

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

ΣΕ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ ΥΓΡΩΝ ΥΠΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Υπό

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΚΑΤΣΙΚΟΓΙΑΝΝΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2012

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Σπύρος Καραμάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτρης Βαλουγεώργης
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Παναγιώτης Ντακούλας
Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 11238/1
Ημερ. Εισ.: 23-01-2013
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2012
ΚΑΤ

Ευχαριστίες

Την ώρα που γράφονται αυτές οι γραμμές, μία επίπονη προσπάθεια διάρκειας 2 ετών έχει φθάσει στο τέλος της. Πρώτα απ' όλα, οφείλω να ευχαριστήσω τον άνθρωπο που με εμπιστεύθηκε από τη πρώτη στιγμή της συνεργασίας μας, τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σπύρο Καραμάνο, για την πολύτιμη καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου, την υπομονή του και τις εξαιρετικά χρήσιμες συμβουλές του τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και σε προσωπικό επίπεδο. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Αθανάσιο Δήμα, για την πολύτιμη συμβολή του στη διατύπωση του μη-γραμμικού προβλήματος. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Δημήτρη Βαλουγεώργη και κκ. Παναγιώτη Ντακούλα για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Ντακούλα του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, που μου υπέδειξε τη λειτουργία του υπολογιστικού πακέτου SeismoSignal που χρησιμοποιήθηκε κατά της διάρκεια της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τη διδακτορική φοιτήτρια του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Πατρίσια Παππά για τη βοήθεια και συνεργασία της όποτε χρειάστηκε. Οφείλω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλα εκείνα τα πρόσωπα με τα οποία περάσαμε 5 υπέροχα χρόνια στο Βόλο τα οποία γράφτηκαν ανεξίτηλα στις μνήμες όλων μας. Επίσης, ευχαριστώ τη Γιώτα για την κατανόησή της, καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Στράτο και Μαρκέλλα και στους θείους μου, Πέτρο και Ισμήνη για την ολόψυχη αγάπη, ηθική και υλική υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένεια μου.

Σας ευχαριστώ για όλα

Γιώργος Κατσικογιάννης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΣΕ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ ΥΓΡΩΝ ΥΠΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΤΣΙΚΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2012

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Σπύρος Καραμάνος Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας ρευστού μιας δεξαμενής παρουσιάζεται όταν η δεξαμενή υπόκειται σε εξωτερική διέγερση. Ο κυματισμός επηρεάζει τη γενική δυναμική συμπεριφορά του συστήματος δεξαμενής-ρευστού. Τα μήκη κύματος της ελεύθερης επιφάνειας αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες διακριτές τιμές της συχνότητας κίνησης, οι οποίες αποτελούν τις ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) του συστήματος, και οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν την μορφή της κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η γραμμική και η μη-γραμμική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού σε κυλινδρικές και ορθογωνικές δεξαμενές κατά τη διάρκεια εξωτερικής διέγερσης μέσω μίας δευτέρας τάξεως ασυμπτωτικής μεθόδου. Κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας γίνεται μελέτη για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων κυματισμού στα συστήματα ορθογωνικής και κυλινδρικής δεξαμενής, των ωστικών και επαγωγικών μεγεθών του φαινομένου (μάζες, δυνάμεις, ροπές), και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτει από την επίλυση του γραμμικού και του μη-γραμμικού προβλήματος. Τέλος γίνεται προσομοίωση με πραγματικούς σεισμούς που έχουν συμβεί στο παρελθόν για την εύρεση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε δεξαμενές διαφόρων διαστάσεων. Η προσομοίωση γίνεται με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου SeismoSignal και με τη χρήση αλγορίθμου πεπερασμένων διαφορών που προγραμματίστηκε στο Microsoft Excel.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	7
1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	10
1.3	Στόχος και δομή της εργασίας	13
Κεφάλαιο 2	Φυσική και μαθηματική διατύπωση του προβλήματος του κυμματισμού	15
2.1	Φυσική και μαθηματική διατύπωση του φαινομένου	15
Κεφάλαιο 3	Επίλυση γραμμικού προβλήματος για ορθογωνικές δεξαμενές	22
3.1	Διατύπωση του προβλήματος	22
3.2	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής δύναμης	29
3.3	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής ροπής	35
3.4	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής μάζας	38
3.5	Υπολογισμός σημείου εφαρμογής επαγωγικής και ωστικής δύναμης	41
3.6	Αρμονική Διέγερση	45
Κεφάλαιο 4	Επίλυση μη-γραμμικού προβλήματος για ορθογωνικές δεξαμενές	47
4.1	Διατύπωση μη-γραμμικού προβλήματος	47
4.2	Ανάλυση με ένα γραμμικό όρο	54
4.3	Υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας με ένα γραμμικό όρο	58
4.4	Ανάλυση με δύο γραμμικούς όρους	62
4.5	Υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας με δύο γραμμικούς όρους	68
Κεφάλαιο 5	Επίλυση γραμμικού προβλήματος για κυλινδρικές δεξαμενές	73
5.1	Διατύπωση του προβλήματος	73
5.2	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής δύναμης	75
5.3	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής ροπής	77
5.4	Υπολογισμός επαγωγικής και ωστικής μάζας	79
5.5	Υπολογισμός σημείου εφαρμογής της επαγωγικής και ωστικής δύναμης	84

Κεφάλαιο 6 Επίλυση μη-γραμμικού προβλήματος για κυλινδρικές δεξαμενές.....	87
6.1 Διατύπωση μη-γραμμικού προβλήματος	87
6.2 Ανάλυση με ένα γραμμικό όρο	94
Κεφάλαιο 7 Απόκριση δεξαμενών σε πραγματικούς σεισμούς.....	104
7.1 Μεθοδολογία επίλυσης	104
7.2 Αποτελέσματα για ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές.....	110
Κεφάλαιο 8 Συμπεράσματα.....	171
Κεφάλαιο 9 Παράρτημα.....	175
9.1 Αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών στο πρόβλημα του κυματισμού.....	175
Κεφάλαιο 10 Βιβλιογραφία.....	177

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγή

Σε δοχεία μερικώς γεμάτα, η ελεύθερη επιφάνεια των υγρών, μπορεί να υποστεί ένα ευρύ φάσμα κινήσεων τύπου “κυματισμού” (sloshing) ανάλογα με το τύπο της διέγερσης και το σχήμα του δοχείου. Έτσι, όταν αλληλεπιδρά η ελεύθερη επιφάνεια με το ελαστικό δοχείο στο οποίο περιέχεται το υγρό ή με τη κατασκευή στήριξης του, μπορεί να επιδείξει σύνθετους τύπους κίνησης, ανάλογους με τη μορφή της ανταλλαγής ενέργειας ανάμεσα στα αλληλεπιδρώντα μέρη. Κάθε κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στο εσωτερικό του δοχείου που το περιέχει περιγράφεται εφ’ εξής με τον όρο “κυματισμός”.

Η κίνηση του ρευστού στο εσωτερικό της δεξαμενής του, έχει έναν άπειρο αριθμό φυσικών ιδιοσυχνοτήτων, ωστόσο είναι πιθανότερο ότι οι όροι που αντιστοιχούν στις μικρότερες ιδιοτιμές είναι αυτοί που προκαλούνται από την εξωτερική διέγερση. Οι περισσότερες μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην έρευνα των εξαναγκασμένων αρμονικών ταλαντώσεων κοντά στη χαμηλότερη φυσική συχνότητα που προβλέπεται από τις γραμμικές εξισώσεις του πεδίου των ρευστών. Όταν μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος υγρό-δοχείο είναι στην περιοχή ή ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα μιας εξωτερικής κίνησης, διαταραχής ή διέγερσης που ασκείται πάνω στη κατασκευή, τότε εμφανίζεται συντονισμός, το εύρος της ταλάντωσης αυξάνει σημαντικά και μπορεί να προκληθεί αστοχία. Επομένως ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων του φαινομένου του κυματισμού και γενικότερα η μελέτη της απόκρισης του συστήματος υγρό-δοχείο σε εξωτερική διέγερση αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σημασία.

Η σημασία της μελέτης του φαινομένου του κυματισμού είναι μεγάλη επειδή συσχετίζεται με ένα μεγάλο αριθμό σημαντικών και τεχνολογικών εφαρμογών που μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν:

- Δυναμική απόκριση βιομηχανικών δεξαμενών και δοχείων πίεσης διαφορετικών γεωμετριών (κυλινδρικές, ορθογωνικές) λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να προκαλέσουν πρόβλημα στην ευστάθεια της δεξαμενής.

- Δυναμική απόκριση δεξαμενών πλοίων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από τα θαλάσσια κύματα, του αποθηκευμένου υγρού στις δεξαμενές του πλοίου. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας του πλοίου.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών καυσίμων πυραύλων διαστημικών οχημάτων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την μεταβαλλόμενη επιτάχυνση του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να οδηγήσουν σε πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών οχημάτων μεταφοράς καυσίμων όπου το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την απότομη αλλαγή της πορείας του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.
- Δυναμική απόκριση ταμιευτήρων φραγμάτων λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια του φράγματος.

Ο κυματισμός των υγρών σε κινούμενα δοχεία δημιουργεί μεγάλη ποικιλία προβλημάτων πρακτικής ασφάλειας, που αφορούν τις περιπτώσεις που αναφέραμε παραπάνω. Αυτό είναι ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα για να επιλυθεί αναλυτικά καθώς οι δυναμικές συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μη γραμμικές και η θέση της ελεύθερης επιφάνειας ποικίλει με το χρόνο κατά τρόπο που δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων.

Οι αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα του κυματισμού είναι δυνατό να εξαχθούν για δεξαμενές κανονικού γεωμετρικού σχήματος, όπως οι ορθογωνικές και οι κυλινδρικές τις οποίες μελετάμε στη παρούσα εργασία. Αναλυτικές τεχνικές για την πρόβλεψη του κυματισμού μεγάλου πλάτους δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί πλήρως. Τέτοια φορτία είναι ιδιαίτερος σημαντικά κατά το στάδιο του σχεδιασμού της κατασκευής στήριξης και των εσωτερικών εξαρτημάτων των οχημάτων που φέρουν δεξαμενές.

Τα φαινόμενα κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας υγρών σε ορθογωνικές δεξαμενές, μπορούν συνήθως να περιγραφούν, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη ροή του ρευστού στις δύο διαστάσεις. Σε κυλινδρικά δοχεία, απαιτείται τρισδιάστατη προσομοίωση του φαινομένου. Γενικώς, η υδροδυναμική πίεση των ρευστών σε κινούμενα άκαμπτα δοχεία περιλαμβάνει δύο διακριτές συνιστώσες. Η μία είναι άμεσα συσχετισμένη με την επιτάχυνση της δεξαμενής και προκαλείται από το μέρος του υγρού που κινείται με τη ταχύτητα της δεξαμενής, γνωστή και ως ωστική πίεση. Η δεύτερη είναι γνωστή ως επαγωγική πίεση και αντιπροσωπεύει την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Μηχανικά μοντέλα όπως αυτό του ελατηρίου μάζας ή εκκρεμών συστημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν το μέρος του κυματισμού.

Ιδιαίτερη αναφορά για το πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας υπάρχει και στον Ευρωκώδικα 8 (EN 1998) ο οποίος αφορά το σχεδιασμό των κατασκευών έναντι σεισμού. Περιέχει έναν αριθμό διατάξεων για το σχεδιασμό κτιρίων και άλλων δομικών έργων, αλλά το μέρος 4 αναφέρεται στο σχεδιασμό δεξαμενών αποθήκευσης διαφόρων τύπων. Η αντοχή και η ευστάθεια των δεξαμενών που υπόκεινται σε έντονη σεισμική δραστηριότητα μπορεί να εξαρτάται από σύνθετα φαινόμενα αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευής – ρευστού, τα οποία δεν είναι εύκολο να απλοποιηθούν για τις διαδικασίες σχεδιασμού.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα μας απασχολήσει τόσο η γραμμική όσο και η μη-γραμμική επίλυση του φαινομένου, ο υπολογισμός των ωστικών και επαγωγικών μεγεθών αλλά και η διαφορά των αποτελεσμάτων όσον αφορά την ανύψωση του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Με τον όρο “φαινόμενο κυματισμού” ή “κλυδασμού” (sloshing) εννοείται η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού που περιέχεται στο εσωτερικό δοχείου και προκαλείται από την εξωτερική διέγερση του δοχείου. Ανάλογα με την εξωτερική διέγερση και την γεωμετρία του δοχείου η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις : η πρώτη κίνηση σχετίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού οπότε έχουμε την δημιουργία κυματισμού στην ελεύθερη του επιφάνεια και η δεύτερη αφορά την κίνηση της μάζα του ρευστού, η οποία ακολουθεί την κίνηση του δοχείου.

Το φαινόμενο επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Westergaard (1933), ο οποίος υπολόγισε την κατανομή των πιέσεων σε φράγμα ορθογωνικής διατομής, το οποίο υπόκειντο σε οριζόντια επιτάχυνση. Ο Lamb το 1945 στο κλασικό βιβλίο του «Υδροδυναμική» παρουσίασε τις θεμελιώδεις αρχές των επιφανειακών κυμάτων, στις οποίες βασίζεται και η ρευστομηχανική ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού. Ο Jacobsen (1949) έλυσε το πρόβλημα του κυματισμού σε όρθιο κυλινδρικό δοχείο καθώς και το πρόβλημα του κυλινδρικού βάρους που περιβάλλεται από ρευστό. Οι Werner και Sundquist (1949) επέκτειναν την μεθοδολογία του Jacobsen για ορθογωνικό δοχείο, ημικυκλικό και τριγωνικό κανάλι. Ωστόσο η πρώτη ολοκληρωμένη ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού και ο διαχωρισμός του σε ομοιόμορφη κίνηση και κίνηση κυματισμού έγινε από τους Graham και Rodriguez (1952), οι οποίοι υπολόγισαν την ομοιόμορφη και κυματική πίεση σε ορθογωνική δεξαμενή. Η πρώτη πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού έγινε από τους Hoskins και Jacobsen (1951), οι οποίοι υπολόγισαν πειραματικά την ωστική πίεση. Αργότερα οι Jacobsen και Ayre (1953) παρουσίασαν εργασία που επιβεβαίωνε τα αποτελέσματα των Hoskins και Jacobsen (1951).

Το έναυσμα για μία ολοκληρωμένη και σε βάθος ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού δόθηκε από την ερευνητική δραστηριότητα της NASA την δεκαετία του 1960 καθώς το πρόβλημα του κυματισμού εμφανιζόταν σε αεροδιαστημικές εφαρμογές και πιο συγκεκριμένα στις δεξαμενές καυσίμων των πυραύλων και διαστημικών οχημάτων. Η NASA (Abramson, 1966) παρουσίασε μια ολοκληρωμένη για την εποχή της μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας και για αρμονική εξωτερική διέγερση. Στην μελέτη αυτή περιλαμβάνονται αναλυτικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα για

το φαινόμενο του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ελαστικότητα των τοιχωμάτων. Τέλος παρουσιάζονται ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα για την προσομοίωση του φαινομένου του κυματισμού.

Η μελέτη του φαινομένου του κυματισμού για δεξαμενές και δοχεία πίεσης υπό την επίδραση σεισμικής διέγερσης παρουσιάστηκε αρχικά από τον Housner (1957, 1963), ο οποίος παρουσίασε αναλυτική λύση του φαινομένου του κυματισμού για μη-παραμορφώσιμα όρθια κυλινδρικά και ορθογωνικά δοχεία. Η αναλυτική λύση του φαινομένου του κυματισμού διαχωρίστηκε σε δύο μέρη, το πρώτο μέρος ονομάστηκε "επαγωγική κίνηση" ενώ το δεύτερο μέρος ονομάστηκε "ωστική κίνηση". Ο διαχωρισμός αυτός αποτέλεσε την βάση για την σύνταξη των κανονιστικών διατάξεων API 650 (American Petroleum Institute, 2000, Παράρτημα E) για όρθια κυλινδρικά δοχεία. Οι Veletsos (1974), Veletsos και Yang (1977), Haroun και Housner (1981) και Haroun (1983) επέκτειναν την μεθοδολογία του διαχωρισμού της "επαγωγικής" και "ωστικής" κίνησης ώστε να περιληφθεί στην μεθοδολογία η ελαστική παραμόρφωση του κελύφους και η αλληλεπίδραση της με το φαινόμενο του κυματισμού. Στην συνέχεια, οι Peek (1988), Natsiavas (1988), Veletsos και Tang (1990) και Malhotra (1995) μελέτησαν το ανασήκωμα απλά εδραζόμενων κατακόρυφων κυλινδρικών δεξαμενών καθώς και την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Σημαντική συνεισφορά στην σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών με ειδική θεμελίωση και απλή στήριξη και στον αντισεισμικό σχεδιασμό αυτών των δεξαμενών έχουν παρουσιάσει με τις εργασίες τους οι Fisher (1979), Rammerstorfer et. al. (1988) και Fisher et. al. (1991). Επιπλέον, οι εργασίες αυτές αποτέλεσαν και την βάση για την σύνταξη των κανονισμών αντισεισμικού σχεδιασμού των κατακόρυφων κυλινδρικών δοχείων στον EN1998-4 (Ευρωκώδικας 8 - part 4.3 -παράρτημα A). Αξιοσημείωτη είναι η συνεισφορά των Niwa και Clough (1982) όσον αφορά την πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Ο Rammerstorfer (1990) παρουσίασε μία ολοκληρωμένη μελέτη και εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με την σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών, περιλαμβάνοντας την αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής και την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Σε πρόσφατη εργασία των Ibrahim et. al. (2001) παρουσιάζεται μια εκτενέστατη βιβλιογραφική ανασκόπηση που αποτελείται από 1319 αναφορές, οι οποίες αναφέρονται στο μη-γραμμικό φαινόμενο του κυματισμού, σε ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα, σε στοχαστική εξωτερική διέγερση, στην παραμόρφωση του τοιχώματος της

δεξαμενής, σε ωστική εξωτερική διέγερση και σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας του φαινομένου του κυματισμού.

Οι παραπάνω εργασίες μελετούν το φαινόμενο του κυματισμού σε κατακόρυφες κυλινδρικές και ορθογωνικές δεξαμενές έναντι σεισμού με ιδιαίτερες εφαρμογές στη χημική και πετροχημική βιομηχανία. Η μελέτη του φαινομένου του κυματισμού λόγω σεισμικής διέγερσης έχει πρακτικό ενδιαφέρον για τον υπολογισμό της συνολικής οριζόντιας σεισμικής δύναμης και της αντίστοιχης ροπής ανατροπής.

1.3 Στόχος και δομή της εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η γραμμική και η μη-γραμμική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού σε κυλινδρικές και ορθογωνικές δεξαμενές κατά τη διάρκεια εξωτερικής διέγερσης μέσω της χρησιμοποίησης δευτέρας τάξεως ασυμπτωτικής μεθόδου. Κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας γίνεται μελέτη για την εύρεση των ωστικών και επαγωγικών μεγεθών του φαινομένου (μάζες, δυνάμεις, ροπές), η μελέτη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και οι διαφορές που εμφανίζουν στα αποτελέσματα η γραμμική και η μη-γραμμική επίλυση του φαινομένου.

Αρχικά στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται μια εισαγωγή για το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε δεξαμενές και τα προβλήματα που είναι ικανό να προκαλέσει σε διάφορες εφαρμογές στη βιομηχανία. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση της μελέτης του φαινομένου από διάφορους ερευνητές στη διάρκεια των χρόνων μέχρι σήμερα.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η φυσική και η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, η οποία βασίζεται στην γενική θεωρία των επιφανειακών κυμάτων.

Στο κεφάλαιο 3 περιγράφεται η διατύπωση και η επίλυση του γραμμικού προβλήματος για ορθογωνικές δεξαμενές. Επιτυγχάνεται η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων κυματισμού καθώς και ο υπολογισμός των ωστικών και επαγωγικών δυνάμεων και ροπών. Επίσης γίνεται υπολογισμός της ωστικής και επαγωγικής μάζας αλλά και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου h/L όπου h το αρχικό ύψος του ρευστού στη δεξαμενή και L το μήκος της δεξαμενής.

Στο κεφάλαιο 4 περιγράφεται η διατύπωση του μη-γραμμικού προβλήματος για ορθογωνική διατομή και θεωρώντας απλή αρμονική διέγερση γίνεται ο υπολογισμός της γραμμικής και της μη-γραμμικής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για δύο περιπτώσεις. Στη πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούμε στην ανάλυση μας έναν όρο από το γραμμικό πρόβλημα ενώ στη δεύτερη περίπτωση γίνεται χρήση δύο γραμμικών όρων.

Στο κεφάλαιο 5 διατυπώνεται και επιλύεται το γραμμικό πρόβλημα για κυλινδρικές δεξαμενές. Επιτυγχάνεται ομοίως η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων κυματισμού καθώς και ο υπολογισμός της ωστικών και επαγωγικών δυνάμεων και ροπών με την ίδια μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 για ορθογωνικές διατομές. Επίσης πραγματοποιείται

υπολογισμός της ωστικής και επαγωγικής μάζας αλλά και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου h/R όπου h το αρχικό ύψος του ρευστού στη δεξαμενή και R η ακτίνα της δεξαμενής.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται η διατύπωση του μη-γραμμικού προβλήματος για κυλινδρική δεξαμενή όπου στην ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ένας επαγωγικός όρος από το γραμμικό πρόβλημα.

Στο κεφάλαιο 7 εξετάζεται η απόκριση δεξαμενών σε πραγματικούς σεισμούς. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για το γραμμικό και το μη-γραμμικό πρόβλημα για ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές διαφόρων διαστάσεων.

Στο κεφάλαιο 8 παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν καθ'όλη τη διάρκεια της παρούσης εργασίας τόσο από τη μαθηματική ανάλυση των πρώτων κεφαλαίων αλλά και από την ανάλυση των σεισμικών διεγέρσεων που παρουσιάζεται εκτενώς στο κεφάλαιο 7.

Στο κεφάλαιο 9 γίνεται μια συνοπτική περιγραφή του αλγορίθμου των πεπερασμένων διαφορών που προγραμματίστηκε στο Microsoft Excel για το πρόβλημα του κυμματισμού και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων από την ανάλυση των σεισμικών διεγέρσεων.

Τέλος, στο κεφάλαιο 10 παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΚΥΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

2.1 Φυσική και Μαθηματική διατύπωση του φαινομένου

Το φαινόμενο του κυματισμού αποτελεί πρόβλημα ροής με ελεύθερη επιφάνεια και σχετίζεται με την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων. Οι ροές, οι οποίες σχετίζονται με επιφανειακά κύματα συνηθίζεται να θεωρούνται δυναμικές ροές γεγονός το οποίο αποτελεί αποδεκτή προσέγγιση για φαινόμενα ελεύθερης επιφάνειας. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού κινείται μόνο κάθετα ως προς τη βάση της δεξαμενής και τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος. Τέλος ο λόγος του μήκους κύματος του κυματισμού προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι αρκετά μεγάλος ώστε η γραμμικοποίηση των εξισώσεων να είναι αποδεκτή. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω θεωρήσεις μπορούμε να παρουσιάσουμε την μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού.

Η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού βασίζεται στην μαθηματική διατύπωση των επιφανειακών κυμάτων. Όταν σ' ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας δημιουργηθούν κυματισμοί βαρύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια, η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων και η ροή χαρακτηρίζεται ως αστρόβιλη. Το διάνυσμα της ταχύτητας εκφράζεται ως η κλίση του δυναμικού της ταχύτητας, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για ένα ατριβές και ασυμπίεστο ρευστό είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g \quad (2.2)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η ροή είναι αστρόβιλη και ότι το πεδίο ροής \mathbf{u} μπορεί να γραφεί ως η κλίση του δυναμικού της συνάρτησης

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (2.3)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας γίνεται η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.4)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της απόκλισης

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.5)$$

ο όρος της συναγωγής γράφεται ως εξής

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (2.6)$$

καθώς η ροή θεωρείται αστρόβιλη ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Εάν η βαρύτητα επιδρά στην αρνητική z-κατεύθυνση μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{g} = \nabla(-gz) \quad (2.7)$$

Η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gz) \quad (2.8)$$

θεωρώντας ότι η συνάρτηση Φ είναι ομαλή, η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gz \right\} = 0 \quad (2.9)$$

και επομένως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.10)$$

για κάποια συνάρτηση $C(t)$. Όμως μπορούμε να επιλέξουμε $C(t)=0$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\Phi \rightarrow \Phi + \int_0^t C(s) ds \quad (2.11)$$

ο οποίος δεν επηρεάζει το πεδίο ταχύτητας.

Για αυτό τον τύπο ροής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli

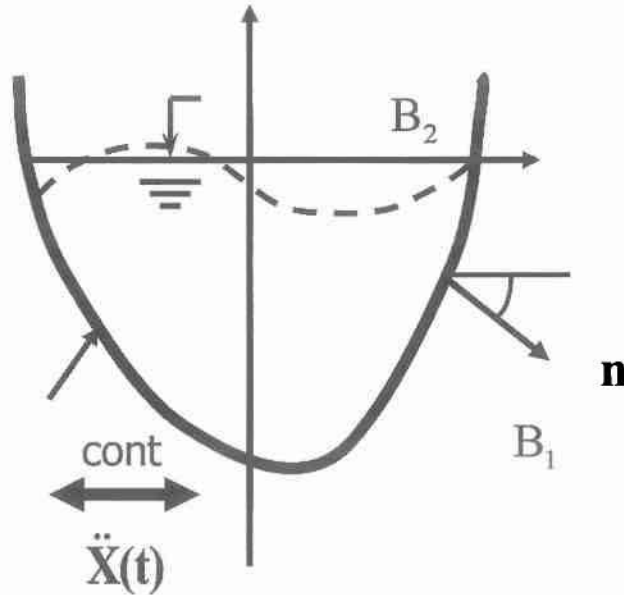
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (2.12)$$

Υπολογίζοντας το Φ από την εξίσωση Laplace (2.3) υπολογίζεται στην συνέχεια το πεδίο των πιέσεων από την εξίσωση Bernoulli (2.12).

Θεωρώντας ότι η ροή είναι διδιάστατη η ελεύθερη επιφάνεια περιγράφεται από την σχέση $z=\eta(x,t)$, όπου η συντεταγμένη x βρίσκεται κατά μήκος της διεπιφάνειας Σχήμα 2.1. Θεωρώντας αμελητέα την επιφανειακή τάση η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η ατμοσφαιρική $p=p_{\text{atm}}$. Επιλέγουμε $p=0$ στην ελεύθερη επιφάνεια και κάνουμε χρήση του απλού μετασχηματισμού $p \rightarrow p - p_{\text{atm}}$ γεγονός το οποίο δεν αλλάζει τις βασικές εξισώσεις

Euler, οι οποίες εξαρτώνται από ∇p . Η εξίσωση Bernoulli στην ελεύθερη επιφάνεια δίνει την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g\eta = 0 \quad \text{στο } z = \eta(x,t) \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική απεικόνιση του πεδίου ορισμού και των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια. Η άλλη εξίσωση που ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η κινηματική συνοριακή συνθήκη, η οποία υποδηλώνει ότι κάθε σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια παραμένει σ' αυτήν. Η μαθηματική διατύπωση της κινηματικής συνοριακής συνθήκης είναι

$$\frac{D}{Dt} \{z - \eta(x,t)\} = \frac{\partial}{\partial t} \{z - \eta(x,t)\} + \mathbf{u} \cdot \nabla \{z - \eta(x,t)\} = 0 \quad (2.14)$$

η οποία δίνει την ακόλουθη εξίσωση η οποία ισχύει για τη κατεύθυνση x

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.15)$$

Σε αντίστοιχη ανάλυση για διδιάστατο πρόβλημα όπου xy η επιφάνεια του ρευστού και z ο κάθετος άξονας στην επιφάνεια xy προκύπτει παρόμοια εξίσωση με αυτή της 2.15 η οποία έχει τη μορφή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Τέλος το ρευστό περιορίζεται από την απαραμόρφωτη επιφάνεια του στο $\partial_2 G$. Σ' αυτή την συνοριακή συνθήκη το κάθετο διάνυσμα της ταχύτητας είναι μηδέν και επομένως ισχύει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \quad (2.16)$$

Στην συνέχεια γραμμικοποιούμε τις μη-γραμμικές συνοριακές συνθήκες θεωρώντας ότι το ύψος των κυματισμών $\eta(x)$ είναι μικρό σε σχέση με χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος όπως το μέσο βάθος του ρευστού και το μήκος κύματος του κυματισμού. Επομένως οι ποσότητες $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ που εκφράζουν την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας και την

συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι μικρές. Επομένως, το γινόμενο $\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ θα είναι πολύ

μικρό (δεύτερης τάξης) και μπορούμε να το αγνοήσουμε σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους που είναι πρώτης τάξης. Τότε η κινηματική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,\eta,t) \quad (2.17)$$

Αναλύοντας την συνιστώσα $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ στο $z=\eta$ σε σειρά Taylor ως προς $z=0$ και απαλείφοντας τους όρους δεύτερης τάξης προκύπτει η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,0,t) \quad \text{στο } B_2 \quad (2.18)$$

Η δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή το ρευστό είναι σε ηρεμία και κάθε κίνηση του ρευστού προκαλείται από τον κυματισμό, ο μη-γραμμικός όρος

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (2.19)$$

μπορεί να αγνοηθεί ως πολύ μικρός. Επιπλέον όρος $\partial\Phi/\partial t$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Taylor ως προς $z=0$ λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο τον πρώτο όρο της σειράς. Τότε προκύπτει η συνοριακή σχέση

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,0,t) + \frac{P(x,t)}{\rho} + g\eta(x,t) = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (2.20)$$

Υπολογίζοντας την χρονική παράγωγο της τελευταίας εξίσωσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $\partial\eta/\partial t$ συναρτήσει του $\partial\Phi/\partial z$ και η δυναμική συνοριακή συνθήκη γράφεται

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(x,0,t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,0,t) = 0 \quad (2.21)$$

Τέλος ισχύει

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

καθώς η πίεση είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια, άρα η τελική μορφή της συνοριακής συνθήκης είναι

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(x,0,t) + g \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,0,t) = 0 \quad (2.23)$$

Μετά την γραμμικοποίηση και για την περίπτωση δεξαμενής ορθογωνικής διατομής η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού έχει ως εξής

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (2.26)$$

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες αποτελεί κλασσικό πρόβλημα ιδιοτιμών και για το λόγο αυτόν το φαινόμενο του κυματισμού

θεωρείται και επιλύεται ως πρόβλημα ιδιοτιμών. Στις περιπτώσεις που ασκείται εξωτερική διέγερση στη δεξαμενή το ανωτέρω πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα συνοριακών τιμών με την εμφάνιση μη-ομογενών όρων στις συνοριακές συνθήκες των τοιχωμάτων της δεξαμενής.

Συγκεκριμένα

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = X \cos \beta \quad \text{στο } B_1 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (2.29)$$

όπου X είναι η εξωτερική διέγερση και $\cos \beta$ είναι το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα n με τον άξονα x όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1.

Αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτουν και για κυλινδρικές δεξαμενές με τη διαφορά ότι οι εξισώσεις διατυπώνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα σε αντιστοιχία με τις εξισώσεις (2.13) και (2.15) για δεξαμενές κυκλικής διατομής οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το συνολικό πρόβλημα είναι

$$g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \quad (2.31)$$

Όπου για κυλινδρικές δεξαμενές

$$\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Γραμμικοποιώντας με παρόμοιο τρόπο τις μη-γραμμικές συνοριακές συνθήκες θεωρώντας ότι το ύψος των κυματισμών $\eta(r, \theta, z)$ είναι μικρό σε σχέση με χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος όπως το μέσο βάθος του ρευστού και το μήκος κύματος του κυματισμού.

Επομένως οι ποσότητες $\frac{\partial \eta}{\partial r}, \frac{\partial \eta}{\partial \theta}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ θα είναι μικρές. Επομένως, τα γινόμενα

$\frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ και $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ θα είναι πολύ μικρά (δεύτερης τάξης) και μπορούμε να το αγνοήσουμε

σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους που είναι πρώτης τάξης. Τότε η κινηματική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.32)$$

και η δυναμική συνοριακή συνθήκη παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

Έπειτα από τη γραμμικοποίηση που πραγματοποιήθηκε προκύπτουν οι εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το πρόβλημα ιδιοτιμών (μηδενική εξωτερική διέγερση) οι οποίες εκφράστηκαν μέσω των εξισώσεων 2.24-2.26, ενώ με εξωτερική διέγερση το ανωτέρω πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα συνοριακών τιμών του οποίου οι εξισώσεις διατυπώθηκαν από τις σχέσεις 2.27 – 2.29. Περαιτέρω ανάλυση παρουσιάζεται διεξοδικά σε επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ

3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Όπως διατυπώθηκε στο κεφάλαιο 2, με απουσία εξωτερικής διέγερσης, το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας (sloshing) μπορεί να θεωρηθεί και να επιλυθεί ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο αντιπροσωπεύει τις ταλαντώσεις της ελεύθερης επιφάνειας ενός ιδανικού υγρού μέσα σε ένα στάσιμο δοχείο. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διέπουν το ανωτέρω πρόβλημα καθώς και η επίλυση τους η οποία θα οδηγήσει στην εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων κυματισμού οι οποίες συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο *sloshing frequencies*.

Με βάση τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και της φύσης του προβλήματος, το δυναμικό της ταχύτητας Φ θεωρούμε πως εκφράζεται από τη κάτωθι σχέση

$$\Phi = \Phi(x, z)e^{i\omega t} \quad (3.1.1)$$

Η Φ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.1.2)$$

και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στη βάση της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } z = 0 \quad (3.1.3)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } z = H \quad (3.1.4)$$

καθώς και στα τοιχώματα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ και στο } x = L \quad (3.1.5)$$

Αντικαθιστώντας το δυναμικό της ταχύτητας Φ στην εξίσωση Laplace (3.1.2) προκύπτει

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

δηλαδή

$$\frac{\vartheta^2 \Phi}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 \Phi}{\vartheta z^2} = 0$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση (3.1.1) στη παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$\frac{\vartheta^2 \Phi(x, z) e^{i\omega t}}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 \Phi(x, z) e^{i\omega t}}{\vartheta z^2} = 0$$

και ισοδύναμα

$$e^{i\omega t} \left[\frac{\vartheta^2 \Phi(x, z)}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 \Phi(x, z)}{\vartheta z^2} \right] = 0$$

Με δεδομένο ότι ο όρος $e^{i\omega t}$ είναι διάφορος του μηδενός πάντα, προκύπτει

$$\frac{\vartheta^2 \Phi(x, z)}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 \Phi(x, z)}{\vartheta z^2} = 0$$

Ομοίως αντικαθιστώντας τη σχέση (3.1.1) στη συνοριακή συνθήκη (3.1.3) προκύπτει

$$\frac{\partial \Phi(x, z) e^{i\omega t}}{\partial z} = 0$$

δηλαδή

$$e^{i\omega t} \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0$$

Παρόμοια από τη συνοριακή συνθήκη (3.1.4) έχουμε

$$\frac{\vartheta^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

και αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξίσωση τη σχέση (3.1.1) προκύπτει

$$\frac{\vartheta^2 \Phi(x, z) e^{i\omega t}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi(x, z) e^{i\omega t}}{\partial z} = 0$$

δηλαδή

$$\Phi(x, z) e^{i\omega t} (i\omega)^2 + g e^{i\omega t} \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0$$

επομένως

$$e^{i\omega t} \left[-\omega^2 \Phi(x, z) + g \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} \right] = 0$$

ή ισοδύναμα

$$-\omega^2 \Phi(x, z) + g \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0$$

Για την εύρεση της συνάρτησης $\Phi(x, z)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *χωριζομένων μεταβλητών*. Έτσι θα έχουμε

$$\Phi(x, z) = X(x)Z(z)$$

Αντικαθιστώντας τη προηγούμενη σχέση στην εξίσωση Laplace (3.1.2) και εκτελώντας διαδοχικά τις πράξεις καταλήγουμε

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = c$$

όπου c μια σταθερά.

Λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις

$$X''(x) + cX(x) = 0$$

και

$$Z''(z) - cZ(z) = 0$$

καταλήγουμε πως οι συναρτήσεις $X(x)$ και $Z(z)$ έχουν την ακόλουθη μορφή

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

και

$$Z(z) = \Gamma e^{kz} + \Delta e^{-kz}$$

Επομένως η συνάρτηση $\Phi(x, z)$ θα έχει τη μορφή

$$\Phi(x, z) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] [\Gamma e^{kz} + \Delta e^{-kz}]$$

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση στην εξίσωση (3.1.3) και με δεδομένο ότι ισχύει η ιδιότητα

$$\cosh(kz) = \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$Z(z) = \Gamma' \cosh(kz)$$

Δηλαδή θα έχουμε

$$\Phi(x, z) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \Gamma' \cosh(kz)$$

Παρόμοια, από τη συνθήκη (3.1.5) αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση προκύπτει πως η συνάρτηση $X(x)$ είναι ίση με

$$X(x) = A \cos(kx)$$

όπου $k = n\pi/L$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε πως η συνάρτηση $\Phi(x, z)$ δίνεται από το τύπο

$$\Phi_n(x, z) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Gamma' \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

όπου A & Γ' είναι σταθεροί συντελεστές.

Για την εύρεση των ω_n , οι οποίες αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες κυματισμού αρκεί να επιλύσουμε τη συνοριακή συνθήκη (3.1.4) αντικαθιστώντας το παραπάνω τύπο που μόλις βρήκαμε για τη συνάρτηση $\Phi(x, z)$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν τη συνθήκη

$$\omega^2 \Phi(x, z) + g \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0$$

και αντικαθιστώντας όπου

$$\Phi_n(x, z) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Gamma' \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

στο ύψος $z=H$ καταλήγουμε πως οι ιδιοσυχνότητες κυματισμού θα έχουν την παρακάτω μορφή

$$\omega_n = \sqrt{g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi}{L}h\right)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.6)$$

Όπου L είναι το μήκος δεξαμενής, h είναι το ύψος του ρευστού στο εσωτερικό της δεξαμενής και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Με βάση τα παραπάνω για τις συναρτήσεις Φ καταλήγουμε:

$$\Phi_n(x, z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

Για τη συνοριακή συνθήκη (3.1.4) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } z = H$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την εξωτερική διέγερση στην οποία υπόκειται η ορθογωνική δεξαμενή θεωρούμε ότι το δυναμικό της ταχύτητας εκφράζεται από τη παρακάτω σχέση

$$\Phi = \Phi(x, z, t) + \dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

όπου

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \Phi_n(x, z)$$

είναι όρος που αντιπροσωπεύει τη λύση που βρήκαμε από το πρόβλημα ιδιοτιμών και

$$\dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

ο όρος που αντιπροσωπεύει την εξωτερική διέγερση \dot{X} .

Συνεπώς, η συνάρτηση Φ μπορεί να γραφεί στη παρακάτω μορφή

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right) + \dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (3.1.7)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.1.7) στη συνοριακή συνθήκη (3.1.4) έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \Phi_n(x, H) + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \frac{\partial \Phi_n(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) k_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \\ = -\ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

όπου

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Για τις συναρτήσεις

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ισχύει ο κανόνας της ορθογωνικότητας. Έτσι έχουμε

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0 \text{ για } m \neq n$$

και

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \text{ για } m = n$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης (3.1.8) με τον όρο

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, L]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + g \dot{q}_n(t) A_n k_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ = -\ddot{X} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\ddot{q}_n(t) A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \frac{L}{2} + g \dot{q}_n(t) A_n k_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \frac{L}{2} = -\ddot{X} \frac{[2 \cos(n\pi) + n\pi \sin(n\pi) - 2]}{2(n\pi)^2}$$

Όμως για $n=1,2,3,\dots$ ο όρος $\sin(n\pi)$ μηδενίζεται, επομένως η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\ddot{q}_n(t) A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \frac{L}{2} + g \dot{q}_n(t) A_n k_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \frac{L}{2} = -\ddot{X} \frac{[\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)^2}$$

Διαιρώντας όλα τα μέλη της παραπάνω εξίσωσης με τον όρο

$$\frac{A_n L \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{2}$$

έχουμε

$$\ddot{q}_n(t) + gk_n \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \dot{q}_n(t) = -\frac{2L^2[\cos(n\pi) - 1]}{A_n(n\pi)^2 L \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \ddot{X}$$

ή ισοδύναμα

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 \dot{q}_n(t) = -\frac{2L^2[\cos(n\pi) - 1]}{A_n(n\pi)^2 L \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \ddot{X}$$

Αν θεωρήσω

$$A_n = \frac{1}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 \dot{q}_n(t) = -\frac{2[\cos(n\pi) - 1] \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \ddot{X} \quad (3.1.9)$$

Από τη σχέση (3.1.9) ορίζουμε ως συντελεστή γ_n

$$\gamma_n = \frac{2[\cos(n\pi) - 1] \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \quad (3.1.10)$$

3.2 Υπολογισμός Επαγωγικής και Ωστικής Δύναμης

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει ο υπολογισμός της επαγωγικής και της ωστικής δύναμης που ασκούνται στη κατασκευή μας. Η επαγωγική δύναμη οφείλεται στη κίνηση της επαγωγικής μάζας του υγρού ενώ η ωστική δύναμη οφείλεται αντίστοιχα στο μέρος του υγρού που αποτελεί την ωστική μάζα. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 1 η ωστική συνιστώσα είναι άμεσα συσχετισμένη με την επιτάχυνση της δεξαμενής και προκαλείται από το μέρος του υγρού που κινείται με τη ταχύτητα της δεξαμενής ενώ η επαγωγική συνιστώσα αντιπροσωπεύει την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού.

Όπως γράψαμε παραπάνω από τη σχέση (3.1.7)

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right) + \dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Για τον υπολογισμό της πίεσης ισχύει ο τύπος

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

δηλαδή

$$P = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \Phi_n(x, z) + \dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

ή ισοδύναμα κάνοντας την παραγωγή προκύπτει

$$P = -\rho \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \Phi_n(x, z) + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \right)$$

και τελικά

$$P = -\rho \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right) + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \right)$$

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό της δύναμης ισχύει

$$F = -\rho \int_0^H \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\tilde{n} \tilde{e}_x) dz$$

δηλαδή

$$F = -\rho \int_0^H \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right) + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \right) dz$$

ή ισοδύναμα

$$F = -\rho \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n(t) A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{L}{n\pi} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \right] - \left[H\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X} \right\}$$

Αντικαθιστώντας το τύπο του A_n στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$F = -\rho \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n(t) \frac{L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \right] - \left[H\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X} \right\}$$

ή ισοδύναμα προκύπτει ο τελικός τύπος για τη δύναμη

$$F = -\rho \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n(t) \frac{L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{(n\pi)^2} \right] + \rho \left[H\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X} \quad (3.2.1)$$

Εφόσον υπολογίσαμε τη τελική σχέση για τη δύναμη, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη δύναμη στα τοιχώματα της δεξαμενής, δηλαδή στις θέσεις $x=0$, $x=L$ καθώς και τη συνολική δύναμη.

Επομένως στη θέση $x=0$ έχουμε:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}0\right) = \cos(0) = 1$$

με αποτέλεσμα ο τύπος (3.2.1) για $x=0$ να παίρνει τη μορφή

$$F_{x=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n(t) \frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} \right] - \left(\frac{\rho HL}{2}\right) \ddot{X} \quad (3.2.2)$$

Αντιστοίχως στη θέση $x=L$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}L\right) = \cos(n\pi)$$

με αποτέλεσμα τύπος (3.2.1) για $x=L$ να γίνεται

$$F_{x=L} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n(t) \frac{\rho L^2 \cos(n\pi)}{(n\pi)^2} \right] + \left(\frac{\rho HL}{2} \right) \ddot{X} \quad (3.2.3)$$

Έχοντας βρει τους τύπους της δύναμης στα τοιχώματα της δεξαμενής, για τη συνολική δύναμη προκύπτει

$$F_{x=0} - F_{x=L} = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} - \left(\frac{\rho HL}{2} \right) \ddot{X} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \frac{\rho L^2 \cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - \left(\frac{\rho HL}{2} \right) \ddot{X}$$

και ισοδύναμα

$$F_{x=0} - F_{x=L} = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \frac{\rho L^2 [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)^2} - \rho HL \ddot{X}$$

Επομένως ο τελικός τύπος της δύναμης που προκύπτει είναι

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \frac{b\rho L^2 [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)^2} - \rho bHL \ddot{X} \quad (3.2.4)$$

Όπου b η σταθερά για την διεύθυνση z .

Με βάση το τύπο για τη συνολική δύναμη στη σχέση (3.2.4) ορίζουμε το συντελεστή a_n ο οποίος δίνεται από το τύπο

$$a_n = \frac{b\rho L^2 [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)^2} \quad (3.2.5)$$

ενώ η συνολική μάζα του υγρού δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$M_L = \rho bHL \quad (3.2.6)$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$q_n = \gamma_n \alpha_n(t) \quad (3.2.7)$$

και έτσι η σχέση

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 \dot{q}_n(t) = -\gamma_n \ddot{X}$$

γίνεται

$$\ddot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) = -\ddot{X} \quad (3.2.8)$$

όπου $\alpha_n(t)$ η σχετική κίνηση του ρευστού λόγω sloshing ως προς το κινούμενο δοχείο.

Υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος του γ_n έχει υπολογιστεί παραπάνω και είναι ίσος με

$$\gamma_n = \frac{2[\cos(n\pi) - 1]\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

Με τη παραπάνω αντικατάσταση ο τύπος της συνολικής δύναμης που είχαμε βρει παραπάνω

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) a_n - M_L \ddot{X}$$

γίνεται

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) a_n \gamma_n - M_L \ddot{X}$$

όπου ο όρος $a_n \gamma_n$ είναι ίσος με:

$$M_n = a_n \gamma_n$$

δηλαδή

$$M_n = \frac{b\rho L^2 [\cos(n\pi) - 1] 2[\cos(n\pi) - 1]\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^2 (n\pi)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

και ισοδύναμα

$$M_n = \frac{2b\rho L^2 [\cos(n\pi) - 1]^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^3}$$

όπου για $n=1,3,5,7,\dots$ παίρνει τη μορφή

$$M_n = \frac{8b\rho L^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^3} \quad (3.2.9)$$

καθώς $\cos(n\pi) = -1$

Επομένως ο τύπος της δύναμης γίνεται

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) M_n - M_L \ddot{X} \quad (3.2.10)$$

Η συνολική κίνηση του ρευστού περιγράφεται από τη σχέση

$$u_n(t) = \alpha_n(t) + X(t)$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω τύπο στη σχέση (3.2.10) όπου περιγράφεται η συνολική δύναμη προκύπτει

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{u}_n(t) - \ddot{X}] M_n - M_L \ddot{X}$$

και ισοδύναμα

$$F_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{u}_n(t) M_n - \left(M_L - \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right) \ddot{X}$$

όπου

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{3.2.11}$$

ορίζεται η επαγωγική μάζα και αντίστοιχα

$$M_I = M_L - \sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{3.2.12}$$

ορίζεται η ωστική μάζα.

Από τη σχέση (3.2.1) έχουμε

$$F = -\rho \sum_{n=1}^{\infty} \left[q_n(t) \frac{L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}{(n\pi)^2} \right] + \rho \left[H\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X}$$

Επίσης λόγω του μετασχηματισμού της σχέσης (3.2.7) ισχύει

$$q_n(t) = \gamma_n \alpha_n(t)$$

Επομένως η συνολική κίνηση του ρευστού γράφεται

$$u_n(t) = \frac{q_n(t)}{\gamma_n} + X(t)$$

ή ισοδύναμα

$$q_n(t) = \gamma_n (u_n(t) - X(t))$$

και παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο προκύπτει

$$\bar{q}_n(t) = \gamma_n (\ddot{u}_n(t) - \ddot{X}(t))$$

Επομένως η σχέση (3.2.1) με βάση τα παραπάνω γίνεται

$$F = -\rho \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_n (u_n(t) - \bar{X}(t)) \frac{L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}{(n\pi)^2} \right] + \rho \left[H(x - \frac{L}{2}) \right] \bar{X}$$

και έχουμε. Για την επαγωγική δύναμη

$$F_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\rho \frac{L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}{(n\pi)^2} \gamma_n \ddot{u}_n(t) \quad (3.2.13)$$

και αντιστοίχως για την ωστική δύναμη

$$F_i = \left[\frac{\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}{(n\pi)^2} \gamma_n - \rho H(x - \frac{L}{2}) \right] \bar{X} \quad (3.2.14)$$

Συγκεκριμένα για τις θέσεις $x=0$ και $x=L$ ισχύει

Στη θέση $x=0$ για την επαγωγική δύναμη προκύπτει

$$F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} \frac{2[\cos(n\pi) - 1] \sinh\left(\frac{n\pi}{L} H\right)}{(n\pi) \cosh\left(\frac{n\pi}{L} H\right)} \ddot{u}_n(t) \quad (3.2.15)$$

ενώ για την ωστική δύναμη έχουμε αντίστοιχα

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} \gamma_n + \rho H \frac{L}{2} \right] \bar{X} \quad (3.2.16)$$

Αντίθετα στη θέση $x=L$ για την επαγωγική δύναμη προκύπτει

$$F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} \frac{2[\cos(n\pi) - 1] \sinh\left(\frac{n\pi}{L} H\right)}{(n\pi) \cosh\left(\frac{n\pi}{L} H\right)} \ddot{u}_n(t) \quad (3.2.17)$$

ενώ για την ωστική δύναμη έχουμε αντίστοιχα

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\rho L^2}{(n\pi)^2} \gamma_n - \rho H \frac{L}{2} \right] \bar{X} \quad (3.2.18)$$

3.3 Υπολογισμος Επανωνικής και Ωστικής Ροπής

Αντίστοιχα με τον υπολογισμό της ωστικής και της επαγωγικής δύναμης που πραγματοποιήθηκε στο κεφάλαιο 3.2, στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει ο υπολογισμός της επαγωγικής και ωστικής ροπής με παρόμοια μεθοδολογία.

Πιο συγκεκριμένα από το κεφάλαιο 3.1 (σελ. 26) έχουμε θεωρήσει πως υπό εξωτερική διέγερση το δυναμικό της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = \Phi(x, z, t) + X\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

όπου

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

δηλαδή

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (3.3.1)$$

Για τον υπολογισμό της ροπής ισχύει ο τύπος

$$\bar{M} = -\rho \int_0^H \frac{\partial \Phi}{\partial t} z dz$$

και σύμφωνα με τη σχέση (3.3.1) προκύπτει

$$\bar{M} = -\rho \int_0^H \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + \ddot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] z dz$$

και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς

$$q_n = \gamma_n \alpha_n(t)$$

και

$$u_n(t) = \alpha_n(t) + X(t)$$

έχουμε

$$\bar{M} = -\rho \left\{ \int_0^H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \gamma_n [\ddot{u}_n(t) - \ddot{X}] z dz + \int_0^H \left(x - \frac{L}{2}\right) z \ddot{X} dz \right\}$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{M} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^3} \gamma_n \ddot{u}_n(t) + \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^2} \gamma_n - \rho \frac{H^2}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X}$$

Από τη τελευταία σχέση προκύπτουν οι σχέσεις

για την επαγωγική ροπή

$$\bar{M}_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^2} \gamma_n \ddot{u}_n(t) \quad (3.3.2)$$

και για την ωστική ροπή

$$\bar{M}_I = \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^2} \gamma_n - \rho \frac{H^2}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \ddot{X} \quad (3.3.3)$$

Στα τοιχώματα της δεξαμενής, δηλαδή στις θέσεις $x=0$ και $x=L$, οι παραπάνω τύποι παίρνουν τη μορφή

Στη θέση $x=0$ για την επαγωγική ροπή προκύπτει

$$\bar{M}_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -\rho L^2 \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^3} \gamma_n \ddot{u}_n(t) \quad (3.3.4)$$

ενώ για την ωστική ροπή έχουμε αντίστοιχα

$$\bar{M}_I = \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \rho L^2 \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^2} \gamma_n + \rho \frac{H^2 L}{4} \right] \ddot{X} \quad (3.3.5)$$

Αντίστοιχα στη θέση $x=L$ για την επαγωγική ροπή έχουμε

$$\bar{M}_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -\rho L^2 \cos(n\pi) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^3} \gamma_n \ddot{u}_n(t) \quad (3.3.6)$$

ενώ για την ωστική ροπή ισχύει

$$\bar{M}_l = \left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \rho L^2 \cos(n\pi) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right]}{(n\pi)^3} \gamma_n - \rho \frac{H^2 L}{4} \right] \bar{X} \quad (3.3.7)$$

3.4 Υπολογισμός Επαγωγικής και Ωστικής Μάζας

Όπως βρέθηκε στα παραπάνω κεφάλαια, η μάζα του υγρού που περιέχεται σε μία δεξαμενή στην οποία επιβάλλεται δυναμική διέγερση αποτελείται από δύο συνιστώσες. Η πρώτη συνιστώσα είναι η ωστική μάζα του υγρού που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα και στη βάση της δεξαμενής ενώ η δεύτερη συνιστώσα είναι η επαγωγική μάζα η οποία αποτελεί την ελεύθερη επιφάνεια και εκτελεί ξεχωριστή κίνηση από αυτή της δεξαμενής. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μεγαλύτερος παράγοντας που επηρεάζει τη ποσότητα της επαγωγικής και της ωστικής μάζας του υγρού είναι ο λόγος των διαστάσεων h/L , όπου h το ύψος του υγρού στο εσωτερικό της δεξαμενής και L το μήκος της δεξαμενής.

