

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

***ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΗΣ ΤΩΝ
ΟΜΒΡΙΩΝ ΣΕ ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΦΑΛΕΙΑ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΩΝ
ΟΔΙΚΩΝ ΧΑΡΑΞΕΩΝ***

υπό

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΟΥΜΠΑΚΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

2016

© 2016 Ευάγγελος Σουμπάκας

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής: Δρ. Νικόλαος Ηλιού
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής: Δρ. Παντελεήμων Κοπελιάς
Λέκτορας Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής: Δρ. Γεώργιος Δ. Καλιαμπέτσος
Επιστημονικός Συνεργάτης Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Νικόλαο Ηλιού, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κ. Γεώργιο Καλιαμπέτσο, επιστημονικό συνεργάτη στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας τον οποίο και ευχαριστώ αρχικά για την ανάθεση του θέματος και στην συνέχεια για την συμβολή, τη βοήθεια, την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της συγκεκριμένης Διπλωματικής Εργασίας. Επίσης, είμαι ευγνώμων στο εναπομένον μέλος της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον κ. Κοπελιά Παντελεήμων για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις του. Τέλος ευχαριστώ τους συγγενείς, τους συμφοιτητές και τους φίλους μου για την ηθική συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια.

Ευάγγελος Σουμπάκας

***ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΗΣ ΤΩΝ
ΟΜΒΡΙΩΝ ΣΕ ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΦΑΛΕΙΑ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΩΝ
ΟΔΙΚΩΝ ΧΑΡΑΞΕΩΝ***

Ευάγγελος Σουμπάκας

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2016

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Νικόλαος Ηλιού , Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θέμα της απορροής των ομβρίων στις καμπύλες περιοχές των οδών είναι μείζονος σημασίας, γιατί υπό συνθήκες συμβάλλει τόσο στην εμφάνιση του φαινομένου της υδρολίσθησης όσο και της παγοπληξίας. Στις Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων, με σκοπό την καλή απορροή του οδοστρώματος, προτείνεται η κατά μήκος κλίση της οδού να μην είναι μικρότερη από την πρόσθετη κλίση των οριογραμμών ή καλύτερα η διαφορά $s-\Delta s$ να είναι τουλάχιστον 0,5%. Είναι σημαντικό ο συνδυασμός οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης να είναι τέτοιος ώστε να αποφεύγονται μικρές τιμές στις συνιστάμενες κλίσεις. Ο έλεγχος πρέπει να γίνεται σε κάθε διατομή και σε κάθε χιλιομετρική θέση. Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση των τιμών που παίρνει η συνισταμένη κλίση σε κρίσιμες περιοχές του οδοστρώματος. Επισημαίνονται με παραδείγματα και αναλυτικές σχέσεις οι κρίσιμες ζώνες κακής απορροής.

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1	ΟΡΙΣΜΟΙ-ΕΝΝΟΙΕΣ	2
2	ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΚΛΙΣΗ ΟΔΟΣΤΡΩΜΑΤΟΣ	5
2.1	ΓΕΝΙΚΑ	5
2.2	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ	7
3	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ	13
3.1	ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗ	13
3.2	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΗΜΙΑΞΟΝΕΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ	25
4	Εφαρμογές στο Anadelta Tessera	26
5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	33
6	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	36
6.1	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ i	36
6.2	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ii	38
6.3	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ iii (Πράξεις απλοποίησης του X_c και του Y_c)	43
7	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	47

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά το θέμα της απορροής των ομβρίων στις οδικές χαράξεις. Αποφάσισα να εντρυφήσω στο εν λόγω ζήτημα καθώς θεωρώ ότι η κακή απορροή των ομβρίων αποτελεί σημαντική αιτία πρόκλησης τροχαίων ατυχημάτων. Ως σκοπός τέθηκε ο προσδιορισμός των προβληματικών περιοχών στην οδική χάραξη και ο εύχρηστος υπολογισμός αυτών.

Χρησιμοποιώντας τις Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων (Ο.Μ.Ο.Ε.) και τους τύπους που παρέχει στον πολιτικό μηχανικό για την χάραξη ενός οδικού έργου, αναλύθηκαν οι συνιστώσες που απαρτίζουν το ζήτημα της απορροής και καταλήξαμε στην ακριβή μαθηματική έκφραση των προβληματικών για την ασφάλεια περιοχών. Για την επαλήθευση των υπολογισμών αλλά και την οπτική παρουσίαση του θέματος χρησιμοποιήθηκε το σχεδιαστικό πρόγραμμα χάραξης οδικών έργων Anadelta Tessera και το Excel.

Η επιλογή κατά μήκος κλίσεων, μεταξύ των σημείων θλάσης της μηκοτομής, που να υπακούουν στον παραπάνω κανόνα δεν διασφαλίζει την καλή απορροή. Πρέπει η ίδια συνθήκη να ισχύει και στα τόξα συναρμογής της μηκοτομής. Έτσι ώστε σε καμία από τις δύο οριογραμμές του οδοστρώματος (και σε κανένα σημείο) να μην εμφανιστεί αντίθετη κλίση από την κατά μήκος κλίση του άξονα περιστροφής της οδού.

Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση των τιμών που παίρνει η συνισταμένη κλίση σε κρίσιμες περιοχές του οδοστρώματος. Η κλίση αυτή υπολογίζεται αναλυτικά για όλο το πλάτος του δρόμου και όχι σαν μια μόνο τιμή λοξής κλίσης ανά χιλιομετρική θέση (συνδυασμός κατά μήκος κλίσης και επίκλισης). Παρουσιάζονται διάφοροι συνδυασμοί

οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης και οι αντίστοιχες κλίσεις. Επισημαίνονται με παραδείγματα και αναλυτικές σχέσεις οι κρίσιμες ζώνες κακής απορροής.

Τα αποτελέσματα της εργασίας θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στον μελετητή έργων οδοποιίας, γιατί θα αποκτήσει μια καθαρότερη εικόνα του προβλήματος της απορροής των ομβρίων, βοηθώντας τον να σχεδιάζει ασφαλέστερα οδικά έργα.

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ-ΕΝΝΟΙΕΣ

Οριζοντιογραφία

Η χάραξη της οδού σε οριζόντιο επίπεδο – οριζοντιογραφία – αποτελεί το πρώτο βήμα στη διαδικασία του γεωμετρικού σχεδιασμού των οδών. Με τη χάραξη της πολυγωνικής της οδού στο τοπογραφικό διάγραμμα τοποθετείται, ουσιαστικά ο άξονα της υπό σχεδιασμό οδού στην οριζοντιογραφία. Η επόμενη ενέργεια είναι η μορφοποίηση της γεωμετρίας σύμφωνα με τους κανόνες ασφαλούς και άνετης χάραξης των οδών – ΟΜΟΕ.

Μηκοτομή

Στο σχέδιο της μηκοτομής περιλαμβάνονται η τομή του άξονα της οδού με το φυσικό έδαφος, η τομή του άξονα της οδού με το κατάστρωμά της, καθώς και η ερυθρά γραμμή που παριστάνει την υψομετρική θέση του άξονα της οδού. Επίσης στο σχέδιο αυτό παρατηρούνται εύκολα και οι ανωφέρειες και κατωφέρειες – θετική ή αρνητική κλίση του τμήματος της οδού στην κατά μήκος τομή – και σε ποιά σημεία η οδός είναι ισόπεδη – το κατάστρωμά της δεν διαφέρει αισθητά από το φυσικό έδαφος.

Με τη χάραξη του άξονα της οδού σε οριζοντιογραφία ορίζεται η θέση του κατά X και Y. Επειδή όμως η οδός αναπτύσσεται στο χώρο είναι απαραίτητο να τοποθετήσουμε τον άξονα κατακόρυφα προσδιορίζοντας έτσι και την 3η διάσταση του που είναι η υψομετρική του θέση. Αυτό γίνεται με τη χάραξη της κατά μήκος τομής του άξονα της οδού ή αλλιώς

της μηκοτομής. Στην αρχή και το τέλος της κατακόρυφης καμπύλης συναρμογής τοποθετείται κατάλληλη σήμανση (σημαία).

Επίκλιση (q)

Αφορά την εγκάρσια κλίση του οδοστρώματος, η οποία καλείται επίκλιση (q). Είναι η κάθετη κλίση στον άξονα του δρόμου (εγκάρσια κλίση). Στο ευθύγραμμο τμήμα της η εγκάρσια τομή γίνεται αμφικλινής με κλίση εκατέρωθεν του άξονα της οδού $\pm 2,5\%$, για λόγους ευκολίας απορροής των όμβριων. Αντίθετα στα καμπύλα τμήματα κατασκευάζεται η τομή του οδοστρώματος μονοκλινής με επίκλιση μεταβαλλόμενη από $\pm 2,5\%$ έως $\pm q\%$, όπου q η τιμή της μέγιστης επίκλισης στο εκάστοτε καμπύλο τμήμα. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η τιμή της μέγιστης επίκλισης, q, να μην υπερβαίνει την μέγιστη επιτρεπόμενη εγκάρσια κλίση, q_{max} , που στην περίπτωση πεδινής περιοχής που ενδιαφέρει για το συγκεκριμένο έργο οδοποιίας είναι 8%.

Κατά μήκος κλίση (s)

Δηλαδή κλίση κατά μήκος του άξονα της οδού. Το 2% σημαίνει θεωρητικά, ότι από το σημείο που ξεκινάει η ανηφόρα και στο τέλος οριζόντιας απόστασης 100 μέτρων, ανεβαίνουμε κατακόρυφα 2 μέτρα. Κατά αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου η υποτείνουσα είναι ο δρόμος.

Πρόσθετη κλίση των οριογραμμών (Δs)

Διαφορά κατά μήκος κλίσεων οριογραμμών και άξονα περιστροφής του οδοστρώματος στα καμπύλα τμήματα της οδού.

Για την εξασφάλιση της απορροής των ομβρίων της οδού, η διαφορά της κατά μήκος κλίσης και της πρόσθετης κλίσης των οριογραμμών πρέπει να είναι τουλάχιστον 0,5%

$$s - \Delta s \geq 0,5\%$$

$s [\%] = \text{κατά μήκος κλίση της οδού,}$

$\Delta s [\%] = \text{πρόσθετη κλίση των οριογραμμών.}$

Κατακόρυφες καμπύλες συναρμογής μηκοτομής

Κυρτή κατακόρυφη καμπύλη είναι η καμπύλη που εγγράφεται στις δύο πλευρές μιας γωνίας της ερυθράς (πολυγωνική γραμμή) η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Αντίθετα κατακόρυφη κοίλη καμπύλη είναι η καμπύλη που εγγράφεται στις δύο πλευρές μιας γωνίας της ερυθράς (πολυγωνική γραμμή) η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα επάνω.

Συνήθως οι κατακόρυφες καμπύλες που διατάσσονται στα κυρτώματα και τα κοιλώματα είναι τετραγωνικές παραβολές ως προσέγγιση κυκλικών τόξων, δεδομένου ότι για τις κατά κανόνα εφαρμοζόμενες μεγάλες ακτίνες και την επιδιωκόμενη ακρίβεια το κυκλικό τόξο και η τετραγωνική παραβολή, πρακτικά, συμπίπτουν. Καθοριστικό γεωμετρικό μέγεθος της κατακόρυφης καμπύλης είναι η ακτίνα καμπυλότητας R στη θέση αλλαγής προσήμου της κατά μήκος κλίσης ($s = 0\%$).

Ερυθρά της οδού

Μια ανοικτή πολυγωνική γραμμή με την οποία ορίζεται πλέον υψομετρικά (κατακόρυφα) η θέση του άξονα της οδού

Κλωθοειδής

Η καμπύλη που χρησιμοποιείται κατά τη μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο και αντίστροφα αλλά και για τη συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ακτίνων. Με τη χρήση της επιτυγχάνεται η μετάβαση από μία καμπυλότητα σε μία άλλη και πιο συγκεκριμένα η συνεχής γραμμική μεταβολή της φυγόκεντρης επιτάχυνσης.

