



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Χρήση του φίλτρου Kalman**  
**για τον εντοπισμό**  
**της θέσης συνδρομητή**  
**σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών**

**Αφροδίτη-Γρηγορία Αθάνατου**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσα καθηγήτρια**

**Αδάμ Μαρία**

**Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία**

**Μάρτιος, 2015**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Χρήση του φίλτρου Kalman  
για τον εντοπισμό  
της θέσης συνδρομητή  
σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών**

**Αφροδίτη-Γρηγορία Αθάνατου**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέποντες καθηγητές**

**Μαρία Αδάμ**

**Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία**

**Μάρτιος, 2015**

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις <sup>(1)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: ...../...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

**Χρήση του φίλτρου Kalman  
για τον εντοπισμό  
της θέσης συνδρομητή  
σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών**

**Αφροδίτη-Γρηγορία Αθάνατου**

**Τριμελής Επιτροπή:**

Μαρία Αδάμ, Επίκουρος Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας (επιβλέπουσα)

Νικόλαος Ασημάκης, Καθηγητής του Τμήματος Ηλεκτρονικών Μηχανικών του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Στερεάς Ελλάδας

Χαρίλαος Σανδαλίδης Χαρίλαος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω θερμά την κα Μαρία Αδάμ και τους κ. Νικόλαο Ασημάκη και Χαρίλαο Σανδαλίδη, για την ευκαιρία που μου έδωσαν να ασχοληθώ με αυτό το ενδιαφέρον αντικείμενο καθώς και για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους φίλους μου, που πίστεψαν σε μένα και με ενθάρρυναν σε κάθε στάδιο των σπουδών μου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω προς την οικογένειά μου και κυρίως τους γονείς μου Χρήστο και Δήμητρα για τη διαχρονική συμπαράσταση και την υλική και ηθική στήριξή τους.

Αφροδίτη-Γρηγορία Αθάνατου

Λαμία, Μάρτιος 2015

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το φίλτρο Kalman, είναι ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιεί μια σειρά από μετρήσεις που παρατηρήθηκαν στην πάροδο του χρόνου, που περιέχει θόρυβο και άλλες ανακρίβειες και παράγει εκτιμήσεις των μεταβλητών που τείνουν να είναι πιο ακριβείς από εκείνες που βασίζονται σε μια ενιαία μέτρηση μόνο. Πιο τυπικά, το φίλτρο Kalman λειτουργεί επαναληπτικά στις ροές θορυβωδών εισερχόμενων δεδομένων για να παράγει μια στατιστικά βέλτιστη εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με την εφαρμογή του φίλτρου Kalman για την εύρεση θέσης ενός κινητού σε ένα δίκτυο ασύρματων επικοινωνιών. Σκοπός της εργασίας είναι η κατανόηση της σημασίας του εντοπισμού κάποιου κινητού σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή καθώς και η χρήση του φίλτρου Kalman για την εύρεση αυτού. Στα δύο πρώτα κεφάλαια δίνεται μια εισαγωγή των ασύρματων δικτύων και τηλεπικοινωνιών και τονίζεται η σημασία δυνατότητας εύρεσης της θέσης κάποιου συνδρομητή. Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας κίνησης. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια πιο ειδική αναφορά στο φίλτρο Kalman και τις εξισώσεις του. Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η σχεδίαση και τα αποτελέσματα των διαφόρων εναλλακτικών τρόπων υλοποίησης του αλγορίθμου. Στο τελευταίο κεφάλαιο εξάγονται τα συμπεράσματα της εφαρμογής του αλγορίθμου.

## ABSTRACT

The Kalman filter is an algorithm that uses a series of measurements observed over time, containing noise and other inaccuracies, and produces estimates of unknown variables that tend to be more precise than those based on a single measurement alone. More formally, the Kalman filter operates iteratively on streams of noisy input data to produce a statistically optimal estimate of the underlying system state. This thesis deals with the application of Kalman filter for finding a position in a mobile network. The purpose of this study is to understand the importance of identifying a cell at any given time and the use of Kalman filter for finding it. In the first chapters are given introductory concepts of networks and telecommunications and is emphasized the potential importance of finding the location of a subscriber. Then the theory of motion is briefly presented. The third chapter is a more specific reference to the Kalman filter and its equations. The fourth chapter describes the design and the results of the study are presented as well the alternatives ways of the algorithm implementation. In the last chapter the conclusions of the implementation of the algorithm are provided.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....	11
---------------	----

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Κυψελωτά δίκτυα κινητών τηλεπικοινωνιών.....	13
1.2 Κινητή διαδικτύωση.....	14
1.3 Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού.....	15
1.4 Συσκευές εντοπισμού.....	16
1.4.1 Επισκόπηση των συσκευών εντοπισμού.....	16
1.4.1.1 Εντοπισμός Βάσει Τερματικού.....	16
1.4.1.2 Εντοπισμός Βάσει Δικτύου.....	16
1.4.1.3 Ακρίβεια των Συστημάτων.....	17
1.4.2 Εφαρμογές Κυψελοειδούς Εντοπισμού.....	17
1.4.2.1 Αυξημένη Ασφάλεια Συνδρομητή.....	17
1.4.2.2 Υπηρεσίες Εντοπισμού.....	17
1.4.2.3 Εντοπισμός βάσει Χρεώσεων.....	17
1.4.2.4 Υπηρεσία Εντοπισμού Βάσει Νομοθεσίας.....	18
1.4.2.5 Ενισχυμένη Απόδοση Δικτύων.....	18
1.5 Τεχνικές Εντοπισμού.....	19
1.5.1 Σύστημα Ταξινόμησης Θέσης.....	19
1.5.1.1 Αυτο- εντοπισμός.....	19
1.5.1.2 Εντοπισμός εξ' αποστάσεως.....	19
1.5.2 Ταξινόμηση Συστημάτων Εντοπισμού.....	19
1.5.2.1 Αναγνώριση Κελιού(CI).....	20
1.5.2.2 Χρόνος Άφιξης(TOA).....	20



1.5.2.3 Διαφορά Χρόνου Άφιξης(TDOA).....	20
1.5.2.4 Γωνία Άφιξης(AOA).....	21
1.5.2.5 Φάση Φορέα.....	21
1.5.4 Αρχιτεκτονικές Εντοπισμού GSM.....	21
1.6 Ζητήματα Απόδοσης Εντοπισμού.....	23
1.6.1 Επισκόπηση Συστημάτων Εντοπισμού.....	23
1.6.2 Ασάφεια του Συστήματος.....	23

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

2.1 Περιγραφή της κίνησης.....	24
2.1.1 Θέση και χρονική στιγμή.....	24
2.1.2 Η έννοια της τροχιάς.....	24
2.2 Η έννοια της ταχύτητας.....	25
2.2.1 Κίνηση με σταθερή ταχύτητα.....	25
2.2.1.1 Εξισώσεις ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.....	25
2.2.2 Κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.....	26

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

3.1 Θεωρία Πιθανοτήτων, Στοχαστικές Διαδικασίες και Θόρυβοι.....	28
3.2 Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης.....	30
3.3 Γραμμικό μοντέλο.....	31
3.3.1 Δυναμικό μοντέλο.....	31
3.3.2 Στατιστικό μοντέλο.....	31
3.4 Βέλτιστη εκτίμηση.....	23
3.5 Αλγόριθμοι εκτίμησης.....	24
3.5.1 Αλγόριθμοι για εκτίμηση .....	34

3.5.2 Αλγόριθμοι για πρόβλεψη.....	34
3.5.3 Αλγόριθμοι για λείανση.....	35
3.6 Εισαγωγή στο φίλτρο Kalman.....	31
3.7 Μαθηματικό υπόβαθρο.....	38
3.8 Παρουσίαση του Kalman filtering προβλήματος.....	40
3.8.1 Σύστημα και μοντέλο παρατήρησης.....	40
3.8.2 Εφαρμογές του φίλτρου Kalman.....	42
3.8.3 Εξισώσεις του φίλτρου Kalman.....	42
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	
4.1 Εισαγωγή.....	45
4.2 Αποδείξεις Εξισώσεων.....	45
4.3 Υλοποίηση Κωδίκων.....	50
4.2Φόρτος φίλτρου Kalman.....	74
ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	80

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φίλτρο Kalman είναι ένα ιδιαίτερα διαδεδομένο και εύχρηστο φίλτρο που χρησιμοποιείται για απαλλαγή από τις θορυβώδεις μετρήσεις. Ο αλγόριθμος αυτός, πραγματοποιεί πρόβλεψη της θέσης του στόχου και χρησιμοποιεί τις μετρήσεις για να διορθώσει την πρόβλεψη αυτή.

Η εκτεταμένη χρήση του φίλτρου Kalman οφείλεται στο ότι συγκεντρώνει πολλά πλεονεκτήματα, τα οποία βοηθούν στην καλύτερη εκτίμηση της δυναμικής κατάστασης του συστήματος. Κατά πρώτο λόγο, το κέρδος του φίλτρου ανανεώνεται με κάθε νέα μέτρηση. Το γεγονός αυτό διευκολύνει την ανίχνευση σε συστήματα με χρονομεταβλητές δυναμικές καταστάσεις ή μετρήσεις, οι διαδικασίες των οποίων μεταβάλλονται με το χρόνο. Επιπλέον, η συνδιακύμανση του θορύβου μέτρησης μπορεί να αυξομειωθεί, έτσι ώστε η κάθε μέτρηση να αποκτήσει διαφορετικό βάρος ανάλογα με την απόσταση από το στόχο, την ισχύ του σήματος ή οποιαδήποτε άλλη ενδεχόμενη ένδειξη της ποιότητας της μέτρησης. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για περιπτώσεις όπου το διάνυμα μετρήσεων περιέχει μετρήσεις από διαφορετικού τύπου αισθητήρες, γιατί δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να κάνει μία αρχικοποίηση ανάλογα με την κατά περίπτωση αναμενόμενη αξιοπιστία του εκάστοτε αισθητήρα. Άλλο πλεονέκτημα του φίλτρου είναι η αποδοτικότητά του σε υπολογιστικά συστήματα περιορισμένης μνήμης. Όλη η πληροφορία για τις αρχικές καταστάσεις, τις μετρήσεις και την κίνηση περιέχεται στον πίνακα συνδιακύμανσης σφάλματος  $P_k$ . Σημαντικό είναι επίσης το ότι δεν απαιτεί περιοδικές ενημερώσεις χρόνου ή μετρήσεων. Στη γενική περίπτωση, το φίλτρο ενημερώνει το χρόνο με υψηλό ρυθμό και όταν κάποια μέτρηση παρέχεται από κάποιον αισθητήρα, η ενημέρωση χρόνου διακόπτεται προσωρινά, προκειμένου να πραγματοποιηθεί η ενημέρωση της μέτρησης. Επομένως έχει την δυνατότητα να διαχειρίζεται δεδομένα από ανόμοιους αισθητήρες, οι οποίοι δεν είναι καν συγχρονισμένοι.

Το πρόβλημα που εξετάζεται με την παρούσα πτυχιακή εργασία είναι η συμβολή του φίλτρου (αλγορίθμου) Kalman στον εντοπισμό της θέσης συνδρομητή σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών. Γίνεται μελέτη της συμπεριφοράς του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης ώστε να προβλεφθεί η θέση του συνδρομητή κάποια χρονική στιγμή γνωρίζοντας τη θέση του την προηγούμενη χρονική στιγμή. Για να γίνει αυτό εκτελούνται οι κώδικες υλοποίησης του φίλτρου Kalman, με διαφορετικές εισόδους, διαφορετικές αρχικές συνθήκες και διαφορετικές μεταβλητές. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα γίνεται κατανοητό πώς και αν επηρεάζεται το φίλτρο Kalman από τις αρχικές συνθήκες, και αν επιτυγχάνεται η βέλτιστη εκτίμηση της θέσης και της ταχύτητας του συνδρομητή.

Η παρούσα εργασία έχει την παρακάτω δομή:

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται αναφορά των βασικών εννοιών του τομέα των κινητών επικοινωνιών και δικτύων. Αναλύεται η σημασία της δυνατότητας εύρεσης κάποιου

συνδρομητή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή σε ένα κινητό δίκτυο και παρουσιάζονται οι συσκευές εντοπισμού του (βάσει δικτύου, βάσει τερματικού), καθώς και οι τεχνικές εντοπισμού του (αυτο- εντοπισμός, εντοπισμός εξ αποστάσεως) .

Στο Κεφάλαιο 2 αναφέρονται οι βασικές αρχές και οι εξισώσεις στη θεωρία της κίνησης.

Στο Κεφάλαιο 3 αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και εκτίμησης που είναι απαραίτητες στην παρούσα πτυχιακή εργασία. Στη συνέχεια αναφέρονται, οι αλγόριθμοι εκτίμησης και πρόβλεψης με τις αντίστοιχες εξισώσεις τους. Ακολουθεί μια εισαγωγή για το φίλτρο Kalman και αναφέρονται κάποιες εφαρμογές του καθώς και οι εξισώσεις του.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι δύο διαφορετικοί τρόποι υλοποίησης του φίλτρου Kalman, αναφορικά με το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman και το φίλτρο Kalman στη μόνιμη κατάσταση (steady state). Τα δύο φίλτρα υλοποιούνται από κώδικες, που έχουν αναπτυχθεί για προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab. Και στην τελευταία ενότητα υπολογίζεται και συγκρίνεται ο υπολογιστικός φόρτος των δύο φίλτρων.

Η πτυχιακή εργασία καταλήγει σε μια ανασκόπηση των σημαντικότερων συμπερασμάτων που αφορούν το υπό εξέταση ζήτημα και παρατίθεται μία λίστα με τη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Βασικές έννοιες επικοινωνιών και σημασία εύρεσης συνδρομητή

### 1.1 Κυψελωτά δίκτυα κινητών τηλεπικοινωνιών

Ένα κυψελωτό δίκτυο είναι ένα ασύρματο δίκτυο, που αποτελείται από κύτταρα ή κελιά, καθένα από τα οποία εξυπηρετείται από τουλάχιστον έναν πομποδέκτη γνωστό και ως σταθμό βάσης. Σε κάθε κυψελωτό δίκτυο κάθε κελί χρησιμοποιεί διαφορετικό αριθμό συχνοτήτων για τα γειτονικά κελιά ώστε να αποφευχθούν παρεμβολές και να παρασχεθεί εγγυημένο εύρος ζώνης σε κάθε κελί. Όταν ενωθούν μαζί τέτοια κελιά παρέχεται ραδιοκάλυψη σε μια μεγάλη γεωγραφική περιοχή. Έτσι δίνεται η δυνατότητα σε ένα μεγάλο αριθμό φορητών πομποδεκτών (π.χ. κινητά) να επικοινωνούν μεταξύ τους. Η ανάπτυξη των κυψελοειδών δικτύων κινητών επικοινωνιών ξεκίνησε από το χώρο της τηλεφωνίας. Τα δύο κύρια χαρακτηριστικά των κυψελωτών δικτύων είναι:

- η διαρκής παρακολούθηση του χρήστη και
- η καταγραφή της τρέχουσας περιοχής, που περιφέρεται ο χρήστης ώστε να καταστεί δυνατή η δρομολόγηση των εισερχομένων κλήσεων καθώς και η διαπομπή της επικοινωνίας του κινητού τερματικού μεταξύ των κυψελών, ώστε να διακόπτεται η επικοινωνία καθώς αυτό κινείται [27].

## 1.2 Κινητή διαδικτύωση

Οι σύγχρονες απαιτήσεις οδήγησαν στην αναπροσαρμογή του πρωτοκόλλου επικοινωνιών ώστε να ανταποκρίνεται στην ανάπτυξη νέων υπηρεσιών. Στις υπάρχουσες εφαρμογές η διεύθυνση του υπολογιστή προσδιορίζει τη θέση του τερματικού και συνεπώς το σημείο τερματισμού των διαδρομών δρομολόγησης στο συγκεκριμένο υπολογιστή. Έτσι σε περίπτωση αλλαγής κάποιου υπολογιστή σε διαφορετικό δίκτυο προκαλείται απώλεια της υπηρεσίας του δικτύου [27].

Οι μηχανισμοί που προτείνονται για κινητό IP βασίζονται στην καταγραφή θέσης του υπολογιστή. Όταν αλλάζει η θέση κάποιου κινητού κόμβου χρειάζεται να γίνει η εγγραφή του σε κάποιον ειδικό πράκτορα που ανταλλάσσει πληροφορίες με τον πράκτορα του γνωστού δικτύου του τερματικού, που είναι υπεύθυνος για την ανίχνευση θέσης. Στη συνέχεια, η τρέχουσα διεύθυνση του τερματικού αντιστοιχείζεται στη γνωστή διεύθυνσή του, τα εισερχόμενα μηνύματα δρομολογούνται πρώτα στο γνωστό δίκτυο του κινητού τερματικού, διοχετεύονται προς τον καινούριο πράκτορα και έπειτα παραδίδονται στον κινητό υπολογιστή[9].

Ένα μειονέκτημα των συγκεκριμένων υπηρεσιών διαδικτύου είναι πως οι ασύρματες ζεύξεις για τη σύνδεση των υπολογιστών στο διαδίκτυο, είναι αρκετά ευαίσθητες σε επιθέσεις. Έτσι οι μηχανισμοί που ελέγχουν την ταυτότητα και την αυθεντικότητα πρέπει να υπάρχουν και στο στρώμα IP [27].

### **1.3 Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού**

Το GPS ( Global Positioning System) είναι ένα παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού γεωγραφικής θέσης ακίνητου ή κινητού χρήστη το οποίο βασίζεται σε ένα πλέγμα δορυφόρων, εφοδιασμένο με συσκευές εντοπισμού, τους πομποδέκτες, οι οποίοι παρέχουν ακριβείς πληροφορίες για τη θέση ενός σημείου [32]. Παρέχει παγκόσμια εμβέλεια και υψηλή ακρίβεια, έχει χαμηλό κόστος αλλά απαιτεί πεδίο χωρίς παρεμβολές ώστε να λαμβάνει τα σήματα. Έτσι ερευνούνται άλλες μέθοδοι εντοπισμού που θα έχουν τα πλεονεκτήματα του GPS και ταυτόχρονα ανθεκτικότητα στα εμπόδια για ικανοποιητική επίδοση.

## **1.4 Συσκευές Εντοπισμού**

### **1.4.1 Επισκόπηση των συσκευών εντοπισμού**

Προκειμένου να εξεταστεί η ικανότητα απορροής πληροφοριών τοποθεσίας χρησιμοποιούνται τα σήματα GSM (Global System Mobile), που είναι ένα κυψελοειδές ψηφιακό σύστημα κινητής τηλεφωνίας, το οποίο χρησιμοποιεί ηλεκτρομαγνητικά σήματα και την τεχνική πολλαπλής πρόσβασης με διαχωρισμό του διαθέσιμου φάσματος συχνοτήτων σε ένα αριθμό καναλιών και τη διαίρεση αυτών σε χρονοθυρίδες για την μετάδοση σημάτων. Για να επιτευχθεί η παραπάνω απορροή επιθεωρούνται οι πιθανές εφαρμογές για εντοπισμό από κινητό τηλέφωνο, οι τεχνικές μέτρησης γενικής θέσης, η ταξινόμηση του συστήματος εντοπισμού θέσης καθώς και η αρχιτεκτονική του δικτύου[14]. Είναι απαραίτητο για το έργο αυτό να διερευνηθούν ποιές υπηρεσίες προσφέρει το GSM και να περιγραφούν ποιές τεχνικές χρησιμοποιεί και με τι ακρίβεια εκτιμάται η θέση ενός κινητού τηλεφώνου [14]. Παρακάτω περιγράφονται χαρακτηριστικά των συστημάτων εντοπισμού θέσης.

#### **1.4.1.1 Εντοπισμός Βάσει Τερματικού**

Το ασύρματο δίκτυο στέλνει μια εκτιμώμενη θέση του κινητού σε ένα διακομιστή ο οποίος ενημερώνει το κινητό ποιό GPS δορυφόροι βρίσκονται στην περιοχή του. Το κινητό παίρνει ένα «στιγμιότυπο» των σημάτων GPS, υπολογίζει την απόστασή του από όλους τους δορυφόρους και στέλνει αυτήν την πληροφορία πίσω στο διακομιστή [14]. Ο διακομιστής υπολογίζει το ακριβές γεωγραφικό πλάτος, μήκος και υψόμετρο του καλούντος. Η τεχνική αυτή έχει αρκετά προβλήματα καθώς παρουσιάζει ευαισθησία στην απόφραξη της γραμμής όρασης μεταξύ του κινητού και των GPS δορυφόρων. Ως εκ τούτου, μπορεί να συμβεί επιπλοκή όταν ο χρήστης του κινητού βρίσκεται μέσα σε ένα κτίριο, υπόγειο χώρο ή σύραγγες. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η δορυφορική κάλυψη μπορεί να είναι αδύνατη, επειδή τα σήματα του GPS καταστρέφονται από πολυ-διαδρομές.

