



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου
Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής

Διπλωματική εργασία

Θέμα: «Ο ρόλος των εικονιστικών στοιχείων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος»

Τουζλούδη Δήμητρα (Α.Μ.:1010058)

1^η επιβλέπουσα καθηγήτρια: κ.Σταθοπούλου Χαρίκλεια

2^η επιβλέπουσα καθηγήτρια: κ.Γκανά Ελένη

Βόλος, 2014



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 12674/1
Ημερ. Εισ.: 11-08-2014
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΕΑ
2014
ΤΟΥ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	4
1. Εισαγωγή	5
2. Μαθηματικό πρόβλημα.....	8
2.1.Τι είναι μαθηματικό πρόβλημα	8
2.2.Είδη μαθηματικών προβλημάτων	10
2.3.Επίλυση μαθηματικού προβλήματος	12
3.Γλώσσα και επίλυση προβλημάτων.....	21
3.1. Ο ρόλος της γλώσσας στην επίλυση προβλημάτων	21
3.2. Έρευνες για το ρόλο της γλώσσας στο μαθηματικό πρόβλημα	25
4. Διατύπωση μαθηματικών προβλημάτων και πολυτροπικότητα	27
4.1. Πολυτροπικότητα	27
4.2. Πολυτροπικότητα και μαθηματικό πρόβλημα	30
5.Οι εικόνες στα σχολικά εγχειρίδια.....	33
6.Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση προβλήματος	37
6.1.Έρευνες για το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων... 38	
6.2.Συμπεράσματα σχετικά με το ρόλο των εικόνων στα μαθηματικά προβλήματα	41
7. Μεθοδολογία-μέθοδος της έρευνας.....	43
7.1.Α' φάση έρευνας: Ανάλυση περιεχομένου-Σχολικό εγχειρίδιο Ε' δημοτικού ..43	
7.1.1. Η θεματική των προβλημάτων	45
7.1.2. Το είδος της σημειωτικής αναπαράστασης.....	49

7.2 Β' φάση έρευνας	58
7.2.1. Είδος της έρευνας.....	58
7.2.2. Προσδιορισμός του δείγματος	59
7.2.3. Σκοπός και υποθέσεις.....	59
7.2.4. Εργαλεία συλλογής δεδομένων - Ερευνητικός σχεδιασμός.....	60
7.2.5. Προβλήματα κατά την έρευνα	67
7.2.6. Αποτελέσματα	68
7.3. Συζήτηση – συμπεράσματα	74
7.4. Προτάσεις	81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	82

Ευχαριστίες

Προτού ξεκινήσω τη διεξοδική παρουσίαση της συγκεκριμένης εργασίας θα ήθελα να αναφερθώ σε όλα τα πρόσωπα, που συνέβαλαν προσωπικά στη διεξαγωγή και ολοκλήρωσή της.

Αρχικά, επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τις επόπτριες καθηγήτριες κ.Χαρίκλεια Σταθοπούλου και κ.Γκανά Ελένη, οι οποίες με υποστήριξαν σε όλα τα στάδια της εργασίας, από τις πρώτες συζητήσεις για την οριοθέτηση του θέματος, ως τη φάση που η εργασία απέκτησε την τελική της μορφή. Το ενδιαφέρον με το οποίο με περιέβαλαν και η διακριτικότητα των συμβουλών και υποδείξεών τους συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση και περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επιπλέον, οφείλω ευχαριστίες στην κ.Αδάμου Θάλεια, εκπαιδευτικό του τμήματος, στο οποίο έλαβε μέρος η ερευνητική προσπάθεια. Με αμέριστο ενδιαφέρον με βοήθησε στη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων προσφέροντάς μου πολύτιμες συμβουλές και στηρίζοντάς με ηθικά και ψυχολογικά.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την ηθική συμπαράσταση και υπομονή που έδειξαν απέναντί μου.

1. Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί έντονη αύξηση του ενδιαφέροντος των ερευνητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Σε ορισμένες χώρες μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα, η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως βασικός στόχος της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Η επίλυση προβλήματος αποτελεί κεντρικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως περιγράφεται από το Α.Π.Σ και Δ.Ε.Π.Π.Σ. όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο οργανώνεται η διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών (Τύπας, 2005).

Στην παρούσα εργασία πρόκειται να ασχοληθούμε με τα μαθηματικά προβλήματα δίνοντας έμφαση στο ρόλο της πολυτροπικότητας, η οποία αναφέρεται στην ποικιλότητα των σημειωτικών συστημάτων που διαμορφώνουν τα μαθηματικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, θα μας προβληματίσει ο ρόλος που διαδραματίζουν τα εικονιστικά στοιχεία κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών και ιδιαίτερα στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, τα παιδιά έρχονται από πολύ μικρή ηλικία σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων (Γαγάτσης, 2001), όπως είναι οι εικόνες, τα διαγράμματα, οι πίνακες, τα σχήματα, οι λεκτικές αναπαραστάσεις, κ.α., οι οποίες χρησιμοποιούνται στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, καθώς πολλές φορές αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών εννοιών.

Επιπλέον, στις μέρες μας τα παιδιά έχουν στη διάθεσή τους, εντός και εκτός σχολικού πλαισίου, όγκο πληροφοριών από το συνδυασμό τεχνολογικών και απλών μέσων επικοινωνίας που δημιουργούν ένα πολυτροπικό περιβάλλον. Στο σύγχρονο πολυτροπικό τοπίο η χρήση εικονιστικών στοιχείων αποτελεί ένα κομμάτι του μαθηματικού γραμματισμού (Γραίκος, 2008) που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια παρουσιάζονται όλο και περισσότερα λεκτικά προβλήματα με συνδυασμό και άλλων μέσων, κυρίως εικονιστικών στοιχείων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η ανάγκη οι

μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα ανάγνωσης και κατανόησης των προβλημάτων λαμβάνοντας όλες τις πληροφορίες που τους δίνονται (Τρομπούκης, 2006).

Αρχικά, κάνοντας βιβλιογραφική ανασκόπηση πρόκειται να εξετάσουμε κάποιες έννοιες που σχετίζονται με τα μαθηματικά προβλήματα και τη χρήση των σημειωτικών συστημάτων που χρησιμοποιούνται σε αυτά. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο θα αναλύσουμε την έννοια του μαθηματικού προβλήματος. Πρόκειται να δοθούν ορισμοί και πληροφορίες σχετικά με το τι είναι μαθηματικό πρόβλημα, ποια είναι τα είδη των μαθηματικών προβλημάτων, από ποια στάδια μπορεί να αποτελείται η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο, δίνεται έμφαση στο ρόλο που διαδραματίζει το γλωσσικό σημειωτικό σύστημα για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος και επίσης παρουσιάζονται αποτελέσματα ορισμένων ερευνών σχετικά με αυτόν. Παρόλο που το γλωσσικό σημειωτικό σύστημα κυριαρχεί, η χρήση και άλλων σημειωτικών τρόπων και αναπαραστάσεων έχει αυξηθεί καθώς οι εικόνες περιβάλλουν το παιδί με παρόμοιο τρόπο που παλαιότερα το περιέβαλε ο γραπτός λόγος (Γρόσδος, 2008). Έτσι, στο τέταρτο κεφάλαιο πρόκειται να ασχοληθούμε με την έννοια της πολυτροπικότητας και τη σχέση της πολυτροπικότητας με το μαθηματικό πρόβλημα. Επιπλέον, το επόμενο κεφάλαιο αφορά στη χρήση των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια. Το τελευταίο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, αφορά στο ρόλο που διαδραματίζουν οι εικόνες για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών.

Όσον αφορά στο δεύτερο μέρος της εργασίας πρόκειται να μελετηθεί αφενός το περιεχόμενο ως προς τη θεματική των μαθηματικών προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ δημοτικού και το είδος των εικονιστικών στοιχείων που παρουσιάζονται στα συγκεκριμένα προβλήματα. Και αφετέρου, πρόκειται να εξεταστεί η επίδραση των εικόνων και των λειτουργιών τους στην επίλυση προβλήματος. Η παρούσα εργασία αποτελεί διερευνητική προσπάθεια για το ρόλο των εικονιστικών στοιχείων και, κατά συνέπεια, την ανάδειξη της σημασίας του οπτικού γραμματισμού στην κατανόηση των μαθηματικών προβλημάτων και τις διαδικασίες επίλυσής τους. Η έρευνα έγινε σε μαθητές Ε΄ Δημοτικού (N=20) στους οποίους δόθηκαν τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων, που αρχικά παρουσιάστηκαν

μόνο λεκτικά και στη συνέχεια συνοδεύονταν από τα είδη των εικονιστικών στοιχείων: διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές, πληροφοριακές εικόνες, αριθμογραμμή. Οι διακοσμητικές και οι βοηθητικές-αναπαραστατικές δεν βρέθηκε να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών, ενώ οι βοηθητικές-οργανωτικές και η αριθμογραμμή συμβάλλουν σημαντικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ ψηλό όταν παρουσιάστηκε το πρόβλημα λεκτικά σε σύγκριση με την παρουσία πληροφοριακής εικόνας, όπου τα αποτελέσματα επιτυχίας στις επιδόσεις των μαθητών μειώθηκαν. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τη σημασία του οπτικού γραμματισμού στα μαθηματικά και την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα.

2. Μαθηματικό πρόβλημα

2.1. Τι είναι μαθηματικό πρόβλημα

Η λέξη πρόβλημα παραπέμπει το μυαλό μας σε κάποιο εμπόδιο ή πρόκληση που δυσκολεύει την επίτευξη ενός στόχου ή αποτελέσματος και μπορεί να επιδέχεται αντιμετώπιση ή λύση. Έτσι, με άλλα λόγια, το πρόβλημα αποτελεί μια κατάσταση, η οποία χρειάζεται να αντιμετωπιστεί ή να λυθεί. Τα προβλήματα συναντώνται στην καθημερινή μας ζωή (προσωπικά, επαγγελματικά, κοινωνικά κ.α.) αλλά και στις διάφορες επιστήμες, όπως είναι τα μαθηματικά (Wikipedia).

Ένας μαθητής αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν ζητάει μια λύση αλλά δεν υπάρχει προφανής τρόπος για να φτάσει στη λύση αυτή. Μια κατάσταση προβληματισμού είναι διαφορετική από αυτές που έχει συναντήσει και επιλέξει μέχρι τώρα και δεν υπάρχει ένας έτοιμος τρόπος-αλγόριθμος, μια τεχνική ή μια στρατηγική για να φτάσει να τη λύσει. Επομένως, το εάν μια κατάσταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως πρόβλημα, εξαρτάται από το μαθηματικό υπόβαθρο του κάθε μαθητή. Για παράδειγμα, για τους μαθητές της Α' γυμνασίου ο πολλαπλασιασμός 413×23 δεν αποτελεί πρόβλημα, γιατί γνωρίζουν την τεχνική που πρέπει να ακολουθήσουν για τον λύσουν, ενώ για τους μαθητές της Β' δημοτικού αποτελεί πρόβλημα (Τουμάσης, 1999).

Στα Μαθηματικά, το πρόβλημα θα πρέπει να είναι μια κατάσταση η επίλυση της οποίας, από το μαθητή, δεν είναι αυτόματη και δεν βασίζεται στην άμεση και τυφλή εφαρμογή ενός δεδομένου αλγορίθμου. Η διαδικασία λύσης του προβλήματος απαιτεί χρόνο και σκέψη από την πλευρά του μαθητή. Ο μαθητής αφού καταλάβει την εκφώνηση του προβλήματος, εφαρμόζει τις γνώσεις του, δοκιμάζει μεθόδους, κάνει λάθη, κινείται μπρος και πίσω στο πρόβλημα μέχρι να ανακαλύψει τη λύση. Στην αρχή της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος πραγματοποιείται η λεγόμενη «μοντελοποίηση» του προβλήματος, δηλαδή τα δεδομένα και οι σχέσεις που περιγράφονται στην εκφώνηση του προβλήματος με πραγματικούς όρους του φυσικού κόσμου μεταφράζονται και μεταφέρονται στον ιδεατό κόσμο των Μαθηματικών. Με τη διαδικασία της «μοντελοποίησης» περνάμε από την περιγραφή των φυσικών γεγονότων, καταστάσεων και σχέσεων στις μαθηματικές πράξεις, σχέσεις, εξισώσεις κλπ (Πολυτίδης, 2006).

Το «παραδοσιακό» μαθηματικό πρόβλημα περιγράφεται λεκτικά, περιέχει αριθμητικά δεδομένα και έχει οπωσδήποτε μία λύση, η οποία επιτυγχάνεται με την επιλογή και το συνδυασμό κατάλληλων πράξεων και μεθόδων (Πήλιουρας, 2008).

Στη μαθηματική γλώσσα **πρόβλημα** είναι κάθε πρόταση που ζητά να βρεθούν ορισμένα στοιχεία με τη βοήθεια κάποιων άλλων. Έτσι, σημαντικό ρόλο σε κάθε πρόβλημα διαδραματίζουν τα **δεδομένα** του προβλήματος, δηλαδή τα στοιχεία τα οποία δίνονται από την εκφώνηση και τα θεωρούμε γνωστά και τα **ζητούμενα**, δηλαδή τα στοιχεία που επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος. Ουσιαστικά, η λύση του προβλήματος είναι η εύρεση των ζητούμενων, η οποία στηρίζεται στα δεδομένα και σε άλλα στοιχεία που ισχύουν (Εξαρχάκος, 1988).

Ο Schoenfeld (1992) ορίζει ως προβλήματα τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, για εξάσκηση και για μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων. Ο συγγραφέας, διακρίνει τα προβλήματα σε "προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις" και σε "καταστάσεις προβληματισμού ή πρωτότυπα προβλήματα".

Γενικά επικρατεί μια σύγχυση σχετικά με το τι είναι πρόβλημα και τι είναι άσκηση. Τονα χαρακτηρίσει κάποιος μια μαθηματική πρόταση, πρόβλημα ή άσκηση, ως ένα σημείο αποτελεί και μια υποκειμενική υπόθεση. Κάτι που μπορεί για κάποιον, δηλαδή να αποτελεί πρόβλημα, για κάποιον άλλο να θεωρείτε άσκηση. Συνήθως οι περισσότεροι μαθητές υποστηρίζουν ότι πρόβλημα είναι μια ιστορία με μακροσκελείς προτάσεις-εκφωνήσεις, στις οποίες παρουσιάζονται τα δεδομένα και σκιαγραφούνται τα ζητούμενα. Ακόμη, όμως και ορισμένοι μαθηματικοί που έχουν ξεκαθαρίσει ουσιαστικά τη διαφορά μεταξύ προβλήματος και άσκησης αδυνατούν να καταλάβουν ότι κάποιο πρόβλημα αν δοθεί πολλές φορές στους μαθητές από ένα σημείο και μετά καταντάει να είναι άσκηση. Επιπλέον, υπάρχει το φαινόμενο της επανάληψης πολλών φραστικών ασκήσεων που οι εκπαιδευτικοί έχουν την ψευδαίσθηση ότι αποτελεί πρόβλημα. Ουσιαστικά, όμως, πρόβλημα θεωρείται μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο που πρόκειται να το λύσει δεν γνωρίζει από την αρχή την διαδικασία για να βρει τη λύση, ενώ στην περίπτωση της άσκησης ο μαθητής γνωρίζει τη διαδικασία εξεύρεσης της λύσης από προηγούμενες εμπειρίες. Επομένως, όταν αναφερόμαστε

στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος εννοούμε μια κατάσταση, η οποία δεν είναι οικεία σε εμάς, δηλαδή ο τρόπος λύσης του δεν είναι γνωστός άμεσα στο λύτη, αλλά ο λύτης θα πρέπει να ανιχνεύσει τον κατάλληλο δρόμο για να εφαρμόσει τις τεχνικές που γνωρίζει με αποτέλεσμα να το λύσει (Μαυρίκιος, 2006).

Έτσι για παράδειγμα, αν πούμε στα παιδιά ότι 5 κιλά μήλα κοστίζουν 6 ευρώ και τους ζητάμε να μας βρουν πόσο θα κοστίζουν τα 8 κιλά μήλα, εφόσον τα παιδιά έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τη μέθοδο των τριών, προφανώς θα αποτελεί για αυτά πρόβλημα η παραπάνω κατάσταση. Όμως, από τη στιγμή που θα βιώσουν την παραπάνω εμπειρία και θα γνωρίζουν ότι οι αντίστοιχες καταστάσεις αντιμετωπίζονται με επιτυχία με τη μέθοδο των τριών, το να τους ρωτήσουμε πόσο κοστίζουν τα 4 κιλά πορτοκάλια όταν τα 3 κοστίζουν 5 ευρώ, για τα συγκεκριμένα παιδιά δε θα αποτελεί πλέον πρόβλημα αλλά άσκηση.

2.2. Είδη μαθηματικών προβλημάτων

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες ταξινομήσεις των μαθηματικών προβλημάτων. Η Yee (2002) προτείνει τη διάκριση των προβλημάτων σε **κλειστά** και **ανοιχτά** προβλήματα. Τα **κλειστά** προβλήματα αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη θεματική περιοχή, όλες οι απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζονται για να λυθούν υπάρχουν στην εκφώνησή τους και η απάντηση συνήθως είναι μονοσήμαντη. Ενώ, τα **ανοιχτά** ή μερικώς δομημένα επιδέχονται ποικίλες απαντήσεις σε σχέση με τις αρχικές παραδοχές. Μια άλλη παρόμοια κατηγοριοποίηση των προβλημάτων έγινε από τον Skovsmose, όπου χώρισε τα προβλήματα σε ασκήσεις (με την έννοια του κλασσικού προβλήματος των εγχειριδίων) και σε πεδία διερεύνησης (Κολέζα, 2009).

Ακόμη, έχουμε μια άλλη ταξινόμηση από τον Εξαρχάκο (1988), ο οποίος χωρίζει τα μαθηματικά προβλήματα σε 3 κατηγορίες: α) **προβλήματα απόδειξης**, β) **προβλήματα κατασκευής** και γ) **εύρεσης αγνώστων στοιχείων ή προβλήματα ανακάλυψης**.

Μια άλλη κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που αναφέρθηκε και παραπάνω από τον Schoenfeld (1992) είναι σε **προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις** και σε **πρωτότυπα προβλήματα**. Τα **προβλήματα ρουτίνας** είναι ασκήσεις που έχουν

ως βασικό στόχο την ανάπτυξη μιας πολύ συγκεκριμένης τεχνικής για την εκτέλεση πράξεων από μνήμης. Η τεχνική υποδεικνύεται αρχικά με ένα λυμένο παράδειγμα και ακολουθούν πολλά όμοια προβλήματα για εμπέδωση. Ενώ, τα **πρωτότυπα προβλήματα** είναι προβλήματα με ένα βαθμό πολυπλοκότητας, που περιγράφουν μια προβληματική κατάσταση. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης, αλλά οι μαθητές πρέπει να συνδυάσουν τις γνώσεις τους και τις ικανότητές τους, ώστε να οδηγηθούν στη λύση (Schoenfeld, 1992, Καραλή, 2009).

Σύμφωνα με τους Riley, Greeno & Heller (1983) προτείνεται μια ταξινόμηση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων και πιο συγκεκριμένα των προβλημάτων προσθετικής δομής σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το είδος της περιγραφόμενης κατάστασης.

Αρχικά, έχουμε τα προβλήματα **αλλαγής**, για παράδειγμα «Η Νίκη έχει 5 μήλα. Έδωσε 2 μήλα στη Φανή. Πόσα έχει τώρα;». Επιπλέον, υπάρχουν τα προβλήματα **συνδυασμού**, για παράδειγμα «Η Νίκη έχει 5 φρούτα. Τα 3 είναι πορτοκάλια και τα υπόλοιπα μήλα. Πόσα μήλα έχει η Νίκη;». Στην τρίτη κατηγορία υπάρχουν τα προβλήματα **σύγκρισης**, για παράδειγμα «Η Νίκη έχει 5 μήλα. Η Φανή έχει ένα λιγότερο από τη Νίκη. Πόσα μήλα έχει η Φανή;». Τέλος, έχουμε τα προβλήματα **εξομοίωσης**, για παράδειγμα «Η Νίκη έχει 5 μήλα. Αν φάει 2 από τα μήλα της θα έχει τόσα μήλα όσα έχει και η Φανή. Πόσα μήλα έχει η Φανή;» (Αγαλιώτης, 2000).

Πιο συγκεκριμένα, για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, οι Verschaffel, Greer και De Corte (2000) ταξινόμησαν τα προβλήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

α) Τα **συνηθισμένα** (Standard), στα οποία οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες για να τα λύσουν, παρά μόνο να συνδυάσουν αριθμητικά δεδομένα με μία ή περισσότερες αριθμητικές πράξεις. Αυτού του είδους τα προβλήματα επικρατούν κατά μεγάλο βαθμό στη διδακτική πρακτική.

β) Τα **ασυνήθιστα** ή προβληματικά (Problematic) προβλήματα. Στα συγκεκριμένα προβλήματα δεν είναι εμφανές το μαθηματικό μοντέλο, εκτός αν ληφθούν υπόψη οιρεαλιστικές καταστάσεις που εγείρονται από το πλαίσιο του προβλήματος. Η παρουσία τέτοιων προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια είναι κατά

μεγάλο βαθμό περιορισμένη και σπάνια βλέπουμε να χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία από τους εκπαιδευτικούς.

2.3. Επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Η σημερινή εποχή απαιτεί να καταστεί ικανός ο μαθητής να παίρνει θετική στάση απέναντι στα προβλήματα της ζωής και να ανακαλύπτει νέα γνώση, παρά να ασχολείται με τη μηχανική εκτέλεση πράξεων. Αποτελεί λοιπόν, ανάγκη να μπορεί να εκτιμήσει καταστάσεις, να διατυπώσει και να λύσει προβλήματα. Θέτοντας τον μαθητή μπροστά σε πραγματικά προβλήματα της ζωής, που έχουν νόημα για τον ίδιο και δίνοντας του την ελευθερία για έρευνα, ώστε να εργαστεί μόνος του με το δικό του προσωπικό τρόπο, επιτυγχάνεται η καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και η αυτενεργός συμμετοχή του στη λύση ποικίλων προβλημάτων. Μέσα από ένα τέτοιο μοντέλο προσεγγίζεται η γνώση και οι δεξιότητες ως προϊόντα ατομικής γνωστικής συγκρότησης και εμπειρίας, αφού ο ρόλος του δασκάλου δεν είναι να μεταφέρει στους μαθητές τη μια και μοναδική αλήθεια, αλλά μάλλον τους βοηθά και τους καθοδηγεί στην αναζήτησή της (Mayer, 1992). Αυτό το μοντέλο υποστηρίζει ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές εμπλέκονται στην αυθεντική μάθηση με ευκαιρίες να εξερευνήσουν και να επεκτείνουν τις γνώσεις τους, να εμπλουτίσουν τις εμπειρίες, να ρωτούν, να αναζητούν απαντήσεις, να κατανοούν την πολυπλοκότητα του κόσμου. Σύμφωνα με το Nagel (1996), με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ενδιαφέρον και τα παιδιά οδηγούνται στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων αναζητώντας απάντηση σε ερωτήματα με το δικό τους ρυθμό και σύμφωνα με τις δικές τους ανάγκες, συνδυάζοντας γνώσεις από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα (Γκλιάου, 2014).

Με τη λύση ενός προβλήματος ο μαθητής επιβεβαιώνει τις ικανότητές του, δυναμώνει τη θέλησή του και αποκτά σαφείς έννοιες και γενικεύσεις, που μπορεί να τις χρησιμοποιήσει για την κατάκτηση νέας γνώσης. Η επίλυση προβλήματος αποτελεί μια αρχή στην κατεύθυνση της αυτορρυθμιζόμενης μάθησης, η οποία ενισχύει την ανεξαρτησία και την αυτοεκτίμηση. Αναγνωρίζει τις διαφορετικές ανάγκες των παιδιών δίνοντάς τους ευκαιρίες να αναπτυχθούν με το δικό τους ρυθμό (Beckeretal, 1979). Είναι βέβαιο ότι η ενασχόληση του μαθητή με τη λύση

μαθηματικών προβλημάτων τον οπλίζει με την ικανότητα να αντιμετωπίσει γενικότερα προβλήματα της ζωής.

Τη δεκαετία του 1980 αναπτύχθηκε μια κίνηση στη μαθηματική εκπαίδευση, η οποία ξεκίνησε από τις ΗΠΑ (NCTM) με σύνθημα τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ως το επίκεντρο της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στον όρο «επίλυση προβλήματος» δόθηκαν 3 διαφορετικές ερμηνείες: α) σκοπός, β) διαδικασία, γ) βασική δεξιότητα. Όσον αφορά στην πρώτη ερμηνεία (το σκοπό), τα μαθηματικά λειτουργούν ως το μέσο για την καλλιέργεια και εξάσκηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Δηλαδή, το συγκεκριμένο μάθημα είναι ωφέλιμο και χρήσιμο, γιατί μας βοηθάει στην επίλυση πολλών και διαφόρων ειδών προβλημάτων. Όσον αφορά τη δεύτερη ερμηνεία (τη διαδικασία) του όρου δίνεται περισσότερο έμφαση στις μεθόδους, τις διαδικασίες, τις στρατηγικές, τις ευρετικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα. Πρόκειται για μια δυναμική, συνεχή διαδικασία εφαρμογής προγενέστερων γνώσεων σε καινούριες καταστάσεις. Τέλος, όσον αφορά την τρίτη ερμηνεία (τη βασική δεξιότητα) σημαίνει ότι ο όρος αποτελεί μια βασική δεξιότητα που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές, ώστε να καταφέρουν να είναι ικανοί και αποτελεσματικοί πολίτες (Τούμασης, 1999).

Ο Davis (1992) θεωρεί την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ως έναν από τους κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τονίζει ότι είναι προτιμότερο οι δάσκαλοι να έχουν ως αφετηρία τα προβλήματα και δουλεύοντας πάνω σε αυτά να καταλήγουν στα Μαθηματικά, παρά να ξεκινούν από τις μαθηματικές ιδέες και στη συνέχεια να τις εφαρμόζουν. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα θεωρήσουν τα Μαθηματικά ως το αποτέλεσμα δουλειάς πάνω σε προβλήματα (Καραλή, 2009).