2 ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΚΛΙΣΗ ΟΔΟΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Αρχικά επιλεγούμε την περίπτωση μιας σταθερής κατά μήκος κλίσης σε ολόκληρη την κλωθοειδή, η οποία είναι η απλούστερη και δύναται να υπολογιστεί εύκολα. Στο σχήμα 2.1 (για τη δημιουργία του οποίου χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Anadelta Tessera) φαίνεται η μηκοτομή μιας οδού, η οποία έχει σταθερή κατά μήκος κλίση -2% (μηκοτομή του δρόμου 2 του σχήματος 2.3). Στο κάτω μέρος του σχήματος φαίνεται ο πίνακας με στοιχεία όπως τα ονόματα των διατομών, χιλιομετρική θέση διατομής κ.α. καθώς και το διάγραμμα επικλίσεων από το οποίο μπορούμε να αντιληφθούμε την καμπυλότητα της οδού.



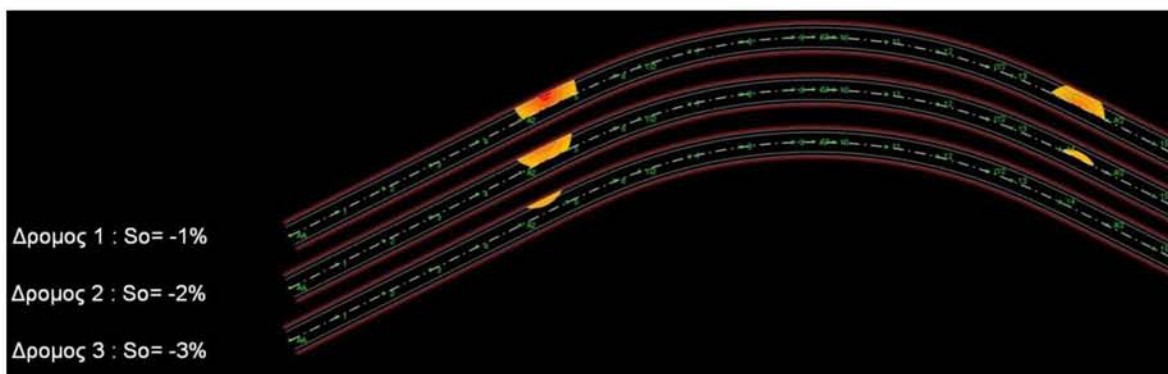
Σχήμα 2.1 : Μηκοτομή και διάγραμμα επικλίσεων (δρόμου 2) με σταθερή κλίση πολυγωνικής $S = -2\%$

Στο παρακάτω σχήμα 2.2 φαίνεται η χρωματική κλίμακα της συνισταμένης κλίσης. Συγκεκριμένα, με κόκκινο αναπαρίσταται η περιοχή του οδοστρώματος που έχει συνισταμένη κλίση 0% έως 0.5% και ομοίως αναπαρίστανται τα υπόλοιπα πεδία συνισταμένων κλίσεων μέχρι την τιμή 2.5%, όπου και δεν τίθεται πλέον πρόβλημα απορροής των ομβρίων.



Σχήμα 2.2 : Χρωματική κλίμακα συνισταμένης κλίσης

Στο παρακάτω σχήμα 2.3 φαίνεται η χρωματική διαβάθμιση της συνισταμένης κλίσης στην οριζοντιογραφία τριών οδών με διαφορετικές μηκοτομές.



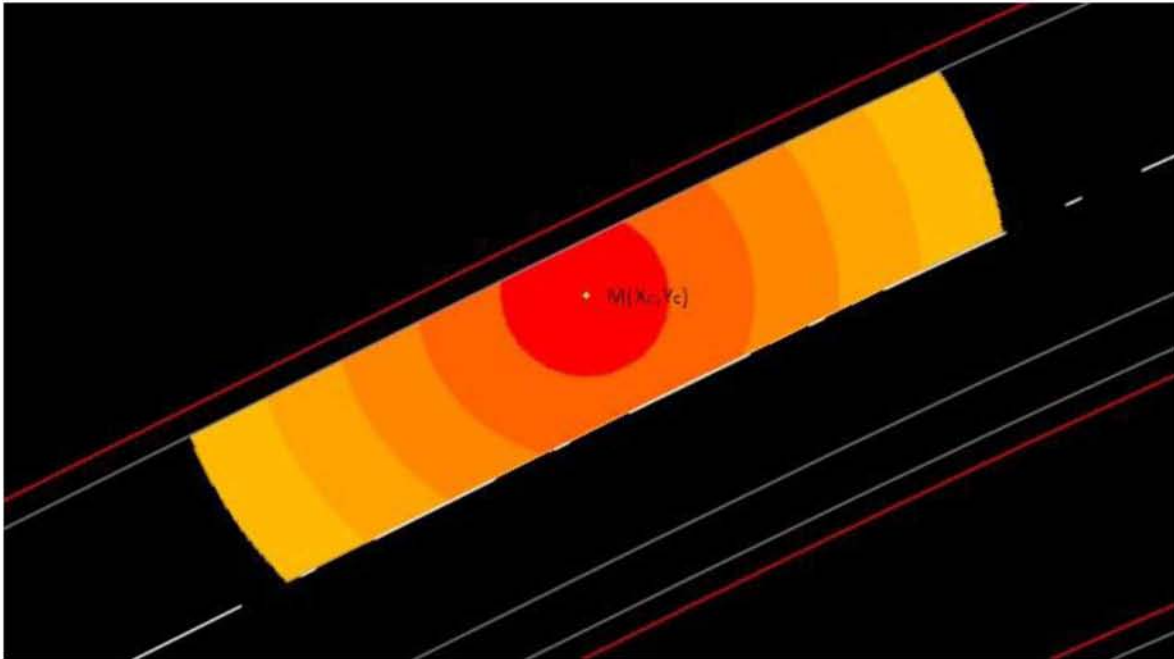
Σχήμα 2.3 : Οριζοντιογραφία οδών με σταθερή κλίση μηκοτομής

Όπως φαίνεται στο σχήμα έχει επιλεγεί μια σταθερή κατά μήκος κλίση (S_0) της ερυθράς (άξονας δρόμου), διαφορετική για κάθε οδό και διαπιστώνουμε την εμφανή επίδραση της επιλογής κατά μήκους κλίσης μιας οδού καθώς όσο εκείνη αυξάνεται, τόσο αμβλύνεται το πρόβλημα της απορροής των ομβρίων και μειώνεται η έκταση της προβληματικής περιοχής.

Το γεγονός της ύπαρξης προβληματικών περιοχών στο παραπάνω παράδειγμα, τεκμηριώνεται με μαθηματική ανάλυση (όπως θα δούμε παρακάτω) και το κέντρο των

προβληματικών περιοχών των οδών με σταθερή κατά μήκος κλίση δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

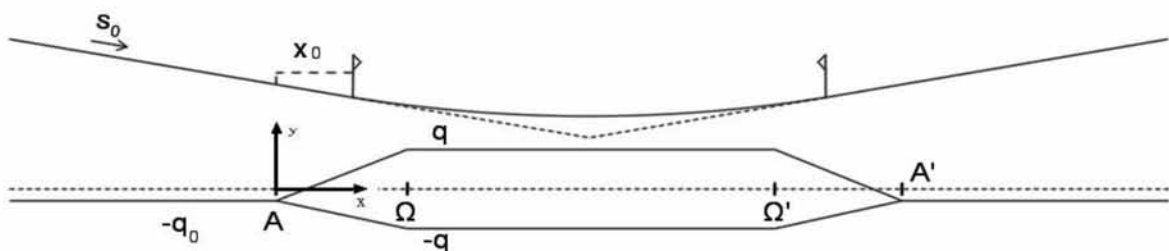
$$\boxed{X_c = \frac{q_0}{q + q_0} L} \quad \text{και} \quad \boxed{Y_c = -\frac{L}{q + q_0} S_0} \quad \text{αντιστοίχως.}$$



Σχήμα 2.4: Απεικόνιση προβληματικής περιοχής με κέντρο $M(X_c, Y_c)$

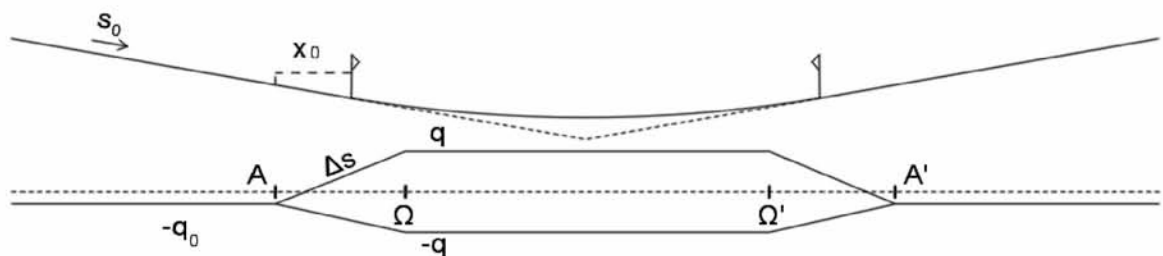
2.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Επιλέγεται ένα σύστημα συντεταγμένων (βλ. σχήμα 2.5) με τετμημένη x την απόσταση από την αρχή της κλωθοειδούς (σημείο A) κατά μήκος του άξονα του δρόμου και τεταγμένη y την εγκάρσια απόσταση από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος, ο οποίος έχει επιλεγεί, για λόγους απλότητας, να ταυτίζεται με τον άξονα του δρόμου.

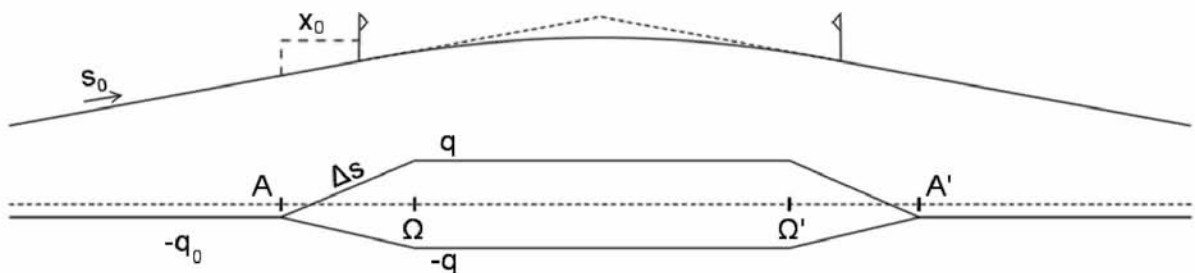


Σχήμα 2.5: Σύστημα συντεταγμένων (x, y)

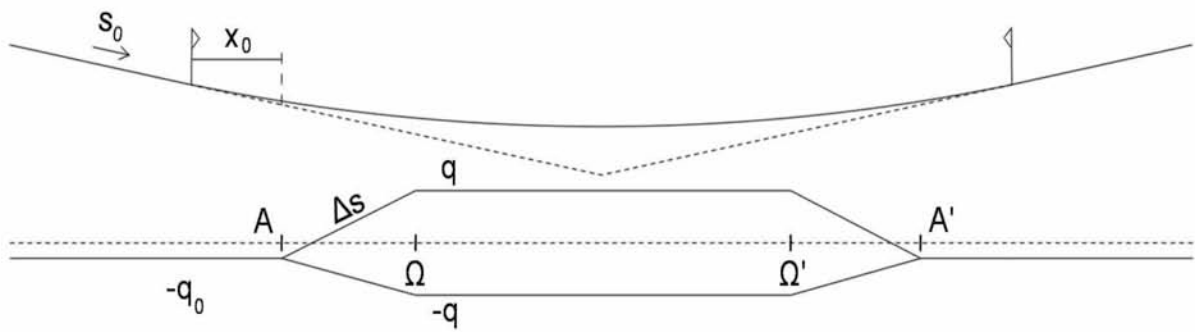
Στη συνέχεια προκειμένου να εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που πρόκειται να αντιμετωπίσει ένας μελετητής οδικών έργων, επιλέγεται για μελέτη μια περιοχή του οδοστρώματος, που χαρακτηρίζεται από ένα συνδυασμό οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης, η οποία υπό προϋποθέσεις μπορεί να οδηγήσει σε όχι καλή απορροή των ομβρίων. Συγκεκριμένα επιλέγεται μία καθοδική κατά μήκος κλίση s_0 , η οποία βαίνει συνεχώς μειούμενη και συνδυάζεται με την καμπύλη συναρμογής εισόδου της οριζόντιας καμπύλης όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.



