

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ



ΜΑΓΝΗΤΟΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΗΧΑΝΩΝ ΣΥΝΤΗΞΗΣ:
ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΣΤΡΩΤΗ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Ι. ΙΑΤΡΙΔΗΣ

Διπλ. Μηχ/γος Μηχανικός ΠΘ, MSc Univ. Manchester

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Νικόλαος Βλάχος	Επιβλέπων - Ομότιμος Καθηγητής ΠΘ
Νικόλαος Πελεκάσης	Τριμελής - Εκλεγμένος Καθηγητής ΠΘ
Ιωάννης Σαρρής	Τριμελής - Επίκουρος Καθηγητής ΤΕΙ Αθηνών
Νικόλαος Ανδρίτσος	Μέλος - Αναπληρωτής Καθηγητής ΠΘ
Δημήτριος Βαλουγεώργης	Μέλος - Καθηγητής ΠΘ
Ιωάννης Βομβορίδης	Μέλος - Καθηγητής ΕΜΠ
Βασίλειος Μποντόζογλου	Μέλος - Καθηγητής και Αντιπρύτανης ΠΘ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - 2012

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει ως σκοπό να προσθέσει νέα γνώση στην τεχνολογία της πυρηνικής σύντηξης. Όσο ποτέ άλλοτε, το ενεργειακό πρόβλημα στο πλανήτη μας συνιστά πια επείγουσα κατάσταση που επιζητεί άμεση επίλυση. Η πυρηνική σύντηξη προσδοκά στην δραστική παραγωγή ενέργειας μέσα από ύλες και διεργασίες που δεν βλάπτουν τον άνθρωπο και το περιβάλλον. Επιτυγχάνοντας παράλληλα πολύ καλούς βαθμούς απόδοσης, η σύντηξη έρχεται να δώσει ελπίδες στην επερχόμενη έλλειψη ενεργειακών πόρων που μάς απειλεί.

Ένα από τα προβλήματα που καθυστερούν την τελική υλοποίηση της πυρηνικής σύντηξης είναι η κατανόηση των φαινομένων ροής σε πολύ υψηλά μαγνητικά πεδία, κάτι που μέχρι τώρα δεν μελετήθηκε σε βάθος, λόγω εγγενών δυσκολιών, και αποτελεί πεδίο έρευνας στην επιστήμη. Η παρούσα εργασία μελετά με αριθμητικές μεθόδους τη μετάβαση μιας ροής από στρωτή σε τυρβώδη, κάτω από την επίδραση μαγνητικού πεδίου, υψηλής έντασης για τις δυνατότητες των σημερινών αριθμητικών μοντέλων. Η κύρια γεωμετρία ροής στην παρούσα διατριβή είναι η τοροειδής, σε μια προσπάθεια να προσεγγιστεί η ροή μέσα στον εξωτερικό μανδύα του μελλοντικού αντιδραστήρα σύντηξης.

Η διατριβή υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του Εθνικού Προγράμματος Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης της Ένωσης Euratom-Ελληνική Δημοκρατία (ΓΓΕΤ). Στο πλαίσιο του προγράμματος έγιναν επισκέψεις (Mobility) στο Universite Libre de Bruxelles και χρήση 32-64 παράλληλων επεξεργαστών στο HPC-FF του Julich της Γερμανίας και στο ULB.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Δρ Νικόλαο Βλάχο, που με ενέπνευσε στην πορεία μου. Η πίστη του στις ικανότητές μου, αλλά και το καθημερινό παράδειγμά του με βοήθησαν να φέρω εις πέρας το έργο που ανέλαβα. Πολλές ευχαριστίες οφείλω στον Δρ Ιωάννη Σαρρή, χωρίς τις καταλυτικές και συνεχείς επεμβάσεις του οποίου δεν θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω τη διατριβή, αλλά και στην οικογένειά του που έδειχνε πάντα υπομονή στις ατέλειωτες συσκέψεις μας που συχνά κρατούσαν μέχρι τις πρώτες πρωινές ώρες.

Ευχαριστώ το τρίτο μέλος της Συμβουλευτικής επιτροπής καθηγητή Νικόλαο Πελεκάση και τα μέλη της Επταμελούς επιτροπής, αναπληρωτή καθηγητή Νικόλαο Ανδρίτσο, καθηγητή Δημήτρη Βαλουγεώργη, καθηγητή Βασίλη Μποντόζογλου και τον καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ιωάννη

Βομβορίδη για την συμμετοχή τους και τα εύστοχα σχόλιά τους που βελτίωσαν το τελικό κείμενο της διατριβής.

Ευγνωμοσύνη χρωστάω στη σύζυγό μου, Ελένη, για το κουράγιο που μου δίνει πάντα στις δύσκολες στιγμές των αποφάσεων και στις αμέτρητες φορές που νόμιζα πως το αδιέξοδο που βρέθηκα θα τερματίσει άδοξα τη διατριβή μου. Η πίστη της στο πρόσωπό μου, η υπομονή της και η υποστήριξή της, ήταν καθοριστικά για το διδακτορικό, μα και για τη ζωή μου γενικότερα.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στον αδελφό μου Γιώργο που από μικρός με ενθάρρυνε σε υψηλούς στόχους. Στην αδελφή μου που μου έμαθε τι σημαίνει υπομονή και σιωπηλό παράδειγμα. Στον πατέρα μου Ιωάννη και τον παππού μου Γιώργο, που με εισήγαγαν στο χώρο των Μηχανικών.

Αφήνω επίτηδες για το τέλος τον αφανή ήρωα της ζωής μου, την Μητέρα μου που της χρωστάω τη ζωή μου, τη συνείδησή μου και ότι καλό με χαρακτηρίζει.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σημαντικό επιστημονικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η ροή και μεταφορά θερμότητας ηλεκτρικά αγωγίμου ρευστού σε αγωγούς, υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Σημαντική εφαρμογή αποτελεί η ροή υγρού μετάλλου στον μανδύα που θα περιβάλλει τον μελλοντικό αντιδραστήρα πυρηνικής σύντηξης. Η επιβολή ισχυρών μαγνητικών πεδίων για την συγκράτηση του πλάσματος στη συγκεκριμένη εφαρμογή, καθιστά αναγκαία τη μελέτη της επίδρασής τους στη ροή και μεταφορά θερμότητας του ρευστού, με σκοπό την βελτίωση της αποδοτικότητας του μανδύα και την αποφυγή πρακτικών προβλημάτων που καθιστούν δυσχερή την επιδιωκόμενη ομαλή λειτουργία του.

Η παρούσα έρευνα που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του Εθνικού Προγράμματος Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης της Ένωσης Euratom-Ελληνική Δημοκρατία, αφορά στη μελέτη της ροής ρευστού σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής, υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Η ροή θεωρείται αρχικά στρωτή, ενώ η επιβολή του μαγνητικού πεδίου σε συνδυασμό με την αύξηση της ταχύτητας ροής έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη τυρβωδών οριακών στρωμάτων κοντά στα τοιχώματα του αγωγού, ώστε να αναπτύσσεται τελικά τύρβη σε όλο το ροϊκό πεδίο.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ροής παρουσία υψηλών μαγνητικών πεδίων είναι δύσκολο να επιτευχθεί με κλασικές μεθόδους αριθμητικής προσομοίωσης γιατί απαιτεί πολύ πυκνά πλέγματα και μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους. Αυτό οφείλεται κυρίως στην ανάπτυξη, λόγω του ισχυρού μαγνητικού πεδίου, πολύ λεπτών μαγνητοϋδροδυναμικών οριακών στρωμάτων τύπου Hartmann στα κάθετα προς το μαγνητικό πεδίο τοιχώματα και τύπου Shercliff στα παράλληλα.

Η προσθήκη του κατάλληλου μαγνητοϋδροδυναμικού μοντέλου που έγινε στην ανοικτή βιβλιοθήκη υπολογιστικής ρευστοδυναμικής «OpenFOAM» είχε σκοπό την ανεύρεση λύσης στο πρόβλημα, με ταυτόχρονη δυνατότητα για παράλληλη εκτέλεση του μοντέλου σε πολλούς επεξεργαστές, κάτι που βοηθά να αντιμετωπιστούν οι αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις. Επί πλέον, η παρούσα διατριβή έχει στόχο να προσδιορίσει τη μεταβατική περιοχή της ροής από στρωτή σε τυρβώδη και να μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει τη μετάβαση και το ροϊκό πεδίο. Βασικός σκοπός είναι η ανάπτυξη γενικών συσχετίσεων που περιγράφουν τη μετάβαση από τη στρωτή στη τυρβώδη ροή, σε συνάρτηση με τους αριθμούς Hartmann και Reynolds.

Υλοποιήθηκαν αριθμητικές προσομοιώσεις για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann ($1 < Ha < 5.000$) και αριθμών Reynolds ($800 < Re < 4.500.000$) με στόχο τη διερεύνηση της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις έλαβαν χώρα σε δύο τοροειδείς αγωγούς της ίδιας τετραγωνικής διατομής με διαφορετικές ακτίνες τόρου, για να μπορούν να εξαχθούν κατάλληλα συμπεράσματα μέσα από τη σύγκρισή τους. Επίσης, ως συμπλήρωμα στη βασική μελέτη της μεταβατικής ροής και αφού ανιχνεύθηκε η περιοχή μετάβασης, μελετήθηκε η ροή και στην τυρβώδη περιοχή, σε μια προσπάθεια χαρακτηρισμού της ροής και μετά τη μετάβαση σε τυρβώδη.

Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν δύο βασικές περιοχές μελέτης, ανάλογα με την αποσταθεροποίηση της δευτερεύουσας ροής στα επίπεδα που είναι κάθετα στη τοροειδή κατεύθυνση. Για αριθμούς Hartmann $Ha < 18$, οι ιξώδεις δυνάμεις εξισορροπούνται από τις υδρομαγνητικές δυνάμεις (Lorentz), ενώ για $Ha \geq 18$ οι δυνάμεις Lorentz εξισορροπούνται από τις δυνάμεις αδράνειας του ρευστού. Η αποσταθεροποίηση της δευτερεύουσας ροής συμβαίνει κυρίως στο εξωτερικό κατακόρυφο (κοίλο) τοίχωμα του τοροειδούς αγωγού. Μια κύρια μορφή της ροής για $Ha < 18$ είναι η εμφάνιση ενός ζεύγους δινών Taylor-Couette, οι οποίες μεγαθύνονται καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds και αποσταθεροποιούνται, οδηγώντας τη ροή σε μετάβαση. Αν και το μαγνητικό πεδίο αναμένεται να επιβραδύνει την ροή, καθώς το μαγνητικό πεδίο αυξάνει με αριθμούς Hartmann $Ha > 18$, αυξάνει και η δύναμη Lorentz και το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση περισσότερων ζευγών δινών, οι οποίες σταδιακά προκαλούν διαταραχές στη στρωτή ροή και την οδηγούν σε μεταβατικά στάδια και τύρβη.

Οι θερμοκρασιακές μεταβολές είναι μεγαλύτερες στην ακτινική κατεύθυνση της τοροειδούς γεωμετρίας και μικρότερες στην κατακόρυφη και εφαπτομενική διεύθυνση. Η εξάρτηση της θερμοκρασίας από την ακτίνα είναι σχεδόν γραμμική, και μαρτυρά μεταφορά θερμότητας με αγωγή για τους πολύ χαμηλούς αριθμούς Prandtl (υγρό μέταλλο) που εξετάζονται. Όταν ο αριθμός Prandtl αυξηθεί, η μεταφορά θερμότητας γίνεται κυρίως με εξαναγκασμένη συναγωγή. Η θερμοκρασία διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα με την αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου (αύξηση του αριθμού Hartmann), ενώ η αύξηση της ταχύτητας του ρευστού (αύξηση του αριθμού Reynolds) προκαλεί άνοδο της θερμοκρασίας του.

Για $Ha \geq 18$, η μετάβαση μπορεί να προσεγγιστεί με τη σχέση: $Re = aHa^b$, όπου για την μικρή γεωμετρία ισχύει: $a = 16.48$ και $b = 1.35$, για $48 < Re/Ha < 360$, ενώ για την μεγάλη γεωμετρία: $a = 16.803$ και $b = 1.4345$, για $81 < Re/Ha < 840$.

ABSTRACT

A subject of great interest is the study of the flow and heat transfer of an electrically conducting fluid in ducts, under the influence of a strong magnetic field. An important application is the liquid metal flow in the breeder blanket that will cover the future nuclear fusion reactor. The application of strong magnetic fields for the containment of the plasma in the specific application requires the study of their effect on the flow and heat transfer, in order to improve the efficiency of the breeder blanket, and to avoid practical problems that cause malfunctions in the desired operation of the blanket.

The present research carried out in the framework of the National Programme of Controlled Thermonuclear Fusion of the Association Euratom-Hellenic Republic, concerns mainly the study of the flow of a conductive fluid in a toroidal duct of a square cross section, under the effect of a strong magnetic field. The flow is initially considered laminar, while the application of the magnetic field combined with the increase of the flow velocity results in the development of turbulent layers near the duct walls, and to finally develop turbulence in the whole flow field.

The prediction of the flow field in the presence of high magnetic fields is difficult to achieve by the usual methods of numerical simulation, because it requires very dense grids and long computation times. This is mainly due to the development of very thin magnetohydrodynamic boundary layers of Hartmann type on the walls normal to the magnetic field and Shercliff type on the parallel walls, because of the strong magnetic field.

The addition of a proper hydromagnetic model, implemented in the open computational fluid dynamics library «OpenFOAM», was to find a solution to this problem, with the additional ability to execute the model in parallel processors, which helps to face the increased computational needs. In addition, the present thesis aims to define the transitional region of flow from laminar to turbulent, and to study the manner by which the magnetic field influences the transition and the flow field. The basic goal is the development of general correlations that describe the transition from laminar to turbulent flow, as a function of the Hartmann and Reynolds numbers.

Numerical simulations were carried out for various values of Hartmann numbers ($1 < Ha < 5.000$) and Reynolds numbers ($800 < Re < 4.500.000$), in order

to study of the transition from laminar to turbulent flow. The numerical simulations were performed for two basic toroidal ducts of the same square cross-section and different torus radii, in order to allow for proper conclusions to be drawn through their comparison. Furthermore, as an addition to the basic study of the transitional flow and after the transitional regime was detected, the flow was also studied in the turbulent regime, in an effort to characterize the flow after its transition to turbulence.

The results indicate two basic categories for study, according to the destabilization of the secondary flow in the planes normal to the toroidal direction. For Hartmann numbers $Ha < 18$, the viscous forces are balanced by the hydromagnetic forces (Lorentz), while for **$Ha \geq 18$ the Lorentz forces** are balanced by fluid inertia. The destabilization of the secondary flow primarily occurs near the external (concave) sidewall of the toroidal duct. A main form of the flow for $Ha < 18$ is the presence of a pair of Taylor-Couette vortices that grow as the Reynolds number increases, and finally are destabilized, leading the flow to transition. Although the magnetic field is expected to delay the flow, as the magnetic field is increased to Hartmann numbers $Ha > 18$, the Lorentz force is also increased resulting to the appearance of more Taylor vortex pairs, which gradually generate flow disturbances and lead it to transitional stages and finally turbulence.

The temperature variations are larger in the radial direction of the toroidal geometry and smaller in vertical and tangential directions. The temperature dependence on the radius is almost linear, indicating heat transfer by conduction for the very small Prandtl numbers (liquid metal) examined. When the Prandtl number is increased, the heat transfer takes places by forced convection. The temperature is kept at low levels with the increase of the magnetic field (increase of Hartmann number) while the increase of the velocity of the fluid (increase of Reynolds number) causes an increase of the fluid temperature.

For $Ha \geq 18$, the transition can be approximated by the correlation: $Re = aHa^b$. For the small toroidal geometry: $a = 16.48$ and $b = 1.35$, in the range $48 < Re/Ha < 360$, while for the large geometry: $a = 16.803$ and $b = 1.4345$, in the range $81 < Re/Ha < 840$.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

	Σελ.
Σχήμα 1.1 Τυπική διάταξη Τοκαμακ για μηχανές σύντηξης	2
Σχήμα 1.2 Τυπική αντίδραση σύντηξης Δευτερίου-Τριτίου	3
Σχήμα 1.3 Τυπικός σταθμός παραγωγής ενέργειας από σύντηξη	4
Σχήμα 1.4 Μανδύας αντιδραστήρα σύντηξης	6
Σχήμα 1.5 Γεωμετρία της ροής	7
Σχήμα 2.1 Κρίσιμες τιμές του αριθμού Reynolds (Re_c) για τη μετάβαση από στρωτή ροή σε τυρβώδη, για διάφορους αριθμούς Hartmann (M) (Burr et al. 2000)	13
Σχήμα 2.2 Επίδραση του αριθμού Reynolds επί της πώσης πίεσης για αριθμούς Hartmann. $Ha = 100, 56000, 200000$ (Fidaros et al. 2008), $Ha = 354, 600, 1060, 2453, 4954$ (Burr et al. 2000)	14
Σχήμα. 2.3 Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας για $Ra=10^5$, $Pr=0.1$, κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο (Ιατρίδης 2008)	19
Σχήμα. 2.4 Κατανομή ισόθερμων για $Ra=10^4$, $Pr=0.7$, κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο. Στρωτή ροή για $Ha=0$ (άνω) και $Ha=100$ (κάτω) (Iatridis et al. 2012a)	19
Σχήμα 2.5 Κατανομή ισόθερμων για $Ra=10^9$, $Pr=0.02$, κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο. Τυρβώδης ροή για $Ha=0$ (άνω) και $Ha=300$ (κάτω). (Sarris et al. 2010)	19
Σχήμα 3.1 Νόμος του Gauss (Young 1991)	31
Σχήμα 3.2 Νόμος του Ampere (Young 1991) (κατεύθυνση ρεύματος I προς τον αναγνώστη)	33
Σχήμα 3.3 Νόμος του Faraday (Young 1991)	35
Σχήμα 4.1 Αποτελέσματα ελέγχου υλοποίησης του κώδικα για ένα χρονικό βήμα	48
Σχήμα 4.2 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης	49
Σχήμα 4.3 Παράμετροι στη διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων	50
Σχήμα 4.4 Σχηματική περιγραφή του βασικού πλέγματος του OpenFOAM	51
Σχήμα 4.5 Τύποι του <code>geometricField<Type></code> σε πλέγμα με 2 οριακά patches	52
Σχήμα 4.6 Βασική δομή αντικειμένων που οδηγεί στο <code>geometricField<Type></code>	53
Σχήμα 4.7 Το <code>geometricField<Type></code> και οι λειτουργίες του	54
Σχήμα 4.8 Γεωμετρία τετραγωνικής κοιλότητας, Al-Najem et al. (1998)	63
Σχήμα 4.9 Σύγκριση κατανομών θερμοκρασίας στο μέσο της γεωμετρίας (α) Al-Najem et al. (1998), (β) τροποποιημένος κώδικας OpenFoam	64
Σχήμα 4.10 Σύγκριση κατανομών ταχύτητας στο μέσο της γεωμετρίας (α) Al-Najem et al. (1998), (β) τροποποιημένος κώδικας OpenFoam	65

Σχήμα 4.11: Σύγκριση γραμμών ροής. Δεξιά γραμμές ροής μόνο στο κεντρικό τμήμα	66
Σχήμα 4.12: Σύγκριση ισόθερμων στο μέσο της γεωμετρίας για διάφορες τιμές Ha (α) Al-Najem et al. (1998), (β) τροποποιημένος κώδικας OpenFoam	67
Σχήμα 4.13 Κυβική γεωμετρία της ροής Ozoe et al. (1989) με μαγνητικό πεδίο στην x - διεύθυνση	68
Σχήμα 4.14 Ισόθερμες για $Ra=10^6$, $Pr=0,054$, $Ha=0$ με Ozoe et al. (1989). (α) Επίπεδο x - z , (β) Επίπεδο x - y , (γ) Επίπεδο y - z . Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).	70
Σχήμα 4.15 Σύγκριση ισόθερμων για $Ra=10^6$, $Pr=0,054$, $Ha=300$, με Ozoe et al. (1989). (α) Επίπεδο x - z , (β) Επίπεδο x - y , (γ) Επίπεδο y - z . Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).	71
Σχήμα 4.16 Σχηματική απεικόνιση του προβλήματος Hartmann, όπως παρουσιάζεται στο εγχειρίδιο του OpenFoam	72
Σχήμα 4.17 Σύγκριση κατανομών ταχύτητας για μαγνητικό πεδίο με ένταση 1T και 20T, με το μοντέλο «mhdFoam» του OpenFoam. Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).	73
Σχήμα 5.1 Γεωμετρία της ροής	74
Σχήμα 5.2 Γεωμετρία της βασικής τοροειδούς ροής	77
Σχήμα 5.3 Αρίθμηση κελιών στην υπό μελέτη γεωμετρία	77
Σχήμα 5.4 Αρχή αξόνων και συντεταγμένες γεωμετρίας	78
Σχήμα 5.5 Ατομικά συστήματα συντεταγμένων σε blocks του (α) 2^{ou} και (β) 4^{ou} τεταρτημόριου	79
Σχήμα 5.6 Διαχωρισμός κελιών στην τετραγωνική διατομή	81
Σχήμα 5.7 Ανάλυση σημείων πλέγματος για $Ha=200$, $Re=1$	81
Σχήμα 5.8 Γεωμετρία ροής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά ίσο με 4,5:1	83
Σχήμα 6.1 Μεταβολή της κινητικής ενέργειας των διαταραχών με τον αριθμό Re , που αναδεικνύει την ανάπτυξη των διαταραχών	87
Σχήμα 6.2 Κρίσιμοι αριθμοί Reynolds μετάβασης για διάφορους αριθμούς Hartmann σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1	88
Σχήμα 6.3 Τρισδιάστατη κατανομή του μέτρου ταχύτητας του ρευστού για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	90
Σχήμα 6.4 Κατανομή στιγμιαίων τιμών του μέτρου ταχύτητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	92

Σχήμα 6.5 Κατανομή της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	94
Σχήμα 6.6 Κατανομή στιγμιαίων τιμών κατακόρυφης ταχύτητας u_z σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	95
Σχήμα 6.7 Κατανομή στιγμιαίων τιμών εφαπτομενικής ταχύτητας u_θ σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	96
Σχήμα 6.8 Κατανομή στιγμιαίων τιμών εφαπτομενικής ταχύτητα u_θ στην αξονική διατομή του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο $r-\theta$). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	97
Σχήμα 6.9 Κατανομή στιγμιαίων τιμών κατακόρυφης στροβιλότητας στην αξονική διατομή του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο $r-\theta$). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	98
Σχήμα 6.10 Κατανομή αζιμούθιας στροβιλότητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο $r-z$). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	99
Σχήμα 6.11 Κατανομή αξονικής στροβιλότητας του τόρου, επίπεδο $r-z$. Για κάθε Ha , ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	100
Σχήμα 6.12 Τρισδιάστατη απεικόνιση αξονικής στροβιλότητας. Ροή στρωτή (άνω), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (κάτω)	102
Σχήμα 6.13 Κατανομή ακτινικής ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση z . Ροή στρωτή (—), μεταβατική (--), τυρβώδης (-.-)	103
Σχήμα 6.14 Γεωμετρία τόρου με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1	105
Σχήμα 6.15 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann σε στρωτές τιμές λίγο πριν τη μετάβαση	105
Σχήμα 6.16 Κρίσιμοι αριθμοί Reynolds για μετάβαση της ροής στον τοροειδή αγωγό με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1 για διάφορες τιμές του Ha , και σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές για τον αγωγό με λόγο 1,5:1	107
Σχήμα 6.17 Μεταβολή κινητικής ενέργειας διαταραχών με τον αριθμό Re για διάφορες τιμές Ha στη μεγάλη γεωμετρία που αναδεικνύουν την ανάπτυξη των διαταραχών	108
Σχήμα 6.18 Τρισδιάστατη απεικόνιση μέτρου ταχύτητας σε στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), και τυρβώδη (δεξιά) ροή για διάφορες τιμές Ha	109
Σχήμα 6.19 Κατανομή στιγμιαίων τιμών του μέτρου ταχύτητας σε αντιδιαμετρικές τομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Για κάθε Ha οι αριθμοί Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω	110

Σχήμα 6.20 Κατανομή της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω	111
Σχήμα 6.21 Κατανομή κατακόρυφης ταχύτητας u_z σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου. Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω	113
Σχήμα 6.22 Κατανομή εφαπτομενικής ταχύτητας u_θ σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου. Για κάθε Ha οι τιμές του Re δηλώνονται από πάνω προς τα κάτω	114
Σχήμα 6.23 Κατανομή εφαπτομενικής ταχύτητα u_θ σε αξονικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Για κάθε Ha , οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά	115
Σχήμα 6.24 Κατανομή κατακόρυφης στροβιλότητας σε αξονικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Για κάθε Ha , οι αριθμοί Re αυξάνονται από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά	116
Σχήμα 6.25 Κατανομή αζιμούθιας στροβιλότητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου. Για κάθε Ha οι αριθμοί Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω	117
Σχήμα 6.26 Κατανομή αξονικής στροβιλότητας του τόρου, επίπεδο r - z . Για κάθε Ha , ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)	118
Σχήμα 6.27 Τρισδιάστατη απεικόνιση αξονικής στροβιλότητας. Ροή στρωτή (άνω), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (κάτω)	119
Σχήμα 6.28 Κατανομή ακτινικής ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση z . Ροή στρωτή (—), μεταβατική (--), τυρβώδης (-.-)	120
Σχήμα 6.29 Ροϊκές γραμμές δευτερογενούς ροής του ρευστού, σε αντιδιαμετρικές διατομές	122
Σχήμα 6.30 Εφαπτομενική ταχύτητα ροής για διάφορες τιμές Ha λίγο πριν τη μετάβαση (επίπεδο r - θ)	123
Σχήμα 6.31 Διανύσματα ροής για διάφορες τιμές Ha και Re , λίγο πριν τη μετάβαση (Το αριστερό τοίχωμα είναι το εσωτερικό)	123
Σχήμα 6.32 Πάχη οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann σε στρωτές τιμές λίγο πριν τη μετάβαση, για τις δύο τοροειδείς γεωμετρίες	125
Σχήμα 6.33 Κατανομή θερμοκρασίας σε διατομές του τοροειδούς αγωγού α) κατακόρυφη διατομή (επίπεδο r - z), β) αξονική διατομή (επίπεδο r - θ)	127
Σχήμα 6.34 Κατανομή διαταραχών θερμοκρασίας σε κατακόρυφες διατομές (επίπεδο r - z) για διάφορους αριθμούς Hartmann και Reynolds	129
Σχήμα 6.35 Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας για διάφορες τιμές αριθμών Ha και Re στο μέσο ύψος $Z=0,5$ του τόρου. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό	130

Σχήμα 6.36	Ακτινική κατανομή διαταραχών θερμοκρασίας για διάφορες τιμές Ha και Re στο μέσο ύψος $Z=0,5$ του τόρου. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό	131
Σχήμα 6.37	Κατανομή θερμοκρασίας στην κατακόρυφη διατομή του τοροειδούς αγωγού για $Pr=0,7$, $Ha=100$ και $Re=8000$	132
Σχήμα 6.38	Κατανομή θερμοκρασίας στο ύψος $Z=0,9$ του τόρου, για $Pr=0,7$, $Ha=100$, $Re=8000$. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό. α) Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας, β) Θερμοκρασιακές διαταραχές	133
Σχήμα 6.39	Πεδίο στιγμιαίων ταχυτήτων u , στις αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	134
Σχήμα 6.40	Τρισδιάστατη απεικόνιση πεδίου στιγμιαίων ταχυτήτων	135
Σχήμα 6.41	Πεδίο ταχυτήτων u_{rms} , σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	136
Σχήμα 6.42	Κατανομές μέτρου στιγμιαίας ταχύτητας στο μέσο ύψος	137
Σχήμα 6.43	Μέση ακτινική ταχύτητα $u_{r, mean}$, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	137
Σχήμα 6.44	Κατανομή μέσης ακτινικής ταχύτητας $u_{r, mean}$ στο μέσο ύψος του τόρου	138
Σχήμα 6.45	Μέση εφαπτομενική ταχύτητα $u_{\theta, mean}$, στις αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	139
Σχήμα 6.46	Μέση εφαπτομενική ταχύτητα $u_{\theta, mean}$ στο μέσο ύψος του τόρου	139
Σχήμα 6.47	Ακτινική κατανομή της εφαπτομενικής ταχύτητας $u_{\theta, rms}$	140
Σχήμα 6.48	Μέση κατακόρυφη ταχύτητα $u_z, mean$, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	141
Σχήμα 6.49	Μέση κατακόρυφη ταχύτητα, $u_z, mean$, στο μέσο ύψος του τόρου	141
Σχήμα 6.50	Κινητική ενέργεια διαταραχών ταχύτητας, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$	142
Σχήμα 6.51	Ακτινική κατανομή κινητικής ενέργειας της τύρβης	143
Σχήμα 6.52	Κατανομή μέσης εφαπτομενικής στροβιλότητας στο μέσο ύψος του αγωγού	144
Σχήμα 6.53	Κατανομή εφαπτομενικής στροβιλότητας rms στο μέσο ύψος του τόρου	145
Σχήμα 6.54	Κατανομή τιμών rms κατακόρυφης στροβιλότητας	146

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Περιγραφή	Σελ.
Πίνακας 4.1 Στοιχεία που αποθηκεύονται στο αρχείο «fvMesh»	52
Πίνακας 4.2 Διακριτοποίηση μερικών παραγώγων στην OpenFOAM	55
Πίνακας 5.1 Θεωρητικό πάχος οριακών στρωμάτων και τιμές (Ha^2/Re) για διάφορες τιμές Ha και Re . α) Πάχος στρωμάτων Hartmann (Ha^{-1}) και πλαϊνών οριακών στρωμάτων ($Ha^{-1/2}$) β) τιμές (Ha^2/Re)	80
Πίνακας 5.2 Αριθμός Re έναρξης και λήξης των προσομοιώσεων για κάθε αριθμό Ha	84
Πίνακας 5.3 Τιμές Re έναρξης/λήξης των προσομοιώσεων για κάθε τιμή Ha για τη ροή στο μεγαλύτερο τόρο	85
Πίνακας 6.1 Τιμές Ha και Re όπου η τοροειδής ροή γίνεται τυρβώδης	87
Πίνακας 6.2 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann, για διάφορες τιμές Ha και Re κατά την μετάβαση	104
Πίνακας 6.3 Κρίσιμες τιμές $Re-Ha$ για μετάβαση σε τυρβώδη ροή στη μεγάλη γεωμετρία	106
Πίνακας 6.4 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann, για διάφορες τιμές Ha και Re κατά την μετάβαση	124

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	III
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	V
ABSTRACT.....	VII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	IX
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	XIV
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	1
1.2 ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	9
1.3 ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	10
2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ	12
2.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΜΑΓΝΗΤΟ-ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ	12
2.2 ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ.....	14
2.3 ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΙ ΚΑΝΑΛΙΑ.....	15
2.4 ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΕ ΑΛΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ	18
2.5 ΣΤΡΩΤΗ, ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΜΑΓΝΗΤΟ-ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ.....	22
3. ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ.....	30
3.1 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ, ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	30
3.1.1 Εξίσωση διατήρησης της μάζας	30
3.1.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής	30
3.1.3 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.....	30
3.1.4 Επίδραση της τύρβης	30
3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ.....	31
3.2.1 Εξισώσεις Ηλεκτροστατικού πεδίου	31
3.2.2 Εξισώσεις Μαγνητοστατικού πεδίου	32
3.2.3 Εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	33
3.2.4 Ανάπτυξη δύναμης Lorentz σε κινούμενο ρευστό	37
3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ.....	38
3.3.1 Εξισώσεις Μαγνητούδροδυναμικής	38
3.3.2 Αδιάστατες εξισώσεις Μαγνητούδροδυναμικής	40
3.3.3 Μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds	41
4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	43
4.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΟΗΣ	43
4.1.1 Εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες	43
4.1.2 Εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες.....	44

4.1.3	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	45
4.2	ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ OPENFOAM	47
4.2.1	Εισαγωγικά στοιχεία για την βιβλιοθήκη OpenFOAM	47
4.3	ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ OPENFOAM	49
4.3.1	Καθορισμός πλέγματος στην OpenFOAM	50
4.3.2	Διακριτοποίηση των εξισώσεων	53
4.4	ΈΛΕΓΧΟΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	62
4.4.1	Σύγκριση με τα αποτελέσματα των Al-Najem et al. (1998)	62
4.4.2	Σύγκριση με τα αποτελέσματα των Ozoe et al. (1989)	68
4.4.3	Σύγκριση με αποτελέσματα της βιβλιοθήκης OpenFOAM	72
5.	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΗΣ ΤΟΡΟΕΙΔΟΥΣ ΡΟΗΣ.....	74
5.1	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΡΟΗΣ	74
5.2	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	76
5.3	ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ OPENFOAM	76
5.4	ΕΠΙΛΟΓΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ.....	82
5.5	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ.....	83
6.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ	86
6.1	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΡΟΕΙΔΟΥΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΛΟΓΟ ΜΕΣΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΠΡΟΣ ΠΛΕΥΡΑ 1,5:1	86
6.2	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΡΟΕΙΔΟΥΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΛΟΓΟ ΜΕΣΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΠΡΟΣ ΠΛΕΥΡΑ 4,5:1	105
6.3	ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΩΝ	127
6.4	ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕ ΛΟΓΟ ΜΕΣΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΠΡΟΣ ΠΛΕΥΡΑ 1,5:1	134
7.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	147
7.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	147
7.2	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	153
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	155
	ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ	164

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Αντικείμενο και Στόχοι της Διατριβής

Η βασικότερη επιδίωξη του *Ευρωπαϊκού Προγράμματος Θερμοπυρηνικής Σύντηξης* είναι η παραγωγή άφθονης και φιλικότερης προς το περιβάλλον ενέργειας. Στην θερμοπυρηνική σύντηξη, Δευτέριο και Τρίτιο ενώνονται προς παραγωγή Ηλίου με ταυτόχρονη απελευθέρωση μεγάλης ποσότητας ενέργειας. Οι διατάξεις που έχουν αναπτυχθεί για την υλοποίηση της σύντηξης (π.χ. Tokamak, Stellarators) βρίσκονται υπό συνεχή βελτίωση ώστε να καταστούν πρακτικά λειτουργικές. Σημαντικό ρόλο στη σύντηξη διαδραματίζει το *πλάσμα*, δηλαδή ένα μίγμα ηλεκτρικά φορτισμένων σωματιδίων. Το πλάσμα σχηματίζεται όταν, λόγω υπερθέρμανσης, σε ένα αέριο απελευθερωθούν ηλεκτρόνια από το άτομό τους (το οποίο έχει ίσο αριθμό αρνητικών και θετικών φορτίων) και γίνουν ελεύθερα. Το πλάσμα επομένως αποτελείται από ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα θετικά φορτισμένα άτομα (ή ιόντα).

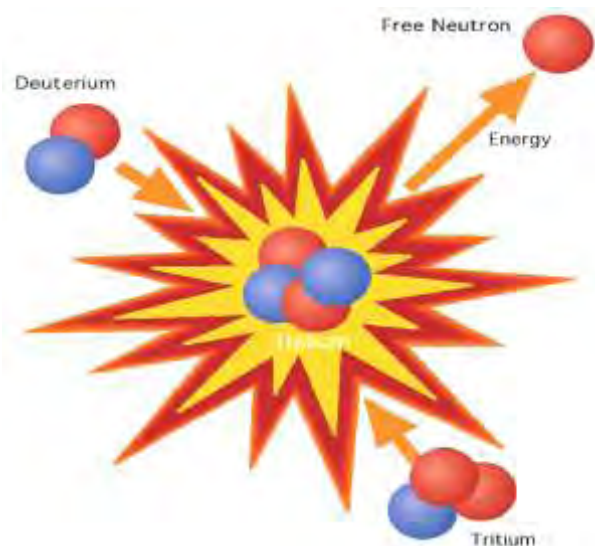
Η μελέτη της συμπεριφοράς του πλάσματος είναι πολύ σημαντική καθώς το μεγαλύτερο ποσοστό της ύλης του σύμπαντος (π.χ. ο Ήλιος, οι αστέρες και άλλα πλανητικά συστήματα) είναι σε μορφή πλάσματος. Η μελέτη αυτή έχει μεγάλη σημασία, τόσο μακροσκοπικά, αν θεωρήσουμε το πλάσμα ως ένα ρευστό, όσο και μικροσκοπικά, καθώς μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων που το απαρτίζουν αναπτύσσονται ελκτικές και απωστικές δυνάμεις.

Τις τελευταίες δεκαετίες αποκαλύπτεται όλο και περισσότερο η δυνατότητα επιτυχημένης υλοποίησης της θερμοπυρηνικής σύντηξης. Στη πλέον καθιερωμένη διαδικασία σύντηξης παίρνουν μέρος πυρήνες ισοτόπων (Δευτέριο $D \equiv p + n$ και Τρίτιο $T \equiv p + 2n$) του Υδρογόνου, όπου με « p » συμβολίζονται τα πρωτόνια και « n » τα νετρόνια. Η σύντηξη των πυρήνων Δευτερίου και Τριτίου ακολουθεί την εξής γενική εξίσωση πυρηνικής αντίδρασης:



όπου, $1 \text{ MeV} \approx 0,16 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται σχηματικά η αντίδραση της σύντηξης πυρήνων υδρογόνου.



Σχήμα 1.1 Τυπική αντίδραση σύντηξης Δευτερίου-Τριτίου

Για να υπερνικηθούν οι απωστικές δυνάμεις Coulomb, οι πυρήνες πρέπει να κινούνται με τεράστιες ταχύτητες και κατά συνέπεια απαιτείται υδρογονικό πλάσμα πολύ υψηλής θερμοκρασίας. Θεωρητικοί υπολογισμοί που επιβεβαιώνονται από τα μέχρι σήμερα πειράματα δείχνουν ότι πρέπει ταυτόχρονα να επιτευχθούν τα εξής μεγέθη:

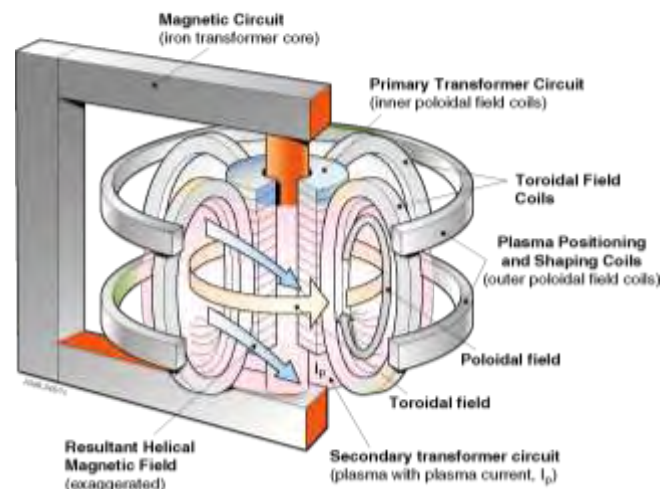
Θερμοκρασία ιόντων T_i	$(100 - 200) \times 10^6$ Kelvin
Πυκνότητα ιόντων n_i	$(2 - 3) \times 10^{20}$ Ιόντα/ m^3
Χρόνος συγκράτησης ενέργειας τ_e	$(1 - 5)$ Seconds

Συγκεκριμένα, για συνεχή λειτουργία του αντιδραστήρα σύντηξης χωρίς παροχή εξωτερικής ενέργειας (αυτανάφλεξη), πρέπει να ικανοποιείται το κριτήριο Lawson (1957), σύμφωνα με το οποίο η παραγόμενη ενέργεια πρέπει να υπερβαίνει την ενέργεια που χρειάζεται για τον περιορισμό και την επίτευξη της θερμοκρασίας του πλάσματος σε κάθε ωφέλιμη συσκευή σύντηξης:

$$n_i T_i \tau_e \geq 6 \cdot 10^{28} \text{ (m}^{-3} \cdot \text{K} \cdot \text{s)} \quad (1.2)$$

Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι η συγκράτηση του πλάσματος που, λόγω της υψηλής θερμοκρασίας, δεν είναι δυνατή με υλικά τοιχώματα. Η συγκράτηση επιτυγχάνεται σε διάταξη με τοροειδή γεωμετρία και εφαρμογή ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Το πολοειδές πεδίο σε διατάξεις "Τοκαμακ" δημιουργείται με πηνία και με ισχυρό ηλεκτρικό ρεύμα στο πλάσμα. Σχηματικά, η πειραματική διάταξη Τοκαμακ παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.2. Σε άλλες διατάξεις (stellarators) το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται μόνο με πηνία χωρίς ηλεκτρικό ρεύμα στο πλάσμα, η απόδοσή τους είναι όμως ακόμη μικρότερη των μεγάλων Τοκαμακ και η

γεωμετρία πιο πολύπλοκη. Οι υπολογισμοί των πιθανών καταστάσεων ισορροπίας και της ευστάθειας του πλάσματος στηρίζονται στη Μαγνητορευστοδυναμική.



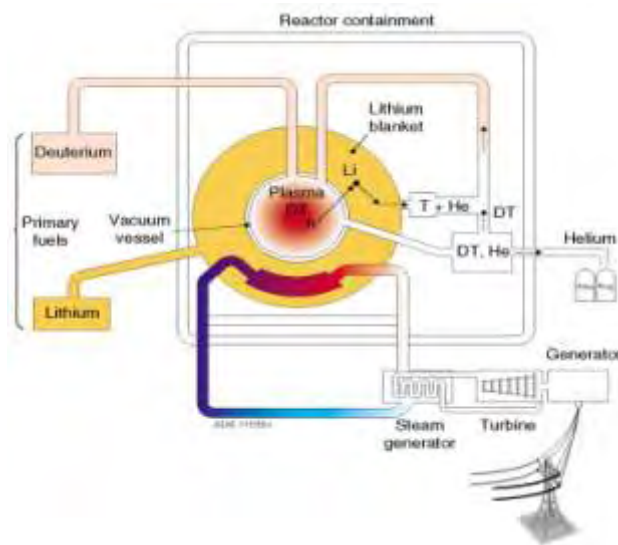
Σχήμα 1.2 Τυπική διάταξη Τοκαμακ για μηχανές σύντηξης (EFDA 2012)

Ας σημειωθεί ότι στη διάταξη JET (Joint European Torus, Culham Αγγλίας) του Ευρωπαϊκού Προγράμματος Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης έχουν επιτευχθεί χωριστά οι τιμές: $T_i = 300 \cdot 10^6$ K, $n_i = 4 \cdot 10^{20}$ m⁻³, $\tau_e = 1,8$ s και για το τριπλό γινόμενο η τιμή: $n_i T_i \tau_e \approx 1 \cdot 10^{22}$ m⁻³·K·s (Culham 2012). Δηλαδή, σήμερα είναι 6 φορές μικρότερη της τιμής ανάφλεξης, ενώ το 1983 ήταν 100 φορές μικρότερη.

Ο αντιδραστήρας ITER (Διεθνής Θερμοπυρηνικός Πειραματικός Αντιδραστήρας) είναι ουσιαστικά ένας μεγαλύτερος Τοκαμακ από αυτόν του JET και αποτελεί συνεργασία Ευρωπαϊκής Ένωσης, ΗΠΑ, Ιαπωνίας, Ινδίας, Κίνας, Ν. Κορέας και Ρωσίας. Η κατασκευή του (κόστος ~ 4 δισ. Ευρώ) ήταν αντικείμενο διαβουλεύσεων σε Ευρωπαϊκό και διεθνές επίπεδο. Η τελική συμφωνία υπεγράφη στο Παρίσι τον Δεκέμβριο 2007 και προβλέπεται ότι σε αυτό τον αντιδραστήρα, το τριπλό γινόμενο ($n_i T_i \tau_e$) θα φτάσει την τιμή ανάφλεξης.

Στο Σχήμα 1.3 παρουσιάζεται σχηματικά μια διάταξη θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα κύριο πρόβλημα στο σχεδιασμό του αντιδραστήρα αφορά τον συγκεντρικό με τον θάλαμο του πλάσματος *Μανδύα* (breeder blanket) όπου θα παράγεται το απαιτούμενο Τρίτιο (από Λίθιο) και θα απάγεται η παραγόμενη ενέργεια σύντηξης από το πλάσμα προς τα συμβατικά συστήματα ηλεκτροπαραγωγής. Οι ερευνητικές δραστηριότητες επικεντρώνονται κυρίως στην μελέτη της συμπεριφοράς του πλάσματος και στην

τεχνολογία υλικών. Η μελέτη των φαινομένων μεταφοράς στο υγρό μέταλλο του μανδύα (~1000-1500 °C) βασίζεται στη μαγνητοϋδροδυναμική στρωτής και ενδεχομένως τυρβώδους ροής αγώγιμου ρευστού.



Σχήμα 1.3 Τυπικός σταθμός παραγωγής ενέργειας από σύντηξη (EFDA 2012)

Τα κύρια πλεονεκτήματα της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι τα εξής (EFDA 2012):

Άφθονες πρώτες ύλες για τον αντιδραστήρα - Το Δευτέριο, μπορεί να παραχθεί εύκολα από το νερό. Το Τρίτιο που απαιτείται για τη διαδικασία μπορεί να παραχθεί από το Λίθιο, το οποίο βρίσκεται στο έδαφος ή στο θαλασσινό νερό.

Ασφάλεια διαδικασίας (αποφυγή πυρηνικού ατυχήματος) - Η ποσότητα του Δευτερίου και του Τριτίου που λαμβάνουν μέρος στην αντίδραση της σύντηξης είναι τόσο μικρή που είναι αδύνατη μια μεγάλη απελευθέρωση ενέργειας. Επίσης η διαδικασία είναι ελεγχόμενη και εύκολα διακόπεται.

Περιβάλλον- Στη διαδικασία της σύντηξης δεν υπάρχουν προϊόντα καύσης (π.χ. CO₂, SO₂, NO_x) αφού δεν χρησιμοποιούνται καύσιμα που περιέχουν άνθρακα ή δεν γίνεται καύση αέρα.

Περιορισμένα πυρηνικά απόβλητα - Στη σύντηξη, αντίθετα με τη σχάση, τα πυρηνικά απόβλητα είναι περιορισμένα και μικρού χρόνου ζωής. Η ραδιενέργεια που θα παράγεται οφείλεται στην αλληλεπίδραση των νετρονίων με τα τοιχώματα του αντιδραστήρα. Με προσεκτική όμως επιλογή των υλικών του αντιδραστήρα αναμένεται ο περιορισμός του προβλήματος.

Σημαντικό πλεονέκτημα αποτελεί επίσης και το γεγονός ότι τα υλικά και τα προϊόντα της σύντηξης δεν είναι κατάλληλα για την παραγωγή πυρηνικών όπλων

καθώς δεν λαμβάνει χώρα παραγωγή Πλουτωνίου. Η αφθονία πρώτων υλών, η ευρεία κατανομή τους στην Γη και η μη ρυπαντική δράση της σύντηξης αυξάνουν την προσδοκία ότι θα αποτελέσει μελλοντικά μία κατάλληλη τεχνολογία για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

Η μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος απαιτεί μια εξαιρετικά πολύπλοκη διάταξη. Πρέπει να λυθούν σοβαρά τεχνικά προβλήματα ειδικά λόγω του ότι στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες που αναπτύσσονται τα υλικά φθείρονται εύκολα. Ταυτόχρονα πρέπει να αντιμετωπιστούν φαινόμενα όπως η αποβολή σωματιδίων που αποκολλούνται από τα τοιχώματα και «μολύνουν» το πλάσμα. Τέλος, σημειώνεται ότι για να είναι αποδοτικός ο σταθμός παραγωγής πρέπει να είναι πολύ μεγάλης ισχύος (της τάξεως μερικών GWatt).

Η *Μαγνητοϋδροδυναμική* (ΜΥΔ) μελετά την κίνηση ηλεκτρικά αγωγίμων ρευστών υπό την επίδραση μαγνητικού ή ηλεκτρικού πεδίου ή συνδυασμού τους. Το πλάσμα και τα υγρά μέταλλα αποτελούν παραδείγματα τέτοιων ρευστών, στα οποία όταν ασκούνται μαγνητικές δυνάμεις με τη σειρά τους μεταβάλλουν το μαγνητικό πεδίο από το οποίο διέρχονται. Ο όρος Μαγνητοϋδροδυναμική χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1937 από τον Hartmann (1937) κατά την μελέτη της ροής υδραργύρου σε αγωγό, υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Ο Alfven (1942) έκανε αναφορά στην ύπαρξη μαγνητοϋδροδυναμικών κυμάτων στην Αστροφυσική, τα οποία δημιουργούνται από ταλαντώσεις ιόντων σε μαγνητικό πεδίο. Παράλληλα, στον τομέα της Γεωφυσικής προέκυψε το συμπέρασμα πως το φαινόμενο ΜΥΔ δυναμό (MHD dynamo effect) στο εσωτερικό της Γης δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο της (Elsasser 1939). Σύμφωνα με αυτό το φαινόμενο, η κινητική ενέργεια του ρευστού είναι δυνατό να μετατραπεί σε ενέργεια ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Έτσι, το υγρό μέταλλο του πυρήνα της γης λόγω της περιστροφικής κίνησής της αποκτά κινητική ενέργεια, η οποία είναι υπεύθυνη για τη διατήρηση του μαγνητικού πεδίου.

Εκτός από τη Γεωφυσική, η Μαγνητοϋδροδυναμική βρίσκει εφαρμογές και σε πολλούς άλλους τομείς (Culham 2012). Ακόμη και η προέλευση του σύμπαντος βασίζεται σε αρχές της, πέραν αυτών της βαρύτητας. Η κατάρρευση της δημιουργεί τις μεγαλύτερες αστρικές εκρήξεις, που προκαλούνται από απότομες αλλαγές στο μαγνητικό πεδίο, εκλύοντας παράλληλα μεγάλες ποσότητες ενέργειας (6×10^{25} Joules).

Η Μαγνητοϋδροδυναμική βρίσκει εφαρμογές και στις μεταλλουργικές τεχνολογίες, μέσω συσκευών που έχουν αναπτυχθεί και λειτουργούν με βασικές αρχές της. Για παράδειγμα, στη βιομηχανία της χύτευσης χάλυβα και αλουμινίου είναι πολλές φορές απαραίτητη η μεταφορά του υγρού μετάλλου μέσα σε ανοιχτά κανάλια. Οι συσκευές που έχουν αναπτυχθεί στηρίζονται στο ότι η ροή του υγρού μετάλλου μπορεί να καθορίζεται από την επίδραση μαγνητικού πεδίου που ασκείται στο ανοιχτό κανάλι από το οποίο διέρχεται το μέταλλο.

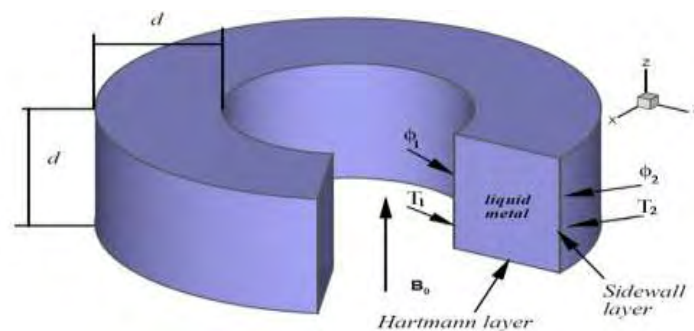
Η μελλοντική κατασκευή του μανδύα (breeder blanket) του αντιδραστήρα σύντηξης (βλέπε Σχήμα 1.4) είναι η εφαρμογή που έδωσε το κίνητρο για την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας. Ο συγκεκριμένος μανδύας θα περιβάλλει το πλάσμα και θα απάγει τη θερμότητα, που θα προκύπτει από την αντίδραση της σύντηξης. Στο σχεδιασμό προβλέπεται πως ένα υγρό μέταλλο (πιθανότατα Pb-17Li), θα τοποθετηθεί σε ένα τοροειδή αγωγό (torus) που θα είναι συγκεντρικός του τόρου του πλάσματος υψηλής θερμοκρασίας, με ταυτόχρονη παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου.

Έτσι, το αντικείμενο της παρούσας έρευνας αφορά στη υπολογιστική μελέτη ροών αγώγιμων ρευστών (ειδικά υγρού μετάλλου) σε τοροειδείς αγωγούς, με σκοπό την μελέτη της ροής και την εκτίμηση της επίδρασης ισχυρών μαγνητικών πεδίων, κάτι που μέχρι τώρα έχει γίνει κυρίως πειραματικά. Η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού που εφαρμόζεται μεταξύ των κατακόρυφων τοιχωμάτων του τοροειδούς αγωγού προκαλεί την διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο σε συνεργασία με το μαγνητικό πεδίο προκαλούν την κίνηση του ρευστού.



Σχήμα 1.4 Μανδύας (breeder blanket) αντιδραστήρα σύντηξης (EFDA 2012)

Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα αφορά στη μελέτη της ροής υγρού μετάλλου σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Βασικός σκοπός είναι η διερεύνηση της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, και η μελέτη του πεδίου ροής καθώς αλλάζουν χαρακτηριστικές παράμετροι όπως ο αριθμός Reynolds (Re) και ο αριθμός Hartmann (Ha). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δίνεται σε υψηλούς αριθμούς Hartmann ($Ha > 150$), όπου ήταν δύσκολο ή αδύνατο να γίνει υπολογιστική έρευνα στο παρελθόν.



Σχήμα 1.5 Γεωμετρία της ροής

Χρησιμοποιήθηκαν οι συνήθειες εξισώσεις μαγνητοϋδροδυναμικής ροής για μικρούς μαγνητικούς αριθμούς Reynolds, για τους οποίους δεν λαμβάνεται υπόψη το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο στη ροή. Σε μία μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε τοροειδή αγωγό δεν είναι πλήρως αντιληπτό το σημείο και η κατεύθυνση που θα εμφανιστεί η αστάθεια, ώστε να υποτεθεί συμμετρικότητα σε κάποιον άξονα συντεταγμένων και να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα ως δισδιάστατο. Έτσι προτιμάται η υιοθέτηση μοντέλου τρισδιάστατης ροής, για την εξαγωγή πληρέστερων και σωστότερων λύσεων. Το αριθμητικό μοντέλο που αναπτύχθηκε εισήχθη στην ανοικτή βιβλιοθήκη υπολογιστικής ρευστοδυναμικής «OpenFOAM», ώστε να γίνει χρήση των διάφορων εργαλείων της για μια πληρέστερη επεξεργασία και απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Επίσης με αυτό τον τρόπο επιτεύχθηκε η παράλληλη εκτέλεση του κώδικα σε πολλούς επεξεργαστές (στα εργαστήρια HPC-FF, Jülich Γερμανίας και στο Université Libre des Bruxelles, Βέλγιο) με μέση χρήση 32-64 επεξεργαστών ανά εκτελούμενη εργασία. Σε περιπτώσεις ανάγκης ιδιαίτερης ακρίβειας και πυκνότερου πλέγματος, ο κώδικας χρησιμοποίησε μέχρι 128 επεξεργαστές ανά εργασία.

Η εφαρμογή του μοντέλου έγινε για διαφορετικά εύρη τιμών των αριθμών Hartmann και Reynolds, ώστε να υπάρξει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα του φαινομένου που μελετάται, δηλαδή της μετάβασης της ροής από στρωτή σε

τυρβώδη. Πιο συγκεκριμένα, καταστρώθηκε πίνακας διαφορετικών αριθμών Hartmann, $Ha = 1$ έως 5000. Για κάθε τιμή Ha , επιλέχθηκε αρχικός αριθμός Reynolds, αρκετά μικρός ώστε η ροή να είναι στρωτή. Η προσομοίωση της ροής υλοποιήθηκε με σταδιακά αυξανόμενο αριθμό Reynolds, με περίπου 5% αύξηση σε κάθε προσομοίωση. Η προσομοίωση έλαβε χώρα μέχρι την ανίχνευση τύρβης στο πεδίο ροής.

Για τη μελέτη της τυρβώδους περιοχής, από τους διάφορους συνδυασμούς Ha και Re , επιλέχθηκαν τέσσερις (δύο για $Ha=100$ και δύο για $Ha=1000$) με αριθμό Re που να αντιστοιχεί σε τυρβώδη ροή. Πιο συγκεκριμένα, οι συνδυασμοί των αριθμών Hartmann που επιλέχθηκαν είναι οι εξής: α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$ και δ) $Ha=1000$, $Re=909410$. Η επιλογή των τιμών έγινε έτσι ώστε κατά την απεικόνισή τους σε διάγραμμα με συντεταγμένες $(x,y) = (Ha, Re)$ όπως στο Σχήμα 6.2, η ένωση του σημείου α) με το σημείο γ), και του σημείου β) με το σημείο δ), να δημιουργούν ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τη γραμμή μετάβασης. Δηλαδή, τα σημεία επιλέχθηκαν με τρόπο ώστε η γραμμή που ενώνει το πρώτο σημείο για $Ha=100$ με το πρώτο για $Ha=1000$ να δημιουργεί παράλληλη γραμμή προς τη γραμμή μετάβασης (παρομοίως και για το δεύτερο σημείο $Ha=100$ και $Ha=1000$). Ο λόγος της επιλογής τέτοιων συνδυασμών $Ha-Re$ είναι για την καλύτερη σύγκριση και επεξήγηση των αποτελεσμάτων καθώς έτσι οι δύο περιπτώσεις των διαφορετικών αριθμών Ha είναι ανάλογες ως προς την είσοδο του ρευστού στην περιοχή της τύρβης.

Έχοντας υπόψη πως η τύρβη απαιτεί πολύ πυκνό πλέγμα για την πληρέστερη προσομοίωσή της, η υιοθέτηση πυκνότερου πλέγματος απαίτησε ιδιαίτερα αυξημένη υπολογιστική ισχύ για την εφαρμογή του κώδικα και την επεξεργασία των αποτελεσμάτων. Σε συνδυασμό με το γεγονός της περιορισμένης πρόσβασης στο εργαστήριο παράλληλης επεξεργασίας HPC-FF (Julich, Γερμανία) και της αδυναμίας πρόσβασης σε άλλο παρόμοιο, αποφασίστηκε η χρήση πιο αραιού πλέγματος, ώστε να καταστεί δυνατό να εξαχθούν αποτελέσματα έστω με μειωμένη ακρίβεια και για την ενδιαφέρουσα περιοχή της πρώιμης τύρβης. Αυτό συνέβαλε στο να ολοκληρωθεί η εικόνα που αποκτήθηκε από την κύρια έρευνα που αφορούσε την μετάβαση της ροής.

Παράλληλα με την βασική τοροειδή γεωμετρία που μελετάται στην παρούσα διατριβή, υλοποιήθηκε ένας ικανός αριθμός προσομοιώσεων σε γεωμετρία της ίδιας διατομής, αλλά με μεγαλύτερη ακτίνα του τόρου όπως στην περίπτωση της

γεωμετρίας των Moresco & Alboussière (2004). Πιο συγκεκριμένα, έγινε σειρά αριθμητικών προσομοιώσεων, με σκοπό να χαρτογραφηθεί η μετάβαση για διάφορες τιμές Ha και να συγκριθεί η συμπεριφορά της ροής για την περίπτωση του τόρου μεγαλύτερης γεωμετρίας.

1.2 Πρωτοτυπία και Συμβολή της Διατριβής

Η μελλοντική κατασκευή του μανδύα απαγωγής θερμότητας (breeder blanket) στον αντιδραστήρα πυρηνικής σύντηξης είναι η εφαρμογή που έδωσε το κίνητρο για την πραγματοποίηση της παρούσας Διδακτορικής έρευνας. Η εφαρμογή υψηλών μαγνητικών πεδίων στον μανδύα καθιστά απαραίτητη την μελέτη ροών σε αντίστοιχες γεωμετρίες με επίδραση υψηλών μαγνητικών πεδίων. Τα πολύ υψηλά μαγνητικά πεδία προκαλούν δυσκολίες στην επίλυση του προβλήματος, καθώς τα οριακά στρώματα τύπου Hartmann που δημιουργούνται σε τοιχώματα κάθετα στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου γίνονται πολύ λεπτά και το απαιτούμενο πυκνό υπολογιστικό πλέγμα καθιστά την επίλυση χρονοβόρα, και πολλές φορές πρακτικά αδύνατη. Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα για τέτοια μαγνητικά πεδία αφορούν σε πειραματικές μελέτες, ενώ υπολογιστικά ελάχιστες εργασίες αναφέρουν αριθμούς Hartmann μεγαλύτερους από 150. Η παρούσα εργασία είναι μια αρχική προσπάθεια να προσομοιωθούν ροές σε μαγνητικά πεδία και αριθμούς Hartmann πολύ πιο κοντά στην πραγματική λειτουργία του εξωτερικού μανδύα του αντιδραστήρα σύντηξης.

Έτσι, η νέα γνώση που προσφέρει η παρούσα έρευνα αφορά στη μελέτη μαγνητοϋδροδυναμικής ροής σε υψηλούς αριθμούς Hartmann (Ha μέχρι 5000). Παράλληλα, αφορά στην επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη ροή, ιδιαίτερα στο πολύ ενδιαφέρον στάδιο της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη, και στη διερεύνηση της τύρβης και των χαρακτηριστικών της, κυρίως στα αρχικά της στάδια. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων οδήγησαν στην κατασκευή διαγραμμάτων ($Re-Ha$) και τον προσδιορισμό της κρίσιμης καμπύλης μετάβασης από την στρωτή στην τυρβώδη ροή. Κατασκευάστηκαν επίσης και άλλα γραφήματα με σκοπό να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά της ροής στην ενδιαφέρουσα περιοχή της μετάβασης, με βάση τα πεδία ταχυτήτων, στροβιλότητας και θερμοκρασιών, και την κινητική ενέργεια του ρευστού.

Ένα από τα κύρια επιτεύγματα της παρούσας διατριβής είναι και τα διαγράμματα μετάβασης της ροής για τις δύο τοροειδείς γεωμετρίες της ίδιας διατομής και διαφορετικής ακτίνας καμπυλότητας, με στόχο τη σύγκριση και

διεξαγωγή πληρέστερων συμπερασμάτων για τα χαρακτηριστικά της ροής στον τοροειδή μανδύα σύντηξης. Τα διαγράμματα αυτά αποτυπώνουν τη μετάβαση της ροής συναρτήσει των αριθμών Reynolds και Hartmann, παρουσία μαγνητικού πεδίου που αντιστοιχεί σε αριθμούς Hartmann από 1 μέχρι και 5000, κάτι που δεν έχει γίνει υπολογιστικά μέχρι τώρα για καμία γεωμετρία.

1.3 Δομή της Διατριβής

Συνοπτικά η δομή της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση και γενικότερη αναφορά σε άλλες εργασίες που ενέπνευσαν ή αποτέλεσαν πηγή για την παρούσα έρευνα. Η αναφορά στις εργασίες γίνεται με κατηγοριοποίηση σύμφωνα με το είδος και την γεωμετρία της ροής. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζονται εργασίες σχετικές με τη μετάβαση σε στρωτή, μεταβατική ή τυρβώδη ροή σε αγωγούς, κανάλια και σε άλλες γεωμετρίες.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η γενική μορφή των θεμελιώδων εξισώσεων της Μαγνητοϋδροδυναμικής. Αναλυτικότερα, παρατίθενται οι βασικές εξισώσεις Ρευστοδυναμικής, Ηλεκτροδυναμικής και Μαγνητοϋδροδυναμικής, δηλαδή οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής (Navier-Stokes), ενέργειας, ηλεκτροστατικού και μαγνητοστατικού πεδίου, οι εξισώσεις Maxwell και οι νόμοι Gauss, Ampere, Ohm και Faraday. Επίσης παρουσιάζεται το μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds, και η αδιάστατη μορφή των εξισώσεων Μαγνητορευστοδυναμικής.

Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφονται τα μαθηματικά και αριθμητικά μοντέλα που υιοθετούνται στην παρούσα μελέτη, και η τελική μορφή των εξισώσεων σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες, σε διαστατή και αδιάστατη μορφή. Οι εξισώσεις παρουσιάζονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες επειδή η βιβλιοθήκη OpenFOAM χρησιμοποιεί μόνο αυτές, ενώ η κυλινδρική τους μορφή παρατίθεται επειδή τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε αυτή τη μορφή για την πληρέστερη απεικόνιση και κατανόησή τους. Το Κεφάλαιο ολοκληρώνεται με γενικά στοιχεία για την βιβλιοθήκη OpenFOAM και τον έλεγχο ορθότητας του αριθμητικού μοντέλου μέσω συγκρίσεων με άλλες εργασίες.

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται τα χαρακτηριστικά της υπό μελέτη ροής και ο τρόπος με τον οποίο η γεωμετρία καταχωρείται στα αρχεία που χρησιμοποιεί η βιβλιοθήκη OpenFOAM. Περιγράφεται λεπτομερώς η κατάστρωση του προβλήματος, και δίνονται οι βασικές παράμετροι των αριθμητικών προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν.

Στο Κεφάλαιο 6 περιγράφεται η μεθοδολογία επίλυσης που ακολουθήθηκε και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που έχουν παραχθεί, για τις δύο επιλεγείσες τοροειδείς γεωμετρίες, καθώς και για την περίπτωση της τυρβώδους ροής. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε Σχήματα που παρήχθησαν από τις αριθμητικές προσομοιώσεις και σχολιάζονται τα κύρια ευρήματα.

Στο κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα έρευνα, κατηγοριοποιημένα σύμφωνα με το είδος της ροής. Τέλος, γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα όπως προκύπτει από τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με την παράθεση της βιβλιογραφίας που χρησιμοποιήθηκε.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η ροή υγρού μετάλλου σε αγωγό υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου αποτελεί βασική εφαρμογή στην τεχνολογία της θερμοπυρηνικής σύντηξης. Η ροή του ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού επηρεάζεται από την ένταση του μαγνητικού πεδίου λόγω του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος. Το μαγνητικό πεδίο αλληλεπιδρώντας με το ηλεκτρικό ρεύμα αναπτύσσει δυνάμεις Lorentz στο ρευστό, με αποτέλεσμα την δημιουργία μαγνητοϋδροδυναμικής ροής. Σε υψηλό μαγνητικό πεδίο, οι δυνάμεις Lorentz προκαλούν ηλεκτρομαγνητική απόσβεση (damping), το φαινόμενο σκέδασης Joule (Joule dissipation), που επηρεάζει τη ροή προκαλώντας μείωση της τύρβης του ρευστού. Ωστόσο, πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν την ύπαρξη τύρβης και σε πολύ υψηλά μαγνητικά πεδία Moresco & Alboussi re (2004).

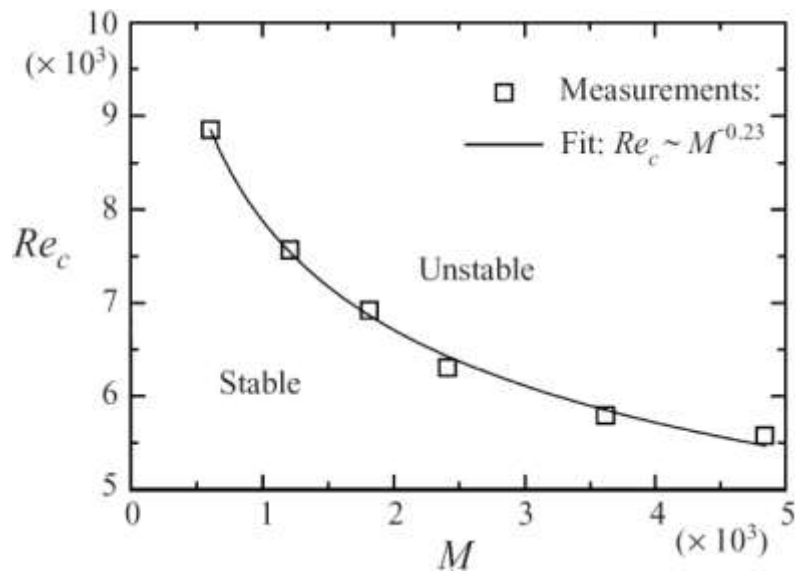
Η Μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε ορθογωνικούς αγωγούς χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση οριακών στρωμάτων διάχυσης (Shercliff layers) κατά μήκος των τοιχωμάτων που είναι παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (Shercliff 1953), και λεπτών οριακών στρωμάτων (Hartmann layers) κατά μήκος των κάθετων στο μαγνητικό πεδίο τοιχωμάτων (Hartmann 1937). Στο μέσο του καναλιού ρέει ρευστό με σχεδόν σταθερή ταχύτητα ενώ η διατμητική ροή στην περιοχή των πλαϊνών τοιχωμάτων έχει υψηλή ταχύτητα, ανάλογη του αριθμού Hartmann, που είναι ικανή να παράγει τυρβώδεις διαταραχές.

Η δημιουργία τύρβης στο οριακό στρώμα που οφείλεται στην επίδραση του μαγνητικού πεδίου, μετριάζεται από το φαινόμενο της σκέδασης Joule, που επίσης αυξάνει με την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Ωστόσο η επίδραση του φαινομένου της σκέδασης Joule είναι κυρίως κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, και μόνο οι τυρβώδεις διαταραχές στο επίπεδο κάθετα στο μαγνητικό πεδίο εξασθενούν. Η εξασθένηση λόγω του μαγνητικού πεδίου τελικά οδηγεί στη δημιουργία κυλινδρικών δινών που οριοθετούνται παράλληλα σε αυτό. Η μεταφορά θερμότητας υποβοηθείται από τα τυρβώδη θερμικά οριακά στρώματα που αναπτύσσονται στα τοιχώματα, επειδή η τυρβώδης κινητική ενέργεια συγκεντρώνεται στα στρώματα αυτά (Young 1991).

2.1 Γενικά για τη μετάβαση στην τυρβώδη μαγνητο-υδροδυναμική ροή

Ο συνδυασμός των αδιάστατων αριθμών Reynolds (Re) και Hartmann (Ha ή M) μπορεί να υποδείξει αν η μαγνητοϋδροδυναμική ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης.

Στην πειραματική εργασία τους οι Burr et al. (2000) δημιούργησαν ένα διάγραμμα (βλέπε Σχήμα 2.1) που δείχνει τις κρίσιμες τιμές του αριθμού Reynolds, Re_c , για μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή σε διάφορους αριθμούς Hartmann, M . Γενικά όσο αυξάνει ο αριθμός Hartmann, η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή πραγματοποιείται σε μικρότερο αριθμό Reynolds. Αντίθετα, για μικρό αριθμό Hartmann, η μετάβαση γίνεται σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds, καθώς η ύπαρξη του φαινομένου της σκέδασης Joule υπερνικά ταχύτερα την τυρβώδη σκέδαση. Η γεωμετρία και οι συνθήκες της ροής των Burr et al. (2000) δεν συμπίπτει με αυτήν της παρούσας διατριβής. Ωστόσο γίνεται αναφορά στη συγκεκριμένη εργασία, γιατί αποτελεί μια από τις πρώτες προσπάθειες να χαρτογραφηθεί η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη σε ένα αγωγό.



Σχήμα. 2.1 Κρίσιμες τιμές του αριθμού Reynolds (Re_c) για μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή, σε διάφορους αριθμούς Hartmann (M) (Burr et al. 2000).

Στην ίδια πειραματική μελέτη οι Burr et al. (2000) αναφέρουν ότι αποτέλεσμα της αύξησης του αριθμού Reynolds είναι ότι η μετάβαση από στρωτή ροή σε τυρβώδη ροή μπορεί να επιτευχθεί μόνο παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Επίσης, χαρακτηριστικό της τυρβώδους δομής της ροής είναι οι δισδιάστατες δίνες που αναπτύσσονται παράλληλα στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο, και οφείλονται στις αναπτυσσόμενες ανισότροπες ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Επί πλέον, η ανάπτυξη του θερμικού οριακού στρώματος επηρεάζει τη μεταφορά θερμότητας στα τοιχώματα. Τέλος, η εργασία συμφωνεί με τον Young (1991) στο ότι τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται στα πλαϊνά τοιχώματα παίζουν σημαντικό ρόλο στην παραγωγή και ανάπτυξη της τύρβης, αφού το μεγαλύτερο ποσοστό της τυρβώδους κινητικής ενέργειας συγκεντρώνεται στα στρώματα αυτά.

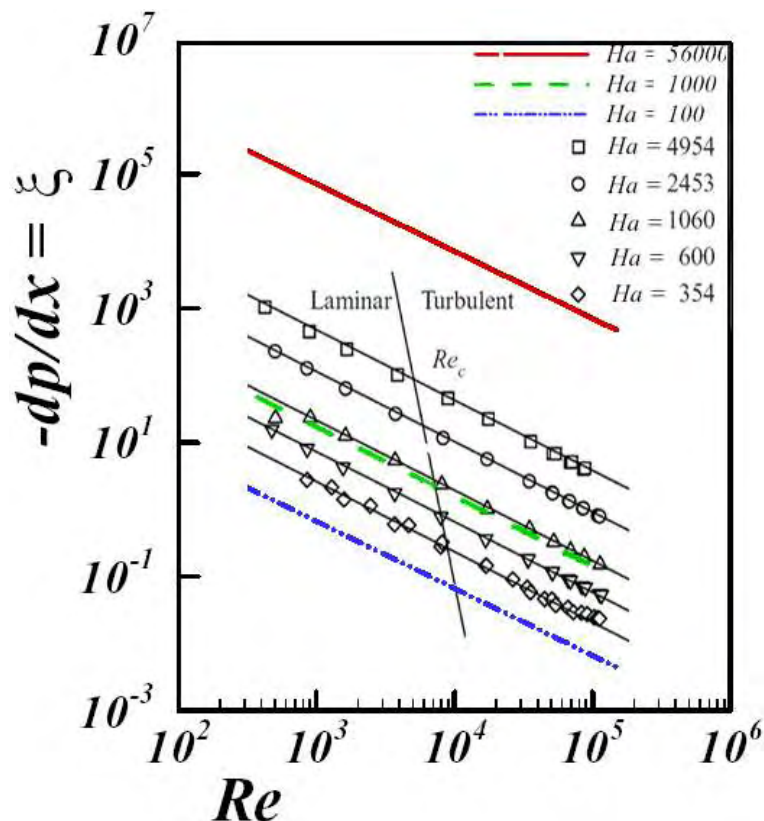
2.2 Μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε αγωγούς

Ο Young (1991) πρότεινε μια αναλυτική σχέση για την πτώση πίεσης σε μία μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής με αγώγιμα τοιχώματα, σε υψηλούς αριθμούς Hartmann, ως εξής:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\xi = -\frac{M^2}{Re} \left[\frac{1}{3(b/a)} \frac{\sqrt{M}}{c_s \sqrt{M}} + \frac{1 + c_H}{c_H + 1/M} \right]^{-1} \quad (2.1)$$

Όπου c_s και c_H είναι συντελεστές αγωγιμότητας των πλαϊνών τοιχωμάτων και των τοιχωμάτων Hartmann, αντίστοιχα, p είναι η πίεση και ξ η αδιάστατη πτώση πίεσης κατά μήκος της κύριας διεύθυνσης x του καναλιού.

Έτσι, η πτώση πίεσης ξ , μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (2.1), για οποιουδήποτε αριθμούς Hartmann και Reynolds. Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της πτώσης πίεσης τόσο στην στρωτή όσο και στην τυρβώδη περιοχή, όπως προτείνεται από τους Burr et al. (2000) και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2. Επίδραση του αριθμού Reynolds επί της πτώσης πίεσης για αριθμούς Hartmann.

$Ha = 100, 1000, 56000$ (Fidaros et al. 2008), $Ha = 354, 600, 1060, 2453, 4954$

(Burr et al. 2000)

Οι συνεχείς γραμμές δηλώνουν τις θεωρητικές τιμές της πτώσης πίεσης στην στρωτή ροή για σταθερό αριθμό Hartmann, ενώ τα σημεία δηλώνουν πειραματικές μετρήσεις. Από το Σχήμα 2.2 φαίνεται ότι σε υψηλούς αριθμούς Hartmann, αδιάφορα αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, η εξίσωση (2.1) προβλέπει ικανοποιητικά την πτώση πίεσης. Στο ίδιο Σχήμα 2.2 αναπαράγονται τα ευρήματα των Fidaros et al. (2008), τα οποία προβάλλονται με μια παχύτερη συνεχή γραμμή ($Ha=56000$), μια διακεκομμένη ($Ha=1000$) και μια αξονική ($Ha=100$). Η σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις δύο εργασίες δείχνει πολύ καλή αντιστοιχία. Φαίνεται ότι η πτώση πίεσης ενός ρευστού είναι υψηλότερη υπό την επίδραση ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου. Επίσης, ανεξάρτητα από το μαγνητικό πεδίο, η πτώση πίεσης με τον αριθμό Reynolds ακολουθεί την ίδια κλίση σε όλες τις περιπτώσεις αριθμού Hartmann.

Συνήθως, αναμένεται μείωση της πτώσης πίεσης με την αύξηση του αριθμού Reynolds. Ωστόσο, κατά την μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή, δεν παρατηρείται κάποια σημαντική αλλαγή. Αυτή η διαπίστωση ισχύει ακόμη και στις περιοχές με πολύ χαμηλό αριθμό Hartmann, σε υψηλούς αριθμούς Reynolds. Σχετικά με τις αυξημένες τιμές του αριθμού Hartmann, αν και γενικά σημειώνεται υψηλότερη πτώση πίεσης, η μεταβολή παρουσιάζει την ίδια κλίση όπως και για μικρούς αριθμούς Hartmann.

Τέλος, ενδιαφέροντα συμπεράσματα προκύπτουν και από την εργασία του Tillack (1990), ο οποίος κάνει χρήση εξισώσεων σχεδιασμού για τη μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε ορθογώνιο αγωγό.

2.3 Μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε αγωγούς και κανάλια

Βασικός σκοπός του μανδύα υγρού μετάλλου (breeder blanket) της μηχανής σύντηξης είναι η εξασφάλιση της αυτοτροφοδότησής της με τρίτιο, η υψηλή απορρόφηση νετρονίων και η αποδοτική μεταφορά της θερμότητας από το πλάσμα προς τις συμβατικές μηχανές παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Τα κύρια τεχνολογικά ζητήματα που αφορούν τη λειτουργία του μανδύα υγρού μετάλλου σχετίζονται με τη μεταφορά ορμής, θερμότητας και μάζας ηλεκτρικά αγώγιμων ρευστών υπό την επίδραση υψηλών μαγνητικών πεδίων σε αγωγούς και συσκευές περισυλλογής υγρού μετάλλου.

Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη στρωτή μαγνητοϋδροδυναμική ροή οδηγεί σε ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας λόγω της αναδόμησης της κατανομής θερμοκρασίας (Zigel 1959). Οι Burr et al. (2003) παρουσίασαν αύξηση

μεταφοράς θερμότητας λόγω του μαγνητικού πεδίου σε πειραματική μελέτη ελεύθερης συναγωγής σε ρευστό. Οι Burr & Mueller (2002) επίσης αναφέρουν αύξηση της μεταφοράς θερμότητας σε συναγωγή Rayleigh-Benard με την επιβολή οριζόντιου μαγνητικού πεδίου. Ο μηχανισμός ενίσχυσης της μετάδοσης θερμότητας μπορεί να αποδοθεί στον ανισοτροπικό χαρακτήρα των δυνάμεων Lorenz που αναπτύσσονται πάνω στο ρευστό. Ενώ η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή μειώνεται γενικά λόγω του φαινομένου της σκέδασης Joule, μπορεί να σημειωθεί στασιμότητα ή ακόμη και αύξηση εξαιτίας των δισδιάστατων δινών που δημιουργούνται από την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου. Οι αλλαγές στην ένταση του μαγνητικού πεδίου επηρεάζουν τις δίνες, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να οδηγήσουν σε αύξηση ή μείωση της μεταφοράς θερμότητας. Κατά τους Burr & Mueller (2002) η αύξηση του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του συντελεστή επιφανειακής τριβής με ταυτόχρονη μείωση της μεταφοράς θερμότητας.

Το υγρό μέταλλο είναι συνήθως ρευστό που χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές (και σε πειραματικές διαδικασίες) λόγω των καλών ηλεκτρικών ιδιοτήτων του. Έχει αριθμό Prandtl αρκετά μικρότερο της μονάδας ($Pr \ll 1$). Στην περίπτωση του υγρού μετάλλου, η μετάδοση θερμότητας σε τυρβώδη ροή επηρεάζεται κυρίως από δύο παράγοντες: Ο πρώτος βασίζεται στο γεγονός ότι η μοριακή διάχυση είναι της ίδιας τάξεως με την τυρβώδη διάχυση. Ο δεύτερος στο ότι σημειώνονται θερμικές απώλειες από τις δίνες λόγω μοριακής κίνησης (Piller et al. 2002). Οι Lee & Choi (2001) παρατήρησαν ότι οι τυρβώδεις δομές επιμηκύνονται κατά τη διεύθυνση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου, όταν αυτό είναι αρκετά ισχυρό. Οι Zikanov & Thess (1998) ανέφεραν παρόμοιες δισδιάστατες δίνες λόγω της δράσης σταθερού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Έτσι, αναμένεται μια αλληλεπίδραση μεταξύ των θερμικών ριπών (bursts) και των επιμηκυσμένων ροϊκών δομών, σε ρευστά με μικρό αριθμό Prandtl.

Η επίδραση μαγνητικών πεδίων διαφόρων προσανατολισμών στη μεταφορά θερμότητας μπορεί να εκτιμηθεί με δυσκολία από τις αλλαγές στο συντελεστή τριβής, Branover (1978). Επίσης, η αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του συντελεστή επιφανειακής τριβής και άρα της μεταφοράς θερμότητας. Ωστόσο, αυτή η αναλογία πρέπει να εφαρμοσθεί με προσοχή σε υγρά μέταλλα, καθώς μπορεί να τροποποιείται από τη μοριακή θερμική διάχυση. Στην πειραματική μελέτη των Burr et al. (2003), όπου ο αριθμός Hartmann κυμαίνεται σε ένα μεγάλο φάσμα τιμών ($0 < Ha < 1600$)

παρατηρείται πως για τις πολύ υψηλές τιμές του αριθμού Ha η μεταφορά θερμότητας γίνεται κυρίως με θερμική διάχυση, καθώς η συναγωγή μειώνεται όλο και περισσότερο.

Η αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα την ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας λόγω της εμφάνισης τύρβης κοντά στα τοιχώματα. Η επίδραση ενός διαμήκους μαγνητικού πεδίου, που απλά ελαττώνει την τύρβη, αναφέρθηκε στις εργασίες των Genin & Sviridov (1983), Genin et al. (1983a, 1983b, 1983c), και Takahashi et al. (1995a, 1995b), ενώ η επίδραση ενός εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου μελετήθηκε από τους Gardner et al. (1966), Gardner (1968), και Gardner & Lykoudis (1971). Σε αυτές τις εργασίες μελετάται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στα χαρακτηριστικά της ροής και επιβεβαιώνεται η μείωση της τύρβης όσο ενισχύεται το μαγνητικό πεδίο. Ωστόσο, οι Miiyazaki et al. (1983, 1986), και Takahashi et al. (1998) παρατηρούν ενίσχυση της τύρβης όταν εφαρμοστεί εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο σε ροή Λιθίου μέσα σε αγωγό. Ενδιαφέρουσες απευθείας αριθμητικές προσομοιώσεις (Direct Numerical Simulations - DNS) δύο διαστάσεων σε αγωγό παρουσιάζουν οι Smolentsev & Moreau (2006), τα αποτελέσματα των οποίων συμφωνούν με την πειραματική μελέτη των Messadek & Moreau (2002).

Είναι αποδεκτό πως, ενώ η μεταφορά θερμότητας μειώνεται κατά τη μετάβαση από την τυρβώδη στη στρωτή ροή, μπορεί να αυξηθεί από μια απότομη κλίση ταχύτητας κοντά σε ένα τοίχωμα λόγω υψηλής μεταφοράς θερμότητας στα οριακά στρώματα. Οι Evtushenko et al. (1995) παρατήρησαν αύξηση της μεταφοράς θερμότητας για ροή NaK σε κανάλι ενώ το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε αριθμητικά από τους Sidorenkov et al. (1995). Κάνοντας χρήση της μαγνητο-υδροδυναμικής, οι Barleon et al. (1994) ήλεγξαν μία ροή Γαλλίου-Ινδίου για αύξηση της μεταφοράς θερμότητας. Ωστόσο, πληροφορίες για τέτοια αύξηση μεταφοράς θερμότητας είναι ελλιπείς για ροή Λιθίου, αν και πληροφορίες για ροή δύο φάσεων Ηλίου-Λιθίου είναι διαθέσιμες από τους Inoue et al. (1987) και Takahashi et al. (1995a,b), όπως επίσης για την πτώση πίεσης μαγνητο-υδροδυναμικής ροής Λιθίου από τους Takahashi et al. (1989).

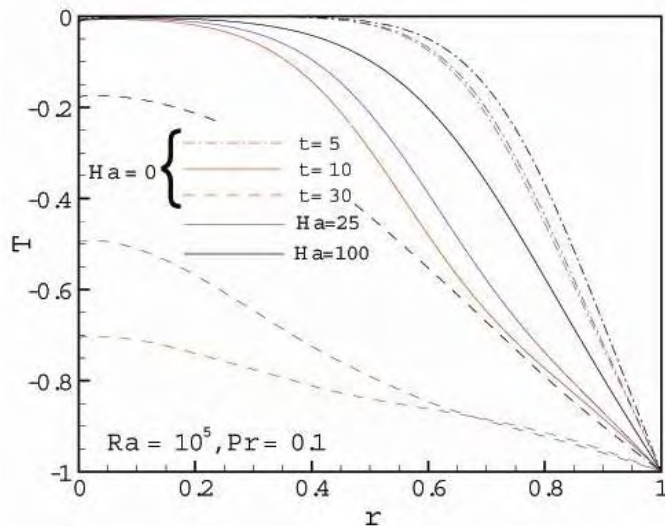
Σε όλες τις παραπάνω εργασίες, η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας οφείλεται σε αστάθεια ή στην τύρβη εντός των οριακών στρωμάτων. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στο συντελεστή μεταφοράς θερμότητας, ερευνήθηκε πειραματικά από τους Takahashi et al. (1998). Στις περισσότερες περιπτώσεις, εκτός από αυτές με μικρό αριθμό Reynolds, ο αριθμός Nusselt αρχικά μειώνεται με

την αύξηση του αριθμού Hartmann από 0 ως 300, προφανώς λόγω της μετάβασης από τυρβώδη σε στρωτή ροή. Με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Hartmann (έως περίπου 1100) ο αριθμός Nusselt αυξάνει έως και 2-2.5 φορές ως προς τις αντίστοιχες τιμές χωρίς μαγνητικό πεδίο. Έτσι, η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας μπορεί να προκαλείται από αυξομειώσεις στην τύρβη λόγω της ασταθούς κατανομής ταχύτητας τύπου Hartmann.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν εργασίες σχετικές με την επίλυση των εξισώσεων του ΜΥΔ μοντέλου «SM82» των Sommeria & Moreau (1982), οι οποίες ισχύουν για μεγάλο αριθμό Hartmann και όπου δεν απαιτείται επίλυση εξισώσεων μαγνητικού πεδίου, σύμφωνα με τους Dousset & Potherat (2008), Potherat (2007) και Potherat et al. (2000). Στην πρώτη από τις τρεις εργασίες, η γεωμετρία αφορά τη ροή γύρω από κύλινδρο μέσα σε ορθογωνικό αγωγό. Η υιοθέτηση των εξισώσεων SM82 επιτρέπει την αντιμετώπιση του προβλήματος ως δισδιάστατου, παρατηρώντας έτσι την αποσταθεροποίηση των δινών τύπου Karman για $Ha \geq 1120$, όταν ισχύει $Re/Ha \sim 0.56$. Στην ίδια περίπτωση του αριθμού Hartmann, για $Re=30000$ δημιουργείται διαταραχή τύπου Kelvin-Helmholtz στα οριακά στρώματα. Η δεύτερη εργασία αφορά στη ροή σε ορθογωνικό αγωγό με υψηλούς αριθμούς Hartmann, κάτι που επιτρέπει τη χρήση των εξισώσεων SM82 και την αντιμετώπιση του προβλήματος ως δισδιάστατου. Παρατηρείται αποσταθεροποίηση των πλαϊνών οριακών στρωμάτων για $Re/Ha^{0.5} \geq 48350$ και σταθεροποίησή τους για $Re/Ha^{0.5} \leq 65.32$. Στην τρίτη εργασία παρουσιάζεται ένα δισδιάστατο μοντέλο για ροές χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds, το οποίο αντιμετωπίζει την ύπαρξη ενός τρισδιάστατου φαινομένου ως διαταραχή.

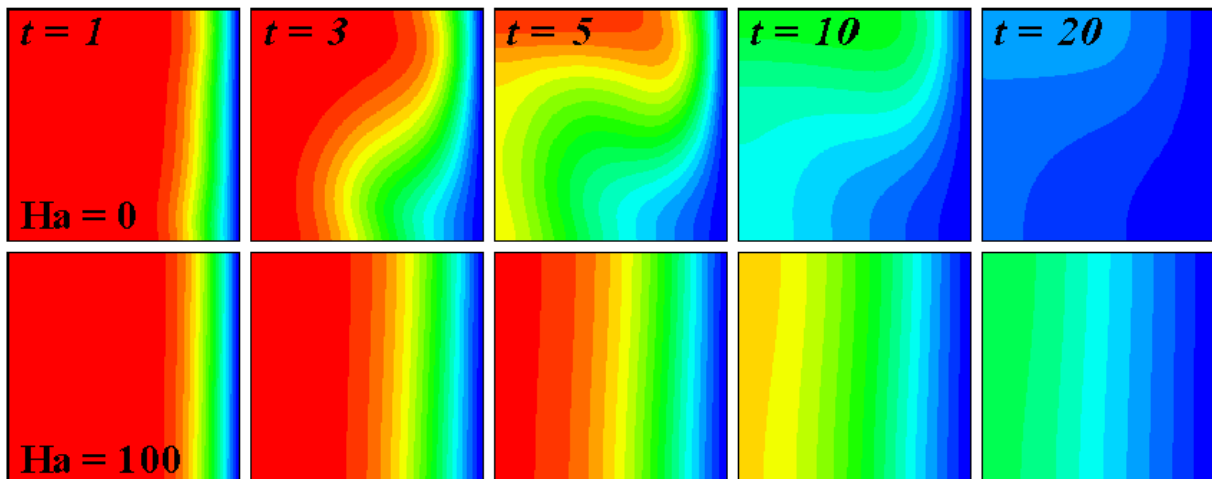
2.4 Μαγνητοϋδροδυναμικές ροές σε άλλες γεωμετρίες

Μελετώντας τη ψύξη υγρού μετάλλου με φυσική συναγωγή σε κυλινδρικό δοχείο παρουσία μαγνητικού πεδίου, για αριθμό Rayleigh από 10^4 έως 10^6 , η ένταση του μαγνητικού πεδίου δεν επηρεάζει τη ροή αρχικά, ενώ στη συνέχεια μειώνει το ρυθμό διείσδυσης (Iatridis 2008, Iatridis et al. 2009). Σε μεγάλους χρόνους, το μαγνητικό πεδίο επιβραδύνει την διαστρωμάτωση του ρευστού και δεν βοηθά στην γρηγορότερη απαγωγή της θερμότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3, για αριθμούς Rayleigh, $Ra=10^5$, και Prandtl, $Pr=0.1$. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση του μεγαλύτερου αριθμού Hartmann, η θερμοκρασία του ρευστού διατηρείται σε υψηλότερα επίπεδα (Iatridis et al. 2011). Υλοποιήθηκαν προσομοιώσεις για το ίδιο πρόβλημα ψύξης υγρού μετάλλου σε δοχείο για στρωτή

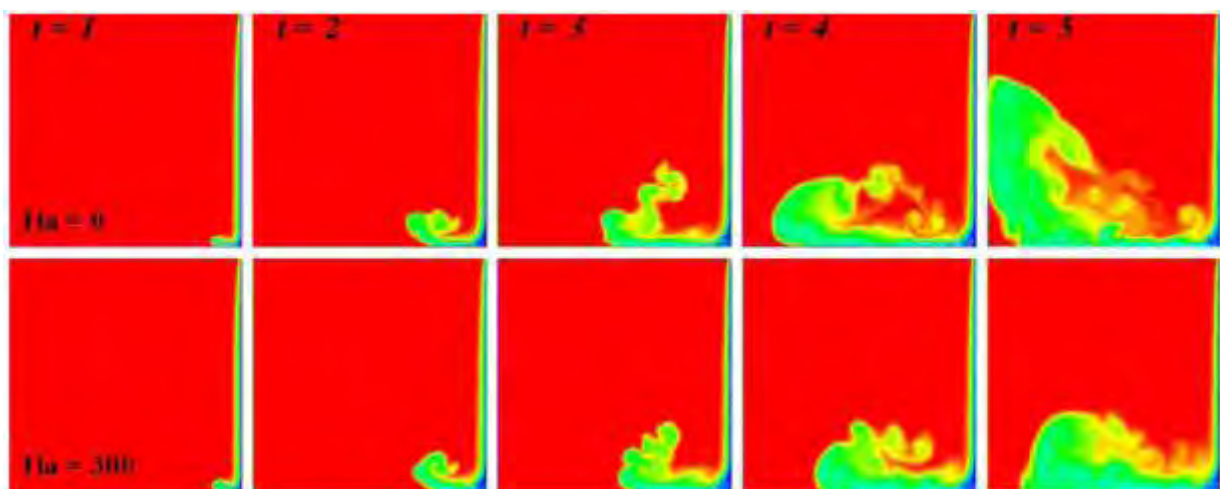


Σχήμα 2.3 Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας για $Ra=10^5$, $Pr=0.1$, κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο (Ιατρίδης 2008)

(Iatridis et al. 2012a) και τυρβώδη ροή (Sarris et al. 2010), όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.4 και 2.5, αντίστοιχα. Το Σχήμα 2.4 απεικονίζεται η κατανομή των ισόθερμων για τις περιπτώσεις $Ha=0$ και 100 , με $Ra=10^4$ και $Pr=0.7$, και στο Σχήμα 2.5 για $Ha=0$ και 300 με $Ra=10^9$ και $Pr=0.02$. Η βασική παρατήρηση είναι πως το μαγνητικό πεδίο καθυστερεί τη διαδικασία της ψύξης.



Σχήμα 2.4 Κατανομή θερμοκρασιών για $Ra=10^4$ και $Pr=0.7$ κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο. Στρωτή ροή για $Ha=0$ (άνω) και $Ha=100$ (κάτω) (Iatridis et al. 2012a)



Σχήμα 2.5 Κατανομή ισόθερμων κατά την ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο για $Ra=10^9$ και $Pr=0.02$. Τυρβώδης ροή με $Ha=0$ (άνω) και $Ha=300$ (κάτω). (Sarris et al. 2010)

Οι Lin & Armfield (2005, 2007) επίσης μελέτησαν τη ψύξη με φυσική συναγωγή ρευστού σε δοχείο, με ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Παρουσίασαν τρία βασικά βήματα στη διαδικασία της ψύξης, το αρχικό στάδιο της δημιουργίας του οριακού στρώματος στο τοίχωμα, που ακολουθείται από τη θερμική διείσδυση και καταλήγει στη θερμική διαστρωμάτωση. Οι Kakarantzas et al. (2009), στην εργασία τους για ψύξη υγρού μετάλλου σε δοχείο με το άνω τοίχωμα να υπόκειται σε θερμοκρασιακή κατανομή και τα υπόλοιπα να είναι αδιαβατικά, συμπεραίνουν ότι η αύξηση του αριθμού Rayleigh ενισχύει τη μεταφορά θερμότητας με συναγωγή, ενώ η αύξηση του αριθμού Hartmann τη μεταφορά θερμότητας με διάχυση.

Οι Sarris et al. (2006), στην εργασία τους σε ψύξη ρευστού σε τετραγωνική κοιλότητα υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, διερευνούν την επίλυση της ροής με τις πλήρεις Μαγνητοϋδροδυναμικές εξισώσεις και με την προσέγγιση του χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds. Παρατηρούν ότι καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει, οι δύο λύσεις διαφέρουν. Σε υψηλούς αριθμούς Grashof η διαφορά των λύσεων μειώνεται, ενώ για τις χαμηλές τιμές του αριθμού Prandtl που προσεγγίζουν το υγρό μέταλλο η διαφορά πάλι μεγαλώνει.

Έχει επίσης μελετηθεί η μόνιμη ροή φυσικής συναγωγής ανάμεσα σε δυο συγκεντρικούς κυλίνδρους από τον Yoo (2003). Στην εργασία των Aldoss et al. (2004) η λύση επιτυγχάνεται με τη μεθοδολογία των πεπερασμένων όγκων και συγκρίνεται η επίδραση των φυσικών παραμέτρων του αριθμού Grashof, του αριθμού Darcy καθώς και του πάχους του πορώδους υλικού, τοποθετημένου ανάμεσα στους κυλίνδρους. Η σύγκριση εστιάζεται στη μεταβολή του αριθμού Nusselt σε σχέση με την περίπτωση της μη παρουσίας πορώδους στρώματος. Παρατηρήθηκε πως όταν το πορώδες στρώμα τοποθετήθηκε πιο κοντά στον εξωτερικό κύλινδρο, η μείωση στον αριθμό Nusselt ήταν αρκετά σημαντική, ενώ στην περίπτωση όπου το πορώδες στρώμα είναι τοποθετημένο δίπλα στον εσωτερικό κύλινδρο, η επίδραση στον αριθμό Nusselt είναι μικρότερη.

Κατά τη μελέτη ροής σε μια κατακόρυφη κυλινδρική κοιλότητα από τον Vargas (2002), εκτιμήθηκαν οι διαφορές που προκύπτουν ανάμεσα στα πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα και κυρίως οι λόγοι που τις προκαλούν. Οι πειραματικές μετρήσεις έγιναν με τη βοήθεια της τεχνικής PIV (Particle Image Velocimetry), ενώ οι αριθμητικές με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Ο λόγος διαμέτρου προς ύψος και οι αριθμοί Prandtl και Rayleigh ήταν σταθεροί. Παρατηρήθηκαν διαφορές στα αποτελέσματα που σχετίζονται με τις αναπόφευκτες απλουστευτικές παραδοχές που χρησιμοποιούνται στο αριθμητικό μοντέλο. Τα

φαινόμενα συναγωγής που προέκυψαν κατά την πειραματική διαδικασία ήταν λιγότερο έντονα, σε σχέση με αυτά της αριθμητικής προσομοίωσης, επειδή στο πείραμα δεν κατέστη δυνατό να καλυφθούν πλήρως οι προϋποθέσεις του προβλήματος που θεωρούν μηδενικές τριβές στα τοιχώματα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της επίδρασης μαγνητικού πεδίου σε διάφορες γεωμετρίες, χωρίς παρουσία φυσικής συναγωγής. Στην εργασία των Witkowski et al. (2002) μελετήθηκε μια μόνιμη τρισδιάστατη στρωτή ροή ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού σε ένα ηλεκτρικά μονωμένο κύλινδρο πεπερασμένου μήκους, ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονά του. Ασκείται ένα μόνιμο, ομοιόμορφο, ασθενές και εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο στον κύλινδρο και μελετάται η επίδρασή του για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds και της παραμέτρου αλληλεπίδρασης: $N=Ha^2/Re$. Προκύπτει πως όσο μεγαλύτερη είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου, τόσο περισσότερο επιβραδύνεται η ροή. Η εργασία των Mutschke et al. (1998) πραγματεύτηκε τη ροή ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού, γύρω από κύλινδρο. Στόχος ήταν ο έλεγχος των κυματικών ασταθειών με εφαρμογή εξωτερικού ομοαξονικού μαγνητικού πεδίου. Μελετήθηκαν διάφοροι συνδυασμοί αριθμού Re και παραμέτρου αλληλεπίδρασης $N=Ha^2/Re$ και εκτιμήθηκαν οι επιδράσεις τους. Παρατηρείται πως η αυξανόμενη ένταση του μαγνητικού πεδίου εξαφανίζει τις όποιες διαταραχές.

Οι Fidaros et al. (2010) μελέτησαν αριθμητικά την περιστροφική κίνηση ρευστού μέσα σε κλειστό κυλινδρικό δοχείο, η οποία επάγεται από ένα περιστρεφόμενο δίσκο τοποθετημένο ομοαξονικά στην βάση του κυλίνδρου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μαγνητικό πεδίο προκαλεί την εμφάνιση μίας σωληνοειδούς δέσμης (jet) στην διεπιφάνεια μεταξύ του δίσκου και του ρευστού η οποία εκτείνεται κατακόρυφα σε όλο το ύψος του κυλίνδρου.

Τέλος, στην εργασία των Dyko et al. (1999) μελετήθηκε η ροή φυσικής συναγωγής μεταξύ δυο ομοαξονικών κυλίνδρων για διάφορους αριθμούς Rayleigh. Η επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου διατηρήθηκε σε σταθερή θερμοκρασία και μεγαλύτερη της σταθερής θερμοκρασίας του εξωτερικού κυλίνδρου. Επιλύθηκαν οι τρισδιάστατες εξισώσεις ροής ενώ ερευνήθηκαν και φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας μέσω του αδιάστατου αριθμού Nusselt. Έγινε ανάλυση ευστάθειας με δυο μεθόδους, γραμμική και ενεργειακή. Παρατηρήθηκε πως όταν ο αριθμός Rayleigh αυξηθεί πάνω από μια κρίσιμη τιμή, η ροή παύει να είναι μόνιμη, και εμφανίζονται διαταραχές. Παράλληλα εμφανίζονται δευτερεύουσες ροές, με τη μορφή μικρών ανακυκλοφοριών, στα άκρα των τοιχωμάτων.

2.5 Στρωτή, μεταβατική και τυρβώδης μαγνητο-υδροδυναμική ροή σε αγωγούς

Μελετώντας πειραματικά τη ροή σε τετραγωνικό κανάλι με αναλογίες διαστάσεων εύρος/ύψος 15:1, ο Murgatroyd (1953) υποστήριξε πως η παρουσία του μαγνητικού πεδίου μπορεί να μειώσει τα φαινόμενα της τύρβης, ακόμη και για την υψηλή τιμή του αριθμού Reynolds $Re=100.000$ ενώ η ροή δείχνει να είναι στρωτή για $Re/Ha < 900$. Η γραμμή που δημιουργείται από την εξίσωση $Re/Ha=900$ μπορεί να θεωρηθεί ως διαχωριστική μεταξύ της στρωτής και τυρβώδους ροής.

Οι Moresco & Alboussi re (2004) παρουσίασαν αποτελέσματα από μετρήσεις που διεξήγαν στο Εργαστήριο Υψηλών Μαγνητικών Πεδίων (High Magnetic Fields Laboratory) στην Grenoble της Γαλλίας. Για ροή σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής (1cmx1cm) με εσωτερική ακτίνα 4cm και εξωτερική 5cm, υπέδειξαν μια κριτική περιοχή μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή για διάφορους συνδυασμούς αριθμών Hartmann και Reynolds. Ο λόγος $R=Re/Ha$ έχει μεγάλη σημασία για τη μετάβαση σε τυρβώδη ροή και κινείται στο εύρος $360 < Re/Ha < 400$, ανάλογα με την τιμή του Ha .

Οι Khalzov et al. (2007) παρατήρησαν τους βασικούς μηχανισμούς της περιστροφικής ροής ρευστού σε τοροειδές κανάλι, στη μελέτη τους σχετικά με την αστάθεια σε περιστρεφόμενη μαγνητοϋδροδυναμική ροή (Magneto-Rotational Instability - MRI). Η ροή χαρακτηρίζεται από την ηλεκτρεγερτική δύναμη Ampere που αυξάνει καθώς το μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτρικό ρεύμα στο ρευστό, και τη δύναμη λόγω τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των μετακινούμενων επιφανειών, δημιουργώντας έτσι μία ροή Couette. Η ανάλυση των Khalzov et al. (2007) περιέχει υπολογισμούς φάσματος ιδιοσυχνοτήτων για την αξονο-συμμετρική ή μη περίπτωση. Για συγκεκριμένες παραμέτρους της γεωμετρίας, η ροή είναι πάντα ασταθής λόγω της MRI με ρυθμό ανάπτυξης που εξαρτάται από την ύπαρξη αξονο-συμμετρίας. Η έναρξη των διαταραχών είναι ανεξάρτητη του είδους της ροής (στρωτή ή τυρβώδης), αρκεί ο αριθμός Prandtl να είναι πολύ μικρός, $Pr \ll 1$. Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής έχουν πολλές ομοιότητες με των Moresco & Alboussi re (2004), υποδεικνύοντας μια κρίσιμη τιμή του λόγου $R=Re/Ha \sim 380$.

Ενδιαφέροντα αποτελέσματα αριθμητικών προσομοιώσεων παρουσιάζονται από τους Uhlmann et al. (2007), κατά τη μελέτη ροής μέσα σε ευθύ αγωγό για χαμηλούς αριθμούς Reynolds, λίγο μεγαλύτερους από αυτόν που προκαλεί τύρβη. Για $Ha=0$, η μετάβαση προκύπτει σε αριθμούς Reynolds λίγο μεγαλύτερους από 1100. Με συνδυασμούς διάφορων αριθμών Reynolds και μηκών αγωγού, οι

προσομοιώσεις για $0.79 < Lx/h < 25.13$ και $320 < Re_b < 2600$, δείχνουν εμφάνιση τύρβης για $Re_b = 1077$, όπου Lx είναι το μήκος του αγωγού, h η μισή πλευρά του αγωγού, $Re_b = u_b h / \nu$, u_b η ταχύτητα στο κυρίως τμήμα του αγωγού. Άλλοι ερευνητές έχουν παράγει όμοια αποτελέσματα για διαφορετικές γεωμετρίες, όπως οι Carlson et al. (1982) που μελετώντας τη ροή σε κανάλι εντοπίζουν έναρξη τύρβης για $Re = 1000$ ενώ οι Faisst & Eckhardt (2004) αναφέρουν την κριτική τιμή $Re = 1125$, για ροή σε σωλήνα.

Άλλη εργασία των Khalzov et al. (2010) που αναφέρεται σε τοροειδές κανάλι τετραγωνικής διατομής, μελετά τη μαγνητοϋδροδυναμική ροή υγρού μετάλλου, ως συνάρτηση των αριθμών Hartmann και Reynolds, συμπεραίνοντας ότι οι διαταραχές δεν συμβαίνουν σε χαμηλές τιμές Re , όπως άλλωστε αναφέρουν και οι Kageyama et al. (2004). Όσον αφορά τα στρώματα Hartmann, η μετάβαση λαμβάνει χώρα στο εύρος τιμών $150 < Re/Ha < 400$, όπως παρατηρείται και από τους Thess et al. (2007) που αναφέρονται στο εξής σενάριο μετάβασης σε δύο βήματα: α) την ανάπτυξη δισδιάστατης αστάθειας, και β) την εξέλιξή της σε τρισδιάστατες ασταθείς διαταραχές. Οι Zienicke και Krasnov (2005) υπολόγισαν τη μετάβαση σε ορθογωνικό κανάλι, με σκοπό να διαχωρίσουν τις περιοχές ευστάθειας και αστάθειας. Παρέχουν συγκεκριμένους αριθμούς Reynolds για τους οποίους τα χαρακτηριστικά στρωτής ροής χάνονται και προκύπτει τύρβη. Για τιμές $Ha = 5, 10$ και 20 , ο λόγος $R = Re/Ha$ είναι $R \sim 350$, για τιμή $Ha = 40$ είναι $R \sim 360-370$ και για $Ha = 100$ είναι $R \sim 380-390$. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά των Moresco & Alboussière (2004) κυρίως στους αυξημένους αριθμούς Hartmann, με μικρό υπολογιστικό λάθος.

Επιπρόσθετα, οι διαφορές μεταξύ υπολογιστικών και πειραματικών αποτελεσμάτων μπορούν να αποδοθούν στην τραχύτητα των τοιχωμάτων. Οι τιμές του R γίνονται μεγαλύτερες από 400 και φτάνουν μέχρι 1000, ανάλογα με το συνδυασμό των τιμών Re και Ha . Η διαταραχή που προκύπτει όταν $R = 400$ είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από το όριο αστάθειας που παρέχει η γραμμική ανάλυση. Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνει, οι ελάχιστες διαταραχές που απαιτούνται για να προκαλέσουν τύρβη μειώνονται. Σύμφωνα με το σενάριο μετάβασης σε δύο βήματα, το μέγεθος της δισδιάστατης αστάθειας πρέπει να είναι περίπου 1000 φορές μεγαλύτερο από τις τρισδιάστατες διαταραχές. Βρέθηκε ότι για τιμές Re μεγαλύτερες από 2000, είναι δυνατή η έναρξη τύρβης με μόνο μια τρισδιάστατη διαταραχή. Αλλά ξεκινώντας με τρισδιάστατες διαταραχές, το ελάχιστο μέγεθος των διαταραχών είναι πολύ μεγαλύτερο από ότι στην περίπτωση

του σεναρίου μετάβασης δύο βημάτων, στο οποίο πρέπει να αναπτυχθεί πρώτα δισδιάστατη αστάθεια. Έτσι, το μέγεθος των διαταραχών μειώνεται εκθετικά σε σχέση με το λόγο Re/Ha .

Σε παλιότερες αριθμητικές προσομοιώσεις, οι Krasnov et al. (2004) αναφέρουν κρίσιμο αριθμό Reynolds, $Re \sim 1000$ στην περίπτωση επίπεδης ροής Poiseuille, και $Re \sim 2000$ στην περίπτωση ροής σε σωλήνα. Τα στρώματα Hartmann περιορίζουν την τύρβη όταν ο λόγος R προσεγγίζει μια κριτική τιμή. Η μετάβαση δεν χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο αριθμό Reynolds, καθώς λαμβάνουν χώρα σειρά αναπτυσσόμενων διαταραχών. Σχετικά με το σενάριο μετάβασης δύο βημάτων, οι δισδιάστατες αστάθειες αναπτύσσονται και μεταμορφώνονται σε δίνες, παρέχοντας ενδιαφέροντα σημεία καμψής στην κατανομή ταχυτήτων. Σε υπολογισμούς ροής με χαμηλό λόγο $R (=Re/Ha)$, η ροή παρέμεινε στρωτή, ως συνέπεια αδύναμων δισδιάστατων διαταραχών. Η ροή μπορεί να γίνει ασταθής και μπορεί να χαρακτηριστεί από τρισδιάστατες διαταραχές, όταν οι δίνες ισχυροποιηθούν. Η μεταφορά ενέργειας από τις δισδιάστατες στις τρισδιάστατες διαταραχές αποτελεί το βασικό μηχανισμό αστάθειας, δείχνοντας πως μόνο οι πλήρως ανεπτυγμένες δίνες είναι ικανές να παρέχουν επαρκή ενέργεια μετάβασης στην τυρβώδη ροή.

Οι Zhao et al. (2011) στην εργασία τους σε ροές αγωγίμων ρευστών σε δακτυλιοειδές (annular) κανάλι, αναφέρουν ότι οι αναπτυσσόμενες διαταραχές που οδηγούν σε τύρβη αφορούν αξονοσυμμετρικές τοροειδείς δίνες, επιμηκυμένες με μικρή γωνία ως προς την αξονική διεύθυνση. Η διατομή των δινών είναι ελλειψοειδούς μορφής, δείχνοντας πως η επίδραση του ισχυρού μαγνητικού πεδίου στη ροή του ρευστού σε αγωγούς και κανάλια γίνεται κατά ασυνήθιστο τρόπο. Στην ίδια εργασία της ροής μεταξύ δύο κυλίνδρων, βρέθηκε ότι για $Ha = \sqrt{1000}$, η πρώτη διαταραχή εμφανίζεται για $Re = 900$. Η ασταθής ροή χαρακτηρίζεται από επιμηκυμένες δίνες, στην ακτινική κατεύθυνση.

Η ανάπτυξη διαταραχών σε ροή αγωγίμου ρευστού σε αγωγό με παρουσία μαγνητικού πεδίου κάθετου στη ροή, μελετήθηκε επίσης από τους Krasnov et al. (2010) που βρήκαν ότι η ισχυρότερες διαταραχές σημειώνονται στα οριακά στρώματα που είναι παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο. Διατηρώντας σταθερή τιμή του $Re = 5000$ και με τιμές του $Ha = 0$ έως 50 , παρατηρείται ότι η ροή στα πλαϊνά οριακά στρώματα μπορεί να γίνει τυρβώδης πολύ νωρίτερα από ότι στα στρώματα Hartmann. Αυτή η τύρβη προκαλείται από μια αρχική συσσώρευση των

επιμηκυμένων κυλινδρικών δινών, οι οποίες χάνουν την περιοδικότητα και συμμετρία τους και τελικά οδηγούν σε τυρβώδεις διαταραχές.

Η ανάπτυξη διαταραχών μέσα στα πλαϊνά οριακά στρώματα μελετήθηκε και από τους Gissinger et al. (2011), οι οποίοι έκαναν τρισδιάστατους υπολογισμούς ροής αγώγιμου ρευστού σε σφαιρικό κελί υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου και σύγκριναν με πειραματικά αποτελέσματα. Συμπέραναν πως οι διαταραχές λόγω ύπαρξης οριακών συνθηκών μπορούν να προκαλέσουν τύρβη όπως στην μαγνητοϋδροδυναμική περιστροφική ανάπτυξη διαταραχών (MRI).

Οι Khalzov et al. (2005) πρότειναν μία αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό της ροής υγρού μετάλλου σε τοροειδή αγωγό ορθογωνικής διατομής. Αυτή η μέθοδος υλοποιήθηκε για εσωτερική ακτίνα του τόρου 5cm, εξωτερική 15cm και διατομή 10cm×10cm, με εύρος αριθμών Hartmann $Ha=0$ έως 1000 και Reynolds $Re=1$ έως 1.000.000. Βασίζεται στην γενίκευση του σχήματος Gauss-Seidel, που χρησιμοποιείται για ροές σε υψηλές τιμές Ha και Re . Ενώ η ταχύτητα επίλυσης της ροής είναι αρκετά ικανοποιητική, στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων η μέθοδος παρουσιάζει ατέλειες. Έγιναν υπολογισμοί για $Ha=1800$ και $Re=1.400.000$. Η υπολογιζόμενη ταχύτητα ικανοποιεί τα κριτήρια της δημιουργίας μαγνητοϋδροδυναμικών διαταραχών (MRI), ενώ η ακτινική εξάρτησή της είναι υπερβολική, της μορφής $1/R$, όπου R είναι η ακτίνα του αγωγού.

Στην αριθμητική μελέτη για ροή υγρού μετάλλου σε κυκλική γεωμετρία καναλιού, οι Khalzov et al. (2006) εξηγούν την παραγωγή διαταραχών επιλύοντας το σύστημα ιδιοτιμών με οριακές συνθήκες άκαμπτων τοιχωμάτων. Η γεωμετρία παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη αξονοσυμμετρικών μαγνητοϋδροδυναμικών διαταραχών MRI, όπως το ύψος του καναλιού που όταν είναι μικρό δεν ευνοεί την ανάπτυξη της τύρβης.

Τα χαρακτηριστικά των διαταραχών τροποποιούνται με την παρουσία μη ομογενούς περιστροφικού μαγνητικού πεδίου, σύμφωνα με τους Ilgisonis & Khalzov (2007). Περιορίζοντας το μαγνητικό πεδίο και αυξάνοντας την απόσταση από το κέντρο, παρατηρείται μείωση στην ταχύτητα που προκαλεί στροβιλότητα στο ρευστό και συνθήκες δημιουργίας διαταραχών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο μαγνητικός αριθμός Mach, ο αδιάστατος αριθμός που αποτελεί το λόγο της ταχύτητας του ρευστού προς την ταχύτητα των κυμάτων Alfvén στο ρευστό, ο οποίος μπορεί να υποδείξει την έναρξη της τύρβης. Στην περίπτωση δίπολου μαγνητικού πεδίου, ο μαγνητικός αριθμός Mach μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους, σε σύγκριση με την περίπτωση ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου.

Αριθμητικοί υπολογισμοί για ροή σε τοροειδή αγωγό ορθογωνικής διατομής έγιναν και από τους Vantieghem & Knaepen (2011), για διάφορους αριθμούς Reynolds και Hartmann οδηγώντας έτσι τη ροή σε στρωτές ή τυρβώδεις μορφές. Για τοροειδή στρωτή ροή σε τετραγωνική διατομή $1\text{cm}\times 1\text{cm}$, με εσωτερική ακτίνα 4cm και εξωτερική 5cm , το μαγνητικό πεδίο μειώνει την επίδραση της φυγόκεντρης δύναμης. Η δευτερεύουσα ροή είναι ισχυρότερη στα στρώματα Hartmann. Όταν ο αριθμός Hartmann αυξάνει, εμφανίζονται δίνες στα οριακά στρώματα. Για $Ha=30$ and $Re=4000$, όπου η ροή πλέον είναι τυρβώδης, τα κατακόρυφα κυλινδρικά τοιχώματα παρουσιάζουν σημαντικές ασυμμετρίες και τα οριακά στρώματα είναι ασταθή. Το ισχυρό μαγνητικό πεδίο μειώνει τη τύρβη και οι διαταραχές εμφανίζονται κυρίως κοντά στα κυλινδρικά τοιχώματα.

Κατά την αριθμητική μελέτη τυρβώδους ροής σε κανάλι με $Re=45818$ και αριθμό Hartmann μεταβαλλόμενο από $32,5$ ως 65 , οι Satake et al. (2006) έδειξαν ότι στο κέντρο του αγωγού οι τυρβώδεις δομές μειώνονται, παρότι οι μαγνητο-υδροδυναμικοί όροι που μειώνουν την τύρβη δεν επηρεάζουν σημαντικά την κινητική ενέργεια. Αν και η τιμή $Ha=65$ είναι διπλάσια από την πρώτη που διερευνήθηκε στη συγκεκριμένη εργασία, δεν επιδρά στη ροή κατά ανάλογο βαθμό. Οι μαγνητικές δυνάμεις υπάρχουν ήδη για $Ha=32,5$ και αυξάνουν σημαντικά για $Ha=65$.

Ο Kobayashi (2008) μελέτησε την τυρβώδη ροή σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, υπό την επίδραση ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου, σε ευθύ αγωγό τετραγωνικής διατομής με τη μέθοδο προσομοίωσης μεγάλων δινών (Large-eddy simulation - LES). Καθώς το μαγνητικό πεδίο γίνεται ισχυρότερο, το στρώμα Hartmann γίνεται λεπτότερο, αλλά τα πλαϊνά οριακά στρώματα παχαίνουν λόγω της εξασθένισης της τύρβης, μέχρι να μετατραπεί η ροή σε στρωτή. Επίσης, καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει στην τυρβώδη ροή, δομές που βρίσκονται στα στρώματα Hartmann μη-συνευθειακές με το μαγνητικό πεδίο εξαφανίζονται σταδιακά με ρυθμό μεγαλύτερο από τον αντίστοιχο στα πλαϊνά οριακά στρώματα. Για αριθμό Reynolds $Re=2650$, τα στρώματα Hartmann και τα πλαϊνά οριακά στρώματα προσεγγίζουν την στρωτή ροή για τον ίδιο αριθμό Hartmann. Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνει στην τιμή $Re=14500$, τα στρώματα Hartmann γίνονται στρωτά, ενώ τα πλαϊνά οριακά στρώματα είναι ακόμη τυρβώδη. Όταν η ροή στα πλαϊνά οριακά στρώματα γίνει στρωτή, το σύνολο πλέον της ροής θα είναι στρωτό και η επιφανειακές τριβές θα έχουν ελαχιστοποιηθεί. Η μετάβαση στην τύρβη συμβαίνει για $R=Re/Ha$ από 220 ως 250 .

Οι Kinet et al. (2009) μελέτησαν αριθμητικά την μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε ευθύ αγωγό με ηλεκτρικά αγώγιμα τοιχώματα, με παρουσία μαγνητικού πεδίου. Ο αριθμός Hartmann επιλέχθηκε με άνω όριο $Ha=200$ λόγω των αυξημένων υπολογιστικών απαιτήσεων που προκύπτουν από την παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Για τιμή $Re=1000$, η ροή είναι στρωτή και δεν εμφανίζει σημεία διαταραχών. Για τιμές $2500 < Re < 3500$, η κινητική ενέργεια του ρευστού αυξάνει σημαντικά και η διαμορφούμενη διαταραχή αποτελείται από δύο σειρές σχεδόν περιοδικών δινών μικρής κλίμακας, μια για κάθε παράλληλο τοίχο. Λόγω του μικρού τους μεγέθους δεν επηρεάζουν την κατανομή της μέσης ταχύτητας. Για τιμές $Re > 3700$ η κινητική ενέργεια αυξάνει περίπου κατά δύο τάξεις μεγέθους. Οι διαταραχές πλέον αποτελούνται από κυματοειδείς δομές μεγάλου μήκους, που εμπεριέχουν δίνες μικρού μεγέθους. Καθώς η κινητική ενέργεια αυξάνει περαιτέρω, η μέγιστη μέση ταχύτητα μειώνεται και το πάχος του στρώματος αυξάνει. Οι δέσμες (jets) που περιέχονται στις διαταραχές αποκολλούνται μερικώς από τα παράλληλα τοιχώματα. Επίσης, αν και οι διαταραχές ισχυροποιούνται κατά δύο τάξεις μεγέθους, δεν αλλάζουν μορφή μέχρις ότου ο αριθμός Reynolds να φτάσει την τιμή $Re=10000$. Για τιμές $Re > 3700$, οι διαταραχές λαμβάνουν κυματοειδή μορφή με μεγάλο μήκος και εξακολουθούν να εμπεριέχουν μικρές δίνες. Η μορφή αυτών των δομών μπορεί να παρεμβάλλεται από τις δέσμες (jets) που αποκολλούνται από τα τοιχώματα. Σχετικά με τον κρίσιμο λόγο $R=Re/Ha$ για τη μετάβαση της ροής, αυτός διαφέρει ανάλογα της γεωμετρίας και του αριθμού Hartmann. Για τον ευθύ αγωγό της συγκεκριμένης μελέτης, ο κρίσιμος λόγος είναι $R=18,5$, που αντιστοιχεί στις μεταβατικές τιμές $Ha=200$ και $Re=3700$.

Οι Chaudhary et al. (2010) υλοποίησαν αριθμητικές προσομοιώσεις για τυρβώδη ροή σε τετραγωνικό αγωγό. Συγκρίνοντας την οριζόντια και κατακόρυφη κατανομή της αξονικής ταχύτητας, η δεύτερη φαίνεται να έχει μεγαλύτερες κλίσεις κυρίως λόγω της ισχυρότερης απόσβεσης της τύρβης κοντά στα οριζόντια τοιχώματα από ότι στα κατακόρυφα. Σε χαμηλούς αριθμούς Hartmann, η μέση αξονική ταχύτητα παρουσιάζει μεγαλύτερη κλίση σε σχέση με την υδροδυναμική περίπτωση ($Ha=0$). Όπως αναμένεται, η παρουσία του μαγνητικού πεδίου μειώνει τις διακυμάνσεις της ταχύτητας, κάτι που συμβαίνει κυρίως στα οριζόντια τοιχώματα. Σε αυτή την περίπτωση, οι δευτερεύουσες ροές τείνουν να τροποποιηθούν περισσότερο, κινούμενες κυρίως σε περιοχές κοντά στις γωνίες των οριζόντιων τοιχωμάτων. Στη συνέχεια, οι δευτερεύουσες ροές κινούνται προς το κέντρο των τοιχωμάτων μέχρι να προχωρήσουν στο κέντρο του αγωγού, κάτι

που προκαλεί μια βαθιά κοιλότητα στη μέση αξονική ταχύτητα, κοντά στα οριζόντια τοιχώματα. Το μαγνητικό πεδίο προκαλεί εγκάρσια συρρίκνωση των κυλινδρικών δομών και επιμήκυνσή τους στην τοροειδή κατεύθυνση της ροής. Επίσης, τροποποιεί την επίδραση του ηλεκτρικού ρεύματος πάνω στο μέγεθος και την κατεύθυνση της δύναμης Lorentz, καθώς το υψηλό ρεύμα που αναπτύσσεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο ενδυναμώνει την δύναμη Lorentz και ενισχύει τη ροή κοντά στα οριζόντια τοιχώματα.

Σχετικά με την παραγωγή στροβιλότητας σε ροή μέσα σε αγωγό χωρίς την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου, οι τάσεις Reynolds προκαλούν εμφάνιση στροβιλότητας στην κατεύθυνση της ροής. Με παρουσία του μαγνητικού πεδίου, πρέπει να ληφθούν υπόψη η δεύτερη παράγωγος του ηλεκτρικού δυναμικού και η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας για τον υπολογισμό της στροβιλότητας. Ο πρώτος όρος συνεισφέρει στην περίπτωση μαγνητικού πεδίου που κατευθύνεται προς τη ροή και ο δεύτερος στην περίπτωση μαγνητικού πεδίου κάθετου προς τη ροή.

Η μαγνητοϋδροδυναμική ροή υγρού μετάλλου γύρω από κύλινδρο τετραγωνικής διατομής, τοποθετημένο σε αγωγό ορθογωνική διατομής, μελετήθηκε αριθμητικά από τους Muck et al. (2000). Το μαγνητικό πεδίο εφαρμόστηκε κατά το μήκος του κυλίνδρου, με αριθμό Hartmann στο εύρος $0 < Ha < 85$ και αριθμούς Reynolds 200 και 250. Η βασική διαπίστωση ήταν ότι πίσω από τον κύλινδρο αναπτύσσεται σειρά δισδιάστατων δινών.

Μελετώντας την τυρβώδη ροή αγωγίμου ρευστού με παρουσία μαγνητικού πεδίου, προτάθηκε από τους Knaepen et al. (2004) μια γραμμική προσέγγιση (quasi linear, QL) για την αντιμετώπιση του προβλήματος που δημιουργείται όταν ο μαγνητικός αριθμός Reynolds αυξηθεί πέραν της τιμής 20. Έτσι, η QL προσέγγιση μπορεί να υιοθετηθεί στην θέση της quasi static (QS) προσέγγισης, όταν δεν μπορεί να αποφευχθεί ένας υψηλός μαγνητικός αριθμός Reynolds. Ωστόσο, όταν ο μαγνητικός αριθμός Reynolds γίνει ίσος με $Rm=50$ ή 100 , πρέπει να χρησιμοποιηθούν πλήρεις μαγνητοϋδροδυναμικές εξισώσεις.