Ο τύπος της επαγωγικής μάζας δίνεται από τη σχέση

$$M_n = \frac{2b\rho L^2 [1 - \cos(n\pi)]^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^3}$$

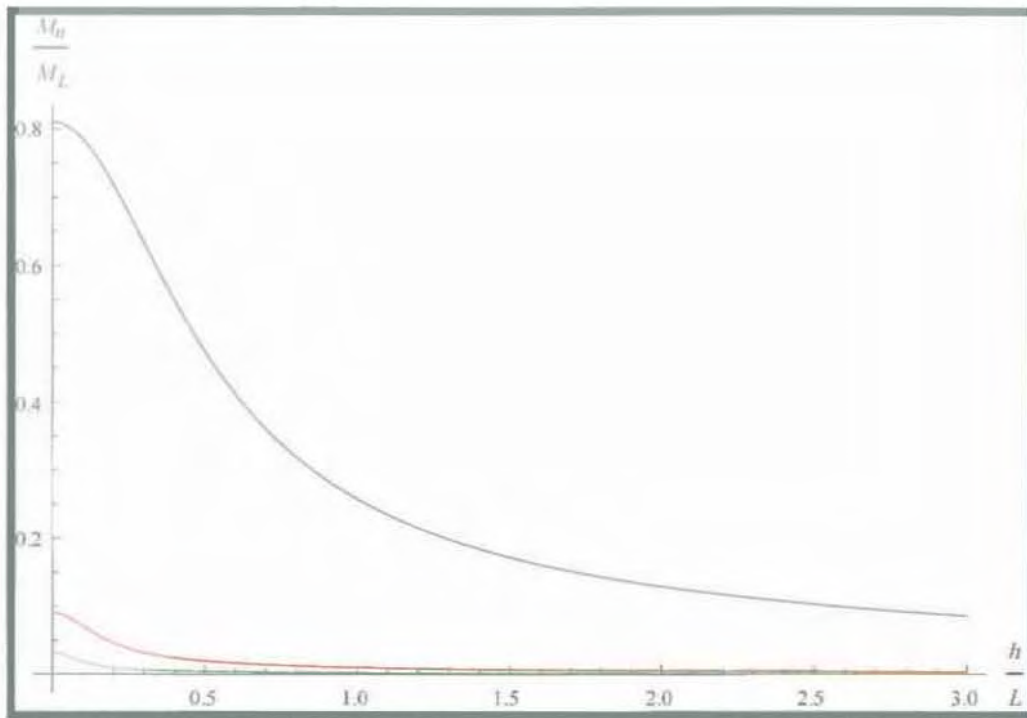
αντίστοιχα ο τύπος της ωστικής μάζας δίνεται από τη σχέση

$$M_I = M_L - M_n = \rho b L H - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b\rho L^2 [1 - \cos(n\pi)]^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{(n\pi)^3}$$

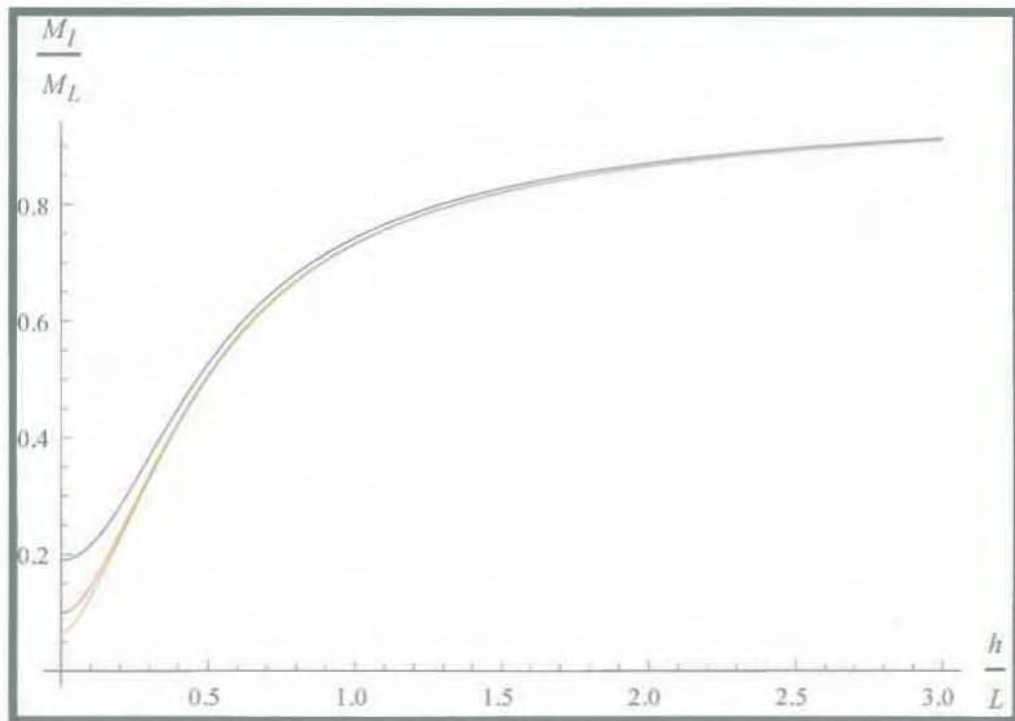
ενώ τέλος η συνολική μάζα του υγρού δίνεται από το τύπο

$$M_L = \rho b L H$$

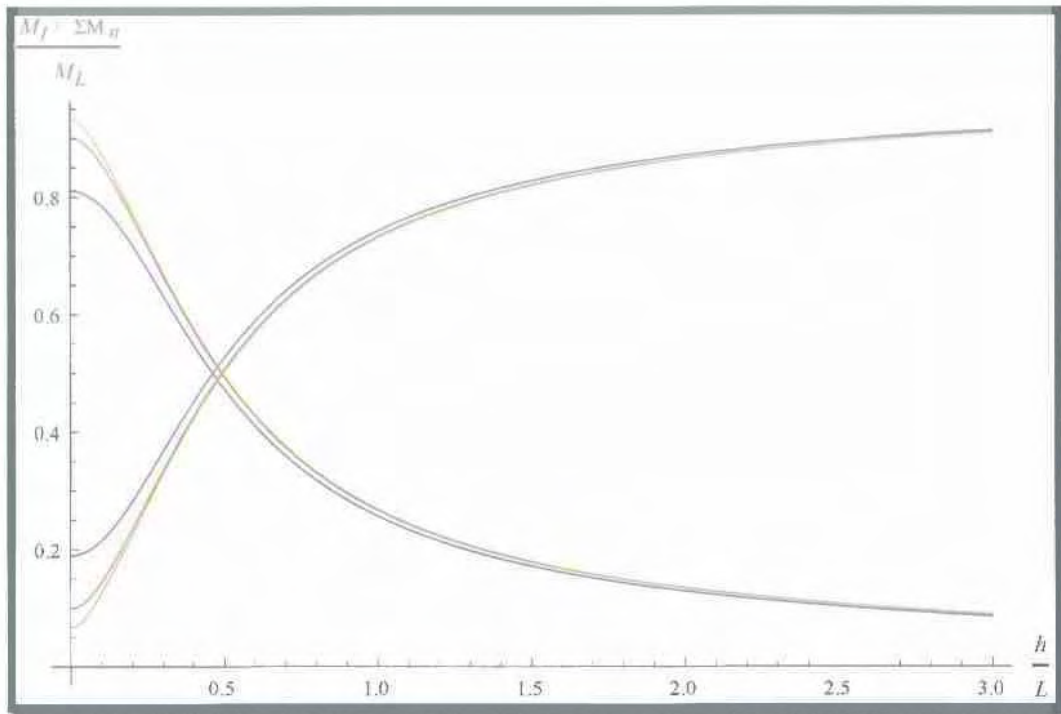
Στις παρακάτω εικόνες υπάρχουν διαγράμματα με τους λόγους της επαγωγικής και της ωστικής μάζας ως προς τη συνολική μάζα του υγρού της δεξαμενής, συνάρτησε του λόγου του ύψους του υγρού προς το συνολικό μήκος της δεξαμενής (h/L). Συγκεκριμένα στην Εικόνα 3.4.1. είναι το διάγραμμα της 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} επαγωγικής μάζας ως προς τη συνολική μάζα του υγρού για λόγους ύψους υγρού προς μήκος δεξαμενής 0 έως 3. Αντίστοιχα στην Εικόνα 3.4.2 είναι το διάγραμμα 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} ωστικής μάζας ως προς τη συνολική μάζα για $0 < h/L < 3$. Τέλος στην Εικόνα 3.4.3. παρουσιάζεται κοινό διάγραμμα επαγωγικής και ωστικής μάζας.



Εικόνα 3.4.1. Διάγραμμα 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} επαγωγικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/L



Εικόνα 3.4.2. Διάγραμμα 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/L



Εικόνα 3.4.3. Κοινό Διάγραμμα 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} ωστικής και επαγωγικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/L

3.5 Υπολογισμός σημείου εφαρμογής της οριζόντιας δύναμης

Για τον υπολογισμό του σημείου εφαρμογής της οριζόντιας δύναμης, αρκεί μία διαίρεση της επαγωγικής και ωστικής ροπής με τις αντίστοιχες δυνάμεις που βρέθηκαν στα παραπάνω κεφάλαια. Έτσι έχουμε διαδοχικά

$$e_n = \frac{\bar{M}_n}{F_n}$$

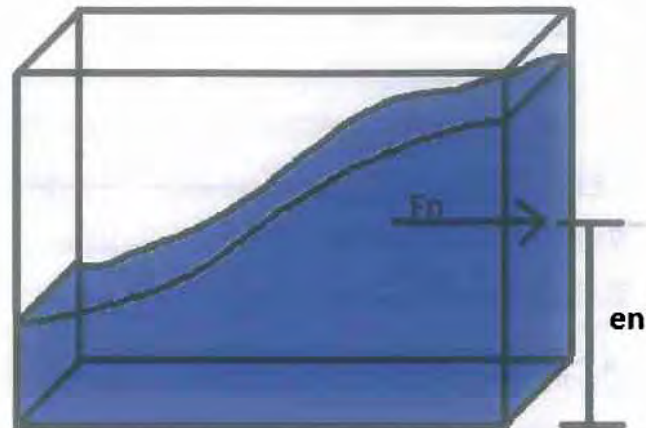
και αντικαθιστώντας τους τύπους 3.3.2 και 3.2.13 στη παραπάνω σχέση έχουμε

$$e_n = \frac{-\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right] \gamma_n \ddot{u}_n(t)}{(n\pi)^3} \div \frac{\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \gamma_n \ddot{u}_n(t)}{(n\pi)^2}$$

ή ισοδύναμα

$$e_n = \frac{Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right)}{n\pi} \text{ για } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Σχήματικα το σημείο εφαρμογής της οριζόντιας δύναμης στο τοίχωμα της δεξαμενής ορθογωνικής διατομής παριστάνεται με τη παρακάτω εικόνα

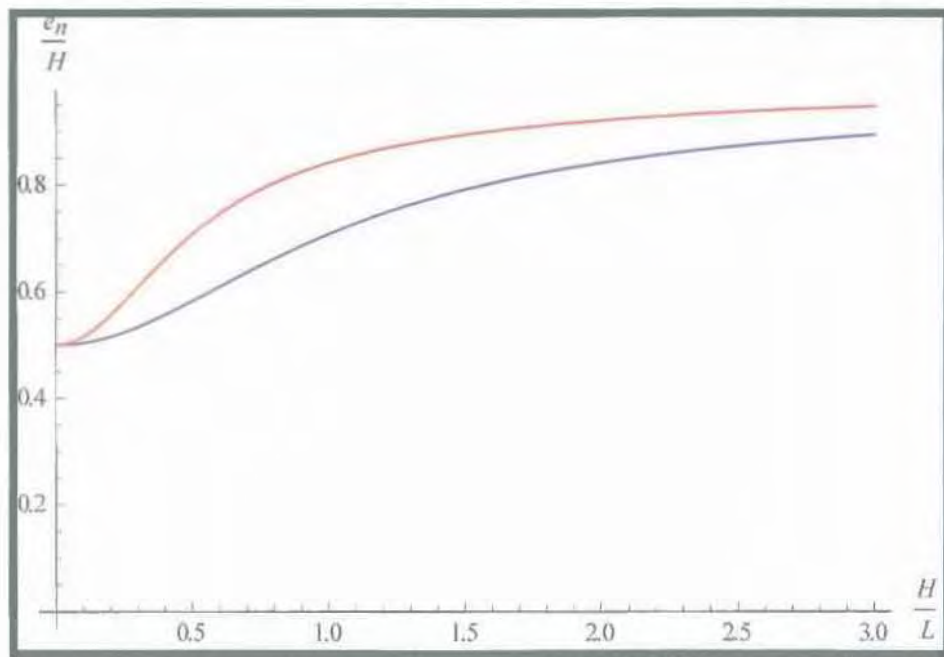


Με δεδομένο πως ενδιαφερόμαστε για τον 1^ο και το 2^ο όρο (n=1 & 2) προκύπτει ότι για τις θέσεις $x=0$ και $x=L$ ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$e_1 = \frac{H\pi - L \tanh\left(\frac{H\pi}{2L}\right)}{\pi} \quad (3.5.1)$$

$$e_2 = \frac{2H\pi - L \tanh\left(\frac{2H\pi}{2L}\right)}{2\pi} \quad (3.5.2)$$

των οποίων το διάγραμμα φαίνεται στην εικόνα 3.5.1 συναρτήσει του λόγου H/L .



Εικόνα 3.5.1. Κοινό διάγραμμα του σημείου εφαρμογής της επαγωγικής δύναμης για τον 1^ο και τον 2^ο όρο συναρτήσει του λόγου H/L

Αντίστοιχα τα ύψη που προκύπτουν από το πηλίκο της ωστικής ροπής και δύναμης έχουν τη μορφή

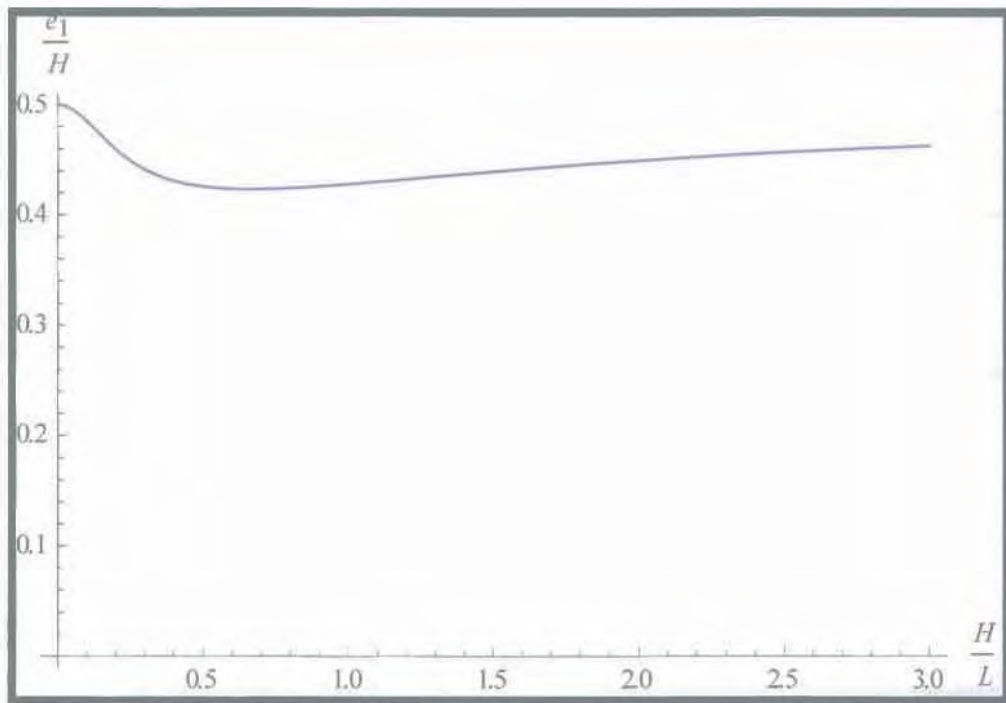
$$e_1 = \frac{\tilde{M}_1}{F_1}$$

και αντικαθιστώντας τους τύπους για τις δυνάμεις και τις ροπές από τις σχέσεις 3.2.14 και 3.3.3 προκύπτει

$$e_1 = \frac{\left[\frac{\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[Hn\pi - L \tanh\left(\frac{Ln\pi}{2L}\right) \right] \gamma_n - \rho \frac{H^2}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) \right] X}{\left[\frac{\rho L^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \gamma_n}{(n\pi)^2} - \rho H \left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \bar{X}}$$

Για $x=0$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος του οποίου το διάγραμμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.5.2 συναρτήσει του λόγου H/L .

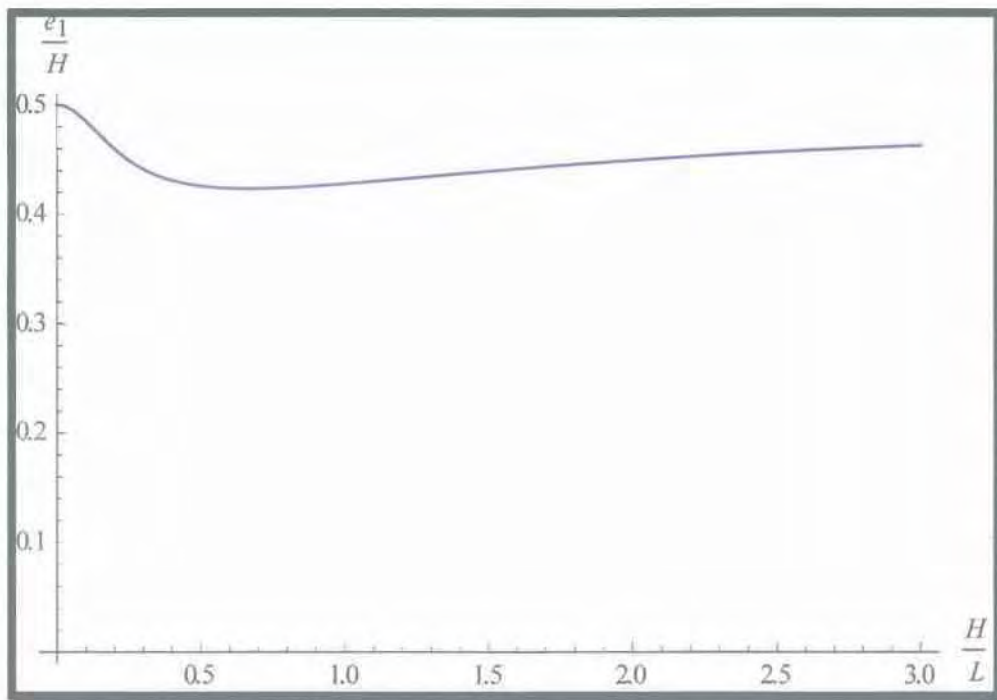
$$\frac{e_1}{H} = \frac{\left\{ 4 \left[\left(\frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)} (n\pi) - \frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)^2} \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right) \frac{2 \tanh\left(\frac{Hn\pi}{L}\right) [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)} + (n\pi)^3 \right] \right\}}{2(n\pi) \left\{ 2 \frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)} \frac{2 \tanh\left(\frac{Hn\pi}{L}\right) [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)} + (n\pi)^2 \right\}}$$



Εικόνα 3.5.2. Διάγραμμα του σημείου εφαρμογής της ωστικής δύναμης για τον 1^ο όρο συναρτήσει του λόγου H/L στη θέση $x=0$

Για $x=L$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος του οποίου το διάγραμμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.5.3 συναρτήσει του λόγου H/L .

$$\frac{e_1}{H} = \frac{\left\{ 4 \cos(n\pi) \left[\left(\frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)} (n\pi) - \frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)^2} \tanh\left(\frac{Hn\pi}{2L}\right) \right) \right] \frac{2 \tanh\left(\frac{Hn\pi}{L}\right) [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)} - (n\pi)^2 \right\}}{2(n\pi) \left\{ 2 \cos(n\pi) \frac{1}{\left(\frac{H}{L}\right)} \frac{2 \tanh\left(\frac{Hn\pi}{L}\right) [\cos(n\pi) - 1]}{(n\pi)} - (n\pi)^2 \right\}}$$



Εικόνα 3.5.3. Διάγραμμα του σημείου εφαρμογής της ωστικής δύναμης για τον 1^ο όρο συναρτήσει του λόγου H/L στη θέση $x=L$

3.6 Αρμονική Διέγερση

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε πως η δεξαμενή του προβλήματος υπόκειται σε απλή αρμονική διέγερση. Θεωρώντας τις q_1 και X αρμονικές συναρτήσεις έχουμε:

$$q_1(t) = Q_1 \sin(\Omega t) \quad (3.6.1)$$

δηλαδή

$$\dot{q}_1 = Q_1 \Omega \cos(\Omega t)$$

και

$$X(t) = X_0 \sin(\Omega t) \quad (3.6.2)$$

δηλαδή

$$\dot{X} = X_0 \Omega \cos(\Omega t)$$

όπου X_0 το εύρος της διέγερσης και Ω η επιβαλλόμενη συχνότητα.

Εύρεση της σταθεράς Q_1

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενα κεφάλαια, γνωρίζουμε πως για το πρόβλημα μας ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -\gamma_n \ddot{X}(t) \quad (3.6.3)$$

όπου

$$X(t) = X_0 \sin(\Omega t)$$

και

$$\gamma_n = \frac{2 \tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) [1 - \cos(n\pi)]}{n\pi} \quad \text{για } n = 1, 3, 5 \dots$$

Για το πρόβλημα μας αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$q_n(t) = Q_n \sin(\Omega t)$$

και θεωρώντας ένα γραμμικό όρο ($n=1$) πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$q_1(t) = Q_1 \sin(\Omega t)$$

Ομοίως για $n=1$ η σταθερά γ_n γίνεται

$$\gamma_1 = -\frac{4 \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{\pi}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.6.3) το τύπο

$$q_1(t) = Q_1 \sin(\Omega t)$$

έχουμε

$$-Q_1 \Omega^2 \sin(\Omega t) + \omega_1^2 Q_1 \sin(\Omega t) = \frac{-4 \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{\pi} \Omega^2 X_0 \sin(\Omega t)$$

Εκτελώντας απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στη τελική μορφή του συντελεστή Q_1 η οποία είναι

$$Q_1 = \frac{4 \Omega^2 X_0 \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} \quad (3.6.4)$$

Επομένως η συνάρτηση $q_1(t)$ σύμφωνα με το τύπο 3.6.1 θα έχει τη μορφή

$$q_1(t) = \frac{4 \Omega^2 X_0 \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} \sin(\Omega t)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ

4.1 Διατύπωση μη – γραμμικού προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται οι εξισώσεις που διέπουν το μη-γραμμικό πρόβλημα με βάση τις εξισώσεις που διέπουν το ολικό πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας και τις εξισώσεις του γραμμικού προβλήματος (1^{ης} τάξης).

Οι εξισώσεις που διέπουν το γραμμικό πρόβλημα είναι η εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

και οι συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} \quad \text{στο } z = H \quad (4.1.2)$$

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0 \quad \text{στο } z = H \quad (4.1.3)$$

Να σημειωθεί πως ο άξονας z είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Ομοίως οι εξισώσεις που διέπουν το γενικό πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας είναι

η εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.4)$$

καθώς και οι 2 συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.1.5)$$

και

$$g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.1.6)$$

για τις οποίες έχει γίνει ήδη αναφορά για το τρόπο που προκύπτουν στο κεφάλαιο 2 και έχουν διατυπωθεί συγκεκριμένα στις εξισώσεις 2.13 και 2.15.

Για τη μελέτη του μη γραμμικού προβλήματος θεωρούμε

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

όπου η είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 4.1.4 όπου

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

καταλήγουμε

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial z^2} = 0$$

όμως ο όρος

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} = 0$$

είναι μηδέν, από τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος, συνθήκη 4.1.1. Επομένως για το πρόβλημα δεύτερης τάξης προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.7)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.1.5) όπου

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial (\eta_{(1)} + \eta_{(2)})}{\partial x} \right]$$

Όμως από τη συνθήκη (4.1.2) του γραμμικού προβλήματος ισχύει

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} = 0$$

Επίσης οι όροι:

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial x}$$

παραλείπονται καθώς είναι 3^{ης} και μεγαλύτερης τάξης. Επομένως η συνθήκη (4.1.5) καταλήγει στη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

Επομένως η τελική εξίσωση για τη κινηματική συνθήκη του μη-γραμμικού προβλήματος γίνεται

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x} \quad (4.1.8)$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (4.1.6) όπου

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

προκύπτει

$$g(\eta_{(1)} + \eta_{(2)}) + \frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

Γνωρίζοντας από τη συνθήκη 4.1.3 του γραμμικού προβλήματος ότι

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

και διαγράφοντας τους όρους 3^{ης} και μεγαλύτερης τάξης η συνθήκη 4.1.6 καταλήγει στη τελική μορφή:

$$g\eta_{(2)} + \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.1.9)$$

Στο $z=H$ ξέρουμε πως ισχύουν οι 2 παρακάτω συνθήκες:

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

και

$$g\eta_{(2)} + \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 4.1.9 ως προς το χρόνο και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.1.10)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση 4.1.10 στην εξίσωση 4.1.8 καταλήγουμε

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

Όμως γνωρίζουμε από την 4.1.3 ότι ισχύει:

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

ή ισοδύναμα παραγωγίζοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης ως προς x έχουμε

$$g \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} \right)$$

και τελικά προκύπτει

$$\frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)$$

Επίσης ισχύει

$$2 \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

με συνέπεια η προηγούμενη σχέση να πάρει τη μορφή

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.1.11)$$

Από τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος είχαμε θεωρήσει πως το δυναμικό της ταχύτητας δίνεται από το τύπο:

$$\Phi_{(1)}(x, z, t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} q_n(t) f_n(x, z) + X\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

όπου

$$f_n(x, z) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

Γράφουμε τον όρο

$$\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων f_n και συνεπώς έχουμε

$$\left(x - \frac{L}{2}\right) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_n f_n(x, z)$$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με τον όρο $f_m(x, z)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, L]$ προκύπτει

$$\int_0^L f_m(x, z) \left(x - \frac{L}{2}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_n f_n(x, z) f_m(x, z) dx$$

και αντικαθιστώντας τους τύπους των ιδιοσυναρτήσεων για n και m έχουμε

$$\int_0^L f_m(x, z) \left(x - \frac{L}{2}\right) dx = \int_0^L \sum_n c_n \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{m\pi}{L}z\right)}{\frac{m\pi}{L} \sinh\left(\frac{m\pi}{L}H\right)} dx$$

ή ισοδύναμα

$$\int_0^L f_m(x, z) \left(x - \frac{L}{2}\right) dx = \sum_n c_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \frac{\cosh\left(\frac{m\pi}{L}z\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi}{L}H\right)} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \quad (4.1.12)$$

Οι συναρτήσεις

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή, όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο ισχύει

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \text{ για } n = m$$

ενώ

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0 \text{ για } n \neq m$$

Επομένως η εξίσωση 4.1.12 για $m = n$ στο $z = H$ γίνεται

$$\int_0^L f_n(x, H) \left(x - \frac{L}{2}\right) dx = c_n \frac{\cosh^2\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} \sinh^2\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \frac{L}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(x - \frac{L}{2}\right) dx = c_n \frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} \tanh^2\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \frac{L}{2}$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε πως η σταθερά c_n δίνεται από το τύπο

$$c_n = \frac{2(\cos(n\pi) - 1)\tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{n\pi} \text{ όπου } n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.1.13)$$

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω το δυναμικό $\Phi_{(1)}$ θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x, z) q_n(t) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_n f_n(x, z) X(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x, z) (q_n(t) + c_n X(t)) \quad (4.1.14)$$

Θέτοντας

$$u_n(t) = q_n(t) + c_n X(t)$$

προκύπτει η τελική μορφή της $\Phi_{(1)}$

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x, z) \dot{u}_n(t)$$

Επομένως με βάση τη τελευταία σχέση η εξίσωση 4.1.11 θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x, z) \dot{u}_n(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x, z) \dot{u}_n(t) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

4.2 Ανάλυση με ένα γραμμικό όρο

Αρχικά για διευκόλυνση θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το πρώτο όρο του γραμμικού προβλήματος, δηλαδή μόνο για $n=1$.

Θεωρούμε δηλαδή ότι

$$\Phi_{(1)}(x, z, t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \dot{u}_1$$

Αντικαθιστώντας τη τελευταία σχέση στην εξίσωση (4.1.15) το δεύτερο μέλος γίνεται

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \dot{u}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \dot{u}_1 \right)^2 \right]$$

και εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = - \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\tanh^2\left(\frac{\pi}{L}H\right)} + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] 2\dot{u}_1 \ddot{u}_1$$

Ονομάζουμε το δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης ως $F(x,t)$ δηλαδή

$$F(x, t) = - \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\tanh^2\left(\frac{\pi}{L}H\right)} + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] 2\dot{u}_1 \ddot{u}_1 \quad (4.2.1)$$

Στο σημείο αυτό θεωρούμε συνάρτηση Φ_2 με την ακόλουθη μορφή

$$\Phi_{(2)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) f_n(x, z) \quad (4.2.2)$$

όπου

$$f_n(x, z) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

οι ιδιοσυναρτήσεις που βρήκαμε από τη ανάλυση του γραμμικού προβλήματος.

Επομένως η συνάρτηση $\Phi_{(2)}(x, z, t)$ γίνεται

$$\Phi_{(2)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \quad (4.2.3)$$

Η $\Phi_{(2)}(x, z, t)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = F(x, t)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή για $z=H$, επομένως αντικαθιστώντας τη σχέση 4.2.3 στη παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} = F(x, t)$$

Αντικαθιστώντας όπου $z=H$ στη παραπάνω σχέση έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t) \quad (4.2.4)$$

Λόγω της ορθογωνικότητας των συναρτήσεων που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της εξίσωσης 4.2.4 με τον όρο

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

και ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[0, L]$. Επομένως έχουμε

$$\frac{L}{n\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{L}{2} + \frac{Lg}{2} \dot{\alpha}_n(t) = \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x, t) dx \quad (4.2.5)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x, t) dx$$

με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου Mathematica βρίσκουμε πως δεν είναι μηδενικό μόνο για 2 όρους και συγκεκριμένα για $n=0$ και για $n=2$. Η λύση για $n=0$ δεν εξετάζεται και επομένως μας απομένει ο όρος $n=2$ για τον οποίο έχουμε:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x, t) dx = \frac{[2\coth^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) - 1]L}{8} (2\dot{u}_1\ddot{u}_1)$$

Επομένως η εξίσωση 4.3.5 γίνεται

$$\frac{L^2}{2n\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \ddot{\alpha}_2(t) + \frac{Lg}{2} \dot{\alpha}_2(t) = \frac{\left[2\coth^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) - 1\right]L}{8} (2\dot{u}_1\ddot{u}_1)$$

Διαιρώντας τα μέλη της προηγούμενης εξίσωσης με τον όρο

$$\frac{L^2}{2n\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

προκύπτει η τελική εξίσωση

$$\ddot{\alpha}_2(t) + \omega_2^2 \dot{\alpha}_2(t) = \frac{\left[2\coth^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) - 1\right]2\pi \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{4L} (2\dot{u}_1\ddot{u}_1) \quad (4.2.6)$$

με

$$\omega_2^2 = \frac{2g\pi \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{L}$$

όπου ω_2 είναι οι ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν από τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος για $n=2$.

Ολοκληρώνοντας στο πεδίο του χρόνου την εξίσωση 4.2.6 προκύπτει

$$\ddot{\alpha}_2(t) + \omega_2^2 \alpha_2(t) = \frac{\left[2\coth^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) - 1\right]2\pi \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{4L} (\dot{u}_1)^2 \quad (4.2.7)$$

Όπου για τη συνάρτηση u_1 ισχύει η σχέση

$$\dot{u}_1(t) = \dot{q}_1(t) + c_1 \dot{X}(t)$$

Θεωρώντας **την ειδική περίπτωση της αρμονικής διέγερσης** (κεφάλαιο 3.6) και επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση που δίνεται από τη σχέση 4.2.7 με τη βοήθεια του Mathematica, καταλήγουμε πως η συνάρτηση α_2 δίνεται από το τύπο

$$\alpha_2(t) = \frac{2\pi\Omega^2(Q_1 + c_1X_0)^2(\omega_2^2 - 4\Omega^2 + \omega_2^2\cos(2\Omega t))\left[3 + \cosh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)\right]\operatorname{Csch}^2\left(\frac{2\pi}{L}H\right)\operatorname{Tanh}\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{16L\omega_2^2(\omega_2^2 - 4\Omega^2)}$$

Απλοποιώντας τη τελευταία εξίσωση οδηγούμαστε στη τελική μορφή της συνάρτησης α_2

$$\alpha_2(t) = 2\pi\Omega^2(Q_1 + c_1X_0)^2 \left[3 + \text{Cosh}\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \right] \text{Csch}^2\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \text{Tanh}\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \left[\frac{1}{16L\omega_2^2} + \frac{\text{Cos}(2\Omega t)}{16L(\omega_2^2 - 4\Omega^2)} \right]$$

Επομένως παραγωγίζοντας τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε

$$\dot{\alpha}_2(t) = - \frac{2\pi\Omega^2(Q_1 + c_1X_0)^2 \left[3 + \text{Cosh}\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \right] \text{Csch}^2\left(\frac{2\pi}{L}H\right) \text{Tanh}\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{16L(\omega_2^2 - 4\Omega^2)} 2\Omega \text{Sin}(2\Omega t)$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} f_n(x,z) \dot{u}_n(t)$$

και κρατώντας μόνο το πρώτο όρο του αθροίσματος, δηλαδή για $n=1$ έχουμε

$$\Phi_{(1)} = f_1(x,z) \left(\dot{q}_1(t) + c_1\dot{X}(t) \right)$$

ή ισοδύναμα κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις προκύπτει

$$\Phi_{(1)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \left[\frac{4\Omega^3 X_0 \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{(-4) \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi} \Omega X_0 \right] \text{Cos}(\Omega t) \quad (4.2.8)$$

4.3 Υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας με ένα γραμμικό

όρο

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει ο υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας τόσο για το γραμμικό (η_1) όσο και για το μη-γραμμικό πρόβλημα (η_2) με βάση τη χρησιμοποίηση ενός γραμμικού όρου, δηλαδή για $n=1$ (κεφάλαιο 4.3) και με τη δεξαμενή μας να υπόκειται σε απλή αρμονική διέγερση (κεφάλαιο 4.2). Πιο συγκεκριμένα στόχος είναι η εύρεση των λόγων η_1/X_0 και η_2/X_0 και η δημιουργία των αντίστοιχων διαγραμμάτων των όρων αυτών συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 όπου Ω είναι η συχνότητα της επιβαλλόμενης διέγερσης και ω_1 η πρώτη ιδιοσυχνότητα του συστήματος μας.

Για το η_1 έχουμε διαδοχικά από τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος μας

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial t}$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξίσωση την σχέση (4.3.8) που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και θέτοντας όπου $z=H$ προκύπτει

$$\eta_{(1)} = \frac{1}{g} \frac{\Omega \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \left[\frac{4\Omega^3 X_0 \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{(-4) \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi} \Omega X_0 \right] \text{Sin}(\Omega t)$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{(1)} = \frac{1}{g} \frac{L\Omega^2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\pi} \left[\frac{4\Omega^2 X_0}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} - \frac{4X_0}{\pi} \right] \text{Sin}(\Omega t)$$

και θέτοντας όπου $\Omega = \kappa\omega_1$ προκύπτει

$$\eta_{(1)} = \frac{1}{g} \frac{L\kappa^2 \omega_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\pi} \left[\frac{4\kappa^2 \omega_1^2 X_0}{\pi(\kappa^2 \omega_1^2 - \omega_1^2)} - \frac{4X_0}{\pi} \right] \text{Sin}(\kappa\omega_1 t)$$

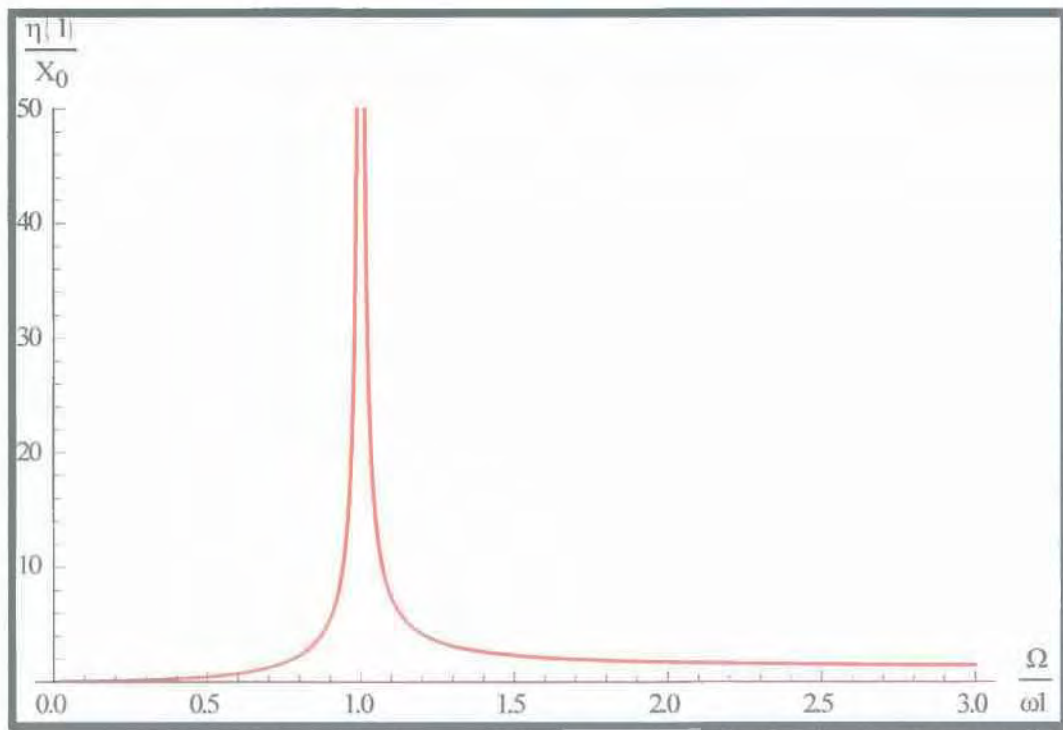
Αντικαθιστώντας την ιδιοσυχνότητα ω_1 σύμφωνα με το τύπο

$$\omega_1 = \frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{L}$$

και αδιαστατοποιώντας το χρόνο θέτοντας $\tau = t \sqrt{\frac{L}{g}}$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\eta(x)}{X_0} = \kappa^2 \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right) \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \left[\frac{4\kappa^2}{\pi(\kappa^2 - 1)} - \frac{4}{\pi} \right] \text{Sin}\left(\kappa \sqrt{\pi \tanh\left(\frac{\pi}{L} H\right)} \tau\right) \quad (4.3.1)$$

της οποίας το διάγραμμα παρουσιάζεται στην εικόνα 4.3.1.



Εικόνα 4.3.1. Μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_1 ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 για $n=1$

Αντίστοιχα για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτει από την επίλυση του μη-γραμμικού προβλήματος (η_2) έχουμε διαδοχικά με βάση την κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right) \right)$$

και τελικά

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

Ολοκληρώνοντας στο πεδίο του χρόνου τη παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$\eta_{(2)} = \int \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} dt + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

και κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις για το δυναμικό $\Phi_{(1)}$ και $\Phi_{(2)}$ (οι σχέσεις τους δίνονται αναλυτικά σε προηγούμενα κεφάλαια), καταλήγουμε στο τελικό τύπο της μη-γραμμικής ανύψωσης για αρμονική διεγερση

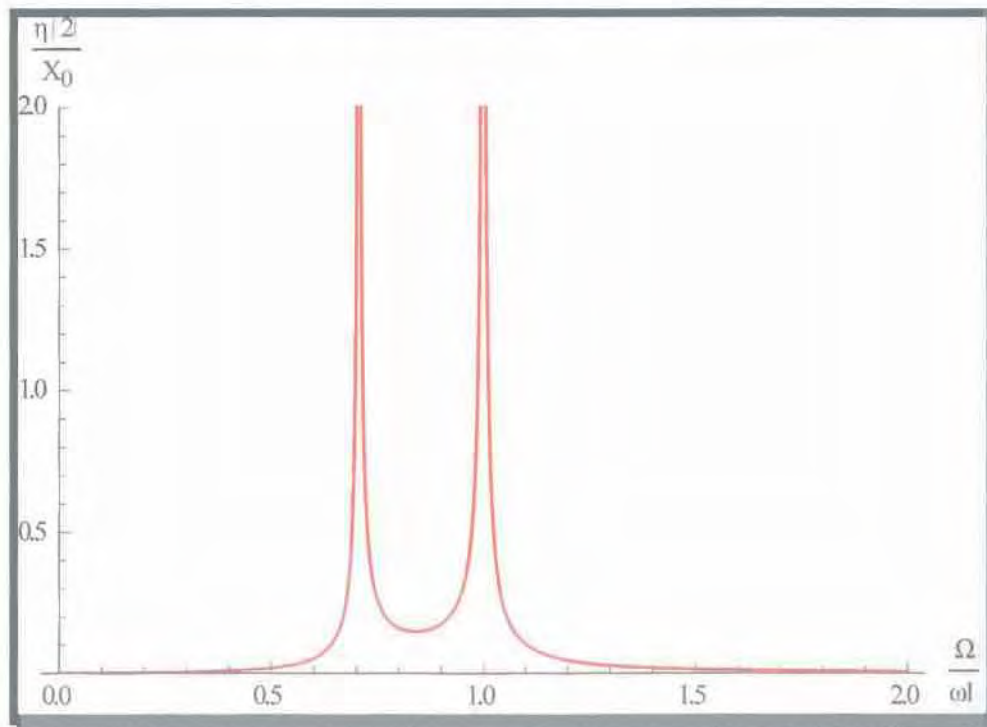
$$\begin{aligned} \eta_{(2)} = & \frac{2\pi\Omega^2(Q_1 + c_1 X_0)^2 \left[3 + \text{Cosh} \left(\frac{2\pi}{L} H \right) \right] \text{Csch}^2 \left(\frac{2\pi}{L} H \right) \text{Tanh} \left(\frac{2\pi}{L} H \right)}{16L(\omega_2^2 - 4\Omega^2)} \text{Cos}(2\Omega t) \text{Cos} \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \\ & + \frac{1}{2g} \left[-\text{Sin} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \left(\frac{4X_0\Omega^3}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} - \frac{4}{\pi} X_0\Omega \right) \text{Cos}(\Omega t) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Όπου για τους όρους Q_1 και c_1 ισχύουν οι παρακάτω τύποι (3.6.4) και (4.1.13)

$$Q_1 = \frac{4\Omega^2 X_0 \tanh \left(\frac{\pi}{L} H \right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)}$$

$$c_1 = \frac{-4 \operatorname{Tanh}\left(\frac{\pi}{L} H\right)}{\pi} \text{ και } \Omega = \kappa \omega_1$$

Εφόσον βρήκαμε το τύπο του η_2 , αδιαστατοποιούμε ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης (X_0), όπως κάναμε και με την ανύψωση η_1 και κάνουμε το διάγραμμα συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.3.2.



Εικόνα 4.3.2. Μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_2 ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 για $n=1$

4.4 Ανάλυση με δύο γραμμικούς όρους

Για τη μελέτη με δύο γραμμικούς όρους, θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία όπως στο κεφάλαιο 4.2 με τη μόνη διαφορά ότι στη παρούσα ανάλυση θα κρατήσουμε δύο όρους από το γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή $n=1$ & $n=3$. Επομένως έχουμε :

$$\Phi_{(1)}(x, z, t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} \dot{u}_1 + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{3\pi}{L}z\right)}{\frac{3\pi}{L} \sinh\left(\frac{3\pi}{L}H\right)} \dot{u}_3 \quad (4.4.1)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}(x, z, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}(x, z, t)}{\partial z} \right)^2 \right]$$

έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1,3} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \dot{u}_n \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1,3} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \dot{u}_n \right)^2 \right]$$

Εκτελώντας τις πράξεις στη παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = F(x, t)$$

όπου όρος $F(x, t)$ δίνεται από το τύπο

$$F(x, t) = - \left\{ \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\tanh^2\left(\frac{\pi}{L}H\right)} + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] 2\dot{u}_1\ddot{u}_1 + \left[\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{L}x\right)}{\tanh^2\left(\frac{3\pi}{L}H\right)} + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \right] 2\dot{u}_3\ddot{u}_3 \right. \\ \left. + \left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)}{\tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right) \tanh\left(\frac{3\pi}{L}H\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \right] (\dot{u}_1\ddot{u}_3 + \dot{u}_3\ddot{u}_1) \right\}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην ανάλυση με τον ένα γραμμικό όρο θεωρούμε για το δυναμικό $\Phi_{(2)}$

$$\Phi_{(2)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) f_n(x, z)$$

όπου

$$f_n(x, z) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

οι ιδιοσυναρτήσεις που βρήκαμε από την ανάλυση του γραμμικού προβλήματος.

Επομένως

$$\Phi_{(2)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

Η $\Phi_{(2)}(x, z, t)$ ικανοποιεί την ισότητα

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = F(x, t)$$

και στο $z=H$ έχουμε ισοδύναμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} = F(x, t)$$

Αντικαθιστώντας όπου $z=H$ στη παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\alpha}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t) \quad (4.4.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνικότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (όπως και στην ανάλυση με τον ένα γραμμικό όρο) καταλήγουμε

$$\frac{L}{n\pi \tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \ddot{\alpha}_n(t) \frac{L}{2} + \frac{Lg}{2} \dot{\alpha}_n(t) = \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x,t) dx$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x,t) dx$$

με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica βρίσκουμε πως δεν είναι μηδενικό μόνο για 3 όρους και συγκεκριμένα για $n=2$, $n=4$ και $n=6$.

Επομένως η $\Phi_{(2)}$ παίρνει τη μορφή:

$$\Phi_{(2)} = \dot{\alpha}_2(t)\psi_2(x,z) + \dot{\alpha}_4(t)\psi_4(x,z) + \dot{\alpha}_6(t)\psi_6(x,z) \quad (4.4.3)$$

Οι χρονικές συναρτήσεις $\alpha_2(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_6(t)$ βρίσκονται από την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) = -f_{(11)n}(\dot{u}_1)^2 - f_{(13)n}(u_1)(u_3) - f_{(33)n}(u_3)^2 \text{ για } n=2,4,6$$

Οι όροι

$$f_{(11)n}, f_{(13)n} \text{ και } f_{(33)n}$$

βρίσκονται από την ολοκλήρωση της σχέσης

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) F(x,t) dx$$

η οποία προέκυψε από την ορθογωνικότητα των ιδιοσυναρτήσεων f_n

Κάνοντας λοιπόν την ολοκλήρωση για $n=2,4,6$ προκύπτουν για τους όρους

$$f_{(11)n}, f_{(13)n} \text{ και } f_{(33)n}$$

οι ακόλουθες τιμές.

Για $n=2$ έχουμε

$$f_{(11)2} = \frac{\pi \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{L} \left[\frac{1}{2} - \text{Coth}^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) \right] \quad (4.4.4)$$

$$f_{(13)2} = \frac{\pi \tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{L} \left[1 + \text{Coth}\left(\frac{\pi}{L}H\right) \text{Coth}\left(\frac{3\pi}{L}H\right) \right] \quad (4.4.5)$$

$$f_{(33)2} = 0 \quad (4.4.6)$$

Αντίστοιχα για $n=4$ έχουμε

$$f_{(11)4} = 0 \quad (4.4.7)$$

$$f_{(13)4} = -\frac{8\pi \tanh\left(\frac{4\pi}{L}H\right)}{L} \left[\frac{\left(3\cosh\left(\frac{2\pi}{L}H\right) + \cosh\left(\frac{4\pi}{L}H\right)\right) \text{csch}^2\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{8 + 16\cosh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)} \right] \quad (4.4.8)$$

$$f_{(33)4} = 0 \quad (4.4.9)$$

Τέλος για $n=6$ έχουμε

$$f_{(11)6} = 0 \quad (4.4.10)$$

$$f_{(13)6} = 0 \quad (4.4.11)$$

$$f_{(33)6} = -\frac{6\pi \tanh\left(\frac{6\pi}{L}H\right)}{4L} \left[2\text{Coth}^2\left(\frac{3\pi}{L}H\right) - 1 \right] \quad (4.4.12)$$

Θεωρώντας την ειδική περίπτωση της αρμονικής διέγερσης (κεφάλαιο 3.6) όπως κάναμε και στη περίπτωση της ανάλυσης με τον ένα γραμμικό όρο και επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) = -f_{(11)n}(\dot{u}_1)^2 - f_{(13)n}(\dot{u}_1)(u_3) - f_{(33)n}(\dot{u}_3)^2 \quad n = 2,4,6$$

αντικαθιστώντας κάθε φορά τις τιμές των $f_{(11)n}$, $f_{(13)n}$ και $f_{(33)n}$ από τους τύπους 4.4.4 έως 4.4.12 έχουμε τους τύπους των συναρτήσεων $\alpha_2(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_6(t)$.

Πιο συγκεκριμένα για τη συνάρτηση $\alpha_2(t)$ προκύπτει

$$\alpha_2(t) = \frac{\pi \Omega^2 (Q_1 + c_1 X_0) (\omega_2^2 - 4\Omega^2 + \omega_2^2 \cos(2\Omega t)) \cosh\left(\frac{\pi}{L} H\right) [A2 + B2 + \Gamma2]}{2L\omega_2^2 (\omega_2^2 - 4\Omega^2) \left[\sinh\left(\frac{\pi}{L} H\right) + \sinh\left(\frac{5\pi}{L} H\right) \right]} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

Όπου οι σταθερές **A2**, **B2**, **Γ2** δίνονται από τους τύπους

$$A2 = 4(Q_1 + c_1 X_0)$$

$$B2 = (7Q_1 - 2Q_3 + 7c_1 X_0 - 2c_3 X_0) \cosh\left(\frac{2\pi}{L} H\right)$$

$$\Gamma2 = (Q_1 - 6Q_3 + c_1 X_0 - 6c_3 X_0) \cosh\left(\frac{4\pi}{L} H\right)$$

Ομοίως για τη συνάρτηση $\alpha_4(t)$ προκύπτει

$$\alpha_4(t) = \frac{\pi \Omega^2 (Q_1 + c_1 X_0) (Q_3 + c_3 X_0) (\omega_4^2 - 4\Omega^2 + \omega_4^2 \cos(2\Omega t)) [A4 + B4 + \Gamma4]}{L\omega_4^2 (\omega_4^2 - 4\Omega^2) \left[\sinh\left(\frac{7\pi}{L} H\right) - \sinh\left(\frac{\pi}{L} H\right) \right]} \cos\left(\frac{4\pi}{L} x\right)$$

Όπου οι σταθερές **A4**, **B4**, **Γ4** δίνονται από τους τύπους

$$A4 = 7 \cosh\left(\frac{\pi}{L} H\right)$$

$$B4 = 4 \left[\cosh\left(\frac{3\pi}{L} H\right) + \cosh\left(\frac{5\pi}{L} H\right) \right]$$

$$\Gamma4 = \cosh\left(\frac{7\pi}{L} H\right)$$

Και τέλος για τη συνάρτηση $\alpha_6(t)$ προκύπτει

$$\alpha_6(t) = \frac{3\pi\Omega^2(Q_3 + c_3X_0)^2 (\omega_6^2 - 4\Omega^2 + \omega_6^2\cos(2\Omega t)) [A_6 + B_6]}{4L\omega_6^2(\omega_6^2 - 4\Omega^2) \left[\text{Sinh}\left(\frac{Q_3\pi}{L}H\right) - \text{Sinh}\left(\frac{3\pi}{L}H\right) \right]} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right)$$

Όπου οι σταθερές **A6**, **B6** δίνονται από τους τύπους

$$A_6 = 7\text{Cosh}\left(\frac{3\pi}{L}H\right)$$

$$B_6 = \text{Cosh}\left(\frac{9\pi}{L}H\right)$$

Να σημειωθεί πως οι σταθερές Q_1, Q_3 και c_1, c_3 δίνονται από τους τύπους

$$Q_1 = \frac{4\Omega^2X_0 \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} \quad \& \quad Q_3 = \frac{4\Omega^2X_0 \tanh\left(\frac{3\pi}{L}H\right)}{3\pi(\Omega^2 - \omega_3^2)}$$

και

$$c_1 = \frac{-4\text{Tanh}\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{\pi} \quad \& \quad c_3 = \frac{-4\text{Tanh}\left(\frac{3\pi}{L}H\right)}{3\pi}$$

Η εύρεση τους έχει παρουσιασθεί αναλυτικά σε προηγούμενα κεφάλαια.

4.5 Υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας με δύο γραμμικούς όρους

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει ο υπολογισμός της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας τόσο για το γραμμικό (η_1) όσο και για το μη-γραμμικό πρόβλημα (η_2) με βάση τη χρησιμοποίηση δύο γραμμικών όρων, δηλαδή για $n=1$ & 3 (κεφάλαιο 4.4) και με τη δεξαμενή μας να υπόκειται σε απλή αρμονική διέγερση (κεφάλαιο 3.6). Πιο συγκεκριμένα στόχος είναι η εύρεση των λόγων η_1/χ_0 και η_2/χ_0 και η δημιουργία των αντίστοιχων διαγραμμάτων των όρων αυτών συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 όπου Ω είναι η συχνότητα της επιβαλλόμενης διέγερσης και ω_1 η πρώτη ιδιοσυχνότητα του συστήματος μας.

Για το η_1 έχουμε διαδοχικά από τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} \quad (4.5.1)$$

Όπου σε αυτή τη περίπτωση για $n=1&3$ έχουμε

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3} f_n(x, z) \dot{u}_n \Rightarrow \Phi_{(1)} = f_1(x, z) \dot{u}_1 + f_3(x, z) \dot{u}_3 \quad (4.5.2)$$

Και σύμφωνα με το μετασχηματισμό

$$u_n(t) = q_n(t) + c_n X(t)$$

η εξίσωση 4.6.2 γίνεται

$$\Phi_{(1)} = f_1(x, z) (\dot{q}_1(t) + c_1 \dot{X}(t)) + f_3(x, z) (\dot{q}_3(t) + c_3 \dot{X}(t))$$

ή ισοδύναμα αντικαθιστώντας τις ιδιοσυναρτήσεις για $n=1$ και $n=3$ προκύπτει

$$\Phi_{(1)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{L}z\right)}{\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi}{L}H\right)} (\dot{q}_1(t) + c_1 \dot{X}(t)) + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{3\pi}{L}z\right)}{\frac{3\pi}{L} \sinh\left(\frac{3\pi}{L}H\right)} (\dot{q}_3(t) + c_3 \dot{X}(t))$$

Με δεδομένο ότι θεωρούμε απλή αρμονική διέγερση έχουμε

$$q_n(t) = Q_n \sin(\Omega t) \text{ και } X(t) = X_0 \sin(\Omega t)$$

από τους τύπους 3.6.1 και 3.6.2.

