ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΣΤΗΝ ΤΕΤΑΡΤΗ (Δ΄) ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ»

της φοιτήτριας

ΜΑΝΝΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

Α.Μ.:0110063

Επιβλέποντες καθηγητές:

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος

ΒΟΛΟΣ, 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Τριανταφυλλίδη Τριαντάφυλλο κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αλλά και την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της πτυχιακής μου εργασίας.

Επίσης , θα ήθελα να ευχαριστήσω τον δεύτερο επιβλέποντα κ. Χατζηκυριάκο Κωνσταντίνο για τις ουσιώδεις συμβουλές αλλά και την πολύτιμη βοήθειά του σχετικά με το υλικό αλλά και την διευθέτηση της πτυχιακής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλοί ερευνητές προβληματίστηκαν με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες στη μάθηση της Γεωμετρίας και τις μετρήσεις και προσπάθησαν να εξηγήσουν γιατί συμβαίνει αυτό και πώς μπορούν να παρέμβουν διδακτικά οι εκπαιδευτικοί, ώστε να γίνουν πιο κατανοητές στους/ις μαθητές/τριες. Στην παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε μία διδακτική παρέμβαση σε μαθητές/τριες της Τετάρτης (Δ΄) Τάξης του Δημοτικού Σχολείου η οποία διήρκησε περίπου ένα μήνα. Συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε μία προσέγγιση διαφορετική από την παραδοσιακή στην οποία σκοπός είναι η προσέγγιση των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού καθώς και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τις σχέσεις που συνδέουν αυτά τα δύο μεγέθη με τη χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών υλικών (γεωπίνακες, τάνγκραμ, πεντόμινο). Παράλληλα, ερευνάται και η σύνδεση με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους αξιοποιώντας τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του van Hiele. Επιπλέον, σκοπός της έρευνας είναι μέσα από μία σειρά οργανωμένων δραστηριοτήτων από το απλό προς το σύνθετο οι μαθητές/τριες να οδηγηθούν μόνοι τους στην ανακάλυψη των σχέσεων που συνδέουν την Περίμετρο με το Εμβαδό αλλά και το αντίστροφο, ελέγχοντας κάθε φορά και τον τρόπο με τον οποίο εκφράζουν αυτή τη σύνδεση σε γλωσσικό επίπεδο. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν πολύ ικανοποιητικά και μέσα από αυτά αναδεικνύεται η θετική συμβολή των χειραπτικών υλικών στη μάθηση διότι, όπως παρατηρήθηκε, αυξήθηκε κατά πολύ η επίδοση των μαθητών/τριών στην κατανόηση των εννοιών και κυρίως των σχέσεων που συνδέουν την Περίμετρο με το Εμβαδόν. Πρόκειται για σχέσεις που γίνονται δύσκολα κατανοητές και ο μόνος τρόπος για να τις αφομοιώσουν και να τις κατακτήσουν είναι να οδηγηθούν μόνοι τους σε αυτή τη διάκριση μέσα από κατασκευές και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τέλος, θα καταλήγαμε λέγοντας πως η συμβολή των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών γενικά, αλλά και της Γεωμετρίας ειδικότερα, είναι ένα θέμα που χρειάζεται να διερευνηθεί περισσότερο, για το λόγο ότι εμπλέκει πολλές παραμέτρους στη διερεύνησή του, οι οποίες είναι όλες ουσιαστικής και κρίσιμης σημασίας για τη μαθησιακή διαδικασία.

ΛΕΞΕΙΣ- ΚΛΕΙΔΙΑ: Περίμετρος, Εμβαδόν, χειραπτικά υλικά, γεωμετρικές έννοιες, μέτρηση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Τα Μαθηματικά είναι πρακτικές που
περιλαμβάνουν απαρίθμηση, μέτρηση,
εντόπιση, παιχνίδι, σχεδιασμό, εξήγηση...
Τα Μαθηματικά είναι το τέχνημα ενός ιδιαίτερου πολιτισμού.»
«Allan Bishop, 1988»

Η διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας είναι πολύ σημαντική στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Ιδιαίτερα, οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού και η μέτρησή τους, είναι πρωταρχικής σημασίας για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Δεν είναι τυχαίο ότι η γεωμετρία και οι μετρήσεις κατέχουν σημαντική θέση στα αναλυτικά προγράμματα όλων των βαθμίδων της Εκπαίδευσης και ειδικότερα της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, όπου αποτελούν δύο βασικούς άξονες γνωστικού περιεχομένου, ήδη από την Πρώτη (Α΄) τάξη του Δημοτικού Σχολείου. Επιπλέον, είναι από τις θεματικές περιοχές που έχουν παραμείνει σχετικά αλώβητες μέσα από τις κατά καιρούς αλλαγές που έχουν πραγματοποιηθεί στην ύλη των Μαθηματικών στα σχολεία, σε αντιδιαστολή με θέματα τα οποία έχουν προστεθεί ή αφαιρεθεί από τη διδασκόμενη ύλη, ανάλογα με τις εκάστοτε επικρατούσες αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτός ίσως είναι και ο λόγος που έχουν αποτελέσει και συνεχίζουν να αποτελούν ζωτικό χώρο έρευνας στο χώρο της διδακτικής των Μαθηματικών.

Οι γεωμετρικές έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού απλών σχημάτων εισάγονται στην Τετάρτη (Δ΄) τάξη του Δημοτικού Σχολείου. Μια ανασκόπηση στη σχετική βιβλιογραφία (Παπαδόπουλος & Δαγδιλέλης, 2001) δείχνει ότι η κατανόηση της έννοιας του Εμβαδού, όπως και πολλών άλλων μαθηματικών εννοιών, παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες για τους μαθητές/τριες, οι οποίοι πολλές φορές δεν αντιλαμβάνονται ορθά την έννοια του Εμβαδού, ούτε τις τεχνικές για τον υπολογισμό του. Η μέχρι τώρα εμπειρία έχει δείξει πως υπάρχει μια σύγχυση στους μαθητές/τριες σε σχέση με την έννοια του Εμβαδού, της μέτρησής του, καθώς και σε άλλες έννοιες που εμπλέκονται άμεσα στην προσέγγιση του θέματος. Το γεγονός αυτό είναι συνισταμένη δύο συνιστωσών: αφενός των λανθασμένων αντιλήψεων τις οποίες έχουν αρκετοί εκπαιδευτικοί οι οποίοι διδάσκουν Γεωμετρία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση κι αφετέρου του αμφισβητήσιμου τρόπου με τον οποίο προσεγγίζονται διδακτικά οι δύο έννοιες. Το φαινόμενο ,επίσης, επιτείνεται και από τη θέση που έχουν οι σχετικές ενότητες μέσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Η «σύγκρουση» Περιμέτρου- Εμβαδού είναι ένα επιστημολογικό εμπόδιο που προξενεί δυσκολίες στην αντίληψη και κατανόηση από τους μαθητές/τριες αυτών των δύο σημαντικών γεωμετρικών εννοιών. Και κατά συνέπεια, απαιτείται να προσδιορίζονται από τους/ις εκπαιδευτικούς διδακτικές προσεγγίσεις, ώστε να ξεπεραστεί αυτή η «σύγκρουση». Για τον λόγο αυτό, έχουν πραγματοποιηθεί πολυάριθμες έρευνες που προσπαθούν να εντοπίσουν και να μελετήσουν σε βάθος τις παραμέτρους αυτές, να ερμηνεύσουν ενδεχόμενες λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για τα Εμβαδά και να προτείνουν διδακτικές λύσεις.

Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζεται μία απόπειρα προσέγγισης των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού στην Τετάρτη (Δ΄) τάξη του Δημοτικού Σχολείου καθώς και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τις σχέσεις που συνδέουν αυτά τα δύο μεγέθη με τη χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών υλικών (γεωπίνακες, τάνγκραμ, πεντόμινο). Παράλληλα, ερευνάται και η σύνδεση με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους αξιοποιώντας τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του van Hiele. Ο λόγος που επιλέχθηκε αυτό το θέμα είναι ότι δεν βρέθηκε παρόμοια εργασία στην ελληνική βιβλιογραφία που να ερευνά την εξελικτική πορεία που εμφανίζουν οι μαθητές/τριες για τη σχέση συγκεκριμένα των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού στην Τετάρτη (Δ΄) τάξη του Δημοτικού Σχολείου, καθώς στις περισσότερες δίνεται βάση στην κατανόηση της έννοιας κυρίως του Εμβαδού μέσα από τη χρήση λογισμικών προγραμμάτων.

Στο **πρώτο μέρος** της εργασίας παρουσιάζεται ο σκοπός της έρευνας, το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε, μια ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας για τη Γεωμετρία, εναλλακτικές ιδέες των μαθητών/τριών, προηγούμενες έρευνες, η θέση της στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τέλος η διδακτική προσέγγιση και η μεθοδολογία στην οποία στηρίχτηκε η συγκεκριμένη έρευνα παρουσιάζοντας παράλληλα και το πεδίο στο οποίο εξελίχθηκε.

Στο **δεύτερο μέρος**, το οποίο είναι το ερευνητικό, αναφέρονται αναλυτικά το δείγμα, το ερευνητικό υλικό και η ανάλυσή του, γίνεται αναλυτική παρουσίαση των δραστηριοτήτων που πραγματοποιήθηκαν καθώς και των αποτελεσμάτων που προέκυψαν. Ακολουθούν τα συμπεράσματα και κάποιες προτάσεις.

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: «ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΣΤΗ Δ΄ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ»

Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία στηρίχτηκε η έρευνα είναι τα εξής:

- Ποιές είναι οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών/τριών καθώς και οι δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές/τριες της Δ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου όταν επεξεργάζονται τις έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού;
- Ποιά είναι η εξελικτική πορεία που εμφανίζουν οι μαθητές/τριες σε σχέση με τις έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού και πώς αντιλαμβάνονται τις σχέσεις που συνδέουν αυτά τα δύο μεγέθη με τη χρήση χειραπτικών υλικών (γεωπίνακες, τάγκραμ, πεντόμινο) ;

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε μέσω της διδακτικής παρέμβασης που σχεδιάστηκε για μαθητές/τριες 10 ετών με τη χρήση συγκεκριμένων χειραπτικών υλικών (γεωπίνακες, τάγκραμ, πεντόμινο) και με τη χρήση φύλλων εργασίας για την επέκταση των δραστηριοτήτων. Επιπλέον, μέσα από τις δραστηριότητες σκοπός της έρευνας είναι οι μαθητές/τριες να οδηγηθούν μόνοι τους στην ανακάλυψη των σχέσεων που συνδέουν την Περίμετρο με το Εμβαδό αλλά και το αντίστροφο, ελέγχοντας κάθε φορά και τον τρόπο με τον οποίο εκφράζουν αυτή τη σύνδεση σε γλωσσικό επίπεδο. Στη συγκεκριμένη έρευνα αυτό επιτυγχάνεται μέσω της βιωματικής μάθησης και αξιοποιώντας τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele καθώς παράλληλα παρατηρούνται και ενισχύονται οι γνώσεις των μαθητών/τριών στα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

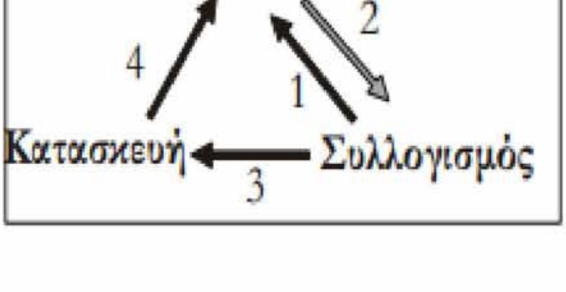
1.1 Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ Η ΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2003), «*οι μαθητές στα πλαίσια της Γεωμετρίας, μελετούν το χώρο μέσα στον οποίο ζουν και προσανατολίζονται, μετρούν, συγκρίνουν και σχηματίζουν νοερές εικόνες της μορφής των αντικειμένων. Μία από τις σημαντικές πλευρές της γεωμετρικής σκέψης είναι η νοερή απεικόνιση του χώρου που σχηματίζεται με τη χρήση των νοερών αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων και δισδιάστατων αντικειμένων και τη θεώρησή τους από διαφορετικές προοπτικές. Οι μαθητές μαθαίνουν τα γεωμετρικά σχήματα, τη δομή τους, αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους. Για να διαχειριστούμε και να περιγράψουμε το φυσικό χώρο που μας περιβάλλει διαθέτουμε ως μέσον τα γεωμετρικά μοντέλα και τη συλλογιστική του χώρου. Αυτά αποτελούν σημαντικά εργαλεία για να λύνουμε διάφορα προβλήματα*».

Η Κολέζα (2000), καταγράφει σαν προτεραιότητες κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο την εξερεύνηση, ονομασία, περιγραφή, ομαδοποίηση, σχεδιασμό και (κατα)μέτρηση συγκεκριμένων φυσικών αντικειμένων στο επίπεδο ή στο χώρο. Σύμφωνα με την ίδια, η μελέτη της Γεωμετρίας είναι απαραίτητη γιατί εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες:

1. *Διαδικασίες Οπτικοποίησης* για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης ή για μια υποκειμενική επαλήθευση και τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων.
2. *Διαδικασίες Κατασκευής* με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες.
3. *Διαδικασίες Συλλογισμού.*

Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να εκτελεστούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη αλλά ο συνδυασμός τους είναι απαραίτητος για τη γεωμετρική σκέψη. Συνδέονται όπως δείχνει το σχήμα:



Πηγή σχήματος: Κολέζα(2000), σελ: 258

Η αντίληψη και κατανόηση του χώρου είναι απαραίτητη για την ερμηνεία και αποτίμηση του κόσμου μας (Battista, 1999). Ένας κόσμος γεμάτος με σχήματα, μορφές, διαστάσεις, χώρους που εμπεριέχουν άλλους χώρους. Οι διαισθητικές- εμπειρικές γνώσεις για δισδιάστατες και τρισδιάστατες μορφές και τα χαρακτηριστικά τους, οι αλληλεξαρτήσεις αυτών των μορφών και τα αποτελέσματα αλλαγών πάνω τους, είναι σημαντικές πτυχές της χωρικής αίσθησης. Οι μαθητές/τριες που αναπτύσσουν μια ισχυρή αίσθηση των χωρικών σχέσεων και που έχουν κάνει κτήμα τους τις έννοιες και τη γλώσσα της Γεωμετρίας, είναι καλύτερα προετοιμασμένα να κατακτήσουν τον κόσμο των αριθμών και της μέτρησης, καθώς επίσης και άλλα προηγμένα μαθηματικά πεδία. Όταν το σχολείο αποτυγχάνει να δώσει στους μαθητές/τριες ένα ικανοποιητικό υπόβαθρο για τη μέτρηση (measurement) και τη νοερή απεικόνιση (visualization), μόνο εκείνοι οι μαθητές που εξασκούνται έξω από το σχολείο (μέσω του παιχνιδιού, της καθημερινής ζωής) θα μπορέσουν να κατανοήσουν την Τυπική Γεωμετρία όταν την συναντήσουν.

Η παραδοσιακή Γεωμετρία η οποία κωδικοποιήθηκε από τον Ευκλείδη πριν από δύο χιλιετίες, είχε ως βάση της αυτό που μπορούν τα μάτια να δουν. Ο χώρος (space) και τα σχήματα (shapes) παρέχουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο ο μαθητής μπορεί να αρχίσει να αποκτά μαθηματική σκέψη. Αν το πραγματικό περιβάλλον είναι η αρχή και η βάση αυτής της σκέψης, η ανάπτυξη της απαιτεί μια πιο γενική και αφηρημένη θεώρηση των πραγμάτων. Αλλά ακόμη και στα πιο αφηρημένα στάδια έχουμε να αναμετρηθούμε με σχήματα και κάποιου είδους χώρο. Μπορεί τα μάτια μας να μη μπορούν να δουν τις οπτικές αναπαραστάσεις τους (δεν υφίσταται κάποιο αντίστοιχο φυσικό οπτικό ερέθισμα), αλλά υπάρχουν οι αναπαραστάσεις μέσω των «νοητικών ματιών» μας (minds' eyes). Κατασκευάζουμε δηλαδή στο μυαλό μας την θεωρητική τους αναπαράσταση. Υπάρχει σαφώς σύνδεση της Γεωμετρίας και της πραγματικότητας (Hershkowitz, Parzysz & Van Dormolen, 1996).

Πολλοί ερευνητές (DeGuire, 1987·Lawson & Chinnappan, 2000· Milauskas, 1987) αναδεικνύουν μια πολύ σημαντική συνεισφορά του μαθήματος της Γεωμετρίας στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών/τριών μέσω των ευκαιριών που δίνει για επίλυση προβλημάτων (problem solving). Προσφέρει και το πλαίσιο επίλυσης διαφόρων προβλημάτων και την εκμάθηση στρατηγικών για επίλυση προβλημάτων σε άλλες θεματικές περιοχές. Η διδασκαλία της μπορεί να γίνει μια πλούσια πηγή δραστηριοτήτων για επίλυση με επαγωγικό και παραγωγικό τρόπο έτσι ώστε να ενισχύεται η λογική, η δημιουργική σκέψη και η «κριτική» ματιά των μαθητών.

Ο Fishbein (1993, όπ. αναφ. στην Κολέζα, 2009) αναφέρει ότι η διδασκαλία οικοδόμησης γεωμετρικών εννοιών στη σκέψη των παιδιών δεν πρέπει να θεωρείται ένα αυθόρμητο, προφανές αποτέλεσμα ενός συνηθισμένου μαθήματος Γεωμετρίας. Αντίθετα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας πρέπει να οργανώνεται στη βάση συγκεκριμένων στόχων και λαμβάνουσα υπόψη τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών/τριών (Κολέζα, 2009).

