ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης και Παραγωγή Διδακτικού Υλικού

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΜΕΣΑ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ. Η ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΚΟΥΡΙΝΙΩΤΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ

ΒΟΛΟΣ 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάγκη και η αγωνία για παροχή μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας αγγίζει τα εκπαιδευτικά συστήματα όλων των χωρών και προβληματίζει διαχρονικά εκπαιδευτικούς και θεωρητικούς του χώρου της διδακτικής. Η καλύτερη δυνατή επίτευξη των διδακτικών και μαθησιακών στόχων ενδιαφέρει κάθε γνωστική περιοχή, όπως βέβαια τα μαθηματικά καθώς και τη γεωμετρία, κλάδο των οποίων αυτή αποτελεί.

Ιδιαίτερα για την περιοχή των μαθηματικών- επομένως και της γεωμετρίας- ο Van de Walle (2005: 1) επισημαίνει τέσσερα βασικά στοιχεία τα οποία θα πρέπει να διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί για μια αποτελεσματική διδασκαλία: 1)να γνωρίζουν τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά», 2) να κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τη γνώση, 3) να σχεδιάζουν δραστηριότητες που σχετίζονται με επίλυση προβλημάτων και 4) να ενσωματώνουν την αξιολόγηση στη διδακτική διαδικασία.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο αναζήτησης και αποτύπωσης ενός διδακτικού και μαθησιακού περιβάλλοντος στο χώρο της γεωμετρίας το οποίο θα βοηθά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών, η παρούσα εργασία περιγράφει τη διεξαγωγή ενός διδακτικού πειράματος για τη διδασκαλία των χαρακτηριστικών στοιχείων των τριγώνων σε μαθητές[1] ΣΤ΄ Δημοτικού επικεντρώνοντας στην οικοδόμηση των εννοιών από τους μαθητές σύμφωνα με την εποικοδομιστική θεώρηση και το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, αλλά και στη διερεύνηση των εννοιών μέσω μιας ποικιλίας διαφορετικών πλαισίων αναπαράστασης.

Τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων αποτελούν τον πυρήνα του συγκεκριμένου παραδείγματος καθώς σύμφωνα με τον Zoltan Dienes η ποικιλία αναπαράστασης μιας ιδέας και η πολλαπλή έκφρασή της υποστηρίζει την κατανόησή της από τους μαθητές (Moyer, 2002: 175,176), ενώ και ο Van de Walle επισημαίνει ότι οι μεταφορές ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών βοηθούν στην ανάπτυξη νέων εννοιών (Van de Walle, 2001: 47).

----

[1] Όπου μαθητές υποδηλώνονται μαθητές και μαθήτριες.

Στο παρόν διδακτικό πλάνο συμπεριλαμβάνονται σχήματα σε μοτίβα, χειραπτικά υλικά και μοντέλα όπως ο γεωπίνακας, τριγωνικά πλαστικά πλακίδια και ξύλινα τρίγωνα δυναμικής μεταβολής και τέλος η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Gabri-Geometry II (Laborde, 1990).

Βέβαια η χρήση πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης από μόνη της δεν είναι ικανή για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και της μαθηματικής συλλογιστική τους εάν δεν συνδυαστεί από κατάλληλες δραστηριότητες και από την παρακίνησή τους να αιτιολογούν και να δίνουν εξηγήσεις για τις κατασκευές και τις λύσεις που προτείνουν. Όπως αναφέρει ο de Villiers, η διδασκαλία συχνά επικεντρώνεται στην επιβεβαίωση και παραλείπει την εξερεύνηση και τις εξηγήσεις (Jones, 2000: 56). Η παρούσα μελέτη δίνει βαρύτητα προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς είναι ανάγκη να απαγκιστρωθούμε από το στόχο των υπολογιστικών δεξιοτήτων και της απλής εφαρμογής ακατανόητων κανόνων και να στραφούμε προς την ανάπτυξη των επιχειρημάτων, της ερμηνείας και της αιτιολόγησης.

Περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο περιλαμβάνει αρχές και έννοιες που σχετίζονται με τη διδασκαλία της γεωμετρίας, των τριγώνων και του εμβαδού και το πώς αυτές προσεγγίζονται μέσα από τα Νέα Πιλοτικά Αναλυτικά προγράμματα Σπουδών. Παρουσιάζονται τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele, και οι βασικές αρχές της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας για τη γνώση, την ανάπτυξη της κατανόησης και το συσχετισμό της με τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων. Παράλληλα παρουσιάζονται και οι θέσεις της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης του Vygotsky. Αναλύεται η σημασία και η χρήση των χειραπτικών μοντέλων στη διδακτική διαδικασία, και τέλος η ενσωμάτωση των Τεχνολογιών των Πληροφοριών και των Επικοινωνιών στην εκπαίδευση, με ιδιαίτερη αναφορά στα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας.

Επιπρόσθετα παρουσιάζεται ο μεθοδολογικός σχεδιασμός και η διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος, η παρουσίαση και η ανάλυση των αποτελεσμάτων και τέλος ακολουθεί μία συζήτηση γύρω από τα αποτελέσματα αυτά.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΕΙΔΟΥΣ -ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

Για τη διερεύνηση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος για τη διδασκαλία των χαρακτηριστικών στοιχείων των τριγώνων και του εμβαδού τους, το οποίο θα στηρίζεται στην εποικοδομιστική θεώρηση και στο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο και θα προσεγγίζει τις έννοιες μέσα σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνεται η χρήση χειραπτικών υλικών και λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, επιλέχθηκε το ερευνητικό είδος του διδακτικού πειράματος.

Η Bell (1999: 11, 28) αναφέρει ότι ο μεθοδολογικός σχεδιασμός ενός ερευνητικού προγράμματος είναι μια απαιτητική διαδικασία και εξαρτάται από τη φύση της έρευνας και από το είδος των πληροφοριών που απαιτούνται. Όμως επισημαίνει ότι η επιλογή του κατάλληλου τύπου μπορεί να οδηγήσει στην εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Με βάση την παραπάνω αρχή και αποδεχόμενοι τη θέση των νατουραλιστικών και ερμηνευτικών προσεγγίσεων ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά δεν διέπεται από γενικούς νόμους και ότι η κατανόησή της μπορεί να γίνει μόνο από κάποιον ερευνητή που έχει κοινό πλαίσιο αναφοράς με τα άτομα αυτά και λαμβάνοντας υπόψη κάποια επιπρόσθετα χαρακτηριστικά τους όπως: «έρευνα μικρής κλίμακας», «υποκειμενικότητα», «μη στατικό μοντέλο», «ερμηνεία του συγκεκριμένου», «κατανόηση περισσότερο των δράσεων», «ο ερευνητής ανθρώπινο εργαλείο» (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 31, 58, 237), επιλέξαμε το διδακτικό πείραμα ως μια εκδοχή των παραπάνω προσεγγίσεων, το οποίο χρησιμοποιεί ποιοτικές τεχνικές συλλογής , ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων και ενδείκνυται για την εκπαιδευτική έρευνα τέτοιας μορφής.

Το διδακτικό πείραμα προσπαθεί να περιγράψει, να ερμηνεύσει και να κατανοήσει ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ενσωματώνονται κάποιες διδακτικές καινοτομίες καθώς και να αποτυπώσει τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής. Συν τοις άλλοις παρέχει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να κατανοήσει τη διαδικασία σκέψης και μάθησης των μαθητών, εφόσον βέβαια όπως επισημαίνει και η Dina van Hiele-Geldof (Σαλονικιός, 2008: 21) «η ανάλυση των διαδικασιών μάθησης σε μια πειραματική κατάσταση επιτρέπει στην έρευνα να διεισδύσει βαθύτερα στην ίδια την πραγματική διαδικασία σκέψης».

Πρωταρχικός στόχος για τον ερευνητή είναι να βιώσει άμεσα το μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών και η εμπειρία αυτή μπορεί να προέλθει μόνο μέσω της διδασκαλίας. Επομένως είναι ουσιώδες συστατικό για το διδακτικό πείραμα η ακέραια ενεργητική εμπλοκή του ερευνητή είτε ως «δάσκαλος-ερευνητής» είτε ως «μάρτυρας-παρατηρητής» της διδασκαλίας (Steffe & Thompson, 2000: 267, 286, 306). Η θέση αυτή δίνει τη δυνατότητα της καταγραφής και της παρακολούθησης όλων των εκφάνσεων συμμετοχής, αλληλεπίδρασης και έκφρασης των μαθητών. Οι μαθητές έχουν τη δική τους μαθηματική πραγματικότητα η οποία υποδηλώνεται με τη γλώσσα και τις δράσεις τους καθώς εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες. Για να κατανοήσουμε την πραγματικότητά τους θα πρέπει να κοιτάξουμε πίσω από αυτά κάνοντας σύμφωνα με τον όρο του von Glasersfeld «εννοιολογική ανάλυση» (Steffe & Thompson, 2000: 269, 270, 287). Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις μαθηματικές έννοιες γίνεται μέσω μιας ακολουθίας διδακτικών επεισοδίων κατά τα οποία υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση του ερευνητή και των μαθητών και η οποία αλληλεπίδραση διαμορφώνει και τροποποιεί τα εννοιολογικά σχήματα των μαθητών αλλά και τις ερμηνείες των ερευνητών στην προσπάθειά τους να δομήσουν μοντέλα εννοιολογικών αλλαγών των μαθηματικών κατασκευών των μαθητών. Και οι δύο πλευρές μαθαίνουν μέσα από τις διαδικασίες του διδακτικού πειράματος (Steffe & Thompson, 2000: 279, 289, 296-299). Τη θέση αυτή υποστηρίζουν και οι Cobb, Wood και Yackel (1990: 125, 139) οι οποίοι αναφέρουν χαρακτηριστικά ότι οι τάξεις μεταμορφώνονται σε «μαθησιακά περιβάλλοντα» τόσο για το δάσκαλο όσο και για το μαθητή και πως «ο δάσκαλος και οι μαθητές αμοιβαία κατασκευάζουν ένα κοινωνικό πλαίσιο διαμέσου του οποίου μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο».

Στο πλαίσιο αυτής της αμοιβαίας μάθησης και της αναζήτησης τροποποιημένων ερμηνειών αναδιατυπώνεται ο ρόλος του δασκάλου και των μαθητών και ο ρόλος της έρευνας μετασχηματίζεται πέρα από την απόμακρη παρατήρηση και κρίση μιας σχολικής τάξης (Kelly & Lesh, 2000: 192, 193). Οι Kelly & Lesh αναφέρουν ότι: «το διδακτικό πείραμα επικεντρώνεται στην ανάπτυξη που συμβαίνει διαμέσου πλούσιων εννοιολογικά περιβαλλόντων τα οποία ρητά σχεδιάστηκαν για να βελτιστοποιήσουν τις πιθανότητες να συμβεί η ανάπτυξη αυτή σε μορφή που μπορεί να παρατηρηθεί». Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές η ανάπτυξη μπορεί να σχετίζεται με τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς, τα διδακτικά περιβάλλοντα ή ακόμα και τις διδακτικές δραστηριότητες όπως αυτές μέσω διαφόρων λογισμικών. Επίσης η χρονική περίοδος κυμαίνεται από λίγες ώρες έως και ένα ακαδημαϊκό έτος και η εφαρμογή του μπορεί να γίνει σε μία μικρή ομάδα, σε μία τάξη ή και σε μεγαλύτερου εύρους μαθησιακά περιβάλλοντα (Kelly & Lesh, 2000: 192).

Ιστορικά στις ΗΠΑ το διδακτικό πείραμα έγινε ευρέως αποδεκτό τη δεκαετία του `70. Σε αυτό οδήγησε η ανάγκη ύπαρξης ενός νέου μοντέλου για τη μαθηματική έρευνα αλλά και η ανάγκη να γεφυρωθεί το χάσμα της έρευνας με τη διδασκαλία. Η κατανόηση των εννοιολογικών κατασκευών των μαθητών δεν μπορεί να ερμηνευθεί με τις ερευνητικές μεθόδους χειρισμού και ελέγχου διαφόρων μεταβλητών, αλλά μέσω της εννοιολογικής ανάλυσης κατά τη διδακτική εμπειρία (Steffe & Thompson, 2000: 270-272). Εξάλλου η μάθηση και η διεργασία των νοητικών δομών χαρακτηρίζονται από πολυπλοκότητα στην οποία εμπλέκονται πολλοί παράγοντες μη μετρήσιμοι με ποσοτικούς δείκτες.

Αυτό που θα πρέπει να επισημανθεί είναι ότι το διδακτικό πείραμα είναι ένα διερευνητικό εργαλείο με το οποίο οι ερευνητές προσπαθούν όχι μόνο να κατανοήσουν τη μαθηματική γνώση των μαθητών αλλά και τα μέσα και τους τρόπους που επηρεάζουν αυτή τη γνώση καθώς και την πρόοδο που παρατηρείται στη διάρκεια του χρόνου (Steffe & Thompson, 2000: 274). Μια πρόοδος που μεταφράζεται σε αλλαγή των σχεδίων των μαθητών και των νοητικών τους δομών ως αποτέλεσμα της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Σκοπός του ερευνητή στο διδακτικό πείραμα είναι μεταξύ άλλων το να βοηθήσει τους μαθητές σε αυτόν τον μετασχηματισμό παρέχοντάς τους τις κατάλληλες μαθηματικές εμπειρίες, ζητώντας αιτιολογήσεις, προβλέψεις και κάνοντάς τους να δουν τις έννοιες και από άλλη οπτική (Steffe & Thompson, 2000: 295). Και όλα αυτά μέσω της αλληλεπίδρασης με τους μαθητές στο πλαίσιο της διδακτικής δράσης και μέσω της ερμηνείας που αποδίδουν η οποία τροποποιείται καθώς αναστοχάζονται και αναλύουν τα δεδομένα κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας. Οι Cobb, Wood και Yackel (1990: 145) εκφράζουν εύστοχα ότι «πεποιθήσεις και πρακτική είναι διαλεκτικά συνδεδεμένα».

Τέλος όσον αφορά τη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων του διδακτικού πειράματος, να αναφέρουμε ότι αυτή δεν νοείται με την καθολική της μορφή στο χώρο των ποσοτικών ερευνών, αλλά με την έννοια ότι τα αποτελέσματα μπορούν να φανούν χρήσιμα για την οργάνωση των εμπειριών όταν παρατηρούμε τους μαθητές να κάνουν μαθηματικά. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν από άλλους ερευνητές διδακτικών πειραμάτων για να κατασκευάσουν ένα τροποποιημένο από το δικό μας, μοντέλο μαθηματικών των μαθητών (Steffe & Thompson, 2000: 304).

Έχουμε βέβαια την επίγνωση ότι η ερμηνευτική ή ποιοτική έρευνα είναι συνυφασμένη με αρκετά μεθοδολογικά ζητήματα όπως για παράδειγμα η ισχύς του ερευνητή- παρατηρητή και η οριοθέτηση της επίσημης και ανεπίσημης παρατήρησης. (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 106, 107). Συχνά είναι επίσης και τα φαινόμενα της απόκρυψης ή της παραπλανητικής «συμπεριφοράς» από μέρους των υποκειμένων της έρευνας. Από την άλλη, η εδραίωση καλών σχέσεων μπορεί να οδηγήσει στην προθυμία των ατόμων να αποκαλύψουν τις σκέψεις τους και όπως σημειώνουν οι Hammersley και Atkinson (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 108): «η διαπραγμάτευση της πρόσβασης είναι πιθανόν να είναι μια συνεχής διαδικασία για τον εθνογράφο».

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ-ΔΕΙΓΜΑ

Ο πληθυσμός της έρευνας αποτελείται από μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και η επιλογή του έγινε με βάση τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (το εμβαδόν τριγώνου διδάσκεται σε αυτή την τάξη) αλλά και με βάση την πρόθεσή μας να δώσουμε ώθηση στους μαθητές να λειτουργήσουν στο επίπεδο 2 Van Hiele της γεωμετρικής σκέψης. Όπως καταγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία, αφενός οι περισσότεροι μαθητές αυτής της ηλικίας βρίσκονται μεταξύ του πρώτου και δευτέρου επιπέδου (Van de Walle, 2005: 480, Σαλονικιός, 2008: 28,73,75) και αφετέρου η ανάπτυξη αυτή είναι προϊόν περισσότερο της διδασκαλίας και όχι της ηλικίας (Burger and Shaughnessy, 1986: 45, 46, Van de Walle, 2005: 424, 429). Επίσης από τη στιγμή που οι μαθητές έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των τριγώνων και τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου, θέλαμε να διερευνήσουμε τα ενδεχόμενα κενά τους, τη σύγχυση μεταξύ των δύο εννοιών και το τι έχουν εμπεδώσει στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης.

Το διδακτικό πείραμα λόγω περιορισμένων μέσων και χρόνου, εφαρμόστηκε σε ένα εκ των δύο τμημάτων ΣΤ΄ τάξης, ενός 12/θέσιου Δημοτικού σχολείου του πολεοδομικού συγκροτήματος της Θεσσαλονίκης, επιλεγμένο με τη στρατηγική δειγματοληψίας σκοπιμότητας ή των μη πιθανοτήτων και ειδικότερα με τη «βολική» δειγματοληψία (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 163, 243). Το δείγμα αποτέλεσαν κυρίως δύο ομάδες μαθητών, με διαφοροποίηση στις μαθηματικές επιδόσεις, έτσι ώστε να καλυφθεί ο παράγοντας της ετερογένειας. Η τοποθέτησή τους έγινε με βάση τις απαντήσεις τους στις αρχικές δραστηριότητες οι οποίες διερεύνησαν το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης και τις προηγούμενες γνώσεις τους, αλλά και με βάση την παρατήρηση του ερευνητή από δύο παρακολουθήσεις διδασκαλίας καθώς και τη διερευνητική συζήτηση με την εκπαιδευτικό του τμήματος πριν την έρευνα. Έτσι δημιουργήθηκε η ομάδα Α (China Town), (Αλέξανδρος, Αθηνά, Ηρώ, Αφροδίτη) με καλές επιδόσεις στη γεωμετρία και η ομάδα Β (Σκορπιοί), (Δημοσθένης, Θάλεια, Ειρήνη, Δάφνη) με σχετικές μαθησιακές δυσκολίες. Να σημειωθεί ότι το σχολείο βρίσκεται σε μια περιοχή με μέτριο κοινωνικοοικονομικό επίπεδο και ότι το ποσοστό των παλιννοστούντων και αλλοδαπών μαθητών του συγκεκριμένου τμήματος ήταν ιδιαίτερα υψηλό (άνω του 50%). Επίσης οι μαθητές αυτοί δεν ήταν εξοικειωμένοι με το ομαδοσυνεργατικό μοντέλο διδασκαλίας και ερχόταν για πρώτη φορά σε επαφή με τα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιήθηκαν.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα μέσα Μαρτίου, έτσι ώστε η διδασκαλία του εμβαδού τριγώνων να συμπίπτει με το σχεδιασμό του Αναλυτικού Προγράμματος. Αφού υπήρξε η απαραίτητη συνεννόηση με το Διευθυντή της σχολικής μονάδας και την εκπαιδευτικό του τμήματος, έγινε μια γνωριμία και ενημέρωση στους μαθητές για το σκοπό αλλά και το περιεχόμενο του διδακτικού πειράματος. Η διδασκαλία έγινε από τον ερευνητή ακολουθώντας τις δραστηριότητες οι οποίες είχαν σχεδιαστεί και μη λαμβάνοντας υπόψη αυτές του σχολικού εγχειριδίου.

Για το συγκεκριμένο διδακτικό πείραμα διατέθηκαν (4) τέσσερα δίωρα, ενώ οι προβλεπόμενες από το Αναλυτικό Πρόγραμμα ώρες διδασκαλίας είναι (1) μία για το εμβαδόν τριγώνου και (1) μία για τη μέτρηση επιφανειών, με δυνατότητα όμως επέκτασης ανάλογα με τις δυσκολίες της ενότητας ή τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις αδυναμίες κάθε τάξης. Για τον επιπλέον χρόνο που αφιερώσαμε, να επισημάνουμε καταρχήν ότι η κύρια διδασκαλία που αναφέρεται στην έννοια του εμβαδού, αρχίζει από τη δραστηριότητα 12 και πραγματοποιήθηκε τα δύο τελευταία δίωρα. Οι πρώτες δραστηριότητες ήταν για επανάληψη και μέσα στο πλαίσιο διερεύνησης των πρότερων γνώσεων και των επιπέδων Van Hiele, αλλά σημαντικές για το εποικοδομιστικό μοντέλο που επιλέχθηκε, καθώς έπρεπε να ξαναχτίσουμε τις προηγούμενες έννοιες με τις ιδιότητες των τριγώνων για να οικοδομήσουμε την έννοια του εμβαδού. Επιπρόσθετα στόχος μας ήταν η κατανόηση των εννοιών και η υπέρβαση της σύγχυσης μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου και η στοχοθεσία πηγαίνει πέρα από τους υπολογισμούς, πράγμα στο οποίο οδηγεί η ολιγόωρη διδασκαλία. Όπως έχει δείξει η εμπειρία, η περιορισμένη γνώση γεωμετρικών εννοιών οδηγεί σε παρανοήσεις και υπάρχει «λανθασμένη ταύτιση της γνώσης του ορισμού μιας έννοιας με την κατανόηση της έννοιας» (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 129).

Δύο περίπου μήνες αργότερα πραγματοποιήθηκε η φάση της αξιολόγησης. Η παρέλευση ενός σημαντικού χρονικού διαστήματος δίνει περισσότερη αξιοπιστία στα αποτελέσματα για το κατά πόσον οι μαθητές έχουν διατηρήσει τις κατακτημένες έννοιες. Οι δύο ομάδες ξεχωριστά, ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες παρόμοιες με αυτές της κυρίως διδασκαλίας και συλλέχθηκαν τα δεδομένα με ανάλογο τρόπο.

ΣΥΛΛΟΓΗ, ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Για τη συλλογή και την επεξεργασία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν κυρίως εργαλεία της ποιοτικής ερευνητικής προσέγγισης. Τα δεδομένα προήλθαν από τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας των μαθητών (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ), από τις παρατηρήσεις του ερευνητή, από τις φωτογραφήσεις των κατασκευών και τις καταγραφές οθόνης στο περιβάλλον του Η/Υ και τέλος από τις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος. Ιδιαίτερα για την παρατήρηση θα πρέπει να αναφέρουμε ότι είναι μια τεχνική η οποία χρησιμοποιείται εκτενώς στις ποιοτικές μεθόδους προκειμένου να συλλεχθούν δεδομένα από πραγματικές (και όχι εργαστηριακές) καταστάσεις και η οποία δίνει τη δυνατότητα στον ερευνητή να κατανοήσει το πλαίσιο της δράσης των υποκειμένων της έρευνας, να καταγράψει μη λεκτικές συμπεριφορές και ακόμη να αντιληφθεί τα «κρίσιμα συμβάντα» αποκτώντας έτσι μια συνολικότερη εικόνα για τον τρόπο που συνδέονται οι διάφοροι παράγοντες μεταξύ τους (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 234, 521, 523). Η χρήση πολλαπλών μεθόδων συλλογής δεδομένων υπάγεται στη «μεθοδολογική τριγωνοποίηση» η οποία θεωρείται απαραίτητη ιδιαίτερα στο χώρο των κοινωνικών επιστημών και εξυπηρετεί την αύξηση της εμπιστοσύνης του ερευνητή στα αποτελέσματα της έρευνάς του και την παροχή βοήθειας προς αυτόν ώστε να παράγει αξιόπιστες αποδείξεις (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 189-191, 521).

Όσον αφορά την ανάλυση των δεδομένων, σκοπός μας ήταν να περάσουμε από την περιγραφή στην επεξήγηση και στην εξαγωγή υποθετικών συμπερασμάτων και όπως αναφέρουν οι Cohen, Manion, Morrison (2008: 254): «παρέχοντας πάντα τις κατάλληλες αποδείξεις, να διατυπώσουμε κάποιες εξηγήσεις για μια κατάσταση, να εντοπίσουμε κάποια βασικά στοιχεία-κλειδιά και πιθανώς να αναδείξουμε ακόμα και τις αιτίες τους». Σύμφωνα με τους ίδιους ένα σημαντικό βήμα στην ανάλυση των ποιοτικών ερευνών είναι και η αναζήτηση αρνητικών και ασύμβατων περιπτώσεων οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν στην τροποποίηση των θεωρητικών δεδομένων (Cohen, Manion, Morrison, 2008: 255, 256), πράγμα το οποίο αναζητήσαμε στα δεδομένα του διδακτικού πειράματος προσπαθώντας παράλληλα να ερμηνεύσουμε τη διαφοροποίηση αυτή.

Διευκρινίστηκε στους μαθητές ότι οι απαντήσεις τους αλλά και η γενικότερη συμμετοχή τους στο μάθημα δεν θα βαθμολογηθούν αλλά θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τους σκοπούς της έρευνας. Οι δραστηριότητες δεν ήταν διαφοροποιημένες για τις ομάδες των μαθητών, αλλά ο ερευνητής όπου έκρινε αναγκαίο, παρείχε περισσότερο χρόνο για να διαπραγματευτούν οι μαθητές με τις έννοιες και τους παρωθούσε θέτοντας κατάλληλες ερωτήσεις και διευκρινήσεις και προκαλώντας εποικοδομητικές συζητήσεις. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με βάση τους στόχους της έρευνας (διερεύνηση πρότερων γνώσεων και επιπέδων Van Hiele, παροχή γεωμετρικών εμπειριών και ώθηση γεωμετρικής σκέψης). Κάποιες επινοήθηκαν από εμάς και κάποιες δημιουργήθηκαν λαμβάνοντας υπόψη δραστηριότητες που είχαν προταθεί στη βιβλιογραφία, οι οποίες τροποποιήθηκαν ή επεκτάθηκαν.

Αναλυτικότερα παρατίθεται η περιγραφή των δραστηριοτήτων:

Δραστηριότητα 1

Οι μαθητές γνωρίζουν από την προηγούμενη τάξη τα βασικά στοιχεία των τριγώνων, το ύψος τους, τα είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους, καθώς και τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού. Για να ξαναφέρουμε στην επιφάνεια την προϋπάρχουσα γνώση, δίνουμε στους μαθητές με τη σειρά τα φύλλα εργασίας 1, 2 και 3. Στο φύλλο 1 τους ζητάμε ατομικά να χρωματίσουν στο εικονιζόμενο σχήμα ό,τι αυτοί νομίζουν πως είναι περίμετρος. Ίσως κάποιοι να χρωματίσουν και το ύψος. Τότε εξηγούμε ότι περίμετρος είναι το άθροισμα των εξωτερικών γραμμών.

Δραστηριότητα 2

Στο δεύτερο φύλλο τους ζητάμε να αναφέρουν πώς αντιλαμβάνονται την έννοια του εμβαδού.

Δραστηριότητα 3

Το φύλλο εργασίας 3 στοχεύει στην υπενθύμιση των διαφόρων ειδών τριγώνων, αλλά και στην εξοικείωση με το υλικό του γεωπίνακα. Τους ζητάμε αφού πρώτα περιεργαστούν ελεύθερα το γεωπίνακα, να κατασκευάσουν ένα ισοσκελές και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια αναπαριστούν τις κατασκευές τους στα μοτίβα γεωπίνακα που τους έχουμε μοιράσει. Με την παρουσίασή τους στην ολομέλεια της τάξης και με αφορμή ενδεχόμενα λάθη, θα υπάρξει ευκαιρία για συζήτηση και υπενθύμιση της ταξινόμησης των τριγώνων ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες. Αυτή η δραστηριότητα, όπως και οι δύο προηγούμενες που σχετίζονται με την περίμετρο και το εμβαδόν, στοχεύουν παράλληλα και στην ανάπτυξη κοινής γεωμετρικής γλώσσας.

Δραστηριότητα 4

Επεκτείνοντας το πλαίσιο της διερεύνησης, πέρα από τις προϋπάρχουσες γνώσεις θέλουμε μέσα από τις παρακάτω δραστηριότητες (φύλλα εργασίας 4, 5, 6) να διαπιστώσουμε και το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σύμφωνα με την ταξινομία των Van Hiele. Στο φύλλο εργασίας 4 ζητάμε από τους μαθητές να ταξινομήσουν μερικά σχήματα. Υπάρχουν σχήματα που έχουν περιστραφεί και ίσως κάποιοι μαθητές να μην κάνουν την ταξινόμηση βάση των ιδιοτήτων των σχημάτων, πράγμα που αποτελεί ένδειξη επιπέδου 0 (νοερής απεικόνισης). Στην περίπτωση αυτή προσπαθώ να τους προβληματίσω φέρνοντας παραδείγματα από γνωστά αντικείμενα: π.χ. εάν μία σκούπα πέσει κάτω θα αλλάξει το σχήμα της;

Δραστηριότητα 5

Στο φύλλο εργασίας 5 καλούνται να ταξινομήσουν διάφορα κομμάτια από χάρτινα τρίγωνα εστιάζοντας στις ιδιότητες (χαρακτηριστικό του επιπέδου 1) και όχι στην απλή αναγνώριση. Προσπαθούν έπειτα να βρουν διαφορετικές κοινές ιδιότητες εμβαθύνοντας έτσι στην καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συσχετίζονται τα σχήματα μεταξύ τους. Τους ζητάμε να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους. Αν κάποια παιδιά αναφέρουν ως κριτήριο το μέγεθος, τους ρωτούμε τι εννοούν (περίμετρο, εμβαδόν, κλπ.) και πώς είναι σίγουροι γι' αυτό. Έτσι εισάγεται σταδιακά και ένας προβληματισμός για την εύρεση του εμβαδού. Στο τέλος επιστρέφουν ξανά στο φύλλο εργασίας 4 για να τους κάνουμε να σκεφτούν τι έκαναν λάθος.

Δραστηριότητα 6

Το φύλλο εργασίας 6 προσανατολίζεται στην ανίχνευση του επίπεδου 2 της γεωμετρικής σκέψης, όπου οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τις αναγκαίες και επαρκείς ιδιότητες για το χαρακτηρισμό των γεωμετρικών σχημάτων. Από μια λίστα ιδιοτήτων επιλέγουν τις αναγκαίες και ακολούθως τις επαρκείς ιδιότητες για κάποια σχήματα. Οι μαθητές για να διεκπεραιώσουν τη δραστηριότητα θα πρέπει να προβούν στο συλλογισμό του τύπου: «εάν…. τότε», χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα, όπως για παράδειγμα: «εάν έχει μια ορθή γωνία, τότε θα ισχύουν αναγκαστικά και κάποιες άλλες ιδιότητες».

Δραστηριότητα 7

Αυτή η δραστηριότητα προτείνεται από τους Burger and Shaughnessy (1986: 34, 36) και δίνει έμφαση στην ανάπτυξη του τυπικού συλλογισμού. Είναι ένα παιχνίδι συμπεράσματος και ονομάζεται «η μυστήρια μορφή». Οι μαθητές προσπαθούν να μαντέψουν ένα σχήμα βλέποντας σταδιακά μία μία τις ενδείξεις που αποκαλύπτονται. Όταν είναι σίγουροι για το σχήμα, σταματούν την περαιτέρω αποκάλυψη των ενδείξεων. Όσοι μαθητές ψάχνουν για το ελάχιστο σύνολο ενδείξεων αποκλείοντας συγχρόνως με κάθε αποκάλυψη κάποια συγκεκριμένα σχήματα, εντάσσονται στο επίπεδο 2 της κλίμακας των Van Hiele. Γι' αυτό ερωτήσεις για το ποια σχήματα αποκλείονται με την εμφάνιση κάποιων ενδείξεων, δίνουν ώθηση στους μαθητές για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης σε αυτό το επίπεδο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πρόκειται για ένα ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο και με την αποκάλυψη της ένδειξης 4 οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι αποκλείεται το σκαληνό τρίγωνο, με την ένδειξη 5 αποκλείεται το ισόπλευρο, ενώ με την αποκάλυψη της ένδειξης 6 αποκλείονται το ορθογώνιο και το οξυγώνιο τρίγωνο. Παράλληλα ζητούμε από τους μαθητές (από την ένδειξη 2 και μετά) να κατασκευάζουν τα σχήματα στο γεωπίνακα ή στον ισομετρικό καμβά παρέχοντας την ελευθερία επιλογής του υλικού με το οποίο θα εργαστούν. Η ελευθερία αυτή ωθεί στην ανάληψη πρωτοβουλιών και στην συνειδητοποίηση της δράσης τους. Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι δεν επιμένουμε στην προσπάθεια κατασκευής ισόπλευρων τριγώνων στο γεωπίνακα, διότι αυτό θα διερευνηθεί σε μετέπειτα δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 8

Ζητούμε από τους μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες να φτιάξουν στο γεωπίνακα ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Έπειτα να ξαναφτιάξουν με ένα λαστιχάκι διαφορετικού χρώματος ακριβώς το ίδιο επάνω στο άλλο, έτσι ώστε να ταυτίζονται οι πλευρές τους. Εν συνεχεία στο δεύτερο τρίγωνο να σύρουν την πάνω κορυφή οριζόντια προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, αναλόγως το περιθώριο που έχουν, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο (εικόνα 1). Θα πρέπει να καταγράψουν ποια στοιχεία του αρχικού τριγώνου άλλαξαν και ποια παρέμειναν αναλλοίωτα. Για να τους βοηθήσουμε με τη διαπίστωση του ύψους, τους ζητάμε να το σχηματίσουν και στα δύο τρίγωνα (εικόνα 2). Με τη δραστηριότητα αυτή παρατηρούν τη μεταβολή και τη διατήρηση κάποιων ιδιοτήτων των τριγώνων όταν μετακινούμε μία κορυφή τους.

Εικ. 1

Εικ. 2

Δραστηριότητα 9

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές ομαδοσυνεργατικά κατασκευάζουν στο γεωπίνακα διάφορα τρίγωνα με βάση κάποιες καθορισμένες ιδιότητες (δύο ίσες πλευρές, μια ορθή γωνία, κλπ.). Η κατασκευή σχημάτων από τους μαθητές αποτελεί μια πολύ επωφελής δραστηριότητα (Van de Walle, 2005: 451). Τους τίθεται επίσης το ερώτημα (σε σύνδεση με τη δραστηριότητα 7) εάν μπορούν στο γεωπίνακα να κατασκευάσουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο και παρωθείται η σκέψη τους στην προσπάθεια να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Η αιτιολόγησή τους διευκολύνεται με τη κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου σε χαρτί ισομετρικού καμβά.

Δραστηριότητα 10

Ως επέκταση της προηγούμενης δραστηριότητας ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν σε χαρτί καμβάδων τρίγωνα με βάση ένα προκαθορισμένο συνδυασμό δύο ιδιοτήτων, οι οποίες έχουν ήδη διερευνηθεί. Καλούνται να απαντήσουν εάν είναι εφικτό να κατασκευαστεί κάθε φορά ένα τέτοιο τρίγωνο αιτιολογώντας την απάντησή τους (π.χ. υπάρχει ένα τρίγωνο ορθογώνιο και συγχρόνως ισόπλευρο;). Ο Van de Walle (2005: 454) ονομάζει αυτή την δραστηριότητα «προκλήσεις των ιδιοτήτων» και επισημαίνει ότι η ανακάλυψη της αδυναμίας συνύπαρξης δύο ιδιοτήτων καθώς και της αιτίας γι' αυτό, αποτελεί πολύτιμη συμβολή στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών. Με τέτοιου τύπου ερωτήσεις οι οποίες περιέχουν κάποια συλλογιστική σκέψη, ωθούμε τα παιδιά να κατανοήσουν τις διαφορές και να αναπτύξουν τη γεωμετρικής τους σκέψης σε ανώτερο επίπεδο. Σημειώνεται ότι παρέχουμε στους μαθητές και διάστικτους και ισομετρικούς καμβάδες. Τα σχέδια των καμβάδων ελήφθησαν από το: «έτοιμο για αναπαραγωγή υλικό» του Van de Walle (2005, Παράρτημα: 31, 33).

Δραστηριότητα 11

Με τη δραστηριότητα αυτή εισάγεται ένα διαφορετικό πλαίσιο αναπαράστασης: το τρίγωνο δυναμικής μεταβολής. Οι μαθητές περιεργάζονται το τρίγωνο αυτό (εικ. 3) και μεταβάλουν ελεύθερα το μήκος των πλευρών και το μέγεθος των γωνιών του σέρνοντας κάθε φορά κάποια από τις κορυφές του. Τους ανακοινώνεται ότι κατά σύμβαση θα θεωρούμε ως πλευρές του τριγώνου το εσωτερικό μέρος των ξύλινων πλευρών. Επίσης απέναντι από κάθε πλευρά θα βρίσκεται η αντίστοιχη γωνία (π.χ.

απέναντι από την πλευρά α βρίσκεται η γωνία Α). Τους ζητάμε να αναφέρουν ποια είδη τριγώνων μπορούν να φτιάξουν με το συγκεκριμένο υλικό χωρίς να το χαλάσουν και να παρουσιάσουν παράλληλα τις κατασκευές τους.

Εικ. 3

<u>Δραστηριότητα 12</u>

Οι μαθητές ομαδοσυνεργατικά εργαζόμενοι στο δυναμικό τρίγωνο, μετατρέπουν ένα αρχικό τρίγωνο (εικ.4) σε ένα άλλο (εικ. 5) και τα συγκρίνουν επισημαίνοντας τις άμεσες αλλά και τις έμμεσες μεταβολές των ιδιοτήτων τους (φύλλο εργασίας 12). Έτσι μπαίνουν στη διαδικασία να σκεφτούν το μετασχηματισμό, πώς δηλαδή φτάσαμε στο νέο σχήμα. Ως έμμεση μεταβολή, τους ζητείται να εκτιμήσουν το τι συνέβη με το μέγεθος του εμβαδού και επανέρχεται ο προβληματισμός για τον υπολογισμό του.

Εικ. 4

Εικ. 5

<u>Δραστηριότητα 13</u>

Αφού οι μαθητές έχουν ήδη προβληματιστεί για τον υπολογισμό του εμβαδού των τριγώνων, με τις παρακάτω δραστηριότητες εισάγονται σταδιακά διάφοροι τρόποι μέτρησής του, οι οποίοι αποτελούν συγχρόνως και εννοιολογικά πλαίσια κατανόησής του. Οι μετρήσεις του μήκους, του εμβαδού, των γωνιών, κλπ. των σχημάτων βοηθούν τους μαθητές να αναγνωρίσουν ακόμα περισσότερες σχέσεις μεταξύ των σχημάτων και να αντιληφθούν καλύτερα τις ιδιότητές τους. Οι μετρήσεις αυτές, όπως υποστηρίζει ο Van de Walle (2005: 451), μπορούν να γίνουν και με μη τυπικές μονάδες μέτρησης και έχουν το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τη διερεύνηση σχέσεων στις οποίες εμπλέκονται. Επιπρόσθετα ο Tan (Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, 2009: 229) πρότεινε ότι η κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού, πρέπει να προέλθει από την εμπειρία χειρισμών κάλυψης επιφανειών με υλικά, για να μπορέσει αργότερα να κατανοηθεί και η χρήση γεωμετρικών τύπων. Για το λόγο αυτό λέμε στα παιδιά να σχηματίσουν ατομικά δύο διαφορετικά τρίγωνα στο γεωπίνακα και να τα αντιγράψουν στο μοτίβο γεωπίνακα. Τους δίνουμε φασόλια και τους ζητάμε να γεμίσουν τα σχήματα και να μετρήσουν πόσα χωράνε στο καθένα. Εν συνεχεία τους δίνουμε διαφάνειες με ισομετρικούς καμβάδες 2 εκατοστών και τους λέμε να τους τοποθετήσουν επάνω στα σχήματα και να μετρήσουν επίσης πόσα τριγωνάκια χωράνε στο κάθε ένα. Ο Van de Walle (2005: 397) επισημαίνει ότι εκτός από τα προγράμματα σχεδίασης στον Η/Υ, δεν υπάρχουν εργαλεία για τη μέτρηση του εμβαδού. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους καμβάδες «ως χάρακα για το εμβαδόν». Τα μοτίβα γεωπίνακα και τα σχέδια των ισομετρικών καμβάδων ελήφθησαν από το: «έτοιμο για αναπαραγωγή υλικό» του Van de Walle (2005, Παράρτημα: 32, 36).

Δραστηριότητα 14

Αυτή η δραστηριότητα στοχεύει στο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το εμβαδόν τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και του ύψους του. Επιπρόσθετα περιλαμβάνει τη διατύπωση και δοκιμή υποθέσεων (χαρακτηριστικό του επιπέδου 2 της γεωμετρικής σκέψης), αλλά συγχρόνως και τη νοερή μετατροπή σχημάτων, η οποία σύμφωνα με τους Markopoulos & Potari (2000: 267) προηγείται της φυσικής μετατροπής, στις περιπτώσεις που οι μαθητές πρέπει να προβλέψουν κάνοντας πιο σύνθετη και απαιτητική τη διαδικασία της σκέψης τους. Στο ξύλινο τρίγωνο και δουλεύοντας σε ομάδες τους ζητείται να το τοποθετήσουν στο ελάχιστο το μήκος των πλευρών του, να το γεμίσουν με φασόλια και να τα καταμετρήσουν. Έπειτα να προβλέψουν τις άμεσες και έμμεσες αλλαγές των στοιχείων του οι οποίες θα προέλθουν, εάν (με βάση την πλευρά α) μετακινήσουν την κορυφή Α διατηρώντας όμως το ίδιο ύψος. Στη συνέχεια ελέγχουν τις προβλέψεις τους και καταγράφουν τις αλλαγές. Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία αλλάζοντας το ύψος και ξανακάνουν καταγραφή. Τώρα οι μαθητές θα πάρουν ως βάση την πλευρά γ (η οποία μεταβάλλεται) και διατηρώντας σταθερό το ύψος θα μεγαλώσουν το μήκος της και θα κάνουν καταγραφή των νέων χαρακτηριστικών. Στο τέλος οι μαθητές συμπεραίνουν τη σχέση του εμβαδού του τριγώνου με το μήκος της βάσης και του ύψους προς αυτή και συμπληρώνουν τη σχετική πρόταση.

<u>Δραστηριότητα 15</u>

Με τη δραστηριότητα αυτή εισάγεται ένα ακόμη διαφορετικό πλαίσιο αναπαράστασης, το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri Geometry II plus. Αφιερώνεται μία διδακτική ώρα για την εξοικείωση των παιδιών με τη διεπαφή του λογισμικού, κατά το οποίο μαθαίνουν τα κουμπιά και τις εντολές της γραμμής εργαλείων. Οι μαθητές κατασκευάζουν ελεύθερα διάφορα τρίγωνα, μετακινούν σέρνοντας τις κορυφές τους και ενεργοποιούν τα εργαλεία μέτρησης μήκους, γωνιών και εμβαδού. Τους λέω να προσέξουν τις αλλαγές που συμβαίνουν (άμεσες και έμμεσες).

<u>Δραστηριότητα 16</u>

Αφού οι μαθητές εξοικειώθηκαν με το λογισμικό, καλούνται να διαπιστώσουν σε αυτό το πλαίσιο τη διατήρηση του εμβαδού, όταν παραμένουν αμετάβλητα το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους. Κατασκευάζουν δύο παράλληλες ευθείες και ένα τρίγωνο μέσα σε αυτές (φύλλο εργασίας 16). Γνωρίζουν ήδη ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες (που είναι ταυτόχρονα και ύψος του τριγώνου) παραμένει σταθερή. Ενεργοποιούν το εργαλείο αυτόματης μέτρησης του εμβαδού και σέρνοντας την κορυφή διαπιστώνουν ότι παρά τη μεταβολή του τριγώνου, το εμβαδόν διατηρείται σταθερό, εφόσον παραμένει σταθερό το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους.

<u>Δραστηριότητα 17</u>

Οι μαθητές έχουν κατανοήσει ότι το εμβαδόν τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους και ότι η σχέση τους είναι αναλογική. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα τους βοηθά να οδηγηθούν στο γεωμετρικό τύπο Ε=β*υ/2. Ξεκινάμε πρώτα με το υλικό των ίσων τριγώνων σε πλαστικά πλακίδια. Τους δίνουμε ίσα ορθογώνια και ίσα ισοσκελή τρίγωνα και τους ζητούμε να φτιάξουν το συμπλήρωμα ενός ορθογωνίου ή παραλληλογράμμου από ένα τρίγωνο (εικόνα 6, 7). Θα διαπιστώσουν έτσι ότι με δύο ίδια τρίγωνα φτιάχνω ένα ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο και ότι το εμβαδόν των τριγώνων είναι το μισό των αντίστοιχων ορθογωνίων ή παραλληλογράμμων. Ρωτούμε τους μαθητές ποια η σχέση της βάσης, του ύψους και του εμβαδού του τριγώνου με τα αντίστοιχα του παραλληλογράμμου. Αναμένεται να αναγνωρίσουν την ταύτιση του ύψους και της βάσης και ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι το μισό του παραλληλογράμμου. Τους είναι ήδη γνωστό ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου προκύπτει από το γινόμενο της βάσης με το ύψος. Επομένως το εμβαδό του τριγώνου θα βγαίνει από τον τύπο: Ε=β*υ/2.

Εικ. 6

Εικ. 7

Δραστηριότητα 18

Επιδιώκοντας την κατανόηση της αντιστοιχίας μεταξύ των αναπαραστάσεων, επιστρέφουμε στο γεωπίνακα και εκτελούμε εκεί μια παραπλήσια δραστηριότητα με τη δραστηριότητα 16. Λέμε στους μαθητές να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και στη συνέχεια να δημιουργήσουν άλλο ένα ισοεμβαδικό προς αυτό. Εμπεριέχεται κι εδώ η διαδικασία της νοερής μετατροπής και του μετασχηματισμού καθώς καλούνται να φανταστούν πώς θα οδηγηθούν στο καινούριο ισοεμβαδικό σχήμα (Markopoulos & Potari 2000: 267). Έχουμε δηλαδή συνειδητή δράση για ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Αναμένεται να αφήσουν ίδια τη βάση και σέρνοντας την επάνω κορυφή να διατηρήσουν σταθερό και το μήκος του ύψους προς αυτή. Συμπληρωματικά βάζω τους μαθητές στο γεωπίνακα να μετρήσουν το εμβαδόν με βάση ορθογώνια σχήματα (πόσα κουτάκια είναι;). Σχηματίζουν ορθογώνια που περικλείουν τα τρίγωνα [εάν είναι ορθογώνια τρίγωνα (εικόνα 8)] ή διαδοχικά μέρος αυτών [εάν είναι οξυγώνια ή αμβλυγώνια (εικόνα 9)] αυξάνοντας σταδιακά το βαθμό δυσκολίας.

Εικ. 8

Εικ. 9

Δραστηριότητα 19

Η προτελευταία δραστηριότητα τίθεται ως εφαρμογή αλλά και ως σύνδεση των εννοιών που διδάχθηκαν με την καθημερινή ζωή. Όπως υποστηρίζει ο Van de Walle (2005: 23): «κάθε μέρα οι μαθητές και οι μαθήτριες πρέπει να νιώθουν πως τα μαθηματικά έχουν νόημα». Δίνεται στις ομάδες μια προβληματική κατάσταση κατά την οποία πρόκειται να τοποθετηθεί ένα τριγωνικό παρτέρι στη σχολική αυλή για το φύτεμα ενός πλατανιού. Υπάρχουν από τους τεχνικούς προς το Διευθυντή του σχολείου δύο προτάσεις και οι μαθητές καλούνται να τον βοηθήσουν να επιλέξει αυτή κατά την οποία θα περισσεύει περισσότερος χώρος για τα παιδιά (αυτή δηλαδή του τριγώνου με το μικρότερο εμβαδόν). Συστήνεται στους μαθητές να μην χρησιμοποιήσουν μετρήσεις με χάρακες, ούτε γεωμετρικούς τύπους του εμβαδού, αλλά τις τεχνικές μέτρησης με βάση τα ορθογώνια σχήματα, καθώς η αυλή είναι στρωμένη με τετράγωνες πλάκες.

Δραστηριότητα 20

Μια συχνή παρανόηση ανάμεσα στους μαθητές είναι η σύγχυση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού. Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα επιχειρείται η αποσαφήνισή τους αξιοποιώντας τα εργαλεία της ταυτόχρονης μέτρησης περιμέτρου και εμβαδού του λογισμικού Cabri, καθώς οι Kordaki and Balomenou (2006: 130) υποστηρίζουν ότι η ταυτόχρονη μέτρησή τους με τα συγκεκριμένα εργαλεία, βοηθάει τους μαθητές στη διάκριση αυτών των εννοιών. Οι μαθητές καλούνται επίσης να διαπιστώσουν ότι η σχέση της μεταβολής τους δεν είναι πάντα παράλληλη.

Ως προέκταση της προηγούμενης δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να υποθέσουν και να απαντήσουν διερευνώντας στο περιβάλλον του Cabri εάν:

Α) Δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα είναι πάντοτε και ισοπεριμετρικά;

Β) Δύο ισοπεριμετρικά τρίγωνα είναι πάντοτε και ισοεμβαδικά;

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Με τις δραστηριότητες αξιολόγησης θέλαμε να διαπιστώσουμε εάν οι μαθητές έχουν εμπεδώσει το συσχετισμό του εμβαδού ενός τριγώνου με το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους, καθώς και τη χρήση των δύο τελευταίων στοιχείων στην παραγωγή ισοεμβαδικών τριγώνων (φύλλα αξιολόγησης 1, 2, 3).

