ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΡΙΑ ΜΑΡΜΑΡΑ

«ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΒΟΛΟΣ 2013

Ο αστρονόμος μπορεί να σου μιλά για την αντίληψή του για το διάστημα αλλά δε μπορεί να σου δώσει την αντίληψή του.

Ο μουσικός ίσως σου τραγουδήσει το ρυθμό που είναι σε όλο το χώρο αλλά δε μπορεί να σου δώσει το αυτί το οποίο συλλαμβάνει το ρυθμό ούτε τη φωνή που τον αντηχεί.

Khalil Gibran (*The Prophet* ***)***

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΛΑΚΙΔΙΑ

(Algebra tiles)

Η ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου, αναπληρωτής καθηγητής ΠΤΔΕ του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης, αναπληρωτής καθηγητής ΠΤΔΕ του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Αναστάσιος Πατρώνης, επίκουρος καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΜΕΛΗ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Κωνσταντίνος Τζανάκης, καθηγητής του Π.Τ.Δ.Ε του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Χαράλαμπος Σακονίδης, καθηγητής του Π.Τ.Δ.Ε του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης.

Δημήτριος Χασάπης, αναπληρωτής καθηγητής του τμήματος Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Άννα Χρονάκη, καθηγήτρια του Π.Τ.Π.Ε του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΡΙΑ ΜΑΡΜΑΡΑ

«ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΒΟΛΟΣ 2013

Στους αγαπημένους μου

Νίκο

Δημήτρη - Ελένη

Θάνο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΑ

Στη σύνταξη, τη διαμόρφωση και τη διόρθωση της διατριβής αυτής αποφασιστική υπήρξε η θετική και πολύτιμη συμπαράσταση και επιστημονική καθοδήγηση του αναπληρωτή καθηγητή κ. Κώστα Χατζηκυριάκου προς τον οποίο εκφράζω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω για τη συμπαράσταση και τις επιστημονικές συμβουλές του τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη και τον επίκουρο καθηγητή κ. Αναστάσιο Πατρώνη.

Ευχαριστώ επίσης τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τους: κ. Τζανάκη Κωνσταντίνο, καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε του Πανεπιστημίου Κρήτης, κ. Σακονίδη Χαράλαμπο καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, κ Χασάπη Δημήτριο, αναπληρωτής καθηγητής του τμήματος Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και την κ. Χρονάκη Άννα καθηγήτρια του Π.Τ.Π.Ε του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για την τιμή που μου έκαναν να μελετήσουν και να κρίνουν την ερευνητική μου εργασία.

Θερμές επίσης ευχαριστίες οφείλω και στον καθηγητή μαθηματικών κ. Γιώργο Μαυροφώτη για την βοήθειά του στη διάρκεια της πιλοτικής και της κύριας παρέμβασης στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης Βόλου, καθώς και στον καθηγητή Θεολογίας Ευθύμιο Γεωργούση για τις υποδείξεις του σχετικά με τη μορφή του κειμένου και για την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά την πορεία της εργασίας μου.

Θα ήταν παράλειψή μου αν δεν ευχαριστούσα τους διευθυντές των σχολίων που δέχτηκαν να γίνουν οι πιλοτικές μας διδασκαλίες και η κύρια διδακτική μας παρέμβαση καθώς και τους διδάσκοντες καθηγητές τμημάτων που μας βοήθησαν να πραγματοποιήσουμε την έρευνα αυτή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία μελετά την επίδραση στη μάθηση και τη διδασκαλία που έχει η εισαγωγή χειραπτικού υλικού, των αλγεβρικών πλακιδίων, των αλγεβρικών εννοιών των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης δευτεροβαθμίων πολυωνύμων και στην επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Η μελέτη διήρκεσε τέσσερα σχολικά έτη αφού για τη διερεύνηση του θέματος χρειάστηκε να γίνουν πιλοτικές διδακτικές παρεμβάσεις σε διάφορα σχολεία πριν την κύρια διδακτική μας παρέμβαση.

Για τις ανάγκες της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια και συνεντεύξεις των μαθητών και των καθηγητών των τάξεων που συμμετείχαν στις πιλοτικές διδακτικές παρεμβάσεις και στην κύρια διδακτική παρέμβασή μας.

Η ποιοτική ανάλυση των ερευνητικών μας δεδομένων μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας με χρήση χειραπτικών υλικών, στην περίπτωσή μας των αλγεβρικών πλακιδίων, βοήθησε τους μαθητές να μάθουν τις αλγεβρικές έννοιες και τεχνικές και ιδιαίτερα εκείνους που είχαν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά. Σε ότι αφορά την επίδοσή τους στο μάθημα δεν παρατηρήθηκε σημαντική βελτίωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ **ΣΕΛΙΔΑ**

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ</u>: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

<u>ΕΠΙΛΟΓΟΣ</u>

Εισαγωγή

Αν δεν μπορείς να επιλύσεις ένα πρόβλημα, τότε υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος που μπορείς να το λύσεις: βρες τον.

George Pólya

Σκοπός της έρευνας αυτής, που είναι μια έρευνα δράσης, είναι να εξεταστεί η επίδραση στη διδασκαλία και στη μάθηση μέρους της διδακτέας ύλης της άλγεβρας της τρίτης Γυμνασίου, του χειραπτικού υλικού (manipulatives), των αλγεβρικών πλακιδίων (algebra tiles), σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας. Συγκεκριμένα μελετούμε την επίδραση που έχει η διδασκαλία και μάθηση μέσω του χειραπτικού υλικού στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές[1] α) μαθαίνουν και εφαρμόζουν σωστά την παραγοντοποίηση δευτεροβαθμίων πολυωνύμων με κοινό παράγοντα, β) μαθαίνουν και εφαρμόζουν σωστά τις ταυτότητες του τελείου τετραγώνου και της διαφοράς τετραγώνων και γ) μαθαίνουν να επιλύουν σωστά εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Της βασικής παρέμβασης προηγήθηκαν πιλοτικές δίωρες διδασκαλίες σε διάφορα σχολεία που μας βοήθησαν να διαμορφώσουμε την τελική μορφή της ερευνητικής παρέμβασής μας. Στην παρέμβαση αυτή, που έγινε τη σχολική χρονιά 2007-2008, συμμετείχαν 48 μαθητές δύο τμημάτων της τρίτης Γυμνασίου σχολικής μονάδας του Δήμου Βόλου. Οι

[1] Σε όλο το κείμενο της διατριβής αυτής ο όρος μαθητές χρησιμοποιείται στη θέση της σύζευξης μαθητές και μαθήτριες.

μαθητές του τμήματος παρέμβασης διδάχθηκαν το μάθημα της άλγεβρας με αλγεβρικά πλακίδια δουλεύοντας σε ομάδες. Στο τμήμα ελέγχου ακολουθήθηκε το μη ομαδοσυνεργατικό, δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας και δεν χρησιμοποιήθηκαν χειραπτικά υλικά.

Ειδικότερα μας ενδιέφερε να μελετήσουμε:

1ον. Αν τα αλγεβρικά πλακίδια σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας επηρεάζουν και πώς τη μάθηση των αλγεβρικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης, καθώς και του τρόπου επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους μαθητές.

2ον. Πώς επιδρά η ομαδοσυνεργατική μάθηση στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα που σχετίζονται με τις αλγεβρικές έννοιες των ταυτοτήτων, παραγοντοποίησης, επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

3ον. Πώς επιδρά η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

Για να ελέγξουμε τη συγκρισιμότητα των τμημάτων ελέγχου και παρέμβασης δώσαμε στην αρχή της παρέμβασης προς συμπλήρωση ένα διαγνωστικό τεστ βασισμένο σε βασικές αλγεβρικές γνώσεις προηγουμένων τάξεων (βλ. Παράρτημα, Πίνακας 1). Μετά το τέλος της παρέμβασης, που διήρκεσε έξι μήνες, δώσαμε στους μαθητές και των δύο τμημάτων, παρέμβασης και ελέγχου, διαγνωστικό τεστ, με ασκήσεις στις προς διερεύνηση προαναφερθείσες ενότητες, για να ελέγξουμε τον βαθμό επίδρασης των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας στην κατανόηση και μάθηση των αλγεβρικών ενοτήτων που αναφέραμε πιο πάνω.

Στις παρεμβατικές μας διδασκαλίες εφαρμόσαμε το ομαδοσυνεργατικό μοντέλο μάθησης. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τεσσάρων μελών, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποιο κριτήριο επιλογής στη συγκρότηση της ομάδας.

Η κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της ένα σετ αλγεβρικών πλακιδίων και φύλλα δραστηριοτήτων ειδικά σχεδιασμένα, με στόχο την εκμάθηση των αλγεβρικών ενοτήτων μέσω της χρήσης των χειραπτικών υλικών. Παράλληλα, κατά την ώρα της διδασκαλίας, υπήρχε δίπλα σε κάθε ομάδα μαθητών μαγνητόφωνο, με το οποίο καταγραφόταν ο τρόπος σκέψης των μαθητών στην ομάδα, ο προβληματισμός τους, οι απορίες που προέκυπταν, οι προτάσεις τους για τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος, οι ερωτήσεις και οι απαντήσεις που δίδονταν σε κάθε περίπτωση, τόσο ανάμεσα στα μέλη της ομάδας όσο και ανάμεσα στους μαθητές και τη διδάσκουσα .

Το περιεχόμενο της κάθε διδακτικής ενότητας, η χρονική διάρκεια, η μορφή των δραστηριοτήτων κινήθηκαν στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος του τότε Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και σήμερα Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) και των ασκήσεων του τότε σχολικού βιβλίου. Η διδακτική μας πρόταση με αυτόν τον σχεδιασμό είναι απολύτως συμβατή με τις απαιτήσεις του σχολικού προγράμματος.

Ποιοτικά στοιχεία που αφορούσαν την αξιολόγηση του μαθήματος, τις σκέψεις, τα συναισθήματα, τη στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα πριν και μετά την παρέμβαση, αντλήθηκαν από τις ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών και του καθηγητή της τάξης παρέμβασης. Στοιχεία επίσης αντλήθηκαν και από το φύλλο αξιολόγησης που δόθηκε προς συμπλήρωση ατομικά στους μαθητές του τμήματος παρέμβασης στο τέλος του κύκλου των μαθημάτων (όλων των ενοτήτων) καθώς και από τα διαγνωστικά διαγωνίσματα (τεστ) .

Σε γενικές γραμμές η έρευνα έδειξε, ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας, ενεθάρρυνε τον διάλογο και τον προβληματισμό μεταξύ των μαθητών για το μάθημα, επέδρασε σημαντικά στη συμμετοχή των αδύνατων μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, βελτίωσε το κλίμα της τάξης, το οποίο με τη σειρά του συνέβαλε στο να αλλάξει η αρνητική στάση πολλών μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών.

Η θετική αυτή συμβολή της χρήσης των χειραπτικών υλικών στο μάθημα της άλγεβρας υπογραμμίστηκε στην αξιολόγηση του μαθήματος από τους μαθητές του τμήματος παρέμβασης όπως και στις προσωπικές συνεντεύξεις. Παρόμοια θέση εξέφρασε και ο καθηγητής του τμήματος παρέμβασης τόσο στην προσωπική του συνέντευξη όσο και στον σχολιασμό – παρατηρήσεις που γίνονταν στο τέλος της κάθε διδακτικής ενότητας. Αλλά και οι μαθητές των τμημάτων των άλλων σχολείων, οι οποίοι συμμετείχαν στην προπαρασκευαστική-πιλοτική φάση της έρευνας, όπως και οι καθηγητές τους, στάθηκαν θετικά απέναντι στη διδακτική μας πρόταση.

Ωστόσο, με βάση τα αποτελέσματα του διαγνωστικού τεστ που δόθηκε μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης, δεν διαπιστώθηκε σημαντική βαθμολογική διαφοροποίηση ανάμεσα στο τμήμα ελέγχου και στο τμήμα παρέμβασης.

Η τελική άποψη που διαμορφώσαμε είναι ότι η παρουσία των χειραπτικών υλικών σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας αποτελεί μια διδακτική πρόταση η οποία κινείται σε θετική κατεύθυνση για την ομαλή μετάβαση του μαθητή από το αριθμητικό και συγκεκριμένο των προβλημάτων του δημοτικού στο συμβολικό και αφηρημένο των αλγεβρικών προβλημάτων.

Η διατριβή αυτή αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει, την έκθεση του προβλήματος που μας οδήγησε στην επιλογή του θέματος της διατριβής, τον σκοπό της έρευνας, τις υποθέσεις και την οργάνωσή της και τη βιβλιογραφική επισκόπηση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι βασικοί άξονες στους οποίους στηρίξαμε τον όλο σχεδιασμό, οι οποίοι ήταν τα χειραπτικά υλικά (αλγεβρικά πλακίδια) και η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας με την αντίστοιχη βιβλιογραφία και ποιοι ήταν οι στόχοι που μας οδήγησαν σε αυτό το διδακτικό μοντέλο.

Στο τρίτο κεφάλαιο υπάρχει περιγραφή των πιλοτικών παρεμβάσεων. Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στην κύρια διδακτική μας παρέμβαση, τη μέθοδο που ακολουθήσαμε, τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε και τα στοιχεία που συλλέξαμε.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα και συγκρίνονται αυτά με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών.

Στον επίλογο τέλος αναφερόμαστε σε σκέψεις και προτάσεις για τη δυνατότητα αξιοποίησης ευρημάτων της έρευνας και κάνουμε μια γενική επισκόπηση της όλης ερευνητικής μας εργασίας.

Κεφάλαιο Πρώτο

Ο σκοπός της έρευνας

Ό,τι υποχρεώθηκες να ανακαλύψεις μόνος σου
αφήνει ένα μονοπάτι στο μυαλό σου
που μπορείς να το χρησιμοποιήσεις ξανά
όταν παρουσιαστεί ανάγκη.
G. C. Lichtenberg: Aphorismen

1. Εισαγωγή

Οι στόχοι, τους οποίους θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου για τη διδασκαλία των μαθηματικών, επικεντρώνονται στο να μάθουν οι μαθητές βασικές μαθηματικές έννοιες και τεχνικές επίλυσης προβλημάτων.

Στο δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας ο ρόλος του δάσκαλου συμφωνεί με την «τραπεζική» αντίληψη της εκπαίδευσης, που είναι να «καταθέτει» ο δάσκαλος τις γνώσεις του στους μαθητές οι οποίοι αντιμετωπίζονται ως λογαριασμοί καταθέσεων ή σαν «κενά δοχεία» που πρέπει να γεμίσουν με τις γνώσεις του (Freire, 1974, σελ. 78).

Πολλοί μαθητές όμως, όπως αναφέρει η Boaler (1977), όταν καλούνται να λύσουν προβλήματα μαθηματικών, να ερμηνεύσουν μια έννοια, να καταλάβουν τη «γλώσσα» του δασκάλου, νιώθουν σαν να «κτυπούν σε τοίχο». Γι' αυτούς ο κόσμος των μαθηματικών, ένας κόσμος με «αυστηρούς κανόνες και τύπους», δεν είναι λογικός, δεν είναι δημιουργικός.

Έτσι για την επίλυση ενός προβλήματος περιορίζονται στο να θυμηθούν καθιερωμένες διαδικασίες και μεθόδους, χρησιμοποιώντας τις υποδείξεις που έμαθαν, και όταν αυτό δεν λειτουργεί ή όταν δεν «βλέπουν» την προφανή μέθοδο επίλυσης για να τη χρησιμοποιήσουν, εγκαταλείπουν την προσπάθεια (Boaler, 1977). Συχνά συγχέουν την «κατανόηση» των εννοιών, που προϋποθέτει ικανότητα να γενικεύουν τις έννοιες που διδάσκονται (VanEngen, 1946, σελ. 272), με τη μηχανική εκτέλεση πολύπλοκων συμβολικών χειρισμών. Στόχος τους είναι να παράγουν τη σωστή απάντηση και όχι να εμβαθύνουν. Μαθαίνουν να δίνουν γρήγορα συγκεκριμένες απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις με αποτέλεσμα να δημιουργείται στους διδάσκοντες λανθασμένη εντύπωση μιας επιτυχούς «κατάθεσης γνώσης» στους μαθητές (Dienes, 1960, σελ. 16).

1.1 Η διδασκαλία των μαθηματικών στην «παραδοσιακή» τάξη και οι επιπτώσεις της στη μάθηση.

Με τον όρο «παραδοσιακή» τάξη χαρακτηρίζουμε την τάξη στην οποία ο δάσκαλος «μεταφέρει» τη γνώση στους μαθητές συνήθως μετωπικά παρουσιάζοντάς την στον πίνακα χωρίς την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Ο ρόλος τους τις περισσότερες φορές είναι ρόλος ακροατή και η μάθηση για ένα σημαντικό σύνολο μαθητών στηρίζεται όχι στην κατανόηση αλλά στην «παπαγαλία».

Η άλγεβρα, ειδικότερα στην «παραδοσιακή» τάξη, παρουσιάζεται ως δέσμη μεμονωμένων αλγορίθμων και αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, τις οποίες οι μαθητές επεξεργάζονται με το να μιμούνται τεχνικές επίλυσης χωρίς να κατανοούν τους λόγους για τους οποίους αυτές είναι ορθές και οι οποίοι σχετίζονται με τις αλγεβρικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτές. Το «βάρος» της μάθησης της αντιμετώπισης μιας άσκησης εναποτίθεται στην εκμάθηση κανόνων και τεχνικών μέσω επαναλαμβανόμενων εφαρμογών τους, χωρίς όμως να είναι σε θέση οι μαθητές να αιτιολογήσουν το «πως και το γιατί» του κάθε βήματος της επίλυσης.

Αποτέλεσμα όμως αυτού είναι οι περισσότεροι μαθητές να μη γνωρίζουν σε ποιες περιπτώσεις οι τεχνικές αυτές τους είναι χρήσιμες και έτσι περιορίζουν την προσπάθειά τους για να λύσουν μία άσκηση στο να θυμηθούν, με αμφίβολη την επιτυχία της σωστής επιλογής, τα «βήματα» επίλυσής της που απομνημόνευσαν.

Η παρουσιαζόμενη αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν και να εφαρμόσουν την τεχνική που διδάχθηκαν οφείλεται πολλές φορές τόσο στο ότι ο σχεδιασμός και η επιλογή των δραστηριοτήτων που γίνονται μέσα στην τάξη ξεκινούν και τελειώνουν με αφηρημένες μη «εικονικές» έννοιες όσο και στο ότι η γνώση, όπως τους δίνεται, δεν βασίζεται πάνω στην εμπειρία (Dienes, 1960, σελ. 26). Ο δάσκαλος ωστόσο πρέπει, για τη διδασκαλία των αφηρημένων εννοιών, να δημιουργήσει μια ποικιλία πλούσιων εμπειρικών καταστάσεων, ώστε οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν τυχόν εννοιολογικές αποκλίσεις και να προβούν στις κατάλληλες αφαιρέσεις (Κολέζα, 2006).

Η έλλειψη εμπειρίας για τον μαθητή σημαίνει δημιουργία κενών στη γνώση, αφού αυτή δεν αποκτήθηκε μέσα από τον δικό του έλεγχο για το «πότε», το «πώς» και το «γιατί», σημαίνει πολλά και βασικά αδιέξοδα. Συσσωρευμένα όμως αδιέξοδα γεμίζουν άγχος τον μαθητή και έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αρνητικής στάσης απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών. Έχουμε έτσι μαθητές, οι οποίοι είναι απαθείς την ώρα του μαθήματος, αφήνουν αχρησιμοποίητες τις δυνατότητές τους, δυσανασχετούν και τελικά απορρίπτουν τα μαθηματικά. Πολλοί από αυτούς, αναφέρει η Ida McCalip Dell’ Isola (1999), ίσως θα ήταν ικανοί να γεφυρώσουν το κενό ανάμεσα στη συγκεκριμένη και στην τυπολογική σκέψη αν είχαν διερευνήσει τις μαθηματικές έννοιες μέσα από δραστηριότητες με χειραπτικά υλικά, οι οποίες θα τους έδιναν την ευκαιρία που δεν είχαν ως τώρα να αντιληφθούν και να κατανοήσουν τις έννοιες αυτές.

Ο Polya (1965, σελ. 103-104) υποστηρίζει, ότι η αποτελεσματική μάθηση ξεκινά με την αντίληψη και τις συγκεκριμένες πράξεις μέσα σε ένα περιβάλλον, κατόπιν κατακτά τις λέξεις και τις έννοιες, και εντέλει γίνεται επιθυμητή νοητική συνήθεια. Διευκρινίζει μάλιστα ότι με τους όρους «πράξη και αντίληψη» σε ένα σχολικό περιβάλλον εννοεί το να βλέπουν και να χειρίζονται οι μαθητές συγκεκριμένα αντικείμενα τα οποία κάνουν, λόγω της φύσης τους (απλά υλικά), την ερμηνεία και την κατανόηση των όρων πιο εύκολη. Κατά τον Polya επομένως μια εξερευνητική φάση πρέπει να προηγείται της εννοιολογικής και εν τέλει της βαθιάς αφομοίωσης και κατανόησης.

Ως μέσα για την πραγματοποίηση της εξερευνητικής φάσης μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα χειραπτικά υλικά, δηλαδή «συγκεκριμένα μοντέλα, ελκυστικά, που εμπλέκουν μαθηματικές έννοιες, που μπορούν να αγγιχθούν και να κινηθούν από τους μαθητές δίνοντας τους τη δυνατότητα να συζητήσουν τις ιδέες τους, να εκφράσουν τη μαθηματική τους σκέψη, χωρίς όμως να αποτελούν υλικά επίδειξης από το δάσκαλο» (Heddens, 2008, σελ. 1). Δεν ταυτίζονται απλά με τα μοντέλα κάποιου συγκεκριμένου αντικειμένου (μακέτες), τα οποία είναι περισσότερο αναπαραστάσεις π.χ το μοντέλο ενός κτηρίου σε μικρότερη κλίμακα, παρότι κάποια από αυτά χρησιμοποιούνται για τον ίδιο σκοπό. Τα χειραπτικά υλικά δεν δείχνουν τίποτε από αυτό που υποτίθεται ότι αναπαριστούν (Utter, 2007).

Κατά τον Bruner (1967) πάντα είναι υλικά που συνδυάζουν την πρόκληση, τον έλεγχο, την περιέργεια και τη φαντασία, τέσσερις από τους πιο βασικούς συντελεστές της μάθησης (Miller, Rule, MacEntee, 2008, σελ. 3). «Χωρίς να αντικαθιστούν τα σύμβολα, ως μέσα παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών, αποτελούν μέρος του πλαισίου μέσα στο οποίο ο δάσκαλος και οι μαθητές διαπραγματεύονται τις διαφορετικές ερμηνείες τους που εμπλέκονται στη λύση μαθηματικών προβλημάτων» (Καφούση, Ντζιαχρήστος, 2000).

Παράλληλα όμως λειτουργούν και ως μέσο ανάπτυξης και σωστής χρήσης της γλώσσας των μαθηματικών, μιας γλώσσας που είναι ειδικά προσαρμοσμένη στο να επικοινωνήσει και να εκφράσει ιδιόμορφους τύπους πληροφοριών που αναφέρονται συνήθως σε αφηρημένες έννοιες. Οι πληροφορίες αυτές (π.χ κανόνες) για να γίνουν κατανοητές και να μεταβιβαστούν ορθά θα πρέπει ο μαθητής να τις γνωρίζει σε βάθος και όχι επιφανειακά, δηλαδή από απλή αποστήθισή τους.

Το χειραπτικό υλικό με την εξεικόνιση της έννοιας που προσφέρει βοηθά τον μαθητή να «περιγράψει» την έννοια και να την εκφράσει χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους κώδικες της μαθηματικής γλώσσας. Οι ορθές αντιστοιχίσεις εικόνας και μαθηματικών όρων και η επανάληψή τους τον καθιστούν στην πορεία της εκπαιδευτικής του διαδικασίας γνώστη και καλό χειριστή της γλώσσας των μαθηματικών, τη γνώση της οποίας αναπτύσσει μέσα από ανακαλύψεις νέων συνδέσεων και σχέσεων των υπαρχουσών εννοιών.

Οι Lappan, και Even, (1989, σελ. 8) είναι της άποψης ότι για να γίνει ικανός ο μαθητής να αναπτύξει τις αφηρημένες έννοιες πρέπει να έχει την ευελιξία να τις αναπαριστάνει με διαφορετικούς τρόπους και να τις αποδίδει μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων. Για τον Bruner (1966, σελ. 13) τα χειραπτικά υλικά αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο παρουσίασης μαθηματικών εννοιών αφού, μέσα από τους χειρισμούς των μαθητών, παρέχουν εικόνες που έχουν τη δυνατότητα να συνοψίζουν καλύτερα την όλη εφαρμογή. Τους δίνουν τη δυνατότητα μέσα από το «πράτειν», να «βλέπουν» το σαφές και το ασαφές, τι λέγεται και τι δεν λέγεται, τη γλώσσα, τα εργαλεία, τα σύμβολα και τους κανόνες. Μαθαίνουν έτσι, ότι η γνώση τους μπορεί να επεκτείνεται, ότι τα διαισθητικά τους μοντέλα μπορούν να αλλάξουν μέσω της δικής τους πρακτικής και όχι μέσω της αυθεντίας του δασκάλου (Jones, 1998).

1.2. Ο σκοπός

Σκοπός της έρευνας μας είναι να μελετήσουμε σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας την επίδραση, που έχει η ένταξη των αλγεβρικών πλακιδίων στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης και της επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Για τον σκοπό αυτό θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην παρουσίαση των αντιδράσεων και των εμπειριών των μαθητών μέσα στην ομάδα κατά την συμπλήρωση των φύλλων εργασίας με τη βοήθεια των αλγεβρικών πλακιδίων, στις όποιες μεταβολές της στάση τους απέναντι στο μάθημα, στα αποτελέσματα των διαγνωστικών διαγωνισμάτων καθώς και στις προτάσεις-παρατηρήσεις τους για την εμπειρία του διδακτικού μοντέλου που βίωσαν, συγκρίνοντάς το με το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε ήταν τα ακόλουθα:

Πρώτο βασικό ερευνητικό ερώτημα

Αν τα αλγεβρικά πλακίδια σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας επηρεάζουν και πώς τη μάθηση των αλγεβρικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης, καθώς και του τρόπου επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους μαθητές.

Ειδικότερα ερωτήματα

Σε ποια έκταση η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων διευκόλυνε τους μαθητές να «δουν» και στη συνέχεια να παρουσιάσουν την αλγεβρική διαδικασία στις ενότητες των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης, της επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

Υπήρξε διαφοροποίηση στην ικανότητα εκτίμησης λάθους και στη μάθηση στις διδασκόμενες αλγεβρικές έννοιες με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων;

«Απεξαρτήθηκαν» τελικά οι μαθητές από τα αλγεβρικά πλακίδια;

Διευκόλυναν οι στρατηγικές των αλγεβρικών πλακιδίων περισσότερο από άλλες την επίλυση των ασκήσεων του είδους που ασχοληθήκαμε;

Δεύτερο βασικό ερευνητικό ερώτημα

Πώς επιδρά η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας στην επίλυση πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ασκήσεων, εφαρμογών των αλγεβρικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.

Τρίτο βασικό ερευνητικό ερώτημα

Πώς επιδρά η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

Ειδικότερα ερευνητικά ερωτήματα

Είχαν οι μαθητές σημαντικά θετικότερη συμπεριφορά απέναντι στα μαθηματικά από ότι πριν;

Είχαν σημαντικά χαμηλότερο επίπεδο φόβου για τα μαθηματικά μετά τη διδακτική παρέμβαση με τα αλγεβρικά πλακίδια;

1.3. Γιατί καταλήξαμε σε αυτήν την έρευνα

Η ανάγκη για αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες σπουδών έχει επισημανθεί κατά καιρούς από πολλούς. Ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται συνήθως η άλγεβρα, όπως λέει ο Bracey (1992), αυξάνει μόνο την απομνημόνευση τύπων μέσω αποστήθισης («παπαγαλία») και τίποτε άλλο. Η δασκαλοκεντρική διδασκαλία οδηγεί τους περισσότερους μαθητές να μαθαίνουν, στην καλύτερη περίπτωση, απλά τους τύπους των ταυτοτήτων, να αισθάνονται ανασφάλεια κατά τη χρήση τους, να κάνουν λάθη κατά την εφαρμογή τους, να μην είναι σε θέση να αιτιολογήσουν το «γιατί» του λάθους και το «πώς» της διόρθωσής του.

Άποψη του Βόσκογλου (2001) είναι ότι στην αποτυχία των μαθητών στα μαθηματικά έχει συμβάλει τα μέγιστα η διδακτική πρόταση, που προέκυψε από σχεδιασμό αντίστοιχου αναλυτικού προγράμματος, να διδάσκονται δηλαδή οι θεμελιώδεις γενικεύσεις, πριν την παρουσίαση της έννοιας που γενικεύεται. Για παράδειγμα η αναγραφή του τύπου μιας ταυτότητας π.χ $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ πριν αυτή να προκύψει ως αποτέλεσμα μιας σειράς εφαρμογών της μορφής του $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$. Η διδακτική μας πείρα έχει δείξει ότι παρόλο που το αναλυτικό πρόγραμμα έχει αλλάξει η διδακτική αυτή μέθοδος παραμένει είτε διότι ο δάσκαλος δεν θέλει να αλλάξει το μοντέλο αφού το θεωρεί επαρκές είτε διότι ο ίδιος αισθάνεται ανεπαρκής να το αλλάξει

Από έρευνα που έγινε σε μαθητές της δευτέρας τάξης Λυκείου, όπως αναφέρουν οι Κλαουδάτος και Παπασταυρίδης (2000), παρατηρήθηκε αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σωστά στις ασκήσεις που τους δόθηκαν και αφορούσαν τη διδαχθείσα ύλη του Γυμνασίου και της πρώτης τάξης του Λυκείου. Ως πιθανά αίτια της αποτυχίας θεωρούν είτε το γεγονός ότι οι μαθητές κάνουν πράξεις χωρίς να κατανοούν τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες, είτε το ότι υπάρχει αδυναμία να αναπτύξουν διασυνδέσεις ανάμεσα σε διαφόρους τρόπους αναπαράστασης μιας μαθηματικής πληροφορίας.

Θα λέγαμε ότι τα κυριότερα προβλήματα που εμφανίζονται στη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας απορρέουν από τον τρόπο διάρθρωσης της ύλης και την έλλειψη πρακτικής χρήσης της από τους μαθητές. Η εισαγωγή του άγνωστου στη θέση του αριθμού «επιβάλλεται» κατά κάποιον τρόπο στον μαθητή, δεν προκύπτει από τον ίδιο ως αναγκαιότητα για να εκφράσει μια γενίκευση. Η εισαγωγή της αφηρημένης έννοιας της μεταβλητής στη θέση του συγκεκριμένου που αντιπροσωπεύει ο αριθμός οδηγεί συχνά πολλούς μαθητές σε αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα.

Χωρίς μάλιστα να αποτελεί υπερβολή θα μπορούσαμε να πούμε ότι συχνά ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται τα μαθηματικά κατευθύνει τους μαθητές στην αντιγραφή κανόνων και αλγεβρικών χειρισμών από τον δάσκαλο χωρίς να κατανοούν πραγματικά το γιατί και το πώς. Η προσοχή που δίνεται στη γενίκευση και στη δυναμική όψη των μεταβλητών είναι λίγη και το άλμα στο τυπικό επίπεδο γίνεται γρήγορα, σε μία δύο σελίδες του σχολικού βιβλίου χωρίς να δίνεται επαρκής χρόνος στους μαθητές να αναπτύξουν τα δικά τους γνωστικά σχήματα. Οι μαθητές δεν κατανοούν γιατί μαθαίνουν τους διάφορους συμβολισμούς και τους χειρισμούς των συμβόλων και αδυνατούν να τα συνδέσουν μεταξύ τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όλες αυτές οι έννοιες, μη έχοντας πραγματική αναφορά στις εμπειρίες τους, να λειτουργούν αρνητικά στην πορεία κατανόησης των διδασκομένων αλγεβρικών εννοιών (Βερύκιος, 2003).

Στα πιο πάνω έρχεται να προστεθεί και το ότι στα μαθηματικά του σχολείου περιοριζόμαστε σε μετασχηματισμούς παραστάσεων με σύμβολα τα οποία, ιδιαίτερα στους μαθηματικούς χειρισμούς, έχουν τον ρόλο του αντικαταστάτη αριθμών ή εννοιών και παραπέμπουν σε κάτι πολύ πιο πολύπλοκο ή μυστήριο για να το αντιληφθεί ο μαθητής με την πρώτη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα συχνά να επικεντρώνει την προσοχή του στα σύμβολα και όχι σε αυτό στο οποίο αναφέρονται και να χάνει έτσι το επιθυμητό, που είναι το «νόημα» (Pimm, 1995). Άποψη του Dienes (1964) είναι ότι ο κίνδυνος αυτός μπορεί να περιοριστεί αν τα σύμβολα δεν απομονωθούν αλλά χρησιμοποιηθούν με ό,τι αυτά συμβολίζουν. Με τη θέση του αυτή επομένως στηρίζει τη χρήση στο μάθημα των χειραπτικών υλικών που εξεικονίζουν σύμβολα, όπως για παράδειγμα το τετράγωνο αντί του συμβόλου x^2, ως τη διδακτική μέθοδο που θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τους αλγεβρικούς χειρισμούς.

Κατά τους English &Halford (1995) για να προκύψουν μέσω της αφαίρεσης οι έννοιες και να αιτιολογηθούν οι διαδικασίες, απαιτείται ο συνδυασμός δραστηριοτήτων με κατάλληλα χειραπτικά υλικά, τα οποία αφορούν και ερεθίζουν πολλαπλές αισθήσεις (όραση, αφή), αφού κάποιος μπορεί να τα βλέπει, να τα κινεί, να τα σηκώνει, να τα αγγίζει, κλπ. Έτσι, λ.χ. η μορφή του σχήματος κάποιου υλικού (που βλέπει και αγγίζει) μπορεί να δώσει τη δυνατότητα στον μαθητή να αναπτύξει μία λεπτομερή δομή μνήμης και με αυτόν τον τρόπο να επιτύχει βαθύτερη μαθηματική κατανόηση (Baturo, A., Cooper T., & Thompson K., 2003, σελ. 301).

Η πολυετής διδακτική εμπειρία μου σε τάξεις του Λυκείου έδειξε ότι οι μαθητές αδυνατούν ακόμα και στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου, να εφαρμόσουν χωρίς λάθη τους τύπους των ταυτοτήτων, τελείου τετραγώνου, διαφοράς τετραγώνων, να επιλύσουν σωστά εξισώσεις δευτέρου βαθμού καθώς και να αιτιολογήσουν τη χρήση των γεωμετρικών όρων «στο τετράγωνο» ή στον «κύβο» για τις δυνάμεις του δύο και τρία αντίστοιχα. Αυτό μας οδήγησε στη σκέψη να ερευνήσουμε, αν η εισαγωγή των αλγεβρικών πλακιδίων στην άλγεβρα της τρίτης Γυμνασίου, όπου οι μαθητές διδάσκονται τις προαναφερθείσες ενότητες για πρώτη φορά, μπορεί να συμβάλει θετικά στην κατανόηση των εννοιών αυτών.

1.4. Έρευνες που έχουν προηγηθεί

Όπως έχει φανεί σε μία σειρά ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι σήμερα τα αλγεβρικά πλακίδια μπορούν να εξεικονίσουν τις αλγεβρικές ταυτότητες, το τριώνυμο και την παραγοντοποίησή του και να συμβάλλουν στην κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών.

Η Goldsby (1994) σε έρευνά της που αφορούσε την επίδραση των αλγεβρικών πλακιδίων στην παραγοντοποίηση πολυωνύμων, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα αλγεβρικά πλακίδια διευκόλυναν τη γένεση των αλγεβρικών εννοιών στον νου του μαθητή. Μαθητές που επαναλάμβαναν την τάξη και με ιστορικό μη συμμετοχής των στο μάθημα, ξεκίνησαν να αλληλοδρούν με την τάξη και να επιλύουν εθελοντικά προβλήματα χρησιμοποιώντας χειραπτικά υλικά. Ο καθηγητής της τάξης σχολίασε για κάποιον μαθητή του, ότι *«ήταν η πρώτη φορά που αυτός ο μαθητής έδωσε κάποιο αποτέλεσμα»*. Για τέτοιους μαθητές, η χρήση των χειραπτικών υλικών εμφανίστηκε να σπάζει τον κύκλο της αδυναμίας να συλλάβουν τα νοήματα και τους έκανε ικανούς να αντιληφθούν τις έννοιες, σχεδόν στο ίδιο επίπεδο με τους μαθητές, που ήταν άριστοι στο μάθημα της άλγεβρας.

Σε έρευνα που διεξήχθη από τη Sharp το 1995 δεν παρουσιάστηκε διαφορά στην επίδοση μεταξύ των μαθητών που διδάχθηκαν με αλγεβρικά πλακίδια και εκείνων που δεν είχαν αυτή την εμπειρία. Όμως η Sharp υπογραμμίζει, ότι τα αλγεβρικά πλακίδια *«συνεισέφεραν νοητικές εικόνες»* που συνέβαλαν θετικά στο να γίνει η μάθηση τους «ευκολότερη». Με τη θέση της αυτή ήταν σύμφωνοι και οι μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνα, αφού επισήμαναν ότι μέσα από την εξεικόνιση, που δίνουν τα αλγεβρικά πλακίδια, μπόρεσαν να σκεφτούν ευκολότερα τους αλγεβρικούς χειρισμούς.

Όπως επισημαίνει στην έρευνα του ο Thornton (1995) «*οι μαθητές ‘‘απόλαυσαν’’ τη διδασκαλία που έγινε με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και κατανόησαν τις αλγεβρικές ενότητες που αναφέρονταν στις πράξεις με πολυώνυμα και στην παραγοντοποίησή τους. Οι περισσότεροι από αυτούς επέδειξαν θετική συμπεριφορά στο μάθημα με τα χειραπτικά υλικά και τα αναγνώρισαν ως αποδεκτά και αποτελεσματικά εκπαιδευτικά εργαλεία»*. Βεβαίως, καταλήγει η έρευνα, ότι αν *«το μαθαίνω μαθηματικά* *είναι το κάνω μαθηματικά»* τότε είναι απαραίτητη μία ουσιαστική στρατηγική για να διδάξεις μαθηματικά, η οποία μπορεί να υποστηριχθεί ουσιαστικά με τη χρήση χειραπτικών υλικών στο μάθημα. Προϋπόθεση όμως για την ανάπτυξη και εφαρμογή αυτής της διδακτικής πρότασης, αναφέρει ο Thornton, είναι να επανεξετάσουν τόσο οι υπεύθυνοι ανάπτυξης του διδακτικού πλαισίου όσο και ο καθηγητής τάξης τις προτεραιότητες και το περιεχόμενο των μαθημάτων.

Η Dyer (1996) σημειώνει στην έρευνά της, ότι «*οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα αλγεβρικά πλακίδια, παρουσίασαν αξιοσημείωτη διαφορά στην επίδοση, από εκείνους, που διδάχθηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων και διαφοροποίησαν προς το θετικότερο την συμπεριφορά τους απέναντι στο μάθημα της άλγεβρας, γεγονός που συμβάλλει τα μέγιστα στη διαδικασία της μάθησης».*

Μαθητές της 7ης, 8ης και 9ης τάξης, στην έρευνα, που έγινε από τη Sobol (1998), χρησιμοποίησαν τα αλγεβρικά πλακίδια και πέτυχαν υψηλότερη βαθμολογία στη δοκιμασία των τεστ, από ό,τι οι συμμαθητές τους που δεν χρησιμοποίησαν τα χειραπτικά υλικά. Η τεχνική της διδασκαλίας με αλγεβρικά πλακίδια εμφανίστηκε να είναι περισσότερο αποτελεσματική από την τεχνική τη βασιζόμενη σε κανόνες, για την ίδια αλγεβρική ενότητα. Η στάση τους όμως απέναντι στα μαθηματικά δεν παρουσίασε σημαντική διαφοροποίηση.

Σε αντίθεση με άλλες έρευνες, στην έρευνα, που γίνεται από τον McClung, (1998) σε μαθητές ηλικίας 15 έως 17 ετών, σημειώθηκαν καλύτερα αποτελέσματα στο τμήμα των μαθητών που διδάχθηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο, από ότι σε εκείνο που οι μαθητές εργάστηκαν με τα αλγεβρικά πλακίδια. Η πιθανή εξήγηση που δόθηκε ήταν ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας είχαν ήδη μάθει να σκέφτονται μέσω των τύπων και δεν ήταν δυνατή η επιστροφή τους από το αφηρημένο (αλγεβρικές έννοιες και σύμβολα) στο συγκεκριμένο (αλγεβρικά πλακίδια).

Επισημαίνεται όμως παράλληλα και το γεγονός, ότι οι μαθητές που διδάχθηκαν με τα χειραπτικά υλικά δεν είχαν αυτά τα υλικά στη διάθεσή τους κατά τη συμπλήρωση του τεστ που τους δόθηκε.

Η Ida McCalip Dell' Isola (1999) γράφει στην έρευνά της ότι: *«η εισαγωγή μιας αφηρημένης έννοιας με συγκεκριμένες εξεικονίσεις καθιστά τους μαθητές ικανούς να συγκρατούν τις αλγεβρικές έννοιες καλύτερα από ότι αν αυτές εισάγονταν με αφηρημένο τρόπο».* Πιθανολογεί ότι: *«οι μαθητές τα ''πηγαίνουν'' καλύτερα με τα αλγεβρικά πλακίδια διότι ''αντιστέκονται'' λιγότερο στο να μην τα χρησιμοποιήσουν».* Επισημαίνει έτσι την αλλαγή της συμπεριφοράς τους απέναντι στο μάθημα, το οποίο με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων έγινε ενδιαφέρον και ελκυστικό. Το καινούργιο περιβάλλον τάξης που δημιούργησε η παρουσία των υλικών ώθησε τον μαθητή να παραμερίσει τις όποιες «ενστάσεις» και αρνήσεις είχε για τα μαθηματικά και συνέβαλε στην ένταξή του στη μαθησιακή διαδικασία.

Στο πλαίσιο της έρευνας της Gningue (2000) μελετήθηκε η επίδοση και η συμπεριφορά 53 μαθητών της 7ης τάξης, που διδάχθηκαν τις πράξεις στα πολυώνυμα και την παραγοντοποίηση με αλγεβρικά πλακίδια. Οι μαθητές αυτοί φάνηκε να κατανοούν καλύτερα τις αφηρημένες έννοιες, να τις οικειοποιούνται, να ανακαλύπτουν το νόημά τους όπως επίσης τον ρόλο και το νόημα της κάθε μεταβλητής. Η έρευνα έδειξε ότι η επιλογή της χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων είχε θετικά αποτελέσματα στην επίδοση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα εκείνων, των οποίων το επίπεδο ικανοτήτων τους ήταν χαμηλό. Σχεδόν όλοι οι μαθητές συμφώνησαν, ότι *«έγινε δυνατό το πέρασμα από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο»*, διότι μπόρεσαν να εξεικονίσουν το *«πώς κάνω μαθηματικά».* Περιέγραψαν τις δραστηριότητες ως *«διαφωτιστικές», «φίνες», «διασκεδαστικές», «ότι σε καθοδηγούν σε κάτι».* Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων ταιριάζει πραγματικά στις ανάγκες των μαθητών του γυμνασίου αφού μέσω των δραστηριοτήτων, που στόχευαν στο να ανακαλύψουν οι μαθητές τους αλγεβρικούς κανόνες και να διαπιστώσουν ότι αυτοί δεν είναι διαφορετικοί από εκείνους της αριθμητικής, έγινε εφικτό να μειωθεί ο φόβος τους για το μάθημα.

Η Goins (2001) μελέτησε και ανέλυσε την επίδραση, που είχε η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία της ενότητας που αναφέρεται στον πολλαπλασιασμό διωνύμων, τόσο στη μάθηση της τεχνικής και του αλγορίθμου, όσο και στην ικανότητά των μαθητών να γενικεύουν περαιτέρω αυτή τη γνώση σε οποιοδήποτε πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν δέκα τάξεις, που διδάχθηκαν με τον δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας και δέκα τάξεις, που διδάχθηκαν το μάθημα με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.
Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική στατιστική διαφορά ανάμεσα στους μαθητές που διδάχθηκαν με τα χειραπτικά υλικά και στους μαθητές που διδάχθηκαν με τον δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τα αλγεβρικά πλακίδια σημείωσαν υψηλότερη βαθμολογία στο post-test. Από αυτό διαφάνηκε ότι έμαθαν καλά την τεχνική και τον αλγόριθμο και ότι ήταν ικανοί, αφού μπορούσαν να εξηγήσουν καλύτερα τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού, να προβούν περαιτέρω σε γενίκευση. Παρουσιάστηκε επίσης σημαντική στατιστική διαφορά στον βαθμό σύλληψης του νοήματος και στον βαθμό κατανόησης της όλης διαδικασίας. Αναδείχτηκε ότι για κάθε μαθητή υπάρχει διαφορετικός τρόπος μάθησης ο οποίος μπορεί να προσεγγιστεί με τη χρήση υλικών, όπως τα αλγεβρικά πλακίδια, τα οποία του παρέχουν εκτός του ακουστικού και οπτικού και τον κιναισθητικό τρόπο μάθησης.

Τα αποτελέσματα της μετα-ανάλυσης 60 ερευνών από τη Sowell (1989), που αφορούσαν τη διδασκαλία μιας ποικιλίας μαθηματικών θεμάτων σε μαθητές με ηλικιακό εύρος από το νηπιαγωγείο ως το κολλέγιο, έδειξαν ότι *«τα μαθηματικά επιτεύγματα αυξήθηκαν όταν η χρήση των χειραπτικών υλικών είχε διάρκεια και ότι η συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στο μάθημα βελτιώθηκε όταν η διδασκαλία έγινε από δασκάλους που είχαν επάρκεια γνώσης πάνω στη χρήση τους».*

Κεφάλαιο Δεύτερο

Η διδακτική πρότασή μας σε σχέση με τη βιβλιογραφία

Η μάθηση δίχως σκέψη είναι χαμένη εργασία

Confucious

1.Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε σε βιβλιογραφική επισκόπηση της χρήση των χειραπτικών υλικών και της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας.

1.1. Το μοντέλο διδασκαλίας που ακολουθήσαμε στην έρευνά μας

Επιλέξαμε στο πλαίσιο της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας και μάθησης να χρησιμοποιήσουμε ως χειραπτικό υλικό μας, τα αλγεβρικά πλακίδια. Σκοπός μας ήταν να εξετάσουμε την επίδραση που έχει η χρήση των χειραπτικών υλικών στη μάθηση αλγεβρικών εννοιών και στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

Η παρέμβασή μας (βλ. αναλυτικά τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο) επικεντρώθηκε στις αλγεβρικές ενότητες που αφορούσαν τις ταυτότητες (τετράγωνο αθροίσματος, διαφορά τετραγώνων), την παραγοντοποίηση, την επίλυση πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων εξισώσεων. Έγινε χωρίς τροποποίηση της διάρκειας της διδακτικής ώρας και χωρίς να «απομακρυνθεί» από τον σχεδιασμό της δομής του μαθήματος όπως αυτή περιγραφόταν στο αναλυτικό πρόγραμμα που προτείνεται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στο βιβλίο του καθηγητή (βλ. Παράρτημα, σελ. 410).

1.2. Μοντέλα διδασκαλίας

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης και στους λόγους που μας οδήγησαν σε αυτήν την επιλογή, θα κάνουμε μια αναφορά στο μοντέλο της μετωπικής διδασκαλίας, που είναι και το επικρατέστερο στη σημερινή τάξη.

1.2.α. Μετωπική διδασκαλία

Λέγοντας μετωπική διδασκαλία ή διδασκαλία σε «όλη την τάξη» εννοούμε μια διδασκαλία που βασίζεται στην προφορική παρουσίαση του θέματος από τον δάσκαλο, με τη βοήθεια του πίνακα, του επιδιασκόπιου ή και του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ο δάσκαλος στην τάξη είναι ο κύριος της μεταφοράς γνώσης, μιας γνώσης που κινείται μονόδρομα από εκείνον προς τους μαθητές. Ο συνήθης ρόλος του, όπως εμείς τον γνωρίσαμε από τη θέση του μαθητή αλλά και από τη θέση του δασκάλου, είναι να «επιδεικνύει», αρχικά στον πίνακα, βήμα προς βήμα την κάθε διαδικασία όπως για παράδειγμα την εφαρμογή τύπων ή τεχνικές επίλυσης προβλημάτων και να επαναδιατυπώνει συχνά αυτά τα βήματα για να δώσει απάντηση σε ερωτήσεις ή απορίες των μαθητών. Οι μαθητές έτσι, μέσα από μια διαδικασία χειρισμού συμβόλων, διδάσκονται μηχανιστικά «βασικές» δεξιότητες και ιδέες χωρίς να μεσολαβήσουν οι ίδιοι, χωρίς να τους δίνεται όπως θεωρούν οι Romberg & Kaput (1999) καθόλου χώρος για δημιουργία, πρωτοβουλία ή ταλέντο, για κρίση ή έκπληξη (Triandafillidis, 2002, σελ. 4).

Η πορεία διδασκαλίας, τα παραδείγματα παρουσίασης των εννοιών, οι ασκήσεις στην τάξη ή στο σπίτι όλα αρχίζουν από το βιβλίο μαθηματικών και όλα τελειώνουν σε αυτό. Χωρίς να αποκλείσουμε προσωπικές πρωτοβουλίες του δασκάλου ως προς την επιλογή εφαρμογών και την πορεία της διδασκαλίας, θα λέγαμε ότι η παρουσία του σχολικού βιβλίου μαθηματικών κατέχει κυρίαρχη θέση στη μαθησιακή διαδικασία και χαρακτηρίζει τη μετωπική διδασκαλία.

Βασικός ρόλος του μαθητή σε αυτό το μοντέλο διδασκαλίας είναι να ακούει, να καταλαβαίνει και να απαντά στις ερωτήσεις του δασκάλου. Το κίνητρό του για μάθηση χαρακτηρίζεται από τον Dewey (1943) εξωγενές, αφού προϋπόθεση μάθησης είναι *«να θυμάται τις έννοιες που παρουσιάστηκαν από το δάσκαλό και όχι αυτές που προέκυψαν από ερωτήσεις που έθεσε ο ίδιος στον εαυτό του»*. Η κατανόηση της κάθε διαδικασίας βασίζεται στην επίλυση μιας σειράς ασκήσεων του βιβλίου, τις οποίες πρέπει ο κάθε μαθητής να λύσει μόνος του. Αυτές είναι συνήθως ασκήσεις απλής εφαρμογής και επιλύονται είτε στο τετράδιο του καθενός είτε στον πίνακα με υποστηριχτική βοήθεια του δασκάλου όταν αυτή κρίνεται αναγκαία. Οι σύνθετες ασκήσεις και πιο δύσκολες αφήνονται συνήθως «*για το σπίτι*» και πολλές φορές είναι προαιρετικές για *«όποιους μπορούν ή ενδιαφέρονται παραπάνω»* όπως επισημαίνεται πολλές φορές από τον δάσκαλο.

Η αξιολόγηση του μαθητή γίνεται συνήθως με βάση τη βαθμολογία που συγκέντρωσε σε τεστ είτε πάνω στη διδακτική ενότητα της ημέρας εκείνης είτε σε επαναληπτικό του κεφαλαίου. Αυτή η μορφή αξιολόγησης που ακολουθεί τη διδασκαλία στρέφει την όλη διαδικασία μάθησης σε μία πάλη για κατάκτηση όσο το δυνατό ψηλότερης βαθμολογίας με αποτέλεσμα ο μαθητής να κινείται μόνιμα σε ένα περιβάλλον έντονου ανταγωνισμού.

Σε πολλές των περιπτώσεων η μετωπική διδασκαλία οδηγεί σε ανταγωνιστικές τάξεις, κυρίως όταν ο δάσκαλος απλώς «παραδίδει» το μάθημα και βαθμολογεί τους μαθητές σύμφωνα μόνο με τις γραπτές τους επιδόσεις. Στην ανταγωνιστική τάξη οι μαθητές εργάζονται ο ένας «ενάντια» στον άλλο για να πετύχουν έναν στόχο, που συνήθως μόνο λίγοι μαθητές μπορούν να κατακτήσουν με επιτυχία.

Το μαθησιακό πλαίσιο που θέτει η ανταγωνιστική τάξη δεν απαντά όμως στις ιδιαιτερότητες μάθησης του κάθε μαθητή. Έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να «βλέπει» τον μαθητή ως μονάδα που πρέπει να εργάζεται γρηγορότερα και με περισσότερη ακρίβεια από τους συμμαθητές του για τη διάκριση και την ανταμοιβή. Ως αποτέλεσμα έχει την κατηγοριοποίηση των μαθητών σε δύο βασικές ομάδες, την ομάδα εκείνων που εργάζονται σκληρά ώστε να κάνουν το καλύτερο και να είναι μέσα στις νόρμες που επιβάλλει ο ανταγωνιστικός χαρακτήρας της τάξης και την ομάδα εκείνων που παίρνουν το σχολείο στα «ελαφρά» καθώς απέχουν μερικά ή ολικά από την εκπαιδευτική διαδικασία. Η συμπεριφορά των μαθητών αυτών, που εκφράζεται συνήθως με απαξίωση του σχολείου, απορρέει από την πεποίθησή τους ότι δεν έχουν καμία ελπίδα να κερδίσουν ως μέλη μιας ατομικιστικής τάξης, αφού ο καθένας εργάζεται για να πετύχει στόχους, διαφορετικούς από τους στόχους των υπολοίπων μαθητών, για τον εαυτό του και μόνο.

Για τον Freundenthal (1973b) η δασκαλοκεντρική μέθοδος διδασκαλίας είναι «*αντί-διδακτική αναστροφή αφού έχει ως σημείο αφετηρίας το αποτέλεσμα των μαθηματικών ενεργειών άλλων». Θεωρεί λοιπόν ότι η διδασκαλία πρέπει να έχει αφετηρία τις μαθηματικές ενέργειες του μαθητή και η γνώση να προκύπτει ως αποτέλεσμα των δικών του ενεργειών και όχι ως προϊόν άλλων. Πιστεύει ότι *«υπάρχει ανατροπή των πραγμάτων αν κάποιος ξεκινά να διδάσκει το αποτέλεσμα μιας δραστηριότητας αντί να διδάσκει αυτήν την ίδιαν τη δραστηριότητα»*. Αρχή του είναι το *«μαθηματικά για όλους»*. και είναι της άποψης, όπως και εμείς, ότι *«το κάνω μαθηματικά είναι σημαντικότερο από τα μαθηματικά ως έτοιμο προϊόν»* (Gravemeijer & Terwel, 2000, σελ. 783).

Ειδικότερα σε ότι αφορά το μάθημα της άλγεβρας οι Campione, J., Brown, A., Connell, M. (1988) σημειώνουν ότι *«η άλγεβρα στην ‘‘παραδοσιακή’’ τάξη παρουσιάζεται ως μια συλλογή απομονωμένων αλγορίθμων και αφηρημένων εννοιών τις οποίες εξασκούν οι μαθητές χωρίς να τις κατανοούν, όπως μία δεξιότητα σε αποσύνθεση»* και έτσι *«η γνώση που αποκτούν οι μαθητές είναι ‘‘αδρανής’’, μια συλλογή δεξιοτήτων και γεγονότων που χρησιμοποιούνται μόνο όταν* *υπενθυμίζονται από τον δάσκαλο»* **(**σελ. 93-114). Ο μαθητής καλείται ουσιαστικά να μιμηθεί τον δάσκαλο και καταλήγει να εγκλωβιστεί σε μια μάθηση καθαρά μηχανικών διαδικασιών. Η μίμηση όμως δεν είναι πάντα τρόπος μάθησης για οποιοδήποτε στάδιο ανάπτυξης του ατόμου αφού μόνο όποιος είναι στο επίπεδο της ανάπτυξης μπορεί να μιμείται.

Σύμφωνα με τον Vygotsky (1978) *«ένα παιδί που έχει δυσκολίες με τα προβλήματα στην αριθμητική ίσως να αντιληφθεί τη λύση του προβλήματος αμέσως όταν το δει λυμένο από τον δάσκαλο στον πίνακα, ο ''αδύνατος'' μαθητής όμως δεν μπορεί να κατανοήσει τη λύση ενός προβλήματος που αναφέρεται σε ανώτερα μαθηματικά αν το πρόβλημα λύνεται στον πίνακα από τον δάσκαλο ό,τι και να γίνει και όσες φορές και να τη μιμηθεί».*

Η εμπειρία, που έχουμε αποκομίσει από τα χρόνια παρουσίας μας στην τάξη, μας κάνει να ευθυγραμμιστούμε με την άποψη που διατύπωσε ο Vygotsky (1978) ότι δηλαδή *«η μίμηση των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος δεν οδηγεί στην κατανόηση»* αφού έχουμε διαπιστώσει ότι ακόμη και όταν κάποιος μαθητής εκτελεί τις πράξεις του προβλήματος σωστά τις περισσότερες φορές είναι έτοιμος να τις τροποποιήσει στην πρώτη αμφισβήτησή μας. Η επανάληψη αυτής της παρατήρησης σε μεγάλη κλίμακα και το γεγονός της αποστασιοποίησης σημαντικού αριθμού μαθητών από τη διαδικασία μάθησης μας έκανε να σταθούμε αρνητικά απέναντι στη μετωπική διδασκαλία ως διδακτική μέθοδο που οδηγεί σε εννοιολογική κατανόηση. Αυτός ήταν και ένας από τους λόγους που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε το χειραπτικό υλικό σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης.

1.2.β. Ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας

Στις παραπάνω επισημάνσεις και αδυναμίες της ανταγωνιστικής τάξης που χαρακτηρίζει πολλές φορές τη δασκαλοκεντρική μέθοδο διδασκαλίας απάντηση έρχεται να δώσει η πρόταση της ομαδοσυνεργατικής τάξης μάθησης, όπου ο μαθητής καλείται όχι μόνο να «κάνει» πράγματα αλλά και να αναλύσει αυτό που κάνει. Χαρακτηριστικό της και ουσιαστική διαφοροποίησή της είναι η σύνθεση της τάξης από μικρές ομάδες μαθητών, οι οποίοι εργάζονται μαζί για την επιτυχία των στόχων που έχει μοιραστεί ο καθένας τους.

Η συνεργατική μάθηση, με εξαίρεση εγχειρήματα όπως η μέθοδος project που αντλεί στοιχεία από τους Dewey και Kilpatrick, δεν ήταν διαδεδομένη. Σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης επικρατούσε η ανταγωνιστική ατομικιστική μάθηση.

Ο Sharan (1980) περιέγραψε την ομαδοσυνεργατική διδακτική μέθοδο μάθησης ως *«μια ομάδα διδακτικών στρατηγικών που χρησιμοποιεί μικρές ομάδες μαθητών για να προωθήσει ισότιμη αλληλόδραση και συνεργασία για τη μελέτη εκπαιδευτικών θεμάτων»*. Αυτή η «αλληλόδραση ανάμεσα στα μέλη της, που δημιουργείται από τους κοινούς στόχους» είναι για τον Lewis (1948) η βάση της ομάδας. (Jacobs, G., Lee, C., & Ng, M, 1997, σελ. 18)

Για τον Piaget (1926), η αλληλόδραση των παιδιών στην ομάδα είναι πολύ σημαντική αφού «η επικοινωνία ενός παιδιού με συνομηλίκους, που έχουν διαφορετικές απόψεις, μπορεί να επιφέρει αρχικά διατάραξη της γνωστικής του ισορροπίας αλλά στη συνέχεια θα το οδηγήσει στην υιοθέτηση ανωτέρου επιπέδου λογικής»

(Ματσαγγούρας, 2000, σελ. 2). Άποψή του είναι ότι «η κοινωνικο-υποκειμενική γνώση, η γλώσσα, οι αξίες, οι κανόνες, η ηθική και τα συμβολικά συστήματα όπως το διάβασμα και τα μαθηματικά μπορούν να μαθευτούν μόνο σε αλληλόδραση με άλλους» (Slavin, 1990, σελ. 15). Ο Vygotsky επίσης θεωρεί ότι «τα παιδιά μαθαίνουν τις υψηλότερες λειτουργίες από τη συναναστροφή [αλληλόδραση] με τους ενήλικες και με τα άλλα παιδιά γύρω τους» (Vygotsky, 1978, σελ. 90).

Οι Smith & MacGregor (1992) ορίζουν την ομαδοσυνεργατική μάθηση ως *«ομπρέλα από ποικίλες διδακτικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνει κοινές πνευματικές προσπάθειες ανάμεσα σε μαθητές ή ανάμεσα σε μαθητές και δάσκαλο».* Οι Deutsch (1962) και Johnson & Johnson (1975) όρισαν ως αρχή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας, το *«καθένας επιτυγχάνει μόνο όταν η ομάδα του επιτυγχάνει»* που σημαίνει δηλαδή, ότι από όλα τα μέλη της ομάδας απαιτείται κοινή αντίληψη και επιτυχία των επιμέρους στόχων του καθενός για να επιτύχουν οι στόχοι της ομάδας. Οι Skinner (1954), Slavin (1970) και Bandura (1994), υποστηριχτές της θεωρίας του κινήτρου, πιστεύουν ότι «όταν οι μαθητές αισθάνονται θετική αλληλόδραση με τους συμμαθητές στην ομάδα τους ενισχύεται η μάθηση και ενθαρρύνονται να δουλέψουν σκληρά για να πετύχουν αυτοί και η ομάδα τους». Η εργασία και η λειτουργία της ομάδας επομένως πρέπει να είναι προσεκτικά σχεδιασμένες και να στοχεύουν στην κινητοποίηση των μελών της ώστε οι μαθητές από παθητικοί αποδέκτες πληροφοριών που δίνονταν από τον δάσκαλο να μετατρέπονται σε ενεργούς συντελεστές στη δόμηση της γνώσης τους.

Τέσσερα είναι τα βασικά χαρακτηριστικά σημεία στα οποία διαφέρει η ομαδοσυνεργατική μέθοδος από τη διδασκαλία σε «όλη την τάξη» στην οργάνωση της τάξης, στον σχεδιασμό των εργασιών, στον ρόλο του δασκάλου και στον ρόλο του μαθητή (Jacobs, Lee, & Ng, 1997). Στη συνεργατική τάξη οι ρόλοι δάσκαλου και μαθητή αλλάζουν και γίνονται περισσότερο σύνθετοι. «*Η τάξη δεν είναι πλέον μόνο ο δάσκαλος και οι μαθητές ως άτομα αλλά δημιουργείται μια πιο ανεξάρτητη κοινότητα»,* όπως λένε οι Smith, & MacGregor *«με όλες τις χαρές, την ένταση και τις δυσκολίες που υπάρχουν σε όλες τις κοινότητες»* (1992, σελ. 8).

Οι μαθητές από ακροατές, παρατηρητές και αποδέκτες σημειώσεων ενεργοποιούνται στην επίλυση προβλήματος, γίνονται συνεργάτες και συνομιλητές. Η παρουσία τους μέσα στην τάξη χάνει τον «ιδιωτικό» της χαρακτήρα αφού ο καθένας τους εργάζεται όχι για την ατομική του «προβολή» αλλά για την «προβολή» της ομάδας. Η συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία, που υπαγορεύονταν από προσωπικές επιλογές, γίνεται συμμετοχή που υπαγορεύεται από τις προσδοκίες της ομάδας. Ο ανταγωνισμός με τους συμμαθητές τους μετατρέπεται σε συνεργασία. Ο δάσκαλος και το βιβλίο παύουν να είναι πια για τον μαθητή η μόνη πηγή αυθεντίας και γνώσης αφού γίνονται ο ίδιος, οι συμμαθητές του και η σκέψη της ομάδας η πρόσθετη και σημαντική πηγή αυθεντίας και γνώσης (MacGregor, 1997, σελ. 31).

Οι Bruner (1966), Craik & Lockhart (1972) και Wittrock (1974), υποστηρίζουν ότι «η μεγαλύτερη εμβάθυνση στη διαδικασία και στη σκέψη μπορεί να επιτευχθεί από τις εξηγήσεις που σου δίνουν οι άλλοι». Οι μαθητές στην ομάδα μαθαίνουν ο ένας από τον άλλο μέσα από τις νοητικές αντιπαραθέσεις τους στις συζητήσεις πάνω στο περιεχόμενο, από τις ανεπαρκείς επιχειρηματολογίες του άλλου αλλά και από τις ανησυχίες που προκύπτουν πάνω στην πορεία της επίλυσης ενός προβλήματος. Αυτή η νοητική αντιπαράθεση ανάμεσα στα μέλη της ομάδας λειτουργεί, όπως σημειώνει ο Damon (1984, σελ. 332), *«ως καταλύτης αλλαγής… Κινητοποιεί τον μαθητή στο να επαναξιολογήσει τις παλιές αντιλήψεις του για τον κόσμο και τον οδηγεί να δομήσει καινούργιες που ταιριάζουν καλύτερα με την εποικοδομητική κριτική που δέχεται από τους συμμαθητές του»*.

Έτσι, ένας ακόμη λόγος που μας οδήγησε στην ομαδοσυνεργατική ως διδακτική μέθοδο ήταν ότι αυτή θα μας έδινε τη δυνατότητα να μελετήσουμε τον τρόπο που λειτουργούν οι μαθητές στην ομάδα, δηλαδή, ποιες νοητικές αντιπαραθέσεις και ποια επιχειρηματολογία αναπτύσσουν πάνω στις δραστηριότητες που σχεδιάσαμε και πως γενικότερα αλληλοδρούν ο ένας με τον άλλο. Κρίναμε ότι αυτή η πληροφόρηση είναι σημαντική για μας όπως και για τους άλλους δασκάλους διότι παρακολουθώντας την εξέλιξη των συζητήσεων, των επιχειρημάτων και των αμφισβητήσεων ανάμεσα στα μέλη της ομάδας μπορεί κανείς να «δει» σε βάθος και με λεπτομέρεια τα σημεία «ασυνέχειας» στη σκέψη τους που εμποδίζουν την εννοιολογική κατανόηση. Ταυτόχρονα κερδίζει σε εμπειρία και γνώση για το πώς πρέπει να παρουσιάζεται η κάθε αλγεβρική ενότητα ώστε να είναι εννοιολογικά κατανοητή στους μαθητές.

Για τον Slavin «η αλληλόδραση είναι σημαντική στη λογικομαθηματική σκέψη, στην «ανισορροπήση» των εγωκεντρικών εννοιολογήσεων του παιδιού (δηλαδή να θέσει υπό αμφισβήτηση τις εγωκεντρικές του εννοιολογήσεις) και στον εφοδιασμό της ανατροφοδότησής του σχετικά με την εγκυρότητα των λογικών δομών» (1996, σελ. 49). Μέσω των εξηγήσεων που δίνει ο ένας μαθητής στον άλλον επιτυγχάνεται αποτελεσματικότερη ανάπτυξη του υλικού της πληροφορίας, την οποία ανάπτυξη η Wittrock (1986) κρίνει «απαραίτητη για να συγκρατήσει ο μαθητής κάποια πληροφορία και να τη συσχετίσει με άλλη ήδη υπάρχουσα στη μνήμη του».

Το γεγονός ότι η μεταφορά γνώσης στη συνεργατική τάξη είναι μοιρασμένη και γίνεται αμφίδρομα όχι μόνο ανάμεσα στον δάσκαλο και τους μαθητές αλλά και μεταξύ των μαθητών μελών της κάθε ομάδας επιβάλλει και αλλαγή στον ρόλο / στάση του δασκάλου. Οι καινούργιες συνθήκες τάξης απαιτούν από εκείνον να αξιολογεί τη γνώση των μαθητών, να χτίζει πάνω σε αυτή, στις προσωπικές τους εμπειρίες, στη γλώσσα, στις στρατηγικές και στην κουλτούρα τους. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων πρέπει να έχει εκείνα τα χαρακτηριστικά τα οποία να δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν πρωτοβουλίες, να παρουσιάσουν τις εμπειρίες και γνώσεις τους, να δουν ότι έχουν αξία, να συνδέσουν τη δική τους μάθηση με τη «σχολική», να κινητοποιηθούν να ακούσουν και να μάθουν με έναν καινούργιο τρόπο.

Σε αντίθεση με τη μετωπική διδασκαλία, όπου ο δάσκαλος είναι ο μόνος αποκλειστικά υπεύθυνος για να θέτει στόχους, να σχεδιάζει εργασίες μάθησης και να αξιολογεί, ο ρόλος του δάσκαλου της συνεργατικής τάξης είναι και ρόλος μεσολαβητή, αφού μοιράζεται την εξουσία και τη γνώση του με τους μαθητές με πολύ ιδιαίτερο τρόπο.

Η επιτυχημένη διαμεσολάβησή του βοηθά τους μαθητές να συνδέσουν την καινούργια πληροφορία με την εμπειρία τους, να συνειδητοποιήσουν τι να κάνουν όταν έρχονται σε δύσκολη θέση, να μάθουν πώς να μαθαίνουν. Οι δάσκαλοι μεσολαβητές καλούν τους μαθητές να θέσουν τους ακριβείς στόχους μέσα στο συγκεκριμένο διδακτικό πλαίσιο δίνοντάς τους δικαίωμα επιλογής δραστηριοτήτων και εργασιών και ενθαρρύνοντάς τους να αξιολογούν ό,τι έμαθαν. Προτρέπουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη γνώση τους, να μοιράζονται τις γνώσεις και τις στρατηγικές τους, να συμπεριφέρονται ο ένας προς τον άλλο με σεβασμό και να στοχεύουν σε κατανόηση υψηλού επιπέδου. Τους βοηθούν να ακούν την διαφορετική άποψη, να υποστηρίζουν τους ισχυρισμούς τους με στοιχεία, να εμπλέκονται σε κριτική και δημιουργική σκέψη και να παίρνουν μέρος σε διάλογο ανοικτό και με περιεχόμενο. «Πάνω από όλα ο δάσκαλος ως μεσολαβητής ρυθμίζει το επίπεδο της πληροφορίας και ενισχύει, στο μέγιστο δυνατό, την ικανότητα του μαθητή να αναλαμβάνει την ευθύνη της μάθησής του» (Tinzmann, Jones, Fennimore, Bakker, Fine & Pierce, 1990).

Τα «πρέπει» όμως που συνθέτουν τον καινούργιο «διευρυμένο» και πιο σύνθετο ρόλο του δασκάλου της συνεργατικής τάξης απαιτούν, όπως αναφέρουν οι Johnson, Johnson & Holubec (1992/1993), από εκείνον «να προσδιορίζει σε κάθε μάθημα το αντικείμενο του μαθήματος και τις στρατηγικές που πρέπει να διδαχθούν, να παίρνει προδιδακτικές αποφάσεις (μέγεθος ομάδων, μέθοδο που θα ακολουθήσουν οι μαθητές, τον ρόλο τους, τα υλικά που χρειάζονται, τον τρόπο που θα διευθετηθεί η αίθουσα), να εξηγεί την εργασία και τη θετική αλληλόδραση, να διδάσκει τις απαιτούμενες έννοιες και στρατηγικές, να δίνει τα κριτήρια της επιτυχίας και να εξηγεί τις αναμενόμενες κοινωνικές δεξιότητες.

Επιπλέον οφείλει να βοηθά τους μαθητές στα διαδικαστικά που αφορούν στη λειτουργία της ομάδας, να παρεμβαίνει στην ομάδα για να βοηθήσει ή για να αυξήσει τις διαπροσωπικές και ομαδικές ικανότητες και να αξιολογεί τη μάθηση».

Όπως είναι φυσικό, στην ομαδοσυνεργατική μάθηση η διεύρυνση του ρόλου του δασκάλου έχει άμεση επίδραση και στο προφίλ του μαθητή. «Η συμμετοχή του απαιτεί να έχει αυξημένο έλεγχο στη μάθηση, να παίρνει αποφάσεις, να εργάζεται συνεργατικά και όχι ανταγωνιστικά, να αποκτά τη γνώση μέσα από τη δόμηση του περιεχομένου και όχι μέσα από την απομνημόνευσή του, να ορίζει τους στόχους και τα μέσα αξιολόγησής του» (Kane & Harms, 1999).

Οι Johnson & Johnson θεωρούν ότι «η συνεργατική μέθοδος διδασκαλίας πρέπει να επιλέγεται όταν, θέλουμε να κάνουμε επίλυση προβλήματος, προσδοκούμε ποιότητα από την προσπάθεια, οι στόχοι μάθησης είναι πολύ σημαντικοί και είναι επιθυμητή η αλληλόδραση ανάμεσα στους μαθητές». Επίσης άποψή τους είναι να προχωρούμε σε εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής «όταν επιθυμούμε ένα άνετο περιβάλλον τάξης, μια πλήρη κλίμακα γνωστικών και ουσιαστικών αποτελεσμάτων, την προώθηση της κοινωνικής ανάπτυξης των μαθητών, την ανάπτυξη διαπροσωπικών ικανοτήτων και θετικών σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές και τον δάσκαλο και τη μείωση των συγκρούσεων ανάμεσα στους μαθητές» (1974, σελ. 6).

Για την επιτυχία της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου σημαντικό ρόλο έχει η κατάλληλη οργάνωση των μαθητών σε ομάδες από τον δάσκαλο. Λ.χ οι ομάδες αφενός πρέπει να είναι ολιγομελείς, των τριών τεσσάρων ή πέντε μελών, αφού όπως έδειξε έρευνα των Hertz-Lazarowitz et al.(1980) «οι μικρές ομάδες ήταν πιο συνεργατικές», και αφετέρου ετερογενείς, πρωταρχικά ως προς τις εκπαιδευτικές τους ικανότητες και δευτερεύοντος με βάση την εθνότητα, τη φυλή και το γένος. Έρευνες των Augustine et al. (1989-90) έδειξαν ότι η ετερογένεια της ομάδας συμβάλει θετικά στη μάθηση τόσο των «χαμηλόβαθμων», όσο και των «υψηλόβαθμων» μαθητών. Ο Mevarech (1999) βρήκε επίσης ότι οι μαθητές στις ετερογενείς ομάδες μπορούσαν να λύσουν σύνθετες νοητικές εργασίες χωρίς να περιορίσουν την πρόοδο των μαθητών με υψηλές αποδόσεις.

Οι Johnson & Holubec (1990) βρήκαν ότι η χρήση μικρών ομάδων έκαναν την εργασία των μαθητών καλύτερη και δόθηκε η ευκαιρία να μάθει ο ένας από τον άλλο. Η Webb (1992) συμφωνεί ότι «οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις ωφελούνται περισσότερο στην ομαδοσυνεργατική μάθηση γιατί είναι εκείνοι που δίνουν συχνότερα λεπτομερείς εξηγήσεις στους άλλους συμμαθητές της ομάδας τους».

Έρευνες λοιπόν όπως αυτές των Johnson & Johnson (1994) έδειξαν ότι είναι σημαντικό να μην γίνεται ο διαχωρισμός των μαθητών σύμφωνα με την υποτιθέμενη δυνατότητά τους, τα επιτεύγματά τους, τα ενδιαφέροντά τους ή άλλα χαρακτηριστικά διότι αυτό αποδυναμώνει τη συνεργασία και την τάξη, αφού στερεί από όλους τους μαθητές την ευκαιρία να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Όταν οι ομάδες είναι ετερογενείς οι μαθητές σε μεγάλο βαθμό αλληλοδρούν και επιτυγχάνουν σε τρόπους και επίπεδα που σπάνια βρίσκουμε σε άλλες στρατηγικές διδασκαλίας.

Έρευνα σε σύνολο 602 μαθητών, με στόχο την διερεύνηση της στάση μαθητών ενιαίων Λυκείων και ΤΕΕ στην ομαδοσυνεργατική διδασκαλία με χρήση φύλλων δραστηριοτήτων, έδειξε ότι οι ανομοιογενείς ομάδες, αρίστης-καλής, καλής-χαμηλής επίδοση μαθητές, συνεργάστηκαν καλύτερα από ότι ομάδες του ιδίου γνωστικού επιπέδου, αρίστης ή χαμηλής επίδοσης (Φακούδης, Ε., 2004, σελ. 319).

Αντίθετη είναι η θέση της Allan (1991) που εξέφρασε επιφυλάξεις και θεώρησε πιθανό «μαθητές υψηλών επιδόσεων να μείνουν πίσω με το να αναγκάζονται να εξηγούν την ύλη στους μαθητές της ομάδας τους με χαμηλές επιδόσεις». Επίσης έθεσε σε αμφισβήτηση την αποτελεσματικότητα των ετερογενών ομάδων ως προς την επίδοση γιατί θεώρησε ότι «οι μαθητές κινητοποιούνται και κερδίζουν περισσότερο παρατηρώντας συμμαθητή τους με τις ίδιες με αυτούς που τα καταφέρνει παρά κάποιον που εξ' αρχής υπερέχει στην επίδοση».

2.1. Είναι η συνεργατική μέθοδος διδασκαλίας περισσότερο αποτελεσματική από άλλες μεθόδους και κυρίως από τη δασκαλοκεντρική μέθοδο διδασκαλίας;

Για τη συνεργατική μάθηση έχουν διατυπωθεί ποικίλα και σημαντικά ερευνητικά ερωτήματα. Το πιο βασικό από αυτά είναι «αν η συνεργατική μέθοδος διδασκαλίας είναι περισσότερο αποτελεσματική από άλλες μεθόδους και κυρίως από τη δασκαλοκεντρική μέθοδο διδασκαλίας». Από τα μέσα του 1970 ο Robert Slavin στο πανεπιστήμιο του John Hopkins και η Elisabeth Cohen στο Stanford αφιέρωσαν χρόνια λεπτομερούς έρευνας για να αναλύσουν και να διαλευκάνουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες διδακτικές δομές με συνεργατικούς, ανταγωνιστικούς ή ατομικούς στόχους επηρεάζουν ή αυξάνουν τις επιδόσεις, την ψυχολογική προσαρμογή, την αυτοεκτίμηση και τις κοινωνικές δεξιότητες των μαθητών.

Σε έρευνα των Johnson & Ahlgren (1976, σελ. 92) που αφορούσε τη στάση των μαθητών σε συνθήκες μάθησης συνεργασίας και σε ανταγωνιστικές συνθήκες μάθησης τα αποτελέσματα έδειξαν ότι σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης η συνεργασία και όχι ο ανταγωνισμός κινητοποίησε θετικά τους μαθητές στη μάθηση, στη συμμετοχή τους στην τάξη, στο να αξιολογήσουν θετικά τον εαυτό τους. Ο ανταγωνισμός είχε κάποια θετική επίδραση μόνο σε μαθητές του γυμνασίου.

Οι Tjosvold, Marine και Johnson (1977) βρήκαν ότι οι στρατηγικές της συνεργατικής μάθησης «ωθούν» τους μαθητές σε θετική συμπεριφορά που εκδηλώνεται απέναντι και στη διδακτική μέθοδο και στη διάθεσή τους για πληροφόρηση. Οι μαθητές μέσα από τις στρατηγικές έμαθαν περισσότερα για την ενότητα που διδάχθηκαν από τους μαθητές που διδάχθηκαν με ανταγωνιστικές στρατηγικές.

Σε μετα-ανάλυση 122 ερευνών των Johnson & Johnson, Nelson, Maruyama και Skon (1981) διαφόρων τύπων συνεργατικής μάθησης, με ποικιλία αντικειμένων μάθησης, στις οποίες έγινε σύγκριση η σχετική επίδραση της δομής των στόχων της συνεργατικής, της ανταγωνιστικής και της ατομικής μάθησης σε ότι αφορά στα επιτεύγματα των μαθητών,. τα αποτελέσματα ανέδειξαν σημαντικά αποτελεσματικότερη τη συνεργατική μάθηση σε σχέση με τον διαπροσωπικό ανταγωνισμό ή την ατομική προσπάθεια στη βελτίωση των επιτευγμάτων και στην αποδοτικότητα των μαθητών (Davidson & Kroll, 1991, σελ. 362).

Σε μετα-ανάλυση επίσης του Slavin (1983) βρέθηκε ότι η συνεργατική μάθηση στο 63% των ερευνών είχε σημαντικά θετικά αποτελέσματα και μόνο σε δύο έρευνες η δασκαλοκεντρική διδασκαλία είχε καλύτερα αποτελέσματα.

Οι Johnson & Johnson, Stanne & Garibaldi (1990) σε έρευνά τους σε μαθητές Γυμνασίου, εξέτασαν τις επιπτώσεις που είχαν οι συνθήκες μάθησης της ομαδοσυνεργατικής σε σχέση με την ατομική στην κατανόηση και στη μάθηση της επίλυσης προβλήματος με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που διδάχθηκαν με την ομαδοσυνεργατική μέθοδο διδασκαλίας αύξησαν την ικανότητά τους στην επίλυση προβλήματος και την αποδοτικότητά τους.

Στην έρευνά τους οι Lazarowitz και Karsenty (1994) σε δείγμα 708 μαθητών της 10ης τάξης εξέτασαν την επίδραση που είχε η διδακτική μέθοδος σε μικρές ομάδες έρευνας σε σχέση με τη μετωπική διδασκαλία. Το ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στη μέτρηση και κατηγοριοποίηση του βαθμού επικοινωνίας, της ερμηνείας δεδομένων, της αξιολόγησης υποθέσεων, του ελέγχου μεταβλητών, της συλλογής χρησίμων στοιχείων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πειραματική ομάδα είχε σημαντικά υψηλότερη βαθμολογία στις τέσσερις υποκλίμακες μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν.

Οι Qin και Johnson & Johnson (1995) συνέκριναν, βασιζόμενοι σε 46 έρευνες, που δημοσιεύτηκαν από το 1923 ως το 1993, τα επιτεύγματα που είχε η συνεργατική μάθηση σε σχέση με την ατομική και την ανταγωνιστική μάθηση στην επίλυση προβλήματος. Τα ευρήματα χωρίστηκαν σε τέσσερες κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο της επίλυσης προβλήματος. Αυτές ήταν γλωσσική (επίλυση γραπτά ή προφορικά), η μη γλωσσική (επίλυση με σύμβολα, μαθηματικά, ενέργειες, πράξεις), η καλά διευκρινισμένη (ενέργειες και λύσεις πλήρως διευκρινισμένες), η μη διευκρινισμένη (χωρίς διευκρινισμένες ενέργειες και λύσεις). Οι ομάδες των μαθητών που εργάστηκαν ομαδοσυνεργατικά είχαν υψηλότερες επιδόσεις από ότι η ατομική και ανταγωνιστική μάθηση και στις τέσσερες κατηγορίες. Αυτά τα αποτελέσματα παρατηρήθηκαν σε όλες τις ηλικίες και έρευνες υψηλής, μεσαίας και χαμηλής ποιότητας. Η ανωτερότητα της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου ήταν μεγαλύτερη στη μη γλωσσική παρά στη γλωσσική κατηγορία (σελ. 129).

Υπήρξαν όμως και έρευνες στις οποίες δεν παρατηρήθηκε θετική επίδραση της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου στον τρόπο σκέψης των μαθητών. Ο John Ross (1988) διαπίστωσε στην έρευνά του, που αφορούσε την επίλυση προβλήματος, ότι η ομάδα ελέγχου που διδάχθηκε με τη μετωπική μέθοδο διδασκαλίας παρουσίασε καλύτερα αποτελέσματα από την ομάδα που διδάχτηκε σύμφωνα με την ομαδοσυνεργατική μέθοδο. Ως αιτίες για το αποτέλεσμα αυτό αναφέρονται η επιλογή της μεθόδου (STAD) που αποδείχθηκε ανεπαρκής, η στάση των «αργόσχολων» μαθητών που άφηναν το δύσκολο κομμάτι της εργασίας για τους άλλους, η ανικανότητα των ικανότερων μελών της ομάδας να «διδάξουν» αποτελεσματικά και η έλλειψη τρόπων συμπεριφοράς

Παρόμοια ήταν τα συμπεράσματα στις έρευνες των Georgas (1986) που αφορούσαν την επίλυση προβλήματος και Lazarowitz, Hertz-Lazarowitz & Baird (1994) πάνω στη δημιουργική εργασία στις οποίες δεν παρουσιάστηκε διαφορά ανάμεσα στην ομαδοσυνεργατική και την ατομική μάθηση (Jacobs, Lee & Ng, 1997, σελ.14).

3. Χειραπτικά υλικά - Αλγεβρικά πλακίδια

Το χειραπτικό υλικό που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας ήταν τα αλγεβρικά πλακίδια (Algebra Tiles). Πριν όμως αναφερθούμε αναλυτικά στα χαρακτηριστικά του υλικού και τη χρήση του θεωρούμε χρήσιμο να αναφερθούμε γενικά στα χειραπτικά υλικά για να σχηματίσουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών.

Με τον όρο *χειραπτικά υλικά* (manipulatives) εννοούμε συγκεκριμένα αντικείμενα τα οποία έχουν σχεδιαστεί για να χρησιμοποιηθούν ως μέσο που κάνει τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες απτές και ευκατάληπτες για την πλειονότητα των μαθητών της τάξης (Moyer, 2001, σελ. 176). Δεν είναι υλικά επίδειξης από τον δάσκαλο, αλλά απευθύνονται αποκλειστικά στον μαθητή δίνοντάς του τη δυνατότητα να δημιουργεί πλήθος εικόνων καθώς μπορεί και τα μετακινεί προς όλες τις κατευθύνσεις και να ελέγχει κατά τον χειρισμό τους το σωστό ή λάθος της σκέψης του (Μαρμαρά, Χατζηκυριάκου, 2007, σελ. 488-489). Δύναμη της χρήσης τους είναι ότι «επιτρέπουν στους μαθητές να συνδέσουν μαθηματικές ιδέες και σύμβολα με φυσικά αντικείμενα, να δώσουν μορφή στον τρόπο σκέψης τους, να δομήσουν τις κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις και συνδέσεις, να επιτύχουν τη μέγιστη δυνατή εννοιολογική κατανόηση» (Fuson et al 1992, σελ. 11). Οι Peterson, Mercer & O' Shea (1988) επίσης τα θεωρούν ως μέσο για τη βελτίωση της απόδοσης των μαθητών όλων των επιπέδων ανεξάρτητα της πνευματικής τους κατάστασης (Uttal, Scudder & DeLoache, 1997, σελ. 38)

Ο Driscoll εντοπίζει τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στην κατανόηση του μαθήματος στο ότι «η άλγεβρα είναι μια ξένη γλώσσα» και επομένως ο μαθητής «πρέπει να αποκτήσει την ικανότητα ''μετάφρασής'' της, ώστε να μπορεί να διαβάσει, να γράψει και να κατανοήσει, τόσο την οπτική όσο και τη συμβολική αναπαράσταση των εννοιών των μεταβλητών και των ισοτήτων» (1982, σελ. 12).

Η άποψη αυτή ανοίγει μια ενδιαφέρουσα προοπτική προσέγγισης του μαθήματος, αυτής της εκμάθησης μιας ξένης γλώσσας, για την οποία όμως η εξεικόνιση είναι απαραίτητο στοιχείο για να αποκτήσει κάποιος την ικανότητα «μετάφρασής» της. Σκεφτήκαμε λοιπόν ότι τα υλικά θα ήταν το μέσο για να περάσει ο μαθητής από τη γλώσσα της αριθμητικής, του συγκεκριμένου, στη γλώσσα της άλγεβρας, του αφηρημένου, από την πρακτική σκέψη στη θεωρητική, που απαιτεί από το άτομο «να εργάζεται με πληροφορίες που δεν είναι άμεσα παρουσιάσιμες σε ένα συγκεκριμένο ή εικονογραφημένο επίπεδο» (Hawker & Cowley, 1997) και να σκέπτεται πέραν του ό,τι μπορεί να δει και να αγγίξει.

Οι μαθητές, πιστεύει ο Devlin (2000) ότι «κατανοούν μια θεωρητική έννοια ευκολότερα αν μάθουν πρώτα τις προκαταρτικές έννοιες με ‘‘χειροπιαστό’’ τρόπο, αν μετατραπούν δηλαδή οι σύνθετες έννοιες μέσα από ενσωματώσεις σε χειρισμούς υλικών ή σε εικονογραφημένες αναπαραστάσεις» (Witzel, Mercer, Miller, 2003, σελ. 121).

Κατά τον Hedden (1986) «οι τεχνικές διαδικαστικής σκέψης, όπως τα μαθηματικά μοντέλα και η χρήση λογικής, μπορούν να συμβάλουν στην κατανόηση των ομοιοτήτων και των διαφορών σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ή μια αλγεβρική έννοια και να βοηθήσουν τους μαθητές να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου».

Οι ενσωματώσεις των μαθηματικών δομών μπορεί να παρουσιαστούν στους μαθητές με διαφορετικούς τρόπους. Ένας από αυτούς, είναι να τους δώσουμε χειραπτικά υλικά έτσι σχεδιασμένα ώστε μέσα από τον ελεγχόμενο χειρισμό τους να γίνονται αντιληπτές οι προς μάθηση μαθηματικές έννοιες. Η άποψη αυτή ευθυγραμμίζεται με εκείνη του Dienes (1964) ότι «για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις αφηρημένες έννοιες της άλγεβρας χρειάζεται να βάλουμε στα χέρια τους υλικά με τα οποία θα ‘‘παίξουν’’ και θα ‘‘χαζέψουν’’, όπως με τα παιγνίδια τους, που είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε μέσα από ελεγχόμενο χειρισμό να κάνουν κατανοητές συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις» (σελ. 43).

Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, όπως αναφέρεται στο πρώτο άρθρο για τις γενικές αρχές της διδασκαλίας των Μαθηματικών, (βλ. Παράρτημα, σελ. 410) θεωρεί ότι: «για να μπορέσουν οι μαθητές να μεταβούν από το επίπεδο της άτυπης εκπεφρασμένης σε συγκεκριμένο πλαίσιο γνώσης, στο επίπεδο της τυπικής μαθηματικής γνώσης πρέπει να έχουν στη διάθεσή τους τα κατάλληλα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου. Η παροχή συγκεκριμένου υλικού, μοντέλων, σχημάτων, διαγραμμάτων, συμβόλων, εξυπηρετεί αυτό το σκοπό».

Σύμφωνα λοιπόν με τα πιο πάνω η χρήση της πρακτικής των χειραπτικών υλικών στα μαθηματικά φαίνεται να είναι ασφαλής διέξοδος για να οδηγηθεί ο μαθητής στη θεωρητική σκέψη. Της ιδίας άποψης είναι και ο Post (1992) αφού θεωρεί ότι τα υλικά «βοηθούν τον μαθητή να κινείται από το επίπεδο του πραγματικού κόσμου στο επίπεδο του συμβολικού, είναι [δηλαδή] κατά κάποια έννοια το μέσο της διαδρομής που ξεκινά από τον συγκεκριμένο πραγματικό κόσμο, που αναφέρεται το πρόβλημα, και τελειώνει στον κόσμο των αφηρημένων εννοιών και μαθηματικών συμβόλων».

Τα χειραπτικά υλικά ή αλλιώς εκπαιδευτικά υλικά, λέει η Szendrei (1996) «έχουν στην αίθουσα διδασκαλίας την έννοια των εργαλείων της πραγματικής ζωής, είναι όμως ειδικά κατασκευασμένα, ώστε να εξυπηρετούν τους σκοπούς της τάξης. Έχουν ως πρόσθετο ρόλο να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες, που δεν έχουν αναπτυχθεί ισοδύναμα καλά, μέσα από την εκτός τάξης εμπειρία τους».

Κατά τον Roschelle (1990) είναι «κομμάτια ‘‘συνομιλίας’’, αντικείμενα τα οποία οι μαθητές μπορούν χρησιμοποιήσουν για να δείξουν δημοσίως μαθηματικές ιδέες και συλλογισμούς μέσα από τη δημιουργία των δικών τους υλικών απεικονίσεων».

Σύμφωνα με τον Meira (1998) λειτουργούν ως «δημιουργοί αναπαραστάσεων μαθηματικών ιδεών, η σύνδεση όμως της έννοιας με τα υλικά δεν είναι αναγκαία διαφανής στους δασκάλους και στους μαθητές. Δεν είναι μαγικά υλικά και δεν φέρουν από μόνα τους τη γνώση ή τη δυνατότητα να κάνουν άμεσα αντιληπτές τις μαθηματικές έννοιες». Ο Meira επισημαίνει με αυτήν την παρατήρηση τον κίνδυνο το υλικό να είναι μη διαφανές για τον μαθητή ή και τον δάσκαλο, δηλαδή να μη λειτουργεί ως μέσο μετάβασης στη θεωρητική σκέψη αλλά να παραμένει το «παιγνίδι» στα χέρια των μαθητών ή να παραπέμπει σε έννοιες μακριά από τους στόχους μάθησης.

Ο ίδιος ορίζει τη διαφάνεια ενός χειραπτικού υλικού «ως τον δείκτη πρόσβασης στη γνώση και την πράξη, και όχι ως έμφυτο χαρακτηριστικό του αντικειμένου. Θεωρεί ότι «το αν ένα χειραπτικό υλικό είναι περισσότερο ή λιγότερο διαφανές εξαρτάται από την ποιότητα της τυπολογικής αντιστοιχίας των απτών χαρακτηριστικών του υλικού και του τομέα γνώσεων στον οποίο στόχευε ο κατασκευαστής» (1998, σελ. 121, 124).

Η Adler είναι της άποψης ότι η διαφάνεια αναφέρεται «στον τρόπο με τον οποίον αλληλοδρά η χρήση του υλικού και η κατανόηση των εννοιών στη διαδικασία μάθησης» (1999, σελ. 49). Η διαφάνεια του υλικού επομένως εξαρτάται από το αν η χρήση του είναι τέτοια ώστε να οδηγεί τον χρήστη να αναγνωρίσει τις έννοιες που «κρύβονται» και να τις κατανοήσει.

Οι Lave και Wenger (1991), όπως αναφέρει σε άρθρο της η ίδια, θεωρούν «ως προϋπόθεση της διαφάνειας του υλικού την ύπαρξη των διπλών χαρακτηριστικών του, του ορατού και του αόρατου». Ως αόρατο χαρακτηριστικό ορίζουν εκείνο που αναφέρεται στη μορφή της μη προβληματικής ερμηνείας και ενσωμάτωσης του υλικού στη δραστηριότητα και ως ορατό εκείνο που αναφέρεται στη μορφή της παρατεταμένης πρόσβασης στην πληροφορία. Οι ίδιοι λένε ότι «η συνύπαρξη αυτή δεν είναι μια απλή διχοτομική διαφορά εφόσον αυτά τα δύο σημαντικά χαρακτηριστικά βρίσκονται σε πολυσύνθετη αλληλόδραση». Ως παράδειγμα αναφέρεται το βιβλίο των μαθηματικών που χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία του μαθήματος. Το βιβλίο είναι ορατό (σχήμα, χρώμα, πιθανές εικόνες στα εξώφυλλα κ.λπ.) και ταυτόχρονα αόρατο υπό την έννοια ότι σε αυτό «κρύβονται» έννοιες οι οποίες μόνο με σωστή χρήση του μπορούν να γίνουν κατανοητές από τον μαθητή (1991, σελ. 102).

Το κάθε χειραπτικό υλικό όπως αναφέρει ο Meira, «δεν είναι απαραίτητα διαφανές στο μαθητή» αλλά, η διαφάνειά του «αναδύεται εξαιτίας των ιδιαιτέρων μορφών χρήσης του, σε πολύ ιδιαίτερα γενικά πλαίσια κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας» (1998, σελ. 138). Χρειάζεται λοιπόν να εξετάσουμε προσεκτικά το πώς ένα χειραπτικό υλικό χρησιμοποιείται από τους μαθητές για να προσδιοριστεί ο βαθμός διαφάνειάς του και η εξέταση αυτή να λαμβάνει χώρα κάθε φορά που το υλικό χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στο γενικό πλαίσιο και τον σκοπό του κάθε επιμέρους μαθήματος.

3.1. Πλεονεκτήματα της χρήσης των χειραπτικών σύμφωνα με τις έρευνες που έχουν γίνει

Τα χειραπτικά υλικά είναι εργαλεία που βοηθούν τη μάθηση αφού δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αιτιολογήσουν την αφηρημένη έννοια με αναπαραστάσεις που απέκτησαν από την εμπειρία της χρήσης τους. Λειτουργούν ως εργαλεία για τους δασκάλους για να συνδέσουν την εμπειρία των μαθητών και την πρότερη γνώση, με την αφηρημένη μαθηματική έννοια και τη νέα γνώση, την οποία αναπαριστούν τα αντικείμενα.

«Η οπτική μέθοδος δημιουργεί πληροφορίες που ευκολότερα ανακαλούνται από τους περισσότερους μαθητές σε αντίθεση με τη λεκτική μέθοδο» ισχυρίζονται οι Shu και Moyer (2007, σελ. 158). Για τον Pimm (1995) «το σύνολο των εικόνων που δημιουργούνται με τα υλικά, προσφέρει στους λύτες προβλημάτων ένα δυναμικό τρόπο σκέψης για τις σχέσεις που πρέπει να εξετάσουν ώστε να απαντήσουν στα ερωτήματα που βάζει το πρόβλημα».

Οι μοντελοποιημένες δραστηριότητες τοποθετούν τους μαθητές σε μια οικεία κατάσταση η οποία τους βοηθά να πιστέψουν στις δυνατότητές τους και να νιώσουν την ανάγκη να αναπτύξουν δυναμικά τις μαθηματικές ιδέες για να λύσουν το πρόβλημα σε μορφή που για εκείνους έχει νόημα. Το γεγονός ότι «μπορούν να έχουν ένα καλό έλεγχο πάνω στα χειραπτικά υλικά» έχει ως αποτέλεσμα να μην «εγκαταλείπουν την προσπάθεια να ‘‘δουλέψουν’’ πάνω σε αυτά, με αυτά και να προχωρήσουν στη διερεύνηση του περιεχομένου της μαθηματικής έννοιας και την αποκρυπτογράφησή της» (Lesh, R., Carmona, G., Post, T., 2002).

Για πολλούς μαθητές τα υλικά λειτουργούν υποστηρικτικά σε θέματα που μπορεί να είναι δύσκολα και να τους προκαλούν σύγχυση. Οι Stein και Bovalino (2001) πιστεύουν, όπως αναφέρει στο άρθρο της η Shrum, ότι «είναι εργαλείο που βοηθά τους μαθητές να σκέπτονται και να αιτιολογούν τη θέση τους κατά τρόπο πιο κατανοητό ενισχύοντας έτσι την ικανότητά τους να παρουσιάσουν τη δομή της έννοιας». Επισημαίνουν μάλιστα ότι «συμβάλλουν θετικά στην κινητοποίηση της διάθεσής τους για μάθηση» (2005, σελ. 44).

Η επίδραση που έχουν τα χειραπτικά υλικά στην κατανόηση και μάθηση, ιδιαίτερα των μαθητών με περιορισμένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, υπήρξε αντικείμενο διαφόρων ερευνών. Οι Marsh, L. G., & Cooke, L. C. (1996) διαπίστωσαν με την έρευνά τους, ότι «τα χειραπτικά υλικά αύξησαν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών στα μαθηματικά και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα υλικά βοηθούν τους μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολίες μάθησης να κατανοήσουν καλύτερα το κλειδί των μαθηματικών εννοιών».

Στην έρευνα των Threadgill-Sowder & Juilfs (1980) που έλαβαν μέρος 174 μαθητές της 7ης τάξης, δεν διαπιστώθηκε διαφορά στην επίδοση μεταξύ των ομάδων που διδάχθηκαν συμβολικά και εκείνων που διδάχτηκαν με χειραπτικά υλικά. Οι μαθητές όμως με χαμηλές επιδόσεις φάνηκε ότι «ωφελήθηκαν περισσότερο από τα χειραπτικά υλικά από ότι οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις, για τους οποίους η διδακτική προσέγγιση με τα σύμβολα ήταν πιο αποτελεσματική».

Οι Suydam και Higgins (1976) παρατήρησαν στην έρευνά τους ότι «οι μαθητές που έκαναν χρήση χειραπτικών υλικών είχαν μεγαλύτερες πιθανότητες να έχουν καλύτερες μαθηματικές επιδόσεις από εκείνους που δεν έκαναν χρήση». Διαπίστωσαν μάλιστα ότι «η μάθηση με χειραπτικά υλικά ήταν αποτελεσματικότερη της συμβολικής, δηλαδή χωρίς απεικόνιση ή χειραπτικά υλικά, όταν «έσπαζε» σε τρία στάδια, δηλαδή όταν ο μαθητής πήγαινε από το συγκεκριμένο στάδιο που είναι τα χειραπτικά υλικά, στο απεικονιστικό και στη συνέχεια στο συμβολικό».

Τα αποτελέσματα της έρευνας της Garrity (1998) έδειξαν ότι οι μαθητές παρουσίασαν θετικότερη συμπεριφορά προς τα μαθηματικά και επιθυμία να συνεργαστούν με τους συμμαθητές της ομάδας τους. Παράλληλα εξέφρασαν την προτίμησή τους να χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά παρά να διδάσκονται με τον παραδοσιακό τρόπο δηλαδή μετωπικά.

Η Barclay (1992) χρησιμοποίησε στην έρευνά της χειραπτικά υλικά για να διδάξει σε μαθητές της 6ης τάξης πρωτοβάθμιες εξισώσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το σύνολο των μαθητών (92 μαθητές) αύξησαν την επίδοσή τους τουλάχιστον στα δύο από τα τρία post tests σε ποσοστό 80%. Αξιοσημείωτη ήταν η σχετική σταθερότητα και η διατήρηση της επίδοσής τους, όπως φάνηκε από τα post tests, που τους δόθηκαν μετά από 3 και μετά από 6 εβδομάδες, χωρίς να μεσολαβήσει περαιτέρω διδασκαλία ή ανάλυση.

Το δυνατό λοιπόν σημείο της έρευνας δεν ήταν ότι οι μαθητές απλά έμαθαν με τα χειραπτικά υλικά, αλλά ότι μπόρεσαν με την βοήθεια των υλικών να διατηρήσουν τις έννοιες χωρίς πρόσθετη διδασκαλία ή ανάλυση κατά τη διάρκεια της επίλυσης του post test.