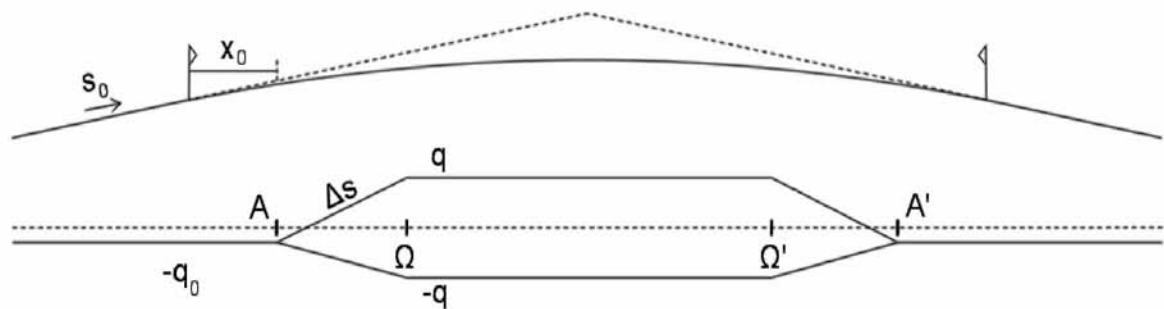
Σχήμα 2.6: Μηκοτομή κοίλης κατακόρυφης καμπύλης με θετικό X_0 και διάγραμμα επικλίσεων.



Σχήμα 2.7: Μηκοτομή κυρτής κατακόρυφης καμπύλης με θετικό X_0 και διάγραμμα επικλίσεων.



Σχήμα 2.8: Μηκοτομή κοίλης κατακόρυφης καμπύλης με αρνητικό X_0 και διάγραμμα επικλίσεων.



Σχήμα 2.9: Μηκοτομή κυρτής κατακόρυφης καμπύλης με αρνητικό X_0 και διάγραμμα επικλίσεων.

Θα μελετηθεί η συνισταμένη κλίση στο εξωτερικό ρεύμα του τμήματος του οδοστρώματος που αντιστοιχεί στην κλωθοειδή εισόδου. Τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τη παρούσα εργασία μπορούν να εφαρμοστούν ανάλογα και στο αντίστοιχο εξωτερικό ρεύμα του τμήματος του οδοστρώματος που αντιστοιχεί στην κλωθοειδή εξόδου. Η χάραξη που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6 είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της στροφής όμως η ανάλυση που θα ακολουθήσει δεν έχει σαν προϋπόθεση αυτή την συμμετρία.

Η **συνισταμένη κλίση** σε οποιαδήποτε θέση του οδοστρώματος θεωρείται ότι είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός και εκφράζεται από τη σχέση:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{(s_x + \Delta s_y)^2 + q_x^2} \quad (1)$$

όπου s_x είναι η κατά μήκος κλίση του άξονα σε απόσταση x από το σημείο A, αρχή της οριζόντιας καμπύλης (αλλά και της καμπύλης συναρμογής), Δs_y η πρόσθετη κατά μήκος κλίση σε απόσταση y από τον άξονα του δρόμου, q_x η επίκλιση σε απόσταση x , επίσης από την αρχή της καμπύλης. Το άθροισμα $s_x + \Delta s_y$ ορίζεται ως η **σύνθετη κατά μήκος κλίση** οποιουδήποτε σημείου με συντεταγμένες (x,y) . Η πρόσθετη (σε σχέση με τον άξονα) κατά μήκος κλίση στην εξωτερική πλευρά του οδοστρώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta s_y = \frac{q + q_0}{L} y \quad (2)$$

όπου $-q_0$ η επίκλιση στην ευθυγραμμία, q η επίκλιση στο κυκλικό τόξο, L το μήκος κλωθοειδούς και y η απόσταση από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος. Παράλληλα η επίκλιση q_x σε απόσταση x από την αρχή της οριζόντιας καμπύλης συναρμογής δίνεται από την σχέση:

$$q_x = -q_0 + \frac{q + q_0}{L} x \quad (3)$$

Η κατά μήκος κλίση s_x σε απόσταση x από την αρχή της κατακόρυφης καμπύλης εκφράζεται από τη σχέση:

$$s_x = s_0 + n \frac{x}{R} \quad \begin{array}{l} \text{όπου } n = +1 \text{ για κοίλη καμπύλη μηκοτομής} \\ \text{και } n = -1 \text{ για κυρτή καμπύλη μηκοτομής} \end{array} \quad (4)$$

όπου s_0 η σταθερή κατά μήκος κλίση πριν την κατακόρυφη καμπύλη συναρμογής ακτίνας R . Αν θεωρηθεί ότι η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης βρίσκεται σε απόσταση x_0 μετά

την αρχή της οριζόντιας καμπύλης συναρμογής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, τότε η σχέση (4) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$s_x = s_0 + n \frac{x - x_0}{R} \quad (5)$$

Εξετάζουμε το διάστημα για $x \geq x_0$ καθώς όταν $x < x_0$ τότε η κλίση είναι σταθερή ίση με s_0 . Έχει επιλεγεί σε αυτή την περίπτωση, να έπεται η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης της αρχής της κλωθοειδούς (σημείο Α), που συνδυάζει τη μεταβλητή επίκλιση με τη μεταβλητή κατά μήκος κλίση για όλο το διάστημα μελέτης. Στο τμήμα της κλωθοειδούς όπου η κατά μήκος κλίση είναι σταθερή, η μελέτη ανάγεται στην αρχική περίπτωση.

Αν υπάρχουν σημεία - θέσεις στα οποία μηδενίζεται η συνισταμένη κλίση, όπως αυτή ορίζεται από τη σχέση (1), αυτά πρέπει να χαρακτηρίζονται από μηδενική επίκλιση και ταυτόχρονα από μηδενική σύνθετη κατά μήκος κλίση $(s_x + \Delta s_y)$. Αυτό προκύπτει από την ίδια σχέση. Η θέση στην οποία μηδενίζεται η επίκλιση προσδιορίζεται από την τιμή του x στην οποία μηδενίζεται η q_x . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει σε απόσταση $x = X_c$ από την αρχή της καμπύλης:

$$0 = -q_0 + \frac{q + q_0}{L} x \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X_c = \frac{q_0}{q + q_0} L} \quad (6)$$

Η θέση στην οποία μηδενίζεται η σύνθετη κατά μήκος κλίση προσδιορίζεται από την τιμή του y στην οποία μηδενίζεται η $(s_x + \Delta s_y)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει σε απόσταση $y = Y_x$ από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος:

$$\frac{q+q_0}{L}y + s_0 + n\frac{x-x_0}{R} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{Y_x = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 + n\frac{x-x_0}{R} \right)} \quad (7)$$

Αυτή είναι μια σχέση που μας δίνει την τιμή της εγκάρσιας απόστασης (από τον άξονα του δρόμου) των σημείων μηδενισμού της σύνθετης κατά μήκος κλίσης. Μας δίνει δε μία τιμή για κάθε χιλιομετρική θέση, όπως αυτή εκφράζεται μέσω της απόστασης x από την αρχή της οριζόντιας καμπύλης. Ο προσδιορισμός του σημείου μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης, δηλαδή του σημείου ταυτόχρονου μηδενισμού της επίκλισης και της σύνθετης κατά μήκος κλίσης, γίνεται με αντικατάσταση στην (7) της τιμής του x από την (6). Αυτή μας δίνει τη σχέση:

$$Y_c = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 + n\frac{\frac{q_0}{q+q_0}L - x_0}{R} \right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{Y_c = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 - n\frac{x_0}{R} + n\frac{q_0}{q+q_0} \frac{L}{R} \right)} \quad (8)$$

Όταν η τιμή του Y_c , της εγκάρσιας απόστασης που προκύπτει από την παραπάνω σχέση, είναι μεγαλύτερη του μηδενός και μικρότερη του πλάτους του οδοστρώματος τότε υπάρχει σημείο M όπου μηδενίζεται η συνισταμένη κλίση εντός του οδοστρώματος. Αυτό το σημείο θα έχει συντεταγμένες (X_c, Y_c) και θα είναι μοναδικό στην περιοχή που εξετάζουμε. Αν δεν υπάρχει σημείο με μηδενική συνισταμένη κλίση αυτό δεν σημαίνει ότι το πρόβλημα της απορροής έχει λυθεί.

3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

3.1 ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο σύστημα συντεταγμένων, που προαναφέραμε, με τετμημένη x την απόσταση από την αρχή της κλωθοειδούς και τεταγμένη y την απόσταση από τον άξονα του δρόμου, θα μελετηθεί η συνάρτηση $\rho_{x,y}$ ώστε να υπολογιστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία χαρακτηρίζονται από μία συγκεκριμένη τιμή συνισταμένης κλίσης. Αν στην σχέση (5) γίνει η παρακάτω αντικατάσταση:

$$B = s_0 - n \frac{x_0}{R}, \text{ για } x > x_0 \quad \text{αλλιώς} \quad B = s_0 \quad (9)$$

όπου B μια σταθερά που αντιπροσωπεύει την κλίση στην αρχή της οριζόντιας καμπύλης, αυτή γράφεται με απλούστερη μορφή, όπως πιο κάτω:

$$s_x = B + n \frac{x}{R} \quad (10)$$

Κάνοντας επίσης την αντικατάσταση:

$$C = \frac{q + q_0}{L} \quad (11)$$

όπου C μία σταθερά που αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της επίκλισης ανά μονάδα μήκους, προκύπτουν απλούστερες σχέσεις. Συγκεκριμένα η σχέση (2), που περιγράφει την πρόσθετη κλίση οριογραμμών, παίρνει τη μορφή:

$$\Delta s_y = Cy \quad (12)$$

και η σχέση (3), που περιγράφει την επίκλιση, μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$q_x = -q_0 + Cx \quad (13)$$

Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, η συνισταμένη κλίση οδοστρώματος, που περιγράφεται αρχικά από την (1), γράφεται όπως πιο κάτω:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{(B + n\frac{x}{R} + Cy)^2 + (-q_0 + Cx)^2} \quad (14)$$

Η παράσταση αυτή αναλύεται σε:

$$\rho_{x,y}^2 = B^2 + n^2 \frac{x^2}{R^2} + C^2 y^2 + 2n\frac{B}{R}x + 2BCy + 2n\frac{C}{R}xy + q_0^2 + C^2 x^2 - 2q_0 Cx \quad <=>$$

$$\rho_{x,y}^2 = B^2 + (\frac{x}{R})^2 + C^2 y^2 + q_0^2 + C^2 x^2 + 2n\frac{B}{R}x + 2BCy + 2n\frac{C}{R}xy - 2q_0 Cx \quad (\text{διότι } n^2=1) \quad (15)$$

και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{(\frac{1}{R^2} + C^2)x^2 + C^2 y^2 + 2(n\frac{B}{R} - q_0 C)x + 2BCy + 2n\frac{C}{R}xy + B^2 + q_0^2} \quad (16)$$

Για να διερευνήσουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων στα οποία η προηγούμενη παράσταση έχει συγκεκριμένη τιμή χρειάζεται να μελετήσουμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\rho_{x,y}^2 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = \rho_0^2 \quad (17)$$