Η έννοια της ισοεμβαδικότητας εξετάστηκε και στα τρία πλαίσια αναπαράστασης τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στο κυρίως μέρος του διδακτικού πειράματος, δηλαδή στο δυναμικό ξύλινο τρίγωνο, στο γεωπίνακα και στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri και ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν τις αντίστοιχες κατασκευές. Επιπρόσθετα στο γεωπίνακα οι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν καταμετρώντας τα κουτάκια, μια δραστηριότητα που μπορούσε να γίνει και με την κατασκευή βοηθητικών ορθογωνίων.

Τέλος με το φύλλο αξιολόγησης 4 διερευνήθηκε εάν οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου απαντώντας στο εάν μεγαλώνει παράλληλα η τιμή τους και αιτιολογώντας την απάντησή τους.

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο περιγράφεται στο κεφάλαιο αυτό, αποτέλεσε τη βάση οριοθέτησης και πληροφόρησης για το σχεδιασμό, τη διεξαγωγή και την ανάλυση της παρούσας μελέτης. Παρουσιάζονται στοιχεία και αρχές για τον κλάδο της γεωμετρίας, για τη σημασία και τη διδασκαλία της, καθώς και για τις επιμέρους έννοιες του εμβαδού και των τριγώνων και το πώς αυτές προσεγγίζονται μέσα από τα Νέα Πιλοτικά Αναλυτικά προγράμματα Σπουδών. Αναλύεται το θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης γεωμετρικών ιδεών των Van Hiele και τα σχετικά επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Εν συνεχεία αναφέρονται οι βασικές αρχές της κονστρουκτιβιστικής θεώρησης για τη γνώση, την ανάπτυξη της κατανόησης και το συσχετισμό της με τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων. Παράλληλα παρουσιάζονται και οι θέσεις της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης του Vygotsky καθώς οι δύο θεωρητικές σχολές ερμηνεύουν συμπληρωματικά τον τρόπο απόκτησης της γνώσης από τους μαθητές. Κατηγορίες των πολλαπλών πλαισίων στη γεωμετρία αποτελούν τα χειραπτικά υλικά και τα περιβάλλοντα των υπολογιστών. Γι’ αυτό αναλύεται η σημασία και η χρήση των χειραπτικών μοντέλων στη διδακτική διαδικασία, και η ενσωμάτωση των Τεχνολογιών των Πληροφοριών και των Επικοινωνιών στην εκπαίδευση, με ιδιαίτερη αναφορά στα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας.

Μέσα στις επιμέρους ενότητες γίνεται η αποσαφήνιση και ο ορισμός των σχετικών εννοιών όπως του εποικοδομισμού, της κατανόησης, των πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης, των χειραπτικών υλικών και των δυναμικών περιβαλλόντων. Οι ανωτέρω περιοχές και τα πορίσματα των ερευνών πάνω σε αυτές δημιούργησαν τον προβληματισμό για την αποτελεσματική διδασκαλία των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και ιδιοτήτων των τριγώνων, διαφώτισαν την κατανόησή μας για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και μαθητριών και τέλος συνέβαλλαν στο σχεδιασμό κατάλληλων δραστηριοτήτων και διδακτικού πλάνου και στην ανάλυση των εμπειρικών δεδομένων.

3.1. Γεωμετρία-Εμβαδόν Τριγώνου- Διδακτικές αρχές

Η Γεωμετρία ως κλάδος των μαθηματικών προσέλκυσε το ενδιαφέρον των ανθρώπων από τα αρχαία ακόμη χρόνια, πρωτίστως εξυπηρετώντας τις ανάγκες τους να διευθετήσουν πρακτικά ζητήματα, όπως ο επαναπροσδιορισμός συνόρων των αγροτεμαχίων έπειτα από πλημμύρες ποταμών (περίπτωση Νείλου). Η ετυμολογία της λέξης (επιστήμη με την οποία μετράμε τη γη) παραπέμπει σε αυτήν ακριβώς τη χρήση, αλλά ένας ευρύτερος όρος συσχετίζει τη γεωμετρία με τη μελέτη, περιγραφή, ταξινόμηση και μέτρηση γεωμετρικών σχημάτων, με απώτερο στόχο την κατανόηση του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε και κινούμαστε (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 115).

Θεωρείται σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση, ερμηνεία και οργάνωση φαινομένων και καταστάσεων του φυσικού κόσμου, καθώς πολλά αντικείμενα ανάγονται σε γεωμετρικά σχήματα και στερεά. Όπως αναφέρεται στο εγχειρίδιο του Νέου Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 21) η χρησιμότητά της σχετίζεται τόσο με την καθημερινή ζωή όσο και με τα Μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες. Ειδικότερα επισημαίνεται ότι αρκετές δράσεις του ανθρώπου στηρίζονται σε ένα πλήθος χωρικών και γεωμετρικών γνώσεων και επιπρόσθετα ότι οι γεωμετρικές έννοιες και διαδικασίες υποστηρίζουν διάφορες μαθηματικές και επιστημονικές έννοιες με την παροχή διαγραμμάτων, γραφικών παραστάσεων, γραμμών αριθμών κλπ. Όσον αφορά την έκφραση της γεωμετρίας στα έργα τέχνης, να αναφέρουμε συμπληρωματικά ότι εκτός από τη γεωμετρική τέχνη της γεωμετρικής εποχής, υπάρχουν ρεύματα στη ζωγραφική που στηρίζονται σε γεωμετρικά σχέδια και σχήματα όπως είναι ο Κυβισμός και ο Νεοπλαστικισμός. Για τους λόγους αυτούς η διδασκαλία της Γεωμετρίας έχει ενσωματωθεί στα προγράμματα σπουδών της βασικής εκπαίδευσης των περισσοτέρων χωρών. Ο Χαλάτσης (2006, πρόλογος) σημειώνει χαρακτηριστικά ότι «Η Γεωμετρία είναι από τα λίγα μαθήματα που το περιεχόμενό της και μόνο θα μπορούσε να αποτελέσει ισχυρό κίνητρο για το ενδιαφέρον του μαθητή. Η λογική δομή που κατ’ εξοχήν τη χαρακτηρίζει έλκει κάθε σκεπτόμενο μυαλό».

Παρόλα αυτά η αντιμετώπισή της θεωρείται δυσανάλογη της σημασίας της, διότι αφενός στα περιεχόμενα των Αναλυτικών Προγραμμάτων καταλαμβάνει περιορισμένο χώρο και αφετέρου διότι η διδακτική της προσέγγιση σε αρκετές περιπτώσεις χαρακτηρίζεται προβληματική, με αποτέλεσμα οι μαθητές να παρουσιάζουν δυσκολίες και κενά στην κατανόηση των εννοιών. Για παράδειγμα, αν και αρκετοί ερευνητές όπως οι Kordaki και Balomenou (2006: 99) υποστηρίζουν ότι για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού είναι απαραίτητη η κατανόηση της διατήρησής του, η διατήρηση του εμβαδού δεν διδάσκεται επαρκώς.

Μία στροφή αρχίζει να παρατηρείται με τη σύνταξη των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών. Η αλλαγή αφορά τόσο τα περιεχόμενα όσο και τη διδακτική προσέγγιση των εννοιών μέσω των οδηγών για τον εκπαιδευτικό και των εργαλείων διδακτικών προσεγγίσεων. Η οργάνωση των περιεχομένων στα Μαθηματικά γίνεται στο πλαίσιο καθορισμού τριών θεματικών αξόνων και αναφερόμενοι στην ΣΤ΄ τάξη ό ένας από αυτούς «Χώρος και Γεωμετρία- Μέτρηση» καταλαμβάνει 35 διδακτικές ώρες. Οι βασικές αρχές και η δομή του προγράμματος που αναφέρονται στη Μαθηματική Εκπαίδευση προφανώς αφορούν και τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Ανάμεσα στις αλλαγές που προτείνονται είναι η προτροπή για συνεργασία, η μεταφορά μεταξύ των διάφορων τύπων αναπαράστασης, η υιοθέτηση διερευνητικών και ανακαλυπτικών διαδικασιών αντί της προσφοράς έτοιμης γνώσης και η σύνδεση της τυπικής με την άτυπη γνώση έτσι ώστε να είναι χρήσιμη και αξιοποιήσιμη από τους μαθητές. Όπως επισημαίνεται, ο χρόνος που διατίθεται στους μαθητές για διερεύνηση ήταν συνήθως περιορισμένος (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 3-6). Επιπρόσθετα μεταξύ των στόχων του νέου προγράμματος είναι η ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων μέσω της διαδικασίας του αναστοχασμού και η ανάπτυξη ικανοτήτων επικοινωνίας της σκέψης των μαθητών χρησιμοποιώντας συμβολική αλλά και φυσική γλώσσα σε επίπεδο διατύπωσης λογικών σχέσεων και επιχειρημάτων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 7, 8).

Στο χώρο της Γεωμετρίας, τα νέα προγράμματα σπουδών στοχεύουν στην ανάπτυξη του χωρικού, γεωμετρικού και οπτικοποιημένου συλλογισμού προσπαθώντας να αντικαταστήσουν τις απλοϊκές παραδοσιακές προσεγγίσεις οι οποίες συνοδεύονταν από έλλειψη ουσιαστικής κατανόησης και από ένα σύνολο παρανοήσεων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 21). Ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη διαχείριση και το μετασχηματισμό κάθε χωρικής πληροφορίας, ενώ αντίστοιχα ο γεωμετρικός συνδέεται με τη μετάβαση από την αισθησιοκινητική αντίληψη των γεωμετρικών μορφών στην κατανόησή τους με βάση τα στοιχεία, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις, δηλαδή στην οργάνωση και επεξεργασία του χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου. Τέλος η οπτικοποιημένη σκέψη αφορά την ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν νοερές εικόνες για αντικείμενα και καταστάσεις του χώρου και να τις επεξεργάζονται νοερά (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 21, 22). Την περιορισμένη διαχείριση νοερών εικόνων κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό σχολείο επισημαίνουν και οι Τουρτούρας, Μπαλή και Αλτιντασιώτης, (2008: 125, 126) οι οποίοι αναφέρουν ότι η ανάπτυξη γνωστικών ικανοτήτων σχετικά με το χώρο (όπως είναι η περιστροφή σε νοερό επίπεδο), η τρισδιάστατη λογική του χώρου και οι μαθηματικές δραστηριότητες που αναφέρονται στο μετασχηματισμό ή τη διαχείριση νοερών εικόνων παραγνωρίζονται στη συγκεκριμένη βαθμίδα δημιουργώντας προβλήματα στις επιδόσεις ορισμένης κατηγορίας μαθητών.

Στη βάση της δομής του προγράμματος βρίσκεται η έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας» σύμφωνα με την οποία κάτι που μαθαίνεται σε μία φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο και στις επόμενες, ακολουθώντας την εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων των μαθητών, από το νηπιαγωγείο μέχρι και το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 10, 11). Για τη συγκεκριμένη τάξη, μεταξύ των βασικών θεμάτων των τροχιών στη Γεωμετρία βρίσκονται τα γεωμετρικά σχήματα και η μέτρηση επιφάνειας. Στις υποτροχιές του πρώτου θέματος περιλαμβάνεται η αναγνώριση και η ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων, η ανάλυση των ιδιοτήτων τους και η εύρεση σχέσεων μεταξύ αυτών, ενώ υποδεικνύεται η προτροπή για προοδευτική εστίαση των μαθητών στα επαρκή χαρακτηριστικά για τον ορισμό και την ταξινόμηση αυτών των σχημάτων. Στη μέτρηση επιφάνειας συμπεριλαμβάνεται η μέτρηση με τυπικές και μη τυπικές μονάδες, ο υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου καθώς και η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 136-139). Ιδιαίτερα για τις διαδικασίες μέτρησης μεγεθών αναφέρεται ότι έχουν μεγάλη σημασία τόσο για μια ποικιλία εφαρμογών της καθημερινής ζωής όσο και για ορισμένες διαστάσεις των Μαθηματικών και παρά τη διαπίστωση ότι συμβάλουν στην ουσιαστική κατανόηση των μεγεθών εκ μέρους των μαθητών, η μέχρι πρότινος διδακτική τους εισαγωγή ήταν ελλιπής (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 23, 24).

Ένα άλλο στοιχείο που χαρακτηρίζει τα νέα προγράμματα σπουδών είναι η αξιοποίηση χειραπτικών μοντέλων και τεχνολογικών και ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία, υπογραμμίζοντας ωστόσο ότι για να είναι αποτελεσματικά απαιτείται η λειτουργική τους ενσωμάτωση στη διαδικασία μάθησης. Μεταξύ των ψηφιακών εργαλείων που προτείνονται είναι και η κατηγορία του δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 26, 27). Τέλος θέματα που σχετίζονται με τη δομή των νέων προγραμμάτων είναι επίσης η βαρύτητα που δίνεται στην έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας, η σημασία στην εκπόνηση συνθετικών εργασιών και η προσέγγιση στην έννοια της αξιολόγησης.

Σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες επισημαίνεται ότι δεν αρκεί ένας «πλούσιος» σχεδιασμός αλλά θεωρείται σημαντική η διαχείρισή της από τον εκπαιδευτικό κατευθύνοντας τους μαθητές σε αναστοχαστική δράση και σε αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων. Οι δε συνθετικές εργασίες δίνουν την ευκαιρία για διασύνδεση των Μαθηματικών (και της Γεωμετρίας) με άλλες επιστήμες και γνωστικές περιοχές, ενώ για την αξιολόγηση προτείνεται η διαμορφωτική της εκδοχή η οποία συμβάλει στην ποιοτικότερη μάθηση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 27-30).

Βέβαια όπως υπογραμμίζουν και οι συντάκτες των νέων ΠΣ, ένα νέο Πρόγραμμα Σπουδών αποτελεί μόνο την αφετηρία για την αναβάθμιση της ποιότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης και θα πρέπει να συνδυαστεί με την ανάπτυξη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού και με την παροχή συνεχούς εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 1). Θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν τον τρόπο οικοδόμησης των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές και να αντιληφθούν την ανάγκη μεταστροφής της διδασκαλίας σε περισσότερο διερευνητικές και συνεργατικές μορφές, όπου η προτεραιότητα θα δίνεται στην ανάπτυξη και στο μετασχηματισμό των νοητικών δομών αντί της προσήλωσης στην καλλιέργεια υπολογιστικών δεξιοτήτων.

Αποσαφηνίζοντας τώρα την έννοια του γεωμετρικού σχήματος και του τριγώνου, να αναφέρουμε ότι στο ιδεατό γεωμετρικό μοντέλο της ευκλείδειας γεωμετρίας ένα γεωμετρικό σχήμα είναι μια διάταξη σημείων στο χώρο, το οποίο αποτελεί υποσύνολο του χώρου που περιέχεται μεταξύ ενός ή περισσότερων ορίων. Αναφερόμενοι στις δύο διαστάσεις, το γεωμετρικό σχήμα είναι υποσύνολο ενός επιπέδου και το τρίγωνο ένα επίπεδο σχήμα που οριοθετείται από μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή, περιλαμβάνει και τα σημεία της γραμμής και τα σημεία που περιέχονται σε αυτή, έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες και αποτελεί την πιο απλή μορφή πολυγώνου (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 116, 117, 127, 129, 130).

Όσον αφορά το εμβαδόν, αυτό λογίζεται ως το μέγεθος που προσαρτάται σε μια πολυγωνική περιοχή και δείχνει το αποτέλεσμα μέτρησης της επιφάνειάς της. Το εμβαδόν δεν αποτελεί χαρακτηριστικό μιας γεωμετρικής έννοιας, δηλαδή δεν την καθορίζει αλλά τη συνοδεύει. (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 129). Όπως έχει ήδη αναφερθεί η μέτρηση μεγεθών (άρα και του εμβαδού) θεωρείται σημαντική διότι έχει πολύπλευρη εφαρμογή στην καθημερινή ζωή (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2007-2013: 23, 24 και Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 148). Για να μετρήσουμε τα εμβαδόν ενός σχήματος επιλέγουμε τη μονάδα μέτρησης η οποία είναι ένα άλλο εμβαδό μικρότερης επιφάνειας και εν συνεχεία καλύπτουμε τη συγκεκριμένη επιφάνεια και απαριθμούμε τις μονάδες. Με την εφαρμογή των τύπων του εμβαδού ο υπολογισμός του γίνεται συντομότερος. (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 148, 153,). Να προσθέσουμε απλά στο σημείο αυτό ότι οι μετρήσεις μεγεθών, όπως υποστηρίζει ο Van de Walle (2005: 451), μπορούν να γίνουν και με μη τυπικές μονάδες μέτρησης οι οποίες έχουν το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τη διερεύνηση σχέσεων στις οποίες εμπλέκονται. Επιπρόσθετα ο Tan (Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, 2009: 229) έχει προτείνει ότι η κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού, πρέπει να προέλθει από την εμπειρία χειρισμών κάλυψης επιφανειών με υλικά, για να μπορέσει αργότερα να κατανοηθεί και η χρήση γεωμετρικών τύπων. Επομένως είναι σημαντικό η «κάλυψη» να προηγηθεί της εκμάθησης του γεωμετρικού τύπου.

Να αναφέρουμε ότι βάση του τύπου του παραλληλογράμμου μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου, καθώς τα δύο σχήματα έχουν κοινό ύψος και βάση και το τρίγωνο αποτελεί το συμπλήρωμα του παραλληλογράμμου (Τριανταφυλλίδης, Σδρόλιας, 2007: 153, 154). Τέλος όπως επισημαίνει και ο Χαλάτσης (2006: 168) δύο ίσα τρίγωνα (που ταυτίζονται όταν μετακινηθούν) είναι ισοεμβαδικά, αλλά δεν σημαίνει ότι δύο ισοεμβαδικά είναι και ίσα. Αυτό αφήνει ένα ενδιαφέρον πεδίο διερεύνησης από τους μαθητές στο πλαίσιο μιας επικοδομιστικής διδασκαλίας.

3.2. Τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele

Ανάμεσα στα διάφορα θεωρητικά μοντέλα διδασκαλίας και μάθησης γεωμετρικών ιδεών ξεχωρίζει η θεωρία των Van Hiele η οποία έχει ως βασικό γνώρισμα την ιεράρχηση σε πέντε επίπεδα του τρόπου κατανόησης και της νοητικής επεξεργασίας αυτών των ιδεών. Το κάθε επίπεδο περιγράφει τον τρόπο νοητικής διεργασίας γεωμετρικών εννοιών αλλά και τους τύπους αυτών των εννοιών, οι οποίοι διαφοροποιούνται από επίπεδο σε επίπεδο (Van de Walle, 2005: 427). Η μετάβαση από επίπεδο σε επίπεδο αποτελεί κριτική ψυχολογική αλλαγή με σημαντική επίδραση στην περαιτέρω μάθηση (Jones, 2000: 60).

Στο επίπεδο 0 (νοερή απεικόνιση) οι μαθητές συλλογίζονται τα σχήματα και τη μορφή τους. Τα αναγνωρίζουν και τα ονομάζουν με βάση τα καθολικά οπτικά χαρακτηριστικά τους, χωρίς να επεξεργάζονται με σαφήνεια τις ιδιότητές τους. Τα παιδιά περιορίζουν τη σκέψη τους στα σχήματα με τα οποία ασχολούνται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η εμφάνιση είναι το μοναδικό κριτήριο ταξινόμησης και γι' αυτό η περιστροφή ενός σχήματος μπορεί να δυσκολέψει ή να διαφοροποιήσει αυτή την ταξινόμηση (Van de Walle, 2005: 427, 428). Σύμφωνα με τους Burger and Shaughnessy (1986: 43, 44) δηλωτικοί δείκτες του επιπέδου 0 είναι: χρήση ασαφών ιδιοτήτων και αναφορά σε οπτικά προτότυπα για να συγκρίνουν, να ταυτοποιήσουν και να ταξινομήσουν σχήματα, συμπερίληψη άσχετων γνωρισμάτων όπως ο προσανατολισμός ενός σχήματος στο χαρτί για την παραπάνω ταξινόμηση, αδυναμία να αντιληφθούν την άπειρη ποικιλία των τύπων των σχημάτων, ασυνεπείς ταξινομήσεις (ταξινομήσεις με ιδιότητες που δεν τις μοιράζονται τα σχήματα μιας ομάδας), και τέλος αδυναμία χρήσης ιδιοτήτων σαν απαραίτητες συνθήκες για να καθορίσουν ένα σχήμα.

Στο επίπεδο 1 (ανάλυση) οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίζουν τα σχήματα όχι ως μεμονωμένες φιγούρες, αλλά στο πλαίσιο μιας τάξης σχημάτων, η οποία περιλαμβάνει κοινά χαρακτηριστικά. Δίνεται έμφαση στις ιδιότητες. Τα παιδιά έχουν την ικανότητα να αναλύουν και να καταγράφουν όλες τις ιδιότητες ενός σχήματος (π.χ. αριθμό πλευρών, αριθμό ορθών ή μη γωνιών, ενδεχόμενη παραλληλία απέναντι πλευρών, κλπ.). Αναγνωρίζουν ιδιότητες που αφορούν τις κλάσεις των σχημάτων(πχ. όλα τα ορθογώνια), αλλά δεν περιορίζονται στις αναγκαίες για να τα ορίσουν. Δηλωτικοί δείκτες του επιπέδου 1 σύμφωνα με τους Burger and Shaughnessy είναι: να συγκρίνουν σχήματα σύμφωνα με τις ιδιότητές των συστατικών τους, αδυναμία συμπερίληψης κατηγοριών μεταξύ γενικών τύπων σχημάτων (π.χ. ότι όλα τα παραλληλόγραμμα είναι τραπέζια), ομαδοποίηση με γνώμονα απλά χαρακτηριστικά γνωρίσματα όπως το μήκος πλευρών και παραμέληση άλλων πιο περίπλοκων όπως η συμμετρία κ.ά., χρήση όλων των απαραίτητων ιδιοτήτων -και όχι των επαρκών -για τον προσδιορισμό σχημάτων, περιγραφή σχημάτων με σαφή χρήση των ιδιοτήτων τους και όχι της ονομασίας τους ακόμη και αν αυτή είναι γνωστή, απόρριψη των ορισμών του βιβλίου και προτίμηση των προσωπικών χαρακτηρισμών, επαλήθευση της εγκυρότητας μιας γεωμετρικής πρότασης με βάση τα πρότυπα των φυσικών επιστημών (π.χ. παρατήρηση μιας ποικιλίας σχεδίων) και τέλος έλλειψη κατανόησης της μαθηματικής απόδειξης (Burger and Shaughnessy, 1986: 44).

Αντικείμενο της σκέψης τους στο επίπεδο 2 (μη τυπική παραγωγή) είναι οι ιδιότητες των σχημάτων. Διαπιστώνουν γεωμετρικές φιγούρες από τις ιδιότητές τους. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να ταξινομούν τα σχήματα και να τα ορίζουν περιοριζόμενοι στα απολύτως αναγκαία χαρακτηριστικά. Μπορούν δηλαδή να κάνουν τη διάκριση ανάμεσα στην αναγκαιότητα και την επάρκεια μέσα από ένα σύνολο ιδιοτήτων ενός σχήματος στην προσπάθεια προσδιορισμού του. Παραδείγματος χάριν ένα παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία αρκεί για να το ορίσουν ως ορθογώνιο. Σε δραστηριότητες ταξινόμησης, οι μαθητές που συλλογίζονται σε αυτό το επίπεδο χρησιμοποιούν ποικιλία τύπων και ιδιοτήτων των σχημάτων για να τα ομαδοποιήσουν. Υπάρχει εστίαση σε λογικά επιχειρήματα σχετικά με τις ιδιότητες και προσπάθεια εκτίμησης μη τυπικών παραγωγικών επιχειρημάτων που αφορούν τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Επικέντρωση στην καλλιέργεια της λογικής και στην αιτιολόγηση, η οποία είναι περισσότερο διαισθητική παρά αυστηρά παραγωγική. Ενώ στο επίπεδο 1 τα άτομα δεν χρησιμοποιούν την επαγωγική λογική για να ανακαλύψουν σχέσεις στα σχήματα και απλά παρατηρούν τις ιδιότητες, στο επίπεδο 2 αναπτύσσουν παραγωγικά επιχειρήματα για να υποστηρίξουν τις σχέσεις στις οποίες κατέληξαν μέσω επαγωγικών συλλογισμών. Σύμφωνα με τον Van de Walle δηλωτικοί δείκτες του επιπέδου 2 θα μπορούσαν να είναι: η βελτίωση στις δεξιότητες νοερής απεικόνισης του χώρου, η δημιουργία και η δοκιμή υποθέσεων, η χρήση λογικών εξηγήσεων, η αιτιολόγηση συμπερασμάτων και τέλος η αξιολόγηση των λογικών επιχειρημάτων για διάφορες γεωμετρικές καταστάσεις (Van de Walle, 2005: 428, 480). Κατά τους Burger and Shaughnessy αντίστοιχοι δείκτες για το επίπεδο 2 είναι: ο σχηματισμός πλήρων ορισμών των τύπων των σχημάτων, η ικανότητα να τροποποιεί ορισμούς και να χρησιμοποιεί ορισμούς για καινούριες έννοιες, σαφείς αναφορές σε ορισμούς, η ικανότητα να αποδέχεται ισοδύναμες μορφές ορισμών, αποδοχή λογικών υποκατηγοριών μεταξύ τύπων σχημάτων, ικανότητα ταξινόμησης σχημάτων σύμφωνα με μια ποικιλία χαρακτηριστικών, σαφής χρήση του συλλογιστικού τύπου «εάν….. τότε», ικανότητα να σχηματίζει άτυπα επαγωγικά επιχειρήματα και τέλος σύγχυση ανάμεσα στο ρόλο των αξιωμάτων και των θεωριών (Burger and Shaughnessy, 1986: 44).

Στο επίπεδο 3 (παραγωγή) οι μαθητές προχωρούν στην διερεύνηση των σχέσεων ανάμεσα στις ιδιότητες προσπαθώντας να βγάλουν συμπεράσματα βασισμένα κυρίως στη λογική και όχι στη διαίσθηση και αναπτύσσοντας σταδιακά ένα σύστημα αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και προτάσεων. Στο ανώτερο επίπεδο της ιεραρχίας (αυστηρότητα), το οποίο διακρίνεται από επιστημονική αυστηρότητα, οι σπουδαστές μελετούν τις σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας.

Βασικό στοιχείο της θεωρίας των Van Hiele είναι ότι σε κάθε επίπεδο δημιουργούνται προϊόντα σκέψης τα οποία θα αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και ανάλυσης στο επόμενο επίπεδο. Τα επίπεδα ακολουθούν επίσης μια καθορισμένη διαδοχική σειρά. Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές θα πρέπει να περάσουν από όλα τα προηγούμενα επίπεδα πριν μεταβούν σε κάποιο συγκεκριμένο έχοντας βιώσει τη γεωμετρική εμπειρία και τον τρόπο συλλογισμού και διερευνώντας τα αντίστοιχα αντικείμενα του κάθε επιπέδου (Van de Walle, 2005: 429). Η ιεραρχική φύση των επιπέδων επιβεβαιώνεται και από τα πορίσματα ερευνητικών μελετών των Mayberry (1983: 58, 67, 68), Fuyes, D., Geddes, D., & Tischer, R. και Burger and Shaughnessy (Burger and Shaughnessy, 1986: 41, 42).

Ωστόσο υπάρχουν και ερευνητές όπως ο Duval ο οποίοι αμφισβητούν το μοντέλο των Van Hiele και κυρίως την αυστηρή ιεραρχία σύμφωνα με την οποία οργανώνονται οι διαφορετικοί τρόποι μαθηματικών συλλογισμών. Ο Duval υποστηρίζει ότι τα διάφορα είδη των γνωστικών δραστηριοτήτων έχουν τη δική τους ανεξάρτητη ανάπτυξη και δεν αντιπροσωπεύουν κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο σκέψης (Jones, 2000: 81, 82).

Η Mayberry διαπίστωσε επίσης ότι είναι δυνατόν κάποιοι μαθητές να λειτουργούν σε διαφορετικά επίπεδα για διαφορετικές έννοιες (Mayberry 1983: 63). Οι Burger and Shaughnessy επισημαίνουν μάλιστα ότι μερικοί μαθητές και μαθήτριες ταλαντεύονται ανάμεσα σε διαφορετικά επίπεδα πάνω στο ίδιο θέμα. Αν και φαίνεται να γνωρίζουν το συμπερασματικό συλλογισμό του επιπέδου 2, δείχνουν να προτιμούν τη σχετική ασφάλεια της συλλογιστικής του επιπέδου 1 (Burger and Shaughnessy, 1986: 45). Αυτό σε συνδυασμό με την παρατήρηση του Usiskin ότι οι μαθητές που βρίσκονται στη φάση μετάβασης από το ένα επίπεδο στο άλλο είναι δύσκολο να ταξινομηθούν αξιόπιστα (Burger and Shaughnessy, 1986: 41), θέτει σε αμφισβήτηση τη διακριτότητα των επιπέδων και αναδεικνύει τη δυναμική παρά τη στατική τους φύση, αυξάνοντας συγχρόνως τη δυσκολία προσδιορισμού του κυρίαρχου επιπέδου συλλογισμού σε κάθε μαθητή.

Αποδεχόμενοι τη θεωρία των Van Hiele και τη βασική της θέση ότι ο κάθε μαθητής αναπτύσσει τη γεωμετρική του σκέψη μεταβαίνοντας σταδιακά μέσα από μια διαδοχή επιπέδων, θα πρέπει στόχος της εκπαίδευσης στη γεωμετρία να είναι η ανάπτυξη του επιπέδου αυτής της σκέψης.

Τα επίπεδα Van Hiele αποτελούν σύνθετες δομές που περιλαμβάνουν την ανάπτυξη και των εννοιών και της διαδικασίας συλλογισμού. Οι δομές των επιπέδων μας βοηθούν να αναλύσουμε και να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των μαθητών σε διάφορα γεωμετρικά καθήκοντα, την απόκτηση εννοιών και τις ικανότητες συλλογισμού τους και να σχεδιάσουμε δραστηριότητες που θα ωθούν την ανάπτυξη μεταξύ των επιπέδων, καθώς οι έρευνες αποδεικνύουν ότι η ανάπτυξη αυτή είναι προϊόν περισσότερο της διδασκαλίας και όχι της ηλικίας (Burger and Shaughnessy, 1986: 45, 46, Van de Walle, 2005: 424, 429). Την παραπάνω άποψη συνεπικουρεί και η διαπίστωση ότι η μετάβαση πέραν του επιπέδου 2 επιτυγχάνεται από λίγους μόνο μαθητές ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Jones, 2000: 61), Usiskin (Burger and Shaughnessy, 1986: 42).

Αυτό που πραγματικά επηρεάζει την πρόοδο μεταξύ των επιπέδων είναι η γεωμετρική εμπειρία. Έχει αποδειχθεί ότι οι πλούσιες γεωμετρικές εμπειρίες με τα σχήματα και τις σχέσεις του χώρου συντελούν στην ανάπτυξη της αίσθησης του χώρου και της γεωμετρικής συλλογιστικής (Van de Walle: 426, 479) καταρρίπτοντας την πεποίθηση ότι αυτή αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό μερικών μόνο ανθρώπων. Ο σχεδιασμός και η παροχή δραστηριοτήτων που θα επιτρέπουν στους μαθητές την ενεργητική συμμετοχή, τη διερεύνηση, τη συζήτηση και την αλληλεπίδραση με τις ιδέες, αποτελούν γεωμετρικές εμπειρίες που προάγουν τη γεωμετρική τους σκέψη. Όταν ρωτούμε τους μαθητές να διερευνήσουν εάν ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι ταυτόχρονα και ισόπλευρο, τους ωθούμε ουσιαστικά να κάνουν πρόοδο στο επίπεδο 2, για να μπορέσουν αργότερα να διερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες και να προσπαθήσουν να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν τις υποθέσεις που κάνουν παράγοντας συμπεράσματα στα πλαίσια ενός συστήματος λογικής.

Τέλος είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι η διδασκαλία θα πρέπει να ανταποκρίνεται στο επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές, γιατί διαφορετικά η διαπραγμάτευση με αντικείμενα και ιδέες που δεν έχουν δομηθεί σε προηγούμενα στάδια θα επιφέρει προβλήματα και δυσκολίες επικοινωνίας και μάθησης, η οποία θα τείνει να είναι επιφανειακή και μη ουσιαστική (Van de Walle: 430). Αυτή η θέση υπονοεί και την αναγκαιότητα εφαρμογής διαφοροποιημένης διδασκαλίας, εφόσον είναι πολύ πιθανόν μέσα σε μία τάξη να υπάρχουν μαθητές με τρόπο σκέψης που αντιστοιχεί σε διαφορετικά επίπεδα των Van Hiele. Η προσπάθεια αυτή θα ωθήσει σε μια σταδιακή εξομάλυνση ώστε δάσκαλοι και μαθητές να λειτουργούμε στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας κοινή γλώσσα και παρόμοιες διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, κατανοώντας ο ένας το συλλογισμό του άλλου και αποτρέποντας φαινόμενα ματαίωσης και αποθάρρυνσης (Burger and Shaughnessy, 1986: 46).

3.3 Εποικοδομισμός-Κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, Κατανόηση, Πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης

3.3.1 Εποικοδομισμός –κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο

Πέραν των διαδικασιών της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών και το πώς αυτή εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους διαδρομής -στοιχεία που το μοντέλο των Van Hiele ερμηνεύει- οι εκπαιδευτικοί είναι απαραίτητο να γνωρίζουν και τον τρόπο που τα παιδιά μαθαίνουν. Ανάμεσα στις διάφορες θεωρίες μάθησης που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό, η εποικοδομιστική θεώρηση (constructivism) και το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο του Vygotsky μοιάζουν να είναι οι ευρύτερα αποδεκτές.

Σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό, «τα άτομα μαθαίνουν από την άμεση εμπειρία με τον κόσμο, μέσω μιας διαδικασίας κατασκευής της γνώσης η οποία λαμβάνει χώρα όταν τα άτομα εμπλέκονται διανοητικά σε νοηματοδοτούμενες γι’ αυτά δραστηριότητες» (Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, 2009: 232). Οι μαθητές δεν είναι άγραφοι χάρτες, ούτε αφομοιώνουν αυτούσιες τις ιδέες που παρουσιάζουν οι εκπαιδευτικοί, αλλά αντίθετα είναι δημιουργοί της ίδιας τους της γνώσης (Van de Walle, 2005: 35). Οικοδομούν μόνοι τους τη γνώση τους προσδίδοντας νοήματα στα πράγματα που αντιλαμβάνονται και κατασκευάζουν έτσι «εννοιολογικά δίκτυα» ή αλλιώς «γνωστικές δομές» οι οποίες συνιστούν το δικό τους χάρτη της πραγματικότητας. Οι γνωστικές δομές αποτελούν προϊόντα της οικοδόμησης, αλλά και εργαλεία για ενσωμάτωση περαιτέρω εννοιών.

Οι απαντήσεις των παιδιών δεν είναι τυχαίες. Τις περισσότερες φορές συνδέονται με τις γνώσεις που κατέχουν και τις οποίες χρησιμοποιούν για να ερμηνεύσουν μια καινούρια έννοια ή μια προβληματική κατάσταση. Οι υπάρχουσες γνώσεις και ιδέες είναι πολύ σημαντικές γιατί με αυτές θα συνδεθεί η κάθε καινούρια έννοια. Η δόμησή της θα επιτευχθεί μέσω αυτών των συνδέσεων και η κατανόησή της θα είναι ανάλογη του αριθμού των συνδέσεων αυτών με τις ήδη υπάρχουσες ιδέες. Ως αποτέλεσμα θα έχουμε την επέκταση ή την τροποποίηση των γνωστικών δομών. Όταν η υπάρχουσα γνώση είναι ελλιπής ή εσφαλμένη, η νέα γνώση θα δομηθεί πιθανόν με εσφαλμένο τρόπο (Van de Walle, 2005: 36, 37, 38).

Επειδή είναι προφανές ότι ο κάθε μαθητής και μαθήτρια θα ενεργοποιήσει διαφορετικές ιδέες οι οποίες θα συνδεθούν με την καινούρια και θα δομήσει διαφορετικό αριθμό συνδέσεων, συνεπάγεται ότι η οικοδόμηση μιας έννοιας θα είναι διαφορετική μεταξύ τους, ακόμη και μέσα στο ίδιο περιβάλλον (Van de Walle, 2005: 36). Γι’ αυτό θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να προσεγγίζει με ιδιαίτερο ενδιαφέρον κάθε διαφορετική ή απροσδόκητη ανταπόκριση εκ μέρους των μαθητών.

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι η ανάδειξη των προϋπάρχουσων γνώσεων (ή πρότερων ή εναλλακτικών αντιλήψεων) των μαθητών αποτελεί το πρώτο και απαραίτητο βήμα για μια διδασκαλία που θα στηρίζεται στον εποικοδομισμό και θα προσανατολίζεται σε στρατηγικές οι οποίες θα έχουν ως αφετηρία τα ίδια τα παιδιά. Πριν αλλάξουν τις πεποιθήσεις τους για μια έννοια, πρέπει να πεισθούν ότι αυτή είναι αναποτελεσματική ή ελλιπής. Πρέπει να οδηγηθούν σε γνωστική σύγκρουση για να αναγκαστούν να τροποποιήσουν τις γνωστικές τους δομές. Για την ισχυρή κατασκευή μιας έννοιας, απαιτείται οι μαθητές να πιστέψουν σε αυτή και σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί με την απλή μετάδοση της γνώσης από τρίτους. Μια ισχυρή κατασκευή σύμφωνα με την Confrey (1990: 111) χαρακτηρίζεται μεταξύ άλλων από δομές με εσωτερική συνοχή, ενσωμάτωση σε ένα πλούσιο δίκτυο εννοιών, σύγκλιση σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων, συμφωνία με τους ειδικούς, ύπαρξη δεσμών με διάφορα συμβολικά συστήματα, δυνατότητα να γίνει εργαλείο για περεταίρω κατασκευές και ικανότητα αιτιολόγησης και υπεράσπισης.

Η ενεργός συμμετοχή των παιδιών στην οικοδόμηση μιας ιδέας και στην κατανόησή της αποτελεί εξ ορισμού χαρακτηριστικό του εποικοδομισμού. Αυτό προϋποθέτει αλλαγές στη μορφή και στις μεθόδους διδασκαλίας, στη χρήση μέσων και υλικών, στο σχεδιασμό και υλοποίηση δραστηριοτήτων, αλλά και στη στάση του δασκάλου προς τους μαθητές και τη γνώση γενικότερα. Η μαθηματική γνώση δεν μεταδίδεται μηχανικά από το δάσκαλο ή το σχολικό εγχειρίδιο σε ένα παθητικό μαθητή, όπως συνέβαινε στην παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία. Απαιτείται η ενεργοποίηση του μαθητή ο οποίος θα διαπραγματεύεται αναστοχαστικά και βιωματικά τις καινούριες ιδέες μέχρι να τις κάνει κτήμα του. Η Confrey (1990) επισημαίνει ότι ο κονστρουκτιβισμός δεν χαρακτηρίζεται μόνο από τις διαδικασίες της οικοδόμησης της γνώσης, αλλά και από το ότι είμαστε συνειδητά ενήμεροι για αυτά που κατασκευάζουμε. Ειδικότερα για τα μαθηματικά αναφέρει: «η κατασκευή τους είναι αντικείμενο προσεκτικής εξέτασης…δεν χτίζονται από αισθητηριακά δεδομένα, αλλά από ανθρώπινη δραστηριότητα (μέτρησης, διάταξης, ταξινόμησης, κλπ.) και αποτελούν τη γλώσσα αυτής της δράσης.» (Confrey 1990: 109).

Ο κονστρουκτιβισμός προτείνει επί της ουσίας ένα εναλλακτικό μοντέλο διδασκαλίας το οποίο σύμφωνα με τη μελέτη της Confrey συμπεριλαμβάνει τα εξής στοιχεία: την προαγωγή της αυτονομίας των μαθητών, την ανάπτυξη των ανακλαστικών διαδικασιών, την καταγραφή ιστορικού κάθε ατομικής περίπτωσης, τη διαπραγμάτευση δοκιμαστικών λύσεων, την ανίχνευση και συζήτηση των στρατηγικών και τέλος την προσκόλληση στο σκοπό των υλικών αναπαραστάσεων. Θεωρεί σημαντικό να υπάρχει αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητών, μέσω της οποίας θα συζητιούνται οι διάφορες στρατηγικές και στο τέλος θα ζητείται από τους μαθητές να παρουσιάζουν και να αιτιολογούν τις κατασκευές τους. Οι μαθητές θα πρέπει να αποφασίζουν για την επάρκεια αυτών των κατασκευών. Στη σπουδαιότητα της αλληλεπίδρασης των μαθητών με το δάσκαλό τους στο πλαίσιο του κονστρουκτιβισμού αναφέρονται και οι Cobb και Steffe (1983: 84) λέγοντας χαρακτηριστικά: «οι εμπειρίες τις οποίες αποκτούν τα παιδιά μέσω της αλληλεπίδρασης με τους ενήλικες επηρεάζουν σημαντικά την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης». Υποστηρίζουν ότι οι μαθητές ερμηνεύουν αυτή την αλληλεπίδραση και τις παρεμβάσεις των εκπαιδευτικών με βάση τις νοητικές τους δομές και αυτή η ερμηνεία προσδιορίζει την εμπειρία τους.

Με όλα τα παραπάνω παρατηρείται μεγαλύτερη εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα και επιπρόσθετα με την απαίτηση του εκπαιδευτικού για αιτιολόγηση, το παιδί συνηθίζει σε μια μικροκουλτούρα και αναμένει πάντοτε στο τέλος να ερωτηθεί από τον εκπαιδευτικό για τις στρατηγικές και τις κατασκευές του. Ο Thompson (1992: 124) αναφέρει ότι υπάρχει διαλεκτική σχέση μεταξύ του συλλογισμού και της έκφρασης. «Καθώς οι μαθητές προσπαθούν να εκφράσουν σωστά αυτά που σκέφτονται, έχουν την ευκαιρία να αποσαφηνίζουν τους συλλογισμούς τους». Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται ο αναστοχασμός και η ανάπτυξη των μεταγνωστικών δεξιοτήτων και η κάθε δράση γίνεται περισσότερο συνειδητά.

Η Confrey σημειώνει ότι η άμεση μορφή διδασκαλίας εμποδίζει την αποδόμηση των παρανοήσεων των μαθητών και δεν τους βοηθάει στην ανάπτυξη ανώτερων γνωστικών δεξιοτήτων. Αντίθετα η αποτίμηση του προγράμματός της με τις κονστρουκτιβιστικές επιρροές, έδειξε βελτίωση στις μαθηματικές επιδόσεις και αύξηση της αυτοεκτίμησης και της επιμονής των μαθητών στη διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών.

Τη θέση του κονστρουκτιβισμού στη μαθηματική εκπαίδευση περιγράφει και η Noddings (1990: 7-18) στη δική της μελέτη, παρουσιάζοντας τις βασικές απόψεις για την κατασκευή της γνώσης από τα δρώντα υποκείμενα και για την διαρκή ανάπτυξη των γνωστικών δομών οι οποίες αποτελούν συγχρόνως και τα εργαλεία της κατασκευής. Η Noddings εστιάζεται στον κονστρουκτιβισμό ως μετα-επιστημολογική θέση, ο οποίος μπορεί να συνεισφέρει από παιδαγωγικής άποψης ως γνωστική και μεθοδολογική θέση, προτείνοντας σύμφωνες με αυτόν μεθόδους μελέτης και διδασκαλίας. Κάνοντας αναφορά στο γνωστό παράδειγμα του Erlwanger για το μαθητή Benny, ο οποίος είχε αναπτύξει λανθασμένους κανόνες για την μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, υποστηρίζει ότι θα πρέπει να ενθαρρύνουμε τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και τη γνωστική σύγκρουση, αν θέλουμε να τα ωθήσουμε στη διόρθωση των παρανοήσεών τους και στην αποφυγή δημιουργίας λανθασμένων μοντέλων σκέψης και κατασκευών. Άλλα στοιχεία που ενσωματώνει σε μια καλή διδακτική στρατηγική, είναι η φωναχτή σκέψη των μαθητών η οποία θα λειτουργούσε ως διαγνωστικό εργαλείο ενημέρωσης αυτού του τρόπου σκέψης, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία με τη διαχείρηση των όποιων ζητημάτων αυτή εγείρει, και η σκόπιμη χρήση των χειραπτικών υλικών.

Ταυτόχρονα όμως δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός ότι το άτομο και ο μαθητής που είναι ενταγμένος σε μία τάξη, μαθαίνει μέσα σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο αλληλεπιδρώντας με άλλους και χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που αυτό το πλαίσιο του προσφέρει. Ο Vygotsky δήλωνε χαρακτηριστικά ότι «η μάθηση δεν είναι μια απλή σχέση μεταξύ ατόμου και γνώσης, αλλά η εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα» (Κολέζα, 2000: 35). Ο ίδιος ψυχολόγος ανέφερε επίσης ότι η μίμηση κάποιων λειτουργιών, η αλληλεπίδραση με ενηλίκους και συνομηλίκους και η παροχή βοήθειας αποφέρει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα για το παιδί (Σαλονικιός, 2008: 13).

Ανάμεσα στις κεντρικές ιδέες της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης της μαθηματικής εκπαίδευσης αναφέρονται: α) οι κοινωνικές οργανωτικές διαδικασίες ως έμφυτο χαρακτηριστικό της μάθησης β) η μάθηση ως μορφή μαθητείας με συμμετοχή σε δραστηριότητες μιας κοινωνικής ομάδας γ) η μάθηση μαθηματικών είναι επικοινωνιακή δραστηριότητα και δ) η μάθηση απαιτεί διαπραγμάτευση του νοήματος στο πλαίσιο συγκεκριμένης δραστηριότητας (Κολέζα, 2000: 34).

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, οι δύο θεωρητικές σχολές (κονστρουκτιβισμός και κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο) ερμηνεύουν συμπληρωματικά τον τρόπο απόκτησης της γνώσης. Η Κολέζα υποστηρίζει ότι «υπάρχει και ένα ενεργητικό άτομο και ένα ενεργητικό περιβάλλον». Μπορούμε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας άλλοτε να προτρέπουμε τα παιδιά να κατασκευάζουν και να εκφράζονται με το δικό τους τρόπο και άλλοτε με την προσφορά εργαλείων να στηρίζουμε τη σκέψη τους (Κολέζα, 2000: 40).

3.3.2 Κατανόηση

Η οικοδόμηση της γνώσης αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει να συνδέεται με την κατανόηση. Χωρίς την κατανόηση θα έχουμε τη μηχανική αποστήθιση μιας έννοιας. Η απομνημονευμένη γνώση όμως είναι μια γνώση επιφανειακή και αυτόνομη, η οποία δεν συνδέεται με κάποιο δίκτυο ιδεών. Στις τεχνικές αποστήθισης χρησιμοποιούνται άσχετες ιδέες οι οποίες έχουν ελάχιστη σχέση με τα μαθηματικά. Η δημιουργία όμως νέων μαθηματικών ιδεών θα πρέπει να στηρίζεται στη χρήση μαθηματικών ιδεών, γιατί διαφορετικά δεν θα έχουμε χρήσιμα γνωστικά δίκτυα, αλλά τη δημιουργία κατά την Noddings μιας «αδύναμης δομής» (Van de Walle, 2005: 38).

Επομένως η κατανόηση χαρακτηρίζει την ποιότητα και την ποσότητα των συνδέσεων μιας ιδέας με τις κατάλληλες υπάρχουσες ιδέες και εξαρτάται από την ύπαρξη των τελευταίων. Όταν έχουμε ένα πλούσιο δίκτυο συνδέσεων αλληλοσυσχετιζόμενων ιδεών, τότε μιλάμε –σύμφωνα με τον όρο του Richard Skemp- για συσχετιστική κατανόηση, σε αντίθεση με τη συντελεστική κατανόηση όπου η γνώση είναι απομονωμένη και προέρχεται από αποστήθιση μέσω πρακτικής εξάσκησης (Van de Walle, 2005: 38).

Διδάσκοντας λοιπόν γεωμετρία, το ζητούμενο δεν θα πρέπει να είναι η απόκτηση γνώσεων, αλλά η κατανόησή τους από τους μαθητές. Και σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να δίνουμε την ευκαιρία μέσω της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, της μέγιστης αλληλεπίδρασης και συζήτησης, να εμφανίζεται στο προσκήνιο ένα πλήθος διαθέσιμων ιδεών οι οποίες θα αποτελέσουν το υπόβαθρο σύνδεσης με την καινούρια ιδέα.