1.2 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Έχουν γίνει διάφορες έρευνες κατά καιρούς, οι οποίες αναλύουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας διαφόρων σχημάτων. Όσον αφορά την αντίληψη της ποσοτικής έννοιας του εμβαδού από τους μαθητές/τριες αυτή θεωρείται ότι είναι ένα μονοδιάστατο μέγεθος σύμφωνα με τους αναπτυξιακούς ψυχολόγους, με τη θεωρία (Flavell, 1963) του Piaget να παίζει μεγάλο ρόλο για την αποδοχή αυτής της αντίληψης (Silverman & Paskewitz, 1988).

Ο Piaget υποστήριξε ότι η σκέψη των μαθητών/μαθητριών ηλικίας κάτω των 7-8 ετών είναι επικεντρωμένη, εννοώντας ότι η σκέψη τείνει να επικεντρωθεί σε μια μόνο πτυχή μιας κατάστασης αποκλείοντας τις άλλες πτυχές. Η επικέντρωση, σύμφωνα με τον Piaget, είναι μια συνέπεια της έλλειψης της κινητικότητας της πρώιμης σκέψης, ένας περιορισμός που οδηγεί το παιδί να παίρνει αποφάσεις, οι οποίες κυριαρχούνται από την αντίληψη. Τα παιδιά είναι επιρρεπή σε μονοδιάστατες εκτιμήσεις και αποφάσεις, κάνοντας συχνή χρήση αποθηκευμένων κανόνων, οι οποίοι κανόνες κατευθύνουν το παιδί να κρίνει ένα ερέθισμα με βάση τις πιο σημαντικές φαινομενικά διαστάσεις του (Siegler, 1983). Επίσης, ο Siegler υποστηρίζει ότι, τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν μονοδιάστατους κανόνες για να υπολογίσουν έννοιες όπως το εμβαδό μιας επιφάνειας, επειδή πολύ απλά δεν κατέχουν τις αντιλήψεις σχετικά με τις ποσοτικές έννοιες του εμβαδού, τις οποίες έχουν οι ενήλικες.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί και ένα άλλο χαρακτηριστικό των μαθητών/τριών στις μικρές τάξεις που είναι το «φαινόμενο του προτύπου». Το φαινόμενο αυτό είναι απόρροια των οπτικό-αντιληπτικών περιορισμών που επηρεάζουν τις δυνατότητες αναγνώρισης και σύγκρισης γεωμετρικών σχημάτων. Σύμφωνα με τους Hershkowitz, Parzysz & Van Dormolen (1996) κάθε γεωμετρική έννοια έχει ένα ή περισσότερα πρότυπα παραδείγματα τα οποία δημιουργούνται πρώτα και εντάσσονται στα γνωστικά σχήματα των μαθητών/τριών. Τα πρότυπα παραδείγματα παρουσιάζουν όλα τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας και εκείνα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που έχουν ισχυρά οπτικά σημεία.

1.3 ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ VAN HIELE

Στα τέλη της δεκαετίας του ΄50, οι Ολλανδοί εκπαιδευτικοί Pierre van Hiele και η σύζυγός του, Dina van Hiele-Geldof, προβληματίζονταν με τις δυσκολίες των μαθητών/τριών τους στη Γεωμετρία.

Ο Pierre van Hiele επηρεάστηκε από το έργο του Piaget (κατασκευή της γνώσης), σύμφωνα με το οποίο, το άτομο κατασκευάζει τη γνώση εσωτερικά, μέσω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον του. Ενώ η Πιαζετιανή θεωρία σχετίζει τη γεωμετρία ως επιστήμη του χώρου, η θεωρία Van Hiele (1986, όπ, αναφ στην Κολέζα, 2009) συνδυάζει τη γεωμετρία ως επιστήμη του χώρου και τη γεωμετρία ως εργαλείο με το οποίο περιγράφεται η μαθηματική δομή του χώρου.

Το άτομο περνάει από τέσσερα στάδια ανάπτυξης, το **Αισθητικοκινητικό** (περίπου 0-2 ετών), το **Προεννοιολογικό** (περίπου 2-7 ετών), των **Συγκεκριμένων Λειτουργιών** (περίπου 7-12) και των **Τυπικών Λειτουργιών** (περίπου 12 ετών- ενήλικος). Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο εξαρτάται από τη βιολογική ωρίμανση του ατόμου και περιλαμβάνει δύο συμπληρωματικές διαδικασίες, την **αφομοίωση** (assimilation) (=διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες δομές γνώσης) και τη **συμμόρφωση** (accommodation) (=διαδικασία τροποποίησης των γνωστικών δομών του ατόμου) (Κολέζα, 2000 · Τρέσσου, 1993).

Επομένως, για να μπορέσει το παιδί να αφομοιώσει μία πληροφορία, θα πρέπει να είναι έτοιμο, να έχει κατασκευάσει, δηλαδή, τις απαραίτητες νοητικές δομές, που απαιτεί η συγκεκριμένη πληροφορία. Όταν όμως η διδασκαλία ενός αντικειμένου απαιτεί λειτουργίες ανώτερου γνωστικού επιπέδου, από αυτό στο οποίο βρίσκεται το παιδί, τότε αυτό δεν μπορεί να ανταποκριθεί (Κολέζα, 2000).

Οι van Hiele επηρεάστηκαν, επίσης, και από το έργο του Vygotsky (θεωρία του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου), σύμφωνα με το οποίο, το παιδί μπορεί να λειτουργήσει μαθησιακά καλύτερα, μέσω της αλληλεπίδρασης ενηλίκου ή ομάδας συνομηλίκων, μέσα από τη μίμηση κάποιων λειτουργιών, απ’ ότι μόνο του, χωρίς βοήθεια. Για να εκφράσει τη μίμηση, στα πλαίσια μιας κοινωνικο-πολιτισμικής δραστηριότητας ο Vygotsky εισήγαγε την ιδέα της **ζώνης επικείμενης ανάπτυξης** (zone of proximal development). Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης είναι η απόσταση ανάμεσα στο αναπτυξιακό επίπεδο, στο οποίο βρίσκεται το παιδί, με βάση τα προβλήματα που μπορεί να επιλύσει μόνο του, χωρίς εξωτερική βοήθεια, και στο εν δυνάμει επίπεδο, με βάση τα προβλήματα που μπορεί να επιλύσει με τη βοήθεια ενός ενηλίκου (εκπαιδευτικού/γονέα) ή σε συνεργασία με ικανότερους συνομηλίκους (Κολέζα, 2009)

Στο πλαίσιο της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης, ενεργοποιούνται εσωτερικές αναπτυξιακές διεργασίες, λόγω της αλληλεπίδρασης του παιδιού με άτομα του περιβάλλοντός του (ενηλίκους/ συνομηλίκους), και, μ' αυτόν τον τρόπο, μπορεί να αποκομίσει τα μεγαλύτερα μαθησιακά οφέλη. Αυτό δε σημαίνει ότι ο/η μαθητής/τρια μαθαίνει αυτόματα. Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης αποτελεί ένα υποστηρικτικό πλαίσιο, μια «σκαλωσιά», που υποβοηθά τη μάθηση. Ο/Η δάσκαλος/ α θα πρέπει να δημιουργήσει ένα ευνοϊκό μαθησιακό περιβάλλον για τους/τις μαθητές/ τριες, με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων ή με τη δημιουργία καταστάσεων επικοινωνίας ανάμεσα τους (Κολέζα, 2000). Φαίνεται, λοιπόν, πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος του δασκάλου στην κατάκτηση του επόμενου αναπτυξιακού επιπέδου από το μαθητή.

Σύμφωνα με την θεωρία των Pierre και Dina van Hiele, οι μαθητές προχωρούν στη Γεωμετρία μέσα από κάποια επίπεδα σκέψης που ξεκινούν από έναν χαρακτήρα πλήρως οπτικοποιημένο και φτάνουν σε προοδευτικά αυξανόμενα επίπεδα πιο εξεζητημένου χαρακτήρα. Στα πλαίσια της θεωρίας τους (van Hiele, 1986) ισχυρίστηκαν ότι: η μάθηση είναι μία ασυνεχής διαδικασία, ότι τα επίπεδα είναι σειριακά και ιεραρχικά δομημένα και επομένως ότι για να λειτουργεί επαρκώς ο μαθητής σε κάποιο επίπεδο πρέπει να έχει προσλάβει σε μεγάλο βαθμό μέρος του προηγούμενου επιπέδου, ότι έννοιες που δεν έγιναν εμφανώς κατανοητές σε ένα επίπεδο καθίστανται ρητά κατανοητές στο επόμενο και ότι κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του σύστημα σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά.

Η θεωρία των Van Hiele ιεραρχεί τον τρόπο κατανόησης των ιδεών του χώρου σε πέντε επίπεδα. Καθένα από τα πέντε επίπεδα περιγράφει τις συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιούνται στην εξέταση ή στη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων. Τα επίπεδα δεν περιγράφουν τις γνώσεις που κατέχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο, αλλά τον τρόπο σκέψης και τους τύπους γεωμετρικών ιδεών που επεξεργάζεται νοητικά. Καθώς ένα άτομο περνάει από το ένα επίπεδο στο άλλο, το αντικείμενο των γεωμετρικών συλλογισμών αλλάζει. Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από τα αντικείμενα της σκέψης και τα προϊόντα της σκέψης.

Επίπεδο 0 : Αναγνώρισης (Recognition) ή Οπτικοποίησης (Visualization)

Οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μία ολότητα, με βάση τη μορφή τους. Τα γεωμετρικά σχήματα ,για παράδειγμα, αναγνωρίζονται από τη μορφή τους συνολικά, δηλαδή, από τη φυσική εμφάνισή τους και όχι από τα μέρη ή τις ιδιότητές τους. Λόγω ακριβώς του ότι στο επίπεδο αυτό η εμφάνιση είναι κυρίαρχη, αυτό μπορεί να επισκιάσει τις ιδιότητες του σχήματος. Αυτό έχει επίσης συνέπεια κατά τον προσδιορισμό των σχημάτων συχνά οι μαθητές να χρησιμοποιούν πρότυπες εικόνες των σχημάτων. Η επιχειρηματολογία τους καθώς και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούν επηρεάζεται από το πώς αντιλαμβάνονται κάτι.

Επίπεδο 1: Περιγραφικό (Description) ή Ανάλυσης (Analysis)

Στο επίπεδο αυτό τα σχήματα φέρουν τις ιδιότητές τους. Ο προσδιορισμός ενός σχήματος δεν τεκμηριώνεται πια επειδή «μοιάζει» αλλά επειδή έχει ορισμένες ιδιότητες. Στο επίπεδο αυτό η γλώσσα είναι σημαντική για την περιγραφή των σχημάτων. Οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να σκέφτονται σε επίπεδο κλάσης σχημάτων και όχι μεμονωμένων σχημάτων. Οι σκέψεις τους για ένα μεμονωμένο σχήμα μπορούν να γενικευτούν για όλα τα σχήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση. Όμως, οι σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών- ιδιοτήτων δεν μπορούν ακόμα να εξηγηθούν από τους μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο. Δεν εντοπίζεται ,δηλαδή, η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων και οι ορισμοί δεν είναι ακόμα κατανοητοί.

Επίπεδο 2: Άτυπης Παραγωγής (Informal Deduction) ή Διάταξης (Order)

Οι μαθητές/τριες κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων και μεταξύ των σχημάτων. Συνδέουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους και τα ταξινομούν σε κατηγορίες π.χ. «κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο, κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο». Είναι σε θέση ,δηλαδή, να αντιληφθούν ότι μια ιδιότητα είναι συνέπεια της άλλης και αρχίζουν να κατανοούν το ρόλο του ορισμού. Μπορούν να κάνουν απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς, αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν ή να συνθέσουν πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών τους. Υπάρχει όμως η εκτίμηση ότι είναι απαραίτητο ένα λογικό επιχείρημα.

Επίπεδο 3: Τυπικής Παραγωγής (Formal Deduction) ή Αφαίρεσης (Abstraction)

Οι μαθητές/τριες δεν είναι απλώς σε θέση να εξετάσουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά και τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Αναπτύσσουν συλλογισμούς για να αποδείξουν μία πρόταση χρησιμοποιώντας δεδομένα, μπορούν να αναπτύξουν μία απόδειξη με περισσότερους από έναν τρόπους, δημιουργούν θεωρήματα βασιζόμενοι σε αξιώματα και ορισμούς και τα αποδεικνύουν χρησιμοποιώντας εκφράσεις λογικής αιτιολόγησης. Στο Λύκειο η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει από αυτό το επίπεδο.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα (Rigor)

Οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της ακρίβειας για τη διατύπωση των γεωμετρικών θεωριών και είναι σε θέση να αναλύσουν διάφορα αξιωματικά συστήματα με μεγάλη αυστηρότητα. Αναπτύσσουν μια θεωρία χωρίς να προσπαθούν να της δώσουν κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία. Σ' αυτό το επίπεδο η Γεωμετρία αποκτά ένα γενικό χαρακτήρα και ευρύτερες εφαρμογές. Μία μειοψηφία μαθητών/τριών φτάνει σε αυτό κατά τη διάρκεια της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και οι περισσότεροι δεν φτάνουν ποτέ. (Van de Walle, 2005)

Χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele

Οι van Hiele καθόρισαν κάποιες γενικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το μοντέλο. Οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ σημαντικές για τους δασκάλους, καθώς προσφέρουν κατευθύνσεις για τη διδακτική πρακτική.

Συγκεκριμένα, τα προϊόντα της σκέψης κάθε επιπέδου συμπίπτουν με τα αντικείμενα της σκέψης του επόμενου. Τα αντικείμενα (δηλαδή οι ιδέες) πρέπει να δημιουργηθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε οι σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα να μπορούν να γίνουν το επίκεντρο του επόμενου επιπέδου (Van de Walle, 2005).

Τα χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele είναι τα εξής

- Τα επίπεδα είναι διαδοχικά. Οι μαθητές/τριες για να φτάσουν σε οποιοδήποτε επίπεδο πάνω από το βασικό (Επίπεδο 0), πρέπει να περάσουν από όλα τα προηγούμενα επίπεδα. Δεν είναι δυνατόν να προσπεράσουν κάποιο ή κάποια επίπεδα, ανεξάρτητα από την εκπαίδευση που θα λάβουν
- Τα Επίπεδα δεν εξαρτώνται από την ηλικία, όπως τα αναπτυξιακά στάδια του Piaget. Στο Επίπεδο 0 θα μπορούσε να είναι ένας/μία μαθητής/τρια της Γ΄ Δημοτικού αλλά και ένας/μία του Γυμνασίου.
- Η μετάβαση από το ένα Επίπεδο στο άλλο δεν γίνεται αυτόματα, με την πάροδο του χρόνου, αλλά κάτω από την επίδραση συγκεκριμένου προγράμματος διδασκαλίας-μάθησης. Ο κυριότερος παράγοντας που επηρεάζει την πρόοδο ενός μαθητή από το ένα Επίπεδο στο άλλο είναι η γεωμετρική εμπειρία.
- Κάθε Επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά. Η διδασκαλία ,λοιπόν, πρέπει πάντα να είναι προσαρμοσμένη στο επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές/τριες και όχι σε αυτό που ο/η δάσκαλος/α νομίζει ή επιθυμεί να βρίσκονται.

Οι φάσεις διδασκαλίας

Η θεωρία των γεωμετρικών επιπέδων του van Hiele περιγράφει επίσης πέντε «φάσεις μάθησης», που κινητοποιούνται μέσα από συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις. Αυτές οι παρεμβάσεις έχουν ως σκοπό να προωθήσουν την εξέλιξη της σκέψης των παιδιών από ένα επίπεδο στο επόμενο. Οι φάσεις αυτές είναι οι εξής:

Φάση 1: Πληροφόρηση (Inquiry)

Ο/Η δάσκαλος/α συζητά με τους μαθητές/τριες για το αντικείμενο της μελέτης, διαπιστώνει τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών/τριών, μαθαίνει πώς ερμηνεύουν το σχετικό λεξιλόγιο και τους δίνει οδηγίες για το θέμα που θα μελετήσουν. Έτσι, οι μαθητές/τριες εξοικειώνονται με το αντικείμενο και προετοιμάζονται για την επόμενη φάση.

Φάση 2: Καθοδηγούμενος Προσανατολισμός (Directed Orientation)

Ο/Η δάσκαλος/α οργανώνει προσεκτικά μια ακολουθία δραστηριοτήτων με την οποία οι μαθητές/τριες εξοικειώνονται με τις χαρακτηριστικές δομές και τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων και τελικά αρχίζουν να συνειδητοποιούν την κατεύθυνση που παίρνει η μελέτη. Οι μαθητές/τριες πρέπει να διευκολύνονται να εντοπίζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και ιδιότητες των σχημάτων και με βάση τις εμπειρίες τους να αρχίζουν να συσχετίζουν τα διάφορα σχήματα μεταξύ τους.

Φάση 3: Έκφραση- Ανάλυση (Explicitation)

Οι μαθητές/τριες βασιζόμενοι στις προηγούμενες εμπειρίες τους, ξεκαθαρίζουν τη χρήση της ορολογίας και εκφράζουν τη γνώμη τους για τις δομές που υπεισέρχονται στη μελέτη. Μπορούν μόνοι τους να παρατηρούν, καταγράφουν, συσχετίζουν, δημιουργούν ένα πλαίσιο συλλογισμών και οι δραστηριότητες πρέπει να προβάλλουν τις σχέσεις που αφορούν το αντικείμενο μελέτης.