«Το χειραπτικό υλικό έχει ευρεία αποδοχή και αναγνωρίζεται ως εργαλείο μάθησης όχι μόνο για τους ‘‘αδύνατους’’ μαθητές αλλά και για μαθητές που στοχεύουν να συνεχίσουν τις σπουδές τους». Αυτό ισχυρίζεται η Hall και αναφέρει, ότι σε έρευνα του Πανεπιστημίου του Wisconsin σε 48 τάξεις, γενικές και επανένταξης (882 μαθητών), οι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν για την προετοιμασία των μαθητών για το κολλέγιο χειραπτικά υλικά (2004, σελ. 11).

Η Ernst το 1994 εφάρμοσε ένα πρόγραμμα (project), με τη συμμετοχή 40 δασκάλων μέσης εκπαίδευσης, με σκοπό να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα και η εφαρμογή των χειραπτικών υλικών στα μαθηματικά της 7ης και 8ης τάξης, στην προ-Άλγεβρα, στην Άλγεβρα, στα Τεχνικά Μαθηματικά, στη Γεωμετρία, στην Τριγωνομετρία και στα Γενικά Μαθηματικά. Η έρευνα ήταν ποιοτική και ποσοτική και τα στοιχεία συγκεντρώθηκαν από παρατηρήσεις της ιδίας, των δασκάλων που συμμετείχαν, εκείνων που επέβλεπαν το πρόγραμμα και των εξωτερικών αξιολογητών.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι μαθητές παρουσίασαν αυτοπεποίθηση, προθυμία, και επιθυμία για περαιτέρω εμπειρία καθώς και μια φιλοπερίεργη προσέγγιση στο πως θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα υλικά. Οι παρατηρητές αναφέρθηκαν στην ενισχυμένη προθυμία των μαθητών να απαντήσουν σε ερωτήσεις καθώς και στη διάθεση τους να εκτείνουν την ανακάλυψη και πέραν της εργασίας που έπρεπε να διεκπεραιώσουν. Οι ίδιοι επεσήμαναν επίσης, ότι οι μαθητές έδειξαν να κατανοούν την εργασία με ακρίβεια, χρησιμοποιώντας την ανακάλυψη και τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, τις οποίες μοιράζονταν με τους συμμαθητές τους και ότι παρουσίασαν θέληση για περαιτέρω μάθηση.

Η μετα-ανάλυση 60 ερευνών σε μαθητές ηλικιών νηπιαγωγείου ως κολλεγίου, που έκανε η Sowell (1989, σελ. 498) έδειξε ότι η αποτελεσματικότητα των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών αυξάνει όταν η χρήση τους γίνεται για μακρύ χρονικό διάστημα. Τα αποτελέσματα που αφορούσαν τη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά έδειξαν ότι αυτή βελτιώθηκε όταν τα υλικά εισήχθησαν στην πρακτική της διδασκαλίας από δασκάλους που γνώριζαν καλά πώς να τα χρησιμοποιούν.

Η Strom (2009), που δίδαξε για δύο χρόνια άλγεβρα σε τάξεις διαφορετικού επιπέδου από το έβδομο έως το προ-κολεγιακό επίπεδο με την ομαδοσυνεργατική μέθοδο και κάνοντας χρήση χειραπτικών υλικών ανέφερε, ότι τα υλικά της επέτρεψαν να εισάγει τις αλγεβρικές έννοιες στο συγκεκριμένο επίπεδο, το οποίο είναι συνυφασμένο με την προηγούμενη γνώση των μαθητών. Τα υλικά έκαναν τους μαθητές ενεργούς και τους παρείχαν οπτική βοήθεια για κατανόηση, μνήμη και ανάκληση μνήμης.

Παρατήρησε ακόμη ότι «μαθητές παθητικοί στο μάθημα πήραν ενεργό ρόλο στις δραστηριότητες με τα υλικά, συζητούσαν τις σκέψεις τους με τους συμμαθητές τους στην ομάδα, συνέδεαν τα σύμβολα με τις ενέργειές τους και μοιράζονταν τα ευρήματά τους με όλη την τάξη. Κάποιοι μαθητές μάλιστα, που άλλοτε όταν τους ρωτούσε σήκωναν απλά τους ώμους δηλώνοντας άγνοια, μετά τη χρήση των υλικών απαντούσαν στις ερωτήσεις μπροστά σε όλη την τάξη». Τα υλικά έδωσαν στον μαθητή, που είχε δυσκολίες στο να εκφραστεί ή που δεν γνώριζε ποιες λέξεις να χρησιμοποιήσει, αντικείμενα στα οποία μπορούσε να αναφερθεί στις απαντήσεις του και όπως ισχυρίζεται η ίδια τα υλικά «ήταν εκείνα που άνοιξαν στον δάσκαλο και τον μαθητή τον δρόμο για συνομιλία και κατανόηση». Υπογραμμίζει ιδιαίτερα ότι «οι αδύνατοι μαθητές σημείωσαν κατά τη διάρκεια αυτών των δύο χρόνων μεγάλη βελτίωση και ότι οι βαθμοί τους στο τεστ βελτιώθηκαν όταν συνεργάστηκαν με άλλον συμμαθητή τους ή στην ομάδα». Η επισήμανση αυτή ενισχύει τη θέση που εξέφρασε η Hall, ότι δηλαδή η συμβολή των χειραπτικών υλικών στη συνεργατική μάθηση είναι πολύ σημαντική (2004, σελ. 11).

Οι Clements και McMillen (1996) θεωρούν απαραίτητο στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών τα χειραπτικά υλικά «όχι όμως απλά ως ένα κομμάτι νοητικής εικόνας διδασκαλίας αλλά ως μια νέα προοπτική χρήσης τους στη διδασκαλία».

3.2. Μειονεκτήματα της χρήσης των χειραπτικών σύμφωνα με τις έρευνες που έχουν γίνει

Παρόλο που οι περισσότερες έρευνες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η ενσωμάτωση χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία του μαθήματος δημιουργεί θετικό περιβάλλον για τη μάθηση στην τάξη, δεν παραλείπουν ταυτόχρονα να επισημαίνουν ότι τα χειραπτικά υλικά από μόνα τους δεν είναι επαρκή για να εγγυηθούν μάθηση μεστή νοήματος και επομένως δεν αποτελούν πανάκεια.

Τα περισσότερα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν γεωμετρική μορφή. Οι γεωμετρικές όμως διασυνδέσεις δεν κάνουν το αντικείμενο εύκολο, απλά «παρέχουν περιβάλλοντα (μικρόκοσμους) στα οποία διευκολύνεται η συζήτηση για σημαντικές ιδέες τόσο ανάμεσα στους μαθητές όσο και ανάμεσα στον μαθητή και τον δάσκαλο» (Picciotto, 1996). Έχουμε ήδη επισημάνει και αναλύσει, σε προηγούμενη παραγράφο (σελ. 45-46), το πρόβλημα που παρουσιάζεται σχετικά με τη διαφάνεια του υλικού. Μπορεί να είναι συγκεκριμένα, ως φυσικά αντικείμενα, αλλά να μην μπορεί ο μαθητής να «διαβάσει με άνεση» όπως λέει ο Clements την αφηρημένη έννοια (1999, σελ. 46).

Οι Uttal, Scudder, & DeLoache (1997) είναι της άποψης ότι τα χειραπτικά υλικά «δεν προσφέρουν ένα μαγικό πλεονέκτημα στον δάσκαλο των μαθηματικών». Υπογραμμίζουν επίσης ότι «για να κριθεί η χρήση τους ως επιτυχημένη θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως σύμβολα και όχι ως υποκατάστατα για τα σύμβολα». Θεωρούμε πολύ σημαντική την παρατήρηση αυτή και ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή από τον δάσκαλο, γιατί αν ο μαθητής δει τα υλικά ως υποκατάστατα συμβόλων είναι πιθανό να παραμείνει στο συγκεκριμένο του αντικειμένου και να μην «προχωρήσει» στην αφηρημένη έννοια ή ακόμη να εγκλωβιστεί στο υλικό και τον χειρισμό του.

Εκείνο βέβαια που προσδιορίζει τον βαθμό που ένα υλικό μπορεί να επηρεάσει τη μάθηση είναι η ίδια του η δομή, η οποία πρέπει είναι τέτοια ώστε να «αντανακλά» άμεσα και μονοσήμαντα το συμβολικό σύστημα που αντικαθιστά. Αυτό δηλαδή σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα ανάμεσα στις ενέργειες του μαθητή με τα χειραπτικά υλικά και στις εικόνες τους (πράξεις και σύμβολα) στο συμβολικό σύστημα. Επομένως η ενσωμάτωση υλικών στη διδακτική διαδικασία δεν σημαίνει και αυτόματη λειτουργία του αμφιμονοσήμαντου της σχέσης χειραπτικό – συμβολικό, συγκεκριμένο της ύλης - άυλο της αφηρημένης έννοιας που στοχεύει ο δάσκαλος να «δουν» οι μαθητές.

Ένα μοντέλο λοιπόν είναι ένας τρόπος αναπαράστασης, αλλά μια αναπαράσταση δεν είναι μοντέλο αν δεν έχει τον «γενεσιουργό» χαρακτήρα (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993, σελ. 198). Δηλαδή αν αυτή η αναπαράσταση δεν έχει ως αποτέλεσμα τη «γέννηση», τη δημιουργία και την αναπαράσταση καινούργιων εννοιών. Για παράδειγμα τα αλγεβρικά πλακίδια εκτός του ότι είναι αναπαραστάσεις τετραγώνων και ορθογωνίων δίνουν τη δυνατότητα στον χρήστη μέσα από τη σύνθεσή τους να δημιουργήσει και να εξεικονίσει την αναπαράσταση του τελείου τετραγώνου ή της διαφοράς τετραγώνων.

Ο φιλόσοφος και μαθηματικός Rene Thom θεωρεί, ότι «το κέρδος που έχουμε κατασκευάζοντας ένα γεωμετρικό μοντέλο, που περιγράφει μια κατάσταση, βρίσκεται στη σφαιρική, ολιστική θεώρηση που προσφέρει που δεν υπάρχει στη λεκτική περιγραφή εξ' αιτίας της αποσπασματικότητας που είναι έμφυτη στο λόγο». Παράλληλα κατά τον Thom «το γεωμετρικό μοντέλο έχει το πλεονέκτημα να δίνει τη δυνατότητα στο άτομο που σκέφτεται, να «κρατήσει» το αντικείμενο της μελέτης του απεικονίζοντάς το στο χώρο» (Γαγάτσης & Πατρώνης, 1993, σελ. 200).

Οι περισσότεροι δάσκαλοι και ερευνητές ισχυρίστηκαν ότι τα χειραπτικά υλικά είναι αποτελεσματικά γιατί είναι συγκεκριμένα, με την έννοια ότι είναι αντικείμενα που οι μαθητές μπορούν να τα πιάσουν στα χέρια τους. Θεωρούν ότι βοηθούν, διότι η αισθητήρια φύση τους τα κάνει να φαίνονται «πραγματικά», αφού συνδέονται με κάποιες ενστικτώδης γνώσεις του ατόμου. Όμως δεν λαμβάνουν υπόψη τους ότι το συγκεκριμένο του αντικειμένου δεν κρατά από μόνο του το κλειδί για το ξεκλείδωμα του μυστηρίου των μαθηματικών. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να προκύψουν προβλήματα κατά τη χρήση τους τα οποία θα πρέπει να γνωρίζει ο καθένας που θα επιλέξει αυτήν τη μέθοδο διδασκαλίας.

Ένα πρώτο πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ως δεδομένο πως το γενικό πλαίσιο διδασκαλίας μπορεί να φανεί «ξεκάθαρα» από τα χειραπτικά υλικά. Αυτό σημαίνει, ότι παρότι οι μαθητές μπορεί να χειρίζονται σωστά τα φυσικά αντικείμενα, το γενικό πλαίσιο του μαθήματος ίσως να παραμένει αδιευκρίνιστο και η όλη διαδικασία μάθησης να καταλήγει σε ικανότητα χειρισμού των υλικών και όχι μετάβασης στη συμβολική παράσταση και στην κατανόηση της αφηρημένης έννοιας.

Ένα δεύτερο πρόβλημα που μπορεί να προκύψει, επειδή η διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές πραγματεύονται το νόημα της παρουσίασης στη δραστηριότητα δεν αναλύεται, είναι αυτοί να οδηγηθούν, όταν αρχίσουν να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στα υλικά και τις ιδέες που αναδύονται, σε διαφορετικές νοητικές πράξεις από αυτές που θέλουμε εμείς να μάθουν. Συνέπεια αυτού είναι να δυσκολεύεται ο δάσκαλος να εκτιμήσει την ποικιλία των νοημάτων που πραγματεύονται και επαναπραγματεύονται οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας και επομένως να μπορέσει να τους βοηθήσει αποτελεσματικά.

Κατά την άποψή μας, πιθανή λύση του προβλήματος θα ήταν η λεπτομερής παρουσίαση, η διδασκαλία του τρόπου χρήσης των υλικών από τους δασκάλους, όπως ακριβώς θα έκαναν για έναν αλγόριθμο. Μέσα από μια αντίστοιχη διαδικασία ο μαθητής θα γνώριζε το πώς θα μεταφράσει την εικόνα σε συμβολική παράσταση και γιατί η συγκεκριμένη αλγεβρική έκφραση εξεικονίζεται στο γεωμετρικό σχήμα που ο ίδιος δημιούργησε ώστε να μην οδηγηθεί σε νοητικές πράξεις διαφορετικές από αυτές του πλαισίου διδασκαλίας.

Είναι απαραίτητο επίσης ο δάσκαλος να έχει υπόψη του τις πολλαπλές ερμηνείες των υλικών για να ακούει τους «υπαινιγμούς», δηλαδή τις διάφορες σκέψεις των μαθητών πάνω στη χρήση τους. Χωρίς να έχει αυτήν τη γνώση δεν θα μπορεί να είναι βέβαιος ότι οι μαθητές του «βλέπουν» ό,τι ο ίδιος στοχεύει να δουν και είναι πιθανό «εξ αιτίας της διαφορετικής ‘‘ανάγνωσης’’ να οδηγηθούν μαθητής και δάσκαλος σε διακοπή της μεταξύ τους συνομιλίας με τα όποια αρνητικά αποτελέσματα συνεπάγεται αυτό» (Thompson, 1994, σελ. 6).

Ο Daniel Willingham είναι της γνώμης ότι «τα χειραπτικά υλικά δεν βοηθούν πάντα τη μάθηση, κάποιες φορές μπορεί και να την εμποδίσουν» διότι «μπορεί να είναι οπτικά τόσο ενδιαφέροντα που να αποσπούν την προσοχή του μαθητή από τον σκοπό του» ή «η σχέση τους (των χειραπτικών) με την έννοια που αντιπροσωπεύουν να είναι σκοτεινή» (2009, σελ. 18).

Η Spear-Swerling (2006) επισημαίνει ότι «τα υλικά ίσως να κρύβουν κάποιες παγίδες ιδιαίτερα για τους μαθητές που έχουν δυσκολίες στη μάθηση. Μπορεί να δημιουργήσουν και σύγχυση αν η αναπαράσταση είναι ανοργάνωτη, αμεθόδευτη και γίνεται με ανεπαρκή καθοδήγηση και διδασκαλία από τον δάσκαλο».

Έρευνες, που αφορούσαν την αποτελεσματικότητα των υλικών ως υποστηρικτικά μέσα μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση, εμφάνισαν αντικρουόμενα συμπεράσματα. Ο Tompson θεωρεί ότι τα συμπεράσματα των ερευνών είναι «στην καλύτερη περίπτωση ασαφή» (1992, σελ. 1). Ο Meira ενισχύει την άποψη αυτήν αναφέροντας ως παράδειγμα τα αντικρουόμενα αποτελέσματα των ερευνών του Fuson (1986) που έδειξαν θετική επίδραση των υλικών και των Resnick και Omanson (1987) που αμφισβητούν τη θετική επίδρασή τους (1998, σελ. 121).

Η διάσταση αυτή των απόψεων μας κάνει να σταθούμε επιφυλακτικοί απέναντι στη χρήση υλικών στο μάθημα σε ότι αφορά τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Γνώμη μας όμως παράλληλα είναι ότι αξίζει να δοκιμάσουμε και αυτή τη μορφή μαθήματος έστω και αν οι προσδοκίες για θετική επίδραση δεν είναι επιβεβαιωμένες καθότι οι παράγοντες που συντελούν σε θετικά ή όχι αποτελέσματα είναι πολλοί, πολυσύνθετοι και ταυτόχρονα ευμετάβλητοι από τάξη σε τάξη.

4. Ιστορική αναδρομή

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι πρώτοι που αναφέρθηκαν στην αναγκαιότητα εισαγωγής χειραπτικών υλικών στην εκπαίδευση ήταν η Edgeworth (1768 –1849) και ο πατέρας της. Το 1798 δημοσίευσαν διατριβή πάνω στην εκπαίδευση, με το τίτλο «Πρακτική Εκπαίδευση» (Practical Education), η οποία ήταν μία εκτενής θεωρία εκπαίδευσης που συνδύαζε τις φιλοσοφικές ιδέες του John Locke και Jean-Jacques

Rousseau καθώς, επίσης και των εκπαιδευτικών συγγραφέων Thomas Day, William Godwin, Joseph Priestley και Catherine Macaulay.

Η θεωρία της εκπαίδευσης των Edgeworths βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι πρώτες εμπειρίες του παιδιού είναι διαπλαστικές και ότι οι συνειρμοί που γίνονται στην παιδική ηλικία διαρκούν για μεγάλο χρονικό διάστημα. Προέτρεψαν τη χρήση χειραπτικών υλικών για τη μάθηση καθώς και ιδέες για «πειράματα» που θα μπορούσαν να κάνουν οι μαθητές και να διασκεδάσουν μαθαίνοντας. Οι Edgeworths υποστήριξαν ότι ο ο λόγος πρέπει να φανερώνει ξεκαθαρά την «σαφή έννοια», θέση που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τον Locke ο οποίος έδινε έμφαση στη σημασία της συγκεκριμένης γλώσσας περισσότερο από ότι στην αφηρημένη (Edgeworth, 1815).

Τα πρώτα χειραπτικά υλικά αντικείμενα, των οποίων η χρήση είχε ως προϋπόθεση την κινητοποίηση των διαφόρων αισθήσεων και ήταν σχεδιασμένα για τη διδασκαλία των μαθηματικών επινοήθηκαν περίπου στα 1800. Ο παιδαγωγός Pestalozzi (1746-1827) γύρω στα 1805, διαπίστωσε ότι τα παιδιά μαθαίνουν καλύτερα όχι μέσα από το διάβασμα και την απομνημόνευση, αλλά μέσα από δραστηριότητες με χειραπτικά υλικά. Ως αρχή του είχε τη «μάθηση μέσω του μυαλού, του χεριού και της καρδιάς». Εισήγαγε λοιπόν στο μάθημα αντικείμενα τα οποία οι μαθητές «εξερευνούσαν» με τη βοήθεια των δασκάλων τους και κατέληγαν σε συμπεράσματα μέσα από τη δική τους εμπειρία. Η διδασκαλία ήταν σχεδιασμένη να κινείται από το απλό στο σύνθετο, από το εύκολο στο δύσκολο και από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (Encyclopedia of Education, 2000).

Τα θεμέλια της μοντέρνας παιδαγωγικής, βάση της οποίας είναι ότι τα παιδιά έχουν μοναδικές ανάγκες και ικανότητες, έθεσε ο Froebel (1782-1852), παιδαγωγός και μαθητής του Pestalozzi. Η διορατικότητά του τον οδήγησε να αναγνωρίσει τη σπουδαιότητα της δραστηριότητας του παιδιού στη μάθηση. Εισήγαγε λοιπόν στην παιδαγωγική την έννοια της «ελεύθερης εργασίας» (Freiarbeit) και καθιέρωσε το «παιγνίδι» ως την τυπική μορφή μάθησης κατά την παιδική ηλικία αναγνωρίζοντας έτσι την αξία του εκπαιδευτικού παιγνιδιού. Υποστήριξε την άποψη ότι τα χειραπτικά υλικά είναι αναγκαία για την εκπαίδευση και σχεδίασε διάφορα αντικείμενα για να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν τις βασικές ιδέες των μαθηματικών. Έθεσε έτσι τις βάσεις για μία νέα αγωγή, υπογραμμίζοντας την ανάγκη για ελευθερία στην έκφραση. Το 1840 επινόησε, για το ινστιτούτο «Παιγνίδι και Δραστηριότητα», που ίδρυσε για τα παιδιά στο Bad Blankenburg, την λέξη Kindergarten (σε ελληνική απόδοση κήπος του παιδιού), όρος που διατηρείται μέχρι και σήμερα στη Γερμανική και Αγγλική Γλώσσα για το νηπιαγωγείο.

Ο Froebel σχεδίασε εκπαιδευτικά παιγνίδια, τα ονομαζόμενα Froebelgaben (δώρα του Froebel). Αυτά ήταν σειρές εκπαιδευτικών παιγνιδιών που περιελάμβαναν γεωμετρικά στερεά για κατασκευές και κύβους για σχεδιασμένες δραστηριότητες.

Froebelgaben

Στις αρχές του 1900 η Μοντεσσόρι (1870-1952), ιταλίδα γιατρός και παιδαγωγός, ανανέωσε τις εκπαιδευτικές αντιλήψεις, φέρνοντας επαναστατικές προτάσεις και μιλώντας για τη δυνατότητα του παιδιού να διδάσκεται μόνο του. Υποστήριξε την ιδέα ότι τα χειραπτικά υλικά είναι αναγκαία στην εκπαίδευση και σχεδίασε διάφορα υλικά για να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν τις βασικές ιδέες των μαθηματικών.

Η πρώτη χρήση αλγεβρικών χειραπτικών υλικών για να απεικονιστούν αλγεβρικές έννοιες έγινε από τον μαθηματικό Dienes (1916-…), που χρησιμοποίησε τα Base Ten Blocks (τετράγωνα δεκαδικής βάσης). Η ιδέα του ήταν επαναστατική και προσέλκυσε το ενδιαφέρον για την εισαγωγή των χειραπτικών υλικών στα μαθηματικά για την εξεικόνιση των αλγεβρικών εννοιών.

4.1. Είδη χειραπτικών υλικών για τα μαθηματικά

Base Ten Blocks

Τα Base Ten Blocks είναι χειραπτικά υλικά που εισήγαγε ο Dienes και θεωρούνται ιδιαίτερα επιτυχημένα και αποτελεσματικά για τη διδασκαλία της αριθμητικής. Τα ονόμασε κύβους δεκαδικής βάσης γιατί αποτελούνται από κύβους μικρούς που αντιστοιχούν σε μονάδες, ράβδους των δέκα κύβων, τετράγωνα πλευράς δέκα κύβων και κύβους μεγάλους πλευράς δέκα κύβων μικρών. Μειονέκτημά τους είναι ότι δεν μπορούν να εξεικονίσουν αρνητικούς αριθμούς.

Base Ten Blocks

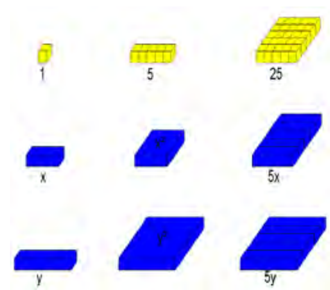
Η Laylock (1977), βελτίωσε το μοντέλο του Dienes, χρησιμοποιώντας τα κομμάτια (Blocks) πολλαπλής βάσης. Εισήγαγε επιπλέον την προσήμανση του μείον με την «επάνω» τοποθέτηση, κάνοντας έτσι δυνατή την εξεικόνιση αναπαραστάσεων που περιέχουν αρνητικούς αριθμούς. Αυτό σήμαινε ότι κάθε Block που τοποθετούνταν πάνω από κάποιο άλλο είχε αρνητικό πρόσημο. Το μέρος του κάτω Block που δεν καλυπτόταν αντιπροσώπευε «αυτό που έμενε» μετά την αφαίρεση. Για παράδειγμα στην παράσταση $(x+1)(x-2)$ ο παράγοντας $x-2$ παρουσιαζόταν ως το x μειωμένο κατά 2 με την τοποθέτηση δύο μονάδων πάνω στο κομμάτι του x. Αποτέλεσμα της «επάνω» παρουσίασης του πλην (αρνητικού προσήμου) ήταν ότι το γεωμετρικό μοντέλο που προέκυπτε είχε τις γεωμετρικά σωστές διαστάσεις.

Ο Rasmussen (1978) χρησιμοποίησε προς διευκόλυνση Block βάσης *+10, +5, +25*. Δημιούργησε επίσης το μη σύμμετρο x-Block δηλαδή Block του οποίου η πλευρά δεν ήταν πολλαπλάσιο του *1* του γωνιαίου κομματιού (της μονάδας). Στο μοντέλο του, το αρνητικό πρόσημο (-) βασίζεται στην ιδέα της Laylock με τη διαφορά ότι προσδιορίζεται χρωματικά. Τα κομμάτια λοιπόν του μοντέλου Rasmussen (Rasmussen’s mathtiles) είναι ζωγραφισμένα μόνο από τη μία μεριά, η μη χρωματισμένη πλευρά προσδιορίζει τον αρνητικό παράγοντα της παράστασης.

Τα Stockadale’s Rectangles (βλ. Έρευνα της Lloyd Nevitt Stockdale) είναι κομμάτια παρόμοια με εκείνα των Rasmussen’s mathtiles. Διαφέρουν στο ότι στα Stockadale’s Rectangles το αρνητικό πρόσημο σημαίνει τοποθέτηση πάνω στο κομμάτι, από το οποίο αφαιρείται, ή φυσική απομάκρυνση και ότι είναι σχεδιασμένα να αναπαριστούν δύο μεταβλητές, ενώ τα Rasmussen's mathtiles είναι σχεδιασμένα για μία μεταβλητή.

Gear Lab

Συνδυασμός των προαναφερθέντων μοντέλων αποτελεί το μοντέλο των Gear Lab που σχεδιάστηκε για τη μάθηση και την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας, της



Gear Lab

παραγοντοποίησης, της επίλυσης εξισώσεων, της συμπλήρωσης τετραγώνου και πολλών άλλων αλγεβρικών έννοιων. Τα Gear Lab είναι απολύτως συμβατά με τα Base Ten Blocks του Dienes και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε σύνδεση το ένα με το άλλο στη διδασκαλία της αριθμητικής και της άλγεβρας ή να χρησιμοποιηθούν και τα δύο μαζί. Το μέγεθος της πλευράς του x-Block και του y-Block έχει επιλεγεί προσεκτικά ώστε να αποτρέπεται η σύγχυση που θα δημιουργούνταν αν είχε διαστάσεις ακεραίου αριθμού ενώ θα αντιπροσώπευε μεταβλητή. Τα Gear Lab πλεονεκτούν από τα υλικά που αναφέραμε πιο πάνω στο ότι το γωνιαίο κομμάτι, η μονάδα, «οργανώνει» το ορθογώνιο στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση σε δύο ή σε τρεις διαστάσεις και ότι ο μαθητής έχει στη διάθεσή του μία επιφάνεια εργασίας (σχήμα 4) η οποία του παρέχει τον χώρο για να επιλυθεί μια εξίσωση και να κάνει χειρισμούς αριθμών με πρόσημα.

Σχήμα 4 Επιφάνεια εργασίας Gear Lab

Έχει δηλαδή ένα δυναμικό συνδυασμό δύο μεθόδων αναπαραστάσεων του πλην, δηλαδή την αρνητική περιοχή της επιφάνειας εργασίας που σημαίνει ότι κομμάτια που τοποθετούνται εκεί έχουν αρνητικό πρόσημο (σχήμα 4) και την «πάνω» προσήμανση (τοποθέτηση του αρνητικού μέλους πάνω στο θετικό) που του δίνει την ευχέρεια να αναπαραστήσει αρνητικές μεταβλητές και να κατανοήσει τεχνικές αλλαγής προσήμων. Η χρήση των δύο μεταβλητών x και y προσθέτει ευελιξία και δίνει δυνατότητα να δουλέψει κάποιος με προβλήματα δύο μεταβλητών. Η χρήση των τρισδιάστατων Blocks κάνει δυνατές τις αναπαραστάσεις όπως x^2y, και y^3 (Wah, Picciotto, 1994, σελ. 18).

Algebra Tiles

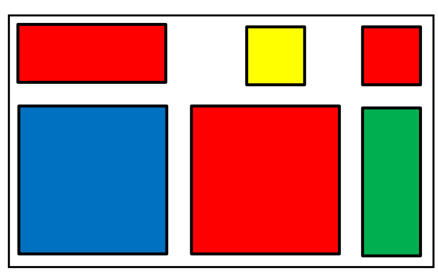
Αλγεβρικά πλακίδια

Τα Αλγεβρικά πλακίδια (Algebra tiles) τα συναντούμε και με τις ονομασίες μαθηματικά πλακίδια (math tiles). Η συμβολή τους στη μάθηση είναι ότι δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εξεικονίσουν αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις. Η αρχική τους χρήση ήταν για να εκφράσουν μαθηματικές έννοιες και να ολοκληρώσουν υπολογισμούς. Σήμερα χρησιμοποιούνται για μέτρηση και για υπολογισμούς ακεραίων αριθμών, για αλγεβρικούς υπολογισμούς και επίλυση εξισώσεων.

Τα Algebra tiles επιτρέπουν στους μαθητές ταυτόχρονα να έχουν μια αλγεβρική και μια γεωμετρική προσέγγιση στις αλγεβρικές έννοιες. Είναι επομένως υλικά τα οποία διευκολύνουν τον μαθητής να αντιληφτεί τη σύνδεσης της γεωμετρίας με την άλγεβρας. Του δίνουν έναν άλλον τρόπο επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων διαφορετικό από τον θεωρητικό χειρισμό των συμβόλων. Με τα υλικά αυτά μπορεί να κρίνει σκέψεις και σύμβολα πριν ή αντί να χρησιμοποιήσει χαρτί και μολύβι.

Τη σύνδεση αυτή της άλγεβρας με τη γεωμετρία ανέδειξε πρώτος ο Thabit ibn Qurra (826-901), ο οποίος επέστρεψε στα στοιχεία του Ευκλείδη για να καθιερώσει μια σταθερή γεωμετρική βάση απόδειξης της αλγοριθμικής επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης όπως και να ερμηνεύσει γεωμετρικά δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να δείξει ότι μπορεί κάποιος να φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα τόσο με αλγεβρική όσο και με γεωμετρική επίλυση ορίζοντας έτσι τη γεωμετρική εξήγηση των αλγεβρικών διαδικασιών (Roshdi Rashed, 2009, σελ. 8).

Τα αλγεβρικά πλακίδια (Algebra Tiles) που χρησιμοποιούμε σήμερα βασίζονται στο μοντέλο που επινόησε ο Rasmussen. Το αρνητικό πρόσημο στα αλγεβρικά πλακίδια



Αλγεβρικά πλακίδια

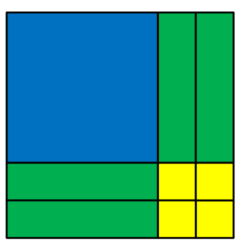
προσδιορίζεται με το χρώμα. Συνήθως για το θετικό πρόσημο χρησιμοποιείται το μπλε, το πράσινο και το κίτρινο χρώμα, χωρίς αυτό να είναι υποχρεωτικό, και το κόκκινο χρώμα για το αρνητικό πρόσημο. Τα αλγεβρικά πλακίδια έχουν το πλεονέκτημα ότι ως μαθηματικό μοντέλο είναι απλό.

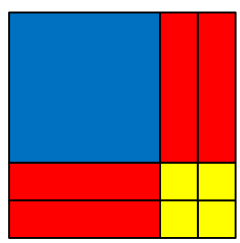
Τα αλγεβρικά πλακίδια ειδικότερα αποτελούνται από ένα σύνολο τετραγώνων και ορθογωνίων διαφορετικών χρωμάτων για τον εξεικονισμό του x^2, του x και της μονάδας. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου x και 1 καθορίζουν και την πλευρά των τετραγώνων, του x^2 και του 1, και το διαφορετικό χρώμα των σχημάτων υποδεικνύει το θετικό ή αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής (Howden, 1984).

Η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία και τη μάθηση αλγεβρικών εννοιών και τεχνικών έχει μελετηθεί εκτεταμένα. Όλες οι έρευνες συμφωνούν ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων βοήθησε τα παιδιά να αναπτύξουν τη μαθηματική φαντασία τους, να κατανοήσουν καλύτερα τις αλγεβρικές έννοιες, να αυξήσουν την αυτοπεποίθησή τους στον χειρισμό αλγεβρικών τεχνικών, όπως είναι η παραγοντοποίηση πολυωνύμων και η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων.

Ωστόσο τα ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση των υλικών αυτών στην επίδοση κινούνται μεταξύ του θετικού και του ουδέτερου (Howden, 1986,·Sharp, 1995,·Thorton, 1995,·Leinenbach & Raymond, 1996, Dyer, 1996, Goldsby, 1996, Hinzman, 1997, Gningue, 2000).

Από τα μειονεκτήματα που παρουσιάζουν αναφέρουμε, την παρανόηση που μπορεί να προκύψει κατά την παρουσίαση του σχήματος για παράδειγμα του $(x+2)^2$ και του $(x-2)^2$. Όπως φαίνεται στο σχήμα πιο κάτω και οι δύο αλγεβρικές εκφράσεις εξεικονίζονται με δύο τετράγωνα ισεμβαδικά με μόνη διαφορά στα χρώματα των ορθογωνίων που αντιπροσωπεύουν το $4x$ και το $-4x$. Η εξεικόνιση επομένως των δύο αλγεβρικών παραστάσεων δεν είναι γεωμετρικά σωστή αφού η μεν $(x+2)^2$ αναλύεται σε $x^2 +4x + 4$ δηλαδή στο εμβαδό τετραγώνου προστίθεται το εμβαδό τεσσάρων ορθογωνίων και τεσσάρων τετραγώνων, ενώ η $(x-2)^2$ που αναλύεται σε $x^2 -4x + 4$ εμφανίζεται και αυτή με το ίδιο εμβαδό παρόλο που από το εμβαδό τετράγωνου πρέπει να αφαιρεθούν τα τέσσερα ορθογώνια και να προστεθούν τέσσαρα τετράγωνα. Αυτό το «πρόβλημα» ίσως οδηγήσει τον μαθητή σε εσφαλμένη «ανάγνωση» του σχήματος αφού ουσιαστικά θα πρέπει για να δώσει την ορθή απάντηση να περάσει μέσα από συνειρμούς στους οποίους τον παραπέμπει η αλλαγή χρώματος και όχι από απλή περιγραφή του σχήματος όπως μπορεί να κάνει για την αλγεβρική παράσταση $(x+2)^2 = x^2 +4x + 4$





$(x+2)^2$ $(x-2)^2$

5. Ο φόβος πολλών μαθητών για τα μαθηματικά και ο ρόλος των χειραπτικών υλικών.

Σε προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε τα πλεονεκτήματα που δίνει γενικότερα στο μαθητή η χρήση χειραπτικών υλικών σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μαθησης και διδασκαλίας. Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να επισημάνουμε το πως η παρουσία τους επιδρά στον ανασταλτικό παράγοντα μάθησης που είναι ο φόβος για το μάθημα, αφού προηγουμένως τον ορίσουμε και αναφερθούμε στις αιτίες που τον δημιουργούν.

Οι Richardson & Suinn’s (1972) όρισαν τον φόβο για τα μαθηματικά ως «το αίσθημα έντασης και αγωνίας που παρεμβαίνει κατά τον χειρισμό αριθμών και της επίλυσης προβλήματος τόσο σε εκδηλώσεις της καθημερινής μας ζωής όσο και σε ακαδημαϊκές καταστάσεις» (Sherman, & Wither, 2003, σελ. 1).

Ορισμένοι παιδαγωγοί στις αρχές του 1970 χρησιμοποίησαν τον όρο *«μαθηματικοφοβία»,* για να ορίσουν το κυρίαρχο αίσθημα φόβου που νιώθει ο μαθητής, ότι δεν θα επιλύσει σωστά το πρόβλημα και δεν θα απαντήσει γρήγορα και σωστά τις ερωτήσεις του δασκάλου (Nolting, P., 2002, σελ. 88). Με την λέξη μαθηματικοφοβία εννοούμε το φόβο, την ανασφάλεια και το δέος που αισθάνονται οι μαθητές για το μάθημα των μαθηματικών. Η μαθηματικοφοβία δεν είναι παθολογική κατάσταση, αλλά προξενείται από τις αρνητικές εμπειρίες των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών και επηρεάζει άμεσα τη μαθητική τους επίδοση, μειώνοντάς τη στο ελάχιστο.

Οι Hadfield και McNeil θεωρούν ότι «ο φόβος για τα μαθηματικά είναι το αποτέλεσμα του κλονισμού του συναισθηματικού κόσμου του μαθητή εξαιτίας περιβαλλοντολογικών (αρνητικές εμπειρίες του μαθητή στο σχολείο ή στο σπίτι), διανοητικών (στυλ μάθησης ή επιπέδου αυτοπεποίθησής του) και προσωπικών παραγόντων δηλαδή το πώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά από την άποψη του ρόλου του φύλου ή του επιπέδου ατολμίας στην τάξη» (Morris, 2007, σελ. 12).

Οι παράγοντες αυτοί ποικίλουν από άτομο σε άτομο και οι ρίζες τους βρίσκονται στην προηγούμενη εμπειρία του ατόμου κατά την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά στην τάξη ή στο σπίτι. Κάθε αρνητική εμπειρία του μαθητή μεταφέρεται στη σκέψη κάθε μελλοντικής εργασίας του και προκαλεί έλλειψη μαθηματικής κατανόησης. Ο φόβος του μαθητή επομένως για τα μαθηματικά θα λέγαμε ότι είναι το αποτέλεσμα δυσάρεστης εμπειρίας, περιορισμένης κατανόησης εννοιών, φτωχής διδασκαλίας, ή πανικού που αισθάνεται ο μαθητής εξαιτίας «αποτυχημένης» προσπάθειας αποστήθισης κανόνων και διαδικασιών.

Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του φόβου είναι τα συναισθήματα αβεβαιότητας και ανικανότητας που νιώθει κάποιος που αντιμετωπίζει ένα κίνδυνο (Hembree, 1990, σελ. 33). Εμφανίζεται στον μαθητή ως μια δυνατή ροπή αποφυγής του μαθήματος, η οποία υποσκάπτει τη μαθηματική του ικανότητα και αποδιοργανώνει τη γνωστική διαδικασία με μείωση της δραστηριότητας στη λειτουργική μνήμη (Ashcraft, 2002, σελ. 183). Ο φόβος αυτός κάνει τον μαθητή να νιώθει κενό στο μυαλό του και να σκέπτεται ότι θα αποτύχει. Οι σκέψεις αυτές επιτείνουν το συναίσθημα και τον οδηγούν σε ένα φαύλο κύκλο που μεγαλώνει διαρκώς και ανεξέλεγκτα. Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι ο φόβος για τα μαθηματικά είναι η ακραία εκείνη συναισθηματική κατάσταση και φυσική αντίδραση του μαθητή που μορφοποιείται ως μια πολύ αρνητική συμπεριφορά απέναντι στο μάθημα.

Μία από τις αιτίες που συντελούν στη δημιουργία φόβου για το μάθημα είναι ο μαθηματικός λόγος, ο οποίος «εμποδίζεται από νοήματα που ‘‘ξεχειλίζουν’’ επειδή οι όροι του έχουν μια διαφορετική σημασία από αυτήν που χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή» (Siety, 2001, σελ. 50). Ο λόγος στα μαθηματικά κατέχει μια πολύ ιδιαίτερη θέση διότι δεν προορίζεται μόνο στην αναζήτηση του νοήματος, αλλά χρησιμοποιείται και για να το «εμποδίσει», όπως για παράδειγμα στην αποστήθιση ή κοινώς στην «παπαγαλία» του μαθήματος. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν ως τρόπο μάθησης των μαθηματικών εννοιών την «παπαγαλία», δεν εργάζονται στην πραγματικότητα για την επίλυση του προβλήματος, αφού δεν κατανοούν τις διαδικασίες, τους κανόνες, τους μηχανισμούς, ούτε τον λόγο για τον οποίο πρέπει να ακολουθούν όλα αυτά. Οι μαθητές έτσι οδηγούνται γρήγορα σε αδυναμία να διατηρήσουν στη μνήμη τους τις έννοιες και τις πρακτικές που διδάχθηκαν και καταλαμβάνονται από πανικό και φόβο.

Άλλη πηγή φόβου, εκτός του μαθηματικού λόγου, είναι η επαφή του μαθητή με τους εγγράμματους υπολογισμούς. Το σοκ που νιώθει είναι μεγάλο, αφού «έρχεται» από το δημοτικό στο γυμνάσιο έχοντας χρησιμοποιήσει μόνο «πραγματικούς» αριθμούς. Έτσι δεν δέχεται ότι «πράξεις», όπως για παράδειγμα $4\cdot5$, αρκούν να αναπαραστήσουν ένα αριθμό χωρίς να γίνεται γνωστό το αποτέλεσμά τους. Γι’ αυτόν τον μαθητή το $\alpha\cdot b$ δεν σημαίνει πολλαπλασιασμός γιατί αδυνατεί να κάνει την πράξη και να δώσει αποτέλεσμα. Ενοχλείται από τη χρήση των γραμμάτων. Μπορεί προς στιγμή να συμβιβάζεται αλλά κατά βάθος δεν την αποδέχεται ουσιαστικά ως πράξη και αυτό τον οδηγεί σε επαναλαμβανόμενα λάθη «απροσεξίας».

Αντίστοιχη προσωπική εμπειρία είχα σε διδασκαλία μου σε τάξη της δευτέρας γυμνασίου όπου προς μεγάλη μου έκπληξη μαθητής μου δήλωσε ότι «δεν γίνεται να κάνουμε πράξεις με γράμματα, δεν υπάρχουν αυτά και εγώ αρνούμαι να ασχοληθώ από δω και πέρα με το μάθημα». Ο μαθητής αυτός ασχολήθηκε ελάχιστα με το μάθημα, παρά τις όποιες προσπάθειες μου.

Η Tobias που ασχολήθηκε από το 1978 με ευρείας κλίμακας ερευνητικές εργασίες πάνω στο φόβο για τα μαθηματικά θεωρεί ότι «δημιουργείται από την έλλειψη εμπιστοσύνης του μαθητή για τις δυνατότητες του, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των κοριτσιών που συνήθως διακατέχονται από το αίσθημα ότι ‘‘τα μαθηματικά είναι για τα αγόρια’’». Η έλλειψη εμπιστοσύνης, όπως η ίδια επισημαίνει, «οδηγεί τον μαθητή σε έλλειψη εμπειρίας και πρακτικής οι οποίες με τη σειρά τους καταστρέφουν ακόμη περισσότερο την εμπιστοσύνη του για τις δυνατότητές του να ανταποκριθεί απέναντι στο μάθημα». Θέση της είναι ότι «στη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να δίνεται έμφαση στη μαθηματική ακρίβεια, δηλαδή πηγαίνοντας από την απάντηση στην ερώτηση και όχι αντιστρόφως, και όχι στην ικανότητα απομνημόνευσης και δεξιοτεχνίας, γιατί έτσι σκοτώνεται η περιέργεια και το ενδιαφέρον του μαθητή για το μάθημα» (Delisio, 2002).

Εκατοντάδες έρευνες έχουν γίνει από πολλούς ερευνητές με αντικείμενο τον φόβο των μαθητών για τα μαθηματικά, τις συνθήκες εμφάνισής του και τη δομή του. Από αυτές αναδείχθηκε ότι η σχέση επίπεδου φόβου και απόδοσης των μαθητών στα μαθηματικά όλων των τάξεων είναι αντιστρόφως ανάλογη. Παρατηρήθηκε γενικότερα ότι μαθητές με υψηλό επίπεδο φόβου δήλωναν περιορισμένη ευχαρίστηση για τα μαθηματικά, είχαν χαμηλή αυτοεκτίμηση και αρνητική συμπεριφορά απέναντι στο μάθημα.

Ερευνητές όπως οι Armstrong, (1985), Betz, (1978), Burton, (1979), Richardson & Suinn (1972) επεσήμαναν μέσα από τις παρατηρήσεις τους ότι οι επιπτώσεις του φόβου στον μαθητή εκδηλώνονται με ανικανότητα ως προς τα μαθηματικά, με πτώση της επίδοση του στο μάθημα και με αρνητικά συναισθήματα ενοχής και ντροπής (Solazzo, 2002, σελ. 42).

Στην έρευνα που έκανε ο Hembree (1990) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «ο φόβος για τα μαθηματικά εμποδίζει τα μαθηματικά επιτεύγματα» (Sherman, B., & Wither, D., (2003, σελ.138). Παράλληλα σύνδεσε άμεσα τον φόβο με την τάση αποφυγής του μαθήματος και την περιορισμένη προσπάθεια στα μαθηματικά τεστ δεξιότητας και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «υψηλό επίπεδο φόβου μειώνει σημαντικά τη θετική συμπεριφορά του μαθητή απέναντι στο μάθημα». Παρατήρησε επίσης ότι το γυναικείο φύλο συνήθως παρουσιάζει φόβο σε μεγαλύτερο βαθμό από ότι το ανδρικό αν και οι μαθητές σε προκολλεγιακές τάξεις εμφάνισαν φόβο μεγαλύτερης έντασης από ότι οι μαθήτριες (Hembree, 1990, σελ. 33).

Οι Ashcraft και Kirk (2001) παρατήρησαν ότι μαθητές που είχαν θετική στάση απέναντι στο μάθημα και ελάχιστο φόβο απόλαυσαν το μάθημα και αναζήτησαν μαθηματικές εμπειρίες με αποτέλεσμα να αυξήσουν τη μαθηματική τους ικανότητα. Αντίθετα μαθητές με αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα και υψηλό επίπεδο φόβου εμφάνισαν τάση αποφυγής με συνέπεια τη μείωση της μαθηματικής τους ικανότητας.

Οι Hopko et al (1998) βρήκαν ότι «οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα και είχαν κριθεί ως έχοντες ‘‘φόβο για τα μαθηματικά’’ δεν ήταν σε θέση να αποτρέψουν την απόσπαση της προσοχής τους από τον δάσκαλο» και ότι «οι φτωχές επιδόσεις τους στο μάθημα οφείλονταν στην ανικανότητα τους να αποφύγουν τις στενάχωρες σκέψεις που τις προκαλούσε το υψηλό επίπεδο φόβου» (Solazzo, 2002, σελ. 44).

Οι προαναφερθείσες αναφορές έδειξαν ότι έπρεπε να «θεραπεύσουμε» τον φόβο των μαθητών μας για τα μαθηματικά, αν όχι να εξαλείψουμε να τον περιορίσουμε στο ελάχιστο ώστε να πάψει να αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη μάθησή τους. Αυτή η «θεραπεία» του φόβου αρχίζει κατά τη γνώμη μας και τελειώνει στη δομή της διδασκαλίας του μαθήματος. Σε κατάλληλο περιβάλλον θεωρούμε ότι μπορεί ο κάθε μαθητής να γίνει ικανός για μάθηση, με την προϋπόθεση βέβαια ότι θα αποδεχθεί τα χαρακτηριστικά και τις ιδιαιτερότητες του μαθήματος και θα δει τα μαθηματικά μέσα από ένα θετικό πρίσμα. Ταυτόχρονα πρέπει να πιστέψει ότι *«η κατάσταση που βιώνει δεν οφείλεται στην ανεπάρκεια της νοημοσύνης του αλλά στην έλλειψη ψυχραιμίας και θάρρους να αντιμετωπίσει αυτές τις ιδιαιτερότητες»* (Tobias, S., 1991, σελ. 91).

Αυτό σημαίνει ότι είναι απαραίτητο να συνδυαστεί η ποιοτική διδασκαλία, που συχνά δεν είναι η δασκαλοκεντρική, με τη θετική συμπεριφορά του μαθητή ο οποίος σε «φιλόξενο» περιβάλλον τάξης θα θέσει ερωτήσεις, θα αναζητήσει παραδείγματα, θα συνεργαστεί και θα εξασκηθεί με τους συμμαθητές του, θα «κάνει» μαθηματικά και δεν θα κρατήσει απλά τις σημειώσεις του μαθήματος.

Η εισαγωγή χειραπτικών υλικών στο μάθημα, στην περίπτωσή μας των αλγεβρικών πλακιδίων, βοηθά τον μαθητή να αντιμετωπίσει τον φόβο του για το μάθημα αφού η χρήση τους δεν προϋποθέτει μαθηματικό λόγο, εγγράμματους υπολογισμούς και γενικότερα χρήση της συμβολικής γλώσσας του μαθήματος, που όπως αναφέραμε αποτελούν και γενεσιουργές αιτίες φόβου για τα μαθηματικά.

Οι μαθητές έχουν αντικείμενα για να εκφραστούν μέσα από αυτά και με αυτά να παρακάμψουν τον χωρίς νόημα για εκείνους μαθηματικό λόγο αλλά ταυτόχρονα να έχουν και την ευκαιρία να τον προσεγγίσουν με έμμεσο τρόπο, από τη «μετάφραση» της εξεικόνισης των υλικών. Ο μαθητής με τα υλικά οικειοποιείται τις αλγεβρικές έννοιες μέσα από γεωμετρικές απεικονίσεις, σχήματα που ο ίδιος δημιουργεί και περνά στη συμβολική έκφραση των εννοιών μέσα από αντιστοίχιση εικόνας – συμβόλου.

Η παρουσία του χειραπτικού υλικού και η αλληλόδραση με τους συμμαθητές του στην ομάδα τον βοηθούν, που λόγω έλλειψης εμπιστοσύνης για τις δυνατότητές του αντιμετωπίζει τα μαθηματικά με αίσθημα φόβου, να ξεπεράσει το αρνητικό συναίσθημα και να αποκτήσει την πεποίθηση του ότι «μπορώ να πετύχω μαζί με τους άλλους».

6. Ανακεφαλαίωση

Η βιβλιογραφική επισκόπηση της χρήσης των χειραπτικών υλικών, συνεξεταζόμενης με εκείνη που αναφέρεται στην ομαδοσυνεργατική μέθοδο διδασκαλίας και την βιβλιογραφία που έχει ως αντικείμενο τον φόβο των μαθητών για τα μαθηματικά, μας έκανε να σκεφτούμε ότι η χρήση χειραπτικών υλικών σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας θα μπορούσε να συμβάλλει στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών και στην αποβολή του φόβου για το μάθημα. Η άποψή μας αυτή ενισχύεται αν λάβει κανείς υπόψη του τα βασικά πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η χρήση των υλικών στο μάθημα και που συνοπτικά είναι τα εξής:

α) Δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αιτιολογήσουν την αφηρημένη έννοια με αναπαραστάσεις χωρίς τη χρήση μαθηματικού λόγου και συμβόλων που προκαλούν αίσθημα φόβο σε πολλούς μαθητές.

β) Είναι εργαλεία για τους δασκάλους για να συνδέσουν την εμπειρία των μαθητών και την πρότερη γνώση, με την αφηρημένη μαθηματική έννοια.

γ) Συμβάλλουν θετικά στην κινητοποίηση της διάθεσης του μαθητή για μάθηση (Stein & Bovalino, 2001).

δ) Λειτουργούν υποστηρικτικά σε θέματα που μπορεί να είναι δύσκολα και να προκαλούν σύγχυση.

ε) Βοηθούν τους μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολίες μάθησης να κατανοήσουν καλύτερα το κλειδί των μαθηματικών εννοιών (Marsh, & Cooke, 1996) .

Δεν ισχυριζόμαστε βεβαίως ότι αποτελούν πανάκεια, αφού μπορεί να είναι συγκεκριμένα αλλά όχι κατ’ ανάγκη διαφανή, ο μαθητής ενδέχεται να εγκλωβιστεί στο χειρισμό τους και να αποσπαστεί η προσοχή του από την ενδιαφέρουσα μορφή τους. Μπορεί επίσης το γενικό πλαίσιο διδασκαλίας να παραμείνει αδιευκρίνιστο, οι πολλαπλές ερμηνείες τους να οδηγήσουν σε διαφορετική «ανάγνωση» της εφαρμογής τους ή να δημιουργήσουν σύγχυση ιδιαίτερα για τους μαθητές που έχουν δυσκολίες στη μάθηση αν «η αναπαραστάση είναι ανοργάνωτη, αμεθόδευτη και γίνεται με ανεπαρκή καθοδήγηση και διδασκαλία από το δάσκαλο» (Spear-Swerling, 2006).

Κεφάλαιο Τρίτο

Περιγραφή των πιλοτικών μας παρεμβάσεων

1.Εισαγωγή

Σκοπός της έρευνας είναι να μελετηθεί η επίδραση που έχει η χρήση των χειραπτικών υλικών σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας και ειδικότερα των αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία της άλγεβρας της τρίτης γυμνασίου. Οι ενότητες της άλγεβρας στις οποίες έγιναν οι παρεμβατικές διδασκαλίες ήταν οι ενότητες της επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού, η παραγοντοποίηση δευτεροβαθμίων μονωνύμων με κοινό παράγοντα και οι ταυτότητες του τετράγωνου αθροίσματος και διαφοράς και της διαφοράς τετραγώνων.

1.1. Πού έγινε η έρευνα

Η τελική διδακτική μας πρόταση εφαρμόστηκε και μελετήθηκε στο 10ο Γυμνάσιο του δημοτικού διαμερίσματος της Νεάπολης του Δήμου Βόλου το σχολικό έτος 2007-2008 και συμμετείχαν σε αυτή είκοσι τέσσερες (24) μαθητές. Η διάρκειά της ήταν έξι μήνες.

Της τελικής εφαρμογής παρέμβασης προηγήθηκαν τρείς (3) πιλοτικές διδασκαλίες εξάωρης διάρκειας (3 δίωρες παρεμβάσεις) στα Γυμνάσια: 2ο Γυμνάσιο Βόλου (δύο τάξεις με δέκα επτά (17) και είκοσι (20) μαθητές αντίστοιχα), 9ο Γυμνάσιο Βόλου είκοσι δύο (22) μαθητές), 3ο Γυμνάσιο Ν. Ιωνίας (δύο τάξεις με είκοσι έξι (26) και είκοσι πέντε (25) μαθητές αντίστοιχα), μία δεκάωρης διάρκειας (5 δίωρες παρεμβάσεις) στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης (σε δύο τάξεις των είκοσι (20) και είκοσι (20) μαθητών αντίστοιχα) και μία εξάωρη παρέμβαση (τρεις δίωρες παρεμβάσεις) σε τρία τμήματα της πρώτης τάξης του Λύκειο Βελεστίνου των είκοσι (20), είκοσι ενός (21) και είκοσι ενός (21) μαθητών αντίστοιχα.

Οι μαθητές του 3ου Γυμνάσιου Ν. Ιωνίας και του 10ου Γυμνάσιου Νεάπολης ανήκαν σε οικογένειες που στην πλειονότητά τους ήταν βιοπαλαιστές και ως εκ τούτου περιορισμένης οικονομικής επιφάνειας και χαμηλού ή μεσαίου μορφωτικού επιπέδου. Οι μαθητές του 2ου και 9ου Γυμνάσιου Βόλου προέρχονταν ως επί το πλείστον από οικογένειες μεσαίου και ανώτερου οικονομικού και μορφωτικού επιπέδου (η κατηγοριοποίηση έγινε κατά προσέγγιση και με γνώμονα την περιοχή κατοικίας). Το Λύκειο Βελεστίνου είναι σχολείο σε αγροτική περιοχή οικονομικά εύρωστη και επομένως το οικονομικό και κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών ήταν δύσκολο να προσδιοριστεί με ακρίβεια.

Οι παρεμβάσεις στα σχολεία που αναφέραμε πιο πάνω βοήθησαν να δούμε σε πρώτη φάση τις αντιδράσεις και τις σκέψεις των μαθητών, που ήδη είχαν διδαχτεί, κατά περίπτωση σχολείου, τις ενότητες που αναφέραμε (ταυτοτήτες, παραγοντοποίηση, επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού) μετωπικά, στη διδακτική μέθοδο που προτείναμε και προέβλεπε τη χρήση αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης. Οι αδυναμίες και τα κενά που εντοπίσαμε σε αυτές τις διδασκαλίες συνέβαλαν στη βελτίωση της διδακτικής μας πρότασης τόσο σε επίπεδο οργάνωσης τάξης όσο και σε επίπεδο σχεδίασης των δραστηριοτήτων που θα κάλυπταν τους στόχους του μαθήματος.

Στο Λυκείου Βελεστίνου δώσαμε διαγνωστικό ερωτηματολόγιο που αφορούσε τα εμβαδά τετραγώνου και ορθογωνίου και τις ταυτότητες τελείου τετραγώνου και διαφοράς τετραγώνου. Από αυτό επιπλέον αντλήσαμε πληροφορίες για το επίπεδο γνώσης των τύπων και τεχνικών που διδάχθηκαν οι μαθητές την προηγούμενη χρονιά στο Γυμνάσιο. Είχαμε έτσι μια εικόνα κατά πόσο οι έννοιες και τεχνικές που διδάχθηκαν στην τρίτη Γυμνασίου με τον μετωπικό τρόπο διδασκαλίας παρέμειναν στη μνήμη των μαθητών

Τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν από όλες τις πιλοτικές παρεμβάσεις αξιοποιήθηκαν στην ανάπτυξη μιας διδακτικής πρότασης που εφαρμόστηκε κατά τη σχολική χρονιά 2007-2008 στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης Βόλου. Η διαστρωμάτωση και διασπορά του δείγματος των μαθητών σε διαφορετικά κοινωνικά και οικονομικά περιβάλλοντα σε συνδυασμό με τις θέσεις των έξι (6) καθηγητών των τμημάτων των πιλοτικών εφαρμογών, όπως αυτές εκφράστηκαν μέσα από τις συνεντεύξεις τους, μας επέτρεψαν να αντλήσουμε στοιχεία για τη διδακτική μας προσέγγιση με χειραπτικά υλικά.

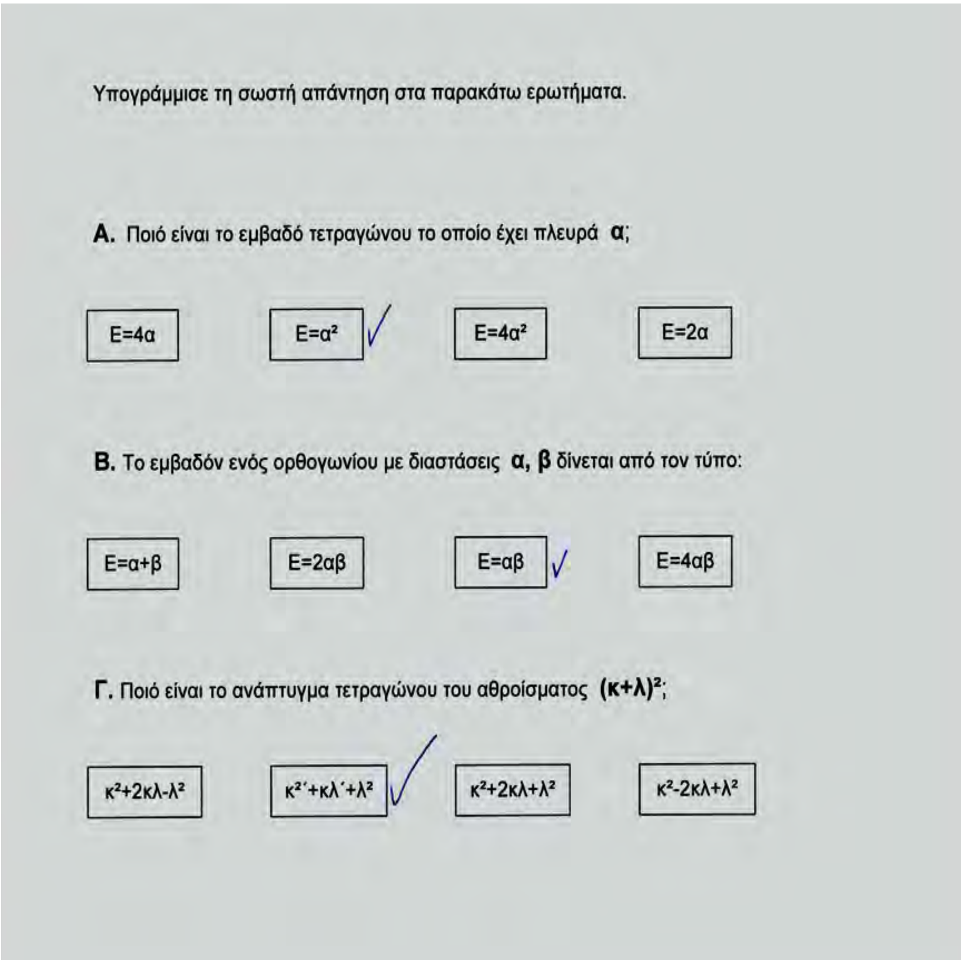
Η τελική πρόταση διδασκαλίας, που εφαρμόστηκε εξ’ ολόκληρου στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης κατά το σχολικό έτος 2007-2008, σχεδιάστηκε λαμβάνοντας υπόψη την κριτική μαθητών και καθηγητών των τάξεων πιλοτικής διδασκαλίας, τα κενά και τις παραλείψεις στη «διάταξη» του μαθήματος, στα παρατηρούμενα αποτελέσματα που είχαν τα υλικά στην κατανόηση, στα συναισθήματα και στη στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

2. Οι πιλοτικές παρεμβάσεις

Οι πιλοτικές παρεμβάσεις έγιναν σε συνεννόηση με τους διδάσκοντες, στις ήδη διδαγμένες ενότητες, κυρίως της ταυτότητας του τελείου τετραγώνου και της παραγοντοποίησης, με τους μαθητές να εργάζονται σε ομάδες των δύο ατόμων ανά θρανίο.

2.1. 2ο Γυμνάσιο Βόλου

Η παρέμβασή μας περιορίστηκε σε τρεις (3) δίωρες διδακτικές ώρες σε δύο τάξεις της τρίτης Γυμνασίου των δεκαεπτά (17) και είκοσι (20) μαθητών, οι οποίοι είχαν ήδη διδαχθεί τις ενότητες των ταυτοτήτων. Αυτό μας έδωσε την ευκαιρία μέσω ενός διαγνωστικού ερωτηματολογίου, όπως φαίνεται παρακάτω, να μάθουμε α) πόσο καλά γνώριζαν οι μαθητές την ταυτότητα του τελείου τετραγώνου και β) αν είχαν οι μαθητές την ικανότητα να συνδέουν τις αλγεβρικές παραστάσεις του α^2 και του $\alpha{\cdot}\beta$ με τη γεωμετρική αναπαράσταση τους, δηλαδή το εμβαδό τετραγώνου και το εμβαδόν ορθογωνίου.



Υπογράμμισε τη σωστή απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα.

Α. Ποιό είναι το εμβαδό τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά **α**;

$E=4\alpha$ $\quad E=\alpha^2 \quad E=4\alpha^2 \quad E=2\alpha$

Β. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις **α, β** δίνεται από τον τύπο:

$E=\alpha+\beta \quad E=2\alpha\beta \quad E=\alpha\beta \quad E=4\alpha\beta$

Γ. Ποιό είναι το ανάπτυγμα τετραγώνου του αθροίσματος **$(\kappa+\lambda)^2$**;

$\kappa^2+2\kappa\lambda-\lambda^2 \quad \kappa^{2\prime}+\kappa\lambda^{\prime}+\lambda^2 \quad \kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2 \quad \kappa^2-2\kappa\lambda+\lambda^2$

Σχήμα 1 Διαγνωστικό Ερωτηματολόγιο

Στη συνέχεια του μαθήματος τους ζητήσαμε να αιτιολογήσουν τη χρήση των όρων «τέλειο τετράγωνο», «διαφορά τετραγώνων», καθώς και αυτών των «χι τετράγωνο» και «χι κύβος». Στόχος μας ήταν να μάθουμε σε ποιο βαθμό οι μαθητές «βλέπουν» τη γεωμετρική διάσταση των αλγεβρικών παραστάσεων.

Διαπιστώσαμε ότι η γεωμετρική διάσταση των «χι τετράγωνο *(x^2)*» και «χι κύβος *(x^3)*» δεν ήταν αναγνωρίσιμες από σημαντικά μεγάλο αριθμό μαθητών όχι μόνον του 2ου Γυμνασίου αλλά και των άλλων σχολείων που συμμετείχαν στις πιλοτικές μας παρεμβάσεις. Η ερμηνεία που δόθηκε από την πλευρά μας όσο και από την πλευρά των καθηγητών τάξης ήταν ότι στη διδασκαλία γίνεται πολύ περιορισμένη αναφορά στη γεωμετρική διάσταση των αλγεβρικών παραστάσεων με αποτέλεσμα αυτό να μην καταγράφεται στη μνήμη των μαθητών.

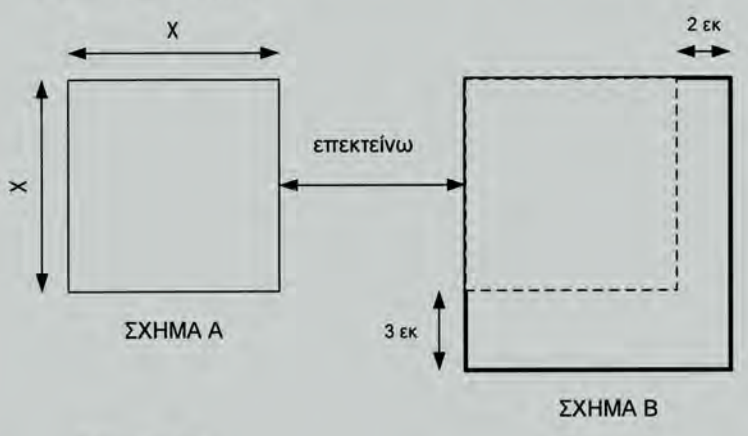
Με αφορμή την παρουσίαση της γεωμετρικής αναπαράστασης του «χι τετράγωνο» προχωρήσαμε στην παρουσίαση των αλγεβρικών πλακιδίων και τη γνωριμία των μαθητών με το υλικό. Οι μαθητές δούλεψαν με τα υλικά σε ομάδες των δύο ή των τεσσάρων μαθητών, ανάλογα με τις χωροταξικές δυνατότητες των τάξεων. Με δεδομένο ότι οι ταυτότητες είχαν ήδη διδαχθεί από τον καθηγητή τάξης, δώσαμε στους μαθητές τις κατάλληλες αλγεβρικές παραστάσεις να τις αναπαραστήσουν με τα αλγεβρικά πλακίδια (1η δίωρη παρέμβαση). Δεν δώσαμε τις δραστηριότητες σε φύλλα εργασίας αλλά τις παρουσιάσαμε στον πίνακα διότι δεν είχαμε στη διάθεσή μας τα χρονικά περιθώρια εκείνα που θα μας επέτρεπαν κάτι τέτοιο. Την έννοια της παραγοντοποίησης και την τεχνική της τη διδάξαμε (2η δίωρη παρέμβαση) καθ’ ολοκλήρου με τα χειραπτικά υλικά, τα φύλλα εργασίας (βλ. Σχήμα 2 και 3) και το επιδιασκόπιο.

Όνομα/Ομάδα......Πάνος......Σχολείο......2ο......

Ημερομηνία......4/11/05......Φύλο Αγόρι Κορίτσι

Δραστηριότητα

Έχω ένα τετράγωνο πλευράς χ και επεκτείνω τις πλευρές του κατα 3 εκ. και 2 εκ αντιίστοιχα όπως στο παρακάτω σχήμα.



Ερώτηση 1η

Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση του εμβαδού του σχήματος Α; x^2

Ερώτηση 2η

Πώς ονομάζεται το σχήμα Β που προέκυψε; ορθογώνιο

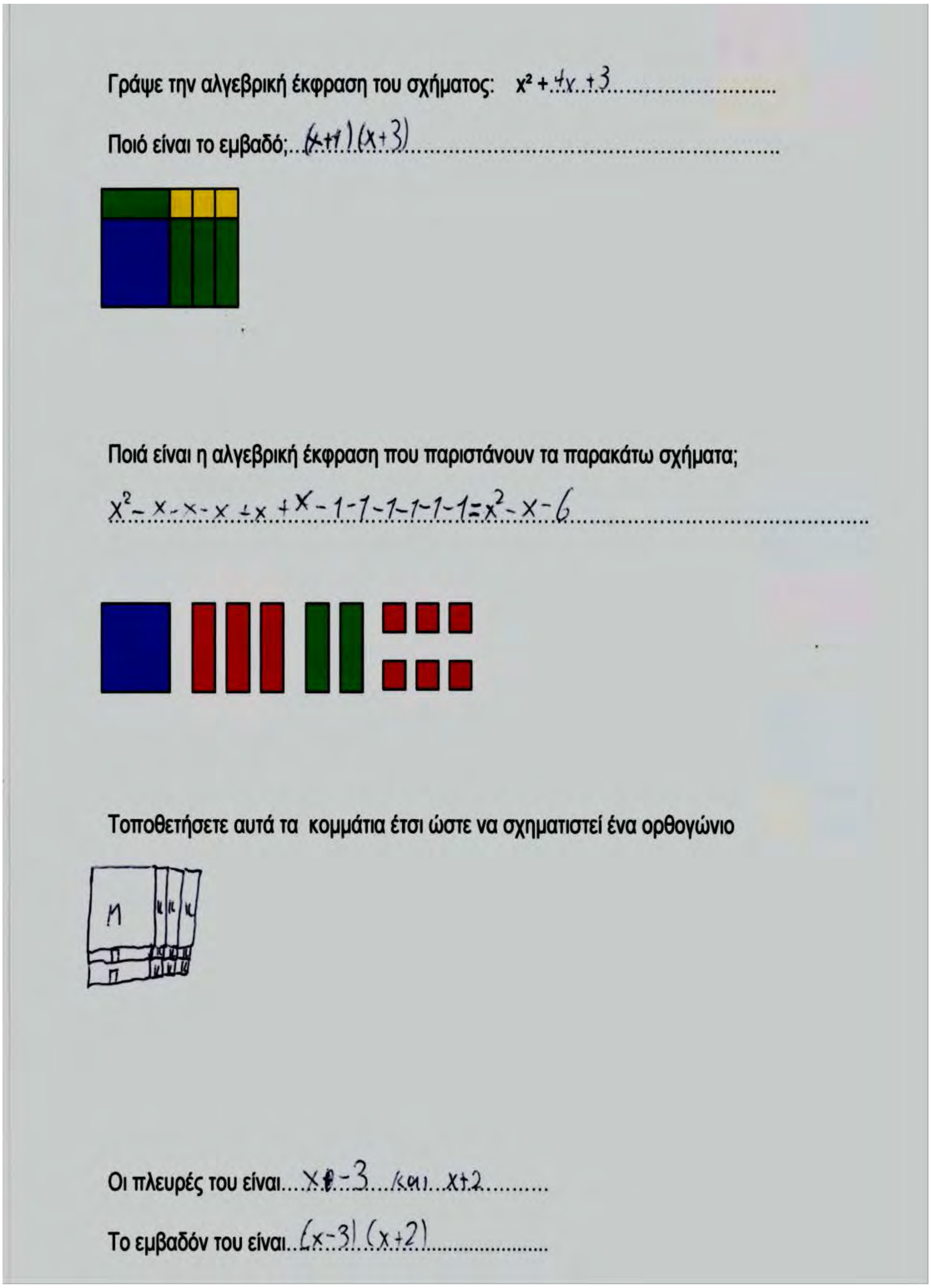
Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση του εμβαδού του σχήματος Β;
$(x+3)(x+2)$

Ερώτηση 3η

Τί θα απαντούσες, άν σε ρωτούσαν τί είναι παραγοντοποίηση;

Παραγοντοποίηση είναι όταν κάνουμε μια αλγεβρικής παράσταση απο προσθαφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς.

Σχήμα 2



Γράψε την αλγεβρική έκφραση του σχήματος: $x^2 + 4x + 3$

Ποιό είναι το εμβαδό; $(x+1)(x+3)$

Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση που παριστάνουν τα παρακάτω σχήματα;

$x^2 - x - x - x + x + x - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = x^2 - x - 6$

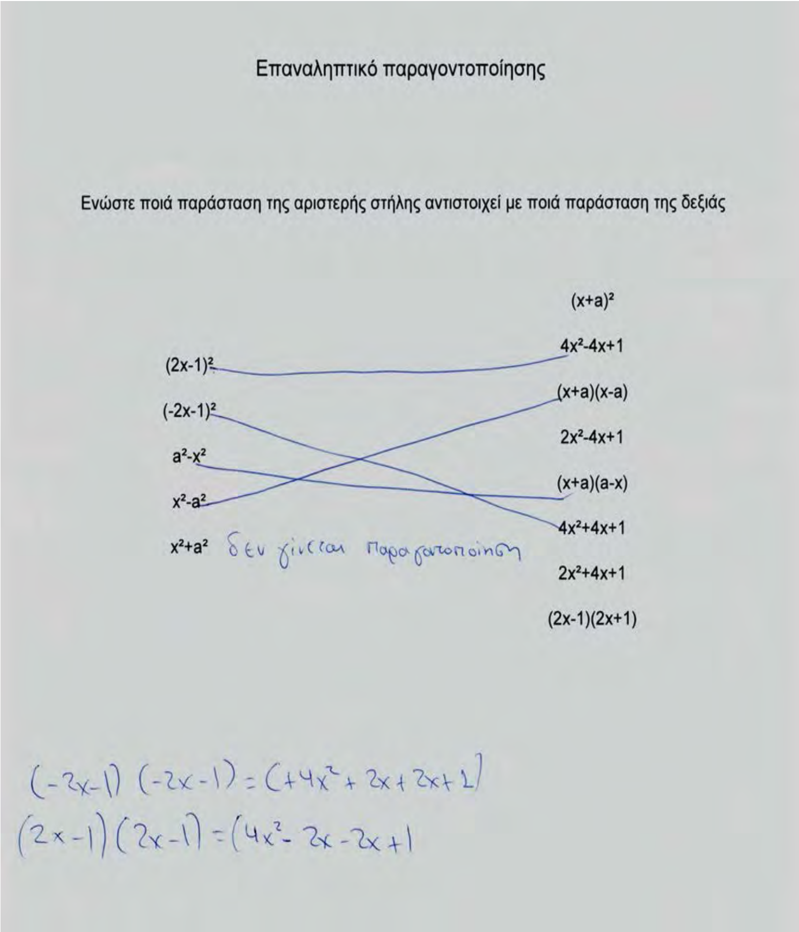
Τοποθετήσετε αυτά τα κομμάτια έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο

Οι πλευρές του είναι $x-3$ και $x+2$

Το εμβαδόν του είναι $(x-3)(x+2)$

Σχήμα 3

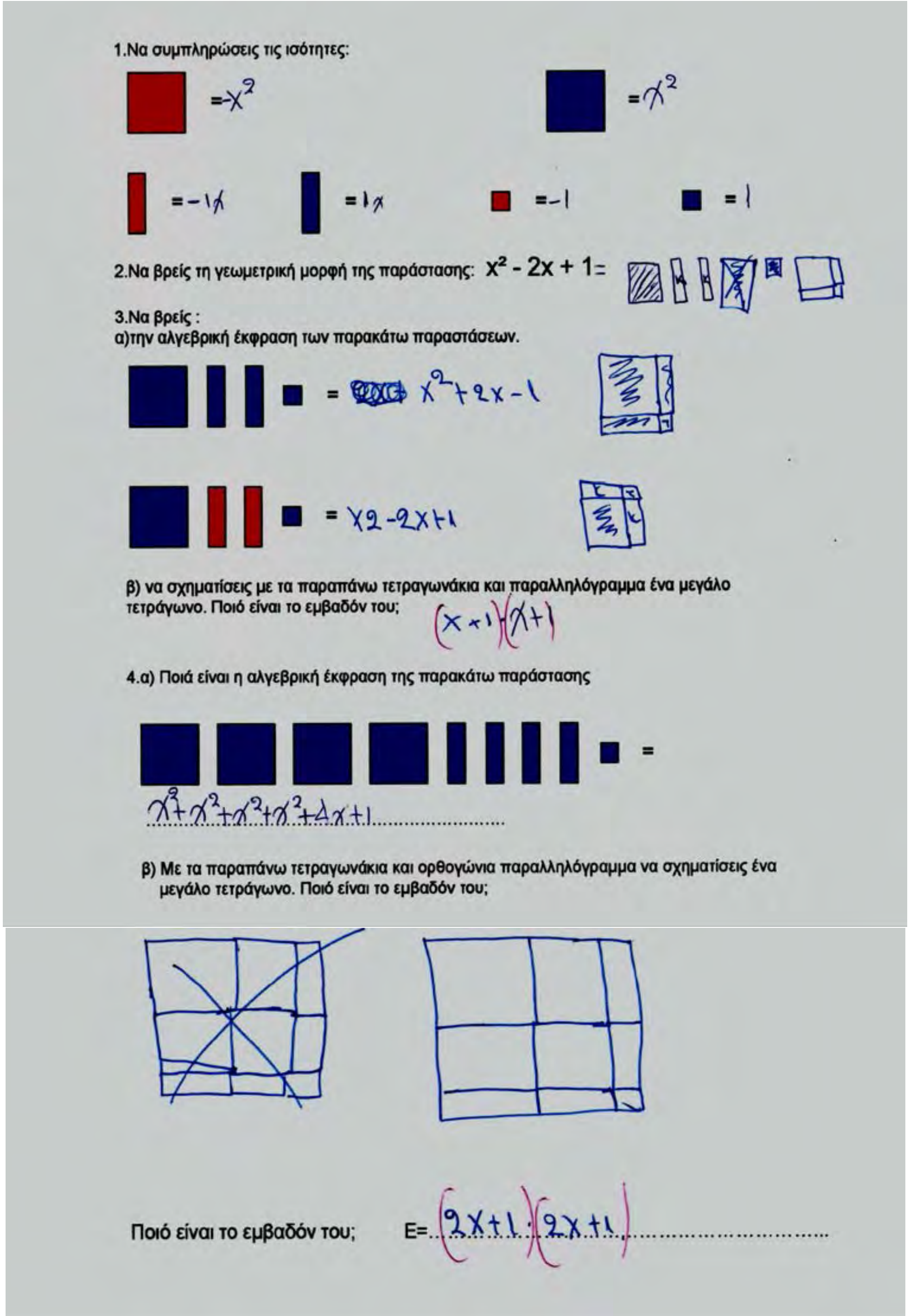
Στη δεύτερη διδακτική ώρα αυτής της παρέμβασης που είχαμε στη διάθεσή μας οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα επαναληπτικό ερωτηματολόγιο (Σχήμα 4) που περιελάμβανε ασκήσεις πάνω στις ταυτότητες τις οποίες είχαμε επεξεργαστεί με τα υλικά ώστε να δούμε την επίδραση που είχε η γεωμετρική προσέγγιση αυτών των εννοιών μέσω των αλγεβρικών πλακιδίων στην κατανόηση και τη μάθηση.



Σχήμα 4. Η σελίδα του Επαναληπτικού Ερωτηματολογίου όπως συμπληρώθηκε από έναν μαθητή

2.2. 3ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας και 9ο Γυμνάσιο Βόλου

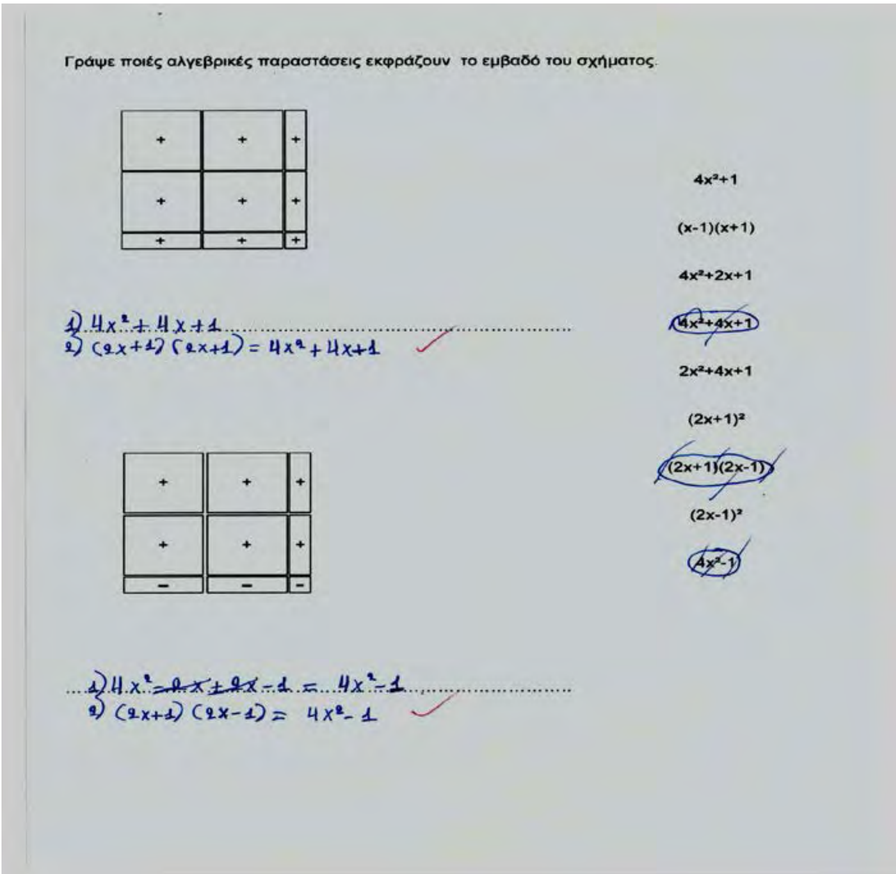
Οι τρεις (3) δίωρες παρεμβάσεις μας στο 3ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας, σε πενήντα ένα (51) μαθητές και σε είκοσι (22) μαθητές στο 9ο Γυμνάσιο Βόλου, ακολούθησαν το πλαίσιο παρέμβασης που περιγράψαμε πιο πάνω με μόνη διαφοροποίηση τον περιορισμό στο ελάχιστο της χρήσης του πίνακα. Αυτό έγινε δυνατό με κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων στο φύλλο εργασίας (βλ. πιο κάτω Σχήμα 5) οι οποίες βοηθούσαν τον μαθητή να εξοικειωθεί με το υλικό και τη χρήση του χωρίς να χρειάζεται ιδιαίτερα τις δικές μας εξηγήσεις.



Σχήμα 5

Παράλληλα η εμπειρία που κερδίσαμε από τις παρεμβάσεις μας στο 2ο Γυμνάσιο μας βοήθησε να «μπούμε» πιο σωστά στον καινούργιο μας ρόλο, του δάσκαλου που δεν είναι πια «στον πίνακα» αλλά στην ομάδα κοντά στον μαθητή. Χρησιμοποιήσαμε το επιδιασκόπιο ως αναπόσπαστο στοιχείο της διδασκαλίας εμείς για να θέσουμε προβλήματα προς επίλυση με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και οι μαθητές για να επιδείξουν στην τάξη τις λύσεις των προβλημάτων που πρότειναν οι ομάδες τους.

Οι μαθητές τέλος και των δύο σχολείων συμπλήρωσαν ένα επαναληπτικό ερωτηματολόγιο πάνω στις μορφές τριωνύμου, το οποίο κάλυπτε όλες τις ενότητες που είχαμε μελετήσει με τα αλγεβρικά πλακίδια, δηλαδή το τέλειο τετράγωνο, τη διαφορά τετραγώνων, την παραγοντοποίηση (βλ. Σχήμα 4 για την πρώτη σελίδα του και Σχήμα 6 για τη δεύτερη σελίδα του). Να σημειωθεί ότι μεσολάβησε χρονικό διάστημα τριών μηνών από την ημερομηνία της τελευταίας μας παρέμβασης και του επαναληπτικού ερωτηματολογίου. Αποζητήσαμε αυτή τη χρονική απόσταση διότι θελήσαμε να μάθουμε και για τη διάρκεια παραμονής στη μνήμη των ενοτήτων που διδάχθηκαν με τη χρήση των υλικών.



Σχήμα 6

2.3. Λύκειο Βελεστίνου

Στην αρχή της χρονιάς ζητήσαμε από τους εξήντα τρεις (63) μαθητές του Λυκείου Βελεστίνου να μας απαντήσουν στο διαγνωστικό ερωτηματολόγιο (βλ. σελ. 79 και σελ. 83) πάνω στις ενότητες των ταυτοτήτων του τελείου τετραγώνου και της διαφοράς τετραγώνων καθώς και τους τύπους εμβαδών τετραγώνου και ορθογωνίου.

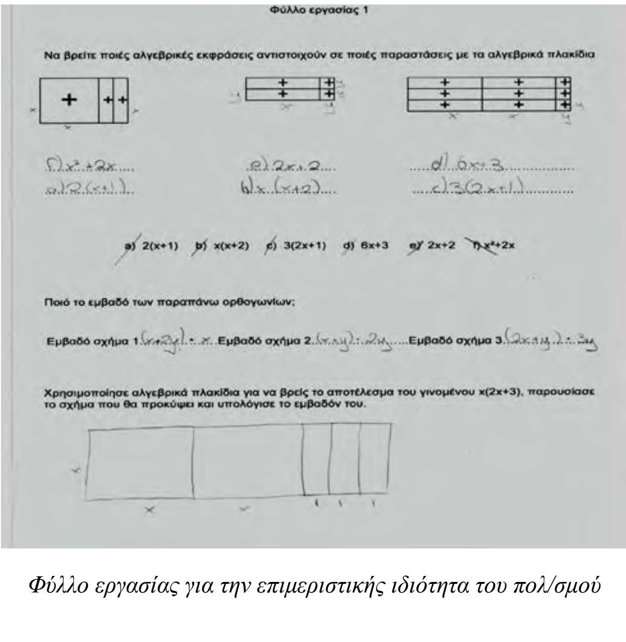
Το ερώτημα στο οποίο εμείς οι ίδιοι θελήσαμε να πάρουμε απάντηση ήταν: «Σε ποιον βαθμό οι μαθητές που τελείωσαν επιτυχώς την τρίτη γυμνασίου είναι γνώστες βασικών ενοτήτων της άλγεβρας που διδάχθηκαν στο Γυμνάσιο με τον «παραδοσιακό» τρόπο διδασκαλίας». Τα στοιχεία που συγκεντρώσαμε και αναλύσαμε από τις πιλοτικές μας διδασκαλίες στα προαναφερθέντα σχολεία παρουσιάζονται λεπτομερώς στις παραγράφους 3.1 ως 3.5

2.4. 10ο Γυμνάσιο (2006-2007)

Η παρέμβαση που έγινε στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης (2006-2007) σε δύο τμήματα των είκοσι (20) και είκοσι (20) μαθητών αντίστοιχα και είχε συνολική διάρκεια δέκα ώρες. Κατά τη διάρκεια αυτής της παρέμβασης «δοκιμάσαμε» στην πράξη τα φύλλα δραστηριοτήτων που είχαμε σχεδιάσει, απορρίψαμε, τροποποιήσαμε, βελτιώσαμε τη δομή τους και αντλήσαμε πληροφορίες για τη μορφή και τους στόχους της κυρίας παρέμβασής μας. Πραγματοποιήσαμε σε αυτό το σχολείο πιλοτικές διδασκαλίες σε όλες τις προς διερεύνηση ενότητες πιο συγκεκριμένα της παραγοντοποίησης, των ταυτοτήτων και της επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Σχεδιάσαμε για κάθε ενότητα χωριστά τις κατάλληλες δραστηριότητες (βλ. Παράρτημα Πίνακες 6-7-8-9-10) λαμβάνοντας υπόψη μας τις προτάσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τους επιμέρους στόχους της διδασκαλίας αυτών των ενοτήτων. Στα φύλλα δραστηριοτήτων συμπεριλάβαμε και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ώστε να έχουν την ευκαιρία οι μαθητές να δουν και τη γεωμετρική επίλυσή τους εκτός από τη συμβολική και να την αποδεχθούν ως ισότιμη.

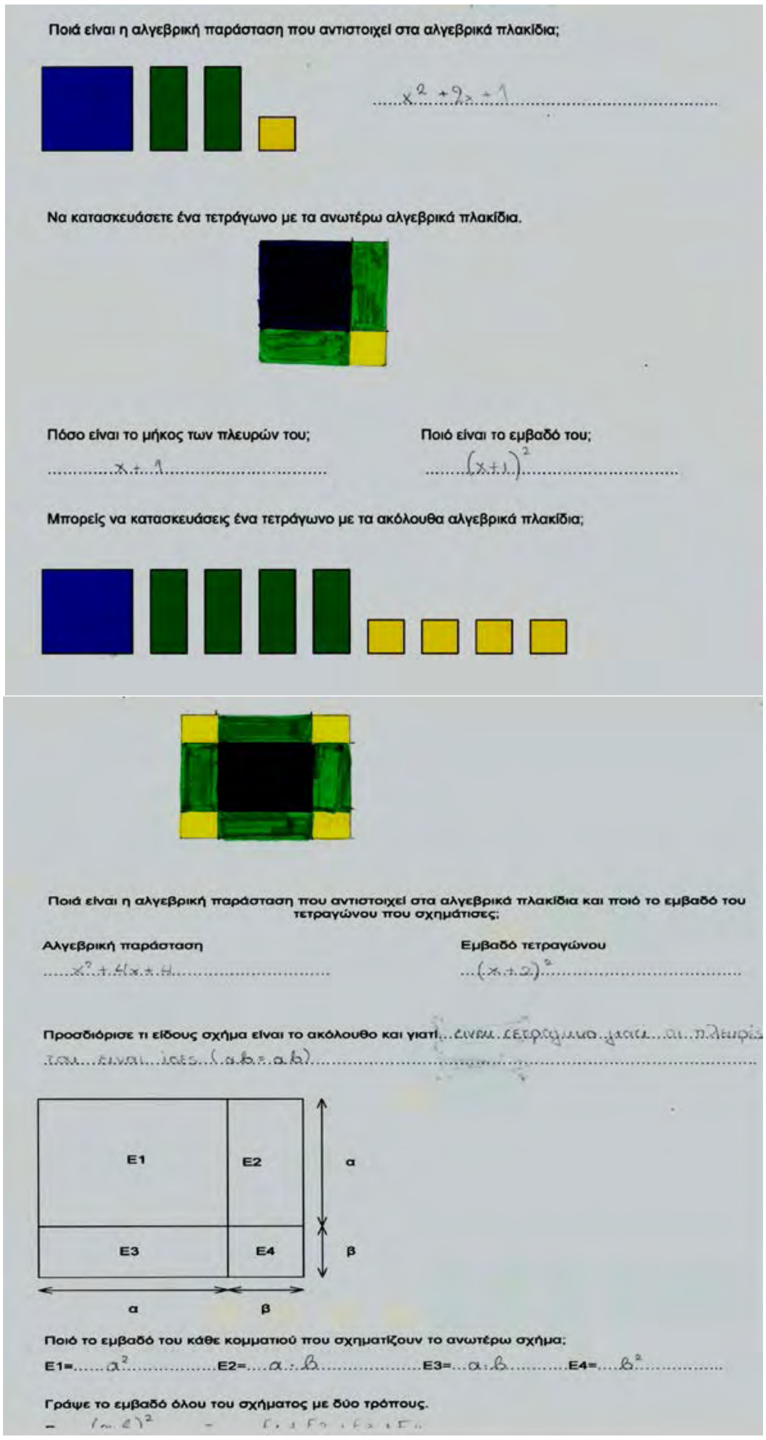
Οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των τεσσάρων, χωρίς κριτήρια επιλογής στη σύνθεση. Κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της ένα σετ από αλγεβρικά πλακίδια και ένα φύλλο δραστηριοτήτων προς συμπλήρωση. Στη διδασκαλία του μαθήματος χρησιμοποιήσαμε το επιδιασκόπιο και τα κατάλληλα αλγεβρικά πλακίδια (διαφανή) για τη χρήση του. Αυτό έδωσε τη δυνατότητα σε μας να θέσουμε στην τάξη ερωτήσεις προβληματισμού πάνω σε διάφορες μορφές σχημάτων και στους μαθητές να δείξουν στους συμμαθητές τις προτάσεις της ομάδας τους που αφορούσαν την επίλυση των δραστηριοτήτων.

Η πρώτη ενότητα την οποία διδάξαμε με αλγεβρικά πλακίδια αφορούσε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Οι αριθμοί που επιλέξαμε στις δραστηριότητες στο φύλλο εργασίας ήταν όλοι θετικοί γιατί μας ενδιέφερε να κατανοήσουν οι μαθητές τη γεωμετρική παράσταση και να εξοικειωθούν με τα πλακίδια. Αυτός ήταν και ο λόγος που δεν χρησιμοποιήσαμε χρώμα για να δώσουμε το θετικό πρόσημο αλλά προσημάναμε τα επιμέρους γεωμετρικά σχήματα.



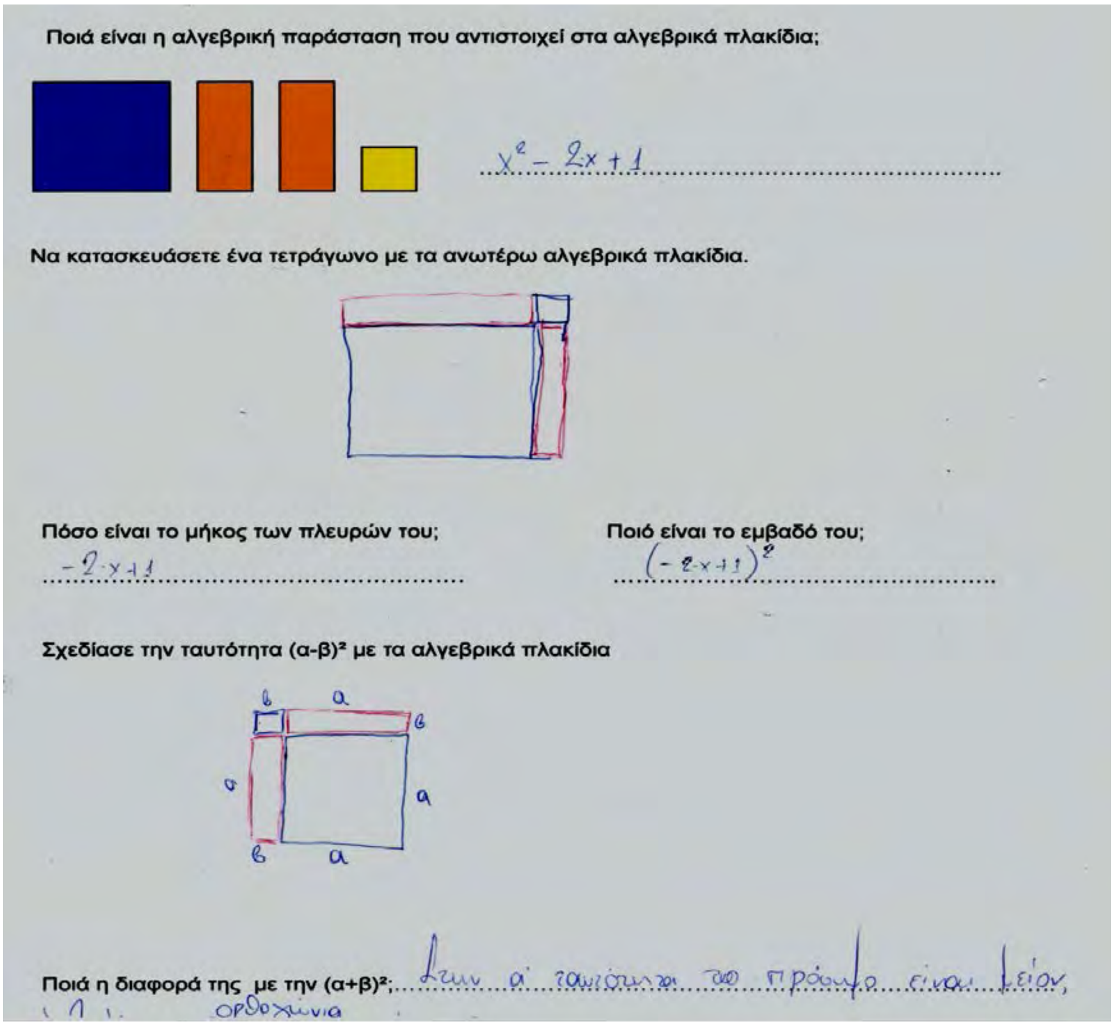
Φύλλο εργασίας για την επιμεριστικής ιδιότητα του πολ/σμού

Η δεύτερη διδακτική ενότητα ήταν αυτή του τετραγώνου του αθροίσματος. Στο φύλλο εργασίας οι δραστηριότητες παρουσιάστηκαν με τα αλγεβρικά πλακίδια στην κανονική τους μορφή αφού οι μαθητές είχαν ήδη εμπεδώσει τον ρόλο του χρώματος του κάθε γεωμετρικού κομματιού.



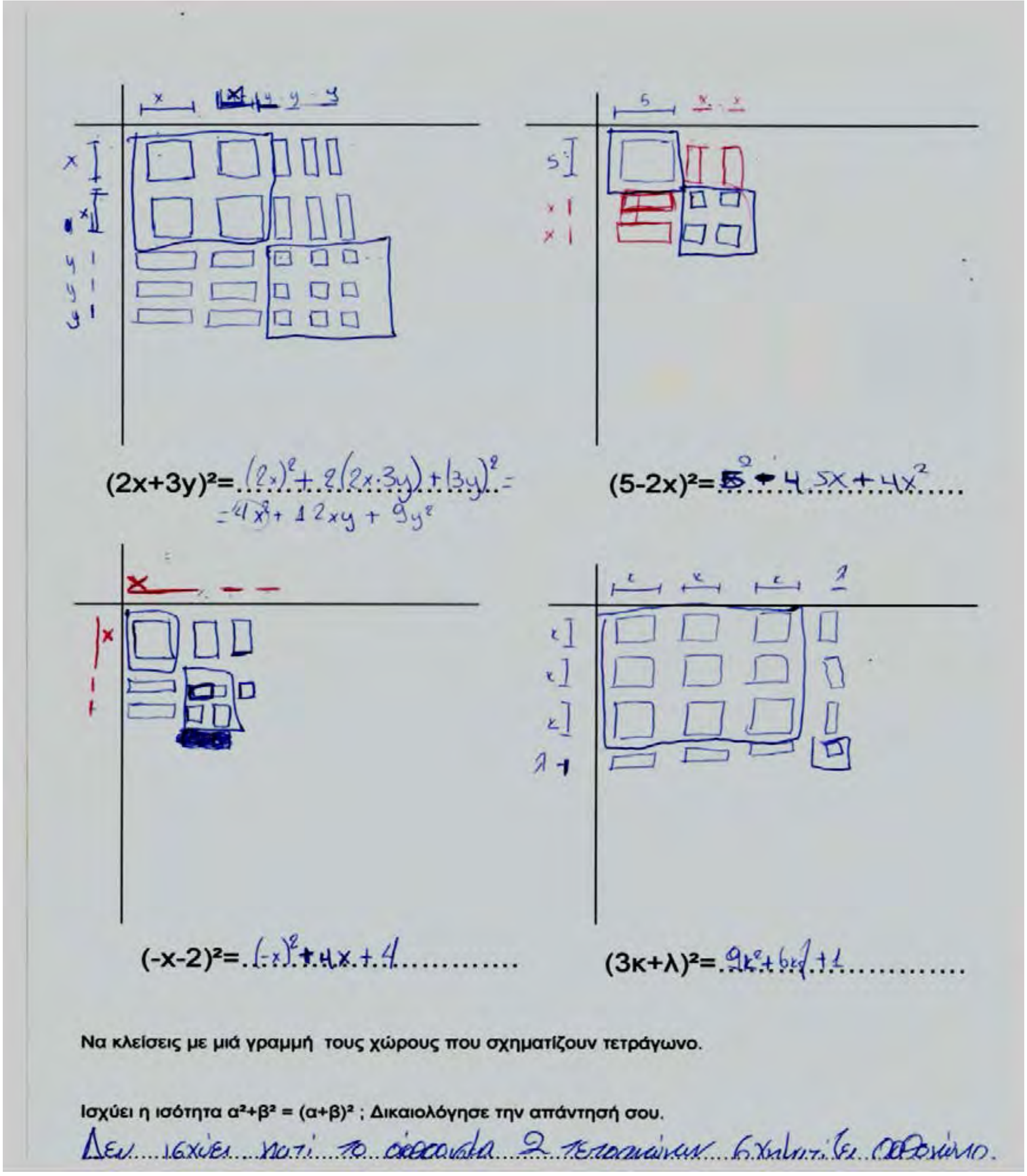
Φύλλο δραστηριοτήτων στο τετράγωνο αθροίσματος

Η τρίτη διδακτική ενότητα της παρέμβασης ήταν το τέλειο τετράγωνο της διαφοράς. Σε αυτήν την ενότητα το κύριο βάρος δόθηκε στην παρουσίαση και εκμάθηση του πίνακα διπλής εισόδου με σχηματική παράσταση των αλγεβρικών πλακιδίων. Επιλέξαμε να διδάξουμε τον πίνακα διότι «απελευθερώνει» τον μαθητή από την ανάγκη να έχει τα υλικά στη διάθεσή του και μπορεί με αυτή την τεχνική να «χρησιμοποιεί» μεγάλο αριθμό εικονικών υλικών ώστε να καλύπτει τις ανάγκες οποιασδήποτε άσκησης.