Επομένως για το η_1 σύμφωνα με την εξίσωση 4.5.1 προκύπτει ο τύπος

$$\eta_{(1)} = \frac{1}{g} \left\{ \begin{aligned} & \frac{L\Omega^2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\pi} \left[\frac{4\Omega^2 X_0}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} - \frac{4X_0}{\pi} \right] + \\ & + \frac{L\Omega^2 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)}{3\pi} \left[\frac{4\Omega^2 X_0}{3\pi(\Omega^2 - \omega_2^2)} - \frac{4X_0}{3\pi} \right] \end{aligned} \right\} \text{Sin}(\Omega t)$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω σχέση όπου $\Omega = \kappa\omega_1$ γνωρίζοντας ότι

$$\omega_1 = \frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right)}{L}$$

και εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στη τελική μορφή της ανύψωσης $\eta_{(1)}$

$$\eta_{(1)} = \frac{1}{g} \left\{ \begin{aligned} & \frac{L\Omega^2 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)}{\pi} \left[\frac{4\Omega^2 X_0}{\pi(\Omega^2 - \omega_1^2)} - \frac{4X_0}{\pi} \right] + \\ & + \frac{L\Omega^2 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)}{3\pi} \left[\frac{4\Omega^2 X_0}{3\pi(\Omega^2 - \omega_2^2)} - \frac{4X_0}{3\pi} \right] \end{aligned} \right\} \text{Sin}(\Omega t)$$

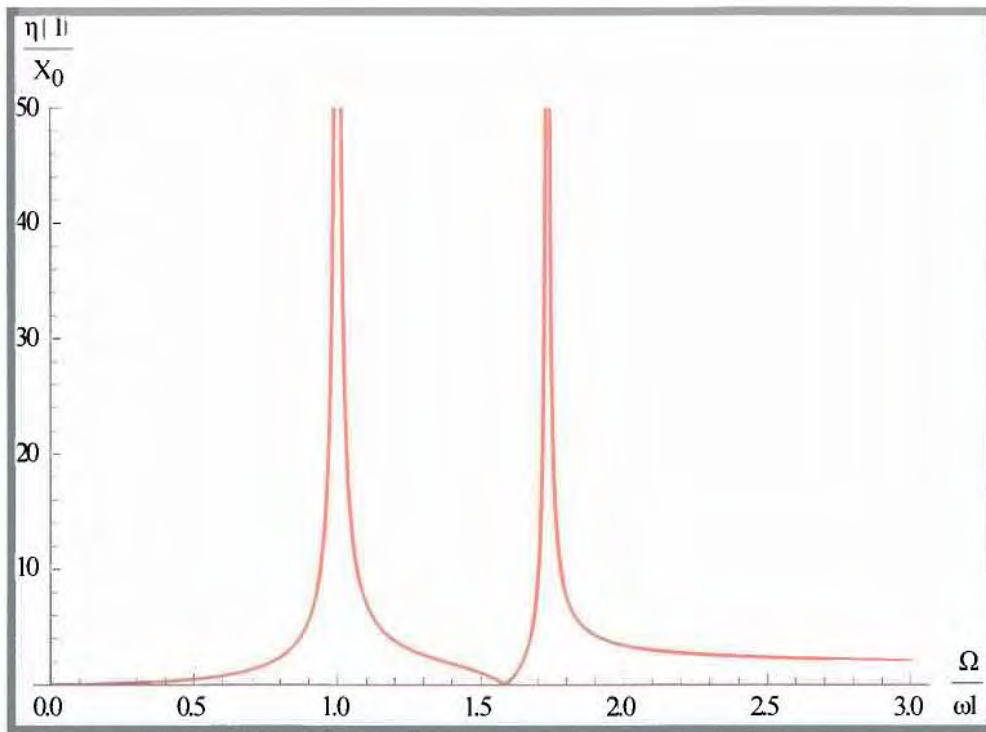
Αδιαστατοποιώντας το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$\tau = t \sqrt{\frac{L}{g}}$$

και διαιρώντας με το εύρος της επιβαλλόμενης διέγερσης καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\eta_{(1)}}{X_0} = \kappa^2 \tanh\left(\frac{\pi}{L}H\right) \left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left(\frac{4\kappa^2}{\pi(\kappa^2 - 1)} - \frac{4}{\pi} \right) + \\ & + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)}{3} \left(\frac{4\kappa^2}{3\pi\left(\kappa^2 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)} - \frac{4}{3\pi} \right) \end{aligned} \right\} \text{Sin}(\kappa\omega_1\tau) \quad (4.5.3)$$

της οποίας το διάγραμμα φαίνεται στην Εικόνα 4.5.1.



Εικόνα 4.5.1. Μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_1 ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 για $n=1&3$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εφαρμόσαμε στην ανάλυση όπου χρησιμοποιήσαμε μόνο ένα γραμμικό όρο, έχουμε αντιστοίχως για το η_2

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right) \right)$$

και τελικά

$$\frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

Ολοκληρώνοντας τη τελευταία εξίσωση στο πεδίο του χρόνου προκύπτει

$$\eta_{(2)} = \int \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} dt + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

Σε αυτή τη περίπτωση η συνάρτηση $\Phi_{(2)}$ δίνεται από το τύπο

$$\Phi_{(2)} = \alpha_2(t)f_2(x, z) + \alpha_4(t)f_4(x, z) + \alpha_6(t)f_6(x, z)$$

ενώ οι συναρτήσεις $\alpha_2(t), \alpha_4(t), \alpha_6(t)$ είναι γνωστές και οι $f_2(x, z), f_4(x, z), f_6(x, z)$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις που υπολογίζονται για $n=2, 4, 6$ αντίστοιχα. Επομένως για την ανύψωση η_2 προκύπτει

$$\eta_{(2)} = \int \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_2(t)f_2(x, z) + \alpha_4(t)f_4(x, z) + \alpha_6(t)f_6(x, z)) dt + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1,3} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \dot{u}_n \right)^2$$

Εκτελώντας τις πράξεις και διαιρώντας με το εύρος της απλής αρμονικής διέγερσης X_0 καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$\frac{\eta_{(2)}}{X_0} = \frac{\left[\alpha_2(t) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \alpha_4(t) \cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right) + \alpha_6(t) \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) \right]}{X_0} + \frac{1}{2} \kappa^2 \pi \varepsilon [V(x)] \cos(\kappa \omega_1 t) \quad (4.5.4)$$

όπου

$$V(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) (Q_1 + c_1)^2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) (Q_1 + c_1)(Q_3 + c_3) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{L}x\right) (Q_3 + c_3)^2$$

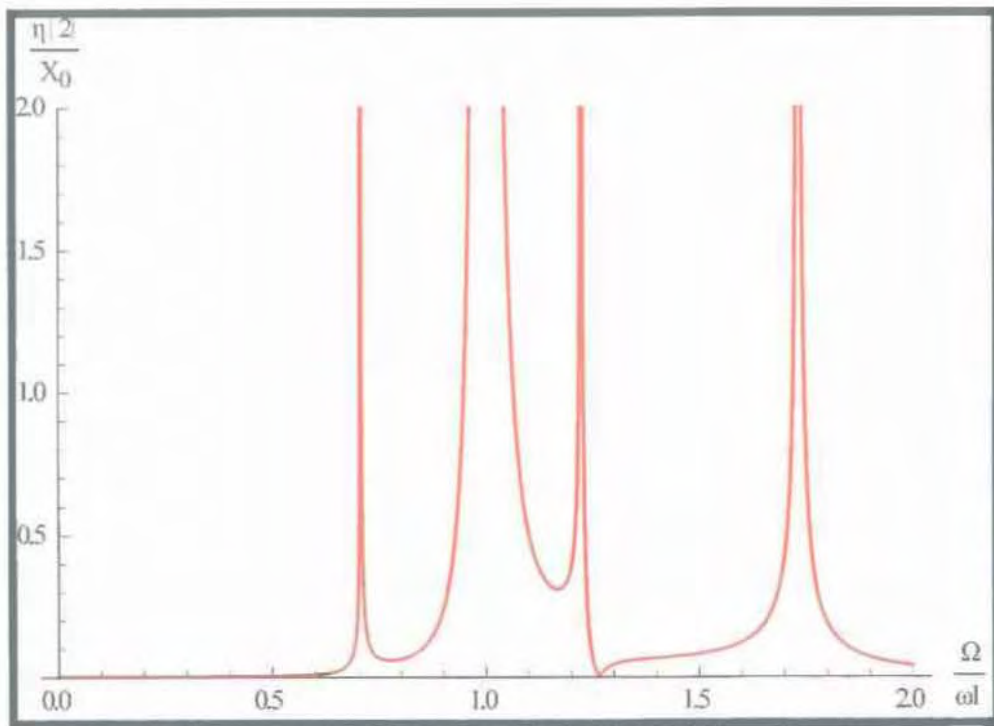
Να σημειωθεί πως ο όρος κ ορίζεται ως ο λόγος της επιβαλλόμενης συχνότητας Ω προς τη πρώτη ιδιοσυχνότητα του συστήματος μας ω_1 , δηλαδή

$$\kappa = \frac{\Omega}{\omega_1}$$

ενώ ο όρος ε ορίζεται ο λόγος του εύρους της επιβαλλόμενης απλής αρμονικής διέγερσης X_0 προς το μήκος της δεξαμενής L , δηλαδή

$$\varepsilon = \frac{X_0}{L}$$

Στην εικόνα 4.5.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα του λόγου η_2/χ_0 λόγου Ω/ω_1 για $n=1$ & 3



Εικόνα 4.5.2. Μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_2 ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 για $n=1$ & 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ

5.1 Διατύπωση του προβλήματος

Όπως και στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών (κεφάλαιο 3.1), έτσι και στις κυλινδρικές δεξαμενές, με απουσία εξωτερικής διέγερσης το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας (sloshing) μπορεί να θεωρηθεί και να επιλυθεί ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Όπως έχει ήδη διατυπωθεί σε προηγούμενα κεφάλαια το πρόβλημα ιδιοτιμών που προκύπτει αντιπροσωπεύει τις ταλαντώσεις της ελεύθερης επιφάνειας ενός ιδανικού υγρού μέσα σε ένα στάσιμο δοχείο. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με τη περίπτωση της ορθογωνικής δεξαμενής για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης έχουμε

Θεωρούμε ότι το δυναμικό Φ της ταχύτητας έχει την ακόλουθη μορφή

$$\Phi(r, \theta, z, t) = e^{i\omega t} \psi_n(r, \theta, z) \quad (5.1.1)$$

Η Φ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.1.2)$$

καθώς και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ στο } r = R \quad (5.1.3)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } z = 0 \quad (5.1.4)$$

και τέλος στη βάση της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } z = -h \quad (5.1.5)$$

Αντιστοίχα με το πρόβλημα στις ορθογωνικές δεξαμενές, αντικαθιστώντας στη συνοριακή συνθήκη (5.1.4) τη σχέση (5.1.1) και επιλύοντας τη θα προκύψουν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος ω_{mn} .

Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

αντικαθιστώντας σύμφωνα με τη (5.1.1) προκύπτει

$$\frac{\partial^2 (e^{i\omega t} \psi_{mn}(r, \theta, z))}{\partial t^2} + g \frac{\partial (e^{i\omega t} \psi_{mn}(r, \theta, z))}{\partial z} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$e^{i\omega t} \left(-\omega^2 \psi_{mn} + g \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial z} \right) = 0$$

Όμως ο όρος $e^{i\omega t}$ είναι διάφορος του μηδενός επομένως

$$\left(-\omega^2 \psi_{mn} + g \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.1.6)$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για κυλινδρικές δεξαμενές οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος δίνονται από τη σχέση

$$\psi_{mn}(r, \theta, z) = J_1(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \cos m\theta \quad (5.1.7)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.1.7) στην εξίσωση (5.1.6) προκύπτει

$$\left\{ -\omega_{mn}^2 J_1(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh \lambda_{mn} h} \cos m\theta + g \frac{\partial J_1(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh \lambda_{mn} h}}{\partial z} \right\} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\left\{ \begin{aligned} & -\omega_{mn}^2 J_1(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \cos m\theta + \\ & g J_1(\lambda_{mn} r) \frac{\lambda_{mn} \sinh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (5.1.8)$$

Θέτοντας στη σχέση (5.1.8) όπου $z=0$, δηλαδή στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, και επιλύοντας την εξίσωση, προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Συνεπώς έχουμε

$$\omega_{mn}^2 = g \lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h)$$

ή ισοδύναμα

$$\omega_{mn} = \sqrt{g \lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h)} \quad (5.1.9)$$

5.2 Υπολογισμός Επανωνικής και Ωστικής Δύναμης

Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός της επαγωγικής και ωστικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα μας λόγω της κίνησης του ρευστού. Θα εφαρμοσθεί η ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε και στις ορθογωνικές δεξαμενές (κεφάλαιο 3.2).

Θεωρώντας λοιπόν $m=1$ για το σύστημα μας, το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_n \psi_{1n}(r, \theta, z) + \dot{X}x$$

ή ισοδύναμα αντικαθιστώντας τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος σύμφωνα με τη σχέση (5.1.7) και εκφράζοντας τη θέση x σε κυλινδρικές συντεταγμένες προκύπτει

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n}r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos\theta \dot{q}_n + \dot{X}r \cos\theta \quad (5.2.1)$$

Για τον υπολογισμό της πίεσης ισχύει

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ή ισοδύναμα αντικαθιστώντας τη σχέση (5.2.1)

$$P = -\rho \left(\sum_{n=0}^{\infty} R J_1(\lambda_{1n}r) \frac{\cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos\theta \ddot{q}_n + \ddot{X}r \cos\theta \right)$$

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό της δύναμης έχουμε:

$$F = -\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\tilde{n} \tilde{e}_x) ds dz$$

ή ισοδύναμα

$$F = -\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} R \cos\theta d\theta dz$$

και τελικά

$$F = -\rho R^2 \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n}r) \frac{\cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos^2\theta \dot{q}_n + r \cos^2\theta \dot{X} d\theta dz$$

Εφαρμόζοντας τη παραπάνω σχέση στα τοιχώματα της δεξαμενής ($r=R$) δηλαδή εκεί που ασκείται η δύναμη έχουμε:

$$F = -\rho R^2 \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \cos^2 \theta \ddot{q}_n + R \cos^2 \theta \ddot{X} dz$$

και ολοκληρώνοντας τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε

$$F = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} q_n - \rho R^2 H \pi \ddot{X} \quad (5.2.2)$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς

$$q_n = v_n a_n(t) \quad (5.2.3)$$

και

$$u_n(t) = a_n(t) + X(t) \quad (5.2.4)$$

με αποτέλεσμα ο όρος \ddot{q}_n στη σχέση (5.2.2) θα πάρει τη μορφή :

$$\ddot{q}_n = v_n (\ddot{u}_n - \ddot{X})$$

Επομένως θα έχουμε:

$$F = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} v_n (u_n - X) - \rho R^2 H \pi \ddot{X}$$

Με απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

Για την επαγωγική δύναμη

$$F_n = - \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi \rho R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} v_n \ddot{u}_n \quad (5.2.5)$$

και για την ωστική δύναμη

$$F_l = \left[\sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi \rho R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} v_n - \rho R^2 H \pi \right] \ddot{X} \quad (5.2.6)$$

5.3 Υπολογισμος Επαγωγικής και Ωστικής Ροπής

Ομοίως στο παρόν κεφάλαιο θα υπολογισθεί με τον ίδιο τρόπο η επαγωγική και η ωστική ροπή όπως έγινε και στις ορθογωνικές δεξαμενές (κεφάλαιο 3.3). Υπενθυμίζουμε ότι η ωστική συσυστώσα οφείλεται στο μέρος του υγρού που κινείται μαζί με τη δεξαμενή υπό την εξωτερική διέγερση, ενώ η επαγωγική συσυστώσα οφείλεται στο μέρος του υγρού που αποτελεί την ελεύθερη επιφάνεια.

Για τον υπολογισμό της ροπής ισχύει ο τύπος

$$\bar{M} = -\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\mathbf{ne}_x)(h+z) ds dz$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{M} = -\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (h+z) R \cos \theta ds dz \quad (5.3.1)$$

και αντικαθιστώντας το δυναμικό σύμφωνα με τη σχέση (5.2.1) προκύπτει

$$\begin{aligned} \bar{M} = & -\rho R \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \cos^2 \theta q_n (h+z) d\theta dz + \\ & + R \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} -\rho R \cos^2 \theta \ddot{X} (h+z) d\theta dz \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

κάνοντας τις απαραίτητες ολοκληρώσεις και ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$q_n = \gamma_n (\mathbf{u}_n - \mathbf{X})$$

καταλήγουμε στο τελικό τύπο

$$\bar{M} = -\rho R \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi[-1 + \operatorname{sech}(\lambda_{1n} h) + (\lambda_{1n} h) \tanh(\lambda_{1n} h)]}{\lambda_{1n}^2} \gamma_n (\ddot{u}_n - \ddot{X}) - \frac{1}{2} \rho R^2 h^2 \pi \ddot{X}$$

όπου προκύπτει

Για την επαγωγική ροπή

$$\bar{M}_n = -\rho R \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi[-1 + \operatorname{sech}(\lambda_{1n} h) + (\lambda_{1n} h) \tanh(\lambda_{1n} h)]}{\lambda_{1n}^2} \gamma_n \ddot{u}_n \quad (5.3.3)$$

ενώ για την ωστική ροπή

$$\bar{M}_I = \left\{ \begin{array}{l} -\rho R \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi[-1 + \operatorname{sech}(\lambda_{1n} h) + (\lambda_{1n} h) \tanh(\lambda_{1n} h)]}{\lambda_{1n}^2} \gamma_n \\ -\frac{1}{2} \rho R^2 h^2 \pi \end{array} \right\} \ddot{X} \quad (5.3.4)$$

5.4 Υπολογισμός Επαγωγικής και Ωστικής Μάζας

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει ο υπολογισμός της επαγωγικής και ωστικής μάζας, όπως έγινε και στη περίπτωση της ορθογωνικής δεξαμενής (κεφάλαιο 3.4). Για τον υπολογισμό των μαζών θα χρησιμοποιηθεί η θεωρία της καθετότητας των συναρτήσεων Bessel καθώς και διάφορες άλλες ιδιότητες τους, οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Διαδοχικά έχουμε από το τύπο για το δυναμικό της ταχύτητας

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_n \psi_n(r, \theta, z) + \ddot{X}x$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n}r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos\theta \dot{q}_n + \ddot{X}r \cos\theta \quad (5.4.1)$$

Η συνάρτηση Φ θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (5.1.4) του προβλήματος μας.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4.1) στη συνθήκη (5.1.4) και θέτοντας $z=0$, δηλαδή στην ελεύθερη επιφάνεια έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} R J_1(\lambda_{1n}r) \cos\theta \ddot{q}_n + \ddot{X}r \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n}r) \frac{R \sinh(\lambda_{1n}h)}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos\theta \dot{q}_n = 0$$

Σε αυτό το σημείο και για διευκόλυνση μας στη συνέχεια θα πραγματοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητής

$$t = \frac{r}{R}$$

ή ισοδύναμα

$$r = Rt$$

Επομένως απλοποιώντας συγχρόνως τον όρο $\cos\theta$ από τη παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\sum_{n=0}^{\infty} R J_1(\lambda_{1n}Rt) \ddot{q}_n + \ddot{X} \sum_{n=0}^{\infty} R J_1(\lambda_{1n}Rt) \tanh(\lambda_{1n}h) \dot{q}_n = -\ddot{X}Rt \quad (5.4.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της σχέσης 5.4.2 με τον όρο

$$tR J_1(\lambda_{1n} Rt)$$

και ολοκληρώνοντας στο διάστημα [0,1] από το κανόνα της ορθογωνικότητας

των συναρτήσεων Bessel έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{q}_n \int_0^1 t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt + g \lambda_{1n} \tanh(\lambda_{1n} h) q_n \int_0^i t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt = \\ = -\bar{X} \int_0^i t^2 J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Στο σημείο αυτό θα γραφθούν οι ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel που θα χρησιμοποιηθούν, για να πάρει τη τελική της μορφή η εξίσωση 5.4.3

Συγκεκριμένα έχουμε

$$\int_0^1 t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt = \frac{1}{2} \left[J_0^2(\lambda_{1n} R) - \frac{2J_0(\lambda_{1n} R)J_1(\lambda_{1n} R)}{(\lambda_{1n} R)} + J_1^2(\lambda_{1n} R) \right] \quad (5.4.4)$$

$$J_0(\lambda_{1n} R) = J_2(\lambda_{1n} R) = \frac{J_1(\lambda_{1n} R)}{\lambda_{1n} R} \quad (5.4.5)$$

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) \quad (5.4.6)$$

Από τις ιδιότητες των σχέσεων 5.4.4 και 5.4.5 με απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε πως

$$\int_0^1 t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt = \frac{1}{2\lambda_{1n}^2 R^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)$$

Επίσης από τις ιδιότητες 5.4.4 και 5.4.6 προκύπτει

$$\int t^2 J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt = \frac{J_2(\lambda_{1n} R)}{\lambda_{1n} R} = \frac{J_1(\lambda_{1n} R)}{\lambda_{1n}^2 R^2}$$

Με βάση τις σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel η σχέση 5.4.3

$$\bar{q}_n \int_0^1 t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt + g \lambda_{1n} \tanh(\lambda_{1n} h) q_n \int_0^i t J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt = -\bar{X} \int_0^i t^2 J_1^2(\lambda_{1n} Rt) dt$$

θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_n \frac{1}{2\lambda_{1n}^2 R^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1) + g \lambda_{1n} \tanh(\lambda_{1n} h) q_n \frac{1}{2\lambda_{1n}^2 R^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1) \\ & = -\ddot{X} \frac{J_1(\lambda_{1n} R)}{\lambda_{1n}^2 R^2} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Διαιρώντας τα μέλη της εξίσωσης (5.4.7) με τον όρο

$$\frac{1}{2\lambda_{1n}^2 R^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)$$

καταλήγουμε

$$\ddot{q}_n + \omega_{1n}^2 q_n = -\frac{2}{J_1(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)} \ddot{X}$$

Από τη τελευταία εξίσωση προκύπτει και ο συντελεστής γ_n ο οποίος δίνεται από το τύπο

$$\gamma_n = \frac{2}{J_1(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)} \quad (5.4.8)$$

Επίσης από τον υπολογισμό της δύναμης F που πραγματοποιήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο (5.2) έχουμε πως ο συντελεστής a_n είναι ίσος με:

$$a_n = J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\rho R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}}$$

Η επαγωγική μάζα M_n προκύπτει με πολλαπλασιασμό των συντελεστών a_n και γ_n επομένως έχουμε με απλές αλγεβρικές πράξεις

$$M_n = a_n \gamma_n = (\rho \pi R^2 H) \frac{R}{H} \frac{2 \tanh(\lambda_{1n} h)}{J_1(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)}$$

Με δεδομένο πως η ολική μάζα είναι ίση με

$$M_L = \rho \pi R^2 H$$

ο λόγος της επαγωγικής προς την ολική μάζα είναι

$$\frac{M_n}{M_L} = \frac{1}{\gamma} \frac{2 \tanh(\lambda_{1n} h)}{J_1(\lambda_{1n} R) (\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)} \quad \text{με } \gamma = \frac{H}{R} \quad (5.4.9)$$

Η ωστική μάζα αντίστοιχα δίνεται από το τύπο

$$M_I = M_L - M_n$$

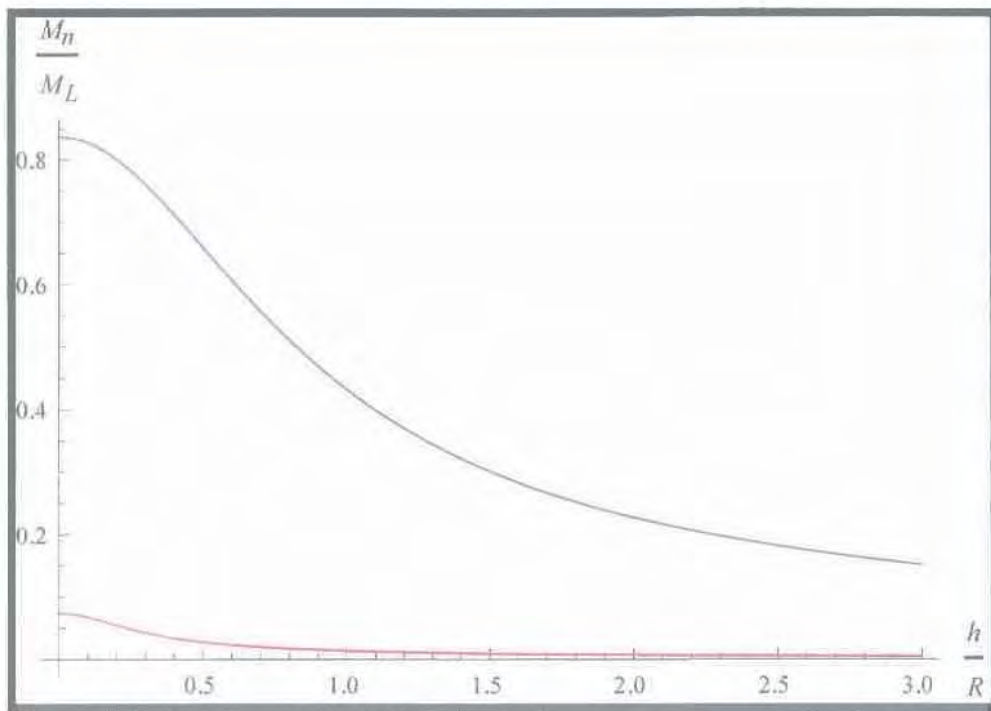
δηλαδή

$$M_I = \rho\pi R^2 H - (\rho\pi R^2 H) \frac{R}{H} \frac{2 \tanh(\lambda_{1n} h)}{(\lambda_{1n} R)(\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)}$$

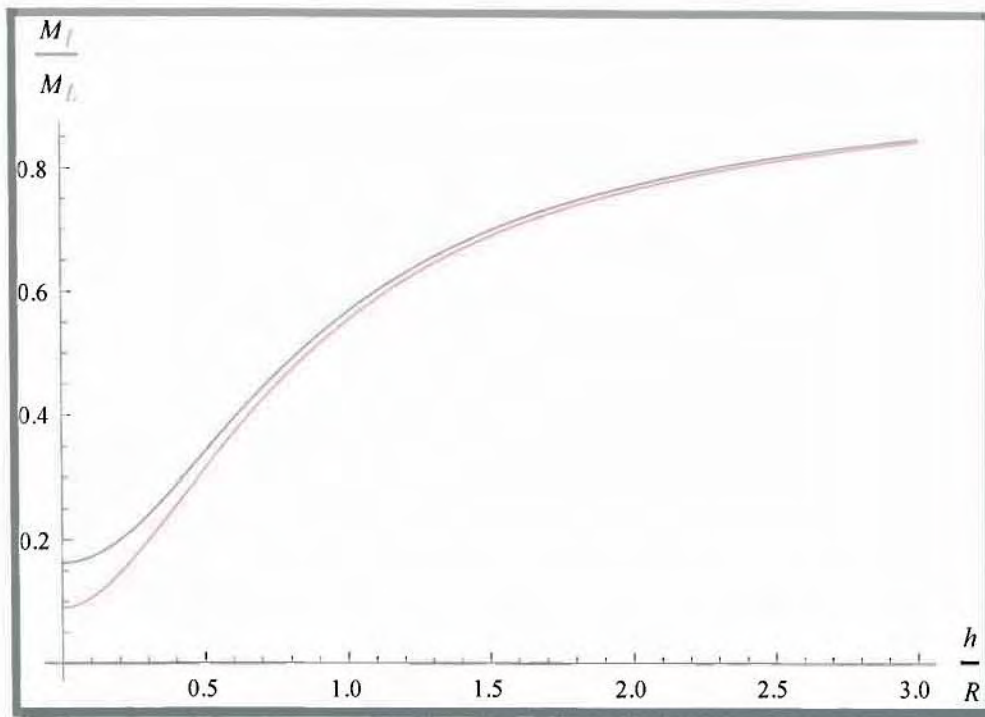
Επομένως ο λόγος της ωστικής προς την ολική μάζα δίνεται από το τύπο

$$\frac{M_I}{M_L} = (\rho\pi R^2 H) \left[1 - \frac{1}{\gamma} \frac{2 \tanh(\lambda_{1n} h)}{(\lambda_{1n} R)(\lambda_{1n}^2 R^2 - 1)} \right] \quad (5.4.10)$$

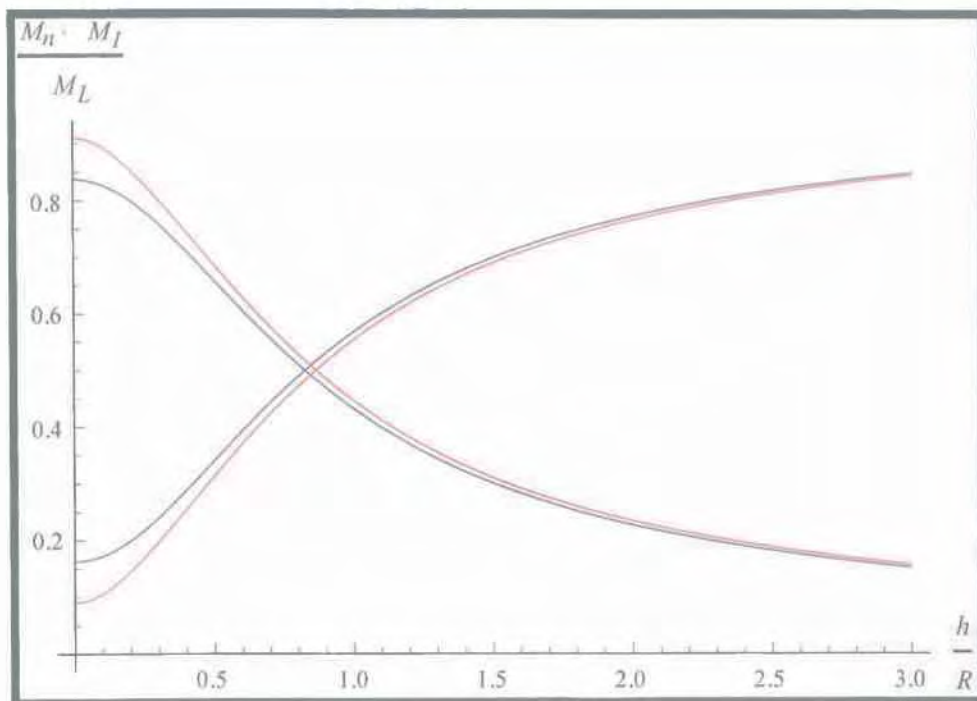
Τα διαγράμματα των λόγων επαγωγικής και ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού παρουσιάζονται στις εικόνες 5.4.1 και 5.4.2 συναρτήσει του λόγου h/R δηλαδή του ύψους του υγρού που βρίσκεται στο εσωτερικό της δεξαμενής προς την ακτίνα της δεξαμενής. Πιο συγκεκριμένα για τους δύο πρώτους όρους ($n=1$ & 2) έχουμε



Εικόνα 5.4.1. Κοινό διάγραμμα $1^{ος}$ και $2^{ος}$ επαγωγικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/R



Εικόνα 5.4.2.Κοινό διάγραμμα 1^{ης} και 2^{ης} ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/R



Εικόνα 5.4.3.Κοινό διάγραμμα 1^{ης} και 2^{ης} ωστικής & επαγωγικής μάζας προς τη συνολική μάζα του υγρού συναρτήσει του λόγου h/R

5.5 Υπολογισμός σημείου εφαρμογής της δύναμης

Για τον υπολογισμό του σημείου εφαρμογής της δύναμης αρκεί μία διαίρεση της επαγωγικής και ωστικής ροπής με τις αντίστοιχες δυνάμεις που βρέθηκαν παραπάνω, όπως έγινε και στη περίπτωση της ορθογωνικής δεξαμενής.

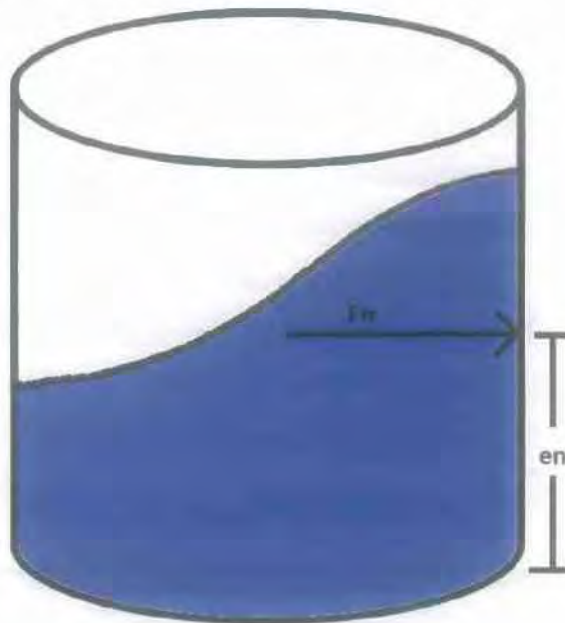
Έτσι έχουμε

$$e_n = \frac{\bar{M}_n}{F_n}$$

ή ισοδύναμα από τις σχέσεις (5.3.3) και (5.2.5) προκύπτει

$$e_n = \frac{-\rho R \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi[-1 + \operatorname{sech}(\lambda_{1n} h) + (\lambda_{1n} h) \tanh(\lambda_{1n} h)]}{\lambda_n^2} \gamma_n \bar{u}_n}{-\sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi \rho R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} \gamma_n \bar{u}_n}$$

Σχήματικα το σημείο εφαρμογής της οριζόντιας δύναμης στο τοίχωμα της δεξαμενής οποιασδήποτε διατομής παριστάνεται με τη παρακάτω εικόνα

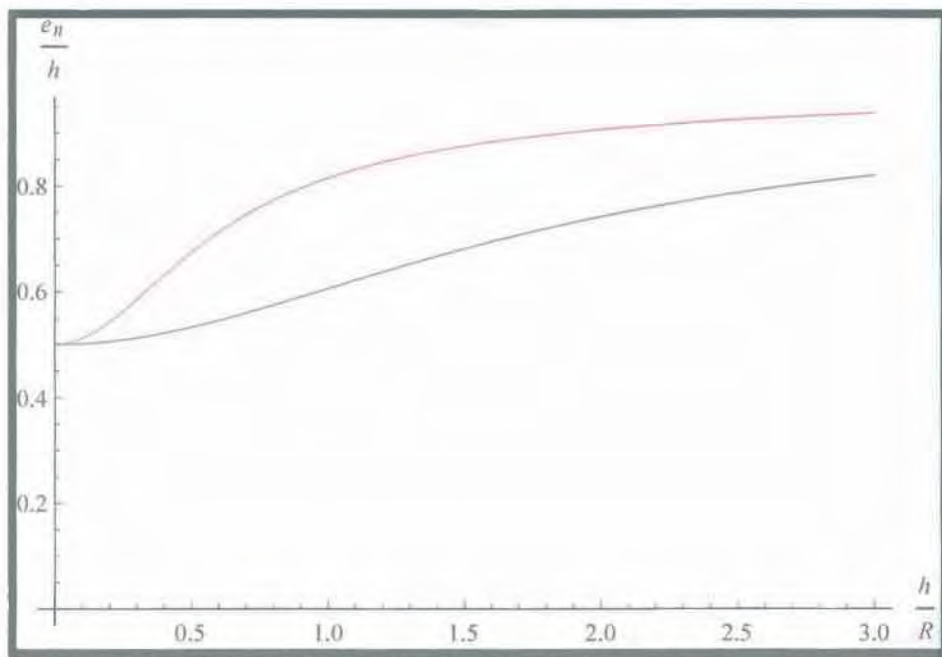


Με δεδομένο πως ενδιαφερόμαστε για τον 1^ο και το 2^ο όρο (n=1 & 2) και γωρίζοντας από τη θεωρία πως $\lambda_{11}R=1.841$ και $\lambda_{12}R=5.331$ έχουμε:

$$1^{\text{st}} \text{ mode } \frac{e_1}{h} = \frac{-1 + \operatorname{sech}\left(1.841 \frac{h}{R}\right) + 1.841 \frac{h}{R} \tanh\left(1.841 \frac{h}{R}\right)}{1.841 \frac{h}{R} \tanh\left(1.841 \frac{h}{R}\right)} \quad (5.5.1)$$

$$2^{\text{nd}} \text{ mode } \frac{e_2}{h} = \frac{-1 + \operatorname{sech}\left(5.331 \frac{h}{R}\right) + 5.331 \frac{h}{R} \tanh\left(5.331 \frac{h}{R}\right)}{5.331 \frac{h}{R} \tanh\left(5.331 \frac{h}{R}\right)} \quad (5.5.2)$$

Τα διαγράμματα των σχέσεων (5.5.1) και (5.5.2) παρουσιάζονται στην εικόνα 5.5.1 συναρτήσει του λόγου h/R, δηλαδή του ύψους του υγρού που περιέχεται στη δεξαμενή προς την ακτίνα της δεξαμενής.



Εικόνα 5.5.1. Κοινό διάγραμμα του σημείου εφαρμογής της επαγωγικής δύναμης για τον 1^ο και τον 2^ο όρο συναρτήσει του λόγου h/R

Αντίστοιχα τα ύψη που προκύπτουν από το πηλίκο της ωστικής ροπής και της αντίστοιχης δύναμης είναι

$$e_i = \frac{M_i}{F_i}$$

με αντικατάσταση των σχέσεων (5.3.4) και (5.2.6) προκύπτει

$$e_1 = \frac{\left\{ -\rho R \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi[-1 + \operatorname{sech}(\lambda_{1n} h) + (\lambda_{1n} h) \tanh(\lambda_{1n} h)]}{\lambda_{1n}^2} \gamma_n - \frac{1}{2} \rho R^2 h^2 \pi \right\} \ddot{x}}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} R) \frac{\pi \rho R \tanh(\lambda_{1n} h)}{\lambda_{1n}} \gamma_n - \rho R^2 H \pi \right] X}$$

Για τον 1^ο και τον 2^ο όρο (n=1 & 2) έχουμε:

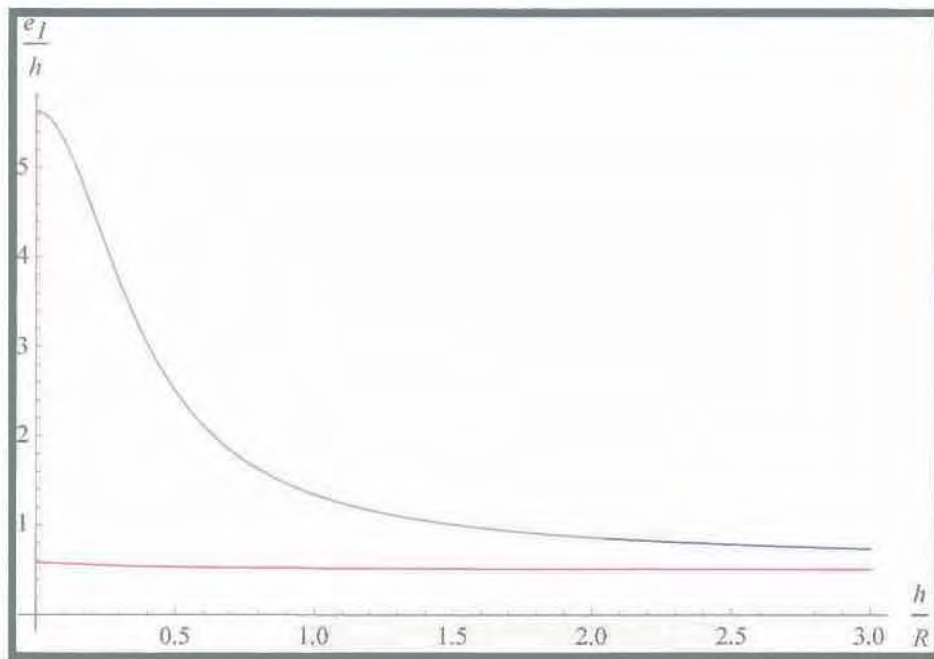
$$1^{\text{st}} \text{ mode } \frac{e_1}{h} = \frac{2 \left[-1 + \operatorname{sech} \left(1.841 \frac{h}{R} \right) + 1.841 \frac{h}{R} \tanh \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] \left(\frac{h}{R} \right)^2}{1.841(1.841^2 - 1)} - \frac{\left(\frac{h}{R} \right)^2}{2} \quad (5.5.3)$$

$$\frac{\left[1.841 \frac{h}{R} \tanh \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] \left(\frac{h}{R} \right)}{1.841(1.841^2 - 1)} - \left(\frac{h}{R} \right)^2$$

$$2^{\text{nd}} \text{ mode } \frac{e_2}{h} = \frac{2 \left[-1 + \operatorname{sech} \left(5.331 \frac{h}{R} \right) + 5.331 \frac{h}{R} \tanh \left(5.331 \frac{h}{R} \right) \right] \left(\frac{h}{R} \right)^2}{5.331(5.331^2 - 1)} - \frac{\left(\frac{h}{R} \right)^2}{2} \quad (5.5.4)$$

$$\frac{\left[5.331 \frac{h}{R} \tanh \left(5.331 \frac{h}{R} \right) \right] \left(\frac{h}{R} \right)}{5.331(5.331^2 - 1)} - \left(\frac{h}{R} \right)^2$$

Τα διαγράμματα των σχέσεων (5.5.3) και (5.5.4) παρουσιάζονται στην εικόνα 5.5.2 συναρτήσει του λόγου h/R.



Εικόνα 5.5.2. Κοινό διάγραμμα του σημείου εφαρμογής της ωστικής δύναμης για τον 1^ο και τον 2^ο όρο συναρτήσει του λόγου h/R

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ

6.1 Διατύπωση μη – γραμμικού προβλήματος

Οι συνθήκες που διέπουν το γραμμικό πρόβλημα όπως διατυπώθηκαν και στο κεφάλαιο 2 είναι η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi_{(1)} = 0 \quad (6.1.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1.2)$$

και η κινηματική και δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} \quad (6.1.3)$$

και

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0 \quad (6.1.4)$$

αντίστοιχα, όπου ο άξονας z είναι ο κάθετος άξονας στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού και $\eta(r, \theta, z)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Τέλος στα τοιχώματα της δεξαμενής ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = X(\tilde{\mathbf{e}}_x \cdot \tilde{\mathbf{n}})$$

όπου $X(t)$ η διέγερση του προβλήματος και $\tilde{\mathbf{n}}$ το κάθετο διάνυσμα στην εξεταζόμενη επιφάνεια.

Οι εξισώσεις που διέπουν το συνολικό πρόβλημα του κυματισμού είναι η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

ή ισοδύναμα για κυλινδρικές δεξαμενές

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1.5)$$

και οι συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού όπως διατυπώθηκαν και στο κεφάλαιο 2 από τις εξισώσεις (2.30) και (2.31)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \quad (6.1.6)$$

$$g\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (6.1.7)$$

Για τη μελέτη του μη γραμμικού προβλήματος θεωρούμε

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.1.5) όπου $\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$ έχουμε:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial z^2} = 0$$

όμως ο όρος

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(1)}}{\partial z^2} = 0$$

από τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος, συνθήκη (6.1.2).

Επομένως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial z^2} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\nabla^2 \Phi_{(2)} = 0$$

Αντίστοιχα αντικαθιστώντας στην (6.1.6) όπου

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial(\eta_{(1)} + \eta_{(2)})}{\partial r} \right] +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial(\eta_{(1)} + \eta_{(2)})}{\partial \theta} \right]$$

Από το γραμμικό πρόβλημα γνωρίζουμε

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} = 0$$

Επίσης οι όροι:

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r}, \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial r}, \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial r}$$

και

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r}, \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial r}, \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial r}$$

παραλείπονται καθώς είναι 3^{ης} και μεγαλύτερης τάξης. Επομένως η συνθήκη (6.1.6) καταλήγει στη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial \theta}$$

Τέλος αντικαθιστώντας στην (6.1.7) όπου

$$\Phi = \Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}$$

και

$$\eta = \eta_{(1)} + \eta_{(2)}$$

έχουμε

$$g(\eta_{(1)} + \eta_{(2)}) + \frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

Γνωρίζοντας από το γραμμικό πρόβλημα ότι

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

και παραλείποντας τους όρους 3^{ης} και μεγαλύτερης τάξης η συνθήκη (6.1.7) καταλήγει

στη μορφή

$$g\eta_{(2)} + \frac{\partial\Phi_{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

Στο $z=H$ ξέρουμε πως ισχύουν οι 2 παρακάτω συνθήκες:

$$\frac{\partial\Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial\eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial\theta} \quad (6.1.8)$$

και

$$g\eta_{(2)} + \frac{\partial\Phi_{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (6.1.9)$$

Παραγωγίζοντας τη (6.1.9) ως προς το χρόνο και εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{\partial\eta_{(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6.1.10)$$

Αντικαθιστώντας την (6.1.10) στην (6.1.8) καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{(2)}}{\partial z} = & -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi_{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial\theta} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_{(2)}}{\partial z} = & -\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + g \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial r} + g \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$g\eta_{(1)} + \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial t} = 0$$

δηλαδή

$$\eta_{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial t} \quad (6.1.12)$$

ή ισοδύναμα παραγωγίζοντας την (6.1.12) ως προς τη μεταβλητή r προκύπτει

$$\frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right) \quad (6.1.13)$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right) \quad (6.1.14)$$

Επίσης παραγωγίζοντας σχέση (6.1.12) ως προς θ έχουμε

$$\frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις (6.1.13) και (6.1.14) στην (6.1.11) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + g \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \left[-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Επίσης ισχύει η ιδιότητα:

$$2 \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 \quad (6.1.16)$$

και αντίστοιχα για τη χωρική μεταβλητή θ

$$2 \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \quad (6.1.17)$$

με συνέπεια η σχέση (6.1.15), εφαρμόζοντας τη παραπάνω ιδιότητα θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2$$

Συνεπώς η τελική εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6.1.18)$$

Από την ανάλυση του γραμμικού προβλήματος είχαμε θεωρήσει

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\lambda_{1n} r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \cos \theta q_n + X r \cos \theta$$

όπου

$$\psi_{1n}(r, \theta, z) = J_1(\lambda_{1n} r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \cos \theta$$

οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

Όπως και στο πρόβλημα με την ορθογωνική δεξαμενή θα εκφράσουμε τον όρο $r \cos \theta$ συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεων ψ_{1n} .

Συνεπώς

$$r \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_{1n} r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \cos \theta \quad (6.1.19)$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$t = \frac{r}{R}$$

η εξίσωση (6.1.18) γίνεται

$$R t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(\lambda_{1n} R t) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \quad (6.1.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (6.1.20) με τον όρο $t J_1(\lambda_{1m} R t)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[\theta, 1]$ έχουμε :

$$\int_0^1 R t^2 J_1(\lambda_{1m} R t) dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n t J_1(\lambda_{1n} R t) J_1(\lambda_{1m} R t) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} dt \quad (6.1.21)$$

Από την ορθογωνικότητα των συναρτήσεων Bessel ισχύει η ιδιότητα:

$$\int_0^1 t J_1(\lambda_{1n} R t) J_1(\lambda_{1m} R t) dt = \begin{cases} 0 & \text{για } m \neq n \\ \frac{1}{2(\lambda_{1n} R)^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) [(\lambda_{1n} R)^2 - 1] & \text{για } m = n \end{cases}$$

Επομένως για $m=n$ και χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων η εξίσωση (6.1.21) γίνεται:

$$\frac{J_1(\lambda_{1n} R)}{(\lambda_{1n} R)^2} = c_n \frac{\cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n} h)} \frac{1}{2(\lambda_{1n} R)^2} J_1^2(\lambda_{1n} R) [(\lambda_{1n} R)^2 - 1]$$

Εκτελώντας τις πράξεις και θέτοντας όπου $z=0$ βρίσκουμε τη τελική μορφή του συντελεστή c_n ο οποίος εκφράζεται από το τύπο

$$c_n = \frac{2}{J_1(\lambda_{1n} R) [(\lambda_{1n} R)^2 - 1]} \quad (6.1.22)$$

Συνεπώς η σχέση (6.1.19) λαμβάνει τη μορφή

$$r \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1(\lambda_{1n} R) [(\lambda_{1n} R)^2 - 1]} \psi_{1n}(r, \theta, z)$$

Έτσι η τελική μορφή της $\Phi_{(1)}$ γίνεται

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}(r, \theta, z) \dot{q}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1(\lambda_{1n} R) [(\lambda_{1n} R)^2 - 1]} \psi_{1n}(r, \theta, z) \dot{X}$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}(r, \theta, z) (\dot{q}_n + c_n \dot{X})$$

Τέλος θέτοντας $\dot{u}_n = (\dot{q}_n + c_n \dot{X})$ προκύπτει

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}(r, \theta, z) \dot{u}_n$$

Για την συνάρτηση $\Phi_{(2)}$ υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση που έχουμε είναι :

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6.1.23)$$

6.2 Ανάλυση με ένα γραμμικό όρο

Χρησιμοποιώντας μόνο το πρώτο όρο ($n=1$) από το γραμμικό πρόβλημα η $\Phi_{(1)}$ γίνεται

$$\Phi_{(1)} = \psi_{11}(r, \theta, z)\dot{u}_1$$

Επομένως η εξίσωση (6.1.22) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)\dot{u}_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)\dot{u}_1}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)\dot{u}_1}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6.2.1)$$

Σύμφωνα με τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος οι ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται από τη σχέση

$$\psi_{11}(r, \theta, z) = J_1(\lambda_{11}r) \frac{\cosh[\lambda_{11}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{11}h)} \cos\theta$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές r, θ, z στη θέση $z=0$ έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)}{\partial r} \Big|_{z=0} = \frac{\lambda_{11}}{2} R \{ [J_0(\lambda_{11}r) - J_2(\lambda_{11}r)] \cos\theta \} \quad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)}{\partial \theta} \Big|_{z=0} = -J_1(\lambda_{11}r) R \sin\theta \quad (6.2.3)$$

$$\frac{\partial \psi_{11}(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \lambda_{11} R J_1(\lambda_{11}r) \tanh(\lambda_{11}h) \cos\theta \quad (6.2.4)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.2.1) τα αποτελέσματα των παραγωγίσεων λαμβάνουμε τη τελική μορφή της εξίσωσης η οποία είναι:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\lambda_{11}}{2} R \{ [J_0(\lambda_{11}r) - J_2(\lambda_{11}r)] \cos\theta \} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (-J_1(\lambda_{11}r) R \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} (R \lambda_{11} J_1(\lambda_{11}r) \tanh(\lambda_{11}h) \cos\theta)^2 \right] (\dot{u}_1)^2$$

Ονομάζοντας το 2^ο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης $I(r, \theta, z=0)$ παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = I(r, \theta) \quad (6.2.5)$$

Θεωρούμε για τη συνάρτηση Φ_2 την ακόλουθη μορφή

$$\Phi_{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{R \cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \cos m\theta$$

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση στην εξίσωση (6.2.5) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \ddot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{R \cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \cos m\theta + \\ & + g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{mn} \dot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{R \sinh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \cos m\theta = I(r, \theta) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα για τη θέση $z=0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \ddot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) R \cos m\theta + g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{mn} \dot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \tanh(\lambda_{mn} h) R \cos m\theta = I(r, \theta)$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον όρο $\cos(\kappa\theta)$ και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε από το κανόνα της ορθογωνικότητας:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(\kappa\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{για } \kappa \neq m \\ \frac{2\pi}{2} = \pi & \text{για } \kappa = m > 0 \text{ και } 2\pi \text{ για } \kappa = m = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση μηδενίζεται για κάθε $\kappa \neq m$, με αποτέλεσμα να γίνεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) R \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta + g \sum_{n=1}^{\infty} R \lambda_{mn} \dot{\alpha}_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \tanh(\lambda_{mn} h) \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta \\ & = \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) I(r, \theta) d\theta \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}(m\theta)I(r, \theta)d\theta$$

αντικαθιστώντας τον πλήρη τύπο της συνάρτησης $I(r, \theta)$ παίρνει τη μορφή που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}(m\theta)I(r, \theta)d\theta = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{aligned} & [F1(r) + F2(r)] \int_0^{2\pi} \text{Cos}^2\theta \text{Cos}(m\theta)d\theta + \\ & + F3(r) \int_0^{2\pi} \text{Sin}^2\theta \text{Cos}(m\theta)d\theta \end{aligned} \right\} (\dot{u}_1)^2$$

Οι συναρτήσεις $F1(r), F2(r), F3(r)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F1(r) = \frac{\lambda_{11}^2 R^2}{4} [J_0(\lambda_{11}r) - J_2(\lambda_{11}r)]^2 \quad (6.2.6)$$

$$F2(r) = \frac{\lambda_{11}^2 R^2}{2} J_1^2(\lambda_{11}r) \text{Tanh}^2(\lambda_{11}h) \quad (6.2.7)$$

$$F3(r) = \frac{R^2}{r^2} [J_1^2(\lambda_{11}r)] \quad (6.2.8)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα σύμφωνα με τους κανόνες ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λαμβάνουν τις τιμές:

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}^2\theta \text{Cos}(m\theta)d\theta = \begin{cases} \pi & \text{για } m = 0 \\ 0 & \text{για κάθε } m \neq 0, 2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{για } m = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2\theta \text{Cos}(m\theta)d\theta = \begin{cases} \pi & \text{για } m = 0 \\ 0 & \text{για κάθε } m \neq 0, 2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{για } m = 2 \end{cases}$$

Εφόσον η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = I(r, \theta)$$

είναι γραμμική η λύση που αναζητούμε προκύπτει από το γραμμικό άθροισμα των λύσεων των παραπάνω 2 εξισώσεων που προκύπτουν για $m=0$ και $m=2$.