#### **1.4.1.2 Εντοπισμός Βάσει Δικτύου**

Οι πιο χρήσιμες τεχνικές εντοπισμού είναι εκείνες που βασίζονται στο δίκτυο. Εδώ περιλαμβάνονται τα συστήματα που βασίζονται στις μετρήσεις του χρόνου άφιξης (TOA), του χρόνου διαφοράς άφιξης (TDOA), και της γωνίας άφιξης (AOA). Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι τεχνικές TDOA αυξάνονται με τη ικανότητα της AOA να βελτιώσει την κάλυψη και την ακρίβεια. Ένα παράδειγμα αυτού είναι η κάλυψη



μιας αγροτικής εθνικής οδού, όπου οι σταθμοί βάσης είναι τοποθετημένοι σε ευθεία κατά μήκος της εθνικής οδού [18].

### **1.4.1.3 Ακρίβεια των Συστημάτων**

Τα συστήματα εντοπισμού του Cambridge χρησιμοποιούν την τεχνική E-OTA (Ενισχυμένη Παρατηρούμενη Διαφορά Ώρας) στο δρομέα του σύστημά τους ώστε οι διαφορές στην ώρα άφιξης να υπολογίζονται στο κινητό και στο δίκτυο. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων δεν ξεπερνά τα 50 μέτρα [14].

## **1.4.2 Εφαρμογές Κυψελοειδούς Εντοπισμού**

Παρακάτω περιγράφεται η σημασία του εντοπισμού θέσης ενός κινητού τηλεφώνου.

### **1.4.2.1 Αυξημένη Ασφάλεια Συνδρομητή**

Σε πολλές περιπτώσεις επείγουσων κλήσεων από κινητά ο καλών αδυνατεί να δώσει πληροφορίες σχετικά με την τοποθεσία του. Έτσι είναι απαραίτητη η αυτόματη παροχή πληροφοριών θέσης, όπως γίνεται σε κλήσεις από σταθερά τηλέφωνα, ώστε η βοήθεια έκτακτης ανάγκης να κατευθυνθεί στο σωστό μέρος και πιο γρήγορα.

### **1.4.2.2 Υπηρεσίες Εντοπισμού**

Σε περίπτωση λάθους προσανατολισμού οι συνδρομητές έχουν τη δυνατότητα, με αποστολή γραπτού μηνύματος να λάβουν πληροφορίες για τη θέση τους καθώς και οδηγίες για τις διευθύνσεις ορισμένων υπηρεσιών (για παράδειγμα σταθμοί πώλησης βενζίνης, εστιατόρια, φαρμακεία, νοσοκομεία, κ.α.). Επιπλέον, η συγκεκριμένη υπηρεσία είναι χρήσιμη για την περίπτωση που κάποιος πελάτης έχει καλέσει στο κέντρο αποστολής ταξί, καθώς η θέση του μεταδίδεται μέσω του δικτύου του ραδιο ταξί, ώστε το πλησιέστερο ελεύθερο να ανταποκριθεί αμέσως.

### **1.4.2.3 Εντοπισμός βάσει Χρεώσεων**

Οι φορείς εκμετάλλευσης δικτύων παρέχουν διαφορετικά τιμολόγια, ανάλογα με τη θέση των κινητών, επιτρέποντάς τους να προσφέρουν ανταγωνιστικές τιμές για κλήσεις από το σπίτι ή το γραφείο χωρίς ένα δημόσιο τηλεφωνικό δίκτυο μεταγωγής (PSTN)[18].

### **1.4.2.4 Υπηρεσία Εντοπισμού Βάσει Νομοθεσίας**

Είναι ένας τρόπος εντοπισμού βασιζόμενος σε νομικό πλαίσιο, όπως η ανίχνευση των κινητών, που εισέρχονται σε μια περιοχή ασφαλείας. Στην περίπτωση αυτή, αποκαλύπτεται η ταυτότητα του χρήστη[14].

### **1.4.2.5 Ενισχυμένη Απόδοση Δικτύου**

Στο μικροσκοπικό επίπεδο, το κυψελοειδές δίκτυο επικοινωνιών λαμβάνει την καλύτερη απόφαση κατά την παράδοση από τη μια κυψέλη στην άλλη, ενώ παρακολουθείται η μετατόπιση των κινητών τηλεφώνων. Η μακροπρόθεσμη παρακολούθηση των θέσεων των κινητών αποτελεί χρήσιμη συμβολή στο σχεδιασμό του δικτύου κινητής τηλεφωνίας.

## **1.5 Τεχνικές Εντοπισμού**

### **1.5.1 Σύστημα Ταξινόμησης Θέσης**

Εξετάζοντας το μέρος λήψης των μετρήσεων θέσης καθώς και χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες θέσης προκύπτουν δύο μεγάλες κατηγορίες ταξινόμησης του GPS: ο αυτο- εντοπισμός και ο εντοπισμός εξ αποστάσεως.

#### **1.5.1.1 Αυτο- εντοπισμός**

Το πιο γνωστό σύστημα αυτο-εντοπισμού είναι το GPS. Ένας δέκτης αυτο-εντοπισμού γνωρίζει τη θέση του και με τις παρεχόμενες εφαρμογές χρησιμοποιεί αυτές τις πληροφορίες για τη λήψη αποφάσεων με βάση τη θέση που απαιτείται για την πλοήγηση.

#### **1.5.1.2 Εντοπισμός εξ αποστάσεως**

Στο σύστημα εντοπισμού εξ αποστάσεως, οι δέκτες μετρούν το σήμα που προέρχεται από το αντικείμενο που θα εντοπιστεί και στη συνέχεια γίνεται αποστολή των συλλεχθέντων δεδομένων σε ένα κεντρικό χώρο ώστε να γίνει η ανάλυσή τους. Η πληροφορία θέσης μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί στην κεντρική μονάδα ή να αποσταλεί σε άλλο σύστημα που εκτελεί μία εφαρμογή, όπως ένα σύστημα αποστολής με βοήθεια υπολογιστή (CAD) [14]. Ένα παράδειγμα των απομακρυσμένων συστημάτων εντοπισμού είναι τα απομακρυσμένα ραντάρ ανίχνευσης.

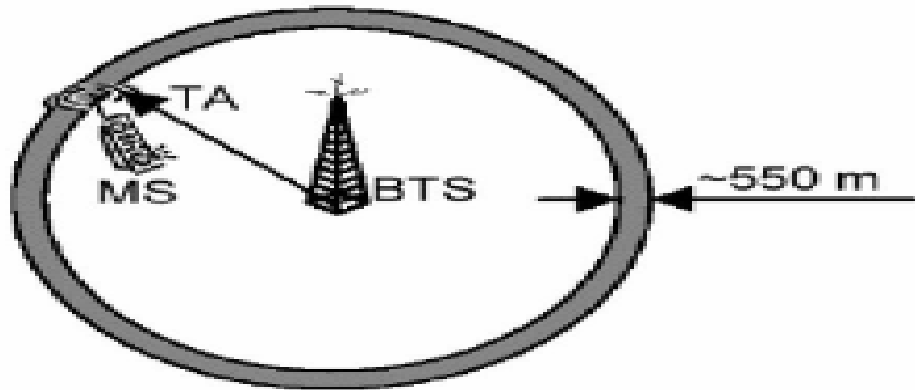
### **1.5.2 Ταξινόμηση Συστημάτων Εντοπισμού**

Η αναγνώριση κελιού (CI), ο χρόνος της άφιξης (TOA), ο χρόνος διαφοράς ώρας άφιξης (TDOA), η γωνία άφιξης (AOA) και η φάση φορέα συμβάλλουν στον εντοπισμό της θέσης ενός σήματος καθώς κάθε μέτρηση ορίζει μία θέση στην οποία πρέπει να βρίσκεται το κινητό τηλέφωνο [18] .

Να σημειωθεί ότι όλες οι τεχνικές που συζητούνται μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε λειτουργία είτε αυτο- εντοπισμού είτε εντοπισμού εξ αποστάσεως, ανάλογα με το αν οι μετρήσεις γίνονται στο κινητό τηλέφωνο ή σε έναν ή περισσότερους σταθμούς βάσης.

### 1.5.2.1 Αναγνώριση Κελιού(CI)

Θεωρείται η πιο βασική τεχνική εντοπισμού. Ο σταθμός βάσης αναγνωρίζει το χρήστη στην κυψελοειδή επιφάνεια. Η μέτρηση τοποθετεί τον χρήστη σε ένα κυκλικό συγκεκριμένο κελί της κάλυψης. Η CI είναι δημοφιλής μεταξύ των χρηστών, διότι δεν απαιτεί τροποποιήσεις στο δίκτυο και είναι φθηνή για ανάπτυξη.



Σχήμα 1: Μέθοδος Αναγνώρισης Κελιού [14]

### 1.5.2.2 Χρόνος Άφιξης(ΤΟΑ)

Ο χρόνος άφιξης αφορά τη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για ένα σήμα να ταξιδέψει μεταξύ ενός σταθμού βάσης και του κινητού τηλεφώνου ή το αντίστροφο. Θα μπορούσε να αφορά το χρόνο της διαδρομής του εκπεμπόμενου σήματος από τον πομπό στο δέκτη και την επιστροφή του πάλι στον πομπό. Σε αυτή την περίπτωση, ο πομπός προϋποθέτει ότι το κινητό τηλέφωνο- δέκτης, γνωρίζει την ακριβή ώρα κατά την οποία ο σταθμός βάσης θα μεταδώσει, και ότι ο δέκτης έχει ένα ρολόι ακριβείας. Και οι δύο μετρήσεις περιορίζουν τη θέση του κινητού τηλεφώνου σε ένα κυκλικό γεωμετρικό τόπο γύρω από το σταθμό βάσης. Αν γίνει κάποια άλλη μέτρηση του χρόνου διάδοσης σε σχέση με ένα δεύτερο σταθμό βάσης, παράγεται ένας δεύτερος κυκλικός γεωμετρικός τόπος[14]. Οι δύο κυκλικοί τόποι θα παράγουν μια ασάφεια επειδή τέμνονται σε δύο σημεία. Η ασάφεια αυτή μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση μίας πληροφορίας σχετικά με την πορεία του κινητού τηλεφώνου ή κάνοντας μια μέτρηση του χρόνου διάδοσης σε ένα τρίτο σταθμό βάσης [14]. Στην περίπτωση όπου περιλαμβάνεται ένας τρίτος σταθμός βάσης, οι τρεις πομποί πρέπει να συγχρονιστούν. Σε ένα ιδανικό μη εδαφικό περιβάλλον, χρειάζονται μόνο τρεις συγχρονισμένοι πομποί προκειμένου να εντοπιστεί ακριβώς ένας σταθερός δέκτης. Εάν ο δέκτης κινείται, η θέση του μπορεί να προσεγγιστεί μόνο εξαιτίας της απόστασης που διανύθηκε, ενώ λαμβάνονται

μετρήσεις TDOA. Ως εκ τούτου, όσο πιο γρήγορα το κινητό κινείται, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το λάθος. Έτσι, η χρήση περισσότερων από τρεις πομπούς είναι καλύτερη όταν εντοπιστούν κινούμενα αντικείμενα[14].

### **1.5.2.3 Διαφορά Χρόνου Άφιξης(TDOA)**

Ακολουθώντας μια σειρά σταθμών βάσεων ένα κινητό τηλέφωνο μετρά τη TDOA μεταξύ ενός ζεύγους αφίξεων. Κάθε τέτοια μέτρηση ορίζει μια υπερβολική θέση πάνω στην οποία βρίσκεται το κινητό. Το σημείο τομής των δύο υπερβολικών θέσεων καθορίζει τη θέση του κινητού τηλεφώνου. Αν δύο υπερβολές τέμνονται σε δύο σημεία υπάρχει ασάφεια η οποία επιλύεται είτε με μια τρίτη μέτρηση TDOA από έναν τρίτο σταθμό βάσης, είτε με την προσέγγιση των προηγούμενων πληροφοριών.

### **1.5.2.4 Γωνία Άφιξης(AOA)**

Η γωνία άφιξης μετράται από το σταθμό βάσης μέχρι το κινητό τηλέφωνο ή αντίστροφα. Υπολογίζει τις γωνίες (ή τις κατευθύνσεις) με τις οποίες ένα σήμα φθάνει σε δύο σταθμούς βάσης από μια φορητή συσκευή [14]. Η μέτρηση ενός σήματος θα παράγει έναν ευθύγραμμο τόπο από το σταθμό βάσης ως το κινητό τηλέφωνο.

Κατά τον ίδιο τρόπο, μια άλλη μέτρηση AOA θα αποδώσει μια δεύτερη ευθεία γραμμή, το σημείο τομής των δύο γραμμών δίνει μια σταθερή θέση για αυτό το σύστημα γωνία-γωνία. Καθώς οι δύο γραμμές τέμνονται σε ένα σημείο δεν υπάρχει ασάφεια.

### **1.5.2.5 Φάση Φορέα**

Παρέχει εκτιμήσεις για τη θέση, με σφάλμα σημαντικά μικρότερο από το μήκος κύματος του φορέα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση παρουσιάζει κάποια προβλήματα. Υπάρχει μεγάλος αριθμός ασαφειών. Η φάση του λαμβανόμενου σήματος μπορεί να μετρηθεί από τον δέκτη εντοπισμού θέσης, αλλά δεν μπορεί να μετρήσει τον ακέραιο αριθμό μηκών κύματος μεταξύ του πομπού και του δέκτη.

## **1.5.3 Αρχιτεκτονικές Εντοπισμού GSM**

Για τον εντοπισμό κινητών τηλεφώνων με GSM, μπορούν να εφαρμοστούν διαφορετικές αρχιτεκτονικές, οι οποίες διαφέρουν στο κόστος της υποδομής, στην κάλυψη έκτασης, στο συνολικό αριθμό των χρηστών που είναι δυνατόν να υποστηριχθεί, και στον αριθμό των χρηστών που μπορούν να εντοπιστούν

ταυτόχρονα[14]. Συνεπώς, κάθε αρχιτεκτονική εφαρμόζεται ανάλογα με τις ανάγκες του εντοπισμού. Προκύπτουν δύο μεγάλες κατηγορίες: εντοπισμός βάσει κινητού και εντοπισμός βάσει δικτύου.

Η αρχιτεκτονική εντοπισμού βάσει κινητού, βασίζεται στο ακουστικό του κινητού. Το ακουστικό χρησιμοποιεί τα σήματα των σταθμών βάσεων για να υπολογίσει τη θέση του. Ένας τρόπος υπολογισμού είναι η χρήση της τεχνικής TDOA η οποία απαιτεί να τροποποιηθεί το ακουστικό έτσι ώστε να είναι σε θέση να κάνει πολύ ακριβείς μετρήσεις TDOA [18]. Ακόμη χρειάζεται να παρασχεθούν πληροφορίες στο ακουστικό για το συγχρονισμό του δικτύου. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα με την αποστολή ενός γραπτού μηνύματος ή μιας υπηρεσίας τηλεειδοποίησης στους δέκτες.

Στη δεύτερη κατηγορία το δίκτυο του κινητού, σε συνδυασμό με τον εξοπλισμό προσδιορισμού θέσης βάσει δικτύου, χρησιμοποιείται για να εντοπίσει την συσκευή του κινητού. Εδώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές μέθοδοι, όπως η AOA ή η TOA , οι οποίες λαμβάνουν πληροφορίες, κάνουν υπολογισμούς και καθορίζουν μια εκτίμηση της θέσης της κινητής συσκευής [14].

Ο συνδυασμός των δύο κατηγοριών αποτελεί την υβριδική αρχιτεκτονική εντοπισμού. Για να υπολογιστεί η θέση, ένα δεδομένο κινητό μετρά τις ριπές TOA από διάφορους σταθμούς πομποδέκτες. Αυτές αποστέλλονται στη συνέχεια στο κέντρο της υπηρεσίας εντοπισμού το οποίο παράγει μετρήσεις TDOA και υπολογίζει μια εκτίμηση θέσης[14] .

## **1.6 Ζητήματα Απόδοσης Εντοπισμού**

### **1.6.1 Επισκόπηση Συστημάτων Εντοπισμού**

Τα συστήματα εντοπισμού θέσης μετρούν τη θέση ενός ή περισσότερων αντικειμένων. Μερικά παραδείγματα είναι το GPS, το ραντάρ, το σόναρ και τα αστικά συστήματα εντοπισμού οχημάτων[14]. Τα πιο σημαντικά συστήματα εμπίπτουν στην κατηγορία των συστημάτων εντοπισμού θέσης βάσει κύματος, επειδή χρησιμοποιούν τις ιδιότητες διάδοσης των κυμάτων για τη μέτρηση της θέσης.

Στα συστήματα βάσει κυμάτων που περιλαμβάνουν σόναρ, ραντάρ, και Omega, η πληροφορία θέσης είναι κωδικοποιημένη πάνω στο κύμα λόγω των φυσικών ιδιοτήτων της διάδοσης κυμάτων. Τα σόναρ και τα ραντάρ χρησιμοποιούν παρόμοιες τεχνικές που βασίζονται σε χρονική καθυστέρηση ή κατεύθυνση της άφιξης του κύματος[14]. Τα Omega μετρούν τις αλλαγές φάσης. Σε αυτά τα συστήματα, ο χρήστης σχετίζει τις θέσεις αντικειμένων στο απόλυτο, πραγματικό καρτεσιανό πλαίσιο μέτρησης.

### **1.6.2 Ασάφεια του Συστήματος**

Ασάφεια συστήματος υπάρχει όταν ένα σύστημα δεν μπορεί να διακρίνει μεταξύ ενός σήματος και της μετάφρασης του εν λόγω σήματος. Μια άλλη μορφή ασάφειας μπορεί να συμβεί αν δύο ή περισσότερα αντικείμενα μετρώνται ταυτόχρονα. Για παράδειγμα αν δύο αντικείμενα είναι κοντά μεταξύ τους, τότε μπορεί να μην είναι δυνατό να γίνει διάκριση μεταξύ τους. Η ικανότητα να διακριθούν δύο ή περισσότερα αντικείμενα ονομάζεται στενή ανάλυση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Βασική θεωρία και εξισώσεις στην κίνηση

#### 2.1 Περιγραφή της κίνησης

Η κίνηση ενός σώματος γίνεται εύκολα αντιληπτή, δεν μπορεί όμως να περιγραφεί εύκολα με ακρίβεια. Η χρήση των μαθηματικών μπορεί να περιγράψει με πιο ακριβή τρόπο την κίνηση. Τα φυσικά μεγέθη παρίστανται με σύμβολα και οι σχέσεις τους με μαθηματικές εξισώσεις. Χρησιμοποιούνται επίσης και γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη αυτά στο χρόνο [24].

##### 2.1.1 Θέση και χρονική στιγμή

Για να γίνει ακριβής περιγραφή της κίνησης ενός σώματος, πρέπει να είναι γνωστή η θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή. Θεωρούμε ότι ένα σώμα κινείται όταν αλλάζει θέση σε σχέση με ένα σταθερό σημείο, το σημείο αναφοράς που θεωρείται ακίνητο. Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός κινητού χρησιμοποιείται το σημείο αναφοράς, και υπολογίζεται η απόστασή του από αυτό. Για να καθοριστεί όμως αυτή η θέση, πρέπει να δηλωθεί εάν το κινητό βρίσκεται δεξιά ή αριστερά από το σημείο αναφοράς που δόθηκε, ώστε να προσδιοριστεί η κατεύθυνση του κινητού. Για τον προσδιορισμό της απόστασης χρειάζεται να είναι γνωστή μόνο η μέτρηση του μήκους και όχι η κατεύθυνση.

##### 2.1.2 Η έννοια της τροχιάς

Το σύνολο των διαδοχικών θέσεων από τις οποίες περνάει ένα κινούμενο σώμα βρίσκονται σε μία γραμμή η οποία ονομάζεται τροχιά της κίνησης. Σε μία ευθύγραμμη κίνηση η τροχιά του κινητού είναι μια ευθεία γραμμή ενώ σε πιο σύνθετες κινήσεις η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη, κυκλική ή σπειροειδής. Προκειμένου να σχεδιαστεί η τροχιά ενός κινητού, θα πρέπει για κάθε χρονική στιγμή να είναι γνωστή η θέση του [24].



## 2.2 Η έννοια της ταχύτητας

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης του σώματος στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται ταχύτητα. Εκφράζεται από ένα διάνυσμα ώστε να δηλώνεται η κατεύθυνση της κίνησης. Η ταχύτητα συνδέεται με δύο μεγέθη: το μήκος της διαδρομής και το χρόνο.

