

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ**

**Διδακτορική Διατριβή:**

**Αλληλεπίδραση μικροφουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα  
(Contrast Agent) με γειτονικό τοίχωμα παρουσία  
ακουστικών διαταραχών**

υπό

**Ευθυμίου Κωνσταντίνου**

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Π.Θ., MSc.

Βόλος 2015

© 2015 Ευθυμίου Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διδακτορικής Διατριβής από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ . Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.



This research has been co-financed by the European Union (European Social Fund - ESF) and Greek national funds through the Operational Program "Education and Lifelong Learning" of the National Strategic Reference Framework (NSRF) - Research Funding Program: Heraclitus II. Investing in knowledge society through the European Social Fund.



## Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

1<sup>ος</sup> Εξεταστής (Επιβλέπων)

**Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος**

Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

2<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Παπαθανασίου Αθανάσιος**

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

3<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Σμπόρος Βασίλειος**

Αναπληρωτής Καθηγητής

School of Engineering and Physical Sciences

Heriot-Watt University Edinburgh, UK

4<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Μποντόζογλου Βασίλειος**

Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

5<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Καραμάνος Σπυρίδων**

Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

6<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Γιαννακόπουλος Αντώνιος**

Καθηγητής

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

7<sup>ος</sup> Εξεταστής

**Δρ. Τσαμόπουλος Ιωάννης**

Καθηγητής

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Πάτρας

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το Θεό που με αξίωσε να φτάσω στο σημείο να αποκτήσω τον 4<sup>ο</sup> τίτλο σπουδών μου και στάθηκε νοερά δίπλα μου σε κάθε μέρα της ζωής μου. Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση για την επιστημονική του καθοδήγηση και για την υπομονή, επιμονή και εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας Διδακτορικής Διατριβής. Επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παπαθανασίου Αθανάσιο, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σμπόρο Βασίλειο, τον Καθηγητή κ. Μποντόζογλου Βασίλειο, τον Καθηγητή κ. Καραμάνο Σπυρίδων, τον Καθηγητή κ. Γιαννακόπουλο Αντώνιο και τον Καθηγητή κ. Τσαμόπουλο Ιωάννη για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις τους στο να γίνει η παρούσα Διδακτορική Διατριβή αρτιότερη. Ακολούθως να ευχαριστήσω τους γονείς μου Νικόλαο και Ευπραξία, καθώς επίσης και τους γονείς της γυναίκας μου, Ιωάννη και Ελένη, στους οποίους είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων, διότι χωρίς τη δική τους συνεισφορά, κυρίως ηθική, θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση των σπουδών μου. Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Μαρία για την κατανόησή της και την ψυχική ενδυνάμωση που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Ηλία και τον κουνιάδο μου Αναστάσιο για το ενδιαφέρον και τη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Τσιγκλιφή Κωνσταντίνο και τη Δρ. Βλαχομήτρου Μαρία για την πολύτιμη βοήθειά τους μέσω των ιδιαίτερα καρποφόρων συζητήσεών μας όλον αυτόν τον καιρό, καθώς επίσης και τον Δρ. Δημόπουλο Δημήτριο για τη σημαντική συμπαράσταση και το ενδιαφέρον του.

Αφιερώνω αυτή την Διατριβή σε όλους τους δικούς μου ανθρώπους και ιδιαιτέρως στη σύζυγό μου.

Ευθυμίου Κωνσταντίνος



# **Αλληλεπίδραση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα (Contrast Agent) με γειτονικό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών**

**Ευθυμίου Κωνσταντίνος**

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2015

Επιβλέπων Καθηγητής:

Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

## **Περίληψη**

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή μελετάται αριθμητικά η αλληλεπίδραση μικροφουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα με γειτονικό τοίχωμα. Το περιβάλλον ρευστό θεωρείται ανιζώδες και ασυμπίεστο του οποίου η πίεση διαταράσσεται είτε με βηματική, είτε με ημιτονοειδή διαταραχή στο άπειρο. Το περίβλημα της μικροφουσαλίδας θεωρείται ως ιξωδοελαστικό κέλυφος αμελητέου πάχους. Για τον υπολογισμό του δυναμικού της ταχύτητας του περιβάλλοντος ρευστού χρησιμοποιείται η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση του κάθετου και εφαπτομενικού ισοζυγίου δυνάμεων κατά μήκος της γενέτειρας καμπύλης του κελύφους, το οποίο θεωρείται αξονοσυμμετρικό. Για βηματική αλλαγή της πίεσης στο περιβάλλον ρευστό το ιξώδες του κελύφους αποσβένει τις ταλαντώσεις όγκου της μικροφουσαλίδας, ενώ η αλληλεπίδραση της τελευταίας με γειτονικό τοίχωμα δημιουργεί δευτερογενείς δυνάμεις Bjerknes οι οποίες προκαλούν τη μετατόπιση της φουσαλίδας. Ωστόσο η μεταφορική κίνηση της φουσαλίδας δεν μπορεί να ανακοπεί λόγω της απουσίας ιξώδους στο περιβάλλον ρευστό και της επίδρασης του ιξώδους του κελύφους μόνο στην ταλαντωτική κίνηση. Η μεταφορική κίνηση διατηρείται ακόμα και μετά την επίτευξη στατικής διαμόρφωσης από τη φουσαλίδα. Η επικρατούσα στατική διαμόρφωση είναι αυτή του ελλειψοειδούς και πρόκειται για ευσταθή κλάδο αναδύμενο από τη σφαιρική διαμόρφωση υπό συμπίεση. Προκύπτει για μικροφουσαλίδες με μαλακά κελύφη και με σχετικά σημαντική αντίσταση στον λυγισμό και τη συμπίεση, που ευνοούν την επιμήκυνση



παράλληλα στον άξονα συμμετρίας. Στατική διαμόρφωση με οδόντωση δεν μπορεί να ανακτηθεί από τις αριθμητικές προσομοιώσεις λόγω του φαινομένου της απόκλισης, “divergence”, και των επακόλουθων ασταθειών που διεγείρονται κατά την παραμόρφωση του κελύφους μέχρι την επίτευξη στατικής διαμόρφωσης. Στην περίπτωση αυτή προκρίνονται ασύμμετρα σχήματα με επιμήκυνση κάθετα στον άξονα συμμετρίας και σημαντικό επίπεδο λυγισμού στην περιοχή του πόλου. Όταν η φουσαλίδα διεγείρεται από διαταραχή ημιτονοειδούς μορφής με πλάτος κάτω από το όριο λυγισμού, λαμβάνει χώρα αρμονικός συντονισμός και η φουσαλίδα επιδεικνύει κυρίως ωοειδή σχήματα με προσανατολισμό κάθετα στο τοίχωμα. Η συγκεκριμένη διαμόρφωση είναι αποτέλεσμα έντονης μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην περιοχή των πόλων του κελύφους η οποία αντισταθμίζεται από το ιξώδες του κελύφους οδηγώντας σε ωοειδή σχηματισμό. Η μείωση της απόστασης από το τοίχωμα δεν επηρεάζει σημαντικά το πλάτος ταλάντωσης της μικροφουσαλίδας και συνεπώς την ακουστική της απόκριση. Καθώς το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής αυξάνει, παρατηρείται δυναμικός λυγισμός αμέσως μετά τη μέγιστη συμπίεση, ο οποίος οδηγεί σε διάρρηξη του κελύφους. Κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων δεν παρατηρήθηκε δημιουργία υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) και για τις δύο περιπτώσεις μεταβολής της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού, καθώς το ιξώδες του κελύφους αποσβένει την ταχύτητα στον πόλο, ενώ η ελαστικότητα του κελύφους δεν επιτρέπει τη δημιουργία έντονων εσοχών.

## **Abstract**

The acoustic interaction between a coated microbubble and a nearby rigid wall is studied numerically. The surrounding fluid is treated as an inviscid, incompressible fluid that is insonated by a step change or a sinusoidal pressure variation, whereas the microbubble coating is taken to be a viscoelastic thin shell. The boundary integral method is employed for calculating the velocity potential in the surrounding fluid, coupled with the finite element method for discretizing the normal and tangential force balances along the generating curve of the shell which is treated as axisymmetric. In the absence of an external forcing frequency, shell viscosity damps volume pulsations while wall interaction produces secondary Bjerknes forces that generate bubble migration. However, since shell viscosity refers to the dilatational part of shell pulsation and the surrounding liquid is inviscid, it cannot affect the bubble translational motion which persists even after the bubble shape has achieved a static arrangement. The prevailing static arrangement is that of a prolate spheroid which constitutes a stable bifurcating branch that emerges from the compressed spherical state. Dimpled static shapes cannot be captured due to a divergence type instability that arises as part of the dynamic evolution of the shell towards this static configuration. When the microbubble is insonated by a forcing frequency below the buckling threshold, harmonic resonance takes place and the microbubble is seen to mainly exhibit prolate shapes with its long axis perpendicular to the wall, while oblate shapes are suppressed. The former arrangement is a result of the increased variation of kinetic energy of the shell at the pole region that is counteracted by viscous shell damping leading to prolate shapes. Reducing the distance from the wall leads to negligible reduction in the amplitude of the response. As the sound amplitude increases dynamic buckling is observed during the rebound phase of the bubble pulsation that ruptures the shell. Jet formation was never observed during the simulations, with either a step or a sinusoidal pressure variation, since shell viscosity damps the speed of the accelerating pole while shell elasticity rearranges interfacial energy in favor of less acute configurations.

## Περιεχόμενα

Περιεχόμενα .....	x
1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Τα Contrast Agents στη διαγνωστική ιατρική .....	1
1.2 Ιστορική Αναδρομή .....	2
1.3 Λειτουργία των Contrast Agents.....	3
1.4 Περιορισμοί των Contrast Agents.....	3
1.5 Εφαρμογές των Contrast Agents.....	4
1.6 Υπάρχοντα και μελλοντικά Contrast Agents .....	5
1.7 Κίνητρο και υπόβαθρο .....	6
1.8 Βιβλιογραφική ανασκόπηση .....	7
1.9 Οργάνωση Διδακτορικής Διατριβής .....	13
2. Διατύπωση του προβλήματος .....	15
2.1 Μοντελοποίηση της μικροφουσαλίδας.....	15
2.2 Λαγκραντζιανή περιγραφή της διεπιφάνειας της μικροφουσαλίδας .....	19
2.3 Ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια: Σύζευξη υδροδυναμικών και ελαστικών δυνάμεων 22	
2.4 Ελαστικές τάσεις και καταστατικές εξισώσεις .....	24
2.5 Τάσεις, καμπτικές ροπές και καταστατικές εξισώσεις .....	28
2.6 Ολοκληρωτική εξίσωση της διεπιφάνειας της μικροφουσαλίδας .....	31
2.7 Μεταβολές της ενέργειας του συστήματος.....	34
3. Αριθμητική Επίλυση .....	37
3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων .....	37
3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων .....	39
3.3 Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων .....	41
3.4 Αλγόριθμος επίλυσης.....	44

3.5 Μέθοδος Newton – Raphson για την περίπτωση μηδενικού διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης .....	45
3.6 Αξιοπιστία της Αριθμητικής Μεθοδολογίας.....	46
4. Αριθμητικά αποτελέσματα για βηματική αλλαγή της πίεσης.....	53
4.1 Στατική Ισορροπία – Ενδεχόμενο Δημιουργίας Jet .....	53
4.2 Παραμετρική Μελέτη .....	66
5. Αριθμητικά αποτελέσματα για ημιτονοειδή αλλαγή της πίεσης.....	74
5.1 Παραμετρική Μελέτη .....	75
5.2 Αντιπαραβολή με Πειραματικές Μετρήσεις.....	86
6. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα .....	91
Αναφορές – Βιβλιογραφία.....	95

## Κατάλογος εικόνων

<b>Εικόνα 1-1:</b> (a) Ταλαντώσεις μικροφυσαλίδας μακριά από σύνορο, (b) Ταλαντώσεις προσκολλημένης μικροφυσαλίδας στο επίπεδο παράλληλα στο σύνορο, (c) Ταλαντώσεις προσκολλημένης μικροφυσαλίδας στο επίπεδο κάθετα στο σύνορο και (d) Στιγμιότυπα που απεικονίζουν το τοροειδές σχήμα της μικροφυσαλίδας κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης του jet.....	8
<b>Εικόνα 1-2:</b> Στιγμιότυπα ταλαντώσεων μικροφυσαλίδας σε κάτοψη (πάνω σειρά φωτογραφιών) και σε πλάγια όψη (κάτω σειρά φωτογραφιών).....	8
<b>Εικόνα 1-3:</b> Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με αγγείο. (a) Μια ομάδα από φυσαλίδες μέσα στο αγγείο οι οποίες προκαλούν τη διαστολή του (κέντρο) και την επακόλουθη εγκόλπωση του τοιχώματος (δεξιά), (b) Διαστολή του αγγείου από την ύπαρξη φυσαλίδας κοντά στο τοίχωμα (κέντρο) και η δημιουργία jet στη φυσαλίδα με κατεύθυνση αντίθετα του τοιχώματος. ....	9
<b>Εικόνα 1-4:</b> α) Οπτικές παρατηρήσεις σχηματισμού συσσωματωμάτων μικροφυσαλίδων πολύ κοντά σε γειτονικό τοίχωμα και β) Διάγραμμα της θεμελιώδους φασματικής συνιστώσας σε σχέση με την ακτίνα ηρεμίας των μικροφυσαλίδων. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις αιωρούμενες φυσαλίδες μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα, η γραμμή 1 αντιστοιχεί στην περίπτωση προσκολλημένης φυσαλίδας στο τοίχωμα και η γραμμή 2 αντιστοιχεί στην περίπτωση συσσωματώματος φυσαλίδων προσκολλημένων στο τοίχωμα. Η μπάρα αντιστοιχεί σε μήκος 10 $\mu\text{m}$ . ....	10

<b>Εικόνα 1-5:</b> Διαγράμματα κατανομής πίεσης εντός του αγγείου και της παραμόρφωσης της μικροφυσαλίδας CA: a) $t=0.02 \mu s$ , b) $t=0.28 \mu s$ μέγιστη διαστολή του αγγείου, c) $t=0.32 \mu s$ μέγιστη διαστολή της μικροφυσαλίδας και d) $t=0.54 \mu s$ .....	10
<b>Εικόνα 1-6:</b> a) Αριθμητικές προσομοιώσεις αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με ελαστικό σύνορο και b) αντίστοιχες πειραματικές παρατηρήσεις.....	11
<b>Εικόνα 1-7:</b> Διαγράμματα σχήματος και ισοϋψών πίεσης μικροφυσαλίδας που ταλαντώνεται κοντά σε γειτονικό στερεό τοίχωμα υπό την επίδραση ημιτονοειδούς ακουστικού κύματος, κατά την: a) φάση διαστολής και b) φάση συμπίεσης – κατάρρευσης, [τα βέλη υποδηλώνουν την πορεία της προσομοίωσης], c) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης του πάχους του κελύφους στον πόλο που βρίσκεται εγγύτερα στο τοίχωμα για τρεις διαφορετικές αποστάσεις της φυσαλίδας από το τελευταίο.....	12
<b>Εικόνα 2-1:</b> Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας με εξωτερικό περίβλημα κοντά σε στερεό τοίχωμα. ....	18
<b>Εικόνα 2-2:</b> Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας με εξωτερικό περίβλημα κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια. ....	18
<b>Εικόνα 2-3:</b> Σχηματική απεικόνιση του συστήματος φυσαλίδα – φυσαλίδα.....	31
<b>Εικόνα 5-1:</b> a) Μεταφορά φωσφορίζοντος υλικού από το κέλυφος μικροφυσαλίδας προς την κυρίως μάζα του ρευστού, b) Απόπειρα ερμηνείας του φαινομένου μέσω της μικροκυκλοφορίας (microstreaming) σαν αποτέλεσμα της ακουστικής απόκρισης της φυσαλίδας. ....	79
<b>Εικόνα 5-2:</b> Ασύμμετρη ταλάντωση μικροφυσαλίδας και δημιουργία jet με κατεύθυνση προς το τοίχωμα.....	86

## Κατάλογος διαγραμμάτων

<b>Διάγραμμα 3-1:</b> a) Γραμμική ανάλυση ευστάθειας (Floquet) από τους Τσιγκλιφή – Πελεκάση, b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας με χρήση φίλτρου, c) Παρόμοιο διάγραμμα χωρίς τη χρήση φίλτρου, d) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας της διεπιφάνειας στο τέλος της προσομοίωσης, χωρίς τη χρήση φίλτρου, e) Διάγραμμα ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας σταθερού πλάτους. Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=2$ , $d_0=200$ ). ....	47
--	----

<b>Διάγραμμα 3-2:</b> α) Σχήμα της μικροφυσαλίδας κατά τη φάση συμπίεσης (μπλε) όπου λαμβάνει χώρα σημαντική παραμόρφωση και κατά τη φάση διαστολής (κόκκινο) όπου το σχήμα παραμένει σχεδόν σφαιρικό, β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της κινητικής ενέργειας (κόκκινο), της ενέργειας λόγω συμπίεσης, ελαστικής παραμόρφωσης και σκέδασης λόγω του διαστολικού ιζώδους της μεμβράνης (μπλε) και της συνολικής μεταβολής ενέργειας του συστήματος (μαύρη). Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=2$ , $d_0=200$ ). ....	48
<b>Διάγραμμα 3-3:</b> α) Σχήμα της μικροφυσαλίδας στην αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη) και στη φάση συμπίεσης (μπλε), β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας. Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=1$ , $d_0=2$ ).....	49
<b>Διάγραμμα 3-4:</b> α) Σχήμα της μικροφυσαλίδας στην αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), αμέσως μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη) και στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε), β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας. Βηματική αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=1$ , $d_0=2$ ). ....	51
<b>Διάγραμμα 4-1:</b> Διάγραμμα διακλάδωσης ελαστικού κελύφους για αδιάστατη καμπτική ελαστικότητα $B=0.087$ [Knoche & Kierfeld (2011)] .....	54
<b>Διάγραμμα 4-2:</b> Διαγράμματα διακλάδωσης για καταστατικό νόμο κελύφους Mooney-Rivlin: α) για $G_{3D}=80$ MPa και β) $G_{3D}=40$ MPa. ....	54
<b>Διάγραμμα 4-3:</b> Διαγράμματα διακλάδωσης για καταστατικό νόμο κελύφους: α) Hooke με $G_{3D}=80$ MPa και β) Skalak με $G_{3D}=80$ MPa. ....	54
<b>Διάγραμμα 4-4:</b> α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή της διαμόρφωσης επίπεδης περιοχής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)] , β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για $\varepsilon=2$ , $d_0=2$ .....	56
<b>Διάγραμμα 4-5:</b> α) Σχήμα της μικροφυσαλίδας λίγο πριν (μαύρη), τη στιγμή διαμόρφωσης της επίπεδης περιοχής (κόκκινη) και λίγο μετά (μπλε), β) Κατανομή κάθετης ταχύτητας του κελύφους στις τρεις χρονικές στιγμές, γ) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος της φυσαλίδας την τελική χρονική στιγμή, δ) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους στις τρεις χρονικές στιγμές και ε) Κατανομή καμπτικής διατμητικής τάσης λόγω κάμψης στο κέλυφος στις τρεις χρονικές στιγμές.....	58
<b>Διάγραμμα 4-6:</b> Διαγράμματα πλάτους των ιδιομορφών της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας στο τέλος της προσομοίωσης, α) χωρίς εφαρμογή φίλτρου και β) με την εφαρμογή φίλτρου.....	59

- Διάγραμμα 4-7:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας χωρίς εξωτερικό περίβλημα [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση μέγιστης συμπίεσης λίγο πριν την έναρξη του jet (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)] και β) Διάγραμμα κατανομής ενέργειας της μικροφυσαλίδας κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ . ..... 60
- Διάγραμμα 4-8:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, δ) Διάγραμμα κάθετης ταχύτητας της διεπιφάνειας στο τέλος της προσομοίωσης και ε) Διάγραμμα ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος της φυσαλίδας, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=100 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ . ..... 62
- Διάγραμμα 4-9:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη μέγιστη διαστολή (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Κατανομή κάθετης ταχύτητας της διεπιφάνειας και δ) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους, στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=0 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ . ..... 63
- Διάγραμμα 4-10:** Στατική ισορροπία μικροφυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και χρήση ελλειπτικής δημιουργίας πλέγματος για ίδιο σετ παραμέτρων με α)  $\mu_{3D}=20 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$  και β)  $\mu_{3D}=0 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ . ..... 64
- Διάγραμμα 4-11:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη μέγιστη διαστολή (κόκκινη), τη στιγμή της διαμόρφωσης επίπεδης περιοχής στην πλευρά του βόρειου πόλου (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $M\text{-}R \text{ shell } (b=0)$ ,  $G_{3D}=10 \text{ MPa}$ ,  $\mu_{3D}=0 \text{ Kg/m}\cdot\text{s}$ ,  $k_B=0 \text{ N}\cdot\text{m}$ . ..... 65
- Διάγραμμα 4-12:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=200$ ,  $M\text{-}R \text{ shell } (b=0)$ ,  $G_{3D}=80 \text{ MPa}$ ,  $\mu_{3D}=20 \text{ Kg/m}\cdot\text{s}$ ,  $k_B=3\cdot 10^{-14} \text{ N}\cdot\text{m}$ . ..... 67
- Διάγραμμα 4-13:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή που διαμορφώνεται το επιμηκυμένο σχήμα (prolate) (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος δ) Χρονική εξέλιξη της  $E_{\text{inviscid}}$  κατά τη

μετάβαση από το σφαιρικό σχήμα στο ωοειδές (prolate) για *M-R shell* ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=4$ ,  $G_{3D}=40$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m. .... 69

**Διάγραμμα 4-14:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)] και β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας για *M-R shell* ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=160$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m. .... 70

**Διάγραμμα 4-15:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή που διαμορφώνεται το επιμηκυμένο σχήμα (prolate) (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, δ) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος, για *Hooke shell*,  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=4$ ,  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m. .... 72

**Διάγραμμα 4-16:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Διάγραμμα ενέργειας για *Skalak shell* ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m και δ) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας για  $\varepsilon=8$ ,  $d_0=2$ . .... 73

**Διάγραμμα 5-1:** Διάγραμμα φάσης για μικροφυσαλίδα με ελαστικό κέλυφος που ακολουθεί καταστατικό νόμο: α) *Mooney-Rivlin* (strain softening shell) και β) *Skalak* (strain hardening shell). .... 74

**Διάγραμμα 5-2:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος και δ) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της πίεσης στη διεπιφάνεια από τη μεριά του ρευστού στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=200$ , *M-R shell* ( $b=0$ ),  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m,  $\nu_f=1.7$  MHz,  $R_0=3.6$   $\mu$ m. .... 76

**Διάγραμμα 5-3:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, για  $\varepsilon=1$ ,  $d_0=4$ , *M-R shell* ( $b=0$ ),  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N.m,  $\nu_f=1.7$  MHz,  $R_0=3.6$   $\mu$ m. .... 77

**Διάγραμμα 5-4:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης



(μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και c) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της πίεσης στη διεπιφάνεια από τη μεριά του ρευστού στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=4$ . ..... 78

**Διάγραμμα 5-5:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, d) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος κατά τη φάση συστολής, για  $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ . ..... 80

**Διάγραμμα 5-6:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (μπλε), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, d) Κατανομή κάθετης ταχύτητας του κελύφους, e) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος της φυσαλίδας την τελική χρονική στιγμή, f) Κατανομή διατμητικής τάσης λόγω κάμψης στο κέλυφος και g) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ . .... 83

**Διάγραμμα 5-7:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας χωρίς ελαστικό περίβλημα [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), τη στιγμή της έναρξης του jet (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ . ..... 83

**Διάγραμμα 5-8:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=160$  MPa. .... 84

**Διάγραμμα 5-9:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=100$  Kg/m.s. .... 85

**Διάγραμμα 5-10:** Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)] για: a) καταστατικό νόμο Hooke με  $G_{3D}=80$  MPa και b) Καταστατικό νόμο Mooney-Rivlin με

$G_{3D}=5\text{ MPa}$  (μαλακό κέλυφος). [ $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=20\text{ Kg/m}\cdot\text{s}$ ,  $k_B=3\cdot 10^{-14}\text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $\nu_f=1.7\text{ MHz}$ ,  $R_0=3.6\text{ }\mu\text{m}$ ]. ..... 86

**Διάγραμμα 5-11:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (μπλε), στη φάση διαστολής (κόκκινη) και στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Κατανομή ιζωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος στη μέγιστη διαστολή και d) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής όπου λαμβάνει χώρα θραύση του κελύφους (μπλε) και στο τέλος της προσομοίωσης όπου έχει δημιουργηθεί το jet (μωβ)] για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $R_0=5.4\text{ }\mu\text{m}$ . ... 88

**Διάγραμμα 5-12:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε) και στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος και d) Κατανομή ιζωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος κατά τη μέγιστη διαστολή, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $R_0=1.8\text{ }\mu\text{m}$ . ..... 89

## 1. Εισαγωγή

Οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent συνιστούν σωματίδια στο εσωτερικό των οποίων υπάρχει αέριο, συνήθως διαλυτό στο αίμα, τα οποία περιβάλλονται από μεμβράνη η οποία παρουσιάζει ελαστικές ιδιότητες. Το γεγονός ότι η διάμετρός τους κυμαίνεται από 1 έως 10  $\mu\text{m}$ , σε συνδυασμό με τον μικρό αριθμό από αυτές που συνήθως διέρχονται μέσω των αγγείων κατά τη διάρκεια των κλινικών μετρήσεων, ελαχιστοποιεί το ενδεχόμενο καρδιακής εμβολής και τις καθιστά ασφαλείς για χρήση στο ανθρώπινο κυκλοφορικό σύστημα. Η χρήση μεμβράνης είναι απαραίτητη, ώστε να μη διαχέεται το αέριο πολύ γρήγορα στο αίμα και τα σωματίδια να μεταφέρονται με την κυκλοφορία χωρίς αλλοιώσεις στο επιθυμητό σημείο μελέτης – δράσης.

### 1.1 Τα Contrast Agents στη διαγνωστική ιατρική

Η μελέτη των μη προσιτών οργάνων του ανθρώπινου σώματος αποτελούσε πάντοτε πρόκληση για τους ιατρούς, τους επιστήμονες και αργότερα τους σχεδιαστές αναλυτικών συσκευών. Η ανακάλυψη των ακτίνων x, στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα, φάνηκε να είναι προς στιγμήν το απόλυτο όργανο για τη μελέτη αυτή. Όμως, παρ' όλα αυτά, έγινε φανερό ότι η ραδιογραφία με ακτίνες x είχε καταστροφικά αποτελέσματα στους ιστούς λόγω της ιονίζουσας ακτινοβολίας. Σήμερα, αν και οι ακτίνες x είναι περισσότερο ασφαλείς και εφαρμόζονται με μεγαλύτερη τεχνογνωσία, συνεχίζουν να προσδίδουν το ίδιο είδος ραδιενέργειας και να αποτελούν ρίσκο για την υγεία όπως στα προηγούμενα χρόνια.

Την τελευταία δεκαετία, οι διαγνωστικές εφαρμογές με χρήση υπερήχων έχουν γίνει ιδιαίτερα δημοφιλείς επειδή, μεταξύ άλλων, οι υπέρηχοι είναι περισσότερο ασφαλείς και λιγότερο δαπανηροί ως εφαρμογή από τις ακτίνες x. Η διαγνωστική με χρήση υπερήχων εξελίχθηκε σε μια ιδιαίτερα επιτυχημένη μέθοδο της διαγνωστικής ιατρικής επειδή μπορεί να παρέχει, σε πραγματικό χρόνο, απεικονίσεις των ιστών και της ροής του αίματος χωρίς τη χρήση ιονίζουσας ακτινοβολίας. Συνήθως, χρησιμοποιεί συχνότητες εύρους 1-10MHz, η χρήση των οποίων αποτελεί πλέον μια σημαντική τεχνική διάγνωσης και θα συνεχίσει να παίζει σπουδαίο ρόλο στο μέλλον [1]. Ωστόσο, οι απεικονίσεις που δίνουν οι υπέρηχοι δεν έχουν σαφείς αντιθέσεις και μερικές φορές οι περιοχές που απεικονίζονται καλύπτονται από τις σκιές των ιστών. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση μικροφουσαλίδων τύπου Contrast Agent.

Οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent που χρησιμοποιούνται στη διαγνωστική ιατρική περιέχουν αργής διάχυσης αέριο, το οποίο είναι συνήθως διαλυτό στο αίμα και περιβάλλεται από εξωτερικό περίβλημα που παρουσιάζει ελαστικές ιδιότητες. Το περίβλημα αυτό αποτρέπει τη γρήγορη διάλυση των μικροφουσαλίδων κατά τη διάρκεια της εφαρμογής τους και επιτρέπει τη μεταφορά τους στο επιθυμητό σημείο δράσης χωρίς αλλοιώσεις [2]. Ωστόσο τα νεότερα μοντέλα μικροφουσαλίδων περιέχουν αέρια με μικρή διαλυτότητα στο αίμα και έτσι αυξάνεται η διάρκεια ζωής τους. Η διάμετρος των μικροφουσαλίδων ποικίλει από 1 έως 10  $\mu\text{m}$  γεγονός που τους επιτρέπει να διέρχονται μέσω των αγγείων, ενώ σε συνδυασμό με τον μικρό τους αριθμό ελαχιστοποιείται το ενδεχόμενο καρδιακής εμβολής. Επίσης, οι μικροφουσαλίδες εισάγονται στον οργανισμό με διάφορους τρόπους, π.χ. κάποιες δίδονται με τη μορφή ροφήματος, ενώ άλλες εισάγονται ενδοφλέβια ή σε μορφή κλύσματος. Μετά την εξέταση κάποιες απορροφώνται αβλαβώς από τον οργανισμό και άλλες εκκρίνονται από τα ούρα ή από την εντερική οδό [3]. Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πως η εφαρμογή τους στο ανθρώπινο κυκλοφορικό σύστημα είναι ασφαλής.

## 1.2 Ιστορική Αναδρομή

Η ανακάλυψη των μικροφουσαλίδων τύπου Contrast Agent προήλθε από την τυχαία παρατήρηση του καρδιολόγου Claude Joyner στα τέλη του 1960 [4]. Ο Joyner, κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ηχο-καρδιογράμματος μεθόδου m, προκειμένου να προσδιορίσει και να παρακολουθήσει την αορτική ρίζα, παρατήρησε παροδική αύξηση του υπερηχητικού σήματος έπειτα από κάθε υπερβαλβική έγχυση αλατούχου διαλύματος στην αορτή [4]. Η πρώτη δημοσίευση σχετικά με την ηχο-καρδιογραφία με χρήση μικροφουσαλίδων τύπου Contrast Agent συναντάται σε ένα άρθρο το 1968 των Gramiak και Shah, όπου αναφέρεται έγχυση πράσινης βαφής ινδοκυανίνης στην καρδιά με σκοπό τη μελέτη του αυξημένου συντονισμού του αίματος που περιείχε τη βαφή [4]. Επακολούθησε έρευνα από τους Gramiak και Fred Kremkau, που έδειξε ότι η βελτίωση στη μέθοδο των υπερήχων ήταν αποτέλεσμα σχηματισμού μικρών φουσαλίδων στην άκρη του καθετήρα και όχι λόγω της ίδιας της βαφής [5].

Το πρώτο υλικό που χρησιμοποιήθηκε για διάγνωση με χρήση υπερήχων ήταν αιωρήματα φουσαλίδων σε βιο-συμβατά υγρά, όπως η πράσινη ινδοκυανίνη και η δεξτερόζη, όπου πεπιεσμένος αέρας διασκορπιζόταν στο υγρό λίγο πριν την έγχυσή του. Όμως, τα υλικά αυτά δε μπορούσαν να αποθηκευθούν και έπρεπε να προετοιμάζονται πριν την μελέτη. Παρ' όλα αυτά, παρείχαν μια περιορισμένη βελτίωση της επανασκέδασης του ηχητικού σήματος [6]. Τα πιο προηγμένα υλικά που αναπτύχθηκαν συνιστούν σταθεροποιημένες μικροφουσαλίδες

αποτελούμενες από χαμηλής διαλυτότητας αέρια τα οποία περιβάλλονται, είτε από σφαιρική μεμβράνη πολυμερούς που σχηματίζεται με ανάμειξη σε συνθήκες έντονης διάτμησης, είτε από λιπίδια ή άλλους σύνθετους υδρογονάνθρακες. Αυτού του είδους τα σωματίδια τροποποιούνται κατάλληλα προκειμένου να έχουν καθορισμένο στόχο, να λειτουργούν δηλαδή ως συστήματα διανομής φαρμάκων ή γονιδίων σε γονιδιακές θεραπείες και ακόμα να μπορούν να είναι θεραπευτικά μέσα που διαλύουν τους θρόμβους του αίματος.

### 1.3 Λειτουργία των Contrast Agents

Τα σωματίδια αυτά βελτιώνουν σημαντικά την ακουστική επανασκέδαση του αίματος και αυτό βοηθά στην απεικόνιση των ανθρώπινων οργάνων και της ροής του αίματος, ενώ δίδουν τη δυνατότητα προσδιορισμού της θέσεως των οργάνων, κατά την εφαρμογή διαγνωστικής μεθόδου, με χρήση υπερήχων [7]. Η βελτίωση του επανασκεδαζόμενου σήματος οφείλεται στη συμπίεστικότητα των περικλειόμενων αερίων [1]. Η μικροφουσαλίδα ταλαντώνεται λόγω της διαταραχής του πεδίου της πίεσης με συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα και στη συνέχεια εκπέμπει ένα σήμα πίεσης λόγω σκέδασης. Με ανάλυση του σήματος εξάγεται το φάσμα συχνοτήτων της ταλάντωσης [8]. Σε περίπτωση μικρής (γραμμικής) διαταραχής το φάσμα συχνοτήτων θα περιέχει μόνο την επιβαλλόμενη συχνότητα διαταραχής, ενώ σε περίπτωση που η διαταραχή είναι μεγάλη το φάσμα θα περιέχει και άλλες συχνοτητές διαταραχής (υποαρμονικές ή υπεαρμονικές). Με τον τρόπο αυτό γίνεται η ταυτοποίηση του συγκεκριμένου σωματιδίου. Παράλληλα, σε συνθήκες συντονισμού, όπου η εξωτερική συχνότητα συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της μικροφουσαλίδας, το σκεδαζόμενο σήμα της πίεσης επηρεάζεται σημαντικά, γεγονός που αυξάνει τις δυνατότητες επεξεργασίας του.

### 1.4 Περιορισμοί των Contrast Agents

Τα σωματίδια αυτά υπόκεινται σε αρκετούς περιορισμούς προκειμένου να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου των υπερήχων. Έτσι, λοιπόν, τα Contrast Agents πρέπει να αποτελούνται από σωματίδια που να μην έχουν διαλυτότητα στο νερό [9]. Το μέγεθος των αγγείων του αίματος κυμαίνεται από 8 ως 14  $\mu\text{m}$ , επομένως η διάμετρος των σωματιδίων που συνιστούν τα Contrast Agents θα πρέπει να έχει άνω όριο τα 14 $\mu\text{m}$ , ώστε να τους επιτρέπει να διασχίζουν τα αγγεία και να αποτρέπεται η φραγή των τελευταίων [10]. Επίσης, τη διαταραχή της πίεσης, εκτός από τις μικροφουσαλίδες, την αντιλαμβάνονται και τα ανθρώπινα όργανα τα οποία έχουν δικό τους φάσμα συχνοτήτων λόγω σκέδασης. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι γνωστό

ένα τμήμα του φάσματος συχνοτήτων των μικροφυσαλίδων, ώστε να μπορεί να ταυτοποιηθεί η θέση τους, αλλά και η τοποθεσία του ανθρώπινου ιστού, λόγω της αντίθεσης (contrast) του σκεδαζόμενου σήματος. Για να γίνεται πιο εύκολα η ταυτοποίηση της μικροφυσαλίδας, θα πρέπει το σήμα που στέλνει πίσω να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, γεγονός που συμβαίνει στην κατάσταση συντονισμού και για σχετικά μεγάλο πλάτος της ακουστικής διαταραχής. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι γνωστή η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσής της και το πλάτος διαταραχής περιορισμένο, για να μην επηρεαστούν οι γύρω ιστοί. Οι μικροφυσαλίδες θα πρέπει επίσης να είναι χημικά σταθερές και να σχεδιάζονται έτσι, ώστε η μεμβράνη τους να λειτουργεί ως εμπόδιο του ρυθμού διάχυσης του αερίου έξω από τη φυσαλίδα [9].

## 1.5 Εφαρμογές των Contrast Agents

Οι μικροφυσαλίδες τύπου Contrast Agent χρησιμοποιούνται ευρέως στη διαγνωστική ιατρική μέσω της μεθόδου των υπερήχων, προκειμένου να τονίσουν συγκεκριμένες περιοχές του ανθρώπινου σώματος [11], π.χ. εφαρμόζονται για την καταγραφή της τροφοδοσίας της καρδιάς με αίμα και αποτελούν εργαλείο για την πρόβλεψη καρδιακών επεισοδίων. Επίσης, οι μικροφυσαλίδες μπορούν να λειτουργούν ως συστήματα μεταφοράς φαρμάκων σε προβληματικές περιοχές του ανθρώπινου σώματος [12]. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, λόγω των ιδιοτήτων της μεμβράνης τους, οι μικροφυσαλίδες προσκολλώνται επιλεκτικά στα άρρωστα κύτταρα, ενώ έπειτα από εφαρμογή μεγάλης διαταραχής της πίεσης καταστρέφονται και το φάρμακο μεταφέρεται στα κύτταρα αυτά. Οι μικροφυσαλίδες θα πρέπει όμως να σχεδιάζονται με τέτοια χαρακτηριστικά, ώστε η διαταραχή της πίεσης και της συχνότητας να τις καταστρέφει χωρίς να επηρεάζονται οι γύρω ιστοί, αφού η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή πίεσης στους έμβιους οργανισμούς δεν μπορεί να ξεπερνά τα 1.6 MPa (16 bar). Μια ακόμη εφαρμογή των μικροφυσαλίδων στην ιατρική είναι η δημιουργία πόρων στην επιφάνεια των κυττάρων (sonoporation), λόγω του ροϊκού πεδίου που προκαλούν οι ταλαντώσεις τους (microstreaming). Το ροϊκό πεδίο που δημιουργείται αυξάνει την απορροφητικότητα των κυττάρων. Επομένως μπορούν να μεταφερθούν σε αυτά φάρμακα, πρωτεΐνες και γονίδια με αποτέλεσμα η θεραπεία να είναι αποδοτικότερη [13]. Στην παραπάνω εφαρμογή, επειδή η απορροφητικότητα των κυττάρων σχετίζεται με το σχηματιζόμενο ροϊκό πεδίο και κατά συνέπεια με τη συχνότητα ταλάντωσης της φυσαλίδας, θα πρέπει να αποτρέπεται η κατάρρευσή της. Είναι απαραίτητο λοιπόν να βρεθούν για τα συγκεκριμένα φυσικά χαρακτηριστικά της μικροφυσαλίδας, το παράθυρο ασφαλείας σχετικά με το πλάτος και τη συχνότητα διαταραχής της πίεσης. Τέλος, στο πλαίσιο εφαρμογών που σχετίζονται με την εξειδικευμένη μεταφορά φαρμάκων ή γονιδίων σε

συγκεκριμένους ιστούς και κύτταρα του ανθρώπινου σώματος, διεξάγεται έρευνα πάνω στον σχεδιασμό του ελαστικού περιβλήματος των μικροφουσαλίδων, ώστε αυτές να κατευθύνονται και να αλληλεπιδρούν με παθολογικούς ιστούς. Έτσι, η ελεγχόμενη ταλάντωση ή και ενδεχόμενη θραύση τους απελευθερώνει ουσίες με θεραπευτικές ιδιότητες ή πολύτιμο γονιδιακό υλικό για γονιδιακή θεραπεία, χωρίς ανεπιθύμητες παρενέργειες [14].

## 1.6 Υπάρχοντα και μελλοντικά Contrast Agents

Οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent έχουν αποτελέσει μία σημαντική βελτίωση στην εφαρμογή της διαγνωστικής με τη μέθοδο των υπερήχων. Περισσότερες από 10 μικροφουσαλίδες βρίσκονται σε στάδιο ανάπτυξης και αρκετές υπόκεινται σε κλινικούς ελέγχους [15]. Κάποιες από αυτές τις μικροφουσαλίδες καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Όνομα	Κατασκευαστής	Τύπος μεμβράνης/ αερίου	Κατάσταση έγκρισης
Levovist®	Schering AG	Υδάτινα αιωρήματα συνδυασμού μικροσωματιδίων γαλακτόζης και παλμιτικού οξέως	Εγκεκριμένο στην Ευρώπη και κλινικά ελεγμένο στην Ιαπωνία και τις ΗΠΑ
Echogen™	Sonus / Abbot	2% γαλάκτωμα δωδεκαφθοροπεντανίου	Εγκεκριμένο στην Ευρώπη
SonoVue™	Bracco	Φωσφολιπίδια - σταθεροποιημένες μικροφουσαλίδες με θειικό εξαφθοριούχο αέριο	Εγκεκριμένο σε πέντε ευρωπαϊκές χώρες
Optison®	Molecular Biosystems Inc./ Mallinckrodt	Υπερφθοράνθρακας - ορός με μικροσφαιρίδια αλμπουμίνης	Εγκεκριμένο στις ΗΠΑ
SonoRx	Bracco	Σιμεθικόνη – επικαλυμμένη σελουλόζη	Εγκεκριμένο στις ΗΠΑ
Definity™	Dupont/ ImaxRx	Μικροφουσαλίδες επικαλυμμένες με φωσφολιπίδια που περιβάλλουν αέριο υπερφθοράνθρακα	Εγκεκριμένο στις ΗΠΑ

Sonazoid™	Nycomed	Αέριο υπερφθοροβουτάνιο περιβαλλόμενο από σταθεροποιημένη μεμβράνη λιπιδίου	Κλινικοί έλεγχοι υπό εξέλιξη στην Ευρώπη
Imagent®	Alliance/ Schering	Απολυμαντική μεμβράνη που περιέχει υπερφθοροεξάνιο – πεπιεσμένος αέρας	Κλινικοί έλεγχοι υπό εξέλιξη στις ΗΠΑ
AI-700	Acusphere Incorporated	Πολυμερές (PLGA) που περιβάλλει χαμηλό υπερφθοράνθρακα	Κλινικοί έλεγχοι υπό εξέλιξη στις ΗΠΑ

**Πίνακας 1-1 :** Contrast Agents διαθέσιμα ή σε στάδιο κλινικού ελέγχου (Πηγή: Frinking et al., 2000)

## 1.7 Κίνητρο και υπόβαθρο

Παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η ταυτοποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς και της ακουστικής υπογραφής των μικροφουσαλίδων τύπου Contrast Agent κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους κοντά σε γειτονικό σύνορο. Η κατανόηση και ακόμη περισσότερο ο έλεγχος αυτής της αλληλεπίδρασης είναι ζωτικής σημασίας για μια πληθώρα καινοτόμων βιοϊατρικών εφαρμογών υπερήχων [16], οι οποίες χρησιμοποιούν τα Contrast Agents είτε ως παράγοντες που ενισχύουν την αντίθεση σε συσκευές απεικόνισης [17], είτε ως μεταφορείς φαρμάκων και γενετικού υλικού [18]. Στην τελευταία περίπτωση, η αναγνώριση της ακουστικής υπογραφής προσκολλημένων στους ιστούς φουσαλίδων είναι καίριο ζήτημα και θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν οι διαμοριακοί δεσμοί που δημιουργούνται μεταξύ της μεμβράνης και του γειτονικού τοιχώματος. Πειραματικές μελέτες έδειξαν ασύμμετρες ταλαντώσεις μικροφουσαλίδων πολύ κοντά σε γειτονικό ιστό [19], [20], συνοδευόμενες από μια μείωση του ακουστικού τους σήματος [19], [21]. Αντιθέτως, έχει παρατηρηθεί αύξηση του επανασκεδαζόμενου σήματος ηχοβολισμένων μικροφουσαλίδων, η οποία αποδίδεται στην αλληλεπίδραση των τελευταίων με τον γειτονικό ιστό [22]. Επιπλέον, υπάρχουν πειραματικά δεδομένα ακουστικής απόκρισης μικροφουσαλίδων που αναφέρουν σχηματισμό υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) με κατεύθυνση προς [19] ή μακριά από το τοίχωμα [23]. Στην περίπτωση σχηματισμού jet με κατεύθυνση προς το τοίχωμα η ροή που δημιουργείται τοπικά ενδέχεται να είναι επιζήμια για τους γειτονικούς ιστούς [24]. Όμως, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η συγκεκριμένη ροή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην καθοδήγηση φαρμακευτικού υλικού σε περιοχή του



κυκλοφορικού συστήματος όπου έχουν δημιουργηθεί θρόμβοι, με στόχο τη διάσπασή τους (θρομβόλυση) [25].

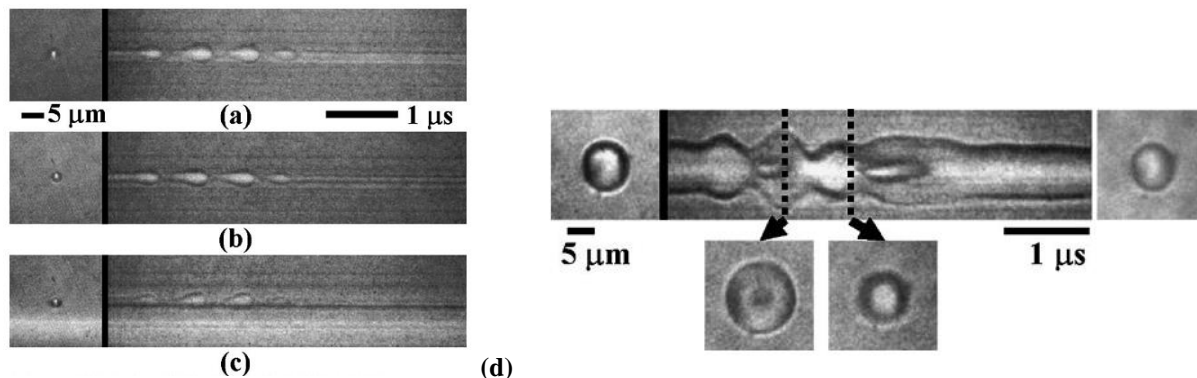
Οι περισσότερες αριθμητικές μελέτες αλληλεπίδρασης Contrast Agent με γειτονικό τοίχωμα εστιάζουν κυρίως στην ελαστική συμπεριφορά του τοιχώματος, ενώ παράλληλα θεωρούν το Contrast Agent ως φυσαλίδα ή σταγόνα με ελεύθερη επιφάνεια [26], [27], [28] με σοβαρές επιπτώσεις στη δυναμική της απόκριση, όπως ο σχηματισμός υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) και τα συνεπακόλουθά της. Η ελαστικότητα της μεμβράνης εισάγεται στη μελέτη των Contrast Agents [29], [30], [31] για να εκτιμηθεί η σημασία των ιξωδοελαστικών ιδιοτήτων της μεμβράνης στην ακουστική απόκριση της φυσαλίδας ή για να αξιολογηθεί η επίδραση γειτονικών συνόρων στην μετακίνηση της μικροφυσαλίδας [22], [32] καθώς επίσης και η επίδραση στη συχνότητα συντονισμού της [33]. Επίσης έχουν μελετηθεί ασύμμετρες ταλαντώσεις μικροφυσαλίδων με εξωτερικό περίβλημα θεωρώντας λεπτό [34], [35] ιξωδοελαστικό κέλυφος στοχεύοντας στην αποσαφήνιση της επίδρασης της παραμόρφωσης του τελευταίου στην ακουστική υπογραφή της μικροφυσαλίδας χρησιμοποιώντας τις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes [34] ή τη θεωρία ανιζώδους ροής [35] για τη μελέτη της δυναμικής του περιβάλλοντος ρευστού, χωρίς σημαντικές αποκλίσεις στο προβλεπόμενο φάσμα συχνοτήτων. Τέλος, έχει μελετηθεί η δυναμική απόκριση μικροφυσαλίδων με σχετικά παχύ εξωτερικό περίβλημα [36] θεωρώντας ότι το περίβλημα αποτελείται από ιξώδες ρευστό. Στη μελέτη αυτή επισημάνθηκε ότι το ιξώδες του περιβλήματος απέτρεψε το σχηματισμό jet και κατά συνέπεια την κατάρρευση της μικροφυσαλίδας κοντά σε γειτονικό σύνορο.

## 1.8 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες έχουν γίνει πολλές και σημαντικές μελέτες για τη δυναμική συμπεριφορά φυσαλίδων με ελαστικό εξωτερικό περίβλημα, όταν αυτές βρίσκονται μόνες τους βυθισμένες σε ρευστό, καθώς επίσης και για την αλληλεπίδρασή τους με γειτονικό σύνορο.

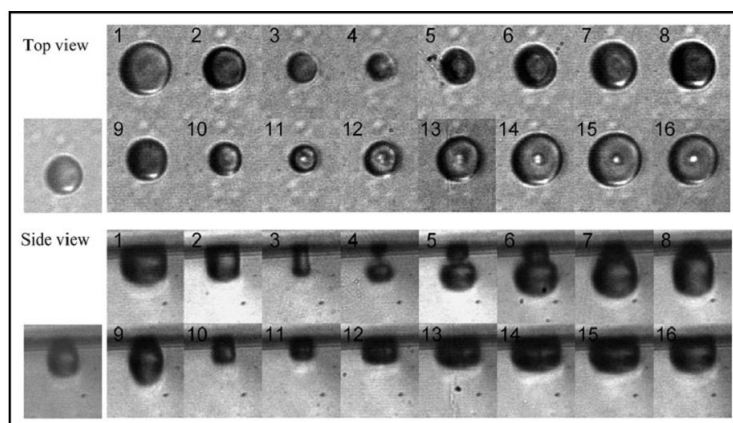
Οι Zhao et al. [19] μελέτησαν τις ασύμμετρες ταλαντώσεις μικροφυσαλίδων τύπου Contrast Agent προσκολλημένων σε πορώδες, ελαστικό κυτταρικό σύνορο, όταν αυτές ηχοβολούνται από υπέρηχο. Στη μελέτη αυτή αναφέρεται ότι οι μικροφυσαλίδες αυτές ταλαντώνονται ασύμμετρα στο επίπεδο κάθετα στο σύνορο και σχεδόν συμμετρικά στο επίπεδο παράλληλα στο τελευταίο, **Εικόνα 1-1(b), (c)**. Επίσης, η παρουσία του συνόρου επηρεάζει το πλάτος της μέγιστης διαστολής της μικροφυσαλίδας. Οι παρατηρήσεις έδειξαν ότι οι προσκολλημένες μικροφυσαλίδες ταλαντώνονται με σημαντικά μικρότερη διαστολή απ' ό,τι οι αντίστοιχες που αιωρούνται στο κυκλοφορικό

σύστημα. Τέλος, για μεγάλα πλάτη εξωτερικής διαταραχής παρατηρήθηκε δημιουργία jet με κατεύθυνση προς το τοίχωμα, **Εικόνα 1-1(d)**.