όπου ρ_0 η συγκεκριμένη τιμή της συνισταμένης κλίσης. Πρόκειται για δευτεροβάθμια εξίσωση το γράφημα της οποίας ονομάζεται κωνική τομή. Αυτή η εξίσωση εμπεριέχει μία τετραγωνική μορφή και μπορεί να γραφεί:

$$X^T A X + D X + \zeta = \rho_0^2 \quad (18)$$

όπου τα X, A, D είναι πίνακες της μορφής:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D = (\delta \varepsilon) \quad (19)$$

Τα στοιχεία των πινάκων, με βάση τις σχέσεις (16) και (17), είναι:

$$a = \frac{1}{R^2} + C^2, \quad \beta = n \frac{C}{R}, \quad \gamma = C^2, \quad \delta = 2(n \frac{B}{R} - q_0 C), \quad \varepsilon = 2BC, \quad \zeta = B^2 + q_0^2 \quad (20)$$

Για να απαλειφθεί ο όρος xy της (17) χρειάζεται περιστροφή των αξόνων. Η διαδικασία λέγεται διαγωνιοποίηση της τετραγωνικής μορφής ή διαγωνιοποίηση του πίνακα A και περιγράφεται στη συνέχεια. Έχουμε τετραγωνικό πίνακα A (δεύτερης τάξης αν υποθέσουμε ότι $\det A \neq 0$) και έστω ότι ο αριθμός λ είναι η ιδιοτιμή του A , αν και μόνο αν, υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα X ώστε $AX = \lambda X$ οπότε μεταφέροντας το δεύτερο μέλος στο πρώτο έχουμε:

$$(A - \lambda I_2)X = 0 \quad (\text{Σχέση 1})$$

Αν τώρα $\det(A - \lambda I_2) \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Εφόσον όμως το μηδενικό διάνυσμα είναι λύση και $X \neq 0$, όπως ορίσαμε αρχικά, τότε πρέπει να έχουμε $\det(A - \lambda I_2) = 0$, συνεπώς:

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix}$$

Πρώτα υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A :

$$\det|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 \quad (21)$$

αυτή η παράσταση μπορεί να γραφεί:

$$|A - \lambda I_2| = \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 \quad (22)$$

και χρησιμοποιώντας τις τιμές από τις σχέσεις (20) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I_2| &= \lambda^2 - \left(\frac{1}{R^2} + C^2 + C^2\right)\lambda + \left(\frac{1}{R^2} + C^2\right)C^2 - \left(n\frac{C}{R}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 |A - \lambda I_2| &= \lambda^2 - \left(\frac{1}{R^2} + 2C^2\right)\lambda + \frac{C^2}{R^2} + C^4 - \frac{C^2}{R^2} \Leftrightarrow \\
 |A - \lambda I_2| &= \lambda^2 - \left(\frac{1}{R^2} + 2C^2\right)\lambda + C^4 \tag{23}
 \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς λ είναι:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left(\frac{1}{R^2} + 2C^2\right)^2 - 4C^4 = \frac{1}{R^4} + 4C^4 + 4\frac{C^2}{R^2} - 4C^4 \Leftrightarrow \\
 \Delta &= \frac{1}{R^4} + \frac{4R^2C^2}{R^4} = \frac{1}{R^4}(1 + 4C^2R^2) \tag{24}
 \end{aligned}$$

Και οι λύσεις της εξίσωσης και ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \frac{\frac{1}{R^2} + 2C^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2R^2} + C^2 \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2R^2} + C^2 \pm \frac{\sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2} \\
 \boxed{\Leftrightarrow \lambda_1 = C^2 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2}} &, \quad \boxed{\lambda_2 = C^2 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2}} \tag{25}
 \end{aligned}$$

Για $C > 0$ αποδεικνύεται ότι και $\lambda_2 > 0$

$$\text{Αν } C > 0 \text{ τότε πρέπει } \lambda_2 > 0 \text{ δηλαδή } C^2 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2R^2C^2 + 1 > \sqrt{1 + 4C^2R^2} \text{ θέτουμε } \alpha = 2R^2C^2 \text{ οπότε } \alpha + 1 > \sqrt{1 + 2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 1)^2 > 1 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 > 1 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$$

και έτσι το γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ που είναι η συνθήκη ώστε η κωνική τομή η οποία προαναφέρθηκε να είναι έλλειψη. Χρειάζεται ο προσδιορισμός των ακτινών της. Το κέντρο της έλλειψης μπορεί να θεωρηθεί γνωστό από τις εξισώσεις (6) και (8) αν γίνει η παραδοχή ότι το σημείο που μηδενίζεται η συνισταμένη κλίση είναι μια εκφυλισμένη μορφή έλλειψης με μηδενικές ακτίνες. Για την απλοποίηση των σχέσεων που δίνουν τις ιδιοτιμές γίνεται η επόμενη αντικατάσταση:

$$F = \sqrt{1 + 4C^2 R^2} \quad (26)$$

και αυτές γράφονται:

$$\boxed{\lambda_1 = C^2 + \frac{1+F}{2R^2}}, \quad \boxed{\lambda_2 = C^2 + \frac{1-F}{2R^2}} \quad (27)$$

Από την εξίσωση:

$$(A - \lambda I_2)X = 0 \quad (28)$$

για τις προηγούμενες ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = \lambda_1$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \lambda_1 & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Οπότε για $\lambda = \lambda_1$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha - \lambda_1)x + \beta y &= 0 \\ \beta x + (\gamma - \lambda_1)y &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{-\beta y}{\alpha - \lambda_1} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-n \frac{C}{R} y}{\frac{1}{R^2} + C^2 - C^2 - \frac{1+F}{2R^2}} = \frac{-nC y}{1-F} \Leftrightarrow x = \frac{n2RC}{F-1} y$$

Οπότε θέτοντας $x = u$ τότε $y = \frac{F-1}{n2RC}u$

από την οποία προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{n} \frac{F-1}{2RC} u \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} nu \\ \frac{F-1}{2RC} u \end{pmatrix} \quad (30)$$

ενώ για $\lambda = \lambda_2$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha - \lambda_2)x + \beta y &= 0 \\ \beta x + (\gamma - \lambda_2)y &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{-\beta}{\alpha - \lambda_2} y \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\lambda_2 - \alpha} y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{n \frac{C}{R} y}{-\frac{1}{R^2} + C^2 - C^2 + \frac{1+F}{2R^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{n2RC}{1+F} y$$

Οπότε θέτοντας $x = -v$ τότε $y = \frac{1}{n} \frac{F+1}{2RC} v$

και προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{pmatrix} -v \\ \frac{1}{n} \frac{F+1}{2RC} v \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -nv \\ \frac{F+1}{2RC} v \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$\begin{pmatrix} nu & -nv \\ \frac{F-1}{2RC} u & \frac{F+1}{2RC} v \end{pmatrix} \quad (32)$$

ο οποίος για να είναι ορθοκανονικός πρέπει:

$$\begin{pmatrix} nu & -nv \\ \frac{F-1}{2RC}u & \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nu & \frac{F-1}{2RC}u \\ -nv & \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

δηλαδή:

$$\boxed{u^2 + v^2 = 1}, \quad \boxed{n \frac{F-1}{2RC}u^2 - n \frac{F+1}{2RC}v^2 = 0} \text{ ή αναλύοντας έχουμε}$$

$$(F-1)u^2 - (F+1)v^2 = 0 \Leftrightarrow Fu^2 - u^2 - Fv^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$F(u^2 - v^2) = u^2 + v^2 \Leftrightarrow \boxed{u^2 - v^2 = \frac{1}{F}} \quad (34)$$

Και αναλύοντας περαιτέρω τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{F} \Leftrightarrow u^2 - \frac{1}{F} = v^2 \text{ και αντικαθιστώντας στην } u^2 + v^2 = 1 \text{ αυτή γίνεται:}$$

$$u^2 + u^2 - \frac{1}{F} = 1 \Leftrightarrow 2u^2 = 1 + \frac{1}{F} \Leftrightarrow 2u^2 = \frac{F+1}{F} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{F+1}{2F}}$$

και αντικαθιστώντας το u στην $u^2 + v^2 = 1$ προκύπτει:

$$v^2 = 1 - \frac{F+1}{2F} = \frac{2F - F - 1}{2F} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{F-1}{2F}}$$

το οποίο οδηγεί στον πίνακα:

$$P = \begin{pmatrix} n\sqrt{\frac{F+1}{2F}} & -n\sqrt{\frac{F-1}{2F}} \\ \frac{F-1}{2RC}\sqrt{\frac{F+1}{2F}} & \frac{F+1}{2RC}\sqrt{\frac{F-1}{2F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nP_1 & -nP_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

όπου:

$$P_1 = \sqrt{\frac{F+1}{2F}} \quad , \quad P_2 = \sqrt{\frac{F-1}{2F}} \quad (36)$$

Ο πίνακας P είναι τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Η περιστροφή των αξόνων που προαναφέρθηκε γίνεται αν στην τετραγωνική μορφή της εξίσωσης (18) κάνουμε την αντικατάσταση:

$$X = P Y \quad (38)$$

όπου ο x δίνεται στη (19) και ο y είναι πίνακας της μορφής:

$$Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (39)$$

η εξίσωση (18) παίρνει τη μορφή:

$$(P Y)^T A (P Y) + D(P Y) + \zeta = \rho_0^2 \quad (40)$$

ή διαφορετικά:

$$Y^T (P^T A P) Y + (D P) Y + \zeta = \rho_0^2 \quad (41)$$

Έτσι στο νέο σύστημα αξόνων δεν υπάρχει ο όρος του γινομένου των μεταβλητών $x' y'$ και έχουμε:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \delta' x' + \varepsilon' y' + \zeta = \rho_0^2 \quad (42)$$

η οποία μπορεί να γραφεί:

$$\lambda_1(x'^2 + 2\frac{\delta'}{2\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2}y') + \zeta = \rho_0^2 \quad (43)$$

όπου τα δ' και ε' προκύπτουν από τον γινόμενο των πινάκων DP και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\delta' = \delta P_{11} + \varepsilon P_{21}, \quad \varepsilon' = \delta P_{12} + \varepsilon P_{22} \quad (44)$$

Τα $P_{11}, P_{12} \dots$ είναι τα στοιχεία του πίνακα P που υπολογίστηκε προηγουμένως, σχέση (35). Στη συνέχεια αντικαθιστώντας έχουμε για το δ' :

$$\delta' = 2(n\frac{B}{R} - q_0C)nP_1 + 2BC\frac{F-1}{2RC}P_1 \quad (45)$$

και για το ε' :

$$\varepsilon' = -2(n\frac{B}{R} - q_0C)nP_2 + 2BC\frac{F+1}{2RC}P_2 \quad (46)$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε για το δ' :

$$\delta' = 2\frac{B}{R}P_1 - 2nq_0CP_1 + 2BC\frac{F-1}{2RC}P_1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\delta' = \frac{BP_1}{R}(F+1) - 2nq_0CP_1} \quad (47)$$

και για το ε' :

$$\varepsilon' = -2\frac{B}{R}P_2 + 2nq_0CP_2 + 2BC\frac{F+1}{2RC}P_2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{BP_2}{R}(F-1) + 2nq_0CP_2} \quad (48)$$

Η εξίσωση (43) γράφεται:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 - \zeta + \rho_0^2 \quad (49)$$

Αποδεικνύεται, κάνοντας τις πράξεις (το σύνολο των οποίων παρατίθεται στο παράρτημα i), ότι:

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} - \zeta = 0 \quad (50)$$

και έτσι η (49) απλοποιείται όπως πιο κάτω:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 = \rho_0^2 \quad (51)$$

Αντικαθιστώντας (πρόκειται για μετατόπιση αξόνων) με δύο νέες μεταβλητές:

$$x'' = x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \quad (52)$$

θα έχουμε την εξίσωση (51) στη μορφή:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \rho_0^2 \quad (53)$$

η οποία γράφεται:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2} = 1 \quad (54)$$

δηλαδή εξίσωση έλλειψης της μορφής:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad (55)$$