**Μέση ταχύτητα:** ορίζεται το πηλίκο του μήκους της διαδρομής που έχει διανύσει ένα κινητό σε ορισμένο χρόνο προς το χρόνο αυτό.

$$u_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Σε περίπτωση που η αρχή μέτρησης των χρόνων  $t_1$  έχει επιλεγεί το 0 ( $t_1=0$  sec), τότε το  $\Delta t$  ταυτίζεται με το  $t_2$  και συμβολίζουμε  $\Delta t=t$ , οπότε

$$u_{\mu} = \frac{x}{t} \quad (2.2)$$

**Στιγμιαία ταχύτητα:** ορίζεται η ταχύτητα ενός κινητού σε μία ορισμένη χρονική στιγμή.

### 2.2.1 Κίνηση με σταθερή ταχύτητα

Μία κίνηση στην οποία η ταχύτητα διατηρείται σταθερή, ονομάζεται ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων :

$$\Delta x = u \cdot \Delta t \text{ σταθερή} \quad (2.3)$$

#### 2.2.1.1 Εξισώσεις ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

Οι εξισώσεις της κίνησης περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο τα βασικά μεγέθη (θέση, ταχύτητα) μεταβάλλονται με το χρόνο.

## A. Ταχύτητα και χρόνος

Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η ταχύτητα διατηρείται σταθερή επομένως ισχύει:

u-σταθερή

Το διάγραμμα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα του χρόνου.

## B. Μετατόπιση, θέση και χρόνος

Από τον ορισμό της ταχύτητας ισχύει ότι:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = u \cdot \Delta t \quad (2.4)$$

Αν u-σταθερή, σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση οι μετατοπίσεις είναι ανάλογες με τα χρονικά διαστήματα μέσα στα οποία πραγματοποιούνται.

Το διάγραμμα της ταχύτητας σε περίπτωση ακινησίας ή ηρεμίας του σώματος συμπίπτει με τον άξονα του χρόνου. Όταν το σώμα είναι ακίνητο, η θέση του είναι σταθερή, οπότε το διάγραμμα θέσης-χρόνου είναι μία ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα των χρόνων [24].

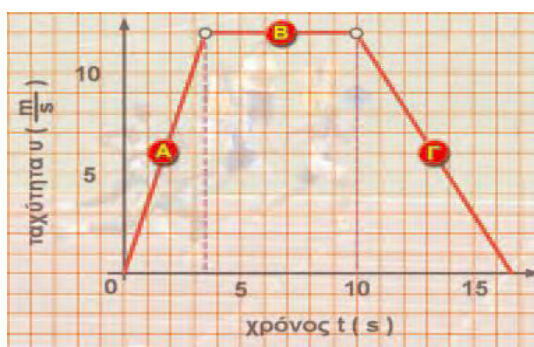
Γενικά, σε κάθε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση το διάγραμμα της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι μια ευθεία γραμμή.

### 2.2.2 Κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα

Είναι δυνατόν το μέτρο, η κατεύθυνση ή και τα δύο να μεταβάλλονται. Τότε μεταβάλλεται και το διάνυσμα της ταχύτητας και η ταχύτητα του σώματος είναι μεταβαλλόμενη.

## Διαγράμματα και κινήσεις

Γνωρίζοντας το είδος της κίνησης μπορεί να σχεδιαστεί το διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου και το διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου. Όταν το κινητό εκτελεί διαδοχικά διαφορετικές κινήσεις, προκύπτει ένα σύνθετο διάγραμμα που αποτελείται από τα διαγράμματα των επιμέρους κινήσεων. Στο διάγραμμα του Σχήματος 2.1, το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία (αρχή αξόνων), η ταχύτητά του σταδιακά αυξάνεται έως τα 12m/sec (κίνηση Α), στη συνέχεια σταθεροποιείται σ'αυτή την τιμή (κίνηση Β) και κατόπιν ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί (κίνηση Γ), γεγονός που σημαίνει ότι το σώμα ακινητοποιείται [24].



Σχήμα 2.1 Κίνηση σώματος

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Βασική θεωρία πιθανοτήτων και εκτίμησης, φίλτρο Kalman

### 3.1 Θεωρία Πιθανοτήτων, Στοχαστικές Διαδικασίες και Θόρυβοι

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής (Mean Value,  $EX$ ) είναι η γενίκευση του μέσου όρου μιας ακολουθίας τιμών. Δίνει ένα κέντρο βάρους γύρω από το οποίο παίρνει τιμές η τυχαία μεταβλητή [28]. Αν η τυχαία μεταβλητή είναι απαριθμητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x)$$

τότε η μέση τιμή της είναι

$$\mu = EX = \sum_i x_i p(x_i)$$

με την προϋπόθεση ότι ισχύει

$$\sum_i |x_i| p(x_i) < \infty .$$

Αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x)$  τότε η μέση τιμή της είναι

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

με την προϋπόθεση ότι ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx < \infty .$$

Διασπορά ή Διακύμανση (variance) και τυπική απόκλιση. Η διασπορά δίνει πληροφορία για το πόσο συγκεντρωμένες/απομακρυσμένες γύρω από τη μέση τιμή

βρίσκονται οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής [32]. Η διασπορά συμβολίζεται με  $VarX$  ή  $\sigma^2$  και είναι η ποσότητα

$$\sigma^2 = VarX = E(X - \mu)^2$$

Συγκεκριμένα, για διακριτές τυχαίες μεταβλητές δίνεται με τον τύπο,

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mu)^2 f(x_k)$$

ενώ για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές δίνεται με τον τύπο,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx .$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται τυπική απόκλιση.

Συνδιακύμανση (Covariance). Η συνδιακύμανση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  δείχνει πόσο σχετίζονται οι δύο μεταβλητές μεταξύ τους, δηλαδή κατά πόσο έχουν την ίδια συμπεριφορά [32], και δίνεται από τον τύπο:

$$Cov(X, Y) = E(X - \mu_x)(Y - \mu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy$$

όπου  $f(x, y)$  είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Όταν

$$cov(X, Y) = 0$$

οι δύο μεταβλητές καλούνται ασυσχέτιστες και όταν  $X = Y$  προκύπτει ο παραπάνω τύπος της διακύμανσης.

Στοχαστική διαδικασία είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων. Εάν είναι αριθμήσιμο το πλήθος τους, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με  $X_i : X_1, X_2, \dots$ . Εάν το πλήθος δεν είναι αριθμήσιμο, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με  $X(t) : t \geq 0$ . Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο, ενώ στη δεύτερη σε στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο [28]. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μεταβλητή  $t$  εκφράζει χρόνο και η στοχαστική διαδικασία συμβολίζει την εξέλιξη ενός γεγονότος με την πάροδο του χρόνου.

### 3.2 Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης

Η θεωρία εκτίμησης ασχολείται με τον υπολογισμό της βέλτιστης εκτίμησης μίας κατάστασης όταν είναι γνωστό ένα σύνολο μετρήσεων. Η κατάσταση είναι η τιμή  $x_k$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{x_k\}$  τη χρονική στιγμή  $k$  (ο χρόνος θεωρείται διακριτός). Η μέτρηση είναι η τιμή  $z_k$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{z_k\}$  τη χρονική στιγμή  $k$ . Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η εκτίμηση  $x(l/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $l$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βέλτιστο κριτήριο [25].

Οι τύποι της εκτίμησης παρουσιάζονται παρακάτω:

<b>Εκτίμηση <math>x(l/k)</math></b>		
Πρόβλεψη, η εκτίμηση της κατάστασης αφορά σε κάποια χρονική στιγμή μετά από αυτή της τελευταίας μέτρησης	$l > k$	Μέλλον
Φιλτάρισμα, η εκτίμηση της κατάστασης αφορά σε κάποια χρονική στιγμή που ταυτίζεται με αυτήν της τελευταίας μέτρησης	$l = k$	Παρόν
Λείανση, η εκτίμηση της κατάστασης αφορά σε κάποια χρονική στιγμή πριν από αυτήν της τελευταίας μέτρησης	$l < k$	Παρελθόν

Για την επίλυση του προβλήματος της θεωρίας εκτίμησης προσδιορίζεται ένα μαθηματικό μοντέλο, που αποτελείται από:

- Το **δυναμικό μοντέλο**, που εκφράζει της σχέση κατάστασης και της μέτρησης
- Το **στατιστικό μοντέλο**, που εκφράζει τη φύση της κατάστασης και της μέτρησης.

Επίσης για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να προσδιοριστεί ένα κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης. Η διαφορά της εκτίμησης από την πραγματική κατάσταση είναι το **λάθος εκτίμησης (estimation error)**. Όσο μικρότερο είναι το λάθος εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης.

### 3.3 Γραμμικό μοντέλο

Το γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου αποτελείται από το δυναμικό και το στατιστικό μοντέλο.

#### 3.3.1 Δυναμικό μοντέλο

Το δυναμικό μοντέλο παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ της κατάστασης και της μέτρησης και περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + Gw(k) \quad (3.1)$$

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1) \quad (3.2)$$

Για  $k \geq 0$ , όπου

- $x(k)$  είναι το διάνυσμα της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $k$ , διαστάσεων  $n \times 1$
- $F(k+1, k)$  είναι η μήτρα μεταφοράς που εξαρτάται από δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές  $k$  και  $k+1$ , διαστάσεων  $n \times n$
- $w(k)$  είναι ο θόρυβος στην κατάσταση τη χρονική στιγμή  $k$  και είναι η είσοδος του συστήματος
- $z(k)$  είναι το διάνυσμα των μετρήσεων τη χρονική στιγμή  $k$ , διαστάσεων  $m \times 1$
- $H(k)$  είναι η μήτρα εξόδου τη χρονική στιγμή  $k$ , διαστάσεων  $m \times n$
- $v(k)$  είναι ο θόρυβος στις μετρήσεις τη χρονική στιγμή  $k$
- $y(k) = H(k)x(k)$  είναι η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή  $k$

#### 3.3.2 Στατιστικό μοντέλο

Το στατιστικό μοντέλο εκφράζει τη φύση της κατάστασης και των μετρήσεων. Χρειάζεται ο θόρυβος στην κατάσταση και στις μετρήσεις να είναι λευκός. Λευκός θόρυβος είναι μία λευκή στοχαστική διαδικασία, δηλαδή, μία στοχαστική διαδικασία με τιμές ασυσχέτιστες από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή. Η στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου έχει σταθερή μέση τιμή, συνήθως μηδενική μέση τιμή [25].

Σε ένα στοχαστικό μοντέλο ισχύουν οι προϋποθέσεις:

**1.** Η στοχαστική διαδικασία  $\{w(k)\}$  ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία με πίνακα διασποράς  $Q(k)$  διαστάσεων  $n \times n$ , οπότε

$$E[w(k)w^T(l)] = \begin{cases} 0, & \alpha\nu k \neq l \\ Q(k), & \alpha\nu k = l \end{cases}$$

Δηλαδή  $\{w(k)\} \square N(0, Q(k))$ , όπου

$$Q(k) = E[w(k)w^T(k)] \quad (3.3)$$

Εδώ συμβολίζεται με  $A^T$  ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα  $A$ .

**2.** Η στοχαστική διαδικασία  $\{v(k)\}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μηδενική μέση τιμή και είναι λευκή διαδικασία με διασπορά  $R(k)$  διαστάσεων  $m \times m$ , οπότε

$$E[v(k)v^T(l)] = \begin{cases} 0, & \alpha\nu k \neq l \\ R(k), & \alpha\nu k = l \end{cases}$$

Δηλαδή  $v(k) \square N(0, R(k))$  όπου

$$R(k) = E[v(k)v^T(l)] \quad (3.4)$$

**3.** Η αρχική τιμή της κατάστασης  $x(0)$  είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή (Gaussian distribution), έχει μέση τιμή  $x_0$  και διασπορά  $P_0$ ,

Δηλαδή  $x(0) \in N(x_0, P_0)$ , όπου

$$x_0 = E[x(0)] \quad (3.5)$$

$$P_0 = E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] \quad (3.6)$$

**4.** Οι στοχαστικές διαδικασίες  $\{w(k)\}$ ,  $\{v(k)\}$  και η τυχαία μεταβλητή  $x(0)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους [25].



### 3.4 Βέλτιστη εκτίμηση

Το πρόβλημα της εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η εκτίμηση  $x(l/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $l$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$  [25]:

$$x(l/k) = E[x(l) / Z_k] \quad (3.7)$$

Το πρόβλημα της εκτίμησης ορίζεται ως η διαφορά της εκτίμησης από την πραγματική κατάσταση [25]:

$$x_e(l/k) = x(l) - x(l/k) \quad (3.8)$$

Όσο μικρότερο είναι το λάθος της εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης. Επομένως, το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης αφορά στο λάθος εκτίμησης και είναι η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του λάθους εκτίμησης, δηλαδή, της διασποράς λάθους εκτίμησης [25]:

$$E[(x_e(l/k))(x_e^T(l/k)) / Z_k] \quad (3.9)$$

## 3.5 Αλγόριθμοι εκτίμησης

Ανάλογα με τον τύπο εκτίμησης υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι εκτίμησης, αλγόριθμοι για πρόβλεψη και αλγόριθμοι για λείανση [25].

### 3.5.1 Αλγόριθμοι για εκτίμηση

Ένας αλγόριθμος εκτίμησης υπολογίζει τη βέλτιστη εκτίμηση (φιλτράρισμα)  $x(k/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $l$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ .

Ο πρώτος ολοκληρωμένος αλγόριθμος εκτίμησης (φίλτρο) προτάθηκε από τον Rudolf E. Kalman στις αρχές της δεκαετίας του 1960 και είναι γνωστός ως φίλτρο Kalman (Kalman filter). Στα μέσα της δεκαετίας του 1970 ο Δημήτριος Γ. Λαϊνιώτης πρότεινε τον αλγόριθμο διαμερισμού, που είναι γνωστός ως φίλτρο Λαϊνιώτη (Lainiotis filter). Τα φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη υπολογίζουν αναδρομικά την εκτίμηση  $x(k/k)$  διαστάσεων  $n \times 1$  και τη διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  διαστάσεων  $n \times n$  [25].

### 3.5.2 Αλγόριθμοι για πρόβλεψη

Ένας αλγόριθμος πρόβλεψης υπολογίζει τη βέλτιστη πρόβλεψη  $x(l/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $l$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , όπου  $l > k$  [25].

Η βέλτιστη πρόβλεψη διαστάσεων  $n \times 1$  είναι:

$$x(l/k) = F(l,k)x(k/k) \quad (3.10)$$

η αντίστοιχη διασπορά λάθους πρόβλεψης διαστάσεων  $n \times n$  δίνεται :

$$P(l/k) = F(l,l-1)P(l-1,k)F^T(l,l-1) + Q(l-1) \quad (3.11)$$

όπου

$$F(l,k) = F(l,l-1)F(l-1,l-2) \dots F(k+1,k) \quad (3.12)$$

όταν  $l = k+1$  προκύπτει ο αλγόριθμος πρόβλεψης κατά ένα βήμα:

$$x(k+1/k) = F(k+1,k)x(k/k) \quad (3.13)$$

$$P(k+1/k) = F(k+1,k)P(k/k)F^T(k+1,k) + Q(k) \quad (3.14)$$

Για  $k = 0, 1, \dots$  με αρχικές συνθήκες

$$x(0/0) = x_0$$

$$P(0/0) = P_0$$

Για τον υπολογισμό της πρόβλεψης και της διασποράς λάθους πρόβλεψης απαιτείται ο υπολογισμός της εκτίμησης  $x(k/k)$  και της διασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$ . Η πρόβλεψη απαιτεί φιλτράρισμα, το οποίο μπορεί να γίνει με το φίλτρο Kalman ή με το φίλτρο Λαϊνιώτη.

### 3.5.3 Αλγόριθμοι για λείανση

Ένας αλγόριθμος λείανσης υπολογίζει τη βέλτιστη πρόβλεψη  $x(l/k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $l$  δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ , όπου  $l < k$ .

Οι πλέον γνωστοί αλγόριθμοι λείανσης είναι ο αλγόριθμος Λαϊνιώτη και ο αλγόριθμος Meditch.

Για τον υπολογισμό της λείανσης και της διασποράς λάθους απαιτείται υπολογισμός της εκτίμησης  $x(k/k)$  και της διασποράς λάθους εκτίμησης  $P(k/k)$  καθώς και ο υπολογισμός της πρόβλεψης  $x(k/k-1)$  και της διασποράς λάθους πρόβλεψης  $P(k/k-1)$ . Η λείανση απαιτεί φιλτράρισμα, το οποίο μπορεί να γίνει με φίλτρο Kalman ή με φίλτρο Λαϊνιώτη[25].

### 3.6 Εισαγωγή στο φίλτρο Kalman

Το φίλτρο Kalman αναπτύχθηκε από τον Rudolf E. Kalman το 1960 ως ένας **αλγόριθμος βέλτιστου υπολογισμού** της κατάστασης ενός συστήματος, το οποίο υπόκειται σε θορύβους που καθιστούν τα συμπεράσματα που λαμβάνουμε αναξιόπιστα. Με τον όρο αλγόριθμος εννοούμε ένα σύνολο εξισώσεων, που παράγουν μια εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος. Ο αλγόριθμος είναι βέλτιστος επειδή ελαχιστοποιεί τη διακύμανση του σφάλματος μεταξύ κατάστασης και εκτίμησης, όπως παρατηρούμε και στο Σχήμα 3.1 [28].

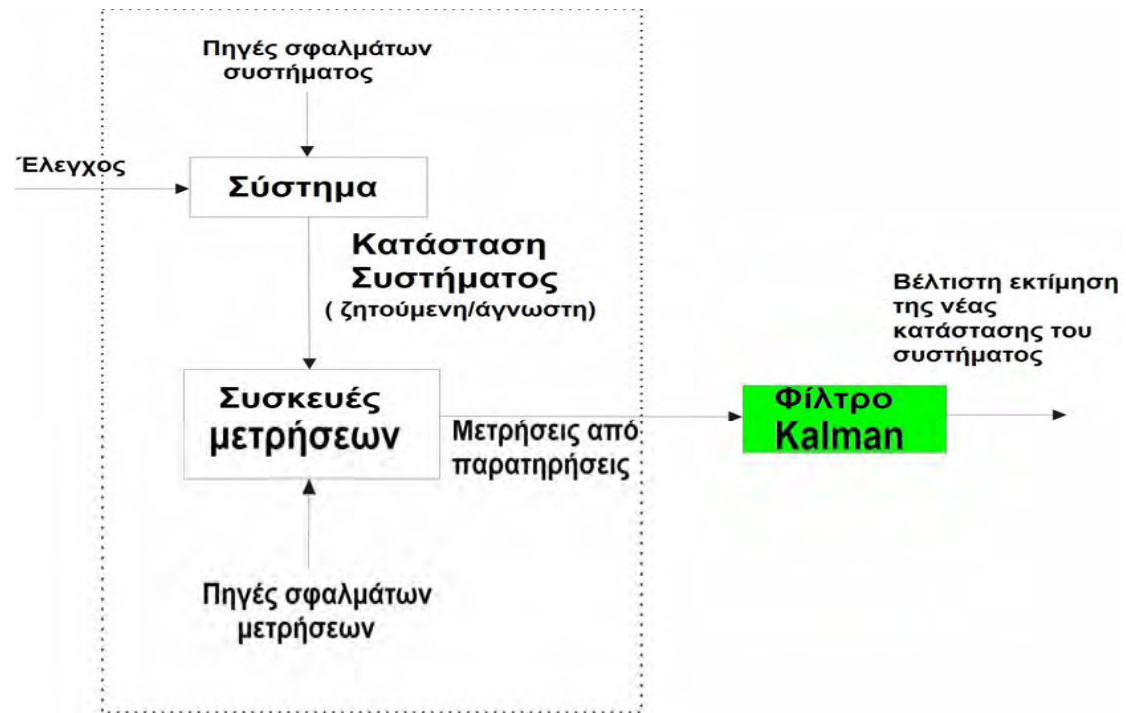
Το φίλτρο υποστηρίζει εκτιμήσεις του παρελθόντος, του παρόντος, και μερικές καταστάσεις του μέλλοντος και μπορεί να τις πραγματοποιήσει ακόμη και όταν η φύση του μοντελοποιημένου συστήματος είναι άγνωστη [29]. Το φίλτρο χρησιμοποιεί το μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος, με γνωστές εισόδους και πολλαπλές διαδοχικές μετρήσεις (από αισθητήρες) για να προκύψει μια εκτίμηση των διαφόρων ποσοτήτων του συστήματος, που είναι καλύτερη από την εκτίμηση που λαμβάνεται με τη χρήση μόνο μίας μέτρησης.

Το φίλτρο Kalman προβλέπει την κατάσταση ενός συστήματος με μια νέα μέτρηση χρησιμοποιώντας ένα σταθμισμένο μέσο όρο. Ο σκοπός των βαρών είναι ότι οι εκτιμήσεις με τη μικρότερη εκτιμώμενη αβεβαιότητα είναι περισσότερο «αξιόπιστες». Οι συντελεστές στάθμισης υπολογίζονται από την συνδιακύμανση, ένα μέτρο της εκτιμώμενης αβεβαιότητας της πρόβλεψης της κατάστασης του συστήματος. Το αποτέλεσμα του σταθμισμένου μέσου όρου είναι μια νέα εκτίμηση της κατάστασης που βρίσκεται μεταξύ της προβλεπόμενης και μετρούμενης κατάστασης, και έχει μια καλύτερη εκτιμώμενη αβεβαιότητα, από ότι έχουν μόνες τους. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε χρονικό βήμα, με τη νέα εκτίμηση και τη συνδιασπορά του ενημερώνοντας την πρόβλεψη που χρησιμοποιείται στην ακόλουθη επανάληψη. Αυτό σημαίνει ότι το φίλτρο Kalman λειτουργεί αναδρομικά και απαιτεί μόνο την τελευταία μικρότερη εκτίμηση, και όχι το σύνολο των εκτιμήσεων και το σύνολο των καταστάσεων προκειμένου να υπολογιστεί η νέα κατάσταση. Κατά την εκτέλεση των πραγματικών υπολογισμών για το φίλτρο, η εκτίμηση της κατάστασης και οι συνδιακυμάνσεις δίνονται από γνωστούς πίνακες.

