματά της στην ισορροπία είναι αρνητικά ενώ τα συναισθήματά του είναι θετικά (κίτρινη περιοχή στο διάγραμμα 3.7α). Στη συνέχεια, όταν το  $A_2$  αυξάνεται, τίποτα σχετικό δε συμβαίνει (από την άποψη ότι τα πρόσημα των συναισθημάτων παραμένουν αμετάβλητα) μέχρι ο ανώτερος σαγματικός κόμβος διακλάδωσης διασχίζεται από κάτω. Αυτές οι διασταυρώσεις στο χώρο των συναισθημάτων δίνουν ώθηση σε μια σχετική μεταβολή που καταλήγει σε μια θετική ισορροπία (σημείο 4 στην πράσινη περιοχή του διαγράμματος 3.7α) ακόμα και όταν η εμφάνιση από το Τέρας είναι ακόμα αρνητική.

Η ανάλυση των ισοκλινών που φαίνονται στο διάγραμμα 3.7b για διάφορες τιμές του  $A_2$  και το διάγραμμα 3.7c της αγάπης της Πεντάμορφης σε σχέση με την εμφάνιση του Τέρατος παρουσιάζουν επίσης ενδιαφέρον γιατί δείχνουν τα συναισθήματα της Πεντάμορφης

αυξάνονται προοδευτικά, αλλά παραμένουν αρνητικά μέχρι την καταστροφική μεταστροφή προς τη θετική ισορροπία (σημείο 4 στο διάγραμμα 1b).



Διάγραμμα 3.7 Αναπαράσταση της ερωτικής ιστορίας μεταξύ της Πεντάμορφης και του Τέρατος χρησιμοποιώντας το μοντέλο (2).

Τα σημεία 1,...,4 στο διάγραμμα αντιπροσωπεύουν τις διαφορετικές τιμές στην έλξη κατά τη διάρκεια της ιστορίας και τις αντίστοιχες τιμές των συναισθημάτων στην ισορροπία. (α) η έλξη του Τέρατος που γίνεται αντιληπτή από την Πεντάμορφη διαφέρει κατά τη διάρκεια της ιστορίας επειδή η Πεντάμορφη γνωρίζει σταδιακά τον αλτρουισμό του μέσα από μια σειρά μικρών ανακαλύψεων. (β) η ισοκλινής  $\dot{x}_1 = 0$  του μοντέλου (2) ανέρχεται προς τα δεξιά όταν το  $A_2$  αυξάνεται ενώ η  $\dot{x}_2 = 0$  παραμένει αμετάβλητη. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το σαγματικό κόμβο διακλάδωσης. (γ) η αγάπη της Πεντάμορφης στην ισορροπία συναρτήσκει της έλξης από το Τέρας. Το διακεκομμένο τμήμα ανταποκρίνεται στη σαγματική ισορροπία.

### 3.3.3 Συμπεράσματα

Αποδείχθηκε ότι η εξέλιξη μιας σχέσης μπορεί να χαρακτηριστεί από μια ξαφνική εξέλιξη εξαιτίας μιας απρόσμενης έκρηξης στα συναισθήματα των δύο συντρόφων. Αυτό έγινε περιγράφοντας την ιστορία «Η Πεντάμορφη και το Τέρας» χρησιμοποιώντας το μαθηματικό μοντέλο που ήδη έχει προταθεί ωρίτερα και δίνοντας στις μεταβλητές κατάλληλες τιμές. Άλλη μια μελέτη που ασχολείται με καταστροφικές διακλαδώσεις στις ερωτικές σχέσεις θα συζητηθεί στη συνέχεια είναι αυτή της ιστορίας της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι από το «Περηφάνεια και Προκατάληψη».

### 3.4 Περηφάνια και Προκατάληψη

Ένα μαθηματικό μοντέλο προτείνεται από τον Rinaldi (Rinaldi et.al 2014) για την περιγραφή της ερωτικής ιστορίας μεταξύ της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι η οποία περιγράφεται στην «Περηφάνια και Προκατάληψη» (“Pride and Prejudice”), στο διάσημο μυθιστόρημα της Jane Austen. Η ανάλυση δείχνει ότι η ιστορία χαρακτηρίζεται από μία ξαφνική έκρηξη συναισθηματικής περιπλοκής, η οποία φανερώνεται από την ύπαρξη ενός σαγματικού κόμβου στο μοντέλο. Το μοντέλο παρουσιάζει ενδιαφέρον, όχι μόνο επειδή ασχολείται για πρώτη φορά με καταστροφικές διακλαδώσεις σε μια ρομαντική σχέση, αλλά κυρίως επειδή εμπλουτίζει τη λίστα με τα παραδείγματα στα οποία η ερωτική ιστορία μεταξύ δύο ατόμων μπορεί να περιγράφεται με Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (Ordinary Differential Equations, ODE). Η ανάλυση βασίζεται στο άρθρο των S. Rinaldi, F. D. Rossa και P. Landi “*A mathematical model of “Pride and Prejudice”*” και προσπαθεί να καλύψει τις ελλείψεις των μοντέλων που προηγήθηκαν, όπως ήταν η μελέτη για το *Canzoniere* με την ιστορία της Λάουρα και του ποιητή Πετράρχη.

#### 3.4.1 Η ιστορία

Η «Περηφάνια και Προκατάληψη» είναι ένα πολύ διάσημο αγγλικό μυθιστόρημα στο οποίο περιγράφεται η ερωτική ιστορία της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι. Το μυθιστόρημα έχει εμπνεύσει πολλές ταινίες με την πιο πετυχημένη να είναι αυτή του 2005. Η μαθηματική ανάλυση υποστηρίζεται από τμήματα της ταινίας και της ιστορίας των δύο ατόμων. Η Ελίζαμπεθ, 20 χρονών, είναι το δεύτερο παιδί μιας συνεσταλμένης οικογένειας, μένει με τους γονείς και τις αδερφές της σε ένα σπίτι στο Hertfordshire. Σε ένα χορό γνωρίζει τον Ντάρσι, έναν ευγενικό νεαρό άντρα με αλαζονικό αέρα ο οποίος ανήκει στην τοπική πλούσια οικογένεια ευγενών. Χωρίς να την δει, η Ελίζαμπεθ ακούει τον Ντάρσι να κάνει ένα άδικο σχόλιο για την εμφάνισή της. Η αντίδρασή της είναι ισχυρή και οξεία. Αυτή είναι μόνο η αρχή μιας σειράς από συζητήσεις στις οποίες υποστηρίζει της ιδέες της οι οποίες έρχονται σε αντίθεση με αυτές του Ντάρσι ή των μελών της οικογένειάς του. Μερικές φορές οι συζητήσεις είναι πολύ έντονες που καταλήγουν σε διαμάχες. Παρόλα αυτά, ο Ντάρσι γοητεύεται από το θάρρος και το ταλέντο της σε σημείο που αρχίζει και δείχνει το ενδιαφέρον του για αυτήν. Σύντομα, ο Ντάρσι εξομολογείται τον έρωτά του τονίζοντας όμως τις δυσκολίες που υπάρχουν για το γάμο τους λόγω της διαφορετικής κοινωνικής τάξης. Η Ελίζαμπεθ δεν εκτιμά τις ενστάσεις του και όταν της προτείνει να παντρευτούν εκείνη αρνείται. Αναστατωμένος από την άρνησή της, της γράφει ένα γράμμα στο οποίο απολογείται

και ταυτόχρονα αιτιολογεί με λεπτομερή και πειστικά επιχειρήματα τα σημεία της παλιάς του συμπεριφοράς που την έκαναν να μην τον συμπαθεί. Αυτό το γράμμα θα είναι και η αιτία που θα αλλάξει ολόκληρη η ιστορία γιατί αφαιρεί τα εμπόδια που την εμπόδιζαν να εκτιμήσει πλήρως τις εξαιρετικές του ικανότητες. Η εμπλοκή της αυξάνεται αδυσώπητα από την αρχική σύγκυση της και άγνοια της έλξης για αυτόν σε ζήλια, όταν υποπτεύεται ότι είναι ερωτευμένος με μια άλλη γυναίκα και σε χαρά όταν ανακαλύπτει ότι η ζήλια της είναι αβάσιμη. Έτσι, η επίγνωση μιας ανταποδοτικής αγάπης επιδιώκεται κλιμακωτά και σφραγίζεται με ένα ρομαντικό φιλί στο τέλος της ταινίας και της ιστορίας.

### 3.4.2 Το μοντέλο

Η ιστορία αγάπης μεταξύ της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι μπορεί να ερμηνευτεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο (3.2)

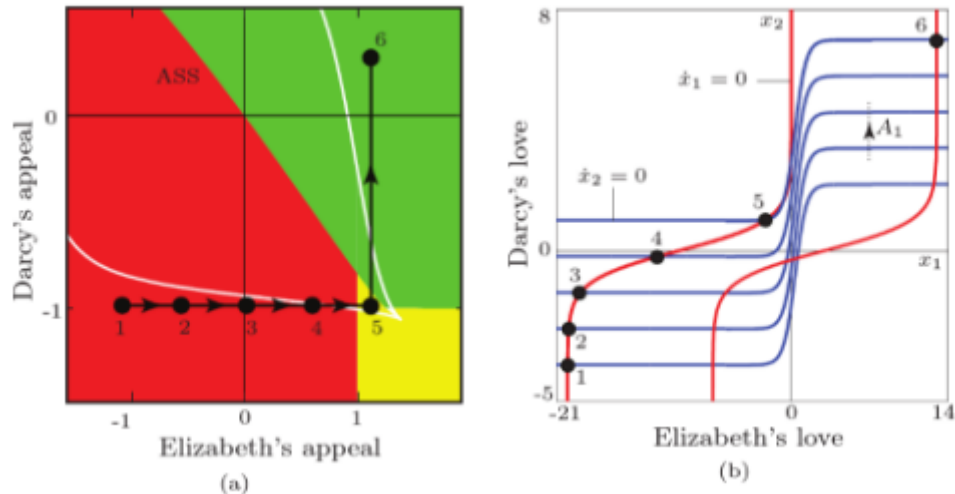
$$\dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + \rho_1A_2 + R_1(x_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2x_2(t) + \rho_2A_1 + R_2(x_1)$$

παρέχοντας κατάλληλες τιμές οι οποίες θα αποδοθούν στις παραμέτρους του μοντέλου. Η έλξη  $A_1$  της Ελίζαμπεθ (που λαμβάνει από τον Ντάρσι) είναι αρχικά μικρή, αλλά στη συνέχεια αυξάνεται σε κάθε συνάντησή τους όπου επιδεικνύει, χωρίς καμία εξαίρεση, τη χάρη και το ταλέντο της. Σε αντίθεση, η έλξη  $A_2$  του Ντάρσι (που λαμβάνει από την Ελίζαμπεθ) παραμένει αρνητική έχοντας προκαταλήψεις απέναντι στο χρήμα και στην καταγωγή του. Είναι έτσι θεμιτό να φανταστεί κάποιος ότι η εξέλιξη της ερωτικής σχέσης είναι αποτέλεσμα της αναδρομικής αύξησης του  $A_1$  η οποία ακολουθείται από μία ξαφνική αύξηση του  $A_2$  (εξαιτίας του αποκαλυπτικού γράμματος του Ντάρσι), όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Στην αρχή της ιστορίας, το αντιπροσωπευτικό σημείο που βρίσκεται στο χώρο των  $A$  είναι το σημείο 1 στην κόκκινη περιοχή του διαγράμματος 3.8 όπου η Ελίζαμπεθ και ο Ντάρσι έχουν μια ανταγωνιστική σχέση. Όταν η αντίληψη  $A_1$  της έλξης της Ελίζαμπεθ αυξάνεται (σημεία 2,3,4,5) τίποτα σχετικό δεν εμφανίζεται, αν και η εμπλοκή του Ντάρσι είναι θετική στο σημείο 5. Σε αυτό το σημείο η Ελίζαμπεθ είναι ακόμα ανταγωνιστική ως προς αυτόν και όντως αυτό ισχύει γιατί αρνείται να τον παντρευτεί. Μόνο το γράμμα του Ντάρσι είναι αυτό που ξαφνικά φανερώνει την εντιμότητα του στην Ελίζαμπεθ. Αυτό



παρουσιάζεται με ένα κατακόρυφο άλμα από το σημείο 5 στο σημείο 6 στην πράσινη περιοχή του διαγράμματος όπου οι δύο εραστές μπορούν να έχουν μόνο θετικά συναισθήματα.



Διάγραμμα 3.8 Αναπαράσταση της ερωτικής ιστορίας μεταξύ της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι. Τα σημεία 1 έως 6 δείχνουν τις διαφορετικές τιμές στην έλξη κατά τη διάρκεια της ιστορίας και τις τιμές ανταπόκρισης στην ισορροπία.

Η ανάλυση των ισοκλινών που φαίνονται στο διάγραμμα παρουσιάζουν επίσης ενδιαφέρον. Δείχνουν ότι η μπλε ισοκλινής ανεβαίνει προς τα πάνω, όταν το  $A_1$  αυξάνεται (από το σημείο 1 στο σημείο 5 του διαγράμματος 3.8a). Αυτό υποδηλώνει ότι τα αισθήματα του Ντάρσι αυξάνονται σταδιακά και τελικά γίνονται θετικά στο σημείο 5 όπου η Ελίζαμπεθ έχει ακόμα αρνητική στάση. Αλλά το γράμμα του Ντάρσι ξαφνικά ανεβάζει την κόκκινη ισοκλινή τόσο πολύ προς τα δεξιά ώστε οι δύο γραμμές τέμνονται μόνο σε ένα σημείο, δηλαδή το σημείο 6 στο θετικό τεταρτημόριο.

### 3.4.3 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή των Rinaldi, S., Rossa, F. D. and Landi, P., (2014), αποδείχθηκε ότι η εξέλιξη μιας ερωτικής ιστορίας μπορεί να χαρακτηριστεί από μία ξαφνική αλλαγή λόγω της απροσδόκητης έκρηξης των συναισθημάτων ενός από τους συντρόφους. Αυτό έγινε με την παρουσίαση μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει την ερωτική ιστορία του μυθιστορήματος «Περηφάνεια και Προκατάληψη». Η μελέτη αυτή, αν και μικρή σε έκταση,

παρουσιάζει ενδιαφέρον γιατί αποτελεί ακόμα ένα παράδειγμα ερωτικής ιστορίας που μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση ODE μοντέλων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση δείχνει μια γενική αρχή, η οποία ήδη είναι γνωστή από την εμπειρία, πως μια σειρά από μικρές ανακαλύψεις μπορούν να δώσουν μία ξαφνική τροπή στην εξέλιξη της ερωτικής ιστορίας. Σε μαθηματικούς όρους, τα σημεία καμπής ονομάζονται καταστροφικά και στην περίπτωση της «Περηφάνειας και Προκατάληψης» φαίνονται από την ύπαρξη μιας σαγματικής κομβικής διακλάδωσης.

## Κεφάλαιο 4

### 4. Κυκλικά δυναμικά συστήματα σε ρομαντικές σχέσεις

#### 4.1 Εισαγωγή

Απλά μοντέλα με διαφορεικές εξισώσεις μπορούν να μιμηθούν τα συναισθήματα μεταξύ δύο ανθρώπων. Τα άτομα μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες: τους ασφαλείς και ανασφαλείς καθώς και σε συνεργικούς και μη-συνεργικούς. Ζευγάρια που αποτελούνται μόνο από ασφαλείς συντρόφους, όπως και αυτά που αποτελούνται μόνο από μη-συνεργικά άτομα έχουν μόνο στατικά μοντέλα συμπεριφοράς. Αντιθέτως, ζευγάρια που αποτελούνται από έναν ασφαλή και έναν συνεργικό σύντροφο, όπως και ζευγάρια που αποτελούνται από ένα ανασφαλή και ένα μη-συνεργικό σύντροφο μπορούν να οδηγήσουν σε κυκλική συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Με άλλα λόγια, η συνύπαρξη ανασφάλειας και συνέργειας είναι το ελάχιστο συστατικό για κυκλικά δυναμικά συστήματα αγάπης. Τα αποτελέσματα παρατηρούνται μέσα από μία τοπική και ολική ανάλυση της διακλάδωσης του μοντέλου.

Το θέμα της ανάλυσης της συναισθηματικής σχέσης μεταξύ δύο ανθρώπων εμπίπτει στον τομέα της ψυχολογίας, όπου οι ανθρώπινες σχέσεις αποτελούν μεγάλο κομμάτι της επιστήμης. Οι ρομαντικές σχέσεις είναι, κατά κάποιον τρόπο, η πιο απλή περίπτωση καθώς περιλαμβάνει μόνο δύο άτομα. Η θεωρία της αφοσίωσης δύο ατόμων εξηγεί γιατί τα βρέφη συνδέονται συναισθηματικά με την μητέρα τους, αλλά και γιατί βιώνουν συναισθηματικό στρες όταν την αποχωρίζονται. Εμπειρικά, μπορούν να γίνουν μελέτες και για τον τρόπο του συναισθηματικού δεσίματος τόσο στα παιδιά όσο και στους ενήλικες. Γενικά, μπορούν να γεννηθούν πολλές υποθέσεις σχετικά με την σχέση αγάπης μεταξύ δύο ανθρώπων ανάλογα με τα διαφορετικό τρόπο αφοσίωσης του ενός για τον άλλον. Συνοψίζοντας, τα γενικά χαρακτηριστικά μιας ρομαντικής σχέσης μπορούν να αποδοθούν στη συμπεριφορά των ατόμων που εμπλέκονται σε αυτή.

Οι ερωτικές σχέσεις είναι δυναμικές διαδικασίες που ξεκινούν από το μηδέν, δύο άτομα είναι τελείως ξένα μεταξύ τους όταν γνωρίζονται, εξελίσσονται, άλλες πιο αργά και άλλες πιο γρήγορα, και καταλήγουν σε κάτι σταθερό. Οι παρατηρήσεις στην πραγματική ζωή έχουν δείξει ότι τις περισσότερες φορές υπάρχει μία ομαλή μετάβαση της σχέσης που οδηγεί σε θετική ρομαντική σχέση. Αλλά υπάρχουν, επίσης, και ιστορίες αγάπης που χαρακτηρίζονται από ασταθείς σχέσεις και ταραχώδες μοτίβο συναισθημάτων όπως κυκλικά συστήματα. Τέτοια είναι η ρομαντική σχέση του Πετράρχη και της Λάουρα που περιγράφεται στην

ποιητική συλλογή *Canzoniere* του Πετράρχη και αποτελεί την πιο διάσημη συλλογή ερωτικών ποιημάτων στο δυτικό κόσμο.

Η ύπαρξη «κύκλων» με διαφορετικές συχνότητες στις ρομαντικές σχέσεις μπορεί να παρατηρηθεί και σε πειραματικές εργασίες. Για παράδειγμα, μπορούν να υπάρχουν 24ωρες διακυμάνσεις μεταξύ των συναισθημάτων δύο ανθρώπων, εάν τουλάχιστον ένας από τους δύο παρουσιάζει διακυμάνσεις στην πίεση του αίματος. Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να παρατηρηθούν εβδομαδιαίες διακυμάνσεις, που μπορεί να οφείλονται στα διαφορετικά συναισθήματα ανάμεσα στις μέρες της εβδομάδος και τα σαββατοκύριακα, αλλά και μηνιαίες διακυμάνσεις ανάλογα με τη φάση της σελήνης. Όλοι αυτοί οι κύκλοι έχουν υψηλή συχνότητα, η οποία προκαλείται από εξωτερικούς παράγοντες.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, οι κύκλοι στις ρομαντικές σχέσεις είναι χαμηλής συχνότητας και ενδογενώς παραγόμενοι. Οι κύκλοι μπορούν να έχουν διαφορετικές περιόδους που ποικίλουν από λίγους μήνες έως και αρκετά χρόνια. Για παράδειγμα, ο κύκλος της αγάπης που περιγράφεται από τον Jones (1995) στο *Canzone* του Πετράρχη έχει περίοδο 4 χρόνια. Οι σταθερές και οι κυκλικές ρομαντικές σχέσεις θυμίζουν πάρα πολύ τη συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων, που είτε τείνουν σε ισορροπία, είτε σε οριακούς κύκλους. Όμως, οι παρατηρήσεις δείχνουν επίσης και την ύπαρξη πολλαπλών ελκυστών. Για παράδειγμα, οι σταθερές και καλές ρομαντικές σχέσεις μπορούν να γίνουν έντονα ανταγωνιστικές, αν ένας από τους δύο δείξει ενδιαφέρον για ένα τρίτο άτομο. Τέλος, μέχρι και παράμετροι όπως η ηλικία που εξελίσσονται πολύ αργά μπορούν να αλλάξουν το καθεστώς μιας σχέσης.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, γίνεται η πρόταση για χρήση διαφορετικών εξισώσεων για τη μοντελοποίηση των συναισθημάτων μεταξύ δύο ανθρώπων. Όλη η μελέτη των A. Gragnani, S. Rinaldi και G. Feichtinger προήλθε από το μονοσέλιδο άρθρο του Strogatz, «*Love affairs and differential equations*» και καταλήγει στη μελέτη ενός κυκλικού δυναμικού συστήματος.