**Εικόνα 1-1:** (a) Ταλαντώσεις μικροφουσαλίδας μακριά από σύνορο, (b) Ταλαντώσεις προσκολλημένης μικροφουσαλίδας στο επίπεδο παράλληλο στο σύνορο, (c) Ταλαντώσεις προσκολλημένης μικροφουσαλίδας στο επίπεδο κάθετο στο σύνορο και (d) Στιγμιότυπα που απεικονίζουν το τοροειδές σχήμα της μικροφουσαλίδας κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης του jet.

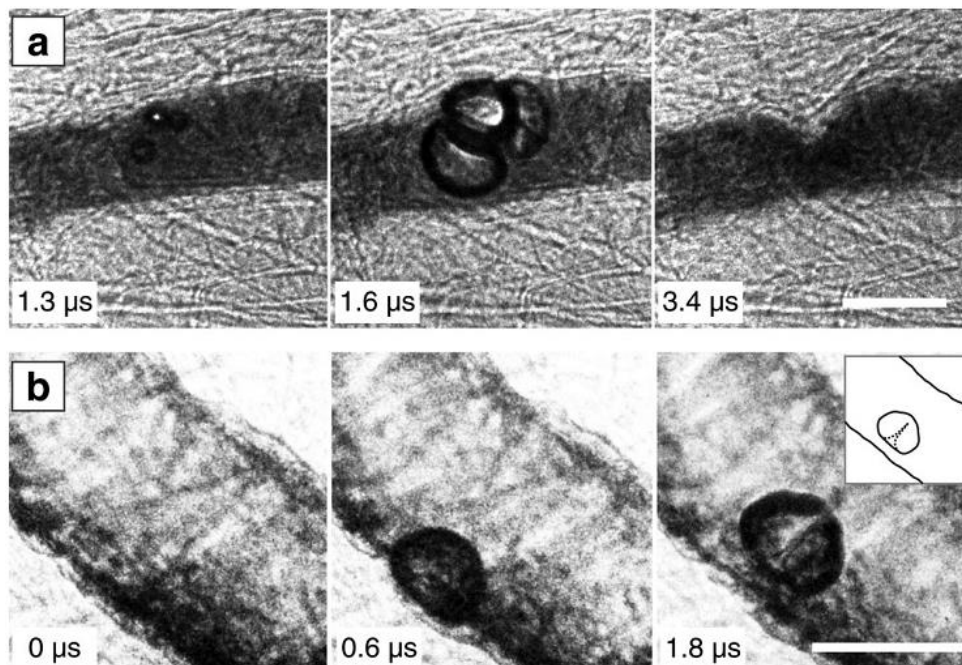
Οι Vos et al. [20] κατάφεραν να παρατηρήσουν, σε πλάγια όψη, ταλαντώσεις μικροφουσαλίδων τύπου Contrast Agent, όταν αυτές βρίσκονται σε επαφή με γειτονικό τοίχωμα. Δηλαδή το επίπεδο παρατήρησης είναι παράλληλο με το τοίχωμα. Αυτό κατέστη δυνατό ενσωματώνοντας στο συμβατικό μικροσκόπιο κατάλληλο κάτοπτρο. Οι παρατηρήσεις έδειξαν ότι οι μικροφουσαλίδες μπορούν να παραμορφωθούν κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεών τους. Αυτές οι μη σφαιρικές παραμορφώσεις παρουσιάζουν προσανατολισμό κάθετο στο τοίχωμα και γίνονται αντιληπτές μόνο με την παρατήρηση σε πλάγια όψη. Αντιθέτως, οι παρατηρήσεις σε κάτοψη έδειξαν ότι οι μικροφουσαλίδες εκτελούν σφαιρικές ταλαντώσεις, **Εικόνα 1-2**.



**Εικόνα 1-2:** Στιγμιότυπα ταλαντώσεων μικροφουσαλίδας σε κάτοψη (πάνω σειρά φωτογραφιών) και σε πλάγια όψη (κάτω σειρά φωτογραφιών).

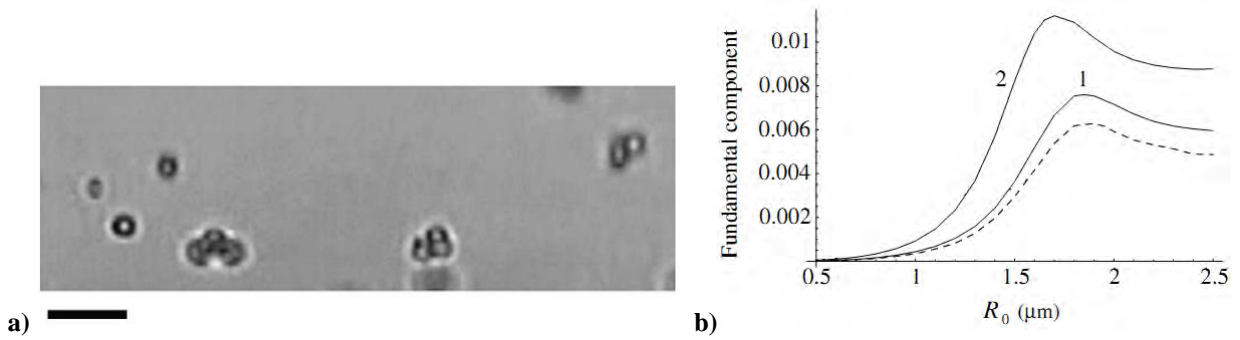
Οι Chen et al. [23] διεξήγαγαν πειράματα σχετικά με την παραμόρφωση που προκαλούν οι φουσαλίδες σε αιμοφόρα αγγεία κάνοντας χρήση της μεθόδου φωτομικρογραφίας υψηλής ταχύτητας. Στην περίπτωση αυτή το γειτονικό σύνορο θεωρείται ελαστικό. Παρατηρήθηκε

δημιουργία jet στις φυσαλίδες που κινούνται κοντά στο τοίχωμα του αγγείου, ενώ στο τελευταίο υπήρξε αρχικά διαστολή και κατόπιν εμφανίστηκαν εγκολπώσεις. Το jet δημιουργείται απομακρυνόμενο από την ελαστική επιφάνεια του αγγείου και τείνει να διασχίσει τη φυσαλίδα κατά μήκος της διαμέτρου της **Εικόνα 1-3**.



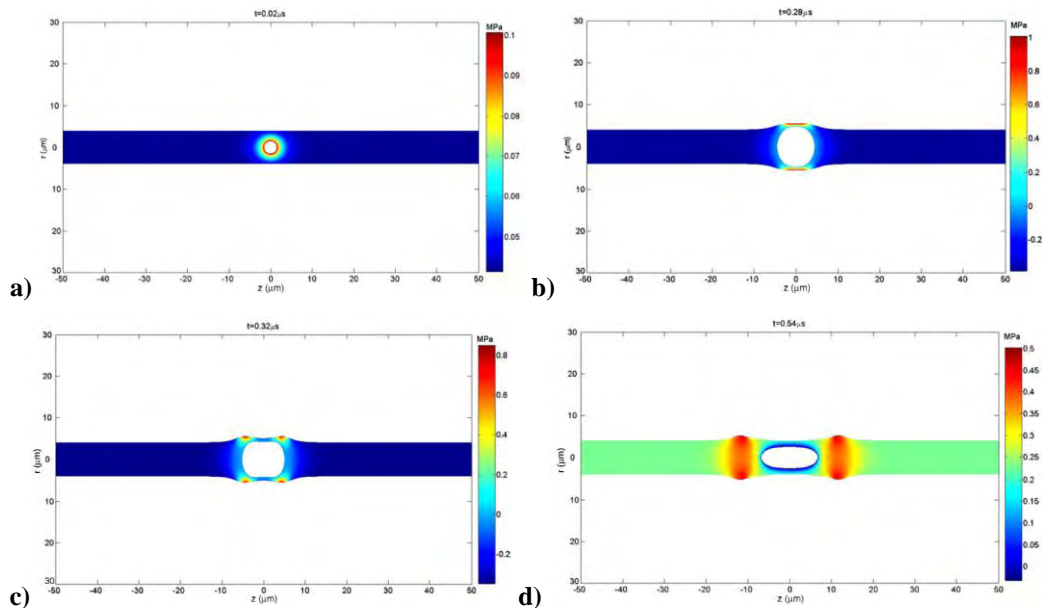
**Εικόνα 1-3:** Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με αγγείο. (a) Μια ομάδα από φυσαλίδες μέσα στο αγγείο οι οποίες προκαλούν τη διαστολή του (κέντρο) και την επακόλουθη εγκόλπωση του τοιχώματος (δεξιά), (b) Διαστολή του αγγείου από την ύπαρξη φυσαλίδας κοντά στο τοίχωμα (κέντρο) και η δημιουργία jet στη φυσαλίδα με κατεύθυνση αντίθετα του τοιχώματος.

Οι Doinikov et al. [22] μοντελοποίησαν την ακουστική απόκριση μικροφυσαλίδων τύπου Contrast Agent, όταν αυτές βρίσκονται κοντά γειτονικό στερεό τοίχωμα, με στόχο να διακρίνουν τις διαφορές ανάμεσα στην ακουστική υπογραφή μικροφυσαλίδων προσκολλημένων στο τοίχωμα και των αντίστοιχων που αιωρούνται μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα. Από τη μελέτη αυτή παρατηρήθηκε ότι η θεμελιώδης φασματική συνιστώσα της ακουστικής απόκρισης των προσκολλημένων μικροφυσαλίδων ήταν αισθητά ισχυρότερη από την αντίστοιχη των αιωρούμενων μέσα στο κυκλοφορικό. Αυτή η αύξηση οφείλεται αφ' ενός στα συσσωματώματα μικροφυσαλίδων που παρατηρούνται πολύ κοντά στο τοίχωμα, **Εικόνα 1-4a**), λόγω της ανάπτυξης των δευτερογενών δυνάμεων Bjerknes και αφ' ετέρου στην ακουστική αλληλεπίδραση των προσκολλημένων φυσαλίδων με το τοίχωμα. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η αύξηση της έντασης της θεμελιώδους συνιστώσας, λόγω των δύο φαινομένων που προαναφέρθηκαν, είναι της τάξης των 8-9 dB, **Εικόνα 1-4b**).



**Εικόνα 1-4:** α) Οπτικές παρατηρήσεις σχηματισμού συσσωματωμάτων μικροφουσαλίδων πολύ κοντά σε γειτονικό τοίχωμα και β) Διάγραμμα της θεμελιώδους φασματικής συνιστώσας σε σχέση με την ακτίνα ηρεμίας των μικροφουσαλίδων. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις αιωρούμενες φουσαλίδες μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα, η γραμμή 1 αντιστοιχεί στην περίπτωση προσκολλημένης φουσαλίδας στο τοίχωμα και η γραμμή 2 αντιστοιχεί στην περίπτωση συσσωματώματος φουσαλίδων προσκολλημένων στο τοίχωμα. Η μπάρα αντιστοιχεί σε μήκος 10 μm.

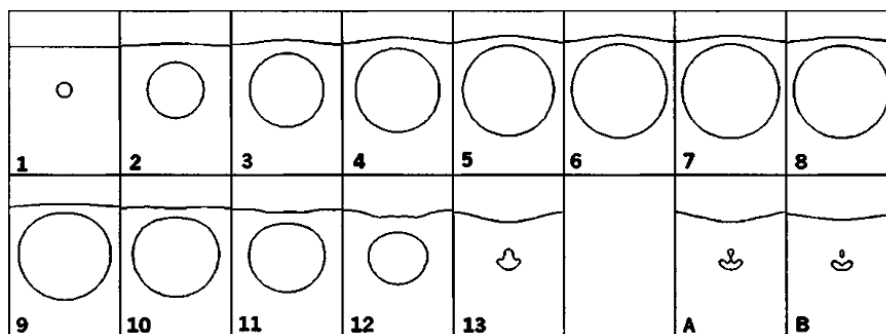
Οι Qin και Ferrara [26] εξέτασαν υπολογιστικά την αλληλεπίδραση μεταξύ μικροφουσαλίδων CA και μικρών αιμοφόρων αγγείων. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις έδειξαν ότι η παρουσία των Contrast Agents εντός του αγγείου αύξησε την πίεση στα τοιχώματα του αγγείου, με αποτέλεσμα να ενισχυθεί η διαπερατότητα του τελευταίου. Όταν το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής αυξηθεί, τότε λαμβάνουν χώρα μη σφαιρικές ταλαντώσεις των μικροφουσαλίδων, **Εικόνα 1-5**, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται ισχυρές τάσεις περιφερειακά του τοιχώματος του αγγείου. Αν αυξηθεί το μέτρο ελαστικότητας του τοιχώματος του αγγείου, τότε μειώνεται το πλάτος ταλάντωσης των μικροφουσαλίδων καθώς επίσης και ο βαθμός διαστολής του αγγείου. Παρ' όλα αυτά, οι προβλέψεις δείχνουν ότι οι περιφερειακές τάσεις στο τοίχωμα του αγγείου αυξάνονται.



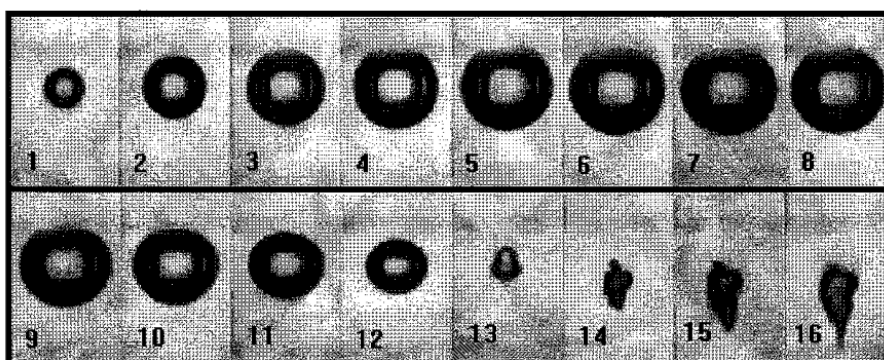
**Εικόνα 1-5:** Διαγράμματα κατανομής πίεσης εντός του αγγείου και της παραμόρφωσης της μικροφουσαλίδας CA: α)  $t=0.02 \mu s$ , β)  $t=0.28 \mu s$  μέγιστη διαστολή του αγγείου, γ)  $t=0.32 \mu s$  μέγιστη διαστολή της μικροφουσαλίδας και δ)  $t=0.54 \mu s$ .



Οι Klaseboer και Khoo [28] μελέτησαν θεωρητικά/υπολογιστικά τη συμπεριφορά ταλαντούμενης φυσαλίδας χωρίς ελαστικό περίβλημα, βυθισμένης σε ρευστό κοντά σε ένα δεύτερο ελαστικό (βιολογικό) ρευστό. Η ελαστικότητα του δεύτερου ρευστού μοντελοποιήθηκε μέσω του όρου πίεσης της διεπιφάνειας των δύο ρευστών, ενώ για τα δύο ρευστά υποτέθηκαν διαφορετικές πυκνότητες. Για κάθε ένα ρευστό θεωρήθηκε ότι ισχύει η εξίσωση Laplace και ο υπολογισμός των κάθετων ταχυτήτων της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας και της αντίστοιχης μεταξύ των δύο ρευστών πραγματοποιήθηκε μέσω της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Οι κάθετες ταχύτητες των δύο διεπιφανειών χρησιμοποιούνται για την ανανέωση της θέσης των διεπιφανειών στη νέα χρονική στιγμή. Οι προσομοιώσεις έδειξαν ότι λόγω της ελαστικότητας του δεύτερου ρευστού προκαλείται μικρή διαταραχή κατά μήκος της διεπιφάνειας της φυσαλίδας, η οποία με την πάροδο του χρόνου ενισχύεται. Η αλληλεπίδραση μεταξύ της διαταραχής και της φυσαλίδας οδηγεί τη δεύτερη σε παραμορφώσεις σχήματος «μανιταριού» και/ή ακόμα και στη διάσπασή της σε δύο μικρότερες, **Εικόνα 1-6**. Αυτά τα φαινόμενα δεν παρατηρήθηκαν, όταν στο δεύτερο ρευστό δεν εισήχθη ελαστικότητα.



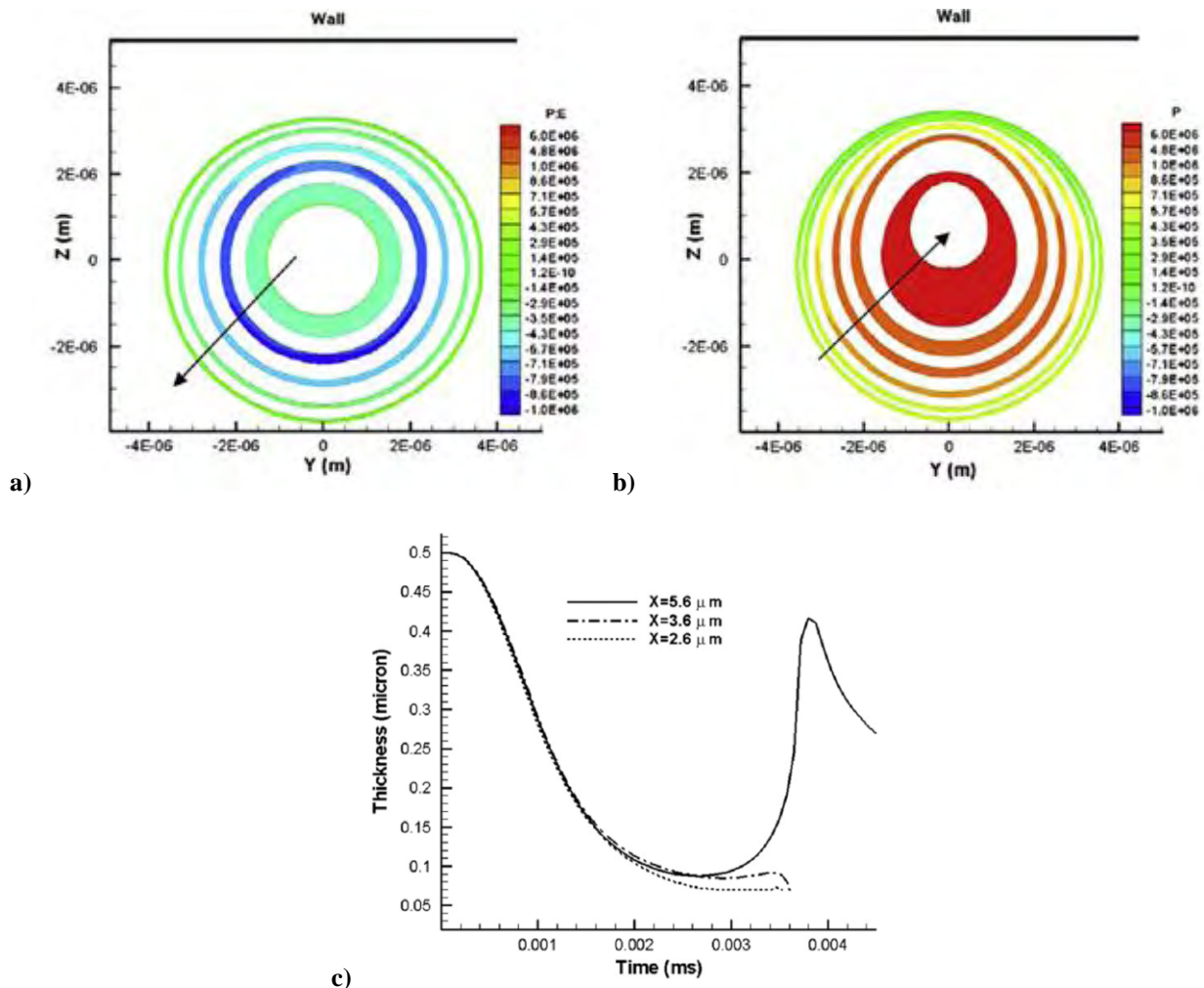
a)



b)

**Εικόνα 1-6:** α) Αριθμητικές προσομοιώσεις αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με ελαστικό σύνορο και β) αντίστοιχες πειραματικές παρατηρήσεις.

Τέλος, οι Hsiao et al. [36] μοντελοποίησαν τη δυναμική τριδιάστατης μικροφυσαλίδας τύπου Contrast Agent η οποία ταλαντώνεται κοντά σε στερεό τοίχωμα υπό την επιβολή ημιτονοειδούς εξωτερικής διαταραχής. Το κέλυφος της μικροφυσαλίδας θεωρήθηκε παχύ, δηλαδή το πάχος του είναι συγκρίσιμο σε σχέση με την αρχική ακτίνα της φυσαλίδας. Η επίλυση έγινε με συνδυασμό των μεθόδων πεπερασμένων όγκων (3DynaFS-Vis) και συνοριακών στοιχείων (3DynaFS-Bem). Οι προσομοιώσεις έδειξαν ότι το ιξώδες του κελύφους της μικροφυσαλίδας δεν επιτρέπει τη δημιουργία υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet), σε αντίθεση με αντίστοιχες φυσαλίδες χωρίς εξωτερικό περίβλημα για τις οποίες έχει καταγραφεί και πειραματικά δημιουργία jet, **Εικόνα 1-7a), b)**. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι το πάχος του κελύφους ποικίλει σημαντικά από σημείο σε σημείο κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων, οδηγώντας πιθανά σε διάρρηξη του κελύφους λόγω τοπικής λέπτυνσής του σε συνδυασμό με καταπόνηση λόγω εφέλκυσμού, **Εικόνα 1-7c)**.



**Εικόνα 1-7:** Διαγράμματα σχήματος και ισοϋψών πίεσης μικροφυσαλίδας που ταλαντώνεται κοντά σε γειτονικό στερεό τοίχωμα υπό την επίδραση ημιτονοειδούς ακουστικού κύματος, κατά την: a) φάση διαστολής και b) φάση συμπίεσης – κατάρρευσης, [τα βέλη υποδηλώνουν την πορεία της προσομοίωσης], c) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης του πάχους του κελύφους στον πόλο που βρίσκεται εγγύτερα στο τοίχωμα για τρεις διαφορετικές αποστάσεις της φυσαλίδας από το τελευταίο.

## 1.9 Οργάνωση Διδακτορικής Διατριβής

Το υπόλοιπο της Διδακτορικής Διατριβής χωρίζεται σε πέντε ενότητες που καταλαμβάνουν τα κεφάλαια 2 έως 6. Πιο συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται αναλυτικά το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με εξωτερικό περίβλημα με γειτονικό σύνορο, αναφέρονται οι διέπουσες εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες του συστήματος, παρουσιάζονται οι καταστατικές εξισώσεις των ελαστικών τάσεων και οι αντίστοιχες των καμπτικών ροπών, ενώ παράλληλα περιγράφεται η ολοκληρωτική εξίσωση για τις διεπιφανείες μικροφυσαλίδας – ρευστού και τοιχώματος – ρευστού. Τέλος, γίνεται αναφορά για τις μεταβολές της ενέργειας του συστήματος φυσαλίδας – τοιχώματος.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και στον τρόπο που διακριτοποιούνται οι εξισώσεις που διέπουν το υπό μελέτη πρόβλημα. Κατόπιν παρουσιάζεται η μέθοδος συνοριακών στοιχείων και η διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης των διεπιφανειών φυσαλίδας – ρευστού και τοιχώματος – ρευστού. Ακολουθώντας περιγράφεται η χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων του συστήματος, γίνεται μια σύντομη αναφορά για τον τρόπο ανακατανομής των κόμβων του πλέγματος ανάλογα με την τοπική καμπυλότητα και την εφαρμογή φίλτρου στις βασικές μεταβλητές του προβλήματος. Αμέσως μετά παρουσιάζεται επιγραμματικά ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος, ενώ στο τελευταίο κομμάτι παρουσιάζονται αποτελέσματα για την αξιοπιστία της αριθμητικής μεθόδου.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την αλληλεπίδραση φυσαλίδων τύπου Contrast Agent με γειτονικό τοίχωμα, όταν εφαρμοστεί βηματική αλλαγή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Γίνεται σύγκριση με την αντίστοιχη συμπεριφορά φυσαλίδων χωρίς ελαστικό περίβλημα, ενώ στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθεται παραμετρική μελέτη για τη διερεύνηση της επίδρασης των ιδιοτήτων της μεμβράνης στη συμπεριφορά των μικροφυσαλίδων. Εξετάζεται το ενδεχόμενο εμφάνισης και επακόλουθης θραύσης λόγω εμφάνισης jet και γίνεται σύγκριση με διαγράμματα διακλάδωσης ώστε να διαπιστωθεί η εξέλιξη της μικροφυσαλίδας σε μεγάλους χρόνους.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα και η παραμετρική μελέτη για την αλληλεπίδραση φυσαλίδων τύπου Contrast Agent με γειτονικό τοίχωμα, όταν εφαρμοστεί ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Γίνεται αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων με διαθέσιμες μετρήσεις από τη βιβλιογραφία και γίνεται προσπάθεια εξήγησης και πρόβλεψης καταγεγραμμένων φαινομένων, όπως αυτά που

παρουσιάστηκαν στις υποενότητες 1.7 και 1.8, σε συνδυασμό με την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του κελύφους.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και χρήση των προσομοιώσεων σε συνδυασμό με ακουστικές μετρήσεις για την ασφαλή εκτίμηση των ιξωδοελαστικών ιδιοτήτων των μικροφυσαλίδων.



## 2. Διατύπωση του προβλήματος

### 2.1 Μοντελοποίηση της μικροφυσαλίδας

Μελετάται η δυναμική συμπεριφορά αξονοσυμμετρικής μικροφυσαλίδας, με εξωτερικό ιξωδοελαστικό περίβλημα και ακτίνα ισορροπίας  $R_0 = R_{bal}$ , η οποία ταλαντώνεται λόγω μεταβολών της πίεσης στην κυρίως μάζα του ρευστού στο οποίο ευρίσκεται, παρουσία γειτονικού τοιχώματος. Το ρευστό είναι Νευτώνικό με πυκνότητα  $\rho_l$  και δυναμικό ιξώδες  $\mu_l$ . Θεωρούμε ότι η μικροφυσαλίδα στο εσωτερικό της περιέχει συμπιεστό αέριο, ενώ το εξωτερικό ρευστό είναι ασυμπίεστο. Λόγω της συμπιεστότητας της μικροφυσαλίδας, η τελευταία εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητα που καθορίζεται από την εξωτερική διαταραχή. Για συχνότητα διαταραχής στο φάσμα των υπερήχων, 1 έως 10 MHz, η ταχύτητα της διεπιφάνειας και κατά συνέπεια του ρευστού είναι μεγάλη. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε, σε πρώτη προσέγγιση, ότι έχουμε αστρόβιλη ροή υψηλού αριθμού Reynolds και επομένως μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού. Επίσης, θεωρούμε ότι έχουμε αξονική συμμετρία, γεγονός που μειώνει κατά μία διάσταση τις απαιτήσεις διακριτοποίησης του προβλήματος. Η μεμβράνη με την οποία περιβάλλεται η μικροφυσαλίδα θεωρείται ότι έχει απειροστό πάχος  $\delta$  σε σχέση με την ακτίνα, μέτρο διάτμησης  $G_s$ , διαστολικό ιξώδες  $\mu_s$  και ότι δεν υπάρχουν παραμένουσες τάσεις στην κατάσταση ισορροπίας. Το υλικό της μεμβράνης μπορεί να είναι γραμμικώς ελαστικό, ψευδοπλαστικό ή διασταλτικό. Στην πρώτη περίπτωση η τάση που αναπτύσσεται στη μεμβράνη είναι ανάλογη της παραμόρφωσης, στη δεύτερη περίπτωση το φαινόμενο μέτρο ελαστικότητας ελαττώνεται καθώς αυξάνει η παραμόρφωση, ενώ στην τρίτη περίπτωση το φαινόμενο μέτρο ελαστικότητας αυξάνει με την αύξηση της παραμόρφωσης. Η πυκνότητα του υλικού της μεμβράνης θεωρείται αμελητέα, εξαιτίας του πολύ μικρού πάχους της και κατά συνέπεια η αδράνειά της μπορεί να αγνοηθεί. Επίσης, θεωρούμε ότι την αρχική χρονική στιγμή η μικροφυσαλίδα έχει σφαιρικό σχήμα και βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με το περιβάλλον ρευστό πίεσης  $P_{st}$ . Το αέριο στο εσωτερικό της φυσαλίδας θεωρείται ιδανικό σε πίεση ισορροπίας  $P_{g,0} = P_{g,bal}$ . Στην κατάσταση ισορροπίας το περιβάλλον ρευστό βρίσκεται σε ηρεμία, στο κέλυφος υπάρχει μόνο η ιστροπική επιφανειακή τάση  $\sigma$ , ενώ η πίεση στο εσωτερικό της μικροφυσαλίδας συνδέεται με την αντίστοιχη στο άπειρο μέσω της σχέσης  $P_{g,bal} - P_{st} = \frac{2\sigma}{R_{bal}}$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχουν παραμένουσες ελαστικές τάσεις στη μεμβράνη, όπου  $\sigma$ : η μέση επιφανειακή τάση μεταξύ εσωτερικού αερίου – μεμβράνης και

μεμβράνης – περιβάλλοντος ρευστού. Οι μεταβολές της πίεσης του εσωτερικού αερίου θεωρούνται ότι γίνονται ομοιόμορφα και ακαριαία μέσω του νόμου ιδανικών αερίων για ισοθερμοκρασιακές μεταβολές.

Αρχικά, η μικροφυσαλίδα θεωρείται σφαιρική και η ακτίνα ισορροπίας της,  $R_{bal}$ , αποτελεί το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος. Εφόσον η χρονική κλίμακα των ταλαντώσεων της μικροφυσαλίδας καθορίζεται από τη συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής  $\omega_f$ , ο χαρακτηριστικός χρόνος θα είναι  $1/\omega_f$  και συνεπώς η χαρακτηριστική ταχύτητα προκύπτει  $\omega_f \cdot R_{bal}$ . Τελικά, η χαρακτηριστική πίεση ορίζεται μέσω της χαρακτηριστικής ταχύτητας ως  $\rho_l \cdot \omega_f^2 \cdot R_{bal}^2$ . Επομένως, συνοψίζοντας, έχουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$\text{Χαρακτηριστικό μήκος: } L = R_{bal} \quad (2-1)$$

$$\text{Χαρακτηριστική πίεση: } \Pi = \rho_l \cdot R_{bal}^2 \cdot \omega_f^2 \quad (2-2)$$

$$\text{Χαρακτηριστικός χρόνος: } T = 1/\omega_f, \quad (2-3)$$

όπου  $R_{bal}$ : η ακτίνα της σφαιρικής μικροφυσαλίδας στην κατάσταση ισορροπίας,  $\rho_l$ : η πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού και  $\omega_f$ : η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής.

Θεωρώντας ασυμπίεστη ροή, οι αδιάστατες εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του περιβάλλοντος ρευστού είναι οι εξής:

η εξίσωση της συνέχειας που εκφράζει το διαφορικό ισοζύγιο μάζας:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2-4)$$

οι εξισώσεις Navier – Stokes που εκφράζουν το διαφορικό ισοζύγιο ορμής:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -\vec{\nabla} P, \quad (2-5)$$

όπου η επίδραση της βαρύτητας και του ιξώδους του ρευστού θεωρούνται αμελητέα λόγω του μικρού μεγέθους της φυσαλίδας και του κυρίαρχου ιξώδους του κελύφους [35], αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, θεωρώντας αμελητέα στροβιλότητα του περιβάλλοντος ρευστού, σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας, το πεδίο ταχυτήτων δίδεται μέσω συνάρτησης δυναμικού  $\Phi$  η οποία ικανοποιεί την Λαπλασιανή:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2-6)$$

Εισάγοντας τη συνάρτηση δυναμικού στην αστρόβιλη εξίσωση ορμής του ρευστού προκύπτει η μεταβατική εξίσωση Bernoulli, η οποία συνδέει τιμές πίεσης και ταχύτητας σε οποιοδήποτε

σημείο του ρευστού με τις ανάλογες τιμές στο άπειρο, όπου λόγω των συνθηκών ηρεμίας που επικρατούν ισχύει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} + P = P_{\infty}(t) \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} + [P_{\infty}(t) - P] \quad (2-7)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει σε κάθε σημείο του ρευστού και χρησιμοποιείται για την ανανέωση των τιμών της συνάρτησης δυναμικού πάνω στις διεπιφάνειες του ρευστού με γειτονικά τοιχώματα σε συνδυασμό με τις εκεί δυναμικές συνθήκες.

Όπως τονίσθηκε και παραπάνω, στο περιβάλλον ρευστό μακριά από το τοίχωμα και την μικροφουσαλίδα επικρατούν συνθήκες ηρεμίας :

$$\vec{V} \rightarrow \vec{0} . \quad (2-8)$$

Η διαταραχή του πεδίου πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού γίνεται είτε με βηματική αλλαγή της πίεσης, είτε με αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής:

$$P_{\infty}^* = P_{st}^* \left[ 1 + \varepsilon \cdot \cos(\omega_f \cdot t^*) \right], \quad (2-9)$$

όπου  $\varepsilon$  : το πλάτος και  $\omega_f$  : η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Για μηδενική συχνότητα ανακτάται η βηματική διαταραχή. Σε συνθήκες στατικής ισορροπίας, όπου το πεδίο ταχυτήτων μηδενίζεται, επικρατεί παντού η στατική πίεση του περιβάλλοντος ρευστού ανεξαρτήτως της εγγύτητας του τοιχώματος:

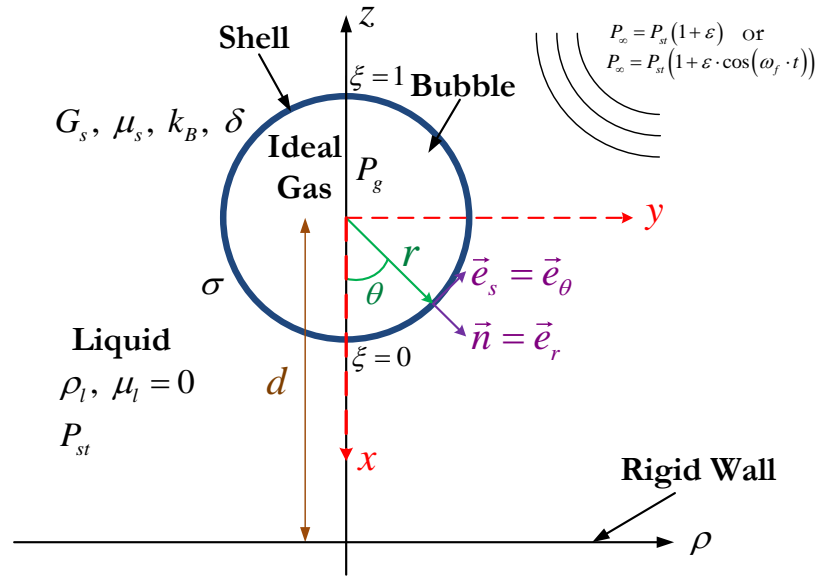
$$P \rightarrow P_{\infty} = P_{st} \quad (2-10)$$

Λόγω της αμελητέας πυκνότητας και του κινηματικού ιξώδους του εσωτερικού αερίου θεωρούμε την πίεσή του ομοιόμορφη. Επιπλέον, εξαιτίας της πολύ μικρής χρονικής κλίμακας μέσα στην οποία εξελίσσονται τα φαινόμενα που μελετώνται στην παρούσα διατριβή, μπορούμε να αγνοήσουμε τη μεταφορά θερμότητας από και προς το περιβάλλον ρευστό σε πρώτη προσέγγιση και να υποθέσουμε αδιαβατικές ή ισόθερμες ταλαντώσεις. Επομένως, η μεταβολή της πίεσης του εσωτερικού αερίου με το χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$P_g \cdot V^{\gamma} = P_0 \cdot V_0^{\gamma} \Rightarrow P_g \cdot V^{\gamma} = P_g(t=0) \cdot \left( \frac{4 \cdot \pi}{3} \right)^{\gamma}, \quad (2-11)$$

όπου  $\gamma$  : η πολυτροπική σταθερά του εσωτερικού αερίου για την οποία ισχύει  $1 \leq \gamma \leq 1.4$ ,  $V$  : ο στιγμιαίος αδιάστατος όγκος της μικροφουσαλίδας και  $V_0$  : ο αρχικός όγκος της μικροφουσαλίδας, ο οποίος για σφαίρα είναι:  $V_0 = \frac{4}{3} \pi$  (αδιάστατος). Για αδιαβατική μεταβολή του εσωτερικού αερίου ισχύει:  $\gamma = 1.4$ , ενώ για ισόθερμη:  $\gamma = 1$ .

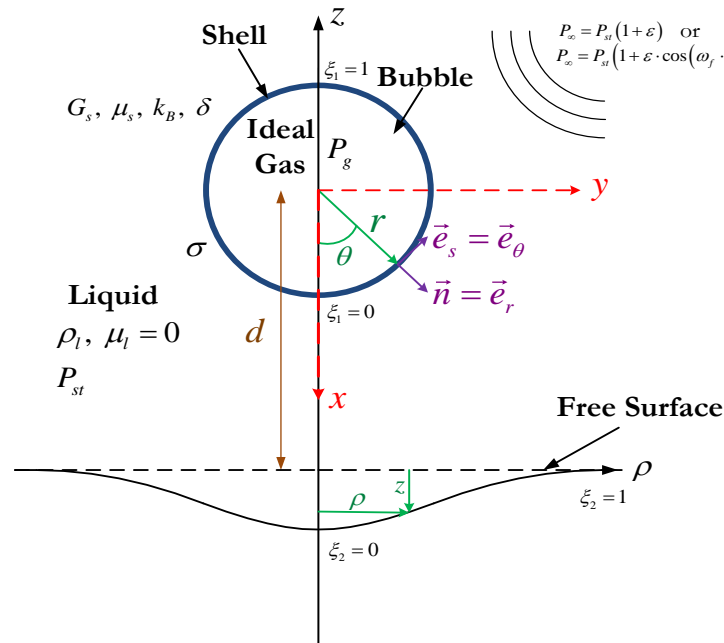
Μελετήθηκαν δύο διαφορετικά είδη τοιχωμάτων. Συγκεκριμένα το τοίχωμα θεωρήθηκε ως (α) στερεό και άκαμπτο, **Εικόνα 2-1** και (β) ελεύθερη επιφάνεια, **Εικόνα 2-2**, ενώ η αρχική απόσταση μεταξύ φουσαλίδας – τοιχώματος είναι  $d_0$ .



**Εικόνα 2-1:** Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας με εξωτερικό περίβλημα κοντά σε στερεό τοίχωμα.

Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στο γειτονικό τοίχωμα θεωρούμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(\rho, \varphi, z)$  με αρχή των αξόνων το σημείο τομής του άξονα συμμετρίας (άξονας  $z$ ) και του τοιχώματος. Η ακτινική συντεταγμένη  $\rho$  κατευθύνεται κατά μήκος του τοιχώματος. Στην περίπτωση του στερεού τοιχώματος, η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη σε αυτό μηδενίζεται, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη μη διείσδυσης επάνω στο τοίχωμα:

$$z=0, \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-12)$$



**Εικόνα 2-2:** Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας με εξωτερικό περίβλημα κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια.

ενώ για ελεύθερη επιφάνεια επιβάλλεται η κινηματική συνθήκη που θέτει την ταχύτητα της διεπιφάνειας ίση με την κάθετη ταχύτητα του ρευστού επάνω στη διεπιφάνεια:

$$\vec{r} = \vec{R}, \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{n} \quad (2-13)$$

όπου  $\vec{R}$ : το άνυσμα θέσης της ελεύθερης επιφάνειας. Περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με την κινηματική συνθήκη και τον τρόπο περιγραφής της στα διάφορα προβλήματα που μελετήθηκαν παρατίθενται παρακάτω στην ενότητα 2.2. Στην περίπτωση της ελεύθερης επιφάνειας ισχύει και η δυναμική συνθήκη όπου η διαφορά πίεσης με το περιβάλλον εξισορροπείται με την επιφανειακή τάση.

$$\vec{r} = \vec{R}, \quad P - P_{atm} = \gamma \vec{\nabla}_s \cdot \vec{n} \quad (2-14)$$

όπου  $\gamma$ : η διεπιφανειακή τάση μεταξύ του υγρού και του περιβάλλοντος αερίου.

Αναφορικά με τη διεπιφάνεια μικροφυσαλίδας – υγρού υιοθετήθηκαν επίσης δύο διαφορετικές θεωρήσεις. Η πρώτη, που είναι και η κυρίως μελετώμενη στην παρούσα εργασία, αντιμετωπίζει τη διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας ως κέλυφος με μικρό αλλά πεπερασμένο πάχος, το οποίο χαρακτηρίζεται από ιξωδοελαστική συμπεριφορά, όπως αυτή περιγράφεται στις [35], [37], [38], [39], [40] και καταγράφεται στο παρακάτω ισοζύγιο κάθετων και εφαπτομενικών δυνάμεων:

$$\vec{r} = \vec{R}: \quad (P_g - P_l) \vec{n} = \frac{2k_m}{We} \vec{n} + \overline{\Delta F} = \frac{(\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n}) \vec{n}}{We} + \overline{\Delta F} \quad (2-15)$$

όπου  $\vec{n}$ : το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της διεπιφάνειας με φορά προς το εξωτερικό της φυσαλίδας,  $\vec{\nabla}_s$ ,  $k_m$ : ο επιφανειακός τελεστής κλίσης και η μέση καμπυλότητα της διεπιφάνειας, αντίστοιχα και  $\overline{\Delta F}$ : οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη μεμβράνη λόγω αντίστασης στον εφελκυσμό/θλίψη, στην κάμψη καθώς και στον ρυθμό μεταβολής του εφελκυσμού/θλίψης. Ταυτόχρονα ισχύει η κινηματική συνθήκη όπως καταγράφεται στην (2-12). Τέλος για την περίπτωση της κλασικής φυσαλίδας που εμφανίζει την ισοτροπική επιφανειακή τάση  $\sigma$  ισχύουν η κινηματική συνθήκη (2-12) σε συνδυασμό με τη δυναμική συνθήκη (2-14), όπου η διεπιφανειακή τάση υγρού περιβάλλοντος αερίου  $\gamma$  αντικαθίσταται από τη διεπιφανειακή τάση  $\sigma$  μεταξύ του υγρού και του αερίου που περικλείεται από τη φυσαλίδα.

## 2.2 Λαγκρανζιανή περιγραφή της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας

Για τη διευκόλυνση της περιγραφής των ελαστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στο κέλυφος, σχημάτων των οποίων δεν είναι δυνατή η μονοσήμαντη περιγραφή τους σε ένα κυλινδρικό ή σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων καθώς και για την περιγραφή των κινηματικών συνθηκών

στις διεπιφάνειες, εισάγεται η περιγραφή της διεπιφάνειας μέσω της Λαγκραντζιανής μεταβλητής  $\xi$ . Στη συγκεκριμένη περιγραφή ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η μεταβλητή  $\xi$ , η οποία παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 (όπου 0 αντιστοιχεί στον πρώτο κόμβο της διεπιφάνειας και 1 στον τελευταίο) και ο χρόνος  $t$ . Επομένως, η μεταβλητή  $\xi$  φανερώνει ουσιαστικά την ταυτότητα του κάθε σωματιδίου ξεχωριστά. Παράλληλα, ορίζουμε ένα τοπικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \varphi, \theta)$  με αρχή των αξόνων το αρχικό κέντρο μάζας της μικροφυσαλίδας στο οποίο γίνεται η βασική ανάλυση. Κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων της φυσαλίδας, η θέση της αρχής των αξόνων επικαιροποιείται, ούτως ώστε να μη βρεθεί ποτέ εκτός φυσαλίδας. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος λόγω αξονικής συμμετρίας είναι:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0,1} = 0, \quad \theta(\xi=0)=0, \quad \theta(\xi=1)=\pi \quad (2-16)$$

και αντιστοιχούν στους δύο πόλους της μικροφυσαλίδας αναφορικά με το τοπικό σφαιρικό σύστημα.

Λόγω αξονικής συμμετρίας, η γωνία  $\varphi$  του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων  $(r, \varphi, \theta)$  θα θεωρηθεί ότι δεν παίζει ρόλο και θα υποτεθεί ότι  $\varphi=0$ . Οι συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  εμφανίζονται σαν εξαρτημένες μεταβλητές των  $\xi$  και  $t$ , δηλαδή:  $r=r(\xi, t)$  και  $\theta=\theta(\xi, t)$ . Επίσης, η μεταβλητή  $\xi$  συνδέεται με το μήκος τόξου  $S$  της γενέτειρας του σχήματος της φυσαλίδας κάθε χρονική στιγμή με τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \xi} \right|_t = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial r}{\partial \xi} \right|_t \right)^2 + r^2 \left( \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_t \right)^2} \Rightarrow S_\xi = \sqrt{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2}, \quad (2-17)$$

όπου  $\xi$  ως δείκτης σημαίνει μερική παραγωγή της μεταβλητής της εκάστοτε ποσότητας ως προς την  $\xi$ .

Ξεκινώντας από το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου πάνω στη διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας:

$$\vec{R} = r \vec{e}_r \quad (2-18)$$

το οποίο ουσιαστικά περιγράφει τη θέση της διεπιφάνειας κάθε χρονική στιγμή και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου της διεπιφάνειας, που τη χρονική στιγμή  $t=0$  βρίσκεται στη θέση  $(r_0, \theta_0)$ , είναι:

$$\vec{U}_{\text{σωμ.}} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} \quad (2-19)$$

προκύπτει ότι:

$$U_r = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} \quad (2-20)$$

και

$$U_\theta = r \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{r_0, \theta_0}. \quad (2-21)$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι:

$$\vec{U}_{\sigma\omega\mu} = U_s \vec{e}_s + U_n \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vec{n} \quad (2-22)$$

όπου  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φουσαλίδας:

$$\vec{n} = \frac{r\theta_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}} \vec{e}_r - \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}} \vec{e}_\theta = \frac{r\theta_\xi}{S_\xi} \vec{e}_r - \frac{r_\xi}{S_\xi} \vec{e}_\theta \quad (2-23)$$

και  $\vec{e}_s$  το εφαπτόμενο διάνυσμα στη διεπιφάνεια:

$$\vec{e}_s = \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}} \vec{e}_r + \frac{r\theta_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}} \vec{e}_\theta = \frac{r_\xi}{S_\xi} \vec{e}_r + \frac{r\theta_\xi}{S_\xi} \vec{e}_\theta \quad (2-24)$$

τότε ο συνδυασμός των (2-4), (2-17), (2-18), (2-19), (2-20) και (2-21) θα δώσει τις κινηματικές συνθήκες στη διεπιφάνεια:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{\Phi_\xi r_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial n} r\theta_\xi \sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}}{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2} \quad (2-25)$$

και

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{\Phi_\xi r\theta_\xi - \frac{\partial \Phi}{\partial n} r_\xi \sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2}}{r(r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2)}, \quad (2-26)$$

όπου  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  το δυναμικό της ταχύτητας και η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στη διεπιφάνεια αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\sqrt{r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2} = S_\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (2-27)$$

Στα παραπάνω,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  υποδηλώνει παραγωγήκη κάθετα στη διεπιφάνεια προς το εξωτερικό της μικροφουσαλίδας, ενώ  $\Phi_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$  εφαπτομενικά της γενέτειρας της μικροφουσαλίδας.

Η συνέχεια των κάθετων ταχυτήτων στη διεπιφάνεια δίνει:

$$\frac{dr}{dt} r \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{d\theta}{dt} r \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Rightarrow \dot{r} \frac{r\theta_\xi}{S_\xi} - \dot{\theta} \frac{rr_\xi}{S_\xi} = \Phi_n, \quad (2-28)$$

ενώ η συνέχεια των εφαπτομενικών ταχυτήτων δίνει:

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{d\theta}{dt} r^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Rightarrow \dot{r} \frac{r_\xi}{S_\xi} + \dot{\theta} \frac{r^2 \theta_\xi}{S_\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \Rightarrow \dot{r} \cdot r_\xi + \dot{\theta} \cdot r^2 \theta_\xi = \Phi_\xi. \quad (2-29)$$

### 2.3 Ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια: Σύζευξη υδροδυναμικών και ελαστικών δυνάμεων

Το ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια γράφεται ως εξής:

$$\vec{r} = \vec{r}_s : \left( -P_l \underline{\underline{I}} + \frac{1}{\text{Re}_l} \underline{\underline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} + P_g \vec{n} = \frac{2k_m}{We} \vec{n} + \overline{\Delta F} = \frac{(\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n}) \vec{n}}{We} + \overline{\Delta F}, \quad (2-30)$$

όπου  $\vec{n}$ : το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της διεπιφάνειας με φορά προς τα έξω από τη φυσαλίδα,

$\vec{\nabla}_s$ ,  $k_m$ : ο επιφανειακός τελεστής κλίσης και η μέση καμπυλότητα της διεπιφάνειας, αντίστοιχα,

$\underline{\underline{I}}$ ,  $\underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ : ο μοναδιαίος και ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων, αντίστοιχα,  $\overline{\Delta F}$ : οι

δυνάμεις λόγω ελαστικών τάσεων στη μεμβράνη,  $We = \frac{\rho_l \omega_f^2 R_{bal}^3}{\sigma}$ : ο αριθμός Weber ο οποίος

συγκρίνει τις αδρανειακές δυνάμεις με τις τριχοειδείς και  $\text{Re}_l = \frac{\rho_l \omega_f R_{bal}^2}{\mu_l}$ : ο αριθμός Reynolds ο

οποίος συγκρίνει τις αδρανειακές με τις ιξώδεις δυνάμεις του περιβάλλοντος ρευστού. Αν θεωρήσουμε μικροφυσαλίδα με ακτίνα ισορροπίας  $R_{bal} \approx 1.5 \mu m$ , το νερό ως περιβάλλον

ρευστό με πυκνότητα  $\rho_l = 1000 \frac{kg}{m^3}$  και δυναμικό ιξώδες  $\mu_l = 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$ , το οποίο

διαταράσσεται με κύμα πίεσης συχνότητας  $\nu_f = 2.4 MHz$ , τότε ο αριθμός Reynolds προκύπτει

$\text{Re}_l \approx 34$ . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις ιξώδεις δυνάμεις από τη μεριά του

ρευστού, ως πρώτη προσέγγιση, διότι όπως έχει δειχθεί στη βιβλιογραφία [41], το διαστολικό

ιξώδες της μεμβράνης είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός απόσβεσης των ταλαντώσεων της

μικροφυσαλίδας. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι  $\text{Re}_l \rightarrow \infty$  και ότι το πεδίο ροής του

περιβάλλοντος ρευστού είναι αστρόβιλο, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη

θεωρία δυναμικής ροής,  $\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi$ . Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση της

συνέχειας (2-4) ανακτούμε το γνωστό αποτέλεσμα ότι η συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας

ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (2-6).