Οι Shatrov & Gerbeth (2010) μελέτησαν τη ροή σε ευθύ αγωγό τετραγωνικής διατομής με την μέθοδο υψηλής πυκνωσης Fourier. Σύμφωνα με την εργασία αυτή, η υδροδυναμική ροή ($Ha=0$) παραμένει στρωτή για $Re=1050$, και αγγίζει την μετάβαση για $Re=1077$. Για τιμή $Re=100000$, η μετάβαση από τυρβώδη σε στρωτή ροή γίνεται για $Re/Ha=225$. Για τιμές $Re=3000$ και $Ha=12,5$, η ροή είναι στρωτή, ενώ φαίνεται πως η μεγαλύτερη τιμή του Ha , για την οποία επιτυγχάνεται τύρβη κυμαίνεται στο εύρος $12,15 < Ha < 12,3$. Για τιμή $Re=3000$,

στην υδροδυναμική ροή, η μέση δομή της δευτερεύουσας ροής χαρακτηρίζεται από οκτώ δίνες, ίδιας μορφής και μεγέθους. Όταν εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο, η συμμετρία αλλάζει, έχοντας πλέον τέσσερις δίνες στα άκρα των τοιχωμάτων, και τέσσερις μεγαλύτερες στην περιοχή μεταξύ των άκρων των τοιχωμάτων.

Τέλος, η ευστάθεια του στρώματος Hartmann, σε στρωτή ροή ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού υπό την επίδραση σταθερού μαγνητικού πεδίου, για υψηλούς αριθμούς Ha , μελετήθηκε από τους Lingwood et al. (1999). Σύμφωνα με την εργασία, ο κρίσιμος λόγος $R = Re/Ha$ δεν μπορεί να είναι μικρότερος από 26, γιατί δεν μπορεί να μεταφερθεί ενέργεια μεταξύ διαταραχών, ανεξάρτητα από το μέγεθος της διαταραχής. Σχετικά με την μαγνητοϋδροδυναμική ροή σε αγωγούς, η διαδικασία της μετάβασης ξεκινά στα πλαϊνά οριακά στρώματα, αντί για τα στρώματα Hartmann. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα συνεισφέρουν λιγότερο στην συνολική διατμητική τάση στα τοιχώματα, λόγω του μεγάλου πάχους τους.

3. ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

3.1 Διατήρηση μάζας, ορμής και ενέργειας

3.1.1 Εξίσωση διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας κατά τη ροή ρευστού, είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

όπου, ρ η πυκνότητα και \mathbf{u} το άνυσμα της ταχύτητας του ρευστού.

Στην περίπτωση ασυμπίεστου ρευστού, οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες και η εξίσωση (3.1) λαμβάνει τη μορφή:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

3.1.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής

Η γενικότερη εξίσωση της διατήρησης της ορμής του ρευστού είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla(\rho \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla(\mu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (3.3)$$

Όπου, ρ , p και μ η πυκνότητα, πίεση και δυναμικό ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα, και \mathbf{f} οι δυνάμεις (εκτός από τις βαρυτικές, $\rho \mathbf{g}$) που ασκούνται στο ρευστό.

Για ασυμπίεστα ρευστά, η εξίσωση (3.3) λαμβάνει τη μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.4)$$

3.1.3 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

Η εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας του ασυμπίεστου ρευστού λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k \Delta T + G \quad (3.5)$$

όπου, T και k η θερμοκρασία και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του ρευστού, και G ο όρος παραγωγής εσωτερικής θερμότητας.

3.1.4 Επίδραση της τύρβης

Στην περίπτωση τυρβώδους ροής, η εξίσωση (3.3) γίνεται:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}}^l + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}}^t \quad (3.6)$$

όπου \bar{u} είναι η χρονικά μέση ταχύτητα του ρευστού, $\bar{\tau}^1$ είναι ο δυαδικός της ιξώδους (μοριακής) τάσης και $\bar{\tau}^t$ ο δυαδικός της τυρβώδους τάσης.

Εάν για παράδειγμα, $\bar{\tau}_x^1$ είναι το άνωσμα της ιξώδους τάσης που ασκείται σε επιφάνεια κάθετη στον άξονα x , τότε:

$$\nabla \bar{\tau}_x^1 = \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}^1}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial^2 z} \right) \quad (3.7)$$

Κατ' ανάλογο τρόπο, αν $\bar{\tau}_x^t$ είναι το άνωσμα της τυρβώδους τάσης που ασκείται σε επιφάνεια κάθετη στον άξονα x , τότε:

$$\nabla \bar{\tau}_x^t = \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^t}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}^t}{\partial z} = \frac{\partial(-\rho \overline{u'_x u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'_x u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'_x u'_z})}{\partial z} \quad (3.8)$$

Όπου u'_x, u'_y, u'_z είναι οι διακυμάνσεις της ταχύτητας του ρευστού στις κατευθύνσεις x, y, z , αντίστοιχα.

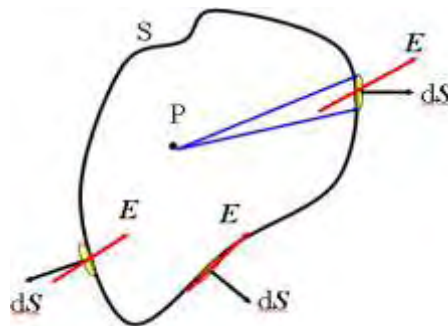
3.2 Εξισώσεις Ηλεκτροδυναμικής

3.2.1 Εξισώσεις Ηλεκτροστατικού πεδίου

Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ένα αστρόβιλο πεδίο με πηγές, το οποίο περιγράφεται μαθηματικά με βάση τους ακόλουθους νόμους:

Νόμος του Gauss: Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου, \mathbf{E} , μέσω μιας τυχούσας κλειστής επιφάνειας όπως στο Σχήμα 3.1, είναι ίση με το εγκλεισμένο ηλεκτρικό φορτίο, Q , διαιρεμένο με τη διηλεκτρική σταθερά του κενού, ϵ_0 , δηλαδή:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$



Σχήμα 3.1 Νόμος του Gauss (Young 1991)

Νόμος του αστροβίλου: Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.10)$$

Από τους παραπάνω νόμους προκύπτουν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\text{Νόμος του Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.11)$$

$$\text{Νόμος του αστροβίλου: } \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.12)$$

Η ισοδυναμία των εξισώσεων (3.9) και (3.10) με τις (3.11) και (3.12), αντίστοιχα, αποδεικνύεται εύκολα ως εξής:

Από τον ορισμό της πυκνότητας φορτίου έχουμε την σχέση:

$$Q = \iiint \rho(\mathbf{r}) dV \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss, η εξίσωση (3.6) μπορεί να γραφεί:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}) dV \quad (3.14)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για τυχόντα όγκο V , μόνο εάν οι ολοκληρούμενες ποσότητες και στα δυο μέλη είναι ίσες, δηλαδή: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Επίσης με βάση το θεώρημα του Stokes έχουμε:

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.15)$$

και λόγω της εξίσωσης (3.10) προκύπτει: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

3.2.2 Εξισώσεις Μαγνητοστατικού πεδίου

Οι εξισώσεις που εκφράζουν το μαγνητοστατικό πεδίο, \mathbf{B} , είναι οι ακόλουθες:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.17)$$

όπου $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ είναι η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος, η οποία ορίζεται ως ένα διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση εκείνη της ροής των ηλεκτρικών φορτίων και μέτρο ίσο με το ποσό του φορτίου (ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας), που διαπερνά μια στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στην κατεύθυνση ροής, και μ_0 η αποκαλούμενη μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes, η εξίσωση (3.17) γίνεται:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \mathbf{I} \quad (3.18)$$

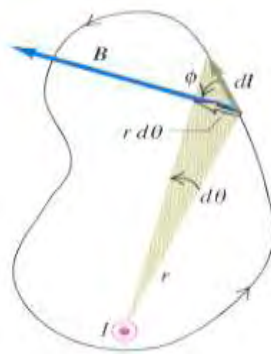
$$\text{εφόσον εξ' ορισμού: } \mathbf{I} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.19)$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I} \quad (3.20)$$

Η εξίσωση (3.20) αποτελεί την ολοκληρωτική έκφραση του νόμου του Ampere:

Η κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου πάνω σε μια τυχούσα κλειστή γραμμή, όπως στο Σχήμα 3.2, ισούται με το ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο διαπερνά μια επιφάνεια που καταλήγει στην κλειστή γραμμή, πολλαπλασιασμένο με τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού.



Σχήμα 3.2 Νόμος του Ampere (Young 1991, ρεύμα I προς τον αναγνώστη)

Εκτός από την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Ampere, υπάρχει και η διαφορική μορφή, στην οποία μπορούμε να καταλήξουμε με βάση την ακόλουθη διαδικασία. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes, το πρώτο μέλος της εξίσωσης (3.20) παίρνει τη μορφή:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.21)$$

Παράλληλα, από τον ορισμό της πυκνότητας ρεύματος, έχουμε:

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.22)$$

Από τις παραπάνω δυο εξισώσεις, τελικά προκύπτει:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.23)$$

Για να ισχύει η εξίσωση (3.23) σε κάθε δυνατή επιφάνεια S, θα πρέπει:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.24)$$

Η εξίσωση (3.24) αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου του Ampere.

3.2.3 Εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Οι εξισώσεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, τα οποία δεν εξαρτώνται από το χρόνο, είναι μη συζευγμένες, δηλαδή ανεξάρτητες. Στη περίπτωση όμως χρονικά μεταβαλλόμενων (μη στατικών) πεδίων, υπάρχει σύνδεση γιατί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν κοινό αίτιο. Το

ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ηλεκτρικά φορτία και το μαγνητικό από ηλεκτρικά ρεύματα, δηλαδή κινούμενα ηλεκτρικά φορτία. Σε αυτή την κοινή προέλευση οφείλεται η σύζευξη ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, και προϋποθέτει τη χρονική εξάρτηση της πυκνότητας φορτίου και της πυκνότητας ρεύματος. Όταν οι κατανομές ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων γίνουν χρονικά εξαρτημένες, οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος παύουν να είναι ασύνδετες και αλληλεξαρτώνται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.25)$$

όπου ρ_{el} η πυκνότητα φορτίου.

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου, γνωστή και ως εξίσωση συνέχειας. Αν τώρα ολοκληρώσουμε τα δυο μέλη της εξίσωσης (3.25) σε ένα τυχόντα όγκο V και κάνουμε χρήση του θεωρήματος Gauss και της σχέσης

$$Q(t) = \int \rho_{el}(\mathbf{r}, t) dV \quad (3.26)$$

που εκφράζει το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται στον όγκο V , παίρνουμε:

$$\int \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} dV + \int \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (3.27)$$

Η φυσική σημασία της εξίσωσης (3.27) είναι ότι η συνολική εκροή φορτίου ανά μονάδα χρόνου, μέσω της κλειστής επιφάνειας που περιλαμβάνει τον όγκο V ισούται με την ανά μονάδα χρόνου μείωση του ηλεκτρικού φορτίου που περιλαμβάνεται στον όγκο V .

Επομένως, εφόσον οι πυκνότητες ρεύματος και φορτίου αλληλεξαρτώνται σύμφωνα με την εξίσωση (3.25), θα αλληλεξαρτώνται τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που προσδιορίζονται από αυτές τις συναρτήσεις. Έτσι, ισχύει

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (3.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (3.29)$$

Η μαθηματική διατύπωση αυτής της αλληλεξάρτησης μπορεί να γίνει ως εξής: Ξεκινώντας από τις εξισώσεις των στατικών πεδίων έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \quad (3.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.32)$$

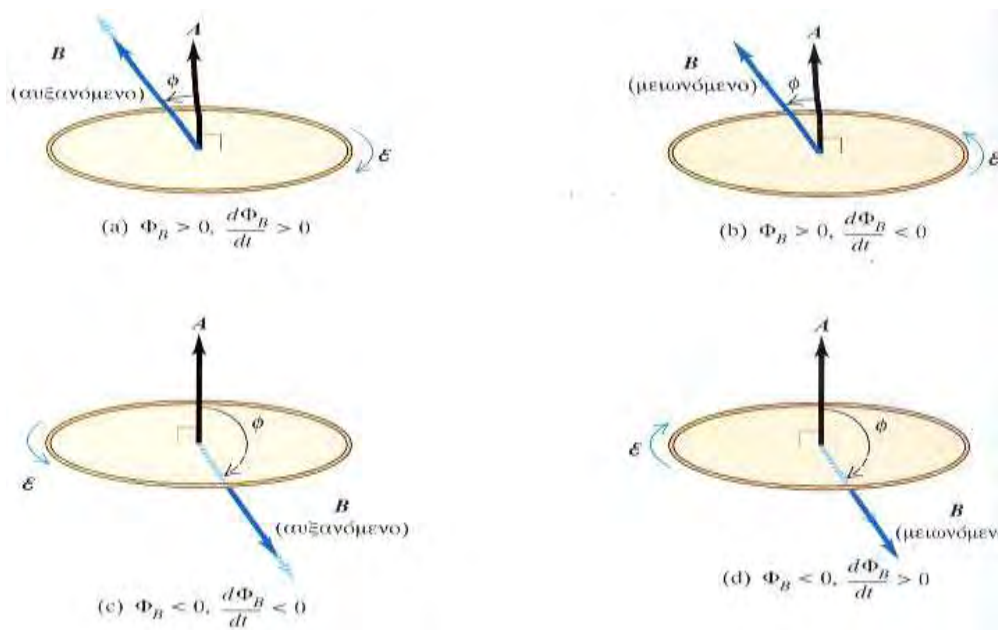
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.33)$$

Οι εξισώσεις (3.30) και (3.32) δεν αλλάζουν, εφόσον δηλώνουν ότι το ηλεκτρικό πεδίο πηγάζει από ηλεκτρικά φορτία, κάτι που δεν ισχύει για τα μαγνητικά πεδία καθώς δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα, δηλ. μαγνητικά φορτία. Το ενδιαφέρον λοιπόν εστιάζεται στις εξισώσεις (3.31) και (3.33). Πράγματι από τον εμπειρικό νόμο του Faraday, σύμφωνα με τον οποίο: *Η ηλεκτρεγερτική δύναμη πάνω σε ένα κλειστό βρόχο, δηλαδή η κυκλοφορία του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο βρόχο (βλέπε Σχήμα 3.3), είναι ίση και αντίθετη με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διασχίζει μια οποιαδήποτε επιφάνεια που καταλήγει στο βρόχο*, προκύπτει:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3.34)$$

$$\text{όπου, } \Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.35)$$

είναι η μαγνητική ροή μέσω μιας τυχούσας επιφάνειας που καταλήγει στο βρόχο.



Σχήμα 3.3 Νόμος του Faraday (Young 1991)

Με βάση το θεώρημα Stokes, το πρώτο μέλος της εξίσωσης (3.34) γίνεται:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.36)$$

η οποία ισχύει για μια τυχαία επιφάνεια, μόνο εάν οι ποσότητες στα δυο μέλη είναι ίσες. Αυτή η διαπίστωση μας οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.37)$$

η οποία φανερώνει πως το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι πλέον αστρόβιλο.

Όσον αφορά την εξίσωση στροβιλισμού του μαγνητικού πεδίου εφόσον τα μεγέθη εξαρτώνται από το χρόνο και ισχύει: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}$, ο Maxwell τροποποίησε την εξίσωση του Ampere εισάγοντας τον όρο $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, γνωστό ως ρεύμα μετατόπισης. Πιο συγκεκριμένα η νέα εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.38)$$

Ερμηνεύοντας τώρα από φυσική άποψη την τελευταία σχέση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η χρονική αλληλεξάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου προστίθεται στα ηλεκτρικά ρεύματα ως μια πρόσθετη πηγή στροβιλισμού του μαγνητικού πεδίου. Έτσι, για την περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου καταλήγουμε στις ακόλουθες τέσσερις εξισώσεις:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \quad (3.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.42)$$

Πρέπει να σημειωθεί πως οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν στο κενό. Σε συνεχή μέσα, εισάγουμε δύο νέα διανυσματικά μεγέθη: τη μετατόπιση $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ και το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, τα οποία είναι συναρτήσεις των \mathbf{E} και \mathbf{B} , αντίστοιχα:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \text{ και } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.43)$$

όπου $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$, η διηλεκτρική σταθερά ή ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου, και χ_e η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του μέσου.

Έτσι οι εξισώσεις (3.39) έως (3.42) λαμβάνουν την τελική μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{el} \quad (3.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.47)$$

Στα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν εδώ, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις της μορφής (3.43), με σταθερές ϵ και μ που χαρακτηρίζουν το υλικό. Στην περίπτωση του πλάσματος, σε πρώτη προσέγγιση έχουμε $\epsilon \approx \epsilon_0$ και $\mu \approx \mu_0$. Γενικά, όμως, ϵ και μ είναι συναρτήσεις διαφόρων μεγεθών, ειδικά της συχνότητας στη περίπτωση ταλαντώσεων.

3.2.4 Ανάπτυξη δύναμης Lorentz σε κινούμενο ρευστό

Θεωρώντας ότι δεν έχουμε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και για ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, μας ενδιαφέρει κυρίως η συνιστώσα \mathbf{f}_m της δύναμης Lorentz, που προκύπτει από το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J}_{el}^m \times \mathbf{B}, \quad (3.48)$$

ενώ από το νόμο του Ohm για κινούμενο μέσο, η επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$\mathbf{J}_{el}^m = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.49)$$

Επομένως, μπορούμε να λάβουμε:

$$\mathbf{f}_m = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \sigma[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}] = \sigma[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}] \quad (3.50)$$

Έστω \mathbf{u}_{\parallel} και \mathbf{u}_{\perp} οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας \mathbf{u} , παράλληλα και κάθετα προς το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} και \mathbf{e}_B το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της μαγνητικής επαγωγής. Έτσι, έχουμε:

$$\mathbf{f}_m = \sigma \left\{ \left[\underbrace{|\mathbf{B}| |\mathbf{u}| \cos(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{B})}_{|\mathbf{u}_{\parallel}|} \right] \mathbf{B} - |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u} \right\} = \sigma \left[(|\mathbf{B}| |\mathbf{u}_{\parallel}|) \mathbf{B} - |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u} \right] \quad (3.51)$$

$$\text{και } \mathbf{f}_m = \sigma (|\mathbf{B}|^2 |\mathbf{u}_{\parallel}| \mathbf{e}_B - |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}) = \sigma (|\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}_{\parallel} - |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}) = -\sigma |\mathbf{B}|^2 \mathbf{u}_{\perp} \quad (3.52)$$

Για δισδιάστατη ροή (x - y) και θεωρώντας ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά την x -δieleύθυνση $B_o(B_o, 0)$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο που επάγεται λόγω της κίνησης του ρευστού (για σχετικά μικρές ταχύτητες ρευστού η επίδραση του επαγόμενου εσωτερικού μαγνητικού πεδίου είναι αμελητέα) έχουμε:

$$x\text{-δieleύθυνση: } \mathbf{f}_{m,y} = 0 \quad (3.53)$$

$$y\text{-δieleύθυνση: } \mathbf{f}_{m,x} = -\sigma B_o^2 \mathbf{u} \quad (3.54)$$

3.3 Εξισώσεις Μαγνητοϋδροδυναμικής και αδιαστατοποίηση

3.3.1 Εξισώσεις Μαγνητοϋδροδυναμικής

Εξετάζουμε την περίπτωση ασυμπίεστου αγωγίμου ρευστού στο οποίο ασκούνται δυνάμεις που επάγονται από (εξωτερικό) μαγνητικό πεδίο. Η περιοχή αυτή ονομάζεται Μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ, Magnetohydrodynamics - MHD), ο όρος όμως χρησιμοποιείται και για συμπιεστά ρευστά. Το πεδίο της ταχύτητας του ρευστού, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, είναι σωληνοειδές και ικανοποιεί τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής (Navier–Stokes):

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.55)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_{em} + \mathbf{f} \quad (3.56)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, p η πίεση, μ ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους \mathbf{f}_{em} η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (ανά μονάδα όγκου) και \mathbf{f} άλλες δυνάμεις που τυχόν δρουν στο ρευστό (π.χ. βαρύτητα).

Η δύναμη \mathbf{f}_{em} μαθηματικά εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{f}_{em} = \rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{J}_{el} \times \mathbf{B} \quad (3.57)$$

Σε αυτή τη σχέση πρέπει να σημειωθεί πως ο όρος $\rho_{el} \mathbf{E}$ απαλείφεται. Αυτό βασίζεται στο ότι σε κάθε όγκο του αγωγίμου μέσου, ακόμη και πολύ μικρό, αλλά μακροσκοπικό, οι πυκνότητες θετικών και αρνητικών φορτίων είναι πρακτικά ίσες, οπότε ισχύει η συνθήκη της "οιονεί ουδετερότητας" ($\rho_{el} \approx 0$) του ρευστού. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampere (χωρίς το ρεύμα μετατόπισης του Maxwell) έχουμε τελικά:

$$\mathbf{f}_{em} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{B}|^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right] \quad (3.58)$$

Στο συγκεκριμένο σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Ohm που συνδέει την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος με την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, με βάση την σχέση:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.59)$$

Όμως, το ηλεκτρικό ρεύμα στο ρευστό επηρεάζει το πεδίο. Από τους νόμους του Ohm και Ampere, υπολογίζουμε την στροβιλότητα

$$\nabla \times \mathbf{J} = \sigma [\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.60)$$

και χρησιμοποιώντας διανυσματικό λογισμό, καταλήγουμε:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.61)$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις της Μαγνητοϋδροδυναμικής του ασυμπίεστου ρευστού είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.62)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B} \quad (3.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{P} = p + \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2 \quad (3.66)$$

Η εξίσωση (3.65), προκύπτει από συνδυασμό των παρακάτω εξισώσεων:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (\text{Νόμος του Ampere}) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{Νόμος του Ohm}) \quad (3.68)$$

και από τη σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.69)$$

Πιο αναλυτικά:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu \sigma [(\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}))] \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ισχύει όμως:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.71)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (3.72)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην εξίσωση (3.65). Ο όρος $1/(\sigma \mu)$ καλείται συχνά συντελεστής μαγνητικής διάχυσης.

Παράλληλα, στην εξίσωση (3.62) η συνολική πίεση P είναι το άθροισμα της υδροστατικής πίεσης, p , και της λεγομένης μαγνητικής πίεσης, $\frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2$. Ο λόγος της υδροστατικής προς τη μαγνητική πίεση

$$\beta = 2 \mu p / |\mathbf{B}|^2 \quad (3.73)$$

είναι μία βασική παράμετρος, γνωστή ως β -αριθμός, που χαρακτηρίζει τις διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης πλάσματος.

Στη Μαγνητοϋδροστατική, όπου $\mathbf{u}=0$ οι καταστάσεις ισορροπίας του ρευστού είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\nabla P = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.74)$$

3.3.2 Αδιάστατες εξισώσεις Μαγνητοϋδροδυναμικής

Εαν χρησιμοποιήσουμε ως χαρακτηριστικές τιμές ταχύτητας, μήκους και μαγνητικής επαγωγής τις τιμές u_0 , l_0 , B_0 , αντίστοιχα, και άρα $t_0 = l_0/u_0$, $\rho_0 = \rho u_0^2$, τότε οι εξισώσεις της Μαγνητοϋδροδυναμικής σε αδιάστατη μορφή γίνονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\nabla P^* + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + R_h (\mathbf{B}^* \cdot \nabla) \mathbf{B}^* \quad (3.76)$$

$$P^* = p^* + \frac{R_h}{2} |\mathbf{B}^*|^2 \quad (3.77)$$

$$\nabla_0 \mathbf{B}^* = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = (\mathbf{B}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{B}^* + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.79)$$

όπου οι αδιάστατοι αριθμοί είναι:

$$\text{Αριθμός Reynolds, } Re = l_0 u_0 / \nu \quad (3.80)$$

$$\text{Μαγνητικός αριθμός Reynolds, } Rm = \sigma \mu l_0 u_0 \quad (3.81)$$

$$\text{Αριθμός μαγνητικής πίεσης, } Rh = b_0^2 / \rho \mu u_0^2 \quad (3.82)$$

όπου μ , ν , ρ και σ είναι η μαγνητική διαπερατότητα, το κινηματικό ιξώδες, η πυκνότητα και η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού, αντίστοιχα, και b_0 είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου.

Ταυτόχρονα το γινόμενο των παραπάνω αριθμών ορίζει τον αδιάστατο αριθμό Hartmann:

$$\text{Αριθμός Hartmann: } Ha = \sqrt{Re Rm Rh} = b_0 l_0 (\sigma / \rho_0 \nu)^{0.5} \quad (3.83)$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η εξίσωση της ορμής:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{f} \quad (3.84)$$

λαμβάνει την αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{b_0^2 l_0}{\rho_0 \mu l_0 u_0^2} \mathbf{f}_{em}^* + \mathbf{f} \quad (3.85)$$

ή αλλιώς:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re} R_m} \mathbf{f}_{\text{em}}^* \quad (3.86)$$

Παράλληλα, ξεκινώντας από τον ορισμό της πυκνότητας του ρεύματος σε αδιάστατη μορφή, έχουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{J}^* = R_m [\mathbf{E}^* + \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*] \quad (3.87)$$

$$\mathbf{J}^* \times \mathbf{B}^* = R_m [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^* + (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) \times \mathbf{B}^*] \quad (3.88)$$

$$\mathbf{J}^* \times \mathbf{B}^* = R_m [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \cdot (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{B}^*) - \mathbf{u}^* |\mathbf{B}^*|^2] \quad (3.89)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει η ακόλουθη αδιάστατη μορφή της εξίσωσης ορμής:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \text{Ha}^2 (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^* - \mathbf{u}^{* \perp} |\mathbf{B}^*|^2) \right] \quad (3.90)$$

όπου $\mathbf{u}^{* \perp} = \mathbf{u}^* - \mathbf{b}(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{b})$ είναι η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη στη διεύθυνση της μαγνητικής επαγωγής και $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} .

3.3.3 Μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds

Όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται επηρεάζει τις ταχύτητες του ρευστού, αλλά η κίνηση του ρευστού δεν επιδρά στο μαγνητικό πεδίο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds (Low- R_m model) για τον υπολογισμό της δύναμης Lorentz στο ρευστό. Έτσι, θεωρώντας ότι \mathbf{e} , \mathbf{j} , \mathbf{b} είναι, αντίστοιχα, οι διαταραχές των \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{B} , οι οποίες οφείλονται στη παρουσία ενός πολύ μικρού πεδίου ταχυτήτων, θα έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{j}_0 = \sigma \cdot \mathbf{E}_0 \quad (3.91)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.92)$$

όπου έχουμε παραλείψει τον δεύτερο όρο $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ στην τέταρτη εξίσωση. Η εξίσωση του Faraday δίνει $\mathbf{e} = \mathbf{u} \times \mathbf{b}$ και έτσι οι διαταραχές του ηλεκτρικού πεδίου στην τέταρτη εξίσωση απαλείφονται. Τώρα, ο νόμος του Ohm γίνεται:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.93)$$

Όμως, εφόσον το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο $\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi$, όπου Φ είναι το ηλεκτρικό δυναμικό, η τελική έκφραση για το νόμο του Ohm είναι:

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.94)$$

ενώ η δύναμη Lorentz ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (3.95)$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις, υπολογίζεται η δύναμη Lorentz στο μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds.

Στην περίπτωση ροής στην οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο "Low- R_m ", και αγνοώντας την επίδραση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, η εξίσωση (3.72) και οι υπόλοιπες αδιάστατες εξισώσεις της Μαγνητοϋδροδυναμικής παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^{*2} \mathbf{u}^* - \text{Ha}^2 \mathbf{u}^{\perp*}) \quad (3.96)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (3.97)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{B}^* = 0 \quad (3.98)$$

4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

4.1 Εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής

4.1.1 Εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι εξισώσεις της ροής δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες επειδή η βιβλιοθήκη OpenFOAM, στην οποία βασίστηκε το παρόν αριθμητικό μοντέλο, χρησιμοποιεί μόνο αυτή τη μορφή συντεταγμένων, ανεξάρτητα από την γεωμετρία που μελετάται. Ωστόσο, στη συνέχεια παρατίθενται και οι εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες, επειδή η απεικόνιση των αποτελεσμάτων γίνεται σε αυτές.

Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ το άνωσμα της ταχύτητας του ρευστού.

Εξισώσεις Ορμής

x - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\mu \rho} (B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z}) \quad (4.2)$$

y - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\mu \rho} (B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_y}{\partial z}) \quad (4.3)$$

z - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\mu \rho} (B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z}) \quad (4.4)$$

όπου ν και μ , οι συντελεστές κινηματικού και δυναμικού ιξώδους, αντίστοιχα, και $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ το άνωσμα της μαγνητικής επαγωγής.

Εξίσωση Ενέργειας

$$\rho C_p (u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.5)$$

όπου C_p η ειδική θερμοχωρητικότητα και k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του ρευστού.

Εξισώσεις Μαγνητικού Πεδίου

x - διεύθυνση

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = B_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial B_x^2}{\partial x} + \frac{\partial B_x^2}{\partial y} + \frac{\partial B_x^2}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

y - διεύθυνση

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial B_y}{\partial z} = B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial B_y^2}{\partial x} + \frac{\partial B_y^2}{\partial y} + \frac{\partial B_y^2}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

z - διεύθυνση

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = B_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial B_z^2}{\partial x} + \frac{\partial B_z^2}{\partial y} + \frac{\partial B_z^2}{\partial z} \right) \quad (4.8)$$

όπου το πηλίκο $1/(\sigma \mu)$ ονομάζεται συντελεστής μαγνητικής διάχυσης.

4.1.2 Εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Όπως προαναφέρθηκε, οι εξισώσεις της ροής παρουσιάζονται και σε κυλινδρικές συντεταγμένες επειδή, αν και η βιβλιοθήκη OpenFOAM χρησιμοποιεί αποκλειστικά καρτεσιανές συντεταγμένες, έγινε μετατροπή των αποτελεσμάτων σε κυλινδρικές συντεταγμένες για να παρουσιαστούν καλύτερα, λόγω της τοροειδούς γεωμετρίας του αγωγού. Οι εξισώσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

Εξισώσεις ορμής

r - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho} j_\theta B_z \quad (4.10)$$

θ - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\rho} j_r B_z \quad (4.11)$$

z - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \quad (4.12)$$

$$\text{Όπου, } j_r = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + u_\theta B_z \right), \quad j_\theta = \sigma \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - u_r B_z \right), \quad j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (4.12a)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{B_z}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.12\beta)$$

Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T \quad (4.13)$$

Εξισώσεις Μαγνητικού Πεδίου

r - διεύθυνση

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial B_r}{\partial z} = B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + B_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

θ - διεύθυνση

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta B_r}{r} = B_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + B_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{B_\theta u_r}{r} + \\ \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} - \frac{B_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

z - διεύθυνση

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = B_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.1.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Στην παρούσα εφαρμογή, ο μαγνητικός αριθμός Reynolds, R_m , θεωρείται πολύ μικρότερος της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι πολύ μικρότερο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και μπορεί να μη ληφθεί υπόψη.

Σε συνέχεια της παραγράφου 3.3.2, σχετικά με την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων, και έχοντας υπόψη την εξεταζόμενη γεωμετρία που αντιστοιχεί στο Σχήμα 1.5, η ταχύτητα του ρευστού \mathbf{u} στην παρούσα γεωμετρία αδιαστατοποιείται κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής ταχύτητας $U_0 = \Delta\varphi/b_0 d$, όπου $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των κυλινδρικών τοιχωμάτων. Το μαγνητικό πεδίο, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, το ηλεκτρικό δυναμικό, ο χρόνος και η πίεση αδιαστατοποιούνται με τη χρήση των χαρακτηριστικών τιμών b_0 , $\sigma\Delta\varphi/d$, $\Delta\varphi$, d/U_0 and ρU_0^2 , αντίστοιχα.

Να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου δεν παρουσιάζονται στην αδιάστατη μορφή τους επειδή λόγω της υιοθέτησης του μοντέλου low Rm δεν λήφθηκαν υπόψη.

$$\text{Εξίσωση ρεύματος:} \quad \mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{b}_0 \quad (4.17)$$

$$\text{Εξίσωση ορμής:} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^*} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} (\mathbf{j} \times \mathbf{b}_0) \quad (4.18)$$

$$\text{Εξίσωση ηλεκτρικού δυναμικού:} \quad \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{b}_0) \quad (4.19)$$

$$\text{Εξίσωση συνέχειας:} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{Εξίσωση ενέργειας:} \quad \frac{\partial T}{\partial t^*} + \mathbf{u} \nabla T = \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T \quad (4.21)$$

Ακολουθεί η αδιάστατη μορφή των παραπάνω εξισώσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r u_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.22)$$

Εξισώσεις ορμής

r - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} j_\theta b_z \quad (4.23)$$

θ - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} j_r b_z \quad (4.24)$$

z - διεύθυνση

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_z \quad (4.25)$$

Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T \quad (4.26)$$

4.2 Γενικά χαρακτηριστικά της βιβλιοθήκης OpenFOAM

4.2.1 Εισαγωγικά στοιχεία για την βιβλιοθήκη OpenFOAM

Για την επίλυση των εξισώσεων (4.17) έως (4.21) έγινε τροποποίηση στο ήδη υπάρχον αριθμητικό μοντέλο "boussinesqBuoyantFoam" της ανοικτής βιβλιοθήκης CFD OpenFOAM, δημιουργώντας τον τροποποιημένο κώδικα «mhdBoussinesqBuoyantFOAM». Η διαδικασία αφορά αρχικά την επίλυση της εξίσωσης Laplace (4.17), ώστε να εκτιμηθεί το ηλεκτρικό δυναμικό Φ και το ηλεκτρικό ρεύμα J , εκλαμβάνοντας υπόψη τις τιμές του προηγούμενου βήματος. Κατόπιν υπολογίζονται τα πεδία ταχυτήτων και πίεσης επιλύοντας την εξίσωση ορμής Navier-Stokes σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας, έχοντας υπόψη τις τιμές του προηγούμενου βήματος. Τέλος, επιλύεται η εξίσωση της ενέργειας για τον προσδιορισμό των θερμοκρασιών.

Στη συνέχεια, ο κώδικας εισέρχεται σε έναν επαναληπτικό βρόχο, με σκοπό να βελτιωθεί η ακρίβεια του ηλεκτρικού δυναμικού Φ , των ταχυτήτων και της πίεσης του ρευστού, με τη χρήση του αλγόριθμου PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators). Ο αλγόριθμος PISO έχει το πλεονέκτημα της συνεχούς επαναληπτικής τακτικής διόρθωσης της ορμής, χωρίς την απαίτηση υποχαλάρωσης (Issa 1985).

Αφού προηγηθεί η δήλωση των οριακών συνθηκών, τα γενικά βήματα που ακολουθούνται στον αλγόριθμο είναι: α) δήλωση των εξισώσεων ορμής και αρχική εκτίμηση ταχυτήτων, β) υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού Φ , ταχύτητας \mathbf{u} , στις επιφάνειες των κελιών του πλέγματος, δ) δήλωση και επίλυση εξίσωσης πίεσης, ε) διόρθωση ταχυτήτων, στ) υπολογισμός λαθών συνέχειας μάζας, και ζ) επανάληψη βημάτων εκτίμησης πίεσης και διόρθωσης ταχύτητας μέχρι να ελαχιστοποιηθεί το λάθος. Η διαδικασία είναι επαναληπτική για να υπάρξει διόρθωση των τιμών και με αυτό τον τρόπο διορθώνονται το ηλεκτρικό δυναμικό Φ , οι ταχύτητες \mathbf{u} και το πεδίο πίεσης p . Στη συνέχεια επιλύεται η εξίσωση ενέργειας, για τον υπολογισμό των θερμοκρασιών T . Τέλος υπολογίζεται η πυκνότητα ρ και η δύναμη Lorentz. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα ελέγχου υλοποίησης του κώδικα για ένα τυχαίο χρονικό βήμα, κατά την προσομοίωση της ροής.

```

Time = 14.674

Courant Number mean: 7.16619e-05 max: 0.0738532
DICPCG: Solving for F, Initial residual = 9.13463e-06, Final residual = 9.13463e-06, No Iterations 0
DILUPBiCG: Solving for Ux, Initial residual = 4.66398e-08, Final residual = 4.66398e-08, No Iterations 0
DILUPBiCG: Solving for Uy, Initial residual = 4.48221e-08, Final residual = 4.48221e-08, No Iterations 0
DILUPBiCG: Solving for Uz, Initial residual = 0.000154341, Final residual = 1.37666e-07, No Iterations 1
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 0.007445, Final residual = 0.000443098, No Iterations 1001
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 0.000440231, Final residual = 9.87282e-06, No Iterations 712
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 9.87289e-06, Final residual = 9.87289e-06, No Iterations 0
time step continuity errors : sum local = 2.63856e-11, global = -7.03727e-13, cumulative = 2.07406e-10
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 7.9751e-05, Final residual = 0.000179026, No Iterations 1001
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 0.000179348, Final residual = 9.92101e-06, No Iterations 364
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 9.92101e-06, Final residual = 9.92101e-06, No Iterations 0
time step continuity errors : sum local = 2.5303e-11, global = -7.03727e-13, cumulative = 2.06702e-10
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 1.92153e-05, Final residual = 9.92734e-06, No Iterations 2
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 9.92735e-06, Final residual = 9.92735e-06, No Iterations 0
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 9.92735e-06, Final residual = 9.92735e-06, No Iterations 0
time step continuity errors : sum local = 2.89508e-11, global = -7.03727e-13, cumulative = 2.05999e-10
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 1.6426e-05, Final residual = 6.08988e-05, No Iterations 1001
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 6.0932e-05, Final residual = 9.78797e-06, No Iterations 142
DICPCG: Solving for p, Initial residual = 9.78796e-06, Final residual = 9.78796e-06, No Iterations 0
time step continuity errors : sum local = 2.51101e-11, global = -7.03727e-13, cumulative = 2.05295e-10
DILUPBiCG: Solving for T, Initial residual = 9.93165e-06, Final residual = 9.93165e-06, No Iterations 0
ExecutionTime = 3156.7 s ClockTime = 3159 s

```

Σχήμα 4.1 Αποτελέσματα ελέγχου υλοποίησης του κώδικα για ένα χρονικό βήμα

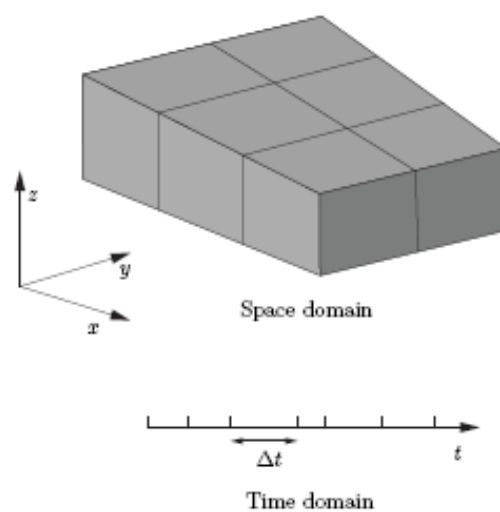
Για την επίλυση των εξισώσεων της ροής, η ανοικτή βιβλιοθήκη OpenFOAM βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται από την χωρική και χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων, που σημαίνει ότι η λύση μοιράζεται σε επιμέρους δομικά σημεία. Η γεωμετρία αποτελείται από χωρία που δημιουργούν ένα πλέγμα, το οποίο περιέχει σημεία, επιφάνειες και κελιά. Το μέγεθος ενός κελιού εξαρτάται από την απαιτούμενη ακρίβεια. Η επίλυση του προβλήματος υλοποιείται για κάθε κελί και ολοκληρώνεται για το σύνολο των κελιών. Με τη χρήση του σχήματος Gauss, οι εξισώσεις γίνονται πιο εύχρηστες περιέχοντας ολοκληρώματα για τα περιγράμματα, τις επιφάνειες και τους όγκους.

Τα σχήματα που υιοθετούνται για την επίλυση των εξισώσεων είναι το Euler implicit για τις χρονικές παραγώγους, η γραμμική Gauss για την κλίση της πίεσης, το Gauss GammaV 0.2 και Gauss Gamma 0.2 για τους όρους $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ και $\mathbf{u}\nabla T$, αντίστοιχα. Επίσης, χρησιμοποιείται η διόρθωση της γραμμικής Gauss για τις Λαπλασιανές μ , T , B , ο αλγόριθμος PISO για την επίλυση της συνέχειας, ορμής και ενέργειας, ο αλγόριθμος ICCG (Incomplete-Cholesky preconditioned Conjugate Gradient) για την επίλυση των συμμετρικών πινάκων των όρων της πίεσης p , και του ηλεκτρικού δυναμικού F , ο αλγόριθμος BICCG (Incomplete-Cholesky preconditioned Biconjugate Gradient) για την επίλυση των ασύμμετρων πινάκων των όρων ταχύτητας U , θερμοκρασίας T . Τέλος, γίνεται χρήση των κεντρικών διαφορών (ακρίβειας 2^{ης} τάξης) για την επίλυση των εξισώσεων ορμής. Εκτός από την σύντομη περιγραφή της βιβλιοθήκης OpenFOAM που ακολουθεί παρακάτω,

περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο εγχειρίδιο χρήσης του OpenFOAM (2010a, 2010b).

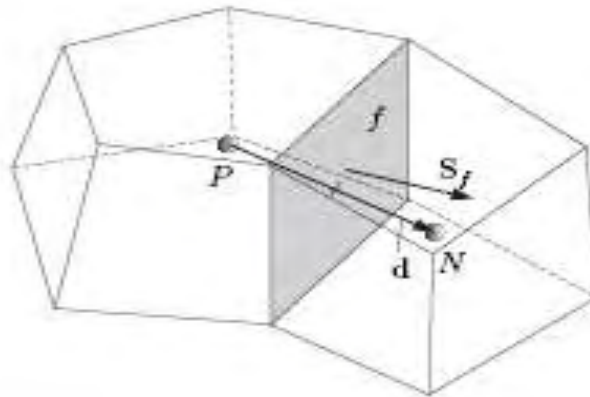
4.3 Σύντομη Περιγραφή της Βιβλιοθήκης OpenFoam

Η χρονική διακριτοποίηση στην OpenFoam, διαιρεί το χρόνο σε ένα σύνολο χρονικών βημάτων Δt που μπορεί να αλλάξει κατά τη διάρκεια μιας αριθμητικής προσομοίωσης, ανάλογα με ένα όρο ελέγχου που υπολογίζεται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Η χωρική και η χρονική διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης

Η διακριτοποίηση του χώρου απαιτεί την υποδιαίρεση του πεδίου σε έναν αριθμό κελιών ή όγκων ελέγχου (OpenFOAM 2010a). Τα κελία καταλαμβάνουν το σύνολο του υπολογιστικού πεδίου ροής και δεν αλληλο-επικαλύπτονται. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα κελιού παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3. Οι εξαρτημένες μεταβλητές και οι άλλες ιδιότητες αποθηκεύονται κυρίως στο κέντρο του κελιού P, αλλά μπορούν να αποθηκευτούν και στην επιφάνεια. Στην βιβλιοθήκη OpenFOAM δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των οριακών επιφανειών κάθε κελιού, ούτε στην ευθυγράμμιση της κάθε επιφάνειας. Αυτό το είδος πλέγματος συχνά αναφέρεται ως «μη δομημένο» για να διαφοροποιηθεί από τα πλέγματα στα οποία οι επιφάνειες των κελιών έχουν μια ορισμένη ευθυγράμμιση.



Σχήμα 4.3 Παράμετροι στη διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων

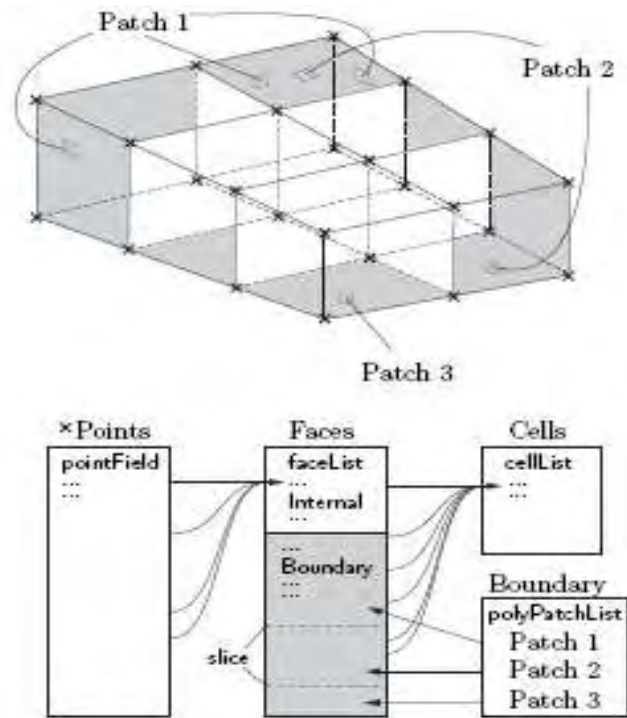
Η χρήση αυθαίρετων μη δομημένων πλεγμάτων σε κώδικες υπολογιστικής μαγνητοϋδροδυναμικής προσφέρει μεγαλύτερη ελευθερία στην παραγωγή πλέγματος και στο χειρισμό, όταν η γεωμετρία του πεδίου είναι σύνθετη ή αλλάζει στον χρόνο. Οι επιφάνειες των κελιών της βιβλιοθήκης OpenFOAM διακρίνονται σε εσωτερικές και οριακές ως εξής:

Εσωτερικές επιφάνειες: Πρόκειται για επιφάνειες που συνδέουν δύο κελιά (δεν μπορεί να είναι περισσότερες από δύο). Για κάθε εσωτερική επιφάνεια, η OpenFOAM υποδεικνύει το ένα κελί να είναι η επιφάνεια *ιδιοκτήτης* και ένα άλλο για να είναι ο *γείτονας*.

Οριακές επιφάνειες: Οι επιφάνειες που ανήκουν μόνο σε ένα κελί και συμπίπτουν με το σύνορο του υπολογιστικού πεδίου. Αυτές οι επιφάνειες έχουν απλά ένα κελί *ιδιοκτήτη*.

4.3.1 Καθορισμός πλέγματος στην OpenFOAM

Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα περιγραφής του πλέγματος στην βιβλιοθήκη OpenFOAM, αρχίζοντας με την βασικότερη κατηγορία πλέγματος, που ονομάζεται «polyMesh» και είναι βασισμένη σε πολύεδρα. Η δομή του πλέγματος φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Ένα πλέγμα κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τις ελάχιστες πληροφορίες που απαιτούνται για να καθοριστεί η γεωμετρία του.



Σχήμα 4.4 Σχηματική περιγραφή του βασικού πλέγματος του OpenFOAM

Δομικά στοιχεία πλέγματος στο «polyMesh»

Σημεία: Λίστα συντεταγμένων των σημείων της δομής

Επιφάνειες: Λίστα με τις επιφάνειες κελιών, όπου η επιφάνεια καθορίζεται από τους αριθμούς των σημείων του πεδίου

Κελιά: Λίστα από κελιά, όπου η κατηγορία τους καθορίζεται από τη λίστα αριθμού επιφανειών, που αντιστοιχούν στο δομικό στοιχείο επιφανειών

Όρια: Το όριο υποδιαιρείται σε λίστα από επιφάνειες για να επιτρέψει στις διαφορετικές οριακές συνθήκες να δοθούν σε διαφορετικές επιφάνειες κατά τη διάρκεια της λύσης. Όλες οι επιφάνειες οποιουδήποτε «polyPatch» αποθηκεύονται ως ένα μπλοκ του «faceList», έτσι ώστε οι επιφάνειες να μπορούν να προσεγγιστούν εύκολα χρησιμοποιώντας αναφορές, οι οποίες αποθηκεύονται στο πρώτο και τελευταίο επίπεδο του μπλοκ.

Η διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιεί τα στοιχεία που προκύπτουν από τη γεωμετρία του πλέγματος που αποθηκεύεται στον κατάλογο «polyMesh». Η βιβλιοθήκη OpenFOAM επεκτείνει την κατηγορία «polyMesh» στο αρχείο «fvMesh» που αποθηκεύει τα στοιχεία που απαιτούνται πρόσθετα για την διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Το αρχείο «fvMesh» κατασκευάζεται από το «polyMesh» και αποθηκεύει τα πρόσθετα στοιχεία στον Πίνακα 4.1 που μπορεί να ενημερωθεί κατά τη διάρκεια εκτέλεσης.

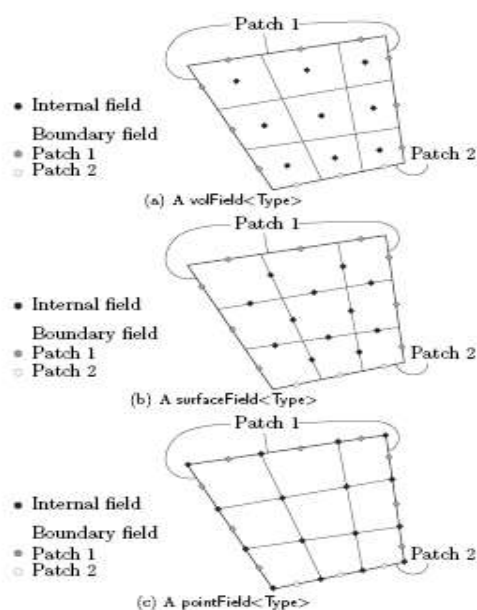
Πίνακας 4.1 Στοιχεία που αποθηκεύονται στο αρχείο «fvMesh»

Class	Description	Symbol	Access function
volScalarField	Cell volumes	V	$V()$
surfaceVectorField	Face area vectors	S_f	$Sf()$
surfaceScalarField	Face area magnitudes	$ S_f $	$magSf()$
volVectorField	Cell centres	C	$C()$
surfaceVectorField	Face centres	C_f	$Cf()$
surfaceScalarField	Face motion fluxes **	ϕ_g	$phi()$

Καθορισμός γεωμετρικού πεδίου «geometricField» στην OpenFOAM

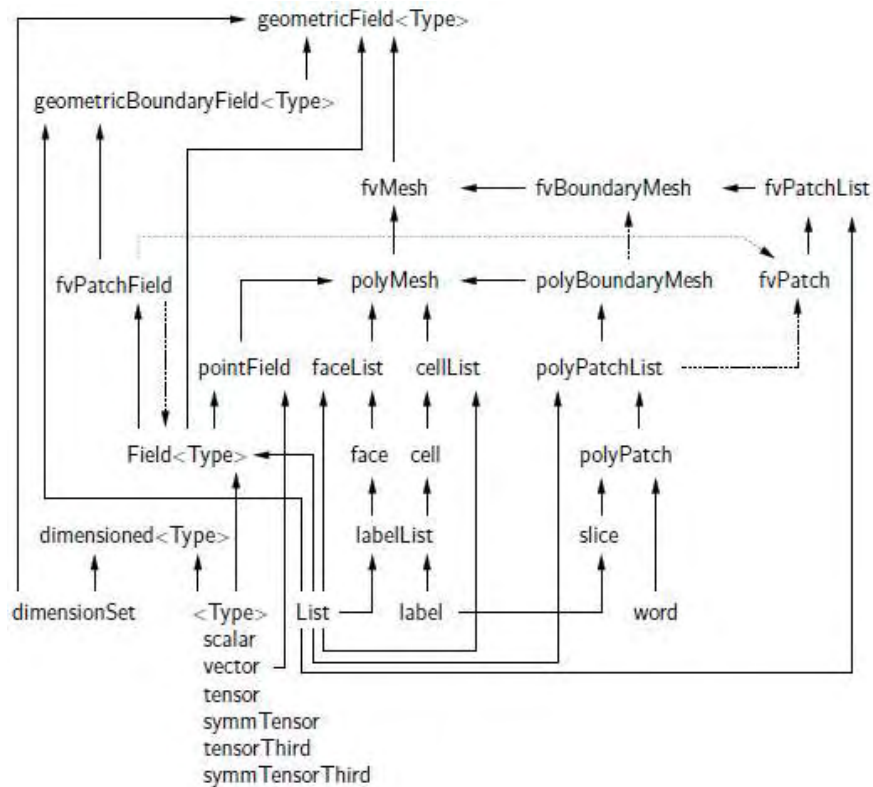
Ένα πεδίο (λίστα τανυστών) και ένα πλέγμα μπορούν να συνδυαστούν για να καθορίσουν ένα πεδίο τανυστών σχετικά με τα σημεία ενός χώρου αναφοράς, που προσδιορίζονται στην OpenFOAM από το αντικείμενο «geometricField<Type>». Οι τιμές του πεδίου («Field») είναι χωρισμένες σε εκείνες μέσα στην εσωτερική περιοχή του πεδίου (π.χ. στο κέντρο του κελιού) και σε εκείνες που καθορίζονται στην οριακή περιοχή του πεδίου (π.χ. στις οριακές επιφάνειες). Τα αντικείμενα «geometricField<Type>» αποθηκεύουν τις ακόλουθες πληροφορίες: *Εσωτερικό πεδίο, Οριακό πεδίο, Πλέγμα, Παλιές τιμές, Τιμές προηγούμενης επανάληψης.*

Το «geometricField<Type>» μετονομάζεται σε μια από τις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας δηλώσεις τύπου «typedef» ανάλογα με το πώς καθορίζεται το πεδίο μέσα στο κελί: α) «volField<Type>»: Το πεδίο καθορίζεται στα κέντρα των κελιών, β) «surfaceField<Type>»: Το πεδίο καθορίζεται στις πλευρές των κελιών, και γ) «pointField<Type>»: Το πεδίο καθορίζεται στα σημεία των κελιών. Οι παραπάνω κατηγορίες τύπου «typedef», που ανήκουν στο αντικείμενο «geometricField<Type>» παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Τύποι του «geometricField<Type>» σε πλέγμα με 2 οριακά «patches»

Η δομή των αντικειμένων που χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί το «geometricField<Type>» παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6.



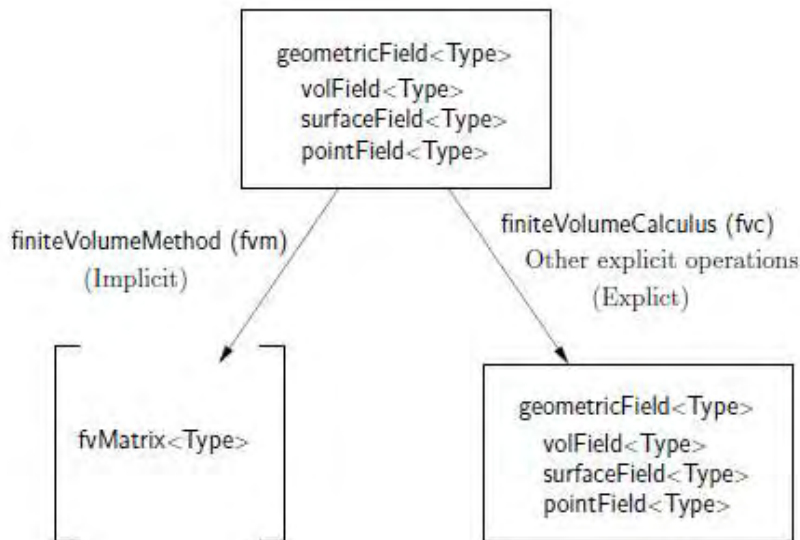
Σχήμα 4.6 Βασική δομή αντικειμένων που οδηγεί στο geometricField<Type>

4.3.2 Διακριτοποίηση των εξισώσεων

Κάθε όρος στις μερικές διαφορικές εξισώσεις της ροής αντιπροσωπεύεται χωριστά στην βιβλιοθήκη OpenFOAM με τη βοήθεια των στατικών συναρτήσεων «finiteVolumeMethod» (fvm) και «finiteVolumeCalculus» (fvc). Στις συναρτήσεις «fvm» και «fvc» δηλώνονται οι διαφορικοί τελεστές, π.χ. ∇^2 , $\nabla \cdot$ και $\partial/\partial t$. Ο σκοπός του διαχωρισμού σε δύο συναρτήσεις «fvm» και «fvc» (αντί μίας) είναι:

- το «fvm» υπολογίζει τα παράγωγα και επιστρέφει ένα «fvMatrix<Type>»
- το «fvc» υπολογίζει τα ρητά παράγωγα και άλλους ρητούς όρους, επιστρέφοντας ένα «geometricField<Type>»

Το Σχήμα 4.7 παρουσιάζει το «geometricField<Type>» που καθορίζεται σε ένα πλέγμα με δυο οριακές επιφάνειες.



Σχήμα 4.7 Το «geometricField<Type>» και οι λειτουργίες του

Ο Πίνακας 4.2 απαριθμεί τις κύριες συναρτήσεις που είναι διαθέσιμες στις «fvm» και «fvc», για να διακριτοποιήσουν όρους στις εξισώσεις. Η διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων κάθε όρου διατυπώνεται πρώτα με τον υπολογισμό του όρου πάνω σε ένα υπολογιστικό κελί όγκου V . Οι περισσότεροι όροι με χωρικές παραγώγους μετατρέπονται έπειτα σε ολοκληρώματα πάνω στην επιφάνεια S του κελιού οριοθετώντας τον όγκο και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss.

$$\int_V \nabla \cdot \phi dV = \int_S dS \cdot \phi \quad (4.27)$$

όπου \mathbf{S} είναι το διάνυσμα της επιφάνειας της περιοχής, και ϕ μπορεί να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε πεδίο τανυστή, ενώ με * συμβολίζεται η πράξη μεταξύ τανυστών, όπως εσωτερικό ή εξωτερικό γινόμενο. Τα ολοκληρώματα όγκου και επιφάνειας γίνονται γραμμικά χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχήματα. Στην βιβλιοθήκη OpenFOAM προσφέρεται μια επιλογή σχημάτων για τη διακριτοποίηση των όρων. Η επιλογή του σχήματος γίνεται είτε με άμεσο καθορισμό του μέσα στον κώδικα είτε από ένα αρχείο εισόδου κατά την εκτέλεση της προσομοίωσης, που αποθηκεύεται μέσα σε ένα αντικείμενο κατηγορίας «fvSchemes».

Λαπλασιανός όρος

Ο όρος Laplace είναι ενσωματωμένος πάνω σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_S dS \cdot (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \Gamma_f S_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (4.28)$$

Πίνακας 4.2: Διακριτοποίηση των μερικών παραγώγων στην OpenFOAM

Term description	Implicit / Explicit	Text expression	fvm::/fvc:: functions
Laplacian	Imp/Exp	$\nabla^2 \phi$ $\nabla \cdot \Gamma \nabla \phi$	laplacian(phi) laplacian(Gamma, phi)
Time derivative	Imp/Exp	$\frac{\partial \phi}{\partial t}$ $\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}$	ddt(phi) ddt(rho, phi)
Second time derivative	Imp/Exp	$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$	d2dt2(rho, phi)
Convection	Imp/Exp	$\nabla \cdot (\psi)$ $\nabla \cdot (\psi \phi)$	div(psi, scheme)* div(psi, phi, word)* div(psi, phi)
Divergence	Exp	$\nabla \cdot \chi$	div(chi)
Gradient	Exp	$\nabla \chi$ $\nabla \phi$	grad(chi) gGrad(phi) lsGrad(phi) snGrad(phi) snGradCorrection(phi)
Grad-grad squared	Exp	$ \nabla \nabla \phi ^2$	sqrGradGrad(phi)
Curl	Exp	$\nabla \times \phi$	curl(phi)
Source	Imp Imp/Exp†	$\rho \phi$	Sp(rho, phi) SuSp(rho, phi)

†fvm::SuSp source is discretised implicit or explicit depending on the sign of rho.

†An explicit source can be introduced simply as a vol<Type>Field, e.g. rho*phi.

Function arguments can be of the following classes:

phi: vol<Type>Field

Gamma: scalar volScalarField, surfaceScalarField, volTensorField, surfaceTensorField.

rho: scalar, volScalarField

psi: surfaceScalarField.

chi: surface<Type>Field, vol<Type>Field.

Όρος συναγωγής

Ο όρος της συναγωγής είναι ενσωματωμένος σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U \phi) dV = \int_S dS \cdot (\rho U \phi) = \sum_f S_f \cdot (\rho U)_f \phi_f = \sum_f F \phi_f \quad (4.29)$$

Το πεδίο ϕ_f στην επιφάνεια f υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ποικίλα σχήματα:

Κεντρικές διαφορές (CD) που είναι δευτέρου βαθμού ακριβείας:

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \quad (4.30)$$

όπου $f_x \equiv \frac{\overline{fN}}{\overline{PN}}$, \overline{fN} είναι η απόσταση μεταξύ του f και του κέντρου N των κελιών και \overline{PN} είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των κελιών P και N.

Upwind differencing, UD που καθορίζει το ϕ_f από την κατεύθυνση της ροής και είναι πρώτης τάξης ακρίβειας

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{για } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{για } F < 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Μικτές διαφορές (blended differencing, BD) συνδιασμός των UD και CD σε μια προσπάθεια να διατηρηθεί η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος με λογική ακρίβεια,

$$\phi_f = (1-\gamma)(\phi_f)_{UD} + \gamma(\phi_f)_{CD} \quad (4.32)$$

Πρώτη χρονική παράγωγος

Η παράγωγος ως προς χρόνο, $\partial/\partial t$, είναι ενσωματωμένη σε έναν όγκο ελέγχου ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \quad (4.33)$$

Ο όρος διακριτοποιείται με μια απλή διαφορά στον χρόνο χρησιμοποιώντας:

νέες τιμές $\phi^n \equiv \phi(t + \Delta t)$ στο χρονικό βήμα για το οποίο λύνουμε

τιμές προηγούμενου βήματος $\phi^0 \equiv \phi(t)$ που αποθηκεύονται στο προηγούμενο

χρονικό βήμα

τιμές πριν το προηγούμενο βήμα $\phi^{00} \equiv \phi(t - \Delta t)$ αποθηκεύονται στο χρονικό

βήμα πριν το προηγούμενο

Το σχήμα διακριτοποίησης μπορεί να δηλωθεί χρησιμοποιώντας τη λέξη κλειδί «timeScheme» στο κατάλληλο αρχείο εισόδου.

Euler implicit scheme (timeScheme EulerImplicit) το οποίο έχει πρώτης τάξης ακρίβεια στο χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = \frac{(\rho p \phi_p V)^n - (\rho p \phi_p V)^0}{\Delta t} \quad (4.34)$$

Backward differencing scheme (timeScheme BackwardDifferencing) το οποίο έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης στο χρόνο και αποθηκεύει την τιμή πριν από την προηγούμενη τιμή και επομένως γι' αυτό απαιτείται κατανάλωση μεγαλύτερου αποθηκευτικού χώρου από ό,τι στο σχήμα EulerImplicit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = \frac{3(\rho p \phi_p V)^n - 4(\rho p \phi_p V)^0 + (\rho p \phi_p V)^{00}}{2\Delta t} \quad (4.35)$$

Δεύτερη χρονική παράγωγος

Η δεύτερη χρονική παράγωγος είναι πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{(\rho p \phi_p V)^n - 2(\rho p \phi_p V)^0 + (\rho p \phi_p V)^{00}}{\Delta t^2} \quad (4.36)$$

Απόκλιση (Divergence)

Ο όρος της απόκλισης γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot \phi dV = \int_S dS \cdot \phi = \sum_f S_f \cdot \phi_f \quad (4.37)$$

Η συνάρτηση «fvc::div» μπορεί να πάρει ως στοιχείο της ένα αντικείμενο «surface<Type>Field», με το ϕ_f να καθορίζεται άμεσα, ή ένα αντικείμενο «vol<Type>Field» το οποίο παρεμβάλλεται στην επιφάνεια με κεντρικές διαφορές.