Η ουσιαστική κατανόηση και η ανάπτυξη των συνδέσεων είναι αυτονόητο ότι δεν επιτυγχάνεται στιγμιαία, αλλά απαιτεί μακροχρόνια προσπάθεια εκ μέρους εκπαιδευτικών και μαθητών. Όμως προσφέρει ικανοποίηση και εσωτερικά κίνητρα στα υποκείμενα της γνώσης και παράλληλα διευκολύνει τη διατήρηση και τις διαδικασίες ανάκτησης των πληροφοριών. Επίσης οι ιδέες που έχουν κατανοηθεί μπορούν να επεκταθούν και να βοηθήσουν στην εκμάθηση νέων ιδεών. Η γνώση παραδείγματος χάριν των γωνιών διευκολύνει την ταξινόμηση των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους και αντίστοιχα η γνώση της διατήρησης του εμβαδού συμβάλει στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού.

Επιπρόσθετα η κατανόηση συνεισφέρει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, καθώς τα τελευταία προϋποθέτουν μεταφορά αποκτημένων ιδεών σε νέες περιστάσεις, η οποία διευκολύνεται όταν υπάρχει ενσωμάτωση ιδεών σε ένα πλούσιο δίκτυο. Κλείνοντας με τα οφέλη της συσχετιστικής κατανόησης, θα λέγαμε ότι αναπτύσσεται μια θετική στάση για τα μαθηματικά καθώς η κατανόησή τους αυξάνει την αίσθηση αυτοεκτίμησης και τα αποχαρακτηρίζει ως ένα δύσκολο και απόμακρο κόσμο (Van de Walle, 2005: 40, 41).

Στον αντίποδα της εννοιολογικής γνώσης (της γνώσης δηλαδή που είναι κατανοητή) υπάρχει και η διαδικαστική γνώση των μαθηματικών η οποία συνίσταται στη γνώση συμβόλων, κανόνων και γενικότερα υπολογιστικών δεξιοτήτων. Η γνώση αυτή, αν και χρήσιμη για την εφαρμογή των μαθηματικών, δεν μπορεί από μόνη της να οδηγήσει στην ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης. Για παράδειγμα οι επαναλαμβανόμενες ασκήσεις εύρεσης εμβαδού μέσω του μαθηματικού τύπου $Ε_{τριγ}$ =β.υ/2 δεν βοηθούν στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και χρειάζεται, όπως ήδη έχει αναφερθεί, μελέτη της έννοιας μέσω ένταξής της σε ένα λογικό δίκτυο.

3.3.3 Πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης

Η ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών και γεωμετρικών εννοιών, όπως είδαμε προηγουμένως, σχετίζεται με την ικανότητα δημιουργίας ποιοτικών και ποσοτικών συνδέσεων μεταξύ ενός δικτύου εννοιών. Σε αυτή την ανάπτυξη μπορεί αναμφισβήτητα να συμβάλλει και η παροχή πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης μιας έννοιας, όπως καταγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία. Κατ' αρχήν σύμφωνα με τις αρχές της Παιδαγωγικής και της Εξελικτικής Ψυχολογίας, η εφαρμογή της εποπτείας -της παράστασης, της εικόνας κάποιου αντικειμένου ή φαινομένου η οποία μας δημιουργείται από την οπτική μας αντίληψη ή σχετίζεται και με άλλες αισθήσεις- στη διδασκαλία διευκολύνει, επιταχύνει και προάγει τη μάθηση. Επιτυγχάνεται καλύτερη διατήρηση των παραστάσεων, μιας και σχετικά πορίσματα έδειξαν ότι ο συνδυασμός ταυτόχρονης όρασης και ακοής αυξάνει το ποσοστό διατήρησής τους στη μνήμη μας (Ζευκίλης, 1989: 7,8,18,). Πέραν της αισθητοποίησης των εννοιών, οι εκπαιδευτικοί προσδοκούν μέσω της εποπτείας στην πρόκληση του ενδιαφέροντος και τη διέγερση της προσοχής των μαθητών.

Ο Schnoz (2002: 101,102,113,116,117) προτείνοντας ένα ενοποιημένο πλαίσιο περιγραφικής και απεικονιστικής αναπαράστασης σημειώνει ότι οι εικόνες, οι γραφικές παραστάσεις και τα διάφορα είδη χαρτών παρέχουν πληροφορίες οι οποίες συμπληρώνουν τις λεκτικές πληροφορίες των κειμένων και μπορούν να υποστηρίξουν την επικοινωνία, τη σκέψη και τη μάθηση. Όσο δυσκολότερο είναι ένα μαθησιακό περιεχόμενο, τόσο περισσότερο αυξάνεται η ανάγκη των μαθητών και μαθητριών να προσέξουν τις επιπρόσθετες απεικονιστικές αναπαραστάσεις. Επιπρόσθετα επισημαίνει ότι η προϋπάρχουσα γνώση σχετικά με τους τύπους των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται κάθε φορά, καθώς και οι ενεργητικές γνωστικές διαδικασίες συμβάλουν στην αποτελεσματικότερη υποστήριξη της κατανόησης και της μάθησης. Σύμφωνα με τον Χαλάτση (2006: XV, 46), τα σχήματα στο χαρτί, όχι μόνο διευκολύνουν τις αποδεικτικές διαδικασίες, αλλά θεωρούνται απαραίτητα στοιχεία για τη διεξαγωγή τους. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά: «η φαντασία μας από μόνη της δεν αρκεί, έχουμε ανάγκη να βλέπουμε».

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει μια διευκρίνιση σχετικά με την έννοια της αναπαράστασης. Η κάθε εικόνα, σχέδιο ή αντικείμενο αναπαριστά μια έννοια εφόσον μπορεί πάνω σε αυτά να επιβληθεί μια μαθηματική σχέση. Η αναπαράσταση ενός σχήματος δεν ισοδυναμεί με την ίδια την έννοια. Τα μάτια μας βλέπουν μόνο το φυσικό αντικείμενο, ενώ το μυαλό μας είναι αυτό που μπορεί να επιβάλλει πάνω στο αντικείμενο τη μαθηματική σχέση. Εάν αυτή η σχέση δεν έχει οικοδομηθεί το αντικείμενο ή το σχέδιο δεν αναπαριστά καμιά έννοια (Van de Walle, 2005: 42, 44). Στο διδακτικό μας παράδειγμα η ταξινόμηση των τριγώνων απαιτεί την επιβολή σχέσεων σύγκρισης ανάμεσα σε γωνίες και πλευρές και όσον αφορά το εμβαδόν τη σύγκριση της επιφάνειας ενός τριγώνου με μια μονάδα μέτρησης που μπορεί να είναι φασόλια ή μονάδες ενός σχετικού καμβά.

Ως μοντέλο μιας μαθηματικής έννοιας θεωρείται κάθε αντικείμενο, σχέδιο ή εικόνα η οποία την αναπαριστά. Οι Lesh, Post & Behr (Van de Walle, 2005: 46) επέκτειναν την έννοια του μοντέλου σε πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις οι οποίες είναι τα χειραπτικά μοντέλα, οι εικόνες, ο γραπτός συμβολισμός, η προφορική γλώσσα και οι πραγματικές καταστάσεις. Επισημαίνουν ότι οι μεταφορές ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών βοηθούν στην ανάπτυξη νέων εννοιών, ενώ και ο Zoltan Dienes αναφέρει ότι η ποικιλία αναπαράστασης μιας ιδέας και η πολλαπλή έκφρασή της υποστηρίζει την κατανόησή της από τους μαθητές (Moyer, 2002: 175,176). Τα πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης των ιδεών συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση και προσδίδουν άλλη διάσταση στη μαθησιακή διαδικασία. Η Ainsworth (2006: 183) αναφέρει χαρακτηριστικά: «οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορούν να παρέχουν μοναδικά οφέλη όταν οι άνθρωποι μαθαίνουν σύνθετες καινούριες ιδέες.»

Οι Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong (2009: 229,231,233,237) στη δική τους μελέτη υποστήριξαν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις ήταν χρήσιμες και βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Ανέπτυξαν ένα καινοτόμο σύστημα με εικονικούς χειρισμούς αντικειμένων και με πολυμεσικό πίνακα, όπου οι μαθητές εξέφραζαν τις ιδέες τους σε συμβολικό επίπεδο (κατ' αντιστοιχία με τους τύπους αναπαράστασης του «γραπτού συμβολισμού» και της «προφορικής γλώσσας» των Lesh, Post & Behr) χρησιμοποιώντας κείμενο, γραφικά, γεωμετρικούς τύπους και προφορικό λόγο. Η μεταφορά ανάμεσα σε αυτά τα επίπεδα και η κριτική ματιά απέναντι στις ποικίλες αναπαραστάσεις των συμμαθητών τους, επιπρόσθετα διευκόλυνε και διεύρυνε τη σκέψη τους βοηθώντας τους να δουν πληρέστερα τις εκάστοτε λύσεις.

Ο Dreyfus (Cooper & Warren, 2008: 25) υποστήριξε ότι η μάθηση προάγεται μέσω τεσσάρων καταστάσεων: χρησιμοποιώντας μία αναπαράσταση, χρησιμοποιώντας περισσότερες αναπαραστάσεις σε παραλληλία, δημιουργώντας συνδέσεις μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων και τέλος μεταφερόμενος ανάμεσά τους. Ο Duval (Cooper & Warren, 2008: 25) επεκτείνοντας την προηγούμενη θέση σκιαγραφεί τέσσερις τύπους ή «καταλόγους» αναπαραστάσεων και επισημαίνει ότι η κατανόηση των μαθηματικών προέρχεται από τον συντονισμό τουλάχιστον δύο διαφορετικών καταλόγων. Οι κατάλογοι του Duval είναι η φυσική γλώσσα, τα σχήματα-διαγράμματα, τα σύμβολα και οι γραφικές παραστάσεις. Αναφέρει πως είναι σημαντικό ενώ χειρίζεσαι μια έννοια μέσω ενός από τους προηγούμενους τύπους, να μπορείς να χρησιμοποιήσεις άμεσα ένα διαφορετικό τύπο για να την αναπαραστήσεις. Οι Cooper & Warren (2008: 23) παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν σε μια ποικιλία πλαισίων τις πτυχές κατανόησης και επικοινωνίας των αναπαραστάσεων. Η ακολουθία αναπαραστάσεων που επέλεξαν περιελάμβανε χειραπτικά υλικά, διαγράμματα, γλώσσα και σύμβολα. Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων επέδρασε θετικά στην ικανότητά των μαθητών να γενικεύουν αναπτύσσοντας μαθηματικά πρότυπα και κανόνες, στην κατανόηση και δημιουργία σχέσεων και στην παρακίνηση τη μελέτης.

Μια ακόμη μελέτη η οποία ανέδειξε τη θετική επίδραση των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών ήταν αυτή των Wing-Kwong Wong, Sheng-Kai Yin, Hsi-Hsun Yang and Ying-Hao Cheng (2011: 43). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις οι οποίες υποστηριζόταν από ένα περιβάλλον υπολογιστή, περιελάμβαναν λεκτική περιγραφή προβλημάτων, στατικές φιγούρες, φιγούρες δυναμικής γεωμετρίας, τυπικές αποδείξεις και δέντρα (διαγράμματα) αποδείξεων. Η αλληλεπίδραση με αυτές τις αναπαραστάσεις αποδείχτηκε μια απολαυστική εμπειρία για τους μαθητές μέσης επίδοσης και τους βοήθησε στην μάθηση γεωμετρικών αποδείξεων, ενώ άλλαξε θετικά και τις στάσεις των μαθητών χαμηλής επίδοσης απέναντι στις αποδείξεις γεωμετρικών θεωρημάτων. Οι ίδιοι ερευνητές θεωρούν τη χρήση διαφορετικών τύπων αναπαραστάσεων ως ένα από τα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης νοημοσύνης και πιστεύουν ότι αυτές μπορούν να κάνουν ευκολότερη τη μάθηση της γεωμετρίας, να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό και την αποσαφήνιση ενός γεωμετρικού προβλήματος και για να υποστηρίξουν τις διαδικασίες συλλογισμού.

Από τις παραπάνω μελέτες διαπιστώνεται ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορούν να συνίστανται σε μια ποικιλία διαφορετικών μορφών και τύπων και έγκειται στην επιλογή του κάθε ερευνητή ή εκπαιδευτικού το ποιες θα χρησιμοποιήσει. Εντούτοις τα χειραπτικά υλικά, η γλώσσα, οι εικόνες-σχήματα (στατικές ή δυναμικές) και η συμβολική γραφή (σύμβολα, τύποι, γραφικές αναπαραστάσεις) αποτελούν κοινά πλαίσια αναπαράστασης σε πολλές έρευνες και αποτελούν βασικές μορφές στη σχετική βιβλιογραφία.

Στο παρόν διδακτικό πλάνο ως διαφορετικά πλαίσια αναπαράστασης συμπεριλαμβάνονται σχήματα σε χαρτί μοτίβων, χειραπτικά υλικά και μοντέλα (όπως ο γεωπίνακας, τριγωνικά πλαστικά πλακίδια και ξύλινα τρίγωνα δυναμικής μεταβολής), η γλώσσα(προφορική και γραπτή) καθώς οι μαθητές καταγράφουν και αιτιολογούν τις στρατηγικές τους, η συμβολική γραφή (με τη χρήση γεωμετρικών τύπων του εμβαδού) και τέλος το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (Gabri). Το κάθε ένα από αυτά έχει τη δική του διδακτική αξία ως μέσο διδασκαλίας και ως πλαίσιο αναπαράστασης. Για τα χειραπτικά υλικά, καθώς και για τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στα επόμενα κεφάλαια. Το σημαντικότερο βέβαια, όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι η συνδυαστική τους χρήση.

Ωστόσο μερικοί ερευνητές εκφράζουν επιφυλάξεις για το εάν οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν κανονικότητες και ασυμφωνίες μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η Sweller (Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang, H.-H., & Cheng, Y.-H., 2011: 44) σημειώνει ότι «η μάθηση μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων απαιτεί συσχετισμό ανόμοιων πηγών πληροφορίας οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν γνωστική υπερφόρτωση αφήνοντας λίγο χώρο για ενεργητική μάθηση», ενώ και η Seufert

(2003: 227,228,235) επισημαίνει πως η απόκτηση γνώσης από πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι αδύνατη από μαθητές με ελάχιστη προηγούμενη γνώση. Οι παραπάνω μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα με τον συντονισμό και την ενσωμάτωση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και χρειάζονται υποστήριξη για το σχηματισμό συνοχής έτσι ώστε να ωφεληθούν από αυτές. Οι αρχάριοι μαθητές επικεντρώνονται σε επιφανειακά στοιχεία των αναπαραστάσεων και αδυνατούν να διαπιστώσουν εννοιολογικά σχετικές οντότητες. Η Seufert έδειξε ότι η παροχή βοήθειας για τους συγκεκριμένους μαθητές δεν είναι αποτελεσματική εάν δεν προσανατολιστεί στη σημασιολογική ενίσχυση του περιεχομένου.

Η Ainsworth μελετώντας τα πορίσματα σχετικών ερευνών επιβεβαίωσε την ύπαρξη αντιφατικών ευρημάτων για την επίδραση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στα μαθησιακά αποτελέσματα. Ενώ κάποιες έρευνες ανέδειξαν τα πλεονεκτήματά τους, κάποιες άλλες παρουσίασαν την αδυναμία των μαθητών και μαθητριών να αποκομίσουν τα σχετικά οφέλη προκαλώντας επιφυλακτικότητα για τη χρήση τους. Ωστόσο διαπίστωσε ότι η συχνότερη δυσκολία των μαθητών ήταν η αδυναμία τους να «μεταφράσουν», δηλαδή να δουν τη σχέση μεταξύ δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων και υποστήριξε ότι η εκτίμηση αυτών των συνδέσεων δεν μπορεί να γίνει αυτόματα. Η θέση αυτή επιχειρηματολογεί και κατά της χρήσης περιβαλλόντων «αυτόματης ή δυναμικής σύνδεσης» μεταξύ των αναπαραστάσεων τα οποία έχουν αναπτυχθεί για να διευκολύνουν την παραπάνω μετάφραση. Ενώ ο μαθητής δρα σε μια αναπαράσταση, τα αποτελέσματα της δράσης του εμφανίζονται αυτόματα και σε μία άλλη, περιορίζοντάς τον όμως έτσι σε παθητικό ρόλο και εμποδίζοντάς τον να οικοδομήσει την απαιτούμενη κατανόηση. Από την άλλη μεριά ο συσχετισμός μεταξύ των αναπαραστάσεων θα μπορούσε να διευκολυνθεί όταν αυτές παρουσιάζουν ομοιότητες που σχετίζονται με την τροπικότητα, τη διεπαφή, τις στρατηγικές και το επίπεδο της αφαίρεσης. Έτσι όμως αποκλείονται οι αναπαραστάσεις που θα έδιναν μια τελείως διαφορετική όψη των εννοιών, πράγμα απαραίτητο για την βαθύτερη κατανόηση. Την απάντηση σε αυτό το δίλλημα δίνει η προσέγγιση της «σκαλωσιάς» σύμφωνα με την οποία η παροχή βοήθειας και αυτόματης σύνδεσης μεταξύ των αναπαραστάσεων μειώνεται σταδιακά ανάλογα με τις επιδόσεις των μαθητών σε αυτό τον τομέα (Ainsworth, 1999: 132,133,147).

Η Ainsworth υιοθετώντας το πλαίσιο DeFT (σχεδιασμός, λειτουργίες, και καθήκοντα) το οποίο σχετίζεται με τη μάθηση μέσα σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων, υποστήριξε ότι ο προσδιορισμός των παιδαγωγικών λειτουργιών των πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι σχεδιαστικές αρχές και η κατανόηση της συνθετότητας των γνωστικών καθηκόντων που αναλαμβάνουν οι μαθητές θα μπορούσε να εξηγήσει τα παραπάνω αντικρουόμενα ευρήματα και να βοηθήσει στην αντίληψη της αποτελεσματικότητάς τους. Συνειδητοποιώντας τις λειτουργίες που οι πολλαπλές αναπαραστάσεις επιτελούν κατά τη μαθησιακή διαδικασία, η αξιολόγησή μας προς αυτές θα επικεντρωνόταν στο κατά πόσο επιτέλεσαν τις συγκεκριμένες λειτουργίες. Θα συνέβαλε επίσης στον καλύτερο σχεδιασμό σχετικών πλαισίων αναπαράστασης, αλλά και στην επιλογή εκείνων των πλαισίων τα οποία μπορούν συνδυαστικά να υποστηρίξουν την αναπαράσταση κάποιων εννοιών. Η Ainsworth (2006: 183) υποστηρίζει ότι: «το ζήτημα δεν είναι εάν τα πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων είναι αποτελεσματικά, αλλά περισσότερο η αναφορά στις περιστάσεις που επηρεάζουν την αποτελεσματικότητά τους.»

Οι βασικές λειτουργίες των πολλαπλών αναπαραστάσεων περιλαμβάνουν το συμπλήρωμα, το περιορισμό και την κατασκευή. Διαφορετικές αναπαραστάσεις μπορούν να μεταφέρουν συμπληρωματικές πληροφορίες ή να δρουν συμπληρωματικά στις διαδικασίες μάθησης προσφέροντας εναλλακτικές στρατηγικές και δραστηριότητες ή υποστηρίζοντας τις ατομικές διαφορές. Οι πληροφορίες μπορεί να είναι διαφορετικές και να αλληλοσυμπληρώνονται (όπως στην περίπτωση του γεωπίνακα που δεν μπορεί να αναπαραστήσει ισόπλευρα τρίγωνα ή να δείξει την κάλυψη μιας επιφάνειας) και επομένως χρειάζονται και άλλα πλαίσια αναπαράστασης, μπορεί όμως να μοιράζονται και την ίδια πληροφορία με το δικό τους τρόπο. Σύμφωνα με την Ainsworth (1999: 135) «αν και η πλειοψηφία των αναπαραστάσεων εκφράζει ισοδύναμες πληροφορίες, η κάθε μια αναδεικνύει διαφορετικές πτυχές μιας κατάστασης». Εάν όλες οι πληροφορίες παρέχονταν μέσω ενός μόνο πλαισίου αναπαράστασης, μπορεί να μειώνονταν οι απαιτήσεις της ενσωμάτωσης και της μεταφοράς μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, όμως ταυτόχρονα θα αυξανόταν η πολυπλοκότητα των δραστηριοτήτων με παράλληλα προβλήματα ερμηνείας και διαφάνειας. Διαφορετικά πλαίσια προσφέρουν τη δυνατότητα ανάπτυξης διαφορετικών στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων και για την επεξεργασία των γεωμετρικών ιδεών, ενώ παρέχουν στους μαθητές, μέσω της δυνατότητας της επιλογής, της ικανοποίησης των μαθησιακών τους προτιμήσεων και των ατομικών τους διαφορών. Επιπρόσθετα η χρήση περισσότερων στρατηγικών και αναπαραστάσεων μπορεί να καλύψει τους εσωτερικούς περιορισμούς που μεμονωμένα τις χαρακτηρίζουν. Έρευνες έχουν δείξει επίσης πως δεν υπάρχουν συνολικά καλύτερες αναπαραστάσεις, αλλά ότι κάποια πλαίσια είναι πιο ωφέλιμα όταν παρέχουν αναπαραστάσεις που ταιριάζουν σε συγκεκριμένες δραστηριότητες. (Ainsworth, 1999: 137,138,139).

Στη δεύτερη λειτουργία, η χρήση μιας αναπαράστασης περιορίζει τις πιθανές ερμηνείες ή παρερμηνείες της χρήσης μιας άλλης. Η ερμηνεία μιας λιγότερο οικείας ή πιο αφαιρετικής αναπαράστασης υποστηρίζεται από μια οικεία αναπαράσταση ή από την αξιοποίηση των εσωτερικών ιδιοτήτων μιας άλλης. Τέλος η λειτουργία της κατασκευής αναφέρεται στην ενθάρρυνση που οι πολλαπλές αναπαραστάσεις παρέχουν στους μαθητές για την βαθύτερη οικοδόμηση των εννοιών. Σχετίζεται με αυτό που ήδη έχει αναφερθεί, ότι η έκθεση σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση και όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Kaput (Ainsworth 1999: 141) «η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα όλο το οποίο είναι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του και μας ενδυναμώνει να δούμε σύνθετες ιδέες με ένα νέο τρόπο και να τις εφαρμόσουμε πιο αποτελεσματικά».

Η παραπάνω ταξινόμηση των λειτουργιών των πολλαπλών αναπαραστάσεων, χωρίς να διαγράφεται μέσα σε αυστηρά καθορισμένα πλαίσια και χωρίς να αποκλείει την επιτέλεση περισσοτέρων της μιας λειτουργίας από την ίδια αναπαράσταση, είναι χρήσιμη, όπως αναφέρθηκε, για τον καθορισμό των στόχων και για την βέλτιστη αποκόμιση των ωφελειών από τη χρήσης τους. Είναι χρήσιμη για τον καθορισμό των πιθανών χρήσεων των πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης, για τον σχεδιασμό του τρόπου υποστήριξης των μαθησιακών στόχων, αλλά και της αποφυγής αντικρουόμενων ευρημάτων σχετικά με την επίδρασή τους στα μαθησιακά αποτελέσματα.

Μέσα στο πλαίσιο DeFT περιγράφονται και οι σχεδιαστικές αρχές των περιβαλλόντων πολλαπλών αναπαραστάσεων καθώς και τα γνωστικά καθήκοντα που απαιτούνται από τους μαθητές. Σχετικά με τις σχεδιαστικές αρχές αρκεί να αναφέρουμε ότι αποτελούν μια ουσιώδης προσπάθεια η οποία σχετίζεται με το περιεχόμενο των αναπαραστάσεων, αλλά και με τον τρόπο που αναπαριστάται μια έννοια ή πληροφορία. Όσον αφορά τις γνωστικές διεργασίες, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με σύνθετα καθήκοντα όταν πρέπει να κατανοήσουν καινούρια πλαίσια αναπαραστάσεων και αυτό γίνεται ακόμη δυσκολότερο για τους μη έμπειρους μαθητές. Θα πρέπει να κατανοήσουν το συντακτικό, τον τρόπο δηλαδή που η κάθε αναπαράσταση κωδικοποιεί και παρουσιάζει τις πληροφορίες, να έχουν την ικανότητα να επιλέγουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις και τέλος να τις κατασκευάζουν μόνοι τους- πράγμα που αποδεδειγμένα μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση μιας κατάστασης. Επιπρόσθετα θα πρέπει να συσχετίσουν τις διάφορες αναπαραστάσεις και μόνο εφόσον μπορέσουν να ανταποκριθούν στις παραπάνω απαιτήσεις θα υπάρξουν τα προσδοκώμενα οφέλη (Ainsworth 2006: 185, 186, 187).

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, η ύπαρξη πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης από μόνη της δεν είναι ικανή για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και της μαθηματικής συλλογιστική τους εάν δεν συνδυαστεί από κατάλληλες δραστηριότητες και από την παρακίνησή τους να αιτιολογούν και να δίνουν εξηγήσεις για τις κατασκευές και τις λύσεις που προτείνουν. Ο de Villiers αναφέρει ότι η διδασκαλία συχνά επικεντρώνεται στην επιβεβαίωση και παραλείπει την εξερεύνηση και τις εξηγήσεις (Jones, 2000: 56). Είναι ανάγκη να απαγκιστρωθούμε από το στόχο των υπολογιστικών δεξιοτήτων και της απλής εφαρμογής ακατανόητων κανόνων και να στραφούμε προς την ανάπτυξη των επιχειρημάτων, της ερμηνείας και της αιτιολόγησης. Θα πρέπει επίσης για να έχουν αποτέλεσμα όλα αυτά, να δημιουργηθεί στην τάξη ένα μαθηματικό περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες θα νιώθουν ασφάλεια να συζητούν, να διερευνούν τις ιδέες, να αμφισβητούν τις υποθέσεις και τα επιχειρήματα των άλλων, αλλά και τα δικά τους και τέλος να οδηγούνται στη μαθηματική αλήθεια μέσα από τους κοινούς τους συλλογισμούς αποκτώντας γνωστική αυτονομία.

Η συνεισφορά των διαφόρων πλαισίων αναπαράστασης έγκειται στο ότι μπορούν, σύμφωνα με τον όρο του Seymour Papert, να γίνουν «παιχνίδια σκέψης», όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες μέσα σε αυτά παίζουν με τις νέες ιδέες και τις δοκιμάζουν, στην προσπάθεια διαμόρφωσης και ένταξής τους στις νοητικές τους δομές. Τα μοντέλα αναπαράστασης αποτελούν αφορμή για σκέψη, διερεύνηση και συζήτηση μεταξύ των μαθητών (Van de Walle, 2005: 46). Όσους περισσότερους τρόπους τους προσφέρουμε για να δοκιμάσουν μια νέα ιδέα τόσο αυξάνουμε τις πιθανότητες της ουσιαστικής τους κατανόησης.

Τα πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης των εννοιών μπορούν να συνδεθούν και με την αξιολόγηση. Η αποτελεσματική αξιολόγηση πρέπει να συμπεριλαμβάνει ποικίλες αξιολογικές τεχνικές για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε πληρέστερα τον τρόπο σκέψης των μαθητών (Van de Walle, 2005: 8, 48). Όταν οι μαθητές διαπραγματεύονται τα χαρακτηριστικά των τριγώνων είτε με χειραπτικά υλικά, είτε σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή, έχουν τη δυνατότητα να εκφράσουν τις ιδέες τους, να μας δείξουν το πώς την αντιλαμβάνονται κι εμείς να κατανοήσουμε καλύτερα τη μαθησιακή τους πορεία.

3.4. Χειραπτικά υλικά

Είδαμε ότι η οικοδόμηση της γνώσης κατά τον κονστρουκτιβισμό, αλλά και η κατανόησή της απαιτούν την ενεργοποίηση του μαθητή και τη συμμετοχή του στη μαθησιακή διαδικασία. Επιπρόσθετα η ορμή για δράση, κινητικότητα και δραστηριοποίηση αποτελεί το βασικό γνώρισμα της παιδικής ηλικίας. Ένα γνώρισμα που αναφέρεται από την εποχή του Αριστοτέλη με το «ου δύναται το νέον ησυχάζειν» (Ζευκίλης, Α. 1989: 7,8,18), συνεχίζεται με το «learning by doing» του Dewey και λαμβάνεται υπόψη από τις οικοδομιστικές και κοινωνικοκονστρουβιστικές θεωρίες μάθησης. Αυτή η ενεργητική συμμετοχή φαίνεται να υπηρετείται άριστα με τη χρήση των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία, τα οποία συγχρόνως αποτελούν και ένα εναλλακτικό πλαίσιο αναπαράστασης των εννοιών. Γι’ αυτό η έρευνα για το πώς η δράση με αυτά τα υλικά μπορεί να υποστηρίξει τη μάθηση, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Με τον όρο χειραπτικά υλικά εννοούμε τα διδακτικά υλικά τα οποία σχεδιάστηκαν για να αναπαραστήσουν διάφορες αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και τα οποία ο μαθητής χειρίζεται με τα χέρια του προσπαθώντας να κάνει συσχέτιση με τις έννοιες αυτές και να οδηγηθεί στην κατανόησή τους. Η χρήση τους «δεν παίζει μόνο το διαμεσολαβητικό ρόλο ανάμεσα στο χειροπιαστό και το αφηρημένο αλλά αποτελεί μια καλή ευκαιρία ανάδειξης και διαπραγμάτευσης πρότερων εμπειριών των παιδιών και εξέλιξης των εμπειριών αυτών σε γνώσεις» (Βιβλίο δασκάλου, Ένταξη τσιγγανοπαίδων στο σχολείο, 2007: 7). Η Dina van Hiele-Geldof στα πλαίσια της έρευνάς της για τη γεωμετρική εκπαίδευση, έδινε στα παιδιά συγκεκριμένο υλικό, «έτσι ώστε να ξετυλίξουν την απεικονιστική σκέψη και να τη μετατρέψουν στον αφηρημένο τρόπο σκέψης που απαιτεί το λογικό σύστημα της γεωμετρίας»

(Σαλονικιός 2008: 20). Ανάμεσα στις διδακτικές αρχές που πρότεινε συμπεριλαμβανόταν το εξής: «ο σχηματισμός των οπτικών γεωμετρικών δομών στους/στις μαθητές/τριες υποστηρίζεται περισσότερο ικανοποιητικά όταν τους επιτρέπουμε να χρησιμοποιούν κατάλληλο υλικό, όπως τουβλάκια» (Σαλονικιός 2008: 21).

Στα χειραπτικά υλικά συμπεριλαμβάνονται οι ράβδοι του Cuisenaire, τα ντόμινο, ο γεωπίνακας, το τάνγκραμ, το πεντόμινο, ο πίνακας 1-100, τα pattern blocks, κ.ά. Στο παρόν διδακτικό πείραμα για τη διδασκαλία των τριγώνων και την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού, ως χειραπτικά υλικά χρησιμοποιούμε: το γεωπίνακα, πλαστικά τριγωνικά πλακίδια και τέλος ένα ξύλινο τρίγωνο δυναμικής μεταβολής, στο οποίο υπάρχει η δυνατότητα να μεταβάλλεται το μέγεθος των γωνιών και το μήκος των πλευρών του.

«Οι γεωπίνακες αποτελούν ένα από τα καλύτερα μέσα για την αναπαράσταση δισδιάστατων σχημάτων» και παρέχουν ευκολία στη δημιουργία αλλά και στο μετασχηματισμό τους (Van de Walle, 2005: 436,439). Η δε δυναμική μεταβολή που χαρακτηρίζει το ξύλινο τρίγωνο δίνει τη δυνατότητα της παρακολούθησης των αλλαγών σε κάποια χαρακτηριστικά του τριγώνου και της διατήρησης κάποιων άλλων όταν σέρνουμε μια κορυφή του.

Από τους πρώτους υποστηρικτές και σχεδιαστές τέτοιων υλικών ήταν η Montessori και ο Froebel, οι οποίοι υποστήριζαν τη σημασία της παιγνιώδους ανακάλυψης στη μάθηση και τη χρήση των υλικών για τη μάθηση πιο αφαιρετικών μαθηματικών (Manches & O’Malley, 2012: 406). Ο Greeno προτείνει ότι ο χειρισμός φυσικών αναφερόμενων των συμβόλων βοηθάει στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες με νόημα (Meira, 1998: 121, 122, 137, 140) και παρόμοια το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων των Μαθηματικών στην έκδοσή του «The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics», συστήνει τη στήριξη της ουσιαστικής μάθησης των σχέσεων μεταξύ των αριθμών στη χρήση συγκεκριμένων υλικών που σχεδιάστηκαν για να αντικατοπτρίσουν θεμελιώδεις μαθηματικές ιδέες (National Council of Teachers of Mathematics, 1989: 87).

Ο Piaget πρότεινε ότι οι μαθητές δεν έχουν τη νοητική ωριμότητα να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται μόνο με λέξεις ή με σύμβολα και απαιτείται αρκετή εμπειρία με συγκεκριμένα υλικά, ενώ και ο Bruner αναφέρει ότι οι μαθητές επιδεικνύουν τις κατανοήσεις τους σε τρεις βαθμίδες αναπαράστασης: την ενεργητική, την εικονική και τη συμβολική, με την πρώτη να σχετίζεται με τη δράση με φυσικά αντικείμενα (Moyer, 2002: 175).

Μια πρόταση που αποτελεί υποστηρικτικό υπόβαθρο για τη χρήση χειραπτικών υλικών είναι η δήλωση του Van de Walle (2005: 24): «οι διδάσκοντες πρέπει να σταματήσουν να διδάσκουν με τα λόγια και να αφήνουν σιγά σιγά τους μαθητές και τις μαθήτριες να καταλάβουν τα μαθηματικά που μαθαίνουν». Όσον αφορά το χώρο της γεωμετρίας ο Tan (Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, 2009: 229) πρότεινε ότι η κατανόηση εννοιών όπως της μέτρησης του εμβαδού πρέπει να προέρχεται από το χειρισμό «κάλυψης», έτσι ώστε όταν εισαχθούν οι γεωμετρικοί τύποι, να είναι κατανοητοί από τα παιδιά.

Τη σημασία της ενσωμάτωσης των χειραπτικών μέσων σε καταστάσεις μάθησης πλούσιες σε μαθηματικό νόημα υποστηρίζει και ο Skemp λέγοντας πως οι πρώιμες εμπειρίες και η αλληλεπίδραση με φυσικά αντικείμενα σχηματίζουν τη βάση για μετέπειτα μάθηση σε αφαιρετικό επίπεδο, ενώ πρόσφατες έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση των Glover, Ronnong & Bruning, Resnick, Simon, κ.ά. βλέπουν το μαθητή σαν ενεργό συμμετέχοντα, ο οποίος οικοδομεί τη γνώση εξάγοντας μηνύματα μέσα από την εμπειρική του δράση (Moyer, 2002: 176).

Οι Kablan, Topan και Erkan (2013: 1638) αναφέρουν ότι η χρήση εκπαιδευτικών υλικών προσφέρει αρκετά οφέλη στους μαθητές, ανάμεσα στα οποία είναι η υποστήριξη της ενεργητικής μάθησης, η βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων και η ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Στη μεταανάλυση που κάνουν συγκρίνοντας τα αποτελέσματα 57 σχετικών μελετών που διεξήχθησαν στην Τουρκία, διαπίστωσαν ότι η χρήση εκπαιδευτικών υλικών στη διδασκαλία είχε θετική επίδραση στην ακαδημαϊκή επιτυχία, ανεξαρτήτως βαθμίδας, μαθήματος και τύπου υλικού. Μεταξύ των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν στις πειραματικές μελέτες, συμπεριλαμβάνονταν και τα χειραπτικά υλικά.

Ωστόσο υπάρχουν και ερευνητές όπως οι Resnick και Omanson (Meira, 1998: 121) που εκφράζουν σκεπτικισμό για τη θετική επίδραση των χειραπτικών μέσων στη διδασκαλία. Η Fennema (Sarama και Clements, 2009: 145) στην έρευνά της έδειξε ότι μαθητές που δεν χειρίστηκαν τους ράβδους του Cuisenaire στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού, υπερείχαν αυτών που ασχολήθηκαν με τέτοιους χειρισμούς. Ο

Thompson (1992: 123) μιλάει για αποτελέσματα «αμφιλεγόμενα στην καλύτερη περίπτωση» και τα αποτυπώνει συγκρίνοντας τις μελέτες τεσσάρων ερευνητών που πραγματοποιήθηκαν για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη χρήση base-ten blocks (τουβλάκια με βάση το δέκα). Στη μελέτη των Resnick και Omanson η χρήση base-ten blocks είχε μικρή επίδραση στην ανάπτυξη της κατανόησης και των δεξιοτήτων των μαθητών που αφορούσαν αφαιρέσεις πολυψήφιων αριθμών, ενώ και ο Labinowicz ανέφερε περιορισμένη ανάπτυξη ικανοτήτων υπολογισμού. Αντίθετα οι Fuson and Briars παρατήρησαν σημαντική βελτίωση των δεξιοτήτων πρόσθεσης και αφαίρεσης πολυψήφιων αριθμών με τη χρήση base-ten blocks, συμβαδίζοντας με τα αποτελέσματα της μελέτης των Wearne and Hiebert στην οποία καταδεικνύεται αισθητή επίδραση στην ανάπτυξη του νοήματος των μαθητών για τη δεκαδική αρίθμηση και για τη συμβολική πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών κλασμάτων. Ο Thompson αποδίδει αυτή την αντίφαση στη διαφοροποίηση των στόχων κάθε μελέτης (για το εάν δηλαδή προσδοκούν στην υπολογιστική δεξιότητα ή στην επίλυση προβλημάτων), στον προσανατολισμό ως προς την καθοδήγηση ή τη διερεύνηση, αλλά και στη φύση της εμπλοκής των μαθητών με τα υλικά.

Γι’ αυτό θα ήταν ίσως προτιμότερο να επικεντρωθεί κανείς όχι στην αποτελεσματικότητα των μέσων καθ’ αυτών, αλλά στον τρόπο που χρησιμοποιούνται και μετασχηματίζονται από τους μαθητές κατά τη δράση τους με αυτά. Συμπλέοντας με την παραπάνω άποψη, οι McNeil και Uttal (2009: 137) αναφέρουν πως η αλληλεπίδραση με συγκεκριμένα υλικά δεν μπορεί να εγγυηθεί την αυτόματη κατασκευή αφαιρετικής γνώσης και προτρέπουν να εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι μαθητές ωφελούνται ή όχι με τη χρήση συγκεκριμένων υλικών. Παρόμοια είναι και η τοποθέτηση των Sarama και Clements (2009: 146, 148) οι οποίοι επισημαίνουν ότι τα χειραπτικά υλικά αν και σπουδαία, δεν μπορούν να μεταφέρουν το νόημα των μαθηματικών ιδεών. Και καταλήγουν ότι οι χειρισμοί υλικών είναι σπουδαίοι για τη μάθηση, μόνο αν συνδεθούν με τις δραστηριότητες και τη σκέψη των μαθητών και χρησιμοποιηθούν σε κατάλληλο διδακτικό πλαίσιο.

Εξάλλου όπως αναφέρει ο Bauersfeld «τα υλικά δεν μιλάνε από μόνα τους», αλλά πρέπει να ιδωθούν σε συνδυασμό με την κουλτούρα της τάξης και τον τρόπο που αλληλεπιδρούν δάσκαλοι και μαθητές μεταξύ τους αλλά και με τα υλικά. Το είδος των δραστηριοτήτων, οι δράσεις των δασκάλων μέσα από τις ερωτήσεις που θέτουν, καθώς και ο τρόπος που αλληλεπιδρούν εκπαιδευτικοί και μαθητές συνιστούν αυτό το περιβάλλον. (Markopoulos & Potari, 2000: 263, 264). Ο Triadafillidis (1996: 163-165) επισημαίνει επίσης ότι η γενικότερη κουλτούρα μιας κοινωνίας η οποία αντανακλάται στη σχολική τάξη, μπορεί να επηρεάσει τις αποδόσεις και τις στάσεις των μαθητών στο χειρισμό των υλικών, αλλά και τις διδακτικές πρακτικές, το ρόλο του δασκάλου και τους εκπαιδευτικούς στόχους γενικότερα.

Η διδασκαλία θα πρέπει να στηριχθεί στην ενεργητική συμμετοχή του μαθητή και στην εμπλοκή του στη μαθησιακή διαδικασία. Να υπάρχει σύνδεση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του και οικοδόμηση της νέας γνώσης πάνω σ' αυτές. Να υποστηρίζει τη συνεργασία, αποφεύγοντας τη μετωπική διδασκαλία και να εμπεριέχει δραστηριότητες με νόημα, οι οποίες έχουν εφαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Για να υπάρχει γόνιμη αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, θα πρέπει να υιοθετηθεί η ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας. Η οργάνωση της τάξης σε ομάδες των 3-4 παιδιών υπηρετεί αυτή τη μορφή, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν συζητήσει για τον τρόπο εργασίας μέσα στην ομάδα και έχουν ενθαρρυνθεί να συμμετέχουν και να εκφράζουν τις ιδέες τους. Θα πρέπει ως εκπαιδευτικοί να έχουμε καλλιεργήσει το διάλογο ανάμεσα στα μέλη της ομάδας, αλλά και στην ολομέλεια της τάξης, οικοδομώντας ένα κλίμα ασφάλειας για όλους τους μαθητές.

Επίσης πριν εισάγουμε το συγκεκριμένο υλικό θα πρέπει να έχουμε αποφασίσει την οργανική ένταξή του στη διδασκαλία, επιλέγοντας να συνδεθεί με τις κύριες δραστηριότητες των μαθητών. Οι μαθητές είναι ελεύθεροι να χειριστούν το υλικό και μέσα από τη νοητική τους δράση να κάνουν συσχετισμούς και να αναπτύξουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών, έχοντας βέβαια υπόψη ότι αν και μοιράζονται το ίδιο εργαλείο η δημιουργία αναπαραστάσεων είναι ατομική υπόθεση (Moyer, 2002: 192,193). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι πρέπει να παρέχουμε στα παιδιά ελευθερία χειρισμών των υλικών και όχι οδηγίες κατευθυνόμενης και μηχανικής χρήσης, γιατί διαφορετικά θα έχουμε απουσία συλλογισμού και μη λειτουργίας τους ως «παιχνίδια σκέψης» (Van de Walle, 2005: 48). Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Triadafillidis (1996: 162) σε μερικές περιπτώσεις «οι μαθητές υποχρεούνται να ακολουθήσουν ένα μονοπάτι το οποίο ο δάσκαλος και τα εργαλεία έχουν ορίσει γι' αυτούς». Οι Resnick και Omanson (Thompson 1992: 124) σημειώνουν ότι εάν οι μαθητές νιώθουν ότι εκτελούν οδηγίες και διαταγές, η ενεργητική τους συμμετοχή θα έχει ελάχιστη επίδραση. Είναι βέβαια πιθανόν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν δυσκολίες και αδυναμία στο να δουν πέρα από τα συγκεκριμένα υλικά και να χρειαστεί η καθοδήγηση του εκπαιδευτικού για τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων και των αφαιρετικών εννοιών. Οι McNeil και Uttal (2009: 138,139) παίρνοντας θέση στο ζήτημα αυτό, συνιστούν την προσπάθεια εύρεσης ισορροπίας από τον εκπαιδευτικό ανάμεσα στην αυστηρή καθοδήγηση και την παροχή αυτονομίας στην υλοποίηση των δραστηριοτήτων.

Επιπρόσθετα πρέπει να αναφέρουμε ότι όλα τα υλικά έχουν τους περιορισμούς τους, είτε μηχανικούς είτε εννοιολογικούς. Στο δυναμικό ξύλινο τρίγωνο που χρησιμοποιήθηκε στη δική μας μελέτη, οι αυξομειώσεις του μεγέθους των στοιχείων του γίνονται μέσα σε συγκεκριμένο εύρος και επιπρόσθετα οι πλευρές του διαθέτουν κάποιο πάχος, εν αντιθέσει με το ιδανικό τρίγωνο όπου το πάχος των πλευρών του θεωρείται απειροελάχιστο. Σχετικά με το γεωπίνακα υπάρχουν περιορισμοί που αφορούν το μέγεθος, τη διευθέτηση και τον αριθμό των καρφιών. Επίσης είναι αδύνατη η κατασκευή σε αυτό ισόπλευρων τριγώνων. Επομένως για την εποικοδομητική εισαγωγή και την ενσωμάτωση των χειραπτικών μέσων, θα πρέπει όλα αυτά να ληφθούν υπόψη κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας.

Ακόμα κι αν οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν κατάλληλες στρατηγικές για τον τρόπο χρήσης τους, οι πεποιθήσεις τους για το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά επηρεάζει το σκοπό ένταξης αυτών των υλικών στη διδασκαλία. Η έρευνα της Patricia S. Moyer ανάμεσα σε γυναίκες εκπαιδευτικούς μαθηματικών δημοσίων σχολείων έδειξε διαφοροποίηση στο εύρος του χρόνου ενασχόλησης και στο σκοπό της ένταξης. Το 1/3 των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί τα χειραπτικά υλικά για την εξερεύνηση γεωμετρικών εννοιών και ένα ποσοστό 30% για να παίξουν κάποιο παιχνίδι. Στις περισσότερες περιπτώσεις το μάθημα ήταν δασκαλοκεντρικό επιβεβαιώνοντας την σχέση: χρήση υλικού και πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τον τρόπο υλοποίησης της μάθησης. Ακόμη υπήρξαν εκπαιδευτικοί που χρησιμοποιούν τα χειραπτικά υλικά μόνο για επίδειξη, χωρίς οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να τα χειριστούν. Είναι προφανές ότι τέτοιες προσεγγίσεις ακυρώνουν την ουσία αυτών των υλικών και τη λειτουργία τους ως μέσα που προσφέρουν τη δυνατότητα στους μαθητές για αναδιοργάνωση του τρόπου σκέψης τους και για οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών (Moyer, 2001: 178,182, 189-191).

Μερικοί ακόμη σκοποί χρήσης των υλικών ήταν: για επίλυση προβλημάτων και εμπλουτισμό της διδασκαλίας, για διαφυγή από τη ρουτίνα, για αμοιβή και προνόμιο, για παροχή ενός οπτικού μοντέλου μιας νεοεισαγώμενης έννοιας, ως μια εναλλακτική στρατηγική επίλυσης προβλημάτων και τέλος για να κάνουν περισσότερο διασκεδαστικά τα μαθηματικά. Η σύνδεση των χειραπτικών υλικών με τη διασκέδαση και όχι με την πραγματική διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται και από το χρονικό σημείο που επιλέγεται για τη χρήση τους. Οι εκπαιδευτικοί τα εισάγουν στο τέλος μιας διδακτικής ώρας, εφόσον έχουν ολοκληρώσει τη διδασκαλία τους, τις Παρασκευές ή προς το τέλος της σχολικής χρονιάς. Γενικά όταν υπάρχει έξτρα χρόνος. Η επιλογή συγκεκριμένων χρονικών στιγμών για τα χειραπτικά υλικά δείχνει το βαθμό εκτίμησή τους γι' αυτά και στέλνει ένα σαφές μήνυμα και στους μαθητές για τη σπουδαιότητά τους στη μαθηματική διδασκαλία. Φαίνεται πως η εκπαιδευτικοί νιώθουν απογοήτευση για τα υλικά και πιστεύουν ότι η διδασκαλία και η κατανόηση επιτυγχάνεται καλύτερα με τον παραδοσιακό τρόπο. Αρκετοί εκπαιδευτικοί δείχνουν προσκολλημένοι στο αναλυτικό πρόγραμμα και στις παραδοσιακές διδακτικές διαδικασίες, όπου η μάθηση των μαθηματικών έχει χαρακτηριστικά μηχανικής κατανόησης, και ανάπτυξης απομονωμένων δεξιοτήτων μέσα από επαναλαμβανόμενες πρακτικές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να φοβούνται την ενσωμάτωση οποιασδήποτε καινοτομίας και αλλαγής στη διδακτική τους πρακτική, η οποία θα διαταράξει τη ρουτίνα και την «τάξη». Υπό αυτό το πρίσμα αδυνατούν να κατανοήσουν το ρόλο και τη δυνατότητα των χειραπτικών μέσων για τη δημιουργία πλαισίου και εμπειριών μέσα από τις οποίες οι μαθητές θα οικοδομήσουν τις δικές τους μαθηματικές αναπαραστάσεις και δεν χρησιμοποιούν τα υλικά ως οργανικό κομμάτι της διδασκαλίας τους. (Moyer, 2001: 186, 187,189-191).

Ο όρος διαφάνεια που σχετίζεται με αυτά τα υλικά και αφορά το βαθμό της φανερής σχέσης τους με τη μαθηματικά ορθή σχέση, είναι προφανές ότι βγαίνει μέσα από τη δράση και όχι από τις δραστηριότητες. Όπως αναφέρεται στο άρθρο του Luciano Meira η διαφάνεια δεν αποτελεί εσωτερικό χαρακτηριστικό ενός υλικού, αλλά δείκτη πρόσβασης του μαθητή στη μαθηματική γνώση και δραστηριότητα και σχετίζεται με το πλαίσιο μέσα στο οποίο το υλικό χρησιμοποιείται. Το υλικό γίνεται αποτελεσματικό και «διαφανές» μέσα από τη χρήση του σε διάφορες δραστηριότητες και σε σχέση με το μετασχηματισμό που υφίσταται στα χέρια των μαθητών. Τα χειραπτικά υλικά έχουν νόημα μόνο εάν συνδεθούν με τη δράση αυτή των μαθητών.