Φάση 4: Ελεύθερος Προσανατολισμός (Free Orientation)

Οι μαθητές/τριες τώρα συναντούν εργασίες με πολλά βήματα ή εργασίες που μπορούν να ολοκληρωθούν με περισσότερους από έναν τρόπους. Αποκτούν εμπειρία στο να βρίσκουν μόνοι τους την κατεύθυνση που πρέπει να πάρουν για να λύσουν το πρόβλημα.

Φάση 5: Ολοκλήρωση (Integration)

Οι μαθητές/τριες επαναλαμβάνουν τις μεθόδους που έχουν τώρα στη διάθεσή τους και κάνουν μία σύνοψη. Εσωτερικεύουν τα αντικείμενα και τις σχέσεις τους και τα ενσωματώνουν σε ένα γνωστικό σχήμα. Ο/Η δάσκαλος/α βοηθάει αυτή τη διαδικασία παρέχοντας σφαιρικές απόψεις των γνώσεων που έχουν ήδη οι μαθητές/τριες, προσέχοντας να μην παρουσιάσουν νέες ή άσχετες ιδέες. (Κολέζα, 2009)

Βασικές ικανότητες στη Γεωμετρία σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele

Συγχρόνως με την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των παιδιών, και επικουρικά για την ομαλή εξέλιξή τους σε αυτά, λειτουργούν και καλλιεργούνται ορισμένες δεξιότητες γεωμετρικής φύσης. Προτείνονται πέντε κατηγορίες ικανοτήτων που θα πρέπει, στα πλαίσια της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, να αναπτύξουν οι μαθητές/τριες. Αυτές είναι: οι οπτικές ικανότητες, λεκτικές ικανότητες, ικανότητες σχεδίασης, λογικές ικανότητες και ικανότητες εφαρμογής.

Το περιεχόμενο αυτών των ικανοτήτων παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω μόνο για τα δύο πρώτα επίπεδα τα οποία καταγράφονται και μελετούνται στη συγκεκριμένη έρευνα:

Επίπεδο 0

Οπτικές: Αναγνώριση διαφόρων σχημάτων από μία εικόνα. Αναγνώριση μιας πληροφορίας που δίνεται με ένα σχήμα.

Λεκτικές: Συσχέτιση του σχήματος με τη σωστή ονομασία. Ερμηνεία προτάσεων που περιγράφουν σχήματα. Αναγνώριση σχήματος από την περιγραφή του.

Σχεδίασης: Άνετη κατασκευή σχημάτων και ονομασία των διαφόρων μερών τους.

Λογικές: Συνειδητοποίηση της ύπαρξης διαφορών ανάμεσα στα σχήματα. Κατανόηση της διατήρησης του σχήματος σε διάφορες σχέσεις.

Εφαρμογής: Αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής.

Επίπεδο 1

Οπτικές: Διάκριση των ιδιοτήτων ενός σχήματος. Εντοπισμός ενός σχήματος ως μέρος ενός πιο σύνθετου σχήματος.

Λεκτικές: Άνετη περιγραφή των διάφορων ιδιοτήτων ενός σχήματος.

Σχεδίασης: Μετάφραση προφορικής πληροφορίας σε εικόνα. Χρήση των ιδιοτήτων ενός σχήματος για την κατασκευή του.

Λογικές: Αντίληψη της ομαδοποίησης των σχημάτων σε διάφορες κατηγορίες. Συνειδητοποίηση του ρόλου των ιδιοτήτων στο διαχωρισμό των σχημάτων.
Εφαρμογής: Αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων των φυσικών αντικειμένων. Αναπαράσταση φυσικών φαινομένων με σχέδιο ή με τη βοήθεια μοντέλου.
(Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος, 1999)

Αξιοποιώντας, λοιπόν, τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele έγινε μία προσπάθεια σε αυτήν την έρευνα να προσεγγιστούν οι έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού μέσα από δραστηριότητες που συνδυάζουν και την ανάπτυξη των ιδιοτήτων των σχημάτων. Μέσω της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιήθηκαν βιωματικές δραστηριότητες (απλές και σύνθετες, ατομικές και ομαδικές) που αφορούσαν την κατασκευή σχημάτων και την εύρεση τόσο της Περιμέτρου όσο και του Εμβαδού τους με τη χρήση άτυπων μονάδων μέτρησης. Στο τέλος κάθε δραστηριότητας γινόταν ο έλεγχος των σχημάτων που κατασκευάστηκαν παρατηρώντας τις σχέσεις Περιμέτρου- Εμβαδού. Παράλληλα, γινόταν και το πέρασμα από το Επίπεδο 0 στο Επίπεδο 1 καθώς και ο έλεγχος για την πλήρη κατάκτηση των βασικών ικανοτήτων του Επιπέδου 1 από όλους τους μαθητές/τριες ελέγχοντας κάθε φορά και τον τρόπο με τον οποίο εκφράζουν τις έννοιες σε γλωσσικό επίπεδο. Ο van Hiele θεωρεί πολύ σημαντικό τον ρόλο της γλώσσας για την μετάβαση των μαθητών από το ένα επίπεδο στο άλλο. Χρησιμοποιώντας οι μαθητές τη γλώσσα για να μιλήσουν και να περιγράψουν δομές, είναι δυνατό να συνειδητοποιήσουν τις σχέσεις και τον τρόπο σύνδεσης μεταξύ αυτών των δομών. Μόλις δημιουργηθούν οι συνδέσεις είναι δυνατό να επιτευχθεί ένα πιο υψηλό επίπεδο σκέψης το οποίο επιδιώκεται με τη σειρά που πραγματοποιούνται και οι δραστηριότητες στη συγκεκριμένη έρευνα. (Κολέζα, 2009)

1.4 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

Οι μαθητές από τις εμπειρίες τους δημιουργούν τις δικές τους ιδέες-αντιλήψεις (conceptions) για το φυσικό κόσμο, που δεν είναι απλές παρανοήσεις (misconceptions) που οφείλονται στην κακή πληροφόρηση, αλλά δημιουργούνται από δικά τους ερευνητικά σχήματα (νοητικές αναπαραστάσεις για ό,τι συμβαίνει γύρω τους). Αυτές είναι οι λεγόμενες εναλλακτικές ιδέες των μαθητών.

Οι έρευνες για τις αντιλήψεις των μαθητών/τριών σχετικά με τη μέτρηση του Εμβαδού, δίνουν έμφαση στις ποικίλες παραμέτρους της έννοιας αυτής. <u>Οι πιο βασικές παράμετροι που έχουν προσδιοριστεί και έχουν εντοπιστεί και στην παρούσα έρευνα είναι οι εξής:</u>

- Σύγχυση Περιμέτρου- Εμβαδού (πιστεύουν ότι το ένα καθορίζει το άλλο).
- Δυσκολία κατανόησης της διατήρησης του Εμβαδού μιας επιφάνειας.
- Εγκλωβισμός στους μαθηματικούς τύπους με αποτέλεσμα να συγχέουν την πράξη του πολλαπλασιασμού με την Περίμετρο και την πράξη της πρόσθεσης με το Εμβαδόν.
- Δυσκολία κατανόησης των σχέσεων που συνδέουν την Περίμετρο με το Εμβαδό (π.χ. ένα σχήμα μπορεί να έχει την ίδια Περίμετρο αλλά διαφορετικό Εμβαδόν και το αντίστροφο)
- Δυσκολία στη διαδικασία μέτρησης (περιορισμένη ικανότητα να οργανώσουν τα κομμάτια πάνω σε μια επιφάνεια με αποτέλεσμα να τα τοποθετούν με κενά μεταξύ τους ή να επικαλύπτονται).
- Ολοκληρωμένη κάλυψη με καταμέτρηση, αλλά χωρίς να μπορούν να εξηγήσουν τη στρατηγική τους (δεν λαμβάνονται υπόψη οι στήλες και οι γραμμές).
- Δυσκολία στους μετασχηματισμούς σχημάτων και στην εύρεση του Εμβαδόν τους. Αυτό συνεπάγεται με τον εγκλωβισμό των μαθητών/τριών σε προτυπικά φαινόμενα τα οποία παρατηρήθηκαν κυρίως στον προσανατολισμό της αναπαράστασης ενός σχήματος τόσο στον πίνακα όσο και στη σελίδα.

1.5 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Οι παραπάνω εναλλακτικές ιδέες έχουν ήδη παρατηρηθεί και από άλλους ερευνητές στην προσπάθειά τους να βρουν τρόπους διδασκαλίας των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού.

Έρευνες εστιασμένες στην κατανόηση από μέρους των παιδιών του χώρου και των γεωμετρικών σχημάτων, άρχισαν από τη δεκαετία του ’50 με πρώτες αυτές των ψυχολόγων για την ανάπτυξη της «γεωμετρικής κατανόησης» (Piaget & Inhelder, 1956, 1967).

Είναι γενικά αποδεκτό ότι τα μαθηματικά θα πρέπει να διδάσκονται με κατανόηση (Hiebert & Lefevre, 1986), έτσι ώστε οι μαθητές/τριες να μπορούν να κινούνται πέρα από τη γνώση των μαθηματικών διαδικασιών και να αναπτύξουν μια κατανόηση του αντικειμένου, η οποία θα τους επιτρέπει να γίνουν ενεργοί δέκτες της γνώσης. Συγκεκριμένα, στο αντικείμενο του Εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων, οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν μαθηματικές διαδικασίες με έναν παθητικό τρόπο και βασίζονται στη χρήση των αλγεβρικών τύπων, χωρίς να έχουν επαρκή κατανόηση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών (Dickson, Brown & Gibson, 1984).

Επιπλέον, πολλοί μαθητές συγχέουν το Εμβαδόν με τη Περίμετρο και δουλεύουν προσθετικά όταν αποπειρώνται να επιλύσουν σχετικά προβλήματα. Προσθέτουν τα μήκη των πλευρών ή υποστηρίζουν πως ο διπλασιασμός του μήκους των πλευρών ενός τετραγώνου συνεπάγεται το διπλασιασμό του Εμβαδού του. Αυτή η παρανόηση επηρεάζει την ικανότητά τους να πραγματοποιούν με επιτυχία τον υπολογισμό των Εμβαδών, όπως έδειξε πρόσφατη έρευνα του Gillian Kidman(2001), που αποκάλυψε προσθετική σκέψη στον υπολογισμό του Εμβαδού. Η έρευνα απέδωσε αυτήν τη συμπεριφορά και επιμονή στον τρόπο σκέψης, ακριβώς στο γεγονός ότι οι μαθητές/τριες έχοντας δυσκολία να ξεχωρίσουν τις δύο έννοιες, ακολούθησαν τη διαίσθησή τους η οποία τους υποδείκνυε την προσθετική διαδικασία. Την ίδια δυσκολία εντόπισαν και οι Clements & Sterfan, μόνο που αυτοί την αιτιολόγησαν ως έλλειψη ικανότητας των μαθητών/τριών να καταλαβαίνουν ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου παρέχουν τον αριθμό των τετραγώνων στις γραμμές και τις στήλες. Γι’ αυτό και θεωρούν πως πρέπει οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν ότι το μήκος των πλευρών του ορθογωνίου μπορεί να προσδιορίσει τον αριθμό των μονάδων κάθε γραμμής και τον αριθμό των γραμμών κάθε στήλης. Από πολλούς τέλος, υποστηρίζεται πως το μοντέλο του van Hiele μέσα από τα πέντε του επίπεδα, προσφέρει στους δασκάλους στρατηγικές ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές/τριες να ξεκαθαρίσουν τόσο τη έννοια της Περιμέτρου όσο και του Εμβαδού.

Παράλληλα, έρευνες έχουν δείξει ότι και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί έχουν μια εξάρτηση στους αλγεβρικούς τύπους και στις μαθηματικές διαδικασίες, στο αντικείμενο του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων (Baturo & Nason, 1996 · Tierney, Boyd & Davis, 1990). Η αποδεκτή σημασία της γνώσης του αντικειμένου, θα σήμαινε ότι ένας δάσκαλος ,με περιορισμένη γνώση των μαθηματικών εννοιών, δεν θα ήταν αποτελεσματικός στο να αναπτύξει την κατανόηση των μαθητών/τριών γύρω από ένα θέμα. Επίσης, άλλες έρευνες έχουν δείξει ότι, πολλοί μελλοντικοί εκπαιδευτικοί παρουσίασαν το θέμα του Εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων μέσω της χρήσης διαδικασιών και αλγεβρικών τύπων, αντί να εστιάσουν πάνω σε δραστηριότητες, οι οποίες θα μπορούσαν να ενισχύσουν την κατανόηση των μαθητών/τριών (Berenson, Valk, Oldham, Runesson, Moreira & Broekman, 1997). Μια πρόσφατη έρευνα (Murphy, 2011) εξέτασε τη σχέση μεταξύ της γνώσης του αντικειμένου των μελλοντικών εκπαιδευτικών πάνω στο θέμα του εμβαδού, με τον τρόπο διδασκαλίας που επιλέγουν οι ίδιοι γι' αυτό το θέμα. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχει μια συσχέτιση μεταξύ αυτής της επάρκειας ή του περιορισμού της γνώσης και των εφαρμοζόμενων διδακτικών δραστηριοτήτων και παιδαγωγικών κατευθύνσεων.

Τέλος, πολλοί υποστηρίζουν ότι αυτή η δυσκολία της διδασκαλίας των εννοιών Εμβαδού και Περιμέτρου οφείλεται στο γεγονός ότι το Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν προβλέπει ικανοποιητικά αρκετό χρόνο για την επιτυχή αντιμετώπισή του (Outhred & Mickelmore 2000· Usiskin, 1997). Άλλοι πάλι (Bond & Parkinson, 1997) αποδίδουν αυτή τη δυσκολία των μαθητών/τριών στην αδυναμία του Προγράμματος Σπουδών να ακολουθήσει το ρυθμό ανάπτυξης της κατανόησης από μέρους των μαθητών/τριών.

1.6 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών ως ειδικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο αναφέρονται:

- Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
- Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας.
- Η κατανόηση βασικών μαθηματικών μεθόδων.
- Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων
- Η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών.
- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης.
- Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ειδικότερα, για τις κύριες γνωστικές περιοχές της Γεωμετρίας και των Μετρήσεων, για την Τετάρτη (Δ΄) Τάξη του Δημοτικού Σχολείου, οι διδακτικοί στόχοι που θέτονται είναι οι εξής:
Οι μαθητές/τριες πρέπει :

- Να εξασκούνται με τη βοήθεια οργάνων στη χάραξη παράλληλων και κάθετων ευθειών και στο σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων
- Να εξασκούνται στον υπολογισμό της Περιμέτρου απλών σχημάτων
- Να μπορούν να υπολογίζουν και να συγκρίνουν περιμέτρους επίπεδων σχημάτων
- Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια του Εμβαδού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ ΤΗΣ

Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν 19 μαθητές/τριες της ηλικιακής ομάδας των δέκα (10) ετών. Οι μαθητές/τριες φοιτούν στην Τετάρτη (Δ΄) τάξη στο 13^{ο} Δημοτικό Σχολείο του Βόλου και το μαθησιακό τους επίπεδο, σύμφωνα με το δάσκαλο, είναι ποικίλο (χαμηλό-μέτριο-υψηλό). Η τάξη αποτελούνταν από 12 αγόρια και 7 κορίτσια.

2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Λαμβάνοντας υπόψη το στόχο της συγκεκριμένης έρευνας έγινε μία προσπάθεια σχεδίασης μιας διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία και ενίσχυση των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού με τη χρήση χειραπτικών υλικών.

Αρχικά, θα πρέπει να αναφερθεί ότι έγινε μία παρακολούθηση της Τετάρτης (Δ΄) τάξης του Δημοτικού Σχολείου ώστε να γίνει μία πρώτη γνωριμία με τους μαθητές/τριες. Συγκεκριμένα, η παρακολούθηση ξεκίνησε όταν οι μαθητές/τριες μπήκαν στο κεφάλαιο της Γεωμετρίας το οποίο στην αρχή διαπραγματεύεται τις έννοιες τις παραλληλίας και της καθετότητας στο ίδιο επίπεδο. Η παρακολούθηση διήρκησε μία εβδομάδα παρατηρώντας τους μαθητές/τριες να εξοικειώνονται με την κατασκευή παράλληλων, τεμνόμενων και κάθετων ευθειών με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων. Επιπλέον, θα πρέπει να αναφερθεί ότι στη συνέχεια της παρακολούθησης, πριν την εισαγωγή τους στις έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού, μοιράστηκαν στους μαθητές/τριες οι γεωπίνακες ώστε να γνωρίσουν το υλικό, το οποίο έβλεπαν για πρώτη φορά, και να κατασκευάσουν μέσα από την δραστηριότητα που τους προτάθηκε, χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια, ευθείες και σχήματα μέσα από τα οποία θα διέκριναν ποιες ευθείες είναι παράλληλες, ποιες τεμνόμενες και ποιες κάθετες.