Για $m=0$ η εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_{0n} R_{J_{0n}}(\lambda_{0n}r) 2\pi + g \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n} \dot{\alpha}_{0n} R_{J_0}(\lambda_{0n}r) \text{Tanh}(\lambda_{0n}h) 2\pi = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \{ [F1(r) + F2(r)]\pi + F3(r)\pi \} (\dot{u}_1)^2 \end{aligned}$$

Ενώ για $m=2$ η εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\alpha}_{2n} R_{J_{2n}}(\lambda_{2n}r) \pi + g \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \dot{\alpha}_{2n} R_{J_2}(\lambda_{2n}r) \text{Tanh}(\lambda_{2n}h) \pi = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ [F1(r) + F2(r)] \frac{\pi}{2} - F3(r) \frac{\pi}{2} \right\} (\dot{u}_1)^2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τις 2 παραπάνω εξισώσεις μία φορά ως προς το χρόνο και με δεδομένο από το γραμμικό πρόβλημα πως για τις ιδιοσυχνότητες του προβλήματος ισχύει η σχέση

$$\omega_{mn}^2 = g\lambda_{mn} \text{Tanh}(\lambda_{mn}h)$$

οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

- $m=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_{0n} + \omega_{0n}^2 \alpha_{0n}) 2R_{J_0}(\lambda_{0n}r) = -[F1(r) + F2(r) + F3(r)] (\dot{u}_1)^2 \quad (6.2.9)$$

- $m=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_{2n} + \omega_{2n}^2 \alpha_{2n}) R_{J_2}(\lambda_{2n}r) = -\frac{1}{2} [F1(r) + F2(r) - F3(r)] (\dot{u}_1)^2 \quad (6.2.10)$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε χρήση της ορθογωνικότητας των συναρτήσεων Bessel

κατά συνέπεια έχουμε:

$$\int_0^R r J_0(\lambda_{0m} r) J_0(\lambda_{0n} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{για } m \neq n \\ \frac{R^2}{2} J_0^2(\lambda_{0n} R) & \text{για } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^R r J_2(\lambda_{2m} r) J_2(\lambda_{2n} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{για } m \neq n \\ \frac{\lambda_{2n}^2 R^2 - 4}{2\lambda_{2n}^2} J_2^2(\lambda_{2n} R) & \text{για } m = n \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (6.2.9) και (6.2.10) με τους όρους

$$r J_0(\lambda_{0m} r)$$

και

$$r J_2(\lambda_{2m} r)$$

αντίστοιχα και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, R]$ έχουμε

Η εξίσωση για $m=0$ λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_{0n} + \omega_{0n}^2 \alpha_{0n}) 2R \int_0^R r J_0(\lambda_{0m} r) J_0(\lambda_{0n} r) dr = \\ = - \int_0^R r J_0(\lambda_{0m} r) [F1(r) + F2(r) + F3(r)] dr (\dot{u}_1)^2 \end{aligned}$$

Ενώ η εξίσωση για $m=2$ γίνεται

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_{2n} + \omega_{2n}^2 \alpha_{2n}) R \int_0^R r J_2(\lambda_{2m} r) J_2(\lambda_{2n} r) dr = \\ = - \int_0^R r J_2(\lambda_{2m} r) \frac{1}{2} [F1(r) + F2(r) - F3(r)] dr (\dot{u}_1)^2 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τους κανόνες της ορθογωνικότητας οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουν τη τελική τους μορφή και για $m=n$ και γίνονται:

Για $m=0$

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha}_{0n} + \omega_{0n}^2 \alpha_{0n}) R^3 J_0^2(\lambda_{0n} R) \\ & = - \int_0^{\bar{R}} r J_0(\lambda_{0n} r) [F1(r) + F2(r) + F3(r)] dr (\dot{u}_1)^2 \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Για $m=2$

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha}_{2n} + \omega_{2n}^2 \alpha_{2n}) R \frac{\lambda_{2n}^2 R^2 - 4}{2 \lambda_{2n}^2} J_2^2(\lambda_{2n} R) \\ & = - \int_0^R r J_2(\lambda_{2n} r) \frac{1}{2} [F1(r) + F2(r) - F3(r)] dr (\dot{u}_1)^2 \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Όπου υπενθυμίζουμε πως οι συναρτήσεις $F1(r)$, $F2(r)$, $F3(r)$ έχουν τη μορφή

$$F1(r) = \frac{\lambda_{11}^2 R^2}{4} [J_0(\lambda_{11} r) - J_2(\lambda_{11} r)]^2$$

$$F2(r) = \frac{\lambda_{11}^2 R^2}{2} J_1^2(\lambda_{11} r) \text{Tanh}^2(\lambda_{11} h)$$

$$F3(r) = \frac{R^2}{r^2} [J_1^2(\lambda_{11} r)]$$

Όσον αφορά τις τιμές της μεταβλητής λ_{mn} , γνωρίζουμε πως προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial J_m(\lambda_{mn} r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

όπου J είναι η Bessel πρώτης τάξης βαθμού m . Η μεταβλητή n δηλώνει τη n (νιοστή) ρίζα της εξίσωσης. Για το πρόβλημα μας μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές για $m=0,1,2$.

Σύμφωνα με το βιβλίο "Handbook of Mathematical Functions Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun" για $m=0, 1, 2$ και για τις πρώτες τιμές των ακέραιων n οι αντίστοιχες τιμές της $\lambda_{mn} R$ είναι:

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6
0	3.831	7.016	10.173	13.323	16.471	19,616
1	1.841	5.331	8.536	11.706	14.864	18.016
2	3.054	6.706	9.969	13.170	16.348	19.513

Με δεδομένες τις παραπάνω τιμές για τη μεταβλητή λ_{mn} θα εξετάσουμε κάθε μία από τις εξισώσεις για $m=0$ και $m=2$ για $n=1,2,3,4,5,6$. Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε μόνο για τη περίπτωση $m=0$ και $n=1$. Για τους υπόλοιπους όρους πραγματοποιήθηκε ακριβώς η ίδια διαδικασία που παρουσιάζεται παρακάτω.

Έτσι για $m=0$ και $n=1$ έχουμε από την εξίσωση (6.2.11)

$$(\ddot{\alpha}_{01} + \omega_{01}^2 \alpha_{01}) R^3 J_0^2(\lambda_{01} R) = - \left[\int_0^R r J_0(\lambda_{01} r) F1(r) dr + \int_0^R r J_0(\lambda_{01} r) F3(r) dr + \int_0^R r J_0(\lambda_{01} r) F2(r) dr \right] (\dot{u}_1)^2$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα τα υπολογίζουμε κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $r = Rt$ επομένως τα όρια του ολοκληρώματος μετατρέπονται από $[0, R]$ σε $[0, 1]$. Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται

$$(\ddot{\alpha}_{01} + \omega_{01}^2 \alpha_{01}) R^3 J_0^2(\lambda_{01} R) = - \left[\int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F1(Rt) dt + \int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F3(Rt) dt + \int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F2(Rt) dt \right] (\dot{u}_1)^2$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica καθώς περιλαμβάνουν γινόμενα συναρτήσεων Bessel τα οποία δε μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά.

Συνεπώς, με δεδομένο ότι $\lambda_{01}R = 3.831$ και $\lambda_{11}R = 1.841$ έχουμε τα εξής αποτελέσματα από τις ολοκληρώσεις

$$\int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F1(Rt) dt = \frac{\lambda_{11}^2}{4} R^2 \int_0^1 t J_0(\lambda_{01} R t) [J_0(\lambda_{11} R t) - J_2(\lambda_{11} R t)]^2 dt = 0.05$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} \int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F3(Rt) dt &= \frac{\lambda_{11}^2}{2} R^2 \text{Tanh}^2(\lambda_{11} h) \int_0^1 t J_0(\lambda_{01} R t) J_1^2(\lambda_{11} R t) dt \\ &= -0.03 \text{Tanh}^2(\lambda_{11} h) \end{aligned}$$

Και τέλος

$$\int_0^1 (R^2 t) J_0(\lambda_{01} R t) F2(Rt) dt = \int_0^1 \frac{1}{t} J_0(\lambda_{01} R t) J_1^2(\lambda_{11} R t) dt = 0.028$$

Επίσης ισχύει

$$J_0^2(\lambda_{01} R) = J_0^2(3.831) = 0.162$$

Συνεπώς η τελική εξίσωση για $m=0$ και $n=1$ είναι:

$$\ddot{\alpha}_{01} + \omega_{01}^2 \alpha_{01} = -\frac{1}{R} \left[0.48 - 0.206 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Με την ίδια μεθοδολογία που εφαρμόσαμε παραπάνω για $m=0$ και $n=1$, θα εφαρμόσουμε για τις υπόλοιπες τιμές του n . Έτσι έχουμε τις τελικές εξισώσεις

Για $m=0$ & $n=2$

$$\ddot{\alpha}_{02} + \omega_{02}^2 \alpha_{02} = -\frac{1}{R} \left[-0.054 + 0.0045 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=3$

$$\ddot{\alpha}_{03} + \omega_{03}^2 \alpha_{03} = -\frac{1}{R} \left[0.028 - 0.00089 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=4$

$$\ddot{\alpha}_{04} + \omega_{04}^2 \alpha_{04} = -\frac{1}{R} \left[-0.018 + 0.00023 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=5$

$$\ddot{\alpha}_{05} + \omega_{05}^2 \alpha_{05} = -\frac{1}{R} \left[(0.013 - 0.00006 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right)) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=6$

$$\ddot{\alpha}_{06} + \omega_{06}^2 \alpha_{06} = -\frac{1}{R} \left[(-0.00995 + 0.00012 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right)) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογίσουμε και τις εξισώσεις για $m=2$ και $n=1,2,3,4,5,6$. Επομένως σε αντιστοιχία με τη περίπτωση όπου $m=0$ θα έχουμε από την εξίσωση (6.2.12)

$$\begin{aligned} & (\ddot{\alpha}_{2n} + \omega_{2n}^2 \alpha_{2n}) R \frac{\lambda_{2n}^2 R^2 - 4}{2\lambda_{2n}^2} J_2^2(\lambda_{2n} R) = \\ & = -\frac{1}{2} \left[\int_0^1 (R^2 t) J_2(\lambda_{2n} R t) F1(Rt) dt + \int_0^1 (R^2 t) J_2(\lambda_{2n} R t) F3(Rt) dt - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 (R^2 t) J_2(\lambda_{2n} R t) F2(Rt) dt \right] (\dot{u}_1)^2 \end{aligned}$$

Επομένως για διάφορες τιμές του n η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει τη τελική της μορφή, συνεπώς

Για $m=2$ & $n=1$

$$\ddot{\alpha}_{21} + \omega_{21}^2 \alpha_{21} = -\frac{1}{R} \left[-0.447 + 0.594 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=2$

$$\ddot{\alpha}_{22} + \omega_{22}^2 \alpha_{22} = -\frac{1}{R} \left[-0.068 + 0.006 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=3$

$$\ddot{\alpha}_{23} + \omega_{23}^2 \alpha_{23} = -\frac{1}{R} \left[0.031 - 0.001 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=4$

$$\alpha_{24} + \omega_{24}^2 \alpha_{24} = -\frac{1}{R} \left[-0.019 + 0.00046 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=5$

$$\alpha_{25} + \omega_{25}^2 \alpha_{25} = -\frac{1}{R} \left[0.0134 - 0.00008 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=6$

$$\alpha_{26} + \omega_{26}^2 \alpha_{26} = -\frac{1}{R} \left[-0.01 + 0.00007 \text{Tanh}^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Κεφάλαιο 7 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΔΕΞΑΜΕΝΩΝ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΕΙΣΜΟΥΣ

7.1 Μεθοδολογία επίλυσης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται αποτελέσματα τόσο για το γραμμικό όσο και για το μη-γραμμικό πρόβλημα σε ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές, στις οποίες επιβάλλονται διεγέρσεις από πραγματικούς σεισμούς που έχουν συμβεί στο παρελθόν. Το αντικείμενο της ανάλυσης είναι η εύρεση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της δεξαμενής για διαφορετικούς λόγους διαστάσεων H/L (και αντίστοιχα H/D) και η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Ειδικότερα η ανάλυση εστιάζεται

1. Στην επιρροή που έχει η χρησιμοποίηση παραπάνω όρων από το γραμμικό πρόβλημα στα αποτελέσματα της μέγιστης ανύψωσης για το 1^{ης} τάξης πρόβλημα.
2. Στη διαφορά που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της μέγιστης ανύψωσης για διάφορους λόγους διαστάσεων H/L και H/D για το γραμμικό πρόβλημα.
3. Στην επιρροή της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτει από την επίλυση του μη-γραμμικού προβλήματος.

Οι σεισμοί τους οποίους μελετήσαμε και θα παρουσιάσουμε παρακάτω δόθηκαν με τη μορφή επιταχυνσιογραφημάτων από επιτόπου μετρήσεις και αναλύθηκαν αρχικά από το πρόγραμμα SeismoSignal το οποίο είναι διαθέσιμο από την ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.seismosoft.com/en/HomePage.aspx>. Με το συγκεκριμένο πρόγραμμα δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη δίνοντας ως δεδομένο το ιστορικό της επιτάχυνσης του σεισμού (επιταχυνσιογράφημα) να λάβει ως αποτέλεσμα το ιστορικό της επιτάχυνσης της ταχύτητας αλλά και της μετατόπισης και με κατάλληλη επεξεργασία με σχεδόν μηδενικό σφάλμα. Επιπλέον μέσω του SeismoSignal μπορούμε να έχουμε τα φάσματα απόκρισης του κάθε σεισμού, και διάφορα άλλα στοιχεία για τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε σεισμού.

Εκτός από τη χρησιμοποίηση του υπολογιστικού πακέτου SeismoSignal, αναπτύχθηκε κατάλληλος αλγόριθμος στο Microsoft Excel. Στον εν λόγω αλγόριθμο εφαρμόσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 9, και παρήχθησαν όλα τα διαγράμματα με τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.2.

Για να έχουμε ρεαλιστικά αποτελέσματα, χρησιμοποιείται κατάλληλη απόσβεση, μέσω του λόγου απόσβεσης ξ . Για δεξαμενές ύδατος ή υδρογονανθράκων η τιμή του για την επαγωγική κίνηση του ρευστού κυμαίνεται περίπου στο 0.5% ή 0.005.

Στις ορθογωνικές δεξαμενές για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας **στο γραμμικό πρόβλημα** γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση (4.1.2)

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} \quad \text{στο } z = H$$

Με δεδομένο ότι το δυναμικό της ταχύτητας εκφράστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια από το τύπο (3.3.1)

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \dot{q}_n(t) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{L}z\right)}{\frac{n\pi}{L} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} + \dot{X}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή z προκύπτει

$$\frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \dot{q}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{(1)} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Με δεδομένο πως έχουμε υπολογίσει τις συναρτήσεις $q_n(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t_n (η διαδικασία εύρεσης των $q_n(t)$ πραγματοποιείται με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών και παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα του κεφαλαίου 9) βρίσκουμε την ολική μετατόπιση μέσω του τύπου

$$u_n = q_n + c_n X \tag{7.1.1}$$

η οποία είναι απαραίτητη **για τη μελέτη του μη-γραμμικού φαινομένου**. Να σημειωθεί ότι X ορίζεται η μετατόπιση που έχει υπολογιστεί με τη βοήθεια του SeismoSignal από το εκάστοτε επιταχυνσιογράφημα.

Τέλος πρέπει να τονισθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις για τις συναρτήσεις $q(t)$ και τα $u(t)$ ισχύουν για τους όρους $n=1,\dots,N$ όπου $N=1,3,5,7,9,11$ (για ορθογωνικές δεξαμενές) και $N=1,2,3,4,5,6$ (για κυλινδρικές δεξαμενές) με αποτέλεσμα όταν εφαρμόζουμε όλα τα παραπάνω για τον όρο $N=1$ βρίσκουμε αντίστοιχα τα q_1, u_1 , για $N=3$ τα q_3, u_3 και αντίστοιχα για τα υπόλοιπα N τις αντίστοιχες σχετικές και απόλυτες μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις.

Για το **μη-γραμμικό πρόβλημα**, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τη χρησιμοποίηση ενός γραμμικού όρου ($n=1$) και δύο γραμμικών όρων ($n=1&3$). Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.2, για *ορθογωνικές δεξαμενές με ένα γραμμικό όρο* ($n=1$) και τη χρησιμοποίηση του όρου απόσβεσης ξ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha_2(t) + 2\xi\omega_2\dot{\alpha}_2(t) + \omega_2^2\alpha_2(t) = \frac{\left[2\coth^2\left(\frac{\pi}{L}H\right) - 1\right] 2\pi\tanh\left(\frac{2\pi}{L}H\right)}{4L} (\dot{u}_1)^2$$

όπου οι τιμές της \dot{u}_1 είναι γνωστές για κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση (7.1.1).

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στη τελευταία εξίσωση βρίσκουμε για κάθε χρονική στιγμή τις τιμές των $\alpha_2(t)$, $\dot{\alpha}_2(t)$ και $\ddot{\alpha}_2(t)$.

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας δύο γραμμικούς όρους ($n=1$ & 3) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις (προσθέτοντας τον όρο της απόσβεσης)

Για $n=2$

$$\ddot{\alpha}_2(t) + 2\xi\omega_2\dot{\alpha}_2(t) + \omega_2^2\alpha_2(t) = -f_{(11)2}(\dot{u}_1)^2 - f_{(13)2}(\dot{u}_1)(\dot{u}_3)$$

όπου οι συντελεστές $f_{(11)2}$ και $f_{(13)2}$ βρίσκονται από τους τύπους (4.4.4) και (4.4.5) αντίστοιχα.

Για $n=4$

$$\ddot{\alpha}_4(t) + 2\xi\omega_4\dot{\alpha}_4(t) + \omega_4^2\alpha_4(t) = -f_{(13)4}(\dot{u}_1)(\dot{u}_3)$$

όπου ο συντελεστής $f_{(13)4}$ βρίσκεται από το τύπο (4.4.8)

Για $n=6$

$$\ddot{\alpha}_6(t) + 2\xi\omega_6\dot{\alpha}_6(t) + \omega_6^2\alpha_6(t) = -f_{(33)6}(\dot{u}_3)^2$$

όπου ο συντελεστής $f_{(13)6}$ βρίσκεται από το τύπο (4.4.12)

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στις παραπάνω εξισώσεις όπως αναφέραμε και παραπάνω βρίσκουμε για κάθε χρονική στιγμή τις τιμές των συναρτήσεων $\alpha_2(t)$, $\dot{\alpha}_2(t)$, $\ddot{\alpha}_2(t)$, $\alpha_4(t)$, $\dot{\alpha}_4(t)$, $\ddot{\alpha}_4(t)$ και $\alpha_6(t)$, $\dot{\alpha}_6(t)$, $\ddot{\alpha}_6(t)$ που απαιτούνται για την εύρεση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για το πρόβλημα 2^{ης} τάξης.

Για τις *κυλινδρικές δεξαμενές στο γραμμικό πρόβλημα* ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις που αναφέραμε και στις ορθογωνικές δεξαμενές. Ισχύει δηλαδή

$$\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\eta_{(1)}}{\partial t}$$

στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, ενώ το δυναμικό τη ταχύτητας $\Phi_{(1)}$ εκφράζεται από τη σχέση

$$\Phi_{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_1(\lambda_{1n}r) \frac{R \cosh[\lambda_{1n}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \cos\theta q_n + Xr \cos\theta$$

Επομένως η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας για το γραμμικό πρόβλημα δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$\eta_{(1)} = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \lambda_{1n} R J_1(\lambda_{1n}r) \tanh(\lambda_{1n}h) \cos\theta q_n$$

Για το μη-γραμμικό πρόβλημα, στις κυλινδρικές δεξαμενές εξετάστηκε μόνο η περίπτωση της χρησιμοποίησης ενός γραμμικού όρου ($n=1$). Από την ανάλυση που περιγράφεται αναλυτικά στα κεφάλαια 6.1 και 6.2 προέκυψαν οι ακόλουθες εξισώσεις (προσθέτοντας τον όρο της απόσβεσης)

Για $m=0$ έχουμε

Για $m=0$ & $n=1$

$$\ddot{\alpha}_{01} + 2\xi\omega_{01}\dot{\alpha}_{01} + \omega_{01}^2\alpha_{01} = -\frac{1}{R} \left[0.48 - 0.206 \tanh^2 \left(1.841 \frac{h\sqrt{1}}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=2$

$$\ddot{\alpha}_{02} + 2\xi\omega_{02}\dot{\alpha}_{02} + \omega_{02}^2\alpha_{02} = -\frac{1}{R} \left[-0.054 + 0.0045 \tanh^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=3$

$$\ddot{\alpha}_{03} + 2\xi\omega_{03}\dot{\alpha}_{03} + \omega_{03}^2\alpha_{03} = -\frac{1}{R} \left[0.028 - 0.00089 \tanh^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=4$

$$\ddot{\alpha}_{04} + 2\xi\omega_{04}\dot{\alpha}_{04} + \omega_{04}^2\alpha_{04} = -\frac{1}{R} \left[-0.018 + 0.00023 \tanh^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=5$

$$\ddot{\alpha}_{05} + 2\xi\omega_{05}\dot{\alpha}_{05} + \omega_{05}^2\alpha_{05} = -\frac{1}{R} \left[0.013 - 0.00006 \tanh^2 \left(1.841 \frac{h}{R} \right) \right] (\dot{u}_1)^2$$

Για $m=0$ & $n=6$

$$\ddot{\alpha}_{06} + 2\xi\omega_{06}\dot{\alpha}_{06} + \omega_{06}^2\alpha_{06} = -\frac{1}{R}\left[-0.00995 + 0.00012\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Και αντίστοιχα για $m=2$

Για $m=2$ & $n=1$

$$\ddot{\alpha}_{21} + 2\xi\omega_{21}\dot{\alpha}_{21} + \omega_{21}^2\alpha_{21} = -\frac{1}{R}\left[-0.447 + 0.594\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=2$

$$\ddot{\alpha}_{22} + 2\xi\omega_{22}\dot{\alpha}_{22} + \omega_{22}^2\alpha_{22} = -\frac{1}{R}\left[-0.068 + 0.006\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=3$

$$\ddot{\alpha}_{23} + 2\xi\omega_{23}\dot{\alpha}_{23} + \omega_{23}^2\alpha_{23} = -\frac{1}{R}\left[0.031 - 0.001\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=4$

$$\ddot{\alpha}_{24} + 2\xi\omega_{24}\dot{\alpha}_{24} + \omega_{24}^2\alpha_{24} = -\frac{1}{R}\left[-0.019 + 0.00046\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=5$

$$\ddot{\alpha}_{25} + 2\xi\omega_{25}\dot{\alpha}_{25} + \omega_{25}^2\alpha_{25} = -\frac{1}{R}\left[0.0134 - 0.00008\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Για $m=2$ & $n=6$

$$\ddot{\alpha}_{26} + 2\xi\omega_{26}\dot{\alpha}_{26} + \omega_{26}^2\alpha_{26} = -\frac{1}{R}\left[-0.01 + 0.00007\text{Tanh}^2\left(1.841\frac{h}{R}\right)\right](\dot{u}_1)^2$$

Επιλύοντας τις παραπάνω εξισώσεις με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών μέσω αλγορίθμου πεπερασμένων διαφορών στο Microsoft Excel προκύπτουν οι τιμές των συναρτήσεων $\alpha(t)$ για κάθε χρονική στιγμή.

Η λεπτομερής διαδικασία για το πώς προέκυψαν οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 6.2.

Για την εύρεση της μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)}$ για τις ορθογωνικές δεξαμενές γίνεται χρήση της εξίσωσης 4.1.8.

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial x}$$

και αντίστοιχα για τις κυλινδρικές δεξαμενές της εξίσωσης 6.1.8

$$\frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial \theta}$$

οι οποίες με διαδοχικές πράξεις καταλήγουν στην παρακάτω μορφή για ορθογωνικές δεξαμενές

$$\eta_{(2)} = \int \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} dt + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial x} \right)^2$$

και

$$\eta_{(2)} = \int \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial z} dt + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2gr^2} \left(\frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial r} \right)^2$$

για κυλινδρικές δεξαμενές αντίστοιχα.

Να σημειωθεί πως οι συναρτήσεις του δυναμικού της ταχύτητας 1^{ης} και 2^{ης} τάξης έχουν διατυπωθεί αναλυτικά σε προηγούμενα κεφάλαια και για τους δύο τύπους δεξαμενών.

7.2 Αποτελέσματα για ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές

7.2.1 Σεισμός Kocaeli, Τουρκία 1999

Ο πρώτος σεισμός που εξετάστηκε ήταν αυτός που έγινε στη περιοχή *Kocaeli της Τουρκίας στις 17 Αυγούστου 1999 μεγέθους 7.8 ρίχτερ*. Ο σεισμός είχε ως αποτέλεσμα 50.000 τραυματισμούς και 17.118 θανάτους ενώ οι υλικές ζημιές ήταν της τάξης των 20 δισεκατομμυρίων δολλαρίων. Για περισσότερες πληροφορίες για το συγκεκριμένο σεισμό θα βρείτε στη διεύθυνση http://en.wikipedia.org/wiki/Great_Hanshin_earthquake.

Στην Εικόνα 7.2.1.1 παρουσιάζεται το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού και στην εικόνα 7.2.2.2 το φάσμα απόκρισης της ψευδοεπιτάχυνσης συναρτήσει της περιόδου T.

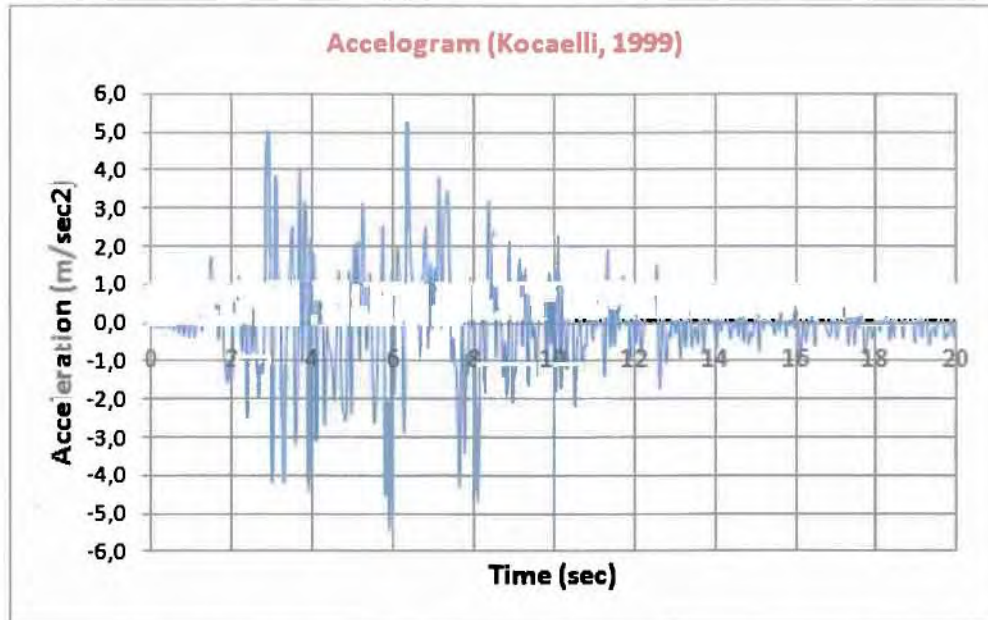
Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας με γραμμική ανάλυση

Στις εικόνες 7.2.1.3 , 7.2.1.4 και 7.2.1.5 παρουσιάζεται η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ συναρτήσει του χρόνου για ορθογωνικές δεξαμενές διαφορετικών διαστάσεων, δηλαδή για διάφορους λόγους H/L όπως υπολογίζεται από το γραμμικό πρόβλημα του κυματισμού. Συγκεκριμένα διατηρώντας σταθερό το ύψος του ρευστού στο εσωτερικό της δεξαμενής (H=15m) και μεταβάλλοντας το μήκος της δεξαμενής (L=30m – Εικ. 7.2.1.3) , (L=20m – Εικ. 7.2.1.4) , (L=10m – Εικ. 7.2.1.5) συγκρίνουμε τη μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Επίσης στο συγκεντρωτικό πίνακα 7.2.1.1 συγκρίνουμε τη μέγιστη ανύψωση για διάφορες τιμές του μήκους L της δεξαμενής. Τέλος στο διάγραμμα 7.2.1.6 παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση συναρτήσει του λόγου H/L.

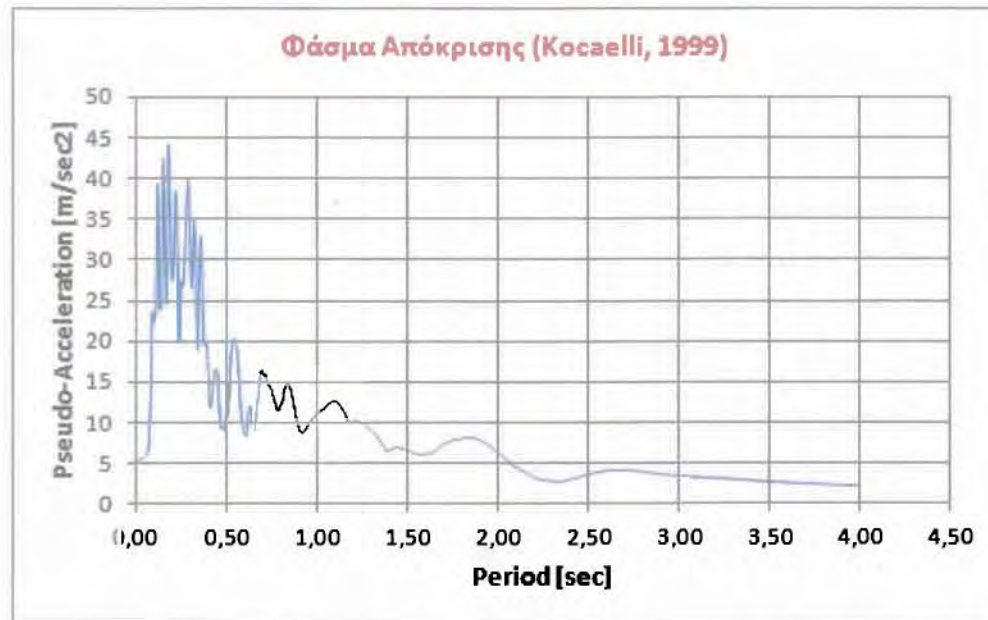
Αντίστοιχα για τις κυλινδρικές δεξαμενές γίνεται παρόμοια παρουσίαση αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα διατηρώντας σταθερό το ύψος του ρευστού στο εσωτερικό της δεξαμενής (H=15m) και μεταβάλλοντας τη διάμετρο της δεξαμενής (D=30m – Εικ. 7.2.1.7) , (D=20m – Εικ. 7.2.1.8) , (D=10m – Εικ. 7.2.1.9) συγκρίνουμε τη μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Αντίστοιχα με τη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών στο πίνακα 7.2.1.2 συγκρίνουμε τη μέγιστη ανύψωση για διάφορες τιμές της διαμέτρου D από 10m μέχρι 30m. Τέλος στο διάγραμμα 7.2.1.10 παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση συναρτήσει του λόγου H/D.

Τέλος για το γραμμικό πρόβλημα ενδιαφέρον παρουσιάζει το ζήτημα για πόσους όρους της επαγωγικής λύσης $n=1, \dots, N$ έχουμε ακριβή αποτελέσματα. Σε κάθε σεισμό που θα εξεταστεί θα θεωρήσουμε σταθερό το λόγο H/L (και H/D αντίστοιχα) και θα δούμε τη

διαφορά της ανύψωσης με τη χρήση ενός μόνο γραμμικού όρου ($N=1$), και με τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων και στους 2 τύπους δεξαμενών.

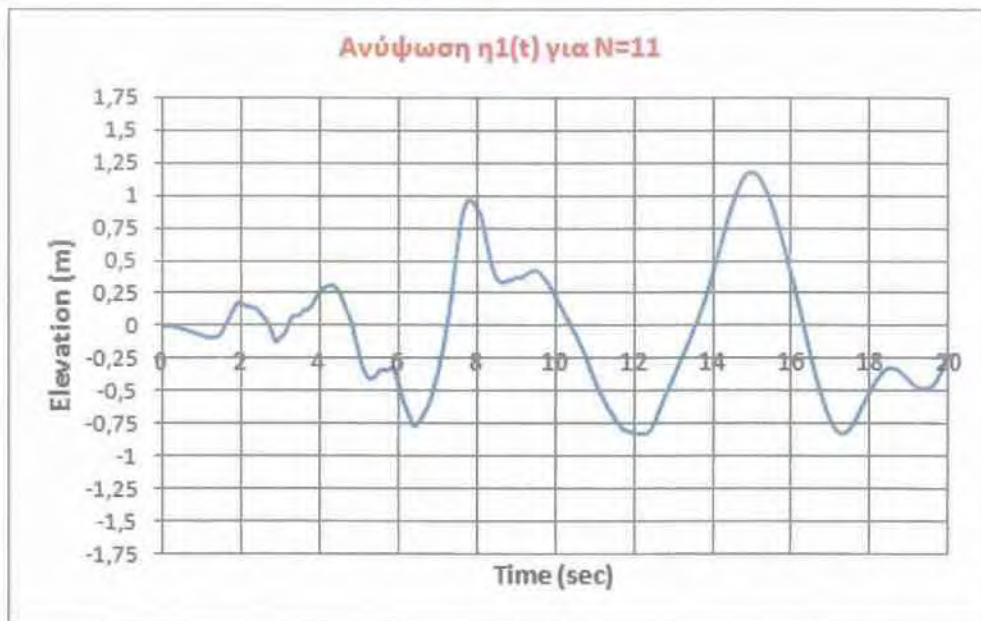


Εικόνα 7.2.1.1 Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Kocaeli στη περιοχή Sakarya στις 17 Αυγούστου 1999

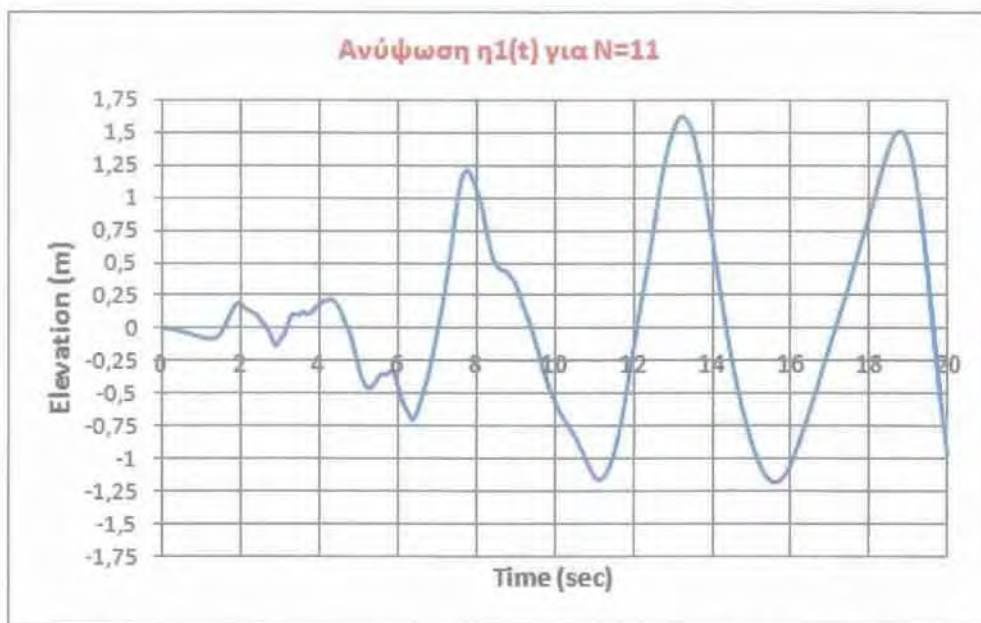


Εικόνα 7.2.1.2. Φάσμα απόκρισης ψευδοεπιτάχυνσης συναρτήσει της ιδιοπεριόδου T του σεισμού Kocaeli, Τουρκία 1999

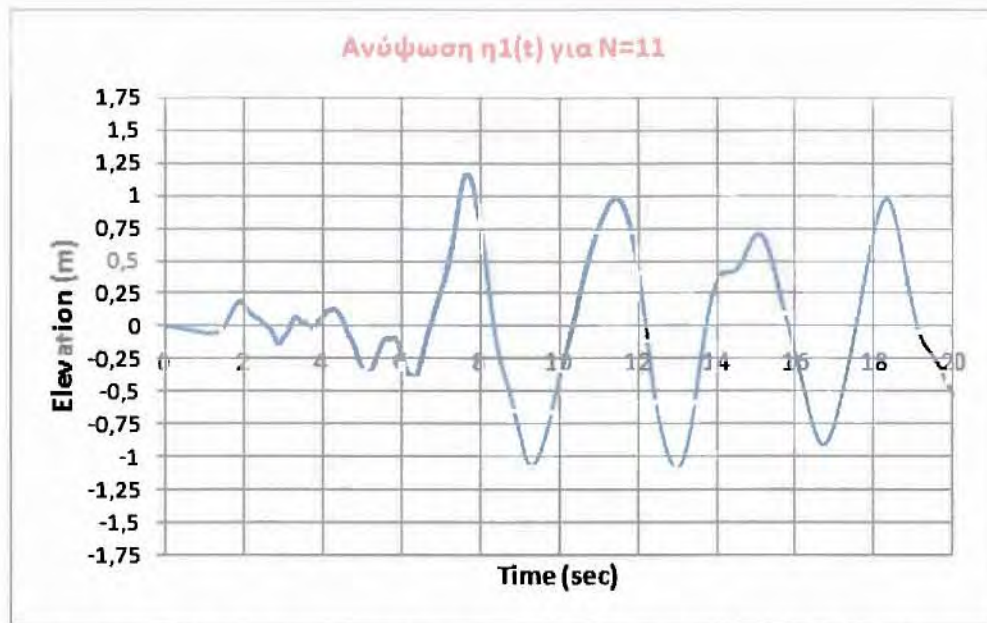
Για ορθογωνική δεξαμενή, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για διάφορους λόγους διαστάσεων παρουσιάζεται στα ακόλουθα γραφήματα



Εικόνα 7.2.1.3. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.5$), σεισμός Kocaeli (1999)



Εικόνα 7.2.1.4. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.75$), σεισμός Kocaeli (1999)

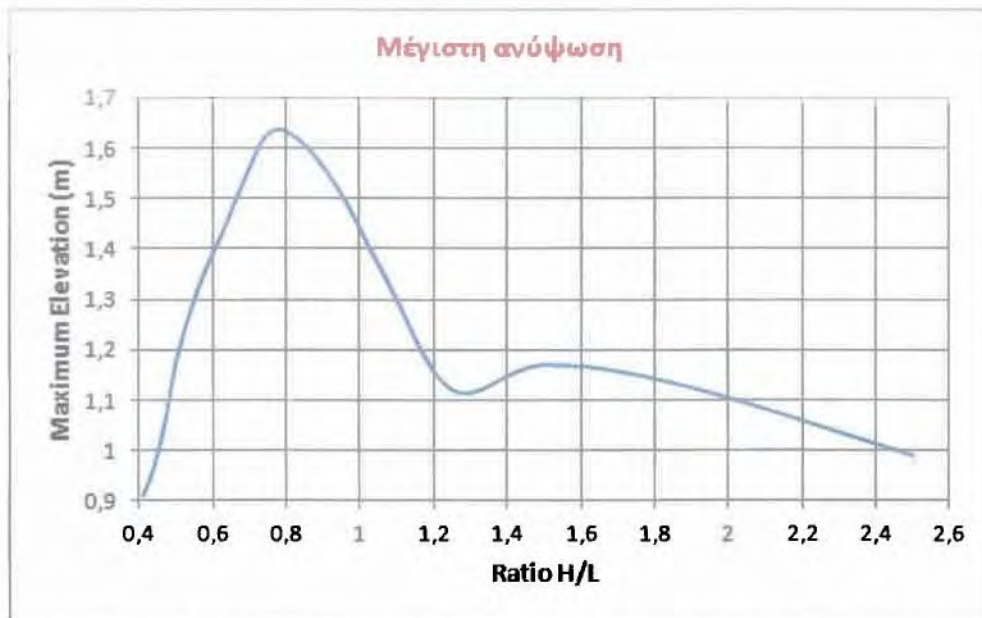


Εικόνα 7.2.1.5. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=1.5$), σεισμός Kocaeli (1999)

Στο Πίνακα 7.2.1.1 παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές μήκους L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$ ενώ στην εικόνα 7.2.1.6 παρουσιάζεται το αντίστοιχο γράφημα συναρτήσε του λόγου H/L .

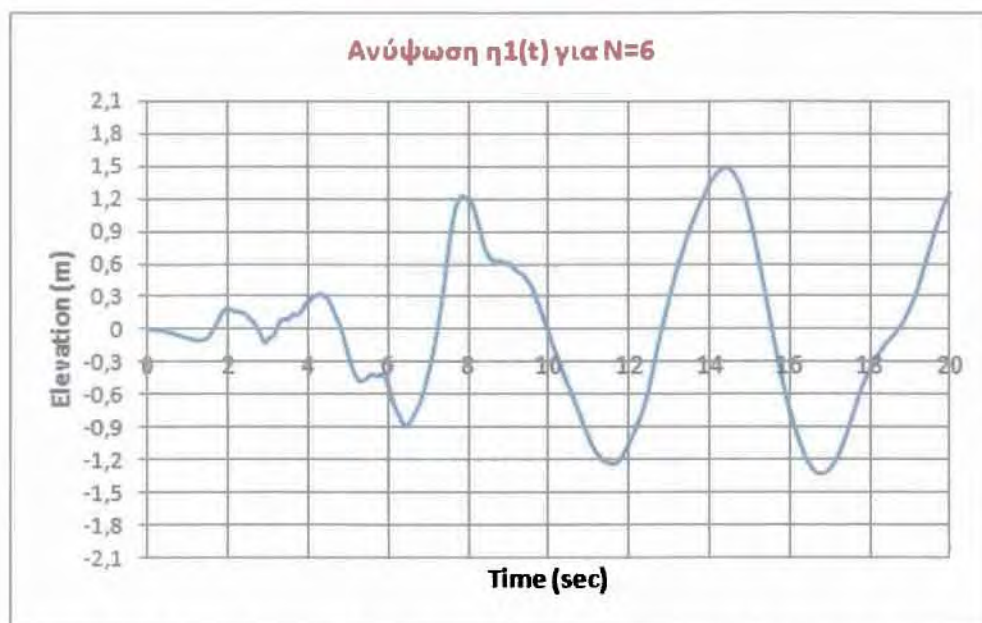
Μήκος L (m)	Λόγος H/L	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	0,99
8	1,87	1,13
10	1,50	1,17
12	1,25	1,12
14	1,07	1,34
16	0,94	1,52
18	0,83	1,62
20	0,75	1,63
22	0,68	1,53
24	0,63	1,44
26	0,58	1,36
28	0,54	1,28
30	0,50	1,18
32	0,47	1,06
34	0,44	0,97
36	0,41	0,91

Πίνακας 7.2.1.1. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_1(t)$ συναρτήσε του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερό ύψος $H=15\text{m}$, σεισμός Kocaeli (1999)

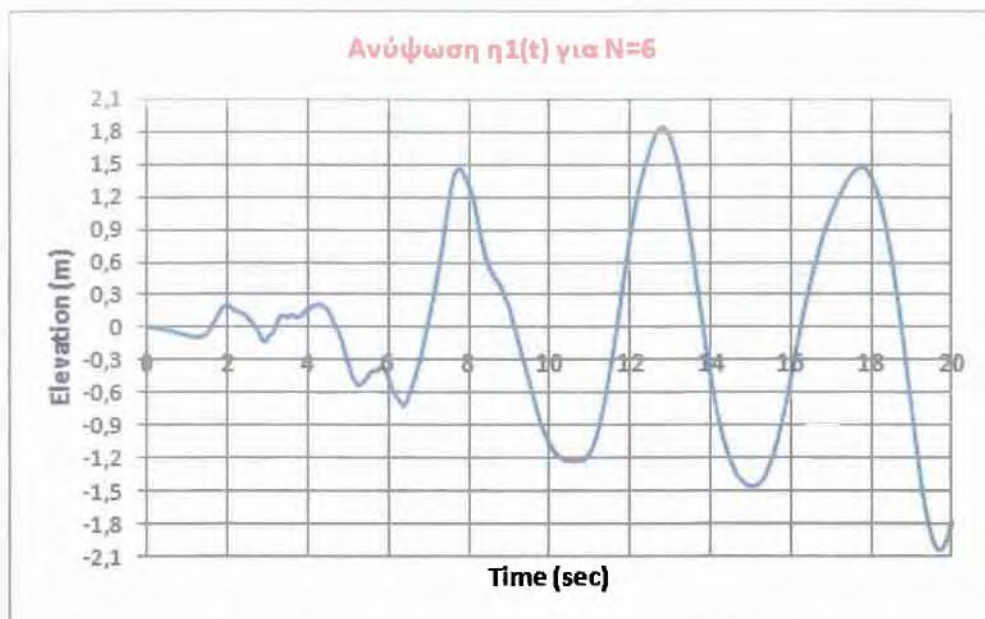


Εικόνα 7.2.1.6. Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Kocaeli (1999)

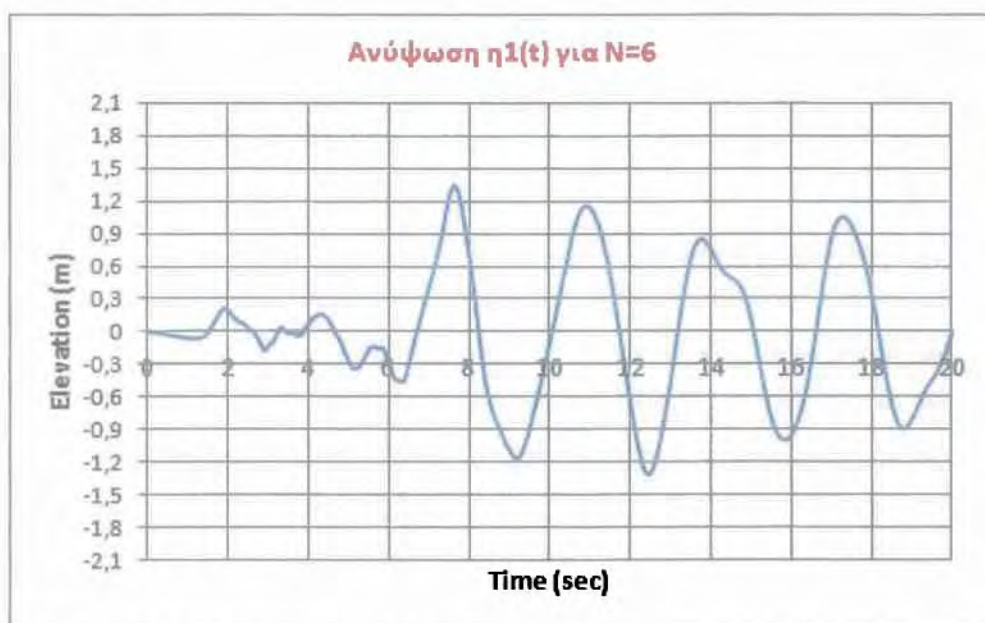
Για **κυλινδρική δεξαμενή** τα αντίστοιχα διαγράμματα που προκύπτουν για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας παρουσιάζονται στις εικόνες που ακολουθούν



Εικόνα 7.2.1.7. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής D=30m και ύψος υγρού H=15m (H/D=0.5) , σεισμός Kocaeli (1999)



Εικόνα 7.2.1.8. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=0.75$), σεισμός Kocaeli (1999)



Εικόνα 7.2.1.9. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=1.5$), σεισμός Kocaeli (1999)

Στο Πίνακα 7.2.1.2 αναφέρονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές διαμέτρου D κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$. Τέλος στην Εικόνα 7.2.1.10 παρουσιάζεται το αντίστοιχο διάγραμμα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσει του λόγου H/D .

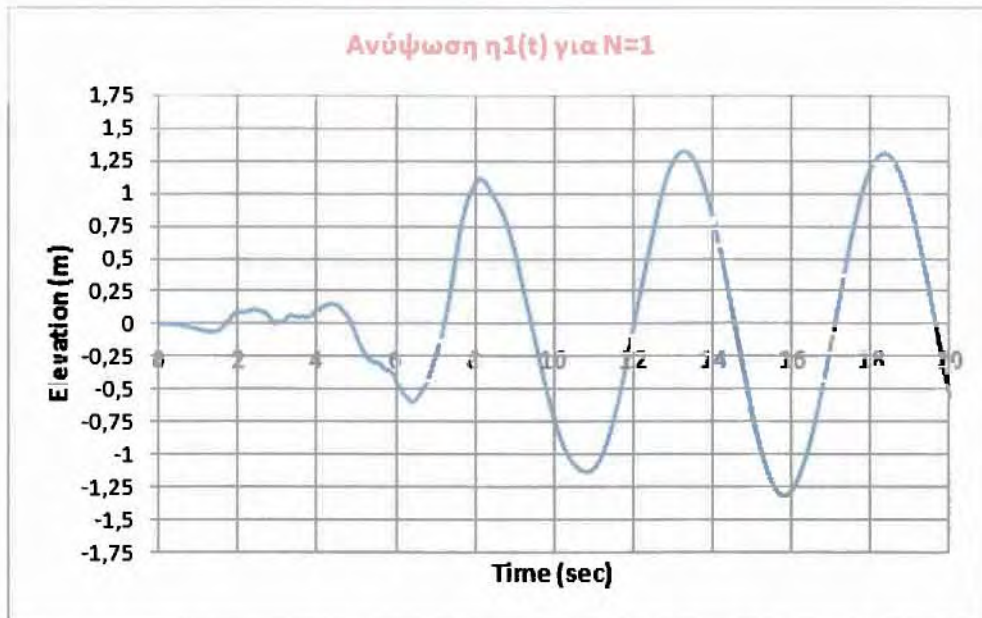
Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	1,17
8	1,87	1,32
10	1,50	1,35
12	1,25	1,34
14	1,07	1,33
16	0,94	1,56
18	0,83	1,68
20	0,75	1,85
22	0,68	1,86
24	0,63	1,78
26	0,58	1,66
28	0,54	1,57
30	0,50	1,49
32	0,47	1,41
34	0,44	1,32
36	0,41	1,21

Πίνακας 7.2.1.2. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Kocaeli (1999)

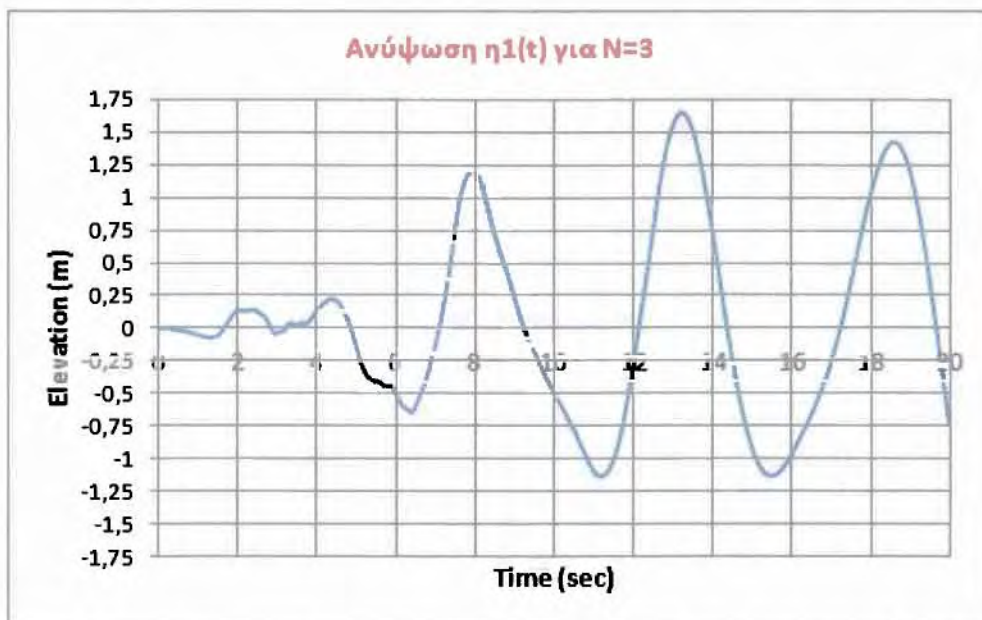


Εικόνα 7.2.1.10. Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Kocaeli (1999)

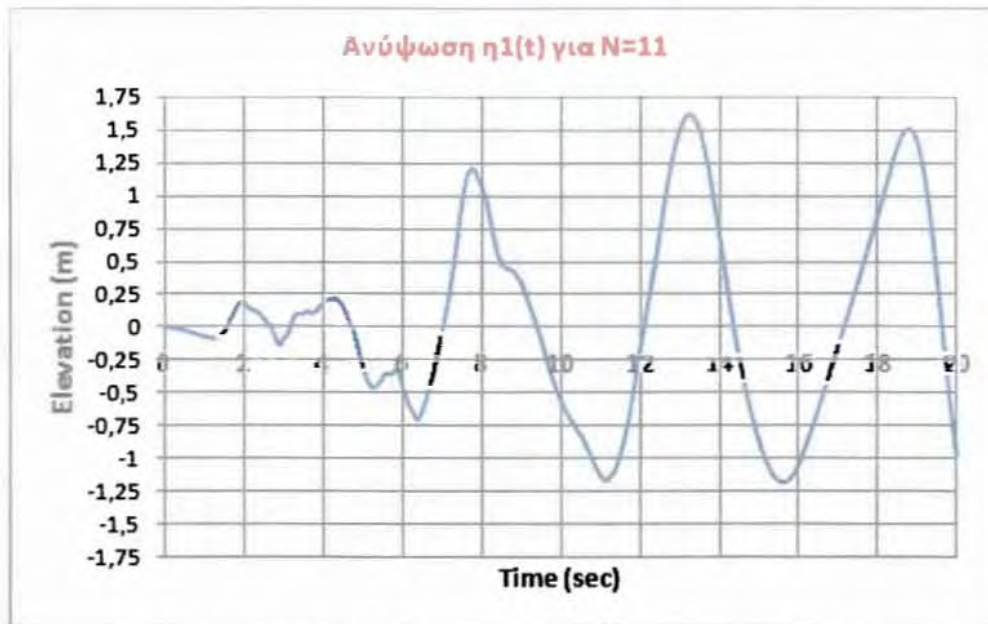
Στις ακόλουθες εικόνες 7.2.1.11 – 7.2.1.15 παρουσιάζονται διαγράμματα της ανύψωσης $\eta_{(1)}$ για διάφορους όρους της επαγωγικής λύσης και συγκεκριμένα για N=1, N=3 και N=11 σε ορθογωνική δεξαμενή με σταθερό λόγο H/L = 0,75.