## 4.2 Ανασκόπηση παλαιότερων υποδειγμάτων

Τα μοντέλα που είχαν προταθεί έως τότε ήταν όλα μινιμαλιστικά από την άποψη ότι περιείχαν τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών, κάθε μία για έναν στο ζευγάρι. Τέτοιες μεταβλητές μπορούν να είναι οι  $x_1$  και  $x_2$ , που μετρούν την αγάπη των ατόμων 1 και 2 για το σύντροφό τους. Θετικές τιμές στο  $x$  αντιπροσωπεύουν θετικά συναισθήματα, που διακυμαίνονται από φιλία μέχρι πάθος, ενώ αρνητικές τιμές σχετίζονται με ανταγωνιστικά συναισθήματα και αποστροφή. Για  $x = 0$  δηλώνεται η αδιαφορία.

Τα μινιμαλιστικά μοντέλα παρουσιάζουν αρκετά μειονεκτήματα. Το κύριο μειονέκτημα είναι ότι δεν είναι ρεαλιστικά, γιατί η αγάπη είναι ένα μείγμα διαφόρων συναισθημάτων (φιλία, πάθος, εκτίμηση, σεβασμός, σεξουαλική ικανοποίηση κ.λπ.) και δύσκολα μπορεί να παρουσιαστεί από μία μόνο μεταβλητή. Επιπρόσθετα, άλλο ένα μειονέκτημα είναι ότι δεν περιλαμβάνει τα συναισθήματα και τις τάσεις της κοινωνικής ζωής των ατόμων. Με άλλα λόγια, λαμβάνεται υπόψη μόνο η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ατόμων, ενώ ο υπόλοιπος κόσμος παγώνει και δεν παίρνει μέρος στη διαμόρφωση των συναισθημάτων. Το πρόβλημα είναι πώς μπορεί να συμπεριληφθούν οι παρατηρήσεις στην πραγματική ζωή μέσα από τις λίγες μεταβλητές του υποδείγματος.

Στην ανάλυση των δυναμικών μοντέλων της αγάπης τρεις μεταβλητές μοιάζουν να έχουν την μεγαλύτερη επιρροή: η λήθη (oblivion), η ανταπόκριση (appeal) και το ένστικτο (instinct). Έτσι, η μεταβολή της αγάπης ενός ατόμου, δηλαδή η μεταβολή του  $x_i$ , συνθέτεται από τρεις όρους:

$$\dot{x}_i = O_i + R_i + I_i$$

όπου  $O_i$  = λήθη,  $R_i$  = ανταπόκριση,  $I_i$  = ένστικτο, και έχουν διαφορετικές τιμές σε κάθε μοντέλο.

Στο πρώτο μοντέλο που αναλύθηκε από τον Strogatz το 1988, η λήθη και το ένστικτο δεν εμφανίζονται, ενώ η ανταπόκριση στα συναισθήματα του συντρόφου εξελίσσεται αναλογικά του  $x_i$ . Αλλά οι δύο συντελεστές έχουν αντίθετα πρόσημα, που σημαίνει ότι ο ένας από τους δύο μισεί να αγαπιέται και αγαπάει να είναι μισητός. Έτσι, το μοντέλο γίνεται ένας γραμμικός ταλαντωτής. Ο Strogatz εξηγεί ότι έκανε αυτήν την ακραία υπόθεση ώστε να προσπαθήσει να διδάξει τους αρμονικούς ταλαντωτές χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα που ήταν ήδη στο μυαλό πολλών φοιτητών του, δηλαδή την εξέλιξη μιας ρομαντικής σχέσης σε σχέση με το χρόνο.

Στα επόμενα δύο μοντέλα που προϋπήρχαν οι μεταβλητές της λήθης και του ενστίκτου συμμετέχουν στην εξέλιξη του υποδείγματος. Η λήθη παρουσιάζεται ως:

$$O_i = -a_i x_i$$

έτσι ώστε εάν ο ένας σύντροφος έχει χάσει τον άλλον ( $R_i = I_i = 0$ ), το  $x_i$  φθίνει εκθετικά. Για αυτό το λόγο το  $a_i$  ονομάζεται συντελεστής λήθης. Το ένστικτο παρουσιάζει την έλξη στην εμφάνιση του συντρόφου. Βέβαια, δεν είναι μόνο η εξωτερική εμφάνιση που υπάρχει στην έλξη αλλά και διάφοροι άλλοι παράμετροι όπως οι γνώσεις, η εκπαίδευση κ.ά.

Στο δεύτερο μοντέλο (Rinaldi, 1998) όλες οι μεταβλητές είναι γραμμικές και δίνονται από τις σχέσεις:

$$O_i = -a_i x_i, \quad R_i = \beta_i x_j, \quad I_i = \gamma_i A_j$$

με τα  $a_i, \beta_i$  και  $\gamma_i$  για  $i = 1, 2$  να είναι θετικά. Έτσι, το μοντέλο είναι ένα θετικό γραμμικό σύστημα έχοντας κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Αν ο γεωμετρικός μέσος ανταπόκρισης στην αγάπη  $\sqrt{\beta_1 \beta_2}$  είναι μικρότερος από τον γεωμετρικό μέσο της λήθης  $\sqrt{a_1 a_2}$  υπάρχει μία μοναδική και σταθερή ισορροπία και τα δύο άτομα, τα οποία είναι εντελώς άγνωστα μεταξύ τους αρχικά, αναπτύσσουν μια ιστορία αγάπης που χαρακτηρίζεται από αυξανόμενα θετικά συναισθήματα. Επιπρόσθετα, η ποιότητα της σχέσης βελτιώνεται με την ανταπόκριση στην αγάπη και στην εμφάνιση. Τέλος, μια αύξηση στην εμφάνιση  $A_i$  του ατόμου  $i$  αυξάνει τα συναισθήματα και των δύο ατόμων στην ισορροπία, αλλά η σχετική βελτίωση είναι μεγαλύτερη για τον σύντροφο του ατόμου  $i$ . Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι μία κοινωνία αποτελούμενη από  $N$  γραμμικά ζευγάρια θα είναι ευσταθής, αν και μόνο αν ο σύντροφος της  $n$  πιο ελκυστικής γυναίκας θα είναι ο  $n$  πιο ελκυστικός άντρας. Αυτό σημαίνει ότι η έλξη ως προς την εμφάνιση του άλλου είναι η κινητήριο δύναμη που δημιουργεί τάξη στις κοινωνίες μας.

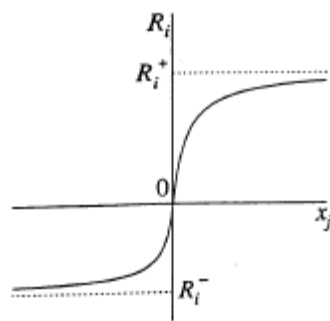
Στο τρίτο μοντέλο (Rinaldi & Gragnani, 1998) η ανταπόκριση και το ένστικτο ακόμα εξαρτώνται μόνο από το  $x_i$  και η εμφάνιση το ίδιο, αλλά η εξάρτηση είναι μη γραμμική. Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνονται υπόψη τα ασφαλή άτομα τα οποία αποτελούν την πλειονότητα των ατόμων. Τα ασφαλή άτομα, όπως αυτοαποκαλούνται, έχουν θετικά διανοητικά μοντέλα για τους εαυτούς τους και τους άλλους και οι ρομαντικές τους σχέσεις χαρακτηρίζονται από οικειότητα, αλληλοεκτίμηση και αλληλοσεβασμό. Ανταποκρίνονται θετικά στην αγάπη του συντρόφου τους και δεν φοβούνται μήπως κάποιος γίνει υπερβολικά συναισθηματικός προς αυτούς. Συνοψίζοντας, η ανταπόκρισή τους  $R_i$  είναι αυξανόμενη του  $x_i$ .

Το διάγραμμα 4.1a είναι η γραφική παράσταση ενός ασφαλούς ατόμου. Τα  $R_i^+$  και  $R_i^-$  είναι η τιμή της ανταπόκρισης για πολύ υψηλές θετικές και αρνητικές τιμές των συναισθημάτων του συντρόφου. Σε αντίθεση με τα ασφαλή άτομα, τα μη ασφαλή άτομα ανταποκρίνονται αρνητικά σε πολύ υψηλά συναισθήματα, όπως δείχνει το διάγραμμα 4.1b. Το μοντέλο είναι:

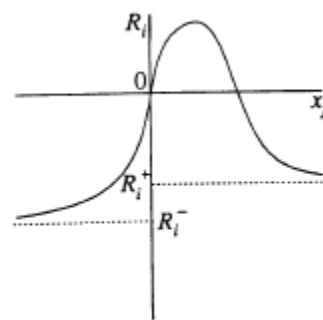
$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + R_1(x_2) + I_1(A_2) \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + R_2(x_1) + I_2(A_1)$$

Αυτό το μοντέλο περιλαμβάνει πολλές από τις προϋποθέσεις ενός απλού γραμμικού υποδείγματος, όπως την ύπαρξη μιας σταθερής θετικής ισορροπίας  $E^+$ . Η μόνη διαφορά είναι ότι οι μη γραμμικότητες μπορούν να γεννήσουν μία αρνητική σταθερή ισορροπία  $E^-$ . Τα ζευγάρια με ένα μοναδικό ελκυστή ( $E^+$ ) ονομάζονται εύρωστα, ενώ τα ζευγάρια με δύο ελκυστές ( $E^+$ ,  $E^-$ ) ονομάζονται εύθραυστα. Το διάγραμμα 4.2 δείχνει το πορτραίτο ανταπόκρισης. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα εύθραυστα ζευγάρια μπορούν να αλλάξουν από  $E^+$  σε  $E^-$ , αν ένας από τους δύο συντρόφους χάσει ξαφνικά το ενδιαφέρον του για τον άλλον.

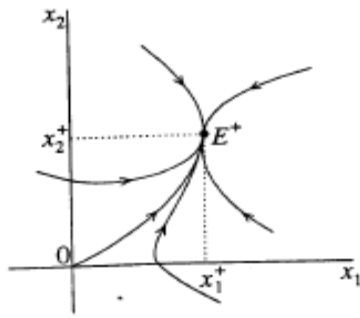


Διάγραμμα 1 (a)

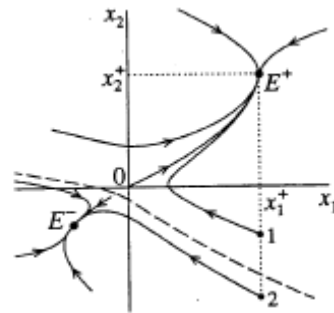


Διάγραμμα 1(b)

Διάγραμμα 4.1 Συναρτήσεις αντίδρασης  $R_i(x_j)$  από ασφαλή και ανασφαλές άτομο



Διάγραμμα 2(a)



Διάγραμμα 2(b)

Διάγραμμα 4.2 Στατικά πορτραίτα από ζευγάρια που αποτελούνται από ασφαλή άτομα, (α) εύρωστα ζευγάρια, (β) εύθραυστα ζευγάρια.

Από το μοντέλο (4.1) δεν μπορούν να προκύψουν κύκλοι ακόμα και αν τα άτομα είναι μη-ασφαλή. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα ζευγάρι με κυκλικό δυναμικό σύστημα πρέπει τουλάχιστον ένας να έχει παράγοντα στο ένστικτο  $I_i$  που να εξαρτάται επίσης από το  $x_i$  ή ένα παράγοντα ανταπόκρισης  $R_i$  που να εξαρτάται και από τις δύο μεταβλητές. Αυτό σχετίζεται με τη συνέργεια.

### 4.3 Συνέργεια και κυκλικά δυναμικά συστήματα

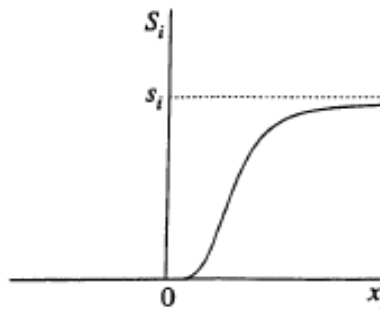
Είναι γνωστό ότι οι αντιδράσεις των ανθρώπων μπορούν να ενισχυθούν από την αγάπη. Για παράδειγμα, οι μητέρες έχουν συνήθως μία προκατειλημμένη άποψη για την ομορφιά των παιδιών τους. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται συνέργεια και παρατηρήθηκε εμπειρικά σε μία μελέτη σχετικά με την φυσική έλξη ανάμεσα σε άτομα που έχουν κάποια ερωτική σχέση και σε άτομα που δεν σχετίζονται μεταξύ τους. Παρά το γεγονός ότι δεν μπορεί να αγνοηθεί καμία μελέτη που δείχνει την ύπαρξη συνέργειας στην ανταπόκριση της αγάπης του συντρόφου, οι μεταβλητές ανταπόκρισης μπορούν να ενισχυθούν από την αγάπη. Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις για την ανταπόκριση και το ένστικτο, οι οποίες έχουν την παρακάτω μορφή:

$$R_i = \left(1 + S_i^R(x_i)\right) R_i^*(x_j) \quad (4.2)$$

$$I_i = \left(1 + S_i^I(x_i)\right) I_i^*(A_j) \quad (4.3)$$



όπου τα  $R_i^*$  και  $I_i^*$  είναι, εξ ορισμού, οι αντιδράσεις ενός μη συνεργικού ατόμου και τα  $S_i^R(x_i)$  και  $S_i^I(x_i)$  είναι 0 για  $x_i \leq 0$  και αυξάνονται, κυρτά/κοίλα, και περιορίζονται για  $x_i > 0$  όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.3. Τα άνω όρια των  $S_i^R$  και  $S_i^I$  εμφανίζονται ως  $s_i^R$  και  $s_i^I$  και ονομάζονται συντελεστές συνέργειας. Ζευγάρια που δεν παρουσιάζουν συνέργεια δεν μπορούν να δημιουργήσουν κυκλικά δυναμικά συστήματα και έτσι η συνέργεια είναι απαραίτητη για τη δημιουργία κυκλικών δυναμικών μοντέλων αγάπης.



Διάγραμμα 4.3: Μια τυπική συνάρτηση συνέργειας

Συνοψίζοντας, στη μελέτη των δυναμικών μοντέλων αγάπης μεταξύ δύο ατόμων υπάρχουν τρεις μηχανισμοί της ενδυνάμωσης και της φθοράς των συναισθημάτων που λαμβάνονται υπόψιν: η λήθη, η ευχαρίστηση να αγαπιέται κάποιος και η ανταπόκριση στην εμφάνιση του συντρόφου. Αυτό παρουσιάζεται με τη χρήση δύο συναρτήσεων που ονομάζονται ανταπόκριση και ένστικτο (R, I) που διαφέρουν για τα ασφαλή και τα μη-ασφαλή άτομα. Επίσης, ο παράγοντας συνέργεια, όταν ένα άτομο ίσως ανταποκρίνεται πιο έντονα στον σύντροφό του όταν είναι ερωτευμένος, μοντελοποιήθηκε. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, ένα άτομο μπορεί να είναι ασφαλές και μη-ασφαλές καθώς και να χαρακτηρίζεται ή όχι από συνέργεια και έτσι δημιουργούνται 4 κλάσεις. Τα ζευγάρια που αποτελούνται από μη συνεργικά άτομα ή από ασφαλή άτομα δεν μπορούν να δημιουργήσουν κυκλικά δυναμικά συστήματα ενώ από την άλλη τα ζευγάρια που αποτελούνται από ασφαλή και συνεργικά άτομα καθώς και τα ζευγάρια που αποτελούνται από μη ασφαλή και μη συνεργικά άτομα μπορούν να δημιουργήσουν κυκλικά δυναμικά μοντέλα. Με άλλα λόγια, η παρουσία συνέργειας και η έλλειψη ασφάλειας μέσα στο ζευγάρι είναι ο λόγος δημιουργίας μιας θυελλώδους σχέσης.

## 4.4 Λάουρα και Πετράρχης

### 4.4.1 Η ιστορία

Έπειτα από την μελέτη ενός μινιμαλιστικού γραμμικού μοντέλου αγάπης μεταξύ δύο συντρόφων, ο Rinaldi ασχολήθηκε με τη μελέτη ενός μη γραμμικού μοντέλου. Πρότεινε τρεις διαφορετικές εξισώσεις για την περιγραφή της δυναμικής αγάπης μεταξύ του Πετράρχη, ενός διάσημου Ιταλού ποιητή του 14<sup>ου</sup> αιώνα, και της Λάουρα, μιας όμορφης αλλά παντρεμένης γυναίκας. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι μη γραμμικές.

Η μελέτη αυτής της ιστορίας παρακινήθηκε από το έργο του Frederic Jones στο έργο του Πετράρχη *Canzoniere*, που αποτελεί το πιο διάσημο βιβλίο με ερωτικά ποιήματα του Δυτικού κόσμου. Μια σειρά από ημερολογιακά ταξινομημένα ποιήματα που στάλθηκαν από τον Πετράρχη στην πλατωνική του ερωμένη Λάουρα, επέτρεψαν στον Jones να εξάγει το συμπέρασμα ότι τα συναισθήματα του ποιητή ακολουθούν μια πορεία 20 ετών με κυκλικό χαρακτήρα και κυμαίνονται από ακραίο πάθος μέχρι την απόγνωση. Με βάση αυτή την υπόθεση, ο Jones μπόρεσε να ταξινομήσει ημερολογιακά τα ποιήματα του Πετράρχη και έπειτα να δείξει πως το ποιητικό του ύφος εξελίχθηκε από μεσαιωνικό σε μοντέρνο ανθρωπιστικό και καλλιτεχνικό ύφος σκέψης και έκφρασης.

Το μοντέλο που προκύπτει από την ιστορία του Πετράρχη είναι πλήρως ανεξάρτητο από αυτό του Jones, αλλά επιβεβαιώνει ισχυρά τα ευρήματά του. Για ορισμένες τιμές της συμπεριφοράς του Πετράρχη και της Λάουρα, το μοντέλο έχει έναν μοναδικό ελκυστή ο οποίος είναι ένας οριακός κύκλος. Οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη ενός κύκλου συμφωνούν απόλυτα με το πορτραίτο των δύο χαρακτήρων στο *Canzoniere*. Το σύστημα μπορεί να διαιρεθεί αν το αναλύσουμε σε γρήγορο, που περιλαμβάνει την αγάπη του Πετράρχη και της Λάουρα, και σε αργό, που περιλαμβάνει την ποιητική έμπνευση του Πετράρχη. Η ανάλυση δείχνει ότι μικρές μεταβολές στην ποιητική έμπνευση μπορούν να έχουν καταστροφικές μεταβάσεις στο γρήγορο μέρος.

Ο Πετράρχης υπήρξε αναμφισβήτητα ο πιο άρρωστα ερωτευμένος ποιητής όλων των εποχών. Έγραψε μια σειρά από 366 ποιήματα, το *Canzoniere*, που περιλαμβάνει μπαλάντες, τραγούδια, σονάτες κ.ά. Στην ηλικία των 23 ετών γνωρίζει τη Λάουρα, μια όμορφη παντρεμένη γυναίκα. Αμέσως την ερωτεύεται και παρά το γεγονός ότι η αγάπη του δεν έχει ανταπόκριση, της στέλνει πάνω από 200 ποιήματα στα επόμενα 21 χρόνια. Τα ποιήματά του δείχνουν το ζήλος και την απόγνωση, τη συμφιλιώση και την περιφρόνηση και σηματοδοτούν

την γέννηση της μοντέρνας ερωτικής ποίησης. Δυστυχώς, μόνο λίγα από τα ποιήματα έχουν ημερομηνία.

Το πρόβλημα χρονολόγησης των ποιημάτων το έλυσε ο Jones. Αρχικά, παρατήρησε ότι ένας αριθμός ποιημάτων έκανε αναφορά στην επαναλαμβανόμενη φύση των ερωτικών του συναισθημάτων. Επιπλέον, η συμπεριφορά της Λάουρα μοιάζει να γίνεται πιο επιεικής με επαναληπτική συχνότητα. Στη συνέχεια μάζεψε όλα τα χρονολογημένα ποιήματα που γράφτηκαν όσο ζούσε η Λάουρα, τα οποία ήταν 42 στο σύνολο, αλλά μόνο τα 23 είχαν σαφή ημερομηνία. Το πρώτο γράφτηκε το 1330 και το τελευταίο το 1347. Έπειτα, μελέτησε κάθε ένα από αυτά τα 23 ποιήματα από γλωσσική και λυρική πλευρά και στη βάση της ανάλυσής του διαβάθμισε τα ποιήματα από το -1 έως το +1. Ο μέγιστος βαθμός +1 δηλώνει εκστατική αγάπη, ενώ οι πολύ αρνητικές τιμές δείχνουν βαθιά απόγνωση και θλίψη. Οι μεσαίες τιμές προσδιορίζουν λιγότερο ακραία συναισθήματα όπως ζήλο, ήρεμη αγάπη, φιλία, μελαγχολία και πόνο.