Έπειτα από την πρώτη επαφή των μαθητών/τριών με ένα από τα βασικά χειραπτικά υλικά της διδακτικής παρέμβασης ξεκίνησε και η υλοποίησή της. Συγκεκριμένα, οργανώθηκε μία σειρά δραστηριοτήτων οι οποίες εξελίσσονταν με προοδευτική σειρά από το απλό προς το σύνθετο. Θα πρέπει, επίσης, να επισημανθεί ότι πρώτα ο δάσκαλος έκανε την εισαγωγή των μαθητών/τριών στα κεφάλαιο του βιβλίου με τις έννοιες που ερευνούνται και έπειτα από την ολοκλήρωση κάθε αντίστοιχου κεφαλαίου γινόταν η διδακτική παρέμβαση με τις αντίστοιχες δραστηριότητες και τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Έχοντας, λοιπόν, παρατηρηθεί, κατά τη διάρκεια του μαθήματος από τον διδάσκοντα, τόσο οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές/τριες όσο και οι εναλλακτικές τους ιδέες, οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε αφενός να συνάδουν με το ηλικιακό και γνωστικό επίπεδο των μαθητών/τριών και αφετέρου να συνδέονται με τους στόχους της αντίστοιχης θεματικής ενότητας του ΔΕΠΠΣ. Συγκεκριμένα, χωρίστηκαν σε τρεις ενότητες:

1η Ενότητα: ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ

Σε αυτήν την ενότητα πραγματοποιούνται βιωματικές δραστηριότητες μέσα από τις οποίες οι μαθητές/τριες χρησιμοποιώντας απλά υλικά κάνουν προσπάθειες μέτρησης τόσο της Περιμέτρου όσο και του Εμβαδού κάνοντας αρχικά εκτιμήσεις και έπειτα επαλήθευση μέσα από τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων τους ώστε να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Επίσης, εισάγονται και τα υλικά: τάνγκραμ και πεντόμινο σε αντίστοιχες ομαδικές δραστηριότητες που θα βοηθήσουν τους μαθητές/τριες να αντιληφθούν καλύτερα τις σχέσεις Περιμέτρου και Εμβαδού.

Οι στόχοι της συγκεκριμένης ενότητας είναι:

- Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια της επιφάνειας.
- Να διακρίνουν την έννοια του εμβαδού από την έννοια της περιμέτρου.
- Να μετρήσουν την επιφάνεια με μη τυπικές μονάδες μέτρησης.
- Να συγκρίνουν επιφάνειες εμπειρικά.
- Να διακρίνουν τις σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού:
    - Να αντιληφθούν ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδόν.
    - Να αντιληφθούν ότι δύο σχήματα με ίδιο εμβαδόν μπορεί να έχουν διαφορετική περίμετρο και αντίστροφα, ότι δύο σχήματα με διαφορετικό εμβαδόν μπορούν να έχουν την ίδια περίμετρο.

2η Ενότητα: ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΟΥΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα οι δραστηριότητες γίνονται πιο σύνθετες και απαιτητικές. Οι μαθητές/τριες έχουν ήδη διακρίνει τις δύο έννοιες και θα πρέπει μέσα από τις δραστηριότητες αυτής της ενότητας να κατασκευάσουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα στο γεωπίνακα και να βρουν την Περίμετρο και το Εμβαδόν τους χωρίς τη χρήση αλγεβρικών τύπων. Οι δραστηριότητες που αφορούν το μετασχηματισμό σχημάτων για τη εύρεση Εμβαδού είναι και οι πιο απαιτητικές.

Οι στόχοι της συγκεκριμένης ενότητας είναι:

- Να μπορούν να αναγνωρίζουν και να σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.
- Να μπορούν να περιγράφουν και να ξεχωρίζουν τα παραλληλόγραμμα βάσει των ιδιοτήτων τους.
- Να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα με διαφορετικό προσανατολισμό στο χώρο.
- Να εμπεδώσουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου μέσα από μετασχηματισμούς των σχημάτων.

3η Ενότητα: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΜΕ ΤΥΠΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Σε αυτήν την ενότητα που είναι και η τελευταία εισάγονται οι τυπικές μονάδες μέτρησης. Χαρακτηριστικό αυτής της ενότητας είναι η κατασκευή του τετραγωνικού μέτρου μαζί με τους μαθητές/τριες για την καλύτερη εμπέδωση του μεγέθους και ακολουθούν εκτιμήσεις μέτρησης διάφορων χώρων του σχολείου. Δεν λείπουν φυσικά και οι ασκήσεις σε φύλλα εργασίας όπου οι μαθητές/τριες με τη χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης θα εξάγουν τον τύπο του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Οι στόχοι της συγκεκριμένης ενότητας είναι:

- Να γνωρίσουν τις συνήθεις μονάδες μέτρησης επιφάνειας.

(Η υλοποίηση και ανάλυση των δραστηριοτήτων κάθε ενότητας θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο δεύτερο μέρος της έρευνας.)

2.3 ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ ΤΗΣ ΥΙΟΘΕΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η μέθοδος η οποία επιλέχθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας είναι η διδακτική παρέμβαση. Η συγκεκριμένη μέθοδος δίνει τη δυνατότητα επεξεργασίας του ερευνητικού πεδίου, σχεδιάζοντας μία διδασκαλία προσαρμοσμένη στις δυσκολίες και στις ανάγκες των μαθητών/τριών.

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη μέθοδος προσφερόταν ιδιαίτερα ώστε να προσαρμοστεί η διδασκαλία πάνω στα ενδιαφέροντα και τις κλίσεις των μαθητών/τριών ώστε να συμμετέχουν και τα ίδια ενεργά σε όλη τη διαδικασία μάθησης και στην οικοδόμηση της νέας γνώσης. Τέλος, η παρέμβαση αυτή βοήθησε στην δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης όπου οι μαθητές/τριες διατυπώνουν ερωτήσεις, εκφράζουν τις μαθηματικές τους ιδέες με ακρίβεια και συνοχή μέσα από την διεξαγωγή ποικίλων δραστηριοτήτων ώστε να μπορούν να εξηγούν και να κατανοούν τον συλλογισμό τους αλλά ταυτόχρονα και των συμμαθητών/τριών τους.

2.4 ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Τα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τη διεξαγωγή της έρευνας είναι:

- Βιβλίο Μαθηματικών Δ΄ Τάξης.
- Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών (γ΄τεύχος) Δ΄ Τάξης.
- Χειραπτικά υλικά: τάνγκραμ, πεντόμινο και γεωπίνακες.
- Φύλλα εργασίας με δραστηριότητες οι οποίες βασίζονται στα βιβλία του μαθητή από το πρόγραμμα: «ΕΝΤΑΞΗ ΤΣΙΓΓΑΝΟΠΑΙΔΩΝ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ», Επίπεδα διδασκαλίας Α, Β και Γ.
- Ξύλινη μακέτα 1x1 για την κατασκευή του τετραγωνικού μέτρου και την υποδιαίρεσή του σε τετραγωνικά δεκατόμετρα χρησιμοποιώντας κομμάτια από φύλλα περιοδικών 10x10 εκ. (κολάζ).

2.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Οι τεχνικές συλλογής ερευνητικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- **Η παρατήρηση** της εξελικτικής πορείας των μαθητών και της ανταπόκρισής τους στους στόχους της διδακτικής παρέμβασης που τέθηκαν εξ αρχής.
- Οι **συνεντεύξεις** των μαθητών, μέσω της μεθόδου διδασκαλίας της ερωτηματοθεσίας.
- **Οπτικοακουστικά δεδομένα** (φωτογραφικό υλικό, μαγνητοφωνημένες συζητήσεις)
- **Κατασκευές παιδιών** (σε ατομικό αλλά και σε ομαδοσυνεργατικό επίπεδο)**.**

Με άλλα λόγια χρησιμοποίησα πρωτογενείς πηγές δεδομένων, αδημοσίευτο υλικό που συγκέντρωσα απευθείας από τους μαθητές/τριες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° : ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Όπως αναφέρθηκε και στη μεθοδολογία της έρευνας, αρχικά, έγινε μία παρακολούθηση της τάξης ώστε να γίνει μία πρώτη γνωριμία με τους μαθητές/τριες. Κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης, πριν την εισαγωγή τους στις έννοιες της Περιμέτρου και του Εμβαδού, μοιράστηκαν στους μαθητές/τριες οι γεωπίνακες, ώστε να γνωρίσουν το νέο υλικό και να εξοικειωθούν με αυτό. Η δραστηριότητα που ακολουθεί δεν περιλαμβάνεται στις ενότητες των δραστηριοτήτων που σχεδιάστηκαν για τη διεξαγωγή της έρευνας.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: Μοίρασα τους γεωπίνακες ανά δύο μαθητές/τριες και τους ζήτησα να αναπαραστήσουν από ένα κεφαλαίο γράμμα της άλφα-βήτα που τους έχω αναθέσει και ο καθένας ξεχωριστά να αναγνωρίσει στο γράμμα του τα ευθύγραμμα τμήματα που υπάρχουν (παράλληλα, κάθετα, τεμνόμενα).

Στηριζόμενη, λοιπόν, στο στόχο του αναλυτικού προγράμματος: *Να αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες και να χρησιμοποιούν την αντίστοιχη ορολογία: «Οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους», «Οι ευθείες τέμνονται»*, ξεκίνησα τη διδακτική μου παρέμβαση με έναν έλεγχο ενός βασικού μέρους της Γεωμετρίας που είναι «Οι ευθείες».

Παρακάτω ακολουθούν ενδεικτικά δύο διάλογοι με τους μαθητές/τριες και συγκεκριμένα με δύο μαθητές/τριες που έχουν αναλάβει τα γράμματα: Ε και Κ :

<u>Για το γράμμα Ε:</u>

Μ1: Έχω το Ε που έχει 3 μικρές ευθείες που είναι μεταξύ τους παράλληλες και με την άλλη την μεγάλη ευθεία είναι τεμνόμενες.

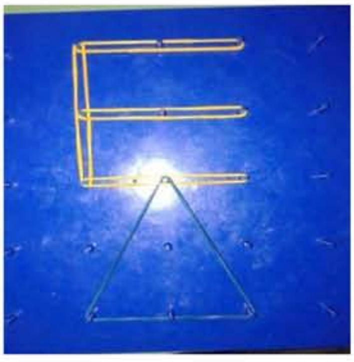
Ε: Έτσι όπως τέμνονται όμως τι παρατηρείς;

Μ1: Ότι είναι παράλληλες.

Ε: Ναι, είναι παράλληλες μεταξύ τους οι 3 ευθείες. Αλλά στην μεγάλη ευθεία πώς τέμνονται;

Μ1: Α! Τέμνονται κάθετα και σχηματίζουν ορθές γωνίες!

Ε: Μπράβο!



Εικόνα 1

Για το γράμμα Κ:

M2: Εγώ έχω το Κ και νομίζω ότι αυτές οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

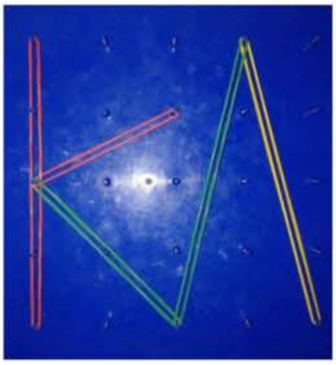
Ε: Γιατί; Τι σημαίνει ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

M2: Είναι αυτές οι ευθείες που όσο και να τις προεκτείνουμε δεν συναντιούνται ποτέ.

Ε: Πολύ ωραία! Αυτές όμως οι δύο ευθείες συναντιούνται κάπου;

M2: Ναι, συναντιούνται πάνω στην μεγάλη ευθεία άρα είναι όλες τεμνόμενες.

Ε: Μπράβο!

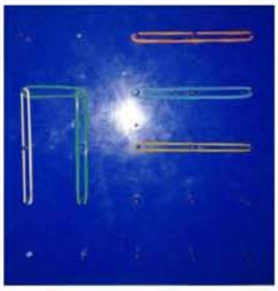


Εικόνα 2

Ακολουθούν εικόνες από τις προσπάθειες των μαθητών/τριών για την αναπαράσταση των υπόλοιπων γραμμάτων στον γεωπίνακα:

Εικόνα 3

Εικόνα 4



Εικόνα 5

Εικόνα 6

Εικόνα 7

Εικόνα 8

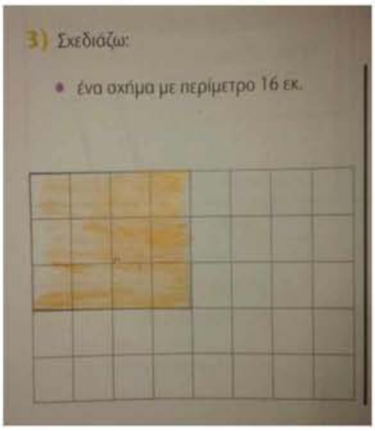
Εικόνα 9

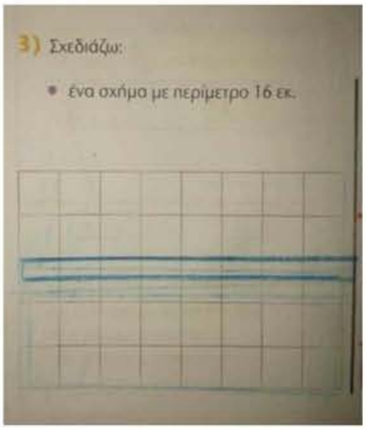
Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα αντιλήφθηκα ότι οι μαθητές/τριες είχαν μάθει θεωρητικά να εξηγούν τις έννοιες αλλά δυσκολεύτηκαν λίγο να εφαρμόσουν τη θεωρία στην πράξη, διότι δεν είχαν ξανακάνει κάποια παρόμοια άσκηση με χειραπτικό υλικό. Βέβαια, όμως, μετά από εξάσκηση πάνω στο γεωπίνακα και αφού ο κάθε μαθητής/τρια μπήκε στη διαδικασία να σκεφτεί ατομικά και να δικαιολογήσει τον τρόπο σκέψης του/της στους/ις συμμαθητές/τριες του, παρατήρησα ότι ανταποκρίθηκαν πολύ καλά, πάντα βέβαια και με την δικιά μου βοήθεια και καθοδήγηση.

Έπειτα από την πρώτη επαφή των μαθητών/τριών με ένα από τα βασικά χειραπτικά υλικά της διδακτικής μου παρέμβασης ξεκίνησε η υλοποίησή της. Όπως αναφέρθηκε και στο 1ο Μέρος της έρευνας, πρώτα ο δάσκαλος έκανε την εισαγωγή των μαθητών/τριών στο κεφάλαιο του βιβλίου με τις έννοιες που ερευνούνται και έπειτα γινόταν η δική μου διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικών υλικών.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατεθεί ένα δείγμα εικόνων που απεικονίζουν τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών/τριών κατά τη διδασκαλία που έκανε ο δάσκαλος της τάξης και που παρατηρήθηκαν από εμένα την ίδια. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε η σύγχυση περιμέτρου και εμβαδού και κυρίως φάνηκε η δυσκολία των μαθητών/τριών να σχεδιάσουν σχήματα στο τετραγωνισμένο χαρτί καθώς δεν είχαν κατανοήσει πώς να δουλέψουν πάνω σε αυτό.

Ειδικότερα, όταν τους ζητήθηκε σε μία άσκηση του βιβλίου να σχεδιάσουν σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα σχήμα με περίμετρο 16 εκ. τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:





Εικόνα 10 **Εικόνα 11** **Εικόνα 12**

Έχοντας, λοιπόν, παρατηρηθεί τόσο οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές/τριες όσο και οι εναλλακτικές τους ιδέες, σχεδιάστηκαν οι παρακάτω δραστηριότητες οι οποίες συνδέονται και με τους στόχους της αντίστοιχης θεματικής ενότητας του ΔΕΠΠΣ και οι οποίες, όπως αναφέρθηκε και στο 1^{o} Μέρος, χωρίστηκαν σε τρεις ενότητες.

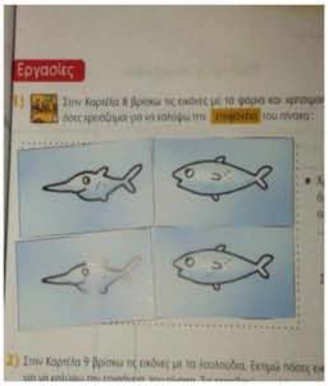
1η ΕΝΟΤΗΤΑ: ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ

1η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια της επιφάνειας και να την μετρήσουν με μη τυπικές μονάδες μέτρησης»

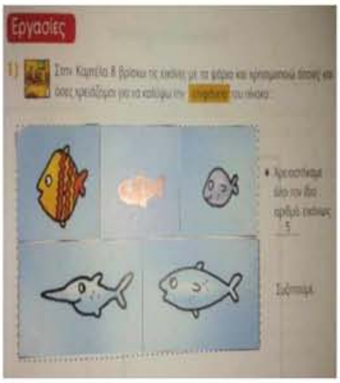
Αρχικά, μοίρασα στους μαθητές/τριες από δέκα εικόνες (6 τετράγωνες και 4 ορθογώνιες παραλληλόγραμμες) και τους ζήτησα να βάλουν όσες χρειάζονται για να καλύψουν την επιφάνεια του σχήματος που τους δόθηκε και έπειτα συγκρίναμε τα αποτελέσματά μας.

Σε αυτήν την δραστηριότητα παρατήρησα ότι δεν τοποθετούσαν όλοι οι μαθητές/τριες σωστά τις εικόνες αφήνοντας κενά μέσα στο σχήμα (Εικόνα13), ενώ ήταν αρκετοί και αυτοί που τα τοποθέτησαν σωστά. Το συμπέρασμα που βγήκε στο τέλος της δραστηριότητας ήταν ότι δεν χρειάστηκαν όλοι τον ίδιο αριθμό εικόνων για να καλύψουν την ίδια επιφάνεια και ο λόγος ήταν, όπως είπε ένας μαθητής: *«Δεν χρησιμοποιήσαμε, κυρία, όλοι τα ίδια σχήματα»*. Στις Εικόνες 14 και 15 φαίνεται η σωστή χρήση και τοποθέτηση των καρτελών μέσα στο σχήμα.

