



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

**Συμπύεση δεδομένων ως εφαρμογή της SVD παραγοντοποίησης
πίνακα**

Αναστασία-Θεοδώρα Ταμπούκου

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Σεπτέμβριος 2017



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

**Συμπύεση δεδομένων ως εφαρμογή
της SVD παραγοντοποίησης πίνακα**

Αναστασία-Θεοδώρα Ταμπούκου

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Σεπτέμβριος 2017

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις ⁽¹⁾, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία:/...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών

**Συμπύεση δεδομένων ως εφαρμογή
της SVD παραγοντοποίησης πίνακα**

Αναστασία-Θεοδώρα Ταμπούκου

Τριμελής Επιτροπή:

Μαρία Αδάμ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορική με Εφαρμογές
στη Βιοϊατρική (επιβλέπουσα)

Βασίλειος Πλαγιανάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορική με
Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

Κωνσταντίνος Δελήμπασης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορική με
Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Έχοντας ολοκληρώσει την πτυχιακή εργασία μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κα Μαρία Αδάμ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για τη συνεχή παρακολούθηση, υποστήριξη, υπομονή και ενθάρρυνση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να την ευχαριστήσω για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή της, προς την επίλυση των διάφορων θεμάτων καθ' όλη την πορεία της ανάπτυξης και της συγγραφής αυτής της εργασίας,

τους κ. Κωνσταντίνο Δελήμπαση και κ. Βασίλειο Πλαγιανάκο, μέλη της Τριμελούς Επιτροπής και Αναπληρωτές Καθηγητές στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για τη συμμετοχή τους στην Εξεταστική Επιτροπή, για τις επικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε, τη βοήθεια και τις συμβουλές που μου παρήχαν πάνω στους αλγορίθμους, διαβεβαιώνοντάς τους ότι οι παρατηρήσεις τους θα ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν,

το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και τους υπόλοιπους διδάσκοντες για το θετικό ακαδημαϊκό κλίμα και την άψογη συνεργασία μας.

Επιπλέον, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην μητέρα μου, η οποία με στήριξε ποικιλοτρόπως, τόσο ηθικά όσο και υλικά, καθ' όλη τη διάρκεια της μέχρι τώρα ζωής μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου και ειδικά τους Ανδρομάχη Παμπάλου, Αμαλία Νίκου και Νίκο Παγώνη τόσο για την επικοδομητική βοήθεια που μου παρείχαν όσο και για την ψυχολογική υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αναστασία-Θεοδώρα Ταμπούκου

Λαμία, Σεπτέμβριος 2017

Contents

Πρόλογος.....	1
Βασικές έννοιες πινάκων.....	3
1.1 Βασικοί ορισμοί πινάκων.....	3
1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη.....	9
1.3 Νόρμες	22
Συμπίεση δεδομένων και SVD.....	31
2.1 Βασικές έννοιες για την SVD παραγοντοποίηση.....	31
2.1.1 Ορισμοί και προτάσεις.....	31
2.1.2 Προσέγγιση ενός μη τετραγωνικού πίνακα A	47
2.2 Frobenius νόρμα, νόρμα-2 ως μέτρα προσέγγισης του πίνακα.....	52
2.3 Δείκτης κατάστασης ως μέτρο προσέγγισης του πίνακα.....	57
Συμπίεση δεδομένων, εφαρμογές στην εικόνα.....	61
3.1 Βασικές έννοιες.....	61
3.2 Συμπίεση δεδομένων στην ασπρόμαυρη εικόνα.....	67
3.3 Συμπίεση δεδομένων στην έγχρωμη εικόνα.....	73
Συμπεράσματα.....	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	81
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	83
Περίληψη.....	95

Πρόλογος

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που υπάρχουν κατά την συμπίεση ενός μη τετραγωνικού πίνακα είναι ότι δεν ανακτάται η πλήρη αρχική πληροφορία και υπάρχει κίνδυνος να χαθεί ένα σημαντικό μέρος αυτής. Η μη ανάκτηση της ολοκληρωμένης πληροφορίας του πίνακα οδηγεί σε προβλήματα σε ποικίλες εφαρμογές του, όπως είναι παραδείγματος χάρη στην εικόνα, πρόβλημα που μελετάται και στην παρούσα εργασία.

Σ'αυτή την πτυχιακή εργασία μελετάται η ιδανικότερη συμπίεση δεδομένων με τη λιγότερη απώλεια πληροφορίας, με την SVD παραγοντοποίηση ενός πίνακα A . Πιο συγκεκριμένα, ο σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι η υλοποίηση ενός αλγορίθμου, που συμβάλλει στον εντοπισμό ενός ιδανικού «κατωφλίου» ώστε ο πίνακας των δεδομένων στον οποίο εφαρμόζεται ο αλγόριθμος, να επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό.

Αναλυτικότερα ανά κεφάλαιο μελετώνται τα ακόλουθα: Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας πινάκων, όπως για παράδειγμα, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα καθώς και οι σημαντικότερες ιδιότητες τους. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στους ορισμούς και στις σημαντικότερες ιδιότητες που αφορούν στις νόρμες διανυσμάτων και πινάκων.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στη θεωρία της SVD παραγοντοποίησης ενός μη τετραγωνικού πίνακα A , καθώς παρουσιάζονται διάφορα σχόλια και παραδείγματα που αναλυτικά την επεξηγούν. Στη συνέχεια περιγράφονται μέτρα όπως είναι η νόρμα Frobenius, η νόρμα-2 και ο δείκτης κατάστασης (condition number), κατάλληλων πινάκων καθώς και σχεδιασμός διαγραμμάτων για τα μέτρα της Frobenius νόρμας και του δείκτη κατάστασης κατάλληλων πινάκων, που σχετίζονται, είτε με τον πίνακα της προσέγγισης του A , είτε με τη διαφορά της προσέγγισης από τον αρχικό πίνακα A .

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρατίθενται αρχικά βασικές έννοιες που αφορούν στην εικόνα, ενώ στη συνέχεια αναφέρονται οι αλγόριθμοι συμπίεσης, που βρίσκουν εφαρμογή στην έγχρωμη και στην ασπρόμαυρη εικόνα. Σημαντική συνθήκη για τη

συμπύεση δεδομένων δίνεται στην Ενότητα 3.1 και υλοποιείται στη συνέχεια στις εφαρμογές. Οι εφαρμογές που αναφέρονται αφορούν την είτε την έγχρωμη είτε την ασπρόμαυρη εικόνα.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα, βιβλιογραφία με τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο και πολλά από αυτά είναι χρήσιμα για περαιτέρω μελέτη των προαναφερόμενων εννοιών και εμπάθυνση, καθώς και παράρτημα που βρίσκεται ο κώδικας σε MATLAB και υλοποιεί τον προτεινόμενο αλγόριθμο, καθώς και τις εφαρμογές του στις εικόνες.

Ο αναγνώστης στη μελέτη του να λάβει υπόψη ότι κάθε κεφάλαιο αυτής της πτυχιακής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δυο αριθμούς, ενώ μερικές αριθμούνται με τρεις. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεσή της. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα παραδείγματα και τα Σχήματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, από τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισής τους στο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Βασικές έννοιες πινάκων

1.1 Βασικοί ορισμοί πινάκων

Ορισμός 1.1

Πίνακας A με στοιχεία από το σύνολο \mathbb{F} (το οποίο έχει στοιχεία από το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} ή από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C}) είναι μια διάταξη $m \times n$ στοιχείων (αριθμών) a_{ij} του συνόλου \mathbb{F} σε μορφή ορθογώνιου παραλληλογράμμου που απεικονίζεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A περιέχει τους αριθμούς a_{ij} , τα οποία είναι τα **στοιχεία** του πίνακα που απεικονίζεται παραπάνω, με τα i και j να αποτελούν τους δείκτες για τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα αντίστοιχα.

Η **διάσταση** ή το **μέγεθος** του πίνακα A είναι $m \times n$, όπου το m είναι το πλήθος των γραμμών και το n το πλήθος των στηλών του πίνακα.

Στη συνέχεια, ο πίνακας A συμβολίζεται (a_{ij}) , $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ ή όταν δεν δίνονται τα στοιχεία του σημειώνεται $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, όπου $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ συμβολίζει το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σύνολο \mathbb{F} .

Εάν κάποιες γραμμές ή στήλες του πίνακα A διαγραφούν, θα προκύψει ένας νέος πίνακας που θα λέγεται **υποπίνακας** του A . Δύο ή περισσότεροι πίνακες με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών χαρακτηρίζονται ως πίνακες του **ίδιου τύπου**.

Ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **σύνθετος** αν τα στοιχεία του αποτελούνται από υποπίνακες (**block**) μικρότερου μεγέθους από τον A . Στο ακόλουθο παράδειγμα σε έναν 3×3 πίνακα A σημειώνονται οι υποπίνακες $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 & 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -3 & -1 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 6 & 13 \\ -8 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 & 5 & 10 \\ 3 & -10 & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix},$$

όπου οι υποπίνακες είναι $A_{11} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ και $A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 3 & -10 & -1 \end{bmatrix}$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια είδη πινάκων που έχουν κάποια ιδιαιτερότητα και θα χρειαστούν στην παρούσα εργασία.

Ορισμός 1.2

- Ένας πίνακας $1 \times n$ λέγεται **πίνακας-γραμμή**, ενώ ένας $m \times 1$ πίνακας λέγεται **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα**.
- Αν τα στοιχεία ενός πίνακα με διαστάσεις $m \times n$ είναι ίσα με μηδεν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m \times n}$ ή απλά \mathbb{O} .
- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $n \times m$ πίνακας (a_{ji}) λέγεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται ως A^t . Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $m \times n$ πίνακας, ο οποίος έχει ως στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A , επομένως $\overline{a_{ij}}$, ονομάζεται ο **συζυγής** του A και

συμβολίζεται με \bar{A} . Για παράδειγμα, αν ο $A = \begin{bmatrix} 4 & 2-i \\ 3i & 9 \end{bmatrix}$, τότε ο συζυγής του είναι $\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2+i \\ -3i & 9 \end{bmatrix}$. Ακόμη ο $n \times m$ πίνακας (\bar{a}_{ji}) ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του πίνακα A και συμβολίζεται $A^* = \bar{A}^t$. Δηλαδή, ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα A είναι $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -3i \\ 2+i & 9 \end{bmatrix}$.

- Αν ένας $m \times n$ πίνακας έχει ίδιο αριθμό στηλών και γραμμών, δηλαδή $n = m$, τότε ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{F})$. Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα

τετραγωνικών πινάκων $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 44 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -34 \\ -1 & -55 & 0 \end{bmatrix}$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **διαγώνιος**, αν για τα στοιχεία του a_{ij} ισχύει $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται και ως

$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 44 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ είναι

διαγώνιος.

Ακόμη πιο ειδικά ο διαγώνιος πίνακας του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με 1, ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται ως $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Δηλαδή, ένας 3×3 μοναδιαίος πίνακας απεικονίζεται ως $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν για κάθε $i > j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο είναι ίσα με

μηδέν. Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ένας άνω τριγωνικός

πίνακας. Αντίθετα ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν για κάθε $i < j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται άνω από τη

διαγώνιο είναι μηδέν. Για παράδειγμα, ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 10 & -2 & 15 \end{bmatrix}$ είναι ένας

κάτω τριγωνικός πίνακας.

Ορισμός 1.3

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ ονομάζεται **συμμετρικός**, αν για κάθε i, j ισχύει ότι $a_{ij} = a_{ji}$. Ισοδύναμα ένας πίνακας A , λέγεται συμμετρικός αν και μόνο αν ισχύει $A = A^t$. Για

παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & -13 & 1 \\ -13 & -21 & -2 \\ 1 & -2 & 15 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ ονομάζεται **Ερμιτιανός** (Hermitian) αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Ισοδύναμα ένας πίνακας A λέγεται Ερμιτιανός αν και μόνο αν $A = A^*$. Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -3i \\ 3i & 9 \end{bmatrix}$ είναι Ερμιτιανός.

Ορισμός 1.4

- Έστω ένας Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$. Αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ ισχύει

$$x^*Ax > 0,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος** (positive definite), ενώ αν ισχύει $x^*Ax \geq 0$ ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** (positive semidefinite matrix) ή **μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας** (non-negative definite matrix).

- Έστω ένας Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$. Αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ ισχύει

$$x^*Ax < 0,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αρνητικά ορισμένος** (negative definite), ενώ αν ισχύει $x^*Ax < 0$ ονομάζεται **αρνητικά ημιορισμένος πίνακας** (negative semidefinite matrix).

Τέλος, αν ένας πίνακας δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, τότε ονομάζεται **αόριστος**.

Στην περίπτωση που $A \in M_n(\mathbb{R})$ στους παραπάνω ορισμούς η αναστροφосуζυγία $*$ αντικαθίσταται από την αναστροφή t και $x \in M_{n \times l}(\mathbb{R})$.

Ορισμός 1.5

Αν για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ισχύει

$$A^* A = A A^* = I_n,$$

τότε ο πίνακας ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**, ενώ αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει

$$A^t A = A A^t = I_n,$$

τότε ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος** ή **ορθοκανονικός**.

Άμεσα από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι χαρακτηριστική ιδιότητα ενός ορθογώνιου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι

$$A^{-1} = A^t.$$

Ορισμός 1.6

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **αντιστρέψιμος**, αν ισχύει

$$AB = BA = I_n,$$

όπου $B \in M_n(\mathbb{F})$. Αν υπάρχει ο B , τότε αυτός ονομάζεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται A^{-1} . Οπότε αν υπάρχει ο A^{-1} είναι μοναδικός και ισχύει

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

Ορισμός 1.7

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. **Βαθμός** ή **τάξη** του A λέγεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού (ή ανηγμένου κλιμακωτού) πίνακα A και συμβολίζεται με $r(A)$ ή $rank(A)$.

Μια από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες για το βαθμό του πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ είναι η ακόλουθη:

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε $r(A)=1$, καθώς η κλιμακωτή μορφή του A είναι ίση με $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος προκύπτει μετά από κατάλληλη γραμμοπράξη.

1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ορισμός 1.8

Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μία απεικόνιση

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F} : A \rightarrow \det A,$$

η οποία αντιστοιχεί στον τετραγωνικό πίνακα A έναν αριθμό, που υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\det A = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, όπου A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A , αν διαγράψουμε από τον A τα στοιχεία της i -γραμμής και της j -στήλης.

Στη βιβλιογραφία ο παραπάνω τύπος για τον υπολογισμό της ορίζουσας του A είναι γνωστός ως *ανάπτυγμα Laplace*.

Η ορίζουσα του $A \in M_n(\mathbb{F})$ συμβολίζεται με $|A|$ και εφόσον ξέρουμε τα στοιχεία του

πίνακα A μπορούμε να γράψουμε $|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$, $\det(A)$ ή $\det A$. Η στήλη ή η

γραμμή που επιλέγεται για να εφαρμοστεί το ανάπτυγμα Laplace είναι αυτή με τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία ώστε να προκύψουν οι λιγότερες υπο-ορίζουσες για υπολογισμό.

Παράδειγμα 1.1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A , $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, είναι προτιμότερο να εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα Laplace ως προς την 3^η γραμμή. Επομένως,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \\ &= (-1)^{3+1}(5) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= [5 \cdot (-2) \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \cdot (-1)] - (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 4) + 0 = 31 \end{aligned}$$



Οι σημαντικότερες ιδιότητες των οριζουσών αναφέρονται στη συνέχεια, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τις αποδείξεις τους σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [6,8,9].

Πρόταση 1.1

- i. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι ιδιότητες που αναφέρονται στις γραμμές της ορίζουσας του πίνακα, ισχύουν και για τις στήλες του.
- ii. Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.
- iii. Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det A = 0$.
- iv. Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε $\det A = 0$.
- v. Για κάθε άνω (κάτω) τριγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}$, όπου α_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$, είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.
- vi. Ένας διαγώνιος πίνακας έχει ορίζουσα που ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1.
- vii. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^t) = \det A$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$ και $\det(A^*) = \overline{\det A}$.
- viii. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

- ix. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^k) = (\det A)^k$.
- x. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$.

Ορισμός 1.9

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ένα διάνυσμα $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0 \quad (1.2.1)$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Η τιμή του λ λέγεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα A και το x λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A , αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα λέγονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** (ή **χαρακτηριστικά μεγέθη**) του πίνακα A .

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A λέγεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα και συμβολίζεται με $\sigma(A)$. Από τις ιδιοτιμές που έχει ο πίνακας A , αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή λέγεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με $\rho(A)$, επομένως

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.2.2)$$

Η ισότητα (1.2.1) γράφεται ισοδύναμα:

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \quad (1.2.3)$$

Από την ισότητα στην (1.2.3), αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ , είναι εύκολο να βρούμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμά της, λύνοντας το ομογενές σύστημα το οποίο προκύπτει από την εξίσωση:

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ για } x \neq 0. \quad (1.2.4)$$

Σε έναν τετραγωνικό πίνακα A , για να υπολογιστούν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ πρέπει να ισχύει η διανυσματική εξίσωση στην (1.2.4), η οποία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.2.5)$$

Επομένως, όλες οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ του πίνακα A πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (1.2.5), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα A . Αν αναπτυχθεί το αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.2.5), προκύπτει ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού το ακόλουθο

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \quad (1.2.6)$$

το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A με συντελεστές $b_j \in \mathbb{F}$, $j=0,1,\dots,n-1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στην (1.2.6) μπορεί να αναλυθεί σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο \mathbb{C} και έστω ότι γράφεται στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{v_i}, \quad (1.2.7)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ είναι όλες οι διαφορετικές **ρίζες** του $\chi_A(\lambda)$ στο \mathbb{C} και v_1, v_2, \dots, v_i η **αλγεβρική πολλαπλότητα** κάθε διαφορετικής ρίζας του $\chi_A(\lambda)$. Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει ότι

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_i = n.$$

Αν για κάποιο i ισχύει $v_i = 1$, η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, διαφορετικά χαρακτηρίζεται **πολλαπλή**.