Εικόνα 7.2.1.11. Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/L=0.75$ και $n=1$, σεισμός Kocaeli (1999)

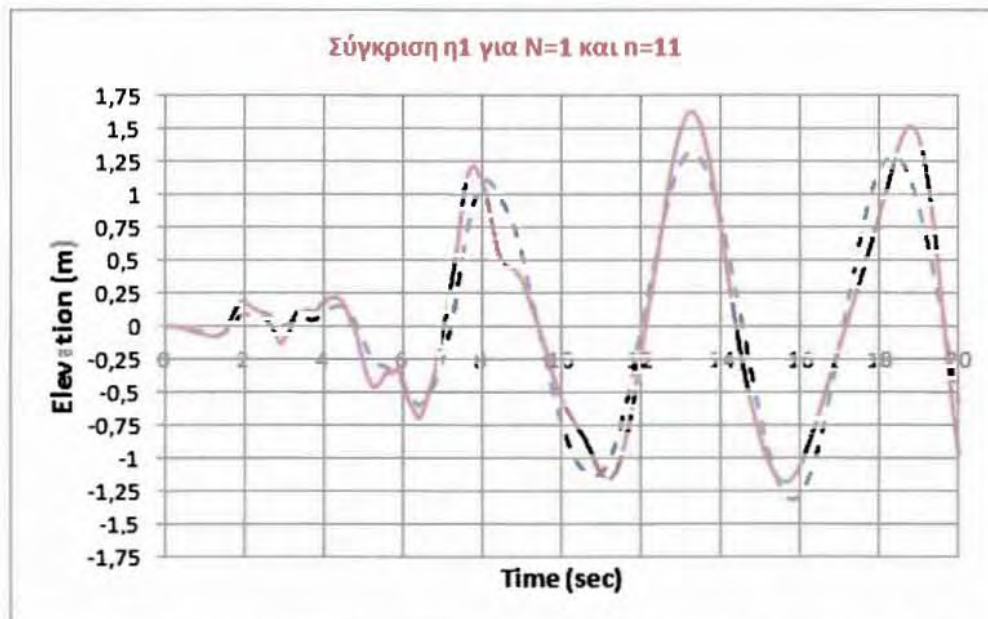


Εικόνα 7.2.1.12. Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/L=0.75$ και $n=1\&3$, σεισμός Kocaeli (1999)



Εικόνα 7.2.1.13. Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/L=0.75$ και $n=1,3,5,7,9,11$, σεισμός Kocaeli (1999)

Τέλος στην εικόνα 7.2.1.14 παρατίθεται ένα συγκριτικό διάγραμμα της ανύψωσης $\eta_1(t)$ που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση ενός (Εικόνα 7.2.1.11) και έξι (Εικόνα 7.2.1.13) γραμμικών όρων. Η διακεκομμένη γραμμή (μπλε) είναι η ανύψωση $\eta_1(t)$ που προκύπτει για $N=1$ και συνεχής (κόκκινη) είναι η ανύψωση για $N=11$.



Εικόνα 7.2.1.14. Σύγκριση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για $n=1$ και $n=1,3,\dots,11$ και λόγο $H/L=0.75$, σεισμός Kocaeli (1999)

Παρατηρούμε ότι λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο ($n=1$) τα αποτελέσματα είναι αρκετά ακριβή μέχρι τη χρονική στιγμή 10sec περίπου, στη συνέχεια όμως υπάρχει απόκλιση της τάξης των 30cm στη μέγιστη ανύψωση. Συγκεκριμένα για $n=1$ η μέγιστη ανύψωση που υπολογίζεται είναι 1,32cm ενώ για $n=1,3,5,7,9,11$ η μέγιστη ανύψωση υπολογίζεται στα 1,63cm. Λαμβάνοντας υπόψιν έναν επιπλέον όρο δηλαδή $n=1$ & 3 τα αποτελέσματα παρουσιάζουν εξαιρετική ακρίβεια και συμπίπτουν με τη περίπτωση των 11 όρων με μηδαμινό σφάλμα.

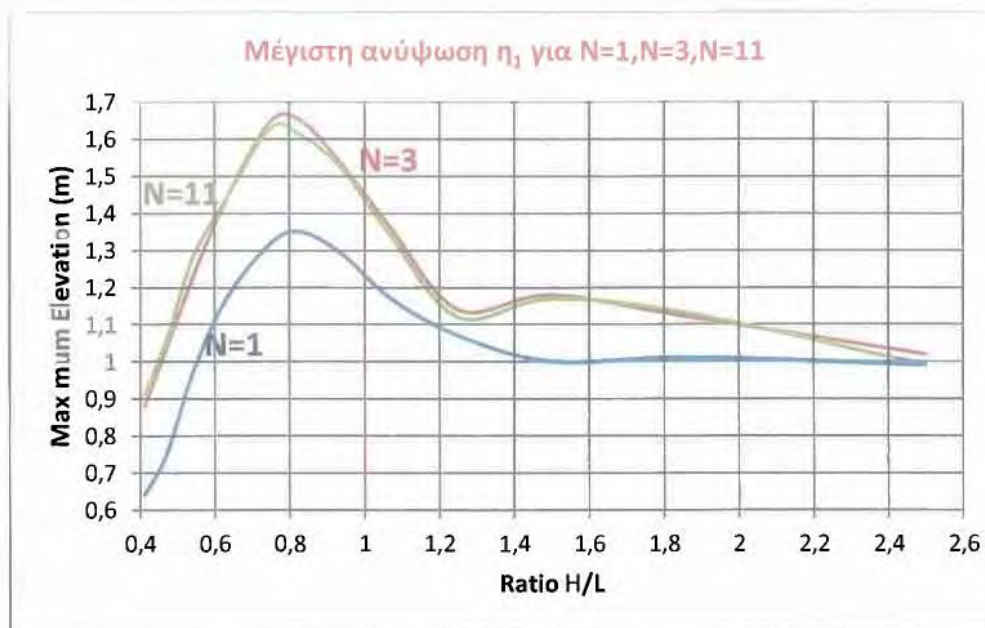
Επειδή όμως για ένα συγκεκριμένο λόγο διαστάσεων H/L δε μπορούμε να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα θα βρούμε τις τιμές της μέγιστης ανύψωσης για διάφορους λόγους $H/L - H/D$.

Ενδεικτικά παρουσιάζεται επίσης η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(1),max}$ για $n=1$ και για $n=1$ έως 11 για ορθογωνικές και για $n=1$ και $n=1$ έως 6 για κυλινδρικές δεξαμενές για διάφορες τιμές του λόγου H/L . Συγκεκριμένα για ορθογωνικές δεξαμενές τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πίνακα 7.2.1.3 ενώ για κυλινδρικές στο πίνακα 7.2.1.4.

Λόγος H/L	$\eta_{1,max} - N=1$	$\eta_{1,max} - N=3$	$\eta_{1,max} - N=5$	$\eta_{1,max} - N=7$	$\eta_{1,max} - N=9$	$\eta_{1,max} - N=11$
3	0,75	0,88	0,86	0,84	0,85	0,85
2,5	0,99	1,02	1,05	1,01	1,00	0,99
1,87	1,01	1,12	1,08	1,09	1,12	1,13
1,5	1,00	1,18	1,16	1,12	1,15	1,17
1,25	1,07	1,14	1,13	1,12	1,10	1,12
1,07	1,17	1,36	1,29	1,33	1,32	1,34
0,94	1,29	1,53	1,46	1,54	1,55	1,52
0,83	1,35	1,65	1,56	1,65	1,66	1,61
0,75	1,32	1,65	1,56	1,66	1,60	1,63
0,63	1,17	1,44	1,40	1,46	1,42	1,44
0,54	0,97	1,23	1,25	1,28	1,22	1,28
0,47	0,75	1,04	1,09	1,06	1,00	1,06
0,41	0,64	0,88	0,97	0,87	0,87	0,91

Πίνακας 7.2.1.3. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)

Στην εικόνα 7.2.1.15 παρουσιάζεται η σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/L με τη χρήση ενός γραμμικού όρου ($n=1$ - μπλε γραμμή) και με τη χρήση 6 γραμμικών όρων ($n= 1,3,5,7,9,11$ - κόκκινη γραμμή)

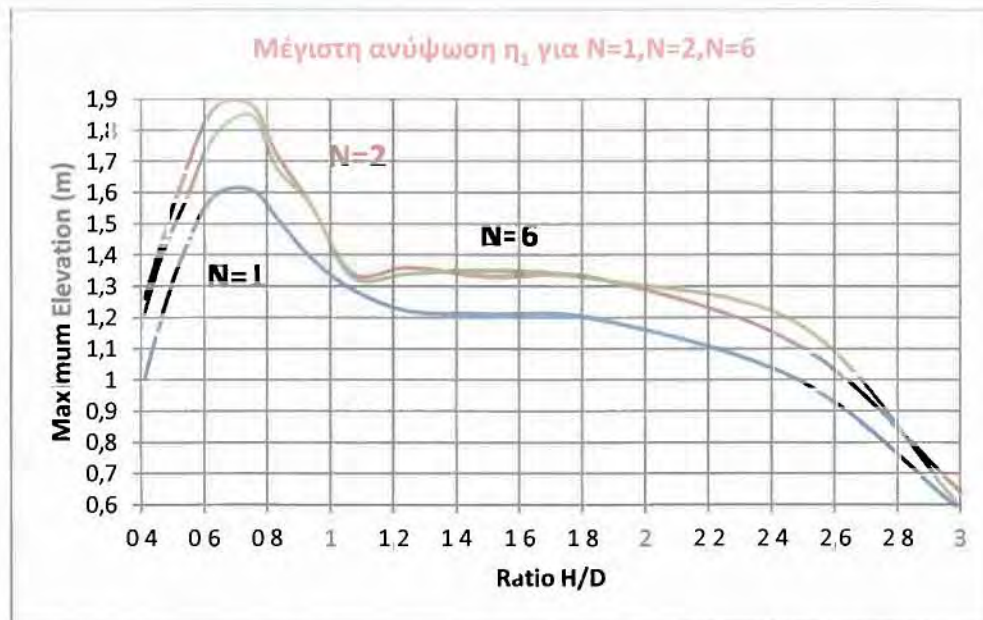


Εικόνα 7.2.1.15. Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $N=1, N=3$ και $N=11$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)

Αντίστοιχα με το πίνακα 7.2.1.3, τα αποτελέσματα για τις κυλινδρικές δεξαμενές παρουσιάζονται στο πίνακα 7.2.1.4. Εκτός από τις διαφορές που παρατηρούνται στη μέγιστη ανύψωση λόγω της μεταβολής των διαστάσεων της δεξαμενής και συγκεκριμένα της διαμέτρου D αξίζει να σημειωθεί και η διαφορά λόγω της χρησιμοποίησης παραπάνω όρων από την επαγωγική λύση ($n=1, n=1,2, n=1,2,3, \dots, N$).

Λόγος H/D	$\eta_{1,max} - N=1$	$\eta_{1,max} - N=2$	$\eta_{1,max} - N=3$	$\eta_{1,max} - N=4$	$\eta_{1,max} - N=5$	$\eta_{1,max} - N=6$
3	0,58	0,64	0,58	0,59	0,59	0,59
2,5	0,99	1,10	1,16	1,16	1,17	1,17
1,87	1,19	1,32	1,27	1,29	1,30	1,32
1,5	1,21	1,33	1,33	1,30	1,33	1,35
1,25	1,22	1,36	1,34	1,33	1,31	1,34
1,07	1,29	1,34	1,37	1,36	1,33	1,33
0,94	1,39	1,56	1,49	1,53	1,57	1,56
0,83	1,52	1,72	1,66	1,71	1,72	1,68
0,75	1,61	1,88	1,82	1,88	1,86	1,85
0,63	1,59	1,87	1,78	1,81	1,78	1,78
0,54	1,42	1,67	1,54	1,58	1,55	1,57
0,47	1,22	1,46	1,37	1,41	1,39	1,41
0,41	1,00	1,26	1,19	1,22	1,20	1,21

Πίνακας 7.2.1.4. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)



Εικόνα 7.2.1.16 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας κυλινδρικής δεξαμενής για $N=1, N=2$ και $N=6$ συναρτήσει του λόγου H/D με $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)

Από τις εικόνες 7.2.1.15 και 7.2.1.16 παρατηρούμε ότι τόσο στις ορθογωνικές όσο και στις κυλινδρικές δεξαμενές υπάρχει σταθερή διαφορά στα αποτελέσματα για τη μέγιστη ανύψωση $\eta_{(1)}$ χρησιμοποιώντας παραπάνω όρους από το γραμμικό πρόβλημα. Η απόκλιση των αποτελεσμάτων μπορεί να θεωρηθεί κάποιες φορές αμελητέα αλλά στη πλειονότητα των περιπτώσεων είναι αρκετά σημαντική και στους δύο τύπους δεξαμενών. Ειδικά για λόγο διαστάσεων $H/D=0,75$ ($H=15m - D=20m$) όπου παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση, η χρησιμοποίηση ενός γραμμικού όρου προβλέπει $\eta_{1,max}=1,61m$ ενώ με χρησιμοποίηση 6 όρων $\eta_{1,max}=1,85m$, δηλαδή υφίσταται διαφορά 24cm η οποία δε κρίνεται αμελητέα.

Επιρροή των μη-γραμμικών όρων στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας

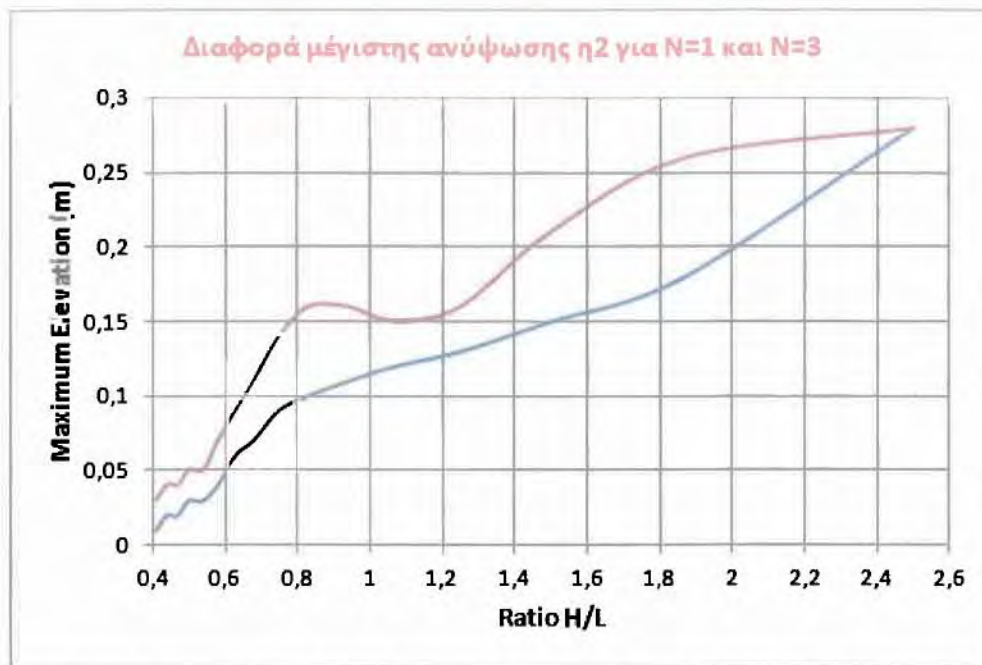
Για τη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2)}$ στις ορθογωνικές δεξαμενές όπως έχουμε ήδη αναφέρει και σε προηγούμενα κεφάλαια έγινε ανάλυση λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο ($n=1$) και δύο γραμμικούς όρους ($n=1$ & 3). Αντίθετα στις κυλινδρικές δεξαμενές τα αποτελέσματα που έχουμε, πάρθηκαν από την ανάλυση με τη χρησιμοποίηση ενός όρου από το γραμμικό πρόβλημα. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ για διάφορους λόγους H/L (και H/D αντίστοιχα) με τη τιμή του ύψους του ρευστού H να κρατείται σταθερή στη τιμή 15m για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις.

Μήκος L (m)	Λόγος H/L	$\eta_{2_{\max}} (m) - N=1$	$\eta_{2_{\max}} (m) - N=3$
6	2,50	0,28	0,28
8	1,87	0,18	0,26
10	1,50	0,15	0,21
12	1,25	0,13	0,16
14	1,07	0,12	0,15
16	0,94	0,11	0,16
18	0,83	0,10	0,16
20	0,75	0,09	0,14
22	0,68	0,07	0,11
24	0,63	0,06	0,09
26	0,58	0,04	0,07
28	0,54	0,03	0,05
30	0,50	0,03	0,05
32	0,47	0,02	0,04
34	0,44	0,02	0,04
36	0,41	0,01	0,03

Πίνακας 7.2.1.5 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),\max}$ συναρτήσσει του λόγου H/L για n=1 και n=1 & 3 με σταθερό ύψος H=15m

Παρατηρούμε ότι όσο ο λόγος H/L μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το μήκος L της δεξαμενής τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται. Αυτό παρατηρείται όπως ήταν αναμενόμενο και στη περίπτωση της χρησιμοποίησης ενός γραμμικού όρου αλλά και σε αυτή της χρησιμοποίησης δύο όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η διαφορά των αποτελεσμάτων στις δύο περιπτώσεις δε μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερα σημαντική για το συγκεκριμένο σεισμό καθώς η μέγιστη απόκλιση είναι 8cm για H/L=1,87. Παρατηρούμε επίσης ότι όσο ο λόγος H/L μειώνεται τα αποτελέσματα συγκλίνουν και τείνουν στη τιμή της μηδενικής ανύψωσης. Το αντίστοιχο διάγραμμα για τη διαφορά της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.1.17.

Για τις κυλινδρικές δεξαμενές τα ανάλογα αποτελέσματα, με τη χρήση ενός μόνο γραμμικού όρου δίνονται από το Πίνακα 7.2.1.6



Εικόνα 7.2.1.17. Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2),max}$ για $n=1$ και $n=1\&3$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)

Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	$\eta_{2,max}$ (m) - $N=1$
6	2,50	0,15
8	1,87	0,14
10	1,50	0,09
12	1,25	0,06
14	1,07	0,05
16	0,94	0,04
18	0,83	0,04
20	0,75	0,03
22	0,68	0,03
24	0,63	0,03
26	0,58	0,02
28	0,54	0,02
30	0,50	0,02
32	0,47	0,01
34	0,44	0,01
36	0,41	0,01

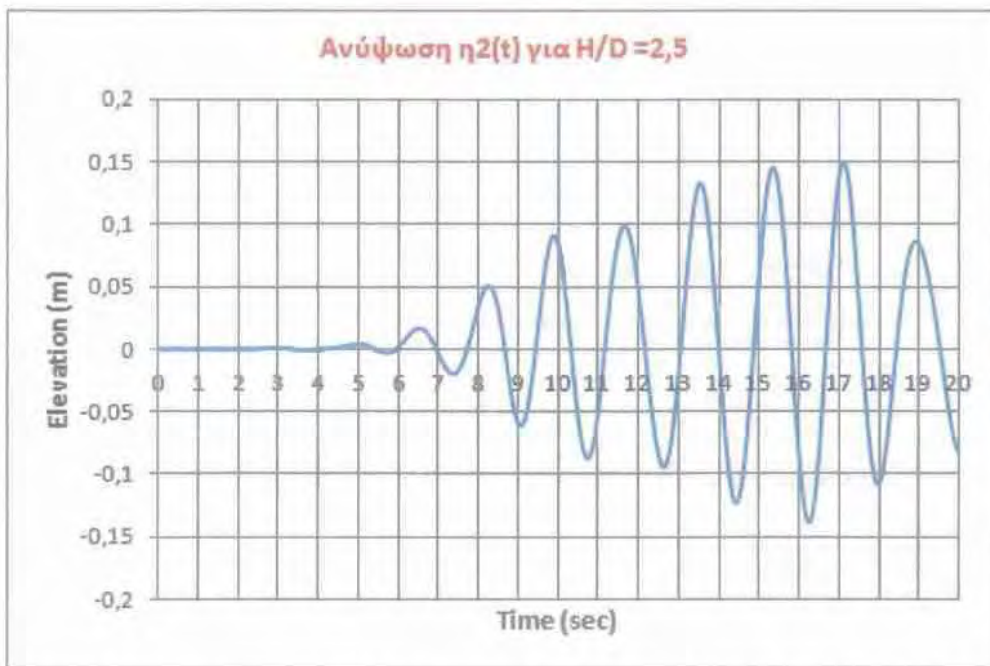
Πίνακας 7.2.1.6. Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής για $n=1$ με σταθερό ύψος $H=15m$

Παρατηρούμε ότι όπως στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών έτσι και στις κυλινδρικές, όσο ο λόγος H/D αυξάνεται τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ αυξάνεται όπως γίνεται αντιληπτό και από την Εικόνα 7.2.1.18.



Εικόνα 7.2.1.18 Μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $n=1$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Kocaeli (1999)

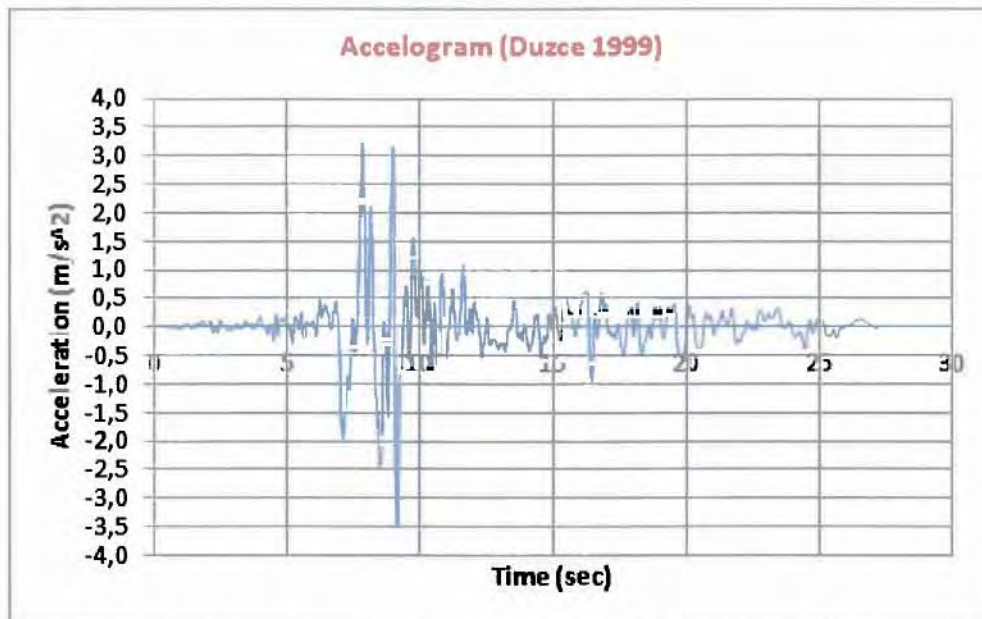
Τέλος, η μορφή της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ συναρτήσει του χρόνου για δεδομένο λόγο διαστάσεων $H/D=2,5$ παρουσιάζεται στην εικόνα 7.2.1.19.



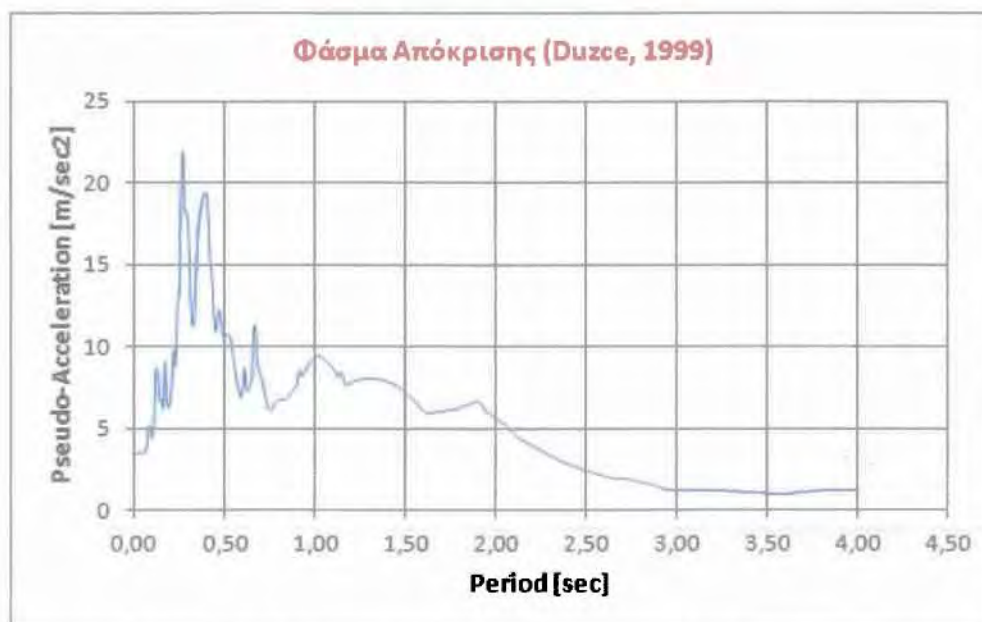
Εικόνα 7.2.1.19 Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_2(t)$ για κυλινδρική δεξαμενή με $H/D=2,5$ συναρτήσει του χρόνου, σεισμός Kocaeli (1999)

7.2.2 Σεισμός Duzce, Τουρκία 1999

Ο δεύτερος σεισμός που εξετάστηκε ήταν αυτός που έγινε στη περιοχή *Duzce της Τουρκίας* στις 12 Νοεμβρίου 1999 μεγέθους 7.2 ρίχτερ. Συνδέεται άμεσα με το προηγούμενο σεισμό (Sakarya) καθώς το επίκεντρο του βρέθηκε μόλις 100km ανατολικά από αυτό του σεισμού της 17/8/1999. Ο σεισμός είχε ως αποτέλεσμα 4.918 τραυματισμούς και 894 θανάτους.



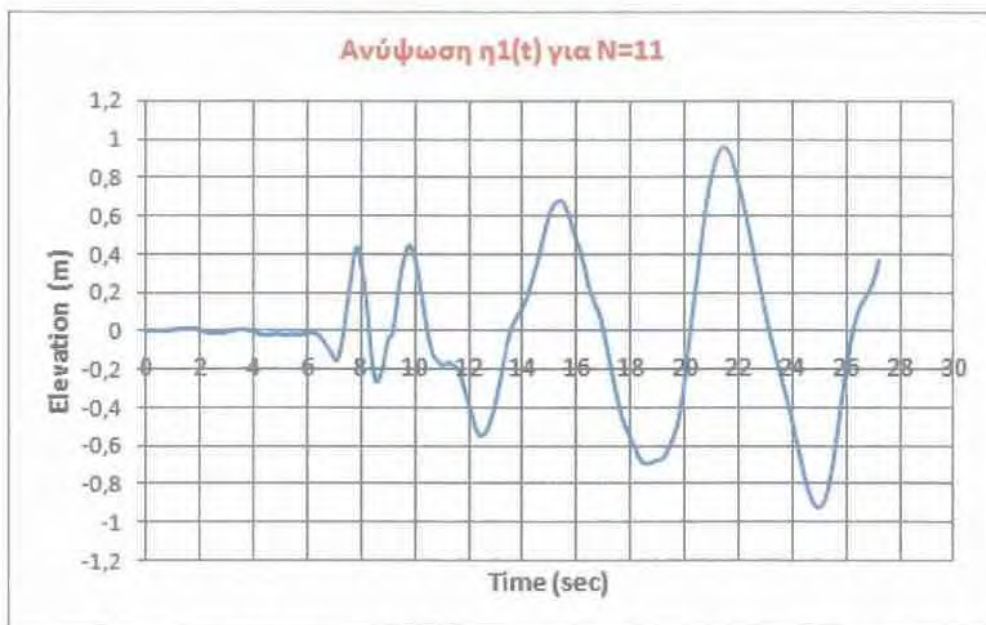
Εικόνα 7.2.2.1. Επιταχυνσιογράφημα σεισμού στη περιοχή Duzce στις 12 Νοεμβρίου 1999



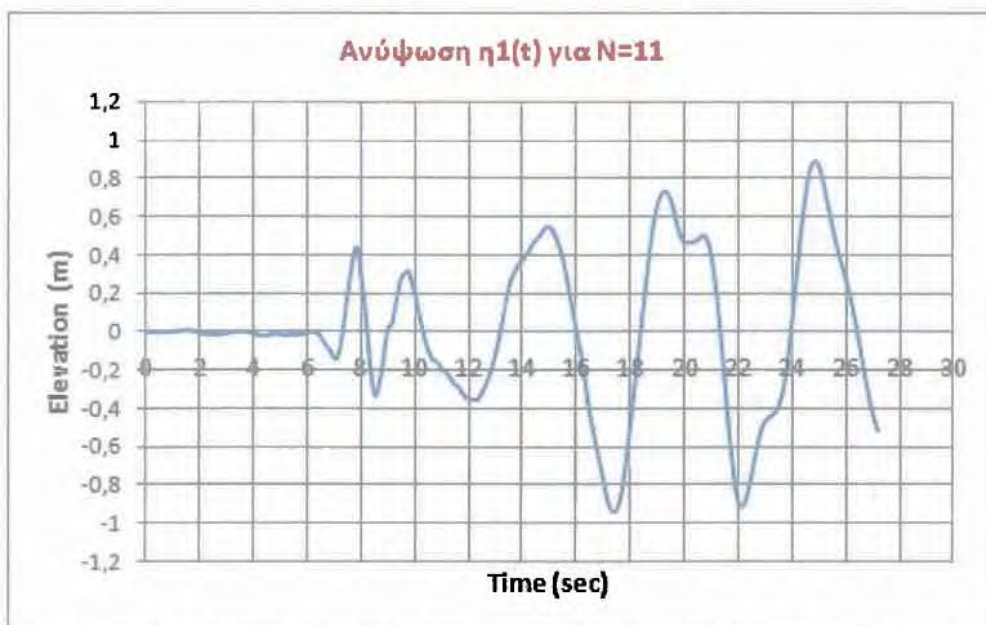
Εικόνα 7.2.2.2. Φάσμα απόκρισης ψευδοεπιτάχυνσης συναρτήσει της ιδιοπεριόδου T του σεισμού Duzce, Τουρκία 1999

Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας με γραμμική ανάλυση

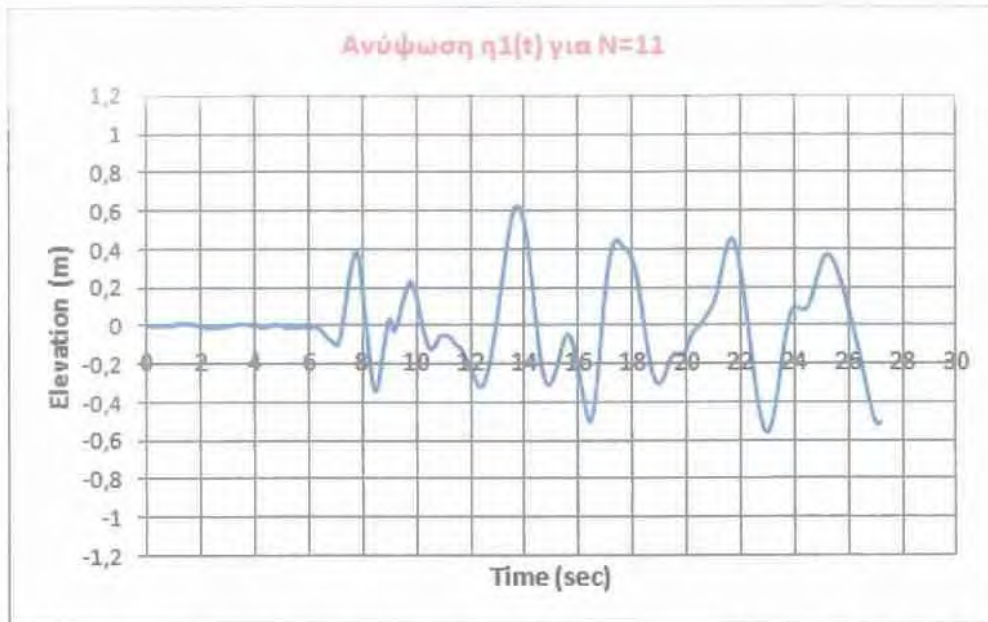
Για ορθογωνική δεξαμενή, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για διάφορους λόγους διαστάσεων παρουσιάζεται στα ακόλουθα γραφήματα



Εικόνα 7.2.2.3. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.5$), σεισμός Duzce (1999)



Εικόνα 7.2.2.4. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.75$), σεισμός Duzce (1999)



Εικόνα 7.2.2.5. Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=1.5$), σεισμός Duzce (1999)

Στον Πίνακα 7.2.2.1 παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές μήκους L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$. Το αντίστοιχο γράφημα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσει του λόγου H/L δίνεται από την Εικόνα 7.2.2.6.

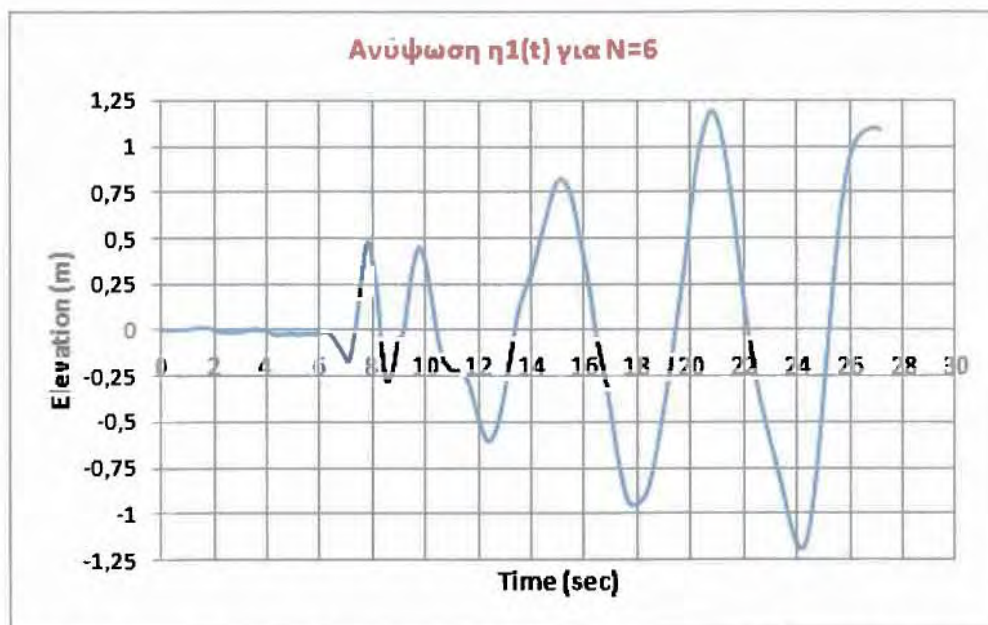
Μήκος L (m)	Λόγος H/L	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	0,52
8	1,87	0,63
10	1,50	0,63
12	1,25	0,70
14	1,07	0,81
16	0,94	0,73
18	0,83	0,68
20	0,75	0,89
22	0,68	1,02
24	0,63	1,16
26	0,58	1,15
28	0,54	1,00
30	0,50	0,96
32	0,47	0,87
34	0,44	0,80
36	0,41	0,76

Πίνακας 7.2.2.1 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερό ύψος $H=15\text{m}$, σεισμός Duzce (1999)

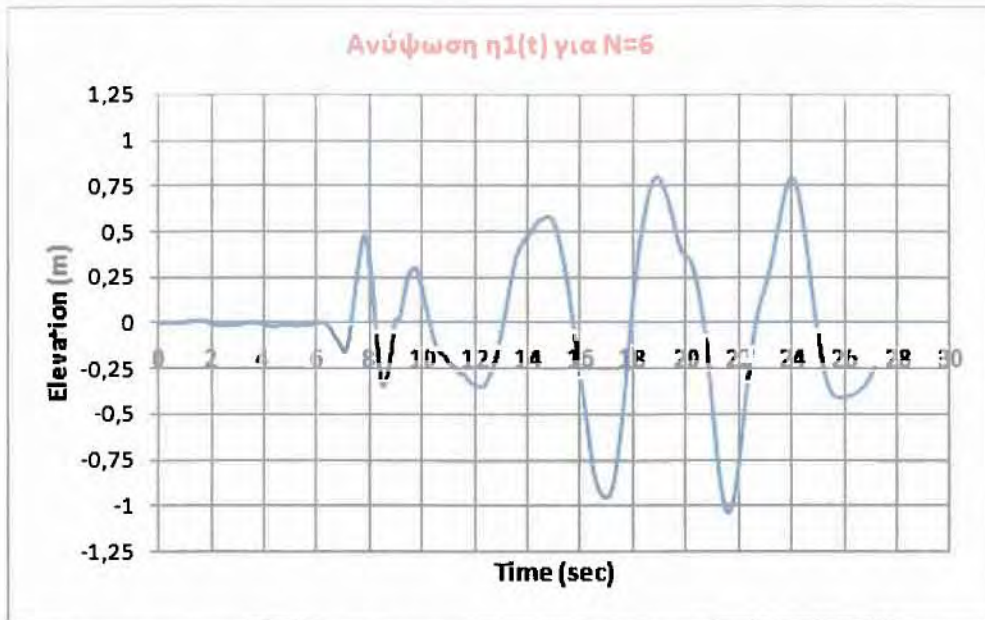


Εικόνα 7.2.2.6. Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Duzce (1999)

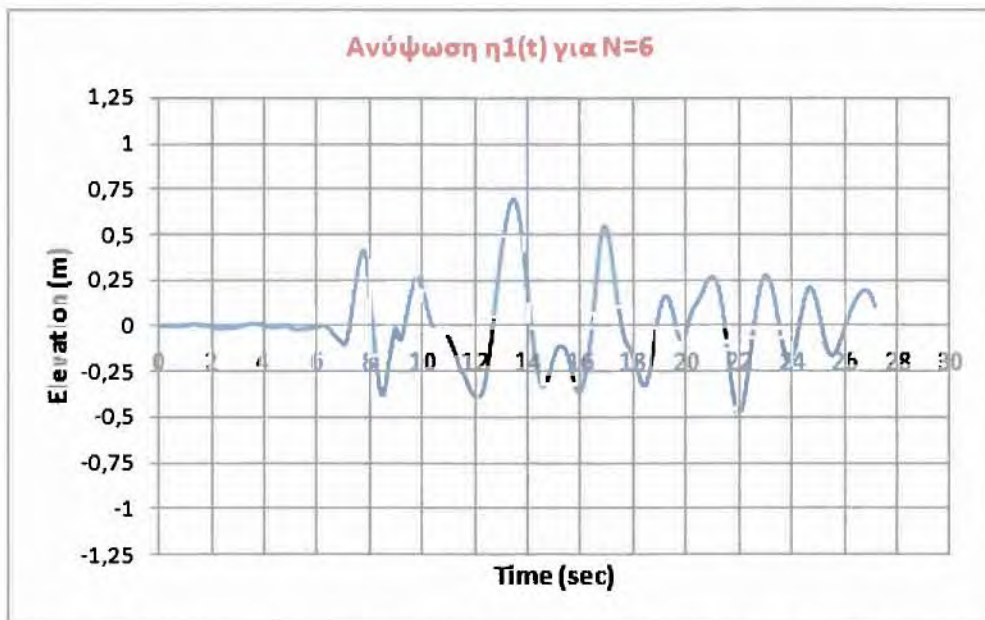
Για **κυλινδρική δεξαμενή** τα αντίστοιχα διαγράμματα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας παρουσιάζονται στις επόμενες εικόνες.



Εικόνα 7.2.2.7 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής D=30m και ύψος υγρού H=15m (H/D=0.5), σεισμός Duzce (1999)



Εικόνα 7.2.2.8 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=0.75$), σεισμός Duzce (1999)

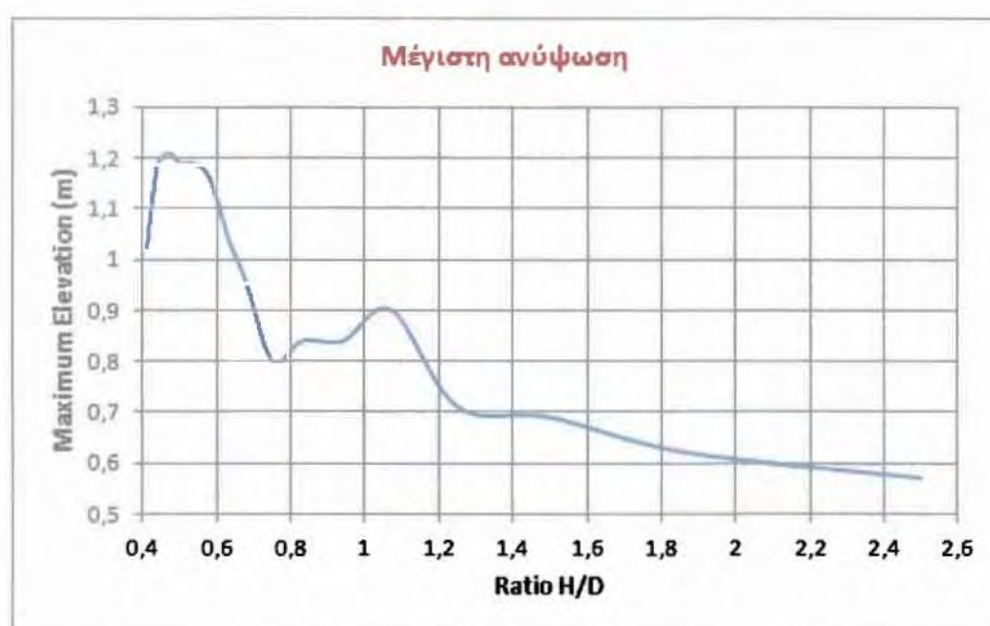


Εικόνα 7.2.2.9 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=1.5$), σεισμός Duzce (1999)

Στο πίνακα 7.2.2.2 παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές της διαμέτρου D της δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$, ενώ στην Εικόνα 7.2.2.10 παρουσιάζεται το αντίστοιχο γράφημα.

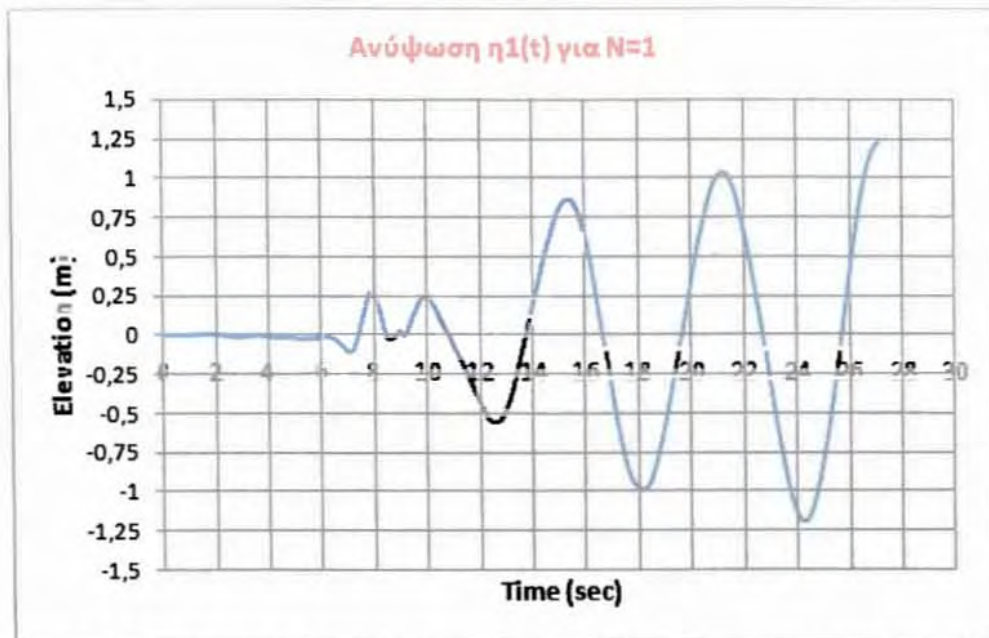
Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	0,57
8	1,87	0,62
10	1,50	0,69
12	1,25	0,71
14	1,07	0,90
16	0,94	0,84
18	0,83	0,84
20	0,75	0,80
22	0,68	0,95
24	0,63	1,04
26	0,58	1,16
28	0,54	1,19
30	0,50	1,19
32	0,47	1,21
34	0,44	1,19
36	0,41	1,02

Πίνακας 7.2.2.2 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Duzce (1999)

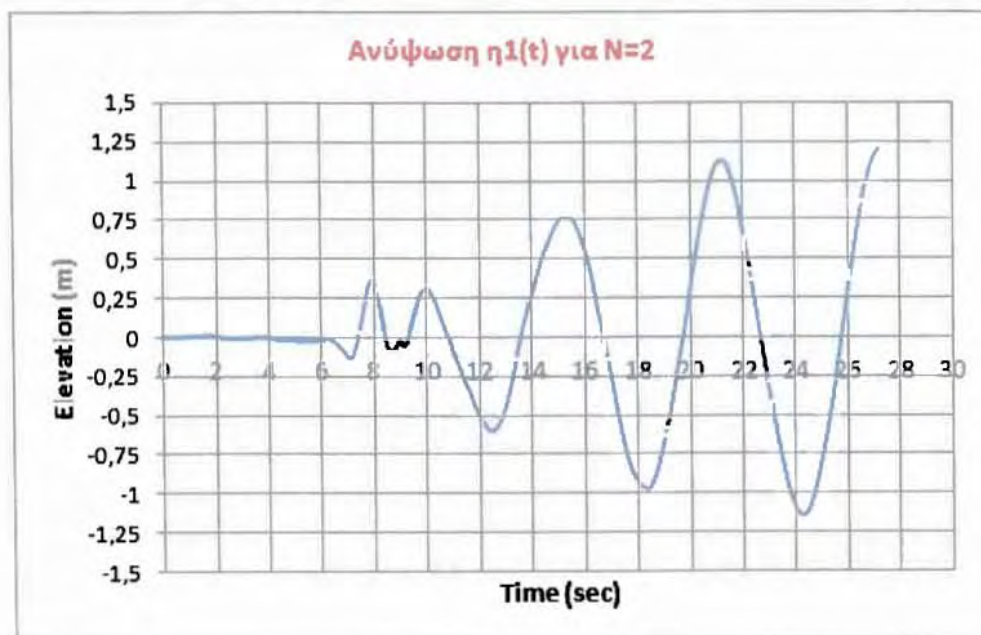


Εικόνα 7.2.2.10 Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Duzce (1999)

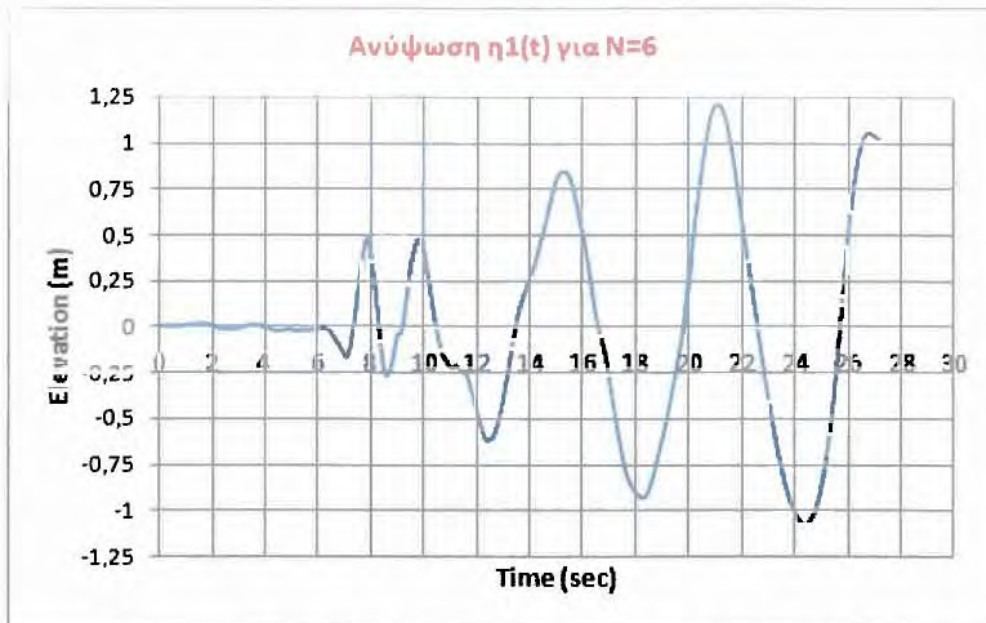
Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανύψωσης για διάφορους όρους της επαγωγικής λύσης και συγκεκριμένα για N=1, N=2 και N=6 με σταθερό λόγο H/D = 0,47 (H=15m – D=32m). Είτε η σύγκριση γίνει σε κυλινδρικές είτε σε ορθογωνικές δεξαμενές τα αποτελέσματα είναι παρόμοια.



Εικόνα 7.2.2.11 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε κυλινδρική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/D=0.47$ και $n=1$, σεισμός Duzce (1999)

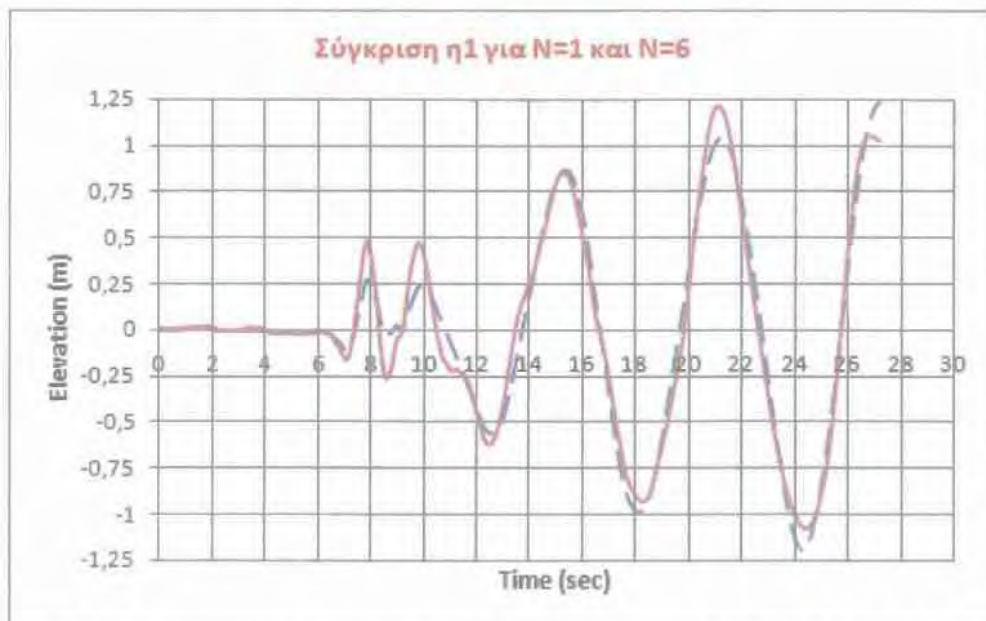


Εικόνα 7.2.2.12 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε κυλινδρική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/D=0.47$ και $n=1$ & 2 , σεισμός Duzce (1999)



Εικόνα 7.2.2.13 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε κυλινδρική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/D=0.47$ και $n=1,2,3,4,5,6$, σεισμός Duzce (1999)

Τέλος στην εικόνα 7.2.2.14 παρατίθεται ένα συγκριτικό διάγραμμα της ανύψωσης που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση ενός (Εικόνα 7.2.2.11) και έξι (Εικόνα 7.2.2.13) γραμμικών όρων. Η διακεκομμένη γραμμή (μπλε) είναι η ανύψωση $\eta_1(t)$ που προκύπτει για $N=1$ και συνεχής (κόκκινη) είναι η ανύψωση για $N=6$.



Εικόνα 7.2.2.14 Σύγκριση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε κυλινδρική δεξαμενή για $n=1$ και $n=1,2,\dots,6$ γραμμικούς όρους με λόγο διαστάσεων $H/D=0.47$, σεισμός Duzce (1999)

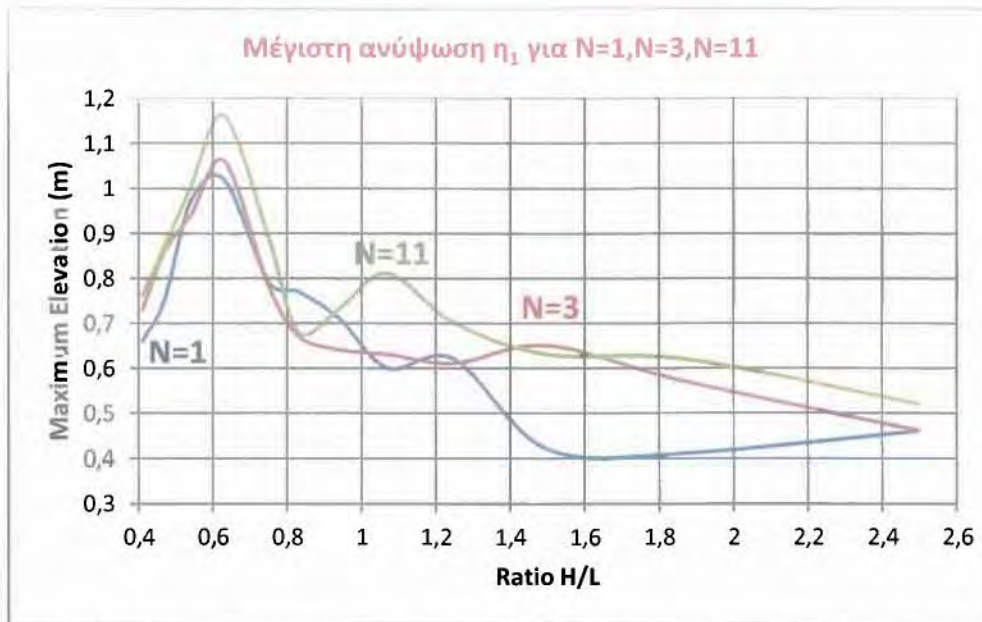
Παρατηρούμε ότι λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο ($n=1$) τα αποτελέσματα είναι αρκετά ακριβή όπως και στη περίπτωση της σύγκρισης που κάναμε για ορθογωνικές δεξαμενές στο πρώτο σεισμό (Sakarya). Στο σεισμό του Duzce παρατηρούμε μία απόκλιση της τάξης των 25cm στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας τις χρονικές στιγμές 7.5sec και 10sec. Μία παρόμοια απόκλιση της τάξης των 20cm διακρίνεται επίσης στη μέγιστη ανύψωση περίπου στα 22sec. Αξίζει να σημειωθεί πως με τη χρησιμοποίηση 2 γραμμικών όρων ($n= 1 \ \& \ 2$) βελτιώνεται η ακρίβεια αλλά όχι σημαντικά. Στο συγκεκριμένο σεισμό η χρησιμοποίηση 4 όρων δίνει αποτελέσματα που συμπίπτουν με εξαιρετική ακρίβεια σε αυτά της χρησιμοποίησης 6 όρων.