Επειδή η βεβαιότητα των μετρήσεων είναι συχνά δύσκολο να μετρηθεί με ακρίβεια, συζητάται η συμπεριφορά του φίλτρου από την άποψη της απολαβής. Το κέρδος Kalman είναι συνάρτηση της σχετικής βεβαιότητας των μετρήσεων και της τρέχουσας εκτίμησης της κατάστασης, και μπορεί να συντονιστεί για να επιτύχει ιδιαίτερες επιδόσεις. Με ένα υψηλό κέρδος, το φίλτρο δίνει περισσότερο βάρος στις μετρήσεις, και έτσι τις ακολουθεί πιο στενά. Με μια μικρή αύξηση, το φίλτρο ακολουθεί τις προβλέψεις του μοντέλου πιο στενά, εξομαλύνοντας το θόρυβο, αλλά μειώνοντας την ανταπόκριση. Στα άκρα, η αύξηση του ενός προκαλεί το φίλτρο να

αγνοήσει την εκτίμηση της κατάστασης εντελώς, ενώ ένα μηδενικό κέρδος έχει ως αποτέλεσμα να αγνοηθούν οι μετρήσεις.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να περιγραφεί η μαθηματική θεωρία που οδήγησε την έρευνα στα φίλτρα Kalman και η παρουσίαση του τελικού αλγορίθμου.



Σχήμα 3.1 Φίλτρο Kalman [28]

*Γιατί ονομάζεται φίλτρο;*

Φίλτρο είναι μια φυσική συσκευή που συμβάλλει στην απομάκρυνση ανεπιθύμητων ποσοτήτων. Αρχικά, ένα φίλτρο έλυσε το πρόβλημα διαχωρισμού ανεπιθύμητων παραγόντων για αέρια, υγρά ή στερεά μείγματα. Στη δεκαετία του 1940 η ιδέα επεκτάθηκε στον διαχωρισμό των σημάτων από το θόρυβο, τα οποία χαρακτηριζόντουσαν από την πυκνότητα του φάσματός τους.

Ο όρος φίλτρο Kalman ξεπερνά την αρχική ιδέα του διαχωρισμού των παραγόντων ενός δείγματος. Συμπεριλαμβάνει την λύση του προβλήματος αντιστροφής (αναπαράσταση των μετρούμενων μεταβλητών σαν συναρτήσεις των μεταβλητών κύριου ενδιαφέροντος). Στην ουσία, αντιστρέφει αυτήν την συναρτησιακή σχέση και εκτιμά τις ανεξάρτητες μεταβλητές ως αντεστραμμένες συναρτήσεις των μετρούμενων μεταβλητών.

### 3.7 Μαθηματικό υπόβαθρο

Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για δύο κυρίως λόγους, την εκτίμηση και την ανάλυση της απόδοσης εκτιμητών.

- ✓ **Εκτίμηση της κατάστασης δυναμικών συστημάτων.** Σχεδόν όλα τα φυσικά συστήματα είναι δυναμικά σε κάποιο βαθμό. Αν κάποιος θέλει πολύ ακριβείς εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών τους στο χρόνο, τότε πρέπει να θέσει υπό εξέταση τη δυναμική τους.

Το πρόβλημα είναι ότι δεν γνωρίζουμε πάντα την δυναμική τους με ακρίβεια. Δεδομένου αυτής της κατάστασης μερικής άγνοιας, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να εκφράσουμε την άγνοιά μας με μεγαλύτερη ακρίβεια, χρησιμοποιώντας πιθανότητες. Το φίλτρο Kalman επιτρέπει να εκτιμηθεί η κατάσταση δυναμικών συστημάτων με συγκεκριμένους τύπους τυχαίας συμπεριφοράς, χρησιμοποιώντας στατιστική πληροφορία. Μερικά παραδείγματα εμφανίζονται στον Πίνακα 3.1 [29].

Πίνακας 3.1: Εφαρμογές δυναμικών συστημάτων

Εφαρμογή	Δυναμικό σύστημα	Τύποι αισθητήρων
Έλεγχος διεργασίας	Χημικό σύστημα	Πίεση Θερμοκρασία Ρυθμός ροής
Πρόβλεψη πλημμύρας	Σύστημα ποταμού	Επίπεδο νερού Δείκτης βροχής Ραντάρ καιρού
Ανίχνευση	Διαστημόπλοιο	Ραντάρ Σύστημα απεικόνισης Εξάντας
Πλοήγηση	Πλοίο	Δρομολόγιο πλοίου Γυροσκόπιο GPS

- ✓ **Ανάλυση των συστημάτων εκτίμησης.** Η τρίτη στήλη του Πίνακα 3.1 παρουσιάζει κάποιους πιθανούς τύπους αισθητήρων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση της κατάστασης του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος. Στόχος της ανάλυσης είναι να καθοριστεί πόσο καλύτερα μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι αισθητήρες μαζί με ένα σύνολο κριτηρίων που δίνονται από την αρχή. Τα κριτήρια αυτά σχετίζονται με την ακρίβεια εκτίμησης και το κόστος συστήματος.

Το φίλτρο Kalman χρησιμοποιεί μια ολοκληρωμένη περιγραφή της κατανομής πιθανότητας των σφαλμάτων εκτίμησης στον καθορισμό των βέλτιστων κερδών του φίλτρου. Αυτή η κατανομή πιθανότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση της απόδοσης ως μια συνάρτηση με τις ακόλουθες παραμέτρους :

- Τους τύπους των αισθητήρων που χρησιμοποιούνται.

- Τις τοποθεσίες και τους προσανατολισμούς των αισθητήρων σε σχέση με το σύστημα που εκτιμάται.
- Τα επιτρεπτά χαρακτηριστικά θορύβου των αισθητήρων.

Τέλος η αναλυτική ικανότητα της τυποποίησης του φίλτρου Kalman επιτρέπει σε ένα σχεδιαστή ενός τέτοιου συστήματος να θεωρήσει κάποιο σφάλμα στα υποσυστήματα του συστήματος εκτίμησης και τροποποιώντας αυτό το σφάλμα, να βελτιώνει το κόστος ή άλλα μέτρα απόδοσης, για να πετύχει το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας εκτίμησης [29].

### 3.8 Παρουσίαση του Kalman filtering προβλήματος

Το πρόβλημα που ζητά επίλυση είναι η συνεχής εκτίμηση ενός συνόλου παραμέτρων οι τιμές των οποίων αλλάζουν με το χρόνο  $k$ . Η ανανέωση επιτυγχάνεται με το συνδυασμό μίας ομάδας παρατηρήσεων ή μετρήσεων  $z(k)$ , οι οποίες περιέχουν δεδομένα σχετικά με την κατάσταση  $x(k)$ .

Συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για όλα τα μεγέθη του φίλτρου:

$z(k)$  διάνυσμα μετρήσεων τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $m \times 1$

$x(k)$  διάνυσμα κατάστασης τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $n \times 1$

$F(k)$  πίνακας μετάβασης κατάστασης τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $n \times n$

$G(k)$  πίνακας μετάβασης εισόδου τη χρονική στιγμή  $k$

$H(k)$  πίνακας εξόδου τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $m \times n$

$w(k)$  θόρυβος στην κατάσταση τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $n \times 1$

$v(k)$  θόρυβος στις μετρήσεις τη χρονική στιγμή  $k$ , μεγέθους  $m \times 1$

$Q(k)$  πίνακας συνδιακύμανσης των  $w(k)$ , μεγέθους  $n \times n$

$R(k)$  πίνακας συνδιακύμανσης των  $v(k)$ , μεγέθους  $m \times m$

$P(k)$  πίνακας διασποράς λάθους εκτίμησης, μεγέθους  $n \times n$

$K(k)$  πίνακας κέρδους, μεγέθους  $n \times m$

#### 3.8.1 Σύστημα και μοντέλο παρατήρησης

Θεωρούμε ένα διάνυσμα παραμέτρων  $x(k)$  διάστασης  $m \times 1$ , το οποίο δηλώνει την κατάσταση ενός διακριτού χρόνου γραμμικού δυναμικού συστήματος, τη χρονική στιγμή  $k$  [30]. Επιπλέον θεωρούμε ένα διάνυσμα  $z(k)$  διάστασης  $n \times 1$ , το οποίο αποτελεί την παρατηρούμενη πληροφορία του συστήματος μετρημένη τη χρονική στιγμή  $k$ . Υποθέτουμε ότι στη γενική περίπτωση τα παραπάνω διανύσματα  $x(k)$  και  $z(k)$  αποτελούν διανύσματα τυχαίων μεταβλητών, και τότε το μοντέλο του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από τις δυο ακόλουθες εξισώσεις:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gw(k) \quad (3.15)$$

όπου ο πίνακας  $F$  διάστασης  $m \times m$  είναι γνωστός ως πίνακας μετάβασης κατάστασης (*state transition matrix*). Το διάνυσμα  $w(k)$  διάστασης  $m \times 1$  αναπαριστά μια στοχαστική διαδικασία θορύβου, η οποία μοντελοποιείται όπως ένας μηδενικής μέσης τιμής λευκός θόρυβος του οποίου ο πίνακας συσχέτισης ορίζεται από την ακόλουθη σχέση ως:



$$E[w(k)w^T(l)] = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq l \\ Q(k), & \text{αν } k = l \end{cases}$$

Δηλαδή  $\{w(k)\} \in N(0, Q(k))$  όπου

$$Q(k) = E[w(k)w^T(k)]$$

Οι παρατηρήσεις της κατάστασης δημιουργούνται μέσω ενός συστήματος μέτρησης το οποίο παρουσιάζεται από μία εξίσωση της μορφής

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (3.16)$$

όπου πίνακας  $H(k)$  διάστασης  $n \times m$  είναι μια γνωστή μέτρηση. Το διάνυσμα  $v(k)$  διάστασης  $n \times 1$  καλείται θόρυβος της μέτρησης και μοντελοποιείται σαν ένας μηδενικής μέσης τιμής μηδενικός θόρυβος του οποίου ο πίνακας συσχέτισης δίνεται από τη σχέση

$$E[v(k)v^T(l)] = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq l \\ R(k), & \text{αν } k = l \end{cases}$$

Δηλαδή  $v(k) \in N(0, R(k))$  όπου

$$R(k) = E[v(k)v^T(k)]$$

Σημειώνουμε πως:

- α) Οι θόρυβοι  $w(k)$  και  $v(k)$  θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητοι.
- β) Οι πίνακες  $F$  και  $H$  θεωρούνται ότι είναι γνωστές.

Έχοντας λοιπόν διατυπώσει το μαθηματικό μοντέλο, που περιγράφει ένα διακριτού χρόνου γραμμικό δυναμικό σύστημα το πρόβλημα έγκειται στο να χρησιμοποιήσουμε την παρατηρούμενη πληροφορία δηλαδή τα διανύσματα  $z_1, z_2, \dots, z_k$  ώστε να αποκτήσουμε για κάθε  $i = 1, 2, \dots, k$  τις ελάχιστες μέσες τετραγωνικές εκτιμήσεις των στοιχείων του διανύσματος κατάστασης  $x(i)$ . Σε σχέση με τη μετρούμενη πληροφορία το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως:

- α) *Filtering*, αν  $i = k$ ,
- β) *Prediction*, αν  $i > k$
- γ) *Smoothing*, αν  $1 < i < k$

### 3.9.2 Εφαρμογές του φίλτρου Kalman

Το φίλτρο Kalman έγινε ένα θεμελιώδες εργαλείο για την ανάλυση και λύση μιας ευρείας τάξης προβλημάτων εκτίμησης. Η πρώτη γνωστή εφαρμογή έγινε στο κέντρο ερευνών της NASA στη δεκαετία του '60, όπου χρησιμοποιήθηκε στην πλοήγηση και στο έλεγχο διαστημόπλοιων. Το φίλτρο Kalman όμως είναι χρήσιμο σε πολλές εφαρμογές. Κυρίως χρησιμοποιείται στην εκτίμηση καταστάσεων συστημάτων που μπορούν μόνο να παρατηρηθούν με ανακρίβεια από το σύστημα.

Το φιλτράρισμα είναι επιθυμητό σε πολλές καταστάσεις στη μηχανική και στα ενσωματωμένα συστήματα. Για παράδειγμα, τα σήματα ραδιοεπικοινωνιών είναι παραμορφωμένα από θόρυβο. Ένας καλός αλγόριθμος φιλτραρίσματος μπορεί να απομακρύνει το θόρυβο από τα ηλεκτρομαγνητικά σήματα, ενώ κρατάει τη χρήσιμη πληροφορία. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι τάσεις τροφοδοσίας. Τα αδιάλειπτα τροφοδοτικά ισχύος είναι συσκευές που φιλτράρουν τις τάσεις γραμμής έτσι ώστε να λειάνουν ανεπιθύμητες διακυμάνσεις που αλλιώς μπορεί να μικρύνουν τη διάρκεια ζωής των ηλεκτρικών συσκευών, όπως των υπολογιστών και των εκτυπωτών.

Στη Μηχανική το φίλτρο Kalman εφαρμόζεται εκτός από τη διαστημική και την αεροναυπηγική, στη ρομποτική και στην αυτοκινητοβιομηχανία. Επίσης, στην επιστήμη των υπολογιστών εφαρμόζεται στην όραση υπολογιστή και στα γραφικά πραγματικού χρόνου. Τέλος, μπορεί να εφαρμοστεί στα οικονομικά για την πρόβλεψη οικονομικών δεικτών και επίσης στην τηλεφωνία.

### 3.8.3 Εξισώσεις του φίλτρου Kalman

**Για το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο:** Έστω οι ακόλουθοι πίνακες, όπως ορίζονται στην παράγραφο 3.8 με

$$F(k+1,k) = F, \quad H(k+1) = H, \quad Q(k) = Q \quad \text{και} \quad R(k+1) = R,$$

να είναι ανεξάρτητοι του  $k$ , δηλαδή σταθεροί πίνακες. Τότε το φίλτρο Kalman δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις, για κάθε  $k = 0, 1, \dots$

$$x(k+1/k) = Fx(k/k) \tag{3.17}$$

$$P(k+1/k) = FP(k/k)F^T + GQG^T \tag{3.18}$$

$$K(k+1) = P(k+1/k)H^T[HP(k+1/k)H^T + R]^{-1} \tag{3.19}$$

$$x(k+1/k+1)=[I-K(k+1)H]x(k+1/k)+K(k+1)z(k+1) \quad (3.20)$$

$$P(k+1/k+1)=[I-K(k+1)H]P(k+1/k) \quad (3.21)$$

έχοντας για αρχικές συνθήκες

$$x(0/0) = x_0$$

$$P(0/0) = P_0$$

Το φίλτρο Kalman είναι ένα αναδρομικό φίλτρο ακόμη και στην περίπτωση του χρονικά αμετάβλητου μοντέλου, γιατί το κέρδος είναι χρονικά μεταβαλλόμενο [20].

**Για το μόνιμης κατάστασης (steady state) φίλτρο Kalman:** Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.18), (3.19), (3.21) στο χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman παράγεται ο πίνακας συνδιακύμανσης ως εξής

$$P(k+1/k) = Q + FP(k/k-1)F^T - FP(k/k-1)H^T [HP(k/k-1)H^T + R]^{-1}HP(k/k-1)F^T \quad (3.22)$$

Η εξίσωση στην (3.22) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως εξίσωση Ricatti για το φίλτρο Kalman.

Η εξίσωση Ricatti μόνιμης κατάστασης παράγεται από την (3.22) και είναι η εξής:

$$\bar{P}_p = F\bar{P}_p F^T + Q - F\bar{P}_p H^T [H\bar{P}_p H^T + R]^{-1} H\bar{P}_p F^T \quad (3.23)$$

Από τις εξισώσεις (3.22), (3.23), (3.25) φαίνεται πως το κέρδος τείνει σε μια σταθερή τιμή ( $K$ ) που καλείται κέρδος μόνιμης κατάστασης και υπολογίζεται ως συνάρτηση της διασποράς λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση [20]

$$\bar{K} = P_p H^T [H\bar{P}_p H^T + R]^{-1} \quad (3.24)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, προκύπτει το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης (steady state Kalman filter)

$$x(k+1/k+1) = [I - KH]Fx(k/k) + Kz(k+1) \quad (3.25)$$

ή

$$x(k+1/k+1) = A_{KF}x(k/k) + B_{KF}z(k+1) \quad (3.26)$$

$$A_{KF} = [I - \bar{K}H]F \quad (3.27)$$

$$B_{KF} = \bar{K} \quad (3.28)$$

Για την υλοποίησή του θα πρέπει να είναι γνωστές η εκτίμηση  $x(k_{ss}/k_{ss})$  ( $k_{ss}$  ο χρόνος μόνιμης κατάστασης) για την εφαρμογή της αναδρομής και η διασπορά λάθους εκτίμησης  $P(k_{ss}/k_{ss})$  για τον υπολογισμό των πινάκων  $A_{KF}$  και  $B_{KF}$  [20].

Με αρχική συνθήκη

$$x(0/0) = x_0$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Εκτέλεση κωδίκων για τον αλγόριθμο Kalman

### 4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, λαμβάνοντας υπόψη τις θεωρίες και τις εξισώσεις της προηγούμενης ενότητας γίνεται προσπάθεια να ελεγχθεί εάν τα αποτελέσματα που δίνει το φίλτρο Kalman έχουν τη βέλτιστη εκτίμηση. Για το λόγο αυτό εξετάζονται οι διαφορετικοί τρόποι υλοποίησης του φίλτρου Kalman σε προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab, ώστε να παρουσιαστεί αν αλλάζοντας τις αρχικές τιμές των εξισώσεων του μοντέλου ή του φίλτρου και τις μεταβλητές που εισάγονται ως είσοδοι στους κώδικες παρατηρείται κάποια αλλαγή στο φίλτρο.

Αρχικά θεωρώντας τις εξισώσεις (3.15) και (3.16) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης, όπως αυτές αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2, αποδεικνύονται οι πίνακες που τις αποτελούν,  $x, F, G, H, v, w$ .

Στη συνέχεια υλοποιούνται οι κώδικες για το φίλτρο Kalman, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των εννοιών 3.8.2 και 3.8.3 και παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν.

Τέλος, αναφέρεται η διαφορά του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman και του φίλτρου στη μόνιμα κατάσταση αναφορικά με τον υπολογιστικό φόρτο τους.

### 4.2 Αποδείξεις Εξισώσεων

Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 3, το μοντέλο παρατήρησης αποτελείται από δύο εξισώσεις, την (3.15) και (3.16). Παρακάτω ακολουθούν οι αποδείξεις τους και ο τρόπος παραγωγής των πινάκων, που τις αποτελούν με τη βοήθεια των εξισώσεων της ευθύγραμμης ομαλής και με μεταβαλλόμενη ταχύτητα κίνησης χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (4.1)$$

$$u = u_0 + at \quad (4.2)$$

$$\Delta s = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (4.3)$$

$$\Delta s = s_0 + u_0 t \quad (4.4)$$

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4.5)$$

$$\Delta s = s(k+1) - s(k) \quad (4.6)$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ι

*Για τις εξισώσεις της θέσης*

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.3) την εξίσωση επιτάχυνσης (4.1) προκύπτει

$$\Delta s = u_0 t + \frac{1}{2} \frac{\Delta u}{\Delta t} t^2$$

Αν στην παραπάνω αντικαταστήσουμε το  $\Delta s$  την εξίσωση (4.6) προκύπτει

$$s(k+1) - s(k) = u_0 t + \frac{1}{2} \frac{\Delta u}{\Delta t} t^2$$

Λύνοντάς την παραπάνω εξίσωση ως προς  $s(k+1)$  και απλοποιώντας το  $t^2$  με το  $\Delta t$  προκύπτει

$$s(k+1) = s(k) + u_0 t + \frac{1}{2} \Delta u t$$

Η παραπάνω εξίσωση για τον άξονα των  $x$  μετατρέπεται στην παρακάτω

$$s_x(k+1) = s_x(k) + u_x(k) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta u_x t \quad (4.7)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει και η αντίστοιχη εξίσωση για τον άξονα των  $y$

$$s_y(k+1) = s_y(k) + u_y(k) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta u_y t \quad (4.8)$$

Για τις εξισώσεις της ταχύτητας

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ταχύτητας (4.2) την εξίσωση επιτάχυνσης (4.1) συνεπάγεται

$$u = u_0 + \frac{\Delta u}{\Delta t} t$$

Απλοποιώντας το  $t$  και το  $\Delta t$  προκύπτει

$$u = u_0 + \Delta u$$

Η παραπάνω εξίσωση για τον άξονα των  $x$  και για τη χρονική στιγμή  $k+1$  μετατρέπεται

$$u_x(k+1) = u_x(k) + \Delta u_x \quad (4.9)$$

Δουλεύοντας ανάλογα προκύπτει και η αντίστοιχη εξίσωση για τον άξονα των  $y$  που είναι

$$u_y(k+1) = u_y(k) + \Delta u_y \quad (4.10)$$

Συνεπώς η εξίσωση της κατάστασης του μοντέλου στην (3.1) με τη μορφή πινάκων δίνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} s_x(k+1) \\ v_x(k+1) \\ s_y(k+1) \\ v_y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x(k) \\ v_x(k) \\ s_y(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x(k) \\ \omega_y(k) \end{bmatrix}$$
$$x(k+1) = F x(k) + G \omega(k)$$

Έτσι καταλήγουμε στους ακόλουθους πίνακες ((βλέπε, 4.11) - (4.15)), οι οποίοι συμπεριλαμβάνονται στους κώδικες της παραγράφου 4.3.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} s_x(k+1) \\ v_x(k+1) \\ s_y(k+1) \\ v_y(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} s_x(k) \\ v_x(k) \\ s_y(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\omega(k) = \begin{bmatrix} \omega_x(k) \\ \omega_y(k) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

όπου  $\omega(k)$  είναι θόρυβος.