Καθώς  $\text{Re}_l \rightarrow \infty$ , το κάθετο και εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας παρέχονται από την σχέση (2-30):



$$\text{Κάθετο ισοζύγιο δυνάμεων: } P_g - P_l = \frac{(\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n})}{We} + \Delta F_n \quad (2-31)$$

$$\text{Εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων: } \vec{e}_s \cdot \frac{1}{Re_l} \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \Delta F_t \Rightarrow \Delta F_t \approx 0, \quad (2-32)$$

$$\text{όπου } \vec{\Delta F} = \Delta F_n \vec{n} + \Delta F_t \vec{e}_s = -\vec{\nabla}_s \cdot \vec{T} \quad (2-33)$$

Οι εξισώσεις (2-31) και (2-32) εξασφαλίζουν τη συνέχεια των δυνάμεων που ασκούνται στη διεπιφάνεια της μικροφουσαλίδας. Στη σχέση (2-33),  $\vec{\nabla}_s$  συμβολίζει το διάνυσμα της επιφανειακής απόκλισης και

$$\vec{T} = \vec{\tau} + \vec{q}\vec{n} = \vec{\tau}_{el} + \vec{\tau}_v + \vec{q}\vec{n} \quad (2-34)$$

είναι ο πλήρης τανυστής τάσεων στη διεπιφάνεια. Επίσης  $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{el} + \vec{\tau}_v$ : ο τανυστής ιξωδοελαστικών τάσεων στη διεπιφάνεια και  $\vec{q}\vec{n}$ : ο τανυστής εγκάρσιων διατμητικών τάσεων που προκύπτουν λόγω των καμπτικών ροπών που αναπτύσσονται στη μεμβράνη [42].

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bernoulli μεταξύ του άπειρου και της διεπιφάνειας ρευστού – φουσαλίδας, τότε θα προκύψει σε αδιάστατη μορφή η παρακάτω σχέση:

$$P_l + \frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = P_\infty, \quad (2-35)$$

όπου  $P_l$ : είναι η πίεση του ρευστού που περιβάλλει τη φουσαλίδα υπολογισμένη στη διεπιφάνεια.

Από τον ορισμό της υλικής παραγώγου έχουμε:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\Phi \quad (2-36)$$

Οπότε, από τις (2-6) και (2-36) προκύπτει:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{D\Phi}{Dt} - |\vec{\nabla}\Phi|^2 \quad (2-37)$$

Από την αντικατάσταση των (2-31) και (2-37) στη (2-35) προκύπτει η δυναμική συνθήκη στη διεπιφάνεια από την οποία μπορεί να υπολογιστεί το δυναμικό της ταχύτητας κοντά στη διεπιφάνεια:

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2}{2} + P_\infty - P_g + \frac{2k_m}{We} + \Delta F_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Phi_\xi}{S_\xi} \right)^2 + \Phi_n^2 \right] + P_\infty - P_g + \frac{2k_m}{We} + \Delta F_n \end{aligned} \quad (2-38)$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για την ανανέωση της τιμής του δυναμικού της ταχύτητας σε κάθε μία από τις διεπιφάνειες, ελεύθερες επιφάνειες ή κελύφη. Στις πρώτες ο ιξωδοελαστικός όρος  $\Delta F_n = 0$ , ενώ στις στερεές επιφάνειες το δυναμικό δεν χρειάζεται να ανανεωθεί λόγω του μηδενισμού της κάθετης μεταβολής του δυναμικού ταχύτητας, (ενότητα 2.6). Το εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της γωνίας  $\theta$  του κελύφους μαζί με την ακτινική συνιστώσα της κινηματικής συνθήκης, η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ακτινικής συντεταγμένης του κελύφους. Στην περίπτωση ελεύθερων επιφανειών η γωνία  $\theta$  ανανεώνεται στον χρόνο μαζί με την ακτινική συνιστώσα  $r$  μέσω των κινηματικών συνθηκών (2-28) και (2-29).

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2-34) στην έκφραση (2-33) προκύπτει:

$$\overrightarrow{\Delta F} = \Delta F_n \vec{n} + \Delta F_t \vec{e}_s = \left[ k_s \tau_{ss} + k_\phi \tau_{\phi\phi} - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial}{\partial s} (r_{cyl} q) \right] \vec{n} - \left[ \frac{\partial \tau_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial r_{cyl}}{\partial s} (\tau_{ss} - \tau_{\phi\phi}) + k_s q \right] \vec{e}_s, \quad (2-39)$$

όπου  $r_{cyl} = r \cdot \sin \theta$ : η κυλινδρική ακτινική συνιστώσα. Η σχέση (2-39) είναι σε συμφωνία με τις κλασικές εξισώσεις της θεωρίας αξονοσυμμετρικού κελύφους εκφρασμένες σε καμπυλόγραμμα συντεταγμένες [37]. Από την εξίσωση (2-39) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για την κάθετη και εφαπτομενική συνιστώσα των ελαστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στο κέλυφος:

$$\Delta F_n = k_s \tau_{ss} + k_\phi \tau_{\phi\phi} - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial}{\partial s} (r_{cyl} q) \quad (2-40)$$

$$\Delta F_t = -\frac{\partial \tau_{ss}}{\partial s} - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial r_{cyl}}{\partial s} (\tau_{ss} - \tau_{\phi\phi}) - k_s q \quad (2-41)$$

## 2.4 Ελαστικές τάσεις και καταστατικές εξισώσεις

Οι τάσεις που αναπτύσσονται στο κέλυφος οφείλονται στην ιξωδοελαστική του συμπεριφορά. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι τάσεις που προκύπτουν λόγω της αντίστασης του κελύφους σε εφελκυσμό/θλίψη,  $\underline{\underline{\tau}}_{el}$  και χαρακτηρίζονται από το μέτρο ελαστικότητας, καθώς και αυτές που προκύπτουν λόγω της αντίστασης του κελύφους σε παραμορφώσεις που συμβαίνουν γρήγορα στον χρόνο,  $\underline{\underline{\tau}}_v$  και οι οποίες χαρακτηρίζονται από το ιξώδες του κελύφους.

Πολλά από τα υλικά δεν αποκρίνονται σε εξωτερικές φορτίσεις με γραμμικό τρόπο. Αντιθέτως, επιδεικνύουν μη γραμμική συμπεριφορά σε μεγάλες παραμορφώσεις. Δηλαδή, η σχέση που συνδέει τάσεις με παραμορφώσεις στο σώμα δεν είναι γραμμική. Δύο πολύ κοινοί τύποι υλικών, που χαρακτηρίζονται από μη γραμμική συμπεριφορά είναι τα ψευδοπλαστικά

(strain softening) και τα διασταλτικά (strain hardening) υλικά. Στην πρώτη περίπτωση, το υλικό της μεμβράνης είναι τέτοιο, ώστε το φαινόμενο μέτρο ελαστικότητας ελαττώνεται καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση, με αποτέλεσμα να «μαλακώνει». Στη δεύτερη περίπτωση, το φαινόμενο μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται με την αύξηση της παραμόρφωσης και συνεπώς το υλικό «σκληραίνει». Παρακάτω παρουσιάζονται οι διέπουσες εξισώσεις που εκφράζουν τη μηχανική συμπεριφορά ιξωδοελαστικής μεμβράνης σε ισορροπία, θεωρώντας το πάχος της απειροστό σε σύγκριση με την ακτίνα, όπως συνήθως συμβαίνει σε μικροφυσαλίδες τύπου Contrast Agent που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υπερήχων της διαγνωστικής ιατρικής, για διαφορετικούς τύπους μη γραμμικής απόκρισης. Εν συνεχεία, χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες [43] για την αναπαράσταση του τανυστή επιφανειακής μετατόπισης,

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{I}} - \bar{n}\bar{n}) \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} \cdot (\underline{\underline{I}} - \bar{N}\bar{N}) \quad (2-42)$$

όπου  $\bar{x}$ ,  $\bar{X}$ : εκφράζουν το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της μεμβράνης στην παραμορφωμένη και την απαραμόρφωτη κατάσταση, αντίστοιχα και ομοίως για τα διανύσματα  $\bar{n}$ ,  $\bar{N}$ . Ο τανυστής  $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}}$  έχει δύο μη μηδενικές ιδιοτιμές  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$ , οι οποίες αντιστοιχούν στους τοπικούς κύριους άξονες της παραμόρφωσης στο εφαπτόμενο επίπεδο της μεμβράνης και αντιπροσωπεύουν τις πρωτεύουσες ανηγμένες παραμορφώσεις κατά μήκος των κύριων αξόνων,

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{dS_i} \quad (2-43)$$

όπου  $ds_i$ ,  $dS_i$ : τα στοιχειώδη μήκη των υλικών ινών σε κάθε μία από τις κύριες διευθύνσεις στην παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη κατάσταση, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας προκύπτει:

$$\lambda_1 = \lambda_s = \frac{S_\xi(t)}{S_\xi(t=0)} \quad (2-44)$$

$$\lambda_2 = \lambda_\phi = \frac{r_{cyl}(t)}{r_{cyl}(t=0)} = \frac{r(t) \cdot \sin \theta(t)}{r(t=0) \cdot \sin \theta(t=0)} \quad (2-45)$$

Εισάγοντας τον τανυστή επιφανειακής παραμόρφωσης Green – Lagrange,  $\underline{\underline{e}}$ , ο οποίος ορίζεται ως:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} - (\underline{\underline{I}} - \bar{N}\bar{N})] \quad (2-46)$$

ο λόγος  $J_s$  μεταξύ της παραμορφωμένης και απαραμόρφωτης τοπικής επιφάνειας και οι διδιάστατες αναλλοίωτες [38] του τανυστή παραμορφώσεων ορίζονται ως εξής:

$$J_s = \lambda_1 \lambda_2 = \sqrt{\det(\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} + \bar{N}\bar{N})} \quad (2-47)$$

$$I_1 = 2tr(\underline{\underline{e}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \quad (2-48)$$

$$I_2 = J_s^2 - 1 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 - 1 \quad (2-49)$$

Οι δύο αναλλοίωτες  $I_1$ ,  $I_2$  εκφράζουν την επιμήκυνση της τοπικής υλικής ίνας και την τοπική επιφανειακή διαστολή, αντίστοιχα. Με γνωστές τις παραπάνω ποσότητες, οι κύριες συνιστώσες του τανυστή των ελαστικών τάσεων μιας διδιάστατης παραμορφωμένης μεμβράνης μπορούν να σχετιστούν με τον τανυστή τάσεων μέσω της ενέργειας παραμόρφωσης [39]:

$$\underline{\tau}_{el} = \frac{2}{J_s} \left[ \frac{\partial w}{\partial I_1} \underline{A} \cdot \underline{A}^T + \frac{\partial w}{\partial I_2} J_s^2 (\underline{I} - \overline{N}\overline{N}) \right] \quad (2-50)$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης  $w(I_1, I_2)$  εξαρτάται από τη φύση του υλικού της μεμβράνης και λαμβάνει διαφορετικές μορφές, καθώς η μηχανική συμπεριφορά της μεμβράνης αλλάζει. Η ενέργεια παραμόρφωσης που περιγράφει μια πολύ λεπτή επιφάνεια ενός ισότροπου ασυμπίεστου ελαστικού υλικού με ψευδοπλαστική συμπεριφορά παρέχεται από το διδιάστατο νόμο Mooney – Rivlin [44]:

$$w^{MR} = \frac{G_{MR}}{2} \left[ (1-b) \left( I_1 + 2 + \frac{1}{I_2 + 1} \right) + b \left( \frac{I_1 + 2}{I_2 + 1} + I_2 + 1 \right) \right] \quad (2-51)$$

Ενώ για τις ελαστικές τάσεις στις δύο κύριες κατευθύνσεις ισχύει:

$$\tau_{ss,el}^{MR} = \frac{G_{MR}}{\lambda_s \cdot \lambda_\varphi} \left[ \lambda_s^2 - \frac{1}{(\lambda_s \cdot \lambda_\varphi)^2} \right] \left[ 1 + b(\lambda_\varphi^2 - 1) \right] \quad (2-52)$$

$$\tau_{\varphi\varphi,el}^{MR} = \frac{G_{MR}}{\lambda_s \cdot \lambda_\varphi} \left[ \lambda_\varphi^2 - \frac{1}{(\lambda_s \cdot \lambda_\varphi)^2} \right] \left[ 1 + b(\lambda_s^2 - 1) \right], \quad (2-53)$$

όπου  $G_{MR} = \frac{E_s}{3}$ : το αδιάστατο επιφανειακό μέτρο διάτμησης για Mooney – Rivlin,  $E_s$ : το

αδιάστατο επιφανειακό μέτρο ελαστικότητας που ορίζεται ως:  $E_s = \frac{3 \cdot G_{3D} \cdot \delta}{\rho_l \cdot \omega_f^2 \cdot R_{bal}^3}$  και  $0 \leq b \leq 1$ .

Καθώς  $b \rightarrow 0$ , η σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων γίνεται περισσότερο μη-γραμμική. Η περίπτωση για  $b=0$  αντιστοιχεί σε neo-Hookean μεμβράνη. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο καταστατικός νόμος Mooney – Rivlin επιτρέπει απεριόριστη επιφανειακή διαστολή η οποία αντισταθμίζεται από προοδευτική λέπτυνση της μεμβράνης.

Ένας από τους πιο διαδεδομένους και ευρέως χρησιμοποιούμενους καταστατικούς νόμους, που αφορά διασταλτικά υλικά, είναι αυτός που αναπτύχθηκε από τον Skalak [38] για την μοντελοποίηση λιπιδίου δομής διπλής στοιβάδας που περικλείει ερυθρά αιμοσφαίρια. Αντιστοίχως, η ενέργεια παραμόρφωσης και οι ελαστικές τάσεις γράφονται ως εξής:

$$w^{Sk} = \frac{G_{Sk}}{4} \left[ I_1^2 + 2I_1 - 2I_2 + CI_2^2 \right] \quad (2-54)$$

$$\tau_{ss,el}^{Sk} = \frac{G_{Sk}}{\lambda_s \cdot \lambda_\phi} \left\{ \lambda_s^2 (\lambda_s^2 - 1) + C (\lambda_s \cdot \lambda_\phi)^2 \left[ (\lambda_s \cdot \lambda_\phi)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2-55)$$

$$\tau_{\phi\phi,el}^{Sk} = \frac{G_{Sk}}{\lambda_s \cdot \lambda_\phi} \left\{ \lambda_\phi^2 (\lambda_\phi^2 - 1) + C (\lambda_s \cdot \lambda_\phi)^2 \left[ (\lambda_s \cdot \lambda_\phi)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2-56)$$

όπου  $G_{Sk} = \frac{E_s(1+C)}{2(1+2C)}$ : το αδιάστατο επιφανειακό μέτρο διάτμησης για Skalak. Η παράμετρος

$C$  στις παραπάνω σχέσεις είναι πάντα θετική και εκφράζει το μέγεθος της επιφανειακής συμπίεστικότητας. Στην περίπτωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων  $C \gg 1$ , για να μπορέσει ο νόμος να ανταποκριθεί στο σχεδόν ασυμπίεστο υλικό της μεμβράνης τους. Παρ' όλα αυτά, ο συγκεκριμένος καταστατικός νόμος είναι αρκετά γενικός και χρησιμοποιείται για διασταλτικές μεμβράνες είτε έχουν επιφανειακή συμπίεστικότητα, είτε όχι. Για μικρές παραμορφώσεις, ο λόγος Poisson  $\nu_s$  και η παράμετρος  $C$  συνδέονται με τη σχέση:

$$\nu_s = \frac{C}{1+C} \quad (2-57)$$

Για την περίπτωση των γραμμικώς ελαστικών υλικών εφαρμόζεται ο καταστατικός νόμος του Hooke, σύμφωνα με τον οποίο οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων και πιο συγκεκριμένα η σχέση τους είναι γραμμική. Η ενέργεια παραμόρφωσης και οι ελαστικές τάσεις γράφονται ως εξής:

$$w^H = \frac{G_s}{4(1-\nu_s)} \left[ (\lambda_s^2 - 1)^2 + 2\nu_s (\lambda_s^2 - 1)(\lambda_\phi^2 - 1) + (\lambda_\phi^2 - 1)^2 \right] \quad (2-58)$$

$$\tau_{ss,el}^H = \frac{G_s}{1-\nu_s} \frac{1}{\lambda_\phi} \left[ \lambda_s^2 - 1 + \nu_s (\lambda_\phi^2 - 1) \right] \quad (2-59)$$

$$\tau_{\phi\phi,el}^H = \frac{G_s}{1-\nu_s} \frac{1}{\lambda_s} \left[ \lambda_\phi^2 - 1 + \nu_s (\lambda_s^2 - 1) \right] \quad (2-60)$$

όπου  $G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$ : το αδιάστατο μέτρο διάτμησης για γραμμικώς ελαστικά υλικά.

Το διαστολικό ιξώδες της μεμβράνης μπορεί να ληφθεί υπ' όψιν μέσω ενός γραμμικού Νευτώνειου όρου [45] ο οποίος προστίθεται στις ελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στο επίπεδο του κελύφους και εμπλέκει την ταχύτητα της μεμβράνης. Οι ιξώδεις τάσεις σε αδιάστατη μορφή γράφονται ως εξής:

$$\tau_{ss,v} = \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} \quad (2-61)$$

$$\tau_{\phi\phi,v} = \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_\phi} \cdot \frac{\partial \lambda_\phi}{\partial t}, \quad (2-62)$$

όπου  $\frac{1}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial t}$  και  $\frac{1}{\lambda_\phi} \cdot \frac{\partial \lambda_\phi}{\partial t}$  : οι κύριες συνιστώσες του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης [39] και

$Re_s$  : ο αριθμός Reynolds της μεμβράνης ο οποίος ορίζεται ως  $Re_s = \frac{\rho_l \omega_f R_{bal}^3}{\mu_s}$ . Στην

προαναφερθείσα έκφραση το διδιάστατο διαστολικό ιξώδες  $\mu_s = 3\mu_{3D}\delta$  σε  $Pa \cdot s \cdot m$  θεωρείται ίσο με το διατμητικό ιξώδες της μεμβράνης, χάριν απλότητας. Αυτή είναι μια συνήθης πρακτική στη βιβλιογραφία [46], [47] λόγω της απουσίας πλήρους ρεολογικού χαρακτηρισμού του υλικού της μεμβράνης. Τέλος, οι παραπάνω ιξώδεις τάσεις προστίθενται στις ελαστικές και καμπτικές τάσεις για τη διαμόρφωση του ισοζυγίου δυνάμεων.

$$\Delta F_n = k_s (\tau_{ss,el} + \tau_{ss,v}) + k_\phi (\tau_{\phi\phi,el} + \tau_{\phi\phi,v}) - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial}{\partial s} (r_{cyl} q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F_n = k_s \left( \tau_{ss,el} + \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} \right) + k_\phi \left( \tau_{\phi\phi,el} + \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_\phi} \cdot \frac{\partial \lambda_\phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial}{\partial s} (r_{cyl} q) \quad (2-63)$$

$$\Delta F_t = -\frac{\partial (\tau_{ss,el} + \tau_{ss,v})}{\partial s} - \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial r_{cyl}}{\partial s} (\tau_{ss,el} + \tau_{ss,v} - \tau_{\phi\phi,el} + \tau_{\phi\phi,v}) - k_s q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F_t = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \tau_{ss,el} + \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} \right) -$$

$$- \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial r_{cyl}}{\partial s} \left( \tau_{ss,el} + \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} - \tau_{\phi\phi,el} + \frac{2}{Re_s} \cdot \frac{1}{\lambda_\phi} \cdot \frac{\partial \lambda_\phi}{\partial t} \right) - k_s q \quad (2-64)$$

## 2.5 Τάσεις, καμπτικές ροπές και καταστατικές εξισώσεις

Οι καμπτικές τάσεις που αναπτύσσονται στο κέλυφος συνδέονται με μεταβολές της καμπυλότητας σε σχέση με το σχήμα αναφοράς, εν προκειμένω η αρχική σφαιρική γεωμετρία. Ο τανυστής καμπυλότητας της διεπιφάνειας ορίζεται [42] ως  $\underline{\underline{B}} \equiv \vec{\nabla}_s \vec{n}$ , οι συνιστώσες του οποίου

ως προς βάση  $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n}]$  είναι  $b_{ij} = \vec{a}_i \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \vec{a}_j$ ,  $i, j = 1, 2$ .  $\vec{\nabla}_s = \sum_{i=1}^2 \vec{a}^i \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $i = 1, 2$ : συμβολίζει

την επιφανειακή απόκλιση [48],  $\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u_i}$ ,  $i = 1, 2$  και  $\vec{a}^i = \frac{(-1)^j (\vec{a}_j \times \vec{n})}{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{n}|}$ ,  $i, j = 1, 2$   $i \neq j$  είναι

τα συμμεταβλητά και αντιμεταβλητά διανύσματα βάσης (covariant and contravariant basis vectors) αντίστοιχα και  $\vec{R}$  είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  της διεπιφάνειας.

Ο τανυστής  $\underline{\underline{B}}$  είναι ένας 2x2 συμμετρικός πίνακας. Για τη διαγωνιοποίησή του και την εύρεση των κύριων διευθύνσεων πρέπει να λυθεί το ιδιοπρόβλημα  $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{t}_i = k_i \cdot \vec{t}_i$ ,  $i = 1, 2$ , όπου οι ιδιοτιμές  $k_i$  είναι οι καμπυλότητες στις κύριες διευθύνσεις, ενώ τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{t}_i$  εκφράζονται ως προς τα  $\vec{a}_i$ . Όταν το σχήμα της διεπιφάνειας, οι ελαστικές τάσεις και οι καμπτικές ροπές εμφανίζουν αξονική συμμετρία, η λύση του ιδιοπροβλήματος δίνει  $\vec{t}_1 = \vec{e}_s$ ,  $\vec{t}_2 = \vec{e}_\varphi$  και

$$k_1 = k_s = \frac{r_\xi^2 \cdot \theta_\xi}{(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{3/2}} + \frac{r \cdot r_\xi \cdot \theta_{\xi\xi} - r \cdot r_{\xi\xi} \cdot \theta_\xi}{(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{3/2}} + \frac{\theta_\xi}{(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_s = \frac{r_\xi^2 \cdot \theta_\xi}{S_\xi^3} + \frac{r \cdot r_\xi \cdot \theta_{\xi\xi} - r \cdot r_{\xi\xi} \cdot \theta_\xi}{S_\xi^3} + \frac{\theta_\xi}{S_\xi} \quad (2-65)$$

$$k_2 = k_\varphi = \frac{\theta_\xi}{(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2}} - \frac{r_\xi \cdot \cot \theta}{r(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2}} = \frac{\theta_\xi}{S_\xi} - \frac{r_\xi \cdot \cot \theta}{r \cdot S_\xi} \quad (2-66)$$

ενώ η μέση καμπυλότητα της διεπιφάνειας είναι:  $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$ . Επομένως, οι κύριες διευθύνσεις

του  $\underline{\underline{\tau}}$  και του  $\underline{\underline{m}}$  ταυτίζονται [42] με τα αξονοσυμμετρικά μοναδιαία διανύσματα και

$$\underline{\underline{m}} = m_s \vec{e}_s \vec{e}_s + m_\varphi \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (2-67)$$

ενώ το διάνυσμα της εγκάρσιας διατμητικής τάσης πάνω στο μεσημβρινό επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{q} = q \vec{e}_s \quad (2-68)$$

Το διάνυσμα διατμητικών τάσεων  $\vec{q}$  σχετίζεται με τον τανυστή καμπτικών ροπών  $\underline{\underline{m}}$  μέσω της σχέσης:

$$\vec{q} = \nabla_s \cdot \underline{\underline{m}} \cdot (\underline{\underline{I}} - \vec{n} \vec{n}) \quad (2-69)$$

$$q = \frac{1}{r_{cyl}} \frac{\partial r_{cyl}}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial r_{cyl}} (r_{cyl} m_s) - m_\varphi \right], \quad (2-70)$$

η οποία εκφράζει το ισοζύγιο καμπτικών ροπών σε ένα διαφορικό στοιχείο της μεμβράνης [42].

Καταστατικές εξισώσεις για τις καμπτικές ροπές έχουν αναπτυχθεί κατά καιρούς στη διεθνή βιβλιογραφία σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες [40], [49]. Στην παρούσα διατριβή υιοθετείται η συνήθης υπόθεση ότι οι καμπτικές ροπές έχουν αμελητέα επίδραση στο συμμετρικό κομμάτι του τανυστή των ελαστικών τάσεων που δίνεται στη σχέση (2-50). Η συγκεκριμένη υπόθεση είναι ορθή για ισότροπες διεπιφάνειες και μικρές καμπτικές παραμορφώσεις, δηλαδή για μικρές μεταβολές της καμπυλότητας του τανυστή  $\underline{\underline{B}}$  σε

καρτεσιανές συντεταγμένες, διότι τότε ο τανυστής καμπτικών ροπών  $\underline{m}$  είναι συμμετρικός και προκύπτει ότι το αντισυμμετρικό κομμάτι του τανυστή  $\underline{\tau}$  μηδενίζεται [42]. Για την περίπτωση αξονικής συμμετρίας, οι Zarda et al. [40] εισήγαγαν ποσότητες που εκφράζουν τις καμπτικές παραμορφώσεις:

$$K_s \equiv \lambda_s k_s - k_s^R \quad (2-71)$$

$$K_\varphi \equiv \lambda_\varphi k_\varphi - k_\varphi^R \quad (2-72)$$

και επικαλέστηκαν την αναλογία με τη γραμμική θεωρία κάμψης λεπτόπαχων πλακών για να εξάγουν τις παρακάτω εκφράσεις για τις καμπτικές ροπές, οι οποίες σε αδιάστατη μορφή γράφονται ως εξής:

$$m_s = \frac{k_B}{\lambda_\varphi} (K_s + \nu_s K_\varphi) \quad (2-73)$$

$$m_\varphi = \frac{k_B}{\lambda_s} (K_\varphi + \nu_s K_s), \quad (2-74)$$

όπου  $k_s^R$ ,  $k_\varphi^R$ : οι αδιάστατες καμπυλότητες στις κύριες διευθύνσεις της κατάστασης αναφοράς, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η σφαίρα, κατά την οποία οι καμπτικές ροπές είναι

μηδενικές,  $k_B = \frac{k_{B,\dim}}{\rho \omega_f^2 R_{bal}^5}$ : η αδιάστατη καμπτική σταθερά και  $k_{B,\dim}$ : η καμπτική σταθερά της

μεμβράνης (μέτρο αντίστασης σε λυγισμό) σε  $N \cdot m$ . Για το αρχικό σφαιρικό σχήμα της μικροφυσαλίδας ισχύει:  $k_s^R = k_\varphi^R = 1$  και θεωρώντας ασυμπίεστο υλικό για τη μεμβράνη:

$\nu_s = 0.5$ . Σύμφωνα με την κλασική θεωρία πλακών και κελυφών για ένα λεπτότοιχο, ισότροπο, ελαστικό υλικό τριών διαστάσεων πάχους  $\delta$  ισχύει [37]:

$$k_{B,\dim} = \frac{3G_{3D}\delta^3}{12(1-\nu_s^2)}, \quad (2-75)$$

όπου  $G_{3D}$ : το τριδιάστατο μέτρο διάτμησης σε  $N/m^2$  το οποίο συνδέεται με το διδιάστατο μέτρο διάτμησης μέσω της σχέσης:  $G_s = G_{3D} \cdot \delta$ . Στην περίπτωσή μας θεωρούμε μεμβράνη από λιπίδιο μονής ή διπλής στοιβάδας για την οποία δεν ισχύει η ισοτροπία. Το υλικό της μεμβράνης επιδεικνύει δύο διαφορετικές ελαστικότητες. Το ελαστικό μέτρο διάτμησης  $G_s$  κατά μήκος της διεπιφάνειας και το μέτρο δυσκαμψίας  $k_B$  στην εγκάρσια διεύθυνση. Το μέτρο δυσκαμψίας της μεμβράνης εξαρτάται, γενικότερα, από τις αναλλοίωτες της παραμόρφωσης και της καμπυλότητας, όμως χάριν απλότητας και για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής θα θεωρηθεί ως ανεξάρτητη φυσική σταθερά. Τέλος, μέσω των παραπάνω μεγεθών, ορίζουμε την αδιάστατη ενέργεια λόγω κάμψης:

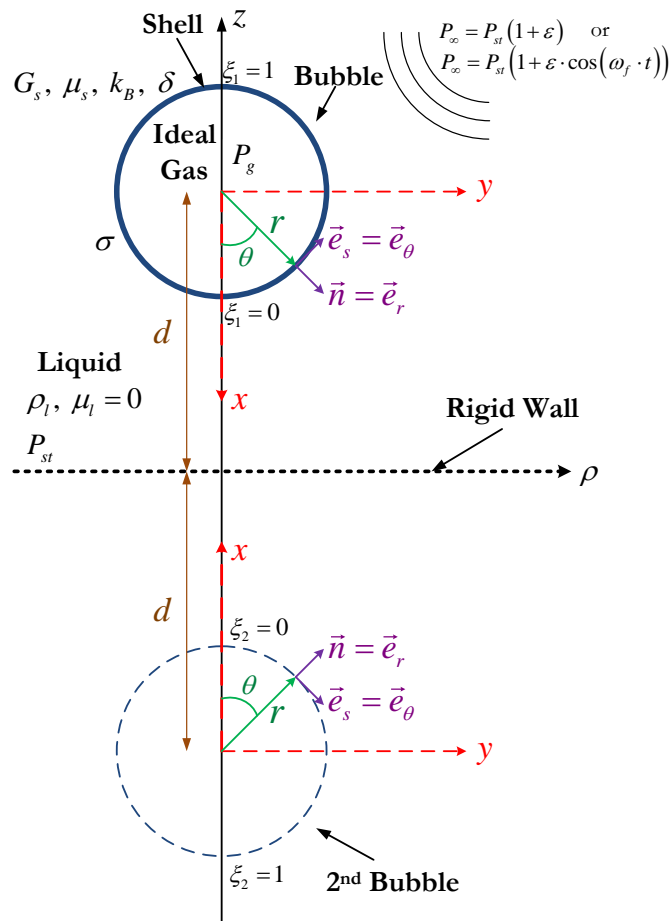


$$w^B = \frac{k_B}{2} (K_s^2 + 2\nu_s K_s K_\varphi + K_\varphi^2) \quad (2-76)$$

η οποία βρίσκεται σε συμφωνία με την κλασική θεωρία κάμψης κελυφών [37], [50].

## 2.6 Ολοκληρωτική εξίσωση της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας

Για την επίλυση του προβλήματος, χρειάζεται να υπολογισθεί η κάθετη παράγωγος  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας, καθώς και στη διεπιφάνεια του ρευστού με τυχόν άλλες φάσεις. Για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μικροφυσαλίδας με στερεό τοίχωμα η συνιστώσα της ταχύτητας, που είναι κάθετη στο τελευταίο, μηδενίζεται. Αυτό επιτυγχάνεται με θεώρηση πανομοιότυπης αξονοσυμμετρικής φυσαλίδας τοποθετημένης συμμετρικά ως προς την αρχική (Εικόνα 2-3). Επομένως, αντί του συστήματος φυσαλίδα – τοίχωμα, έχουμε το σύστημα φυσαλίδα – φυσαλίδα. Για την περίπτωση μικροφυσαλίδας – ελεύθερης επιφάνειας η διάταξη απεικονίζεται στην Εικόνα 2-2.



Εικόνα 2-3: Σχηματική απεικόνιση του συστήματος φυσαλίδα – φυσαλίδα.

Το μέγεθος  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  υπολογίζεται με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της εξίσωσης Laplace πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή υποθέσαμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και χωρίς ιξώδεις, ισχύει η σχέση (2-6). Επιπλέον, επειδή η ροή εξωτερικά της φουσαλίδας θεωρείται ασυμπίεστη, η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή της (2-4). Συνεπώς, από τις (2-6) και (2-4) προκύπτει η εξίσωση Laplace. Χρησιμοποιώντας το 2<sup>ο</sup> θεώρημα του Green [51]:

$$\int_D \left[ \Phi(\vec{z}) \nabla^2 \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) - \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) \nabla^2 \Phi(\vec{z}) \right] dV(\vec{z}) = \int_{\partial D} \left[ \Phi(\vec{y}) \frac{\partial \hat{G}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} - \hat{G}(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial \Phi(\vec{y})}{\partial n} \right] dA(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{z} \in D, \quad \vec{y} \in \partial D, \quad (2-77)$$

όπου  $\Phi$ : το δυναμικό της ταχύτητας και  $\hat{G}$ ,  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$ : οι πυρήνες απλής και διπλής στοιβάδας της εξίσωσης (2-6) για τους οποίους ισχύει:

$$\nabla^2 \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) + \Delta(\vec{x}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{z} \in D^\infty \text{ και } \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \infty \\ \vec{z} \rightarrow \infty}} \left[ \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) \right] = 0, \quad (2-78)$$

όπου  $\Delta$ : η συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Με χρήση των σχέσεων (2-6), (2-77) και (2-78) προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση όταν το πεδιακό σημείο  $\vec{x}$  βρίσκεται πάνω στη διεπιφάνεια:

$$-\frac{1}{2} \Phi(\vec{x}, t) + \int_A \Phi(\vec{y}, t) \frac{\partial \hat{G}(\vec{y}, \vec{x})}{\partial n} dA(\vec{y}, t) = \int_A \frac{\partial \Phi(\vec{y}, t)}{\partial n} \hat{G}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t), \quad \vec{y}, \vec{x} \in A, \quad (2-79)$$

όπου  $A$ : η επιφάνεια της φουσαλίδας και  $\vec{n}$ : το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φουσαλίδας. Ο πυρήνας  $\hat{G}$  υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης (2-78) για τριδιάστατο χωρίο [52],

$$\hat{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in D^\infty \quad (2-80)$$

Στην ολοκληρωτική εξίσωση (2-79), όταν το σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{y}$  (σημείο πηγής - source point) τείνει να συμπίσει στο σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{x}$  (πεδιακό σημείο - field point), τότε εμφανίζεται ιδιομορφία στον πυρήνα  $\hat{G}$ , η οποία όμως είναι αδύναμη (weak singularity) και για το λόγο αυτό η ολοκλήρωση είναι εφικτή. Αντίθετα, η ολοκλήρωση που περιέχει τον πυρήνα  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$  είναι εφικτή μόνο υπό την έννοια του Cauchy principal value [53]. Για να άρουμε την ισχυρή ιδιομορφία (strong singularity) που εμφανίζεται στον πυρήνα  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$ ,

προσθέτουμε και αφαιρούμε στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (2-79) τον όρο

$\int_A \Phi(\vec{x}, t) \frac{\partial \hat{G}(\vec{y}, \vec{x})}{\partial n} dA(\vec{y}, t)$ . Αν λάβουμε υπ' όψιν ότι:

$$\Phi(\vec{x}, t) \int_A \frac{\partial \hat{G}(\vec{y}, \vec{x})}{\partial n} dA(\vec{y}, t) = -\frac{1}{2} \Phi(\vec{x}, t), \quad (2-81)$$

η (2-79) τελικά θα δώσει:

$$\int_A \frac{\partial \Phi(\vec{y}, t)}{\partial n} \hat{G}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t) = -\Phi(\vec{x}, t) + \int_A [\Phi(\vec{y}, t) - \Phi(\vec{x}, t)] \frac{\partial \hat{G}(\vec{y}, \vec{x})}{\partial n} dA(\vec{y}, t) \quad (2-82)$$

Επίσης, λόγω της αξονικής συμμετρίας, το δυναμικό είναι ανεξάρτητο από τη γωνία  $\varphi$  και η ολοκλήρωση των πυρήνων θα δώσει [54], [55]:

$$G = \int_0^{2\pi} \hat{G} d\phi, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} d\phi \quad (2-83)$$

Η (2-82) με την (2-83) θα δώσουν τελικά σε κυλινδρικές συντεταγμένες για την περίπτωση του συστήματος φουσαλίδα – φουσαλίδα:

$$\begin{aligned} -\alpha \Phi(\rho_0, z_0, t) = & \int_{S_{b1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\rho, z, t) G(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_{b1} - \int_{S_{b1}} [\Phi(\rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0, t)] \frac{\partial G}{\partial n}(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_{b1} + \\ & + \int_{S_{b2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\rho, z, t) G(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_{b2} - \int_{S_{b2}} \Phi(\rho, z, t) \frac{\partial G}{\partial n}(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_{b2} \end{aligned} \quad (2-84)$$

Στην παραπάνω σχέση  $S_{b1}$  και  $S_{b2}$  συμβολίζουν τις διεπιφάνειες των δύο φουσαλίδων με το περιβάλλον ρευστό και  $\alpha = 0, 1$  ή  $2$  αναλόγως του αν το πεδιακό σημείο βρίσκεται εντός, επί της διεπιφάνειας ή εκτός της μικροφουσαλίδας, **Εικόνα 2-3**. Λόγω της συμμετρικής διάταξης των δύο φουσαλίδων η παραπάνω σχέση ικανοποιεί τον μηδενισμό της παραγώγου επί της στερεάς επιφάνειας. Επιπλέον έχει θεωρηθεί ότι το πεδιακό σημείο  $(\rho_0, z_0)$  βρίσκεται στην επιφάνεια της πρώτης φουσαλίδας, ώστε να εξομαλυνθεί η ολοκλήρωση του πυρήνα διπλής στοιβάδας  $\frac{\partial G}{\partial n}$ , της ιδιόμορφης λύσης πάνω στην εν λόγω επιφάνεια  $S_{b1}$ . Ανάλογη διαδικασία χρησιμοποιείται και για την περίπτωση που το πεδιακό σημείο βρεθεί στη διεπιφάνεια της δεύτερης  $S_{b2}$ .

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση για το σύστημα μικροφουσαλίδα – ελεύθερη επιφάνεια σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned} -\alpha \Phi(\rho_0, z_0, t) = & \int_{S_b} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\rho, z, t) G(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_b - \int_{S_b} [\Phi(\rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0, t)] \frac{\partial G}{\partial n}(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_b + \\ & + \int_{S_w} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\rho, z, t) G(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_w - \int_{S_w} \Phi(\rho, z, t) \frac{\partial G}{\partial n}(\rho_0, z_0, \rho, z) dS_w \end{aligned} \quad (2-85)$$

Στην παραπάνω σχέση  $S_b$  και  $S_w$  συμβολίζουν τη διεπιφάνεια της φυσαλίδας με το περιβάλλον ρευστό και τη διεπιφάνεια μεταξύ ρευστού και περιβάλλοντος αερίου αντίστοιχα. Επίσης,  $\alpha = 0, 1$  ή  $2$  αναλόγως του αν το πεδιακό σημείο βρίσκεται εντός, επί της διεπιφάνειας ή εκτός της μικροφυσαλίδας, **Εικόνα 2-2**. Επιπλέον έχει θεωρηθεί ότι το πεδιακό σημείο  $(\rho_0, z_0)$  βρίσκεται στην επιφάνεια της φυσαλίδας, ώστε να εξομαλυνθεί η ολοκλήρωση του πυρήνα διπλής στοιβάδας  $\frac{\partial G}{\partial n}$ , της ιδιόμορφης λύσης πάνω στην εν λόγω επιφάνεια  $S_b$ . Ανάλογη διαδικασία χρησιμοποιείται και για την περίπτωση που το πεδιακό σημείο βρεθεί στη διεπιφάνεια ρευστού – περιβάλλοντος αερίου  $S_w$ .

Η εξίσωση (2-84) ή (2-85), που είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο όρος  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  στη διεπιφάνεια, εφόσον γνωρίζουμε το δυναμικό πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή ο άγνωστος περιέχεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση Fredholm πρώτου είδους. Για το λόγο αυτό, στην αριθμητική επίλυση θα χρειαστεί να γίνει απ' ευθείας αντιστροφή του πίνακα για την επίλυση του συστήματος που προκύπτει, σε αντίθεση με τις εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους, όπου η επίλυση του συστήματος γίνεται με επαναληπτικό τρόπο.

## 2.7 Μεταβολές της ενέργειας του συστήματος

Για να παράγουμε την ολοκληρωτική εξίσωση της ενέργειας του συστήματος ξεκινάμε από την εξίσωση:

$$\iiint_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla^2 \Phi dV = 0 \quad (2-86)$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi)^2 \right] dV = 0 \quad (2-87)$$

Αν εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό θεώρημα του Reynolds στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \iiint_V (\nabla \Phi)^2 dV \right] = \oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \frac{1}{2} \oint_A (\nabla \Phi)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \quad (2-88)$$

ενώ κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2-88) και εισάγοντας τη δυναμική εξίσωση της διεπιφάνειας (2-38) λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \right] - \oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial n} \left( P_\infty - P_g + \frac{2k_m}{We} + \Delta F_n \right) dA = 0 \quad (2-89)$$

Η παραπάνω σχέση εφαρμόζεται και στην περίπτωση παρουσίας επιπλέον ελεύθερων διεπιφανειών του υγρού με γειτονικές φάσεις με κατάλληλη επέκταση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Ουσιαστικά συνδέει τις μεταβολές της κινητικής ενέργειας του συστήματος με: α) τις μεταβολές της πίεσης του αερίου εντός της φυσαλίδας σε σχέση με το άπειρο, β) την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μεμβράνη λόγω εφελκυσμού/θλίψης και κάμψης και γ) την ενέργεια λόγω μεταβολής της επιφάνειας της μεμβράνης. Συγκεκριμένα ο όρος της (2-89) που περιέχει τις ελαστικές και την επιφανειακή τάση, καθώς και τη συμπίεση του κελύφους, εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας λόγω ελαστικότητας, μεγέθους διεπιφάνειας της φυσαλίδας και λόγω συμπίεσης. Πρέπει δε να τονιστεί ότι η ενέργεια λόγω ελαστικότητας περιλαμβάνει την καμπτική ενέργεια καθώς και την ενέργεια λόγω εφελκυσμού/θλίψης, αλλά και λόγω του ρυθμού εφελκυσμού/θλίψης. Η τελευταία αφορά την επίδραση του ιξώδους του κελύφους στην ανάπτυξη εφελκυστικών/θλιπτικών τάσεων πάνω σε αυτό. Έτσι όσον αφορά τη διατήρηση της συνολικής ενέργειας του κελύφους ισχύει ότι:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{surf} + E_{comp} + E_{strain} + E_{bend} + E_{visc} = const, \quad (2-90)$$

όπου:  $E_{kin} = \frac{1}{2} \iint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} dA$  : η κινητική ενέργεια,  $\vec{\zeta} = -\vec{n}$  κατ' αντιστοιχία με τους Πελεκάση και

Τσαμόπουλο [56],  $E_{surf} = \iint_A dA$  : η ενέργεια λόγω μεγέθους διεπιφάνειας,  $E_{comp} = V \left( P_{\infty} + \frac{P_g}{\gamma - 1} \right)$  :

η ενέργεια λόγω συμπίεσης,  $E_{strain}$  : η ενέργεια λόγω ανάπτυξης ελαστικών τάσεων στο κέλυφος, η οποία δίνεται από τις σχέσεις (2-51), (2-54) και (2-58) για τους καταστατικούς νόμους Mooney – Rivlin, Skalak και Hooke αντίστοιχα,  $E_{bend}$  : η ενέργεια λόγω κάμψης του κελύφους, η οποία δίνεται από τη σχέση (2-76) και  $E_{visc}$  : η ενέργεια σκέδασης λόγω ανάπτυξης ιξωδών τάσεων στο κέλυφος. Επομένως, για την περίπτωση που το υλικό του κελύφους είναι γραμμικώς ελαστικό, η (2-90) γράφεται:

$$\begin{aligned} \left[ E_{kin} + E_{surf} + E_{comp} + E_{strain} + E_{bend} \right]_t^0 &= - \int_0^t \left[ \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \Delta F_{n,v} dA \right] dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \iint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} dA + \iint_A dA + V \left( P_{\infty} + \frac{P_g}{\gamma - 1} \right) + \\ &+ \frac{G_s}{4(1-\nu_s)} \left[ (\lambda_s^2 - 1)^2 + 2\nu_s (\lambda_s^2 - 1)(\lambda_{\varphi}^2 - 1) + (\lambda_{\varphi}^2 - 1)^2 \right] + \\ &+ \frac{k_B}{2} (K_s^2 + 2\nu_s K_s K_{\varphi} + K_{\varphi}^2) \end{aligned} \right\}_t^0 &= - \int_0^t \left[ \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \Delta F_{n,v} dA \right] dt \end{aligned} \quad (2-91)$$

όπου 0 και t υποδηλώνουν την αρχική και την τυχαία χρονική στιγμή, αντίστοιχα. Στο υπόλοιπο της διατριβής θα δίδεται η απεικόνιση των παραπάνω επί μέρους μορφών ενέργειας καθώς και του αθροίσματός τους:  $E_{inviscid} = E_{kin} + E_{surf} + E_{comp} + E_{strain} + E_{bend}$ , πλην αυτής που αφορά στην ελαστική ενέργεια λόγω ρυθμού εφελκυσμού/θλίψης,  $E_{visc} = E_{tot} - E_{inviscid}$  και οφείλεται στις ιξώδεις τάσεις που αναπτύσσονται στο κέλυφος.

### 3. Αριθμητική Επίλυση

Λόγω χρήσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης, το πρόβλημα της ροής μεταφέρεται από το τριδιάστατο χωρίο στη διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας με το ρευστό, δηλαδή το πρόβλημα γίνεται από τριδιάστατο διδιάστατο. Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης της αξονικής συμμετρίας χρειάζεται να διακριτοποιηθεί μόνο η γενέτειρα καμπύλη του σχήματος των φυσαλίδων. Επομένως, η διακριτοποίηση, είτε μέσω των πεπερασμένων, είτε μέσω των συνοριακών στοιχείων θα είναι σε μία διάσταση. Αξίζει δε να σημειωθεί ότι τυχόν επιπρόσθετες αξονοσυμμετρικές διεπιφάνειες μπορούν επίσης να διακριτοποιηθούν με την ολοκλήρωση κατά μήκος της γενέτειρας καμπύλης τους.

#### 3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η επίλυση της άγνωστης θέσης της μικροφυσαλίδας καθώς και της συνάρτησης δυναμικού της ταχύτητας πάνω στη διεπιφάνεια, γίνεται με χρήση του τοπικού σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων αρχικά τοποθετημένου στο κέντρο μάζας της μικροφυσαλίδας. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) χρησιμοποιείται για τη μετατροπή της κινηματικής συνθήκης στην  $r$ -διεύθυνση (2-25), του εφαπτομενικού ισοζυγίου δυνάμεων στη διεπιφάνεια (2-32) και της δυναμικής οριακής συνθήκης (2-38) από μερικές διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις αρχικών τιμών. Προς το σκοπό αυτό, οι αντίστοιχες άγνωστες μεταβλητές  $(r, \theta, \Phi)$  αναπαριστώνται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα άγνωστων συντελεστών που πολλαπλασιάζονται από ένα σύνολο προκαθορισμένων συναρτήσεων βάσης, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε μερικά στοιχεία του χωρίου. Η ασθενής μορφή προκύπτει κατά τον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων (2-25), (2-32) και (2-38) από κάθε συνάρτηση βάσης και ολοκληρώνεται σε όλο το χωρίο. Τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης Gauss χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μέσα σε κάθε στοιχείο. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι τα αριθμητικά σφάλματα προέρχονται από την παρεμβολή των άγνωστων συναρτήσεων και όχι από την αριθμητική ολοκλήρωση [57].

Ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιήθηκαν οι κυβικές συναρτήσεις B-splines, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε τέσσερα στοιχεία και οι οποίες σε κάθε στοιχείο ικανοποιούν τη συνέχεια όχι μόνο οι ίδιες, αλλά και η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός τους [58]. Εδώ, θα πρέπει να τονιστεί ότι ο υπολογισμός των καμπτικών τάσεων στην εξίσωση (2-38) απαιτεί διακριτοποίηση παραγώγου 4<sup>ης</sup> τάξης. Οι συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης δεν μπορούν να ανταποκριθούν στις ανάγκες αυτής της διακριτοποίησης. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά

παράγοντες, ούτως ώστε να ρίξουμε την τάξη της παραγώγου κατά ένα. Ο υπολογισμός 3<sup>ης</sup> τάξης παραγώγου είναι αποδεκτός με κυβικές συναρτήσεις B-splines, καθώς η ασθενής μορφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, κάτι που ικανοποιείται από την τρίτη παράγωγο των B-cubic splines [59] η οποία είναι ασυνεχής αλλά τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Επίσης, πρέπει να τονισθεί ότι λόγω της αξονικής συμμετρίας του προβλήματος οι συνοριακοί όροι που προκύπτουν από την ολοκλήρωση κατά παράγοντες μηδενίζονται.

Εφόσον για τις συναρτήσεις βάσης ισχύει ότι  $B_i(\xi = \xi_j) \neq \delta_{ij}$ , οι συντελεστές των αγνώστων  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  της αναπαράστασης B-splines:

$$r(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} a_i(t) B_i(\xi), \quad \theta(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} b_i(t) B_i(\xi), \quad \Phi(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i(t) B_i(\xi), \quad (3-1)$$

όπου  $N$ : ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος, είναι διαφορετικοί από τις τιμές των άγνωστων συναρτήσεων στους κόμβους. Κατά συνέπεια, αυτός ο τρόπος αναπαράστασης απαιτεί έναν πρόσθετο πολλαπλασιασμό πινάκων προκειμένου να πάρουμε τις τιμές στους κόμβους των συναρτήσεων. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε φανταστικούς κόμβους εκτός του χωρίου, δηλαδή,  $a_0$ ,  $a_{N+1}$ ,  $b_0$ ,  $b_{N+1}$ ,  $c_0$ ,  $c_{N+1}$  εκφράζονται με όρους συντελεστών των εσωτερικών κόμβων χρησιμοποιώντας συνοριακές συνθήκες και στην προκειμένη περίπτωση τις σχέσεις (2-16). Οι κόμβοι αυτοί έχουν μόνο μαθηματική σημασία [60]. Τέλος, επειδή οι κυβικές συναρτήσεις B-splines καλύπτουν τέσσερα στοιχεία θα δημιουργηθεί πίνακας ζώνης με εύρος ζώνης επτά, ο οποίος απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς για την αντιστροφή του σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange (εύρος ζώνης 5). Το μειονέκτημα αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της ακρίβειας, σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange, η οποία είναι στην περίπτωση των B-splines  $O(h^4)$  για την παρεμβολή της άγνωστης συνάρτησης και  $O(h^3)$  για την παρεμβολή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης, όπου  $h$ : το μήκος του στοιχείου [55].