Από τη στιγμή που η δράση είναι το ζητούμενο, αντιλαμβάνεται κανείς τη μεγάλη σημασία της ενσωμάτωσής τους στη μαθησιακή διαδικασία (Meira, 1998: 121,122,124).

Εάν όμως παραμείνουμε συνέχεια σε δραστηριότητες στις οποίες η εισαγωγή του χειραπτικού υλικού είναι ιδιαίτερα διαφανής (transparent), ελλοχεύει ο κίνδυνος, όπως σημειώνει και η Moyer (2001: 177), οι μαθητές να χρησιμοποιούν αυτόματα το υλικό με ένα τρόπο ρουτίνας, χωρίς να αναπτύσσουν περεταίρω μαθηματικές έννοιες. Όσο προχωρούμε σε πιο αφαιρετικές δραστηριότητες το υλικό προσφέρει την ευκαιρία για ανάπτυξη ποικίλων στρατηγικών και κινητοποιεί τους μαθητές να συμμετέχουν σε μια προοδευτική ανάπτυξη των μαθηματικών τους ιδεών. Όμως από την άλλη μεριά, με τη μη διαφανή εισαγωγή είναι πιθανόν να εμφανιστούν ιδιαίτερες δυσκολίες για τους μαθησιακά αδύνατους μαθητές. (Meira, 1998: 132,133,135).

Αυτή η δυσκολία βέβαια μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσα από την αμοιβαία οικειοποίηση της δράσης των μαθητών. Οι τελευταίοι καθώς εργάζονται με τα υλικά, συζητούν και ανταλλάσουν εμπειρίες και επιχειρήματα επιτρέποντας τη «διαφάνεια κατά την κατασκευή». Η αλυσίδα των δράσεων των μαθητών εφόσον γίνεται ομαδοσυνεργατικά τους δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθούν τη διαφάνεια των υλικών μέσα από αμοιβαία οικειοποίηση, επαγωγική συνεισφορά και συνεργασία Επίσης μια άλλη στρατηγική για τη αντιμετώπιση των δυσκολιών είναι η καταγραφή των μαθηματικών αναπαραστάσεων των μαθητών σε ένα χαρτί ενώ χειρίζονται το υλικό, έτσι ώστε να τις χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο κατανόησης. Επισημαίνεται βέβαια ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι πολύ σημαντικός για τη δημιουργία ενός μαθηματικού περιβάλλοντος που θα παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές για την ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης (Meira, 1998: 137,138).

Ένα επιπρόσθετο στοιχείο που αφορά τα χειραπτικά υλικά είναι ότι πρέπει να ιδωθούν μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο που χρησιμοποιούνται, καθώς αποτελούν συμβολικές συσκευές με πολιτιστική σημαντικότητα (Meira, 1998: 122). O Cobb (1995: 378) αναφέρει το παράδειγμα του Vygotsky στο οποίο η χρήση του πίνακα 1-100 γίνεται διαφορετικά αντιληπτή από μαθητές με εμπειρία στο σκάκι όπου γνωρίζουν τις θέσεις και τον τρόπο μετακίνησης μέσα στα κουτιά. O Cobb παρουσιάζει τις θέσεις τις κοινονικοπολιτισμικής θεωρίας, σύμφωνα με την οποία η απόδοση νοημάτων σε ιδιαίτερα σύμβολα και η κατανόηση των πολιτιστικών εργαλείων επηρεάζεται από τη συμμετοχή σε πολιτιστικές πρακτικές και από την οικειοποίηση διανοητικής κληρονομιάς και εγκαθιδρυμένων μαθηματικών πρακτικών. Όμως αποδεχόμενος μια συνύπαρξη της κονστρουκτιβιστικής και κοινονικοπολιτισμικής θεώρησης, επισημαίνει ότι περισσότερη σημασία έχει η πρακτική της τοπικής ομάδας παρά της ευρύτερης κοινωνίας. Η οικοδόμηση των νοημάτων από τους μαθητές γίνεται μέσα στο υπόβαθρο που δημιουργείται στην τάξη, μέσω της συζήτησης και της αλληλεπίδρασης μαθητών και εκπαιδευτικού, η οποία επηρεάζει την νοηματοδότηση των υλικών και συμβόλων.

Κλείνοντας θα λέγαμε ότι τα χειραπτικά υλικά δίνουν αφορμή για να συζητήσουμε και να κατασκευάσουμε μαθηματικές ιδέες, αλλά και να εκφράσουμε και να κοινοποιήσουμε τις σκέψεις μας όταν δυσκολευόμαστε με τη γλώσσα, αποτελώντας κατά τον Roschelle «conversation pieces» (Meira, 1998: 140). Δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να θέτει ερωτήσεις «υψηλής τάξης» οι οποίες εξάγουν υψηλότερου επιπέδου σκέψη (Kawanaka and Stigler, 2000: 277, 278), αλλά και να μετασχηματίσει το ρόλο του, και από μεταλαμπαδευτής της γνώσης και της πληροφορίας να πειραματιστεί και αυτός με τα υλικά και να συμμετέχει μαζί με τους μαθητές σε μια συζήτηση, μέσα από την οποία θα προκύπτει η οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών.

3.5. ΤΠΕ στην εκπαίδευση και στη γεωμετρία, περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Η ραγδαία ανάπτυξη των Τεχνολογιών της πληροφορίας και επικοινωνίας (ΤΠΕ) τα τελευταία χρόνια, είχε ως αποτέλεσμα τη σύνδεσή τους με ένα μεγάλο εύρος εκφάνσεων και δραστηριοτήτων της καθημερινής, επαγγελματικής και κοινωνικής ζωής. Αναπόφευκτα δεν θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστος και ο χώρος της εκπαίδευσης, στον οποίο οι ΤΠΕ παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο που έχει ως στόχο να υποστηρίξει τη διδασκαλία και τη μάθηση.

Όταν αναφερόμαστε στις νέες τεχνολογίες εννοούμε τη χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Η/Υ) αλλά και άλλων συστημάτων πολυμέσων (video κλπ.). Βέβαια όπως σημειώνει η Σολομωνίδου (Βλάχου, 2004: 25) «ο Η/Υ είναι ο κύριος τεχνικός εκπρόσωπος των ΤΠΕ». Οι νέες τεχνολογίες διαθέτουν κάποια χαρακτηριστικά τα οποία ευνοούν τη μάθηση και τα οποία ώθησαν την ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Μεταξύ αυτών είναι η πρόκληση ενδιαφέροντος και η αύξηση κινήτρων για μάθηση, ο συνδυασμός εικόνας-κειμένου και η οπτικοποίηση της πληροφορίας, η παροχή απεριορίστων πηγών πληροφοριών, η ενθάρρυνση της ενεργητικής μάθησης, η δυνατότητα σύνδεσης των σχολικών δραστηριοτήτων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, η ενθάρρυνση της επικοινωνίας και της εξ αποστάσεως συνεργασίας και τέλος η υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης. Αναλύοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα λέγαμε ότι ο Η/Υ διαθέτει ένα ελκυστικό περιβάλλον και δημιουργεί την πεποίθηση στους μαθητές ότι είναι χρήσιμος για τη ζωή τους. Από την άλλη ο συνδυασμός εικόνας-κειμένου βοηθάει παιδιά με μειωμένη γλωσσική κατανόηση και δυσκολίες έκφρασης και σύμφωνα με έρευνα του Mayer μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση και στην επίλυση ενός προβλήματος μαθηματικών. Επιπρόσθετα η υποστήριξη της ενεργητικής μάθησης συνεπικουρείται από το πλαίσιο ανατροφοδότησης και τη δυνατότητα ελέγχου της μάθησης που παρέχουν, ενώ η σύνδεση των δραστηριοτήτων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής διευκολύνεται μέσω προσομοιώσεων των καταστάσεων μάθησης με πραγματικές, αυξάνοντας τις πιθανότητες εφαρμογής και χρήσης της σχολικής γνώσης και την «κοινωνική και πολιτισμική αυθεντικότητα» του σχολείου (Βοσνιάδου, 2006: 39-53).

Συμπληρωματικά να αναφέρουμε ότι ο Η/Υ εκμηδενίζει γεωγραφικές και χρονικές αποστάσεις και ως γνωστικό εργαλείο προσφέρει υπηρεσίες τις οποίες αδυνατούν να καλύψουν τα ήδη υπάρχοντα εποπτικά μέσα (Βλάχου, 2004: 27). Επίσης με τη λειτουργία υπερκειμένων (hypertext) ικανοποιεί την περιέργεια και τη φιλομάθεια του αναγνώστη, καθώς αυτός μπορεί να επικεντρώνεται και να μεταβαίνει σε όποια πληροφορία επιθυμεί χωρίς να ακολουθεί τη σειριακή ροή ενός συμβατικού κειμένου (Γαρυφαλλίδου, Ιωαννίδης, Σκέλλας, Τσιτσίρης, 1998: 133). Τέλος σύμφωνα με τη Βοσνιάδου (2006: 91, 92) οι νέες τεχνολογίες μπορούν να κάνουν την εκμάθηση των μαθημάτων πιο ευχάριστη και εύκολη και παρά τα αντικρουόμενα ερευνητικά αποτελέσματα, η διδασκαλία με την υποστήριξη υπολογιστών μπορεί υπό προϋποθέσεις να παράγει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την παραδοσιακή.

Να προσθέσουμε επίσης ότι ο εικονικός χειρισμός διδακτικών αντικειμένων μέσω του Η/Υ δεν υστερεί του φυσικού χειρισμού, καθώς όπως ισχυρίζονται οι Triona και Klahr (2003: 149), κανένα θεωρητικό ή εμπειρικό δεδομένο δεν αποδεικνύει ότι η φυσική ή η εικονική παρουσίαση και χειρισμός διδακτικών υλικών είναι περισσότερο αποτελεσματικός. Παρομοίως οι Sarama και Clements (2009: 147) αναφέρουν ότι οι Η/Υ μπορούν να παρέχουν αναπαραστάσεις γεμάτες σημασία για τους μαθητές, όπως και τα φυσικά αντικείμενα. Και μάλιστα παρουσιάζουν επισκοπήσεις διαφόρων ερευνών σύμφωνα με τις οποίες οι αναπαραστάσεις στον Η/Υ είναι πιο ευέλικτες και διαχειρίσημες σε σχέση με τους φυσικούς χειρισμούς. Καταλήγοντας αναδεικνύουν ότι αυτοί οι χειρισμοί διευκολύνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης καθώς κάνουν τις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες πιο συνειδητές, ενθαρρύνουν τις ακριβείς εξηγήσεις, συνδέουν το συγκεκριμένο με το συμβολικό και υποστηρίζουν τις νοητικές δράσεις επάνω στα αντικείμενα.

Πέρα από τη βελτίωση της ποιότητας της εκπαιδευτικής διαδικασίας, ένας επιπρόσθετος λόγος ένταξης των ΤΠΕ στην εκπαίδευση ήταν η διασφάλιση του δικαιώματος για ίσες ευκαιρίες μόρφωσης, καθώς η διαφοροποιημένη δυνατότητα πρόσβασης στις νέες τεχνολογίες θα δημιουργούσε κοινωνίες δύο ταχυτήτων. Ο τεχνολογικός αναλφαβητισμός θα αύξανε το ψηφιακό χάσμα μεταξύ των ανθρώπων και θα οδηγούσε μία μερίδα του πληθυσμού σε σχολική, επαγγελματική και κοινωνική περιθωριοποίηση (Λαφατζή, 2005: 23, 24).

Η εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση έγινε στη βάση τριών μοντέλων, του τεχνοκρατικού, του ολιστικού και του πραγματολογικού. Στην πρώτη περίπτωση η πληροφορική αποτελεί ξεχωριστό γνωστικό αντικείμενο και σκοπός της διδασκαλίας είναι ο τεχνολογικός αλφαβητισμός, δηλαδή η εκμάθηση χειρισμού, λειτουργίας και προγραμματισμού του Η/Υ. Κατά το ολιστικό μοντέλο η ανάπτυξη πληροφορικών δεξιοτήτων επιτυγχάνεται μέσα από τη χρήση των νέων τεχνολογιών κατά τη διδασκαλία των διαφόρων μαθημάτων, καθώς οι ΤΠΕ αποτελούν διαθεματικό εργαλείο μάθησης που διαχέεται σε όλα τα μαθήματα. Τέλος το πραγματολογικό μοντέλο είναι ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων ο οποίος στοχεύει και στον τεχνολογικό αλφαβητισμό και στην εκπαιδευτική και παιδαγωγική αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των υπολοίπων μαθημάτων (Βλάχου, 2004: 21-23). Ο Μιχαηλίδης αναφέρει ότι η σύνδεση της πληροφορικής και των νέων τεχνολογιών με άλλα μαθήματα μπορεί να οδηγήσει στη μετάβαση από το ξεπερασμένο σχήμα της «Εκπαίδευσης στην Πληροφορική» στο σύγχρονο «Πληροφορική στην Εκπαίδευση» (Μιχαηλίδης, 1998: 13).

Η χρήση των ΤΠΕ συνδέθηκε με το σύνολο σχεδόν των μαθημάτων καθώς, αφενός έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος λογισμικών για τα επιμέρους γνωστικά αντικείμενα, αλλά και αφετέρου τα προγράμματα γενικής χρήσης και το διαδίκτυο προσφέρουν δυνατότητες για αναζήτηση πληροφοριών, για ανταλλαγή απόψεων και για επικοινωνία. Να διευκρινίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι ορισμοί για το εκπαιδευτικό λογισμικό είναι συγκεχυμένοι και για κάποιους «εκπαιδευτικό» θεωρείται το λογισμικό το οποίο χρησιμοποιείται για εκπαιδευτικούς σκοπούς, χωρίς απαραίτητα να έχει δημιουργηθεί για το σκοπό αυτό (Μιχάλης, 2004: 95).

Για το χώρο της Γεωμετρίας τα διάφορα λογισμικά αποτελούν ένα διαφορετικό πλαίσιο αναπαράστασης των εννοιών, το οποίο είναι ιδιαίτερα ελκυστικό για τους μαθητές. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η ποικιλία διαφορετικών πλαισίων αυξάνει τις πιθανότητες κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές. Επιπρόσθετα παρέχουν τη δυνατότητα για χειρισμούς αντικειμένων οι οποίοι θα ήταν δυσκολότερο να πραγματοποιηθούν με συμβατικές κατασκευές δίνοντας έτσι προστιθέμενη αξία στη διδασκαλία. Οι Sarama και Clements (2009: 147, 148) αναφέρουν ότι οι γεωμετρικοί χειρισμοί στον Η/Υ μπορούν να ενθαρρύνουν τη νοητική σύνθεση και αποσύνθεση των σχημάτων και πως η ευελιξία αυτών των χειρισμών επιτρέπει στους μαθητές την καλύτερη εξερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων. Ανάμεσα στα οφέλη από τις κατάλληλες χρήσεις των ΤΠΕ τα οποία σχετίζονται με τη γεωμετρία, η Βοσνιάδου (2006: 88) σημειώνει ακόμα ότι αποτελούν ένα άριστο εργαλείο για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων και γνώσεων και συμβάλουν στην κατανόηση του χώρου και των γεωμετρικών σχημάτων μέσω των γραφικών δυνατοτήτων των πολυμέσων, όπως επίσης ότι η χρήση της Logo μπορεί να βοηθήσει στη γνώση των ιδιοτήτων των σχημάτων και της έννοιας της γωνίας.

Μια κατηγορία λογισμικών για τη γεωμετρία αποτελούν τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, όπου ο μαθητής μπορεί να μεταβάλει σταδιακά κάποια στοιχεία ενός σχήματος και παράλληλα να παρατηρεί την μεταβολή ή τη διατήρηση κάποιων άλλων χαρακτηριστικών του. Παραδείγματα τέτοιων λογισμικών αποτελούν το Geometer’s Sketchpad και το Cabri II Plus. Τα συστήματα αυτά ανήκουν στα ανοιχτού τύπου διερευνητικά λογισμικά. Οι Markopoulos και Potari (2000: 269) τονίζουν ότι οι χειρισμοί υλικών στα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας «επιτρέπουν στους μαθητές να μετακινηθούν από τις φυσικές σε περισσότερο νοητικές δράσεις» και παράλληλα ενθαρρύνουν το δάσκαλο να συμμετέχει σε διερευνήσεις μαζί με τους μαθητές. Με τη δυναμική μεταβολή μπορούμε να αντιληφθούμε τις δομικές ιδιότητες των γεωμετρικών εννοιών και ως συνέπεια να οδηγηθούμε στη βαθύτερη κατανόησή τους. Όπως αναφέρει η Βοσνιάδου (2006: 70) στα λογισμικά αυτά μπορούμε να κατασκευάζουμε σχήματα τα οποία διατηρούν αναλλοίωτες τις ιδιότητές τους ενώ μεταβάλλονται κάποια στοιχεία (αντικείμενα) που τα αποτελούν. Έτσι για παράδειγμα μεταβάλλοντας τη γωνία ενός τριγώνου με το σύρσιμο μιας κορυφής, μεταβάλλονται αυτόματα και οι άλλες, έτσι ώστε να διατηρείται σταθερό το συνολικό άθροισμα των γωνιών (180^o). Ο Nicholas Jackiw, δημιουργός ενός τέτοιου λογισμικού, προσδιορίζει τα παραπάνω με το εξής τρόπο: «αντικείμενα όπως σημεία, ευθείες και κύκλοι σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας σχετίζονται μεταξύ τους με γεωμετρικούς περιορισμούς … Όταν οποιοδήποτε από τα αντικείμενα σύρεται (drag), τα άλλα αντικείμενα δυναμικά ανανεώνουν τον εαυτό τους έτσι ώστε οι περιορισμοί να διατηρούνται. Το σύρσιμο (dragging) το οποίο είναι η καρδιά της δυναμικής γεωμετρίας, απελευθερώνει ένα σχήμα από τον συμβατικό του ρόλο που είναι η αναπαράσταση ή η τυπική περίπτωση και μετατρέπεται σε μια γενική περίπτωση στην οποία αναφέρονται τα μαθηματικά». Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τις ιδιότητες ενός σχήματος και να οδηγηθούν από την τυπική στη γενική περίπτωση μέσω της γρήγορης εξέτασης παρόμοιων περιπτώσεων (Βοσνιάδου (2006: 70).

Μια επιπλέον δυνατότητα των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας είναι η ευκολία των μετασχηματισμών στο επίπεδο όπως είναι η μεταφορά, η περιστροφή και η ανάκλαση. Οι Τριανταφυλλίδης και Σδρόλιας (2007: 184, 185) χαρακτηρίζουν αυτούς τους μετασχηματισμούς ως «επιτρεπόμενες κινήσεις στο επίπεδο» και αναφέρουν ότι «παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των επίπεδων σχημάτων». Η Jones (2000: 55, 58, 61, 80) στη δική της μελέτη έδειξε ότι τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να καταστίσουν τους μαθητές ικανούς να αλληλεπιδρούν με τη γεωμετρική θεωρία και να εξελίξουν τη σκέψη τους από την έκφραση ασαφών καθημερινών προτάσεων στις μαθηματικές εξηγήσεις. Μεταξύ των πορισμάτων της έρευνας αναφέρονται ακόμη ότι τα περιβάλλοντα αυτά επηρεάζουν τις δράσεις των μαθητών κατά την επίλυση ενός προβλήματος καθώς απαιτούν την ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών και ότι επιδρούν στην ανατροφοδότηση που παρέχεται στο χρήστη. Εισάγουν επίσης ένα ειδικό κριτήριο εγκυρότητας για τις γεωμετρικές κατασκευές, οι οποίες θα πρέπει να μην «χαλάνε» με τη λειτουργία του συρσίματος διαχωρίζοντας με τον τρόπο αυτό το απλό σχέδιο με το γεωμετρικό σχήμα, το οποίο κατά την Laborde αποτελεί ένα θεωρητικό αντικείμενο, τα στοιχεία του οποίου συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες ιδιότητες. Τέλος η Jones επισημαίνει ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας λειτουργούν σαν γνωστικοί αναδιοργανωτές και η χρήση τους μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τη δυνατότητα ιεραρχικής ταξινόμησης των γεωμετρικών σχημάτων και να κάνουν πρόοδο σε υψηλότερα επίπεδα της κλίμακας van Hiele. Στο συσχετισμό αυτών των περιβαλλόντων με την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών στα διάφορα επίπεδα Van Hiele αναφέρθηκε και ο Gawlick (2005: 361) ο οποίος έδειξε ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν το μέσο επίτευξης ανώτερων επιπέδων, καθώς μπορούν να εισάγουν στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας διερευνητικές διαδικασίες και στρατηγικές.

Μια ακόμη έρευνα που ανέδειξε τη χρησιμότητα των δυναμικών περιβαλλόντων στην διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών ήταν αυτή των Kordaki και Balomenou (2006: 99, 100, 103, 128, 130), σύμφωνα με την οποία οι μαθητές εκμεταλλευόμενοι τα εργαλεία του λογισμικού Cabri ανέπτυξαν μια ευρύτερη αντίληψη για την έννοια του εμβαδού τριγώνου από ότι θα κατασκεύαζαν με τα συμβατικά μέσα. Κατανόησαν τη διατήρηση του εμβαδού και αξιοποιώντας τα εργαλεία αυτόματης μέτρησης οδηγήθηκαν στην υπέρβαση της σύγχυσης μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου. Οι παραπάνω ερευνήτριες επεσήμαναν επίσης ότι η λειτουργία του συρσίματος (drag mode) βοηθάει τους μαθητές να σχηματίσουν δυναμική άποψη των γεωμετρικών εννοιών, καθώς τους δίνει τη δυνατότητα να χειρίζονται με φυσική αίσθηση θεωρητικά αντικείμενα και πως σε σχέση με το μολύβι και το χαρτί τους δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουν απείρως περισσότερες περιπτώσεις σχημάτων και να κατανοήσουν την ισοεμβαδικότητα.

Ωστόσο όπως και κάθε υλικό, έτσι και τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας παρουσιάζουν τις δικές τους αδυναμίες και περιορισμούς. Η Jones (2000: 56, 59) εκφράζει την ανησυχία της ότι η δυνατότητα της δοκιμής άπειρων διαγραμμάτων μέσω της διαδικασίας του συρσίματος και η λειτουργία της αυτόματης μέτρησης που παρέχεται από το λογισμικό για την επιβεβαίωση συμπερασμάτων, μπορεί να μειώσει την ανάγκη των μαθητών να εμπλακούν σε διαδικασίες επαγωγικού συλλογισμού και αποδείξεων. Επιπρόσθετα η ιεραρχική λειτουργική εξάρτηση των αντικειμένων στις κατασκευές του λογισμικού εμποδίζει τις τροποποιήσεις και μπορεί να αποτελέσει πηγή σύγχυσης για τους μαθητές. Οι Kordaki και Balomenou (2006: 131) αναδεικνύουν επίσης ότι στο περιβάλλον του Cabri είναι δύσκολο να εφαρμοστούν στρατηγικές μέτρησης με μικρότερες μονάδες εμβαδού, ενώ ο χωρισμός μιας επιφάνειας και η ανασύνθεσή των τμημάτων της για τη δημιουργία μιας ισοεμβαδικής με αυτή, δεν περιλαμβάνονται στις δυνατότητες του λογισμικού.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε –όπως έχει αναφερθεί και για τα χειραπτικά υλικά- ότι η αποτελεσματικότητα ενός μέσου πέραν των δυνατοτήτων ή αδυναμιών που παρουσιάζει, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από ένα πλήθος παραγόντων που αλληλοεμπλέκονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Όπως παραθέτει η Jones (2000: 56, 81), αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι η ανάπτυξη της αποδεικτικής ικανότητας των μαθητών εξαρτάται από την κουλτούρα της τάξης, από τα καθήκοντα που οι μαθητές διαπραγματεύονται καθώς και από την αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητών και μαθητών μεταξύ τους. Η ίδια καταλήγει ότι χωρίς τον προσεκτικό σχεδιασμό δραστηριοτήτων και διδασκαλίας και χωρίς τη διαμόρφωση ενός περιβάλλοντος που θα ενθαρρύνει τα συμπεράσματα και τις μαθηματικές εξηγήσεις, η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ενδέχεται να επιβραδύνει την ανάπτυξη της επαγωγικής απόδειξης. Ο Holz (2001: 63, 67) παρατηρεί ότι αν και τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να υποστηρίξουν την διερευνητική μάθηση, συνήθως χρησιμοποιούνται για επιβεβαίωση γνωστών δεδομένων. Έτσι –συνεχίζει- είναι δύσκολο να κινητοποιήσεις τους μαθητές όταν τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα. Ένα παράδειγμα λανθασμένης χρήσης του Cabri αναφέρεται και στη μελέτη της Laborde (2001: 299, 309), όπου υπήρξε μειωμένη και στατική χρήση των δυνατοτήτων του λογισμικού, καθώς οι δραστηριότητες επικεντρώθηκαν στις μετρήσεις και όχι στη χρήση του εργαλείου του διαρκούς συρσίματος. Επιπρόσθετα οι ερωτήσεις προς τους μαθητές αφορούσαν αριθμητικές και όχι ποιοτικές σχέσεις και συμπεριφορές γεωμετρικών στοιχείων, ενώ έντονη ήταν και η καθοδήγηση προς τους μαθητές μη επιτρέποντάς τους τον αυτόνομο πειραματισμό. Η Laborde επισημαίνει ακόμη ότι πολλοί εκπαιδευτικοί αυξάνουν το βαθμό δυσκολίας των δραστηριοτήτων, χωρίς να γνωρίζουν τις «συμπεριφορές» των παιδιών στο Cabri.

Γενικεύοντας τις παραπάνω θέσεις για την αποτελεσματικότητα των ΤΠΕ στη διδασκαλία και μάθηση, οι Ράπτης και Ράπτη (2001: 49) δηλώνουν χαρακτηριστικά: «τόσο οι απελευθερωτικές, όσο και οι αρνητικές δυνατότητες του Η/Υ δεν είναι αυτονόητες και δεν πραγματώνονται μηχανικά και απρόσκοπτα, αλλά προϋποθέτουν ορισμένες αλλαγές νοοτροπιών και πρακτικών στο σύνολο των φορέων που εμπλέκονται στην εκπαιδευτική διαδικασία». Παρομοίως η Βοσνιάδου (2006: 13, 14) αναφέρει ότι αποτελεί μύθο η πεποίθηση ότι η απλή εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση είναι δυνατόν από μόνη της να αλλάξει τις εκπαιδευτικές πρακτικές. Η χρήση ΤΠΕ μπορεί να έχει σημαντικές επιδράσεις στην εκπαίδευση μόνο αν συνδυαστεί με αλλαγές στα ΑΠ και στις πρακτικές των εκπαιδευτικών.

Καταλήγουμε ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού, παρά την εισαγωγή οποιουδήποτε μέσου (όσο «ισχυρό» κι αν συστήνεται αυτό), ήταν και θα παραμένει σημαντικός όχι μόνο για την παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ, αλλά και για την υποστήριξη μιας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας και μάθησης. Όπως αναφέρει ο Peterson (Βοσνιάδου, 2006: 54) «ο εκπαιδευτικός είναι το κλειδί για μια επιτυχημένη χρήση των νέων τεχνολογιών». Χρειάζεται στροφή προς την οργάνωση της διδασκαλίας και τη δημιουργία ενός πλαισίου το οποίο θα ενθαρρύνει τη συμμετοχή των μαθητών στις μαθησιακές διαδικασίες, θα στηρίζει τη διερευνητικές και συνεργατικές μορφές μάθησης, θα στοχεύει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων και κριτικής σκέψης και θα απαιτεί από τους μαθητές αναστοχασμό και αιτιολόγηση των δράσεών τους. Μια τέτοια προσέγγιση δημιουργεί την αισιοδοξία ότι οι μαθητές θα μπορέσουν να κατανοούν τις έννοιες και να αναπτύσσουν τις νοητικές τους δομές, με απώτερο σκοπό να οδηγηθούν στη γνωστική αυτονομία και να αποκτήσουν τα εφόδια για να ενταχθούν στο σύγχρονο «κοινωνικό γίγνεσθαι».

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

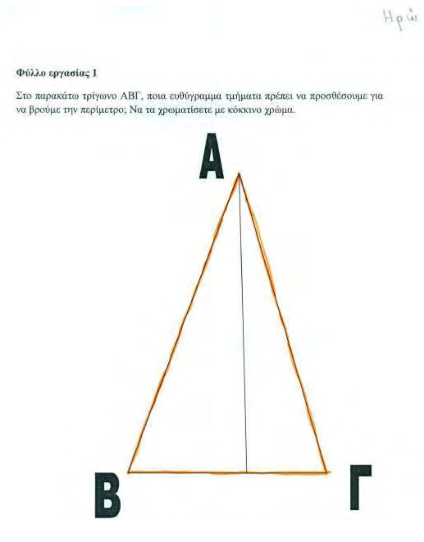
Η ανάλυση των δραστηριοτήτων και η καταγραφή των αποτελεσμάτων του διδακτικού πειράματος έγιναν στη βάση των ενοτήτων του αρχικού σχεδιασμού των δραστηριοτήτων και προκύπτουν μέσα από τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας των μαθητών, από τις φωτογραφίσεις των κατασκευών τους, τις καταγραφές οθόνης κατά την εργασία τους στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri, αλλά και από τις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις και τις παρατηρήσεις μας κατά τη διεξαγωγή του. Οι δραστηριότητες 1 έως 3 είχαν στόχο τη διερεύνηση πρότερων γνώσεων, οι δραστηριότητες 4 έως 6 τη διερεύνηση του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των παιδιών σύμφωνα με την ταξινομία Van Hiele και οι δραστηριότητες 7 έως 12 αποσκοπούσαν στην παρώθηση της γεωμετρικής τους σκέψης μέσω της περαιτέρω διερεύνησης των ιδιοτήτων των τριγώνων και της μεταξύ τους σχέσης. Παράλληλα με τις τελευταίες δραστηριότητες γινόταν και μια σταδιακή εισαγωγή στην έννοια της δυναμικής μεταβολής των τριγώνων, ενώ στις δραστηριότητες 13 έως 20 είχαμε τη διαπραγμάτευση της έννοιας του εμβαδού. Στο πλαίσιο αυτών των ενοτήτων αναλύθηκαν τέσσερις άξονες οι οποίοι συνίστανται στα εξής:

- Οι δυνατότητες και οι αδυναμίες που εμφάνισαν οι μαθητές
- Διατύπωση εξηγήσεων και ανάδειξη ενδεχόμενων αιτιών των παραπάνω καταστάσεων
- Διδακτικές πρακτικές για την υπέρβαση των παραπάνω αδυναμιών
- Αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης

<u>Διερεύνηση πρότερων γνώσεων</u>

Δραστηριότητα 1

Η δραστηριότητα 1 είχε ως στόχο τη διερεύνηση πρότερων γνώσεων και συγκεκριμένα την υπενθύμιση της περιμέτρου. Το σύνολο των μαθητών όπως φαίνεται μέσα από τα φύλλα εργασίας, έδειξε να γνωρίζει τη συγκεκριμένη έννοια καθώς την κατέδειξε χρωματίζοντάς τη σωστά σε ένα τρίγωνο (Φύλλο εργασίας 1).

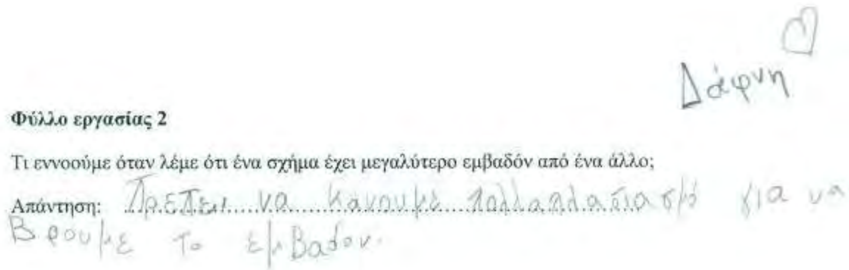

Ηρώ

Φύλλο εργασίας 1

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ, ποια ευθύγραμμα τμήματα πρέπει να προσθέσουμε για να βρούμε την περίμετρο; Να τα χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα.

Δραστηριότητα 2

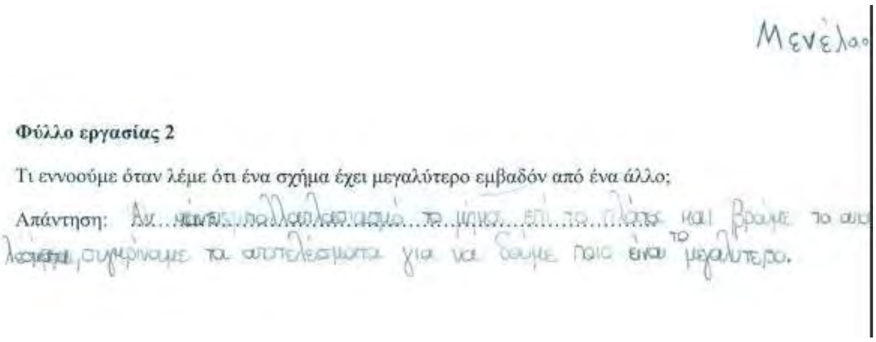
Στη δεύτερη δραστηριότητα στόχος ήταν η διερεύνηση της αντίληψης των μαθητών για την έννοια του εμβαδού. Μέσα από τα φύλλα εργασίας αναδείχθηκε ότι κάποια παιδιά θεωρούν το εμβαδό ως πολλαπλασιασμό (φύλλα εργασίας 2: Δάφνη, Μενέλαος),


Δάφνη

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Πρεπει να κανουμε πολλαπλασιασμό για να Βρουμε το εμΒαδον.

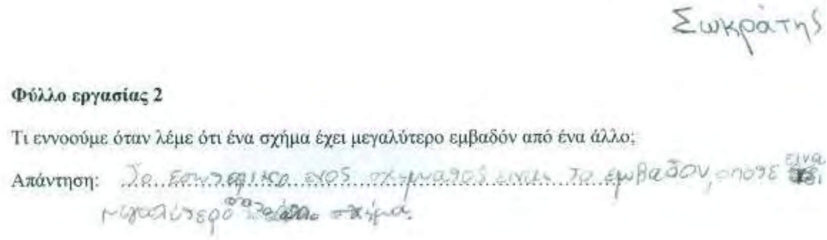

Μενέλαος

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Αν κάνουμε πολλαπλασιασμό το μήκος επί το πλάτος και βρούμε το αυ λογαριασμό, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα για να δούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο.

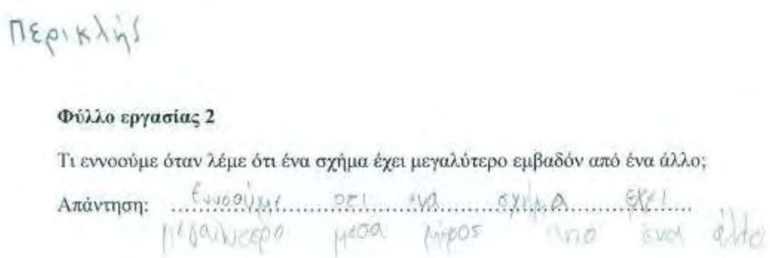
ως το εσωτερικό ενός σχήματος (φύλλα εργασίας 2: Σωκράτης, Περικλής),


Σωκράτης

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Το εσωτερικό ενός σχήματος είναι το εμβαδόν, οπότε είναι μεγαλύτερο το σχήμα.

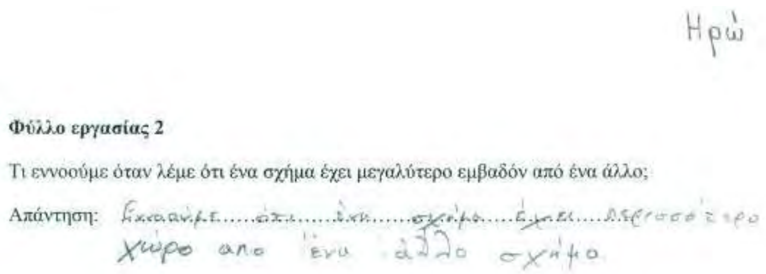

Περικλής

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Εννοούμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλυτερο μεσα μερος απο ενα άλλο

ως το χώρο που αυτό το σχήμα πιάνει (φύλλα εργασίας 2: Ηρώ, Αλέξανδρος),



Ηρώ

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Εννοούμε ότι ένα σχήμα έχει περισσότερο χώρο απο ένα άλλο σχήμα

Αλέξανδρος

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Όταν πιάνει περισσότερο χώρο από το άλλο.

και ως επιφάνεια (φύλλα εργασίας 2: Αθηνά).

Αθηνά

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Εννοούμε ότι έχει μεγαλύτερη επιφάνεια απο ένα άλλο σχήμα.

Αρκετά παιδιά (5) έδειξαν να συγχέουν τις έννοιες εμβαδού και περιμέτρου:

Φύλλο εργασίας 2: Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδό από ένα άλλο;

Ελπίδα: Εννοούμε ότι το σχήμα έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το άλλο.

Μια προσεκτικότερη παρατήρηση των φύλλων εργασίας αυτών των παιδιών αναδεικνύει ότι αντιλαμβάνονται τη διαφορά των εννοιών:

Φύλλο εργασίας Ναυσικάς: Εννοούμε ότι το άθροισμα των πλευρών ενός σχήματος, δηλαδή η περίμετρός του …

αλλά συνδέουν τις δύο έννοιες με σχέση παράλληλης αυξομείωσης. Ότι δηλαδή μεγαλύτερη περίμετρος σημαίνει και μεγαλύτερο εμβαδόν ή το αντίστροφο:

Φύλλο εργασίας Ορέστη: Λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο … το λέμε όταν ένα σχήμα έχει μεγαλύτερη περίμετρο.

Αυτή η αντίληψη είναι πιθανόν διαμορφωμένη από τη γνώση που έχουν για το εμβαδόν του τετραγώνου το οποίο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό πλευράς επί πλευράς και το οποίο αυξάνεται όταν αυξάνεται η περίμετρος. Στα τρίγωνα βέβαια δεν ισχύει αυτή η σχέση (τουλάχιστον όχι πάντοτε) και είναι λογικό να προέκυψε αυτή η σύγχυση. Κάποιοι γνώριζαν την ανάμειξη της βάσης στον υπολογισμό του εμβαδού:

Φύλλο εργασίας Ορέστη: Το εμβαδό είναι ένας πολλαπλασιασμός μεταξύ ύψους και μήκους.

και επομένως εύκολα έκαναν το συνειρμό ότι η αύξηση του μήκους της βάσης (άρα και της περιμέτρου) θα προκαλέσει και αύξηση του εμβαδού, χωρίς βέβαια να μπορούν ακόμη να αντιληφθούν τις ιδιαιτερότητες της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου στα τρίγωνα.

Τέλος να αναφέρουμε ότι υπήρξαν παιδιά που εξέφραζαν σωστά την έννοια του εμβαδού, αλλά δεν ένιωθαν σίγουροι γι’ αυτό και ήταν διστακτικοί στο να καταγράψουν την άποψή τους στο φύλλο εργασίας. Σε αυτή την περίπτωση η δική μου ενθάρρυνση επέδρασε καταλυτικά:

Περικλής: Πιστεύω ότι το εμβαδόν είναι το μέσα μέρος ενός σχήματος.

Δάσκαλος: Γράψ’ το. Αυτό θα γράψεις. «Πιστεύω ότι το μέσα μέρος του είναι μεγαλύτερο από το άλλο».

Δραστηριότητα 3

Η δραστηριότητα 3 στόχευε στην υπενθύμιση των διαφόρων ειδών τριγώνων, αλλά και στην εξοικείωση με το υλικό του γεωπίνακα. Οι μαθητές έδειξαν κατ’ αρχήν ενθουσιασμό με το καινούριο γι’ αυτούς υλικό, το οποίο τους βοήθησε να οπτικοποιήσουν τα διάφορα είδη τριγώνων. Κάποιοι μαθητές παραπλανήθηκαν οπτικά στο γεωπίνακα και θεώρησαν ισόπλευρο το ισοσκελές τρίγωνο που είχαν φτιάξει (εικ. 1):

Δάσκαλος (προς Ναυσικά): Για πες μας κι εσύ τα σχήματα που έκανες.

Ναυσικά: Παραλληλόγραμμο, τετράγωνο, ορθογώνιο τρίγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο(δείχνοντας το ισοσκελές, το επάνω αριστερά).

Εικ. 1

Εικ. 2

Δάσκαλος: Ωραία. Αυτό γιατί είναι ισόπλευρο τρίγωνο; Είναι το πάνω αριστερά.

Ναυσικά: Γιατί έχει ίσες πλευρές.

Στο σημείο αυτό χρειάστηκε η παρέμβασή μας για να αντιληφθούν οι μαθητές το «συντακτικό» του υλικού, δηλαδή τις αποστάσεις στο διάστικτο γεωπίνακα, τη μη ισομετρικότητα διαγώνιων και οριζόντιων αποστάσεων, καθώς και τη χρησιμότητα των κουκίδων (καρφιών) στον υπολογισμό των αποστάσεων:

Δάσκαλος: Είσαι σίγουρη ότι είναι ίσες πλευρές;

Ναυσικά: Να μετρήσω με το χάρακα;

Δάσκαλος: Όχι με το χάρακα δεν θα μετρήσουμε. Μπορούμε να μετρήσουμε με τι; Τι λέτε οι υπόλοιποι;

Αφροδίτη: Με τις βουλίτσες (καρφάκια).

Δάσκαλος: Με τις βουλίτσες. Πάρα πολύ ωραία!

Δάσκαλος: Για δείτε όλοι με τις βουλίτσες. Αυτή η απόσταση είναι ίση με αυτή την απόσταση; (δείχνοντας ανάμεσα σε δύο οριζόντιες και σε δύο διαγώνιες κουκίδες και επισημαίνοντας ότι οι οριζόντιες και οι κάθετες αποστάσεις αποτελούν τις πλευρές ενός τετραγώνου ενώ οι διαγώνιες τη διαγώνιό του).

Ναυσικά: Όχι.

Δάσκαλος: Τώρα λοιπόν καταλάβαμε ότι δεν είναι ισόπλευρο, έ; Τι είναι;

Ναυσικά: Είναι ισοσκελές.

Επίσης υπήρξαν και εσφαλμένες απόψεις για το αμβλυγώνιο τρίγωνο (εικ. 2):

Δάσκαλος(προς ομάδα τριγωνάκια): Εσύ ξέρεις πώς λέγονται τα σχήματα που έχεις φτιάξει;

Ορέστης: Τρίγωνο, ρόμβος, τρίγωνο αμβλυγώνιο… δεν θυμάμαι.

Δάσκαλος: Πώς το λέμε αυτό; (το κάτω αριστερά)

Ορέστης: Τρίγωνο αμβλυγώνιο.

Δάσκαλος: Για να το δούμε. Για να είναι τρίγωνο αμβλυγώνιο τι πρέπει να έχει;

Ορέστης: Μια ορθή γωνία.

Δάσκαλος: Για να είναι ένα τρίγωνο αμβλυγώνιο πρέπει να έχει μια ορθή γωνία; Αυτό λες;

Ορέστης: Αυτό θυμάμαι.

αλλά και συγκεχυμένες απόψεις για το αμβλυγώνιο, οι οποίες έδειχναν μια αβεβαιότητα για την αιτιολόγηση των χαρακτηριστικών του ιδιοτήτων (ακόμη και μαθητές με καλές επιδόσεις στα Μαθηματικά φαίνεται να το είχαν ξεχάσει):

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Τι τρίγωνο είναι αυτό;

Ηρώ: Αμβλυγώνιο δεν είναι;

Δάσκαλος: Γιατί είναι αμβλυγώνιο αυτό το τρίγωνο;

Ηρώ: Ε… Νομίζω…

Δάσκαλος: Το αμβλυγώνιο τρίγωνο ξέρεις τι χαρακτηριστικά έχει;

Ηρώ: Δεν το θυμάμαι.

……………………..

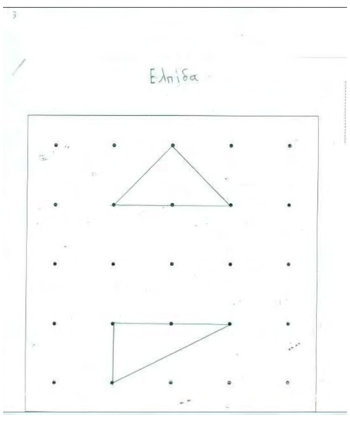
Δάσκαλος: Αλέξανδρε, εσύ αυτό που έκανες πιστεύεις ότι είναι αμβλυγώνιο;

Αλέξανδρος: Νομίζω ότι είναι δεν ξέρω.

Δάσκαλος: Τι σε κάνει να νομίζεις ότι είναι αμβλυγώνιο;

Αλέξανδρος: Το έκανα στην τύχη.

Η προβληματική αναπαράσταση του αμβλυγώνιου τριγώνου αποτυπώθηκε και στα μοτίβα γεωπίνακα (Περικλής, Ελπίδα, Δάφνη). Ως αμβλυγώνια έφτιαξαν τα κάτω τρίγωνα που είναι βέβαια ορθογώνια (Εικ. 3, Εικ. 4).



Εικ. 3 Εικ. 4

Η συζήτηση όμως που έγινε στην τάξη και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών ευνόησε την κατάθεση επιχειρημάτων και απόψεων, οι οποίες σταδιακά οδήγησαν στην ανακάλυψη της γνώσης. Έτσι χρήσιμη αποδείχτηκε η παρέμβαση ενός παιδιού το οποίο έκανε αναφορά στη γωνία:

Μενέλαος: Έχει μια γωνία που είναι 160^o ;

Στο σημείο αυτό τους έθεσα τον προβληματισμό για να αντιληφθούν ότι όλες οι αμβλείες είναι κατάλληλες για να χαρακτηρίσουν ένα τρίγωνο αμβλυγώνιο:

Δάσκαλος: Εάν είχε 150^o , θα ήταν πάλι αμβλυγώνιο;

Μενέλαος: Όχι, έτσι θεωρώ.

Δάσκαλος: Έτσι θεωρείς.

Μενέλαος: Αλλά μπορεί να είναι κι αυτό που λέτε.

Μετά την όλη συζήτηση ο Ορέστης έδειξε να αναγνωρίζει με σιγουριά το αμβλυγώνιο τρίγωνο, αλλά εξακολουθούσε να δυσκολεύεται να το ορίσει με την ορθή μαθηματική γλώσσα (εικ. 5):

Δάσκαλος (προς Ορέστη): Ποιο τρίγωνο πιστεύεις ότι είναι αμβλυγώνιο από αυτά που έκανες;

Ορέστης: Αυτό. (το κάτω δεξιά)

Εικ. 5

Δάσκαλος: Γιατί θεωρείς ότι είναι αμβλυγώνιο;

Ορέστης: Γιατί είναι προς τα πλάγια.

Η παρέμβασή μου τον βοήθησε να το θυμηθεί και να το κατανοήσει:

Δάσκαλος: Ποιο είναι προς τα πλάγια;

Ορέστης: Αυτή η γωνία.

Δάσκαλος: Θυμόμαστε τα είδη των γωνιών που υπάρχουν;

Ορέστης: (δείχνει να το θυμήθηκε και να το κατάλαβε) Επειδή η μία του γωνία είναι αμβλεία.

Στην προσπάθεια να ξεκαθαρίσουμε περισσότερο το είδος των γωνιών ενός αμβλυγωνίου τριγώνου, προβληματίσαμε τους μαθητές για το εάν μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μια αμβλείες στο ίδιο τρίγωνο και οι μαθητές απάντησαν αρνητικά, με βάση τον κανόνα του συνόλου των 180 μοιρών:

Δάσκαλος(προς ομάδα Α): Τι είπαμε πριν ότι χρειάζεται ένα τρίγωνο για να είναι αμβλυγώνιο;

Ηρώ: Γωνία πάνω από 90^o ;

Δάσκαλος: Μια γωνία ή περισσότερες πάνω από 90^o ;

Ηρώ: Μμ…

Δάσκαλος(προς Αθηνά): Τι λες εσύ;

Αθηνά: Μία.

Δάσκαλος: Μπορεί να έχει δύο γωνίες πάνω από 90^o ;

Όλοι μαζί: Όχι! Όχι!

Δάσκαλος: Γιατί παιδιά;

Αθηνά: Δεν θα 'ναι τρίγωνο.

Δάσκαλος: Δεν μπορούμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο με δύο πάνω από 90^o ;

Αλέξανδρος: Όχι, γιατί το σύνολο των γωνιών θα πρέπει να είναι 180^o .

Δάσκαλος: Αν κάνουμε μία 91^o και μία 91^o μας κάνει;

Αλέξανδρος: 182^o .

Δάσκαλος: Οπότε για την Τρίτη δεν μένει τίποτα, την έχουμε ξεπεράσει.