Με αυτό τον τρόπο αποδείχθηκε η εξίσωση (3.19) και παρουσιάστηκαν οι πίνακές της.



## ΑΠΟΔΕΙΞΗ II

Οι μετρήσεις  $z(k)$  είναι αποστάσεις. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.4) για τον άξονα των  $x$  και προσθέτοντας θόρυβο  $v$ , για τη χρονική στιγμή  $k$  προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$z_x(k) = s_x(k) + u_x(k)\Delta t + v_x(k) \quad (4.16)$$

Ανάλογα και για τον άξονα των  $y$

$$z_y(k) = s_y(k) + u_y(k)\Delta t + v_y(k) \quad (4.17)$$

Συνεπώς η εξίσωση της μέτρησης του μοντέλου στην (3.2) με τη μορφή πινάκων δίνεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} z_x(k) \\ z_y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x(k) \\ v_x(k) \\ s_y(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix}$$

$$z(k) = H x(k) + v(k)$$

Έτσι καταλήγουμε στους ακόλουθους πίνακες ((βλέπε, 4.18) - (4.20)), οι οποίοι

συμπεριλαμβάνονται στους κώδικες της παραγράφου 4.3

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_x(k) \\ z_y(k) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$v(k) = \begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

## 4.3 Υλοποίηση Κωδίκων

Για την εκτέλεση των κωδίκων χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες υποθέσεις.

- Το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο.
- Οι πίνακες  $F, G, H$  θεωρούνται γνωστοί και σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα δίνονται από τις εξισώσεις (4.12), (4.15), (4.19).
- Η  $\Delta t$  αλλάζει και είναι η διαφορά των χρονικών στιγμών  $k$  και  $k+1$ .
- Οι αρχικές καταστάσεις  $x(0/0)$  και  $P(0/0)$  θεωρούνται μηδενικές.
- Ο αριθμός των επαναλήψεων που θα τρέξει ο κώδικας ( $k_{max}$ ) δίνεται από το χρήστη.

Στη συνέχεια δίνεται ο κώδικας για την υλοποίηση του μοντέλου. Είναι γνωστοί οι πίνακες  $F, G, H$ . Ως δεδομένα εισόδου δίνονται ο χρόνος ( $dt$ ), οι συνδιασπορές των θορύβων για τους άξονες  $x, y$ , εδώ συμβολίζονται με  $covwx, covwy, covnx, covny$ , ο αρχικοποιημένος πίνακας  $x$  και ο αριθμός των επαναλήψεων ( $k_{max}$ ) που είναι επιθυμητός. Χρησιμοποιούνται και οι εξισώσεις του φίλτρου (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21).

### ΚΩΔΙΚΑΣ 1

```
function [z]=modela(dt,covwx,covwy,covnx,covny,x0,kmax)
% model

% model parameters
F=[1 dt 0 0           %εξίσωση πίνακα 4.12
   0 1 0 0
   0 0 1 dt
   0 0 0 1];
H=[1 dt 0 0           % εξίσωση πίνακα 4.19
   0 0 1 dt];
G=[dt/2  0           % εξίσωση πίνακα 4.15
   1      0
   0 dt/2
   0      1];
1

% gaussian noises
wx=sqrt(covwx)*randn(1,kmax); %υπολογισμός συνδιακύμανσης των θορύβων
wy=sqrt(covwy)*randn(1,kmax);
vx=sqrt(covnx)*randn(1,kmax+1);
vy=sqrt(covny)*randn(1,kmax+1);
W=[wx; wy];           % εξίσωση πίνακα 4.14
V=[vx; vy];           % εξίσωση πίνακα 4.20

% measurements
x=[x0];               %ανάθεση στο x την αρχική τιμή x0
X=x;
z0=H*x0+V(:,1:1);    %αρχική τιμή του z0
z=[z0];               %ανάθεση στο z την αρχική τιμή z0
Z=z;
```

```

for k=1:kmax           %αριθμός επαναλήψεων
    X=F*X+G*W(:,k:k); %εξίσωση 3.15
    Z=H*X+V(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.16
    x=[x,X];          %αποθηκεύει σε νέα στήλη το καινούριο x
    z=[z,Z];          %αποθηκεύει σε νέα στήλη το καινούριο z
end;

```

Τα ληφθέντα δεδομένα z του Κώδικα 1 εισάγονται σαν δεδομένα εισόδου στον Κώδικα 2.

Ο παρακάτω κώδικας είναι η υλοποίηση του φίλτρου Kalman. Δέχεται ως είσοδο το χρόνο (dt), τις συνδιασπορές των θορύβων για τους άξονες x, y, (covwx, covwy, covvx, covvy), δύο αρχικοποιημένους πίνακες (xest0, pest0), τον αριθμό των επαναλήψεων που είναι επιθυμητός (kmax) και τις μετρήσεις (z) που ήταν η έξοδος του παραπάνω Κώδικα 1.

## **ΚΩΔΙΚΑΣ 2**

```
function
[xest,pest]=kalmanfilter(dt,covwx,covwy,covvx,covvy,xest0,pest0,z,kmax)
% Kalman Filter

% Kalman Filter parameters
I=eye(4); %μοναδιαίος πίνακας μεγέθους 4X4
F=[1 dt 0 0 % εξίσωση πίνακα 4.12
  0 1 0 0
  0 0 1 dt
  0 0 0 1];
H=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.19
  0 0 1 dt];
G=[dt/2 0 %εξίσωση πίνακα 4.15
  1 0
  0 dt/2
  0 1];
q=[covwx 0
  0 covwy];
Q=G*q*G';
R=[covvx 0
  0 covvy];
% Kalman Filter estimation
xe=xest0; %αρχικοποίηση του xe, το xest δίνεται
pe=pest0; %αρχικοποίηση του pe, το pest δίνεται
xest=[xe];
pest=[pe];
for k=1:kmax
  xp=F*x; %εξίσωση 3.17 x πρόβλεψης
  pp=Q+F*pe*F'; %εξίσωση 3.18 p πρόβλεψης
  g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R); %εξίσωση 3.19 κέρδος
  xe=(I-g*H)*xp+g*z(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.20 x εκτίμησης
  pe=(I-g*H)*pp; %εξίσωση 3.21 p εκτίμησης
  xest=[xest xe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα xe
  pest=[pest pe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα pe
end;

% plot estimation
figure(1); %γραφική αναπαράσταση των sx,ux, sy,uy αντίστοιχα
subplot(4,1,1);
plot([0:kmax],xest(1:1,:));
subplot(4,1,2);
plot([0:kmax],xest(2:2,:));
subplot(4,1,3);
plot([0:kmax],xest(3:3,:));
subplot(4,1,4);
plot([0:kmax],xest(4:4,:));
```

Εκτελώντας τους Κώδικες 1 και 2 για

Conwx=0.01

Conwy=0.01

Convx=0.1

Convy=0.1

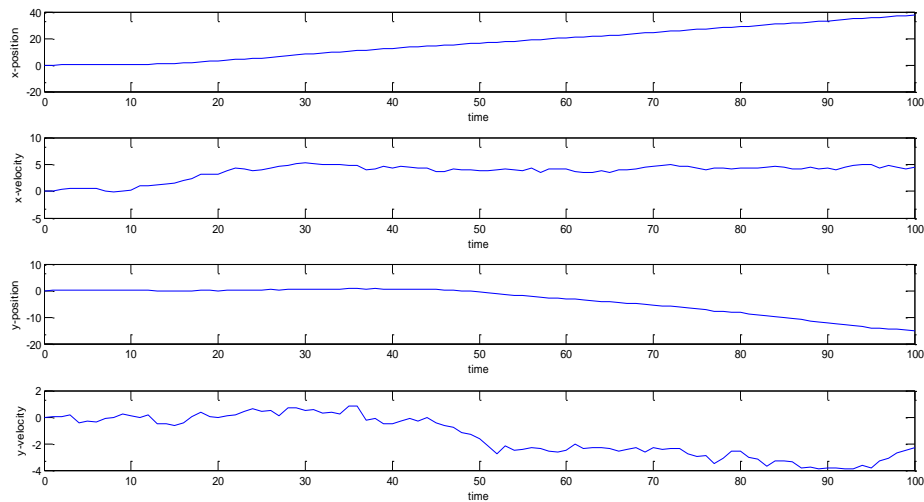
xest0=[0;0;0;0]

pest0=[10 0 0 0;0 1 0 0;0 0 10 0;0 0 0 1]

kmax=50

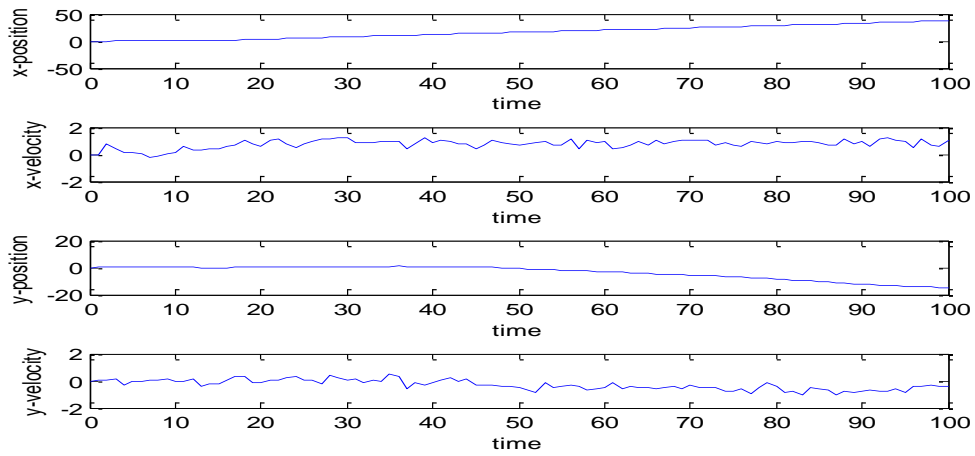
και τις μετρήσεις  $z$  που δίδονται από τον Κώδικα 1 για διαφορετικά  $dt$  παρουσιάζονται τα παρακάτω διαγράμματα. Αλλάζει ο χρόνος  $dt$  για να παρουσιαστούν τυχόν επιδράσεις του στην ταχύτητα ή τη θέση του στόχου.

Για  $dt=0.1$ , ο Κώδικας 2 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.1), όπου σε κάθε διάγραμμα το πρώτο, παριστάνει το  $s_x$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το δεύτερο, το  $u_x$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το τρίτο, το  $s_y$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $y$ ) και το τελευταίο, το  $u_y$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $y$ ).



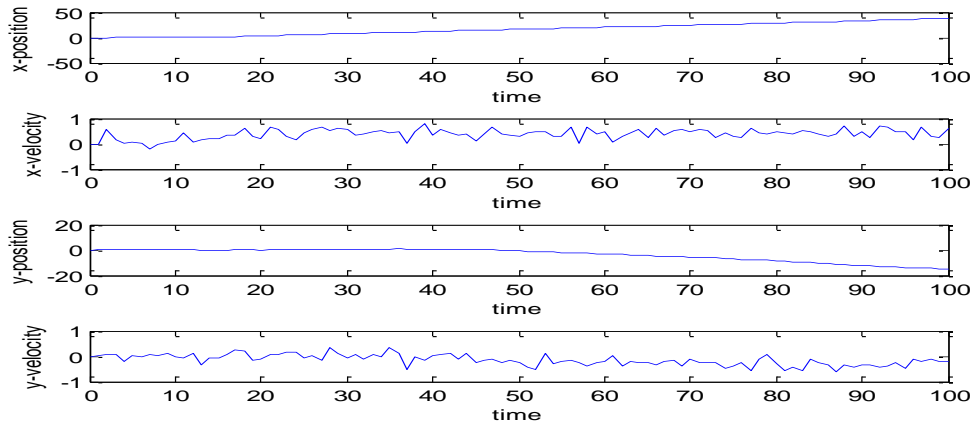
Σχήμα 4.1:  $dt=0.1$ , Κώδικας 4.1

Για  $dt=0.5$ , ο Κώδικας 2 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.2).



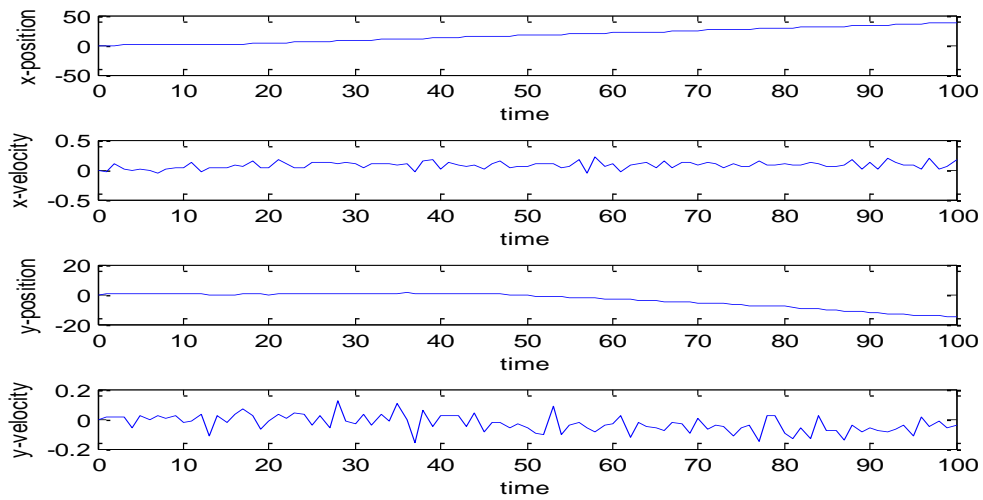
Σχήμα 4.2:  $dt=0.5$ , Κώδικας 2

Για  $dt=1$ , ο Κώδικας 2 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.3).



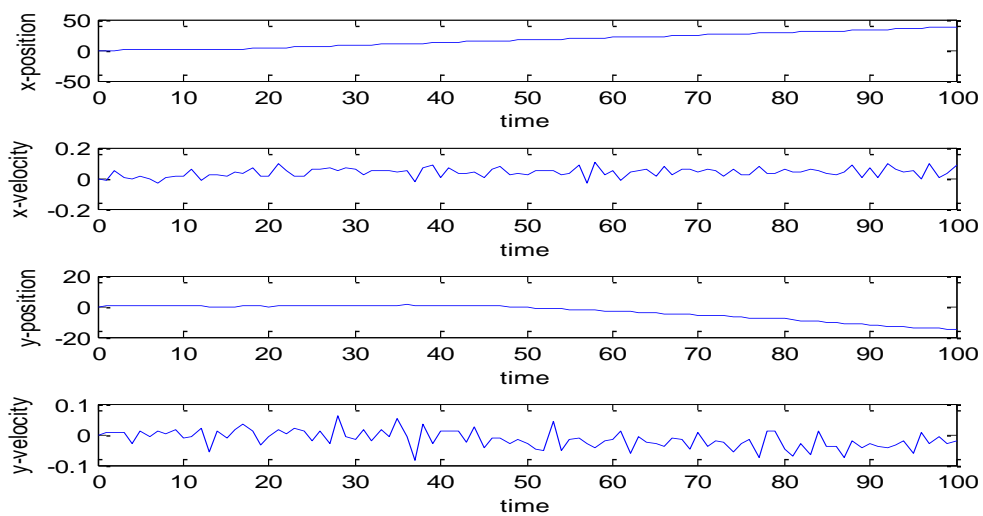
Σχήμα 4.3:  $dt=1$  Κώδικας 2

Για  $dt=5$ , ο Κώδικας 2 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4:  $dt=5$ , Κώδικας 2

Για  $dt=10$ , ο Κώδικας 2 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5:  $dt=10$ , Κώδικας 2

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Για τις παραπάνω δοκιμές παρατηρείται πως τα διαγράμματα που αναπαριστούν την θέση παραμένουν σταθερά, ενώ εκείνα που αναπαριστούν την ταχύτητα αλλάζουν καθώς αλλάζει και το  $dt$ .



Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας φίλτρου Kalman **μόνιμης κατάστασης** (steady state). Δέχεται ως είσοδο το χρόνο (dt), τις συνδιασπορές των θορύβων για τους άξονες x, y, (covwx, covwy, covvx, covvy), τον αρχικοποιημένο πίνακα xest0, τον αριθμό των επαναλήψεων που είναι επιθυμητός και τις μετρήσεις (z) που ήταν η έξοδος του Κώδικα 1.

### **ΚΩΔΙΚΑΣ 3**

```
function
[xest, PE]=sskalmanfilter(dt, covwx, covwy, covvx, covvy, xest0, z, kmax)
% Steady State Kalman Filter

% Kalman Filter parameters
I=eye(4); %μοναδιαίος πίνακας μεγέθους 4x4
F=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.12
  0 1 0 0
  0 0 1 dt
  0 0 0 1];
H=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.19
  0 0 1 dt];
G=[dt/2 0 %εξίσωση πίνακα 4.15
  1 0
  0 dt/2
  0 1];
q=[covwx 0
  0 covwy];
Q=G*q*G';
R=[covvx 0
  0 covvy];
% Riccati Equation
% Steady State Prediction Error Covariance
PP=dare(F', H', Q, R); %εξίσωση Ricatti
% Steady State Gain
K=PP*H'*inv(H*PP*H'+R); %εξίσωση 3.24 κέρδος
% Steady State Estimation Error Covariance
PE=(I-K*H)*PP;
% Steady State Kalman Filter parameters
A=(I-K*H)*F; %εξίσωση 3.27
B=K; %εξίσωση 3.28

% Steady State Kalman Filter estimation
xe=xest0;
xest=[xe];
for k=1:kmax
    xe=A*xe+B*z(:, k+1:k+1); %εξίσωση 3.26
    xest=[xest xe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα pe
end;

% plot estimation
figure(1); %γραφική αναπαράσταση των sx, ux, sy, uy
subplot(4,1,1);
plot([0:kmax], xest(1:1, :));
subplot(4,1,2);
plot([0:kmax], xest(2:2, :));
subplot(4,1,3);
plot([0:kmax], xest(3:3, :));
subplot(4,1,4);
plot([0:kmax], xest(4:4, :));
```

Παρακάτω ακολουθεί μια παραλλαγή του κώδικα του φίλτρου Kalman **για σταθερή ταχύτητα**. Με δεδομένα τις μετρήσεις (z), το χρόνο (dt), τις συνδιακυμάνσεις των θορύβων w,v και τις σταθερές ταχύτητες για τους άξονες x, y, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης του κινητού.