Η επίλυση προβλήματος, με την γενική έννοια του όρου, είχε στα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα και σχολικά εγχειρίδια πολύ περιορισμένο ρόλο και ουσιαστικά χρησιμοποιούνταν τα προβλήματα για να εφαρμόσουν οι μαθητές τα όσα είχαν διδαχτεί ήδη. Αντίθετα, σήμερα αποκτά σημαντικό ρόλο και καθορίζει αποφασιστικά το πνεύμα της διδακτικής διαδικασίας. Η λογική της επίλυσης προβλήματος χρησιμοποιείται πλέον για την εισαγωγή των νέων εννοιών

και για τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων ή καταστάσεων προβληματισμού. Η λογική αυτή αποτελεί ένα νέο στοιχείο που εισάγεται στα μαθηματικά του Δημοτικού. Στο πλαίσιο αυτής της λογική εισάγονται τα πρωτότυπα προβλήματα ή προβλήματα έρευνας που έχουν ως σκοπό την καλλιέργεια και την ανάπτυξη γενικότερων δεξιοτήτων και ικανοτήτων ως προς την μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων και γενικότερα τον τρόπο αντιμετώπισης διάφορων καταστάσεων (Μήτσου, 2010).

Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο οργανώνεται η διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών. Έτσι, η επίλυση προβλήματος αποτελεί κεντρικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως περιγράφεται από το Α.Π.Σ και Δ.Ε.Π.Π.Σ.. Η επίλυση προβλήματος είναι ένας από τους επτά άξονες περιεχομένου πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. Από αυτούς τους άξονες, η «Επίλυση προβλήματος», οι «Αριθμοί και πράξεις», οι «Μετρήσεις» και η «Γεωμετρία» εισάγονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, η «Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων» εισάγεται στην Τετάρτη τάξη, ενώ οι «Λόγοι και αναλογίες» και οι «Εξισώσεις» εισάγονται στην Έκτη τάξη (Τύπας, 2005).

Η διδακτική μέθοδος που προβάλλεται διεθνώς, αλλά και τονίζεται με έμφαση στη σύγχρονη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, ξεκινά με μια κατάσταση προβληματισμού, στην οποία εμπλέκονται οι μαθηματικές έννοιες που πρέπει να διδαχτούν. Η επίλυση προβλήματος εισάγεται από την Πρώτη τάξη του Δημοτικού. Όμως τα πρώτα χρόνια η θεματολογία των προβλημάτων προκύπτει από τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών, ενώ σταδιακά τα προβλήματα γίνονται πιο σύνθετα και προέρχονται τόσο από την καθημερινή πραγματικότητα όσο και από καθαρά μαθηματικές περιοχές. Η κατανόηση ενός προβλήματος και η αναζήτηση της λύσης του γίνεται κατ' αρχήν σε διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια επιχειρείται μια αποδεικτική διαδικασία που στηρίζεται σε μια σειρά λογικών ισχυρισμών. Πέρα από το περιεχόμενο του προβλήματος, σημασία έχει και ο τρόπος παρουσίασης των δεδομένων. Ανάλογα με την ηλικία τους, οι μαθητές καλούνται να συλλέγουν και να επεξεργάζονται δεδομένα που δίνονται όχι μόνο μέσα από ένα

κείμενο αλλά και μέσα από μια εικόνα, ένα πίνακα ή μια γραφική παράσταση. Καλούνται επίσης να σκεφτούν διάφορες στρατηγικές για τη λύση ενός προβλήματος. Ενθαρρύνονται οι νοεροί και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί - που επίσης γίνονται νοερά – σαν πρόβλεψη, αλλά και σαν έλεγχο του αποτελέσματος (Τυπάζ, Ντάφου, 2005).

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), ο όρος επίλυση μαθηματικού προβλήματος έχει χρησιμοποιηθεί με διάφορες σημασίες, από την απλή εκτέλεση ασκήσεων μνήμης και φτάνουν μέχρι τη δημιουργία μαθηματικών από τον επαγγελματία επιστήμονα.

Σύμφωνα με τον Polya (1971), επίλυση μαθηματικού προβλήματος θεωρείται μια δεξιότητα που μπορεί να διδαχθεί με τη μίμηση και την άσκηση, προτείνοντας μια σειρά από ερωτήσεις με τις οποίες ο διδάσκων οδηγεί το μαθητή στην επίλυση. Το βιβλίο του Polya (1971) «Πώς να το λύσω» (How to solve it, σελ.13-15) είναι ένα χαρακτηριστικό κείμενο που αφορά στην επίλυση προβλήματος, στο οποίο παρουσιάζεται ότι οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος που χρησιμοποιούνται μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τέσσερις βασικές:

1.Κατανόηση του προβλήματος: Στο στάδιο της κατανόησης, η κατάσταση περιγράφεται λεκτικά, ώστε να γίνει μια εσωτερική αναπαράστασή της. Ο λύτης πρέπει να διαβάσει το κείμενο και να «αποσπάσει» πληροφορίες με γραμματική και σημασιολογική ανάλυση. Ακόμη, από τις πληροφορίες αυτές, θα πρέπει να δημιουργήσει στο μυαλό του μια εσωτερική αναπαράσταση του συγκεκριμένου προβλήματος. Έτσι, εξετάζει με προσοχή και αναλύει τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, ώστε να κατανοήσει τις σχέσεις και διασυνδέσεις ανάμεσα στα δεδομένα, με τελικό σκοπό να αντιληφθεί τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα. Το στάδιο αυτό είναι σημαντικό, καθώς δεν μπορεί κάποιος να απαντήσει σε μια ερώτηση που δεν έχει κατανοήσει.

Πολύ σημαντικός για την κατανόηση του προβλήματος είναι ο ρόλος του δασκάλου. Σε αυτό το στάδιο μια συνήθης στρατηγική είναι να ζητείται από τους μαθητές να επαναλάβουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια, να το αναδιατυπώσουν με πιο απλό και κατανοητό τρόπο.

[Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διαχωρίσουμε δύο έννοιες την *εξωτερική* και *εσωτερική* αναπαράσταση.

- Οι *εσωτερικές* αναπαραστάσεις αποτελούν τις νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (Dufour – Janvier et al. 1987), αντιπροσωπεύουν δηλαδή, κάποιες πτυχές του εξωτερικού κόσμου. Ουσιαστικά, δεν μπορούν εύκολα να γίνουν αντιληπτές και να παρατηρηθούν απευθείας. Όμως, μπορούν να γίνουν αντιληπτές με τη συστηματική παρατήρηση του μαθητή πάνω σε ένα συγκεκριμένο έργο που καλείται να κάνει. Αφορούν ουσιαστικά, τον προσωπικό τρόπο με τον οποίο το άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του για να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα και έχουν μεγάλη σημασία για την εκμάθηση των μαθηματικών. Δηλαδή, επιτρέπουν στο άτομο να συνδέει τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός μαθηματικού προβλήματος, να ξεχωρίζει τα κύρια στοιχεία από τα δευτερεύοντα, να συνδέει γνώση από διαφορετικά θέματα και χρόνους, να βρίσκει δυνατότητες και εναλλακτικούς τρόπους, να αναλύει και να συνδέει βήματα της λογικής.
- Οι *εξωτερικές* αναπαραστάσεις λειτουργούν ως ερέθισμα στις αισθήσεις μας (Janvier) και μπορεί να συνίστανται από διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, λέξεις μιας γλώσσας, τυπικά σύμβολα ή και άλλες παραστάσεις της γλώσσας των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Lesh, Behr & Post (1987) οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι εξωτερικές δηλώσεις ή καλύτερα «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών» δηλαδή, οι εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες οι μαθητές (Λουμάκου, 2010).]

2. Επινόηση ενός σχεδίου για τη λύση του: Στο σημείο αυτό, κατασκευάζεται από τους μαθητές ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο με βάση τα στοιχεία και τις σχέσεις που περιγράφονται από το κείμενο του προβλήματος. Ο λύτης αναγνωρίζει τις χρήσιμες στρατηγικές και επιλέγει την κατάλληλη στρατηγική μέσα από πολλές διαθέσιμες. Το στάδιο αυτό μπορεί να αποτελέσει μια χρονοβόρα διαδικασία καθώς

μέσα από προσπάθειες τόσο επιτυχημένες όσο και αποτυχημένες ο λύτης θα καταλήξει σε μια αποτελεσματική μέθοδο επίλυσης.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολύνει τη σύλληψη της επιτυχούς μεθόδου επίλυσης με ερωτήσεις που έχουν σκοπό την ανάκληση προϋπάρχουσας γνώσης και εμπειρίας από τους μαθητές.

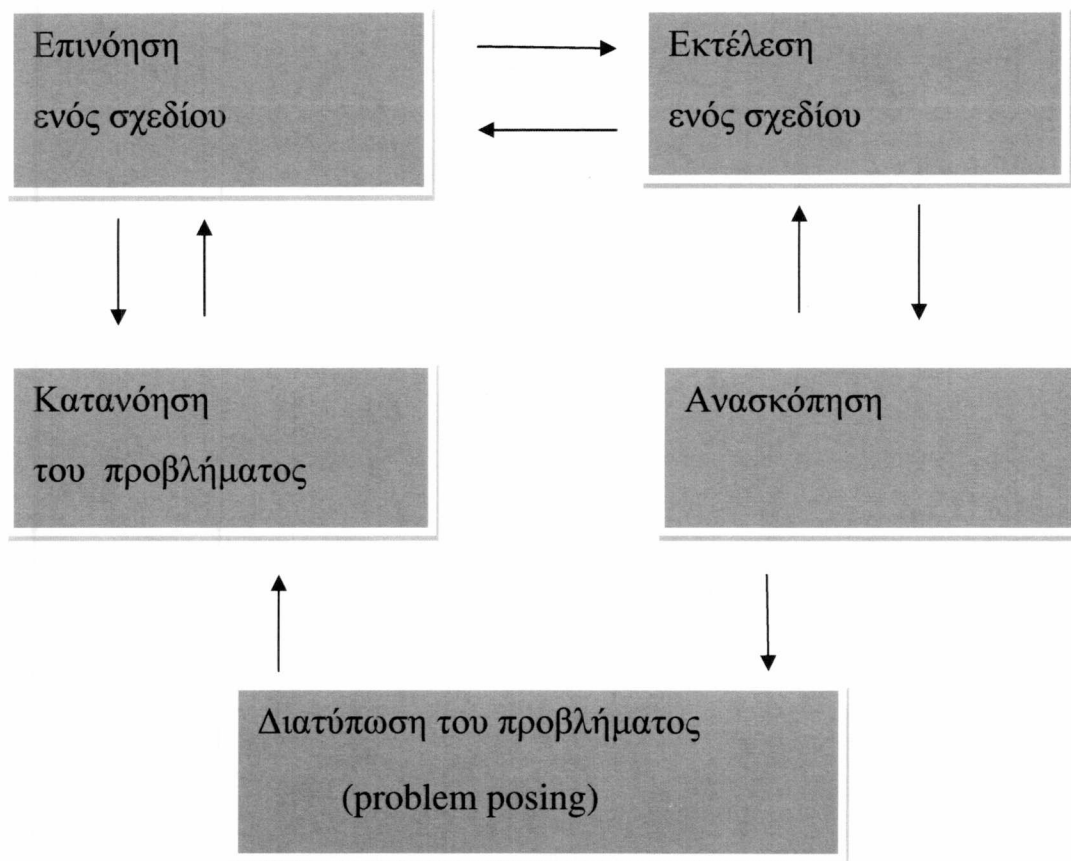
3. Εκτέλεση του σχεδίου: Στο τρίτο στάδιο, εκτελούνται οι πράξεις που περιλαμβάνονται στο μαθηματικό μοντέλο του προηγούμενου σταδίου, ώστε να καταλήξουμε σε κάποιο μαθηματικό αποτέλεσμα. Ο λύτης εφαρμόζει την κατάλληλη ή τις κατάλληλες στρατηγικές που έχει επιλέξει. Σε αυτό το σημείο αυτό που πρέπει να προσέχουν οι μαθητές είναι να ελέγχουν κάθε βήμα κατά τη διαδικασία εφαρμογής του σχεδίου τους προκειμένου να μην οδηγηθούν σε λάθος αποτέλεσμα και να μην ξεχάσουν κάποιο από τα βήματα του σχεδίου λύσης.

4. Ανασκόπηση: Το τέταρτο και τελευταίο στάδιο που διακρίνει ο Polya περιλαμβάνει την ανασκόπηση της λύσης, τον έλεγχο της απάντησης και την προέκταση του προβλήματος. Στο σημείο αυτό, ο λύτης εξετάζει τη λύση που βρήκε αν είναι λογική ή όχι, σκέφτεται πως αλλιώς θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα ή και που αλλού μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο για τη λύση άλλων προβλημάτων.

Παρ' όλα αυτά η έρευνα έδειξε ότι η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος μέσω των στρατηγικών του Polya έχει αμφισβητούμενα αποτελέσματα, διότι μπορεί οι στρατηγικές αυτές να χρησιμοποιηθούν ως οδηγοί, όμως δεν μπορούν να αντικαταστήσουν τη γνώση του περιεχομένου. Η επιτυχία τους εξαρτάται από τις ειδικές γνώσεις και ικανότητες του λύτη. Επεκτείνοντας τις ιδέες του Polya, ο Schoenfeld (1987, 1992) υπογραμμίζει τη σημασία της μεταγνώσης και αναφέρεται όχι μόνο σε ένα γενικό προγραμματισμό της διαδικασίας επίλυσης αλλά και στην επιλογή υπο-στόχων για τον έλεγχο των επιμέρους βημάτων και την ενδεχόμενη αναθεώρηση όλου του σχεδίου (Κολέζα, 2009).

Ένας άλλος διαχωρισμός των σταδίων από τους Mayer & Hegarty (1996), τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος είναι αρχικά η **μετάφραση**, δηλαδή η μετατροπή των στοιχείων που υπάρχουν στο πρόβλημα σε μια νοητική-εσωτερική αναπαράσταση. Σε δεύτερη φάση, υπάρχει η **ολοκλήρωση**, δηλαδή ο συνδυασμός όλων των επιμέρους αναπαραστάσεων σε μια περιεκτική, συνολική νοητική εικόνα του προβλήματος. Το τρίτο στάδιο αφορά στο **σχεδιασμό**, δηλαδή την επινόηση και τον έλεγχο ενός σχεδίου επίλυσης, μιας στρατηγικής προσέγγισης των ζητούμενων. Τέλος, έχουμε την **εκτέλεση**, δηλαδή τη μετατροπή του σχεδίου σε συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις και την εύρεση αποτελέσματος. Έτσι, σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2000,σελ. 36-38) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός προβλήματος όπου υπάρχουν τα στάδια που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Το πρόβλημα είναι το εξής: «Ο Νίκος έχει 1 εκατοστάριο. Ο Φάνης έχει 30 δραχμές. Πόσα χρήματα έχουν και οι δυο μαζί; ». Όσον αφορά το πρώτο στάδιο, η μετάφραση είναι ότι ο Νίκος έχει 1 εκατοστάριο, δηλαδή 100 δραχμές, ο Φάνης 30 δραχμές. Σχετικά με την ολοκλήρωση, ο μαθητής θα πρέπει να καταλάβει ότι στην ερώτηση η λέξη «μαζί» σημαίνει τα χρήματα του Νίκου+ τα χρήματα του Φάνη. Όσον αφορά στο σχεδιασμό, ο μαθητής θα πρέπει να κατανοήσει ότι θα χρησιμοποιήσει την πράξη της πρόσθεσης για να λύσει το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να προσθέσει το 100 και το 30 κάθετα. Τέλος, σχετικά με την εκτέλεση, ο μαθητής θα εκτελέσει την πράξη.

Επιπλέον, το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει τη δυναμική ή «κυκλική» φύση της λύσης προβλήματος σύμφωνα με τον Wilson (1994) :



(Κλαουδάτος, 2011)

Επειδή στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τον τρόπο που διατυπώνεται και παρουσιάζεται ένα πρόβλημα στους μαθητές, ο όρος problem posing (διατύπωση προβλήματος) αφορά στις διάφορες εκδοχές που μπορεί να πάρει η εκφώνηση του προβλήματος, καθώς και τις τροποποιήσεις που μπορούν να γίνουν, ώστε το πρόβλημα να γίνει πιο κατανοητό στους μαθητές.

Ο Hayers (1981, Mayer, 1985) παρουσιάζει ότι η επίλυση προβλήματος είναι η εύρεση του κατάλληλου δρόμου ώστε να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ της προβληματικής κατάστασης και της λύσης. Ο μαθητής για να οδηγηθεί στη λύση θα πρέπει να έχει αποκτήσει και αναπτύξει ένα ρεπερτόριο γνωστικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων και στρατηγικών, ώστε να καταφέρει να ελέγχει την πορεία της επίλυσης. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Mayer (1985), η επίλυση προβλήματος αποτελεί την μετάβαση από μια δεδομένη κατάσταση σε μια άλλη που

αποτελεί το στόχο και τα χαρακτηριστικά αυτής της διαδικασίας είναι η νοητική αναπαράσταση του προβλήματος και η ανακάλυψη των μέσων για την επίλυσή του (Μήτσου, 2010).

Έτσι, λοιπόν για να καταφέρει κάποιος να επιλύσει ένα πρόβλημα θα πρέπει αρχικά να διαβάσει προσεκτικά το πρόβλημα, ώστε να αποκωδικοποιήσει τα δεδομένα που δίνονται από την εκφώνηση του προβλήματος και να τα ξεχωρίσει από τα ζητούμενα. Στη συνέχεια, θα πρέπει να βρει μια σχέση μεταξύ των δεδομένων και των ζητούμενων που δίνονται. Στο σημείο αυτό σημαντικό ρόλο παίζει η ανάκληση προηγούμενων εμπειριών, όπου οι μαθητές πρόκειται να θυμηθούν κάποιο παρόμοιο πρόβλημα που είχαν λύσει. Εάν όμως ο μαθητής δεν καταφέρει να δημιουργήσει αυτή τη σύνδεση, υπάρχει η δυνατότητα να χωρίσει το αρχικό πρόβλημα σε υπο-προβλήματα που θα είναι πιο εύκολο να λυθούν. Στο τέλος, ο μαθητής θα εκτελέσει τις πράξεις που απαιτούνται για να λύσει το πρόβλημα και θα ελέγξει εάν το αποτέλεσμα και η απάντησή του είναι λογική.

3.Γλώσσα και επίλυση προβλημάτων

3.1. Ο ρόλος της γλώσσας στην επίλυση προβλημάτων

Υπάρχει έντονο το φαινόμενο οι μαθητές να διαμαρτύρονται ότι «δεν καταλαβαίνουν τίποτα» από το μαθηματικό πρόβλημα, ώστε να καταφέρουν να το λύσουν. Πόση αλήθεια κρύβει αυτή η φράση; Υπάρχει περίπτωση η αδυναμία κατανόησης των μαθητών να οφείλεται στο μέσο επικοινωνίας, δηλαδή στη γλώσσα με την οποία διατυπώθηκε το πρόβλημα; (Παπαδοπετράκης, 1992) Μια από τις βασικές λειτουργίες της γλώσσας είναι να μεταφέρει νοήματα. Έτσι, μπορεί τα προβλήματα των μαθητών να ξεκινούν από εκεί. Πιο συγκεκριμένα, στα νοήματα που πολλές από τις μαθηματικές λέξεις αναφέρονται είναι σύνθετα και οι λέξεις που χρησιμοποιούμε σε αυτά, εμπεριέχουν συχνά και άλλα νοήματα με τα οποία οι μαθητές μπορεί να μην είναι εξοικειωμένοι (Κεραμάρης, Μπαρμπαγιάννη, 2011).

Σύμφωνα με την Κολέζα (2006), απαραίτητη προϋπόθεση της κατανόησης των πληροφοριών που παρουσιάζονται με μαθηματική μορφή είναι η κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας. Η γλώσσα, στην οποία είναι γραμμένο το πρόβλημα επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τη δυνατότητα κατανόησης και αναπαράστασης της κατάστασης προβληματισμού από τους μαθητές. Για να γίνει αυτό εφικτό, δηλαδή οι μαθητές να αντιληφθούν την προβληματική κατάσταση που πρέπει να επιλύσουν, είναι απαραίτητο ο τρόπος που διατυπώνεται το λεκτικό πρόβλημα να είναι σαφές και ξεκάθαρο. Η κατανόηση στα μαθηματικά πηγάζει από την ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται και να χειρίζεται τα μαθηματικά αντικείμενα ως έννοιες και να ανακαλύπτει τις σχέσεις που τις διέπουν με απώτερο στόχο να οδηγηθεί σε διαδικασίες επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος. Η επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά, όπως αναφέρουν οι Καραντζής και Τσαγγάρης (2003), είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία, η οποία εμπεριέχει όχι μόνο τη γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, των πράξεων και των αλγορίθμων τους, αλλά και της γλώσσας με την οποία εκφράζονται οι ποσοτικές σχέσεις των στοιχείων ενός μαθηματικού προβλήματος (Τσεσμελή, Λιάπη, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 2014).

Η επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία που απαιτεί και εμπερικλείει τη βαθύτερη γνώση και κατανόηση της γλώσσας. Με τον όρο λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα εννοούμε το πρόβλημα που παρουσιάζεται σε

γραφική μορφή και πολλές φορές απαιτείται η βαθύτερη γνώση του πλαισίου που μπορεί να σχετίζεται με την καθημερινή γνώση πέρα από την μαθητική, ώστε η λύση να είναι λογικά αποδεκτή και έγκυρη. Η έλλειψη οικειότητας των μαθητών με το περιεχόμενο των προβλημάτων καθώς και ο τρόπος παρουσίασης των προβλημάτων επηρεάζει τον τρόπο σκέψης των μαθητών για την επίλυσή του. Οι μαθητές συνήθως μέσα από την ενασχόληση και την εμπειρία τους με παραδοσιακά λεκτικά προβλήματα προσεγγίζουν τα προβλήματα επιπόλαια και μηχανικά. Δεν αντιμετωπίζουν το πρόβλημα σαν ολότητα, αλλά επικεντρώνονται σε μεμονωμένα τμήματά του. Πολλές φορές δυσκολεύονται στην αναδιοργάνωση των πληροφοριών και στον διαχωρισμό των σχετικών ή άσχετων με το πρόβλημα στοιχείων που τους παρέχει η εκφώνηση (Μαυρίκιος, 2006). Δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην αριθμητική πράξη που πρόκειται να χρησιμοποιήσουν παρά στο περιεχόμενο του προβλήματος και πολλές φορές δίνουν απαντήσεις χωρίς νόημα ακόμα και σε προβλήματα που είναι άλυτα λόγω μη αρκετών πληροφοριών. Ένα κλασσικό παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα με τον καπετάνιο: Υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια σε ένα σκάφος. Πόσων ετών είναι ο καπετάνιος; (Reusser, 1988) Τρεις στους τέσσερις μαθητές απάντησαν 36 ετών (Κολέζα, 2009, σελ 314).

Για να καταφέρει ένας μαθητής να κατανοήσει και να μεταφράσει όλες τις προτάσεις ενός προβλήματος είναι απαραίτητο να διαθέτει γνώση ως προς τη γλώσσα στην οποία διατυπώνεται το πρόβλημα (γλωσσική γνώση) και τη γνώση σχετικά με τον κόσμο στον οποίο παραπέμπει (πραγματολογική γνώση). Για παράδειγμα, στην πρόταση «Η Μαρία έχει 3 ευρώ περισσότερα από την Ιωάννα» ο μαθητής με βάση τη γλωσσική του γνώση θα πρέπει να ξεχωρίσει τη Μαρία από την Ιωάννα και τη σημασία της λέξης περισσότερα. Ενώ, με βάση την πραγματολογική του γνώση θα πρέπει να σκεφτεί ότι 3 ευρώ αντιστοιχούν σε 300 λεπτά. Γενικά, οι άνθρωποι διαφέρουν στο να μεταφράζουν με τον ίδιο τρόπο-σωστά τα δεδομένα ενός προβλήματος από την εκφώνηση (Μαυρίκιος, 2006).

Σύμφωνα με το Γαγάτση (2006), η αναγνωσιμότητα ενός κειμένου είναι ο βαθμός δυσκολίας που αισθάνεται ένας αναγνώστης για να κατανοήσει το κείμενο, χωρίς να λάβει υπόψη την υλική παρουσίαση του μηνύματος και ο βαθμός δυσκολίας στην ανάγνωση ενός κειμένου επηρεάζεται από το περιεχόμενό του, από τον τρόπο με τον οποίο το κείμενο είναι συνταγμένο και από τις προτιμήσεις του αναγνώστη. Ο

βαθμός δυσκολίας στην ανάγνωση μαθηματικών κειμένων είναι μεγαλύτερος, επειδή το μαθηματικό κείμενο αποτελείται από ένα μείγμα της φυσικής και της μαθηματικο-συμβολικής γλώσσας. Οι δυσκολίες στη μετάφραση του προβλήματος εξαιτίας της γλωσσικής διατύπωσης του μαθηματικού προβλήματος φαίνεται να συνδέονται με αναγνωστικές δυσχέρειες των μαθητών γενικής ή ειδικής φύσης, γεγονός που καθιστά προβληματική την κατανόηση των λέξεων, των μαθηματικών εννοιών αλλά και τη σύνδεση των αντίστοιχων λέξεων με τα μαθηματικά σύμβολα (Τσεσμελή, Λιάπη, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 2014).

Η γλώσσα των μαθηματικών με την ειδική ορολογία και τις μορφές λόγου που χρησιμοποιεί, τους συμβολισμούς και τις αναπαραστάσεις της διαφέρει από την καθημερινή φυσική γλώσσα με αποτέλεσμα να αποτελεί συχνά την αιτία δυσκολιών κατανόησης των μαθηματικών και κατ' επέκταση τη δυσκολία κατανόησης των μαθηματικών προβλημάτων. Σημαντικό ζήτημα αποτελεί το κατά πόσο η φυσική γλώσσα μπορεί να αποδώσει και να εξηγήσει έννοιες που δεν χρησιμοποιούνται σε αυτήν, όπως είναι οι έννοιες της καθαρής μαθηματικής γλώσσας. Έχει επισημανθεί ότι σε επίπεδο μαθηματικής επικοινωνίας η ίδια η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός αποτελείται από μια σύνθεση μεταξύ καθημερινής και τεχνικής μαθηματικής γλώσσας. Γι' αυτό το λόγο είναι πολύ σημαντικό να εστιάζει ο εκπαιδευτικός την προσοχή του στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζει διάφορες έννοιες μέσα στην τάξη, γιατί αυτός ο τρόπος θα καθορίσει τη «γέννηση» της αντίστοιχης γλώσσας στους μαθητές. Επομένως, αν οι μαθητές δεν αποκτήσουν τις κατάλληλες εμπειρίες και βιώματα για να κατανοήσουν αυτού του είδους τη γλώσσα, θα τους είναι πολύ δύσκολο να αντιληφθούν τα νοήματα και τις περιγραφές αυτής της γλώσσας, όταν θα την συναντήσουν στην εκφώνηση ενός προβλήματος (Κεραμάρης, Μπαρμπαγιάννη, 2011, σελ.156-157).