Επειδή όμως για ένα συγκεκριμένο λόγο διαστάσεων H/L δε μπορούμε να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα θα βρούμε τις τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ για διάφορους λόγους $H/L - H/D$. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση που προκύπτει με τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Αναλυτικότερα για ορθογωνικές (Πίνακας 7.2.2.3) και κυλινδρικές (Πίνακας 7.2.2.4) έχουμε

Λόγος H/L	$\eta_{1\max} - N=1$	$\eta_{1\max} - N=3$	$\eta_{1\max} - N=5$	$\eta_{1\max} - N=7$	$\eta_{1\max} - N=9$	$\eta_{1\max} - N=11$
2,5	0,46	0,46	0,52	0,52	0,52	0,52
1,87	0,41	0,57	0,64	0,64	0,62	0,62
1,5	0,42	0,65	0,66	0,63	0,64	0,63
1,25	0,62	0,61	0,65	0,66	0,66	0,70
1,07	0,60	0,63	0,71	0,76	0,79	0,81
0,94	0,71	0,64	0,72	0,74	0,73	0,73
0,83	0,77	0,67	0,66	0,71	0,70	0,68
0,75	0,79	0,78	0,85	0,91	0,91	0,89
0,63	1,02	1,06	1,01	1,08	1,13	1,16
0,54	0,97	0,94	0,96	1,01	1,06	1,00
0,47	0,75	0,86	0,90	0,93	0,93	0,87
0,41	0,66	0,73	0,75	0,78	0,80	0,76

Πίνακας 7.2.2.3. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Duzce (1999)

Στην επόμενη σελίδα ακολουθεί διάγραμμα για τη μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας η_1 (Εικόνα 7.2.2.15) όπου η μπλε γραμμή παρουσιάζει τα αποτελέσματα της χρήσης ενός όρου ($N=1$) και η κόκκινη έξι όρων ($N=11$) από το γραμμικό πρόβλημα.

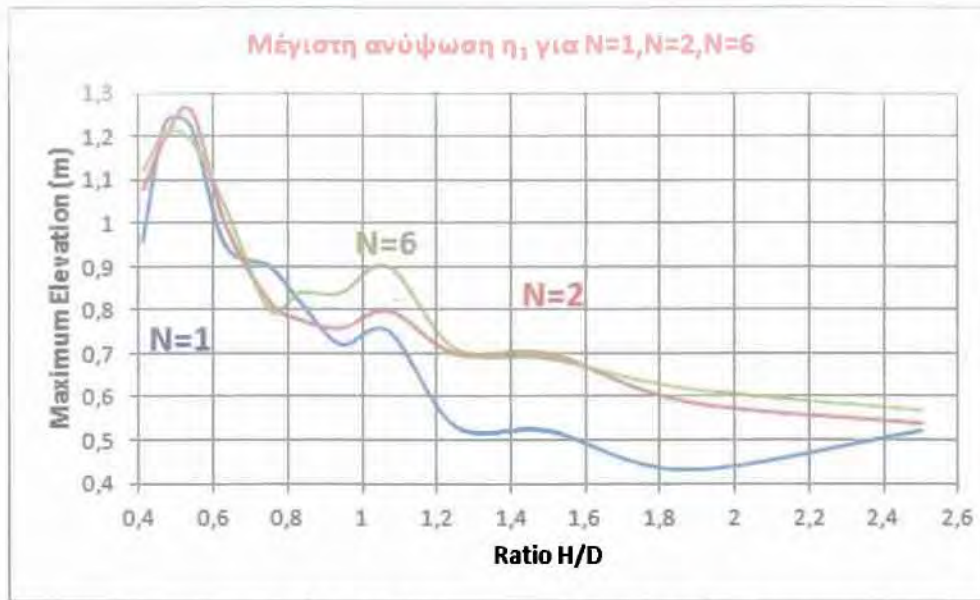


Εικόνα 7.2.2.15. Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $N=1, N=3$ και $N=11$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Duzce (1999)

Με βάση τη παραπάνω ανάλυση για το σεισμό στη περιοχή Duzce η μέγιστη ανύψωση $\eta_{1,max}$ που προβλέπεται από τη χρησιμοποίηση ενός γραμμικού όρου είναι 1,02m ενώ από τη χρησιμοποίηση 6 γραμμικών όρων 1,16m για λόγο διαστάσεων $H/L=0,63$. Υπάρχει δηλαδή μια διαφορά 14cm η οποία δεν κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική αλλά ούτε αμελητέα.

Λόγος H/D	$\eta_{1,max} - N=1$	$\eta_{1,max} - N=2$	$\eta_{1,max} - N=3$	$\eta_{1,max} - N=4$	$\eta_{1,max} - N=5$	$\eta_{1,max} - N=6$
2,5	0,52	0,54	0,60	0,57	0,58	0,57
1,87	0,43	0,59	0,64	0,62	0,63	0,62
1,5	0,52	0,70	0,73	0,70	0,72	0,69
1,25	0,53	0,70	0,66	0,66	0,69	0,71
1,07	0,75	0,80	0,90	0,91	0,91	0,90
0,94	0,72	0,76	0,89	0,85	0,85	0,84
0,83	0,82	0,78	0,76	0,79	0,83	0,84
0,75	0,90	0,82	0,74	0,78	0,82	0,80
0,63	0,95	1,00	0,97	1,02	1,03	1,04
0,54	1,22	1,26	1,21	1,18	1,19	1,19
0,47	1,23	1,20	1,19	1,23	1,20	1,21
0,41	0,96	1,08	1,14	1,14	1,09	1,12

Πίνακας 7.2.2.4. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Duzce (1999)



Εικόνα 7.2.2.16 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας κυλινδρικής δεξαμενής για $N=1, N=2$ και $N=6$ συναρτήσει του λόγου H/D με $H=15m$, σεισμός Duzce (1999)

Από την ανάλυση των παραπάνω γραφημάτων γίνεται κατανοητό ότι η χρησιμοποίηση ενός όρου δίνει αποτελέσματα τα οποία χαρακτηρίζονται γενικά ικανοποιητικά αλλά και με την ύπαρξη σφαλμάτων που φτάνουν κοντά στα 20cm για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, διαφορά η οποία δε μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Συγκριμένα για λόγο διαστάσεων H/L μικρότερο του 0,83 τα αποτελέσματα δε παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Αντίθετα για $H/L > 0,83$ όπως παρουσιάζεται και από την εικόνα 7.2.2.16 υπάρχει σταθερή διαφορά που κυμαίνεται από 12cm έως και 19cm και τείνει να μηδενιστεί για $H/L=2,5$. Συμπερασματικά για ακριβή αποτελέσματα με μικρό περιθώριο σφάλματος για όλο το εύρος διαστάσεων απαιτείται η χρησιμοποίηση παραπάνω όρων από το γραμμικό πρόβλημα.

Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης του μη-γραμμικού προβλήματος για το σεισμό Duzce.

Επιρροή των μη-γραμμικών όρων στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας

Για τη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2)}$ στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ για διάφορους λόγους. Συγκεκριμένα ο πίνακας 7.2.2.5 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για ορθογωνικές δεξαμενές, ενώ αντίστοιχα ο πίνακας 7.2.2.6 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα για την ανάλυση σε κυλινδρικές δεξαμενές. Και στις δύο περιπτώσεις η τιμή του ύψους του ρευστού (H) διατηρείται σταθερή στη τιμή 15m ενώ μεταβάλλεται η τιμή του μήκους/διαμέτρου της δεξαμενής σε ένα εύρος τιμών 6-36m.

Μήκος L (m)	Λόγος H/L	$\eta_{2_{\max}}$ (m) - N=1	$\eta_{2_{\max}}$ (m) - N=3
6	2,50	0,09	0,10
8	1,87	0,04	0,13
10	1,50	0,03	0,09
12	1,25	0,03	0,08
14	1,07	0,03	0,04
16	0,94	0,04	0,05
18	0,83	0,04	0,05
20	0,75	0,04	0,04
22	0,68	0,04	0,03
24	0,63	0,04	0,03
26	0,58	0,04	0,04
28	0,54	0,04	0,04
30	0,50	0,02	0,04
32	0,47	0,02	0,04
34	0,44	0,02	0,03
36	0,41	0,01	0,03

Πίνακας 7.2.2.5 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),\max}$ ορθογωνικής δεξαμενής συναρτήσει του λόγου H/L για n=1 και n=1 & 3 με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Duzce (1999)

Παρατηρούμε, πως στο σεισμό του Duzce όπως και στη περίπτωση του σεισμού στη περιοχή Sakarya όσο ο λόγος H/L μειώνεται, τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται. Αυτό παρατηρείται όπως ήταν αναμενόμενο και στη περίπτωση της χρησιμοποίησης ενός γραμμικού όρου αλλά και σε αυτή της χρησιμοποίησης δύο όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η διαφορά των αποτελεσμάτων στις δύο περιπτώσεις δε μπορεί να θεωρηθεί σημαντική καθώς η μέγιστη απόκλιση είναι 9cm για H/L=1,87. Παρατηρούμε επίσης ότι όσο ο λόγος H/L μειώνεται τα αποτελέσματα συγκλίνουν και τείνουν σε μηδενική τιμή.

Αντίστοιχα το διάγραμμα για τη διαφορά της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.2.17.

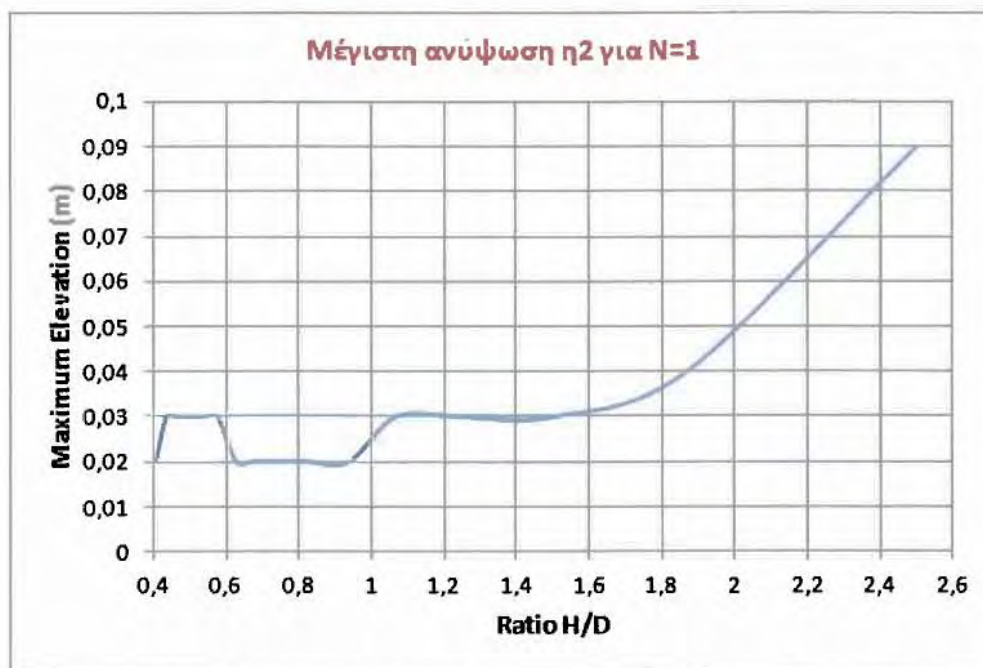


Εικόνα 7.2.2.17 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2),max}$ για N=1 και N=3 συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Duzce (1999)

Παρατηρούμε πως όπως και στο πρώτο σεισμό που μελετήθηκε (Sakarya), με την αύξηση του λόγου διαστάσεων H/L η μέγιστη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2)}$ αυξάνεται. Επίσης από το γράφημα 7.2.1.17 γίνεται αντιληπτό πως για λόγους $1,2 < H/L < 2,2$ τα αποτελέσματα για n=1 και n=1&3 αποκλίνουν σημαντικά με τη μέγιστη διαφορά να φθάνει τα 9cm για λόγο διαστάσεων H/L=1,87. Αντίστοιχα αποτελέσματα για κυλινδρικές δεξαμενές με τη χρησιμοποίηση ενός όρου από το γραμμικό πρόβλημα παρουσιάζονται στο πίνακα 7.2.2.6 και στο αντίστοιχο γράφημα της εικόνας 7.2.2.18. Παρατηρούμε ότι όπως και στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών έτσι και στις κυλινδρικές, όσο ο λόγος H/D μειώνεται τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται και τείνει να μηδενιστεί.

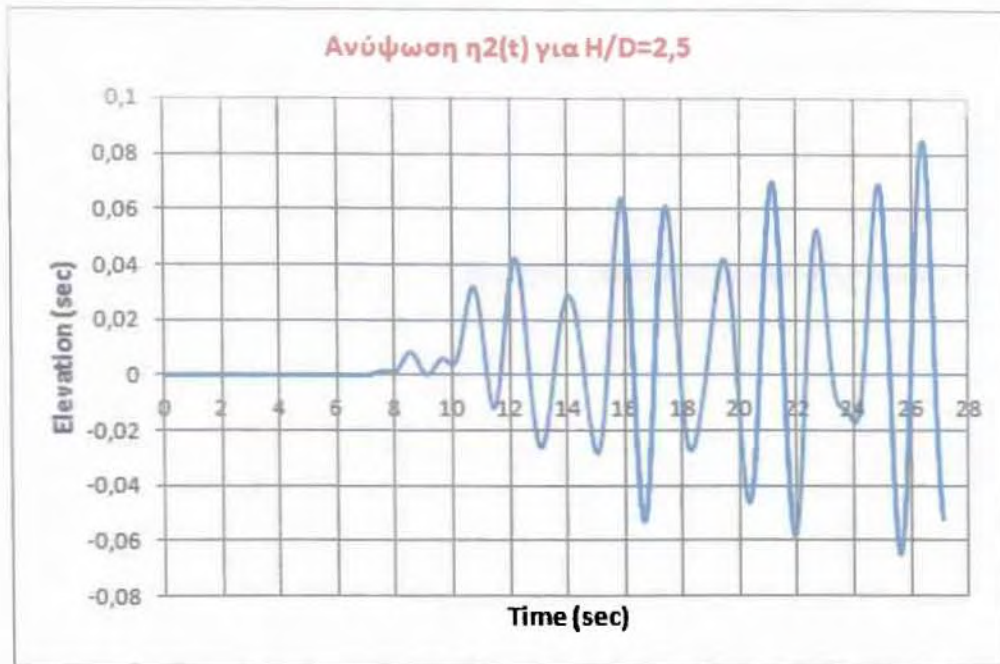
Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	$\eta_{2,max}$ (m) - N=1
6	2,50	0,09
8	1,87	0,04
10	1,50	0,03
12	1,25	0,03
14	1,07	0,03
16	0,94	0,02
18	0,83	0,02
20	0,75	0,02
22	0,68	0,02
24	0,63	0,02
26	0,58	0,03
28	0,54	0,03
30	0,50	0,03
32	0,47	0,03
34	0,44	0,03
36	0,41	0,02

Πίνακας 7.2.2.6 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής για n=1 με σταθερό ύψος H=15m



Εικόνα 7.2.2.18 Μέγιστη ανύψωση $\eta_{2,(max)}$ της ελεύθερης επιφάνειας για N=1 συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με ύψος H=15m, σεισμός Duzce (1999)

Τέλος το διάγραμμα που παρουσιάζει τη μορφή του $\eta_{(2)}$ συναρτήσει του χρόνου για τη σεισμική δόνηση στη περιοχή Duzce με σταθερό λόγο διαστάσεων H/D=2,5 δίνεται από τη την εικόνα 7.2.2.19.

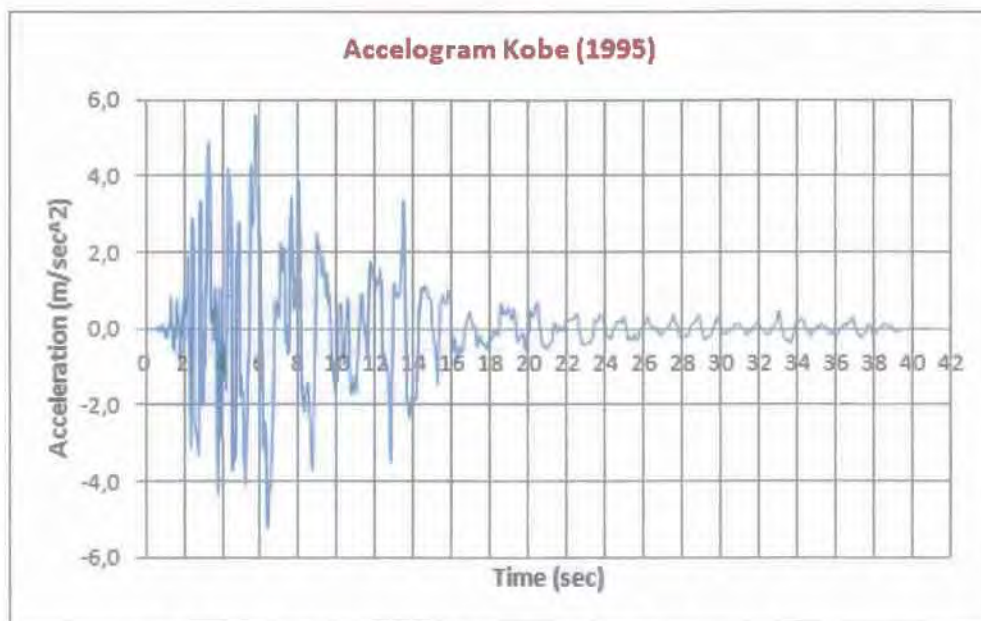


Εικόνα 7.2.2.19 Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_2(t)$ για κυλινδρική δεξαμενή με λόγο $H/D=2,5$ συναρτήσει του χρόνου, *Duzce Τουρκία 1999*

7.2.3 Σεισμός Kobe, Ιαπωνία 1995

Ο τρίτος σεισμός τον οποίο αναλύσαμε ήταν αυτός που έγινε 20km έξω πόλη Kobe της Ιαπωνίας στις 17 Ιανουαρίου το 1995. Περίπου 6.434 άνθρωποι έχασαν τη ζωή τους ενώ οι υλικές ζημιές υπολογίστηκαν περίπου στα 100 δισεκατομμύρια δολάρια. Το επιταχυνσιογράφημα που μελετήσαμε ώστε να πάρουμε και τα αποτελέσματα της για τη παρούσα εργασία προέρχεται από τον επιστημονικό σταθμό Takatori. Για περισσότερες πληροφορίες για το συγκεκριμένο σεισμό και τις συνέπειες που είχε μπορεί να βρει κανείς στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://en.wikipedia.org/wiki/Great_Hanshin_earthquake.

Παρακάτω παρουσιάζονται το επιταχυνσιογράφημα (Εικόνα 7.2.3.1) και το φάσμα απόκρισης του σεισμού (Εικόνα 7.2.3.2).



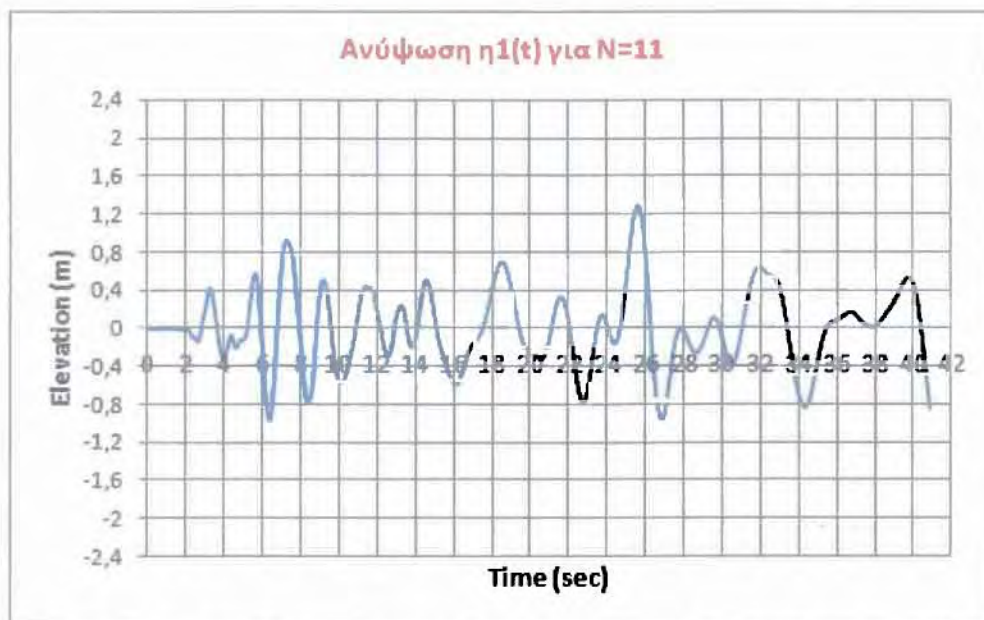
Εικόνα 7.2.3.1 Επιταχυνσιογράφημα σεισμού στη περιοχή Kobe της Ιαπωνίας, 17 Ιανουαρίου το 1995



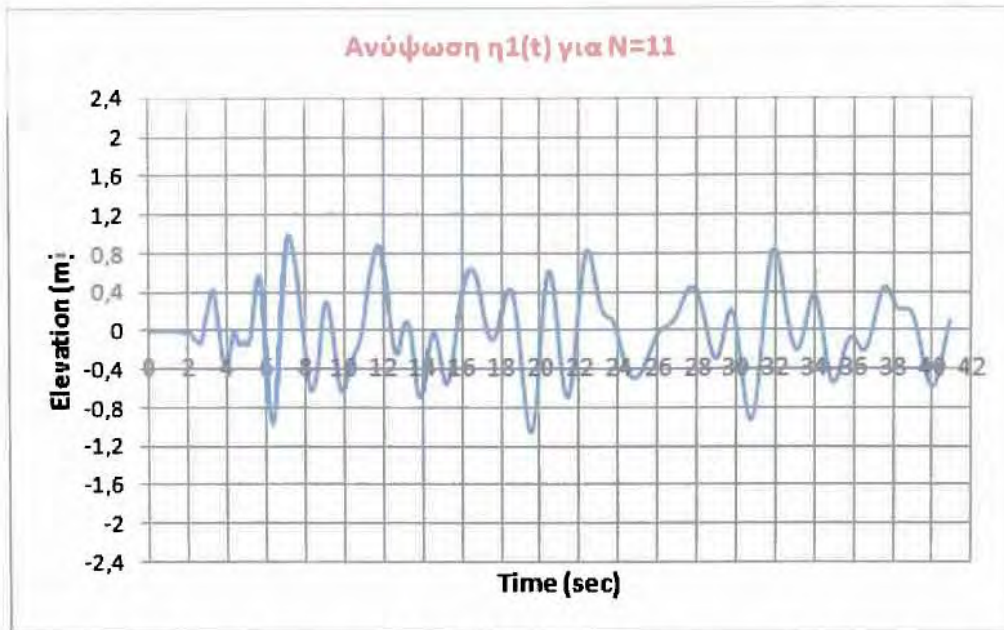
Εικόνα 7.2.3.2 Φάσμα απόκρισης ψευδοεπιτάχυνσης συναρτήσει της ιδιοπεριόδου T του σεισμού στη περιοχή Kobe της Ιαπωνίας.

Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας με γραμμική ανάλυση

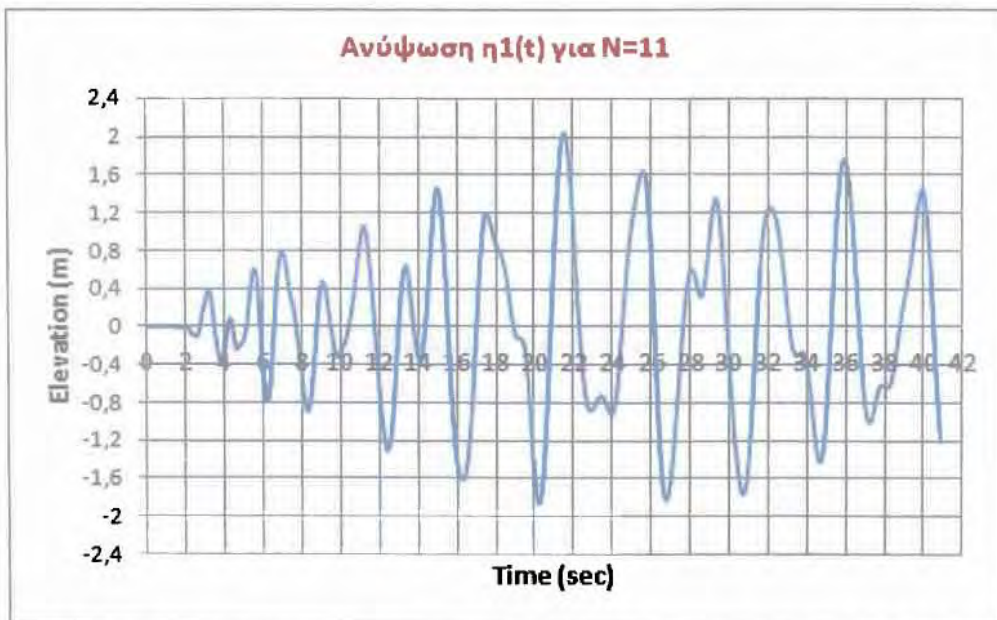
Για ορθογωνική δεξαμενή, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για διάφορους λόγους διαστάσεων παρουσιάζεται στα ακόλουθα γραφήματα



Εικόνα 7.2.3.3 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.5$), σεισμός Kobe (1995)



Εικόνα 7.2.3.4 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.75$), σεισμός Kobe (1995)

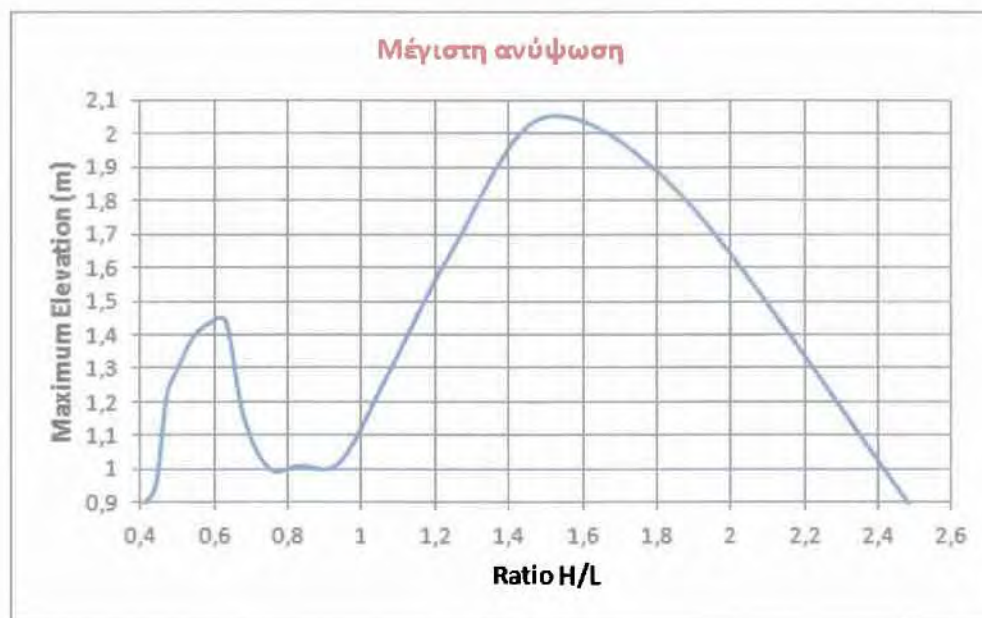


Εικόνα 7.2.3.5 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=1.5$), σεισμός Kobe (1995)

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές μήκους L της δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού στο εσωτερικό $H=15\text{m}$. Το αντίστοιχο γράφημα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσει του λόγου H/L απεικονίζεται στην Εικόνα 7.2.3.6.

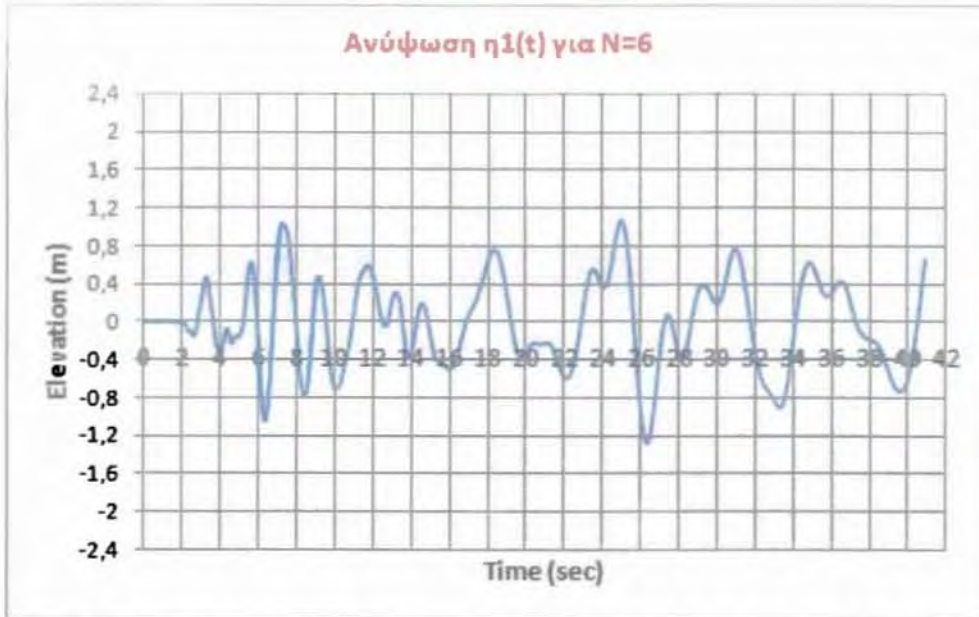
Μήκος L (m)	Λόγος H/L	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	0,87
8	1,87	1,81
10	1,50	2,05
12	1,25	1,66
14	1,07	1,28
16	0,94	1,02
18	0,83	1,01
20	0,75	1,00
22	0,68	1,15
24	0,63	1,44
26	0,58	1,43
28	0,54	1,39
30	0,50	1,30
32	0,47	1,22
34	0,44	0,95
36	0,41	0,90

Πίνακας 7.2.3.1 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Kobe (1995)

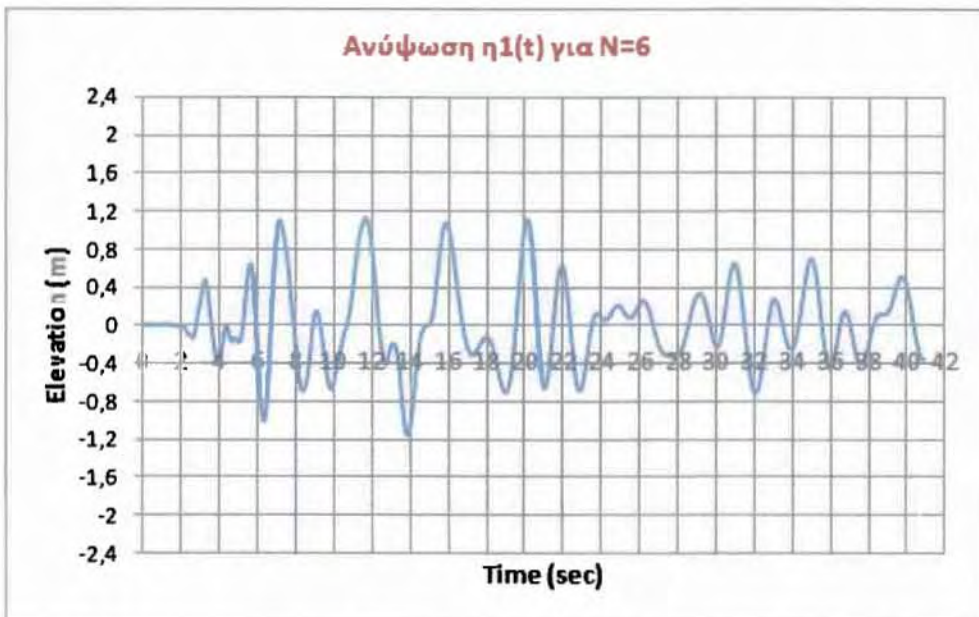


Εικόνα 7.2.3.6 Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Kobe (1995)

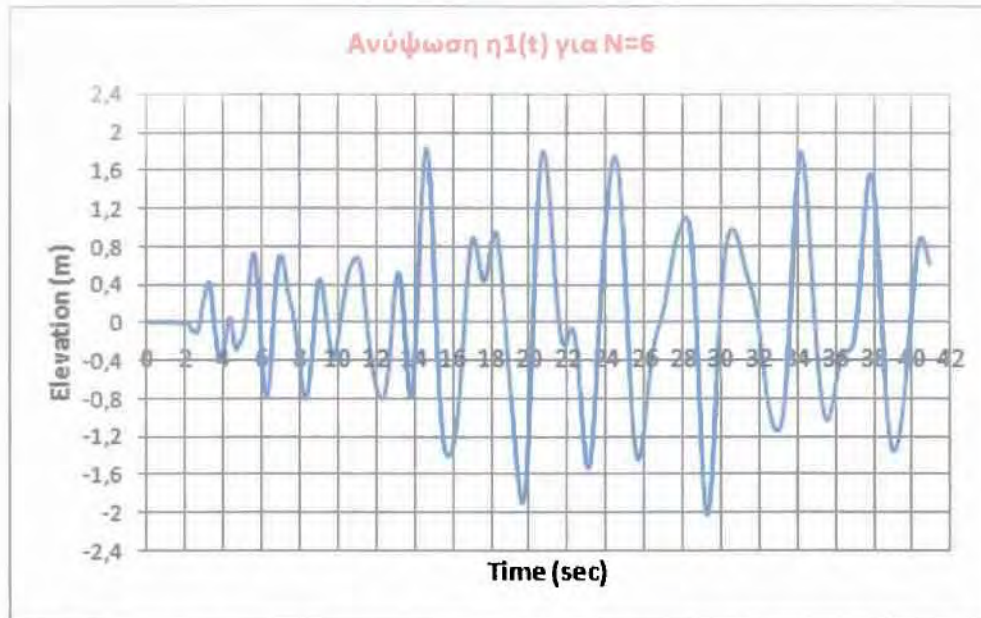
Για κυλινδρική δεξαμενή τα αντίστοιχα διαγράμματα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για διάφορες τιμές του λόγου διαστάσεων H/D παρουσιάζονται στις ακόλουθες εικόνες.



Εικόνα 7.2.3.7 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.5$), σεισμός Kobe (1995)



Εικόνα 7.2.3.8 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.75$), σεισμός Kobe (1995)

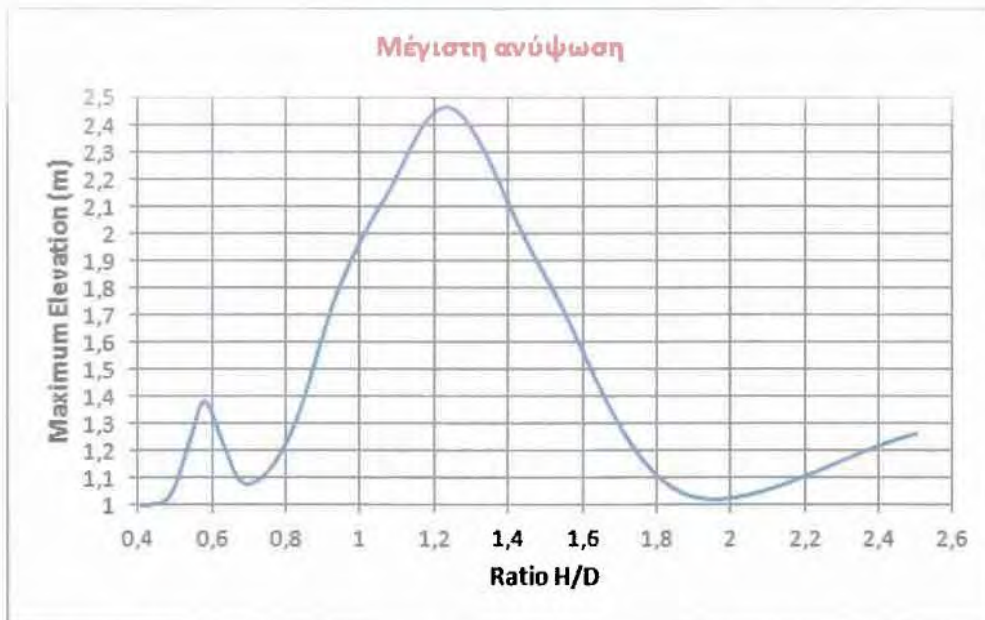


Εικόνα 7.2.3.9 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=1.5$), σεισμός Kobe (1995)

Στο πίνακα 7.2.3.2 παρατίθενται αναλυτικά οι τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές διαμέτρου D της δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$. Τέλος το αντίστοιχο διάγραμμα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσει του λόγου διαστάσεων H/D παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.3.10.

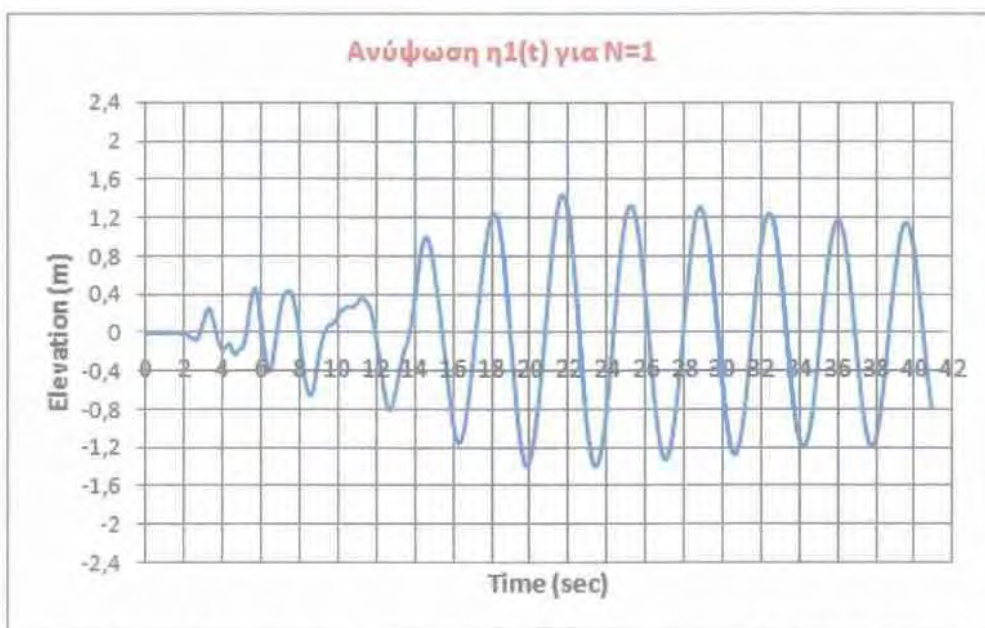
Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1)\max}$ (m)
6	2,50	1,26
8	1,87	1,04
10	1,50	1,84
12	1,25	2,46
14	1,07	2,14
16	0,94	1,79
18	0,83	1,32
20	0,75	1,12
22	0,68	1,08
24	0,63	1,22
26	0,58	1,38
28	0,54	1,24
30	0,50	1,07
32	0,47	1,01
34	0,44	1,00
36	0,41	0,99

Πίνακας 7.2.3.2 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερό ύψος $H=15\text{m}$

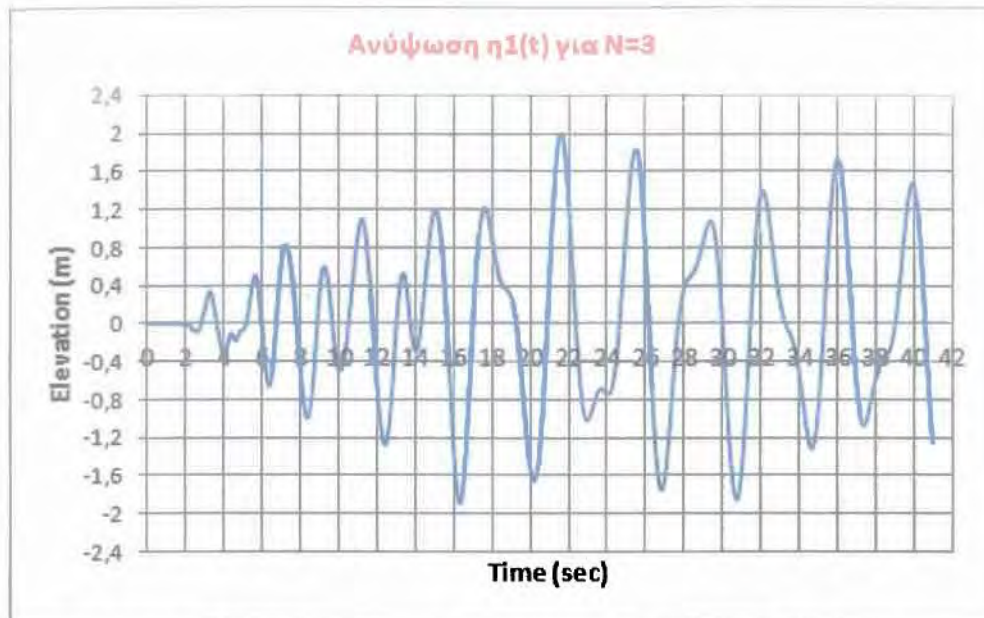


Εικόνα 7.2.3.10 Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Kobe (1995)

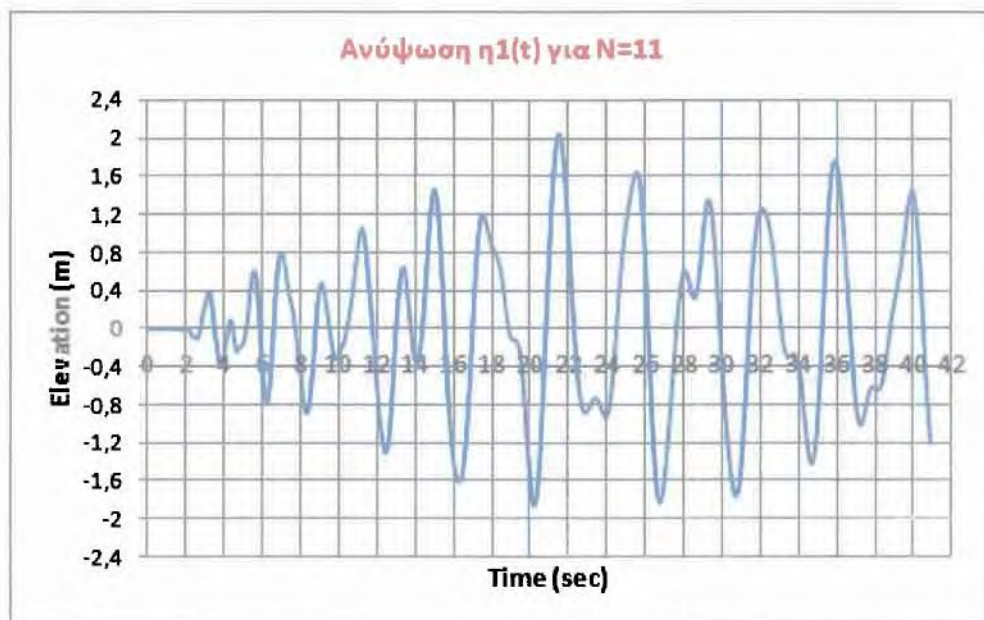
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση ενός (N=1), δύο (N=3) και έξι (N=11) γραμμικών όρων για σταθερό λόγο διαστάσεων H/L =1.5.



Εικόνα 7.2.3.11 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για σταθερό λόγο H/L=1.5 ορθογωνικής δεξαμενής και n=1, σεισμός Kobe (1995)

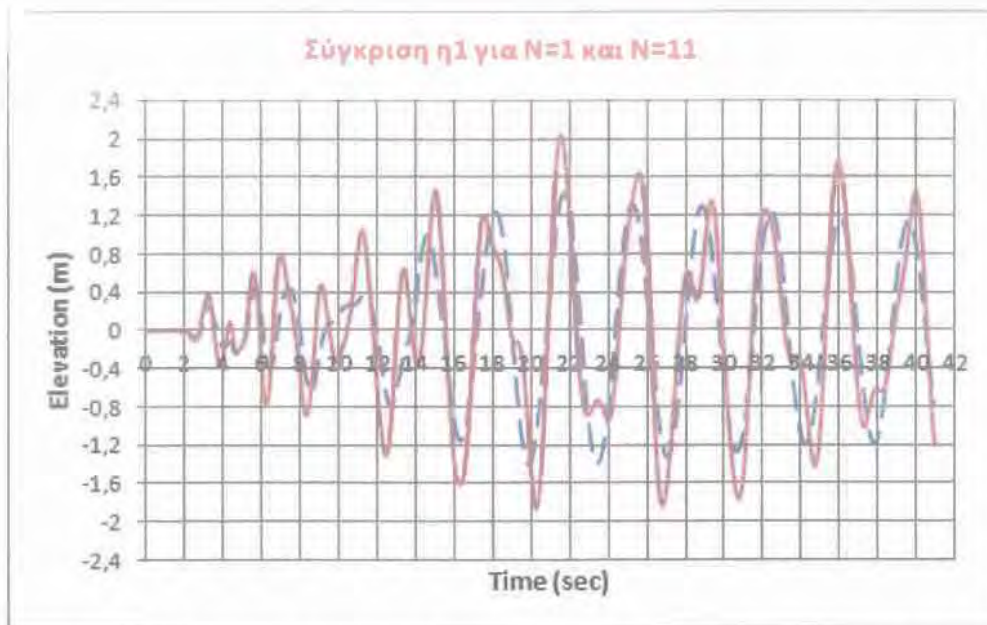


Εικόνα 7.2.3.12 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/L=1.5$ και $n=1\&3$, σεισμός Kobe (1995)



Εικόνα 7.2.3.13 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή για σταθερό λόγο $H/L=1.5$ και $n=1,3,5,7,9,11$, σεισμός Kobe (1995)

Τέλος στην εικόνα 7.2.3.14 παρατίθεται ένα συγκριτικό διάγραμμα της ανύψωσης που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση ενός (Εικόνα 7.2.3.11) και έξι (Εικόνα 7.2.3.13) γραμμικών όρων. Η διακεκομμένη γραμμή (μπλε) είναι η ανύψωση που προκύπτει για $N=1$ και συνεχής (κόκκινη) είναι η ανύψωση για $N=11$.



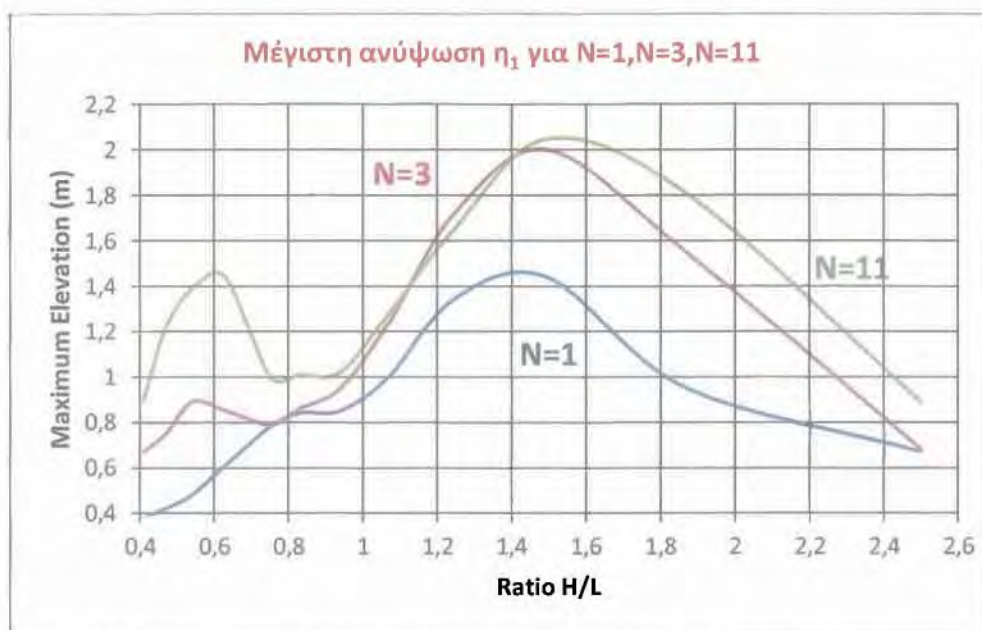
Εικόνα 7.2.3.14 Σύγκριση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνική δεξαμενή μεταξύ $n=1$ και $n=1,3,5,7,9,11$ και λόγο $H/L=1.5$, σεισμός Kobe (1995)

Στο σεισμό του Kobe παρατηρούμε ότι λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο ($n=1$) τα αποτελέσματα αποκλίνουν αρκετά σε σχέση με αυτά της χρησιμοποίησης 11 όρων τόσο στη μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και στη βύθιση. Αξίζει να σημειωθεί πως για $n=1$ και λόγο διαστάσεων $H/L=1.5$ η μέγιστη ανύψωση που υπολογίζεται είναι $1,44m$ ενώ για $n=1,3,5,7,9,11$ η μέγιστη ανύψωση φτάνει τα $2,05m$. Υπάρχει δηλαδή μία διαφορά ακρίβειας $61cm$ η οποία μπορεί να θεωρηθεί αρκετά σημαντική. Λαμβάνοντας υπόψιν ένα παραπάνω όρο δηλαδή $n=1$ & 3 τα αποτελέσματα παρουσιάζουν πολύ καλύτερη ακρίβεια και συμπίπτουν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση 11 όρων με πολύ μικρό σφάλμα το οποίο θεωρείται αμελητέο.

Επειδή όμως για ένα συγκεκριμένο λόγο διαστάσεων H/L δε μπορούμε να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα θα βρούμε τις τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)max}$ για διάφορους λόγους $H/L - H/D$. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση που προκύπτει με τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Αναλυτικότερα για ορθογωνικές δεξαμενές (Πίνακας 7.2.3.3 - Εικόνα 7.2.3.15) προκύπτει

Λόγος H/L	$\eta_{1_{\max}} - N=1$	$\eta_{1_{\max}} - N=3$	$\eta_{1_{\max}} - N=5$	$\eta_{1_{\max}} - N=7$	$\eta_{1_{\max}} - N=9$	$\eta_{1_{\max}} - N=11$
2,5	0,67	0,68	0,93	0,87	0,87	0,89
1,87	0,95	1,55	1,70	1,86	1,81	1,81
1,5	1,44	2,00	2,13	2,10	2,01	2,05
1,25	1,35	1,73	1,83	1,76	1,66	1,66
1,07	1,00	1,24	1,37	1,34	1,37	1,28
0,94	0,85	0,95	1,00	1,00	1,01	1,02
0,83	0,84	0,86	1,06	0,96	0,99	1,01
0,75	0,78	0,79	1,07	0,95	0,97	1,00
0,63	0,61	0,85	1,00	1,22	1,41	1,44
0,54	0,48	0,89	0,90	1,06	1,27	1,39
0,47	0,42	0,75	0,81	0,90	1,08	1,22
0,41	0,38	0,67	0,78	0,77	0,85	0,90

Πίνακας 7.2.3.3. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)\max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Kobe (1995)

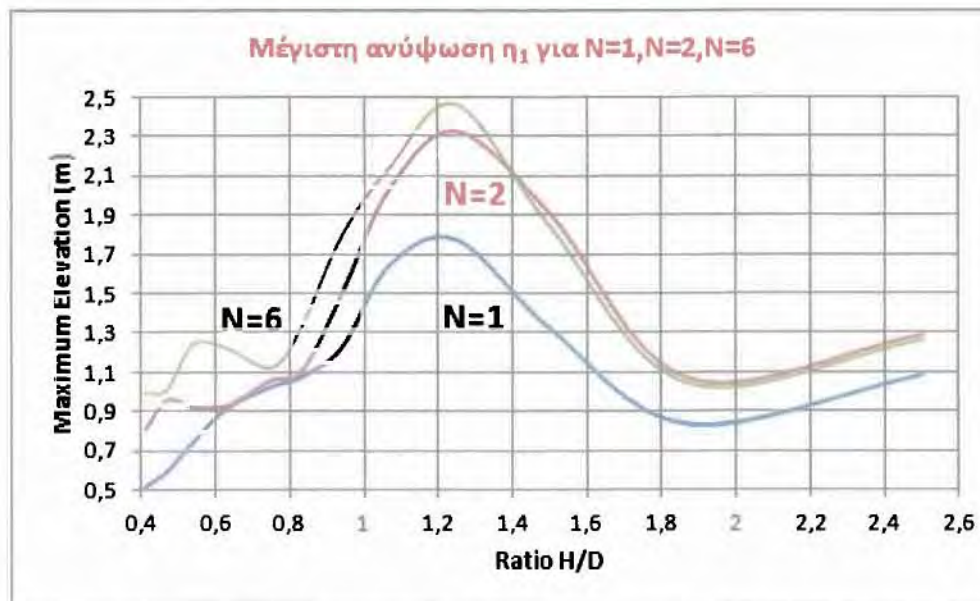


Εικόνα 7.2.3.15 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για N=1, N=3 και N=11 συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Kobe (1995)

Αντίστοιχα με το πίνακα 7.2.3.3, τα αποτελέσματα για την ανύψωση σε κυλινδρικές δεξαμενές παρουσιάζονται στο πίνακα 7.2.3.4. Εκτός από τις διαφορές που παρατηρούνται στη μέγιστη ανύψωση λόγω της μεταβολής των διαστάσεων της δεξαμενής και συγκεκριμένα της διαμέτρου D αξίζει να σημειωθεί και η διαφορά λόγω της χρησιμοποίησης παραπάνω όρων από την επαγωγική λύση ($n=1, n=1,2, n=1,2,3, \dots, N$).