Στο τέλος της δραστηριότητας 3 έγινε στην ολομέλεια της τάξης ανακεφαλαίωση της ταξινομίας των τριγώνων ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες τους και μέσω (προβοκατόρικων) ερωτήσεων διαλευκάνθηκαν επιπρόσθετα οι ιδιότητες του οξυγώνιου:

Δάσκαλος: Και; ... Το οξυγώνιο. Τι έχει το οξυγώνιο;

Δημοσθένης: Έχει μία οξεία γωνία.

Δάσκαλος: Μία οξεία γωνία; Οι άλλες τι είναι;

Δημοσθένης: Όλες, όλες είναι οξείες.

Δάσκαλος: Α! Όλες οι γωνίες είναι οξείες. Τώρα το είπαμε καλύτερα.

αλλά και του σκαληνού τριγώνου:

Δάσκαλος: Τι έχει το σκαληνό;

Ναυσικά: (Γέλια).

Δάσκαλος: Δεν το θυμάσαι. Τι μπορεί να έχει; Μπορεί να είναι ίσες οι πλευρές του στο σκαληνό;

Ναυσικά: Όχι. (μετά από σκέψη)

Δάσκαλος: Γιατί; Αν ήταν και οι τρεις ίσες, θα ήταν σκαληνό;

Ναυσικά: Όχι.

Δάσκαλος: Τι θα ήταν;

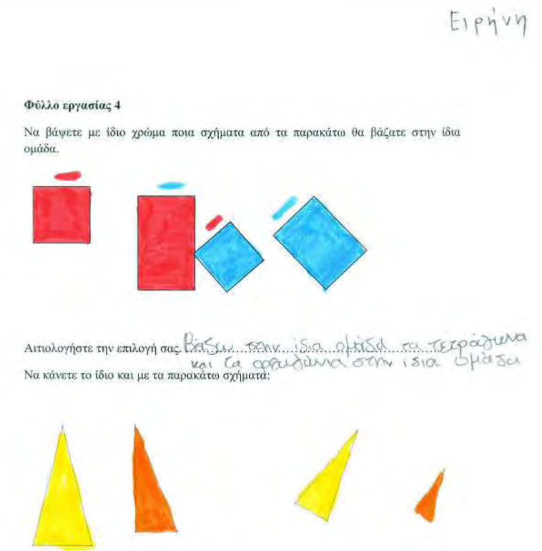
Ναυσικά: Θα ήταν ισόπλευρο.

Δάσκαλος: Αυτό δεν έχει καμία ίση πλευρά. Είναι όλες διαφορετικές.

<u>Διερεύνηση επιπέδων γεωμετρικής σκέψης</u>

Δραστηριότητα 4

Με αυτή τη δραστηριότητα (όπως και με τις 5 και 6) διερευνήθηκε το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σύμφωνα με την ταξινομία των Van Hiele. Οι μαθητές ταξινόμησαν διάφορα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνια και τρίγωνα) και στο σύνολο τους έκαναν σωστά την ταξινόμηση βάζοντας μαζί τα σχήματα ίδιων ιδιοτήτων και όχι βάση περιστροφής ή εμφάνισης, πράγμα που δείχνει ότι η σκέψη τους ήταν πέραν του επιπέδου 0 (της νοερής απεικόνισης) (φύλλο εργασίας 4).


Ειρήνη

Φύλλο εργασίας 4

Να βάψετε με ίδιο χρώμα ποια σχήματα από τα παρακάτω θα βάζατε στην ίδια ομάδα.

Αιτιολογήστε την επιλογή σας. Βάζω στην ίδια ομάδα τα τετράγωνα και τα ορθογώνια στην ίδια ομάδα

Να κάνετε το ίδιο και με τα παρακάτω σχήματα:

Ωστόσο σε κάποια περίπτωση χρειάστηκε αναφορά σε παραδείγματα περιστρεμμένων υλικών για να γίνει κατανοητή η διατήρηση των ιδιοτήτων:

Δάσκαλος: Παίζει ρόλο το ότι ένα σχήμα έγειρε στο πλάι (το περιστρέψαμε); Αλλάζει αυτό το σχήμα; Διατηρεί τις ιδιότητές του;

Μενέλαος: Όχι (δεν διατηρεί τις ιδιότητές του).

Δάσκαλος: Εάν έχω μία σκούπα η οποία πέφτει κάτω, όταν πέσει στο πάτωμα θα αλλάξει το σχήμα της;

Μενέλαος: Όχι, όχι!

Δάσκαλος: Άρα και τα σχήματα όταν τα περιστρέψω δεν αλλάζουν τα χαρακτηριστικά τους.

Επίσης πρόβλημα παρουσίασαν κάποιοι μαθητές στην ακριβή περιγραφή των κοινών ιδιοτήτων:

Δάσκαλος: Τι έχουν αυτά τα δύο ίδιο; (για τα ορθογώνια τρίγωνα)

Δημοσθένης: Έχουν μια ίσια γραμμή (και τα δύο). Είναι έτσι.

Η συζήτηση που ακολούθησε τον οδήγησε να καθορίσει ακριβώς την κοινή ιδιότητα (δηλαδή την ορθή γωνία):

Δάσκαλος: Έχουν γραμμή ίσια ή κάποια γωνία έχουν ίδια;

Δημοσθένης: Ναι! Τη γωνία την έχουν ίδια.

Δάσκαλος: Πώς τη λέμε αυτή τη γωνία;

Δημοσθένης: Ισόπλευρη… όχι.

Δάσκαλος: Ποιες γωνίες είπαμε ότι υπάρχουν; Η οξεία, η αμβλεία και η; …Ορθή. Αυτές δεν είναι οι γωνίες;

Δημοσθένης: Α, ναι!

Δάσκαλος: Τι γωνία έχουν αυτά τα δύο που μας έδειξες;

Δημοσθένης: Ορθή.

Δάσκαλος: Πώς τα λέμε αυτά τα τρίγωνα που έχουν μια γωνία ορθή;

Δημοσθένης: (Σιωπά).

Δάσκαλος: Ξέρει κανείς απ' την ομάδα σας;

Ελπίδα: Ισόπλευρο;

Δάσκαλος (προς όλη την τάξη): Πώς το λέμε παιδιά ένα τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή;

Αλέξανδρος: Ορθογώνιο.

Δάσκαλος (προς Περκλή): Αυτά τα δύο τρίγωνα είπες ότι είναι ίδια. Τι κοινό έχουνε;

Δημοσθένης: Μία ίση πλευρά.

Δάσκαλος: Μια κάθετη πλευρά. Είναι ίσες οι πλευρές ή κάθετες;

Δημοσθένης: Κάθετες.

Δάσκαλος: Και σχηματίζουν τι γωνία;

Δημοσθένης: Μια ορθή γωνία.

Στο τέλος ο Δημοσθένης έγραψε την αιτιολόγηση στο φύλλο εργασίας του.

Δραστηριότητα 5

Η δραστηριότητα αυτή απαιτούσε την ταξινόμηση διάφορων τριγώνων με βάση κοινές τους ιδιότητες. Ο βαθμός δυσκολίας σε σχέση με την προηγούμενη δραστηριότητα ήταν αυξημένος καθώς τα σχήματα ήταν περισσότερα και χρειαζόταν μεγαλύτερη προσήλωση στις ιδιότητες. Αρκετά παιδιά (7) εστίασαν στις κοινές ιδιότητες των σχημάτων και τα ταξινόμησαν ανάλογα, παρέχοντας ορθή αιτιολόγηση για την επιλογή τους και δείχνοντας επάρκεια στο επίπεδο 1 των Van Hiele (εικ. 6).

Εικ. 6

Φύλλο εργασίας 5: Εξήγησε γιατί έβαλες κάποια μαζί;

Αλέξανδρος: Γιατί η πρώτη ομάδα (1, 8, 9) είναι με ορθογώνια τρίγωνα

………………

Μενέλαος: Κύριε το εννέα είναι ισοσκελές (ανακαλύπτοντας μία ακόμη ιδιότητα εκτός από ορθογώνιο).

Δάσκαλος: Άρα με ποιο θα το βάλεις;

Μενέλαος: Με το 4 (που είναι κι αυτό ισοσκελές).

Δάσκαλος: Θα πάει με το 4. Πολύ ωραία.

Κάποια λάθη στην ταξινόμηση δεν οφειλόταν στην άγνοια των ιδιοτήτων, αλλά σε λανθασμένη οπτική αντίληψη κάποιας ιδιότητας. Με τη δική μου επισήμανση αλλά και την προσεκτικότερη παρατήρηση και μέτρηση των μη εμφανών ιδιοτήτων από μέρους των μαθητών, αναγνωρίστηκαν τα λάθη και έγινε αναθεώρηση της ταξινόμησης:

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Γιατί έβαλες αυτά τα τρία στην ίδια ομάδα;

Ηρώ: Γιατί είναι ισοσκελή (συμπεριλαμβάνει και το 5, που είναι όμως ισόπλευρο).

Δάσκαλος: Αυτό το μεσαίο είναι ισοσκελές; Το 5; Ισοσκελές είναι. Έχει δύο ίσες πλευρές. Η Τρίτη όμως πλευρά τι είναι; Είναι μικρότερη, μεγαλύτερη από τις άλλες ή ίση;

Ηρώ (αφού τις μετράει με το χάρακα): Ίσες.

Δάσκαλος: Άρα τι είναι αυτό το τρίγωνο;

Ηρώ: Ισόπλευρο.

………………….

Δάσκαλος: Γιατί έβαλες μαζί το 5, 6 (που είναι ισόπλευρα) και το 9 (που είναι ορθογώνιο);

Ορέστης: Γιατί είναι ισόπλευρα.

Δάσκαλος: Το εννέα είναι ισόπλευρο κι αυτό;

Ορέστης: (παρατηρώντας το καλύτερα) Ορθογώνιο.

Δάσκαλος: Άρα πρέπει να πάει μαζί με το πέντε και το έξι;

Ορέστης: Όχι.

Δάσκαλος: Με ποιο θα πάει;

Ορέστης: Με το ένα και το οκτώ.

Δάσκαλος: Ωραία, γιατί έχουν και τα τρία μία ορθή γωνία.

Ορισμένα λάθη επισημάνθηκαν και από τα άλλα παιδιά και η αυθόρμητη παρέμβασή τους οδήγησε σε συζήτηση και αναγνώριση των λαθών:

Αλέξανδρος: Κύριε το 7 με το 1 δεν είναι ίδιο. Γιατί αυτό (το 1) είναι ορθογώνιο, ενώ το 7 δεν είναι. Αυτό δεν έχει ορθή γωνία.

Μενέλαος: Έχει!

Αλέξανδρος: Το έλεγξα. Δεν έχει.

Δάσκαλος: Δεν έχει ορθή γωνία. Είναι μεγαλύτερη από τη γωνία του γνώμονα (90^o). Στη γεωμετρία αν δεν είμαστε σίγουροι, χρησιμοποιούμε το γνώμονα. Με αυτή τη γωνία θα καταλάβουμε πάντα αν είναι ορθή.

Δάσκαλος: Άρα το 7 με ποιο θα πάει; Τι είπαμε ότι είναι το 7;

Μενέλαος: Ισόπλευρο.

Αλέξανδρος: Ισόπλευρο δεν είναι σίγουρα.

Δάσκαλος: Να δούμε λίγο τις γωνίες του.

Μενέλαος: Ναι.

Δάσκαλος: Να τις δούμε μία μία. Αυτή τι είναι;

Μενέλαος: 90^o .

Δάσκαλος: Αυτή που δείχνω είναι ενενήντα;

Αλέξανδρος: Μικρότερη.

Δάσκαλος: Άρα οξεία. Αυτή;

Μενέλαος: Οξεία.

Δάσκαλος: Αυτή;

Αθηνά: Οξυγώνιο. ... Όχι.

Μενέλαος: Όχι οξεία.

Αλέξανδρος: Αμβλεία.

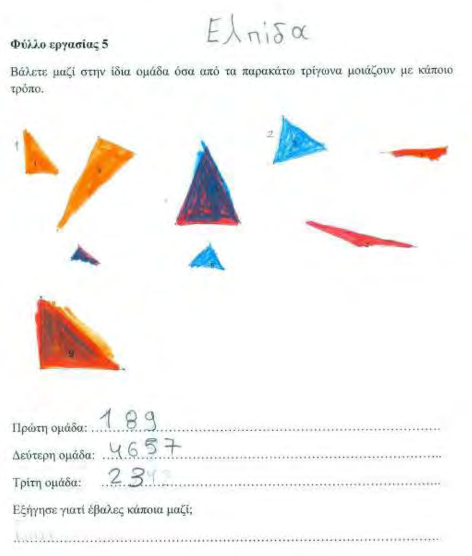
Δάσκαλος: Άρα; Πώς το λέμε το 7; Αμβλυγώνιο. Θα πρέπει να ψάξετε να βρείτε ένα άλλο αμβλυγώνιο. Ποιο άλλο είναι αμβλυγώνιο;

Αλέξανδρος: Το 2.

Μενέλαος: Και το 3.

Δάσκαλος: Ωραία θα τα βάλετε μαζί.

Ωστόσο υπήρξαν και μαθητές που τα έβαζαν μεν σωστά, αλλά δεν εξηγούσαν το γιατί (δηλαδή τη σχέση των ιδιοτήτων). (Φύλλο εργασίας 5).


Ελπίδα

Φύλλο εργασίας 5

Βάλετε μαζί στην ίδια ομάδα όσα από τα παρακάτω τρίγωνα μοιάζουν με κάποιο τρόπο.

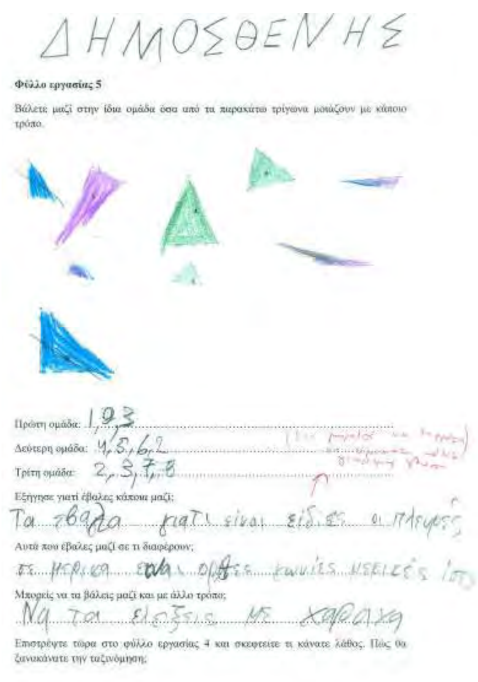
Πρώτη ομάδα: 1 8 9

Δεύτερη ομάδα: 4 6 5 7

Τρίτη ομάδα: 2 3

Εξήγησε γιατί έβαλες κάποια μαζί;

Η αιτιολόγηση που χρησιμοποιεί ο Δημοσθένης στην ταξινόμησή του δείχνει έλλειψη κοινής γεωμετρικής γλώσσας, καθώς αδυνατεί να εκφράσει π.χ. ότι οι πλευρές τέμνονται κάθετα και αναφέρει απλά ότι είναι ίδιες οι πλευρές (Φύλλο εργασίας 5).


ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ

Φύλλο εργασίας 5

Βάλετε μαζί στην ίδια ομάδα όσα από τα παρακάτω τρίγωνα μοιάζουν με κάποιο τρόπο.

Πρώτη ομάδα: 1,9,3

Δεύτερη ομάδα: 4,5,6,2

Τρίτη ομάδα: 2,3,7,8

Εξήγησε γιατί έβαλες κάποια μαζί;

Τα έβαλα γιατί είναι ίδιες οι πλευρές

Αυτά που έβαλες μαζί σε τι διαφέρουν;

Σε μερικά είναι ορθές γωνίες ισοσκελές

Μπορείς να τα βάλεις μαζί και με άλλο τρόπο;

Να τα ελέξεις με χάρακα

Επιστρέψτε τώρα στο φύλλο εργασίας 4 και σκεφτείτε τι κάνατε λάθος. Πώς θα ξανακάνατε την ταξινόμηση;

Η ώθηση που δόθηκε σε αυτό το επίπεδο 1, ήταν να προσπαθήσουν να βρουν διαφορετικές κοινές ιδιότητες εμβαθύνοντας έτσι στην καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συσχετίζονται τα σχήματα μεταξύ τους. Με τις κατάλληλες ερωτήσεις και τον ανάλογο προβληματισμό, οι μαθητές αντιλήφθηκαν και αναγνώρισαν και άλλες κοινές ιδιότητες, εστιάζοντας π.χ. πέρα από τις γωνίες και σε συσχετισμό των πλευρών τους και ανέπτυξαν τη γεωμετρική τους σκέψη:

Δάσκαλος: Μπορούμε να τα βάλουμε μαζί και με άλλο τρόπο;

Αλέξανδρος: Ναι.

Δάσκαλος: Βάλ' τα τώρα μαζί και με άλλο τρόπο.

Μενέλαος: Με άλλο τρόπο;

Δάσκαλος: Δηλαδή, το 2 που είναι αμβλυγώνιο, έχει κάτι άλλο εκτός από μια αμβλεία γωνία; Ποιος θα μου πει;

Αλέξανδρος: Το 2 είναι και ισοσκελές.

Δάσκαλος: Άρα με ποιο μπορεί να πάει;

Αλέξανδρος: Με το 4, με το 6, το 5 …

Στο τελευταίο μέρος της δραστηριότητας εισήχθη ο προβληματισμός για το δυνατό συνδυασμό ιδιοτήτων ενός τριγώνου ο οποίος ώθησε κι αυτός τη σκέψη των παιδιών:

Δάσκαλος: Είπατε πολύ σωστά ότι ένα τρίγωνο μπορεί να είναι αμβλυγώνιο, αλλά μπορεί να είναι (συγχρόνως) και ισοσκελές. Ή μπορεί να είναι … Μπορεί να είναι ισόπλευρο και αμβλυγώνιο;

Αλέξανδρος: Όχι.

Δάσκαλος: Γιατί; Γιατί να μην είναι; Το ισόπλευρο τρίγωνο τι γωνίες έχει;

Αθηνά: Ίσες.

Δάσκαλος: Και οι τρεις είναι ίσες. Πόσες μοίρες έχει η κάθε μία;

Αλέξανδρος: Το αμβλυγώνιο έχει μία μεγαλύτερη από 90^o και οι άλλες δύο είναι μικρότερες από 90^o . Δεν γίνεται να είναι.

Δάσκαλος: Έτσι ακριβώς. Δεν γίνεται να είναι ισόπλευρο και αμβλυγώνιο. Πολύ ωραία!

Δραστηριότητα 6

Με αυτή τη δραστηριότητα έγινε προσπάθεια να ανιχνευτεί εάν η γεωμετρική σκέψη των μαθητών βρίσκεται στο επίπεδο 2 των Van Hiele. Μία ένδειξη γι' αυτό το επίπεδο αποτελεί η ικανότητα να αναγνωρίζουν τις αναγκαίες και επαρκείς ιδιότητες για τον χαρακτηρισμό ενός γεωμετρικού σχήματος. Τους ζητήθηκε κατ' αρχήν να επιλέξουν από μία λίστα ιδιοτήτων τις αναγκαίες για να είναι ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Δύο μαθητές (Ναυσικά, Μενέλαος) βρήκαν όλες τις αναγκαίες ιδιότητες ενός ορθογωνίου τριγώνου (Φύλλο εργασίας 6).

Αλλά και η πλειοψηφία των μαθητών (9) αναγνώρισε τις περισσότερες από αυτές, κάνοντας μία έως δύο το πολύ λανθασμένες επιλογές. Η πιο συχνή λανθασμένη επιλογή (8 μαθητές) ήταν ότι θεώρησαν αναγκαία συνθήκη για ένα ορθογώνιο τρίγωνο το να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους. Αυτό υποδηλώνει ότι αδυνατούσαν να αντιληφθούν ότι ένα τρίγωνο μπορεί να είναι συγχρόνως και ορθογώνιο και ισοσκελές (Φύλλο εργασίας 6).

Αλέξανδρος

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες ☑

Β) να έχει μια ορθή γωνία ☑

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες ☐

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο ☑

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους ☑

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες ☐

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: Η Β): να έχει μια ορθή γωνία γιατί ένα ορθογώνιο τρίγωνο πρέπει να έχει τη γωνία 90° δηλαδή ορθή.

Ένα άλλο συχνό λάθος (5 μαθητές) στις αναγκαίες ιδιότητες ήταν ότι απέρριπταν ως αναγκαία το να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Προφανώς αγνοούσαν την ιδιότητα της υποτείνουσας ως μεγαλύτερη πλευρά από τις δύο κάθετες (Φύλλο εργασίας 6).

ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες ☑

Β) να έχει μια ορθή γωνία ☑

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες ☒

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο ☒

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους ☒

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες ☒

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

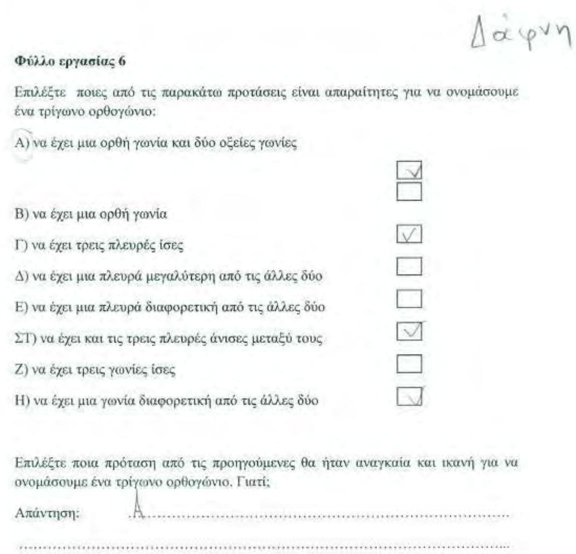
Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: η Β γιατί σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο χρηάζετε μια ορθή γωνία

Βέβαια υπήρξαν και μαθητές με αρκετά «ποιοτικά» λάθη στην αναγνώριση των αναγκαίων ιδιοτήτων, όπως το να λένε ότι πρέπει να έχει τρεις πλευρές ίσες (Δάφνη, Ειρήνη) ή τρεις γωνίες ίσες (Θάλεια).

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος της δραστηριότητας, ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν την επαρκή ιδιότητα η οποία από μόνη της θα ήταν αρκετή για τον χαρακτηρισμό του ορθογωνίου τριγώνου. Η ικανότητα αυτής της αναγνώρισης είναι η πλέον ενδεικτική του επιπέδου 2. Η σωστή απάντηση ήταν η Β, το να έχει δηλαδή μια ορθή γωνία. Η ιδιότητα αυτή είναι επαρκής από μόνη της, διότι εάν ισχύει, τότε ισχύουν αναγκαστικά και κάποιες άλλες, όπως το να έχει π.χ. και δύο οξείες γωνίες ή το να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο.

Πέντε μαθητές επέλεξαν λανθασμένα την Α πρόταση (το να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες) ως επαρκή, μη κάνοντας το συλλογισμό ότι με την ύπαρξη της ορθής γωνίας εξυπακούονται οι δύο οξείες (Φύλλο εργασίας 6).



Δάφνη

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες ☑

Β) να έχει μια ορθή γωνία ☐

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες ☑

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο ☐

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο ☐

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους ☑

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες ☐

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: Α

Τους προβλημάτισα και τους βοήθησα να το καταλάβουν αναφέροντας το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ποια διάλεξες (σχετικά με το Β ερώτημα);

Δάφνη: (Δείχνει την Α πρόταση).

Δάσκαλος (διαβάζει την επιλογή της): Να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες.

Δάσκαλος: Εάν έχει μία ορθή γωνία (η Β πρόταση), θα μας ήταν αρκετή;

Δάφνη: (Σιωπά).

Δάσκαλος: Εάν ένα τρίγωνο είχε μια ορθή γωνία, οι άλλες τι είπαμε ότι θα ήταν; Μπορεί να μην είναι οξείες και να είναι κάτι άλλο; Τι πιστεύεις;

Δάφνη: (Σιωπά).

Δάσκαλος: Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει μια ορθή γωνία και μία αμβλεία;

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Γιατί;

Δάφνη: (Σιωπά).

Δάσκαλος: Πόσο είναι το άθροισμα και των τριών γωνιών σε ένα τρίγωνο πάντα;

Δάφνη: (Σιωπά).

Δάσκαλος (προς όλη την ομάδα): Πόσο είναι παιδιά;

Δημοσθένης: 180^o .

Δάσκαλος: Η ορθή; Πόσες μοίρες είναι;

Δάφνη: 90^o .

Δάσκαλος: Εάν έχουμε μία 90^o, μπορεί να έχουμε κι άλλη μία 90 ή περισσότερο από 90;

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Γιατί Έρβιν; Άμα είναι 90 και 90, που θα πάμε; Φτάσαμε στο;

Δημοσθένης: 180 .

Δάσκαλος: Δεν μας παίρνει. Άρα με μία ορθή γωνία <u>εννοείται</u> ότι οι άλλες θα είναι; Οξείες.

Δάφνη: Ναι!

Δάσκαλος: Άρα δεν χρειάζεται η Α πρόταση. Η Β δεν μας καλύπτει;

Δάφνη: Ναι!

<u>Παρώθηση στη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ ιδιοτήτων –Δυναμική μεταβολή</u>

Δραστηριότητα 7

Η αναζήτηση των ελαχίστων ενδείξεων για την αναγνώριση ενός γεωμετρικού σχήματος και ο αποκλεισμός κάποιων σχημάτων με τη σταδιακή αποκάλυψή τους, είναι στοιχεία που ωθούν τη γεωμετρική σκέψη των παιδιών στο επίπεδο 2 και αυτό ακριβώς επιδιώχθηκε με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Η πρώτη ένδειξη οδήγησε το σύνολο των μαθητών να καταγράψουν σωστά όλα τα κλειστά σχήματα. Με τη δεύτερη ένδειξη (έχει δύο οξείες γωνίες), αποκλείστηκαν το τετράγωνο και το ορθογώνιο. Η ομάδα των Σκορπιών (Β) κατέγραψε ελλιπώς την απάντηση μη αναφέροντας το πλάγιο παραλληλόγραμμο και καταγράφοντας μόνο τα τρίγωνα. Βοήθησε πολύ τους μαθητές η παράλληλη κατασκευή των σχημάτων στο γεωπίνακα ή στον καμβά για να αντιληφθούν ποια σχήματα ταιριάζουν και ποια αποκλείονται κάθε φορά. Διαφορετικά στο νοητικό- αφαιρετικό επίπεδο ήταν πιο δύσκολο να προσδιορίσουν τα σχήματα. Έτσι σε συνδυασμό με τη συζήτηση που κάναμε, συνειδητοποίησαν τα λάθη τους και συμπεριέλαβαν και το πλάγιο παραλληλόγραμμο στην απάντησή τους:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): (Μετά την παρουσίαση της δεύτερης πρότασης) Δε μου λέτε; Φτιάξατε κάποια τρίγωνα τα οποία έχουν δύο οξείες γωνίες. Ναι;

Δημοσθένης, Άννα: Ναι! Ναι!

Δάσκαλος: Εκτός από τρίγωνο θα μπορούσαμε να έχουμε ένα άλλο σχήμα; Με τέσσερις πλευρές που να έχει δύο οξείες γωνίες;

Δημοσθένης: Το τετράγωνο.

Δάσκαλος: Το τετράγωνο έχει τέσσερις ορθές.

Ειρήνη: Το ορθογώνιο!

Δάσκαλος: Το ορθογώνιο έχει 4 ορθές. Για να έχει δύο οξείες; Για κάνετε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο να δούμε;

Ειρήνη: (κατασκευάζει ένα ορθογώνιο).

Δάσκαλος: Αυτό που έκανες είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο;

Ειρήνη: Όχι.

Δάσκαλος: Τι είναι;

Ειρήνη: Ορθογώνιο (δείχνει να το αντιλαμβάνεται αμέσως).

Με την αποκάλυψη της τέταρτης ένδειξης (η μια γωνία είναι ίση με μία άλλη), οι μαθητές αντιλήφθηκαν μερικώς τα πιθανά τρίγωνα που μπορεί να είναι βάση αυτής, κυρίως το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Όμως απέκλεισαν το ορθογώνιο (ομάδες Α και Β) και το αμβλυγώνιο (ομάδα Β):

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ποια τρίγωνα γράψτε τώρα αποκλείονται;

Δημοσθένης: Ορθογώνιο ...

Προφανώς αδυνατούσαν να κατανοήσουν ότι γίνεται ένα τρίγωνο να συνδυάζει δύο ιδιότητες π.χ. ισοσκελές και ορθογώνιο ή ισοσκελές και αμβλυγώνιο. Με τη συζήτηση αλλά και την κατασκευή των σχημάτων στο γεωπίνακα ή στον καμβά οδηγήθηκαν στην ανατροπή της αρχικής τους εκτίμησης:

Δάσκαλος: Υπάρχει ορθογώνιο που να είναι και ισοσκελές; Δεν μπορεί να γίνει αυτό;

Δημοσθένης: Το ορθογώνιο έχει μόνο μία ίση γραμμή. Οι άλλες δύο είναι διαφορετικές.

Ο Δημοσθένης αναφέρεται στις γωνίες και εννοεί ότι το ορθογώνιο τρίγωνο έχει μία ορθή και δύο γωνίες διαφορετικές. Εγώ τον διόρθωσα συνεχίζοντας τον προβληματισμό για το ισοσκελές:

Δάσκαλος: Το ορθογώνιο έχει μία ορθή γωνία. Οι άλλες δύο δεν μπορεί να είναι ίσες;

Δημοσθένης: Όχι, γιατί ...

Δάσκαλος: Για δοκίμασε να το φτιάξεις στο γεωπίνακα.

Δημοσθένης: Ένα ορθογώνιο είναι 90^o (εννοεί τη μία γωνία) και όλα τα άλλα είναι 180^o .

Δάσκαλος: Και τα δύο μαζί (ορθή και οι άλλες δύο).

Δημοσθένης: Άμα βάλουμε κι άλλες 90, θα έχουμε πάνω από 180.

Προφανώς κατάλαβε λανθασμένα την τέταρτη πρόταση. Ενώ εννοεί να έχει δύο οξείες γωνίες, ο Δημοσθένης το εξέλαβε να έχει δύο ορθές ίσες.

Δάσκαλος: Ωραία φτιάξε μου ένα ορθογώνιο τρίγωνο να το δούμε (το κανονίζω στο γεωπίνακα να είναι και ισοσκελές) (εικ. 7).

Δάσκαλος: Αυτό λοιπόν που φτιάξατε είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Συμφωνείτε όλη η ομάδα;

Ομάδα Β: Ναι!

Δάσκαλος: (Δείχνοντας την ορθή) Αυτή η γωνία πόσες μοίρες είναι;

Ομάδα Β: 90^o .

Δάσκαλος: Αυτές οι δύο γωνίες σου φαίνονται για ίσες; (Στο ισοσκελές ορθογώνιο).

Δημοσθένης: Διαφορετικές είναι.

Δάσκαλος: Αυτή είναι διαφορετική από αυτή;

Θάλεια: Όχι!

Δημοσθένης: Αυτές όχι!

Δάσκαλος: Αυτές τι είναι; Είναι ίσες αυτή με αυτή;

Όλη η ομάδα: Ναι!

Δάσκαλος: Άρα μπορούμε να έχουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο που να έχει και δύο γωνίες ίσες;

Δημοσθένης: Α, ναι!

Δάσκαλος: Είδατε τώρα που το φτιάξαμε ότι γίνεται.

Εικ. 7

Με τον ίδιο τρόπο, βάζοντας τα παιδιά (ομάδα Β) να σχηματίσουν στο γεωπίνακα ένα αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, τους έκανα να συνειδητοποιήσουν ότι ήταν δυνατή η συνύπαρξη αυτών των ιδιοτήτων. Όσον αφορά το τρίγωνο που θα έπρεπε να αποκλειστεί με βάση τις δύο ίσες γωνίες, τους ώθησα να συσχετίσουν τις γωνίες με τις πλευρές και μέσα από τη διαδικασία του τυπικού συλλογισμού να οδηγηθούν στον αποκλεισμό του σκαληνού τριγώνου:

Δάσκαλος: Το σκαληνό τρίγωνο τι είπαμε ότι έχει, θυμάστε;

Ομάδα Β: Όχι.

Δάσκαλος: Τρεις πλευρές διαφορετικές ...

Δημοσθένης: Από την άλλη.

Δάσκαλος: Οι γωνίες του τι θα είναι; Αφού όλες οι πλευρές είναι διαφορετικές, οι γωνίες του τι θα είναι; Θα είναι διαφορετικές;

Θάλεια: Ναι.

Δάσκαλος: Μπορεί, αφού λέει η μία γωνία να είναι ίση με μία άλλη, να είναι σκαληνό;

Θάλεια: Όχι.

Δάσκαλος: Άρα ποιο τρίγωνο αποκλείεται;

Δημοσθένης: Το σκαληνό.

Με την πέμπτη ένδειξη (η τρίτη πλευρά είναι μεγαλύτερη από τις άλλες) οι μαθητές (ακόμη και παιδιά που είχαν δυσκολίες με τις άλλες ενδείξεις) αντιλήφθηκαν εύκολα ότι έπρεπε να αποκλειστεί το ισόπλευρο τρίγωνο:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Στην τέταρτη πρόταση αποκλείσαμε το σκαληνό. Εδώ μας λέει (η πέμπτη πρόταση) ότι πρέπει να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες. Ρωτάω εγώ τώρα. Μπορεί να είναι ισόπλευρο αυτό το τρίγωνο;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάσκαλος: Άρα ποιο αποκλείεται;

Δημοσθένης: Το ισόπλευρο.

Με την ένδειξη 6 (ότι το τρίγωνο πρέπει να έχει και μια αμβλεία) αντιλήφθηκαν εύκολα ότι επρόκειτο για το ισοσκελές και αμβλυγώνιο, εφόσον είχαν προηγουμένως διαπιστώσει στο γεωπίνακα ότι ο συνδυασμός ιδιοτήτων (όπως π.χ. ορθογώνιο και ισοσκελές) ήταν εφικτός. Θα πρέπει τέλος να αναφερθεί ότι οι μαθητές κατασκεύασαν τα σχήματά τους κατά κόρον στο γεωπίνακα παρά στον ισομετρικό καμβά, επειδή ο γεωπίνακας τους φάνηκε πιο λειτουργικός, με την έννοια ότι μπορούσαν εύκολα να ανακατασκευάζουν τα σχήματά τους. Βέβαια η κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων στο γεωπίνακα ήταν ανέφικτη, αλλά δεν επιμείναμε σε αυτή τη φάση.

Δραστηριότητα 8

Με τη δραστηριότητα 8 οι μαθητές έκαναν μετασχηματισμούς στο γεωπίνακα. Μετακίνησαν την κορυφή ενός τριγώνου και τους ζητήθηκε να καταγράψουν τις μεταβολές που επήλθαν στα στοιχεία του. Η μεταβολή των γωνιών και των δύο πλευρών του ήταν εμφανής από τους μαθητές, ενώ εύκολα αναγνωρίστηκε και η διατήρηση της βάσης:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Τι άλλαξε; Η βάση του άλλαξε;

Δημοσθένης: Όχι, παραμένει η ίδια. Άλλαξαν οι δύο πλευρές.

Δάσκαλος: Οι δύο πλευρές και οι γωνίες ποιες άλλαξαν; Γράψτε τι άλλαξε και τι έμεινε το ίδιο. Από πλευρές και γωνίες.

Στην αντίληψη της διατήρησης ή της μεταβολής κάθε στοιχείου του τριγώνου συνέβαλε σαφώς η ύπαρξη των κουκίδων του γεωπίνακα, οι οποίες διευκολύνουν τον κάθε υπολογισμό:

Δάσκαλος: Να πω μία ακόμη φορά. Στο γεωπίνακα χρειάζεται να μετράμε με το χάρακα;

Όλη η ομάδα: Όχι.

Δάσκαλος: Τι μας βοηθάει να μετράμε;

Δάφνη: Αυτά εδώ (δείχνοντας τα καρφάκια).

Δάσκαλος: Α, μπράβο! Οι κορυφές.

Πρόβλημα υπήρξε και στις δύο ομάδες (Α και Β) με το σχηματισμό του ύψους. Με τη συζήτηση και τη δική μου παρέμβαση μιλώντας για το κάθετο τμήμα από την κορυφή προς τη βάση, ξεπεράστηκαν οι δυσκολίες (εικ. 8):

Δάσκαλος: Ύψος είπαμε είναι μία γραμμή από την κορυφή προς τη βάση.

Δημοσθένης: Α, ναι! (και το φτιάχνει στα τρίγωνα του γεωπίνακα)

Εικ. 8

Εικ. 9

Η ομάδα Τσάινα Τάουν (Α) είχε κάνει το ύψος πλάγια, όχι κάθετα (εικ. 9).

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Το ύψος είπαμε είναι η κάθετη από την κορυφή προς τη βάση. Στο τρίγωνο το πορτοκαλί (αμβλυγώνιο), το ύψος από την κορυφή τι πρέπει να είναι; Πλάγια είναι η γραμμή ή κάθετη προς τη βάση;

Αφροδίτη: Κάθετη.

Δάσκαλος: Αυτό που κάνατε εσείς είναι κάθετη;

Αφροδίτη: Όχι!

Ο σχηματισμός του ύψους στο γεωπίνακα βοήθησε τους μαθητές να το οπτικοποιήσουν και να αντιληφθούν ξεκάθαρα μέσω των κουκίδων τη διατήρησή του:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Άλλαξαν τα ύψη;

Όλη η ομάδα Β: Όχι.

Δάσκαλος: Παρέμειναν τα ίδια. Δύο κουτάκια εδώ, δύο κουτάκια εδώ.

Δραστηριότητα 9

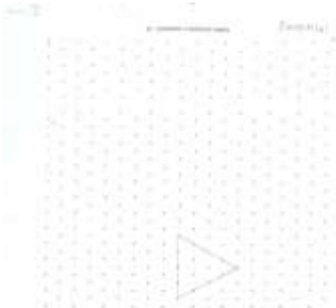
Η κατασκευή μερικών τριγώνων στο γεωπίνακα με βάση κάποιες προκαθορισμένες ιδιότητες έγινε σχετικά εύκολα από όλα τα παιδιά, εφόσον είχε προηγηθεί στις αρχικές δραστηριότητες η υπενθύμιση των ειδών των τριγώνων. Έτσι έφτιαξαν ισοσκελή, ορθογώνια, αμβλυγώνια και σκαληνά τρίγωνα. Ο προβληματισμός επήλθε όταν κλήθηκαν να κατασκευάσουν στο γεωπίνακα ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Η ομάδα Α κάθε φορά που προσπαθούσε, αντιλαμβανόταν ότι το αποτέλεσμα δεν ήταν ισόπλευρο:

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Αυτό που φτιάξατε είναι ισόπλευρο;

Όλη η ομάδα: Όχι, όχι!

Η Β ομάδα χρειάστηκε κάποια επισήμανση για να αντιληφθούν ότι το τρίγωνό τους δεν ήταν ισόπλευρο (εικ. 10):

Εικ. 10



Εικ. 11

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Αυτό που φτιάξατε λέτε ότι είναι ισόπλευρο;

Δημοσθένης: Ναι.

Δάσκαλος: Δηλαδή αυτή η πλευρά είναι ίση με αυτή; (δείχνοντας την τρίτη άνιση)

Θάλεια: Όχι!

Τους βοήθησα να αιτιολογήσουν την αδυναμία κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου στο γεωπίνακα κάνοντας αναφορά στη διαγώνιο ενός τετραγώνου ή ορθογωνίου και επισημαίνοντας ότι αυτή είναι πάντα μεγαλύτερη από οποιαδήποτε πλευρά του:

Δάσκαλος: Πώς θα το καταλάβουμε (ότι δεν είναι ισόπλευρο); Φτιάχνουμε ένα τετράγωνο (στο γεωπίνακα). Εντάξει; Η μία πλευρά στο τετράγωνο είναι ίση με τη διαγώνιο;

Δημοσθένης: Ναι.

Θάλεια, Άννα: Όχι!

Δάσκαλος: Η διαγώνιος δεν είναι πάντα (το έχετε μάθει πέρυσι) μεγαλύτερη από τις πλευρές;

Δημοσθένης: Ναι.

Δάσκαλος: Άρα αυτή η πλευρά είναι μεγαλύτερη από αυτές.

……………………..

Δάσκαλος: Δε γίνεται. Γιατί δε γίνεται; Διότι στο γεωπίνακα οι αποστάσεις από τα καρφάκια κάθετα και οριζόντια είναι ίσες. Διαγώνια όμως είναι ίσες;

Ηρώ: Όχι.

Δάσκαλος: Αυτός είναι ο λόγος.

Η αιτιολόγησή τους διευκολύνθηκε με την κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου σε χαρτί ισομετρικού καμβά (εικ. 11):

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Στον ισομετρικό καμβά μπορέσαμε να κάνουμε ισόπλευρο;

Δημοσθένης, Άννα: (βλέποντας το γεωπίνακα) Όχι, όχι!

Δάσκαλος: (δείχνοντας τον ισομετρικό καμβά) Εδώ, εδώ.

Δημοσθένης: Α, εδώ ναι.

Δάσκαλος: Στο γεωπίνακα;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάσκαλος: Γιατί τα καταφέραμε εδώ και δεν μπορέσαμε στο γεωπίνακα; Τι διαφορετικό έχει εδώ;

Δημοσθένης: Γιατί εδώ πέρα (στο γεωπίνακα) οι πλάγιες γραμμές του δεν ήταν ίσες (εννοεί με τις κάθετες και οριζόντιες), ενώ πέρα ήταν.

Δάσκαλος: Ενώ στον ισομετρικό καμβά είναι ίσες.

Η προσπάθεια τεκμηρίωσης μιας απάντησης αλλά και η ολοκληρωμένη στο τέλος αιτιολόγηση που οικειοποιήθηκε από όλους τους μαθητές, παρώθησε τη γεωμετρική τους σκέψη.

Δραστηριότητα 10

Στη δραστηριότητα «προκλήσεις των ιδιοτήτων» οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν εάν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν τρίγωνα που συνδυάζουν δύο συγκεκριμένες ιδιότητες κάθε φορά. Η ανακάλυψη της αδυναμίας συνύπαρξης δύο ιδιοτήτων και η προσπάθεια αιτιολόγησης αυτής, συνέβαλε στην καλύτερη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών και ώθησε την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών. Ο συνδυασμός ορθογωνίου και ισοσκελούς απορρίφθηκε αρχικά και από τις δύο ομάδες (Α και Β):

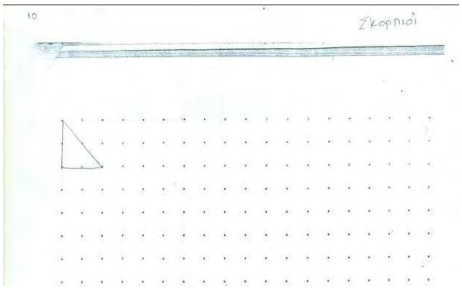
Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ορθογώνιο και ισοσκελές μπορεί να γίνει;

Δάφνη: Όχι.

Ειρήνη: Δε βγαίνει.

Στην αναθεώρηση της άποψής τους βοήθησε η αναπαράσταση του συγκεκριμένου τριγώνου στον καμβά (εικ. 12). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η οπτικοποίηση των εννοιών και των σχημάτων συμβάλει στην καλύτερη κατανόησή τους, αλλά και στην άρση λανθασμένων αντιλήψεων (όπως συνέβη και στη συγκεκριμένη περίπτωση):

Δάσκαλος: Αυτό εδώ πέρα τι είναι; Είναι ορθογώνιο; (δείχνω το ορθογώνιο και ισοσκελές που έφτιαξαν)



Εικ. 12

Δημοσθένης: Ναι.

Δάσκαλος: Είναι ισοσκελές;

Δημοσθένης: Ναι.

Δάσκαλος: Άρα γίνεται, το φτιάξατε.

……………………

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Ορθογώνιο και ισοσκελές λέτε όχι. Για να το δούμε τώρα μαζί.

Δάσκαλος (Δείχνοντας ένα ορθογώνιο και ισοσκελές): Αυτό εδώ τι είναι;

Αθηνά: Ναι, είναι! (το λέει σίγουρη)

Αφροδίτη: Ορθογώνιο και ισοσκελές.

Δάσκαλος: Άρα είδατε ότι μπορούμε να το κάνουμε.

Με τον ίδιο τρόπο οι μαθητές αναθεώρησαν την αρχική λανθασμένη άποψη για τη μη δυνατή κατασκευή αμβλυγωνίου και ισοσκελούς τριγώνου:

Δάσκαλος: Αμβλυγώνιο και ισοσκελές μπορεί να γίνει;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάσκαλος: Το είχαμε φτιάξει πριν. Μπορεί να γίνει (τους το υπενθυμίζω δείχνοντάς το).

Δημοσθένης: Α, ναι;

…………………..

Δάσκαλος: Πάμε παρακάτω. Αμβλυγώνιο και ισοσκελές μπορεί να γίνει;

Αφροδίτη: Όχι. (Μετά από λίγο) Δεν ξέρω.

Δάσκαλος: Μπορεί να γίνει. Το `χαμε φτιάξει πριν. Να το (αφού το φτιάχνω να το δούνε).

Οι μαθητές και των δύο ομάδων συμφώνησαν ότι ένα τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ισόπλευρο ή αμβλυγώνιο και ισόπλευρο. Κάποιες δυσκολίες αντιμετώπισαν στην έκφραση της αιτιολόγησης γι’ αυτό (κυρίως για το αμβλυγώνιο και ισόπλευρο). Η παρέμβασή μου τους κατεύθυνε να εστιάσουν στο είδος των γωνιών του ισόπλευρου τριγώνου και τους βοήθησε να αιτιολογήσουν την επιλογή τους:

Αφροδίτη: Αμβλυγώνιο και ισόπλευρο όχι.

Δάσκαλος: Γιατί δεν μπορεί;

Αφροδίτη: Γιατί δεν μπορεί.

Δάσκαλος: Το ισόπλευρο τι έχει ως προς τις γωνίες;

Αλέξανδρος: Δύο ίσες.

Δάσκαλος: Το ισόπλευρο;

Αφροδίτη: Τρεις.

Δάσκαλος: Τρεις ίσες. Μπράβο.

Δάσκαλος: Το αμβλυγώνιο όμως έχει;

Αθηνά: Μία αμβλεία.

Δάσκαλος: Μία αμβλεία και δύο;

Αφροδίτη: Οξείες.

Δάσκαλος: Άρα όχι. Πολύ σωστά.

……………………

Δάσκαλος: Πάμε στην τελευταία (περίπτωση). Αμβλυγώνιο και ισόπλευρο μπορεί να γίνει;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Το ισόπλευρο τι γωνίες έχει;

Δημοσθένης: Ίσες.

Δάσκαλος: Τρεις ίσες. Ενώ το αμβλυγώνιο έχει μία αμβλεία και άλλες δύο;

Δημοσθένης: Ε, ε, …

Δάσκαλος: Οξείες.

Δημοσθένης: Α, ναι, ναι!

Δάσκαλος: Άρα όχι.

Παρόμοια ήταν η παρέμβασή μου για το ορθογώνιο και ισόπλευρο, με εστίαση στο είδος των γωνιών του ισόπλευρου τριγώνου:

Δάσκαλος: Πάμε παρακάτω. Ορθογώνιο και ισόπλευρο μπορεί να γίνει;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάσκαλος: Γιατί;

Δημοσθένης: Γιατί το ορθογώνιο έχει μια γωνία (ορθή) …

Δάσκαλος: Και δύο άλλες διαφορετικές.

Δάσκαλος: Το ισόπλευρο τι γωνίες πρέπει να έχει;

Δημοσθένης: Ίσες πρέπει να έχει.

Δάσκαλος: Και τις τρεις ίσες. Άρα δεν μπορεί να γίνει. Πολύ σωστά.

<u>Διαπραγμάτευση της έννοιας του εμβαδού</u>

Δραστηριότητα 11

Η δραστηριότητα 11 παρείχε την ευκαιρία γνωριμίας και εξοικείωσης των μαθητών με το ξύλινο τρίγωνο δυναμικής μεταβολής. Σέρνοντας τις κορυφές, παρατήρησαν και διαπίστωσαν την ταυτόχρονη μεταβολή κάποιων στοιχείων του. Ενθουσιάστηκαν με το καινούριο γι’ αυτούς υλικό και ήθελαν όλοι ανυπόμονα να το περιεργαστούν (φιλονικούσαν για το ποιος θα το πάρει). Έδειξαν να κατανοούν τις μεταβολές που γινόταν στα στοιχεία του τριγώνου και εκτέλεσαν αφοσιωμένοι και με μεγάλο ενδιαφέρον όλες τις σχετικές με αυτό δραστηριότητες.

Όταν η ομάδα Β σχημάτισε το ορθογώνιο τρίγωνο, τους οδήγησα να προβληματιστούν για την ακρίβεια της κατασκευής τους και συνειδητοποίησαν την αναγκαιότητα χρήσης του γνώμονα (εικ. 13):

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Να ρωτήσω τώρα κάτι παιδιά. Φτιάξατε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Ναι; Γιατί είναι ορθογώνιο αυτό;

Δάφνη: Γιατί έχει μια ορθή γωνία.

Δάσκαλος: Πόσο σίγουρη είσαι ότι αυτή είναι ορθή γωνία; Είσαι απόλυτα σίγουρη ή με το μάτι το είδες;

Δάφνη: Όχι, με το μάτι.