Για παράδειγμα, οι στίχοι:

*Therefore my strength is ebbing day by day  
which I alone can secretly survey,  
and she whose very glance will scourge my heart*

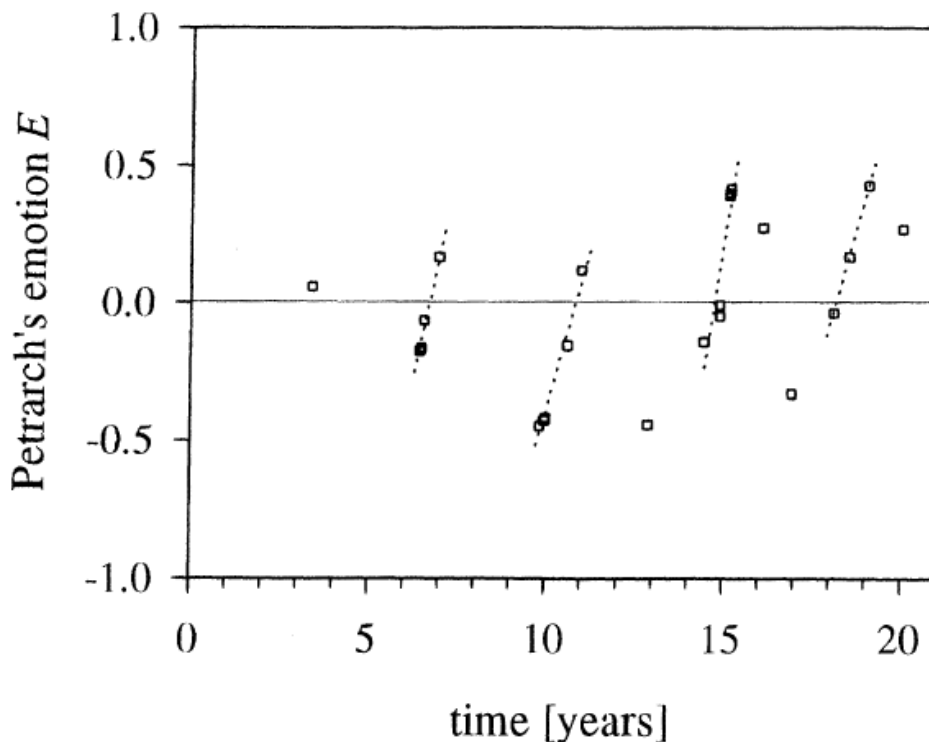
βαθμολογούνται με πολύ αρνητική τιμή καθώς δείχνουν απόγνωση, ενώ οι στίχοι:

*Her I seem to hear, hearing bough and wind's caress,  
as birds and leaves lament, as murmuring flees  
the streamlet coursing through the grasses green.*

βαθμολογούνται με -0,45 γιατί διακρίνονται από το συναίσθημα της μελαγχολίας.

Οι ημερομηνίες και οι βαθμοί των 23 ποιημάτων παρουσιάζονται ως σημεία του παρακάτω διαγράμματος μαζί με τέσσερα ανερχόμενα τμήματα μιας διακεκομμένης γραμμής που παρεμβάλει μερικά από τα σημεία. Η απόσταση μεταξύ των ζευγαριών γειτονικών τμημάτων δεν είναι πολύ διαφορετική και κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι αυτά τα τμήματα είναι μέρη ενός κυκλικού μοτίβου. Με άλλα λόγια, η ανάλυση υποδεικνύει ότι τα συναισθήματα

του Πετράρχη ποικίλουν περιοδικά στο χρόνο και η περίοδος ενός συναισθηματικού κύκλου είναι λίγο λιγότερο από τέσσερα χρόνια.



Διάγραμμα 4.4 Οι συντεταγμένες των σημείων είναι οι ημερομηνίες και ο βαθμός του κάθε ποιήματος που αναλύθηκαν από τον Jones.

Αυτό που έκανε ο Jones ήταν να προεκτείνει με μια απλή τεχνική τα τμήματα του διαγράμματος, έτσι ώστε να δημιουργήσει ένα σχεδόν κυκλικό διάγραμμα  $E(t)$ , που να περιγράφει το χρονικό μοτίβο των συναισθημάτων του ποιητή σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα (1330, 1348). Στη συνέχεια έδωσε ένα βαθμό  $\hat{E}$  σε καθένα από τα μη χρονολογημένα ποιήματα και συμπλήρωσε υποθετικές χρονολογίες για κάθε ένα από τα ποιήματα. Τέλος, χρησιμοποιώντας ιστορικά και άλλα γεγονότα της ζωής του Πετράρχη και τις επισκέψεις του στην Αβινιόν, στην πόλη της Γαλλίας όπου γνώρισε τη Λάουρα, κατάφερε να αποκλείσει όλες τις πιθανές χρονολογίες εκτός από μία κάθε φορά και έτσι έλυσε το πρόβλημα της χρονολόγησης των ποιημάτων. Το κλειδί της μελέτης είναι αναμφισβήτητα η ανακάλυψη της κυκλικής διακύμανσης των συναισθημάτων του Πετράρχη.

#### 4.4.2 Το μοντέλο

Τα συναισθήματα της Λάουρα και του Πετράρχη μπορούν να παρουσιαστούν μέσω τριών διαφορικών εξισώσεων. Τα συναισθήματα της Λάουρα περιγράφονται από τη μεταβλητή  $L(t)$ , αντιπροσωπεύοντας την αγάπη για τον ποιητή τη στιγμή  $t$ . Θετικές και υψηλές τιμές στο  $L$  δείχνουν φιλία, ενώ αρνητικές τιμές μπορούν να σχετίζονται με ψυχρά συναισθήματα και ανταγωνισμό. Η προσωπικότητα του Πετράρχη είναι πιο πολύπλοκη και παρουσιάζεται μέσα από δύο μεταβλητές:  $P(t)$ , που είναι η αγάπη του για τη Λάουρα και  $Z(t)$  που είναι η ποιητική του έμπνευση. Υψηλές τιμές στο  $P$  αντιπροσωπεύουν εκστατική αγάπη, ενώ αρνητικές τιμές δείχνουν απόγνωση.

Το μοντέλο είναι το εξής:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -a_1L(t) + R_L(P(t)) + \beta_1A_P \quad (4.4)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -a_2P(t) + R_P(L(t)) + \beta_2\frac{A_L}{1+\delta Z(t)} \quad (4.5)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -a_3Z(t) + \beta_3P(t) \quad (4.6)$$

Όπου  $A_P$  [ $A_L$ ] είναι η ανταπόκριση στην εμφάνιση (τόσο φυσική όσο και νοητική) του Πετράρχη (αντίστοιχα της Λάουρα) και όλα τα μικρά ελληνικά γράμματα είναι θετικές σταθερές παράμετροι, που σημαίνει ότι η διαφοροποίηση στην προσωπικότητα του Πετράρχη και της Λάουρα, καθώς μεγαλώνουν ή λόγω άλλων παραγόντων, δεν λαμβάνονται υπόψη.

Η τιμή της αλλαγής της αγάπης της Λάουρα, εξίσωση (4.4), είναι το άθροισμα τριών όρων. Ο πρώτος, που είναι αρνητικός για θετικές τιμές στο  $L$ , περιγράφει τη διαδικασία της λήθης, που χαρακτηρίζει το κάθε άτομο. Ο δεύτερος, που είναι  $R_L(P)$ , είναι η αντίδραση της Λάουρα στην αγάπη του Πετράρχη, ενώ ο τρίτος όρος είναι η ανταπόκριση στην εμφάνισή του. Η εξίσωση (4.5) είναι παρόμοια με την (4.4) με μία εξαίρεση: η ανταπόκριση του Πετράρχη στην έλξη του για τη Λάουρα εξαρτάται επίσης και από την ποιητική του έμπνευση  $Z$ . Αυτό λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι τα άτομα που σχετίζονται με ποιητική έμπνευση έχουν εξασθενημένα τα βασικά τους ένστικτα και επηρεάζονται πιο πολύ από την ποιητική του έφεση. Τέλος, η εξίσωση (4.6) δηλώνει ότι η αγάπη του Πετράρχη υποστηρίζει την έμπνευσή του, η οποία αλλιώς θα έφθινε εκθετικά με το χρόνο κατά  $1/\alpha_3$ . Με άλλα λόγια, η

ποιητική έμπνευση είναι αναπόσπαστο κομμάτι της εκθετικής αύξησης της αγάπης του ποιητή για την αγαπημένη του.

Πρέπει σε αυτό το σημείο να διευκρινιστούν οι συναρτήσεις  $R_L(P)$  και  $R_P(L)$ . Μιας και τα περισσότερα άτομα αγαπούν το να αγαπιούνται και μισούν το να μισούνται, η πιο απλή επιλογή θα ήταν να θεωρηθούν γραμμικές οι συναρτήσεις αντίδρασης. Η γραμμικότητα του  $R_P(L)$  είναι αναμφισβήτητη (τουλάχιστον για τιμές του  $L < 0$ ), μιας και τα ποιήματα του ποιητή έχουν πολύ έντονες αντιδράσεις στα σχετικά δείγματα ανταγωνισμού από τη Λάουρα. Έτσι υποθέτουμε:

$$R_P(L) = \beta_2 L \quad (4.7)$$

Από την άλλη, μια γραμμική συνάρτηση αντίδρασης δεν είναι η κατάλληλη για την Λάουρα. Μόνο στην αρχή της γνωριμίας τους μπορεί να θεωρηθεί η  $R_L(P)$  γραμμική, καθώς αντιπροσωπεύει τη ροπή μιας όμορφης γυναίκας της υψηλής κοινωνίας στην ανταπόκριση ενός αθώου φλερτ. Όμως η Λάουρα ποτέ δεν ξεπερνά τα προσωπικά της όρια και περιορίζεται μόνο σε κάποια χαμόγελα και ματιές. Ακόμα και όταν ο Πετράρχης εκδηλώνει δημόσια την αγάπη του διαβάζοντας τα ποιήματά του στο κοινό, αυτή αντιδρά πολύ γρήγορα με απάρνηση, όπως φαίνεται και σε πολλά από τα ποιήματά του.

Έτσι, προτείνεται η χρήση μιας συνάρτησης  $R_L(P)$  η οποία, για  $P > 0$ , αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται. Όμως, η συμπεριφορά της Λάουρα είναι μη γραμμική για αρνητικές τιμές του  $P$ . Στην πραγματικότητα, όταν  $P \ll 0$ , δηλαδή ο ποιητής έχει έρθει σε απόγνωση, η Λάουρα τον λυπάται και ξεπερνώντας το σημείο του ανταγωνισμού που νιώθει, αρχίζει να νιώθει βαθιά συναισθήματα οίκτου αντιστρέφοντας την αντίδραση των συναισθημάτων της στο πάθος του ποιητή.

Η συμπεριφορά αυτή της Λάουρα παρουσιάζεται επαναλαμβανόμενα στο *Canzoniere*. Για παράδειγμα, στη παρακάτω σονάτα:

*Casting your eyes upon my pallor new,  
which thoughts of death recalls to all mankind,  
pity in you I've stirred; whence, by your kind  
greetings, my heart to life's kept true.*

Το παραπάνω σημαίνει ότι η συνάρτηση  $R_L(P)$ , εκτός από το να έχει ένα θετικό μέγιστο για  $P > 0$ , έχει και ένα αρνητικό ελάχιστο για  $P < 0$ . Έτσι, η συνάρτηση αντίδρασης της Λάουρα  $R_L(P)$  μοιάζει να είναι μία κυβική συνάρτηση

$$R_L(P) = \beta_1 P \left( 1 - \left( \frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) \quad (4.8)$$

όπου το  $\beta_1$  σε αυτή τη συνάρτηση δικαιολογείται ως  $\beta_2$  στην (4.7). Έτσι, για  $P = \gamma$ , η κολακεία αντισταθμίζεται με ανταγωνισμό (έτσι ώστε  $R_L(\gamma) = 0$ ), ενώ για  $P = -\gamma$  ο ανταγωνισμός αντισταθμίζεται από οίκτο. Επιπλέον, η τιμή του  $P$  για την οποία η ανταπόκριση είναι μέγιστη και ελάχιστη είναι  $\gamma/\sqrt{3}$  και  $-\gamma/\sqrt{3}$  αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τις συναρτήσεις (4.7) και (4.8), το μοντέλο του Πετράρχη και της Λάουρα, που περιγράφεται με τις εξισώσεις (4.4)-(4.6), μετατρέπεται σε:

$$\frac{dL}{dt} = -a_1 L + \beta_1 \left[ P \left( 1 - \left( \frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) + A_P \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{dP}{dt} = -a_2 P + \beta_2 \left[ L + \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -a_3 Z + \beta_3 P \quad (4.11)$$

Αυτό είναι το μοντέλο με το οποίο θα γίνει η παρακάτω ανάλυση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο της συμπεριφοράς του Πετράρχη και της Λάουρα έχει προκύψει από το σύνολο των ποιημάτων του *Canzoniere* και όχι μόνο από τα 23 ποιήματα που ανέλυσε ο Jones. Έτσι, τα αποτελέσματα θα είναι ανεξάρτητα από το διάγραμμα που εμπειρικά δημιούργησε ο Jones.

Καταρχήν, το μοντέλο με τις εξισώσεις (4.9)-(4.11) περιγράφει τη δυναμική των συναισθημάτων που δημιουργούνται μεταξύ ενός ποιητή και μιας γυναίκας. Προφανώς, κάθε ζευγάρι χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες συμπεριφορές. Στην προκειμένη περίπτωση, η διαμέτρηση των παραμέτρων είναι ιδιαίτερα δύσκολη και πολύ υποκειμενική καθώς όλες οι

πληροφορίες προέρχονται από μία σειρά ποιημάτων. Επιπλέον, οι τιμές που δίνονται στις παραμέτρους δεν είναι αναγκαίο να είναι οι σωστές, αλλά αποτελούν αποτέλεσμα της υποκειμενικής κρίσης του Rinaldi.

Ξεκινώντας από τις παραμέτρους  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  που περιγράφουν τη διαδικασία της λήθης, μπορεί να ισχυριστεί χωρίς αμφιβολία ότι

$$\alpha_1 > \alpha_2$$

Όντως, η Λάουρα δεν φαίνεται να είναι ποτέ ισχυρά συνδεδεμένη με τον ποιητή, ενώ ο ίδιος έχει επίμονα συναισθήματα. Αυτό διαπιστώνεται και μέσα από τις σονάτες του *Canzoniere*.

Από την άλλη,

$$\alpha_2 > \alpha_3$$

καθώς η ποιητική έμπνευση του Πετράρχη ελαττώνεται με πολύ αργό ρυθμό. Ο Πετράρχης συνεχίζει να γράφει (πάνω από 100 ποιήματα) για περισσότερα από δέκα χρόνια μετά το θάνατο της αγαπημένης του. Το κυρίαρχο θέμα αυτών των ποιημάτων δεν είναι το πάθος του για τη Λάουρα, το οποίο έχει σβήσει με τον καιρό, αλλά η ανάμνηση αυτής και η επίκληση στο θάνατο. Οι όροι  $\alpha_i$  αναδομούνται για να ικανοποιήσουν τις σχέσεις:

$$\alpha_1 = 3\alpha_2 \quad \alpha_3 = \frac{1}{10}\alpha_2 \quad (4.12)$$

Για παράδειγμα, οι τιμές

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0.1$$

ικανοποιούν τη συνθήκη (4.12) και μπορούν να ερμηνευτούν αν υποθετικά η Λάουρα ξεχνάει τον Πετράρχη περίπου σε τέσσερις μήνες και το πάθος του Πετράρχη εξασθενεί σε ένα χρόνο, ενώ η ποιητική του έμπνευση παραμένει για δέκα χρόνια.



Για τις παραμέτρους αντίδρασης  $\beta_i$ , η Λάουρα υποτίθεται ότι είναι πολύ λιγότερο ευαίσθητη από τον Πετράρχη, δηλαδή:

$$\beta_1 = \alpha_2, \quad \beta_2 = 5\alpha_2, \quad \beta_3 = 10\alpha_2 \quad (4.13)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος της αντίδρασης της  $1/\beta_3$  ισοδυναμεί με τον χρόνο που ξεχνάει ο Πετράρχης, ο οποίος είναι πέντε φορές πιο αντιδραστικός από τη δική της αντίδραση στην αγάπη και στην εμφάνιση.

Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση:

$$\gamma = \delta = 1 \quad (4.14)$$

μιας και αυτό είναι πάντα πιθανό για κατάλληλες τιμές  $P$  και  $Z$ .

Τέλος, αντίθετα πρόσημα χρησιμοποιούνται για την εμφάνιση της Λάουρα και του Πετράρχη, δηλαδή:

$$A_L = 2, \quad A_P = -1 \quad (4.15)$$

Πράγματι, όπως παρουσιάζεται και στο *Canzoniere*, εκείνη είναι μία όμορφη και λαμπερή γυναίκα, ενώ σε αντίθεση, ο Πετράρχης είναι ένας κρύος λόγιος που ενδιαφέρεται για την ιστορία και τα γράμματα. Η αρνητική του εμφάνιση σχολιάζεται και από τον ίδιο σε μια σονάτα.

Αν ο συντελεστής λήθης του Πετράρχη  $\alpha_2$  είναι σταθερός, οι σχέσεις (4.12) – (4.15) παράγουν ένα ολόκληρο σύνολο παραμέτρων. Μία ευρεία εκτίμηση του  $\alpha_2$  είναι  $\alpha_2 = 1$  που ανταποκρίνεται σε σταθερή αγάπη του Πετράρχη για ένα χρόνο και το σύνολο των παραμέτρων που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3, & \alpha_2 &= 1, & \alpha_3 &= 0.1 \\ \beta_1 &= 1, & \beta_2 &= 5, & \beta_3 &= 10 \\ \gamma &= \delta = 1, & A_L &= 2, & A_P &= -1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

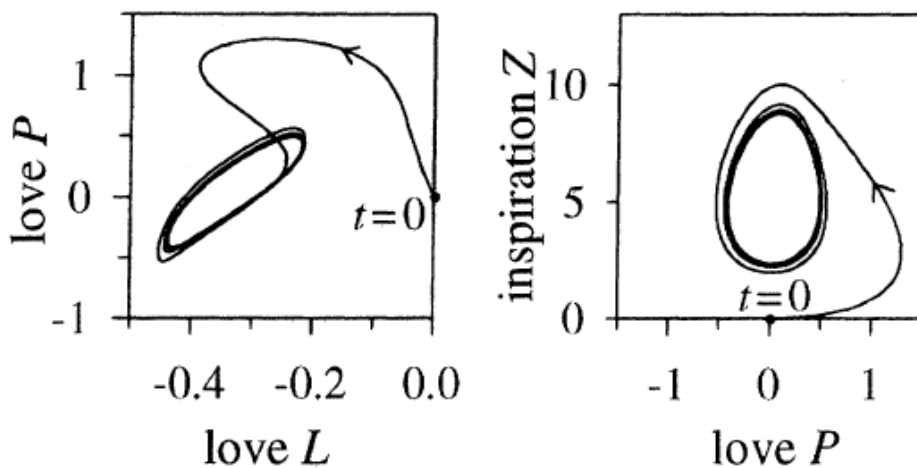
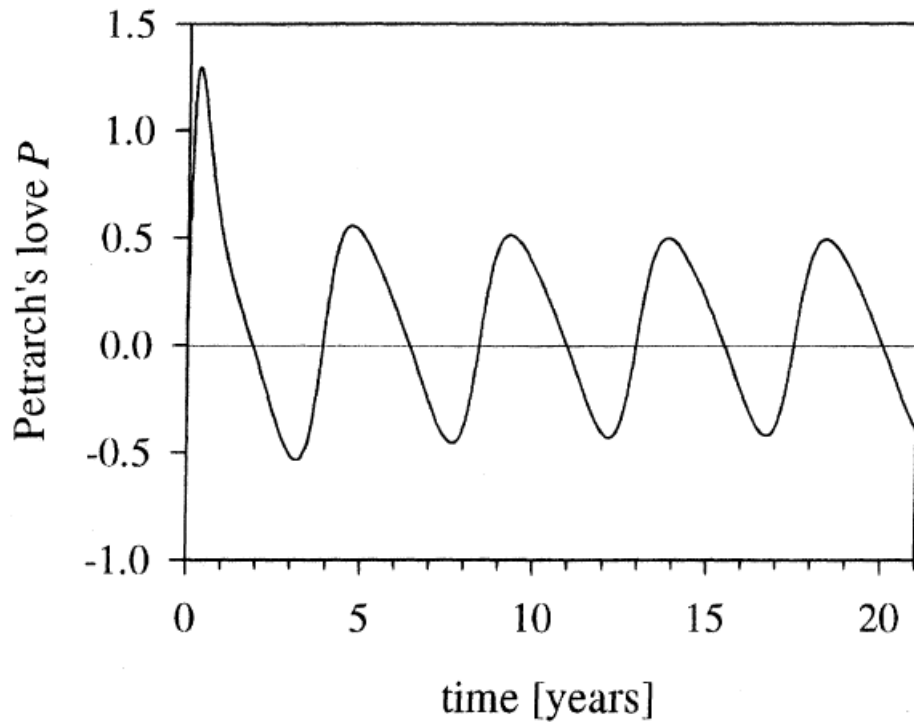
Οι εξισώσεις (4.9) – (4.11) με τις τιμές των παραμέτρων (4.16) μπορούν να ολοκληρωθούν για μια περίοδο 21 ετών, ξεκινώντας από τη μέρα 6 Απριλίου 1327, όταν ο Πετράρχης συνάντησε τη Λάουρα για πρώτη φορά, και τελειώνοντας τη μέρα που πέθανε η Λάουρα, δηλαδή στις 6 Απριλίου 1348. Οι επιλεγμένες αρχικές συνθήκες είναι

$$L(0) = 0, \quad P(0) = 0, \quad Z(0) = 0$$

Οι δύο πρώτες είναι προφανείς, αλλά και η τρίτη είναι εύλογη μιας και ο Πετράρχης δεν είχε γράψει ποτέ παρόμοια ποιήματα πριν το 1327. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής αναπαράστασης, που παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα, έρχονται σε πλήρη συμφωνία με το *Canzoniere* και με την ανάλυση του Frederic Jones. Μετά από ένα υψηλό σημείο, η αγάπη του Πετράρχη τείνει προς ένα κανονικό κύκλο που χαρακτηρίζεται από θετικές και αρνητικές κορυφές. Επίσης, το  $L(t)$  και το  $Z(t)$  τείνουν σε ένα κυκλικό μοτίβο.