Η κινηματική συνθήκη στην  $r$ -διεύθυνση (2-25), μετά τον πολλαπλασιασμό με τη δοκιμαστική συνάρτηση και την ολοκλήρωση στη διεπιφάνεια, γίνεται:

$$\int_0^1 r_t \cdot B_i \cdot r_{cyl} \cdot s_\xi d\xi = \int_0^1 \left( \frac{\Phi_\xi \cdot r_\xi}{s_\xi^2} + \frac{\Phi_n \cdot r \cdot \theta_\xi}{s_\xi} \right) B_i \cdot r_{cyl} \cdot S_\xi d\xi, \quad (3-2)$$

όπου στην παραπάνω σχέση έχει υλοποιηθεί, τετριμμένα λόγω αξονικής συμμετρίας, η ολοκλήρωση κατά την αζιμούθια κατεύθυνση  $\varphi$ . Αντιστοίχως, το εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων πάνω στη διεπιφάνεια (2-32) παίρνει την μορφή:



$$\begin{aligned}
& -\int_0^1 \frac{2 \cdot r^2 \cdot \theta_\xi \cdot \theta_{\xi t}}{\text{Re}_s \cdot s_\xi^2} r_{cyl} \cdot B_{i,\xi} d\xi - \int_0^1 \frac{2 \cdot \cos \theta \cdot \theta_t}{\text{Re}_s \cdot \sin \theta} r_{cyl,\xi} \cdot B_i d\xi = \\
& = \int_0^1 \tau_{ss,el} \cdot r_{cyl} \cdot B_{i,\xi} d\xi + \int_0^1 \tau_{\phi\phi,el} \cdot r_{cyl,\xi} \cdot B_i d\xi + \int_0^1 r_{cyl} \cdot m_s (k_{s,\xi} \cdot B_i + k_s \cdot B_{i,\xi}) d\xi + \\
& + \int_0^1 k_s \cdot r_{cyl,\xi} \cdot m_\phi \cdot B_i d\xi + \int_0^1 \frac{2 \cdot r_\xi \cdot r_{\xi t}}{\text{Re}_s \cdot s_\xi^2} r_{cyl} \cdot B_{i,\xi} d\xi + \\
& + \int_0^1 \frac{2 \cdot r \cdot r_t \cdot \theta_\xi^2}{\text{Re}_s \cdot s_\xi^2} r_{cyl} \cdot B_{i,\xi} d\xi + \int_0^1 \frac{2 \cdot r_t}{\text{Re}_s \cdot r} r_{cyl,\xi} \cdot B_i d\xi
\end{aligned} \tag{3-3}$$

Οι χρονοπαράγωγοι προκύπτουν στην παραπάνω σχέση λόγω της συνεισφοράς των ιξωδών τάσεων στο εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων. Η χρονοπαράγωγος της ακτινικής συνιστώσας του ανύσματος θέσης τοποθετείται στο δεξί μέλος της διακριτοποιημένης μορφής, διότι θα έχει προηγηθεί η ενημέρωση της ακτινικής θέσης του κελύφους μέσω της κινηματικής συνθήκης.

Ομοίως, η δυναμική συνθήκη στη διεπιφάνεια (2-38) παίρνει την μορφή:

$$\int_0^1 \frac{D\Phi}{Dt} \cdot B_i \cdot r_{cyl} \cdot S_\xi d\xi = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\Phi_s^2 + \Phi_n^2) + P_\infty - P_G + \frac{2 \cdot k_m}{We} + \Delta F_n \right] B_i \cdot r_{cyl} \cdot S_\xi d\xi, \tag{3-4}$$

όπου  $B_i$ : οι κυβικές συναρτήσεις B-splines,  $r_{cyl} = r \cdot \sin \theta$ : η κυλινδρική ακτινική συνιστώσα,

$k_m = \frac{k_s + k_\phi}{2}$ : η μέση καμπυλότητα και  $\Delta F_n$ : οι ιξωδοελαστικές δυνάμεις στη διεύθυνση κάθετα

στη διεπιφάνεια, σχέση (2-40).

Τελικά, μετά την εισαγωγή των σχέσεων (3-1) στις εξισώσεις (3-2), (3-3) και (3-4), προκύπτουν συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\underline{\underline{M}}_1 \frac{da}{dt} = \underline{F}_1, \quad \underline{\underline{M}}_2 \frac{db}{dt} = \underline{F}_2 \quad \text{και} \quad \underline{\underline{M}}_3 \frac{dc}{dt} = \underline{F}_3, \tag{3-5}$$

όπου το πρώτο σύστημα αναφέρεται στην κινηματική συνθήκη στην r-διεύθυνση (2-25), το δεύτερο στο εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια (2-32) και το τρίτο στη δυναμική συνοριακή συνθήκη (2-38). Τα  $\underline{\underline{M}}_1$ ,  $\underline{\underline{M}}_2$ , και  $\underline{\underline{M}}_3$  είναι οι πίνακες μάζας των παραπάνω εξισώσεων οι οποίοι μεταβάλλονται με το χρόνο. Τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων (3-5) λύνονται σειριακά.

### 3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Η εξίσωση που διακριτοποιείται με συνοριακά στοιχεία είναι η ολοκληρωτική εξίσωση (2-84). Η επιπλέον άγνωστη μεταβλητή που θα διακριτοποιηθεί είναι η ταχύτητα των σωματιδίων κάθετα στη διεπιφάνεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} d_i(t) B_i(\xi), \quad (3-6)$$

όπου πάλι ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται οι κυβικές συναρτήσεις B-splines. Επιτρέποντας το πεδιακό σημείο  $\hat{\xi}$  (field point) να προσεγγίσει κάθε έναν από τους κόμβους του πλέγματος και ολοκληρώνοντας όλα τα στοιχεία που σχετίζονται με το σημείο πηγής  $\xi$  (source point), για σταθερό σημείο πεδίου, προκύπτουν  $N$  εξισώσεις. Οι αξονοσυμμετρικοί πυρήνες  $G$  και  $\frac{\partial G}{\partial n}$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι [61]:

$$G = \frac{K(m)}{\pi \sqrt{a+b}} \quad (3-7)$$

$$\text{και } \vec{\nabla} G \cdot \vec{n} = \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} n_r + \frac{\partial G}{\partial z} n_z \text{ με:}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{2r(\xi)\pi\sqrt{a+b}} \left[ \frac{\left[ z(\xi) - z(\hat{\xi}) \right]^2 + r^2(\hat{\xi}) - r^2(\xi)}{a-b} E(m) - K(m) \right] \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = - \left[ \frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} \frac{z(\xi) - z(\hat{\xi})}{a-b} E(m) \right], \text{ όπου:}$$

$$a = r^2(\xi) + r^2(\hat{\xi}) + \left[ z(\xi) - z(\hat{\xi}) \right]^2$$

$$b = 2r(\xi)r(\hat{\xi}) \quad (3-9)$$

$$m = \frac{2b}{a+b}, \quad m_l = 1 - m = \frac{a-b}{a+b}$$

και  $K(m)$ ,  $E(m)$  είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τα οποία υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια ( $< 2 \times 10^{-8}$ ) με τη βοήθεια αναπτυγμάτων:

$$K(m) = \sum_{i=0}^4 A_i m_l^i + \ln\left(\frac{1}{m_l}\right) \sum_{i=1}^4 C_i m_l^i$$

$$E(m) = 1 + \sum_{i=1}^4 D_i m_l^i + \ln\left(\frac{1}{m_l}\right) \sum_{i=1}^4 E_i m_l^i, \quad (3-10)$$

όπου  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ : είναι δεδομένες σταθερές [62]. Όταν το πεδιακό σημείο  $\hat{\xi}$  (field point) τείνει να συμπίσει με το σημείο πηγής  $\xi$  (source point), η ολοκλήρωση του δεύτερου μέλους της (2-84) απαιτεί ειδική μεταχείριση λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας της μορφής

$\ln\left(\frac{1}{a-b}\right) = \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}|^2}\right)$  που εμφανίζει ο πυρήνας  $G$ . Στα στοιχεία που εμφανίζεται η

προαναφερθείσα ιδιομορφία εφαρμόζεται λογαριθμική ολοκλήρωση κατά Gauss με χρήση 12 σημείων [56]. Στα υπόλοιπα εφαρμόζεται κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss με χρήση 4 σημείων. Ο πυρήνας  $\frac{\partial G}{\partial n}$  παρουσιάζει ισχυρότερη ιδιομορφία της μορφής  $|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}|^{-1}$ . Ο όρος του

πυρήνα  $\frac{\partial G}{\partial n}$  στην εξίσωση (2-84) γίνεται ομαλός με τη διαδικασία που προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.6 του προηγούμενου κεφαλαίου. Συνεπώς, για την ολοκλήρωση πλέον αυτών των όρων εφαρμόζεται κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss με διάφορους αριθμούς σημείων, όπως προτείνεται κι από τη βιβλιογραφία [63]. Τελικά προκύπτει σύστημα της μορφής:

$$\begin{matrix} (N \times N) & (N \times 1) & (N \times N) & (N \times 1) \\ \underline{\underline{G}} & \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{K}} & \cdot \underline{\underline{F}}, \end{matrix} \quad (3-11)$$

όπου  $\underline{\underline{P}}$ : είναι το διάνυσμα που περιέχει τις γνωστές τιμές του δυναμικού σε κάθε κόμβο και  $\underline{\underline{F}}$ : το διάνυσμα που περιέχει τους άγνωστους συντελεστές  $d_i$  της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν οι συνοριακές συνθήκες (2-16), που ισχύουν λόγω αξονικής συμμετρίας και οι οποίες μειώνουν κατά δύο τον αριθμό των άγνωστων συντελεστών  $d_i$ .

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι οι πίνακες που προκύπτουν είναι πλήρεις, σε αντίθεση με αυτούς που δημιουργούνται με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων οι οποίοι έχουν μορφή ζώνης. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, τόσο η κατασκευή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$ , όσο και η αντιστροφή του, να είναι πολύ χρονοβόρες διαδικασίες σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Χρησιμοποιώντας ωστόσο 100 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της διεπιφάνειας προέκυψε ότι η κατασκευή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$  είναι περίπου 10 φορές πιο χρονοβόρα διαδικασία απ' ότι η αντιστροφή του [64], [65]. Για το λόγο αυτό έγινε παραλληλισμός της κατασκευής του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$  χρησιμοποιώντας το πρωτόκολλο επικοινωνίας MPI. Περαιτέρω βελτιστοποίηση μπορεί να γίνει με την παράλληλη αντιστροφή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$ .

### 3.3 Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων

Για την ολοκλήρωση στο χρόνο χρησιμοποιείται το ρητό σχήμα τέταρτης τάξης Runge-Kutta, λόγω των καλύτερων χαρακτηριστικών ευστάθειας που παρέχει [55]. Στην παρούσα

εφαρμογή του παραπάνω σχήματος χρονικής ολοκλήρωσης, παρατηρήθηκε ότι για μικρές αρχικές παραμορφώσεις, διπλασιάζοντας τον αριθμό των στοιχείων κατά μήκος της διεπιφάνειας, απαιτείται ένα χρονικό βήμα περίπου τέσσερις φορές μικρότερο για αριθμητική ευστάθεια. Η επίλυση των αγνώστων του προβλήματος γίνεται διαδοχικά. Όταν η πλήρης κατάσταση της φυσαλίδας είναι γνωστή σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, τα σημεία της επιφάνειας μετακινούνται όπως περιγράφουν η ακτινική κινηματική συνθήκη και το εφαπτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων, εξισώσεις (2-25) και (2-32) αντίστοιχα, προκειμένου να ληφθούν οι νέες συντεταγμένες τους. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και η νέα τιμή του δυναμικού της ταχύτητας, όπως περιγράφεται από την (2-38). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική συνοριακή εξίσωση (2-84), παίρνουμε την κάθετη παράγωγο του δυναμικού, η οποία αντιπροσωπεύει την κάθετη ταχύτητα των διεπιφανειών φυσαλίδας και γειτονικού συνόρου. Στο τελευταίο στάδιο, υπολογίζεται ο όγκος της φυσαλίδας στη νέα χρονική στιγμή, η νέα τιμή της εσωτερικής πίεσης δίνεται από το νόμο αδιαβατικής μεταβολής και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τον τερματισμό της προσομοίωσης λόγω πολύ μεγάλης παραμόρφωσης της διεπιφάνειας της φυσαλίδας ή της επίτευξης στατικής ισορροπίας.

Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η δυναμική της κατάρρευσης ή της θραύσης. Σ' αυτά τα τελευταία στάδια της προσομοίωσης επιχειρείται ανακατανομή των κόμβων του πλέγματος ανάλογα με την τοπική καμπυλότητα. Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία ανακατανέμονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στο μήκος του στοιχείου, ενώ εξασφαλίζεται ακριβής διακριτοποίηση σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτό επιτυγχάνεται με τοποθέτηση των σημείων κατά μήκος της διεπιφάνειας έτσι, ώστε το παρακάτω ολοκλήρωμα [66] να ελαχιστοποιείται:

$$\int_s (1 + d|2k_m|) ds = \int_0^1 (1 + d|2k_m|) \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} d\xi, \quad (3-12)$$

όπου  $d$  : είναι η παράμετρος ελέγχου της συγκέντρωσης των πλεγματικών σημείων σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτή η παράμετρος κυμαίνεται από  $10^{-2}$  έως  $10^{-3}$ , καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει από 80 έως 160. Η μείωση του  $d$  ισοδυναμεί με μείωση της επίδρασης της καμπυλότητας καθώς επανακαθορίζεται το πλέγμα [64].

Στις διέπουσες εξισώσεις του προβλήματος υπεισέρχεται ο υπολογισμός χωρικών παραγώγων τρίτης τάξης χωρίς την σταθεροποιητική επίδραση του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού, με αποτέλεσμα κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης να εμφανίζονται αστάθειες μικρού μήκους κύματος (short wave instabilities), οι οποίες τελικά προκαλούν τη διακοπή της διαδικασίας. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι το διαστολικό ιξώδες του κελύφους επιδρά κυρίως στην κατεύθυνση της απόσβεσης των ταλαντώσεων όγκου χωρίς να επηρεάζει ουσιαστικά τις

ταλαντώσεις ιδιομορφών ανώτερης τάξης, κάτι που κάνει πολύ αποτελεσματικά το ιξώδες του περιβάλλοντος υγρού που δεν λαμβάνεται υπόψη στην παρούσα εργασία. Μάλιστα ο ρυθμός απόσβεσης ταλαντώσεων σχήματος μίας φυσαλίδας λόγω του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού [67] δίνεται από την σχέση  $e^{-t/\tau}$  όπου η χρονική σταθερά  $\tau$  είναι της μορφής,  $\tau \approx \frac{R_0^2}{(n+2)(2n+1)(\mu/\rho)}$ , οπότε καθίσταται σαφές ότι η απόσβεση γίνεται ταχύτερα όσο μειώνεται το μήκος κύματος της ιδιομορφής,  $n \rightarrow \infty$ . Κατά συνέπεια, τέτοιου είδους φαινόμενα δεν αναμένονται να παρουσιαστούν σε προσομοιώσεις όπου λαμβάνεται υπόψη η συνεκτικότητα του ρευστού.

Οι αστάθειες μικρού μήκους κύματος δε μπορούν να απαλειφθούν μόνο με πύκνωση του υπολογιστικού πλέγματος και πρέπει να γίνει χρήση τεχνικών φιλτραρίσματος της αριθμητικής λύσης προκειμένου να απαλειφθούν οι ιδιομορφές υψηλής τάξης από την αριθμητική λύση. Επομένως, σε κάθε χρονικό υποβήμα της μεθόδου Runge-Kutta υπολογίζονται εκ νέου οι βασικές μεταβλητές αποκόποντας ιδιομορφές ανώτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, η σφαιρική ακτινική συνιστώσα  $r$ , το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  και η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας της διεπιφάνειας  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  της μικροφυσαλίδας υπολογίζονται μέσω της σχέσης:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot P_n, \quad (3-13)$$

όπου  $P_n$ : τα πολυώνυμα Legendre, ενώ οι συντελεστές  $c_n$  υπολογίζονται από τη σχέση:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) \cdot P_n \cdot \sin \theta d\theta. \quad (3-14)$$

Οι όροι που διατηρούνται στο άθροισμα είναι συνήθως οι 50 πρώτοι, ενώ οι υπόλοιποι αποκόπονται. Η συγκεκριμένη διαδικασία επέτρεψε τη συνέχιση των προσομοιώσεων ακόμη και σε περιπτώσεις έντονης παραμόρφωσης της φυσαλίδας.

Τέλος, καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει, η κατασκευή του πίνακα του συστήματος (3-11), ο οποίος είναι πλήρης όπως συνήθως συμβαίνει με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων, γίνεται το πιο χρονοβόρο κομμάτι των υπολογισμών καταλαμβάνοντας περισσότερο από το 80% του χρόνου επεξεργασίας [55], [56]. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τον υπολογιστικό χρόνο καταφεύγουμε σε στρατηγικές παράλληλου προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας του συστήματος κατασκευάζεται με παραλληλισμό σε διαφορετικούς πυρήνες του επεξεργαστή που απασχολούνται με την κατασκευή διαφορετικών γραμμών του πίνακα. Ο αλγόριθμος εκτελείται σε cluster με μηχανήματα (Intel i7) με επεξεργαστή 12

πυρήνων και μνήμη RAM 64GB, σε περιβάλλον Linux (openSuse 12.2 & 13.2), γεγονός που συνεπάγεται σημαντική εξοικονόμηση του υπολογιστικού χρόνου επεξεργασίας.

### 3.4 Αλγόριθμος επίλυσης

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με στερεό γειτονικό τοίχωμα είναι ο εξής:

- i. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  θεωρούμε ότι η πίεση στο άπειρο διαταράσσεται σύμφωνα με την εξίσωση  $P_{\infty} = P_{st}(1+\varepsilon)$  ή την εξίσωση  $P_{\infty} = P_{st}[1+\varepsilon \cdot \cos(t)]$ , ενώ θεωρούμε ότι τόσο το δυναμικό  $\Phi$ , όσο και η ταχύτητα  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  είναι μηδέν ενώ το σχήμα της μικροφυσαλίδας είναι σφαιρικό.
- ii. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στις σχέσεις (2-25), (2-32), (2-38) και υπολογίζουμε την καινούρια θέση της διεπιφάνειας  $(r, \theta)$ , καθώς και το δυναμικό  $\Phi$  της ταχύτητας μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης με την μέθοδο Runge-Kutta (RK) τεσσάρων υποβημάτων.
- iii. Υπολογισμός των συντεταγμένων της διεπιφάνειας στο γενικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων μέσα σε κάθε υποβήμα της RK για να χρησιμοποιηθούν στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.
- iv. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων σε κάθε υποβήμα της RK στην ολοκληρωτική εξίσωση (2-84) και με δεδομένο πλέον το δυναμικό  $\Phi$  στη διεπιφάνεια υπολογίζουμε την ταχύτητα  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  κάθετα στη διεπιφάνεια.
- v. Εφόσον ξέρουμε την νέα θέση της διεπιφάνειας, υπολογίζουμε τον καινούργιο όγκο της φυσαλίδας. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2-11), η οποία δηλώνει την αδιαβατική μεταβολή του αερίου της φυσαλίδας, υπολογίζουμε την καινούργια πίεση στο εσωτερικό της σε κάθε υποβήμα.
- vi. Εφαρμογή φίλτρου στις βασικές μεταβλητές, δηλαδή στη σφαιρική ακτινική συνιστώσα  $r$ , στο δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  και στην κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας της διεπιφάνειας  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  της μικροφυσαλίδας.

- vii. Έλεγχος για το αν η αρχή των αξόνων του τοπικού σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται πολύ κοντά στη διεπιφάνεια της μικροφυσαλίδας. Αν η απόσταση είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη τιμή, η θέση της αρχής των αξόνων επικαιροποιείται στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο πόλων της μικροφυσαλίδας.
- viii. Σύγκριση του μικρότερου μήκους τόξου με το αντίστοιχο ισοκατανεμημένο και ανακατανομή των σωματιδίων της διεπιφάνειας, με παρεμβολή μεταξύ των υπολογισμένων σημείων, εφόσον το πρώτο είναι αρκετά μικρότερο από το δεύτερο.
- ix. Ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα (ii) με νέα δεδομένα για την πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας, τη θέση, το δυναμικό και την κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας και η επίλυση προχωράει στον χρόνο.

### 3.5 Μέθοδος Newton – Raphson για την περίπτωση μηδενικού διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης

Για τις ανάγκες της παραμετρικής μελέτης που διεξήχθη και παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο χρειάστηκε να εξεταστεί και η περίπτωση μηδενικού διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης. Στην περίπτωση αυτή, το εφαιτομενικό ισοζύγιο δυνάμεων (3-3) διαφοροποιείται. Πιο συγκεκριμένα, οι ιξώδεις όροι μηδενίζονται, διότι ο αριθμός Reynolds της μεμβράνης απειρίζεται,  $Re_s \rightarrow \infty$ . Έτσι, δεν είναι εφικτό να υπολογιστούν οι χρονικές παράγωγοι των

συντελεστών των splines  $\frac{db}{dt}$  για την  $\theta$ -συντεταγμένη και η σχέση (3-3) γίνεται:

$$\int_0^1 \tau_{ss,el} \cdot r_{cyl} \cdot B_{i,\xi} d\xi + \int_0^1 \tau_{\varphi\varphi,el} \cdot r_{cyl,\xi} \cdot B_i d\xi + \int_0^1 r_{cyl} \cdot m_s (k_{s,\xi} \cdot B_i + k_s \cdot B_{i,\xi}) d\xi + \int_0^1 k_s \cdot r_{cyl,\xi} \cdot m_\varphi \cdot B_i d\xi = 0 \quad (3-15)$$

Εισάγοντας το ανάπτυγμα  $\theta(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} b_i(t) B_i(\xi)$  στην (3-15) προκύπτει ένα σύστημα μη

γραμμικών εξισώσεων με άγνωστους τους συντελεστές των splines για τη συντεταγμένη  $\theta$ , το οποίο λύνεται με τη μέθοδο Newton – Raphson. Συνεπώς, η πορεία επίλυσης διαφοροποιείται στο βήμα (ii) όσον αφορά την ανανέωση της πολικής συνιστώσας του κελύφους. Επιλύοντας την εξίσωση (2-25) γίνεται γνωστή η  $r$ -συντεταγμένη της διεπιφάνειας. Αντικαθιστώντας την επικαιροποιημένη τιμή της  $r$ -συντεταγμένης στην (3-15) προκύπτει η νέα  $\theta$ -συντεταγμένη της διεπιφάνειας με την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος (3-15) με την μέθοδο Newton-Raphson, και τελικά καθίσταται γνωστή η καινούρια θέση της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας. Κατόπιν ακολουθεί η ίδια διαδικασία που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.4.



### 3.6 Αξιοπιστία της Αριθμητικής Μεθοδολογίας

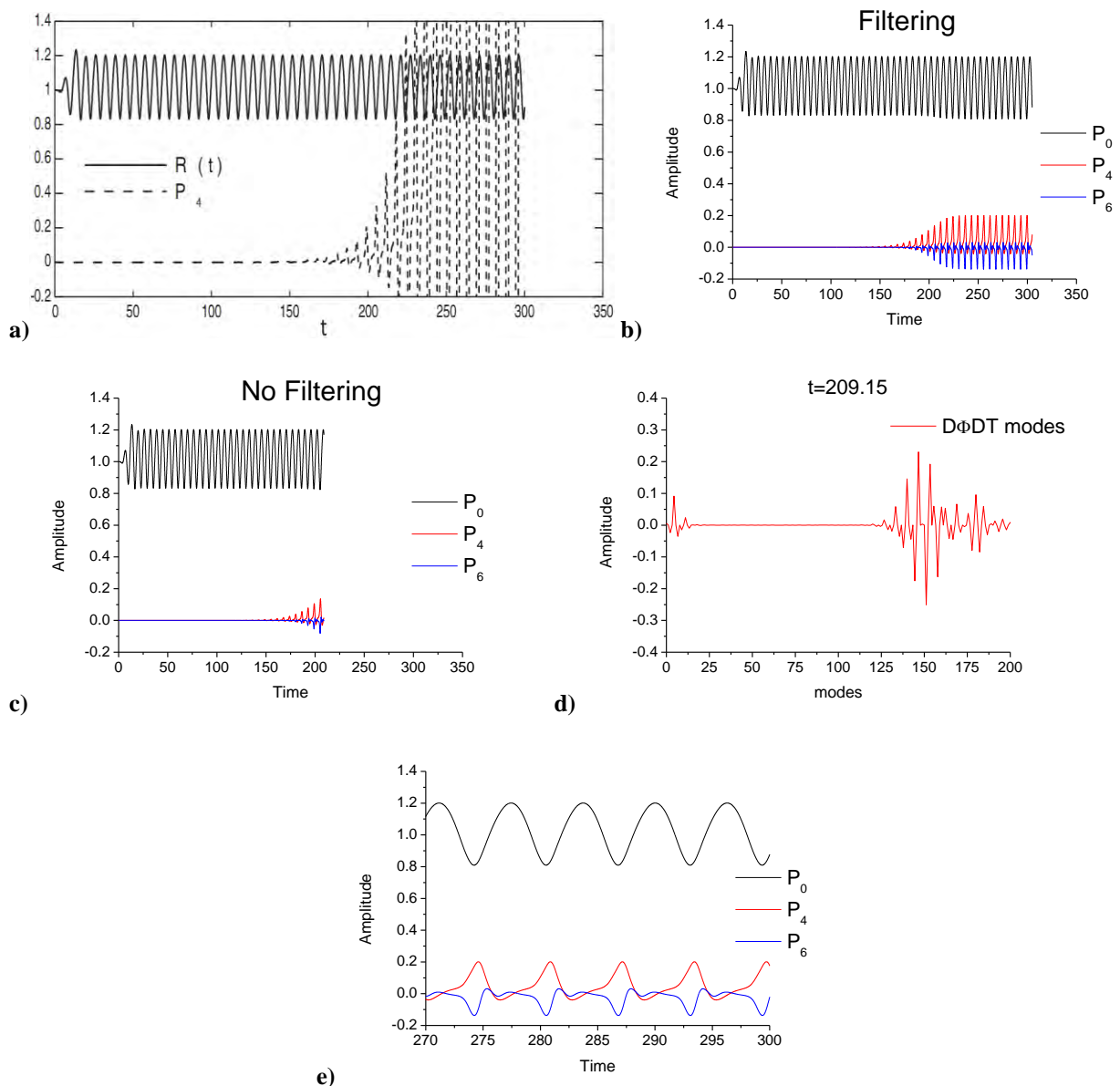
Για την πιστοποίηση της ορθότητας της αριθμητικής μεθοδολογίας που περιγράφηκε παραπάνω έγιναν προσομοιώσεις για να ανακτηθεί το κατώφλι ευστάθειας αρμονικού ή υποαρμονικού συντονισμού. Η επιλογή των παραμέτρων έγινε με τέτοιο τρόπο, ούτως ώστε να ανακτηθούν συγκεκριμένες πτυχές της συμπεριφοράς των μικροφυσαλίδων τύπου Contrast Agent που αναφέρονται πειραματικά [68], όπως η συχνότητα συντονισμού, το πλάτος διαταραχής για το οποίο αρχίζει η ανάπτυξη των ιδιομορφών σχήματος καθώς επίσης και το πλάτος των διεγερόμενων ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας. Από τις πραγματοποιηθείσες οπτικές μετρήσεις των μη σφαιρικών ιδιομορφών σχήματος που αναπτύσσονται σε μικροφυσαλίδες με μεμβράνη από φωσφολιπίδιο μονής στοιβάδας, όταν αυτές βρίσκονται μέσα σε άπειρο ρευστό και υπόκεινται σε αξονοσυμμετρικές διαταραχές, προέκυψε ότι η ανάπτυξη των ιδιομορφών γίνεται μέγιστη για φυσαλίδες με αρχική ακτίνα ίση με την ακτίνα συντονισμού, δηλαδή  $R_0 = R_{SF} \approx 2.5 \mu m$  και συχνότητα εξωτερικής διαταραχής  $\nu_f = 1.7 MHz$ , όπου οι τάσεις στη μεμβράνη είναι μηδενικές (Stress Free). Συνεπώς, θεωρώντας μεμβράνη με ψευδοπλαστική συμπεριφορά (Mooney – Rivlin,  $b=0$ ) και πάχος  $\delta \approx 1 nm$ , το τριδιάστατο μέτρο διάτμησης προκύπτει περίπου  $G_{3D} = 80 MPa$  [31]. Επιπλέον, απαιτώντας το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής για την ανάπτυξη της ιδιομορφής σχήματος με τέσσερις λοβούς ( $P_4$ ), για φυσαλίδα με αρχική ακτίνα  $R_{SF} = 3.6 \mu m$ , να είναι  $\varepsilon < 2$ , έτσι ώστε η διέγερση της συγκεκριμένης ιδιομορφής να λάβει χώρα σε σχετικά λίγες περιόδους, παίρνουμε μια εκτίμηση του μέτρου δυσκαμψίας της μεμβράνης,  $k_B = 3 \cdot 10^{-14} N \cdot m$ , μέσω γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας για την ιδιομορφή  $P_4$  [69]. Με την απαίτηση το μέγιστο πλάτος των ταλαντώσεων όγκου της μικροφυσαλίδας να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα, όταν μια φυσαλίδα αρχικής ακτίνας  $R_{SF} = 2.3 \mu m$  διεγείρεται από εξωτερική διαταραχή πλάτους  $\varepsilon = 4$ , το τριδιάστατο διαστολικό ιξώδες της μεμβράνης προκύπτει περίπου  $\mu_{3D} = 20 Pa \cdot s$ . Επομένως συνοψίζοντας έχουμε τις παρακάτω παραμέτρους:

$$R_0 = 3.6 \mu m, \mu_{3D} = 20 Pa \cdot s, G_{3D} = 80 MPa, \sigma = 0.051 \frac{N}{m}, k_B = 3 \cdot 10^{-14} N \cdot m, b = 0 \text{ (MR shell)}, \\ \nu_0 = 1.132 MHz, \nu_f = 1.7 MHz, \gamma = 1.07, P_{st} = 101325 Pa, \rho_l = 998 \frac{kg}{m^3}, \mu_l = 0, \delta = 1 nm$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους, η γραμμική ανάλυση ευστάθειας προέβλεψε ότι το κατώφλι ευστάθειας είναι  $\varepsilon \approx 1.7$ . Στο **Διάγραμμα 3-1a**) φαίνεται η ανάπτυξη της ασταθούς ιδιομορφής σχήματος για πλάτος εξωτερικής διαταραχής  $\varepsilon = 2$ , όπως προβλέπει η ανάλυση

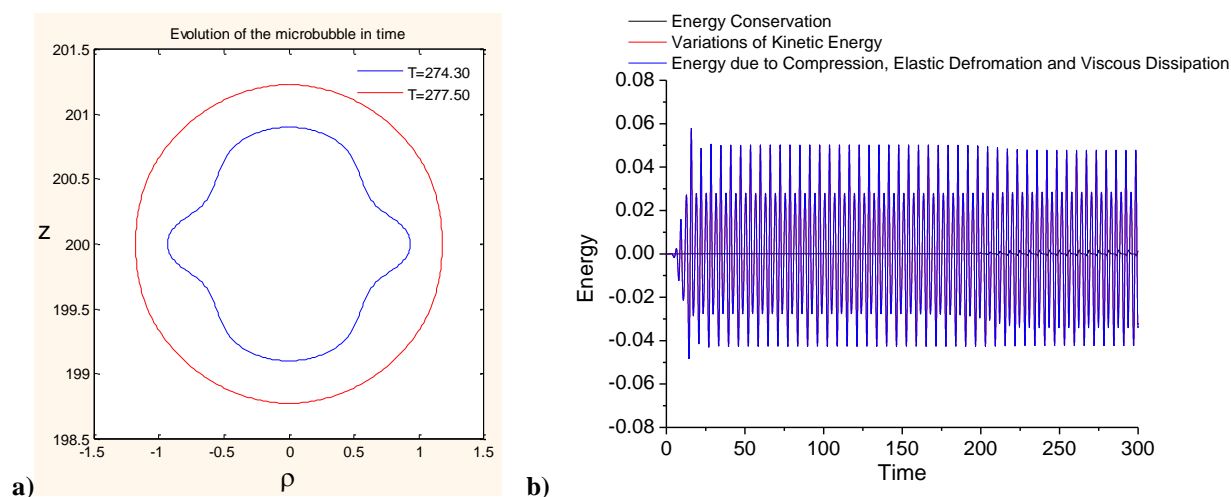


Floquet που διεξήχθη από τους Τσιγκλιφή και Πελεκάση [35], με την ιδιομορφή  $P_4$  να κυριαρχεί μέσω αρμονικού συντονισμού. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις μικροφυσαλίδας με τις παραπάνω φυσικές ιδιότητες, η οποία ταλαντώνεται λόγω ακουστικής διαταραχής, ανέκτησαν το κατώφλι ευστάθειας για την έναρξη των ταλαντώσεων της ιδιομορφής  $P_4$ , όπως προβλέπει η γραμμική ανάλυση ευστάθειας, δηλαδή  $\varepsilon = 1.7$ . Οι προσομοιώσεις έγιναν για αρχική απόσταση της μικροφυσαλίδας από το τοίχωμα  $d_0 = 200$  με χρήση 150 στοιχείων και χρονικό βήμα  $10^{-4}$ . Καθώς το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής γίνεται  $\varepsilon = 2$ , παρατηρείται ταχεία αύξηση της



**Διάγραμμα 3-1:** a) Γραμμική ανάλυση ευστάθειας (Floquet) από τους Τσιγκλιφή – Πελεκάση, b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας με χρήση φίλτρου, c) Παρόμοιο διάγραμμα χωρίς τη χρήση φίλτρου, d) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας της διεπιφάνειας στο τέλος της προσομοίωσης, χωρίς τη χρήση φίλτρου, e) Διάγραμμα ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας σταθερού πλάτους. Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=2$ ,  $d_0=200$ ).

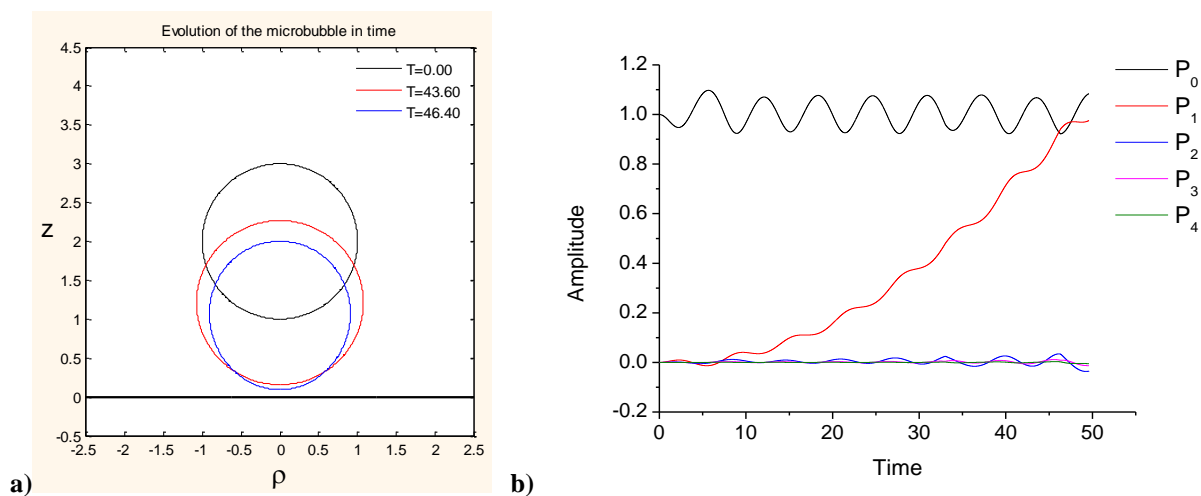
ιδιομορφής  $P_4$  η οποία αρχίζει να αναπτύσσεται μετά από περίπου 30 περιόδους της εξωτερικής διαταραχής, **Διάγραμμα 3-1b**), και τελικά το πλάτος της ιδιομορφής σταθεροποιείται. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόστηκε φίλτρο, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.3. Στο **Διάγραμμα 3-1b**) και c) απεικονίζεται η επίδραση του φίλτρου στην τελική έκβαση της προσομοίωσης. Χωρίς τη χρήση του φίλτρου η προσομοίωση διακόπτεται απότομα λίγο μετά από την εμφάνιση των ιδιομορφών ανώτερης τάξης. Το **Διάγραμμα 3-1d**) απεικονίζει το πλάτος των ιδιομορφών της χρονικής παραγωγού του δυναμικού της ταχύτητας της διεπιφάνειας τη στιγμή που διακόπτεται η προσομοίωση, όπου φαίνεται η φύση της αστάθειας μικρού μήκους η οποία χαρακτηρίζεται από αύξηση των ιδιομορφών χαμηλής και υψηλής τάξης, ενώ οι ενδιάμεσες παραμένουν αμελητέες. Συγκεκριμένα, την ταχύτερη αύξηση παρουσιάζει η ιδιομορφή με μήκος κύματος  $\Delta s$ , όπου  $\Delta s$ : το μήκος του ενός στοιχείου του πλέγματος πάνω στην γενέτειρα του αξονοσυμμετρικού σχήματος. Έτσι, για πλέγμα 150 στοιχείων τη μεγαλύτερη αύξηση παρουσιάζει η ιδιομορφή Legendre  $P_{150}$ , η οποία χαρακτηρίζεται από 150 λοβούς. Διατηρώντας τους πρώτους 50 όρους στη σχέση (3-13), ανακτήθηκαν μόνιμες ταλαντώσεις της μικροφυσαλίδας σταθερού πλάτους, καθώς επίσης και σταθεροποίηση του πλάτους των αναδυόμενων ιδιομορφών σχήματος. Και οι δύο ιδιομορφές σχήματος  $P_4$  και  $P_6$  ταλαντώνονται σε αρμονικό συντονισμό. Πιο συγκεκριμένα, οι αναδυόμενες ιδιομορφές έχουν τη μέγιστη τιμή του πλάτους τους, όταν η φυσαλίδα βρίσκεται στη μέγιστη συμπίεση. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο **Διάγραμμα 3-1e**), το οποίο εστιάζει στο χρονικό διάστημα όπου το πλάτος των ταλαντώσεων της μικροφυσαλίδας έχει σταθεροποιηθεί. Το σχήμα της διεπιφάνειας



**Διάγραμμα 3-2:** a) Σχήμα της μικροφυσαλίδας κατά τη φάση συμπίεσης (μπλε) όπου λαμβάνει χώρα σημαντική παραμόρφωση και κατά τη φάση διαστολής (κόκκινο) όπου το σχήμα παραμένει σχεδόν σφαιρικό, b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της κινητικής ενέργειας (κόκκινο), της ενέργειας λόγω συμπίεσης, ελαστικής παραμόρφωσης και σκέδασης λόγω του διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης (μπλε) και της συνολικής μεταβολής ενέργειας του συστήματος (μαύρη). Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=2$ ,  $d_0=200$ ).

της φυσαλίδας κατά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα χαρακτηρίζεται από τέσσερις λοβούς κατά τη φάση συμπίεσης, ενώ παραμένει σχεδόν σφαιρικό κατά τη φάση διαστολής, όπως φαίνεται και στο **Διάγραμμα 3-2a)**, όπου ο άξονας συμμετρίας είναι ο  $z$ . Τέλος, σε κάθε χρονικό βήμα ελέγχεται η κινητική, η ελαστική και η συνολική ενέργεια της μικροφυσαλίδας καθώς επίσης και η σκέδαση της ενέργειας λόγω του διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης. Το **Διάγραμμα 3-2b)** απεικονίζει τη διατήρηση της ενέργειας κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης.

Σε μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί τα προηγούμενα χρόνια για φυσαλίδες χωρίς εξωτερικό περίβλημα οι οποίες ταλαντώνονται κοντά σε άλλες φυσαλίδες ή κοντά σε γειτονικό σύνορο, έχει παρατηρηθεί ότι αναπτύσσεται μια δύναμη έλξης ή άπωσης μεταξύ των φυσαλίδων ή μεταξύ φυσαλίδας και γειτονικού συνόρου. Η δύναμη αυτή είναι η γνωστή δύναμη Bjerknes. Για την περίπτωση των δύο φυσαλίδων που αλληλεπιδρούν, η πρώτη κινείται λόγω της επιτάχυνσης του ρευστού που προκαλούν οι ταλαντώσεις της δεύτερης και αντίστροφα. Η δύναμη είναι ελκτική όταν αυτές ταλαντώνονται σε φάση, ενώ ισχύει το αντίθετο όταν ταλαντώνονται εκτός φάσης [56], [70]. Έχει βρεθεί, επίσης, ότι η δύναμη Bjerknes είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των δύο φυσαλίδων για σταθερό πλάτος εξωτερικής διαταραχής ή ευθέως ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της διαταραχής για δεδομένη αρχική απόσταση [71], [72]. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις που διεξήχθησαν για το ίδιο σετ παραμέτρων που αναφέρθηκε παραπάνω, αλλά για απόσταση της μικροφυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα από το στερεό τοίχωμα ίση με μία αρχική διάμετρο της μικροφυσαλίδας  $d_0 = 2$  και πλάτος εξωτερικής διαταραχής ημιτονοειδούς μορφής  $P_\infty = P_{st} [1 + \varepsilon \cdot \cos t]$  με  $\varepsilon = 1$ , έδειξαν ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής της η μικροφυσαλίδα πλησιάζει το τοίχωμα, λόγω ανάπτυξης της ελκτικής δύναμης Bjerknes, **Διάγραμμα 3-3a)**. Στο **Διάγραμμα 3-3b)**



**Διάγραμμα 3-3:** a) Σχήμα της μικροφυσαλίδας στην αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη) και στη φάση συμπίεσης (μπλε), b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας. Ημιτονοειδής αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ )

αποτυπώνονται οι πρώτες πέντε ιδιομορφές σχήματος με  $P_0$  να υποδηλώνει τις ταλαντώσεις όγκου της μικροφυσαλίδας και  $P_1$  τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ότι κατά τη φάση διαστολής η μικροφυσαλίδα παραμένει σχεδόν σφαιρική, ενώ κατά τη συμπίεση παραμορφώνεται εμφανίζοντας την ιδιομορφή  $P_2$ . Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ το πλάτος της ακουστικής διαταραχής βρίσκεται κάτω από το προβλεπόμενο, για ταλαντώσεις σχήματος λόγω υποαρμονικού/αρμονικού συντονισμού για μικροφυσαλίδα μακριά από τοίχωμα, η παρουσία του τελευταίου μειώνει σημαντικά το κατώφλι έναρξης ταλαντώσεων σχήματος. Τέλος, η μετατόπιση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας γίνεται εντονότερη κατά τη φάση συμπίεσης, ενώ κυριαρχείται από σχήματα επιμηκυμένα κατά τον άξονα συμμετρίας (prolate).

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, στη βιβλιογραφία [13] αναφέρεται ότι η δύναμη Bjerknes είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ δύο φυσαλίδων που ταλαντώνονται και ευθέως ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της εξωτερικής διαταραχής.

Δηλαδή για τη μέση τιμή της δύναμης Bjerknes ισχύει:  $\hat{F} \sim \frac{R_{1,0}^3 \cdot R_{2,0}^3 \cdot \rho_l}{d^2} \varepsilon^2$ , όπου  $R_{1,0}$ ,  $R_{2,0}$ : οι

αρχικές ακτίνες των δύο μικροφυσαλίδων,  $d$ : η αρχική απόσταση μεταξύ τους και  $\varepsilon$ : το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής. Συνεπώς, η δύναμη Bjerknes που ασκείται στην πρώτη φυσαλίδα θα

είναι:  $\hat{F} = \rho_l \cdot R_{1,0}^3 \cdot \hat{a} \Rightarrow \frac{R_{1,0}^3 \cdot R_{2,0}^3 \cdot \rho_l}{d^2} \varepsilon^2 \sim \rho_l \cdot R_{1,0}^3 \cdot \hat{a} \Rightarrow \hat{a} \sim \frac{R_{2,0}^3 \cdot \rho_l}{d^2} \varepsilon^2$ , όπου  $\hat{a}$ : η μέση

επιτάχυνση της φυσαλίδας. Για δεδομένο μέγεθος φυσαλίδων, γνωστό ρευστό και σταθερό

πλάτος εξωτερικής διαταραχής ισχύει:  $\hat{a} \sim \frac{1}{d^2} \Rightarrow \hat{a} \cdot d^2 = const$ . Για δεδομένη απόσταση θα

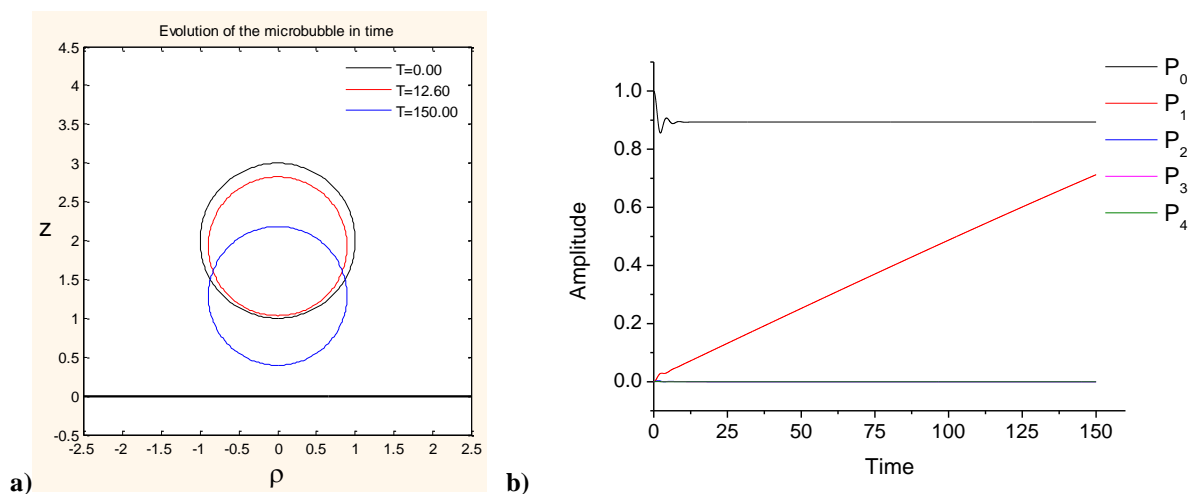
ισχύει:  $\hat{a} \sim \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\hat{a}}{\varepsilon^2} = const$ . Για την επαλήθευση αυτής της συσχέτισης, στην περίπτωση

ταλαντούμενης μικροφυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα κοντά σε στερεό τοίχωμα, έγιναν προσομοιώσεις για σταθερό πλάτος διαταραχής,  $\varepsilon = 1$ , αλλάζοντας την αρχική απόσταση από το τοίχωμα και αντίστοιχα για σταθερή αρχική απόσταση,  $d_0 = 10$ , μεταβάλλοντας το πλάτος της διαταραχής. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

$\varepsilon = 1$			$d_0 = 10$		
	$\hat{a}$	$\hat{a} \cdot d^2$		$\hat{a}$	$\hat{a}/\varepsilon^2$
$d_0 = 10$	0.580669E-05	5.806695E-03	$\varepsilon = 1$	0.580669E-04	5.806695E-05
$d_0 = 8$	9.148456E-05	5.855012E-03	$\varepsilon = 2$	2.351017E-04	5.877541E-05
$d_0 = 6$	1.636356E-04	5.890882E-03	$\varepsilon = 3$	5.341037E-04	5.934485E-05

Στον παραπάνω πίνακα τα μεγέθη  $\hat{a} \cdot d^2$  και  $\frac{\hat{a}}{\varepsilon^2}$  παραμένουν πρακτικά αμετάβλητα. Συνεπώς, γίνεται φανερό ότι η συσχέτιση της μέσης επιτάχυνσης της φυσαλίδας με το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής καθώς επίσης και εκείνης μεταξύ της μέσης επιτάχυνσης με την αρχική απόσταση από το τοίχωμα επαληθεύεται ακόμα και για μικροφυσαλίδες που περιβάλλονται από ελαστική μεμβράνη.

Η ανάπτυξη της δευτερογενούς δύναμης Bjerknes παρατηρείται και στην περίπτωση βηματικής αλλαγής της πίεσης στο περιβάλλον ρευστό  $P_\infty = P_{st}(1 + \varepsilon)$  με  $\varepsilon = 1$ , **Διάγραμμα 3-4a**), διατηρώντας το ίδιο σετ παραμέτρων και απόσταση από το τοίχωμα ίση με μία αρχική διάμετρο της μικροφυσαλίδας  $d_0 = 2$ . Αρχικά η φυσαλίδα εκτελεί ταλαντώσεις όγκου με περίοδο που καθορίζεται από την φυσική συχνότητα  $\omega_0 = 7113760 \text{ rad/s}$  (ή  $\nu_0 = 1.132 \text{ MHz}$ ) για ταλαντώσεις όγκου. Η ταλάντωση της φυσαλίδας φθίνει και τελικώς μηδενίζεται, λόγω του διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης που είναι και ο κυρίαρχος μηχανισμός απόσβεσης. Κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων όγκου, όπως αυτές αποτυπώνονται μέσω της χρονομεταβολής της ακτινικής ιδιομορφής  $P_0$ , τροφοδοτείται με ενέργεια η ιδιομορφή  $P_1 = \cos \theta$ , η οποία εκφράζει τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας και κατά συνέπεια την προσέγγισή της προς το τοίχωμα, **Διάγραμμα 3-4b**). Με το πέρας των ταλαντώσεων ο  $P_1$  συνεχίζει να αυξάνεται με γραμμικό τρόπο, ήτοι η φυσαλίδα κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα λόγω αδράνειας. Η ταχύτητα αυτή δε μπορεί να ανακοπεί, λόγω της απουσίας των ιξωδών δυνάμεων του περιβάλλοντος ρευστού (ιδανικό ρευστό). Το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής βρίσκεται κάτω από το όριο στατικού λυγισμού που προβλέπει η ανάλυση ευστάθειας σφαιρικού κελύφους για



**Διάγραμμα 3-4:** α) Σχήμα της μικροφυσαλίδας στην αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), αμέσως μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη) και στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε), β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας. Βηματική αλλαγή της πίεσης ( $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ ).

το συγκεκριμένο σετ παραμέτρων. Συνεπώς, η σφαιρική διαμόρφωση είναι ευσταθέστερη, με χαμηλότερη ενέργεια έναντι άλλων διαμορφώσεων. Το σχήμα της μικροφυσαλίδας παραμένει σφαιρικό, καθ' όλη τη διάρκεια της πορείας της προς το τοίχωμα. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι η δράση του ιξώδους της μεμβράνης αφορά κυρίως στην απόσβεση των ταλαντώσεων όγκου. Όπως θα φανεί καλύτερα στις επόμενες ενότητες, για μεγαλύτερο πλάτος της αρχικής διαταραχής η παραμόρφωση σχήματος παραμένει ακόμη και μετά το πέρας των ταλαντώσεων όγκου. Παρ' όλα αυτά η σταθερή μεταφορική ταχύτητα του κέντρου βάρους της φυσαλίδας δεν είναι απολύτως εφικτή, παρά μόνο στην περίπτωση επίτευξης σχήματος που αντιστοιχεί σε στατική ισορροπία. Διαφορετικά, ακόμη και μετά την απόσβεση των ταλαντώσεων όγκου, η μη γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ ιδιομορφών σχήματος τροφοδοτεί τη μεταφορική κίνηση με αποτέλεσμα την απόκλιση από την γραμμικότητα στην χρονική μεταβολή του πλάτους του  $P_1$ .