Φύλλο δραστηριοτήτων στο τετράγωνο διαφοράς

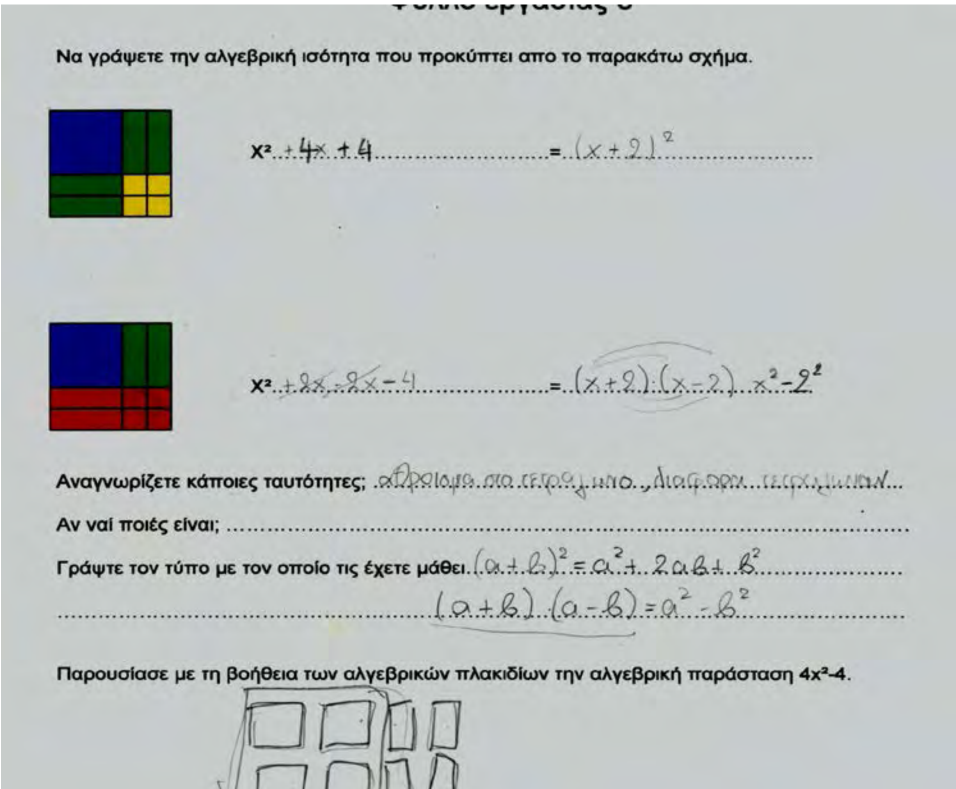
Οι παρακάτω ασκήσεις που επιλύθηκαν με τη χρήση του πίνακα διπλής εισόδου ήταν ασκήσεις του βιβλίου που δυσκόλευαν τους μαθητές στην επίλυση κυρίως διότι οι άγνωστοι είχαν συντελεστές διάφορους του ένα.



Πίνακας διπλής εισόδου

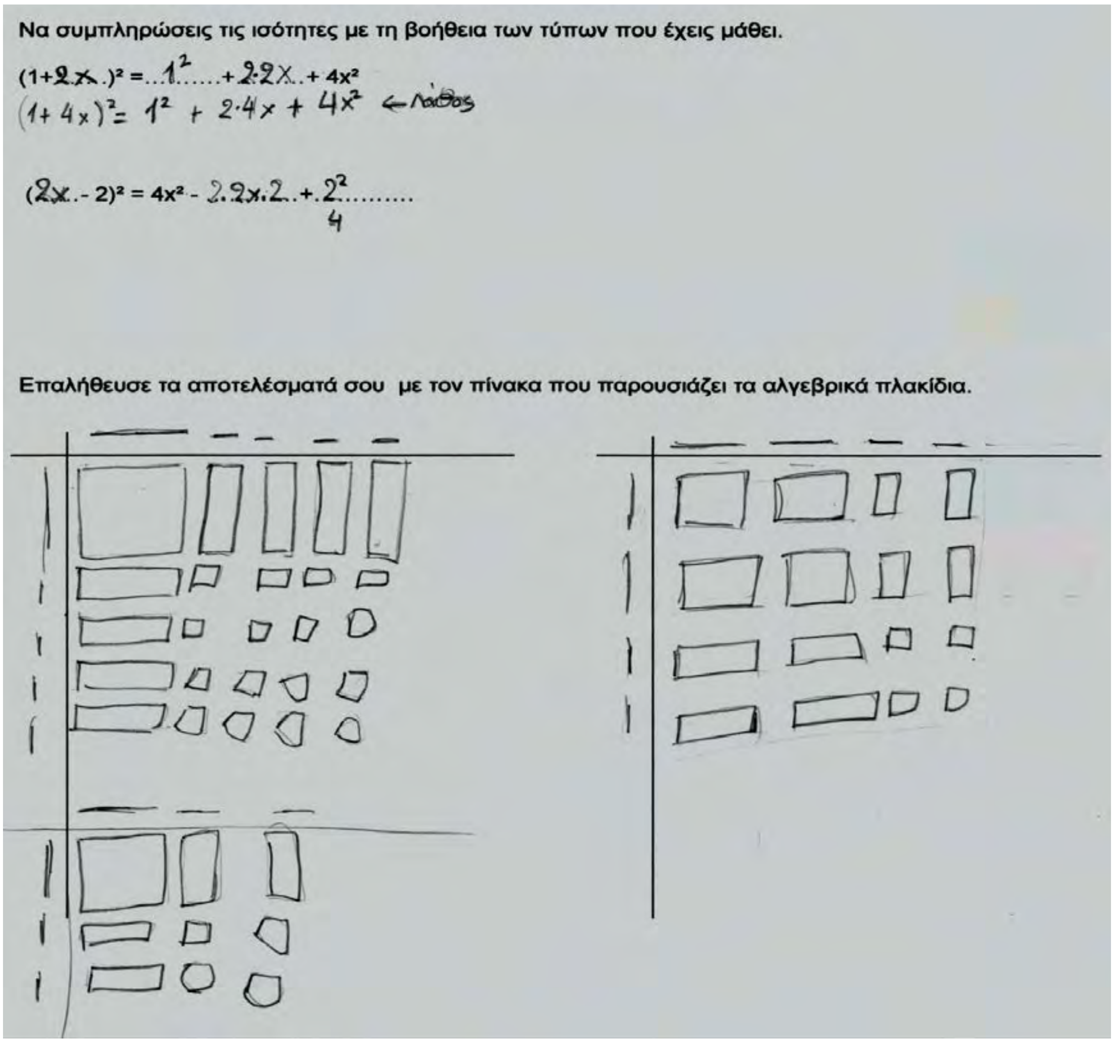
Ο πίνακας διπλής εισόδου βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν σωστά την ταυτότητα του τελείου τετραγώνου και για τον λόγο αυτόν τον εντάξαμε ως αναπόσπαστο κομμάτι της ενότητας στην κύρια παρέμβασή μας.

Η τέταρτη ενότητα που μας απασχόλησε ήταν η διαφορά τετραγώνων. Στο φύλλο δραστηριοτήτων περιελάβαμε και την ταυτότητα του τελείου τετραγώνου εκτός από την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων για να μπορέσουν οι μαθητές να τις αντιπαραβάλουν και να τις διαχωρίσουν ως έννοιες. Επίσης να αντιληφθούν τη μορφή παραγοντοποίησης που δίνει η διαφορά τετραγώνων η οποία και οδηγεί σε επίλυση δευτεροβάθμιας χωρίς τη χρήση του τύπου της διακρίνουσας. Οι ασκήσεις συμπλήρωσης είχαν τη μορφή αντιστοίχων ασκήσεων του βιβλίου. Τους ζητήσαμε να κάνουν χρήση του πίνακα διπλής εισόδου για να ελέγξουν την ορθότητα των πράξεών τους. Στόχος μας ήταν να τον αποδεχθούν ως εργαλείο επαλήθευσης που θα «απαντά» σε κάθε τους αμφιβολία για τη σωστή ή όχι εφαρμογή των τύπων.



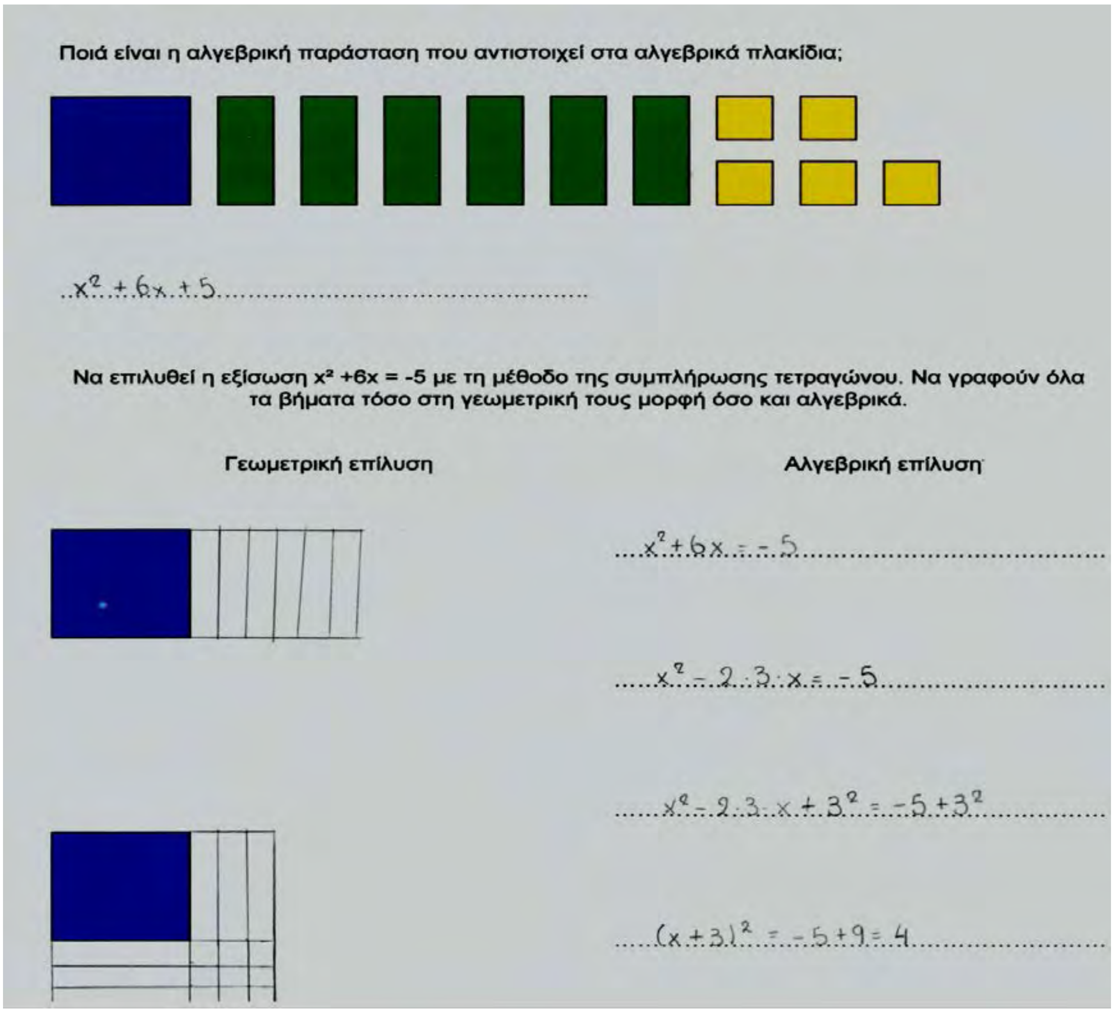
Φύλλο δραστηριοτήτων στη διαφορά τετραγώνων

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον μαθητή να εντοπίζει το λάθος του στη δεύτερη άσκηση και να το υποδεικνύει ($4x^2$ ⟵ Λάθος) μετά από τον έλεγχο που έκανε για το ανάπτυγμα της $(1 + 4x)^2$ με τον πίνακα διπλής εισόδου.



Φύλλο δραστηριοτήτων στις ταυτότητες με χρήση πίνακα διπλής εισόδου

Στην πέμπτη ενότητα παρουσιάσαμε την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης με την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Από τους μαθητές ζητήσαμε να παρουσιάσουν όλα τα βήματα της επίλυσης τόσο στη γεωμετρική της μορφή όσο και στην αλγεβρική της ώστε να γίνει αντιληπτό το ισοδύναμο χειρισμών και πράξεων με σύμβολα



Φύλλο δραστηριοτήτων στην ενότητα «συμπλήρωση τετραγώνου»

Στο τέλος αυτής της «ολοκληρωμένης» πιλοτικής διδασκαλίας, που συνέβαλε τα μέγιστα στη διαμόρφωση της κύριας παρέμβασης μας αφού μας βοήθησε να αξιολογήσουμε τα φύλλα δραστηριοτήτων που σχεδιάσαμε τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς τη χρονική διάρκεια της επεξεργασίας τους από τους μαθητές, πήραμε ατομικές συνεντεύξεις από όλους τους μαθητές και των δύο τμημάτων. Οι ερωτήσεις που τους θέσαμε ήταν ίδιες με αυτές που θέσαμε στους μαθητές της κύριας παρέμβασης (βλ. σελ 178).

Οι απαντήσεις που πήραμε ήταν θετικές σε ότι αφορούσε τη μέθοδο διδασκαλίας που ακολουθήσαμε. Σχεδόν όλοι ήταν της γνώμης να διδάσκεται το μάθημα με χρήση χειραπτικού υλικού ώστε να γίνεται περισσότερο κατανοητό και ευχάριστο για όλους τους μαθητές.

3. Στοιχεία που αντλήσαμε από τις πιλοτικές μας παρεμβάσεις

Από τις πιλοτικές μας παρεμβάσεις που προηγήθηκαν της κύριας παρέμβασής μας στα σχολεία: Λύκειο Βελεστίνου, 2ο Γυμνάσιο Βόλου, 9ο Γυμνασίου Βόλου, Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας Βόλου και 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης Βόλου (2006-2007) προέκυψαν ενδιαφέροντα στοιχεία τα οποία συνυπολογίσαμε στο σχεδιασμό του τελικού πλαισίου παρέμβασης.

3.1. Λύκειο Βελεστίνου

Τα αποτελέσματα του διαγνωστικού τεστ (βλ. Παράρτημα Πίνακας.1, 2α) που δόθηκε στους μαθητές της πρώτης τάξης του Λυκείου Βελεστίνου έδειξαν ότι το 30% των μαθητών δεν γνώριζε τον τύπο που αντιστοιχεί στο εμβαδό τετραγώνου ενώ το 45% τον τύπο του εμβαδού ορθογωνίου. Επιπροσθέτως ενώ το 90% των μαθητών σημείωσε τον σωστό τύπο του τελείου τετραγώνου $(κ + λ)^2$ οι ίδιοι στις ασκήσεις που ακολουθούσαν αδυνατούσαν να τον εφαρμόσουν σωστά σε οποιαδήποτε άλλη μορφή του.

Αυτό δείχνει ότι η γνώση που απέκτησαν ήταν επιφανειακή και βασίστηκε στην αποστήθιση και όχι στην κατανόηση της έννοιας.

Παρατηρήσαμε επίσης πλήρη σύγχυση στην ταυτότητα του τέλειου τετραγώνου, αφού υπήρξαν γραπτά που αντιστοιχούσαν τον τύπο της με τρείς διαφορετικές εκφράσεις όπως για παράδειγμα $α^2 + β^2 = (α + β)^2$, $(-2x - 1)^2 = (2x - 1)(2x + 1)$, $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$.

Οι μαθητές μας επεσήμαναν ότι δεν είχαν διδαχθεί ποτέ τη γεωμετρική προσέγγιση του x^2 και δεν είχε αιτιολογηθεί από τους εκάστοτε καθηγητές τους, ή τουλάχιστον εκείνοι δεν θυμόταν, η χρήση των όρων «τέλειο τετράγωνο» και «διαφορά τετραγώνων». Αξίζει μάλιστα να αναφέρουμε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές είχαν υψηλή βαθμολογία στο μάθημα των μαθηματικών στην τρίτη γυμνασίου.

Σε ένα από τα τμήματα κάναμε μετά το διαγνωστικό τεστ, μάθημα παρέμβασης με τα αλγεβρικά πλακίδια στην ενότητα του τέλειου τετραγώνου. Οι μαθητές του τμήματος αυτού μετά την πάροδο μιας εβδομάδας συμπλήρωσαν διαγνωστικό τεστ όμοιο με εκείνο πριν την παρέμβασή μας, τα αποτελέσματα του οποίου έδειξαν αισθητή βελτίωση.

Οι λανθασμένες απαντήσεις για το εμβαδό τετραγώνου και ορθογωνίου σχεδόν μηδενίστηκαν και παρουσιάστηκαν πέντε γραπτά, σε σύνολο 21, με όλες τις αντιστοιχίσεις σωστές και τρία γραπτά με μια μόνο λανθασμένη απάντηση. Στο διαγνωστικό τεστ, πριν την παρέμβαση, αντίθετα δεν παρουσιάστηκε κανένα αλάνθαστο γραπτό ενώ υπήρχαν τρία γραπτά με ένα μόνο λάθος στην αντιστοίχιση του $\alpha^2 + \beta^2$.

Θεωρούμε λοιπόν ότι δεν θα ήταν παρακινδυνευμένο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η επίδραση των αλγεβρικών πλακιδίων συνέβαλε σε σημαντικό βαθμό στην κατανόηση της ταυτότητας και στη συνέχεια στη βελτίωση της απόδοσης αυτών των μαθητών.

3.2. Το 2ο Γυμνάσιο Βόλου

Στην τάξη του 2ου Γυμνάσιο Βόλου δεν παρατηρήθηκε πρόβλημα στα εμβαδά τετραγώνου και ορθογωνίου. Οι μισοί όμως μαθητές δεν μπόρεσαν να γράψουν την αλγεβρική παράσταση δοθέντος τετραγώνου και δοθέντος ορθογωνίου. Η δυσκολία αυτή ανέδειξε ένα μαθησιακό κενό που δημιουργείται από την μη σύνδεση της γεωμετρίας με την άλγεβρα. Η έλλειψη της γέφυρας που συνδέει τους δύο μαθηματικούς χώρους δημιουργεί την εντύπωση στους μαθητές ότι αυτοί δεν έχουν σημεία επαφής, διαύλους επικοινωνίας, με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να κάνουν αλγεβρικούς συνειρμούς σε γεωμετρικές παραστάσεις και αντιστρόφως.

Σημειώσαμε επίσης την πλήρη αδυναμία να συμπληρώσουν οι μαθητές σωστά τον ορισμό της παραγοντοποίησης που τους ζητήσαμε. Χαρακτηριστικά έγραψαν ότι παραγοντοποίηση είναι «η ανάλυση πολυωνύμων σε παράγοντες», «η μετατροπή παραγόντων σε γινόμενα», «η παράσταση που μπορούμε να βγάλουμε παράγοντες». Η αδυναμία αυτή φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι ο κανόνας για τους μαθητές είναι μια διαδικασία απομνημόνευσης, κενής περιεχομένου, στερούμενης συνάφειας με την κατανόηση της έννοιας όπως και με την έννοια των όρων «ανάλυση», «παράγοντας» κλπ.

Αναφορικά με τη διδακτική πρόταση της ενσωμάτωσης των αλγεβρικών πλακιδίων στο μάθημα των μαθηματικών η θέση σχεδόν όλων των μαθητών, όπως αυτή εκφράστηκε στο φύλλο αξιολόγησης που συμπλήρωσαν, ήταν θετική. Ορισμένες από τις απαντήσεις τους ήταν ότι: «κατανόησαν με εύκολο και όμορφο τρόπο», «είδαν ότι τα μαθηματικά δεν είναι αόριστα πράγματα αλλά συγκεκριμένα», «κατάλαβαν τη λογική των τύπων», «κατανόησαν με σχήματα τις αλγεβρικές παραστάσεις σε μια διαφορετική ατμόσφαιρα τάξης συνεργαζόμενοι με τον συμμαθητή τους».

3.3. Το 9ο Γυμνασίου Βόλου

Οι μαθητές του 9ου Γυμνασίου Βόλου είχαν διδαχθεί πριν την παρέμβαση μας τις ενότητες των ταυτοτήτων του τελείου τετραγώνου και της διαφοράς τετραγώνων και οι απαντήσεις αντιστοίχισης του διαγνωστικού τεστ (βλ. Πίνακας 1, 2α) μας βοήθησαν να βγάλουμε συμπεράσματα για την επίδραση που είχε η μετωπική διδασκαλία σε ότι αφορά την κατανόηση των εννοιών και τεχνικών που διδάχθηκαν.

Σε σύνολο είκοσι δύο (22) μαθητών μόνο τέσσερις (4) μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση «τι είναι παραγοντοποίηση». Οκτώ μαθητές συμπλήρωσαν σωστά τις αντιστοιχίσεις εκτός του «κλασικού» σφάλματος του $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ αλλά μόνο δύο μαθητές από αυτούς έδωσαν τον σωστό ορισμό της παραγοντοποίησης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ορισμοί που δόθηκαν ως απάντηση στην ερώτηση για το τι είναι παραγοντοποίηση, οι οποίες δείχνουν ότι όσο καλές, όσο σημαντικές να είναι οι εξηγήσεις του δασκάλου τελικά δεν επαρκούν για να αφομοιώσει σωστά ο μαθητής τις αλγεβρικές έννοιες. Για κάποιους μαθητές λοιπόν η παραγοντοποίηση είναι, «μια αλγεβρική παράσταση που με κάποιους τρόπους μας βοηθά να βρούμε το αποτέλεσμα πιο εύκολα», «μια παράσταση που θα πρέπει να βγάλουμε ένα παράγοντά της για να κάνουμε πράξεις». Άλλοι θεωρούν ότι κάνουμε παραγοντοποίηση «όταν μετατρέπουμε αριθμούς σε γινόμενα», ή για «να παραγοντοποιώ όλους τους όρους ενός πολυωνύμου». Επίσης ότι την χρησιμοποιούμε για «να κάνουμε παράγοντες τις διάφορες παρενθέσεις» ή «να μετατρέπουμε σε παράγοντες τα γινόμενα στην παρένθεση».

Η εξήγηση που δίνουμε για τις παραπάνω εκφράσεις, είναι ότι οι μαθητές αδυνατούν να δώσουν τον κανόνα, *«μια αλυσίδα δύο η περισσοτέρων αφηρημένων εννοιών»*, όπως λέει ο Gagné (1970, σελ. 57) διότι δεν τον κατανοούν, ή διότι *«κατέληξαν σε αυτόν από λανθασμένες αφαιρέσεις της διδαχθείσας διαδικασίας»* όπως ισχυρίζεται ο Schoenfeld, (1994, σελ. 10).

Επίσης πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι τα μαθηματικά έχουν μια πολύ ιδιαίτερη γλώσσα και πολλές λέξεις έχουν διαφορετική σημασία από αυτήν που συνήθως χρησιμοποιούμε. Μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει εν μέρει μαθαίνω μια μοναδική αντιστοιχία μεταξύ των λέξεων και των εννοιών σε ένα μαθηματικό κείμενο. Όταν λοιπόν κάποιος μαθητής αδυνατεί να αποκρυπτογραφήσει την ακριβή μαθηματική έννοια κινδυνεύει να σχηματίσει στο νου του λανθασμένη εικόνα και να καταλήξει σε σύγχυση (Zenverbergen, 2000, σελ. 205).

Η χρήση λοιπόν ειδικών μαθηματικών όρων, ως ένα είδος συντόμευσης της μάθησης, εμπεριέχει τον κίνδυνο ο μαθητής να παραμείνει στην καθαρά φραστική αλυσίδα των εννοιών και να μην προχωρήσει στην πραγματική εννοιολογική (Gagné, 1970, σελ. 58) με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να γνωρίζει πότε και πως θα εφαρμόσει τις έννοιες αυτές σωστά στην πράξη.

3.4. Το Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας Βόλου

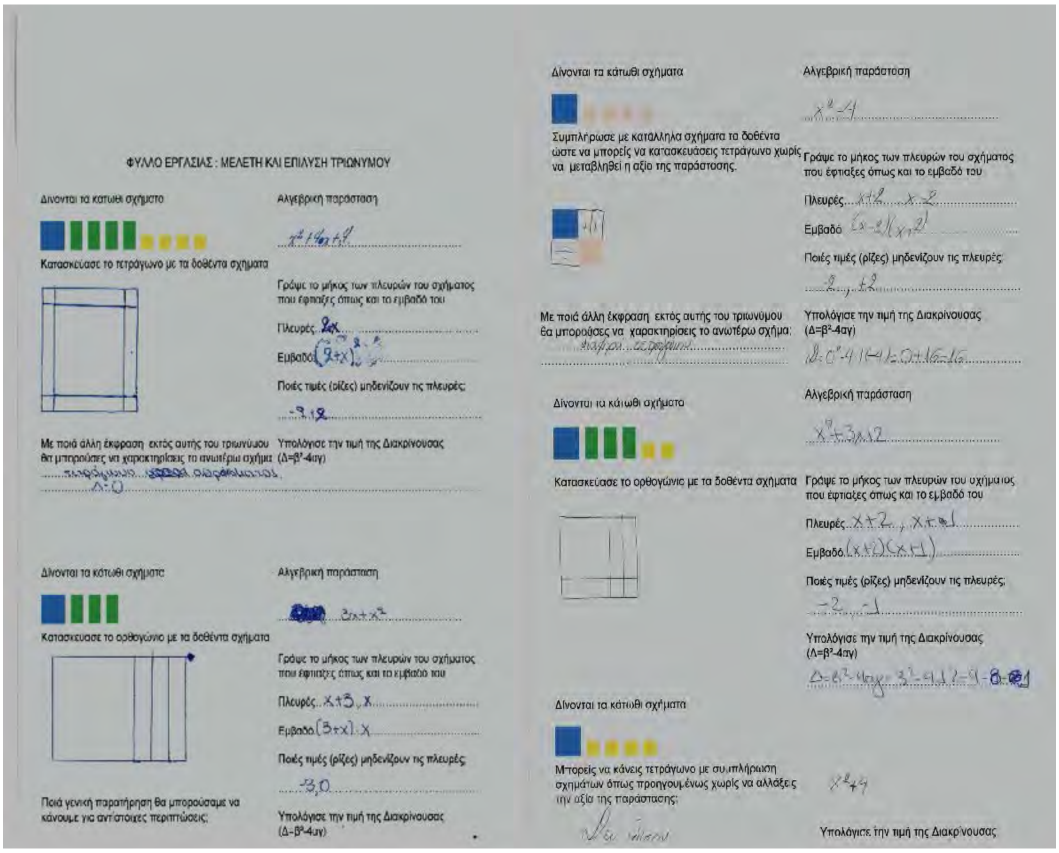
Στο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας Βόλου η παρέμβασή μας έγινε σε δύο τμήματα της τρίτης Γυμνασίου. Το ένα τμήμα είχε «γνωρίσει» τα αλγεβρικά πλακίδια και στη δευτέρα Γυμνασίου σε δική μας διδακτική παρέμβαση στην ενότητα της επίλυσης πρωτοβαθμίων εξισώσεων. Μας δόθηκε έτσι η δυνατότητα δούμε την επίδραση που είχε η ενσωμάτωση της χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία των μαθηματικών όταν αυτή γίνεται στη δευτέρα και συνεχίζει στην τρίτη Γυμνασίου.

Η παρέμβασή μας ήταν τετράωρης διάρκειας διαιρεμένη σε δύο δίωρες διδασκαλίες στις αλγεβρικές ενότητες της επίλυσης τριωνύμου με παραγοντοποίηση (εύρεση εμβαδού ορθογωνίου, βλ. Πίνακας 3, α-β-γ) και της μελέτης τριωνύμου. Οι παρεμβάσεις μας ήταν αποσπασματικές με την έννοια ότι οι διδασκαλίες δεν διαδέχθηκαν η μία την άλλη αλλά μεσολάβησε αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα μεταξύ τους.

Παρότι ανάμεσα στις δύο παρεμβάσεις μεσολάβησε χρονικό διάστημα τριών μηνών οι μαθητές ανακάλεσαν εύκολα στη μνήμη τους τον ρόλο των υλικών, την αντιστοιχία τους με τα αλγεβρικά σύμβολα και τις τεχνικές εφαρμογής των.

Δεν πρέπει βέβαια να παραλείψουμε να αναφέρουμε έναν ακόμη παράγοντα που συντέλεσε στο να διατηρήσουν στη μνήμη τους τις εφαρμογές που διδάχθηκαν συμμετέχοντας στην έρευνά μας, την εξοικείωση τους με τα υλικά από την προηγούμενη τάξη.

Από την επιτυχή συμπλήρωση του επαναληπτικού φύλλου εργασίας (βλ. το παρακάτω Σχήμα 7), που αντιστοιχούσε στην ενότητα επίλυσης και μελέτης τριωνύμου φάνηκε ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών απέδωσε θετικά αποτελέσματα. Όλοι οι μαθητές κινήθηκαν με άνεση από τη γεωμετρική παράσταση στην αλγεβρική πράγμα που συμπεραίνεται από το ότι σε όλα τα φύλλα έχουν σχεδιαστεί σωστά τα σχήματα με τα αλγεβρικά πλακίδια και έχουν αναγραφεί οι αντίστοιχοι αλγεβρικοί τύποι όπως φαίνεται στις παρακάτω υποδειγματικές απαντήσεις.


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα
Κατασκεύασε το τετράγωνο με τα δοθέντα σχήματα
Αλγεβρική παράσταση
Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του
Πλευρές
Εμβαδό
Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;
Με ποιά άλλη έκφραση εκτός αυτής του τριωνύμου θα μπορούσες να χαρακτηρίσεις το ανωτέρω σχήμα
Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας (Δ=β²-4αγ)
Δ=0

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα
Κατασκεύασε το ορθογώνιο με τα δοθέντα σχήματα
Αλγεβρική παράσταση
3x+x²
Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του
Πλευρές x+3, x
Εμβαδό (3+x)·x
Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;
-3,0
Ποιά γενική παρατήρηση θα μπορούσαμε να κάνουμε για αντίστοιχες περιπτώσεις;
Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας (Δ=β²-4αγ)

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα
Αλγεβρική παράσταση
x²-4
Συμπλήρωσε με κατάλληλα σχήματα τα δοθέντα ώστε να μπορείς να κατασκευάσεις τετράγωνο χωρίς να μεταβληθεί η αξία της παράστασης.
Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του
Πλευρές x+2 x-2
Εμβαδό (x-2)(x+2)
Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;
-2, +2
Με ποιά άλλη έκφραση εκτός αυτής του τριωνύμου θα μπορούσες να χαρακτηρίσεις το ανωτέρω σχήμα;
Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας (Δ=β²-4αγ)

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα
Αλγεβρική παράσταση
x²+3x+2
Κατασκεύασε το ορθογώνιο με τα δοθέντα σχήματα
Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του
Πλευρές x+2, x+1
Εμβαδό (x+2)(x+1)
Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;
-2, -1
Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας (Δ=β²-4αγ)
Δ=β²-4αγ=3²-4·1·2=9-8=1

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα
Μπορείς να κάνεις τετράγωνο με συμπλήρωση σχημάτων όπως προηγουμένως χωρίς να αλλάξεις την αξία της παράστασης;
x²+4
Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας

Σχήμα 7

Οι μαθητές με την κατασκευή ορθογωνίου, που αντιστοιχούσε σε δοθείσα αλγεβρική παράσταση, την εύρεση του μήκους των πλευρών του και του εμβαδού του οδηγήθηκαν στον προσδιορισμό των τιμών της μεταβλητής που μηδένιζε το εμβαδόν ανακαλύπτοντας παράλληλα και μελετώντας κατά περίπτωση τις διάφορες μορφές του τριωνύμου.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του επαναληπτικού φύλλου εργασίας (βλ. το πιο πάνω Σχήμα 7).

Άσκηση	Αλγεβρική παράσταση	πλευρές	Εμβαδό	Ρίζες	Διακρίνουσα
	12	11	12	6	10
	12	9	12	7	4
	12	11	11	8	8
	7				7
	12	12	12	9	8
	12	12	12	9	8

Πίνακας αποτελεσμάτων επαναληπτικού Φύλλου Εργασίας

3.5. 10ο Γυμνάσιο Βόλου (2006-2007)

Το 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης Βόλου θα λέγαμε ότι «σήκωσε» το κύριο βάρος της έρευνας μας, αφού είναι το σχολείο που εφαρμόσαμε την πιο ουσιαστική μη αποσπασματική πιλοτική μας παρέμβαση τη σχολική χρονιά 2006-2007 και στη συνέχεια την ολοκληρωμένη κύρια παρέμβαση μας την επόμενη σχολική χρονιά 2007-2008, στην οποία και στηρίχθηκε η έρευνά μας.

Την παρέμβαση αυτή τη χαρακτηρίζουμε μη αποσπασματική διότι έγινε σε δύο τμήματα της τρίτης Γυμνασίου, ήταν δεκάωρης διάρκειας για κάθε τμήμα και οι μαθητές διδάχθηκαν έστω και συνοπτικά όλες τις ενότητες που διερευνούμε σε αυτή τη διατριβή. Δεν θα πρέπει επίσης να παραληφθεί ότι αποτέλεσε και την «ευκαιρία» να «εκπαιδεύσουμε» τον καθηγητή τάξης σε ρόλο συνεργάτη ώστε να έχουμε ουσιαστική βοήθεια στην οργάνωση και την εύρυθμη λειτουργία της τάξης κατά την κύρια παρέμβασή μας.

Για τον σκοπό αυτό υπήρχε συνεργασία μαζί του για τον τρόπο με τον οποίον θα γινόταν η παρουσίαση παραδειγμάτων και η επίλυση ασκήσεων στα μαθήματα που ακολουθούσαν το μάθημα παρέμβασης. Συμφωνήσαμε να γίνεται αναφορά στην εξεικόνιση των αλγεβρικών παραστάσεων με τα αλγεβρικά πλακίδια και σε κάθε περίπτωση που παρουσιαζόταν τυχόν απορίες πάνω σε αλγεβρικές έννοιες αυτές να λύνονται σε συνάρτηση με τα υλικά. Σημειώνουμε ότι η διδακτική μέθοδος που χρησιμοποιούσε ο καθηγητής τάξης ήταν η μετωπική διδασκαλία.

Στοιχεία ενδιαφέροντα αντλήσαμε από τις παρατηρήσεις που κάναμε στην τάξη, από ανταλλαγή απόψεων με τους μαθητές των ομάδων, από το τεστ (βλ. Πίνακας 1, 2α) που συμπλήρωσαν μετά τις παρεμβατικές μας διδασκαλίες, από τις ατομικές συνεντεύξεις όλων των μαθητών και του καθηγητή τάξης στο τέλος της σχολικής χρονιάς.

Εντύπωση μας έκανε η απόλυτη προσκόλληση των μαθητών στο συμβολικό μοντέλο των αλγεβρικών παραστάσεων, που τους εμπόδιζε να «διαβάζουν» την εικόνα που δημιουργούσαν με τα αλγεβρικά πλακίδια, με αποτέλεσμα πολλές φορές να οδηγούνται σε λανθασμένα συμπεράσματα παρότι το πρόβλημα είχε επιλυθεί σωστά με τα χειραπτικά υλικά. Η αδυναμία αυτή των μαθητών να «διαβάσουν» την εικόνα που δημιούργησαν με τα χειραπτικά υλικά, να στηριχτούν σε αυτή και να την «μεταφράσουν» με χρήση συμβόλων ξεπεράστηκε σε μεγάλο βαθμό στην κύρια παρέμβασή μας χάρις στις πολλές ασκήσεις που δώσαμε και απαιτούσαν συνδυασμό της γεωμετρικής μορφής με την αλγεβρική της αναπαράσταση.

Αυτό το πετύχαμε με δραστηριότητες στα φύλλα εργασίας όπου ο μαθητής έπρεπε να εκφράσει το γεωμετρικό μοντέλο των αλγεβρικών πλακιδίων συμβολικά με αλγεβρικές παραστάσεις και αντιστρόφως. Κάποιος μαθητής στη συνέντευξή του είπε: *«Στην αρχή δεν το ψιλοπίστεψα* [την επίλυση με τα αλγεβρικά πλακίδια]. *Ο τρόπος που γράφαμε και το λύναμε* [παραδοσιακά] *μου φάνηκε πιο σίγουρος. Είναι λάθος βέβαια γιατί άλλο να βλέπεις κάτι με τα μάτια σου και άλλο να το…λύνεις»*

Στους παρακάτω πίνακες 1, 2 και 3 αναγράφονται τα αποτελέσματα από το τεστ που συμπλήρωσαν οι μαθητές όλων των τμημάτων (Γ1, Γ2, Γ3) στο τέλος της παρέμβασης που περιελάμβανε τις ενότητες των ταυτοτήτων.

Τα αποτελέσματα του τμήματος παρέμβασης Γ2.

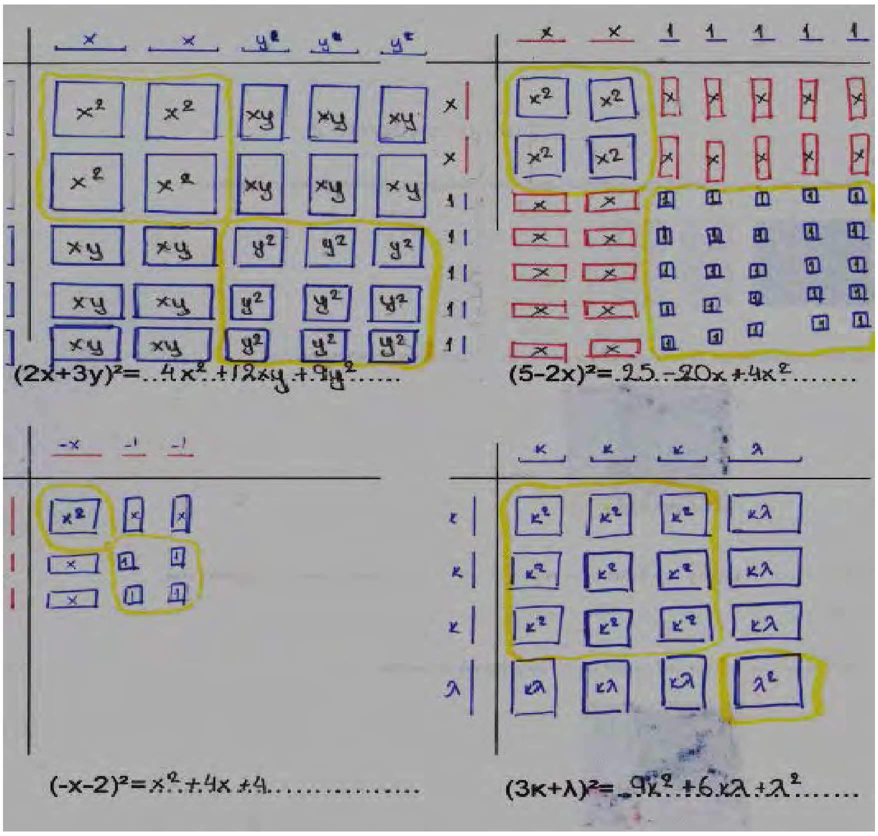
Γ 2	**Τμήμα παρέμβασης**		Σύνολο μαθητών 19
	Αντιστοιχίστε την παράσταση της αριστερής στήλης με την αντίστοιχη της δεξιάς στήλης		
	Σωστή απάντηση		Λάθος απάντηση
$(2x-1)^2$	13	68%	6
$(-2x-1)^2$	9	47%	10
$a^2- x^2$	13	68%	6
$x^2 - a^2$	16	82%	3
$x^2 + a^2$	5*	26%	14

Πίνακας 1

*Στο τμήμα Γ2 (τμήμα παρέμβασης) παρατηρήσαμε αύξηση στο ποσοστό των σωστών αντιστοιχίσεων για το $x^2+\alpha^2$ αποτέλεσμα που διαφοροποιείται σημαντικά από τα άλλα τμήματα τόσο του ελέγχου όσο και του άλλου τμήματος παρέμβασης.

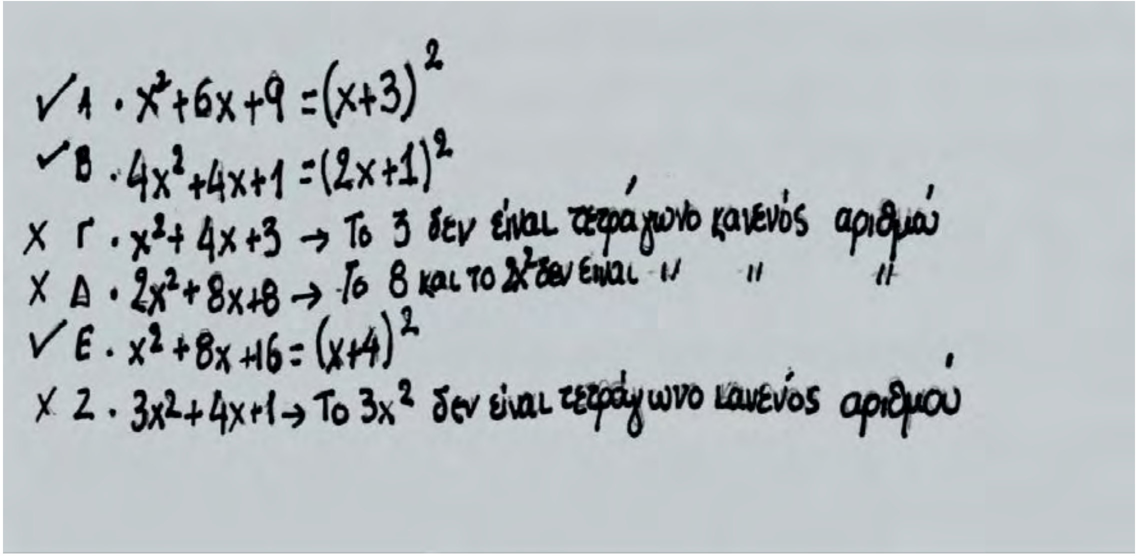
Την εξήγηση για τη διαφοροποίηση αυτή από το Γ3 (τμήμα παρέμβασης) την αναζητήσαμε στο περιεχόμενο των παρεμβατικών μας διδασκαλιών. Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι στο τμήμα Γ2 είχαμε κάνει μια σειρά εφαρμογών με πίνακα διπλής εισόδου που λόγω έλλειψης χρόνου δεν έγιναν στην ίδια έκταση στο τμήμα Γ3.

Χρησιμοποιήσαμε τον πίνακα διπλής εισόδου με στόχο να βοηθήσουμε τους μαθητές να εντοπίσουν το λάθος που κάνουν να παραλείπουν κατά την ύψωση στο τετράγωνο του συντελεστή του x^2, να το κατανοήσουν και να το διορθώσουν. Για την επιτυχία του στόχου μας σχεδιάσαμε δραστηριότητες με χρήση πινάκων διπλής εισόδου όπως οι παρακάτω:



Άσκηση με πίνακα διπλής εισόδου

Από τους μαθητές ζητήσαμε, όπως φαίνεται και στην άσκηση, να βάλουν σε κύκλο τα τετράγωνα που δημιουργήθηκαν και να παρατηρήσουν τον αριθμό των επιμέρους τετραγώνων που τα αποτελούσαν. Αυτό τους οδήγησε να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι όταν ο συντελεστής του x είναι 2, 3, 5, 6,… τότε στην ανάπτυξη του τετραγώνου του αθροίσματος ο συντελεστής του x^2 θα πρέπει να είναι αντίστοιχα 4, 9, 16, 25, 36,… δηλαδή το τετράγωνο του συντελεστή (βλ. το επόμενο Σχήμα 8).



Σχήμα 8

Οι παρατηρήσεις αυτές, η ύπαρξη δηλαδή ή όχι δύο τετραγώνων στη θέση του δευτεροβάθμιου παράγοντα και του σταθερού όρου, μας έδωσαν την αφορμή να συζητήσουμε και το αντίστροφο δηλαδή πότε ένα τριώνυμο θα μπορεί να είναι ανάπτυγμα τελείου τετραγώνου. Το όφελος αυτής της προσέγγισης ήταν ότι οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα με μια «πρώτη ματιά» να αποκλείουν μορφές τριωνύμων που δεν θα μπορούσαν να είναι αναπτύγματα τέλειων τετραγώνων.

Τα αποτελέσματα του τμήματος παρέμβασης Γ3

Γ 3	**Τμήμα παρέμβασης**		Σύνολο μαθητών 16
	Αντιστοιχίστε την παράσταση της αριστερής στήλης με την αντίστοιχη της δεξιάς στήλης		
	Σωστή απάντηση		Λάθος απάντηση
$(2x-1)^2$	11	68%	5
$(-2x-1)^2$	11	68%	5
$a^2- x^2$	13	2%	3
$x^2 - a^2$	14	81%	2
$x^2 + a^2$	2*	12.5%	14

Τα αποτελέσματα του Γ3, τμήμα παρέμβασης, όπως εμφανίζονται στον πιο πάνω πίνακα, δεν διαφοροποιούνται ιδιαίτερα από εκείνα του Γ2, εκτός της τελευταίας αντιστοίχισης για την οποία αναφερθήκαμε ιδιαιτέρως στον πίνακα του Γ2. Παρατηρώντας όμως τα αποτελέσματα του τμήματος ελέγχου στον πίνακα που ακολουθεί γίνεται αντιληπτό ότι είναι εμφανώς διαφοροποιημένα ως προς τα αρνητικά σε σχέση με εκείνα των τμημάτων παρέμβασης Γ2, Γ3.

Τα αποτελέσματα του τμήματος ελέγχου Γ1

Γ 1	**Τμήμα ελέγχου**	Σύνολο μαθητών 15
	Αντιστοιχίστε την παράσταση της αριστερής στήλης με την αντίστοιχη της δεξιάς στήλης	
	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση
$(2x-1)^2$	1**	14
$(-2x-1)^2$	7 47%	8
$a^2 - x^2$	9 60%	6
$x^2 - a^2$	10 67%	5
$x^2 + a^2$	1	

** Αξίζει να αναφερθεί ότι σε 8 από τα 14 λανθασμένα γραπτά παρατηρούμε ότι οι μαθητές αντιστοιχούν το $(2x-1)^2$ στο $2x^2 - 4x + 1$ δηλαδή κατά την εφαρμογή του τύπου κάνουν το σύνηθες λάθος της μη ύψωσης στο τετράγωνο του συντελεστή του x . Το ίδιο λάθος παρατηρείται μόνο σε ένα γραπτό στα τμήματα παρέμβασης Γ3 και Γ2 αντίστοιχα. Θεωρούμε λοιπόν ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων συνέβαλε σημαντικά στον περιορισμό αυτού του λάθους στα τμήματα παρέμβασης καθώς και η χρήση του πίνακα διπλής εισόδου.

Με το τέλος των διδασκαλιών μας ζητήσαμε προσωπικά απ' τον καθένα μαθητή να μας απαντήσει στα ίδια ερωτήματα που θέσαμε και στην κύρια παρέμβασή μας (βλ. σελ.178).

Στις συνεντεύξεις τους οι μαθητές εκφράστηκαν θετικά για την εμπειρία που είχαν με τα χειραπτικά υλικά, παρότι οι παρεμβάσεις μας ήταν «διαλείμματα» στην καθημερινότητα τους που ήταν το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας. Χαρακτήρισαν το μάθημα *«πολύ* *καλύτερο»* και *«γενικά πιο ενδιαφέρον από ένα καθημερινό μάθημα».* Μίλησαν για κατανόηση τύπων λέγοντας *«κατάλαβα βασικά πως βγαίνουν οι τύποι γιατί είναι δύσκολο όταν σου δίνουν ένα σταθερό τύπο και σου λένε ‘‘έχεις αυτό κάνεις αυτό’'. Τώρα μάθαμε πως βγαίνουν αυτοί οι τύποι και δεν έρχονται ‘‘ουρανοκατέβατοι’’».*

Αναφέρθηκαν επίσης στα σύμβολα, στους αριθμούς και στην πορεία της σκέψης και μας είπαν *«Ναι, κατάλαβα καλύτερα κάποια σύμβολα, κάποιες αλγεβρικές παραστάσεις και στην αρχή δεν ήξερα πώς να τις λύσω αλλά μετά με αυτά τα τετραγωνάκια κατάλαβα περίπου ποια είναι η σκέψη για τη σωστή λύση της άσκησης», «Με βοήθησαν πάρα πολύ να κατανοήσω τα μαθηματικά, τους αριθμούς γιατί όταν τα βλέπουμε σε σχήμα, είναι πιο εύκολα από ότι να τα βλέπω γραμμένα σε ένα πίνακα όλο νούμερα και να τα βλέπουμε στην πράξη όπως γίνονται».* Ενώ κάποια μαθήτρια συμπλήρωσε *«Εγώ που υποτίθεται είμαι καλή, με αυτά κατάλαβα πράγματα που…συμπλήρωσα κάποια κενά»*

Εκφράστηκαν επίσης θετικά και για την εμπειρία τους στην ομάδα γιατί *«κάναμε μαθηματικά και δεν ήταν μονότονο μάθημα, μόνο να κάναμε και κάτι άλλο που θα επικοινωνούσαμε και με τους άλλους και θα ήμασταν χωρισμένοι σε ομάδες, θα είχαμε τα σχήματα, πως τα λένε αυτά (αλγεβρικά πλακίδια), και πιστεύω και μας βοηθάει και είναι ψυχαγωγικό».* Μας προέτρεψαν μάλιστα ότι *«πρέπει να γίνεται αυτό γιατί βοηθάει παρά πολύ τα παιδιά και όχι στην τρίτη Γυμνασίου αλλά από την πρώτη για να τα καταλάβουμε καλύτερα»* γιατί *«Εντάξει καλή είναι η θεωρία αλλά αν έχεις κάτι χειροπιαστό είναι πολύ καλύτερα».*

Ένα σημαντικό θέμα που υπογραμμίστηκε στις συνεντεύξεις τους ήταν η διαφοροποίηση της στάσης των αδύνατων μαθητών στο μάθημα. Πριν όμως αναφερθούμε σε συγκεκριμένες αναφορές που έγιναν για αυτή την κατηγορία μαθητών από τους συμμαθητές τους είναι χρήσιμο να «ορίσουμε» τον αδύνατο μαθητή και να δώσουμε τα χαρακτηριστικά του .

Για τους Hammersley & Voods «αδύνατος μαθητής» είναι ο μαθητής εκείνος που αλληλοδρά «φτωχά» με τους συμμαθητές του και παράλληλα αποφεύγει να εκφράζεται ενώπιον της τάξης. Πιστεύει ότι το να είσαι έξυπνος ή όχι είναι μια ικανότητα αμετάβλητη. Έχει χαμηλή αυτοπεποίθηση, υψηλό επίπεδο άγχους, αίσθημα αποτυχίας που τον οδηγούν σε απόσυρση από τις δραστηριότητες της τάξης (1976, σελ., 121).

Ο Schoenfeld (2011, σελ. 4) ορίζει την αυτοπεποίθηση και γενικότερα τις πεποιθήσεις ως τις «προσωπικές αντιλήψεις του ατόμου, οι οποίες διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο αυτό αντιλαμβάνεται και εμπλέκεται στη μαθησιακή διαδικασία». Διάφοροι ερευνητές επισημάνουν τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν οι πεποιθήσεις στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά αφού επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά (Gomez-Chacon, 2000).

Το χαμηλό λοιπόν επίπεδο αυτοπεποίθησης που έχει κάποιος μαθητής σε συνδυασμό με το υψηλό επίπεδο άγχους, το αίσθημα δηλαδή έντασης και αγωνίας που παρεμβαίνει στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος, λογικής σκέψης και στην παρουσίαση απλών ή σύνθετων μαθηματικών χειρισμών και υπολογισμών, τον οδηγούν σε αρνητική στάση απέναντι στον εαυτό του και στη μαθησιακή διαδικασία, σε συνεχείς αποτυχίες που καταλήγουν σε χαμηλή βαθμολογία στο μάθημα.

Στην έρευνά μας τα «βλέμματα» μιας σημαντικής ομάδας μαθητών συγκέντρωσαν, σε πλήρη σύμπτωση απόψεων, μαθητές που προηγουμένως παρουσίαζαν σαφή αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα είτε σε επίπεδο συμμετοχής είτε σε επίπεδο συγκέντρωσης και άλλαξαν στάση όταν το μάθημα έγινε με τα αλγεβρικά πλακίδια. Μας ανέφεραν λοιπόν ότι εντυπωσιάστηκαν από το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή στο μάθημα που έδειξαν οι «αδύνατοι» συμμαθητές τους, η Μαρία, ο Γιώργος, η Ελένη.

Η Παναγιώτα μας είπε για τη Μαρία τη συμμαθήτριά της με την οποία εκείνη τη χρονιά μοιραζόντουσαν το ίδιο θρανίο ότι *«Απλά τη Μαρία την είδα πριν ξεκινήσουμε να κάνουμε με σας ήταν λίγο αδύνατη αλλά μετά το κατάλαβε περισσότερο και τώρα μπορεί να λύνει πιο άνετα τις ασκήσεις... Πιστεύω πως κέρδισε ναι, γιατί ήταν αυτή που προσπαθούσε και μου έλεγε ‘‘έλα ρε Παναγιώτα πες μου τι θα κάνουμε, πώς θα το σκεφτούμε’’, η Μαρία ειλικρινά προσπαθούσε »* και συμπλήρωσε *«Με τα σχήματα είδα ότι βελτιώθηκε, αυτό το είδα και στο διαγώνισμα έγραψε καλά κιόλας».*

Παρόμοιες παρατηρήσεις έκανε και ο Κώστας και ο Χρήστος για τον συμμαθητή τους τον Γιώργο που κατά γενική ομολογία δεν συμμετείχε παλαιότερα στα μαθήματα. Τον Γιώργο τον γνωρίσαμε και εμείς με τα χαρακτηριστικά, του αδιάφορου μαθητή που καταφεύγει στις σκανδαλιές στην ώρα του μαθήματος για να κινεί έστω και αρνητικά την προσοχή των άλλων. Όταν λοιπόν τους ρωτήσαμε στις συνεντεύξεις αν παρατήρησαν συμμαθητές τους να έχουν αλλάξει στάση απέναντι στο μάθημα μετά την εμπειρία που είχαν με τα αλγεβρικά πλακίδια μας υπέδειξαν τον Γιώργο.

Ο Κώστας μας είπε *«Ε…ας πούμε ο Κ….*[επώνυμο του Γιώργου] *που δεν ενδιαφέρεται και πολύ είδα ότι κάπως εργάστηκε γιατί του άρεσε γιατί δεν ξαναείχε κάνει ποτέ κάτι τέτοιο»* και ο Χρήστος επιβεβαίωσε *«Ναι πιστεύω ότι όλους μας τράβηξε αυτό το πράγμα μέχρι και ο Γιώργος που για τα άλλα μαθήματα αδιαφορεί πιάστηκε με τα μαθηματικά του άρεσαν τα σχήματα, ήταν ένα παιγνίδι».*

Αλλά τόσο η Μαρία όσο και ο Γιώργος όταν τους ζητήσαμε να μας πούνε τη γνώμη τους για την πρόταση μαθήματος που τους δώσαμε μας είπαν:

Μαρία: «*Πιστεύω ότι είναι πιο εύκολα τώρα, μου φαίνονται πιο εύκολα…έχω εικόνα και δεν είναι μόνο αριθμοί αλλά είναι και ‘‘πράγματα’’*» και κάνοντας αυτοαξιολόγηση συμπλήρωσε «*Πιστεύω ότι ήμουν μια μαθήτρια μέτρια προς αδύνατη και τώρα πιστεύω ότι είμαι μέτρια*».

Γιώργος: «*…καλύτερα πάντως αυτό από το να γράφεις συνέχεια, …μερικά παιδιά στην τάξη που στα μαθηματικά δεν ήταν τόσο καλοί, όπως και εγώ, μετά από αυτά που κάναμε με τα τετράγωνα, βοηθήθηκαν πιο πολύ και να λύνουμε ασκήσεις και να τα καταλαβαίνουμε καλύτερα και να μας αρέσει πιο πολύ και να παρακολουθούμε πιο πολύ*» και πρόσθεσε «*Γενικά και εγώ στα μαθηματικά πίστευα ότι δεν πρόκειται, δεν ξέρω γιατί, πίστευα ότι δεν πρόκειται κάποιοι που δεν προσέχουν να προσέχουν. Αλλά με αυτό …τους φάνηκε σαν παιγνίδι, όπως και εμένα και έτσι προσπάθησαν πιο πολύ*».

Οι γνώμες των μαθητών αναφορικά με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στο μάθημα ήταν θετικές και εστιάστηκαν στο ενδιαφέρον που προκάλεσαν στους ίδιους και στους συμμαθητές τους. Μεταξύ των άλλων απόψεων που μας εξέθεσαν στις συνεντεύξεις τους επιλέξαμε ως πιο ενδιαφέρουσες κατά τη γνώμη μας αυτές των Κυριάκου, Κατερίνας και Μάνου:

Κυριάκος: «*Κάποια παιδιά έ, είχαν …ενδιαφερόντουσαν εκείνη την ώρα όταν έκαναν κάποια λύση, κάτι τέτοιο σκεφτόντουσαν και με τα τέτοια* [τα υλικά] *οπότε σκεφτόντουσαν, οπότε έβαλαν σκέψεις και με το μυαλό τους*».

Κατερίνα: *«Κάποια παιδιά που δεν έδιναν καθόλου σημασία στα μαθηματικά ή δεν τους ενδιέφερε και μόλις είδαν ότι αυτό είναι πιο ευχάριστο μαζεύτηκαν λίγο και άρχισαν να διαβάζουν παραπάνω».*

Μάνος: *«...από αυτούς τους αδιάφορους υπήρξαν και κάποιοι άρχισαν να λένε α ... μου αρέσουν τα μαθηματικά έτσι».*

Για τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος ο Δημήτρης είπε ότι *«Πιστεύω είναι πολύ σωστό γιατί ίσως τα παιδιά που δεν επιθυμούν τα μαθηματικά να ψάχνουν κάποιον άλλον τρόπο εφαρμογής για το μάθημα»* και η Αγγελική τόνισε ότι *«Με αυτόν τον τρόπο πιστεύω τότε ότι θα υπήρχαν βέβαια καλοί μαθητές, αλλά δεν θα υπήρχαν παιδιά που θα ήταν αδιάφορα».*

4. Ανακεφαλαίωση

Από τις πιλοτικές μας παρεμβάσεις συγκεντρώσαμε στοιχεία που μας βοήθησαν να προσδιορίσουμε τη μορφή και το πλαίσιο της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας στο οποίο θα κινούνταν η κύρια διδακτική μας παρέμβαση ώστε αυτή να είναι το δυνατό απαλλαγμένη από αστοχίες και αδυναμίες. Τα στοιχεία που συγκεντρώσαμε αφορούσαν τους τομείς οργάνωση τάξης, σχεδιασμό διδασκαλίας και επιλογή κατάλληλων εργαλείων για τη συλλογή στοιχείων απαραίτητων για την ποιοτική ανάλυση της έρευνας.

Ειδικότερα σε ότι αφορούσε την οργάνωση της τάξης «είδαμε» τον τρόπο αναδιάρθρωσης της διάταξης των θρανίων στο χώρο ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές σε ομάδες και να γίνεται απρόσκοπτα η χρήση των χειραπτικών υλικών και η συμπλήρωση των φύλλων δραστηριοτήτων.

Επίσης οι πιλοτικές μας παρεμβάσεις μας βοήθησαν να καταλήξουμε στον αριθμό των τεσσάρων μαθητών σε κάθε ομάδα αφού διαπιστώσαμε ότι η ομάδα με αυτή τη σύνθεση κάλυπτε τις δυνατότητες συνεργασίες μεταξύ των μελών της και ήταν «διαχειρίσιμη» από τον ερευνητή.

Αναφορικά με τον σχεδιασμό διδασκαλίας είχαμε την ευκαιρία να «δοκιμάσουμε» διαφορετικές συνθέσεις φύλλων δραστηριοτήτων και να ελέγξουμε την πληρότητά και αποτελεσματικότητά τους ως προς την εκπλήρωση των στόχων της κάθε ενότητας όπως και τη δυνατότητα συμπλήρωσης τους στο διδακτικό δίωρο. Διαπιστώσαμε επίσης ότι η επιλογή μας για δίωρη διδασκαλία του μαθήματος εκτός από εφαρμόσιμη είχε και το πλεονέκτημα της ολοκλήρωσης της ενότητας με θετική επίπτωση στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών από τον μαθητή.

Παράλληλα μας δόθηκε η δυνατότητα να «διερευνήσουμε» τον τρόπο και τον χρόνο που θα κάναμε χρήση του επιδιασκοπίου καθώς και τις δραστηριότητες στις οποίες ήταν αναγκαία η χρήση του.

Οι συνομιλίες μας με τους μαθητές στις ομάδες, οι απορίες, οι συλλογισμοί, τα επιχειρήματά που χρησιμοποιούσαν για την επίλυση των δραστηριοτήτων, όπως αυτές καταγράφηκαν στα μαγνητοφώνα των ομάδων και οι παρατηρήσεις μας αποτέλεσαν τη βάση για τη διαμόρφωση των ερωτηματολογίων αξιολόγησης και των ερωτήσεων των συνεντεύξεων.

Τέλος σημαντική ήταν η συμβολή, στην αξιολόγηση και βελτίωση του πλαισίου διδασκαλίας της κύριας παρέμβασής μας, των απαντήσεων στις ερωτήσεις που θέσαμε στις ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών των και των καθηγητών των τάξεων των πιλοτικών μας παρεμβάσεων.

Κεφάλαιο Τέταρτο

Περιγραφή της κύριας διδακτικής μας παρέμβασης

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την κύρια διδακτική μας παρέμβαση, τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε τα φύλλα δραστηριοτήτων, τα τεστ, τις συνεντεύξεις, τα φύλλα αξιολόγησης και στοιχεία που αντλήσαμε για την ποιοτική μας ανάλυση. Επίσης θα αναφερθούμε στο κλίμα της τάξης που διαμορφώθηκε κατά την παρέμβασή μας ως αποτέλεσμα του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και την επίδραση του στους αδύνατους μαθητές.

1.1. Κύρια διδακτική παρέμβαση στο 10ο Γυμνάσιο Βόλου

Την τελική μας παρέμβαση την εφαρμόσαμε στους μαθητές της τρίτης τάξης του 10ου Γυμνασίου Βόλου κατά τη σχολική χρονιά 2007-2008. Από τα τρία τμήματα της τρίτης Γυμνασίου του 10ου Γυμνασίου Βόλου και κατόπιν επιλογής ένα χρησιμοποιήθηκε ως τμήμα παρέμβασης και ένα ως τμήμα ελέγχου. Ο καθηγητής, με τον οποίο συνεργαστήκαμε, ήταν και καθηγητής τάξης σε όλα τα τμήματα της τρίτης Γυμνασίου.

Η επιλογή του τμήματος παρέμβασης έγινε από την ερευνήτρια με βασικό κριτήριο επιλογής ότι αυτό το τμήμα είχε διδαχθεί την άλγεβρα της δευτέρας τάξης από την ίδια και επομένως της ήταν ήδη γνωστές οι ενίοτε μαθησιακές δυνατότητες και δυσκολίες του κάθε μαθητή.

Επιπροσθέτως οι μαθητές του τμήματος αυτού την προηγούμενη χρονιά, είχαν «γνωρίσει» και εργαστεί για μία διδακτική ώρα με τα αλγεβρικά πλακίδια. Η διδακτική ενότητα στην οποία είχε γίνει χρήση των υλικών (την προηγούμενη χρονιά) ήταν αυτή της επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού. Οι μαθητές στην ενότητα αυτή εργάστηκαν ανά θρανίο σε ομάδες των δύο μαθητών έχοντας ανά ομάδα ένα σετ αλγεβρικών πλακιδίων και φύλλο δραστηριοτήτων.

Είχαμε λοιπόν άμεση γνώση για τις δυνατότητες των μαθητών του τμήματος αυτού τόσο στον τομέα που αφορούσε την επίδοσή τους στο μάθημα όσο και σε κείνον που είχε σχέση με τη συμπεριφορά τους στην τάξη και γενικότερα τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Οι γνώσεις μας αυτές ήταν πολύ χρήσιμες στην έρευνά μας αφού θα μας βοηθούσαν να εντοπίσουμε τις τυχόν διαφοροποιήσεις που θα παρουσίαζε ο καθένας τους στη συμπεριφορά του στην τάξη, στη συμμετοχή του στο μάθημα, στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών, στη στάση του δηλαδή γενικότερα απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών.

Το τμήμα παρέμβασης αποτελούνταν από είκοσι τέσσερες (24) μαθητές μεταξύ των οποίων ήταν και τρεις αλλοδαποί, δύο αγόρια και ένα κορίτσι, με καταγωγή αλβανική. Οι περισσότεροι μαθητές του τμήματος είχαν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα.

1.2. Η διαδικασία

Στην κύρια παρεμβατική μας διδασκαλία στο 10ο Γυμνάσιο κατά το σχολικό έτος 2007-2008 ο καθηγητής της τάξης παρέμβασης συμμετείχε ενεργά στα δρώμενα της τάξης ακολουθώντας τις οδηγίες της ερευνήτριας σχετικά με την πορεία του μαθήματος. Ο ίδιος καθηγητής δίδασκε και στο τμήμα ελέγχου γεγονός που έδινε πρόσθετο πλεονέκτημα στην έρευνά μας αφού οι παρατηρήσεις του είχαν και στοιχεία σύγκρισης όπως αυτά προέκυπταν από τα δύο διδακτικά μοντέλα, την μετωπική, δασκαλοκεντρική διδασκαλία που εφάρμοζε ο ίδιος και την ομαδοσυνεργατική μέθοδο διδασκαλίας με χρήση χειραπτικών υλικών που εφαρμόζαμε εμείς. Επισημαίνουμε ότι ο ίδιος είχε επιφυλάξεις ως προς την επιτυχία της μεθόδου που προτείναμε και της επιτυχούς εφαρμογής της στην τάξη.

Στους μαθητές δεν δόθηκε διαγνωστικό ερωτηματολόγιο, στην αρχή της κύριας παρέμβασης, διότι οι ενότητες που διδάχθηκαν στα μαθηματικά της δευτέρας Γυμνασίου δεν μπορούσαν να αποτελέσουν βάση σύγκρισης για τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν από την εισαγωγή των χειραπτικών υλικών στις αλγεβρικές ενότητες των ταυτοτήτων παραγοντοποίησης και επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Χρησιμοποιήσαμε για τον λόγο αυτό τη βαθμολογία των μαθητών της προηγούμενης τάξης ως στοιχείο αναφοράς του επίπεδου μάθησης και βεβαίως την προσωπική γνώμη της ερευνήτριας/καθηγήτριας τάξης στη δευτέρα Γυμνασίου.

Η επιλογή του τμήματος ελέγχου και ο έλεγχος ομοιογένειας του δείγματος έγινε με τη συμπλήρωση από τους μαθητές και των τριών τμημάτων ενός διαγνωστικού ερωτηματολογίου με ασκήσεις οι οποίες αφορούσαν την επίλυση τριών εξισώσεων πρώτου βαθμού διαφορετικού βαθμού δυσκολίας και την εύρεση του εμβαδού και της περιμέτρου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (βλ. πιο κάτω Σχήμα 9).

Όνομα...Τμήμα..............................

Ημερομηνία..

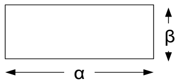
Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. x+2 = -5...

2. 6x+15 = 3...

3. 3 (x+2) + 4 (1-x) = x - 2...
....
....

4. Γράψτε με τι ισούται το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει πλάτος α και μήκος β.



Εμβαδό ορθογωνίου = ...

5. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 24 cm. Το πλάτος του είναι 5 cm. Ποιό είναι το μήκος του;

Σχήμα 9

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το τμήμα $Γ_2$ που επιλέξαμε για την παρέμβαση παρουσίαζε σχετικά μεγαλύτερο βαθμό ομοιογένειας με το τμήμα $Γ_3$. Τα συγκριτικά στοιχεία παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Τμήμα/Βαθμολογία	01-03	04-08	Συνολικά γραπτά >15
Γ1 (26 μαθητές)	12 46%	9 34,5%	3 14%
Γ2 (24 μαθητές)		18 75%	2 16.5%
Γ3 (23 μαθητές)	10 40%	7 33%	1 17%

Αποτελέσματα διαγνωστικού ερωτηματολογίου

Παρατηρούμε ότι η βαθμολογία των μαθητών του Γ1 παρουσιάζει μεγάλη συσσώρευση στα άκρα δηλαδή στο «όλα λάθος» και στο «όλα σωστά» και επομένως μεγάλη στρέβλωση και ανισοκατανομή στην απόδοση της τάξης. Στα άλλα δύο τμήματα το φαινόμενο δεν είναι τόσο έντονο χωρίς όμως να ισχυριζόμαστε ότι η κατάσταση είναι πολύ καλύτερη.

Στο τμήμα Γ2 κανείς μαθητής δεν παρουσίασε διαγνωστικό ερωτηματολόγιο με λανθασμένες όλες τις απαντήσεις στις ασκήσεις. Όλοι οι μαθητές του τμήματος αυτού απάντησαν σωστά για το εμβαδό του παραλληλογράμμου σε σύγκριση με τα τμήματα Γ1 και Γ3 όπου στην αντίστοιχη ερώτηση απαντούν σωστά 12 μαθητές του κάθε τμήματος. Η διαφοροποίηση αυτή κατά την άποψή μας οφείλεται στο ότι οι μαθητές του Γ2 (το τμήμα που δίδαξε η ερευνήτρια) γνώρισαν τα αλγεβρικά πλακίδια στη δευτέρα Γυμνασίου, όπως αναφέραμε πιο πάνω, στις εξισώσεις του πρώτου βαθμού.

Στο ερώτημα γιατί τότε δεν επιλύουν σωστά τις ασκήσεις που αφορούν την εξίσωση πρώτου βαθμού, ως πιθανή απάντηση θα δίναμε το ότι η παρέμβαση μας ήταν χρονικά πολύ περιορισμένη και αποσπασματική με αποτέλεσμα οι μαθητές να συγκρατήσουν στη μνήμη τους μόνο τα εμβαδά των σχημάτων που συνθέτουν το χειραπτικό υλικό.

Η κύρια παρέμβαση μας διήρκεσε έξι μήνες και περιελάμβανε μία εβδομαδιαία δίωρη διδασκαλία όπως ακριβώς είχε οριστεί από το αναλυτικό πρόγραμμα. Επιλέξαμε να είναι ένα δίωρο την εβδομάδα και όχι δύο μονόωρες διδασκαλίες, όπως συνήθως γίνεται, για να έχουμε άνεση χρόνου να αναπτύξουμε το μοντέλο διδασκαλίας που σχεδιάσαμε και να έχουμε τη δυνατότητα να ολοκληρώνουμε την ενότητα και τις δραστηριότητες που αντιστοιχούσαν σε αυτή. Ο μαθητής έτσι, σε κάθε συνάντησή μας, είχε την πλήρη ανάπτυξη της αλγεβρικής έννοιας που διδασκόταν. Η διδασκαλία των ενοτήτων ακολούθησε το αναλυτικό πρόγραμμα που προτεινόταν τότε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

2. Αναλυτική περιγραφή των κυρίων παρεμβάσεων στο 10ο Γυμνάσιο κατά το σχολικό έτος 2007-2008

Η κύρια παρέμβαση μας έγινε κατά το σχολικό έτος 2007-2008 στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης Βόλου. Η διδασκαλία έγινε σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης με χρήση χειραπτικών υλικών, των αλγεβρικών πλακιδίων, χρήση επιδιασκοπίου, μαγνητοφώνου σε κάθε ομάδα και φύλλα δραστηριοτήτων. Οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των τεσσάρων χωρίς επιλεγμένη σύνθεση.

Η έρευνά μας στόχευε να μελετήσει την εφαρμογή της διδακτικής μας πρότασης σε «πραγματικές» συνθήκες γι’ αυτόν τον λόγο τηρήθηκαν όλοι οι «περιορισμοί» που έχει η διδασκαλία σε μία τάξη ενός σχολείου, που δεν έχει και τις καλύτερες συνθήκες λειτουργίας, όπως για την περίπτωσή μας ήταν η συστέγαση τριών σχολείων. Με τον όρο «περιορισμοί» εννοούμε χρονικούς περιορισμούς (35-40 λεπτά ωριαίας διδασκαλίας) και περιορισμούς χώρου (διαστάσεις τάξης, χωροθέτηση θρανίων, δυνατότητα τοποθέτησης και λειτουργίας επιδιασκοπίου).

Συναποφασίσαμε με τον καθηγητή τάξης να γίνεται το δίωρο εβδομαδιαίο μάθημα της άλγεβρας σε μία μέρα και να μην «σπάζει» σε δύο μονόωρες διδασκαλίας σε δύο διαφορετικές μέρες της εβδομάδος, ώστε να υπάρχει χρόνος να αναπτύξουμε τις δραστηριότητες με τα υλικά. Το ωρολόγιο αυτό πρόγραμμα του τμήματος που αφορούσε το μάθημα της άλγεβρας εφαρμόστηκε κατά τη διάρκεια όλης της χρονιάς ανεξαρτήτως από τη χρονική διάρκεια της δικής μας παρέμβασης.

Η επιλογή μας αυτή υπήρξε αφενός μεν προϊόν των πιλοτικών μας παρεμβάσεων, κυρίως βέβαια αυτής της προηγούμενης χρονιάς στο ίδιο σχολείο που ήταν και η πιο πλήρης και αφετέρου της διδακτικής μας εμπειρίας των 22 χρόνων που μας είχε δείξει ότι συνήθως έχεις καλύτερα αποτελέσματα στη μάθηση όταν έχεις τη δυνατότητα να ολοκληρώσεις την παράδοση της καινούργιας ενότητας και τις εφαρμογές της.

Όταν η ενότητα «σπάζει» για παράδειγμα σε δύο διδακτικές ώρες σε διαφορετικές μέρες χάνεται τη δεύτερη ώρα πολύτιμος διδακτικός χρόνος σε επαναλήψεις των εννοιών που αναπτύχθηκαν κατά την πρώτη, χρόνος όμως που είναι αναγκαίος για προβληματισμό, εμβάθυνση και περαιτέρω ανάπτυξη των εννοιών αυτών. Ο καθηγητής δεν έχει το χρονικό περιθώριο να διερευνήσει το επίπεδο μάθησης της διδαχθείσας ενότητας, του λείπει ο χρόνος να συνομιλήσει με τους μαθητές του να «ανοίξει» τις έννοιες και να κάνει το αφηρημένο κατανοητό.

Η συνομιλία αυτή με τους μαθητές, κατά τη γνώμη μας, κρίνεται αναγκαία διότι θα δώσει στη σχέση μαθητή – καθηγητή τη διάσταση εκείνη που θα διευκολύνει την επικοινωνία και θα εμπνεύσει εμπιστοσύνη στον μαθητή να εκφράσει ελεύθερα τον προβληματισμό του για τις έννοιες που δεν κατανοεί. Τα στενά χρονικά περιθώρια αναγκάζουν τον δάσκαλο γενικότερα να μένει σε ρόλο λέκτορα και όχι σε θέση προπονητή όπως αναφέρουν οι Davis και Maher (1997). Γι' αυτούς λοιπόν η θέση του δάσκαλου πρέπει να είναι πλάι στον μαθητή-αθλητή που αγωνίζεται για τη γνώση του την οποία πρέπει να αποκτήσει μέσα από την ενεργή συμμετοχή του. Κατά συνέπεια ο δάσκαλος δεν πρέπει να περιορίζει τη διδασκαλία του σε τεχνικές επίλυσης προβλήματος αλλά σε επιλογή δραστηριοτήτων που θα δώσουν τη δυνατότητα στον μαθητή να δομήσει τη γνώση μέσα από τη δική του εμπειρία.

Η άποψη αυτή ευθυγραμμίζεται με τη θέση και πρόταση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (βλ. Παράρτημα Πίνακας 12) που αναφέρει ότι: *«Ο διδάσκων θα πρέπει να οργανώσει την τάξη έτσι ώστε μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες να δώσει τη δυνατότητα και την ευκαιρία στους μαθητές του να οικοδομήσουν τη γνώση, και παράλληλα να ελαττώσει σημαντικά τον χρόνο που αφιερώνει για την παρουσίαση από τον ίδιο θεμάτων και εννοιών»*

2.1. Πως «σχεδιάσαμε» τα μαθήματα της κύριας παρέμβασης

Το κάθε μάθημα παρέμβασης σχεδιάστηκε κατά τρόπο που να ανταποκρίνεται στο πλαίσιο μαθήματος που έθετε το (τότε) Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Για τον σκοπό αυτόν καταβάλαμε προσπάθεια, σε όποια ενότητα προσφέρονταν η δυνατότητα, να συμπεριλάβουμε στα φύλλα εργασίας και ασκήσεις ή παραδείγματα του σχολικού βιβλίου.

Το κάθε μάθημα είχε την αυτοτέλειά του, δηλαδή ήταν προσανατολισμένο έτσι ώστε ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να ανακαλύψει τις καινούργιες έννοιες της διδακτικής ενότητας, να τις εφαρμόσει, να τις κατανοήσει και τέλος να καταλήξει σε γενικά συμπεράσματα, όπως για παράδειγμα στην εξαγωγή τύπων για τις έννοιες που επεξεργάστηκε και κάλυπταν μία διδακτική ενότητα.

Ο καθηγητής τάξης δεν συμμετείχε στο σχεδιασμό του μαθήματος και των φύλλων δραστηριοτήτων τα οποία προτείνονταν και υλοποιούνταν εξ' ολοκλήρου από την ερευνήτρια. Ο ρόλος της ερευνήτριας και του καθηγητή τάξης κατά την διδακτική διαδικασία περιορίζονταν στον ρόλο του βοηθού-συνεργάτη των ομάδων. Ο καινούργιος αυτός ρόλος μας στην τάξη, μας έδωσε την ευκαιρία:

να παρατηρήσουμε πιο «στενά» τον τρόπο σκέψης των μαθητών,

να ανακαλύψουμε τους καινούργιους δρόμους προσέγγισης τους,

να προβληματιστούμε για τις αδυναμίες τους, που αφορούσαν την κατανόηση των εννοιών,

να αναζητήσουμε απαντήσεις σε απορίες τους μέσα από ένα διαφορετικό μοντέλο εξηγήσεων και

να «διαβάσουμε» το μάθημα μέσα από τη ματιά του μαθητή και όχι μέσα από το πλαίσιο των δικών μας θέσεων και αντιλήψεων, που αποκτήσαμε εφαρμόζοντας επί σειρά ετών το «παραδοσιακό» μοντέλο διδασκαλίας.

Η κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της ένα σετ αλγεβρικών πλακιδίων και ένα φύλλο εργασίας ώστε να ωθούνται οι μαθητές να συνεργαστούν για την κατασκευή του σχήματος που απαιτούσε η κάθε δραστηριότητα και παράλληλα να συμμετέχουν όλα τα μέλη της ομάδας στην συμπλήρωση των στοιχείων που απαιτούσε το φύλλο δραστηριοτήτων. Υπήρχε, όπως έχουμε αναφέρει, σε κάθε ομάδα και μαγνητόφωνο για την καταγραφή των συζητήσεων μεταξύ των μελών της και μεταξύ μαθητών και ερευνήτριας.

Στα πρώτα φύλλα δραστηριοτήτων που σχεδιάσαμε ιδιαίτερο βάρος δώσαμε στη χρήση του υλικού ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές με τα αλγεβρικά πλακίδια, τόσο στην κατασκευή όσο και στην «ανάγνωση» των σχημάτων της κατασκευής. Στόχος μας ήταν να αποκτήσουν σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο βαθμό την ικανότητα να μεταβαίνουν από το γεωμετρικό/εικονικό μοντέλο στο αλγεβρικό/συμβολικό και αντιστρόφως.

Η δομή των φύλλων δραστηριοτήτων ακολούθησε σε γενικές γραμμές τη δομή των φύλλων που σχεδιάσαμε για τις πιλοτικές διδασκαλίες μας. Διαφοροποιήθηκε όμως ως προς τον αριθμό των δραστηριοτήτων διότι η παρέμβασή μας αποτελούσε την κύρια διδασκαλία της ενότητας και έπρεπε να καλύπτει όλες τις επιμέρους έννοιες στις οποίες γινόταν αναφορά στο σχολικό βιβλίο. Για να είναι μάλιστα σε θέση ο μαθητής να «διαβάσει» και να «κατανοήσει» τις ασκήσεις του βιβλίου οι οποίες δίνονταν με τη συμβολική τους μορφή εντάξαμε στα φύλλα δραστηριοτήτων και ασκήσεις του τότε σχολικού βιβλίου. Αυτές δόθηκαν με γεωμετρικές εκφράσεις, με τα αλγεβρικά πλακίδια, χωρίς τροποποίηση στη δομή τους.

Ο λόγος που μας έκανε να καταλήξουμε σε αυτόν τον σχεδιασμό μαθήματος ήταν ο μαθητής να μην απομακρυνθεί από το βιβλίο αλλά να το αποδεχθεί ως κομμάτι της όλης διαδικασίας εξίσου «φιλικό» με τα φύλλα δραστηριοτήτων που τους προτείναμε για συμπλήρωση. Του «δείχναμε» έτσι και τον εναλλακτικό τρόπο να λύσει τις ασκήσεις για το σπίτι, που του έβαζε ο καθηγητής τάξης, σε περίπτωση που η συμβολική έκφρασή τους του δημιουργούσε συναισθήματα απέχθειας και άρνησης.

Η περιγραφή των μαθημάτων που παραθέτουμε στη συνέχεια αυτής της ενότητας ακολουθεί τη χρονολογική σειρά που έγιναν στο τμήμα παρέμβασης και καλύπτουν τη διδακτέα υλη της Άλγεβρας της τρίτης Γυμνασίου που αναφέρεται στις ταυτότητες, την παραγοντοποίηση και την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

2.2 Λεπτομερής περιγραφή του κάθε μαθήματος παρέμβασης

2.2.1 Μονώνυμα (βλ. Πίνακας 12, α-β-γ)

Στόχος

Να μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν την περίμετρο και το εμβαδό δοθέντων σχημάτων και να γίνει αντιληπτή η έννοια της αλγεβρικής παράστασης, της αριθμητικής της τιμής και του τρόπου που συνδέονται.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλο εργασίας

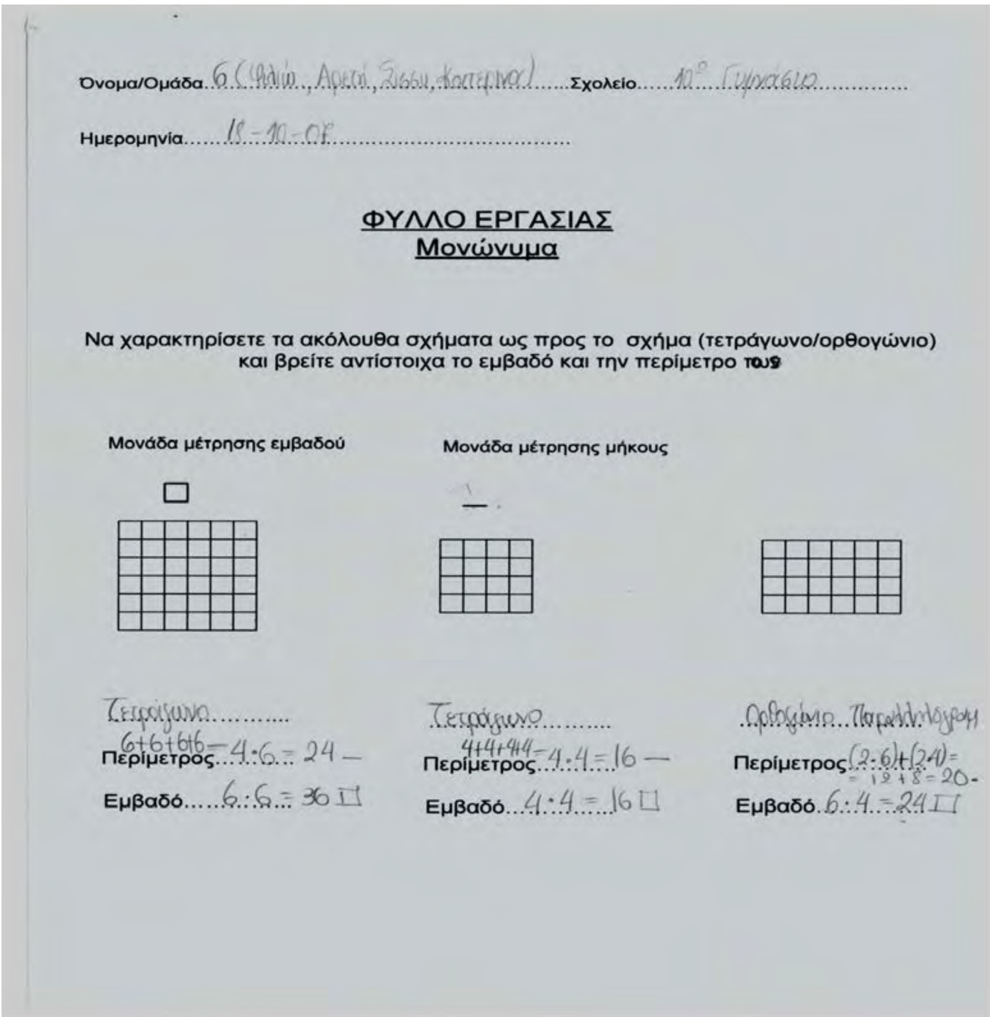
Για να εισάγουμε την έννοια των όμοιων μονωνύμων ζητήσαμε αρχικά από τους μαθητές να χωρίσουν σε ομάδες τα αλγεβρικά πλακίδια με το ίδιο εμβαδό και στη συνέχεια να δημιουργήσουν σύνολα ομοίων μονωνύμων, χρησιμοποιώντας διαφορετικό αριθμό ισεμβαδικών πλακιδίων, ώστε να γίνει κατανοητή η έννοια του συντελεστή ενός μονωνύμου. Το φύλλο δραστηριοτήτων σχεδιάστηκε με τρόπο ώστε να γίνουν αντιληπτές οι παραπάνω έννοιες, να εμπεδωθούν και να γίνει η σύνδεση των γεωμετρικών σχημάτων, τετραγώνων και παραλληλογράμμων, με τα αντίστοιχα αλγεβρικά σύμβολα. Η πρώτη άσκηση είχε στόχο να «ξεκαθαρίσουν» οι μαθητές τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού του τετραγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Για να συνηθίσουν οι μαθητές να «βλέπουν και να διαβάζουν» τα σχήματα ανεξάρτητα από τις χρησιμοποιούμενες μεταβλητές χρησιμοποιήθηκαν για τις διαστάσεις των σχημάτων διαφορετικές μεταβλητές, όπως *x, y, α, β*. Δόθηκε έμφαση στη σύνδεση της αλγεβρικής παράστασης και της αριθμητικής της τιμής μέσω της δραστηριότητας της συμπλήρωση ενός πίνακα.

Παράλληλα επιδιώξαμε με την τελευταία άσκηση να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και να «κινηθούν» άνετα ανάμεσα στην έννοια του βαθμού μονωνύμου και στην έννοια του βαθμού πολυωνύμου. Η άσκηση αυτή ακολούθησε το παρακάτω μοντέλο άσκησης του βιβλίου

Μονώνυμο	**Συντελεστής**	**Βαθμός ως προς x**	**Βαθμός ως προς y**	**Βαθμός ως προς x και y**
$5xy^4$				
$-xy^2$				
$\frac{1}{7}x^2y^5$				
$-\sqrt{3}\,x^4$				

Άσκηση βιβλίου Μαθηματικά Γ Γυμνασίου



Όνομα/Ομάδα 6 (Ηλιάνα, Αρετή, Σίσσυ, Κατερίνα) Σχολείο 10ο Γυμνάσιο

Ημερομηνία 18-10-08

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Μονώνυμα

Να χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα σχήματα ως προς το σχήμα (τετράγωνο/ορθογώνιο) και βρείτε αντίστοιχα το εμβαδό και την περίμετρο τους

Μονάδα μέτρησης εμβαδού

Μονάδα μέτρησης μήκους

Τετράγωνο
Περίμετρος 6+6+6+6 = 4·6 = 24
Εμβαδό 6·6 = 36

Τετράγωνο
Περίμετρος 4+4+4+4 = 4·4 = 16
Εμβαδό 4·4 = 16

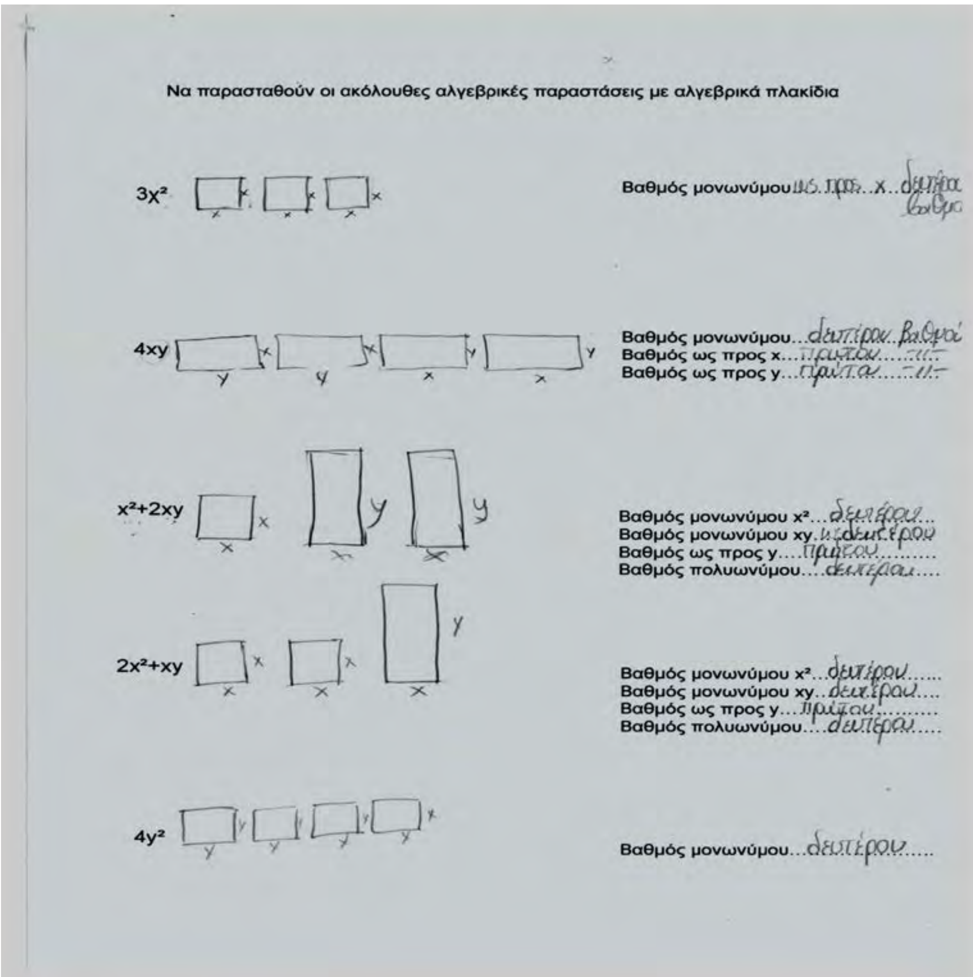
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο
Περίμετρος (2·6)+(2·4) = 12+8 = 20
Εμβαδό 6·4 = 24

Φύλλο εργασίας στα μονώνυμα

Άσκηση 3

Αν το α=3 και το β=2 για τα ανωτέρω σχήματα να υπολογιστούν οι αριθμητικές τιμές του ακόλουθου πίνακα

Αλγεβρική παράσταση	Αριθμητική παράσταση
α β	
	6 • 4
	9
β^2	
	3 • 6
y^2	



Φύλλο εργασίας στα μονώνυμα

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας.

Οι δραστηριότητες που εμπεριέχονταν στο φύλλο εργασίας δεν δυσκόλεψαν τους μαθητές και αυτό έγινε εμφανές από τον τρόπο συμπλήρωσής του.

2.2.2. Πρόσθεση πολυωνύμων (βλ. Πίνακας 13, α-β-γ-δ)

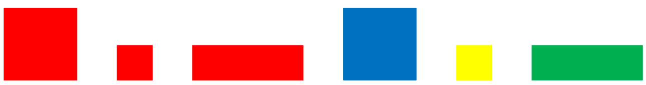
Στόχος

Να οριστεί το μηδενικό στοιχείο με διάφορους συνδυασμούς αλγεβρικών πλακιδίων και στη συνέχεια να οδηγηθούν οι μαθητές μέσα από τη χρήση των υλικών στον κανόνα της πρόσθεσης πολυωνύμων.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλο εργασίας

Με χρήση του επιδιασκοπίου κάναμε την εισαγωγή του μηδενικού στοιχείου μέσω «πρόσθεσης» παράθεσης δηλαδή σχημάτων που είχαν το ίδιο εμβαδό αλλά διέφεραν στο χρώμα. Υπενθυμίζουμε ότι το χρώμα στα αλγεβρικά πλακίδια δίνει το πρόσημο της μεταβλητής που εξεικονίζεται μέσω της επιφάνειας του τετραγώνου ή του ορθογωνίου, ήτοι κόκκινο για το αρνητικό, μπλε, πράσινο ή κίτρινο για το θετικό.

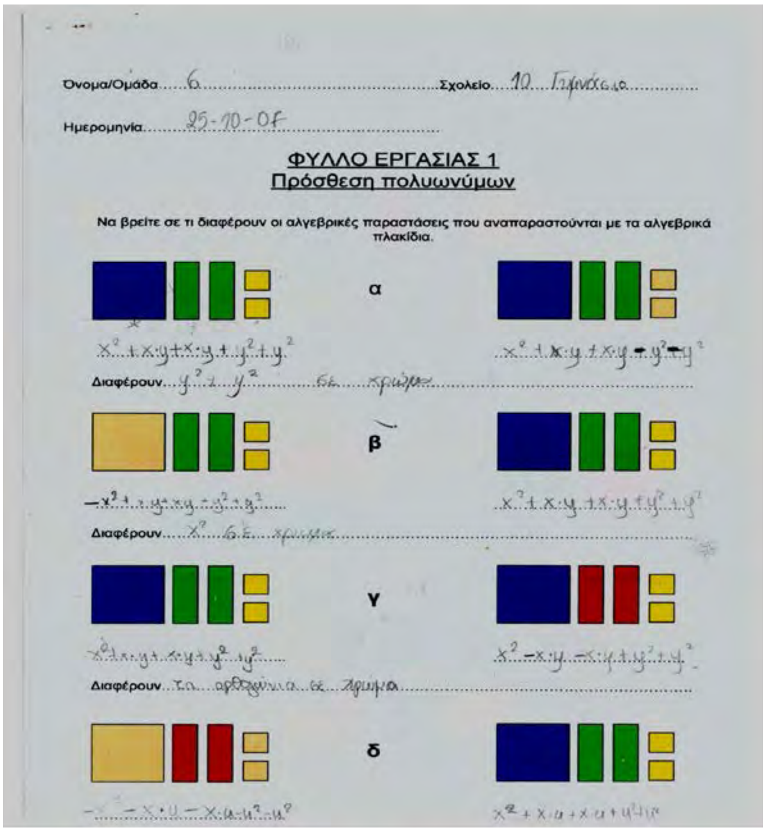
Μία αναπαράσταση για παράδειγμα του μηδενικού στοιχείου μπορεί να δοθεί όπως στο παρακάτω σχήμα:



Μηδενικό στοιχείο με αλγεβρικά πλακίδια

Από τους μαθητές ζητήθηκε στη συνέχεια να μας δώσουν δικές τους προτάσεις για αναπαραστάσεις μηδενικού στοιχείου με τα αλγεβρικά πλακίδια και να τις παρουσιάσουν με το επιδιασκόπιο σε όλη την τάξη.

Το φύλλο εργασίας σχεδιάστηκε με κεντρικό άξονα το μηδενικό στοιχείο και κατά συνέπεια την έννοια του αντιθέτου, ώστε διαδοχικά να οδηγηθούν οι μαθητές στον τρόπο πρόσθεσης πολυωνύμων που βασίζεται στην αναγωγή των ομοίων όρων. Στην πρώτη δραστηριότητα «παίξαμε» με τα χρώματα των πλακιδίων για να γίνει αντιληπτό ποιο στοιχείο με ποιο είναι αντίθετο. Οι διαστάσεις των πλακιδίων είχαν μέγεθος ***x, y.*** Οι δραστηριότητες που ακολούθησαν στόχευαν στο να εμπεδώσουν οι μαθητές την αναγωγή των ομοίων όρων και τον τρόπο απλοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης. Οι ασκήσεις αφορούσαν μεταβάσεις από τα χειραπτικά υλικά στην αλγεβρική παράσταση και αντίστροφα. Στην τελευταία δραστηριότητα ορίσαμε τη χρήση του σημείου συν (+) στα αλγεβρικά πλακίδια και αφήσαμε τους μαθητές να προσδιορίσουν και να εκφράσουν τον τρόπο που γίνεται η πρόσθεση πολυωνύμων.


Όνομα/Ομάδα 6 Σχολείο 10 Γυμνάσιο

Ημερομηνία 25-10-07

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Πρόσθεση πολυωνύμων

Να βρείτε σε τι διαφέρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που αναπαραστούνται με τα αλγεβρικά πλακίδια.

α

$x^2+x\cdot y+x\cdot y+y^2+y^2$ $x^2+x\cdot y+x\cdot y-y^2-y^2$

Διαφέρουν y^2+y^2 σε χρώμα

β

$-x^2+x\cdot y+x\cdot y+y^2+y^2$ $x^2+x\cdot y+x\cdot y+y^2+y^2$

Διαφέρουν x^2 σε χρώμα

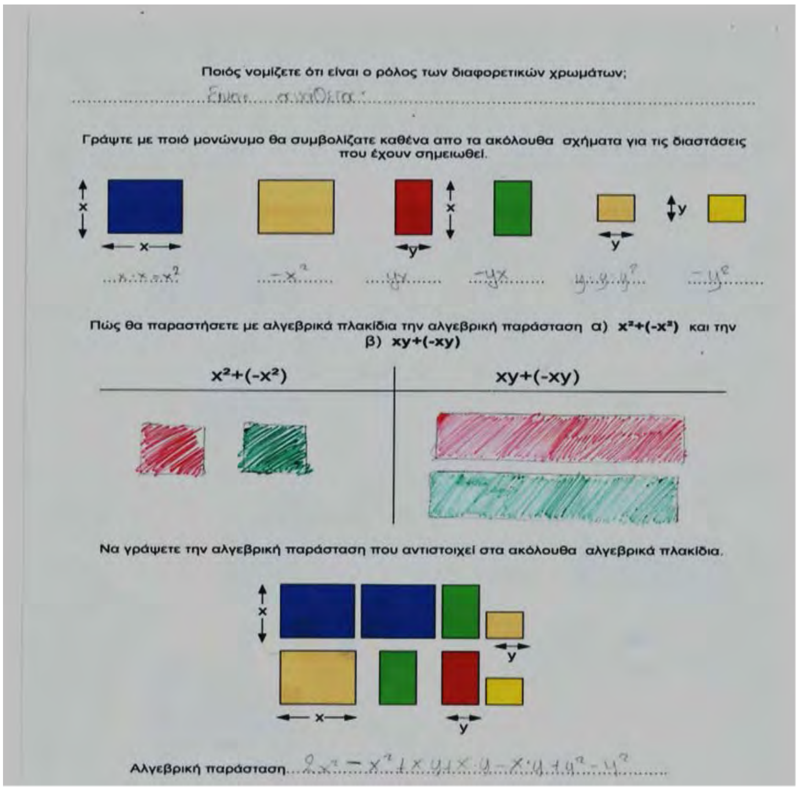
γ

$x^2+x\cdot y+x\cdot y+y^2+y^2$ $x^2-x\cdot y-x\cdot y+y^2+y^2$

Διαφέρουν τα ορθογώνια σε χρώμα

δ

$-x^2-x\cdot y-x\cdot y-y^2-y^2$ $x^2+x\cdot y+x\cdot y+y^2+y^2$


Ποιός νομίζετε ότι είναι ο ρόλος των διαφορετικών χρωμάτων;

Είναι αντίθετα.

Γράψτε με ποιό μονώνυμο θα συμβολίζατε καθένα απο τα ακόλουθα σχήματα για τις διαστάσεις που έχουν σημειωθεί.

$x\cdot x=x^2$ $-x^2$ yx $-yx$ $y\cdot y=y^2$ $-y^2$

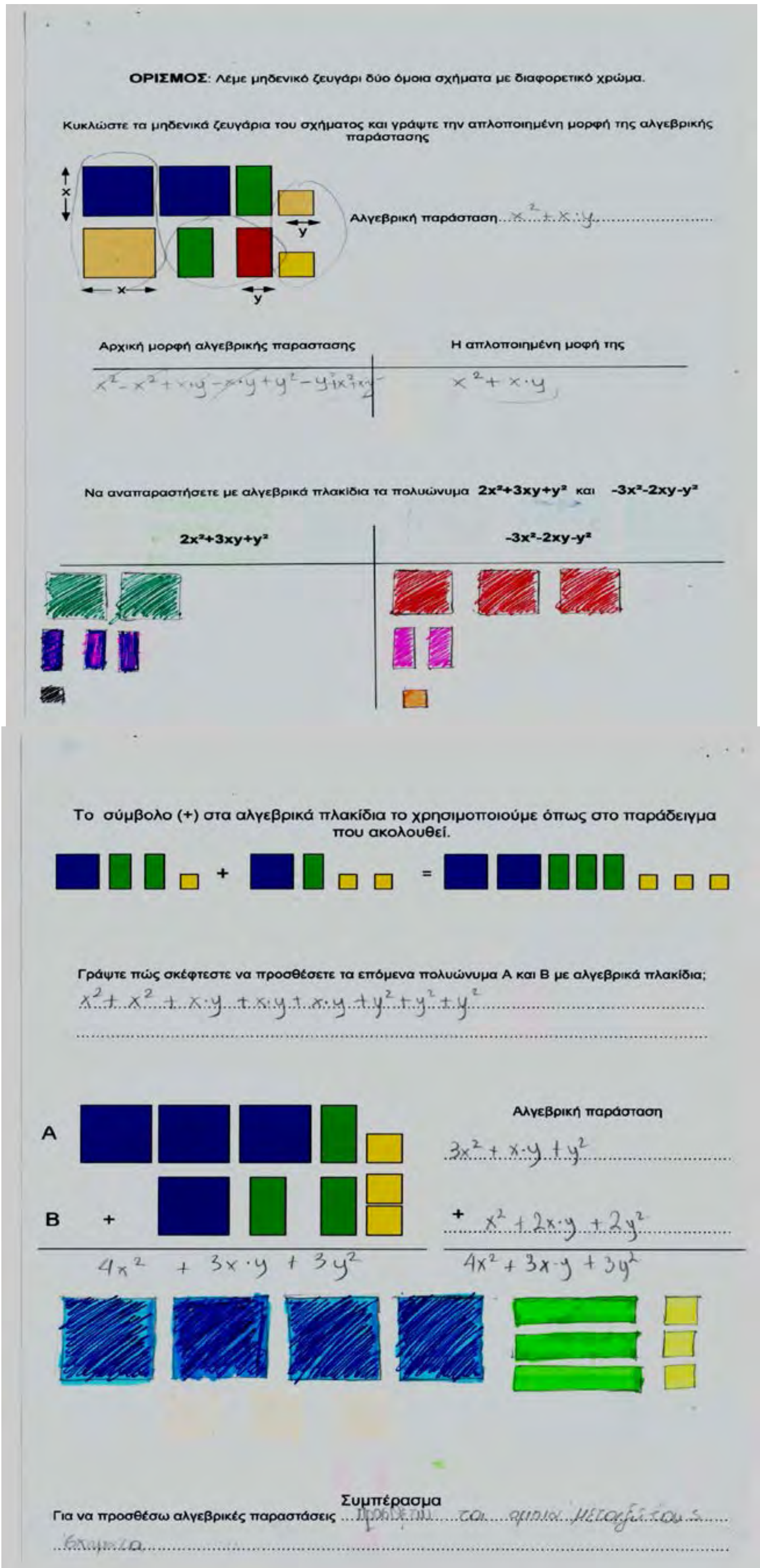
Πώς θα παραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση α) $x^2+(-x^2)$ και την β) $xy+(-xy)$

$x^2+(-x^2)$	$xy+(-xy)$

Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα ακόλουθα αλγεβρικά πλακίδια.