Κλίση

Ο όρος της κλίσης μπορεί να υπολογιστεί με ποικίλους τρόπους. Το σχήμα μπορεί να λειτουργήσει είτε με την επιλογή της ιδιαίτερης συνάρτησης «grad» που είναι σχετική με τη διακριτοποίηση του σχήματος, π.χ. «fvc::gGrad», «fvc::lsGrad» κ.λπ., είτε με τη χρησιμοποίηση της συνάρτησης «fvc::grad» που συνδυάζεται με την κατάλληλη λέξη κλειδί «timeScheme» σε ένα αρχείο εισόδου.

Η ολοκλήρωση Gauss γίνεται χρησιμοποιώντας τη λειτουργία «fvc::grad» με το «timeScheme Gauss» ή άμεσα χρησιμοποιώντας τη λειτουργία «fvc::gGrad». Η διακριτοποίηση εκτελείται χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη μέθοδο του θεώρηματος του Gauss στον όγκο ολοκλήρωσης:

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_S dS \phi = \sum_f S_f \phi_f \quad (4.38)$$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι βασισμένη στην ακόλουθη ιδέα:

- (α) Μια τιμή στο σημείο P μπορεί να επεκταθεί σε γειτονικό σημείο N χρησιμοποιώντας την κλίση στο P
- (β) Η εκτεταμένη τιμή στο N μπορεί να συγκριθεί με την πραγματική τιμή στο N, και η διαφορά θα είναι το λάθος

(γ) Αν ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των υπολογισμένων λαθών σε όλα τα γειτονικά σημεία του P ως προς την κλίση, τότε η κλίση θα πρέπει να έχει προσεγγιστεί καλά

Τα ελάχιστα τετράγωνα καλούνται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση «fvc::grad» με «timeScheme leastSquares» ή άμεσα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση «fvc::lsGrad». Η διακριτοποίηση εκτελείται όπως με τον πρώτο υπολογισμό του τανυστή **G** σε κάθε σημείο P αθροίζοντας όλα τα γειτονικά N:

$$\mathbf{G} = \sum_N \omega_N^2 \mathbf{d}\mathbf{d} \quad (4.39)$$

όπου **d** είναι το διάνυσμα από το P στο N και η συνάρτηση στάθμησης $\omega_N = 1/|\mathbf{d}|$. Η κλίση υπολογίζεται έπειτα ως:

$$(\nabla\phi)_p = \sum_N \omega_N^2 \mathbf{G}^{-1} \bullet \mathbf{d}(\phi_N - \phi_p) \quad (4.40)$$

Κανονική κλίση επιφάνειας: Η κανονική κλίση σε μια επιφάνεια $n_f \bullet (\nabla\phi)_f$ μπορεί να υπολογιστεί στις επιφάνειες των κελιών χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$(\nabla\phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_p}{d} \quad (4.41)$$

Αυτή η κλίση καλείται από τη λειτουργία «fvc::snGrad» και επιστρέφει ένα τύπο «surfaceField<Type>». Ο τύπος είναι άμεσα ανάλογος με αυτόν που υπολογίζεται από τον τύπο της Λαπλασιανής διακριτοποίησης. Με τον ίδιο τρόπο, μπορεί να εισαχθεί μια διόρθωση για να βελτιώσει την ακρίβεια της επιφανειακής κλίσης στην περίπτωση των μη-ορθογώνιων πλεγμάτων. Αυτή η διόρθωση γίνεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση «fvc::snGradCorrection [Check**]».

Πηγαίοι όροι

Ρητός: Κάθε ρητός όρος είναι ένα αντικείμενο «volField<Type>». Ως εκ τούτου, ένας ρητός όρος μπορεί να είναι ενσωματωμένος σε μια εξίσωση απλά ως πεδίο τιμών. Παραδείγματος χάριν, εάν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση Poisson $\nabla^2\phi = f$, πρέπει να καθορίσουμε το ϕ και το f ως αντικείμενα «volScalarField» και έπειτα να λύσουμε: `solve(fvm::laplacian(phi) == f)`

Άρρητος: Ένας άρρητος όρος πηγής είναι ενσωματωμένος σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \rho\phi dV = \rho_p V_p \phi_p \quad (4.42)$$

Άλλοι ρητοί τύποι διακριτοποίησης

Ολοκλήρωμα επιφάνειας: «fvc::surfaceIntegrate» εκτελεί ένα άθροισμα του αντικειμένου «surface<type>Field» επιφανειακών τιμών οριοθετώντας κάθε κελί και διαιρώντας με τον όγκο κελιού, δηλαδή $\sum_f \phi_f / V_P$, επιστρέφει ένα αντικείμενο «volField<type>».

Άθροισμα επιφάνειας: «fvc::surfaceSum» εκτελεί ένα άθροισμα του αντικειμένου «surface<type>» Field επιφανειακών τιμών οριοθετώντας κάθε κελί, δηλαδή $\sum_f \phi_f$ επιστρέφοντας ένα αντικείμενο «volField<Type>».

Μέσος όρος: «fvc::average» παράγει ένα μέσο όρο του αντικειμένου «surface<Type>Field» στις τιμές των επιφανειών του, δηλαδή $\left(\sum_f S_f \phi_f \right) / \sum_f S_f$, και επιστρέφει ένα αντικείμενο «volField<Type>».

Χρονική διακριτοποίηση

Όταν οριστούν όλοι οι χωρικοί όροι όπως $\mathbf{A} \phi$, όπου το \mathbf{A} είναι οποιοσδήποτε χωρικός τελεστής, π.χ. Λαπλασιανή, είναι δυνατή η έκφραση μη-μόνιμων μερικών διαφορικών εξισώσεων με ακέραια μορφή ως εξής:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_V \mathbf{A} \phi dV \right] dt = 0 \quad (4.43)$$

Χρησιμοποιώντας την άρρητη μέθοδο Euler, ο πρώτος όρος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{(\rho_P \phi_P V)^n - (\rho_P \phi_P V)^0}{\Delta t} dt = \frac{(\rho_P \phi_P V)^n - (\rho_P \phi_P V)^0}{\Delta t} \Delta t \quad (4.44)$$

και ο δεύτερος όρος ως

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \mathbf{A} \phi dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{A}^* \phi dt \quad (4.45)$$

όπου, το \mathbf{A}^* αντιπροσωπεύει μια χωρική διακριτοποίηση του \mathbf{A} .

Το χρονικό ολοκλήρωμα μπορεί να διακριτοποιηθεί με τρεις τρόπους:

Euler implicit: χρησιμοποιεί την άρρητη διακριτοποίηση των χωρικών όρων και με αυτόν τον τρόπο παίρνονται οι τρέχουσες τιμές ϕ^n .

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \phi^n \Delta t \quad (4.46)$$

Είναι πρώτης τάξης ακριβής στο χρόνο.

Explicit: χρησιμοποιεί ρητή διακριτοποίηση των χωρικών όρων, χρησιμοποιώντας τις ϕ^0 του προηγούμενου βήματος

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \phi^0 \Delta t \quad (4.47)$$

Είναι πρώτης τάξης ακριβής στο χρόνο και ασταθής αν ο αριθμός Courant είναι μεγαλύτερος από 1. Ο αριθμός Courant ορίζεται ως

$$C_0 = \frac{U_f d}{|d|^2 \Delta t} \quad (4.48)$$

όπου U_f είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα.

Crank Nicholson χρησιμοποιεί τον κανόνα τραπεζίου για να διακριτοποιήσει τους χωρικούς όρους. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται ένας μέσος όρος των τιμών του ϕ^n και παλαιών τιμών, ϕ^0 .

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \frac{(\phi^n + \phi^0)}{2} \Delta t \quad (4.49)$$

Είναι δεύτερης τάξης ακριβής στο χρόνο.

Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες απαιτούνται για να ολοκληρώσουν το προς επίλυση πρόβλημα. Επομένως πρέπει να διευκρινίσουμε τις οριακές συνθήκες σε όλες τις οριακές επιφάνειες. Οι οριακές συνθήκες μπορούν να διαιρεθούν σε δυο τύπους:

Dirichlet: ορίζει την τιμή της εξαρτώμενης μεταβλητής στο όριο και επομένως καλείται «fixed value».

Neumann: ορίζει την κλίση της μεταβλητής συνήθως στο όριο και επομένως καλείται «fixed gradient».

Όταν διακριτοποιούμε τους όρους που περιλαμβάνουν το άθροισμα πάνω στις επιφάνειες \sum_f πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν μία από τις επιφάνειες

είναι οριακή επιφάνεια. Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες έχουμε:

Fixed Value: θέτουμε μια σταθερή τιμή στο όριο ϕ_b . Μπορούμε απλά να αντικαταστήσουμε το ϕ_b στις περιπτώσεις όπου η διακριτοποίηση απαιτεί την τιμή

σε μία οριακή επιφάνεια ϕ_f , π.χ. στον όρο συναγωγής. Σε όρους όπου απαιτείται η κλίση της επιφάνειας $(\nabla\phi)_f$, π.χ. Λαπλασιανή, αυτό υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την τιμή στην οριακή επιφάνεια και την τιμή στο κέντρο των κελιών,

$$S_f \bullet (\nabla\phi)_f = |S_f| \frac{\phi_b - \phi_p}{|d|} \quad (4.50)$$

Fixed gradient: όπου η κλίση της ποσότητας στην οριακή επιφάνεια g_b είναι δεδομένη, εκεί έχουμε τον υπολογισμό των:

$$g_b = \left(\frac{S}{|S|} \bullet \nabla\phi \right)_f \quad (4.51)$$

Όταν απαιτείται διακριτοποίηση της τιμής σε μία οριακή επιφάνεια πρέπει να παρεμβάλουμε την τιμή στο κέντρο του κελιού στο όριο με

$$\phi_f = \phi_p + d \bullet (\nabla\phi)_f = \phi_p + |d| g_b \quad (4.52)$$

Το ϕ_b μπορεί να αντικατασταθεί άμεσα σε περιπτώσεις όπου απαιτείται η διακριτοποίηση για να υπολογιστεί η κλίση επιφανειών,

$$S_f \bullet (\nabla\phi)_f = |S_f| g_b \quad (4.53)$$

Φυσικές οριακές συνθήκες

Στην ροή ρευστού υπάρχουν τα ακόλουθα φυσικά όρια που ορίζουν τις οριακές συνθήκες:

Είσοδος: Δίνεται το πεδίο ταχύτητας στην είσοδο, ενώ η οριακή συνθήκη της κλίσης πίεσης είναι μηδέν. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα καθορισμού μιας τυρβώδους εισόδου, όπου εκτός από τη μέση τιμή δίνονται και οι διαταραχές.

Έξοδος: Δίνεται το πεδίο πίεσης στην έξοδο με την οριακή συνθήκη της κλίσης της ταχύτητας να είναι μηδέν.

Συνθήκη μη ολίσθησης αδιαπέρατων τοιχωμάτων (No-slip impermeable wall): Η ταχύτητα του ρευστού είναι ίση με αυτή του τοίχου και μπορεί να οριστεί μια συνθήκη σταθερής τιμής. Η κλίση της πίεσης καθορίζεται μηδενική δεδομένου ότι η ροή μέσω του τοίχου είναι μηδενική.

Σε ένα πρόβλημα όπου η λύση και οι οριακές συνθήκες είναι συμμετρικές ως προς ένα επίπεδο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το μισό υπολογιστικό πεδίο. Οι οριακές συνθήκες του επιπέδου συμμετρίας πρέπει να καθοριστούν σύμφωνα με την συμμετρία.

4.4 Έλεγχος αξιοπιστίας του αριθμητικού μοντέλου

Για την διασφάλιση της ορθής λειτουργίας και ακρίβειας του παρόντος αριθμητικού μοντέλου, επιλέχθηκαν κατάλληλα αποτελέσματα από δημοσιευμένες εργασίες για σύγκριση ώστε να αποτιμηθεί η αξιοπιστία του μοντέλου. Οι εργασίες που επιλέχθηκαν ήταν των Al-Najem et al. (1998), Ozoe & Okada (1989) και παραδείγματα ροών που αναφέρονται στο *Programmer's Guide (2010)* της βιβλιοθήκης OpenFOAM.

Η διαδικασία που τηρήθηκε για να προσομοιωθεί με τον παρόντα τροποποιημένο κώδικα OpenFoam η ροή κάθε μίας από τις παραπάνω εργασίες, ξεκίνησε με την εισαγωγή της γεωμετρίας του προβλήματος στο αρχείο «blockMeshDict», του φακέλου «constant/polyMesh». Αφού στο ίδιο αρχείο καθορίστηκε το πλέγμα και η πυκνωση των κελιών που θα χρησιμοποιηθεί, στη συνέχεια ακολούθησε η εισαγωγή των παραμέτρων του προβλήματος στο αρχείο «transportProperties». Οι τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές αυτού του αρχείου αποτελούν τους συντελεστές των διαφόρων όρων των αδιάστατων εξισώσεων ως εξής:

$$\rho_0 : \partial U / \partial t \quad \mu : \nabla^2 U \quad C_p : \partial T / \partial t \quad k : \nabla^2 T \quad \beta : \nabla T$$

T_0 : θερμοκρασιακές διαφορές στον όρο βαρύτητας

q : παραγωγή θερμότητας

B_0 : $J \times B$ (συντελεστής δύναμης Lorentz)

σ : συντελεστής όρου ρεύματος

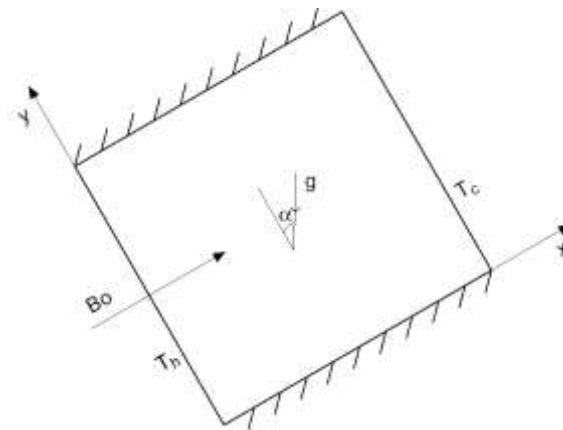
Επίσης στο αρχείο «g» αποτυπώνεται ο όρος της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Για να συμπληρωθεί το αρχείο «transportProperties» πρέπει να δηλωθούν οι μονάδες μέτρησης κάθε όρου με τη μορφή [μάζα μήκος χρόνος θερμοκρασία αριθμός μορίων ένταση ρεύματος ένταση φωτός]. Οι μονάδες μέτρησης είναι οι ακόλουθες: [kg, metre, second, Kelvin, moles, ampere, candela]. Για παράδειγμα, T_0 [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] σημαίνει πως το T_0 είναι η μεταβλητή που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία. Σημαντικό είναι να καθοριστούν έπειτα οι αρχικές και οριακές συνθήκες στα αρχεία που βρίσκονται στο φάκελο «0».

4.4.1 Σύγκριση με τα αποτελέσματα των Al-Najem et al. (1998)

Η εργασία των Al-Najem et al. (1998) αφορά μια δισδιάστατη κοιλότητα τετραγωνικής διατομής που περιλαμβάνει ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό. Τα οριζόντια τοιχώματα είναι μονωμένα, το αριστερό κατακόρυφο παραμένει σε υψηλή θερμοκρασία T_H , ενώ το δεξιό βρίσκεται σε χαμηλή θερμοκρασία T_C . Σχήμα 4.8. Στο

ρευστό επιβάλλεται ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και το τελικό αποτέλεσμα είναι μία μαγνητοϋδροδυναμική ροή λόγω φυσικής συναγωγής.



Σχήμα 4.8 Γεωμετρία τετραγωνικής κοιλότητας, Al-Najem et al. (1998)

Η ροή είναι ασυμπίεστη στρωτή και οι εξισώσεις που την περιγράφουν, σε αδιάστατη μορφή με όρους στροβιλότητας και ροϊκής συνάρτησης είναι:

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (4.54)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \alpha \right) - \frac{Ha^2}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4.57)$$

Όπου ω είναι η στροβιλότητα του ρευστού, Ψ η ροϊκή συνάρτηση, u και v οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού στην x - και y -διεύθυνση, αντίστοιχα, Gr ο αριθμός Grashof, θ η θερμοκρασία του ρευστού, α η γωνία κλίσης της κοιλότητας, Ha ο αριθμός Hartmann, και t ο χρόνος.

Από το νόμο του Ohm προκύπτει η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος \mathbf{J} .

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.58)$$

Για οριακές συνθήκες του προβλήματος, σε όλα τα όρια της διατομής ισχύει $u = v = \Psi = 0$. Επίσης,

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \text{ για } y = 0, 1, \text{ για όλα τα } x$$

$$\theta = 1, \text{ για } x = 0, \text{ για όλα τα } y, \text{ και } \theta = 0, \text{ για } x = 1, \text{ για όλα τα } y.$$

Σκοπός της εργασίας των Al-Najem et al. (1998) ήταν η μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου επί της ροής. Στους αριθμητικούς υπολογισμούς έγινε χρήση πλέγματος 41x41 και από τα αποτελέσματα που εξήχθησαν, ενδιαφέρον έδειξαν οι γραμμές ροής και οι ισόθερμες για αριθμό Grashof, $Gr=10^6$, και αριθμούς Hartmann, $Ha=0, 15, 50$ και 100 .

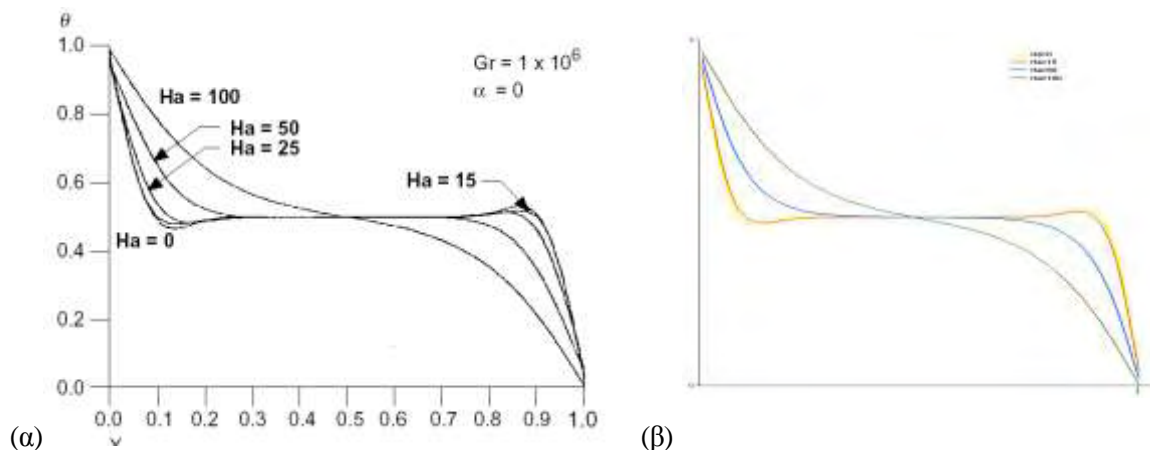
Έγινε εφαρμογή του παρόντος κώδικα για τις παραπάνω παραμέτρους σε μια προσπάθεια συγκρίσης των αποτελεσμάτων. Επίσης δημιουργήθηκαν διαγράμματα κατανομών θερμοκρασιών και ταχυτήτων στη διατομή της γεωμετρίας, για τις διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann, με πολύ καλή σύγκριση με την εργασία των Al-Najem et al. (1998).

Εκλαμβάνοντας υπόψη τους όρους των αδιάστατων εξισώσεων του προβλήματος, στο αρχείο «transportProperties» εισήχθησαν οι τιμές:

$$\begin{aligned} \rho^0 : 1,0 \quad T_0 : 0 \quad \mu : 1/\sqrt{Gr} \quad C_p : 1,0 \quad k : 1/Pr \sqrt{Gr} \\ \beta : 1,0 \quad q : 0 \quad B_0 : \sqrt{Ha^2 / \sqrt{Gr}} \quad \sigma : 1,0 \end{aligned}$$

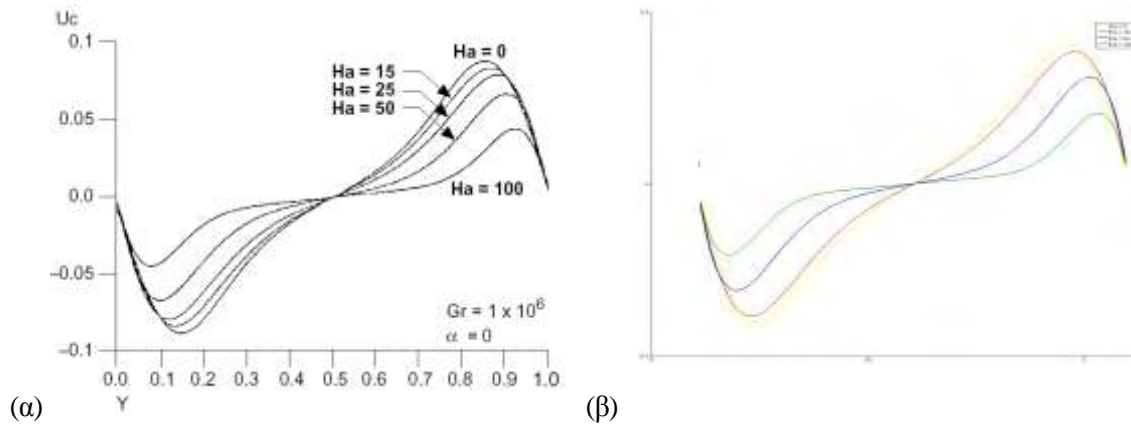
Επίσης στο αρχείο «g» ο όρος που αντιστοιχεί στην διεύθυνση y είναι -1.0 . Στις αρχικές και οριακές συνθήκες καθορίστηκε η θερμοκρασία στο αρχείο T να είναι 1 στο αριστερό τοίχωμα και 0 στο δεξί, ενώ τα άνω και κάτω τοιχώματα δηλώθηκαν ως αδιαβατικά («zeroGradient»). Οι ταχύτητες στο αρχείο U δηλώθηκαν μηδενικές, η πίεση στο αρχείο p , το δυναμικό στο αρχείο F και το ρεύμα στο αρχείο J αδιαβατικά.

Τα Σχήματα 4.9 και 4.10 δείχνουν πως οι κατανομές θερμοκρασίας και ταχύτητας, αντίστοιχα, για διαφορετικές τιμές του Ha , συγκρίνονται ικανοποιητικά με τα αποτελέσματα των Al-Najem et al. (1998). Οι μικρές διαφορές οφείλονται στη μεγάλη πυκνωση κελιών που χρησιμοποιεί ο παρών τροποποιημένος κώδικας OpenFOAM.



Σχήμα 4.9: Σύγκριση κατανομών θερμοκρασίας στο μέσο της κοιλότητας

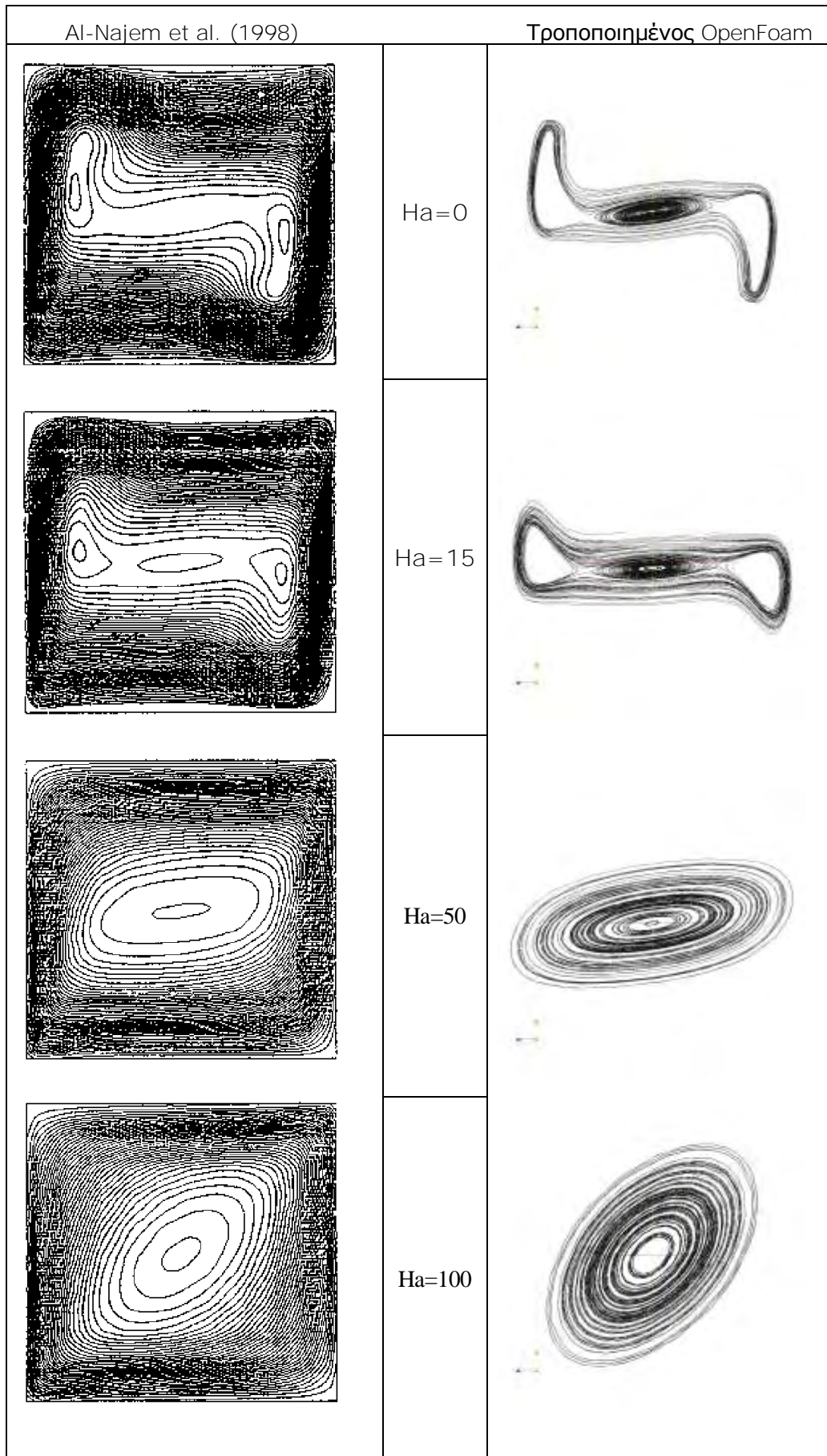
(a) Al-Najem et al. (1998), (b) τροποποιημένος κώδικας OpenFoam



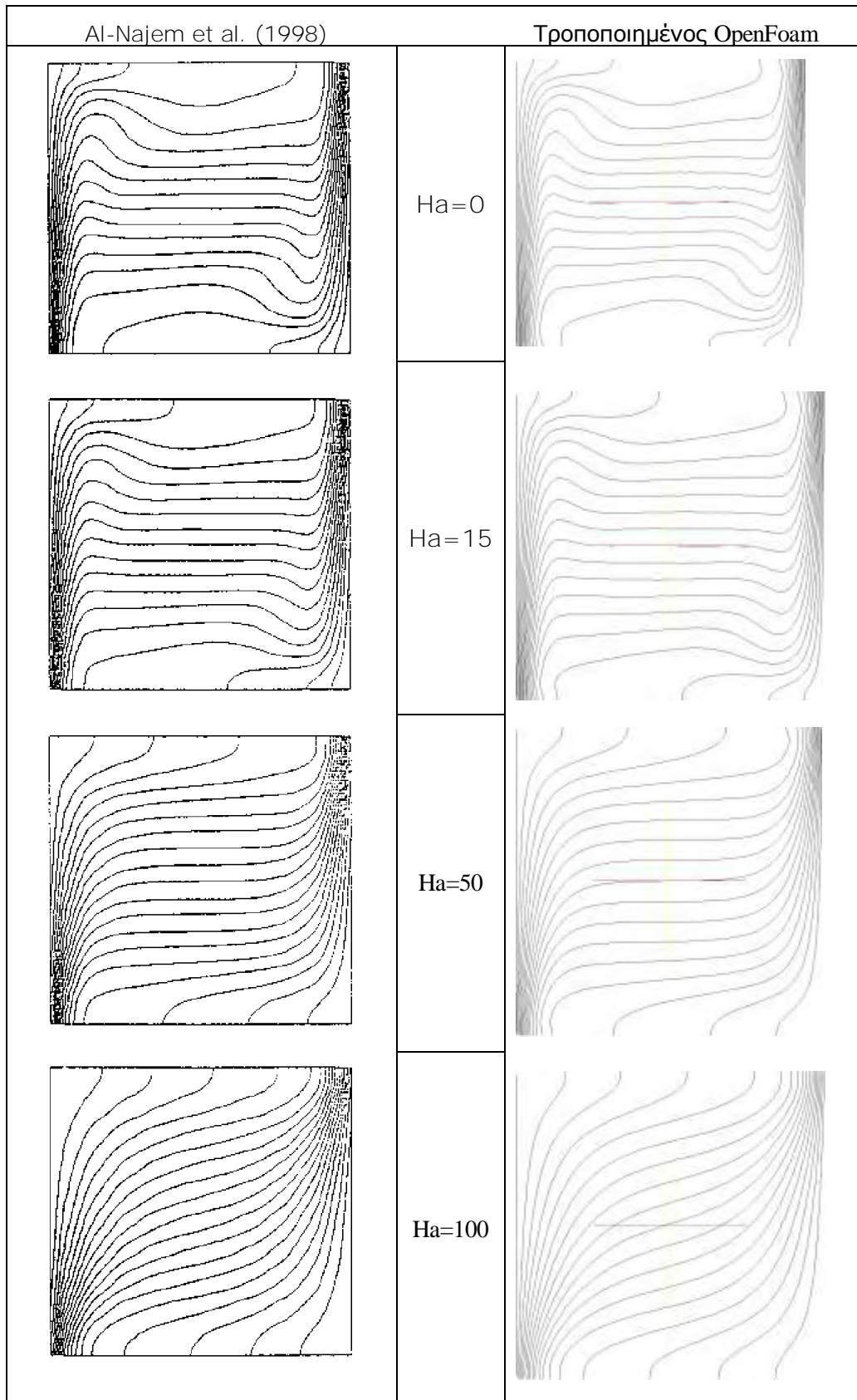
Σχήμα 4.10: Σύγκριση κατανομών ταχύτητας στο μέσο της κοιλότητας

(a) Al-Najem et al. (1998), (b) τροποποιημένος κώδικα OpenFoam

Επίσης τα Σχήματα 4.11 και 4.12 δείχνουν πως οι γραμμές ροής και οι ισόθερμες, αντίστοιχα, συγκρίνονται ικανοποιητικά με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των Al-Najem et al. (1998).



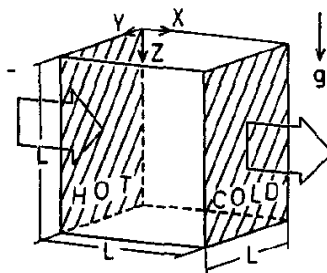
Σχήμα 4.11 Σύγκριση γραμμών ροής. Δεξιά γραμμές ροής μόνο στο κεντρικό τμήμα



Σχήμα 4.12 Σύγκριση ισόθερμων στο μέσο της κοιλότητας για διάφορες τιμές Ha

4.4.2 Σύγκριση με τα αποτελέσματα των Ozoe et al. (1989)

Η εργασία των Ozoe et al. (1989) πραγματεύεται τη φυσική συναγωγή ρευστού υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου σε κυβική γεωμετρία, Σχήμα 4.13. Το ρευστό θερμαίνεται στο ένα κάθετο τοίχωμα που είναι σε υψηλή θερμοκρασία, και ψύχεται στο απέναντι τοίχωμα που βρίσκεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία. Οι τέσσερις υπόλοιποι τοίχοι του κυβικού δοχείου είναι θερμικά μονωμένοι. Η κατεύθυνση της βαρύτητας είναι στον άξονα z. Η εργασία αναφέρεται κυρίως για την περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι στη x-διεύθυνση και γι' αυτό γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων για αυτή την περίπτωση.



Σχήμα 4.13 Κυβική γεωμετρία της ροής Ozoe et al. (1989) με μαγνητικό πεδίο στην x-διεύθυνση

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, στην αδιάστατη μορφή τους, είναι:

$$\frac{D\Omega}{D\tau} = (\Omega \cdot \nabla)U + \text{Pr} \nabla^2 \Omega + \text{Pr} \left(-\frac{\partial T}{\partial Y}, \frac{\partial T}{\partial X}, 0 \right)^T + \text{Ha}^2 \text{Ra}^{-2/3} \text{Pr} \left\{ -\nabla \times (\nabla \Psi_e \times \mathbf{e}) + \nabla \times [(\mathbf{U} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}] \right\} \quad (4.59)$$

$$\frac{DT}{D\tau} = \nabla^2 T \quad (4.60)$$

όπου T η αδιάστατη θερμοκρασία, τ ο χρόνος, Ω η στροβιλότητα, U η συνιστώσα της ταχύτητας στην x διεύθυνση, e το μοναδιαίο διάνυσμα του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Οι αδιάστατες μεταβλητές είναι ως εξής:

$$\begin{aligned} X &= x/x_0, Y = y/x_0, Z = z/x_0, U = u/u_0, V = v/u_0, W = w/u_0, \tau = t/t_0, \\ u_0 &= \alpha/x_0, x_0 = [g\beta(\theta_h - \theta_c)l^3/(\alpha\nu)]^{-1/3}, t_0 = x_0^2/\alpha, \theta_0 = (\theta_h + \theta_c)/2 \\ T &= (\theta - \theta_0)/(\theta_h - \theta_c), L = l/x_0 = \text{Ra}^{1/3} \\ \text{Ra} &= g\beta(\theta_h - \theta_c)l^3/(\alpha\nu), \text{Ha} = [\sigma_e/(\rho\nu)]^{1/2} B_0 l, \text{Pr} = \nu/\alpha \end{aligned} \quad (4.61)$$

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι εξής:

Θερμοκρασία:

$$T = 0,5 \text{ για } X = 0 \quad T = -0,5 \text{ για } X = L$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \text{ για } Y = 0 \text{ και } L \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \text{ για } Z = 0 \text{ και } L \quad (4.62)$$

Ταχύτητα:

$$U = V = W = 0 \text{ για } X = 0 \text{ και } L, \quad Y = 0 \text{ και } L, \quad Z = 0 \text{ και } L \quad (4.63)$$

Στροβιλότητα:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 0, \quad \Omega_y = -\partial W / \partial X, \quad \Omega_z = -\partial V / \partial X, \text{ για } X = 0 \text{ και } L \\ \Omega_x &= \partial W / \partial Y, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -\partial U / \partial Y, \text{ για } Y = 0 \text{ και } L \\ \Omega_x &= -\partial V / \partial Z, \quad \Omega_y = -\partial U / \partial Z, \quad \Omega_z = 0, \text{ για } Z = 0 \text{ και } L \end{aligned} \quad (4.64)$$

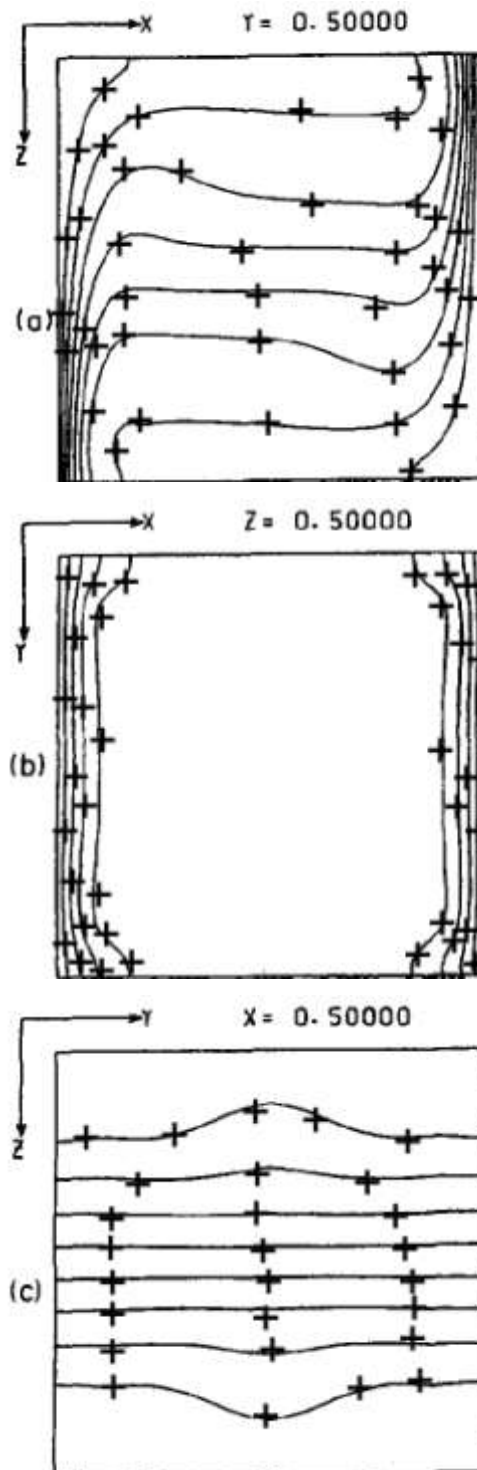
Οι Ozoe et al. (1989) χώρισαν την κυβική γεωμετρία σε 21 κελιά στην X-διεύθυνση, 11 στην Y-διεύθυνση και 15 στην Z-διεύθυνση, οπότε επιλέχθηκε ο ίδιος αριθμός κελιών και στην παρούσα εργασία για την ορθή σύγκριση των αποτελεσμάτων του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM. Επίσης, η σύγκριση έγινε για τιμές $Pr = 0,054$, $Ra = 10^6$ και για διάφορες τιμές του αριθμού Ha , με το μαγνητικό πεδίο στην x-διεύθυνση.

Έχοντας υπόψη τους όρους των αδιάστατων εξισώσεων του προβλήματος, στο αρχείο «transportProperties» εισήχθησαν οι τιμές:

$$\begin{aligned} \rho_0 &: 1,0 & T_0 &: 0 & \mu &: Pr & C_p &: 1,0 & k &: 1,0 \\ \beta &: Pr & q &: 0 & B_0 &: \sqrt{\frac{Ha^2 Pr}{Ra^{2/3}}} & \sigma &: 1,0 \end{aligned}$$

Επίσης στο αρχείο «g» ο όρος που αντιστοιχεί στην διεύθυνση y είναι -1,0. Στις οριακές συνθήκες καθορίστηκε η θερμοκρασία στο αρχείο T να είναι 0,5 στο αριστερό τοίχωμα και -0,5 στο δεξί, ενώ τα άνω και κάτω τοιχώματα δηλώθηκαν ως αδιαβατικά («zeroGradient»). Οι ταχύτητες στο αρχείο U δηλώθηκαν μηδενικές, η πίεση στο αρχείο p, το δυναμικό στο αρχείο F και το ρεύμα στο αρχείο J αδιαβατικά.

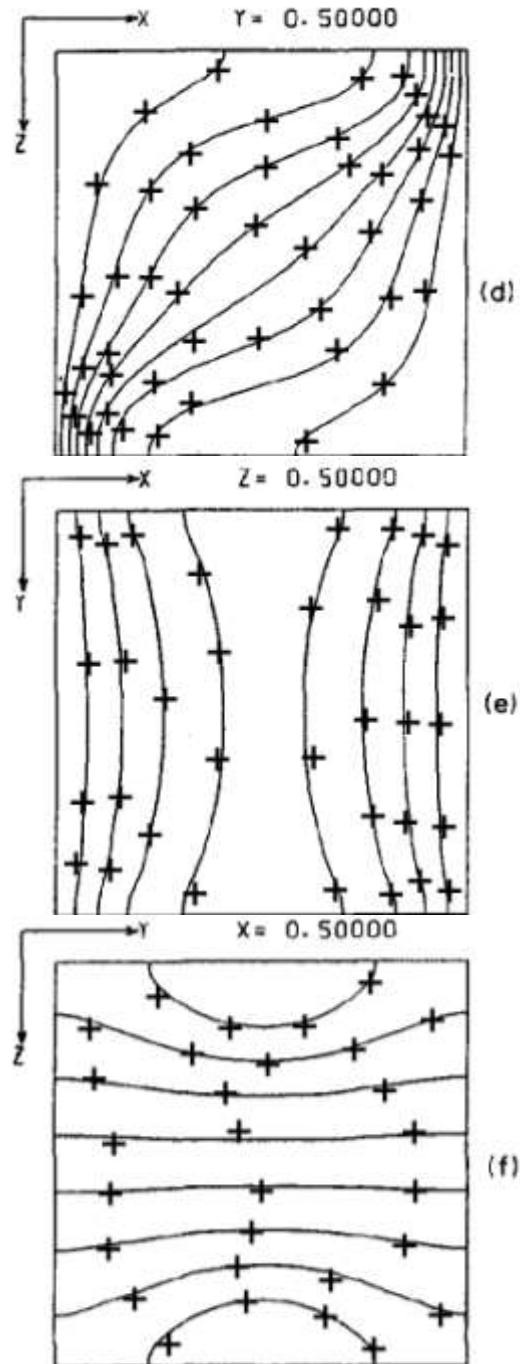
Στα Σχήματα 4.14 και 4.15 συγκρίνονται οι ισόθερμες σε διάφορες τομές της κυβικής γεωμετρίας για $Ra=10^6$, $Pr=0,054$, και για $Ha = 0$ και 300, αντίστοιχα, με πολύ καλά αποτελέσματα.



Σχήμα 4.14 Σύγκριση ισόθερμων για $Ra=10^6$, $Pr=0,054$, $Ha=0$ με Ozoe et al. (1989).

(α) Επίπεδο $x-z$, (β) Επίπεδο $x-y$, (γ) Επίπεδο $y-z$.

Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).



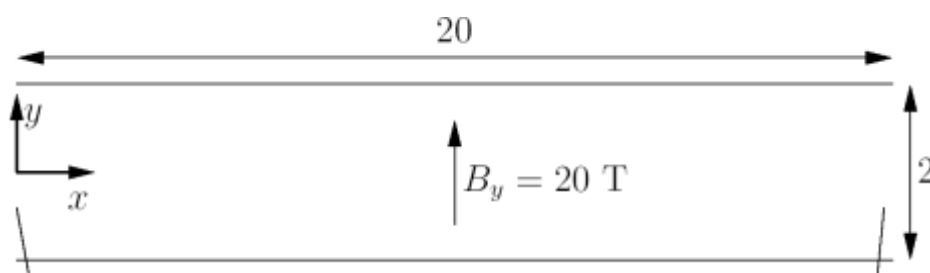
Σχήμα 4.15 Σύγκριση ισόθερμων για $Ra=10^6$, $Pr=0,054$, $Ha=300$, με Ozoe et al. (1989).

(α) Επίπεδο x-z, (β) Επίπεδο x-y, (γ) Επίπεδο y-z

Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).

4.4.3 Σύγκριση με αποτελέσματα της βιβλιοθήκης OpenFOAM

Στο εγχειρίδιο του OpenFoam αναλύεται η περίπτωση του δισδιάστατου προβλήματος Hartmann, στο οποίο ένα ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό ρέει μεταξύ δύο παράλληλων πλακών, ενώ το μαγνητικό πεδίο έντασης B είναι κάθετο στις πλάκες, όπως στο Σχήμα 4.16. Η είσοδος του ρευστού γίνεται με ταχύτητα 1m/s προς τη διεύθυνση x . Στην έξοδο η πίεση είναι μηδενική, ενώ η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με 20 Tesla . Το πρόβλημα επιλύθηκε με χρήση του μοντέλου «mhdFoam», που είναι εγκατεστημένο στην βιβλιοθήκη OpenFoam ως παράδειγμα.



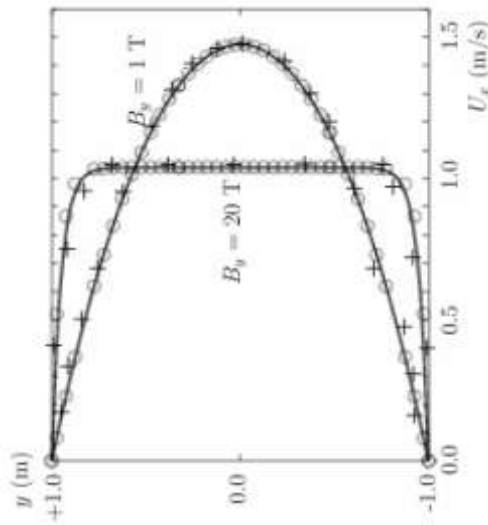
Σχήμα 4.16 Σχηματική απεικόνιση του προβλήματος Hartmann, όπως παρουσιάζεται στο εγχειρίδιο του OpenFoam

Για να προσομοιωθεί η ροή με τον τροποποιημένο κώδικα OpenFoam, στο αρχείο «transportProperties» εισήχθησαν οι παρακάτω τιμές, εκλαμβάνοντας υπόψη τους όρους των αδιάστατων εξισώσεων του προβλήματος:

rho0 :	1.0	T0 :	0	mu :	1.0	Cp :	1.0	k :	1.0
beta :	1.0	q :	0	B0 :	Ha	sigma :	1.0		

Επίσης στο αρχείο «g» όλοι οι όροι επιλέχθηκαν να είναι μηδενικοί. Στις αρχικές και οριακές συνθήκες στο αρχείο «T» τα τοιχώματα ορίστηκαν αδιαβατικά («zeroGradient»). Στην είσοδο η ταχύτητα στο αρχείο «U» δηλώθηκε ως μονάδα στη x -διεύθυνση και μηδενική στις υπόλοιπες διευθύνσεις, η πίεση στο αρχείο «p», το ηλεκτρικό δυναμικό στο αρχείο «F» και το ρεύμα στο αρχείο «J» δηλώθηκαν ως αδιαβατικά.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.17 δείχνει πως υπάρχει ταύτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μοντέλων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατανομή της ταχύτητας που προκύπτει από τα αποτελέσματα του παραπάνω μοντέλου, Σχήμα 4.17, δείχνοντας πώς επηρεάζεται η ταχύτητα του ρευστού από το μαγνητικό πεδίο. Όπως φαίνεται το υψηλό μαγνητικό πεδίο ($B=20\text{T}$) επιβραδύνει το ρευστό.



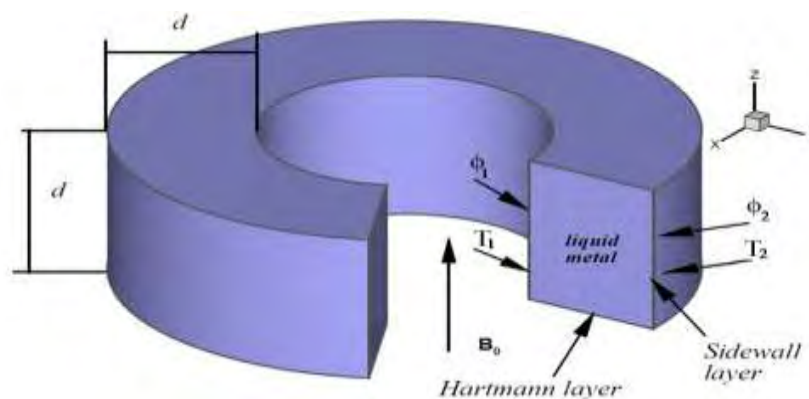
Σχήμα 4.17 Σύγκριση κατανομών ταχύτητας για μαγνητικό πεδίο με ένταση 1T και 20T, με το μοντέλο «mhdFoam» του OpenFoam. Τα αποτελέσματα του τροποποιημένου κώδικα OpenFOAM παρουσιάζονται με (+).

5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΗΣ ΤΟΡΟΕΙΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

5.1 Γεωμετρία της ροής

Η γεωμετρία της παρούσης τοροειδούς ροής υγρού μετάλλου προέρχεται από τον μανδύα που θα περιβάλλει τον μελλοντικό αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής σύντηξης, Σχήμα 5.1. Ο βασικός μηχανισμός κίνησης του ρευστού είναι η διαφορά δυναμικού που εφαρμόζεται στα κατακόρυφα κυλινδρικά τοιχώματα, η οποία επάγει ηλεκτρικό ρεύμα στο ρευστό ακτινικά. Η ανωστικές δυνάμεις που οφείλονται στη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ των κατακόρυφων τοιχωμάτων θεωρούνται μικρές σε σχέση με τις μαγνητικές δυνάμεις Lorentz, και δεν λαμβάνονται υπόψη, οπότε και ο αριθμός Rayleigh θεωρείται μηδενικός. Έτσι η ροή οδηγείται από τις μαγνητικές δυνάμεις και όχι τις ανωστικές. Το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το ρευστό σε συνδυασμό με το αξονικό (κατακόρυφο) μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσει δύναμη Lorentz που προκαλεί την περιστροφική κίνηση του ρευστού.

Τα κατακόρυφα τοιχώματα είναι ηλεκτρικά αγωγιμα, με διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 , T_2 και ηλεκτρικά δυναμικά Φ_1 , Φ_2 , ενώ τα οριζόντια τοιχώματα είναι θερμικά μονωμένα. Οι ταχύτητες θεωρούνται μηδενικές στα τοιχώματα (no slip condition). Με την επιλογή της γεωμετρίας αυτής μπορούν να αποφευχθούν προβλήματα εισόδου/εξόδου που υπάρχουν σε ευθείς αγωγούς. Ο τοροειδής αγωγός έχει τετραγωνική διατομή αδιάστατης πλευράς 1, με εσωτερική ακτίνα $R_1=1$ και εξωτερική $R_2=2$.



Σχήμα 5.1 Γεωμετρία της ροής

Ο σκοπός αυτής της διάταξης είναι να μελετηθεί η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Οι μέχρι τώρα έρευνες έχουν εστιασθεί σε αριθμούς Ha μέχρι περίπου 150, ενώ στην παρούσα εργασία μελετώνται ροές με ισχυρότερα

μαγνητικά πεδία και μεγαλύτερο εύρος τιμών αριθμού Reynolds. Χαρακτηριστικές εργασίες είναι αυτές των Messadek & Moreau (2002), Khalzov & Smolyakov (2005), Khalzov et al. (2006), Uhlmann et al. (2007) και Khalzov et al. (2010), που μελετούν τη στρωτή, μεταβατική και τυρβώδη ροή σε τοροειδείς αγωγούς.

Βάση πολλών εργασιών αποτέλεσε η σειρά πειραματικών μετρήσεων των Moresco & Alboussiére (2004), οι οποίοι μελέτησαν τη μετάβαση της ροής σε μεγαλύτερο τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής, με εσωτερική ακτίνα $R_1=4\text{cm}$, εξωτερική $R_2=5\text{cm}$ και ίδια πλευρά 1cm . Αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων αυτής της ροής παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6.2, με σκοπό την σύγκριση των αποτελεσμάτων της παραπάνω βασικής γεωμετρίας με μια μεγαλύτερη. Ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τη μεγαλύτερη γεωμετρία παρουσιάζουν και οι Khalzov et al. (2007), Vantieghem & Knaepen (2011), Zhao et al. (2011) και Zhao & Zikanov (2012). Η κύρια διαφορά αυτών των εργασιών είναι ότι στην παρούσα διατριβή μελετάται μεγαλύτερο εύρος αριθμών Hartmann, με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα για όσο το δυνατό ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο. Αυτό επιτεύχθηκε αφού παρουσιάζονται αποτελέσματα για Ha μέχρι 5000.

Επίσης, βασικός στόχος της παρούσας διατριβής ήταν η χαρτογράφηση της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, σε ένα διάγραμμα που να δείχνει για ποιες τιμές αριθμών Hartmann και Reynolds σημειώνεται η μετάβαση. Αυτά τα διαγράμματα αντιστοιχούν στις δύο γεωμετρίες της παρούσας διατριβής (βλέπε παρακάτω Σχήματα 6.2 και 6.15) για τη βασική τοροειδή γεωμετρία με τη μικρή ακτίνα (λόγος μέσης ακτίνας προς πλευρά, 1,5:1) και τη μεγάλη ακτίνα (λόγος μέσης ακτίνας προς πλευρά, 4,5:1), αντίστοιχα. Το μοντέλο που εφαρμόστηκε περιγράφηκε παραπάνω και βασίστηκε στη βιβλιοθήκη OpenFOAM (2010a, 2010b), σύμφωνα με τους Weller et al. (1998) και Jasak et al. (2007). Ανάλογη χρήση της βιβλιοθήκης OpenFOAM έχει γίνει και από τους Dousset & Potherat (2012) και Greenshields & Reese (2007) για άλλες γεωμετρίες.

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε και στις δύο τοροειδείς γεωμετρίες για τη στρωτή και μεταβατική ροή ήταν $200 \times 200 \times 80$ στην αξονική, ακτινική και εφαπτομενική (τοροειδή) διεύθυνση, αντίστοιχα, ενώ για την τυρβώδη ροή ήταν $256 \times 256 \times 128$. Στην επιλογή του πλέγματος ελήφθησαν υπόψη τα πλαϊνά οριακά στρώματα πάχους τάξης $Ha^{-1/2}$ και τα οριακά στρώματα Hartmann με πάχος τάξης Ha^{-1} , τοποθετώντας τουλάχιστον 10 σημεία πλέγματος σε κάθε ένα από αυτά τα οριακά στρώματα, ενώ σε αυξημένες τιμές Ha δόθηκαν μέχρι 20 σημεία. Αποτελέσματα με πλέγμα $150 \times 150 \times 80$ για $Ha=100$ και $Ha=1000$, για τις

περιπτώσεις στρωτής και μεταβατικής ροής, διαφοροποιήθηκαν μόλις κατά 3%, κάτι που δείχνει πως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και αυτό το πλέγμα. Ωστόσο, για λόγους μεγαλύτερης ακρίβειας επιλέχθηκε το πλέγμα 200x200x80. Επίσης, το πλέγμα 256x256x128 για την ίδια ροή δεν έδειξε σημαντική διαφορά στα αποτελέσματα, οπότε χρησιμοποιήθηκε μόνο για κάποια αρχικά στάδια τυρβώδους ροής που αναφέρονται παρακάτω.

Χρήση αντιστοιχων πλεγμάτων αναφέρεται και στις εργασίες των Chaudhary et al. (2010), Knaepen et al. (2004), Shatrov & Gerbeth (2010), Vantieghem & Knaepen (2011), Zhao et al. (2011), Zhao & Zikanov (2012), Zienicke & Krasnov (2005), Zikanov & Thess (1998), Lu & Hetsroni (1995), Joung et al. (2007), οι οποίοι δεν προέβησαν σε περαιτέρω πύκνωση των πλεγμάτων.

5.2 Οριακές συνθήκες

Στις υπό μελέτη ροές, τα κατακόρυφα τοιχώματα θεωρούνται ισόθερμα και τα οριζόντια αδιαβατικά ενώ παράλληλα εφαρμόζεται η συνθήκη μη ολίσθησης. Το εσωτερικό τοίχωμα διατηρείται σε σταθερή υψηλή θερμοκρασία και το εξωτερικό σε χαμηλή. Επίσης, αγνοείται η βαρύτητα ($g=0$) επειδή όπως αναφέρθηκε παραπάνω η ανωστικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες έναντι των μαγνητικών δυνάμεων. Τα οριζόντια τοιχώματα θεωρούνται ηλεκτρικά μονωμένα ενώ τα κατακόρυφα ηλεκτρικά αγωγίμα. Πιο αναλυτικά για τα τοιχώματα, ισχύει:

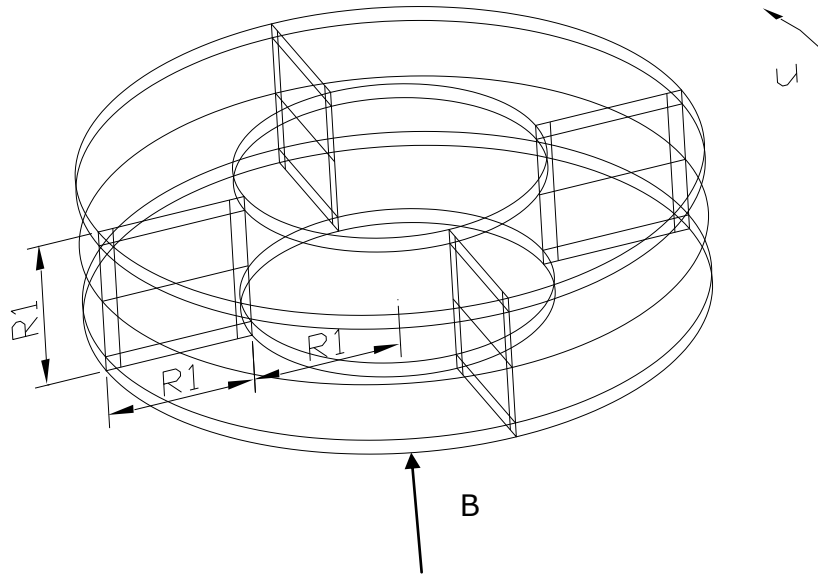
$$\text{Εσωτερικό τοίχωμα: } U_x = U_y = U_z = 0, \Phi = T = 1$$

$$\text{Εξωτερικό τοίχωμα: } U_x = U_y = U_z = \Phi = T = 0$$

5.3 Καταχώρηση γεωμετρίας στο OpenFOAM

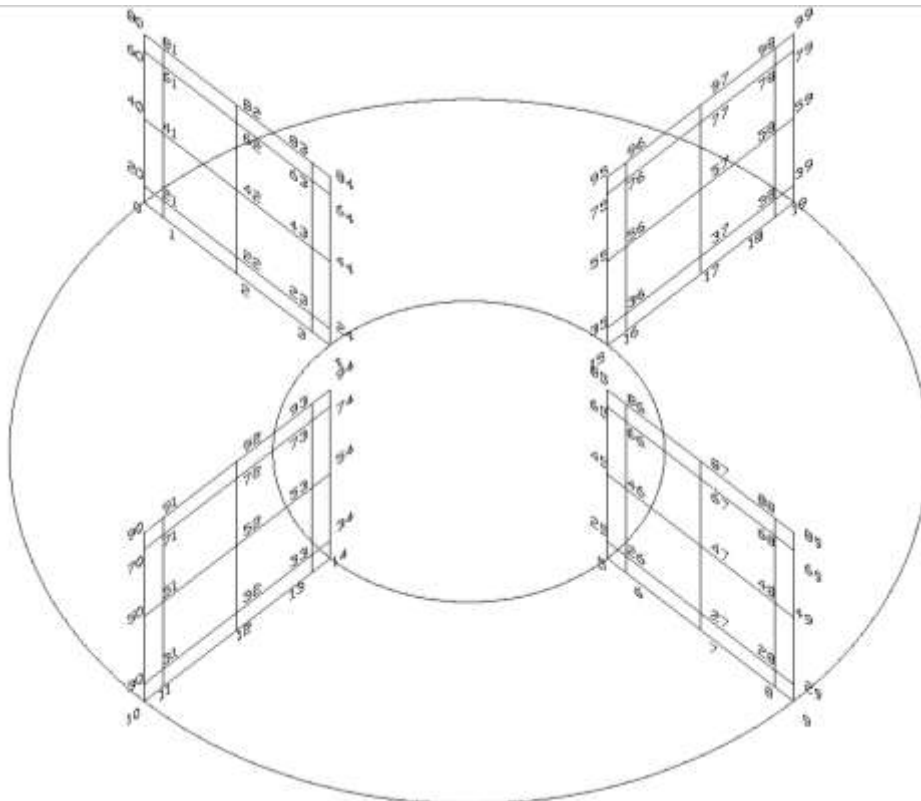
Η γεωμετρία χωρίστηκε σε κελιά με τρόπο ώστε να είναι δυνατή η μελέτη της ροής σε υψηλά μαγνητικά πεδία, όπου λόγω των πολύ λεπτών πλευρικών οριακών στρωμάτων και των στρωμάτων Hartmann, απαιτείται μεγάλος αριθμός κελιών για να προσδιορισθεί η ροή σε ικανοποιητικό βαθμό. Για το λόγο αυτό το πλέγμα είναι πυκνότερο εντός των στρωμάτων Hartmann που αναπτύσσονται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο (για τα οποία απαιτείται μέγεθος κελιού: Ha^{-1}) και εντός των πλευρικών στρωμάτων που αναπτύσσονται στα κατακόρυφα τοιχώματα (για τα οποία απαιτείται μέγεθος κελιού: $Ha^{-1/2}$).

Για τη σωστή απεικόνιση της γεωμετρίας του προβλήματος, θεωρήθηκαν τέσσερις τετραγωνικές διατομές, πλευράς μήκους R1, σύμφωνα με το Σχήμα 5.2.