με ημιάξονες:

$$a = \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \text{και} \quad b = \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (56)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με σταθερή τιμή (ρ_0) της συνισταμένης κλίσης είναι μια έλλειψη με ημιάξονες που δίνονται από τις σχέσεις (56). Η έλλειψη που έχει προκύψει έχει περιστραφεί σε σχέση με τον άξονα του δρόμου σύμφωνα με την εξίσωση (38) και στη συνέχεια έχει μετατοπιστεί στο νέο σύστημα αξόνων κατά $\Delta x'$ και κατά $\Delta y'$, όπως αυτά εκφράζονται από τις εξισώσεις (52). Η εξίσωση (38) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nP_1 & -nP_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (57)$$

και η εξίσωση (52) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (58)$$

που αντιστρέφοντας την έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ -\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Από τις (57) και (59) προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nP_1 & -nP_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ -\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \right\} \quad (60)$$

και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nP_1 & -nP_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n\frac{\delta'P_1}{2\lambda_1} + n\frac{\varepsilon'P_2}{2\lambda_2} \\ -\frac{F-1}{2RC}P_1\frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC}P_2\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

δηλαδή στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων η έλλειψη έχει κέντρο:

$$\boxed{X_c = -n\frac{\delta'P_1}{2\lambda_1} + n\frac{\varepsilon'P_2}{2\lambda_2}} \quad , \quad \boxed{Y_c = -\frac{F-1}{2RC}P_1\frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC}P_2\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2}} \quad (62)$$

και είναι στραμμένη κατά γωνία θ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\cos\theta = P_1 \quad (63)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των μεγεθών και τις πράξεις οι σχέσεις (62) απλοποιούνται σε (βλ παράρτημα iii):

$$\boxed{X_c = \frac{q_0}{q+q_0}L} \quad , \quad \boxed{Y_c = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 - n\frac{x_0}{R} + n\frac{q_0}{q+q_0}\frac{L}{R} \right)} \quad (64)$$

Οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται με τις σχέσεις (6) και (8), που δίνουν τις συντεταγμένες του σημείου μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης.

3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΗΜΙΑΞΟΝΕΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$$a \approx b \approx \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_{1,2}}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{C^2 + \frac{1 \pm F}{2R^2}}} \quad \text{όπου } F = \sqrt{1 + 4C^2 R^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Όπου:} \quad \lambda_1 = C^2 + \frac{1+F}{2R^2} \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1-F}{2R^2} \quad C = \frac{q+q_0}{L}$$

$$a \approx b \approx \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_{1,2}}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{C^2 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4C^2 R^2}}{2R^2}}} \Leftrightarrow \frac{\rho_0}{\sqrt{C^2 + \frac{1}{2R^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^4} + \frac{C^2}{R^2}}}} \Leftrightarrow$$

και επειδή όλοι οι όροι του παρονομαστή εκτός του C^2 τείνουν στο μηδέν, προσεγγιστικά απλοποιούμε την εξίσωση των ημιαξόνων ως παρακάτω:

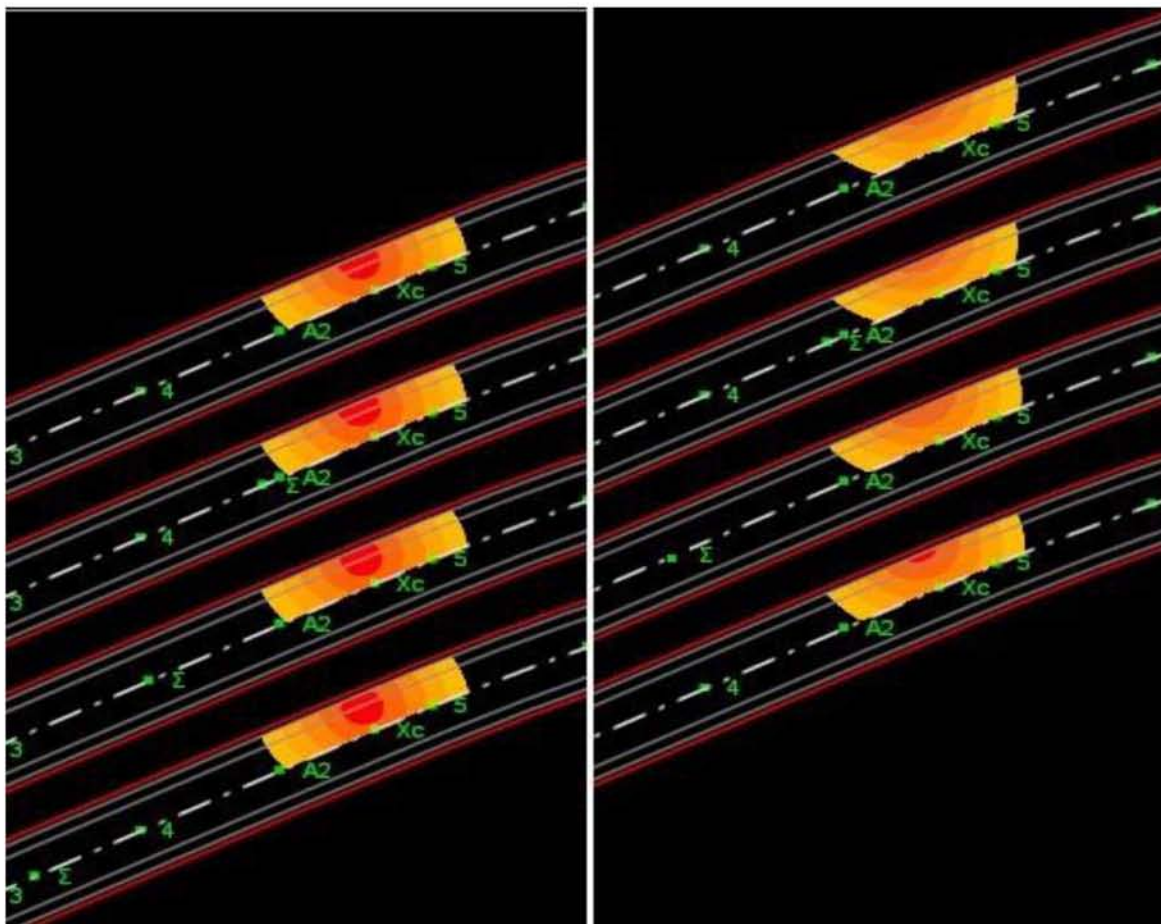
$$\boxed{a \approx b = \frac{\rho_0}{C}}, \text{ εξίσωση που μας δίνει μια αρκετά ικανοποιητική και κυρίως εύκολα}$$

υπολογίσιμη πρώτη εκτίμηση του εν λόγω μεγέθους.

Για μια πιο ακριβή προσέγγιση χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πρόγραμμα Excel καταλήγουμε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την ανωτέρω σχέση με τους σταθερούς συντελεστές 0,96 και 1,04 ώστε να εκτιμήσουμε ορθότερα τον μικρό και μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης. Η σχετική ανάλυση μέσω του Excel παρατίθεται στο παρατήμα ii.

4 Εφαρμογές στο Anadelta Tessera

Στα παρακάτω σχήματα παριστάνεται χρωματικά η τιμή της συνισταμένης κλίσης με τη χρήση του προγράμματος Anadelta tessera, για ποικίλες περιπτώσεις στις οποίες το σημείο με συντεταγμένες (X_c, Y_c) είναι το κέντρο των εμφανιζόμενων, περίπου κυκλικών, σχηματισμών. Χαρακτηριστικά σημεία των σχημάτων αποτελούν η αρχή της οριζόντιας καμπύλης συναρμογής δηλαδή η αρχή της στροφής (που σημειώνεται με A2 όπως η ονομασία της αντίστοιχης διατομής), η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης (που σημειώνεται με Σ στο σχήμα) και τα ονόματα των υπόλοιπων διατομών των δρόμων. Σε όλα τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν απεικονίζονται τέσσερις οδοί στο αριστερό τμήμα του εκάστοτε σχήματος και τέσσερις στο δεξιό τμήμα. Η απεικόνιση πολλών οδών ταυτόχρονα αποσκοπεί στο να καταστεί δυνατό να αντιληφθούμε καλύτερα τις σταδιακές μεταβολές των στοιχείων μεταξύ των οδών και τις αλλαγές που αυτές επιφέρουν αλλά και να κατανοήσουμε ευκολότερα το πρόβλημα της απορροής των ομβρίων.

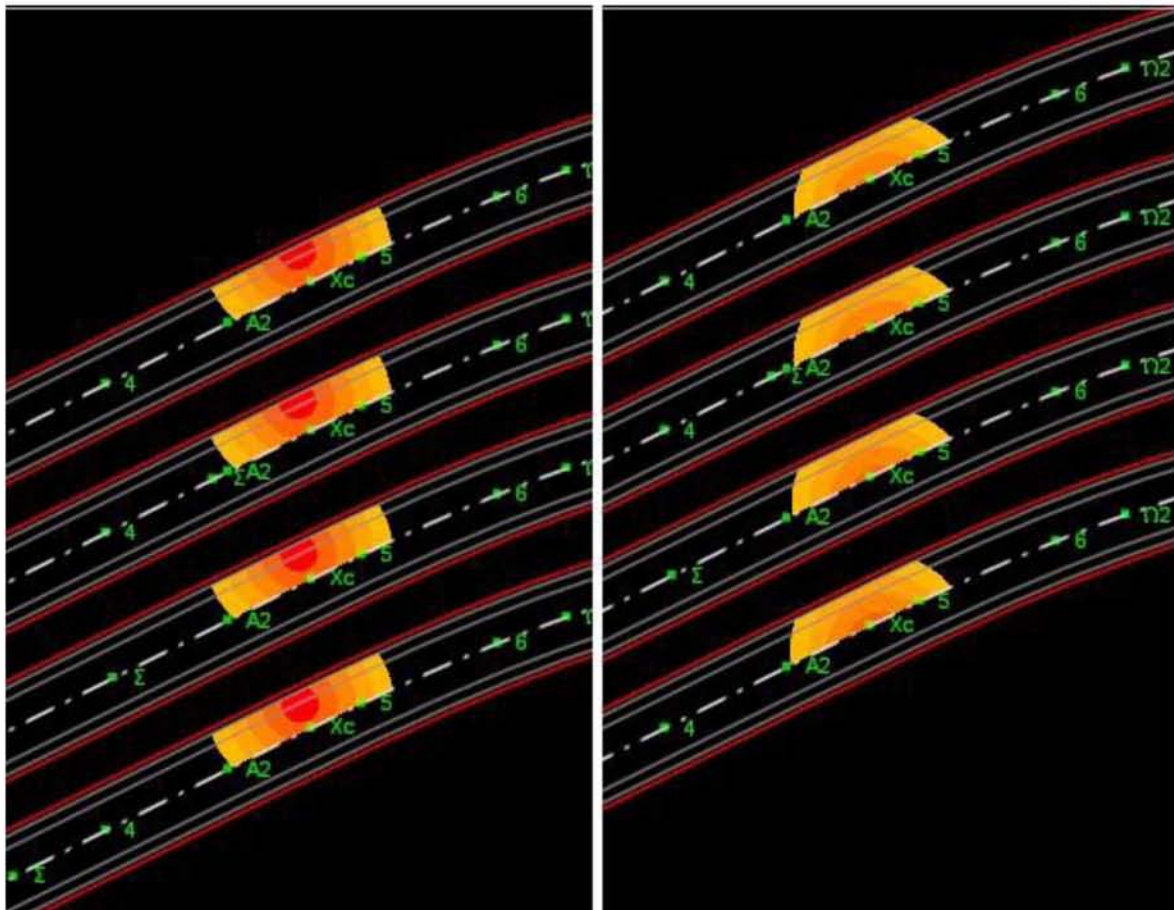


Σχήμα 4.1: Χρωματική παράσταση της συνισταμένης κλίσης οδοστρώματος Αρνητικά X_o - κοίλες αριστερά $S_o = -1\%$ και δεξιά $S_o = -2\%$