Εικόνα 13

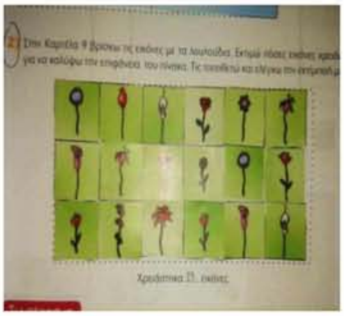


Εικόνα 14



Εικόνα 15

Στη ίδια δραστηριότητα, τους μοίρασα και άλλες εικόνες (όλες τετράγωνες) και τους ζήτησα να μου καλύψουν την επιφάνεια ενός άλλου σχήματος και να συγκρίνουν μετά τα αποτελέσματα. Αυτή τη φορά οι μαθητές/τριες τοποθέτησαν σωστά όλες τις εικόνες στην επιφάνεια του σχήματος και με χαρά συνειδητοποίησαν ότι όλοι χρησιμοποίησαν τον ίδιο αριθμό εικόνων (Εικόνα 16) λέγοντας χαρακτηριστικά: *«Κυρία, τώρα έχουμε όλοι εικόνες με το ίδιο σχήμα και μέγεθος γι' αυτό έχουμε τον ίδιο αριθμό όλοι»*.



Εικόνα 16

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές εξασκήθηκαν με τον όρο επιφάνεια = εμβαδό και το συνέδεσαν με το “γέμισμα” ενός σχήματος.

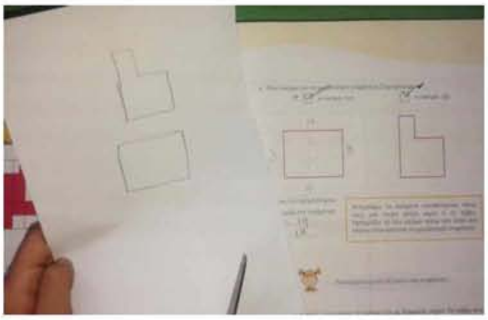
2η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια της περιμέτρου και να την διακρίνουν από την έννοια του εμβαδού»

Σε αυτή τη δραστηριότητα μοίρασα στους μαθητές/τριες από μία κορδέλα και τους ζήτησα να κολλήσουν την κορδέλα στο περίγραμμα του σχήματος που τους έχει δοθεί και τους ρώτησα με ποιον τρόπο θα υπολογίσουμε πόση ακριβώς κορδέλα χρειαζόμαστε. Οι μαθητές/τριες εύκολα μπόρεσαν να ανταποκριθούν στα διάκριση του περιγράμματος (Εικόνα 17) καθώς είναι μία έννοια που την γνώριζαν ήδη και στην ερώτηση για τον υπολογισμό της κορδέλας απάντησαν: «*Θα τοποθετήσουμε την κορδέλα γύρω- γύρω σε όλα το σχήμα για να βρούμε ακριβώς πόση θα χρειαστούμε*», ενώ μία άλλη απάντηση ήταν «*Κυρία η κορδέλα θα είναι ίση με το μήκος όλων των πλευρών του σχήματος*». Επομένως, φάνηκε ότι μπόρεσαν επιτυχώς να συνδέσουν οι μαθητές/τριες την έννοια του περιγράμματος με την περίμετρο χρησιμοποιώντας συχνά τη φράση «*το γύρω- γύρω του σχήματος*».

Εικόνα 17

3η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να συγκρίνουν επιφάνειες εμπειρικά - Να διακρίνουν τις σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού»

Συνέχισα με απλές δραστηριότητες ώστε οι μαθητές/τριες να διακρίνουν τις έννοιες περιμέτρου- εμβαδού και να μην τις συγχέουν. Συγκεκριμένα, τους έδειξα δύο επίπεδα σχήματα και τους ρώτησα να μου πουν ποιο νομίζουν ότι έχει μεγαλύτερη περίμετρο. Στη συνέχεια, αφού κάνανε τις εκτιμήσεις τους για την περίμετρο, καλούνταν να συγκρίνουν τα σχήματα ως προς το εμβαδόν τους αντιγράφοντας τα δύο σχήματα σε ένα φύλλο χαρτί (Εικόνα 18) και έπειτα, αφού τα τοποθετήσουν το ένα πάνω στο άλλο, να συγκρίνουν το τελικό αποτέλεσμα με την αρχική τους εκτίμηση.



Εικόνα 18

Στην ερώτηση που τους έκανα για το ποιο σχήμα νομίζουν ότι έχει μεγαλύτερη περίμετρο οι περισσότεροι απάντησαν για το δεύτερο (β) σχήμα ενώ για το εμβαδόν οι γνώμες των μαθητών/τριών χωρίστηκαν καθώς άλλοι λέγανε για το πρώτο (α) σχήμα και άλλοι για το δεύτερο (β) ότι είναι μεγαλύτερο. Κάνοντας όμως την βιωματική προσέγγιση έπειτα από δοκιμή που έκανε ο καθένας ατομικά, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τελικά το πρώτο (α) σχήμα ήταν μεγαλύτερο ως προς το εμβαδόν. Αντίθετα, όσον αφορά την περίμετρο με έκπληξη συνειδητοποίησαν, μετά από μέτρηση με τη χρήση του χάρακά τους, ότι και τα δύο σχήματα είχαν την ίδια περίμετρο. Τους ζήτησα τότε να συνοψίσουν τις πληροφορίες αυτής της άσκησης και να φτιάξουμε όλοι μαζί ένα συμπέρασμα το οποίο διαμορφώθηκε ως εξής:
« *Δύο σχήματα με διαφορετικό εμβαδόν μπορεί να έχουν την ίδια περίμετρο*»

Στο τέλος της δραστηριότητας, εξήγησα στους μαθητές/τριες ότι αυτή είναι μία σχέση περιμέτρου και εμβαδού την οποία πρέπει να κατανοήσουν διότι στην πορεία των δραστηριοτήτων θα εντοπίσουμε και άλλες σχέσεις που συνδέουν τις δύο έννοιες.

4η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να διακρίνουν σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού»

Σε αυτή τη δραστηριότητα εισάγω το πρώτο χειραπτικό υλικό που είναι το τάνγκραμ. Οι μαθητές/τριες γνώριζαν ήδη το υλικό αλλά δεν είχαν δουλέψει με αυτό πάνω σε κάποια δραστηριότητα. Μάλιστα οι ίδιοι οι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι το τάνγκραμ είναι ένα κινέζικο πάζλ το οποίο αποτελείται από άλλα μικρότερα σχήματα.

Αρχικά, τους ζήτησα να μου αναγνωρίσουν τα σχήματα που περιλαμβάνει ένα τάνγκραμ (Εικόνα 19) και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Τι σχήμα έχει ένα τάνγκραμ συναρμολογημένο έτσι όπως το βλέπετε;

Μ1: Τετράγωνο.

Ε: Γιατί είναι τετράγωνο, πώς το καταλαβαίνεις;

Μ1: Γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Ε: Πολύ ωραία! Τα υπόλοιπα μικρότερα σχήματα τα αναγνωρίζεται ποια είναι:

Μ2: Υπάρχουν δύο μεγάλα τρίγωνα και ένα τετράγωνο.

Μ3: Βλέπω και άλλα δύο μικρά τρίγωνα κυρία.

Ε: Και ποιο άλλο σχήμα μας έμεινε;

Μ4: Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ε: Είσαι σίγουρος ότι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Από την ονομασία του καταλαβαίνουμε ότι έχει ορθές γωνίες. Αυτό το σχήμα έχει ορθές γωνίες ή μπορούμε να το πούμε κάπως αλλιώς;

Μ5: Α! Κυρία αυτό είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο γιατί μοιάζει με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά αυτό γέρνει γι' αυτό το λέμε πλάγιο.

Ε: Μπράβο! Πολύ σωστή παρατήρηση.

Εικόνα 19

Στη συνέχεια, τους έδειξα δύο φιγούρες- περιγράμματα του τάνγκραμ και τους ρώτησα να μου σχολιάσουν τόσο την περίμετρο όσο και το εμβαδό τους:

Ε: Για κοιτάξτε τα δύο σχήματα, το ένα είναι ένα λαγουδάκι και το άλλο ένα σπίτι. Τι πιστεύετε εσείς, έχουν την ίδια περίμετρο;

(Όλοι μαζί): Όχι!!

Ε: Για να παρατηρήσουμε το εμβαδόν τους. Τι πιστεύετε γι' αυτό;

Μ1: Το λαγουδάκι μου φαίνεται εμένα μεγαλύτερο.

Μ2: Όχι, το σπίτι είναι μεγαλύτερο γιατί είναι πιο πλατύ.

Μ3: Κυρία, και τα δύο σχήματα είναι ίσα στο εμβαδόν!

Ε: Από πού το συμπέρανες αυτό;

Μ3: Γιατί κυρία φτιάχνονται από τα ίδια σχήματα.

Ε: Μπράβο! Πολύ καλή παρατήρηση. Αλλά πάμε να κάνουμε και τον δικό μας έλεγχο τοποθετώντας τα τάνγκραμ στα διάφορα περιγράμματα για να δούμε αν ισχύει αυτό που είπε ο συμμαθητής σας.

Τους μοίρασα, αρχικά, τα τάνγκραμ σε ομάδες των 2 ατόμων και τους ζήτησα να τα συναρμολογήσουν για να σχηματιστεί το τετράγωνο (με τη δική μου καθοδήγηση) . Συγκρίναμε όλοι το υλικό μας και αφού διαπιστώσαμε ότι είναι το ίδιο υλικό σε διαφορετικά χρώματα τους μοίρασα διάφορα περιγράμματα και τους ζήτησα να καλύψουν την επιφάνεια με τα κομμάτια του τάνγκραμ ώστε να τα συγκρίνουμε και να ελέγξουμε την πρόταση που πρότεινε ο συμμαθητής μας. Οι εικόνες που ακολουθούν είναι τα περιγράμματα που κατασκεύασαν οι μαθητές/τριες με τα κομμάτια του τάνγκραμ:

Εικόνα 20

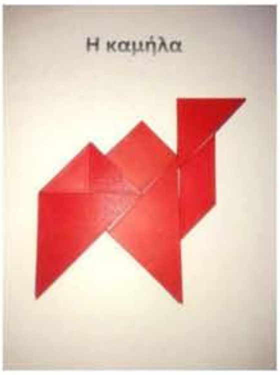
Εικόνα 21

Εικόνα 22

Εικόνα 23

Εικόνα 24

Εικόνα 25



Εικόνα 26

Εικόνα 27

Εικόνα 28

Εικόνα 28

Εικόνα 30

Στο τέλος της δραστηριότητας, όταν οι μαθητές/τριες κατασκεύασαν όλα τα περιγράμματα που τους μοίρασα, τους ζήτησα να τα κοιτάξουν και να μου πουν τι κοινό έχουν όλα αυτά τα σχήματα. Με ευκολία αυτή τη φορά, όλοι οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι όλα τα σχήματα αν και έχουν διαφορετική περίμετρο, έχουν το ίδιο εμβαδόν, αρκεί να αλλάξουν τη σειρά και τη θέση που τοποθετούν τα κομμάτια του τάνγκραμ. Επομένως, όλοι συμφώνησαν με την αρχική υπόθεση του συμμαθητή τους, διότι κάνανε οι ίδιοι ατομικά τον έλεγχο, και όταν τους ζήτησα να φτιάξουμε όλοι μαζί το συμπέρασμα που προκύπτει από τη δραστηριότητα με τα τάνγκραμ όλοι μαζί μου είπαν:

«*Διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδόν παρόλο που έχουν διαφορετική περίμετρο*»

5η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να διακρίνουν σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού»

Μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας με τα τάνγκραμ, εισήγαγα στους μαθητές/τριες ένα νέο χειραπτικό υλικό, τα πεντόμινο. Οι μαθητές/τριες δεν το γνώριζαν αυτό το υλικό, οπότε τους έδειξα κάποια κομμάτια πεντόμινο και τους ρώτησα αν μπορούν να σκεφτούν γιατί πήραν αυτή την ονομασία:

Ε: Για ποιο λόγο πιστεύετε ότι ονομάστηκαν “πεντόμινο”;

Μ1: Μήπως γιατί έχουν πέντε (5) πλευρές;

Ε: Πέντε (5) πλευρές βλέπεις;

Μ1: Όχι.

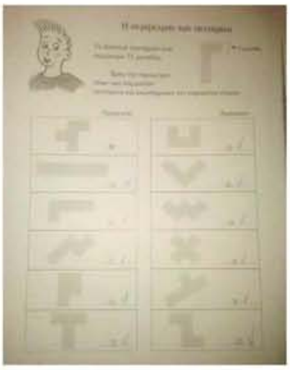
Μ2: Μήπως γιατί φτιάχνονται από πέντε (5) τετράγωνα;

Ε: Ακριβώς. Για παρατηρήστε όλα τα κομμάτια του πεντόμινο. Όλα αποτελούνται από πέντε (5) τετράγωνα. Άρα τι κοινό έχουν αυτά τα σχήματα πεντόμινο;

Μ3: Έχουν το ίδιο εμβαδόν, αλλά όπως τα βλέπουμε δεν φαίνεται να έχουν και την ίδια περίμετρο γιατί αλλάζει το σχήμα τους.

Ε: Πολύ ωραία, το εμβαδόν είναι ίδιο σε όλα. Για να ελέγξουμε τώρα τι συμβαίνει και με την περίμετρό τους μετρώντας ένα- ένα τα κομμάτια πεντόμινο.

Χώρισα, λοιπόν, τους μαθητές/τριες σε ομάδες των 4 και τους μοίρασα τα πεντόμινο (από 12 κομμάτια). Έπειτα, τους ζήτησα να τοποθετήσουν τα πεντόμινο στα φύλλα εργασίας που τους είχα μοιράσει μέσα από τα οποία διακρίνονται τα πέντε τετράγωνα από τα οποία αποτελείται το κάθε πεντόμινο (Εικόνα 31). Στη συνέχεια, τους μοίρασα το επόμενο φύλλο εργασίας στο οποίο έπρεπε να μετρήσουν την περίμετρο του κάθε κομματιού πεντόμινο (Εικόνα 32) και στο τέλος να παρατηρήσουν τις μετρήσεις που κάνανε συνολικά και να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα.



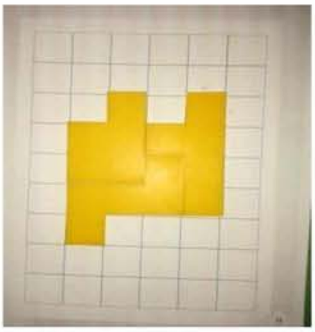
Εικόνα 31 **Εικόνα 32**

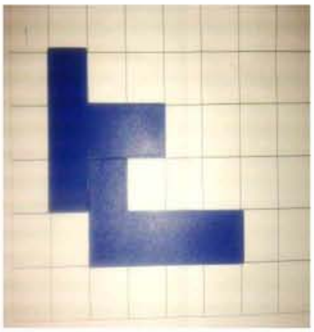
Στο τέλος της δραστηριότητας, μετά τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας για τον έλεγχο της περιμέτρου, οι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι όλα τα κομμάτια έχουν περίμετρο δώδεκα (12) μονάδες, ενώ μόνο ένα πεντόμινο έχει περίμετρο δέκα (10) μονάδες. Όποτε, καταλήξανε στο αντίστροφο συμπέρασμα από αυτό που είχανε καταλήξει στην 3η δραστηριότητα και το οποίο διαμόρφωσαν ως εξής:

«Δύο σχήματα με ίδιο εμβαδόν μπορεί να έχουν και διαφορετική περίμετρο»

6η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να διακρίνουν σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού»

Σε αυτή τη δραστηριότητα στόχος μου ήταν οι μαθητές/τριες να εντοπίσουν πάλι το συμπέρασμα στο οποίο οδηγήθηκαν και στην 3η Δραστηριότητα, ότι δηλαδή « *Δύο σχήματα με διαφορετικό εμβαδόν μπορεί να έχουν την ίδια περίμετρο*». Οι σχέσεις γενικά που συνδέουν την περίμετρο με το εμβαδόν δεν γίνονται εύκολα κατανοητές, ούτε είναι αυτονόητες για τους μαθητές/τριες. Γι' αυτό θεώρησα σημαντικό να τις εντοπίσουν από διαφορετικές δραστηριότητες και με διάφορα χειραπτικά υλικά ώστε να τις κατανοήσουν καλύτερα. Συγκεκριμένα, σε αυτή τη δραστηριότητα ζήτησα από τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν με τα πεντόμινο ένα σχήμα που να έχει περίμετρο 20 και να συγκρίνουν στη συνέχεια τα σχήματα που κατασκεύασαν.





Εικόνα 33 **Εικόνα 34** **Εικόνα 35**

Όπως φαίνεται και από τις κατασκευές, οι μαθητές/τριες σύγκριναν μόνοι τους και επαλήθευσαν και πάλι τη σχέση περιμέτρου – εμβαδού καθώς τα σχήματα που κατασκεύασαν έχουν την ίδια περίμετρο αλλά διαφορετικό εμβαδόν διότι αποτελούνται από διαφορετικό αριθμό πεντόμινο.