Αλγεβρική παράσταση $2x^2-x^2+x\cdot y+x\cdot y-x\cdot y+y^2-y^2$

Φύλλο εργασίας στην πρόσθεση πολυωνύμων **1**



ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε μηδενικό ζευγάρι δύο όμοια σχήματα με διαφορετικό χρώμα.

Κυκλώστε τα μηδενικά ζευγάρια του σχήματος και γράψτε την απλοποιημένη μορφή της αλγεβρικής παράστασης

Αλγεβρική παράσταση $x^2 + x \cdot y$

Αρχική μορφή αλγεβρικής παραστασης	Η απλοποιημένη μοφή της
$x^2 - x^2 + x \cdot y - x \cdot y + y^2 - y^2 + x^2 + xy$	$x^2 + x \cdot y$

Να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια τα πολυώνυμα **$2x^2+3xy+y^2$** και **$-3x^2-2xy-y^2$**

$2x^2+3xy+y^2$	$-3x^2-2xy-y^2$

Το σύμβολο (+) στα αλγεβρικά πλακίδια το χρησιμοποιούμε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Γράψτε πώς σκέφτεστε να προσθέσετε τα επόμενα πολυώνυμα Α και Β με αλγεβρικά πλακίδια;
$x^2 + x^2 + x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y + y^2 + y^2 + y^2$

A

B +

Αλγεβρική παράσταση

$3x^2 + x \cdot y + y^2$

$+ \quad x^2 + 2x \cdot y + 2y^2$

$4x^2 + 3x \cdot y + 3y^2$

$4x^2 + 3x \cdot y + 3y^2$

Συμπέρασμα

Για να προσθέσω αλγεβρικές παραστάσεις προσθέτω τα όμοια μεταξύ τους όμοια

Φύλλο εργασίας στην πρόσθεση πολυωνύμων

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Ούτε αυτό το φύλλο δυσκόλεψε τους μαθητές στη συμπλήρωση του. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα υλικά «πήραν» αμέσως τη θέση τους στο μάθημα διότι από τη συμπλήρωση της αντίστοιχης δραστηριότητας (βλ. παραπάνω φύλλο εργασίας) παρατηρούμε ότι οι μαθητές εκφράζουν το συμπέρασμά τους για την πρόσθεση των αλγεβρικών παραστάσεων με αναφορές στα σχήματα και το χρώμα των υλικών και δίνουν το σωστό αποτέλεσμα σε πλήρη αλγεβρική μορφή. Μια ομάδα μάλιστα αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «για να προσθέσω αλγεβρικές παραστάσεις προσθέτω όλα τα μπλε όλα τα πράσινα, όλα τα κίτρινα».

2.2.3. Αφαίρεση πολυωνύμων (βλ. Πίνακας 14, α-β-γ)

Στόχος

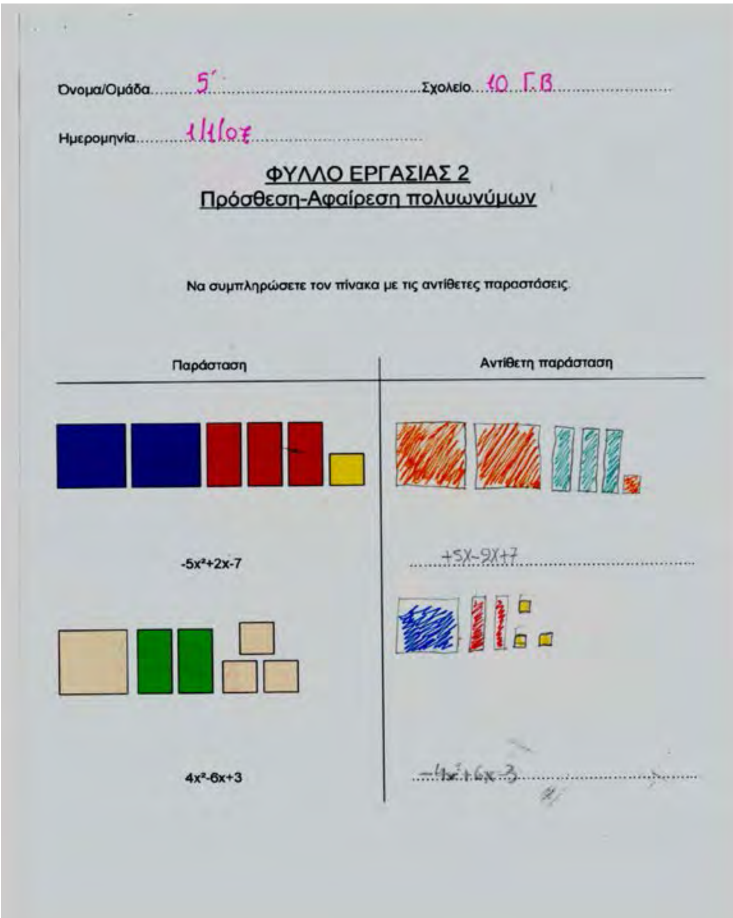
Στόχος του μαθήματος ήταν οι μαθητές να μπορούν όταν τους δοθεί μια παράσταση να ορίζουν την αντίθετή της με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και να μάθουν τον αλγόριθμο της αφαίρεσης δύο πολυωνύμων με τη βοήθεια των υλικών.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλο εργασίας

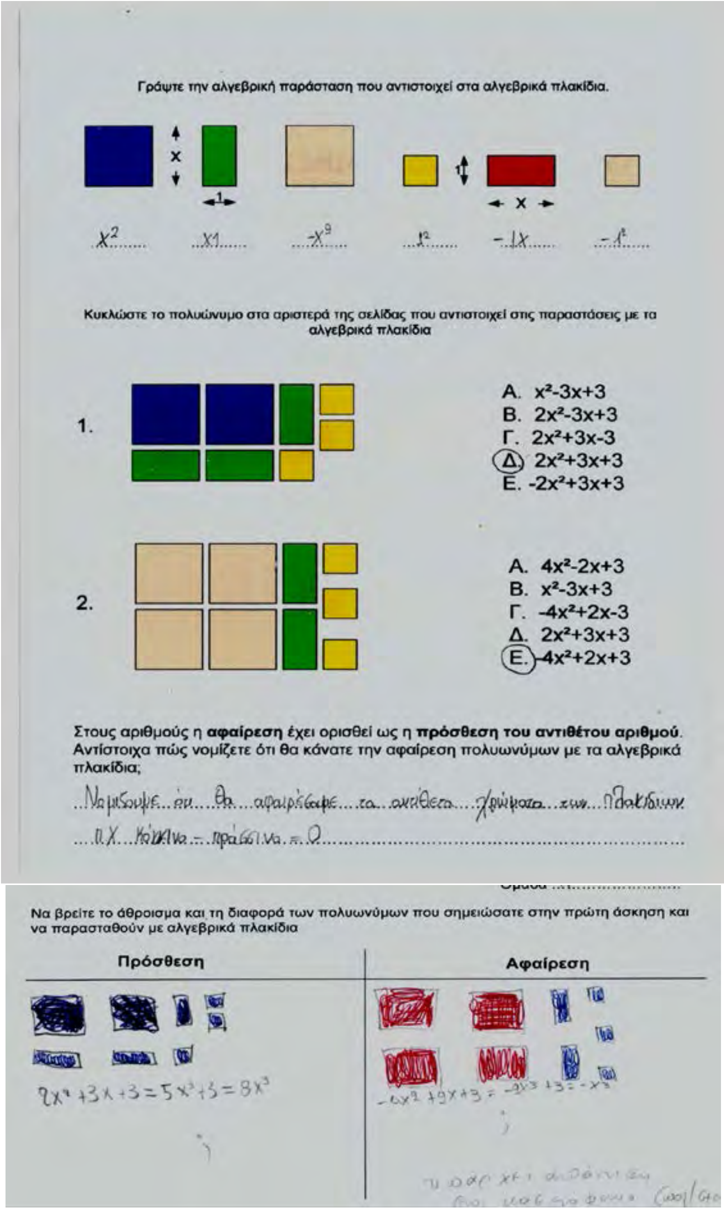
Σε αυτή τη διδακτική μας παρέμβαση εισάγαμε για πρώτη φορά τη μονάδα στα αλγεβρικά πλακίδια. Για τον λόγο αυτόν ορίσαμε τη διάσταση της πλευράς του μικρού τετραγώνου ίση με ένα *(1)* όπως φαίνεται και στο φύλλο δραστηριοτήτων (βλ. Πίνακας 14β). Επακόλουθο αυτού ήταν το ορθογώνιο να έχει εμβαδό $1{\cdot}x$ δηλαδή x. Με τον τρόπο αυτόν μπορούσαμε με τα αλγεβρικά πλακίδια να δώσουμε την εικόνα ενός πολυώνυμου δευτέρου βαθμού μιας μεταβλητής για παράδειγμα του x.

Το φύλλο εργασίας απαιτούσε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την αντίθετη παράσταση παραστάσεων που δώσαμε χρησιμοποιώντας είτε αλγεβρικά πλακίδια είτε αλγεβρικές μορφές. Στη συνέχεια τους ζητήσαμε να δώσουν την πρότασή τους για τον ορισμό της πράξης της αφαίρεσης πολυωνύμων λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της αφαίρεσης στους πραγματικούς αριθμούς και το πως αντιπροσωπεύονται αυτοί από τα αλγεβρικά πλακίδια. Επισημαίνουμε, ότι το είδος των ασκήσεων της τρίτης σελίδας το «δανειστήκαμε» από το σχολικό βιβλίο και συγκεκριμένα από την πιο κάτω άσκηση:

Να αποδείξετε ότι αν από το εμβαδόν $3x^2 + 5x + 21$ ενός ορθογωνίου αφαιρέσουμε τα εμβαδά $x^2 + x + 4$, $2x^2 + 4x + 1$ δύο άλλων ορθογωνίων θα βρούμε εμβαδό τετραγώνου πλευράς *4*.



Φύλλο εργασίας στην αφαίρεση πολυωνύμων



Φύλλο εργασίας στην αφαίρεση πολυωνύμων

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Δεν παρατηρήθηκε δυσκολία στη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας για τις δραστηριότητες που παρουσιάζονται πιο πάνω. Οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τα υλικά και είδαμε ότι όλες οι ομάδες όρισαν την αφαίρεση πολυωνύμων με τα αλγεβρικά πλακίδια σωστά ως πρόσθεση των αντίθετων σε χρώμα πλακιδίων. Σημείωσαν ενδεικτικά ότι «στα αλγεβρικά πλακίδια η αφαίρεση γίνεται με πρόσθεση ομοίων σχημάτων αλλά με διαφορετικό χρώμα».

Πρόβλημα συμπλήρωσης παρουσιάστηκε στην τελευταία άσκηση η οποία δεν επιλύθηκε από καμία ομάδα λόγω του περιορισμένου χρόνου του μαθήματος. Η άσκηση αυτή ήταν παρόμοια της άσκησης του βιβλίου που αναφέραμε πιο πάνω. Αλλάξαμε μόνο λίγο τους αριθμούς για να μπορούν οι μαθητές να έχουν τον απαιτούμενο αριθμό πλακιδίων χωρίς όμως να αλλοιώσουμε το μοντέλο της. Από τους μαθητές ζητήσαμε, βάση της άσκησης, τα εξής:

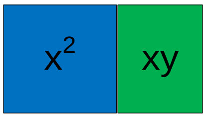
Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια που αντιστοιχούν στο πολυώνυμο $3x^2+7x+4$ ένα ορθογώνιο. Κατασκευάσετε ομοίως το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο x^2+4x+3 καθώς και το ορθογώνιο του x^2+x. Στη συνέχεια να αφαιρέσετε αυτά τα δύο εμβαδά από το εμβαδό του ορθογώνιου $3x^2+7x+4$. Να αναπαραστήσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια όλα τα βήματα καθώς και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης.

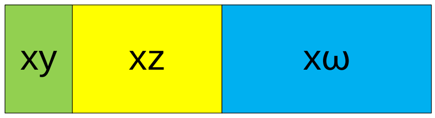
Θέσαμε επιπλέον επιμέρους ερωτήματα σχετικά με το σχήμα που θα προέκυπτε, με το μήκος των πλευρών του και το εμβαδόν του. Το γεγονός ότι ο χρόνος δεν ήταν επαρκής μας έκανε να σκεφτούμε ότι θα έπρεπε αυτήν τη δραστηριότητα να την παρουσιάζαμε με τη βοήθεια του επιδιασκόπιου και να την επιλύαμε με ενεργή συμμετοχή των μαθητών, το οποίο και πραγματοποιήσαμε στο επόμενο μάθημα επαναλαμβάνοντας στο φύλλο δραστηριοτήτων την ίδια άσκηση.

2.2.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων (βλ. Πίνακας 15, α-β-γ-δ)

Στόχος

Στόχος του μαθήματος ήταν να αναγνωρίσουν οι μαθητές την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως απεικόνιση εμβαδού ενός ορθογωνίου το οποίο προκύπτει ως παράθεση επιμέρους εμβαδών ορθογωνίων ή ορθογωνίων και τετραγώνων μαζί, όπως για παράδειγμα στα παρακάτω σχήματα.



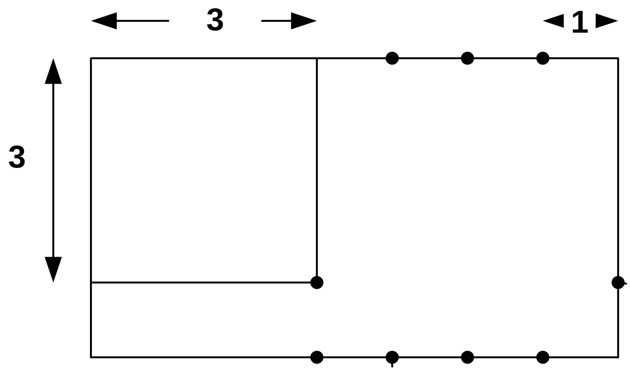


$x^2+xy=x(x+y)$ $xy+xz+x\omega=x(y+z+\omega)$

Περιγραφή του μαθήματος /Φύλλου εργασίας

Το φύλλο δραστηριοτήτων σχεδιάστηκε με τρόπο ώστε οι μαθητές να εισάγονται στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού από το εμβαδό ορθογώνιου γνωστών διαστάσεων και στη συνέχεια από το εμβαδό ορθογώνιου με τα μήκη των πλευρών του εκφρασμένα ως διώνυμα μεταβλητής του *x*.

Ως πρώτο βήμα σχεδιάσαμε ένα ορθογώνιο (βλ. πιο κάτω Σχήμα 9) του οποίου οι δύο πλευρές ήταν επεκτάσεις των πλευρών τετραγώνου γνωστού εμβαδού. Το μήκος του πλάτους και του ύψους το καθορίσαμε εμείς με προσδιορισμό συγκεκριμένης μονάδας. Από τους μαθητές ζητήσαμε να ενώσουν τα απέναντι σημεία των πλευρών του ορθογωνίου, να γράψουν πόσα και ποια είναι τα επιμέρους σχήματα που δημιουργήθηκαν και να υπολογίσουν το εμβαδόν τους.



Σχήμα 9

Σκοπός μας ήταν να «δουν» οι μαθητές από ποια κομμάτια αποτελείται το κάθε ορθογώνιο που κατασκεύαζαν, και να διερευνήσουν με πόσους τρόπους θα μπορούσαν να εκφράσουν αυτό το εμβαδό. Είχαμε έτσι τη δυνατότητα, από την κατασκευή του ορθογωνίου και τη διπλή έκφραση του εμβαδού του, να εισάγουμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και να «δικαιολογήσουμε» τη χρήση του όρου «επιμεριστική» και γεωμετρικά, με αναφορά στα κομμάτια της σύνθεσης του. Παράλληλα οι μαθητές εργάστηκαν πάνω στην παραγοντοποίηση του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου, έννοια που θα συναντούσαν σε μετέπειτα ενότητα, παραγοντοποιώντας μία σειρά τριωνύμων μέσω της κατασκευής ορθογωνίου με τα αλγεβρικά πλακίδια.

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Δεν παρατηρήθηκαν δυσκολίες στον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογωνίου. Οι μαθητές αντιλήφθησαν τη δυνατότητα που είχαν να υπολογίσουν το εμβαδό είτε ως γινόμενο των πλευρών του ορθογωνίου είτε ως άθροισμα εμβαδών των επιμέρους «κομματιών» που το αποτελούσαν. Η χρήση της λέξης «επιμέρους» από τους μαθητές οδήγησε απρόσκοπτα στον ορισμό της έννοιας της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

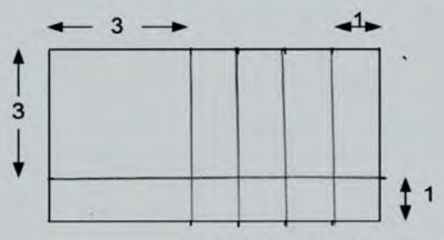
Ο στόχος της δημιουργίας ορθογωνίου για τη μετατροπή μιας δευτεροβάθμιας συνάρτησης σε γινόμενο βοήθησε πολύ τους μαθητές, μέσα από την αδυναμία τους να συμπληρώσουν το σχήμα, να αντιληφθούν ότι η $x^2 + 1$ δεν παραγοντοποιείται γιατί όπως μας έγραψαν: «δεν είναι επαρκή τα σχήματα ώστε να σχηματίσουν ορθογώνιο» ή «γιατί έχουμε μόνο ένα μεγάλο και ένα μικρό τετράγωνο».

Λόγω του περιορισμένου χρόνου η τελευταία άσκηση επιλύθηκε με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και του επιδιασκοπίου.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Ορίζουμε τις διαστάσεις για τα αλγεβρικά πλακίδια ως εξής:

Ενώστε τα απέναντι σημεία του κάτωθι σχήματος.



Πόσα διαφορετικά σχήματα δημιουργήθηκαν;

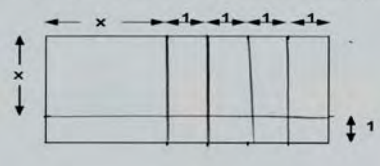
3 κατασχήματα: 1 τετράγωνο, 1 ορθογώνια, 4 τετράγωνα μικρά

Χαρακτηρήστε τα ως προς το σχήμα τους και βρείτε το εμβαδό τους.

Σχήμα τετράγωνο .... Εμβαδό 9

Σχήμα ορθογώνιο .... Εμβαδό 3.

Ενώστε ομοίως τα απέναντι σημεία του κάτωθι σχήματος.



Να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος.

Πλευρές $x+4$ και $x+1$ .... Εμβαδό $x+4 \cdot x+1$ των σχημάτων ή θα προσθέσουμε τα εμβαδά

Με πόσους τρόπους θα μπορούσατε να βρείτε το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος; Θα υπολογίσουμε σ.υ

Γράψτε τη γνώμη σας και τους τύπους που προτείνετε................................

....

Στο βιβλίο σας υπάρχει το κάτωθι σχήμα και σας ζητούν να βρείτε ποιές απαντήσεις μαθητών δίνουν σωστά το εμβαδό του. Βρείτε τες και δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

	x	3
x	x^2	$3x$
2	$2x$	$2 \cdot 3 = 6$

$x^2 + 6$

x^2+6x+5

$(x+2)\ (x+3)$

$2x \cdot 3x$

x^2+5x+6

Φύλλο εργασίας στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων

Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια τα ορθογώνια που αντιστοιχούν στις κάτωθι αλγεβρικές παραστάσεις και να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδό τους.

$x^2 - x$ $x^2 + +3x + 2$ $x^2 + +2x + 1$

Πλευρές……………………………………………………..Εμβαδό…………………………………..

Μπορεί να κατασκευαστεί ορθογώνιο με τα αλγεβρικά πλακίδια που αντιστοιχεί στην αλγεβρική παράσταση $x^2 + 1$; Αιτιολογήσατε την απάντησή σας

Α) Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $3x^2 + 7x + 4$

Β) Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $x^2 + 4x + 3$ και $x^2 + x$

Γ) Να αφαιρέσετε αυτά τα δύο εμβαδά από το εμβαδό του ορθογωνίου $3x^2 + 7x + 4$ και γράψτε τι σχήμα προέκυψε, πόσο είναι οι πλευρές του και ποιο το εμβαδό του.

Το σχήμα είναι…………………………………………………γιατί ……………………………………

………………………………………………………………………………..οι πλευρές του έχουν

μήκος…………………………………………………..και το εμβαδό του είναι………………………

….

Η άσκηση που επιλύθηκε με χρήση επιδιασκοπίου

2.2.5. Τετράγωνο αθροίσματος – διαφοράς (βλ. Πίνακας 16, α-β-γ-δ)

Στόχος

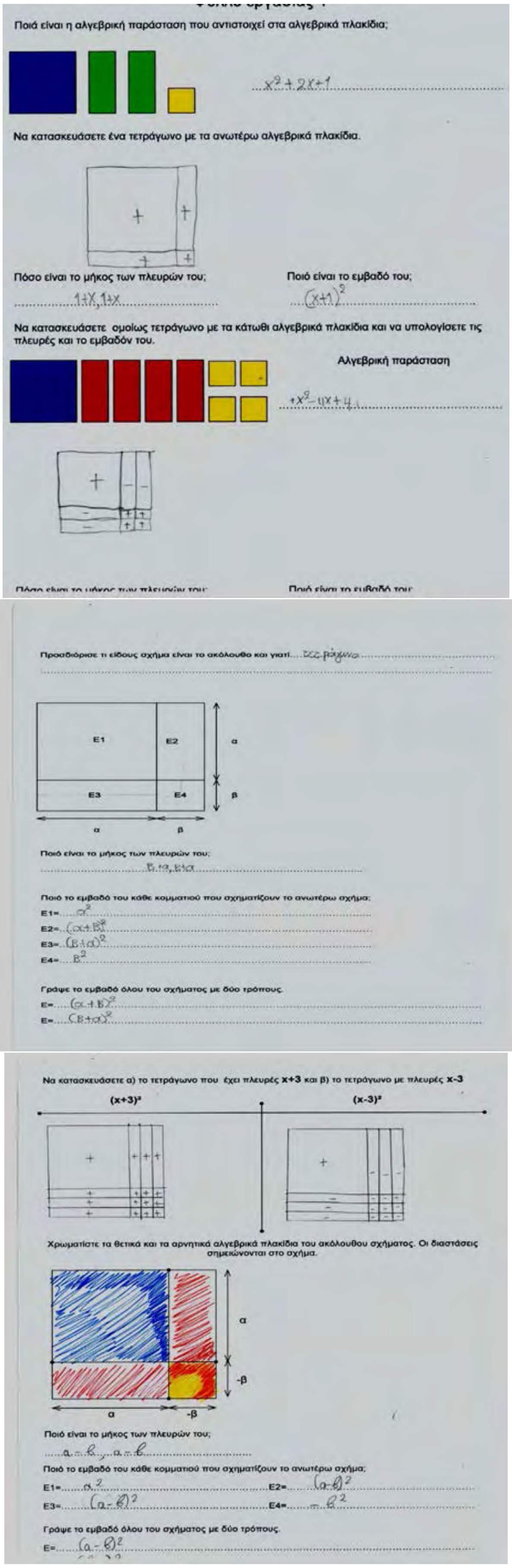
Στόχος του μαθήματος ήταν να διδαχθούν οι μαθητές το ανάπτυγμα του τετραγώνου αθροίσματος και του τετραγώνου της διαφοράς κατασκευάζοντας τετράγωνα με αλγεβρικά πλακίδια. Σκοπός μας ήταν να παρατηρήσουν μέσα από κατάλληλες εφαρμογές τις διαφορές που προκύπτουν στους τύπους των δύο ταυτοτήτων.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Από τους μαθητές ζητήθηκε να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας, το οποίο περιείχε κατασκευές και ερωτήσεις προς απάντηση που είχαν επεξεργαστεί στην προηγούμενη ενότητα, που αφορούσε τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Το σχεδιάσαμε όμως έτσι ώστε στις απαιτούμενες κατασκευές το τετράγωνο του αθροίσματος δύο μεταβλητών να το διαδέχεται το τετράγωνο της διαφοράς τους ή να συνυπάρχουν στην ίδια δραστηριότητα για να επισημανθούν οι ομοιότητες και διαφορές στην κατασκευή του ζητούμενου τετραγώνου.

Τα αναπτύγματα των διωνύμων $(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^2$ προέκυψαν από τον μετασχηματισμό σε τετράγωνο των γεωμετρικών απεικονίσεων της $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και της $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. Η κατασκευή του τετραγώνου πλευράς $\alpha+\beta$ ως γεωμετρική απεικόνιση της $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ όπως και του τετραγώνου πλευράς $\alpha - \beta$ ως γεωμετρική απεικόνιση της $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ μας έδωσε τη δυνατότητα να αιτιολογήσουμε τη χρήση του όρου «τέλειο τετράγωνο». Η εξεικόνιση της $(\alpha + \beta)^2$ και της $(\alpha - \beta)^2$ και οι παρατηρήσεις που έκαναν οι μαθητές για τις διαφορές των δύο σχημάτων θεωρούμε ότι διευκόλυναν τους μαθητές στη σωστή απομνημόνευση του τύπου της κάθε ταυτότητας.

Στην τέταρτη σελίδα επανήλθαμε στο ερώτημα αν το $(x + y)^2$ ισούται με το $x^2 + y^2$ ζητώντας από τους μαθητές να αναπαραστήσουν την αλγεβρική παράσταση $(x + y)^2$ και να χρωματίσουν τα κομμάτια που αντιστοιχούν στη παράσταση $x^2 + y^2$. Σκοπός μας ήταν να μείνει ισχυρή η εικόνα ότι το $x^2 + y^2$ αποτελεί τμήμα του τετραγώνου του $(x + y)^2$ και δεν ταυτίζεται με το συνολικό εμβαδό του σχήματος ώστε να αποφευχθεί μέσω της εξεικόνισης η λανθασμένη εφαρμογή της ταυτότητας.



Ποιά είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;

x^2+2x+1

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με τα ανωτέρω αλγεβρικά πλακίδια.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του; $1+x$, $1+x$

Ποιό είναι το εμβαδό του; $(x+1)^2$

Να κατασκευάσετε ομοίως τετράγωνο με τα κάτωθι αλγεβρικά πλακίδια και να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδόν του.

Αλγεβρική παράσταση

$+x^2-4x+4$

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του; Ποιό είναι το εμβαδό του;

Προσδιόρισε τι είδους σχήμα είναι το ακόλουθο και γιατί... τετράγωνο

Ποιό είναι το μήκος των πλευρών του; $β+α$, $β+α$

Ποιό το εμβαδό του κάθε κομματιού που σχηματίζουν το ανωτέρω σχήμα;

E1= $α^2$

E2= $(α+β)^2$

E3= $(β+α)^2$

E4= $β^2$

Γράψε το εμβαδό όλου του σχήματος με δύο τρόπους.

E= $(α+β)^2$

E= $(β+α)^2$

Να κατασκευάσετε α) το τετράγωνο που έχει πλευρές **x+3** και β) το τετράγωνο με πλευρές **x-3**

$(x+3)^2$ **$(x-3)^2$**

Χρωματίστε τα θετικά και τα αρνητικά αλγεβρικά πλακίδια του ακόλουθου σχήματος. Οι διαστάσεις σημειώνονται στο σχήμα.

Ποιό είναι το μήκος των πλευρών του; $a-b$, $a-b$

Ποιό το εμβαδό του κάθε κομματιού που σχηματίζουν το ανωτέρω σχήμα;

E1= a^2 E2= $(a-b)^2$

E3= $(a-b)^2$ E4= $-b^2$

Γράψε το εμβαδό όλου του σχήματος με δύο τρόπους.

E= $(a-b)^2$

Φύλλο εργασίας στο τετράγωνο αθροίσματος - διαφοράς

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

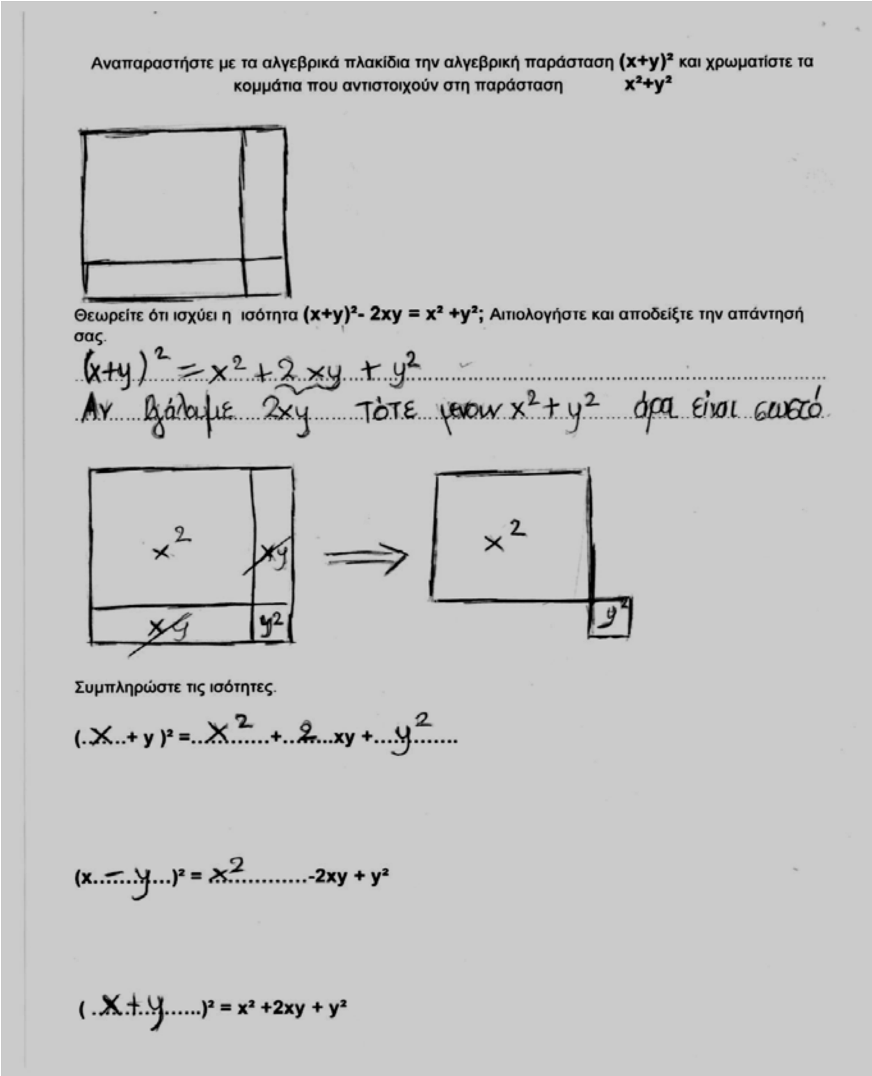
Δεν παρατηρήσαμε δυσκολίες στη συμπλήρωση των δραστηριοτήτων στο φύλλο εργασιών που δώσαμε. Οι μαθητές συμπλήρωσαν σωστά την τελευταία δραστηριότητα που αποτελούσε και την επαναληπτική άσκηση επίσης του μαθήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πέντε ομάδες από τις έξι έδωσαν σωστή απάντηση σε μία από τις «δύσκολες» ερωτήσεις που μπορεί κάποιος να θέσει ενώπιον της τάξης στην μετωπική διδασκαλία και εννοούμε την ορθότητα της ισότητας $(x + y)^2 – 2xy = x^2 + y^2$.

Ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές δεν περιορίζονται ως απάντηση στο «ναι» αλλά στηρίζουν την άποψή τους χρησιμοποιώντας «γεωμετρική» επιχειρηματολογία όπως:

«είναι σωστό γιατί έμεινε ένα τετράγωνο και ένα μικρό τετραγωνάκι»

«ισχύει διότι αν αφαιρέσουμε τα ορθογώνια θα μας μείνει $x^2 + y^2$»

Μία ομάδα, μάλιστα χρησιμοποιεί και την αλγεβρική απόδειξη, με την ανάπτυξη της ταυτότητας και την γεωμετρική ζωγραφίζοντας την εικόνα με τα αλγεβρικά πλακίδια, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω απόσπασμα του φύλλου εργασίας της. Αυτό για εμάς ήταν ένδειξη ότι η συμβολική μορφή της ταυτότητας του τετραγώνου του αθροίσματος «κλείδωσε» ως έννοια και τύπος με την εξεικόνισή της από τα αλγεβρικά πλακίδια την οποία και χρησιμοποιούν στην περίπτωση αυτή οι μαθητές της ομάδας ως επαλήθευση και επιβεβαίωση του ισχυρισμού τους.



Δραστηριότητα στις ταυτότητες

2.2.6. Διαφορά τετραγώνων (βλ. Πίνακας 17, α-β-γ-δ)

Στόχος

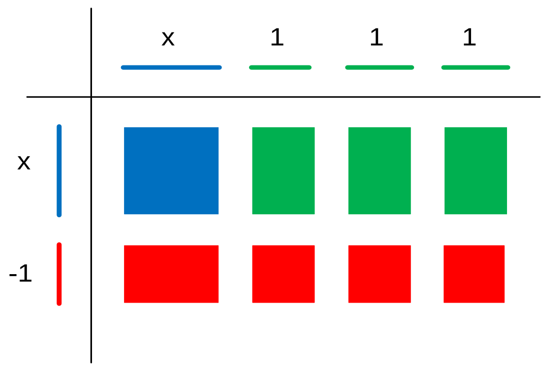
Στόχος του μαθήματος ήταν να εργαστούν οι μαθητές με τα χειραπτικά υλικά για να ανακαλύψουν με τις γνώσεις που ήδη κατέχουν, την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Οι μαθητές εργάστηκαν αρχικά με την πρώτη σελίδα του φύλλου εργασίας όπου αναπτύσσεται ο τύπος της ταυτότητας της διαφοράς τετραγώνων. Οι γνώσεις που απαιτούνταν ήταν του μηδενικού στοιχείου, που προκύπτει ως αποτέλεσμα συνύπαρξης θετικού και αρνητικού ισεμβαδικού σχήματος και της παραγοντοποίηση με τα αλγεβρικά πλακίδια και ήταν ήδη γνωστές. Η ταυτότητα λοιπόν ανακαλύφτηκε εύκολα αφού βασιζόταν σε δραστηριότητες με τις οποίες είχαν ασχοληθεί οι μαθητές με επιτυχία σε προηγούμενες ενότητες, όπως αυτές της κατασκευής τετραγώνου και της έκφραση του εμβαδού του με δύο τρόπους.

Τη δεύτερη σελίδα, που βασίζονταν στη χρήση του πίνακα διπλής εισόδου με τον οποίο εξεικονίζεται το είδος του σχήματος και κατά συνέπεια το εμβαδό του ανάλογα με τις διαστάσεις που αναφέρονται στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα, την αφήσαμε να τη συμπληρώσουν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος. Ο σχεδιασμός ήταν να προηγηθεί η εκμάθηση και χρήση του πίνακα σε εφαρμογές που ήδη επεξεργάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες δηλαδή του τετραγώνου αθροίσματος και διαφοράς.

Θεωρήσαμε αναγκαίο σε αυτή την ενότητα να τους δείξουμε πως μπορούν με πίνακα διπλής εισόδου να δώσουν την απεικόνιση πολλαπλασιασμού διωνύμων όταν δεν έχουν στη διάθεσή τους τα αλγεβρικά πλακίδια (βλ. παράδειγμα σχήμα 10), ώστε να μπορούν να ελέγχουν, μέσω της εξεικόνισης αυτής, την ορθότητα των πράξεών τους με τα σύμβολα όταν το επιθυμούν.



Σχήμα 10 Αναπαράσταση(x+3)(x-1)

Οι ασκήσεις που προτείναμε για συμπλήρωση ήταν ασκήσεις παρόμοιες με εκείνες του σχολικού βιβλίου.

Επιλέξαμε τις $(-x-y)^2$, $(\kappa+\lambda)^2$, $(3x+2\beta)^2$, $(4-x)^2$ γιατί έχουμε παρατηρήσει στην εκπαιδευτική μας πορεία ότι ασκήσεις αυτής της μορφής δυσκολεύουν συνήθως τους μαθητές και σε αυτές παρατηρούνται τα περισσότερα «κλασικά» λάθη. Τα λάθη στα οποία αναφερόμαστε είναι i) η παράληψη της ύψωσης του συντελεστή του αγνώστου στο τετράγωνο, ii) η σύγχυση που δημιουργείται με το αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής και iii) η δυσκολία σωστής εφαρμογής του τύπου αν η μεταβλητή κατέχει τη δεύτερη θέση του διώνυμου του υψωμένου στο τετράγωνο.

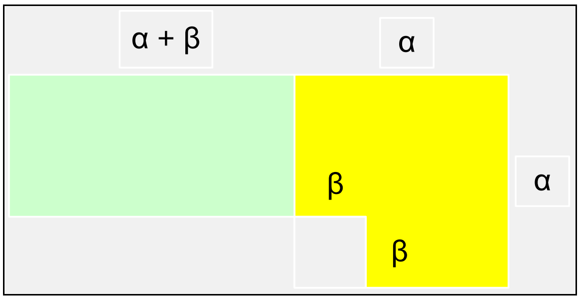
Ένα ακόμη λάθος (iv) που κάνουν συνήθως οι μαθητές είναι ότι συγχέουν τον τύπο της ταυτότητας του τετραγώνου της διαφοράς με εκείνον της διαφοράς τετραγώνων. Έτσι είναι σύνηθες να αντιστοιχίζουν το $(\alpha-\beta)^2$ με το $\alpha^2-\beta^2$ όπως και το $\alpha^2+\beta^2$ με το $(\alpha+\beta)^2$.

Οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να σχεδιάσουν τα γεωμετρικά σχήματα στους πίνακες διπλής εισόδου που καθορίζονταν από τις διαστάσεις που αντιστοιχούσαν στον οριζόντιο και κάθετο άξονα του. Επίσης δεν συνάντησαν ιδιαίτερο πρόβλημα στο να «μεταφράσουν» τη γεωμετρική εξεικόνιση σε αλγεβρική παράσταση διότι αναγνώρισαν την ομοιότητά της με την εικόνα που δημιουργούσαν οι ίδιοι με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.

Στις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν πρώτα την αλγεβρική παράσταση με εφαρμογή του τύπου και στη συνέχεια, αφού συμπληρώσουν τον πίνακα διπλής εισόδου, να κάνουν τον έλεγχο και να επισημάνουν τα λάθη τους. Επιδιώξαμε με αυτόν τον τρόπο να τους δείξουμε ότι έχουν τη δυνατότητα «δοκιμής» ενώ παράλληλα τους επισημάναμε αδυναμίες και λάθη κατά την εφαρμογή του τύπου. Τη δραστηριότητα την επέλυσαν οι μαθητές στην πλειονότητά τους σωστά γιατί η συμπλήρωση του πίνακα τους έδωσε τη σιγουριά ότι θα δώσουν τη σωστή λύση και απέφυγαν έτσι τα λάθη που αναφέραμε πιο πάνω. Στην τέταρτη σελίδα ζητήσαμε να χρησιμοποιήσουν πίνακα διπλής εισόδου και να εξεικονίσουν τους τύπους της ταυτότητας άθροισμα στο τετράγωνο και διαφοράς τετραγώνων, ώστε να παρατηρήσουν τις διαφορές που έχουν οι δύο τύποι και να αποφύγουν τη σύγχυσή τους σε μελλοντικές εφαρμογές.

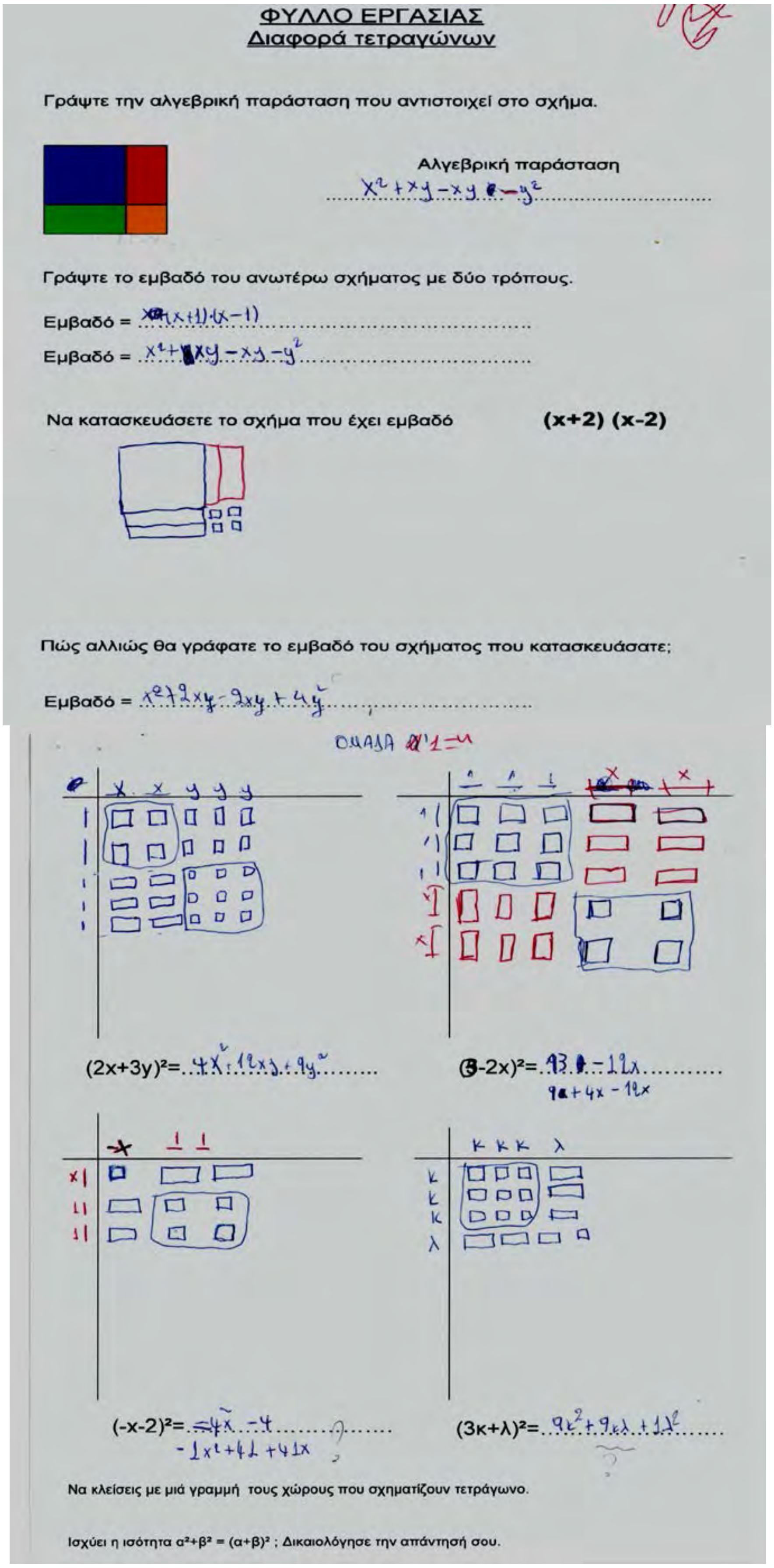
Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Ενδιαφέρον παρουσίασε η επίλυση προβλήματος από το σχολικό βιβλίο (βλ. πιο κάτω Σχήμα 11) στο οποίο ζητείται να ελεγχθεί αν τα οικόπεδα (πράσινο και κίτρινο) που παραχώρησε ένας πατέρας στα παιδιά του σύμφωνα με το σχήμα είναι ίσα ή αδικήθηκε κάποιο από τα παιδιά.



Σχήμα 11

Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι από το κίτρινο τετράγωνο πλευράς α είχε αφαιρεθεί ένα τετράγωνο πλευράς β και επομένως η αλγεβρική έκφραση που αντιστοιχεί στο κίτρινο κομμάτι του οικοπέδου είναι η $\alpha^2 - \beta^2$. Ομοίως μπόρεσαν να διαβάσουν την άλλη διάσταση του πράσινου ορθογωνίου ότι ήταν $\alpha – \beta$ και επομένως το εμβαδό του ότι ισούται με $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ δηλαδή με $\alpha^2 - \beta^2$. Το γεγονός ότι κατέληξαν στη σωστή απάντηση ισχυροποίησε την άποψή μας ότι οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη γεωμετρική απεικόνιση αυτών των αλγεβρικών εκφράσεων σε σημαντικό βαθμό.


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Διαφορά τετραγώνων

Γράψτε την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στο σχήμα.

Αλγεβρική παράσταση $x^2+xy-xy-y^2$

Γράψτε το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος με δύο τρόπους.

Εμβαδό = $(x+1)(x-1)$

Εμβαδό = $x^2+xy-xy-y^2$

Να κατασκευάσετε το σχήμα που έχει εμβαδό **(x+2) (x-2)**

Πώς αλλιώς θα γράφατε το εμβαδό του σχήματος που κατασκευάσατε;

Εμβαδό = $x^2+2xy-2xy+4y^2$

ΟΜΑΔΑ 1

$(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

$(3-2x)^2=9\ -12x$
$9+4x-12x$

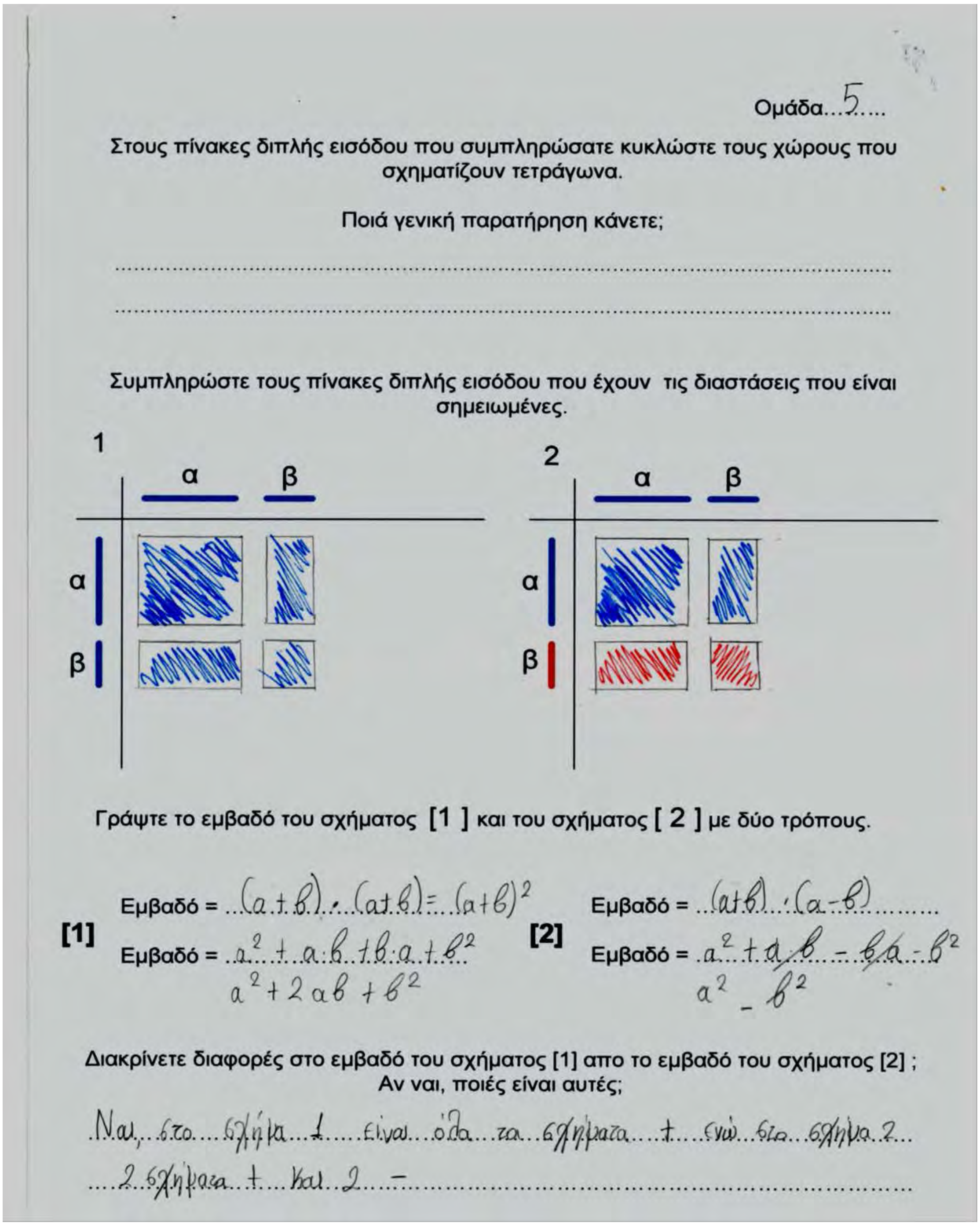
$(-x-2)^2=-4x-4$
$-1x^2+4+4x$

$(3\kappa+\lambda)^2=9\kappa^2+9\kappa\lambda+1\lambda^2$

Να κλείσεις με μιά γραμμή τους χώρους που σχηματίζουν τετράγωνο.

Ισχύει η ισότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

Φύλλο εργασίας στη διαφορά τετραγώνων



Ομάδα...5...

Στους πίνακες διπλής εισόδου που συμπληρώσατε κυκλώστε τους χώρους που σχηματίζουν τετράγωνα.

Ποιά γενική παρατήρηση κάνετε;

....

....

Συμπληρώστε τους πίνακες διπλής εισόδου που έχουν τις διαστάσεις που είναι σημειωμένες.

Γράψτε το εμβαδό του σχήματος [1] και του σχήματος [2] με δύο τρόπους.

[1] Εμβαδό = $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2$

Εμβαδό = $\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta^2$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

[2] Εμβαδό = $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

Εμβαδό = $\alpha^2+\cancel{\alpha\beta}-\cancel{\beta\alpha}-\beta^2$

$\alpha^2-\beta^2$

Διακρίνετε διαφορές στο εμβαδό του σχήματος [1] απο το εμβαδό του σχήματος [2] ; Αν ναι, ποιές είναι αυτές;

Ναι, στο σχήμα 1 είναι όλα τα σχήματα + ενώ στο σχήμα 2 ... 2 σχήματα + και 2 −

2.2.7. Επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού (βλ. Πίνακες 20, α-β, 21, α-β)

Στόχος

Στόχος του μαθήματος ήταν η διδασκαλία και εκμάθηση της επίλυσης της εξίσωσης πρώτου βαθμού με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων. Η διδακτική ενότητα της επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού είχε διδαχθεί στους μαθητές στη δευτέρα Γυμνασίου. Επειδή διαπιστώσαμε από τεστ που συμπληρώσαν οι μαθητές στην αρχή της διδακτικής ώρας ότι υπήρχε σχεδόν πλήρης άγνοια του τρόπου επίλυσης της πρωτοβάθμιας εξίσωσης, θέσαμε ως στόχο του μαθήματος τη διδασκαλία και εκμάθηση της επίλυσης της εξίσωσης πρώτου βαθμού με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Η επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού είχε διδαχθεί στους μαθητές στη δευτέρα Γυμνασίου και το αυτό γεγονός μας επέτρεψε να ελέγξουμε το επίπεδο γνώσης των μαθητών που αφορούσε τη συγκεκριμένη ενότητα πριν τη δική μας παρέμβαση. Στην αρχή λοιπόν του μαθήματος δώσαμε στους μαθητές να συμπληρώσουν ένα τεστ (βλ. πιο κάτω Σχήμα 12) που περιελάμβανε απλές πρωτοβάθμιες ασκήσεις.

Να λύσετε τις εξισώσεις

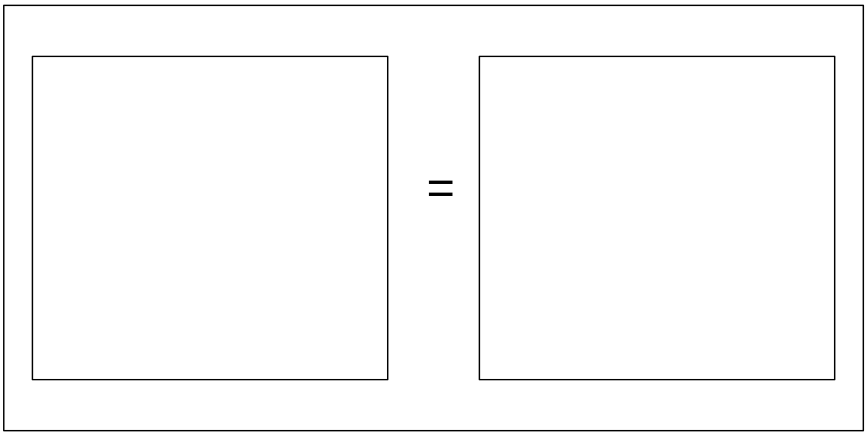
x+2 = 5…………………………………………………..

6x + 15 = 3…………………………………………………

3 (x + 2) + 4 (1-x) = x- 2…………………………………..

Σχήμα 12

Το χρονικό περιθώριο που δόθηκε στους μαθητές για την επίλυση των ασκήσεων ήταν διάρκειας δέκα λεπτών. Τη δοκιμασία αυτή συμπλήρωσαν όλοι οι μαθητές ατομικά και όχι κατά ομάδες και κατά συνέπεια είχαμε, πριν την παρεμβατική μας διδασκαλία, γνώση του γνωστικού επίπεδου (του σημείου αφετηρίας) του κάθε μαθητή. Στη συνέχεια μοιράστηκαν στις ομάδες των μαθητών τα χειραπτικά υλικά και χαρτόνια («επιφάνειες εργασίας») με δύο πλαίσια οριοθετημένα όπως στο παρακάτω σχήμα.

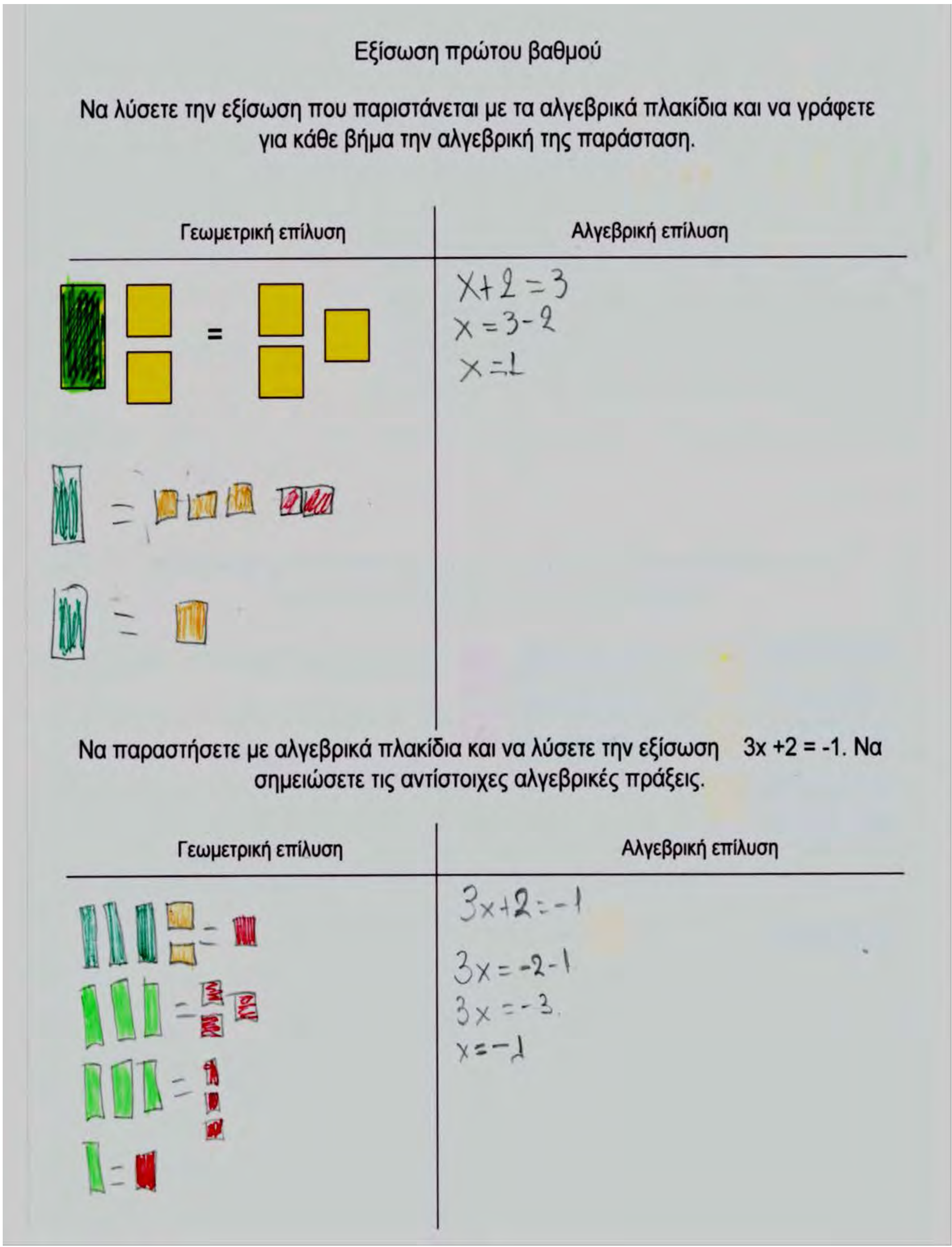


Επιφάνεια εργασίας πρωτοβαθμίων εξισώσεων

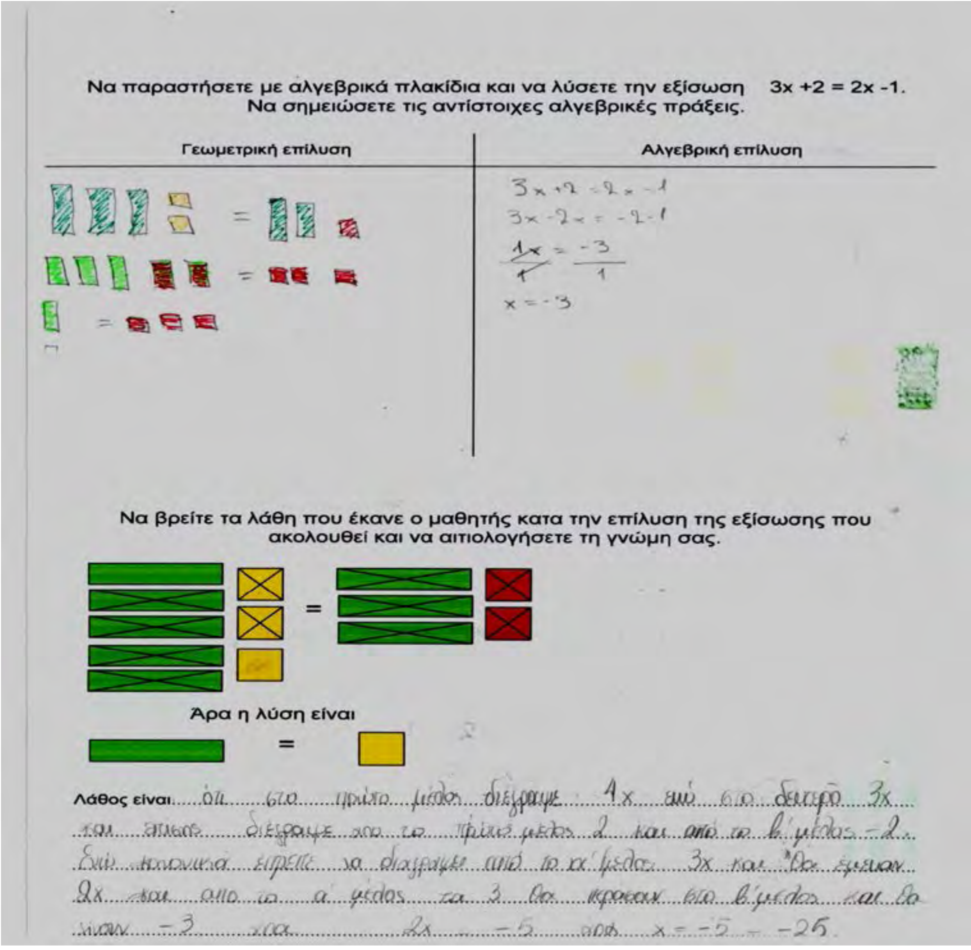
Με τα δύο πλαίσια δεξιά και αριστερά του συμβόλου της ισότητας θέλαμε να απεικονίσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης ώστε να γίνει αντιληπτό στους μαθητές ότι η οποιαδήποτε μετακίνηση πλακιδίων από το ένα πλαίσιο στο άλλο γίνεται με αλλαγή χρώματος πλακιδίων δηλαδή τα χρώματα μπλε, κίτρινο, πράσινο (θετικό) σε χρώμα κόκκινο (αρνητικό) και αντιστρόφως. Παράλληλα η χρήση των δύο ισεμβαδικών ομοίων πλαισίων με το σύμβολο της ισότητας στη μέση παρέπεμπε σε εικόνα ισορροπίας και μας διευκόλυνε στο να επισημαίνουμε στους μαθητές τις λάθος ενέργειες που επιφέρουν «διατάραξη» αυτής της ισορροπίας.

Μας δόθηκε επίσης η ευκαιρία να μιλήσουμε για τις μηδενικές παραστάσεις και για τις ιδιότητες των ισοτήτων που επιτρέπουν την πρόσθεση ή την αφαίρεση του ίδιου αριθμού και στα δύο μέλη χωρίς να αλλάξει η ισότητα. Ειδικότερα επισημάναμε και αιτιολογήσαμε ότι για τα αλγεβρικά πλακίδια η ισορροπία, δηλαδή η ισότητα, δεν «διαταράσσεται» από την πρόσθεση ή αφαίρεση και στα δύο πλαίσια της επιφάνειας εργασίας ισεμβαδικών πλακιδίων του ιδίου χρώματος.

Στο φύλλο εργασίας οι δραστηριότητες ακολούθησαν τον τύπο των ασκήσεων του τεστ που δώσαμε στην αρχή της διδακτικής ώρας. Με τη βοήθεια του επιδιασκοπίου ζητήσαμε από τους μαθητές να αναζητήσουν τις λύσεις σε μορφές πρωτοβαθμίων εξισώσεων που κατέληγαν σε αοριστία ή αδυναμία εύρεσης λύσης.



Φύλλο εργασίας στην επίλυση πρωτοβάθμιας εξίσωσης



Φύλλο εργασίας στην επίλυση πρωτοβάθμιας εξίσωσης

Στο τέλος της διδακτικής ώρας δόθηκε στους μαθητές να συμπληρώσουν ένα τεστ (βλ. πιο κάτω Σχήμα 13). Σε αυτό διατηρήσαμε το ίδιο μοντέλο ασκήσεων με ελάχιστες τροποποιήσεις στους αριθμούς στοχεύοντας στον έλεγχο της αποτελεσματικότητας που είχε η χρήση των χειραπτικών υλικών στην κατανόηση των εννοιών της ενότητας.

Να λύσετε τις εξισώσεις

x+4 = - 5……………………………………………………...

3x - 15 = 3…………………………………………………….

2 (x +3) - 4 (1-x) = x- 2…………………………………..

Σχήμα 13

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Η εξέταση των δύο διαγωνισμάτων (τεστ) πριν και μετά τη διδασκαλία με τα αλγεβρικά πλακίδια έδειξε μεγάλη βελτίωση στη βαθμολογία του κάθε μαθητή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο μέσος όρος του τεστ στην αρχή του μαθήματος ήταν περίπου οκτώ (8) με πέντε (5) μαθητές πάνω από δεκατρία (13). Αυτός ο μέσος όρος του διαγνωστικού διαγωνίσματος μετά την παρέμβαση ανέβηκε στο δέκα έξι και δύο δέκατα (16,2). Σε τεστ ιδίου βαθμού δυσκολίας στο τμήμα ελέγχου, που δόθηκε μετά το πέρας της διδασκαλίας (μετωπική) της ιδίας ενότητας, ο μέσος όρος της βαθμολογίας κυμάνθηκε στο δώδεκα και τρία δέκατα (12,3).

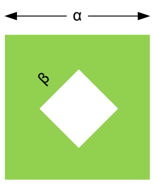
2.2.8. Μορφές παραγοντοποίησης (Πίνακας 18, α-β)

Στόχος

Στόχος του μαθήματος ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της παραγοντοποίησης στις μορφές των ταυτοτήτων, άθροισμα και διαφορά στο τετράγωνο και διαφορά τετραγώνων, καθώς και την παραγοντοποίηση δευτεροβαθμίων μονωνύμων με κοινό παράγοντα.

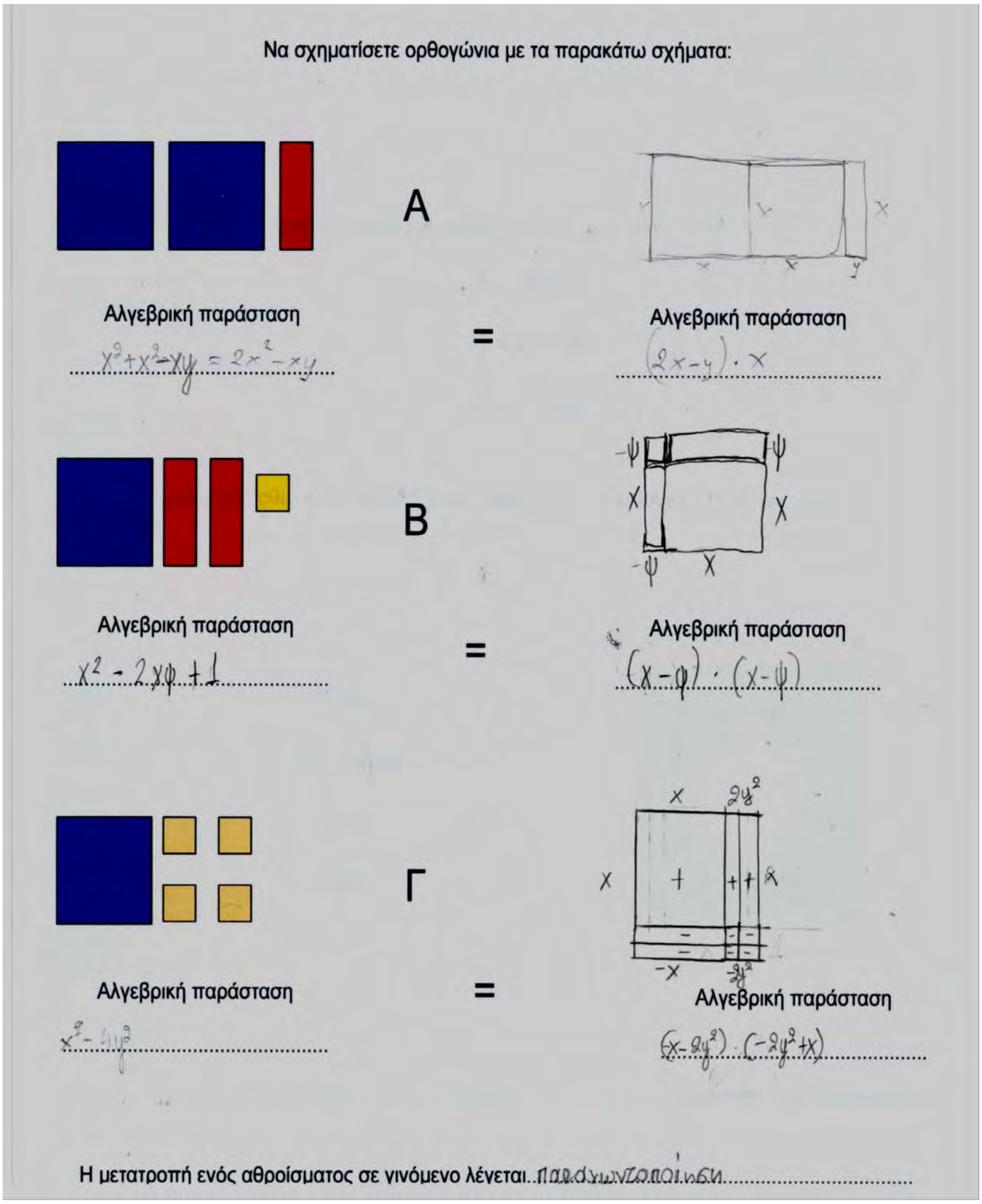
Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Στο φύλλο εργασίας επιλέξαμε ασκήσεις να «καλύπτουν» όλες τις κατηγορίες παραγοντοποίησης που προαναφέρθηκαν και τις οποίες οι μαθητές είχαν γνωρίσει σε προηγούμενες ενότητες. Σκοπός μας ήταν να κατανοήσουν τη χρήση των εννοιών και τεχνικών που διδάχτηκαν και να τις εφαρμόσουν για τη μετατροπή των συγκεκριμένων μορφών αλγεβρικών παραστάσεων σε γινόμενο.



Άσκηση βιβλίου

Η τελευταία άσκηση ήταν από το (τότε) βιβλίο του καθηγητή και επιλύθηκε με ευκολία από τους μαθητές αφού το γεωμετρικό σχήμα ήταν οικεία μορφή λόγω της χρήσης των χειραπτικών υλικών.



Φύλλο εργασίας στην παραγοντοποίηση

Σημειώστε ποιές απο τις παρακάτω παραστάσεις παριστούν εμβαδό ορθογωνίου;

$(x-y)(x+y)$ $\qquad$ $2+(x-y)(x+y)$

$4(\alpha-\beta)^2$ $\qquad$ $4+(\alpha-\beta)^2$

$(x+2y)x-y$ $\qquad$ $(x+2y)(x-y)$

Γιατί επιλέξατε αυτές; Γιατί για να είναι ορθογώνιο πρέπει να υπάρχει ο πολλαπλασιασμός στις πράξεις

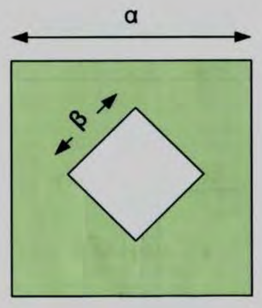
Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

$4x+8 = 4(x+2$

$2x^2+4x = 2(x^2+2x$

$3xy-y^2 = y(3x-y$

Ποιές αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζουν το εμβαδό του ακόλουθου σχήματος;



$(\alpha-\beta)^2$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2-\beta^2$

Δικαιολογήστε την απάντησή ας γιατι αν αφαιρέσουμε απο το μεγαλο τετράγωνο το μικρο θα βρούμε το εμβαδο του μεγάλου

Φύλλο εργασίας στην παραγοντοποίηση

2.2.9. Μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ δευτεροβάθμιας παράστασης

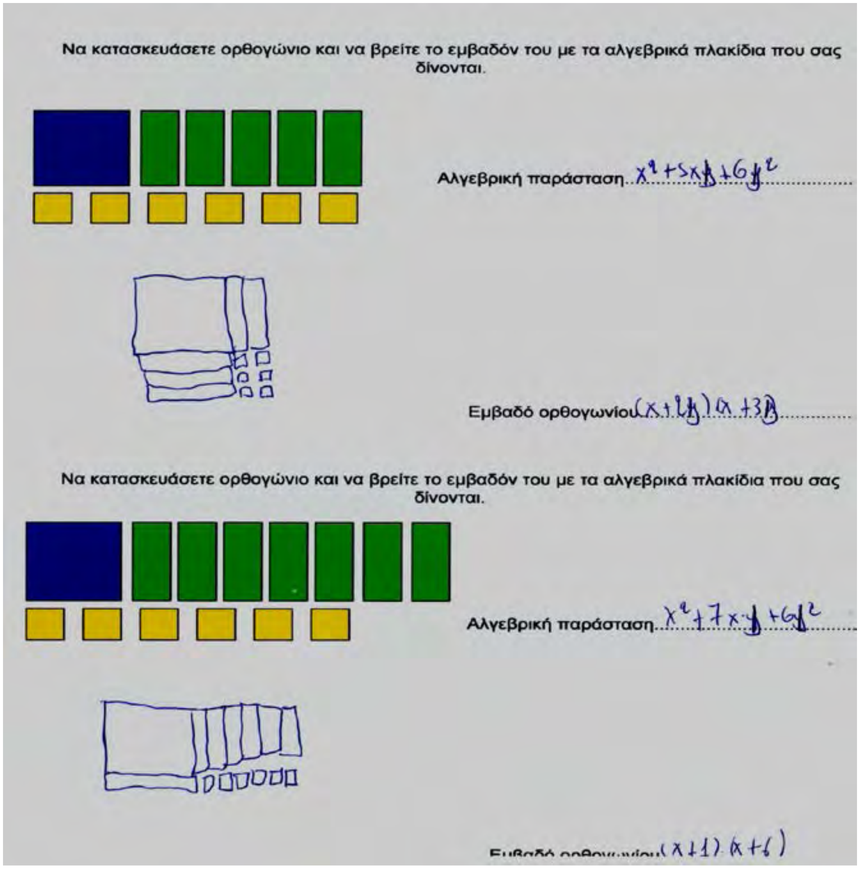
(βλ. Πίνακας 19, α-β-γ-δ)

Στόχος

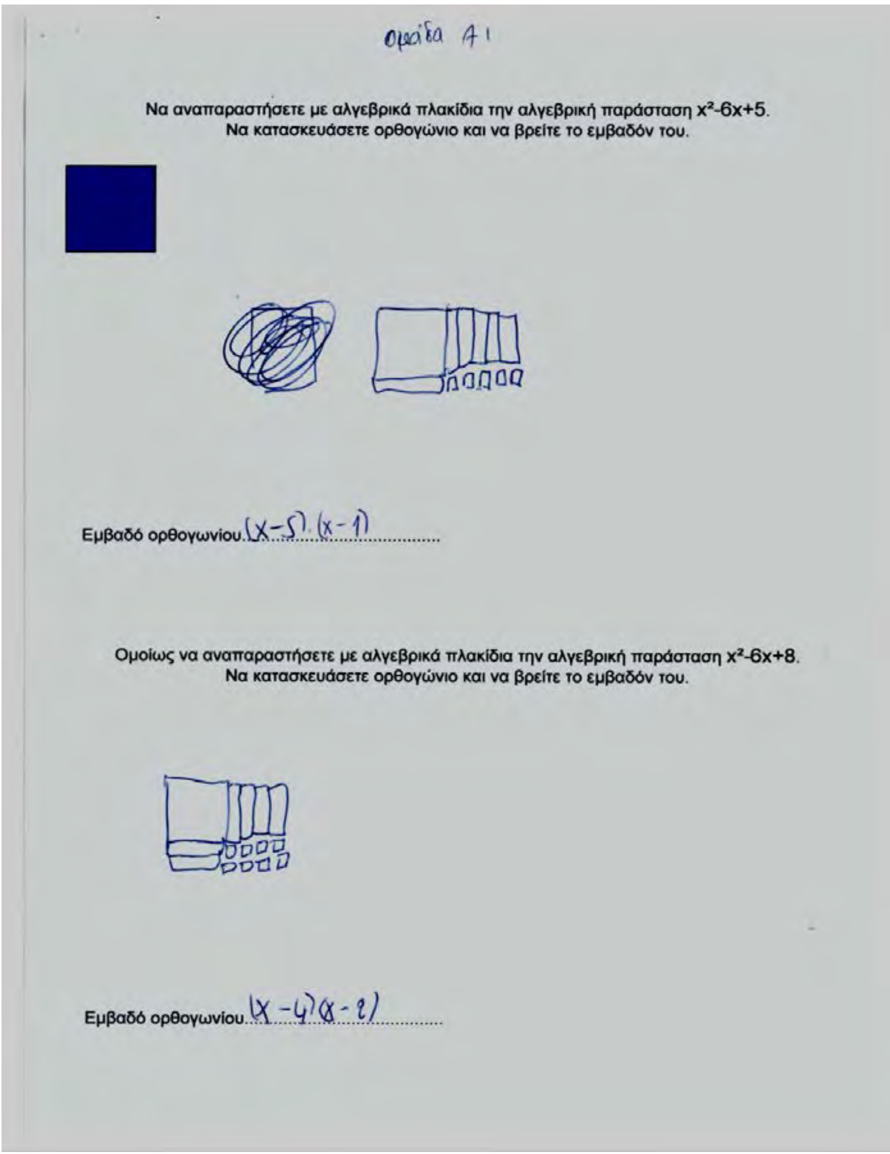
Επιλέξαμε να δώσουμε στους μαθητές τη μορφή του τριωνύμου, όταν γνωρίζουν την ημιπερίμετρο και το εμβαδό ενός ορθογωνίου, για να επεκτείνουν το γνωστικό τους πεδίο στο τριώνυμο και στη συνέχεια στην επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού, χωρίς να «απομακρυνθούν» από τις γνώσεις που ήδη κατέχουν. Απώτερος στόχος μας ήταν η γνώση που θα πάρουν να αποτελέσει και τη βάση για τη διδασκαλία της ενότητας κατασκευής τριωνύμου από το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών του που διδάσκεται στην επόμενη τάξη.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Το φύλλο εργασίας που σχεδιάσαμε ακολούθησε τη φιλοσοφία που αναφέραμε στους στόχους του μαθήματος. Οι μαθητές στις πρώτες δύο σελίδες ασχολήθηκαν με την κατασκευή ορθογωνίου από δοθέντα αλγεβρικά πλακίδια ή από δοθείσα αλγεβρική παράσταση, δραστηριότητες με τις οποίες είχαν ασχοληθεί και στην ενότητα της παραγοντοποίησης.



Φύλλο εργασίας στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης


ομάδα Α1

Να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση x^2-6x+5.
Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

Εμβαδό ορθογωνίου (x-5)·(x-1)

Ομοίως να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση x^2-6x+8.
Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

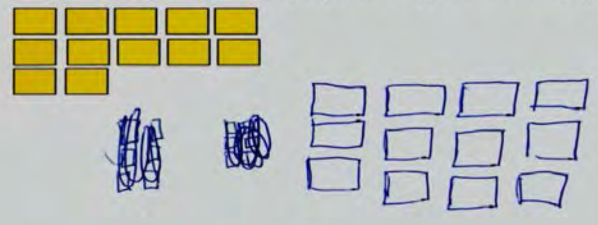
Εμβαδό ορθογωνίου (x-4)(x-2)

Φύλλο εργασίας στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Στην τρίτη σελίδα δώσαμε την ευκαιρία στους μαθητές να επαναφέρουν στη μνήμη τους το εμβαδό και την ημιπερίμετρο ενός ορθογωνίου για να συνδέσουμε τις έννοιες αυτές με τους συντελεστές δευτεροβάθμιας παράστασης. Στην τέταρτη σελίδα τους ζητήσαμε να κάνουν το τελικό βήμα προς τον στόχο που είχαμε θέσει, να παραγοντοποιούν δευτεροβάθμιες παραστάσεις όταν ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου παράγοντα είναι η μονάδα και του πρωτοβάθμιου και ο σταθερός όρος είναι αντιστοίχως οι τιμές ημιπεριμέτρου και εμβαδού ορθογωνίου.

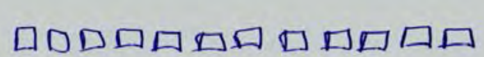
Ομάδα Α'

Να κατασκευάσετε με τα ακόλουθα αλγεβρικά πλακίδια όσα δυνατόν ορθογώνια μπορείτε και να βρείτε για κάθε ορθογώνιο το εμβαδό του και την μισή περίμετρο του.



Εμβαδό ορθογωνίου ~~....~~ 4 - 3   Μισή περίμετρος 7

Εμβαδό ορθογωνίου 6 · 2   Μισή περίμετρος 8



Εμβαδό ορθογωνίου 12 · 1   Μισή περίμετρος 13

Ομάδα Α'

Αναγνωρίζετε αυτούς τους αριθμούς των εμβαδών και ημιπεριμέτρων στα ακόλουθα τριώνυμα;

$x^2-7x+12$

$x^2-8x+12$

$x^2-13x+12$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Η περίμετρος θα μεγαλώνει όσο το εμβαδό μένει σταθερό. Επίσης και στα ορθογώνια οι συντελεστές είναι η μισή περίμετρος κάθε ορθογωνίου.

Τι μπορεί να παριστάνουν το α και το β στον τύπο $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$;

Το α+β μπορεί να παριστάνουν μισή περίμετρο

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$	αβ	α+β	α	β	$(x+\alpha)(x+\beta)$
$x^2 + 3x + 2$	2	3	1	2	$(x+1)\cdot(x+2)$
$x^2 - 3x + 2$	2	−3	−1	−2	$(x-1)\cdot(x-2)$
$x^2 + 5x - 6$	−6	5	−2	3	$(x-2)\cdot(x+3)$
$x^2 + 5x + 6$	6	5	2	3	$(x+2)(x+3)$
$x^2 - x - 2$	−2	−1	+1	−2	$(x+1)\cdot(x-2)$
$x^2 + x - 2$	−2	+1	−1	+2	$(x-1)(x+2)$

Φύλλο εργασίας στην κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης από άθροισμα και γινόμενο αριθμών

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Η συμπλήρωση των φύλλων εργασίας έδειξε ότι οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να δώσουν τις γεωμετρικές εκφράσεις αλγεβρικών παραστάσεων, έχουν κατανοήσει την έννοια του εμβαδού και της ημιπεριμέτρου των σχημάτων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η γεωμετρική απεικόνιση της δευτεροβάθμιας να μην τους δημιουργήσει κανένα πρόβλημα.

2.2.10. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (ελλιπείς μορφές)

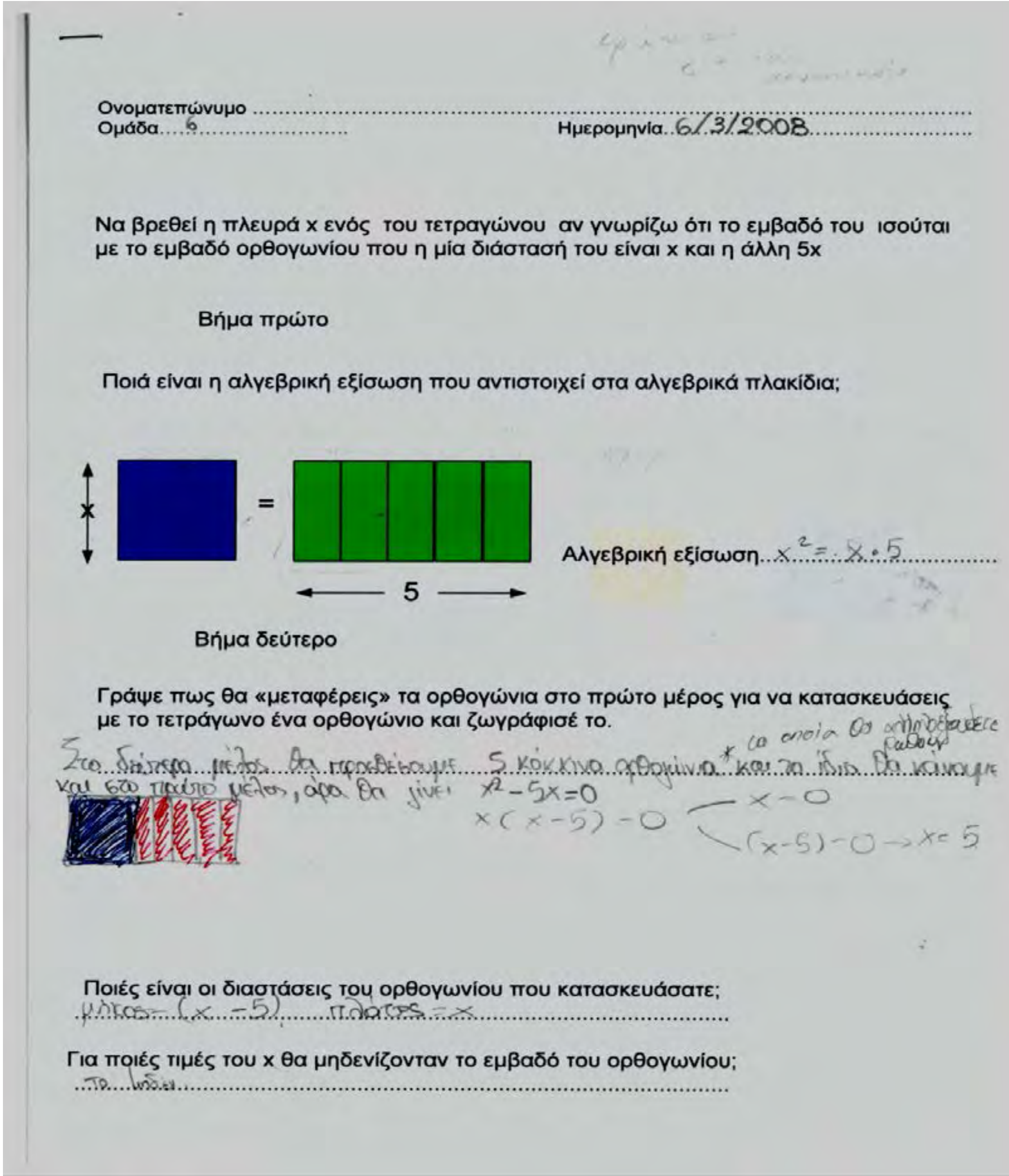
(βλ. Πίνακας 22,α-β-γ-δ)

Στόχος

Στόχος της διδασκαλίας αυτής της ενότητας ήταν να επιλύσουν οι μαθητές δευτεροβάθμιες εξισώσεις ελλιπών μορφών ανακαλώντας στη μνήμη τους παραγοντοποιήσεις που βασίζονταν είτε στην ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων είτε στην παραγοντοποίηση μονωνύμων, πρώτου ή δευτέρου βαθμού, με κοινό παράγοντα. Παράλληλα επιδιώξαμε να ανακαλύψουν, μέσα από την αδυναμία κατασκευής ορθογωνίου, τη μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που δεν επιλύεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

Σκεφτήκαμε να «οδηγήσουμε» τους μαθητές στην επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ζητώντας τους να ακολουθήσουν τα δύο βήματα που προτείνουμε στην πρώτη σελίδα του φύλλου εργασίας (βλ. το παρακάτω σχήμα)



Ονοματεπώνυμο ....
Ομάδα ...6...................... Ημερομηνία ..6/3/2008......................

Να βρεθεί η πλευρά x ενός του τετραγώνου αν γνωρίζω ότι το εμβαδό του ισούται με το εμβαδό ορθογωνίου που η μία διάστασή του είναι x και η άλλη 5x

Βήμα πρώτο

Ποιά είναι η αλγεβρική εξίσωση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;

Αλγεβρική εξίσωση ...$x^2 = x \cdot 5$...

Βήμα δεύτερο

Γράψε πως θα «μεταφέρεις» τα ορθογώνια στο πρώτο μέρος για να κατασκευάσεις με το τετράγωνο ένα ορθογώνιο και ζωγράφισέ το.

Στο δεύτερο μέλος θα προσθέσουμε 5 κόκκινα ορθογώνια* και τα ίδια θα κάνουμε και στο πρώτο μέλος, άρα θα γίνει $x^2-5x=0$

* τα οποία θα αλληλοεξουδετερωθούν

$x(x-5)=0$

$x=0$

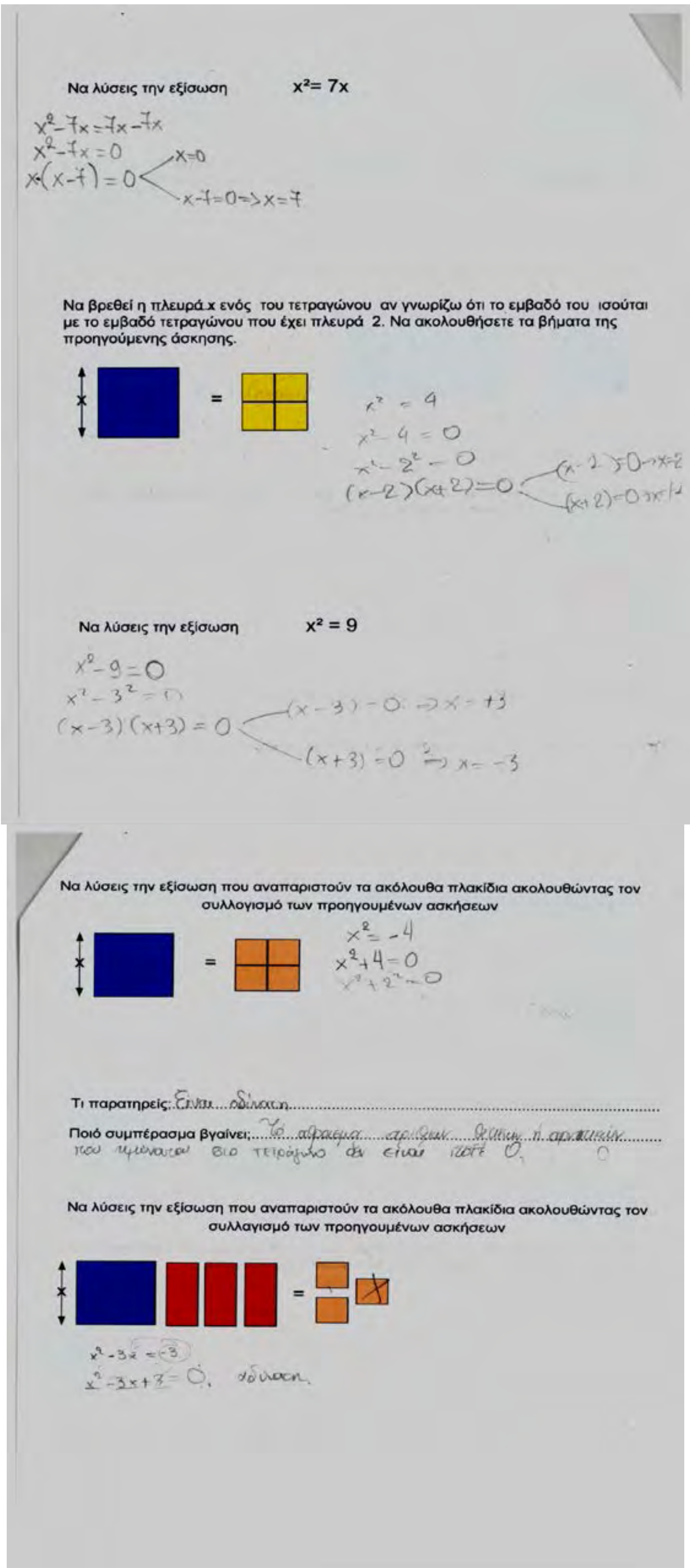
$(x-5)=0 \rightarrow x=5$

Ποιές είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου που κατασκευάσατε;
...μήκος = $(x-5)$ πλάτος = x...

Για ποιές τιμές του x θα μηδενίζονταν το εμβαδό του ορθογωνίου;
...το ίδιο...

Φύλλο εργασίας στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης ελλιπούς μορφής

Στόχος μας ήταν να αναγνωρίσει ο μαθητής ότι είναι ήδη γνώστης της επίλυσης αυτής της ελλιπούς μορφής τριωνύμου αφού αυτή βασίζεται στην παραγοντοποίηση μονωνύμων που έχουν κοινό παράγοντα και στην επίλυση πρωτοβάθμιας εξίσωσης, δηλαδή σε έννοιες και τεχνικές τις οποίες είχε ήδη επεξεργαστεί με τα αλγεβρικά πλακίδια. Στο φύλλο εργασίας περιελήφθησαν όλες οι ελλιπείς μορφές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, καθώς και μία δευτεροβάθμια πλήρους μορφής, για να δώσουμε στους μαθητές την ευκαιρία να «περάσουν» με την επίλυσή της στο θέμα της επόμενης ενότητας που ήταν η επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης πλήρους μορφής.



Να λύσεις την εξίσωση $x^2 = 7x$

$x^2 - 7x = 7x - 7x$
$x^2 - 7x = 0$
$x(x-7) = 0$ → $x = 0$ ή $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Να βρεθεί η πλευρά x ενός του τετραγώνου αν γνωρίζω ότι το εμβαδό του ισούται με το εμβαδό τετραγώνου που έχει πλευρά 2. Να ακολουθήσετε τα βήματα της προηγούμενης άσκησης.

x =

$x^2 = 4$
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 - 2^2 = 0$
$(x-2)(x+2) = 0$ → $(x-2) = 0 \to x = 2$ ή $(x+2) = 0 \to x = -2$

Να λύσεις την εξίσωση $x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0$
$x^2 - 3^2 = 0$
$(x-3)(x+3) = 0$ → $(x-3) = 0 \Rightarrow x = +3$ ή $(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$

Να λύσεις την εξίσωση που αναπαριστούν τα ακόλουθα πλακίδια ακολουθώντας τον συλλογισμό των προηγουμένων ασκήσεων

x =

$x^2 = -4$
$x^2 + 4 = 0$
$x^2 + 2^2 = 0$

Τι παρατηρείς; Είναι αδύνατη

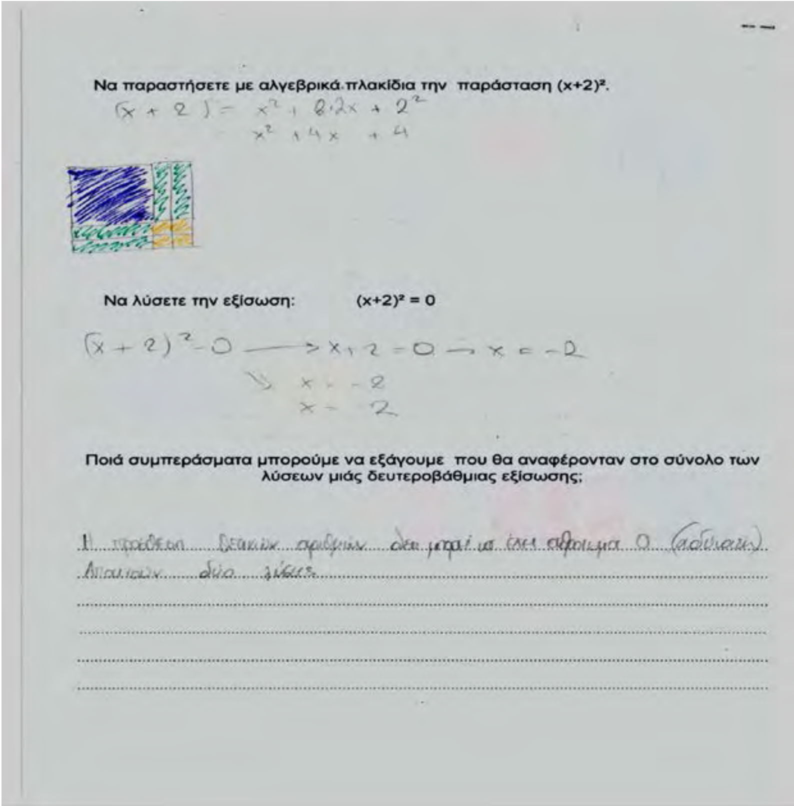
Ποιό συμπέρασμα βγαίνει; Το άθροισμα αριθμών [illegible] που υψώνονται στο τετράγωνο δεν είναι ίσο 0.

Να λύσεις την εξίσωση που αναπαριστούν τα ακόλουθα πλακίδια ακολουθώντας τον συλλογισμό των προηγουμένων ασκήσεων

x =

$x^2 - 3x = -3$
$x^2 - 3x + 3 = 0$, αδύνατη

Φύλλο εργασίας στην επίλυση δευτεροβάθμιαςεξίσωσης


Να παραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την παράσταση $(x+2)^2$.

$(x+2) = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2$

$x^2 + 4x + 4$

Να λύσετε την εξίσωση: $(x+2)^2 = 0$

$(x+2)^2 = 0 \longrightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$

$x = -2$

$x = -2$

Ποιά συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε που θα αναφέρονταν στο σύνολο των λύσεων μιάς δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

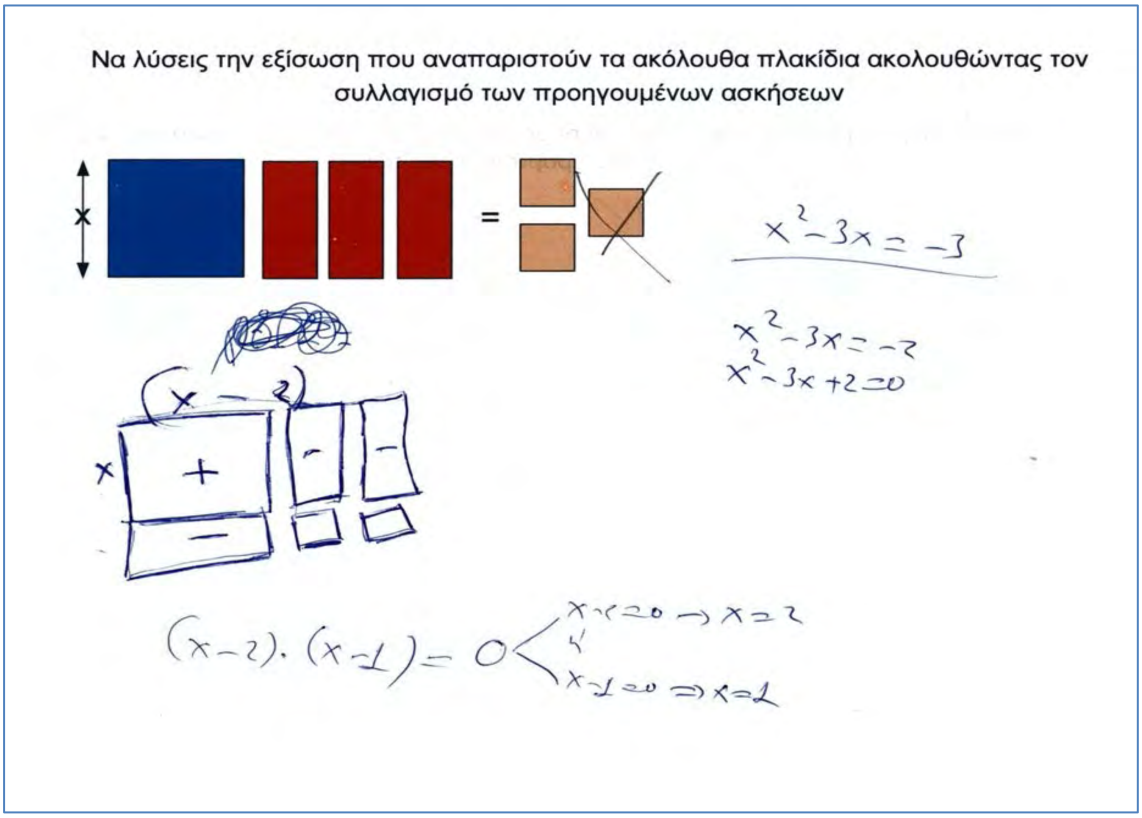
Φύλλο εργασίας στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Παρατηρήσεις από τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας

Από τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές είχαν κατανοήσει τον «μηχανισμό» μεταφοράς στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, με αλλαγή του χρώματος των αλγεβρικών πλακιδίων, την αλλαγή του πρόσημου του μονωνύμου της αλγεβρικής παράστασης. Επίσης κατέληξαν εύκολα, κατασκευάζοντας το ανάπτυγμα του τετράγωνου αθροίσματος, στη λύση της διπλής ρίζας.

Αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι όλες οι ομάδες αναγνώρισαν την αδυναμία επίλυσης της $x^2 + 4$ της τρίτης σελίδας γεγονός που ενισχύει την άποψή μας ότι οι δραστηριότητες που δώσαμε σε προηγούμενες ενότητες βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν ότι η παράσταση αυτή δεν μπορεί να μηδενιστεί. Μια ομάδα μάλιστα έγραψε ότι *«δεν μπορεί να μας κάνει μηδέν όταν προσθέτουμε μόνο θετικούς ή μόνο αρνητικούς αριθμούς».*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο τρόπος που αντιμετώπισαν την αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $x^2 - 3x = -3$ που δόθηκε με τη γεωμετρική της μορφή με τα αλγεβρικά πλακίδια. Η αδυναμία να συμπληρώσουν τετράγωνο με τα τρία μικρά τετράγωνα, τις μονάδες, τους οδήγησε να διαγράψουν το ένα για να δημιουργήσουν την $x^2 -3x = -2$ την οποία και επέλυσαν γεωμετρικά και συμβολικά (βλ. το παρακάτω σχήμα).



Δευτεροβάθμια εξίσωση χωρίς ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

2.2.11. Επίλυση τριωνύμου με τη συμπλήρωση τετραγώνου

(βλ. Πίνακας 24, α-β-γ-δ)

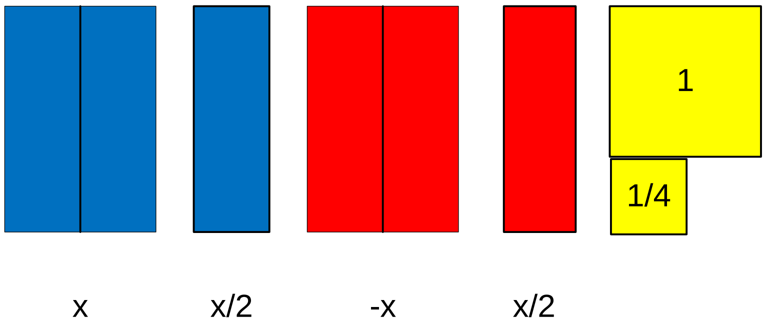
Στόχος

Στόχος της διδακτικής ενότητας ήταν να οδηγηθούν οι μαθητές μέσα από την κατασκευή τετραγώνου στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης και στη συνέχεια να αναφερθούμε στον τρόπο που οδηγηθήκαμε στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Περιγραφή του μαθήματος / Φύλλου εργασίας

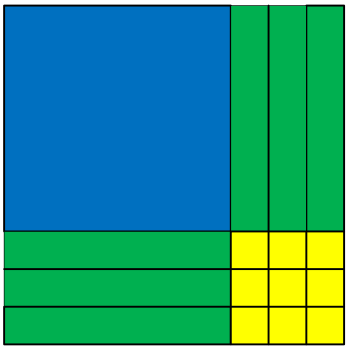
Τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν κατά τρόπο ώστε εργαζόμενοι οι μαθητές με τα αλγεβρικά πλακίδια να ανακαλύψουν τα κομμάτια που λείπουν για τη συμπλήρωση τετραγώνου.