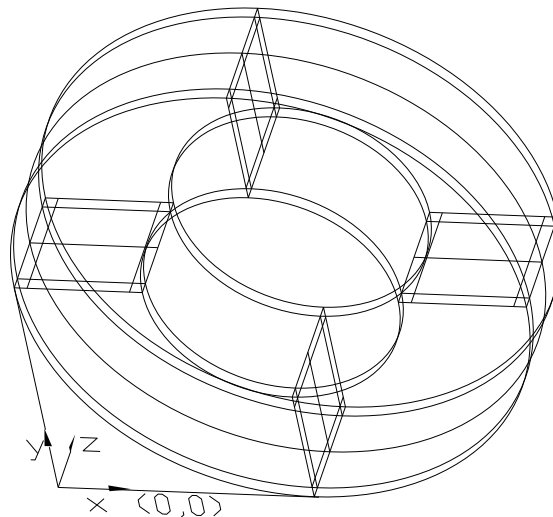


Σχήμα 5.2 Γεωμετρία της βασικής τοροειδούς ροής

Το Σχήμα 5.3 παρουσιάζει τα σημεία που ορίσθηκαν για να εισαχθεί η γεωμετρία στην βιβλιοθήκη OpenFOAM. Η αρίθμηση των σημείων δόθηκε με τρόπο ώστε οι συντεταγμένες τους να είναι πάντα θετικές. Έτσι, το κέντρο του κύκλου της βάσης της γεωμετρίας βρίσκεται στις συντεταγμένες $(2, 2, 0)$, όπως στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.3 Αρίθμηση κελιών στην υπό μελέτη γεωμετρία

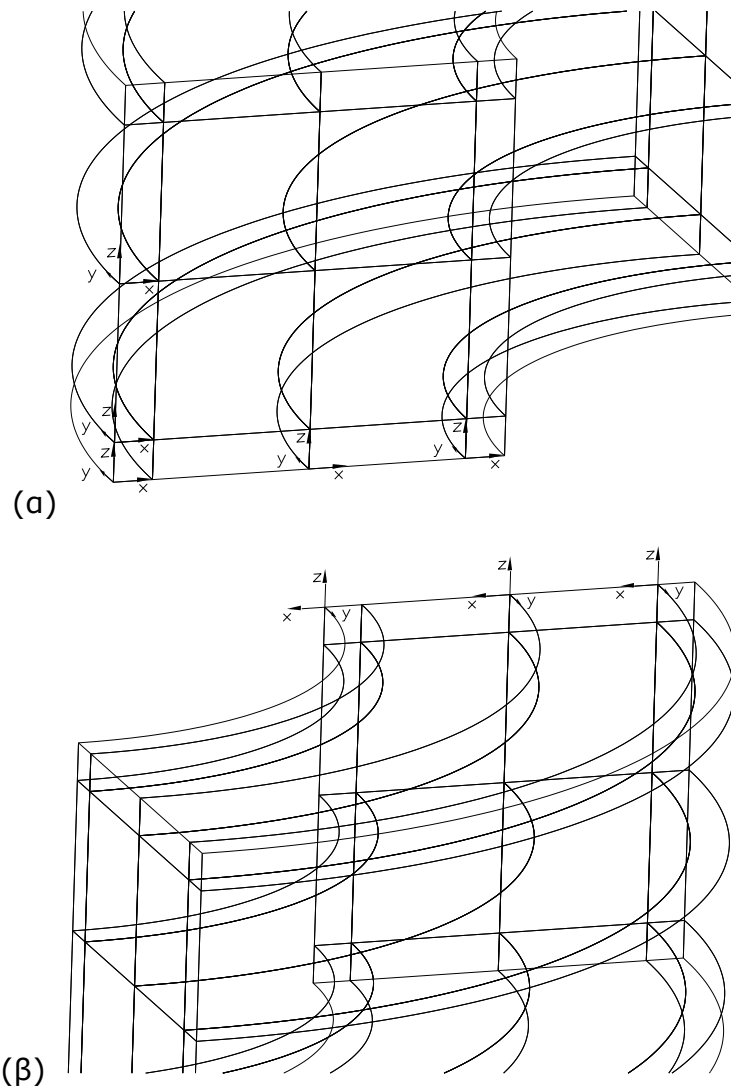


Σχήμα 5.4 Αρχή αξόνων και συντεταγμένες γεωμετρίας

Ακολουθεί η συμπλήρωση του αρχείου «transportProperties», το οποίο δέχεται τις τιμές που προκύπτουν από την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων:

$$\begin{array}{llllll} \text{Rho0: } 1,0 & \text{T0: } 0,0 & \text{mu: } 1/\text{Re} & \text{Cp: } 1,0 & \text{k: } 1/(\text{RePr}) \\ \text{beta: } \frac{\text{Ra}}{\text{Re}^2 \text{Pr}} & \text{q: } 0,0 & \text{B0: } (0 \ 0 \ 1,0) & \text{sigma: } \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \end{array}$$

Ανάλογα με τη γραφή των συντεταγμένων στους όγκους της γεωμετρίας κατά τη δήλωση των «blocks» στο αρχείο «blockmeshDict», κάθε «block» έχει το δικό του σύστημα αρίθμησης, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.5. Το σύστημα αυτό δεν συμπίπτει πάντα με το σύστημα συντεταγμένων της συνολικής γεωμετρίας. Πρέπει να δοθεί προσοχή σε αυτό για να γίνει ορθή απόδοση κελιών και πύκνωση. Καθώς δηλώνονται οι συντεταγμένες που δημιουργούν ένα «block», η θέση του κάθε σημείου που επιλέγεται, ορίζει και τη θέση της αρχής των αξόνων στο ατομικό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, επειδή στα «blocks» δηλώθηκαν πρώτα τα σημεία της βάσης κάθε όγκου, το ατομικό επίπεδο x-y βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο με το επίπεδο x-y του γενικού συστήματος συντεταγμένων της τοροειδούς γεωμετρίας. Στο αρχείο «blockmeshDict», δηλώθηκαν με τη σειρά το δεύτερο, πρώτο, τέταρτο και τρίτο τεταρτημόριο της γεωμετρίας. Στο τέταρτο τεταρτημόριο, επειδή ακολουθήθηκε διαφορετική αρίθμηση στον άξονα z (συμπίπτει με τον άξονα του τόρου), παρατηρείται και αλλαγή των συντεταγμένων πύκνωσης, σε σχέση με τα υπόλοιπα τεταρτημόρια.



Σχήμα 5.5 Ατομικά συστήματα συντεταγμένων σε «blocks» του δεύτερου (α) και τέταρτου (β) τεταρτημόριου

Καθώς το μέγεθος των κελιών του πλέγματος εξαρτάται από τις τιμές Ha και Re , μέσω του πάχους των στρωμάτων Hartmann και των πλευρικών οριακών στρωμάτων, καταστρώθηκε ο Πίνακας 5.1 με τις διάφορες τιμές Ha και Re , και το μέγεθος των κελιών που αντιστοιχεί σε αυτά, όπως και της τιμής (Ha^2/Re) , που χρησιμοποιεί η βιβλιοθήκη OpenFoam για την ανάγνωση πληροφοριών της ροής και την ορθή εκτέλεση του μοντέλου.

Πίνακας 5.1 Πάχος οριακών στρωμάτων και τιμές (Ha^2/Re) για διάφορες τιμές Ha και Re .

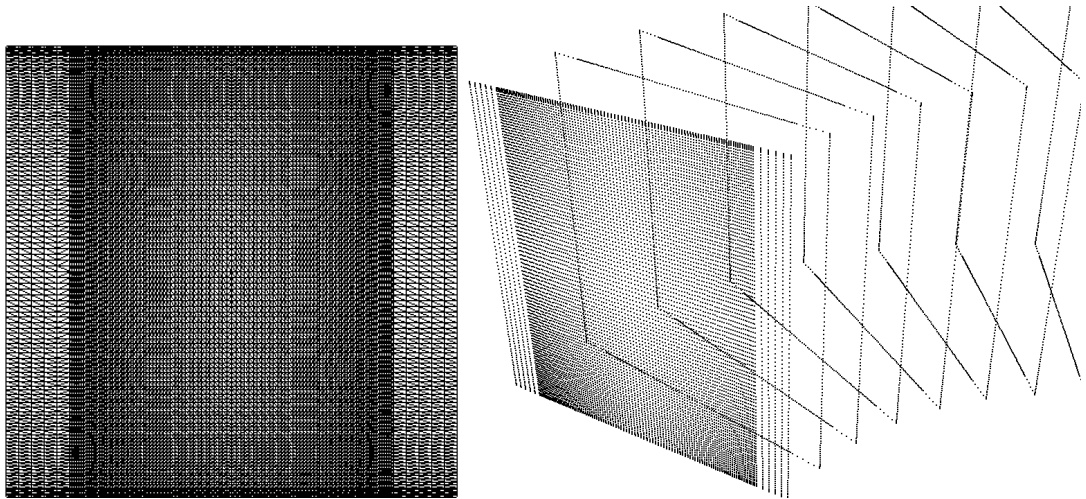
(α) Θεωρητικό πάχος στρωμάτων Hartmann (Ha^{-1}) και πλαισίων οριακών στρωμάτων ($Ha^{-1/2}$)

Ha	1	1	5	10	50	100	200	300	400	500	1000	5000
Ha^{-1}	1	1	0,2	0,1	0,02	0,01	0,005	0,00333	0,0025	0,002	0,001	0,0002
$Ha^{-1/2}$	1	1	0,44721	0,316223	0,14142	0,1	0,07071	0,05774	0,05	0,04472	0,03162	0,01414

(β) τιμές (Ha^2/Re)

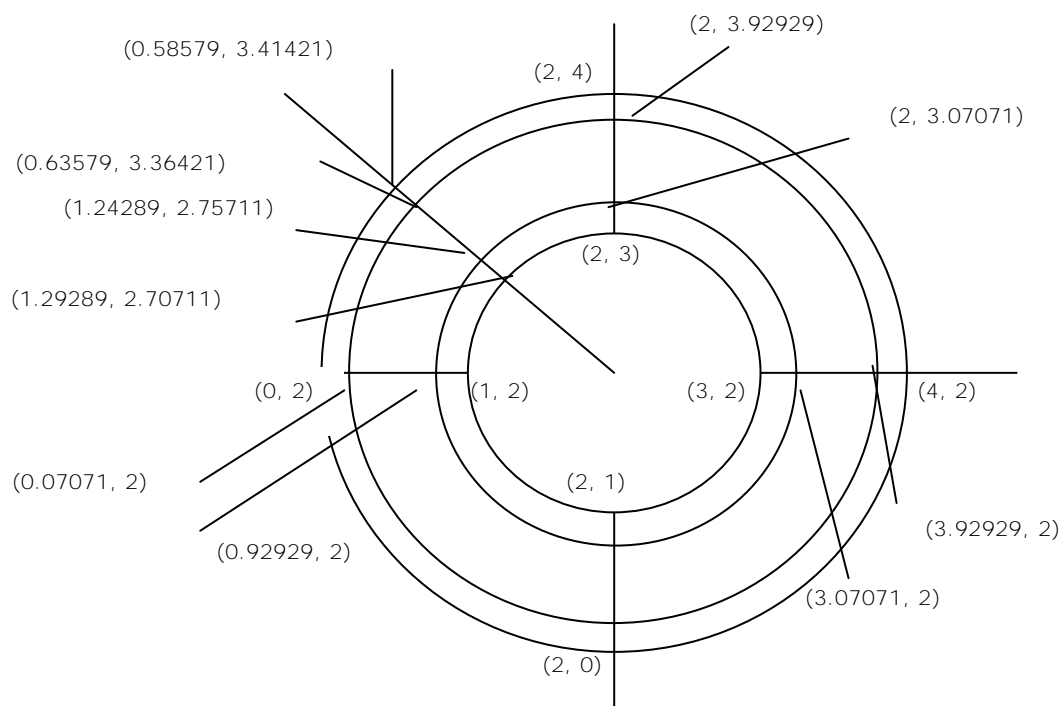
Ha \ Re	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
1	1	0,2	0,1	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0002	0,0001
5	25	5	2,5	0,5	0,25	0,05	0,025	0,005	0,0025
10	100	20	10	2	1	0,2	0,1	0,02	0,01
50	2500	500	250	50	25	5	2,5	0,5	0,25
100	10000	2000	1000	200	100	20	10	2	1
100	10000	2000	1000	200	100	20	10	2	1
200	40000	8000	4000	800	400	80	40	8	4
400	160000	32000	16000	3200	1600	320	160	32	16
500	250000	50000	25000	5000	2500	500	250	50	25
1000	1000000	200000	100000	20000	10000	2000	1000	200	100
5000	25000000	5000000	2500000	500000	250000	50000	25000	5000	2500

Κατόπιν, προσδιορίστηκε το μέγεθος των κελιών για κάθε συνδυασμό τιμών Ha και Re . Για παράδειγμα, στην περίπτωση $Ha = 200$ και $Re = 1$, προκύπτουν $Ha^2/Re = 40000$, $1/Ha = 0,005$ και $1/\sqrt{Ha} = 0,070711$. Έτσι, σύμφωνα με το Σχήμα 5.6, στην τετραγωνική διατομή μεγέθους 1 τα όρια των κελιών είναι ως εξής: *σημείο 0* $x=0$, *σημείο 1* $x=0,07071$, *σημείο 2* $x=0,5$, *σημείο 3* $x=0,92929$, *σημείο 4* $x=1,0$. Αντίστοιχα, οι κατακόρυφες διαιρέσεις του κελιού βρίσκονται στο *σημείο 0* $y=0$, *σημείο 20* $y=0,005$, *σημείο 40* $y=0,5$, *σημείο 60* $y=0,995$, *σημείο 80* $y=1,0$. Η ίδια λογική υιοθετήθηκε και στους άλλους συνδυασμούς Ha και Re για την ανεύρεση του βέλτιστου πλέγματος.



Σχήμα 5.6 Διαχωρισμός κελιών στην τετραγωνική διατομή

Εκτός από τα σημεία που προαναφέρθηκαν, η βιβλιοθήκη OpenFoam απαιτεί και σημεία από τα οποία περνά η καμπύλη της γεωμετρίας. Διχοτομώντας ένα τεταρτημόριο και εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα είναι εύκολο να βρεθούν οι συντεταγμένες της τομής της διχοτόμου με την κυκλική κάτοψη του αγωγού. Στο Σχήμα 5.7 φαίνεται η γεωμετρία για την περίπτωση όπου $Ha=200$ και $Re=1$, όπου απεικονίζεται η τομή της διχοτόμου του δεύτερου τεταρτημόριου με την τοροειδή διατομή. Οι συντεταγμένες της τομής πρέπει να εισαχθούν στην βιβλιοθήκη OpenFOAM, ώστε να αποδοθεί ορθά η τοροειδής μορφή στον αγωγό.



Σχήμα 5.7 Ανάλυση σημείων πλέγματος για $Ha=200$, $Re=1$

5.4 Επιλογή πλέγματος αριθμητικών προσομοιώσεων

Για την επιλογή του σωστού υπολογιστικού πλέγματος, πρέπει να ληφθεί υπόψη εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Ο κώδικας υλοποιήθηκε αρχικά για συνδυασμό μικρών αριθμών Hartmann και Reynolds με ένα ικανοποιητικό πλέγμα (αρχικά 5 κελιά στα οριακά στρώματα και 12 στην κύρια περιοχή, με πυκνωση κελιών «grading» 2). Η διαδικασία υλοποίησης μιας προσομοίωσης ξεκινά με την επιλογή των αριθμών Hartmann και Reynolds που χαρακτηρίζουν τη ροή. Αν το ζεύγος των αριθμών αυτών υποδεικνύει στρωτή ροή, ο κώδικας συγκλίνει πολύ γρήγορα, η κινητική ενέργεια διαταραχών δεν αυξάνει απότομα σε τιμές που να προδίδουν μετάβαση και έτσι η ροή αποδεικνύεται πράγματι στρωτή.

Αυξάνοντας σταδιακά τον αριθμό Reynolds, σε μια συγκεκριμένη προσομοίωση το μοντέλο αργεί να συγκλίνει, οι ταχύτητες του ρευστού εμφανίζουν διαταραχές ενώ η κινητική ενέργεια των διαταραχών αυξάνει απότομα. Στην περίπτωση αυτή η ροή εισέρχεται πλέον σε μεταβατικό στάδιο. Για να επιβεβαιωθεί ο ακριβής αριθμός Reynolds, στον οποίον εμφανίζεται μετάβαση της ροής, επιλέγεται μεγαλύτερο πλέγμα, και εκτελείται ξανά ο κώδικας με επαναπροσδιορισμό του πλέγματος (εντολές «blockMesh» και «mapFields») για να είναι η λύση πιο ακριβής. Λόγω του πυκνότερου πλέγματος, οι υπολογιστικές απαιτήσεις ήταν πολύ αυξημένες και γι' αυτό έγινε παράλληλη εκτέλεση του κώδικα με ταυτόχρονη χρήση πολλών επεξεργαστών (χρήση εντολών του OpenFoam «decomposePar», «mpirun», «reconstructPar»).

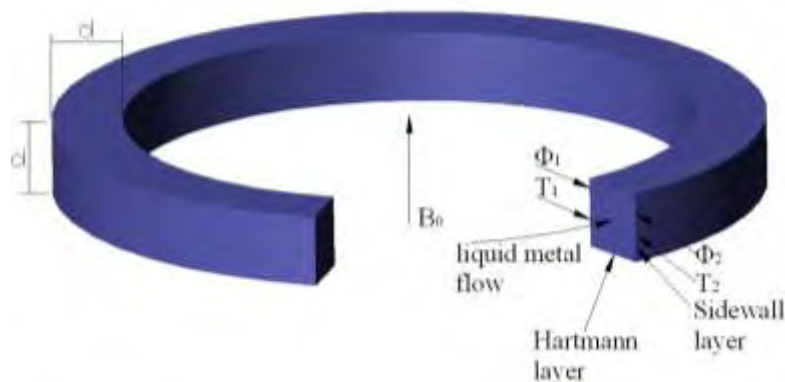
Σε πολλές περιπτώσεις, επειδή η χρήση της εντολής «mapFields», η οποία επαναπροσδιορίζει το πλέγμα, καθυστερεί την εκτέλεση του μοντέλου, επιλέχθηκε η εκτέλεση του κώδικα από την αρχή με νέο πλέγμα, αντί η μετατροπή του πλέγματος μέσω της εντολής «mapFields». Στις περιπτώσεις που ανιχνευόταν διαταραχές και μετάβαση σε τύρβη, τερματιζόταν η προσομοίωση και εφαρμοζόταν από την αρχή ένα νέο σενάριο προσομοίωσης με την επόμενη τιμή Ha του Πίνακα 5.2 και τον ίδιο αριθμό Reynolds. Κατά την προσομοίωση, η τιμή του Re έπρεπε να αυξάνεται σταδιακά (κατά 5% περίπου ανά προσομοίωση), μέχρι να ανιχνευθεί η μετάβαση στον συγκεκριμένο αριθμό Hartmann.

Ανακεφαλαιώνοντας σχετικά με το πλέγμα, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 5.1 το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις δύο γεωμετρίες που μελετήθηκαν είχε μέγεθος $200 \times 200 \times 80$, στην αξονική, ακτινική και γωνιακή διεύθυνση, αντίστοιχα, για τη στρωτή και αρχικά μεταβατική ροή ενώ για την

τυρβώδη ροή είχε μέγεθος 256x256x128. Στα οριακά στρώματα τοποθετήθηκαν από 10 μέχρι 18 κελιά, ανάλογα με την αναμενόμενη διαταραχή της ροής.

5.5 Αριθμητικές προσομοιώσεις

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις εντάχθηκαν στις εξής τρεις κατηγορίες: α) Μελέτη της μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη για την περίπτωση της βασικής τοροειδούς γεωμετρίας τετραγωνικής διατομής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά διατομής 1,5:1, Σχήμα 5.1, β) Μελέτη της ροής μετά την μετάβαση σε τυρβώδη, και γ) Μελέτη της μετάβασης της ροής για λόγο της μέσης ακτίνας προς την πλευρά της διατομής ίσο με 4,5:1, ενώ η διατομή παραμένει ίδια, Σχήμα 5.8. Στην τελευταία αυτή ροή εντός της μεγάλης γεωμετρίας, αναμένεται η μετάβαση να συμβεί για μεγαλύτερους Re , σύμφωνα με DiPrima et al. (1984), Mullin et al. (2002) και Xiao et al. (2002).



Σχήμα 5.8 Γεωμετρία ροής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά ίσο με 4,5:1

Η ροή προσομοιώθηκε ως τρισδιάστατη, επειδή δεν είναι γνωστό σε ποια κατεύθυνση μπορεί να γίνει η έναρξη της αστάθειας αλλά και για να διερευνηθεί το πρόβλημα πληρέστερα. Καταστρώθηκε ο Πίνακας 5.2 με διαφορετικούς αριθμούς Hartmann ($Ha = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 18, 20, 22, 30, 50, 100, 200, 400, 500, 1000, 2000$ και 5000). Οι τιμές $Ha = 2, 3, 4, 15, 18, 22$ συμπεριληφθήκαν για να σχηματιστεί μια πληρέστερη εικόνα σχετικά με τη μετάβαση της ροής, επειδή κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων αναδεικνύεται πως η τιμή $Ha = 18$ είναι σημαντική, καθώς για $Ha < 18$ οι ιξώδεις δυνάμεις εξισορροπούνται από τις υδρομαγνητικές δυνάμεις (Lorentz), ενώ για $Ha \geq 18$ οι δυνάμεις Lorentz εξισορροπούνται από τις δυνάμεις αδράνειας του ρευστού.

Η μετάβαση από την στρωτή στη τυρβώδη ροή εξακριβώθηκε με την καταγραφή της κινητικής ενέργειας των διαταραχών: $E' = \frac{1}{V} \int_V u_i'^2 dV$, όπου V είναι ο όγκος ελέγχου και u_i' είναι οι διαταραχές ταχύτητας στις τρεις διευθύνσεις.

Όμοια διαδικασία ακολουθήθηκε και από τους Kinet et al. (2009). Για συγκεκριμένο αριθμό Hartmann, κάθε προσομοίωση ξεκίνησε με την επιλογή αριθμού Reynolds για στρωτή ροή, όπου η κινητική ενέργεια διαταραχών παραμένει χαμηλή. Η προοδευτική αύξηση του αριθμού Reynolds είχε ως αποτέλεσμα την σταδιακή αύξηση των διαταραχών. Όταν ο αριθμός Reynolds προσέγγιζε μια κριτική τιμή, οι διαταραχές σημείωναν απότομη αύξηση κατά περίπου 4-5 τάξεις μεγέθους (από 10^{-15} – 10^{-7} για τη στρωτή ροή σε 10^{-4} – 10^{-2} στις μεταβατικές) και η ροή γίνετο μεταβατική και τελικά τυρβώδης. Οι αρχικές και τελικές τιμές του Re για κάθε Ha δίνονται στον Πίνακα 5.2. Οι αριθμοί Ha και Re αντιμετωπίστηκαν ξεχωριστά, ως διαφορετικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη ροή. Για να αλλάξει η τιμή του Re στις προσομοιώσεις, χωρίς να επηρεαστεί ο Ha, αυτό γίνεται με την τροποποίηση του $\Delta\phi$, που υπάρχει στην εξίσωση της ταχύτητας $U_0 = \Delta\phi / B_0 d$, η οποία με τη σειρά της επηρεάζει το $Re = U_0 d / \nu$, όχι όμως και το Ha.

Πίνακας 5.2 Αριθμός Re έναρξης και λήξης των προσομοιώσεων για κάθε αριθμό Ha

Ha	1	2	3	4	5	10	15	18	20	22
Re έναρξης	1000	1000	1000	1000	1000	900	800	900	900	900
Re λήξης	250000	50000	30000	6000	2500	1600	1500	1100	1250	1200

Ha	30	50	100	200	400	500	1000	2000	5000
Re έναρξης	1000	2500	4000	10000	30000	40000	100000	400000	500000
Re λήξης	1450	3200	8000	22000	90000	150000	600000	1350000	5200000

Μερικές προσομοιώσεις ξεκίνησαν στο Ινστιτούτο Φυσικής Πλάσματος του Université Libre des Bruxelles στο Βέλγιο, ενώ οι υπόλοιπες συνεχίστηκαν και ολοκληρώθηκαν στο υπολογιστικό κέντρο HPC-FF του Julich στην Γερμανία. Η μέση χρήση επεξεργαστών ήταν 32-64 ανά εργασία, με κάποιες εξαιρέσεις όπου το ισχυρό πλέγμα απαιτούσε 128 επεξεργαστές, κάτι ωστόσο πολύ δύσκολο στην υλοποίηση, λόγω περιορισμένης πρόσβασης στο δίκτυο επεξεργαστών. Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων οδήγησαν στην κατασκευή του διαγράμματος Re-Ha με την κρίσιμη καμπύλη μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή και άλλων γραφημάτων που έχουν σκοπό να αναδείξουν και εξηγήσουν τα χαρακτηριστικά της ροής στην ενδιαφέρουσα περιοχή της μετάβασης.

Σχετικά με τη μελέτη της τύρβης, από τις διάφορες περιπτώσεις συνδυασμών Ha και Re, επιλέχθηκαν τέσσερις συνδυασμοί (δύο για Ha=100 και δύο για 1000) στην τυρβώδη περιοχή. Η επιλογή των τιμών Ha και Re έγινε έχοντας υπόψη το

Σχήμα 6.2, που απεικονίζει τη μετάβαση της ροής για διάφορους αριθμούς Hartmann και Reynolds, στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων. Οι τιμές των (Ha, Re) επιλέχθηκαν ώστε κατά την απεικόνισή τους στο Σχ. 6.2 με συντεταγμένες $(x, y) = (Ha, Re)$ η ένωση του πρώτου σημείου (Ha, Re) για $Ha=100$ με το πρώτο σημείο για $Ha=1000$ να σχηματίζει γραμμή παράλληλη προς τη γραμμή μετάβασης (και όμοια η ένωση του δεύτερου σημείου). Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται ομοιομορφία στις υπό μελέτη περιπτώσεις. Τα δύο ζεύγη τιμών που επιλέχθηκαν ώστε να δημιουργούν παράλληλες προς τη γραμμή μετάβασης είναι: α) $Ha=100, Re=20000 - Ha=1000, Re=454705$, και β) $Ha=100, Re=40000, Re=909410$. Έχοντας υπόψη πως η τυρβώδης ροή απαιτεί πυκνότερο πλέγμα για την ορθή προσομοίωσή της, το πλέγμα για την παραπάνω προσομοίωση ήταν $256 \times 256 \times 128$. Η χρήση του πλέγματος αυτού ωστόσο είχε ως αποτέλεσμα η εφαρμογή του κώδικα, αλλά και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων να απαιτεί ιδιαίτερα αυξημένη υπολογιστική ισχύ.

Όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 5.1, παράλληλα με την βασική γεωμετρία του τόρου (λόγος μέσης ακτίνας προς πλευρά διατομής 1,5:1), υλοποιήθηκε ένας ικανός αριθμός προσομοιώσεων σε γεωμετρία με την ίδια διατομή, αλλά με μεγαλύτερο τόρο (λόγος 4,5:1) όπως στην εργασία των Moresco & Alboussi re (2004). Ο σκοπός της εφαρμογής ήταν η χαρτογράφηση της μετάβασης για διάφορες τιμές Ha και η σύγκριση της συμπεριφοράς της ροής για την περίπτωση γεωμετρίας με την μικρότερη μέση ακτίνα. Τυχόν διαφορές από τα πειραματικά αποτελέσματα των Moresco & Alboussi re (2004) οφείλονται στις τριβές τοιχωμάτων και στις μεταβαλλόμενες τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού και του ηλεκτρικού ρεύματος κατά το πείραμα. Ο Πίνακας 5.3 απεικονίζει τους διαφορετικούς αριθμούς Reynolds και τους αντίστοιχους αριθμούς Hartmann των παραπάνω αριθμητικών προσομοιώσεων.

Πίνακας 5.3 Τιμές Re έναρξης/λήξης των προσομοιώσεων σε κάθε τιμή Ha για τη ροή στο μεγαλύτερο τόρο

Ha	3	5	10	18	50	100
Re έναρξης	20000	4000	800	800	2000	5000
Re λήξης	30000	5500	2000	2500	6000	25000

Ha	200	500	1000	2000	5000
Re έναρξης	15000	50000	100000	300000	1200000
Re λήξης	35000	115000	360000	900000	4500000

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, η παρουσία μαγνητικού πεδίου στη ροή προκαλεί την εμφάνιση των στρωμάτων Hartmann που αναπτύσσονται σε τοιχώματα κάθετα στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Τα στρώματα αυτά γίνονται λεπτότερα με την αύξηση του μαγνητικού πεδίου και απαιτούν πυκνό πλέγμα και ισχυρή υπολογιστική δύναμη για τον ακριβή προσδιορισμό τους. Έτσι, η αύξηση του αριθμού Hartmann συνεπάγεται την ανάγκη για όλο και πυκνότερο πλέγμα, μετατρέποντας το πρόβλημα της επίλυσης της ροής ουσιαστικά σε μια δυσεπίλυτη, χρονοβόρα διαδικασία.

Με σκοπό την εξαγωγή αποτελεσμάτων με ικανοποιητική ακρίβεια, το πλέγμα χωρίστηκε σε τρία τμήματα: α) το κεντρικό τμήμα της ροής, β) το τμήμα που καλύπτεται από τα στρώματα Hartmann, και γ) το τμήμα που αποτελείται από τα πλαϊνά οριακά στρώματα. Με αυτό τον τρόπο διαχωρισμού του πλέγματος στις επιμέρους περιοχές, είναι δυνατή η διαφορετική κατανομή των κελιών, σύμφωνα με τις ανάγκες κάθε στρώματος. Η κρίσιμη περιοχή κυρίως των στρωμάτων Hartmann και δευτερευόντως των πλαϊνών οριακών στρωμάτων απαιτούν πιο πυκνό πλέγμα. Το πάχος του τμήματος του αγωγού που καλύπτεται από τα στρώματα Hartmann επιλέχθηκε ανάλογο προς Ha^{-1} , και το πάχος του τμήματος που καλύπτεται από τα πλαϊνά οριακά στρώματα ανάλογο προς $Ha^{-0.5}$.

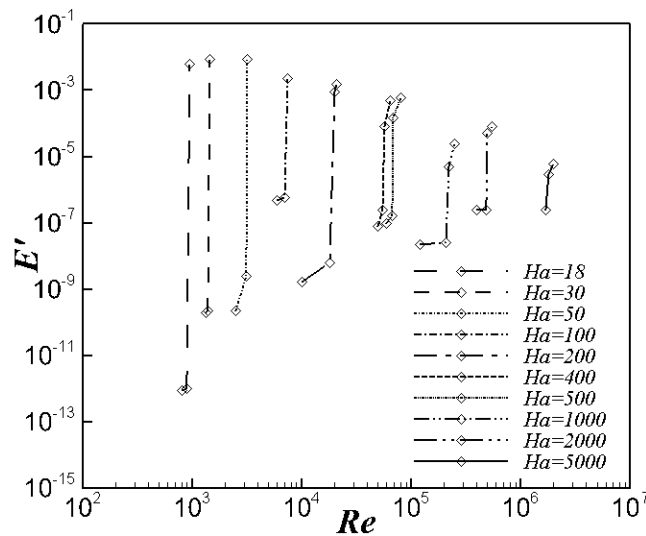
Για λόγους ακρίβειας, σε πολλές περιπτώσεις και κυρίως σε μεγαλύτερους αριθμούς Hartmann, πολλές προσομοιώσεις έπρεπε να επαναλαμβάνονται με ακόμη πυκνότερο πλέγμα ή μικρότερο χρονικό βήμα. Ο κώδικας τότε απαιτεί πολύ περισσότερα χρονικά βήματα για να επιτύχει σύγκλιση της λύσης του πεδίου ροής. Κάποια από τα αρχικά αποτελέσματα της προσομοίωσης της βασικής γεωμετρίας με $R_1=1$ και $R_2=2$ έχουν παρουσιαστεί από τους Iatridis et al. (2012b).

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται και συζητούνται σε τέσσερις ενότητες: α) Γεωμετρία με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1, β) Γεωμετρία με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1, γ) Μεταφορά θερμότητας και κατανομή θερμοκρασιών για τη γεωμετρία με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1, και δ) Τυρβώδης ροή για τη γεωμετρία με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1.

6.1 Γεωμετρία τοροειδούς ροής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1

Για σταθερό αριθμό Ha , η σταδιακή αύξηση του αριθμού Reynolds για κάθε προσομοίωση (περίπου 5% κάθε φορά) έχει ως αποτέλεσμα μηδαμινή ανάπτυξη

των διαταραχών στην ροή, μέχρι αύξηση σε κρίσιμη τιμή Re όπου η κινητική ενέργεια των διαταραχών αυξάνει κατά 4-5 τάξεις μεγέθους, όπου η ροή γίνεται ασταθής και στη συνέχεια τυρβώδης, Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1 Μεταβολή της κινητικής ενέργειας των διαταραχών με τον αριθμό Re , που αναδεικνύει την ανάπτυξη των διαταραχών

Για επιτάχυνση της λύσης, κάποιες προσομοιώσεις ξεκίνησαν κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων με χαμηλότερους αριθμούς Hartmann στρωτής ροής. Έχοντας τα αποτελέσματα για κάποιο Ha , και τροποποιώντας το πλέγμα και τα οριακά στρώματα ώστε να αντιστοιχούν σε μεγαλύτερο Ha , ήταν δυνατή η εκκίνηση της προσομοίωσης και για μεγαλύτερες τιμές του Ha , από τις τιμές πεδίων για την μικρότερη τιμή Ha . Αυτό έγινε επειδή προέκυπταν λεπτότερα οριακά στρώματα και άρα διαφορετικά διαμορφωμένο πλέγμα, λόγω του ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου. Έτσι η αριθμητική προσομοίωση ξεκινά από εκεί που σταμάτησε η περίπτωση του χαμηλότερου Ha και όχι από την αρχή. Σε πολλές περιπτώσεις όμως αυτή η μέθοδος απαιτεί πολύ πυκνό πλέγμα, για την μεταπήδηση από το ένα Ha στο άλλο, με αποτέλεσμα η λύση της νέας περίπτωσης να επιβραδύνεται περισσότερο από ότι συνήθως και έτσι να αποφεύγεται αυτή η επιλογή.

Πίνακας 6.1 Τιμές Ha και Re όπου η τοροειδής στρωτή ροή γίνεται τυρβώδης

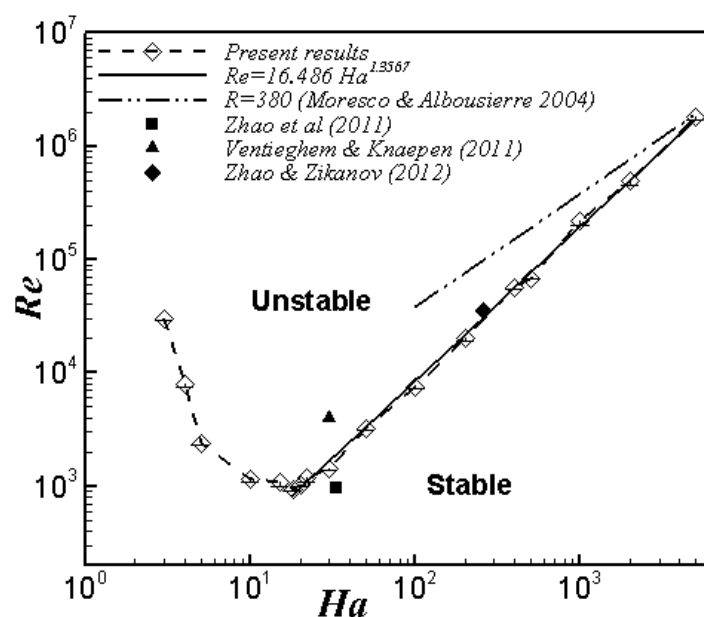
Ha	3	4	5	10	15	18	20	22	30	50
Re	30000	8000	2400	1150	1100	950	1030	1200	1450	3200
R	10000	2000	480	115	73.33	52,7	51,5	54,54	48,33	64

Ha	100	200	400	500	1000	2000	5000
Re	7500	20000	57000	68000	220000	500000	1800000
R	75	100	142.5	136	220	250	360

Στον Πίνακα 6.1. παρουσιάζονται οι υπολογισθέντες κρίσιμοι αριθμοί Reynolds για μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη σε διάφορους αριθμούς Hartmann για όλες τις προσομοιώσεις που αναφέρονται στον Πίνακα 5.2.

Το Σχήμα 6.2 δείχνει τους κρίσιμους αριθμούς Reynolds για μετάβαση σε διάφορες τιμές του Ha. Ο κρίσιμος λόγος $R = 380$ αφορά στην πειραματική εργασία των Moresco & Alboussière (2004) για τοροειδή αγωγό. Οι Vantieghem & Knaepen (2011), Zhao et al. (2011), Zhao & Zikanov (2012) μελετούν ροές σε τοροειδείς γεωμετρίες και αναφέρονται σε μεταβατικές καταστάσεις. Οι εργασίες αυτές παρουσιάζουν ομοιότητες στη γεωμετρία και στις οριακές συνθήκες με την παρούσα διατριβή, και ανήκουν στις λίγες εργασίες που μελετούν τη μετάβαση κάτω από την επίδραση υψηλού μαγνητικού πεδίου. Η ροή για $Ha < 18$ χαρακτηρίζεται από ιξώδεις δυνάμεις που υπερिशύουν της δυνάμεως Lorentz, η οποία είναι χαμηλή, λόγω του χαμηλού μαγνητικού πεδίου. Ως αποτέλεσμα, ο κρίσιμος αριθμός Re πρέπει να αυξηθεί ικανά, ώστε να μειώσει τον όρο της διάχυσης (η διάχυση πολλαπλασιάζεται με $1/Re$) και να προκαλέσει μετάβαση της ροής. Αυτό μπορεί να γίνει με την αύξηση του $\Delta\phi$, το οποίο θα αυξήσει την ταχύτητα ($U_0 = \Delta\phi / B_0 d$), άρα και τον Re ($= U_0 d / \nu$).

Οι τιμές για $Ha > 500$ δίνονται με επιφύλαξη, καθώς δεν υπάρχει άλλη εργασία για σύγκριση. Επίσης, το αυξημένο υπολογιστικό κόστος δεν επέτρεψε την προσομοίωση με ακόμη μεγαλύτερο πλέγμα, κάτι που προτείνεται για μελλοντική έρευνα. Το ίδιο ισχύει και για τη μεγάλη γεωμετρία.



Σχήμα 6.2 Κρίσιμοι αριθμοί Reynolds μετάβασης για διάφορους αριθμούς Hartmann σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5: 1

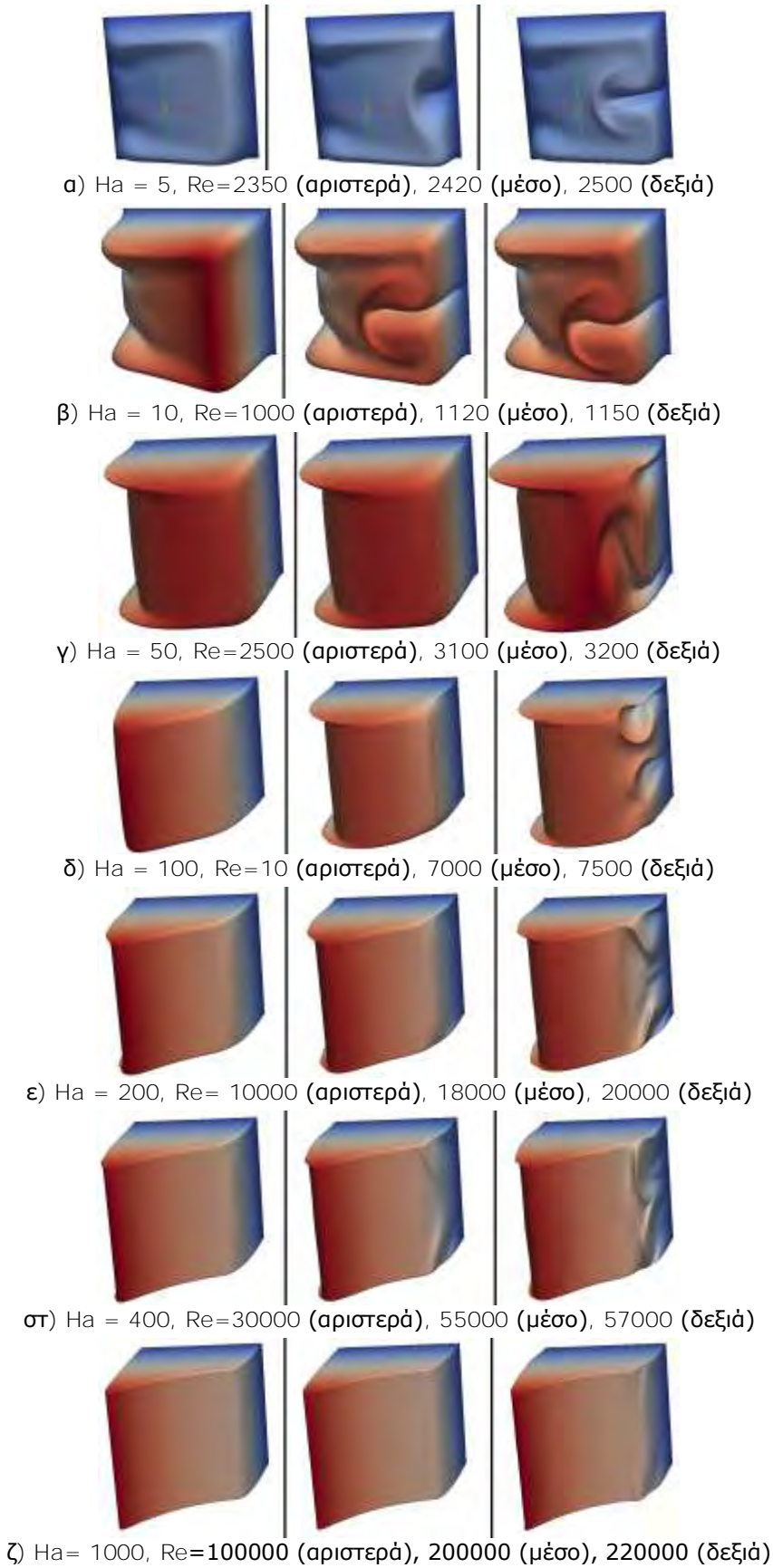
Η καμπύλη που προσεγγίζει τις κρίσιμες τιμές Re για κάθε Ha (βλ. Πίνακα 6.1) παρουσιάζεται επίσης στο Σχήμα 6.2 και αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση:

$$Re = 16,486 Ha^{1,3567} \quad (6.1)$$

Για $Ha < 18$ λοιπόν οι χαμηλές μαγνητικές δυνάμεις είναι της ίδιας τάξης με τις ιξώδεις δυνάμεις. Για $Ha > 18$ η διαφορετική μορφή της γραμμής μετάβασης οφείλεται στο ότι η δύναμη Lorentz εξισορροπείται από τις δυνάμεις αδρανείας. Το ισχυρό μαγνητικό πεδίο δυναμώνει τη δύναμη Lorentz μέσω του γινόμενου $j \times B$, με αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας της ροής. Ωστόσο αυξάνει αισθητά και ο όρος της διάχυσης. Σε υψηλές τιμές του Re , κοντά στα πλαϊνά τοιχώματα η αυξημένη κλίση της ταχύτητας καθιστά τους μη γραμμικούς όρους της αδρανείας ισχυρότερους από τις ιξώδεις δυνάμεις. Το αποτέλεσμα είναι η μετάβαση της ροής στην περιοχή των πλαϊνών τοιχωμάτων. Οι αυξημένες μαγνητικές δυνάμεις σε αυτή την περίπτωση είναι της ίδιας τάξης με τις αδρανειακές, ενώ οι ιξώδεις μειώνονται λόγω του μεγάλου Re (λόγω του όρου της διάχυσης $1/Re$).

Ο κρίσιμος λόγος $R = Re/Ha$ είναι στο εύρος τιμών $48 < R < 360$ για τιμές Ha στο εύρος $18 \leq Ha \leq 5000$. Το Σχήμα 6.2 δείχνει άλλωστε πως τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής ταιριάζουν με άλλα αποτελέσματα που έχουν δημοσιευθεί παλιότερα και παρουσιάζονται στο ίδιο Σχήμα. Ο λόγος των διαφορών στα αποτελέσματα έγκειται στη διαφορετική γεωμετρία και συνθήκες.

Το Σχήμα 6.3 παρουσιάζει τρισδιάστατες κατανομές του μέτρου ταχύτητας του ρευστού για διάφορα μαγνητικά πεδία. Οι στιγμιαίες τιμές των ταχυτήτων που προβάλλονται έχουν σκοπό να επισημάνουν τη διαφορετική συμπεριφορά της ροής για κάθε αριθμό Hartmann. Επιλέχθηκαν τρεις αριθμοί Reynolds για στρωτή, μεταβατική και τυρβώδη ροή (τύρβη σε αρχικό στάδιο). Σε όλες τις περιπτώσεις των αριθμών Ha , στο μεσαίο Σχήμα που αντιστοιχεί στην μεταβατική φάση της ροής, και έπειτα στο δεξί που η ροή εισέρχεται στην τυρβώδη περιοχή, φαίνεται πως η μετάβαση συμβαίνει πρώτα στο οριακό στρώμα του εξωτερικού τοιχώματος του τόρου. Σε χαμηλές τιμές Ha , παρατηρείται μια δίνη στη στρωτή ροή (δίνη Taylor-Couette) συμμετρική με την αντίστοιχη που φαίνεται στην αντιδιαμετρική διατομή. Όταν ο αριθμός Reynolds αγγίζει τιμές μετάβασης, η συμμετρία χάνεται, κατά την κατακόρυφη μετακίνηση των δινών, οι οποίες αποκτούν ελικοειδή δομή και σταδιακά αποσταθεροποιούνται, σηματοδοτώντας μετάβαση σε τυρβώδη ροή. Καθώς το μαγνητικό πεδίο ισχυροποιείται, η δομή της ροής δεν αποτελείται από ένα μοναδικό συμμετρικό ζεύγος δινών αλλά από περισσότερα, ενώ η ανάπτυξη των διαταραχών καθυστερεί.



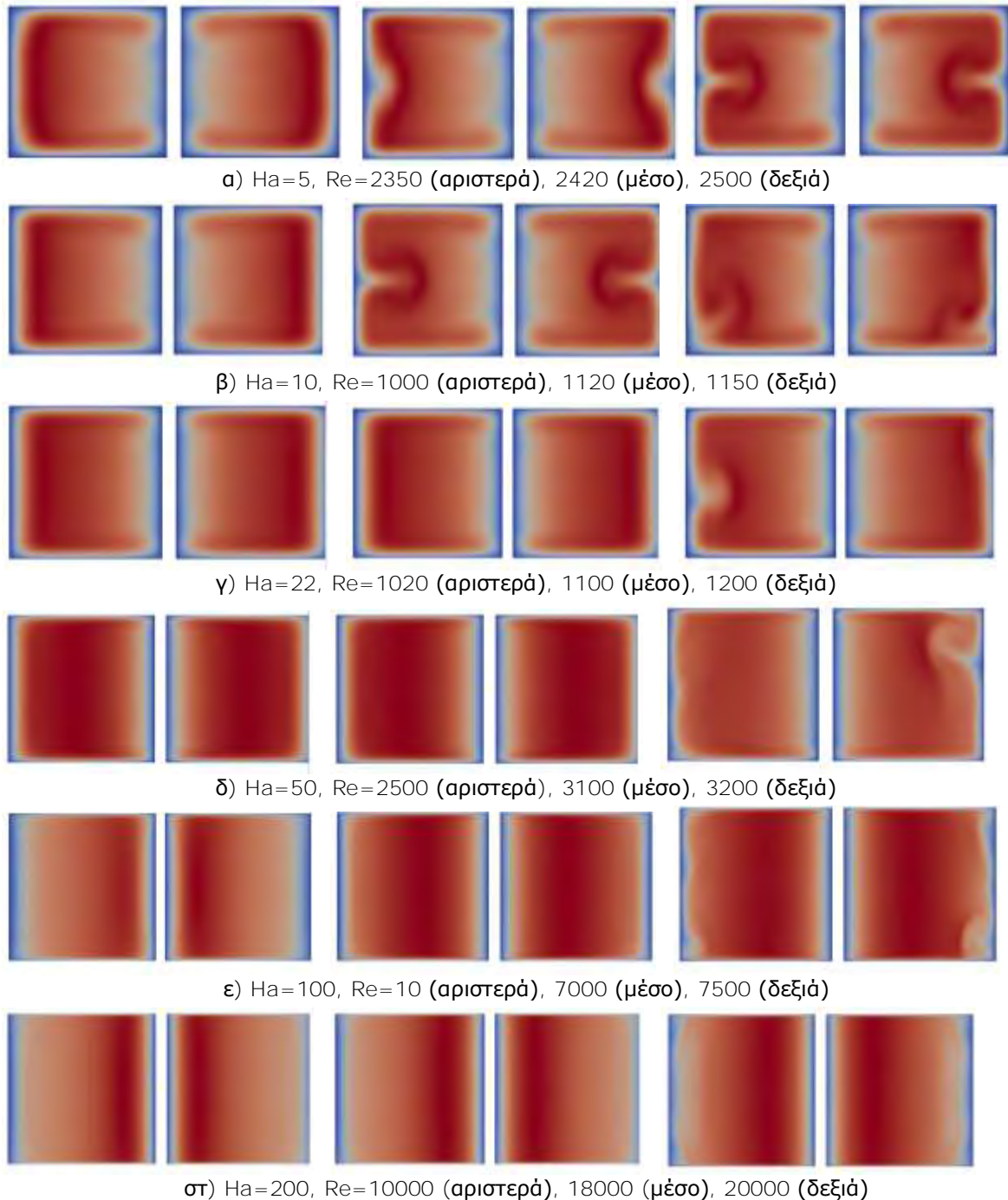
Σχήμα 6.3 Τρισδιάστατη κατανομή του μέτρου ταχύτητας του ρευστού για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Πρέπει να ειπωθεί ότι οι δίνες Taylor-Couette σε αυτές τις προσομοιώσεις έχουν τροποποιηθεί από την μορφή που συνιστά ολική κάλυψη της περιοχής κοντά στο κατακόρυφο τοίχωμα, ή ακόμη και όλου του αγωγού, κάτι που απαντάται στην κλασική περίπτωση ροής Couette σε τοροειδή γεωμετρία με περιστρεφόμενα τοιχώματα. Στο ίδιο Σχήμα 6.3 παρατηρείται επίσης ότι όσο χαμηλότερος είναι ο αριθμός Ha , τόσο μικρότερη και η απαιτούμενη αύξηση του αριθμού Re , για την επίτευξη της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Όσο αυξάνει ο αριθμός Hartmann, τόσο μεγαλύτερος πρέπει να είναι ο αριθμός Reynolds για να μεταβεί η ροή σε τυρβώδη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση του $Ha=5$, όπου αυξάνοντας την τιμή του Re μόνο κατά 3%, από $Re=2350$ σε $Re=2420$, επιτυγχάνεται τιμή κινητικής ενέργειας διαταραχών που οδηγεί σε τυρβώδη ροή, σε αντίθεση με την περίπτωση $Ha=1000$, όπου για να ανέλθει η κινητική ενέργεια διαταραχών σε τιμές μετάβασης απαιτείται αύξηση της τιμής του Re κατά 100%, από $Re=100000$ σε $Re=200000$.

Το Σχήμα 6.4 παρουσιάζει κατανομές του μέτρου ταχύτητας του ρευστού, σε αντιδιαμετρικές τομές του αγωγού, ώστε να διερευνηθεί η συμμετρία στις δύο τομές, καθώς η στρωτή ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν, για τον μικρό αριθμό $Ha=5$, τα πλαϊνά οριακά στρώματα, τα οποία συνιστούν περιοχές του αγωγού όπου πρωτοεμφανίζονται διαταραχές. Οι διαταραχές εμφανίζονται για την ίδια τιμή $Ha=5$, ακόμη και στην περίπτωση στρωτής ροής $Re=2350$, στο εσωτερικό οριακό στρώμα. Πρόκειται για τις περιοδικές και συμμετρικές δίνες Taylor-Couette, που μεταφέρονται με χαμηλές ταχύτητες του ρευστού, και αφορούν καθαρά στρωτή ροή και εμφανίζονται στα πλαϊνά οριακά στρώματα. Η ανάπτυξη των δινών είναι πιο εμφανής στις περιπτώσεις με χαμηλό αριθμό Hartmann. Αν και αφορούν σε στρωτή ροή, σταδιακά αυξάνουν σε μέγεθος, χάνουν τη συμμετρία τους και οδηγούν τη ροή σε μεταβατική και τυρβώδη, καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds.

Καθώς η ροή προσεγγίζει τη μετάβαση, η αύξηση του αριθμού Reynolds έχει ως συνέπεια την απώλεια της συμμετρίας. Στην περίπτωση $Ha=10$, για $Re=1150$ οι δίνες μετατοπίστηκαν στα κάτω άκρα του πλαϊνού οριακού στρώματος, έχασαν τη μεταξύ τους συμμετρία και άλλαξαν μορφή. Στην περίπτωση $Ha=30$ με $Re=1500$, όπου η ροή δεν έχει ακόμη χάσει πλήρως τη συμμετρία της, οι δίνες μετατοπίστηκαν κατακόρυφα, ώστε πλέον δεν βρίσκονται στο μέσο του πλαϊνού οριακού στρώματος. Κατά τη μετάβαση στα αρχικά στάδια τύρβης, στα ισχυρότερα μαγνητικά πεδία το πλαϊνό οριακό στρώμα τείνει να αντιστέκεται περισσότερο στις

διαταραχές. Για $Ha=200$, όταν η ροή γίνεται τυρβώδης οι διαταραχές παρατηρούνται σε τυχαία σημεία μεταξύ των άκρων των οριακών στρωμάτων, καταλαμβάνοντας μεγάλα τμήματα του στρώματος με πιο ομοιόμορφο τρόπο από ότι στους χαμηλούς αριθμούς Hartmann, όπου οι διαταραχές είναι πιο τοπικές, αλλά και πιο έντονες.

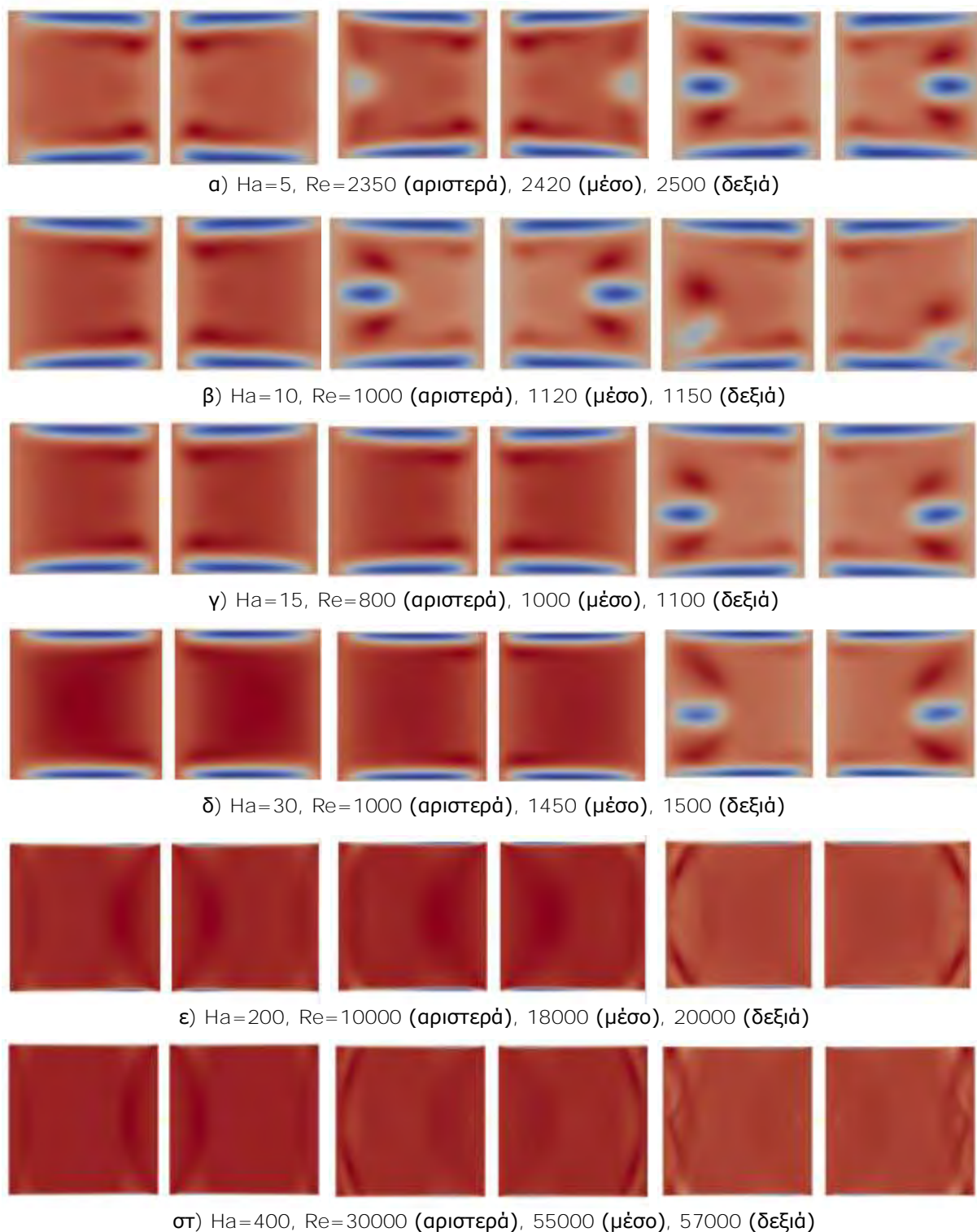


Σχήμα 6.4 Κατανομή στιγμιαίων τιμών του μέτρου ταχύτητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Η κινητικότητα της ροής μέσα στα στρώματα Hartmann γίνεται αντιληπτή σε όλες τις περιπτώσεις του Σχήματος 6.5 όπου απεικονίζονται οι κατανομές της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού, και κυρίως για τις μικρές τιμές Ha μέχρι $Ha=30$. Καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει, είναι ενδιαφέρον πώς μειώνεται αντίστοιχα το πάχος των στρωμάτων, όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο. Όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνει ώστε να παρουσιαστούν διαταραχές στη ροή, αυτές είναι αρχικά περιορισμένες και συμμετρικές, όπως φαίνεται στο δεύτερο τμήμα (μέσο) του Σχήματος, για όλες τις περιπτώσεις των τιμών Ha . Για τους χαμηλούς αριθμούς $Ha=5$ και 10 , πάλι είναι εμφανής η παρουσία του ζεύγους δινών Taylor, όπως και στα Σχήματα 6.3 και 6.4. Οι δίνες είναι εμφανείς σε έντονο ή αδύναμο βαθμό, στις τέσσερις πρώτες περιπτώσεις τιμών Ha του Σχήματος. Στις υψηλές τιμές του $Ha = 200$ και 400 (τελευταίες δύο περιπτώσεις του Σχήματος) οι δίνες αυτού του τύπου αντικαθίστανται από τυχαίες διαταραχές. Οι διαταραχές αυτές εμφανίζονται στα πλαϊνά οριακά στρώματα, όπως και στις χαμηλές τιμές Ha , καταλαμβάνοντας το σύνολο των οριακών στρωμάτων με τον μεγάλο όγκο τους.

Στους χαμηλότερους αριθμούς Hartmann (μέχρι $Ha=30$) του Σχήματος 6.5, οι συμμετρικές διαταραχές της στρωτής ροής αναπτύσσονται και τελικώς οδηγούν τη ροή σε μετάβαση. Στα αρχικά στάδια τύρβης, κάποιες διαταραχές δείχνουν συμμετρικές, προφανώς επειδή δεν έχει προχωρήσει η διαδικασία της μετάβασης, αν και η κινητική ενέργεια διαταραχών έχει ανέλθει σε επίπεδα που μαρτυρούν πλήρη μετάβαση σε τύρβη (βλέπε Σχήματα 6.5α,γ,δ). Για ισχυρά μαγνητικά πεδία, η δύναμη Lorentz υπερिशύει των δυνάμεων αδράνειας, και το πεδίο ταχυτήτων φαίνεται ομαλό, ώστε η απώλεια της συμμετρίας και η εμφάνιση τύρβης να είναι ορατή μόνο μέσα στα οριακά στρώματα. Όταν ο αριθμός Reynolds γίνει αρκετά μεγάλος, τότε το σύνολο της ροής στον αγωγό προδίδει την ύπαρξη τύρβης, κάτι που δεν φαίνεται στο Σχήμα, καθώς αυτό παρουσιάζει μόνο τα αρχικά στάδια της τύρβης.

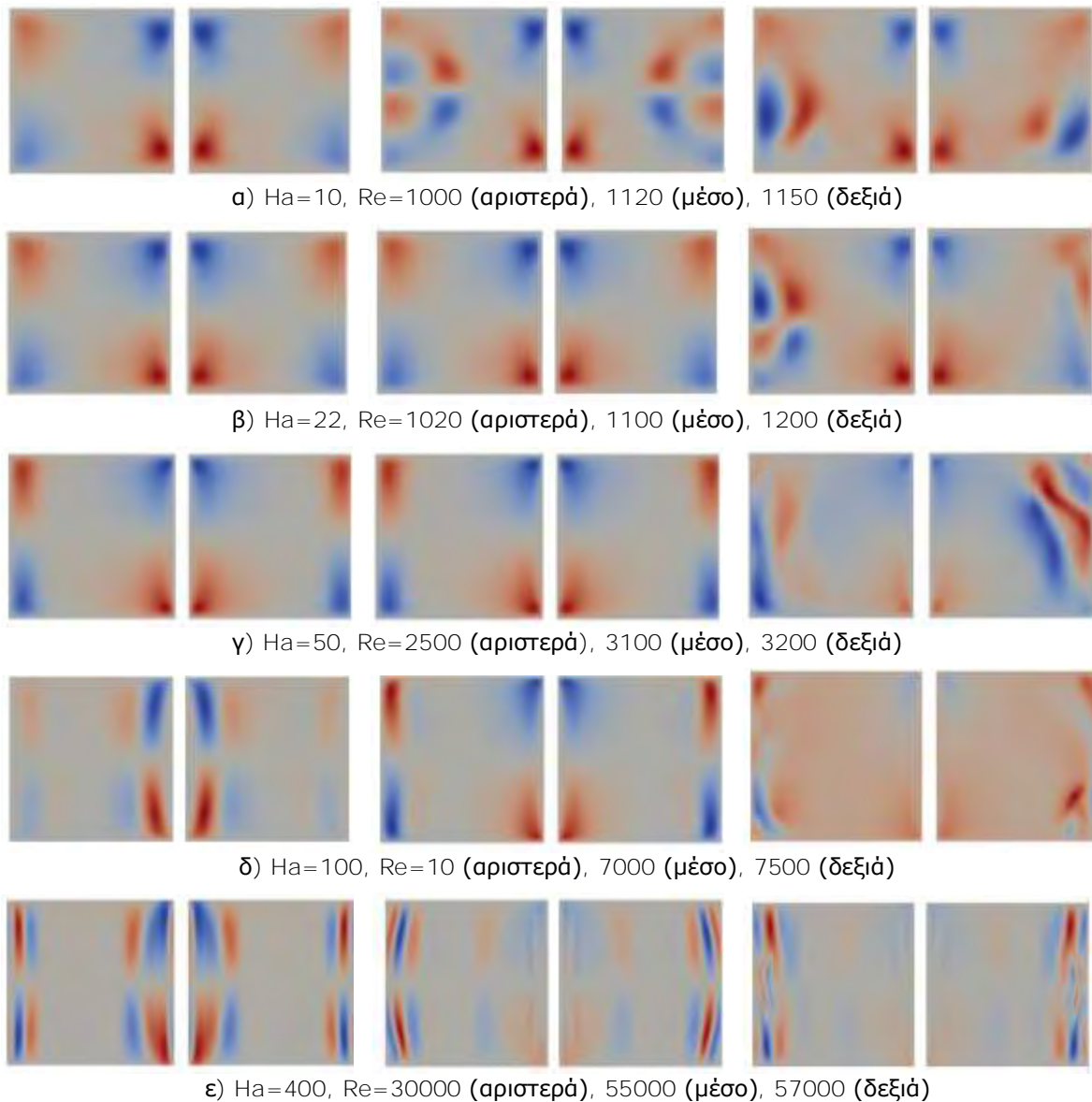
Σχετικά με τη μετάβαση, στο μεσαίο τμήμα κάθε περίπτωσης του Σχήματος 6.5, όταν ο αριθμός Hartmann είναι χαμηλός (Σχήματα 6.5α,β,γ,δ), η ροή είναι πιο ευαίσθητη στις μεταβολές του αριθμού Reynolds. Στα αρχικά στάδια μετάβασης, η ακτινική ταχύτητα u_r μπορεί να εξακολουθεί να εμφανίζεται ομαλή, μέχρι τη ξαφνική καθοριστική μεταβολή της λόγω προσέγγισης του αριθμού Reynolds στην κρίσιμη τιμή. Ομοίως και η κινητική ενέργεια είναι σε χαμηλά επίπεδα και ξαφνικά πολλαπλασιάζεται κατά μερικές τάξεις μεγέθους, κάτι που υποδεικνύει την μετάβαση της ροής στα αρχικά στάδια τύρβης.