7η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Να διακρίνουν σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού»

Οι σχέσεις περιμέτρου και εμβαδού ολοκληρώθηκαν με αυτήν τη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές/τριες χρησιμοποίησαν και πάλι τα πεντόμινο και μέσα από την οποία παρατήρησαν μία γενική ιδέα της σχέσεις αυτών των δύο εννοιών. Συγκεκριμένα, διέκριναν ότι το εμβαδόν και η περίμετρος ενός σχήματος είναι διαφορετικά. Η διαδικασία εξελίχτηκε όπως και οι προηγούμενες δραστηριότητες. Τους μοίρασα ένα φύλλο εργασίας με δύο σχήματα στα οποία θα έπρεπε να τοποθετήσουν τα πεντόμινο σωστά για να βρούνε την περίμετρο και το εμβαδόν του κάθε σχήματος (Εικόνα 36).

Εικόνα 36

Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές/τριες κατάφεραν επιτυχώς να τοποθετήσουν τα πεντόμινο στη σωστή θέση καθώς και να μετρήσουν την περίμετρο του κάθε σχήματος σωστά. Φάνηκε, επομένως, ότι είχαν εξασκηθεί αρκετά καλά στις δύο προηγούμενες δραστηριότητες με τη χρήση των πεντόμινο.

Αυτό που μου έκανε περισσότερο εντύπωση είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές/τριες παρατήρησαν ότι το πρώτο σχήμα έχει 10 τετράγωνα, άρα σκέφτηκαν αμέσως ότι θα χρειαστούν 2 κομμάτια πεντόμινο, και ότι το δεύτερο σχήμα έχει 15 τετράγωνα, άρα θα χρειαστούν 3 κομμάτια πεντόμινο. Άρα κατάφεραν επιτυχώς να κάνουν τους κατάλληλους συνδυασμούς έχοντας ως σημείο αναφοράς ότι όλα τα κομμάτια πεντόμινο αποτελούνται από 5 τετράγωνα και να κάνουν πιο γρήγορα και εύκολα τους υπολογισμούς. Έγινε, λοιπόν, η πρώτη σύνδεση του πολλαπλασιασμού με το εμβαδό. Τέλος, κατέληξαν στο συμπέρασμα μετρώντας και την περίμετρό τους, ότι το πρώτο σχήμα έχει περίμετρο 16 μονάδες και το δεύτερο 18, ενώ τα εμβαδά τους είναι 10 και 15 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα.

2η ΕΝΟΤΗΤΑ: ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΟΥΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

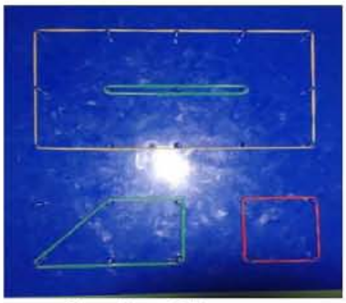
Σε αυτήν την ενότητα οι δραστηριότητες έχουν σχεδιαστεί με τη χρήση του γεωπίνακα. Είναι δραστηριότητες που ακολουθούν μία πορεία από το απλό προς το σύνθετο. Έχει ήδη προηγηθεί από τον δάσκαλο η διδασκαλία των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, κυρίως των παραλληλογράμμων. Οπότε και οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν ώστε να ελέγξω τόσο την μετάβαση των μαθητών/τριών από το επίπεδο 0 στο επίπεδο 1 των van Hiele όσο και τον υπολογισμό του εμβαδού αυτών των σχημάτων μέσα από μετασχηματισμούς, ελέγχοντας κάθε φορά και τις σχέσεις που αναδεικνύονται μεταξύ της περιμέτρου και του εμβαδού.

8η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Αναγνώριση και σχεδιασμός επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων»

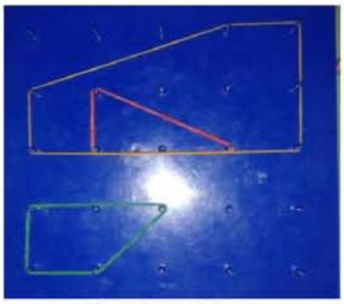
Σε αυτή τη δραστηριότητα μοίρασα τους γεωπίνακες ανά δύο άτομα και υπό την καθοδήγησή μου ζήτησα από τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν σχήματα με τα λαστιχάκια και να τα αναγνωρίσουν. Συγκεκριμένα οι οδηγίες που τους έδωσα ήταν οι εξής:

- Πάρτε ένα κόκκινο λαστιχάκι και κατασκευάστε ένα σχήμα που να ακουμπά σε 4 καρφάκια.
- Πάρτε ένα πράσινο λαστιχάκι και κατασκευάστε ένα σχήμα που να ακουμπά σε 5 καρφάκια.
- Πάρτε ένα κίτρινο λαστιχάκι και κατασκευάστε ένα σχήμα που να έχει μέσα του 3 καρφάκια.

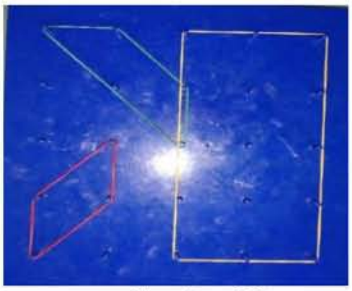
Έπειτα συζητήσαμε για τα σχήματα που δημιουργήθηκαν και προσπάθησαν να τα αναγνωρίσουν (Εικόνες 37-38-39).



Εικόνα 37



Εικόνα 38



Εικόνα 39

Όπως βλέπουμε και από τις εικόνες οι μαθητές/τριες κατασκεύασαν σχήματα τα οποία τα ονόμασαν σωστά αν και δυσκολεύτηκαν να εκφραστούν σε γλωσσικό επίπεδο, ενώ κάποιοι/ες θα λέγαμε ότι εγκλωβίστηκαν σε προτυπικά φαινόμενα. Ειδικότερα, ακολουθεί ο εξής διάλογος:

Ε: Ποιο σχήμα είναι αυτό που κατασκεύασες και ακουμπά σε 4 καρφάκια; (Εικόνα 38)

Μ1: Μοιάζει με το γνώμονα που χρησιμοποιούμε.

Ε: Ναι, αλλά πώς λέγεται αυτό το σχήμα; Για δες, έχει 3 πλευρές.

Μ1: Α! Είναι τρίγωνο.

Ε: Σωστά! Και το άλλο το μεγάλο σχήμα που έχει μέσα του τρία καρφάκια πώς θα το ονομάζαμε;

Μ1: Έχει 5 πλευρές οπότε πεντάπλευρο;

Ε: Ναι, σωστά! Αυτό το σχήμα ποιο είναι που έχει μέσα του 3 καρφάκια; (Εικόνα 37)

Μ2: Είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ε: Και πώς το κατάλαβες;

Μ2: Γιατί αν ήταν τετράγωνο έπρεπε να έχει όλες τις πλευρές ίσες ενώ αυτό έχει δύο μεγάλες και δύο μικρές.

Ε: Ναι, αλλά τι ιδιότητα έχουν αυτές οι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;

Μ2: Είναι παράλληλες.

Ε: Και τι άλλο; Για παρατήρησε καλύτερα.

Μ2: Α, είναι ίσες οι απέναντι πλευρές.

Ε: Πολύ ωραία. Αυτό το σχήμα τώρα τι είναι, πώς το ονομάζουμε; (Εικόνα 39)

Μ3: Μοιάζει με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ε: Ναι αλλά έχει μία σημαντική διαφορά από το ορθογώνιο. Μπορείς να τι διακρίνεις;

Μ3: Οι πλευρές οι απέναντι είναι παράλληλες και ίσες αλλά δεν είναι ορθές.

Ε: Μπράβο! Οπότε πώς το λέμε αυτό το σχήμα που είναι παραλληλόγραμμο αλλά χωρίς ορθές γωνίες;

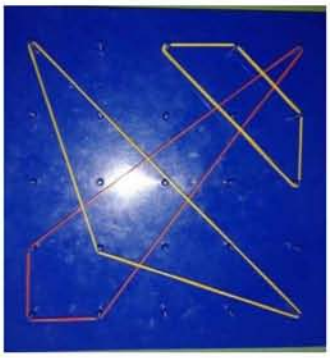
Μ3: Πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Ε: Μπράβο!

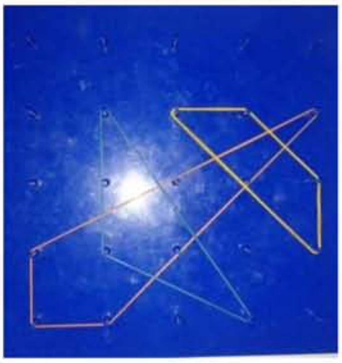
Φάνηκε, επομένως, ότι οι μαθητές/τριες δεν είχαν αποκτήσει ευχέρεια στο λόγο ώστε να μπορούν να περιγράφουν σωστά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Σε αυτό το σημείο έγινε και μία παρέμβαση και από το δάσκαλο και ακολούθησε συζήτηση με τους μαθητές/τριες σχετικά με το τι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ποιες οι ιδιότητές του, ποιες οι ιδιότητες του τετραγώνου, αν το τετράγωνο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τέλος, αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο και γιατί. Η συζήτηση διήρκησε αρκετό χρόνο αλλά οι μαθητές/τριες στο τέλος φάνηκε να κατανοούν περισσότερο τις ιδιότητες των σχημάτων και να εκφράζονται πιο συγκεκριμένα για τις ιδιότητές τους. Οι παρακάτω δραστηριότητες, λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες των μαθητών/τριών, εμπλέκουν πάλι τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να εξοικειωθούν περισσότερο και αν καταφέρουν να κάνουν επιτυχώς το πέρασμα από το επίπεδο 0 στο επίπεδο 1 και να το κατακτήσουν πλήρως.

9η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Αναγνώριση και σχεδιασμός επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων»

Η δραστηριότητα έχει πολλά κοινά με την προηγούμενη μόνο που τώρα τους έδειξα μία εικόνα στον πίνακα από έναν γεωπίνακα στον οποίο ήταν σχεδιασμένο με τα λαστιχάκια ένα σχήμα – αεροπλανάκι (Εικόνα 40). Τους ζήτησα, λοιπόν, όπως το βλέπουν να το μεταφέρουν στον δικό τους γεωπίνακα ακριβώς με τον ίδιο τρόπο σχεδιασμένο. Σε αυτή τη δραστηριότητα παρατήρησα κάποιες δυσκολίες ως προς τον προσανατολισμό των μαθητών/τριών όπως φαίνεται στις εικόνες 41 και 42.



Εικόνα 40



Εικόνα 41

Εικόνα 42

Στο τέλος της δραστηριότητας όταν ρώτησα τους μαθητές/τριες να μου πουν ποια σχήματα αναγνωρίζουν στο αεροπλανάκι και πάλι διέκρινα έναν εγκλωβισμό σε προτυπικά φαινόμενα. Συγκεκριμένα, για το τραπέζιο στη βάση του σχήματος δεν αναφέρθηκε κανείς ενώ οι περισσότεροι το χαρακτήρισαν τετράπλευρο που μοιάζει με καραβάκι. Ο παρακάτω διάλογος κάνει ξεκάθαρο αυτόν τον εγκλωβισμό στα προτυπικά φαινόμενα:

Ε: Ποια σχήματα διακρίνετε στο αεροπλανάκι;

Μ1: Ένα τρίγωνο, ένα σαν παραλληλόγραμμο και ένα σπαθί.

Μ2: Εγώ βλέπω ένα τρίγωνο, ένα σπαθί και ένα καραβάκι.

Ε: Αυτό το σχήμα γιατί το ονομάζεις καραβάκι; Δεν έχει κάποιο όνομα; Ας ξεκινήσουμε με το πόσες πλευρές έχει.

Μ2: Α, ναι είναι ένα τετράπλευρο.

Ε: Πολύ ωραία. Για παρατήρησε, όμως, τι συμβαίνει με τις πλευρές του; Υπάρχει κάτι κοινό με το παραλληλόγραμμο;

Μ2: Νομίζω ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες, αλλά οι άλλες δεν είναι παράλληλες.

Ε: Ακριβώς! Το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες το ονομάζουμε τραπέζιο! Δεν το γνωρίζατε;

(Όλοι μαζί): Όχι!

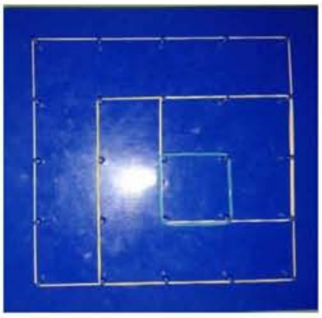
Μ3: Κυρία, εγώ βλέπω ένα τετράπλευρο, ένα τρίγωνο και έναν τραβηγμένο ρόμβο και αν το μαζέψουμε αρκετά βγαίνει πάλι ένα μικρό τρίγωνο.

Ε: Πολύ ωραία παρατήρηση.

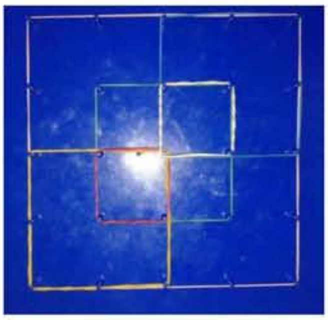
Συμπέρανα, επομένως, ότι οι μαθητές/τριες δεν γνώριζαν καθόλου το τραπέζιο και το παρομοίαζαν με άλλα σχήματα της καθημερινότητας, όπως είναι το καραβάκι. Για τα άλλα σχήματα διέκρινα μία καλύτερη προσπάθεια αναγνώρισης διότι προσπαθούσαν να τα αλλάξουν θέση για να δουν με ποιο άλλο σχήμα μοιάζει, όπως για παράδειγμα το “σπαθί” μοιάζει με τραβηγμένο ρόμβο ή και με ένα μικρό τρίγωνο αν το μετακινήσουμε.

10η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Ανάδειξη των ιδιοτήτων του τετραγώνου- Αναγνώριση σχημάτων με διαφορετικό προσανατολισμό στο χώρο- Μέτρηση εμβαδού στο γεωπίνακα με μετασχηματισμούς σχημάτων»

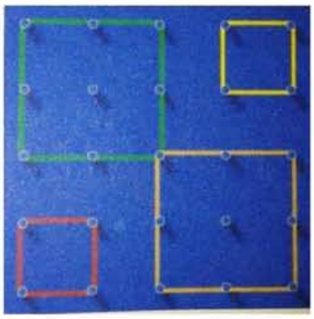
Σε αυτή τη δραστηριότητα ζήτησα από τους μαθητές/τριες να φτιάξουν στο γεωπίνακα όσα περισσότερα <u>διαφορετικά</u> τετράγωνα. Οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν και σχεδίασαν όλα τα πιθανά τετράγωνα που χωράνε στο γεωπίνακα 5x5 (Εικόνα 43). Στην προσπάθειά τους, όμως, να βρουν άλλα διαφορετικά τετράγωνα κάποιοι μαθητές/τριες σχημάτισαν τετράγωνα ίσα με τα προηγούμενα (Εικόνες 44 και 45). Με άλλα λόγια, εγκλωβίστηκαν, όπως αναφέραμε παραπάνω, σε προτυπικά φαινόμενα που σχετίζονται με τον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό των σχημάτων πάνω στο γεωπίνακα.



Εικόνα 43

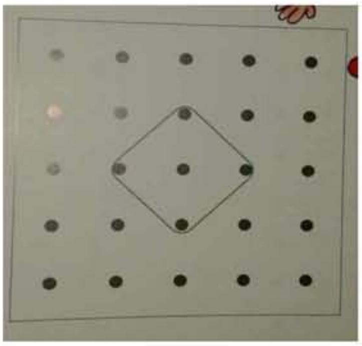


Εικόνα 44

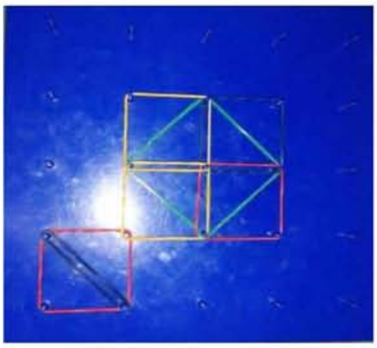


Εικόνα 45

Όταν ολοκλήρωσαν το σχηματισμό τετραγώνων στο γεωπίνακα τους εξήγησα ότι το μικρότερο τετράγωνο που έχουν φτιάξει στο γεωπίνακα θα είναι και η μονάδα μέτρησής για το εμβαδό σχημάτων που θα κατασκευάζουν. Όποτε, επέκτεινα την δραστηριότητα αυτή δείχνοντάς τους στον γεωπίνακα ένα σχήμα και τους ρώτησα να μου πουν ποιο είναι (Εικόνα 46) και έπειτα να βρούνε το εμβαδόν του με βάση τη μονάδα μέτρησης που τους έδειξα (Εικόνα 47).



Εικόνα 46



Εικόνα 47

Στην ερώτηση για το ποιο είναι το σχήμα της Εικόνας 46 οι περισσότεροι μαθητές/τριες μου είπαν ότι είναι τετράγωνο λέγοντας ότι αν το γυρίσουμε λίγο στο πλάι θα φαίνεται καθαρά ότι είναι τετράγωνο. Δεν έδειξαν, επομένως, κάποια ιδιαίτερη δυσκολία να αναγνωρίσουν το σχήμα διότι όπως φαίνεται και στην εικόνα εύκολα κατάλαβαν ότι όλες οι πλευρές του είναι ίσες, άρα είναι τετράγωνο. Περισσότερη δυσκολία είχαν στο να βρούνε το εμβαδόν του σχήματος χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το μικρότερο τετράγωνο του γεωπίνακα. Παρατήρησα τις προσπάθειες που κάνανε, όπου άλλαζαν θέση το σχήμα και το χώριζαν σε περισσότερα κομμάτια φτάνοντας τελικά να το διαμορφώσουν όπως φαίνεται στην Εικόνα 47. Κόψανε, δηλαδή, τη μονάδα μέτρησης στη μέση και είδανε ότι χωράει στο σχήμα 4 φορές, άρα χωράνε 2 τετράγωνα.. Επομένως, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το σχήμα έχει εμβαδόν 2 τετράγωνα.