Η εκφώνηση ενός προβλήματος προσεγγίζεται με ένα ιδιαίτερο τρόπο, διαφορετικό από αυτόν που προσεγγίζονται άλλα κείμενα καθημερινής γλώσσας. Η Τσακίρη (2007) αναφέρει ότι η εκφώνηση ενός μαθηματικού προβλήματος επιβάλλει τη συνύπαρξη δύο διαφορετικών περιγραφών, οι οποίες παραθέτουν διαφορετικούς τύπους πληροφοριών. Η μια περιγραφή αναφέρεται σε ένα σενάριο της πραγματικής ζωής και η άλλη περιλαμβάνει ζεύγη εκφράσεων-ρημάτων (χάνω-κερδίζω), εκφράσεων σύγκρισης (περισσότερα-λιγότερα), εκφράσεων που δείχνουν χρονική

μεταβολή (εχθές-σήμερα). Επομένως, η ορθή κατανόηση των πληροφοριών προκύπτει από τη διασύνδεση των δύο σημασιολογικών διαστάσεων, δηλαδή των εκφράσεων που δίνουν τα αριθμητικά δεδομένα και των εκφράσεων που αναφέρονται στις σχέσεις και την οργάνωσή τους (Τσακίρη, 2007).

Σύμφωνα με τις Τσεσμελή, Λιάπη, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου (2014), η κατανόηση ενός μαθηματικού προβλήματος γίνεται περισσότερο δυσχερής όταν οι μαθητές συναντούν μαθηματικούς όρους που δε συνδέονται με τον καθημερινό τους λόγο. Έτσι, σημαντικό ρόλο για την κατανόηση ενός κειμένου διαδραματίζει η οικειότητα του αναγνώστη με τις λέξεις. Δηλαδή, το άτομο μπορεί να ανακαλέσει εύκολα από τη μνήμη του το περιεχόμενο των λέξεων που χρησιμοποιεί στην καθημερινή του ζωή. Στο σημείο αυτό μια δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας ή στην κατανόηση ενός προβλήματος οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν διαχωρίσει κάποιες λέξεις και έννοιες που χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο στην καθημερινή ζωή και σημαίνουν κάτι διαφορετικό, όπως για παράδειγμα η λέξη πίνακας, πρώτος, κ.α. Ακόμη, στη μαθηματική γλώσσα σχεδόν κάθε λέξη και σύμβολο είναι σημαντικά για την κατανόηση του προβλήματος και δεν παρουσιάζουν πλεονασμό σε σύγκριση με άλλα κείμενα της καθομιλουμένης.

Οι μαθητές σχετικά με το μαθηματικό λεξιλόγιο καλούνται να μάθουν να διαχωρίζουν τις λέξεις που έχουν ειδικό μαθηματικό νόημα και σπάνια χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή. Τέτοιες λέξεις μπορεί να είναι για παράδειγμα οι εξής: προσθετέοι, πηλίκο, πολλαπλασιαστέος, κ.α. Επιπλέον, θα πρέπει να γνωρίζουν τη σημασία των λέξεων που χρησιμοποιούνται και στα μαθηματικά και στην καθημερινή τους ζωή αλλά με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, η λέξη ζημιά, πίνακας, κ.α. Τέλος, όσον αφορά το μαθηματικό λεξιλόγιο υπάρχουν λέξεις που χρησιμοποιούνται και στα δύο περιβάλλοντα με τον ίδιο τρόπο, έχουν δηλαδή την ίδια σημασία. Τέτοιες λέξεις μπορεί να είναι για παράδειγμα: λιγότερο περισσότερο, κ.α. (Αγαλιώτης, 2000, σελ. 79-80).

Επιπλέον, ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο που μπορεί να επηρεάσει την κατανόηση του προβλήματος από τους μαθητές και να τους οδηγήσει σε γνωστική σύγχυση είναι η αμφισημία της γλωσσικής έκφρασης. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι

ο τρόπος που έχει διατυπωθεί το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα επιτρέπει να δέχεται διαφορετικές ερμηνείες από τον αναγνώστη. Σύμφωνα με μελέτες (Αγαλιώτης, 2000, Καραντζής και Τσαγγάρης, 2003) οι δυσκολίες που αφορούν στη μετάφραση των στοιχείων του προβλήματος σε νοερή αναπαράσταση έχουν συνήθως σχέση με την ασαφή γλωσσική διατύπωση του προβλήματος που μπορεί να οδηγήσει σε πολυσήμαντες ερμηνείες από τους μαθητές. Μάλιστα επειδή στο γραπτό λόγο δεν είναι εύκολο να δοθούν επεξηγήσεις και διευκρινήσεις σε σύγκριση με τον προφορικό, ανακύπτει η ανάγκη τα μαθηματικά προβλήματα να διατυπώνονται με ακρίβεια και σαφήνεια, ώστε η κατανόηση των προβλημάτων και η επιλογή των κατάλληλων μεθόδων για τη λύση από τους μαθητές να είναι ευκολότερη.

3.2. Έρευνες για το ρόλο της γλώσσας στο μαθηματικό πρόβλημα

Αποτελέσματα ερευνών των De Corte και Verschaffel (1987) έδειξαν ότι τα λεκτικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, αλλά διαφέρουν ως προς τη σημασιολογική τους δομή είναι δυνατόν να διαφέρουν πολύ στο βαθμό δυσκολίας τους. Έτσι, η σημασιολογική δομή ενός προβλήματος αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τη δυσκολία που θα έχει ο μαθητής να το επιλύσει. Γι' αυτό τα λάθη που κάνουν συνήθως οι μαθητές σε λεκτικά προβλήματα δεν οφείλονται μόνο στην ανεύθυνη συμπεριφορά τους, αλλά αποτελούν συνέπεια λανθασμένων αντιλήψεων και διαδικασιών ή έλλειψη γνώσεων, ώστε να είναι ικανοί να τα επιλύσουν. Μια άλλη σχετική έρευνα των De Corte, Verschaffel και De Win (1985) έδειξε ότι η επαναδιατύπωση των λεκτικών προβλημάτων, όπου οι υπονοούμενες σημασιολογικές σχέσεις γίνονται πιο σαφείς, διευκολύνει την κατανόηση και την επίλυση των προβλημάτων από τα παιδιά (Βοσνιάδου, 1995).

Εξίσου αξιοσημείωτη είναι μια έρευνα των Abedi και Lord (2001), στην οποία υποστηρίζεται ότι η απλοποίηση της γλώσσας των μαθηματικών προβλημάτων συμβάλλει στο να βελτιώσουν οι μαθητές τις επιδόσεις τους σε αυτά. Κάτι τέτοιο θεωρείται φυσιολογικό, διότι με τις τροποποιήσεις αυτές η φύση των οντοτήτων στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα, αλλά και οι σχέσεις που διαμορφώνονται μέσα στο πρόβλημα γίνονται περισσότερο κατανοητές από τα παιδιά. Σύμφωνα με την ίδια έρευνα, αυτοί που ως επί το πλείστον ωφελήθηκαν από την τροποποίηση της

παρουσίασης των προβλημάτων ήταν οι λεγόμενοι φτωχοί-αρχάριοι αναγνώστες. Οι γλωσσικές αυτές απλοποιήσεις της λεκτικής δομής των μαθηματικών προβλημάτων είχαν ελάχιστη επίδραση στους πιο ικανούς χρήστες της γλώσσας μαθητές, καθώς οι τελευταίοι διέθεταν εκ των προτέρων ισχυρή λεκτική ικανότητα, η οποία τους εξασφάλιζε την άνετη κατανόηση της αρχικής δομής των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων και εν τέλει την δίχως ιδιαίτερα προβλήματα επίλυσή τους (Τρομπούκης, 2006).

Επιπλέον, τη στενή σχέση μεταξύ αναγνωστικής κατανόησης και ικανότητας επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σε ελληνόφωνους μαθητές δημοτικού σχολείου, έχουν επισημάνει ερευνητικά οι Μαριδάκη-Κασσωτάκη και Χιονίδου-Μοσκοφογλου (2004), οι οποίες βρήκαν ότι οι μαθητές 7-8 χρονών διευκολύνθηκαν σημαντικά στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης μετά τη χρήση λεκτικής αναδιατύπωσης των προβλημάτων τους και ιδιαίτερα με την εισαγωγή χρονικών επεξηγηματικών φράσεων από την οικεία καθημερινότητα των παιδιών (π.χ. πριν τα γενέθλια).

Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της έρευνας των Τσεσμελή, Λιάπη, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου (2014) για την επίδραση της λεκτικής αναδιατύπωσης και εικονιστικής αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων του δημοτικού, έδειξαν ότι οι μαθητές βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους μετά τη λεκτική αναδιατύπωση των κειμένων, ενώ η επίδοσή τους δε διαφοροποιήθηκε σημαντικά με τη χρήση της εικονιστικής αναπαράστασης, παρά το γεγονός ότι η ποιοτική ανάλυση των λαθών έδειξε ότι υπήρχαν ποιοτικές διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, η βελτίωση της επίδοσης μετά από τη λεκτική αναδιατύπωση και εικονιστική αναπαράσταση των προβλημάτων ήταν σημαντικότερη για την ομάδα των μαθητών με υψηλότερες μαθηματικές ικανότητες.

4. Διατύπωση μαθηματικών προβλημάτων και πολυτροπικότητα

4.1. Πολυτροπικότητα

Με τον όρο *πολυτροπικότητα* νοείται η μορφή παρουσίασης ενός πολιτισμικού προϊόντος, στο οποίο περιέχονται και συνδυάζονται περισσότεροι από ένα σημειωτικοί τρόποι (modes) (ο γραπτός λόγος, ο προφορικός λόγος, η εικόνα, η μουσική, ο ήχος, ο ρυθμός, οι χειρονομίες) και αντιδιαστέλλεται από τον όρο *μονοτροπικότητα* με τον οποίο νοείται η μορφή παρουσίασης ενός πολιτισμικού προϊόντος, στο οποίο περιέχεται μόνο ένας σημειωτικός τρόπος. Είναι προφανές πως ένα πολυτροπικό κείμενο συντίθεται από επί μέρους μονοτροπικά «σημεία» και τις μεταξύ τους διασυνδέσεις. Η σχέση τους δηλαδή είναι διαλεκτική και η επίδρασή τους αμφίδρομη κατά τη διαδικασία παραγωγής νοήματος. Με την έννοια αυτή ο διαχωρισμός τους ουσιαστικά είναι ψευδής, δεδομένου ότι η επικοινωνία δεν συντελείται ποτέ μονοτροπικά (π.χ. μόνο με τη γλώσσα) αλλά με πολλούς σημειωτικούς τρόπους και με ειδικό και σημαντικό ρόλο για τον καθένα. Η διάκριση δηλαδή ανάμεσα στην μονοτροπικότητα και πολυτροπικότητα γίνεται «για να εξυπηρετήσει την ανάλυση των σημειωτικών πολιτισμικών προϊόντων» και άρα μπορούμε να μιλάμε για βαθμό πολυτροπικότητας στα πολιτισμικά προϊόντα (Χατζησαβίδης & Γαζάνη, 2005).

Χρήσιμη θεωρία σχετικά με την πολυτροπικότητα έχει παραχθεί από τον Kress (2003). Σύμφωνα με αυτόν, η πολυτροπική σύνθεση δεν είναι απλά μία πρόσθετη τεχνική στην οποία εικόνες, λέξεις, μουσική, χρώμα, κίνηση κτλ καθώς αντιπαράτιθενται αυξάνουν τη δυναμική της κατασκευής νοήματος σε ένα κείμενο. Αντιθέτα, μέσα από μια διαδικασία πλέγματος (Mitchell, 2004) ή ενορχήστρωσης (Kress&vanLeeuwen, 2001) ένα πολυτροπικό κείμενο δημιουργεί ένα διαφορετικό σύστημα νοηματοδότησης που ξεπερνά τη συλλογική συμβολή των επιμέρους συστατικών του στοιχείων. Όπως επισημαίνεται από τους Hull & Nelson, (2005), η πολυτροπικότητα υποστηρίζει όχι απλά έναν νέο τρόπο κατασκευής νοήματος αλλά την κατασκευή ενός διαφορετικού είδους νοήματος.

Σε εκπαιδευτικό επίπεδο, η πολυτροπικότητα ως εννοιολογική περιγραφή της αναπαράστασης και της επικοινωνίας οδηγεί στην μετατόπιση του παιδαγωγικού ενδιαφέροντος από τον γραμματισμό στους πολυγραμματισμούς (Κυπριώτης 2006). Ενώ δηλαδή ο γραμματισμός ενδιαφέρεται να καταστήσει τους μαθητές ικανούς στο να λειτουργούν αποτελεσματικά σε διάφορα περιβάλλοντα και καταστάσεις γλωσσικής επικοινωνίας, χρησιμοποιώντας δηλαδή κείμενα του γραπτού και του προφορικού λόγου, η έννοια των πολυγραμματισμών (New London Group, 1996) κάνει αναφορά στο ευρύτερο σημειωτικό τοπίο της επικοινωνίας και επισημαίνει την αναγκαιότητα να καταστήσουμε τους μαθητές κριτικούς αναγνώστες της ποικιλότητας των μορφών που συνδέονται με τις τεχνολογίες της πληροφορίας και των πολυμέσων, όπως επίσης των μορφών κειμένου που παράγονται μέσα σε μια πολύγλωσση και πολυπολιτισμική κοινωνία (Χατζησαββίδης, 2003, Γρόσδος, 2008).

Ειδικότερα, η ομάδα New London Group (1996) θεωρεί ότι υπάρχουν δύο μεταβλητές, δύο «επιχειρήματα», όπως τα ονομάζει, που κατευθύνουν την παιδαγωγική του γραμματισμού προς τους πολυγραμματισμούς. Το πρώτο επιχείρημα συνδέεται με τις παγκόσμιες αλλαγές που επιφέρουν η μετανάστευση, η πολυπολιτισμικότητα και η παγκόσμια οικονομική ενοποίηση και φέρνουν στο προσκήνιο την πολιτισμική και γλωσσική πολυμορφία. Το δεύτερο επιχείρημα συνδέεται με την επίδραση των νέων τεχνολογιών. «Το νόημα παράγεται με τρόπους που είναι όλο και περισσότερο πολυτροπικοί, στους οποίους οι γραπτοί-γλωσσικοί τρόποι νοήματος είναι αναπόσπαστο μέρος των οπτικών, ακουστικών και χωρικών τύπων νοήματος. Μέσα σε αυτό τον αναδυόμενο κόσμο του νοήματος, απαιτείται ένας νέος, πολυτροπικός γραμματισμός.» (Kalantzis&Cope, 1999, Γρόσδος, 2008).

Στις μέρες μας τα παιδιά έχουν στη διάθεσή τους, εντός και εκτός σχολικού πλαισίου, όγκο πληροφοριών από το συνδυασμό τεχνολογικών και απλών μέσω επικοινωνίας. Παρόλο που το γλωσσικό σημειωτικό σύστημα κυριαρχεί, η χρήση και άλλων σημειωτικών τρόπων και αναπαραστάσεων έχει αυξηθεί καθώς οι εικόνες περιβάλλουν το παιδί με παρόμοιο τρόπο που παλαιότερα το περιέβαλε ο γραπτός λόγος (Γρόσδος, 2008). Όπως αναφέρει η Χοντολίδου (1999), το κίνημα της εικόνας

και της πληροφορικής έδωσε θέση σε μία νέα εποχή πολυγραμματισμών που επιτρέπει τη γρήγορη διαχείριση πολυτροπικών μέσων.

Ο λόγος (discourse) δε διαμορφώνεται μόνο μέσω της γλώσσας αλλά και μέσω άλλων σημειωτικών συστημάτων. Σε μια κοινωνία όλοι οι διαθέσιμοι σημειωτικοί τρόποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση για την άρθρωση λόγων. Ένα κείμενο, επίσης, ως αποτέλεσμα της άρθρωσης ενός ή πολλών λόγων με έναν ή περισσότερους σημειωτικούς τρόπους μπορεί να είναι μονοτροπικό ή πολυτροπικό (Kreese & Van Leeuwen, 2001). Κάθε κείμενο, λοιπόν, σύμφωνα με τη θεωρία της πολυτροπικότητας είναι ένα πολλαπλό σύστημα τρόπων. Σε κάθε κείμενο ένας ή περισσότεροι τρόποι μπορούν να είναι οι κυρίαρχοι αλλά ακόμη και σε κείμενα που κατ' αρχήν φαίνεται να υπερισχύει ένας τρόπος έναντι άλλων, μία προσεκτικότερη μελέτη τους θα μας έδειχνε ότι και άλλοι τρόποι είναι εξίσου σημαντικοί (Χοντολίδου, 1999).

Σύμφωνα με τη Χοντολίδου (1999), το σχολείο οφείλει να ανοίξει τους ορίζοντές του στη συστηματική πλέον διδασκαλία και ανάλυση των πολυτροπικών κειμένων, προετοιμάζοντας έτσι τους/τις μαθητές/τριες του να χειρίζονται ικανοποιητικά την πληθώρα των πολυτροπικών κειμένων που τους περιβάλλει (Τύπος, τηλεόραση, teletext, βιντεοκλίπ, Internet κ.λπ). Στη σύγχρονη διδακτική, η έννοια του κειμένου εμφανίζεται διευρυμένη για να περιλάβει κάθε σημειωτικό τρόπο και σύστημα (εικόνα, ήχος, χρώμα, κίνηση, κλπ.) που συμβάλλει στην κατασκευή του νοήματος και η κατανόηση λεκτικών και εικονικών πληροφοριών θεωρείται ευεργετική για τη διαδικασία μάθησης (Carney & Levin, 2002).

Η έννοια των πολυγραμματισμών που συνδέεται άμεσα με την έννοια της πολυτροπικότητας, αναφέρεται στην ικανότητα αντίληψης της μορφικής ποικιλίας που μπορούν να έχουν οι σημειωτικοί τρόποι και τα κείμενα. Σε αυτή την περίπτωση η κατασκευή του νοήματος δημιουργείται τόσο από τη γλώσσα που χρησιμοποιείται στα διάφορα κείμενα όσο και από τους άλλους τρόπους, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο οπτικός γραμματισμός, για παράδειγμα είναι η ικανότητα που έχει το άτομο να μπορεί να παρατηρεί τα εικονιστικά στοιχεία (εικόνες, σύμβολα,

διαγράμματα, σχήματα, κ.α.), να τα «διαβάξει» και να αποκωδικοποιεί κάθε φορά τα μηνύματα που θέλουν να μεταδώσουν, καθώς και το ίδιο το άτομο να μπορεί να παράγει κείμενα που έχουν οπτικά χαρακτηριστικά (Kress&VanLeeuwen, 2001, Ζίφκου, 2011).

4.2. Πολυτροπικότητα και μαθηματικό πρόβλημα

Η γλώσσα αποτελεί ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας, το οποίο βρίσκεται σε συσχέτιση με τη σκέψη. Ο ρόλος της γλώσσας είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας, αφού οι πρώτες λογικο-μαθηματικές έννοιες αποκτώνται με τη βοήθεια του εργαλείου της γλώσσας και μετά διευρύνονται με τη βοήθεια του εργαλείου της μαθηματικής γλώσσας.

Ωστόσο, ο ίδιος ο Vygotsky (1981) αναγνωρίζει και τη σημασία και άλλων συμβολικών συστημάτων ή εργαλείων, όπως είναι τα σχεδιαγράμματα, οι εικόνες και τα αριθμητικά σύμβολα. Η ιδέα της χρήσης εικονιστικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά δεν είναι καινούρια και αποτελεί μια άλλη παρεμβατική τεχνική εκτός της λεκτικής αναδιατύπωσης. Οι οπτικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, σχέδια, κ.α.) θεωρούνται απαραίτητα εργαλεία στο έργο των μαθηματικών και πολλοί επιστήμονες (Ηλία, Χρυσάνθου, Φιλίππου, 2003) υποστήριξαν ότι η χρήση εικονιστικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας τους.

Επιπλέον, ο Polya (1998) εισηγήθηκε τη στρατηγική «κάνε ένα σχέδιο» για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, το οποίο περιλάμβανε την κατανόηση του μαθηματικού προβλήματος, την επινόηση ενός σχεδίου για την επίλυσή του, την υλοποίηση του σχεδίου καθώς και τον τελικό έλεγχο για την ορθότητα της επίλυσης του.

Η γλώσσα και τα εικονιστικά στοιχεία αποτελούν δύο διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης, μετάδοσης και ανταλλαγής πληροφοριών και γνώσεων στα μαθηματικά, που παρουσιάζουν θεμελιώδεις διαφορές ως προς το περιεχόμενό τους, την πληροφοριακή τους δύναμη και τη χρησιμότητά τους (Schnotz, 2002, Ηλία, Χρυσάνθου, Φιλίππου, 2003).

Έτσι, στα μαθηματικά, ενώ παλαιότερα δινόταν περισσότερο έμφαση στον αριθμητισμό ως απλή γνώση της αριθμησης, σήμερα οδηγούμαστε στο μαθηματικό γραμματισμό. Με την έννοια αυτή, μαθηματικά εγγράμματο θεωρείται το άτομο που κατέχει τις ουσιώδεις μαθηματικές ικανότητες και δεξιότητες με τις οποίες μπορεί να επιλύσει άμεσα προβλήματα της καθημερινής ζωής και μπορεί να κατανοεί και να εκτιμά τις συμβολοποιημένες, μαθηματικές πληροφορίες που λαμβάνει από διάφορα επικοινωνιακά μέσα και πολυτροπικά κειμενικά είδη, όπως διαγράμματα, στατιστικές, πίνακες, δημόσια έγγραφα, κ.α. (Γραΐκος, 2008, PISA, 2003)

Η εξέλιξη αυτή των κειμένων είναι και αναμενόμενη, αλλά και απαιτούμενη να συμβεί και στα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία πλέον εμπεριέχουν πολυτροπικά κείμενα. Η διαπίστωση αυτή επιβεβαιώνεται από την Χοντολίδου η οποία αναφέρει: «Η χρήση πολυσύνθετων αναπαραστατικών πηγών (πολυτροπικότητα) δεν είναι ασφαλώς χαρακτηριστικό μόνο των πολυμεσικών λογισμικών αλλά και των παραδοσιακότερων μέσων, όπως τα σχολικά εγχειρίδια» (Κυπριώτης, 2006).

Στα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια παρουσιάζονται όλο και περισσότερα λεκτικά προβλήματα με συνδυασμό και άλλων μέσων, κυρίως εικονιστικών στοιχείων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η ανάγκη οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα ανάγνωσης και κατανόησης των προβλημάτων λαμβάνοντας όλες τις πληροφορίες που τους δίνονται (Τρομπούκης, 2006).

Είναι γενικά αποδεκτό ότι ένας παράγοντας που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στις προσπάθειες επίλυσης ενός προβλήματος είναι ο τρόπος παρουσίασής του. Άρα, η λεκτική περιγραφή του μαθηματικού προβλήματος, σε συνδυασμό με την παρουσία μη γλωσσικών αναπαραστάσεων σε αυτό, μπορεί να συμβάλουν σημαντικά στην προσπάθεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος από το αρχικό κιάλας στάδιο της κατανόησης του προβλήματος. Έτσι, είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες σχετικά με το πρόβλημα με οποιονδήποτε τρόπο κι αν τους δίνεται (γλωσσικό κείμενο, εικόνες, σκίτσα, διαγράμματα, κ.α.).

Πρέπει να αναφερθεί ότι μέχρι στιγμής έχει γίνει αναφορά στην πολυτροπικότητα των σχολικών εγχειριδίων, ενώ στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην πολυτροπικότητα που εμπλέκει τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η κατανόηση του προβλήματος από τους μαθητές μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Αρχικά, ένας από αυτούς είναι η αναδιατύπωση ή παράφραση του προβλήματος από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό ή και από τους μαθητές. Δηλαδή, ο μαθητής πρόκειται να επαναλάβει το μαθηματικό πρόβλημα με δικά του λόγια. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να κατανοήσει καλύτερα το περιεχόμενο του προβλήματος και τη σειρά των ενεργειών που θα ακολουθήσει. Επιπρόσθετα, η χρήση κατάλληλου εποπτικού υλικού αποτελεί ένα τρόπο ώστε να γίνει κατανοητό το πρόβλημα που πρόκειται να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν. Μια άλλη πολύ σημαντική τεχνική είναι η οπτικοποίηση και η δραματοποίηση του προβλήματος. Σχετικά με την οπτικοποίηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν εικόνες, σκίτσα, διαγράμματα, πίνακες, παράσταση με μαθηματικά στοιχεία, τα οποία πρόκειται να βοηθήσουν την ολοκλήρωση της νοητικής εικόνας και την κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα στοιχεία του προβλήματος. Η δραματοποίηση, δηλαδή το παιχνίδι ρόλων μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση αφού στον τρόπο παρουσίασης του προβλήματος υπάρχει κινητική, ακουστική και λεκτική αλληλεπίδραση (Αγαλιώτης, 2000, σελ.363-365).

5.Οι εικόνες στα σχολικά εγχειρίδια

Η επίδραση του πολιτισμού της εικόνας μεταβάλλει τον αριθμό και την ποιότητα των εικονιστικών στοιχείων στα σχολικά εγχειρίδια. Ο εξεικονισμός του σχολικού εγχειριδίου (και της διδασκαλίας των μαθηματικών) αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες αλλαγές στον εκπαιδευτικό χώρο (Πλειός, 2005). Στο σχολικό εγχειρίδιο αυτό που κυριαρχεί ως **λόγος** (discourse) είναι ουσιαστικά το γλωσσικό κείμενο και η εικόνα (κυρίως δυσδιάστατη), εκτός αν ο ίδιος ο εκπαιδευτικός παρουσιάσει κάποιο άλλο εποπτικό υλικό σχετικό με το μάθημα που περιλαμβάνει τρισδιάστατη εικόνα, βίντεο ή ακουστικές πληροφορίες.

Στην περίπτωση των μαθηματικών, οι εικόνες αποτελούν –ανάμεσα σε άλλες εξωτερικές αναπαραστάσεις όπως σχήματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις – τους πιο συνηθισμένους τρόπους έκφρασης των μαθηματικών πληροφοριών. Παρατηρείται μάλιστα έντονη ποσοτική μεταβολή στην παρουσία των εικονιστικών στοιχείων στα σχολικά εγχειρίδια. Για παράδειγμα, ο Πλειός (2005), κατά τη μελέτη των προηγούμενων σχολικών εγχειριδίων, αναφέρει την εμφάνιση πλήθους εικόνων στο βιβλίο των μαθηματικών της Στ' τάξης, για μαθησιακούς κυρίως λόγους σε σύγκριση με τα βιβλία των μαθημάτων που αφορούν ανθρωπιστικές σπουδές στα οποία οι εικόνες εξυπηρετούν αισθητικούς σκοπούς. Εξηγεί επίσης ότι, επειδή το περιεχόμενο των μαθηματικών είναι περισσότερο αφηρημένο, οι εικόνες απέχουν αρκετά από μια απλή αισθητική προσέγγιση. Παρόμοια και η Λουμάκου (2010) αναλύοντας τα βιβλία των μαθηματικών του νέου και του παλιού προγράμματος σπουδών για τις πρώτες πέντε τάξεις του δημοτικού σχολείου περιγράφει τη ραγδαία αύξηση στον αριθμό των εικονιστικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται στα νέα βιβλία, αναδεικνύοντας τον καθολικό ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των γραπτών κειμένων (Δεσλή και Μολασιώτη, 2013).