Το σχήμα 4.1 απεικονίζει οδούς με κοίλες καμπύλες μηκοτομής. Έχει χρησιμοποιηθεί για όλους τους δρόμους τιμή επίκλισης στην ευθυγραμμία $q_o = -2.5\%$, επίκλισης στο κυκλικό τόξο $q = 7.5\%$ που αντιστοιχεί σε πρόσθετη κλίση οριογραμμών $\Delta s = 0.75$. Το μήκος κλωθοειδούς είναι $L = 50m$ και η απόσταση της οριογραμμής από το άξονα είναι $a = 3.75m$. Στους δρόμους που φαίνονται στο αριστερό τμήμα του σχήματος η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = -1\%$, ενώ σε αυτούς του δεξιού τμήματος η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = -2\%$. Η τιμή του x_o είναι 0 για το δρόμο στο επάνω μέρος του αριστερού σχήματος και μειώνεται σε $x_o = -2,265m$, $-17,264m$ και $-32,264m$ για τους επόμενους. Η τιμή του x_o είναι 0 για το δρόμο στο επάνω μέρος του δεξιού σχήματος και μειώνεται σε $x_o = -2,247m$, $-22,243m$ και $-42,239m$ για τους επόμενους. Παρατηρούμε ότι το x_o είναι αρνητικό σε όλους τους δρόμους, δηλαδή η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης

(που σημειώνεται με Σ στο σχήμα) προηγείται της αρχής της οριζόντιας καμπύλης (που σημειώνεται με $A2$ στο σχήμα όπως η ονομασία της αντιστοίχης διατομής). Επίσης οι κατακόρυφες ακτίνες R για τον πρώτο δρόμο του αριστερου τμήματος είναι 11773m ενώ για τους επόμενους είναι 12000m, 13500m και 15000m. Ενώ για τον πρώτο του δεξιού τμήματος είναι $R=5887.65m$ και για τους επόμενους είναι 6000m, 7000m και 8000m αντιστοίχως.

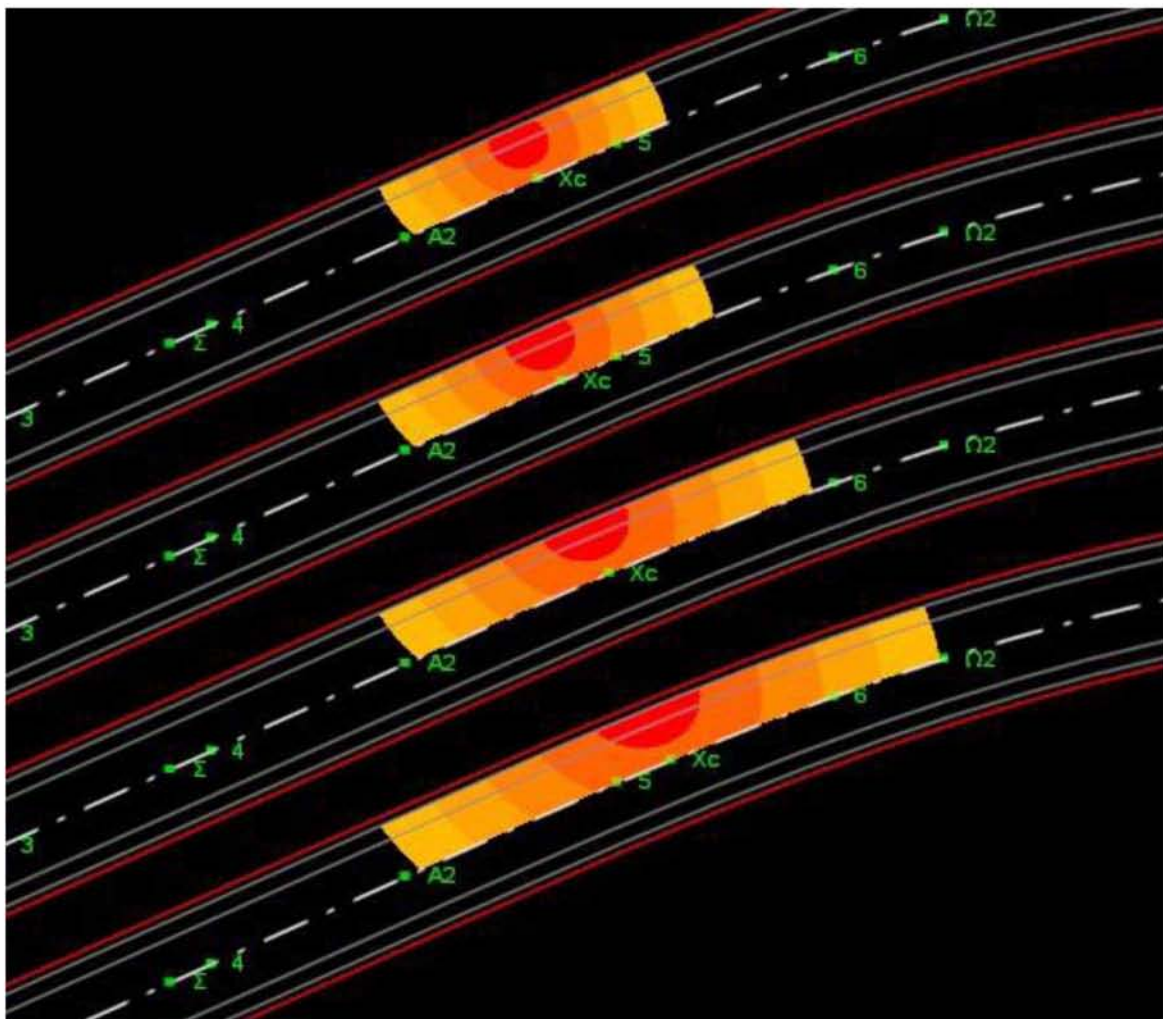
Στο παραπάνω παράδειγμα (σχήμα 4.1) τα στοιχεία που μεταβλήθηκαν προκειμένου να γίνει σύγκριση, είναι η αρχική κατά μήκος κλίση s_o , η τιμή του x_o και η κατακόρυφη ακτίνα R . Όπως φαίνεται και ήταν αναμενόμενο βάσει του τύπου (6), το X_c δεν επηρεάστηκε από τις μεταβολές των ανωτέρων τιμών και ως εκ τούτου η χιλιομετρική απόσταση του κέντρου της προβληματικής περιοχής παρέμεινε αμετάβλητη σε όλες τις οδούς. Αντιθέτως από τις μεταβολές, επηρεάστηκε όπως αναμενόταν βάσει του τύπου (8), το κέντρο Y_c της προβληματικής περιοχής. Διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα της απορροής ελαττώνεται όσο αυξάνεται η αρχική κατά μήκος κλίση. Επίσης, παρατηρείται μείωση του ζητήματος κακής απορροής όσο μικραίνει η κατακόρυφη ακτίνα R (μετατοπίζεται το κέντρο της προβληματικής περιοχής προς την εξωτερική οριογραμμή).



Σχήμα 4.2: Χρωματική παράσταση της συνισταμένης κλίσης οδοστρώματος. Αρνητικά X_o - αριστερά κοίλες $S_o = -1\%$ και δεξιά κυρτές $S_o = 1\%$

Στο σχήμα 4.2 έχει χρησιμοποιηθεί για όλες τις οδούς τιμή επίκλισης στην ευθυγραμμία $q_0 = -2.5\%$, επίκλισης στο κυκλικό τόξο $q = 7.5\%$ που αντιστοιχεί σε πρόσθετη κλίση οριογραμμών $\Delta s = 0.75$. Η τιμή του x_o είναι 0 για τους δρόμους στο επάνω μέρος του σχήματος (τόσο αριστερά όσο και δεξιά) και μειώνεται σε -2,265m, -17,264m και -32,264m για τους επόμενους. Το μήκος κλωθοειδούς είναι $L = 50m$ και η απόσταση της οριογραμμής από το άξονα είναι $\alpha = 3.75m$. Στους δρόμους που φαίνονται στο αριστερό τμήμα του σχήματος η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = -1\%$ οπότε και έχουν κοίλες κατακόρυφες καμπύλες συναρμογής, ενώ σε αυτούς του δεξιού τμήματος η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = 1\%$ οπότε και έχουν κυρτές κατακόρυφες καμπύλες συναρμογής. Επίσης οι κατακόρυφες ακτίνες R για τους δρόμους στο επάνω μέρος του σχήματος (τόσο αριστερά όσο και δεξιά) είναι 11773m ενώ για τους επόμενους είναι 12000m, 13500m και 15000m αντιστοίχως.

Με το παραπάνω παράδειγμα (σχήμα 4.2) διαπιστώνουμε ότι το ζήτημα της απορροής είναι εντονότερο στις χαράξεις με κοίλες κατακόρυφες καμπύλες (αριστερό τμήμα του σχήματος). Αυτό εξακριβώνεται καθώς το μοναδικό στοιχείο που μεταβάλλεται για τη σύγκριση είναι το πρόσημο της αρχικής κατά μήκος κλίσης. Στους δρόμους αριστερά είναι $s_o = -1\%$ ενώ στους δεξιά είναι $s_o = 1\%$. Επίσης διαπιστώνουμε ξανά ότι το πρόβλημα της απορροής ελαττώνεται όσο μειώνεται η κατακόρυφη ακτίνα R (μετατοπίζεται το κέντρο της προβληματικής περιοχής προς την εξωτερική οριογραμμή).

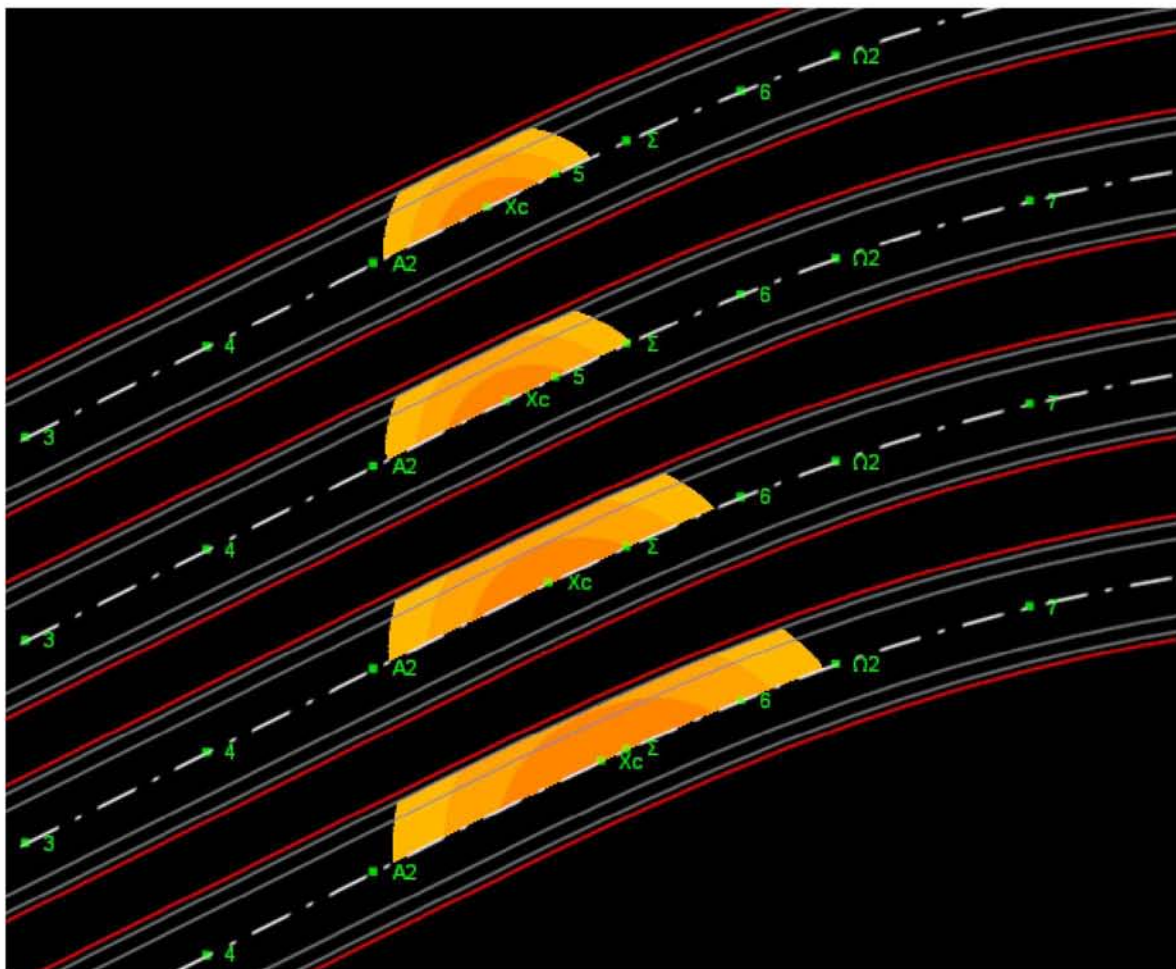


Σχήμα 4.3: Χρωματική παράσταση της συνισταμένης κλίσης οδοστρώματος Αρνητικά X_o - Κοίλες καμπύλες $S_o = -1\%$ & $q = 7,5\%$ έως $2,5\%$