Στην αρχή, η έμπνευση του Πετράρχη αυξάνεται πολύ πιο αργά απ' ό,τι η αγάπη του και μετά παραμένει θετική κατά τη διάρκεια ολόκληρης της περιόδου. Αυτό ίσως εξηγεί γιατί ο Πετράρχης γράφει το πρώτο του ποίημα για τη Λάουρα περισσότερα από τρία χρόνια μετά την γνωριμία τους αλλά στη συνέχεια συνεχίζει να γράφει στίχους χωρίς καμία αξιοσημείωτη διακοπή.

Σε αντίθεση, η αγάπη της Λάουρα είναι πάντα αρνητική. Αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με το *Canzoniere*, στο οποίο η Λάουρα είναι μονίμως ενάντια στα συναισθήματα του Πετράρχη. Σε κάποια σονάτα του, ο ποιητής περιγράφει την αγαπημένη του ως «γλυκό μου εχθρό».



Διάγραμμα 4.5 Η εξέλιξη της αγάπης του Πετράρχη με το χρόνο και οι προβολές από τις τροχιές του συστήματος (4.9)-(4.11) με μηδενική αρχική συνθήκη και τιμές (4.16).

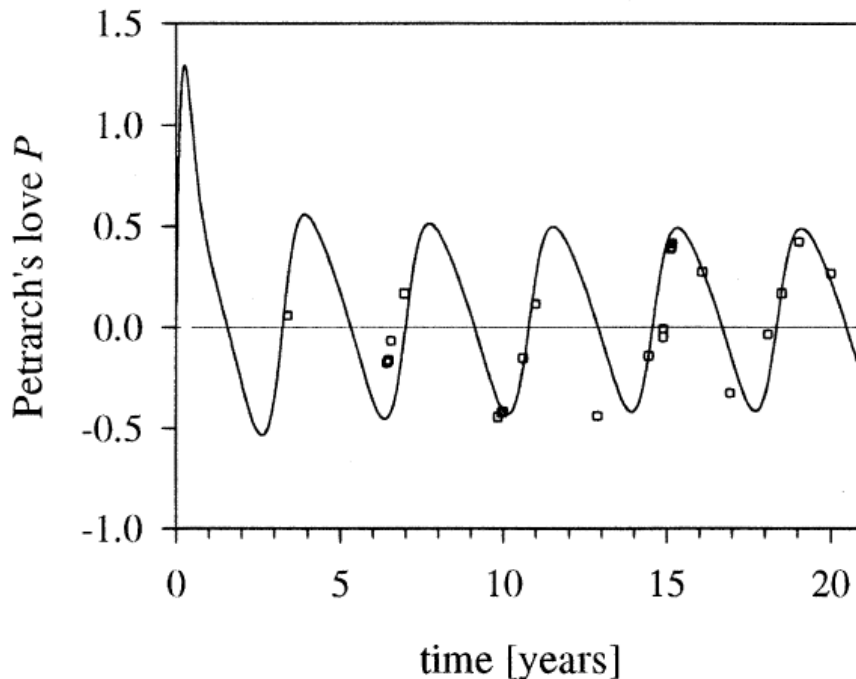
Το πρώτο διάγραμμα δείχνει την εξέλιξη της αγάπης του Πετράρχη στο χρόνο. Οι θετικές τιμές αντιπροσωπεύουν θερμά συναισθήματα, όπως έντονο πάθος και αγάπη, ενώ οι αρνητικές τιμές αντιπροσωπεύουν την απόγνωση του ποιητή. Σε σύγκριση με το διάγραμμα του Jones, το διάγραμμα αυτό δείχνει ότι ο κύκλος που προσομοιώνει το κύκλο των συναισθημάτων του Πετράρχη, είναι ελαφρώς πιο μεγάλος (περίπου 20%). Τα άλλα δύο

διαγράμματα δείχνουν τον οριακό κύκλο  $P(t) - L(t) - Z(t)$  με αρχικές συνθήκες το μηδέν και τις τιμές των παραμέτρων (4.16).

Αν το  $\alpha_2$  αυξηθεί 20% και γίνει επανάληψη της παραπάνω προσομοίωσης με καινούριο σετ παραμέτρων:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3.6, & \alpha_2 &= 1.2, & \alpha_3 &= 0.12 \\ \beta_1 &= 1.2, & \beta_2 &= 6, & \beta_3 &= 12 \\ \gamma &= \delta = 1, & A_L &= 2, & A_P &= -1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Εξαιτίας των σχέσεων (4.12) – (4.15) η νέα λύση μπορεί να παρασταθεί απλά τραβώντας την παλιά σε σχέση με το χρόνο κατά 20%. Το νέο διάγραμμα της αγάπης του Πετράρχη φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα 4.6 Η εξέλιξη της αγάπης του Πετράρχη με το χρόνο και οι προβολές από τις τροχιές του συστήματος (4.9)-(4.11) με μηδενική αρχική συνθήκη και τιμές (4.17).

Παράλληλα με την καμπύλη, στο διάγραμμα απεικονίζονται και οι βαθμοί που έχει δώσει ο Jones στα 23 χρονολογημένα ποιήματα. Τα σημεία μοιάζουν σχεδόν να συμπίπτουν. Επιπλέον, η εφαρμογή μπορεί να γίνει ακόμα καλύτερη με μια μικρή τροποποίηση στις παραμέτρους. Ο Rinaldi όμως δεν προχωρά σε αυτή την τροποποίηση των παραμέτρων γιατί

έτσι θα έκανε τον Πετράρχη να φαίνεται ότι παράγει τα ποιήματά του σαν μια άκαμπτη, ντετερμινιστική μηχανή. Αναμφισβήτητα όμως, το μοντέλο  $L - P$  με τις τιμές των παραμέτρων (4.17), υποστηρίζει τα συμπεράσματα που είχε εξάγει ο Jones.

Για να είναι η ανάλυση πιο ολοκληρωμένη, πρέπει να μελετηθεί και η δύναμη του οριακού κύκλου  $L - P$  στις διαταραχές των τιμών των παραμέτρων. Αλλάζοντας κάθε φορά μόνο μία παράμετρο (εκτός από το  $\gamma$  και το  $\delta$ ) και με σεβασμό προς τις τιμές που υποδείχθηκαν στη (4.17), ο Rinaldi, χρησιμοποιώντας υπολογιστικό λογισμικό για την ανάλυση της διακλάδωσης ενός συνεχούς δυναμικού συστήματος, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο κύκλος τελικά εξαφανίζεται δια μέσου μιας υπερκρίσιμης διακλάδωσης Hopf. Αυτό σημαίνει ότι καθώς οι τιμές των παραμέτρων ποικίλουν, ο κύκλος  $L - P$  μπορεί να σμικυνθεί και τελικά να αντικατασταθεί από ένα σταθερό σημείο ισορροπίας.

Οι ποσοστιαίες παραλλαγές των παραμέτρων που γενούν την διακλάδωση Hopf είναι οι παρακάτω:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$A_L$	$A_P$
Τιμή αναφορά	3.6	1.2	0.12	1.2	6	12	2	-1
% παραλλαγές	36	23	134	-22	-19	-82	-53	45

Οι πιο κριτικές παράμετροι είναι οι  $\alpha_2, \beta_1$  και  $\beta_2$  αλλά πρέπει και αυτές να μεταβληθούν για να μεταμορφωθεί το κυκλικό σύστημα σε ένα σταθερό. Αριθμητικά, αυτό δείχνει ότι ο κύκλος  $L - P$ , που αναγνωρίστηκε πιο πάνω, δεν οφείλεται σε ανάποδο συνδυασμό παραμέτρων, αλλά αντιθέτως, είναι αρκετά ισχυρός.

Τέλος, θα γίνει έλεγχος της δύναμης του κύκλου με συναρτησιακές διαταραχές. Για αυτό το λόγο, ελαφρώς διαφοροποιούνται οι συναρτήσεις αντίδρασης της Λάουρα και του Πετράρχη (σχέσεις (4.7) και (4.8)). Συγκεκριμένα, διαπιστώνεται ότι ο κύκλος  $L - P$  δεν εξαφανίζεται, αν οι συναρτήσεις αντίδρασης δεν είναι συμμετρικές. Αυτό διαπιστώνεται, προφανώς, μόνο με διαταραχές στη συνάρτηση του Πετράρχη (4.7), καθώς η αγάπη της Λάουρα είναι πάντα αρνητική στον κύκλο  $L - P$ .

### 4.4.3 Αργοί – γρήγοροι οριακοί κύκλοι

Στη συγκεκριμένη μελέτη δεν λαμβάνονται υπόψη οι τιμές των παραμέτρων που είχαν δοθεί προηγουμένως, καθώς ο σκοπός είναι να γίνει ο διαχωρισμός των γενικών συνθηκών των παραμέτρων που εγγυόνται την ύπαρξη ενός οριακού κύκλου. Έτσι, το μοντέλο ξαναγράφεται ως εξής:

$$\frac{dL}{dt} = -a_1L + \beta_1 \left[ P \left( 1 - \left( \frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) + A_P \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{dP}{dt} = -a_2P + \beta_2 \left[ L + \frac{A_L}{1+\delta Z(t)} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \varepsilon[-Z + \mu P] \quad (4.18)$$

αλλάζοντας ελαφρώς την (4.11). Οι δύο νέες παράμετροι  $\varepsilon$  και  $\mu$  είναι θετικές με  $\varepsilon = \alpha_3$  και  $\mu = \beta_3/\alpha_3$ .

Εάν η τιμή του  $\varepsilon$  είναι μικρή η μεταβολή του  $Z(t)$  είναι μικρή σε σχέση με το  $L(t)$  και  $P(t)$  και έτσι η μοναδική διαταρακτική μέθοδος (4.9) και (4.10) μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Γενικά, το σύστημα μπορεί να διαχωριστεί σε γρήγορο και αργό μέρος, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση το γρήγορο σύστημα περιγράφεται από τις συναρτήσεις (4.9) και (4.10) και με το  $Z =$  σταθερό, ενώ το αργό περιλαμβάνει και την (4.18). Μια τέτοια αποσύνθεση επιτρέπει σε κάποιον να κατασκευάσει μια μοναδική τροχιά η οποία αποτελείται από αλληλουχία εναλλακτικών γρήγορων και αργών αλλαγών.

#### 4.4.3.1 Το γρήγορο υποσύστημα

Σε αυτή τη περίπτωση, οι εξισώσεις (4.9) και (4.10), με το  $Z$  παγωμένο σε μια σταθερή τιμή, περιγράφουν τη γρήγορη δυναμική του συστήματος. Η κατάσταση ενός τέτοιου συστήματος δε μπορεί να τείνει σε έναν οριακό κύκλο καθώς η απόκλιση είναι αρνητική. Έτσι, τα  $L(t)$  και  $P(t)$  τείνουν σε μία ισορροπία, δηλαδή σε μία ευσταθή λύση  $(L, P)$  των εξισώσεων (4.9) και (4.10).

Αποκλείοντας την  $L$  από την (4.9) και (4.10), με  $dL/dt = dP/dt = 0$  και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές  $P$  και  $Z$  προκύπτει η ισότητα:

$$\Phi(Z) = \Psi(P) \quad (4.19)$$

όπου

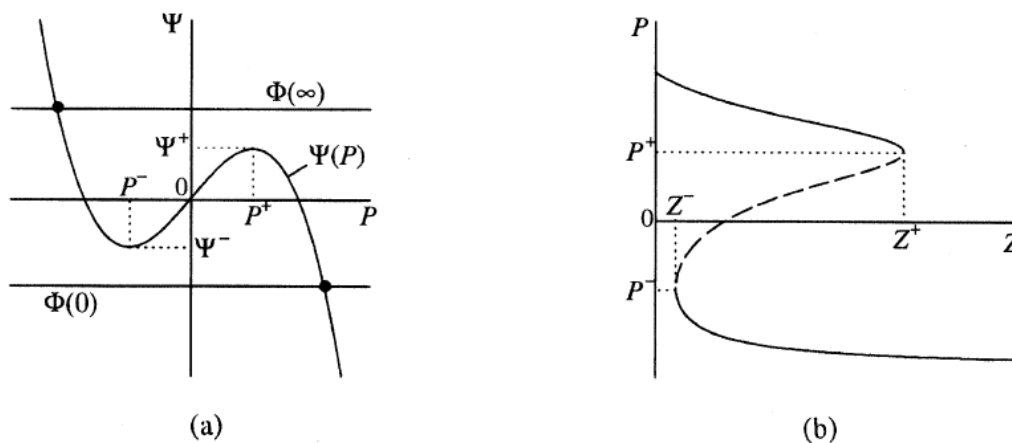
$$\Phi(Z) = -\gamma^2 \left( A_P + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{A_L}{1+\delta Z} \right) \quad (4.20)$$

$$\Psi(P) = 3\Delta P - P^3$$

Με

$$\Delta = \frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}{3\beta_1\beta_2} \gamma^2 \quad (4.21)$$

Και αν η  $\Delta$  είναι θετική, για παράδειγμα αν  $\beta_1\beta_2 > \alpha_1\alpha_2$ , τότε η εξίσωση  $\Psi(P)$  έχει ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο.



Διάγραμμα 4.7: το διάγραμμα της συνάρτησης  $\Psi(P)$

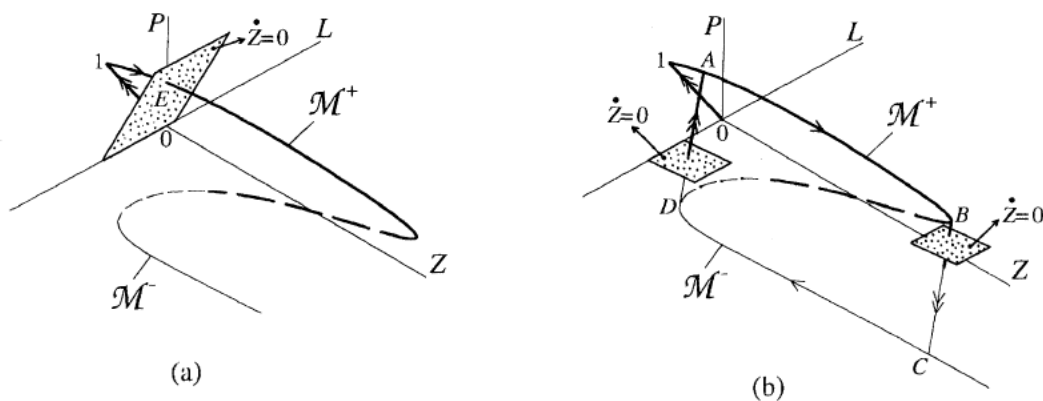
Το πρώτο διάγραμμα δείχνει τη συνάρτηση  $\Psi(P)$  και οι δύο τελείες είναι οι λύσεις της (4.19) για  $Z = 0$  και  $Z = \infty$ . Το δεύτερο διάγραμμα είναι το γρήγορο υποσύστημα για σταθερές τιμές του  $Z$ : υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας: δύο ευσταθή (συνεχείς γραμμές) και ένα ασταθές (διακεκομμένη γραμμή).

#### 4.4.3.2 Μοναδικές τροχιές και γρήγοροι-αργοί οριακοί κύκλοι

Σε αυτό το σημείο προστίθεται και ο αργός παράγοντας του συστήματος που είναι το  $Z$ , δηλαδή η ποιητική έμπνευση του Πετράρχη που περιγράφεται από τη σχέση (4.18) με το  $\varepsilon$  θετικό και μικρό. Σε ένα τριών διαστάσεων σύστημα  $(L, P, Z)$  το πολλαπλό  $dZ/dt = 0$  είναι το επίπεδο:

$$Z = \mu P$$

Έτσι, για  $\mu$  μεγαλύτερο από μία κριτική τιμή  $\mu_{crit}$ , ένα τέτοιο επίπεδο χωρίζεται σε δύο ευσταθείς διακλαδώσεις  $M^+$  και  $M^-$  από τις πολλαπλές ισορροπίες  $M$  του γρήγορου υποσυστήματος, όπως φαίνονται στο δεύτερο διάγραμμα. Όλες οι μοναδικές τροχιές τείνουν σε ένα μοναδικό οριακό κύκλο ABCD, ενώ για  $\mu$  μικρότερο από το  $\mu_{crit}$ , όλες οι μοναδικές τροχιές τείνουν προς ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας  $E$ .

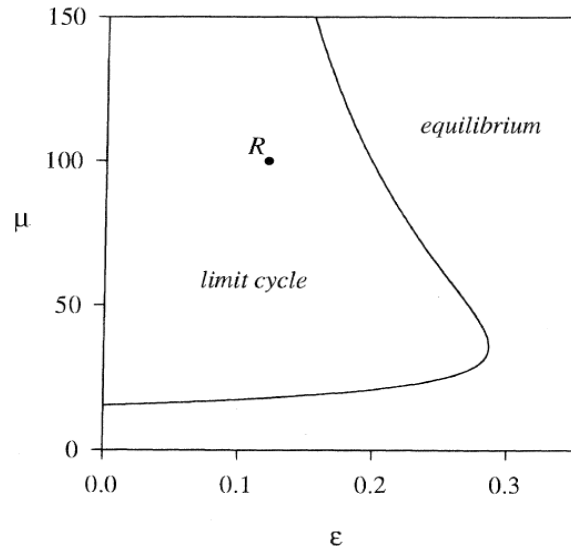


Διάγραμμα 4.8 Η ισορροπία των πολλαπλών γρήγορων υποσυστημάτων

Η ισορροπία των πολλαπλών γρήγορων υποσυστημάτων και οι ευσταθείς διακλαδώσεις  $M^+$  (στο πάνω επίπεδο  $L, Z$ ) και  $M^-$  (στο κάτω επίπεδο  $L, Z$ ).

Συμπερασματικά, οι τιμές των  $\varepsilon$  και  $\mu$  είναι αυτές που θα καθορίσουν αν το σύστημα θα τείνει προς ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας  $E$  ή προς έναν οριακό κύκλο. Ξεκινώντας από μια πολύ χαμηλή τιμή στο  $\varepsilon$  το σύστημα τείνει στον οριακό κύκλο, ενώ καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\varepsilon$  ο οριακός κύκλος μπορεί και να εξαφανιστεί τελείως μέσω της υπερκρίσιμης διακλάδωσης Hopf.





Διάγραμμα 4.9 Η διακλάδωση Hopf για διάφορες τιμές των παραμέτρων ( $\epsilon, \mu$ ).

Το διάγραμμα αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα: ένα δυσδιάστατος χώρος (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο χώρος  $(\epsilon, \mu)$ ), χωρίζεται σε δύο περιοχές, όπου η ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να είναι κυκλική ή στατική. Το σημείο  $R$  αναφέρεται στις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της σχέσης (4.17).