Τα εικονιστικά στοιχεία στα σχολικά εγχειρίδια συμβάλλουν αφ' ενός στην πρόκληση του ενδιαφέροντος και της προσοχής των μαθητών. Επιπλέον, οι εικόνες βοηθούν τους μαθητές να εμπλουτίσουν τις πληροφορίες τους σχετικά με ένα θέμα

και πολλές φορές λειτουργούν ως μνημονικές τεχνικές για να θυμούνται πιο εύκολα κάποια πράγματα οι μαθητές. Αφετέρου όμως, και ιδιαίτερα στην περίπτωση των μαθηματικών, τα εικονιστικά στοιχεία μπορεί να έχουν οργανική λειτουργία. Δηλαδή, να υποστηρίζουν την κατανόηση του κειμένου με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα επαναλαμβάνοντας και οπτικά τη γλωσσική πληροφορία ή επεκτείνοντάς την όταν δίνεται πρόσθετη πληροφορία ή διασαφηνίζοντας ή οργανώνοντας καλύτερα κάποια σημεία του γλωσσικού κειμένου.

Τα εικονιστικά στοιχεία είναι από τα πιο συνηθισμένα είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στα πλαίσια της χρήσης αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, μια σημαντική διάκριση που θα πρέπει να γίνει είναι αυτή μεταξύ των όρων:

1. **κύριες** και 2. **βοηθητικές** αναπαραστάσεις.

1. Οι **κύριες** αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος, εφόσον μέσα από αυτές εκφράζεται οποιαδήποτε πληροφορία σε σχέση με το πρόβλημα. Είναι αυτόνομες και ανεξάρτητες από το αντικείμενο που αναπαριστούν και το άτομο μπορεί να τις τροποποιήσει και να τις επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς. Η λεκτική περιγραφή του προβλήματος θεωρείται κύρια αναπαράσταση, όπως και μια εικόνα που περιλαμβάνει πληροφορίες απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος.

2. Οι **βοηθητικές** αναπαραστάσεις δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, αλλά μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά τη διαδικασία επίλυσης. Στις βοηθητικές αναπαραστάσεις για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος εντάσσονται οι εικόνες, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες, τα δενδροδιαγράμματα, τα διαγράμματα Vergnaud και Marshall, η αριθμητική γραμμή κ.α (Γαγάτσης, 2004, Λουμάκου, 2010).

Έτσι, αφού τα εικονιστικά στοιχεία αποτελούν ένα είδος εξωτερικής αναπαράστασης στα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να χωριστούν σε κύριες και βοηθητικές, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω και η χρήση τους μπορεί να συμβάλλει στα διάφορα στάδια και φάσεις της διαδικασίας επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος.

Οι εικόνες που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να είναι φωτογραφίες, σκίτσα-σχέδια και αναπαραστάσεις. Οι **φωτογραφίες** αποτελούν αποτυπώσεις του φυσικού και δομημένου περιβάλλοντος, όπως είναι οι ανθρώπινες δραστηριότητες ή οι δραστηριότητες του φυτικού ή ζωικού κόσμου, αποτυπώσεις αντικειμένων και πολυτροπικού υλικού (αφίσες, οδοδείκτες, κόμικς, ταμπέλες, κ.α.). Οι φωτογραφίες αυτές είτε δημιουργήθηκαν για να ενταχθούν στα σχολικά εγχειρίδια είτε αποκόπηκαν από το πλαίσιο που δημιουργήθηκαν με σκοπό να χρησιμοποιηθούν στα βιβλία. Παρ' όλα αυτά, αποτελούν το είδος του εικονογραφικού υλικού που απαιτεί τη μεγαλύτερη συναισθηματική εμπλοκή του θεατή και αντικαθιστούν την πραγματικότητα, όμως επιδέχονται πολλές και διαφορετικές ερμηνείες. Τα **σκίτσα** αποτελούν αναπαραστάσεις, που τους έχουν αφαιρεθεί κάποια στοιχεία, όπως χρώματα, μοτίβα, κ.α. με σκοπό να δοθεί έμφαση στα στοιχεία που πρόκειται να διδαχθούν. Τέλος, οι **αναπαραστάσεις**(διαγράμματα, πίνακες, ιστογράμματα, γραφικές παραστάσεις, σχήματα, λεκτικές και αλγεβρικές εκφράσεις) παρέχουν σχηματοποιημένες πληροφορίες ή γενικεύουν τις προσφερόμενες γνώσεις και συμβάλλουν στην ανάπτυξη μνημονικών στρατηγικών ή σε διαδικασίες που απαιτούν επιλογές(σύγκριση, ταξινόμηση) (Γρόσδος, 2008).

Οι σημαντικότερες λειτουργίες που επιτελούν τα εικονιστικά στοιχεία στα σχολικά εγχειρίδια, οι οποίες αποτελούν, ταυτόχρονα, και αξιολογικούς δείκτες είναι (Ματσαγγούρας 2006: 85, Καψάλης και Χαραλάμπους 1995: 168, Κουλαϊδής, κ.ά. 2001: 134-137):

- (α) Διακοσμητική λειτουργία: Η αισθητική διάσταση και η ελκυστικότητα του βιβλίου.
- (β) Αφηγηματική λειτουργία: Η απεικόνιση αφηγείται παραστατικά το περιεχόμενο του κειμένου.
- (γ) Απεικονιστική λειτουργία: Η απεικόνιση συγκεκριμενοποιεί το περιεχόμενο του κειμένου.
- (δ) Ταξινομική λειτουργία: Η απεικόνιση προβαίνει σε ταξινόμηση των δεδομένων του κειμένου, π.χ. οι ταξινομικοί πίνακες.
- (ε) Αναλυτική λειτουργία: Ρεαλιστικές ή συμβατικές απεικονίσεις παριστάνουν με ευδιάκριτο τρόπο τα επιμέρους στοιχεία ενός συνόλου.

(στ) Επεξηγηματική λειτουργία: Η απεικόνιση επεξηγεί σημεία του κειμένου.

(ζ) Η μνημονική λειτουργία: Η απεικόνιση μέσα από σχηματοποιήσεις οργανώνει και απλοποιεί τα δεδομένα του κειμένου για να διευκολύνει την κατανόηση του, π.χ. οι εννοιολογικοί χάρτες.

(η) Η συμβολική λειτουργία: Η απεικόνιση αναδεικνύει κοινωνικούς ρόλους και σχέσεις.

6.0 ρόλος της εικόνας στην επίλυση προβλήματος

Στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, σύμφωνα με τον Χαραλάμπους (2007) οι εικόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αρχικά στις εκφωνήσεις των προβλημάτων. Στο σημείο αυτό τα δεδομένα ενός προβλήματος δίνονται εικονικά στους μαθητές και οι πληροφορίες που λαμβάνουν οι μαθητές από τις εικόνες μπορούν να μεταφραστούν είτε γλωσσικά είτε συμβολικά, ώστε οι μαθητές να προχωρήσουν στη επιλογή του κατάλληλου τρόπου για να λύσουν το πρόβλημα. Επιπλέον, οι εικόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία συλλογισμού του μαθητή, όπου στο σημείο αυτό είτε χρησιμοποιείται μια εξωτερική εικόνα είτε οπτικοποιούνται χωρίς τη χρήση εικόνας τα βήματά της. Τέλος, οι εικόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην παρουσίαση της λύσης και των αποτελεσμάτων. Γενικά, τα εικονιστικά στοιχεία μπορούν να υπάρξουν σε όλα τα στάδια κατά τη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος.

Με βάση την ταξινόμηση των Carney και Levin (2002) οι οποίοι προτείνουν πέντε λειτουργίες της εικόνας στην επεξεργασία ενός κειμένου: 1. Διακοσμητική, 2. Αναπαραστατική, 3. Οργανωτική, 4. Μεταφραστική, 5. Μετασχηματιστική, οι Γαγάτσης και Θεοδούλου (2003) προτείνουν μια ταξινόμηση για τη λειτουργία των εικόνων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Χωρίζουν τις εικόνες που χρησιμοποιούνται σε μαθηματικά προβλήματα σε:

(α) **Διακοσμητικές**, όπου οι εικόνες αποτελούν διακοσμητικά στοιχεία και δε βοηθούν τους μαθητές στη διαδικασία απόκτησης πληροφοριών ή οργάνωσης της λύσης του προβλήματος. Για παράδειγμα, μια εικόνα ενός λεωφορείου σε ένα πρόβλημα που αφορά στον αριθμό των επιβατών που ανέβηκαν ή κατέβηκαν από το λεωφορείο σε διάφορες στάσεις έχει διακοσμητική λειτουργία, καθώς δε σχετίζεται με την επίλυση του προβλήματος.

(β) **Βοηθητικές-αναπαραστατικές**, όπου οι εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή κάποιο μέρος του προβλήματος με σκοπό να βοηθήσουν τον μαθητή να αντιληφθεί τη δομή του προβλήματος. Αυτές τις εικόνες όμως ο μαθητής μπορεί να τις αγνοήσει και να λύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα και χωρίς αυτές.

(γ) **Βοηθητικές-οργανωτικές**, όπου οι εικόνες βοηθούν και καθοδηγούν τους μαθητές στη διαδικασία λύσης του προβλήματος, γιατί πολλές φορές τους παραπέμπουν να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι. Η λύση του προβλήματος όμως μπορεί να βρεθεί και χωρίς αυτές, όπως γίνεται και στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών. Ένα παράδειγμα βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας που συνοδεύει το πρόβλημα μπορεί να είναι : «Έχω 12 μήλα και θέλω να τα μοιράσω εξίσου σε 4 πιάτα. Πόσα μήλα θα βάλω σε κάθε πιάτο;». Υπάρχει μια εικόνα με πιάτα που καθοδηγεί τους μαθητές να σχεδιάσουν τα μήλα στα πιάτα αυτά.

(δ) **Πληροφοριακές**, όπου οι εικόνες είναι απαραίτητες για να λυθεί το πρόβλημα, γιατί η λύση του προβλήματος στηρίζεται στις πληροφορίες που λαμβάνουμε από τις εικόνες. Ένα παράδειγμα πληροφοριακής εικόνας μπορεί να είναι η εικόνα της λαϊκής αγοράς με τις αναγραφόμενες τιμές πάνω στα προϊόντα ή η εικόνα της βιτρίνας ενός καταστήματος που παρουσιάζει τις τιμές των προϊόντων και είναι απαραίτητη για να λυθεί ένα πρόβλημα σχετικά με την αγορά προϊόντων από το συγκεκριμένο κατάστημα.

6.1. Έρευνες για το ρόλο της εικόνας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων

Οι έρευνες που έχουν γίνει μέχρι στιγμής σχετικά με το πόσο βοηθητική για τους μαθητές είναι η χρήση των εικόνων παράλληλα με το γλωσσικό κείμενο μας δίνουν αμφιλεγόμενα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, μια έρευνα του Γαγάτση και Δημητρίου που αφορά την επίδραση των «σημειωτικών» αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης σε μαθητές Α', Β' και Γ' δημοτικού μας δείχνει τα

εξής αποτελέσματα: Το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ υψηλό στις πράξεις που υπήρχε μόνο ο αριθμητικός κώδικας στην εκφώνηση και σχετικά υψηλό στα προβλήματα με το λεκτικό κώδικα. Αντίθετα, χαμηλότερο ήταν το ποσοστό επιτυχίας σε έργα όπου υπήρχαν και τους τρεις κώδικες, δηλαδή ο αριθμητικός, ο λεκτικός και ο εικονιστικός κώδικας. Αυτό δείχνει ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων δεν μεταφέρεται αυτόματα από το ένα πλαίσιο κωδίκων στο άλλο και ότι όσο πιο πολλοί κώδικες αναπαραστάσεων εμπλέκονται στην παρουσίαση του προβλήματος, τόσο πιο πολλές δυσκολίες υπάρχουν για τα παιδιά, ιδιαίτερα για αυτά της Α' τάξης. Έτσι λοιπόν, η συγκεκριμένη έρευνα μας δείχνει ότι ο συνδυασμός των κωδίκων και ιδιαίτερα για τα παιδιά μικρής ηλικίας μπορεί να λειτουργήσει ως δυσκολία, αντί να τα διευκολύνει στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί μια άλλη έρευνα των Θεοδούλου και Γαγάτση (2003) σχετικά με το ποιο είναι το είδος της εικόνας, το οποίο βοηθάει τους μαθητές να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα σε μαθητές Β' δημοτικού. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η παρουσία της διακοσμητικής και της πληροφοριακής εικόνας δεν επηρέασαν σημαντικά την επίδοση των μαθητών, σε αντίθεση με τις βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες οι οποίες είχαν στατιστικά σημαντική επίδραση. Οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες άλλοτε είχαν σημαντική επίδραση και άλλοτε όχι, ανάλογα με το είδος της πράξης που περιλαμβανόταν στο πρόβλημα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν επίσης, ότι η χρήση της εικόνας από τα παιδιά γινόταν ασυνείδητα, καθώς πολλά παιδιά, ενώ χρησιμοποιούσαν την εικόνα για να λύσουν τα προβλήματα, αμφισβητούσαν τη χρησιμότητα της εικόνας δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησε στη λύση του προβλήματος.

Η έρευνα των Μάρκου, Γαγάτση (2004) έδειξε ότι οι μαθητές αγνοούν τις διακοσμητικές εικόνες και στρέφονται κυρίως στο κείμενο και τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος για να το λύσουν. Ακόμη, η έρευνα των Γαγάτση και Μοδέστου (2004) έδειξε ότι οι μαθητές Α' τάξης επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν εικονικές αναπαραστάσεις -αντί λεκτικές- για να λύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού. Επιπλέον, μια άλλη έρευνα των Τσακίρη, Ρούσου- Μιχαηλίδου, Ηλία και Γαγάτση (2004), ποσοτική και ποιοτική, διερευνά το ρόλο της διακοσμητικής και πληροφοριακής εικόνας καθώς και τη λειτουργία της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση προβλημάτων προσθετικής δομής και συγκεκριμένα σύνθεσης

μέτρων, από μαθητές/τριες Β' και Γ' Δημοτικού. Οι διακοσμητικές εικόνες, δεν επηρέασαν τη συμπεριφορά των μαθητών, οι οποίοι αγνόησαν την ύπαρξη της εικόνας και αντιμετώπισαν τα προβλήματα ως λεκτικά. Οι μαθητές, ομολόγησαν ότι οι πληροφοριακές εικόνες, αν και ήταν απαραίτητες για την επίλυση των προβλημάτων, τους δυσκόλεψε παρά πολύ.

Ακόμη, η έρευνα των Ηλία, Χρυσάνθου και Φιλίππου (2003) με τίτλο «Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος» και με σκοπό την εξέταση της συμβολής των εικόνων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από μαθητές Στ' τάξης, είχε τα εξής αποτελέσματα: Η συμβολή της αναπαραστατικής, της οργανωτικής και της πληροφοριακής εικόνας ήταν πολύ σημαντική, αλλά όχι της διακοσμητικής. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι ο ρόλος της εικόνας στην επικοινωνία ήταν συμπληρωματικός και υποστηρικτικός του γλωσσικού κώδικα για την αναπαραστατική και οργανωτική εικόνα, ανύπαρκτος για τη διακοσμητική και απαραίτητος για την πληροφοριακή. Το συμπέρασμα που προκύπτει από την έρευνα είναι ότι η συμβολή της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην εικόνα και στο πρόβλημα (λειτουργία εικόνας), τις προϋπάρχουσες γνώσεις και νοητικές ικανότητες των μαθητών.

Επιπλέον, η έρευνα της Χρυσοστόμου με τίτλο « Προβλήματα αλλαγής με περιττές πληροφορίες, με λεκτική αναπαράσταση και πληροφοριακή εικόνα: ο ρόλος της αναπαράστασης, της δομής και του διδακτικού συμβολαίου» σε Κύπριους μαθητές Β' και Γ' δημοτικού έδειξαν ότι οι πληροφοριακές εικόνες δε βελτιώνουν την επίδοση των μαθητών σε σχέση με τα λεκτικά προβλήματα. Όμως, η εικονική αναπαράσταση των περιττών πληροφοριών επιτρέπει στους μαθητές να τις συγκρίνουν οπτικά με σχετικές πληροφορίες και να τις απορρίψουν από τη λύση τους.

Επιπρόσθετα, σε μεταπτυχιακή έρευνα της Χαραλάμπους (2007) με αντικείμενο τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ' τάξης στην Ελλάδα και Κύπρο, διαπιστώνεται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων συνοδεύεται από εικόνα. Υπερτερούν οι διακοσμητικές και πληροφοριακές εικόνες. Η παρουσία βοηθητικών-οργανωτικών εικόνων είναι μηδαμινή.

Τέλος, η έρευνα των Δεσλή και Μολασιώτη (2013) σχετικά με την επίδραση των εικόνων στην επίδοση μαθητών Β' τάξης σε προβλήματα αριθμητικών πράξεων με ακέραιους είχε τα εξής αποτελέσματα: Οι διακοσμητικές και οι πληροφοριακές εικόνες που εμφανίζονται πιο συχνά στα σχολικά εγχειρίδια, δεν βρέθηκε να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών, ενώ οι βοηθητικές εικόνες – αναπαραστατικές και οργανωτικές – συμβάλλουν σημαντικά στην καλύτερη επίδοσή τους.

6.2. Συμπεράσματα σχετικά με το ρόλο των εικόνων στα μαθηματικά προβλήματα

Έτσι, οι έρευνες δεν μας δίνουν ένα ξεκάθαρο μήνυμα σχετικά με το ρόλο των εικόνων στην επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων. Αυτό που καταλαβαίνουμε είναι ότι οι μαθητές αγνοούν κυρίως τις διακοσμητικές εικόνες και δίνουν έμφαση στα λεκτικά και αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος για να το λύσουν. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευτεί με τις απόψεις των Carney & Levin (2002) ότι οι διακοσμητικές εικόνες, παρά το γεγονός ότι προσδίδουν ένα ελκυστικό χαρακτήρα στο κείμενο, δεν ενισχύουν την κατανόηση ή την ανάκληση πληροφοριών από το κείμενο (Λουμάκου, 2010). Ακόμη, όταν παρουσιάζονται πληροφοριακές εικόνες που περιλαμβάνουν δηλαδή στοιχεία απαραίτητα για να λυθεί το πρόβλημα, οι μαθητές μπορεί να δυσκολευτούν να αποκωδικοποιήσουν τις πληροφορίες από τις εικόνες, διότι δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση τους. Η δυσκολία μπορεί να οφείλεται στην ηλικία τους ή στην ικανότητά τους να επεξεργάζονται οπτικές πληροφορίες. Φαίνεται, ότι οι βοηθητικές εικόνες και κυρίως οι οργανωτικές πολλές συμβάλλουν στην οργάνωση της λύσης από τους μαθητές, όμως άλλες φορές ανάλογα και με τη δυσκολία της πράξης μπορεί να αγνοηθούν από τους μαθητές.

Επομένως, οι περισσότεροι μαθητές σύμφωνα με τις έρευνες κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων στηρίζονται περισσότερο στα λεκτικά στοιχεία του προβλήματος και αγνοούν πολλές φορές τις εικόνες ή δυσκολεύονται να τις ερμηνεύσουν, με αποτέλεσμα να μην τις λαμβάνουν υπόψη τους. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες όπως, στη σχέση που έχει η εικόνα με το γλωσσικό κείμενο (λειτουργία της εικόνας), στην

πράξη που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί το πρόβλημα, στην ηλικία και τις νοητικές ικανότητες των μαθητών, στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, στις ικανότητες προσοχής και σάρωσης της εικόνας από το άτομο, στη δυσκολία να περάσουν από τον ένα κώδικα στον άλλο, στη δυσκολία να ανασύρουν από τη μνήμη τους πληροφορίες μέσα από τις εικόνες. Επιπλέον, άλλοι παράγοντες μπορεί να είναι η αναντιστοιχία της εικόνας με τις ερμηνευτικές ικανότητες του ατόμου ή τις απαιτήσεις του έργου, η μη καταλληλότητα της συνθετικής δομής της εικόνας που αφορά στη χωρική διάταξη των μερών της και η προβολή μόνο ορισμένων πτυχών της.

Οι μαθητές είναι πιθανό να μην έχουν μάθει να «διαβάζουν» εικόνες, ώστε να λάβουν τις απαραίτητες πληροφορίες από αυτές για να καταφέρουν να τις χρησιμοποιήσουν και να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. Ένας άλλος ανασταλτικός παράγοντας μπορεί να είναι η πολυσημική ιδιότητα των εικόνων. Η γνωστή ρήση «μια εικόνα, χίλιες λέξεις» μπορεί να αλλάξει σε «μια εικόνα, χίλιες ερμηνείες» (Γιαννακοπούλου).

Έτσι, δημιουργείται η ανάγκη οι μαθητές να εξοικειωθούν με τον οπτικού γραμματισμού, δηλαδή να αναπτύξουν στρατηγικές για να διαβάζουν και να ερμηνεύουν τις εικόνες. Σύμφωνα με τον Πλειό (2005), μια εικόνα επιτρέπει και επιβάλλει υποκειμενικές αναγνώσεις και η ανάγνωση της εικόνας είναι διαφορετική από την ανάγνωση του γλωσσικού κειμένου. Για να διαβάσει κανείς ένα γλωσσικό κείμενο θα πρέπει να ξεκινήσει από τα αριστερά προς τα δεξιά και σε γραμμική σειρά να συνεχίσει την ανάγνωση. Αντίθετα, στην περίπτωση της εικόνας, η ανάγνωση μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε σημείο και να καταλήξει σε οποιοδήποτε άλλο σημείο. Είναι σημαντικό η εικόνα και το κείμενο να αποτελούν ένα ενιαίο οπτικά και νοηματικά σύνολο και οι μαθητές να μάθουν να αντλούν από το σύνολο τις απαραίτητες πληροφορίες και να τις χρησιμοποιούν.

7. Μεθοδολογία-μέθοδος της έρευνας

Μετά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε πρόκειται να παρουσιάσουμε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο τη διερευνητική μας μελέτη. Αρχικά, πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση περιεχομένου, που αφ' ενός στοχεύει στην καταγραφή της θεματικής των προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου της Ε' Δημοτικού και αφ' ετέρου στην καταγραφή του είδους των εικονιστικών στοιχείων που συνοδεύουν τα προβλήματα. Στο δεύτερο μέρος της ερευνητικής μας προσπάθειας, πρόκειται να εκτελέσουμε μια εμπειρική έρευνα σχετικά με το ρόλο που διαδραματίζουν τα εικονιστικά στοιχεία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

7.1.Α' φάση έρευνας: Ανάλυση περιεχομένου-Σχολικό εγχειρίδιο Ε' δημοτικού

Η προσπάθεια μελέτης ενός σχολικού εγχειριδίου οδηγεί αναπόφευκτα στο κρίσιμο ερώτημα: Πώς μπορούμε να αναλύσουμε ένα σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών; Προς την κατεύθυνση αυτή έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες μέθοδοι ανάλυσης και ταξινόμησης, καθεμία από τις οποίες έχει διαφορετικό στόχο και αναδεικνύει διαφορετικά κάθε φορά στοιχεία (Καφούση, Σκουμπουρδή, Τάτσης). Σύμφωνα με τις Pepin and Haggarty (2001) η ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου μπορεί να γίνει τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο και τη δομή του όσο και σε σχέση με τη χρήση του στις σχολικές τάξεις από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς ή και συνδυαστικά. Οι ίδιες ερευνήτριες επισημαίνουν ότι η ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των σχολικών εγχειριδίων μπορεί να γίνει με βάση τις ακόλουθες περιοχές: μαθηματικές προθέσεις, παιδαγωγικές προθέσεις, κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά και πολιτισμικές παραδόσεις.

Στην συγκεκριμένη εργασία πρόκειται να ασχοληθούμε με κάποιες υπο-ενότητες των δύο πρώτων περιοχών, δηλαδή των μαθηματικών προθέσεων και των παιδαγωγικών προθέσεων. Οι μαθηματικές προθέσεις αναφέρονται στην επιλογή και

τον τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια (για παράδειγμα, ποια θέματα υπάρχουν και πότε εισάγονται, σε ποια δίνεται ιδιαίτερη έμφαση, με ποια σειρά παρουσιάζονται), καθώς και στις υπονοούμενες αντιλήψεις για τη φύση των μαθηματικών (για παράδειγμα, αν προωθείται η παραδοσιακή προσέγγιση μέσω της επίλυσης ασκήσεων ή αν δίνεται έμφαση στην κατασκευή της γνώσης μέσω της επίλυσης προβλημάτων) (Κολέζα&Φακούδης, 2008, Τσικοπούλου, 2008). Οι παιδαγωγικές προθέσεις αφορούν στους τρόπους με τους οποίους το σχολικό εγχειρίδιο βοηθά ή όχι το μαθητή να μάθει με βάση τα λεκτικά και τα μη λεκτικά χαρακτηριστικά του κειμένου (γλώσσα, εικόνες, σύμβολα κ.ά.). Προς αυτή την κατεύθυνση αρκετές έρευνες έχουν ασχοληθεί με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων, όπως η ποιότητα των εξηγήσεων, ο ρόλος των συμβόλων ή η λειτουργία των εικόνων (Newton&Newton, 2006, Ηλία, 2003, Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003).

Στην παρούσα έρευνα πρόκειται να ασχοληθούμε με τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή των Μαθηματικών της Ε' δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα κάθε κεφαλαίου που έχουν την ονομασία στο βιβλίο του μαθητή «δραστηριότητα-ανακάλυψη». Ο αριθμός των κεφαλαίων όπως και των προβλημάτων είναι 55. Ουσιαστικά, πρόκειται να αναλύσουμε το περιεχόμενο των συγκεκριμένων προβλημάτων σε δύο άξονες.