Δάσκαλος: Με το μάτι είσαι απόλυτα σίγουρη;

Δημοσθένης: Όχι. Πρέπει να είναι 90 μοίρες.

Δάσκαλος: Πώς θα σιγουρευτούμε ότι είναι απόλυτα 90;

Δημοσθένης: Με το γνώμονα.

Δάσκαλος: Βάζουμε την ορθή γωνία και τη συγκρίνουμε (να ταιριάζει) με την ορθή γωνία του γνώμονα.

Εικ. 13

Στην ερώτηση για το ποια είδη τριγώνων είναι εφικτό να κατασκευαστούν με το ξύλινο τρίγωνο, οι μαθητές της Β ομάδας συμπεριέλαβαν και το ισόπλευρο:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ποια τρίγωνα μπορούμε να φτιάξουμε με το ξύλινο τρίγωνο;

Δημοσθένης: Ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, ισόπλευρο και οξυγώνιο.

Όμως το ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να φτιαχτεί με το συγκεκριμένο υλικό, το οποίο όπως όλα τα υλικά έχει κι αυτό τη δική του αδυναμία. Για να το αντιληφθούν οι μαθητές, τους έβαλα να το κατασκευάσουν και να μετρήσουν τις πλευρές του. Έτσι με την πράξη και τη κατασκευή φτάνουν βιωματικά στη γνωστική σύγκρουση και στην εύρεση της ορθής γνώσης:

Δάσκαλος (προς Δάφνη): Μπορούμε να φτιάξουμε ισόπλευρο;

Δάφνη: Ναι.

Δάσκαλος: Για φτιάξε μου ένα.

Δάφνη: (Η Δάφνη φτιάχνει ένα ισοσκελές).

Δάσκαλος: Αυτό που έφτιαξες είναι ισόπλευρο; Τι είπαμε ότι έχει το ισόπλευρο;

Δάφνη: Ίσες πλευρές.

Δάσκαλος: Αυτές οι πλευρές είναι όλες ίσες; Για μέτρησέ τες με το χάρακα να το δούμε.

Δάφνη: Η β πλευρά είναι 28. Η α είναι 24.

Δάσκαλος: Είναι ισόπλευρο;

Δάφνη: Όχι.

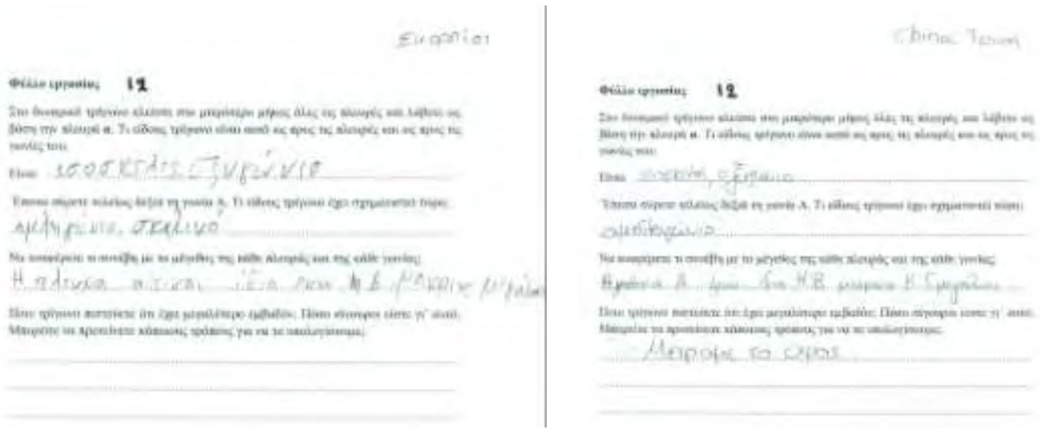
Δάσκαλος: Μπορούμε με αυτό το υλικό που σας έδωσα να φτιάξουμε ισόπλευρο;

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Είναι το μόνο που δεν μπορούμε. Έχει αυτή την αδυναμία, εντάξει;

Δραστηριότητα 12

Συνεχίζοντας τις δραστηριότητες με το ξύλινο τρίγωνο δυναμικής μεταβολής, οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες μετέτρεψαν ένα αρχικό τρίγωνο (οξυγώνιο και ισοσκελές) σε ένα άλλο (αμβλυγώνιο) και επεσήμαναν τις μεταβολές στα στοιχεία του. Κι εδώ το ενδιαφέρον της ενασχόλησής τους ήταν αυξημένο και έδειξαν να κατανοούν κάποιες τουλάχιστον από τις μεταβολές στο μήκος των πλευρών και στο μέγεθος των γωνιών, μπαίνοντας έτσι στη διαδικασία να σκεφτούν το μετασχηματισμό και το πώς φτάσαμε στο νέο σχήμα. Η δυναμική μεταβολή του τριγώνου με το σύρσιμο της κορυφής, έδωσε τη δυνατότητα στα παιδιά να παρακολουθήσουν σταδιακά την κάθε αλλαγή και να βγάλουν συμπεράσματα για το ποιο στοιχείο άλλαζε ταυτοχρόνως με κάποιο άλλο, πράγμα το οποίο θα ήταν δυσκολότερο να φανταστούν εάν απλά παραβάλαμε πλάι πλάι το αρχικό και το τελικό σχήμα. Η ομάδα Β επικεντρώθηκε στη μεταβολή των πλευρών, ενώ η Α στη μεταβολή των γωνιών (Φύλλα εργασίας 12).



Ως μια προσπάθεια επισήμανσης των έμμεσων αλλαγών, ζητήθηκε από τους μαθητές να εκτιμήσουν το τι συνέβη με το μέγεθος του εμβαδού, αλλά παράλληλα ανέκυψε και ο προβληματισμός για τον τρόπο υπολογισμού του. Συνειδητοποίησαν κατ’ αρχήν ότι χωρίς ακριβή υπολογισμό δεν μπορούμε με σιγουριά να συγκρίνουμε τα εμβαδά παρόμοιων σχημάτων:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ποιο σχήμα πιστεύετε ότι έχει το μεγαλύτερο εμβαδό; Αυτό ή το αρχικό;

Θάλεια: Το δεύτερο.

Δάσκαλος: Πόσο σίγουρη είσαι γι` αυτό; Είσαι απόλυτα σίγουρη;

Θάλεια: Δεν είμαι.

Δάσκαλος: Με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να σιγουρευτούμε;

Δημοσθένης: Να το μετρήσουμε.

Όσον αφορά τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού, υπήρξε προβληματισμός στους μαθητές, από τη στιγμή που δεν γνώριζαν φυσικά το τι ακριβώς έπρεπε να εξετάσουν. Η ομάδα Β πρότεινε να μετρήσουν το μήκος των πλευρών και να τις πολλαπλασιάσουν, επηρεαζόμενοι προφανώς από τον γνωστό σε αυτούς τύπο του εμβαδού του τετραγώνου και του ορθογωνίου. Μέσω της συζήτησης όμως που δημιουργήθηκε, αντιλήφθηκαν ότι αυτό δεν ίσχυε για τα τρίγωνα:

Δάσκαλος: Με ποιο τρόπο να το μετρήσουμε; Για σκεφτείτε ένα τρόπο που θα μπορούσαμε να το μετρήσουμε.

Δάφνη: Με το χάρακα.

Δάσκαλος: Με το χάρακα τι μετράμε; Πλευρές. Το μέσα μπορούμε να το μετρήσουμε με το χάρακα;

Δάφνη: Όχι. Μπορούμε όμως να μετρήσουμε γύρω γύρω τις πλευρές του και να πολλαπλασιάσουμε.

Δάσκαλος: Τι να πολλαπλασιάσουμε;

Δάφνη: Πλευρά με πλευρά.

Δάσκαλος: Αν πολλαπλασιάσουμε πλευρά με πλευρά, μας δίνει το εμβαδόν του τριγώνου; Ξέρουμε Δημοσθένη τέτοιο πράγμα;

Δημοσθένης: Όχι.

Η ομάδα Β πρότεινε και κάποιους ανορθόδοξους τρόπους, τους οποίους βέβαια (μέσω ερωτήσεων που έγιναν) αντιλήφθηκε αμέσως ότι δεν είχαν καμιά εφαρμογή:

Δάσκαλος: Πώς θα μπορούσαμε να σιγουρευτούμε;

Δημοσθένης: Να βάλουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μέσα;

Δάσκαλος: Χωράει ακριβώς; Ταιριάζει;

Δημοσθένης: Όχι.

Η ομάδα Α υποψιάστηκε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συσχετίζεται με το ύψος του, θεωρώντας το όμως λανθασμένα ως το μοναδικό κριτήριο για τον υπολογισμό του:

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Η ομάδα Α βρήκε ποιο τρίγωνο είναι μεγαλύτερο; Εννοώ το εμβαδόν του, όχι οι πλευρές.

Ηρώ: Αυτό, αυτό.

Δάσκαλος: Το δεύτερο. Είστε σίγουροι 100% ;

Ηρώ: Ναι.

Δάσκαλος: Πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι;

Αλέξανδρος: Αφού μεγαλώνει το ύψος.

Όμως κάποια παιδιά της ομάδας Α (Αλέξανδρος και Αφροδίτη) είχαν λανθασμένη αντίληψη και για το σχηματισμό του ύψους. Ο Αλέξανδρος θεωρούσε το ύψος όχι ως κάθετη, αλλά ως πλάγια γραμμή από την κορυφή προς τη βάση, ενώ και η Αφροδίτη το εξέφρασε ως μια γραμμή από την κορυφή μέχρι την απέναντι γωνία. Η παρέμβασή μου, αλλά και η διορθωτική υπόδειξη της Ηρώς, τους οδήγησαν να αντιληφθούν σωστά την έννοια:

Αλέξανδρος: Από εδώ μέχρι εδώ (δείχνοντας μια πλάγια γραμμή από την κορυφή προς τη βάση).

Δάσκαλος: (Αφού η Ηρώ το διορθώνει) Α! Τώρα καλύτερα. Τι λέμε ύψος; Θυμάται κανείς να μου το πει;

Αφροδίτη: Μια γραμμή από την κορυφή μέχρι την απέναντι γωνία.

Δάσκαλος: Μια γραμμή από την κορυφή προς την απέναντι πλευρά.

Δάσκαλος: Κι αυτή η γραμμή πώς πρέπει να είναι; Πλάγια ή κάθετη;

Όλη η ομάδα Α: Κάθετη.

Δάσκαλος: Δείξτε μου λοιπόν το ύψος.

Δάσκαλος: Α, ωραία! Αυτό. Εδώ είναι το κάθετο. Εδώ είναι πλάγιο.

Εν συνεχεία τους έδειξα πώς ακριβώς να κάνουν τη μέτρηση του ύψους χρησιμοποιώντας το γνώμονα και το ξύλινο «Ταυ», μιας και αντιμετώπισαν κάποιες δυσκολίες με το ζήτημα αυτό:

Δάσκαλος: (Χρησιμοποιώντας το γνώμονα και το ξύλινο «ταυ») μετρήστε το ύψος και αφού σχηματίσετε το αρχικό τρίγωνο όπως ήταν πριν, μετρήστε και το αρχικό ύψος.

Ωστόσο παρά τη μέτρηση του ύψους, ο προβληματισμός για τον υπολογισμό του εμβαδού παρέμεινε ζωντανός:

Δάσκαλος: Συμφωνείτε ότι πρέπει να ανακαλύψουμε ένα τρόπο για να μετρήσουμε το εμβαδόν;

Αλέξανδρος: Κύριε είναι ίδια.

Δάσκαλος: Όμως το λέτε αυτό με το μάτι.

Αφροδίτη: Ναι.

Δάσκαλος: Δεν είμαστε σίγουροι.

Δραστηριότητα 13

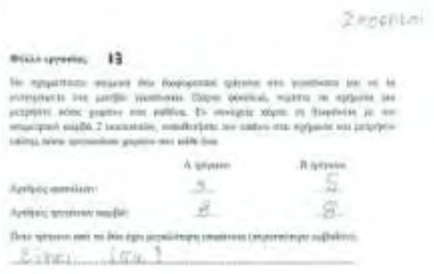
Μετά τον προβληματισμό για τον υπολογισμό του εμβαδού, οι μαθητές στη δραστηριότητα 13 προέβησαν σε χειρισμούς κάλυψης επιφανειών με διάφορα υλικά, καθώς η εμπειρία αυτή, όπως είδαμε στη σχετική βιβλιογραφία, είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού. Εξάλλου οι μη τυπικές μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των σχημάτων και των ιδιοτήτων στις οποίες εμπλέκονται. Οι μαθητές αφού σχημάτισαν στο γεωπίνακα δύο διαφορετικά τρίγωνα, τα αντέγραψαν στο σχετικό μοτίβο και εν συνεχεία τους ζητήθηκε να τα γεμίσουν με φασόλια και να μετρήσουν τον αριθμό που περιείχε το κάθε σχήμα (εικ. 14).

Εικ. 14

Εικ. 15

Επιπρόσθετα χρησιμοποιήθηκαν διαφάνειες με ισομετρικούς καμβάδες ως «εναλλακτικοί χάρακες για το εμβαδόν», τις οποίες οι μαθητές τοποθέτησαν επάνω στα τρίγωνα και καταμέτρησαν πόσα τριγωνάκια περιείχε το καθένα (εικ. 15).

Η μέτρηση με τις διαφάνειες των καμβάδων (η καταμέτρηση των μικρών τριγώνων) τους δυσκόλεψε λιγάκι, ενώ η καταμέτρηση των φασολιών αποδείχθηκε μια απλούστερη και πιο ευχάριστη γι' αυτούς διαδικασία. Το αποτέλεσμα πάντως ήταν ότι και με τις δύο άτυπες μετρήσεις αντιλήφθηκαν και κατανόησαν τις διαφορές του μεγέθους μεταξύ των δύο επιφανειών (ή την ισότητα σε κάποιες περιπτώσεις), αλλά και την έννοια του εμβαδού γενικότερα (φύλλο εργασίας 13).



Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Με αυτό που κάναμε, με το να καλύψουμε με φασόλια τα σχήματα ή με τα τριγωνάκια, μας βοήθησε να καταλάβουμε ποιο είναι μεγαλύτερο;

Δάφνη: Ναι (όχι και με πολύ ανθουσιασμό).

Δάσκαλος: Ποιο καλά από το να ήταν με το μάτι ή να μετρούσαμε τις πλευρές.

Δάσκαλος: Εσύ;

Ειρήνη: Μας βοήθησε.

Δάσκαλος: Τώρα με τα υλικά είμαστε πιο σίγουροι για το πιο είναι μεγαλύτερο.

……………………

Δάσκαλος(προς ομάδα Α): Με το μάτι ή με το ύψος δεν ήμασταν σίγουροι. Αυτό που κάναμε να καλύψουμε με κάποια υλικά το τρίγωνο μας βοήθησε να καταλάβουμε το εμβαδόν;

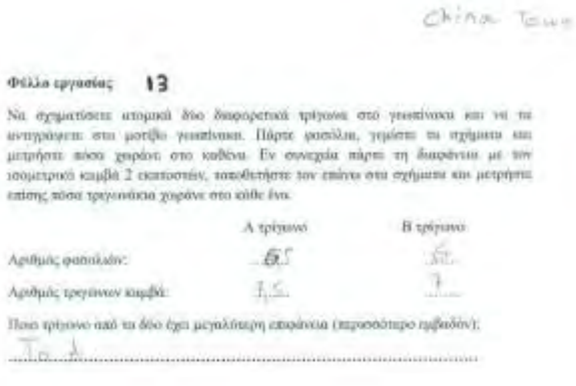
Αλέξανδρος: Ναι.

Ηρώ: Ναι.

Δάσκαλος: Όταν λοιπόν καλύπτουμε με υλικά ένα τρίγωνο (και το μετράμε), τότε καταλαβαίνουμε ... Τι καταλαβαίνουμε;

Αλέξανδρος: Πιο εύκολα το εμβαδόν του!

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το υλικό των φασολιών έχει (όπως και κάθε υλικό) μια μικρή αδυναμία. Όλα τα φασόλια δεν έχουν το ίδιο ακριβώς μέγεθος και υπάρχει πιθανότητα να αλλοιωθεί ελαφρώς το αποτέλεσμα μιας μέτρησης (φύλλο εργασίας 13, εικ. 16).



China Town

Φύλλο εργασίας 13

Να σχηματίσετε ατομικά δύο διαφορετικά τρίγωνα στο γεωπίνακα και να τα αντιγράψετε στο μοτίβο γεωπίνακα. Πάρτε φασόλια, γεμίστε τα σχήματα και μετρήστε πόσα χωράνε στο καθένα. Εν συνεχεία πάρτε τη διαφάνεια με τον ισομετρικό καμβά 2 εκατοστών, τοποθετήστε τον επάνω στα σχήματα και μετρήστε επίσης πόσα τριγωνάκια χωράνε στο κάθε ένα.

	Α τρίγωνο	Β τρίγωνο
Αριθμός φασολιών:	65	56
Αριθμός τριγώνων καμβά:	7,5	7

Ποιο τρίγωνο από τα δύο έχει μεγαλύτερη επιφάνεια (περισσότερο εμβαδόν);

Το Α

Εικ. 16

Βασιζόμαστε όμως στο νόμο των πιθανοτήτων, σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατον οι μαθητές να επιλέγουν μόνο μικρά ή μόνο μεγάλα φασόλια κάθε φορά. Επιπρόσθετα εάν υπάρχουν μικρές αποκλίσεις, εξηγούμε στους μαθητές πού οφείλεται αυτό. Κυρίως όμως επισημαίνουμε ότι στόχος μας εδώ δεν είναι η ακριβής μέτρηση, αλλά η κατανόηση των εννοιών μέσω των άτυπων μετρήσεων.

Δραστηριότητα 14

Αυτή η δραστηριότητα είχε ως στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το εμβαδόν τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και του ύψους του. Δουλεύοντας με το δυναμικό ξύλινο τρίγωνο, κατέγραψαν στην αρχική κλειστή του θέση το μέγεθος της επιφάνειάς του (δηλαδή το εμβαδόν) χρησιμοποιώντας τα φασόλια (εικ. 17).

Εικ. 17

Εικ. 18

Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να προβλέψουν τις άμεσες και έμμεσες αλλαγές των στοιχείων του εάν σύρουν την επάνω κορυφή Α και διατηρήσουν σταθερό το ύψος του. Η διατύπωση και η δοκιμή υποθέσεων, αλλά και η διαδικασία της νοερής μετατροπής των σχημάτων η οποία έπρεπε να προηγηθεί της φυσικής μετατροπής, ώθησαν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών καθώς αποτελούν χαρακτηριστικά του επιπέδου 2 των Van Hiele. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν σε αυτή τη διαδικασία της πρόβλεψης και της νοερής μετατροπής, αφού συνεργαζόμενοι και συζητώντας σε ομάδες συμπλήρωσαν τα φύλλα εργασίας (ασχέτως εάν ήταν σωστές ή όχι οι προβλέψεις τους) (φύλλο εργασίας 14).

Στη συνέχεια έλεγξαν τις προβλέψεις τους (γεμίζοντας πάλι το νέο τρίγωνο με φασόλια) και κατέγραψαν τις αλλαγές (εικ. 18).

Η ομάδα Β μέσω της βιωματικής αυτής δραστηριότητας διαπίστωσε τη μη αλλαγή του εμβαδού (στην περίπτωση που βάση και ύψος παραμένουν σταθερά) και αναθεώρησε την αρχική της υπόθεση:

Δάσκαλος(προς ομάδα Β): Θα αλλάξει το εμβαδόν;

Δημοσθένης (και όλη η αμάδα Β): Θα αλλάξει.

Δάσκαλος: (Μετά την καταμέτρηση των φασολιών) Για πείτε μου τώρα, το εμβαδόν άλλαξε;

Ειρήνη: Όχι.

Δάσκαλος: Πώς το καταλάβατε ότι δεν άλλαξε το εμβαδόν;

Ειρήνη: Βάλαμε μέσα τα φασόλια, τα μετρήσαμε ...

Δάσκαλος: Και είδαμε ότι ο αριθμός τους είναι ...

Ειρήνη: 98.

Δάσκαλος: Είναι ίδιος. Πάρα πολύ ωραία.

Έπειτα οι μαθητές επανέλαβαν την ίδια διαδικασία (με πρόβλεψη και έλεγχο) αλλάζοντας διαδοχικά το ύψος και το μήκος της βάσης και αυτή τη φορά διαπίστωσαν την αλλαγή του εμβαδού:

Δάσκαλος(προς ομάδα Α): Αλλάξαμε τώρα το ύψος. Το εμβαδόν άλλαξε;

Ηρώ: Ναι.

Δάσκαλος: Ωραία. Αν αλλάξουμε λοιπόν το ύψος, αλλάζει το;

Αλέξανδρος: Εμβαδόν.

Με όλη αυτή τη δραστηριότητα, με τη διατύπωση των υποθέσεων, τη δοκιμή τους με κατάλληλα και εύχρηστα υλικά (δυναμικά τρίγωνα, φασόλια), αλλά και την αλληλεπίδραση και τη συζήτηση που δημιουργήθηκε, οι μαθητές οδηγήθηκαν μόνοι τους στο συμπέρασμα και έδειξαν να έχουν κατανοήσει ότι το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και από το μήκος του αντίστοιχου ύψους προς αυτή:

Αλέξανδρος: (Διαβάζει το συμπέρασμα) Το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος των πλευρών και από το μήκος ... (δυσκολεύεται).

Δάσκαλος: Από ποιο εξαρτάται; Τι αλλάξαμε και άλλαξε το εμβαδόν;

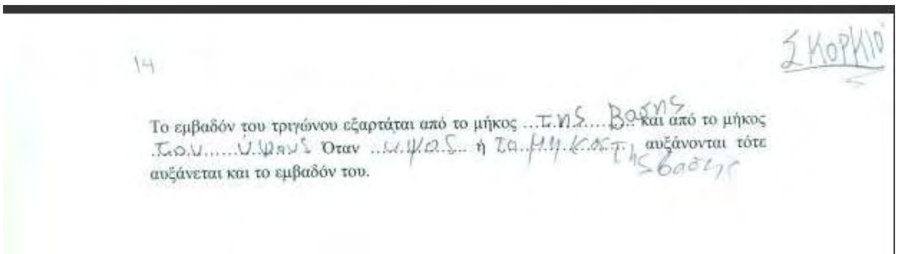
Αλέξανδρος: Το ύψος και το μήκος ...

Δάσκαλος: Της βάσης.

Αθηνά: Από το μήκος του ύψους και το μήκος της βάσης.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία το είπες. Εξαρτάται από το μήκος του ύψους και το μήκος της βάσης. Αυτό δεν διαπιστώσαμε; Τι διαπιστώσαμε;

Και ολόκληρη η τάξη λέει ξανά το συμπέρασμα και το γράφει στα φύλλα εργασίας.


14

Το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος ...ΤΗΣ... ΒΑΣΗΣ και από το μήκος ..ΤΟΥ......ΥΨΟΥΣ Όταν ...ΥΨΟΣ... ή ΤΟ..ΜΗΚΟΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ αυξάνονται τότε αυξάνεται και το εμβαδόν του.

Δραστηριότητα 15

Με τη δραστηριότητα αυτή εισήχθη ένα ακόμη διαφορετικό πλαίσιο αναπαράστασης, το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri Geometry II plus.

Αφιερώθηκε μια διδακτική ώρα για την εξοικείωση με τη διεπαφή του λογισμικού και οι μαθητές μέσω των φύλλων εργασίας που τους δόθηκαν, έμαθαν τα κουμπιά και τις εντολές της γραμμής εργαλείων κατασκευάζοντας τρίγωνα, αλλά και διαπίστωσαν τη δυναμική τους κίνηση σέρνοντας τις κορυφές.

Οι χειρισμοί στο περιβάλλον του λογισμικού και το σύρσιμο της κορυφής του τριγώνου με το ποντίκι γινόταν με ευκολία από την πλειοψηφία των μαθητών και αποτέλεσε μια ευχάριστη δραστηριότητα, καθώς ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση Η/Υ. Τα παιδιά εξάλλου αποτελούν τους «ιθαγενείς» της τεχνολογίας και νιώθουν έλξη για τα εκπαιδευτικά λογισμικά αλλά και για τις ΤΠΕ γενικότερα. Σέρνοντας τις κορυφές, τους ζητήθηκε να προσέξουν τις αλλαγές στα στοιχεία του τριγώνου και οι μαθητές τις αντιλήφθηκαν άμεσα:

Δάσκαλος(προς ομάδα Β): Όταν το κουνάμε (σέρνουμε) μια κορυφή, τι αλλάζει στο τρίγωνο;

Θάλεια: Οι γωνίες αλλάζουν… Οι πλευρές.

Παρώθηση χρειάστηκε για να αντιληφθούν και τις έμμεσες αλλαγές των στοιχείων του. Με τη συζήτηση αλλά και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών οδηγήθηκαν στην ανακάλυψή τους:

Δάσκαλος: Ωραία. Αυτές είναι οι άμεσες αλλαγές. Αυτές που φαίνονται. Τι άλλο πιστεύεις ότι αλλάζει εκτός από τις γωνίες και τις πλευρές;

Θάλεια: Το τρίγωνο.

Δάσκαλος: Δηλαδή; Το σχήμα του.

Θάλεια: Ναι.

Δάσκαλος: Τι άλλο πιστεύεις ότι αλλάζει από αυτά που μάθαμε τις προηγούμενες μέρες;

Θάλεια: Το εμβαδόν.

Δάσκαλος: Το εμβαδόν του. Πολύ ωραία. Και;

Θάλεια: Το ύψος του…

Δάσκαλος: Πάρα πολύ ωραία. Και;

Δάφνη: Το μήκος;

Δάσκαλος: Ποιο μήκος; Το μήκος των;

Δάφνη: Των πλευρών.

Δάσκαλος: Πώς λέμε το μήκος των πλευρών, γύρω γύρω;

Δημοσθένης: Περίμετρος.

Με την ενεργοποίηση των εργαλείων μέτρησης του εμβαδού στο λογισμικό, οι μαθητές κατανόησαν πολύ εύκολα τη μεταβολή ή τη διατήρησή του:

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): (Αφού ενεργοποίησαν το εργαλείο μέτρησης του εμβαδού) Τι βλέπετε ότι αλλάζει τώρα;

Αφροδίτη: Το εμβαδόν.

Δάσκαλος: Με αυτό το εργαλείο είναι πιο εύκολο να καταλάβεις την αλλαγή του εμβαδού;

Αφροδίτη: Ναι. Είμαι 100% σίγουρη.

Δάσκαλος: Από τι είσαι σίγουρη;

Αφροδίτη: Επειδή το γράφει.

Δάσκαλος: Βλέπεις δηλαδή την ένδειξη στον υπολογιστή (με το εργαλείο μέτρησης του εμβαδού).

Δραστηριότητα 16

Οι μαθητές με αυτή τη δραστηριότητα διαπίστωσαν στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri τη διατήρηση του εμβαδού του τριγώνου, όταν το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους παραμένουν αμετάβλητα. Βασικός στόχος ήταν η ώθηση της γεωμετρικής τους σκέψης στο επίπεδο 2 Van Hiele μέσω της προσπάθειας αιτιολόγησης της διατήρησης του εμβαδού, καθώς χαρακτηριστικό του επιπέδου αυτού αποτελεί η καλλιέργεια της λογικής και η ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων.

Οι μαθητές αντιλήφθηκαν τη διατήρηση του εμβαδού ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες. Ωστόσο η ομάδα Β΄ έδειξε αδυναμία στην τεκμηρίωση και αιτιολόγηση αυτής της διατήρησης:

Δάσκαλος: Όταν σέρνεις την κορυφή του τριγώνου (ανάμεσα στις παράλληλες) το εμβαδόν του αλλάζει ή δεν αλλάζει;

Δάφνη: Δεν αλλάζει.

Δάσκαλος: Γιατί δεν αλλάζει;

Δάφνη: Γιατί ...

ενώ κάποιο παιδί της ομάδας δεν ήταν σίγουρο για το εάν υπάρχει ή όχι μεταβολή του εμβαδού:

Δάσκαλος: Θάλεια, εσύ πιστεύεις ότι αλλάζει το εμβαδόν του;

Θάλεια: Ναι. Όχι.

Για να τη βοηθήσω, ξεκίνησα την παρέμβαση με την παρατήρηση της βάσης και του ύψους του τριγώνου. Ήταν αντιληπτό απ' όλους ότι η βάση παρέμενε σταθερή. Η Θάλεια στην ερώτηση εάν αλλάζει το ύψος, απάντησε καταφατικά και έδειξε να έχει ξεχάσει τη διατήρηση της σταθερής απόστασης μεταξύ των παραλλήλων ευθειών. Αναφέροντας το παράδειγμα των σιδηροδρομικών γραμμών, κατανόησε ότι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών είναι σταθερή, διότι διαφορετικά το τρένο θα εκτροχιαζόταν:

Δάσκαλος: Το ύψος του τριγώνου όπως το βλέπεις αλλάζει;

Θάλεια: Ναι.

Δάσκαλος: Να βοηθήσω. Τα παίρνουμε ένα ένα. Ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες η απόσταση αλλάζει ή παραμένει η ίδια;

Θάλεια: Ναι (Αλλάζει).

Δάσκαλος: Δύο γραμμές τρένου δηλαδή σε κάποιο σημείο στενεύουν;

Θάλεια: Στενεύουν.

Δάσκαλος: Τότε το τρένο θα φύγει. Δεν θα εκτροχιαστεί; Αλλάζουν οι γραμμές του τρένου; Η απόσταση;

Θάλεια (Και όλα τα παιδιά μαζί): Όχι!

Εν συνεχεία αναγνωρίζοντας την ταύτιση απόστασης παράλληλων ευθειών και ύψους τριγώνου, αναθεώρησε την αρχική της άποψη και συνειδητοποίησε τη διατήρηση του ύψους:

Δάσκαλος: Ποια η σχέση του ύψους του τριγώνου με αυτή την απόσταση; Είναι το ίδιο ή διαφορετικό;

Θάλεια: Είναι το ίδιο.

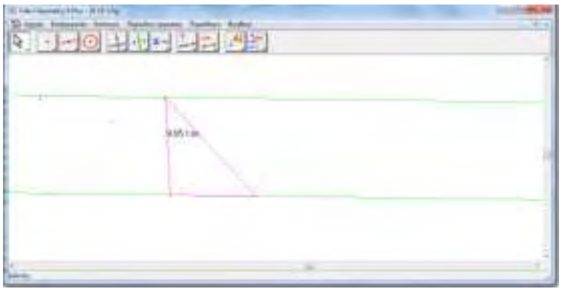
Δάσκαλος: Η απόσταση αλλάζει;

Θάλεια: Όχι.

Δάσκαλος: Το ύψος του τριγώνου αλλάζει;

Θάλεια: Όχι.

Η συγκεκριμένη ομάδα με την ενεργοποίηση του εργαλείου αυτόματης μέτρησης του εμβαδού διαπίστωσε τη διατήρησή του. (Καταγραφή οθόνης Σκορπιοί, εικ. 20):



Εικ. 20

και συσχετίζοντας τις παρατηρήσεις για τη βάση και το ύψος, κατάφερε να αιτιολογήσει αυτή τη θεώρηση:

Δάσκαλος: Το εμβαδόν του τριγώνου αλλάζει;

Δάφνη: Ναι. Όχι, δεν αλλάζει (αμέσως το διορθώνει με σιγουριά).

Δάσκαλος: Δεν αλλάζει αφού τι είπαμε Ρουζάνα; Το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και…;

Θάλεια: Το ύψος.

Δάσκαλος: Αφού λοιπόν το ύψος και η βάση μένουν το ίδιο, το εμβαδόν;

Όλη η ομάδα μαζί: Θα παραμείνει το ίδιο!

Δραστηριότητα 17

Οι μαθητές αφού κατανόησαν ότι το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους και ότι η σχέση τους είναι αναλογική, με τη δραστηριότητα 17 οδηγήθηκαν στο γεωμετρικό τύπο $Ε_{τριγ} = β * υ / 2$. Αυτή τη φορά εργάστηκαν με ένα νέο χειραπτικό υλικό, τα τριγωνικά πλαστικά πλακίδια. Τους δώσαμε ίσα ορθογώνια και ίσα αμβλυγώνια τρίγωνα και τους ζητήσαμε να φτιάξουν το συμπλήρωμα ενός ορθογωνίου ή παραλληλογράμμου από ένα τρίγωνο. Οι μαθητές έφτιαξαν άνετα το συμπλήρωμα (εικ. 21):

Εικ. 21

Εικ. 22

και με τη βοήθεια του συγκεκριμένου υλικού διαπίστωσαν ότι με δύο ίδια τρίγωνα φτιάχνω ένα ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο. Επίσης είδαν εμφανώς ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι το μισό του αντίστοιχου ορθογωνίου ή παραλληλογράμμου:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Ποια η σχέση του εμβαδού αυτού του τριγώνου με αυτό ολόκληρου του σχήματος;

Δάφνη: Δύο φορές πιο μεγάλο (εννοεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου).

Στη συνέχεια ρωτήσαμε τους μαθητές να μας πουν ποια η σχέση της βάσης και του ύψους των τριγώνων με τα αντίστοιχα των ορθογωνίων ή των παραλληλογράμμων. Η ταύτιση της βάσης ήταν προφανής. Δυσκολίες ανέκυψαν στο να καταδείξουν το ύψος του ορθογωνίου, αλλά κυρίως του πλάγιου παραλληλόγραμμου και των τριγώνων που αυτό αποτελούνταν. Με τη διευκρινιστική συζήτηση που ακολούθησε και τη χρήση του γνώμονα, οι μαθητές αναγνώρισαν τα ύψη (εικ. 22):

Δάσκαλος: Δείξτε μου με το δάχτυλό σας το ύψος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Δάφνη: Από εκεί μέχρι εκεί (δείχνοντας τη διαγώνιο).

Δάσκαλος: Αυτό το πράγμα το λέμε ύψος ή διαγώνιο;

Δάφνη: Διαγώνιο.

Δάσκαλος: Δείξε μου το ύψος.

Δάφνη: Από εδώ μέχρι εδώ (δείχνοντας το μήκος).

Δάσκαλος: Αυτό είναι το μήκος του.

Δημοσθένης: Κύριε αυτό είναι το ύψος.

Δάσκαλος: Σχηματίστε το τώρα με το γνώμονα.

…και σχετικά με το πλάγιο παραλληλόγραμμο (εικ. 23, 24):

Δάσκαλος: Πείτε μου τώρα ποια η σχέση του ύψους του τριγώνου και του ύψους του πλάγιου παραλληλογράμμου; Είναι μικρότερο μεγαλύτερο, ή ίσο;

Δημοσθένης: Είναι μεγαλύτερο (το ύψος του παραλληλογράμμου).

Δάσκαλος: Μπορούμε το ύψος του παραλληλογράμμου να το σύρουμε πιο εδώ (σέρνω το γνώμονα έτσι ώστε να συμπίπτουν τα δύο ύψη, κάτω τριγώνου και παραλληλογράμμου);

Δάφνη: Ναι.

Δάσκαλος: Ας απομακρύνω τώρα το πάνω τρίγωνο χωρίς να κουνήσω ούτε το ύψος, ούτε το κάτω τρίγωνο. Δεν κούνησα τίποτα. Το ύψος του τριγώνου είναι αυτό που έχει παραμείνει;

Όλη η ομάδα Β: Ναι! Ναι!

Δάσκαλος: Τώρα που το είδατε διαφορετικά, ποιο το ύψος τριγώνου και παραλληλογράμμου; Άλλαξε;

Όλη η ομάδα Β: Είναι το ίδιο.

Εικ. 23

Εικ. 24

Έτσι οι μαθητές αντιλήφθηκαν την ταύτιση και του ύψους και έχοντας υπόψη αφενός ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου βγαίνει από τον τύπο $E_{παραλ} = β * υ$ και αφετέρου ότι το εμβαδόν τριγώνου είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου, οδηγήθηκαν εύκολα στον τύπο του εμβαδού του τριγώνου $E_{τριγ} = β * υ / 2$ (φύλλο εργασίας 17).

Δραστηριότητα 18

Όπως είδαμε στις δραστηριότητες 14 και 16, οι μαθητές διαπίστωσαν στο δυναμικό τρίγωνο αλλά και στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri αντίστοιχα, τη διατήρηση του εμβαδού όταν παραμένουν αμετάβλητα το μήκος της βάσης και του ύψους. Τώρα επιδιώκοντας την κατανόηση της αντιστοιχίας μεταξύ των αναπαραστάσεων, επιστρέψαμε στο γεωπίνακα και εκτελέσαμε εκεί μια παραπλήσια δραστηριότητα. Ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και στη συνέχεια να δημιουργήσουν άλλο ένα ισοεμβαδικό με αυτό. Μέσω της διαδικασίας της νοερής μετατροπής και του μετασχηματισμού, καθώς έπρεπε να φανταστούν το πώς θα οδηγηθούν στο καινούριο ισοεμβαδικό σχήμα, κατάφεραν να το δημιουργήσουν αφήνοντας ίδιο το μήκος της βάσης και του αντίστοιχου ύψους (εικ. 25).

Εικ. 25

Εικ. 26

Αυτό έδειξε ότι οι μαθητές είχαν στο μυαλό τους τις προηγούμενες κατασκευές στα άλλα πλαίσια αναπαράστασης όπου κι εκεί η ισοεμβαδικότητα προέκυπτε από τη διατήρηση της βάσης και του ύψους, στοιχεία τα οποία προτάθηκαν για την αιτιολόγηση της τωρινής τους δημιουργίας:

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Γιατί είναι ισοεμβαδικά αυτά τα δύο;

Αθηνά: Γιατί έχουν ίδια βάση (δύο κουτάκια) και ίδιο ύψος (δύο κουτάκια).

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να μετρήσουν στο γεωπίνακα το εμβαδόν των τριγώνων (πόσα κουτάκια είναι) με βάση ορθογώνια σχήματα με τα οποία περιέκλυσαν τα τρίγωνα. Όσον αφορά το ορθογώνιο τρίγωνο, η διαδικασία ήταν σχετικά εύκολη και οι μαθητές αφού σχημάτισαν με λαστιχάκι ένα ορθογώνιο που περιέκλειε το τρίγωνο, καταμέτρησαν τα κουτάκια του και αντιλήφθηκαν ότι τα μισά αποτελούσαν το εμβαδόν του τριγώνου (καθώς η υποτείνουσα αποτελούσε τη διαγώνιο του ορθογωνίου) (Εικ. 26):

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Γιατί είναι ισοεμβαδικά αυτά τα δύο;

Αθηνά: Γιατί έχουν ίδια βάση (δύο κουτάκια) και ίδιο ύψος (δύο κουτάκια).

Δάσκαλος: Πόσα κουτάκια είναι το ορθογώνιο τρίγωνο (το πορτοκαλί);

Αλέξανδρος: Τέσσερα κουτάκια.

Δάσκαλος: Τέσσερα ποιο είναι; Τι κοιτάμε πρώτα; Το τρίγωνο ή το ορθογώνιο;

Αλέξανδρος: Τέσσερα είναι ολόκληρο.

Δάσκαλος: Το τρίγωνο;

Αλέξανδρος: Δια δύο, δύο.

Η ομάδα Β χρειάστηκε κάποια διευκρίνιση για το ορισμό των κουτιών, αλλά έδειξε αμέσως να το κατανοεί:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Πόσα κουτάκια είναι το ορθογώνιο ολόκληρο (το πράσινο);

Ειρήνη: Δυο, τέσσερα, έξι, οχτώ.

Δάσκαλος: Κουτάκι είναι αυτό ανάμεσα σε τέσσερις κορυφές.

Όλη η ομάδα: Ααα!

Δάσκαλος: Πόσα είναι τώρα όλο το σχήμα;

Όλη η ομάδα: Τέσσερα.

Δάσκαλος: Το τρίγωνο το κίτρινο;

Όλη η ομάδα: Το μισό. Δύο.

Για τους άλλους τύπους τριγώνων οι μαθητές ναι μεν αντιλήφθηκαν ότι θα πρέπει να το κλείσουν με ορθογώνια τμηματικά:

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Αν το κλείσω αυτό όλο (ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο) σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με βοηθάει;

Θάλεια: Όχι.

Δάσκαλος: Τι πρέπει να κάνω; Να το κλείσω ...

Δημοσθένης: Κομμάτι, κομμάτι.

Ωστόσο δυσκολεύτηκαν να το υλοποιήσουν στην πράξη (ειδικά στον υπολογισμό μικρών τμημάτων του τριγώνου) και χρειάστηκε να επιμείνω λιγάκι περισσότερο δείχνοντας την τεχνική να αφαιρούν τμηματικά κομμάτια του ορθογωνίου (εικ. 27):

Εικ. 27

Δάσκαλος (προς ομάδα Α): Αυτό το πορτοκαλί ορθογώνιο πόσα κουτάκια είναι;

Αφροδίτη: Ένα, δύο, τρία.

Δάσκαλος: Είπατε ότι το κάθε κουτί είναι ανάμεσα σε τέσσερα καρφιά.

Αφροδίτη: Α! (Δείχνοντας να το θυμήθηκε)Τότε είναι δύο.

Δάσκαλος: Δύο όλο το πορτοκαλί. Το τριγωνάκι να δούμε πόσο είναι. Από εδώ και προς τα πάνω εάν ήταν έτσι, πόσα κουτάκια θα ήταν; (υποθέτοντας να καλύπτει το μισό πορτοκαλί ορθογώνιο).

Αφροδίτη: Θα `τανε… θα `τανε το μισό του πορτοκαλί.

Δάσκαλος: Δηλαδή ένα κουτάκι. Όμως εδώ λείπει το μισό. Άρα;

Αφροδίτη: Μισό.

Δάσκαλος: Μισό και ένα από το προηγούμενο ορθογώνιο;

Αφροδίτη: Ενάμισι.

Δείχνοντας ακόμη ένα παράδειγμα οι μαθητές έδειξαν να εξοικειώνονται με αυτή την τεχνική υπολογισμού του εμβαδού στο γεωπίνακα και να την κατανοούν (εικ. 2):

Δάσκαλος: Τώρα που το χώρισα σε δύο ορθογώνια μας βοηθάει;

Αλέξανδρος: Κάτι ψιλά.

Δάσκαλος: Πάμε στο ένα ορθογώνιο. Το ένα ορθογώνιο πόσα κουτάκια είναι;

Αλέξανδρος: Δύο.

Δάσκαλος: Το τρίγωνο το πορτοκαλί, αυτό εδώ;

Αλέξανδρος: Ένα.

Δάσκαλος: Ένα κουτί αυτό εδώ. Το άλλο;

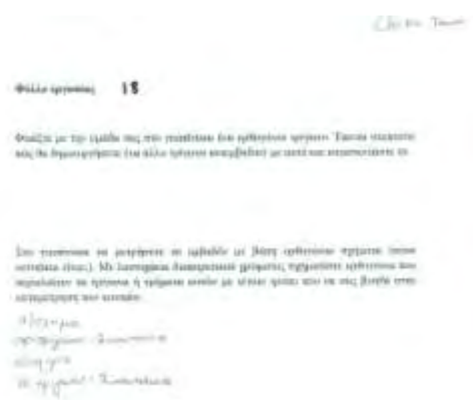
Αλέξανδρος: Ένα.

Δάσκαλος: Και ένα κουτί αυτό εδώ, σύνολο δύο. Βοήθησε τώρα;

Αλέξανδρος: Ναι!

Δάσκαλος: Άρα το σπουδαίο είναι να δω πώς θα βάλω τα ορθογώνια να παίρνουν μέρος του τριγώνου.

Έτσι κατάφεραν οι μαθητές να επαληθεύσουν εάν το τρίγωνό τους είναι ισοεμβαδικό (φύλο εργασίας 18).



Δραστηριότητα 19

Με τη δραστηριότητα 19 έγινε προσπάθεια νε συνδεθούν οι έννοιες που διδάχθηκαν με την καθημερινή ζωή, δίνοντας την αίσθηση στους μαθητές ότι τα μαθηματικά έχουν κάποιο νόημα γι' αυτούς. Δόθηκε ένα πρόβλημα που σχετιζόταν με τη σχολική τους αυλή, πράγμα που προσέλκυσε το ενδιαφέρον τους και τους παρακίνησε να ασχοληθούν με την επίλυσή του. Συγκεκριμένα τους ζητήθηκε να βοηθήσουν το Διευθυντή του σχολείου να επιλέξει ανάμεσα σε δύο τριγωνικά παρτέρια για δεντροφύτευση, αυτό που θα άφηνε περισσότερο ελεύθερο χώρο. Στην ερώτηση για το τι έπρεπε να αναζητήσουν, η αναμενόμενη απάντηση θα ήταν αυτό με το μικρότερο εμβαδόν. Κάποιοι μαθητές ωστόσο έδειξαν να συγχέουν την περίμετρο με το εμβαδόν και απάντησαν ανάλογα:

Δάσκαλος (προς όλη την τάξη): Τι πρέπει να ψάξουμε σε κάθε τρίγωνο για να μας μείνει περισσότερος ελεύθερος χώρος;

Περικλής: Το μήκος των πλευρών.

Ενδεχομένως όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη ανάλυση, αυτή η σύγχυση να προερχόταν από την προσομοίωση που έκαναν οι μαθητές με το εμβαδόν του τετραγώνου, όπου το μήκος των πλευρών έχει παράλληλη αυξομείωση με το εμβαδόν του (πράγμα βέβαια που δεν ισχύει στα τρίγωνα). Ο προβληματισμός που τέθηκε στο μαθητή για την ισχύ αυτής της σχέσης στα τρίγωνα, τον έκανε να αντιληφθεί ότι το ενδιαφέρον μας έπρεπε να στραφεί προς την εύρεση του εμβαδού:

Δάσκαλος: Δηλαδή εάν είναι μικρότερο το μήκος των πλευρών, είσαι σίγουρος ότι θα πιάσει λιγότερο χώρο;

Περικλής: Μήπως χρειαζόμαστε το εμβαδόν;

Και συνεχίζοντας τη συζήτηση για αποσαφήνιση:

Δάσκαλος: Το μήκος των πλευρών τι μας δίνει; Το εμβαδόν ή την περίμετρο;

Αφροδίτη: Την περίμετρο.

Δάσκαλος: Εμάς μας ενδιαφέρει το εμβαδόν ή η περίμετρος;

Περικλής: Το εμβαδόν.

Δάσκαλος (προς όλη την τάξη): Όταν λέμε να μείνει πολύ ελεύθερος χώρος τι πρέπει να κοιτάξουμε;

Αθηνά: Να πιάνει λιγότερο χώρο.

Δάσκαλος: Δηλαδή πώς το λέμε στη γεωμετρία;

Αλέξανδρος: Εμβαδόν.

Δάσκαλος: Να έχει το λιγότερο εμβαδόν.

Να σημειώσουμε επίσης ότι περαιτέρω αποσαφήνιση της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου έγινε στην επόμενη δραστηριότητα. Στη συνέχεια οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν ποιο από τα δύο τρίγωνα είχε το μικρότερο εμβαδόν. Με δεδομένο ότι η αυλή ήταν στρωμένη με τετράγωνες πλάκες, ο υπολογισμός του εμβαδού δεν απαιτούσε τη χρήση χάρακα, αλλά ήταν αρκετές ή η τεχνική με τα ορθογώνια ή αυτή με τον συνυπολογισμό βάσης και ύψους.

Οι μαθητές και στις δύο περιπτώσεις υπολόγισαν σωστά ότι και τα δύο τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδόν (δύο κουτάκια), πράγμα που έδειξε ότι είχαν κατανοήσει την εύρεση του εμβαδού. Στην πρώτη περίπτωση έκλεισαν τα τρίγωνα μέσα σε ορθογώνια, καθώς έδειξαν να το είχαν εμπεδώσει από την προηγούμενη δραστηριότητα στο γεωπίνακα (φύλλο εργασίας 19).

Η εφαρμογή του γεωμετρικού τύπου $Ε_{τριγ} = β * υ / 2$ ήταν εύκολη για όλους τους μαθητές, καθώς ήταν ευδιάκριτο το μήκος του ύψους (δύο κουτάκια), αλλά και το μήκος της βάσης (δύο κουτάκια) λαμβάνοντας ως μονάδα μέτρησης την πλευρά της κάθε τετραγωνικής πλάκας.

Δραστηριότητα 20

Η τελευταία δραστηριότητα στόχευε στην αποσαφήνιση και τη διάκριση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού, μιας και όπως έχουμε δει, παρατηρήθηκε σε κάποιες περιπτώσεις σύγχυση και παρανόηση τους από μερίδα μαθητών. Σε αυτή την αποσαφήνιση συνέβαλε η αξιοποίηση των εργαλείων της ταυτόχρονης μέτρησης περιμέτρου και εμβαδού του λογισμικού Cabri. Οι μαθητές αφού κατασκεύασαν ένα τρίγωνο, ενεργοποίησαν τα συγκεκριμένα εργαλεία (με τα οποία ήταν ήδη εξοικειωμένοι). Έπειτα σέρνοντας κάποια κορυφή, παρατήρησαν τη δυναμική μεταβολή στις τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού και αντιλήφθηκαν ότι πρόκειται για διακριτές έννοιες, με τη μία (περίμετρος) να σχετίζεται με την αυξομείωση των πλευρών και την άλλη (εμβαδόν) με το χώρο που το τρίγωνο καταλαμβάνει (καταγραφή οθόνης, εικ. 28).