Αν αντικατασταθεί κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή $\lambda = \lambda_i$, στο σύστημα (1.2.4) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με $V(\lambda_i)$.

Ορισμός 1.10

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{ x \in M_n(\mathbb{F}) : (A - \lambda_i I)x = 0 \}, \quad (1.2.8)$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος** αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i , ο οποίος είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i και η διάσταση του υποχώρου $V(\lambda_i)$ είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I). \quad (1.2.9)$$

Ο αριθμός $\dim V(\lambda_i)$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i .

Μια σημαντική παρατήρηση που αφορά την αλγεβρική και τη γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και ταυτόχρονα είναι μικρότερη ή ίση της τιμής της αλγεβρικής πολλαπλότητας. Αναλυτικότερα

$$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} = \dim V(\lambda_i) \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα}. \quad (1.2.10)$$

Οι σημαντικότερες ιδιότητες για τα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τις αποδείξεις τους σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [6,8,9].

Πρόταση 1.2

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

- i. Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα και ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- ii. a) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
b) Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή.

- c) $\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, δηλαδή το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του A ισούται με το ίχνος του $\text{tr}A$.
- iii. Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\sigma(A) = \sigma(A')$.
- iv. Αν λ, x είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k είναι λ^k και x , όπου $k \in \mathbb{N}$.
- v. Αν λ, x είναι χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-k} είναι λ^{-k} και x , όπου $k \in \mathbb{N}$.
- vi. Οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
- vii. Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού (συμμετρικού) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
- viii. Ένας Ερμιτιανός (συμμετρικός) πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μεταξύ των θετικών ιδιοτιμών του υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή ίση με μηδέν.
- ix. Ένας Ερμιτιανός (συμμετρικός) πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Είναι αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μεταξύ των αρνητικών ιδιοτιμών του υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή ίση με μηδέν.

Ορισμός 1.11

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_k \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ του V ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν και μόνο αν η διανυσματική εξίσωση

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_k = 0, \text{ με } a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{F} \quad (1.2.11)$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Αν η (1.2.11) έχει και άλλες λύσεις εκτός από το μηδέν, τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_k \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**.

Πρόταση 1.3

Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\det[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \neq 0.$$

Αν τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ θεωρηθούν στήλες ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύμφωνα με την Πρόταση 1.3 ισχύει $\det A \neq 0$. Από την Πρόταση 1.1(ii) συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Ορισμός 1.12

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα Δ που τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι οι ιδιοτιμές λ_i του A και ισχύει

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad (1.2.12)$$

όπου

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ο δε πίνακας P είναι τετραγωνικός, ονομάζεται *πίνακας ομοιότητας* και έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, \dots, x_n του A , δηλαδή,

$$P = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]. \quad (1.2.13)$$

Παράδειγμα 1.2

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα

ιδιοδιανύσματα του πίνακα A , καθώς και να εξεταστεί η διαγωνοποίησή του.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A υπολογίζεται από την (1.2.6) και είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 & 6 \\ -1 & \lambda + 1 & -3 \\ 1 & 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 3),$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = -3$.

Για κάθε ιδιοτιμή υπάρχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, το οποίο υπολογίζεται στη συνέχεια.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι

$$(A - I)x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2y \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, είναι

$$x_1 = [-2 \quad 1 \quad 0]^t.$$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$ είναι

$$(A + 3I)x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\left. \begin{array}{l} x + 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -5z \\ y = -z \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$, είναι

$$x_2 = [-5 \quad -1 \quad 1]^t.$$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4$ είναι

$$(A - 4I)x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2z \\ y = -z \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4$, είναι

$$x_3 = [2 \quad -1 \quad 1]^t.$$

Τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 και x_3 τοποθετούνται ως στήλες στον πίνακα ομοιότητας P , όπως στην (1.2.13) δηλαδή,

$$P = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 και x_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, και γι' αυτό υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα P . Άρα,

$$\det P = \det \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 7 \neq 0$$

οπότε ισχύει η Πρόταση 1.3 και τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 και x_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, συνεπώς ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος (βλέπε, Πρόταση 1.1(ii)). Ο πίνακας P^{-1} υπολογίζεται ότι είναι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/7 & -2/7 & 0 \\ 1/7 & 2/7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την (1.2.12) ο διαγώνιος πίνακας που προκύπτει από τη διαγωνοποίηση του A υπολογίζεται

$$A = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow \Delta = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$



Στο Παράδειγμα 1.2 παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορετικές ιδιοτιμές στις οποίες αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επίσης εάν οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1, δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε αυτές, με αποτέλεσμα να δημιουργείται πρόβλημα για την ύπαρξη τετραγωνικού και αντιστρέψιμου πίνακα P που χρειάζεται για τη διαγωνοποίηση του A . Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των διαφορετικών ιδιοτιμών, της γραμμικής ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων και της διαγωνοποίησης του πίνακα ή επιπλέον ποια σχέση συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε πολλαπλή ιδιοτιμή. Η απάντηση στο ερώτημα δίνεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 1.4

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

- i. Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- ii. Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει n διακεκριμένες διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.
- iii. Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A είναι ίση με την αλγεβρική, τότε ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στο Παράδειγμα 1.2 ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος σύμφωνα με την Πρόταση 1.4 (ii), χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων και ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας τους. Στη συνέχεια, όταν ο πίνακας έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές εφαρμόζεται η Πρόταση 1.4 (ii) και στην αντίθετη περίπτωση δηλαδή όταν παρουσιάζεται από κάποια ιδιοτιμή πολλαπλότητα επιβάλλεται ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές και ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων.

Παράδειγμα 1.3

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Να εξεταστεί αν οι πίνακες A και B διαγωνοποιούνται.

➤ Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2.$$

Από το $\chi_A(\lambda)$ προκύπτουν οι ιδιοτιμές του A , που είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 1$ (διπλή ρίζα). Επειδή οι ιδιοτιμές δεν είναι διακεκριμένες και η λ_3 έχει πολλαπλότητα, πρέπει να εξετάσουμε την ορίζουσα του πίνακα με τα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών του πίνακα A όπως αναφέρεται στην Πρόταση 1.2 ώστε να καταλήξουμε αν ο πίνακας διαγωνοποιείται ή όχι.

- Για την $\lambda_1 = -1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_1 = \begin{bmatrix} -2/5 & 7/5 & -8/5 & 1 \end{bmatrix}^t$.
- Για την $\lambda_2 = 3$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$.
- Για την $\lambda_3 = -1$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ και $x_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 , x_3 και x_4 τα τοποθετούμε σε στήλες στον πίνακα ομοιότητας, όπως στην (1.2.13) και στη συνέχεια εξετάζουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους

$$P = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] = \begin{bmatrix} -2/5 & 2 & 0 & 0 \\ 7/5 & -1 & 1 & 0 \\ -8/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να εξετάσουμε αν τα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, x_3 και x_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα P . Άρα,

$$\det P = \det \begin{bmatrix} -2/5 & 2 & 0 & 0 \\ 7/5 & -1 & 1 & 0 \\ -8/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{16}{5} \neq 0$$

οπότε ισχύει η Πρόταση 1.3 και τα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, x_3 και x_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4(i) ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

➤ Ο πίνακας B έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2,$$

Από το $\chi_B(\lambda)$ προκύπτουν οι ιδιοτιμές του B , που είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ και $\lambda_3 = 1$ (διπλή ρίζα). Επειδή οι ιδιοτιμές δεν είναι διακεκριμένες και η λ_3 έχει πολλαπλότητα, πρέπει να εξετάσουμε την ορίζουσα του πίνακα με τα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών του πίνακα B , (βλέπε, Πρόταση 1.2), ώστε να καταλήξουμε αν ο πίνακας B διαγωνοποιείται ή όχι.

- Για την $\lambda_1 = -1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_1 = [2/5 \quad -2/5 \quad 2/5 \quad 1]^t$.
- Για την $\lambda_2 = 5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_2 = [40/7 \quad 8/7 \quad -20/7 \quad 1]^t$.
- Για την $\lambda_3 = -1$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $x_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^t$.

Επειδή στην ιδιοτιμή λ_3 αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα, το x_3 , ενώ η ιδιοτιμή αυτή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 2, συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει η Πρόταση 1.4(iii), οπότε ο πίνακας B δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.



Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ένας πίνακας μπορεί να είναι διαγωνοποιήσιμος ακόμα και στην περίπτωση που δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές και κάποια από αυτές έχει αλγεβρική πολλαπλότητα διαφορετική της μονάδας. Όπως παρατηρούμε στο Παράδειγμα 1.3 ένας πίνακας με ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας μεγαλύτερης του 1 μπορεί να είναι διαγωνοποιήσιμος, μπορεί και όχι. Για να αποφασίσουμε, χρειάζεται να εξετάσουμε το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ιδιοτιμή και να εξασφαλίσουμε ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι ίση με τη γεωμετρική, (βλέπε, Πρόταση 1.4(iii)). Με τον παραπάνω περιορισμό εξασφαλίζεται η αντιστρεψιμότητα του πίνακα ομοιότητας P και μέσω της (1.2.12) η διαγωνοποίηση του αρχικού πίνακα. Ωστόσο μια ειδική περίπτωση, όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός, η ύπαρξη και αντιστρεψιμότητα του P εξασφαλίζεται, ανεξάρτητα από την αλγεβρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών του A , όπως αυτό παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα, την απόδειξη μπορεί ο αναγνώστης να τη μελετήσει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [6,8,9].

Θεώρημα 1.1 (φασματικό θεώρημα)

Για κάθε Ερμιτιανό (συμμετρικό) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$ με στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα¹ ιδιοδιανύσματα του A και ένας διαγώνιος πίνακας $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = U\Delta U^* = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} U^* \quad (1.2.14)$$

¹ Στη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης, γνωστή ως **μέθοδος Gram-Schmidt**, αναφερόμαστε στην επόμενη παράγραφο 1.3, δείτε τον Αλγόριθμο 1.1.

1.3 Νόρμες

Στην παρούσα ενότητα θεωρούμε ένα διάνυσμα με n πραγματικές ή μιγαδικές συντεταγμένες ότι ανήκει στο \mathbb{F}^n .

Ορισμός 1.13

Έστω τα διανύσματα $u, v \in \mathbb{F}^n$. Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F} : (u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** στον \mathbb{F}^n , αν για κάθε $u, v, w \in \mathbb{F}^n$ και $a, b \in \mathbb{F}$, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- i. $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
- ii. $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$
- iii. $\langle u, u \rangle \geq 0$
- iv. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{F}^n}$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (iii) και (iv) του Ορισμού 1.13 μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο (νόρμα) ενός διανύσματος του \mathbb{F}^n ως εξής:

Ορισμός 1.14

Έστω ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον \mathbb{F}^n και το διάνυσμα $u \in \mathbb{F}^n$. Ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

ονομάζεται **μέτρο (νόρμα)** ή **μήκος** του διανύσματος u .

Σε αρκετά βιβλία δίνεται ο ακόλουθος ορισμός για το μέτρο του διανύσματος, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 1.14 λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου, όπως αυτό ορίστηκε στον Ορισμό 1.13, [3, 7, 10].

Ορισμός 1.15 (Νόρμα διανύσματος)

Μέτρο (νόρμα) ενός διανύσματος $x \in \mathbb{F}^n$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathbb{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i. $\|x\| \geq 0$
- ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{F}^n$, (τριγωνική ανισότητα)

Για το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, όπου $x_i \in \mathbb{F}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad (1.3.1)$$

Υπάρχουν πολλές νόρμες για το $x \in \mathbb{F}^n$. Οι πιο σημαντικές και πιο γνωστές από αυτές είναι:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \quad (\text{νόρμα άπειρο}) \quad (1.3.2)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{νόρμα ένα}) \quad (1.3.3)$$

$$\|x\|_E = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2} \quad (\text{Ευκλείδεια νόρμα}) \quad (1.3.4)$$

Σχόλιο 1.1

Η σχέση (1.3.4) προκύπτει από τη (1.3.1), αν αντικαταστήσουμε στο p την τιμή 2.

Παράδειγμα 1.4

Έστω διάνυσμα $x = (2, -1, 0, 3)$. Να υπολογιστούν οι νόρμες που αναφέρθηκαν στον Ορισμό 1.15.

- Για τον υπολογισμό της $\|x\|_\infty$ από (1.3.2) έχουμε:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} \{|x_i|\} = 3.$$

- Για τον υπολογισμό της $\|x\|_1$ από (1.3.3) έχουμε:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^n |x_i| = 6.$$

- Για τον υπολογισμό της $\|x\|_E$ από (1.3.4) έχουμε:

$$\|x\|_E = (\sum_{i=0}^n |x_i|^2)^{1/2} = \sqrt{14}. \quad \blacktriangle$$

Είναι γνωστό ότι δύο διανύσματα $u, v \in \mathbb{F}^n$ σχηματίζουν μια γωνία μεταξύ τους θ , που δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad (1.3.5)$$

Από την (1.3.5) είναι φανερό ότι δύο διανύσματα είναι μεταξύ τους **κάθετα**, δηλαδή, σχηματίζουν ορθή γωνία, ($\theta=90^\circ$) αν και μόνο αν $\langle u, v \rangle = 0$. Η ιδιότητα γενικεύεται για περισσότερα διανύσματα καταλήγοντας στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.16

Έστω ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{F}^k$. Τα διανύσματα ονομάζονται **ορθοκανονικά** αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

- $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$ με $i, j = 1, 2, \dots, n$.
- $\|v_i\| = 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Αλγόριθμος 1.1 (Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt)

Έστω v_1, v_2, \dots, v_n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν τον χώρο \mathbb{R}^k .

Βήμα 1^ο: Θέτουμε $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

⋮

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} - \dots - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

Βήμα 2^ο: Ορίζουμε $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1, w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \dots, w_n = \frac{1}{\|u_n\|} u_n$

Τα διανύσματα w_1, w_2, \dots, w_n είναι ορθοκανονικά.

Παράδειγμα 1.5

Να διαγωνοποιηθεί ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, εφαρμόζεται το φασματικό θεώρημα, συνεπώς για να υπολογιστεί η «παραγοντοποιημένη» μορφή του A χρειάζεται να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα.

Αρχικά, ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)^2.$$

Από το $\chi_A(\lambda)$ προκύπτουν οι ιδιοτιμές του A , που είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 5$ (διπλή ρίζα) και για κάθε ιδιοτιμή υπάρχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Άρα,

- για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_1 = [1 \ 1 \ 1]^t$.
- για την $\lambda_2 = 5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $x_2 = [-1 \ 1 \ 0]^t$ και $x_3 = [-1 \ 0 \ 1]^t$. Επομένως η ιδιοτιμή λ_2 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με την αλγεβρική (βλέπε, Πρόταση 1.4 (iii)).

Τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 και x_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα από Πρόταση 1.3 διότι

$$\det[x_1 \ x_2 \ x_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0,$$

άρα από την (1.2.13) σχηματίζεται ο πίνακας \tilde{P} , δηλαδή

$$\tilde{P} = [x_1 \ x_2 \ x_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας \tilde{P}^{-1} υπολογίζεται στη συνέχεια

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται και σύμφωνα με την (1.2.12) γράφεται

$$A = \tilde{P} \Delta \tilde{P}^{-1},$$

όπου

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Όμως βρίσκοντας το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x_1 , x_2 και x_1 , x_3 , διαπιστώνουμε ότι είναι κάθετα. Από το Θεώρημα 1.1 υπάρχει ένας άλλος πίνακας U , ο οποίος είναι ορθογώνιος και επιτυγχάνει τη διαγωνοποίηση του πίνακα A . Για την

κατασκευή του πίνακα U , εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο στα διανύσματα x_2, x_3 . Οπότε,

$$\tilde{x}_2 = x_3 - \frac{\langle x_3, x_2 \rangle}{\|x_2\|^2} x_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}^t.$$

Καταλήγουμε

$$w_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t.$$

$$w_2 = \frac{1}{\|x_2\|} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{x}_2\|} \tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}^t.$$

Τελικά ο ορθογώνιος πίνακας U , ο οποίος απαιτείται για τη διαγωνοποίηση του A είναι ο ακόλουθος

$$U = [w_1 \quad w_2 \quad w_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$



Ορισμός 1.17 (Νόρμες πινάκων)

Νόρμα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i. $\|A\| \geq 0$
- ii. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

- iii. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$
- iv. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$
- v. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$, οι πιο γνωστές νόρμες πίνακα είναι οι ακόλουθες:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|\} \text{ ή } \|A\|_r \quad (\text{νόρμα γραμμής}) \quad (1.3.6)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{c_j = \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|\} \text{ ή } \|A\|_c \quad (\text{νόρμα στήλης}) \quad (1.3.7)$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} \quad (\text{Ευκλείδεια νόρμα}) \quad (1.3.8)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} \quad (\text{νόρμα Frobenius}) \quad (1.3.9)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad (\text{φασματική νόρμα}) \quad (1.3.10)$$

όπου $\rho(A^*A)$ είναι η φασματική ακτίνα του συμμετρικού πίνακα A^*A .