Σχήμα 6.5 Κατανομή της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Στις περιπτώσεις στρωτής ροής του Σχήματος 6.6, η κατακόρυφη (αξονική) ταχύτητα του ρευστού εμφανίζει σημαντικότερες αλλαγές στα άκρα των οριακών στρωμάτων. Καθώς αυξάνει ο αριθμός Hartmann, οι διαταραχές μετακινούνται

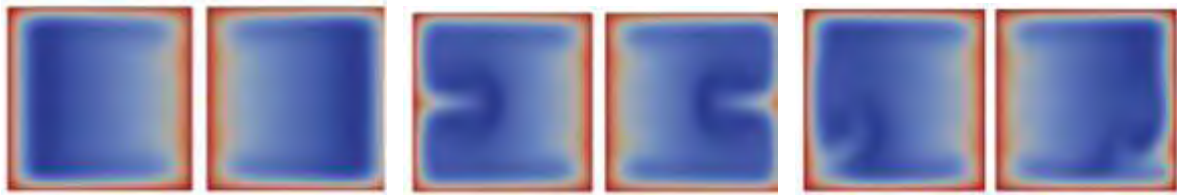
προς το μέσο των στρωμάτων και καταλαμβάνουν ευρύτερο χώρο, κυρίως στην κατακόρυφη διεύθυνση. Κατά τη μετάβαση της ροής όταν ο αριθμός Reynolds φτάσει στην κρίσιμη τιμή, ο αριθμός Hartmann επηρεάζει τη διαμόρφωση των διαταραχών στα οριακά στρώματα κατά όμοιο τρόπο, αλλά οι διαταραχές μεγαλώνουν και χάνουν τη συμμετρία τους, καθώς πληθαίνουν και διογκώνονται προς απροσδιόριστη κατεύθυνση.



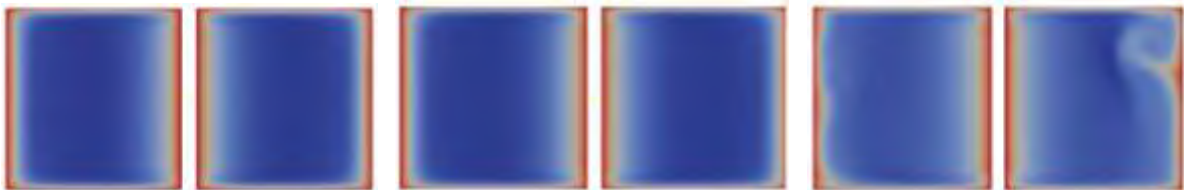
Σχήμα 6.6 Κατανομή στιγμιαίων τιμών κατακόρυφης ταχύτητας u_z σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Η απεικόνιση του πεδίου ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι σημαντική διότι λόγω της τοροειδούς γεωμετρίας του αγωγού, η εφαπτομενική είναι η τοροειδής διεύθυνση της ροής. Στα Σχήματα 6.7 και 6.8 παρουσιάζεται η εφαπτομενική ταχύτητα, αποτυπωμένη στα επίπεδα $r-z$ και $r-\theta$, αντίστοιχα. Εκ

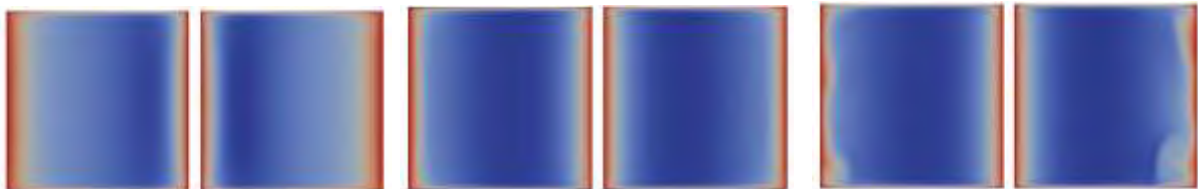
πρώτης όψεως στις περιπτώσεις στρωτής ροής που παρουσιάζονται στα σχήματα αυτά, φαίνεται πως η εφαπτομενική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη κοντά στα εξωτερικά τοιχώματα του αγωγού.



α) $Ha=10$, $Re=1000$ (αριστερά), 1120 (μέσο), 1150 (δεξιά)



β) $Ha=50$, $Re=2500$ (αριστερά), 3100 (μέσο), 3200 (δεξιά)



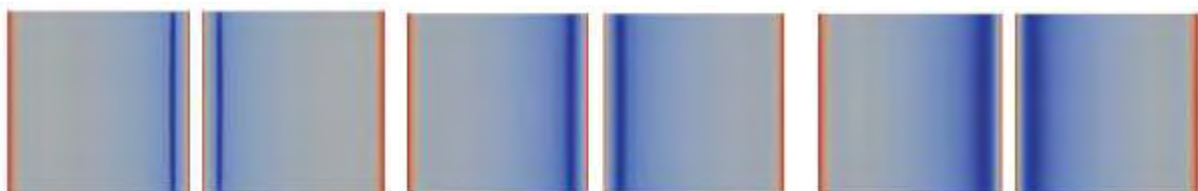
γ) $Ha=100$, $Re=10$ (αριστερά), 7000 (μέσο), 7500 (δεξιά)



δ) $Ha=500$, $Re=40000$ (αριστερά), 67000 (μέσο), 68000 (δεξιά)



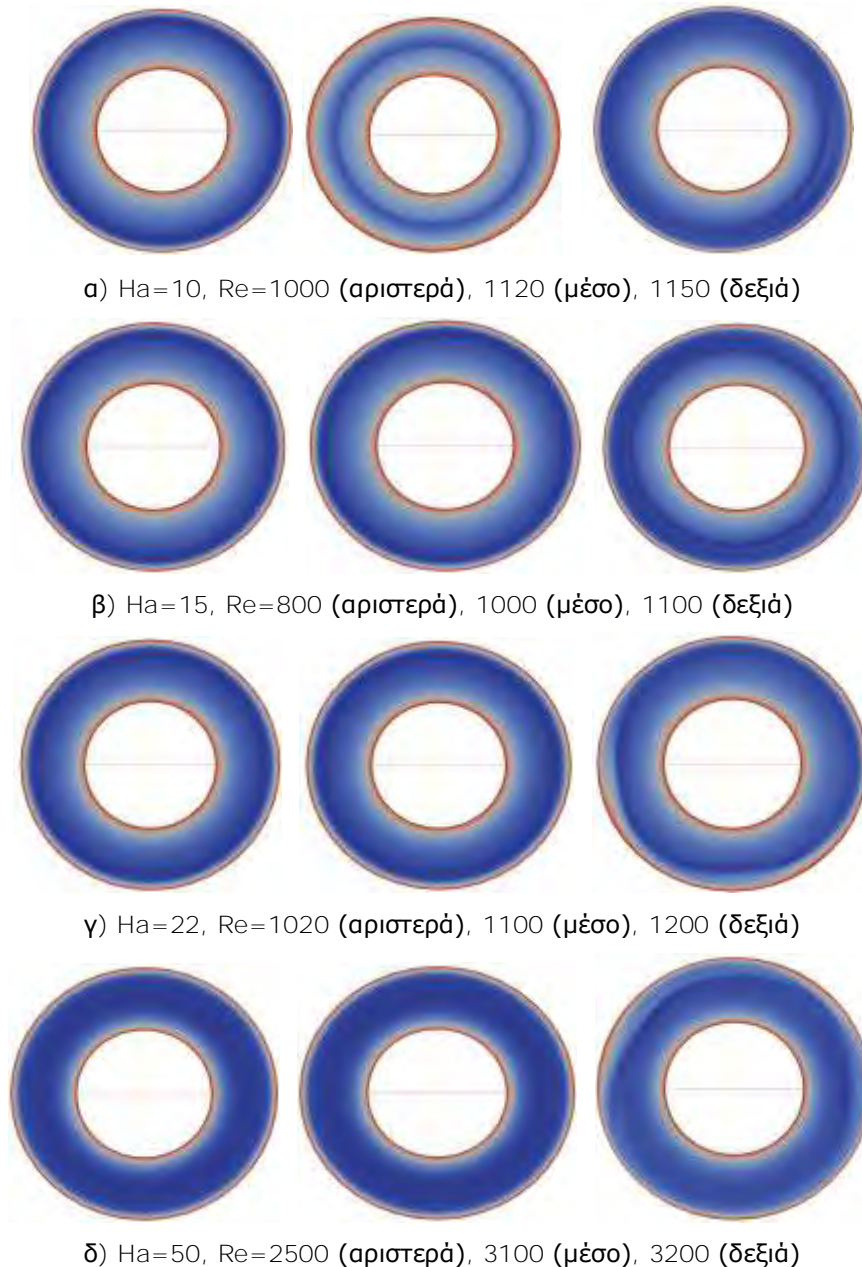
ε) $Ha=1000$, $Re=100000$ (αριστερά), 200000 (μέσο), 220000 (δεξιά)



στ) $Ha=2000$, $Re=400000$ (αριστερά), 450000 (μέσο), 500000 (δεξιά)

Σχήμα 6.7 Κατανομή στιγμιαίων τιμών εφαπτομενικής ταχύτητας u_θ σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Επίσης η εφαπτομενική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα από ότι στα οριζόντια, όπως δείχνει το Σχήμα 6.7. Μελετώντας τις μεσαίες εικόνες στα ίδια Σχήματα 6.7 και 6.8, το πεδίο ταχυτήτων αντιπροσωπεύει μια ομαλή ροή που μπορεί εκ πρώτης όψεως να ερμηνευθεί ως στρωτή. Ωστόσο επιβεβαιώνεται από το Σχήμα 6.2 ότι η κινητική ενέργεια των διαταραχών έχει αυξηθεί αρκετά και η ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη.



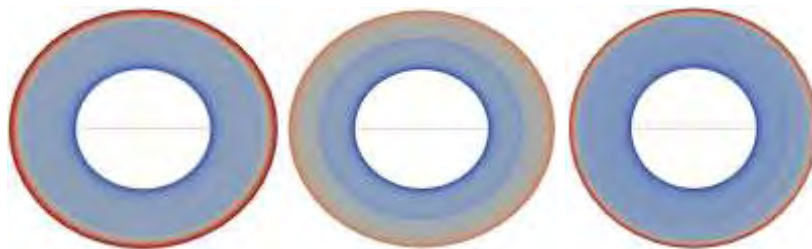
Σχήμα 6.8 Κατανομή στιγμιαίων τιμών εφαπτομενικής ταχύτητα u_θ στην αξονική διατομή του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο $r-\theta$). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Ακόμη μια ενδιαφέρουσα μεταβλητή που παίζει σημαντικό ρόλο στη μετάβαση της ροής σε τυρβώδη είναι η στροβιλότητα του ρευστού. Η κατακόρυφη

στροβιλότητα (z -διεύθυνση) παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.9 αποτυπωμένη στην οριζόντια κάτοψη του αγωγού. Σε χαμηλούς αριθμούς Hartmann και Reynolds που αντιστοιχούν σε στρωτή ροή, η στροβιλότητα ενισχύεται στα εξωτερικά τοιχώματα του αγωγού, όπως και η ταχύτητα. Καθώς οι αριθμοί Hartmann και Reynolds αυξάνουν ώστε η ροή να βρίσκεται κοντά στη μετάβαση, τότε σε σχέση με τις χαμηλές τιμές που είναι κοντά στη μετάβαση, η στροβιλότητα εξακολουθεί να έχει την ίδια συμπεριφορά: δηλαδή, διατηρείται σε υψηλά επίπεδα στο κέντρο του αγωγού και στα εξωτερικά τοιχώματα, ενώ μειώνεται στα εσωτερικά.



α) $Ha=5$, $Re=2350$ (αριστερά), 2420 (μέσο), 2500 (δεξιά)



β) $Ha=10$, $Re=1000$ (αριστερά), 1120 (μέσο), 1150 (δεξιά)



γ) $Ha=15$, $Re=800$ (αριστερά), 1000 (μέσο), 1100 (δεξιά)



δ) $Ha=50$, $Re=2500$ (αριστερά), 3100 (μέσο), 3200 (δεξιά)

Σχήμα 6.9 Κατανομή στιγμιαίων τιμών κατακόρυφης στροβιλότητας στην αξονική διατομή του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο r - θ). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Κατά την μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, η στροβιλότητα αυξάνει όπως είναι αναμενόμενο. Στο Σχήμα 6.9, μόνο η λεπτομερής παρατήρηση

του δεξιού τμήματος όλων των περιπτώσεων προδίδει απώλεια της συμμετρίας κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Στο Σχήμα 6.10 παρουσιάζεται η κατανομή της εφαπτομενικής στροβιλότητας, η οποία σε συνδυασμό με την αυξημένη κινητική ενέργεια των διαταραχών προδίδει την έναρξη εμφάνισης τύρβης.



α) $Ha=5$, $Re=2350$ (αριστερά), 2420 (μέσο), 2500 (δεξιά)



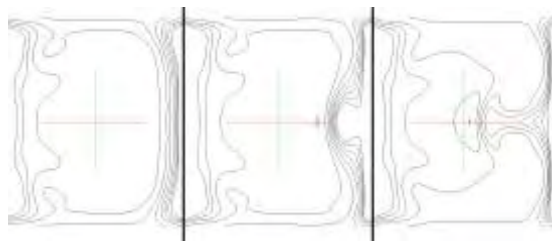
β) $Ha=10$, $Re=1000$ (αριστερά), 1120 (μέσο), 1150 (δεξιά)



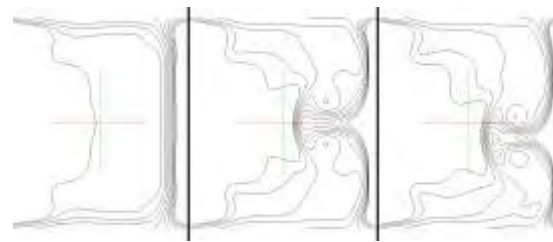
γ) $Ha=50$, $Re=2500$ (αριστερά), 3100 (μέσο), 3200 (δεξιά)

Σχήμα 6.10 Κατανομή αζιμουθιας στροβιλότητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού (επίπεδο $r-z$). Ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

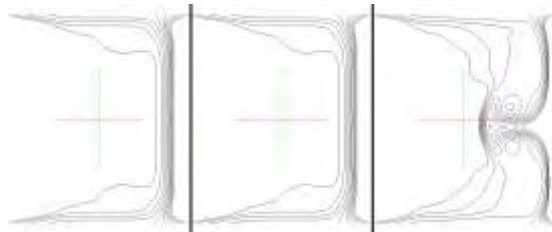
Το Σχήμα 6.11 παρουσιάζει την κατανομή της αξονικής στροβιλότητας στην τετραγωνική διατομή του τοροειδούς αγωγού. Η στρωτή ροή εμφανίζει σύνθετες γραμμές για μικρές τιμές του Ha , ενώ απλοποιούνται καθώς αυξάνει. Κοντά στο εξωτερικό τοίχωμα του αγωγού (δεξιά), οι γραμμές είναι πυκνότερες, δείχνοντας εντονότερες διαταραχές στην περιοχή αυτή. Για ισχυρό μαγνητικό πεδίο η πύκνωση γίνεται υψηλότερη κοντά στα πλαϊνά τοιχώματα, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στο κέντρο του αγωγού. Η ροή επίσης για $Ha < 18$ χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος δινών Taylor που εξελίσσεται και καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνει, η ροή οδηγείται σε αστάθεια. Σε αυτό το εύρος αριθμών Hartmann, η ροή ελέγχεται από τις ιξώδεις δυνάμεις.



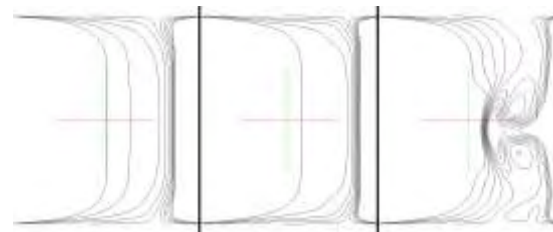
α) $Ha=5$, $Re=2350$ (α), 2420(μ), 2500(δ)



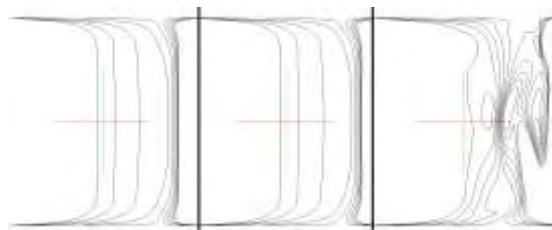
β) $Ha=10$, $Re=1000$ (α), 1120(μ), 1150(δ)



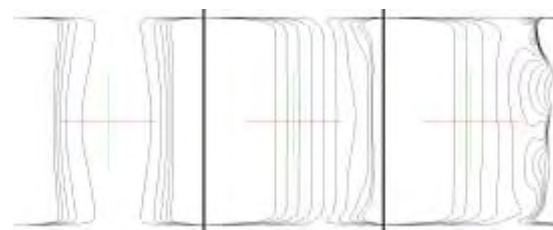
γ) $Ha=15$, $Re=800$ (α), 1000(μ), 1100(δ)



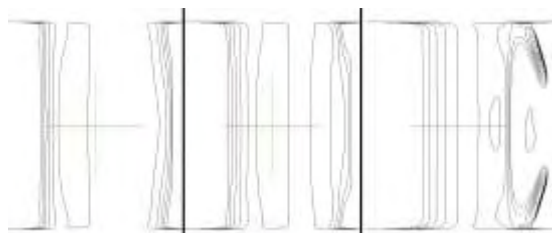
δ) $Ha=30$, $Re=1000$ (α), 1450(μ), 1500(δ)



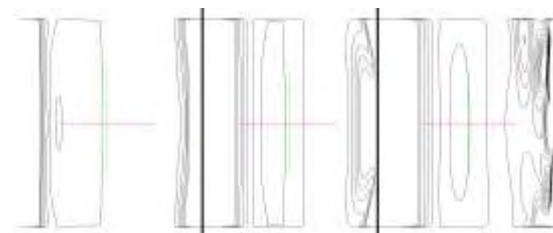
ε) $Ha=50$, $Re=2500$ (α), 3100(μ), 3200(δ)



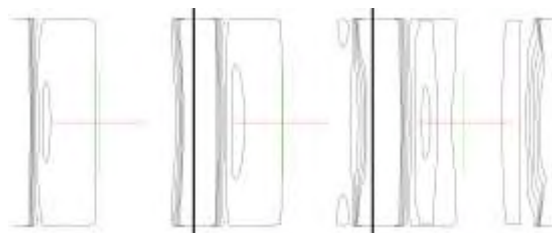
σ) $Ha=100$, $Re=10$ (α), 7000(μ), 7500(δ)



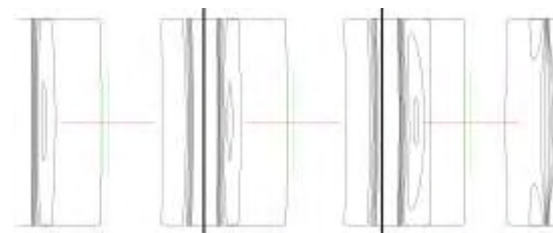
ζ) $Ha=200$, $Re=10000$ (α), 18000(μ), 20000(δ)



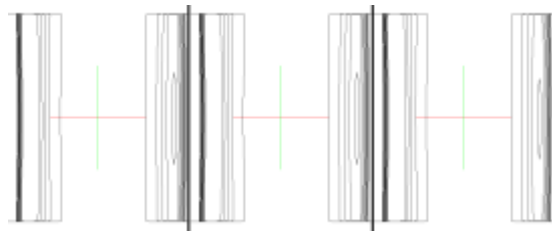
η) $Ha=400$, $Re=30000$ (α), 55000(μ), 57000(δ)



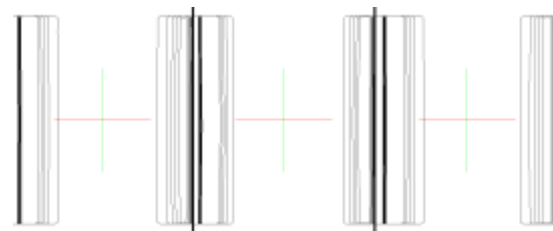
θ) $Ha=500$, $Re=40000$ (α), 67000(μ), 68000(δ)



ι) $Ha=1000$, $Re=100000$ (α), 200000(μ), 220000(δ)



ια) $Ha=2000$, $Re=400000$ (α), 450000(μ), 500000(δ)



ιβ) $Ha=5000$, $Re=500000$ (α), 1600000(μ), 1700000(δ)

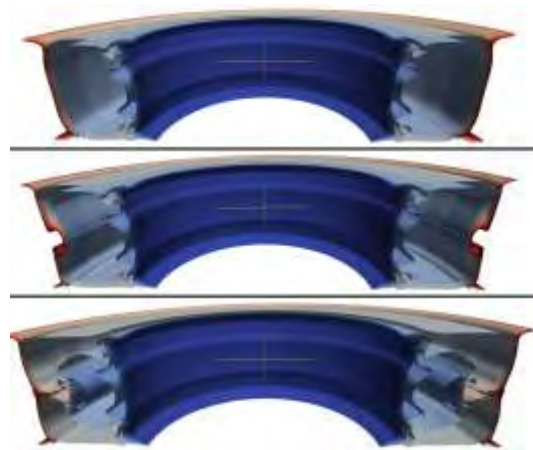
Σχήμα 6.11 Κατανομή αξονικής στροβιλότητας του τόρου, επίπεδο r - z . Για κάθε Ha , ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Για $Ha > 18$, οι δυνάμεις αδράνειας πρέπει να υπερνικήσουν τη δύναμη Lorentz για να αποσταθεροποιήσουν τις δίνες, οδηγώντας τη ροή σε τυρβώδη. Είναι αξιοσημείωτο πως για $Ha > 18$ οι δίνες πολλαπλασιάζονται, και αυτό εξηγείται από το ότι καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει, αυξάνει επίσης και η δύναμη Lorentz, δημιουργώντας περισσότερα ζεύγη δινών Taylor και ευνοώντας έτσι την ανάπτυξη διαταραχών στη ροή.

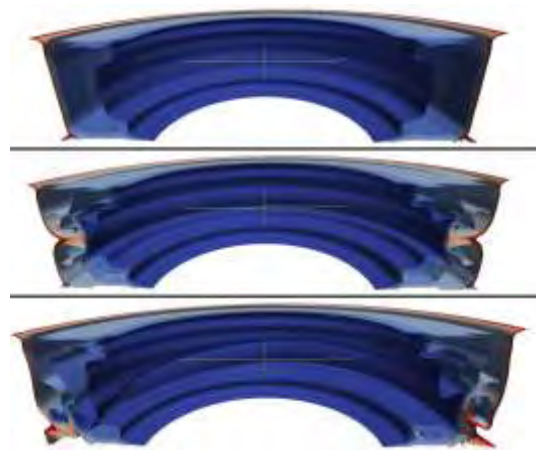
Στην μεταβατική περιοχή σημειώνεται ανάπτυξη δευτερευόντων δινών, που εξελίσσονται, χάνουν τη συμμετρία τους και μετατρέπονται σε τυρβώδεις. Στο ίδιο Σχήμα 6.11 η συμμετρία χάνεται καθώς μετακινείται η όλη κατανομή της στροβιλότητας κατακόρυφα, πέρα από την οριζόντια συμμετρία που και αυτή χάνεται καθώς η ροή εισέρχεται σε μεταβατική φάση. Η αύξηση του αριθμού Reynolds έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση δινών, οι οποίες καθώς επηρεάζονται από το μαγνητικό πεδίο ωθούνται προς το εξωτερικό τοίχωμα του αγωγού, και τελικά παραμένουν σε κάποια απόσταση από αυτό.

Η τρισδιάστατη απεικόνιση της αξονικής στροβιλότητας δίνεται στο Σχήμα 6.12. Μελετώντας το σχήμα αυτό για τις στρωτές ροές, η μορφή των ισοϋψών αλλάζει καθώς οι αριθμοί Reynolds και Hartmann μεταβάλλονται, όπως φαίνεται στο πρώτο μέρος των τριών γραφημάτων κάθε περίπτωσης. Πρωταρχικό στοιχείο αποτελεί η συμμετρία που επικρατεί στη στρωτή ροή. Εμφανώς το μαγνητικό πεδίο προκαλεί μια αραιώση στις ισοϋψείς, ακόμη και σε υψηλές τιμές του Re . Η δεύτερη κατηγορία στο ίδιο Σχήμα 6.12 περιλαμβάνει διαταραχές που οδηγούν στη συνέχεια σε τύρβη. Κυρίως για χαμηλούς αριθμούς $Ha < 50$, αυξάνοντας λίγο τον αριθμό Reynolds εμφανίζεται τύρβη στη ροή. Αντίθετα σε ισχυρά μαγνητικά πεδία, ο Re πρέπει να αυξηθεί πολύ περισσότερο για να υπάρξει διαταραχή.

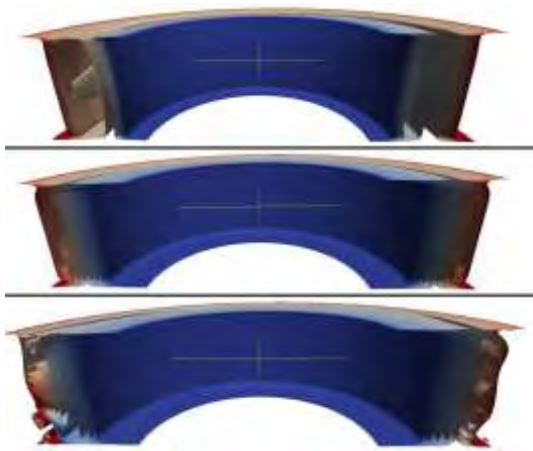
Τέλος, το Σχήμα 6.13 παρουσιάζει κατανομές της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού στην κατακόρυφη z -διεύθυνση, για διάφορες τιμές των Re και Ha . Η απώλεια της συμμετρίας και η είσοδος στην μεταβατική περιοχή είναι εμφανής σε όλες τις περιπτώσεις του Σχήματος, καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds. Επίσης η αύξηση του αριθμού Hartmann έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή της ταχύτητα να εμφανίζει λιγότερες καμπυλώσεις, όπως είναι αναμενόμενο, καθώς το μαγνητικό πεδίο επιβραδύνει γενικώς το ρευστό. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι τα οριακά στρώματα Hartmann (πάνω και κάτω τοιχώματα) γίνονται λεπτότερα με την αύξηση του Ha .



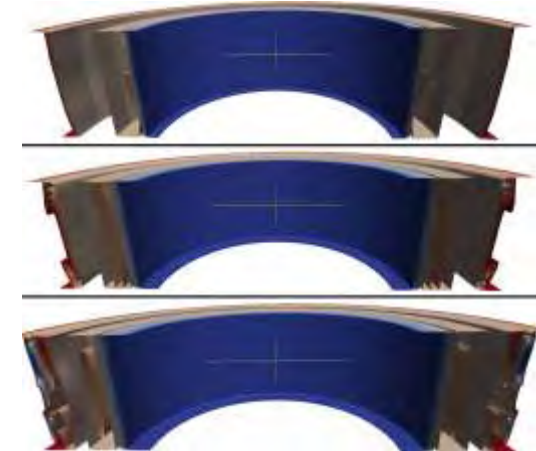
Re=2350(άνω), 2420(μέσο), 2500(κάτω)
(α) Ha=5



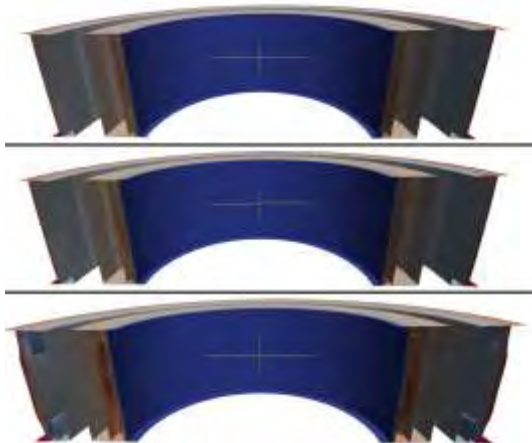
Re=1000(άνω), 1120(μέσο), 1150(κάτω)
(β) Ha=10



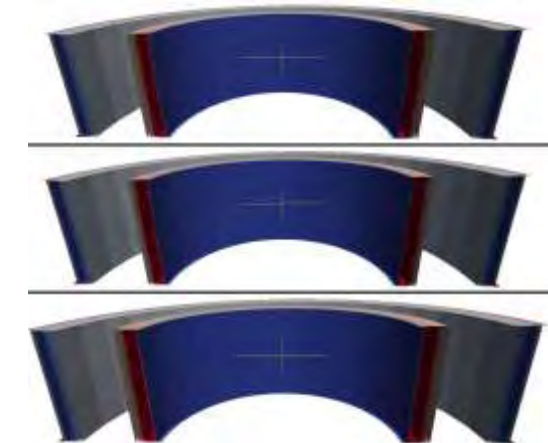
Re=10(άνω), 7000(μέσο), 7500(κάτω)
(γ) Ha=100



Re=30000(άνω), 55000(μέσο), 57000(κάτω)
(δ) Ha=400

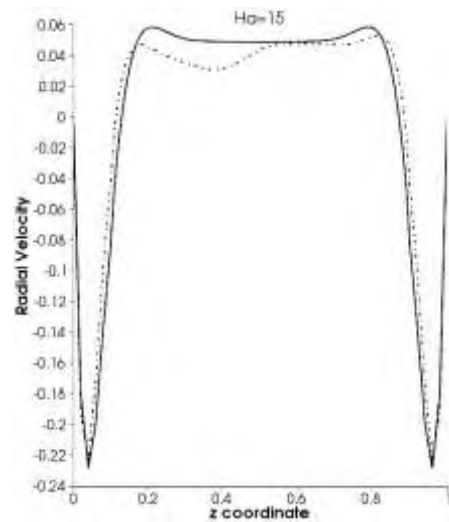
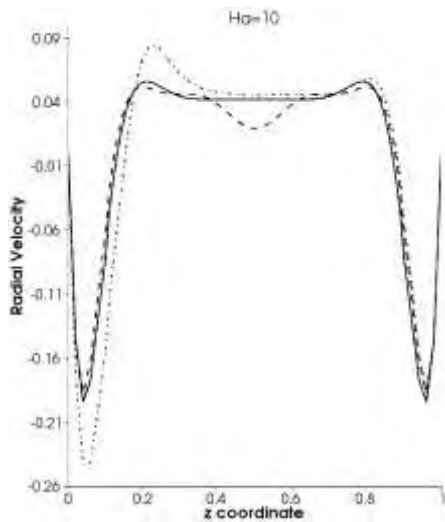


Re=100000(άνω), 200000(μέσο), 220000(κάτω)
ε) Ha=1000,



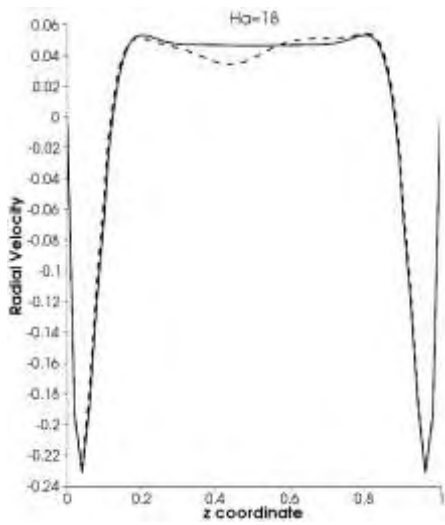
Re=500000(άνω), 1600000(μέσο), 1700000(κάτω)
ζ) Ha=5000

Σχήμα 6.12 Τρισδιάστατη απεικόνιση αξονικής στροβιλότητας.
Ροή στρωτή (άνω), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (κάτω)

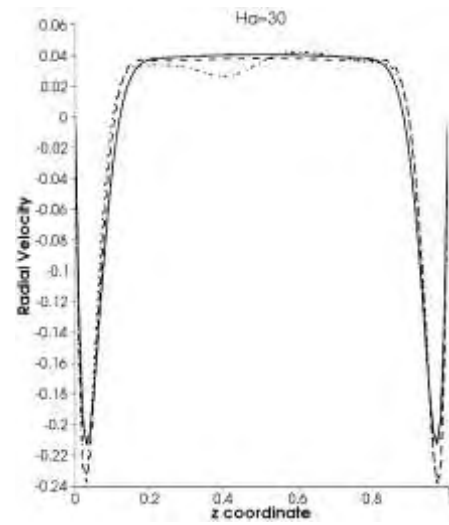


α) $Ha=10$, $Re=1000$ —, 1120 --, 1150 ---

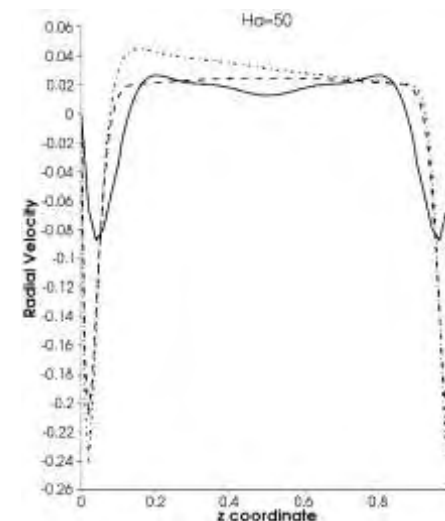
β) $Ha=15$, $Re=800$ —, 1000 --, 1100 ---



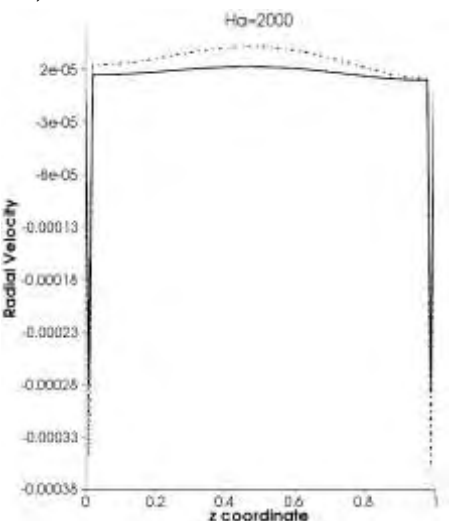
γ) $Ha=18$, $Re=900$ —, 950 --



δ) $Ha=30$, $Re=1000$ —, 1400 --, 1450 ---



ε) $Ha=50$, $Re=2500$ —, 3100 --, 3200 --- στ) $Ha=2000$, $Re=400000$ —, 450000 --, 500000 ---



Σχήμα 6.13 Κατανομή ακτινικής ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση z .
Ροή στρωτή (—), μεταβατική (--), τυρβώδης (-.-)

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση που μπορεί να διεξαχθεί από τα Σχήματα που έχουν παρουσιαστεί, αφορά το πάχος των πλαϊνών οριακών στρωμάτων και

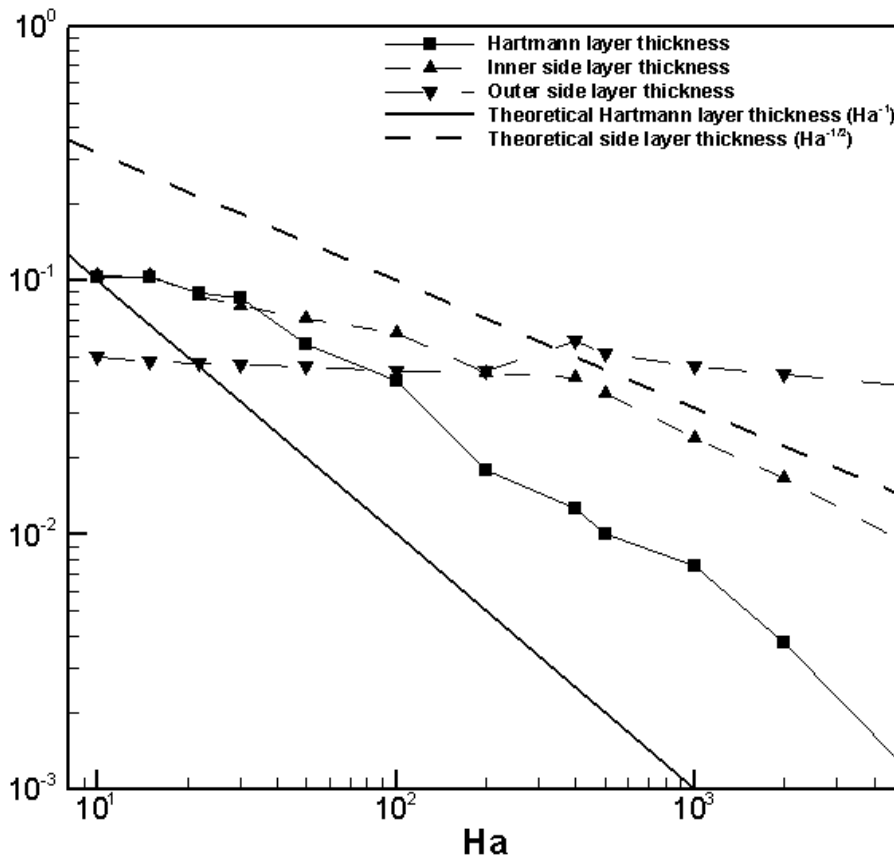
των στρωμάτων τύπου Hartmann. Μελετώντας κυρίως το Σχήμα 6.5, που απεικονίζει τις ακτινικές ταχύτητες u_r του ρευστού, προκύπτουν αποτελέσματα για το πάχος των στρωμάτων τύπου Hartmann, ενώ κυρίως από το Σχήμα 6.7, όπου παρουσιάζονται οι εφαπτομενικές ταχύτητες u_θ , μπορεί να μελετηθεί το πάχος των πλαϊνών οριακών στρωμάτων.

Πίνακας 6.2 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann, για διάφορες τιμές Ha και Re κατά την μετάβαση

Ha	Re	Upper Hartmann layer thickness	Lower Hartmann layer thickness	Inner side layer thickness	Outer side layer thickness	Theoretical Hartmann layer thickness (Ha^{-1})	Theoretical side layer thickness ($Ha^{-1/2}$)
10	1120	0,10239	0,10239	0,10417	0,04977	0,1	0,31623
15	1000	0,10239	0,10239	0,10380	0,04810	0,06667	0,25820
22	1100	0,08951	0,08951	0,08629	0,04728	0,04545	0,21320
30	1400	0,08532	0,08532	0,07870	0,04630	0,03333	0,18257
50	3100	0,05573	0,05573	0,07094	0,04577	0,02	0,14142
100	7000	0,04012	0,04012	0,06208	0,04402	0,01	0,1
200	18000	0,01788	0,01788	0,04312	0,04382	0,005	0,07071
400	55000	0,01263	0,01263	0,04128	0,05734	0,0025	0,05
500	67000	0,01003	0,01003	0,03600	0,05174	0,002	0,04472
1000	200000	0,00755	0,00755	0,02403	0,04577	0,001	0,03162
2000	450000	0,00377	0,00377	0,01676	0,04246	0,0005	0,02236
5000	1700000	0,00124	0,00124	0,00932	0,03846	0,0002	0,01414

Σύμφωνα με τις πληροφορίες για τα πάχη οριακών στρωμάτων σε ροή κοντά στη μετάβαση, που συλλέχθηκαν στον Πίνακα 6.2, προκύπτει αρχικά πως το άνω και κάτω οριακό στρώμα τύπου Hartmann είναι ίδια, ενώ το πλαϊνό οριακό στρώμα του εσωτερικού κυλινδρικού τοιχώματος έχει διαφορετικό πάχος από αυτό του εξωτερικού. Πιο συγκεκριμένα, μέχρι και την τιμή $Ha=200$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.14, το εσωτερικό πλαϊνό οριακό στρώμα είναι παχύτερο από το εξωτερικό, ενώ για $Ha>200$ το πάχος του οριακού στρώματος στο εξωτερικό κυλινδρικό τοίχωμα εμφανίζει μια απότομη άνοδο, και γίνεται παχύτερο από το εσωτερικό. Η εξήγηση βρίσκεται στα Σχήματα των ροϊκών γραμμών 6.11 και 6.12, όπου σε αυτή την τιμή του Ha , παρατηρείται ότι κοντά στα εξωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα αυξάνει ο αριθμός των δινών, επιδρώντας άμεσα στο πάχος των οριακών στρωμάτων. Καθώς αυξάνει ο αριθμός Ha σε μεγαλύτερες τιμές, το πάχος αυτό μειώνεται, μα παραμένει μεγαλύτερο από αυτό του εσωτερικού οριακού

στρώματος. Για $Ha \geq 200$, το μεγαλύτερο πάχος του στρώματος Hartmann παρατηρείται όλο και κοντύτερα προς τα εσωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα. Επίσης είναι μεγαλύτερο από το θεωρητικό πάχος Ha^{-1} , και καθώς αυξάνει ο αριθμός Ha η διαφορά αυτή μεγαλώνει. Το αντίθετο ισχύει με τα πάχη των πλαϊνών οριακών στρωμάτων, όπου αυτά είναι μονίμως μικρότερα από το θεωρητικό πάχος $Ha^{-1/2}$, ενώ καθώς αυξάνει ο αριθμός Ha , η διαφορά μειώνεται.

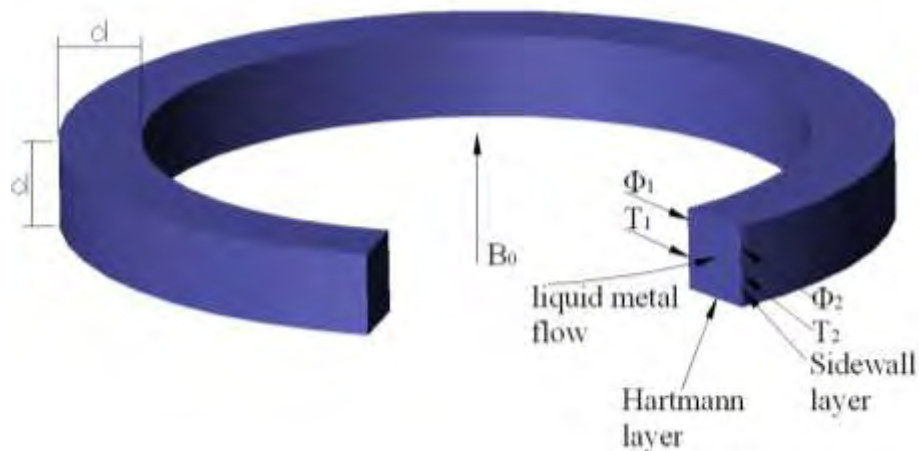


Σχήμα 6.14 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann για στρωτές ροές λίγο πριν τη μετάβαση

6.2 Γεωμετρία τοροειδούς ροής με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1

Η γεωμετρία του Σχήματος 6.15 αφορά στον τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής της εργασίας των Moresco & Alboussi re (2004). Όλες οι συνθήκες της ροής και η διατομή του αγωγού είναι ίδια με αυτή της βασικής ροής που έχει ήδη έχει περιγραφεί στην ενότητα 6.1, με μόνη διαφορά την μέση ακτίνα. Έτσι, ο λόγος της μέσης ακτίνας προς το ύψος είναι 4,5:1. Η γεωμετρία αυτή επιλέχθηκε, σε συνδυασμό με τη βασική (λόγος 1,5:1), για σύγκριση της ροής του ρευστού σε δύο διαφορετικές γεωμετρίες, με μικρή και μεγάλη ακτίνα. Η γεωμετρία άλλωστε

του Σχήματος 6.15 έχει γίνει αντικείμενο μελέτης πολλών εργασιών, κάτι που την καθιστά ενδιαφέρουσα, όπως φάνηκε και από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση.



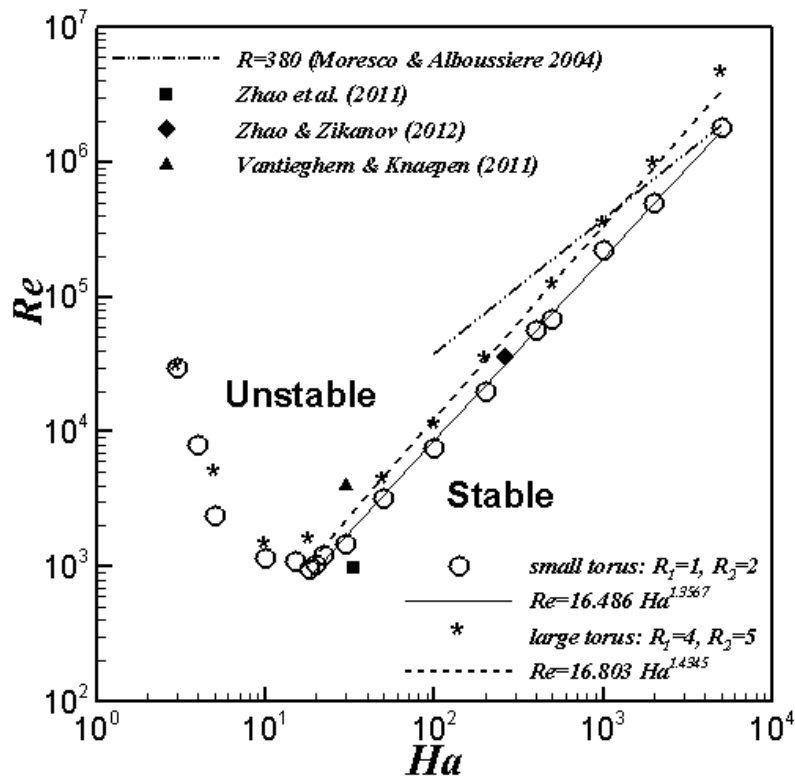
Σχήμα 6.15 Γεωμετρία τόρου με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1

Στο Σχήμα 6.16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων για τη μετάβαση της ροής στη γεωμετρία με λόγο 4,5:1, και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα για την βασική γεωμετρία λόγου 1,5:1, καθώς και με άλλες εργασίες που κρίθηκαν σημαντικές. Οι πρόσφατες εργασίες των Zhao et al. (2011), Vantieghem & Knaepen (2011), Zhao & Zikanov (2012) εμφανίζουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα που βρίσκονται σε συμφωνία με τις προσομοιώσεις της παρούσας διατριβής. Ειδικά στην εργασία των Zhao & Zikanov (2012), όπου μελετάται η ροή για $Ha=260$, παρατηρείται ότι η διαταραχές ξεκινούν για $Re=35400$, ενώ η μετάβαση πρωτοεμφανίζεται στα πλαϊνά οριακά στρώματα. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα αποτελέσματα των υπόλοιπων εργασιών που εμφανίζονται στο ίδιο Σχήμα 6.16. Οι εργασίες αυτές διαφέρουν από τις παρούσες προσομοιώσεις κυρίως λόγω της διαφορετικής γεωμετρίας και των συνθηκών, ωστόσο αποτελούν και αυτές τμήμα των λιγοστών εργασιών που έχουν δημοσιευθεί για μαγνητικά πεδία με $Ha>100$.

Πίνακας 6.3 Κρίσιμες τιμές $Re-Ha$ για μετάβαση σε τυρβώδη ροή στη μεγάλη γεωμετρία

Ha	3	5	10	18	50	100	200	500	1000	2000	5000
Re	28000	4700	1500	1450	4050	10500	32000	112000	320000	900000	4200000
R	9333.3	940	150	80.55	81	105	160	224	320	450	840

Όπως αναφέρθηκε και στη μικρή γεωμετρία, επειδή δεν υπάρχουν εργασίες για σύγκριση με αποτελέσματα για $Ha>500$, υπάρχει μια επιφύλαξη που μπορεί να καλυφθεί με μελλοντικές προσομοιώσεις σε ισχυρότερο πλέγμα, κάτι που απαιτεί και πολύ μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.



Σχήμα 6.16 Κρίσιμοι αριθμοί Reynolds για μετάβαση της ροής στον τοροειδή αγωγό με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1 για διάφορες τιμές του Ha , και σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές για τον αγωγό με λόγο 1,5:1

Στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζονται οι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds στους οποίους η ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη, για κάθε αριθμό Ha στη μεγάλη γεωμετρία. Είναι ενδιαφέρον ότι μέχρι την τιμή $Ha=10$, ο αριθμός Re που απαιτείται για την εμφάνιση τύρβης είναι μεγάλος και μειώνεται, ενώ για τιμές $Ha>10$ αρχίζει πάλι να αυξάνει. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στην περίπτωση της μικρότερης γεωμετρίας (μέχρι την τιμή $Ha=18$), γεγονός που αποδίδεται στο ότι για μικρές τιμές Ha , η δύναμη Lorentz εξισορροπείται από τις ιξώδεις δυνάμεις, ενώ για τις μεγαλύτερες τιμές του Ha , η δύναμη Lorentz εξισορροπείται από τις δυνάμεις αδράνειας.

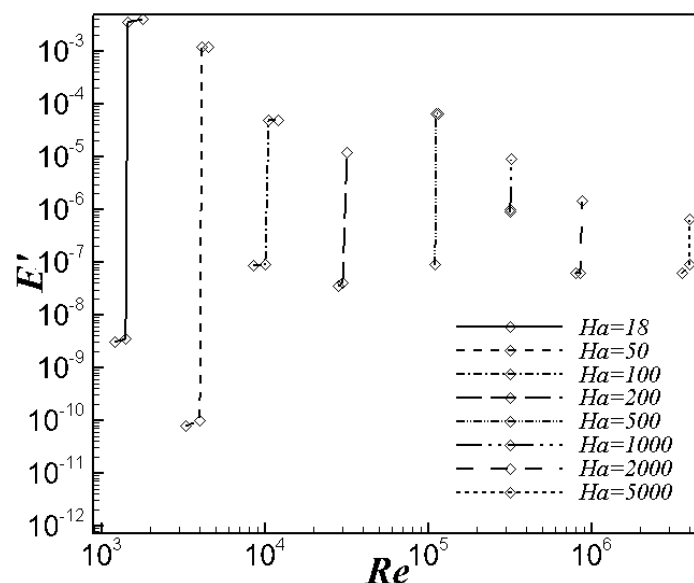
Η γραμμή που χαρακτηρίζει τις κρίσιμες τιμές Re για κάθε τιμή Ha (βλέπε Πίνακα 6.3) για την μεγάλη γεωμετρία με λόγο 4,5:1 προσομοιώνεται από την εξίσωση:

$$Re = 16.803 Ha^{1.4345} \quad (6.2)$$

Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να συγκριθεί με την αντίστοιχη εξίσωση 6.1 για την μικρή γεωμετρία με λόγο 1,5:1, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 6.1. Στη ροή με την μεγαλύτερη γεωμετρία, παρατηρείται ότι η μετάβαση συμβαίνει για μεγαλύτερες τιμές Re σε κάθε τιμή του Ha . Ωστόσο η εξίσωση που προσεγγίζει τη

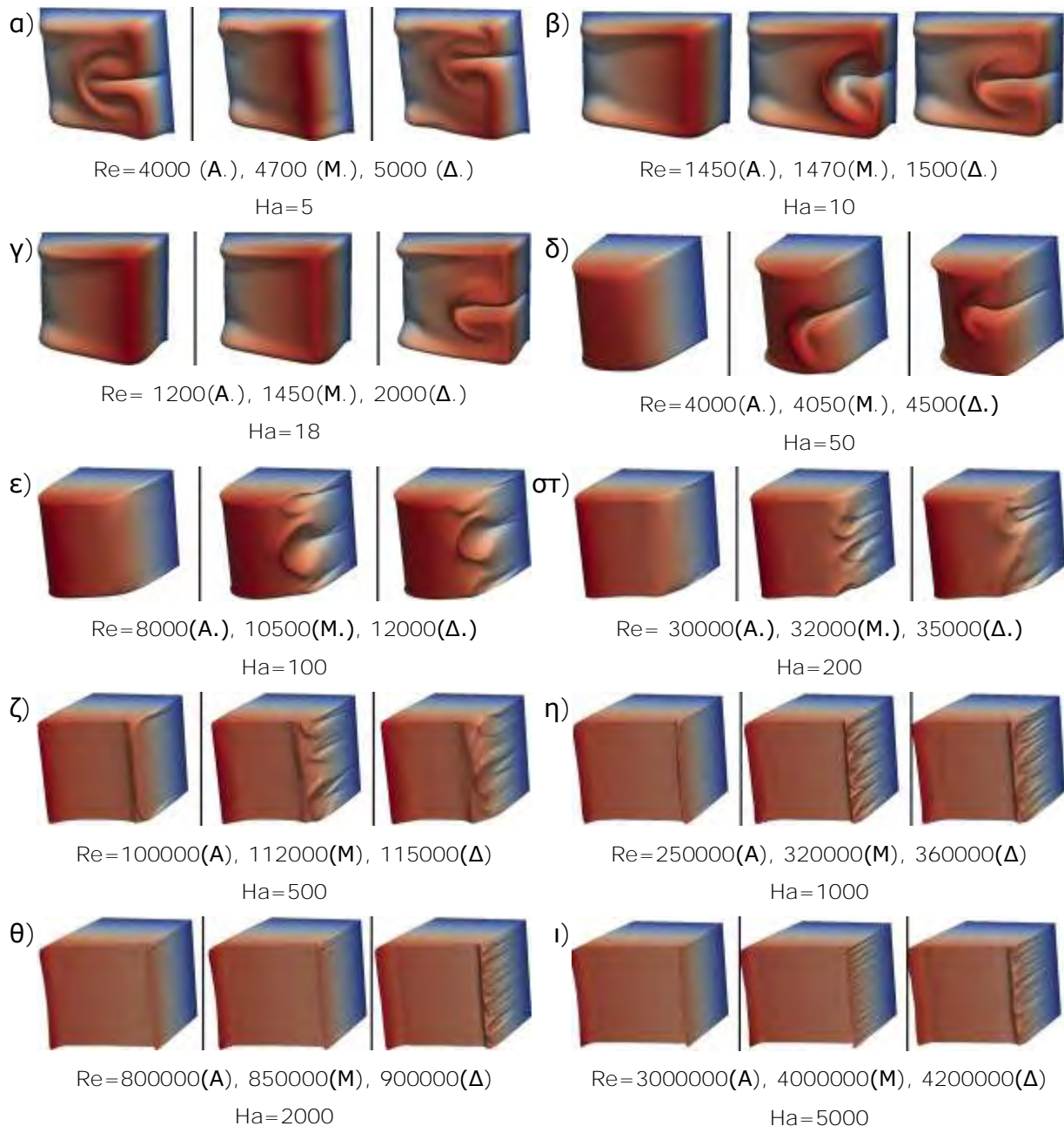
μετάβαση στην μεγάλη γεωμετρία δημιουργεί παράλληλη καμπύλη με αυτή της μικρότερης γεωμετρίας, αναδεικνύοντας την αντιστοιχία των δύο περιπτώσεων.

Στο Σχήμα 6.17 είναι εμφανής η αύξηση της κινητικής ενέργειας για τιμές Re που προσεγγίζουν την τυρβώδη ροή στη μεγάλη γεωμετρία τόρου (λόγος 4,5:1). Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν για τη γεωμετρία με τη μικρότερη ακτίνα στο Σχήμα 6.1. Ενώ η κινητική ενέργεια για στρωτή ροή κυμαίνεται στα επίπεδα τιμών 10^{-10} - 10^{-7} , καθώς ο αριθμός Reynolds προσεγγίζει την κρίσιμη τιμή, η κινητική ενέργεια αυξάνει απότομα στα επίπεδα 10^{-3} - 10^{-5} , όπου η αύξηση είναι 2 ως 7 τάξεις μεγέθους, ανάλογα με την υπό μελέτη περίπτωση.



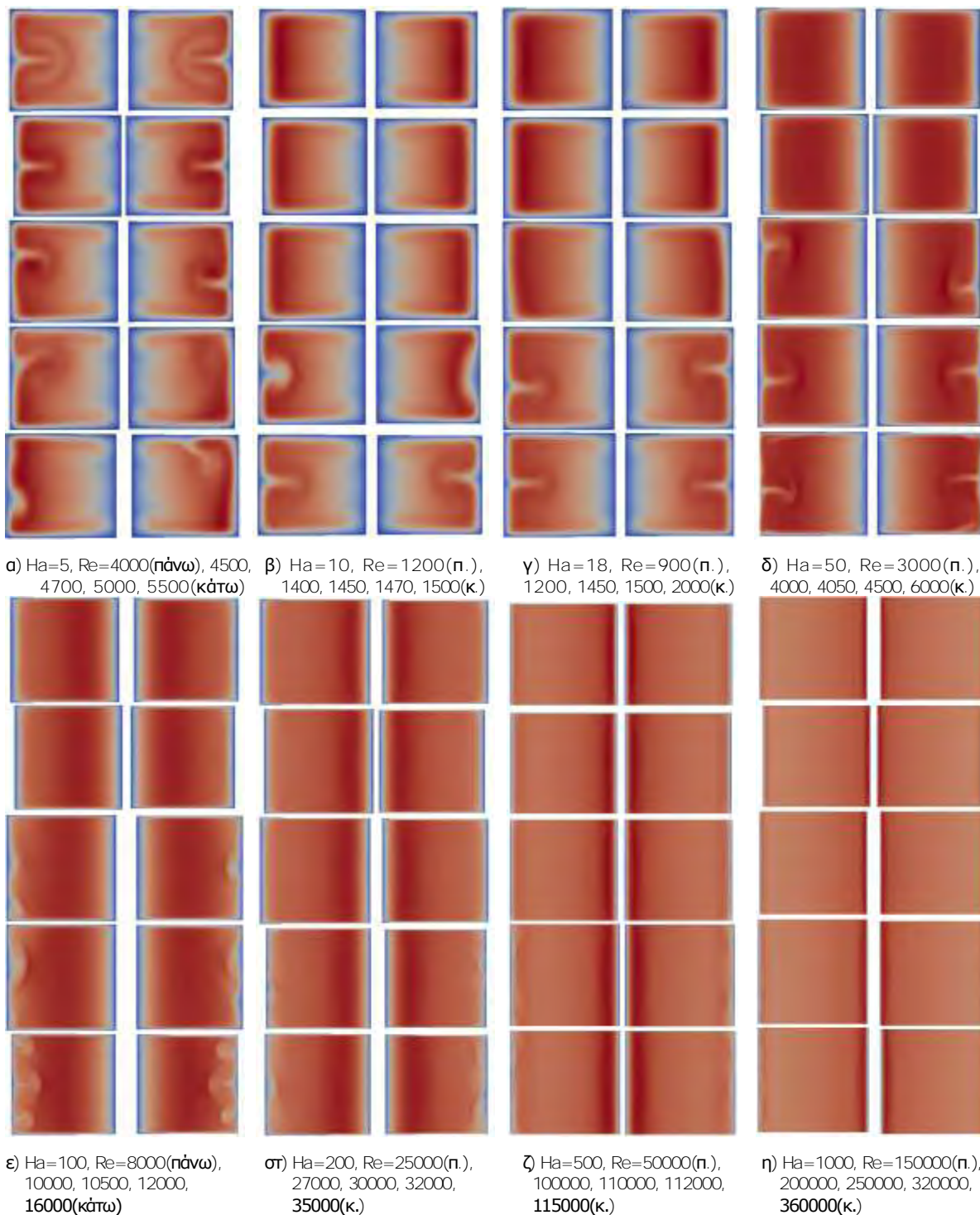
Σχήμα 6.17 Μεταβολή κινητικής ενέργειας διαταραχών με τον αριθμό Re για διάφορες τιμές Ha στη μεγάλη γεωμετρία που αναδεικνύουν την ανάπτυξη των διαταραχών

Στο Σχήμα 6.18 παρουσιάζεται το μέτρο της ταχύτητας σε τρισδιάστατη απεικόνιση. Σε όλες τις περιπτώσεις του Σχήματος φαίνεται αρχικά η ομοιομορφία της στρωτής ροής (αριστερή εικόνα με την χαμηλή τιμή Re) και η δημιουργία των διαταραχών κατά την μετάβαση σε τύρβη (μεσαία και δεξιά εικόνα). Στις περιπτώσεις των μικρότερων τιμών Hartmann ($Ha \leq 100$), η αύξηση του αριθμού Reynolds σε κρίσιμες τιμές έχει ως συνέπεια τη δημιουργία μεγάλων δινών και τη μεγάλη μεταβολή της ταχύτητας από το εσωτερικό κυλινδρικό τοίχωμα προς το εξωτερικό. Καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει, η ταχύτητα δείχνει ηπιότερες μεταβολές μέσα στον αγωγό, παραμένοντας ίδια σε μεγαλύτερο ποσοστό της διατομής. Ενώ στους χαμηλούς Ha τα πλαϊνά οριακά στρώματα καταλαμβάνουν μεγάλο τμήμα του αγωγού, στους υψηλούς ($Ha > 100$) λεπταίνουν αρκετά.

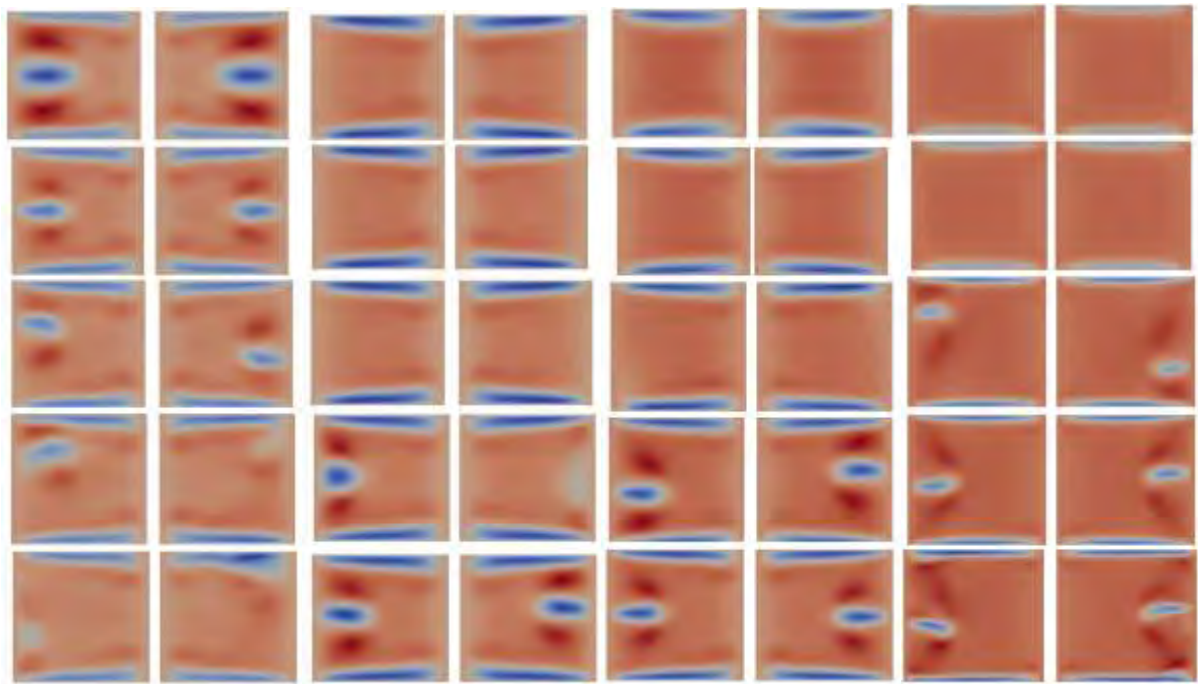


Σχήμα 6.18 Τρισδιάστατη απεικόνιση μέτρου ταχύτητας σε στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), και τυρβώδη (δεξιά) ροή για διάφορες τιμές Ha

Επίσης, δημιουργούνται περισσότερες δίνες μικρότερου μεγέθους που καταλαμβάνουν κυρίως το μεγαλύτερο ποσοστό του πλαινίου οριακού στρώματος. Γενικά υπάρχουν ομοιότητες με το Σχήμα 6.3, όπου παρουσιάζεται η περίπτωση της γεωμετρίας με τη μικρότερη ακτίνα (λόγος 1,5:1). Μια σημαντική διαφορά, που οφείλεται στις μειωμένες φυγόκεντρες δυνάμεις της μεγάλης γεωμετρίας, είναι η εμφάνιση του M-προφίλ ταχύτητας στο Σχήμα 6.18, δείχνοντας πως η δευτερεύουσα ροή έχει γίνει πολύ ισχυρή για $Ha > 200$.