#### **ΚΩΔΙΚΑΣ 4**

```
function [x,xest]=gsm(dt,covw,covv,velx,vely)

%movement
kmax=100;
xest0=[0 0 0 0]';%αρχικοποίηση των xest0, pest0 και αριθμού
επαναλήψεων
pest0=eye(4);

% GSM position tracking model
% model parameters
F=[1 dt 0 0      %εξίσωση πίνακα 4.12
   0 1 0 0
   0 0 1 dt
   0 0 0 1];
H=[1 0 0 0      %εξίσωση πίνακα 4.19
   0 0 1 0];
G=[dt/2  0      %εξίσωση πίνακα 4.15
   1  0
   0 dt/2
   0  1];
covwx=covw; %ανάθεση στις συνδιακυμάνσεις των θορύβων για τους 2
άξονες
covwy=covw;
covvx=covv;
covvy=covv;
q=[covwx  0
   0 covwy];
Q=G*q*G';
R=[covvx  0
   0 covvy];

% gaussian noises
wx=sqrt(covwx)*randn(1,kmax);
wy=sqrt(covwy)*randn(1,kmax);
vx=sqrt(covvx)*randn(1,kmax+1);
vy=sqrt(covvy)*randn(1,kmax+1);
W=[wx; wy];      %εξίσωση 4.14
V=[vx; vy];      %εξίσωση 4.20

% measurements
xest0=[0 velx 0 vely]'; %αρχικοποίηση των xest0,z0,x0
x0=xest0;
x=[x0];
X=x;
z0=H*x0+V(:,1:1);
z=[z0];
Z=z;
for k=1:kmax
    X=F*X+G*W(:,k:k); %εξίσωση 3.15
```

```

    Z=H*X+V(:,k+1:k+1);    %εξίσωση 3.16
    x=[x,X];               %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα X,Z
    z=[z,Z];
end;

% Kalman Filter
xe=xest0;
pe=pest0;
xest=[xe];
pest=[pe];
for k=1:kmax
    xp=F*x;                %εξίσωση 3.17 x πρόβλεψης
    pp=Q+F*pe*F';         % εξίσωση 3.18 p πρόβλεψης
    g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R); %εξίσωση 3.19 κέρδος
    xe=(eye(4)-g*H)*xp+g*z(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.20 x εκτίμησης
    pe=(eye(4)-g*H)*pp;    %εξίσωση 3.21 p εκτίμησης
    xest=[xest xe];        %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα xe
    pest=[pest pe];        %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα pe
end;

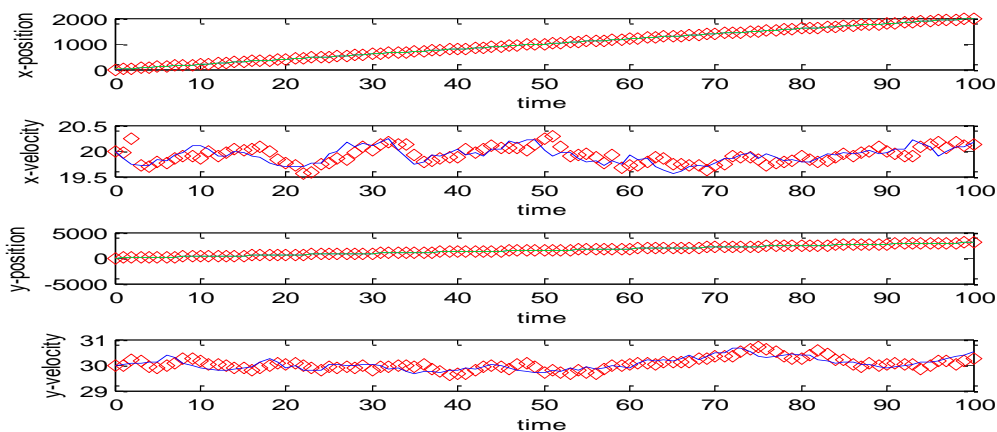
% plot estimation
figure(1);                %γραφική αναπαράσταση
subplot(4,1,1);
plot([0:kmax],xest(1:1,:), 'rd', [0:kmax],x(1:1,:), 'b', [0:kmax],z(1:1,:), 'g');
subplot(4,1,2);
plot([0:kmax],xest(2:2,:), 'rd', [0:kmax],x(2:2,:), 'b');
subplot(4,1,3);
plot([0:kmax],xest(3:3,:), 'rd', [0:kmax],x(3:3,:), 'b', [0:kmax],z(2:2,:), 'g');
subplot(4,1,4);
plot([0:kmax],xest(4:4,:), 'rd', [0:kmax],x(4:4,:), 'b');

```

Στη συνέχεια ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις για διάφορες τιμές των  $dt$ ,  $conv_x$  και  $conv_y$ . Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, το πρώτο διάγραμμα παριστάνει το  $s_x$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το δεύτερο το  $u_x$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το τρίτο το  $s_y$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $y$ ) και το τελευταίο το  $u_y$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $y$ ).

Όπου με κόκκινο παρουσιάζεται η εκτιμώμενη θέση, με μπλε η πραγματική θέση και με πράσινο η μέτρηση  $z$ .

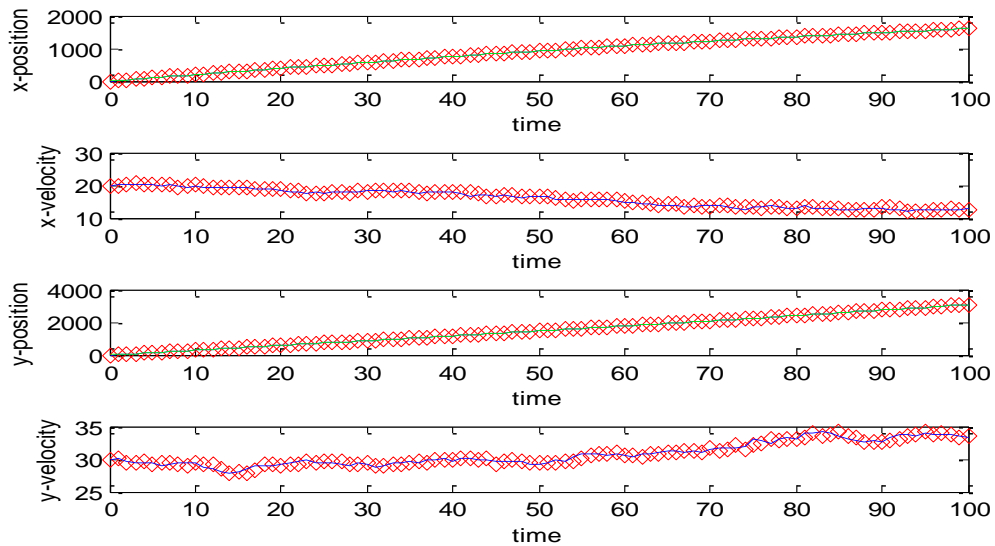
Για  $dt=1$ ,  $conv_x=0.01$ ,  $conv_y=0.1$ ,  $vel_x=20$ ,  $vel_y=30$  ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.6) (`gsm(1,0.01,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.6 :  $conv_x=0.01$ ,  $conv_y=0.1$ ,  $vel_x=20$ ,  $vel_y=30$ , Κώδικας 4

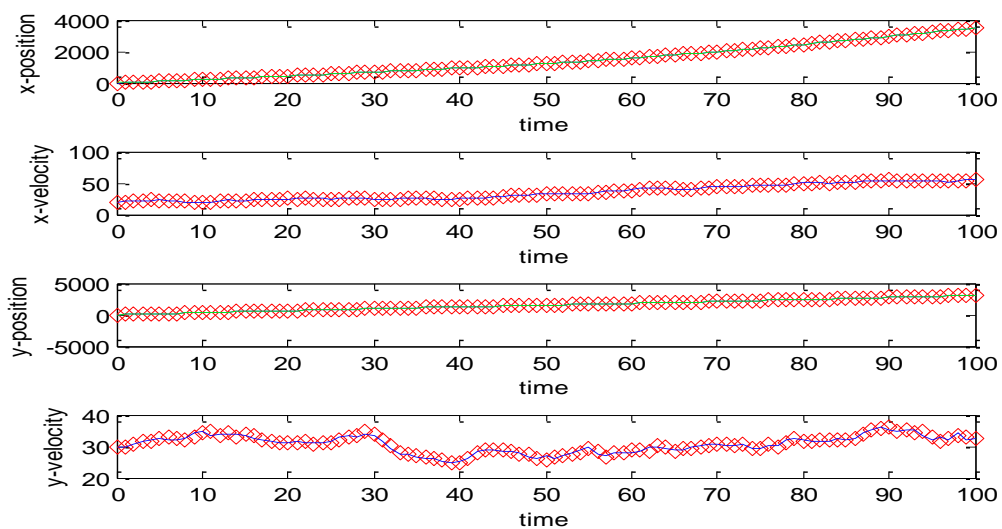
Κάνοντας αλλαγές στο  $\text{covw}$  για να φανούν οι επιδράσεις του θορύβου εισόδου.

Για  $\text{dt}=1$ ,  $\text{covw}=0.1$ ,  $\text{covn}=0.1$ ,  $\text{velx}=20$ ,  $\text{vely}=30$  ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.7) ( $\text{gsm}(1,0.1,0.1,20,30)$ )



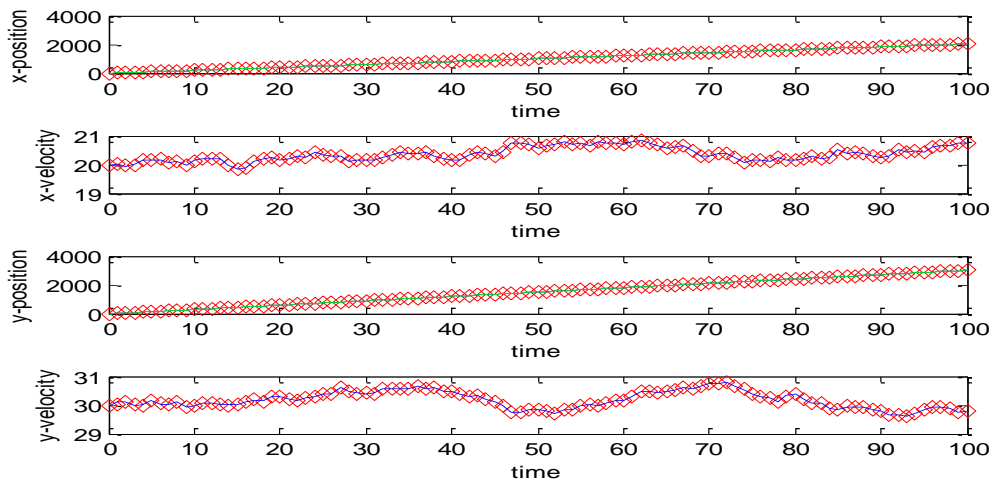
Σχήμα 4.7:  $\text{dt}=1$ ,  $\text{covw}=0.1$ ,  $\text{covn}=0.1$ ,  $\text{velx}=20$ ,  $\text{vely}=30$ , Κώδικας 4

Για  $\text{dt}=1$ ,  $\text{covw}=1$ ,  $\text{covn}=0.1$ ,  $\text{velx}=20$ ,  $\text{vely}=30$  ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.8) ( $\text{gsm}(1,1,0.1,20,30)$ )



Σχήμα 4.8:  $\text{dt}=1$ ,  $\text{covw}=1$ ,  $\text{covn}=0.1$ ,  $\text{velx}=20$ ,  $\text{vely}=30$ , Κώδικας 4

Για  $dt=1$ ,  $convw=0.01$ ,  $convv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.9) (`gsm(1,0.01,0,20,30)`)



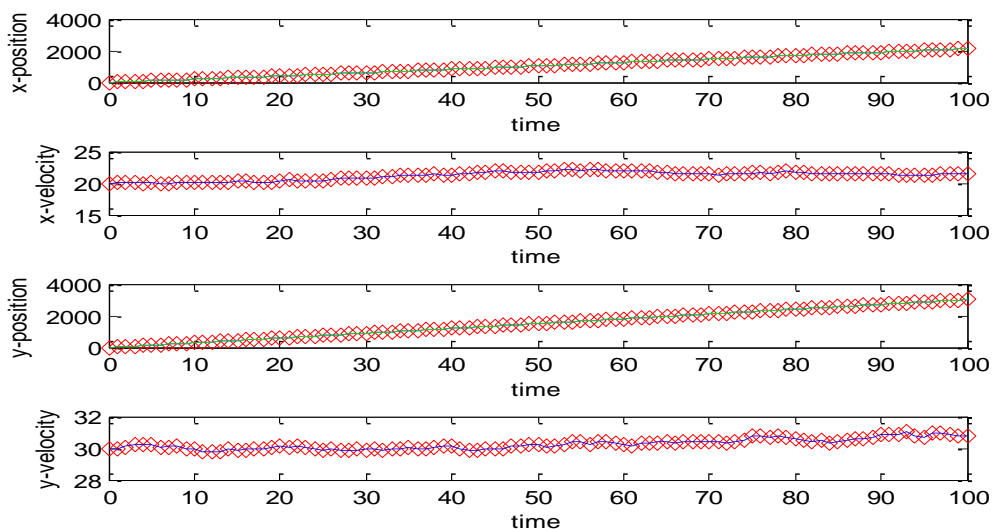
Σχήμα 4.9 :  $dt=1$ ,  $convw=0.01$ ,  $convv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$  , Κώδικας 4

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Παρατηρείται πως για τις θέσεις στους άξονες  $x, y$  η πραγματική και η εκτιμώμενη θέση συμπίπτουν. Για τις ταχύτητες στους άξονες  $x, y$  παρουσιάζεται πως για πιο μικρό θόρυβο εισόδου οι δύο θέσεις δεν έχουν διαφορές και συμπίπτουν. Φαίνεται πως οι αρχικές συνθήκες δεν επηρεάζουν το φίλτρο.

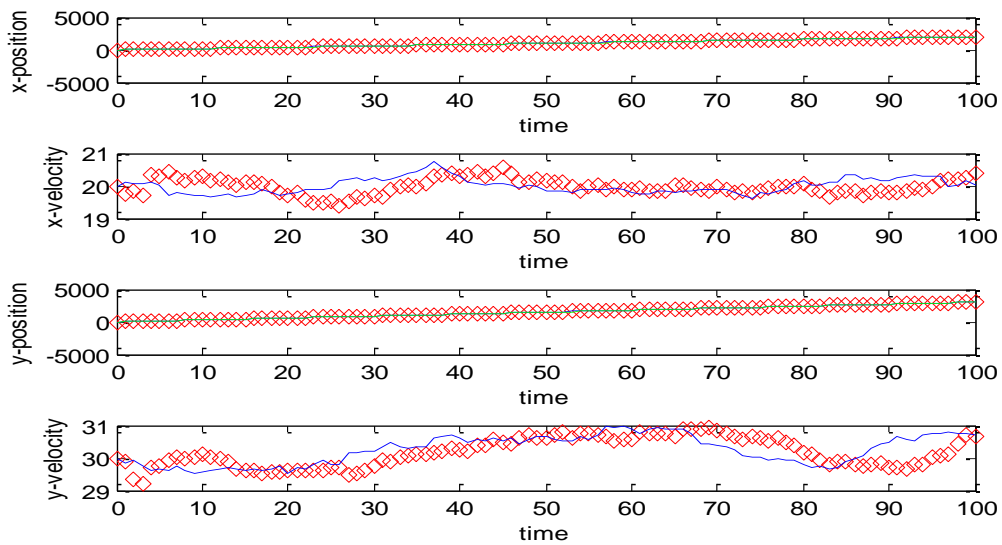
Στη συνέχεια μεταβάλλεται το  $convv$  για να φανούν τυχόν επιδράσεις του θορύβου μετρήσεων στις γραφικές παραστάσεις.

Για  $dt=1$ ,  $convw=0.01$ ,  $convv=0$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.10) (`gsm(1,0.01,0,20,30)`)



Σχήμα 4.10:  $dt=1$ ,  $convw=0.01$ ,  $convv=0$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 4

Για  $dt=1, covw=0.01, covv=10, velx=20, vely=30$ , ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.11) (`gsm(1,0.01,10,20,30)`)



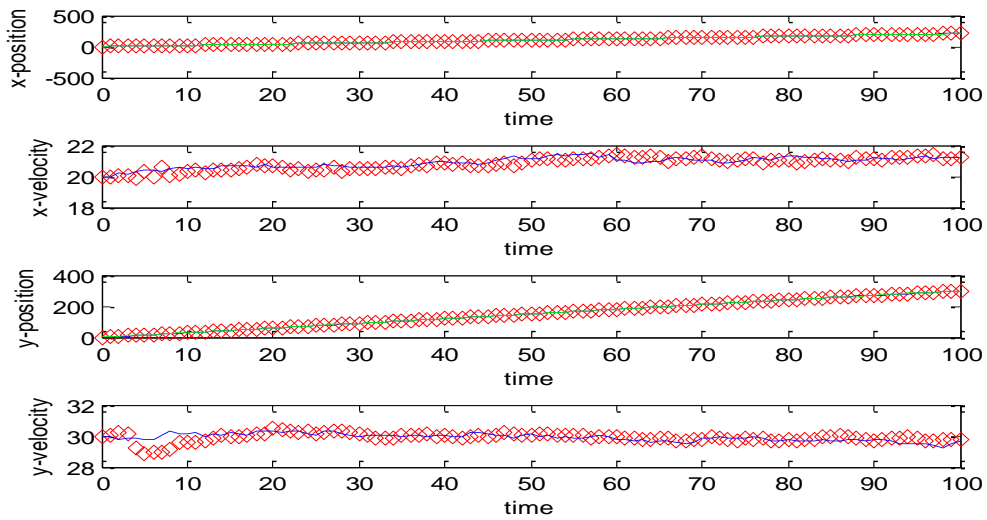
Σχήμα 4.11:  $dt=1, covw=0.01, covv=10, velx=20, vely=30$ , Κώδικας 4

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Παρατηρείται και πάλι πως για τη θέση στους άξονες  $x, y$  πραγματική και η εκτιμώμενη θέση συμπίπτουν. Στις παραστάσεις της ταχύτητας των αξόνων  $x, y$  οι ταχύτητες για μικρό θόρυβο συμπίπτουν, όμως για μεγαλύτερο θόρυβο οι διαφορές είναι μεγάλες ειδικότερα στον άξονα  $y$ . Για αλλαγές στις αρχικές συνθήκες το φίλτρο δεν επηρεάζεται και δίνει καλή εκτίμηση θέσης και ταχύτητας.

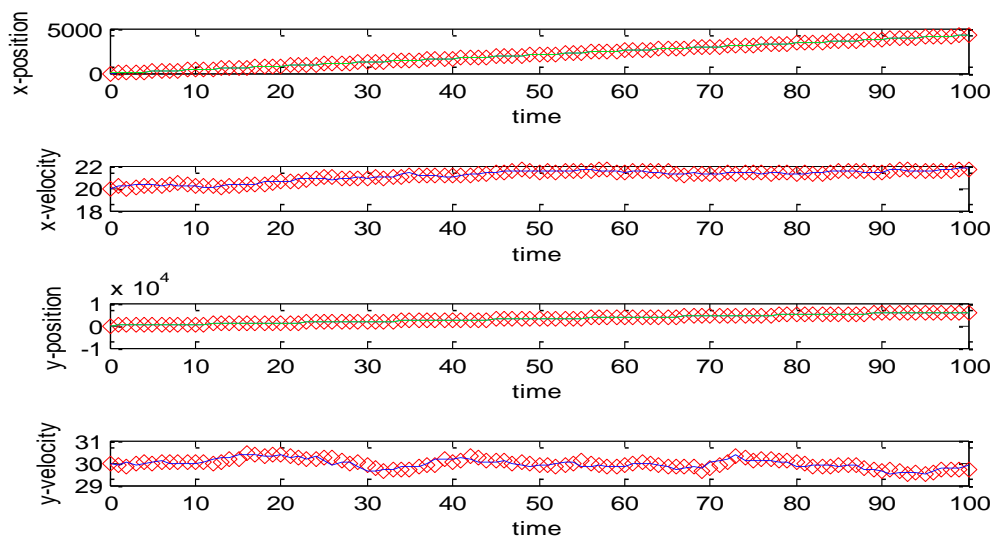
Παρακάτω δίδονται τα διαγράμματα όταν μεταβάλλεται το  $dt$  ώστε να φανούν τυχόν επιδράσεις του.

Για  $dt=0.1, covw=0.01, covv=0.1, velx=20, vely=30$ , ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.12) (`gsm(0.1,0.01,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.12:  $dt=0.1$ ,  $conw=0.01$ ,  $conv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$  Κώδικας 4

Για  $dt=2$ ,  $conw=0.01$ ,  $conv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 4 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.13) (`gsm(2,0.01,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.13:  $dt=2$ ,  $conw=0.01$ ,  $conv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 4

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Για διαφορετικούς χρόνους  $dt$  οι διαφορές στην εκτιμώμενη και πραγματική θέση είναι πολύ μικρές. Το φίλτρο συνεπώς πάλι δεν επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες.



Ο παρακάτω κώδικας είναι παραλλαγή του κώδικα φίλτρου Kalman για **μόνιμη κατάσταση**. Σε αυτό τον κώδικα ο αριθμός επαναλήψεων (kmax), οι πίνακες xest0, pest0 καθώς και οι εντολές του κώδικα του μοντέλου δίνονται μέσα στον κώδικα 5 και όχι στην είσοδο ή με κλήση του κώδικα αντίστοιχα όπως στον κώδικα 3. Ακόμη ο πίνακας H δεν εξαρτάται από το dt. Ως είσοδο δίνονται ο χρόνος dt (διαφορά μεταξύ k και k+1), οι συνδιακυμάνσεις των θορύβων v, w και οι ταχύτητες για τους άξονες x, y (velx, vely) οι οποίες δεν θα αλλάζουν. Ως έξοδο θα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις που απεικονίζουν την πραγματική και εκτιμώμενη θέση του κινητού καθώς και τις μετρήσεις z.