#### 4.4.4 Συμπεράσματα

Στο άρθρο του «*Laura and Petrarch: An Intriguing Case of Cyclical Love Dynamics*» ο Rinaldi πρότεινε ένα μινιμαλιστικό δυναμικό μοντέλο αγάπης μεταξύ ενός ποιητή και της αγαπημένης του και εφαρμόστηκε για ένα πολύ γνωστό ζευγάρι, αυτό του Πετράρχη και της Λάουρα. Η αξία του μοντέλου παρουσιάζεται σε τρία σημεία. Το μοντέλο είναι ένα από τα σπάνια τριών διαστάσεων μοντέλα στο οποίο η μοναδική διαταρακτική μέθοδος έχει εφαρμοστεί πολύ αναλυτικά και πλήρως πετυχημένα. Η έρευνά του εξηγεί γιατί η Λάουρα και ο Πετράρχης ενεπλάκησαν σε μία κυκλική ιστορία αγάπης χωρίς τέλος. Αυτό έρχεται επίσης σε συμφωνία με τη καθαρά εμπειρική ανακάλυψη του F. Jones. Τέλος, ο τρίτος και ίσως ο πιο σημαντικός λόγος που το μοντέλο έχει τέτοια αξία είναι ότι χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για να περιγράψουν τη δυναμική της αγάπης μεταξύ δύο ατόμων. Φυσικά, αυτό θα μπορούσε να αμφισβητηθεί αν σκεφτεί κάποιος ότι η προσέγγιση του Strogatz για τη δημιουργία του «ιδανικού ταλαντωτή αγάπης» μπορεί να

υιοθετηθεί σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Η συμπλήρωση του κενού μεταξύ αμφισβήτησης και απόδειξης υπήρξε ίσως η πιο μεγάλη πρόκληση.

## Κεφάλαιο 5

### 5. Το μοντέλο «Λάουρα και Πετράρχης»

#### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το μέρος παίρνουμε το μοντέλο της ιστορίας της Λάουρας και του Πετράρχη που ανέπτυξε ο Rinaldi στο άρθρο του *Laura and Petrarch: An Intriguing Case of Cyclical Love Dynamics* (1998), στηριζόμενος στην έρευνα του Jones πάνω στη συλλογή ποιημάτων *Canzoniere* του Πετράρχη. Η ανάλυση γίνεται με τη βοήθεια του προγράμματος E&F Chaos, με σκοπό το σχεδιασμό των διάφορων διαγραμμάτων μέσα από τα οποία θα γίνει η μελέτη του συστήματος για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Όπως είδαμε και στην ενότητα 4.4, ένα αντιπροσωπευτικό μοντέλο της ερωτικής ιστορίας του Πετράρχη και της Λάουρα, σύμφωνα με τον Rinaldi, αποτελείται από τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

$$\frac{dL}{dt} = -a_1L + \beta_1 \left[ P \left( 1 - \left( \frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) + A_P \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{dP}{dt} = -a_2P + \beta_2 \left[ L + \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -a_3Z + \beta_3P \quad (4.11)$$

όπου:

$L$ : τα συναισθήματα της Λάουρα τη στιγμή  $t$

$P$ : τα συναισθήματα του Πετράρχη τη στιγμή  $t$

$Z$ : η ποιητική έμπνευση του Πετράρχη τη στιγμή  $t$

$A_P[A_L]$  : είναι η ανταπόκριση στην εμφάνιση (τόσο φυσική όσο και νοητική) του Πετράρχη και της Λάουρα αντίστοιχα

$R_L(P)$ , είναι η αντίδραση της Λάουρα στην αγάπη του Πετράρχη και το αντίστροφο

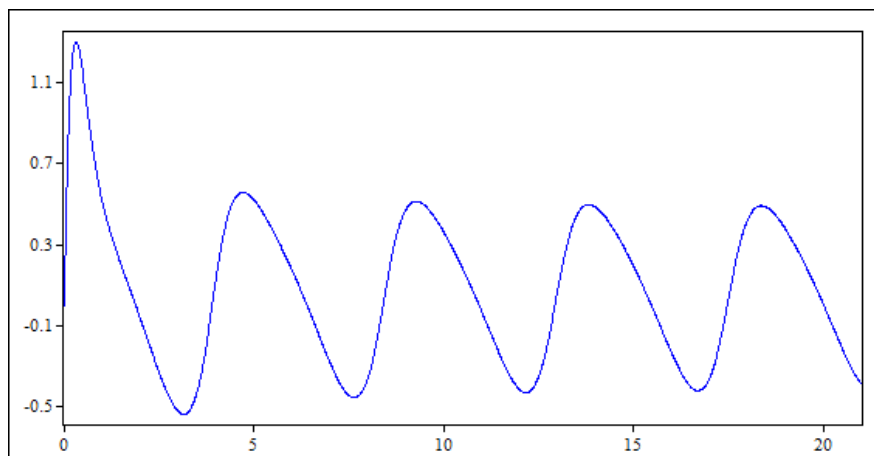
Όλα τα μικρά ελληνικά γράμματα είναι θετικές σταθερές παράμετροι, που σημαίνει ότι η διαφοροποίηση στην προσωπικότητα του Πετράρχη και της Λάουρα, καθώς αυξάνουν ή λόγω άλλων παραγόντων, δεν λαμβάνονται υπόψη.

Οι τιμές των παραμέτρων είναι αυτές που δίνονται από το σύνολο (4.16) και οι αρχικές τιμές είναι  $L(0) = 0$ ,  $P(0) = 0$ ,  $Z(0) = 0$ . Επειδή η ιστορία κράτησε για περίπου 21 χρόνια θα ήταν πιο σωστό η μελέτη να γίνει μέσα σε αυτό το χρονικό ορίζοντα χωρίς να απαγορεύεται η μελέτη του συστήματος και για παραπάνω από 21 έτη, κάτι το οποίο μπορεί να εξάγει συμπεράσματα για την πορεία του συστήματος αν δεν είχε διακοπεί βίαια από το θάνατο της Λάουρα.

## 5.2 Ανάλυση του μοντέλου με το E&F Chaos

### 5.2.1 Αρχικές συνθήκες

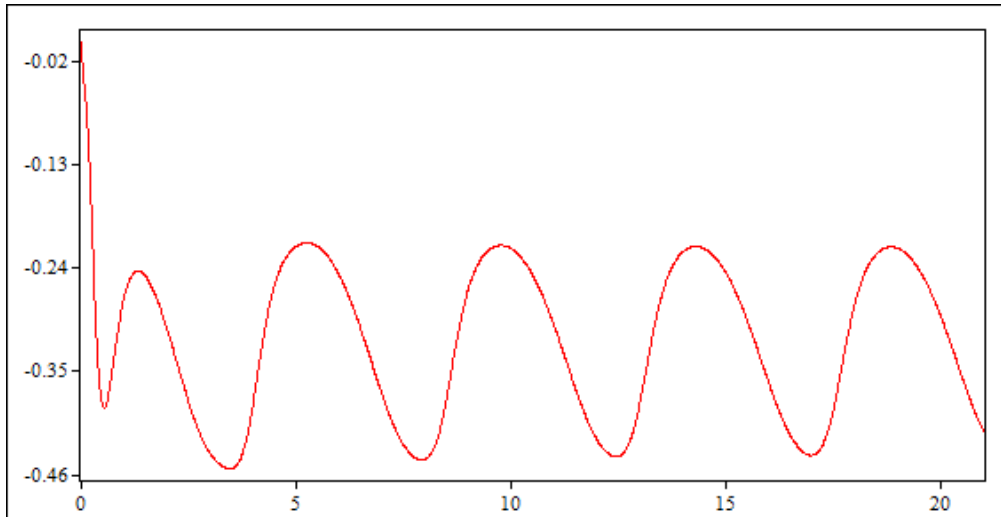
Θέτουμε τις αρχικές συνθήκες του συστήματος  $L(0) = 0$ ,  $P(0) = 0$ ,  $Z(0) = 0$  και τις αρχικές τιμές των παραμέτρων. Με τη βοήθεια του προγράμματος E&F Chaos, αρχικά κατασκευάζουμε το διάγραμμα time series που μας δείχνει την πορεία της εξέλιξης των συναισθημάτων  $L$ ,  $P$  αλλά και της ποιητικής έμπνευσης του Πετράρχη η οποία ευθύνεται σε μεγάλο βαθμό για την διατήρηση των συναισθημάτων του έπειτα από πολλά χρόνια.



Διάγραμμα 5.1 Διάγραμμα  $P-t$  για 21 χρόνια

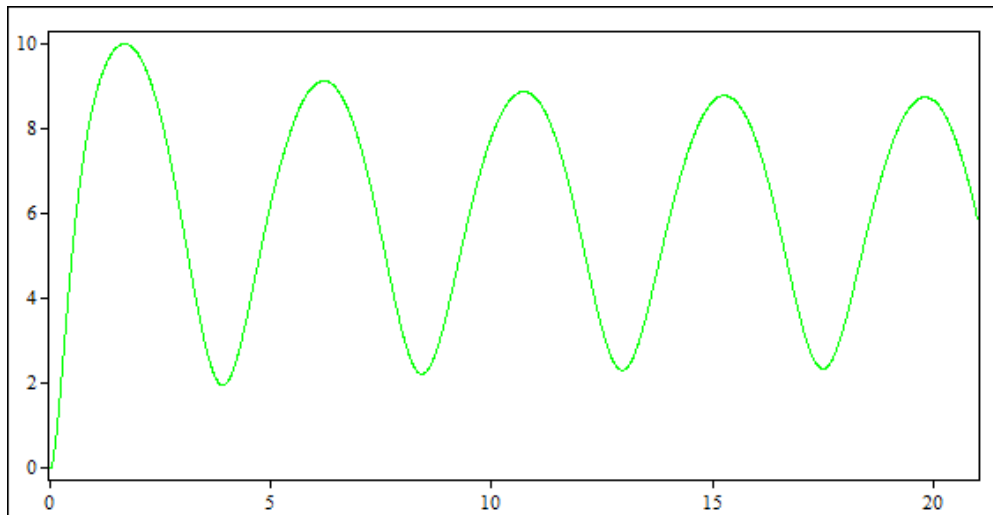
Από το διάγραμμα 5.1,  $P-t$ , παρατηρούμε ότι τα πρώτα χρόνια της γνωριμίας του με τη Λάουρα υπάρχει μια έκρηξη συναισθημάτων και το  $P$  λαμβάνει υψηλές θετικές τιμές. Καθώς περνούν τα χρόνια, ο Πετράρχης συχνά απογοητεύεται από την απόρριψη της Λάουρα και για αυτό υπάρχουν αρνητικές τιμές στο διάγραμμα. Θετικές τιμές στο  $P$  αντιπροσωπεύουν θετικά συνασθήματα όπως είναι η αγάπη, το πάθος, η φιλία και η εκτίμηση, ενώ αρνητικές τιμές αντιπροσωπεύουν την απόγνωση που νιώθει ο ποιητής. Ο λόγος που τα συνασθήματα του Πετράρχη αυξάνονται ξανά και ακολουθούν μια περιοδική κυκλική πορεία, που κινείται πάνω και κάτω από μια νοητή ευθεία γραμμή, είναι πως όταν αυτός απογοητεύεται και

μελαγχολεί η Λάουρα τον λυπάται και αυτή η μικρή της ανταπόκριση, έστω και λύπηση, δίνει ώθηση ξανά στα συναισθήματα του ποιητή.



Διάγραμμα 5.2: διάγραμμα L-t για 21 χρόνια

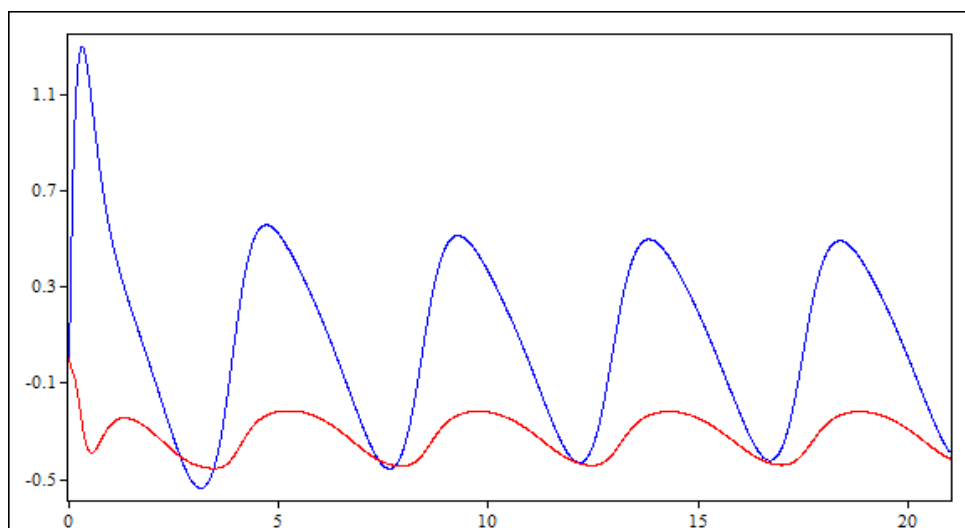
Από το διάγραμμα 5.2,  $L-t$ , παρατηρούμε πως τα συναισθήματα της Λάουρα, παρά το γεγονός ότι αυξομειώνονται, παραμένουν πάντα στο αρνητικό τμήμα του διαγράμματος. Στην αρχή της γνωριμίας της με τον ποιητή νιώθει κολακευμένη, γι' αυτό η τιμή  $L$  είναι υψηλότερη, αν και αρνητική, από τις υπόλοιπες τιμές. Όμως, δεν ξεχνά ότι είναι μια παντρεμένη γυναίκα και καθώς τα χρόνια περνούν νιώθει αποστροφή για τον ποιητή και πιο αρνητικά συναισθήματα. Ο λόγος που υπάρχουν αυξομειώσεις είναι γιατί όταν βλέπει τον Πετράρχη λυπημένο και μέσα στην απόγνωση αρχίζει και νιώθει οίκτο για αυτόν, κάτι το οποίο μεταφράζεται σε λιγότερο αρνητικά συναισθήματα.



Διάγραμμα 5.3: διάγραμμα  $Z-t$  για 21 χρόνια

Από το διάγραμμα 5.3,  $Z-t$ , βλέπουμε πως η ποιητική έμπνευση του Πετράρχη αυξάνεται αργά στην αρχή και στη συνέχεια πιο γρήγορα και παραμένει θετική για όλα τα χρόνια, κάτι το οποίο έρχεται σε συμφωνία και με το *Canzoniere*, αλλά και με τα συμπεράσματα του Rinaldi. Η ποιητική έμπνευση είναι πολλές φορές αυτή που δίνει ώθηση στα συναισθήματα του ποιητή.

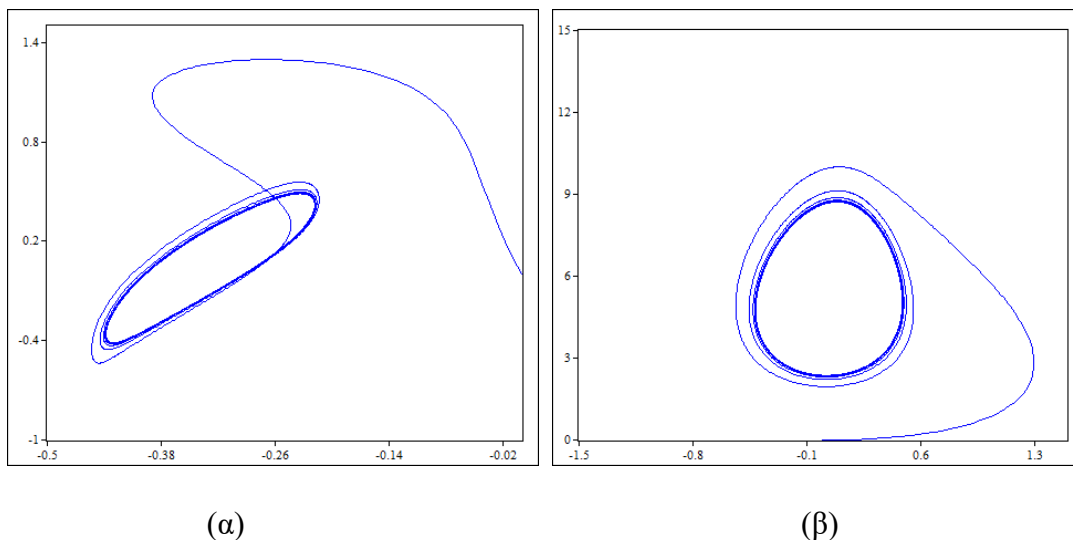
Χρήσιμο θα ήταν να παρουσιαστούν και οι δύο καμπύλες  $L-t$  και  $P-t$  στο ίδιο διάγραμμα για τη σύγκριση των συναισθημάτων της Λάουρα και του Πετράρχη.



Διάγραμμα 5.4 Διάγραμμα  $L-t$ ,  $P-t$  για 21 χρόνια

Όπως παρατηρούμε και στο διάγραμμα 5.4, τα συναισθήματα του Πετράρχη είναι πολύ πιο υψηλά από αυτά της Λάουρα, που λαμβάνουν πάντα αρνητικές τιμές. Όταν το  $P$  είναι υψηλό η Λάουρα νιώθει αποστροφή και ενοχλείται από τον ποιητή καθώς είναι παντρεμένη. Γι' αυτό και η κόκκινη γραμμή μειώνεται. Όταν ο Πετράρχης απογοητεύεται η Λάουρα νιώθει οίκτο και καθώς αυξάνεται η κόκκινη γραμμή ( $L$ ) δίνει ώθηση και στην μπλε και αυτό επαναλαμβάνεται για 21 χρόνια. Ακόμα και αν το διάγραμμα γινόταν για πάνω από 21 χρόνια το μοτίβο θα επαναλαμβανόταν συνεχώς χωρίς κάποια αλλαγή.

Χρήσιμη είναι και η παρουσίαση του φασικού διαγράμματος ή αλλιώς φασικού πορτραίτου (phase plot), που δείχνει το σύνολο των γραφικών παραστάσεων των λύσεων του συστήματος. Αρχικά κατασκευάζουμε τα φασικά πορτραίτα με σταθερές τις τιμές των παραμέτρων.



Διάγραμμα 5.5 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$ . (α) στον κάθετο άξονα είναι το  $P$  και στον οριζόντιο το  $L$ , (β) στον κάθετο άξονα είναι  $Z$  και στον οριζόντιο το  $P$ .

Στο διάγραμμα 5.5 παρουσιάζονται οι λύσεις του συστήματος για όλες τις τιμές των παραμέτρων σταθερές και ίσες με τις αρχικές. Παρατηρούμε ότι το σύστημα ξεκινά από το σημείο  $(0,0)$  και οι λύσεις συγκλίνουν σε ένα οριακό κύκλο, όπου το  $L$  είναι πάντα αρνητικό, το  $P$  παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές και το  $Z$  πάντα θετικές τιμές.

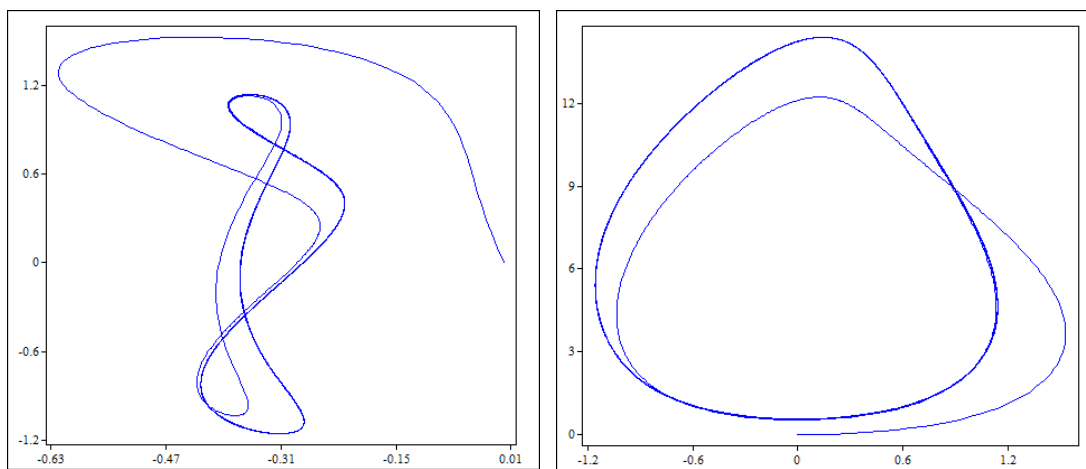
Στη συνέχεια, θα μεταβάλουμε τις τιμές κάποιων παραμέτρων για να εξετάσουμε πώς συμπεριφέρεται το σύστημα. Σύμφωνα με τον Rinaldi, οι πιο κρίσιμες παράμετροι είναι οι  $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$  οπότε θα επιλέξουμε τη μεταβολή αυτών των τριών παραμέτρων.