## 4. Αριθμητικά αποτελέσματα για βηματική αλλαγή της πίεσης

### 4.1 Στατική Ισορροπία – Ενδεχόμενο Δημιουργίας Jet

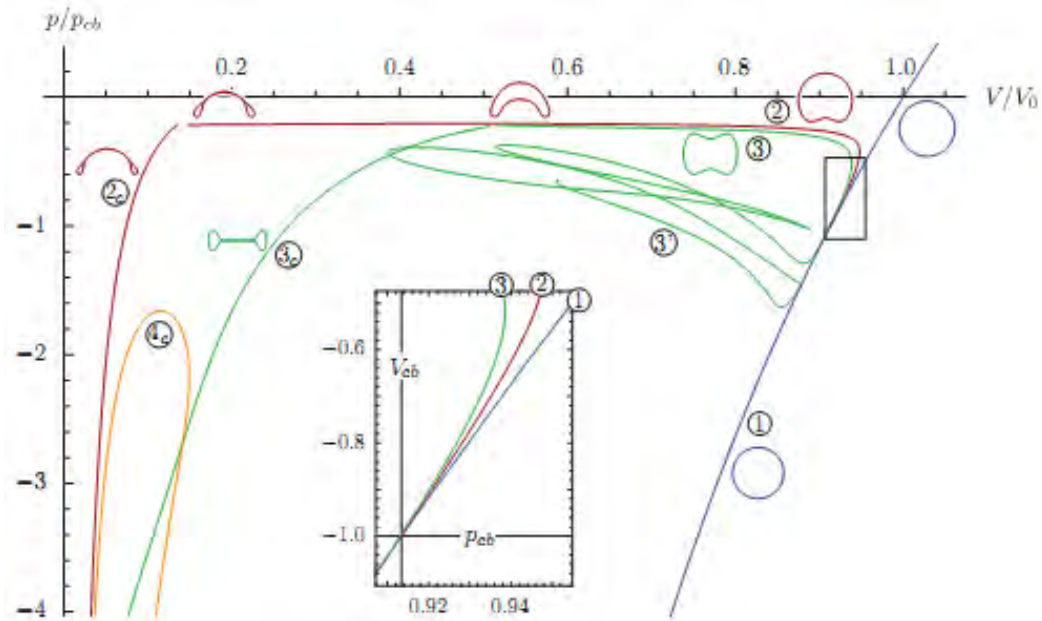
Σε μία πρώτη προσπάθεια κατανόησης της δυναμικής συμπεριφοράς μικροφυσαλίδων με ελαστικό περίβλημα όταν βρίσκονται κοντά σε στερεό τοίχωμα, εξετάστηκε η αλληλεπίδρασή τους με βηματική διαταραχή της πίεσης. Στην περίπτωση αυτή οι μικροφυσαλίδες χωρίς ελαστικό περίβλημα, θα τις αποκαλούμε ελεύθερες φυσαλίδες, εκτελούν ταλαντώσεις όγκου και σχήματος ενώ με την επίδραση του ιξώδους καταλήγουν σε στατική διαμόρφωση στο σφαιρικό σχήμα με διαφορετική ακτίνα, αναλόγως της αρχικής διαταραχής. Η εν λόγω ισορροπία για την περίπτωση αμελητέας τάσης ατμών και αμελητέας διάχυσης, λόγω της ταχύτητας του φαινομένου, είναι ευσταθής για μικρές διαταραχές της πίεσης [73], [74],

$$P_{G0} - P_{st} = \frac{2\sigma}{R_0}, \quad P_{GE} - P_{\infty} = \frac{2\sigma}{R_E}, \quad P_{\infty} = P_{st}(1 + \varepsilon), \quad (4-1)$$

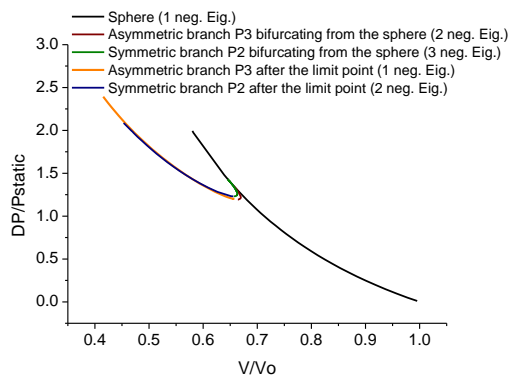
$$P_{GE} \frac{4}{3} \pi R_E^3 = P_{G0} \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad \text{για ισοθερμοκρασιακή διεργασία}$$

Η σφαιρική συμμετρία ανατρέπεται για αρκετά μεγάλο πλάτος βηματικής διαταραχής, λόγω της επιτάχυνσης που αναπτύσσεται στη φάση επαναφοράς, μετά τη συμπίεση, κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων όγκου που εκτελεί η φυσαλίδα (dynamic Blake threshold [75]). Η παρουσία του τοιχώματος δεν αναιρεί την παραπάνω στατική ισορροπία, όμως μειώνει το παράθυρο ισχύος της. Παράλληλα, καθώς το πλάτος της διαταραχής αυξάνεται, παρατηρείται έντονη παραμόρφωση και εμφάνιση υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) που κατευθύνεται με μεγάλη ταχύτητα προς την πλευρά της ελεύθερης επιφάνειας που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα [76]. Έτσι προκαλείται κατάρρευση της φυσαλίδας, προτού επιτευχθεί η στατική ισορροπία. Το ιξώδες του περιβάλλοντος ρευστού παίζει σημαντικό ρόλο στο φαινόμενο αυτό, με αποτέλεσμα να το αναιρέσει για αρκετά μεγάλη τιμή ιξώδους, για δεδομένο μέγεθος φυσαλίδας και πλάτος διαταραχής. Στην παρούσα ενότητα διερευνήθηκε η συμπεριφορά μικροφυσαλίδας με ελαστικό κέλυφος σε περιβάλλον βηματικής διαταραχής προκειμένου να διερευνηθεί: α) η δυνατότητα παραγωγής διαγράμματος διακλάδωσης που θα απεικονίζει διαφορετικές διαμορφώσεις στατικής ισορροπίας του κελύφους και β) η πιθανότητα εμφάνισης ιδιομορφιών πεπερασμένου χρόνου, όπως η δημιουργία jet, που θα αναιρέσουν το ενδεχόμενο στατικής ισορροπίας. Επεκτείνοντας ανάλογες εργασίες από τη βιβλιογραφία [77], [78] **Διάγραμμα 4-1**, κατασκευάστηκαν διαγράμματα διακλάδωσης [79] για κελύφη που ακολουθούν τους καταστατικούς νόμους Mooney-Rivlin **Διάγραμμα 4-2a),b)**, Hooke **Διάγραμμα 4-3a)** και Skalak **Διάγραμμα 4-3b)** για διαφορετικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας, όπου προκύπτει

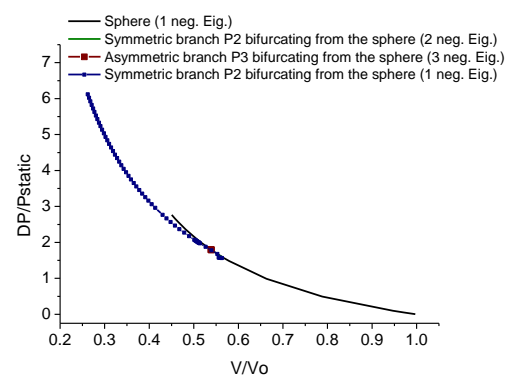




**Διάγραμμα 4-1:** Διάγραμμα διακλάδωσης ελαστικού κελύφους για αδιάστατη καμπτική ελαστικότητα  $B = 0.087$  [Knoche & Kierfeld (2011)]

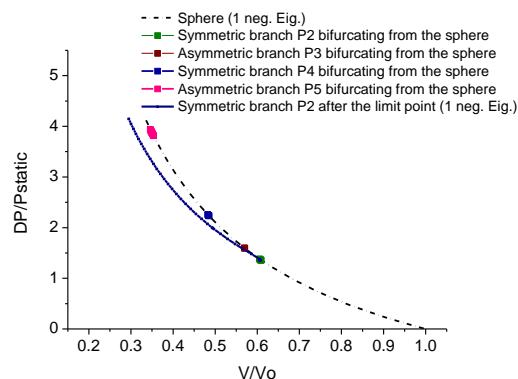


a)

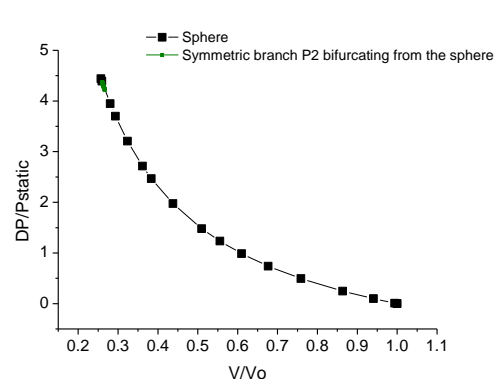


b)

**Διάγραμμα 4-2:** Διαγράμματα διακλάδωσης για καταστατικό νόμο κελύφους Mooney-Rivlin: a) για  $G_{3D}=80$  MPa και b)  $G_{3D}=40$  MPa.



a)



b)

**Διάγραμμα 4-3:** Διαγράμματα διακλάδωσης για καταστατικό νόμο κελύφους: a) Hooke με  $G_{3D}=80$  MPa και b) Skalak με  $G_{3D}=80$  MPa.



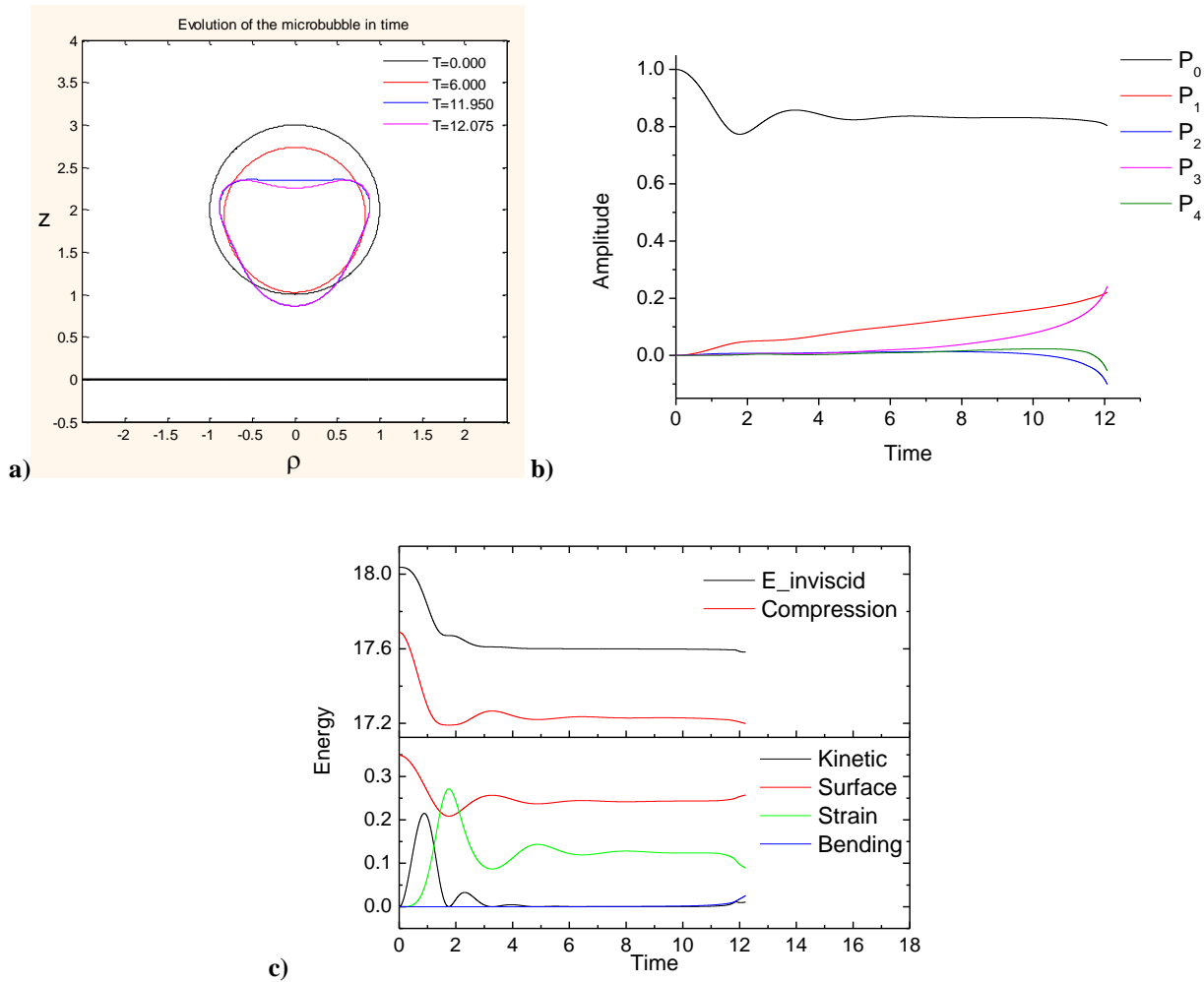
η δυνατότητα εμφάνισης συμμετρικών prolate ή ασύμμετρων σχημάτων ανάλογα με τη σειρά που προκύπτουν οι ιδιομορφές λυγισμού του σφαιρικού κελύφους. Παράλληλα, η πειραματική βιβλιογραφία αναφέρει το ενδεχόμενο σχηματισμού jet κατά την αλληλεπίδραση μικροφουσαλίδων contrast agent με γειτονικό τοίχωμα, χωρίς όμως αρκετές λεπτομέρειες αναφορικά με τον μηχανισμό [19], [20].

Στο πλαίσιο αυτό μελετήθηκε η αλληλεπίδραση μικροφουσαλίδας τύπου Contrast Agent με γειτονικό στερεό και άκαμπτο τοίχωμα, όταν στο περιβάλλον ρευστό επιβάλλεται βηματική αλλαγή πίεσης της μορφής  $P_\infty = P_{st}(1 + \varepsilon)$  με  $\varepsilon = 2$ . Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι οι κάτωθι:

$R_0 = 3.6 \mu m$ ,  $\mu_{3D} = 20 Pa \cdot s$ ,  $G_{3D} = 80 MPa$ ,  $\sigma = 0.051 \frac{N}{m}$ ,  $k_B = 3 \cdot 10^{-14} N \cdot m$ ,  $\nu_s = 0.5$ ,  
 $b = 0$  (MR shell),  $\nu_0 = 1 MHz$ ,  $\nu_f = 1.7 MHz$ ,  $\gamma = 1.07$ ,  $P_{st} = 101325 Pa$ ,  $\rho_l = 998 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\mu_l = 0$ ,  $\delta = 1 nm$   
 και αφορούν σε μαλακό κέλυφος από φωσφολιπίδιο του οποίου έχει μελετηθεί υπολογιστικά η απόκριση, όταν δεν υπάρχει γειτονικό τοίχωμα [35]. Η αρχική απόσταση του κέντρου μάζας της μικροφουσαλίδας από το τοίχωμα είναι ίση με μία διάμετρο της φουσαλίδας την αρχική χρονική στιγμή,  $d_0 = \frac{d'}{R_{bal}} = 2$ . Στην ουσία πρόκειται για μία από τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.6 με τη διαφορά ότι το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής είναι διπλάσιο. Οι φυσικές παράμετροι του κελύφους διαμορφώνουν τη στατική ισορροπία που απεικονίζεται στο διάγραμμα διακλάδωσης του **διαγράμματος 4-2a**) (κόκκινη γραμμή). Λόγω της μεγάλης τιμής του μέτρου ελαστικότητας  $\chi = 3 \cdot G_{3D} \cdot \delta$  και της σκλήρυνσης του κελύφους στη συμπίεση ο λυγισμός προκρίνει ασύμμετρη ιδιομορφή. Ο εν λόγω κλάδος είναι ασταθής, αναπτύσσεται σε τιμές υπερπίεσης μικρότερες της κρίσιμης, παρουσιάζει οριακό σημείο (limit point) και συνεχίζει να αναπτύσσεται για μεγαλύτερες τιμές της υπερπίεσης και μεγάλο βαθμό συμπίεσης, ενώ είναι γραμμικά ευσταθής, αν και χαρακτηρίζεται από μικρότερη ενέργεια σε σχέση με τη σφαιρική διαμόρφωση για τις ίδιες τιμές παραμέτρων.

Η προσομοίωση που απεικονίζεται στο **Διάγραμμα 4-4** εμπίπτει στον κλάδο μετά το οριακό σημείο, ενώ είναι για τιμή της υπερπίεσης πάνω από την κρίσιμη. Όπως φαίνεται και από την εξέλιξη του πλάτους του  $P_0$  και  $P_1$ , **Διάγραμμα 4-4b**), παράλληλα με τις ταλαντώσεις σχήματος, **Διάγραμμα 4-4a**), η φουσαλίδα έλκεται από το τοίχωμα λόγω ανάπτυξης της δευτερογενούς δύναμης Bjerknes, η οποία είναι εντονότερη της αντίστοιχης στην ενότητα 3.6 εξαιτίας του μεγαλύτερου πλάτους της διαταραχής. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, όσο διαρκούν οι ταλαντώσεις του  $P_0$ . Όταν λόγω της επίδρασης του ιξώδους του κελύφους οι ταλαντώσεις όγκου αποσβέννυνται, η φουσαλίδα αποκτά στατική ισορροπία με συμπιεσμένο

σφαιρικό σχήμα, ενώ μετακινείται με σταθερή ταχύτητα λόγω αδράνειας και έλλειψης ιξώδους στο περιβάλλον ρευστό που να αντιδρά στη μεταφορική κίνηση της φυσαλίδας. Όμως, λόγω του

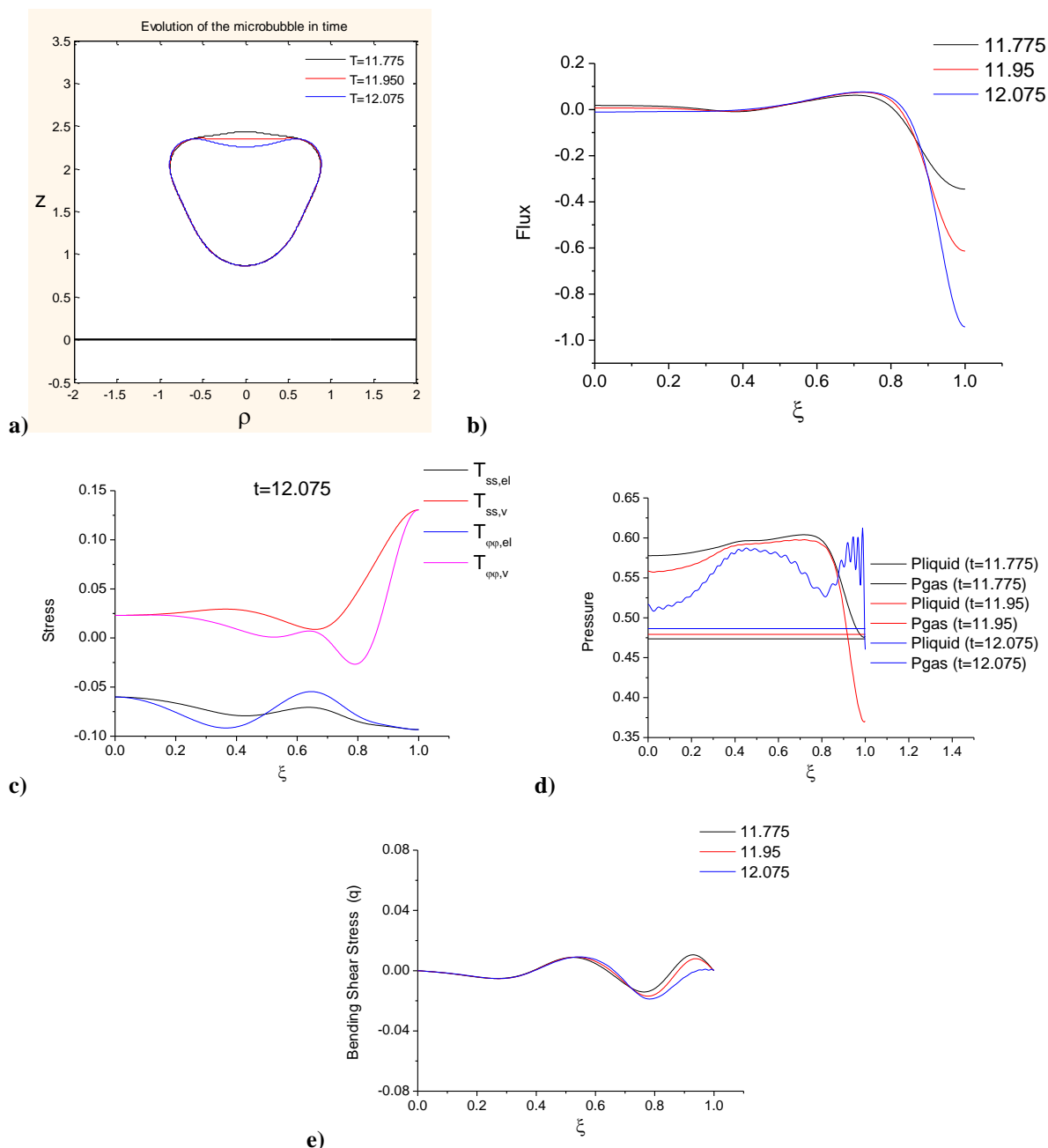


**Διάγραμμα 4-4:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή της διαμόρφωσης επίπεδης περιοχής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)] , b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ .

ότι η βηματική διαταραχή ξεπερνά την κρίσιμη τιμή στατικού λυγισμού, μετά από ένα χρονικό διάστημα εμφανίζεται παραμόρφωση σχήματος που κυριαρχείται από ασύμμετρες ιδιομορφές. Τα παραπάνω αποτυπώνονται και στην μεταβολή της ενέργειας  $E_{inviscid}$  του συστήματος υγρό/κέλυφος που δε συμπεριλαμβάνει αυτήν που αναπτύσσεται στο κέλυφος λόγω του ιξώδους, **Διάγραμμα 4-4c**). Όσο διαρκεί η απόσβεση των ταλαντώσεων όγκου καταγράφεται μείωση της  $E_{inviscid}$ , ενώ παραμένει σταθερή όταν επιτυγχάνεται στατική ισορροπία σφαιρικού σχήματος. Στην ίδια χρονική περίοδο ο  $P_1$  αυξάνεται γραμμικά σηματοδοτώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας. Όταν ενεργοποιείται η διαδικασία λυγισμού του κελύφους μετά από την πάροδο ικανού χρόνου υπό συμπίεση, παρατηρείται ανάπτυξη ιδιομορφών

σχήματος με παράλληλη μείωση του όγκου, λόγω και της επίδρασης του διαστολικού ιξώδους του κελύφους που τείνει να αποσβέσει τυχόν μεταβολές όγκου και να αποκαταστήσει στατική ισορροπία στο ευσταθές ασύμμετρο σχήμα που καταγράφεται στο διάγραμμα διακλάδωσης, **Διάγραμμα 4-1** και **4-2a**). Η παραμόρφωση αποτυπώνεται μέσω της ανάπτυξης ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, **Διάγραμμα 4-4a**), οι οποίες εκφράζονται μέσω των πολωνύμων Legendre. Περισσότερο βαθμού πολωνύμου Legendre υποδηλώνει ασύμμετρη ιδιομορφή και κατά συνέπεια ασύμμετρη παραμόρφωση της φυσαλίδας. Το αντίθετο ισχύει για άρτιου βαθμού πολωνύμου. Παράλληλα, παρατηρείται η τάση για μη γραμμική αύξηση του πλάτους του  $P_1$  λόγω μη γραμμικής αλληλεπίδρασης γειτονικών ιδιομορφών σχήματος  $P_2$  και  $P_3$  [80], [81] που αναπτύσσονται γρήγορα λόγω της ασύμμετρης μεταλυγισμικής συμπεριφοράς.

Κατά τη φάση του λυγισμού αναπτύσσονται υψηλές ταχύτητες γύρω από το βόρειο πόλο του κελύφους λόγω της διαφοράς πίεσης με το διάκενο μεταξύ της φυσαλίδας και του τοιχώματος, **Διάγραμμα 4-5b**), και της ροής ανακοπής που διαμορφώνεται [82], [75]. Το σχήμα του κελύφους τείνει να αποκτήσει οδόντωση στην περιοχή γύρω από τον πόλο και στη διαδικασία αυτή εμφανίζει την αλληλουχία σχημάτων που φαίνεται στο **Διάγραμμα 4-5a**) μέσω μίας περίπου επίπεδης διαμόρφωσης γύρω από τον πόλο. Ταυτόχρονα αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις στο κομμάτι του κελύφους που παραμένει περίπου σφαιρικό μακριά από τον πόλο, **Διάγραμμα 4-5c**). Οι έντονες θλιπτικές τάσεις στην περιοχή αυτή σηματοδοτούν το φαινόμενο αξονοσυμμετρικού λυγισμού [83] στην περιοχή του πόλου και το πέρασμα σε σχήμα με οδόντωση, όπως άλλωστε προβλέπει και το σχετικό διάγραμμα διακλάδωσης, **Διάγραμμα 4-2a**). Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σαν αποτέλεσμα της ισχυρής υδροδυναμικής φόρτισης του κελύφους μέσω της διαφοράς πίεσης στην περιοχή γύρω από τον πόλο, **Διάγραμμα 4-5d**). Η επιτάχυνση στον πόλο είναι πολύ μεγάλη με αποτέλεσμα την εμφάνιση περιοχής μικρής καμπυλότητας και μηδενικής διάτμησης  $q$ , **Διάγραμμα 4-5e**). Λόγω όμως της ανάπτυξης του υδροδυναμικού φορτίου μέσω της δυναμικής πίεσης το φαινόμενο καταγράφεται εδώ με την μορφή απόκλισης (“divergence”) [84]. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι στη διαδικασία αυτή τείνει να μειωθεί περαιτέρω ο όγκος της φυσαλίδας γεγονός που ενεργοποιεί τις ιξώδεις τάσεις προκειμένου να αναιρέσουν αυτήν την τάση. Αυτό φαίνεται και από το γράφημα της ενέργειας  $E_{inviscid}$ , **Διάγραμμα 4-4c**), το οποίο εμφανίζει πτωτική τάση στη φάση του λυγισμού καθώς και στο γράφημα των ιξωδών τάσεων, **Διάγραμμα 4-5c**). Οι τάσεις αυτές είναι κυρίως εφελκυστικές σε μία προσπάθεια να ανακατανεύμουν την κινητική ενέργεια στο κέλυφος κάθετα στον άξονα συμμετρίας επιβραδύνοντας έτσι τη διαδικασία οδόντωσης του κελύφους έως την επίτευξη στατικής ισορροπίας. Παράλληλα με την αντίσταση σε κάμψη αποτρέπουν την ανάπτυξη

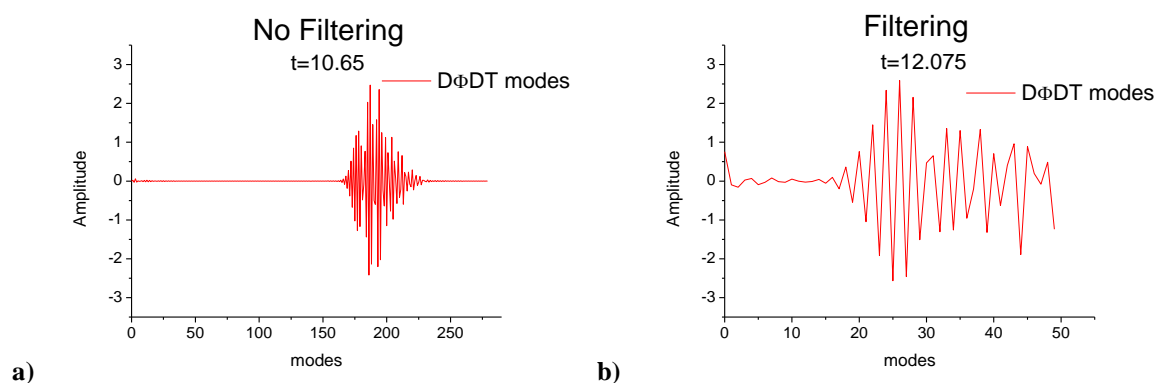


**Διάγραμμα 4-5:** α) Σχήμα της μικροφουσαλίδας λίγο πριν (μαύρη), τη στιγμή διαμόρφωσης της επίπεδης περιοχής (κόκκινη) και λίγο μετά (μπλε), β) Κατανομή κάθετης ταχύτητας του κελύφους στις τρεις χρονικές στιγμές, γ) Κατανομή ιζωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος της φουσαλίδας την τελική χρονική στιγμή, δ) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους στις τρεις χρονικές στιγμές και ε) Κατανομή καμπτικής διατμητικής τάσης λόγω κάμψης στο κέλυφος στις τρεις χρονικές στιγμές.

καμπτικών τάσεων στην περιοχή του πόλου γεγονός που εξηγεί και τη μη δημιουργία jet στη φάση αυτή.

Η παραπάνω δυναμική εξέλιξη του φαινομένου “divergence” αντανακλά και στην εκθετική αύξηση των ιδιομορφών σχήματος, **Διάγραμμα 4-4b**). Όμως παράλληλα παρατηρείται ανάπτυξη ιδιομορφών μικρού μήκους κύματος στο φάσμα της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας, **Διάγραμμα 4-6b**) και της πίεσης, **Διάγραμμα 4-5d**) και στην

επακόλουθη κατάρρευση της προσομοίωσης. Οι πρώτες ιδιομορφές συμφωνούν με αυτές που χαρακτηρίζουν τα ασύμμετρα σχήματα που προβλέπει το διάγραμμα διακλάδωσης, **Διάγραμμα 4-1**, όμως η διαδικασία λυγισμού μέσω της οποίας παράγονται δε μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά στο πλαίσιο της παρούσας μοντελοποίησης του προβλήματος. Η εν λόγω προσομοίωση, καθώς και όλες οι προσομοιώσεις που καταλήγουν σε μεταλυγισμικό σχήμα που παρουσιάζει οδόντωση, σταματούν πριν την επίτευξη στατικής ισορροπίας, καθώς αδυνατούν να παρακολουθήσουν το φαινόμενο απόκλισης “divergence” που εμφανίζει το κέλυφος κατά τη χρονική μετάβαση σχήματος που απεικονίζει το **Διάγραμμα 4-5a**). Η ανάπτυξη των ιδιομορφών μικρού μήκους που συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα συναντάται και εδώ με την έναρξη της διαδικασίας λυγισμού, **Διάγραμμα 4-6a**), στην ανάλυση ιδιομορφών της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας και αρχικά αντιμετωπίζεται μέσω φιλτραρίσματος. Γρήγορα όμως, μετά τη μετάβαση που απεικονίζει το **Διάγραμμα 4-5a**) και με την προϊούσα εμφάνιση της περιοχής μηδενικής καμπυλότητας, η διαδικασία ανάπτυξης ιδιομορφών μικρού μήκους επιταχύνεται και η προσομοίωση καταρρέει πριν την εμφάνιση στατικής ισορροπίας.

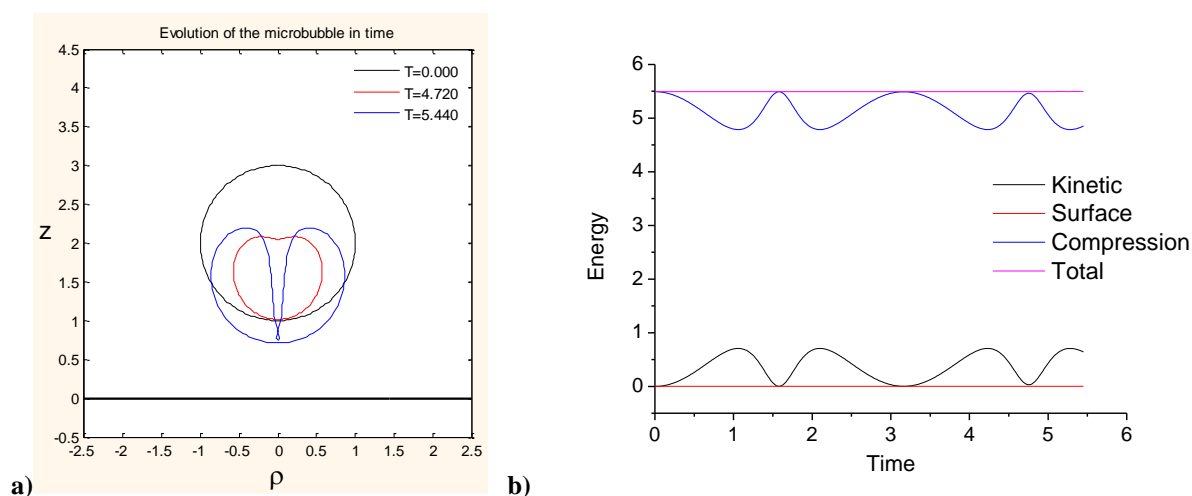


**Διάγραμμα 4-6:** Διαγράμματα πλάτους των ιδιομορφών της χρονικής παραγώγου του δυναμικού της ταχύτητας στο τέλος της προσομοίωσης, a) χωρίς εφαρμογή φίλτρου και b) με την εφαρμογή φίλτρου.

Η σημαντική επιδείνωση στην ακρίβεια της λύσης στην περιοχή γύρω από τον πόλο ενδεχομένως οφείλεται στη συγκέντρωση μεγάλου αριθμού Λαγκραντζιανών σωματιδίων στη περιοχή γύρω από τον πόλο, σε αντίθεση με προβλήματα ελεύθερων επιφανειών όπου τα σωματίδια καταφεύγουν σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας και χρειάζεται ανακατανομή του πλέγματος [65], όπου τα ελλειπτικά ολοκληρώματα που συνιστούν τους ιδιόμορφους πυρήνες της Λαπλασιανής παρουσιάζουν ημιτονοειδή συμπεριφορά. Προσεκτικότερος χειρισμός στην κατασκευή του πίνακα ώστε να αποφεύγονται υπολογισμοί στην περιοχή του πόλου, καθώς και επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης μέσω ολοκληρωτικής εξίσωσης δευτέρου είδους [55], ενδεχομένως να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό και είναι αντικείμενο τρέχουσας

διερεύνησης. Εναλλακτικά, θα πρέπει να ενσωματωθεί στη διακριτοποίηση του κάθετου ισοζυγίου τάσεων το γεγονός ότι τα σωματίδια της διεπιφάνειας δεν είναι Λαγκραντζιανά που κινούνται με την ταχύτητα του ρευστού, αλλά σημεία σήμανσης (marker points) τα οποία μετακινούνται με συγκεκριμένο τρόπο, δηλαδή με την κάθετη ταχύτητα του ρευστού και με την εφαπτομενική ταχύτητα που ορίζει το εφαπτομενικό ισοζύγιο τάσεων, έτσι ώστε να είναι εναρμονισμένη η ολική παράγωγος του δυναμικού ταχύτητας με τη διαδικασία ανανέωσης των διεπιφανειακών σημείων. Με τον τρόπο αυτό αναμένεται να υπάρξει βελτίωση της αριθμητικής ακρίβειας στην μεταλυγισμική φάση οπότε και αναπτύσσονται σχετικά μεγάλες ταχύτητες στη διεπιφάνεια του κελύφους στην περιοχή του πόλου όπου αναπτύσσεται η εσοχή.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, στη μικροφουσαλίδα με ελαστικό περίβλημα το ιξώδες της μεμβράνης δρα ως μηχανισμός απόσβεσης των ταλαντώσεων όγκου και συνεπώς αποκτά σταθερή μεταφορική ταχύτητα με κατεύθυνση προς το τοίχωμα. Επιπλέον, κατά την μεταλυγισμική φάση οι ιξώδεις τάσεις που αναπτύσσονται τείνουν να τεντώσουν το κέλυφος χωρίς τη δημιουργία περιοχής υψηλής καμπυλότητας, λόγω και της αντίστασης στον λυγισμό, με αποτέλεσμα την αποφυγή δημιουργίας jet. Στην αντίστοιχη φουσαλίδα χωρίς περίβλημα δεν υπάρχει τέτοιος μηχανισμός, με αποτέλεσμα τη διαρκή ταλάντωσή της, την επιταχυνόμενη κίνησή της προς το τοίχωμα και την τελική της κατάρρευση με δημιουργία αιχμηρής εσοχής (jet) με μεγάλη καμπυλότητα στο τμήμα της διεπιφάνειάς της μακριά από το τοίχωμα, **Διάγραμμα 4-7a**). Ο συνδυασμός της ύπαρξης ροής ανακοπής, που αναφέρθηκε παραπάνω, με την εμφάνιση jet έχει καταδειχθεί σε κλασικές μελέτες κατάρρευσης φουσαλίδων αερίου [82], [75]. Στην περίπτωση όμως της φουσαλίδας με ελαστικότητα η φουσαλίδα δεν καταρρέει με την ίδια ευκολία, αλλά λόγω της επίδρασης του διαστολικού ιξώδους και της αντίστασης στον



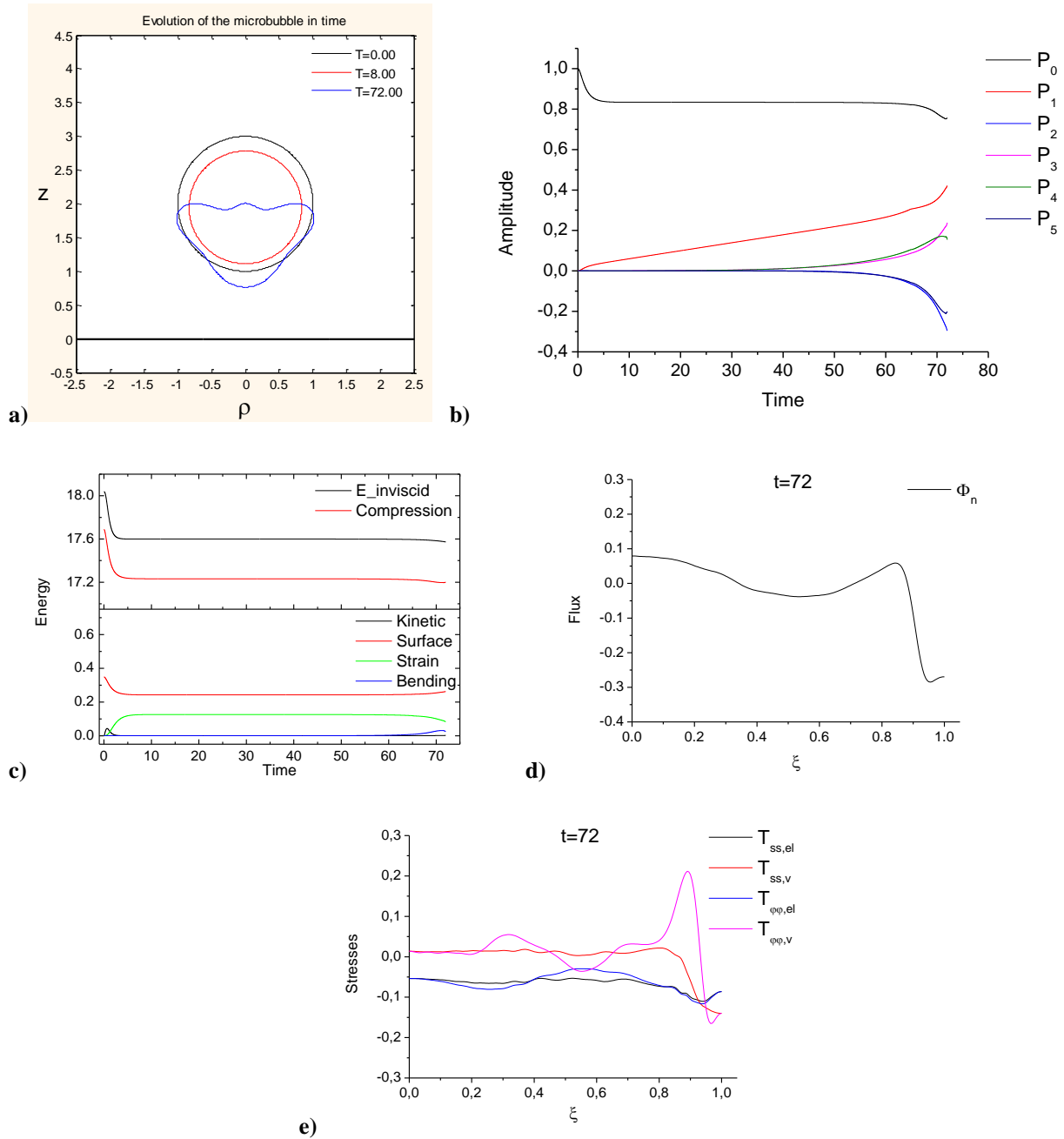
**Διάγραμμα 4-7:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας χωρίς εξωτερικό περίβλημα [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση μέγιστης συμπίεσης λίγο πριν την έναρξη του jet (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)] και b) Διάγραμμα κατανομής ενέργειας της μικροφουσαλίδας κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ .

λυγισμό του κελύφους υπάρχει η δυνατότητα ανακατανομής και απομείωσης της ενέργειας  $E_{inviscid}$ , **Διάγραμμα 4-4c**), ώστε να αποφευχθεί η ανάπτυξη ισχυρών καμπτικών τάσεων, **Διάγραμμα 4-5e**). Αντιθέτως, στις φυσαλίδες χωρίς περίβλημα η συνολική ενέργεια διατηρείται, **Διάγραμμα 4-7b**), ενώ δεν υπάρχει η δυνατότητα επίτευξης στατικής ισορροπίας πέραν αυτής που αντιστοιχεί στο σφαιρικό σχήμα, λόγω της ισοτροπίας της επιφανειακής τάσης που την διέπει.

Προκειμένου να πιστοποιηθεί η επίδραση των ιξωδών τάσεων, δοκιμάστηκε μεταβολή του διαστολικού ιξώδους της μεμβράνης διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους. Με την αύξηση του διαστολικού ιξώδους παρατηρήθηκε ότι η παραμόρφωση της φυσαλίδας λόγω λυγισμού και κατά συνέπεια το φαινόμενο “divergence”, καθυστέρησε στο χρόνο, **Διάγραμμα 4-8a**). Επίσης, οι αρχικές ταλαντώσεις όγκου της μικροφυσαλίδας αποσβένουν ταχύτερα με αποτέλεσμα η μεταφορική της ταχύτητα να είναι μικρότερη και συνεπώς η προσέγγιση στο τοίχωμα να γίνεται πιο αργά, **Διάγραμμα 4-8b**). Η δράση του ιξώδους καταγράφεται και στην πτωτική τάση με τον χρόνο της ενέργειας  $E_{inviscid}$ , **Διάγραμμα 4-8c**), τόσο αρχικά όσο και στο στάδιο της προσομοίωσης με την εμφάνιση του λυγισμού. Στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης, η περιοχή κοντά στον πόλο της μικροφυσαλίδας που βρίσκεται μακρύτερα από το τοίχωμα πλησιάζει με ταχύτητα προς το τοίχωμα, **Διάγραμμα 4-8d**). Λόγω αυτής της ταχύτητας αναπτύσσονται υψηλές ιξώδεις τάσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι ιξώδεις τάσεις στην φ-διεύθυνση,  $\tau_{\phi\phi,v}$ , φαίνεται ότι αλλάζουν απότομα πρόσημο στη γειτονιά του πόλου της μικροφυσαλίδας υποδηλώνοντας με τον τρόπο αυτό πιθανή διάρρηξη της μεμβράνης στην περιοχή αυτή, **Διάγραμμα 4-8e**).

Ταυτόχρονα το σχήμα του κελύφους παρουσιάζει εντονότερο εφελκυσμό στην περιοχή όπου αναπτύσσονται ισχυρές ιξώδεις τάσεις και κάθετα στον άξονα συμμετρίας, **Διάγραμμα 4-8a**), ενώ έχει ξεκινήσει η επιβράδυνση της κίνησης του πόλου προς τα μέσα, **Διάγραμμα 4-8d**). Η προσομοίωση και σε αυτήν την περίπτωση σταματάει στη φάση που αναπτύσσεται δυναμικά το φαινόμενο divergence/λυγισμού λόγω της γρήγορης ανάπτυξης ιδιομορφών μικρού μήκους. Και εδώ αναμένεται να προχωρήσει η επιβράδυνση του κελύφους και η διαδικασία μείωσης της ενέργειάς του μέσω των εφελκυστικών ιξωδών τάσεων, μέχρι να επιτευχθεί τελικά στατική ισορροπία ίδια με αυτήν του σχήματος **Διάγραμμα 4-4a**), χωρίς τη δημιουργία jet.



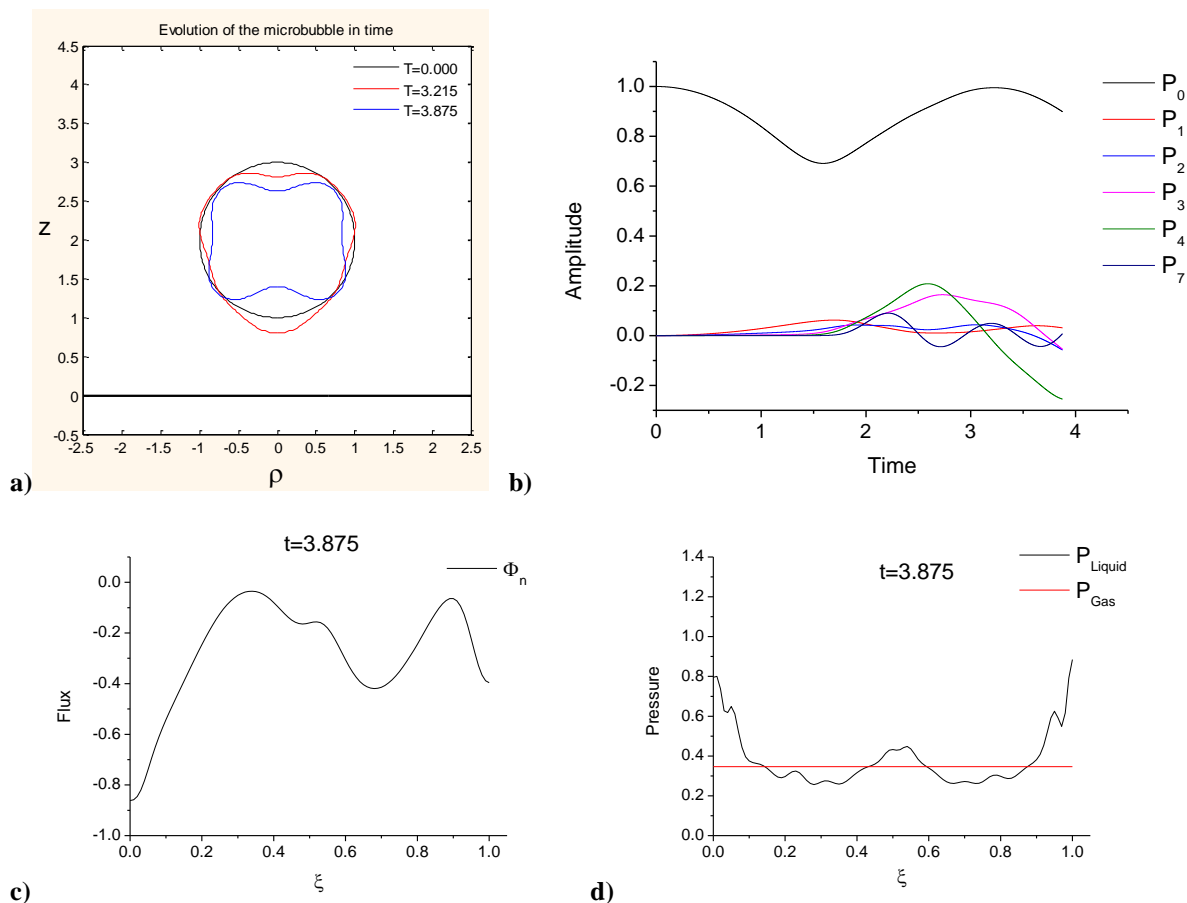


**Διάγραμμα 4-8:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, γ) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, δ) Διάγραμμα κάθετης ταχύτητας της διεπιφάνειας στο τέλος της προσομοίωσης και ε) Διάγραμμα ιξώδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος της φυσαλίδας, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=100 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{s}$ .

Για μηδενικό διαστολικό ιξώδες η μικροφυσαλίδα εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις, λόγω της απουσίας μηχανισμού απόσβεσης. Η ανάπτυξη των ιδιομορφών σχήματος συμβαίνει πολύ πιο γρήγορα με δεσπόζουσα αυτή της  $P_4$ , **Διάγραμμα 4-9a),b)**. Προς το τέλος της προσομοίωσης παρατηρείται μεγάλη κινητικότητα των πόλων της μικροφυσαλίδας, **Διάγραμμα 4-9c)**, οι οποίοι κινούνται ο ένας προς τη μεριά του άλλου. Και σε αυτή την περίπτωση, λόγω αλλαγής της καμπυλότητας των περιοχών κοντά στους πόλους εμφανίζεται το φαινόμενο του



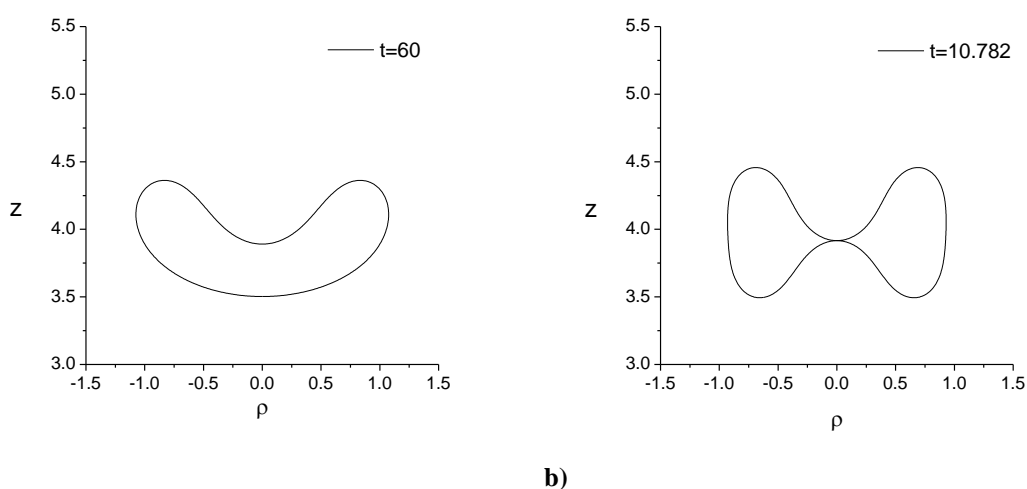
“divergence” οδηγώντας σε αστάθειες μικρού μήκους κύματος που εμφανίζονται στην χρονική παράγωγο του δυναμικού της ταχύτητας του κελύφους, αλλά και στην πίεση **Διάγραμμα 4-9d**), με αποτέλεσμα τη διακοπή της προσομοίωσης. Μηδενισμός της αντίστασης σε λυγισμό δεν προωθεί τη δημιουργία jet. Αντίθετα ευνοεί την ανάπτυξη αφύσικων παραμορφώσεων σε όλο το εύρος του κελύφους όλο και μικρότερου μήκους κύματος.



**Διάγραμμα 4-9:** α) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη μέγιστη διαστολή (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], β) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας, γ) Κατανομή κάθετης ταχύτητας της διεπιφάνειας και δ) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους, στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=0$  kg/m's.

Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι προσομοιώσεις της απόκρισης της φουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος σε βηματική διαταραχή, με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και δημιουργία ελλειπτικού πλέγματος [85], επιβεβαιώνουν τη μη δημιουργία jet και την επίτευξη στατικής ισορροπίας, **Διάγραμμα 4-10a**), με ασύμμετρο σχήμα που αποτελεί χρονική μετεξέλιξη των σχημάτων του **Διαγράμματος 4-4a**) και **4-9a**). Η αντίσταση σε λυγισμό δεν επιτρέπει τη δημιουργία περιοχής έντονων καμπτικών τάσεων και διευρύνει τη δέσμη υγρού που διαπερνά το κέλυφος. Μηδενισμός του ιξώδους του κελύφους δίνει, τελικά, σχήματα της μορφής **4-10b**), όπου η πλευρά της διεπιφάνειας γύρω από τον βόρειο πόλο του κελύφους χτυπά την περιοχή γύρω από τον νότιο πόλο με μικρή ταχύτητα με τη μορφή διευρυμένης δέσμης, αν και

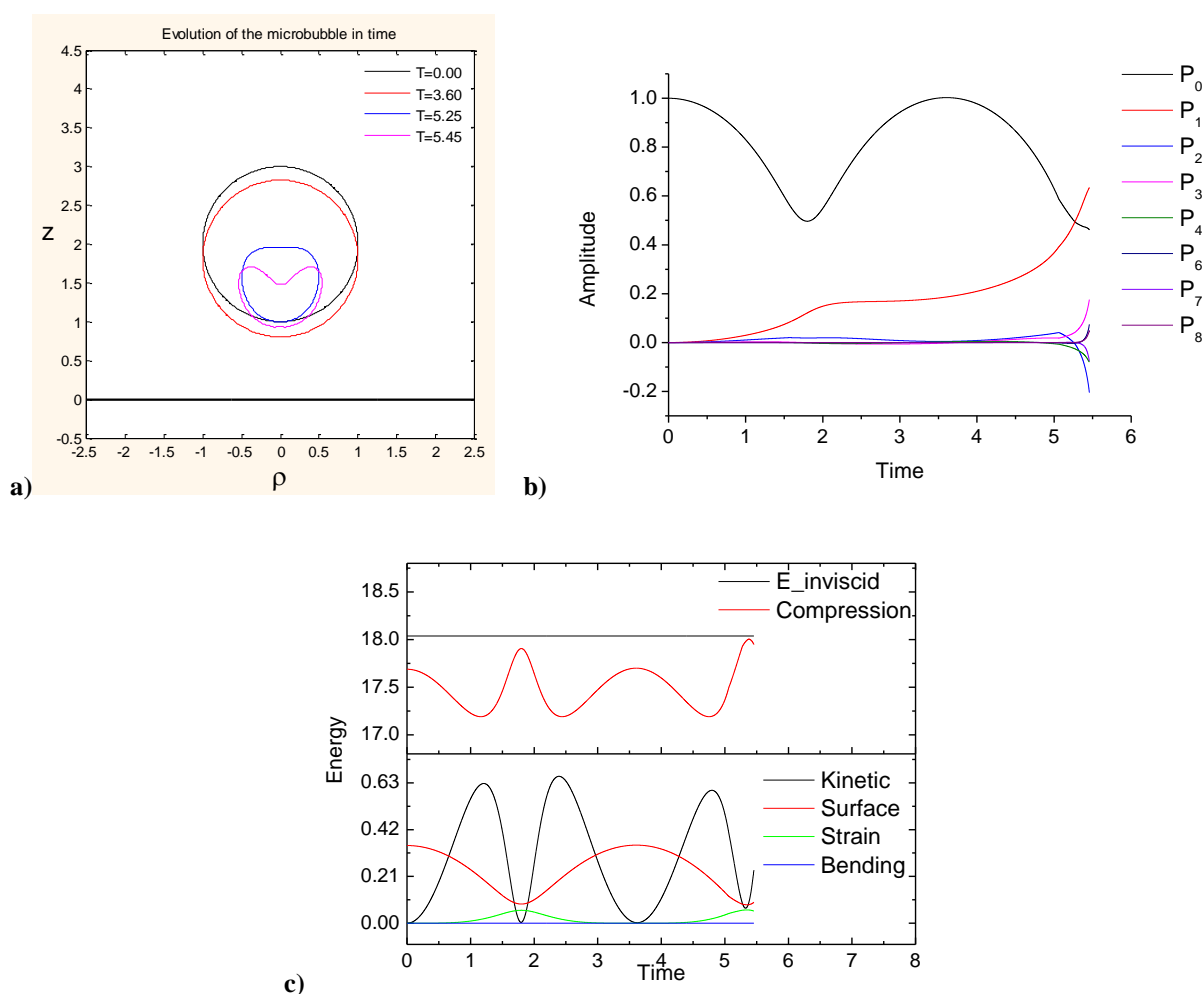
στενότερης από αυτήν του **4-10a**). Στην περίπτωση αυτή οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στο ρευστό στην περιοχή γύρω από τον βόρειο πόλο του κελύφους αποτρέπουν την ανάπτυξη κυμάτων μικρού μήκους. Επιπλέον, λόγω της επαφής μεταξύ των δύο πλευρών του τοιχώματος, αναμένεται να δημιουργηθεί στον νότιο πόλο ζώνη επαφής που θα διευρύνεται με τον χρόνο, έως ότου επιτευχθεί στατική ισορροπία του τύπου που περιγράφεται στο **Διάγραμμα 4-1** (κόκκινη γραμμή) [77]. Η εν λόγω λύση αποτελεί εναλλακτική επιλογή στατικής ισορροπίας αυτής που απεικονίζεται στο **Διάγραμμα 4-10a**), έχει καταγραφεί στη βιβλιογραφία [77] χωρίς να είναι σαφές μέσω ποιου φαινομένου διακλάδωσης προκύπτει και μπορεί να εμφανισθεί όταν το ιξώδες του κελύφους είναι αμελητέο.



**Διάγραμμα 4-10:** Στατική ισορροπία μικροφουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και χρήση ελλειπτικής δημιουργίας πλέγματος για ίδιο σετ παραμέτρων με a)  $\mu_{3D}=20 \text{ kg/m}^3 \text{ s}$  και b)  $\mu_{3D}=0 \text{ kg/m}^3 \text{ s}$ .

Τέλος διερευνήθηκε η ταυτόχρονη επίδραση της απαλοιφής του ιξώδους του κελύφους,  $\mu_{3D}=0 \text{ kg/m}^3 \text{ s}$  και της αντίστασης σε λυγισμό  $k_B=0 \text{ N} \cdot \text{m}$  στην απόκριση της μικροφουσαλίδας. Στην περίπτωση αυτή λόγω της έλλειψης ιξώδους του κελύφους η εξέλιξη του φαινομένου είναι πολύ πιο γρήγορη και χαρακτηρίζεται από αμείωτη ταλάντωση όγκου, επιτάχυνση λόγω της δύναμης Bjerknes, **Διάγραμμα 4-11b**) και σταθερή συνολική ενέργεια, **Διάγραμμα 4-11c**). Παράλληλα παρατηρείται η δημιουργία πλουσιότερου φάσματος ιδιομορφών που περιγράφουν την παραμόρφωση σχήματος, **Διάγραμμα 4-11b**), λόγω της μηδενικής αντίστασης στον λυγισμό. Το σχήμα του κελύφους που προκύπτει, **Διάγραμμα 4-11a**), παρουσιάζει λιγότερο εφελκυσμό στην περιοχή γύρω από τον βόρειο πόλο λόγω της απουσίας των ιξωδών τάσεων, ενώ εμφανίζει σχετικά μεγάλη καμπυλότητα. Πάντως απέχει από τη δημιουργία jet λόγω της αδυναμίας έντονης επιμήκυνσης παράλληλα στον άξονα συμμετρίας στην περιοχή του βόρειου πόλου. Λόγω της ανισοτροπίας των ελαστικών τάσεων αντί της

επιμήκυνσης παράλληλα στον άξονα συμμετρίας παρατηρείται επιμήκυνση κάθετα σε αυτόν με αποτέλεσμα την σχετική διεύρυνση της δέσμης που διαπερνά το κέλυφος. Η παραπάνω συμπεριφορά φαίνεται καλύτερα σε προσομοίωση με χρήση πεπερασμένων στοιχείων όπου λαμβάνεται υπόψη το ιξώδες του ρευστού [85], στην οποία το τελικό σχήμα είναι αυτό του **Διαγράμματος 4-10b)**. Η δέσμη που σχηματίζεται είναι στενότερη από αυτήν στο **Διάγραμμα 4-10a)**, χωρίς όμως να έχει τα χαρακτηριστικά του jet. Η προσομοίωση συνοριακών στοιχείων που παρουσιάζεται στο **Διάγραμμα 4-11** δεν μπορεί να προχωρήσει λόγω της προϊούσας ανάπτυξης ιδιομορφών όλο και μικρότερου μήκους λόγω της παντελούς απουσίας αντίστασης σε λυγισμό.



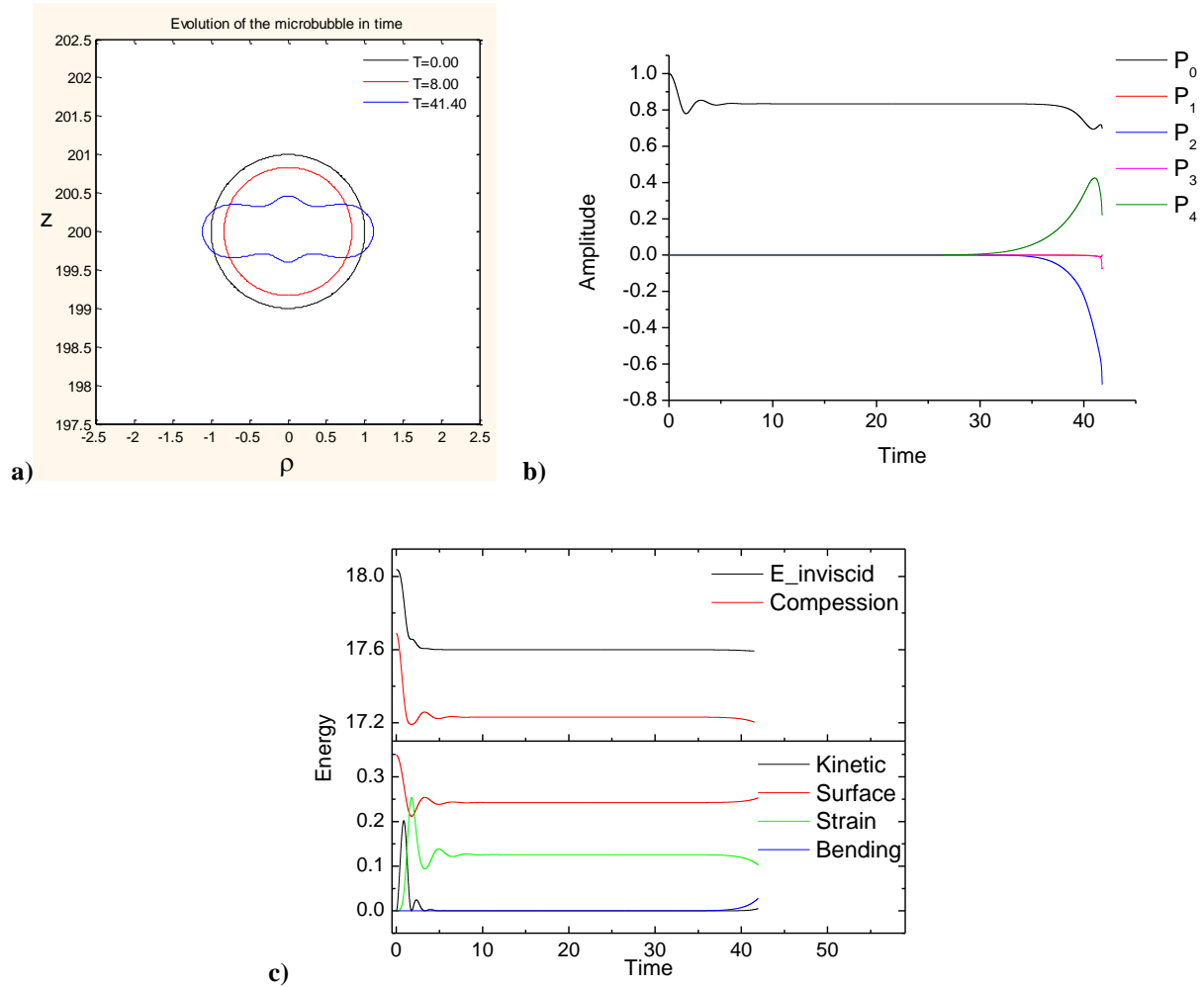
**Διάγραμμα 4-11:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη μέγιστη διαστολή (κόκκινη), τη στιγμή της διαμόρφωσης επίπεδης περιοχής στην πλευρά του βόρειου πόλου (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ , M-R shell ( $b=0$ ),  $G_{3D}=10$  MPa,  $\mu_{3D}=0$  Kg/m<sup>2</sup>s,  $k_B=0$  N/m.

## 4.2 Παραμετρική Μελέτη

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται παραμετρική μελέτη της αλληλεπίδρασης μικροφυσαλίδας με γειτονικό στερεό τοίχωμα με στόχο να αποσαφηνιστεί και να καταδειχθεί ο ρόλος των παραμέτρων του κελύφους στη συμπεριφορά της φυσαλίδας. Το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής παρέμεινε σταθερό,  $\varepsilon = 2$ .

Η παρουσία του τοιχώματος επηρεάζει την ανάπτυξη ιδιομορφών της μικροφυσαλίδας. Πιο συγκεκριμένα, όταν η φυσαλίδα βρίσκεται σε κοντινή απόσταση από το τοίχωμα αναπτύσσονται ταχύτερα ασύμμετρες ιδιομορφές σχήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η παρουσία του τοιχώματος προκαλεί τη μετατόπιση της μικροφυσαλίδας, η οποία αποτυπώνεται από την ιδιομορφή  $P_1 = \cos\theta$ . Παράλληλα αναπτύσσονται και άλλες ιδιομορφές σχήματος ανώτερης τάξης, συμπεριλαμβανομένων και ασύμμετρων, οι οποίες με την πάροδο του χρόνου αυξάνουν το πλάτος τους σημαντικά με αποτέλεσμα να αποτυπώνονται στο τελικό σχήμα της μικροφυσαλίδας, **Διάγραμμα 4-4a**). Επιπροσθέτως, η ύπαρξη του τοιχώματος επηρεάζει τη ροή του ρευστού που περιβάλλει τη φυσαλίδα δημιουργώντας σημείο ανακοπής (stagnation point flow). Η πίεση στην πλευρά της μικροφυσαλίδας μακριά από το τοίχωμα είναι μεγαλύτερη από αυτή στην πλευρά που αντικρίζει το τοίχωμα. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η διαφορά, ήτοι μεγαλύτερο πλάτος διαταραχής, τόσο μεγαλύτερη και η ταχύτητα, δημιουργώντας έτσι τις συνθήκες για την παραμόρφωση της φυσαλίδας. Για αρχική απόσταση  $d_0 = 200$  μεταξύ φυσαλίδας και τοιχώματος η επιρροή του τοιχώματος είναι πρακτικά αμελητέα, δηλαδή δεν παρατηρείται ουσιαστική μετατόπιση του κέντρου μάζας της μικροφυσαλίδας. Ως εκ τούτου, η παραμόρφωση της φυσαλίδας είναι συμμετρική, **Διάγραμμα 4-12a**), με κυρίαρχες ιδιομορφές τις  $P_2$  και  $P_4$ , **Διάγραμμα 4-12b**). Εδώ πρέπει να τονισθεί, σε συνδυασμό και με το σχετικό διάγραμμα διακλάδωσης, **Διάγραμμα 4-2a**), για φυσαλίδα με κέλυφος χωρίς την παρουσία τοιχώματος, ότι ανεξαρτήτως της παρουσίας του τοιχώματος υπάρχουν δύο δυνατές λύσεις στατικής ισορροπίας, η συμμετρική και η ασύμμετρη με την τελευταία να είναι προτιμητέα τόσο από πλευράς ενεργειακής όσο και από το γεγονός ότι είναι γραμμικά ευσταθής. Εν προκειμένω, η ενέργεια του συστήματος, **Διάγραμμα 4-12c**), μειώνεται με την ενεργοποίηση της διαδικασίας λυγισμού μετά την επίτευξη του στατικού σφαιρικού σχήματος, καθώς η βηματική μεταβολή ξεπερνά την κρίσιμη. Λόγω της απουσίας τοιχώματος η δυναμική του συστήματος προκρίνει το συμμετρικό σχήμα αρχικά, αλλά προϊόντος του χρόνου αναπτύσσεται και ο  $P_3$  αποτυπώνοντας το ενδεχόμενο τελικής επικράτησης ασύμμετρου σχήματος. Η προσομοίωση όμως τελικά

καταρρέει λόγω της εμφάνισης αστάθειας μικρού μήκους και χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση για τη διακρίβωση της ακριβούς δυναμικής συμπεριφοράς.



**Διάγραμμα 4-12:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=200$ , M-R shell ( $b=0$ ),  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m's,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N'm.

Σε επόμενη φάση εξετάστηκε η επίδραση του καταστατικού νόμου στην απόκριση της φουσαλίδας σε συνδυασμό με τη μεταβολή του μέτρου διάτμησης  $G_{3D}$  διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους. Επικεντρώνοντας αρχικά στον νόμο Mooney-Rivlin εξετάστηκε η επίδραση της αύξησης του μέτρου διάτμησης. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι το μέτρο δυσκαμψίας συνδέεται με το μέτρο διάτμησης μέσω της αδιάστατης καμπτικής ελαστικότητας, η οποία ορίζεται ως:

$$B = \frac{k_B}{G_s R_{eq}^2}, \quad (4-2)$$

όπου το  $k_B$  σε  $N \cdot m$  και το  $G_s = G_{3D} \cdot \delta$  σε  $N/m$ . Συνεπώς, διατηρώντας σταθερό τον λόγο  $B$ , η μείωση του μέτρου δυσκαμψίας ισοδυναμεί με αντίστοιχη αύξηση του μέτρου διάτμησης και

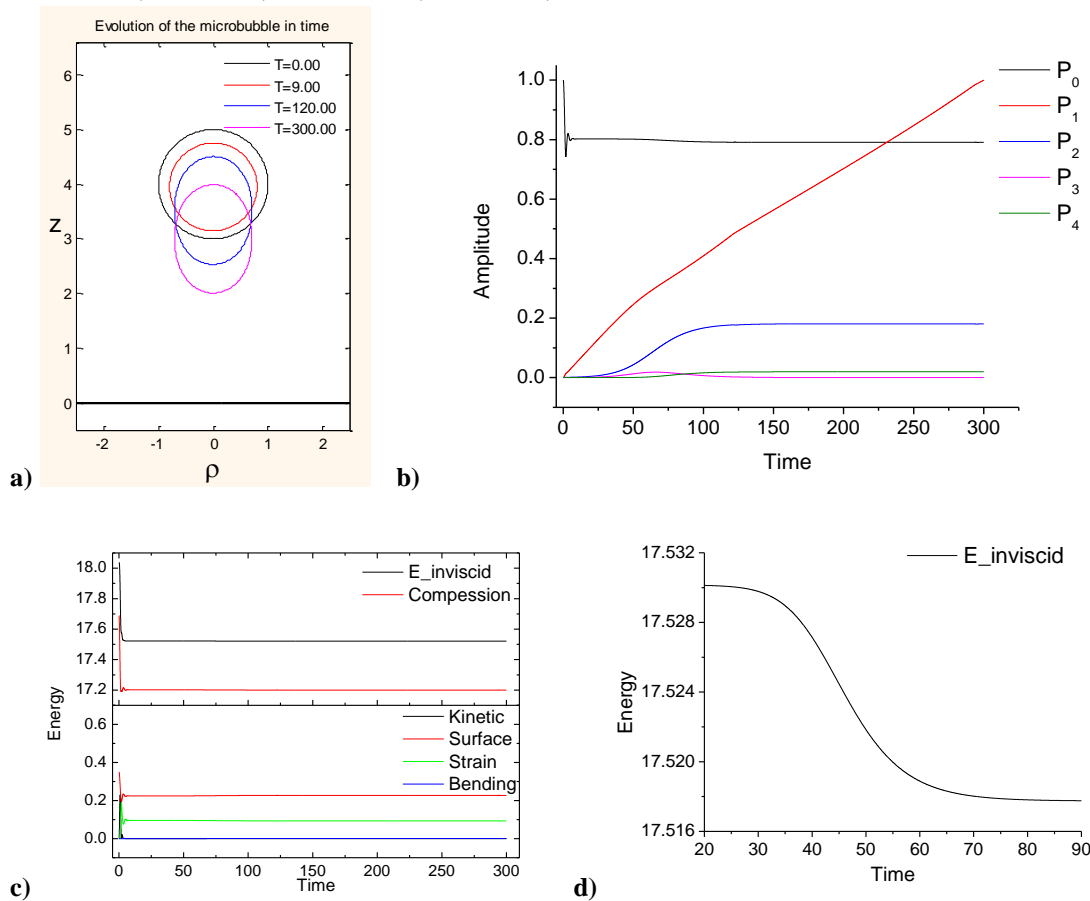
το αντίστροφο. Επομένως, η επίδραση του μέτρου δυσκαμψίας μπορεί να διερευνηθεί μέσω της μεταβολής του μέτρου διάτμησης. Παράλληλα, η μείωση του μέτρου δυσκαμψίας αυξάνει τη σημασία της αντίστασης σε συμπίεση  $\tilde{P}_A \equiv \frac{P_A R_{Eq}}{G_s}$ . Μάλιστα για μαλακά κελύφη, όπως αυτά στα οποία επικεντρώνει η παρούσα εργασία, η παραπάνω αδιάστατη παράμετρος είναι  $O(1)$  και συνεπώς η μεταβολή της αντανakλά άμεσα στην στατική συμπεριφορά του κελύφους [78]. Συγκεκριμένα αύξηση της εν λόγω παραμέτρου ισοδυναμεί με σταδιακή μετατροπή της μικροφυσαλίδας σε οιονεί ασυμπίεστο σωματίδιο.

Ελαττώνοντας το μέτρο διάτμησης  $G_{3D} = 40 \text{ MPa}$  ευννοείται η επιμήκυνση/ επιβράχυνση του κελύφους σε σχέση με την κάμψη του η οποία εμπεριέχει περισσότερη ελαστική ενέργεια, με συνέπεια η μικροφυσαλίδα να εμφανίζει συμμετρική μεταλυσισμική συμπεριφορά με επιμήκυνση στην περιοχή γύρω από κάθε πόλο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που μελετήθηκε, η φυσαλίδα οδηγήθηκε σε μόνιμη παραμορφωμένη κατάσταση με κυρίαρχη ιδιομορφή την  $P_2$ , **Διάγραμμα 4-13b**), η οποία υποδηλώνεται με το ωοειδές σχήμα που αποκτά η φυσαλίδα, **Διάγραμμα 4-13a**). Η αύξηση της αντίστασης στην συμπίεση αναγκάζει την μικροφυσαλίδα να συρρικνωθεί κατά μήκος του ισημερινού, ενώ επιμηκύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας σε μία προσπάθεια να αντισταθεί στην μείωση του όγκου που της επιβάλλεται. Έτσι παρουσιάζει σημαντική ενέργεια εφελκυσμού στην περιοχή μεταξύ των πόλων αντί πάνω στους πόλους ώστε να ελαχιστοποιήσει την ενέργεια.

Η ίδια μόνιμη κατάσταση ανακτήθηκε και για μεγάλη απόσταση μεταξύ μικροφυσαλίδας και τοιχώματος  $d_0 = 200$ , με τη διαφορά ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας της πρώτης παρέμεινε μηδενική. Η συγκεκριμένη μόνιμη κατάσταση επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα διακλάδωσης που προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας του σφαιρικού κελύφους για τις συγκεκριμένες παραμέτρους. Στην περίπτωση αυτή στο διάγραμμα διακλάδωσης, **Διάγραμμα 4-2b**), η μεταλυσισμική συμπεριφορά κυριαρχείται από κλάδο με συμμετρικά επιμηκυνόμενα σχήματα, με τον ασύμμετρο κλάδο να ακολουθεί για μεγαλύτερη κρίσιμη τιμή. Κατ' αναλογία με την περίπτωση του **Διαγράμματος 4-2a**), ο συμμετρικός κλάδος αναπτύσσεται για μικρότερες τιμές της εξωτερικής υπερπίεσης, εμφανίζει σημείο καμπής και εξελίσσεται για μεγαλύτερες τιμές της εξωτερικής υπερπίεσης με παράλληλη σημαντική συμπίεση του όγκου. Ταυτόχρονα, γραμμική ανάλυση ευστάθειας ταυτοποιεί τον κλάδο που προκύπτει μετά το σημείο καμπής ως ευσταθή, παρ' όλο που χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο ενεργειακό περιεχόμενο σε σχέση με την σφαιρική διαμόρφωση. Στη δυναμική προσομοίωση που απεικονίζει το **Διάγραμμα 4-13** το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής είναι πάνω από το

όριο ευστάθειας σε λυγισμό (buckling threshold), με αποτέλεσμα το σφαιρικό σχήμα να μην είναι πλέον ευσταθές. Τελικά, η μικροφουσαλίδα καταφέρνει να σταθεροποιηθεί σε χαμηλότερης ενέργειας διαμόρφωση, που για το δεδομένο σετ παραμέτρων προκύπτει να είναι η παραπάνω αναφερθείσα ωοειδής. Η παραπάνω συμπεριφορά αντανακλά και στο διάγραμμα της ενέργειας  $E_{inviscid}$ , **Διάγραμμα 4-13c**), όπου μετά την απόσβεση των ταλαντώσεων όγκου καταλήγει στην σφαιρική διαμόρφωση χαμηλής ενέργειας. Με το πέρας του χρόνου όμως το φαινόμενο του λυγισμού αποσταθεροποιεί το σφαιρικό σχήμα οδηγώντας το κέλυφος στην παραπάνω συμμετρική διαμόρφωση ακόμη χαμηλότερης ενέργειας. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι η ενέργεια  $E_{inviscid}$  αφορά το κέλυφος μαζί με το περιβάλλον ρευστό καθώς εμπεριέχει και την πίεση στο μακρινό πεδίο,  $P_\infty$ . Οι υπόλοιπες συνιστώσες της ενέργειας αφορούν το κέλυφος. Η ενέργεια λόγω συμπίεσης του κελύφους λαμβάνει την μορφή:

$$E_{c,sh} = V \left( P_0 + \frac{P_G}{\gamma - 1} \right), \quad E_c = V \left( P_\infty + \frac{P_G}{\gamma - 1} \right), \quad P_{st} = P_0, \quad P_\infty = P_{st} (1 + \varepsilon) \quad (4-3)$$

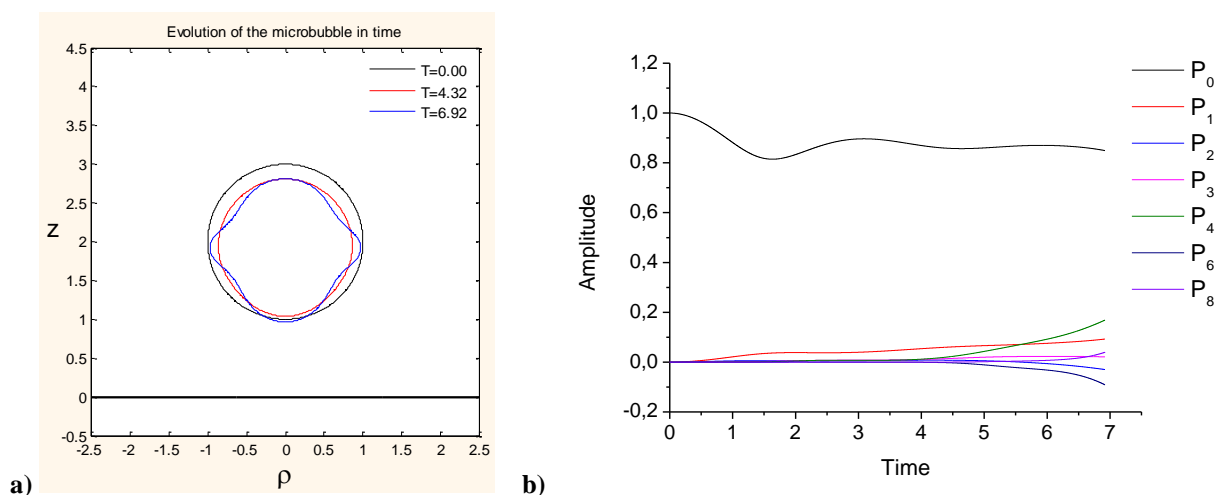


**Διάγραμμα 4-13:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή που διαμορφώνεται το επιμηκυμένο σχήμα (prolate) (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος d) Χρονική εξέλιξη της  $E_{inviscid}$  κατά τη μετάβαση από το σφαιρικό σχήμα στο ωοειδές (prolate) για M-R shell ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=4$ ,  $G_{3D}=40$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m's,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N'm.



Συνεπώς αφαιρώντας από την ενέργεια λόγω συμπίεσης  $E_c$  του **Διαγράμματος 4-13c)** την ποσότητα  $\varepsilon VP_{st}$  παίρνουμε την καθαρή ενέργεια λόγω συμπίεσης του κελύφους,  $E_{c,sh}$ . Αθροίζοντας όλες τις συνιστώσες της ενέργειας του κελύφους προκύπτει ότι η τελευταία συμμετρική διαμόρφωση, αν και ευσταθής δυναμικά, έχει μεγαλύτερο ενεργειακό περιεχόμενο από την σφαιρική,  $E_{shell,spherical} = 16.664 < E_{shell,prolate} = 16.673$ . Παρ' όλα αυτά η δυναμική εξέλιξη του φαινομένου επιλέγει την γραμμικά ευσταθή διαμόρφωση λόγω της αστάθειας της σφαιρικής. Σημαντικό είναι επίσης το γεγονός ότι για σχήματα τέτοιας μορφής η αριθμητική προσομοίωση που διενεργείται προχωράει μέχρι την τελική ισορροπία χωρίς να χρειάζεται να ενεργοποιηθεί η διαδικασία φιλτραρίσματος της αριθμητικής λύσης. Ο λόγος είναι ότι για να ληφθεί το συμμετρικό σχήμα δεν χρειάζεται να μεσολαβήσει το φαινόμενο “divergence” όπως αυτό καταγράφεται στα **Διαγράμματα 4.5a), 4.6a)**, γεγονός που διευκολύνει σημαντικά την πρόοδο της αριθμητικής προσομοίωσης.

Αυξάνοντας το μέτρο διάτμησης ώστε  $G_{3D} = 160 \text{ MPa}$  ισοδυναμεί με ελάττωση της αντίστασης σε λυγισμό, γεγονός που ευνοεί την εμφάνιση ασύμμετρων σχημάτων στην μεταλυγισμική κατάσταση του διαγράμματος διακλάδωσης. Στην σχετική προσομοίωση παρατηρήθηκε ότι η παραμόρφωση της φυσαλίδας συνέβη νωρίτερα στο χρόνο, ενώ οι αναδυόμενες ιδιομορφές ήταν περισσότερες, **Διάγραμμα 4-14b)**, με αποτέλεσμα η μικροφυσαλίδα να παρουσιάζει παραμορφωμένο σχήμα με περισσότερους λοβούς, **Διάγραμμα 4-14a)**. Αυτό συμβαίνει, διότι με αύξηση του  $G_{3D}$  το υλικό του κελύφους «σκληραίνει» μην επιτρέποντας μεγάλες παραμορφώσεις λόγω εφελκυσμού/θλίψης, ενώ παράλληλα αδυνατίζει η

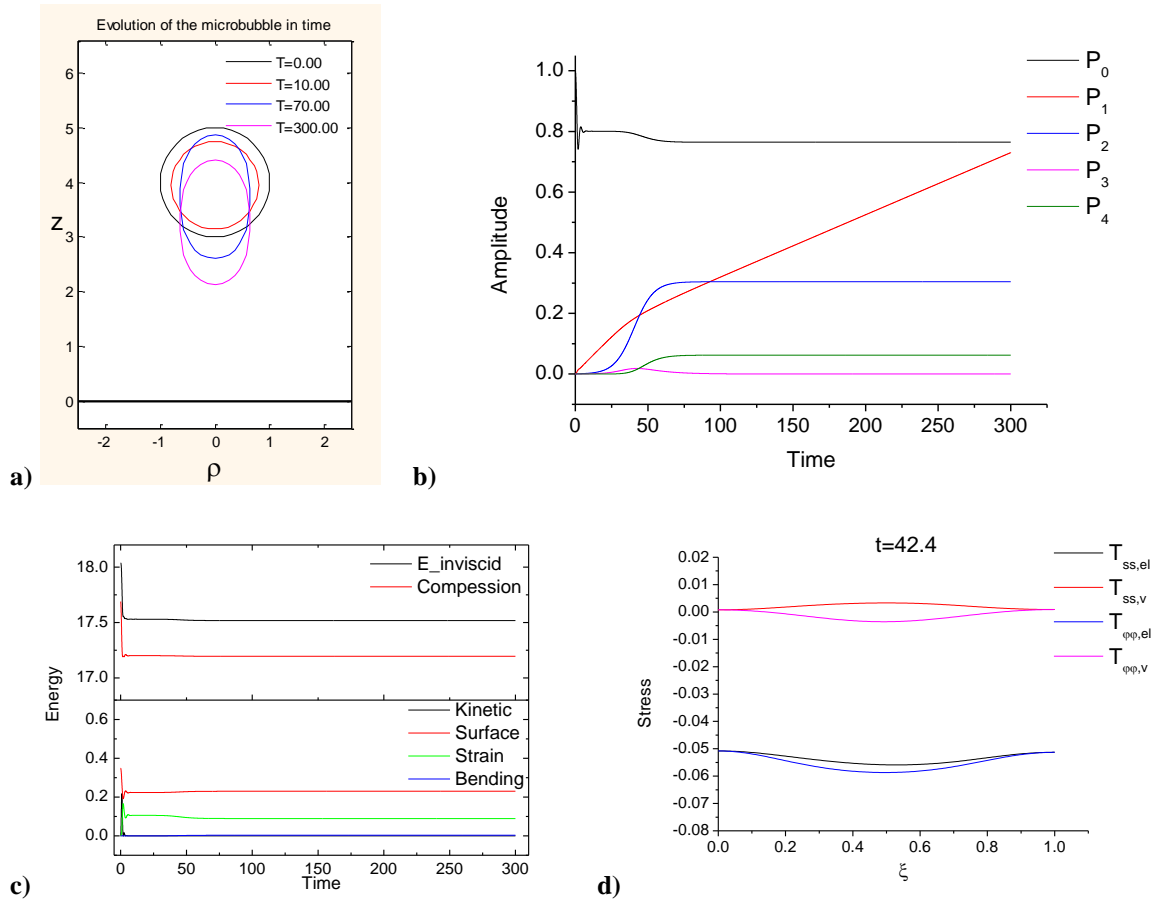


**Διάγραμμα 4-14:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)] και b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας για M-R shell ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=160 \text{ MPa}$ ,  $\mu_{3D}=20 \text{ Kg/m}^2\text{s}$ ,  $k_B=3 \cdot 10^{-14} \text{ N} \cdot \text{m}$ .



αντίσταση στην συμπίεση. Συνεπώς η ενέργεια διοχετεύεται στην πολλαπλή κάμψη του κελύφους προκαλώντας την έντονη παραμόρφωσή του παρουσιάζοντας παραπάνω από έναν λοβούς. Ανάλογη συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί για σκληρά πολυμερικά κελύφη και αύξηση του μέτρου ελαστικότητας [78]. Και στην περίπτωση αυτή η εμφάνιση εσοχής στο σχήμα που προκύπτει συνοδεύεται από την ανάπτυξη αστάθειας μικρού μήκους κύματος με αποτέλεσμα την αδυναμία συνέχισης της προσομοίωσης μέχρι την επίτευξη στατικής ισορροπίας.

Επίσης, διερευνήθηκε η επίδραση του καταστατικού νόμου για τις ελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στο κέλυφος. Επιλέχθηκε ο νόμος του Hooke θεωρώντας το υλικό του κελύφους γραμμικώς ελαστικό, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές. Στην περίπτωση αυτή δεν υφίσταται η σκλήρυνση του κελύφους κατά την συμπίεση, που είναι εγγενής στα κελύφη που ακολουθούν τον καταστατικό νόμο Mooney-Rivlin, και συνεπώς συμπεριφέρονται ως μαλακά κελύφη. Από τις προσομοιώσεις για  $G_{3D} = 80 \text{ MPa}$  παρατηρήθηκε ότι η φυσαλίδα οδηγήθηκε σε μόνιμη παραμορφωμένη κατάσταση με κυρίαρχη ιδιομορφή την  $P_2$ , **Διάγραμμα 4-15b**), η οποία υποδηλώνεται με το ωοειδές σχήμα που αποκτά η φυσαλίδα, **Διάγραμμα 4-15a**). Η ίδια μόνιμη κατάσταση ανακτήθηκε και για μεγάλη απόσταση μεταξύ μικροφυσαλίδας και τοιχώματος  $d_0 = 200$ , με τη διαφορά ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας της πρώτης παρέμεινε μηδενική. Η συγκεκριμένη μόνιμη κατάσταση επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα διακλάδωσης που προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας για τις συγκεκριμένες παραμέτρους, **Διάγραμμα 4-3a**). Το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής είναι πάνω από το όριο ευστάθειας σε λυγισμό (buckling threshold), με αποτέλεσμα το σφαιρικό σχήμα να μην είναι πλέον ευσταθές. Τελικά, η μικροφυσαλίδα καταφέρνει να σταθεροποιηθεί σε χαμηλότερης ενέργειας διαμόρφωση, που για το δεδομένο σετ παραμέτρων προκύπτει να είναι η ωοειδής, **Διάγραμμα 4-15c**). Ας σημειωθεί ότι και στην εν λόγω περίπτωση η ενέργεια του κελύφους στην τελική ωοειδή μορφή είναι μεγαλύτερη από αυτήν της σφαιρικής διαμόρφωσης με βάση την στατική ανάλυση  $E_{shell,spherical} = 16.677 < E_{shell,prolate} = 16.699$ , όμως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος προκρίνει την ευσταθή λύση που κυριαρχείται από τον  $P_2$ , χωρίς την εμφάνιση ασταθειών μικρού μήκους και τη χρήση φιλτραρίσματος. Ανάλογη συμπεριφορά προκύπτει από την προσομοίωση και ανάλυση του νόμου Hooke, όταν  $G_{3D} = 40 \text{ MPa}$ , όπου προκύπτει στατική ισορροπία με σχήμα που χαρακτηρίζεται από συμμετρία με κυρίαρχη ιδιομορφή την  $P_2$ , με ανάλογη διαμόρφωση με αυτήν του σχετικού διαγράμματος διακλάδωσης για  $G_{3D} = 80 \text{ MPa}$ , **Διάγραμμα 4-3a**).



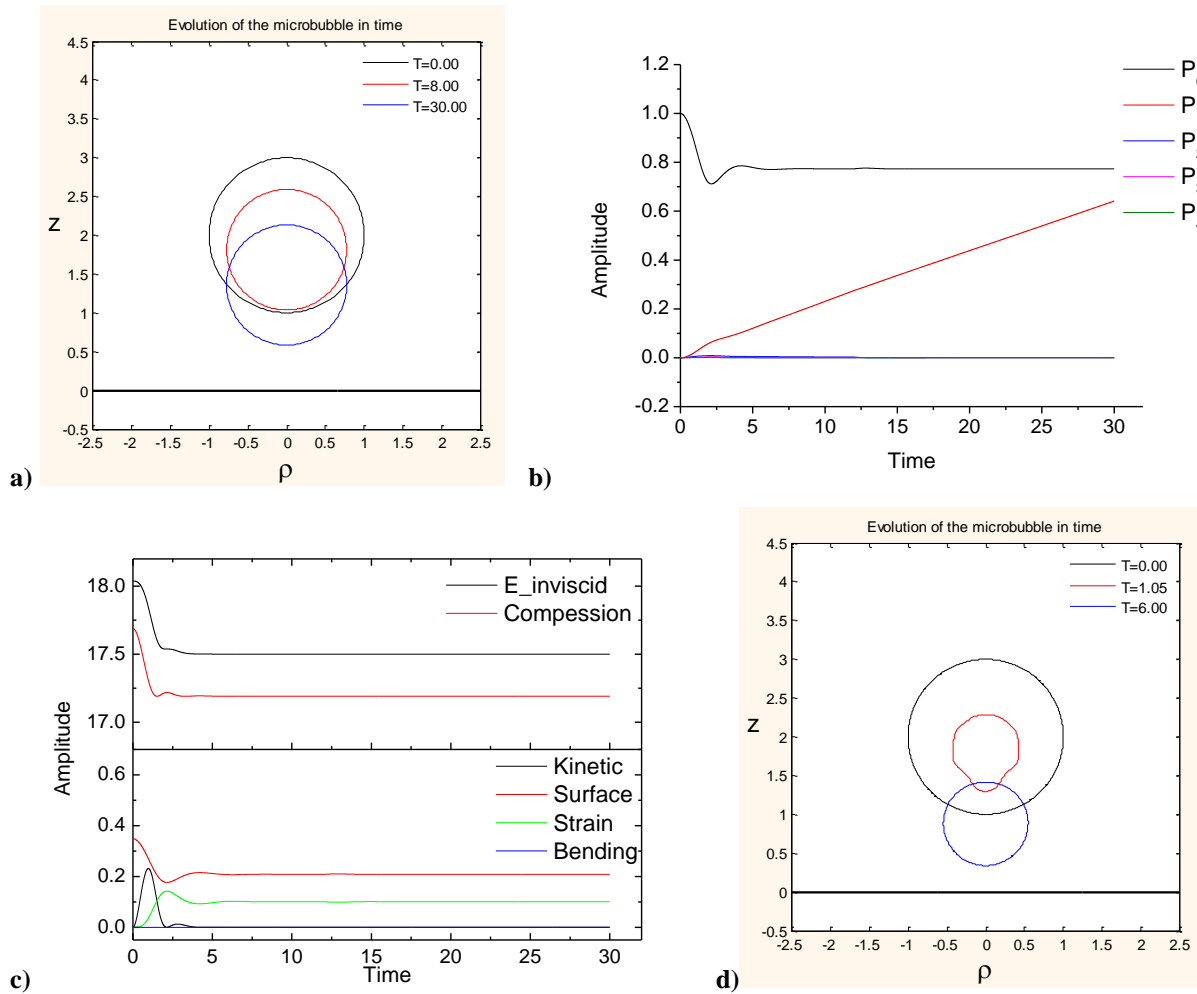
**Διάγραμμα 4-15:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), τη στιγμή που διαμορφώνεται το επιμηκυμένο σχήμα (prolate) (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, d) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος, για Hooke shell,  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=4$ ,  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m's,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N/m.

Τέλος, δοκιμάστηκε και ο καταστατικός νόμος του Skalak που, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.4, αναφέρεται σε υλικά στα οποία παρατηρείται αύξηση του φαινομένου μέτρου ελαστικότητας καθώς αυξάνει η παραμόρφωση, ενώ μαλακώνουν στη φάση ισοτροπικής συμπίεσης [39]. Η παράμετρος που εκφράζει την επιφανειακή συμπίεσιότητα επιλέχθηκε ως

$$C=1, \text{ εφόσον έχουμε ασυμπίεστο υλικό } \nu_s=0.5 \text{ και η σχέση που τα συνδέει είναι } \nu_s = \frac{C}{1+C}.$$

Οι προσομοιώσεις έδειξαν ότι μετά από λίγες ταλαντώσεις η μικροφουσαλίδα απέκτησε σφαιρικό σχήμα στην στατική διαμόρφωση. Η σφαιρική διαμόρφωση της φουσαλίδας διατηρείται καθ' όλη τη διάρκεια της πορείας μέχρι το τοίχωμα, **Διάγραμμα 4-16a**). Η ίδια ακριβώς συμπεριφορά επιδεικνύεται και για πολύ μεγάλο πλάτος εξωτερικής διαταραχής  $\varepsilon=8$ , **Διάγραμμα 4-16d**). Το κέλυφος της μικροφουσαλίδας εμφανίζει μείωση του φαινομένου μέτρου ελαστικότητας κατά τη συμπίεσή του. Συνεπώς, η ενέργεια διοχετεύεται περισσότερο σε παραμόρφωση λόγω

εφελκυσμού/θλίψης παρά σε κάμψη, με αποτέλεσμα η μικροφουσαλίδα να διατηρεί το σφαιρικό της σχήμα ακόμα και υπό καθεστώς πολύ μεγάλης φόρτισης. Το σχετικό διάγραμμα διακλάδωσης 4-3b) πιστοποιώντας την ευστάθεια του εν λόγω κελύφους παρουσιάζει κρίσιμο σημείο λυγισμού, που αντιστοιχεί σε συμμετρικό σχήμα, για πολύ μεγάλες τιμές της εξωτερικής υπερπίεσης  $\varepsilon_{cr} \approx 4.5$  για  $G_{3D} = 80 \text{ MPa}$ .



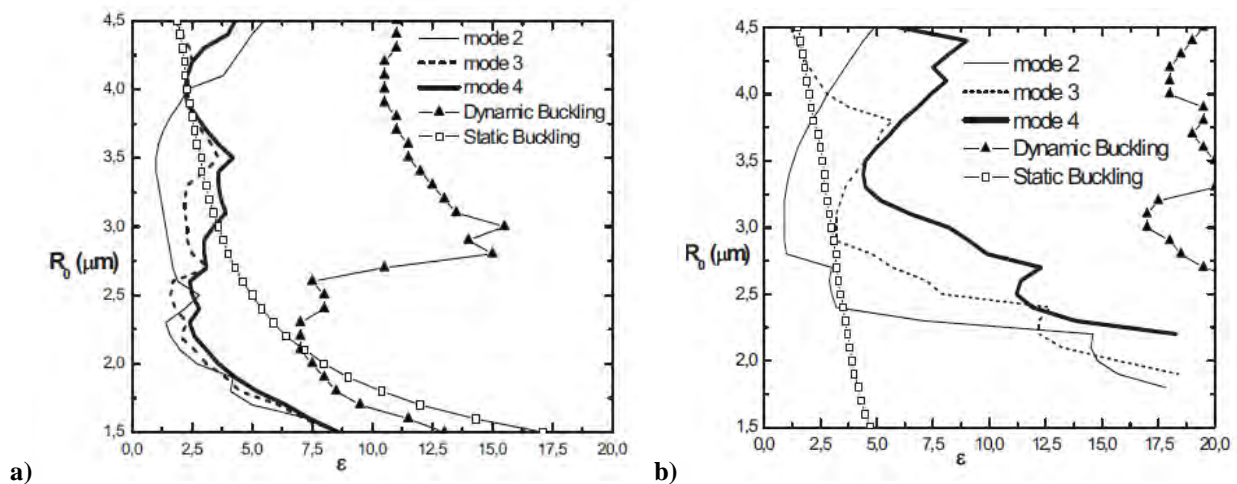
**Διάγραμμα 4-16:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), μετά το πέρας των ταλαντώσεων (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας, c) Διάγραμμα ενέργειας για Skalak shell ( $b=0$ ),  $\varepsilon=2$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=80 \text{ MPa}$ ,  $\mu_{3D}=20 \text{ Kg/m}^2\text{s}$ ,  $k_B=3 \cdot 10^{-14} \text{ N} \cdot \text{m}$  και d) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας για  $\varepsilon=8$ ,  $d_0=2$ .

## 5. Αριθμητικά αποτελέσματα για ημιτονοειδή αλλαγή της πίεσης

Στην παρούσα ενότητα γίνεται προσπάθεια ανάλυσης της απόκρισης μικροφουσαλίδας ευρισκόμενης κοντά σε στερεό τοίχωμα σε ημιτονοειδή μεταβολή της πίεσης σε μακρινή απόσταση, που λαμβάνει τη μορφή:

$$P_{\infty} = P_{st} \left[ 1 + \varepsilon \cos(t) \right], \quad P = \frac{P'}{\rho \omega_f^2}, \quad t = \omega_f t' \quad (5-1)$$

Η δυναμική συμπεριφορά της μικροφουσαλίδας σε τέτοιου είδους διαταραχή πλησιάζει την απόκριση των Contrast Agents σε πραγματικές συνθήκες και παρέχει τη δυνατότητα κατανόησης των μηχανισμών που διέπουν την καταγεγραμμένη συμπεριφορά τους σε in vitro πειραματικές μελέτες με την εφαρμογή υπερήχων. Σαν σημείο αναφοράς και σύνδεσης με προηγούμενες μελέτες παραθέτουμε εδώ το διάγραμμα φάσης που παρήχθη από τους Τσιγκλιφή και Πελεκάση [69] για μικροφουσαλίδα με ελαστικό κέλυφος ταλαντούμενη χωρίς την επίδραση γειτονικών επιφανειών, **Διάγραμμα 5-1a)** και b). Όπως καθίσταται σαφές από τα παρακάτω διαγράμματα, η εμφάνιση ταλαντώσεων σχήματος και η ενδεχόμενη θραύση του κελύφους καθορίζονται από το κατώφλι υποαρμονικού συντονισμού και το κατώφλι στατικού και δυναμικού λυγισμού. Η τελευταία περίπτωση είναι ανάλογη με την αστάθεια Rayleigh-Taylor (rebound instability) για φουσαλίδες χωρίς προστατευτικό κέλυφος, που εμφανίζεται αμέσως μετά την μέγιστη συμπίεση της φουσαλίδας, για αρκετά μεγάλο πλάτος της ακουστικής διαταραχής. Για αρκετά μικρές φουσαλίδες τύπου Mooney – Rivlin ή Hooke το παραπάνω κατώφλι ταυτίζεται με αυτό του στατικού λυγισμού, **Διάγραμμα 5-1a)**, λόγω του ότι η ιδιοσυχνότητα ταλαντώσεων όγκου είναι αρκετά μεγαλύτερη από την εξωτερικά επιβαλλόμενη, ώστε η απόκριση του κελύφους να είναι οιονεί στατική.