Στους τέσσερις δρόμους του σχήματος 4.3 η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = -1\%$, η τιμή του x_o είναι $-22,64\text{m}$, η κατακόρυφη καμπύλη έχει ακτίνα $R = 14000\text{m}$, το

μήκος κλωθοειδούς είναι $L=50m$ και η απόσταση της οριογραμμής από το άξονα είναι $\alpha=3.75m$. Έχει χρησιμοποιηθεί για όλες τις οδούς τιμή επίκλισης στην ευθυγραμμία $q_0 = -2.5\%$ ενώ η επίκλιση στο κυκλικό τόξο μεταβάλλεται από $q=7.5\%$ στον πάνω δρόμο σε $q=6\%$, $q=4\%$ και $q=2.5\%$ αντιστοίχως. Οι επικλίσεις αυτές αναλογούν σε πρόσθετη κλίση οριογραμμών $\Delta s=0.75$ $\Delta s=0.64\%$ $\Delta s=0.49\%$ και $\Delta s=0.40\%$.

Με το παραπάνω παράδειγμα (σχήμα 4.3) επαληθεύονται ουσιαστικά οι τύποι (6) και (8) καθώς μεταβάλλοντας μόνο την επίκλιση q , αλλάζει η θέση και η έκταση της προβληματικής απορροής των ομβρίων. Συγκεκριμένα, όσο ελαττώνεται η επίκλιση q , τόσο μετατοπίζεται το κέντρο της προβληματικής περιοχής προς την εξωτερική οριογραμμή και αυξάνεται η έκτασή της.



Σχήμα 4.4: Χρωματική παράσταση της συνισταμένης κλίσης οδοστρώματος θετικά X_c - Κυρτές καμπύλες $S_0=1\%$ & $q=7,5\%$ έως $2,5\%$

Στους τέσσερις δρόμους του σχήματος 4.4 η τιμή της αρχικής κατά μήκος κλίσης είναι $s_o = 1\%$, η τιμή του $x_o = 27,733\text{m}$, η κατακόρυφη καμπύλη έχει ακτίνα $R=9000\text{m}$ και είναι κυρτή, το μήκος κλωθοειδούς είναι $L=50\text{m}$ και η απόσταση της οριογραμμής από το άξονα είναι $a=3.75\text{m}$. Έχει χρησιμοποιηθεί για όλες τις οδούς τιμή επίκλισης στην ευθυγραμμία $q_o = -2.5\%$ ενώ η επίκλιση στο κυκλικό τόξο μεταβάλλεται από $q=7.5\%$ στον πάνω δρόμο σε $q=6\%$, $q=4\%$ και $q=2.5\%$ αντιστοίχως. Οι επικλίσεις αυτές αναλογούν σε πρόσθετη κλίση οριογραμμών $\Delta s=0.75$ $\Delta s=0.64\%$ $\Delta s=0.49\%$ και $\Delta s=0.40\%$.

Στο παραπάνω παράδειγμα (σχήμα 4.4) όπως και στο παράδειγμα του σχήματος 4.3 επαληθεύονται ουσιαστικά οι τύποι (6) και (8) καθώς μεταβάλλοντας μόνο την επίκλιση q , αλλάζει η θέση και η έκταση της προβληματικής απορροής των ομβρίων. Συγκεκριμένα, όσο ελαττώνεται η επίκλιση q , τόσο μετατοπίζεται το κέντρο της προβληματικής περιοχής προς την εξωτερική οριογραμμή και αυξάνεται η έκτασή της. Το αξιοσημείωτο είναι όμως ότι όταν έχουμε κοίλες κατακόρυφες καμπύλες (σχήμα 4.3) πρέπει να επιζητούμε μικρότερες τιμές επίκλισης q καθώς αμβλύνεται εν μέρει το πρόβλημα της απορροής σε αντίθεση με την περίπτωση των κυρτών κατακόρυφων καμπυλών (σχήμα 4.4) που επιζητούμε μεγαλύτερες τιμές επικλίσεων.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα και αναμένεται από τη σχέση (6) οι διαφορετικές τιμές του x_o και του R δεν επηρεάζουν τις τιμές του X_c αντίθετα επηρεάζουν τις τιμές του Y_c όπως αναμένεται και από τη σχέση (8). Επίσης η τιμή του q , δηλαδή και του Δs , επηρεάζει την έκταση της περιοχής με προβληματική απορροή. Αν θεωρηθεί σαν τέτοια η περιοχή που χαρακτηρίζεται από $\rho_{x,y} < 0.5\%$ τότε το πρόβλημα δεν περιορίζεται στον υπολογισμό των σημείων μηδενικής κλίσης αλλά είναι χρήσιμος ο εντοπισμός ολόκληρων περιοχών. Μια περισσότερο ενδελεχής μελέτη του ζητήματος της απορροής μπορεί να γίνει εξετάζοντας αναλυτικά τη σχέση (1).

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα της απορροής των ομβρίων όπως διαπιστώνουμε μέσα από το συνδυασμό της μαθηματικής ανάλυσης και τη χρήση του σχεδιαστικού προγράμματος Anadelta Tessera εντοπίζεται στις καμπύλες περιοχές των οδών και συγκεκριμένα μετά την αρχή της οριζόντιας καμπύλης συναρμογής (A_2). Στο διάστημα της κλωθοειδούς εισόδου (ή εξόδου) εντοπίζουμε την προβληματική περιοχή που αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων με συγκεκριμένη τιμή συνισταμένης κλίσης.

Με βάση την αρχική ανάλυση προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με τιμή συνισταμένης κλίσης μικρότερη από ρ_0 είναι ο εσωτερικός χώρος μιας έλλειψης. Αν ως τιμή του ρ_0 επιλεγεί μια οριακή (π.χ. 0.5%) τότε η προβληματική περιοχή θα είναι το τμήμα του εσωτερικού της αντίστοιχης έλλειψης το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στον άξονα του δρόμου και την εξωτερική οριογραμμή. Η έκταση (το εμβαδόν) αυτή της περιοχής είναι ανάλογη του τετραγώνου της τιμής ρ_0 που θα επιλεγεί και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταβολής της επίκλισης ανά μονάδα μήκους. Το κέντρο $M(X_c, Y_c)$ της εν λόγω περιοχής δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη τιμή (ρ_0). Αντίθετα οι ακτίνες της έλλειψης (a και b) εξαρτώνται από αυτήν και είναι ευθέως ανάλογες του ρ_0 , όπως προκύπτει από τις σχέσεις (56). Το κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης, που ταυτίζεται με το σημείο ταυτόχρονου μηδενισμού της επίκλισης και της σύνθετης κατά μήκος κλίσης. Το σημείο αυτό μπορεί να είναι πραγματικό (να βρίσκεται εντός των ορίων του οδοστρώματος) ή όχι (δηλαδή να βρίσκεται σε μία θεωρητική θέση).

Έχει σημασία ο μελετητής να παρατηρεί σε ποιο πεδίο τιμών εργάζεται. Να αντιλαμβάνεται δηλαδή αν η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης έπεται ή όχι, της οριζόντιας καμπύλης. Στη περίπτωση που η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης έπεται της οριζόντιας

καμπύλης (δηλαδή έχουμε θετικό X_0) έχει νόημα να διερευνήσουμε το διάστημα για $X > X_0$ καθώς για το διάστημα όπου $X < X_0$ το ζήτημα της εύρεσης των προβληματικών περιοχών απλοποιείται έχοντας σταθερή κατά μήκος κλίση. Βεβαίως, όταν το $X_0 > X_c$ πρέπει να αντιληφθούμε ότι το κέντρο M της προβληματικής απορροής των ομβρίων βρίσκεται στο διάστημα $0 < X < X_0$ οπότε δεν συντρέχει λόγος διερεύνησης της μετέπειτα περιοχής.

Σε κάθε περίπτωση πρέπει αρχικά ο μελετητής να εντοπίσει τη χιλιομετρική θέση του σημείου μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης (X_c) ώστε να ερευνήσει το ορθό διάστημα και όχι όλο το μήκος της οδού.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα και αναμένεται από τη σχέση (6) οι διαφορετικές τιμές του X_0 και του R δεν επηρεάζουν τις τιμές του X_c αντίθετα επηρεάζουν τις τιμές του Y_c όπως προβλέπεται και από τη σχέση (8). Επίσης η τιμή της επίκλισης q , δηλαδή και του Δs , επηρεάζει την έκταση της περιοχής με προβληματική απορροή.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες παρατηρήσεις προς την κατεύθυνση της ορθότερης χάραξης και της αποφυγής του φαινομένου της κακής απορροής.

- ❖ Όσο αυξάνεται η ακτίνα R της κατακόρυφης καμπύλης (ακτίνα μηκοτομής), επομένως αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή το X_0 , τόσο αυξάνεται και το πρόβλημα της απορροής των ομβρίων καθώς το κέντρο της έλλειψης μετατοπίζεται προς τον άξονα της οδού.
- ❖ Όσο αυξάνεται η αρχική κατά μήκος κλίση s_0 της οδού, τόσο μειώνεται το πρόβλημα.
- ❖ Γενικά οι κυρτές καμπύλες αντιμετωπίζουν σε πολύ μικρότερο βαθμό ζήτημα απορροής ομβρίων σε σχέση με τις αντίστοιχες κοίλες καμπύλες μηκοτομής. Αυτό οφείλεται στο ότι σε καμία από τις δύο οριογραμμές του οδοστρώματος μιας κυρτής κατακόρυφης καμπύλης δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί αντίθετη κλίση από την κατά μήκος κλίση του άξονα περιστροφής της οδού.

- ❖ Μεταβάλλοντας μόνο την επίκλιση q στο κυκλικό τόξο, αλλάζει η θέση και η έκταση της προβληματικής απορροής των ομβρίων. Συγκεκριμένα, όσο ελαττώνεται η επίκλιση q , τόσο διογκώνεται η έκταση του εν λόγω πεδίου. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι, όταν έχουμε κοίλες κατακόρυφες καμπύλες (σχήμα 2.11) πρέπει να επιζητούμε μικρότερες τιμές επίκλισης q καθώς αμβλύνεται εν μέρει το πρόβλημα της απορροής διότι μετατοπίζεται το κέντρο της προβληματικής περιοχής προς την εξωτερική οριογραμμή, σε αντίθεση με την περίπτωση των κυρτών κατακόρυφων καμπυλών (σχήμα 2.12) που επιζητούμε μεγαλύτερες τιμές επικλίσεων.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα της εργασίας θεωρείται ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στον μελετητή έργων οδοποιίας, δίνοντας μια πιο σαφή εικόνα του προβλήματος της απορροής των ομβρίων και συμβάλλοντας στον σχεδιασμό ασφαλέστερων και οικονομικότερων οδικών έργων.