Στους μαθητές δόθηκαν ειδικά κατασκευασμένα αλγεβρικά πλακίδια που αναπαριστούσαν το x και το $x/2$, τη μονάδα και το τέταρτο της μονάδας για να έχουν έτσι τη δυνατότητα να εξεικονίσουν τη διαίρεση στη μέση του ορθογωνίου x και της μονάδας σε τέταρτα (βλ. παρακάτω Σχήμα 14). Τα κομμάτια αυτά είναι αναγκαία για τη γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου στην περίπτωση που ο αριθμός των ορθογωνίων είναι περιττός αριθμός. Με αυτή την κατασκευή αποφύγαμε να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές ψαλίδι και να έχουν έτσι στη διάθεσή τους τα αναγκαία γεωμετρικά σχήματα.



Σχήμα 14

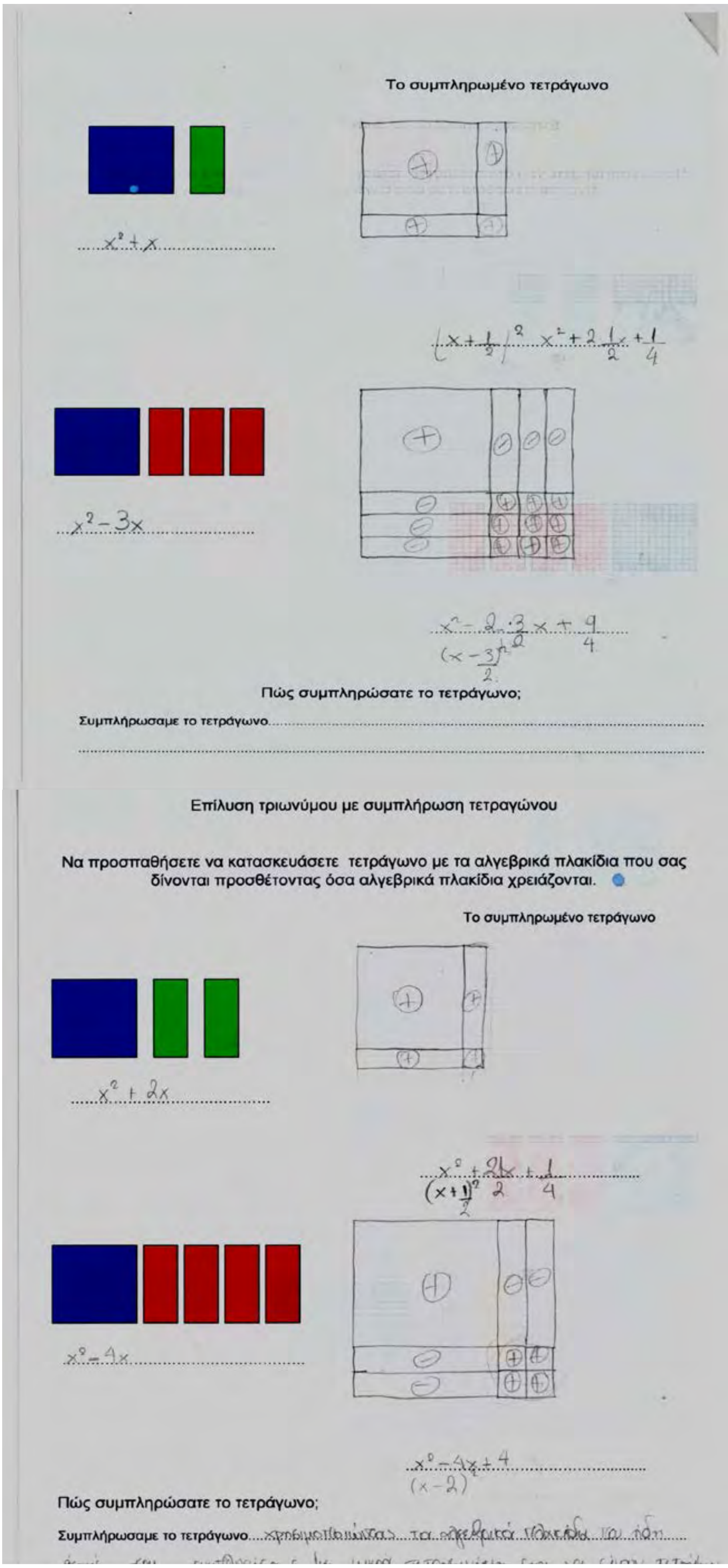
Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα παράδειγμα χρήσης των αλγεβρικών πλακιδίων όταν απαιτείται η διαίρεση του ενός ορθογωνίου από τα τρία για να κατασκευαστεί το τετράγωνο και η διαίρεση της μονάδας σε τέταρτα. Η παράσταση που μετατρέπεται σε τετράγωνο είναι η $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = x^2 + 2\,\frac{3}{2}\,x + \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{4})^2$



Αναπαράσταση της $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^2$

Από τους μαθητές ζητήθηκε να γράψουν με σύμβολα όλα τα βήματα κατασκευής τετραγώνου και να κατανοήσουν με αυτόν τον τρόπο ποιές αλγεβρικές ποσότητες και πως πρέπει να τροποποιηθούν, δηλαδή ποιες να προστεθούν ή να αφαιρεθούν και γιατί.

Στο τέλος του μαθήματος δείξαμε στους μαθητές την επίλυση της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου και πώς καταλήγουμε στον τύπο εύρεσης των ριζών της. (βλ. σελ. 94 σχολικού βιβλίου). Ξεκινήσαμε με την διαίρεση των όρων της $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με τον συντελεστή α του x^2 ώστε να πάρει τη μορφή των εξισώσεων που επέλυσαν (με συντελεστή του x^2 μονάδα) και αναφερόμασταν σε κάθε πράξη που εκτελούσαμε με τα σύμβολα, στην αντίστοιχη ενέργεια που οι ίδιοι έκαναν για να κατασκευάσουν με τα αλγεβρικά πλακίδια το εκάστοτε τετράγωνο της παράστασης που είχαν προς επίλυση. Καταλήξαμε λοιπόν στη μορφή $(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 = \frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ και στην επίλυσή της ως προς x η οποία έδωσε εκτός των δύο ριζών και τον τύπο της διακρίνουσας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.


Το συμπληρωμένο τετράγωνο

x^2+x

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \quad x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

x^2-3x

$x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

Πώς συμπληρώσατε το τετράγωνο;

Συμπληρώσαμε το τετράγωνο

Επίλυση τριωνύμου με συμπλήρωση τετραγώνου

Να προσπαθήσετε να κατασκευάσετε τετράγωνο με τα αλγεβρικά πλακίδια που σας δίνονται προσθέτοντας όσα αλγεβρικά πλακίδια χρειάζονται.

Το συμπληρωμένο τετράγωνο

x^2+2x

$x^2+\frac{2}{2}x+\frac{1}{4}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

x^2-4x

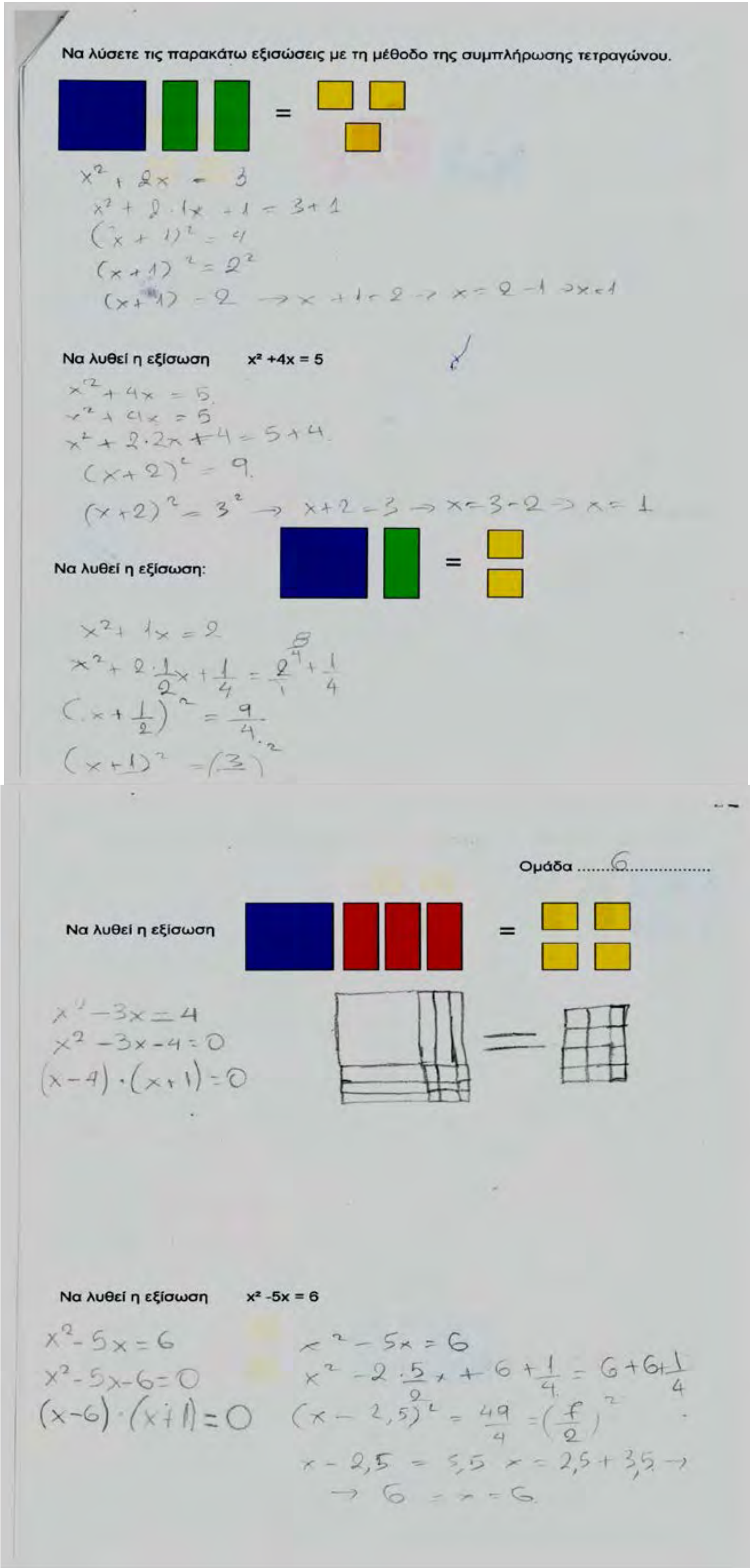
x^2-4x+4

$(x-2)^2$

Πώς συμπληρώσατε το τετράγωνο;

Συμπληρώσαμε το τετράγωνο χρησιμοποιώντας τα αλγεβρικά πλακίδια και ήδη

Επίλυση εξίσωσης δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγών



Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου.

$x^2 + 2x = 3$

$x^2 + 2 \cdot 1x + 1 = 3 + 1$

$(x+1)^2 = 4$

$(x+1)^2 = 2^2$

$(x+1) = 2 \rightarrow x + 1 = 2 \rightarrow x = 2 - 1 \rightarrow x = 1$

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 = 5 + 4$

$(x+2)^2 = 9$

$(x+2)^2 = 3^2 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 3 - 2 \rightarrow x = 1$

Να λυθεί η εξίσωση:

$x^2 + 1x = 2$

$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{2}{1} + \frac{1}{4}$

$(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

$(x + \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$

Ομάδα ...6...

Να λυθεί η εξίσωση

$x^2 - 3x = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4) \cdot (x+1) = 0$

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 5x = 6$

$x^2 - 5x = 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6) \cdot (x+1) = 0$

$x^2 - 5x = 6$

$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + 6 + \frac{1}{4} = 6 + 6 + \frac{1}{4}$

$(x - 2,5)^2 = \frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2$

$x - 2,5 = 3,5 \quad x = 2,5 + 3,5 \rightarrow$

$\rightarrow 6 = x = 6$

Επίλυση εξίσωσης δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου

3. Τα «εργαλεία» που χρησιμοποιήσαμε για την ποιοτική ανάλυση της έρευνάς μας.

3.1 Φύλλα δραστηριοτήτων

Τα φύλλα δραστηριοτήτων (εργασίας), που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, μας βοήθησαν να δούμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές επεξεργάζονται τις δραστηριότητες τόσο στο γεωμετρικό – κατασκευαστικό επίπεδο όσο και στο συμβολικό-αλγεβρικό.

Η παρουσία τους σε συνδυασμό με τα αλγεβρικά πλακίδια μας βοήθησαν να θέσουμε ερωτήσεις, να απαντήσουμε σε απορίες με επιχειρήματα σε ένα επίπεδο που ήταν κατανοητό από το σύνολο των μαθητών τις κάθε ομάδας. Η συνομιλία μας αυτή με τους μαθητές μας έκανε κοινωνούς των επιμέρους δυσκολιών που εμπόδιζαν τη μάθηση και την εμβάθυνση των αλγεβρικών εννοιών των ενοτήτων που επεξεργαστήκαμε.

Οι πληροφορίες που συγκεντρώσαμε μας βοήθησαν στη διαμόρφωση του τελικού επαναληπτικού διαγωνίσματος, των ερωτήσεων που θέσαμε στις προσωπικές συνεντεύξεις μαθητών και καθηγητή τάξης καθώς και στη σύνταξη των φύλλων αξιολόγησης. Επιπροσθέτως οι απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα δραστηριοτήτων όπως και τα σχήματα με τα οποία απέδιδαν τη γεωμετρική διάσταση του προβλήματος υπήρξαν για μας μια διαρκής πηγή πληροφόρησης για τον βαθμό και τον τρόπο επίδρασης του χειραπτικού υλικού στη μάθηση των εννοιών των ταυτοτήτων, παραγοντοποίησης, επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

3.2.Τα Τεστ

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε στην αρχή της ερευνητικής μας εργασίας ήταν η δυσκολία που είχαμε στη σύνθεση ενός διαγνωστικού τεστ του επιπέδου γνώσεων των μαθητών του τμήματος παρέμβασης και αντίστοιχα του τμήματος ελέγχου.

Η δυσκολία αυτή οφείλονταν αφ’ ενός μεν στο γεγονός ότι η ύλη της άλγεβρας που διδάχθηκαν την προηγούμενη χρονιά περιελάμβανε βασικά πράξεις με πραγματικούς αριθμούς, την έννοια της συνάρτησης και την επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης πρώτου βαθμού και αφ’ ετέρου στο ότι η παρέμβασή μας γίνονταν σε διδακτικές ενότητες, τις οποίες οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί, άρα δεν υπήρχε η δυνατότητα ελέγχου του επιπέδου βελτίωσης σε ότι αφορά την επίδοση των μαθητών μετά την παρέμβαση.

Για τους λόγους που προαναφέραμε περιοριστήκαμε σε ένα διαγνωστικό τεστ (βλ. Πίνακας 11) που απαιτούσε από τους μαθητές να συμπληρώσουν – επιλύσουν ασκήσεις εξισώσεων πρώτου βαθμού διαφορετικής δυσκολίας, να δώσουν τον τύπο του εμβαδού ορθογωνίου και να υπολογίσουν τις πλευρές ορθογωνίου γνωστής περιμέτρου.

Σκέψη μας ήταν ότι αυτές οι βασικές γνώσεις αποτελούσαν και ένα υπόβαθρο γνώσεων που έπρεπε να έχει κατακτήσει κάποιος μαθητής από τη φοίτησή του στη δευτέρα γυμνασίου και άρα θα μπορούσαν να αποτελέσουν και μια αφετηρία γνώσεων για το ερευνητικό μας αντικείμενο.

Το διαγνωστικό τεστ ακολούθησαν δύο διαγνωστικά τεστ το ένα μετά το πέρας της διδασκαλίας της ενότητας των ταυτοτήτων (βλ. σχήμα 4 σελ. 79 και Σχήμα 6 σελ. 83) και το άλλο στο τέλος της παρέμβασης (βλ. παρακάτω Σχήματα) στα δύο τμήματα, παρέμβασης και ελέγχου. Αυτά περιελάμβαναν ασκήσεις πάνω σε όλες τις ενότητες που διδάχτηκαν με τα χειραπτικά υλικά. Το δεύτερο επαναληπτικό τεστ δόθηκε προς συμπλήρωση στους ίδιους μαθητές μετά από έναν τουλάχιστον μήνα από το τελευταίο μάθημα παρέμβασης.

Επαναληπτικό Διαγώνισμα

1 Να αντιστοιχίσεις την αλγεβρική παράσταση που βρίσκεται στα αριστερά με το σωστό ανάπτυγμα της στα δεξιά και στη συνέχεια να δικαιολογήσεις την επιλογή σου.

	$2x^2 - 4x + 1$
$(2x + 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$
	$2x^2 + 4x + 1$
	$4x^2 - 4x + 1$

Επέλεξα την δεύτερη ($4x^2+4x+1$) διότι όμα τα λύσεις θα σου βγει

2 Ομοίως να αντιστοιχίσεις τη σωστή απάντηση για τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις

	$(x+2)^2$
$x^2 - 4$	$x^2 + 2$
$x^2 + 4$	$(x+2)(x-2)$
$x^2 + 2x + 2$	Δεν παραγοντοποιείται
	$(x+1)(x+2)$

Επαναληπτικό διαγώνισμα τέλος παρέμβασης (σελ.1)

3 Να συμπληρώσεις τις ακόλουθες ισότητες με τους αριθμούς και τα σύμβολα που λείπουν

α) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

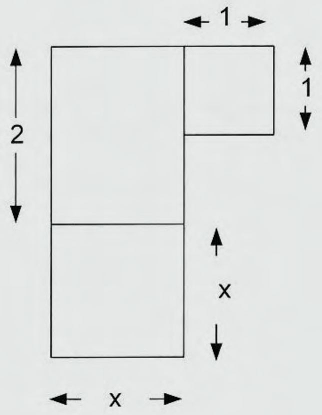
β) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

4 Να χαρακτηρίσεις σωστές ή λάθος τις παρακάτω ισότητες και να διορθώσετε τις λανθασμένες γράφοντας τη σωστή παράσταση.

$x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$	Σ	Λ	
$x^2 - 9 = (x-9)(x+9)$	Σ	Λ	$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$
$9x^2 - \alpha^2 = (3x-\alpha)(3x+\alpha)$	Σ	Λ	
$4y^2 - 1 = (4y-1)(4y+1)$	Σ	Λ	$(2y-1)(2y+1)$

Επαναληπτικό διαγώνισμα τέλος παρέμβασης (σελ.2)

5 Να βρείς ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδό του σχήματος που ακολουθεί



$x^2 + 2x + 1^2$

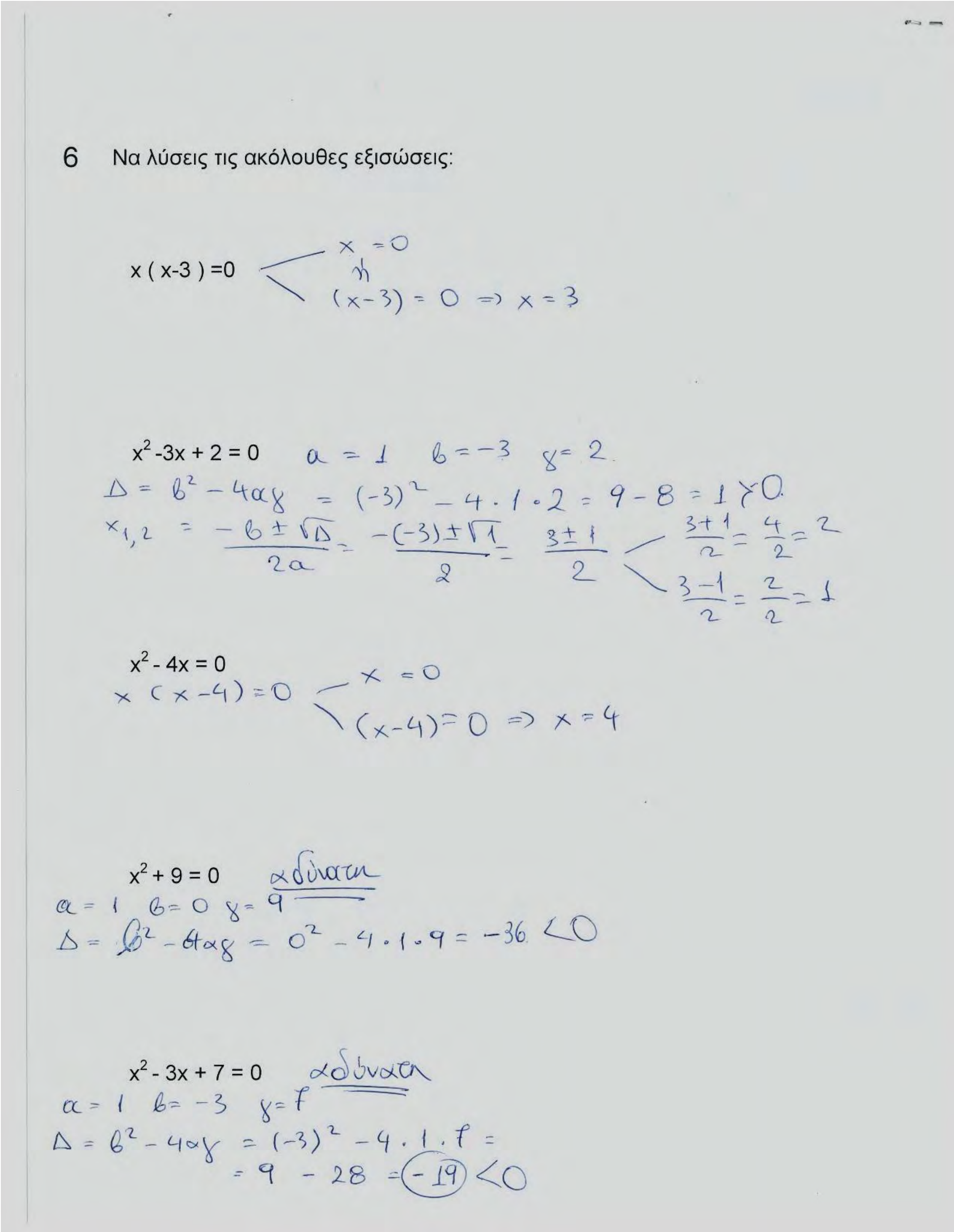
Υπάρχει τετράγωνο με εμβαδό ίσο με το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος ;

Ναί

<u>Αν ναί</u> τότε η πλευρά του είναι $x + 1$

και το εμβαδό του είναι $(x + 1)^2$

Επαναληπτικό διαγώνισμα τέλος παρέμβασης (σελ.3)



6 Να λύσεις τις ακόλουθες εξισώσεις:

$x(x-3)=0$ — $x=0$ ή $(x-3)=0 \Rightarrow x=3$

$x^2-3x+2=0$ $\quad \alpha=1 \quad \beta=-3 \quad \gamma=2$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}$ — $\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$, $\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ — $x=0$, $(x-4)=0 \Rightarrow x=4$

$x^2+9=0$ αδύνατη

$\alpha=1 \quad \beta=0 \quad \gamma=9$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0^2-4\cdot1\cdot9=-36<0$

$x^2-3x+7=0$ αδύνατη

$\alpha=1 \quad \beta=-3 \quad \gamma=7$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot7=$
$=9-28=-19<0$

Επαναληπτικό διαγώνισμα τέλος παρέμβασης (σελ.4)

Στα πιο πάνω πρέπει βεβαίως να αναφερθούν και τα διαγνωστικά τεστ που χρησιμοποιήσαμε πριν και μετά την παρέμβασή μας στην ενότητα της επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού, που αναπτύξαμε ήδη στην αντίστοιχη παράγραφο.

3.2.1 Στοιχεία που αντλήσαμε από τη συμπλήρωση των τεστ στα τμήματα ελέγχου και παρέμβασης.

Μετά το πέρας της παρέμβασης, που κάλυπτε τις ενότητες των ταυτοτήτων, και αφού μεσολάβησε ένα διάστημα δύο μηνών οι μαθητές των τμημάτων παρέμβασης (βλ. Πίνακας 1, 2α, 2β) και ελέγχου (βλ. Πίνακας 1, 2α) συμπλήρωσαν ένα φύλλο επαναληπτικών ασκήσεων. Τα αποτελέσματα έδωσαν ένα προβάδισμα στο τμήμα παρέμβασης με μέσο όρο 10,4 έναντι του 8,2 που σημείωσαν οι μαθητές του τμήματος ελέγχου. Στο τμήμα παρέμβασης προσθέσαμε και τρίτη σελίδα, αντιστοίχιση γεωμετρικών παραστάσεων με αλγεβρικές, για να ελέγξουμε τον βαθμό κατανόησης των ταυτοτήτων με τα αλγεβρικά πλακίδια. Οι μαθητές αναγνώρισαν την αλγεβρική παράσταση του γεωμετρικού σχήματος και μόνο ένα γραπτό συμπληρώθηκε λανθασμένα.

Στις αρχές Μαΐου 2008, περίπου δύο μήνες μετά την τελευταία διδασκαλία μας, ζητήσαμε από τους είκοσι τρείς (23) μαθητές του τμήματος παρέμβασης και από τους είκοσι (20) μαθητές του τμήματος ελέγχου να απαντήσουν γραπτά σε μία σειρά ερωτήσεων (βλ. Πίνακας 25, α-β-γ-δ) που κάλυπταν όλες τις ενότητες στις οποίες είχαμε παρέμβει και αποτελούσαν το βασικό ερευνητικό μας αντικείμενο.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δεν έδειξαν αξιοσημείωτη διαφοροποίηση ανάμεσα στους μαθητές των δύο τμημάτων ως προς την ικανότητα τους να αναγνωρίζουν τις εφαρμογές των τύπων των ταυτοτήτων (βλ. Πίνακας 25α, 25β). Μικρή απόκλιση στην επίδοση, με καλύτερη εκείνη του τμήματος παρέμβασης, παρατηρούμε στην επίλυση της δραστηριότητας της σελίδας τρία (3). Υπάρχουν επτά γραπτά (7) του τμήματος παρέμβασης έναντι έξι (6) γραπτών του τμήματος ελέγχου που συμπληρώνουν σωστά την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στο δοθέν σχήμα, την ύπαρξη τετραγώνου και τον υπολογισμό της πλευράς και εμβαδού του. Έξι (6) μαθητές του τμήματος παρέμβασης συμπληρώνουν σωστά μόνο την αλγεβρική παράσταση, έναντι δύο μαθητών (2) του τμήματος ελέγχου, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ένταξη των αλγεβρικών πλακιδίων στο μάθημα συνέβαλε θετικά στη βαθύτερη κατανόηση της ταυτότητας του τελείου τετραγώνου.

Στην τέταρτη σελίδα, όπου ο μαθητής καλείται να επιλύσει εξισώσεις δευτέρου βαθμού, παρατηρούμε ότι ενώ ο αριθμός των μαθητών που επιλύουν σωστά τις ασκήσεις στα δύο τμήματα δεν διαφοροποιείται ιδιαιτέρα, ο αριθμός μαθητών στο τμήμα ελέγχου που δεν έχουν λύσει καμία άσκηση σωστά ωστόσο είναι αισθητά αυξημένος (30% έναντι 17,4%).

Παρενθετικά σημειώνουμε ότι δώσαμε ιδιαίτερη βαρύτητα στην επίλυση των ασκήσεων της τέταρτης σελίδας για τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά μας, καθότι απαιτείται σύνθεση γνώσεων από τον μαθητή για να καταλήξει στο σωστό αποτέλεσμα και όχι να «παίξει», όπως στις ασκήσεις των σελίδων 1-2, και με τον παράγοντα τύχη (αντιστοίχιση, σωστό-λάθος).

Το ενδιαφέρον μας παράλληλα εστιάστηκε στην ποιοτική διάσταση των λαθών που εμφανίζονται κατά την επίλυση των εξισώσεων της τέταρτης σελίδας. Επισημάναμε λοιπόν ότι οι έξι (6) μαθητές του τμήματος ελέγχου, που αναφέραμε πιο πάνω, οι οποίοι δεν επιλύουν καμία άσκηση, παρουσιάζουν σημαντικά κενά στην κατανόηση εννοιών αφού θεωρούν, όπως βλέπουμε στα γραπτά τους πιο κάτω, ότι η δευτεροβάθμια και η πρωτοβάθμια εξίσωση δεν διαφέρουν, ότι έχουν τη δυνατότητα να αντικαθιστούν το x^2 με το x και ότι μπορούν να επιλύουν τη δευτεροβάθμια ως εξίσωση πρώτου βαθμού, δηλαδή με αναγωγή ομοίων όρων, χωρισμό γνωστών από αγνώστους, διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου.

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 + 9$

$x - 9$

$\frac{9x}{9x} = \frac{9x}{9x} = 0$

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = 0 - 9$

$0 - 9^2$

$x(x-3) = 0$

$x^2 = 0 + 3$

$x \cdot x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x(x-3=) = 0$

$x^2 \; x - 3| = 0$

$x = 3 \neq 0$

$x^2 - 3x + 7 = 0$

$x^2 - 3x = -9$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{-9}{2}$

$x^2 - 3x + 7 = 0$

$x^2 + 3x + 7 = -3x$

$x + 3x + 7 = 10 - 3x$

$x^2 - 3x + 7 = 0$

$x^2 - 3x = 0 - 7$

$3x^2 = 0$

$9x = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x + 3x + 2 - 3x$

$x + 3 + 2 = 5 - 3x$

$\frac{5x}{5x} = \frac{3x}{3x} = 2x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 3x = 0 - 2$

$3^2 x = 0$

$9x = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x = -4$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 3x = -2$

$x = \frac{-2}{3}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 3 + 2\cancel{x} = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x^2 + 4x \neq 0$

$x - 4x \neq 0$

$\frac{4x}{4x} = \frac{4x}{4x} = 0$

$x^2 - 4x = 0$ $\quad x^2 - 4x = 0$

$x^2 < 4x = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x^2 = +4x$

$x^2 = +2x$

$x^2 - 4x = 0$

$x^2 - 4x = 0$

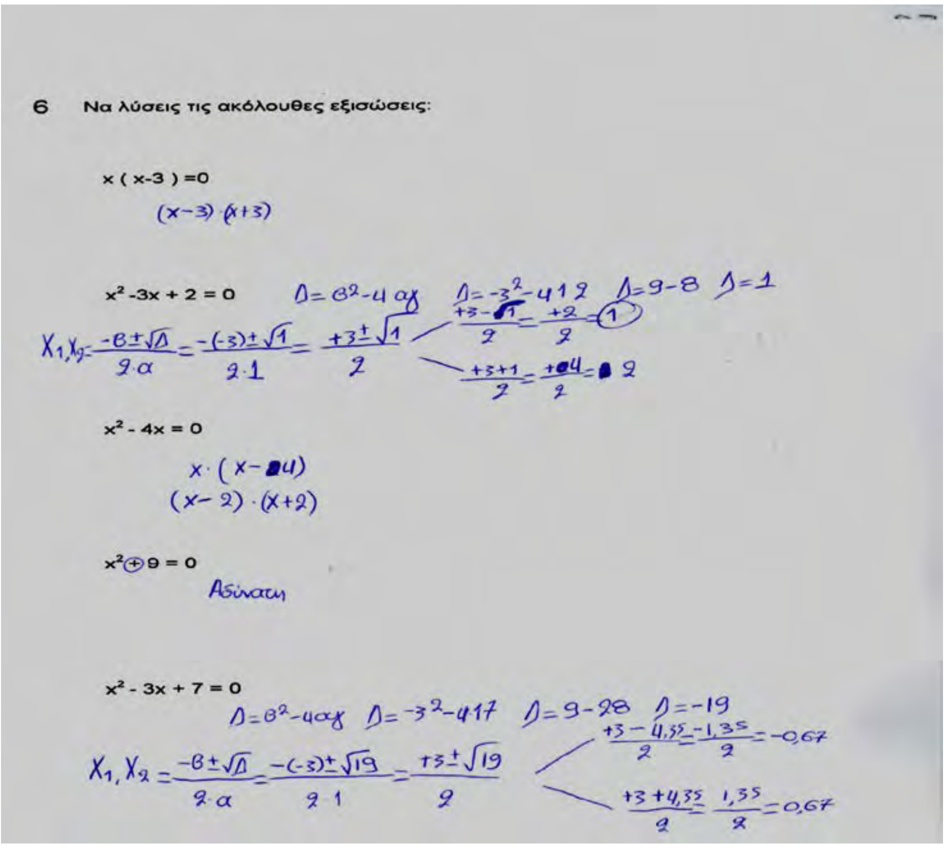
$4x^2 = 0$

$16x = 0$

Λανθασμένες απαντήσεις μαθητών τμήματος έλεγχου

Ο «τύπος» αυτών των λαθών, να επιλύεται η δευτεροβάθμια ως πρωτοβάθμια, δεν εμφανίζεται σε κανένα γραπτό του τμήματος παρέμβασης. Ας σημειωθεί ότι σε δύο από τα τέσσερα (4) λανθασμένα γραπτά αυτού του τμήματος έχει αναγραφεί ο τύπος της διακρίνουσας. Σε ένα από αυτά γίνεται και χρήση του τύπου των ριζών χωρίς όμως να καταλήγει ο μαθητής λόγω εσφαλμένων υπολογισμών, σε σωστό αποτέλεσμα. Στα λανθασμένα γραπτά του τμήματος ελέγχου βρήκαμε μόνο ένα που αναγράφεται ο τύπος της διακρίνουσας.

Αξίζει να σημειωθεί, εκτός των άλλων, ότι έξι (6) μαθητές του τμήματος παρέμβασης για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 9 = 0$ δεν χρησιμοποιούν τον τύπο της διακρίνουσας, για να καταλήξουν με τη εύρεση του αρνητικού προσήμου της στο αδύνατο να επιλυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά δίνουν τη σωστή απάντηση μέσα από «ματιά γεωμετρική», μέσα από την εικόνα που τους έδωσε η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.



Λανθασμένες απαντήσεις σε γραπτό του τμήματος παρέμβασης

Ίσως λοιπόν να είναι χρήσιμο να καθιερώσουμε τη διαισθητική κατανόηση των υλικών, όπως λέει ο Bruner, πριν εκθέσουμε τους μαθητές μας σε περισσότερο παραδοσιακές και τυπολογικές μεθόδους συμπεράσματος και απόδειξης (1960, σελ. 59), να τους «δώσουμε» μαθηματικές απεικονίσεις για να εξεικονίσουν τις καταστάσεις του προβλήματος, να συνδέσουν τις μαθηματικές έννοιες και να επιλύσουν το πρόβλημα (Fennema & Carpenter, 1991, σελ. 5). Να τους δώσουμε δηλαδή μαθηματικά ‘‘μοντέλα’’ που με τα πρότυπά τους, τις εικόνες της εκμάθησης, την εκμάθηση των διαδικασιών, τη γλώσσα τους θα ενεργοποιήσουν τη μαθηματική ματιά τους (Lerman, 2000, σελ. 26).

Στην μετωπική διδασκαλία όμως οι μαθητές εκτίθενται μόνο σε περιορισμένης έκτασης μαθηματικές απεικονίσεις, που επικεντρώνονται σε αριθμούς και σε γράμματα για τους αριθμούς. Χρειάζεται λοιπόν να δουν ότι είναι ευκολότερο να κατανοήσεις σημαντικές μαθηματικές έννοιες όταν αυτές αναπαριστούνται με διάφορους τρόπους και διαφορετικές παραστάσεις εκθέτοντας έτσι τις διαφορετικές οπτικές των δεδομένων στοιχείων (Fennema & Carpenter, 1991, σελ. 6).

3.3. Φύλλα Αξιολόγησης

Από τους μαθητές ζητήσαμε στο τέλος της σχολικής τους χρονιάς να συμπληρώσουν ανώνυμα ένα φύλλο αξιολόγησης του μαθήματος (βλ. Πίνακας 26, α-β-γ). Οι ερωτήσεις που τέθηκαν ήταν παρόμοιες των ερωτήσεων των προσωπικών συνεντεύξεων. Δημιουργήσαμε με αυτόν τον τρόπο μια συλλογή δεδομένων προς διασταύρωση των απόψεων των μαθητών που εξέθεσαν στις συνεντεύξεις τους με αυτές που παρουσίασαν στο φύλλο αξιολόγησης. Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές, σχετικά με το κλίμα τάξης, την εργασία σε ομάδες και τη θέση τους απέναντι στη διδακτική μας πρόταση δεν απείχαν από την προσωπική μας αντίληψη για τα ίδια θέματα.

Όπως προέκυψε από την «ανάγνωση» των φύλλων αξιολόγησης (βλ. στη συνέχεια Σχήμα 16), οι μαθητές θεωρούν ότι η εμπειρία της διδασκαλίας ήταν θετική, βοηθήθηκαν από τα αλγεβρικά πλακίδια στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών καλύτερα από ότι στο συνηθισμένο μάθημα. Τα αλγεβρικά πλακίδια και η εργασία σε ομάδες συνετέλεσαν στο να συμμετέχουν οι μαθητές με πολύ ενδιαφέρον στο μάθημα, να έχουν ευκαιρία να συζητούν πολλές φορές την πορεία της άσκησης με τον καθηγητή και να γίνουν οι σχέσεις μεταξύ των συμμαθητών της ομάδας καλύτερες.

Σύμφωνα με τον Polya (1965, σελ 70) η ιδέα της λύσης προσεγγίζεται καλύτερα αν κάποιος έχει σαφείς λεπτομέρειες σε ένα αρμονικό όλο. Με αυτήν τη θέση ευθυγραμμίζονται σχεδόν στο σύνολό τους και οι μαθητές μας αφού μας γράφουν ότι πολλές φορές για να «δουν» τη λύση, κυρίως των δύσκολων ασκήσεων αλλά και για τις πιο απλές, «μετέφραζαν» την αλγεβρική παράσταση σε γεωμετρική, τη σχεδίαζαν ή ανέτρεχαν νοητά στις λεπτομέρειες της εικόνα που είχαν διατηρήσει στη μνήμη τους από την κατασκευή που επεξεργάστηκαν στο μάθημα.

Η συμμετοχή τους στο μάθημα αυξήθηκε πολύ, γιατί ένιωσαν σίγουροι να απαντήσουν στις ερωτήσεις του καθηγητή τους, αφού η θέση τους ήταν και θέση της ομάδας τους. Μας ανέφεραν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο για λίγους, όπως πίστευαν μέχρι πρότινος και επίσης ότι τώρα βαθμολόγουν τον εαυτό τους με καλύτερο βαθμό από ότι στο παρελθόν.

	Συμφωνώ πολύ	Συμφωνώ αρκετά	Συμφωνώ λίγο	Διαφωνώ
Σε γενικές γραμμές η εμπειρία μου από τη διδασκαλία με τα χειραπτικά υλικά ήταν θετική	12	9	1	
Κατανόησα καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκα από ότι στο συνηθισμένο μάθημα	11	8	3	
Το μάθημα με χειραπτικά υλικά βοηθά μόνο τους «αδύνατους» μαθητές	16	5	1	
Το μάθημα με τα χειραπτικά υλικά βοηθά όλους τους μαθητές	18	4		
Δεν νομίζω ότι τα χειραπτικά υλικά βοηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών			2	20
Δεν μου αρέσει να συζητώ με τους συμμαθητές μου το πώς θα λυθεί μία άσκηση	1	1	2	18
Δεν αισθάνομαι σίγουρος/η να απαντήσω στις ερωτήσεις του καθηγητή χωρίς να ρωτήσω τον/την διπλανό μου.		4	7	11
Θεωρώ ότι τα μαθηματικά είναι μόνο για λίγους μαθητές.	1	2	6	13
	[1]	[2]	[3]	[4]
Τα αλγεβρικά πλακίδια με βοήθησαν να καταλάβω τα μαθηματικά [πάρα πολύ, πολύ, σχεδόν καθόλου , καθόλου]	11	10	1	
Συμμετείχα στο μάθημα με [πάρα πολύ, πολύ, σχεδόν καθόλου , καθόλου] ενδιαφέρον	6	14	1	1
Για να λύσω [τις σύσκολες , τις εύκολες , όλες τις] ασκήσεις τις σχεδίαζα με τα αλγεβρικά πλακίδια	10		12	
Συζήτησα με τον καθηγητή μου για την πορείας της άσκησης [πολλές, φορές , μερικές φορές , καθόλου]	9	12	1	
Αν βαθμολογούσα τον εαυτό μου τώρα θα έβαζα στα μαθηματικά [πολύ καλύτερο, καλύτερο, χειρότερο, πολύ χειρότερο] βαθμό.	4	16	2	
Οι σχέσεις μου με τους συμμαθητές της ομάδας μου έγιναν [πολύ καλύτερες, καλύτερες παρέμειναν ίδιες, χειροτέρευσαν]	10	2	10	
Όταν έλυνα μια άσκηση σκεφτόμουν [πάντα, σχεδόν πάντα μερικές φορές, ποτέ] την εικόνα με τα αλγεβρικά πλακίδια για να βοηθηθώ	9	3	9	1

Σχήμα 16: Αποτελέσματα Φύλλου Αξιολόγησης

Αναφέρθηκαν θετικά για το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας με τη χρήση αλγεβρικών πλακιδίων, διότι όπως μας γράφουν:
«Από το να βλέπεις δυσνόητα σύμβολα είναι καλύτερα να βοηθιέσαι από τα πλακίδια. Σε αυτή τη διαδικασία σκέφτεσαι, αναρωτιέσαι και έτσι συμμετέχεις ενεργά στο μάθημα».
«Ήταν κάτι καινούργιο για μένα και όπως τα καινούργια ήθελα να το γνωρίσω με πολύ ανυπομονησία και περιέργεια. Στην πορεία επειδή καταλάβαινα πολύ καλύτερα τα μαθηματικά αυτό ‘‘με ανέβαζε’’ ψυχολογικά και έλεγα ‘‘μπορώ, μπορώ’’»
«Τα υλικά έκαναν πιο εύκολο το μάθημα, πιστεύω έπιασαν τόπο, δεν ‘‘πήγαν τζάμπα’’ και ήταν πιο ευχάριστο το μάθημα»
«Μου δόθηκε η ευκαιρία να συνεργαστώ με τους συμμαθητές μου, να συζητήσω με τους καθηγητές μου και να ευχαριστηθώ το μάθημα των μαθηματικών».

3.4. Οι συνεντεύξεις

Η ερευνητική μας εργασία έκλεισε με ατομικές συνεντεύξεις όλων των μαθητών του τμήματος παρέμβασης (2007-2008). Ατομικές συνεντεύξεις είχαμε πάρει και από τους μαθητές που είχαν συμμετάσχει κατά την πιλοτική φάση της έρευνας (2006-2007).

Συγκεντρώσαμε μέσω των συνεντεύξεων ένα αρκετά μεγάλο δείγμα σκέψεων, συναισθημάτων και προτάσεων μαθητών σχετικά με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στο μάθημα της άλγεβρας στις ενότητες που εξετάζονται στην ύλη της τρίτης Γυμνασίου και συγκεκριμένα των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης, της επίλυσης εξίσωσης πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Οι απόψεις των μαθητών που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις διασταυρώθηκαν με εκείνες των φύλλων αξιολόγησης (βλ. Πίνακας 26, α-β-γ). Οι ερωτήσεις των φύλλων αξιολόγησης, στις οποίες οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν ανώνυμα, ήταν πάνω στο ίδιο πλαίσιο ερωτήσεων που θέσαμε κατά τη διάρκεια της προσωπικής συνέντευξης. Προσπαθήσαμε με αυτόν τον τρόπο να περιορίσουμε, στα πλαίσια του δυνατού, τον παράγοντα της προσωπικής «δέσμευσης» μαθητή - ερευνήτριας δηλαδή να εκφράσει ο μαθητής θετικές απόψεις για την ερευνητική μας εργασία, εξ αιτίας της οικειότητας ή συμπάθειας που προέκυψε στη διάρκεια της παρέμβασης, αντίθετες προς την πραγματικότητα.

Τις συνεντεύξεις των μαθητών ακολούθησαν οι συνεντεύξεις των καθηγητών (βλ. Πίνακας 27) που παρακολούθησαν τις πιλοτικές μας διδασκαλίες, στα τμήματα των σχολείων που έχουν προαναφερθεί, όπως και του καθηγητή τάξης, που συνεργάστηκε μαζί μας κατά την πιλοτική μας παρέμβαση το σχολικό έτος 2006-2007 και κατά την κύρια παρέμβασή μας το σχολικό έτος 2007-2008. Τα ερωτήματα τα οποία θέσαμε στους μαθητές ήταν:

1. *Τι σκέφτηκες όταν πρωτοείδες τα αλγεβρικά πλακίδια;*
2. *Σε βοήθησαν τα αλγεβρικά πλακίδια, όσες φορές εργάστηκες με αυτά;*
3. *Πώς αντιμετώπιζες το μάθημα των μαθηματικών όταν δούλευες τα υλικά;*
4. *Ποιο ήταν το «κλίμα» της τάξης όταν εργαστήκατε σε ομάδες με τα αλγεβρικά πλακίδια;*
5. *Ποια η εμπειρία σου από την εργασία σε ομάδες;*
6. *Παρατήρησες συμμαθητές σου που άλλαξαν συμπεριφορά στο μάθημα όταν δουλεύατε με τα υλικά;*
7. *Αν σου βάλω μια άσκηση με τα υλικά μπορείς να την λύσεις;*

1. *Πώς χρησιμοποιείς την εμπειρία σου από τα αλγεβρικά πλακίδια για να επιλύσεις ή να επαληθεύσεις μία άσκηση που σε δυσκολεύει;*

2. *Ποια ήταν η στάση σου απέναντι στα μαθηματικά πριν την παρέμβαση; Ποια είναι τώρα; Πως θα ήταν αν δούλευες όλα τα χρόνια με υλικά;*

3. *Πως θα πρότεινες να γίνεται το μάθημα των μαθηματικών και γιατί;*

3.4.1 Στοιχεία που αντλήσαμε από τις προσωπικές συνεντεύξεις των μαθητών

Τα βασικά σημεία που έθιξαν οι μαθητές μας στα φύλλα αξιολόγησης για την εμπειρία τους με τα χειραπτικά υλικά, τα επισημάναμε και στις προσωπικές τους συνεντεύξεις. Οι παρατηρήσεις τους επικεντρώθηκαν στην εμπειρία που είχαν από τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και στα συναισθήματα τους για τα μαθηματικά πριν και μετά την παρέμβασή μας, στις εμπειρίες που είχαν από τη συμμετοχή τους στην ομάδα, στο κλίμα της τάξης που επικρατούσε, στην επίδραση που είχε η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στους αδύνατους μαθητές της τάξης τους. Για να έχουμε καλύτερη εικόνα για την άποψη των μαθητών στα σημεία στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω θα κατηγοριοποιήσουμε αυτές τις απόψεις στη συνέχεια.

3.4.1.α. Πως είδαν οι μαθητές τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στο μάθημα.

Οι αναπαραστάσεις, που δημιούργησαν οι ίδιοι οι μαθητές με τα αλγεβρικά πλακίδια, «ελάφρυναν» το γνωστικό τους φορτίο, μπόρεσαν να εργαστούν σε εναλλακτικά μέρη του προβλήματος, να «δουν» τις ιδέες και τις έννοιες που μεσολαβούσαν ως την επίλυση του, να οργανώσουν τη λύση του, να αναπτύξουν το επιχείρημα και να υποστηρίξουν τα συμπεράσματά τους Ο χειρισμός των συμβόλων που είχε μετατραπεί σε χειρισμό αντικειμένων τους μείωσε τον φόβο και την άρνηση να προχωρήσουν για να φτάσουν σε ένα αποτέλεσμα. Εξοικειώθηκαν με τα υλικά και αυτή η εξοικείωση πέρασε και στη συμβολική παράσταση που μέχρι τότε έστεκε εχθρική και απόμακρη απέναντί τους.

Οι μαθητές μας είπαν ότι με τα αλγεβρικά πλακίδια: *«λύνω ασκήσεις που χωρίς αυτά δεν μπορούσα μέχρι τώρα», «με τα υλικά προσπαθούσα περισσότερο, γιατί μπορούσα να το κάνω και εγώ, αν γινόταν στο πίνακα θα αντέγραφα μόνο», «εγώ μπερδευόμουν στην αρχή στο* x^2 *δεν θυμόμουν… τα μπέρδευα γενικά αυτά, και τώρα που έχουμε κάνει τα κομματάκια, αυτά τα σχεδιάκια, θυμάμαι το* x^2 *είναι τετράγωνο το ένα είναι… και αυτά τα καταλαβαίνω πολύ πιο καλύτερα».*

Παράλληλα στάθηκαν κριτικά απέναντι στην «παραδοσιακή», μετωπική, μέθοδο διδασκαλίας, που βάση της είναι τα σύμβολα και οι πράξεις και τα θεώρησαν ως την κύρια αιτία αποστασιοποίησης τους από τα μαθηματικά. Γνώμη τους είναι ότι : *«βοηθάνε πάρα πολύ, εμένα με βοηθήσανε πάρα πολύ να καταλάβω», «τα μαθηματικά από παλιότερα που τα ήξερα, φανταζόμουν, ότι ήταν μόνο πράξεις και… αρκετά δύσκολα στην κατανόηση και θεωρία... και όλα, αλλά με αυτά από την αρχή δεν πίστευα, ότι μπορούσα... και ούτε ότι θα είχα φτάσει σε αυτό το στάδιο να μπορώ να κάνω τέτοιες πράξεις που… με τα νούμερα αποκλείεται έτσι…».*

Ο τρόπος μάθησης και οι στρατηγικές μάθησης, εννοώντας τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται ή για να επιτευχθεί ένας στόχος μάθησης ή για να αντιμετωπιστεί ένα πρόβλημα κατανόησης (Garner 1990), που χρησιμοποιούσε ο μαθητής τον οδηγούσαν σε αδιέξοδο και αυτή ήταν η αιτία της πεποίθησής του ότι δεν θα μπορούσε να κάνει τέτοιες πράξεις.

Η Anthony θεωρεί ότι πολλοί είναι οι μαθητές που δεν γνωρίζουν ποιες στρατηγικές είναι κατάλληλες σε κάθε πρόβλημα με αποτέλεσμα όταν τις εφαρμόζουν η χρήση τους να είναι αναποτελεσματική. Διαπίστωσε μάλιστα σε έρευνά της ότι οι στρατηγικές μάθησης δεν βοηθούν τους μαθητές γιατί οι γνώσεις τους πολλές φορές είναι ανεπαρκείς για τη λύση του προβλήματος και γιατί ακόμη και να έχουν τις αναγκαίες γνώσεις για να λύσουν το πρόβλημα εφαρμόζουν τις στρατηγικές αναποτελεσματικά. Επιπλέον παρατήρησε ότι τους εμποδίζουν να συνειδητοποιήσουν τα γνωστικά τους προβλήματα (1996, σελ. 25).

Η μη αποτελεσματική στρατηγική μάθησης όμως επίσης οδηγεί τους μαθητές σε αποστασιοποίηση από το μάθημα και σε υποτίμηση των δυνατοτήτων τους να κατανοήσουν τις έννοιες. Ο Παύλος μας είπε ότι *«με τις πράξεις συγκεκριμένα δεν τα πήγαινα πολύ καλά. Ε... παρόλο που μπορούσα να κάνω πράξεις, εντάξει για κάποιο πρόβλημα, να λύσω το πρόβλημα αλλά πάντα με άγχωναν οι πράξεις, με αποτέλεσμα μερικές φορές να το έκανα λάθος από την αρχή και το αποτέλεσμα να ήταν λάθος»*.

Τα αλγεβρικά πλακίδια άλλαξαν την στρατηγική μάθησης και η Κατερίνα μας επισήμανε ότι αυτό την βοήθησε γιατί ενώ *«στην αρχή μπερδευόμουν με τα πρόσημα, αλλά όταν τα μεταφέραμε από το ένα μέρος και αλλάζαμε χρώμα και έτσι μου μπήκε να αλλάζω και τα πρόσημα»*.

Κάνοντας ένα πρόχειρο απολογισμό της εμπειρίας τους αρκετοί εξέφρασαν παρόμοιες γνώμες. *«Σε σύγκριση με την πρώτη τάξη που δεν ήμουν σε θέση να λύσω μια άσκηση στην τρίτη πλέον ότι απορίες μπορεί να μου γεννιόνταν για μια εξίσωση για παράδειγμα μπορούσα να ανατρέξω στα τετραγωνάκια, τα σχηματάκια, όλα αυτά και να λύσω σωστά να μην προβληματιστώ τώρα...», «εγώ πίστευα ότι ήξερα κάποια πράγματα ενώ στην ουσία δεν τα ήξερα. Εγώ φέτος είδα τον εαυτό μου να λέει αυτό το ξέρω και μέσα από τις ασκήσεις και τα σχήματα, ότι δεν ήταν αυτό που ήξερα και έτσι πιστεύω αν δεν υπήρχαν δεν θα το καταλάβαινα»*. Με τις δηλώσεις τους αυτές δείχνουν ότι αρχίζουν να νιώθουν εμπιστοσύνη για τις δυνατότητές τους που αφορούν την κατανόηση των εννοιών του μαθήματος την οποία εμπιστοσύνη ο Skemp (1971, σελ. 35) θεωρεί σημαντικό παράγοντα για να οδηγηθεί ο μαθητής στην επιτυχία.

Μας είπαν επίσης ότι *«άμα έχεις υλικά τα μαθαίνεις και πιο γρήγορα και πιο εύκολα».* Το χειραπτικό υλικό δηλαδή, τους έδωσε την αυτοπεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι και για κείνους και ότι δεν στερούνται δυνατοτήτων όταν το μάθημα προσεγγίζεται με το κατάλληλο διδακτικό μοντέλο.

3.4.1.β. Ποιες οι εμπειρίες των μαθητών από τη συμμετοχή τους στην ομάδα

Το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας ήταν ίσως χωρίς υπερβολή άγνωστο στους μαθητές. Υποδέχτηκαν λοιπόν την πρότασή μας στην αρχή με κάποιες επιφυλάξεις για την αποτελεσματικότητά της, σε ότι αφορούσε τη μάθηση, έγινε όμως από όλους αποδεκτή και συνδέθηκε αναπόσπαστα με το μάθημα της άλγεβρας. *«Όταν αρχίσαμε στην αρχή δεν μπορούσα να τα καταφέρνω, αλλά τα κατανοούσα περισσότερο γιατί ο καθένας έλεγε τη γνώμη του, τα συνδυάζαμε, προσπαθούσαμε να βγάλουμε ένα συμπέρασμα. Εμένα με βοήθησε πάντως με τις ομάδες»* μας είπε ο Δημήτρης.

Η άποψή του αυτή δικαιώνει την επιλογή μας η διδασκαλία των παρεμβάσεων να γίνει σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης ώστε να θέσουμε τα άτομα της ομάδας σε διαδικασία συνεργασίας για να επιτύχουν τον κοινό τους στόχο που στην περίπτωσή μας ήταν η επίλυση των δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας. Να πως μας περιγράφουν ορισμένοι την εμπειρία τους:

«Συνεργαζόμασταν και βοηθιόμασταν στις ασκήσεις, ας πούμε είχαμε κολλήσει κάπου και πεταγόταν ο διπλανός και έλεγε εδώ πέρα βάλε αυτό ή εκείνο και συνεχίζαμε».

«Πολλές φορές ρωτούσαμε ο ένας τον άλλο και λέγαμε γιατί να βάλουμε αυτό, και εξηγούσαν οι υπόλοιποι».

«Άκουγα τις γνώμες των υπολοίπων και αν συμφωνούσαμε σε κάτι γράφαμε αυτό αν δεν ήξερα εγώ κάτι, προσπαθούσαν να μου το εξηγήσουν τα κορίτσια με δικά τους παραδείγματα για να το καταλάβω όπως και στα άλλα κορίτσια».

Σύμφωνα με την κοινωνική άποψη της ομαδοσυνεργατικής, όπως αναφέρει ο Slavin (1996), οι μαθητές βοηθούν ο ένας τον άλλον στη μάθηση γιατί το θετικό κλίμα που δημιουργείται από το συναίσθημα ότι ανήκουν σε μία ομάδα κάνει το κάθε μέλος της να ενδιαφέρεται για την επιτυχία όλων των άλλων μελών (Killen, 2006, σελ. 182).

Ο Βασίλης μας περιέγραψε τον τρόπο που λειτουργούσε η δική του ομάδα για να βοηθήσουν τον Γιάννη να λύσει τις απορίες του. *«Όταν καμιά φορά Γιάννης έχει κάποια απορία και μπορεί να ήμουν απασχολημένος με άλλα πράγματα και έτσι μπορεί να ρωτήσει τον Νίκο, τον Βασίλη απέναντι και να του λύσουν την απορία και καμιά φορά ντρέπεται να ρωτήσει και τον καθηγητή, λέει ‘‘τι να ρωτήσω’’ ενώ νομίζει ότι τα έχει καταλάβει, ενώ δεν τα έχει καταλάβει».*

Οι μαθητές που δεν είχαν καλή σχέση με τα μαθηματικά ένιωσαν πιο σίγουροι μέσα από τη θετική αλληλόδραση των συμμαθητών τους όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα παρατηρήσεων που έκαναν:

«Είχα και άλλη βοήθεια εκτός από ένα άτομο, έπαιρνα γνώμες».

«Εμένα μου φάνηκε πιο εύκολο, γιατί ας πούμε σε ένα θρανίο με τον διπλανό σου δεν έχεις πάντα την ίδια βοήθεια από ότι θα είχαμε από περισσότερα άτομα. Γιατί καθόμασταν και συνεργαζόμασταν, παρόλο που κάναμε φασαρία».

«Κατάλαβα πιο εύκολα μερικά πράγματα γιατί άμα είμαστε μια παρέα ρωτάς τον διπλανό σου και σου λέει ‘‘εντάξει’’, πιο καλά είναι σαν ομάδα».

«Ήταν καλύτερα, γιατί βοηθάει ο ένας τον άλλο. Γιατί άμα ήταν ο καθένας μόνος του στα θρανία δεν θα τις έλυνε τόσο εύκολα, για παράδειγμα τις μοιραζόμασταν τις ασκήσεις δεν τις κάναμε όλοι μαζί. Κάναμε κάποιες δύο μαζί και τις άλλες οι άλλοι δύο».

Το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας με χρήση αλγεβρικών πλακιδίων προώθησε καλύτερες ισότιμες σχέσεις μεταξύ των μελών της ομάδας, πιο θετική συμπεριφορά απέναντι στη γνώση και τις έννοιες που έπρεπε να μαθευτούν, υψηλοτέρα επίπεδα κινητοποίησης και προσωπικής αποτελεσματικότητας από ότι η ανταγωνιστική και ατομική εμπειρία μάθησης. Το γεγονός ότι η επιτυχία της ομάδας βασίζεται στη μάθηση όλων των μελών της, πιστεύει ο Killen (2006, σελ. 183), παρακινεί τους μαθητές να όχι μόνο να μάθουν οι ίδιοι, αλλά να ενθαρρύνουν και να βοηθήσουν ο ένας τον άλλον να για να μάθει. Οι μαθητές συμφώνησαν λέγοντας ότι:

«Ήταν πολύ καλύτερα, συνεργαζόμασταν και πιστεύω πως και τα άλλα παιδιά βοηθήθηκαν και εγώ από εκείνους και εκείνοι από μένα»,

«Μου άρεσε πάρα πολύ, γιατί είμαστε σε ένα στάδιο που πρέπει να μάθουμε να συνεργαζόμαστε με τους άλλους που θα μας βοηθήσει πάρα πολύ. Είδα ότι στην ομάδα που βρίσκομαι γίνεται μια γενική προσπάθεια από όλες τις συμμαθήτριες μου δίνει η κάθε μία τους κάτι ξεχωριστό και αυτή είναι όλη η μαγεία το ότι δεν θα είσαι μόνο εσύ αλλά ότι θα υπάρχει και κάποιος άλλος που θα σε διορθώσει, θα σε συμπληρώσει, που θα έχει μια απορία και που εσύ μπορείς να τον βοηθήσεις ή μπορεί να έχεις εσύ την απορία και μπορεί να σε βοηθήσει».

3.4.1.γ Πως χρησιμοποιούν την εμπειρία τους από τα αλγεβρικά πλακίδια

Τα αλγεβρικά πλακίδια «άνοιξαν» στους μαθητές έναν άλλον τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης του προβλήματος. Έμαθαν στρατηγικές ανακάλυψης και επίλυσης προβλήματος και «εκμεταλλεύτηκαν» την εξεικόνιση για να διευκολύνουν τη σκέψη τους.

«Δεν μπορούσα να καταλάβω πως θα κάνω τις πράξεις, αλλά μετά εφόσον κάναμε το σχήμα μετά μπορούσα να τις κάνω καλύτερα γιατί σκεφτόμουν το σχήμα» μας είπε η Ελένη

Τους βοήθησαν στη μάθηση και στην εμβάθυνση των μαθηματικών εννοιών και έμαθαν να σκέπτονται με έναν εναλλακτικό τρόπο:

«Δεν μπορούσα να καταλάβω το χι, το γράμμα με τους αριθμούς τι έχει να κάνει …φέτος ναι, ας πούμε το κόκκινο που είναι το πλην χι. Φέτος με τα χαρτάκια τα κατάλαβα, τι είναι αυτό το άγνωστο μέσα στους αριθμούς», «Πέρυσι λέγαμε ότι δεν μπορούμε να προσθέτουμε ανόμοια πράγματα, αλλά δεν το καταλαβαίναμε, γιατί δεν είχαμε την εικόνα. Τώρα όμως που ξέρουμε ότι το x^2 είναι τετράγωνο και το xy είναι το ορθογώνιο καταλαβαίνεις τώρα».

Η Μαρία μας είπε ότι πριν την παρέμβαση *«όταν ήταν να λύσω μια άσκηση χωρίς να έχω* [αυτά] *στο μυαλό μου πάντα μου φαινόταν παλούκια, δεν μπορούσα να… που φοβόμουν από την αρχή και την άρχιζα από την αρχή λάθος και την τελείωνα λάθος»* και συνεχίζει αναφερόμενη στην εμπειρία της με τα υλικά *«…τώρα μου έχει φύγει αυτό το συναίσθημα. Δεν το σκέφτομαι γιατί εκείνη την ώρα που βλέπω την άσκηση μου έρχονται τα σχήματα στο μυαλό και μου έρχεται με ευκολία να αρχίσω να την λύνω».*

Η Μαρία είχε πολύ χαμηλές προσδοκίες για τις επιδόσεις της στο μάθημα και τάση να τα παρατήσει στην πρώτη δυσκολία, εμφάνιζε δηλαδή χαρακτηριστικά του μαθητή με *«σύνδρομο αποτυχίας»*, όπως αναφέρει η

Brophy (2010, σελ. 107), το οποίο αποκτά κάποιος ύστερα από σειρά αποτυχιών. Τα χειραπτικά υλικά φάνηκε να έχουν ανασταλτικό χαρακτήρα του συνδρόμου της αποτυχίας αφού την βοήθησαν να πιστέψει ότι είναι ικανή να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του μαθήματος.

3.4.1.δ. Ποια τα συναισθήματα / η στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα

Με τα υλικά στα χέρια τους οι μαθητές περιόρισαν τον φόβο τους για το μάθημα, απέκτησαν αυτοπεποίθηση για τον εαυτό τους και έδειξαν προθυμία να μάθουν περισσότερα αφού είχαν πια αντικείμενα «για να σκέπτονται μαζί τους».

Αναφερόμενοι στις συνεντεύξεις τους στα συναισθήματά τους για το μάθημα μας τόνισαν: «Το φοβόμουν [το μάθημα των μαθηματικών], είχα άγχος. Τώρα με τα υλικά …καθόλου». Οι μαθητές συχνά λέει η Anthony, (1996, σελ. 27) αναγνωρίζουν ότι δεν καταλαβαίνουν τις εξηγήσεις που δίνει ο δάσκαλος αλλά τους λείπει η αναγκαία γνώση για να θεραπεύσουν αυτή την κατάσταση. Η Μαρία επιβεβαιώνει την άποψή της λέγοντας ότι *«με έπιανε από την αρχή μια αγανάκτηση γιατί δεν τα καταλάβαινα, …αλλά εντάξει μου έφυγε αυτή η αγανάκτηση που είχα και έλεγα πω-πω μαθηματικά, τι κάνουμε τώρα; Δεν ξέρω τίποτε. Πλέον μπορώ να λύσω τις ασκήσεις με πολύ πιο εύκολο τρόπο* [βέβαιη] *από πέρυσι και πρόπερσι».*

Μας διαβεβαίωσαν παράλληλα ότι και η στάση τους απέναντι στα μαθηματικά διαφοροποιήθηκε αφού *: «Μας διευκολύνανε. Ήταν πιο ωραία από το να τρέχω για να προλάβω* [όπως με τις πράξεις]». Για πολλούς μαθητές η επιτυχία στα μαθηματικά έχει άμεση σχέση με το πώς αισθάνονται στην τάξη. Όταν αισθανθούν άνετα με το μάθημα αισθάνονται και ικανοί να ανταποκριθούν και στις απαιτήσεις του μαθήματος (Idris, 2005, σελ. 53). Τα αλγεβρικά πλακίδια τους έδωσαν τη δυνατότητα να αισθανθούν άνετα αφού μας είπαν ότι *«όταν έχω μαθηματικά λέω ‘‘εντάξει* *τα ξέρω, τα έχω καταλάβει'' υπάρχει μια αισιοδοξία ότι μπορώ να τα λύσω».*

Ο Skemp θεωρεί ότι τα αισθήματα απογοήτευσης και φόβου που νιώθει ο μαθητής για τα μαθηματικά οφείλονται στη δυσκολία που αντιμετωπίζει να κατανοήσει τις έννοιες και εξηγεί ότι όταν τις κατανοήσει τότε νιώθει ασφαλής και αποκτά αυτοπεποίθηση (Idris, 2005, σελ. 28). Την αυτοπεποίθηση αυτή που ένιωσε ο Χάρης τον έκανε να αλλάξει στάση απέναντι στα μαθηματικά «*γιατί μπορώ να λύσω πια ασκήσεις, μπορώ να κάνω και το σχήμα κιόλας για να διευκολυνθώ μέσα από αυτό».*

Οι παραπάνω περιγραφές υποστηρίζουν τη θέση που εκφράζουν οι Lopez & Schroeder (2008, σελ. 33-34) σύμφωνα με την οποία: «από τη στιγμή που οι μαθητές αναγνωρίσουν το στιλ μάθησης που προτιμούν είναι ικανοί να μεταφέρουν αυτό το στιλ και σε άλλες καταστάσεις, αισθάνονται ότι είναι ικανοί και η μάθηση γίνεται ουσιαστική». Ο Gagné (1970, σελ. 61) θεωρεί ότι «ο καλύτερος τρόπος για να ενθαρρύνεις το μαθητή να σκέπτεται είναι να νιώθει σίγουρος ότι έχει κάτι για να σκεφτεί».

Ο Dienes υποστηρίζει ότι «η διαδικασία της μάθησης είναι ψυχολογική και όχι λογική και μια αρκετά μεγάλη λογική αλληλουχία, όπως η χρήση συμβόλων, δεν είναι αναγκαστικά η καλύτερη μέθοδος μάθησης των αφηρημένων δομών. Το τελειότερο μέτρο της αφαίρεσης επιτυγχάνεται μέσω μιας πλούσιας ποικιλίας εμπειριών. Τα σύμβολα πρέπει να τα εισάγουμε ως μιαν άλλην ενσωμάτωση, ίσως την πλησιέστερη, της μαθηματικής εμπειρίας και αφού οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις έννοιες και χρειάζονται τη γενίκευσή τους» (1964, σελ. 137-139).

Μία ανοργάνωτη συλλογή κανόνων χωρίς αιτιολόγηση, πράγμα το οποίο χαρακτηρίζει συχνά τη διδασκαλία των μαθηματικών, «πελαγώνει» το μυαλό και των περισσότερο έξυπνων μαθητών. Άποψη του Skemp είναι ότι οι μαθητές, όταν δεν μπορούν να κατανοήσουν μια έννοια, δεν γνωρίζουν ότι αυτό ίσως δεν είναι δικό τους λάθος και μπορεί να οφείλεται είτε στον λανθασμένο τρόπο παρουσίασής της είτε στην παράλειψη εισαγωγής ή υπενθύμισης προκαταρτικών εννοιών απαραίτητων για την εισαγωγή της καινούργιας έννοιας (1987, σελ. 36).

Στρέφουν έτσι την προσπάθειά τους στην απομνημόνευση διαδικασιών, κανόνων και μηχανικών ενεργειών, που ως επί το πλείστον δεν κατανοούν, με αποτέλεσμα να ξεχνούν τα μαθηματικά και ευθύς αμέσως να μπαίνει σε λειτουργία ο πανικός και ο φόβος. Τα συναισθήματα αυτά πολλαπλασιάζονται σε κάθε επαφή με το μάθημα, μετατρέπονται σε απέχθεια που μπορεί να τους ακολουθεί για μια ολόκληρη ζωή. Αυτά τα συναισθήματα ήταν διάχυτα στις συνεντεύξεις των μαθητών μιλώντας μας για τον εαυτό τους, αλλά και για συμμαθητές τους που τα ίδια συναισθήματα, δυσαρέσκειας, άγχους και φόβου για τα μαθηματικά τους οδήγησαν τις προηγούμενες χρονιές να αποστασιοποιηθούν από το μάθημα.

3.4.1.ε Πως «εκφράστηκαν» οι μαθητές με περιορισμένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά στο νέο περιβάλλον τάξης.

Στην παρέμβασή μας τα χειραπτικά υλικά και η εργασία σε ομάδες έδωσαν άλλον «αέρα» στην ατμόσφαιρα της τάξης που επηρέασε προς το θετικότερο τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και τους βοήθησε να πιστέψουν ότι έχουν τις δυνατότητες να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του μαθήματος.

Η παρατήρησή μας αυτή ενισχύεται και από την άποψη που διατυπώνεται από την Barclay (1992, σελ. 10) κατά την οποία η παρουσία των χειραπτικών υλικών στην τάξη συμβάλλει στην κινητοποίηση των μαθητών, τους βοήθα να μην αποσπούν την προσοχή τους από το μάθημα και να συγκεντρώνονται στις έννοιες που επεξεργάζονται.

Θα λέγαμε λοιπόν, ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας, όπως διαπιστώσαμε από την έρευνά μας, επέδρασε σημαντικά στην αλλαγή του εχθρικού και απόμακρου περιβάλλοντος τάξης για τον αδιάφορο μαθητή και αυτό βοήθησε σε σημαντικό βαθμό στην ένταξή του στη μαθησιακή διαδικασία.

Συγκεκριμένα μάλιστα ένας από τους χαρακτηριζόμενους «αδύνατους» μαθητές μας ανέφερε: *«Φέτος είναι λίγο καλύτερα τα πράγματα, έχω αρχίσει να τα συμπαθώ τα μαθηματικά, γιατί έχει αλλάξει ο τρόπος διδασκαλίας είναι πιο ενδιαφέρον δηλαδή ελκύει τον μαθητή και να προσέξει».* Η αντιπαραβολή που χρησιμοποιεί της φετινής εμπειρίας του σε σχέση με τις ως τότε εμπειρίες του ισχυροποιεί την άποψή μας ότι το δασκαλοκεντρικό σύστημα διδασκαλίας δημιουργεί προβλήματα στη μάθηση για πολλούς μαθητές.

Για να διασταυρώσουμε την προσωπική μας άποψη για την επίδραση που είχαν τα υλικά στους μαθητές των οποίων η στάση ήταν αρνητική απέναντι στο μάθημα συμπεριλάβαμε στο ερωτηματολόγιο των συνεντεύξεων μας και την ερώτηση «Παρατήρησες συμμαθητές σου που άλλαξαν συμπεριφορά στο μάθημα όταν δουλεύατε με τα υλικά;»

Την προσοχή των περισσότερων μαθητών «τράβηξαν» τρεις περιπτώσεις μαθητών που άλλαξαν το προφίλ τους, του αδύνατου-αδιάφορου μαθητή ως προς το μάθημα των μαθηματικών, εξ αιτίας του διαφορετικού περιβάλλοντος και του τρόπου διδασκαλίας που εφαρμόσαμε. Τα ονόματα της Γιάννας, της Φανής και του Γιώργου επαναλαμβάνονταν στις συνεντεύξεις σχεδόν όλων των συμμαθητών τους ως απάντηση στην ερώτηση αν υπέπεσε στην αντίληψή τους κάποιος συμμαθητής ή συμμαθήτρια που διαφοροποίησε τη στάση του ή τη στάση της απέναντι στο μάθημα.

Η ερευνήτρια είχε πλήρη εικόνα της συμπεριφοράς και της στάση τους στα μαθηματικά και την τάξη γιατί είχε διδάξει το μάθημα την προηγούμενη χρονιά χωρίς τη χρήση χειραπτικών υλικών. Η Γιάννα λοιπόν ήταν μια μαθήτρια που δύσκολα συγκεντρώνονταν στο μάθημα. Στο θρανίο της είχε συνήθως περιοδικά (αυτά που χαρακτηρίζουμε κοριτσίστικα) και αντικείμενα για την περιποίηση των μαλλιών. Της άρεσε να μιλά κατά την ώρα του μαθήματος και να απασχολεί τις συμμαθήτριές της. Τότε ήθελε μου είπε να γίνει κομμώτρια και να μη συνεχίσει το σχολείο. Η Μάνια ήταν στην ίδια ομάδα με τη Γιάννα και μας περιέγραψε πως την είδε όταν τα υλικά μπήκαν στην καθημερινότητα του μαθήματος.

Μ: …Συγκεκριμένα από τη δική μου ομάδα η Γιάννα και η Αποστολία που στην αρχή δεν ενδιαφέρονταν που τους φαινόταν ας πούμε δύσκολα, όπως στους περισσότερους, με τα υλικά πιστεύω ότι και σε αυτούς τους κίνησε το ενδιαφέρον και ήθελαν να δουν τι γίνεται.
Ε: Τις είδες να ασχολούνται δηλαδή;
Μ: Πολύ. Σε σύγκριση με παλιότερα, πάρα πολύ.
Ε: Άμα ήταν ασκήσεις;
Μ: Αποκλείεται να ασχολούνταν.

Η Άννα από την ίδια ομάδα επιβεβαιώνει την άποψη της Μαρίας για την Γιάννα και την Αποστολία:

Α: Έχουν αλλάξει. Ειδικά η Γιάννα τώρα τελευταία ασχολείται πολύ με τα μαθηματικά και δείχνει κάποιο ενδιαφέρον για αυτά.
Ε: Αντιλήφθηκες και άλλους αδύνατους μαθητές εκτός από την Γιάννα να δουλεύουν;
Α: Ναι, η Αποστολία, ο Ράμπο,…

Ένας άλλος μαθητής ο Γιάννης μας είπε ότι από τα παιδιά που άλλαξαν συμπεριφορά ξεχώρισε από τη δική του ομάδα τον Ράμπο και τον Γιώργο, αλλά και την Γιάννα από την άλλη ομάδα.

Τον Γιώργο θα μπορούσαμε να τον χαρακτηρίσουμε ως ένα παιδί πολύ συνεσταλμένο, δεν απασχολούσε ιδιαίτερα την τάξη με τη συμπεριφορά του και δεν συμμετείχε την προηγούμενη χρονιά σχεδόν καθόλου στο μάθημα. Η επίδοση του στα μαθηματικά, όπως ήταν φυσικό, ήταν κακή.

Ο Ράμπο ήταν από την αρχή πολύ ατίθασος μαθητής, θα μπορούσαμε να δώσουμε τον χαρακτηρισμό του μαθητή που προβληματίζει με τη συμπεριφορά του τον δάσκαλο και τον προκαλεί με τη στάση του να τον απομακρύνει από την τάξη. Ερχόταν πάντα τελευταίος στο μάθημα μετά το διάλειμμα και δεν έδειχνε δυσαρέσκεια αν του απαγορευόταν η είσοδος. Ήταν αλβανικής καταγωγής και όπως μας είπε μέχρι το Δημοτικό ήταν καλός μαθητής. Προστέθηκε ως πέμπτο μέλος της ομάδας του Γιάννη, Γιώργου, Βάσου και Νίκου γιατί με τους συμμαθητές του στην προηγούμενη ομάδα είχε προστριβές. Ο Γιάννης λοιπόν μας μίλησε εκτός των άλλων και για αυτούς τους συμμαθητές του:

Γ: ... ο Ράμπο βοηθάει και αυτός καμιά φορά ναι, εντάξει έκανε και αυτός μερικά πράγματι και ο Γιώργος, αυτός σχημάτιζε τα τετράγωνα.

Ε: Του άρεσαν του Γιώργου. Αν δεν ήταν τα υλικά θα δούλευε;

Γ: Όχι τόσο πολύ, όσο δουλεύει τώρα, ... τώρα τα έχει καταλάβει περισσότερο, τον έχουν βοηθήσει περισσότερο τα υλικά.

……………………………………………………………………………..

Γ: ... και η Γιάννα τώρα σηκώνεται στον πίνακα, σε άλλα μαθήματα δεν δουλεύει καθόλου σημασία, ενώ στα μαθηματικά σηκώνει το χέρι, έχει απορίες, δεν ρωτά σε άλλα μαθήματα.

……………………………………………………………………

*Γ: ..., αλλά καμιά φορά που εγώ έκανα λάθος το εμβαδό χρησιμοποιούσε (*ο Γιώργος) *τα υλικά και μου έλεγε «αφού είναι έτσι».*

Ε: Σε διόρθωνε δηλαδή ο Γιώργος.

Γ: Έ κανα δύο φορές με διόρθωνε.

Ε: Το περίμενες αυτό από τον Γιώργο;

Γ: Ε, ναι μου έκανε εντύπωση στα μαθηματικά… Τώρα τα βλέπει πιο εύκολα τα πράγματα

………………………………………………………………………………

Ε: Μήπως ο Γιώργος πέρυσι μιλούσε στο μάθημα γιατί δεν καταλάβαινε;
Γ: Ναι, μπορεί και γι' αυτό, γιατί δεν παρακολουθούσε κιόλας όταν κάναμε ασκήσεις. Αυτά που γράφαμε στον πίνακα τα έγραφε αλλά δεν καταλάβαινε τι έγραφε πολλές φορές. Εντάξει τώρα καταλαβαίνει …η εικόνα πάντως τον βοηθάει

Ο Βάσος ανήκε στην ίδια ομάδα με τον Γιάννη και τον Γιώργο και αυτός μας υπέδειξε τον Γιώργο τον συμμαθητή του που άλλαξε τη στάση του απέναντι στο μάθημα.

Β: Ναι, ο Γιώργος. Ασχολήθηκε περισσότερο με τα «χαρτάκια» (αλγεβρικά πλακίδια) *και τις πράξεις από ότι θα είχε ασχοληθεί αν δεν τα είχαμε… Ναι, τα κατάφερνε γιατί έλεγε ''θα κάνω εγώ την άσκηση'' από τη φωτοτυπία και απέκτησε και μία αυτοπεποίθηση.*
Ε; Είχε και κάποιες φορές ηγετικό ρόλο;
Β: Ναι, είχε.

Αλλά και ο Νίκος μας είπε για τον Γιώργο.

Ν: Ναι, ο Γιώργος και αυτόν τον έχω προσέξει γιατί καθόμασταν μαζί στην δευτέρα Γυμνασίου ... ότι καμιά φορά ίσως μας δημιουργήθηκε και αυτό, το να μην κάνεις παραπάνω, να κάνω και εγώ, ανταγωνισμός. Είδα ότι αυτός προσπάθησε να «βγάλει» και αυτός το φύλλο δραστηριοτήτων τα σχήματα εν πάση περιπτώσει.
Ε: Αν ήταν πράξεις;
Ν: Μπορεί, αλλά δεν νομίζω. Αυτός θα βαριόταν… δεν ξέρω.

Ε: Δυσκολευόταν ο Γιώργος;
Ν: Όχι, γιατί υπήρξαν φορές που κάτι που δεν ήξερα εγώ και μου το είπε ο Γιώργος.

Ένας άλλος μαθητής, αλβανικής καταγωγής, που συμμετείχε ενεργά στο μάθημα και τράβηξε την προσοχή μας ήταν ο Έλιαν. Επικέντρωνε την προσπάθεια του να κατανοήσει πρώτα τη γλώσσα μας και κατόπιν τις αμαθηματικές έννοιες. Ένιωθε απομονωμένος από τους συμμαθητές του και η εργασία σε ομάδες τον βοήθησε να κάνει φίλους. *«Με βλέπουν* (στην ομάδα) *σα να είμαι ένας ίσος, να μην είμαι ανώτερος ή κατώτερος, ότι ξέρω και εγώ τη γλώσσα, τα πάντα»*. Και στον Έλιαν έκανε εντύπωση η διαφοροποιημένη στάση της Γιάννας στο μάθημα.

Ε: Ναι, την Γιάννα, που αυτή δεν έλυνε άσκηση και όταν την είδα εκεί πέρα έλυνε κάποιες ασκήσεις, να πω, σα να ήταν καλύτερη από μένα. Τώρα δεν ξέρω εγώ δυσκολευόμουν λίγο και αυτή τα έλυνε πιο μπροστά από μένα, λάθος σωστό, αυτή πάντως τα έκανε… Δεν μπορώ να πω τι έκανε λάθος και τι σωστό πάντως πιο μπροστά από μένα τα έκανε τα έκανε, ασχολούνταν με το μάθημα.

Η Χρύσα μας υπέδειξε την «κολλητή» της που άλλαξε στάση απέναντι στο μάθημα και η Σοφία επανέρχεται στη στάση που παρουσίασε η Γιάννα στο μάθημα.

Χ:… είδα και την κολλητή μου, η οποία δεν μπορούσε να λύσει εύκολα, αλλά με τα υλικά και μόνη της κιόλας τα κατάφερνε πολύ καλά, μπορούσε να την κάνει την άσκηση, πολλές φορές με βοηθούσε και μένα την ίδια.
Ε: Απέκτησε αυτοπεποίθηση, πως το είδες;

Χ: Ναι, ναι επειδή κατάλαβε καλύτερα και υπήρχαν περισσότερες πιθανότερες να το πει το σωστό και το σήκωνε το χέρι της να μιλήσει.
Ε: Είδες άτομα από την ομάδα σου ή από άλλες ομάδες που δεν θα δούλευαν αν δεν υπήρχαν τα υλικά.
Σ: Ναι, την Γιάννα, πιστεύω ότι αν δεν ήταν τα υλικά δεν θα ασχολούνταν καθόλου. Με την Γιάννα δεν το περίμενα και τόσο πολύ γιατί συνήθως… κάνει αυτές τις χαζομάρες, δεν το περίμενα … ότι θα ασχολούνταν, θα προσπαθούσε να καταλάβει… Ναι, ναι, [με έμφαση, σίγουρη] *γιατί στις αρχές δεν έκανε τίποτε ενώ από τη στιγμή που είχε αυτά έκανε πάρα πολλά… και η Φανή που ώρες-ώρες κάθεται και λύνει ασκήσεις, τα έχει καταλάβει και αυτή τα μαθηματικά γιατί όπως την βλέπουμε και μείς τα λύνει σωστά.*

Η περίπτωση της Φανής είχε σχεδόν όλα τα χαρακτηριστικά με την περίπτωση της Γιάννας. Μαθήτρια πλήρως αδιάφορη για το μάθημα, απασχολούσε τις συμμαθήτριές της κάνοντας και λέγοντας ανοησίες. Ήταν αδιάφορη την προηγούμενη χρονιά στις παρατηρήσεις της καθηγήτριας (ήταν η ίδια η ερευνήτρια), έμπαινε και αυτή τελευταία μετά το διάλειμμα στην τάξη. Στην ομάδα της Φανής ήταν και η Κάτια η καλύτερη μαθήτρια της τάξης, από κάθε άποψη και απουσιολόγος του τμήματος. Η Κάτια μας μίλησε για τη συμμαθήτριά της.

Κ: …Τη Φανή δύο χρόνια πριν αν της έλεγες « λύσε μου αυτήν την εξίσωση» σου έλεγε «βαριέμαι να την λύσω ά δεν ξέρω, δεν ξέρω, δεν ξέρω τίποτα» με τα σχηματάκια (αλγεβρικά πλακίδια) *είναι η μοναδική που λέει «ά, εγώ θα τη λύσω», παίρνει πρωτοβουλίες «εγώ θα τη λύσω».*
Ε: Εγώ δεν το είχα αντιληφθεί. Πέρασε στο συμβολισμό;
Κ: Εγώ, όπως τη βλέπω, συνήθως η Φανή, όταν λύνει εξισώσεις και έχει αυτές που μας δίνεται εσείς με τα τετραγωνάκια δίπλα ξέρει να τα αναγνωρίζει και να γράφει ξέρω εγώ το τετράγωνο x^2 ότι αντιστοιχεί, ναι

ξέρει πολύ καλά. Ξέρει μετά και τα πρόσημα, δεν μπερδεύεται δηλαδή το έχει ξεπεράσει αυτό το πρόβλημα, βασικά υπήρχε μια σύγχυση με αυτό τα πρόσημα στη συνέχεια πήρε τα πάνω της και μια χαρά πολύ καλή.

Ε: Θα είχε φτάσει σε αυτό το στάδιο αν δούλευε αλλιώς;

Κ: Όχι. Είναι και ένα άτομο που μιλάει πολύ, δύσκολα μπορείς να της κεντρίσεις το ενδιαφέρον πρέπει να είσαι από πάνω να την πιέσεις αλλά διαφορετικά μόνη της δεν κάνει τίποτα.

Από όλα τα παραπάνω θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ένταξη των αλγεβρικών πλακίδιων στο διδακτικό πλαίσιο της άλγεβρας έδωσε σε όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από την προηγούμενη τους επίδοσή τους στα μαθηματικά, κίνητρο συμμετοχής στη μαθησιακή διαδικασία και τους έκανε να αισθάνονται ότι μπορούν να επιτύχουν και να «προχωρήσουν» προς την πρόκληση. Ο καθηγητής τάξης που συμμετείχε στην έρευνα μας είπε ότι *«με τα υλικά ασχολήθηκε και μια βαθμίδα μαθητών πιο κάτω από αυτές που εργάζονται και αυτοί πήραν και κάτι, ενώ αν το μάθημα ήταν μόνο θεωρητικό θα είχαν πάει πίσω»* και επεσήμανε ότι *«άτομα που δεν περιμένεις να δουλέψουν ασχολούνται»*.

Θα λέγαμε λοιπόν ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει ένα κατάλληλο μέσο «ταιριάσματος» «ανάμεσα στην αλγεβρική δομή και στη δομή του τρόπου σκέψης του κάθε μαθητή», όπως αναφέρει ο Dienes (1960), δίνοντας τη δυνατότητα στον καθένα τους να σχηματοποιήσει μια αλγεβρική έννοια, να δημιουργήσει και να δομήσει συνεργατικά, συμβάλλοντας με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας του, κάτι που δεν έβλεπε και δεν κατανοούσε πριν.

Τον κύκλο των συνεντεύξεων μας έκλεισαν οι συνεντεύξεις που πήραμε την επόμενη χρονιά, μετά το πέρας της έρευνάς μας στο 10ο Γυμνάσιο Νεάπολης, από δύο μαθήτριες του τμήματος παρέμβασης και ήδη μαθήτριες της Α. Λυκείου. Οι μαθήτριες που επιλέξαμε, στο πλαίσιο των δυνατοτήτων που είχαμε, αντιπροσώπευαν δύο ακραίες «τάσεις» μαθητών δηλαδή του «άριστου» (Κατερίνα) και του «αδύνατου» μαθητή (Γιάννα), χαρακτηρισμοί που έχουν αναφορά βέβαια μόνο στην επίδοση τους στο μάθημα.

Περιοριστήκαμε στις δύο αυτές μαθήτριες διότι συναντήσαμε ιδιαίτερη δυσκολία να επικοινωνήσουμε και στη συνέχεια να συναντήσουμε άλλους μαθητές, αφού ως γνωστό δεν τηρούνται στοιχεία στο γυμνάσιο που αποφοίτησαν για τα σχολεία που επέλεξαν οι μαθητές να συνεχίσουν τη σχολική τους εκπαίδευση.

Θεωρήσαμε αυτές τις συνεντεύξεις χρήσιμες για την έρευνά μας αφού μας δινόταν έτσι η ευκαιρία να έχουμε, έστω και περιορισμένα, στοιχεία για τον βαθμό επίδρασης των χειραπτικών υλικών, το επίπεδο παραμονής στη μνήμη των αλγεβρικών εννοιών που διδάχθηκαν στο γυμνάσιο, τον τρόπο με τον οποίον αντιμετωπίζουν στο Λύκειο τις όποιες μαθησιακές τους δυσκολίες στο μάθημα της Άλγεβρας και βεβαίως τα συναισθήματα με τα οποία αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά σήμερα. Σημειώνουμε ότι η ύλη της Άλγεβρας της πρώτης Λυκείου είναι επέκταση της ύλης που διδάχθηκαν βασικά στην τρίτη γυμνασίου και επομένως οι θέσεις τους παρουσιάζουν ενδιαφέρον για την έρευνά μας. Τα ερωτήματα που θέσαμε στις δύο μαθήτριες της Α Λυκείου ήταν:

1. Πώς τοποθετούνται αυτή τη χρονιά απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών

2. Αν δυσκολεύονται στην κατανόηση των εννοιών.

3. Αν ανατρέχουν στην απεικόνιση που τους έδιναν τα αλγεβρικά πλακίδια για να επιλύσουν μία άσκηση

4. Αν θυμούνται τις ενότητες που διδάχθηκαν στην τρίτη Γυμνασίου.

5. Πώς «βλέπουν» τη διδακτική εμπειρία που είχαν με τα χειραπτικά υλικά;

Τη Γιάννα τη συναντήσαμε στην πρώτη Λυκείου και μιλήσαμε μαζί της για να διαπιστώσουμε τον βαθμό επίδρασης των χειραπτικών υλικών σε ό,τι αφορούσε την επίδοση, τη στάση της απέναντι στα μαθηματικά, τα συναισθήματά και τη συμπεριφορά της στο μάθημα.

Διαπιστώσαμε ότι θυμόταν τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων και έλυσε χωρίς δισταγμό την παραγοντοποίηση του $x^2 - 5x + 6$ σχηματίζοντας το ορθογώνιο (σε σκίτσο) με τα κατάλληλα κομμάτια του υλικού

Μας είπε ότι θα προτιμούσε το ομαδοσυνεργατικό μοντέλο διδασκαλίας της προηγούμενης χρονιάς, ότι βελτιώθηκε επειδή «κάναμε το μάθημα έτσι» και ότι πέρυσι καταλάβαινε περισσότερο. Επίσης ότι η συμπεριφορά της απέναντι στο μάθημα άλλαξε, συμμετέχει και μπορεί φέτος να λύνει ασκήσεις πιο εύκολα.

Μας εξήγησε ότι, «όταν βλέπει μια άσκηση τώρα πιστεύει ότι θα τη λύσει και ίσως σταματήσει σε κάποιο σημείο, αν είχε όμως τα αλγεβρικά πλακίδια θα μπορούσε να βρει το λάθος». Χαρακτήρισε τον εαυτό της αυτή τη χρονιά «ως μέτρια μαθήτρια ενώ στις προηγούμενες τάξεις (πρώτη και δευτέρα Γυμνασίου) ήταν πιο κάτω και ότι οι επιδόσεις της βελτιώθηκαν από την περσινή χρονιά» (τρίτη γυμνασίου).

Της άρεσε που δούλεψε σε ομάδες και θα ήθελε να συνέχιζε και στις επόμενες τάξεις έτσι διότι «είναι πιο ευχάριστο, τα παιδιά λένε τη γνώμη τους» και διότι «αν δεν θυμόταν κάτι θα της το θύμιζε κάποιος από την ομάδα και θα πήγαινε πιο κάτω ενώ χωρίς την ομάδα θα τα παρατούσε».

Της δώσαμε λέξεις να μας πει σε ποιο μοντέλο διδασκαλίας θα ταίριαζαν. Στη διδασκαλία χωρίς τα αλγεβρικά πλακίδια αντιστοίχισε τις λέξεις αδιαφορία, αποστροφή, αρνητικό, ενώ στο μάθημα με τα αλγεβρικά πλακίδια τις λέξεις δημιουργικότητα, χρησιμότητα, βεβαιότητα, ενδιαφέρον, αλλαγή ατμόσφαιρας, θετικό, συζήτηση, συμμετοχή.

Η Κατερίνα, που θα τη χαρακτηρίζαμε άριστη μαθήτρια, θέλησε και εκείνη να μας μιλήσει για την εμπειρία που είχε την προηγούμενη χρονιά συμμετέχοντας στις παρεμβατικές μας διδασκαλίες. Μας τόνισε ότι στην τάξη φέτος της Α. Λυκείου δεν αντιμετωπίζει κανένα πρόβλημα στις ταυτότητες, την παραγοντοποίηση, το τριώνυμο, αλλά νιώθει τη διδασκαλία που γίνεται με τον παραδοσιακό τρόπο ότι: «δεν είναι δικό μου, είναι ξένο… το δέχομαι έτσι όπως είναι». Και συνεχίζει περιγράφοντας τη στάση της την ώρα της διδασκαλίας:

«Δεν συμμετέχω, το βλέπω απλά στον πίνακα, το αποδέχομαι όπως είναι, δεν μπαίνω στη λογική να σκεφτώ πως έφτασα ως εδώ. Πέρυσι βλέπαμε, δεν πηγαίναμε κατευθείαν, ξεκινούσαμε από κάτι διαφορετικό, δεν το έβλεπα ως τύπο και να πω ‘‘Κατερίνα αυτό είναι πρέπει να το αποδεχθείς δηλαδή το ’χεις μη ρωτάς γιατί και πως’’».

Μας ανέφερε ότι φέτος όταν έχει απορίες για τη λύση μιας άσκησης: «το κοιτάω, προσπαθώ να σκεφτώ τι έχει γίνει και πολλές φορές αυτό που σκέφτομαι εγώ στην πραγματικότητα μπορεί να μην ισχύει, αλλιώς να έχουμε φτάσει σε ένα σημείο και εγώ να ακολούθησα κάποια άλλα βήματα που μπορεί να είναι λάθος»

Η Κατερίνα δεν συμμετέχει γιατί δεν έχει εικόνα του προβλήματος, δεν «βλέπει» την έννοια, που πρέπει να προηγείται των κανόνων, της λείπουν τα πρώτα βήματα στη διαδικασία της μάθησης που είναι όπως σημειώνει ο Pestalozzi η παρατήρηση και το νόημα (Szendrei, 1996). Δεν κατανοεί τις έννοιες γιατί αυτές δεν μπορούν να «ανακαλυφθούν» από μια απλή παρουσίαση στον πίνακα, αλλά θέλει να τις «κατασκευάσει», να τις εφεύρει μόνη της, να είναι δικές της.

Η γνώση άλλωστε, όπως αναφέρει η Goldsby (1996), δεν είναι κάτι που το παίρνει ο μαθητής παθητικά από το περιβάλλον, αλλά μία επιχείρηση «ανασυνθετική-κατασκευαστική» στην οποία ο μαθητής παίζει ενεργό ρόλο. Για την Κατερίνα η γνώση που παίρνει κατά την παράδοση του μαθήματος, είναι ξένη, γιατί δεν στηρίζεται στην αφομοίωση των νέων καταστάσεων, δεν στηρίζεται σε δομές, που προϋπάρχουν, ούτε στην ταυτόχρονη τροποποίηση αυτών των δομών σε καινούργιες (Dell'Isola, 1999). Ο τρόπος παρουσίασης του μαθήματος δεν ταιριάζει με τον τρόπο σκέψης που εκείνη κατανοεί και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μειωθεί το κίνητρο της για συμμετοχή στο μάθημα.

4. Ανακεφαλαίωση

Η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας έδωσε τη δυνατότητα, ιδιαίτερα σε μαθητές αδιάφορους για το μάθημα, να επανεξετάσουν τη στάση τους και να λειτουργήσουν ως ισότιμα μέλη μέσα στην ομάδα τους. Τα υλικά τους έδωσαν κίνητρο συμμετοχής στη μαθησιακή διαδικασία, τους έκαναν να αισθάνονται ότι μπορούν να επιτύχουν και να «προχωρήσουν» προς την πρόκληση.

Στο σύνολό τους οι μαθητές, μέσα στις ομάδες «μίλησαν» ανοιχτά για τις αδυναμίες τους στην μάθηση τόσο με τους συμμαθητές τους όσο και με μας τους δασκάλους τους. Εκφράστηκαν μέσα από τα χειραπτικά υλικά και για τα χειραπτικά υλικά κάνοντάς μας κοινωνούς των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν στη χρήση, την εφαρμογή, το πέρασμα από το συγκεκριμένο στο συμβολικό και αντίστροφα.

Προχώρησαν στη μάθηση των εννοιών διότι, όπως είπαν στις συνεντεύξεις τους και όπως και μείς αντιληφθήκαμε από τη συμμετοχή τους στην ομάδα και την τάξη, ο τρόπος που επεξεργαστήκαμε την κάθε ενότητα άλλαξε. Κινήθηκε στη βάση των αρχών μάθησης που αναφέρει ο Polya (1965, σελ 102) δηλαδή ήταν ενεργητική, αφού έγινε μέσω της ανακάλυψης, ήταν αποδοτική γιατί και ο πλέον αδιάφορος μαθητής ενδιαφέρθηκε για το υλικό βρίσκοντας ευχαρίστηση στη χρήση του και χαρακτηρίστηκε από επαλληλία φάσεων αφού την πράξη διαδεχόταν η αντίληψη και αυτήν η διαδικασία με λέξεις και έννοιες αφήνοντας στον μαθητή τελικά τη «γεύση» μιας ευχάριστης νοητικής συνήθειας.

Κεφάλαιο Πέμπτο

Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο επιχειρούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα που θέσαμε προς διερεύνηση στο πρώτο κεφάλαιο. Ιδιαίτερα θα επικεντρωθούμε στα ευρήματα που προέκυψαν από την έρευνά μας από τα οποία αντλήσαμε και τα στοιχεία για απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά.

1.1 Πρώτο βασικό ερώτημα

Αν τα αλγεβρικά πλακίδια σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας επηρεάζουν και πώς τη μάθηση των αλγεβρικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης, καθώς και του τρόπου επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους μαθητές.

1.1.α Υποερώτημα

Σε ποια έκταση η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων διευκόλυνε τους μαθητές να «δουν» και στη συνέχεια να παρουσιάσουν την αλγεβρική διαδικασία στις ενότητες των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης, της επίλυσης πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

Τα αλγεβρικά πλακίδια έγιναν στα χέρια των μαθητών το εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου συνέθεσαν και ανέδειξαν την εικόνα των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών όπως εκείνων του τελείου τετραγώνου, της διαφοράς τετραγώνων και της παραγοντοποίησης. Τους έδωσαν την αυτοπεποίθηση που έλειπε σε πολλούς, ένα αίσθημα ασφαλείας και σιγουριάς για να «κινηθούν με άνεση» ανάμεσα στο συγκεκριμένο της εικόνας και στην αφηρημένη παράσταση των αλγεβρικών συμβόλων.

Η Ελευθερία μας είπε ότι: *«Όταν άρχισα να κάνω με αυτά τα πράγματα άρχισα σιγά-σιγά τις ασκήσεις να τις κάνω μόνη μου και ό,τι δεν καταλάβαινα με βοηθούσε* (το σχήμα) *δηλαδή άρχισα σιγά-σιγά να λύνω μόνη μου τις ασκήσεις».*

Με τα αλγεβρικά πλακίδια, μας είπε μια άλλη μαθήτρια τα μαθηματικά *«μου φαίνονται πιο εύκολα, εντάξει γιατί…Ναι, έχω εικόνα και ότι δεν είναι μόνο αριθμοί αλλά είναι και ‘‘πράγματα’’».* Οι μαθητές ως «πράγματα» τα αποδέχθηκαν, συμφιλιώθηκαν μαζί τους, συνέθεσαν εικόνες σε ένα αρμονικό όλο με ευδιάκριτες λεπτομέρειες και μέσα από τη σύνθεση μπόρεσαν να προσεγγίσουν την ιδέα της λύσης του προβλήματος (Polya, σελ. 70).

Ο καθηγητής τάξης, κατά την πιλοτική φάση της παρέμβασης, μας είπε σε συνάντησή που είχαμε μαζί του, ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν την άλλη πρόταση μαθήματος που δώσαμε, θετικά. Έτσι όταν τους ζήτησε να του πουν τις εντυπώσεις τους για το μάθημα εξέφρασαν τη γνώμη *«να γίνεται το μάθημα, κύριε έτσι, είναι εύκολο… και μερικοί είπαν αυτά τα μαθηματικά είναι παιγνιδάκι, σε τέτοιο στυλ το είδαν».*

Η Γιάννα, που γνωρίσαμε ήδη από τις συνεντεύξεις των συμμαθητών της στο προηγούμενο κεφάλαιο, μας περιέγραψε στην προσωπική της συνέντευξη μέσα από το παράδειγμα της $x^2 - 7x + 6$, πως αντιμετωπίζει την παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε, στον διάλογο που παραθέτουμε στη συνέχεια, ότι προτιμά να μας εξηγήσει την «τεχνική» της παραγοντοποίησης με αναφορά στα υλικά γιατί με αυτά νιώθει άνετα και σίγουρη για τις δυνατότητές της. Κινείται με άνεση από τα σύμβολα στα υλικά και αντίστροφα, πράγμα που μας επιτρέπει να πούμε ότι για κείνη ήταν πια το εργαλείο γνώσης που την έφερε κοντά στο μάθημα των μαθηματικών.

Ε: Για πες μου τι κάνεις όταν έχεις να λύσεις μια άσκηση;

Γ: Πείτε μου ένα παράδειγμα να σας εξηγήσω.

Ε: Έχεις για παράδειγμα $x^2 - 7x + 6$. *Πώς θα την κάνεις γινόμενο;*

Γ: Λέω, έχω ένα τετράγωνο…πόσα χι;

Ε: Πλην επτά.