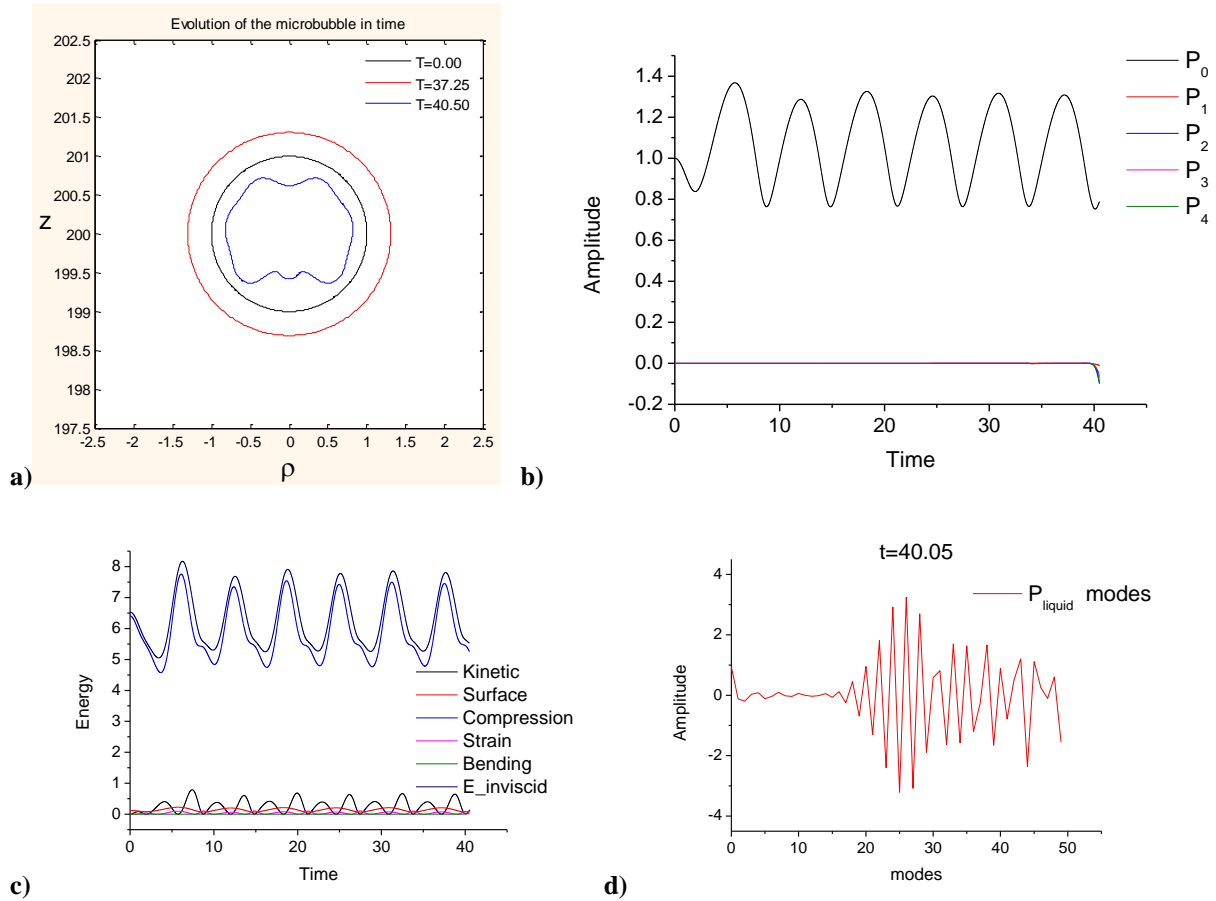


**Διάγραμμα 5-1:** Διάγραμμα φάσης για μικροφουσαλίδα με ελαστικό κέλυφος που ακολουθεί καταστατικό νόμο: a) Mooney-Rivlin (strain softening shell) και b) Skalak (strain hardening shell).

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την επίδραση του τοιχώματος στην εμφάνιση των παραπάνω φαινομένων, στην ένταση του σκεδαζόμενου σήματος καθώς και στην ευστάθεια της μικροφυσαλίδας. Ειδικά στο τελευταίο ζήτημα θα αφιερωθεί η ενότητα 5.2, όπου θα εξεταστούν φαινόμενα θραύσης του κελύφους που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία και θα επιχειρηθεί ανάλυση του μηχανισμού θραύσης σε συνδυασμό με την εξήγηση της διαδικασίας εμφάνισης jet.

## 5.1 Παραμετρική Μελέτη

Στην ενότητα 3.6 μελετήθηκε η ακουστική απόκριση φυσαλίδας με ελαστικό κέλυφος με τοίχωμα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση,  $d_0 = d'/R_{bal} = 200$ , για πλάτος της διαταραχής,  $\varepsilon = 2$ , πάνω από το κατώφλι υποαρμονικού συντονισμού σύμφωνα με την ανάλυση ευστάθειας που παρουσιάστηκε στην [69] και ανακτήθηκε πλήρως η συμπεριφορά που καταγράφηκε με την προσομοίωση για μικροφυσαλίδα που εκτελεί ταλαντώσεις απουσία τοιχώματος [35]. Αυξάνοντας το πλάτος της διαταραχής σε  $\varepsilon = 3$ , το οποίο βρίσκεται πάνω από το κατώφλι εμφάνισης του δυναμικού λυγισμού (dynamic buckling) όπως υπολογίσθηκε στην [35], η φυσαλίδα εκτελεί μικρό αριθμό ταλαντώσεων με την επιβαλλόμενη συχνότητα, αλλά σύντομα αναπτύσσει έντονη παραμόρφωση λόγω αύξησης αριθμού ιδιομορφών, **Διάγραμμα 5-2b**). Η αστάθεια αυτή έχει τη δομή που καταγράφηκε ως dynamic buckling στην [69] υπό την έννοια ότι παρουσιάζεται δραστική αύξηση των ιδιομορφών αμέσως μετά τη φάση μέγιστης συμπίεσης, ενώ κατά την υπόλοιπη διάρκεια της ταλάντωσης το σχήμα παραμένει σφαιρικό, **Διάγραμμα 5-2a**). Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι που η αύξηση ξεπερνά ένα όριο και η προσομοίωση σταματά λόγω μειωμένης ακρίβειας. Πρέπει δε να τονισθεί ότι και στην εν λόγω προσομοίωση, καθώς και σε όλες τις προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στην παρούσα ενότητα, εφαρμόζεται φιλτράρισμα της λύσης, ώστε να απαλλαγεί από ιδιομορφές πολύ μικρού μήκους κύματος, π.χ. ανάπτυξη του  $P_n$ , όπου  $n$  ο αριθμός των στοιχείων στην εξεταζόμενη προσομοίωση, όμως η διακοπή της προσομοίωσης δεν γίνεται όπως στην προηγούμενη ενότητα και στην περίπτωση στατικής ισορροπίας μέσω ασύμμετρων σχημάτων λόγω περαιτέρω ανάπτυξης ιδιομορφών μικρού μήκους στην χρονική παράγωγο του δυναμικού της ταχύτητας στη διεπιφάνεια, αλλά λόγω της πολύ γρήγορης ανάπτυξης των ιδιομορφών σχήματος που αναφέρθηκε παραπάνω και της έντονης παραμόρφωσης του κελύφους, η οποία αντανακλά και στην πίεση που ασκεί το υγρό στο κέλυφος, **Διάγραμμα 5-2d**). Η ενέργεια στην παραπάνω προσομοίωση παρουσιάζει ημιτονοειδή μεταβολή, **Διάγραμμα 5-2c**), ακολουθώντας την



**Διάγραμμα 5-2:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος και d) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της πίεσης στη διεπιφάνεια από τη μεριά του ρευστού στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=200$ , M-R shell ( $b=0$ ),  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N/m,  $\nu_f=1.7$  MHz,  $R_0=3.6$   $\mu$ m.

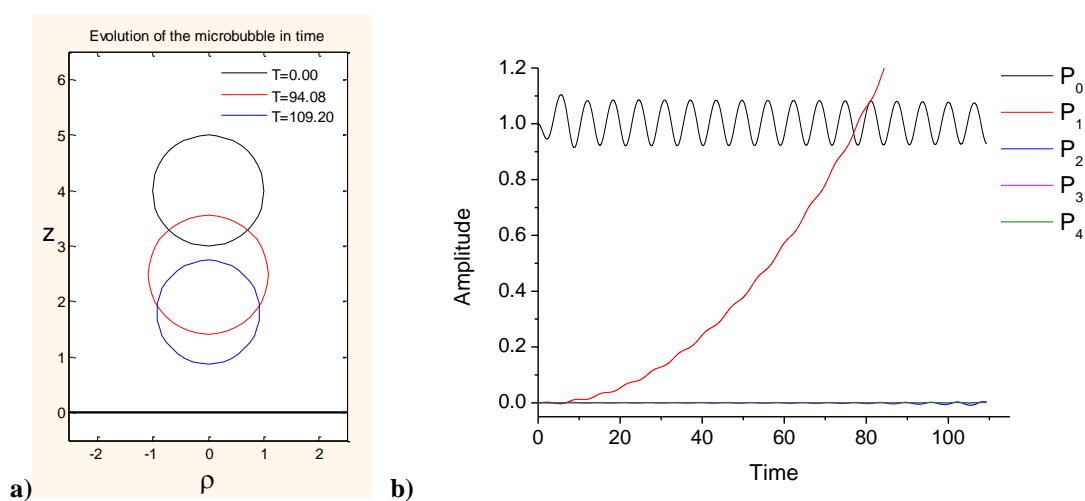
προσδιδόμενη ενέργεια στο σύστημα υγρό/μικροφυσαλίδα μέσω της εξωτερικής διαταραχής. Η αστάθεια αυτή είναι πολύ παρόμοια με την rebound instability που παρατηρείται σε φυσαλίδες χωρίς προστατευτικό κέλυφος [86], και εκτιμάται ότι μπορεί να καταστρέψει την συνέχεια του τελευταίου λόγω των έντονων καμπτικών και ελαστικών τάσεων που αναπτύσσονται, βλ. και παρακάτω ανάλυση τάσεων στο **Διάγραμμα 5-6**. Εν προκειμένω, η προσομοίωση σταματάει αναγκαστικά λόγω της αύξησης και ιδιομορφών μικρού μήκους παράλληλα με τις βασικές ιδιομορφές, όπως φαίνεται και από την κατανομή ιδιομορφών της πίεσης, **Διάγραμμα 5-2d**). Τέλος, η αριθμητική επίλυση δεν καταγράφει κάποια προσέγγιση της φυσαλίδας προς το τοίχωμα λόγω της ανύπαρκτης ανάπτυξης του  $P_1$ , όπως αναμένεται λόγω της πολύ μεγάλης απόστασης και της αμελητέας δευτερογενούς δύναμης Bjerknes, βλ. και ενότητα 3.6 στο Κεφάλαιο 3.

Η παραπάνω συμπεριφορά αφορά πολύ μεγάλες αποστάσεις από το τοίχωμα, οπότε η φυσαλίδα συμπεριφέρεται ως ελεύθερη, δηλαδή αγνοεί την παρουσία τοιχώματος. Καθώς η



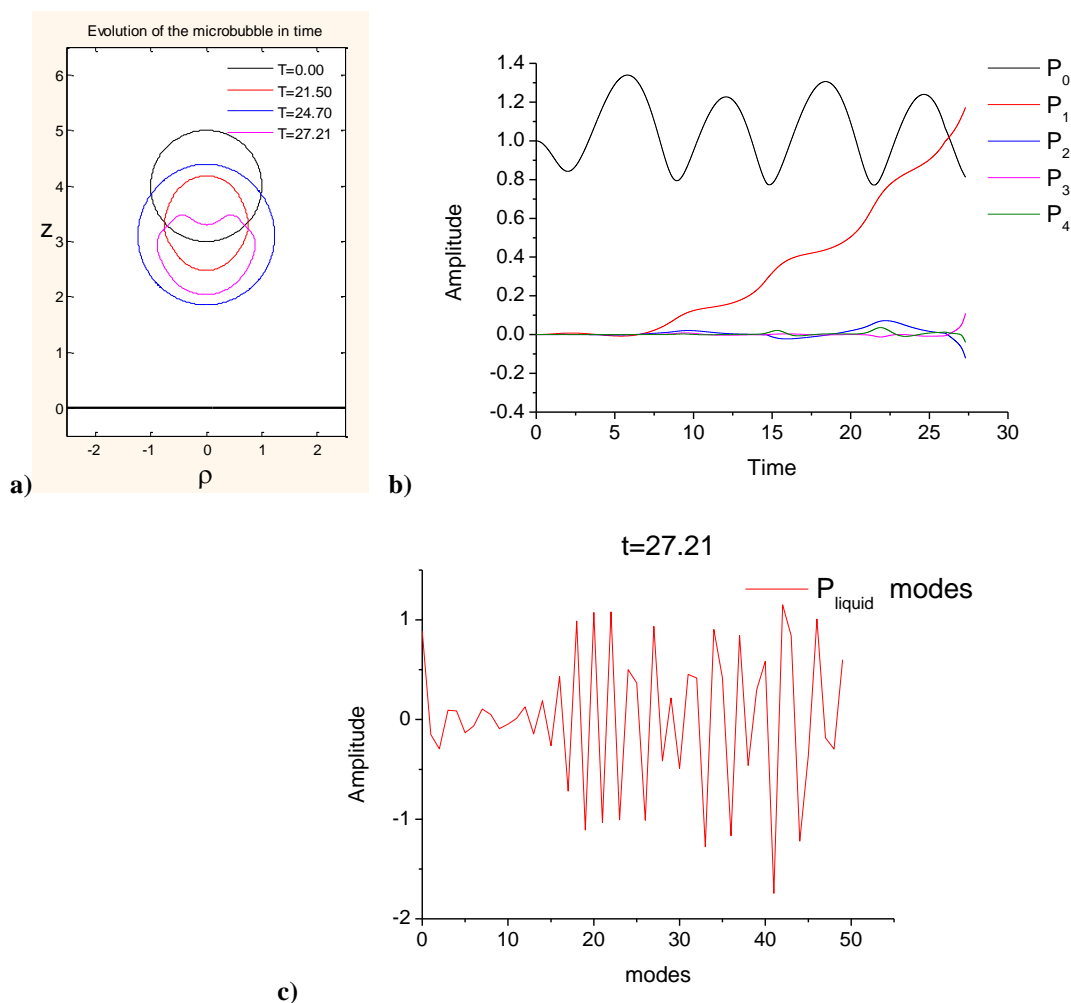
απόσταση μειώνεται η επίδραση του τοιχώματος είναι διττή. Μέσω των ταλαντώσεων όγκου της φυσαλίδας προκαλεί επιτάχυνση της τελευταίας προς το μέρος του, ενώ ταυτόχρονα ευνοεί την παραμόρφωση του κελύφους για μικρότερα πλάτη της ακουστικής διαταραχής. Όσο δε διαρκεί η εξωτερικά επιβαλλόμενη συχνότητα, συντηρούνται οι ταλαντώσεις όγκου με αποτέλεσμα η φυσαλίδα να πλησιάζει συστηματικά το τοίχωμα. Κατά συνέπεια, εάν δεν έχει ήδη επέλθει κάποια δραστηκή παραμόρφωση που να σταματήσει αναγκαστικά την προσομοίωση σηματοδοτώντας ενδεχόμενη ρήξη της συνέχειας του κελύφους, σε συνδυασμό με την απουσία ιξώδους σκέδασης στο περιβάλλον ρευστό που να επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας, η μικροφυσαλίδα μεταφέρεται μέχρι το τοίχωμα.

Προκειμένου να διερευνηθούν τα παραπάνω φαινόμενα διεξήχθησαν προσομοιώσεις για αρχική απόσταση της φυσαλίδας από το τοίχωμα  $d_0 = d'/R_{bal} = 4$ . Όπως φαίνεται και από τα σχήματα **Διάγραμμα 5-3a)** και **b)** το κέλυφος παρουσιάζει παραμόρφωση για μικρότερη τιμή του πλάτους  $\varepsilon$ , σε σχέση με την προσομοίωση για πολύ μεγάλη απόσταση που φαίνεται στο **Διάγραμμα 3-1** που κατέγραψε υποαρμονικό συντονισμό για ελεύθερη μικροφυσαλίδα. Μάλιστα στην περίπτωση του **Διαγράμματος 5-3** η φυσαλίδα παραμορφώνεται και επιταχύνεται προς το τοίχωμα, λόγω της δευτερογενούς δύναμης Bjerknes που περιγράφηκε και στην ενότητα 3.6, μέχρι που περίπου ακουμπάει σε αυτό λόγω της απουσίας της δύναμης λίπανσης από πλευράς του τοιχώματος ελλείψει ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού. Καθώς το πλάτος της διαταραχής αυξάνεται, ενώ όμως παραμένει κάτω από αυτό που απαιτείται στο **Διάγραμμα 5-2**, η μικροφυσαλίδα εκτελεί μικρό αριθμό ταλαντώσεων όγκου και πριν πλησιάσει αρκετά στο τοίχωμα παρουσιάζει έντονη αύξηση των ιδιομορφών με εκτενή παραμόρφωση του σχήματος,



**Διάγραμμα 5-3:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, για  $\varepsilon=1$ ,  $d_0=4$ , M-R shell( $b=0$ ),  $G_{3D}=80$  MPa,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m's,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N'm,  $\nu_f=1.7$  MHz,  $R_0=3.6$   $\mu$ m.

**Διάγραμμα 5-4a)**, μέσω της αστάθειας δυναμικού λυγισμού (dynamic buckling) που εντείνεται μεταξύ διαδοχικών περιόδων και στη φάση μέγιστης συμπίεσης του κελύφους, **Διάγραμμα 5-4b)**. Στην περίπτωση αυτή επίσης η προσομοίωση σταματά λόγω ταυτόχρονης αύξησης ιδιομορφών μικρού μήκους, όπως φαίνεται στην ανάλυση Legendre της πίεσης, **Διάγραμμα 5-4c)**, οι οποίες μεγαλώνουν λόγω μη γραμμικής αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών σχήματος. Αναμένεται και εδώ το κέλυφος τελικά να διαρραγεί λόγω των ιξωδοελαστικών τάσεων που αναπτύσσονται επάνω του λόγω της παραμόρφωσης. Συνολικά η επίδραση του τοιχώματος, πέραν των δυνάμεων Bjerknes, είναι να μειώσει το κατώφλι πλάτους για την εμφάνιση παραμόρφωσης, είτε μέσω συντονισμού είτε μέσω δυναμικού λυγισμού, και να μειώσει τη διαφορά μεταξύ των δύο κρίσιμων τιμών πλάτους για την εμφάνιση των παραπάνω φαινομένων. Επίσης, όπως φαίνεται από το απεικονιζόμενο πλάτος των ταλαντώσεων όγκου, και επαληθεύεται παρακάτω με την περαιτέρω μείωση της απόστασης από το τοίχωμα, η προσέγγιση στο τοίχωμα από μόνη της δεν προκαλεί καμία αισθητή μείωση στο σκεδαζόμενο

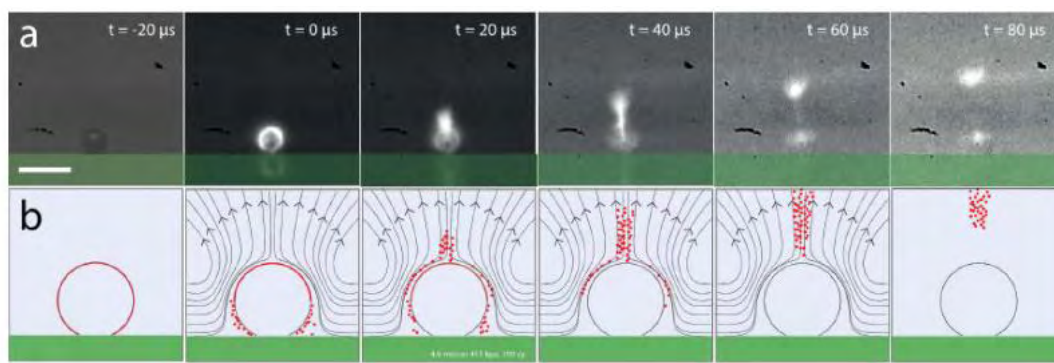


**Διάγραμμα 5-4:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας και c) Διάγραμμα πλάτους των ιδιομορφών της πίεσης στη διεπιφάνεια από τη μεριά του ρευστού στο τέλος της προσομοίωσης, για  $\epsilon=2$ ,  $d_0=4$ .



σήμα ταλάντωσης. Συνεπώς, η καταγεγραμμένη μείωση του επανασκεδαζόμενου ακουστικού σήματος από μικροφυσαλίδες [21] αφορά φυσαλίδες που εκτελούν ταλάντωση παγιδευμένες σε τοίχωμα, ενώ όπου υπάρχει αύξηση του σήματος οφείλεται στην προσέγγιση αριθμού μικροφυσαλίδων κοντά στο τοίχωμα λόγω των δευτερογενών δυνάμεων Bjerknes και της επακόλουθης συζευγμένης ταλάντωσης που εκτελούν και στην οποία εμφανίζονται ως ένας μεγάλος όγκος με μεγάλο επανασκεδαζόμενο σήμα, βλ. και [22].

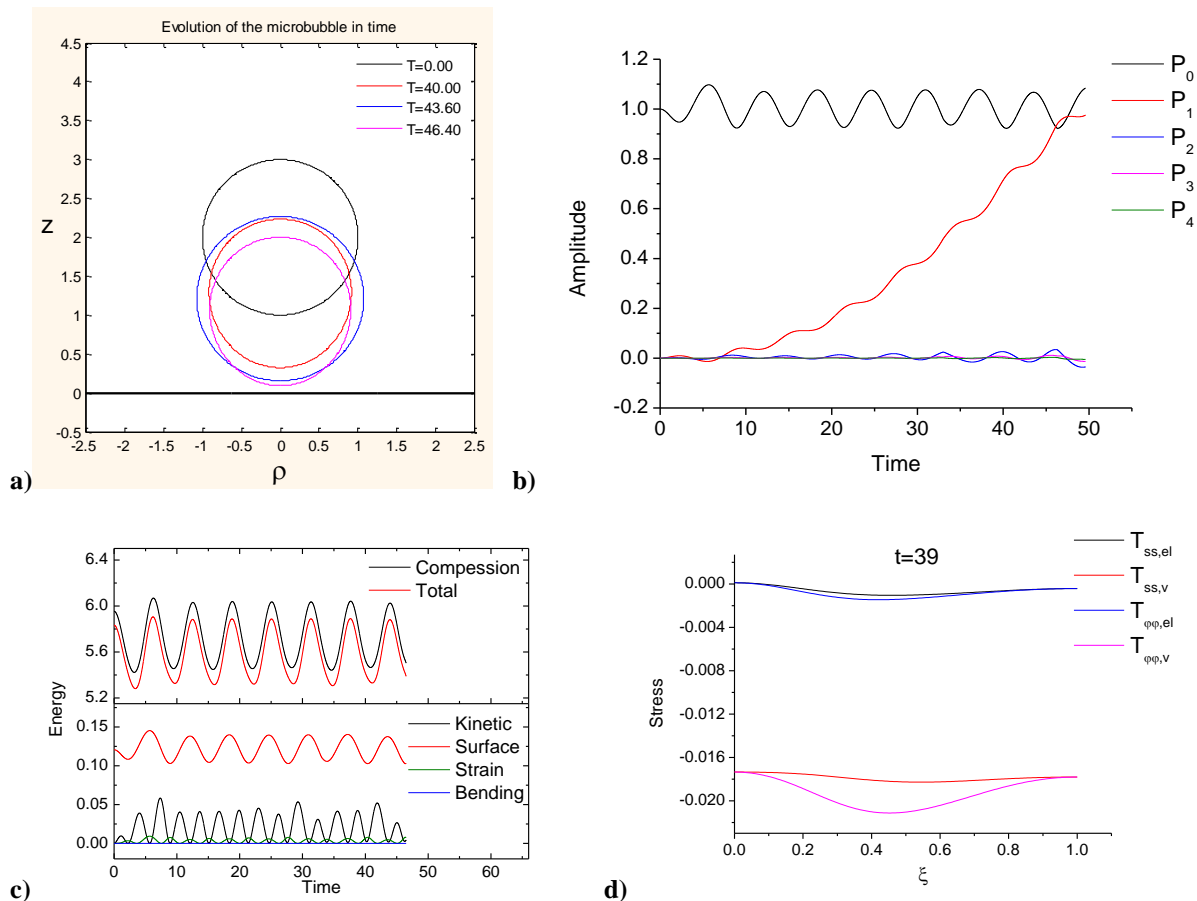
Σε επόμενη φάση θα μελετήσουμε την ακουστική συμπεριφορά μικροφυσαλίδων με κέλυφος από λιπίδιο, οι οποίες χρησιμοποιούνται κυρίως για μεταφορά φαρμάκων, σε πολύ κοντινή αρχική απόσταση από στερεό τοίχωμα,  $d_0 = d'/R_{bal} = 2$ , με στόχο την αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις, **Εικόνα 1-2** από την Εισαγωγή [20] και **Εικόνα 5-1a),b)** από την [87]. Στην πρώτη περίπτωση μικροφυσαλίδα ευρισκόμενη πολύ κοντά σε τοίχωμα απεικονίζεται να υλοποιεί αξονοσυμμετρικές ταλαντώσεις πρωτίστως κατά τον κατακόρυφο άξονα ως προς το επίπεδο του τοιχώματος. Στην 2<sup>η</sup> περίπτωση φωσφορίζον υλικό έχει εναποτεθεί στο κέλυφος μικροφυσαλίδας μικρού σχετικά μεγέθους το οποίο, στη φάση της συμπίεσης, μεταφέρεται στην κυρίως μάζα του περιβάλλοντος ρευστού μέσω της κίνησης του ρευστού. Η παραπάνω ερμηνεία επικεντρώνει στο φαινόμενο της μικροκυκλοφορίας (microstreaming), όπου η ταλάντωση της φυσαλίδας ενεργοποιεί διατμητική ροή στο γειτονικό ρευστό δημιουργώντας έτσι ανακυκλοφορία στο πεδίο ροής, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μεταφορά φαρμακευτικού υλικού.



**Εικόνα 5-1:** a) Μεταφορά φωσφορίζοντος υλικού από το κέλυφος μικροφυσαλίδας προς την κυρίως μάζα του ρευστού, b) Απόπειρα ερμηνείας του φαινομένου μέσω της μικροκυκλοφορίας (microstreaming) σαν αποτέλεσμα της ακουστικής απόκρισης της φυσαλίδας.

Θα επιχειρήσουμε να κατανοήσουμε τα παραπάνω φαινόμενα μέσω των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν, να συζητήσουμε την εγκυρότητα των μηχανισμών που προτείνει η βιβλιογραφία και να καταλήξουμε στον πιο εύλογο φυσικό μηχανισμό που διέπει την εξέλιξη

τους. Για τον σκοπό αυτό έγιναν προσομοιώσεις με τις παραμέτρους που χρησιμοποιήθηκαν στα **Διαγράμματα 5-3** και **5-4** και για μικρότερη αρχική απόσταση,  $d_0 = d'/R_{bal} = 2$ . Η απόκριση για πλάτος διαταραχής  $\varepsilon=1$  απεικονίζεται στο **Διάγραμμα 5-5**, όπου η φυσαλίδα εκτελεί ταλαντώσεις όγκου στην επιβαλλόμενη συχνότητα, ενώ ταυτόχρονα επιταχύνεται προς το τοίχωμα λόγω των δευτερογενών δυνάμεων Bjerknes, **Διάγραμμα 5-5b**). Η παραπάνω ταλάντωση αντανακλά στο διάγραμμα διατήρησης ενέργειας, **Διάγραμμα 5-5c**). Παράλληλα το σχήμα παραμένει σφαιρικό στη φάση της διαστολής, ενώ παρουσιάζει επιμήκυνση κατά τον άξονα συμμετρίας στη φάση συμπίεσης, **Διάγραμμα 5-5a**). Η παραπάνω συμπεριφορά είναι αναμενόμενη αφού, λόγω της ελαστικότητας του κελύφους, η παραμόρφωση είναι ενεργειακά προτιμητέα στη φάση της συστολής. Κατά τη διάρκεια της μετάβασης από τη διαστολή στη συστολή αναπτύσσονται υψηλές θλιπτικές ιξώδεις τάσεις, **Διάγραμμα 5-5d**), των οποίων η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στον ισημερινό. Η συγκεκριμένη κατανομή των ιξωδών τάσεων υποχρεώνει την περιοχή γύρω από τον ισημερινό σε επίπεδη διαμόρφωση ελαττώνοντας την

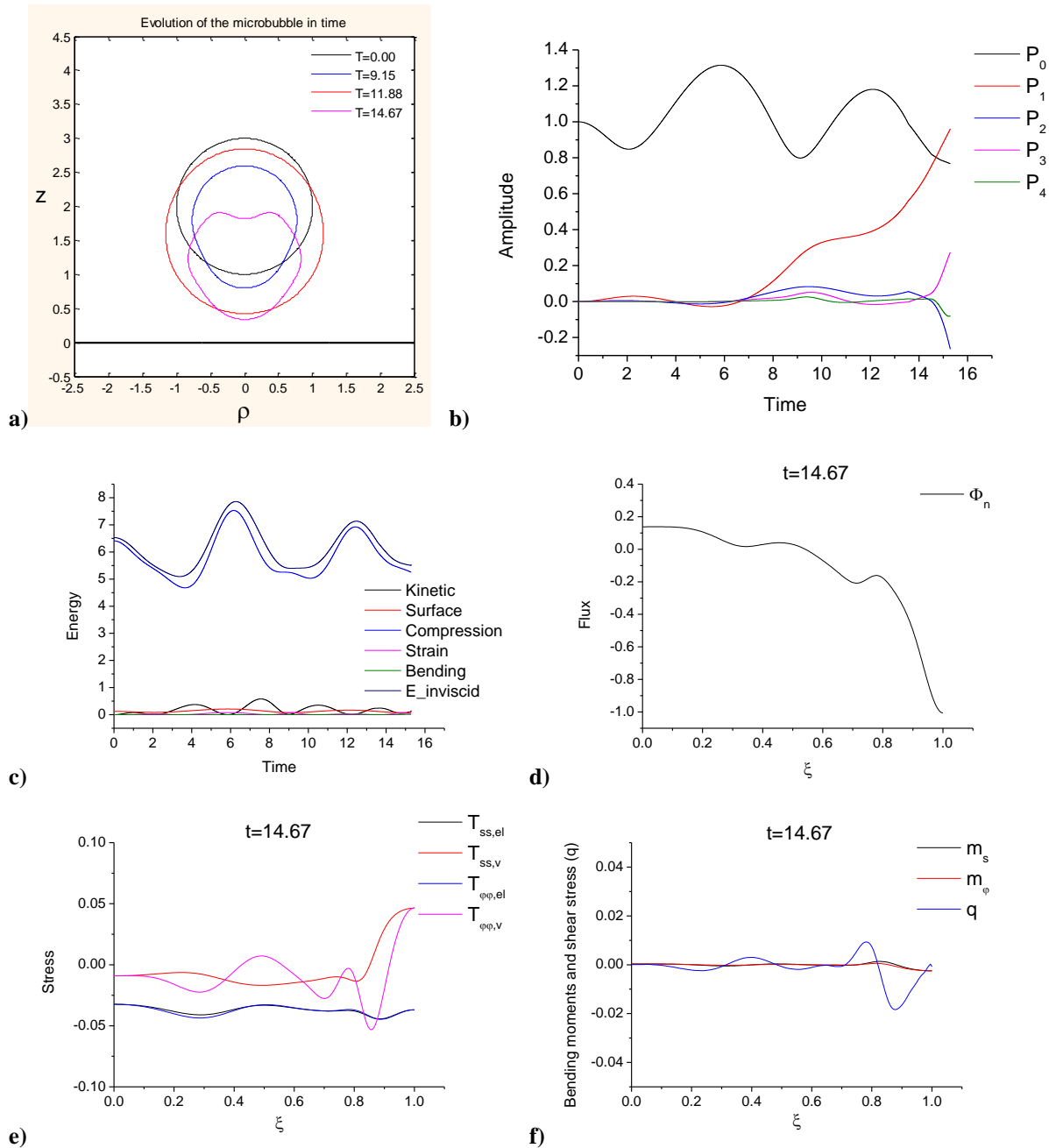


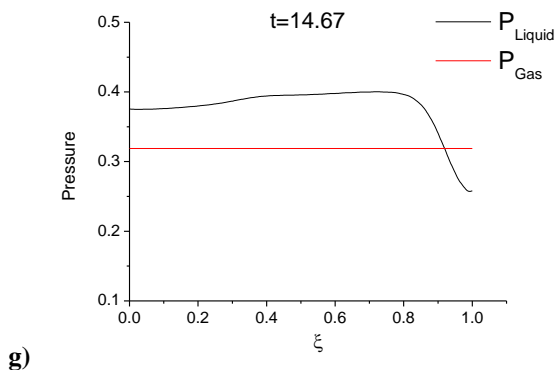
**Διάγραμμα 5-5:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος, d) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος κατά τη φάση συστολής, για  $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ .

καμπυλότητά της. Συνεπώς ευνοείται η ανάπτυξη της ιδιομορφής σχήματος  $P_2$ , **Διάγραμμα 5-5b**), οδηγώντας έτσι στη δημιουργία σχημάτων επιμηκυμένων κατά τον άξονα συμμετρίας (prolate). Τελικά, η φυσαλίδα πλησιάζει το τοίχωμα χωρίς όμως να το ακουμπήσει, καθ' όσον η προσομοίωση διακόπτεται. Η παραπάνω μοντελοποίηση παύει να είναι αξιόπιστη σε τόσο μικρές αποστάσεις από το τοίχωμα, διότι αγνοεί την εμφάνιση της λιπαντικής πίεσης στο διάκενο η οποία την απωθεί από το τοίχωμα. Μάλιστα αναμένεται ότι λαμβάνοντας υπόψη τις ιξώδεις τάσεις στο ρευστό η φυσαλίδα ενδέχεται να οδηγηθεί σε ταλάντωση γύρω από μία ελάχιστη απόσταση.

Αυξάνοντας το πλάτος της ακουστικής διαταραχής σε  $\varepsilon = 2$  προκαλεί την έντονη ανάπτυξη ιδιομορφών σχήματος, όμως δεν δίδεται η ευκαιρία ώστε να αναπτυχθεί κάποια αστάθεια μια και η φυσαλίδα πολύ σύντομα φτάνει στο τοίχωμα. Έτσι επαναλαμβάνεται η προσομοίωση του **Διαγράμματος 5-4** για μικρότερη απόσταση,  $d_0 = 2$  και μεγαλύτερο πλάτος,  $\varepsilon = 3$ . Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται πολύ γρήγορη ανάπτυξη ιδιομορφών σχήματος, **Διάγραμμα 5-6b**) στην επιβαλλόμενη συχνότητα, παράλληλα με την επιτάχυνση προς το τοίχωμα λόγω Bjerknes. Ανάλογη μεταβολή επιδεικνύει και η ενέργεια του συστήματος, **Διάγραμμα 5-6c**). Το σχήμα αρχικά είναι επιμηκυμένο (prolate), **Διάγραμμα 5-6a**), όμως η ανάπτυξη της αστάθειας δυναμικού λυγισμού προκαλεί την ανάπτυξη και ασύμμετρων ιδιομορφών με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται σχήματα με εσοχή στην περιοχή του βόρειου πόλου. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 4, η μεγάλη ταχύτητα που αποκτά η περιοχή γύρω από τον βόρειο πόλο του κελύφους, **Διάγραμμα 5-6d**) προκαλεί την ανάπτυξη εφελκυστικών ιξωδών τάσεων που εφελκύουν το κέλυφος κάθετα στον άξονα συμμετρίας, **Διάγραμμα 5-6e**). Έτσι παρατηρείται ανάπτυξη έντονων καμπτικών τάσεων  $q$ , **Διάγραμμα 5-6f**), και εφελκυστικών τάσεων γύρω από τον πόλο, ενώ στο υπόλοιπο κομμάτι του κελύφους επικρατούν θλιπτικές τάσεις, **Διάγραμμα 5-6e**). Και στην περίπτωση αυτή γίνεται χρήση filtering και η προσομοίωση διακόπτεται λόγω ανάπτυξης ιδιομορφών μικρού μήκους σαν αποτέλεσμα της έντονης παραμόρφωσης του κελύφους. Όμως η παραπάνω αριθμητική συμπεριφορά δεν αναιρείται, αντίθετα επιτείνεται, από την τάση του κελύφους να διαρραγεί λόγω της έντονης παραμόρφωσης και της συσσώρευσης ελαστικής ενέργειας στην περιοχή γύρω από τον βόρειο πόλο. Μάλιστα, η συμπεριφορά αυτή, μια και στη φάση αμέσως μετά την μέγιστη συμπίεση η πίεση της φυσαλίδας είναι μεγαλύτερη τοπικά από αυτήν του ρευστού, **Διάγραμμα 5-6g**), εξηγεί καλύτερα από αυτήν της ανακυκλοφορίας (microstreaming) την πειραματικά παρατηρούμενη, **Εικόνα 5-1**, γρήγορη μεταφορά του υλικού που έχει εναποτεθεί στο κέλυφος προς την κυρίως μάζα του ρευστού. Για μεγάλο πλάτος ακουστικής διαταραχής τυχόν θραύση του κελύφους στη

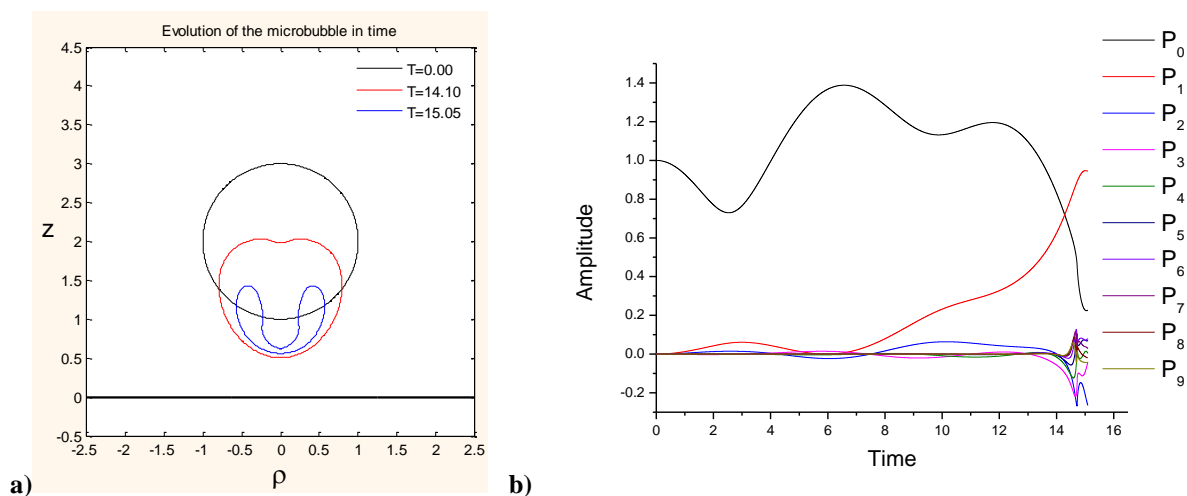
φάση της αναπήδησης (rebound) δημιουργεί δέσμη του περικλειόμενου αερίου που μεταφέρει επιφανειακό υλικό προς την κυρίως μάζα του ρευστού. Πρέπει να τονισθεί ότι στη φάση συμπίεσης η κυκλοφορία του ρευστού θα γίνεται προς το κέλυφος και όχι ανάποδα, γεγονός που δεν ευνοεί την μεταφορά υλικού κατά την φορά που δείχνουν τα πειράματα. Συνεπώς, ο μηχανισμός που προτείνεται εδώ και εμπλέκει τη θραύση του κελύφους στη φάση συμπίεσης κρίνεται ως πιο αξιόπιστος.





**Διάγραμμα 5-6:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (μπλε), στη φάση διαστολής (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κελύφος, d) Κατανομή κάθετης ταχύτητας του κελύφους, e) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κελύφος της φυσαλίδας την τελική χρονική στιγμή, f) Κατανομή διατμητικής τάσης λόγω κάμψης στο κελύφος και g) Κατανομή πίεσης κατά μήκος του κελύφους, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ .

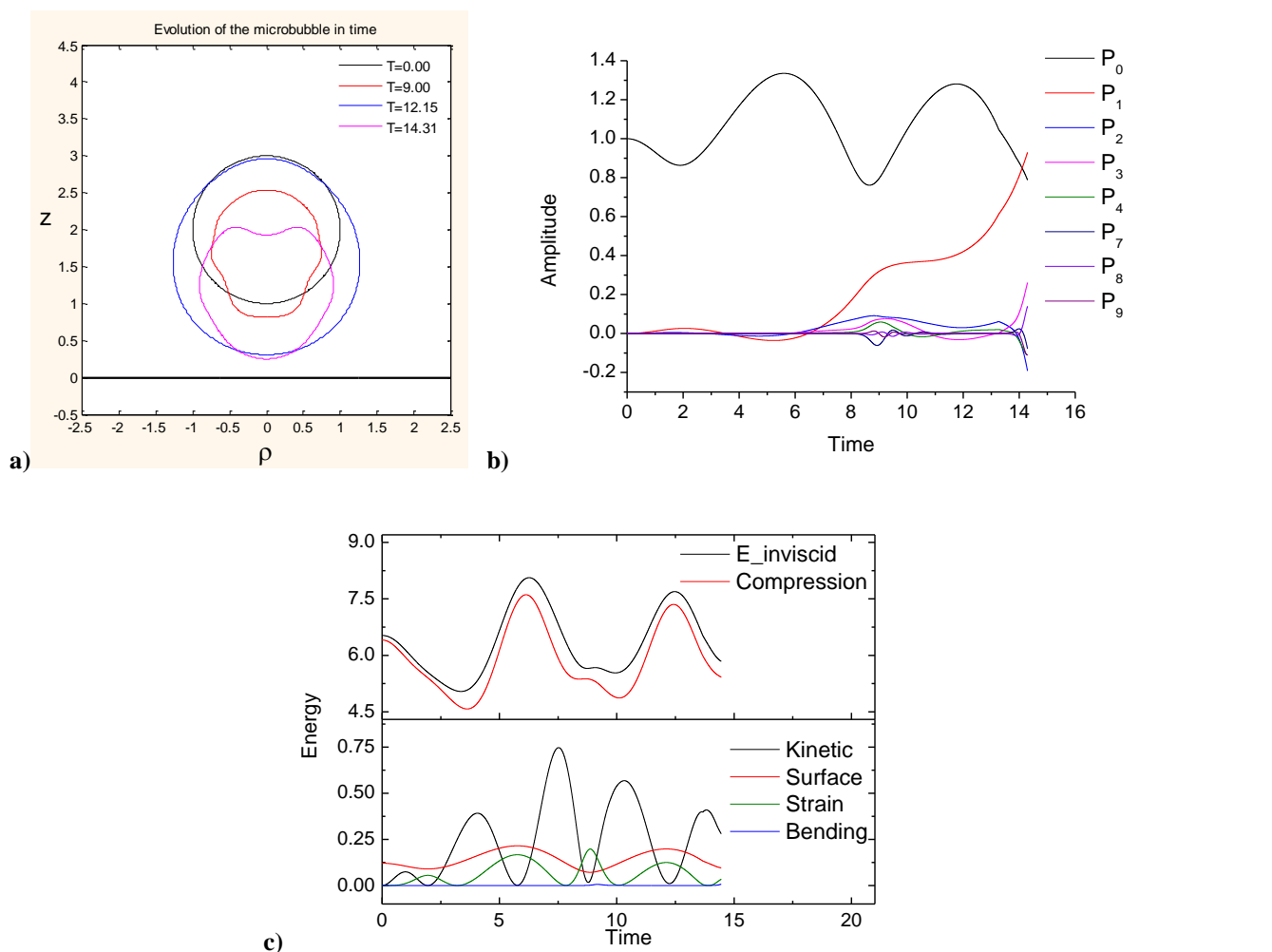
Σε αντίθεση με την παραπάνω συμπεριφορά, φυσαλίδα χωρίς ελαστικό κάλυμμα παρουσιάζει την κλασική δημιουργία υγρού jet που την διαπερνά, **Διάγραμμα 5-7a**), και την ανάπτυξη αριθμού ιδιομορφών σχήματος, **Διάγραμμα 5-7b**). Η μεγάλη ταχύτητα της δέσμης σταδιακά μειώνεται λόγω της συμπίεσης του εσωκλειστού αερίου. Παρ' όλα αυτά παρουσιάζει αρκετά μεγαλύτερη επιμήκυνση παράλληλα προς τον άξονα συμμετρίας, ενώ τελικά το ισοζύγιο μεταξύ της πίεσης και της ισοτροπικής επιφανειακής τάσης δίνει μία περίπου σφαιρική απόληξη της δέσμης. Κατ' αντιπαραβολή, στο **Διάγραμμα 5-6a**) το σχήμα του κελύφους στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης παρουσιάζει επιμήκυνση κάθετα στον άξονα συμμετρίας προκειμένου να αποφευχθεί η δημιουργία μεγάλων εφελκυστικών τάσεων με ενδεχόμενη μεγάλη επιμήκυνση επάνω στον πόλο και κατά μήκος του άξονα. Συνολικά, το δυναμικό ισοζύγιο δυνάμεων πάνω στο κελύφος κατευθύνει την επιμήκυνση και την κάμψη εκτός του άξονα συμμετρίας, σαν



**Διάγραμμα 5-7:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας χωρίς ελαστικό περίβλημα [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), τη στιγμή της έναρξης του jet (κόκκινη), στο τέλος της προσομοίωσης (μπλε)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ .

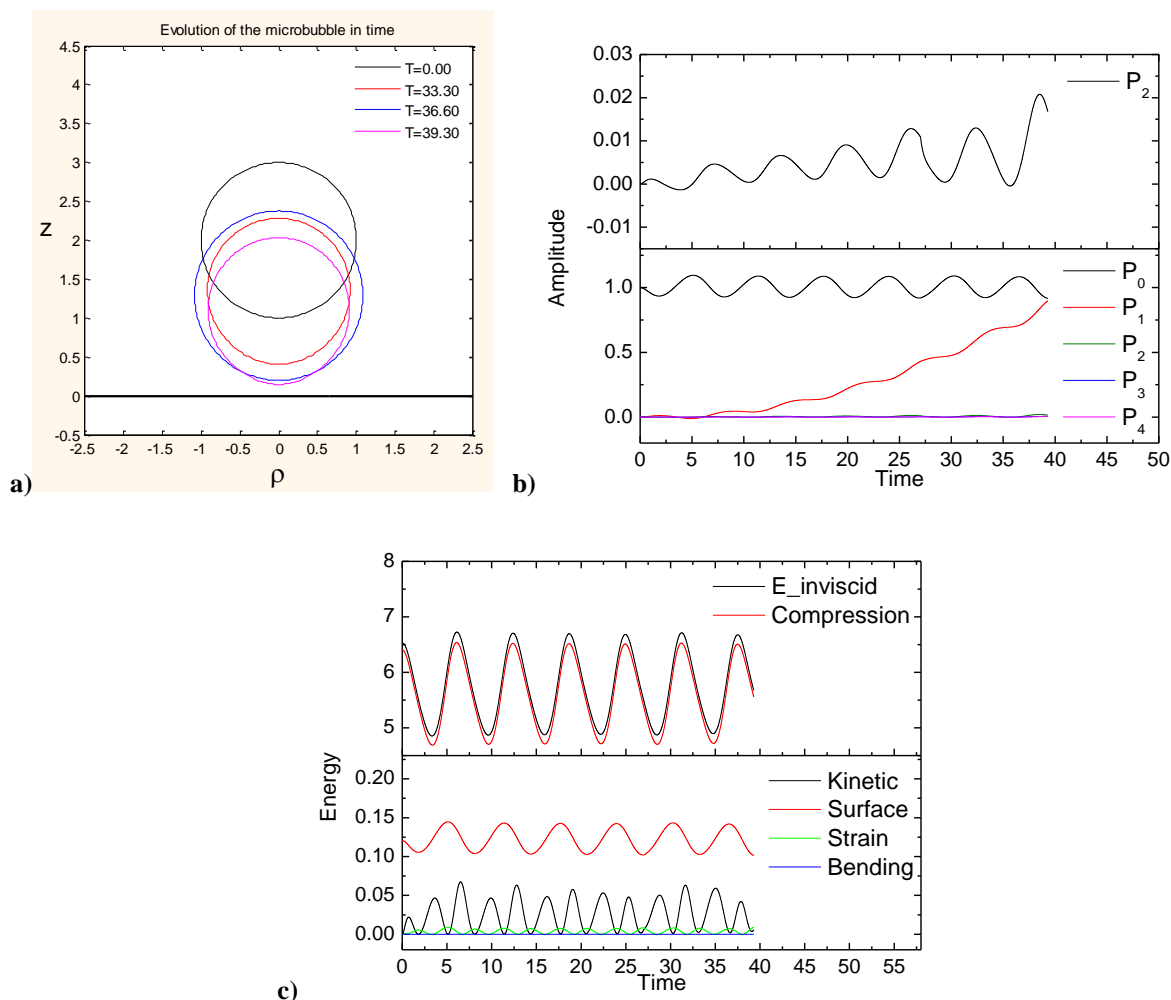
αποτέλεσμα της ανισοτροπίας των ιξωδοελαστικών τάσεων σε αντίθεση με την επιφανειακή τάση στις διεπιφάνειες χωρίς ελαστική επίστρωση, προκειμένου να ανακαταστεί και να ελαχιστοποιήσει την ενέργεια του κελύφους αποτρέποντας έτσι τη δημιουργία υγρής δέσμης jet.

Η παραπάνω συμπεριφορά μελετήθηκε και παραμετρικά. Συγκεκριμένα, αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του κελύφους κατ' ουσίαν ευνοεί τον λυγισμό αντί του εφελκυσμού/θλίψης εμπλουτίζοντας έτσι το φάσμα ιδιομορφών σχήματος κατά την ακουστική απόκριση της μικροφυσαλίδας, **Διάγραμμα 5-8b**), στη φάση μέγιστης συμπίεσης. Το σχήμα παρουσιάζει παρόμοια εξέλιξη με αυτήν που απεικονίζει το **Διάγραμμα 5-6a**), γεγονός που προδιαθέτει για την τελική θραύση του κελύφους σε βάθος χρόνου ή, εναλλακτικά, για την ανάπτυξη πτυχώσεων στην αζιμούθια κατεύθυνση προκειμένου να εκτονωθούν οι αναπτυσσόμενες ελαστικές τάσεις. Αντίστοιχα, αύξηση του ιξώδους του κελύφους ευνοεί την μεταφορά ενέργειας από τις ταλαντώσεις όγκου στην αναπτυσσόμενη ιδιομορφή σχήματος,  $P_2$ , στη φάση



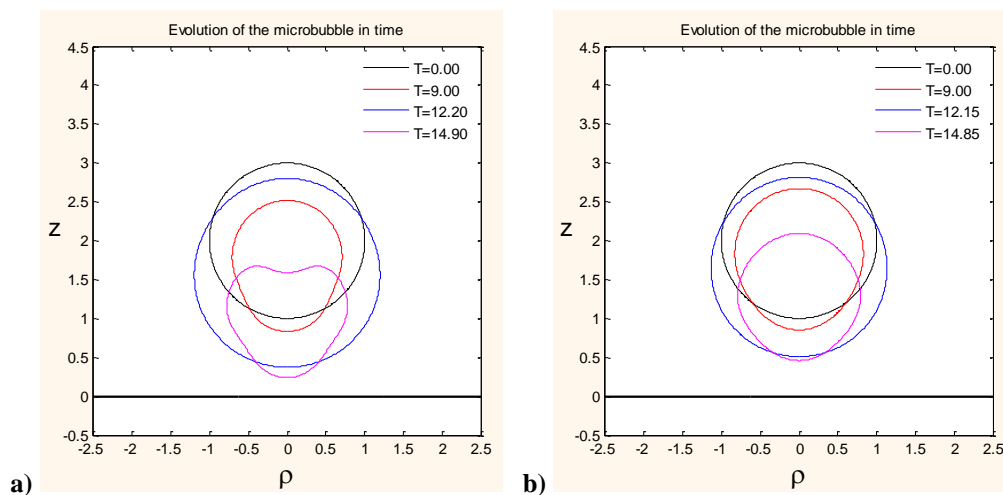
**Διάγραμμα 5-8:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $G_{3D}=160$  MPa.