Σύμφωνα με τον πρώτο άξονα-μαθηματικές προθέσεις, πρόκειται να αναλύσουμε τη συχνότητα της θεματικής - περιεχομένου των μαθηματικών προβλημάτων. Οι κατηγορίες ως προς τη θεματική των προβλημάτων είναι: *ο αθλητισμός, τα παιχνίδια, ο φυσικός κόσμος, η κοινωνική ζωή, η σχολική ζωή, το φαγητό, οι τοποθεσίες, τα άλλα σχολικά μαθήματα, η σωματομετρία, τα ενδιαφέροντα* και τέλος τα προβλήματα *χωρίς θέμα*. Σε κάποια προβλήματα μπορεί η θεματική τους να ταιριάζει σε παραπάνω από μια κατηγορίες, το κάθε πρόβλημα θα το συμπεριλάβουμε σε όσες κατηγορίες ταιριάζει.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο άξονα-παιδαγωγικές προθέσεις πρόκειται να ασχοληθούμε με τους διάφορους σημειωτικούς τρόπους (τροπικότητα) που παρουσιάζονται τα συγκεκριμένα προβλήματα και να τους ταξινομήσουμε σε κατηγορίες. Ουσιαστικά, εκτός από το γλωσσικό κείμενο στα συγκεκριμένα

προβλήματα παρουσιάζονται πολλά εικονιστικά στοιχεία. Σύμφωνα με την ταξινόμηση των Θεοδούλου και Γαγάτση (2003), οι εικόνες που συνοδεύουν τα προβλήματα θα κατηγοριοποιηθούν με βάση τη λειτουργία τους σε: **διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και πληροφοριακές**. Εκτός όμως, από τις εικόνες υπάρχουν και άλλα εικονιστικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στα λεκτικά προβλήματα, γι' αυτό το λόγο προσθέτουμε άλλη μια κατηγορία στην ταξινόμησή μας τις **αναπαραστάσεις**, που περιλαμβάνουν τις αριθμογραμμές, τους πίνακες, τα διαγράμματα, τα ραβδογράμματα. Θα προσθέσουμε, επίσης, την κατηγορία της **μηδενικής αναπαράστασης** που αφορά στη μη ύπαρξη εικόνας στο μαθηματικό πρόβλημα. Τα εικονιστικά στοιχεία που μελετώνται βρίσκονται είτε ενδιάμεσα της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος, είτε δίπλα ή πάνω ή κάτω αυτού. Τέλος, όταν ένα πρόβλημα συνοδεύεται από περισσότερα εικονιστικά στοιχεία, κάθε στοιχείο θα κατηγοριοποιηθεί ξεχωριστά ως προς τη λειτουργία που επιτελεί.



7.1.1. Η θεματική των προβλημάτων

Αρχικά, η μελέτη της θεματικής επιτρέπει την ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η σχέση των Μαθηματικών τόσο με την καθημερινή ζωή όσο και με άλλα γνωστικά αντικείμενα. Το περιεχόμενο των προβλημάτων αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα για τη λύση τους. Τα προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή των μαθητών είτε κοινωνική, είτε σχολική, είτε σε πλαίσια παιχνιδιού κινητοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών και τους είναι πιο οικεία ως προς το περιεχόμενο. Όσο πιο κοντά βρίσκεται η θεματολογία των προβλημάτων στα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες των μαθητών, τόσο περισσότερα εσωτερικά κίνητρα αναπτύσσουν, περισσότερη προσπάθεια, επιμονή και υπομονή καταβάλλουν για να τα επιλύσουν. Η σύνδεση των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια που μπορεί να συναντήσουν στην καθημερινή ζωή τους επιδρά μάλλον θετικά, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εφόδια για να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις της πραγματικής ζωής.

Πιο συγκεκριμένα, η θεματική που επιλέξαμε για να κατηγοριοποιήσουμε τα συγκεκριμένα λεκτικά προβλήματα αναφέρεται στα εξής :

- 1) Φυσικός κόσμος (ζώα, φυτά, περιβάλλον)

- 2) Αθλητισμός
- 3) Παιχνίδια (με κάρτες, τάγκραμ, μουσικά όργανα, Η/Υ, κ.α.)
- 4) Κοινωνική ζωή (συναλλαγές, προσφορές, εκπτώσεις, επισκέψεις στο λούνα παρκ/στο εστιατόριο/κινηματογράφο, γενέθλια, κ.α.)
- 5) Σχολική ζωή (εκλογές στην τάξη, σχολική θεατρική παράσταση, επισκέψεις, κατασκευές και δραστηριότητες μέσα στην τάξη)
- 6) Φαγητό
- 7) Τοποθεσίες
- 8) Άλλα σχολικά μαθήματα (γεωγραφία, πληροφορική, ευέλικτη ζώνη, ιστορία)
- 9) Σωματομετρία (βάρος, ύψος)
- 10) Ενδιαφέροντα(συλλογές)
- 11) Χωρίς θέμα

Αυτές λοιπόν, είναι οι κατηγορίες που περιγράφουν τη θεματική των δραστηριοτήτων, ακόμη και στην περίπτωση όπου υπάρχουν έμμεσα ως αναφορά για παράδειγμα στον τίτλο του προβλήματος, χωρίς κάποιο σενάριο, είτε λεκτικά είτε με τη χρήση κάποιας εικόνας. Τα προβλήματα είναι σε αριθμό 55, όμως σε κάποια προβλήματα μπορεί το θέμα τους να ταιριάζει σε παραπάνω από μια κατηγορίες.

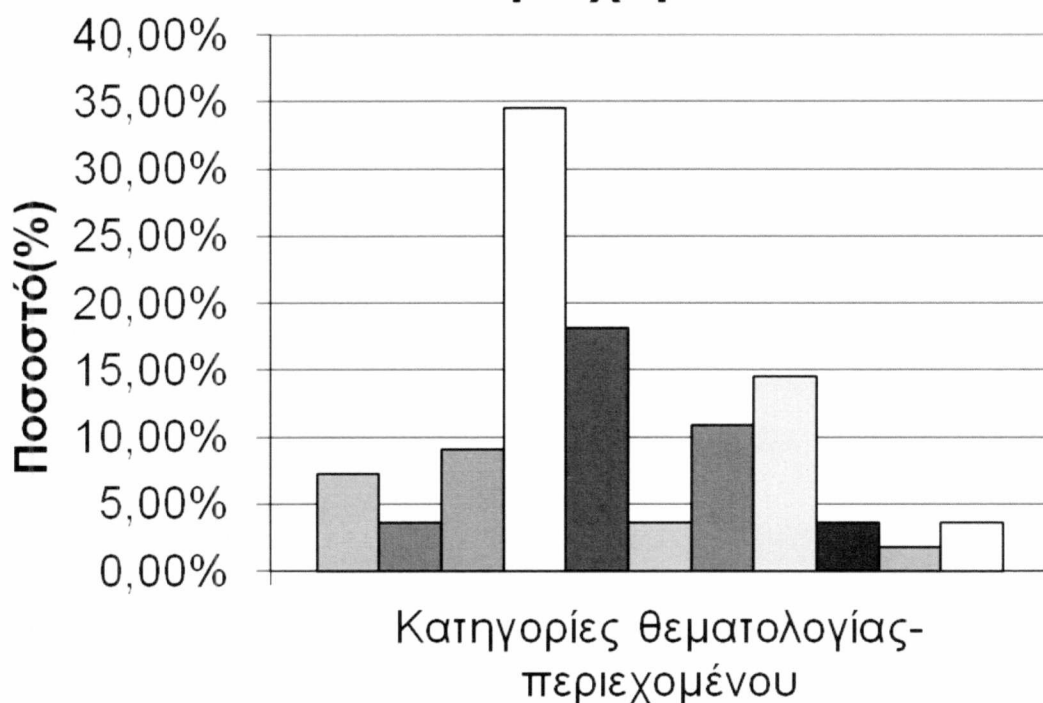
Αποτελέσματα

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τα αποτελέσματα της ανάλυσης:

Θεματική	Αριθμός προβλημάτων	Ποσοστό (%)
1) Φυσικός κόσμος	4	7,27%

2) Αθλητισμός	2	3,63%
3) Παιχνίδια	5	9,09%
4) Κοινωνική ζωή	19	34,54%
5) Σχολική ζωή	10	18,18%
6) Φαγητό	2	3,63%
7) Τοποθεσίες	6	10,90%
8) Άλλα σχολικά μαθήματα	8	14,54%
9) Σωματομετρία	2	3,63%
10) Προσωπικά ενδιαφέροντα	1	1,81%
11) Χωρίς θέμα	2	3,63%

Συχνότητα θεματικής- περιεχομένου



- Φυσικός κόσμος
- Αθλητισμός
- Παιχνίδια
- Κοινωνική ζωή
- Σχολική ζωή
- Φαγητό
- Τοποθεσίες
- Σχολικά μαθήματα
- Σωματομετρία
- Προσωπικά ενδιαφέροντα
- Χωρίς θέμα

Στα συγκεκριμένα προβλήματα φαίνεται ότι παρουσιάζονται με μεγαλύτερη συχνότητα αυτά που σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των μαθητών (34,54%). Αμέσως μετά κατατάσσονται αυτά τα οποία σχετίζονται με τη σχολική ζωή των μαθητών και τις σχολικές δραστηριότητες (18,18%) και στη συνέχεια με φθίνουσα σειρά τα προβλήματα τα οποία έχουν ως θεματολογία άλλα σχολικά μαθήματα (14,54%). Έπειτα, κατατάσσονται τα προβλήματα που αναφέρονται σε διάφορες

τοποθεσίες (10,90%), στη συνέχεια σε παιχνίδια (9,09%) και αμέσως μετά στο φυσικό κόσμο (7,27%). Μετά, παρουσιάζονται με την ίδια συχνότητα (3,63%) τα προβλήματα που σχετίζονται με τον αθλητισμό, το φαγητό, τη σωματομετρία και τα προβλήματα χωρίς κάποιο συγκεκριμένο θέμα. Τέλος, με τη μικρότερη συχνότητα παρουσιάζονται τα προβλήματα που σχετίζονται με τα προσωπικά ενδιαφέροντα των μαθητών.

7.1.2. Το είδος της σημειωτικής αναπαράστασης

Στη συνέχεια, πρόκειται να ασχοληθούμε με τους σημειωτικούς τρόπους που χρησιμοποιούνται στην κειμενική αναπαράσταση των μαθηματικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε τους διάφορους τρόπους με τους οποίους παρουσιάζονται τα λεκτικά προβλήματα στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο. Τα λεκτικά προβλήματα παρουσιάζονται κυρίως με δύο βασικούς σημειωτικούς τρόπους, το γλωσσικό κείμενο και τα εικονιστικά στοιχεία. Εκτός από αυτά βέβαια, ο εκπαιδευτικός της εκάστοτε τάξης μπορεί να χρησιμοποιήσει και άλλους τρόπους και μέσα για να διδάξει ή να βοηθήσει την κατανόηση και την σκέψη των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Προτού όμως περάσουμε στην ταξινόμηση της συχνότητας των εικονιστικών στοιχείων που υπάρχουν στα συγκεκριμένα λεκτικά προβλήματα, θα ήταν χρήσιμο να παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα ερευνών σχετικά με το καθαρά γλωσσικό κείμενο των συγκριμένων δραστηριοτήτων-προβλημάτων του βιβλίου που θα ασχοληθούμε.

Το μέρος που μας απασχολεί στην παρούσα έρευνα αναφέρεται στο βιβλίο του μαθητή ως Δραστηριότητα-Ανακάλυψη. Σύμφωνα με τους Μαστρογιάννη και Μαλέτσκο (2009), οι τίτλοι κάθε κεφαλαίου-μαθήματος με τα πετυχημένα, λογοπαίγνια τους, αποσπών τους μαθητές από την μαθηματική γλώσσα, αφού μαθηματικές λέξεις τις αναμιγνύουν και τις εντάσσουν σε καθαρά φυσικά-καθομιλούμενα γλωσσικά πλαίσια, αποστερώντας τους την μαθηματική τους σημασία και ορολογία, και δημιουργώντας σύγχυση στους μαθητές. Έρευνα των Κεραμάρη και Μπαρμπαγιάννη (2011), μας δείχνει ότι ο χρόνος που χρησιμοποιείται σε αυτά τα προβλήματα είναι ο ενεστώτας, σε πρόσωπο α' ενικό και α' πληθυντικό, που δίνει

ζωντάνια και παραστατικότητα στην αφήγηση και χρησιμοποιείται πολλές φορές αντί για την προστακτική (όπως συνέβαινε παλιά, – λύστε, γράψτε –) με σκοπό να δηλωθεί παράκληση - προσταγή με λεπτότητα. Επιπλέον, παρατηρείται η χρήση της εισαγωγικής ερώτησης σε κάθε κεφάλαιο. Η ερώτηση μπορεί να είναι πλάγια ή ευθεία και εισάγεται με ερωτηματικές αντωνυμίες (Τι σχέση έχουν...; Πόσο...Ποιο..) ή ερωτηματικά επιρρήματα (Πότε, πώς κάνουμε...;) ή (Μπορώ + υποτακτική), για να προετοιμάσουν, να παρακινήσουν, να προβληματίσουν και να κινητοποιήσουν τη δημιουργικότητα του μαθητή. Τέλος, στα προβλήματα, αποφεύγεται η χρήση της προστακτικής (π.χ. λύστε με δύο τρόπους τα προβλήματα), καθώς και η χρήση της αόριστης αντωνυμίας «ένας». Έτσι ο αναγνώστης μπορεί να επικαλεστεί προσωπικές του καταστάσεις προκειμένου να αναπαραστήσει τα δεδομένα.

Όσον αφορά στους τρόπους με τους οποίους παρουσιάζονται τα προβλήματα στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο όπως αναφέραμε και προηγουμένως είναι δύο, το γλωσσικό κείμενο και τα εικονιστικά στοιχεία. Σύμφωνα λοιπόν, με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση ο ρόλος που διαδραματίζει η εικόνα που χρησιμοποιείται σε κάποιο πρόβλημα μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με τη λειτουργία που επιτελεί. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω σύμφωνα με τους Γαγάτση και Θεοδούλου (2003), οι εικόνες που παρουσιάζονται στα προβλήματα μπορούν να χωριστούν σε α) *πληροφοριακές*, β) *βοηθητικές-αναπαραστατικές*, γ) *βοηθητικές-οργανωτικές* και δ) *διακοσμητικές*. Εκτός όμως, από τις εικόνες υπάρχουν και άλλα εικονιστικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στα λεκτικά προβλήματα, γι' αυτό το λόγο προσθέτουμε άλλη μια κατηγορία στην ταξινόμησή μας τις *αναπαραστάσεις*, που περιλαμβάνουν τις αριθμογραμμές, τους πίνακες, τα διαγράμματα, τα ραβδογράμματα. Θα προσθέσουμε, επίσης, την κατηγορία της *μηδενικής αναπαράστασης* που αφορά στη μη ύπαρξη εικόνας στο μαθηματικό πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα, η κατηγοριοποίηση που επιλέξαμε να κάνουμε στα συγκεκριμένα λεκτικά προβλήματα αναφέρεται στα εξής :

1. Διακοσμητική εικόνα
2. Πληροφοριακή εικόνα
3. Βοηθητική – οργανωτική εικόνα

4. Βοηθητική – αναπαραστασιακή εικόνα

5. Αναπαραστάσεις: Αριθμογραμμή- Πίνακας-Διάγραμμα-Ραβδόγραμμα-Γράφημα

6.Μηδενική αναπαράσταση

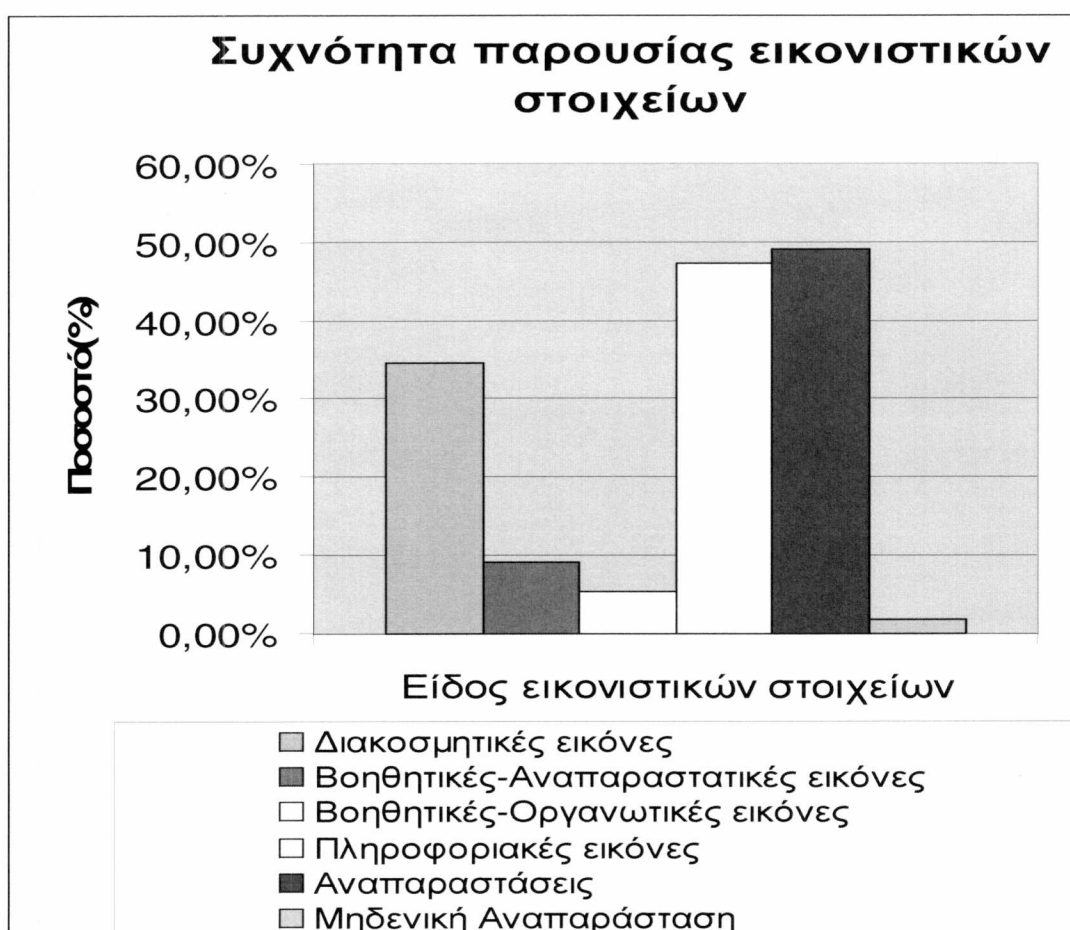
Είναι σημαντικό, ότι πρέπει να αναφερθεί πως όταν ένα πρόβλημα συνοδεύεται από περισσότερα εικονιστικά στοιχεία, κάθε στοιχείο θα κατηγοριοποιηθεί ξεχωριστά ως προς τη λειτουργία που επιτελεί. Μάλιστα, παρατηρείται ότι στα περισσότερα προβλήματα χρησιμοποιούνται κυρίως πληροφοριακές εικόνες ή διακοσμητικές εικόνες σε συνδυασμό με κάποιο διάγραμμα ή πίνακα. Οι εικόνες, τα διαγράμματα, κτλ., μπορεί να χρησιμοποιούνται σε διάφορες φάσεις της διαδικασίας λύσης του προβλήματος. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν στην εκφώνηση του προβλήματος, στη στρατηγική-μέθοδο επίλυσης ή και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων του προβλήματος.

Αποτελέσματα

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των προβλημάτων και το είδος της εικόνας που υπάρχει σε αυτά :

Είδος εικόνας	Αριθμός προβλημάτων	Ποσοστό(%)
1)Διακοσμητικές εικόνες	19	34,54%
2)Βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες	5	9,09%
3)Βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες	3	5,45%
4) Πληροφοριακές εικόνες	26	47,27%

5)Αναπαραστάσεις: Διάγραμμα, γράφημα, πίνακας, αριθμογραμμή, ραβδόγραμμα	27	49,09%
6) Μηδενική αναπαράσταση	1	1,81%



Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι με μεγαλύτερη συχνότητα παρουσιάζονται οι αναπαραστάσεις, όπως είναι τα διαγράμματα, οι αριθμογραμμές, τα γραφήματα, οι πίνακες, τα ραβδογράμματα. Αμέσως μετά με φθίνουσα σειρά και ελάχιστη διαφορά βρίσκονται οι πληροφοριακές εικόνες και στη συνέχεια οι διακοσμητικές. Έπειτα, με πολύ μικρή συχνότητα παρουσιάζονται οι βοηθητικές εικόνες τόσο οι

αναπαραστατικές όσο και οι οργανωτικές, που η παρουσία τους θεωρείται μηδαμινή. Τέλος, μόνο σε ένα πρόβλημα δεν υπήρχε κανενός είδους εικονιστικής αναπαράστασης.

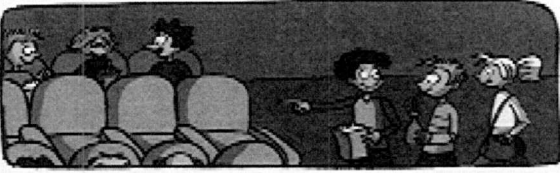
Στη συνέχεια πρόκειται να παρουσιάσουμε κάποιο ενδεικτικό δείγμα των συγκεκριμένων προβλημάτων:

6 Επίλυση προβλημάτων

ΣΤΟΝ ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

🕒 Μπορούμε να βρούμε διαφορετικές στρατηγικές για να λύσουμε ένα πρόβλημα;




Ο Μίλτος, η Αθηνά και ο Γιάνας πήγαν να δουν τον κινηματογράφο.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα παιδιά στις τρεις θέσεις;

Συζητάμε στην τάξη για τη στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

Να σχεδιάσουμε!
 Να κάνουμε μοντέλο!
 Μπορούμε να κάνουμε πίνακα!
 Θα κάνουμε γρήγορη εκτίμηση!



- Με ποιο παιδί συμφωνώ; Εξηγώ ποια στρατηγική μου φαίνεται πιο εύκολη.

1ος τρόπος

- Μερικοί συνδυασμοί είναι:

M	A	X
M	X	A
- Συμπληρώνω τους υπόλοιπους:

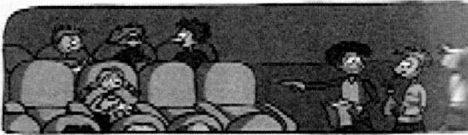
A	X	M	X	M	A

2ος τρόπος

Σε κάθε περίπτωση, το παιδί που καθίσει στη μέση έχει τα δύο άλλα παιδιά δίπλα του. Άρα, το κάθε παιδί μπορεί να έχει με 2 διαφορετικούς τρόπους δίπλα του τα άλλα δύο παιδιά. Αφού τα παιδιά είναι 3 και για καθένα υπάρχουν 2 διαφορετικοί τρόποι, έχουμε: $2 \times 2 = 4$ τρόπους.

- Την επόμενη φορά είχαν πάει στον κινηματογράφο με τη φίλη τους Γιάννα.

🕒 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσαν να καθίσουν τα παιδιά αν η Γιάννα δεν αλλάξει θέση;



Διαδικασία επίλυσης προβλήματος: Ανάλυση διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης

22

Σε αυτό το πρόβλημα η πρώτη εικόνα είναι μια βοηθητική-αναπαραστατική, με σκοπό να βοηθήσει το μαθητή να κατανοήσει πιο εύκολα τη δομή του προβλήματος, βέβαια μπορεί να αγνοηθεί από τους μαθητές καθώς δεν δίνει σημαντικές πληροφορίες και δεν είναι απαραίτητη για τη διαδικασία λύσης. Ενώ, στη συνέχεια παρατηρείται μια αφηγηματική εικόνα σε μορφή κόμικς, όπου οι

εικονιζόμενοι μιλούν και παρουσιάζουν κάποιους τρόπους λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος, που αποτελεί ένα βοηθητικό κείμενο.

9


**Αξία θέσης ψηφίων
στους δεκαδικούς αριθμούς**

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ


Δραστηριότητα - Ανακάλυξη


🕒 Πώς συγκρίνω δεκαδικούς αριθμούς;


Η Νεφέλη και η Νάνση παρακολουθούν στην τηλεόραση καλλιτεχνικό πατινάζ που τους αρέσει πολύ. Τους έκαναν εντύπωση οι βαθμολογίες:



- Το ζευγάρι από τον Καναδά πήρε 9,850 βαθμούς.
- Το ζευγάρι από την Αυστρία πήρε 9,760 βαθμούς.
- Το ζευγάρι από τη Ρωσία πήρε μια βαθμολογία που βρίσκεται ανάμεσα στις βαθμολογίες των άλλων δύο ζευγαριών. Ποια μπορεί να ήταν η βαθμολογία του;

 Δείχνω στην αριθμογραμμή τις 3 βαθμολογίες:

9,500			10,000
			
9,500			10,000
1,000			1,000

 Συζητάμε στην τάξη τις λύσεις που δώσαμε, καταγράφουμε τις βαθμολογίες που πήραν τα τρία ζευγάρια και τις κατατάσσουμε στις τρεις θέσεις.

Ποιο ζευγάρι ήρθε πρώτο:

Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει μια διακοσμητική εικόνα, της οποίας ο ρόλος της είναι προσελκύσει την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών, χωρίς να παρουσιάζεται κανένα σημαντικό στοιχείο για την δομή ή πληροφορίες για τον τρόπο λύσης του προβλήματος. Όλες οι πληροφορίες που είναι απαραίτητες δίνονται από το γλωσσικό κείμενο. Στη συνέχεια, για να βοηθηθούν οι μαθητές να λύσουν το

πρόβλημα χρησιμοποιείται μια αριθμογραμμή. Η αριθμογραμμή ουσιαστικά χρησιμοποιείται μια να οργανώσει τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

22

Έννοια του Ποσοστού

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΩΝ ΕΚΠΤΩΣΕΩΝ


Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

☺ Τι σημαίνει ποσοστό στα εκατό;

Game Time

150€ έκπτωση 10%


τελική τιμή: 135€ + δωρεάν παιχνίδι




Playbox


150€ έκπτωση 20%

τελική τιμή: € + παιχνίδι 35€





Η παιχνιδομηχανή με ένα παιχνίδι κοστίζει €.



Η παιχνιδομηχανή με ένα παιχνίδι κοστίζει €.

- Από ποιο κατάστημα συμφέρει στον Παύλο να αγοράσει την παιχνιδομηχανή με ένα παιχνίδι; Βάζω • Από το πρώτο • Από το δεύτερο
- Πόσα € είναι τα $\frac{10}{100}$ ή 10%: • στα 100 €; • στα 150 €;

• Κλάσματα που έχουν παρονομαστή το 100 γράφονται και με το σύμβολο %.

Παράδειγμα: $\frac{85}{100} = 85\%$, το οποίο διαβάζεται: ογδόντα πέντε τοις εκατό ή ογδόντα πέντε στα εκατό.

• Αντίστοιχα, κλάσματα που έχουν παρονομαστή το 1000 γράφονται και με το σύμβολο ‰.