11η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Ανάδειξη ιδιοτήτων του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καθώς και της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου»

Μετά από μία προσπάθεια μέτρησης του εμβαδού χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το μικρότερο τετράγωνο του γεωπίνακα, ζήτησα από τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν στο γεωπίνακα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 10 μονάδες (μονάδα είναι η απόσταση από το ένα καρφάκι στο άλλο, όχι όμως η διαγώνιος). Τα σχήματα που κατασκευάστηκαν ήταν τα εξής: (Εικόνα 48)

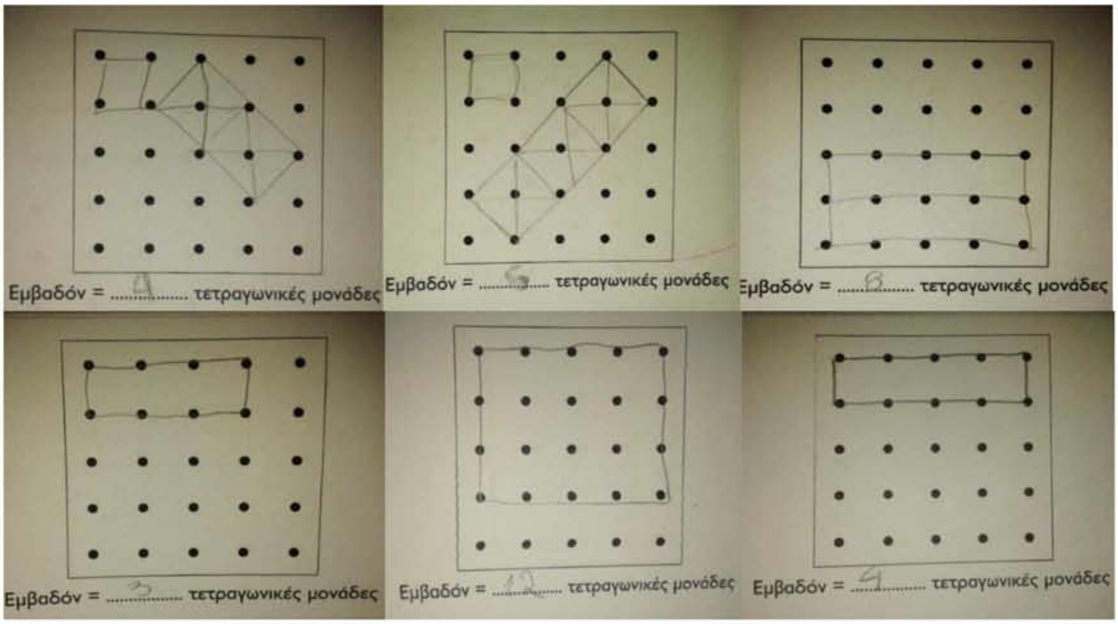
Εικόνα 48

Όταν ρώτησα τους μαθητές/τριες να μου πουν τι παρατηρούν, σχεδόν όλοι απάντησαν για τη σχέση ανάμεσα στην περίμετρο και το εμβαδόν. Μάλιστα οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες ανέφεραν ότι ενώ και τα δύο σχήματα έχουν την ίδιο περίμετρο (10 μονάδες) έχουν διαφορετικό εμβαδόν (4 και 6 τετραγωνικές μονάδες) κάνοντας και τη σύνδεση με μία άλλη δραστηριότητα στην οποία φτάσανε στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή:
«*Δύο σχήματα με την ίδια περίμετρο μπορεί να έχουν διαφορετικό εμβαδόν*»

12η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Υπολογισμός του εμβαδού μέσα από μετασχηματισμούς σχημάτων»

Έχοντας εξασκηθεί οι μαθητές/τριες στην μέτρηση εμβαδού και περιμέτρου, συνέχισα με πιο σύνθετες δραστηριότητες. Σε αυτή τη δραστηριότητα τους μοίρασα φύλλα εργασίας που απεικόνιζαν πολλούς γεωπίνακες, 5x5 στο μέγεθος, και τους ζήτησα να κατασκευάσουν όσο περισσότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα μπορούσαν και έπειτα να υπολογίσουν το εμβαδόν τους. Τους προέτρεψα, μάλιστα, να ψάξουν να βρουν σχήματα και με διαγώνιο προσανατολισμό αρκεί να διατηρούνται οι ιδιότητες του σχήματος.

Το αποτέλεσα αυτής της δραστηριότητας ήταν πολύ ικανοποιητικό. Οι μαθητές/τριες ήταν ήδη υποψιασμένοι για το μετασχηματισμό των σχημάτων, οπότε όχι μόνο κατασκεύασαν πολλά ορθογώνια παραλληλόγραμμα αλλά κατάφεραν να βρουν και το εμβαδόν τους ακόμα και με διαγώνιο προσανατολισμό. Στην εικόνα 49 που ακολουθεί φαίνονται κάποια παραδείγματα των προσπαθειών τους:

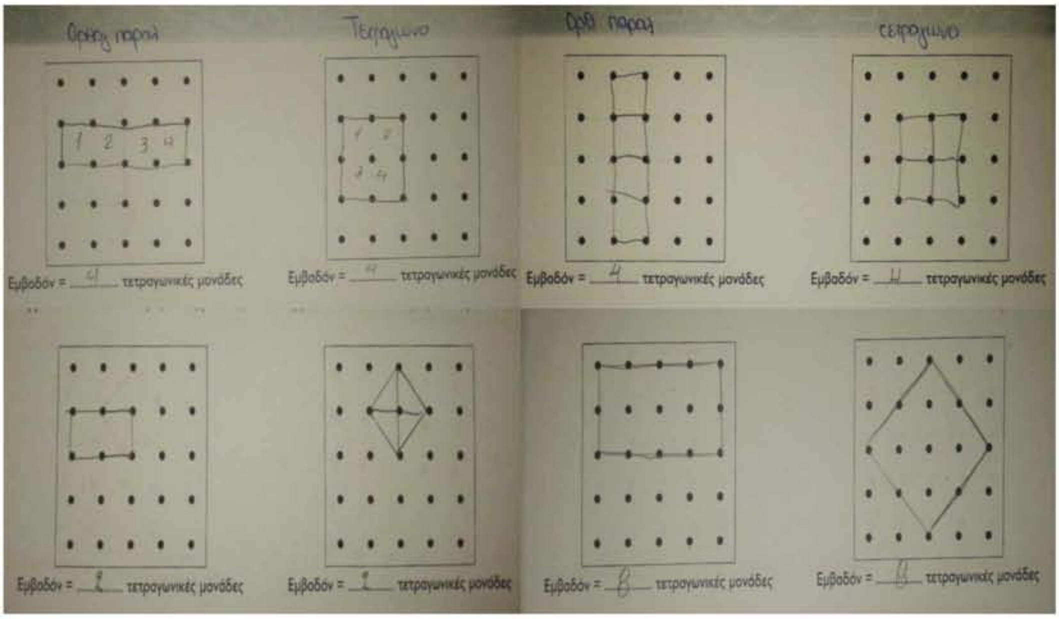


Εικόνα 49

Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές/τριες είχαν τη δυνατότητα να μελετήσουν και να κατασκευάσουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαφορετικό προσανατολισμό από τον συνήθη που αντιμετωπίζουν στα πλαίσια μιας παραδοσιακής προσέγγισης καθώς και να εξασκηθούν πολύ καλά στον υπολογισμό του εμβαδού.

13η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Επεξεργασία των παραλληλογράμμων - Υπολογισμός του εμβαδού μέσα από μετασχηματισμούς σχημάτων»

Η παραπάνω δραστηριότητα έγινε λίγο πιο απαιτητική. Συγκεκριμένα, μοίρασα στους μαθητές/τριες ένα άλλο φύλλο εργασίας, πάλι με τους ίδιους γεωπίνακες, και τους ζήτησα να βρουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τετράγωνα που να έχουν όμως το ίδιο εμβαδόν συνδυάζοντας το και με την προηγούμενη δραστηριότητα. Έπρεπε δηλαδή στη μία στήλη να κατασκευάσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στην απέναντι στήλη το αντίστοιχο τετράγωνο με το ίδιο εμβαδόν. Οι προσπάθειες των μαθητών/τριών φαίνονται στην παρακάτω Εικόνα 50:

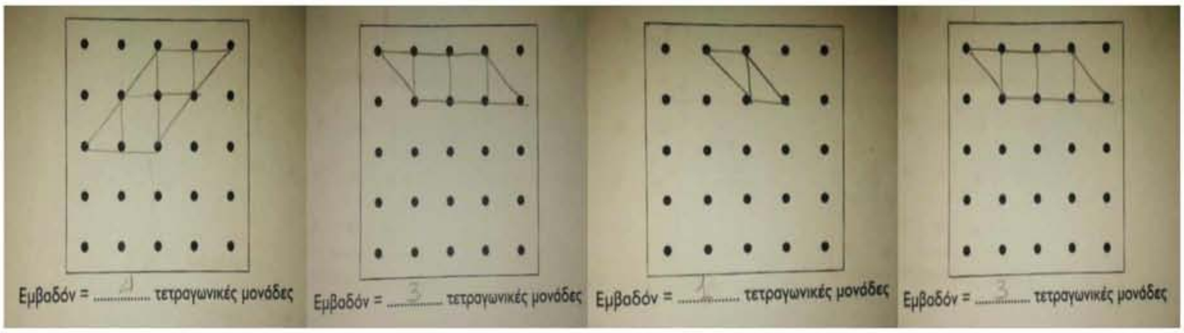


Εικόνα 50

Όπως φαίνεται και από την εικόνα οι περισσότεροι μαθητές/τριες κατάφεραν επιτυχώς να μελετήσουν και να κατασκευάσουν ισεμβαδικά σχήματα. Οι μαθητές/τριες αξιοποίησαν την εμπειρία τους από την προηγούμενη δραστηριότητα ενώ κάποιοι άλλοι θυμήθηκαν τη δραστηριότητα που αφορούσε την εύρεση όλων των τετραγώνων και την συνδύασαν. Αξιοσημείωτη, μάλιστα, είναι και η προσπάθεια ενός μαθητή που όπως φαίνεται στην Εικόνα 50 έφτιαξε ένα τετράγωνο με εμβαδό 8 τετραγωνικές μονάδες. Ο μετασχηματισμός του σχήματος καθώς και ο υπολογισμός του εμβαδού μαρτυρά το πόσο καλά κατανόησε τον τρόπο για τον υπολογισμό του εμβαδού. Φάνηκε, επομένως, ότι έχουν κάνει μία πολύ μεγάλη πρόοδο στη διαχείριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στον υπολογισμό του εμβαδού τους με άτυπες μονάδες μέτρησης (τετράγωνο στο γεωπίνακα) οι οποίες όμως είναι πολύ κοντά με τις τυπικές μονάδες μέτρησης που θα εισαχθούν αργότερα (τετραγωνικό εκατοστό).

14η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Επεξεργασία των παραλληλογράμμων - Υπολογισμός του εμβαδού μέσα από μετασχηματισμούς σχημάτων».

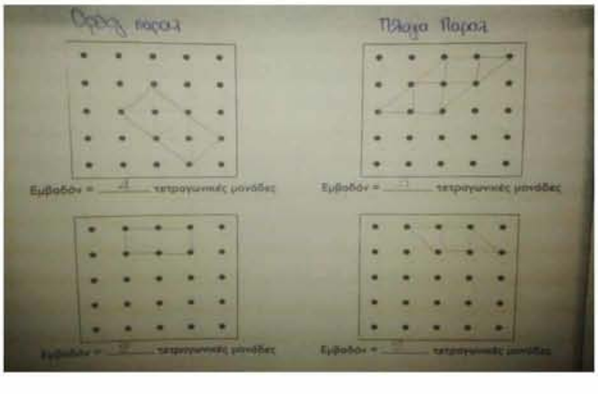
Η δεύτερη ενότητα με τη χρήση των χειραπτικών υλικών ολοκληρώθηκε με αυτή τη δραστηριότητα, η οποία ήταν η πιο σύνθετη και απαιτητική. Αρχικά, μοίρασα τα φύλλα εργασίας με τους γεωπίνακες και αφού συζητήσαμε για τις ιδιότητες του πλάγιου παραλληλογράμμου, ζήτησα από τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν όσα πλάγια παραλληλόγραμμα μπορούσαν στο γεωπίνακα και να βρούνε το εμβαδόν τους. Η Εικόνα 51 δείχνει την προσπάθεια των μαθητών/τριών που ήταν πολύ ικανοποιητική:



Εικόνα 51

Το πλάγιο παραλληλόγραμμο το είχαμε συναντήσει και σε προηγούμενες δραστηριότητες, οπότε, όπως φάνηκε και από το αποτέλεσμα, οι μαθητές/τριες δεν αντιμετώπισαν πρόβλημα στην κατασκευή του, ενώ μου έκανε ιδιαίτερη εντύπωση το γεγονός ότι υπολόγισαν το εμβαδόν με πολύ περισσότερη ευκολία καθώς χώριζαν το σχήμα στα επιμέρους τετράγωνα ή τρίγωνα και υπολόγιζαν αμέσως το εμβαδόν του.

Στο τέλος αυτής της δραστηριότητας, η οποία ήταν αρκετά απαιτητική, ζήτησα από τους μαθητές/τριες μία πρόκληση. Συγκεκριμένα, τους ζήτησα να μου φτιάξουν ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που να έχουν όμως το ίδιο εμβαδό. Πρόκειται για μία αρκετά δύσκολη δραστηριότητα καθώς οι μαθητές/τριες έπρεπε να συσχετίσουν τα τρία διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα (πλάγιο παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τετράγωνο) μέσα από τη μελέτη και τον υπολογισμό του εμβαδού τους και πιο συγκεκριμένα, έπρεπε να σχεδιάσουν ισεμβαδικά πλάγια και ορθογώνια παραλληλόγραμμα και να μελετήσουν τους μετασχηματισμούς των σχημάτων σε σχέση με την τετραγωνική μονάδα. Η δραστηριότητα αυτή τους δυσκόλεψε αρκετά καθώς πολλοί μαθητές/τριες πίστευαν ότι δεν γίνεται να φτιάξουν αυτά τα δύο σχήματα με το ίδιο εμβαδόν. Ωστόσο, ήταν χαρακτηριστική η προσπάθεια τεσσάρων μαθητών/τριών οι οποίοι μπόρεσαν με συνεργασία να φτιάξουν δύο σχήματα πλάγιων και ορθογώνιων παραλληλογράμμων με το ίδιο εμβαδό και τα οποία απεικονίζονται στην Εικόνα 52.



Εικόνα 52

Η προσπάθεια όλων των μαθητών/τριών με χαροποίησε ιδιαίτερα διότι η εξελεγκτική τους πορεία στον υπολογισμό του εμβαδού παραλληλογράμμων ήταν φανερά ικανοποιητική και με εμφανή αποτελέσματα. Έτσι, ολοκληρώθηκε και η δεύτερη ενότητα των δραστηριοτήτων που είχα σχεδιάσει και τέλος, περνάμε στην τρίτη και τελευταία ενότητα.

3η ΕΝΟΤΗΤΑ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΜΕ ΤΥΠΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Η έρευνά μου ολοκληρώθηκε με την τρίτη ενότητα μέσα από την οποία παρατήρησα κυρίως κατά πόσο τα χειραπτικά υλικά και οι δραστηριότητες που σχεδίασα βοήθησαν τους μαθητές/τριες να περάσουν στη μέτρηση του εμβαδού με τη χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης. Συγκεκριμένα, αφού ο δάσκαλος της τάξης τους έκανε μία εισαγωγή στις τυπικές μονάδες μέτρησης του εμβαδού και στις υποδιαιρέσεις τους, σχεδίασα την εξής βιωματική δραστηριότητα:

15η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: «Γνωριμία με τις συνήθεις μονάδες μέτρησης της επιφάνειας»

Σε αυτή τη δραστηριότητα προσπάθησα με βιωματικό τρόπο να γνωρίσουν οι μαθητές/τριες το τετραγωνικό μέτρο και να δουν το μέγεθός του μέσα στην τάξη και να μην μείνουν μόνο στο θεωρητικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, έφερα στην τάξη μία ξύλινη μακέτα με διαστάσεις 1x1 και την τοποθέτησα πάνω στον πίνακα ώστε να γίνεται ορατή από όλους. Έπειτα, πήρα το μεγάλο χάρακα που υπήρχε στην τάξη, μήκους ενός μέτρου και μέτρησα μαζί με τους μαθητές/τριες τις διαστάσεις της μακέτας ώστε να δουν και οι ίδιοι ποιο είναι το μέγεθός της.