Γ: Επτά ορθογώνια αρνητικά και έξι μικρά τετραγωνάκια.

Ε Και για να κάνεις γινόμενο με αυτά τα κομμάτια τι θα κάνεις;

Γ: Ε… ένα τετράγωνο.

Ε: Για πάρε τα υλικά [παίρνει τα αντίστοιχα κομμάτια αλγεβρικών πλακιδίων και κατασκευάζει το σχήμα]. *Έχεις λοιπόν ένα τετράγωνο και επτά ορθογώνια...*

Γ: Ναι, κόκκινα.

Ε: Και έξι τετραγωνάκια.

Γ: Κίτρινα.

Ε: Λοιπόν πώς θα τα τοποθετήσεις;

Γ: Βάζω τρία από δω και δύο από κει [εννοεί τις δύο πλευρές του τετραγώνου].

Ε: Ναι, αλλά έχουμε επτά. [η Ιωάννα βάζει άλλα δύο δίπλα στα τρία]. *Κλείνει τώρα έτσι το σχήμα;*

Γ: Όχι.

Ε: Τι πρέπει να κάνεις; [κινεί το ένα ορθογώνιο από τα δύο δίπλα στα πέντε].

Γ: Έβαλα στη μία πλευρά έξι αρνητικά ορθογώνια και ένα αρνητικό από την άλλη και έξι μικρά [συμπληρώνει την γωνία].

Ε: Το σχήμα που έγινε τι σχήμα είναι;

Γ: Ορθογώνιο.

Ε: Τι διαστάσεις έχει;

Γ: Χι συν ένα, όχι πλην ένα. [αφού κοιτά το χρώμα]

Ε: Και η άλλη πλευρά; [μετρά τα ορθογώνια]

Γ: Χι πλην έξι.

Η Γιάννα έκανε σωστά την παραγοντοποίηση, αφού η επίλυση προβλήματος είχε πια την οικεία μορφή ενός παιγνιδιού στο οποίο συμπληρώνεται η εικόνα με την κατάλληλη τοποθέτηση των επιμέρους κομματιών της. Κατανοούσε τους κανόνες διότι ήταν απλοί και αφορούσαν το σχήμα και το χρώμα. Ένιωθε άνετα με τα σχήματα και βέβαιη για την ικανότητά της να καταλήξει σε αποτέλεσμα αφού οι γνώσεις που απαιτούνταν ήταν περιορισμένες στο επίπεδο χειρισμών. Τα σύμβολα για εκείνη, αλλά και για πολλούς συμμαθητές της, δεν ήταν αποτρεπτικά, δεν «απειλούσαν» με λάθη διότι με τη μορφή των γεωμετρικών σχημάτων μπορούσε να τα αγγίξει, να τα μετακινήσει, να μιλήσει γι' αυτά, να μάθει μέσα από αυτά.

Η γεωμετρική μάθηση συνέβαλε θετικά στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών και στη διατήρησή τους στη μνήμη των μαθητών διότι, όπως ισχυρίζεται ο Skemp, μειώνει το φορτίο της λειτουργικής μνήμης (1987, σελ. 130) με αποτέλεσμα να πλεονεκτεί απέναντι σε άλλη μορφή μάθησης.

Ο τρόπος βέβαια με τον οποίο τα συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά συνέβαλαν στη μάθηση των εννοιών ήταν διαφορετικός σε κάθε μαθητή και εξαρτήθηκε από τα κενά που παρουσίαζε αυτός σε επίπεδο γνώσεων. Σε άλλους μαθητές λοιπόν λειτούργησαν τα σχήματα, όπως χαρακτηριστικά μας είπε η Μαρία: *«Ναι, κατάλαβα που ... ότι δεν μπορεί να προστεθεί ένα ορθογώνιο με ένα τετράγωνο αυτό το μπέρδευα συνεχώς».* Κάποιος άλλος μίλησε για το χρώμα*, «…στην αρχή μπερδευόμουν με τα πρόσημα και όταν τα μεταφέραμε από το ένα μέρος αλλάζαμε χρώμα και έτσι μου ‘‘μπήκε’’ να αλλάζω και τα πρόσημα».*

Σχεδόν όλοι μας ανέφεραν ότι: *«Όταν δεν μπορούσα έχοντας μια εξίσωση που δεν μου έβγαινε ούτε με ταυτότητα, ούτε με παραγοντοποίηση και θα έκανα λάθος, τότε ανέτρεχα στο σχήμα, να σχηματίσω την εξίσωση και από κει να δω…».*

Την εξεικόνιση που χρησιμοποίησαν για να επιλύσουν τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας, την «αναζήτησαν» και στην επίλυση ασκήσεων του βιβλίου. Τα αλγεβρικά πλακίδια βρήκαν μια θέση στην καθημερινότητάς τους και λειτουργούσαν πια ως εργαλείο σκέψης.

Ε: Σε άσκηση του βιβλίου κατέφευγες στην εικόνα;

ΑΜ: Ναι, ναι το έκανα.

Ε: Σε τι ασκήσεις, δύσκολες, εύκολες.

ΑΜ: Δύσκολες ήταν όπως τις έβλεπες στο βιβλίο, αλλά μετά έκανες το σχήμα και μετά μπορούσες να τις λύσεις.

Ε: Αν δεν είχες κάνει το σχέδιο θα την είχες λύσει την άσκηση;

ΑΜ: Πιστεύω πως όχι.

Ε: Δηλαδή πίστευες από την αρχή ότι αν την σχεδιάσεις θα την λύσεις την άσκηση;

ΑΜ: Ναι.

Ε: Και λειτουργούσε τελικά;

ΑΜ: Είχε αποτέλεσμα πάντως.

Με τα «χαρτάκια» στα χέρια τους, όπως τα αποκαλούσαν, απελευθερώθηκαν από τον κόσμο των συμβόλων που δυσκολεύονταν να κατανοήσουν, πέρασαν στον κόσμο της κατασκευής εικόνων και δημιούργησαν έτσι τη δική τους διέξοδο προς την κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών: *«... σε κάποια πράγματα που δεν το καταλάβαινα στο κανονικό μάθημα με τα χαρτάκια τα καταλάβαινα, μπορούσα να τα καταλάβω πιο εύκολα».*

Αναζήτησαν τη γνώση μέσα από τη δική τους εμπειρία που απέκτησαν από τη χρήση των υλικών, αναζήτησαν στο σχήμα τις απαντήσεις για το πώς και το γιατί της επίλυσης των ασκήσεων και «ξεμπέρδεψαν» με πολλά από τα λάθη τους. *«Εγώ μπερδευόμουν στην αρχή στο* x^2 *δεν θυμόμουν... τα μπέρδευα γενικά αυτά, και τώρα που έχουμε κάνει τα κομματάκια, αυτά τα σχεδιάκια, θυμάμαι το* x^2 *είναι τετράγωνο το ένα είναι... και αυτά τα καταλαβαίνω πολύ πιο καλύτερα».*

Η Βασιλική αναφέρθηκε στη δυσκολία της να περάσει από τους αριθμούς στις μεταβλητές, να αποδεχθεί δηλαδή τον συμβολισμό τους με γράμματα, ένα πρόβλημα κοινό θα λέγαμε για τους μαθητές του Γυμνασίου.

Β: Δεν μπορούσα να καταλάβω το χι, το γράμμα με τους αριθμούς τι έχει να κάνει.
Ε: Σου δόθηκε αυτή η απάντηση με τα υλικά;
Β: Στη πρώτη και δευτέρα Γυμνασίου όχι, φέτος ναι, ας πούμε το κόκκινο που είναι το πλην χι. Φέτος με τα χαρτάκια τα κατάλαβα, τι είναι αυτό το άγνωστο μέσα στους αριθμούς.

Η Φωτεινή χρησιμοποιούσε την «παπαγαλία» μέχρι τώρα για να απομνημονεύσει τους τύπους που έγραφε ο δάσκαλος στον πίνακα. Τα αλγεβρικά πλακίδια τη βοήθησαν, όπως μας είπε, να καταλάβει πως *«βγαίνουν»* οι τύποι, ότι δεν έρχονται «*ουρανοκατέβατοι»*. Όταν την ρωτήσαμε «τι σου πρόσθεσαν τα αλγεβρικά πλακίδια;» μας απάντησε:

«Τη σκέψη του όταν κάνω πράξεις υπάρχουν πράγματα τα οποία μπορούν να ταυτιστούν με τις πράξεις»

Η αρνητική κριτική της για το μάθημα που είχε ως βάση την τυποποίηση της σκέψης όπως και το σχόλιο-διαμαρτυρία της ότι *«ποτέ δεν μας τα είχαν δείξει»,* δηλώνει την αντίθεσή της απέναντι στο παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης.

Τα «σχηματάκια» που οι μαθητές δημιούργησαν με τα υλικά, τους στήριξαν στη λύση του προβλήματος, τους διόρθωσαν το λάθος στην πορεία της σκέψης, τους έδωσαν αυτήν την ίδια τη σκέψη όπως μας είπε χαρακτηριστικά κάποιος μαθητής και την αυτογνωσία του *«τι ξέρω και τι δεν ξέρω πραγματικά».*

Ε: Πίστεψες μετά στα υλικά; [για να λύσει άσκηση]

Κ: Ναι βέβαια, γιατί είδα και στον εαυτό μου, γιατί σε σύγκριση με την πρώτη τάξη που δεν ήμουν σε θέση να λύσω μια άσκηση στην τρίτη πλέον ό,τι απορίες μπορεί να μου γεννιόνταν για μια εξίσωση για παράδειγμα μπορούσα να ανατρέξω στα τετραγωνάκια, τα σχηματάκια, όλα αυτά και να λύσω σωστά να μην προβληματιστώ τώρα…

…………………………………………………………………………………….

Κ: ... εγώ πίστευα ότι ήξερα κάποια πράγματα ενώ στην ουσία δεν τα ήξερα. Εγώ φέτος είδα τον εαυτό μου να λέει αυτό το ξέρω και μέσα από τις ασκήσεις και τα σχήματα, όχι δεν ήταν αυτό που ήξερα και έτσι πιστεύω αν δεν υπήρχαν δεν θα το καταλάβαινα.

1.1.β. Υποερώτημα

Υπήρξε διαφοροποίηση στην ικανότητα εκτίμησης λάθους και στη μάθηση στις διδασκόμενες αλγεβρικές έννοιες με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων;

Τα αλγεβρικά πλακίδια εφοδίασαν τους μαθητές με επιχειρηματολογία ικανή να στηρίξει και να τεκμηριώσει τις απόψεις τους. Διεύρυναν την κατανόηση των εννοιών δίνοντας μια νέα διάσταση στα μαθηματικά σύμβολα και παράλληλα συνέβαλαν μέσα από τη διαδικασία σύνθεσης της εικόνας στην αυτενέργεια των μαθητών για τη σωστή επίλυση του εκάστοτε προβλήματος. Μια καθηγήτρια παρατήρησε:

Λ: Γράφουν μερικοί $(α+β)^2=α^2+αβ+β^2$ *και ξεχνούν το 2 ενώ έτσι θα θυμούνται ότι είναι δύο ορθογώνια. Με αυτά τα υλικά θυμόντουσαν ότι είχαν δύο τετράγωνα και δύο ορθογώνια και έλεγαν «α, δεν το έβαλα το δύο» από την οπτική εικόνα που είχαν. Και το χρώμα βοηθάει.*

Το ταίριασμα ή μη των επιμέρους κομματιών της σύνθεσης τους παρείχε αφενός μεν τη δυνατότητα ελέγχου και εξήγησης, αφετέρου την αιτιολόγηση αποδοχής ή απόρριψης, της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσονταν ανάμεσα στα μέλη της ομάδας για το τελικό αποτέλεσμα.

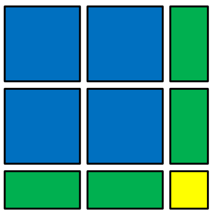
Ο διάλογος που ακολουθεί είναι μέρος της συνομιλίας μεταξύ των μαθητών μιας ομάδας και της ερευνήτριας και αναδεικνύει τη συμβολή του υλικού στην ορθή επίλυση του προβλήματος. Έχει γίνει την ώρα της παρέμβασης σε τμήμα της πιλοτικής φάσης της έρευνάς μας, αναφέρεται στη δραστηριότητα στο εάν ένα τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο ή όχι και σκιαγραφεί τον τρόπο που προσεγγίζουν οι μαθητές της ομάδας το πρόβλημα, με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.

[Οι μαθητές της ομάδας προβληματίζονται για το πως θα ελέγξουν το σχήμα που κατασκεύασαν και ζητούν στήριξη από την ερευνήτρια].

Μ: Είναι τετράγωνο κυρία;

Ε: Για να δούμε τις πλευρές.

Μ: Χί και χί και 1και 2x+1.



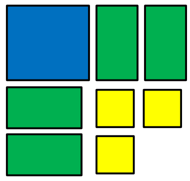
$4x^2 + 4x + 1$

Ε: Το $(2x+1)^2$ ποιό είναι;

Μ: Το $4x^2+4x+1$ ...άρα είναι τετράγωνο, σχηματίζεται.

[Ακολουθεί έλεγχος για το x^2+4x+3 στην ίδια ομάδα].

Μ1: Να δούμε για το x^2+4x+3.



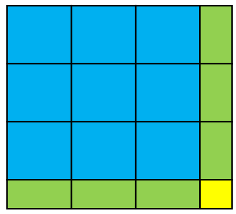
$x^2 +4x +3$

Μ2: Εδώ ...[δείχνει το 3] *δεν έπρεπε να είναι συν τέσσερα;.*

Μ1: Λείπει ένα.

Ε: Εδώ τι έγινε; Βρήκατε τις πλευρές;

Μ1: Δεν γίνεται κυρία λείπει η γωνία. [αναφέρεται στο σχήμα που κάνουν με τα υλικά και δεν κλείνει, δεν συμπληρώνεται το τετράγωνο].



Π.χ $9x^2 +6x +1$

Ε: Αν έχεις τρία τετράγωνα [ερώτηση για το $3x^2+4x+1$] *μπορείς να κάνεις τετράγωνο;*

Μ2: Όχι.

Ε: Αν έχεις εννιά τετράγωνα;

Μ2: Γίνεται. [τοποθετεί τα εννιά τετράγωνα και διαπιστώνει ότι μπορεί να σχηματίσει με αυτά τετράγωνο όπως για παράδειγμα στο $9x^2 +6x +1$].

Με τα υλικά ο μαθητής κατόρθωσε να αιτιολογήσει γιατί δεν μπορεί να είναι η παράστασης $3x^2+4x+1$ ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου με τη διαπίστωση και μόνο ότι έχοντας στη διάθεσή του τρία τετράγωνα δεν μπορεί να δημιουργήσει με αυτά το ένα από τα δύο τετράγωνα (το μπλε τετράγωνο που σχηματίζουν τα εννιά μικρότερα όπως στο πιο πάνω σχήμα για το $9x^2 +6x +1$) που δημιουργούν την εικόνα του τετραγώνου του αθροίσματος.

Στην ερώτησή μας «αν είχε εννέα τετράγωνα αν τότε θα μπορούσε η παράσταση να είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου» η απάντηση του, ήταν «γίνεται». Ο μαθητής έδωσε καταφατική απάντηση γιατί με τα εννιά τετράγωνα είχε τη δυνατότητα να τα συνθέσει και να δημιουργήσει ένα μεγαλύτερο τετράγωνο όπως στο πιο πάνω σχήμα. Αυτό βέβαια ως πρώτη εκτίμηση, διότι στη συνέχεια ο μαθητής θα έπρεπε να προχωρήσει σε έλεγχο και των άλλων κομματιών του σχήματος (των παραλληλογράμμων) για την οριστική απάντηση, όπως αν του δινόταν για παράδειγμα το τριώνυμο π.χ $9x^2+6x+1$.

Το κέρδος που είχε ο μαθητής στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι μπόρεσε εξαρχής να απορρίψει μορφές τριωνύμων ως μη αναπτύγματα τετραγώνων αθροίσματος με έλεγχο ύπαρξης ή μη των δύο τετραγώνων της εξεικόνισης των δηλαδή του ενός που δημιουργείται από τον αριθμό του δευτεροβάθμιου μονωνύμου και του άλλου από τον σταθερό όρο.

Με την ίδια συλλογιστική επισημάναμε και το λάθος που γίνεται στην ύψωση όρου στο τετράγωνο να παραλείπεται δηλαδή από τους μαθητές η ύψωση του συντελεστή της μεταβλητής.

Πάνω στο σχήμα «χτίστηκαν» από τους μαθητές τεκμηριώσεις συμπερασμάτων που συνέβαλαν στο να αποκτήσουν οι ίδιοι επάρκεια στην ικανότητα εκτίμησης λάθους, στη χρήση της λογικής, στον προσδιορισμό των κρισίμων στοιχείων του προβλήματος, στη δόμηση των μεταξύ των σχέσεων και γενικότερα στην κατανόηση τόσο των εννοιών όσο και του ίδιου του προβλήματος. Ακούσαμε αρκετά συχνά από πολλούς μαθητές ότι: «*Κάποιες φορές όταν είναι πολύ δύσκολο* [το πρόβλημα] *και δε μπορώ να το καταλάβω χρησιμοποιώ τα σχήματα είναι το τετράγωνο και τι μου μένει άλλο… αν συμπληρώνει, πως βγαίνουν τα σχήματα,...»*.

Κάποια μαθήτρια απέδωσε την επιτυχία της στο διαγώνισμα στον τρόπο που διδάχθηκε την ενότητα που αφορούσε την επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγοντάς μας χαρακτηριστικά *«Τώρα σ' αυτό το διαγώνισμα που γράψαμε το έκανα* [το σχήμα για την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης] *λίγο πάνω στο θρανίο και έγραψα και πολύ καλά. Εντάξει στον πίνακα οι ασκήσεις, μπορεί να τα καταλαβαίναμε αλλά όχι τόσο πολύ. Αλλά εγώ αυτά τα είχα βάλει ως επαλήθευση μέσα στο μυαλό μου και έτσι διαπίστωνα αν κάτι ήταν σωστό ή λάθος»*.

Τα υλικά αμφισβητήθηκαν από κάποιους μαθητές που ένιωθαν σίγουροι με τη χρήση των σύμβολων, όμως υπήρξαν φορές που και αυτοί αναζήτησαν την εικόνα για να κατανοήσουν τεχνικές που είχαν μάθει με τον συμβολικό τρόπο. Ο Νίκος μας είπε: *«Στην αρχή έλεγα ‘‘δεν πειράζει, ας το κάνω εγώ όπως ξέρω και …δεν πειράζει’’. Μετά όμως όταν είδα ότι η συμπλήρωση τετραγώνου με τα σύμβολα δεν ήταν τόσο εύκολη, λέω ‘‘κάτι θα ξέρουν για να μας τα κάνουν’’. Όταν μας έβαζε ο καθηγητής συμπλήρωση τετραγώνου έκανα αυτό με το σχήμα».*

Με αφορμή τις λανθασμένες απαντήσεις που έδωσαν και αρκετοί μαθητές που αναγνωρίζονταν ως καλοί, δηλαδή μαθητές που θεωρούνταν επαρκείς χρήστες της συμβολικής διαχείρισης, οδηγηθήκαμε να ελέγξουμε απομαγνητοφωνημένο διάλογο που έγινε κατά τη συμπλήρωση του φύλλου δραστηριοτήτων και αφορούσε το τέλειο τετράγωνο στην πιλοτική μας παρέμβαση στο 10ο Γυμνάσιο.

Η ερευνήτρια παρατηρεί ότι ενώ οι μαθητές μιας ομάδας έχουν απεικονίσει σωστά το σχήμα του $(x+1)^2$ με τα υλικά, γράφουν στη συνέχεια ότι το εμβαδό του σχήματος είναι $(x+1)^2 = x^2+1$. Με αυτό ως αφορμή γίνεται ο παρακάτω διάλογος μεταξύ ενός μαθητή της ομάδας και της ερευνήτριας από τον οποίο γίνεται εμφανής η «άρνηση» του να «διαβάσει» το σχήμα που έχει μπροστά του μένοντας εγκλωβισμένος στις τεχνικές των συμβόλων (η συζήτηση γίνεται πάνω στο σχήμα).

Ε: Το x^2+1 είναι το εμβαδό του τετραγώνου;

Μ: Ναι.

Ε: Το εμβαδό του σχήματος πόσο είναι;

Μ: $(x+1)^2$.

Ε: Το $(x+1)^2$ είναι ίσο με το x^2+1;

Μ: Ναι, είναι ίσα γιατί...

Ε: Για να δούμε ... το $(x+1)^2$ αντιπροσωπεύει όλο το σχήμα που μου έδειξες. Το x^2+1 είναι το ίδιο σχήμα;

Ο μαθητής βγάζει τα δύο ορθογώνια από το σχήμα που έχει σχηματίσει με τα αλγεβρικά πλακίδια.

Ε: Το σχήμα αυτό που δημιουργήθηκε είναι το ίδιο με το προηγούμενο;

Μ: Όχι.

Ε: Πόσα κομμάτια πρέπει να χρησιμοποιήσω για να φτιάξω το σχήμα που ζωγράφισες;

Μ: Τέσσερα.

Ε: Γιατί γράψατε τότε ότι το $(x+1)^2$ είναι ίσο με το x^2+1;

Μ: Γιατί πάει κάθε όρος στο τετράγωνο. Έτσι μας έχουν πει..

Βλέπουμε εδώ, ότι ο μαθητής κάνει χρήση αλγεβρικής επεξήγησης αντί να ελέγξει την ορθότητα της απάντησης του μέσω του σχήματος που ο ίδιος έκανε και βρίσκεται μπροστά του.

Ε: Άμα σε ρωτήσουν γιατί το $(x+1)^2$ δεν είναι ίσο με το x^2+1 τι θα τους πεις;

Μ: Τι θα τους πω; (προβληματισμένος)

Ε: Αν έχεις στη διάθεσή σου αυτά τα «χαρτάκια» μπορείς να δείξεις ότι $(x+1)^2$ δεν είναι ίσο με το x^2+1; Το ότι δηλαδή το $x^2+1=(x+1)^2$ δεν είναι σωστό;

Μ: Ναι. Γιατί θα έχω αυτά τα δύο κομμάτια [τα τετράγωνα] *και δεν γίνεται αυτό το σχήμα* [Δείχνει το μεγάλο τετράγωνο που αντιπροσωπεύει την εικόνα του $(x+1)^2$].

Ε: Με δύο τετράγωνα έστω και ίσα μπορείς να κατασκευάσεις ένα τετράγωνο;

Μ: Όχι. (χωρίς δισταγμό) *γιατί θα είναι ορθογώνιο.*

Κατά την απομαγνητοφώνηση των συνομιλιών μεταξύ των μελών της ομάδας φάνηκε ότι άποψη του μαθητή ήταν να κάνει τον πολλαπλασιασμό (x+1)(x+1) και ενώ προχωρούσε στις πράξεις, x^2+2x+. . . , επεμβαίνει κάποιος άλλος μαθητής της ομάδας, λέγοντας *«να το γράψουμε x^2+1»*, προλαβαίνοντάς τον έτσι, πριν τελειώσει την επιμεριστική και τον παρασύρει στο λάθος. Όταν αυτό επισημάνθηκε μέσα από τον διάλογο που είχαν με τον ερευνητή έριξαν ο ένας το φταίξιμο στον άλλο.

Η παρουσία του υλικού ανέδειξε το γεγονός ότι συχνά οι μαθητές απλά χειρίζονται σύμβολα με μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό επάρκειας χωρίς να κατανοούν πάντα τι κάνουν. Η λύση που αναζητούσαν ήταν μπροστά τους, αλλά δεν ήταν σε θέση να την αναγνωρίσουν, καθώς απαιτούνταν εκ μέρους των η γυμνασμένη μαθηματική «όραση» που φέρνει η κατανόηση. (Μαρμαρά, Χατζηκυριάκου, 2008, σελ. 36-38).

Η ανάπτυξη της μαθηματικής αιτιολόγησης έδωσε στους μαθητές της κάθε ομάδας σειρά επιχειρημάτων ικανών να «διορθώσουν» λανθασμένες κινήσεις ή σκέψεις του συμμαθητή τους, να «δουν» οι ίδιοι τι κάνουν λάθος, να «ξαναεπαληθεύσουν» το αποτέλεσμα σε περίπτωση αμφιβολίας ή διχογνωμίας, να σιγουρευτούν για το αποτέλεσμα στο οποίο είχαν καταλήξει. Η Καίτη μας διηγήθηκε ένα στιγμιότυπο στην ομάδα της που ενισχύει τον ισχυρισμό μας.

Κ: «… μια φορά η Αρετή είχε να λύσει μια άσκηση και να κάνει το σχήμα και η Φιλιώ τη διόρθωσε να αλλάξει το σχήμα. Έβαλε νομίζω ένα ορθογώνιο και είχαμε $(x\text{-}1)^2$ και είχε βάλει η Αρετή ένα κόκκινο και ένα πράσινο και λέει η Φιλιώ ‘‘όχι αυτά αλληλοεξουδετερώνονται, θέλει και από δω ένα κόκκινο για να είναι ίσα’’».

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα χρώματα και τα σχήματα βοήθησαν τη Φιλιώ, που ήταν μια μαθήτρια με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και αδιάφορη για το μάθημα, όχι μόνο να εντοπίσει το λάθος που έκανε η Αρετή αλλά και να αιτιολογήσει την άποψή της.

Η Μαρία και ο Γιάννης επίσης μας επισήμαναν ότι χρησιμοποιούν το σχήμα για επαλήθευση της σκέψης τους και θεωρούν την επίλυση των ασκήσεων στον πίνακα μη «παραγωγική» ως προς την κατανόηση για τους ίδιους.

Μ: «Ναι, ναι βασικά ήταν πολύ εντυπωσιακό αυτό το πράγμα υπήρχαν…εντάξει στον πίνακα οι ασκήσεις μπορεί να τα καταλαβαίναμε αλλά όχι τόσο πολύ. Αλλά εγώ αυτά τα είχα βάλει ως επαλήθευση μέσα στο μυαλό μου και έτσι διαπίστωνα αν κάτι ήταν σωστό ή λάθος».

Ο Γιάννης μάλιστα επισημαίνει ότι τώρα γράφει τις πράξεις πιο συνειδητά αποκαλύπτοντας έτσι με τον τρόπο του, ότι τις πράξεις από τον πίνακα απλά τις αντέγραφε χωρίς να κατανοεί την αλληλουχία των πράξεων.

Γ: «…τις γράφω [τις πράξεις] *πιο συνειδητά, γιατί δεν γράφουμε από τον πίνακα ποιος είναι ο τύπος. Γιατί οδηγούμασταν μόνοι μας στην απάντηση από τα φύλλα. Πολλές φορές κάνουμε λάθος αλλά μετά το βλέπουμε, βλέπουμε και τι λάθος έχουμε κάνει και μετά το αλλάζουμε».*

Με τα αλγεβρικά πλακίδια οι μαθητές μπόρεσαν να προσδιορίσουν, να αναγνωρίσουν και να αναπτύξουν στρατηγική επίλυσης προβλήματος. Τους δόθηκε έτσι λοιπόν η δυνατότητα να προχωρήσουν στην ανάπτυξη και βελτίωση της μαθηματικής αιτιολόγησης (Hiebert, 1997,σελ. 141), η οποία κατά τους Ball & Bass όπως αναφέρει στο άρθρο της η Brodie (2009, σελ., 42) «είναι αδιαχώριστη από τη γνώση των μαθηματικών εννοιών με κατανόηση».

1.1.γ. Υποερώτημα

«Απεξαρτήθηκαν» τελικά οι μαθητές από τα αλγεβρικά πλακίδια;

Ευθεία απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι δύσκολο να δοθεί. Αν η ερώτηση περιορίζεται στο αν οι μαθητές μπορούσαν να προχωρήσουν στην επίλυση άσκησης χωρίς να έχουν τα υλικά στη διάθεσή τους η απάντηση είναι καταφατική, αν όμως η ερώτηση περιλαμβάνει την ανεξαρτητοποίηση τους και από την εικόνα που μπορούσαν να σχεδιάσουν για να προχωρήσουν στην επίλυση ή στην επαλήθευση του προβλήματος η απάντηση μάλλον είναι αρνητική.

Όπως μας επισήμαναν οι ίδιοι στο φύλλο αξιολόγησης, την τεχνική που διδάχθηκαν και τις δεξιότητες που ανέπτυξαν, να εκφράζουν δηλαδή γεωμετρικά την αλγεβρική παράσταση, να την επιλύουν μέσω του σχήματος και να αποδίδουν τη γεωμετρική επίλυση συμβολικά, τις χρησιμοποιούν, όταν έχουν να λύσουν δύσκολες ασκήσεις (10 μαθητές στους 22) και σε όλες τις ασκήσεις (12 μαθητές στους 22).

Μια μαθήτρια αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Όταν είναι εύκολη η άσκηση την κάνω κατευθείαν, για επαλήθευση το χρησιμοποιώ κάνω δηλαδή το σχέδιο. Άμα είναι δύσκολη την κάνω κατευθείαν το σχέδιο και μετά προσπαθώ να βγάλω την εξίσωση*».

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι λογικό να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι για τις δύσκολες ασκήσεις όλοι οι μαθητές νιώθουν την ανάγκη να καταφύγουν στο σχήμα. Η εξάρτηση αυτή του μαθητή έχει τόσο τα θετικά της στοιχεία όσο και τα αρνητικά της. Θετικό είναι ότι ο μαθητής μέσω του σχήματος μπαίνει στη διαδικασία προσπάθειας επίλυσης του εκάστοτε προβλήματος ενώ σε άλλη περίπτωση θα είχε εγκαταλείψει την άσκηση. Αρνητικό όμως είναι ότι η μη απαγκίστρωση του μαθητή από τη σχηματική παράσταση τον εμποδίζει να περάσει στον χειρισμό συμβόλων, έστω και για τις εύκολες ασκήσεις, Δεν πρέπει βέβαια να υποτιμήσουμε το γεγονός ότι το να περάσει ο μαθητής από τη διερεύνηση της μορφής ενός σχήματος μέσα από την κίνηση των χεριών στην αποτύπωση του σχήματος στο χαρτί είναι σημαντικό διότι τα σχεδιαστικά του βήματα αποτυπώνουν και όλους τους συλλογισμούς της επίλυσης του προβλήματος. Μέσα από αυτό το πρίσμα θα μπορούσαμε ίσως να ισχυριστούμε ότι αυτό σταδιακά τον οδηγεί σε απεξάρτηση από την εικόνα, σε ασφαλή επίλυση του προβλήματος με χρήση μαθηματικών συμβόλων και σε ομαλή μετάβαση στην αφηρημένη σκέψη

Η τοποθέτησή μας αυτή επιβεβαιώνεται και από τη συνέντευξη, που μας παραχώρησε μαθήτρια της τάξης παρέμβασης, την επόμενη σχολική χρονιά (Α. Λυκείου). Συγκεκριμένα μας είπε ότι «*όταν θέλω ...και βλέπω μια ταυτότητα πάει κατευθείαν, δουλεύω πλέον μηχανικά, ξέρω το πώς θα είναι και ποιο είναι το ανάπτυγμα. ...Δεν έχω κανένα πρόβλημα και να την αναγνωρίσω και να την εφαρμόσω…σίγουρα με βοήθησαν τα υλικά δεν το συζητώ*».

1.1.δ.Υποερώτημα

Διευκόλυναν οι στρατηγικές των αλγεβρικών πλακιδίων περισσότερο από άλλες την επίλυση των ασκήσεων του είδους που ασχοληθήκαμε;

Οι στρατηγικές που αναπτύχθηκαν είτε με άμεση χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων είτε έμμεσα με εφαρμογή τους σε πίνακα διπλής εισόδου φάνηκε να διευκολύνουν περισσότερο από εκείνες τις στρατηγικές που ως βάση τους είχαν την απομνημόνευση των τύπων των ταυτοτήτων δηλαδή του τετραγώνου αθροίσματος και διαφοράς και της διαφοράς τετραγώνων. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγηθήκαμε από τη διαπίστωση ότι οι μαθητές εφάρμοσαν ορθά τις δραστηριότητες που τους προτείναμε και εκφράστηκαν θετικά για τη δυνατότητα τους να ελέγχουν με χρήση του πίνακα διπλής εισόδου την ορθή εφαρμογή των τύπων όταν είχαν αμφιβολίες για το αποτέλεσμα.

Επιπροσθέτως παρατηρήσαμε, στις διδασκαλίες πιλοτικής εφαρμογής της έρευνας σε τάξεις που είχαν ήδη διδαχθεί τις αντίστοιχες ενότητες, ότι οι στρατηγικές των καθηγητών τους για τη σωστή εφαρμογή των τύπων είχαν πολλά προβλήματα και δύσκολα κατακτιόνταν από τους μαθητές.

Στο διαγνωστικό ερωτηματολόγιο που δώσαμε στην αρχή της παρεμβατικής μας διδασκαλίας διαπιστώσαμε την ύπαρξη πολλών λαθών σε ασκήσεις εφαρμογής των ταυτοτήτων, λάθη που κατά την εκτίμησή μας οφείλονται στις αδυναμίες που παρουσιάζει η χωρίς κατανόηση απομνημόνευση των τύπων. Οι αδυναμίες αυτές δεν ξεπεράστηκαν ούτε μέσα από προτεινόμενες τεχνικές των καθηγητών τους, που στηρίζονταν σε κάποιας μορφής απεικόνιση, τεχνικές που όπως επισημάναμε ανακύκλωναν το πρόβλημα δεδομένου ότι η σωστή εφαρμογή τους προϋπέθετε κατανόηση και καλό χειρισμό συμβόλων εκ μέρους του μαθητή.

Στις συνεντεύξεις τους οι καθηγητές αναφερόμενοι στις τεχνικές που χρησιμοποίησαν για την ορθότερη εφαρμογή των τύπων, μας είπαν ότι:

Ε: Χρησιμοποιώ τον τύπο και με βελάκια αντικαθιστώ τις καινούργιες μεταβλητές πάνω στο μοντέλο.

Γ: Υπογραμμίζω τις μεταβλητές που υπάρχουν στην άσκηση και βάζω από κάτω το α και το β της ταυτότητας. Συνεχίζω με το ίσον και με το ακόλουθο μοντέλο

$(\quad)^2+2(\quad)(\quad)+(\quad)^2$ *και βάζουν* [οι μαθητές] *στις παρενθέσεις το καινούργια στοιχεία και έτσι διασφαλίζω την σωστή ύψωση στο τετράγωνο. Το λάθος* $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ *παρατηρείται πολλές φορές.*

Οι τεχνικές που αναφέρθηκαν έχουν το μειονέκτημα ότι δεν ξεφεύγουν από τη χρήση συμβόλων. Επομένως είναι το ίδιο δύσκολες για τον μαθητή που δεν χειρίζεται σωστά τα σύμβολα γιατί δεν κατανοεί την έννοιά τους και επομένως και τις τεχνικές που τα συνοδεύουν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακάτω συνέντευξη που μας παραχώρησε καθηγητής, στην οποία παρατηρούμε ότι προχωρά σε μια απόπειρα απαγκίστρωσης από τη χρήση συμβόλων. Για να το πετύχει αυτό χρησιμοποιεί ως «μεσάζοντα» την ελληνική γλώσσα όπως λέει ώστε να «συνδέσει τις λέξεις με τα σύμβολα και να προχωρήσει στη συνέχεια *«στη μετάφραση των μαθηματικών σκέψεων»*. Προσπαθεί όμως να δώσει εξηγήσεις, τις οποίες ο Rancière (1991) περιγράφει ως μία σειρά συλλογισμών που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν μια σειρά συλλογισμών που υπάρχουν ήδη στην ύλη που διδάχθηκε κάποιος, μάταια κατά την γνώμη μας γιατί αν ο μαθητής δεν μπορεί λόγω μαθησιακών κενών να αντιληφθεί την πρώτη σειρά των συλλογισμών με τα σύμβολα γιατί θα πρέπει να υποθέσουμε ότι θα καταλάβει τους συλλογισμούς του δασκάλου με χρήση των λέξεων (Triandafillidis, 2002, σελ. 4).

Β: Τη μαθηματική σκέψη την ερμηνεύω «ελληνικά» δηλαδή λέω «όταν έχουμε ένα άθροισμα στο τετράγωνο κάνει το τετράγωνο του πρώτου, δεν του λέω άλφα στο τετράγωνο συν το διπλάσιο γινόμενο του πρώτου με τον δεύτερο συν το τετράγωνο του δευτέρου και μετά στην εφαρμογή τους ζητώ να μου πουν «ελληνικά» τα παραπάνω. Αν δεν χρησιμοποιήσει παρένθεση π.χ $2x^2$ για τον παράγοντα $2x$ τότε του λέω ‘‘ποιός είναι ο πρώτος’’; ‘‘Πόσο κάνει το τετράγωνο του $2x^2$ εδώ είναι μόνο στο x. Λέμε όλος ο πρώτος όρος στο τετράγωνο’’. Κάποιοι το καταλαβαίνουν κάποιοι όχι, κάποιοι το ξεχνάνε πολλές περιπτώσεις. Πάντα μεταφράζω «ελληνικά» τις μαθηματικές σκέψεις με λέξεις, αλλά με απόλυτη μετάφραση. Αν είχα *χρόνο θα τα χρησιμοποιούσα (τα αλγεβρικά πλακίδια) για να κάνω οπτική εικόνα.*

Στο παραπάνω απόσπασμα της συνέντευξης διαπιστώνουμε ότι ο καθηγητής θεωρεί ότι η χρήση των λέξεων, π.χ «άθροισμα στο τετράγωνο» ή το «τετράγωνο του πρώτου, η ερμηνεία στα «ελληνικά» όπως υποστηρίζει, αντί του $(\alpha+\beta)^2$ και του α^2 αντίστοιχα, κάνει την έννοια και την εφαρμογή της ταυτότητας ευκολότερη για τον μαθητή. Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιεί τη γεωμετρική διάσταση της ταυτότητας που δεν είναι κατανοητή στο μαθητή και ίσως μάλιστα να τον μπερδεύει περισσότερο αφού η εφαρμογή του τύπου σε άσκηση γίνεται με χρήση συμβόλων και όχι με λέξεις. Ο ίδιος εξ άλλου στην κριτική που ασκεί στη μέθοδο που ακολουθεί παραδέχεται ότι *«κάποιοι το καταλαβαίνουν κάποιοι όχι, κάποιοι το ξεχνάνε πολλές περιπτώσεις».*

Ενδιαφέρον παρουσίασε και η άποψη που εξέφρασε μια καθηγήτρια για την αναγκαιότητα της απομνημόνευσης, κοινώς «παπαγαλία »,την οποία θεωρεί αναγκαία για τον μαθητή. Όπως θα παρατηρήσει κάποιος στο κείμενο της συνέντευξης η κατανόηση των εννοιών δεν έχει τη βαρύτητα που έχει η εκμάθηση του κανόνα ο οποίος όπως μας τόνισε *«πρέπει να μαθευτεί σαν ποίημα τον καταλαβαίνεις δεν τον καταλαβαίνεις».*

Λ: Πρέπει να απομνημονεύουν ένα θεώρημα για παράδειγμα. Καταλαβαίνεις δεν καταλαβαίνεις πρέπει να το μάθεις απέξω. Μετά εφαρμόζοντάς το σε ασκήσεις θα το καταλάβεις. Μερικά παιδιά λένε δεν μπορούν, αλλά δεν έχει δεν μπορώ πρέπει να το μάθεις σαν ποίημα και μετά με τις ασκήσεις θα το καταλάβεις…

Το ίδιο ήταν και με την πρόσθεση ετεροσήμων αριθμών. Στην αρχή δεν το καταλάβαιναν και τους είπα να το μάθετε σαν ποίημα. Μετά όμως *από πολλά παραδείγματα δεν θα χρειάζεστε πια τον κανόνα. Στην αρχή λοιπόν βοηθάει. Γιατί όταν δεν έχεις μάθει τον κανόνα πώς θα λύσεις τις ασκήσεις; Μου λένε «δεν το καταλαβαίνω». Δεν έχει δεν το καταλαβαίνεις, αφού το λέει ο κανόνας πάει και τελείωσε.*

Οι ίδιοι καθηγητές αναφερόμενοι στα σχόλια των μαθητών τους και εκφράζοντας και την προσωπική τους εκτίμηση για την πρόταση μαθήματος που δώσαμε σημείωσαν:

Ε: Στο άλλο μάθημα συζητήσαμε ορισμένα πράγματα και είπαν (οι μαθητές) *«α, κύριε το να γίνεται το μάθημα έτσι είναι εύκολο» και τους είπα, ότι δεν μπορεί πάντα να γίνεται έτσι. Θετικά δηλαδή το αντιμετώπισαν. Μερικοί είπαν αυτά τα μαθηματικά είναι παιγνιδάκι, σε τέτοιο στυλ το είδαν.*

Λ: Αναφέρθηκαν θετικά (*οι* μαθητές). *Τους άρεσε και αυτοί ενδιαφέρον το βρήκαν, αφού με ρωτούσαν πότε θα ξανάρθεις. Όχι τους άρεσε αυτό που είδανε και σε θέλανε ξανά.*

Β: Η γεωμετρική ερμηνεία βοηθά. Στις ταυτότητες το είδα και στην παραγοντοποίηση είδα ότι βοηθάει. Εγώ θα τα ήθελα τα αλγεβρικά πλακίδια σε όσα δυνατόν περισσότερα κεφάλαια για να ενισχύσω τη γεωμετρική ερμηνεία.

Γ: Ιδιαιτέρως βοηθήθηκαν οι μαθητές στην απομνημόνευση του συντελεστή του γινομένου και του πρόσημου του όσο και στην αποφυγή του λάθους της μη ύψωσης στο τετράγωνο παραγόντων με συντελεστή μεγαλύτερο της μονάδας.

Αλλά και οι ίδιοι οι μαθητές στο ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν στο τέλος της παρέμβασης συμφωνούν ότι το μάθημα ήταν ενδιαφέρον, δεν τους δυσκόλεψε και η εργασία με τα χειραπτικά υλικά ήταν εύκολη. Σημείωσαν ότι ιδιαιτέρως τους άρεσε:

«η εξήγηση του μαθήματος»

«η γεωμετρική προσέγγιση της ταυτότητας $(α+β)^2$»

«το γεγονός ότι μπόρεσα να τα καταλάβω καλύτερα»

«ο τρόπος με τον οποίο έγινε το μάθημα»

«το ότι παίζαμε και μαθαίναμε»

Επίσης μας εξήγησαν ότι θα ήθελαν το μάθημα να γίνεται με τα αλγεβρικά πλακίδια διότι:

«με βοήθησαν να κατανοήσω περισσότερο το μάθημα και να καταλάβω πράγματα που δεν είχα καταλάβει»,

«μάθαμε πρακτικά την έννοια του μαθήματος»

«γιατί είναι πιο εύκολος αυτός ο τρόπος»

«έβρισκα τις μεταβλητές σωστά»,

«κατάλαβα καλύτερα ότι το $α^2+β^2 = (α+β)^2$ δεν ισχύει και βρήκα και το γιατί και μου άρεσε και ο πίνακας διπλής εισόδου»

«με βοήθησαν να δώσω μια χειροπιαστή εξήγηση στις ταυτότητες και την παραγοντοποίηση».

Από τις πιο πάνω επισημάνσεις των μαθητών γίνεται αντιληπτό, ότι οι διδακτικές τεχνικές που εφάρμοσαν οι καθηγητές των τάξεων παρέμβασης, κατά την πιλοτική και κύρια φάση, δεν αναγνωρίστηκαν από τους μαθητές ως οι καταλληλότερες, για την κατανόηση των εννοιών και των εφαρμογών τους. Οι μαθητές της τάξης παρέμβασης, που διδάχθηκαν τις αλγεβρικές έννοιες με τα χειραπτικά υλικά, σύμφωνησαν ότι βοηθήθηκαν*: «Στο να λύνουμε μια εξίσωση πιο εύκολα, πιο γρήγορα,* *πιο σωστά… Όταν για παράδειγμα έχω x^2 + 3x φέρνω στο μυαλό μου το τετράγωνο και τα τρία ορθογώνια και καταλαβαίνω πως πάει η εξίσωση»*

Ο Δημήτρης μας ανέφερε ακόμη ότι: *«… όταν ήταν κάποιες ασκήσεις να κάνουμε στο σπίτι καθόμουν και σκεφτόμουν αυτά που μας είχατε πει, αυτά που έχουμε κάνει και…ε! το σχήμα..., τώρα σ' αυτό το διαγώνισμα που γράψαμε το έκανα λίγο πάνω στο θρανίο* (το σχήμα για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης) *και έγραψα και πολύ καλά».*

Πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει και η άποψη του Τάσου ότι: «*σκεφτόμουν τα τετραγωνάκια και έβγαζα άλλες επιλύσεις και το έβρισκα αλλιώς»,* που δίνει μια άλλη διάσταση της συμβολής των αλγεβρικών πλακιδίων ότι δηλαδή οι διαφορετικές επιλογές σύνθεσης σχήματος με τα υλικά δίνουν στον μαθητή τη δυνατότητα να οδηγηθεί και σε άλλους τρόπους επίλυσης του προβλήματος (Lappan & Even, 1989, Jones, S., 1998).

2. Δεύτερο βασικό ερώτημα

Πώς επιδρά η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας στην επίλυση πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ασκήσεων, εφαρμογών των αλγεβρικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.

Διαπιστώσαμε ότι ο συνδυασμός της ομαδοσυνεργατικής μάθησης με παράλληλη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στην εκμάθηση των αλγεβρικών εννοιών των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης και των επιλύσεων εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού αποδείχθηκε καθοριστικής σημασίας για την ενεργή συμμετοχή του συνόλου των μαθητών στη διδακτική διαδικασία. Παρατηρήσαμε ότι αυτό το μοντέλο διδασκαλίας κινητοποίησε ουσιαστικά τους μαθητές αφού όπως είπαν:

«Επηρεάζεσαι, βλέπεις τον διπλανό σου να εργάζεται,…δεν μπορείς να μείνεις απαθής» και έτσι *«Συνεργαζόμασταν …είχαμε απορίες μεταξύ μας, κάναμε απορίες, ωραία ήταν».*

Οι Bransford, Brown & Coking, (1999), Greeno, Collins & Resnick (1996) θεωρούν ότι η αλληλόδραση μεταξύ των μαθητών όπως και του δασκάλου είναι βασικό στοιχείο δόμησης γνώσης. Με την άποψη αυτή συμφωνεί και Lemke (1997) που διαπιστώνει ότι όταν οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά σε καταστάσεις αλληλόδρασης τους δίνεται η ευκαιρία να δομήσουν γνώση μέσα από τις εξηγήσεις, τις σκέψεις και τη συζήτηση, δηλαδή εν συντομία να δώσουν νόημα στη γνώση. (Hoek, D., Seegers, G., 2005, σελ. 20).

Σε μετα-ανάλυση 122 ερευνών από τους Johnson & Johnson, Maruyama, Nelson και Skon συγκρίθηκε η σχετική αποτελεσματικότητα της συνεργασίας, της συνεργασίας με ανταγωνισμό μέσα στην ομάδα, του διαπροσωπικού ανταγωνισμού και της ατομικής προσπάθειας (1980, σελ. 47). Τα αποτελέσματα αυτής της μετα-ανάλυσης έδειξαν α) η συνεργασία είναι σημαντικά αποτελεσματικότερη από τον διαπροσωπικό ανταγωνισμό και την ατομική προσπάθεια β) η συνεργασία με ανταγωνισμό μέσα στην ομάδα υπερέχει του διαπροσωπικού ανταγωνισμού και της ατομικής προσπάθειας και γ) δεν υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στον διαπροσωπικό ανταγωνισμό και στην ατομική προσπάθεια.

Η συνεργασία στην ομάδα βοήθησε τον Βασίλη όταν κάτι δεν καταλάβαινε διότι: *«βοηθούσαν τα παιδιά, τους έλεγα ‘‘δεν το κατάλαβα’’ κάναμε όλοι μαζί την άσκηση σε συνεργασία και έτσι μέσα από αυτό το καταλάβαινα».* Και η Λένα μας είπε ότι μέσα στην ομάδα «*μπόρεσα να σκεφτώ αν είναι σωστή* (η λύση της άσκησης) *ή κάτι είναι λάθος και να αποφασίσουμε μετά, γιατί υπάρχουν σε μια άσκηση πολλές λύσεις».*

Η θετική αντιμετώπιση του όλου εγχειρήματος από τους μαθητές προώθησε και μια θετικότερη συμπεριφορά απέναντι στη γνώση και στις προς μάθηση έννοιες. Είδαμε να αυξάνεται η προθυμία τους να παίρνουν μέρος σε πιο δύσκολες δραστηριότητες, διότι πίστευαν στη στήριξη της ομάδας, να αναπτύσσουν ποιοτική σκέψη μέσα από την προσπάθεια στήριξης των επιχειρημάτων τους, να προχωρούν σε γενίκευση εννοιών και να εμφανίζουν δημιουργικότητα στην επίλυση προβλήματος μέσα από τον πειραματισμό που τους επέτρεπε η σύνθεση του σχήματος.

Κοινός παρανομαστής όλων των παρατηρήσεων που αναφέραμε ήταν η συζήτηση, η οποία, όπως ισχυρίζεται ο Jaques (2003, σελ. 492), βοηθά τα μέλη της ομάδας να πραγματευτούν έννοιες, να αναπτύξουν ικανότητα να ακούν τις θέσεις του άλλου, να παρουσιάζουν τις ιδέες τους και να επιχειρηματολογούν για τις σκέψεις τους.

Η Άννα και η Χριστίνα μας μίλησαν για αυτή τους την εμπειρία και τη συνεργασία τους με τους συμμαθητές τους στα πλαίσια της δικής τους ομάδας.

Α: Στην αρχή όχι, γιατί δεν ήξερα πώς να τους πω πώς να λύσουμε μια άσκηση και τέτοιο.

Ε: Δεν ήθελες να πεις τη γνώμη σου;

Α: Όχι, δεν ήθελα γιατί πίστευα πως θα ήταν λάθος.

Ε: Αυτό συνεχίστηκε μέχρι τέλος;

Α: Όχι, μετά άρχισα να λέω τη γνώμη μου και ας μην ήταν σωστή, αλλά εντάξει.

Ε: Είδες ότι ήταν χρήσιμη και η δική σου γνώμη;

Α: Ναι, γιατί ο καθένας πρέπει να λέει τη γνώμη του.

Ε: Ακόμη και όταν δεν είναι σωστή;

Α: Άμα δεν είναι σωστή τη διόρθωνε ένα κορίτσι και μετά το καταλάβαινα.

Η Άννα ένιωσε «προστατευμένη» μέσα στην ομάδα και ξεπέρασε τον φόβο να εκφράσει τις σκέψεις της ακόμη και αν αυτές δεν ήταν σωστές. Αυτό δεν το έκανε ενώπιον όλης της τάξης, όπως γίνεται στην «παραδοσιακή» διδασκαλία, διότι ήθελε να αποφύγει, στην περίπτωση της λανθασμένης σκέψης, την έκθεση της στα μάτια όλων των συμμαθητών της και του δασκάλου. Με την ομάδα ήταν αλλιώς αφού ο στόχος ήταν κοινός και επιτυχία της ομάδας ήταν και επιτυχία του κάθε μέλους της. Αυτός είναι ο λόγος που θεωρεί πια απαραίτητο στοιχείο στη διαδικασία της μάθησης το ότι *«ο καθένας πρέπει να λέει τη γνώμη του»*.

Η Χριστίνα μας έκανε γνωστή τη δική της θετική εμπειρία από τη συνεργασία στην ομάδα της. Στη συνέντευξή της κυρίαρχη θέση έχουν οι λέξεις «*βοηθιόμασταν» και «συνεργαζόμασταν»* που περιγράφουν χαρακτηριστικά το πλαίσιο λειτουργίας της ομάδας και παράλληλα τη θετική στάση της απέναντι στην άλλη πρόταση διδασκαλίας που προτείναμε την ομαδοσυνεργατική. Σημαντική είναι και η τελευταία παρατήρησή της «*συνδεθήκαμε πιο πολύ»* και *«είχαμε πιο πολλές σχέσεις μετά από αυτό»* που βάζει μια άλλη εξίσου ενδιαφέρουσα διάσταση της ομαδοσυνεργατικής αυτή της επιρροής της στις διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ των μελών της ομάδας.

Χ: Μου άρεσε, γιατί τα καταλαβαίναμε καλύτερα και όταν δυσκολευόταν ο ένας από μας τον βοηθούσε ο άλλος, δεν χρειαζόταν να φωνάζουμε τόσες φορές τον κύριο βοηθιόμασταν μεταξύ μας.

Ε: Λύνατε περισσότερες ασκήσεις έτσι;

Χ: Ναι, περισσότερες και πολύ ευκολότερα.

Ε: Σε τι σε βοηθούσε η ομάδα;

Χ: Συνεργαζόμασταν και βοηθιόμασταν στις ασκήσεις, ας πούμε είχαμε κολλήσει κάπου και πεταγόταν ο διπλανός και έλεγε εδώ πέρα βάλε αυτό ή εκείνο και συνεχίζαμε.

Ε: Αυτό θα συνέβαινε αν ήσασταν μόνοι σας;

Χ: Όχι, θα αναγκαζόμουν να φωνάξω τον κύριο και να με βοηθήσει να συνεχίσω.

Ε: Η συζήτηση έδινε περισσότερη βοήθεια;

Χ: Ναι, γιατί πολλές φορές ρωτούσαμε ο ένας τον άλλο και λέγαμε γιατί να βάλουμε αυτό, και εξηγούσαν οι υπόλοιποι.

Ε: Οι σχέσεις σας διαφοροποιήθηκαν;

Χ: Ήμασταν ήδη φίλες, αλλά ναι συνδεθήκαμε πιο πολύ, βοηθιόμασταν πιο πολύ τώρα και είχαμε πιο πολλές σχέσεις μετά από αυτό.

Οι μαθητές στις συνεντεύξεις τους δεν αναφέρθηκαν μόνο στα θετικά του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας, αλλά προχώρησαν και στη σύγκριση του με το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας και μας επεσήμαναν ότι:

Μ: Εμένα μου φάνηκε πιο εύκολο, γιατί ας πούμε σε ένα θρανίο με το διπλανό σου δεν έχεις πάντα την ίδια βοήθεια από ότι θα είχαμε από περισσότερα άτομα. Γιατί καθόμασταν και συνεργαζόμασταν, παρόλο που κάναμε φασαρία.

Γ: Ε, ήταν καλύτερα, γιατί βοηθάει ο ένας τον άλλο. Γιατί άμα ήταν ο καθένας μόνος του στα θρανία δεν θα τις έλυνε τόσο εύκολα, για παράδειγμα τις μοιραζόμασταν τις ασκήσεις δεν τις κάναμε όλοι μαζί (επίλυση στον πίνακα), *κατάλαβα πιο εύκολα μερικά πράγματα γιατί άμα είμαστε μια παρέα ρωτάς τον διπλανό σου και σου λέει «εντάξει» πιο καλά είναι σαν ομάδα.*

Γ: Καλύτερα με ομάδες μας βοηθούσε περισσότερο, ναι γιατί άμα ο καθηγητής κάθεται και γράφει στον πίνακα συνέχεια μπορεί να *καταλαβαίνουμε αλλά θα μας έπαιρνε περισσότερο χρόνο να μάθουμε για παράδειγμα ότι το x^2 είναι τετράγωνο. Βοηθάει η ομάδα γιατί λύνουμε και τις ασκήσεις πιο γρήγορα, γιατί είμαστε τέσσερα άτομα. Και ο Γιάννης* (μαθητής με χαμηλή επίδοση και αδιάφορος για το μάθημα) *λύνει ασκήσεις.*

Οι απόψεις τους δηλώνουν και τη μεταστροφή της αρνητικής στάσης τους απέναντι στο μάθημα και κατ' επέκταση και στο σχολείο αφού πια ήταν «παρέα», ήταν τέσσερα άτομα και όπως μας ανέφεραν «*είχα και άλλη βοήθεια εκτός από ένα άτομο, έπαιρνα γνώμες», «σαφώς βοηθούσε γιατί καλύτερα πέντε μυαλά παρά ένα*».

Η συνεργατική μάθηση ενθάρρυνε τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία. *«Η ομαδική εργασία βοηθούσε κάποια παιδιά που δεν τα καταφέρνουν, γιατί με τη βοήθεια του διπλανού συμμετείχαν, η οπτική εικόνα βοηθούσε πολύ. Αποδίδει πολύ το ομαδικό και που θα κοιτάξουν από το διπλανό είναι σημαντικό»* μας επεσήμανε μια καθηγήτρια τάξης κατά την πιλοτική φάση της έρευνας. Οι μαθητές στην ομάδα προσπάθησαν να βρουν διαφορετικούς τρόπους για να εξηγήσουν τις έννοιες και να λύσουν το πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Αυτό σε συνδυασμό με την προσδοκία επιτυχίας τους ενίσχυσε τη θέλησή τους για μάθηση και αύξησε την πιθανότητα για θετικά επιτεύγματα. Ένας καθηγητής μας είπε: «*Παρατήρησα ότι λύνουν την άσκηση όχι μόνο με έναν τρόπο αλλά παρουσιάζουν και δεύτερον και τρίτον*».

Σύμφωνα με τον Slavin (1990, σελ. 2) οι μαθητές στα πλαίσια της ομάδας μπορούν, ερμηνεύοντας την γλώσσα του δασκάλου με τους δικούς τους κώδικες ομιλίας, να εξηγήσουν ο ένας στον άλλο συχνά πολύ επιτυχημένα δύσκολες έννοιες. Αυτό έχει ως συνέπεια την ενίσχυση και της δικής τους κατανόηση αφού στην προσπάθειά τους να οργανώσουν τον τρόπο σκέψης τους, για να εξηγήσουν τις ιδέες τους στους συμμαθητές τους, πρέπει να εμπλακούν οι ίδιοι σε νοητική διεργασία.

Την άποψη αυτή μας την επιβεβαίωσαν και οι μαθητές στις συνομιλίες που είχαμε μαζί τους στα πλαίσια της προσωπικής συνέντευξης. Μας είπαν ότι «*πολλές φορές ρωτούσαμε ο ένας τον άλλο και λέγαμε γιατί να βάλουμε αυτό, και εξηγούσαν οι υπόλοιποι … γιατί με τα σχήματα συζητούσαμε στην ομάδα ποια δυσκολία είχαμε, μας συμβούλευαν οι διπλανοί, τα εξηγούσαμε…»* όπως και ότι *«…άκουγα τις γνώμες των υπολοίπων και αν συμφωνούσαμε σε κάτι γράφαμε αυτό αν δεν ήξερα εγώ κάτι, προσπαθούσαν να μου το εξηγήσουν τα κορίτσια με δικά τους παραδείγματα για να το καταλάβω όπως και στα άλλα κορίτσια».*

Οι Johnson & Holubec (1990) βρήκαν ότι η χρήση μικρών ομάδων έκανε την εργασία των μαθητών καλύτερη και τους έδωσε την ευκαιρία να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Σημαντικό αποτέλεσμα μιας παραγωγικής ομαδικής εργασίας είναι για τους Slavin, Hurley και Chamberlain (2003, σελ. 191) ότι οι μαθητές κερδίζουν σε αυτοσεβασμό και αυτογνωσία για το πώς και πότε μαθαίνουν κάποια καινούργια έννοια.

Το κλειδί για τον αυτοσεβασμό και την αυτογνωσία είναι η θετική εικόνα για τον εαυτό τους που κτίζεται με τη συνεισφορά τους στην ομάδα για την επιτυχία του κοινού στόχου. *«…με ‘‘ανέβασαν’’ ψυχολογικά και έλεγα ‘‘μπορώ, μπορώ’’»* έγραψε κάποια μαθήτρια αξιολογώντας τον τρόπο που διδάχθηκε το μάθημα. *«Όταν αρχίσαμε στην αρχή δεν μπορούσα να τα καταφέρω, αλλά τα κατανοούσα περισσότερο γιατί ο καθένας έλεγε τη γνώμη του, τα συνδυάζαμε, προσπαθούσαμε να βγάλουμε ένα συμπέρασμα. Εμένα με βοήθησε πάντως με τις ομάδες»*, μας είπε ο Γιάννης.

Η γνώμη του αυτή είναι αντιπροσωπευτική της γενικότερης θέσης των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα αφού, εκτός από τις συνεντεύξεις, ανέφεραν και στα φύλλα αξιολόγησης την εργασία σε ομάδες ως στοιχείο που άρεσε διότι όπως έγραψαν «*αποτέλεσε ευκαιρία συνεργασίας με τους συμμαθητές*».

Ο καθηγητής τάξης στη συνέντευξή του αναφέρθηκε στη διαφοροποίηση προς το θετικότερο των σχέσεων μεταξύ των μαθητών της ομάδας και σημείωσε ενδεικτικά ότι παρατήρησε «*στις ομάδες οι χειρότεροι μαθητές να πλησιάζουν τους καλύτερους*».

Η ομάδα και τα αλγεβρικά πλακίδια έδωσαν στους «αδύνατους» μαθητές αίσθημα σιγουριάς και ασφάλειας. Αυτό το συναίσθημα τους βοήθησε να παραμερίσουν τις αμφιβολίες τους για τις δυνατότητές τους στα μαθηματικά, για την ικανότητά τους ότι μπορούν να μετέχουν ισότιμα με θέση και άποψη στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Ε: Στην ομάδα υπήρχαν παιδιά που δεν δούλευαν όταν το μάθημα γίνονταν με τον παραδοσιακό τρόπο;

Ν: Ναι, εγώ ο ίδιος.

Ε: Άλλο παιδί άλλαξε συμπεριφορά;

Ν: Ναι, ο Γιάννης και αυτόν τον έχω προσέξει γιατί καθόμασταν μαζί στη δευτέρα Γυμνασίου ... ότι καμιά φορά ίσως μας δημιουργήθηκε και αυτό, το να μην κάνεις παραπάνω, να κάνω και εγώ, ανταγωνισμός. Είδα ότι και αυτός προσπάθησε να «βγάλει» και αυτός το φύλλο δραστηριοτήτων τα σχήματα εν πάση περιπτώσει.

Η αλληλόδραση έδωσε στην ομάδα δυναμική η οποία συντέλεσε στο να αλλάξουν τυχόν αρνητικές σχέσεις μεταξύ των μελών της και να μεταβληθεί προς το θετικότερο η συμπεριφορά τους απέναντι στο μάθημα. Η άποψη αυτή είναι ευθυγραμμισμένη με τη γνώμη των μαθητών ότι: «*βοηθάνε* [οι ομάδες] *και να συμμετέχουν όλοι και να δένονται μεταξύ τους τα παιδιά, αλλά και να προσέχουν κάποιοι που παλαιότερα αδιαφορούσαν»* αλλά και με τη διαπίστωση ότι *«πριν ήξερα τους συμμαθητές μου απλά, δεν ήξερα πως σκέφτονται και όταν ήμασταν σαν ομάδα κατάλαβα πως σκέφτονται, κατάλαβα πως σκέφτεται ο καθένας δηλαδή τον τρόπο πως σκέφτονται »*

Η ομάδα ακόμη βοήθησε μαθητές που τους χαρακτήριζε η αποδιοργάνωση και η μη συγκέντρωση στο μάθημα να συμμετέχουν και να γίνουν ενεργά μέλη της. Σχεδόν το σύνολο των μαθητών αναφέρθηκε στην αλλαγή της στάσης της Γιάννας, αδύνατη μαθήτρια με δυσκολία συγκέντρωσης στη διδακτική διαδικασία, απέναντι στο μάθημα: *«Με την Γιάννα δεν το περίμενα και τόσο πολύ γιατί συνήθως... κάνει αυτές τις χαζομάρες, δεν το περίμενα ... ότι θα ασχολούνταν, θα προσπαθούσε να καταλάβει. γιατί στην ομάδα η Γιάννα από ότι βλέπω ασχολείται πιο πολύ με τα χαρτονάκια* [αλγεβρικά πλακίδια]» υπογράμμισε χαρακτηριστικά ένας συμμαθητής της.

Στη συνέντευξή της η Γιάννα ανέφερε ως βασικό παράγοντα που επηρέασε τη δικής της συμπεριφοράς στα μαθηματικά το ότι «*..είχα και άλλη βοήθεια εκτός από ένα άτομο, έπαιρνα γνώμες».*

Και η Καίτη όμως εντυπωσιάστηκε από τη μεταστροφή της φίλης της Φανής, με ίδια χαρακτηριστικά συμπεριφοράς όπως αυτά της Γιάννας, και μας είπε: *«Η Φανή είναι και ένα άτομο που μιλάει πολύ, δύσκολα μπορείς να της κεντρίσεις το ενδιαφέρον πρέπει να είσαι από πάνω να την πιέσεις αλλά διαφορετικά μόνη της δεν κάνει τίποτα.... Τη Φανή δύο χρόνια πριν αν της έλεγες ‘‘ λύσε μου αυτή την εξίσωση’’ σου έλεγε ‘‘βαριέμαι να τη λύσω ά δεν ξέρω, δεν ξέρω, δεν ξέρω τίποτα’’ με τα σχηματάκια είναι η μοναδική στην ομάδα που λέει ‘‘ά, εγώ θα τη λύσω’’, παίρνει πρωτοβουλίες ‘‘εγώ θα τη λύσω’’».*

Η Φανή στη συνέντευξή της μας έκανε γνωστό ότι *«δεν μου άρεσαν ποτέ τα μαθηματικά. Είχαν πράξεις και τέτοια»* και μας εξήγησε ότι άλλαξε τη στάσης της στο μάθημα: *«γιατί είμαι καλύτερη, είμαι σε ομάδα, τα καταλαβαίνουμε καλύτερα, λέμε περισσότερα έχουμε και τα σχέδια τα τετραγωνάκια για να τα καταλαβαίνουμε».*

Η απόδοσή της Φανής και της Γιάννας βελτιώθηκε γιατί απέκτησαν κίνητρο και αυτοπεποίθηση ότι διαθέτουν ικανότητα για μάθηση (Schunk,1996 σελ. 5). Και στην έρευνά μας φάνηκε όπως και στις έρευνες των Johnson, Johnson & Holubec (1992, 1993), Johnson, Johnson, & Smith (1998) ότι η χρήση των συνεργατικών ομάδων βάσης συντελεί στην ενεργή συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία, προσωποποιεί την απαιτούμενη εργασία και τη σχολική εμπειρία, καλυτερεύει την ποιότητα και την ποσότητα της μάθησης.

Στη γενική ομοφωνία, για τη θετική επίδραση που είχε η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας που εφαρμόσαμε στα πλαίσια της έρευνάς μας, υπήρξαν και ελάχιστες φωνές αμφισβήτησης που επικεντρώθηκαν βασικά στο θέμα της αδυναμίας συνεργασίας. Συγκεκριμένα δύο μαθητές, με σχετικά καλή επίδοση στα μαθηματικά, εξέφρασαν στις συνεντεύξεις τους επιφυλάξεις για θετική επιρροή του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας με χρήση χειραπτικού υλικού. Ένας από τους δύο, μαθητής τάξης της πιλοτικής διδασκαλίας μας στο 10ο Γυμνάσιο, μας παρουσίασε από τη δική της οπτική γωνία την άποψή της για την εργασία των μαθητών σε ομάδες.

Ε: Γιατί δεν σου αρέσει να συνεργάζεσαι;

Μ: Γιατί ο καθένας σκέπτεται με διαφορετικό τρόπο. Εγώ μπορεί να θέλω να το κάνω έτσι όπως το κάνω, να κάτσω να το σκεφτώ μόνη μου μπορεί …ενώ ομαδικά μπορεί ο άλλος να το σκέφτεται αλλιώς και να δημιουργηθεί μια ένταση και να μην… ε! γίνεται πολύ συχνά.

Ε: Η ένταση δεν είναι θετική αφού έχει ως αντικείμενο τη μάθηση;

Μ: Είναι θετική ως προς τη μάθηση αλλά στο τέλος μπορεί να βγάλεις λάθος συμπέρασμα.

Ε: Ναι αλλά θα έχει υπάρξει κάποιος προβληματισμός!

Μ: Προβληματισμό μπορεί να έχεις και μόνος σου. Το να σε ρωτάει ο καθηγητής σου σε βάζει σε προβληματισμούς αλλά το να έχεις μια συζήτηση με τους άλλους πώς θα λύσεις την άσκηση και να ... είναι πιστεύω καλύτερα μόνος σου γιατί πολλές φορές μπορεί να σε μπερδέψει ο διπλανός σου χωρίς καν να το θέλει.

Ε: Γιατί θέλεις να προβληματιστείς μόνη σου;

Μ: Γιατί αν εγώ δεν είμαι η πιο δυνατή στην παρέα και οι άλλοι τη βρίσκουν τη λύση αμέσως ενώ εγώ χρειάζομαι χρόνο, με καταπιέζει αυτό και οι άλλοι θα τη βρίσκουν τη λύση και επειδή δουλεύουμε ομαδικά θα πρέπει να το αντιγράψω και να μην κάτσω να συλλογιστώ με τον εαυτό μου και να βρω την απάντηση.

Από τον διάλογο γίνεται φανερό ότι η μαθήτρια έχοντας λειτουργήσει έως τώρα σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον τάξης δεν δέχεται να μοιραστεί τις γνώσεις της με τους συμμαθητές της ομάδας της. Θεωρεί ότι αυτό θα λειτουργήσει ανασταλτικά ως προς το να ξεχωρίσει στον τομέα της επίδοσης. Επαναλαμβάνει συνεχώς τις λέξεις «εγώ» και «μόνη μου» σε μια προσπάθεια να απορρίψει την ιδέα της συνεργασίας. Μάλιστα φτάνει να μιλάει για καταπίεση από τους άλλους συμμαθητές της στην περίπτωση που δεν είναι εκείνη «η πιο δυνατή της παρέας». Από την όλη συνομιλία αναδύεται το πρόβλημα της μη αποδοχής της ισότιμης συνεργασίας στην ομάδα. Ρόλος του δασκάλου είναι να το αντιμετωπίσει και να αποδείξει ότι τα θετικά αποτελέσματα της αλληλόδρασης αφορούν όλους τους μαθητές ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στο μάθημα.

Οι έρευνες όμως των Johnson & Holubec (1990) και Webb (1992), όπως αναφέραμε στο δεύτερο κεφάλαιο, έδειξαν ότι οι καλοί μαθητές, αν και μπορούν να κατανοήσουν τις αφηρημένες έννοιες τόσο με την «παραδοσιακή» μέθοδο διδασκαλίας όσο και με την ομαδοσυνεργατική, μαθαίνουν καλύτερα μέσα από τις δραστηριότητες της ομαδοσυνεργατικής. Ο Slavin (1991, σελ. 71)θεωρεί ότι η ανάγκη να εξηγούν οι καλοί μαθητές πολύ συχνά στους άλλους τις έννοιες και τις διαδικασίες βοηθά και τους ίδιους να τις κατανοήσουν καλύτερα και να τις συγκρατήσουν στη μνήμη τους για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Άποψη του Vygotsky (1978, σελ. 90) είναι ότι η επικοινωνία παράγει ανάγκη για έλεγχο και επιβεβαίωση των σκέψεων όλων των μελών της ομάδας και δημιουργεί έτσι τις αναγκαίες συνθήκες ώστε το κάθε μέλος της να έχει την ευκαιρία να αναπτύξει την κατάλληλη επιχειρηματολογία για να στηρίξει τις προσωπικές του απόψεις. Ο Graves (1990, σελ. 78) υποστηρίζει ότι το να μπορεί να επιχειρηματολογεί ο μαθητής πάνω στην άποψή του έχει ευεργετική επίδραση τόσο για τους καλούς μαθητές όσο και για κείνους με χαμηλότερες επιδόσεις αφού μέσα από τη διερεύνηση των ποικίλων προοπτικών στην επίλυση ενός προβλήματος προωθείται η ανάπτυξη της νόησης.

Τα αλγεβρικά πλακίδια λειτούργησαν ως κίνητρο μάθησης γιατί ήταν ελκυστικά στον μαθητή. Οι περισσότεροι στις συνεντεύξεις τους τα παρομοίωσαν με παιγνίδι και έτσι «μπήκαν» στη μαθησιακή διαδικασία χωρίς να αμφισβητούν τις ικανότητές τους για μάθηση. Αυτό κατά την άποψή μας ήταν και το σημαντικότερο βήμα για να περάσουν στη συνέχεια μέσα από τον χειρισμό των υλικών και την εξεικόνιση στην αποσαφήνιση των αλγεβρικών εννοιών.

Με σημείο αναφοράς τη δομή του σχήματος μπόρεσαν να προχωρήσουν στην ανάπτυξη συνθετότερων εννοιών και επιχειρημάτων μέσα από τη δυνατότητα που τους προσέφερε η εξεικόνιση για διαφοροποίηση, ενσωμάτωση και την επαναδόμηση της σκέψης τους.

Για την Karten (2010, σελ. 25) περισσότερη συνεργασία στην τάξη σημαίνει για τον δάσκαλο και τον μαθητή περισσότερα μάτια και αυτιά να βλέπουν και να ακούν απαντήσεις και έτσι να εναρμονίζεται η διδασκαλία σε ποικίλα επίπεδα. Θεωρεί μάλιστα ότι η συνεργατική μάθηση και η ισότιμη καθοδήγηση είναι πολύτιμα διδακτικά εργαλεία για εφήβους διότι απολαμβάνουν τη μάθηση του ενός από τον άλλον. Την ίδια γνώμη εξέφρασαν και οι μαθητές μας που συμμετείχαν στην έρευνά μας: *«το μάθημα σε ομάδες είναι πιο ψυχαγωγικό να το πω, …επικοινωνούν οι άλλοι δεν είναι μόνο …εκείνη την ώρα, δεν είναι μόνο τα μαθηματικά είναι και τα…παιδιά και η επικοινωνία»* μας τόνισαν.

Με την άποψη αυτή συνταχθήκαμε και εμείς αφού και οι δικές μας παρατηρήσεις συνέκλιναν στο ότι οι μαθητές μας απόλαυσαν το μάθημα. Στις ομάδες μαθητές υψηλής, μέσης και χαμηλής επίδοσης προσκλήθηκαν υπό ίσους όρους να κάνουν το καλύτερο στα πλαίσια των δυνατοτήτων τους και όπως χαρακτηριστικά έγραψε η Κατερίνα *«έδωσε ο καθένας μας κάτι ξεχωριστό και αυτή ήταν όλη η μαγεία»*.

2.1. Ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας και αλλοδαποί μαθητές

Σήμερα οι περισσότερες τάξεις στα σχολεία είναι ετερογενείς ως προς την καταγωγή και την κουλτούρα των μαθητών και αυτό θα πρέπει να αντιμετωπίζεται από τον κάθε δάσκαλο ως μία πρόκληση για αναμόρφωση του τρόπου διδασκαλίας στα νέα δεδομένα.

Σύμφωνα με τον Banks (2004, σελ. 3) η πολιτισμική εκπαίδευση είναι μια ιδέα, μια κίνηση εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης και μια διαδικασία ώστε μαθητές από διαφορετικά έθνη, φυλές, κοινωνικά στρώματα ή φύλα να έχουν ίσες ευκαιρίες στην εκπαίδευση. Σκοπό έχει να δημιουργηθεί ένα σχετικά δικαιότερο εκπαιδευτικό περιβάλλον για τους αλλοδαπούς μαθητές, το οποίο να μπορεί να τους βοηθήσει να ενσωματωθούν ευκολότερα στο καινούργιο κοινωνικό περιβάλλον και να αποκτήσουν το δυνατόν περισσότερες γνώσεις.

Η εκπαίδευση όμως για να είναι αποτελεσματική για το σύνολο των μαθητών, αλλοδαπών ή μη, χρειάζεται στο σχεδιασμό του μαθήματος να υπάρχουν «προκλήσεις» που να λαμβάνουν υπόψη τους τις ικανότητες και τις αδυναμίες του κάθε μαθητή που τις εμφανίζει ή όχι στην τάξη.

Θεωρούμε ότι μια τέτοια πρόκληση ήταν και η συνεργασία των μαθητών σε ομάδες με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων διότι σύμφωνα με τους Slavin (1986), Allport (1992), Catsambis (1994) και Rech (1994) η συνεργατική μάθηση:

α) προωθεί το αυτοαίσθημα, το κίνητρο και τα επιτεύγματα για τα κορίτσια και τους μαθητές που ανήκουν σε μειονότητες

β) βελτιώνει τη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στους συμμαθητές τους, ιδιαιτέρως προς εκείνους που ανήκουν σε διαφορετικό από εκείνους κοινωνικό πλαίσιο

3) μειώνει τους περιορισμούς που δημιουργήθηκαν εξ αιτίας της φυλής και του φύλου, με την ελάττωση των προκαταλήψεων.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις κάναμε και μείς στα πλαίσια της έρευνας αυτής σχετικά με τα θετικά αποτελέσματα που είχε η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας που εφαρμόσαμε στις σχέσεις ελλήνων μαθητών και των αλλοδαπών συμμαθητών τους. Η ίδια άποψη εκφράστηκε και από τους ίδιους τους μαθητές, των οποίων η χώρα καταγωγής τους δεν ήταν η Ελλάδα, στις συνεντεύξεις που μας παραχώρησαν.

Τα σημεία που έθιξαν στη συνομιλία μαζί μας ήταν ενδιαφέροντα και έδωσαν νέες διαστάσεις στα πλεονεκτήματα αυτής της διδακτικής μεθόδου σε συνδυασμό με τα χειραπτικά υλικά. Ο Λεόν αναφέρθηκε σε θέματα γλώσσας, φιλίας, σχέσεων και κάλυψε με τις απόψεις του και αυτές του Ρίμπα και της Ντένιας.

Ε: Η δουλειά σε ομάδα βοηθούσε και στη γλώσσα είπες.

Λ: Ναι, βοηθούσε γιατί αφού όλοι θα μιλούσαν Ελληνικά, θα προσπαθήσεις και συ να καταλάβεις λέξεις που δεν ξέρεις είτε το θέλεις είτε όχι.

Ε:, Βελτίωσες τις σχέσεις σου με τους άλλους;

Λ: Ναι, λίγο ναι, μιλάω πιο πολύ, μερικοί, όχι ότι φοβόμουν απλά άκουγα κάποια πράγματα που δεν τους συμπαθούσα. Στην ομάδα, όμως άλλαξα γνώμη, κατάλαβα ποιος είναι αυτός ο άλλος, ποιος είμαι εγώ.

Ε: Είναι αυτό σημαντικό;

Λ: Εμένα στην αρχή που μπήκαμε σε ομάδα, δεν μου άρεσε, μετά είδα ότι όλοι είμαστε περίπου ίδιοι, δεν με βγάζω εμένα έξω, επειδή ήμουν ο Λεόν, τώρα κατάλαβα θα είμαστε χαρούμενα παιδιά και δεν υπάρχει κάτι και είναι στον άνθρωπο.

Ε: Είναι σημαντικό να κάνεις φίλους και να σε γνωρίσουν;

Λ: Ναι, είναι σημαντικό, στην αρχή με περιορίζανε και ξέρω και κάποια άτομα που έχουν πει για μένα, αλλά δεν μπορούσα να πάω να τους πω τίποτε, τι να τους πω;

Ε: Κάνεις παρέα με κάποια παιδιά από την ομάδα;

Λ: Δεν κάνω παρέα, αλλά τώρα είμαι πιο ανοικτός, τους έμαθα τώρα, αλλά όταν είμαστε στην ομάδα είναι αλλιώς, δεν είναι όπως αυτοί που κάνω παρέα. Με βλέπουν σα να είμαι ένας ίσος, να μην είμαι ανώτερος ή κατώτερος, ότι ξέρω και εγώ τη γλώσσα, τα πάντα.

Ε*: Τα μαθηματικά βοηθάνε τα παιδιά που δεν ξέρουν τη γλώσσα.*

Λ: Ναι, γιατί είναι ίδια σε όλες τις χώρες, γιατί δεν υπάρχει ανάγκη ούτε να μιλήσει ούτε…

Ε: Αν υπήρχαν και υλικά;

Λ: Θα ήταν καλύτερα, γιατί ξεχνάς τα μαθηματικά και πας σιγά-σιγά και δεν καταλαβαίνεις, ότι δεν ξέρεις Ελληνικά και ξέρεις τα πάντα μετά γιατί πως θα διαβάσεις, γιατί μόνο η θεωρία είναι δύσκολη, καταλαβαίνεις τα πάντα μετά. Εντάξει δεν λέω 100%, αλλά άμα θέλεις να μάθεις τα μαθαίνεις, μετά πας σιγά-σιγά και στα άλλα μαθήματα.

Η συνεργασία του Λεόν στην ομάδα με τους συμμαθητές του τον βοήθησε να τους αποκαλύψει πλευρές της προσωπικότητάς του που μέχρι πρότινος δεν είχε την ευκαιρία. Για κείνον ήταν σημαντική αυτή η συνεργασία αφού έτσι του δόθηκε η δυνατότητα να τους μάθει και να τους δείξει ότι δεν διαφέρει από εκείνους, ότι δηλαδή δεν είναι ανώτερος ή κατώτερος, ότι ξέρει τη γλώσσα, τα πάντα όπως σημείωσε.

Οι Johnson, D., Johnson, R. & Holubec όπως αναφέρει ο Jakob (1999, σελ. 19) έθεσαν ως απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί το ομαδοσυνεργατικό μοντέλο μάθησης α) τη θετική αλληλόδραση των μαθητών, β) την ισχυρή πρόσωπο με πρόσωπο επικοινωνία για την αποσαφήνιση εννοιών και διαδικασιών γ) την ατομική υπευθυνότητα, δ) τη διαπροσωπική ικανότητα και την ικανότητα μικρών ομάδων ε) τη διαδικασία ομάδας.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι με τα αλγεβρικά πλακίδια πετύχαμε σε μεγάλο βαθμό το σύνολο των προϋποθέσεων που αναφέραμε. Όπως ήδη παρουσιάσαμε με τα υλικά πετύχαμε να επικοινωνήσουν οι μαθητές μεταξύ τους, να αλληλοδράσουν θετικά, να αισθανθούν μέλη της ομάδας, να συμμετέχουν στην κοινή προσπάθεια επίλυση του προβλήματος. Επίσης ως διδακτικά μέσα «ενίσχυσαν τις ευκαιρίες διαλόγου στην ομάδα και πρόσφεραν σε παιδιά με μειωμένη γνώση της επίσημης γλώσσας τη δυνατότητα να αναπτύξουν και να επικοινωνήσουν τη μαθηματική τους σκέψη ώστε, αναστοχαζόμενα για το περιεχόμενο των συζητήσεων να εμβαθύνουν στις έννοιες και να αποκτήσουν αυτόνομη μαθηματική σκέψη» (Τριανταφυλλίδης, 2007, σελ. 113)

3. Τρίτο βασικό ερώτημα

Πώς επιδρά η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

3.1. Υποερώτημα

Είχαν οι μαθητές σημαντικά θετικότερη συμπεριφορά απέναντι στα μαθηματικά από ότι πριν;

Σε μελέτη των Sternberg, Torff & Gringorenko που έγινε το 1998 σε 142 μαθητές 8ης τάξης στις ΗΠΑ, αναδείχθηκε ότι από τις τρείς διδακτικές προσεγγίσεις που εφαρμόστηκαν με έμφαση η πρώτη στη μνήμη, η δεύτερη στην κριτική και αναλυτική σκέψη και η τρίτη στην αναλυτική δημιουργική και πρακτική, καλύτερα αποτελέσματα έδωσε η τρίτη διδακτική προσέγγιση.

Κατέληξαν λοιπόν στο συμπέρασμα ότι διδάσκοντας τους μαθητές με τρόπο που να δίνει έμφαση στο τρίπτυχο αναλυτική, δημιουργική και πρακτική σκέψη τους δίνουμε τη δυνατότητα να «κεφαλαιοποιήσουν» τα δυνατά τους σημεία, να αντισταθμίσουν τις αδυναμίες τους και να κωδικοποιήσουν τα υλικά με ποικίλο και ενδιαφέροντα τρόπο (Sternberg, 2006, σελ. 94).

Μπορούμε επομένως, σύμφωνα με αυτά τα συμπεράσματα, να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές μας τα «πήγαν» καλύτερα στα μαθηματικά γιατί ο τρόπος διδασκαλίας που προτείναμε ταίριαζε περισσότερο στον τρόπο που οι ίδιοι σκέφτονταν. Τα χειραπτικά υλικά, που εντάξαμε στη διδακτική μας προσέγγιση, τους έδωσαν την ευκαιρία να κινηθούν μέσα από την πράξη στη δημιουργική και αναλυτική σκέψη, να ανακαλύψουν ένα ευρύτερο πεδίο δυνατοτήτων στο μάθημα, και να επαναπροσδιορίσουν τη θέση τους απέναντι στα μαθηματικά. Αυτό υποστήριξαν και στις συνεντεύξεις τους.

Ήμουν αρνητικός (με το μάθημα πριν). *Τώρα που έχω κάνει με τα υλικά εντάξει θετικός είμαι.*

Εντάξει, όταν έχω μαθηματικά λέω «εντάξει τα ξέρω, τα έχω καταλάβει» υπάρχει μια αισιοδοξία ότι μπορώ να τα λύσω.

Αδιάφορο μου ήταν το μάθημα πριν αλλά τώρα ξεκινάει να μου αρέσει. Πιστεύω πως ναι, άλλαξα στάση απέναντι στο μάθημα γιατί τώρα προσέχω πιο πολύ, παλιά δε πρόσεχα γιατί δε μου άρεσαν τα μαθηματικά.

Φέτος είναι λίγο καλύτερα τα πράγματα, έχω αρχίσει να τα συμπαθώ τα μαθηματικά, γιατί έχει αλλάξει ο τρόπος διδασκαλίας

Τα αλγεβρικά πλακίδια λοιπόν έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη μεταβολή προς το θετικότερο της συμπεριφοράς των μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών, αφού μετέτρεψαν το αδιάφορο μάθημα σε ενδιαφέρον, την απαισιοδοξία για την ικανότητα τους σε αισιοδοξία, την αντιπάθεια για τα μαθηματικά σε συμπάθεια, την αρνητική στάση τους σε θετική.

Η θετική αυτή στάση επισημάνθηκε τόσο από τους ίδιους τους μαθητές στις συνεντεύξεις τους, οι οποίοι δεν παρέλειψαν να αναφερθούν σε συμμαθητές τους που συμμετείχαν για πρώτη φορά ενεργά στο μάθημα και να τονίσουν την επιτυχή ένταξη τους στην διδακτική πρακτική, όσο και από τους καθηγητές των τάξεων που «γνώρισαν» τη διδακτική μας πρόταση. Οι καθηγητές αυτοί χαρακτήρισαν το μάθημα: *«ενδιαφέρον, πιο πρακτικό, ευχάριστο για τα παιδιά, το βλέπουν σαν παιγνίδι. Η ατμόσφαιρα τάξης είναι θετική και βοηθά…».*

3.2. Υποερώτημα

γ) Είχαν σημαντικά χαμηλότερο επίπεδο φόβου για τα μαθηματικά μετά τη διδακτική παρέμβαση με τα αλγεβρικά πλακίδια;

Οι μαθητές όπως αναφέρθηκε πιο πάνω άλλαξαν τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά αφού ο τρόπος διδασκαλίας έπαψε να είναι αδιάφορος και βαρετός. Η διαφορετική ατμόσφαιρα τάξης που δημιουργήθηκε τους επέτρεψε να «χαλαρώσουν». Δεν αισθάνονταν πια την «απειλή» να τους ζητηθεί να δώσουν άμεσες προφορικές απαντήσεις ή να έλθουν σε αμηχανία μπροστά στους συμμαθητές τους. Μέσα στην ομάδα είχαν τη δυνατότητα να κατανοήσουν ότι και άλλοι μαθητές έχουν το ίδιο πρόβλημα, το ίδιο συναίσθημα με αυτούς και ότι προβλήματα όπως αυτά επιλύονται με αλληλοβοήθεια και επιμονή (Woodard, 2004, σελ. 2).

Η Μίνα μας επιβεβαίωσε *ότι «ναι, η Γιάννα* (αδύνατη μαθήτρια, αδιάφορη στα μαθηματικά) *τώρα σηκώνεται στον πίνακα, σε άλλα μαθήματα δεν δουλεύει καθόλου σημασία, ενώ στα μαθηματικά σηκώνει το χέρι, έχει απορίες, δεν ρωτά σε άλλα μαθήματα».*

Τα χειραπτικά υλικά τους κίνησαν την προσοχή και το ενδιαφέρον για το μάθημα. «*Μας τράβηξε αυτό το πράγμα μέχρι και ο Θανάσης που για τα άλλα μαθήματα αδιαφορεί πιάστηκε με τα μαθηματικά του άρεσαν τα σχήματα, ήταν ένα παιγνίδι»* μας είπε ο Δημήτρης. Η παρουσία τους βοήθησε να μειωθούν τα αισθήματα απόδρασης από τη μαθησιακή διαδικασία γιατί παραμερίστηκε ο φόβος και η ανασφάλεια της λανθασμένης απάντησης.

Παρατηρήσαμε στους μαθητές μείωση των αρνητικών συναισθημάτων και των επιπέδων φόβου για τα μαθηματικά με παράλληλη αύξηση της αυτοεκτίμησης και της εμπιστοσύνης στις ικανότητές τους για επιτυχή επίλυση των δραστηριοτήτων που τους αναθέσαμε. *«Σε μένα έπιασαν τόπο δεν πήγαν τσάμπα»* έγραψε κάποιος μαθητής στο φύλλο αξιολόγησης και ένας άλλος σημείωσε ότι του άρεσε γιατί *«με ανέβασαν ψυχολογικά και έλεγα μπορώ, μπορώ»*.

Οι περισσότεροι στις συνεντεύξεις τους «στάθηκαν» σε συμμαθητές τους, χωρίς πρότερη συμμετοχή στο μάθημα, που διαφοροποιήθηκαν από τον τρόπο διδασκαλίας που εφαρμόσαμε. Είδαν σε αυτούς μια τελείως διαφορετική στάση στο μάθημα από εκείνη που παρουσίαζαν στα μαθηματικά πριν την παρέμβασή μας. Τη διαφοροποίηση αυτή την ερμήνευσαν ως αποτέλεσμα της παρουσίας των αλγεβρικών πλακιδίων. Χαρακτηριστικά ο Γιάννης παρατήρησε για την Κυριακή *«...μια συμμαθήτριά μου που δεν ασχολείται ποτέ μόλις είδε τα υλικά αμέσως ασχολήθηκε και με τα υλικά τα κατάλαβε αμέσως. Ναι μόνο με τα υλικά* [δούλεψε]*…. Αυτή ένα δέκα βγάζει»*.

Ο περιορισμός των αρνητικών συναισθημάτων για τα μαθηματικά είναι στόχος που πρέπει να επιδιώκεται από κάθε διδάσκοντα διότι αυτά τα συναισθήματα επιδρούν σε νοητικές καταστάσεις όπως είναι η ανικανότητα συγκέντρωσης, σε καταστάσεις συμπεριφοράς όπως η απέχθεια ή το «μίσος» για το μάθημα, που είπε η Καίτη και σε συναισθήματα όπως ο φόβος. Τις επιπτώσεις αυτές μας τις περιέγραψαν και στις συνεντεύξεις τους οι μαθητές «*ναι, δεν ήθελα να σηκωθώ στον πίνακα, ο δάσκαλος βοηθούσε αν ρωτούσες, εγώ δεν ρωτούσα», «φοβόμουν από την αρχή* (του μαθήματος)*», «λέω θα προσέξω, αλλά όταν γυρίζω στο σπίτι και κολλήσω, πηγαίνω πίσω πάλι»*.

Η διδακτική μας πρόταση με τα αλγεβρικά πλακίδια τους έδωσε την ευκαιρία να γνωρίσουν και μιαν άλλη πλευρά των ικανοτήτων τους και να απαλλαγούν έστω και για το χρονικό που διήρκεσε η παρέμβαση από τον φόβο για τα μαθηματικά. Οι ίδιοι μας επιβεβαίωσαν ότι τα αντιμετωπίζουν πια διαφορετικά.

Σ: Με έπιανε από την αρχή μια αγανάκτηση γιατί δεν τα καταλάβαινα, αλλά εντάξει.

Ε: Η αγανάκτηση ήταν για το μάθημα ή για τον εαυτό σου;

Σ: Για τον εαυτό μου.

Ε: Θεωρούσες ότι έφταιγε η Σοφία;

Σ: Ναι, γιατί περισσότερο δεν έδωσα βαρύτητα στο μάθημα για να προσπαθήσω να τα καταλάβω και μου έφυγε αυτή η αγανάκτηση που είχα και έλεγα πω-πω μαθηματικά, τι κάνουμε τώρα; Δεν ξέρω τίποτε.

Ε: Έτσι που δουλεύαμε φέτος άλλαξε αυτό;

Σ: Άλλαξε [θετική, σίγουρη απάντηση]. *Πλέον μπορώ να λύσω τις ασκήσεις με πολύ πιο εύκολο τρόπο* [βέβαιη] *από πέρυσι και πρόπερσι.*

Ε: Έφυγε η αγανάκτηση;

Σ: Ναι, [δειλά]. *Στην αρχή ξαναήλθε λίγο στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, αλλά όταν τις κατάλαβα, τις εμπέδωσα πολύ καλά.*

Το φοβόμουν, είχα άγχος.

Ε Τώρα με τα υλικά έχεις το ίδιο άγχος;

Γ: Όχι, καθόλου. Όπως είπα και πριν, φαινόταν σα παιγνίδι τα μαθηματικά ενώ παλιά μου φαινόταν βαρετό.

Ε: Σε τι σε βοήθησαν;

Γ: Να συγκεντρώνομαι περισσότερο τώρα. Το μάθημα των μαθηματικών για μένα ήταν αδιάφορο, αλλά τώρα ξεκινάει να μου αρέσει.

Ε: Φέτος άλλαξε κάτι, γιατί σε βλέπω να ασχολείσαι.

Γ: Τα υλικά μου προκάλεσαν το ενδιαφέρον.

Θέλοντας να έχουμε εικόνα σχετικά με τους παράγοντες και τις συνθήκες που οδηγούν έναν μαθητή στην άρνηση για το μάθημα των μαθηματικών εντάξαμε στο ερωτηματολόγιό μας (βλ. τέταρτο κεφάλαιο, σελ. 178) την ερώτηση για το ποια ήταν η στάση τους απέναντι στο μάθημα πριν και μετά την παρέμβαση. Για μας ήταν έκπληξη η αποκάλυψη που μας έκανε η καλύτερη μαθήτρια της τάξης λέγοντας μας: «*Μου άρεσαν πάρα πολύ τα μαθηματικά. Έφτασα όμως να τα μισώ στην πρώτη* (Γυμνασίου) *από μια λάθος διδασκαλία. Τώρα βλέπω μαθηματικά και λέω ‘‘ουάου’’*».

Για τους Trujillo & Hadfield (1999), όπως αναφέρουν σε άρθρο τους οι Usimaki & Nason (2004), οι παράγοντες που οδηγούν έναν μαθητή να στρέφει την πλάτη του στα μαθηματικά και να κυριεύεται από συναισθήματα, αδιαφορίας, απέχθειας και φόβου για το μάθημα είναι τρεις οι περιβαλλοντικοί, οι διανοητικοί και της προσωπικότητας.

Οι περιβαλλοντικοί παράγοντες αναφέρονται στις εμπειρίες των μαθητών στην τάξη, στη γονική πίεση, στους «σκληρούς» δάσκαλους, καθώς και στη διδασκαλία των μαθηματικών σε ένα αυστηρό σύνολο κανόνων και μη συμμετοχής στην τάξη.

Οι διανοητικοί παράγοντες αναφέρονται στους «αταίριαστους» τύπους διδασκαλίας, στη διάθεση του μαθητή, στην έλλειψη επιμονής εκ μέρους του, στην έλλειψη εμπιστοσύνης για τη μαθηματική του ικανότητα, καθώς και στην έλλειψη κατανόησης για τη χρησιμότητα του μαθήματος των μαθηματικών.

Ενώ οι παράγοντες προσωπικότητας έχουν αναφορά στην απροθυμία που δείχνει ο μαθητής να κάνει ερωτήσεις, η οποία οφείλεται στη ντροπή που αισθάνεται, στη χαμηλή αυτοεκτίμηση που έχει και για τις μαθήτριες ειδικότερα είναι και η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι χώρος αρσενικός (Usimaki & Nason, 2004, σελ. 370).

Τους τρείς αυτούς παράγοντες παραγωγής φόβου και αποστροφής για το μάθημα «εντοπίσαμε» και μείς στις συνεντεύξεις των μαθητών και κυρίως στις εκμυστηρεύσεις εκείνων που μας δήλωσαν ότι δεν αγαπούσαν τα μαθηματικά. Ήδη η Σοφία αναφέρθηκε, στη συνέντευξη της πιο πάνω, σε αισθήματα αγανάκτησης και ενοχής για το ότι αδυνατούσε να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες και τεχνικές *«έλεγα πω-πω μαθηματικά, τι κάνουμε τώρα;»*. Η χαμηλή της μάλιστα αυτοεκτίμηση εκφράστηκε ανοιχτά με το *«Δεν ξέρω τίποτε»*. Ο Γιάννης στη συνέχεια μας είπε ότι δεν μπορούσε να συγκεντρωθεί σε ένα μάθημα βαρετό, αδιάφορο, χωρίς ενδιαφέρον. Το μάθημά μας τους κέρδισε γιατί είχε εκείνα τα χαρακτηριστικά που οδηγούσαν σε μια θετική εμπειρία τάξης για τον μαθητή.

Οι περιβαλλοντολογικοί παράγοντες, με αναφορά σε ακατάλληλους δασκάλους και λανθασμένους τρόπους διδασκαλίας, περιγράφτηκαν από την πλειοψηφία των μαθητών που παρουσίασαν αρνητική στάση στο μάθημα των μαθηματικών. Σχεδόν όλοι τοποθέτησαν την αρχή του προβλήματός τους με το μάθημα στο δημοτικό, κυρίως στις δύο τελευταίες τάξεις. Στα αποσπάσματα των συνεντεύξεων που ακολουθούν δίνονται χαρακτηριστικές λεπτομέρειες των τρόπων διδασκαλίας που είχαν ως αποτέλεσμα την αρνητική στάση των μαθητών στα μαθηματικά.

Ε: Και μετά γιατί τα παράτησες;

Ρ: Δεν ήταν καλός ο δάσκαλος, δεν σε βοηθούσε, σε ρωτούσε ‘‘τα κατάλαβες;’’, ‘‘όχι’’ και έφευγε… Όταν μπαίναμε μέσα [από το διάλειμμα] *μας έλεγε ‘‘κάνατε τις ασκήσεις;’’, όποιο παιδί έλεγε ‘‘ναι’’ δεν μας έλεγε τίποτε άλλο, όπως ‘‘να σε βοηθήσω’’… όχι, επειδή εγώ δεν τα είχα καταλάβει… ήταν λίγο δύσκολα. Εκεί κόλλησα, τα άλλα γενικά τα* *καταλάβαινα και μετά πέμπτη, έκτη τα παράτησα, έπαιρνα χάλια βαθμούς και μετά στο Γυμνάσιο ακόμα περισσότερο.*

Μ: …όταν μας ρωτούσε για μια άσκηση δεν μας ρωτούσε για τις πράξεις, μας ρωτούσε το αποτέλεσμα για να δει αν ήταν σωστή η απάντηση.
Ε; Εσύ έψαχνες ένα αποτέλεσμα;
Μ: Ναι, συνέχεια μέχρι το τέλος τις πράξεις που έπρεπε να κάνω και ας ήταν λάθος μια από τις προηγούμενες πράξεις. Πάντως το αποτέλεσμα έβγαινε λάθος, δεν υπήρχε περίπτωση να βγει σωστό.
Ε: Αφού ξεκινούσες με αυτή την προϋπόθεση.
Μ: Ναι, εγώ από την αρχή ήξερα ότι ήταν λάθος αλλά δεν σταματούσα μου έλεγε [ο δάσκαλος] *να συνεχίσω. Πάντα αυτό μου έλεγε.*

Ε: Τι έγινε στην έκτη;
Χ: Δεν ξέρω, πολλές φορές ίσως και γιατί δεν πρόσεχα… δεν είχαμε και τον ίδιο δάσκαλο, δεν τα καταλάβαινα και τόσο καλά από εκείνον τον δάσκαλο. Από τον δάσκαλο της Πέμπτης είχα πάρει πιο πολλά, μας εξηγούσε καλύτερα για μένα, με βοηθούσε να τα καταλάβω, της έκτης όμως δεν μπορούσα, τα έλεγε και δύσκολα, ήταν όποιος τα έπιανε εκείνη την ώρα, μετά έπρεπε να πάει κάποιος να τον ρωτήσει στο διάλειμμα για να τα καταλάβει και εγώ τις περισσότερες φορές δεν πήγαινα και μου έμειναν κενά.
Ε: Μήπως λοιπόν φταίει ο δάσκαλος;
Χ: Δεν ξέρω, ίσως τα αναλύαμε πιο πολύ με τον άλλον κύριο ενώ αυτός τα έλεγε πιο γρήγορα και δεν τον προλάβαινα.
Ε: Δεν ήταν προσιτός;
Χ: Σε κάποια παιδιά ήταν. Μας έλεγε ότι απορίες είχαμε να πάμε στο διάλλειμα.
Ε: Γιατί στο διάλλειμα; Αν είχατε απορία εκείνη την ώρα τι κάνατε;

Χ: Ε, τις γράφαμε για το διάλλειμα.

Ε; Και πως λύνατε την άσκηση;

Χ: Δεν ξέρω, συνήθως μας έβαζε παραδείγματα στον πίνακα, ώστε να μπορέσουμε να διευκολυνθούμε και να την λύσουμε και άμα ήταν τόσο σημαντική η απορία να την πούμε και εκείνη την ώρα, ώστε να βοηθηθεί και όλη η τάξη.