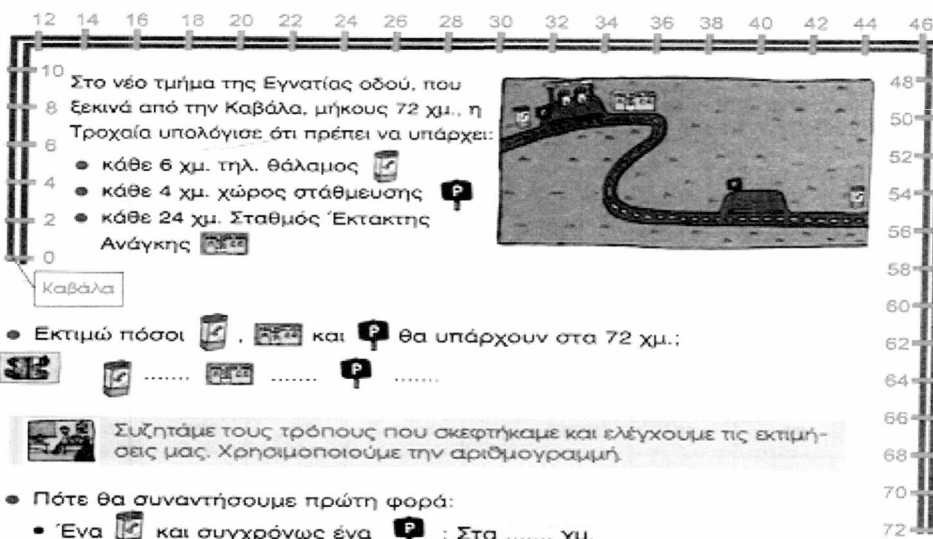
Παράδειγμα: $\frac{850}{1000} = 850\text{‰}$, το οποίο διαβάζεται: οχτακόσια πενήντα τοις χιλίοις ή οχτακόσια πενήντα στα χίλια.

Σε αυτό το πρόβλημα οι εικόνες που παρουσιάζονται είναι πληροφοριακές, αφού περιλαμβάνουν σημαντικές πληροφορίες, τις οποίες ο μαθητής θα πρέπει να λάβει υπ' όψη του για να μπορέσει να το λύσει.

ΣΤΗΝ ΕΓΝΑΤΙΑ ΟΔΟ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

☉ Μπορώ πολλαπλασιάζοντας διαφορετικούς αριθμούς να βρω το ίδιο γινόμενο;



- Πότε θα συναντήσουμε πρώτη φορά:
 - Ένα και συγχρόνως ένα : Στα χμ.
 - Ένα , ένα και ένα μαζί; Στα χμ.

- Πόσες φορές στα 72 χμ. θα υπάρχουν συγχρόνως , και :

Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα.

4																			
6																			
24			-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

- Κυκλώνω σε ποιο χιλιόμετρο κάθε φορά υπάρχουν και οι 3 σταθμοί.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα περιλαμβάνει μια διακοσμητική εικόνα, μια αριθμογραμμή, καθώς και βοηθητικά εικονίδια που αρχικά επεξηγείται γλωσσικά η σημασία τους και στη συνέχεια επαναλαμβάνονται μόνο τα εικονίδια για να απαντήσει ο μαθητής στα διάφορα ερωτήματα. Η ανάπτυξη του οπτικού γραμματισμού από το μαθητή είναι σημαντική καθώς θα πρέπει να αναγνωρίζει τι σημαίνουν τα εικονίδια.

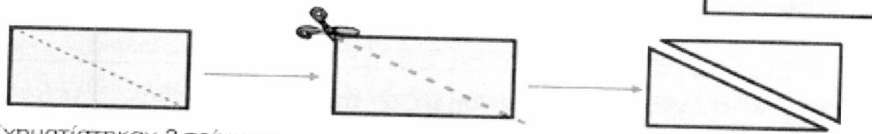
ΕΠΙΣΚΕΨΗ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΣΗ (α')

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

☉ Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει 2 ορθές γωνίες;

Τα παιδιά στην τάξη της Νεφέλης επισκέφτηκαν την έκθεση «Ταξίδι στον κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών». Όταν επέστρεψαν στο σχολείο, αποφάσισαν να κάνουν στην τάξη κάποιες από τις δραστηριότητες που τους έδειξαν στην έκθεση:

- α. Χρησιμοποιούμε μια κόλλα χαρτί A4 (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
- Χαράζουμε τη διαγώνιο.
 - Κόβουμε κατά μήκος της διαγωνίου.



Σχηματίστηκαν 2 τρίγωνα.

- Είναι τα τρίγωνα μεταξύ τους ίσα; Εξηγώ:
- Ονομάζω $\hat{\alpha}$ την κάθε ορθή γωνία. Τις άλλες δυο τις ονομάζω $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$. Με το μοιρογνωμόνιο μετρώ κάθε γωνία του ενός τριγώνου και συμπληρώνω τον πίνακα:

γωνία	μοίρες	είδος γωνίας

- Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$;



Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια γωνία και δυο γωνίες

Σε αυτό το πρόβλημα η εικόνα που δίνεται στην εκφώνηση είναι βοηθητική-οργανωτική, καθώς υπάρχουν οι οδηγίες λεκτικά για το πώς πρέπει να κινηθούν οι μαθητές, όμως η εικόνα ίσως τους βοηθήσει να οργανώσουν καλύτερα τις σκέψεις τους για το πώς πρέπει ανταποκριθούν στη δραστηριότητα. Στη συνέχεια, υπάρχει ένας πίνακας που βοηθά τους μαθητές να οργανώσουν τις γνώσεις τους.

7.2 Β' φάση έρευνας

7.2.1. Είδος της έρευνας

Η εμπειρική έρευνα είναι ένας τρόπος για την απόκτηση γνώσεων με στοιχεία που μπορούν να αναλυθούν ποσοτικά ή ποιοτικά. Μέσα από την ποσοτικοποίηση των αποδεικτικών στοιχείων ή κάνοντας νόημα από την ποιοτική μορφή, ένας ερευνητής μπορεί να απαντήσει σε εμπειρικά ερωτήματα, τα οποία πρέπει να ορίζονται σαφώς και να λογοδοτεί με τα στοιχεία που συλλέχθηκαν (δεδομένα). Ο σχεδιασμός έρευνας διαφέρει ανάλογα με τον τομέα και το θέμα ερευνάται. Πολλοί ερευνητές συνδυάζουν ποιοτικές και ποσοτικές μορφές ανάλυσης για την καλύτερη απάντηση σε ερωτήσεις που δεν μπορεί να μελετηθεί σε εργαστηριακές ρυθμίσεις, ιδιαίτερα στις κοινωνικές επιστήμες και στην εκπαίδευση (Wikipedia).

Ο Gilbert De Landsheere στο βιβλίο του «*Η εμπειρική έρευνα στην εκπαίδευση*, σελ.9-15» υποστηρίζει τη συνύπαρξη της ερμηνευτικής και εμπειρικής έρευνας στον τομέα της εκπαίδευσης, σε αντίθεση με τους εκπροσώπους της νοολογικής-ερμηνευτικής κατεύθυνσης που αμφισβητούν τη δυνατότητα εφαρμογής της εμπειρικής έρευνας στις Επιστήμες της Αγωγής. Θεωρεί ότι όχι μόνο είναι εφικτή η συνύπαρξη αυτή, αλλά είναι και αναγκαία προϋπόθεση προκειμένου να διερευνηθεί και να μελετηθεί το ευρύ φάσμα των παιδαγωγικών φαινομένων. Έτσι, οι ποιοτικές και ποσοτικές μελέτες λειτουργούν συμπληρωματικά σε ένα ερευνητικό πλαίσιο. Ο ερευνητής στην εκπαίδευση δε θα πρέπει μόνο να ασχολείται με την περιγραφή και την εξήγηση φαινομένων, αλλά και να προσδιορίζει στοιχεία που θέλει να μελετήσει κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και να ελέγχει τις υποθέσεις του διυποκειμενικά (Gilbert De Landsheere, 1996).

Στο πλαίσιο μιας τέτοιας διαδικασίας, ο ερευνητής αρχικά θα προσδιορίσει το πρόβλημα. Το πρόβλημα διερεύνησης μπορεί να πηγάζει είτε από την προσωπική του εμπειρία είτε από την ανάγνωση της σχετικής βιβλιογραφίας είτε από τη συνύπαρξη και των δύο. Στη συνέχεια, πρόκειται να προσδιορίσει το δείγμα που θα χρησιμοποιήσει στη μελέτη του και να διατυπώσει τις δικές του υποθέσεις. Σημαντικό ρόλο παίζει ο προσδιορισμός των μεταβλητών που είναι πιθανόν να επηρεάσουν την κατανόηση των μαθητών. Η μεταβλητή που σκόπιμα χρησιμοποιείται, ώστε οι επιδράσεις της να μπορούν να μετρηθούν και να

αξιολογηθούν ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή*. Η επίδραση που παράγεται ή η αλλαγή συμπεριφοράς που προκύπτει από την τροποποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζεται *εξαρτημένη*. Κάποια άλλα εξίσου σημαντικά βήματα του ερευνητή αποτελούν: η επιλογή των τεχνικών και με των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν, η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η εξαγωγή συμπερασμάτων και προτάσεων (Gajendra K.Verma, Kanka Mallick, 2004).

7.2.2. Προσδιορισμός του δείγματος

Η ερευνητική προσπάθεια διενεργήθηκε στο 13^ο Δημοτικό Σχολείο Βόλου το Μάιο του 2014. Στην έρευνα συμμετείχαν 20 μαθητές της Ε' Δημοτικού με μέσο όρο ηλικίας τα 10 χρόνια, που φοιτούσαν στο 13^ο Δημοτικό σχολείο του Βόλου κατά τη σχολική χρονιά 2013-2014. Οι μαθητές προέρχονταν κυρίως από οικογένειες μεσαίου κοινωνικο-οικονομικού στρώματος και μορφωτικού επιπέδου. Σύμφωνα με τα λεγόμενα της εκπαιδευτικού του τμήματος όλοι οι μαθητές είχαν φυσιολογική ανάπτυξη και νοημοσύνη. Παρ' όλα αυτά, υπήρχε στο τμήμα μία μαθήτρια, η οποία αντιμετώπιζε μαθησιακές δυσκολίες. Η συγκεκριμένη μαθήτρια δεν είχε κάποια επίσημη διάγνωση. Το αναγνωστικό επίπεδο της μαθήτριας ήταν χαμηλότερο από το μέσο όρο των υπόλοιπων μαθητών της ίδιας ηλικίας και αντιμετώπιζε κάποια δυσκολία στη γραφή, παραλείποντας ή προσθέτοντας φωνήματα στις λέξεις. Σύμφωνα με τη δασκάλα του τμήματος, οι επιδόσεις της στα μαθηματικά ήταν στο επίπεδο των υπόλοιπων μαθητών της τάξης.

7.2.3. Σκοπός και υποθέσεις

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξεταστεί ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος σε μαθητές Ε' δημοτικού. Ειδικότερα εξετάστηκε η επίδραση των τεσσάρων ειδών εικόνας που σύμφωνα με τους Γαγάτση και Θεοδούλου (2003) χώρισαν τις εικόνες που υπάρχουν στα μαθηματικά προβλήματα σε πληροφοριακές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και διακοσμητικές. Τα αποτελέσματα θα δοθούν από τα ποσοστά επιτυχίας στις λύσεις

των μαθητών, αλλά κυρίως από τις δικές τους απόψεις σχετικά με το ρόλο που διαδραματίζουν οι εικόνες στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Ιδιαίτερος στόχος είναι οι μαθητές να εκφράσουν τις γνώμες τους σχετικά με τη λειτουργία των εικόνων στα συγκεκριμένα προβλήματα.

Οι κυριότερες ερευνητικές υποθέσεις είναι οι εξής:

1. Η παρουσία διακοσμητικής εικόνας σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι μαθητές θα αγνοήσουν τη χρήση της διακοσμητικής εικόνας στο συγκεκριμένο πρόβλημα.
2. Η παρουσία βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι μαθητές θα λάβουν υπ' όψη τους τις βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες για την επίλυση των προβλημάτων.
3. Η παρουσία βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι μαθητές θα λάβουν υπ' όψη τους τις βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες για την επίλυση των προβλημάτων.
4. Οι μαθητές θα δυσκολευτούν στην απόκτηση πληροφοριών από το πρόβλημα που περιλαμβάνει πληροφοριακή εικόνα.
5. Οι μαθητές θα βοηθηθούν από τη χρήση της αριθμογραμμής.

7.2.4. Εργαλεία συλλογής δεδομένων - Ερευνητικός σχεδιασμός

Τα εργαλεία συλλογής των δεδομένων αποτελούνταν από τη δημιουργία δύο φύλλων εργασίας, που το καθένα περιλάμβανε 4 μαθηματικά προβλήματα και ένα ερωτηματολόγιο για κάθε μαθητή. Για την παρούσα έρευνα σχεδιάστηκαν 4 μαθηματικά προβλήματα και η επιλογή των μαθηματικών δοκιμασιών έγινε από το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' δημοτικού των Μαθηματικών απομονώνοντας τις λεπτομέρειες των σελίδων, ώστε να μην παραπέμπει τους μαθητές σε κάποιο συγκεκριμένο κεφάλαιο στο βιβλίο τους και τους βοηθήσει στη διαδικασία της επίλυσης. Επιπλέον, ένα από τα προβλήματα δεν παρουσιάστηκε όπως ακριβώς είναι

διατυπωμένο στο σχολικό εγχειρίδιο, αλλά τροποποιήθηκε ώστε να ταιριάζει στις γνώσεις και δυνατότητες των μαθητών σύμφωνα με υποδείξεις της εκπαιδευτικού του τμήματος.

Τα δύο φύλλα εργασίας περιλάμβαναν τα ίδια προβλήματα. Στο πρώτο φύλλο, οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν τα συγκεκριμένα προβλήματα, στα οποία οι πληροφορίες παρουσιάζονται μόνο λεκτικά. Στο δεύτερο φύλλο, το κάθε πρόβλημα περιλάμβανε συνδυασμό λεκτικού και εικονιστικού τρόπου παρουσίασης των πληροφοριών. Οι εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν άνηκαν σε μια από τις κατηγορία που ήδη έχουν αναλυθεί. Δηλαδή, ένα πρόβλημα παρουσιάζόταν με τη χρήση πληροφοριακής εικόνας, ένα με τη χρήση διακοσμητικής εικόνας και τη χρήση αριθμογραμμής για τη διαδικασία λύσης, ένα με τη χρήση βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας και τέλος, ένα με τη χρήση βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας. Οι συμμετέχοντες μπορούσαν να βασιστούν στις εικόνες για την επίλυση των προβλημάτων, ανάλογα με τη λειτουργία που αυτές επιτελούσαν. Για παράδειγμα, τα προβλήματα με πληροφοριακές εικόνες, δεν ήταν δυνατόν να επιλυθούν χωρίς να αντληθούν στοιχεία από τις εικόνες.

Τα 4 προβλήματα δόθηκαν στους μαθητές σε δύο φάσεις, όσα και τα φύλλα εργασίας. Αρχικά, οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τα προβλήματα χωρίς την παρουσία εικόνων. Δηλαδή, δόθηκε στους μαθητές το πρώτο φύλλο εργασίας που περιλαμβάνει τα προβλήματα, στα οποία οι πληροφορίες τους παρουσιάζονται μόνο λεκτικά. Οι μαθητές διάβασαν το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά και ο ερευνητής έθετε βοηθητικά ερωτήματα στους μαθητές, ώστε να ανακαλέσουν κάποιες προϋπάρχουσες γνώσεις από τη μνήμη τους που ήταν απαραίτητες. Επειδή, στη συγκεκριμένη έρευνα αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πόσο οι μαθητές χρησιμοποιούν τις εικόνες ή όχι για να λύσουν τα προβλήματα, αν τις θεωρούν ή όχι απαραίτητες και πόσο τους βοήθησαν ή τους δυσκόλεψαν, τα προβλήματα που επιλέχθηκαν ήταν προσαρμοσμένα τις ικανότητες των μαθητών. Αυτό σημαίνει ότι οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν τα προβλήματα με επιτυχία. Στη συνέχεια, δόθηκαν στους μαθητές τα ίδια προβλήματα με την παρουσία λεκτικών και εικονιστικών πληροφοριών. Στο τέλος της διαδικασίας, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν ένα ερωτηματολόγιο για να εκφράσουν τις απόψεις τους σχετικά με το αν οι εικόνες στα συγκεκριμένα προβλήματα τους βοήθησαν στην επίλυσή τους. Κατά τη διαδικασία, ο κάθε μαθητής

έπρεπε να εργαστεί ατομικά λύνοντας αρχικά τα προβλήματα και στη συνέχεια συμπληρώνοντας το ερωτηματολόγιο. Το χρονικό διάστημα που είχε ο κάθε μαθητής στη διάθεσή του ήταν δύο διδακτικές ώρες. Επιπλέον, διατηρήθηκε η ανωνυμία των μαθητών και οι μαθητές ενημερώθηκαν από την αρχή της διαδικασίας ότι δεν είναι απαραίτητο να γράψουν τα ονόματά τους στα φύλλα εργασίας και στο ερωτηματολόγιο και ακόμη ότι δεν θα βαθμολογηθούν, ώστε να μην αγχωθούν για τις επιδόσεις τους.

Πριν από την εκτενή παρουσίαση των δοκιμασιών και των εργαλείων είναι σημαντικό να ορίσουμε τις μεταβλητές της συγκεκριμένης μελέτης. Στην περίπτωση μας θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή τα 4 μαθηματικά προβλήματα που δίνονται στους μαθητές με 2 μορφές, αρχικά μόνο λεκτικά και στη συνέχεια με την παρουσία λεκτικών και εικονιστικών στοιχείων και το ερωτηματολόγιο. Ως εξαρτημένη μεταβλητή θεωρούμε τις απαντήσεις των μαθητών στα προβλήματα, αλλά και τα σχόλια που καταγράφουν στο ερωτηματολόγιο καταγράφοντας τις απόψεις τους.

Παρουσίαση των προβλημάτων

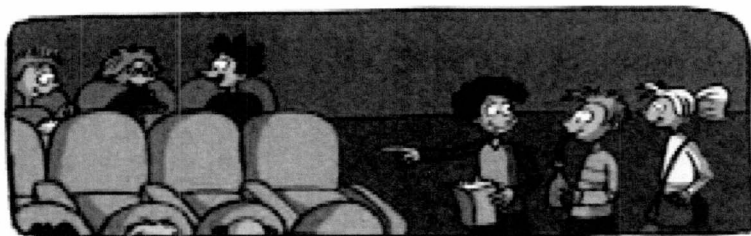
Πρόβλημα 1

Το πρώτο πρόβλημα είχε τον τίτλο «Στον κινηματογράφο». Το πλαίσιο του προβλήματος ήταν γνωστό στους μαθητές, αφού όλοι οι μαθητές εξέφρασαν ότι πηγαίνουν συχνά στον κινηματογράφο με τους γονείς τους. Έτσι, η θεματολογία-περιεχόμενο του συγκεκριμένου προβλήματος αποτελεί ένα μέρος της κοινωνικής ζωής των μαθητών. Η εκφώνηση του προβλήματος στο πρώτο φύλλο εργασίας δόθηκε ως εξής:

- ❖ Ο Μίλτος, η Αθηνά και ο Χριστόφορος πήγαν να δούνε μια ταινία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε 3 διαθέσιμες θέσεις;

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, το ίδιο πρόβλημα δόθηκε με τη χρήση βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας. Η εκφώνηση στο δεύτερο φύλλο εργασίας ήταν η εξής:

- ❖ Ο Μίλτος, η Αθηνά και ο Χριστόφορος πήγαν να δούνε μια ταινία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε 3 διαθέσιμες θέσεις;



Πρόβλημα 2

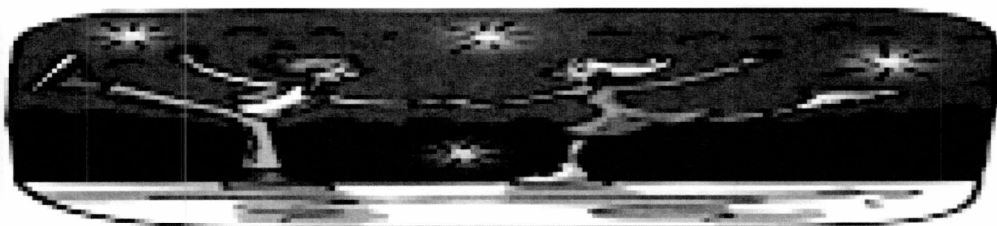
Το δεύτερο πρόβλημα είχε τον τίτλο «Παιχνίδια σε ομάδες». Ουσιαστικά, η θεματολογία του προβλήματος αφορούσε το άθλημα του καλλιτεχνικού πατινάζ. Οι περισσότεροι μαθητές έχουν παρακολουθήσει στην τηλεόραση αγώνες αυτού του αθλήματος. Η θεματική μαθηματική περιοχή στην οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο πρόβλημα σχετίζεται με τους δεκαδικούς αριθμούς. Το συγκεκριμένο πρόβλημα δόθηκε στο πρώτο φύλλο εργασίας ως εξής:

Η Νεφέλη και η Νάνσυ παρακολουθούν στην τηλεόραση καλλιτεχνικό πατινάζ που τους αρέσει πολύ. Τους έκαναν εντύπωση οι βαθμολογίες:

- Το ζευγάρι από τον Καναδά πήρε **9,850** βαθμούς.
- Το ζευγάρι από την Αυστρία πήρε **9,760** βαθμούς.
- Το ζευγάρι από τη Γαλλία πήρε μια βαθμολογία **ανάμεσα** στις βαθμολογίες των άλλων δύο ζευγαριών. Ποια μπορεί να είναι η βαθμολογία του;

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, το πρόβλημα παρουσιάστηκε με τη χρήση διακοσμητικής εικόνας και τη χρήση αριθμογραμμής για τη διαδικασία επίλυσής του. Στο δεύτερο φύλλο δόθηκε ως εξής:

Η Νεφέλη και η Νάνσυ παρακολουθούν στην τηλεόραση καλλιτεχνικό πατινάζ που τους αρέσει πολύ. Τους έκαναν εντύπωση οι βαθμολογίες:



- Το ζευγάρι από τον Καναδά πήρε **9,850** βαθμούς.
- Το ζευγάρι από την Αυστρία πήρε **9,760** βαθμούς.
- Το ζευγάρι από τη Γαλλία πήρε μια βαθμολογία **ανάμεσα** στις βαθμολογίες των άλλων δύο ζευγαριών. Ποια μπορεί να είναι η βαθμολογία του;

Δείχνω στην **αριθμογραμμή** τις τρεις βαθμολογίες:



Πρόβλημα 3

Το τρίτο πρόβλημα είχε τον τίτλο «Στην περίοδο των εκπτώσεων». Οι εκπτώσεις αποτελούν ένα οικείο θέμα στους μαθητές, καθώς γνωρίζουν πως κάθε 2-3 φορές το χρόνο υπάρχουν εκπτώσεις στα καταστήματα, καθώς υπάρχουν σε πολλές βιτρίνες και σε διαφημίσεις. Η θεματική μαθηματική περιοχή στην οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι τα ποσοστά. Το πρόβλημα όμως τροποποιήθηκε ώστε να ταιριάζει με τις ικανότητες των μαθητών. Αρχικά, στο πρώτο φύλλο εργασίας δόθηκε ως εξής:

- ❖ Στην περίοδο των εκπτώσεων ο Παύλος επισκέφτηκε δυο καταστήματα με παιχνίδια. Η παιχνιδομηχανή που ήθελε είχε **αρχική τιμή 150ευρώ**:

Α' κατάσταση: **έκπτωση 10%** για την παιχνιδομηχανή.

Β' κατάσταση: **έκπτωση 20%** για την παιχνιδομηχανή.

1. Πόσα ευρώ έκπτωση έχει η παιχνιδομηχανή στο πρώτο κατάστημα;

2. Πόσα ευρώ έκπτωση έχει η παιχνιδομηχανή στο δεύτερο κατάστημα;

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας το πρόβλημα παρουσιάζεται με τη χρήση πληροφοριακής εικόνας, ως εξής:

- ❖ Στην περίοδο των εκπτώσεων ο Παύλος επισκέφτηκε δυο καταστήματα με παιχνίδια.



1. Πόσα ευρώ έκπτωση έχει η παιχνιδομηχανή στο πρώτο κατάστημα;
2. Πόσα ευρώ έκπτωση έχει η παιχνιδομηχανή στο δεύτερο κατάστημα;

Πρόβλημα 4

Το τέταρτο πρόβλημα είχε τίτλο «Επίσκεψη στην έκθεση». Η θεματολογία-περιεχόμενο του προβλήματος αφορά στη σχολική ζωή των μαθητών και οι εκπαιδευτικές επισκέψεις με το σχολείο είναι κάτι γνώσιμο στους μαθητές. Η θεματική μαθηματική περιοχή στην οποία αναφέρεται το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα οι έννοιες : ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, διαγώνιος. Στο πρώτο φύλλο εργασίας, το πρόβλημα δόθηκε ως εξής:

- ❖ Τα παιδιά στην τάξη της Νεφέλης επισκέφτηκαν την έκθεση «Ταξίδι στον κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών». Όταν επέστρεψαν στο σχολείο, αποφάσισαν να κάνουν στην τάξη κάποιες από τις δραστηριότητες που είδαν στην έκθεση:

Χρησιμοποιούμε μια κόλλα χαρτί A4 (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο):

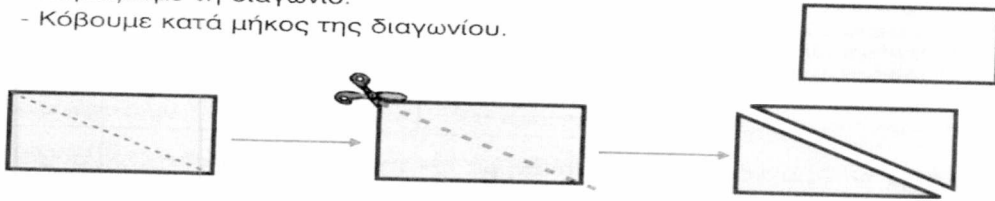
- χαράζουμε τη διαγώνιο
- κόβουμε κατά μήκος της διαγωνίου

Μπορείς να κάνεις το ίδιο σε ένα φύλλο A4; Τι σχηματίζεται;

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, το πρόβλημα δόθηκε με τη χρήση βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας, ως εξής:

- ❖ Τα παιδιά στην τάξη της Νεφέλης επισκέφτηκαν την έκθεση «Ταξίδι στον κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών». Όταν επέστρεψαν στο σχολείο, αποφάσισαν να κάνουν στην τάξη κάποιες από τις δραστηριότητες που είδαν στην έκθεση:

- α. Χρησιμοποιούμε μια κόλλα χαρτί A4 (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
 - Χαράζουμε τη διαγώνιο.
 - Κόβουμε κατά μήκος της διαγωνίου.