Σχόλιο 1.2

- Η Ευκλείδεια νόρμα στην (1.3.8), είναι ίδια με την Frobenius νόρμα στην (1.3.9) όπως προκύπτει από την σύγκριση των αντίστοιχων τύπων παραπάνω.
- Για κάθε συμμετρικό πίνακα η νόρμα γραμμής στην (1.3.6) ταυτίζεται με τη νόρμα στήλης στην (1.3.7).
- Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, τότε $\rho(A) = \|A\|_2$

Παράδειγμα 1.6

Να υπολογιστούν οι νόρμες που αναφέρθηκαν στις (1.3.6)-(1.3.10) για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Για τον υπολογισμό της $\|A\|_\infty$ από (1.3.6) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \{r_i = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{r_i\} = \max\{r_1, r_2, r_3\} \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{|2| + |4| + |1|, |-2| + |-1| + |0|, |4| + |-3| + |1|\} \\ &= \max\{7, 3, 8\} = 8 \end{aligned}$$

- Για τον υπολογισμό της $\|A\|_1$ από (1.3.7) έχουμε :

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \{c_j = \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{c_j\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|, |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|, |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{|2| + |-2| + |4|, |4| + |-1| + |-3|, |1| + |0| + |1|\} \\ &= \max\{8, 8, 2\} = 8 \end{aligned}$$

- Για τον υπολογισμό της $\|A\|_E$ από (1.3.8) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|_E &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 4^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

- Σύμφωνα με το Σχόλιο 1.2 ισχύει ότι:

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \sqrt{52}$$

- Για τον υπολογισμό της $\|A\|_2$ από (1.3.10) έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B με

$$B = A^*A = \begin{bmatrix} 24 & -2 & 6 \\ -2 & 26 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι $\lambda_1 = 0.3861$, $\lambda_2 = 24.0963$, και $\lambda_3 = 27.5176$, (με $\text{rank}(B) = 3$).

Άρα, $\rho(A^*A) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = 27.5176$, επομένως

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{27.5176} = 5.2457. \quad \blacktriangle$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Συμπύεση δεδομένων και SVD

2.1 Βασικές έννοιες για την SVD παραγοντοποίηση

Η παραγοντοποίηση ενός μη-τετραγωνικού πίνακα δεν είναι εφικτή με τις μεθόδους που έχουν παρουσιαστεί στο πρώτο Κεφάλαιο. Σ' αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται η παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ στη μορφή $A = USV^*$, όπου S είναι ένας block-διαγώνιος πίνακας και U, V είναι κατάλληλης διάστασης ορθομοναδιαίοι πίνακες.

2.1.1 Ορισμοί και προτάσεις

Θεωρώντας ένα πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και εφαρμόζοντας διαδοχικά τις γνωστές ιδιότητες των πινάκων

$$(AB)^* = B^*A^* \quad \text{και} \quad (A^*)^* = A,$$

διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$, $AA^* \in M_m(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανοί, επειδή ισχύει

$$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^* \quad \text{και} \quad (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A. \quad (2.1.1)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2 (vii) οι ιδιοτιμές των Ερμιτιανών πινάκων A^*A , AA^* στην (2.1.1) είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στη συνέχεια, θεωρώντας τα μη-μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ και $y \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$x^*A^*Ax = (Ax)^*Ax = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

$$y^*AA^*y = (A^*y)^*A^*y = \|A^*y\|^2 \geq 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι οι Ερμιτιανοί πίνακες A^*A , AA^* είναι θετικά ημιορισμένοι (βλέπε, Ορισμό 1.4). Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 1.2 (viii) οι παραπάνω θετικά ημιορισμένοι πίνακες A^*A , AA^* έχουν ιδιοτιμές μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή έχουν θετικές ιδιοτιμές ή μηδέν.

Η τελευταία παρατήρηση υποδεικνύει ότι μπορούμε να διατάξουμε τις ιδιοτιμές, λ_i , του πίνακα $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$ ως εξής :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Τέλος, αν ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός και x είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του A , τότε μπορούμε να γράψουμε τις ισότητες: $Ax = \lambda x$ και $\|x\| = 1$, από όπου προκύπτει

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = |\lambda|.$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι εάν το λ είναι ιδιοτιμή ενός Ερμιτιανού πίνακα A , τότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι αυτό που κάνει το διάνυσμα Ax να έχει ίσο μήκος με την τιμή $|\lambda|$.

Ορισμός 2.1

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. **Ιδιάζουσα τιμή** (singular value) του πίνακα A , συμβολίζεται με σ , ονομάζεται η μη αρνητική τετραγωνική ρίζα της ιδιοτιμής λ του πίνακα $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$, δηλαδή,

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \quad (2.1.3)$$

Πρόταση 2.1

Ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ είναι ίσος με r , αν και μόνο αν ο βαθμός (rank) του πίνακα A είναι r .

Σχόλιο 2.1

- i. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1.3) οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A αναζητούνται από τις ιδιοτιμές λ του πίνακα $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$, και σε κάθε ιδιοτιμή λ αντιστοιχεί μια ιδιάζουσα τιμή $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Προφανώς, οι ιδιάζουσες τιμές διατάσσονται όπως και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του A^*A στη (2.1.2), άρα

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για το βαθμό του $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ισχύει $r(A) = r \leq \min\{m, n\}$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση και σύμφωνα με την ισοδυναμία που περιγράφεται στην Πρόταση 2.1, οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A είναι στο πλήθος r και οι υπόλοιπες είναι μηδέν, οπότε η (2.1.4) γράφεται ισοδύναμα

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q = 0, \quad (2.1.5)$$

όπου $q = \min\{m, n\}$.

- ii. Ο πίνακας $AA^* \in M_m(\mathbb{F})$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$ με διαφορετική πολλαπλότητα στην ιδιοτιμή μηδέν, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές έχουν την ίδια πολλαπλότητα στους δύο συμμετρικούς πίνακες.

Στο επόμενο Θεώρημα διατυπώνεται, η πιο γνωστή μέθοδος παραγοντοποίησης πίνακα που συναντάται στις εφαρμογές, η ονομαζόμενη παραγοντοποίηση ιδιάζουσων τιμών (**Singular Value Decomposition**) ή σε συντομία **SVD**. Η SVD παραγοντοποίηση είναι μια μέθοδος ανάλυσης ενός οποιουδήποτε $m \times n$ πίνακα A σε γινόμενο τριών πινάκων S, U, V , όπου ο πίνακας S είναι ένας πίνακας με ίδιες διαστάσεις με αυτές του A , δηλαδή έχει μέγεθος $m \times n$ και τα στοιχεία ταυτίζονται με τις ιδιάζουσες τιμές (singular values) του πίνακα A σε φθίνουσα σειρά, ο U είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $m \times m$ και V είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $n \times n$. Την απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [6,8,9].

Θεώρημα 2.1

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ με $r(A) = r$, και $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ οι ιδιάζουσες τιμές του. Τότε υπάρχει $m \times n$ πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} D_{r \times r} & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \mathbb{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

με $D_{r \times r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, και υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες U, V τέτοιοι ώστε

$$A = U \cdot S \cdot V^*, \quad (2.1.6)$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας V έχει στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A^*A και ο $m \times m$ πίνακας U έχει ως στήλες ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν από

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \quad (2.1.7)$$

όπου v_i είναι η i -στήλη του ορθογώνιου πίνακα V στη (2.1.6) για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$.

Σχόλιο 2.2

- i. Αρχικά υπολογίζονται και διατάσσονται οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$, και σύμφωνα με αυτές διατάσσονται και οι αντίστοιχες ιδιάζουσες τιμές όπως στη (2.1.5), (βλέπε, Σχόλιο 2.1 (i)), δηλαδή,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q = 0,$$

όπου $q = \min\{m, n\}$. Επειδή οι πίνακες S, A πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις, όπως σημειώνεται στο Θεώρημα 2.1, τοποθετούνται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S οι r διατεταγμένες μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές, οι οποίες βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του block διαγώνιου πίνακα D στον S , και κατόπιν αναγράφονται οι μηδενικές ιδιάζουσες τιμές έως ότου συμπληρωθούν m συνολικά διαγώνια στοιχεία στον S . Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ιδιάζουσες τιμές θα θεωρούμε τις τιμές

που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα S , οι οποίες είναι πάντα διατεταγμένες, όπως στη (2.1.5).

- ii. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i του $A^*A \in M_n(\mathbb{F})$ υπολογίζεται το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων αριθμείται ακολουθώντας τη διάταξη που έχουν οι αντίστοιχες ιδιοτιμές (κατά συνέπεια και οι ιδιάζουσες τιμές του A) και εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος 1.1 για την ορθοκανονικοποίησή τους (μέθοδος Gram-Schmidt). Τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα σημειώνονται v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, τα οποία τοποθετούνται ως στήλες στον πίνακα V .
- iii. Για κάθε μη μηδενική ιδιάζουσα τιμή σ_i και χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ορθοκανονικοποιημένο διάνυσμα v_i , $i = 1, 2, \dots, r$, υπολογίζεται το αντίστοιχο διάνυσμα u_i από τη (2.1.7). Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram-Schmidt ορθοκανονικοποιούνται τα διανύσματα u_i και στη συνέχεια τοποθετούνται ως στήλες στον πίνακα U .
- iv. Προφανώς το Θεώρημα 2.1 εφαρμόζεται και στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει πραγματικά στοιχεία, δηλαδή αναφερόμαστε στον πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, οπότε οι ορθομοναδιαίοι πίνακες U, V είναι ορθογώνιοι και όπου υπάρχει ο συμβολισμός $*$ αντικαθίσταται με την απλή αναστροφή, t , ο δε πίνακας $A^tA \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός.

Παράδειγμα 2.1

Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο SVD.

Ο συμμετρικός πίνακας που προκύπτει είναι

$$A^tA = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_{A^t A}(\lambda) = \lambda(\lambda - 11)(\lambda - 1).$$

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 0$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους είναι: $x_1 = [-1 \quad 2/3 \quad 1]^t$, $x_2 = [1 \quad 0 \quad 1]^t$ και $x_3 = [1 \quad 3 \quad -1]^t$.

Διαιρώντας τα ιδιοδιανύσματα με τα μέτρα τους έχουμε τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης, οπότε

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{22}}{3}} \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{\sqrt{22}} [-3 \quad 2 \quad 3]^t,$$

$$v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 0 \quad 1]^t,$$

$$v_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} [1 \quad 3 \quad -1]^t.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1.3) οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A αναζητούνται από τις ιδιοτιμές του $A^t A$, οι οποίες είναι:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{11}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1, \quad \text{και} \quad \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$$

Επειδή ο βαθμός(rank) του πίνακα A είναι $r(A) = 2$, για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων S , A , όπως σημειώνεται στο Θεώρημα 2.1 και στο Σχόλιο 2.2 (i), στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S τοποθετούνται μόνο οι μη μηδενικές τιμές σ_1 και σ_2 , οπότε οι ιδιάζουσες τιμές θεωρούνται μόνο οι σ_1 και σ_2 , συνεπώς ο πίνακας S γράφεται

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.2 (iii) και τη (2.1.7) τα διανύσματα u_1 και u_2 ορίζονται ως εξής:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{11\sqrt{2}} [-11/3 \quad 11/3]^t = \frac{1}{\sqrt{2}} [-11/33 \quad 11/33]^t,$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = 1[1 \quad 1]^t = [1 \quad 1]^t.$$

Για το v_3 ισχύει $A v_3 = 0$.

Επομένως, ο ορθογώνιος πίνακας U έχει ως στήλες τα παραπάνω ορθοκανονικά διανύσματα, συνεπώς είναι

$$U = [u_1 \quad u_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -11/33 & 1 \\ 11/33 & 1 \end{bmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & 3/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{11} \end{bmatrix}.$$

Η SVD παραγοντοποίηση του πίνακα A δίνεται από τη (2.1.6) ως ακολούθως:

$$A = U S V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -11/33 & 1 \\ 11/33 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/\sqrt{22} & 2/\sqrt{22} & 3/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{11} \end{bmatrix}.$$



Παράδειγμα 2.2

Έστω ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας B εφαρμόζοντας τη μέθοδο SVD.

Ο συμμετρικός πίνακας που προκύπτει είναι

$$B^t B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},$$

και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_{B^t B}(\lambda) = (\lambda - 9)(\lambda - 2)$$

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = 2$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους είναι: $x_1 = [0 \ 1]^t$ και $x_2 = [1 \ 0]^t$.

Διαιρώντας τα ιδιοδιανύσματα με τα μέτρα τους έχουμε τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης, οπότε

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = [0 \ 1]^t.$$

$$v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = [1 \ 0]^t.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1.3) οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα B αναζητούνται από τις ιδιοτιμές του $B^t B$, οι οποίες είναι:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3, \text{ και } \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$$

Επειδή ο βαθμός(rank) του πίνακα B είναι $r(B) = 2$, για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων S , B , όπως σημειώνεται στο Θεώρημα 2.1 και στο Σχόλιο 2.2 (i), στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S τοποθετούνται όλες οι τιμές που υπολογίστηκαν σ_1 και σ_2 , οι οποίες είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A , συνεπώς ο πίνακας S γράφεται

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.2 (iii) και τη (2.1.7) τα διανύσματα u_1 και u_2 ορίζονται ως εξής:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} B v_1 = \frac{1}{3} [-1 \ 2 \ 2]^t,$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} B v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ -1 \ 1]^t.$$

Για να ολοκληρωθεί ο πίνακας U πρέπει να υπάρχει ένα ακόμα διάνυσμα u_3 , οπότε επεκτείνουμε το χώρο της βάσης των διανυσμάτων με ένα τυχαίο ιδιοδιάνυσμα $x_3 =$

$[4 \ 1 \ 1]^t$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.3 γίνεται ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων u_1, u_2 και x_3 . Επειδή

$$\det[u_1 \ u_2 \ x_3] = \det \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 4 \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = 3\sqrt{2} \neq 0,$$

συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα u_1, u_2 και x_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt ανάμεσα στα διανύσματα u_1, u_2 και x_3 για να ελέγξουμε την ορθοκανονικότητα τους και διαπιστώνουμε ότι

$$\tilde{x}_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle x_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = [4 \ 1 \ 1]^t$$

Διαιρώντας το παραπάνω διάνυσμα με το μέτρο του προκύπτει το τρίτο στοιχείο της ορθοκανονικής βάσης που χρησιμοποιείται στο χώρο στηλών του U . Συγκεκριμένα

$$u_3 = \frac{\tilde{x}_3}{\|\tilde{x}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} [4 \ 1 \ 1]^t.$$

Επομένως, ο ορθογώνιος πίνακας U έχει ως στήλες τα παραπάνω ορθοκανονικά διανύσματα, συνεπώς είναι

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η SVD παραγοντοποίηση του πίνακα B δίνεται από τη (2.1.6) ως ακολούθως:

$$B = U S V^t = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Παράδειγμα 2.3

Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας C εφαρμόζοντας τη μέθοδο SVD .

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας C είναι συμμετρικός, αλλά όπως στα Παραδείγματα 2.1 και 2.2 και σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο υπολογίζεται το γινόμενο $C^t C$ και ο συμμετρικός πίνακας που προκύπτει είναι

$$C^t C = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 12 \\ 20 & 44 & 20 \\ 12 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_{C^t C}(\lambda) = \lambda(\lambda - 64)(\lambda - 4)$$

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι $\lambda_1 = 64$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 0$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους είναι: $x_1 = [1 \ 2 \ 1]^t$, $x_2 = [1 \ -1 \ 1]^t$ και $x_3 = [-1 \ 0 \ 1]^t$.

Διαιρώντας τα ιδιοδιανύσματα με τα μέτρα τους έχουμε τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης, οπότε

$$v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} [1 \ 2 \ 1]^t.$$

$$v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad -1 \quad 1]^t.$$

$$v_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1.3) οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα C αναζητούνται από τις ιδιοτιμές του $C^t C$, οι οποίες είναι:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 8, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2, \quad \text{και} \quad \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$$

Επειδή ο βαθμός(rank) του πίνακα C είναι $r(C) = 2$, για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων S , C , όπως σημειώνεται στο Θεώρημα 2.1 και στο Σχόλιο 2.2 (i), στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S τοποθετούνται όλες οι προαναφερθείσες τιμές σ_1 , σ_2 και σ_3 , οι οποίες είναι οι ιδιάζουσες, συνεπώς ο πίνακας S γράφεται

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.2 (iii) και τη (2.1.7) τα διανύσματα u_1 και u_2 ορίζονται ως εξής:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} C v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} [1 \quad 2 \quad 1]^t.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} C v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad -1 \quad 1]^t.$$

Για να συμπληρωθεί ο πίνακας U και να έχει τις ιδιότητες που απαιτούνται από το Θεώρημα 2.1 αρχικά πρέπει να θεωρήσουμε ένα ακόμα διάνυσμα, οπότε επεκτείνουμε το χώρο της βάσης των διανυσμάτων με ένα τυχαίο διάνυσμα, έστω $x_4 = [-1 \quad 0 \quad 1]^t$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.3 έχουμε

$$\det[u_1 \quad u_2 \quad x_3] = \det \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1 \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = 6 \neq 0,$$

συνεπώς τα διανύσματα u_1 , u_2 και x_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt ανάμεσα στα διανύσματα u_1 , u_2 και x_4 για να ελέγξουμε την ορθοκανονικότητά τους και διαπιστώνουμε ότι

$$\widetilde{x}_3 = x_4 - \frac{\langle x_4, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle x_4, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = [-1 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Διαιρώντας το παραπάνω διάνυσμα με το μέτρο του προκύπτει το τρίτο στοιχείο της ορθοκανονικής βάσης που χρησιμοποιείται στο χώρο στηλών του U . Συγκεκριμένα

$$u_3 = \frac{\widetilde{x}_3}{\|\widetilde{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Επομένως, ο ορθογώνιος πίνακας U έχει ως στήλες τα παραπάνω ορθοκανονικά διανύσματα, συνεπώς είναι

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Η SVD παραγοντοποίηση του πίνακα C δίνεται από τη (2.1.6) ως ακολούθως:

$$C = U S V^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1 \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 2.4

Έστω ο πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας D εφαρμόζοντας τη μέθοδο SVD .