Ο φόβος και η απέχθεια του μαθητή για το μάθημα είναι για τον Skemp (1971, σελ. 32) το αποτέλεσμα του ότι *«η γνώση του μαθητή εξαρτάται από τον δάσκαλό του αφού τα μαθηματικά δεν μπορούν να διδαχθούν άμεσα από το καθημερινό περιβάλλον αλλά μόνο έμμεσα από άλλους που τα γνωρίζουν»*. Ο MacGregor (1997, σελ. 29) θεωρεί ότι η αρνητική στάση απέναντι στη μάθηση δημιουργείται όταν οι δάσκαλοι βλέπουν τους μαθητές ως ενιαίο σώμα μεμονωμένων ατόμων έτοιμο να προσλάβει γνώσεις μέσα από έναν ενιαίο τρόπο διανομής πληροφοριών. Πιστεύει ότι το φαινόμενο θα περιοριστεί αν αυτοί (οι δάσκαλοι) κατευθυνθούν σε μορφές διδασκαλίας που δεν λειτουργούν ως επιχειρήσεις «μετάδοσης» ή «κάλυψης» γνώσεων και δεν περιορίζουν τη μάθηση απλά σε ρόλο άσκησης του «παίρνω» και «εκφράζω».

Εκτός όμως από τη «φτωχή» διδασκαλία, για κάποιους μαθητές το αρνητικό συναίσθημα συνδέεται με τον φόβο της πιθανής υποτίμησης εκ μέρους του δασκάλου ή των συμμαθητών τους σε κάποια λανθασμένη τους απάντηση. Έτσι αρκεί πολλές φορές μια παρατήρηση του δασκάλου ενώπιον της τάξης για επαναλαμβανόμενα λάθη κάποιου μαθητή να αποτελέσει την αιτία δημιουργίας φόβου και τελικά άρνησης για το μάθημα.

Α: Ας πούμε λύναμε προβλήματα και επειδή εγώ δεν τα καταλάβαινα τα έκανα συνέχεια λάθος. Ε μου έκαναν παρατήρηση και…

Ε: Ο δάσκαλος δεν προσπαθούσε να σε βοηθήσει;

Α: Προσπάθησε, αλλά εγώ δεν τα καταλαβαίνω, συνέχισα να μην καταλαβαίνω.

Για κάποιον δάσκαλο μάλιστα το μάθημα των μαθηματικών χρησίμευε και ως μέσο πίεσης και τιμωρίας σε μη συμμόρφωση των μαθητών για ησυχία στην τάξη, όπως μας είπε μια μαθήτρια *«ήταν ένας δάσκαλος που μας απειλούσε συνέχεια. Άμα δεν κάναμε ησυχία μας έβαζε και κάναμε μαθηματικά, μαθηματικά, μαθηματικά…»*

Οι μαθητές γενικότερα αναφερόμενοι στην αρνητική στάση των συμμαθητών τους στα μαθηματικά μας είπαν ότι ίσως: *«τα παιδιά που δεν επιθυμούν τα μαθηματικά να ψάχνουν κάποιον άλλον τρόπο εφαρμογής για το μάθημα»* ή ότι τους λείπει ένα φιλικό περιβάλλον τάξης αφού *«δεν υπάρχει μαθητής που μπορεί να λειτουργήσει σε ένα εχθρικό περιβάλλον με έναν αδιάφορο καθηγητή».*

Ο Martinez (1987) θεωρεί ότι τα χειραπτικά υλικά *«παρέχουν θεραπεία για τον φόβο των μαθητών για τα μαθηματικά»* (Uttal, Scudder & DeLoache, 1997, σελ. 38). Η θέση του βρίσκει σύμφωνους και τους μαθητές που συνεργάστηκαν μαζί μας σε αυτή την έρευνα αφού όπως μας είπε κάποια μαθήτρια με τη χρήση των υλικών μπόρεσαν να *«ξεκαθαρίζουν περισσότερο το μυαλό τους που εφαρμόζουν κάποιους τύπους με τα σχήματα, αλλά και ξεμπλοκάρουν. Με αυτό τον τρόπο τότε θα υπήρχαν βέβαια καλοί μαθητές, αλλά δεν θα υπήρχαν παιδιά που θα ήταν αδιάφορα».*

Η ομαδοσυνεργατική μέθοδος μάθησης και διδασκαλίας, όπως παρουσιάσαμε και αναλύσαμε διεξοδικά στο δεύτερο κεφάλαιο, όταν εφαρμοστεί σωστά φαίνεται ότι περιορίζει τις αρνητικές επιπτώσεις της μετωπικής διδασκαλίας σε ότι αφορά τα συναισθήματα των μαθητών για τα μαθηματικά. Η άποψη μας αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι οι μαθητές στις συνεντεύξεις τους και στα φύλλα αξιολόγησης εξέφρασαν στη συντριπτική τους πλειοψηφία την επιθυμία το μάθημα να γίνεται ομαδοσυνεργατικά με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.

4. Συγκρίσεις με προηγούμενες έρευνες

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερθήκαμε σε μια σειρά ερευνών των οποίων το κύριο ερευνητικό ερώτημα ήταν η επίδραση της χρήσης των αλγεβρικών πλακιδίων στην κατανόηση αλγεβρικών ενοτήτων που αφορούν τα πολυώνυμα, τις πράξεις, τις ταυτότητες, την παραγοντοποίηση, την επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού. Η σύγκριση των συμπερασμάτων της έρευνάς μας θα επικεντρωθεί στις έρευνες αυτές αλλά και σε εκείνες του δευτέρου κεφαλαίου που αναφέρονται τόσο στην επιλογή του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου διδασκαλίας, όσο και στους παράγοντες που συντελούν στη δημιουργία φόβου για τα μαθηματικά.

Θα συζητήσουμε λοιπόν τα ευρήματά σε σχέση με έρευνες που αναφέρονται: α) στη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων β) στην εφαρμογή του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου διδασκαλίας εν γένει και σε τάξεις μαθηματικών ειδικότερα και γ) στην επίδραση του μοντέλου διδασκαλίας που εφαρμόσαμε σε μαθητές με περιορισμένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Στις έρευνες που αναφέραμε των Thornton (1971), Goldsby (1994), Leinenbach & Raymond (1996), Dyer (1996), Hinzman (1997), Sobol (1998), Gningue (1998), McCalip Dell'Isola (1999), Goins (2001) και Goracke (2009) τονίστηκε η θετική επίδραση που είχε η ενσωμάτωση των αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία των αλγεβρικών εννοιών που αναφέρονταν στα πολυώνυμα. Η θετική επίδραση βασικά αφορούσε στη μάθηση των εννοιών και στην αλλαγή στάσης των αδιάφορων μαθητών απέναντι στο μάθημα και όχι στην επίδοση των μαθητών για την οποία τα θετικά ή αρνητικά ποιοτικά αποτελέσματα των ερευνών παρέμειναν, θα λέγαμε, αδιευκρίνιστα.

Από τη δική μας έρευνα αναδείχτηκε, ότι η εξεικόνιση των αλγεβρικών εννοιών, όπως εκείνων του τελείου τετραγώνου, της διαφοράς τετραγώνων και της παραγοντοποίησης, που έγινε δυνατή με τη χρήση των αλγεβρικών πλακίδιων βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τις αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες και να οικειοποιηθούν τεχνικές επίλυσης προβλήματος παραμερίζοντας τις όποιες ανασφάλειες και αρνήσεις είχαν για τις δυνατότητές τους στο μάθημα.

Με τα υλικά κατέκτησαν τη δική τους αίσθηση αλήθειας για τις έννοιες και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση τόσο των δραστηριοτήτων των φύλλων εργασίας όσο και των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου (βλ. τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο). Κέρδισαν δηλαδή την αυτογνωσία ή *«το τι ξέρω και τι δεν ξέρω πραγματικά»* όπως μας είπε ο Γιώργος. Αυτά δεν απέχουν πολύ από εκείνα που διατυπώθηκαν σε παρόμοιες έρευνες όπως παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Η Goracke (2009) από την έρευνά της κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «*η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων συνέβαλε στην αύξηση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών η οποία με τη σειρά της αύξησε την αυτοπεποίθηση και τη διάθεσή τους για τα μαθηματικά»*. Η μεγαλύτερη δύναμη των αλγεβρικών πλακιδίων βρίσκεται, κατά την Sharp (1995) στο ότι *«παρέχουν ένα εναλλακτικό σύστημα αναπαραστάσεων που εσωτερικεύεται στον κάθε μαθητή με τέτοιον τρόπο ώστε να τον βοηθά να απομνημονεύει γεγονότα και όχι χειρισμούς παπαγαλίας»*. Η Goldsby (1995) τα θεωρεί *«εργαλείο παρέμβασης της πτωτικής τάσης του δείκτη κατανόησης στη διδασκαλία του μαθήματος και εναλλακτική μέθοδο για να αποκτήσουν οι μαθητές επαρκή γνώση στα ουσιώδη, αν το πρότυπο της διδασκαλίας που ακολουθείται δεν είναι επιτυχές»*. Η θέση της αυτή ταυτίζεται με την άποψη που εκφράστηκε από μαθητή μας όταν μας είπε ότι *«με τα αλγεβρικά πλακίδια κατάλαβε ότι οι τύποι δεν έρχονται ‘‘ουρανοκατέβατοι’’»* αλλά, στηρίζονται σε συλλογισμούς που όμως *«ποτέ δεν τους είχαν δείξει* [οι δάσκαλοι]».

Τα σύμβολα για τους μαθητές της τάξης παρέμβασής μας απέκτησαν εικόνα με διαστάσεις και χρώμα και έπαψαν να είναι τα *«γράμματα ανάμεσα στους αριθμούς»* όπως τα είχε αποκαλέσει μαθητής που συμμετείχε στην έρευνά μας. Έγιναν γεωμετρικά σχήματα, τετράγωνα και ορθογώνια που τους έδωσαν τη δυνατότητα να συνθέσουν, να αποσυνθέσουν, να ανασυνθέσουν εικόνες και μέσα από μια κυκλική διαδικασία πειραματισμού να αποσαφηνίσουν τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Η πλειονότητα των μαθητών στην έρευνα της Sharp (1995) δήλωσε ότι τα αλγεβρικά πλακίδια πρόσθεσαν *«ένα νοερό ομοίωμα που έκανε ευκολότερη τη μάθησή τους»* και υπογράμμισαν ότι «*βρήκαν εύκολο να σκέφτονται τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς όταν φαντάζονταν τα* *αλγεβρικά πλακίδια».* Μαθητής που έλαβε μέρος στην έρευνα της Goldsby (1994) σχολίασε: *«η φιγούρα που κάνεις με αυτά σε βοηθά με το πρόβλημα. Το πρόβλημα κτίζεται βαθμιαία και έτσι βρίσκεις τις απαντήσεις».* Αντίστοιχη είναι και η θέση μαθητή μας όταν μας είπε ότι *«είδα τον εαυτό μου που στην πρώτη τάξη δεν ήμουν σε θέση να λύσω μια άσκηση στην τρίτη πλέον…μπορούσα να ανατρέξω στα σχηματάκια και να λύσω σωστά, να μην προβληματιστώ».*

Τα αλγεβρικά πλακίδια βοήθησαν τους μαθητές να δουν το γενικό στο συγκεκριμένο και το συγκεκριμένο στο γενικό. *«Μάθαμε πρακτικά την έννοια του μαθήματος»* έγραψαν στο φύλλο αξιολόγησης, δηλαδή μπήκαν στη διαδικασία, τουλάχιστον σε κάποιο βαθμό, *«να γεφυρώσουν το χάσμα ανάμεσα στη συγκεκριμένη και την αφηρημένη σκέψη»* όπως επεσήμαναν και οι Leinebach και Raymond (1996) στην έρευνά τους.

Τα χειραπτικά υλικά στήριξαν τους μαθητές στην επίλυση προβλήματος «υποδεικνύοντάς» τους το λάθος στη σκέψη τους και ισχυροποιώντας την πεποίθηση τους για το ορθό της απάντησής τους στην κάθε αμφισβήτηση λύσης που προέκυπτε. Κάποιοι μας είπαν ότι *«κέρδισαν τη σκέψη»*, εννοώντας τη δυνατότητα να σκέπτονται και ότι *«απέκτησαν τον λόγο»* που τους έκανε να πιστέψουν ότι οι δυνατότητές τους δεν περιορίζονταν στο χαμηλό βαθμό της μέχρι τότε επίδοσής τους στα μαθηματικά.

Η εξεικόνιση τους έδωσε τη δυνατότητα να «δουν» τη λύση, να αιτιολογήσουν τον τρόπο επίλυσης που επέλεξαν, να επιχειρηματολογήσουν για το ορθό ή το λανθασμένο της σκέψης τους, να επαληθεύσουν, να αποσαφηνίσουν και να αναπτύξουν συνθετότερες αλγεβρικές έννοιες και τεχνικές. Απέκτησαν έτσι αυτοέλεγχο, η σκέψη τους έγινε ποιοτικότερη και αυτό συντέλεσε στο να γίνουν ικανοί να προχωρήσουν σε περαιτέρω γενικεύσεις εννοιών. Αντίστοιχη παρατήρηση για ποιοτικότερη σκέψη των μαθητών ανέφερε και η Bennett (2001) στην έρευνά της. Η ίδια διαπίστωσε ότι «*οι μαθητές που διδάχθηκαν χρησιμοποιώντας τα χειραπτικά υλικά ήταν ικανότεροι στο να εξηγήσουν γραπτά σε μία παράγραφο τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων»*.

Το διδακτικό μοντέλο που εφαρμόσαμε έδωσε στους μαθητές επίσης την ευκαιρία όχι μόνο να ακούν, αλλά να μιλούν και οι ίδιοι για τα μαθηματικά, να συζητούν τι παρατηρούν, για ποιο λόγο κάποια διαδικασία «δουλεύει» και άλλη όχι, για ποιο λόγο σκέφτονται ότι η λύση που προτείνουν είναι η σωστή. Η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων τους έμαθε να οργανώνουν τη σκέψη τους και να ανακαλούν τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις όταν δυσκολεύονται στη συμβολική επίλυση του προβλήματος. *«Σκεφτόμουν τα τετραγωνάκια* (αλγεβρικά πλακίδια) *και έβγαζα άλλες λύσεις και το έβρισκα αλλιώς»* μας είπε η Αναστασία.

Δάσκαλος της ομάδας παρέμβασης που συμμετείχε στην έρευνα της Sharp (1995) ανακάλυψε τρείς μήνες μετά την παρέμβαση ότι όταν παρότρυνε έναν μαθητή, που δεν μπορούσε να απαντήσει σε ερώτησή του, να *«σκεφτεί ότι έχει τα αλγεβρικά πλακίδια»* ο μαθητής μπόρεσε να δώσει τη σωστή απάντηση. Παρόμοιες παρατηρήσεις έγιναν και από άλλον δάσκαλο στην ίδια έρευνα ο οποίος επισήμανε ότι «*στο τελικό διαγώνισμα που έγινε 4 μήνες μετά την παρέμβαση κάποιοι μαθητές ζωγράφισαν εικόνες των αλγεβρικών πλακιδίων για να τους βοηθήσουν να απαντήσουν σε κάποιες ερωτήσεις»*.

Στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης που συμπλήρωσαν οι μαθητές μετά το τέλος της παρέμβασης παρατηρήσαμε ότι σχεδόν οι μισοί, δέκα

(10) μαθητές μας απάντησαν ότι *«σχεδιάζουν την εικόνα με τα αλγεβρικά πλακίδια για να λύσουν τις δύσκολες ασκήσεις»*, ενώ οι υπόλοιποι δώδεκα (12) μαθητές χρησιμοποίησαν την εικόνα για όλες τις ασκήσεις χωρίς να κάνουν διάκριση ανάμεσα σε εύκολες και σε δύσκολες ασκήσεις.

Το γεγονός βέβαια ότι κανείς δεν απαντά ότι καταφεύγει στην εικόνα για τις εύκολες ασκήσεις μπορεί να οδηγήσει σε δύο συμπεράσματα. Είτε ότι ο μαθητής πραγματικά δεν χρειάζεται την εικόνα για να επιλύσει αυτήν την κατηγορία προβλημάτων, οπότε αυτό κατά τη γνώμη μας αποτελεί θετική εξέλιξη της διδακτικής μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε, είτε ότι καταφεύγει εξαρχής στην εικόνα για σιγουριά χωρίς να κατηγοριοποιήσει προηγουμένως την άσκηση σε εύκολη ή δύσκολη οπότε είναι πιθανό να έχει εγκλωβιστεί στο υλικό.

Αυτή όμως η δεύτερη υπόθεσή μας, που αφορά τον εγκλωβισμό του μαθητή στο υλικό, αποδυναμώνεται από το γεγονός ότι δεν παρατηρήθηκε στα φύλλα των επαναληπτικών ασκήσεων, στο τέλος της κύριας παρέμβασης, να χρησιμοποιείται το σχήμα για την ορθή επίλυση άσκησης ούτε να γίνεται αναφορά σε αυτό για να αιτιολογηθεί για παράδειγμα ότι το $x^2 + 9 = 0$ δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς. Αν η εξάρτηση των μαθητών από τα υλικά ήταν πλήρης, αφού δεν είχαν στη διάθεσή τους αλγεβρικά πλακίδια ή δεν θα είχαν λύσει την άσκηση ή θα είχαν αναζητήσει την απάντηση στην εξεικόνιση μέσα από τον πίνακα διπλής εισόδου.

Στην έρευνα της Gningue (1998) οι μαθητές περιέγραψαν τις δραστηριότητες με τα υλικά ως *«βοηθητικές»* και *«τέλειες»* που *«σχηματίζουν νοερή εικόνα» και «έχουν κάποιο αποτέλεσμα»*. Σχεδόν όλοι συμφώνησαν ότι η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο έγινε δυνατή γιατί *«εξεικόνισαν τις δραστηριότητες του ‘‘κάνω* *μαθηματικά'', τις απεικόνισαν νοητικά και γενίκευσαν την εμπλεκόμενη διαδικασία»*. Η McCalip Dell'Isola (1999) σημειώνει ότι στην έρευνά της μαθητές με όχι πρόσφατη εμπειρία που διδάχθηκαν με χρήση αλγεβρικών πλακιδίων *«παρουσίασαν μεγαλύτερη ικανότητα συγκράτησης* [των εννοιών] *στη μνήμη από εκείνους που διδάχθηκαν παραδοσιακά»*.

Στα ερωτηματολόγια αξιολόγησης στην έρευνά μας οι δώδεκα (12) μαθητές από τους είκοσι δύο (22) απαντούν ότι σκέφτονται την εικόνα με τα αλγεβρικά πλακίδια πάντα ή σχεδόν πάντα, οι εννέα (9) απαντούν μερικές φορές και μόνο ένας απαντά ποτέ. Αν αυτές τις απαντήσεις τις συνδυάσουμε με εκείνες που αναφέρονται παραπάνω στο είδος των ασκήσεων που γίνεται χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων θα λέγαμε ότι το χρονικό διάστημα που παραμένει ο τρόπος χρήσης του υλικού στη μνήμη των μαθητών δεν ήταν μικρό. Την υπόθεσή μας αυτή την επιβεβαίωσε η Γιάννα, την περίπτωση της οποίας αναφέραμε στο κεφάλαιο τέσσερα, όταν τη συναντήσαμε ένα χρόνο μετά την παρέμβασή μας και διαπιστώσαμε ότι ο τρόπος επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων παρέμεινε «ζωντανός» στο μυαλό της αφού θυμόταν όχι μόνο τα υλικά αλλά και τον τρόπο σύνθεσής τους σε εικόνα.

Ίσως κάποιος βέβαια να ισχυριστεί ότι αυτή η εξάρτηση του μαθητή στην εικόνα να είναι μια αρνητική εξέλιξη της χρήσης των χειραπτικών υλικών, όμως δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός ότι η εικόνα παράλληλα τον στηρίζει στην προσπάθειά του να αποβάλλει τα συναισθήματα άρνησης που έχει στο να συμμετέχει στο μάθημα και στο να προχωρήσει στην όποια επίλυση προβλήματος. Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών εξάλλου στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης χαρακτήρισε την εμπειρία με τα αλγεβρικά πλακίδια θετική, βοηθητική στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών και καθοριστικής σημασίας για τη συμμετοχή όλων των μαθητών στο μάθημα.

Η επίδραση του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου διδασκαλίας στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και στη συμπεριφορά των μαθητών στην τάξη

Η επιλογή μας να εργαστούν οι μαθητές σε ομάδες των τεσσάρων κρίθηκε από μας, αλλά και από τους ίδιους τους μαθητές επιτυχής και ωφέλιμη. Είδαμε με ενδιαφέρον μαθητές οι οποίοι δεν είχαν εργαστεί σχεδόν ποτέ σε ομάδες να υιοθετούν την πρότασή μας και εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων να συνεργάζονται αρμονικά. Μάθαιναν ο ένας από τον άλλο μέσα από τη συμφωνία ή τη διαφωνία στη σκέψη του συμμαθητή τους και χρησιμοποίησαν επιχειρήματα για να υποστηρίξουν τη δική τους πρόταση.

Τα χειραπτικά υλικά ήταν το μέσο «συνομιλίας» της ομάδας και το κριτήριο για την ορθή ή λανθασμένη άποψη στην επίλυση της δραστηριότητας του κάθε μέλους της. «Προκάλεσαν» και «προσκάλεσαν» όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα των επιδόσεών τους, να συμμετέχουν στο μάθημα και τους οδήγησαν να επαναπροσδιορίσουν τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Η ομάδα έδωσε στον καθένα το βήμα να πει τη γνώμη του, την ευκαιρία να εκθέσει τα επιχειρήματά του, να απορρίψει ή να προσδιορίσει εκ νέου την άποψή του. Μέσα από τη συζήτηση τα μέλη της ομάδας μπόρεσαν να διαπραγματευτούν έννοιες, να αναπτύξουν την ικανότητα να ακούν τις θέσεις του άλλου, να παρουσιάσουν τις ιδέες τους, να τις υποστηρίξουν και να τις τεκμηριώσουν.

Παρόμοιες παρατηρήσεις έκαναν στις έρευνές τους η Webb (1982, σελ. 421) και η Dyer (1996). Η Webb παρατήρησε ότι *«ο ατομικός ρόλος στην αλληλόδραση της ομάδας είχε σημαντική επιρροή στη μάθηση»* και η Dyer (1996) ότι *«τα αλγεβρικά πλακίδια συνέβαλαν στη μαθηματική ωριμότητα των μαθητών και ότι ο εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας όπως αυτός με τα χειραπτικά υλικά και ο συνεργατικός τρόπος μάθησης έδωσαν επιτυχή αποτελέσματα στους μαθητές της πρώτης και της δευτέρας τάξης του κολλεγίου στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών».*

Ο Freudenthal (1987, 1991) υποστήριξε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να γίνεται σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και με ετερογενή σύνθεση των ομάδων γιατί *«στις ετερογενείς ομάδες το κέρδος στη γνώση μοιράζεται τόσο στους ‘‘αδύνατους’’ όσο και στους ‘‘δυνατούς’’ μαθητές»* (Gravemeijer & Terwel, 2000, σελ. 783). Ο Slavin (1996) αναφέρει ότι στις περισσότερες έρευνες που έκανε κατέληξε στο συμπέρασμα *«ότι οι μαθητές υψηλών, μεσαίων ή χαμηλών επιδόσεων ωφελήθηκαν εξίσου με την ομαδοσυνεργατική μέθοδο μάθησης σε σύγκριση με εκείνους των ομάδων ελέγχου που δεν εφαρμόστηκε αντίστοιχη μέθοδος»* (1996, σελ. 58).

Η Webb (1982) εξέφρασε την άποψη ότι *«αν η διαφορά επιπέδων γνώσεων των μαθητών της ομάδας δεν είναι σοβαρή τότε επωφελούνται όλα τα μέλη της ομάδας. Έτσι ομάδες που αποτελούνται από μαθητές με υψηλές και μεσαίες επιδόσεις στα μαθηματικά ή με μεσαίες και χαμηλές επιδόσεις έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα για επιτυχία».* Σε έρευνα επίσης της Robinson (1991, σελ. 25) φάνηκε ότι σε ομάδες, τα μέλη των οποίων δεν είχαν μεγάλη διαφορά στο επίπεδο των γνώσεων, οι δύο κατηγορίες μαθητών, η πρώτη με υψηλό ως μεσαίο επίπεδο γνώσεων και η δεύτερη με μεσαίο ως χαμηλό, αυξάνουν τις γνώσεις τους αφού *«ο μαθητής που* *έχει τις περισσότερες γνώσεις αφιερώνει περισσότερο χρόνο να δίνει απαντήσεις που του θέτουν οι συμμαθητές με λιγότερες γνώσεις».* Του δίνεται επομένως η ευκαιρία να εμβαθύνει στην έννοια ώστε να αποκτήσει τα επιχειρήματα εκείνα που θα τον βοηθήσουν να δώσει πειστικές εξηγήσεις στις τυχόν απορίες ή ενστάσεις των συμμαθητών του και να γίνει κατανοητός.

Οι Augustine, Gruber & Hanson (1989-90) αναφέρουν ότι στις ετερογενείς ομάδες βελτιώθηκε η απόδοση τόσο των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις όσο και εκείνων με υψηλές και ότι η συμμετοχή τους στην ομάδα συνέβαλε στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης (Whicker, Bol, Nunnery (1997, σελ. 43).

Οι παραπάνω θέσεις μας βρίσκουν σύμφωνους γιατί και μείς διαπιστώσαμε στην έρευνά μας ότι οι μαθητές που είχαν την ταμπέλα του αποτυχημένου, εξαιτίας των επιδόσεών τους στο μάθημα την προηγούμενη χρονιά, που διδάχθηκαν με την δασκαλοκεντρική μέθοδο διδασκαλίας, μάθαιναν από τους «εξυπνότερους» μαθητές της ομάδας, οι οποίοι με τη σειρά τους ενίσχυσαν τις γνώσεις τους μέσα από την προσπάθειά τους να «διδάξουν» τους «αδύνατους» συμμαθητές τους. Παρατηρήσαμε ότι η μικρή διαφορά του επίπεδου γνώσεων των μαθητών της κάθε ομάδας, αφού ήταν από μεσαίο ως χαμηλό, συνετέλεσε στην καλή συνεργασία μεταξύ τους, στην ανταλλαγή γνώσεων και σκέψεων, που είχαν ως αποτέλεσμα την αύξηση και βελτίωση των γνώσεων όλων των μαθητών της ομάδας.

Η αλληλόδραση έδωσε ισχύ στη συνεργατική μάθηση η οποία με τη σειρά της κέρδισε την αποδοχή του συνόλου των μαθητών. Με το να μοιράζονται τη γνώση και την εμπειρία τους μπόρεσαν να μάθουν ο ένας από τον άλλο, να εντοπίσουν τις αδυναμίες τους και να τις βελτιώσουν. Αυτή την άποψη εξάλλου μετέφεραν οι ίδιοι σε όλες τις συνεντεύξεις τους αλλά και στην αξιολόγηση του μαθήματος που έκαναν χαρακτηρίζοντας την εμπειρία τους αυτή, την εργασία σε ομάδες, οι είκοσι ένα (21) από τους είκοσι δύο (22) μαθητές θετική.

Το ίδιο μας επιβεβαίωσαν και μέσα από τις απαντήσεις που έδωσαν στην ερώτησή μας πως θα ήθελαν να γίνεται το μάθημα της άλγεβρας όπου επιγραμματικά μας είπαν ότι θέλουν «*όπως τώρα με ομάδες και στην ομάδα, να είναι μερικοί καλοί για να βοηθάνε, έτσι και με τα τετράγωνα για να είναι καλύτερος τρόπος και να είναι πολύ πιο εύκολα», «να είμαστε σε ομάδα και για πέντε λεπτά να έρχεται ο καθηγητής να δει άμα είναι καλές οι ασκήσεις, να μας βοηθήσει. Άμα δεν μπορούμε να λύσουμε μια άσκηση να μας βοηθούσε λίγο και μετά να συνεχίζαμε»,* ενώ κάποιος άλλος μας υπογράμμισε ότι *«αν στην ομάδα όλοι οι μαθητές κάθονται και λύνουν άσκηση τότε κερδίζει* [η ομάδα], *διότι αυτό που ξέρω εγώ ο άλλος δεν το ξέρει και αυτό που δεν ξέρω εγώ το ξέρει ο άλλος».*

Παρόμοια σχόλια έκαναν και οι μαθητές που συμμετείχαν σε έρευνα των Whicker, Bol & Nunnery (1997), που αφορούσε τη συμπεριφορά των μαθητών στην ομάδα αφού δήλωσαν ότι τους άρεσε γιατί, πρώτον, ήταν ευκολότερο να λύνουν σύνθετες ή δύσκολες ασκήσεις, όταν συνεργάζονταν, δεύτερον, είχαν την ευκαιρία να μοιράζονται και να συζητούν τις σκέψεις τους και τρίτον έμαθαν περισσότερα εργαζόμενοι σε ομάδες.

Οι Good, Reys, Grouws & Mulryan (1989-90) πιστεύουν ότι ένα από τα οφέλη του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης είναι η επικοινωνία που αναπτύσσεται μεταξύ των μαθητών η οποία ενισχύει το κίνητρο και τον ενθουσιασμό τους για μάθηση και προωθεί τη μαθηματική σκέψη. Ενώ παράλληλα με τη συμμετοχή τους στην ομάδα τους μαθαίνουν όχι μόνο να συνεργάζονται αλλά και να γίνονται πιο δεκτικοί με τους άλλους (Whicker, Bol, Nunnery (1997, σελ. 43).

Οι Hertz- Lazarowitz, Sharan, & Steinberg (1980) σε έρευνά τους παρατήρησαν ότι οι μαθητές στην ομάδα βοήθησαν ο ένας τον άλλον δέχθηκαν καινούργιες ιδέες και γενικά ενίσχυσαν την αποδοτικότητα τους από τους εκείνους που δεν συμμετείχαν σε ομάδα (Slavin, 1985, σελ. 13).

Οι Brody & Davidson (1998, σελ. 30) θεωρούν ότι ο δάσκαλος σε μία τάξη που ακολουθεί το ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας πρέπει να έχει πολλαπλούς ρόλους για να συμβάλει με την παρουσία του στην επιτυχή εφαρμογή αυτού του μοντέλου. Έτσι απαιτείται να είναι α) ερμηνευτής, διευθυντής και προπονητής σε ότι αφορά την μετάδοση της γνώσης, β) σε ότι αφορά τη διαχείριση της γνώσης ρόλος του είναι να την διευκολύνει, να ενθαρρύνει τους μαθητές να διεκπεραιώσουν την εργασία τους στην ομάδα να έχει δηλαδή ρόλο αντίστοιχου «διευθυντή ορχήστρας» και γ) για να συμβάλλει στην αλλαγή της μορφής μάθησης πρέπει να συμμετέχει και ο ίδιος σε αυτή και να είναι αναπόσπαστο κομμάτι της κοινότητας της τάξης.

Η εφαρμογή λοιπόν στην έρευνά μας του ομαδοσυνεργατικού πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας με χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων απαίτησε και αλλαγή του ρόλου μας ως δάσκαλου της τάξης. Οι καινούργιες συνθήκες μας «μετακίνησαν» από τον πίνακα στην καρδιά της τάξης, ανάμεσα στους μαθητές και μας μετέτρεψαν από βασικό «προμηθευτή» γνώσης σε βοηθό γνώσης, σε θέση δίπλα στο μαθητή και όχι πάνω από κείνον.

Με δεδομένο ότι η εμπειρία μας σε αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας ήταν μηδαμινή, ο νέος μας ρόλος, που απαιτούσε άλλη θεώρηση πραγμάτων από εκείνη του δασκάλου που διδάσκει μετωπικά, ήταν μια πρόκληση. Μας ώθησε πάνω απ’ όλα να «αναζητήσουμε» τρόπους να διαμορφώσουμε το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον (διάταξη θρανίων, χρήση επιδιασκοπίου, «ελκυστικά» φύλλα δραστηριοτήτων) που θα βοηθούσε τον μαθητή να «παράγει» γνώση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από τις δικές του δραστηριότητες με τα υλικά.

Η παρουσία μας έγινε διακριτική. Αποφύγαμε να δίνουμε άμεσες απαντήσεις του τύπου σωστό ή λάθος και προσπαθήσαμε μέσα από το σχήμα να οδηγήσουμε τον μαθητή στον ορθό συλλογισμό για το αποτέλεσμα. Τον βοηθήσαμε να ακούσει τη διαφορετική άποψη, να υποστηρίξει τους ισχυρισμούς του με στοιχεία, να εμπλακεί σε κριτική και δημιουργική σκέψη και να πάρει μέρος σε διάλογο ανοικτό και με περιεχόμενο.

Προσπαθήσαμε η διαμεσολάβησή μας να είναι το δυνατόν επιτυχής ώστε να βοηθήσουμε τους μαθητές. Οι ίδιοι μας είπαν ότι ο τρόπος που τους παρουσιάσαμε τις έννοιες τους βοήθησε γιατί μπόρεσαν να συνδέσουν την καινούργια πληροφορία με την εμπειρία τους, να συνειδητοποιήσουν τι να κάνουν όταν έρχονται σε δύσκολη θέση, να μάθουν δηλαδή πώς να μαθαίνουν. Η επαφή μας με τον μαθητή, σε ότι αφορά τις δυσκολίες που αντιμετώπιζε, ήταν διαρκής ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να ακολουθήσουμε την πορεία της γνώσης, που στοχεύαμε να δώσουμε μέσω των δραστηριοτήτων που επιλέξαμε, να την αποσαφηνίσουμε ή να την αναπροσαρμόσουμε αναλόγως των δυσκολιών που εμφανίζονταν. Η διδασκαλία μας έτσι ξέφυγε, όπως θεωρεί ο Gattegno (1970), *«από το παραδοσιακό ¨μολύβι-χαρτί¨, από την εξάσκηση και πράξη, από το κάθομαι και ¨καταλαβαίνω¨, από τη διδασκαλία σε μορφή διάλεξης με καταιγισμό γνώσεων, από την ¨κατανόηση¨ της απομνημόνευσης».*

Στα ερωτηματολόγια αποτίμησης οι είκοσι ένα (21) μαθητές από τους είκοσι δύο (22) της τάξης μας έγραψαν ότι «*συζήτησαν την πορεία της άσκησης με τον καθηγητή τους*» εννοώντας την ερευνήτρια και τον καθηγητή τάξης που ήταν παρόν στο μάθημα και συμμετείχε ισότιμα στην όλη διαδικασία. Επίσης σημείωσαν ότι τους άρεσε που *«οι καθηγητές απαντούσαν σε όσες ερωτήσεις κι αν έχεις κάνει πιο πριν».*

Αντίστοιχες αναφορές για τη θετική επίδραση της ομαδοσυνεργατικής σε συνδυασμό με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων υπάρχουν και στις έρευνες της Goldsby (1994) και της Sobol (1998). Στην έρευνα της Goldsby διαβάζουμε ότι ένας δάσκαλος που συμμετείχε σημείωσε ενδεικτικά: *«με βοήθησαν* [τα χειραπτικά υλικά] *σε ένα είδος ‘‘απόσυρσης’’ και επέτρεψαν στους μαθητές να εισάγουν περισσότερα και εμένα να μην έχω πολύ έλεγχο μέσα στην τάξη. Νομίζω ότι θα ήταν πρόκληση για τους περισσότερους δασκάλους να αφήσουν αυτήν την εξουσία μπροστά στην ενεργή συμμετοχή στην τάξη»*. Η Sobol αναφέρει στην έρευνα της ότι *«οι δάσκαλοι των τμημάτων παρέμβασης είχαν τη δυνατότητα να παρέχουν άμεση ανατροφοδότηση στους μαθητές τους, να τους κινητοποιούν να μάθουν, να τους ενθαρρύνουν να δίνουν απαντήσεις, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία επιχειρημάτων και να ελέγχουν προσεκτικά την εργασία τους, περισσότερο συχνά από τους δασκάλους της παραδοσιακής τάξης».*

Υπήρξαν όμως και περιπτώσεις μαθητών που διαφώνησαν με αυτό το μοντέλο διδασκαλίας και στάθηκαν αρνητικά τόσο στη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων όσο και στην εργασία σε ομάδες. Στην κύρια έρευνά μας είχαμε μόνο έναν μαθητή που σχεδόν αρνήθηκε τη συνεργασία μαζί μας. Η επίδοση του στο μάθημα ήταν καλή χωρίς όμως να μπορεί να εμβαθύνει στις έννοιες και να αιτιολογήσει το «γιατί» των τεχνικών επίλυσης που χρησιμοποιούσε. Η αδυναμία του αυτή του στερούσε την αυτοπεποίθηση ότι αυτό που γράφει είναι σωστό, με αποτέλεσμα όταν του ζητούσαμε την αιτιολόγηση κάποιων πράξεων (με σύμβολα) οι αμφιβολίες του τον οδηγούσαν να σβήνει ακόμα και τη σωστή εφαρμογή τους.

Στη συνέντευξη που μας έδωσε μας είπε αναφερόμενος στα υλικά ότι: «*Δεν ξετρελάθηκα κιόλας, δεν ήταν και πολύ σημαντικά*» και ότι δεν τον δυσκόλεψαν αλλά αδιαφορεί αφού *«δεν θα κάνουμε έτσι στο Λύκειο»*. Στην ερώτησή μας αν αισθάνεται σίγουρος με τη χρήση των συμβόλων η απάντησή του ήταν: *«Σίγουρος..., εντάξει πάντα κάνω λάθη»* και αμέσως μετά, αναθεωρώντας εν μέρει τη στάση του [για τα αλγεβρικά πλακίδια] είπε: *«Εντάξει χρησιμεύουν, αλλά εγώ δεν τα χρησιμοποιώ, είναι χάσιμο χρόνου»*. Σε ότι αφορούσε το κλίμα της τάξης άποψη του ήταν ότι: *«Σαφώς ήταν καλύτερα από άλλες χρονιές, ήταν ενδιαφέροντα, εντάξει»*.

Αντίστοιχες μεμονωμένες περιπτώσεις μαθητών επισημάνθηκαν και στην έρευνα της Sharp (1995). Για δύο μαθητές που είχαν αποτελέσματα κατώτερα των συνήθων επιδόσεών τους όταν χρησιμοποίησαν τα αλγεβρικά πλακίδια υλικά ο δάσκαλος δήλωσε ότι *«η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων τους ήταν ''ενοχλητική'' γιατί δεν τα είχαν δει ποτέ προηγουμένως. Δεν τους άρεσε η αλλαγή του τρόπου μάθησης των μαθηματικών*» και υπογράμμισε ότι «*οι δύο αυτοί μαθητές τελείωσαν την τάξη με μία από τις υψηλότερες βαθμολογίες»*.

Η Goldsby (1994) πιθανολογεί, όπως αναφέρει στην έρευνα της, ότι τα χειραπτικά υλικά *«ενδεχομένως να είναι περισσότερο ωφέλιμα στους μαθητές που δεν είχαν προγενέστερη επιτυχία στα μαθηματικά ενώ για τους δυνατούς μαθητές να μην έχουν τόσο ευεργετικά αποτελέσματα»*. Στην έρευνα της Sobol (1998). οι δάσκαλοι στις συνεντεύξεις τους εξέφρασαν την πεποίθησή τους ότι *«οι μαθητές με ιδιαίτερη ικανότητα στα μαθηματικά είναι διστακτικοί να αφιερωνόσουν τόσο πολύ χρόνο με τα χειραπτικά υλικά από τον φόβο ότι δεν θα τελειώσουν τη διδακτέα ύλη»* και όπως το έθεσε ένας καθηγητής: *«αυτοί* [οι μαθητές] *θα μάθαιναν την αφηρημένη έννοια με οποιονδήποτε τρόπο».*

Η ίδια ερευνήτρια θέλοντας να ερμηνεύσει αυτή την στάση των μαθητών, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι *«τα αλγεβρικά πλακίδια, ως χειραπτικά υλικά, είναι γενικώς τα πιο κατάλληλα για να μάθουν οι μαθητές τους κανόνες για πρώτη φορά. Η αξία τους όμως χάνεται αν οι μαθητές έχουν ήδη μάθει τον κανόνα για τις πράξεις στα πολυώνυμα».* Ο McClug (1998) στην έρευνά του εξέτασε την επίδραση των αλγεβρικών πλακιδίων σε μαθητές του Λυκείου. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ήταν ότι *«τα χειραπτικά υλικά ίσως να μην είναι αποτελεσματικά για μαθητές που έχουν ήδη εισέλθει στο στάδιο των τυπολογικών χειρισμών διότι η σκέψη τους δεν είναι συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο».*

Σχολιάζοντας τα πιο πάνω θα συμφωνούσαμε και μείς ότι είναι πιθανό τα αλγεβρικά πλακίδια να μην είναι τόσο αποτελεσματικά για τους μαθητές που χειρίζονται καλά τους τύπους και τα σύμβολα. Η εμπειρία μας όμως από τα χρόνια διδασκαλίας στην τάξη μας έχει δείξει ότι πολλοί από αυτούς τους μαθητές εργάζονται μηχανικά με ελλιπείς γνώσεις αφού πολλές φορές δεν μπορούν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο επιλύουν ένα πρόβλημα ή γιατί κατέληξαν σε αυτήν την επιλογή των χειρισμών. Άποψή μας λοιπόν είναι ότι τα υλικά μπορούν να αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της διδακτικής μεθόδου των μαθηματικών τουλάχιστον για τις τάξεις του Γυμνασίου και ο χρόνος της χρήσης τους να ποικίλει ανάλογα με το επίπεδο επίδοσης και κατανόησης των μαθητών στο μάθημα. Σημειώνουμε, βέβαια, για να γίνει σαφές, ότι στόχος μας είναι οι μαθητές να «περάσουν» με «ασφάλεια» και γνώση στο συμβολικό χειρισμό και όχι να υποκαταστήσουμε τον συμβολικό χαρακτήρα των αλγεβρικών εννοιών με σχήματα.

Η επίδραση του μοντέλου διδασκαλίας που εφαρμόσαμε στους μαθητές με περιορισμένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Η διδακτική πρόταση που εφαρμόσαμε κέρδισε το ενδιαφέρον του συνόλου των μαθητών και κυρίως των αδύνατων μαθητών οι οποίοι βρήκαν διέξοδο στο άγχος τους και στην άρνησή τους για τα μαθηματικά. Η ενεργή παρουσία τους στην τάξη επισημάνθηκε από το σύνολο των μαθητών όπως είδαμε στο κεφάλαιο τέσσερα.

Η ένταξή τους σε ομάδα και τα αλγεβρικά πλακίδια τους βοήθησαν στο να έχουν πρόσβαση σε κατάλληλες και αποτελεσματικές στρατηγικές ώστε να μπορούν να διαχειριστούν τη μάθησή τους. Σταμάτησαν να προσποιούνται ότι καταλαβαίνουν, να κρατούν πολλές σημειώσεις για να δίνουν την εντύπωση ότι συμμετέχουν και να νιώθουν φόβο να κάνουν ερωτήσεις πάνω στο μάθημα με τη σκέψη ότι θα θεωρηθούν «χαζοί» από τον δάσκαλο και τους συμμαθητές τους. Απέκτησαν αυτοπεποίθηση ότι είχαν και αυτοί ικανότητα στη μάθηση, αίσθημα πολύ σημαντικό, όπως επισημαίνει ο Dale Schunk, που *«κινητοποιεί το άτομο στο να βελτιώσει την αποδοτικότητα του»* (1996, σελ. 1). Την όλη αρνητική τους στάση για τα μαθηματικά μας την περιέγραψαν με τις λέξεις «*Απλά δεν ασχολούμουν», «δεν πρόσεχα δεν μπορούσα»* και την αιτιολόγησαν με το ότι *«τα μαθηματικά από παλιότερα που τα ήξερα, φανταζόμουν, ότι ήταν μόνο πράξεις και…*

αρκετά δύσκολα στην κατανόηση και θεωρία» και ότι *«το μάθημα ήταν αδιάφορο».*

Μελέτες όπως αυτές των Armstrong, (1985), Betz, (1978), Burton, (1979), Richardson & Suinn (1972) έδειξαν ότι οι επιπτώσεις του φόβου για το μάθημα στον μαθητή εκδηλώνεται με ανικανότητα ως προς τα μαθηματικά, με πτώση της επίδοση του στο μάθημα και με αρνητικά συναισθήματα ενοχής και ντροπής (Solazzo, 2002, σελ. 42). Οι παρατηρήσεις τους αυτές επιβεβαιώθηκαν και στη δική μας έρευνα από τους ίδιους τους μαθητές στις συνεντεύξεις τους. Οι μαθητές μας μίλησαν για τα συναισθήματα που κυριαρχούσαν, πριν την παρέμβασή μας, κατά τη διάρκεια του μαθήματος: *«πάντα με άγχωναν οι πράξεις, καταλάβαινα ότι είχα πολλά κενά», «πάντα μου φαινόταν παλούκια, δεν μπορούσα να... που φοβόμουν από την αρχή», «είχα άγχος», «με έπιανε από την αρχή μια αγανάκτηση για τον εαυτό μου γιατί δεν τα καταλάβαινα», «πάντα δεν τα συμπαθούσα ήμουν αρνητικός».* Μια μαθήτριά μας είπε ότι τα συναισθήματα του φόβου που την κυρίευαν την έκαναν να μην θέλει να εκφράσει τη σκέψη της ενώπιον της τάξης και φυσικά του δασκάλου *«γιατί πίστευα πως θα ήταν λάθος».*

Η διδακτική μέθοδος που ακολουθήσαμε στην παρέμβασή μας ήταν καθοριστικής σημασίας για κείνη, αλλά και για άλλους μαθητές, γιατί όπως μας είπε *«μετά άρχισα να λέω τη γνώμη μου και ας μην ήταν σωστή», «τώρα υπάρχει μια αισιοδοξία ότι μπορώ να τα λύσω* [τα προβλήματα], *τα λύνω με μεγαλύτερη σιγουριά»* μας βεβαίωσε κάποια άλλη μαθήτρια με τα ίδια χαρακτηριστικά ως προς τα συναισθήματά της για το μάθημα.

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα κατέληξαν και οι έρευνες που είχαν ως βασικό χειραπτικό υλικό τα αλγεβρικά πλακίδια. Οι Leinenbach &

Raymond (1996) όπως και η Dyer (1996), παρατήρησαν στις έρευνες τους ότι τα υλικά βελτίωσαν τη συμπεριφορά των αδιάφορων μαθητών απέναντι στο μάθημα της άλγεβρας και η στάση τους έγινε πιο θετική. Οι μαθητές στην έρευνα της Hinzman (1997) σχολίασαν ότι αισθάνθηκαν περισσότερο άνετα με το μάθημα και είχαν ικανοποιητικότερο αποτέλεσμα *«διότι οι δάσκαλοί τους ‘‘γούσταραν’’ τα μαθηματικά και ήθελαν να διδάξουν σε σύγκριση με τους δασκάλους τους της προηγούμενης τάξης»*. Η Goracke (2009) διαπίστωσε ότι *«η χρήση των χειραπτικών υλικών αύξησε την κατανόηση των μαθητών, η οποία με τη σειρά της αύξησε την αυτοπεποίθηση και τη διάθεση τους για μαθηματικά. Οι μαθητές από τη χρήση δεν κέρδισαν μόνο σημαντική εμπειρία που τους επέτρεψε να δημιουργήσουν τη δική τους κατανόηση αλλά τους έδωσε και δυνατότητα κοινωνικοποίησης και άρχισαν να απολαμβάνουν το μάθημα των μαθηματικών»*.

Για τους μαθητές που επαναλάμβαναν την τάξη στην έρευνα της Goldsby (1994) τα υλικά φάνηκε *«να σπάζουν τον κύκλο της φθίνουσας διανοητικής ικανότητας και να τους κάνουν ικανούς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτούς που δεν είχαν αντίστοιχη εμπειρία. Για αυτούς τους μαθητές τα χειραπτικά υλικά έδειξαν ότι αυξάνουν την αυτοπεποίθησή τους για τη μαθηματική τους ικανότητα και τους επιτρέπουν να «γευτούν» κάποιες επιτυχίες»*. Ένας μαθητής μάλιστα είπε χαρακτηριστικά ότι *«μπορούσε να δει το πρόβλημα για πρώτη φορά»*.

Τρεις μαθητές που διδάχθηκαν μόνο την παραγοντοποίηση με τα αλγεβρικά πλακίδια στην έρευνα της Sharp (1995) σημείωσαν καλύτερη επίδοση από ότι συνήθως και ο δάσκαλος σχολιάζοντας το γεγονός πρόσθεσε *«από όλους τους μαθητές μου πιστεύω ότι αυτοί ωφελήθηκαν περισσότερο από τα αλγεβρικά πλακίδια. Συχνά προσπαθούσαν να κάνουν κάτι, οτιδήποτε αρμόζει σε κανόνες ή όχι. Τα αλγεβρικά πλακίδια τους* *παρείχαν αρκετή εννοιολογική κατανόηση ώστε να πειραματιστούν με κάποια επιτυχία. Τους έδωσαν επίσης κάποια κίνητρα που τα χρειάζονται για να πετύχουν».*

Στις έρευνες των Gningue (1998) και Drapac (1980) παρατηρήθηκε ότι κατά τη διάρκεια της παρέμβασης υπήρξε σημαντική μείωση του φόβου για την άλγεβρα με παράλληλη αύξηση της αυτοπεποίθησης των μαθητών για τις ικανότητές τους και αυτό παρέμεινε και μετά το πέρας της όλης διδακτικής πρότασης.

Άποψή μας είναι ότι η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων στις τάξεις των μαθηματικών που μελετήσαμε μπορεί να μην θεράπευσε την «αφηγηματική» ασθένεια από την οποία πάσχει η σχέση δασκάλου-μαθητή σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Freire, 1993) έδειξε όμως να βοηθά πολλούς «βωβούς» μαθητές να βρουν τη φωνή τους (Μαρμαρά, Χατζηκυριάκου, 2007, σελ.496).

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Πιστεύω ότι τα περισσότερα σχολεία σχολεία χρειάζονται αναδιοργάνωση της διδασκαλίας που θα βοηθήσει στο να καταστεί δυνατή η ενεργή μάθηση και αδύνατη η παθητική.

Freudenthal (1973, σελ.62)

1. Σκέψεις και προτάσεις για δυνατότητα αξιοποίησης ευρημάτων της έρευνας

Στο σχεδιασμό ανάπτυξης του Νέου Σχολείου, όπως αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συμπεριλαμβάνεται «η βασική φιλοσοφία της ένταξης χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών». Ως στόχοι μάθησης αναφέρονται επιγραμματικά α) η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης κοινωνικο-πολιτισμικών και ψηφιακών εργαλείων, β) η ικανότητα αλληλόδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες και γ) η ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας, δηλαδή να μπορεί το άτομο να υπερασπίζεται τις απόψεις του, να αναζητά πληροφορίες να κατανοεί και να νοηματοδοτεί την εμπειρία του.

Υπογραμμίζεται επίσης ότι ο μαθητής πρέπει να αποκτήσει «ικανότητα έκφρασης με πολλαπλές αναπαραστάσεις, ικανότητα ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων, όπως επίσης ικανότητα συνεργασίας στο πλαίσιο μιας ομάδας και ικανότητα επικοινωνίας και διατύπωσης συλλογισμών και επιχειρημάτων» (Νέο Σχολείο Πρόγραμμα Σπουδών, σελ. 3-6). Οι στόχοι όμως αυτοί δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθούν μέσα στο διδακτικό πλαίσιο που καθορίζει η μετωπική διδασκαλία, η οποία και αποτελεί και τη βασική μέθοδο διδασκαλίας που εφαρμόζεται σχεδόν από το σύνολο των καθηγητών της μέσης εκπαίδευσης

Η διδακτική μας παρέμβαση με τον τρόπο που σχεδιάστηκε συμπεριέλαβε όλους τους στόχους μάθησης που αναφέρονται στο Πρόγραμμα Σπουδών του Νέου Σχολείου, όπως τους παρουσιάσαμε πιο πάνω. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε, όπως αυτά αναλύθηκαν στο κεφάλαιο πέντε, απαντούν στο μέτρο του δείγματος των είκοσι δύο (22) μαθητών στο αν αυτοί οι στόχοι μπορούν και πως, αν όχι να επιτευχθούν πλήρως, να προσεγγιστούν σε μεγάλο βαθμό.

Η πρόταση διδασκαλίας που εφαρμόσαμε πιστεύουμε ότι βοήθησε τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα να αποκτήσουν με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων ικανότητα να εκφραστούν μαθηματικά αρχικά χωρίς τη χρήση συμβόλων που για τους περισσότερους λειτουργούσαν απωθητικά για το μάθημα. Το ταίριασμα των κομματιών των αλγεβρικών πλακιδίων τους οδήγησε μέσα από προβληματισμό και από ερεθίσματα αμφιβολίας στην ορθή σκέψη και αυτή με τη σειρά της, σύμφωνα με την άποψη που εκφράζεται από τον Peirce (1878, σελ. 2-3), σε *«παραγωγή πεποιθήσεων»* που είναι απαραίτητες για τη βελτίωση της επίδοσης τους στο μάθημα. Στα ερωτηματολόγια αξιολόγησης σημείωσαν οι είκοσι (20) από τους είκοσι δύο (22) ότι θα βαθμολογούσαν τον εαυτό τους με καλύτερο βαθμό από ότι πριν. Ειδικότερα τέσσερις (4) μαθητές σημείωσαν τον χαρακτηρισμό «πολύ καλύτερα», δεκαέξι (16) «καλύτερα» και μόνο δύο (2) μαθητές θεώρησαν ότι η επίδοσή τους χειροτέρεψε.

Άποψή μας είναι ότι η διδακτική μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι κατάλληλη να ενταχθεί ως πλαίσιο διδασκαλίας γιατί χαρακτηρίζεται από ρεαλισμό και δυνατότητα πραγματοποίησης στη σημερινή σχολική πραγματικότητα και αυτήν την άποψη την στηρίζουμε στα εξής:

α) Η διδακτική μας παρέμβαση, ακολούθησε το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας, όπως αυτό προτείνονταν από το (τότε) Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

β) Η «αναστάτωση» της τάξης με το να γίνει το μάθημα δίωρης διάρκειας περιορίστηκε σε μια φορά την εβδομάδα και έτσι αποφεύχθηκαν οι αντιρρήσεις, που εγείρουν ενίοτε οι άλλοι καθηγητές για τη νέα διάταξη των θρανίων. Επιπλέον η ανάληψη ευθύνης για την διάταξη και «επαναδιάταξη» των θρανίων, της μεταφοράς του επιδιασκοπίου στην τάξη από τους ίδιους τους μαθητές στη διάρκεια του διαλλείματος έδωσε στην όλη προσπάθεια μια μορφή συλλογικότητας μεταξύ μαθητών καθηγητών (ερευνήτριας και καθηγητή τάξης).

γ) Τα προβλήματα συντονισμού και συνεργασίας στις ομάδες αντιμετωπίστηκαν με τη συνεχή παρουσία μας ως δασκάλου συμβούλου στους μαθητές και με φύλλα εργασίας που δεν άφηναν χρονικά κενά και περιθώρια για αποσυντονισμό της τάξης. Σε αυτό βοήθησε τα μέγιστα και η «οικειοθελής» συμμετοχή των μαθητών με περιορισμένο ενδιαφέρον στο μάθημα. Τα χειραπτικά υλικά ήταν για αυτούς η «φιλική» λύση προσέγγισης του μαθήματος, η αιτία και το κίνητρο να παραμερίσουν τους ενδοιασμούς για τις δυνατότητές τους, τους φόβους τους για τα μαθηματικά.

δ) Και τέλος, ίσως το κυριότερο, τα φύλλα δραστηριοτήτων που παρουσιάσαμε στην κύρια φάση της έρευνάς μας αποδείχθηκαν αξιόπιστα ως προς τη λειτουργικότητά τους για το μάθημα της άλγεβρας αφού η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία έδειξε ότι παρουσιάζουν πληρότητα και ως προς τον χρόνο και ως προς την κάλυψη του περιεχομένου της κάθε ενότητας σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα που προτείνονταν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Η πρότασή μας επομένως έχει τις παραμέτρους εκείνες που την καθιστούν εφαρμόσιμη στα πλαίσια του ωρολογίου προγράμματος του σχολείου. Το προτεινόμενο πλαίσιο μαθήματος είναι μια πρόκληση για τον δάσκαλο και μια πρόσκληση ενεργούς συμμετοχής και μάθησης για τους μαθητές, οι οποίοι όπως διαπιστώσαμε ήταν πρόθυμοι και έτοιμοι να συνεργαστούν με τους συμμαθητές τους σε ομάδες και να «πάρουν τη μάθηση στα χέρια τους» με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων.

Η μόνη επιφύλαξη που διατηρούμε ως προς την εφαρμογή της είναι το πώς οι δάσκαλοι θα σταθούν απέναντι στο πλαίσιο μαθήματος που προτείνουμε. Πως θα διαχειριστούν την καινούργια πραγματικότητα της τάξης, την όλη διάρθρωση του μαθήματος σε ένα πλαίσιο τελείως διαφορετικό από εκείνο της μετωπικής διδασκαλίας. Οι ίδιες επιφυλάξεις που αφορούν τους δασκάλους διατυπώνονται και από την Seeley (πρόεδρος του NCTM 2004-2006) λέγοντας ότι *«εμπόδιο στην εφαρμογή ενός αντίστοιχου πλαισίου διδασκαλίας είναι και το γεγονός ότι οι δάσκαλοι δεν διδάχθηκαν τον τρόπο να φέρνουν τον μαθητή σε επαφή με μια ποικιλία ενδιαφερόντων και σημαντικών δραστηριοτήτων κατάλληλα δομημένων που θα τον βοηθήσουν να αναπτύξει την έμφυτη κριτική σκέψη και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος»* (1993, σελ. 43-45)

Συνυπολογίζοντας όλες τις παραμέτρους που εξετάσαμε στην έρευνά μας, τους μαθητές, τον δάσκαλο, το κλίμα της τάξης θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι αυτή η διδακτική πρόταση είναι ένα βήμα για μια διδασκαλία με κατανόηση που καλύπτει το μαθησιακό ενδιαφέρον του συνόλου των μαθητών. Είναι κατάλληλη για όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και θα μπορούσε να επεκταθεί και στην πρώτη τάξη του Λυκείου, ιδιαίτερα στην ενότητα που αναφέρεται στην επίλυση και διερεύνηση του τριωνύμου.

Η έρευνά μας βέβαια όπως και σχεδόν όλες οι άλλες που αναφέραμε δεν μπόρεσε να δώσει σαφή απάντηση για τον βαθμό που αυτή η διδακτική μας παρέμβαση επηρέασε την επίδοση των μαθητών. Πρέπει να λάβουμε όμως σοβαρά υπόψη ότι η διάρκειά της ήταν περιορισμένη στα στενά πλαίσια μιας σχολικής χρονιάς και από αυτήν τη σκοπιά η παρέμβαση ήταν αδύναμη για να ανατρέψει τις παγιωμένες αρνητικές θέσεις, που αποκτήθηκαν χρόνια πριν, πολλών μαθητών απέναντι στα μαθηματικά.

Η επίδραση όμως που έχει η εισαγωγή χειραπτικών υλικών στον τομέα επίδοση των μαθητών στο μάθημα θα μπορούσε να αναλυθεί με ασφάλεια, αν υπήρχε η δυνατότητα τα υλικά να ενταχθούν στα μαθηματικά από την πρώτη τάξη του γυμνασίου σε εισαγωγικές αλγεβρικές έννοιες, ή το αργότερο στη δευτέρα γυμνασίου σε μεγαλύτερη έκταση όπως στις πράξεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ή στην επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού και να συνεχιστεί η χρήση τους στην τρίτη τάξη του Γυμνασίου στις ενότητες των ταυτοτήτων, πράξεων στα πολυώνυμα επίλυση εξισώσεων. Η παρακολούθηση της εξελικτικής πορείας της επίδοσης του ιδίου δείγματος μαθητών ή έστω ενός σημαντικού αντιπροσωπευτικού του μέρους θα μας έδινε ασφαλείς πληροφορίες για τον τρόπο και τον βαθμό που την επηρεάζουν.

Οι συνθήκες όμως για μια έρευνα τέτοιας έκτασης μοιάζουν απόμακρες αν συνυπολογιστούν:

α) Οι κτιριακές ανεπάρκειες, δηλαδή μικρές τάξεις που δύσκολα μπορείς να έχεις την επιθυμητή διάταξη θρανίων ώστε να διευκολύνεται η συνεργασία στην ομάδα.

β) Η έλλειψη υλικοτεχνικής υποδομής όπως για παράδειγμα επιδιασκόπιο, ή διαφάνειες για τη χρήση του ακόμη και έλλειψη παροχής ρεύματος μέσα στην τάξη.

γ) Οι δυσκολίες και τα προσκόμματα που τίθενται από τη μεριά της ίδιας της πολιτείας, με σχεδόν απαγόρευση εισόδου στην τάξη για έρευνα αφού η μεγαλύτερη διάρκεια αδείας είναι τέσσερες (4) διδακτικές ώρες για όλη τη σχολική χρονιά.

δ) Η σχεδόν ανύπαρκτη πληροφόρηση και ενημέρωση των δασκάλων πάνω στην εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής με χρήση χειραπτικών υλικών.

ε) Οι αρνητικές αντιδράσεις και η απροθυμία των ίδιων των εκπαιδευτικών να συμμετέχουν ή να συνεργαστούν σε μια αντίστοιχη μέθοδο διδασκαλίας.

Στις οδηγίες του τότε Παιδαγωγικού Ινστιτούτου αλλά και του σημερινού Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής για τους διδάσκοντες τα μαθηματικά του Γυμνασίου διαβάζουμε, ότι «τα μαθηματικά δεν είναι απλά ένα λογικό συνεπές εννοιολογικό σύστημα για την ανάπτυξη αυστηρών αποδείξεων, αλλά είναι πρωτίστως μια δραστηριότητα που πραγματώνεται διαμέσων κατά στάσεων προβληματισμού και μέσα σε ένα περιβάλλον που ευνοεί την ανάπτυξή τους» (Μαθηματικά Γ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού σελ. 13). Η διδασκαλία επομένως θα πρέπει να περιλαμβάνει δραστηριότητες οι οποίες θα ενθαρρύνουν τη συνεργασία και την ομαδική εργασία, η μορφή των οποίων να είναι τέτοια ώστε να παροτρύνουν τους μαθητές σε πνευματικό και διανοητικό ανταγωνισμό. Η σχολική τάξη πρέπει να λειτουργεί ως μια μικρή μαθηματική κοινότητα- εργαστήριο με τελικό ζητούμενο την ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών ως προς τα μαθηματικά. (Μαθηματικά Α Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού σελ. 32).

Αυτή όμως η διδακτική πρόταση παραμένει θα λέγαμε στο επίπεδο του επιθυμητού και όχι σε επίπεδο εφαρμογής αφού ούτε η εργασία σε ομάδες εφαρμόζεται, σχεδόν από το σύνολο των δασκάλων, ούτε βεβαίως δίνονται στους μαθητές «εργαλεία σκέψης», όπως για παράδειγμα τα χειραπτικά υλικά που θα «συμπληρώσουν» τις ομάδες και θα ενθαρρύνουν μέσα από την αλληλόδραση τους μαθητές σε πνευματικό και διανοητικό ανταγωνισμό. Εκτός των άλλων λείπουν και ολοκληρωμένες διδακτικές προτάσεις εφαρμογής για τους δάσκαλους που θα επιθυμούσαν να ακολουθήσουν ένα αντίστοιχο μοντέλο διδασκαλίας.

Παρότι λοιπόν οι εισηγήσεις για αναμόρφωση της μαθηματικής εκπαίδευσης υποστηρίζονται σε ευρεία κλίμακα, ελάχιστα βήματα έχουν γίνει προς αυτήν την κατεύθυνση και κυρίως για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Οι περισσότερες έρευνες που έχουν γίνει, όχι μόνο στην Ελλάδα αλλά και σε παγκόσμια κλίμακα, αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών στις τάξεις του δημοτικού σχολείου. Είναι επομένως αναγκαίο να υπάρξουν έρευνες σε επίπεδο Γυμνασίου οι οποίες να μελετήσουν, στην πραγματικότητα του μέσου Ελληνικού σχολείου, τόσο τα γνωστικά αποτελέσματα όσο και τα αποτελέσματα στη συμπεριφορά των μαθητών όταν αυτοί διδαχθούν τα μαθηματικά σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας με παράλληλη χρήση κατάλληλων χειραπτικών υλικών.

Τα σχέδια μαθήματος που περιγράψαμε διεξοδικά στα προηγούμενα κεφάλαια, τρίτο και τέταρτο, κινούνται μέσα στα πλαίσια των στόχων έρευνας που αναφέραμε πιο πάνω και ευελπιστούμε να χαρακτηριστεί ως παράδειγμα διδακτικής πρότασης. Μιας πρότασης που έχει στόχο τη μάθηση και τη σωστή εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών των ταυτοτήτων, της παραγοντοποίησης και της επίλυσης πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους μαθητές και η οποία συγχρόνως μπορεί για τους δασκάλους των μαθηματικών να λειτουργήσει ως πλαίσιο αναφοράς, ως βάση για τις δικές τους αποφάσεις πάνω στη μέθοδο μάθησης που εκείνοι θα επιλέξουν.

Στην έρευνά μας αυτή καταλήξαμε σε ορισμένα συμπεράσματα τα οποία αναλύσαμε σε σημαντικό βαθμό στο κεφάλαιο πέντε. Αυτά όμως για να αποκτήσουν επαρκή βαθμό βαρύτητας, θα πρέπει να επιβεβαιωθούν περαιτέρω με έρευνες κυρίως πάνω στην επίδραση της χρήσης των αλγεβρικών πλακιδίων σε ότι αφορά την επίδοση των μαθητών στο μάθημα, έναν τομέα στον οποίον η έρευνά μας δεν μπόρεσε να απαντήσει με κατηγορηματικό τρόπο. Θα ήταν επίσης χρήσιμο να διερευνηθούν διεξοδικότερα σε επίπεδο Γυμνασίου οι επιπτώσεις που έχει το μοντέλο της μετωπικής διδασκαλίας, που κατά τους Dewey (1904/1964) και Romberg (1983) δίνει *«έμφαση στην απορρόφηση μιας εγγραφής γνώσεων»,* στη μάθηση και στη συμπεριφορά των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών καθώς και η μορφή των παρεμβάσεων που θα βοηθήσουν οι επιπτώσεις αυτές να ξεπεραστούν.

Η αλλαγή του διδακτικού μοντέλου βέβαια απαιτεί την ύπαρξη απαντήσεων σχετικά με τα ποία σημεία της διδασκαλίας πρέπει να αναμορφωθούν και πώς. Άποψη της Ball (1992), αλλά και δική μας συγχρόνως, είναι ότι το *«όραμα της αναμόρφωσης της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης δεν μπορεί να περιλαμβάνει μόνο τον προβληματισμό πάνω στα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν αλλά πρέπει να αφορά την ύλη που θα επιλεγεί να διδαχτεί, τον τρόπο διδασκαλίας, σε ποιον θα απευθύνεται και με τι είδος περιβάλλοντος τάξης»*.

Ο Confrey (1997, σελ. 43) υποστηρίζει ότι *«από το μάθημα της άλγεβρας του σήμερα, πρέπει να εξαλειφθούν οι προπαρασκευασμένες και χωρίς νόημα ασκήσεις, να μειωθεί ο χειρισμός των συμβόλων και ταυτόχρονα να δοθούν στον μαθητή ευκαιρίες να ανακαλύψει τις αλγεβρικές έννοιες, να τις εξερευνήσει και να βγάλει τα συμπεράσματά του»*. Οι Romberg και Kaput (1999, σελ. 4) υποστηρίζουν τη θέση του Confrey αφού θεωρούν ότι *«η παραδοσιακή διαδικασία χειρισμού συμβόλων συνεπάγεται μόνο την ανάπτυξη μιας συλλογής ρουτινών χωρίς να υπάρχει περιθώριο για εφευρετικότητα ή κλίση, καθόλου χώρος για υπόθεση ή έκπληξη, καμιά ευκαιρία για ανακάλυψη. Στην πραγματικότητα καμιά ανάγκη για τον άνθρωπο»*. Η Schram (1988, σελ. 3), θεωρεί ότι *«στόχος της διδασκαλίας μας πρέπει να είναι ο μαθητής να μελετήσει τρόπους που έχουν νόημα στα μαθηματικά, να ανακαλύψει διαδικασίες για να λύνει καινούργια προβλήματα και να δομήσει μοντέλα για να κατανοεί μαθηματικές καταστάσεις»*

Συμφωνώντας λοιπόν με τις απόψεις των Ball (1992), Confrey (1997) και Schram (1988), που προαναφέραμε, θα συμπληρώναμε ότι η ανακάλυψη των αλγεβρικών εννοιών από τον μαθητή θα διευκολυνθεί αν η γεωμετρική παράσταση συνυπάρχει αναπόσπαστα της συμβολικής στη διδασκαλία του μαθήματος. Για τον σκοπό αυτόν η παρουσία χειραπτικών υλικών και ειδικότερα όπως αναδείξαμε στην έρευνά μας, των αλγεβρικών πλακιδίων, παίζει καθοριστικό ρόλο.

Στον σχεδιασμό του Νέου Σχολείου, όπως αποκαλείται από το Υπουργείο Παιδείας, αναφέρεται ρητά ότι στόχος στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η χρήση χειραπτικών υλικών. Στα καινούργια βιβλία υπάρχουν αναφορές στη γεωμετρική διάσταση του πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων και των ταυτοτήτων, ενότητες που μελετήσαμε και εμείς, όπως και μια σειρά ασκήσεων που δίνονται με τη γεωμετρική έκφραση του προβλήματος. Εκείνο όμως που λείπει από το βιβλίο του δασκάλου, το οποίο θελήσαμε και μείς να προσεγγίσουμε με την έρευνα αυτή, είναι το «συγκεκριμένο» στην πληροφορία, δηλαδή η περιγραφή του περιβάλλοντος τάξης, των υλικών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές για εξερεύνηση και ανακάλυψη καθώς και τα χαρακτηριστικά του ρόλου του δασκάλου ως συντονιστή μάθησης. Λείπει επιπλέον η σχετική καθοδήγηση, όπως επισημαίνει και η Frei (2007, σελ. 9) στο βιβλίο της «Teaching Mathematics Today» για το *«πώς να απευθύνεσαι στους μαθητές με διαφορετικό στυλ μάθησης, πώς να δημιουργηθεί επαφή με τους μαθητές, πώς να ενσωματώσεις υλικά και πώς να διαφοροποιήσεις τη διδασκαλία σου βασιζόμενος στις πολλαπλές εξατομικευμένες ανάγκες μάθησης που μόνο ο δάσκαλος βλέπει στην τάξη του»*.

Στην έρευνά μας προσεγγίσαμε πολλά από τα παραπάνω όπως την επαφή με τους μαθητές, τις ενσωματώσεις υλικών, τις διαφοροποιήσεις στη διδασκαλία, άλλα αρκετά, άλλα λίγο και άλλα καθόλου. Στον περιορισμό χρόνου και δείγματος που είχαμε, καταλήξαμε σε κάποια συμπεράσματα που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο πέντε, τα οποία όμως θεωρούμε ότι θα πρέπει να μελετηθούν διεξοδικότερα σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Γνώμη μας είναι μια μελλοντική έρευνα να μελετήσει στο ίδιο δείγμα μαθητών από την πρώτη έως την τρίτη Γυμνασίου την επίδραση της χρήσης χειραπτικών υλικών στη μάθηση αλγεβρικών εννοιών στην επίδοσή τους στο μάθημα και στη συμπεριφορά τους απέναντι στα μαθηματικά, ώστε τα συμπεράσματα που θα προκύψουν να χαρακτηρίζονται για την σαφήνεια και αξιοπιστία τους.

Η έρευνα αυτή ευελπιστούμε ότι έδωσε μια θετική απάντηση στην εκφρασμένη αρνητική θέση των δασκάλων, που προτάσσουν τη φασαρία και τη δύσκολη διαχείριση τάξης για την εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας και στο εφικτό της χρήσης χειραπτικού υλικού στο επίπεδο της τάξης της τρίτης γυμνασίου. Εμείς θα τη χαρακτηρίζαμε ως ένα πρώτο βήμα προσέγγισης των στόχων μάθησης, όπως αυτοί περιγράφονταν στο αναλυτικό πρόγραμμα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, που χρειάζεται όμως την υποστήριξη περαιτέρω ερευνών για να αντιμετωπιστούν τυχόν αδυναμίες ή παραλείψεις.

2. Γενική επισκόπηση της όλης έρευνας

Η παρούσα έρευνα επεδίωξε να προσδιορίσει την επίδραση που έχει η χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων τόσο στην κατανόηση και μάθηση των αλγεβρικών εννοιών, όσο και στη συμπεριφορά και τα συναισθήματα των μαθητών απέναντι στο μάθημα.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η χρήση των χειραπτικών υλικών σε ένα ομαδοσυνεργατικό περιβάλλον διδασκαλίας, έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην ανάπτυξη της κατανόησης και της εμπιστοσύνης των μαθητών αφού περιόρισε τις δυσκολίες στη μάθηση των καινούργιων αλγεβρικών εννοιών. Τα συμπεράσματα, που προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, δείχνουν ότι για τη βελτίωση της διδακτικής προσέγγισης του μαθήματος *«σήμερα δεν επαρκεί μόνο να ''δούμε'' την άλγεβρα διαφορετικά αλλά πρέπει να τη ''φωτίσουμε'' και διαφορετικά»,* όπως αναφέρουν οι Williams και Molina (1996). Η θέση τους λοιπόν ότι *«η άλγεβρα πρέπει να στοχεύει σε τρόπους επίλυσης παρά σε τρόπο επίλυσης προβλήματος ώστε να εφοδιάζονται οι μαθητές με πολλαπλές στρατηγικές»* και ότι οι μαθητές *«έχουν ανάγκη να τους παρέχονται ευκαιρίες να πειραματιστούν, να συγκεντρώσουν δεδομένα, να αναλύσουν δεδομένα και να εξάγουν λογικά συμπεράσματα βασισμένα στα ευρήματά τους»* μας βρίσκει απόλυτα σύμφωνους. (1996, σελ. 42, Williams & Molina).

Άποψή μας είναι ότι δεν αρκεί ένα καλοτυπωμένο βιβλίο άλγεβρας με ελκυστικά χρώματα και εικόνες για τον μαθητή και οι όμορφα θεωρητικά διατυπωμένοι στόχοι στο βιβλίο του δασκάλου για γίνει μια πετυχημένη διδακτική προσέγγιση του μαθήματος. Αυτή για να επιτευχθεί θα πρέπει να αλλάξει ο τρόπος της διδασκαλία της άλγεβρας δηλαδή να μην επικεντρώνεται μόνο στη συμβολική διάσταση των αλγεβρικών εννοιών, όπως γίνεται μέχρι τώρα, αλλά να συνυπάρχει και αναδεικνύεται παράλληλα και η γεωμετρική διάστασή τους, η οποία το συνηθέστερο ή παραλείπεται ή αναφέρεται αποσπασματικά χωρίς ιδιαίτερη τεκμηρίωση, ώστε να εμπεδωθεί στον μαθητή το ισοδύναμο των δύο μορφών τους.

Η αλλαγή αυτή βεβαίως πρέπει να συνοδεύεται και από αλλαγή της στάσης του δασκάλου τόσο απέναντι στο μάθημα όσο και απέναντι στους μαθητές. Θα πρέπει επομένως ο δάσκαλος να είναι ενημερωμένος για το πώς θα δημιουργήσει μια τάξη στην οποία ο μαθητής να ενθαρρύνεται και να θεωρεί αυτονόητο να ρωτά, να αιτιολογεί και να κρίνει. Θεωρούμε ταυτόχρονα αναγκαίο να αναθεωρήσει τη θέση που λέει, ότι η επιτυχία του μαθητή στην άλγεβρα κρίνεται από τη δεξιοτεχνία του χειρισμού των συμβόλων, γιατί κατά την εκτίμησή μας στις περισσότερες των περιπτώσεων ο χειρισμός αυτός γίνεται χωρίς την κατανόηση των συμβολικών παραστάσεων. Η Schram (1988, σελ. 2) είναι της άποψης, που βρίσκει και εμάς σύμφωνους, ότι ένα τέτοιο πλαίσιο διδασκαλίας κάνει τους μαθητές, να βλέπουν το μάθημα της άλγεβρας *«ως συλλογή πρακτικών και κανόνων χωρίς νόημα μόνο για απομνημόνευση τους οποίους ''αρχειοθετούν'' για μια προσεχή αναφορά»*.

Αντίθετους βεβαίως μας βρίσκει και η θέση εκείνων που θεωρούν τα χειραπτικά υλικά χάσιμο χρόνου και μας εκφράζει η γνώμη του Strom (2009) ότι δηλαδή *«υπάρχει διαφορά ανάμεσα στο χάσιμο χρόνου ''παίζοντας'' με τα κατάλληλα χειραπτικά υλικά ένα δυναμικό διδακτικό εργαλείο που κάνει τα μαθηματικά προσιτά σε όλους τους μαθητές»*. Συμφωνούμε παράλληλα και με την άποψη της Thompson (1994, σελ. 3) ότι *«η χρήση και μόνο χειραπτικών υλικών στην τάξη δεν είναι αρκετή για να εγγυηθεί την επιτυχία στους στόχους του μαθήματος. Για να καταλάβουμε την αποτελεσματική χρήση τους πρέπει παράλληλα να κοιτάξουμε το συνολικό διδακτικό περιβάλλον. Ειδικότερα θα πρέπει να γνωρίσουμε τις εντυπώσεις των δασκάλων σχετικά με αυτό που επιδίωκαν να διδάξουν όπως και τις εντυπώσεις των μαθητών από τις δραστηριότητες με τις οποίες τους ζητήθηκε να ασχοληθούν»*.

Έτσι δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι τα χειραπτικά υλικά μπορεί να είναι μια αποτελεσματική βοήθεια για τον τρόπο σκέψης των μαθητών και για τη διδασκαλία αλλά η αποτελεσματικότητα τους είναι εξαρτημένη από το τι εσύ ως δάσκαλος προσδοκάς να πετύχεις. Επομένως *«για να πάρεις το μέγιστο όφελος από τη χρήση των υλικών από τους μαθητές σου, πρέπει διαρκώς να ρυθμίζεις τις πράξεις σου έτσι ώστε να αποτελούν απάντηση στην ερώτηση ‘‘τι πραγματικά θέλω εγώ από τους μαθητές μου να κατανοήσουν’’»* (Thompson, 1994, σελ. 10).

Τα όποια θετικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την έρευνά μας ήταν άρρηκτα συνδεδεμένα με την ομαδοσυνεργατική μάθηση. Το μαθησιακό αυτό μοντέλο κατά την Burke (2008, σελ. 58) αποτελεί σήμερα *«μια από τις πιο επιτυχημένες μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι για να επιτρέψουν στους μαθητές να αλληλοδράσουν και να μάθουν με άτομα ομότιμα, αφού περιλαμβάνει και την εγκεφαλο-συμβατή θεωρία (brain-compatible) και την θεωρία συναισθηματικής ευφυΐας (emotional intelligence)»*.

Οι καθηγητές, με τους οποίους συζητήσαμε κατά τη διάρκεια των πιλοτικών μας παρεμβάσεων, όσο και ο καθηγητής που συμμετείχε στην κύρια παρέμβασή μας εξέφρασαν τις επιφυλάξεις τους ως προς την εφαρμογή από τους ίδιους της ομαδοσυνεργατικής μεθόδου διδασκαλίας. Οι ενστάσεις τους επικεντρώθηκαν, στη δυσκολία τους να οργανώσουν και να διαχειριστούν τη νέα μορφή τάξης, και στο γεγονός ότι η ομαδική εργασία είναι θορυβώδης, απαιτεί χρόνο και συχνά φαίνεται να μην οδηγεί πουθενά. Πολλοί δάσκαλοι ήταν της γνώμης ότι *«είναι πιο εύκολο να λες απλά στους μαθητές παρά να τους αφήσεις να παραδέρνουν». «Οι δάσκαλοι όμως που είναι πρόθυμοι να λειτουργήσουν μέσω αυτών των προβλημάτων τα οφέλη που έχουν οι μαθητές σε ότι αφορά την κατανόηση μπορεί να είναι σημαντικά και μακροχρόνια»* επεσήμανε ο Silver (1990, σελ. 32) και είμαστε απολύτως σύμφωνοι με τη γνώμη του.

Η ερευνήτρια δεν ισχυρίζεται ότι τα αλγεβρικά πλακίδια είναι η μοναδική μέθοδος για να διδαχθούν οι προαναφερθείσες αλγεβρικές έννοιες. Τα αλγεβρικά πλακίδια μπορεί να είναι προαιρετικά. Η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και με χρήση αντιστοίχων προγραμμάτων στον υπολογιστή που θα δώσει μεγαλύτερες δυνατότητες ανάπτυξης υψηλοτέρου επιπέδου συλλογιστικής δεξιότητας. Δάσκαλοι όμως και μαθητές χρειάζονται χρόνο να μάθουν να λειτουργούν με τον καλύτερο επιθυμητό τρόπο με τα καινούργια προγράμματα μαθημάτων και διδακτικών μεθόδων.

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

Adler, J. (1998). *Lights and limits: Recontextualising Lave and Wenger to theorize knowledge of teaching and of learning school mathematics*. In Watson, A. (Ed.) Situated cognition and the learning of mathematics. Centre for Mathematics Education Research. University of Oxford, Department of Educational Studies. Oxford. pp. 161-177.

Adler, J., (1999). *The Dillema of Transparency: Seeing and Seening Through Talk in the Mathematics Classroom.* Journal for Research in Mathematics Education Washington: Jan. 1999, Vol. 30 Iss. 1, p. 47 (18pp)

Allan, S., D. (1991) .*Ability Grouping Research Reviews: What Do They Say about Grouping and the Gifted*? Educational Leadership, 48(6), 60-65.

Anthony, G.(1996). *When Mathematics Students Fail to Use Appropriate Learning Strategies.* Mathematics Education Research Journal, Vol. 8,
No. 1, 23-37

Allen, C. (2007). An action based research study on how using manipulatives will increase students achievement in Mathematics. Marygrove College.

Ashcraft, M., Kirk, E. (2001). *The Relationship Among Working Memory Math Anxiety and Performance*. Journal of Experimental Psychology: General. 2001, Vol. 130, No. 2, 224-237.

Ashcraft,M. (2002). *Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences*. Current Directions in Psychological Science. Vol. 11, No 5, 181-185.

Ayers, M. (1999). Locke Routledge N.Y

Ball, D. (1992). *Magical hopes. Manipulatives and the reform of math education*. American Educator, 16, 14–18, 46–47.

Balter, L., Tamis-LeMonda, K. (2003). Handbook of Contemporary Issues. Psychology Press.

Bandura, A. (1994). *Self-efficacy*. Encyclopedia of human behavior Vol. 4, pp. 71-81). New York: Academic Press.

Banks, J., & McGee Banks, C. (2004). Handbook of Research on Multicultural Education. By Jossey- Bass.

Barclay, J. (1992). A Study of a Manipulative Approach to Teaching Linear Equations to Sixth Grades Students. Masters Degree Dissertation, Texas Woman's University, Denton Texas.

Barnes, M. (2000). *Effects of Dominant and Subordinate Masculinitiew on Interactions in a Collaborative Learning Classroom.* London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning.

Baturo, A., Cooper T., & Thompson, K. (2003). *Effective Teaching with Visual Materials:Years Six and Seven Case Studies.* Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference Volume 4.

Bigge, M. (1982). Learning Theories for Teachers. Harper & Row, Publishers, New York.

Bishop, A., J., Conffree, F. (1986). Perspectives on Mathematics Education. Kluwer Akademic Publishers.

Brenner, M., E. (1995). *The role of Multiple Representations in Learning Algebra.* Annual Meating of the North American Chater of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Brody, C., Davidson, N. (1998). Professional Development for Cooperative Learning: Issues and Approaches. Published by State University of New York Press, Albany.

Brophy, J. (2010). Motivating Students to Learn. Routledge.

Boaler, J. (1977). The development of Disciplinary Relationships: Knowledge, Practice, and Identity in Mathematics Classrooms. U.S Department of Education. (ED 476091).

Boaler, J, William, D., Zevenbergen, R. (2000). The Construction of identity in Secondary Mathematics Education.U.S Department of Education (ED.482654).

Boaler, J., Greeno, J. (2000). *Identity, Agency, and Knowing in MathematicsWorlds.* London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning.

Boaler, J. (2003). Studying and Capturing the Complexity of Practice--The Case of the "Dance of Agency" (ED500873). International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13-18, 2003), Vol. 1, pp. 3-16.

Booth, L. (1988). *Children's Difficulties in Beginning Algebra*. The Ideas of Algebra, K-12. National Council of Teachers of Mathematics. Yearbook 1988.

Borkowski, M. (1995). Motivation in Mathematics. Martha Carr New York Hampton Press.

Brandt, R., (1998). Powerful Learning. Association for Supervision and Curriculum Development. (σελ.5-11)

Brown, A., L., Campione, J., C. (1977). *Memory Strategies in Learning:Training Children to Study Strategically*. Technical Report No. 22. National Inst. of Education (DHEW), Washington, D.C.

Bruner, J., S. (1956). A Study of Thinking. Science Editions, INC. New York.

Bruner, J., S. (1960). The Progress of Education. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bruner, J., S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Burke, K. (2008). What to Do with the Kid who … developing Cooperation, self-Discipline and Responsibility in the Classroom. Corwin Press.

Burton, W. (1958). *Basic Principles in a Good Teaching-Learning Situation* What Research Says about Teaching and Learning. (Mar., 1958), pp. 242-248 Phi Delta Kappa International.

Callaway, W. (2001). Jean Piaget: a most outrageous deception. Nova Science Publishers,Inc.

Campione, J., Brown, A., Connell, M. (1988). *Metacognition: On the Importance of Understanding What you are doing in the Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Edited by Randall I Charles and Edward A Silver, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carter, C., Yackel, E. (1989). A Constructivist Perspective on Relationship Between Mathematical Beliefs and Emotional Acts. Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco, 1989.

Chamberlin, S. (2010). *A Review of Instruments Created to Assess Affect in Mathematics*. Journal of Mathematics Education, Vol. 3, No. 1, pp. 167-182.

Chazan, D. (1994). *Algebra for all Students?* National Center of Research on Teacher Learning, East Lansing, MI.

Clements, D. H. (1999). ‘‘*Concrete*’’ *manipulatives, concrete ideas*. Contemporary Issues in Early Childhood, 1(1), 45-60.

Clements, D., H. & McMillen, S. (1996). *Rethinking Concrete Manipulatives*. Teaching Children Mathematics, *2(5), 270-279* by the National Council of Teachers of Mathematics.

Confrey, J. (1990). *What Constructivism Implies for Teaching.* Journal for
Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 4 Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, 107-122.

Confrey, J. (1997). *What Do We Know about K-14 Students Learning of Algebra*. The Nature and the Role of Algebra in the K-14 Curriculum. National Academy Press.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., (1992). *A Constructivist Alternative to the Representational View of Mathematics Education.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 23, No. 1, (Jan., 1992), pp. 2-33.

Damon, W. (1984). *Peer Education: The Untapped Potential*. Journal of Applied Developmental Psychology Vol. 5, Issue: 4, Pages: 331-343.

Davidson, N., Kroll, D., L. (1991). *An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics.* Journal for Research in Mathematics Education Vol. 22, No. 5, pp. 362-365.

Davidson, J., Sternberg, R (2003). The Psychology of Problem Solving Cambridge University Press.

Davis, R., Maher, C. (1977). *How Students Think. Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images.* London: Lawrence Erlbaum Associates.

Delisio, E., R. (2002). Sheila Tobias on re-thinking teaching math, science. Education World. http://www.education-world.com/a_curr/profdev026.shtml

Devlin, K. (2000). *Finding your inner mathematician.* The Chronicle of Higher. Education, 46, B5.

Dewey, J. (1933). *How We Think,* p.137. Boston: D.C. Heath & Co.

Dewey, J. (1964). *The Relation of Theory to Practice in the Education of Teachers.* National Society for the Scientific Study of Education.

Dewey, J. (1943). *The Child and the Curriculum. The School and Society.* The University of Chicago Press.

Dewey, J. (1897). *My Pedagogic Creed*. School Journal Vol. 54 (January 1897), pp. 77.

Dienes, Z., P. (1960). Building Up Mathematics. London: Hutchinson Educational.

Dienes, Z., P. (1964). The Power of Mathematics. London: Hutchinson Educational.

Dienes, Z., P. (1964). An Experimental Study of Mathematics Learning. London: Hutchinson Educational.

Drapac, Waite, Gloria, Lynne (1980). Development of Manipulative Materials for Elementary Algebra for College Students and Evaluation of their Effect on Achievement, Attitude toward Mathematics and Math Anxiety.

Driscoll, M. (1982). Research within Reach: Secondary school Mathematics. St. Louis*:* CEM-REL Inc.

.Dutton, W., H. (1954). *Measuring Attitudes toward Arithmetic*. Elementary School Journal, 54, 24-31.

Dyer, L. (1996). *An investigation of use of the algebra*. Dr. University of Missouri-St. Louis.

Edgeworth, M., & Edgeworth, P. (1815). Practical Education. J. Francis Lippitt, Providence, (R. I.) and T. B. Wait & Sons, Boston.

English, L. (1997). *Children's Reasoning Process in Classifying and Solving Computational Word Problems.* Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors, and Images. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P., S. (1994). *Evaluation of the Effectiveness and Implementation of a Math Manipulatives Project.* Nasville, TN: Annual Meeting of the Mid-South Education Research Association (ERIC Document ED 391675)

Evans, J., (2000). Adult's Mathematical Thinking and Emotions. A Study of Numerate Practices. Routledger Falmer N.Y.

Fennema, E., Carpenter, T. (1991). *Research and Cognitively Guided Instruction.* Intergrating Research on Teaching and Learning Mathematics. State University of New York Press.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M. (1997). *Teachers Creating Change: Examining Evolving Beliefs and Classroom* Practice. Mathematics Teachers in Transition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fennema, E., Carpenter, T., Hiebert, J., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1999). *Learning Basic Number Concepts and Skills as Problem Solving*. Mathematics Classrooms that Promote Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fillou, E. & Sutherland, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. *International Handbook of Mathematics education* 139-160. Kluwer Academic Publishers Netherland.

Frei, S. (2007). Teaching Mathematics Today. Professional Development for Successful Classrooms, Practical Strategies for Successful Classrooms. Shell Education.

Freire, P. (1993) *Pedagogy of the Oppressed*. Continuum Books, New York.

French, D. (2002). Teaching and Learning Algebra. YHT. Ltd. London

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Kluwer the Language of Science.

Freudenthal, H. (1978). Weeding and Sowing Preface to a Science of Mathematical Education. Reidel Publishing Company. Holland.

Fuson, K. (1986). *Roles of Representation and Verbalization in the Teaching of Multi-Digit Addition and Subtraction.* European Journal of the Psychology of Education. Vol. 1, No. 2, pp. 35-56.

Gagne, M., R. (1970). The Condition of Learning. Holt, Rinehart and Wilston, Inc. New York.

Gamoran, A., Porter, A., Smithson J., White P. (1997). *Upgrading High School Mathematics Instruction: Improving Learning Opportunities for*

Low-Achieving, Low-Income Youth. Educational Evaluation and Policy Analysis Vol. 19, No. 4, pp. 325-338

Gardner, H. (1993). Multiple Intelligences, New Horizons. Basic Book. New York

Garrity, C. (1998). Does the Use of Hand-On Learning, with Manipulatives Improve the Test Scores of Secondary Education Geometry Students? Dr. Saint Xavier University of Chicago, Illinois (ED 422179).

Gattegno, C. (1970). What We Owe Children the Subordination of Teaching to Learning. Outerbridge & Dienstfrey New York.

Glasersfeld, E. (1989). An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical. National Science Foundation, Washington, D.C. (ED 309935).

Glasersfeld, E. (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gningue, M., S. (2000). *The use of manipulatives in middle school Algebra: an application of Dienes variability principles.* Dr. Columbia University.

Goins, K., B. (1977). *Comparing the effects of visual and algebra tile manipulative methods on student skill and understanding of polynominal multiplication.* Ph. D. South Carolina University.

Goldsby, D. (1996). *The effect of algebra tile use on polynomial factoring ability of Algebra I students.* Dr. University of New Orleans.

Goldsmith, L., Shifter, D. (1997). *Understanding Teachers in Transition: Characteristics of a Model for the Development of Mathematics Teaching.* Mathematics Teachers in Transition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Goracke, M., A. (2009). *The Role of Manipulatives in Eighth Grade Mathematics Classroom.* Math in the Middle Institute Partnership. Action Research Project Report. University of Nebraska-Lincoln.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). *Hans Freudenthal: a Mathematician on Didactics and Curriculum Theory.* Curriculum Studies, Vol.32, No 6, p.p 777-796.

Graves, T. (1991). *The Controversy over Group Rewards in Cooperative Classrooms*. Educational Leadership 48 (7), 77-79.

Grows, D., Cebulla, K. (2000). Improving Student Achievement in Mathematics. Educational Practices Series 4. International Bureau of Education (IBE) Geneva.
(ED445925).

Hall, E. (2004). Strategie of Teaching Mathematics. Corrine Burton M. A. Ed.

Haylock, D. (1991). Factor in Low Attainment in Mathematics. Teaching Mathematics in Low Attainers, pp. 8-12.

Haury, D., L. & Rillero, P. (1994). *Perspectives of Hands-On Science Teaching*. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education, Columbus, Ohio.

Heddens, J. (1986). *Bringing the gap between the concrete and the abstract*. Arithmetic Teacher, 33(6), 14-17.

Heddens, J. (1997). *Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives*. Kent State University. Ανακτήθηκε στις 7/12/2008 www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html.

Hembree, R., (1990). *The Nature Effects and Relief of Mathematics Anxiety*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21, No.1, 33-46.

Hiebert, J. (1997). *Aiming Research toward Understanding: Lessons we can learn from Children Mathematic* Education as a research domain: A Search for Identity. Kluwer Academic Publishers.

Hinzman, K. (1997). *Use of Manipulatives in Mathematics at the Middle School Level and Their Effects on Students Grades and Attitudes.* Ph.D. Salem-Teikyo University.

Hoek, D. & Seegers, G. (2005). *Effects of Instruction on Verbal Interactions During Collaborative Problem Solving.* Learning Environments Research January 2005, Vol. 8, Issue 1, pp 19-39.

Howden, H. (1984). *Algebra tiles for the overhead projector*. New York: Cuisenaire Company of America, Inc.

Howden, H. (1986). *The role of manipulatives in learning mathematics*. Insights into Open Education, 19 (1), 1.

Idris, N. (2005). Teaching and Learning of Mathematics. Making Sense and Developing Cognitive Abilities. Utusan Publication & Distributors Sdn Bhd.

Jacobs, G., M., Lee, C, & Ng, M. (1997). *Co-operative learning in the thinking classroom*. Paper presented at the International Conference on Thinking, Singapore.

Jakob, E. (1999). Cooperative Learning in Context. En Educational Innovation in Everyday Classrooms. State University of New York Press, Albany.

Jameson, M. (2010). *Math Anxiety: Theoretical Perspectives on Potential Influences and Outcomes.* Anxiety in Schools. The Causes Consequences and Solutions for Academic Anxieties. Peter Lang Publishing Inc. New York

Jennison, M., Beswick, K. (2010). *Student Attitude, Student Understanding and Mathematics Anxiety*. Mathematics Education Research Group of Australasia (ED520908).

Johnson, D., Johnson, R. (1975). *Effects of Cooperative, Competitive and Individualized Goal Structures on Learning Outcomes.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Psychological Association. New Orleans (ED101854).

Johnson, D., Ahlgren, A. (1976). *Relationship between student attitudes about cooperation and competition and attitudes toward schooling.* Journal of Educational Psychology, Vol. 68 (1), pp. 92-102.

Johnson, D. (1982). Interdependence *and Interpersonal Attraction among Heterogeneous and Homogeneous Individuals: A Theoretical Formulation and a Meta-Analysis of Research*. National Institute of Education. Washington.

Johnson, D., Johnson, R., Holubec, E., Roy, P. (1984). *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, VA (ED241516).

Johnson, D., Johnson, R. (1993). *Introduction to Cooperative Learning*. Cooperative Learning Institute and Interaction. Book Company.

Johnson, D., Johnson, R., & Smith (1998). Cooperative Learning. Cooperative Learning Institute and Interaction. Book Company

Johnson, D., Johnson, R. (1999). *What Makes Cooperative Learning Work*. Cooperative Learning. JALT Applied Materials. Opinion Papers (ED437841).

Johnson, D., Johnson, R., & Smith (1998). Cooperative Learning. University Of Minnesota.

Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson, Skon, (1981). *Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A meta-analysis.*
Psychological Bulletin, Vol. 89(1), Jan 1981, 47-62.

Jones, S. (1998). The role of manipulatives in introducing and developing mathematical concepts in elementary and middle grades. Resource room: Math-research analysis, manipulatives &middle/secondary math.

Kalchman, M., & Koedinger, K. (2005). *Teaching and Learning function.* How Students Learn Mathematics. History, Mathematics and Science in the Classroom.The National Academies Press Washington, D.C.

Kamil, C. (1975). *Pedagogical Principles Derived from Piaget's Theory: Relevance for Educational Practice.* Curriculum Design by Golby M., Greenwald J., West R. The Open University. London

Karten, T. (2010. Inclusion Strategies That Work! Research-Based Methods for the Classroom. Corwin A SAGE Company

Kieran, K. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 390-419.

Kieran, K. (2004). *The Core of Algebra Reflection on its Main Activities*. The Future of Teaching and Learning Algebra. Kluwer Academic Publishers.

Killen, R. (2006). *Foundation for Quality Teaching and Learning*. Effective Teaching strategies. Lessons from Research and Practice. Thomson Social Science Press.

Knowles, M. (1973). The Adult Learner: A Neglected Species. Gulf Publishing Company Houston (ED084368).

Lambert, L. (2002). The Constructivist Leader. Published by Teacher College Press Columbia University.

Lambert, M. (1990). *When the Problem is not the Question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching.* American Educational Research Journal, Vol. 27, No. 1, pp. 29-63.

Lappan, G., Even, R. (1989). *Learning to Teach: Meaningful Understanding of Mathematics Content.* National Center for Research on Teacher Education, Michigan State University.

Lave, J., Wenger, E. (1991). Situated Learning. Legitimate Peripheral participation, Cambridge: University of Cambridge Press.

Lefrancois, G. (2011). Theories of Human Learning: What the Professor Said. Wadsworth. Belmont USA.

Lerman, (2000). *The social turn in mathematics education research.* London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning.

Lesh, R., Carmona, G., Post, T. (2002). *Models and Modelling*. Proceeding of the Annual Meeting for Psychology of Mathematics Education. 11p. Vol. 1-4 (ED 471752).

Locke, J., (1796). An Essay Concerning Human Understanding. Thomas Longman London.

Lodholz, R. (1990). *The Transition from Arithmetic to Algebra*. Algebra for Everyone. The National Council of Teachers of Mathematics.

Lopez, D., Schroeder, L. (2008). Designing Strategies that Meet the Variety of Learning Styles of Students. An Action Research Project. Saint Xavier University, Chicago, Illinois.

Loewenberg, D., Bass, H. (2000). *Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics*. London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning

Madsen, A., L., Lanier, P., E. (1992). *The effect of Conceptually Oriented Instruction on Students Computation Competencies.* Institute for Research and Teaching, Michigan State University, East Lansing, MI.

MacGregor, J. (1997). *Collaborative Learning: Shared Inquiry as a Process of Reform.* Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics. The Mathematics Association of America.

Martin, T., & Schwartz, D. (2005). Physically distributed learning: adapting and reinterpreting physical environments in the development of fraction concepts. *Cognitive Science, 29*(4), 587-625.

McCalip Dell' Isola, Ida (1999). *An investigation of the use of algebra tiles to introduce the basic concepts of integers, equations and polynomials in community college developmental algebra classes*. Dr.Tennessee, Knoxville University.

McClung, L.,W. (1998). *A study on the use of manipulatives and their effect on student achievement in a high school Algebra I class*. Ph.D. Salem-Teikyo University.

Marsh*, L., G., &* Cooke*, L., C. (*1996*). The effects of using manipulatives in teaching math problem solving* to *students with learning disabilities*. Learning Disabilities Research and Practice, 11(1), 58-65.

Meira, L. (1998). *Making Sense of Instructional Device: TheEmergenceof Transparency in Mathematical Activity*. Journal for Research in Mathematical Education, Vol. 29, No. 2 (Mar., 1998), 121-142.

Miller, K., Rule, A., MacEntee, V. (2008). Teaching High School Age Students with Special Needs the Four Situations for Subtraction. Reports Evaluative (ED 499957).

Mink, D., Hall, E. (2009). Strategies for Teaching Mathematics. Shell Education Publishing Inc.

Mogari, D. (2004). *Attitudinal Scales Measures in Euclidean Geometry: what they measure?* South Africa Journal of Education Vol. (24), 1-4.

Morgan, C. (2000). *Better Assessment in Mathematics Education? A Social Perspective.* London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning.

Morris, E. (2007). Students Perceptions on the Reduction on Math Anxiety. Dr. Capella University

Moyer, P. (2001). *Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach Mathematics*. Educational Studies in Mathematics 47: 175-197.

Nolting, P. (2002). Winning at Math: Your Guide to Learning through Successful Study Skills. Academic Success Press, Inc.

Ogg, B. (2010). What is the Impact of Math Manipulatives on Student Leaning? Dr. Ohio University.

Orton, A., Orton, D., Frobisher, L., J. (2005). *Learning and teaching elementary algebra.* Insights into Teaching Mathematics.

Pape, S., Tchoshanov, M. (2001). *The Role of Representation(s) in Developing Mathematical* Understanding. Theory into Practice ,Vol. 40, No 2 Realizing Reform in School Mathematics (Spring 2001), pp. 118-127.

Piaget, J. (1935). Science of Education and the Psychology of the Child. New York. Orion Press.

Piaget, J. (1948). To Understand is to Invent. New York. Grossman Publishers 1973.

Peirce, C. (1868). *On a New List of Categories*. Proceedings of the American Academy and Sciences 7 (1868), 287-298.

Peirce, C., (1878). *How to Make Our Ideas Clear*. Popular Science Monthly 12 (January 1878), 286-302.

Peirce, C. (1902). *Three Trichotomies of Signs*. Philosophical Writings of Peirce, by Justus Buchler. Routledge and Kegan Paul Ltd.

Peirce, C. (1991). Peirce on Signs: Writings on Semiotic. By Charles Sanders. The University of North Carolina Press.