Μπορείς να κάνεις το ίδιο σε ένα φύλλο A4; Τι σχηματίζεται;

Ερωτηματολόγιο

Επιπλέον, για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο ένα ερωτηματολόγιο για κάθε μαθητή, το οποίο περιλάμβανε 4 ερωτήσεις, μία δηλαδή για κάθε πρόβλημα με 3 υποερωτήματα. Τα υποερωτήματα αποτελούνταν από 2 ερωτήσεις κλειστού τύπου και 1 ανοιχτού τύπου. Οι ερωτήσεις ουσιαστικά ζητούσαν από τους μαθητές να εκφράσουν τις απόψεις τους σχετικά με το πόσο βοηθήθηκαν για την επίλυση του κάθε προβλήματος με τη χρήση των συγκεκριμένων εικόνων. Δηλαδή, ζητήθηκε από τους μαθητές να πουν σε ποια προβλήματα χρησιμοποίησαν τις εικόνες για να λύσουν το πρόβλημα και αν θα μπορούσαν να λύσουν κάποιο(ένα ή περισσότερα) από αυτά τα προβλήματα χωρίς την παρουσία εικονιστικών στοιχείων.

Πιο συγκεκριμένα το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε τις εξής ερωτήσεις:

1. Το πρόβλημα 1 με τίτλο «Στον κινηματογράφο»:

- α. κατάφερες να το λύσεις χωρίς την εικόνα;
- β. Αν ναι, θεωρείς περιττή την εικόνα;
- γ. Αν όχι, σε βοήθησε η συγκεκριμένη εικόνα στη λύση του προβλήματος, και πώς;

2. Το πρόβλημα 2 με τίτλο «Παιχνίδια σε ομάδες»:

- α. κατάφερες να το λύσεις χωρίς την εικόνα και την αριθμογραμμή;

β. Αν ναι, θεωρείς περιττή την εικόνα και την αριθμογραμμή;

γ. Τι σε βοήθησε περισσότερο για να το λύσεις: η εικόνα ή η αριθμογραμμή και πώς;

3. Το πρόβλημα 3 με τίτλο «Στην περίοδο των εκπτώσεων»:

α. το έλυσες χωρίς την εικόνα τη δεύτερη φορά;

β. Αν ναι, θεωρείς περιττή την εικόνα;

γ. Αν όχι, πιστεύεις ότι σε βοήθησε η εικόνα να το λύσεις; Ποιες πληροφορίες πάνω στην εικόνα σε βοήθησαν;

4. Το πρόβλημα 4 με τίτλο «Επίσκεψη στην έκθεση»:

α. το έλυσες χωρίς την εικόνα;

β. Αν ναι, θεωρείς περιττή την εικόνα;

γ. Αν όχι, πιστεύεις ότι σε βοήθησε η εικόνα να το λύσεις; και με ποιο τρόπο;

7.2.5. Προβλήματα κατά την έρευνα

Ένα πρόβλημα που δημιουργήθηκε είναι ότι οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα ανήσυχοι στη διάρκεια συμπλήρωσης των φύλλων εργασίας και του ερωτηματολογίου. Ουσιαστικά, επειδή δε θεωρούσαν την ερευνήτρια ως δασκάλα τους έκαναν αρκετή φασαρία. Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύθηκε με την παρουσία της εκπαιδευτικού του τμήματος μέσα στην αίθουσα, η οποία διέθετε περισσότερο κύρος για τους μαθητές.

Επίσης, ένα άλλο πρόβλημα που παρατηρήθηκε ήταν ότι ορισμένοι μαθητές δεν κατάλαβαν ακριβώς το ρόλο των πληροφοριακών εικόνων. Επειδή, τα προβλήματα δόθηκαν αρχικά μόνο με λεκτική παρουσίαση και οι μαθητές κατάφεραν να τα επιλύσουν ισχυρίστηκαν ότι και στο δεύτερο φύλλο εργασίας μπορούσαν να επιλύσουν το πρόβλημα χωρίς την παρουσία εικόνας. Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύθηκε, καθώς η ερευνήτρια είχε λίγο χρόνο να διαβάσει τα ερωτηματολόγια των

μαθητών και τους έθεσε προφορικά κάποιες διευκρινιστικές ερωτήσεις για να τους βοηθήσει.

7.2.6. Αποτελέσματα

Για να βρεθούν τα αποτελέσματα της επιτυχίας των μαθητών στα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν κάποια κριτήρια επιτυχίας, σύμφωνα τα οποία η επιτυχία στο κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 0 για κάθε λανθασμένη απάντηση, με 0,5 για κάθε μερικώς ορθή απάντηση και με 1 για κάθε ορθή απάντηση.

Πρώτο φύλλο εργασίας

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που αφορούν στο πρώτο φύλλο εργασίας, στο οποίο τα προβλήματα δόθηκαν μόνο με λεκτική παρουσίαση.

Το πρώτο πρόβλημα, οι μαθητές το έλυσαν δημιουργώντας ένα δικό τους σχέδιο, όπως αναφέρει και ο Polya στα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος, όπου αρχικά δημιούργησαν διάφορες τριάδες για να σκεφτούν ποιοι μπορεί να είναι οι δυνατοί συνδυασμοί που μπορούν να καθίσουν τα 3 παιδιά του προβλήματος στις 3 διαθέσιμες θέσεις και στη συνέχεια έδωσαν την τελική τους απάντηση. Το ποσοστό επιτυχίας σε αυτό το πρόβλημα ήταν 92,5%.

Το δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές το έλυσαν καθώς προσπάθησαν να σκεφτούν αριθμούς ανάμεσα στο 9,760 με 9,850. Οι περισσότεροι μαθητές έγραψαν περισσότερους από ένα πιθανούς αριθμούς που μπορεί να αντιστοιχούν στη βαθμολογία του ζευγαριού της Γαλλίας, όπως ζητάει το πρόβλημα. Ορισμένοι μαθητές παρουσίασαν ένα ή δύο αριθμούς, άλλοι παρουσίασαν περισσότερους και άλλοι ότι μπορεί να είναι όλοι οι αριθμοί από το 9,761 μέχρι 9,849 δίνοντας και κάποια παραδείγματα. Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών σε αυτό το πρόβλημα είναι 87,5%.

Το τρίτο πρόβλημα λύθηκε από τους μαθητές με το μοναδικό τρόπο που είχαν διδαχθεί να διαχειρίζονται τα ποσοστά σύμφωνα με τη δασκάλα του τμήματος, δηλαδή με τον πολλαπλασιασμό ενός ακέραιου αριθμού με κλάσμα που έχει στον παρονομαστή του το 100. Έτσι, όλες οι απαντήσεις των μαθητών που κατάφεραν να

λύσουν το πρόβλημα ήταν της μορφής « $150 \times 10/100 = 1500/100 = 15$ ». Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών σε αυτό το πρόβλημα ήταν 90%.

Το τέταρτο πρόβλημα, οι μαθητές το έλυσαν ακολουθώντας τις οδηγίες που τους δινόταν σε ένα φύλλο A4 που τους έδωσε η ερευνήτρια. Το ποσοστό επιτυχίας στο πρόβλημα ήταν 87,5%.

Δεύτερο φύλλο εργασίας

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που αφορούν στο δεύτερο φύλλο εργασίας, στο οποίο οι πληροφορίες στα προβλήματα δόθηκαν με συνδυασμό λεκτικό και εικονιστικό τρόπο.

Οι μαθητές διάβασαν το πρώτο πρόβλημα και με υποδείξεις της ερευνήτριας παρατήρησαν και σχολίασαν την εικόνα. Η συγκεκριμένη εικόνα ήταν βοηθητική-αναπαραστατική. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν το ίδιο τρόπο με πριν για να λύσουν το πρόβλημα. Υπήρχαν μάλιστα κάποιοι μαθητές, οι οποίοι κατευθείαν καθώς αντιλήφθηκαν πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα και μαθητές που έγραψαν αναλυτικά τους διαφορετικούς συνδυασμούς και μετά απάντησαν. Το ποσοστό επιτυχίας στην επίδοση των μαθητών ήταν ίδιο, δηλαδή 92,5%.

Στο δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές διάβασαν το πρόβλημα και με τις υποδείξεις της ερευνήτριας παρατήρησαν και σχολίασαν την εικόνα, η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν διακοσμητική. Επιπλέον, οι μαθητές σχολίασαν ότι στο δεύτερο φύλλο εργασίας εκτός από την εικόνα που προστέθηκε σε αυτό το πρόβλημα υπήρχε και μια αριθμογραμμή που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν για να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους. Το ποσοστό επιτυχίας σε αυτό το πρόβλημα ήταν 92,5%.

Στο τρίτο πρόβλημα, οι μαθητές έπρεπε να διαβάσουν το κείμενο, να παρατηρήσουν την εικόνα και να αποκωδικοποιήσουν τα στοιχεία της εικόνας που χρειάζονταν για να τα λύσουν, καθώς η εικόνα ήταν πληροφοριακή. Υπήρχαν μαθητές μάλιστα, οι οποίοι υπογράμμισαν μέσα στην εικόνα κάποια στοιχεία απαραίτητα για τη λύση. Το ποσοστό επιτυχίας σε αυτό το πρόβλημα ήταν 75%.

Τέλος, στο τέταρτο πρόβλημα οι μαθητές πάλι έπρεπε να διαβάσουν το πρόβλημα και τις οδηγίες που τους δίνονταν για να το λύσουν. Σε αυτό υπήρχε η

παρουσία βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας. Το ποσοστό επιτυχίας σε αυτό το πρόβλημα ήταν 90%.

Μια σύγκριση στις επιδόσεις των μαθητών στα δύο φύλλα



Συμπερασματικά, τα ποσοστά επιτυχίας στις επιδόσεις των μαθητών δεν άλλαξαν με μεγάλες διαφορές σε καμία από τις κατηγορίες των εικονιστικών στοιχείων που προστέθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των μαθητών στο πρώτο πρόβλημα, στο οποίο υπάρχει παρουσία βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας οι σωστές απαντήσεις έμειναν ακριβώς οι ίδιες. Στο δεύτερο πρόβλημα, που υπήρχε η παρουσία διακοσμητικής εικόνας και της αριθμογραμμής, το ποσοστό επιτυχίας αυξήθηκε λίγο από 87,5% σε 92,5% και αυτό πιθανόν να οφείλεται στη χρήση της αριθμογραμμής, καθώς η εικόνα δεν περιλάμβανε πληροφορίες που αφορούσαν στη λύση του προβλήματος. Στο τρίτο πρόβλημα, που υπήρχε παρουσία πληροφοριακής εικόνας, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών φαίνεται να μειώθηκαν από 90% σε

75%. Τέλος, στο τέταρτο πρόβλημα, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών φαίνεται να αυξήθηκαν από 87,5% σε 90% με την παρουσία βοηθητικής-οργανωτικής εικόνας.

Αποτελέσματα από το ερωτηματολόγιο

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν εκτός από τις λύσεις των μαθητών οι ίδιες οι απόψεις τους σχετικά με τη λειτουργία και το ρόλο των εικονιστικών στοιχείων στα συγκεκριμένα προβλήματα.

Σύμφωνα με το ερωτηματολόγιο για το πρώτο πρόβλημα, στο οποίο χρησιμοποιήθηκε βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα, οι 19 από τους 20 μαθητές, δηλαδή το 95% των μαθητών, υποστήριξαν ότι μπορούν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα χωρίς την εικόνα. Κάποιες απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

- ❖ *Το πρόβλημα το έλυσα χωρίς την εικόνα, η οποία στο δεύτερο φυλλάδιο δε με βοήθησε καθόλου οπότε τη θεωρώ περιττή.*
- ❖ *Η εικόνα δε με βοήθησε καθόλου και χωρίς την εικόνα τα κατάφερα.*
- ❖ *Το πρώτο πρόβλημα ήταν εύκολο και μπόρεσα να το λύσω και χωρίς την εικόνα.*
- ❖ *Εγώ τα κατάφερα χωρίς την εικόνα, αλλά καλό είναι να υπάρχει.*
- ❖ *Δεν χρειάστηκα την εικόνα.*
- ❖ *Θεωρώ την εικόνα περιττή.*
- ❖ *Δε με βοήθησε η εικόνα.*

Μόνο η μαθήτρια που αντιμετώπιζε μαθησιακές δυσκολίες υποστήριξε ότι « Η εικόνα με βοήθησε πολύ». Στη συνέχεια, η ερευνήτρια ρώτησε τη μαθήτρια, γιατί πιστεύει ότι την βοήθησε η εικόνα και εκείνη απάντησε ότι τη βοήθησε να καταλάβει σε τι αναφέρεται το πρόβλημα και να σκεφτεί πιο εύκολα τη λύση του, αφού παρουσιάζονταν 3 παιδιά στον κινηματογράφο και 3 θέσεις για να καθίσουν.

Για το δεύτερο πρόβλημα, στο οποίο χρησιμοποιήθηκε η διακοσμητική εικόνα και η αριθμογραμμή, οι 19 από τους 20 μαθητές, δηλαδή το 95% των μαθητών, υποστήριξαν ότι η εικόνα ήταν περιττή και δεν τη χρησιμοποίησαν για να λύσουν το

πρόβλημα. Ακόμη, 8 στους 20 μαθητές, δηλαδή το 40% των μαθητών, υποστήριξαν ότι η χρήση της αριθμογραμμής τους βοήθησε να λύσουν το πρόβλημα σε σύγκριση με το πρώτο φύλλο εργασίας στο οποίο δεν υπήρχε η αριθμογραμμή. Κάποιες απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

- ❖ *Μπόρεσα να το λύσω χωρίς την εικόνα.*
- ❖ *Η εικόνα και η αριθμογραμμή δε με βοήθησαν καθόλου, ειδικά η εικόνα που δεν είχε κανένα στοιχείο.*
- ❖ *Κατάφερα να το λύσω χωρίς την εικόνα και την αριθμογραμμή, όμως δε θεωρώ την αριθμογραμμή περιττή.*
- ❖ *Η εικόνα δε βοηθάει καθόλου, αφού δε δίνει κανένα στοιχείο, ενώ η αριθμογραμμή βοηθάει πολύ.*
- ❖ *Μόνο η αριθμογραμμή με βοήθησε, η εικόνα όχι.*
- ❖ *Μόνο η αριθμογραμμή με βοήθησε, γιατί έβαλα τους αριθμούς στη σειρά.*
- ❖ *Η αριθμογραμμή, γιατί με βοήθησε να καταλάβω καλύτερα τη σειρά.*

Μόνο η μαθήτριά που αντιμετώπιζε μαθησιακές δυσκολίες υποστήριξε ότι η εικόνα στο συγκεκριμένο πρόβλημα τη βοήθησε, όχι για την επίλυση του προβλήματος, αλλά για να καταλάβει το περιεχόμενο-θεματολογία. Η ίδια γράφει «*Με βοήθησε η εικόνα για να καταλάβω τα λόγια*». Επειδή, δυσκολευόταν στην ανάγνωση, η χρήση της εικόνας τη βοήθησε να καταλάβει το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται το συγκεκριμένο πρόβλημα, βλέποντας την εικόνα, τους αριθμούς και την τελική ερώτηση κατάφερε να λύσει το πρόβλημα.

Για το τρίτο πρόβλημα, στο οποία χρησιμοποιήθηκε πληροφοριακή εικόνα δημιουργήθηκε ένα πρόβλημα στο να κατανοήσουν οι μαθητές το ρόλο που διαδραματίζει η συγκεκριμένη εικόνα στην επίλυση του προβλήματος. Αρχικά, οι 7 από τους 20 μαθητές, δηλαδή το 35% των μαθητών, υποστήριξαν ότι δεν χρειάζονταν την εικόνα για να λύσουν το πρόβλημα. Επειδή, οι μαθητές κλήθηκαν αρχικά να λύσουν το πρόβλημα χωρίς την εικόνα επηρεάστηκαν από την πρώτη λύση, οι οποίοι υποστήριξαν ότι μπορούν να λύσουν το πρόβλημα και χωρίς την εικόνα. Η ερευνήτρια έθεσε κάποιες διευκρινιστικές ερωτήσεις σε αυτούς τους μαθητές. Στη συνέχεια, οι μαθητές κατάλαβαν ότι η συγκεκριμένη εικόνα στο δεύτερο φύλλο

εργασίας ήταν απαραίτητη, αφού περιλάμβανε τα στοιχεία τα οποία έπρεπε να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να το λύσουν. Παρ' όλα αυτά, οι συγκεκριμένοι μαθητές υποστήριξαν ότι τους ήταν πιο εύκολο να λύσουν το πρόβλημα χωρίς την εικόνα, διότι η εικόνα τους μπερδευε. Ουσιαστικά, οι μαθητές δυσκολεύονταν να αποκωδικοποιήσουν τις πληροφορίες που χρειάζονταν από την εικόνα και γι' αυτό θεώρησαν ότι όταν το πρόβλημα παρουσιάστηκε μόνο λεκτικά τους ήταν πιο εύκολο να σκεφτούν τη λύση του. Οι υπόλοιποι 13 μαθητές, δηλαδή το 65% των μαθητών υποστήριξαν από την αρχή ότι η εικόνα ήταν απαραίτητη για τη λύση του προβλήματος στο δεύτερο φυλλάδιο, αφού περιλάμβανε όλες τις πληροφορίες που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν. Κάποιες χαρακτηριστικές απόψεις των μαθητών ήταν οι εξής:

- ❖ *Η εικόνα με βοήθησε και ήταν απαραίτητη, γιατί είχε τις τιμές.*
- ❖ *Μπόρεσα να το λύσω και χωρίς την εικόνα στο πρώτο φυλλάδιο, αλλά στο δεύτερο η εικόνα βοηθάει, γιατί υπήρχαν πάνω οι πληροφορίες.*
- ❖ *Στην αρχή το έλυσα χωρίς την εικόνα, στο δεύτερο φυλλάδιο η εικόνα με βοήθησε.*
- ❖ *Η εικόνα με βοήθησε να το λύσω, γιατί υπήρχαν πάνω οι τιμές και οι εκπτώσεις.*
- ❖ *Το έλυσα πιο εύκολα χωρίς την εικόνα.*
- ❖ *Δε με βοήθησε η εικόνα, γιατί με μπερδευσε.*
- ❖ *Στην εικόνα ήταν οι τιμές και οι εκπτώσεις.*

Για το τέταρτο πρόβλημα, στο οποίο χρησιμοποιήθηκε βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα, οι 7 από τους 20 μαθητές, δηλαδή το 35% των μαθητών υποστήριξαν ότι η εικόνα που υπήρχε στο δεύτερο φυλλάδιο τους βοήθησε να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι υπόλοιποι 13 μαθητές υποστήριξαν ότι η εικόνα ήταν περιττή, αφού μπορούσαν να το λύσουν και χωρίς αυτή. Κάποιες απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

- ❖ *Το έλυσα και χωρίς την εικόνα, αλλά στο δεύτερο φυλλάδιο με βοήθησε, γιατί δείχνει τον τρόπο λύσης.*

- ❖ *Η εικόνα δε με βοήθησε να το λύσω, μπορούσα και χωρίς την εικόνα.*
- ❖ *Η εικόνα με βοήθησε, γιατί δε θυμόμουν τι είναι η διαγώνιος, το είδα και το θυμήθηκα.*
- ❖ *Πριν από την εικόνα δε μπορούσα να το λύσω.*
- ❖ *Η εικόνα με βοήθησε να το λύσω καλύτερα από πριν.*
- ❖ *Η εικόνα με βοήθησε να το λύσω για να καταλάβω πώς να χαράζω στο χαρτί.*
- ❖ *Η εικόνα ήταν περιττή.*

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε την τάση των μαθητών να μην στηρίζονται στις εικόνες για να λύσουν τα προβλήματα και μάλιστα πολλές φορές να ισχυρίζονται ότι δε είναι απαραίτητες ακόμη και στην περίπτωση της πληροφοριακής εικόνας. Βέβαια, η άποψή τους αυτή μπορεί να ήταν εντελώς διαφορετική αν το πρόβλημα τους δινόταν απευθείας με τη χρήση πληροφοριακής εικόνας. Το είδος των εικονιστικών στοιχείων που επηρέασε θετικά ή αρνητικά τους μαθητές ήταν η βοηθητική-οργανωτική, η αριθμογραμμική και η πληροφοριακή εικόνα. Φαίνεται ότι στα προβλήματα που περιλάμβαναν αυτό το είδος των εικονιστικών στοιχείων δημιουργήθηκαν γνωστικές αντιφάσεις στους μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων.

7.3. Συζήτηση – συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία αποτελεί διερευνητική προσπάθεια για το ρόλο των εικονιστικών στοιχείων και, κατά συνέπεια, την ανάδειξη της σημασίας του οπτικού γραμματισμού στην κατανόηση των μαθηματικών προβλημάτων και τις διαδικασίες επίλυσής τους. Η ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν και να ερμηνεύουν εικόνες απαιτεί και επιτρέπει την εξοικείωσή τους με τις μαθηματικές έννοιες και την επίλυση προβλήματος. Έτσι, γίνεται αντιληπτό τόσο ο σύνθετος ρόλος των εικόνων όσο και η σημασία τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Σε πρώτη φάση ασχοληθήκαμε με τη μελέτη του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Ε΄ δημοτικού σε δύο άξονες. Αρχικά, μελετήθηκαν τα συγκεκριμένα προβλήματα «Δραστηριότητα-Διερεύνηση» ως προς τη θεματολογία

τους και το περιεχόμενό τους και στη συνέχεια ως προς το είδος των εικονιστικών στοιχείων που παρουσιάζονται σε αυτά.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα ως προς τη θεματική-περιεχόμενο των προβλημάτων, υπερτερούν αυτά που σχετίζονται με την κοινωνική και τη σχολική ζωή των μαθητών. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς η θεματική των προβλημάτων είναι οικεία στους μαθητές. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συνδέσουν το μάθημα των μαθηματικών με την καθημερινή τους ζωή, όπου η χρήση των μαθηματικών είναι απαραίτητη. Η σύνδεση των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια που μπορεί να συναντήσουν στην καθημερινή ζωή τους επιδρά μάλλον θετικά, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εφόδια για να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις της πραγματικής ζωής. Επιπλέον, παρουσιάζονται αρκετά προβλήματα που συνδέονται με άλλα σχολικά μαθήματα, όμως είναι πολύ λίγα τα προβλήματα που σχετίζονται με τα προσωπικά ενδιαφέροντα των παιδιών αυτής της ηλικίας, τα παιχνίδια που παίζουν και τον αθλητισμό, που ίσως θα επιδρούσαν θετικά, καθώς θα κινητοποιούσαν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Από τη μελέτη των εικονιστικών στοιχείων στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε' Δημοτικού προέκυψε ότι οι αναπαραστάσεις, όπως είναι τα διαγράμματα, οι αριθμογραμμές, τα γραφήματα, οι πίνακες, τα ραβδογράμματα, υπερτερούν σε συχνότητα έναντι των άλλων ειδών. Αμέσως μετά με φθίνουσα σειρά και ελάχιστη διαφορά βρίσκονται οι πληροφοριακές εικόνες και στη συνέχεια οι διακοσμητικές. Έπειτα, με πολύ μικρή συχνότητα παρουσιάζονται οι βοηθητικές εικόνες τόσο οι αναπαραστατικές όσο και οι οργανωτικές, που η παρουσία τους θεωρείται μηδαμινή. Επιπλέον, θα πρέπει να αναφερθεί ότι μόνο σε ένα κεφάλαιο στη συγκεκριμένη «δραστηριότητα-ανακάλυψη» δεν υπήρχε κανένα είδος εικονιστικής αναπαράστασης. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με την έρευνα της Χαραλάμπους (2007) με αντικείμενο τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ' τάξης στην Ελλάδα και Κύπρο, όπου διαπιστώνεται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων συνοδεύεται από εικόνα, όπου υπερτερούν οι διακοσμητικές και πληροφοριακές εικόνες, ενώ η παρουσία βοηθητικών-οργανωτικών εικόνων είναι μηδαμινή. Το εύρημα αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές της Ε' Δημοτικού τυπικά θα πρέπει να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις πληροφοριακές εικόνες και την ερμηνεία τους στα μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τα άλλα είδη εικόνων που

εμφανίζονται λιγότερο συχνά. Σε κάθε περίπτωση, επειδή στην πλειοψηφία τους τα προβλήματα συνοδεύονταν από εικόνες (μόνο περίπου το 1,81% δεν είχαν κάποια εικονική αναπαράσταση), οι μαθητές έχουν την ευκαιρία πολύ συχνά να χρησιμοποιούν και να ερμηνεύουν εικόνες, οι περισσότερες από τις οποίες είναι έγχρωμες ψευδοεικόνες.

Σε δεύτερη φάση, διερευνήσαμε το ρόλο που διαδραματίζουν οι συγκεκριμένες κατηγορίες των εικονιστικών στοιχείων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος σε μαθητές της Ε' δημοτικού. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να μην διαφέρουν πολύ με τις αρχικές ερευνητικές υποθέσεις που τέθηκαν. Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται να επαληθεύεται η πρώτη υπόθεση της έρευνας ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Το γεγονός ότι παρατηρήθηκε διαφορά στην επίδοση των μαθητών στη λύση του προβλήματος όταν σε αυτό προστέθηκε διακοσμητική εικόνα, οφείλεται στο γεγονός ότι στο ίδιο πρόβλημα προστέθηκε και η χρήση της αριθμογραμμής. Έτσι, η μικρή διαφορά που παρουσιάζεται σχετίζεται με αυτό το είδος της αναπαράστασης και όχι με την παρουσία διακοσμητικής εικόνας. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα των Γαγάτση και Μάρκου (2002), οι οποίοι σε έρευνά τους με ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα βρήκαν ότι η παρουσία διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων δεν επηρέασε τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων αυτών. Το εύρημα αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί με βάση των άποψη των Carney και Levin (2002) ότι οι διακοσμητικές εικόνες, παρά το γεγονός ότι προσδίδουν ένα ελκυστικό χαρακτήρα στο κείμενο, δεν ενισχύουν την κατανόηση ή την ανάκληση πληροφοριών από το κείμενο. Ακόμη, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, ενώ οι διακοσμητικές εικόνες περνούν απαρατήρητες και δεν προσφέρουν τη δυνατότητα ερμηνευτικής λειτουργίας, οι εικονογράφοι τις προτιμούν ιδιαίτερα ακόμα και στις μεγάλες τάξεις του Δημοτικού (Λουμάκου, 2010), πιθανότατα για την ελκυστικότητα που προσφέρουν. Επισημαίνεται, επίσης, ότι οι πρωτότυπες εικόνες είναι λίγες και κυριαρχούν οι ψευδοεικόνες που δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματικότητα (Γρόσδος, 2009). Έτσι, ο ρόλος της διακοσμητικής εικόνας είναι ανύπαρκτος εφόσον κανένας μαθητής δεν τη χρησιμοποίησε, γεγονός που εκφράστηκε και ρητά από τους ίδιους τους μαθητές.