Ο συμμετρικός πίνακας που προκύπτει είναι

$$D^t D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_{D^t D}(\lambda) = \lambda (\lambda - 18) (\lambda - 16)$$

Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 16$ και $\lambda_3 = 0$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους είναι: $x_1 = [1 \ 0 \ 0]^t$, $x_2 = [0 \ 1 \ 0]^t$ και $x_3 = [0 \ 0 \ 1]^t$.

Προφανώς τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα είναι τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης του $R^{3 \times 1}$, οπότε

$$v_1 = [1 \ 0 \ 0]^t,$$

$$v_2 = [0 \ 1 \ 0]^t,$$

$$v_3 = [0 \ 0 \ 1]^t.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1.3) οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα D αναζητούνται από τις ιδιοτιμές του $D^t D$, οι οποίες είναι:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3\sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 4 \quad \text{και} \quad \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$$

Επειδή ο βαθμός(rank) του πίνακα D είναι $r(D) = 2$, για να συμφωνούν οι διαστάσεις των πινάκων S , D , όπως σημειώνεται στο Θεώρημα 2.1 και στο Σχόλιο 2.2 (i), στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S τοποθετούνται όλες οι προαναφερθείσες τιμές σ_1 , σ_2 και σ_3 , οι οποίες είναι οι ιδιάζουσες, συνεπώς ο πίνακας S γράφεται

$$S = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.2 (iii) και τη (2.1.7) τα διανύσματα u_1 και u_2 ορίζονται ως εξής:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} D v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^t.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} D v_2 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^t.$$

Για να συμπληρωθεί ο πίνακας U και να έχει τις ιδιότητες που απαιτούνται από το Θεώρημα 2.1 αρχικά πρέπει να θεωρήσουμε δύο ακόμα διανύσματα, οπότε επεκτείνουμε με δύο τυχαία διανύσματα

$$x_3 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]^t \quad \text{και} \quad x_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.3 έχουμε

$$\det[u_1 \quad u_2 \quad x_3 \quad x_4] = \det \begin{bmatrix} \sqrt{2}/6 & 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2}/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/6 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{2} \neq 0,$$

συνεπώς τα διανύσματα u_1 , u_2 , x_3 και x_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt ανάμεσα στα διανύσματα u_1 , u_2 και x_4 για να ελέγξουμε την ορθοκανονικότητά τους και διαπιστώνουμε ότι

$$\tilde{x}_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle x_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = [1 \ 0 \ 0 \ -1]^t$$

Διαιρώντας το παραπάνω διάνυσμα με το μέτρο του προκύπτει το τρίτο στοιχείο της ορθοκανονικής βάσης που χρησιμοποιείται στο χώρο στηλών του U . Συγκεκριμένα

$$u_3 = \frac{\tilde{x}_3}{\|\tilde{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ 0 \ -1]^t.$$

Στη συνέχεια για το διάνυσμα u_4 ,

$$\tilde{x}_4 = x_4 - \frac{\langle x_4, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 - \frac{\langle x_4, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle x_4, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = [1/4 \ -2/3 \ 0 \ 5/4]^t$$

Διαιρώντας το παραπάνω διάνυσμα με το μέτρο του προκύπτει το τέταρτο στοιχείο της ορθοκανονικής βάσης που χρησιμοποιείται στο χώρο στηλών του U . Συγκεκριμένα

$$u_4 = \frac{\tilde{x}_4}{\|\tilde{x}_4\|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{149}} \left[\frac{1}{4} \ -\frac{2}{3} \ 0 \ \frac{5}{4} \right]^t.$$

Επομένως, ο ορθογώνιος πίνακας U έχει ως στήλες τα παραπάνω ορθοκανονικά διανύσματα, συνεπώς είναι

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/6 & 0 & 1/\sqrt{2} & 6\sqrt{2}/4\sqrt{149} \\ 2\sqrt{2}/3 & 0 & 0 & -12\sqrt{2}/3\sqrt{149} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/6 & 0 & -1/\sqrt{2} & 30\sqrt{2}/4\sqrt{149} \end{bmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η SVD παραγοντοποίηση του πίνακα D δίνεται από τη (2.1.6) ως ακολούθως:

$$D = USV^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/6 & 0 & 1/\sqrt{2} & 6\sqrt{2}/4\sqrt{149} \\ 2\sqrt{2}/3 & 0 & 0 & -12\sqrt{2}/3\sqrt{149} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/6 & 0 & -1/\sqrt{2} & 30\sqrt{2}/4\sqrt{149} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

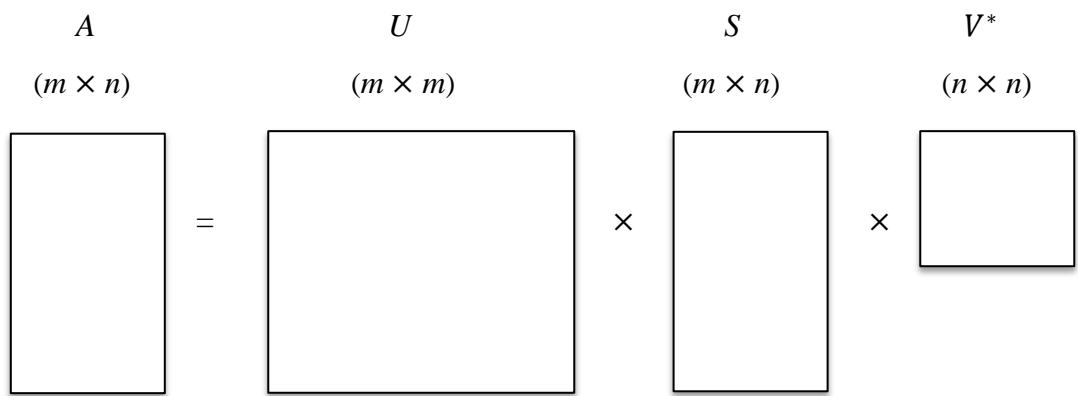


2.1.2 Προσέγγιση ενός μη τετραγωνικού πίνακα A

Σ' αυτό το σημείο εξετάζεται μια σημαντική εφαρμογή της παραγοντοποίησης SVD. Όπως έχει αναφερθεί, αν ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, τότε οι πίνακες U , S και V έχουν διαστάσεις $m \times m$, $m \times n$ και $n \times n$, αντίστοιχα. Ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών (που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S , και είναι διατεταγμένες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη, όπως στη (2.1.4)), είναι ίσος με το βαθμό του πίνακα A , (όπου ο βαθμός σημειώνεται με $r = r(A)$). Έστω ότι επιλέγουμε και σαθεροποιούμε έναν ακέραιο αριθμό k για τον οποίο ισχύει $k \leq r$,

- κρατάμε τις k μεγαλύτερες ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A στον πίνακα S και τις υπόλοιπες $r - k$ τις θέτουμε ίσες με μηδέν.
- κρατάμε τις πρώτες k στήλες του πίνακα U και τις υπόλοιπες $m - r$ στήλες τις θέτουμε ίσες με μηδέν.
- κρατάμε τις πρώτες k γραμμές του πίνακα V και τις υπόλοιπες $n - r$ γραμμές τις θέτουμε ίσες με μηδέν.

Η διαδικασία αυτή αναλύεται στο παρακάτω Σχήμα 2.2 [11, 14]. Οι τιμές $r - k$, $m - r$ και $n - r$ είναι **πάντα** θετικές ή μηδέν, αφού ισχύει ότι $k \leq r$ και $r \leq \min\{m, n\}$. Το αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας είναι να δημιουργηθούν νέοι πίνακες (αντίστοιχοι των U , S και V , βλέπε, Σχήμα 2.1), οι U_k , S_k και V_k , οι οποίοι έχουν διαστάσεις $m \times k$, $k \times k$ και $k \times n$, αντίστοιχα, (βλέπε, Σχήμα 2.2). Το γινόμενο των τριών αυτών πινάκων στη συνέχεια σημειώνεται με \tilde{A}_k . Επομένως από τον τύπο της παραγοντοποίησης του A στη (2.1.6)

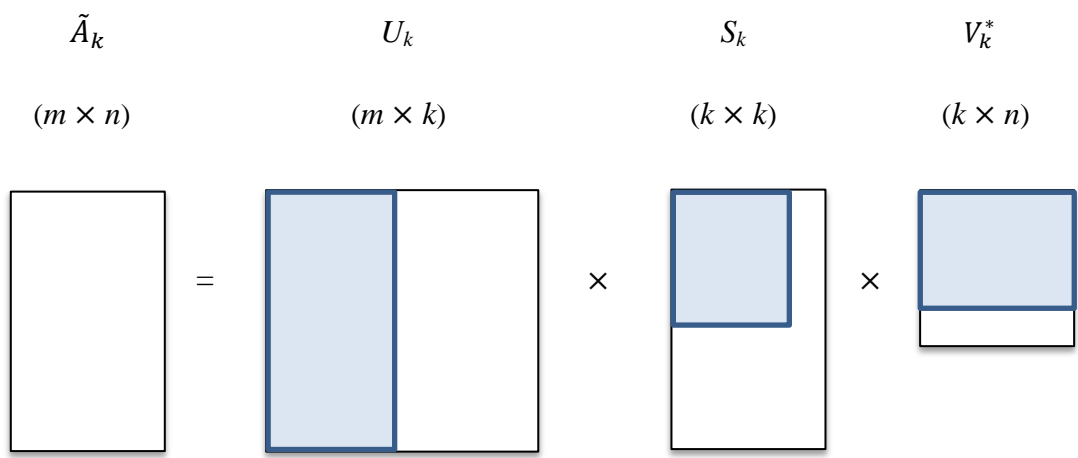


Σχήμα 2.1 : Διαστάσεις των πινάκων στην SVD παραγοντοποίηση του A

καταλήγουμε στον πίνακα

$$\tilde{A}_k = U_k \cdot S_k \cdot V_k^* \tag{2.1.8}$$

όπου



Σχήμα 2.2 : Διαστάσεις των πινάκων στην παραγοντοποίηση του \tilde{A}_k

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανάλυση είναι φανερό ότι ο τύπος της SVD παραγοντοποίησης του A στη (2.1.6) είναι ισοδύναμος με την έκφραση:

$$A = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^* + \dots + \sigma_r \cdot u_r \cdot v_r^* \tag{2.1.9}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι στη (2.1.9) και για $i=1,2,\dots,r$, κάθε γινόμενο $u_i \cdot v_i^*$ είναι ένας πίνακας A_i διάστασης $m \times n$, δηλαδή έχει ίδιες διαστάσεις με αυτές του πίνακα A . Ο κάθε πίνακας A_i έχει κάποιο βάρος και αντιστοιχεί σε μια ιδιάζουσα τιμή σ_i και συμμετέχει στην «ανάκτηση» του πίνακα A . Ο παράγοντας σ_i επηρεάζει και καθορίζει τον πίνακα A_i , καθώς τα διανύσματα u_i και v_i^* είναι μοναδιαία. Επομένως όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του σ_i , τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η «επίδραση» του πίνακα A_i στην «ανάκτηση» του πίνακα A . Εάν επιλέξουμε να κρατήσουμε τις k μεγαλύτερες ιδιάζουσες τιμές και θέσουμε τις υπόλοιπες ίσες με μηδέν, τότε προκύπτει μια προσέγγιση του πίνακα A , όπου η ομοιότητα με τον πίνακα A εξαρτάται από την τιμή k , καθώς και τις τιμές των σ_l και σ_k . Συνεπώς, η (2.1.8) γράφεται ισοδύναμα με μορφή αθροίσματος ως

$$\tilde{A}_k = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^* + \dots + \sigma_k \cdot u_k \cdot v_k^* \quad (2.1.10)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω και παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1 και 2.2 ο πίνακας \tilde{A}_k έχει ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις με τον πίνακα A , οι δύο πίνακες διαφέρουν μόνο στο βαθμό τους, καθώς ο βαθμός του A είναι r και $r(\tilde{A}_k) = k$, με $k \leq r$.

Αν $k = r$, δηλαδή αν διατηρηθούν όλες οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A , μετά από αντικατάσταση των πινάκων A και \tilde{A}_k από (2.1.9) και (2.1.10) προκύπτει $A - \tilde{A}_k = 0$, οπότε οι δύο πίνακες είναι ίσοι (ταυτίζονται).

Στην περίπτωση $k < r$, μετά την αντικατάσταση των πινάκων A και \tilde{A}_k από (2.1.9) και (2.1.10) προκύπτει

$$A - \tilde{A}_k = \sigma_{k+1} \cdot u_{k+1} \cdot v_{k+1}^* + \sigma_{k+2} \cdot u_{k+2} \cdot v_{k+2}^* + \dots + \sigma_r \cdot u_r \cdot v_r^* \quad (2.1.11)$$

Η «ομοιότητα» των πινάκων A και \tilde{A}_k παίζει σημαντικό ρόλο σε εφαρμογές με εικόνα, όπου υπάρχουν πολλές ιδιάζουσες τιμές, οπότε επιλέγοντας μια μικρή τιμή για το (δείκτη) k παρατηρούμε ότι ο πίνακας \tilde{A}_k αποτελεί μία «ικανοποιητική» **προσέγγιση** του πίνακα A , [15].

Παράδειγμα 2.5

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για έναν ακέραιο k μικρότερο του βαθμού του A να δοθεί μία προσέγγιση \tilde{A}_k του A .

Ο πίνακας A είναι ένας πίνακας διαστάσεων 3×4 , οπότε ακολουθώντας τον αλγόριθμο της SVD παραγοντοποίησής του, όπως αναπτύχθηκε στην Υποενότητα 2.1.1 (βλέπε, Θεώρημα 2.1, Σχόλιο 2.2 και Παραδείγματα 2.1-2.4), προκύπτουν οι πίνακες U , V , S με U να είναι ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας, S να είναι 3×4 και τέλος ο πίνακας V να είναι ένας 4×4 ορθογώνιος πίνακας. Οι υποψήφιες ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A είναι : $\sigma_1 = 10.1811$, $\sigma_2 = 6.4443$, $\sigma_3 = 2.1948$, και $\sigma_4 = 0$. Επειδή οι διαστάσεις των πινάκων S , A πρέπει να ταυτίζονται, στην κύρια διαγώνιο του πίνακα S τοποθετούνται μόνο οι ιδιάζουσες τιμές σ_1 , σ_2 και σ_3 , οι οποίες είναι διατεταγμένες και χαρακτηρίζονται ιδιάζουσες τιμές του A . Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 ο βαθμός του πίνακα A είναι $r(A) = 3$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε:

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & U & & S & & V^t \\ & (3 \times 4) & & (3 \times 3) & & (3 \times 4) & & (4 \times 4) \\ \boxed{} & = & \boxed{} & \times & \boxed{} & \times & \boxed{} \end{array}$$

Από τη (2.1.6) έχουμε

$$A = U S V^t =$$

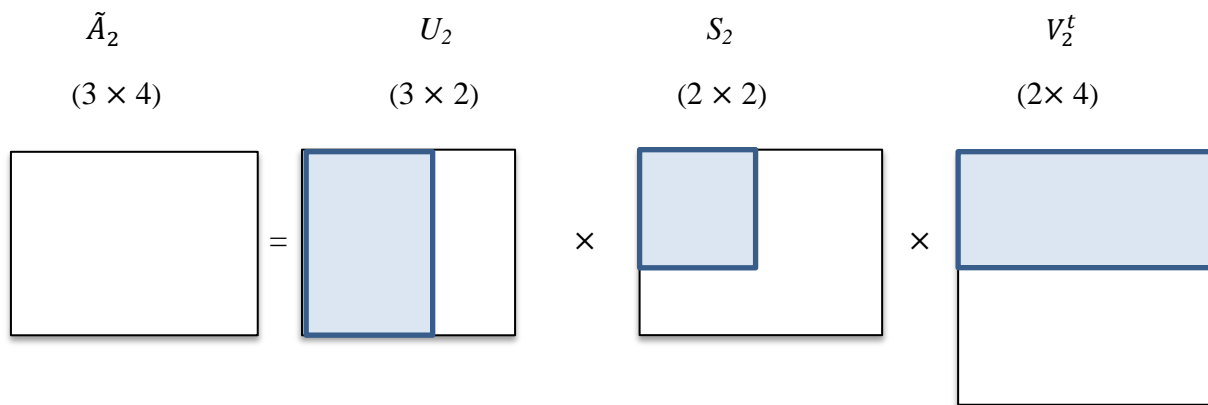
$$= \begin{bmatrix} 0.0740 & 0.8193 & -0.5686 \\ 0.3030 & 0.5247 & 0.7955 \\ -0.9501 & 0.2312 & 0.2094 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10.1811 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1948 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2847 & -0.8134 & 0.5069 & 0.0218 \\ 0.8149 & 0.003 & -0.4365 & -0.3814 \\ -0.0702 & 0.2974 & 0.5501 & -0.7772 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (2.1.12)$$