6 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

6.1 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ι

Απόδειξη της σχέσης (50)

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} - \zeta = 0$$

$$\delta' = \frac{BP_1}{R}(F+1) - 2nq_0CP_1, \quad \varepsilon' = \frac{BP_2}{R}(F-1) + 2nq_0CP_2$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{F+1}{2F}}, \quad P_2 = \sqrt{\frac{F-1}{2F}}$$

$$\lambda_1 = C^2 + \frac{1+F}{2R^2}, \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1-F}{2R^2}$$

$$F = \sqrt{1+4C^2R^2} \Rightarrow F^2 - 1 = 4C^2R^2$$

$$\delta'^2 = \frac{B^2P_1^2}{R^2}(F+1)^2 + 4q_0^2C^2P_1^2 - \frac{4nBq_0C}{R}P_1^2(F+1)$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{B^2P_2^2}{R^2}(F-1)^2 + 4q_0^2C^2P_2^2 + \frac{4nBq_0C}{R}P_2^2(F-1)$$

$$\delta'^2 = \left[\frac{B^2}{R^2}(F+1)^2 + 4q_0^2C^2 - \frac{4nBq_0C}{R}(F+1) \right] P_1^2$$

$$\varepsilon'^2 = \left[\frac{B^2}{R^2}(F-1)^2 + 4q_0^2C^2 + \frac{4nBq_0C}{R}(F-1) \right] P_2^2$$

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} = \frac{\left[B^2(F+1)^2 + 4q_0^2C^2R^2 - 4nBq_0CR(F+1) \right] P_1^2}{2(2C^2R^2 + 1 + F)}$$

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} = \frac{\left[B^2(F+1)^2 + 4q_0^2C^2R^2 - 4nBq_0CR(F+1) \right] F+1}{(F+1)^2} \frac{1}{2F}$$

$$\frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} = \frac{\left[B^2(F-1)^2 + 4q_0^2 C^2 R^2 + 4nBq_0 CR(F-1) \right] P_2^2}{2(2C^2 R^2 + 1 - F)}$$

$$\frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} = \frac{\left[B^2(F-1)^2 + 4q_0^2 C^2 R^2 + 4nBq_0 CR(F-1) \right]}{(F-1)^2} \frac{F-1}{2F}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} &= \frac{\left[B^2(F+1)^2(F-1) + 4q_0^2 C^2 R^2(F-1) - 4nBq_0 CR(F^2-1) \right]}{2F(F^2-1)} + \\ &+ \frac{\left[B^2(F-1)^2(F+1) + 4q_0^2 C^2 R^2(F+1) + 4nBq_0 CR(F^2-1) \right]}{2F(F^2-1)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} = \frac{B^2(F^2-1)[(F-1) + (F+1)]}{2F(F^2-1)} + \frac{4q_0^2 C^2 R^2[(F-1) + (F+1)]}{2F(F^2-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} = B^2 + \frac{4q_0^2 C^2 R^2}{4C^2 R^2} = B^2 + q_0^2 = \zeta \Rightarrow$$

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} - \zeta = 0$$

6.2 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ii

6.3 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ iii (Πράξεις απλοποίησης του X_c και του Y_c)

Πράξεις απλοποίησης του X_c

$$X_c = -n \frac{\delta' P_1}{2\lambda_1} + n \frac{\varepsilon' P_2}{2\lambda_2}$$

$$\delta' = \frac{BP_1}{R}(F+1) - 2nq_0CP_1, \quad \varepsilon' = \frac{BP_2}{R}(F-1) + 2nq_0CP_2$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{F+1}{2F}}, \quad P_2 = \sqrt{\frac{F-1}{2F}}$$

$$\lambda_1 = C^2 + \frac{1+F}{2R^2}, \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1-F}{2R^2}$$

$$F = \sqrt{1+4C^2R^2} \Rightarrow F^2 - 1 = 4C^2R^2$$

$$X_c = \frac{-n \frac{BP_1^2}{R}(F+1) + 2n^2q_0CP_1^2}{2C^2 + \frac{1+F}{R^2}} + \frac{n \frac{BP_2^2}{R}(F-1) + 2n^2q_0CP_2^2}{2C^2 + \frac{1-F}{R^2}} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{-n \frac{B(F+1)^2}{2RF} + \frac{q_0C(F+1)}{F}}{2C^2 + \frac{1+F}{R^2}} + \frac{n \frac{B(F-1)^2}{2RF} + \frac{q_0C(F-1)}{F}}{2C^2 + \frac{1-F}{R^2}} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{-nBR(F+1)^2 + 2q_0C(F+1)R^2}{4C^2R^2F + 2F(1+F)} + \frac{nBR(F-1)^2 + 2q_0C(F-1)R^2}{4C^2R^2F + 2F(1-F)} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{-nBR(F+1)(F^2-1) + 2q_0C(F^2-1)R^2}{4C^2R^2F(F-1) + 2F(F^2-1)} + \frac{nBR(F-1)(F^2-1) + 2q_0C(F^2-1)R^2}{4C^2R^2F(F+1) + 2F(1-F^2)} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{-n4B(F+1)C^2R^3 + 8q_0C^3R^4}{4C^2R^2F(F-1) + 8C^2R^2F} + \frac{4nB(F-1)C^2R^3 + 8q_0C^3R^4}{4C^2R^2F(F+1) - 8C^2R^2F} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{4C^2 R^3 [-nB(F+1) + 2q_0 CR]}{4C^2 R^2 F(F+1)} + \frac{4C^2 R^3 [nB(F-1) + 2q_0 CR]}{4C^2 R^2 F(F-1)} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{R[-nB(F+1) + 2q_0 CR]}{F(F+1)} + \frac{R[nB(F-1) + 2q_0 CR]}{F(F-1)} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{R[-nB(F^2-1) + 2q_0 CR(F-1)] + R[nB(F^2-1) + 2q_0 CR(F+1)]}{F(F^2-1)} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{2q_0 CR^2 [(F-1) + (F+1)]}{F(F^2-1)} = \frac{4q_0 CR^2 F}{4C^2 R^2 F} \Rightarrow$$

$$X_c = \frac{q_0}{C} = \frac{q_0}{\frac{q+q_0}{L}} \Rightarrow X_c = \frac{q_0}{q+q_0} L$$

Πράξεις απλοποίησης του Y_c

$$Y_c = -\frac{F-1}{2RC} P_1 \frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC} P_2 \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2}$$

$$\delta' = \frac{BP_1}{R}(F+1) - 2nq_0 CP_1 \quad , \quad \varepsilon' = \frac{BP_2}{R}(F-1) + 2nq_0 CP_2$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{F+1}{2F}} \quad , \quad P_2 = \sqrt{\frac{F-1}{2F}}$$

$$\lambda_1 = C^2 + \frac{1+F}{2R^2} \quad , \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1-F}{2R^2}$$

$$F = \sqrt{1+4C^2 R^2} \Rightarrow F^2 - 1 = 4C^2 R^2$$

$$Y_c = -\frac{F-1}{2RC} P_1 \frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC} P_2 \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \quad (\text{πράξεις αντίστοιχες με την απλοποίηση του } X_c)$$

$$Y_c = \frac{-\frac{BP_1^2}{R}(F^2-1) + 2nq_0CP_1^2(F-1)}{2RC\left(2C^2 + \frac{1+F}{R^2}\right)} - \frac{\frac{BP_2^2}{R}(F^2-1) + 2nq_0CP_2^2(F+1)}{2RC\left(2C^2 + \frac{1-F}{R^2}\right)} \Rightarrow$$

$$Y_c = \frac{-\frac{B(F^2-1)(F+1)}{2RF} + \frac{nq_0C(F^2-1)}{F}}{2RC\left(2C^2 + \frac{1+F}{R^2}\right)} - \frac{\frac{B(F^2-1)(F-1)}{2RF} + \frac{nq_0C(F^2-1)}{F}}{2RC\left(2C^2 + \frac{1-F}{R^2}\right)} \Rightarrow$$

$$Y_c = (F^2-1) \frac{-BR(F+1) + 2nq_0CR^2}{8C^3R^3F + 4RCF(1+F)} - (F^2-1) \frac{BR(F-1) + 2nq_0CR^2}{8C^3R^3F + 4RCF(1-F)} \Rightarrow$$

$$Y_c = -(F^2-1) \frac{BR(F+1) - 2nq_0CR^2}{2RCF(4C^2R^2 + 2 + 2F)} - (F^2-1) \frac{BR(F-1) + 2nq_0CR^2}{2RCF(4C^2R^2 + 2 - 2F)} \Rightarrow$$

$$Y_c = -(F^2-1) \frac{BR(F+1) - 2nq_0CR^2}{2RCF(F^2 + 1 + 2F)} - (F^2-1) \frac{BR(F-1) + 2nq_0CR^2}{2RCF(F^2 + 1 - 2F)} \Rightarrow$$

$$Y_c = -(F-1) \frac{BR(F+1) - 2nq_0CR^2}{2RCF(F+1)} - (F+1) \frac{BR(F-1) + 2nq_0CR^2}{2RCF(F-1)} \Rightarrow$$

$$Y_c = -(F-1) \frac{BR(F^2-1) - 2nq_0CR^2(F-1)}{2RCF(F^2-1)} - (F+1) \frac{BR(F^2-1) + 2nq_0CR^2(F+1)}{2RCF(F^2-1)} \Rightarrow$$

$$Y_c = -\frac{1}{2C} \left((F-1) \frac{B(F^2-1) - 2nq_0CR(F-1)}{F(F^2-1)} + (F+1) \frac{B(F^2-1) + 2nq_0CR(F+1)}{F(F^2-1)} \right) \Rightarrow$$

$$Y_c = -\frac{1}{2C} \left((F-1) \frac{B}{F} + (F+1) \frac{B}{F} + \frac{-2nq_0CR(F-1)^2 + 2nq_0CR(F+1)^2}{4C^2R^2F} \right) \Rightarrow$$

$$Y_c = -\frac{1}{2C} \left(2B + \frac{8nq_0CRF}{4C^2R^2F} \right) \Rightarrow Y_c = -\frac{1}{2C} \left(2B + \frac{2nq_0}{CR} \right) \Rightarrow$$

$$Y_c = -\frac{1}{C} \left(B + n \frac{q_0}{CR} \right) \Rightarrow$$

$$Y_c = -\frac{L}{q + q_0} \left(s_0 - n \frac{x_0}{R} + n \frac{q_0}{q + q_0} \frac{L}{R} \right)$$

7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ηλίου, Ν.Ε., Καλιαμπέτσος, Γ.Δ. (2012), Διερεύνηση του προβλήματος της απορροής των ομβρίων σε κρίσιμες για την ασφάλεια περιοχές των οδικών χαράξεων, 3^ο Πανελλήνιο Συνεδριο Οδοποιας. Αθήνα

Υπουργείο Περιβάλλοντος Χωροταξίας & Δημοσίων Έργων, (2001). *Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων (ΟΜΟΕ)*. Τεύχος 3: Χαράξεις (ΟΜΟΕ - Χ)

Μαλιάκας, Μ., Αδάμ, Μ., *Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας*. Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, edu.eap.gr.

Κανελλαΐδης, Γ., Μαλέρδος, Γ., Γλάρος, Γ. (2002). *Σημειώσεις για τον Γεωμετρικό Σχεδιασμό των Οδών*. Αθήνα.

Ντίνης, Ο.Θ.(2010). *Από τη χάραξη ως την κατασκευή οδών*. Αθήνα, Εκδόσεις: Ζήτη

Γιαννέλου, Α. (2013). *Μελέτη και προϋπολογισμός έργου σε όρυγμα του έργου οδοποιας "Κατασκευή οδού Ηγουμενίτσας - Πρέβεζας, Βελτίωση κατά τμήματα, Υπομήμα 4 : Καρτέρι Γερακάρι Πράγα από Χ.Θ.0+100 έως Χ.Θ. 14937,20*. Πολυτεχνική Σχολή :Πάτρα.

Lamm, R., Psarianos, B., and Mailaender, T. (1999). *Highway Design and Traffic Safety Engineering Handbook*. McGraw-Hill, New York.