της συμπίεσης η οποία κυριαρχεί, **Διάγραμμα 5-9b**), σε σχέση με τις υπόλοιπες, δίνοντας έντονα επιμηκυμένο (prolate) σχήμα παράλληλα στον άξονα συμμετρίας, **Διάγραμμα 5-9a**), γεγονός που αντανακλά και στην ελαστική ενέργεια του κελύφους σε σχέση με την καμπτική, **Διάγραμμα 5-9c**). Αντίθετα, όταν αυξάνεται η ελαστικότητα του κελύφους η ενέργεια λυγισμού αυξάνεται κατά τα τελευταία στάδια της προσομοίωσης, **Διάγραμμα 5-8c**), λόγω της έντονης παραμόρφωσης του κελύφους. Αλλαγή του καταστατικού νόμου δεν μεταβάλλει το παραπάνω μοτίβο δυναμικής απόκρισης της φουσαλίδας, όπως φαίνεται και στο **Διάγραμμα 5-10a**). Για μικρές τιμές του μέτρου ελαστικότητας η ανάπτυξη εσοχής στην περιοχή του βόρειου πόλου είναι δυσκολότερη, διότι το κέλυφος διοχετεύει ευκολότερα την ενέργεια σε εφελκυσμό/θλίψη παρά σε κάμψη και συμπίεση, όντας πιο μαλακό, όπως συζητήθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συνεπώς, η μικροφουσαλίδα επιδεικνύει ταλαντώσεις με παραμόρφωση ωοειδούς σχήματος στη φάση συμπίεσης, **Διάγραμμα 5-10b**).



**Διάγραμμα 5-9:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας και c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=100$  Kg/m<sup>3</sup>.

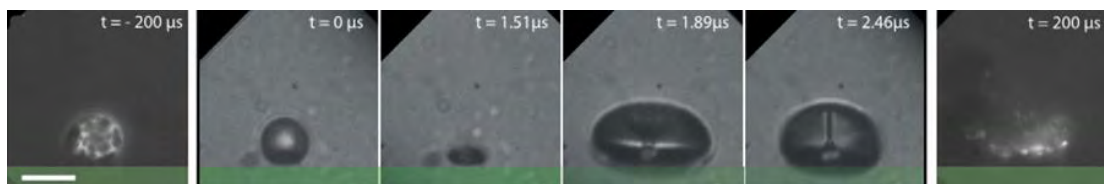




**Διάγραμμα 5-10:** Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συστολής (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε), στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)] για: a) καταστατικό νόμο Hooke με  $G_{3D}=80$  MPa και b) Καταστατικό νόμο Mooney-Rivlin με  $G_{3D}=5$  MPa (μαλακό κέλυφος). [ $\varepsilon=1$ ,  $d_0=2$ ,  $\mu_{3D}=20$  Kg/m<sup>3</sup>s,  $k_B=3 \cdot 10^{-14}$  N/m,  $\nu_f=1.7$  MHz,  $R_0=3.6$   $\mu$ m].

## 5.2 Αντιπαραβολή με Πειραματικές Μετρήσεις

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω σημαντική συνιστώσα της παρούσας εργασίας είναι η κατανόηση μηχανισμών ταλάντωσης και κατάρρευσης μικροφουσαλίδων που βρίσκονται κοντά σε τοιχώματα. Για τον σκοπό αυτό έχουν παρατεθεί τα σχετικά διαγράμματα, **Εικόνα 1-2** και **Εικόνα 5-1**, από τις πειραματικές εργασίες [20] και [87] αντίστοιχα που απεικονίζουν ασύμμετρη ταλάντωση μικροφουσαλίδας κοντά σε τοίχωμα και μεταφορά διεπιφανειακού υλικού από το κέλυφος ταλαντούμενης μικροφουσαλίδας στην κυρίως μάζα ρευστού. Τέλος παρατίθεται εδώ γράφημα, **Εικόνα 5-2**, που απεικονίζει ασύμμετρη ταλάντωση μικροφουσαλίδας κοντά σε τοίχωμα σε συνδυασμό με τη δημιουργία jet. Και στις τρεις περιπτώσεις η παρούσα εργασία παρέχει εύλογη εξήγηση της απόκρισης της μικροφουσαλίδας, η οποία παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο για τον έλεγχο και βελτιστοποίηση σχετικών εφαρμογών.



**Εικόνα 5-2:** Ασύμμετρη ταλάντωση μικροφουσαλίδας και δημιουργία jet με κατεύθυνση προς το τοίχωμα. Φυσαλίδα μεγέθους  $R_0=5$   $\mu$ m.

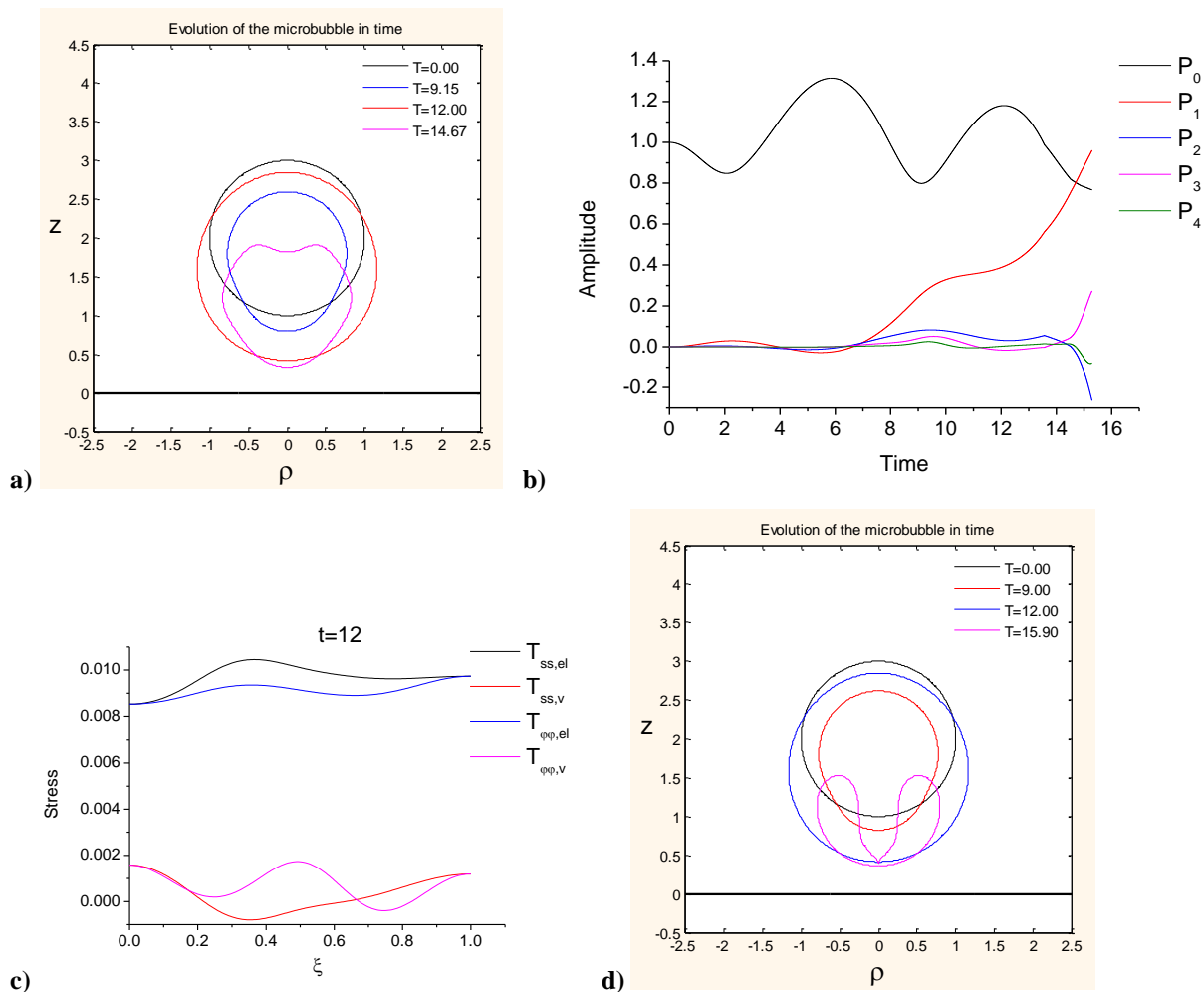
Αναφορικά με την **Εικόνα 1-2**, όπου περιγράφονται οι ασύμμετρες ταλαντώσεις μικροφουσαλίδας κυρίως κάθετα στο γειτονικό τοίχωμα, σε συνδυασμό και με την αναφορά στην εργασία [19] για εμφάνιση τοροειδών μικροφουσαλίδων και σχημάτων επιμηκυμένων κάθετα σε γειτονικό τοίχωμα, **Εικόνα 1-1**, οι προσομοιώσεις της ενότητας 5.1, (**Διαγράμματα 5-3, 5-5,**



**5-9** και **5-10b**), για κοντινή απόσταση της μικροφυσαλίδας από το τοίχωμα απεικονίζουν συμπεριφορά όπου κυριαρχούν ωοειδή (prolate) σχήματα χωρίς εσοχή στη θέση του πόλου για σχετικά μικρά πλάτη ακουστικής διαταραχής ή/και για σχετικά μαλακά κελύφη που μπορούν να απορροφήσουν ελαστική ενέργεια μέσω εφελκυσμού/θλίψης. Για σχετικά μεγαλύτερες τιμές του πλάτους ή σχετικά σκληρότερα κελύφη οι προσομοιώσεις, (**Διαγράμματα 5-4, 5-6** και **5-8**), δίνουν αρχικά ωοειδή σχήματα, ακολουθούμενα από σχήματα που παρουσιάζουν εσοχή στην περιοχή του πόλου που βρίσκεται μακριά από το τοίχωμα ενώ ταλαντώνονται σχεδόν αποκλειστικά κάθετα σε αυτό. Τα παραπάνω ευρήματα συνάδουν στην εικόνα των κελυφών από φωσφολιπίδιο ως σχετικά μαλακών κελυφών που παρουσιάζουν έντονη παραμόρφωση, καθώς δε εκτελούν ταλαντώσεις όγκου προσεγγίζουν γειτονικά τοιχώματα όπου ταλαντώνονται κάθετα σε αυτά. Αναφορικά με τη δυνατότητα δημιουργίας jet και το ενδεχόμενο θραύσης πρέπει να σημειωθεί ότι, όπως δείχνουν και οι προσομοιώσεις των **Διαγραμμάτων 5-4, 5-6** και **5-8**, για αρκετά μεγάλα πλάτη ακουστικής διαταραχής, τα μαλακά κελύφη μπορούν να σπάσουν αμέσως μετά τη φάση μέγιστης συμπίεσης λόγω του φαινομένου του δυναμικού λυγισμού και της αύξησης αριθμού ιδιομορφών σχήματος που χαρακτηρίζονται από εσοχή στην περιοχή του βόρειου πόλου και την ανάπτυξη έντονων καμπτικών τάσεων. Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να καταγραφούν ως τοροειδείς φυσαλίδες σε φωτογραφική αναπαράσταση υπό κάτοψη **Εικόνα 1-1**. Σε τέτοια περίπτωση όμως η θραύση του κελύφους δεν οδηγεί σε jet αλλά στην αποδέσμευση μέρους του περικλειόμενου αερίου, **Εικόνα 5-1**, λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ του αερίου και του περιβάλλοντος ρευστού, και στην μεταφορά υλικού που έχει εναποτεθεί στο κέλυφος για φαρμακευτικούς ή απεικονιστικούς σκοπούς. Μάλιστα, προσομοιώσεις που έχουν διεξαχθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων που εμπεριέχουν και την δράση του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού [85], **Διάγραμμα 4-10a**) και b), δεν καταγράφουν την δημιουργία jet σε στατική ή δυναμική φόρτιση της μικροφυσαλίδας, αλλά τη δημιουργία παραμορφωμένου κελύφους με διευρυμένη εσοχή στην περιοχή του βόρειου πόλου, γεγονός που αδυνατίζει την ισχύ της δημιουργούμενης δέσμης.

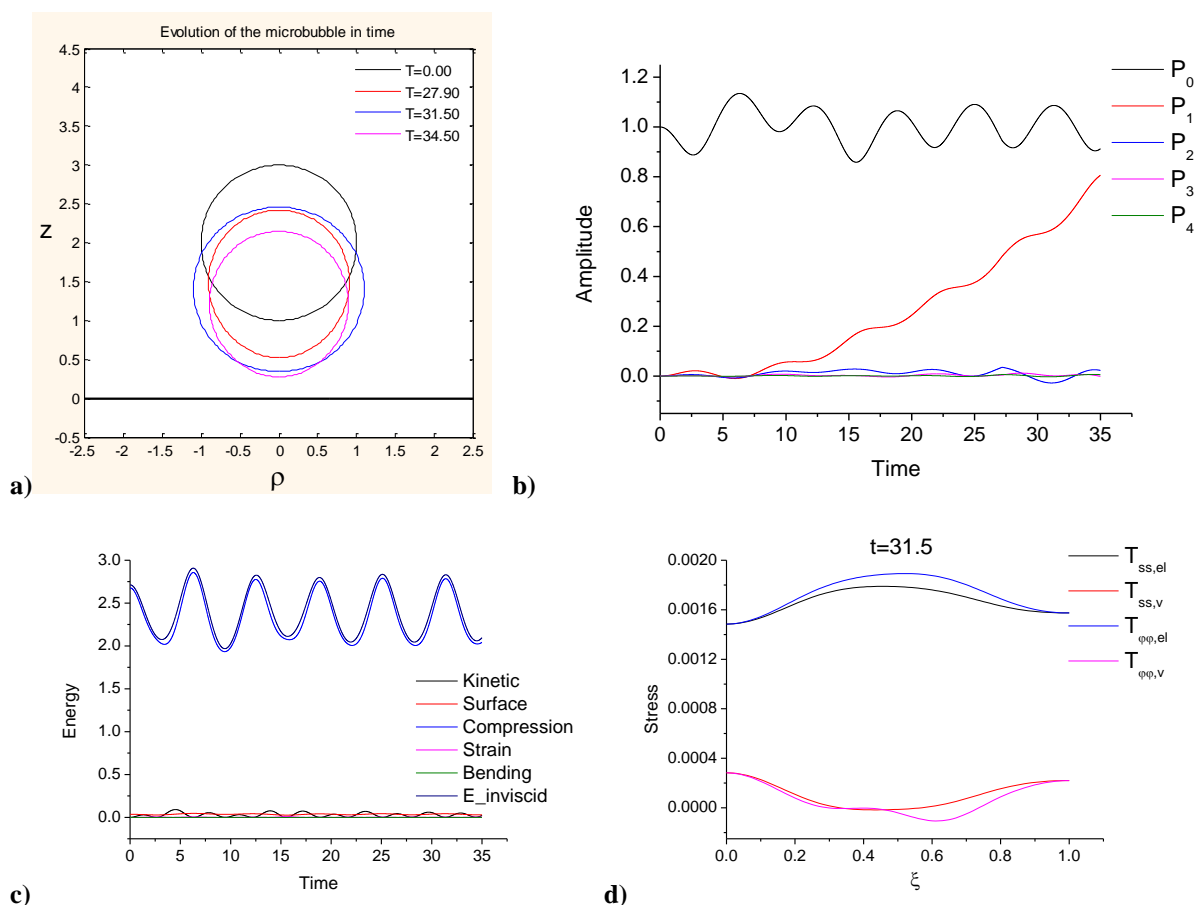
Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η απεικόνιση δημιουργίας λεπτής υδάτινης δέσμης (jet) κατά την κατάρρευση μικροφυσαλίδων με προστατευτικό κέλυφος, **Εικόνα 5-2**, που καταγράφεται σε πειράματα, [87], [19]. Όπως ήδη αναφέρθηκε εκτενώς στην παρούσα εργασία η ιξωδοελαστική συμπεριφορά του κελύφους μικροφυσαλίδων με επικάλυψη από φωσφολιπίδιο, οι οποίες είναι και οι πιο έντονα παραμορφούμενες από αυτές που χρησιμοποιούνται σε απεικονιστικές ή ιατροφαρμακευτικές εφαρμογές, δεν επιτρέπει τη δημιουργία jet. Συγκεκριμένα, η αντίσταση σε λυγισμό δεν επιτρέπει τη δημιουργία εσοχής μεγάλης καμπυλότητας στον πόλο, ενώ η αντίσταση στην χρονική μεταβολή του μήκους του κελύφους

οδηγεί σε τέντωμα του κελύφους κάθετα στον άξονα συμμετρίας. Τέλος, η αντίσταση σε εφελκυσμό/θλίψη και η εκ φύσεως ασυμμετρία στις αναπτυσσόμενες ελαστικές τάσεις αποτρέπουν την σύσταση λεπτής υγρής δέσμης ανοίγοντας το παραμορφούμενο κέλυφος, όπως φαίνεται στις προσομοιώσεις της παρούσας εργασίας όπου απεικονίζεται η προϊούσα δημιουργία εσοχής στο κέλυφος σε συνθήκες στατικής ή δυναμικής φόρτισης. Όμως παραμένει το ερώτημα αναφορικά με τη δημιουργία jet σε πειράματα με μικροφουσαλίδες με ελαστικό κέλυφος, όπως στην **Εικόνα 5-2**. Προκειμένου να εξετασθεί η δυναμική απόκριση στην εν λόγω εικόνα διεξήχθη προσομοίωση με φουσαλίδα τάξης μεγέθους που φαίνεται στην **Εικόνα 5-2** και με πλάτος και συχνότητα ακουστικής διαταραχής παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην [87]. Η προσομοίωση καταγράφει συμπεριφορά της μορφής που απεικονίζεται στα **Διαγράμματα 5-4, 5-6 και 5-8**, με την εμφάνιση αστάθειας δυναμικού λυγισμού και η οποία



**Διάγραμμα 5-11:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (μπλε), στη φάση διαστολής (κόκκινη) και στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφουσαλίδας, c) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος στη μέγιστη διαστολή και d) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφουσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής όπου λαμβάνει χώρα θραύση του κελύφους (μπλε) και στο τέλος της προσομοίωσης όπου έχει δημιουργηθεί το jet (μωβ)] για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $R_0=5.4 \mu\text{m}$ .

σε βάθος χρόνου θα οδηγήσει σε θραύση του κελύφους, **Διάγραμμα 5-11a), b)**. Όμως η **Εικόνα 5-2** παρουσιάζει δημιουργία jet στη φάση της διαστολής κάτι που δεν αναμένεται να συμβεί με βάση την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του κελύφους. Εναλλακτικά εξετάζεται το ενδεχόμενο η δημιουργία jet να ακολουθήσει τη θραύση του κελύφους λόγω της δημιουργίας πολύ μεγάλων εφελκυστικών τάσεων πάνω στο σφαιρικό κέλυφος στη φάση μέγιστης διαστολής. Το **Διάγραμμα 5-11c)** δίνει τις ιξωδοελαστικές τάσεις στο κέλυφος όπου φαίνεται η κυριαρχία των ελαστικών τάσεων οι οποίες, αναλόγως της αντοχής του κελύφους, μπορούν να το οδηγήσουν σε θραύση. Το **Διάγραμμα 5-11d)** δίνει την εξέλιξη του σχήματος της ελεύθερης φυσαλίδας που δημιουργείται μετά τη θραύση του κελύφους στην μέγιστη διαστολή του. Λόγω του περίπου σφαιρικού σχήματος στη φάση αυτή η προσομοίωση ξεκινάει από σφαιρική φυσαλίδα με μέγεθος και πίεση αυτή που καταγράφηκε στη φάση μέγιστης διαστολής του contrast agent. Όπως φαίνεται και από την ακολουθία σχημάτων που καταγράφει το **Διάγραμμα 5-11d)** και όπως αναμένεται με βάση τη δυναμική συμπεριφορά ελεύθερων φυσαλίδων, στην αμέσως επόμενη ταλάντωση δημιουργείται ένα ισχυρό jet που χτυπάει στα απέναντι τοιχώματα της



**Διάγραμμα 5-12:** a) Χρονική εξέλιξη σχήματος της μικροφυσαλίδας [Αρχική χρονική στιγμή (μαύρη), στη φάση συμπίεσης (κόκκινη), στη φάση διαστολής (μπλε) και στο τέλος της προσομοίωσης (μωβ)], b) Διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των κυρίαρχων ιδιομορφών σχήματος της μικροφυσαλίδας, c) Χρονική εξέλιξη των διαφόρων συνιστωσών ενέργειας του συστήματος υγρό/κέλυφος και d) Κατανομή ιξωδοελαστικών τάσεων στο κέλυφος κατά τη μέγιστη διαστολή, για  $\varepsilon=3$ ,  $d_0=2$ ,  $R_0=1.8 \mu\text{m}$ .

φυσαλίδας, περίπου όπως περιγράφεται στην απεικόνιση της ακουστικής απόκρισης της φυσαλίδας στην **Εικόνα 5-2** με βάση τις πειραματικές μετρήσεις στην [87]. Επαναλαμβάνοντας την προσομοίωση με φυσαλίδα μικρότερου μεγέθους και για παρόμοια ακουστική διαταραχή καταγράφεται η ακολουθία σχημάτων **Διάγραμμα 5-12a**) όπου το περίπου σφαιρικό σχήμα στη φάση της μέγιστης διαστολής ακολουθείται από ωοειδή σχήματα στη φάση της συμπίεσης. Τα τελευταία όμως δεν αναμένεται να παρουσιάσουν αστάθεια δυναμικού λυγισμού που θα οδηγήσει σε θραύση το κέλυφος, **Διάγραμμα 5-12b**), λόγω και του μικρού αρχικού μεγέθους της φυσαλίδας. Παράλληλα, οι ιξωδοελαστικές τάσεις που καταγράφονται στη φάση διαστολής, **Διάγραμμα 5-12d**), είναι αισθητά μικρότερες από αυτές που υπολογίσθηκαν για την μεγαλύτερη φυσαλίδα, **Διάγραμμα 5-11c**). Τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, κατά πάσα πιθανότητα, το πειραματικά καταγεγραμμένο jet της **Εικόνας 5-2** από την [87] δημιουργείται μετά τη θραύση του κελύφους λόγω των εφελκυστικών τάσεων στη φάση μέγιστης διαστολής.

Εν γένει και με βάση τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων της παρούσας εργασίας, σε συνδυασμό και με τις διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις, δεν αναμένεται η δημιουργία jet από μικροφυσαλίδες με ελαστική επίστρωση, ενόσω αυτές διατηρούν την συνοχή τους και δεν έχουν υποστεί θραύση. Προκειμένου να δημιουργηθεί jet, θα πρέπει πρώτα να έχει διαρραγεί το κέλυφος μέσω κάποιου από τους μηχανισμούς που περιγράφηκαν παραπάνω, με αποτέλεσμα το διαφυγόν αέριο να λειτουργήσει ως ελεύθερη φυσαλίδα και να καταρρεύσει με τη διαδικασία που προβλέπει η δυναμική φυσαλίδων αερίου.

## 6. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα Διδακτορική διατριβή μελετήθηκε η αλληλεπίδραση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα (Contrast Agents) με γειτονικό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών. Επιβλήθηκαν δύο είδη διαταραχών: α) βηματική αλλαγή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού στο άπειρο και β) αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής στο άπειρο. Στην πρώτη περίπτωση, οι ταλαντώσεις της μικροφυσαλίδας αποσβένουν λόγω της επίδρασης του διαστολικού ιξώδους του κελύφους. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης παρατηρείται μετατόπιση της μικροφυσαλίδας λόγω ανάπτυξης δευτερογενών δυνάμεων Bjerknes, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το τοίχωμα. Αποδεικνύεται πως και για την περίπτωση φυσαλίδων με ελαστικό περίβλημα, η δύναμη Bjerknes είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης για δεδομένο πλάτος εξωτερικής διαταραχής, καθώς επίσης και ευθέως ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της διαταραχής για δεδομένη απόσταση. Μετά την απόσβεση των ταλαντώσεων όγκου της μικροφυσαλίδας η αποκτηθείσα μεταφορική ταχύτητα παραμένει σταθερή και δεν μπορεί να ανακοπεί λόγω απουσίας ιξώδους στο περιβάλλον ρευστό. Η μικροφυσαλίδα επιδιώκει την επίτευξη ευσταθούς στατικής ισορροπίας η οποία, για χαμηλά πλάτη εξωτερικής διαταραχής, είναι η σφαιρική με μικρότερη ακτίνα από την αρχική. Για μεγαλύτερα πλάτη διαταραχής και για ικανό διάστημα υπό συμπίεση, η μικροφυσαλίδα επιδεικνύει παραμόρφωση επιδιώκοντας στατική διαμόρφωση εκτός της σφαιρικής. Ψευδοπλαστικά κελύφη (strain softening, νόμος Mooney-Rivlin) με χαμηλό μέτρο ελαστικότητας (μαλακά) επιτυγχάνουν συμμετρική διαμόρφωση ελλειψοειδούς σχήματος επιμηκυνόμενα κατά τον άξονα συμμετρίας (prolate). Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και για γραμμικώς ελαστικά (νόμος Hooke) ή διασταλτικά κελύφη (strain hardening, νόμος Skalak), για ακόμη μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας, διότι παραμένουν πιο μαλακά στη συμπίεση σε σχέση με τα ψευδοπλαστικά. Η παραπάνω στατική διαμόρφωση είναι το συνδυασμένο αποτέλεσμα της αντίστασης σε κάμψη και συμπίεση που ευνοούν την επιμήκυνση στο μέσο του κελύφους, αποφεύγοντας τη συσσώρευση ελαστικής ενέργειας στους πόλους.

Για υψηλό μέτρο ελαστικότητας η παραμόρφωση της φυσαλίδας είναι ασύμμετρη και λαμβάνει χώρα νωρίτερα στον χρόνο. Το σχήμα της μικροφυσαλίδας είναι πλουσιότερο σε ιδιομορφές σχήματος, που εκφράζονται μέσω των πολωνύμων Legendre, επιδεικνύοντας σχήματα με περισσότερους λοβούς. Στην περίπτωση μεγάλου μέτρου ελαστικότητας ή μεγάλου πλάτους εξωτερικής διαταραχής δημιουργείται οδόντωση στην περιοχή του πόλου της μικροφυσαλίδας που βρίσκεται μακρύτερα από το τοίχωμα (βόρειος πόλος), με τελικό στόχο την επίτευξη ασύμμετρης στατικής διαμόρφωσης. Το κέλυφος παρουσιάζεται επιμηκυνόμενο στην

περιοχή γύρω από τον βόρειο πόλο όπου παρατηρείται και η ανάπτυξη έντονων καμπτικών τάσεων. Για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του μέτρου ελαστικότητας η καμπτική ενέργεια γίνεται συνολικά προτιμητέα με αποτέλεσμα το κέλυφος να παρουσιάζει συμμετρικό σχήμα με ανεπτυγμένες εσοχές στις περιοχές γύρω και από τους δύο πόλους. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις αδυνατούν να ακολουθήσουν την όλη διαδικασία, διότι κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης η περιοχή του βόρειου πόλου αλλάζει καμπυλότητα περνώντας κάποια δεδομένη στιγμή από επίπεδη διαμόρφωση, η οποία σηματοδοτεί την έναρξη ασταθειών μικρού μήκους κύματος λόγω του φαινομένου της απόκλισης (divergence) που εμφανίζονται πρωτίστως στη χρονική παράγωγο του δυναμικού της ταχύτητας. Συνεπώς, οι προσομοιώσεις καταρρέουν. Δεν παρατηρήθηκε σε καμία από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν δημιουργία υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) ακόμα και στην περίπτωση ασύμμετρης παραμόρφωσης της μικροφυσαλίδας με δημιουργία οδόντωσης, καθώς το ιξώδες του κελύφους αποσβένει την ταχύτητα στον πόλο, ενώ η ελαστικότητα του κελύφους δεν επιτρέπει τη δημιουργία έντονων εσοχών. Ακόμα και στην περίπτωση μηδενικού διαστολικού ιξώδους του κελύφους παρατηρείται διευρυμένη δέσμη που διαπερνά το κέλυφος, λόγω της αντίστασης του κελύφους σε λυγισμό και της ανισοτροπίας των ελαστικών τάσεων που δεν επιτρέπει επιμήκυνση παράλληλα στον άξονα συμμετρίας, αλλά κάθετα σε αυτόν με αποτέλεσμα τη διεύρυνση της δέσμης. Μηδενισμός της αντίστασης σε λυγισμό δεν προωθεί τη δημιουργία jet. Αντίθετα ευνοεί την ανάπτυξη αφύσικων παραμορφώσεων σε όλο το εύρος του κελύφους όλο και μικρότερου μήκους κύματος.

Στην περίπτωση ημιτονοειδούς αλλαγής της πίεσης στο περιβάλλον ρευστό παρατηρείται μετατόπιση της μικροφυσαλίδας με μεταβαλλόμενη κίνηση λόγω της ανάπτυξης δευτερογενούς δύναμης Bjerknes, που προκαλείται από τη διαρκή ταλάντωση της μικροφυσαλίδας, η οποία ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Καθώς η απόσταση μειώνεται η επίδραση του τοιχώματος είναι διττή. Μέσω των ταλαντώσεων όγκου της φυσαλίδας προκαλεί επιτάχυνση της τελευταίας προς το μέρος του, ενώ ταυτόχρονα ευνοεί την παραμόρφωση του κελύφους για μικρότερα πλάτη της ακουστικής διαταραχής. Όσο δε διαρκεί η εξωτερικά επιβαλλόμενη συχνότητα συντηρούνται οι ταλαντώσεις όγκου με αποτέλεσμα η φυσαλίδα να πλησιάζει συστηματικά το τοίχωμα. Κατά συνέπεια, εάν δεν έχει ήδη επέλθει κάποια δραστική παραμόρφωση που να σταματήσει αναγκαστικά την προσομοίωση σηματοδοτώντας ενδεχόμενη ρήξη της συνέχειας του κελύφους, σε συνδυασμό με την απουσία ιξώδους σκέδασης στο περιβάλλον ρευστό που να επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας, η μικροφυσαλίδα επιταχύνεται μέχρι να φτάσει το τοίχωμα. Η μείωση της απόστασης από το τοίχωμα δεν επηρεάζει σημαντικά το πλάτος ταλάντωσης της



μικροφυσαλίδας και συνεπώς την ακουστική της απόκριση. Κατά την προσέγγιση της μικροφυσαλίδας στο τοίχωμα παρατηρήθηκε ότι η τελευταία επιδεικνύει ωοειδή διαμόρφωση (prolate) στη φάση συμπίεσης, η οποία οφείλεται στην ανάπτυξη υψηλών θλιπτικών ιξωδών τάσεων και οδηγούν τη συγκεκριμένη περιοχή σε επίπεδη διαμόρφωση. Συνεπώς, ευνοείται η ανάπτυξη της ιδιομορφής  $P_2$ , η οποία αποτυπώνεται με τη δημιουργία σχημάτων επιμηκυμένων κατά τον άξονα συμμετρίας (prolate), τα οποία ταλαντώνονται κάθετα στο τοίχωμα. Καθώς το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής αυξάνει, παρατηρείται δυναμικός λυγισμός αμέσως μετά τη μέγιστη συμπίεση, ο οποίος εκφράζεται με τη δημιουργία οδόντωσης στην περιοχή του βόρειου πόλου και ο οποίος οδηγεί σε διάρρηξη του κελύφους. Ο μηχανισμός αυτός ενδεχομένως εξηγεί την μεταφορά διεπιφανειακού υλικού τοποθετημένου στο κέλυφος μικροφυσαλίδας contrast agent μακριά από το τοίχωμα προς την κυρίως μάζα του περιβάλλοντος ρευστού στη φάση συμπίεσης, όπως παρατηρείται σε οπτικές παρατηρήσεις ταλαντούμενων μικροφυσαλίδων διαθέσιμων στη βιβλιογραφία. Αλλαγή του καταστατικού νόμου δεν μεταβάλλει το παραπάνω μοτίβο δυναμικής απόκρισης της φυσαλίδας. Για μικρές τιμές του μέτρου ελαστικότητας η ανάπτυξη εσοχής στην περιοχή του βόρειου πόλου είναι δυσκολότερη, διότι το κέλυφος διοχετεύει ευκολότερα την ενέργεια σε εφελκυσμό/θλίψη παρά σε κάμψη και συμπίεση, όντας πιο μαλακό. Συνεπώς, η μικροφυσαλίδα επιδεικνύει ταλαντώσεις με παραμόρφωση ωοειδούς σχήματος στη φάση συμπίεσης, δηλαδή παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά για την περίπτωση μικρού πλάτους εξωτερικής διαταραχής. Ούτε στην περίπτωση ημιτονοειδούς αλλαγής της πίεσης παρατηρήθηκε δημιουργία jet. Για μικροφυσαλίδες με ελαστικό κέλυφος σχετικά μεγάλου μεγέθους, ακτίνας άνω των  $4\mu\text{m}$ , παρατηρείται πειραματικά δημιουργία jet. Για την εξήγηση αυτής της συμπεριφοράς, πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις για μικρό ( $R_0=1.8\mu\text{m}$ ) και σχετικά μεγάλο μέγεθος ( $R_0=5.4\mu\text{m}$ ) φυσαλίδας. Παρατηρήθηκε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στο κέλυφος κατά τη μέγιστη διαστολή στη δεύτερη περίπτωση είναι αρκετά μεγαλύτερες από εκείνες της πρώτης. Θεωρώντας ότι επήλθε θραύση του σφαιρικού κελύφους τη στιγμή εκείνη ανακτήθηκε η πειραματικά καταγεγραμμένη συμπεριφορά, με τη δημιουργία jet που χτυπάει στο απέναντι τοίχωμα της φυσαλίδας στην αμέσως επόμενη φάση συρρίκνωσης μετά τη δημιουργία του.

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον η παραπάνω μελέτη να εισάγει στη μοντελοποίησή της ελαστικότητα για το γειτονικό τοίχωμα. Με τον τρόπο αυτό η μελέτη γίνεται ρεαλιστικότερη, καθώς στην πράξη οι μικροφυσαλίδες ταλαντώνονται κοντά σε οργανικούς ιστούς, οι οποίοι έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες και αναμένεται να επηρεάσουν τη συμπεριφορά των μικροφυσαλίδων.

Επιπλέον, θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω ανάπτυξη του μοντέλου για την μελέτη τριδιάστατης μικροφυσαλίδας ταλαντούμενης κοντά σε γειτονικό σύνορο ώστε να καταγραφεί η συνδυασμένη επίδραση της θέσης του τοιχώματος και της διεύθυνσης διάδοσης της ακουστικής διαταραχής.

Τέλος, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η συμπεριφορά παγιδευμένων φυσαλίδων, οι οποίες βρίσκονται σε επαφή με γειτονικό σύνορο και χρησιμοποιούνται για τη στοχευμένη διανομή φαρμάκου στον πάσχοντα ιστό. Οι συγκεκριμένες φυσαλίδες παρουσιάζουν διαφορετική απόκριση από αυτές που δεν είναι παγιδευμένες και είναι σημαντικό να προσδιοριστεί η ακουστική τους υπογραφή. Η μοντελοποίηση των συγκεκριμένων φυσαλίδων θα πρέπει να λάβει υπ' όψιν της τις διαμοριακές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο τμήμα επαφής της φυσαλίδας με το γειτονικό τοίχωμα.



## Αναφορές – Βιβλιογραφία

- [1] de Jong N. & Ten Cate F. J., “New ultrasound contrast agents and technological innovations”, *Ultrasonics* **34**, 587-590, (1996).
- [2] Bouakaz A., Frinking P. J. A., de Jong N., & Bom N., “Non-invasive measurement of the hydrostatic pressure in a fluid-filled cavity based on the disappearance time of micrometer-sized free gas bubbles”, *Ultrasound Med. Biol.* **25**, 1407-1415, (1999).
- [3] Klibanov A. L., Rychak J. J., Yang W. C., Alikhani S., Li B., Acton S., Lindner J. R., Ley K. & Kaul S., “Targeted ultrasound contrast agent for molecular imaging of inflammation in high-shear flow”, *Contrast Media Mol. Imaging* **1**, 259-266, (2006).
- [4] Gramiak R. & Shah M., “Echocardiography of the Aortic Root”, *Investigative Radiology* **3**, 356-358, (1968).
- [5] Goldberg B., “Ultrasound Contrast Agents”, Martin Dunitz Ltd, (1997).
- [6] Klibanov A., “Targeted Delivery of Gas-Filled Microbubbles. Contrast Agents for Ultrasound Imaging”, *Advanced Drug Delivery* **37**, 139-157, (1999).
- [7] Forsberg F., Basude R., Liu J. B., Alessandro J., Shi W., Rawool N., Goldberg B. & Wheatley M., “Effect of filling gases on the backscatter from contrast microbubbles: Theory and in vivo measurements”, *Ultrasound in Medicine and Biology* **8**, 1203-1211, (1999).
- [8] Khismatullin D. B. & Nadim A., “Radial oscillations of encapsulated microbubbles”, *Phys. Fluids*, Vol. **14**, No. 10, (2002).
- [9] Hoff L., “Acoustic properties of ultrasonic contrast agents”, *Ultrasonics* **34**, 591-593, (1996).
- [10] Shi W., Frosberg F., Tornes A., Ostensen J. & Goldberg B., “Destruction of Contrast Microbubbles and the Association with Inertial Cavitation”, *Ultrasound in Med. and Biol.*, Vol. **26**, No. 6, 1009-1019, (2000).
- [11] Lanza G. M., Trousil R., Wallace K., Rose J., Hall C., Scott M., Miller J., Eisenburg P., Gaffney P. & Wickline S., “In vitro characterization of a novel, tissue-targeted ultrasonic contrast system with acoustic microscopy”, *J. Ac. Soc. Am.* **104**, 3665-3672, (1998).
- [12] Rouffiac V., Duret J. S., Opolon P., Péronneau P. & Roche A., “A new high intensity focused ultrasound (HIFU) system for tumor treatment and real – time control by Doppler sonography. Ex vivo and in vivo investigations”, *The 10<sup>th</sup> European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging*, (2005).

- [13] Theoharis S., Fostira F., George A., & Blomley M., “Optison Enhances gene delivery by increasing the uptake of plasmid DNA by cells”, The 10<sup>th</sup> European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging, (2005).
- [14] Babich J. & Fischman A., “Target imaging of infection”, *Advance Drug Delivery Reviews* **37**, 237-252, (1997).
- [15] Frinking P. J., Bouakaz A., Kirkhorn J. & Ten Cate F. J., “Ultrasound contrast imaging: Current and new potential methods”, *Ultrasound in Med. and Biol.*, Vol. **26**, No. 6, 965-975, (2000).
- [16] Stride E. & Saffari N., “Microbubble ultrasound contrast agents: A review”, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part H: J. Eng. Med.* **217**, 429-447, (2003).
- [17] Borsboom J. M. G., Chin C. T., Bouakaz A., Versluis M. & de Jong N. “Harmonic Chirp Imaging Method for Ultrasound Contrast Agent”, *IEEE Trans on Ultr. Ferr. & Freq. Cont.* **52**(2), (2005).
- [18] Ferrara K., Pollard R. & Borden M., “Ultrasound microbubble contrast agents: Fundamentals and application to gene and drug delivery”, *Annu. Rev. Biomed.* **9**, 415–447, (2007).
- [19] Zhao S., Ferrara K. W. & Dayton P. A., “Asymmetric oscillation of adherent targeted ultrasound contrast agents”, *Appl. Phys. Lett.* **87**:ref. 134103, (2008).
- [20] Vos H. J., Dollet B., Bosch J. G., Versluis M. & de Jong N. “Nonspherical vibrations of microbubbles in contact with a wall—a pilot study at low mechanical index”, *Ultrasound in Med. & Biol.*, Vol. **34**(4) pp. 685–688, (2008).
- [21] Garbin V., Cojoc D., Ferrari E., Di Fabrizio E., Overvelde M. L. J., van der Meer S. M., de Jong N., Lohse D. & Versluis M., “Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging”, *Appl. Phys. Lett.* **90**:ref. 114103, (2007).
- [22] Doinikov A., Zhao S. & Dayton P. A., “Modeling of the acoustic response from contrast agent microbubbles near a rigid wall”, *Ultrasonics* **49**, 195–201, (2009).
- [23] Chen H., Kreider W., Brayman A. A., Bailey M. R. & Matula T. J., “Blood vessel deformations on microsecond time scales by ultrasonic cavitation”, *Phys. Rev. Lett.*, **106**(3), Article ID 034301, (2011).
- [24] Zderic V., Brayman A. A., Sharar S. R., Crum L. A. & Vaezy S., “Microbubble-enhanced hemorrhage control using high intensity focused ultrasound”, *Ultrasonics* **45**, 113-120, (2006).

- [25] Porter T., “Microvascular thrombolysis: From in vitro to in vivo to clinical trials”, 20th European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging, Rotterdam, The Netherlands, (22-23 Jan 2015).
- [26] Qin S. & Ferrara K. W., “Acoustic response of compliant microvessels containing ultrasound contrast agents”, *Phys. Med. Biol.* **51**, 5065–5088, (2006).
- [27] Curtiss G. A., Leppinen D. M., Wang Q. X. & Blake J. R., “Ultrasonic cavitation near a tissue layer”, *J. Fluid Mech.* **730**, 245–272, (2013).
- [28] Klaseboer E. & Khoo B. C., “An oscillating bubble near an elastic material”, *J. Appl. Phys.* **96**(10), 5808–5818, (2004).
- [29] Church C. C., “The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles”, *J. Ac. Soc. Am.* **97**, 1510 – 1521, (1995).
- [30] de Jong N., Emmer M., Chin C. T., Bouakaz A., Mastik F., Lohse D. & Versluis M., “Compression-only behavior of phospholipid-coated contrast bubbles”, *Ultrasound in Med. & Biol.* **33**(4), 653-656, (2007).
- [31] Tsiglifis K. & Pelekasis N., “Radial oscillations of insonated contrast agents – Effect of the membrane constitutive”, *J. Ac. Soc. Am.*, **123**(6), pp. 4059-4070, (2008).
- [32] Garbin V., Dollet B., Overvelde M., Cojoc D., Di Fabrizio E., van Wijngaarden L., Prosperetti A., de Jong N., Lohse D., & Versluis M., “History force on coated microbubbles propelled by ultrasound”, *Phys. Fluids* **21**, 092003, (2009).
- [33] Qin S. & Ferrara K. W., “The natural frequency of nonlinear oscillation of ultrasound contrast agents in microvessels”, *Ultrasound in Med. & Biol.*, Vol. **33**, No. 7, pp. 1140–1148, (2007).
- [34] Liu Y., Sugiyama K., Takagi S., & Matsumoto Y., “Numerical study on the shape oscillation of an encapsulated microbubble in ultrasound field,” *Phys. Fluids* **23**, 041904, (2011).
- [35] Tsigklifis K. & Pelekasis N. A., “Simulations of insonated contrast agents: Saturation and transient break-up”, *Phys. Fluids* **25**(3), art. No. 032109, (2013).
- [36] Hsiao C. T., Lu X., & Chahine G. L., “Three-dimensional modeling of the dynamics of therapeutic ultrasound contrast agent,” *Ultrasound in Med. & Biol.*, **36**(12), 2065-2079, (2010).
- [37] Timoshenko S. & Woinowsky-Krieger S., “Theory of Plates and Shells”, McGraw-Hill Companies, (1959).
- [38] Skalak R., Tozeren A., Zarda R. P. & Chien S., “Strain energy function of red blood shell membranes”, *Biophys. J.*, **13**, 245-264, (1973).

- [39] Barthès-Biesel D., Diaz A. & Dhenin E., “Effect of constitutive laws for two-dimensional membranes on flow-induced capsule deformation”, J. Fluid Mech., **460**, 211-222, (2002).
- [40] Zarda P. R., Chien S. & Skalak R., “Elastic deformations of red blood cells”, J. Biomechanics, **10**, 211-221, (1977).
- [41] Khismatulin D. B. & Nadim A., “Radial oscillations of encapsulated microbubbles”, Phys. Fluids, **14**, 3534-3556, (2002).
- [42] Pozrikidis C., “Effect of membrane bending stiffness on the deformation of capsules in simple shear flow”, J. Fluid Mech. Vol. **440**, pp. 269-291, (2001).
- [43] Prosperetti A. & Lezzi A., “Bubble dynamics in a compressible liquid, Part 1. First-order theory”, J. Fluid Mech., **168**, 457-478, (1986).
- [44] Herring C., “Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion”, OSRD Rep., No. **236**, (1941).
- [45] Edwards D. A., Brenner H. & Wasan D. T., “Interfacial Transport Properties and Rheology”, Butterworth-Heinemann, Stonheam, MA, (1991).
- [46] Barthès-Biesel D. & Sgaier H., “Role of membrane viscosity in the orientation and deformation of a spherical capsule in shear flow”, J. Fluid Mech., **160**, 119, (1985).
- [47] Diaz A., Barthès-Biesel D. & Pelekasis N. A., “Effect of membrane viscosity on the dynamic response of an axisymmetric capsule”, Phys. Fluids, **13**, 3835, (2001).
- [48] Storey B. D., “Shape stability of sonoluminescence bubbles: Comparison of theory to experiments”, Phys. Rev. E, **64**, 017301, 1-3, (2001).
- [49] Steigmann D. J., “Fluid films with curvature elasticity”, Arch. Rat. Mech., **150**, 127-152, (1999).
- [50] Pozrikidis C., “Modeling and Simulation of Capsules and Biological Cells”, Chapman & Hall/CRC, (2003).
- [51] Paris F., Cañas J., “Boundary Element Method”, Oxford University Press, (1997).
- [52] Brebbia C. A. & Dominguez J., “Boundary Elements: An introductory course”, Witpress, Computational Mechanics Publications, (1992).
- [53] Pelekasis N. A. “A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology”, *Ph.D. Thesis submitted to the Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo*, (1991).
- [54] Pelekasis N. A., Tsamopoulos J. A., Manolis G. D., “Equilibrium shapes and stability of charged and conducting drops”, Phys. Fluids A, vol. **2**, No. 8, (1990).

- [55] Pelekasis N. A., Tsamopoulos J. A., Manolis G. D., “A hybrid finite–boundary element method for inviscid flows with free surface”, *J. Comput. Physics*, **101**, 231-251, (1992).
- [56] Pelekasis N. A. & Tsamopoulos J. A., “Bjerknes forces between two bubbles. Part 1. Response to a step change in pressure”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **254**, pp. 467-499, (1993).
- [57] Stroud H. & Secrest D., “Gaussian Quadrature Formulas”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1966).
- [58] de Boor C., “A Practical Guide to Splines”, Springer-Verlag, New York, (1978).
- [59] Donea J. & Huerta A., “Finite Element Methods for Flow Problems”, John Wiley & Sons, Ltd., (2003).
- [60] Prenter P. M., “Splines and Variational Methods”, Wiley-Interscience publications, (1975).
- [61] Gray L. J., Garzon M., Mantic V. & Graciani E., “Galerkin boundary integral analysis for the axisymmetric Laplace equation”, *Int. J. Numer. Meth. Engng* (in press), (2005).
- [62] Abramowitz M. & Stegun I. A., “Handbook of Mathematical functions”, Dover, New York, (1972).
- [63] Lachat J. C. & Watson J. O., *Int. J. Numerical Methods Eng.*, **10**, 991, (1976).
- [64] Tsiglifis K. A., “Numerical Simulation of Bubbles Dynamics in Response to Acoustic Disturbances”, Ph. D. Thesis submitted to the Mechanical Engineering Department of University of Thessaly, Volos, (2007).
- [65] Tsiglifis K. & Pelekasis N. A., “Nonlinear oscillations and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects: Effect of internal overpressure”, *Phys. Fluids*, **19**, 072106, (2007).
- [66] Thompson J. F., Warsi Z. U. & Mastin W. C., “Numerical Grid Generation: Foundations and Applications”, North Holland, (1985).
- [67] Lamb H., “Hydrodynamics”, Dover Publications NY, USA, (1932).
- [68] Dollet B., van der Meer M., Garbin V., De Jong N., Lohse D. & Versluis M., “Nonspherical oscillations of ultrasound contrast agent microbubbles”, *Ultrasound Med. Biol.*, **34**(9), 1465-1473, (2008).
- [69] Tsiglifis K. & Pelekasis N., “Parametric stability and dynamic buckling of an encapsulated microbubble subject to acoustic disturbances”, *Phys. Fluids* **23**, 012102, (2011).
- [70] Pelekasis N. A. & Tsamopoulos J. A., “Bjerknes forces between two bubbles. Part 2. Response to an oscillatory pressure field”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **254**, pp. 501-527, (1993).
- [71] Bjerknes V.F.K., “Fields of Force”, Columbia University Press, (1906).
- [72] Bjerknes V.F.K., “Die Craftfelder”, Vieweg, (1909).

- [73] Brennen C. E., “Cavitation and Bubble Dynamics”, Oxford University Press, NY, (1995).
- [74] Blake F.G., “The onset of cavitation in liquids: I”. Acoustics Res. Lab. Harvard Univ. Tech Memo. No **12**, (1949).
- [75] Blake J. R., Keen G. S., Tong R. P. & Wilson M., “Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles”, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A357**, 251-267, (1999).
- [76] Popinet S. & Zaleski S., “Bubble collapse near a solid boundary: a numerical study of the influence of viscosity”, J. Fluid Mech. **464**, pp. 137-163, (2002).
- [77] Knoche S. & Kierfeld J., “Buckling of spherical capsules”, Phys. Rev. E, **84**(4): p. 046608, (2011).
- [78] Lytra A. & Pelekasis N., “Static response and stability of coated microbubbles – multiplicity of solutions and parameter estimation”, Fluid Dyn. Res, **46**: 041422, (2014).
- [79] Lytra A. & Pelekasis N., “Static stability of axisymmetric encapsulated contrast agents- Effect of resistance to bending, stretching and compression on the structure of the bifurcation diagram”, in preparation.
- [80] Benjamin T. B. & Ellis A. T., “Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles”, J. Fluid Mech., **212**, 65–80, (1990).
- [81] Doinikov A., “Translational motion of a bubble undergoing shape oscillations”, J. Fluid Mech., vol. **501**, pp. 1–24, (2004).
- [82] Blake J. R., Hooton M. C., Robinson P. B. & Tong R. P., “Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact”, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A355**, 537-550, (1997).
- [83] Updike D. P. & Kalnins A., “Axisymmetric behavior of an elastic spherical shell compressed between rigid plates”, JAM TRANS ASME, **37**: p. 635-640, (1970).
- [84] Zuo Q. H. & Schreyer H. L., “Flutter and divergence instability of non-conservative beams and plates”, Int. J. Solids Structures Vol. **33**, No. 9, pp. 1355-1367, (1996).
- [85] Vlachomitrou M. & Pelekasis N., “A numerical method for simulating the dynamic behavior of a bubble in an unbounded or a rigid wall -restricted viscous flow”, in preparation.
- [86] Hilgenfeldt S., Lohse D., & Brenner H. P., “Phase diagrams for sonoluminescing bubbles”, Phys. Fluids **8**, 2608 \_1996\_; erratum, ibid. **9**, 2462, (1996).
- [87] Lajoinie G., Luan Y., Gelderblom E., Dollet B., Lentacker I., Dewitte H., de Jong N. & Versluis M., “On the controlled and directed local release from drugloaded microbubbles for sonothrombolytic therapy”, 20<sup>th</sup> European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging, Rotterdam, Netherlands, (2015).