που μπορεί να υπολογιστεί και από την ισοδύναμη σχέση (2.1.9), δηλαδή

$$A = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^t + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^t + \sigma_3 \cdot u_3 \cdot v_3^t = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν όμως επιλέξουμε τις 2 πρώτες ιδιάζουσες τιμές, δηλαδή $k = 2$, τότε από τη (2.1.8) έχουμε ότι ο πίνακας U_2 είναι διαστάσεων 3×2 , ο πίνακας S_2 είναι διαστάσεων 2×2 και ο πίνακας V_2 είναι διαστάσεων 2×4 και $r(\tilde{A}) = 2$, και μια προσέγγιση του πίνακα A , αποτελεί ο ακόλουθος πίνακας \tilde{A}_2 :



Χρησιμοποιώντας τις στήλες των πινάκων στην (2.1.12) και αντικαθιστώντας στη (2.1.10) έχουμε

$$\tilde{A}_2 = U_2 \cdot S_2 \cdot V_2^t = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^t + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^t \quad (2.1.13)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0740 & 0.8193 \\ 0.3030 & 0.5247 \\ -0.9501 & 0.2312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.1811 & 0 \\ 0 & 6.4443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2847 & -0.8134 & 0.5069 & 0.0218 \\ 0.8149 & 0.003 & -0.4365 & -0.3814 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4.0876 & -0.6289 & 2.6865 & 2.03 \\ -1.8774 & -2.5192 & 3.0396 & 1.3570 \\ -3.9677 & 7.8633 & -4.2528 & 0.3572 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

2.2 Frobenius νόρμα, νόρμα-2 ως μέτρα προσέγγισης του πίνακα

Εδώ να υπενθυμίσουμε ότι στην Ενότητα 1.3 ορίστηκαν και αναφέρθηκαν νόρμες μόνο τετραγωνικών πινάκων (βλέπε, Ορισμός 1.17) στην παρούσα ενότητα αυτοί οι ορισμοί επεκτείνονται και για την περίπτωση μη τετραγωνικών πινάκων. Δύο σημαντικές νόρμες πινάκων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα πτυχιακή εργασία και συνδέονται με τα μεγέθη που προκύπτουν από την SVD παραγοντοποίηση του πίνακα A είναι η Frobenius νόρμα και η νόρμα-2, των οποίων ο ορισμός για τυχαίο πίνακα δίνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 2.2

- Η Frobenius νόρμα ενός μη τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ορίζεται να είναι

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_{i,j}|^2}. \quad (2.2.1)$$

- Νόρμα-2 ενός μη τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ορίζεται να είναι η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του A στη (2.1.5), δηλαδή,

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \equiv s_{11} \quad (2.2.2)$$

όπου s_{11} σημειώνει το πρώτο στοιχείο του πίνακα $S \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, και βρίσκεται στην κύρια διαγώνιό του, όπως αυτός ορίζεται στο Θεώρημα 2.1.

Στην Υποενότητα 2.1.2 μελετήθηκε μία προσέγγιση των στοιχείων ενός $m \times n$ πίνακα A , από τα στοιχεία ενός πίνακα \tilde{A}_k , ο οποίος κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας κατάλληλες στήλες από τους πίνακες U, S, V της SVD παραγοντοποίησης του A . Το ερώτημα που τίθεται εδώ αναφέρεται στην περίπτωση $k < r$, και τότε μας ενδιαφέρει πόσο καλή είναι η προσέγγιση που πραγματοποιείται, δηλαδή, πόσο «κοντά» βρίσκονται

οι δύο πίνακες A και \tilde{A}_k , δηλαδή, πόσο κοντά βρίσκονται τα στοιχεία των πινάκων A και \tilde{A}_k .

Απάντηση στο παραπάνω ερώτημα μπορούμε να αποκτήσουμε χρησιμοποιώντας τη Frobenius νόρμα του πίνακα $A - \tilde{A}_k$. Όπως αναφέρεται [5], αντικαθιστώντας στη (2.2.1) του Ορισμού 2.2 με τα στοιχεία του πίνακα $A - \tilde{A}_k$ έχουμε:

$$\|A - \tilde{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_{i,j} - \tilde{\alpha}_{i,j}|^2} \quad (2.2.3)$$

Σχόλιο 2.3

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 για τον $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ με βαθμό $r(A) = r$ από την SVD παραγοντοποίηση προκύπτει ο πίνακας S που τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A , και r είναι το πλήθος των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών του. Όπως αναφέρεται [16, Lemma 4.2] η Frobenius νόρμα του A σχετίζεται με τις μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του ως εξής:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \quad (2.2.4)$$

Θεωρώντας $k < r$ προκύπτει η προσέγγιση \tilde{A}_k του πίνακα A , ο οποίος έχει αντίστοιχα $r(\tilde{A}_k) = k$, όπου k το σύνολο των ιδιάζουσων τιμών του πίνακα \tilde{A}_k . Αν στη διαφορά των δύο πινάκων υπολογίσουμε την τιμή της Frobenius νόρμας χρησιμοποιώντας τη (2.2.4) διαπιστώνουμε ότι η τιμή σχετίζεται με τις ιδιάζουσες τιμές του A , που δεν χρησιμοποιήθηκαν κατά την προσέγγιση του πίνακα \tilde{A}_k στη (2.1.10). Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τη (2.2.4) για τον πίνακα της διαφοράς των πινάκων A και \tilde{A}_k έχουμε

$$\|A - \tilde{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}. \quad (2.2.5)$$

Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε τη νόρμα-2 στη διαφορά των πινάκων A και \tilde{A}_k , όπως αποδεικνύεται [15, 16] διαπιστώνουμε ότι η τιμή είναι ίση με την αμέσως επόμενη ιδιάζουσα τιμή από αυτήν του \tilde{A}_k , δηλαδή,

$$\|A - \tilde{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1} \quad (2.2.6)$$

όπου σ_{k+1} είναι η ιδιάζουσα τιμή του A , που βρίσκεται στη θέση $k + 1$ θεωρώντας ότι οι ιδιάζουσες τιμές είναι διαταγμένες όπως στη (2.1.5).

Τελικά από τη (2.2.6) γίνεται φανερό ότι χρησιμοποιώντας τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ της διαφοράς της προσέγγισης \tilde{A}_k από τον πίνακα A μπορούμε να βοηθηθούμε ώστε να επιλέξουμε κατάλληλη τιμή του δείκτη k από την ιδιάζουσα τιμή σ_{k+1} . Σκοπός μας είναι να παραλείψουμε ορισμένες ιδιάζουσες τιμές και κατάλληλα διανύσματα από τους πίνακες U_k , S_k και V_k ώστε από την ισότητα (2.1.10) να πετύχουμε προσέγγιση \tilde{A}_k τέτοια ώστε αυτή να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερη στον πίνακα A , το οποίο επιτυγχάνεται όταν σ_{k+1} τείνει στο μηδέν.

Για τον σχεδιασμό της Frobenius νόρμα του πίνακα $A - \tilde{A}_k$ χρησιμοποιούμε από το Παράρτημα, Κώδικα I, για k ιδιάζουσες τιμές και δημιουργείται ένα διάγραμμα. Δεν θα σχεδιαστεί η νόρμα $\|\cdot\|_2$ της διαφοράς της προσέγγισης \tilde{A}_k από τον πίνακα A , γιατί τα αποτελέσματα είναι σημεία των ιδιάζουσων τιμών και είναι μια φθίνουσα ευθεία.

Παράδειγμα 2.6

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος 2.5.

Να υπολογιστούν η Frobenius νόρμα και η νόρμα-2 του πίνακα $A - \tilde{A}_k$.

Στο Παράδειγμα 2.5 υπολογίστηκε ότι για τις 2 πρώτες ιδιάζουσες τιμές ($k = 2$) ο πίνακας $\tilde{A}_k = \tilde{A}_2$ έχει διαφορετικό βαθμό από τον πίνακα A , όπου $r(\tilde{A}_2) = 2$ και $r(A) = 3$ και ο δε πίνακας \tilde{A}_2 είναι

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -4.0876 & -0.6289 & 2.6865 & 2.03 \\ -1.8774 & -2.5192 & 3.0396 & 1.3570 \\ -3.9677 & 7.8633 & -4.2528 & 0.3572 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A - \tilde{A}_2$ υπολογίζεται από την ισότητα στη (2.1.11) και ισούται με

$$A - \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.0876 & -0.3711 & -0.6865 & 0.9700 \\ -0.1226 & 0.5192 & 0.9604 & -1.3570 \\ -0.0323 & 0.1367 & 0.2528 & -0.3572 \end{bmatrix}.$$

Από την ισότητα (2.2.3) υπολογίζεται η νόρμα Frobenius του $A - \tilde{A}_2$, που είναι

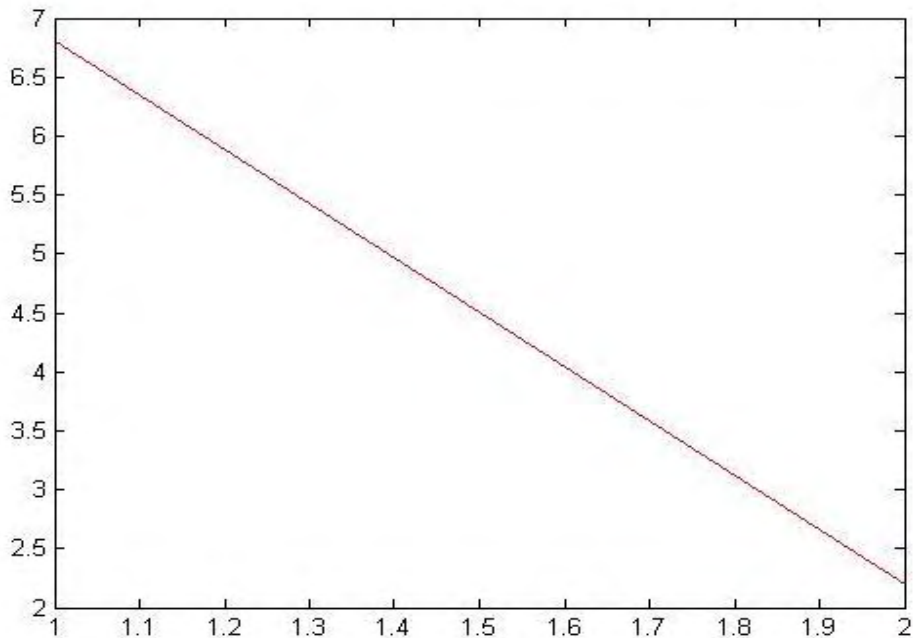
$$\|A - \tilde{A}_2\|_F = 2.1948 = \sigma_3.$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι όπως αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 2.5 η ιδιάζουσα τιμή σ_3 του A είναι ίση με 2.1948 επαλήθευοντας με αυτόν τον τρόπο την ισότητα στη (2.2.4).

Όμοια, μπορούμε να επαληθεύσουμε τη (2.2.6) αρκεί να εφαρμόσουμε τον Ορισμό 2.2 και τη (2.2.2) για τον πίνακα $A - \tilde{A}_2$, από όπου διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\|A - \tilde{A}_2\|_2 = \sigma_3 = 2.1948.$$

Για το σχεδιασμό της Frobenius νόρμας του πίνακα $A - \tilde{A}_2$ χρησιμοποιούμε τον κώδικα από το Παράρτημα, Κώδικα I, και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3 ως μια ευθεία για τις 2 πρώτες ιδιάζουσες τιμές ($k = 2$) και είναι:



Σχήμα 2.3 : Διάγραμμα Frobenius νόρμα του Παραδείγματος 2.6

Εδώ να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό της νόρμας Frobenius χρησιμοποιήσαμε τη βιβλιοθήκη της MATLAB, έκδοση 2011, όπου για έναν τυχαίο πίνακα L υπολογίζεται η τιμή της και αποθηκεύεται στη μεταβλητή `error`, ως εξής:

```
>> error =norm(L, 'fro');
```

και για τον υπολογισμό της νόρμας-2 του τυχαίου πίνακα L υπολογίζεται η τιμή της και αποθηκεύεται στη μεταβλητή `error`, ως εξής:

```
>> error =norm(L);
```



2.3 Δείκτης κατάστασης ως μέτρο προσέγγισης του πίνακα

Ο δείκτης κατάστασης (condition number) βασίζεται στην SVD παραγοντοποίηση ενός πίνακα A με διαστάσεις $m \times n$ και συγκεκριμένα στις ιδιάζουσες τιμές του. Συγκεκριμένα, ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ με βαθμό $r(A) = r$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός που ισούται με το πηλίκο της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του A , δηλαδή

$$\text{cond}(A) = \frac{s_{11}}{s_{qq}}, \quad (2.3.1)$$

όπου $s_{11} \equiv \sigma_1 > 0$, $s_{qq} \equiv \sigma_q \geq 0$, $q = \min\{m, n\}$ είναι οι διατεταγμένες ιδιάζουσες τιμές του A , που αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα $S \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, και βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του, όπως αυτός ορίζεται στο Θεώρημα 2.1.

Σχόλιο 2.4

Ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένα μέτρο που δείχνει πόσο «κοντά» βρίσκεται ο πίνακας στην ιδιότητα της αντιστρεψιμότητάς του. Από τις πιο γνωστές ιδιότητες [15] του δείκτη κατάστασης έχουμε να αναφέρουμε :

- i. Ο δείκτης κατάστασης του μοναδιαίου πίνακα είναι ίσος με 1.
- ii. Για το δείκτη κατάστασης ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\text{cond}(A) \geq 1$.
- iii. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$.
- iv. Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $\text{cond}(A)$ είναι πολύ μεγάλος αριθμός, δηλαδή, τείνει στο άπειρο.
- v. Αν ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι πολύ μεγάλος αριθμός αυτό σημαίνει ότι για το βαθμό r του πίνακα A ισχύει $r(A) = r < n$, το οποίο επιπρόσθετα σημαίνει ότι οι στήλες/γραμμές είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.

Για το σχεδιασμό του δείκτη κατάστασης του πίνακα \tilde{A}_k χρησιμοποιούμε από το Παράρτημα, τον Κώδικα I, για k το πλήθος ιδιάζουσες τιμές και δημιουργείται το αντίστοιχο διάγραμμα.

Παράδειγμα 2.7

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος 2.5.

Να υπολογιστεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A .

Στο Παράδειγμα 2.5 υπολογίστηκαν οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A , που είναι:

$$\sigma_1 = 10.1811, \sigma_2 = 6.4443, \sigma_3 = 2.1948,$$

οι οποίες είναι διατεταγμένες ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου στον πίνακα S στην παραγοντοποίηση SVD του πίνακα A ,

$$S = \begin{bmatrix} 10.1811 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1948 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στη (2.3.1) έχουμε

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 4.6387.$$

Επιπλέον, στο Παράδειγμα 2.5 για $k = 2$ υπολογίστηκε ο πίνακας προσέγγισης $\tilde{A}_k = \tilde{A}_2$ του πίνακα A ότι είναι

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -4.0876 & -0.6289 & 2.6865 & 2.03 \\ -1.8774 & -2.5192 & 3.0396 & 1.3570 \\ -3.9677 & 7.8633 & -4.2528 & 0.3572 \end{bmatrix}$$

Στη (2.1.13) υπολογίζεται ο 2×2 πίνακας S_2 , που αντιστοιχεί στον \tilde{A}_2 , ισούται με

$$S_2 = \begin{bmatrix} 10.1811 & 0 \\ 0 & 6.4443 \end{bmatrix}$$

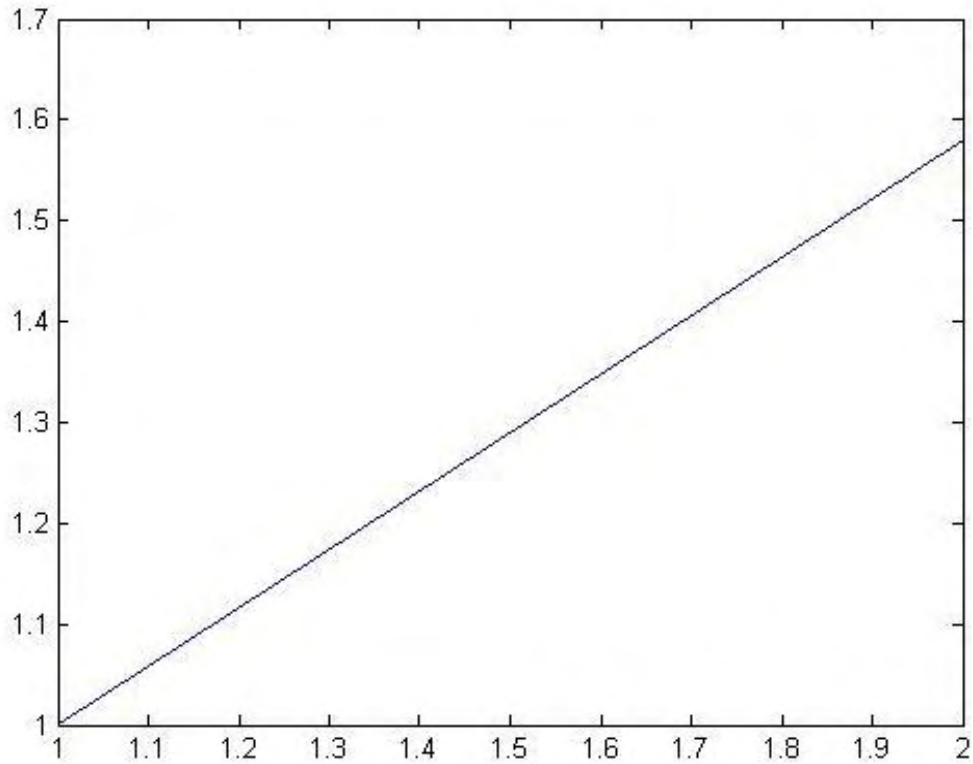
και έχει ως στοιχεία της κύριας διαγωνίου του τις ιδιάζουσες τιμές

$$\tilde{\sigma}_1 = 10.1811, \tilde{\sigma}_2 = 6.4443.$$

Αντικαθιστώντας στη (2.3.1) για τον πίνακα \tilde{A}_2 έχουμε

$$\text{cond}(\tilde{A}_2) = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2} = 1.5798.$$

Για το σχεδιασμό του δείκτη κατάστασης του πίνακα \tilde{A}_2 χρησιμοποιούμε τον κώδικα από το Παράρτημα, Κώδικα I, και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4 ως μια ευθεία για τις 2 πρώτες ιδιάζουσες τιμές ($k = 2$) και είναι:



Σχήμα 2.4 : Διάγραμμα δείκτη κατάστασης του Παραδείγματος 2.7

Εδώ να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό του δείκτη κατάστασης μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη βιβλιοθήκη της MATLAB, έκδοση 2011, όπου για έναν τυχαίο πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ υπολογίζεται η τιμή του δείκτη κατάστασης και αποθηκεύεται στη μεταβλητή `error`, ως εξής:

```
>> error=cond(A);
```



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Συμπύεση δεδομένων, εφαρμογές στην εικόνα

3.1 Βασικές έννοιες

Σήμερα η εικόνα είναι μια από τις σημαντικότερες πηγές πληροφορίας και μπορούμε να τη βρούμε ως ακίνητη (image), ή κινούμενη (video), ασπρόμαυρη (grayscale) ή έγχρωμη (RGB). Η ψηφιακή εικόνα είναι το πιο σύγχρονο μέσο πληροφορίας τόσο στο τομέα του internet ή της εκπαίδευσης, όσο στον τομέα της ψυχαγωγίας και της υγείας, [16].