### 5.2.2 Παράμετρος $\alpha_2$

Αρχικά θα μεταβάλουμε την παράμετρο  $\alpha_2$  που είναι ο συντελεστής φθοράς των συναισθημάτων του Πετράρχη. Θα δώσουμε τις τιμές 0 έως 2 για το  $\alpha_2$  και θα δούμε πώς συμπεριφέρονται οι λύσεις του συστήματος.

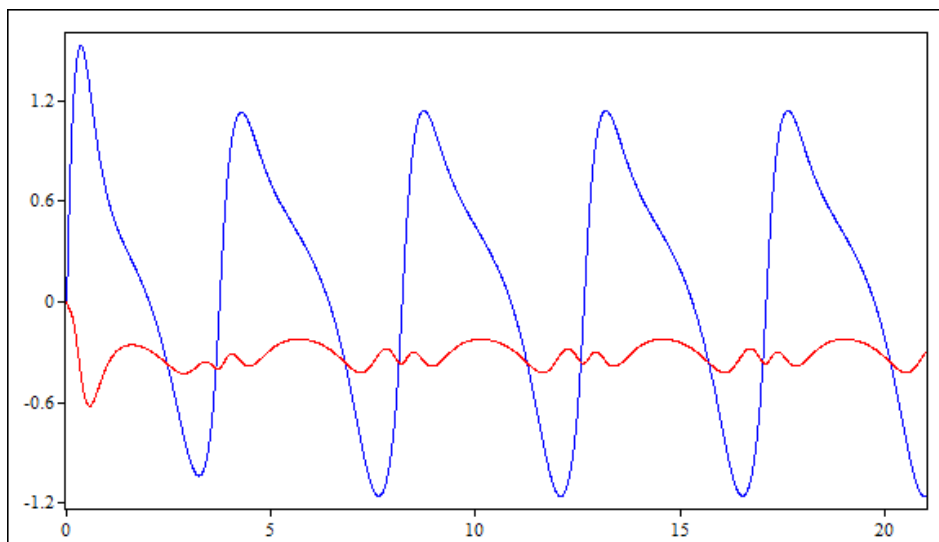
1<sup>η</sup> περίπτωση  $\alpha_2 = 0$

Στην περίπτωση που το  $\alpha_2$  πάρει την τιμή 0 γίνεται η υπόθεση ότι τα συναισθήματα του Πετράρχη δεν φθίνουν αναλογικά με το  $P$  και έτσι αν το  $L$  ήταν θετικό το  $P$  θα μπορούσε να αυξάνεται συνεχώς.



(α)

(β)



(γ)

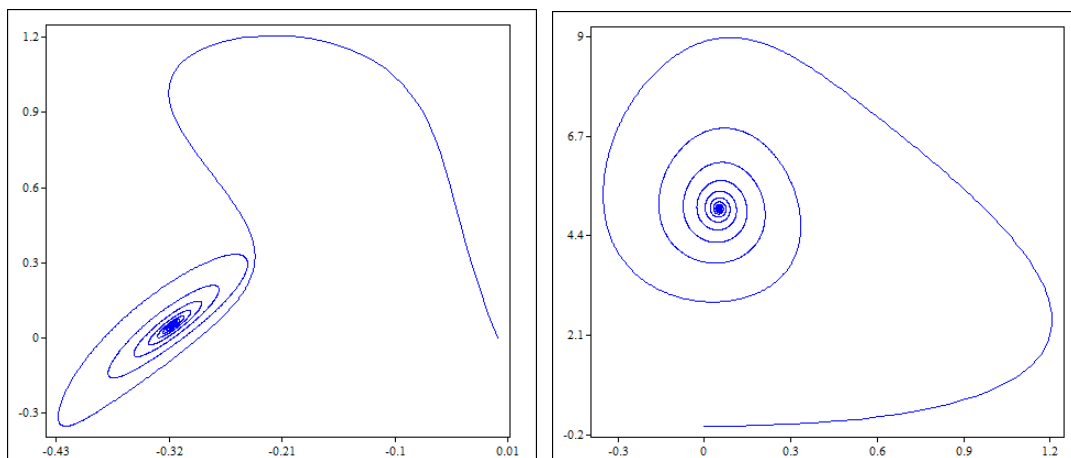
Διάγραμμα 5.6 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\alpha_2 = 0$ .



Παρατηρούμε ότι ο οριακός κύκλος έχει παραμορφωθεί, αλλά και πάλι το σύστημα είναι ασταθές. Η διακύμανση στο  $P$  και στο  $L$  σε σχέση με το χρόνο παρουσιάζουν μια περιοδικότητα στις εναλλαγές μέγιστου και ελάχιστου με το  $P$  να κινείται πιο ομαλά και το  $L$  συνεχίζει να παίρνει μόνο αρνητικές τιμές.

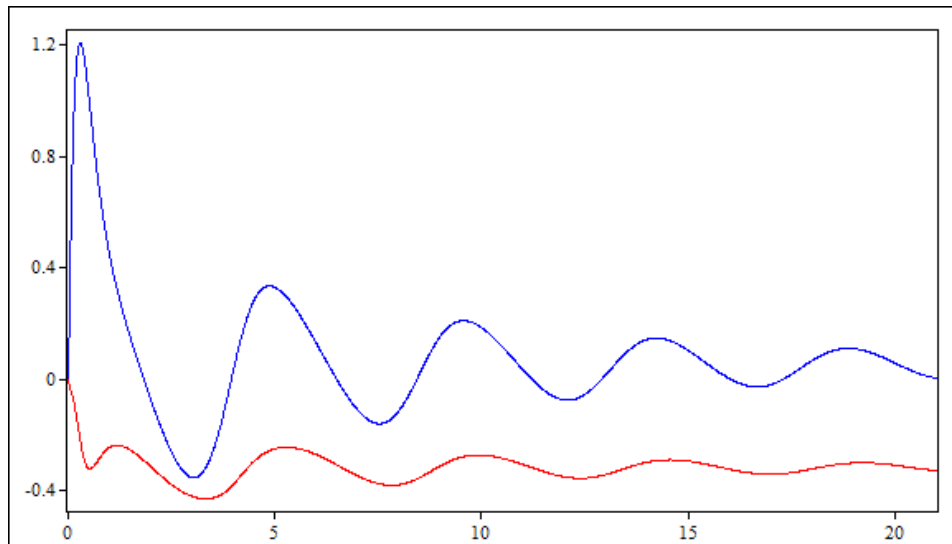
2<sup>η</sup> περίπτωση  $\alpha_2 = 1.5$

Για  $\alpha_2 = 1$  έχουμε το αρχικό σύστημα του οποίου οι λύσεις συγκλίνουν σε ένα οριακό κύκλο. Στην περίπτωση που το  $\alpha_2$  πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1 ο οριακός κύκλος αρχίζει σιγά σιγά να μικραίνει τείνοντας προς ένα ευσταθές σημείο. Βάζουμε την τιμή  $\alpha_2 = 1.5$  στο σύστημα και τότε παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα



(α)

(β)



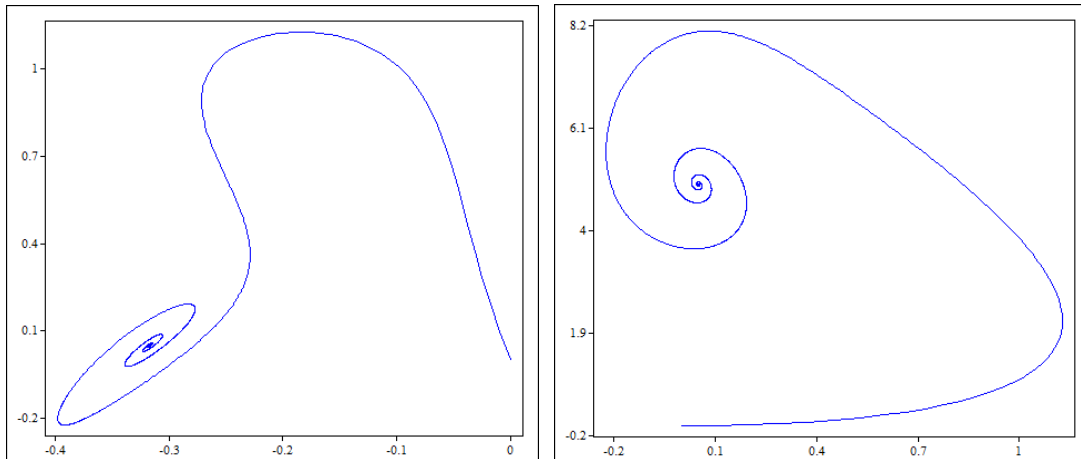
(γ)

Διάγραμμα 5.7 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\alpha_2 = 1.5$ .

Παρατηρούμε ότι όταν το  $\alpha_2 = 1.5$  η τροχιά του οριακού κύκλου έχει γίνει πολύ πιο μικρή και το σύστημα συγκλίνει προς ένα σημείο στο κέντρο του κύκλου. Όμως, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το διάγραμμα (γ) το σύστημα δεν έχει λύση ευσταθές σημείο αλλά συγκλίνει προς ένα σημείο και για αυτό το λόγο οι διακυμάνσεις στο  $L$  και  $P$  γίνονται όλο και πιο μικρές.

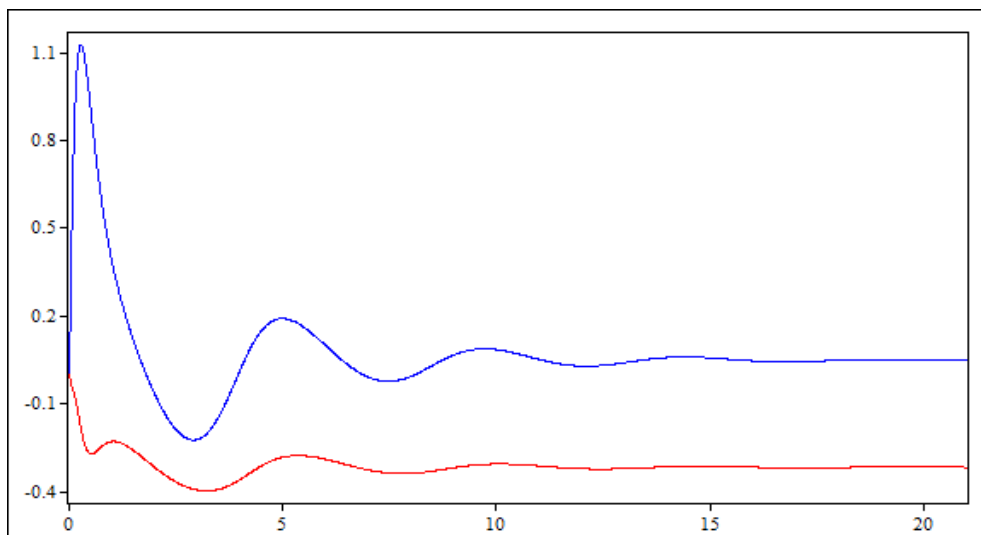
3<sup>η</sup> περίπτωση  $\alpha_2 = 2$

Στην περίπτωση που το  $\alpha_2$  πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1.5, ο οριακός κύκλος μικραίνει όλο και περισσότερο και για τιμές κοντά στο 2 και μεγαλύτερες του 2, τον οριακό κύκλο αντικαθιστά ένα ευσταθές σημείο. Βάζουμε την τιμή  $\alpha_2 = 2$  στο σύστημα και τότε παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα.



(α)

(β)



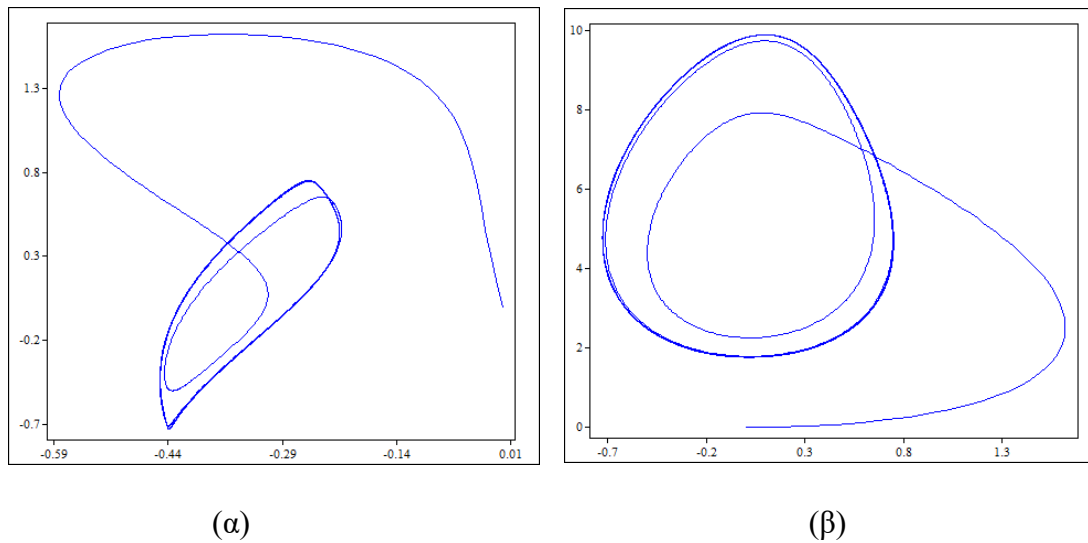
(γ)

Διάγραμμα 5.8 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\alpha_2 = 2$ .

Επομένως, για  $\alpha_2 = 2$  τη θέση του οριακού κύκλου παίρνει ένα ευσταθές σημείο, όπως φαίνεται στα διαγράμματα 5.8 (α), (β), (γ). Συνεπώς, η τιμή της παραμέτρου  $\alpha_2$  είναι πολύ κρίσιμη για το μοντέλο, γιατί για μικρές μεταβολές του, καθώς η τιμή του  $\alpha_2$  αυξάνεται από 0 έως 2, ο οριακός κύκλος συγκλίνει προς ένα ευσταθές σημείο. Έτσι, αν η διαδικασία λήθης του Πετράρχη ήταν πιο γρήγορη, η κυκλική συμπεριφορά της σχέσης τους θα εμφανιζόταν μόνο κατά τα πρώτα χρόνια της γνωριμίας τους και στη συνέχεια το σύστημα θα γινόταν ευσταθές με τη Λάουρα να έχει αρνητικά συναισθήματα και τον Πετράρχη με πολύ μικρά θετικά ή μηδενικά συναισθήματα, κάτι το οποίο σημαίνει ότι κάποια στιγμή θα ξεχνούσε τη Λάουρα.

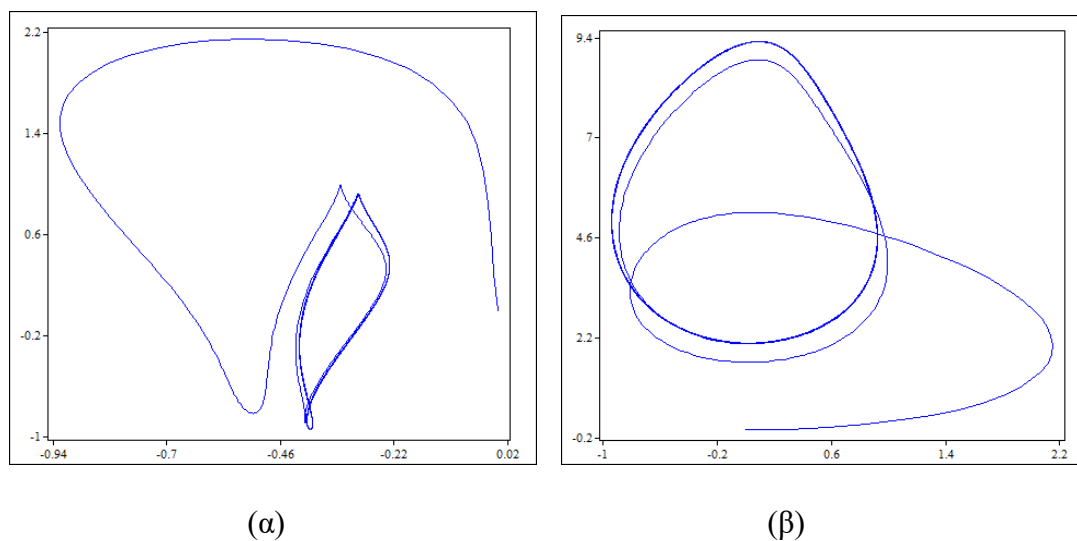
### 5.2.3 Παράμετρος $\beta_2$

Στη συνέχεια θα μεταβάλουμε την παράμετρο  $\beta_2$  η οποία είναι ο συντελεστής ανταπόκρισης του Πετράρχη στα συναισθήματα της Λάουρα. Η τιμή που δίνεται στο  $\beta_2$  αρχικά στο μοντέλο είναι 5. Η τιμή αυτή είναι υψηλή γιατί ο Πετράρχης αντιδρά έντονα στη συμπεριφορά της Λάουρα προς αυτόν και όταν του δώσει λίγο προσοχή, έστω και αν αυτή είναι οίκτος, η αγάπη του προς τη Λάουρα μεγαλώνει ξανά. Έτσι, δεν θα ήταν λογικό να μειώσουμε πολύ την τιμή της παραμέτρου αλλά θα την αυξήσουμε από 5 έως 15 για να μελετήσουμε αν αλλάζει κάτι στο σύστημα.



Διάγραμμα 5.9 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$  για  $\beta_2 = 8$ .

Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα 5.9 (α), (β) η συμπεριφορά των λύσεων δεν έχει αλλάξει ιδιαίτερα με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου  $\beta_2$  καθώς πάλι υπάρχει ο οριακός κύκλος.



Διάγραμμα 5.10 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$  για  $\beta_2 = 15$ .

Με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου σε 15 η συμπεριφορά των λύσεων δεν έχει αλλάξει και κινούνται γύρω από έναν οριακό κύκλο του οποίου το σχήμα έχει ελαφρώς παραμορφωθεί.

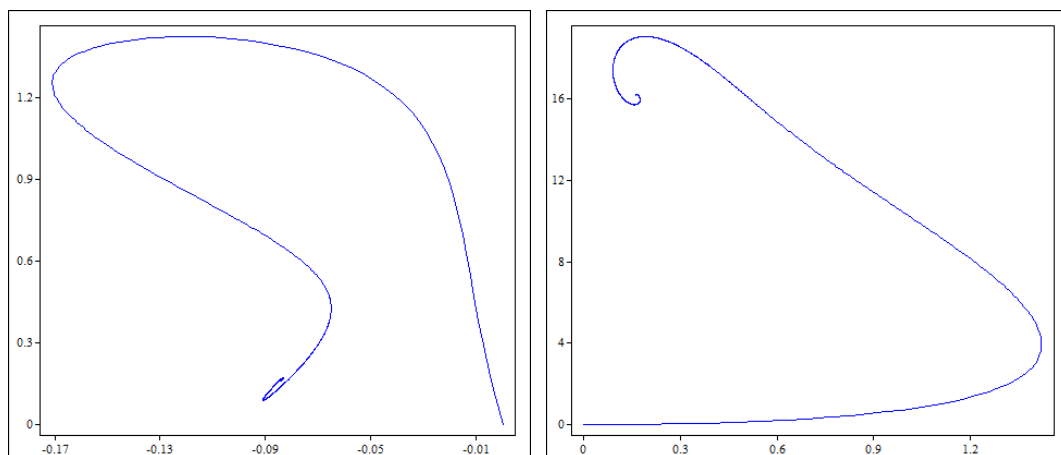
Συμπεραίνουμε, ότι η παράμετρος  $\beta_2$  δεν είναι τελικά τόσο κρίσιμη γιατί καθώς παίρνει διαφορετικές τιμές δεν έχει σημαντική επίδραση στο μοντέλο και επομένως, αν η ανταπόκριση του Πετράρχη ήταν ακόμα πιο υψηλή αυτό δε θα επηρέαζε τα συναισθήματα της Λάουρα, καθώς παραμένουν αρνητικά, αλλά ούτε και την πορεία της σχέσης τους.

### 5.2.4 Παράμετρος $\beta_1$

Στη συνέχεια θα μεταβάλλουμε την παράμετρο  $\beta_1$ , η οποία είναι ο συντελεστής ανταπόκρισης της Λάουρα στα συναισθήματα του Πετράρχη. Η τιμή που παίρνει το  $\beta_1$  στο μοντέλο είναι 1. Θα μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου  $\beta_1$  από 0 έως 10 για να δούμε τι θα συμβεί στο μοντέλο και αν θα επηρεάσει την εξέλιξη της ερωτικής ιστορίας.