Εικ. 28

Κάποιο παιδί μπέρδεψε τις δύο τιμές και χρειάστηκε η υπενθύμιση (με τη συμμετοχή των μαθητών) ότι την περίμετρο τη μετράμε σε εκατοστά (στο Cabri) ενώ το εμβαδόν σε τετραγωνικά εκατοστά:

Δάφνη: Κύριε (ποια ένδειξη) αυτό είναι η περίμετρος και ποια το εμβαδόν;

Δάσκαλος: Να μια καλή ερώτηση. Την περίμετρο σε τι τη μετράμε;

Ηρώ: Σε εκατοστά.

Δάσκαλος: Το εμβαδόν σε τι το μετράμε;

Ναυσικά: Σε τετραγωνικά εκατοστά.

Στη διάκριση των εννοιών συνέβαλε και η παρατήρηση της σχέσης στη μεταβολή των τιμών τους, η οποία δεν ήταν ανάλογη. Οι μαθητές κλήθηκαν να διαπιστώσουν το είδος αυτής της μεταβολής. Επιπρόσθετα η διαδικασία αυτή εμπεριείχε τη διατύπωση και τη δοκιμή υποθέσεων (χαρακτηριστικό του επιπέδου 2 της γεωμετρικής σκέψης) μέσω της οποίας οι μαθητές αναθεώρησαν την αρχική εσφαλμένη άποψη, ότι η τιμή του εμβαδού μεγαλώνει παράλληλα με την τιμή της περιμέτρου (καταγραφή οθόνης, εικ. 29):

Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Η τιμή του εμβαδού μεγαλώνει πάντα όταν μεγαλώνει η τιμή της περιμέτρου;

Ειρήνη: Όχι, δεν μεγαλώνει.

Θάλεια: Εγώ λέω ναι.

Δάφνη: Κι εγώ έλεγα ναι.

Δάσκαλος: Ωραία. 41 εκ. λοιπόν η περίμετρος, 51 τ. εκ. το εμβαδόν. Πάω να μεγαλώσω την περίμετρο. Κοιτάξτε λίγο, πόσο την πήγα την περίμετρο;

Δάφνη: 42.

Δάσκαλος: Το εμβαδόν από 51 πόσο πήγε;

Δάφνη: 50,94.

Δάσκαλος: Μεγάλωσε ή μίκρυνε;

Δάφνη: Μίκρυνε.

Δάσκαλος: Μίκρυνε ενώ η περίμετρος μεγάλωσε. Άρα ισχύει αυτό που είπατε πριν;

Θάλεια: Ναι.

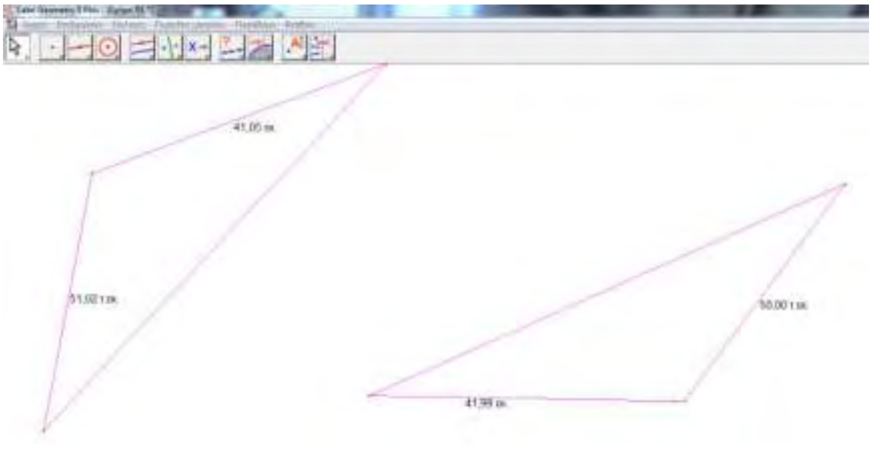
Δάσκαλος: Εσείς είπατε όταν μεγαλώνει η περίμετρος μεγαλώνει το εμβαδόν. Εδώ η περίμετρος από 41 την πήγα 42. Το εμβαδόν από 51 πήγε 50. Μίκρυνε. Ισχύει αυτό που είπατε πριν;

Δάφνη: Όχι!

Δάσκαλος: Μπορεί δηλαδή να μεγαλώσει η περίμετρος και το εμβαδόν να …

Δάφνη: Μικρύνει.

Δάσκαλος: Υπάρχει κι αυτή η περίπτωση. Δεν γίνεται πάντα, αλλά γίνεται.



Εικ. 29

Και αυτή η διαπίστωση έγινε πολύ εύκολα με τα εργαλεία του λογισμικού τα οποία παρείχαν τη δυνατότητα στους μαθητές να μεταβάλουν όσο ήθελαν τις τιμές, μέχρι να καταλήξουν στο συμπέρασμα που έψαχναν και να συνειδητοποιήσουν τη συμβολή τους σε αυτή την κατανόηση:

Δάσκαλος: Σε αυτό μας βοήθησε να το καταλάβουμε το περιβάλλον του Cabri;

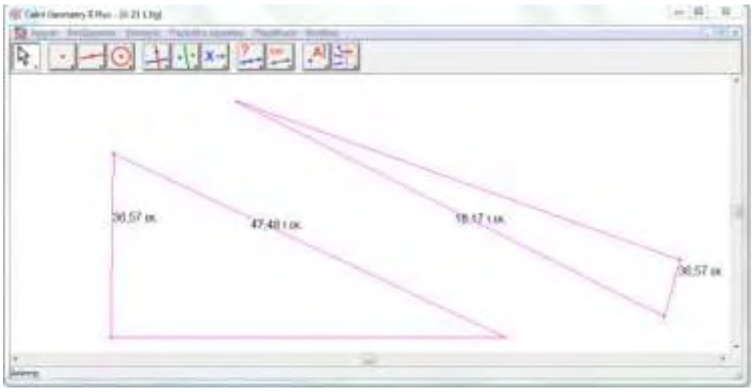
Όλη η ομάδα Β: Ναι!

Ως προέκταση ζητήσαμε από τους μαθητές να διερευνήσουν στο περιβάλλον του λογισμικού εάν δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα είναι πάντοτε και ισοπεριμετρικά και το αντίστροφο. Αφού έφτιαξαν δύο τυχαία τρίγωνα και ενεργοποίησαν ξανά τα εργαλεία της αυτόματης μέτρησης, έσυραν το δεύτερο τρίγωνο μέχρι να δείξει το ίδιο εμβαδό και διαπίστωσαν ότι η περίμετρος ήταν διαφορετική:

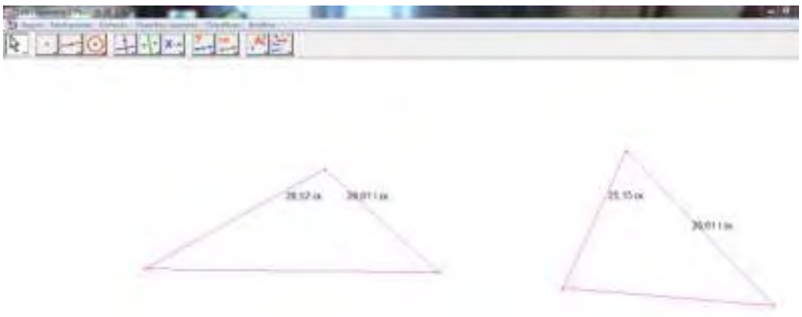
Δάσκαλος (προς ομάδα Β): Δύο ισοεμβαδικά είναι πάντοτε και ισοπεριμετρικά; Τι πρέπει να κάνω πρώτα; Να σύρω τα δύο τρίγωνα ώστε να έχουν το ίδιο;

Θάλεια: Εμβαδόν.

Με ανάλογο τρόπο βρήκαν εύκολα ότι και δύο ισοπεριμετρικά μπορεί να έχουν διαφορετικό εμβαδόν (καταγραφή οθόνης, εικ. 30, 31).



Εικ. 30



Εικ. 31

Αφού διαπίστωσαν ότι δεν συμβαδίζει η ισοπεριμετρικότητα με την ισοεμβαδικότητα, ζητήθηκε ως τελευταίος προβληματισμός από τους μαθητές να απαντήσουν εάν μπορεί σε κάποια περίπτωση να είναι δύο τρίγωνα ταυτόχρονα ισοεμβαδικά και ισοπεριμετρικά. Επί της ουσίας τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν στο Cabri δύο τρίγωνα με τη συγκεκριμένη συνθήκη. Εδώ ανέκυψαν σχετικές δυσκολίες και στην πρόβλεψη και στην κατασκευή:

Δάσκαλος: Πάντοτε δε γίνεται. Υπάρχει όμως περίπτωση να είναι και ισοεμβαδικά και ισοπεριμετρικά;

Αλέξανδρος: Δε γίνεται να είναι και η περίμετρος και το εμβαδόν ταυτόχρονα ίσα.

Κάποιος μαθητής έδωσε την ιδέα να φτιάξουμε τα τρίγωνα μέσα σε δύο παράλληλες. Όμως παρατήρησαν εύλογα ότι έτσι θα είχαμε δύο ίδια τρίγωνα:

Δάσκαλος: Ωραία. Ας το κοιτάξουμε. Για ίδιο εμβαδόν τι να κάνουμε;

Αφροδίτη: Να κάνουμε δύο παράλληλες.

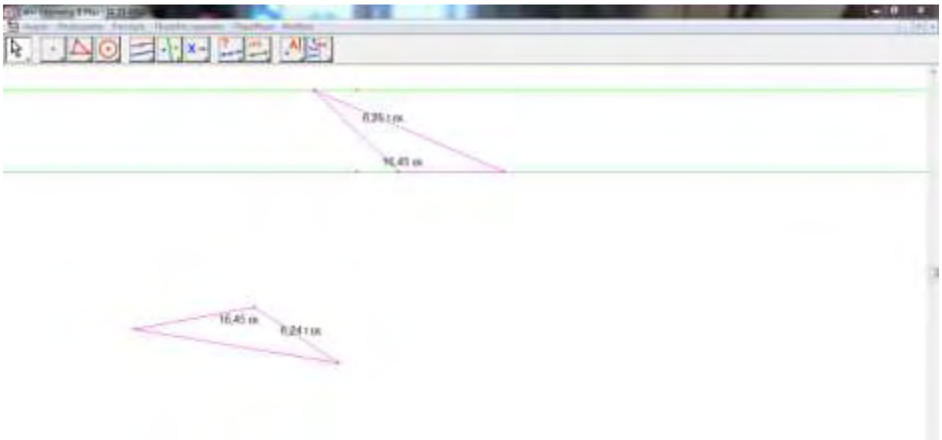
Δάσκαλος: Με τις παράλληλες που είπατε για ποιο λόγο; Τι εξασφάλισα με τις παράλληλες;

Αφροδίτη: Ίδιο εμβαδόν.

Αλέξανδρος: Έτσι όμως φτιάξαμε δυο ίδια τρίγωνα.

Χρειάστηκε η δική μου υπόδειξη ώστε να βάλουν μέσα στις παράλληλες το ένα τρίγωνο και να σύρουν το άλλο μέχρι να δείξει το ίδιο εμβαδό. Εν συνεχεία έσυραν το πρώτο τρίγωνο (το οποίο μέσα στις παράλληλες διατηρεί το εμβαδόν του) μέχρι να δείξει την ίδια περίμετρο με το άλλο. Έτσι κατάφεραν να δημιουργήσουν δύο τρίγωνα ισοεμβαδικά και ισοπεριμετρικά ταυτόχρονα και να σχηματίσουν μια ολοκληρωμένη αντίληψη για τις δύο έννοιες (καταγραφή οθόνης, εικ. 32).

.

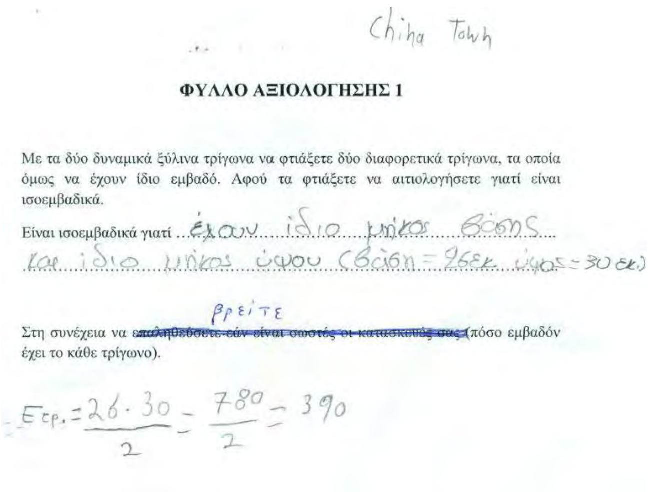


Εικ. 32

5. ΑΝΑΛΥΣΗ- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΜΑΔΑ Α (China Town)

Η ομάδα Α έδειξε να θυμάται την εξάρτηση του εμβαδού τριγώνου από το μήκος της βάσης και του ύψους και ήταν σε θέση να εφαρμόζει αυτή τη γνώση για την κατασκευή ισοεμβαδικών τριγώνων στα διάφορα πλαίσια αναπαράστασης, δηλαδή στο δυναμικό ξύλινο τρίγωνο, στο γεωπίνακα και στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri (Φύλλο αξιολόγησης 1, εικόνες 1, 2, 3).



Chiha Towh

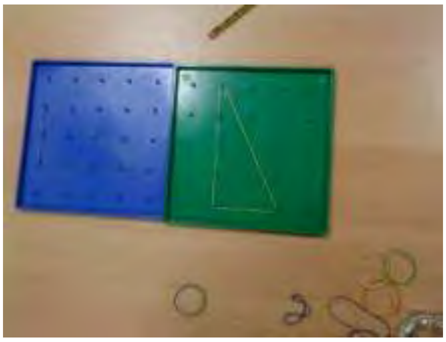
ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Με τα δύο δυναμικά ξύλινα τρίγωνα να φτιάξετε δύο διαφορετικά τρίγωνα, τα οποία όμως να έχουν ίδιο εμβαδό. Αφού τα φτιάξετε να αιτιολογήσετε γιατί είναι ισοεμβαδικά.

Είναι ισοεμβαδικά γιατί ...έχουν ίδιο μήκος βάσης και ίδιο μήκος ύψου (βάση = 26εκ. ύψος = 30 εκ.)

Στη συνέχεια να ~~επαληθεύσετε εάν είναι σωστές οι κατασκευές σας~~ βρείτε (πόσο εμβαδόν έχει το κάθε τρίγωνο).

$E_{τρ.} = \frac{26 \cdot 30}{2} = \frac{780}{2} = 390$



Εικ. 1

Εικ. 2

Εικ. 3

Παρουσιάστηκαν κάποια προβλήματα στη χρήση ακριβούς μαθηματικής ορολογίας αποκαλώντας τη βάση ως πλάτος, αλλά αυτό αποδείχθηκε ότι οφειλόταν περισσότερο σε βιασύνη και επιπολαιότητα -επηρεαζόμενοι όπως έχουμε ήδη αναφέρει και από το πλάτος στα ορθογώνια- καθώς το διόρθωσαν οι ίδιοι αμέσως ακούγοντας τη δική μου ένσταση:

Αλέξανδρος: Πρέπει να έχει το ίδιο ύψος και το ίδιο … πλάτος.

Δάσκαλος: Τι να έχει Αλέξανδρε;

Αλέξανδρος: Ίδιο ύψος και ίδιο πλάτος. Ε, ... Βάση και ύψος είναι (το διορθώνει αμέσως).

Δάσκαλος: Βάση και ύψος. Δεν υπάρχει πλάτος στα τρίγωνα.

Οι μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας έδειξαν ευελιξία στην περίπτωση που έπρεπε να διατηρηθεί η ισοεμβαδικότητα με αλλαγή της βάσης. Κατανοώντας τη διατήρηση του εμβαδού ως διατήρηση του γινομένου β*υ , αντιλήφθηκαν ότι η μείωση του μήκους της βάσης κατά το ήμιση έπρεπε να συνοδευτεί από διπλασιασμό του ύψους:

Δάσκαλος: Η βάση τώρα να έχει δύο κουτάκια.

Αλέξανδρος: Έχει 2, άρα πρέπει να έχει 4 ύψος για να είναι ίδια (το λέει με σιγουριά).

Δάσκαλος: Α! Πολύ ωραία το είπε ο Αλέξανδρος. Αφού μειώσαμε τη βάση στο μισό, το ύψος τι έπρεπε να το κάνουμε παιδιά;

Αλέξανδρος: Διπλάσιο.

Δάσκαλος: Γιατί το εμβαδόν είπαμε ότι είναι ένα γινόμενο ...

Ηρώ: Της βάσης επί του ύψους.

Δάσκαλος: Πρέπει λοιπόν αφού κάναμε μισό το ένα, να κάνουμε το άλλο;

Ηρώ: Διπλάσιο.

Στη διαδικασία καταμέτρησης των κουτιών στο γεωπίνακα, οι μαθητές εξακολούθησαν να αντιμετωπίζουν κάποιες δυσκολίες:

Δάσκαλος: Για μετρήστε τα.

Αλέξανδρος: Ένα, δύο σίγουρα. Και ένα, δύο μισά ... τρία.

Δάσκαλος: Προηγουμένως όμως είπες ότι βγαίνει 4.

Με τη συνεργασία και μετρώντας διαδοχικά, οδηγήθηκαν στο σωστό αποτέλεσμα:

Ηρώ: Ένα, μισό, δύο, ...

Αφροδίτη: Τρία, ...

Ηρώ: Τρεισήμισι, ...

Αλέξανδρος: Τέσσερα.

Χρειάστηκε υπενθύμιση για τα βοηθητικά ορθογώνια λαστιχάκια για να τα ξαναθυμηθούν:

Δάσκαλος: Αλλά θυμάστε τι είχαμε πει; Τι μπορεί να μας βοηθήσει; Τι κόλπο είχαμε βρει για να μετράμε τα κουτάκια;

Ηρώ: Με τις κουκίδες.

Δάσκαλος: Βάζαμε άλλα λαστιχάκια; Χρησιμοποιούσαμε άλλα λαστιχάκια;

Όλη η ομάδα: Α, Ναι!

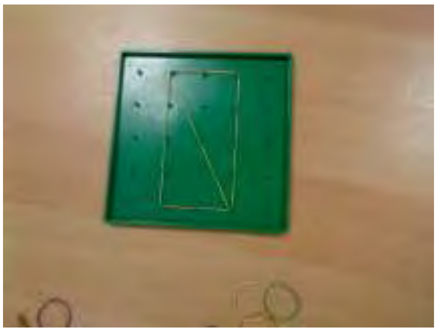
Δάσκαλος: Και τι κάναμε με αυτά τα λαστιχάκια;

Αφροδίτη: Κάναμε τετράγωνα.

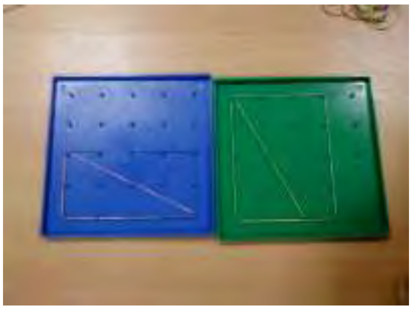
Δάσκαλος: Τετράγωνα ή ορθογώνια; Γιατί και το τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

Αφροδίτη: Ναι, ναι.

Παρόλα αυτά κατά τη διαδικασία του κλεισίματος των τριγώνων μέσα σε ορθογώνια συνεχίστηκαν κάποιες δυσκολίες, με τον Αλέξανδρο να φτιάχνει το συμπλήρωμα του ορθογωνίου αντί να περικλείσει το τρίγωνο (εικόνα 4).



Εικ. 4



Εικ. 5

Εντούτοις αναγνώρισαν για μια ακόμη φορά ότι η τεχνική αυτή είναι αρκετά χρήσιμη για τον υπολογισμό του εμβαδού στο πλαίσιο του γεωπίνακα:

Δάσκαλος (προς όλους): Τι έκανε ο Αλέξανδρος;

Ηρώ: Ένα ορθογώνιο.

Δάσκαλος: Ένα ορθογώνιο μέσα στο οποίο;

Ηρώ: Έκλεισε το τρίγωνο.

Δάσκαλος: Για δείτε τώρα. Το ορθογώνιο πόσα κουτάκια έχει;

Αλέξανδρος: Ένα, δύο, τρία ... οχτώ.

Δάσκαλος: Αυτή η γραμμή τι είναι στο ορθογώνιο; (δείχνοντας τη διαγώνιο)

Αθηνά: Διαγώνιος.

Δάσκαλος: Και η διαγώνιος χωρίζει ένα τρίγωνο σε δύο ίσα μέρη ή όχι;

Ηρώ: Ίσα.

Δάσκαλος: Άρα αφού το ορθογώνιο έχει 8 κουτάκια, και αυτό (το τρίγωνο) είναι το μισό του, είναι 4. Μας βοήθησε το ορθογώνιο που το κλείσαμε;

Αφροδίτη: Ναι!

Επίσης οι μαθητές θυμήθηκαν τη χρήση παράλληλων ευθειών στο Cabri για την κατασκευή ισοεμβαδικών τριγώνων (με τη διατήρηση του ύψους):

Δάσκαλος: Πώς θα το φτιάξουμε αυτό το τρίγωνο που έχει ύψος 10; Τι θα φτιάξουμε πρώτα;

Αφροδίτη: Παράλληλες.

αλλά και τα εργαλεία αυτόματης μέτρησης εμβαδού και αναγνώρισαν τη συμβολή τους στην παρακολούθηση των τιμών τους:

Δάσκαλος: Πώς θα διαπιστώσουμε ότι είναι ισοεμβαδικό πέραν από το ίδιο ύψος και την ίδια βάση;

Αλέξανδρος: Με αυτό εδώ (δείχνοντας από τη γραμμή εργαλείων, τη μέτρηση του εμβαδού).

Δάσκαλος: Πόσο είναι το εμβαδόν (το καινούριο);

Αλέξανδρος: 20,3.

Δάσκαλος: Για δες και το επάνω.

Αλέξανδρος: 20,2.

Δάσκαλος: Εντάξει. Άρα το εργαλεία μέτρησης του λογισμικού σε τι μας βοηθάνε;

Αλέξανδρος: Το να βρίσκουμε πιο εύκολα το εμβαδόν.

Δάσκαλος: Και τι άλλο;

Αλέξανδρος: Το μήκος.

Δάσκαλος: Και την περίμετρο ακόμη.

Τέλος αναδείχθηκε ότι οι μαθητές της ομάδας Α μπορούσαν να κάνουν τη διάκριση των εννοιών του εμβαδού και της περιμέτρου απαντώντας σωστά ότι δεν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους ως προς τη μεταβολή των τιμών τους και έδειξαν παράλληλα πρόοδο και εξέλιξη στη μαθηματικοποίησή τους αιτιολογώντας και παρέχοντας εξηγήσεις αντί απλά να περιγράφουν μία κατάσταση (Φύλλο αξιολόγησης 4).

Chinatown

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 4

Όταν μεγαλώνει η περίμετρος ενός τριγώνου, μεγαλώνει πάντα και το εμβαδόν του;

Οχι

Γιατί; Γιατί το εμβαδόν του τριγώνου δεν εξαρτάται από την περίμετρο αλλά απο την βάση και το ύψος

ΟΜΑΔΑ Β (Σκορπιοί)

Η Β ομάδα είχε ξεχάσει από τι ακριβώς εξαρτάται το εμβαδόν ενός τριγώνου και αντιμετώπισε ανάλογες δυσκολίες στην κατασκευή ισοεμβαδικών τριγώνων αλλά και στην αιτιολόγηση της ισοεμβαδικότητας. Το ξαναθυμήθηκε σιγά σιγά μέσα από την δική μου παρέμβαση και τις κατάλληλες προοδευτικές ερωτήσεις:

Δάσκαλος: Για να φτιάξουμε δυο τρίγωνα με ίδιο εμβαδόν τι πρέπει να κάνουμε;

Δημοσθένης: Να μετρήσουμε το γύρω-γύρω, την περίμετρο.

Δάσκαλος: Να μετρήσουμε την περίμετρο για να φτιάξουμε ίδιο εμβαδόν; Εσείς οι άλλοι τι λέτε; Η περίμετρος έχει καμιά σχέση με το εμβαδόν;

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Εσύ τι λες Ειρήνη;

Ειρήνη: Όχι.

Δάσκαλος: Άρα πρέπει να βρείτε κάτι άλλο. Από τι εξαρτάται το εμβαδόν;

Δημοσθένης: Από τις πλευρές!

Δάσκαλος: Από όλες τις πλευρές;

Δημοσθένης: Όχι από τις δύο.

Δάσκαλος: Από τις δύο ή από τη μία;

Δημοσθένης: Από τη μία, ναι.

Δάσκαλος: Πώς τη λέμε αυτή τη μία;

Δημοσθένης: Ισόπλευρο, ... ισοσκελές.

Δάσκαλος: Είναι η βάση;

Δημοσθένης: Α, ναι. Η βάση.

Δάφνη: Κύριε, πέρασε πολύς καιρός και τα έχουμε ξεχάσει.

Δάσκαλος: Δεν πειράζει. Το εμβαδόν από τι εξαρτάται; Θυμάστε; Από τη βάση και από τι άλλο;

Ειρήνη: Από το ύψος;

Δάσκαλος: Μπράβο Ειρήνη. Ωραία το είπες. Άρα για να είναι δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα, τι πρέπει να έχουν;

Δημοσθένης: Ίδιο ύψος και την ίδια βάση.

Παρόμοια παρέμβαση χρειάστηκε και για τον ακριβή τύπο του εμβαδού. Θυμόταν το γινόμενο β*υ αλλά είχαν ξεχάσει τη διαίρεση δια του δύο. Ο συσχετισμός με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου τους ώθησε να ξαναθυμηθούν ότι το εμβαδόν τριγώνου είναι το μισό του και επομένως ο τύπος του είναι $Ε_{τριγ} = β*υ / 2$:

Δάσκαλος: Τον τύπο τον θυμάστε;

Δάφνη: Πολλαπλασιάζουμε τις πλευρές.

Δάσκαλος: Ποιες πλευρές;

Ειρήνη: Τη βάση με το ύψος.

Δάσκαλος: Εμβαδόν ίσον βάση επί ύψος ... Δε μου λέτε; Μόνο βάση επί ύψος ή έχει και κάτι άλλο; Σκέτο βάση επί ύψος ήταν;

Δημοσθένης: Όχι (ξέρει ότι έχει και κάτι άλλο αλλά δεν θυμάται τι).

Δάσκαλος: Δάφνη θυμάσαι;

Δάφνη: Και κάτι άλλο είχε.

…(σωπαίνουν)

Δάσκαλος: Το διαιρούσαμε με κάτι μήπως;

Ειρήνη: Α, ναι. Παίρναμε βάση επί ύψος και μετά αυτό που θα βρούμε θα το διαιρέσουμε.

Δάσκαλος: Με τι; Με ποιον αριθμό;

Ειρήνη: Με το ύψος.

Δάσκαλος: Βάση επί ύψος είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Το εμβαδόν του τριγώνου σε σχέση με το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου τι σχέση έχει; Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι το ίδιο με το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου;

Δάφνη: Όχι.

Δάσκαλος: Ποιο είναι ποιο μεγάλο;

Δάφνη: Το παραλληλόγραμμο.

Δάσκαλος: Πόσο ποιο μεγάλο;

…

Δάσκαλος: Μήπως είναι δύο φορές μεγαλύτερο; Διπλάσιο μήπως;

Δημοσθένης: Ναι, ναι.

Δάσκαλος: Άρα είναι το διπλάσιο. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι το;

Όλη η ομάδα: Το διπλάσιο.

Δάσκαλος: Το διπλάσιο είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Του τριγώνου;

Ειρήνη: Δια δύο.

Δάσκαλος: Είναι το μισό του. Πολύ ωραία. Σε τι το μετράμε το εμβαδόν;

Δημοσθένης: Σε τετραγωνικά εκατοστά.

Η ομάδα Β είχε ξεχάσει επίσης να υπολογίζει τα κουτάκια στο γεωπίνακα (ειδικά τα μισά) και χρειάστηκε σχετική υπενθύμιση:

Δάσκαλος: Θυμάστε πώς υπολογίζουμε τα κουτάκια;

Δημοσθένης: Να τα μετρήσουμε όλα εδώ.

Δάσκαλος: Μέτρησέ τα.

Δημοσθένης: 1, 2, 3, … (μετράει τα καρφάκια και όχι τα μέσα).

Δάσκαλος: Συγνώμη λίγο. Τα καρφάκια μετράς ή το μέσα; Όταν λέω κουτάκια στο γεωπίνακα, κοίτα λίγο Άννα…

Ειρήνη: 1, 2, 3, … (δεν μετρούν όμως και τα μισά).

Δάσκαλος: Πρέπει να υπολογίζετε και τα μισά.

Παρόλη την παρέμβαση οι δυσκολίες συνεχίστηκαν ακόμη και στην περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε την τεχνική του κλεισίματος των τριγώνων μέσα σε ορθογώνια, πράγμα που έδειξε ότι για την κατανόηση του «συντακτικού» του συγκεκριμένου χειραπτικού υλικού απαιτείται συχνότερη ένταξή του στην καθημερινή διδασκαλία:

Θάλεια: 1, 2, 3, … τρεισήμισι.

Δάσκαλος: Τρεισήμισι είναι; Το ξαναεπαναλαμβάνω. Ένα κουτάκι είναι ανάμεσα σε τέσσερα καρφάκια. Θα βλέπετε και ποια είναι μισά.

Δημοσθένης: Ωραία! Αυτό είναι ένα ολόκληρο. Και αυτό δύο.

Δάσκαλος: Δύο μέχρι στιγμής.

Δημοσθένης: Άλλο ένα μισό.

Θάλεια: Τέσσερα.

Δημοσθένης: Αυτό μας βγαίνει έτσι. Δεν βγαίνει έτσι.

(Αλλά πάλι μπερδεύονται).

Δάσκαλος: Να βοηθήσω λιγάκι. Θυμάστε στο γεωπίνακα πώς (τι) μας βοηθούσε να υπολογίσουμε τα κουτάκια;

Δάφνη: Ναι.

Δάσκαλος: Για πες μου εσύ τι κάναμε; Βάζαμε ένα άλλο λαστιχάκι …

Ειρήνη: Α, ναι!

Δάσκαλος: Για πες Ειρήνη. Κλείναμε τα τρίγωνα σε ένα …

Θάλεια: Λαστιχάκι.

Δάσκαλος: Το οποίο τι σχήμα είχε;

Δημοσθένης: Το ίδιο με αυτό.

Δάσκαλος: Τρίγωνο ήταν και αυτό; Όχι.

Ειρήνη: Τετράγωνο;

Δάσκαλος: Σε ορθογώνια; Θυμάστε που το κάναμε;

Όλη η ομάδα: Ναι!

Δάσκαλος: Για κλείστε το τρίγωνο αυτό σε ένα ορθογώνιο.

(Αφού όμως δεν το κλείνει ολόκληρο)

Δάσκαλος (προς Δημοσθένη): Ολόκληρο το τρίγωνο. Τώρα άφησες απ' έξω κομμάτι.

Αφού ο Δημοσθένης τώρα κάνει ένα πιο μεγάλο ορθογώνιο από όσο έπρεπε (εικόνα 5, σχήμα β):

Δάσκαλος: Χρειάζεται να κάνω το δεύτερο ορθογώνιο έξω-έξω τόσο μεγάλο;

Δημοσθένης: Όχι.

Η συζήτηση και ο συσχετισμός του τριγώνου με ολόκληρο το ορθογώνιο που το περιέκλεισε, βοήθησε και τη Θάλεια να υπολογίσει σωστά το εμβαδόν:

Δάσκαλος: Το ορθογώνιο είναι 8 κουτάκια. Το τρίγωνο πόσο είναι;

Θάλεια: 5.

Δάσκαλος: Το δεύτερο τρίγωνο περίμενε λίγο. Θα το βρει η Θάλεια.

Θάλεια: 1, 2, 3, 4.

Δάσκαλος: Αυτό εδώ το κομματάκι που περισσεύει δεν θα το βάλουμε;

Θάλεια: 5.

Δάσκαλος: Είναι ολόκληρο;

Θάλεια: 4 και μισό.

Δάσκαλος: 4 και μισό λες. Θυμάσαι που η Ειρήνη είπε να μετρήσουμε τα κουτάκια από όλο το ορθογώνιο; Για μέτρησέ τα.

Θάλεια: 1, 2, ... 8.

Δάσκαλος: 8 είναι όλο το ορθογώνιο. Το τριγωνάκι;

Δημοσθένης: 4.

Δάσκαλος: Είναι το μισό από το ορθογώνιο;

Θάλεια: Ναι.

Δάσκαλος: Πόσο θα είναι το τριγωνάκι;

Θάλεια: 4.

Δάσκαλος: Α, μπράβο! Σε βοήθησε τώρα;

Θάλεια: Ναι.

Δάσκαλος: Άρα μας βοηθάνε όταν τα κλείσουμε σε ένα ορθογώνιο τα κουτάκια;

Όλη η ομάδα: Ναι!

Δάσκαλος: Απλά το είχαμε ξεχάσει λιγάκι, έ;

Η ομάδα Β έδειξε σχετική ευχέρεια στους χειρισμούς των εργαλείων του λογισμικού Cabri και κατασκεύασε το ισοεμβαδικό τρίγωνο μειώνοντας τη βάση και διπλασιάζοντας το ύψος.

Ως προς τη σχέση περιμέτρου – εμβαδού, τα περισσότερα παιδιά της ομάδας απάντησαν σωστά στο φύλλο αξιολόγησης 4 αναφέροντας ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους καμιά αναλογία:

Δάσκαλος: Όταν μεγαλώνει η περίμετρος από ένα τρίγωνο, μεγαλώνει το εμβαδόν του πάντοτε; Τι λέτε;

Δάφνη: Εγώ λέω ναι.

Δάσκαλος: Εσύ Δημοσθένη;

Δημοσθένης: Όχι.

Δάσκαλος (προς Ειρήνη): Εσύ;

Ειρήνη: Όχι.

Δάσκαλος: Εσύ Θάλεια;

Θάλεια: Όχι.

Το σπουδαιότερο είναι ότι μπόρεσαν να αιτιολογήσουν την άποψή τους λέγοντας ότι το εμβαδόν δεν εξαρτάται από την περίμετρο αλλά από τη βάση και το ύψος και έδειξαν ότι η διάκριση αυτών των εννοιών που είχε επιτευχθεί στην κυρίως διδασκαλία, απέκτεισε μόνιμο χαρακτήρα:

Δάσκαλος: Γιατί Θάλεια λες όχι; Να το δικαιολογήσουμε. Αυτό είναι το σημαντικό.

Θάλεια: Γιατί η περίμετρος δεν έχει σχέση με το εμβαδόν.

Δάσκαλος: Πάρα πολύ ωραία το είπε. Η περίμετρος δεν έχει σχέση με το εμβαδόν. Το εμβαδόν από τι εξαρτάται;

Δημοσθένης: Από τη βάση και το ύψος.

Η Δάφνη εκτός του ότι εξέφρασε λανθασμένη άποψη, αδυνατούσε κιόλας να την αιτιολογήσει:

Δάσκαλος: Να ρωτήσω την Δάφνη. Εσύ είχες πει ότι θα άλλαζε. Όσο μεγαλώνει η περίμετρος θα μεγαλώνει και το εμβαδόν του. Πού στηρίχτηκες γι' αυτό; Γιατί το σκέφτηκες έτσι;

Δάφνη: Γιατί μεγαλώνει.

Μέσα από τη συζήτηση και από την επισήμανση ότι το εμβαδόν τριγώνου εξαρτάται από τη βάση και το ύψος, το συγκεκριμένο παιδί αναθεώρησε τη λανθασμένη του άποψη και κυρίως αντιλήφθηκε το επιχείρημα αυτής της θέσης:

Δάσκαλος: Πίστευες δηλαδή ότι η περίμετρος έχει σχέση με το εμβαδόν; Αυτό πίστευες;

Δάφνη: Τώρα το κατάλαβα.

Δάσκαλος: Στην αρχή πίστευες ότι το εμβαδόν εξαρτάται από την περίμετρο;

Δάφνη: Ναι.

Δάσκαλος: Από τι εξαρτάται το εμβαδόν;

Δημοσθένης: Από τη βάση και το ύψος.

Δάσκαλος: Άρα συμβαίνει Δάφνη, επειδή μεγαλώνει η περίμετρος να μεγαλώνει και το εμβαδόν του;

Δάφνη: Όχι.

Η αδυναμία αιτιολόγησης την οποία εξακολουθούν να εμφανίζουν ορισμένοι μαθητές υποδεικνύει την ανάγκη επικέντρωσης της διδασκαλίας στην επιχειρηματολογία και στην απαίτηση για παροχή εξηγήσεων από τους μαθητές σε καθημερινή βάση.

6. **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Το διδακτικό πείραμα που παρουσιάστηκε στην παρούσα μελέτη, έγινε στο πλαίσιο αναζήτησης μιας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας και ενός μαθησιακού περιβάλλοντος το οποίο θα συνέβαλε στην επίτευξη των διδακτικών και μαθησιακών στόχων. Ειδικότερα διερευνήθηκε εάν η διεξαγωγή μιας διδασκαλίας η οποία στηρίζεται στην εποικοδομιστική θεώρηση, στο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο και στη διερεύνηση των εννοιών μέσα σε πολλαπλά πλαίσια αναπαράστασης, μεταξύ των οποίων ήταν κάποια χειραπτικά υλικά και το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri, μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και στην καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών. Παράλληλα έγινε προσπάθεια να κατανοηθεί ο τρόπος που οι μαθητές κατασκευάζουν τις γεωμετρικές έννοιες παρακολουθώντας και αναλύοντας τις δράσεις και τις ερμηνείες που δίνουν κατά τη διάρκεια εμπλοκής τους στις διάφορες δραστηριότητες. Η διδασκαλία αφορούσε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του τριγώνου και την οικοδόμηση της έννοιας του εμβαδού σε μαθητές ΣΤ΄ Δημοτικού και τα ερευνητικά δεδομένα ελήφθησαν κυρίως από μία ομάδα μαθητών (Α) με καλές επιδόσεις στη γεωμετρία και από μία ομάδα (Β) με σχετικές μαθησιακές δυσκολίες.

Αρχικά έγινε η διερεύνηση των προϋπάρχουσων γνώσεων καθώς και του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σύμφωνα με την ταξινομία Van Hiele και η τοποθέτησή τους στις αντίστοιχες ομάδες. Αρκετοί μαθητές (περισσότερο της ομάδας Β) έδειξαν να συγχέουν τις έννοιες εμβαδού και περιμέτρου, κυρίως προσδίδοντας σε αυτές μία σχέση παράλληλης αυξομείωσης. Η υπέρβαση αυτής της σύγχυσης η οποία απαντάται συχνά μεταξύ των μαθητών-όπως αναφέρθηκε και στη βιβλιογραφία-έγινε με τη χρήση των εργαλείων αυτόματης μέτρησης εμβαδού και περιμέτρου στο περιβάλλον του λογισμικού και επιβεβαιώθηκε με την αναθεώρηση της αρχικής τους εκτίμησης αλλά και με τις απαντήσεις τους στις δραστηριότητες αξιολόγησης (τουλάχιστον από την πλειοψηφία των μαθητών). Το αποτέλεσμα επιβεβαίωσε τη θέση των ερευνητριών Kordaki και Balomenou (2006: 130) ότι η συνδυαστική χρήση των δύο εργαλείων βοηθά στη διάκριση των εννοιών.

Σχετικά με την ανίχνευση των επιπέδων Van Hiele, οι μαθητές έδειξαν να βρίσκονται μεταξύ των επίπεδων 1 και 2. Κάποιοι μπορούσαν να ταξινομούν σχήματα με διαφορετικούς τρόπους (ομάδα Α και Β) και να διακρίνουν τις αναγκαίες ιδιότητες των σχημάτων (ομάδα Α). Τα προβλήματα εντοπίστηκαν στη ανεπάρκεια μαθηματικής γλώσσας, στην μη αναγνώριση των επαρκών ιδιοτήτων για το χαρακτηρισμό ενός σχήματος (ομάδα Α, Β) και κυρίως στις δυσκολίες αιτιολόγησης, όπως στις περιπτώσεις ταξινομήσεων (ομάδα Β) ή συνύπαρξης ιδιοτήτων (π.χ. αμβλυγώνιο και ισόπλευρο) (ομάδα Α και Β). Τα ευρήματα αυτά έδειξαν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν διαφοροποιημένη ανάπτυξη σε κάποια είδη γνωστικών δραστηριοτήτων και ότι δεν είναι δυνατόν να αντιπροσωπευθούν αποκλειστικά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο σκέψης. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τις ενστάσεις ορισμένων ερευνητών όπως ο Duval (Jones, 2000: 81,82) και η Meyberry (1983: 63) οι οποίοι αμφισβητούν την αυστηρή ιεραρχία των επιπέδων Van Hiele.

Η παράλληλη κατασκευή των σχημάτων στο γεωπίνακα ή στα μοτίβα των καμβάδων βοήθησε στην οπτικοποίησή τους και διευκόλυνε τις αποδεικτικές διαδικασίες καθώς στο νοητικό–αφαιρετικό επίπεδο ήταν πιο δύσκολο για τους μαθητές να προσδιορίσουν τα σχήματα. Σημαντική συμβολή στη διερεύνηση των σχέσεων είχε επίσης το δυναμικό ξύλινο τρίγωνο και το περιβάλλον του λογισμικού τα οποία μέσω της δυναμικής μεταβολής έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές (κυρίως της ομάδας με τις μαθησιακές δυσκολίες) να αντιληφθούν την επίδραση του μήκους της βάσης και του ύψους στο μέγεθος του εμβαδού, αλλά και να αναθεωρήσουν σε κάποιες περιπτώσεις τις λανθασμένες αντιλήψεις τους. Η κάλυψη επιφανειών με υλικά (φασόλια, διαφάνειες) βοήθησε στην κατανόηση της διαφοράς μεταξύ δύο επιφανειών αλλά και της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού. Στο πλαίσιο της αντιστοιχίας μεταξύ των αναπαραστάσεων, οι μαθητές έφτιαξαν ισοεμβαδικά τρίγωνα και στα τρία πλαίσια (ξύλινα τρίγωνα, γεωπίνακας, Cabri) και έδειξαν ότι εμπέδωσαν την έννοια της διατήρησης του εμβαδού, πράγμα που αποτυπώθηκε και στις δραστηριότητες αξιολόγησης και από τις δύο ομάδες. Το εύρημα αυτό επιβεβαίωσε την άποψη του Kaput (Ainsworth 1999: 14) ότι «η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων μας ενδυναμώνει να δούμε σύνθετες ιδέες με ένα νέο τρόπο και να τις εφαρμόσουμε αποτελεσματικά», καθώς και της Confrey (1990: 111) ότι «η σύγκλιση μιας έννοιας σε πολλαπλά πλαίσια αναπαραστάσεων συμβάλλει σε μια ισχυρή κατασκευή».

Εκτός όμως από τη χρήση των χειραπτικών υλικών και της διαδοχικής μεταφοράς των μαθητών στα διαφορετικά πλαίσια αναπαράστασης, το σημαντικότερο στοιχείο που έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, στην κατανόηση των εννοιών και στην άρση των παρανοήσεων ήταν η διαμόρφωση ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος. Συμπλέοντας με τις αναφορές της σχετικής βιβλιογραφίας ότι η χρήση χειραπτικών υλικών ή η παροχή πολλαπλών πλαισίων αναπαράστασης από μόνη της δεν είναι αρκετή (Markopoulos & Potari, 2000: 263,264, Ainsworth, 2006: 183), στο συγκεκριμένο παράδειγμα δόθηκε βαρύτητα στην ενεργητική συμμετοχή του μαθητή, στη διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων, στην αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητών, αλλά και μαθητών μεταξύ τους, στην καλλιέργεια διαλόγου και ελεύθερης έκφρασης των απόψεων, στην αμφισβήτηση των επιχειρημάτων, στη διαδικασία διατύπωσης και δοκιμής υποθέσεων και τέλος στην αμοιβαία οικειοποίηση της δράσης τους η οποία –όπως υποστηρίζει ο Meira (1998: 137)-επέτρεψε την ανάδειξη της «διαφάνειας» των υλικών και τη σύνδεσή τους με τη μαθηματική γνώση. Η όλη διαδικασία επαλήθευσε τα θεωρητικά δεδομένα ότι η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης είναι προϊόν περισσότερο της διδασκαλίας και όχι της ηλικίας και ότι η πρόοδος μεταξύ των επιπέδων επηρεάζεται από τις πλούσιες γεωμετρικές εμπειρίες τις οποίες βιώνουν τα παιδιά (Burger and Shaughnessy, 1986: 45,46, Van de Walle, 2005: 424,426,429,479).

Ωστόσο, παρά την παροχή αυτού του υποστηρικτικού πλαισίου, οι μαθητές εξακολούθησαν να έχουν δυσκολίες στον υπολογισμό του εμβαδού στο γεωπίνακα με τη μέθοδο της καταμέτρησης των κουτιών. Οι δυσκολίες εντοπίστηκαν και στις δύο ομάδες. Αυτές οφείλονται στο ότι οι μαθητές δεν είχαν την προηγούμενη εμπειρία με το υλικό του γεωπίνακα και χρειάστηκε ανάληψη νέων γνωστικών καθηκόντων και κατανόηση του «συντακτικού» του, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο η κάθε αναπαράσταση κωδικοποιεί και παρουσιάζει τις πληροφορίες. Απαιτείται η συχνότερη χρήση των χειραπτικών υλικών και η οργανική ένταξή τους στη διδασκαλία. Πρόβλημα παρουσιάστηκε και με την αιτιολόγηση των επιλογών. Αν και υπήρξε βελτίωση στον τομέα αυτό, η ομάδα Β σε κάποιες περιπτώσεις διατήρησε τις αδυναμίες της. Η ανάπτυξη αυτής της δεξιότητας απαιτεί προφανώς μακροχρόνια προσπάθεια και η διδασκαλία θα πρέπει να διέπεται καθημερινά από αυτή, έτσι ώστε οι μαθητές να συνηθίσουν σε μια «μικροκουλτούρα αιτιολόγησης» και να αναμένουν πάντοτε από τον εκπαιδευτικό να ερωτηθούν και να δώσουν εξηγήσεις για την κάθε τους κατασκευή. Η αναμονή αυτή, όπως επισημαίνουν και οι Cobb, Wood και Yackel (1990: 135) «διευκολύνει την ανάπτυξη της υποχρέωσης να κατανοήσουν τα πράγματα όταν εργάζονται σε ομάδες». Επίσης στις δραστηριότητες αξιολόγησης οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες χρειάστηκαν ώθηση για να ξαναθυμηθούν ορισμένες έννοιες. Από την μια μεριά φάνηκε πως η παρέλευση ενός σημαντικού χρονικού διαστήματος επέδρασε σε αυτή τη λήθη, από την άλλη όμως, η τελική ανάκληση των εννοιών στο προσκήνιο, έδειξε ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές τις είχαν κατανοήσει, τουλάχιστον σε κάποιο βαθμό στην κυρίως διδασκαλία.

Για να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα του διδακτικού πειράματος, πρέπει πρωτίστως να προσδιορίσουμε τι θεωρούμε αποτελεσματική διδασκαλία και ποιοι θα πρέπει να είναι οι ουσιαστικοί στόχοι της. Εάν στόχος της διδασκαλίας είναι η επιβεβαίωση των ήδη παρουσιασμένων από τον εκπαιδευτικό εννοιών και σχέσεων και η εφαρμογή ακατανόητων κανόνων, είναι προφανές ότι η εφαρμογή κάθε καινοτομίας είναι περιττή, καθώς όλα τα παραπάνω υλοποιούνται μέσα στο πλαίσιο της παραδοσιακής μετωπικής διδασκαλίας. Εάν όμως επιδίωξή μας είναι να απαγκιστρωθούμε από τον στόχο των υπολογιστικών δεξιοτήτων και να στραφούμε προς την κατανόηση των εννοιών, την ανάπτυξη επιχειρημάτων και στρατηγικών, την ερμηνεία και αιτιολόγηση αντί της απλής περιγραφής, τότε το συγκεκριμένο διδακτικό πείραμα έχει θέση στην εκπαιδευτική διαδικασία και μπορεί να υποδείξει νέους τρόπους στην προσέγγισή της. Επιπρόσθετα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συνεισφορά του έγκειται στο να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να οργανώσει τις εμπειρίες του όταν παρατηρεί τους μαθητές να κάνουν μαθηματικά και να χρησιμοποιηθεί ως βάση κατασκευής τροποποιημένων μοντέλων μαθηματικών των μαθητών τα οποία θα καθοδηγούν τις παιδαγωγικές του παρεμβάσεις.