Ορισμός 3.1

Η εικόνα ορίζεται ως μια δισδιάστατη συνάρτηση $f(x,y)$, όπου τα x,y είναι οι συντεταγμένες επιπέδου και το πλάτος f σε κάθε ζευγάρι x,y λέγεται ένταση ή φωτεινότητα της εικόνας στο σημείο αυτό. Η εικόνα μπορεί να θεωρηθεί ως η κατανομή της πληροφορίας στο επίπεδο με συντεταγμένες (x,y) , έτσι η f χαρακτηρίζει μια επιφάνεια, η οποία όταν έχει χαμηλές τιμές πλησιάζει το μαύρο, ενώ όταν έχει υψηλές τιμές πλησιάζει το άσπρο. Πιο συγκεκριμένα, η f δείχνει την αμαύρωση της εικόνας σε κάθε σημείο (x,y) . Οι στάθμες που χρησιμοποιούνται είναι 255 ($2^8 - 1$), δηλαδή στη στάθμη 255 αντιστοιχεί το λευκό και στη στάθμη 0 αντιστοιχεί το μαύρο. Οπότε ένας δυαδικός των 8 bits (1 byte) αρκεί για να περιγράψουμε την τιμή της αμαύρωσης ενός pixel (δηλαδή ενός δείγματος της εικόνας), [12]. Το τελικό αποτέλεσμα της εικόνας είναι το σύνολο όλων αυτών των pixels. Υπάρχει και η περίπτωση η εικόνα να είναι έγχρωμη και σε κάθε θέση έχει 3 τιμές, οι οποίες αντιστοιχούν στα χρώματα κόκκινο (Red), πράσινο (Green) και μπλε (Blue).

Σχόλιο 3.1

Η Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων είναι η εφαρμογή της πάνω σε συγκεκριμένα σήματα (images). Το μέγεθος μιας εικόνας έχει μεγάλη σημασία στην ταχύτητα της υλοποίησης των αλγορίθμων για λειτουργία σε πραγματικό χρόνο. Η τεχνολογία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων πολύ μεγάλης κλίμακας (VLSI), σε συνδυασμό με την ανάπτυξη αρχιτεκτονικών συνεχούς ροής (pipelining) με μεγάλο βαθμό παραλληλισμού, βοήθησε στην υλοποίηση αρκετών αλγορίθμων. Οι αλγόριθμοι επεξεργασίας εικόνων βοηθούν στην επίλυση διαφόρων σκοπών και πιο συγκεκριμένα:

- a) βελτίωση της ποιότητας των εικόνων. Με τη χρήση κατάλληλων φίλτρων ή την αποκατάσταση τους στην αρχική εικόνα, ύστερα από την αλλοίωση τους μετά από την επίδραση θορύβου.
- b) την κωδικοποίηση τους ώστε η πληροφορία να μπορεί να περιγραφεί με όσο το δυνατό λιγότερα bits (συμπίεση πληροφορίας) ή την αποτελεσματική αποθήκευση τους σε περιορισμένο αποθηκευτικό χώρο και με ικανοποιητική ποιότητα της εικόνας (όπου να προσεγγίζει και την αρχική εικόνα).
- c) την μετατροπή φωτογραφιών σε εικόνες 2 αποχρώσεων, δηλαδή μαύρου και άσπρου, για εκτύπωση ή επίδειξη σε δυαδική μορφή.
- d) την τροποποίηση φωτογραφιών (π.χ. pixelate), με εφαρμογή καλλιτεχνικών φίλτρων.

Σχόλιο 3.2

Στην παρούσα εργασία η επεξεργασία των εικόνων υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τη βιβλιοθήκη της MATLAB, έκδοση 2011. Η βασική δομή της πληροφορίας στη MATLAB βρίσκεται σε έναν πίνακα, ο οποίος περιέχει ένα διατεταγμένο σύνολο πραγματικών ή φανταστικών αριθμών. Ο πίνακας εξυπηρετεί στην αναπαράσταση της εικόνας, η οποία έχει διατεταγμένα σύνολα χρωμάτων και εντάσεων φωτός. Στην αναπαράσταση της εικόνας, ο πίνακας που την αντιστοιχεί περιέχει μόνο πραγματικές τιμές καθώς η MATLAB δεν υποστηρίζει εικόνες φανταστικών τιμών.

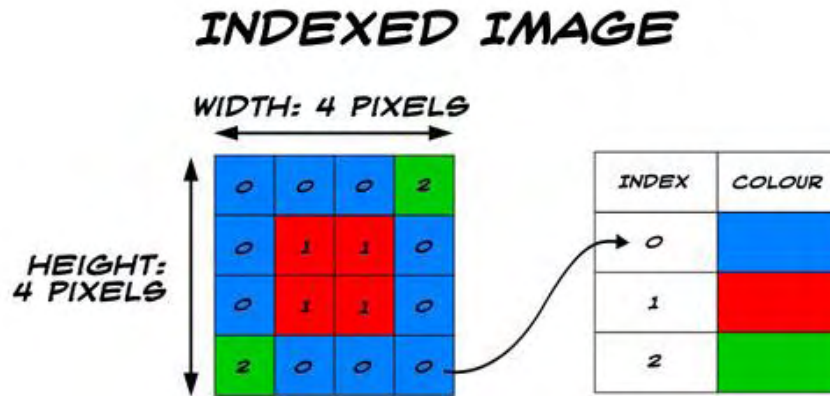
Οι εικόνες αποθηκεύονται σαν δισδιάστατοι πίνακες, όπου κάθε στοιχείο του πίνακα αναφέρεται σε ένα pixel της εικόνας. Η λέξη pixel προέρχεται από την λέξη element(στοιχείο εικόνας) και συνήθως αναφέρεται σε μια κουκίδα της οθόνης του υπολογιστή. Οπότε αφού υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των εικόνων και των πινάκων, διευκολύνεται η χρήση διαφόρων αλγορίθμων ή εργασιών για την επεξεργασία εικόνων με τη MATLAB.

Τέλος η MATLAB υποστηρίζει τους εξής τύπους εικόνας:

1. Indexed images
2. Grayscale images (ασπρόμαυρες εικόνες)
3. RGB images (έγχρωμες εικόνες)

Ορισμός 3.2

Μια **indexed image** αποτελείται από έναν πίνακα δεδομένων X και έναν πίνακα χρωμάτων-παλέτα (color map). Ο color map είναι ένας πίνακας $m \times 3$ ο οποίος περιέχει τιμές μεταξύ του εύρους $[0,1]$ και βρίσκεται αποθηκεύμενος μέσα στη MATLAB. Κάθε μια από τις γραμμές καθορίζει τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε, αντίστοιχα. Μια indexed image χρησιμοποιεί “direct mapping” των τιμών pixel σε color map τιμές. Το χρώμα κάθε pixel της εικόνας καθορίζεται από την αντίστοιχη τιμή του πίνακα X ως ένδειξη στο color map. Στη συνέχεια ακολουθεί παράδειγμα indexed image, στο Σχήμα 3.1, [4].



Σχήμα 3.1 : Παράδειγμα indexed image

Στις επόμενες ενότητες αναλύονται και εφαρμόζονται αναλυτικά οι άλλοι 2 τύποι εικόνας.

Γιατί όμως να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο σε μια εικόνα; Αρχικά όπως έχει αναφερθεί η εικόνα αναπαριστά έναν πίνακα, οπότε η απλή συμπίεση εικόνας με τη χρήση φίλτρων ή διαφόρων αλγορίθμων σίγουρα προσφέρει αρκετές πληροφορίες για το αποτέλεσμα της εικόνας, οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν καλύτερα με τη χρήση της SVD παραγοντοποίησης.

Όπως αναφέρεται [2, p. 911], ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ απαιτεί τη διαχείριση mn στοιχείων, ενώ η προσέγγιση \tilde{A}_k απαιτεί τη γνώση και διαχείριση $(m + n + 1)k$ στοιχείων, το οποίο προκύπτει από την ισότητα

$$\tilde{A}_k = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^* + \dots + \sigma_k \cdot u_k \cdot v_k^*$$

στη (2.1.10) υπολογίζοντας τα στοιχεία των διανυσμάτων $u_i, v_i, i = 1, 2, \dots, k$, σύμφωνα με τις διαστάσεις τους, που είναι m για το διάνυσμα u_i και n για το διάνυσμα v_i .

Αν ισχύει

$$k < \frac{mn}{m+n+1}, \tag{3.1.1}$$

τότε η προσέγγιση \tilde{A}_k απαιτεί τη διαχείριση λιγότερων στοιχείων από ότι χρειάζεται ο πίνακας A , και τότε αναφερόμαστε σε **συμπίεση δεδομένων** του πίνακα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι μεγάλων διαστάσεων (π.χ. μία εικόνα) με πολλές ιδιάζουσες τιμές, αν επιλέξουμε k πολύ μικρότερο του κλάσματος στη (3.1.1), τότε η προσέγγιση \tilde{A}_k είναι «ικανοποιητική», μια και απαιτούνται λιγότερα στοιχεία στη διαχείριση του \tilde{A}_k . Στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι πρόκειται για συμπίεση των αρχικών δεδομένων, γεγονός που συναντάται στη μεταφορά ψηφιακής εικόνας σε μεγάλες αποστάσεις (π.χ. δορυφόροι, διαστημικές αποστολές), [15].

Παράδειγμα 3.1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος 2.5.

Το πλήθος των στοιχείων του A είναι $m \times n = 3 \times 4 = 12$.

Για να ισχύει η (3.1.1) απαιτείται $k < \frac{12}{8} = 1,5$, οπότε αν πάρουμε $k = 1$, τότε τα στοιχεία του \tilde{A}_1 που χρειάζεται να διαχειριστούμε είναι $m + n + 1 = 8$, οπότε έχουμε περίπου 3,3% συμπίεση των αρχικών δεδομένων.



Παράδειγμα 3.2

Έστω ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος 2.7.

Το πλήθος των στοιχείων του B είναι $m \times n = 6 \times 4 = 24$.

Για να ισχύει η (3.1.1) απαιτείται $k < \frac{24}{11} = 2,2$, οπότε αν πάρουμε:

- $k = 2$, τότε τα στοιχεία του

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -2.7602 & -3.05082 & 3.9883 & -0.2164 \\ -1.4033 & -1.6124 & 4.0133 & -0.0762 \\ 2.8551 & 3.2756 & -8.0080 & 0.1578 \\ 1.4054 & 1.4893 & 0.0435 & 0.1455 \\ 6.4503 & 6.5948 & 7.9909 & 0.8005 \\ -0.4685 & -0.4964 & -0.0145 & -0.0485 \end{bmatrix}$$

που χρειάζεται να διαχειριστούμε είναι $(m + n + 1)k = 22$, οπότε έχουμε περίπου 8% συμπίεση των αρχικών δεδομένων και

- $k = 1$, τότε τα στοιχεία του

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.5817 & 0.5556 & 1.9866 & 0.0937 \\ 0.7903 & 0.7549 & 2.6993 & 0.1274 \\ -1.5688 & -1.4985 & -5.3582 & -0.2528 \\ 0.2205 & 0.2107 & 0.7532 & 0.0355 \\ 2.9530 & 2.8206 & 10.0857 & 0.4759 \\ -0.0735 & -0.0702 & -0.2511 & -0.0118 \end{bmatrix}$$

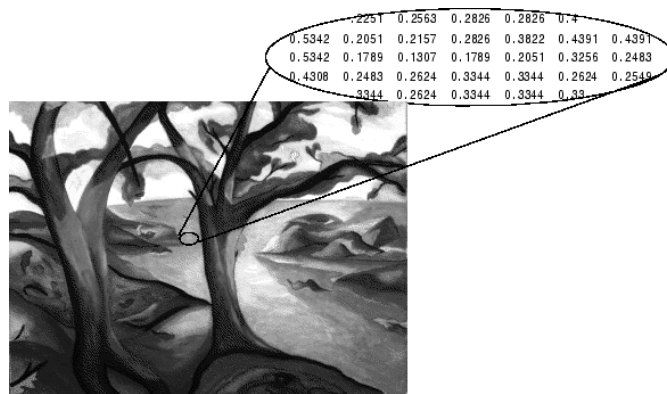
που χρειάζεται να διαχειριστούμε είναι $(m + n + 1)k = 11$, οπότε έχουμε περίπου 54% συμπίεση των αρχικών δεδομένων.



3.2 Συμπύεση δεδομένων στην ασπρόμαυρη εικόνα

Ορισμός 3.3

Μια **grayscale image** (ασπρόμαυρη εικόνα) αναπαριστά έναν πίνακα δεδομένων, του οποίου οι τιμές του πίνακα δίδουν την ένταση του φωτός της εικόνας. Η εφαρμογή MATLAB αποθηκεύει την εικόνα σε ένα πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο αντιστοιχεί σε ένα pixel. Ο πίνακας μπορεί να είναι της κλάσης double, uint8 και uint16. Τα στοιχεία του πίνακα αναπαριστούν διάφορες εντάσεις του φωτός, δηλαδή επίπεδα του γκρι και έχουν εύρος από 0-255 (ή 1 ή 65535 αντίστοιχα για το double και το uint16). Το 0 αναπαριστά το μαύρο και το 255 το άσπρο. Ένα παράδειγμα grayscale image με τα στοιχεία του πίνακα της είναι η ακόλουθη στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2 : Παράδειγμα grayscale image

Υπάρχει ακόμα ένα είδος grayscale image, το οποίο περιέχει μόνο άσπρο και μαύρο και ονομάζεται δυαδική. Σε μία **δυαδική εικόνα** υπάρχουν δύο διακριτές τιμές σε κάθε pixel, οι 0 και 1. Η εικόνα αποθηκεύεται σε ένα διδιάστατο πίνακα, ο οποίος είναι πίνακας μηδενικών (off pixels) και μονάδων (on pixels), [13].

Σχόλιο 3.4 (Αλγόριθμος)

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφηκε ο σχεδιασμός μέτρων προσέγγισης σε έναν πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Στην παρούσα ενότητα περιγράφεται για την ασπρόμαυρη εικόνα (grayscale image) ο αλγόριθμος που κάνει συμπύεση στην εικόνα (όπως αναφέρεται στην

Ενότητα 3.1 ως συμπύεση δεδομένων ενός πίνακα). Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε στη MATLAB, έκδοση 2011 και ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα, (βλέπε, Κώδικα II).

Αρχικά επιλέγουμε την εικόνα που θέλουμε να επεξεργαστούμε, η οποία για να χρησιμοποιηθεί στη MATLAB πρέπει να αποθηκευτεί ως ένας πίνακας και αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή :

```
E=imread(name) ;
```

Η εντολή αυτή διαβάζει την εικόνα και την αποθηκεύει σε έναν πίνακα E. Όμως ο πίνακας αυτός μπορεί να είναι κλάσης uint8 και να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια grayscale εικόνα, οπότε πρέπει να μετατραπεί σε μια grayscale εικόνα.

```
I_GRAY = rgb2gray(E) ;
```

Οπότε έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας, που περιέχει τιμές που αντιστοιχούν σε grayscale εικόνα, αλλά επειδή ο πίνακας δεν έχει τιμές που μπορούν να υπολογιστούν, πρέπει αυτές οι τιμές να κανονικοποιηθούν. Αυτό γίνεται με την εξής εντολή:

```
I=im2double(I_GRAY) ;
```

Τώρα η εικόνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πίνακας I. Σύμφωνα με τη συνθήκη που δόθηκε στην (3.1.1), (βλέπε, Ενότητα 3.1) υπολογίζεται η τιμή k , που επιτρέπει τη διαχείριση λιγότερων στοιχείων από ότι χρειάζεται ο αρχικός πίνακας, A . Άρα για τη τιμή k θα βρίσκω την (3.1.1), η οποία αληθεύει πάντα επειδή η εικόνα αντιστοιχεί σε ένα πίνακα I , ο οποίος είναι μεγάλων διαστάσεων.