Σχήμα 6.19 Κατανομή στιγμιαίων τιμών του μέτρου ταχύτητας σε αντιδιαμετρικές τομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω

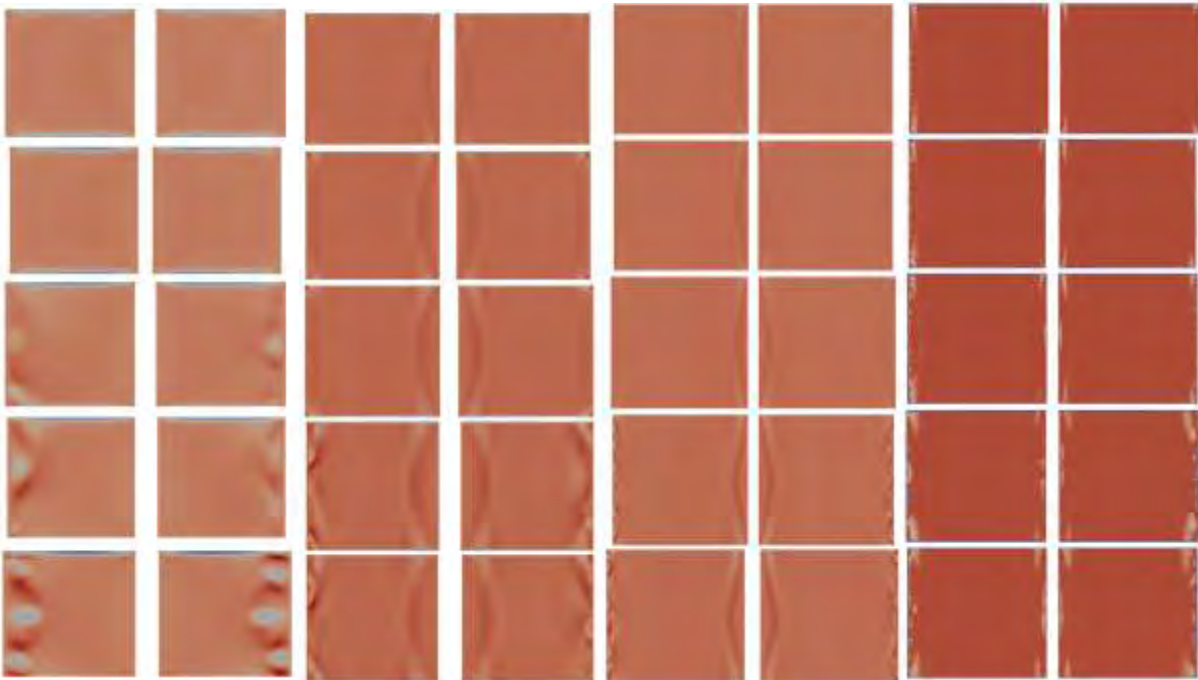


α) $Ha=5$, $Re=4000$ (πάνω), 4500, 4700, 5000, 5500(κάτω)

β) $Ha=10$, $Re=1200$ (π.), 1400, 1450, 1470, 1500(κ.)

γ) $Ha=18$, $Re=900$ (π.), 1200, 1450, 1500, 2000(κ.)

δ) $Ha=50$, $Re=3000$ (π.), 4000, 4050, 4500, 6000(κ.)



ε) $Ha=100$, $Re=8000$ (πάνω), 10000, 10500, 12000, 16000(κάτω)

σ) $Ha=500$, $Re=50000$ (π.), 100000, 110000, 112000, 115000(κ.)

ζ) $Ha=1000$, $Re=50000$ (π.), 200000, 250000, 320000, 360000(κ.)

η) $Ha=5000$, $Re=3000000$ (π.), 3400000, 4000000, 4200000, 4500000(κ.)

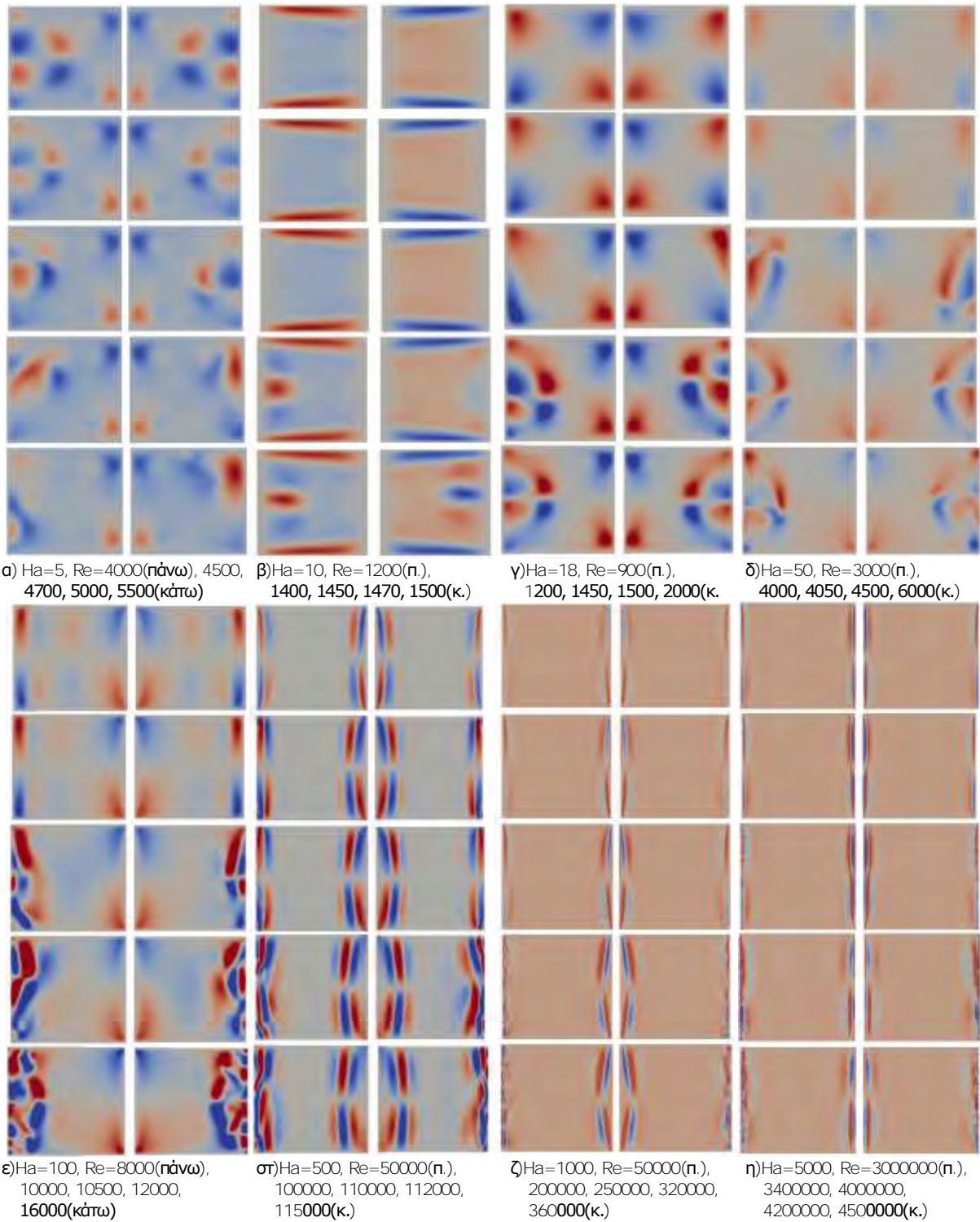
Σχήμα 6.20 Κατανομή της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού, για διάφορες τιμές Ha και Re . Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω

Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν από το Σχήμα 6.19, όπου απεικονίζεται το μέτρο της ταχύτητας για διάφορες τιμές των Ha και Re . Σε κάθε τμήμα του σχήματος αυτού, παρουσιάζονται αντιδιαμετρικές διατομές του αγωγού,

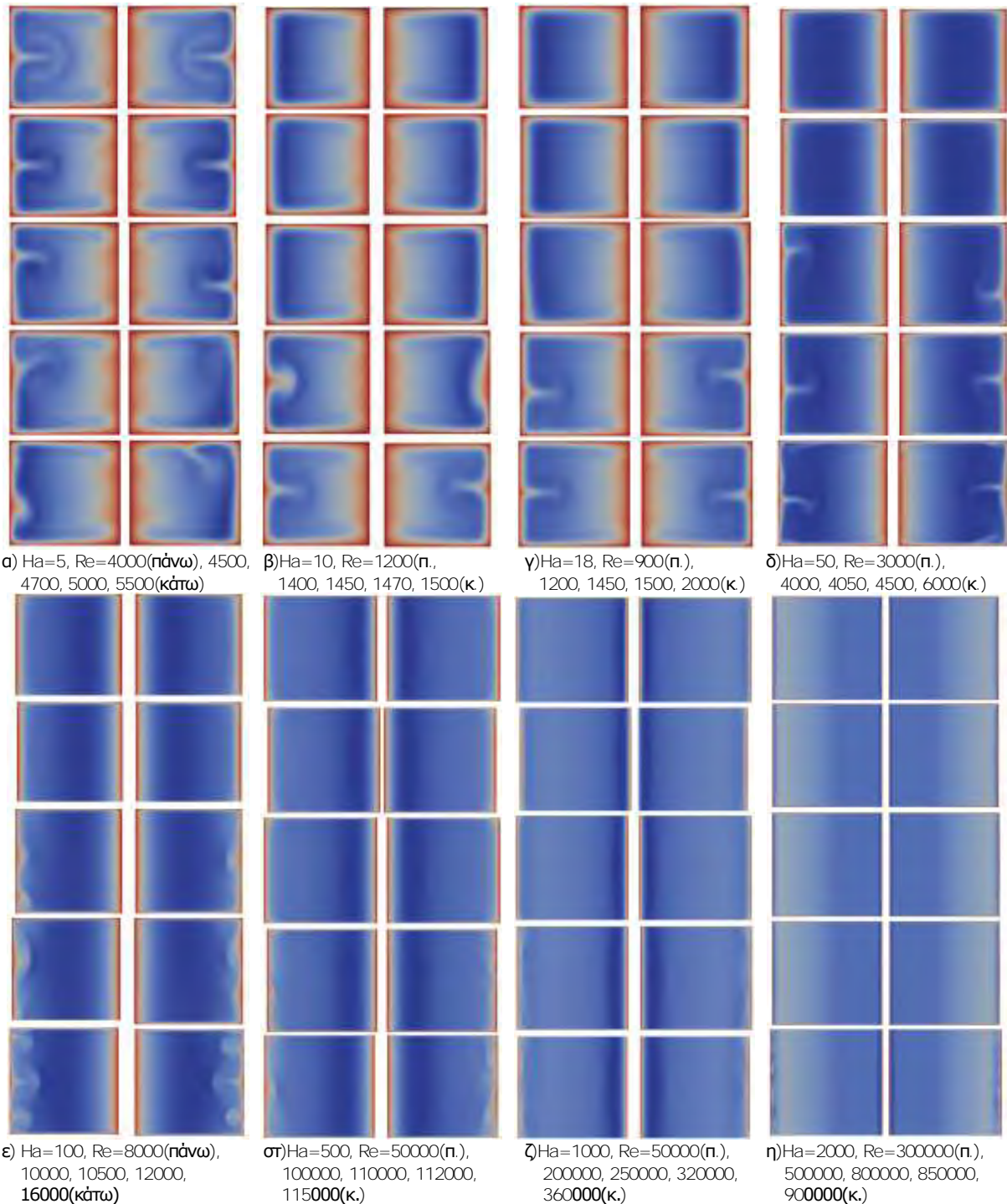
δείχνοντας την συμμετρία της στρωτής ροής στις χαμηλές τιμές Re , που φαίνεται στις επάνω εικόνες του Σχήματος. Στις υψηλότερες τιμές Re δημιουργούνται ασύμμετρες διαταραχές, που φαίνεται στις κάτω τρεις εικόνες μετάβασης κάθε περίπτωσης του Σχήματος. Είναι εμφανές επίσης, πως σε όλες τις περιπτώσεις η έναρξη των διαταραχών παρατηρείται πρώτα στα οριακά στρώματα, στο εξωτερικό πλαϊνό τοίχωμα του αγωγού.

Στο Σχήμα 6.20 παρουσιάζονται οι κατανομές της ακτινικής ταχύτητας του ρευστού σε αντιδιαμετρικές διατομές, για διάφορες τιμές Ha και Re . Το Σχήμα δείχνει, στα δύο επάνω τμήματα κάθε περίπτωσης, τη στρωτή ροή για χαμηλές τιμές Re , και την έναρξη διαταραχών για υψηλότερες που οδηγούν σε τύρβη, στα τρία κάτω τμήματα. Είναι φανερό ότι διαταραχές εμφανίζονται στα στρώματα Hartmann πιο κοντά προς τα εξωτερικά τοιχώματα, όπως τονίστηκε και στο Σχήμα 6.19. Σε χαμηλούς αριθμούς $Ha \leq 50$, παρατηρούνται οι δίνες Taylor, οι οποίες σταδιακά αποσταθεροποιούνται και οδηγούν στη μεταβατική φάση της ροής.

Στο Σχήμα 6.21 παρουσιάζονται κατανομές της κατακόρυφης ταχύτητας u_z , σε δύο αντιδιαμετρικές τομές του τοροειδούς αγωγού. Για $Ha > 50$ και καθώς ο αριθμός Ha αυξάνει, η ροή παρουσιάζει κινητικότητα πλησιέστερα προς τα πλαϊνά τοιχώματα. Αυτό ισχύει ακόμη και για τους χαμηλούς αριθμούς Re της στρωτής ροής, ενώ σε χαμηλούς αριθμούς Ha η ταχύτητα του ρευστού επηρεάζεται όχι μόνο κοντά στα οριακά στρώματα, αλλά και σε πιο κεντρικά σημεία του αγωγού.



Σχήμα 6.21 Κατανομή κατακόρυφης ταχύτητας u_z σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου. Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω



Σχήμα 6.22 Κατανομή εφαπτομενικής ταχύτητας u_θ σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου. Για κάθε Ha οι τιμές του Re δηλώνονται από πάνω προς τα κάτω

Στα Σχήματα 6.22 και 6.23, όπου παρουσιάζεται η εφαπτομενική ταχύτητα στα επίπεδα $r-z$ και $r-\theta$, αντίστοιχα, είναι εμφανής η παρουσία των δινών Taylor σε χαμηλές τιμές Re , αλλά και η δημιουργία μιας κεντρικής δίνης που ξεκινά από το μέσο των εξωτερικών πλαϊνών τοιχωμάτων και μετατοπίζεται στα ενδότερα. Αυτό συμβαίνει όταν η ροή είναι στρωτή, ενώ με την αύξηση του Re , οι δίνες Taylor χάνουν τη συνέχεια και συμμετρία τους. Επίσης, η κεντρική δίνη χάνει τη

συμμετρία της σε σχέση με την αντιδιαμετρική της, καθώς η μια μετακινείται κατακόρυφα. Τα ενδιαφέροντα αυτά φαινόμενα ατονούν σε υψηλές τιμές Ha , και στη θέση τους εμφανίζονται διαταραχές που καταλαμβάνουν μικρότερο χώρο, ως αποτέλεσμα του ισχυρού μαγνητικού πεδίου που επιβραδύνει την ροή.



α) $Ha=5$, $Re=4000, 4500, 4700, 5000, 5500$

β) $Ha=10$, $Re=1200, 1400, 1450, 1470, 1500$



γ) $Ha=18$, $Re= 900, 1200, 1450, 1500, 2000$

δ) $Ha=50$, $Re=3000, 4000, 4050, 4500, 6000$



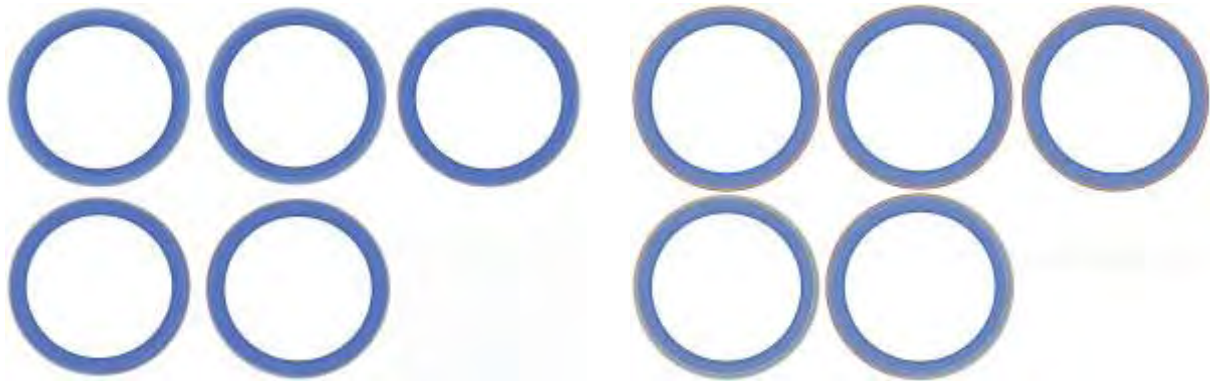
ε) $Ha=2000$, $Re=3x, 5x, 8x, 8.5x, 9x10^5$

στ) $Ha=5000$, $Re=3x, 3.4x, 4x, 4.2x, 4.5x10^6$

Σχήμα 6.23 Κατανομή εφαπτομενικής ταχύτητα u_θ σε αξονικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Για κάθε Ha οι τιμές του Re αυξάνονται από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά

Το Σχήμα 6.24 δείχνει την κατανομή της κατακόρυφης στροβιλότητας του ρευστού στο μέσο ύψος της τοροειδούς διατομής του αγωγού. Παράλληλα, η εφαπτομενική συνιστώσα της στροβιλότητας αποτυπώνεται στο Σχήμα 6.25, στις αντιδιαμετρικές διατομές του αγωγού, όπου για $Ha=5$ παρατηρείται ένα ζεύγος δινών Taylor στη στρωτή περιοχή ροής. Αυτές οι δίνες δεν συνιστούν τύρβη, αλλά

συμμετρικές διακυμάνσεις της στρωτής ροής, οι οποίες εξελίσσονται και σταδιακά οδηγούν τη ροή σε μετάβαση.



α) $Ha=5$, $Re=4000, 4500, 4700, 5000, 5500$

β) $Ha=10$, $Re=1200, 1400, 1450, 1470, 1500$



γ) $Ha=18$, $Re=900, 1200, 1450, 1500, 2000$

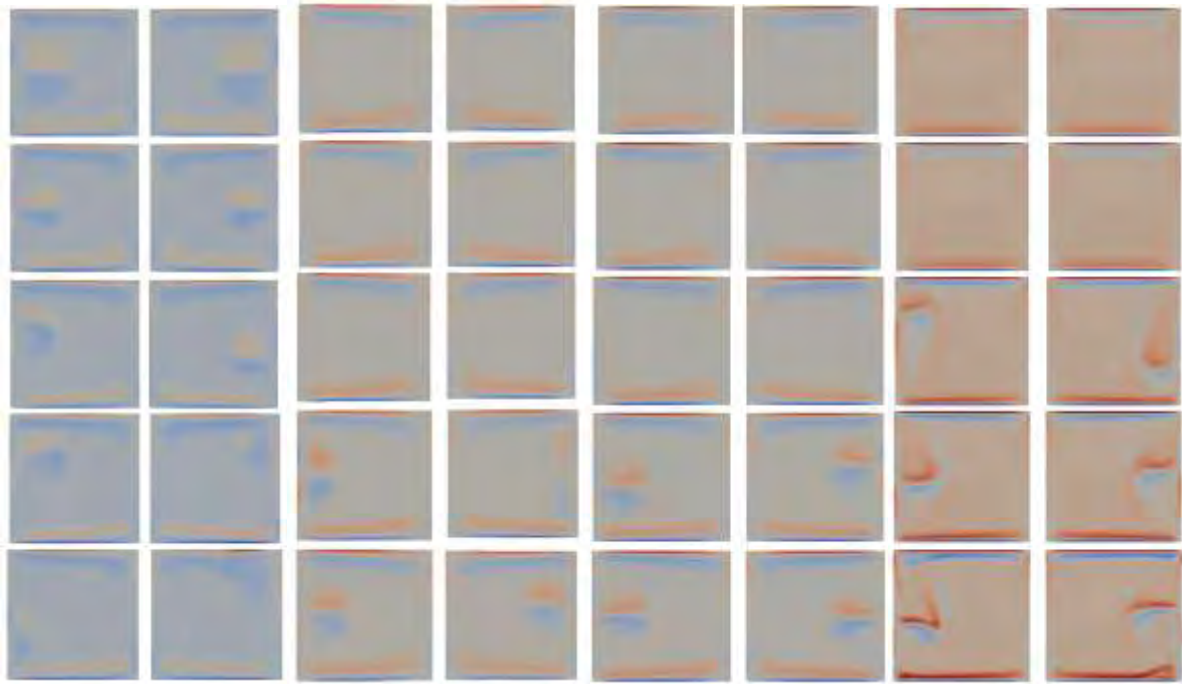
δ) $Ha=50$, $Re=3000, 4000, 4050, 4500, 6000$



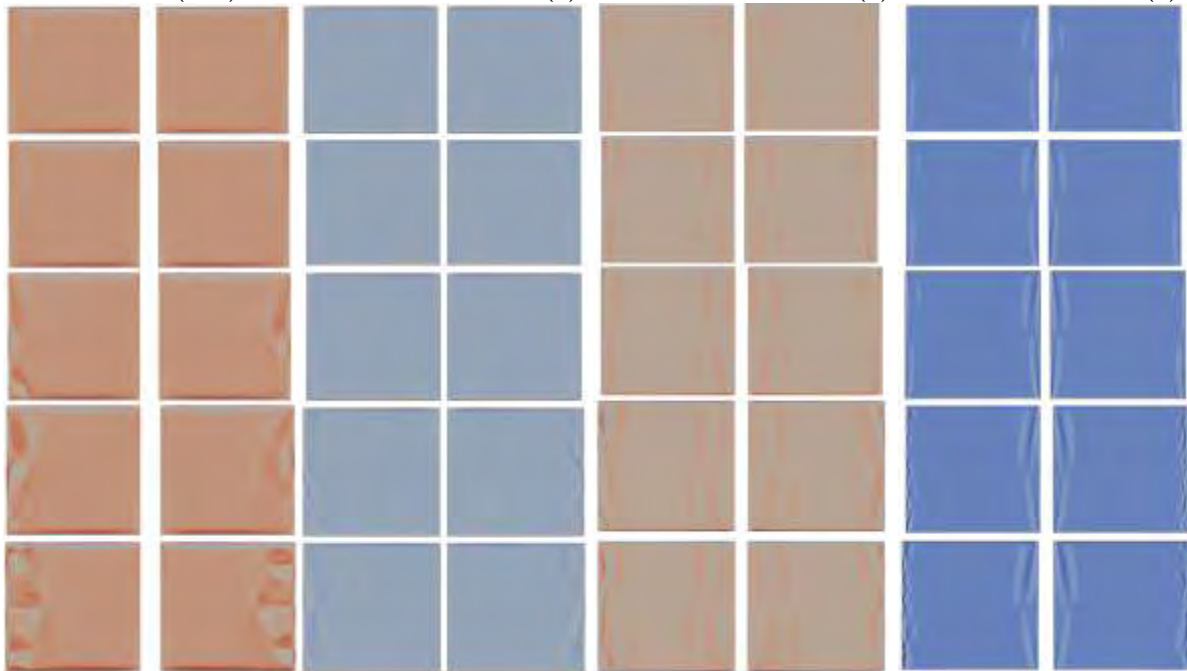
ε) $Ha=2000$, $Re=300000, 500000, 800000, 850000, 900000$

Σχήμα 6.24 Κατανομή κατακόρυφης στροβιλότητας σε αξονικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. Για κάθε Ha , οι αριθμοί Re αυξάνονται από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά

Το γεγονός ότι το ισχυρό μαγνητικό πεδίο καταστέλλει τις μεγάλες μεταβολές ταχυτήτων, φαίνεται και στα Σχήματα 6.23 και 6.24. Στα Σχήματα 6.23ε,στ και 6.24ε η έντονη επίδραση του μαγνητικού πεδίου έχει την τάση να εξομαλύνει τη ροή. Η συμμετρία χάνεται όταν ο αριθμός Reynolds αυξηθεί αρκετά, καθώς το μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί πλέον να υπερνικήσει τις δυνάμεις αδράνειας.



α) $Ha=5$, $Re=4000$ (πάνω), 4500, 4700, 5000, 5500(κάτω) β) $Ha=10$, $Re=1200$ (π.), 1400, 1450, 1470, 1500(κ.) γ) $Ha=18$, $Re=900$ (π.), 1200, 1450, 1500, 2000(κ.) δ) $Ha=50$, $Re=3000$ (π.), 4000, 4050, 4500, 6000(κ.)



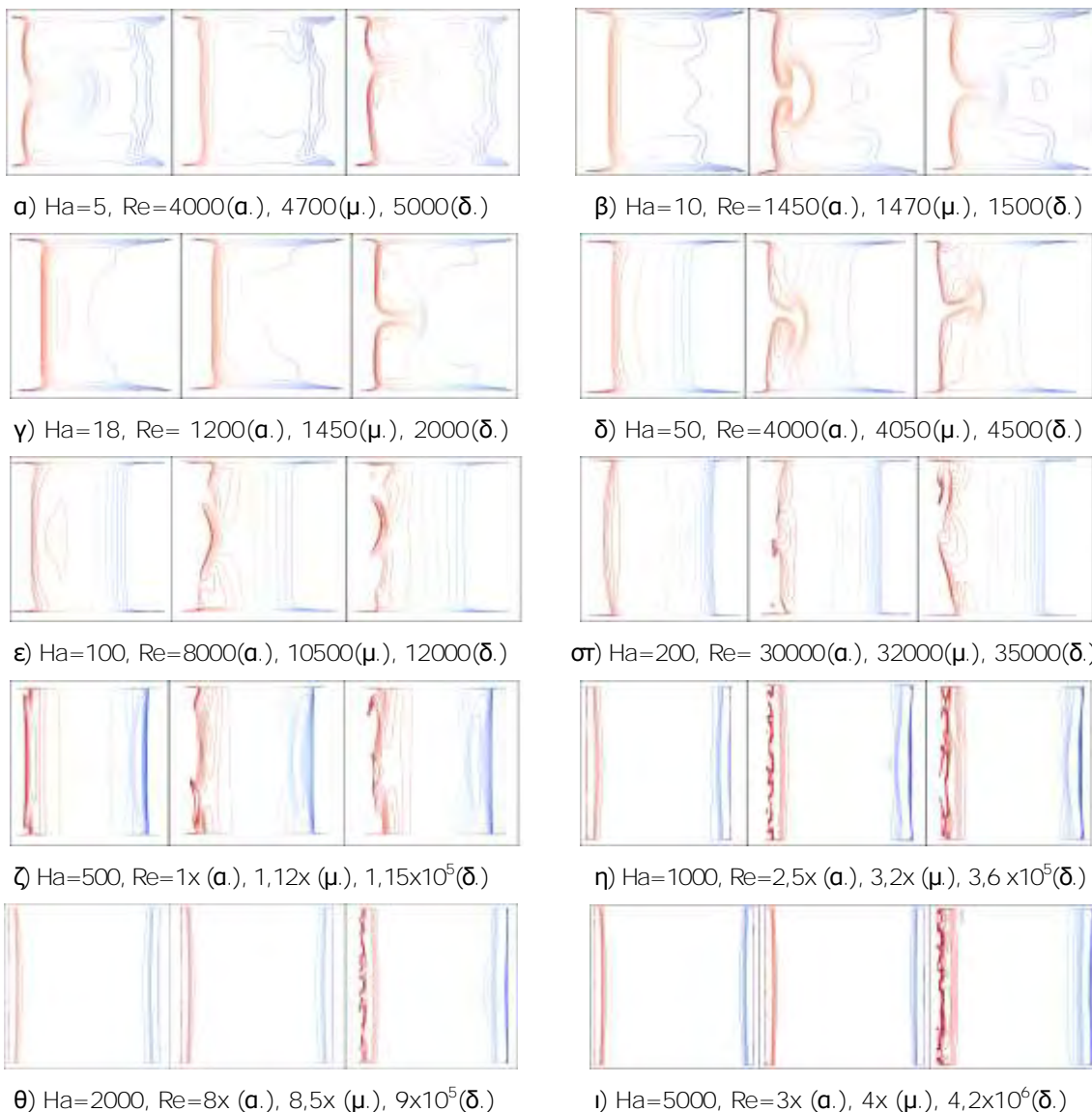
ε) $Ha=100$, $Re=8000$ (πάνω), 10000, 10500, 12000, 16000(κάτω) στ) $Ha=200$, $Re=25000$ (π.), 27000, 30000, 32000, 35000(κ.) ζ) $Ha=500$, $Re=50000$ (π.), 100000, 110000, 112000, 115000(κ.) η) $Ha=1000$, $Re=150000$ (π.), 200000, 250000, 320000, 360000(κ.)

Σχήμα 6.25 Κατανομή αζιμούθιας στροβιλότητας σε αντιδιαμετρικές διατομές του τόρου.

Για κάθε Ha οι αριθμοί Re αυξάνονται από πάνω προς τα κάτω

Γενικά οι παρατηρήσεις που έγιναν εδώ για τα αποτελέσματα της μεγάλης γεωμετρίας, βρίσκονται σε συμφωνία με αυτές που αντιστοιχούν στη μικρή γεωμετρία. Η κυριότερη διαφορά είναι ότι η μετάβαση και οι σταδιακές αλλαγές

στη συμπεριφορά της ροής, από στρωτή μέχρι την εμφάνιση τύρβης, συμβαίνουν για μεγαλύτερες τιμές Ha στην περίπτωση της μεγαλύτερης γεωμετρίας.

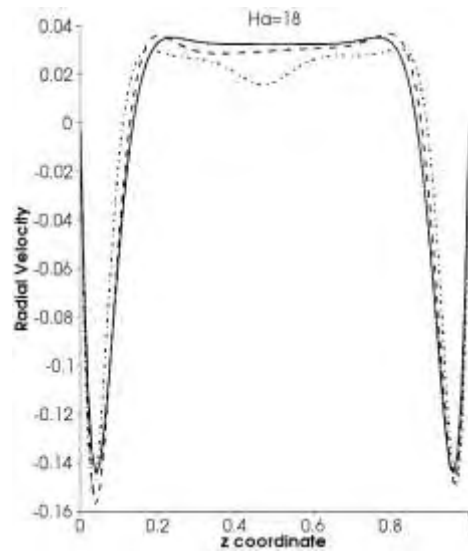
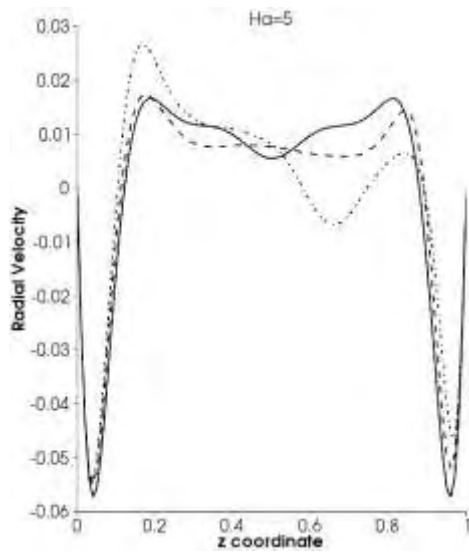


Σχήμα 6.26 Κατανομή αξονικής στροβιλότητας του τόρου, επίπεδο r - z . Για κάθε Ha , ροή στρωτή (αριστερά), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (δεξιά)

Οι κατανομή της αξονικής στροβιλότητας που εμφανίζεται στο Σχήμα 6.26, και η τρισδιάστατη απεικόνισή της στο μισό τόρο που φαίνεται στο Σχήμα 6.27, συμφωνούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την μικρότερη γεωμετρία. Δείχνουν αρχικά την συμμετρία της στρωτής ροής, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα από τα τρία κάθε υποπερίπτωσης των Σχημάτων 6.26 και 6.27.

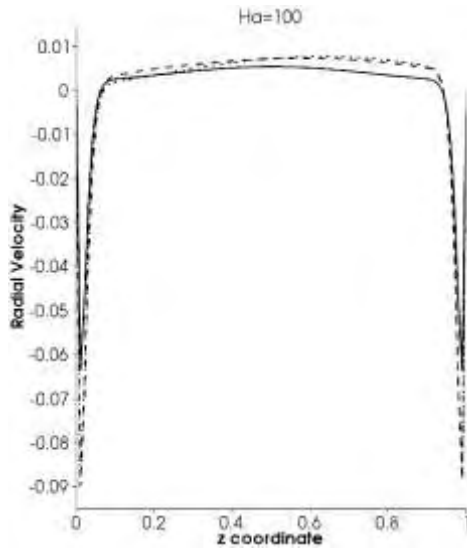
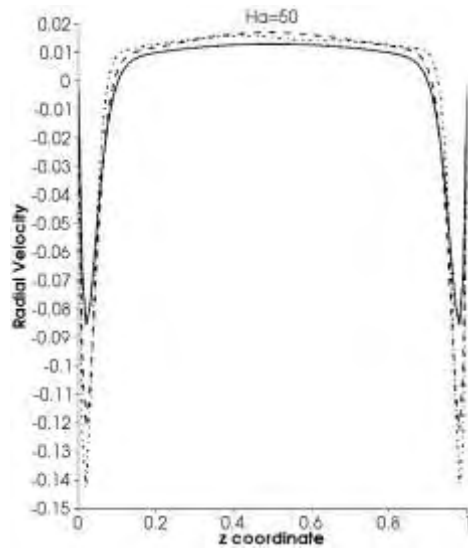


Σχήμα 6.27 Τρισδιάστατη απεικόνιση αξονικής στροβιλότητας.
Ροή στρωτή (άνω), μεταβατική (μέσο), τυρβώδης (κάτω)



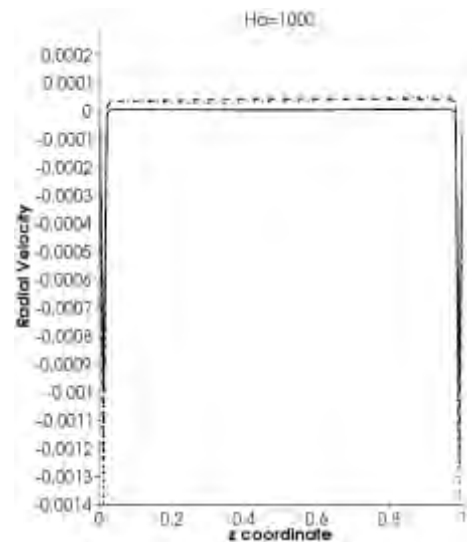
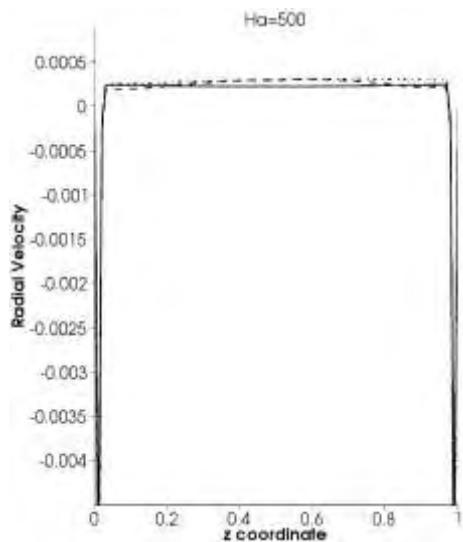
α) Ha=5, Re=4500—, 4700--, 5000-.-

β) Ha=18, Re= 1200—, 1450--, 2000-.-



γ) Ha=50, Re=3000—, 4050--, 6000-.-,

δ) Ha=100, Re=8000—, 10500--, 12000-.-



ε) Ha=500, Re=10000—, 112000--, 115000-.-

ζ) Ha=1000, Re=250000—, 320000--, 360000-.-

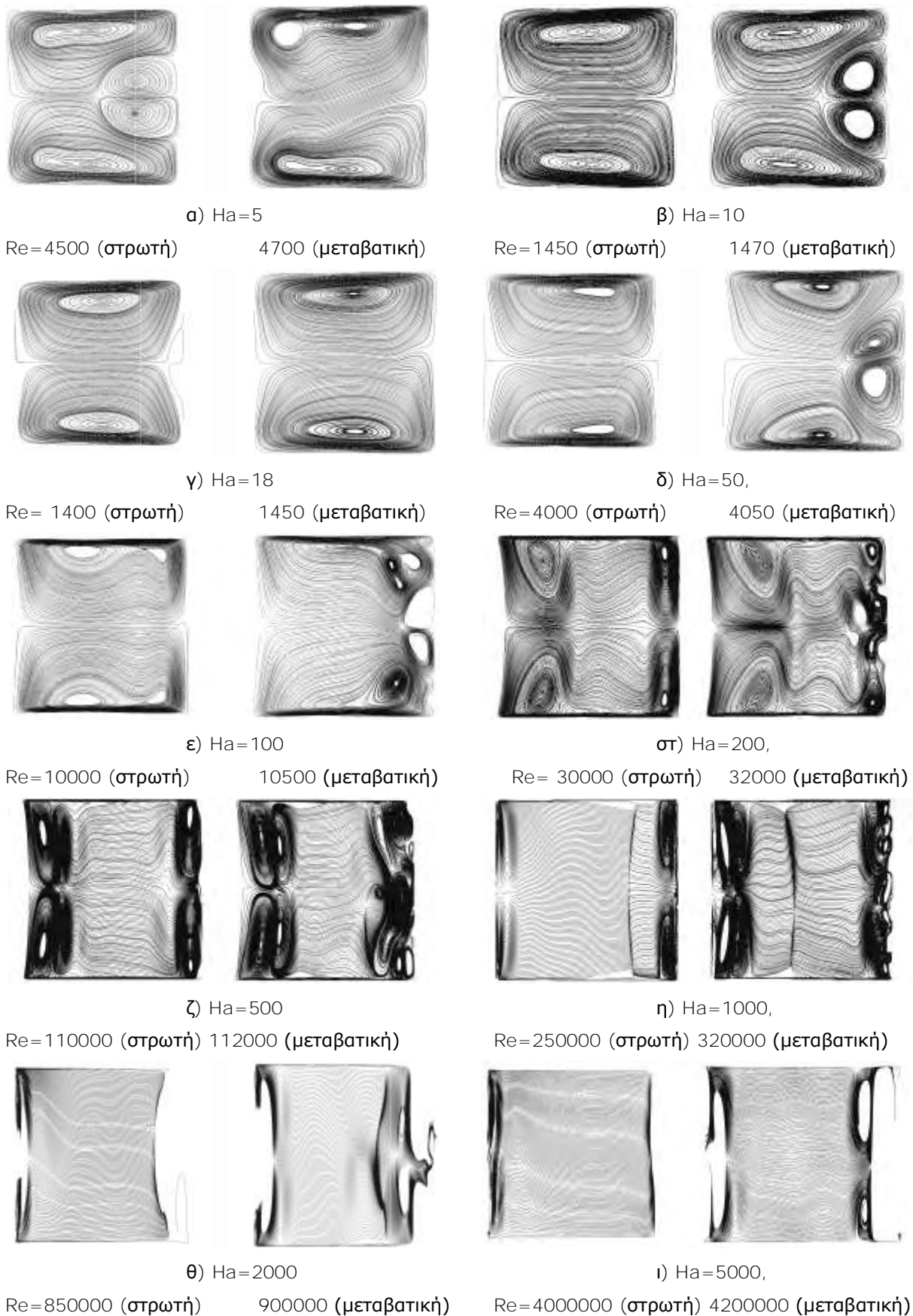
Σχήμα 6.28 Κατανομή ακτινικής ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση z.
Ροή στρωτή (—), μεταβατική (--), τυρβώδης (-.-)

Κατά τη μεταβατική ροή, όπως δείχνει το μεσαίο γράφημα του Σχήματος 6.27, η ροή αποκτά πολύπλοκη μορφή, χάνει τη συμμετρία της και εμφανίζονται απροσδιόριστες διαταραχές. Καθώς αυξάνει ο Ha , η πολυπλοκότητα των ισοϋψών ατονεί και η έντονα καμπυλωτή δομή αντικαθίσταται από σχεδόν ευθύγραμμα τμήματα. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στην μικρότερη γεωμετρία, με βασική διαφορά την μετάβαση σε χαμηλότερες τιμές Ha .

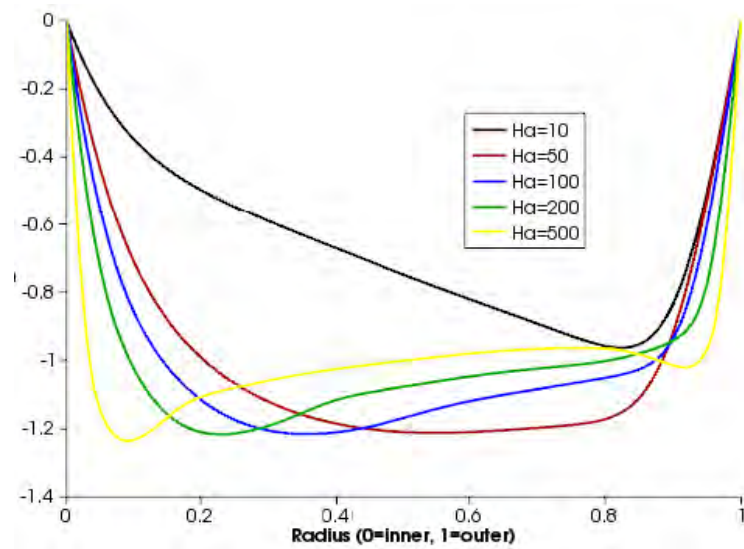
Στο Σχήμα 6.28, όπου παρουσιάζονται κατανομές της ακτινικής ταχύτητας u_r του ρευστού στην κατακόρυφη διεύθυνση z , παρατηρείται ότι στις χαμηλές τιμές του Ha , η ταχύτητα εμφανίζει πολύπλοκες κατανομές. Επίσης εμφανίζει μια μέγιστη τιμή κοντά στα πλαϊνά τοιχώματα. Με την αύξηση του μαγνητικού πεδίου, η ταχύτητα εξομαλύνεται και η κατανομή της γίνεται πιο επίπεδη. Σε όλες τις περιπτώσεις του σχήματος, η αύξηση του αριθμού Reynolds ενισχύει την ανάπτυξη διαταραχών και τις διακυμάνσεις στην κατανομή ταχυτήτων.

Οι ροϊκές γραμμές της δευτερογενούς ροής σε στρωτή και μεταβατική ροή που απεικονίζονται στο Σχήμα 6.29, προκύπτουν από την ολοκλήρωση της ταχύτητας με τη μέθοδο Runge-Kutta. Το Σχήμα αποδεικνύει ότι σε χαμηλές τιμές Ha , μια ελάχιστη μεταβολή του αριθμού Reynolds μπορεί να αλλάξει καθοριστικά τη συμπεριφορά του ρευστού, ενώ σε ισχυρότερα μαγνητικά πεδία η αντίστοιχη μεταβολή του Re πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη. Για παράδειγμα, για $Ha=18$, αύξηση του Re κατά μόλις 3% προκαλεί τύρβη, ενώ για $Ha=500$, απαιτείται αύξηση του Re μέχρι 30%, για να αυξηθούν οι τιμές της κινητικής ενέργειας των διαταραχών και να εμφανισθεί τύρβη.

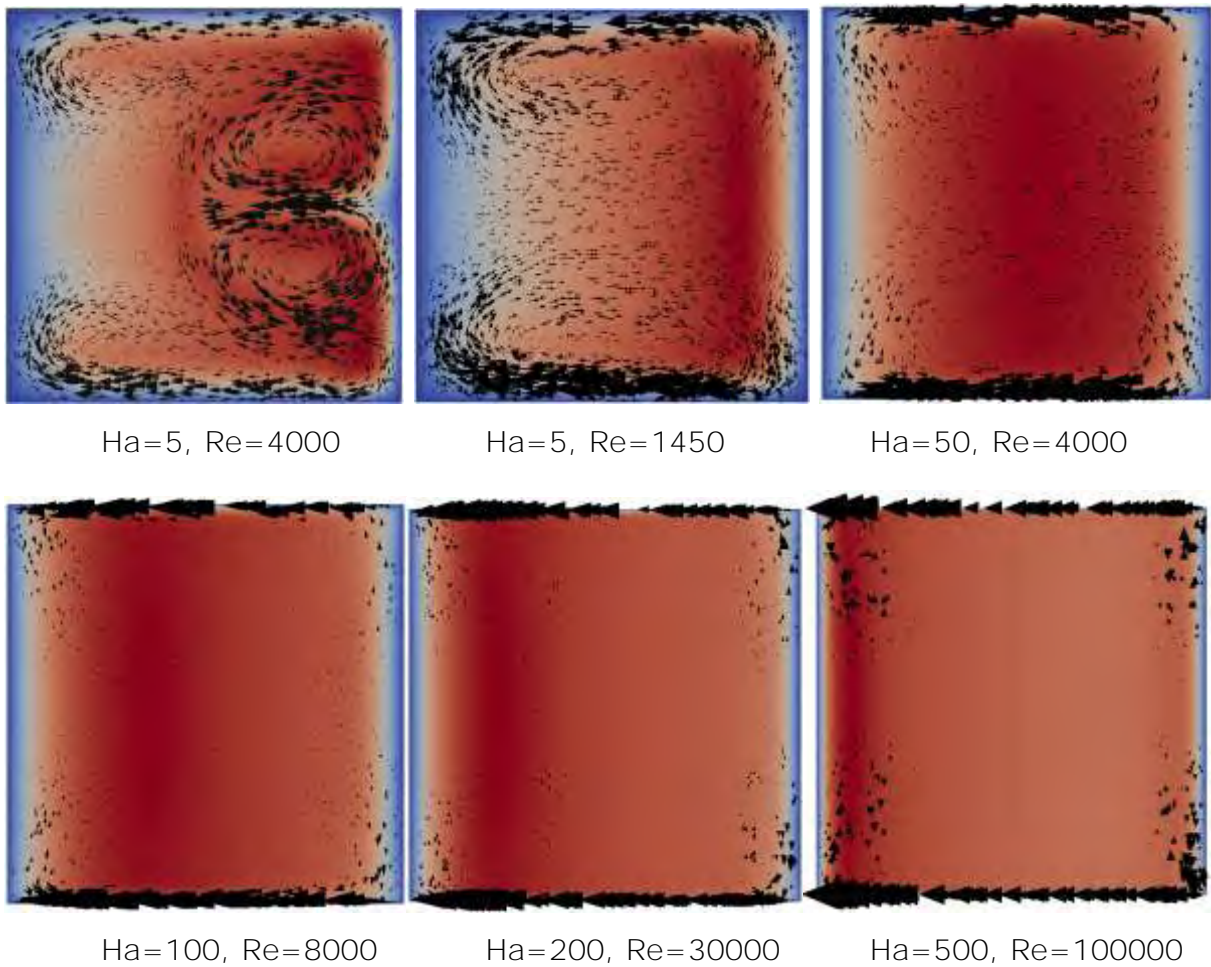
Είναι σημαντικό να τονισθεί πως τα πολλαπλά ζεύγη δινών Taylor που εμφανίζονται σε πολλά τμήματα του Σχήματος 6.29 για $Ha > 18$, αντικαθιστούν το μοναδικό ζεύγος που χαρακτηρίζει τη ροή για $Ha < 18$. Η εξήγηση βασίζεται στο ότι το ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο αυξάνει την δύναμη Lorentz που ευνοεί την ανάπτυξη πολλών δινών και με την αύξηση του Re οδηγούν σε αποσταθεροποίηση της ροής. Έτσι εξηγείται και η αλλαγή κλίσης της γραμμής μετάβασης στο Σχήμα 6.16 για $Ha=18$. Αυτό το συμπέρασμα συμφωνεί με το αντίστοιχο για το Σχήμα 6.11, που εμφανίζει τις ροϊκές γραμμές για τη ροή στη μικρή γεωμετρία του τοροειδούς αγωγού.



Σχήμα 6.29 Ροϊκές γραμμές δευτερογενούς ροής του ρευστού, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού



Σχήμα 6.30 Εφαπτομενική ταχύτητα ροής για διάφορες τιμές Ha λίγο πριν τη μετάβαση (επίπεδο $r-\theta$)



Σχήμα 6.31 Διανύσματα ροής για διάφορες τιμές Ha και Re , λίγο πριν τη μετάβαση (Το αριστερό τοίχωμα είναι το εσωτερικό)

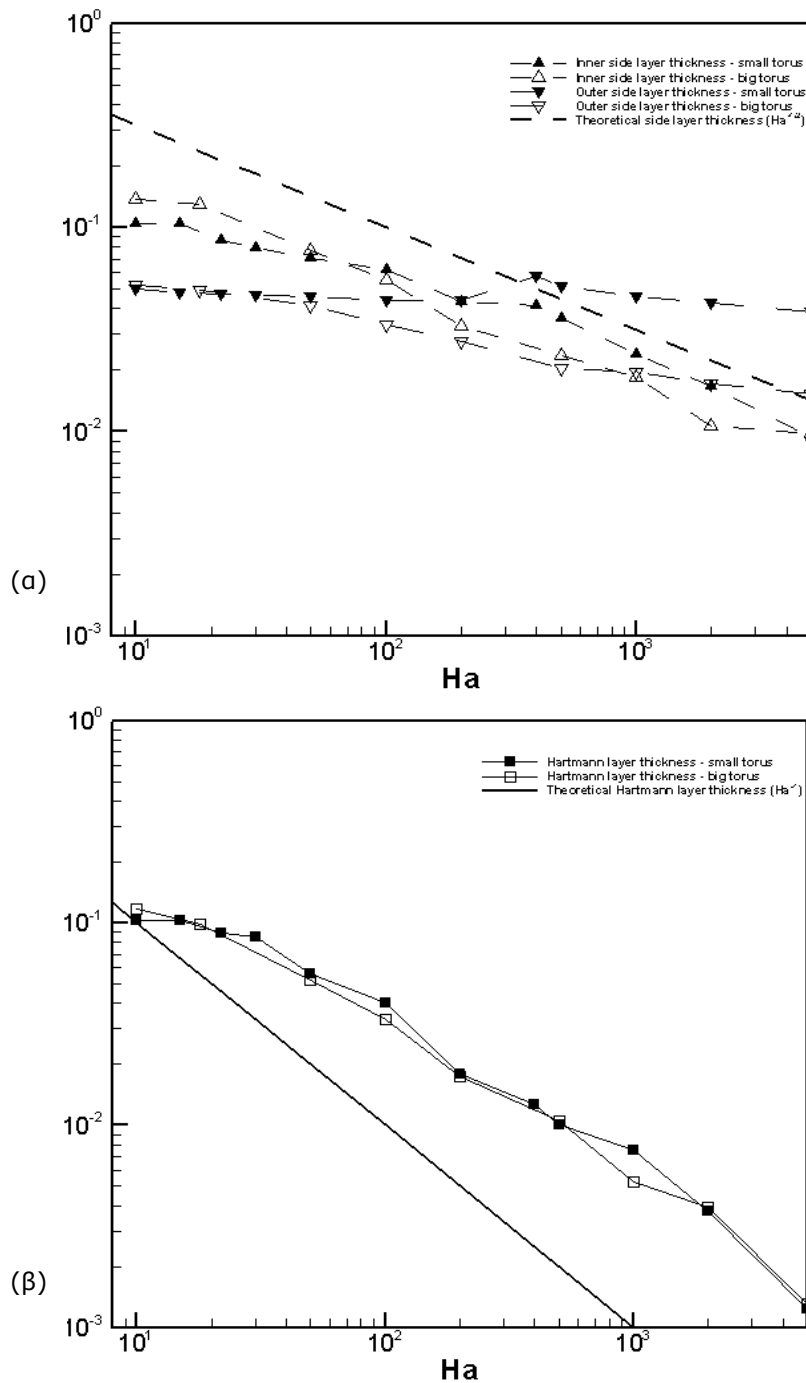
Η εφαπτομενική ταχύτητα της ροής στο επίπεδο $r-\theta$ φαίνεται στο Σχήμα 6.30, από όπου είναι εμφανές ότι σε χαμηλές τυχές του αριθμού Ha οι μέγιστες ταχύτητες καταλαμβάνονται στα εξωτερικά τοιχώματα, ενώ σε υψηλότερες σημειώνεται μετακίνηση της μέγιστης προς τα εσωτερικά. Επίσης καθώς ο αριθμός Ha αυξάνει, τόσο η ταχύτητα αρχίζει να χαρακτηρίζεται από το M-προφίλ, που αποδεικνύει πως η δευτερεύουσα ροή δυναμώνει.

Στο Σχήμα 6.31 όπου απεικονίζονται τα διανύσματα ροής, φαίνεται η μεταφορά ροής από τα πλαϊνά οριακά στρώματα προς τον αγωγό διαμέσου των οριακών στρωμάτων τύπου Hartmann, όπου λαμβάνουν τη ροή από τα εξωτερικά οριακά στρώματα και την προωθούν στα εσωτερικά. Στη συνέχεια η κίνηση κατευθύνεται προς το κέντρο του αγωγού, για να επαναληφθεί η πορεία προς τα εξωτερικά οριακά στρώματα.

Αντίστοιχα με τη μικρή γεωμετρία, μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες για τα πάχη των πλαϊνών οριακών στρωμάτων και των στρωμάτων τύπου Hartmann. Μελετώντας κυρίως το Σχήμα 6.20, που απεικονίζει τις ακτινικές ταχύτητες u_r του ρευστού, προκύπτουν αποτελέσματα για το πάχος των στρωμάτων τύπου Hartmann, ενώ κυρίως από το Σχήμα 6.22, όπου παρουσιάζονται οι εφαπτομενικές ταχύτητες u_θ , μπορεί να μελετηθεί το πάχος των πλαϊνών οριακών στρωμάτων.

Πίνακας 6.4 Πάχη πλαϊνών οριακών στρωμάτων και στρωμάτων τύπου Hartmann, για διάφορες τιμές Ha και Re κατά την μετάβαση

Ha	Re	Upper Hartmann layer thickness	Lower Hartmann layer thickness	Inner side layer thickness	Outer side layer thickness	Theoretical Hartmann layer thickness (Ha^{-1})	Theoretical side layer thickness ($Ha^{-1/2}$)
5	4700	0,11776	0,11776	0,13741	0,05453	0,2	0,44721
10	1500	0,11713	0,11713	0,13690	0,05241	0,1	0,31623
18	1450	0,09780	0,09780	0,12981	0,04951	0,05556	0,23570
50	4050	0,05249	0,05249	0,0767	0,04162	0,02	0,14142
100	10500	0,03314	0,03314	0,0553	0,0334	0,01	0,1
200	32000	0,01750	0,01750	0,03280	0,02751	0,005	0,07071
500	112000	0,01055	0,01055	0,02361	0,02039	0,002	0,04472
1000	320000	0,00523	0,00523	0,01846	0,01954	0,001	0,03162
2000	900000	0,00392	0,00392	0,01070	0,01711	0,0005	0,02236
5000	4200000	0,00131	0,00131	0,00977	0,01520	0,0002	0,01414



Σχήμα 6.32 Πάχη α) πλαϊνών οριακών στρωμάτων και β) στρωμάτων Hartmann σε στρωτή ροή λίγο πριν τη μετάβαση, για τις δύο τοροειδείς γεωμετρίες

Από τις πληροφορίες για την μετάβαση της ροής που συλλέχθηκαν στον Πίνακα 6.4, προκύπτει αρχικά η ομοιότητα με τη μικρή τοροειδή γεωμετρία, όπου το άνω και κάτω οριακό στρώμα τύπου Hartmann είναι ίδια, ενώ το πλαϊνό οριακό στρώμα του εσωτερικού κυλινδρικού τοιχώματος έχει διαφορετικό πάχος από αυτό του εξωτερικού. Για $Ha \geq 200$, το μεγαλύτερο πάχος του στρώματος Hartmann παρατηρείται όλο και κοντύτερα προς τα εσωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα. Επίσης

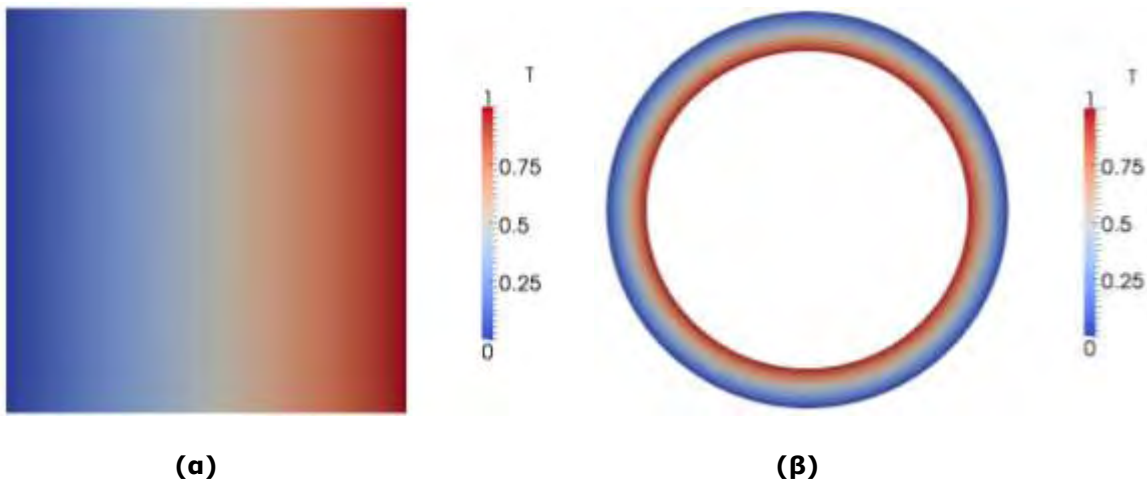
είναι μεγαλύτερο από το θεωρητικό πάχος Ha^{-1} , και καθώς αυξάνει ο αριθμός Ha , η διαφορά αυτή μεγαλώνει, όπως και στη μικρή γεωμετρία. Η αντιστοιχία σε σχέση με τη μικρή τοροειδή γεωμετρία παραμένει και στα πάχη των πλαϊνών οριακών στρωμάτων, όπου αυτά είναι μονίμως μικρότερα από το θεωρητικό πάχος $Ha^{-1/2}$, ενώ καθώς αυξάνει ο αριθμός Ha , η διαφορά μειώνεται.

Αντίστοιχη εικόνα με την απότομη αύξηση του πάχους του εξωτερικού οριακού στρώματος και αύξηση του πάνω από το πάχος του εσωτερικού οριακού στρώματος, που συμβαίνει στη μικρή γεωμετρία για $Ha > 200$, συμβαίνει στη μεγάλη τοροειδή γεωμετρία για $Ha = 1000$, κάτι που δικαιολογείται παρόμοια από τη συγκέντρωση πολλών μικρών δινών στο χώρο του οριακού στρώματος κοντά στο εξωτερικό τοίχωμα (Σχήμα 6.26, 6.27). Στην περίπτωση βέβαια της μεγάλης γεωμετρίας φαίνεται πως αυτές οι δίνες είναι μικρότερες αλλά περισσότερες από την περίπτωση της μικρής γεωμετρίας. Το μικρό μέγεθος δινών και ο αυξημένος αριθμός $Ha = 1000$ στην περίπτωση της μεγάλης γεωμετρίας δικαιολογούν το γεγονός πως το πάχος του εξωτερικού οριακού στρώματος δεν μεγαλώνει τόσο απότομα όσο στη μικρή γεωμετρία, αλλά σίγουρα εξομαλύνεται η μείωσή του, που σε συνδυασμό με την ταχύτερη μείωση του πάχους του εσωτερικού οριακού στρώματος, το πρώτο γίνεται μεγαλύτερο.

Συγκρίνοντας τα πάχη των στρωμάτων μεταξύ των δύο γεωμετριών στο Σχήμα 6.32, τα στρώματα Hartmann κυμαίνονται σε ίδια επίπεδα. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα, τόσο στα εσωτερικά, όσο και στα εξωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα, είναι παχύτερα στη μεγάλη γεωμετρία για μικρές τιμές του αριθμού Ha μέχρι περίπου $Ha = 50$, ενώ για μεγαλύτερες φαίνεται πως είναι παχύτερα τα πλαϊνά οριακά στρώματα της μικρότερης γεωμετρίας.

6.3 Μεταφορά θερμότητας και κατανομή θερμοκρασιών

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου στη θερμοκρασία του ρευστού. Επίσης είναι σημαντική η μεταφορά θερμότητας στις τρεις βασικές περιοχές της ροής που μελετώνται στην παρούσα διατριβή, δηλαδή της στρωτής, της μεταβατικής και της τυρβώδους ροής σε περιοχές κοντά στη μετάβαση. Η γεωμετρία που εξετάζεται αφορά στον τοροειδή αγωγό με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 4,5:1.