Βέβαια όλα τα παραπάνω αποτελέσματα διατυπώνονται με επιφύλαξη, αφενός γιατί η έρευνα διεξήχθη σε ένα μικρό μόνο δείγμα μαθητών και αφετέρου διότι η κάθε τάξη αποτελεί μια ξεχωριστή περίπτωση με τη δική της δυναμική, το διαφορετικό κοινωνικοπολιτιστικό και μορφωτικό υπόβαθρο των μαθητών και το ιδιαίτερο πλέγμα σχέσεων το οποίο αναπτύσσεται μεταξύ των μελών της. Παρόλα αυτά είναι επιτακτικό να προσανατολιστούμε στη διαφοροποίηση των εκπαιδευτικών στόχων, με έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων έτσι ώστε οι μεν εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν τις εννοιολογικές κατασκευές των μαθητών, οι δε μαθητές μέσω του αναστοχασμού και της προσπάθειας έκφρασης του συλλογισμού τους να δημιουργήσουν μεταγνωστικές γνωστικές δεξαμενές και να οδηγηθούν στη συνειδητή δράση και στη γνωστική αυτονομία αποφασίζοντας οι ίδιοι για την επάρκεια των κατασκευών τους.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainsworth, Shaaron (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33, 131-152.

Ainsworth, Shaaron (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instraction*, 16, 183-198.

Bell, Judith (1999*). Μεθοδολογικός Σχεδιασμός Παιδαγωγικής και Κοινωνικής Έρευνας. Οδηγός για φοιτητές και υποψήφιους διδάκτορες.* Αθήνα. Gutenberg.

Βιβλίο δασκάλου, Μαθηματικά, (2007). *Ένταξη τσιγγανοπαίδων στο σχολείο, Μεθοδολογικές οδηγίες για τη δημιουργική χρήση των βιβλίων του μαθητή στα τμήματα ένταξης*. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Βλάχου Ματούλα (2004). Μοντέλα Ένταξης των Η/Υ στην Εκπαίδευση. Στο: Ινστιτούτο Παιδαγωγικών Ερευνών-Μελετών. Διδασκαλική Ομοσπονδία Ελλάδος. *Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.* Επιμέλεια Α., Δημητρακοπούλου (σελ. 19-24). Αθήνα.

Βλάχου Ματούλα (2004). Οι ΤΠΕ στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Στο: Ινστιτούτο Παιδαγωγικών Ερευνών-Μελετών. Διδασκαλική Ομοσπονδία Ελλάδος. *Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.* Επιμέλεια Α., Δημητρακοπούλου (σελ. 24-35). Αθήνα.

Βοσνιάδου, Στέλλα (2006). *Παιδιά, Σχολεία και Υπολογιστές. Προοπτικές, προβλήματα και προτάσεις για την αποτελεσματικότερη χρήση των νέων τεχνολογιών στη εκπαίδευση.* Gutenberg. Αθήνα.

Burger, F. William and Shaughnessy, J. Michael (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, No 1, 31-48.

Cobb, Paul (1995). Cultural Tools and Mathematical Learning: A Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, No 4, 362-385.

Cobb, Paul and. Steffe, P. Leslie (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 14, No 2, 83-94.

Cobb, Paul, Wood, Terry and Yackel Erna (1990). Chapter 9: Classrooms as Learning Environments for Teachers and Researchers. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph,* Vol. 4, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. 125-146.

Cohen, L., Manion L. και Morrison K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.* Μεταίχμιο. Αθήνα.

Confrey, Jere (1990). Chapter 8: What Constructivism Implies for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*. *Monograph,* Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, Vol. 4, 107-122.

Cooper, J. Tom- Warren Elizabeth (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education* 40: 23-37.

Γαρυφαλλίδου, Δ. Μ., Ιωαννίδης, Γ. Σ., Σκέλλας, Α., Τσιτσίρης, Π. (1998). Εκπαιδευτικό λογισμικό, Πολυμέσα και Ίντερνετ- Σύγκριση με παραδοσιακές μεθόδους. Στο: Στο: *Η Πληροφορική στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Πρακτικά συνεδρίου του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Σχολή Ελληνικών και Μεσογειακών Σπουδών. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Επιμέλεια Κώστας Τσολακίδης (σελ. 126-139). Ρόδος.

Gawlick, Thomas (2005). Connecting Arguments to Actions- Dynamic Geometry as Means for the Attainment of Higher van Hiele Levels. *ZDM.* Vol. 37 (5).

Holz, Reinhard (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations –A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 6: 63-86.

Jones, Keith (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations When Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, No ½, 55-85

Kablan, Zeynel, Topan Beyda και Erkan Burak (2013). The Effectiveness Level of Material Use in Classroom Instruction: A Meta-analysis Study. *Educational Sciences Theory & Practice,* 13(3). 1638-1644.

Kawanaka, Takako and James, W. Stigler (2000). Teachers Use of Questions in Eighth-Grade Mathematics Classrooms in Germany, Japan and the United States. *Mathematical Thinking and Learning*, 1 (4), 255-278.

Kelly, A. & Lesh, R. A. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Lawrence Erlbaum Associates, publishers Mahwah. New Jersey, London.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Αθήνα. Leader Books.

Kordaki, Maria and Balomenou, Athanasia (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11: 99-135.

Laborde, Colette (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 283-317.

Laborde, J.-M. (1990). Cabri – Geometry (Software). France: Universite de Grenoble.

Λαφατζή, Γ. Ιωάννα (2005). Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση. Εκδόσεις Αδελφών Κυριακίδη. Αθήνα.

Manches, Andrew, O’ Maley, Claire (2012). Tangibles for learning: a representational analysis of physical manipulation. *Pers Ubiquit Comput* 16: 405-419.

Markopoulos, C. & Potari, D., (2000). Dynamic Transformations of Solids in the Mathematics Classroom. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima, Japan.

Mayberry, Joanne (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 14, No 1, 58-69.

McNeil, M. Nicole and Uttal, H. David (2009). Rethinking the Use of Concrete Materials in Learning: Perspectives From Development and Education. *Society for Research in Child Development.* Volume 3, No. 3, 137-139.

Meira, Luciano, (1998). Making sense of Instructional Devises: The emergence of Transparency in Mathematic Activity, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29. No 2, 121-142.

Μιχαηλίδης, Π. Γ. (1998). Πληροφορική στην Εκπαίδευση: Προβληματισμοί. Στο: *Η Πληροφορική στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Πρακτικά συνεδρίου του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Σχολή Ελληνικών και Μεσογειακών Σπουδών. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Επιμέλεια Κώστας Τσολακίδης (σελ. 13-23). Ρόδος.

Μιχάλης Αργύρης (2004). Εφαρμογές των ΤΠΕ στην Εκπαίδευση. Στο: Ινστιτούτο Παιδαγωγικών Ερευνών-Μελετών. Διδασκαλική Ομοσπονδία Ελλάδος. *Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.* Επιμέλεια Α., Δημητρακοπούλου (σελ. 95-111). Αθήνα.

Moyer, S. Patricia (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47: 175-197.

National Council of Teachers of Mathematics, (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Noddings, Nel, (1990). Chapter 1: Constructivism in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. *Monograph,* Vol. 4, Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, 7-18.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007-2013). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση.* «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)- Νέο Πρόγραμμα σπουδών, στους άξονες προτεραιότητας 1,2,3 – Οριζόντια Πράξη». Κωδικός MIS 295450.

Ράπτης, Α., Ράπτη, Α. (2001). Είναι δυνατόν να αλλάξει η κουλτούρα της μάθησης με την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση; Η σημασία της παιδαγωγικής μόρφωσης των εκπαιδευτικών και η υστέρηση της εκπαιδευτικής πολιτικής στη χώρα μας. Στο: *Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση. Τεχνικές, Εφαρμογές, Κατάρτιση Εκπαιδευτικών.* Πρακτικά συνεδρίου του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Τμήμα Ελληνικών και Μεσογειακών Σπουδών. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Επιμέλεια Κώστας Τσολακίδης (σελ. 47-70). Ρόδος.

Σαλονικιός, Χ. Δημήτριος, (2008). *Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου. Ανάλυση με βάση τη θεωρία van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη.* Διπλωματική εργασία μεταπτυχιακού προγράμματος του ΠΤΔΕ του ΑΠΘ. Θεσσαλονίκη.

Sarama, Julie and Clements, H., Douglas (2009). "Concrete" Computer Manipulatives in Mathematics Education. *Child Development Perspectives*. Volume 3, Number 3, Pages 145-150.

Schnotz, Wolfgang (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review*, vol. 14, No. 1, March.

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instraction*, 13, 227-237.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying Principles and Essential Elements. In Kelly A. & Lesh R. A. (Eds) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp 267-307). Lawrence Erlbaum Associates, publishers Mahwah. New Jersey, London.

Thompson, W. Patrick (1992). Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 23. No 2, 123-147.

Τουρτούρας, Δ., Χ., Μπαλή Ε. και Αλτιντασιώτης, Α. (2008). *Το φύλλο ως παράγοντας διαμόρφωσης της σχολικής επίδοσης. Η περίπτωση των παιδιών από την πρώην ΕΣΣΔ στα Δημοτικά Σχολεία της Θεσσαλονίκης.* Επιστημονικό Βήμα του Δασκάλου. Διδασκαλική Ομοσπονδία Ελλάδας. Ινστιτούτο Παιδαγωγικών Ερευνών- Μελετών. Τεύχος 9.

Triadafillidis, A. T. (1996). The Effectiveness of Practical Work in Lower Secondary School Mathematics: A Cultural Approach. *Journal of Mathematical Behavior*. (15), 161-166.

Τριανταφυλλίδης, Α., Τριαντάφυλλος, Σδρόλιας, Α., Κωνσταντίνος, (2007). *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης.* ΤΥΠΩΘΗΤΩ- Γεώργιος Δάρδανος. Αθήνα.

Triona, L. M. and Klahr, D. (2003). Point and click or grab and heft: Comparing the influence of physical and virtual instructional materials on elementary school students' ability to design experiments. *Cognition and instruction.* Volume 21, issue 2. 2003. Pages 149-173.

Van de Walle, A. John (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια Εξελικτική Διδασκαλία.* Επιστημονική επιμέλεια: Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης. ΤΥΠΩΘΗΤΩ- Γεώργιος Δάρδανος. Αθήνα.

Wing-Kwong Wong, Sheng-Kai Yin, Hsi-Hsun Yang and Ying-Hao Cheng, (2011). Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, 14(3), 43-54.

Wu-Yuin Hwang, Jia-Han Su, Yueh-Min Huang & Jian-Je Dong, (2009). A Study of Multi-Representation of Geometry Problem Solving with Virtual Manipulatives and Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 12(3), 229-247.

Χαλάτσης, Αθανάσιος, (2006). *Γεωμετρία*. 2^{η} έκδοση. Εκδόσεις Ζήτη. Αθήνα.

Ζευκίλης, Αρίσταρχος, (1989) *Τα εποπτικά μέσα διδασκαλίας*. Γρηγόρης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ηρώ

Φύλλο εργασίας 1

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ, ποια ευθύγραμμα τμήματα πρέπει να προσθέσουμε για να βρούμε την περίμετρο; Να τα χρωματίσετε με κόκκινο χρώμα.

Δάφνη

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Πρέπει να κάνουμε πολλαπλασιασμό για να βρούμε το εμβαδον.

Περικλής

Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Εννοούμε οτι ενα σχημα εχει μεγαλυτερο μεσα μερος απο ενα άλλο

Ηρώ

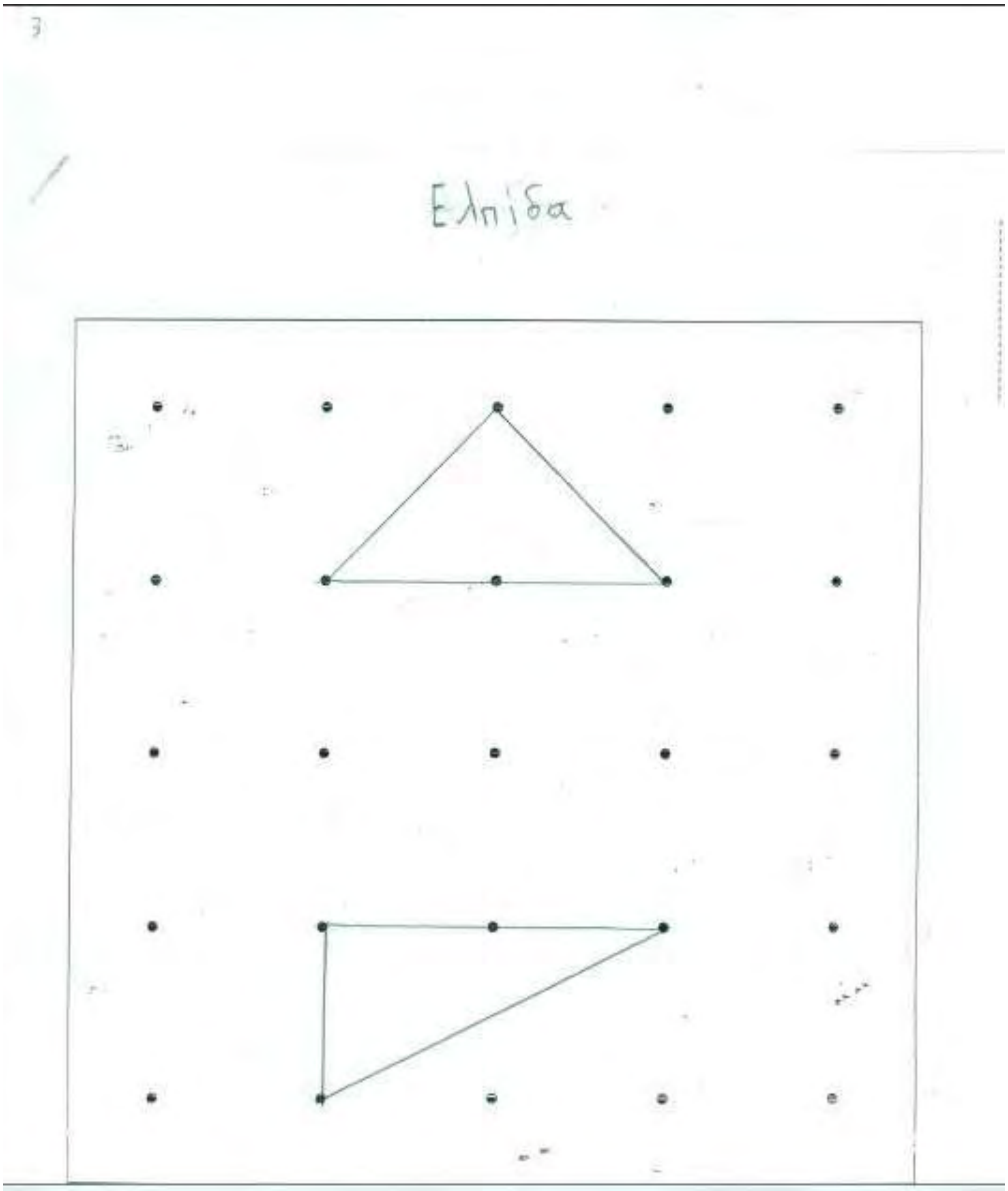
Φύλλο εργασίας 2

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο;

Απάντηση: Εννοούμε ότι ένα σχήμα έχει περισσότερο χώρο απο ένα άλλο σχήμα

Φύλλο εργασίας 3

Παίξτε ελεύθερα με το γεωπίνακα και δημιουργείστε με τα λαστιχάκια διάφορα σχήματα. Εν συνεχεία δημιουργήστε διάφορα τρίγωνα και έπειτα κατασκευάστε ένα ισοσκελές και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Αναπαραστήστε στα μοτίβα γεωπίνακα τα συγκεκριμένα τρίγωνα.



Ειρήνη

Φύλλο εργασίας 4

Να βάψετε με ίδιο χρώμα ποια σχήματα από τα παρακάτω θα βάζατε στην ίδια ομάδα.

Αιτιολογήστε την επιλογή σας. Βάζω στην ίδια ομάδα τα τετράγωνα και τα ορθογώνια στην ίδια ομάδα

Να κάνετε το ίδιο και με τα παρακάτω σχήματα:

ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ

Φύλλο εργασίας 5

Βάλετε μαζί στην ίδια ομάδα όσα από τα παρακάτω τρίγωνα μοιάζουν με κάποιο τρόπο.

Πρώτη ομάδα: 1, 9, 3

Δεύτερη ομάδα: 4, 5, 6, 2 [illegible]

Τρίτη ομάδα: 2, 3, 7, 8

Εξήγησε γιατί έβαλες κάποια μαζί;

Τα έβαλα γιατί είναι ειδικές οι πλευρές

Αυτά που έβαλες μαζί σε τι διαφέρουν;

σε μερικα ειναι ορθές γωνίες μερικές ισ

Μπορείς να τα βάλεις μαζί και με άλλο τρόπο;

Να τα ελεγξεις με χαρακα

Επιστρέψτε τώρα στο φύλλο εργασίας 4 και σκεφτείτε τι κάνατε λάθος. Πώς θα ξανακάνατε την ταξινόμηση;

Ελπίδα

Φύλλο εργασίας 5

Βάλετε μαζί στην ίδια ομάδα όσα από τα παρακάτω τρίγωνα μοιάζουν με κάποιο τρόπο.

Πρώτη ομάδα: 1 8 9

Δεύτερη ομάδα: 4 6 5 7

Τρίτη ομάδα: 2 3

Εξήγησε γιατί έβαλες κάποια μαζί;

Αλέξανδρος

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες ☑ ☑

Β) να έχει μια ορθή γωνία ☐

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες ☐

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο ☑

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους ☑

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες ☐

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: Η Β): να έχει μια ορθή γωνία, γιατί ένα ορθογώνιο τρίγωνο πρέπει να έχει τη γωνία 90° δηλαδή ορθή.

ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες ☑

Β) να έχει μια ορθή γωνία ☑

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες ☒

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο ☒

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους ☒

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες ☒

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο ☑

Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: η Β γιατί σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο χρειάζεται μια ορθή γωνία

Δάφνη

Φύλλο εργασίας 6

Επιλέξτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απαραίτητες για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο:

Α) να έχει μια ορθή γωνία και δύο οξείες γωνίες

Β) να έχει μια ορθή γωνία

Γ) να έχει τρεις πλευρές ίσες

Δ) να έχει μια πλευρά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο

Ε) να έχει μια πλευρά διαφορετική από τις άλλες δύο

ΣΤ) να έχει και τις τρεις πλευρές άνισες μεταξύ τους

Ζ) να έχει τρεις γωνίες ίσες

Η) να έχει μια γωνία διαφορετική από τις άλλες δύο

Επιλέξτε ποια πρόταση από τις προηγούμενες θα ήταν αναγκαία και ικανή για να ονομάσουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Γιατί;

Απάντηση: Α ....

....

Σκορπιοι

Φύλλο εργασίας 7

Προσπαθήστε να μαντέψετε το μυστήριο σχήμα βλέποντας μία μία τις ενδείξεις που αποκαλύπτω. Όταν είστε σίγουροι σταματήστε με. Επίσης από τη δεύτερη ένδειξη και μετά να κατασκευάζετε τα σχήματα στο γεωπίνακα ή στον ισομετρικό καμβά (όπου οι τελείες έχουν οριζόντια και διαγώνια την ίδια απόσταση).

1) τρίγωνο, τετράγονο, κυκλος, πολυγονο πεντογονοκα.

2) τρίγωνο ορθογωνιο, πλάγιο παραλληλογραμο

3) τριγωνο αμβληγώνιο, τριγωνο ορθογώνιο, τρίγωνο οξυγώ[νιο] τρίγωνο σκαλινό.

4) τρίγωνο (ισοσκελες) ισοπλευρο, ορθογώνιο, αμβλιγωνιο κα[ι] αποκλειστε το σκαλινο.

5) τρίγωνο ισοσκελες ορθογώνιο, αμβλιγώνιο κα[ι] αποκλειστα το ισοπλευρο

6) τρίγωνο αμβλιγώνιο ισοσκελές ητων το σχήμ[α] που ψάχναμε

China town

Φύλλο εργασίας 7

Προσπαθήστε να μαντέψετε το μυστήριο σχήμα βλέποντας μία μία τις ενδείξεις που αποκαλύπτω. Όταν είστε σίγουροι σταματήστε με. Επίσης από τη δεύτερη ένδειξη και μετά να κατασκευάζετε τα σχήματα στο γεωπίνακα ή στον ισομετρικό καμβά (όπου οι τελείες έχουν οριζόντια και διαγώνια την ίδια απόσταση).

1) τετραγωνο, κύκλος, τρίγωνο, ορθογώνιο, πολυγωνο

2) ορθογωνιο τρίγωνο, αμβλειγωνιο τρίγωνο, ισοσκελη τρίγωνο, ρομβος, πλαγ[ιο] παραλληλογραμμο, τραπέζιο, σκαλινό τρίγωνο

3) όλα τα τρίγωνα

4) ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές τρίγωνο, αμβλειγωνιο τρίγωνο ορθογώνιο τρίγωνο, (το σκαλινό τρίγωνο αποκλείεται)

5) ισοσκελές τρίγωνο, αμβλυγωνο τρίγωνο, ορθογώνιο (ισόπλευρο τρίγων[ο] αποκλείεται)

6) αμβλειγώνιο τρίγωνο-ισοσκελές

Φύλλο εργασίας 8

Φτιάξτε εργαζόμενοι με την ομάδα σας στο γεωπίνακα ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Έπειτα με ένα άλλο λαστιχάκι (με πιο σκούρο χρώμα) να φτιάξετε ένα ίδιο τρίγωνο επάνω σε αυτό, έτσι ώστε να ταυτίζονται οι πλευρές τους. Εν συνεχεία να σύρετε την πάνω κορυφή του δεύτερου τριγώνου οριζόντια προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, αναλόγως το περιθώριο που έχετε, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Θα πρέπει να καταγράψετε ποια στοιχεία του αρχικού τριγώνου άλλαξαν και ποια παρέμειναν αναλλοίωτα.

Στοιχεία του τριγώνου που άλλαξαν: …………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Στοιχεία του τριγώνου που παρέμειναν τα ίδια: ………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Σχηματίστε με λαστιχάκια τα ύψη των τριγώνων από τις επάνω κορυφές και αναφέρετε εάν υπήρξε κάποια μεταβολή.

……………………………………………………………………………………………..

Φύλλο εργασίας 9

Να κατασκευάσετε με την ομάδα σας στο γεωπίνακα τα παρακάτω τρίγωνα:

Α) Μερικά τρίγωνα με δύο ίσες πλευρές

Β) Μερικά τρίγωνα με μια ορθή γωνία

Γ) Μερικά αμβλυγώνια τρίγωνα

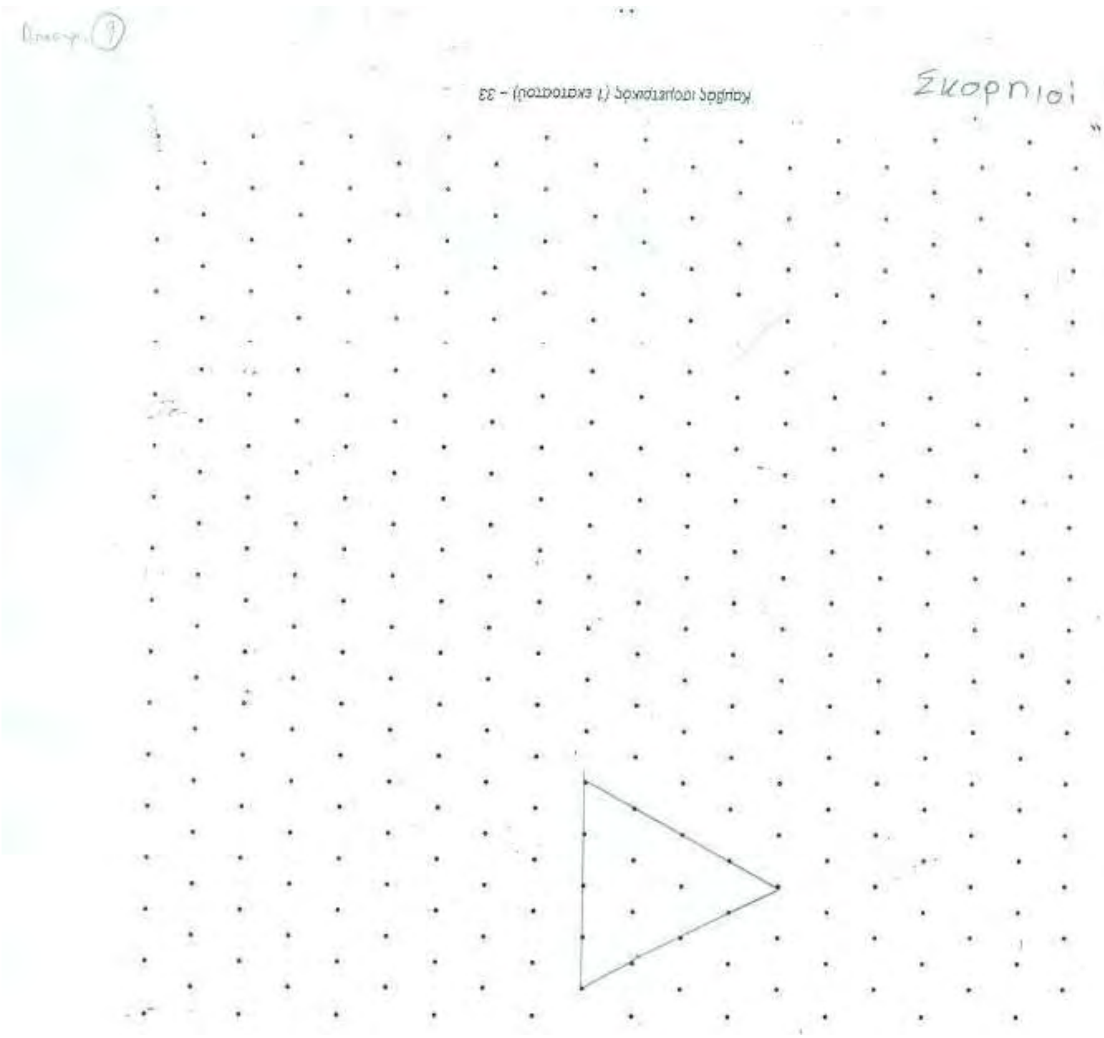
Δ) Μερικά σκαληνά τρίγωνα

Μπορείται να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

……………………………………………………………………………………………..

Δημιουργήστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε χαρτί ισομετρικού καμβά.



Φύλλο εργασίας 10

Συζητήστε με την ομάδα σας και απαντήστε εάν μπορεί να υπάρξει ένα τρίγωνο που να είναι συγχρόνως:

Α) ορθογώνιο και ισοσκελές ……

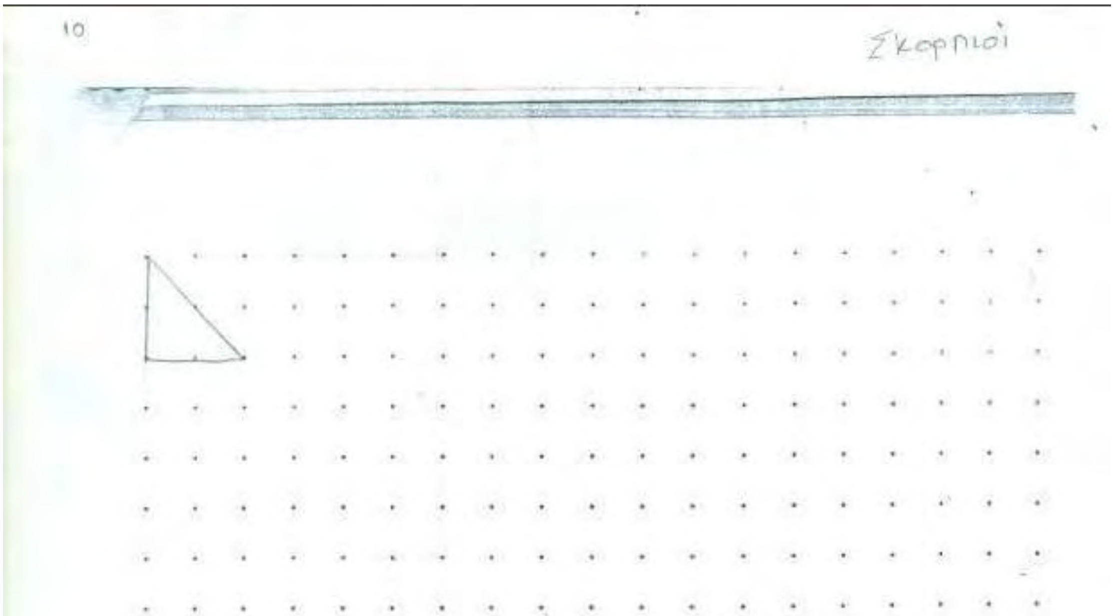
Β) ορθογώνιο και ισόπλευρο ……

Γ) ορθογώνιο και σκαληνό ……

Δ) αμβλυγώνιο και ισοσκελές ……

Ε) αμβλυγώνιο και ισόπλευρο ……

Στις περιπτώσεις που νομίζετε ότι αυτό δεν γίνεται να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. Έπειτα να σχεδιάσετε σε χαρτί καμβάδων τα τρίγωνα.



Φύλλο εργασίας 11

Πάρτε το ξύλινο τρίγωνο. Μετακινείστε ελεύθερα την κορυφή Α του τριγώνου και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται ταυτόχρονα το μήκος των πλευρών και το μέγεθος των γωνιών του. Σημειώστε ότι κατά σύμβαση θα θεωρούμε κορυφές τα σημεία όπου βρίσκονται οι βίδες στις ενώσεις των πλευρών. Επίσης απέναντι από κάθε πλευρά θα βρίσκεται η αντίστοιχη γωνία (π.χ. απέναντι από την πλευρά α βρίσκεται η γωνία Α). Ποια είδη τριγώνων μπορείτε να φτιάξετε με το υλικό αυτό χωρίς να το χαλάσετε;

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

Ευφορίοι

Φύλλο εργασίας 12

Στο δυναμικό τρίγωνο κλείστε στο μικρότερο μήκος όλες τις πλευρές και λάβετε ως βάση την πλευρά **α**. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες του;

Είναι ισοσκελές, οξυγώνιο

Έπειτα σύρετε τελείως δεξιά τη γωνία Α. Τι είδους τρίγωνο έχει σχηματιστεί τώρα;

αμβλυγώνιο σκαληνό

Να αναφέρετε τι συνέβη με το μέγεθος της κάθε πλευράς και της κάθε γωνίας;

Η πλευρα α ειναι ίδια ενω η β μακρινε μεγάλωσ

Ποιο τρίγωνο πιστεύετε ότι έχει μεγαλύτερο εμβαδόν; Πόσο σίγουροι είστε γι' αυτό; Μπορείτε να προτείνετε κάποιους τρόπους για να το υπολογίσουμε;

China Town

Φύλλο εργασίας 12

Στο δυναμικό τρίγωνο κλείστε στο μικρότερο μήκος όλες τις πλευρές και λάβετε ως βάση την πλευρά **α**. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες του;

Είναι ισοσκελή, οξυγώνιο

Έπειτα σύρετε τελείως δεξιά τη γωνία Α. Τι είδους τρίγωνο έχει σχηματιστεί τώρα;

αμβλυγώνιο

Να αναφέρετε τι συνέβη με το μέγεθος της κάθε πλευράς και της κάθε γωνίας;

Η πλευρα Α εμεινε ίδια Η Β μικραινε Η Γ μεγάλωσε

Ποιο τρίγωνο πιστεύετε ότι έχει μεγαλύτερο εμβαδόν; Πόσο σίγουροι είστε γι' αυτό; Μπορείτε να προτείνετε κάποιους τρόπους για να το υπολογίσουμε;

Μετράμε το ύψος

China Town

Φύλλο εργασίας **13**

Να σχηματίσετε ατομικά δύο διαφορετικά τρίγωνα στο γεωπίνακα και να τα αντιγράψετε στο μοτίβο γεωπίνακα. Πάρτε φασόλια, γεμίστε τα σχήματα και μετρήστε πόσα χωράνε στο καθένα. Εν συνεχεία πάρτε τη διαφάνεια με τον ισομετρικό καμβά 2 εκατοστών, τοποθετήστε τον επάνω στα σχήματα και μετρήστε επίσης πόσα τριγωνάκια χωράνε στο κάθε ένα.

	Α τρίγωνο	Β τρίγωνο
Αριθμός φασολιών:	~~6~~ 5	6
Αριθμός τριγώνων καμβά:	7,5	7

Ποιο τρίγωνο από τα δύο έχει μεγαλύτερη επιφάνεια (περισσότερο εμβαδόν);

Το Α

Σκορπιοι

Φύλλο εργασίας **13**

Να σχηματίσετε ατομικά δύο διαφορετικά τρίγωνα στο γεωπίνακα και να τα αντιγράψετε στο μοτίβο γεωπίνακα. Πάρτε φασόλια, γεμίστε τα σχήματα και μετρήστε πόσα χωράνε στο καθένα. Εν συνεχεία πάρτε τη διαφάνεια με τον ισομετρικό καμβά 2 εκατοστών, τοποθετήστε τον επάνω στα σχήματα και μετρήστε επίσης πόσα τριγωνάκια χωράνε στο κάθε ένα.

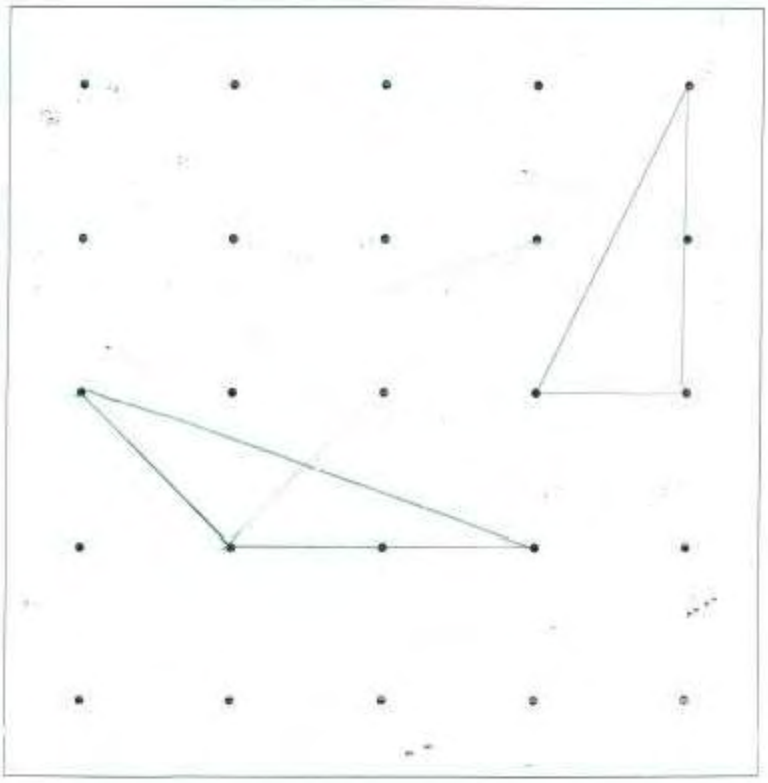
	Α τρίγωνο	Β τρίγωνο
Αριθμός φασολιών:	5	5
Αριθμός τριγώνων καμβά:	8	8

Ποιο τρίγωνο από τα δύο έχει μεγαλύτερη επιφάνεια (περισσότερο εμβαδόν);

Είναι ίσα !

13

China Town



14

Σκορπιό

Το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος ...της.....βάσης.. και από το μήκος .του......ύψους. Όταν ...ύψος... ή το..μήκος..της βάσης αυξάνονται τότε αυξάνεται και το εμβαδόν του.

14

China Town

Το εμβαδόν του τριγώνου εξαρτάται από το μήκος της...βασης. και από το μήκος .του...ύψους. Όταν το...ύψος ή το..μήκος...της βάσης αυξάνονται τότε αυξάνεται και το εμβαδόν του.

china town

Φύλλο εργασίας 14

Στο ξύλινο τρίγωνο και δουλεύοντας σε ομάδες να πάρετε ως βάση την πλευρά **α**, να τοποθετήσετε στο ελάχιστο το μήκος των πλευρών του, να το γεμίσετε με φασόλια και να τα καταμετρήσετε. Ποιες αλλαγές θα προέλθουν στα στοιχεία του εάν μετακινήσετε την κορυφή **Α** διατηρώντας όμως το ίδιο ύψος; Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα πριν σύρετε την κορυφή **Α**:

Αρ. φασολιών: 90
Ύψος: 25

	ΘΑ ΑΛΛΑΞΕΙ	ΔΕΝ ΘΑ ΑΛΛΑΞΕΙ
πλευρά β		✓
πλευρά γ	✓	
γωνία Α		✓
γωνία Β	✓	
γωνία Γ	✓	
ύψος		✓
μήκος βάσης α		✓
εμβαδόν		✓

Τώρα σύρετε την κορυφή **Α**, ξαναγεμίστε με φασόλια, καταμετρήστε τα και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός φασολιών: 90
Ύψος: 25

	ΑΛΛΑΞΕ	ΔΕΝ ΑΛΛΑΞΕ
πλευρά β		✓
πλευρά γ	✓	
γωνία Α		✓
γωνία Β	✓	
γωνία Γ	✓	
ύψος		✓
μήκος βάσης α		✓
εμβαδόν		✓

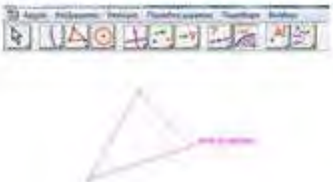
Εάν αλλάξουμε το ύψος τι θα συμβεί με το εμβαδόν; Απάντηση: ......Ναι............

Φύλλο εργασίας 15

1. Ανοίξτε το λογισμικό Cabri Geometry II plus.

2. Επιλέξτε το τρίτο εικονίδιο και εν συνεχεία τη δημιουργία τριγώνου.

3. Αφού φτιάξετε το τρίγωνο, επιλέξτε το δείκτη και κρατώντας τον πατημένο σε μια κορυφή σύρετέ τον σε διάφορες κατευθύνσεις.



4. Ενεργοποιήστε το εργαλείο μέτρησης του εμβαδού και σύρετε διαδοχικά μια κορυφή παρατηρώντας τις αλλαγές.

Σκορπιοί

Φύλλο εργασίας 16

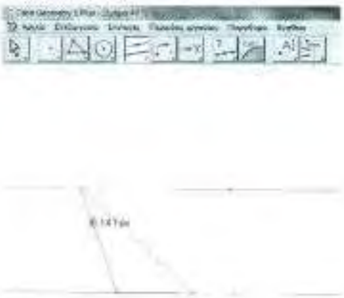
Κατασκευάστε δύο παράλληλες ευθείες και ένα τρίγωνο μέσα σε αυτές. Τι γνωρίζετε για την απόσταση ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες;

η αποσ;

Ποια η σχέση του ύψους του τριγώνου με αυτή την απόσταση;

είναι το ίδιο πράγμα.

Ενεργοποιήστε το εργαλείο αυτόματης μέτρησης του εμβαδού και σύρετε διαδοχικά την κορυφή. Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;



Απάντηση: γιατί η βαση και το ύψος είναι ταίδια

Σκορπιοί

Φύλλο εργασίας 17

Πάρτε τα κόκκινα τριγωνικά πλαστικά πλακίδια και φτιάξτε το συμπλήρωμα ενός ορθογωνίου από ένα τρίγωνο ενώνοντας δύο ίδια με τον κατάλληλο τρόπο. Έπειτα με τα κίτρινα πλακίδια φτιάξτε το συμπλήρωμα ενός παραλληλογράμμου.

Ποια η σχέση του εμβαδού των τριγώνων με αυτό των αντίστοιχων ορθογωνίων ή παραλληλογράμμων;

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Ποια η σχέση της βάσης, του ύψους και του εμβαδού του τριγώνου με τα αντίστοιχα του παραλληλογράμμου;

Απάντηση: Το ύψος του τριγώνου και του παραλληλογράμμου είναι τα ίδια.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι γνωστό ότι προκύπτει από το γινόμενο της βάσης με το ύψος. Επομένως ποιος μπορεί να είναι ο τύπος του εμβαδού του τριγώνου;

$Ε_{τριγων} = \frac{β \cdot υ}{2}$

China Town

Φύλλο εργασίας 18

Φτιάξτε με την ομάδα σας στο γεωπίνακα ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Έπειτα σκεφτείτε πώς θα δημιουργήσετε ένα άλλο τρίγωνο ισοεμβαδικό με αυτό και κατασκευάστε το.

Στο γεωπίνακα να μετρήσετε το εμβαδόν με βάση ορθογώνια σχήματα (πόσα κουτάκια είναι;). Με λαστιχάκια διαφορετικού χρώματος σχηματίστε ορθογώνια που περικλείουν τα τρίγωνα ή τμήματα αυτών με τέτοιο τρόπο που να σας βοηθά στην καταμέτρηση των κουτιών.

α) σχήμα
ορ. τρίγωνο = 2 κουτάκια
β) σχήμα
ισ. τρίγωνο = 2 κουτάκια

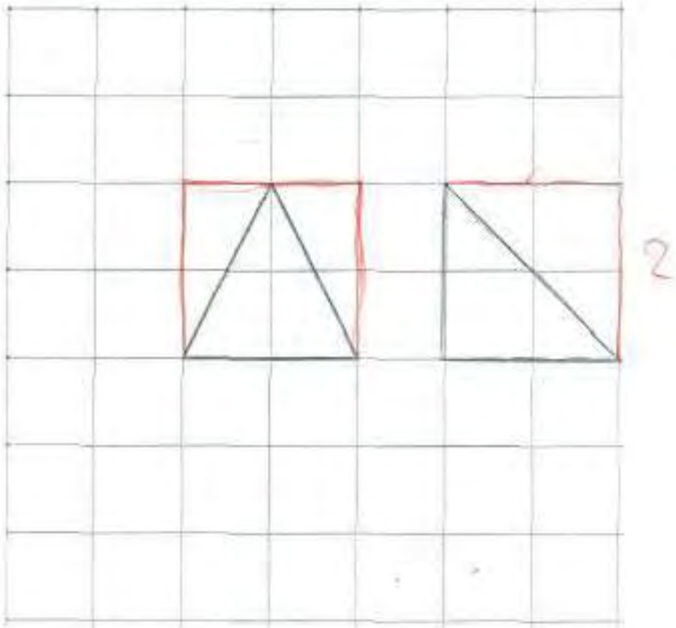
Σκορπιοί

Φύλλο εργασίας **19**

Στην αυλή του σχολείου μας πρόκειται να τοποθετηθεί ένα τριγωνικό παρτέρι για τα φύτεμα ενός πλατανιού. Υπάρχουν από τους τεχνικούς προς το Διευθυντή του σχολείου δύο προτάσεις (σχήμα 10) ~~και σχήμα 9)~~. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να επιλέξει αυτή κατά την οποία θα περισσεύει περισσότερος ελεύθερος χώρος για τα παιδιά. Τι θα πρέπει να ψάξουμε στα δύο τριγωνικά παρτέρια;

Να έχει το λιγότερο εμβαδόν

Να μη χρησιμοποιήσετε μετρήσεις με χάρακες, ούτε γεωμετρικούς τύπους του εμβαδού, αλλά τις τεχνικές μέτρησης με βάση τα ορθογώνια σχήματα, καθώς η αυλή είναι στρωμένη με τετράγωνες πλάκες. Να χρωματίσετε το περίγραμμα των ορθογωνίων που θα χρησιμοποιήσετε για τη μέτρηση.



Σχήμα 10

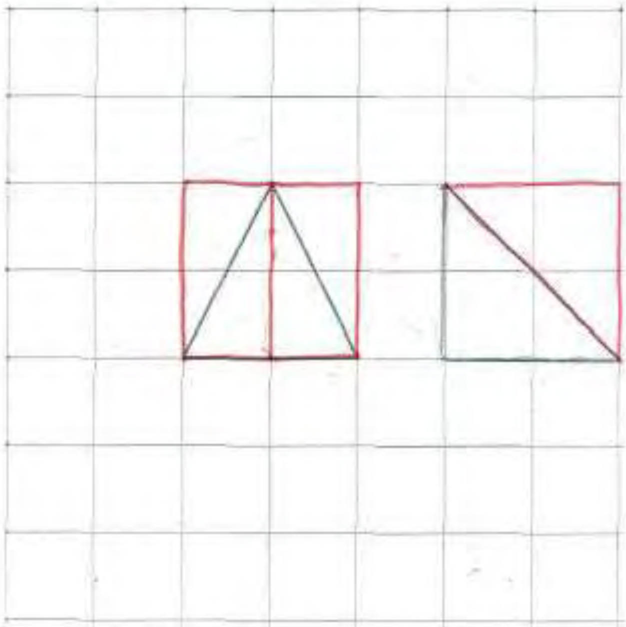
Χρύσα Τσώτη

Φύλλο εργασίας 19

Στην αυλή του σχολείου μας πρόκειται να τοποθετηθεί ένα τριγωνικό παρτέρι για το φύτεμα ενός πλατανιού. Υπάρχουν από τους τεχνικούς προς το Διευθυντή του σχολείου δύο προτάσεις (σχήμα 10) ~~και σχήμα 11~~. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να επιλέξει αυτή κατά την οποία θα περισσεύει περισσότερος ελεύθερος χώρος για τα παιδιά; Τι θα πρέπει να ψάξουμε στα δύο τριγωνικά παρτέρια;

Να έχει λιγότερο εμβαδόν

Να μη χρησιμοποιήσετε μετρήσεις με χάρακες, ούτε γεωμετρικούς τύπους του εμβαδού, αλλά τις τεχνικές μέτρησης με βάση τα ορθογώνια σχήματα, καθώς η αυλή είναι στρωμένη με τετράγωνες πλάκες. Να χρωματίσετε το περίγραμμα των ορθογωνίων που θα χρησιμοποιήσετε για τη μέτρηση.

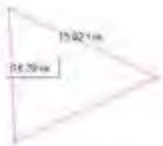


Σχήμα 10

Είναι και τα δύο ίσα

Φύλλο εργασίας 20

Στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri δημιουργείστε ένα τρίγωνο και ενεργοποιήστε τα εργαλεία μέτρησης περιμέτρου και εμβαδού.



Σύρετε διαδοχικά κάποια κορυφή και παρατηρήστε τις μεταβολές στις τιμές τους. Η τιμή του εμβαδού μεγαλώνει πάντα όταν μεγαλώνει η τιμή της περιμέτρου;

Απάντηση: ……………………………………………………………………………………

Υποθέστε και απαντήστε διερευνώντας στο περιβάλλον του Cabri εάν:

Α) Δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα είναι πάντοτε και ισοπεριμετρικά;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Β) Δύο ισοπεριμετρικά τρίγωνα είναι πάντοτε και ισοεμβαδικά;

……………………………………………………………………………………………

Chiha Towh

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Με τα δύο δυναμικά ξύλινα τρίγωνα να φτιάξετε δύο διαφορετικά τρίγωνα, τα οποία όμως να έχουν ίδιο εμβαδό. Αφού τα φτιάξετε να αιτιολογήσετε γιατί είναι ισοεμβαδικά.

Είναι ισοεμβαδικά γιατί ...έχουν ίδιο μήκος βάσης...
και ίδιο μήκος ύψου (βάση = 26εκ. ύψος = 30 εκ.)

Στη συνέχεια να ~~επαληθεύσετε εάν είναι σωστές οι κατασκευές σας~~ βρείτε (πόσο εμβαδόν έχει το κάθε τρίγωνο).

$$E_{τρ.} = \frac{26 \cdot 30}{2} = \frac{780}{2} = 390$$

China Town

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Στο γεωπίνακα να φτιάξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 4 κουτάκια και ύψος 2 κουτάκια. Έπειτα φτιάξτε ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 2 κουτάκια, αλλά να είναι ισοεμβαδικό με το πρώτο.

Πόσα κουτάκια θα είναι το ύψος του δεύτερου τριγώνου; ...4...

Γιατί; Αφού η βάση μειώθηκε στο μισό
έτσι έπρεπε να το διπλασιάσουμε

Στο τέλος να υπολογίσετε το εμβαδόν και των δύο τριγώνων με βάση τα κουτάκια του γεωπίνακα.

Α τρίγωνο: ...4...

Β τρίγωνο: ...4...

china town

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

Έχουμε φτιάξει στο λογισμικό Cabri ένα τρίγωνο με μήκος βάσης 8 εκατοστά και ύψος 5 εκατοστά. Εάν ένα άλλο τρίγωνο έχει μήκος βάσης 4 εκατοστά, πόσο θα πρέπει να είναι το ύψος του για να είναι ισοεμβαδικό με το πρώτο; 10.. εκ.

Ποια η απόσταση των δύο παραλλήλων εάν το βάζαμε μέσα σε αυτές; 10εκ.

Να το δημιουργήσετε και να μετρήσετε τα ύψη με τα εργαλεία του λογισμικού.

Σκορπιοι

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 4

Όταν μεγαλώνει η περίμετρος ενός τριγώνου, μεγαλώνει πάντα και το εμβαδόν του;

ναι, Όχι....

Γιατί; η περίμετρος δεν έχει σχέση με το εμβαδόν του.

china town

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 4

Όταν μεγαλώνει η περίμετρος ενός τριγώνου, μεγαλώνει πάντα και το εμβαδόν του;

Όχι......

Γιατί; Γιατί το εμβαδόν του τριγώνου δεν εξαρτάται από την περίμετρο αλλά απο την βάση και το ύψος