Για να αποφευχθούν κάποιες τιμές του πίνακα A , οι οποίες είναι είτε πολύ μεγάλες είτε πολύ μικρές κάνουμε μια μικρή κανονικοποίηση στον πίνακα ώστε να αντιστοιχούν στο εύρος των αποχρώσεων του μαύρου και άσπρου. Άρα,

```
A (A<0) =0 ;  
A (A>1) =1 ;
```

Επομένως για τιμές μεγαλύτερες του 1 αντιστοιχούν στο άσπρο, ενώ τιμές μικρότερες του 0 αντιστοιχούν στο μαύρο.

Επομένως υπολογίζουμε για τον κανονικοποιημένο πίνακα \mathbf{I} την SVD και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δύο μέτρα, τη Frobenius νόρμα και το δείκτη κατάστασης για τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων. Στα διάγραμμα φαίνεται το πλήθος των k ιδιάζουσων τιμών στον οριζόντιο άξονα, και οι τιμές των μέτρων στον κάθετο άξονα.

Ωστόσο από την Ενότητα 3.1 και εφαρμόζοντας την (3.1.1) επιτυγχάνεται η συμπίεση δεδομένων, καθώς η προσέγγιση \tilde{A}_k (δηλαδή, ο \mathbf{A} στον Κώδικα II) απαιτεί τη διαχείριση λιγότερων στοιχείων από ότι χρειάζεται ο πίνακας \mathbf{I} .

Ο αλγόριθμος αυτός διευκολύνει στις εικόνες να φαίνονται κάποιες λεπτομέρειες και ειδικά σε μια grayscale εικόνα, οι λεπτομέρειες φαίνονται πιο έντονες. Επειδή οι εικόνες μπορούν να καταναλώσουν αρκετό χώρο στη μνήμη, με το “κόψιμο ορισμένων k ” καταλαμβάνουν λιγότερο χώρο, χωρίς όμως να έχουν υποστεί σημαντική αλλοίωση στην τελική εικόνα αναφορικά με την αρχική. Στο ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζεται αναλυτικότερα η εφαρμογή του αλγορίθμου.

Παράδειγμα 3.1

Έστω η παρακάτω εικόνα, να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος συμπίεσης (Σχόλιο 3.4) για την ασπρόμαυρη (grayscale) εικόνα.



Σχήμα 3.3 : Grayscale image

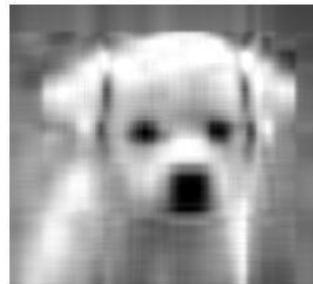
Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιώ την εφαρμογή της MATLAB και ο αλγόριθμος βρίσκεται στο Παράρτημα, (βλέπε, Κώδικα II).

```
>> exg(name)
```

Η συνάρτηση στην οποία δίνονται τα ορίσματα, όπου name το αρχείο της εικόνας. Ο πίνακας που προκύπτει από τη μετατροπή της εικόνας είναι διαστάσεων 213×236 και έχει βαθμό $r = 213$. Οι αντίστοιχες εικόνες για τις τιμές $k = 2$, $k = 6$, $k = 20$ και $k = 100$, καθώς και τα ποσοστά συμπίεσης μέσα στην παρένθεση για την κάθε περίπτωση, παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.4.



$k = 2$ (98,21%)



$k = 6$ (94,63%)



$k = 20$ (82,09%)

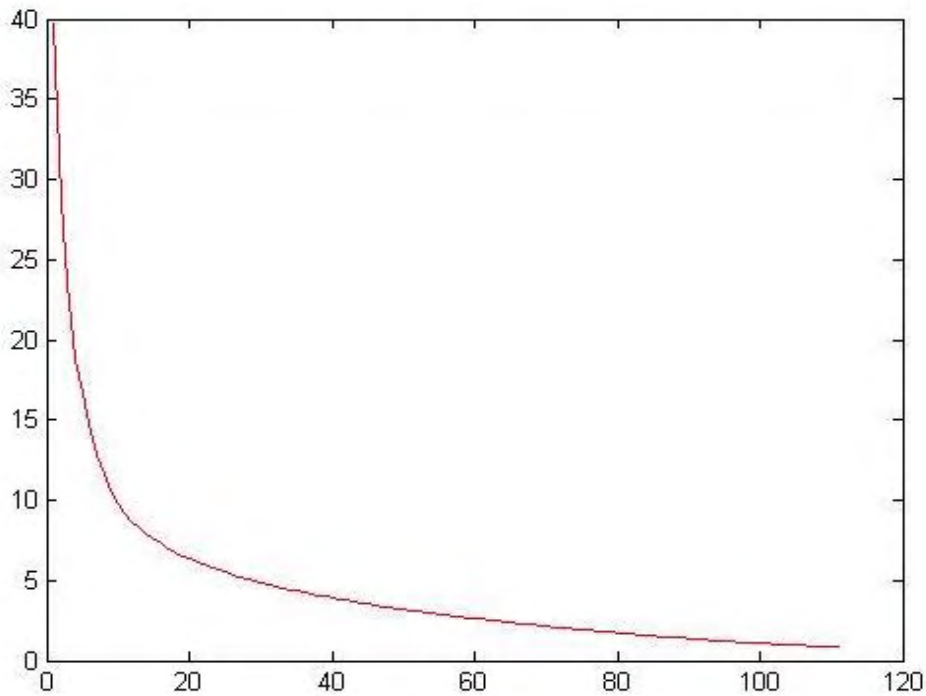


$k = 111$ (0,632%)

Σχήμα 3.4 : Αποτελέσματα grayscale εικόνας για διαφορετικές τιμές k

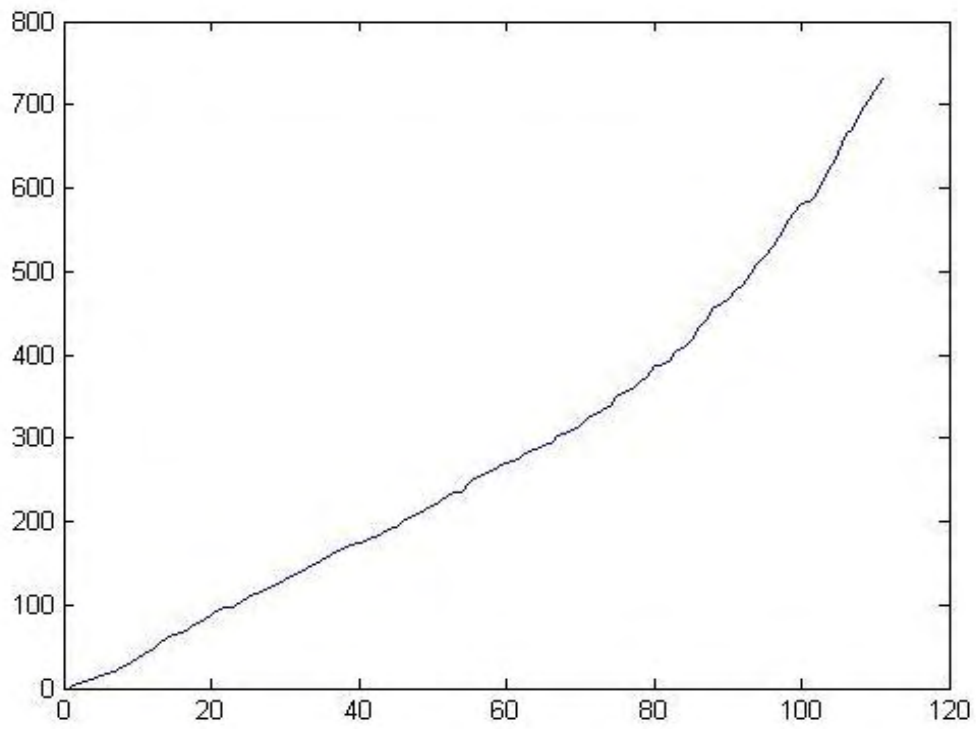
Όπως παρατηρούμε για $k=2$ η εικόνα δεν είναι καθόλου καθαρή και αρχίζει να βελτιώνεται μετά την τιμή $k=6$, χωρίς όμως να βελτιώνεται «γρήγορα» με την αύξηση της τιμής του k και να παρουσιάζονται αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά της (όπως στην αρχική). Το ίδιο ισχύει και για $k=20$. Η τιμή $k=111$ επαληθεύει την (3.1.1) και τότε η εικόνα εμφανίζεται ίδια με την αρχική.

Στα διάγραμματα που ακολουθούν στο Σχήμα 3.5 στο Σχήμα 3.6 γίνεται ο σχεδιασμός της Frobenius νόρμα και του δείκτη κατάταστασης αντίστοιχα, για $k=111$.



$k=111$

Σχήμα 3.5 : Διάγραμμα Frobenius νόρμα του Παραδείγματος 3.1



$k=111$

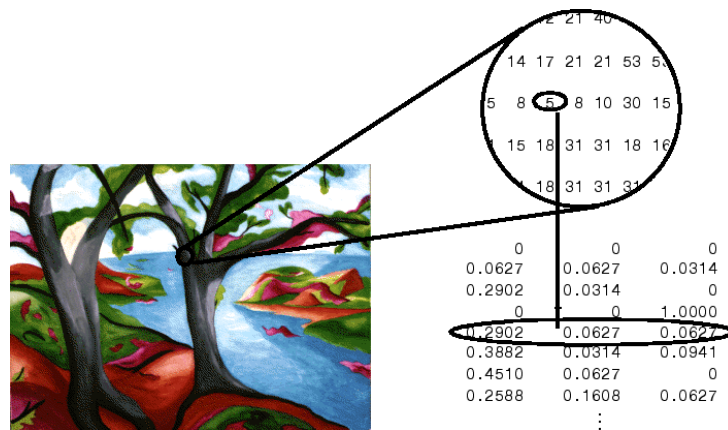
Σχήμα 3.6: Διάγραμμα δείκτη κατάστασης του Παραδείγματος 3.1



3.3 Συμπύεση δεδομένων στην έγχρωμη εικόνα

Ορισμός 3.4

Η **RGB image** αναφέρεται και ως μια “truecolor” εικόνα (πραγματικού χρώματος), η οποία αποθηκεύεται στη MATLAB, ως ένας πίνακας δεδομένων $m \times n \times 3$ όπου καθορίζει τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε, που αποτελούν στοιχεία κάθε ανεξάρτητου pixel του πίνακα. Οι RGB εικόνες δεν χρησιμοποιούν color map, αλλά το χρώμα του κάθε pixel είναι ένας συνδυασμός των εντάσεων του κόκκινου, του πράσινου και του μπλε. Ο πίνακας μπορεί να είναι της κλάσης double, uint8 και uint16. Σε πίνακα κλάσης double οι τιμές του πίνακα είναι μεταξύ 0 και 1. Δηλαδή, ένα στοιχείο που έχει τιμές (0,0,0) αντιστοιχεί στο μαύρο, ενώ το στοιχείο με τιμές (1,1,1) αντιστοιχεί στο άσπρο. Τα στοιχεία και των τριών χρωμάτων για κάθε pixel αποθηκεύονται στις τρεις διαστάσεις του πίνακα, όπως φαίνεται και παρακάτω στην RGB εικόνα του Σχήματος 3.7.



Σχήμα 3.7 : Παράδειγμα RGB image

Σχόλιο 3.5 (Αλγόριθμος)

Στην παρούσα ενότητα αναπτύσσεται αλγόριθμος που εφαρμόζεται σε RGB εικόνα. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε στη MATLAB, έκδοση 2011 και ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα, (βλέπε, Κώδικα III).

Αρχικά επιλέγουμε την εικόνα που θέλουμε να επεξεργαστούμε, η οποία για να χρησιμοποιηθεί στη MATLAB πρέπει να αποθηκευτεί ως ένας πίνακας και αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή :

```
E=imread(rgbname) ;
```

Η εντολή αυτή διαβάζει την εικόνα και την αποθηκεύει σε έναν πίνακα E. Έτσι έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας, ο οποίος περιέχει τιμές που αντιστοιχούν σε RGB εικόνα, αλλά επειδή ο πίνακας δεν έχει τιμές που μπορούν να υπολογιστούν, πρέπει αυτές οι τιμές να κανονικοποιηθούν. Αυτό γίνεται με την εξής εντολή:

```
I=im2double(E) ;
```

Τώρα η εικόνα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πίνακας και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος συμπίεσης δεδομένων που έχει αναφερθεί στην Ενότητα 3.2, αλλά η διαφορά είναι τώρα ότι η εικόνα αποτελείται από τρία επίπεδα (layers). Τα τρία επίπεδα αντιστοιχούν στα τρία χρώματα που δημιουργούν την έγχρωμη εικόνα, δηλαδή, το κόκκινο, το πράσινο και το μπλε. Τότε, αφού υπάρχουν 3 επίπεδα θα πρέπει να υπάρχουν τρεις πίνακες που να δημιουργούν τον τελικό πίνακα I, ο οποίος περιγράφει την εικόνα. Άρα για κάθε χρώμα υπολογίζεται ξεχωριστά το γινόμενο της SVD.

```
A=U(:,1:w)*S(1:w,1:w)*V(:,1:w)';
```

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα, όπου στον άξονα xx' σημειώνονται οι τιμές k και στον άξονα yy' οι τιμές της Frobenius νόρμας για τη διαφορά των πινάκων I-A και του δείκτη κατάστασης για τον πίνακα A. Στην ουσία η εικόνα αποτελείται από 3 διαφορετικές εικόνες που την περιγράφουν 3 διαφορετικά χαρακτηριστικά, που αντιστοιχούν στα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε, τα οποία έχουν αντίστοιχες καμπύλες.

```
imshow(cat(3,A1,A2,A3),[]);
```

Στην παραπάνω εντολή φαίνεται εμφανίζονται ταυτόχρονα και τα τρία χαρακτηριστικά.

Στο Παράδειγμα 3.2 στη συνέχεια αναλύεται περισσότερο ο αλγόριθμος.

Παράδειγμα 3.2

Έστω η παρακάτω εικόνα, να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος συμπίεσης (Σχόλιο 3.5) για την RGB εικόνα.



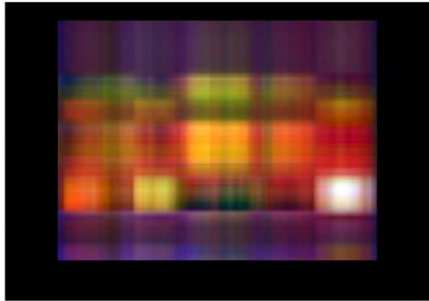
Σχήμα 3.8 : RGB image

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιώ την εφαρμογή της MATLAB, έκδοση 2011 και ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα Κώδικας III.

```
>> ex1(rgbname)
```

Η συνάρτηση στην οποία δίνουμε τα ορίσματα. όπου `rgbname` το όνομα του αρχείου της εικόνας.

Ο πίνακας που προκύπτει από τη μετατροπή της εικόνας είναι διαστάσεων 479×684 και έχει βαθμό $r = 384$. Οι αντίστοιχες εικόνες για τις τιμές $k = 2$, $k = 30$, $k = 100$ και $k = 281$, καθώς και τα ποσοστά συμπίεσης μέσα στην παρένθεση για την κάθε περίπτωση, παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.9.