Αυτό οφείλεται στην ουδετερότητά της ως προς την πληροφοριακή της λειτουργία στο πρόβλημα.

Επιπρόσθετα, η αρχική ερευνητική υπόθεση ότι η χρήση των πληροφοριακών εικόνων πρόκειται να δυσκολέψει τους μαθητές στην επίλυση προβλήματος επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα. Οι πληροφοριακές εικόνες, αν και από τη φύση τους είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, δεν επηρέασαν θετικά τη συμπεριφορά των μαθητών σε σχέση με την επίδοσή τους όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα. Οι μαθητές παρουσίασαν χαμηλότερη επίδοση σε σύγκριση με την επίδοση που παρουσίασαν όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα, χωρίς την παρουσία εικόνας. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη ότι η παρουσία των εικόνων, και των αναπαραστάσεων γενικότερα, δεν είναι πάντοτε βοηθητική για τα παιδιά καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας (Carney & Levin, 2002). Η χρήση των εικόνων, επομένως, θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Όπως άλλωστε υποστηρίζει ο Seeger (1998) πρέπει να εγκαταλειφθεί η αντίληψη με βάση την οποία η κατανόηση στα μαθηματικά θεμελιώνεται σε κάποια αντιληπτική εικόνα της οποίας το νόημα θεωρείται αυτονόητο.

Τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται να οδηγούν σε μία αντίφαση. Ενώ το σχολικό εγχειρίδιο αποτελείται κατεξοχήν από πληροφοριακές εικόνες, οι μαθητές δυσκολεύονται να τις χρησιμοποιήσουν και να προχωρήσουν στη λύση τους. Η χρήση των εικόνων, συγκεκριμένα των πληροφοριακών, για την επίλυση προβλημάτων βρέθηκε ότι προκαλεί δυσκολία στους μαθητές. Ένα μικρό μέρος των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε αυτοβούλως την εικόνα και κατάφερε να αντλήσει τις απαραίτητες πληροφορίες, ενώ οι περισσότεροι χρειάστηκαν κάποια υπόδειξη από την ερευνήτρια, πιθανότατα λόγω έλλειψης εξοικείωσης με την ανάγνωση των πληροφοριακών εικόνων. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που όλοι οι μαθητές στηρίχθηκαν στις πληροφοριακές εικόνες για να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα, αρκετοί μαθητές αμφισβήτησαν τη χρησιμότητα των εικόνων αυτών, δηλώνοντας ότι δεν τους βοήθησαν αρκετά στη λύση των προβλημάτων.

Όσον αφορά στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων, οι μαθητές αγνόησαν την εικόνα και δεν έδειξαν αλλαγή στη συμπεριφορά τους, καθώς

δεν είχαν θετική συνεισφορά και μάλλον η εικόνα επιβάρυνε τους μαθητές με μία εικονική αναπαράσταση που δεν χρησιμοποιήσαν. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι μαθητές για να επιλύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποίησαν και στα δύο φύλλα εργασίας τη δημιουργία ενός δικού τους σχεδίου, σύμφωνα με τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος, όπως παρουσιάζει ο Polya. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση ότι δηλαδή, η παρουσία βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και οι μαθητές θα λάβουν υπ' όψη τους τις βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες για την επίλυση των προβλημάτων. Ακόμη, τα αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με την έρευνα των Ηλία, Χρυσάνθου και Φιλίππου (2003), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ο ρόλος της εικόνας στην επικοινωνία ήταν συμπληρωματικός και υποστηρικτικός του γλωσσικού κώδικα για την αναπαραστατική εικόνα. Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα αυτό είναι ότι οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος, με αποτέλεσμα άλλοτε να αγνοούνται από αυτούς και άλλοτε να χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων, αυτό επιβεβαιώθηκε σε έρευνα των Θεοδούλου και Γαγάτση (2003), οι οποίοι υποστήριξαν ότι οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες άλλοτε είχαν σημαντική επίδραση και άλλοτε όχι, ανάλογα με το είδος της πράξης που περιλαμβάνονταν στο πρόβλημα. Επιπρόσθετα, ίσως επειδή το πρόβλημα ήταν αντίστοιχο με τις ικανότητες των μαθητών και το θεώρησαν εύκολο για να το λύσουν, δε χρησιμοποίησαν τη βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα. Όπως άλλωστε αναφέρουν οι Carney και Levin (2002), όσο πιο δύσκολο είναι το κείμενο, τόσο πιο βοηθητικές είναι πιθανό να είναι οι εικόνες.

Από την άλλη, οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες φάνηκε να έχουν μια θετική επίδραση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος από ορισμένους μαθητές. Το εύρημα αυτό, που επαληθεύει τη δεύτερη υπόθεση της έρευνας, δείχνει ότι οι εικόνες αυτού του είδους βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να οργανώσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να καταλήξουν στην ορθή λύση του προβλήματος. Πριν από τη παρουσίαση και χρήση οργανωτικής και την υποβολή βοηθητικών ερωτήσεων ορισμένοι μαθητές δυσκολεύτηκαν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα ή ακολούθησαν λανθασμένη πορεία εργασίας. Η χρήση

της συγκεκριμένης κατηγορίας εικόνα τους βοήθησε και φαίνεται ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη συγκεκριμένη εικόνα συνειδητά, καθώς το εξέφρασαν οι ίδιοι οι μαθητές. Η οργανωτική εικόνα φάνηκε να χρησιμοποιείται στα τρία πρώτα στάδια επίλυσης του προβλήματος, δηλαδή στην κατανόηση, το σχεδιασμό και την εκτέλεση της λύσης. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με την έρευνα των Δεσλή και Μολασιώτη (2013), που υποστηρίζουν ότι οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες συμβάλλουν σημαντικά στην καλύτερη επίδοσή τους. Βέβαια, πρέπει να αναφερθεί ότι δε χρησιμοποίησαν όλοι μαθητές τη βοηθητική-οργανωτική εικόνα.

Οι βοηθητικές εικόνες, γενικά, δεν εξυπηρέτησαν ιδιαίτερα το ρόλο τους και πιο συγκεκριμένα, οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες δεν είχαν θετική συνεισφορά και μάλλον επιβάρυναν τους μαθητές με μία εικονική αναπαράσταση που δεν χρησιμοποίησαν, ενώ οι βοηθητικές-οργανωτικές σε άλλους μαθητές επέδρασαν θετικά και άλλοι μαθητές δε τη χρησιμοποίησαν καθόλου. Τα χαμηλά ποσοστά χρήσης των βοηθητικών-οργανωτικών και αναπαραστατικών-εικόνων, είναι γεγονός που επιβεβαιώνει τη δυσκολία των παιδιών να «διαβάσουν» και να χρησιμοποιήσουν τις εικόνες, παρ' όλο που αυτό το είδος των εικόνων σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή του προβλήματος και να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του. Η περιορισμένη χρήση των βοηθητικών εικόνων, ωστόσο, ενδεχομένως, εξηγείται και από την περιορισμένη παρουσία αυτού του είδους των εικόνων στο σχολικό βιβλίο, που έχει ως αποτέλεσμα να μην είναι τόσο εξοικειωμένοι οι μαθητές με τη χρήση των συγκεκριμένων εικόνων. Μια τέτοια ερμηνεία για τη δυσκολία των μαθητών να «διαβάζουν» τις εικόνες και να τις χρησιμοποιούν, δεν μπορεί να ισχύει για τις πληροφοριακές εικόνες που έχουν συχνή παρουσία στο σχολικό εγχειρίδιο και παρ' όλα αυτά οι μαθητές εξέφρασαν τη δυσκολία στην επεξεργασία της συγκεκριμένης κατηγορίας.

Ακόμη, η συνεισφορά της αριθμογραμμής στην κατανόηση του τρόπου λύσης του προβλήματος φαίνεται από τα αποτελέσματα της έρευνας και επιβεβαιώνεται η αρχική υπόθεση ότι η αριθμογραμμή θα βοηθήσει τους μαθητές στην επίλυση του προβλήματος. Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά, όπως είναι οι αριθμογραμμές, οι πίνακες, τα διαγράμματα, τα ραβδογράμματα, κ.α., υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθητών ήδη από τις μικρές τάξεις του δημοτικού και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση τους. Εξάλλου, και στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο

της Ε' δημοτικού ο αριθμός των αναπαραστάσεων αυτού του είδους υπερτερεί έναντι των άλλων.

Συμπερασματικά, εξετάζοντας την επίδραση του είδους των εικόνων στην επίδοση των μαθητών βρέθηκε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν στις περισσότερες περιπτώσεις παρόμοια επίδοση ή μικρή αλλαγή στις επιδόσεις στα προβλήματα ανεξάρτητα από τη λειτουργία που επιτελεί η εικόνα που τα συνοδεύει. Ακόμη, παρατηρείται ότι οι περισσότεροι μαθητές υποστήριξαν ότι δεν ήταν βοηθητική η χρήση των εικόνων και δεν στηρίχθηκαν σε αυτές για να επιλύσουν τα προβλήματα. Η αμφισβήτηση της χρησιμότητας των εικόνων δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου δεν χρησιμοποιούν την εικόνα ενσυνείδητα, αλλά ασυνείδητα. Μάλιστα συχνά δυσκολεύτηκαν στην εύρεση της λύσης, όταν η αναζήτηση των μαθηματικών πληροφοριών εξαρτάται μόνο από το οπτικό μέσο, όταν δηλαδή τα απαραίτητα στοιχεία για το πρόβλημα δίνονται στην εικόνα, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων με πληροφοριακές εικόνες. Η αποτελεσματική επίλυση μαθηματικού προβλήματος με τη χρήση εικόνων εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην εικόνα και στο πρόβλημα (λειτουργία εικόνας), στις προϋπάρχουσες γνώσεις και στις νοητικές ικανότητες (π.χ. εξεικόνιση) των μαθητών χωρίς βέβαια να αποκλείεται και η επίδραση άλλων παραγόντων. Οι δυσκολίες αυτές μπορεί να οφείλονται και σε άλλους παράγοντες όπως, στην πράξη που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί το πρόβλημα, στην ηλικία των μαθητών, στις ικανότητες προσοχής και σάρωσης της εικόνας από το άτομο, στη δυσκολία να περάσουν από τον ένα κώδικα στον άλλο, στη δυσκολία να ανασύρουν από τη μνήμη τους πληροφορίες μέσα από τις εικόνες. Επιπλέον, άλλοι παράγοντες μπορεί να είναι η αναντιστοιχία της εικόνας με τις ερμηνευτικές ικανότητες του ατόμου ή τις απαιτήσεις του έργου.

Με την επικράτηση και κυριαρχία των πολυτροπικών κειμένων στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται πλέον μία σαφής αλλαγή του ρόλου των μαθητών να μούνται περισσότερο στον οπτικό γραμματισμό προκειμένου να είναι σε θέση να αναπτύσσουν στρατηγικές για να διαβάζουν, να κατανοούν και να ερμηνεύουν τις εικόνες που τους παρουσιάζονται (Kress&vanLeeuwen, 2010). Ο εξεικονισμός του σχολικού εγχειριδίου αποτέλεσε μεγάλη αλλαγή στον εκπαιδευτικό χώρο (Πλειός, 2005) κάνοντας τις εικόνες δυναμικά διδακτικά μέσα για γνωστικά αντικείμενα όπως, για παράδειγμα, στις Φυσικές Επιστήμες, όπου οι εικόνες χρησιμοποιούνται σε

μεγάλο βαθμό ως βοηθητικά εργαλεία επεξεργασίας δύσκολων εννοιών και κατανόησής τους (Ιμβριώτης & Γκικοπούλου, 2009).

7.4. Προτάσεις

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αποσκοπούσε στην μελέτη του ρόλου των εικονιστικών στοιχείων στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στο δείγμα της συγκεκριμένης έρευνας υπήρχε μια μαθήτρια με μαθησιακές δυσκολίες, όπου οι δυσκολίες της αφορούσαν κυρίως στον τομέα της ανάγνωσης και της γραφής, η οποία υποστήριξε ότι ακόμα και η διακοσμητική και βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα, τη βοήθησαν να κατανοήσει καλύτερα το πλαίσιο του προβλήματος και τον τρόπο λύσης του προβλήματος. Έτσι, δημιουργείται η ανάγκη για μελλοντικές έρευνες στον τομέα των μαθησιακών δυσκολιών που σχετίζεται με το ρόλο των συγκεκριμένων εικονιστικών κατηγοριών σε αυτή την κατηγορία μαθητών, καθώς συμβαδίζει με το γεγονός ότι η οπτικοποίηση σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες συμβάλλει θετικά, αφού ελαφρύνει το γνωστικό φορτίο της γλώσσας (Παντελιάδου, 2011).

Επιπρόσθετα, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι τα πρόβλημα που δόθηκαν ήταν αντίστοιχα με τις ικανότητες των μαθητών και οι ίδιοι υποστήριξαν ότι ήταν εύκολο να τα λύσουν, με αποτέλεσμα να μην βοηθηθούν από τη χρήση βοηθητικής-αναπαραστατικής εικόνας και ελάχιστα από τη χρήση βοηθητικής-οργανωτικής. Όπως άλλωστε αναφέρουν οι Carney και Levin (2002), όσο πιο δύσκολο είναι το κείμενο, τόσο πιο βοηθητικές είναι πιθανό να είναι οι εικόνες. Επομένως, θα ήταν χρήσιμο να δημιουργηθούν μελλοντικές έρευνες, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να λύσουν δυσκολότερα έργα-προβλήματα για να διερευνηθεί περαιτέρω ο ρόλος των βοηθητικών εικόνων (αναπαραστατικών και οργανωτικών).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγαλιώτης Ι. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά: αιτιολογία, αξιολόγηση, αντιμετώπιση*, ε' έκδοση. Αθήνα: Ελληνικά γράμματα.

Ανδρέου Ξ., Μενελάου Α., Λεμονίδης Χ. (2007). Αντιμετώπιση ρεαλιστικών προβλημάτων από μαθητές Ε' Δημοτικού, Πρακτικά 9^{ου} Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, Πάφος 2-4 Φεβρουαρίου, σελ.197-206,ανακτήθηκε από:
<http://mathslife.eled.uowm.gr/sites/default/files/usersfiles/45.pdf>

Αρσένης Κ. (2004). *Πώς απαντούν οι μαθητές του Δημοτικού σε Ρεαλιστικά προβλήματα*, (εργασία από το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας), Φλώρινα, ανακτήθηκε από:
<http://mathslife.eled.uowm.gr/sites/default/files/usersfiles/arsen.pdf>

Βοσνιάδου Σ. (1995). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg

Γαγάτσης Α., Δημητρίου Α. (2004). Η επίδραση των «σημειωτικών» αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης, ανακτήθηκε από:
<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/514.pdf>

Γαγάτσης Α., Ηλία Ι., Καταλάνου Σ., Μοδέστου Μ., Ιωάννου Ο. (2006). *Αναγνωσιμότητα των κειμένων και ο ρόλος των εικόνων*, Πρακτικά 9^{ου} Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου, Τμήμα επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ανακτήθηκε από:
http://www.pek.org.cy/Proceedings_2006/1.%20kefalaio%201%20Themata%20mathimatikis%20Paideias/1.9.%20Gagatsis%20et%20al..pdf

Γαγάτσης Α., Θεοδούλου Ρ. (2003). Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις...Ποιό είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος; Ανακτήθηκε από:

<http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/theodgag.pdf>

Γαγάτσης Α., Λοΐζου Α., Στυλιανού Μ., Τόφαρου Σ.(2004), Διδακτικό Συμβόλαιο και μάθηση των Μαθηματικών. Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Πρακτικά 9^ο Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, ανακτήθηκε

από:http://www.pek.org.cy/Proceedings_2006/1.%20kefalaio%201%20Themata%20mathimatikis%20Paideias/1.4.%20A.%20Gagatsis%20et%20al..pdf

Γκλιάου-Χριστοδούλου Ν. (2012). Μάθηση μέσω επίλυσης προβλημάτων στο νηπιαγωγείο, αναρτήθηκε από:

http://iliastoutsoglidis.blogspot.gr/2012/02/blog-post_18.html

Γραίκος Ν. (2008). Παραγωγή και επεξεργασία μαθηματικών προβλημάτων, Η Διδακτική των Θετικών Επιστημών στην Εκπαίδευση: Δημιουργώντας γέφυρες επικοινωνίας ανάμεσα στο Νηπιαγωγείο, το Δημοτικό, το Γυμνάσιο, Πρακτικά συνεδρίου της OMEP, Θεσσαλονίκη, ανακτήθηκε από : <http://stavros.files.wordpress.com/2011/07/12-h-didaktiki-twn-thetikwn-epistimwn.pdf>

Γρόσδος Σ. (2008). Μαθηματικός γραμματισμός και Οπτικός γραμματισμός: Χρειάζονται τα παιδιά εικόνες για να λύσουν μαθηματικά προβλήματα; Η

Διδακτική των Θετικών Επιστημών στην Εκπαίδευση: δημιουργώντας

γέφυρες επικοινωνίας ανάμεσα στο Νηπιαγωγείο, το Δημοτικό, το Γυμνάσιο,

Πρακτικά συνεδρίου της OMEP, Θεσσαλονίκη, ανακτήθηκε από :

<http://stavros.files.wordpress.com/2011/07/12-h-didaktiki-twn-thetikwn->

Carney R.N. & Levin J.R. (2002). Pictorial illustrations still improve students'

learning from text. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.

Δεσλή Δ., Μολασιώτη Κ. (2013). *Οι εικόνες στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Β' Δημοτικού και ο ρόλος τους στην επίδοση των μαθητών*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Πρακτικά 5^{ου} Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, ανακτήθηκε από: <http://enedim2014.web.uowm.gr/>

De Landsheere G. (1996). *Η εμπειρική έρευνα στην εκπαίδευση*, (μετ. Γιώργος Δίπλας), Αθήνα, εκδόσεις: τυπωθήτω

Εξαρχάκος Θ. Γ. (1988). *Διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα, εκδόσεις: ελληνικά γράμματα

Ζίφκου Ε. (2011). *Ανάγνωση έντυπων πολυτροπικών κειμένων από παιδιά προσχολικής ηλικίας* (πτυχιακή εργασία), Βόλος, ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Ηλία Ι., Χρυσάνθου Α., Φιλίππου Γ. (2003). *Ο Ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ανακτήθηκε από:

<http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/ilia.pdf>

Hull, G. A., & Nelson, M. E. (2005). Locating the semiotic power of multimodality.

Written communication, 22(2), 224-261.

International Student Assessment (2003). Ζητήματα που αφορούν τις προϋποθέσεις του μαθηματικού γραμματισμού και τα διάφορα είδη του σε

σχέση με τους στόχους της PISA, ανακτήθηκε από <http://www.pisa.oecd.org>.

Καραλή Ο., (2009). *Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής από μαθητές της τρίτης γυμνασίου* (διπλωματική εργασία), Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών και Πανεπιστήμιο Κύπρου, ανακτήθηκε από:

http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_karali.olympia.pdf.pdf

Καρούση Σ., Σκουμπουρδή Χ., Τάτσης Κ. Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού, ανακτήθηκε από :

www.pre.aegean.gr/Documents/.../Kafoussi%20SONIA%20DRASTHR.doc

Κεραμάρης Κ., Μπαρμπαγιάννη Ε. (2011). Η γλώσσα των μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου, ΕΛΕΤΟ – Πρακτικά 8^{ου} Συνεδρίου «Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία», Αθήνα, ανακτήθηκε από:

http://www.eleto.gr/download/Conferences/8th%20Conference/Papers/8th_08-06_KeramarisK_BarbagianniEugenia_Paper_V02.pdf

Κολέζα Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*, Αθήνα, 8^η έκδοση, εκδόσεις : Τύπος

Κουσίδης Δ.Γ. (2004). *Ο ρόλος των απτικών και οπτικών εμπειριών και η συμβολή των εποπτικών μέσων διδασκαλίας στη συγκρότηση της μαθηματικής έννοιας της γραμμικής συνάρτησης* (διδακτορική διατριβή), ΑΠΘ, ανακτήθηκε από:

http://www.grafima.com.gr/index.php?page=details&cat_id=9&cat=16&id=1&st=pr

Κυπριώτης Δ. (2006). Πολυτροπικότητα και γραπτά-εικονιστικά κείμενα,

ανακτήθηκε από: <http://multitasks.blogspot.com/2006/09/blog-post.html>

Kress, G. & van Leeuwen, T. (2010). *Η ανάγνωση των εικόνων: Η γραμματική του*

οπτικού σχεδιασμού. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Λουμάκου Μ. (2010). *Η χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στα σύνθετα προβλήματα Συγκριτική Θεώρηση παλιού και νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών* (διπλωματική εργασία), Πανεπιστήμιο Πατρών, ανακτήθηκε από:
<http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/handle/10889/4358?locale=el>

Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή. ΟΕΔΒ, Αθήνα, ανακτήθηκε από:
http://www.pi-schools.gr/programs/epimorfosi/epimorfotiko_yliko/dimotiko/mathimatika.pdf

Μαστρογιάννης Α., Μαλέτσκος Α. (2009). *Η Μαθηματική Γλώσσα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου*, αναρτήθηκε από:
<http://ipeir.pde.sch.gr/educonf/2/09ThetikesEpistimes/mastrogiannis-maletskos/mastrogiannis-maletskos.pdf>

Μαυρίκιος Χ. (2006), *Ο ρόλος και η ανάπτυξη μεταγνωστικών διαδικασιών στην επίλυση αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος*, (μεταπτυχιακή εργασία), Αθήνα, Ανακτήθηκε από :
http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_mavrikios.pdf

Μήτσου Ε., (2010). *Η μοντελοποίηση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: εντοπισμός ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ μαθητών δημοτικού και φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης κατά την ενασχόλησή τους με αυθεντικά προβλήματα μοντελοποίησης* (πτυχιακή εργασία), Φλώρινα, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Ανακτήθηκε από:
<http://mathslife.eled.uowm.gr/sites/default/files/usersfiles/%20%CE%9C%CE%AE%CF%84%CF%83%CE%BF%CF%85%20%CE%95%CF%85%CF%83%CF%84%CE%B1%CE%B8%CE%AF%CE%B1%20%CF%84%CE%B5%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%B7.pdf>

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω*, Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (-). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Ανακτήθηκε από www.pi-schools.gr

Παντελιάδου Σ. (2011). *Μαθησιακές δυσκολίες και εκπαιδευτική πράξη: Τι και γιατί*, Αθήνα, εκδόσεις: πεδίο

Παπαδοπετράκης Ε.(1992). Μια μεταθεωρία για τον Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο, Πρακτικά 9^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας-Γλώσσα και Σκέψη στη Μαθηματική Παιδεία,σελ.29-53, Πάτρα

Παπαδοπετράκης Ε.(2006). *Φυσικές Γλώσσες και Μαθηματικός Λόγος*, Πάτρα, ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων του Πανεπιστημίου Πάτρας

Πλειός, Γ. (2005). *Πολιτισμός της εικόνας και εκπαίδευση. Ο ρόλος της εικονικής ιδεολογίας*. Αθήνα: Πολύτροπον.

Στάμου Φ., Τρανός Τ., Χατζησαββίδης Σ. (2004). Η «ανάγνωση» και η «παραγωγή» τροπικότητας σε μαθησιακό περιβάλλον: Πρώτες διαπιστώσεις από μια διδακτική εφαρμογή. Μελέτες για την ελληνική γλώσσα, πρακτικά 24^{ης} συνάντησης του τομέα Γλωσσολογίας, ΑΠΘ Θεσσαλονίκη (666-672)

Τουμάσης Μπ. (1999). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών: Διδακτική, θεωρία και πράξη*, Αθήνα, εκδόσεις: Gutenberg, 215-6, 423-8.

Τρομπούκης Μ. (2006), *Η επίδραση της γλώσσας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές, που έχουν την ελληνική ως δεύτερη* (πτυχιακή εργασία), Βόλος, ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Τσακίρη Μ. (2007), *Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλήματος*, Θέματα εισαγωγικής επιμόρφωσης για νεοδιόριστους εκπαιδευτικούς, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, σελ.355-365, Αθήνα, ανακτήθηκε από: http://www.pischools.gr/download/news/t_eisag_epimorfosis.pdf

Τσεσμελή Ν.Σ., Λιάπη Β., Χιονίδου-Μοσκοφόγλου Μ. (2014). Η συμβολή της λεκτικής αναδιατύπωσης και της εικονιστικής αναπαράστασης στην Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος σε μαθητές Δημοτικού Σχολείου, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, τεύχος 7, σελ.67-88, Φεβρουάριος 2014, Ένωση Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών

Τύπας Γ., Ντάφου Ε. (2006). Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια. ΥΠΕΠΘ, ανακτήθηκε από: <http://kmaked.pde.sch.gr/symdim-thess12/MathGeneral.pdf>

Verma G.K., Mallich K. (2004). *Εκπαιδευτική έρευνα: Θεωρητικές προσεγγίσεις και τεχνικές*, (μετ. Γρίβα Ελ.), Αθήνα, εκδόσεις: τυπωθήτω

Χαραλάμπους Α. (2007). *Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μελέτη σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών Ελλάδας - Κύπρου (Γ' τάξη Δημοτικού) όσον αφορά το είδος των εικόνων που συνοδεύουν τα μαθηματικά προβλήματα*, (Διπλωματική εργασία), Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων του Πανεπιστημίου Κύπρου-Τμήμα Επιστημών της Αγωγής.

Χοντολίδου Ε. (1999), *Εισαγωγή στην έννοια της Πολυτροπικότητας*, ανακτήθηκε από: <http://www.netschoolbook.gr/>

Χρυσοστόμου Α. (2013). Προβλήματα Αλλαγής με Περιττές Πληροφορίες, με Λεκτική Αναπαράσταση και Πληροφοριακή Εικόνα: Ο Ρόλος της Αναπαράστασης, της Δομής και του Διδακτικού Συμβολαίου, Πρακτικά

15^ο Παγκύπριου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, 8-10
Μαρτίου 2013, Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, 31-46, Ανακτήθηκε από:
[http://www.cms.org.cy/assets/files/PAGKIPRIO%20SINEDRIO/PRAKTIKA
%202013%20FIN.pdf](http://www.cms.org.cy/assets/files/PAGKIPRIO%20SINEDRIO/PRAKTIKA%202013%20FIN.pdf)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000121492