## ΚΩΔΙΚΑΣ 5

```
function [x,xest]=gsmss(dt,covw,covv,velx,vely)

%movement
kmax=100;      %αρχικοποίηση των xest0, pest0 και αριθμού επαναλήψεων
xest0=[0 0 0 0]';
pest0=eye(4);

% GSM position tracking model

% model parameters
F=[1 dt 0 0      %εξίσωση πίνακα 4.12
   0 1 0 0
   0 0 1 dt
   0 0 0 1];
H=[1 0 0 0      %εξίσωση πίνακα 4.19
   0 0 1 0];
G=[dt/2  0      %εξίσωση πίνακα 4.15
   1  0
   0 dt/2
   0  1];
covwx=covw;    %ανάθεση στις συνδιακυμάνσεις των θορύβων για τους 2
άξονες
covwy=covw;
covvx=covv;
covvy=covv;
q=[covwx  0
   0 covwy];
Q=G*q*G';
R=[covvx  0
   0 covvy];

% gaussian noises
wx=sqrt(covwx)*randn(1,kmax);
wy=sqrt(covwy)*randn(1,kmax);
vx=sqrt(covvx)*randn(1,kmax+1);
vy=sqrt(covvy)*randn(1,kmax+1);
W=[wx; wy];    %εξίσωση πίνακα 4.14
V=[vx; vy];    %εξίσωση πίνακα 4.20

% measurements
xest0=[0 velx 0 vely]'; %αρχικοποίηση των xest0, x0,z0
```

```

x0=xest0;
x=[x0];
X=x;
z0=H*x0+V(:,1:1);
z=[z0];
Z=z;
for k=1:kmax
    X=F*X+G*W(:,k:k);      %εξίσωση 3.15
    Z=H*X+V(:,k+1:k+1);    %εξίσωση 3.16
    x=[x,X];               %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα X,Z
    z=[z,Z];
end;

% Riccati Equation
% Steady State Prediction Error Covariance
PP=dare(F',H',Q,R);        %εξίσωση 3.22 Ricatti
% Steady State Gain
K=PP*H'*inv(H*PP*H'+R);    %εξίσωση 3.24 κέρδος
% Steady State Estimation Error Covariance
PE=(eye(4)-K*H)*PP;

% Steady State Kalman Filter parameters
A=(eye(4)-K*H)*F;          %εξίσωση 3.27
B=K;                       %εξίσωση 3.28

% Steady State Kalman Filter
xe=xest0;
xest=[xe];
for k=1:kmax
    xe=A*xe+B*z(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.26
    xest=[xest xe];         %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα xest
end;

% plot estimation
figure(1);                  %γραφική αναπαράσταση
subplot(4,1,1);
plot([0:kmax],xest(1:1,:), 'rd', [0:kmax],x(1:1,:), 'b', [0:kmax],z(1:1,:), 'g');
subplot(4,1,2);
plot([0:kmax],xest(2:2,:), 'rd', [0:kmax],x(2:2,:), 'b');
subplot(4,1,3);
plot([0:kmax],xest(3:3,:), 'rd', [0:kmax],x(3:3,:), 'b', [0:kmax],z(2:2,:), 'g');
subplot(4,1,4);
plot([0:kmax],xest(4:4,:), 'rd', [0:kmax],x(4:4,:), 'b');

```

Έπειτα παρουσιάζεται ο κώδικας 6. Αφορά το φίλτρο Kalman για **σταθερή ταχύτητα και διαφορετικό Q** [22]. Μέσα στον κώδικα εσωκλείεται και ο κώδικας του φίλτρου Kalman μόνιμης κατάστασης. Εξάγει γραφικές παραστάσεις που αναπαριστούν τη θέση και την ταχύτητα στους άξονες x,y. Όπου κόκκινο η πραγματική θέση, μπλε η εκτιμώμενη θέση από το φίλτρο Kalman και πράσινο η εκτιμώμενη θέση από το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης.

### **ΚΩΔΙΚΑΣ 6**

```
function kfcv
% GSM position tracking model
% constant velocity (velx, vely)
% Kalman Filter

% model parameters
velx=20; %αρχικοποίηση των velx, vely, αριθμού επαναλήψεων
vely=30;
kmax=100;
dt=1;
s2q=0.01;
s2r=0.1;
F=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.12
    0 1 0 0
    0 0 1 dt
    0 0 0 1];
H=[1 0 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.19
    0 0 1 0];
Q=s2q.*[dt^3/3 dt^2/2 0 0
        dt^2/2 dt 0 0
        0 0 dt^3/3 dt^2/2
        0 0 dt^2/2 dt];
R=s2r.*eye(2);

x0=[0 0 0 0]';
P0=eye(4);

x=[0 velx 0 vely]';
wnoise=repmat([0 0 0 0],kmax,1)+randn(kmax,4)*chol(Q);
vnoise=repmat([0 0],kmax,1)+randn(kmax,2)*chol(R);
w=wnoise';
v=vnoise';

% measurements (observations)
X=[x0];
Z=[];
for k=1:kmax
x=F*x+w(:,k); %εξίσωση 3.15 X=[X x];
z=H*x+v(:,k); %εξίσωση 3.16 Z=[Z z];
end;

% Kalman Filter
xest=[x0];
pest=[P0];
xe=x0;
pe=P0;
for k=1:kmax
xp=F*xe; %εξίσωση 3.17 x πρόβλεψης
pp=Q+F*pe*F'; %εξίσωση 3.18 p πρόβλεψης
```

```

g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R); %εξίσωση 3.19 κέρδος
xe=(eye(4)-g*H)*xp+g*Z(:,k:k); %εξίσωση 3.20 x εκτίμησης
pe=(eye(4)-g*H)*pp; %εξίσωση 3.21 p εκτίμησης
xest=[xest xe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα xe
pest=[pest pe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα pe
end;

% Steady State Kalman filter
% Riccati Equation
PP=dare(F',H',Q,R); %εξίσωση Riccati 3.22
% Steady State Gain
K=PP*H'*inv(H*PP*H'+R); %εξίσωση κέρδους 3.24
% Steady State Kalman Filter parameters
A=(eye(4)-K*H)*F; %εξίσωση 3.27
B=K; %εξίσωση 3.28

% Steady State Kalman Filter
xestss=[x0];
xe=x0;
for k=1:kmax
    xe=A*xe+B*Z(:,k:k); %εξίσωση 3.26
    xestss=[xestss xe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα xe
end;

% plot estimation
figure(1); %γραφική αναπαράσταση
subplot(2,2,1);
plot([0:kmax],X(1:1,:), 'r', [0:kmax],xest(1:1,:), 'b', [0:kmax],xestss(1:1,:), 'g');
legend('x real', 'xest KF', 'xest SSKF');
xlabel('time');
ylabel('position x-axis');
subplot(2,2,2);
plot([0:kmax],X(2:2,:), 'r', [0:kmax],xest(2:2,:), 'b', [0:kmax],xestss(2:2,:), 'g');
legend('x real', 'xest KF', 'xest SSKF');
xlabel('time');
ylabel('velocity x-axis');
subplot(2,2,3);
plot([0:kmax],X(3:3,:), 'r', [0:kmax],xest(3:3,:), 'b', [0:kmax],xestss(3:3,:), 'g');
legend('x real', 'xest KF', 'xest SSKF');
xlabel('time');
ylabel('position y-axis');
subplot(2,2,4);
plot([0:kmax],X(4:4,:), 'r', [0:kmax],xest(4:4,:), 'b', [0:kmax],xestss(4:4,:), 'g');
legend('x real', 'xest KF', 'xest SSKF');
xlabel('time');
ylabel('velocity y-axis');

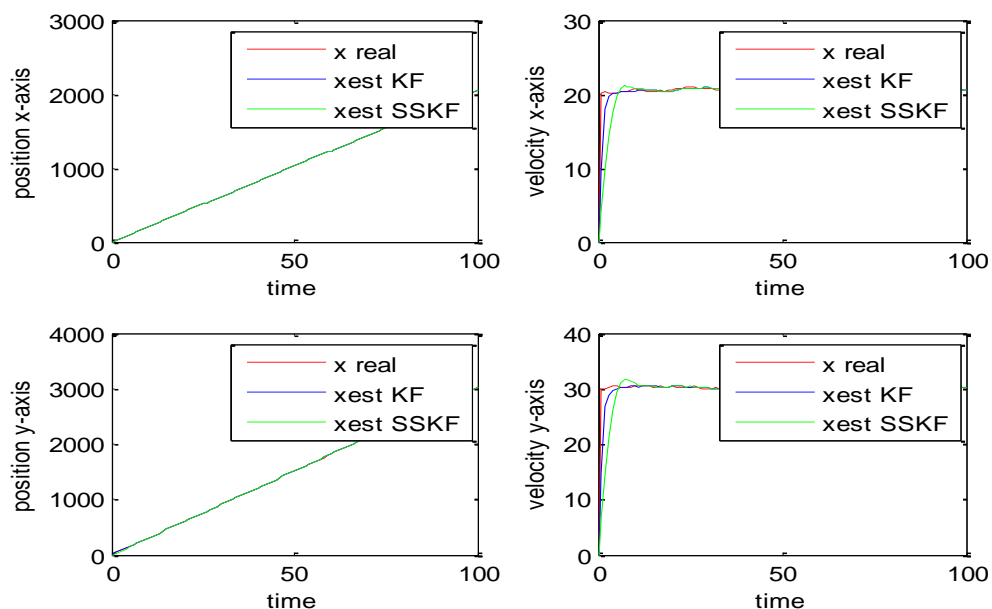
```

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν εάν μεταβληθούν κάθε φορά τα  $dt$ ,  $covw$  και  $conw$ .

Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, το πρώτο διάγραμμα παριστάνει το  $s_x$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το δεύτερο το  $u_x$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $x$ ), το τρίτο το  $s_y$  ως προς το χρόνο (τη θέση του κινητού στον άξονα των  $y$ ) και το τελευταίο το  $u_y$  ως προς το χρόνο (την ταχύτητα του κινητού στον άξονα των  $y$ ).

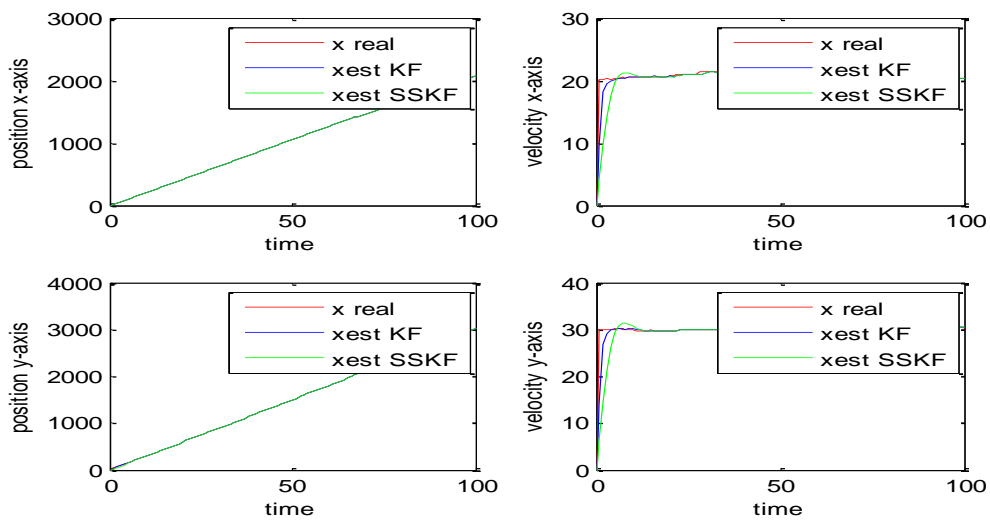
- Μεταβολή του  $conw$  για να παρουσιαστούν τυχόν επιδράσεις του.

Για  $dt=1$ ,  $covw=0,1$ ,  $conw=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.14) (`kfcv(1,0.1,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.14:  $dt=1$ ,  $covw=0,1$ ,  $conw=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 6

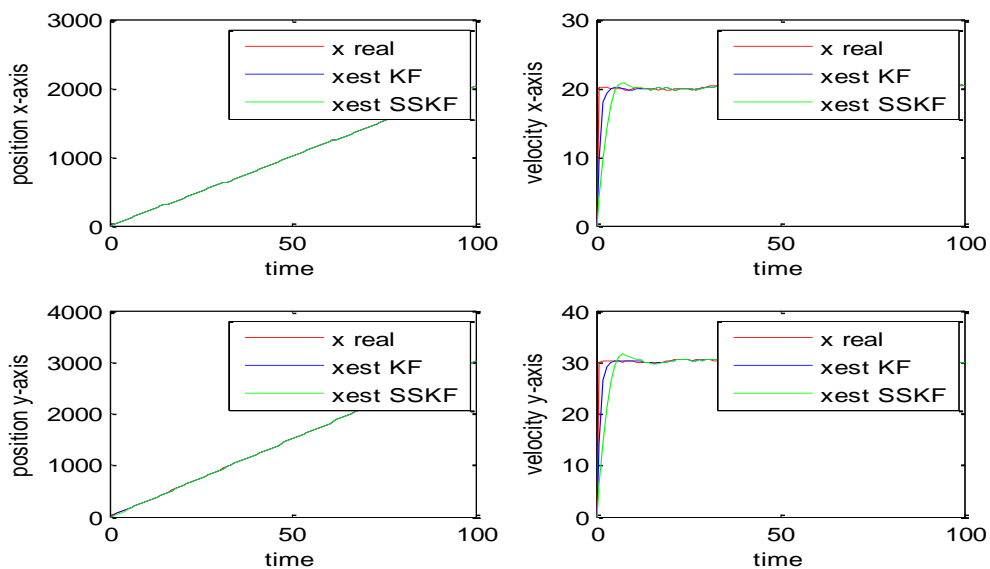
Για  $dt=1$ ,  $covw=1$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$  ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.15) (`kfcv(1,1,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.15:  $dt=1$ ,  $covw=1$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 6

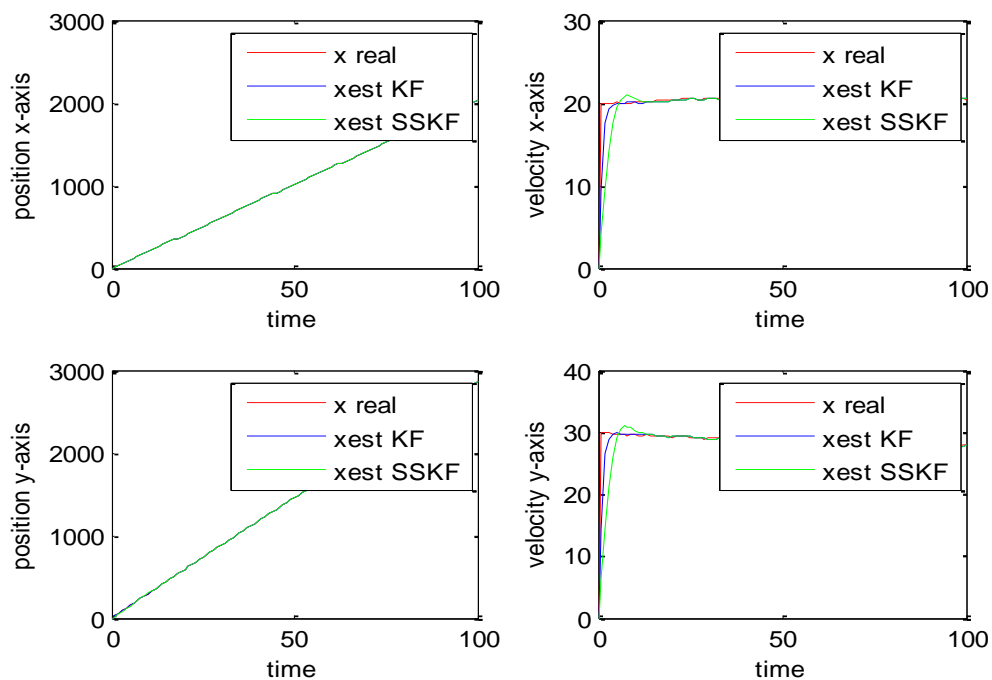
- Μεταβολή του  $covv$  για να παρουσιαστούν τυχόν επιδράσεις του.

Για  $dt=1$ ,  $covw=0.1$ ,  $covv=0$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, (Σχήμα 4.16) (`kfcv(1,0.1,0,20,30)`)



Σχήμα 4.16:  $dt=1$ ,  $covw=0.1$ ,  $covv=0$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 6

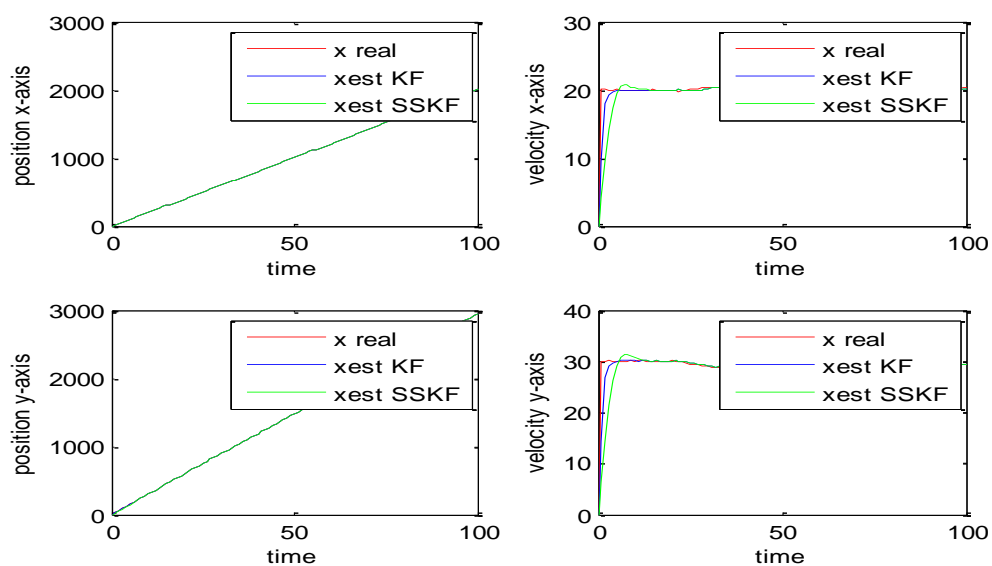
Για  $dt=1$ ,  $covw=0.1$ ,  $covv=10$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.17) (`kfcv(1,0.1,10,20,30)`)



Σχήμα 4.17:  $dt=1$ ,  $covw=0.1$ ,  $covv=10$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 6

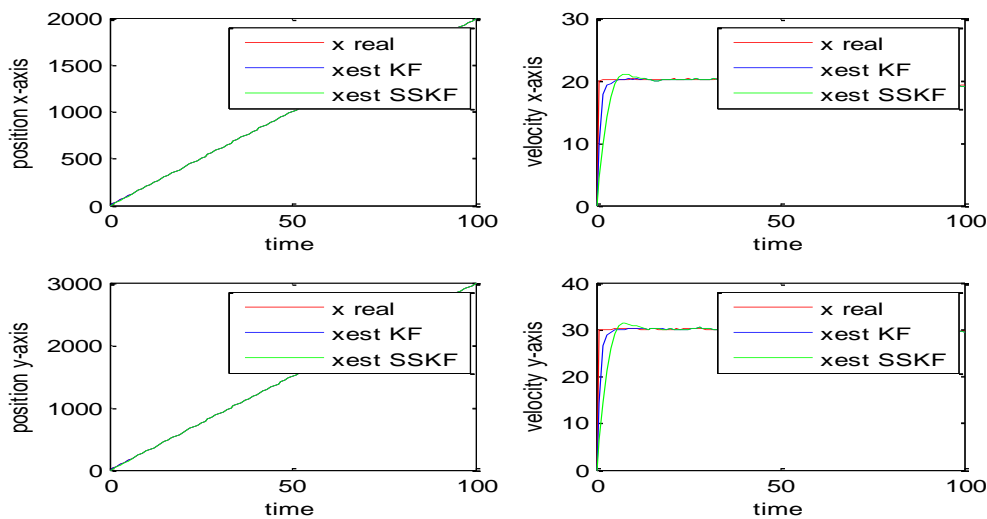
- Μεταβολή του  $dt$  για να παρουσιαστούν τυχόν επιδράσεις του.

Για  $dt=1$ ,  $covw=0.01$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.18) (`kfcv(1,0.01,0.1,20,30)`)



Σχήμα 4.18:  $dt=1$ ,  $covw=0.01$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , Κώδικας 6

Για  $dt=2$ ,  $covw=0.01$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$ , ο Κώδικας 6 δίνει τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 4.19) (`kfcv(2,0.01,0.1,20,30)`)



Σχήμα 19:  $dt=2$ ,  $covw=0.01$ ,  $covv=0.1$ ,  $velx=20$ ,  $vely=30$

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Παρατηρείται πως στους άξονες  $x, y$  οι γραφικές παραστάσεις των θέσεων δεν αλλάζουν. Οι εκτιμώμενες θέσεις του κινητού που προκύπτουν από το φίλτρο Kalman καθώς και από το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης συμπίπτουν με την πραγματική θέση. Όσον αφορά στις ταχύτητες στους άξονες  $x, y$  υπάρχουν ελάχιστες διαφορές μεταξύ των τριών.