$k = 2$ (99,28%)



$k = 30$ (89,34%)



$k = 100$ (64,47%)



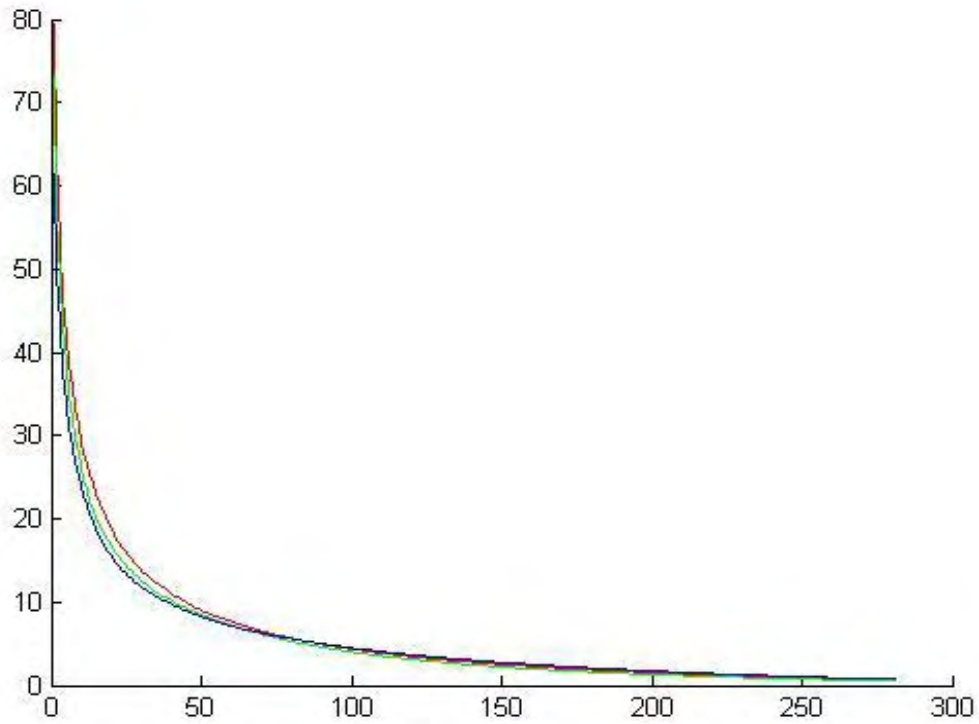
$k = 281$ (0,168%)

Σχήμα 3.9 : Αποτελέσματα RGB εικόνας για διαφορετικές τιμές του k

Όπως παρατηρούμε για $k = 2$ η εικόνα δεν είναι καθόλου καθαρή και αρχίζει να βελτιώνεται μετά την $k = 30$, χωρίς όλα τα χρώματα και τα χαρακτηριστικά να φαίνονται με μεγάλη ακρίβεια. Για $k = 100$ υπάρχει μια καλή απόδοση της εικόνας και για $k = 281$ η εικόνα είναι ίδια με την αρχική, οπότε ισχύει η (3.1.1) και η εικόνα στην τιμή που

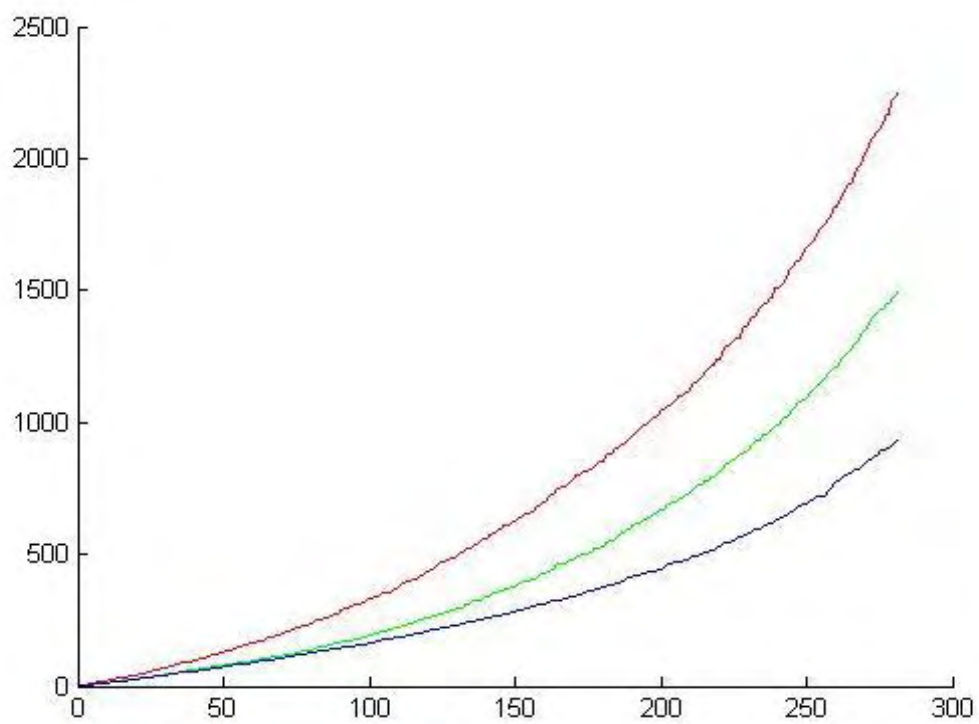
προσδιορίζει ο τύπος den έχει κάνει συμπίεση στην εικόνα, καθώς για $k=281$ η εικόνα είναι ίδια με την αρχική.

Στα διάγραμματα που ακολουθούν στο Σχήμα 3.10 στο Σχήμα 3.11 γίνεται ο σχεδιασμός της Frobenius νόρμα και του δείκτη κατάτασης αντίστοιχα, για $k=281$.



$k=281$

Σχήμα 3.10 : Διάγραμμα Frobenius νόρμα του Παραδείγματος 3.2



$k=281$

Σχήμα 3.11: Διάγραμμα δείκτη κατάστασης του Παραδείγματος 3.2

Συμπεράσματα

Η σημερινή εποχή μπορεί άνετα να θεωρηθεί μια ψηφιακή εποχή, καθώς η φωτογραφία και τα βίντεο είναι μέρος της ζωής μας. Έτσι είναι φανερό ότι χρειάζεται περισσότερος χώρος και στη μνήμη ώστε να αποθηκευτούν όλα τα βίντεο και οι φωτογραφίες. Γι' αυτό μέθοδοι συμπίεσης δεδομένων είναι αρκετά χρήσιμοι, γιατί μπορούμε να διατηρούμε σε λιγότερο χώρο στη μνήμη μια εικόνα χωρίς όμως να επηρεάζεται η ποιότητά της.

Η SVD παραγοντοποίηση, είναι μια απλή και εύχρηστη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να επιτευχθεί η συμπίεση μιας εικόνας ή άλλων δεδομένων, που μπορούν να μετατραπούν σε πίνακα, ώστε να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος. Τα αποτελέσματα για τους αλγορίθμους που χρησιμοποιήσαμε είναι εμφανή στα Παραδείγματα 3.1 και 3.2 που γίνεται εφαρμογή σε εικόνα.

Η νόρμα Frobenius και ο δείκτης κατάστασης είναι μέτρα που συνδέονται με τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A , γι' αυτό και επιλέχθηκαν ως βασικοί παράμετροι για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων σε συνάρτηση με το πλήθος k των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών που χρησιμοποιούνται.

Στο Κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην Ενότητα 3.1 αναφέρεται μία συνθήκη ώστε να εξετάζεται η συμπίεση δεδομένων, η οποία είναι αποδοτική στην περίπτωση πίνακα μεγάλων διαστάσεων. Επιλέγοντας τιμές για το k αυτές που ικανοποιούν τη συνθήκη (3.1.1) σχεδιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των μέτρων τόσο της νόρμας Frobenius του πίνακα $A - \tilde{A}_k$, όσο και του δείκτη κατάστασης του πίνακα \tilde{A}_k . Οι εφαρμογές του αλγορίθμου γίνονται σε grayscale εικόνες και RGB εικόνες.

Συμπερασματικά, η συμπίεσης δεδομένων πίνακα με την ευχρηστία και την σταθερότητα της SVD παραγοντοποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αρκετές εφαρμογές. Αρκεί βέβαια να γίνουν οι ανάλογες αλλαγές ώστε να μπορέσει να εφαρμοστεί τόσο και για ένα μεγάλο πίνακα όσο και σε έναν μικρό πίνακα. Έτσι η προαναφερθείσα θεωρία και τα συμπεράσματα που εξήχθησαν, είναι αρκετά χρήσιμα και χρήζουν περαιτέρω μελέτης και εμβάθυνσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. K.M. Aiswarya, Rachana Ramesh, Preeti. M. Sobarad and Vipula Singh, *Lossy Image Compression using SVD Coding Algorithm*, in Proceedings of International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiSPNET), (2016), DOI: 10.1109/WiSPNET.2016.7566363.
2. Howard Anton and Chris Rorres, *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications*, 10th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2010.
3. Ευάγγελος Αγγελής, *Θεωρία διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα*, Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοιατρική, Σχολή Θετικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Λαμία, 2014.
4. James Bird, *Bitmap and Indexed Images*, Φεβρουάριος 2008, <http://jbrd.github.io/2008/02/01/bitmap-and-indexed-images.html>.
5. Zi-Quan Hong and Jing-Yu Yang, *Optimal Discriminant Plane for a Small Number of Samples and Design Method of Classifier on the Plane*, Department of Computer Science, East China Institute of Technology, People' s Republic of China, (1991), 317-324.
6. Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2005.
7. Χρήστος Δέδες, *Μη αρνητικοί πίνακες*, Πτυχιακή εργασία, Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοιατρική, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Λαμία, 2011.
8. Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα. Θεωρία και εφαρμογές*, Εκδόσεις Guttenberg, Αθήνα 2008.
9. Νικόλαος Καδιανάκης και Σωτήριος Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Αθήνα, 2008.
10. Ειρήνη Καλαθά, *Διαταραχή ιδιοτιμών συμμετρικού πίνακα*, Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοιατρική, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Λαμία, 2012.
11. Ι. Μανωλόπουλος και Απ. Ν. Παπαδόπουλος, *Ανάκτηση Πληροφορίας (Σημειώσεις Διαλέξεων)*.

12. K. Mounika, D. Sri Navya Lakshmi, K. Alekya, under the guidance of M. R. N. Tagore, *SVD Based Image Compression*, International Journal of Engineering Research and General Science, vol. 3, is. 2, (2015).
13. Νικόλαος Α. Νάννος, *Ανάπτυξη Εξελιγμένων Αλγορίθμων για την Ψηφιακή Επεξεργασία και Ανάλυση Κυτταροπαθολογικών Εικόνων με τη Χρήση Πλατφόρμας MATLAB*, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα 2011.
14. Ανδρέας Τζάνης, *Ιδιοτιμές και Ιδιάζουσες Τιμές*, Κεφάλαιο 3, http://users.uoa.gr/~atzanis/MathGeo/Idiotimes_Idiodianysmata.pdf.
15. Π. Ι. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Τομέας Μαθηματικών, Αθήνα 2014, <http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/metaptyx.pdf>.
16. <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring12/cos598C/svdchapter.pdf>
17. <http://people.sc.fsu.edu/~pbeerli/classes/isc5315-notes/jpeterson/lab3.pdf>
18. <https://www.mathworks.com/>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στη συνέχεια παρατίθεται σε MATLAB οι κώδικες που αναπτύχθηκαν στην παρούσα πτυχιακή εργασία.

Ο ακόλουθος Κώδικας I δημιουργήθηκε για το σχεδιασμό της Frobenius νόρμας για τον πίνακα $A - \tilde{A}_k$ και του δείκτη κατάστασης του πίνακα \tilde{A}_k , που βρίσκεται στο Κεφάλαιο 2 στην Ενότητα 2.2 και 2.3 αντίστοιχα. Είναι 3 αρχεία.

Κώδικας I

```
function [error,A]=ex2(C,k)

%C είναι ο πίνακας που δίνεται από τον χρήστη
%k είναι το πλήθος των ιδιάζουσων τιμών που χρησιμοποιούνται
%στην προσέγγιση

for i=1:1
    [U,S,V]=svd(C(:, :, i)) %svd

    ra=rank(S)

    A(:, :, i)=U(:, 1:k)*S(1:k, 1:k)*V(:, 1:k)';

    per=C(:, :, i)-A(:, :, i); %διαφορά αρχικού πίνακα
                                με διαταραγμένου
    error=norm(per, 'fro'); %Frobenius νόρμα
end

function [co,A]=exCo(C,k)

for i=1:1
    [U,S,V]=svd(C(:, :, i)) %svd

    ra=rank(S);

    A(:, :, i)=U(:, 1:k)*S(1:k, 1:k)*V(:, 1:k)';
```



```

co=S(1,1)/S(k,k);           %δείκτης κατάστασης για
                              τον πίνακα προσέγγισης

end

function ex3(C,w)           %συνάρτηση για σχεδιασμό
                              διαγραμμάτων

figure;
W=[];
for k=1:w
    [error,A]=ex2(C,k)
    Err(k)=error

    W=[W,k];

    [co,A]=exCo(C,k)
    CO(k)=co

end

plot(W, Err, 'r')           %διάγραμμα Frobenius νόρμας
figure(2);
plot(W, CO, 'b')           %διάγραμμα δείκτης κατάστασης

```


Ο ακόλουθος Κώδικας II που βρίσκεται στο Κεφάλαιο 3 στην Ενότητα 3.2 και περιγράφει τον αλγόριθμο που βρίσκεται στο Σχόλιο 3.4. Έχει ξανά δύο συναρτήσεις όπως και ο Κώδικας I.

Κώδικας II

```
function [rI,error,co]=comp(name,k)

%name είναι το όνομα του αρχείου ".jpg"

E=imread(name); %διαβάζει την εικόνα και την αποθηκεύει σε έναν πίνακα E

I_GRAY = rgb2gray(E); %η εικόνα δεν είναι grayscale(έχει uint8 ως χαρακτηριστικό) και την μετατρέπω σε grayscale

I=im2double(I_GRAY); %Κανονικοποίηση τιμών

rI=rank(I);

[U,S,V]=svd(I);
A=U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';

per=I-A;
error=norm(per,'fro'); %νόρμα Frobenius

co=S(1,1)/S(k,k); %condition number

A(A<0)=0;
A(A>1)=1;
figure(2);
imshow(A) %Emfanish eikonas svd

end
```



```

function exg(name)

% name το όνομα το αρχείου ".jpg"

W=[]; %δημιουργία πίνακα
E=imread(name);
I_GRAY = rgb2gray(E);
I=im2double(I_GRAY);

[m,n]=size(I);
k1=(m*n)/(m+n+1);
k=floor(k1);

for k2=1:k %αλλαγή k ώστε να μετράει από
           το 1 έως το k που προκύπτει

    [rI,error,co]=comp(name,k2);
    Err(k2)=error
    W=[W,k2];
    CO(k2)=co

end
figure();
plot(W, Err, 'r')
figure();
plot(W, CO, 'b')

```


Ο ακόλουθος Κώδικας III, που βρίσκεται στο Κεφάλαιο 3, στην Ενότητα 3.3 και περιγράφει τον αλγόριθμο, που βρίσκεται στο Σχόλιο 3.2 Έχει ξανά δύο συναρτήσεις όπως και ο Κώδικας I.

Κώδικας III

```
function [error,co,A]=compress1(I,U,S,V,k)

    A=U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';           %svd

    per=I-A;
    error =norm(per,'fro');                    %νόρμα Frobenius

    co=S(1,1)/S(k,k);                          %condition number

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function ex1(rgbname)

% rgbname το όνομα το αρχείου ".jpg"

E=imread(rgbname);                            %διαβάζει μια rgb εικόνα
                                                %και την αποθηκεύει
I=im2double(E);                               %κανονικοποίηση της εικόνας E

figure;

W=[];                                          %δημιουργία πίνακα

%για κάθε χρώμα αλλαγή i
for i=1:3
    [m,n]=size(I(:,:,i));
    k1=(m*n)/(m+n+1);
    k=floor(k1);                              %υπολογίζεται η ακέραια τιμή k
```



```

    [u,s,v]=svd(I(:,:,i));
    U{i}=u;
    S{i}=s;
    V{i}=v;

    rS(i)=rank(S{i});
end

for k2=1:k

    [error1,co1,A1]=compress1(I(:,:,1),U{1},S{1},V{1},k2);
    [error2,co2,A2]=compress1(I(:,:,2),U{2},S{2},V{2},k2);
    [error3,co3,A3]=compress1(I(:,:,3),U{3},S{3},V{3},k2);
    Err(k2,:)=[error1,error2,error3];

    %για κάθε k που δίνεται δημιουργείται
    %για κάθε χρώμα ένας πίνακας στον οποίο
    %εφαρμόζεται η προηγούμενη συνάρτηση

    W=[W,k2];
    CO(k2,:)=[co1,co2,co3];

    imshow(cat(3,A1,A2,A3),[]); %κρατάμε και τους 3
                                %πίνακες με αυτήν την
                                %εντολή

    drawnow

end
figure();
hold on
plot(W, Err(:,1),'r')
plot(W, Err(:,2),'g')
plot(W, Err(:,3),'b')

figure();
hold on
plot(W, CO(:,1),'r')
plot(W, CO(:,2),'g')
plot(W, CO(:,3),'b')

```


Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η υλοποίηση ενός αλγορίθμου, ο οποίος μπορεί να κάνει συμπίεση δεδομένων και συμβάλλει στον εντοπισμό ενός «κατωφλίου» σε ένα μη τετραγωνικό πίνακα A . Ειδικότερα για την υλοποίηση του αλγορίθμου, γίνεται η εφαρμογή της SVD παραγοντοποίησης.

Η Frobenius νόρμα και ο δείκτης κατάστασης (condition number) χρησιμοποιούνται ως μέτρα προσέγγισης στον πίνακα A , και παραθέτονται διαγράμματα. Στη συνέχεια αναφέρεται μια συνθήκη όπου η προσέγγιση \tilde{A}_k απαιτεί τη διαχείριση λιγότερων στοιχείων από ότι χρειάζεται ο πίνακας A . Τότε αναφερόμαστε σε συμπίεση δεδομένων του πίνακα A , γεγονός που ισχύει, όταν ο πίνακας A είναι μεγάλων διαστάσεων με πολλές ιδιάζουσες τιμές.

Όμως επειδή σε ένα πίνακα με αριθμούς δεν είναι εύκολο να διακριθεί διαφορά μεταξύ του αρχικού πίνακα και της προσέγγισής του, ο αλγόριθμος βρίσκει εφαρμογή στην εικόνα. Η διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής εικόνας είναι φανερή, είτε αυτή είναι έγχρωμη, είτε ασπρόμαυρη, γι' αυτό ο αλγόριθμος βρίσκει εφαρμογή σ' αυτές.

Λέξεις κλειδιά: συμπίεση δεδομένων, πίνακας, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, SVD παραγοντοποίηση, ιδιάζουσες τιμές, Frobenius νόρμα, condition number, έγχρωμη εικόνα, ασπρόμαυρη εικόνα