Λόγος H/D	$\eta_{1_{\max}} - N=1$	$\eta_{1_{\max}} - N=2$	$\eta_{1_{\max}} - N=3$	$\eta_{1_{\max}} - N=4$	$\eta_{1_{\max}} - N=5$	$\eta_{1_{\max}} - N=6$
2,5	1,09	1,29	1,24	1,24	1,26	1,26
1,87	0,84	1,07	0,97	0,99	1,04	1,04
1,5	1,33	1,91	1,80	1,83	1,90	1,84
1,25	1,78	2,33	2,41	2,34	2,47	2,46
1,07	1,65	2,04	2,14	2,11	2,10	2,14
0,94	1,23	1,50	1,67	1,68	1,82	1,79
0,83	1,08	1,10	1,31	1,27	1,31	1,32
0,75	1,03	1,06	1,27	1,08	1,08	1,12
0,63	0,92	0,93	1,16	1,05	1,15	1,22
0,54	0,75	0,92	0,92	1,01	1,24	1,24
0,47	0,60	0,96	0,95	0,90	0,99	1,01
0,41	0,52	0,81	0,85	0,84	0,95	0,99

Πίνακας 7.2.3.4. Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),\max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Kobe (1995)



Εικόνα 7.2.3.16 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),\max}$ της ελεύθερης επιφάνειας κυλινδρικής δεξαμενής για N=1, N=2 και N=6 συναρτήσει του λόγου H/D με H=15m, σεισμός Kobe (1995)

Από την ανωτέρω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι στο σεισμό του Kobe τα αποτελέσματα για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με τη χρήση ενός γραμμικού όρου διαφέρουν σε σημαντικό βαθμό σε σχέση με τη χρησιμοποίηση 6 όρων. Συγκεκριμένα για τις ορθογωνικές δεξαμενές η διαφορά φτάνει μέχρι και κοντά στο 1m (H/L=0,54) ενώ και στις κυλινδρικές δεξαμενές υπάρχει διαφορά η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να θεωρηθεί πολύ σημαντική καθώς φτάνει έως και τα 70cm (H/L=1,25). Γενικά για το συγκεκριμένο σεισμό παρατηρείται σημαντική διαφορά στα αποτελέσματα της ανύψωσης με τη χρήση ενός και έξι γραμμικών όρων σε όλο το εύρος των τιμών του λόγου διαστάσεων

H/L – H/D. Για ακριβή αποτελέσματα με μικρό περιθώριο σφάλματος απαιτείται η χρήση 2 επαγωγικών όρων και για ορισμένους λόγους διαστάσεων (Πίνακας 7.2.3.6) είναι απαραίτητη ακόμα και η χρησιμοποίηση 3 γραμμικών όρων.

Επιρροή των μη-γραμμικών όρων στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας

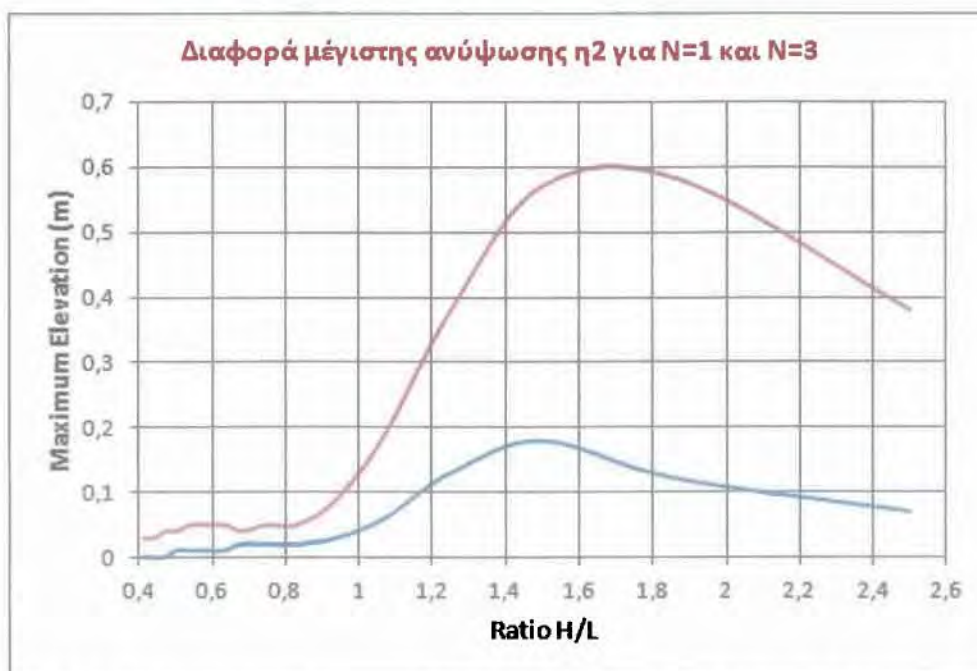
Για τη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2)}$ στους παρακάτω πίνακες παθétονται οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ για διάφορους λόγους. Συγκεκριμένα ο πίνακας 7.2.3.5 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για ορθογωνικές δεξαμενές, ενώ αντίστοιχα ο πίνακας 7.2.3.6 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα για την ανάλυση σε κυλινδρικές δεξαμενές. Και στις δύο περιπτώσεις η τιμή του ύψους του ρευστού (H) διατηρείται σταθερή στη τιμή 15m ενώ μεταβάλλεται η τιμή του μήκους/διαμέτρου της δεξαμενής σε ένα εύρος τιμών 6-36m. Υπενθυμίζουμε ότι στις ορθογωνικές δεξαμενές πραγματοποιήθηκε ανάλυση λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο (n=1) και δύο γραμμικούς όρους (n=1 & 3) ενώ στις κυλινδρικές δεξαμενές τα αποτελέσματα που έχουμε, πάρθηκαν από την ανάλυση με τη χρησιμοποίηση ενός όρου από το γραμμικό πρόβλημα.

Μήκος L (m)	Λόγος H/L	$\eta_{2_{\max}}$ (m) - N=1	$\eta_{2_{\max}}$ (m) - N=3
6	2,50	0,07	0,38
8	1,87	0,12	0,58
10	1,50	0,18	0,57
12	1,25	0,13	0,38
14	1,07	0,06	0,19
16	0,94	0,03	0,09
18	0,83	0,02	0,05
20	0,75	0,02	0,05
22	0,68	0,02	0,04
24	0,63	0,01	0,05
26	0,58	0,01	0,05
28	0,54	0,01	0,05
30	0,50	0,01	0,04
32	0,47	0,00	0,04
34	0,44	0,00	0,03
36	0,41	0,00	0,03

Πίνακας 7.2.3.5 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),\max}$ ορθογωνικής δεξαμενής συναρτήσει του λόγου H/L για n=1 και n=1 & 3 με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Kobe (1995)

Παρατηρούμε, ότι όσο ο λόγος H/L μειώνεται, τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται και τείνει σταδιακά να μηδενιστεί όπως και στις περιπτώσεις των σεισμών Duzce και Sakaria.

Αυτό παρατηρείται όπως ήταν αναμενόμενο και στη περίπτωση της χρησιμοποίησης ενός γραμμικού όρου αλλά και σε αυτή της χρησιμοποίησης δύο όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα είναι φανερό ότι για λόγους διαστάσεων $H/L < 0,94$ η διαφορά της μέγιστης ανύψωσης στις δύο περιπτώσεις είναι αμελητέα. Αντίθετα για λόγους $H/L > 0,97$ η διαφορά στα αποτελέσματα της ανύψωσης μπορεί να θεωρηθεί αρκετά σημαντική καθώς κυμνείται από 25cm ($H/L=1,25$) έως και 46cm ($H/L=1,87$). Αντίστοιχα το διάγραμμα για τη διαφορά της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.3.17.



Εικόνα 7.2.3.17 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $n=1$ και $n=1\&3$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής όπου $H=15m$, σεισμός Kobe (1995)

Για τις κυλινδρικές δεξαμενές ο αντίστοιχος πίνακας δίνει τα εξής αποτελέσματα.

Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	$\eta_{2,max}$ (m) - N=1
6	2,50	0,10

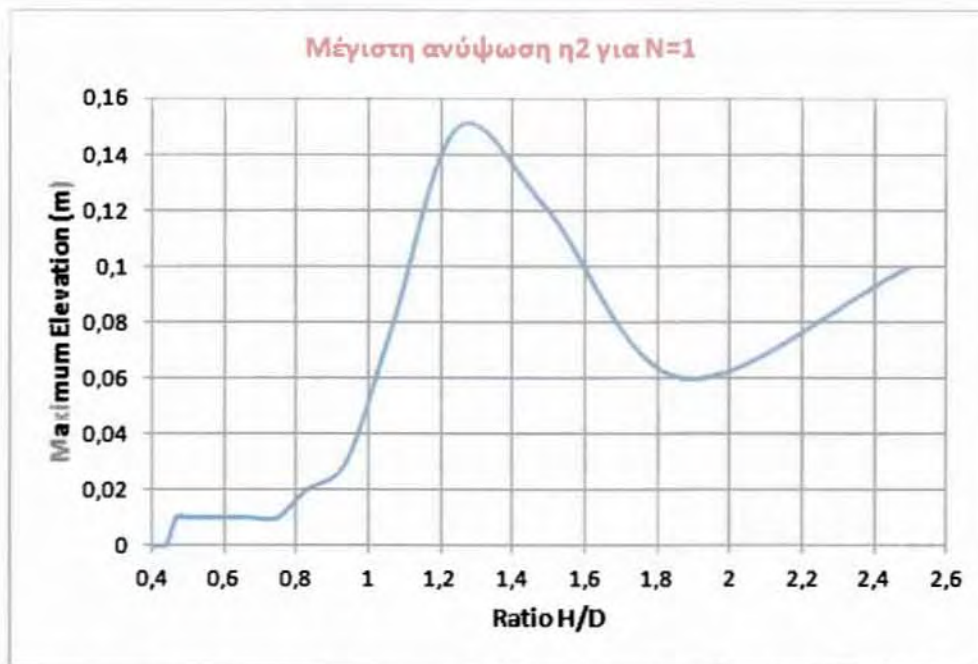
8	1,87	0,06
10	1,50	0,12
12	1,25	0,15
14	1,07	0,08
16	0,94	0,03
18	0,83	0,02
20	0,75	0,01
22	0,68	0,01
24	0,63	0,01
26	0,58	0,01
28	0,54	0,01
30	0,50	0,01
32	0,47	0,01
34	0,44	0,00
36	0,41	0,00

Πίνακας 7.2.3.6 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2),max}$ συναρτήσεως του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής για N=1 με σταθερό ύψος H=15m

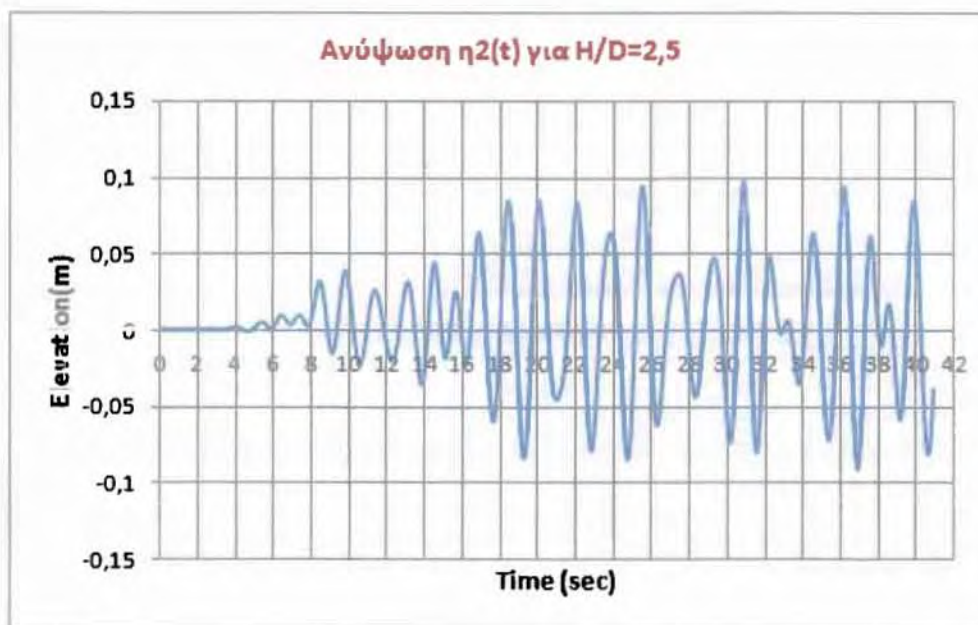
Παρατηρούμε ότι όπως και στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών έτσι και εδώ, όσο ο λόγος H/D μεώνεται τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται και τείνει να μηδενιστεί. Επίσης αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα στις κυλινδρικές και στις ορθογωνικές δεξαμενές με τη χρησιμοποίηση ενός γραμμικού όρου παρατηρούμε ότι συγκλίνουν αρκετά για όλο το φάσμα του λόγου διαστάσεων H/L-H/D.

Στην επόμενη σελίδα στην εικόνα 7.2.56 παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ της ελεύθερης επιφάνειας για λόγους διαστάσεων από 0,4 έως 2,6. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται και στις ορθογωνικές δεξαμενές.

Τέλος το διάγραμμα που δείχνει τη μορφή του $\eta_{(2)}$ συναρτήσεως του χρόνου για τη σεισμική δόνηση του Kobe με σταθερό λόγο H/D=2,5 παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.2.57. Για λόγους διαστάσεων μικρότερους του 2,5 το παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζει την ίδια μορφή αλλά η μέγιστη ανύψωση έχει μικρότερο εύρος όπως φαίνεται και από τις τιμές του πίνακα 7.2.18. Αξίζει να σημειωθεί πως παρόμοια μορφή έχει το $\eta_{(2)}$ (με διαφορετικό εύρος βέβαια) και στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών για διάφορους λόγους H/L.



Εικόνα 7.2.3.18 Μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $N=1$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με ύψος $H=15m$, σεισμός Kobe (1995)

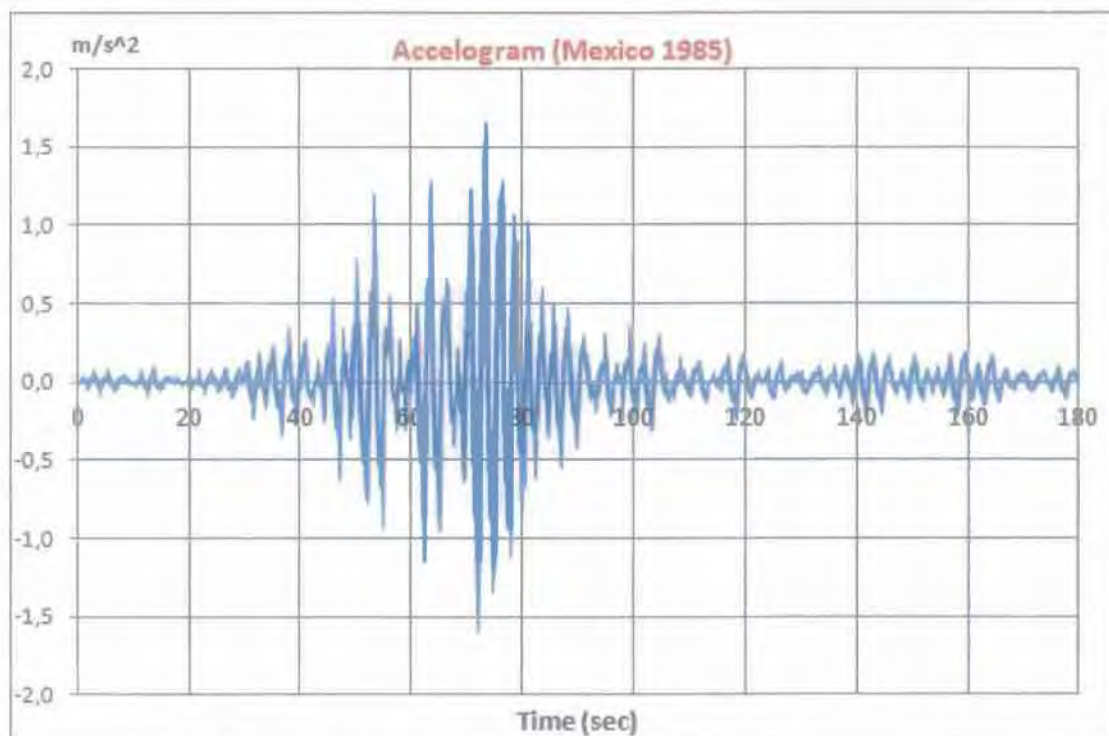


Εικόνα 7.2.3.19 Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_2(t)$ για κυλινδρική δεξαμενή με λόγο $H/D=2,5$ συναρτήσει του χρόνου, σεισμός Kobe (1995)

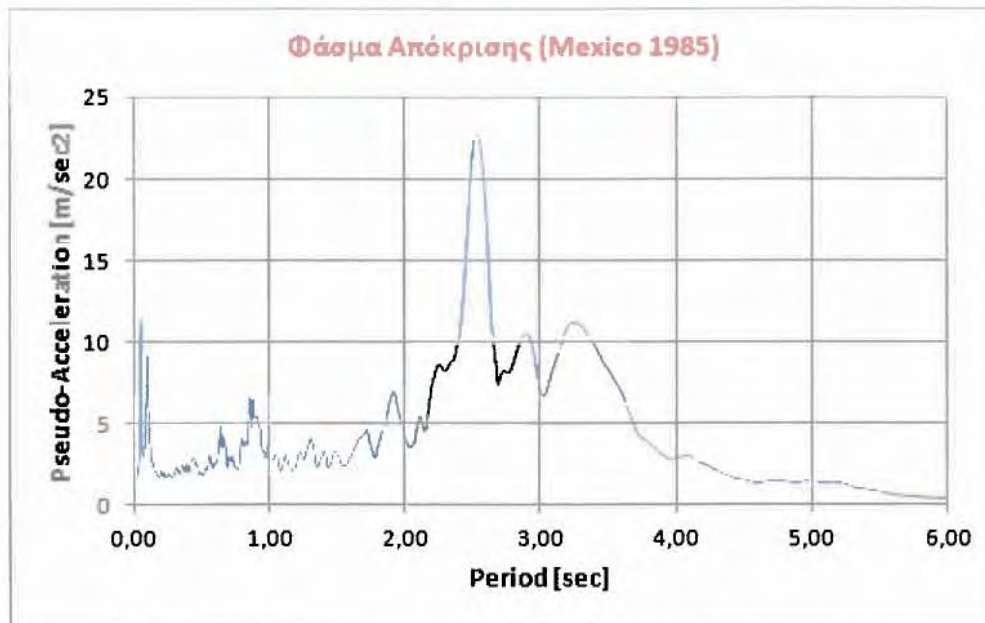
7.2.4 Σεισμός Mexico, Μεξικό 1985

Ο τέταρτος σεισμός τον οποίο μελετήσαμε ήταν αυτός που έγινε στη πόλη του Μεξικού στις 19 Σεπτεμβρίου του 1985 με μέγεθος 8 της κλίμακας ρίχτερ. Πάνω από 9.500 άνθρωποι έχασαν τη ζωή (ενώ από ειδικούς εκτιμάται ότι ο πραγματικός αριθμός των νεκρών ξεπερνάει τους 40.000), 30.000 άνθρωποι τραυματίστηκαν ενώ περίπου 100.000 έμειναν άστεγοι. Οι υλικές ζημιές ήταν ανυπολόγιστες για πολλές περιοχές του Μεξικού με κυριότερες αυτές της πρωτεύουσας Mexico City στην οποία 412 κτίρια καταστράφηκαν ολοσκερώς και άλλες 3.124 είχαν υποστεί σοβαρότατη ζημιά. Εκτιμάται ότι ο σεισμός έγινε αισθητός από 20 εκατομμύρια ανθρώπους. Το επιταχυνσιογράφημα που μελετήσαμε ώστε να πάρουμε και τα αποτελέσματα για τη παρούσα εργασία προέρχεται από την υπηρεσία "Secretaria de Comunicaciones y Transportes" (SCT). Για περισσότερες πληροφορίες για το συγκεκριμένο σεισμό και τις συνέπειες που είχε μπορεί να βρει κανείς στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://en.wikipedia.org/wiki/1985_Mexico_City_earthquake.

Στη παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού



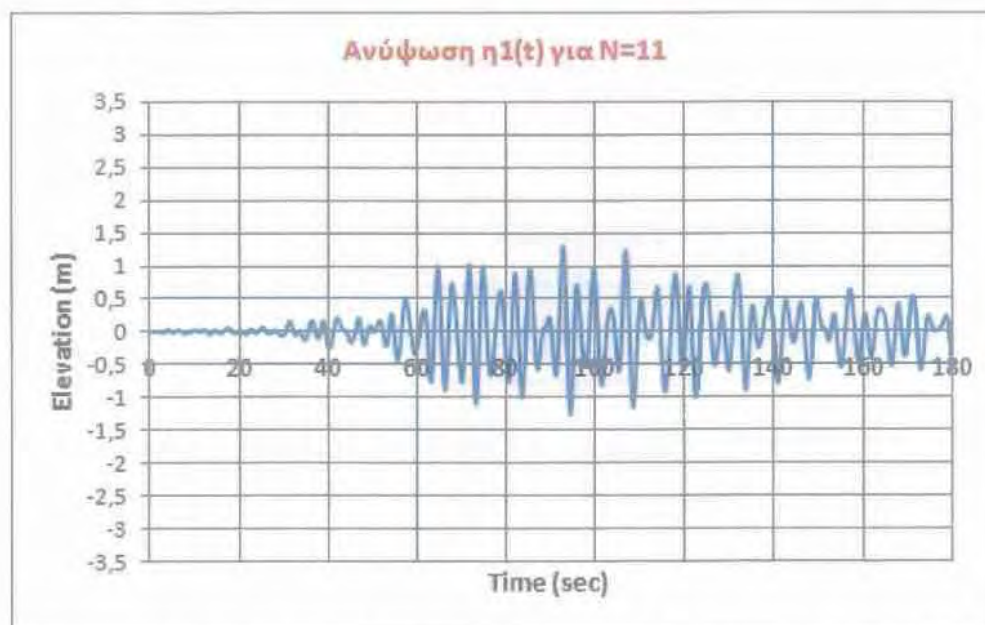
Εικόνα 7.2.4.1 Επιταχυνσιογράφημα του σεισμού στο Μεξικό 19 Σεπτεμβρίου του 1985



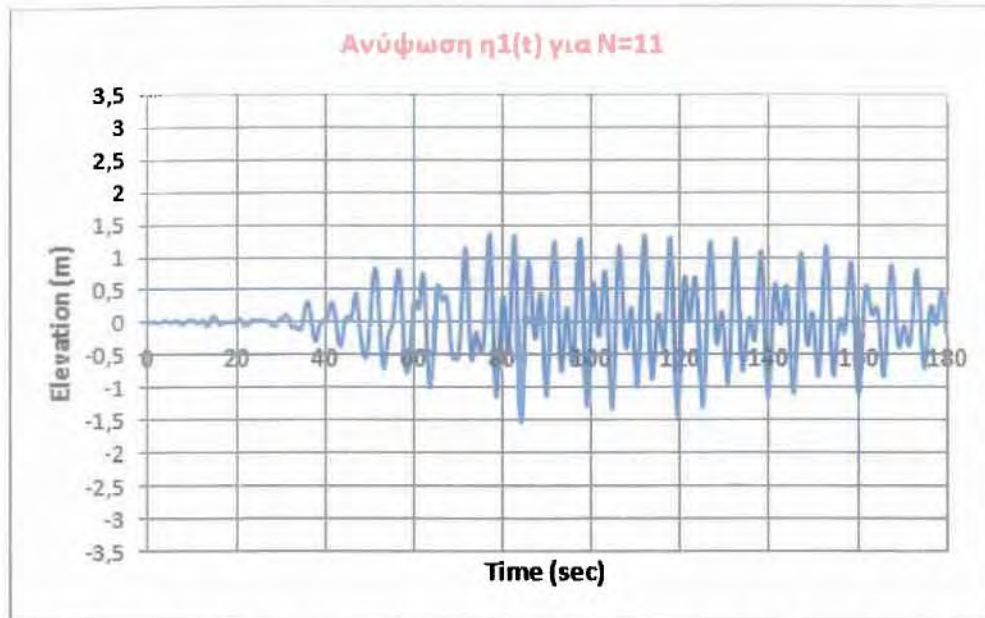
Εικόνα 7.2.4.2 Φάσμα απόκρισης ψευδοεπιτάχυνσης συναρτήσει της ιδιοπεριόδου T του σεισμού στη περιοχή του Μεξικό.

Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας με γραμμική ανάλυση

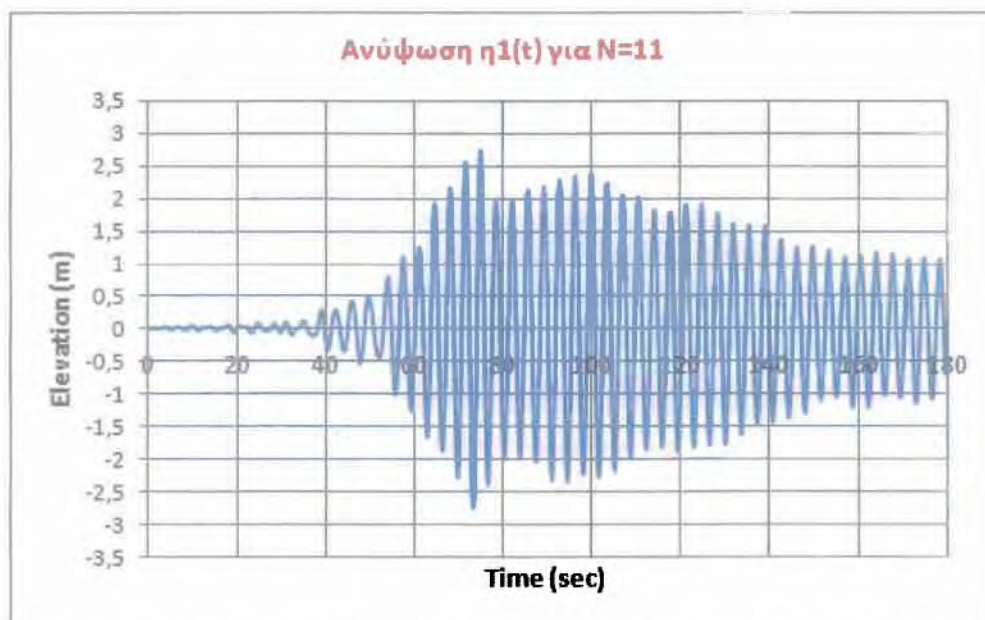
Για ορθογωνική δεξαμενή, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για διάφορους λόγους διαστάσεων παρουσιάζεται στα ακόλουθα γραφήματα



Εικόνα 7.2.4.3 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.5$), σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.4.4 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=0.75$), σεισμός Mexico (1985)

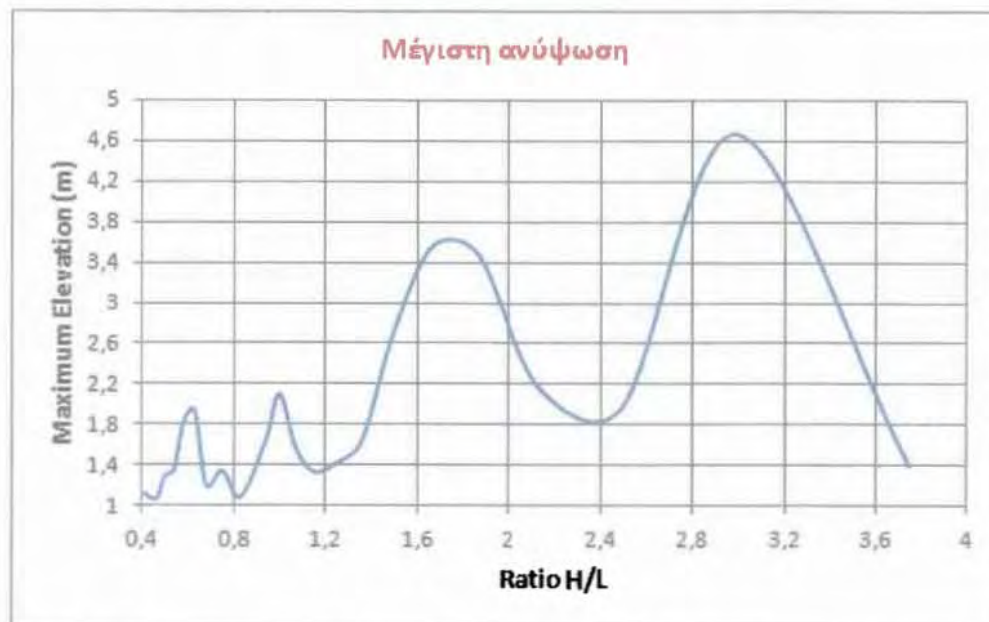


Εικόνα 7.2.4.5 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για μήκος ορθογωνικής δεξαμενής $L=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/L=1.5$), σεισμός Mexico (1985)

Στον Πίνακα 7.2.4.1 παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές μήκους L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$. Το αντίστοιχο γράφημα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσεως του λόγου H/L απεικονίζεται στην Εικόνα 7.2.4.6.

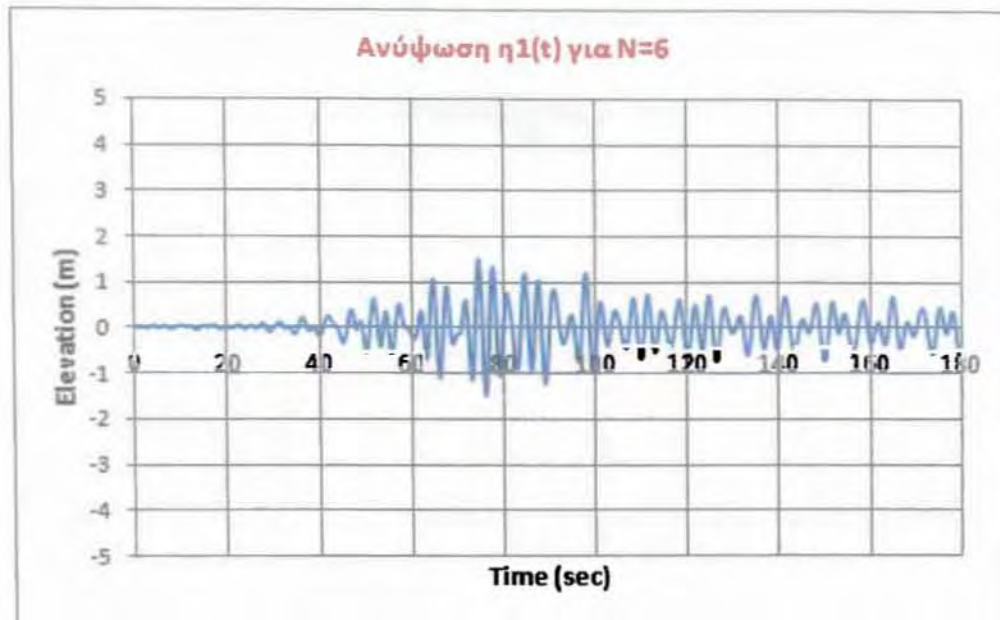
Μήκος L (m)	Λόγος H/L	Μέγιστη Ανύψωση η_{1max} (m)
4	3,75	1,40
5	3,00	4,67
6	2,50	1,98
7	2,14	2,16
8	1,87	3,48
9	1,67	3,57
10	1,50	2,73
11	1,36	1,65
12	1,25	1,43
13	1,15	1,34
14	1,07	1,58
15	1,00	2,11
16	0,94	1,65
18	0,83	1,09
20	0,75	1,35
22	0,68	1,21
24	0,63	1,94
26	0,58	1,82
28	0,54	1,36
30	0,50	1,30
32	0,47	1,09
34	0,44	1,08
36	0,41	1,13

Πίνακας 7.2.4.1 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με σταθερό ύψος H=15m

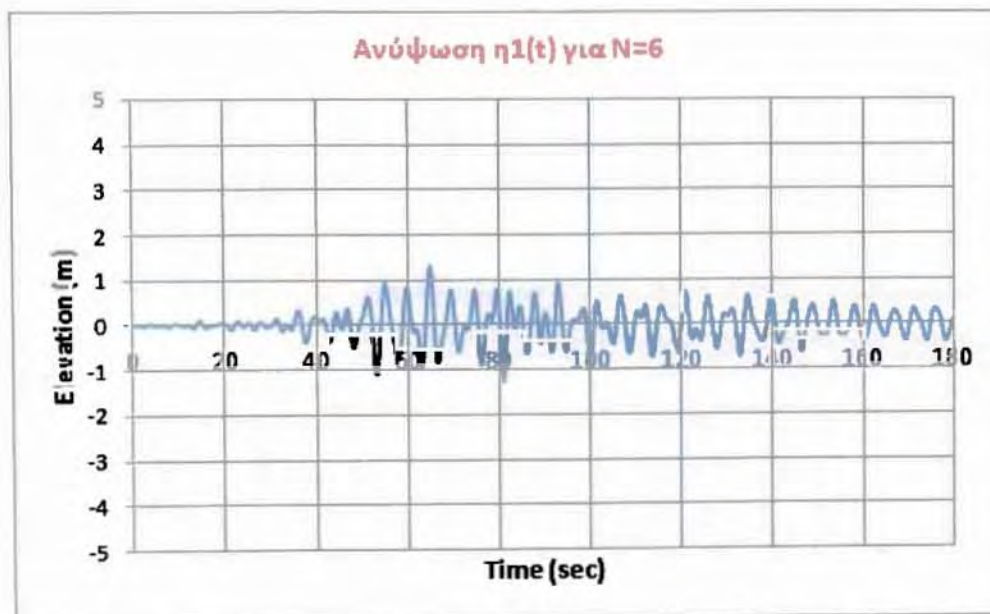


Εικόνα 7.2.4.6 Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(1),max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Mexico (1985)

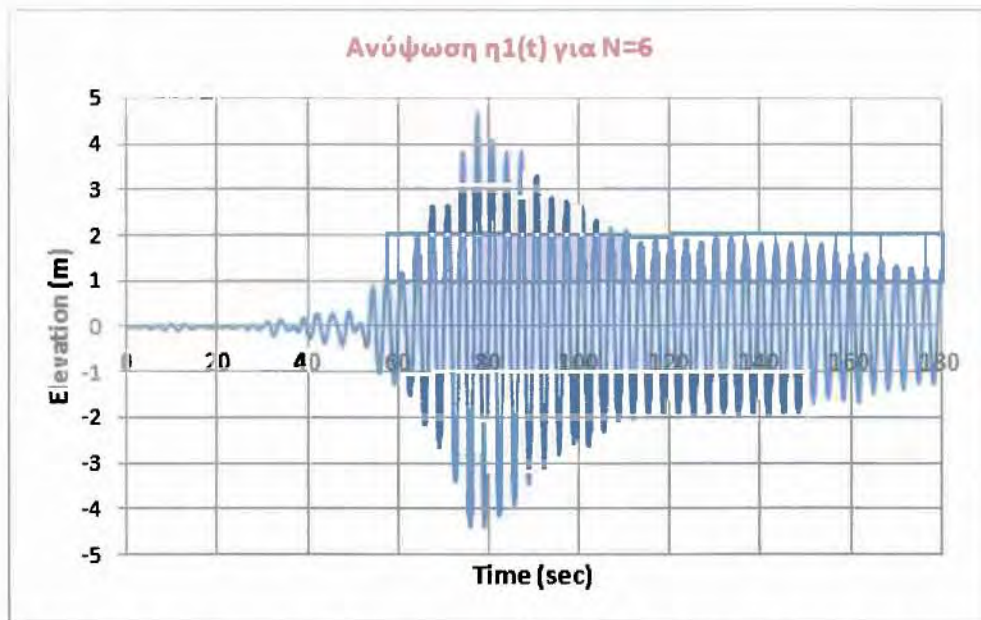
Για κυλινδρική δεξαμενή τα αντίστοιχα διαγράμματα που προκύπτουν για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας παρουσιάζονται στα ακόλουθα γραφήματα.



Εικόνα 7.2.4.7 Διάγραμμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=30\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=0.5$), σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.4.8 Διάγραμμα μετατόπισης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=20\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=0.75$), σεισμός Mexico (1985)



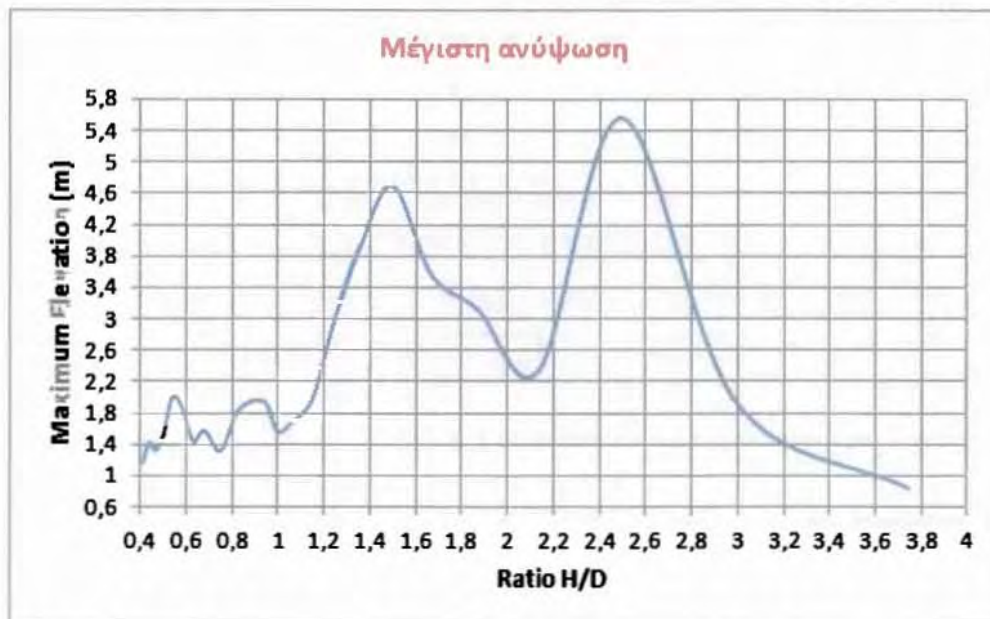
Εικόνα 7.2.4.9 Διάγραμμα μετατόπισης ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για διάμετρο κυλινδρικής δεξαμενής $D=10\text{m}$ και ύψος υγρού $H=15\text{m}$ ($H/D=1.5$), σεισμός Mexico (1985)

Στο Πίνακα 7.2.4.2 παρουσιάζονται ενδεικτικά οι τιμές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές διαμέτρου D κυλινδρικής δεξαμενής και σταθερή τιμή υψους ρευστού $H=15\text{m}$. Το αντίστοιχο γράφημα της μέγιστης ανύψωσης συναρτήσεως του λόγου H/D απεικονίζεται στην Εικόνα 7.2.4.10.

Ο συγκεκριμένος σεισμός παρουσιάζει ιδιαιτερότητες σε σχέση με τους υπόλοιπους σεισμούς που αναλύσαμε και για το λόγο αυτό, για μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων χρησιμοποιήσαμε περισσότερες τιμές για το μήκος L και τη διάμετρο D για τις ορθογωνικές και τις κυλινδρικές δεξαμενές αντίστοιχα.

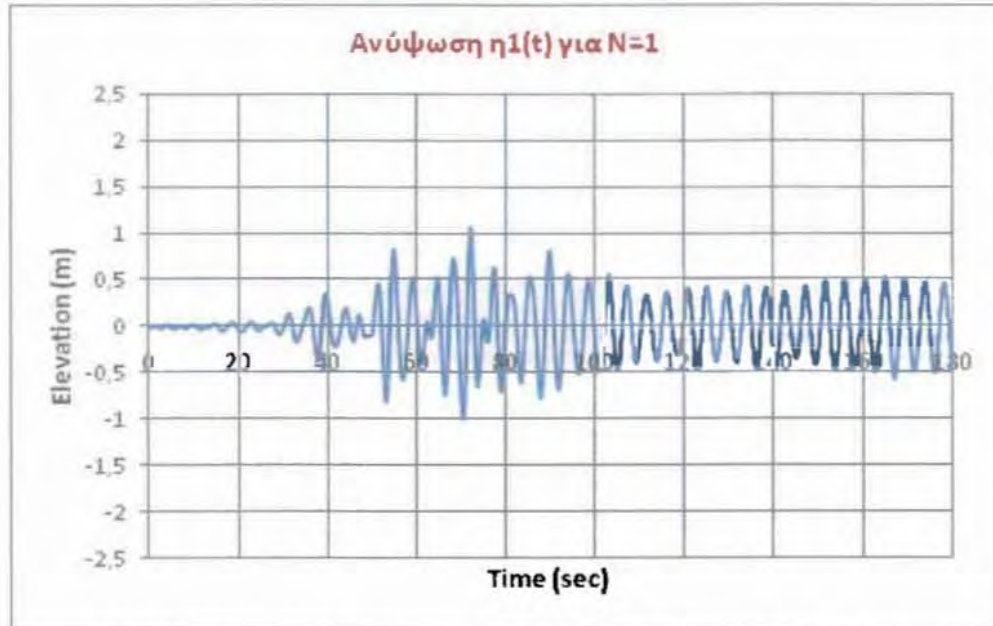
Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	Μέγιστη Ανύψωση $\eta_{(1),max}$ (m)
4	3,75	0,83
5	3,00	1,91
6	2,50	5,56
7	2,14	2,34
8	1,87	3,12
9	1,67	3,55
10	1,50	4,69
11	1,36	3,93
12	1,25	3,02
13	1,15	1,97
14	1,07	1,70
15	1,00	1,55
16	0,94	1,94
18	0,83	1,83
20	0,75	1,31
22	0,68	1,57
24	0,63	1,44
26	0,58	1,88
28	0,54	2,00
30	0,50	1,50
32	0,47	1,31
34	0,44	1,41
36	0,41	1,15

Πίνακας 7.2.4.2 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ συναρτήσεως του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Mexico (1985)

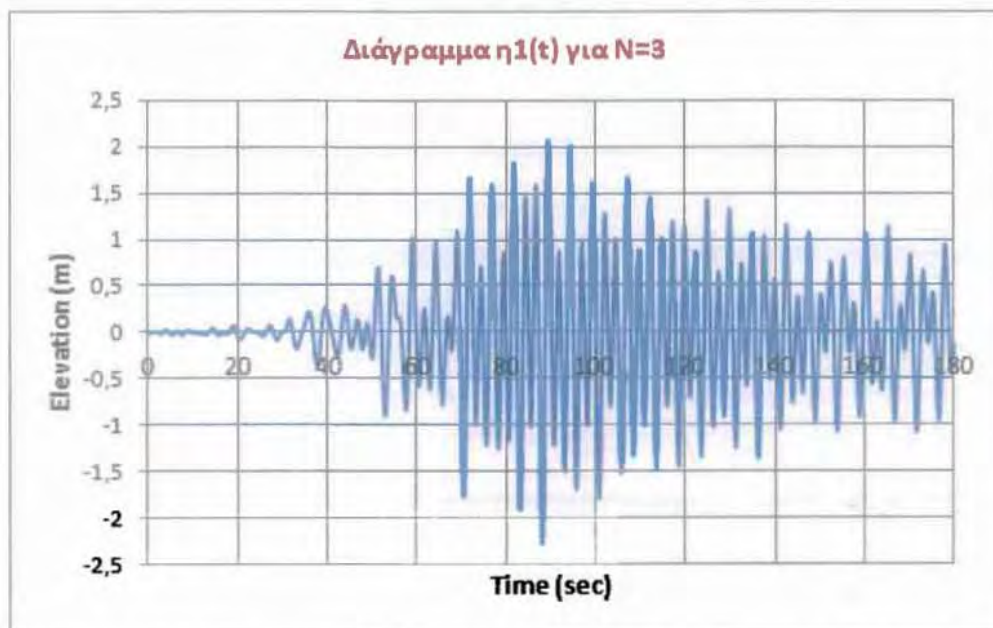


Εικόνα 7.2.4.10 Διάγραμμα μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσεως του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με H=15m, σεισμός Mexico (1985)

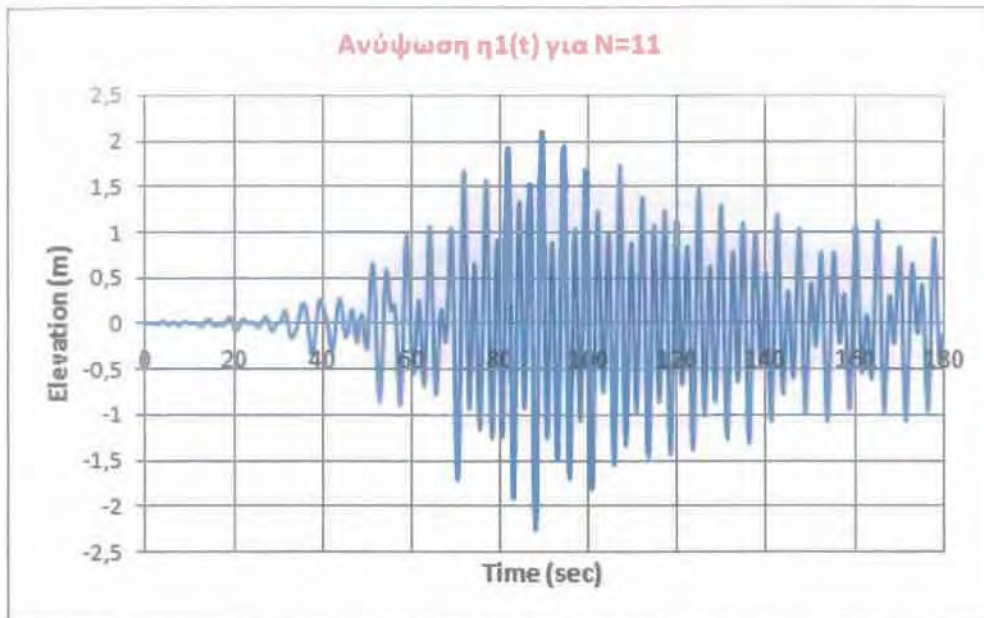
Στις ακόλουθες εικόνες παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορους όρους της επαγωγικής λύσης και συγκεκριμένα για $N=1, N=3$ και $N=11$ με σταθερό λόγο $H/L=1$.



Εικόνα 7.2.4.11 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για σταθερό λόγο $H/L=1$ ορθογωνικής δεξαμενής και $n=1$, σεισμός Mexico (1985)

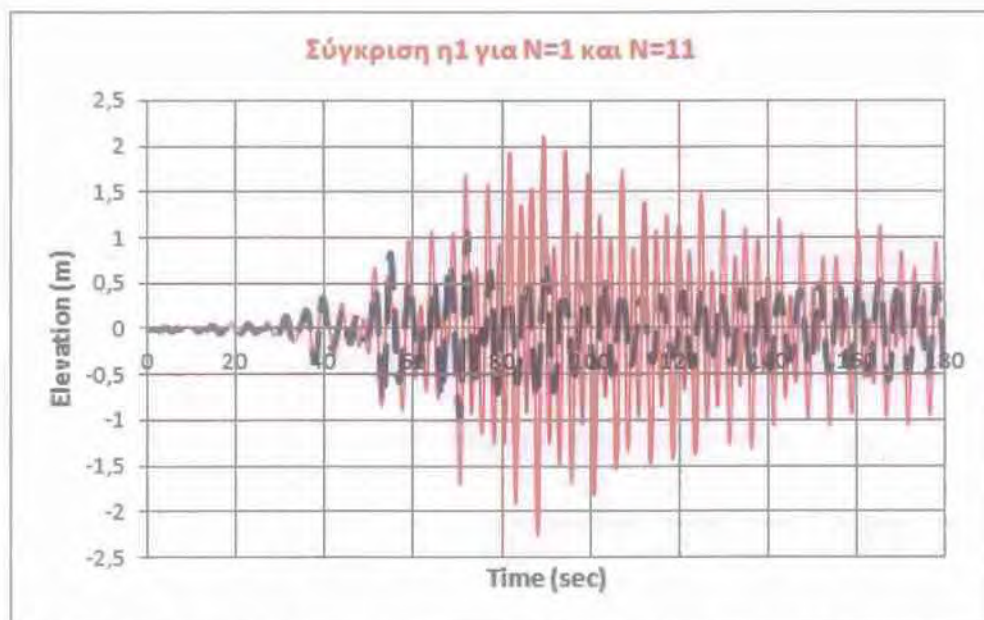


Εικόνα 7.2.4.12 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για σταθερό λόγο $H/L=1$ ορθογωνικής δεξαμενής και $n=1$ & 3, σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.4.13 Διάγραμμα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ για σταθερό λόγο $H/L=1$ ορθογωνικής δεξαμενής και $n=1,3,5,7,9,11$, σεισμός Mexico (1985)

Τέλος στην εικόνα 7.2.4.14 παρατίθεται ένα συγκριτικό διάγραμμα της ανύψωσης που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση ενός (Εικόνα 7.2.4.11) και έξι (Εικόνα 7.2.4.13) γραμμικών όρων. Η διακεκομμένη γραμμή (μπλε) είναι η ανύψωση που προκύπτει για $N=1$ και συνεχής (κόκκινη) είναι η ανύψωση για $N=11$.



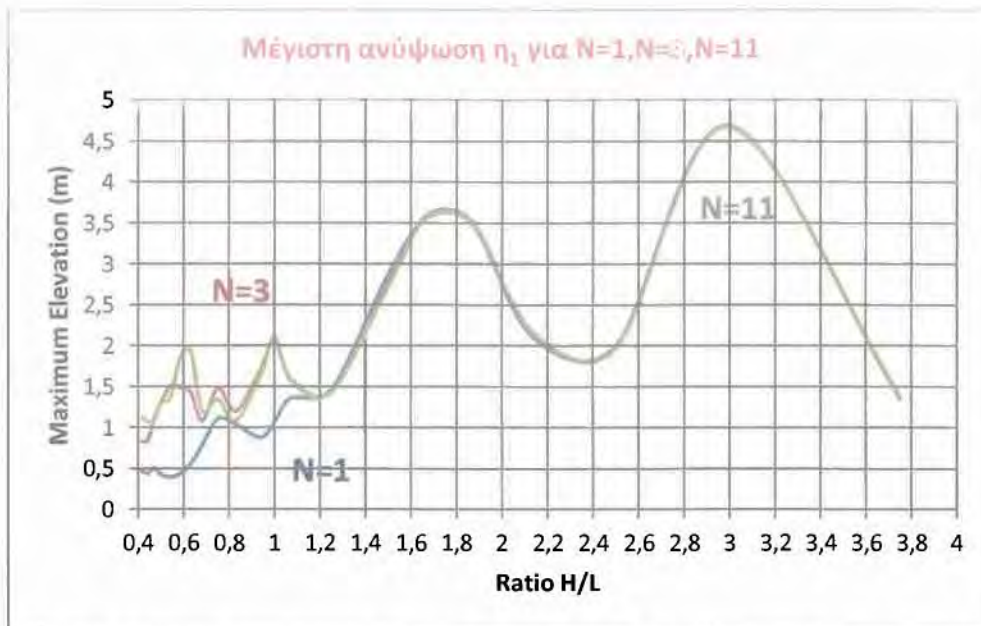
Εικόνα 7.2.4.14 Σύγκριση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_1(t)$ σε ορθογωνικές δεξαμενές για $n=1$ και $n=1,3,5,7,9,11$ και λόγο $H/L=1$, σεισμός Mexico (1985)

Στο σεισμό του Mexico παρατηρούμε ότι λαμβάνοντας υπόψιν ένα γραμμικό όρο (N=1) τα αποτελέσματα που παίρνουμε διαφέρουν σε σημαντικό βαθμό με αυτά της χρησιμοποίησης έντεκα όρων (N=11) τόσο στη μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και στη βύθιση. Αξίζει να σημειωθεί πως για $n=1$ και λόγο διαστάσεων $H/L=1$ η μέγιστη ανύψωση που υπολογίζεται είναι 1,07m ενώ για $n=1,3,5,7,9,11$ η μέγιστη ανύψωση φτάνει τα 2,11m. Υπάρχει δηλαδή μία διαφορά ακρίβειας 1,04m η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί πολύ σημαντική. Λαμβάνοντας υπόψιν ένα παραπάνω όρο, δηλαδή για $N=3$ τα αποτελέσματα παρουσιάζουν πολύ καλύτερη ακρίβεια (Εικ. 7.2.40) και συμπίπτουν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση 11 όρων (Εικ. 7.2.41) με πολύ μικρό σφάλμα το οποίο θεωρείται αμελητέο.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων θα βρούμε τις τιμές της μέγιστης ανύψωσης για διάφορους λόγους $H/L-H/D$. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(1),max}$ που προκύπτει με τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων από το γραμμικό πρόβλημα. Αναλυτικότερα για ορθογωνικές δεξαμενές (Πίνακας 7.2.4.3 - Εικόνα 7.2.4.15) προκύπτει

Λόγος H/L	$\eta_{1,max} - N=1$	$\eta_{1,max} - N=3$	$\eta_{1,max} - N=5$	$\eta_{1,max} - N=7$	$\eta_{1,max} - N=9$	$\eta_{1,max} - N=11$
3,75	1,36	1,36	1,38	1,39	1,40	1,40
3,00	4,69	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67
2,5	2,00	1,97	1,98	1,97	1,98	1,98
2,14	2,10	2,14	2,15	2,15	2,15	2,16
1,87	3,48	3,50	3,49	3,49	3,48	3,48
1,67	3,57	3,60	3,58	3,58	3,57	3,57
1,5	2,88	2,78	2,76	2,74	2,74	2,73
1,25	1,47	1,44	1,41	1,42	1,43	1,43
1,07	1,36	1,59	1,60	1,59	1,59	1,58
1	1,07	2,08	2,12	2,11	2,11	2,11
0,94	0,88	1,72	1,67	1,66	1,66	1,65
0,83	1,04	1,20	1,12	1,10	1,10	1,09
0,75	1,11	1,48	1,33	1,34	1,35	1,35
0,68	0,78	1,08	1,23	1,21	1,21	1,21
0,63	0,56	1,43	1,94	1,98	1,96	1,94
0,58	0,43	1,49	1,99	1,88	1,82	1,82
0,54	0,40	1,51	1,61	1,42	1,37	1,36
0,50	0,43	1,31	1,24	1,34	1,32	1,30
0,47	0,51	1,13	1,15	1,10	1,08	1,09
0,44	0,44	0,84	1,02	1,08	1,11	1,08
0,41	0,49	0,83	0,87	1,23	1,15	1,13

Πίνακας 7.2.4.3 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/L και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) σε ορθογωνικές δεξαμενές με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.4.15 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $N=1, N=3$ και $N=11$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)

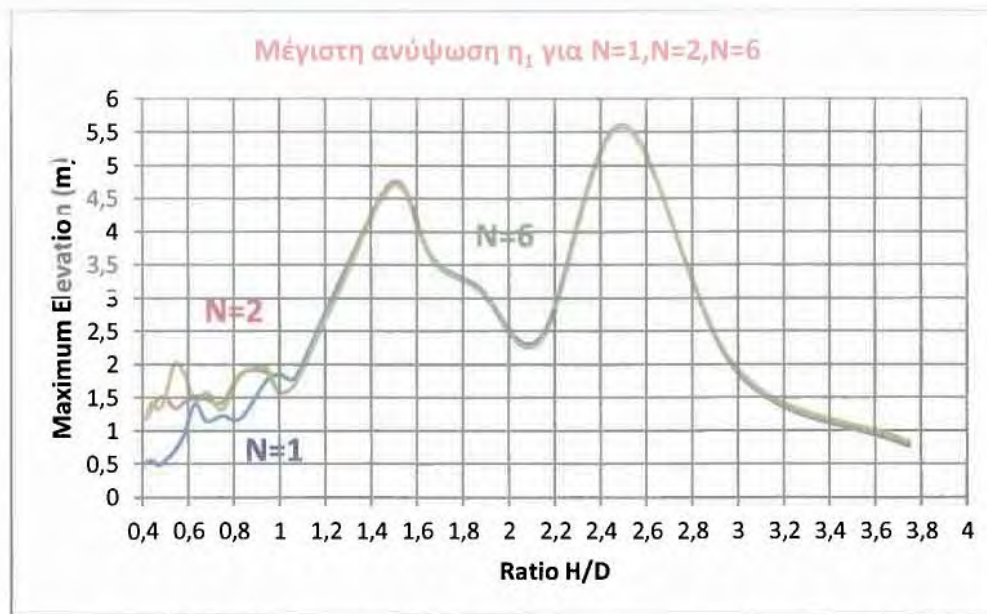
Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε πως για μεγάλες τιμές του λόγου διαστάσεων H/L και συγκεκριμένα για $H/L > 1,07$ τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση ενός επαγωγικού όρου από το γραμμικό πρόβλημα ($N=1$) συμπίπτουν με μεγάλη ακρίβεια με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων. Αντίθετα όσο ο λόγος H/L μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το μήκος L της δεξαμενής (καθώς $H=σταθερο\ 15m$) παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα αποκλίνουν σε σημαντικό βαθμό. Αναλυτικότερα, με μόνη εξαίρεση τη περίπτωση όπου $H/L=0,83$ και $H/L=0,75$, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις για $H/L < 1,07$, η μέγιστη ανύψωση παρουσιάζει διαφορά σταθερά μεγαλύτερη του μισού μέτρου (0,5m) και σε αρκετές περιπτώσεις αγγίζει ή και ξεπερνάει το ένα μέτρο (1m). Συγκεκριμένα, οι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρουσιάζονται για λόγους διαστάσεων $H/L=0,63$ (1,38m) και $H/L=0,58$ (1,39m) οι οποίες θεωρούνται εξαιρετικά σημαντικές. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί πως και αποκλίσεις μικρότερες του ενός μέτρου θεωρούνται αξιοσημείωτες και χρήζουν αντίστοιχης προσοχής.