Μετά την γνωριμία με το τετραγωνικό μέτρο έχοντας ως οδηγό και το βιβλίο του μαθητή ρώτησα τους μαθητές/τριες να μου πουν ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις του, ώστε να τις σχεδιάσουμε στο τετραγωνικό μέτρο και να δούμε ποιο είναι το αντίστοιχο μέγεθός τους. Οι υποδιαιρέσεις, όπως σωστά ανέφεραν οι μαθητές/τριες είναι το τετραγωνικό δεκατόμετρο, το τετραγωνικό εκατοστό και το τετραγωνικό χιλιοστό. Έχοντας, ήδη, προηγηθεί το μάθημα με τις τυπικές μονάδες μέτρησης από τον δάσκαλο, ρώτησα τους μαθητές/τριες να μου πουν πόσα τετραγωνικά δεκατόμετρα έχει το τετραγωνικό μέτρο και έπειτα χώρισα με τον χάρακα το τετραγωνικό μέτρο σε 100 ίσα τετράγωνα διάστασης 10x10 εκατοστά. Μετά, τους δείχνω ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο και τους ζητάω να μου πουν πόσα τετραγωνικά εκατοστά εμπεριέχονται και μου απάντησαν πολύ σωστά, 100.

Στη συνέχεια της δραστηριότητας, για να γίνει πιο ενδιαφέρουσα και να ξεφύγουμε από τους τύπους, μοίρασα στους μαθητές/τριες φύλλα από περιοδικά και τους ζήτησα να μου τα κόψουν σε σχήμα τετράγωνο με διαστάσεις 10x10 εκατοστά και να τα τοποθετήσουμε στην μακέτα μας. Το αποτέλεσμα φαίνεται στις Εικόνες 53 και 54.

Εικόνα 53

Εικόνα 54

Όπως φαίνεται και στις εικόνες, τοποθετήσαμε στο τετραγωνικό μέτρο μία κάθετη στήλη με δέκα φύλλα περιοδικών με διαστάσεις 10x10 τετραγωνικά εκατοστά και μία οριζόντια στήλη με τα αντίστοιχα φύλλα περιοδικών. Δεν καλύψαμε όλο το τετραγωνικό μέτρο διότι ήθελα να προτρέψω τους μαθητές/τριες να υπολογίσουν μόνοι τους, βλέποντας την κάθετη και οριζόντια στήλη, το σύνολο των τετραγωνικών δεκατόμετρων που υπάρχουν σε ένα τετραγωνικό μέτρο. Οι μαθητές/τριες δεν δυσκολεύτηκαν καθόλου να υπολογίσουν το σύνολο καθώς το υπολόγισαν κάνοντας πολλαπλασιασμό και καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι όντως το τετραγωνικό μέτρο αποτελείται από 100 τετραγωνικά δεκατόμετρα. Στο τέλος, όταν τους ρώτησα με ποια στρατηγική βρήκαν το αποτέλεσμα όλοι μαζί συμφώνησαν πως πολλαπλασιάζοντας την κάθετη με την οριζόντια στήλη στο σχήμα μπορούμε να βρούμε το σύνολο των τετραγώνων που υπάρχουν.

Σε αυτό το σημείο ζήτησα από τους μαθητές/τριες να μου κάνουν κάποιες εκτιμήσεις, έχοντας μπροστά τους το τετραγωνικό μέτρο, και να υπολογίσουν πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι η τάξη τους, η αίθουσα υπολογιστών καθώς και το προαύλιό τους. Κάποιες εκτιμήσεις ξέφευγαν αρκετά από το πραγματικό, ενώ κάποιες άλλες ήταν κοντά στην πραγματικότητα. Ιδιαίτερη εντύπωση μου έκανε ο τρόπος σκέψης των μαθητών/τριών για τον υπολογισμό του εμβαδού. Ο ακόλουθος διάλογος πραγματοποιήθηκε στην τάξη όπου οι μαθητές/τριες έκαναν μια εκτίμηση για το εμβαδόν της τάξης τους.

Ε: Πόσο τετραγωνικά μέτρα πιστεύετε ότι είναι η τάξη μας;

Μ1: Περίπου στα 35 τ.μ. πιστεύω.

Μ2: Εγώ υπολογίζω κοντά στα 36 τ.μ. κυρία. Είμαι σίγουρος!

Ε: Πώς είσαι τόσο σίγουρος;

Μ2: Γιατί, κυρία. αν παρατηρήσουμε την τάξη χωράνε περίπου 6 τετραγωνικά μέτρα στην οριζόντια και στην κάθετη στήλη οπότε από τον πολλαπλασιασμό βγαίνουν 36 τ.μ..

Ε: Πολύ σωστό το σκεπτικό σου!

Μ3: Εγώ πάλι κυρία πιστεύω 24 τ.μ..

Όλοι μαζί: Και εμείς κυρία τόσο πιστεύουμε. Στην οριζόντια στήλη χωράνε μόνο 4 τ.μ. ενώ κάθετα χωράνε 6 τ.μ.. Οπότε το αποτέλεσμα βγαίνει 24 τ.μ..

Ε: Ο τρόπος σκέψης σας είναι σωστός για όλους σας γιατί μπορείτε σωστά να κάνετε εκτιμήσεις όχι μετρώντας ένα – ένα τα τετραγωνάκια αλλά κάνοντας κατευθείαν πολλαπλασιασμό κερδίζοντας πολύ χρόνο.

Μ4: Ναι κυρία έτσι πρέπει να υπολογίζουμε, ειδικά όταν έχουμε μεγάλη έκταση.

Ε: Μπράβο!!

Ολοκληρώνοντας, οι μαθητές/τριες θεώρησα ότι ήταν έτοιμοι να περάσουν στον υπολογισμό του εμβαδού με τη χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης καθώς παρατήρησα ότι κατάφεραν επιτυχώς να εξάγουν τον τύπο του εμβαδού τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν και στις επόμενες δραστηριότητες του βιβλίου για την εύρεση του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $4^{Ο}$: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Αποτελέσματα πολλών ερευνών, οι οποίες είναι καταγραμμένες στη διεθνή βιβλιογραφία, παρουσιάζουν ότι οι μαθητές/τριες συναντούν ιδιαίτερες δυσκολίες στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών, όπως της Περιμέτρου και του Εμβαδού επίπεδων σχημάτων. Οι δυσκολίες τους στο σχολείο συνεχίζουν να τους ακολουθούν και πέρα από αυτό, όσον αφορά σε εφαρμογές που σχετίζονται με τις παραπάνω έννοιες. Αυτό το γεγονός καθιστά επιτακτική την ανάγκη για υιοθέτηση διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων των γεωμετρικών εννοιών γενικότερα και των δύο αυτών εννοιών ειδικότερα.

Στην παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε μία διδακτική παρέμβαση σε μαθητές/τριες της Τετάρτης (Δ΄) Τάξης του Δημοτικού Σχολείου η οποία διήρκησε περίπου ένα μήνα. Συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε μία προσέγγιση διαφορετική από την παραδοσιακή, μέσα από την οποία οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν σε μία ενεργή απόκτηση γνώσεων, χωρίς να στερηθούν τη χαρά της προσωπικής- ομαδικής συμμετοχής και της ενεργητικής εμπλοκής στην μαθησιακή διαδικασία.

Ειδικότερα, όσον αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν για την υλοποίηση της έρευνας, κατάφερα να τα απαντήσω σε αρκετά ικανοποιητικό επίπεδο. Σε αυτό συνέβαλαν φυσικά οι δραστηριότητες που σχεδίασα με τέτοιο τρόπο ώστε αφενός να συνάδουν με το ηλικιακό και γνωστικό επίπεδο των μαθητών/τριών και αφετέρου να συνδέονται με τους στόχους της αντίστοιχης θεματικής ενότητας του ΔΕΠΠΣ. Οι δραστηριότητες εξελίχθηκαν με προοδευτική σειρά ακολουθώντας μία πορεία από το απλό προς το σύνθετο. Αυτό, όμως, που έκανε την διδακτική μου παρέμβαση διαφορετική ήταν η χρήση των χειραπτικών υλικών καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης για την διδασκαλία των εννοιών της Περιμέτρου και του Εμβαδού. Οι μαθητές/τριες πρώτη φορά ερχόντουσαν σε επαφή με τα συγκεκριμένα υλικά, εκτός του τάνγκραμ, και είχαν μία εντυπωσιακή εξελικτική πορεία στην κατανόηση των δύο εννοιών. Αυτό φάνηκε και από την παρακολούθηση που έκανα πριν την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην τάξη καθώς και από την διδασκαλία που έκανε ο δάσκαλος της τάξης πάνω στις δύο αυτές έννοιες. Οπότε και η σειρά των δραστηριοτήτων ήταν ανάλογη της εξελικτικής πορείας των μαθητών/τριών.

Μέσα από αυτήν την έρευνα, αναδεικνύεται η θετική συμβολή των χειραπτικών υλικών στη μάθηση διότι, όπως παρατηρήθηκε, αυξήθηκε κατά πολύ η επίδοση των μαθητών/τριών στην κατανόηση των εννοιών και κυρίως των σχέσεων που συνδέουν την Περίμετρο με το Εμβαδόν. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες, υπό την καθοδήγησή μου, οδηγήθηκαν μόνοι τους στην εξαγωγή των συμπερασμάτων μέσα από την παρατήρηση, τα πειράματα και τον έλεγχο των υποθέσεών τους. Τα σημαντικότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε μέσα από τις δραστηριότητες και τα εξέφρασαν οι ίδιοι οι μαθητές/τριες είναι τα εξής:

- « *Δύο σχήματα με διαφορετικό εμβαδόν μπορεί να έχουν την ίδια περίμετρο*» και αντίστροφα, ότι δηλαδή
- «*Δύο σχήματα με την ίδια περίμετρο μπορεί να έχουν διαφορετικό εμβαδόν*»
- «*Διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδόν παρόλο που έχουν διαφορετική περίμετρο*»
- «*Δύο σχήματα με ίδιο εμβαδόν μπορεί να έχουν και διαφορετική περίμετρο*»

Πρόκειται για σχέσεις που οι περισσότεροι μαθητές/τριες δεν γνωρίζουν ότι υπάρχουν αλλά και δύσκολα γίνονται κατανοητές. Ο μόνος τρόπος για να τις κατανοήσουν και να τις κατακτήσουν είναι να οδηγηθούν μόνοι τους σε αυτή τη διάκριση μέσα από κατασκευές και σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Οι μαθητές/τριες εξέφραζαν τα συμπεράσματά τους, άλλοτε με θαυμασμό και άλλοτε με δισταγμό κυρίως στις τελευταίες δραστηριότητες που έπρεπε να κάνουν μετασχηματισμούς των σχημάτων για να βρουν το εμβαδόν τους. Το ενδιαφέρον τους, μάλιστα, κορυφώθηκε στις δραστηριότητες που έπρεπε να σκεφτούν συνδυαστικά και να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο με το ίδιο εμβαδόν καθώς και ένα ορθογώνιο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με το ίδιο εμβαδόν. Όπως διακρίνουμε, μέσα από αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές/τριες εξασκήθηκαν πολύ και με τις ιδιότητες των σχημάτων και κυρίως των παραλληλογράμμων. Σχεδόν όλες οι δραστηριότητες απαιτούσαν καλή γνώση των ιδιοτήτων των σχημάτων ώστε να μπορούν να διακρίνουν τις διαφορές και τις ομοιότητές τους. Από τα αποτελέσματα, λοιπόν, της έρευνας μπορούμε να πούμε ότι όλοι σχεδόν οι μαθητές/τριες κατάφεραν να κατακτήσουν το πρώτο επίπεδο των van Hiele.

Επίσης, είναι αξιοπρόσεχτο το γεγονός ότι οι μαθητές/τριες συνέδεσαν μόνοι τους τον υπολογισμό του εμβαδού με την πράξη του πολλαπλασιασμού και τον υπολογισμό της περιμέτρου με την πράξη της πρόσθεσης. Αυτή η γνώση ανήκε στις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών /τριών οι οποίοι/ες στην αρχή είχαν μεγάλη σύγχυση για αυτές τις έννοιες. Στο τέλος, όμως, όχι απλά τις διαχώρισαν αλλά κατάφεραν με την εισαγωγή στις τυπικές μονάδες μέτρησης να διατηρήσουν όσα έμαθαν από τη χρήση των χειραπτικών υλικών και να εισαχθούν πολύ πιο εύκολα στην εφαρμογή του τύπου τον οποίο και πάλι δημιούργησαν μόνοι τους συνδέοντάς τον με τις δραστηριότητες που προηγήθηκαν.

Αξίζει , επιπλέον να αναφερθεί ότι στην αρχή της έρευνας έγινε εμφανές το φαινόμενο του προτύπου, η σύνδεση δηλαδή μιας γεωμετρικής έννοιας (π.χ. το παραλληλόγραμμο) μόνο με κάποιο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται παρανοήσεις. Η σειρά, όμως, με την οποία σχεδιάστηκαν οι δραστηριότητες μπορεί να άφησε στην αρχή περιθώριο να εκφραστούν ελεύθερα οι απόψεις των μαθητών/τριών για τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα αλλά εξελίχθηκαν με τέτοιο τρόπο που απαιτούσαν καλή γνώση των ιδιοτήτων και κυρίως των παραλληλογράμμων που οι μαθητές/τριες μετά από συχνή επαφή με αυτή τη γνώση στο τέλος κατάφεραν να την αφομοιώσουν και να την εφαρμόσουν.

Θα πρέπει φυσικά να αναφέρουμε πως εξαιτίας κάποιων παραμέτρων, όπως ο περιορισμένος χρόνος που αφιερώθηκε στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, όπως και ο μικρός αριθμός του δείγματος της έρευνας (19 μαθητές/τριες), δεν μας επιτρέπουν τη διατύπωση γενικών συμπερασμάτων. Παρόλο αυτά κάθε έρευνα μπορεί να αποτελεί αφορμή για διατύπωση νέων ερευνητικών ερωτημάτων αλλά και να συμβάλλει στον προβληματισμό και τη διερεύνηση ζητημάτων που απασχολούν την εκπαιδευτική κοινότητα γενικά.

Τέλος, θα καταλήγαμε λέγοντας πως η συμβολή των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών γενικά, αλλά και της Γεωμετρίας ειδικότερα, είναι ένα θέμα που χρειάζεται να διερευνηθεί περισσότερο, για το λόγο ότι εμπλέκει πολλές παραμέτρους στη διερεύνησή του, οι οποίες είναι όλες ουσιαστικής και κρίσιμης σημασίας για τη μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Battista, M. (1999). *The importance of spatial structuring in geometric reasoning. Teaching Children Mathematics*, 6, no3, 170-177.

Baturo A. & Nason R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. Educational Studies in Mathematics, 31(3), 235-268

Berenson S., van der Valk T., Oldham E., Runesson U., Queiroz Moreira C., & Broekman H. (1997). *An international study to investigate prospective teachers' content knowledge of the area concept*. European Journal of Teacher Education, 20, 137–150

DeGuire, L. (1987). *Geometry: An avenue for teaching problem solving in grades K-9.* In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12, (pp. 59-68)*, 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

Dickson L., Brown M., & Gibson O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. London: Cassell

Douglas H. Clements & Michelle Stephan, Measurement in Pre K2 mathematics, Conference on Standards for Preschool and Kindergarten Mathematics Education, ESI-98-17540

Flavell J. (1963). *The developmental psychology of Jean Piaget*. New York: Van Nostrad

Gillian Kidman. *Testing for Additivity in Intuitive Thinking of Area*, Merga24 Conference, Numeracy and Beyond, University of Sydney, 30 June-4 July 2001.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. J. Bishop et al (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* (Part 2 / pp. 161-204). Netherlands: Kluwer Academic Publisher

Hiebert J. & Lefevre P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (pp.1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Lawson, M., & Chinnappan, M. (2000). *Knowledge connectedness in geometry problem solving*. Journal for Research in Mathematics Education, 31, no1, 26-43.

Mary Ann Hannibal, *Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes*, Teaching Children Mathematics, vol. 5, No 6, Feb 1999.

Milauskas, G. (1987). *Creative geometry problems can lead to creative problem solvers.* In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), Learning and Teaching Geometry, K-12, (pp. 69-84), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

Murphy C. (2012). *The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area*, Journal of Mathematics Teacher Education, 2012 - 15:187–206

Siegler, R. S. (1983). Five generalizations about cognitive development. American Psychologist, 38, 263-277

Silverman I. W. & Paskewitz S. L. (1988). *Developmental and individual Differences in Children's Area Judgment Rules*. Bowling Green State University, Journal Of Experimental Child Psychology 46, 74-87

Tierney C., Boyd C. & Davis G. (1990). *Prospective primary teachers' conceptions of area.* In G. Booker,P. Cobb, & T. D. Mendecuti (Eds.), *Proceedings of the 14th conference of the international group of the psychology of mathematics education* (pp. 307–315). Mexico: IGPME

Trevor G Bond & Kellie Parkinson, *Identifying Learner Characteristics Relevant to Children's Understanding of Area Concepts*, International Research Group Measuring Development, Symposium, AERA 1997, Chicago.

Usiskin, Z. (1997), *The implications of "Geometry for all"*, NCSM Journal of Mathematics Education Leadership, I(3), 5-16

Van de Walle John A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία.* (μετ: Αλεξανδροπούλου Α., Κομπορόζος Β.) (επιμ: Τριανταφυλλίδης Τ.)

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight*, Orlando, Academic Press

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Α.Π.Σ.) υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books, σελ:257-259

Κολέζα Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.*

Κοντογιάννης, Δ., & Ντζιαχρήστος, Β. (1999). *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας* (3η έκδοση). Αθήνα

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου*, Αθήνα: Πατάκης

Παπαδόπουλος, Ι και Δαγδιλέλης, Β. (2001). *Σχεδίαση και Χρήση Πληροφορικών Περιβαλλόντων για τη Διδασκαλία των Εμβαδών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, *Πρακτικά 18ου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Ρόδος, 424-434.

Τρέσσου, Ε. (επιμ.) (1993). *Χώρος-Γεωμετρία: Περιεχόμενο και Διδασκαλία.* Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