Peirce, (2000). Philosophy of Signs: Essays in Comparative Semiotics. By Gerard Deledalle. Indiana University Press.

Picciotto, H. (1996) *Algebra for All?* Teacher's Edition Creative Publications. California.

Pierson, J (1997). *A case Study of the Use of Manipulatives and Technology in High School Mathematics*. Voice of Inquiry in Teacher Education.Lawrence Erlbaum Associates.

Pimm, D. (1995). Symbols and Meanings in School Mathematics. London and New York: Routledge

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* New York- London- Sydney: John Wiley & Sons, Inc.

Post, T. (1992). Teaching Mathematics in Grade K-8. Research-Based Methods. Boston Allyn and Bacon.

Post, T. (1981). *The Role of Manipulative Materials in the Learning of Mathematical Concepts.* In Selected Issues in Mathematics Education (pp. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.

Pritchard, A. (2008). Ways of learning: learning theories and learning styles in the classroom. Routledge.

Raymond, A., M., Leinenbach, M. (1996). *A two Year Collaborative Action Research Study on the Effects of a " Hands-On" Approach to Learning Algebra.* Annual Meeting of Group for the Psychology of Mathematics Education (Panama City, 1996).

Reble, A. (1951). Geschichte der Paedagogik. Ernst Klett Verlage. (Πρώτη έκδοση στα Ελληνικά Εκδόσεις Παπαδήμας 1990 σε μετάφραση Χατζηστεφανίδης, Θ., Χατζηστεφανίδη-Πολυζώη, Σ.).

Richardson, F., & Suinn, R. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric Data. Journal of counseling Psychology. Vol.19, No.6, pp. 551-554.

Robinson, A. (1991). Cooperative Learning and Academically Talented Student. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Romberg, T., Kaput, J. (1999). *Mathematics Worth Teaching. Mathematics Worth Understanding.* Mathematics Classrooms that Promote Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sharan, S., Geok-chin Tan, I., Kim-eng Lee, C. (2006). Group Investigation and Student Learning: an Experiment in Singapore Schools. Marsall Cavendish Academic.

Schlechty, P. (2011). Engaging Students: The Next Level of Working on the Work .Published by Jossey-Bass.

Schoenfeld, A.,(1987). Cognitive Science and Mathematics Education. Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1994). *Some Notes on the Enterprise.* Research in Collegiate Mathematics Education. CBMC Issue in Mathematic Education Vol.4. American Mathematical Society in Cooperation with Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (1994). Doing and Teaching Mathematics. Mathematical Thinking and Problem-Solving Erlbaum, Lawrence Associates, Incorporated.

Schoenfeld, A. (2011). How We Think: A Theory of Goal- Oriented Decision Making and its Educational Applications. Routledge.

Schram, P. (1988). Changing Mathematics Conceptions of Pre-Service A Content and Pedagogical Inervention. Teachers Paper presented at Annual Meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, L.A. (Eric Document Reproduction Service No. ED302549)

Schunk, D. (1996). *Self-Efficacy for Learning and Performance*. Annual Conference of American Educational Research Association. New York. (April 1996, ED 394663)

Scott, Nelson, B. (1997). *Learning about Teacher Change in Context of Mathematics Education Reform: Where Have We Come From?* Mathematics Teachers in Transition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Seeley, C. (1993). "*Increasing Access or Ensuring Failure? Policymakers throw a hammer into the wall.*" Proceedings of the Algebra for the Twenty-first Century Conference. Reston, VA: NCTM.

Senk, S., Thompson, D. (2003). Standards-Based School Mathematics Curricula: What are They? What do Students Learn? Mahwah, NJ: Lawrence E. Erlbaum Associates, Publishers, 2003.

Serres, M. (1985). Five Senses: A Philosophy of Mingled Bodies. Translated Sankey, M., Cowley, P., .Continuum International Publishing Group.

Sharp, J. (1995). *Results of Using Algebra Tiles as Meanigful Representations of Algebra Concepts*. Annual Meeting of the Mid-Western Education Research Association (Chicago, 1995).

Sherman, B., & Wither, D. (2003). *Mathematics Anxiety and Mathematics Achievement*. Mathematics Education Research Journal. Vol. 15, No. 2, 138-150.

Shrum, T. (2005). *The Use of Manipulatives in Mathematics Class*. Making a Difference. Action Research in Middle Level Education. Handbook of Research in middle Level Education series by Micki M.,Caskey.

Shu, J., Moyer, P. (2007). *The Developing Students Representation Fluency Using virtual and Physical Algebra Balance*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26(2), 155-173.

Siety, A. (2001). Mathematiques ma Chere Terreur. (Μαθηματικά ο αγαπημένος μου φόβος) Εκδόσεις Σαββάλα.

Silver, Ed., Kilpatrich, J., Schlesinger, B. (1990). Thinking through Mathematics: Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms. The Thinking Series. College board Publication New York (ED 387350).

Simon, M. (1997). *Developing New Models of Mathematics Teaching: An Imperative for Research on Mathematics Teacher Development.* Mathematics Teachers in Transition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Penguin Books, Middlesex England.

Slavin, R. (1985). Learning to Cooperate. Cooperating to Learn. Plenum Press New York.

Slavin, R. (1987). *Cooperative Learning. Student Teams. What Research Says to the Teacher*. National Education Association Washington, D.C (ED282862)

Slavin, R. (1990). Cooperative Learning. Theory, Research, and Practice. Allyn and Bacon Massachusetts.

Slavin, R. (1996). *Research for the Future.Research on Cooperative Learning and Achievement: What We Know, What We Need to Know.* Contempory Educational Psychology 21, 43-69. Academic Press, Inc.

Slavin, R., Hurley, E., Chamberlain, A. (2003). *Cooperative Learning and Achievement: Theory and Research.* Handbook of Psychology: Educational Psychology. Wiley John & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.

Smith, L., B., & MacGregor, J. (1992). *What is Collaborative Learning?* Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education. The National Center on Postsecondary Teaching, Learning and Assessment, University Park, Pa. 1992.

Sobol, Anita, J. (1998). *A formative and summative evaluation study of classroom interactions and student/ teacher effects when implementing* *algebra tile manipulatives with junior high school students.* Dr. St. John's University New York.

Solano, A., Presmeg, N. (1995). Proceeding of the Annual Conference of the International Group the Psychology of Mathematics Education, 19th. Brazil. Vol. 3 (ED411136).

Solazzo, L. (2002). The Role of Gender, Cognition, Anxiety and Competence. Beliefs in Predicting Mathematics Achievement. Dr Fordham University.

Sowell, E. (1989). *Effect of Manipulative Materials in Mathematics Instruction.* Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20, No. 5, 498-505.

Spando, Joseph W.& Zeidler, Dana L. (1996). What's the Buzz? Tell me what's Happening! Developing Ownership of Understanding in Mathematics Education. Opinion Paper (ERIC Document Reproduction Service No. ED 395796).

Spando, Joseph, W. & Zeidler, Dana, L., Chappell, Michaele, F. (1997). Advancing Ownership of Understanding and Responsibility through Homework in Mathematics Education. Paper presented at the Annual Meeting of Pi Lambda Theta International Education Leadership Association, San Diego.

Stanic, G., M., A. and Hart, L., E. (1995). *Attitudes, persistence, and mathematics achievement: Qualifying race and sex differences.* In

Secada, W. G. (Ed.). New Directions for Equity in Mathematics Education., pp. 258-275. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Star, J., Ben-Zeev, T. *(2001). Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications.* Understanding and Teaching the Intuitive M: Student and Teacher Learning. Lawrence Erlbaum Associates.

Sternberg, R. (2006). *The Nature of Creativity*. Creativity Research Journal. Lawrence Erlbaum Associates Vol. 18, No 1, 87-98.

Sternberg, R. (2009). *Toward a Triarchic Theory of Human Intelligence*. The Essential Sternberg: Essays on Intelligence, Psychology and Education. Springer Publishing Company.

Strom, J. (2009). *Manipulatives in Mathematics Instruction*. Dr. Bemidji State University.

Suydam, M., & Higgins, J. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research.* ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education, College of Education, Ohio State University, Columbus, OH.

Swan, M. (2006). Collaborative Learning in Mathematics. A challenge to our Beliefs and Practices. NRDC Institute of Education.

Szendrei, J. (1996). *Concrete Material in Classroom*. International Handbook of Mathematic Education, 411-434.

Taylor, T. (1992). Mutual Misunderstanding. Scepticism and theorizing of Language and Interpretation. Duke University Press.

Terwel, J. (2011). Cooperative Learning and Mathematics Education: A Happy Marriage? Education for Innovation: The Role of Arts and STEM Education. Paper present at the OECD /France Workshop, Paris 23-24 May 2011.

Thom, R. (1971). *"Modern¨ Mathematics: An Educational and Philosophic Error?* American Scientist, Vol. 59, No. 6.

Thompson, P., W. & Sfard, A. (1994). *Problems of Reification: Representations and Mathematical Objects.* In D. Kirshner (Ed.) Proceedings of f the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education North America, Plenary Sessions Vol. 1, pp. 1-32. Baton Rouge, LA: Louisiana State University.

Thompson, P. (1994). *Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding.* Arithmetic Teacher 41(9).

Thompson, P. (1992). *Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics.* Journal of Researching Mathematic Education, 23(2), 123-147.

Thorton, G. (1995). *Algebra Tiles and learning styles.* Ph.D, Simon Fraser University.

Tobias, S. (1991). *Math Mental Health: Going Beyond Math Anxiety.* College Teaching, Vol. 39, No. 3, pp. 91-93.

Threadgill-Sowder, J., Juilfs, P. (1980). *Manipulative Versus Symbolic Approach to Teaching Logical Connectives in Junior High School: an Aptitude x Treatment Interaction Study*. Journal for Research in Mathematics Education, 11, 367-374.

Triandafillidis, T. (2002). *On 'How to Make Our Ideas Clear's: a Pragmaticist Critique of explication in the Mathematics Classroom.* For the Learning of Mathematics. FLM Publishing Association, Kingston, Ontario, Canada.

Tinzmann, M., B., Jones, B., F., Fennimore, T., F., Bakker, J., Fine, C. and. Pierce J. (1990). What Is the Collaborative Classroom? NCREL, Oak Brook.

Tsay, M., Brady, M. (2010). *A Case Study of Cooperative Learning and Communication Pedagogy: Does Working in Teams Make a Difference?* Journal of the Scholarship of Teaching and Learning, Vol. 10, No. 2, pp. 78-89 Jun 2010.

Usiskin, Z. (1988). *Conception of School Algebra and Uses of Variables.* The Ideas of Algebra, K-12. National Council of Teachers of Mathematics. Yearbook 1988, p.18.

Usiskin, Z. (1999). *Why is Algebra Important to Learn.* Algebraic Thinking Grades K-12. National Council of Teachers of Mathematics Reston Virginia.

Usimaki, L. & Nason, R. (2004). *Causes Underlying Pre-Service Teachers' Negative Beliefs And Anxieties About Mathematics.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004.

Uttal, D., H., Scudder, K., V. & DeLoache, J., S. (1997). *Manipulatives as Symbols*: *A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics.* Journal of Applied Developmental Psychology, Vol. 18, No. 1, pp. 37-54(18).

Utter, Br. (2007). Pick and Plan: 100 Brain-Compatible Strategies for lesson design. Sage Publication Company.

VanEngen, H. (1946). An Aspect of Meaning in Arithmetic. *The Elementary School Journal, Vol.46, No. 5, pp. 272-277.* The University of Chicago Press.

Vygotsky, L., S. (1978). Mind in Society. The Development of higher Psychological Processes. Harvard University Press.

Vygotsky, L., S. (1962). Thought and Language Publisher: The M.I.T. Press,

Wah, A., Picciotto, H. (1994). Algebra Themes, Tools, Concepts. Creative Publications. California.

Webb, N. (1982). *Student Interaction and Learning in Small Group.* Review of Educational Research Vol.52, No. 3, pp. 421-445.

West, L. (2011). *Using Physical and Virtual Manipulatives with Eighth Grade Geometry Students*. Math in the Middle Institute Partnership . Action Research
Project Report in partial fulfillment of the MAT Degree Department of Mathematics University of Nebraska-Lincoln.

Williams, S., Molina, D. (1996). *Algebra: What all Students Can Learn*. The Nature and Role of Algebra in K-14 Curriculum. Proceeding of National Symposium. NCTM.

Whicker, K., Bol, L., Nunnery, J. (1997). *Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom.* The Journal of Education Research, Vol.91, No 1

Willingham, D. (2009). *Is It True That Some People Just Can't Do Maths?* American Educator Winter 2009-2010.

Witzel, Bradley, Cecil D., Mercer, and David M. Miller. *"Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties: An Investigation of an Explicit Instruction Model."*. Learning Disabilities Research and Practice 18 (2003): 121–31.

Wood, S., D. (1929). Adult Learning in America. Robert Krieger Publishing Co.

Woodard, T. (2004). *The Effects of Math Anxiety on Post-Secondary Developmental Students as Related to Achievement, Gender, and Age.* Inquiry, Vol. 9, No. 1, Spring 2004.

Zenverbergen, R. (2000). *"Cracking the Code" of Mathematics Classrooms: School Success as a Function of Linguistic, Social, and*

Cultural Background. London: Multiple Perspectives in Mathematics Teaching and Learning.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βερύκειος, Π. (2003). *Η Μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα: Εμπόδια στη Μαθησιακή Πορεία του Μαθητή. Η περίπτωση της Εξίσωσης*. 20^{o} Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Βόσκογλου, Μ. (2001). *Διδακτικές δραστηριότητες που ενθαρρύνουν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματικές διαδικασίες*. 18^{o} Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Γαγάτσης, Α., Πατρώνης, Τ. (1993). *Χρήση γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη.

Στασινός, Δ. (1999). *Μαθησιακές δυσκολίες του παιδιού και του εφήβου.* Αθήνα: Gutenberg.

Τουμάσης, Μ. (1999). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα:Gutenberg.

Καφούση, Σ., Ντζιαχρήστος, Β. (2000). *Ο ρόλος του εποπτικού υλικού στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών.* Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 53. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. (2000). *Τα Μαθηματικά του Σχολείου και ο Πραγματικός Κόσμος. Πώς θα συνδυάσουμε τη θεωρία και την Πράξη* Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 54. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά. Επιστημολογία και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κουτσοδήμας, Γ. (2002). *Οι αξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί (αξιοσημείωτες ταυτότητες). Ιστορική-Ερευνητική Προσέγγιση*. 19ο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Μαρμαρά, Μ., Χατζηκυριάκος, Κ., (2007). *«Το μάθημα δεν είναι μόνον οι αριθμοί είναι και πράγματα» αλγεβρικά πλακίδια και «αδύναμοι» μαθητές.* Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, σελ. 488-497.

Μαρμαρά, Μ., Χατζηκυριάκος, Κ., (2009). *Η χρήση αλγεβρικών πλακιδίων στη διδασκαλία και τη μάθηση αλγεβρικών εννοιών*. Πρακτικά 5ης διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών τόμος 1, σελ. 33-43.

Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία : «Γιατί», «Πως», «Πότε» και για «Ποιους».* Διήμερο επιστημονικό Συμπόσιο «Η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Τάσεις και εφαρμογές».

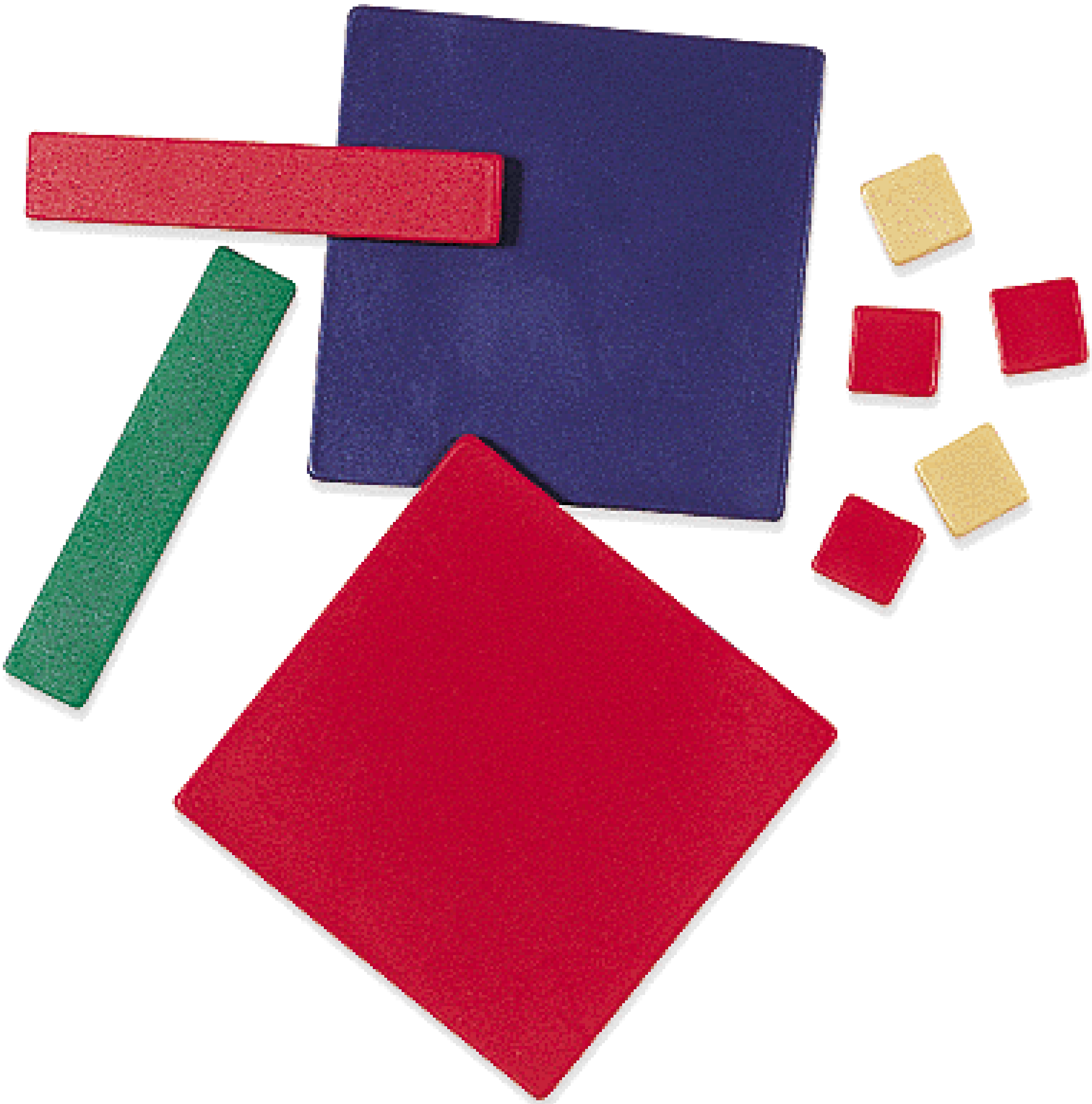
Οικονόμου, Θ. (2003). *Η Διδασκαλία Εννοιών της Άλγεβρας μέσω Γεωμετρικών Προσεγγίσεων. Εφαρμογή του Διαθεματικού Προσανατολισμού του Νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών.* 20ο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε

Τριανταφυλλίδης, Τ. (2007). *Γλωσσικές μειονότητες και μαθηματική εκπαίδευση*. Ετερότητα στη Σχολική Τάξη και Διδασκαλία της Ελληνικής Γλώσσας και των Μαθηματικών: η περίπτωση των Τσιγγανοπαίδων. Επτάλοφος Α.Β.Ε.Ε. Εκδοτικές Επιχειρήσεις.

Φακούδης Ευάγγελος (2004). *Απόψεις καθηγητών μετά την εφαρμογή ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας με φύλλα δραστηριοτήτων*. Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ (Τρίκαλα 2004).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΛΑΚΙΔΙΑ (Algebra Tiles)



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΑ ΤΕΣΤ ΚΑΙ ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΙΛΟΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΑΒΆΣΕΩΝ

Πίνακας 1 (Διαγνωστικό τεστ)

Ονομα/Ομάδα…………………………………………..Σχολείο………………………………….

Ημερομηνία……………………………………………...Φύλο Αγόρι Κορίτσι

Υπογράμμισε τη σωστή απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα

A. Ποιό είναι το εμβαδό τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά **α**;

$E=4\alpha$	$E=\alpha^2$	$E=4\alpha^2$	$E=2\alpha$

B. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις **α, β** δίνεται από τον τύπα

$E=\alpha+\beta$	$E=2\alpha\beta$	$E=\alpha\beta$	$E=4\alpha\beta$

Γ. Ποιό είναι το ανάπτυγμα τετραγώνου του αθροίσματος **$(\kappa+\lambda)^2$**;

$\kappa^2+2\kappa\lambda-\lambda^2$	$\kappa^2+\kappa\lambda+\lambda^2$	$\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2$	$\kappa^2-2\kappa\lambda+\lambda^2$

Πίνακας 2α (Διαγνωστικό τεστ)

Όνομα/Ομάδα…………………………………………….....Σχολείο……………………………………

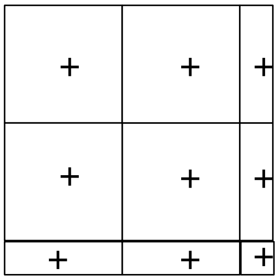
Ημερομηνία…………………………………………………Φύλο Αγόρι Κορίτσι

Ενώστε ποιά παράσταση της αριστερής στήλης αντιστοιχεί με ποιά παράσταση της δεξιάς

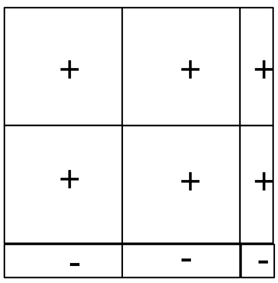
	$(x+a)^2$
	$4x^2-4x+1$
$(2x-1)^2$	$(x+a)(x-a)$
$(-2x-1)^2$	$2x^2-4x+1$
a^2-x^2	$(x+a)(a-x)$
x^2-a^2	$4x^2+4x+1$
x^2+a^2	$2x^2+4x+1$
	$(2x-1)(2x+1)$

Πίνακας 2β

Γράψε ποιες αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζουν το εμβαδό του σχήματος



……………………………………………………………………………………



……………………………………………………………………………………

$4x^2 + 1$

$(x - 1)(x + 1)$

$4x^2 + 2x + 1$

$4x^2 + 4x + 1$

$2x^2 + 4x + 1$

$(2x + 1)^2$

$(2x - 1)(2x + 1)$

$(2x - 1)^2$

$4x^2 - 1$

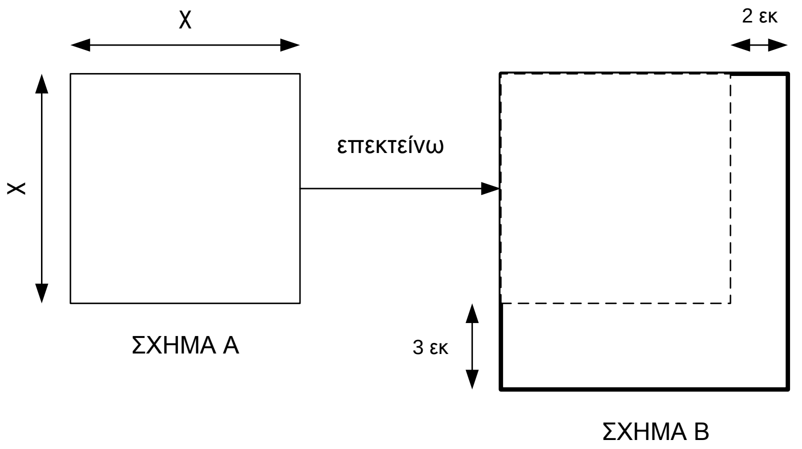
Πίνακας 3α

Όνομα/Ομάδα……………………………………………….....Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία……………………………………………………Φύλο Αγόρι Κορίτσι

Δραστηριότητα

Έχω ένα τετράγωνο πλευράς χ και επεκτείνω τις πλευρές του κατα 3 εκ. και 2 εκ αντιίστοιχα όπως στο παρακάτω σχήμα.



Ερώτηση 1η

Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση του εμβαδού του σχήματος Α;

Ερώτηση 2η

Πώς ονομάζεται το σχήμα Β που προέκυψε;

Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση του εμβαδού του σχήματος Β;

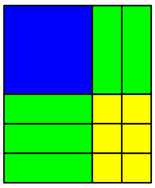
Πίνακας 3β

Όνομα/Ομάδα……………………………………………….....Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία…………………………………………………Φύλο Αγόρι Κορίτσι

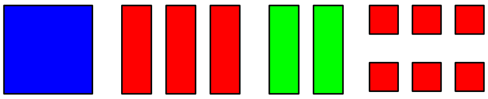
Γράψε την αλγεβρική έκφραση του σχήματος: x^2 +……………………………...

Ποιό είναι το εμβαδό;………………………………………………………………..



Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση που παριστάνουν τα παρακάτω σχήματα;

…………………………………………………………………………………………………..



Τοποθετήσετε αυτά τα κομμάτια έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο

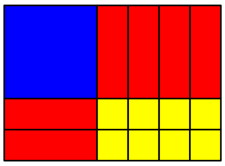
Οι πλευρές του είναι……………………………………

Το εμβαδόν του είναι…………………......................

Πίνακας 3γ

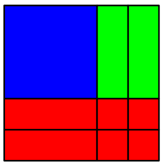
Οι πλευρές του επόμενου σχήματος είναι……………………………………

Το εμβαδόν του είναι…………………........................



Τι παρατηρείτε ως προς το χρώμα των μικρών τετραγώνων σε σχέση με το χρώμα των αντιστοίχων του προηγουμένου σχήματος; Τί εξήγηση θα δίνατε;

Να γράψετε την αλγεβρική ισότητα που προκύπτει απο το παρακάτω σχήμα.



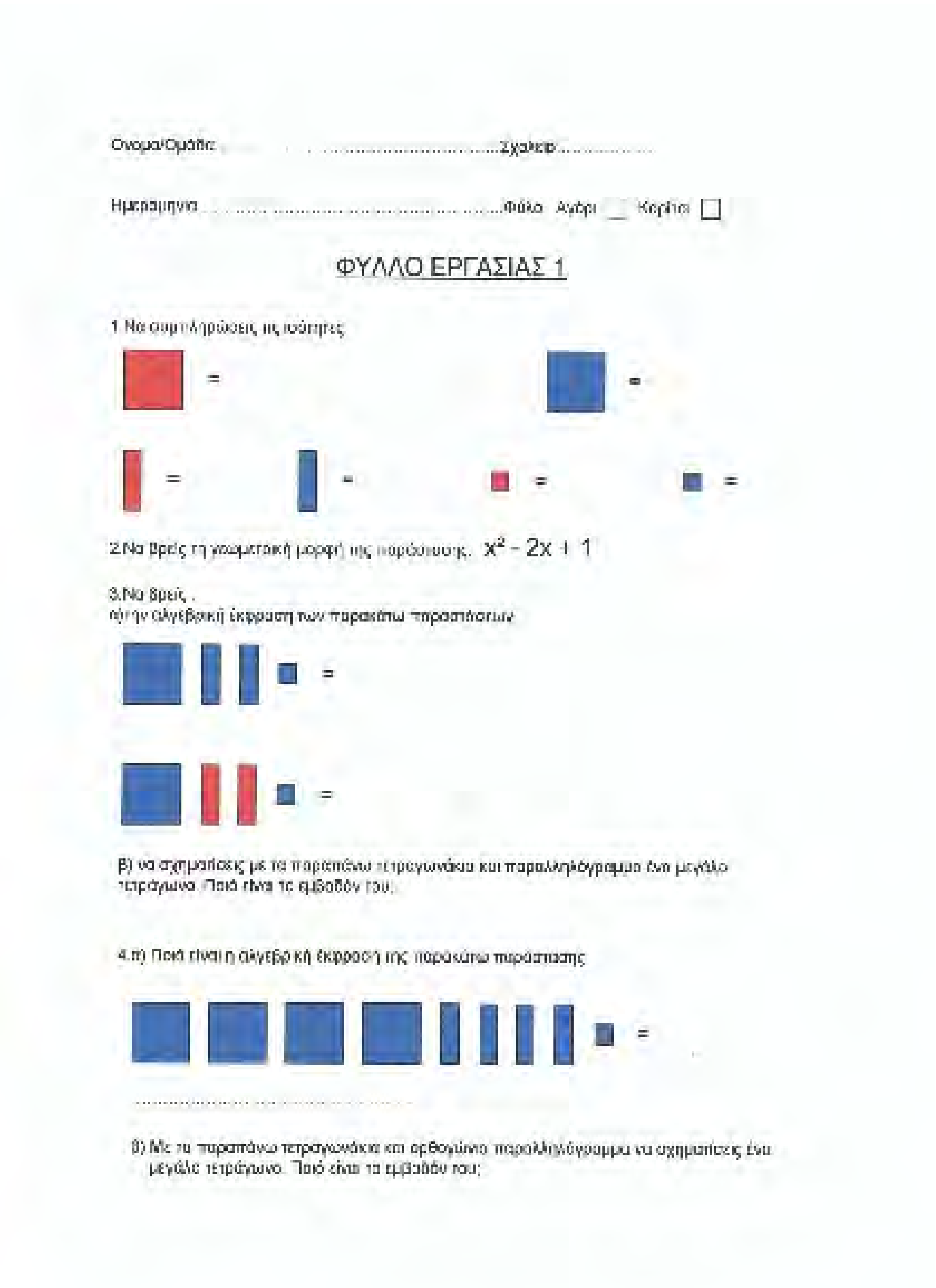
X^2…………………………………..=………………………………

Αναγνωρίζετε κάποια ταυτότητα;

Αν ναί ποιά είναι;

Γράψτε τον τύπο με τον οποίο τις έχετε μάθει.

Πίνακας 4α



Όνομα/Ομάδα: ....Σχολείο..................

Ημερομηνία ....Φύλο Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

1. Να συμπληρώσεις τις ισότητες

=   =

=   =   =   =

2. Να βρείς τη γεωμετρική μορφή της παράστασης. $x^2 - 2x + 1$

3. Να βρείς .
α) την αλγεβρική έκφραση των παρακάτω παραστάσεων

=

=

β) να σχηματίσεις με τα παραπάνω τετραγωνάκια και παραλληλόγραμμα ένα μεγάλο τετράγωνο. Ποιό είναι το εμβαδόν του;

4. α) Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση της παρακάτω παράστασης

=

....

β) Με τα παραπάνω τετραγωνάκια και ορθογώνια παραλληλόγραμμα να σχηματίσεις ένα μεγάλο τετράγωνο. Ποιό είναι το εμβαδόν του;

Πίνακας 4β

β) να σχηματίσεις με τα παραπάνω τετραγωνάκια και παραλληλόγραμμα ένα μεγάλο τετράγωνο.

Ποιό είναι το εμβαδόν του; Ε=..

4.α) Ποιά είναι η αλγεβρική έκφραση της παρακάτω παράστασης

 =

....

β) Με τα παραπάνω τετραγωνάκια και ορθογώνια παραλληλόγραμμα να σχηματίσεις ένα μεγάλο τετράγωνο.

Ποιό είναι το εμβαδόν του; Ε=..

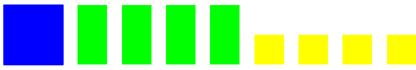
Πίνακας 5α

Ονοματεπώνυμο ομάδας……………………………………………………………………………….

Σχολείο……………………………………………..Ημερομηνία………………………………………

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα



Κατασκεύασε το τετράγωνο με τα δοθέντα σχήματα

Αλγεβρική παράσταση

……………………………………………….

Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του

Πλευρές………………………………………….

Εμβαδό…………………………………………..

Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;

……………………………………………………

Με ποιά άλλη έκφραση εκτός αυτής του τριωνύμου θα μπορούσες να χαρακτηρίσεις το ανωτέρω σχήμα;

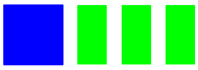
……………………………………………………………

……………………………………………………………..

Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$)

……………………………………………………

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα



Κατασκεύασε το ορθογώνιο με τα δοθέντα σχήματα

Αλγεβρική παράσταση

……………………………………………….

Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του

Πλευρές………………………………………….

Εμβαδό…………………………………………..

Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;

……………………………………………………

Ποιά γενική παρατήρηση θα μπορούσαμε να κάνουμε για αντίστοιχες περιπτώσεις;

……………………………………………………………

…………………………………………………………….

Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$)

……………………………………………………

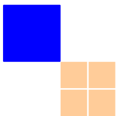
Πίνακας 5β

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα

Αλγεβρική παράσταση

……………………………………………

Συμπλήρωσε με κατάλληλα σχήματα τα δοθέντα ώστε να μπορείς να κατασκευάσεις τετράγωνο χωρίς να μεταβληθεί η αξία της παράστασης.



Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του

Πλευρές……………………………………….

Εμβαδό………………………………………..

Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;

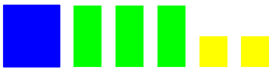
…………………………………………………

Με ποιά άλλη έκφραση εκτός αυτής του τριωνύμου θα μπορούσες να χαρακτηρίσεις το ανωτέρω σχήμα;
…………………………………………………………
…………………………………………………………

Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$)

…………………………………………………

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα



Αλγεβρική παράσταση

……………………………………………

Κατασκεύασε το ορθογώνιο με τα δοθέντα σχήματα

Γράψε το μήκος των πλευρών του σχήματος που έφτιαξες όπως και το εμβαδό του

Πλευρές……………………………………….

Εμβαδό………………………………………..

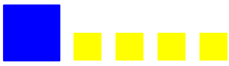
Ποιές τιμές (ρίζες) μηδενίζουν τις πλευρές;

…………………………………………………

Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$)

…………………………………………………

Δίνονται τα κάτωθι σχήματα



Μπορείς να κάνεις τετράγωνο με συμπλήρωση σχημάτων όπως προηγουμένως χωρίς να αλλάξεις την αξία της παράστασης;

Υπολόγισε την τιμή της Διακρίνουσας ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$)

…………………………………………………

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΙΛΟΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ ΣΤΟ 10ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

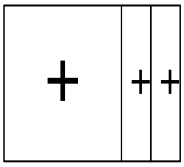
Πίνακας 6 α

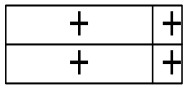
Επιμεριστική Ιδιότητα

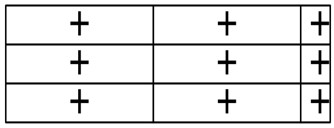
Ονοματεπώνυμο ………………………………………………………………………………………….
Ομάδα……………………..   Ημερομηνία……………………………………..

Φύλλο εργασίας 1

Να βρείτε ποιές αλγεβρικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ποιές παραστάσεις με τα αλγεβρικά πλακίδια







…………………. …………………. ………………………………….

…………………. …………………. ………………………………….

a) $2(x+1)$ b) $x(x+2)$ c) $3(2x+1)$ d) $6x+3$ e) $2x+2$ f) x^2+2x

Ποιό το εμβαδό των παραπάνω ορθογωνίων;

Εμβαδό σχήμα 1……………….Εμβαδό σχήμα 2…………………..Εμβαδό σχήμα 3………………….

Χρησιμοποίησε αλγεβρικά πλακίδια για να βρείς το αποτέλεσμα του γινομένου $x(2x+3)$, παρουσίασε το σχήμα που θα προκύψει και υπολόγισε το εμβαδόν του.

Πίνακας 6 β

Χρησιμοποίησε τα αλγεβρικά πλακίδια για να δείξεις την ισότητα $2x\ (x+1) = 2x^2 + 2x$

Γενίκευσε τις παρατηρήσεις για το γινόμενο $\alpha\ (\beta + \gamma) =$

Πίνακας 7 α

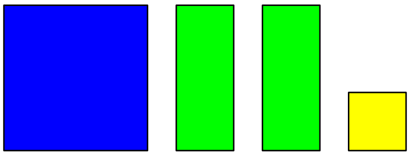
Τέλειο τετράγωνο

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………………

Ομάδα……………………….. Ημερομηνία……………………………………….

Φύλλο εργασίας 1

Ποιά είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;



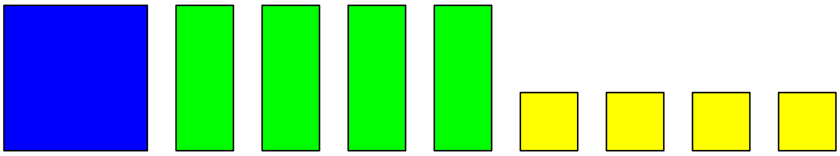
…………………………………………………………..

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με τα ανωτέρω αλγεβρικά πλακίδια.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του; Ποιό είναι το εμβαδό του;

……………………………………………… …………………………………………..

Μπορείς να κατασκευάσεις ένα τετράγωνο με τα ακόλουθα αλγεβρικά πλακίδια;



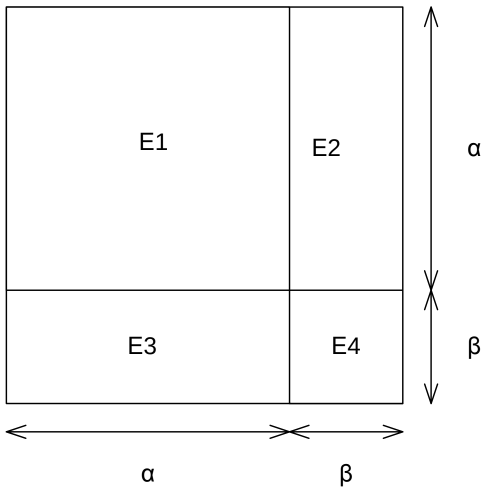
Πίνακας 7 β

Ποιά είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια και ποιό το εμβαδό του τετραγώνου που σχημάτισες;

Αλγεβρική παράσταση ……………………………………………… Εμβαδό τετραγώνου ……………………………………………..

Προσδιόρισε τι είδους σχήμα είναι το ακόλουθο και γιατί…………………………………………………….

……..



Ποιό το εμβαδό του κάθε κομματιού που σχηματίζουν το ανωτέρω σχήμα;

Ε1=……………………….Ε2=……………………………Ε3=………………….Ε4=…………………...

Γράψε το εμβαδό όλου του σχήματος με δύο τρόπους.

Ε=………

Πίνακας 8 α

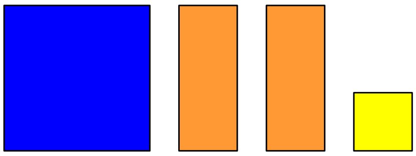
Διαφορά τετραγώνων

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………………

Ομάδα……………………….. Ημερομηνία……………………………………..

Φύλλο εργασίας 2

Ποιά είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;



…………………………………………………………..

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με τα ανωτέρω αλγεβρικά πλακίδια.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του; Ποιό είναι το εμβαδό του;

………………………………………………. …………………………………………..

Σχεδίασε την ταυτότητα $(α\text{-}β)^2$ με τα αλγεβρικά πλακίδια

Ποιά η διαφορά της με την $(α+β)^2$;…………………………………………………………………………..

……..

Πίνακας 8 β

$(2x+3y)^2=$……………………...

$(5-2x)^2=$…………………….

$(-x-2)^2=$……………………….

$(3κ+λ)^2=$…………………….

Να κλείσεις με μιά γραμμή τους χώρους που σχηματίζουν τετράγωνο.

Ισχύει η ισότητα $α^2+β^2 = (α+β)^2$; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

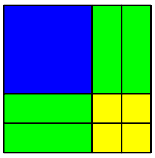
……………………………………………………………………………………………………….

Πίνακας 9 α

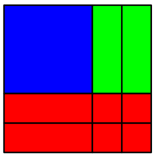
Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………………….
Ομάδα……………………….. Ημερομηνία………………………………………..

Φύλλο εργασίας 3

Να γράψετε την αλγεβρική ισότητα που προκύπτει απο το παρακάτω σχήμα.



X^2…………………………………..=……………………………….



X^2…………………………………..=……………………………….

Αναγνωρίζετε κάποιες ταυτότητες; …………………………………………………………………...

Αν ναί ποιές είναι; ……………………………………………………………………………………….

Γράψτε τον τύπο με τον οποίο τις έχετε μάθει…………………………………………………….

…….

Παρουσίασε με τη βοήθεια των αλγεβρικών πλακιδίων την αλγεβρική παράσταση $4x^2$-4.

Πόσο είναι οι πλευρές;…………………………………..Πόσο είναι το εμβαδό;………………….........

Πίνακας 9 β

Να συμπληρώσεις τις ισότητες με τη βοήθεια των τύπων που έχεις μάθει.

$(1+\dots\dots)^2 = \dots\dots + \dots\dots + 4x^2$

$(\dots\dots - 2)^2 = 4x^2 - \dots\dots + \dots\dots$

Επαλήθευσε τα αποτελέσματά σου με τον πίνακα που παρουσιάζει τα αλγεβρικά πλακίδια.

Γράψε τι σκέφτηκες……………………………………………………………………………………………….

………

……..

……..

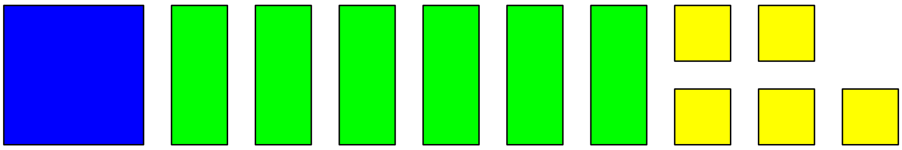
Πίνακας 10 α

Συμπλήρωση τετραγώνου

Ονοματεπώνυμο …………………………………………………………………………………………….
Ομάδα……………………….. Ημερομηνία……………………………………..

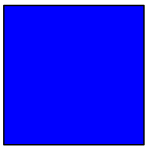
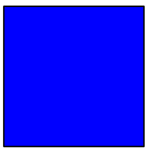
Φύλλο εργασίας 4

Ποιά είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;



…………………………………………………………..

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^2 + 6x = -5$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Να γραφούν όλα τα βήματα τόσο στη γεωμετρική τους μορφή όσο και αλγεβρικά.

Γεωμετρική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση
	…………………………………………………………..
	…………………………………………………………..
	…………………………………………………………..
	…………………………………………………………..
	…………………………………………………………..

Πίνακας 10 β

Να επιλυθεί η εξίσωση $x^2 -4x +3 = 0$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Να γραφούν όλα τα βήματα τόσο στη γεωμετρική τους μορφή όσο και αλγεβρικά.

Γεωμετρική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..
	……………………………………………………………..

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΥΡΙΑΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΣΤΟ 10ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Πίνακας 11

Όνομα………………………………………………………………………….Τμήμα……………………….

Ημερομηνία………………………………………………….

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. x+2 = -5…………………………………………………………………………….

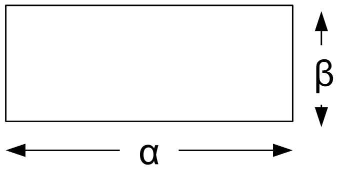
2. 6x+15 = 3………………………………………………………………………….

3. 3 (x+2) + 4 (1-x) = x - 2………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

4. Γράψτε με τι ισούται το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει πλάτος α και μήκος β.



Εμβαδό ορθογωνίου = …………………………..

5. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 24 cm. Το πλάτος του είναι 5 cm. Ποιό είναι το μήκος του;

Πίνακας 12α

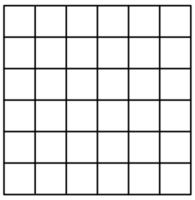
Όνομα/Ομάδα……………………………………………...Σχολείο…………………………………

Ημερομηνία…………………………………………………

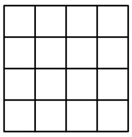
<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>
<u>Μονώνυμα</u>

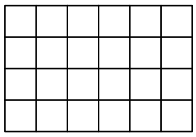
Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα σχήματα ως προς το σχήμα (τετράγωνο/ορθογώνιο) και βρείτε αντίστοιχα το εμβαδό και την περίμετρο των



Μονάδα μέτρησης





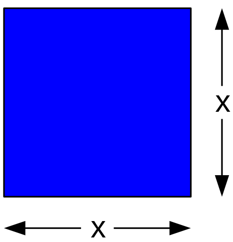
……………………....   ……………………....   ……………………....

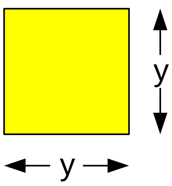
Περίμετρος………..   Περίμετρος………..   Περίμετρος………..

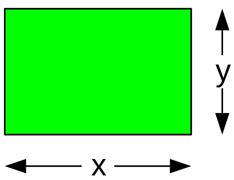
Εμβαδό…………...   Εμβαδό…………...   Εμβαδό…………...

Άσκηση 2

Το ίδιο να γίνει και για τα σχήματα που ακολουθούν και για τις διαστάσεις που δίνονται.







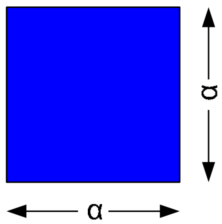
……………………....   ……………………....   ……………………....

Περίμετρος………..   Περίμετρος………..   Περίμετρος………..

Εμβαδό…………...   Εμβαδό…………...   Εμβαδό…………...

Πίνακας 12β

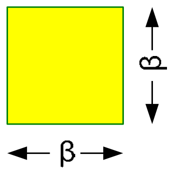
Άσκηση 3



……………………....

Περίμετρος……….

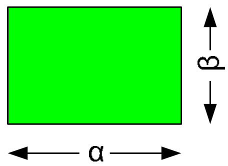
Εμβαδό…………..



……………………....

Περίμετρος……….

Εμβαδό…………..



……………………....

Περίμετρος……….

Εμβαδό…………..

Άν το α=3 και το β=2 για τα ανωτέρω σχήματα να υπολογιστούν οι αριθμητικές τιμές του ακόλουθου πίνακα

Αλγεβρική παράσταση	Αριθμητική τιμή
$\alpha \cdot \beta$	
	$6 \cdot 4$
	9
β^2	
	$3 \cdot 6$
y^2	
α^2	

Πίνακας 12γ

Άσκηση 4

Να παρασταθούν οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις με αλγεβρικά πλακίδια

$3\chi^2$

Βαθμός μονωνύμου…………………..

$4xy$

Βαθμός μονωνύμου……….................
Βαθμός ως προς x…………………….
Βαθμός ως προς y…………………….

x^2+2xy

Βαθμός μονωνύμου x^2………………..
Βαθμός μονωνύμου xy……………….
Βαθμός ως προς y…………………….
Βαθμός πολυωνύμου…………………

$2x^2+xy$

Βαθμός μονωνύμου x^2………………...
Βαθμός μονωνύμου xy………………..
Βαθμός ως προς y…………………….
Βαθμός πολυωνύμου…………………

$4y^2$

Βαθμός μονωνύμου…………………..

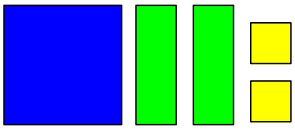
Πίνακας 13α

Όνομα/Ομάδα……………………………………………...Σχολείο……………………………………

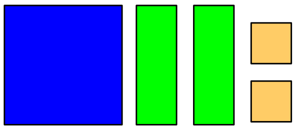
Ημερομηνία…………………………………………………

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Πρόσθεση πολυωνύμων

Να βρείτε σε τι διαφέρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που αναπαραστούνται με τα αλγεβρικά πλακίδια.

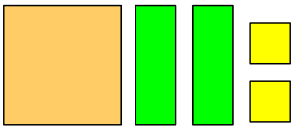


α

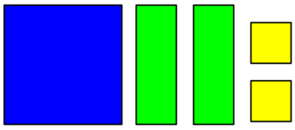


………………………………... ………………………………...

Διαφέρουν………………………………………………………………………………………….

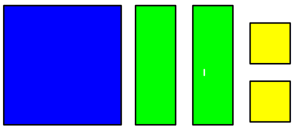


β

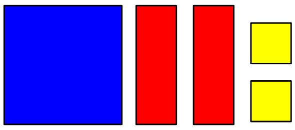


………………………………... ………………………………...

Διαφέρουν………………………………………………………………………………………….

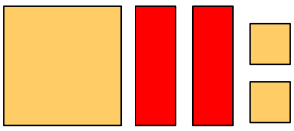


γ

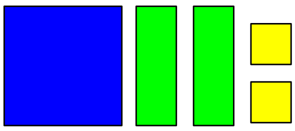


………………………………... ………………………………...

Διαφέρουν………………………………………………………………………………………….



δ



………………………………... ………………………………...

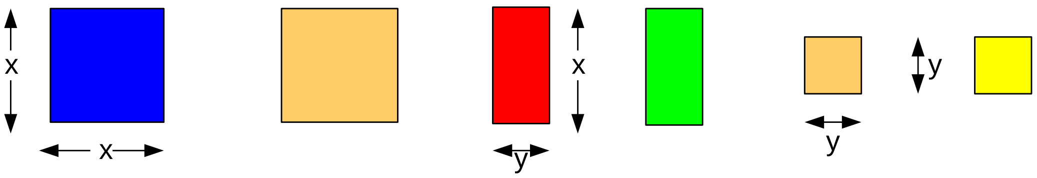
Διαφέρουν………………………………………………………………………………………….

Πίνακας 13β

Ποιός νομίζετε ότι είναι ο ρόλος των διαφορετικών χρωμάτων;

……
.

Γράψτε με ποιό μονώνυμο θα συμβολίζατε καθένα απο τα ακόλουθα σχήματα για τις διαστάσεις που έχουν σημειωθεί.

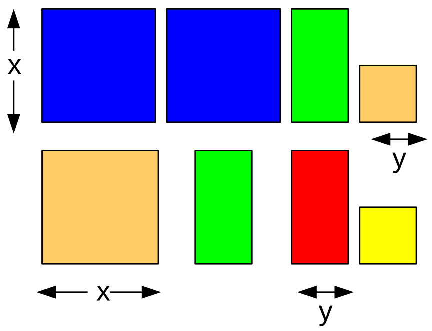


…………… …………… …………… …………… …………… ……………

Πώς θα παραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση α) $\mathbf{x^2+(-x^2)}$ και την β) $\mathbf{xy+(-xy)}$

$x^2+(-x^2)$	$xy+(-xy)$

Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα ακόλουθα αλγεβρικά πλακίδια.

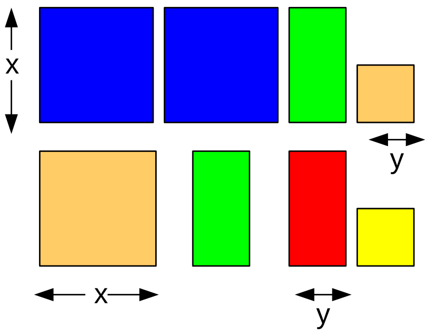


Αλγεβρική παράσταση…………………………………………………………………..

Πίνακας 13γ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε μηδενικό ζευγάρι δύο όμοια σχήματα με διαφορετικό χρώμα.

Κυκλώστε τα μηδενικά ζευγάρια του σχήματος και γράψτε την απλοποιημένη μορφή της αλγεβρικής παράστασης



Αλγεβρική παράσταση…………………………………….

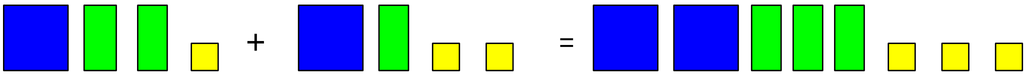
Αρχική μορφή αλγεβρικής παραστασης	Η απλοποιημένη μοφή της

Να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια τα πολυώνυμα **$2x^2+3xy+y^2$** και **$-3x^2-2xy-y^2$**

$2x^2+3xy+y^2$	**$-3x^2-2xy-y^2$**

Πίνακας 13δ

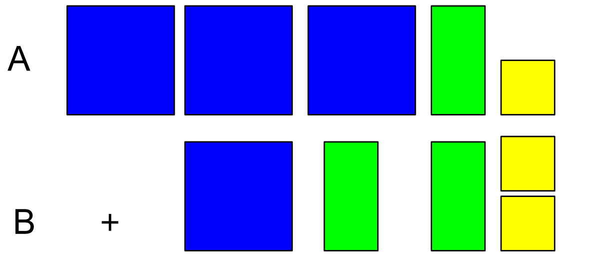
Το σύμβολο (+) στα αλγεβρικά πλακίδια το χρησιμοποιούμε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.



Γράψτε πώς σκέφτεστε να προσθέσετε τα επόμενα πολυώνυμα Α και Β με αλγεβρικά πλακίδια;

………

………



Αλγεβρική παράσταση

…………………………………………………

\+ …………………………………………………

Συμπέρασμα

Για να προσθέσω αλγεβρικές παραστάσεις ……………………………………………………………………

……

……

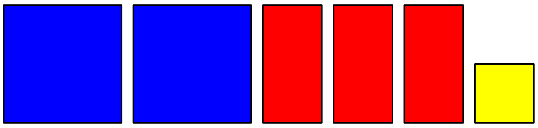
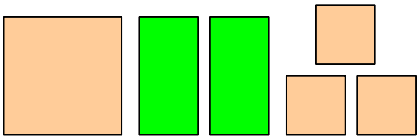
Πίνακας 14α

Όνομα/Ομάδα………………………………………………....Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία……………………………………………………

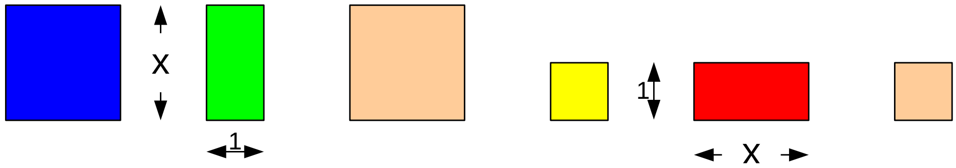
Αφαίρεση Πολυωνύμων

Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις αντίθετες παραστάσεις.

Παράσταση	Αντίθετη παράσταση
	
$-5x^2+2x-7$	…………………………………………………...
	
$4x^2-6x+3$	…………………………………………………...

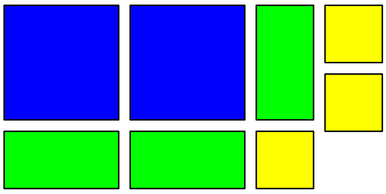
Πίνακας 14β

Γράψτε την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια.

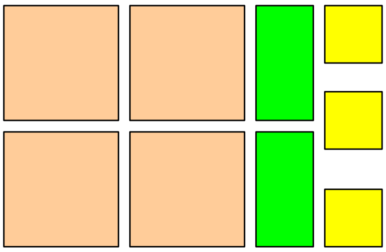


………… ………… ………… ………… ………… …………

Κυκλώστε το πολυώνυμο στα αριστερά της σελίδας που αντιστοιχεί στις παραστάσεις με τα αλγεβρικά πλακίδια

1. 

Α. x^2-3x+3
Β. $2x^2-3x+3$
Γ. $2x^2+3x-3$
Δ. $2x^2+3x+3$
Ε. $-2x^2+3x+3$

2. 

Α. $4x^2-2x+3$
Β. x^2-3x+3
Γ. $-4x^2+2x-3$
Δ. $2x^2+3x+3$
Ε. $-4x^2+2x+3$

Στους αριθμούς η **αφαίρεση** έχει ορισθεί ως η **πρόσθεση του αντιθέτου αριθμού**. Αντίστοιχα πώς νομίζετε ότι θα κάνατε την αφαίρεση πολυωνύμων με τα αλγεβρικά πλακίδια;

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Πίνακας 14γ

Ομάδα ……………………..

Να βρείτε το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων που σημειώσατε στην πρώτη άσκηση και να παρασταθούν με αλγεβρικά πλακίδια

Πρόσθεση	**Αφαίρεση**

Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια που αντιστοιχούν στο πολυώνυμο $\mathbf{3x^2+7x+4}$ ένα ορθογώνιο. Κατασκευάσετε ομοίως το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο $\mathbf{x^2+4x+3}$ καθώς και το ορθογώνιο του $\mathbf{x^2+x}$. Στη συνέχεια να αφαιρέσετε αυτά τα δύο εμβαδά απο το εμβαδό του ορθογώνιου $\mathbf{3x^2+7x+4}$. Να αναπαραστήσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια όλα τα βήματα καθώς και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης.

Τί σχήμα είναι αυτό που προέκυψε;…………………………………………………………………………...

Γιατί το χαρακτηρίζετε έτσι;……………………………………………………………………………………..

Ποιό το μήκος των πλευρών του;…………………………………………………………………………...

Ποιό το εμβαδόν του;……………………………………………………………………………………………...

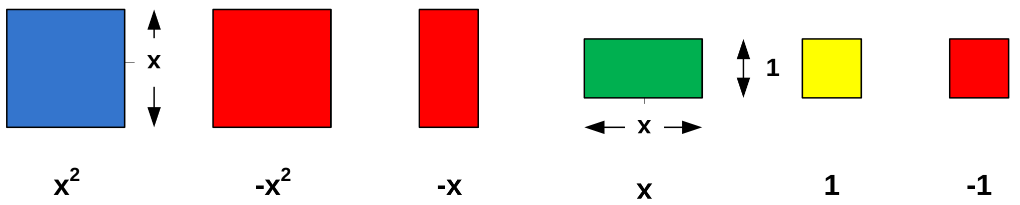
Πίνακας 15α

Όνομα/Ομάδα……………………………………………...Σχολείο………………………………….

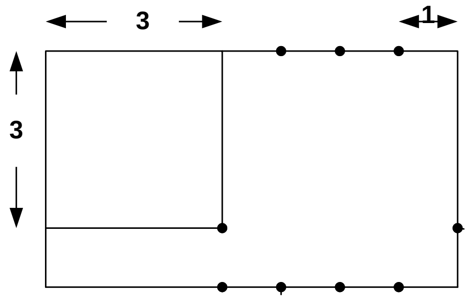
Ημερομηνία…………………………………………………

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Ορίζουμε τις διαστάσεις για τα αλγεβρικά πλακίδια ως εξής:



Ενώστε τα απέναντι σημεία του κάτωθι σχήματος



Πόσα διαφορετικά σχήματα δημιουργήθηκαν;

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Χαρακτηρίστε τα ως προς το σχήμα τους και βρείτε το εμβαδό τους.

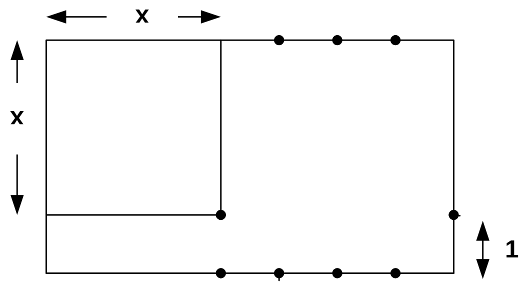
Σχήμα……………………………………………………….Εμβαδό……………………

Σχήμα……………………………………………………….Εμβαδό……………………

Σχήμα……………………………………………………….Εμβαδό……………………

Πίνακας 15β

Ενώστε τα απέναντι σημεία του κάτωθι σχήματος



Να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος

Πλευρές…………………………………………………….Εμβαδό ……………………………….

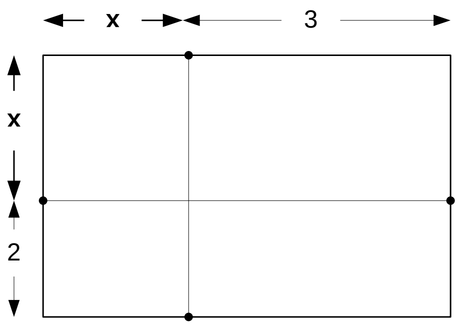
Με πόσους τρόπους θα μπορούσατε να βρείτε το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος;…………………...

Γράψτε τη γνώμη σας και τους τύπους που προτείνεται ………………………………………………..

……

Στο βιβλίο σας υπάρχει το κάτωθι και σας ζητούν να βρείτε ποιες απαντήσεις μαθητών

δίνουν σωστά το εμβαδό του. Βρείτε τες και δικαιολογήσετε την απάντησή σας



$x^2 + 6$

$x^2 + 6x + 5$

$(x+2)(x+3)$

$2x \bullet 3x$

$x^2 + 5x + 6$

Πίνακας 15γ

Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια τα ορθογώνια που αντιστοιχούν στις κάτωθι αλγεβρικές παραστάσεις και να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδό τους.

$x^2 - x$

Πλευρές…………………………………………………………...Εμβαδό…………………………………..

$x^2 + +3x + 2$

Πλευρές…………………………………………………………...Εμβαδό…………………………………..

$x^2 + +2x + 1$

Πλευρές…………………………………………………………...Εμβαδό…………………………………..

Πίνακας 15δ

Μπορεί να κατασκευαστεί ορθογώνιο με τα αλγεβρικά πλακίδια που αντιστοιχεί στην αλγεβρική παράσταση **$x^2 + 1$**; Αιτιολογήσατε την απάντησή σας

………

………..

Α) Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο **$3x^2 + 7x + 4$**

Β) Να κατασκευάσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο **$x^2 + 4x + 3$** και **$x^2 + x$**

Γ) Να αφαιρέσετε αυτά τα δύο εμβαδά από το εμβαδό του ορθογωνίου **$3x^2 + 7x + 4$** και γράψτε τι σχήμα προέκυψε, πόσο είναι οι πλευρές του και ποιο το εμβαδό του.

Το σχήμα είναι…………………………………………………γιατί ……………………………………

…………………………………………………………………………………..οι πλευρές του έχουν μήκος…………………………………………………...και το εμβαδό του είναι………………………….

………..

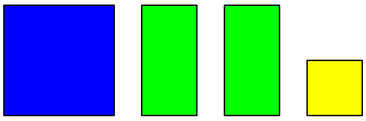
Πίνακας 16α

Όνομα/Ομάδα………………………………………………...Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία…………………………………………………

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ-ΔΙΑΦΟΡΑΣ

Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια



………………………………………….

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με τα ανωτέρω αλγεβρικά πλακίδια

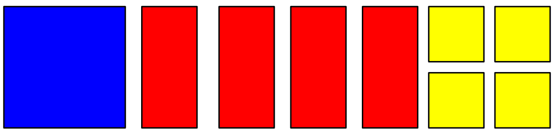
Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του;

……………………………………………..

Ποιο είναι το εμβαδό του;

…………………………………………...

Να κατασκευάσετε ομοίως ένα τετράγωνο με τα κάτωθι αλγεβρικά πλακίδια και να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδό του.



Αλγεβρική παράσταση

………………………………………….

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του;

……………………………………………..

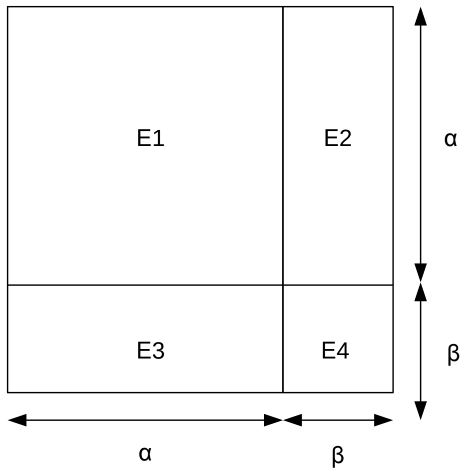
Ποιο είναι το εμβαδό του;

…………………………………………...

Πίνακας 16β

Προσδιορίστε τι είδος σχήμα είναι το ακόλουθο και γιατί……………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………....



Ποιό είναι το μήκος των πλευρών του;

…………………………………………………………………….

Ποιό είναι το εμβαδό του κάθε κομματιού που σχηματίζουν το ανωτέρω σχήμα;

E1…………………………………………………………………………………….

E2…………………………………………………………………………………….

E3…………………………………………………………………………………….

E4…………………………………………………………………………………….

Γράψτε το εμβαδό όλου του σχήματος με δύο τρόπους

E = ……………………………………………………………………………………….

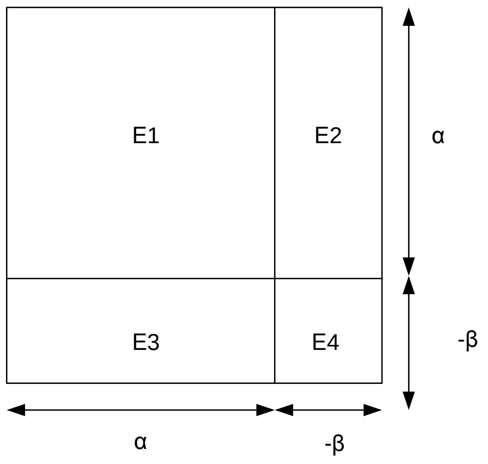
E = ……………………………………………………………………………………...

Πίνακας 16γ

Να κατασκευάσετε α) το τετράγωνο που έχει πλευρές **x+ 3** και β) το τετράγωνο με πλευρές **x- 3**

$(x+3)^2$	$(x-3)^2$

Χρωματίστε τα θετικά και τα αρνητικά αλγεβρικά πλακίδια του ακόλουθου σχήματος. Οι διαστάσεις σημειώνονται στο σχήμα



Ποιό είναι το μήκος των πλευρών του;

…………………………………………………………………………

Ποιό είναι το εμβαδό του κάθε κομματιού που σχηματίζουν το ανωτέρω σχήμα;

E1……………………………………………………………………………………

E2……………………………………………………………………………………

E3……………………………………………………………………………………

E4……………………………………………………………………………………

Γράψτε το εμβαδό όλου του σχήματος με δύο τρόπους

E = ……………………………………………………………………………………

E = ……………………………………………………………………………………..

Πίνακας 16δ

Αναπαραστήστε με τα αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση $\mathbf{(x + y)^2}$ και χρωματίστε τα κομμάτια που αντιστοιχούν στη παράσταση $\mathbf{x^2 + y^2}$.

Θεωρείτε ότι ισχύει η ισότητα $\mathbf{(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2}$; Αιτιολογήστε και αποδείξτε την απάντησή σας.

……….

……….

Συμπληρώστε τις ισότητες.

(………+ y)^2 = …………+…………xy + …………

(x………)^2 = …………-2xy + y^2

(………………)^2 = x^2 + 2xy + y^2

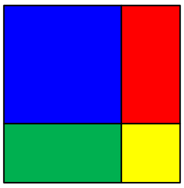
Πίνακας17α

Όνομα/Ομάδα………………………………………………....Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία……………………………………………………

ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Γράψτε την αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στο σχήμα



Αλγεβρική παράσταση

…………………………………………….

Γράψτε το εμβαδό του ανωτέρου σχήματος με δύο τρόπους.

Εμβαδό = ………………………………………………………..

Εμβαδό =………………………………………………………...

Να κατασκευάσετε το σχήμα που έχει εμβαδό **(x+2) (x-2)**

Πώς αλλιώς θα γράφατε το εμβαδό του σχήματος που κατασκευάσατε;

Εμβαδό = ……………………………………………………………………..

Πίνακας 17β

Να δείξετε με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου τα σχήματα που έχουν τα ακόλουθα εμβαδά

A	$(x+3)\ (x-3)$

B	$(2x+1)\ (2x-1)$

Γ	$(2x+3)\ (2x-3)$

Δ	$(3x+1)\ (3x-1)$

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$(2x+1)\ (2x-1) =$……………………………………………………………..

$(2x+3)\ (2x-3) =$……………………………………………………………..

$(3x+1)\ (3x-1) =$……………………………………………………………..

$(x+3)\ (x-3) =$………………………………………………………………..

Πίνακας 17γ

A

$(2x + 3y)^2 =$……………………………

B

$(3 - 2x)^2 =$……………………………

Γ

$(-x - 2)^2 =$……………………………

Δ

$(3\kappa + \lambda)^2 =$……………………………

Να κλείσεις με μια γραμμή τους χώρους που σχηματίζουν τετράγωνο

Ισχύει η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$; Δικαιολόγησε την απάντησή σου

………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

Πίνακας 17δ

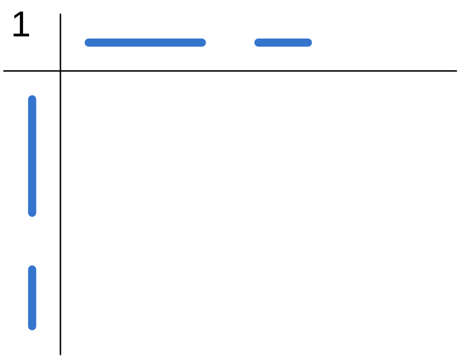
Στους πίνακες διπλής εισόδου που συμπληρώσατε κυκλώστε τους χώρους που σχηματίζουν τετράγωνα.

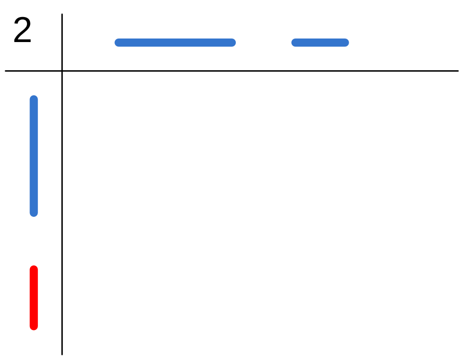
Ποια γενική παρατήρηση κάνετε;

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Συμπληρώστε τους πίνακες διπλής εισόδου που έχουν τις διαστάσεις που είναι σημειωμένες.





Γράψτε το εμβαδό του σχήματος [1] και του σχήματος [2] με δύο τρόπους.

[1]

Εμβαδό = …………………………….

Εμβαδό = …………………………….

[2]

Εμβαδό = …………………………….

Εμβαδό = …………………………….

Διακρίνετε διαφορές στο εμβαδό του σχήματος [1] από το εμβαδό του σχήματος [2]. Αν ναι, ποιες είναι αυτές;

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

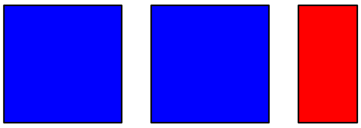
Πίνακας 18α

Όνομα/Ομάδα…………………………………………………..Σχολείο……………………………………

Ημερομηνία……………………………………………………

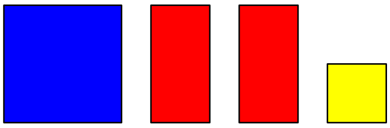
ΜΟΡΦΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Να σχηματίσετε ορθογώνια με τα παρακάτω σχήματα:



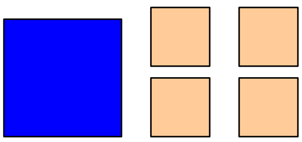
Α

Αλγεβρική παράσταση …………………………….. = Αλγεβρική παράσταση ……………………………..



Β

Αλγεβρική παράσταση …………………………….. = Αλγεβρική παράσταση ……………………………..



Γ

Αλγεβρική παράσταση …………………………….. = Αλγεβρική παράσταση ……………………………..

Η μετατροπή ενός αθροίσματος σε γινόμενο λέγεται ……………………………………………..

Πίνακας 18β

Σημειώστε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις παριστούν εμβαδό ορθογωνίου

(x-y) (x+y)	2+(x-y)(x+y)
$4(\alpha-\beta)^2$	4+ (α-β)
(x +2y)x -y	(x+2y)(x-y)

Γιατί επιλέξατε αυτές;…………………………………………………………………………………

……..

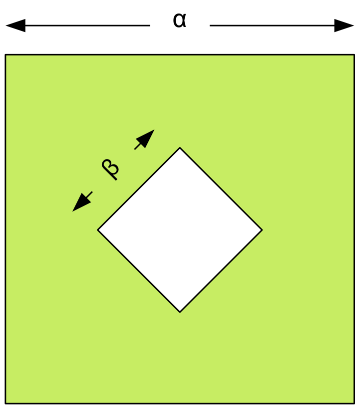
Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

4x + 8 = 4(……………..)

$2x^2$ + 4x = 2(……………)

3xy – y^2 = y(…………….)

Ποιες αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζουν το εμβαδό του ακόλουθου σχήματος;



$(\alpha-\beta)^2$

(α-β)(α+β)

$\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2-\beta^2$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας……………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

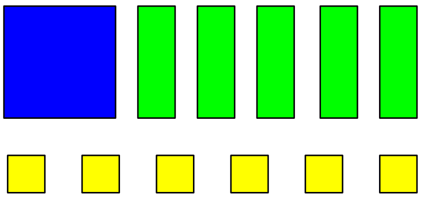
Πίνακας 19α

Μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ δευτεροβάθμιας παράστασης

Ονοματεπώνυμο ομάδας……………………………………………………………………………………

Σχολείο………………………………………………..Ημερομηνία…………………………………………

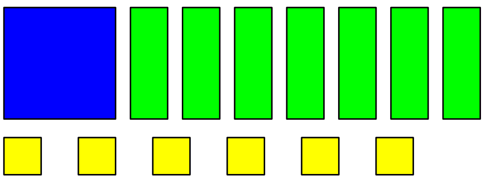
Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδό του με τα αλγεβρικά πλακίδια που σας δίνονται



Αλγεβρική παράσταση………………………….

Εμβαδό ορθογωνίου…………………………….

Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδό του με τα αλγεβρικά πλακίδια που σας δίνονται



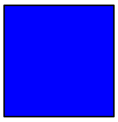
Αλγεβρική παράσταση………………………….

Εμβαδό ορθογωνίου…………………………….

Πίνακας 19β

Να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση $x^2 - 6x + 5$.

Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδό του



Εμβαδό ορθογωνίου…………………………….

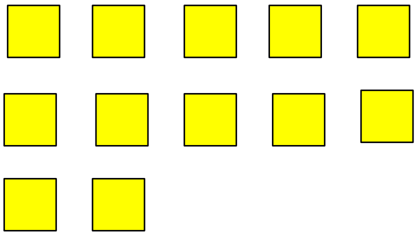
Να αναπαραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την αλγεβρική παράσταση $x^2 - 6x + 8$.

Να κατασκευάσετε ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδό του

Εμβαδό ορθογωνίου…………………………….

Πίνακας 19γ

Να κατασκευάσετε με τα ακόλουθα αλγεβρικά πλακίδια όσα το δυνατόν ορθογώνια μπορείτε και να βρείτε για κάθε ορθογώνιο το εμβαδό του και τη μισή περίμετρό του.



Εμβαδό ορθογωνίου……………………………. Μισή περίμετρος………………………………...

Εμβαδό ορθογωνίου……………………………. Μισή περίμετρος………………………………...

Εμβαδό ορθογωνίου……………………………. Μισή περίμετρος………………………………...

Πίνακας 19δ

Αναγνωρίζετε τους αριθμούς των εμβαδών και ημιπεριμέτρων στα ακόλουθα τριώνυμα;

$$x^2 – 7x + 12$$

$$x^2 – 8x + 12$$

$$x^2 – 13x + 12$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας.

………

……...

Τι μπορεί να παριστάνουν το **α** και το **β** στο τύπο $\mathbf{x^2 + (α+β)x + αβ}$;

………

……...

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$x^2 + (α+β)x + αβ$;	αβ	α+β	α	β	(x + α)(x + β)
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

Πίνακας 20α

Pre-test (Εξίσωση πρώτου βαθμού)

Όνομα…………………………………………………………………………Τμήμα…………………………

Ημερομηνία…………………………………………………

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. x+2 = -5…………………………………………………………………………….

2. 6x+15 = 3………………………………………………………………………….

3. 3 (x+2) + 4 (1-x) = x - 2…………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

Πίνακας 20β

Post-test (Εξίσωση πρώτου βαθμού)

Όνομα………………………………………………………………………….Τμήμα…………………………

Ημερομηνία…………………………………………………

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. x+4 = -5…………………………………………………………………………….

2. 3x-15 = 3…………………………………………………………………………

3. 2 (x+3) - 4 (1-x) = x - 2…………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

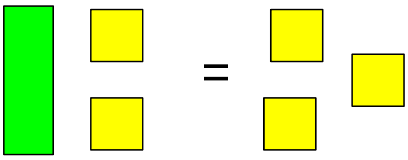
Πίνακας 21α

Ονοματεπώνυμο ομάδας………………………………………………………………………………….

Σχολείο……………………………………………..Ημερομηνία………………………………………

Εξίσωση πρώτου βαθμού

Να λύσετε την εξίσωση που παριστάνεται με τα αλγεβρικά πλακίδια και να γράφετε για κάθε βήμα την αλγεβρική της παράσταση

Γεωμετρική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση
	

Να παραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την εξίσωση 3x + 2 = -1. Να σημειώσετε τις αντίστοιχες αλγεβρικές πράξεις.

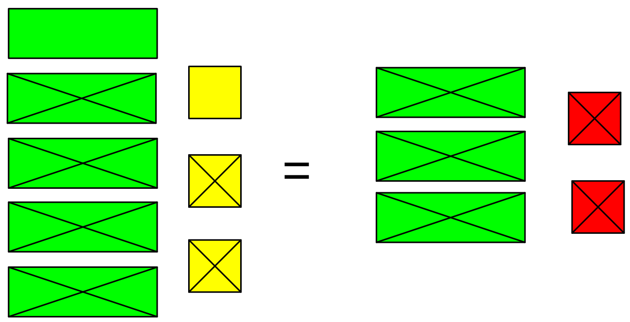
Γεωμετρική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση

Πίνακας 21β

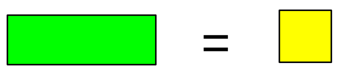
Να παραστήσετε με αλγεβρικά πλακίδια την εξίσωση $3x + 2 = 2x-1$. Να σημειώσετε τις αντίστοιχες αλγεβρικές πράξεις.

Γεωμετρική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση

Να βρείτε τα λάθη που έκανε ο μαθητής κατά την εξίσωση που ακολουθεί και να αιτιολογήσετε τη γνώμη σας.



Άρα η λύση είναι



Λάθος είναι……………………………………………………………………………………………..

……

……

……

Πίνακας 22α

Ονοματεπώνυμο ομάδας……………………………………………………………………………………….

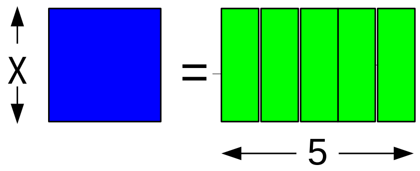
Σχολείο……………………………………………..Ημερομηνία…………………………………………

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ [ΕΛΛΙΠΕΙΣ ΜΟΡΦΕΣ]

Να βρεθεί η πλευρά x ενός τετραγώνου αν γνωρίζω ότι το εμβαδό του ισούται με το εμβαδό ορθογωνίου που η μία διάστασή του είναι x και η άλλη 5x.

Βήμα πρώτο

Ποια είναι η αλγεβρική εξίσωση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;



Αλγεβρική εξίσωση………………………….

Βήμα δεύτερο

Γράψε πως θα «μεταφέρεις» τα ορθογώνια στο πρώτο μέρος για να κατασκευάσεις με το τετράγωνο ένα ορθογώνιο και ζωγράφισέ το.

………………………………………………………………………………………………………

Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου που κατασκευάσατε;

…………………………………………………………………….

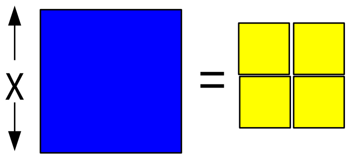
Για ποιες τιμές του **x** θα μηδενίζονταν το εμβαδό του ορθογωνίου;

……………………………………………………………………...

Πίνακας 22β

Να λύσεις την εξίσωση $x^2 = 7x$

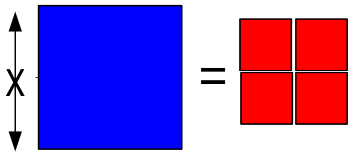
Να βρεθεί η πλευρά x ενός τετραγώνου αν γνωρίζω ότι το εμβαδό του ισούται με το εμβαδό τετραγώνου έχει πλευρά **2.** Να ακολουθήσετε τα βήματα της προηγούμενης άσκησης.



Να λύσεις την εξίσωση $x^2 = 9$

Πίνακας 22γ

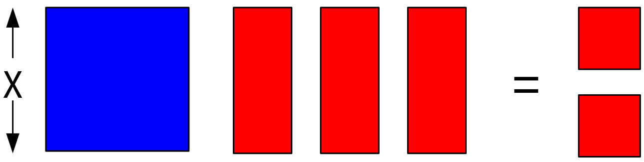
Να λύσεις την εξίσωση που αναπαριστούν τα ακόλουθα πλακίδια ακολουθώντας το συλλογισμό των προηγούμενων ασκήσεων.



Τι παρατηρείς;………………………………………………………………………………………………..

Ποιο συμπέρασμα βγαίνει;…………………………………………………………………………………….

Να λύσεις την εξίσωση που αναπαριστούν τα ακόλουθα πλακίδια ακολουθώντας το συλλογισμό των προηγούμενων ασκήσεων.



Πίνακας 22δ

Να παραστήσετε με τα αλγεβρικά πλακίδια τη παράσταση $(x+2)^2$

Να λύσεις την εξίσωση $(x+2)^2 = 0$

Ποια συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε που θα αναφέρονταν στο σύνολο των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης ελλιπούς μορφής.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

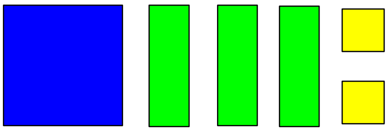
Πίνακας 23α

Ονοματεπώνυμο ομάδας…………………………………………………………………………………….

Σχολείο………………………………………………..Ημερομηνία…………………………………………

Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης (Πλήρης μορφή)

Ποια είναι η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στα αλγεβρικά πλακίδια;



……………………………………………………………………...

Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο με τα ανωτέρω αλγεβρικά πλακίδια.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του;

…………………………………………………

Ποιο είναι το εμβαδό του;

………………………………………………

Πίνακας 23β

Να μετατρέψετε σε γινόμενο την αλγεβρική παράσταση $\mathbf{x^2 + 7x + 6}$ κάνοντας χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων

$$x^2 + 7x + 6 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Ομοίως να παραγοντοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση $\mathbf{x^2 - 7x + 6}$ με τη χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων

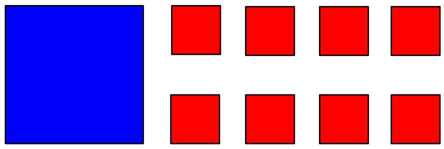
$$x^2 - 7x + 6 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Για ποιές τιμές του μηδενίζονται οι πλευρές των ορθογωνίων που κατασκευάσατε;

$\mathbf{x^2 + 7x + 6}$		$\mathbf{x^2 - 7x + 6}$	
x =……………,	x =………………	x =……………,	x =………………

Πίνακας 23γ

Δίνονται τα κάτωθι αλγεβρικά πλακίδια



Να χρησιμοποιήσετε όσα επιπλέον σχήματα χρειάζεστε για να συμπληρώσετε ένα ορθογώνιο και να το κατασκευάσετε.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του;

…………………………………………………

Ποιο είναι το εμβαδό του;

………………………………………………

Συμπλήρωσε τα κενά που υπάρχουν στην αλγεβρική παράσταση

x^2…………………………..-8 = (x………..)(x…………)

ώστε να αντιστοιχεί στο ορθογώνιο που κατασκεύασες

Πίνακας 23δ

Θα μπορούσατε να δώσετε και άλλη λύση χρησιμοποιώντας διαφορετικό αριθμό πλακιδίων από αυτά που προσθέσατε προηγουμένως ώστε να προκύψει ένα ακόμη ορθογώνιο; Αν ναι σχεδιάστε το.

Πόσο είναι το μήκος των πλευρών του;

…………………………………………………

Ποιο είναι το εμβαδό του;

………………………………………………

Συμπλήρωσε τα κενά που υπάρχουν στην αλγεβρική παράσταση

x^2…………………………..-8 = (x………..)(x…………)

ώστε να αντιστοιχεί στο ορθογώνιο που κατασκεύασες

Πίνακας 24α

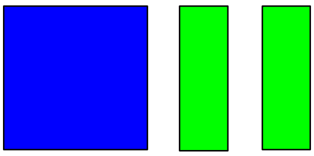
Ονοματεπώνυμο ομάδας…………………………………………………………………………………….

Σχολείο……………………………………………..Ημερομηνία………………………………………

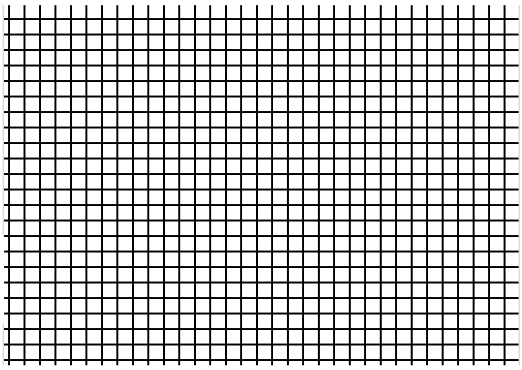
Επίλυση τριωνύμου με συμπλήρωση τετραγώνου

Να προσπαθήσετε να κατασκευάσετε τετράγωνο με τα αλγεβρικά πλακίδια που σας δίνονται προσθέτοντας όσα αλγεβρικά πλακίδια χρειάζονται.

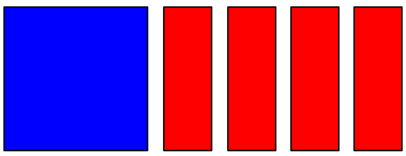
Το συμπληρωμένο τετράγωνο



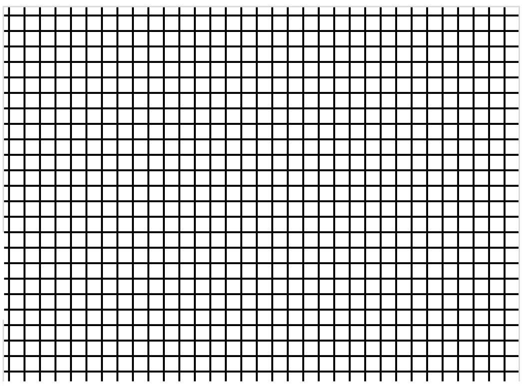
………………………………………………….



…………………………………………………….



………………………………………………….



…………………………………………………..

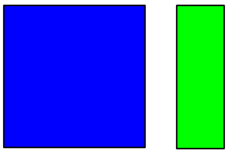
Πώς συμπληρώσατε το τετράγωνο;

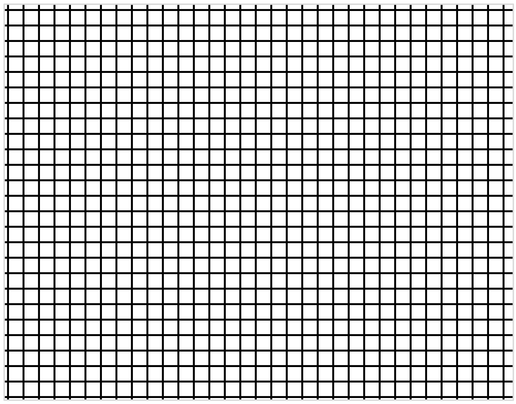
Συμπληρώσαμε το τετράγωνο……………………………………………………………………………

………..

Πίνακας 24β

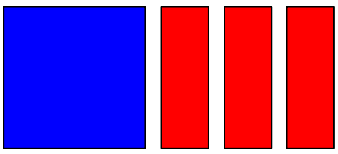
Το συμπληρωμένο τετράγωνο

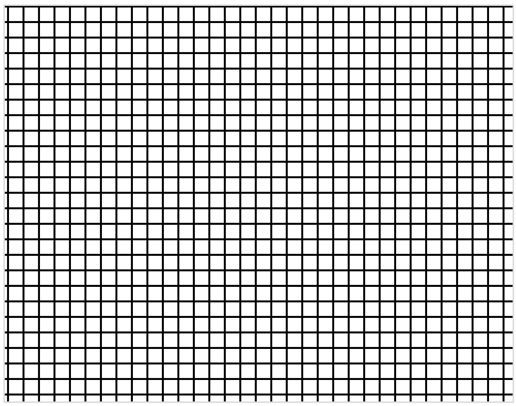




…………………………………………………..

…………………………………………………..





…………………………………………………..

…………………………………………………..

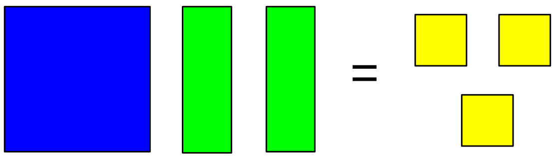
Πώς συμπληρώσατε το τετράγωνο;

Συμπληρώσαμε το τετράγωνο………………………………………………………………………….

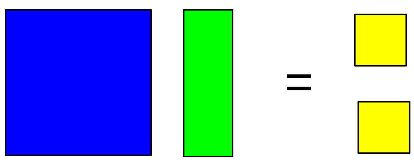
………..

Πίνακας 24γ

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου.

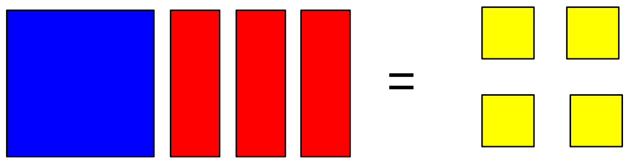


Να λύσεις την εξίσωση $x^2 + 4x = 5$

Να λύσεις την εξίσωση 

Πίνακας 24δ

Να λύσεις την εξίσωση



Να λύσεις την εξίσωση $x^2 - 5x = 6$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ:

ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΑ ΔΙΑΓΩΝΊΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ – ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΚΥΡΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Πίνακας 25α

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………Ομάδα…………….

Σχολείο…………………………………………………………Ημερομηνία……………………………….

Επαναληπτικό Διαγώνισμα

1 Να αντιστοιχίσετε τη σωστή απάντηση της ακόλουθης αλγεβρικής παράστασης και στη συνέχεια να δικαιολογήσεις την επιλογή σου.

	$2x^2 – 4x + 1$
$(2x + 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$
	$2x^2 + 4x + 1$
	$4x^2 – 4x + 1$

Επέλεξα την……………………………………………διότι………………………………..

………………………………………………………………………………………………………

2 Ομοίως να αντιστοιχίσεις τη σωστή απάντηση για τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις

$x^2 – 4$	$(x+2)^2$
$x^2 + 4$	$x^2 +2$
$x^2 + 2x +2$	$(x+2) (x-2)$
	Δεν παραγοντοποιείται
	$(x+1)(x+2)$

Πίνακας 25β

Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες με τους αριθμούς και τα σύμβολα που λείπουν

3 α) (x ……†……..) ^{2} = ………+………+ 9

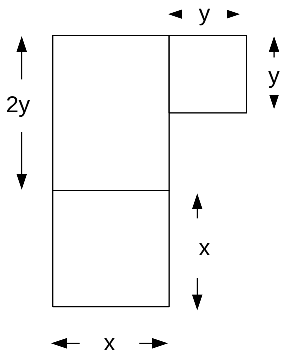
β) (……†…… 4)^2 = x ^{2} -………†………..

4 Να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις παρακάτω ισότητες και να διορθώσετε τις λανθασμένες γράφοντας τη σωστή παράσταση.

$x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$	Σ	Λ
$x^2 - 9 = (x-9)(x+9)$	Σ	Λ
$4x^2 - α^2 = (2x-α)(2x+α)$	Σ	Λ
$4y^2 - 1 = (4y-1)(4y+1)$	Σ	Λ

Πίνακας 25γ

5 Να βρείτε ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδό του σχήματος που ακολουθεί



………………………………………………………………

Πόσο θα ήταν η πλευρά ενός τετραγώνου που θα είχε ίσο εμβαδό με το εμβαδό του ανωτέρω σχήματος ;

……

Αν **<u>ναι</u>** τότε η πλευρά του είναι……………………………………………………………….

και το εμβαδόν του είναι……………………………………………………………………...

Πίνακας 25δ

6 Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$x(x-3) = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 - 3x + 7 = 0$

Πίνακας 26α (Φύλλο αξιολόγησης)

«Αλγεβρικά πλακίδια» 10ο Γυμνάσιο. Σχολικό έτος 2007-2008

Ερωτηματολόγιο

Τα ερωτηματολόγια είναι ανώνυμα. Σημείωσε την επιλογή σου σε κάθε ερώτηση της πρώτης σελίδας σημειώνοντας το αντίστοιχο τετραγωνάκι και ακολούθως στη τρίτη σελίδα απάντησε στις ερωτήσεις γράφοντας τις δικές σου απόψεις. Τα τετραγωνάκια θα τα σημειώσεις με βάση τα ακόλουθα:

[4] για το «***συμφωνώ πολύ»*** **[3]** για το «***συμφωνώ αρκετά»***, **[2]** για το ***«συμφωνώ λίγο»*** **[1]** για το ***«διαφωνώ»***

Ερώτηση					
1	Σε γενικές γραμμές η εμπειρία μου από τη διδασκαλία με τα χειραπτικά υλικά ήταν <u>θετική</u>	4	3	2	1
2	Κατανόησα <u>καλύτερα</u> τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκα από ότι στο συνηθισμένο μάθημα	4	3	2	1
3	Το μάθημα με χειραπτικά υλικά βοηθά <u>μόνο</u> τους «αδύνατους» μαθητές.	4	3	2	1
4	Το μάθημα με τα χειραπτικά υλικά βοηθά <u>όλους</u> τους μαθητές	4	3	2	1
5	<u>Δεν νομίζω</u> ότι τα χειραπτικά υλικά βοηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών	4	3	2	1
6	<u>Δεν μου αρέσει</u> να μου συζητώ με τους συμμαθητές μου το πώς θα λυθεί μια άσκηση	4	3	2	1
7	<u>Δεν αισθάνομαι σίγουρος/η</u> να απαντήσω στις ερωτήσεις του καθηγητή χωρίς να ρωτήσω τον/την διπλανό/ή μου	4	3	2	1
8	Θεωρώ ότι τα μαθηματικά είναι <u>μόνο</u> για λίγους μαθητές	4	3	2	1

Πίνακας 26β

Υπογράμμισε την επιλογή σου μέσα από την παρένθεση για να συμπληρώσεις τις προτάσεις που ακολουθούν

9 Τα αλγεβρικά πλακίδια με βοήθησαν να καταλάβω τα μαθηματικά ***[πάρα πολύ, πολύ, σχεδόν καθόλου, καθόλου]***

10 Συμμετείχα στο μάθημα με ***[πάρα πολύ, πολύ, σχεδόν καθόλου, καθόλου]*** ενδιαφέρον.

11 Για να λύσω ***[τις δύσκολες, τις εύκολες, όλες τις]*** ασκήσεις τις σχεδίαζα με τα αλγεβρικά πλακίδια.

12 Συζήτησα με τον καθηγητή μου για την πορεία της άσκησης ***[πολλές φορές, μερικές φορές, καθόλου]***

13 Αν βαθμολογούσα τον εαυτό μου τώρα θα έβαζα στα μαθηματικά ***[πολύ καλύτερο, καλύτερο, χειρότερο, πολύ χειρότερο]*** βαθμό.

14 Οι σχέσεις μου με τους συμμαθητές τις ομάδας μου έγιναν ***[πολύ καλύτερες, καλύτερες, παρέμειναν ίδιες, χειροτέρευσαν]***

15 Όταν έλυνα μια άσκηση σκεφτόμουν ***[πάντα, σχεδόν πάντα, μερικές φορές, ποτέ]*** την εικόνα με τα αλγεβρικά πλακίδια για να βοηθηθώ

Πίνακας 26γ

«Αλγεβρικά πλακίδια» 10ο Γυμνάσιο. Σχολικό έτος 2007-2008

Τι σου άρεσε περισσότερο από τον τρόπο που διδάχτηκες το μάθημα της άλγεβρας;
………

………

………

Τι δεν σου άρεσε;
………

………

………...

Δυσκολεύτηκες όταν εργαζόσουν με τα αλγεβρικά πλακίδια;

………

Αν δυσκολεύτηκες, τι ήταν αυτό που σε δυσκόλεψε;……………………………………………………………………………………………

………

……..

Δυσκολεύτηκες να συνεργαστείς με τους συμμαθητές σου στην ομάδα;

………

Αν δυσκολεύτηκες, τι ήταν αυτό που σε δυσκόλεψε……………………………………………………………………………………………..

………

………

Θεωρείς ότι τα μαθηματικά είναι για σένα ένα δύσκολο μάθημα;

………

Ποιές ασκήσεις έλυνες ευκολότερα; Τις ασκήσεις του φύλλου δραστηριοτήτων ή τις ασκήσεις του βιβλίου;……………………………

………
.

Γιατί;……

……..

Πως θα ήθελες να γίνεται το μάθημα των μαθηματικών;

………

Γιατί;………

………

Πίνακας 27

Ερωτηματολόγιο συνέντευξης για τον καθηγητή.

1. Πώς θα χαρακτηρίζατε το μάθημα με την χρήση των αλγεβρικών πλακιδίων;
2. Υπάρχει κάτι που σας έκανε εντύπωση όσον αφορά τους μαθητές, το κλίμα της τάξης, το μάθημα.
3. Τί πρόβλημα νομίζετε ότι θα αντιμετωπίζατε αν κάνατε το μάθημα, όπου αυτό θα ήταν δυνατό, χρησιμοποιώντας χειραπτικά μέσα.
4. Αναφέρθηκαν οι μαθητές σας στον τρόπο που έγινε το μάθημα παρέμβασης;
5. Αν ναι ήταν θετικά ή αρνητικά τα σχόλια; Τί άλλες παρατηρήσεις κάνανε;
6. «Διαταράσσεται» η ατμόσφαιρα της τάξης δουλεύοντας οι μαθητές ομαδικά;
7. Πιστεύετε ότι πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένη σύνθεση τάξης για να γίνεται χρήση χειραπτικών μέσων π.χ καλοί μαθητές, ήσυχοι κ.λ.π.
8. Θα κάνατε διάκριση ανάμεσα σε «διασκεδαστικά» και «πραγματικά» μαθηματικά;
9. Είναι η απομνημόνευση ο σημαντικότερος τρόπος μάθησης;
10. Σε ποιούς τομείς βοηθά, αν βοηθά;
11. Κάτω από ποιές συνθήκες θα κάνατε μάθημα χρησιμοποιώντας χειραπτικά μέσα;

12. Νομίζετε ότι οι θεωρητικές γνώσεις στα μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με αναπαραστάσεις ή παρατηρείτε δυσκολία να «διαβάσουν» οι μαθητές μια αναπαράσταση π.χ διάγραμμα, γεωμετρική παράσταση;
13. Θα μπορούσαν τα αλγεβρικά πλακίδια να ενταχθούν ισότιμα στην δομή του μαθήματος χωρίς να αποτελούν «διάλειμα» μαθήματος;
14. Ποιά είναι τα δυνατά σημεία της έρευνας που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να φέρουν αλλαγή στο αναλυτικό πρόγραμμα;
15. Ποιές διδακτικές προσεγγίσεις χρησιμοποιείτε για να γίνεται η μετάβαση από την πρακτική σκέψη στη θεωρητική;

ΑΡΘΡΟ $1^{Ο}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1. Θεωρητικό υπόβαθρο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Τα προγράμματα σπουδών (Π.Σ.) και τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στοχεύουν στην παρουσίαση μιας συγκεκριμένης, κατά τάξη, ύλης η επιλογή και διάρθρωση της οποίας γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τους γενικότερους στόχους της εκπαίδευσης και τους ειδικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Για την υλοποίηση των στόχων πρέπει να ληφθούν υπόψη τόσο οι αρχές μάθησης που αφορούν τη διαδικασία απόκτησης γνώσης γενικά και ειδικά της μαθηματικής γνώσης, όσο και οι γενικές αρχές της διδασκαλίας των Μαθηματικών, σύμφωνα με τις οποίες η διαδικασία μάθησης στα Μαθηματικά είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα. Η αντίληψη αυτή αντιπαρατίθεται στην ιδέα του «μαθαίνω απορροφώντας γνώση» η οποία παρουσιάζεται ή μεταβιβάζεται από κάποιον και «συλλαμβάνεται» παθητικά από τον μαθητή. **Η κατασκευή της γνώσης καθίσταται εφικτή υπό την προϋπόθεση ότι η διαδικασία της μάθησης βασίζεται σε συγκεκριμένες εμπειρίες του ατόμου.**

Η μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας ή δεξιότητας είναι μια διαδικασία μακρόχρονη και κινείται σε διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή, η μάθηση είναι δυνατή επειδή είμαστε ικανοί να ανακαλύπτουμε κοινές ιδιότητες σε διαφορετικού είδους εμπειρίες, τις οποίες «αποθηκεύουμε» στη μνήμη για μελλοντική χρήση. Η νοητική αναπαράσταση μιας κοινής ιδιότητας είναι αυτό που ονομάζουμε έννοια. Οποτεδήποτε βλέπουμε ή ακούμε κάτι στο περιβάλλον, ανακαλούμε από τη μνήμη μας μια έννοια που θεωρούμε σχετική. Παριστάνοντας τις έννοιες με σύμβολα μπορούμε να τις ανακαλέσουμε κάθε στιγμή χωρίς την ανάγκη εξωτερικού ερεθίσματος. Στην περίπτωση αυτή η έννοια έχει γίνει ένα «νοητικό αντικείμενο», το οποίο διαπραγματευόμαστε με διάφορους τρόπους. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ομαδοποιήσουμε έννοιες από μια κοινή τους ιδιότητα, σχηματίζοντας έννοιες ανωτέρας τάξεως. Οι διαδοχικές αφαιρέσεις που απαιτούνται για τη δημιουργία εννοιών ανωτέρας τάξεως, προσδιορίζουν το νόημα του όρου «αφαιρετική διαδικασία». Για να μπορέσουν οι μαθητές να μεταβούν από το επίπεδο της άτυπης εκπεφρασμένης σε συγκεκριμένο πλαίσιο γνώσης, στο επίπεδο της τυπικής μαθηματικής γνώσης **πρέπει να έχουν στη διάθεσή τους τα κατάλληλα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου. Η παροχή συγκεκριμένου υλικού, μοντέλων, σχημάτων, διαγραμμάτων, συμβόλων, εξυπηρετεί αυτό το σκοπό.**

Οι έννοιες «αφηρημένο» και «συγκεκριμένο» είναι σχετικές. Κάτι που χαρακτηρίζεται ως αφηρημένο για μια ηλικία μαθητών, λειτουργεί ως συγκεκριμένο εργαλείο για μεγαλύτερες ηλικίες. Αυτό σημαίνει ότι ο προσανατολισμός προς μια βάση συγκεκριμένων εμπειριών, δεν πρέπει να μεταφρασθεί στενά και σε σχέση μόνο με υλικά αντικείμενα ή δραστηριότητες δανεισμένες αποκλειστικά από την καθημερινή ζωή. Τα διάφορα μοντέλα, τα σχήματα, τα διαγράμματα κτλ. ενδέχεται για κάποιες ηλικίες μαθητών να παίξουν το ρόλο του συγκεκριμένου, στο οποίο θα στηριχθεί η διαδικασία απόκτησης μαθηματικής γνώσης.