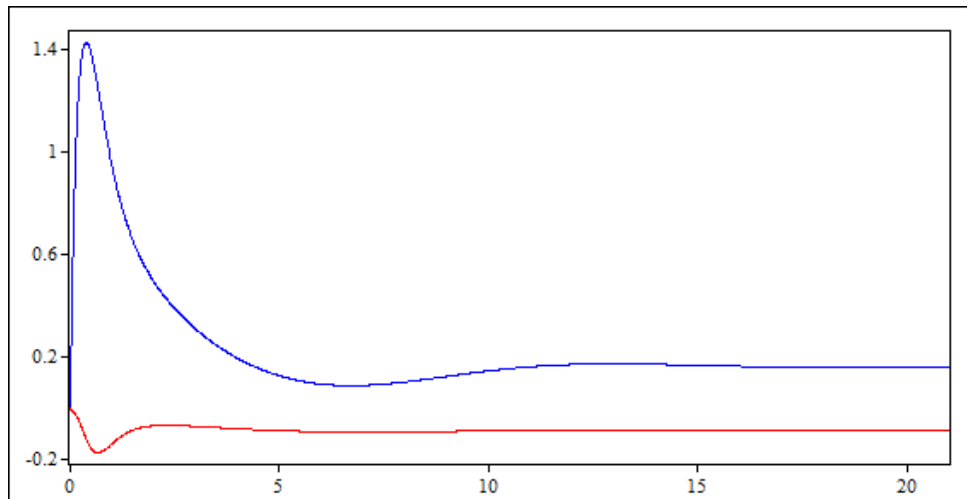
1<sup>η</sup> περίπτωση  $\beta_1 = 0.3$

Καθώς μεταβάλλεται η τιμή της παραμέτρου  $\beta_1$  από 0 έως 0.3 το σύστημα έχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας και αυτό φαίνεται από τα φασικά πορτραίτα  $L-P$  και  $P-Z$  καθώς και από το διάγραμμα χρονολογικής σειράς.



(α)

(β)



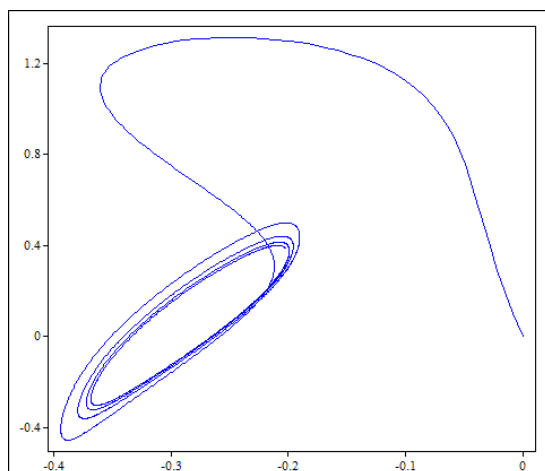
(γ)

Διάγραμμα 5.11 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  για  $\beta_1 = 0.3$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\beta_1 = 0.3$ .

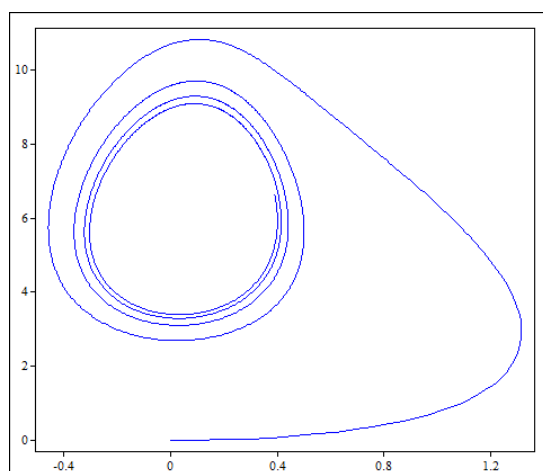
Παρατηρούμε πως για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\beta_1$  το σύστημα έχει ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αρχικά υπάρχει μια έκρηξη στα συναισθήματα του Πετράρχη και αυτό φαίνεται από την κατακόρυφη πορεία της μπλε γραμμής ενώ στη συνέχεια μειώνονται και σταθεροποιούνται σε μία θετική, αλλά μικρή, τιμή. Η Λάουρα έχει αρνητικά συναισθήματα στην αρχή και στη συνέχεια τα συναισθήματά της ως προς τον Πετράρχη είναι σχεδόν ουδέτερα και η τιμή του  $L$  κινείται πολύ κοντά στο 0.

2<sup>η</sup> περίπτωση  $\beta_1 = 0.88$

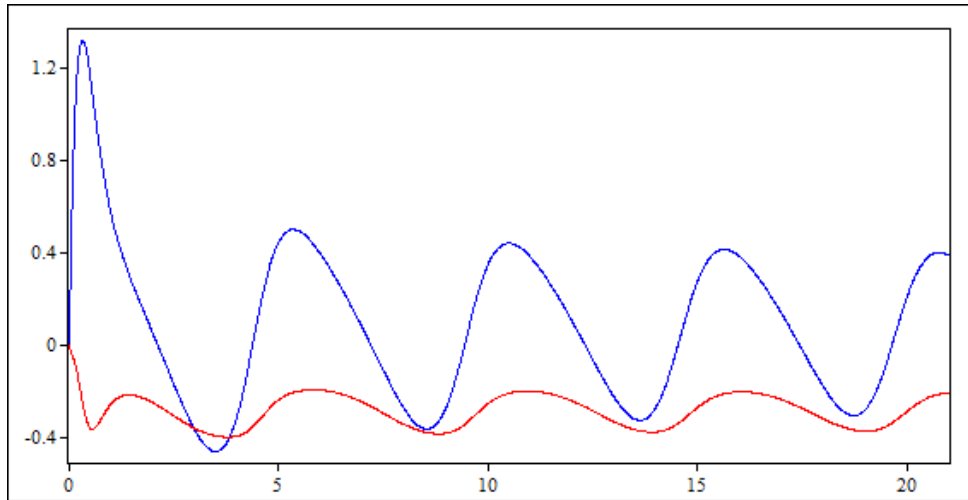
Καθώς η τιμή της παραμέτρου  $\beta_1$  αυξάνεται και γίνεται μεγαλύτερη από 0.3 τη θέση του ευσταθούς σημείου παίρνει ένας οριακός κύκλος.



(α)



(β)



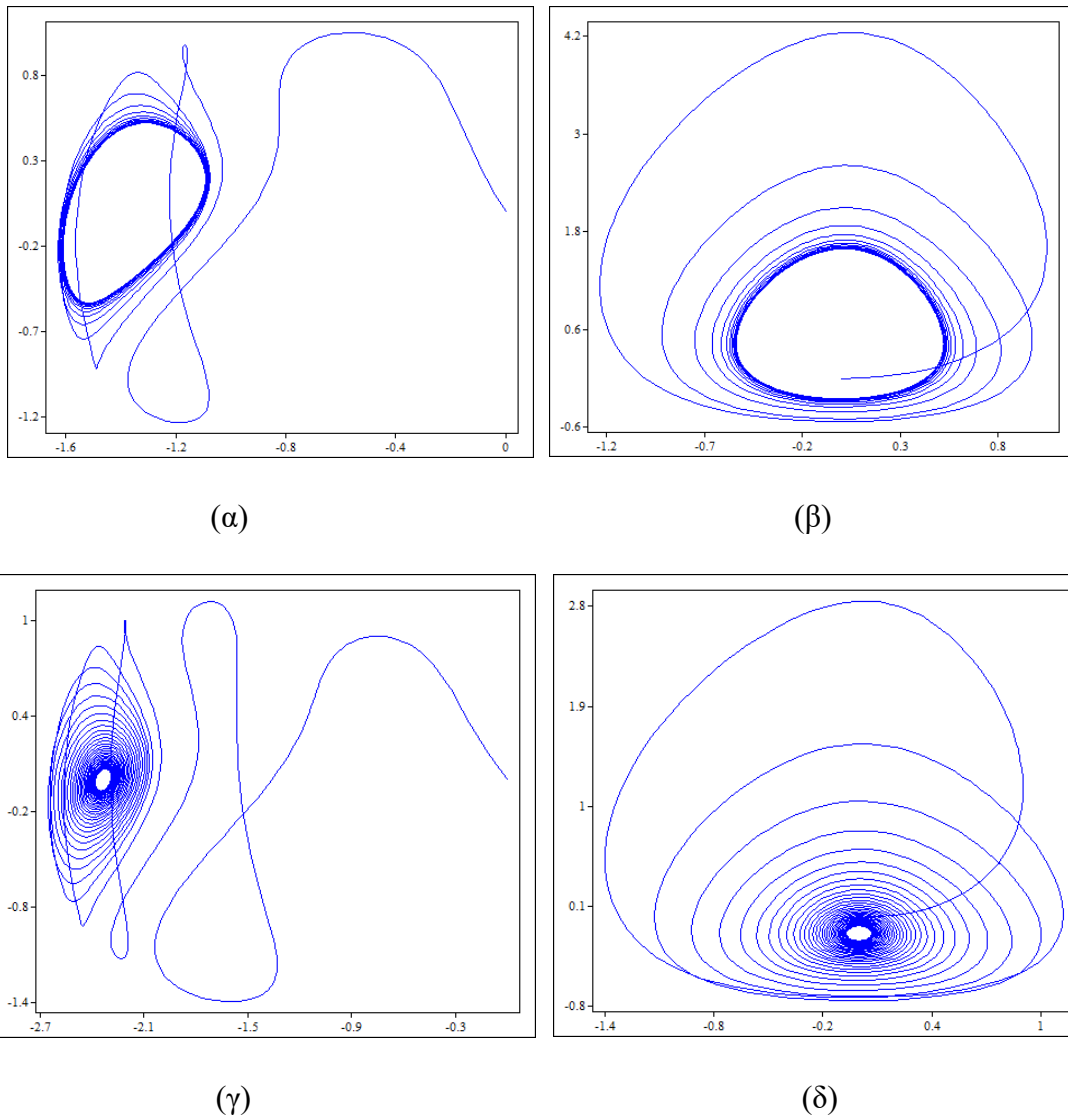
(γ)

Διάγραμμα 5.12 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  για  $\beta_1 = 0.88$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\beta_1 = 0.88$ .

Στα διαγράμματα 5.12 (α), (β) παρουσιάζονται οι προβολές από τις τροχιές του συστήματος (4.9) – (4.11) για την εξέλιξη της αγάπης της Λάουρα και του Πετράρχη για τις αρχικές τιμές των παραμέτρων με μοναδική αλλαγή στην παράμετρο  $\beta_1$ .

3<sup>η</sup> περίπτωση  $0.88 < \beta_1 < 7$

Αν αυξήσουμε την τιμή του  $\beta_1$  από 0.88 έως 7 τότε θα παρατηρήσουμε πως δεν αλλάζει κάτι σημαντικό στη συμπεριφορά του μοντέλου και υπάρχει ακόμα ο οριακός κύκλος ο οποίος όμως καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\beta_1$  μειώνεται και μοιάζει να συγκλίνει προς ένα σημείο. Χαρακτηριστικά παρουσιάζουμε τα διαγράμματα για  $\beta_1 = 4$  και  $\beta_1 = 7$  για να δούμε την εξέλιξη του μοντέλου.

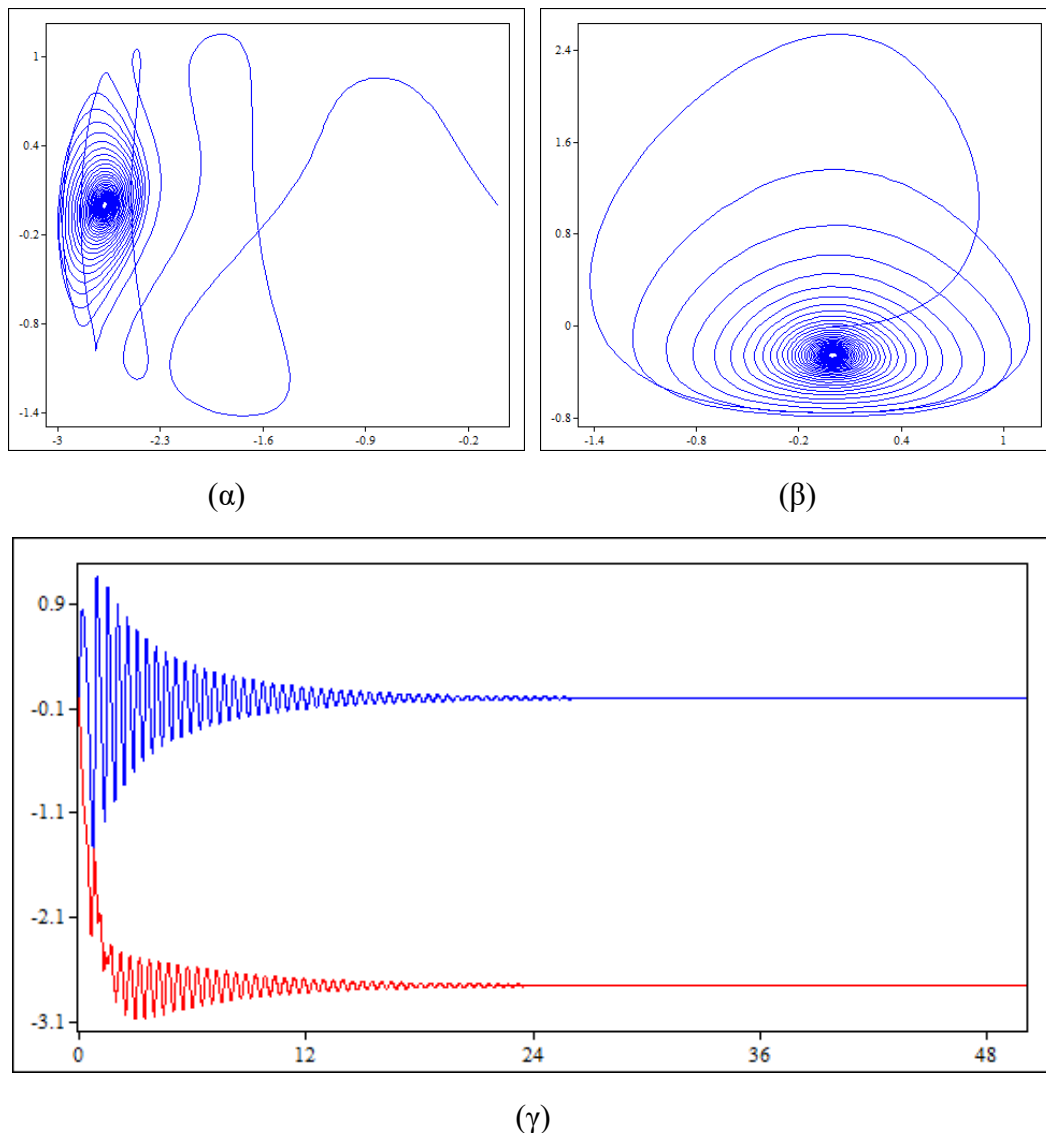


Διάγραμμα 5.13 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$  για  $\beta_1 = 4$  και (γ)  $L-P$  και (δ)  $Z-P$  για  $\beta_1 = 7$ .

#### 4<sup>η</sup> περίπτωση $\beta_1 > 7$

Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή της παραμέτρου  $\beta_1$  τότε ο οριακός κύκλος συγκλίνει προς ένα ευσταθές σημείο. Η επίδραση της μεταβολής της παραμέτρου  $\beta_1$  όμως δεν θα ήταν σημαντική για τα 21 χρόνια που κράτησε η ερωτική ιστορία της Λάουρα και του Πετράρχη γιατί, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 5.14(γ) το σύστημα έχει ευσταθές σημείο μετά τα 36 χρόνια.





Διάγραμμα 5.14 Φασικά πορτραίτα (α)  $L$ - $P$  και (β)  $Z$ - $P$  για  $\beta_1 = 8$  και (γ) εξέλιξη του  $L$  (κόκκινη γραμμή) και  $P$  (μπλε γραμμή) με το  $t$  για  $\beta_1 = 8$ .

Συμπεραίνουμε πως η τιμή της παραμέτρου  $\beta_1$  μπορεί να θεωρηθεί κρίσιμη για την εξέλιξη της ερωτικής ιστορίας της Λάουρα με τον Πετράρχη, καθώς για τιμές μικρότερες του 1 το σύστημα έχει ευσταθές σημείο ισορροπίας. Καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου, το ευσταθές σημείο γίνεται ασταθής οριακός κύκλος και στη συνέχεια πάλι ευσταθές σημείο. Επομένως, αν η Λάουρα αντιδρά πολύ λίγο στα συναισθήματα του ποιητή, τότε η Λάουρα θα είχε σταθερά αρνητική ή ουδέτερη ανταπόκριση στον Πετράρχη. Τότε ο ποιητής θα ξεχνούσε την αγάπη του προς τη Λάουρα και θα έμενε μόνο με την ανάμνησή της. Καθώς αυξάνεται η ανταπόκριση της Λάουρα, εμφανίζεται η κυκλική συμπεριφορά της σχέσης τους που αναλύθηκε και προηγουμένως. Τέλος, για πολύ υψηλές τιμές ανταπόκρισης της Λάουρα στα συναισθήματα του Πετράρχη, η περιοδικότητα στη σχέση τους θα συνέχιζε να υπάρχει για

όσο ζούσε η Λάουρα, ενώ αν υποθέσουμε ότι δεν πέθαινε τότε τα συναισθήματα της Λάουρα και του Πετράρχη θα σταθεροποιούνταν σε κάποια τιμή ύστερα από περίπου 36 χρόνια.

### 5.3 Τροποποιημένο μοντέλο

Παίρνουμε το μοντέλο της ερωτικής ιστορίας του Πετράρχη και της Λάουρα και το τροποποιούμε προσθέτοντας έναν επιπλέον όρο στην πρώτη εξίσωση, στην εξίσωση της αγάπης της Λάουρα προς τον Πετράρχη. Το μοντέλο πλέον έχει την εξής μορφή:

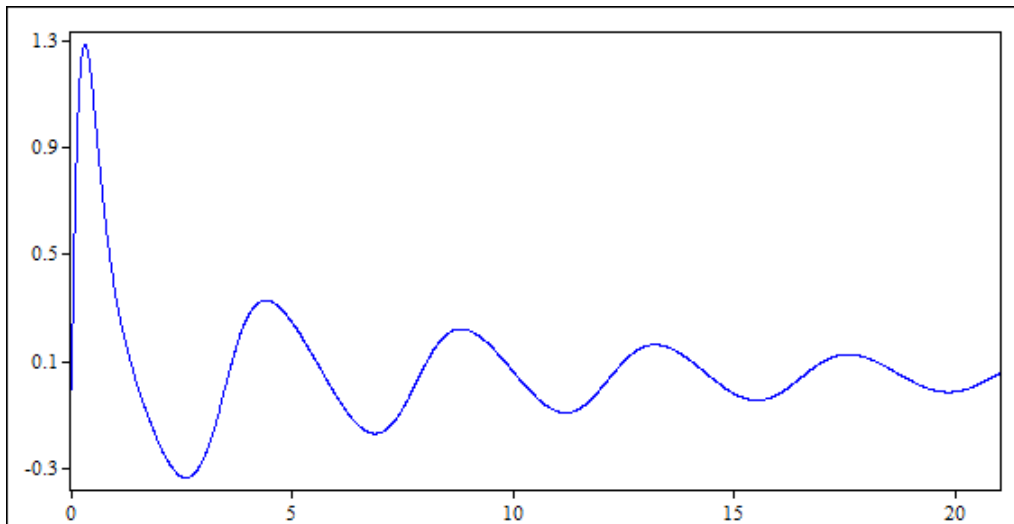
$$\frac{dL}{dt} = -a_1L + \beta_1 \left[ P \left( 1 - \left( \frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) + A_p \right] + A_hLP$$

$$\frac{dP}{dt} = -a_2P + \beta_2 \left[ L + \frac{A_L}{1+\delta Z(t)} \right]$$

$$\frac{dZ}{dt} = -a_3Z + \beta_3P$$

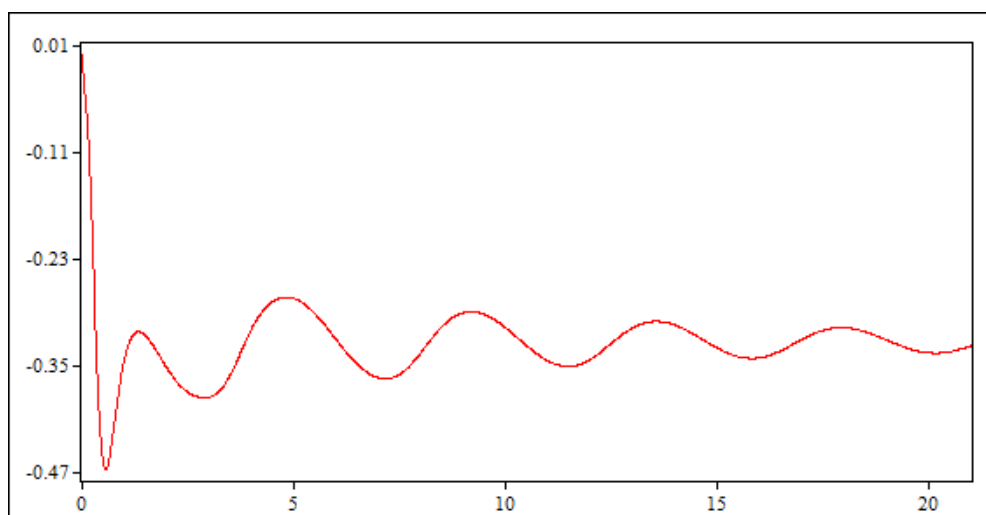
Ο συντελεστής  $A_h$  ορίζεται ως ο συντελεστής που μας δείχνει την έλξη που νιώθει η Λάουρα για τον σύζυγό της. Το γεγονός πως η Λάουρα είναι παντρεμένη δεν παρουσιάζεται επαρκώς μέσα στο υπάρχον μοντέλο και υποθέτουμε ότι η έλξη που νιώθει για τον σύζυγό της είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που μπορεί να επηρεάσει τα συναισθήματα της Λάουρα για τον Πετράρχη. Ο όρος  $L*P$  ορίζεται ως ο παράγοντας επιτάχυνσης των συναισθημάτων μεταξύ των δύο ατόμων που συμμετέχουν στη σχέση. Πιστεύουμε ότι αυτός ο παράγοντας, καθώς μεταβάλλονται τα συναισθήματα του Πετράρχη και της Λάουρα, δίνει ακόμη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα αλλά και ρεαλιστικότητα στο μοντέλο μας.