Στην Εικόνα 7.2.4.15 παρουσιάζεται το αντίστοιχο διάγραμμα από το οποίο γίνεται αντιληπτό αυτό που παρατηρήθηκε και από τις τιμές της ανύψωσης στο Πίνακα 7.2.4.3, ότι δηλαδή για μικρούς λόγους διαστάσεων η χρήση ενός γραμμικού όρου ($N=1$) δε δίνει ακριβή αποτελέσματα για τη μέγιστη ανύψωση ενώ για μεγαλύτερους λόγους διαστάσεων τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά ακριβή.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις κυλινδρικές δεξαμενές παρουσιάζονται στο Πίνακα 7.2.4.4 και στην Εικόνα 7.2.4.16. Όπως και στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών έτσι και στις κυλινδρικές παρατηρούμε πως για μεγάλες τιμές του λόγου H/D τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση ενός όρου (N=1) συμπίπτουν με μεγάλη ακρίβεια με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρησιμοποίηση παραπάνω όρων. Αντίθετα όσο ο λόγος H/D μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το μήκος D της δεξαμενής (καθώς H=σταθερο 15m) παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα αποκλίνουν σε σημαντικό βαθμό, με τη μέγιστη διαφορά να φθάνει έως και 1,31 μέτρα (m) για H/L=0,54. Στην Εικόνα 7.2.4.16 παρουσιάζεται το αντίστοιχο διάγραμμα για κυλινδρικές δεξαμενές όπου παρατηρείται παρόμοια συμπεριφορά με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις ορθογωνικές τόσο για χαμηλές όσο και για υψηλές τιμές του λόγου διαστάσεων.

Λόγος H/D	$\eta_{1_{\max}} - N=1$	$\eta_{1_{\max}} - N=2$	$\eta_{1_{\max}} - N=3$	$\eta_{1_{\max}} - N=4$	$\eta_{1_{\max}} - N=5$	$\eta_{1_{\max}} - N=6$
3,75	0,76	0,80	0,82	0,82	0,82	0,83
3,00	1,86	1,89	1,90	1,90	1,91	1,91
2,5	5,60	5,59	5,58	5,57	5,56	5,56
2,14	2,40	2,35	2,34	2,34	2,34	2,34
1,87	3,16	3,13	3,12	3,12	3,12	3,12
1,67	3,59	3,57	3,55	3,55	3,55	3,55
1,5	4,70	4,76	4,73	4,71	4,70	4,69
1,25	3,14	3,07	3,06	3,05	3,03	3,02
1,07	1,80	1,71	1,71	1,71	1,70	1,70
1	1,85	1,57	1,54	1,55	1,55	1,55
0,94	1,74	1,88	1,93	1,93	1,93	1,94
0,83	1,18	1,86	1,84	1,84	1,84	1,83
0,75	1,22	1,43	1,36	1,33	1,31	1,31
0,68	1,14	1,47	1,53	1,57	1,57	1,57
0,63	1,40	1,52	1,42	1,43	1,43	1,44
0,58	0,92	1,42	1,85	1,88	1,87	1,88
0,54	0,69	1,33	1,91	1,96	2,00	2,00
0,50	0,55	1,50	1,68	1,57	1,50	1,50
0,47	0,48	1,49	1,49	1,37	1,33	1,31
0,44	0,55	1,34	1,21	1,33	1,41	1,41
0,41	0,51	1,16	1,13	1,15	1,16	1,15

Πίνακας 7.2.4.4 Τιμές μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),\max}$ (σε μέτρα) συναρτήσει του λόγου H/D και του αριθμού των γραμμικών όρων (N) με σταθερό ύψος H=15m, σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.4.16 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $N=1, N=2$ και $N=6$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)

Επιρροή των μη-γραμμικών όρων στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας

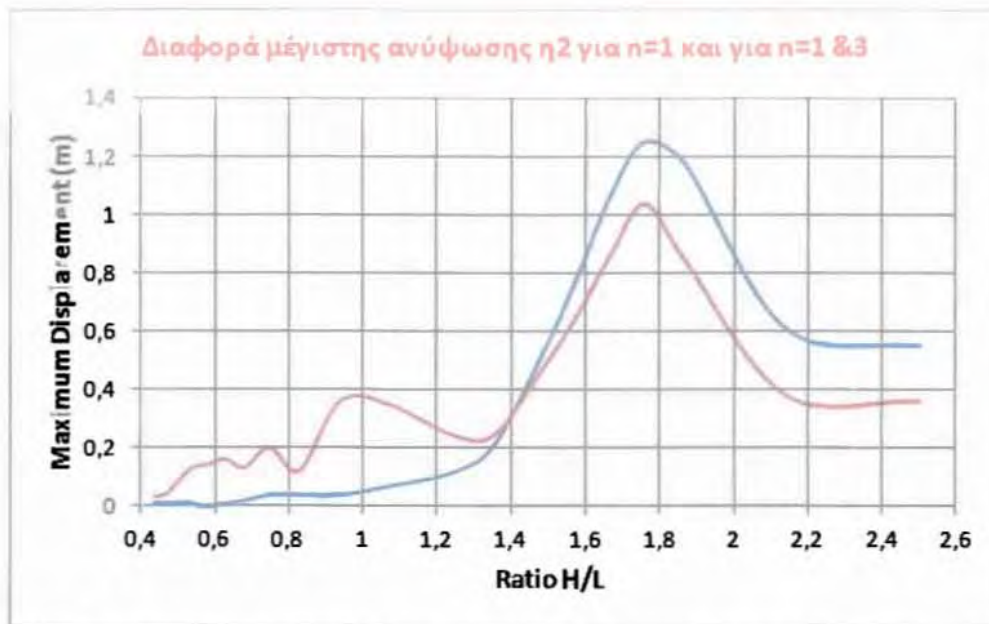
Για τη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(2)}$ στις ορθογωνικές δεξαμενές όπως έχουμε ήδη αναφέρει και σε προηγούμενα κεφάλαια έγινε μελέτη λαμβάνοντας υπόψιν ένα ($N=1$) και δύο ($N=3$) γραμμικούς όρους. Αντίθετα στις κυλινδρικές δεξαμενές τα αποτελέσματα που έχουμε, πάρθηκαν από τη μελέτη με τη χρησιμοποίηση ενός όρου από το πρόβλημα 1^{ης} τάξης. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ για διάφορους λόγους H/L (και H/D αντίστοιχα) με τη τιμή του ύψους του ρευστού (H) να κρατείται σταθερή στα 15m.

Μήκος L (m)	Λόγος H/L	$\eta_{2,max}$ (m) - $N=1$	$\eta_{2,max}$ (m) - $N=3$
6	2,50	0,55	0,36

7	2,14	0,61	0,38
8	1,87	1,17	0,84
8,5	1,76	1,25	1,04
9	1,67	1,07	0,87
9,5	1,58	0,79	0,66
10	1,50	0,56	0,50
11	1,36	0,22	0,25
12	1,25	0,12	0,24
14	1,07	0,07	0,35
16	0,94	0,04	0,36
18	0,83	0,04	0,12
20	0,75	0,04	0,20
22	0,68	0,02	0,13
24	0,63	0,01	0,16
26	0,58	0,00	0,14
28	0,54	0,01	0,13
30	0,50	0,01	0,08
32	0,47	0,01	0,04
34	0,44	0,01	0,03
36	0,41	0,01	0,03

Πίνακας 7.2.4.5 Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_2(t)$ ορθογωνικής δεξαμενής συναρτήσει του λόγου H/L για $n=1$ και $n=1 \ \& \ 3$ με σταθερό ύψος $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)

Από το παραπάνω πίνακα γίνεται αντιληπτό ότι όσο ο λόγος διαστάσεων H/L μειώνεται, δηλαδή όσο αυξάνεται το μήκος L της δεξαμενής, τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ μειώνεται. Αυτό παρατηρείται όπως ήταν αναμενόμενο και στη περίπτωση της χρησιμοποίησης ενός γραμμικού όρου ($N=1$) αλλά και σε αυτή της χρήσης δύο όρων από το πρόβλημα 1^{ης} τάξης. Τα παραπάνω γίνονται ευκολότερα αντιληπτά από το γράφημα της Εικόνας 7.2.4.17 που παρουσιάζει τη διαφορά της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2)}$ στην επόμενη σελίδα. Με κόκκινη γραμμή είναι το μέγιστο $\eta_{(2)}$ για $n=1 \ \& \ 3$ και με μπλε γραμμή το αντίστοιχο για $n=1$.



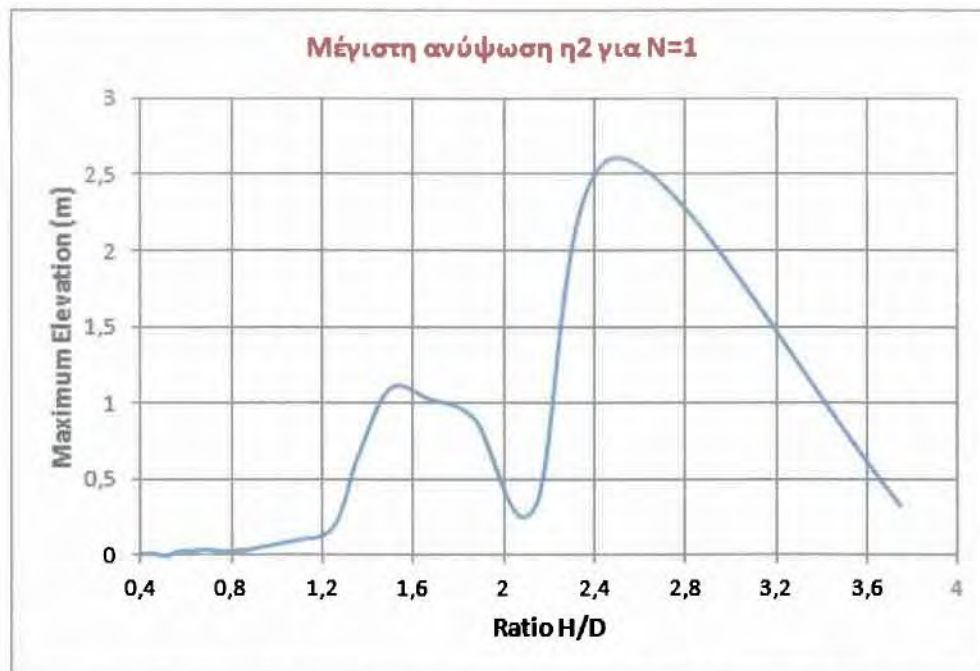
Εικόνα 7.2.4.17 Σύγκριση της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(2),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $n=1$ και $n=1\&3$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής με $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)

Για τις κυλινδρικές δεξαμενές ο αντίστοιχος πίνακας δίνει τα εξής αποτελέσματα.

Διάμετρος D (m)	Λόγος H/D	$\eta_{2,max}$ (m) - N=1
4	3,75	0,33
6	2,50	2,61
7	2,14	0,32
8	1,87	0,90
9	1,67	1,03
10	1,50	1,10
11	1,36	0,66
12	1,25	0,19
14	1,07	0,10
16	0,94	0,06
18	0,83	0,03
20	0,75	0,03
22	0,68	0,04
24	0,63	0,03
26	0,58	0,03
28	0,54	0,01
30	0,50	0,00
32	0,47	0,01
34	0,44	0,01
36	0,41	0,01

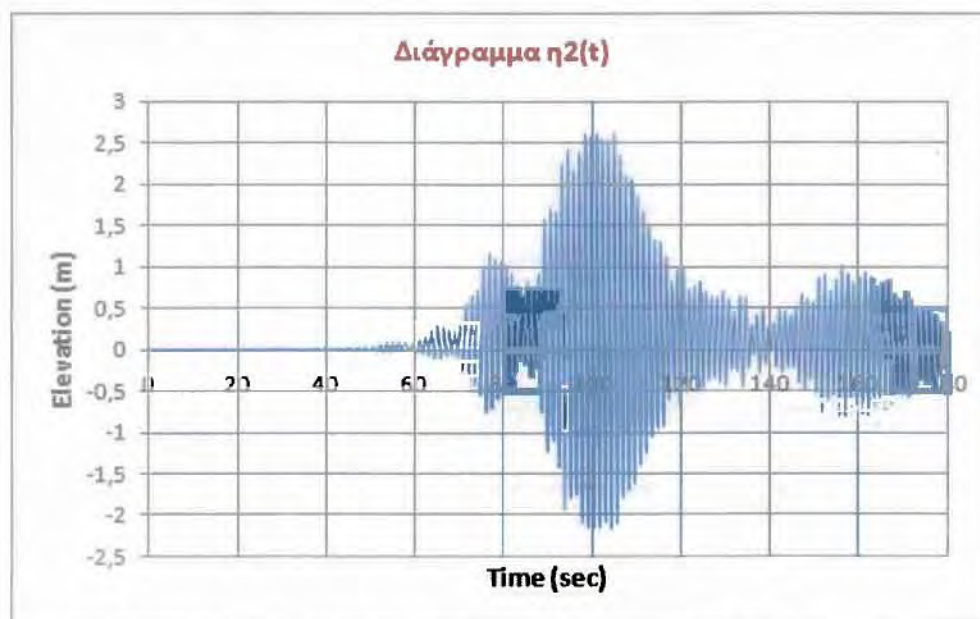
Πίνακας 7.2.4.6. Τιμές μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_2(t)$ συναρτήσει του λόγου H/D για $n=1$ με σταθερό ύψος $H=15m$

Παρατηρούμε και στη περίπτωση των κυλινδρικών δεξαμενών, όσο ο λόγος H/D αυξάνεται τόσο η μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2)}$ αυξάνεται. Στη περίπτωση της σεισμικής διέγερσης του Μεξικού το η_2 παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στα 1,10m για λόγο $H/D=1.5$ και εμφανίζει τη μέγιστη τιμή του στα 2,6m για λόγο $H/D=2,5$.



Εικόνα 7.2.4.18 Μέγιστη ανύψωση $\eta_{(2),max}$ της ελεύθερης επιφάνειας για $n=1$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής με ύψος $H=15m$, σεισμός Mexico (1985)

Τέλος η μορφή του $\eta_{(2)}$ συναρτήσεως του χρόνου για $H/D=2,5$ είναι

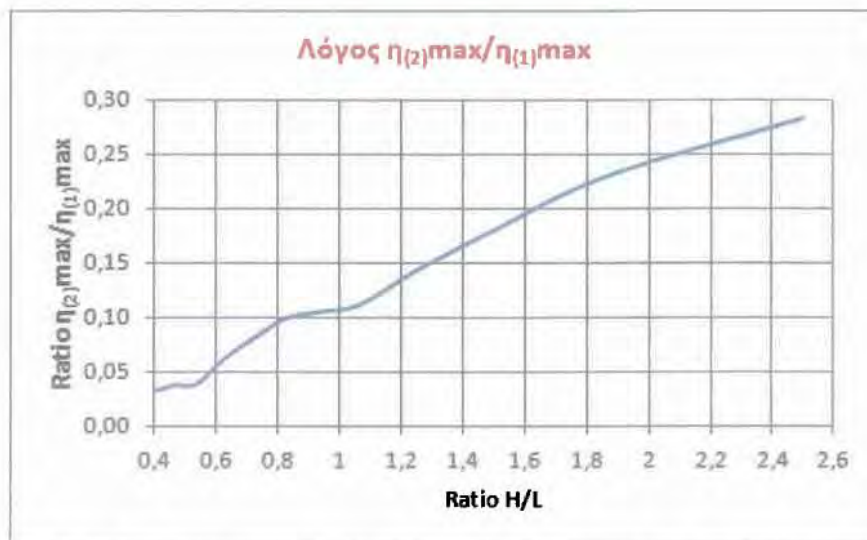


Εικόνα 7.2.4.19 Ανύψωση $\eta_2(t)$ της ελεύθερης επιφάνειας για κυλινδρική δεξαμενή με λόγο $H/D=2,5$ συναρτήσει του χρόνου, σεισμός Mexico (1985)

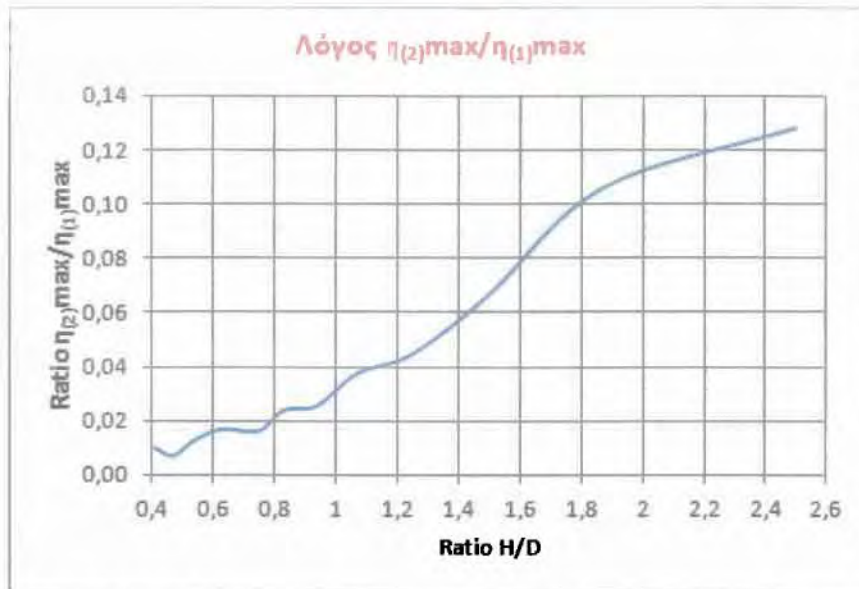
7.2.5 Σύγκριση μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ με τη μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ στους 4 σεισμούς

Τέλος παρουσιάζεται για κάθε ένα σεισμό από αυτούς που αναλύσαμε παραπάνω ένα διάγραμμα του λόγου της μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς τη μέγιστη ανύψωση $\eta_{(1)max}$ που προκύπτει από το γραμμικό πρόβλημα συναρτήσει του λόγου διαστάσεων $H/L - H/D$. Με τα συγκεκριμένα διαγράμματα θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε ακόμη περισσότερο την επιρροή της μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)}$ στο συνολικό πρόβλημα αλλά και το μέγεθος της σε σχέση με την ανύψωση $\eta_{(1)}$ που προκύπτει από το πρώτης τάξεως πρόβλημα. Σημειώνεται πως για το σχεδιασμό των παρακάτω διαγραμμάτων, στη περίπτωση των ορθογωνικών δεξαμενών, οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)max}$ που χρησιμοποιήθηκαν προκύπτουν με τη χρήση 6 επαγωγικών όρων ($N=1,3,5,7,9,11$) ενώ για τη μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)max}$ χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα από την ανάλυση με τη χρησιμοποίηση 2 επαγωγικών όρων ($N=1$ & 3). Αντιστοίχως και στις κυλινδρικές δεξαμενές για την ανύψωση $\eta_{(1)max}$ χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τη χρήση 6 επαγωγικών όρων ($N=1,2,3,4,5,6$). Υπενθυμίζουμε πως στη περίπτωση των κυλινδρικών δεξαμενών για το μη-γραμμικό πρόβλημα εξετάστηκε μόνο η περίπτωση χρησιμοποίησης ενός επαγωγικού όρου. Συγκεκριμένα έχουμε

- Σεισμός Kocaeli (1999)

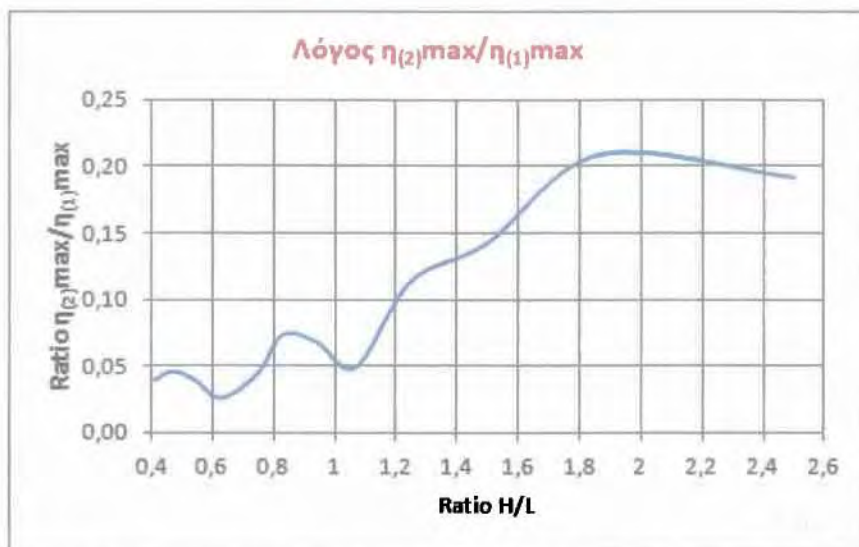


Εικόνα 7.2.5.1 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής, σεισμός Kocaeli (1999)

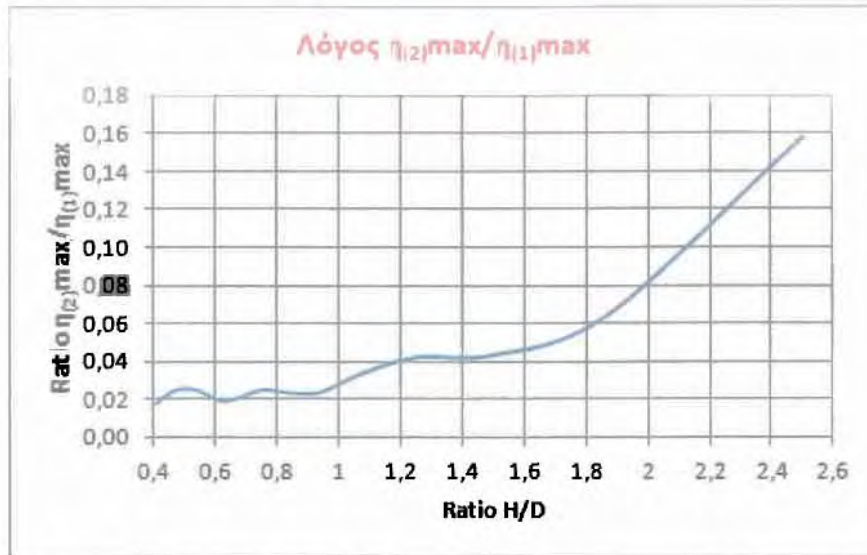


Εικόνα 7.2.5.2 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής, σεισμός Kocaeli (1999)

- Σεισμός Duzce (1999)

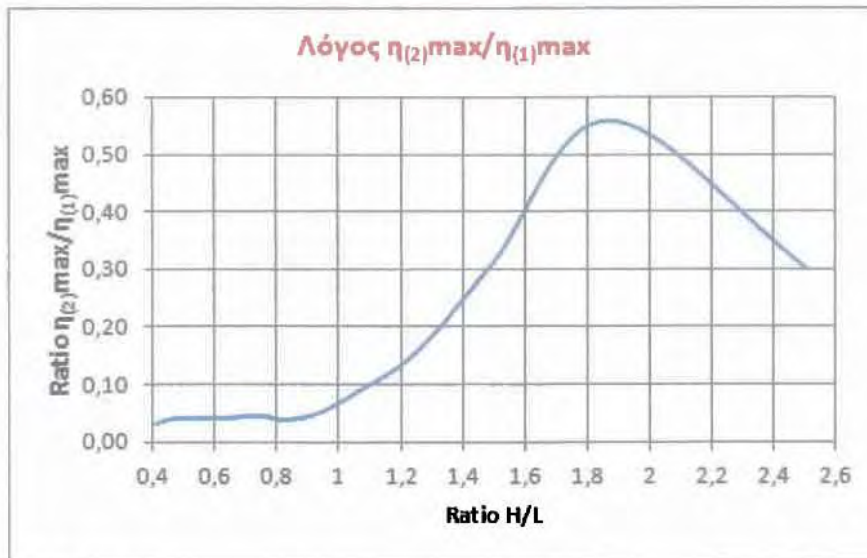


Εικόνα 7.2.5.3 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής, σεισμός Duzce (1999)

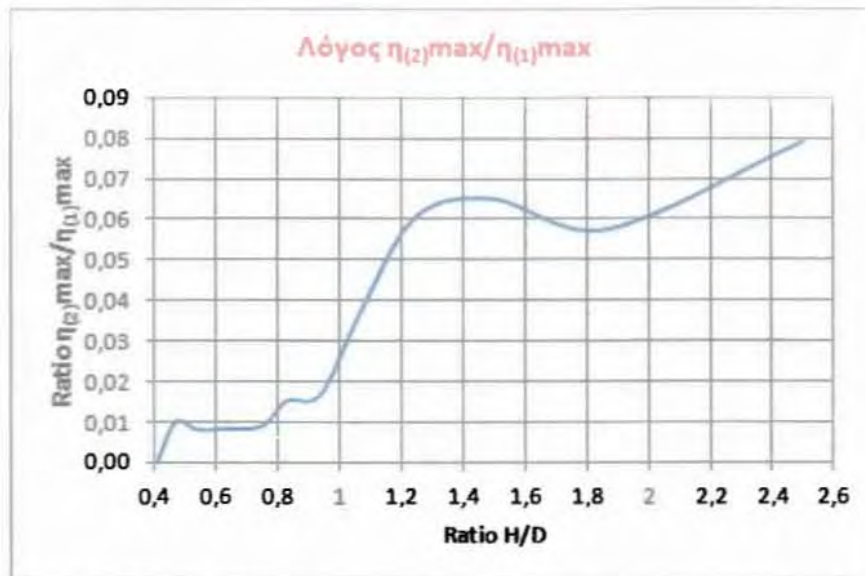


Εικόνα 7.2.5.4 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσεσι του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής, σεισμός Duzce (1999)

- Σεισμός Kobe (1995)

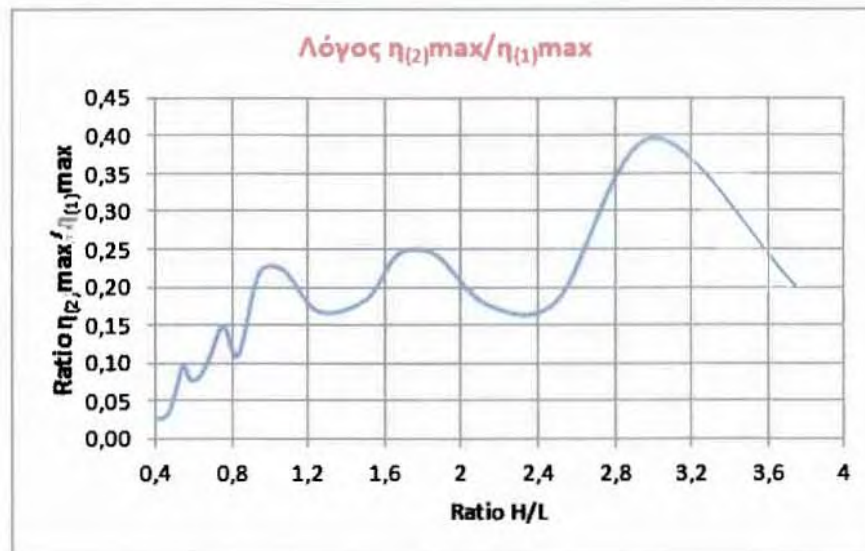


Εικόνα 7.2.5.5 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσεσι του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής, σεισμός Kobe (1995)

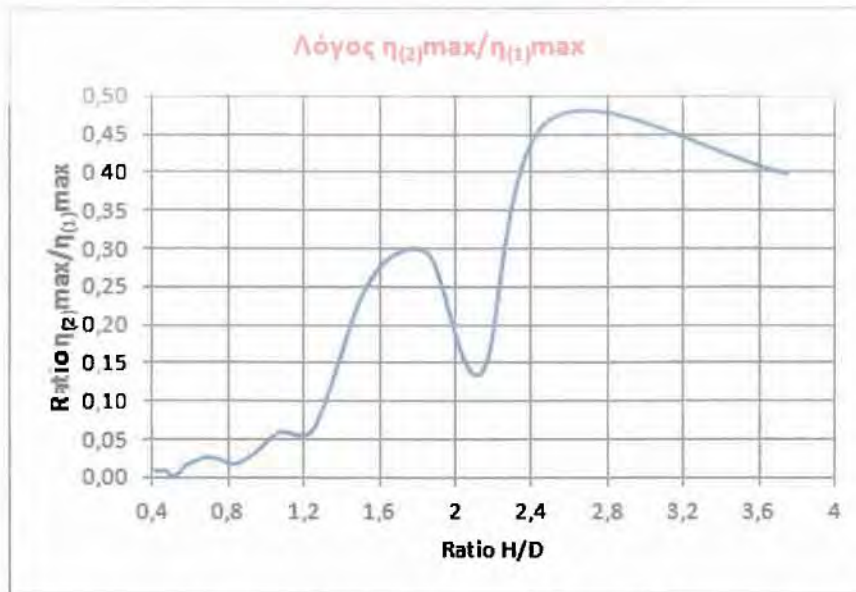


Εικόνα 7.2.5.6 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσει του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής, σεισμός Kobe (1995)

- Σεισμός Μεξικό (1985)



Εικόνα 7.2.5.7 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσει του λόγου H/L ορθογωνικής δεξαμενής, σεισμός Mexico (1985)



Εικόνα 7.2.5.8 Λόγος μέγιστης μη-γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(2)max}$ προς μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ συναρτήσεως του λόγου H/D κυλινδρικής δεξαμενής, σεισμός Mexico (1985)

Όπως παρατηρείται από τα ανωτέρω διαγράμματα η μέγιστη μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)max}$ παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά σε σχέση με τη μέγιστη γραμμική ανύψωση $\eta_{(1)max}$ τόσο σε ορθογωνικές όσο και σε κυλινδρικές δεξαμενές. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως σε όλους τους σεισμούς και στους δύο τύπους δεξαμενών η αύξηση του λόγου διαστάσεων H/L-H/D οδηγεί σε αύξηση του λόγου $\eta_{(2)max}/\eta_{(1)max}$. Αυτό σημαίνει πως όσο αυξάνει το ύψος της δεξαμενής σε σχέση με το μήκος/διάμετρο της τόσο η μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)}$ εμφανίζεται να επηρεάζεται περισσότερο το συνολικό πρόβλημα. Συγκεκριμένα αξίζει να αναφέρουμε πως σε όλους τους σεισμούς, στις ορθογωνικές δεξαμενές, για λόγο διαστάσεων μεγαλύτερο του 1.5 η μέγιστη μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)max}$ εμφανίζεται να φθάνει σε σημαντικά ποσοστά. Συγκεκριμένα αγγίζει περίπου το 30% της ανύψωσης $\eta_{(1)max}$ στο σεισμό Kocaeli για λόγο διαστάσεων H/L=2.5 όπως επίσης και για το σεισμό Duzce φθάνει έως το 21% της μέγιστης γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(1)max}$ για λόγο H/L=1.9. Ιδιαίτερα για τους σεισμούς με υψηλή δεσπόζουσα περίοδο ο λόγος των δύο μεγίστων αγγίζει το 60% για λόγο H/L=1.8 στο σεισμό του Kobe, ποσοστό το οποίο θεωρείται εξαιρετικά υψηλό και χρήζει ιδιαίτερης προσοχής. Ομοίως και στο σεισμό του Μεξικό η μέγιστη μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)max}$ φθάνει ακόμα και το 40% της γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(1)max}$ για λόγο διαστάσεων κοντά στη τιμή 3, ποσοστό που θεωρείται αρκετά σημαντικό.

Κεφάλαιο 8 Συμπεράσματα

Από τη παραπάνω ανάλυση τόσο για ορθογωνικές όσο και για κυλινδρικές δεξαμενές καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα

1. Με την αύξηση του λόγου διαστάσεων της δεξαμενής $H/L - H/D$ η επαγωγική μάζα του υγρού (impulsive mass - sloshing) μειώνεται ενώ η ωστική μάζα (convective mass) αυξάνεται όπως παρουσιάζεται από τις εικόνες 3.4.1 και 3.4.2 για ορθογωνικές και 5.4.1 και 5.4.2 για κυλινδρικές δεξαμενές. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται το ύψος του υγρού (H) σε σχέση με το μήκος της δεξαμενής τόσο μειώνεται η ποσότητα της μάζας που αποτελεί την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού η οποία γνωρίζουμε ότι εκτελεί ανεξάρτητη κίνηση από αυτή της δεξαμενής υπό την επίδραση εξωτερικής δυναμικής διέγερσης.
2. Από την ανάλυση των σεισμικών διεγέρσεων παρατηρήθηκε πως για όλους τους σεισμούς που εξετάστηκαν η μέγιστη ανύψωση συναρτήσει του λόγου $H/L - H/D$ παρουσιάζει ίδια μορφή για ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές αποδεικνύοντας την “ισοδυναμία” μεταξύ των δεξαμενών αυτών των γεωμετριών. Αυτό παρουσιάζεται χαρακτηριστικά στις ακόλουθες εικόνες
 - Εικόνα 7.2.1.6 – Εικόνα 7.2.1.10 για το σεισμό στη περιοχή Sakarya Τουρκίας
 - Εικόνα 7.2.2.6 – Εικόνα 7.2.2.10 για το σεισμό στο Duzce στη Τουρκία
 - Εικόνα 7.2.3.6 – Εικόνα 7.2.3.10 για το σεισμό στο Kobe της Ιαπωνίας
 - Εικόνα 7.2.4.6 – Εικόνα 7.2.4.10 για το σεισμό του Μεξικό
3. Οι δύο πρώτοι σεισμοί που αναλύθηκαν στις περιοχές Sakarya και Duzce της Τουρκίας εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά. Από το φάσμα απόκρισης των δύο σεισμικών διεγέρσεων που παρουσιάζεται στις εικόνες 7.2.1.2 και 7.2.2.2 αντίστοιχα γίνεται αντιληπτό πως πρόκειται για δύο σεισμούς με χαμηλή δεσπόζουσα ιδιοπερίοδο, δηλαδή χαρακτηρίζονται ως υψίσυχνες σεισμικές διεγέρσεις. Για τους συγκεκριμένους σεισμούς η μέγιστη γραμμική ανύψωση η_1 παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά, δηλαδή τόσο στις ορθογωνικές όσο και στις κυλινδρικές δεξαμενές παρατηρείται ότι το η_1 λαμβάνει τις υψηλότερες τιμές για λόγους διαστάσεων $H/L - H/D$ που κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0,54-0,98 (Sakarya) και 0,44-0,68 (Duzce).

Πέρα από το ανωτέρω εύρος τιμών, η μέγιστη γραμμική ανύψωση μειώνεται συνεχώς και λαμβάνει αισθητά κατώτερες τιμές. Αυτό σημαίνει πως για υψίσυχνους σεισμούς, οι περισσότεροι επίφοβες δεξαμενές, στις οποίες παρουσιάζεται μεγάλη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, είναι αυτές με χαμηλό ύψος ρευστού σε σχέση με το μήκος τους. Αντίθετα, για δεξαμενές με μεγάλο ύψος και μικρό μήκος (δηλ. υψηλό λόγο $H/L-H/D$), η μέγιστη γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας παρουσιάζει αισθητά μικρότερες τιμές σε υψίσυχνους σεισμούς.

4. Για τους σεισμούς του Kobe και του Mexico από το φάσμα απόκρισης (Εικ. 7.2.3.2 και Εικ. 7.2.4.2 αντίστοιχα) γίνεται αντιληπτό πως οι μέγιστες φασματικές τιμές εμφανίζονται σε 2 περιοχές. Η πρώτη περιοχή αντιστοιχεί σε ιδιοπερίοδο μικρότερη των 0.5sec (όπως στους σεισμούς Duzce και Sakarya) ενώ η δεύτερη περιοχή χαρακτηρίζεται από ιδιοπερίόδους μεγαλύτερες του 1sec. Συγκεκριμένα για το σεισμό στην Ιαπωνία είναι $T=1,2\text{sec}$ ενώ για τη σεισμική δόνηση του Μεξικό $T=2,55\text{sec}$. Στους συγκεκριμένους σεισμούς, οι οποίοι μπορούν να χαρακτηριστούν και ως σεισμοί χαμηλής συχνότητας, η μέγιστη γραμμική ανύψωση παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο για λόγους διαστάσεων $H/L-H/D$ που κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0,5-0,8 (όπως παρατηρήθηκε και στους σεισμούς της Τουρκίας) αλλά λαμβάνει τις μέγιστες τιμές για λόγους διαστάσεων σημαντικά υψηλότερους που κυμαίνονται σε ένα εύρος τιμών γύρω από το 1,3 και φθάνουν έως και 3 στο σεισμό του Μεξικό. Αυτή η συμπεριφορά δηλώνει πως για σεισμικές διεγέρσεις που χαρακτηρίζονται από υψηλή δεσπόζουσα περίοδο, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας εμφανίζει υψηλές τιμές για μικρούς λόγους διαστάσεων, **αλλά** παρουσιάζει τις μέγιστες τιμές της, οι οποίες είναι σημαντικά υψηλότερες, σε δεξαμενές οι οποίες έχουν μεγάλο ύψος και μικρό μήκος (υψηλός λόγος $H/L-H/D$).

5. Η χρήση ενός επαγωγικού όρου για την ανάλυση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_{(1)}$ παρουσίασε **ανακριβή αποτελέσματα σε όλους τους σεισμούς** που εξετάστηκαν. Η χρησιμοποίηση ανωτέρω όρων ($n=1,3,5,7,9,11$ για ορθογωνικές και $n=1,2,3,4,5,6$ για κυλινδρικές δεξαμενές) είχε ως αποτέλεσμα οι τιμές της μέγιστης ανύψωσης $\eta_{(1)}$ να παρουσιάζονται σημαντικά υψηλότερες σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που είχαμε από τη χρήση ενός γραμμικού όρου ($n=1$). Η μεταξύ τους

διαφορά εξαρτάται τόσο από το είδος του σεισμού (φάσμα, επιταχυνσιογράφημα) όσο και από το λόγο των διαστάσεων $H/L-H/D$ της εκάστοτε δεξαμενής. Ειδικά για τους σεισμούς *Kobe* και *Mexico* η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων ξεπερνά ακόμα και το 1 μέτρο σε αρκετές περιπτώσεις. Συνοπτικά, από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε γίνεται αντιληπτό πως για μεγαλύτερη ακρίβεια και ασφαλή αποτελέσματα **ενδείκνυται η χρήση παραπάνω επαγωγικών όρων**. Για υψίσυχνους σεισμούς προέκυψε πως η χρησιμοποίηση 2 γραμμικών όρων είναι αρκετή για να έχουμε ακριβή αποτελέσματα ενώ για σεισμούς με υψηλή δεσπόζουσα περίοδο για ορισμένους λόγους διαστάσεων (κυρίως για $H/L - H/D < 1$) απαιτείται η χρήση 3 ή και παραπάνω επαγωγικών όρων για την επίτευξη ακριβέστερων αποτελεσμάτων. Τα αντίστοιχα γραφήματα για ορθογωνικές και κυλινδρικές δεξαμενές αντίστοιχα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.2 και συγκεκριμένα στις εικόνες

- Εικόνα 7.2.1.15 – Εικόνα 7.2.1.16 για το σεισμό στη *Sakarya* Τουρκίας
 - Εικόνα 7.2.2.15 – Εικόνα 7.2.2.16 για το σεισμό στο *Duzce* στη Τουρκία
 - Εικόνα 7.2.3.15– Εικόνα 7.2.3.16 για το σεισμό στο *Kobe* της Ιαπωνίας
 - Εικόνα 7.2.4.15 – Εικόνα 7.2.4.16 για το σεισμό του Μεξικό
6. Η μελέτη του μη-γραμμικού προβλήματος της κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας υπο εξωτερική απλή αρμονική διέγερση σε ορθογωνικές δεξαμενές οδηγεί στο φαινόμενο του συντονισμού σε μικρότερη τιμή της 1^{ης} ιδιοσυχνότητας από την αντίστοιχη μελέτη του γραμμικού προβλήματος. Συγκεκριμένα στο γραμμικό πρόβλημα ο συντονισμός λαμβάνει χώρα για $\Omega = \omega_1$ ενώ στο μη-γραμμικό πρόβλημα το σύστημα μας συντονίζεται για $\Omega = 0.71\omega_1$. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στις εικόνες 4.3.1 και 4.3.2 όπου παρουσιάζεται η μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_1 και η_2 αντίστοιχα ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 . Παρατηρούμε ότι η ανύψωση του υγρού από το πρόβλημα 2^{ης} τάξης για μηδενική απόσβεση απειρίζεται για λόγο συχνοτήτων 0.71.
7. Η χρησιμοποίηση 2 όρων από το γραμμικό πρόβλημα ($n=1\&3$) στην ανάλυση του μη-γραμμικού προβλήματος οδηγεί το σύστημα μας σε κατάσταση συντονισμού για

περισσότερες τιμές του λόγου Ω/ω_1 τόσο στη περίπτωση του γραμμικού όσο και σε αυτή του μη-γραμμικού προβλήματος. Το παραπάνω φαινόμενο παρουσιάζεται χαρακτηριστικά στις εικόνες 4.5.1 και 4.5.2 όπου παρουσιάζεται η μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας η_1 και η_2 αντίστοιχα ως προς το εύρος της επιβαλλόμενης αρμονικής διέγερσης συναρτήσει του λόγου Ω/ω_1 .

8. Για τη μη-γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας η_2 παρατηρήθηκε πως τόσο στις ορθογωνικές όσο και στις κυλινδρικές δεξαμενές με τη μείωση του λόγου διαστάσεων $H/L - H/D$ μειώνεται και η μέγιστη ανύψωση η_2 . Συμπερασματικά, σε όλους τους σεισμούς που εξετάστηκαν το η_2 μεγιστοποιείται για δεξαμενές με μεγάλο ύψος και μικρό μήκος/διάμετρο και σε ορισμένες περιπτώσεις λαμβάνει σημαντικά υψηλές τιμές οι οποίες χρήζουν ανάλυσης και προσοχής. Αναλυτικότερα στο σεισμό της *Sakarya* το η_2 αγγίζει τα 30cm για λόγο $H/L=2,5$ ενώ στο σεισμό του *Duzce*, ο οποίος ήταν πιο ασθενής, η μέγιστη ανύψωση ανέρχεται στα 13cm για λόγο διαστάσεων 1,87. Στο σεισμό *Kobe* της *Ιαπωνίας* το η_2 παρατηρήθηκε ότι ήταν εξαιρετικά υψηλό καθώς έφτασε περίπου τα 60cm για λόγους διαστάσεων 1,5 και 1,87 ενώ στο σεισμό του *Μεξικού* ξεπέρασε το 1m για λόγους που κυμαίνονται μεταξύ του 1,6 και του 1,87.
9. Από τις πληροφορίες που παρατέθηκαν στο Συμπέρασμα 8 γίνεται αντιληπτό πως σε σεισμούς που χαρακτηρίζονται από χαμηλή συχνότητα και (υψηλή δεσπόζουσα ιδιοπερίοδο) όπως οι σεισμοί *Kobe* και *Mexico* η μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)}$ παρουσιάζει σημαντικά υψηλότερες τιμές σε σχέση με αυτές που εμφανίζει σε υψίσυχνες σεισμικές διεγέρσεις (*Sakarya - Duzce*). Ειδικά για τους σεισμούς στην *Ιαπωνία* και στο *Μεξικό* η ανύψωση $\eta_{(2)}$ σε ορισμένες περιπτώσεις λαμβάνει εξαιρετικά υψηλές τιμές οι οποίες θα πρέπει να υπολογίζονται οπωσδήποτε καθώς επηρεάζουν σημαντικά τη συνολική ανύψωση.
10. Από τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 7.2.5 γίνεται κατανοητό πως η μέγιστη μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)max}$ παρουσιάζεται ιδιαίτερα αυξημένη για υψηλούς λόγους διαστάσεων (δηλαδή για δεξαμενές μεγάλες σε ύψος και μικρές σε μήκος $L -$ διάμετρο D) σε όλους τους τύπους σεισμών και εμφανίζεται να λαμβάνει εξαιρετικά υψηλές τιμές σε σχέση με τη μέγιστη γραμμική ανύψωση

$\eta_{(1)\max}$ για τους σεισμούς με υψηλή δεσπόζουσα περίοδο. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δηλώνει ότι η μη-γραμμική ανύψωση $\eta_{(2)}$ επηρεάζει σημαντικά το συνολικό πρόβλημα για δεδομένες συνθήκες (φύση σεισμού, γεωμετρικά χαρακτηριστικά κατασκευής) καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές που λαμβάνει είναι αρκετά υψηλές και άμεσα συγκρίσιμες με αυτές της γραμμικής ανύψωσης $\eta_{(1)}$. Συγκεκριμένα **οι μέγιστες αναλογίες $\eta_{(2)\max}/\eta_{(1)\max}$** που παρουσιάστηκαν και χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής και ανάλυσης είναι

- **Σεισμός Kocaeli** $\eta_{(2)\max}/\eta_{(1)\max} = 28\%$
- **Σεισμός Duzce** $\eta_{(2)\max}/\eta_{(1)\max} = 21\%$
- **Σεισμός Kobe** $\eta_{(2)\max}/\eta_{(1)\max} = 56\%$
- **Σεισμός Mexico** $\eta_{(2)\max}/\eta_{(1)\max} = 40\%$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

9.1 Αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών στο πρόβλημα του κυματισμού

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναπτυχθεί συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εύρεση των συναρτήσεων q_n , u_n οι οποίες ήταν απαραίτητες για την εύρεση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας τόσο στο γραμμικό όσο και στο μη-γραμμικό πρόβλημα.

Με βάση την ανάλυση που παρουσιάσαμε το πρόβλημα του κυματισμού καταλήγει στην επίλυση της εξίσωσης του απλού ταλαντωτή με απόσβεση, όπως κάτωθι

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi\omega\dot{q}_n(t) + \omega^2q_n(t) = -c\ddot{X}(t) \quad (9.1.1)$$

όπου $q_n(t)$: η σχετική μετατόπιση της κατασκευής μας ως προς το έδαφος

και αντίστοιχα $\dot{q}_n(t)$ και $\ddot{q}_n(t)$ η σχετική ταχύτητα και επιτάχυνση

Επίσης ω είναι η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

Επιπλέον όρος c αποτελεί ένα σταθερό συντελεστή ο οποίος έχει βρεθεί σε προηγούμενα κεφάλαια και δίνεται με διαφορετική έκφραση σε ορθογωνικές και σε κυλινδρικές δεξαμενές. Τέλος ο όρος $\ddot{X}(t)$ αποτελεί την επιτάχυνση της εδαφικής μετατόπισης η οποία δίνεται από το εκάστοτε επιταχυνσιογράφημα.

Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $q_n(t)$ γίνεται κατάλληλη ολοκλήρωση της εξίσωσης (9.1.1) με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και με βάση τους μετασχηματισμούς

$$\ddot{q}_n(t) = \frac{1}{\Delta t^2}(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \quad (9.1.2)$$

και

$$\dot{q}_n(t) = \frac{1}{\Delta t}(q_{n+1} - q_{n-1}) \quad (9.1.3)$$

η (9.1.1) γίνεται

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{1}{2\Delta t} 2\xi\omega \right) q_{n+1} \\ & = -c\ddot{X}_n(t) - \left(\omega^2 - \frac{2}{\Delta t^2} \right) q_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{1}{2\Delta t} 2\xi\omega \right) q_{n-1} \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος θεωρούνται μηδενικές (σύστημα αρχικώς εν ηρεμία)

$$q_0 = q(t_0) = 0$$

και

$$\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0) = 0$$

Με βάση τις παραπάνω συνθήκες για $t=t_0$ η (9.1.1) γίνεται

$$\ddot{q}_0(t) = -c\ddot{X}_0(t) \quad (9.1.5)$$

από την (9.1.2) προκύπτει ότι

$$q_1 = q_{-1} \quad (9.1.6)$$

και από την (9.1.3) έχουμε

$$\ddot{q}_0(t) = \frac{1}{\Delta t^2} (q_1 + q_{-1}) \quad (9.1.7)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (9.1.5), (9.1.6) και (9.1.7) καταλήγουμε πως

$$q_1 = q_{-1} = -\frac{1}{2} c \Delta t^2 \ddot{X}_0(t) \quad (9.1.8)$$

Από την εξίσωση (9.1.8) είναι όλα γνωστά και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τα q_1 , q_{-1} και εν συνεχεία από την εξίσωση (9.1.1) για τα διάφορα t_n τις υπόλοιπες τιμές των q_n . Να σημειωθεί πως το βήμα Δt ορίζεται από το βήμα στο επιταχυνσιογράφημα και συνήθως οι τιμές του είναι 0.005 sec ή 0.01 sec.

Με δεδομένο πως έχουμε βρει τα q_n για κάθε χρονική στιγμή t_n τώρα μπορούμε να βρούμε την ολική μετατόπιση μέσω της σχέσης

$$u_n = q_n + c_n X \quad (9.1.9)$$

η οποία απαιτείται για την επίλυση του μη-γραμμικού προβλήματος όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Jannette B. Frandsen (2004), "Sloshing motions in excited tanks", *Journal of Computational Physics* 196, pp. 53–87
- [2] C.Z. Wang, B.C. Khoo (2005), "Finite element analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems in random excitations", *Ocean Engineering* 32, pp. 107–133
- [3] Hugo Hernandez-Barrios, Ernesto Heredia-Zavoni, Alvaro A. Aldama-Rodriguez (2007), "Nonlinear sloshing response of cylindrical tanks subjected to earthquake ground motion", *Engineering Structures* 29, pp. 3364–3376
- [4] V. Sriram, S.A. Sannasiraj, V. Sundar (2006), "Numerical simulation of 2D sloshing waves due to horizontal and vertical random excitation", *Applied Ocean Research* 28, pp. 19–32
- [5] WEI CHEN, MEDHAT A. HAROUN, FENG LIU (1996), "Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks", *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 653–669
- [6] S. Papaspyrou, S.A. Karamanos, D. Valougeorgis (2004), "Response of half–full horizontal cylinders under transverse excitation", *Journal of Fluids and Structures* 19, pp. 985–1003
- [7] Raouf A. Ibrahim (2005), "Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications", Cambridge University Press
- [8] Abramowitz, M., and Stegun, I., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, 10th Ed., Dover, New York.
- [9] Frank Bowman (1958), *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications Inc. New York
- [10] S. Papaspyrou, D. Valougeorgis, S. A. Karamanos (2004), "Sloshing Effects in Half-Full Horizontal Cylindrical Vessels Under Longitudinal Excitation", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.1, pp. 255-265
- [11] Lazaros A. Patkas, Spyros A. Karamanos (2007), "Variational Solutions for Externally Induced Sloshing in Horizontal-Cylindrical and Spherical Vessels", *ASCE JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS*, JUNE 2007