Οι δύο τελευταίοι κώδικες ασχολούνται με το φίλτρο Kalman για κυκλική κίνηση. Ο κώδικας 7 αφορά το μοντέλο, όπως και ο κώδικας 1, και εξάγει ως αποτέλεσμα τις μετρήσεις  $z$  οι οποίες εισάγονται ως είσοδος στον κώδικα 8 που υλοποιεί το φίλτρο Kalman.

## ΚΩΔΙΚΑΣ 7

```
function [x,z]=modela(dt,covwx,covwy,covvx,covvy,x0,kmax)

% model

% model parameters
F=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.12
  0 1 0 0
  0 0 1 dt
  0 0 0 1];
H=[1 dt 0 0 %εξίσωση πίνακα 4.19
  0 0 1 dt];
G=[dt/2 0 %εξίσωση πίνακα 4.15
  1 0
  0 dt/2
```



```

0 1];

% gaussian noises
wx=sqrt(covwx)*randn(1,kmax);
wy=sqrt(covwy)*randn(1,kmax);
vx=sqrt(covvx)*randn(1,kmax+1);
vy=sqrt(covvy)*randn(1,kmax+1);
W=[wx; wy];
V=[vx; vy];
% measurements
x=[x0]; %αρχικοποίηση των x,z0
X=x;
z0=H*x0+V(:,1:1);
z=[z0];
Z=z;
for k=1:kmax
    X=F*X+G*W(:,k:k); %εξίσωση 3.15
    Z=H*X+V(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.16
    x=[x,X]; %αποθήκευση σε νέα στήλη των νέων X,Z
    z=[z,Z];
end;
z=[0:kmax; zeros(1,kmax+1)];
th=linspace(0,2*pi,kmax+1); %δημιουργία κύκλου
z=[cos(th); sin(th)]; %αποθηκεύεται στο z το ημίτονο και συνημίτονο
της th

```

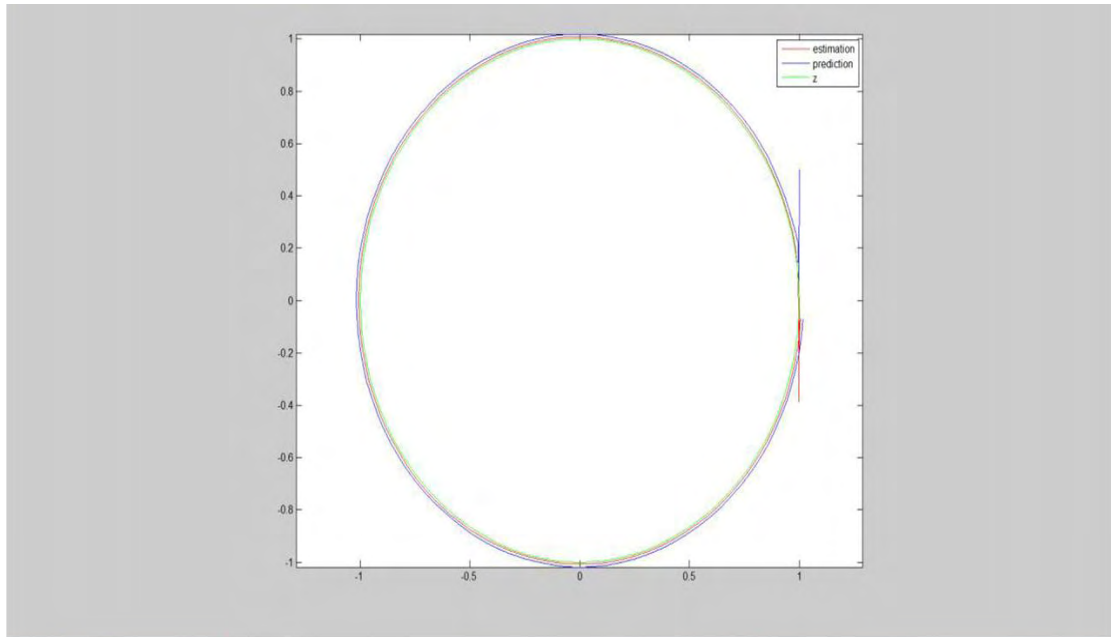
## ΚΩΔΙΚΑΣ 8

```
function
[xest,pest,xpp]=kalmanfilter(dt,covwx,covwy,covvx,covvy,x0,pest0,z,km
ax)
% Kalman Filter
% Kalman Filter parameters
I=eye(4);           %μοναδιαίος πίνακας μεγέθους 4x4
F=[1 dt 0 0        %εξίσωση πίνακα 4.12
  0 1 0 0
  0 0 1 dt
  0 0 0 1];
H=[1 dt 0 0        %εξίσωση πίνακα 4.19
  0 0 1 dt];
G=[dt/2 0          %εξίσωση πίνακα 4.15
  1 0
  0 dt/2
  0 1];
q=[covwx 0
  0 covwy];
Q=G*q*G';
R=[covvx 0
  0 covvy];

% Kalman Filter estimation
xe=x0;             %αρχικοποίηση των xe,pe
pe=pest0;
xest=[xe];
pest=[pe];
xp=F*xe;
xpp=[xp];
for k=1:kmax
  xp=F*xe;        %εξίσωση 3.17 x πρόβλεψης
  pp=Q+F*pe*F';  %εξίσωση 3.18 p πρόβλεψης
  g=pp*H'*inv(H*pp*H'+R); %εξίσωση 3.19 κέρδος
  xe=(I-g*H)*xp+g*z(:,k+1:k+1); %εξίσωση 3.20 x εκτίμησης
  pe=(I-g*H)*pp; %εξίσωση 3.21 p εκτίμησης
  xest=[xest xe]; %αποθηκεύει σε νέα στήλη τα νέα xe,pe
  pest=[pest pe];
  xpp=[xpp xp];
end;

% plot position estimated
figure(1); %γραφική αναπαράσταση
plot(xest(1:1,:),xest(3:3:,:), 'r',xpp(1:1,:),xpp(3:3:,:),z(1,:),z(2,:),
'g');
legend('estimation','prediction','z');

axis equal
```



Σχήμα 4.20:Κυκλική κίνηση

#### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Στο πάνω διάγραμμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του κώδικα 8. Παρατηρείται πως ακόμη και σε κυκλική κίνηση η πραγματική και η εκτιμώμενη θέση ταυτίζονται.

## 4.4 Υπολογιστικός Φόρτος φίλτρου Kalman

Οι δύο κώδικες Kalman filter και steady state Kalman filter που αναπτύχθηκαν παραπάνω υπολογίζουν θεωρητικά τις ίδιες εκτιμήσεις. Έτσι προκειμένου να συγκριθούν οι αλγόριθμοι για τον υπολογιστικό τους χρόνο χρειάζεται να συγκριθεί ο υπολογιστικός φόρτος τους. Ο φόρτος των φίλτρων εξαρτάται από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος κατάστασης και τη διάσταση  $m$  του διανύσματος μετρήσεων και αφορά μία επανάληψη των αλγορίθμων. Ο υπολογιστικός φόρτος απαιτεί να είναι γνωστές οι διαστάσεις των πινάκων και περιλαμβάνει τις βαθμωτές λειτουργίες (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) των οποίων ο υπολογιστικός φόρτος θεωρείται ίσος.

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζεται ο υπολογιστικός φόρτος του πλήθους των βαθμωτών πράξεων (πρόσθεσεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις) των πινάκων που χρειάζονται.

Πίνακας 4.1: Υπολογιστικός φόρτος των πράξεων των πινάκων

Πράξεις Πίνακα	Υπολογιστικός Φόρτος
$A_{n \times m} + B_{n \times m} = C_{n \times m}$	$nm$
$A_{n \times n} + B_{n \times n} = S_{n \times n}$ , $S$ : συμμετρικός	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$I_{n \times n} + A_{n \times n} = B_{n \times n}$ , $I$ : διαγώνιος	$n$
$A_{n \times m} * B_{m \times k} = C_{n \times k}$	$2nmk - nk$
$A_{n \times m} * B_{m \times m} = S_{n \times n}$ , $S$ : συμμετρικός	$n^2m + nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$[A_{n \times n}]^{-1} = B_{n \times n}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$

Ο υπολογιστικός φόρτος του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman, που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) και (3.21), προκύπτει με την κατάλληλη εφαρμογή του φόρτου των πράξεων που παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1 για τις αντίστοιχες πράξεις που σημειώνονται στο φίλτρο.

Πίνακας 4.2: Υπολογιστικός φόρτος για το φίλτρο Kalman

Χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman(TIKF)		
Πράξεις	Διαστάσεις Πίνακα	Υπολογιστικός Φόρτος
$x(k+1/k) = Fx(k/k)$ (3.17)	$(n \times n)(n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Y_1 \equiv FP(k/k)$	$(n \times n)(n \times n)$	$2n^3 - n^2$
$Y_2 \equiv Y_1 F^T$	$(n \times n)(n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
$P(k+1/k) = Y_2 + Q$ (3.18)	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$Y_3 \equiv HP(k+1/k)$	$(m \times n)(n \times n)$	$2n^2 m - nm$
$Y_4 \equiv Y_3 H^T$	$(m \times n)(n \times m)$	$nm^2 + nm - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$
$Y_5 \equiv Y_4 + R$	$(m \times m) + (m \times m)$	$\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$
$[Y_5]^{-1}$	$(m \times m)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$
$K(k+1) = Y_3^T [Y_5]^{-1}$ (3.19)	$(n \times m)(m \times m)$	$2nm^2 - nm$
$Y_6 \equiv K(k+1)H$	$(n \times m)(m \times n)$	$2n^2 m - n^2$
$Y_7 \equiv I - Y_6$	$I_{n \times n} + (n \times n)$	$n$
$Y_8 \equiv Y_7 x(k+1/k)$	$(n \times n)(n \times 1)$	$2n^2 - n$
$Y_9 \equiv K(k+1)z(k+1)$	$(n \times m)(m \times 1)$	$2nm - n$
$x(k+1/k+1) = Y_8 + Y_9$ (3.20)	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$P(k+1/k+1) = Y_7 P(k+1/k)$ (3.21)	$(n \times n)(n \times n)$	$n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
<b>ΣΥΝΟΛΟ:</b>	$CB_{TIKF} = 4n^3 + 3.5n^2 - 1.5n + 4n^2 m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m)$	

Συνεπώς

$$CB_{TIKF} = 4n^3 + 3.5n^2 - 1.5n + 4n^2 m + nm + 3nm^2 + \frac{1}{6}(16m^3 - 3m^2 - m) \quad (4.21)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.21) και για τις τιμές των m,n που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3 προκύπτει ο υπολογιστικός φόρτος του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman, που απαιτείται για τον εντοπισμό θέσης συνδρομητή σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών:

Πίνακας 4.3 Υπολογιστικός φόρτος εντοπισμού θέσης συνδρομητή στο δίκτυο (χρονικά αμετάβλητο)

n	m	$CB_{TIKF}$
4	2	509

Ο υπολογιστικός φόρτος του steady state φίλτρου Kalman, που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), και (3.24) προκύπτει με την κατάλληλη εφαρμογή του φόρτου των πράξεων που παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1 για τις αντίστοιχες πράξεις που σημειώνονται στο φίλτρο στη μόνιμη κατάσταση του φίλτρου Kalman.

Πίνακας 4.4 Υπολογιστικός φόρτος για το steady state Kalman filter

Steady State Kalman Filter (SSKF)		
Πράξεις Πίνακα	Διαστάσεις Πίνακα	Υπολογιστικός Φόρτος
$Y_{10} \equiv Kz(k+1)$	$(n \times m)(m \times 1)$	$2nm - n$
$Y_{11} = [I - KH]Fx(k+1)$	$(n \times n)(n \times 1)$	$2n^2 - n$
$x(k+1/k+1) = Y_{11} + Y_{10}$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
<b>ΣΥΝΟΛΟ:</b> $CB_{SSKF} = 2n^2 + 2nm - n$		

Συνεπώς

$$CB_{SSKF} = 2n^2 + 2nm - n \quad (4.22)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.22) και για τις τιμές των m,n που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5 προκύπτει ο υπολογιστικός φόρτος του φίλτρου Kalman σε μόνιμη κατάσταση, που απαιτείται για τον εντοπισμό θέσης συνδρομητή σε ασύρματο δίκτυο επικοινωνιών:

Πίνακας 4.5 Υπολογιστικός φόρτος εντοπισμού θέσης συνδρομητή στο δίκτυο (μόνιμης κατάστασης)

n	m	$CB_{SSKF}$
4	2	44

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από τους Πίνακες 4.3 και 4.5 συμπεραίνουμε ότι το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης είναι πιο γρήγορο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman. Το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό επειδή αποτελεί στοιχείο σύγκρισης του χρόνου εκτέλεσης των αλγορίθμων γιατί είναι ανεξάρτητο οποιουδήποτε παράγοντα (χωρητικότητα, ταχύτητα, μνήμη, κ.α.) του ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου υλοποιείται το φίλτρο, εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις των πινάκων της κατάστασης και της μέτρησης.

## ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα τελευταία χρόνια συνεχώς αυξάνονται φαινόμενα κατά τα οποία είναι δύσκολος ο εντοπισμός της θέσης ενός κινητού. Για παράδειγμα επείγουσες κλήσεις όπου ο καλών αδυνατεί να δώσει την ακριβή τοποθεσία του, μη δυνατότητα εύρεσης της θέσης κάποιου ατόμου, ανικανότητα προσανατολισμού. Έτσι τα συστήματα και οι συσκευές εντοπισμού καθιστώνται σημαντικό κομμάτι της σύγχρονης κοινωνίας για διευκόλυνση του πληθυσμού.

Η παρούσα πτυχιακή ασχολήθηκε με το πρόβλημα του εντοπισμού ενός συνδρομητή σε ένα δίκτυο με τη χρήση του φίλτρου Kalman. Δηλαδή ενός αλγορίθμου που παράγει μια εκτίμηση της κατάστασης ενός συστήματος και ο οποίος χρησιμοποιεί το μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος με γνωστές εισόδους αλλά και πολλαπλές διαδοχικές μετρήσεις για να σχηματιστεί μια εκτίμηση διαφόρων ποσοτήτων αυτού του συστήματος, στη συγκεκριμένη περίπτωση της θέσης και της ταχύτητας. Περιγράφηκε η μαθηματική φύση του φίλτρου και σχεδιάστηκαν οι αλγόριθμοί του σε προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab.

Το πρόβλημα που εξετάστηκε στην παρούσα πτυχιακή εργασία είναι κατά πόσο το φίλτρο παρέχει βέλτιστη εκτίμηση. Για να ελεγχθεί λοιπόν η εκτίμησή του, στο Κεφάλαιο 4 αναπτύχθηκαν οι αποδείξεις ώστε να προκύψουν οι πίνακες που απαρτίζουν τις εξισώσεις του φίλτρου. Στη συνέχεια εκτελέστηκε ο βασικός κώδικας υλοποίησης του φίλτρου Kalman καθώς και άλλοι τρεις κώδικες για διαφορετικές μεταβλητές εισόδου και διαφορετικές τιμές των μεταβλητών αυτών ώστε από την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, δηλαδή τις γραφικές παραστάσεις που εξήγαγαν οι κώδικες κάθε φορά, να προκύψει τελικά πως το φίλτρο παρέχει βέλτιστη εκτίμηση της θέσης κάποιου κινητού. Ο υπολογιστικός φόρτος αποδεικνύει ότι το φίλτρο Kalman μόνιμης κατάστασης είναι πολύ πιο γρήγορο από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman (βλέπε τα αριθμητικά νούμερα στους Πίνακες 4.3, 4.5 και σύγκρινε). Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μόνιμης κατάστασης είναι ανεξάρτητος οποιουδήποτε άλλου παράγοντα (χωρητικότητα, ταχύτητα, μνήμα, κ.α.) του ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου υλοποιείται το φίλτρο, εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις των πινάκων της κατάστασης και της μέτρησης.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] B.O. Anderson, J. B. Moore , *Optimal filtering*, Dover Publications, INC Mineola, New York, 2005.
- [2] N. Assimakis, M. Adam, Discrete Time Kalman and Lainiotis Filters Comparison, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 1, no. 13, 2007, 635-659.
- [3] N. Assimakis, M. Adam, Global Systems for Mobile Position Tracking Using Kalman and Lainiotis Filters, *Scientific World Journal*, Vol. 2014, Article ID 130512, 2014, 8 pages.
- [4] N. Assimakis, M. Adam, Steady State Kalman Filter for Periodic Models: A New Approach, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 4, no. 5, 2009, 201 – 218
- [5] N. Assimakis, M. Adam, FIR implementation of the steady-state Kalman filter *Int. J. Signal and Imaging Systems Engineering*, Vol. 1, Nos. 3/4, 2008.
- [6] N. Assimakis, M. Adam, A. Douladiris, Information filter and Kalman filter comparison: selection of the faster filter, *International Journal of Information Engineering*.
- [7] N. Assimakis, D.Q. Lainiotis, S.K Katsikas, F.L. Sanida, A survey of recursive algorithms for the solution of the discrete time Riccati equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Methodr & Applications*. Vol. 30, No. 4, *Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts 0 1997 Elsevier Science Ltd 1997*, pp. 2409-2420.
- [8] J. Barbosa Bastos Gomes, *An Overview on Target Tracking Using Multiple Model Methods*, Master's Thesis in Electrical and Computer Engineering , Instituto Superior Tecnico, Universidade Tecnica de Lisboa, 2008, <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395137804053/thesis.pdf>
- [9] A. Baterman, *Digital Communications, Design for the real world* , 1998
- [10] A.Benavoli , L.Chisci , A.Farina, Fibonacci sequence, golden section, Kalman filter and optimal control, Istituto Dalle Molle di Studi sull'Intelligenza Artificiale Manno, Switzerland, DSI, Universita di Firenze, Firenze, Italy Engineering Division, SELEX-SistemIntegrati S.p.A., Rome, Italy
- [11] A. Capponi , A.Farina , C.Pilotto, Expressing stochastic filters via number sequences, Department of Computer Science, California Institute of Technology USA, Business Unit of Large Systems, 2009.
- [12] Ir. Cazan, Kalman Filters.
- [13] J. Donogue, State estimation and control of the Fibonacci system, Department of Electrical and Computer Engineering,Cleveland USA 2010.
- [14] J. Dubois, J. S. Daba, M. Nader, C. El Ferkh, GSM position tracking using a Kalman filter, *World Academy of Science, Engineering and Technology*
- [15] R. Faragher,Understanding the basis of the Kalman filter via a simple and intuitive derivation, *IEEE Signal processing magazine* 2012.



- [16] N. J. Higham, P. A. Knight, Matrix powers in finite precision arithmetic, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [17] R. E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md (1960)
- [18] M.Nájar, J. Vidal, Kalman tracking based on TDOA for UMTS Mobile Location, Dept. of Signal Theory and Communications, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [19] M.Nájar, J. Vidal, Kalman tracking for mobile location in NLOS situations, Dept. of Signal Theory and Communications, Universitat Politècnica de Catalunya
- [20] M. Nájar, J. Vidal, A. Kjellström, Kalman tracking for UMTS mobile location, Dept. of Signal Theory and Communications, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [21] J.E Padgett, C.G Guenther, T. Hattori, "Overview of Wireless Personal Communications, IEEE Communications Magazine, Vol. 33, No. 1, January , 1995.
- [22] I. Reid, *Kalman Filter*, Hilary Term, 2001.
- [23] G . Welch, G. Bishop, An introduction to Kalman filter, Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill , 2006.
- [24] Ν. Αντωνίου, Π. Δημητριάδης, Κ. Καμπούρης, Κ. Παπαμιχάλης, Λ. Παπασιμίπα *Φυσική Β' Γυμνασίου*, Οργανισμός εκδόσεων διδακτικών βιβλίων.
- [25] Ν. Ασημάκης, *Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Αράκυνθος, 2009
- [26] Χ. Δημητρακόπουλος, Πρόβλεψη πρωτεϊνικών αλληλεπιδράσεων με τη χρήση αλγορίθμων υπολογιστικής νοημοσύνης, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών , 2010.
- [27] Μ.Ε. Θεολόγου , *Δίκτυα κινητών και προσωπικών επικοινωνιών*.
- [28] Μ. Λάζαρος, *Φίλτρο Kalman*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης , 2012
- [29] Δ. Δ. Παναγιώ, *Ανάλυση συστημάτων για τον υπολογισμό της ΦΡΑΚΤΑΛ διάστασης σε συνδυασμό με NARMAX μοντέλα*, Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία , Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2012.
- [30] Θ. Τριανταφύλλου, *Το φίλτρο Kalman σε ανομοιόμορφη δειγματοληψία*, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Πατρών , 2010.

#### ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

[31] <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>

[32] <http://en.wikipedia.org>