Όπως και στο αρχικό μοντέλο, έτσι και σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνουμε τις αρχικές τιμές των παραμέτρων και μηδενικές αρχικές συνθήκες και στη νέα παράμετρο  $A_h$  δίνουμε αρχικά την τιμή 1. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα E & F Chaos σχεδιάζουμε ξανά τα αρχικά φασικά πορτραίτα και την εξέλιξη του  $L$  και του  $P$  με το χρόνο για να δούμε αν έχει αλλάξει κάτι σε σχέση με τα αποτελέσματα του αρχικού μοντέλου.



Διάγραμμα 5.15 Διάγραμμα  $P-t$  για 21 χρόνια

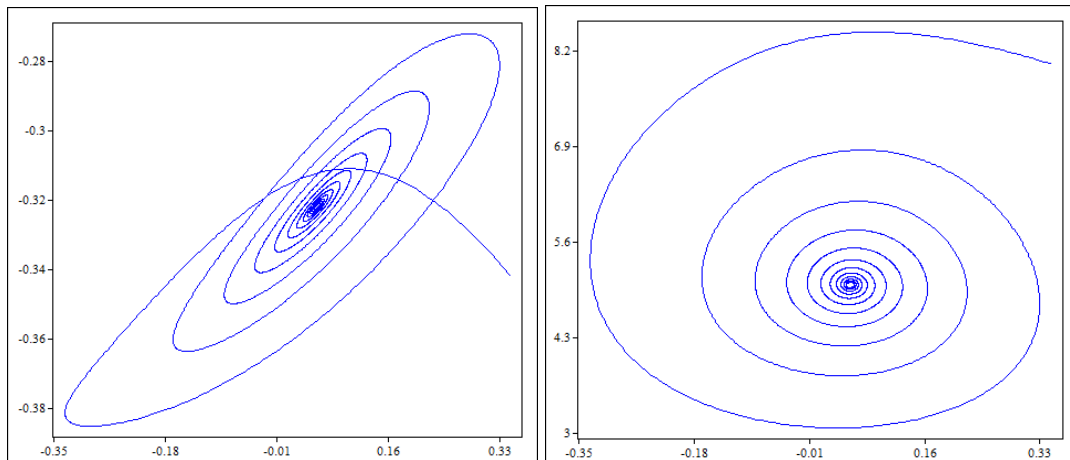
Από το διάγραμμα 5.15 παρατηρούμε πως αν και η κυκλική συμπεριφορά των συναισθημάτων του Πετράρχη παραμένει, τα συναισθήματά του είναι μειωμένα σε σχέση με τα αρχικά και περιορίζεται σε μικρότερες ταλαντώσεις μεταξύ μέγιστου και ελάχιστου σημείου. Επίσης, καθώς τα χρόνια περνούν, οι ταλαντώσεις γίνονται όλο και μικρότερες. Συνεπώς, αν η ιστορία διαρκούσε περισσότερα από 21 χρόνια, τότε το σύστημα θα κινούταν προς ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, κάτι το οποίο δεν ισχύει για το αρχικό μας μοντέλο στο οποίο η κυκλική συμπεριφορά θα συνεχίζεται για όσα χρόνια και αν το «τρέξουμε».



Διάγραμμα 5.16 Διάγραμμα  $L-t$  για 21 χρόνια

Και σε αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε πως μειώθηκε το πλάτος των διακυμάνσεων μεταξύ μέγιστου και ελάχιστου και τα συναισθήματα συγκλίνουν σε ένα σημείο το οποίο υπάρχει

μετά το πέρας των 21 χρόνων που κρατάει η ιστορία. Τα συναισθήματα της Λάουρα συνεχίζουν να παραμένουν αρνητικά για όλη τη διάρκεια της ιστορίας.



(α)

(β)

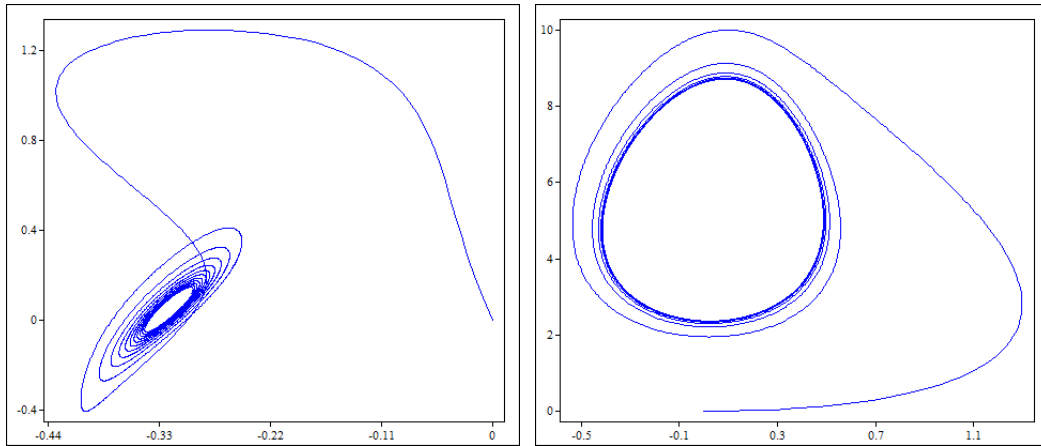
Διάγραμμα 5.17 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$ .

Το ίδιο παρατηρούμε και από τα φασικά πορτραίτα του διαγράμματος 5.17 με τις προβολές (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$  στο οποίο φαίνεται ότι το σύστημα από οριακό κύκλο, δηλαδή ημιπεριοδικότητα, συγκλίνει προς ένα ελκυστικό σημείο ισορροπίας.

Στη συνέχεια θα μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου  $A_h$  για να δούμε πως επηρεάζει την ισορροπία του συστήματος.

### 5.3.1 1<sup>η</sup> περίπτωση $A_h = 0.6$

Αρχικά, δοκιμάζουμε τιμές μικρότερες του 1 και παρατηρούμε πως για τιμές μέχρι 0.6 οι λύσεις του συστήματος κινούνται σε έναν οριακό κύκλο. Επομένως, αν δώσουμε τιμές στο  $A_h$  από 0 έως 0.6 περίπου, δε θα επηρεάσει σημαντικά την εξέλιξη της ιστορίας. Το μόνο που παρατηρούμε είναι ότι τα συναισθήματα εξελίσσονται πιο γρήγορα και έτσι έχουμε μια επιτάχυνση της σχέσης.



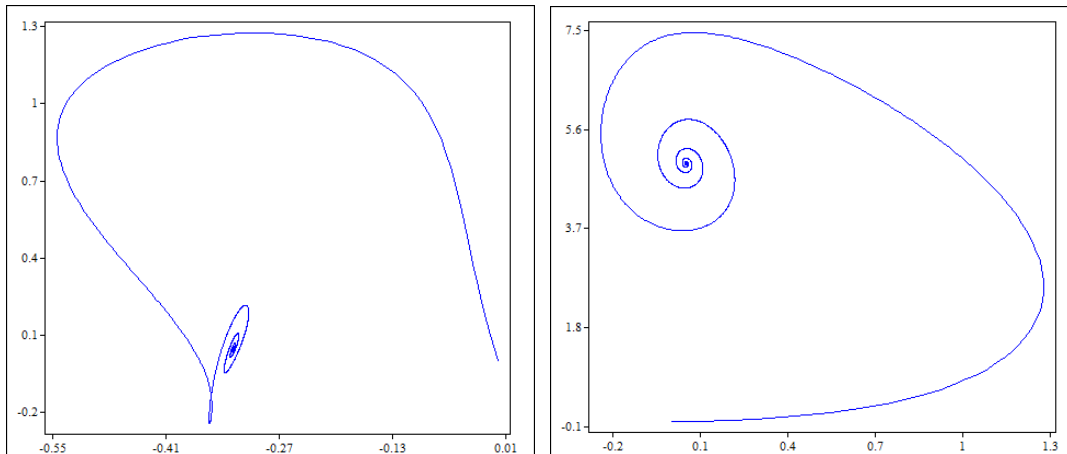
(α)

(β)

Διάγραμμα 5.18 Φασικά πορτραίτα (α)  $L-P$  και (β)  $Z-P$  για  $A_h = 0.6$

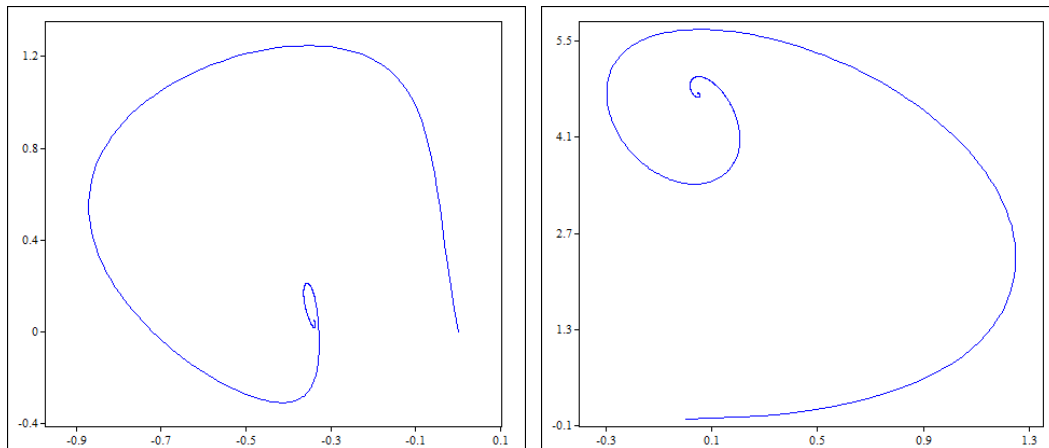
### 5.3.2 2<sup>η</sup> περίπτωση $A_h > 1.8$

Αυξάνοντας την παράμετρο  $A_h$  παρατηρούμε πως τη θέση του οριακού κύκλου παίρνει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας στο οποίο συγκλίνει. Για την τιμή  $A_h = 1.8$  εμφανίζεται το ευσταθές σημείο ισορροπίας και από αυτήν την τιμή και μετά, όσο και αν την αυξήσουμε, δε θα εμφανιστεί ξανά ο οριακός κύκλος. Επομένως, η κρίσιμη τιμή είναι το 1.8 για την παράμετρο.



(α)

(β)



(γ)

(δ)

Διάγραμμα 5.19 Φασικά πορτραίτα (α), (γ)  $L$ - $P$  και (β), (δ)  $P$ - $Z$  για τιμές  $A_h = 1.8$  (α), (β) και  $A_h = 4$  (γ), (δ).

Επομένως, μπορούμε να βγάλουμε ως συμπέρασμα ότι η παράμετρος  $A_h$  είναι χρήσιμη για το μοντέλο μας, καθώς καθορίζει την πορεία της σχέσης, από οριακό κύκλο σε ευσταθές σημείο, και το κάνει πιο ρεαλιστικό. Ο όρος  $LP$  επιταχύνει την εξέλιξη των συναισθημάτων και οι εναλλαγές γίνονται πιο γρήγορα από πριν. Βέβαια, η τιμή της παραμέτρου πρέπει να είναι τέτοια ώστε να συμβαδίζει με την εξέλιξη της ιστορίας και, σε κάποιο βαθμό, με τις παρατηρήσεις του Jones σχετικά με την χρονολόγηση των ποιημάτων.

## Κεφάλαιο 6

### 6. Συμπεράσματα

Η εξέλιξη μιας ερωτικής σχέσης μπορεί να επηρεαστεί από πολλά γεγονότα τα οποία μπορούν να είναι και καθοριστικά για την πορεία της. Η επιλογή μεταβλητών αλλά και παραμέτρων είναι η πιο κρίσιμη απόφαση στη δημιουργία ενός δυναμικού μοντέλου που να περιγράφει την ερωτική σχέση μεταξύ δύο ατόμων. Το μοντέλο μπορεί να είναι γραμμικό αλλά μπορεί να είναι και μη γραμμικό. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα μόνο με γραμμικούς όρους, ενώ στη συνέχεια προστέθηκαν και μη γραμμικοί όροι οι οποίοι προσδίδουν πολυπλοκότητα αλλά και μεγαλύτερη ρεαλιστικότητα στο μοντέλο. Επίσης, γίνεται η υπόθεση πως μεταβάλλονται μόνο τα συναισθήματα των δύο (ή τριών ατόμων στην περίπτωση ερωτικών τριγώνων), ενώ ο υπόλοιπος κόσμος παραμένει παγωμένος.

Με τα δυναμικά μοντέλα αγάπης έχουν αναλυθεί μυθιστορηματικές ή κινηματογραφικές ιστορίες αγάπης, όπως είναι αυτές του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας του Σαίξπηρ, της Πεντάμορφης και του Τέρατος από την κινηματογραφική μεταφορά του Disney, της Ελίζαμπεθ και του Ντάρσι από την «Περηφάνεια και Προκατάληψη», αλλά και άλλες πολλές που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Όμως, με τα δυναμικά μοντέλα χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεταβλητές και παραμέτρους μπορούμε να περιγράψουμε οποιαδήποτε ρομαντική ή ανθρώπινη σχέση.

Στην περίπτωση της Λάουρα και του Πετράρχη, είδαμε πως, εκτός από τις παραμέτρους  $\alpha_3$  και  $\beta_3$ , που εξέτασε ήδη ο Rinaldi και τις τιμές για τις οποίες εμφανίζεται οριακός κύκλος ή ευσταθής ισορροπία, υπάρχουν και άλλες παράμετροι μέσα στο μοντέλο που μπορούν να αλλάξουν την ισορροπία. Ο Rinaldi πρότεινε ως πιο κρίσιμες τις παραμέτρους  $a_2, \beta_1$  και  $\beta_2$ . Επομένως εξετάσαμε αρχικά τις τιμές αυτών των παραμέτρων. Η παράμετρος  $a_2$ , η οποία δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο ο Πετράρχης ξεχνά την αγαπημένη του, επηρεάζει την πορεία της σχέσης τους. Έτσι, για υψηλότερες τιμές του  $a_2$  η διαδικασία λήθης επιδρά σημαντικά πάνω στα συναισθήματα του Πετράρχη τα οποία εξασθενούν και τελικά σταθεροποιούνται σε μια αρκετά χαμηλή, αλλά θετική, τιμή. Το ίδιο συμβαίνει και με τη Λάουρα της οποίας τα συναισθήματα οίκτου και συμπόνιας εμφανιζόταν μόνο κατά την απόγνωση του Πετράρχη και έτσι κρατά μια σταθερά αρνητική στάση απέναντί του. Στη συνέχεια μελετήσαμε την παράμετρο  $\beta_2$ , που είναι η ανταπόκριση του Πετράρχη στα συναισθήματα της Λάουρα. Σε αυτή τη περίπτωση, η αλλαγή στις τιμές της παραμέτρου δεν επιφέρουν κάποια σημαντική αλλαγή και ο οριακός κύκλος συνεχίζει να υπάρχει. Τέλος, μεταβάλαμε την παράμετρο  $\beta_1$  η

οποία δείχνει την ανταπόκριση της Λάουρα στα συναισθήματα του Πετράρχη. Για τιμές στο  $\beta_1$  από 0 έως 0.88 δεν υπάρχει οριακός κύκλος και το σύστημα κινείται προς ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αν αυξηθεί από 0.88 έως περίπου το 7 εμφανίζεται ο οριακός κύκλος και η ημιπεριοδικότητα του συστήματος. Ενώ αν αυξήσουμε περισσότερο το  $\beta_1$  τη θέση του κύκλου παίρνει η ισορροπία.

Τροποποιώντας ελαφρά το αρχικό μοντέλο που πρότεινε ο Rinaldi με την προσθήκη ενός μη γραμμικού όρου,  $A_hLP$ , βλέπουμε πως η εξέλιξη των συναισθημάτων επιταχύνεται. Για χαμηλές τιμές στο  $A_h$  παρατηρείται η ύπαρξη του οριακού κύκλου, ενώ καθώς αυξάνεται η τιμή του, τη θέση του οριακού κύκλου παίρνει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας και η σχέση μεταξύ του Πετράρχη και της Λάουρα, μετά από σύντομη κυκλική συμπεριφορά, ισορροπεί σε ένα σημείο.



## Βιβλιογραφία

- Bauso et. al, (2014), Mean-field games for marriage, *PLoS One*, 9 (5). e94933
- Bellomo N. and Carbonaro B., (2006), On the Modeling of Complex Sociopsychological Systems with Some Reasoning About Kate, Jules, and Jim, *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Hindawi Publish Corporation, Vol.2006, pg.1-26.
- Bowlby J. (1969). Attachment, Attachment and loss: Vol. 1. Loss. *New York: Basic Books*.
- Gottman J.M. and Levenson R.W., (2002), A two-factor model for predicting when a couple will divorce, *Family Process*, 41, 1; *Research Library*, pg. 83.
- Gragnani, A., Rinaldi, S. and Feichtinger, G., (1997), Cyclic Dynamics in Romantic Relationships, *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 7, No. 11, 2611-2619.
- Hartl R.F and Mehlmann A., (1984), Optimal seducing policies for dynamic continuous lovers under risk of being killed by a rival, *Cybrnetics and Systems*, An Intern, 15, pg.119-126.
- Jones F.J., (1995), The Structure of Petrarch's Canzoniere. *Brewer*, Cambridge, UK.
- Liao X. and Ran J., (2005), Hopf bifurcation in love dynamical models with nonlinear couples and time delays, *Chaos solutions and Fractals*, **31**, 853-865.
- Rey, J.M. (2010). A mathematical model of sentimental dynamics accounting for marital dissolution. *PLoS ONE*, 5(3), e9881.
- Rinaldi, S., (1998), Laura and Petrarch: An Intriguing Case of Cyclical Love Dynamics, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. **58**, No. 4, pp. 1205-1221.
- Rinaldi, S., Rossa, F. D. and Landi, P., (2014), A mathematical model of Pride and Prejudice, *Nonlinear Dynamics Psychol Life Sci.*, **2**, 199-211.
- Rinaldi, S., Rossa, F. D. and Landi, P., (2013b), Small discoveries can have great consequences in love affairs: The case of Beauty and the Beast, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **23**, 1330038.
- Rinaldi, S., Rossa, F. D. and Dercole, F., (2010), Love and appeal in standard couples, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **20**, 2443-2451.
- Rinaldi, S. and Gragnani, A., (1998a), Love dynamics between secure individuals: A modeling approach, *Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences*, **2**, 283-301.

- Rinaldi, S., (1998), Love dynamics: The case of linear couples, *Applied Mathematics and Computation*, **95**, 181-192.
- Rinaldi, S., Rossa, F. D., Dercole, F., Gragnani, A. and Landi, P., (2015), Modeling Love Dynamics, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, Vol. **89**.
- Simpson et al. (1996), Conflict in close relationships: An attachment perspective. *Journal of Personality and Social Psychology*, 71,899-914.
- Sternberg R.J, (1986), A triangular theory of love, *Psychological Review*, Vol. 93(2), 119-135.
- Spiegelman, M., (1997), An introduction to Dynamical Systems and Chaos, LDEO
- Sprott, J. C., (2004), Dynamical Models of Love, *Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences*, Vol. **8**, No. 3.
- Stenberg, R. J. and Banes, M. L., (1998), The psychology of love, New Haven, CT: Yale University Press.
- Strogatz, S., (1994), Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering, MA: Addison-Wesley.
- Strogatz, S., (1988), Love Affairs and Differential Equations, *Mathematics Magazine*, Vol. **61**, No. 1, 35.
- Zhou C., et al. (2014), Organelle-based aggregation and retention of damaged proteins in asymmetrically dividing cells, *Cell* 159(3):530-42