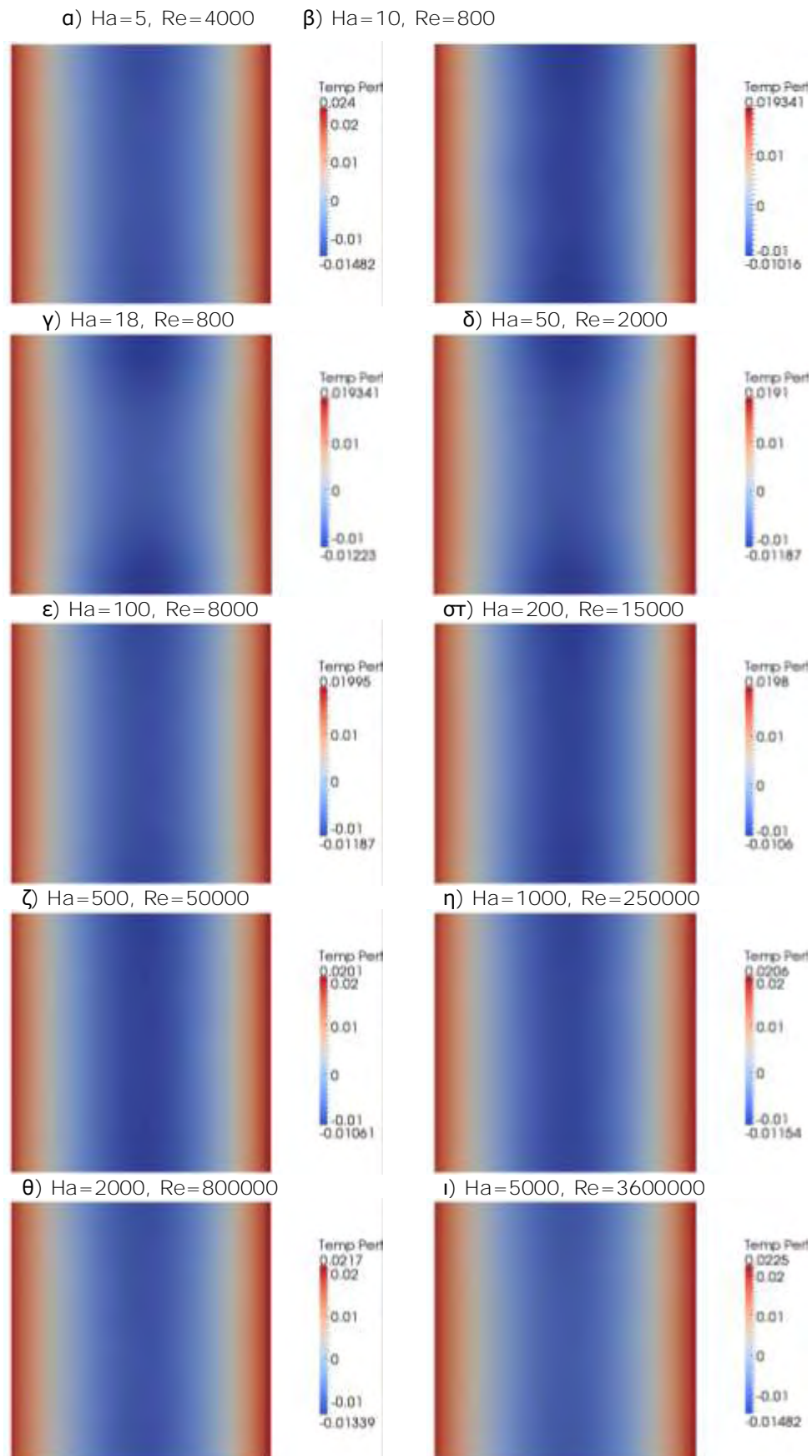
Σχήμα 6.33 Κατανομή θερμοκρασίας σε διατομές του τοροειδούς αγωγού
α) κατακόρυφη διατομή (επίπεδο $r-z$). β) αξονική διατομή (επίπεδο $r-\theta$)

Η κίνηση του ρευστού στην παρούσα τοροειδή διάταξη οφείλεται στη διαφορά δυναμικού που εφαρμόζεται στα κυλινδρικά τοιχώματα και επάγει ηλεκτρικό ρεύμα στο ρευστό ακτινικά, το οποίο σε συνδυασμό με το εξωτερικό κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο αναπτύσσουν ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz που προκαλεί περιστροφική κίνηση του ρευστού. Η θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ των κυλινδρικών τοιχωμάτων είναι μικρή, καθιστώντας τις ανωστικές δυνάμεις αμελητέες σε σύγκριση με τις μαγνητικές. Σχετικά με τις οριακές συνθήκες, τα οριζόντια τοιχώματα είναι ηλεκτρικά μονωμένα, το εσωτερικό κατακόρυφο τοίχωμα έχει αδιάστατη θερμοκρασία $T=1$ και το εξωτερικό $T=0$. Καθώς ο αριθμός Prandtl του υγρού μετάλλου είναι πολύ μικρότερος της μονάδας ($Pr=0,001$), παρατηρείται πως η μεταφορά θερμότητας γίνεται κυρίως με αγωγή. Για επιβεβαίωση αυτής της παρατήρησης έγινε προσομοίωση για ρευστό με μεγαλύτερο αριθμό Prandtl ($Pr=0,7$) και είχε ως αποτέλεσμα τη μεταφορά θερμότητας με συναγωγή, εξαναγκασμένης μορφής λόγω της δύναμης Lorentz πέραν από τη θερμοκρασιακή διαφορά.

Για τη μελέτη του θερμοκρασιακού πεδίου κατασκευάστηκαν κατανομές θερμοκρασιών σε διάφορες διατομές του τοροειδούς αγωγού. Στο Σχήμα 6.33 παρουσιάζεται η κατανομή της θερμοκρασίας του ρευστού σε μια κατακόρυφη τομή του τοροειδούς αγωγού και στην οριζόντια διατομή στο μέσο ύψος του. Το Σχήμα αυτό παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα σε όλες τις περιπτώσεις συνδυασμών $Ha-Re$ καθώς η ισχυρή επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη ροή έχει ως αποτέλεσμα η θερμοκρασία να παρουσιάζει μικρές μεταβολές από περίπτωση σε περίπτωση. Επίσης λόγω των συνοριακών συνθηκών το εσωτερικό κατακόρυφο τοίχωμα έχει σε όλες τις περιπτώσεις αδιάστατη τιμή $T=1$ (λαμβάνοντας κόκκινο χρώμα κοντά στο τοίχωμα) ενώ το εξωτερικό κατακόρυφο τοίχωμα έχει τιμή $T=0$ (λαμβάνοντας κοντά στο τοίχωμα μπλε χρώμα). Το κοινό σε όλες τις ροές που εξετάζονται στην παρούσα διατριβή είναι πως η σημαντική μεταβολή της θερμοκρασίας συμβαίνει κατά την ακτινική διεύθυνση, ενώ κατά την κατακόρυφη και αζιμούθια διεύθυνση, δεν σημειώνονται μεγάλες αλλαγές. Η επίδραση των οριακών στρωμάτων δεν φαίνεται στο Σχήμα αυτό, μπορεί ωστόσο να παρατηρηθεί σε όλες τις περιπτώσεις του Σχήματος 6.34.

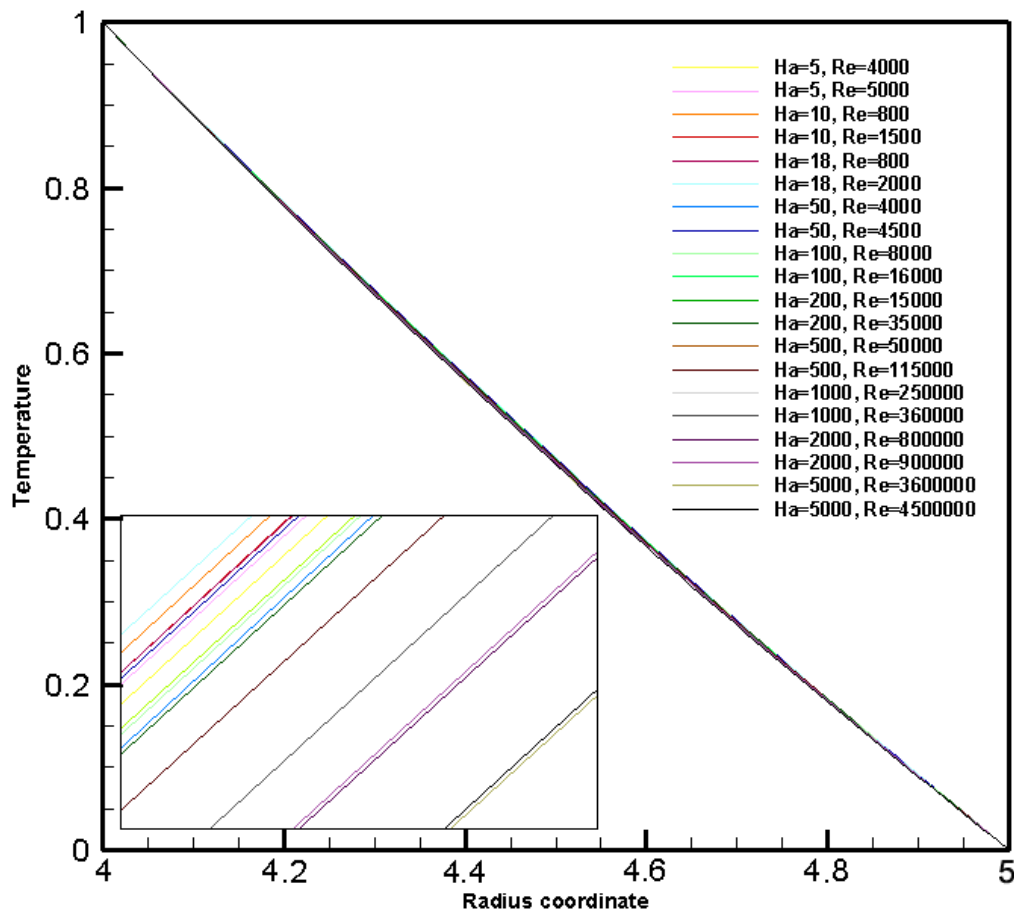
Η προσεκτική μελέτη των διαταραχών της θερμοκρασίας του ρευστού κάνει εμφανή κάποια αποτελέσματα. Οι θερμοκρασιακές διαταραχές προέκυψαν από την αφαίρεση της στιγμιαίας θερμοκρασίας από τη μέση θερμοκρασία.

Στο Σχήμα 6.34 παρουσιάζονται οι θερμοκρασιακές διαταραχές για τιμές Ha που αντιστοιχούν σε στρωτή ροή, κοντά στη μετάβαση. Η βασική διαπίστωση είναι πως οι διαταραχές αυξάνονται κοντά στα πλαϊνά τοιχώματα του αγωγού και πως υπάρχουν μεγάλες ομοιότητες μεταξύ των περιπτώσεων που μελετήθηκαν.



Σχήμα 6.34 Κατανομή διαταραχών θερμοκρασίας σε κατακόρυφες διατομές (επίπεδο $r-z$) για διάφορους αριθμούς Hartmann και Reynolds

Με σκοπό την εξαγωγή περισσότερων συμπερασμάτων, παρουσιάζονται ακτινικές κατανομές της θερμοκρασίας και των διαταραχών της, στο μέσο ύψος του αγωγού. Το Σχήμα 6.35 παρουσιάζει την ακτινική κατανομή της θερμοκρασίας για $z=0.5$, η οποία μεταβάλλεται από την τιμή 0 στο εξωτερικό τοίχωμα του αγωγού έως την τιμή 1 στο εσωτερικό. Στο σχήμα αυτό επιλέχτηκε να προβληθούν δύο τιμές Re για κάθε Ha . Η χαμηλή τιμή Re αφορά στην στρωτή ροή, ενώ η υψηλή σε μεταβατική. Καθώς ο αριθμός Ha αυξάνει, η θερμοκρασία τείνει να παραμένει σε χαμηλότερα επίπεδα. Η αύξηση του αριθμού Reynolds προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας και πιο συγκεκριμένα προκαλεί μεγαλύτερη αύξηση για ροή με μικρό αριθμό Hartmann. Σε υψηλές τιμές Ha , παρατηρείται πως η διαφορά των κατανομών θερμοκρασίας είναι πολύ μικρή.

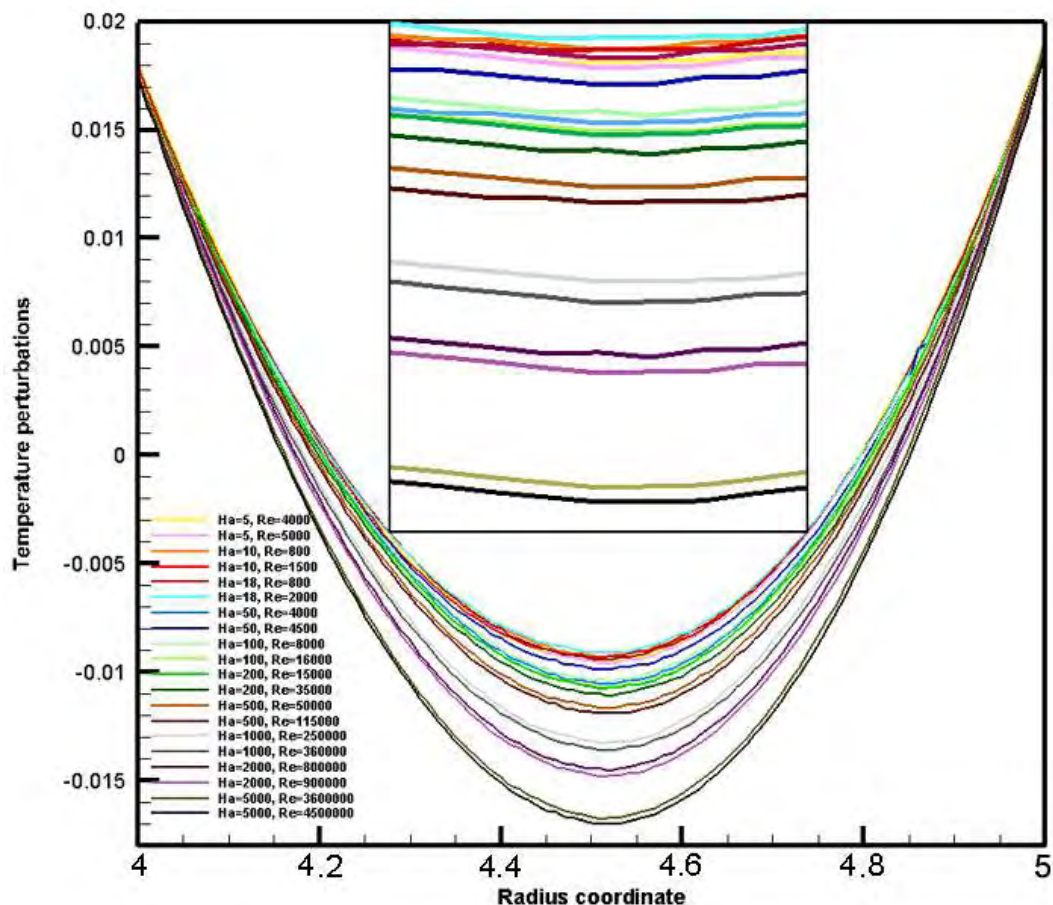


Σχήμα 6.35 Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας για διάφορες τιμές αριθμών Ha και Re στο μέσο ύψος $Z=0,5$ του τόρου. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό

Για όλες τις περιπτώσεις συνδυασμών $Ha-Re$, παρατηρείται στο Σχήμα 6.35 πως η εξάρτηση της θερμοκρασίας από την ακτίνα απεικονίζεται σχεδόν ως ευθεία

γραμμή. Αυτό μαρτυρά μεταφορά θερμότητας με αγωγή και όχι συναγωγή, κάτι που δικαιολογείται από τον πολύ μικρό αριθμό Prandtl του ρευστού.

Οι θερμοκρασιακές διαταραχές του ρευστού εμφανίζονται στο Σχήμα 6.36 που προέκυψε ουσιαστικά από την αφαίρεση των μέσων τιμών θερμοκρασίας από τις στιγμιαίες τιμές του Σχήματος 6.35. Όπως και στο Σχήμα 6.35, επιλέχθηκαν δύο περιπτώσεις ανά τιμή Ha , μια για στρωτή ροή και μια κατά την έναρξη της μετάβασης. Παρατηρείται ομοιομορφία και στις θερμοκρασιακές διαταραχές, με τη διαφορά πως επειδή αφαιρείται η μέση τιμή, το αποτέλεσμα είναι πλέον μια συνάρτηση παραβολικής μορφής. Παρατηρείται πως οι διαταραχές λαμβάνουν τις υψηλότερες τιμές τους στα πλαϊνά τοιχώματα, όπου επίσης ο αριθμοί Hartmann και Re παίζει μικρό ρόλο στην μεταβολή των διαταραχών. Μεταξύ των πλαϊνών τοιχωμάτων, το μαγνητικό πεδίο τείνει να μειώσει το μέγεθος των διαταραχών.

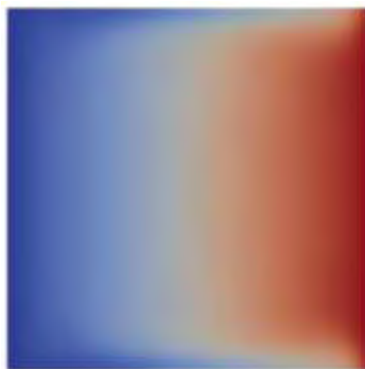


Σχήμα 6.36 Ακτινική κατανομή διαταραχών θερμοκρασίας για διάφορες τιμές Ha και Re στο μέσο ύψος $Z=0,5$ του τόρου. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό

Ο λόγος της παρουσίασης όλων των περιπτώσεων $Ha-Re$ λίγο πριν τη μετάβαση και κατά τη μετάβαση στα Σχήματα 6.35 και 6.36, είναι για να

μελετηθεί η επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε κάθε περίπτωση ροής και να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές. Κυρίως για $Ha \geq 18$, η λεπτομερής παρατήρηση της Σχήματος δείχνει ότι καθώς ο αριθμός Hartmann αυξάνει, οι διαταραχές της θερμοκρασίας μειώνονται. Σε αυτή βέβαια την τιμή του Ha , η ροή αλλάζει γενικά συμπεριφορά, καθώς η δύναμη Lorentz για $Ha < 18$ δρα κυρίως έναντι των δυνάμεων ιξώδους, ενώ για $Ha > 18$ πρέπει να εξισορροπήσει τις αδρανειακές δυνάμεις που γίνονται πιο ισχυρές. Επίσης η αύξηση του αριθμού Reynolds αναμένεται να προκαλέσει αύξηση της θερμοκρασίας και των διαταραχών της. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα, λόγω του ισχυρού μαγνητικού πεδίου που εμποδίζει τη μεταφορά θερμότητας και διατηρεί τη θερμοκρασία σε πιο χαμηλά επίπεδα.

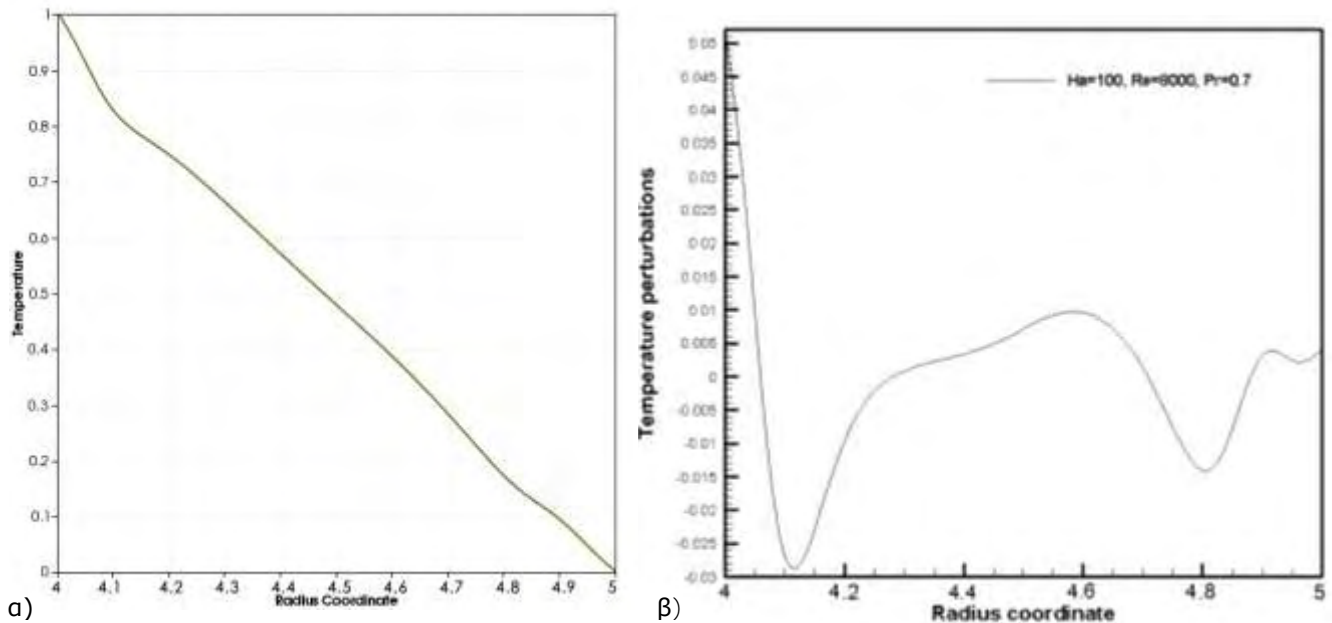
Η γραμμική εξάρτηση της θερμοκρασίας από την ακτίνα στο Σχήμα 6.35 και η συμμετρία που εμφανίζουν οι θερμοκρασιακές διαταραχές στο Σχήμα 6.36 χάνονται όταν ο αριθμός Pr είναι πολύ μεγαλύτερος από την πολύ μικρή τιμή που αντιστοιχεί σε υγρό μέταλλο. Για να γίνει σύγκριση με μεγαλύτερο αριθμό Prandtl, επιλέχθηκε να γίνει προσομοίωση με τιμή $Pr=0,7$, αφήνοντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες για την περίπτωση $Ha=100$ και $Re=8000$. Έτσι προέκυψε το Σχήμα 6.37, στο οποίο εμφανίζεται η θερμοκρασιακή κατανομή σε κατακόρυφη διατομή του τοροειδούς αγωγού, όπου παρατηρείται ότι η κατανομή διαφέρει από το Σχήμα 6.33, της αντίστοιχης περίπτωσης με πολύ μικρότερο Pr.



Σχήμα 6.37 Κατανομή θερμοκρασίας στην κατακόρυφη διατομή του τοροειδούς αγωγού για $Pr=0,7$, $Ha=100$ και $Re=8000$

Για ύψος $z=0,9$ του αγωγού η ακτινική εξάρτηση της θερμοκρασίας αλλάζει, κάτι που φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 6.38. Η εξάρτηση της θερμοκρασίας από την ακτίνα δεν είναι πλέον ευθεία γραμμή, ενώ οι διαταραχές της θερμοκρασίας δεν είναι τόσο ομαλές και συμμετρικές, όπως παρατηρήθηκε στο αντίστοιχο Σχήμα 6.36 του μικρότερου αριθμού Prandtl. Η συναγωγή στην

περίπτωση του $Pr=0,7$ είναι ορατή, ως μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας, αντικαθιστώντας την αγωγή, που φαίνεται ότι επικρατεί για πολύ μικρότερο Pr , σε συνδυασμό με τον αμελητέο αριθμό Rayleigh.



Σχήμα 6.38 Κατανομή θερμοκρασίας στο ύψος $Z=0,9$ του τόρου, για $Pr=0,7$, $Ha=100$, $Re=8000$. Η ακτινική συντεταγμένη 4 αντιστοιχεί στο εσωτερικό τοίχωμα ενώ η τιμή 5 στο εξωτερικό. α) Ακτινική κατανομή θερμοκρασίας, β) Θερμοκρασιακές διαταραχές

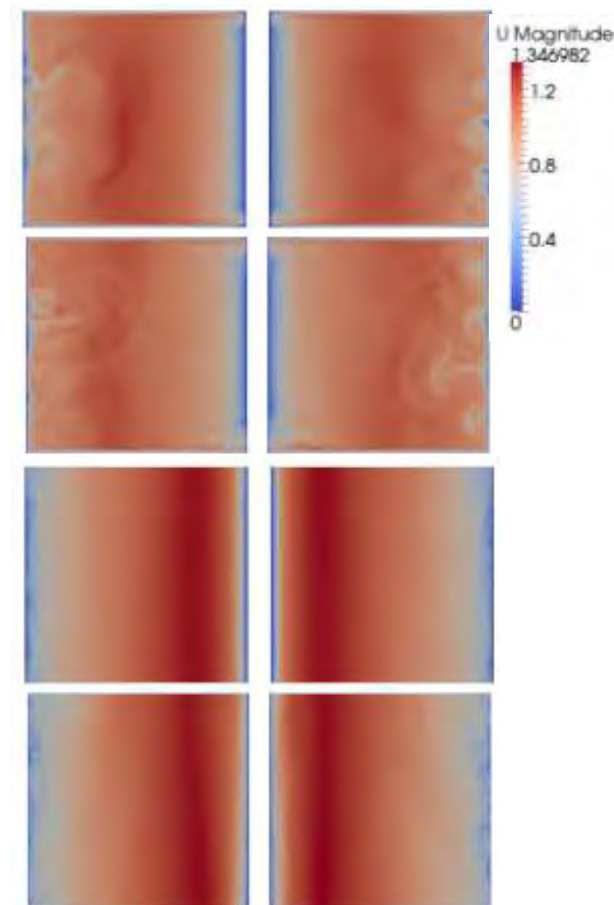
6.4 Τυρβώδης ροή στη γεωμετρία με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1

Για την μελέτη της πρώιμης τυρβώδους ροής επιλέχθηκαν τέσσερις περιπτώσεις στην καθαρά τυρβώδη περιοχή, δύο για $Ha=100$ και δύο για $Ha=1000$, με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου στη ροή. Η επιλογή έγινε με βάση το Σχήμα 6.2 που παρουσιάζει τη γραμμή διαχωρισμού της στρωτής από τη μεταβατική ροή για τις διάφορες τιμές αριθμών Hartmann και Reynolds. Επιλέχθηκαν οι συνδυασμοί αριθμών: α) $Ha=100$, $Re=20000$, β)

$Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$ και δ) $Ha=1000$, $Re=909410$.

Η επιλογή έγινε ώστε όταν οι τιμές αυτές απεικονιστούν σχηματικά με συντεταγμένες $(x,y) = (Ha,Re)$ στο Σχήμα 6.2, αν το σημείο α) ενωθεί με το γ) και το σημείο β) ενωθεί με το δ) να σχηματίζουν ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τη γραμμή μετάβασης. Το πρώτο δηλαδή σημείο για $Ha=100$ με το πρώτο για $Ha=1000$ δημιουργεί παράλληλη γραμμή προς τη γραμμή μετάβασης (όμοια και το δεύτερο). Ο σκοπός αυτής της επιλογής τιμών ήταν η καλύτερη σύγκριση και επεξήγηση των αποτελεσμάτων.

Το υπολογιστικό πλέγμα είχε μέγεθος $256 \times 256 \times 128$, στην αξονική, ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα. Ο λόγος που δεν επιλέχθηκε πυκνότερο πλέγμα (χρήσιμο ειδικά στις περιπτώσεις υψηλών τιμών Re) είναι οι αυξημένες



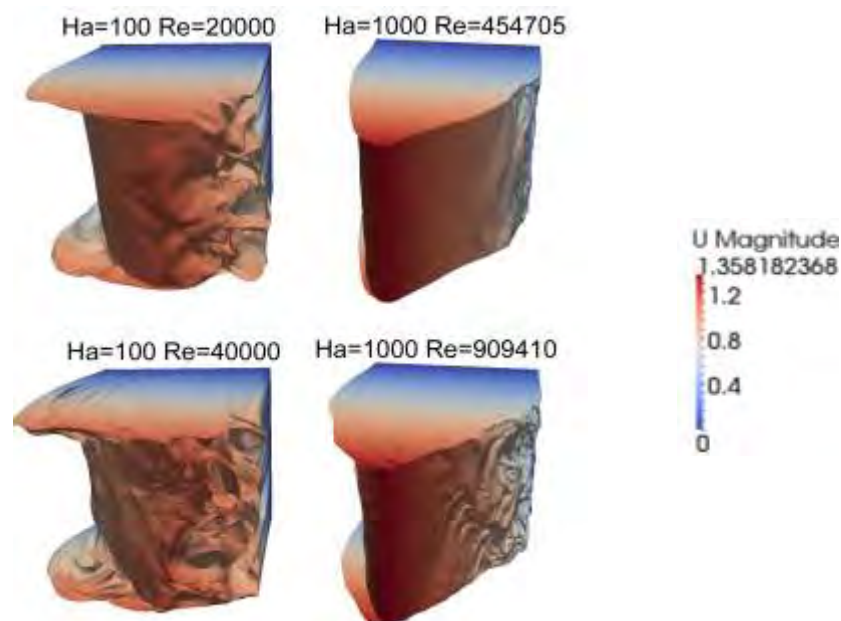
Σχήμα 6.39 Πεδίο στιγμιαίων ταχυτήτων u , στις αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού.

- α) $Ha=100$, $Re=20000$,
- β) $Ha=100$, $Re=40000$
- γ) $Ha=1000$, $Re=454705$
- δ) $Ha=1000$, $Re=909410$

απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ για την εφαρμογή του μοντέλου, και για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

Μια πρώτη εικόνα της τυρβώδους ροής μέσα στον τοροειδή αγωγό φαίνεται στο Σχήμα 6.39. Οι κατανομές στιγμιαίων ταχυτήτων σε αντιδιαμετρικές διατομές του αγωγού, δείχνουν ότι η τύρβη είναι εντονότερη στα εξωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα. Διαταραχές παρατηρούνται και στα εσωτερικά τοιχώματα, αλλά και στα οριακά στρώματα Hartmann (πάνω και κάτω τοίχωμα). Ωστόσο οι διαταραχές στα στρώματα Hartmann είναι εμφανέστερες μόνο στις περιπτώσεις $Ha=100$. Το ισχυρό μαγνητικό πεδίο που επιβάλλεται στην περίπτωση $Ha=1000$, μειώνει αρκετά το πάχος των οριακών στρωμάτων Hartmann, με αποτέλεσμα οι διαταραχές στην περίπτωση αυτή να φαίνονται μόνο με μεγέθυνση του Σχήματος.

Μία τρισδιάστατη απεικόνιση στιγμιαίων τιμών του μέτρου της ταχύτητας του ρευστού για τις τέσσερις περιπτώσεις τυρβώδους ροής που μελετήθηκαν, φαίνεται στο Σχήμα 6.40. Η σύγκριση των δύο πάνω σχημάτων με τα αντίστοιχα κάτω, δείχνει την ενίσχυση της τύρβης με την αύξηση του αριθμού Reynolds, όπως είναι αναμενόμενο. Οι διαταραχές στα οριακά στρώματα τύπου Hartmann είναι ορατές, όπως και στο κέντρο της διατομής του αγωγού.



Σχήμα 6.40 Τρισδιάστατη απεικόνιση πεδίου στιγμιαίων ταχυτήτων

Για την πληρέστερη μελέτη της τύρβης, είναι χρήσιμη η παρουσίαση τιμών μέσης και rms ταχύτητας του ρευστού στο σύνολο της ροής και όχι μόνο σε ένα τμήμα της. Η μέση τιμή ταχύτητας, προέκυψε από τη μέση τιμή κάθε σημείου του αγωγού σε κάθε χρονικό βήμα και αποθηκεύοντας στο τελευταίο χρονικό βήμα την τελική μέση τιμή.

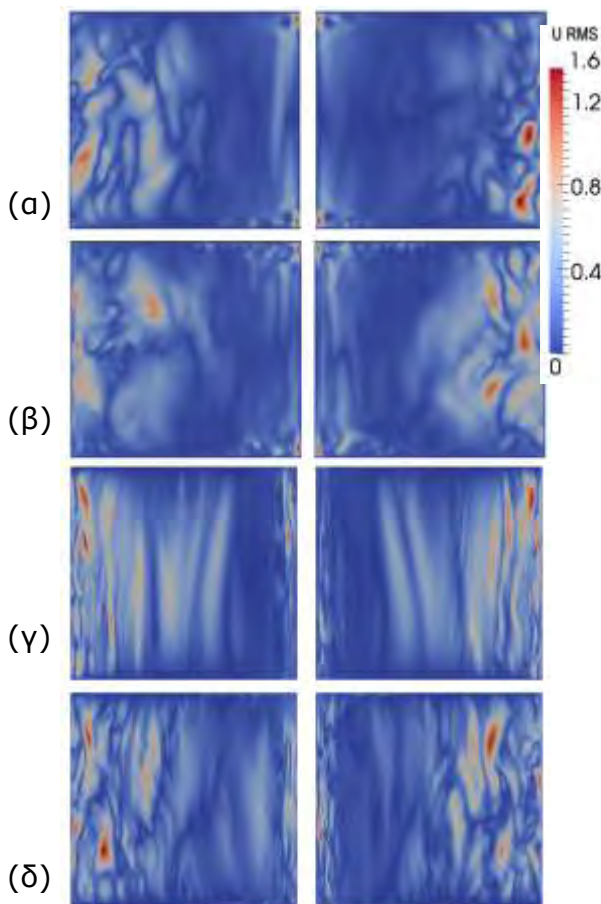
Οι τιμές rms μιας μεταβλητής προκύπτουν από την σχέση: $\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i - f_{\text{mean}})^2 / N}$,

όπου f_i η τιμή μιας μεταβλητής f σε συγκεκριμένο σημείο, f_{mean} η μέση τιμή της μεταβλητής και N ο αριθμός των σημείων που λαμβάνονται υπόψη για την εύρεση της μέσης τιμής. Έτσι, η ταχύτητα u_{RMS} προέκυψε από τη σχέση:

$$u_{\text{RMS}} = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^N (u_{r,i} - u_{r,\text{mean}})^2 + \sum_{i=1}^N (u_{\theta,i} - u_{\theta,\text{mean}})^2 + \sum_{i=1}^N (u_{z,i} - u_{z,\text{mean}})^2 \right] / N}, \quad (6.3)$$

ενώ η κινητική ενέργεια της τύρβης E_{TURB} από τη σχέση:

$$E_{\text{TURB}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (u_{r,i} - u_{r,\text{mean}})^2 + \sum_{i=1}^N (u_{\theta,i} - u_{\theta,\text{mean}})^2 + \sum_{i=1}^N (u_{z,i} - u_{z,\text{mean}})^2 \right] / N \quad (6.4)$$



Σχήμα 6.41 Πεδίο ταχυτήτων u_{rms} , σε αντι-διαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού.

α) $Ha=100$, $Re=20000$

β) $Ha=100$, $Re=40000$

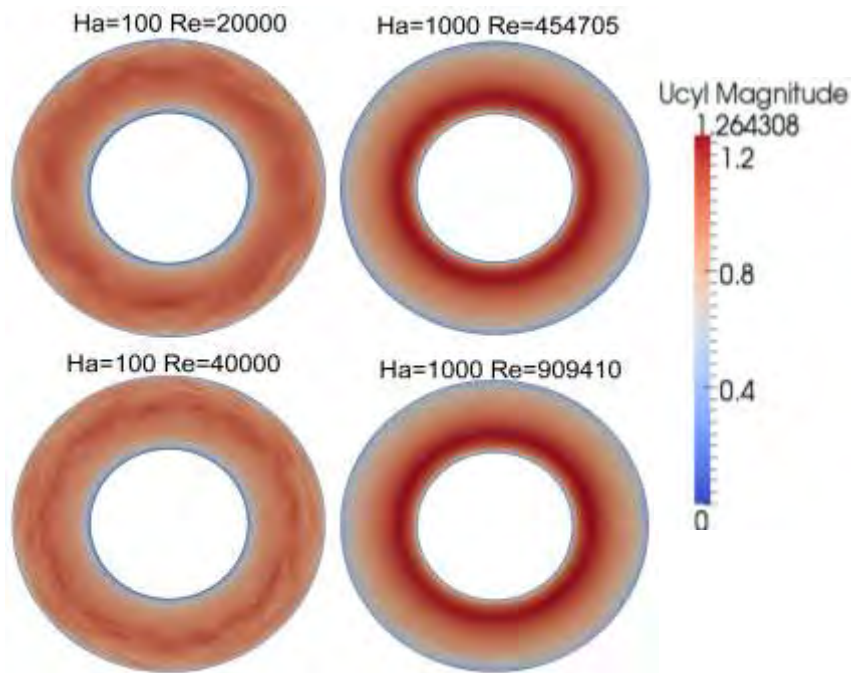
γ) $Ha=1000$, $Re=454705$

δ) $Ha=1000$, $Re=909410$

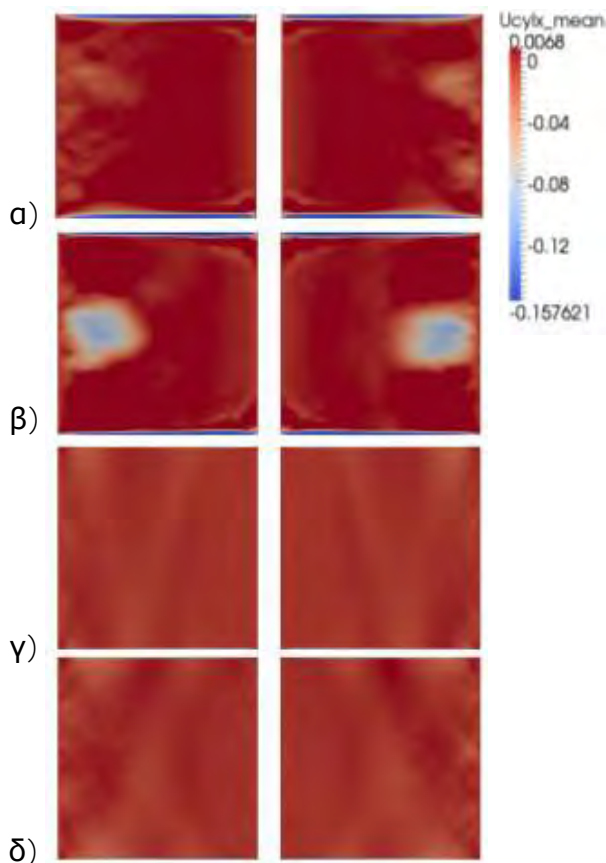
Στο Σχήμα 6.41 παρουσιάζεται το πεδίο ταχυτήτων u_{rms} . Οι περιπτώσεις (α, β) του Σχήματος αφορούν σε αριθμό $Ha=100$, ενώ οι δύο επόμενες σε $Ha=1000$. Ενδιαφέρον εμφανίζουν τα πλαϊνά τοιχώματα του αγωγού, κυρίως τα εξωτερικά, από τα οποία οι διαταραχές μεταφέρονται προς το κέντρο του αγωγού. Κοντά στα εσωτερικά τοιχώματα εμφανίζονται επίσης έντονες διαταραχές. Στις υψηλές τιμές Ha , για χαμηλούς αριθμούς Reynolds, οι μεταβολές της τύρβης δείχνουν να επηρεάζουν την ταχύτητα της ροής στον αγωγό κατά ζώνες που αναπτύσσονται κατακόρυφα και αλλάζουν στην ακτινική διεύθυνση. Σε υψηλές τιμές Re , το πεδίο ταχυτήτων τροποποιείται πλέον απροσδιόριστα χωρίς να σημειώνεται κάποια ομοιομορφία στη διεύθυνση κάποιου άξονα.

Στο Σχήμα 6.42 παρουσιάζεται το μέτρο στιγμιαίας ταχύτητας του ρευστού.

Παρατηρείται ότι στις μεγάλες τιμές Ha ($=1000$), η ταχύτητα έχει στο μεγαλύτερο ποσοστό του αγωγού μεγαλύτερες τιμές (σκούρες κόκκινες περιοχές κοντά στα



Σχήμα 6.42 Κατανομές μέτρου στιγμιαίας ταχύτητας στο μέσο ύψος



Σχήμα 6.43 Μέση ακτινική ταχύτητα $U_{r,mean,r}$ σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού.

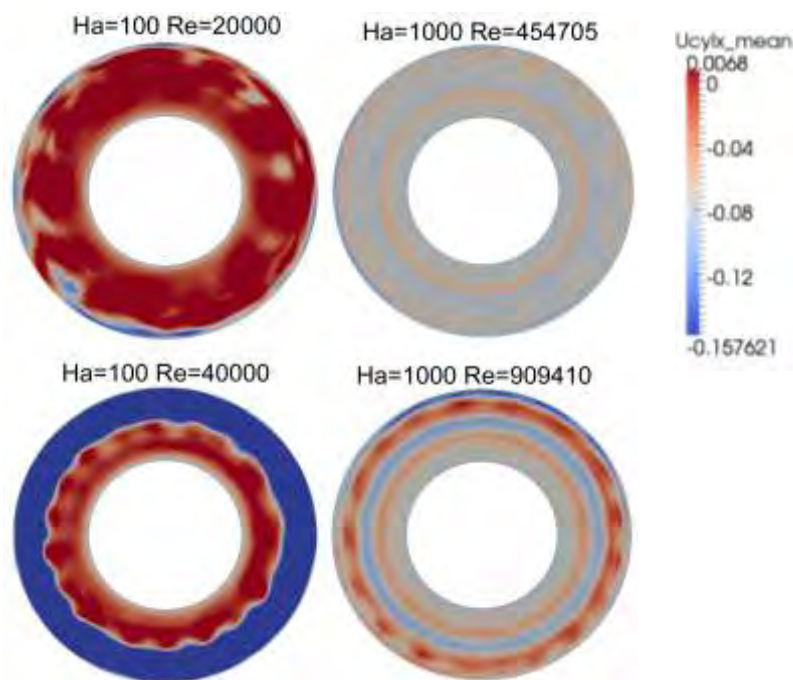
- α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$
 δ) $Ha=1000$, $Re=909410$

εσωτερικά τοιχώματα του αγωγού) σε σχέση με την περίπτωση $Ha=100$. Το ίδιο ισχύει και για τις μικρότερες τιμές ταχύτητας (περιοχές με μπλε χρώμα) της περίπτωσης $Ha=1000$, που εμφανίζονται επίσης σε μεγαλύτερο τμήμα του αγωγού, κυρίως στα εξωτερικά τοιχώματα.

Επίσης, για $Ha=1000$, η ταχύτητα μεταβάλλεται κυρίως στην ακτινική διεύθυνση, καθώς και στα δύο σχήματα δεν παρουσιάζεται σημαντική αλλαγή ταχύτητας στην εφαπτομενική διεύθυνση. Για $Ha=100$, οι μεγαλύτερες τιμές της ταχύτητας εμφανίζονται σε τυχαία σημεία στο μέσο μεταξύ των τοιχωμάτων. Αν και η μικρότερη τιμή της ταχύτητας δεν απέχει πολύ από την μεγαλύτερη (όπως φαίνεται από

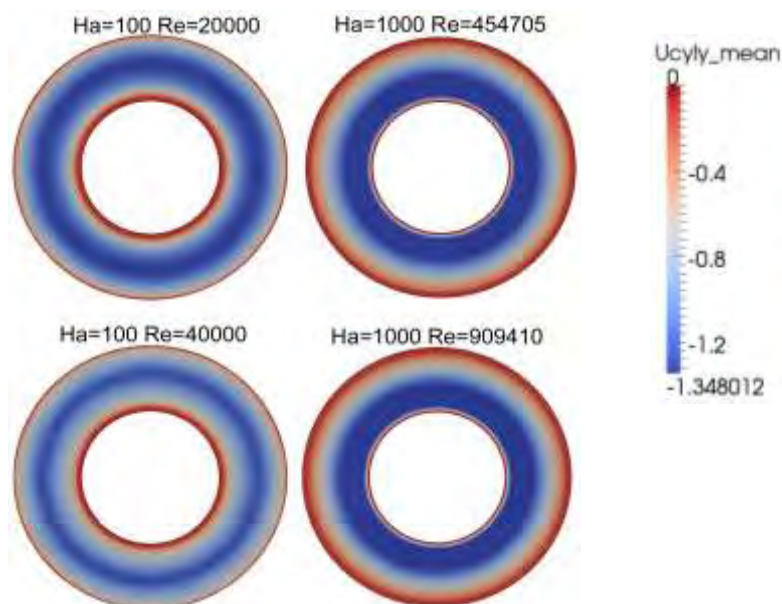
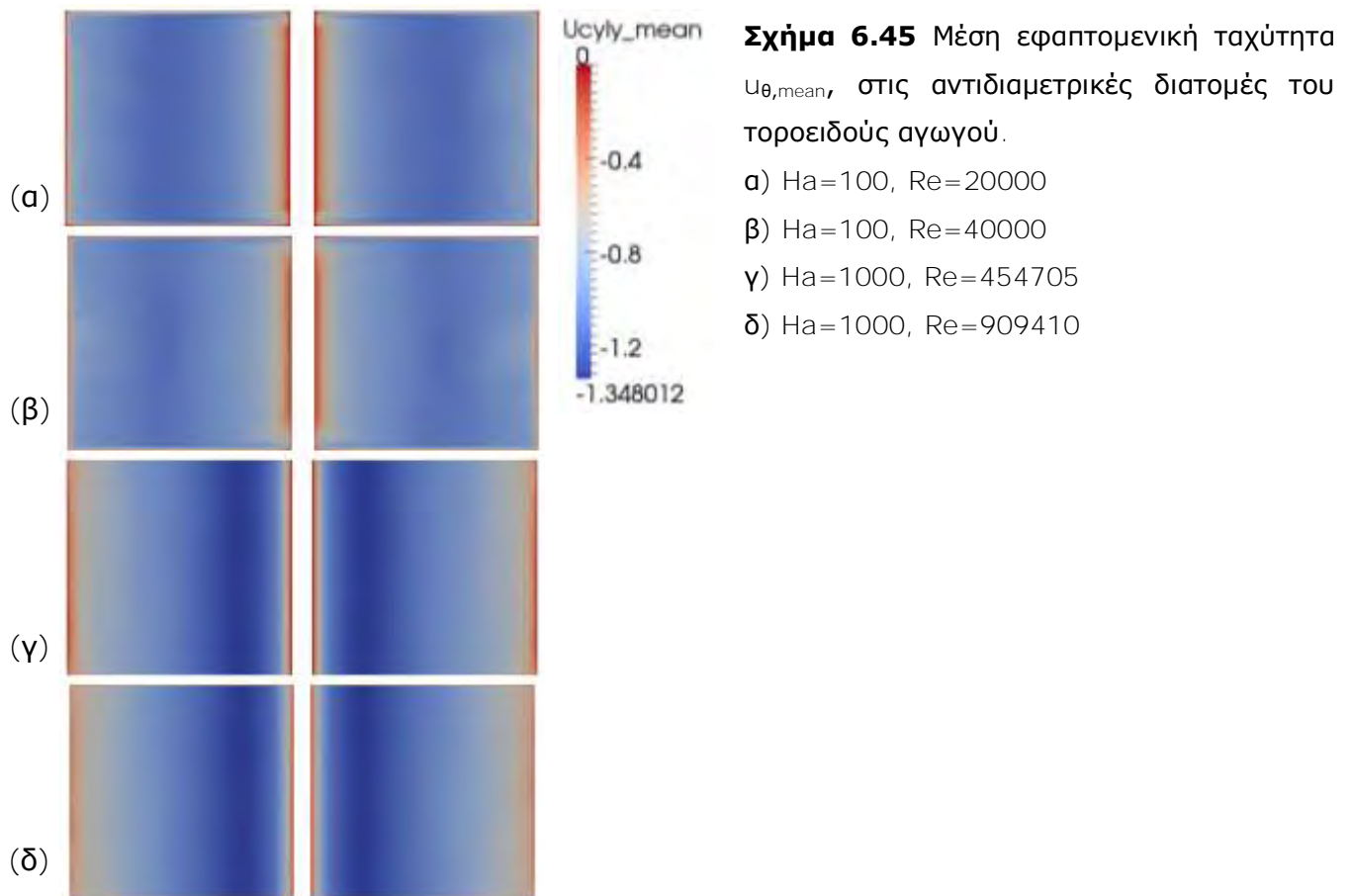
το μικρότερο χρωματικό βάθος στα δύο Σχήματα για $Ha=100$, σε σχέση με τις περιπτώσεις $Ha=1000$), σημειώνεται έντονη διαφοροποίηση και τυχαιότητα στις τιμές ταχύτητας μέσα στον αγωγό, σε σχέση με την περίπτωση $Ha=1000$.

Στα Σχήματα 6.43 και 6.44 εμφανίζεται η μέση ακτινική ταχύτητα ρευστού, στις αντιδιαμετρικές κατακόρυφες διατομές του αγωγού και στην κάτοψη στο μέσο ύψος του αγωγού, αντίστοιχα. Γίνεται χρήση της ίδιας κλίμακας χρωμάτων για ευκολότερη σύγκριση. Μια γενική παρατήρηση είναι ότι το μαγνητικό πεδίο επιβραδύνει την ταχύτητα του ρευστού, αλλά η ροή παραμένει τυρβώδης.



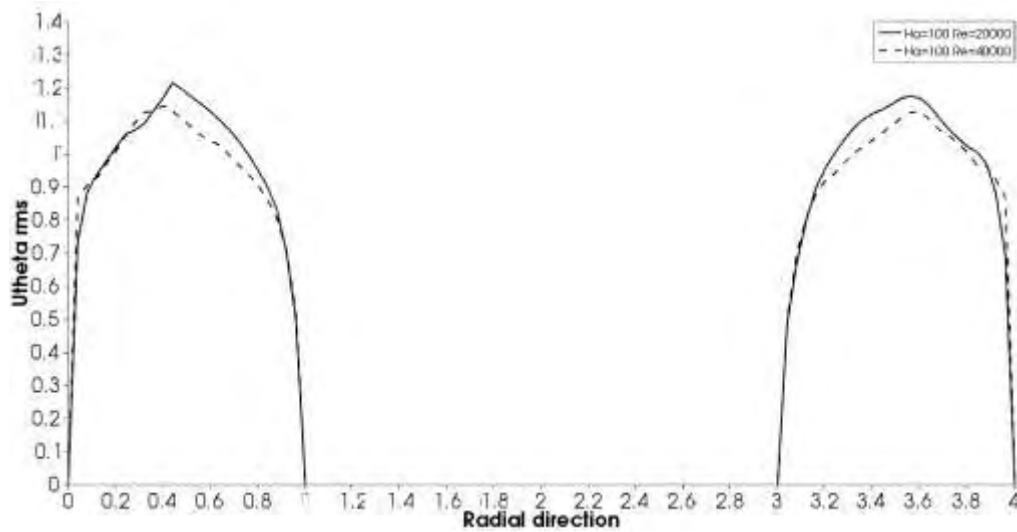
Σχήμα 6.44 Κατανομή μέσης ακτινικής ταχύτητας $U_{r,mean}$ στο μέσο ύψος του τόρου

Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη των Σχημάτων 6.45 και 6.46, όπου αποτυπώνεται η μέση εφαπτομενική ταχύτητα του ρευστού στις αντιδιαμετρικές κατακόρυφες διατομές του αγωγού και στην κάτοψη στο μέσο του ύψους του, αντίστοιχα. Και στα δύο σχήματα είναι φανερή η αυξημένη ταχύτητα της ροής στα πλαϊνά κατακόρυφα τοιχώματα.

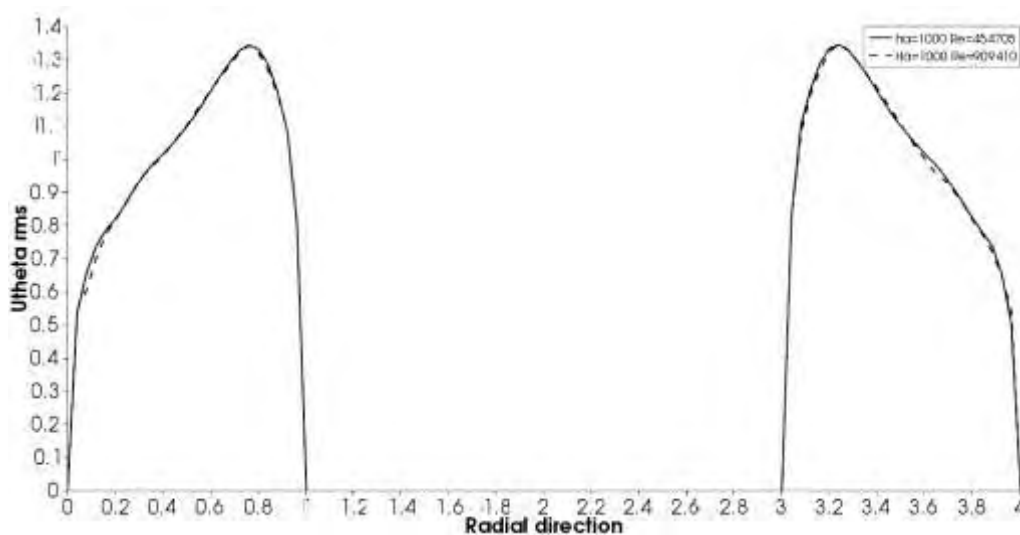


Από την κατανομή των τιμών rms της εφαπτομενικής ταχύτητας που αποτυπώνεται στις αντιδιαμετρικές κατακόρυφες διατομές στο Σχήμα 6.47, παρατηρείται ότι το αυξημένο μαγνητικό πεδίο ($Ha=1000$) δεν επιτρέπει αύξηση της ταχύτητας του ρευστού, ακόμη και όταν ο αριθμός Reynolds διπλασιαστεί.

Ωστόσο, την περίπτωση του χαμηλότερου Ha ($=100$) οι διαφορετικοί αριθμοί Reynolds προκαλούν μεγαλύτερες διαφορές στην ταχύτητα.



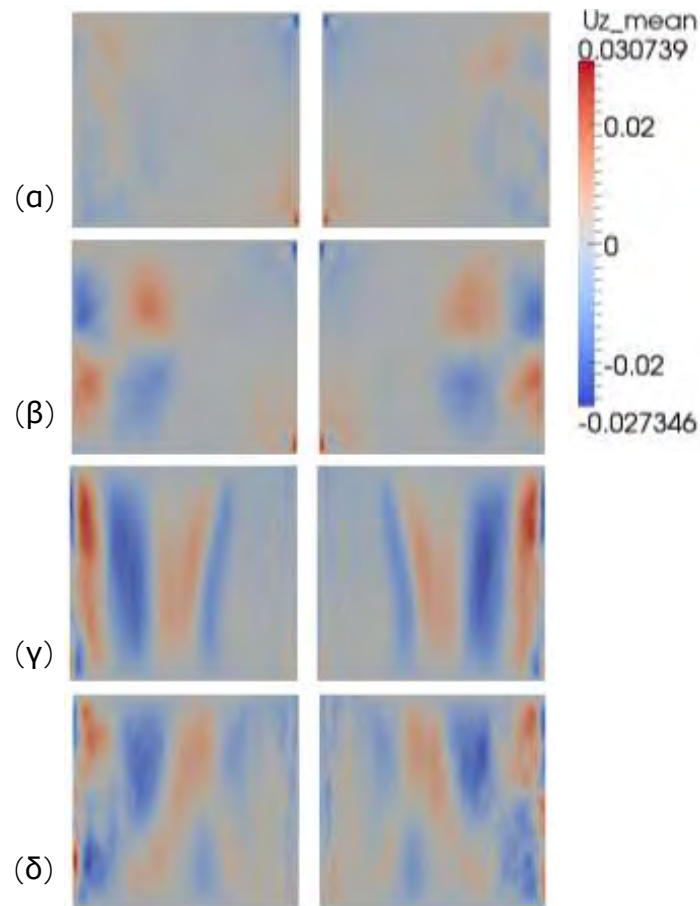
α) $Ha=100$, $Re=20000$, 40000



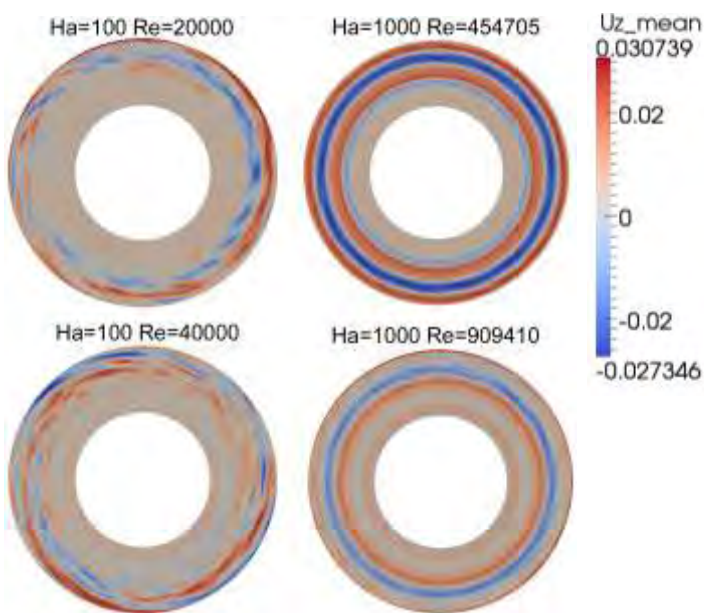
β) $Ha=1000$, $Re=454705$, 909410

Σχήμα 6.47 Ακτινική κατανομή της εφαπτομενικής ταχύτητας $U_{\theta,rms}$

Το Σχήμα 6.48 εμφανίζει τη μέση κατακόρυφη ταχύτητα $u_{z,mean}$ του ρευστού. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δύο πρώτες περιπτώσεις (α,β) του σχήματος, για $Ha=100$, όπου η ροή στις γωνίες των εσωτερικών κατακόρυφων τοιχωμάτων εμφανίζει διαταραχές.

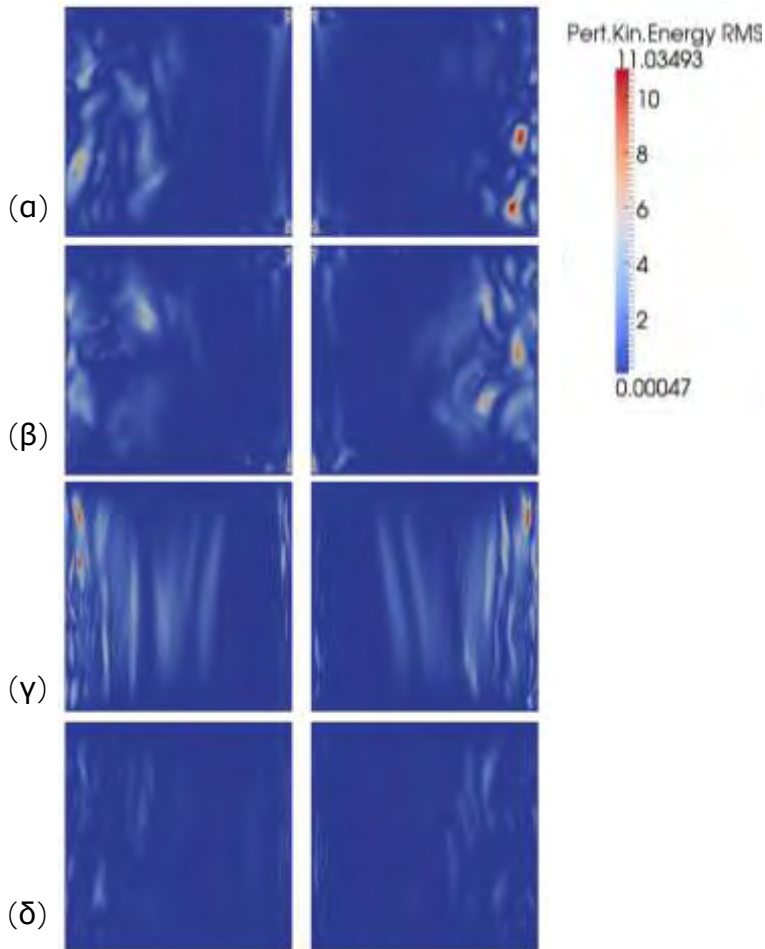


Σχήμα 6.48 Μέση κατακόρυφη ταχύτητα $U_{z,mean}$, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού. α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$



Σχήμα 6.49 Μέση κατακόρυφη ταχύτητα, $U_{z,mean}$, στο μέσο ύψος του τόρου

Στο Σχήμα 6.49, όπου παρουσιάζεται η μέση κατακόρυφη ταχύτητα του ρευστού, στην οριζόντια διατομή στο μισό ύψος του αγωγού, οι διαταραχές είναι πιο εμφανείς. Στις περιπτώσεις υψηλότερων τιμών Re , η ταχύτητα μεταβάλλεται εντονότερα από σημείο σε σημείο μέσα στον αγωγό.



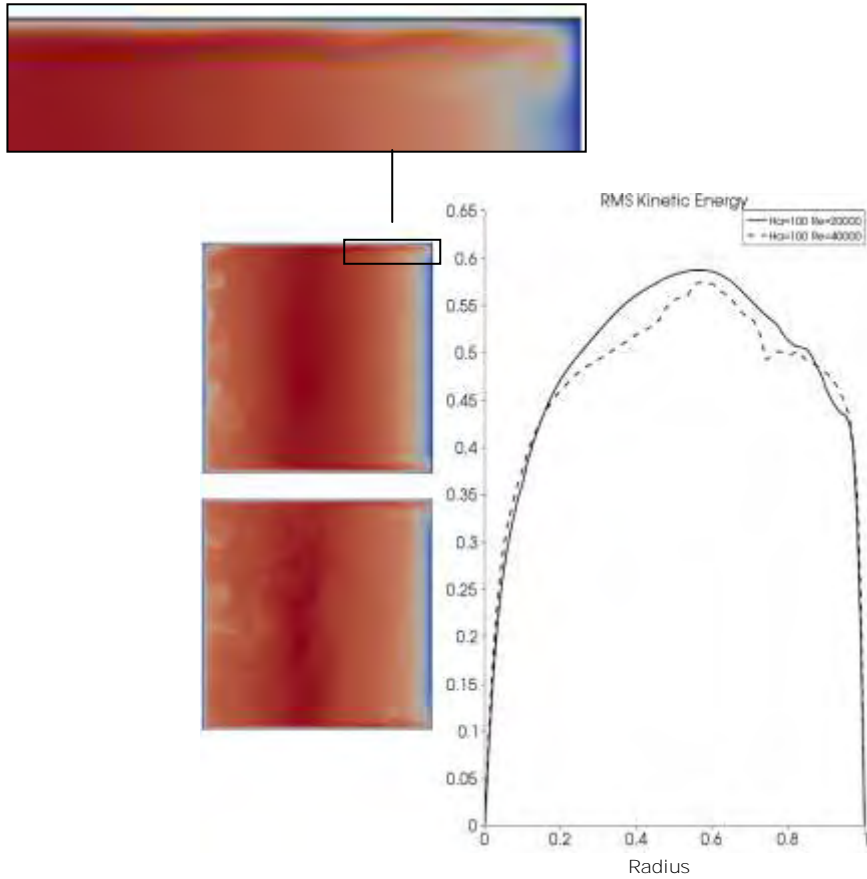
Σχήμα 6.50 Κινητική ενέργεια διαταραχών ταχύτητας, σε αντιδιαμετρικές διατομές του τοροειδούς αγωγού.

α) $Ha=100$, $Re=20000$, β) $Ha=100$, $Re=40000$, γ) $Ha=1000$, $Re=454705$, δ) $Ha=1000$, $Re=909410$

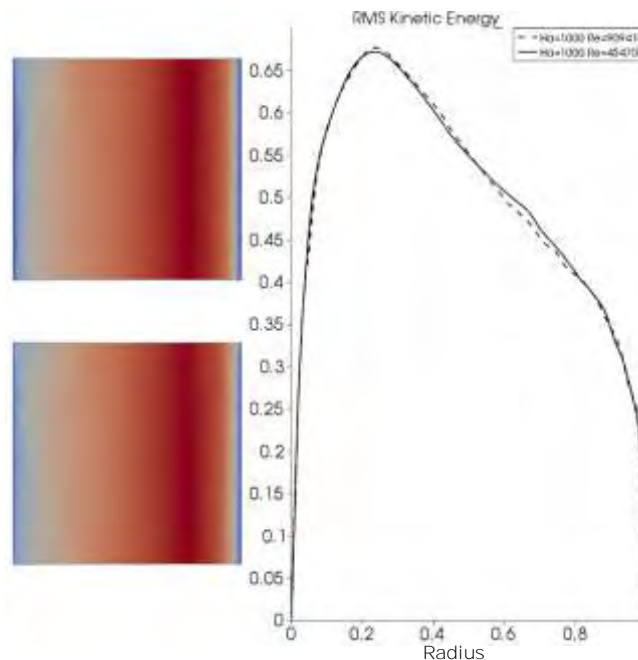
Στο Σχήμα 6.50, για την χαμηλή τιμή $Ha=100$, φαίνεται πως η κινητική ενέργεια των διαταραχών μεταβάλλεται αρκετά κυρίως σε περιοχές κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα και από το κέντρο του αγωγού προς τα εξωτερικά τοιχώματα. Όπως και στο Σχήμα 6.48, αξιοσημείωτο είναι το τμήμα του αγωγού στις γωνίες των εσωτερικών τοιχωμάτων, που ανήκει τόσο στα πλαϊνά όσο και στα οριακά στρώματα Hartmann. Σε πολλές περιπτώσεις όπου υπάρχει δραστηριότητα σε αυτή την περιοχή, γίνεται αλληλεπίδραση των δύο οριακών στρωμάτων. Στην υψηλή τιμή $Ha=1000$, η κινητική ενέργεια των διαταραχών παρουσιάζει μεταβολές σε μεγαλύτερο ποσοστό του αγωγού, ωστόσο

οι αλλαγές είναι πιο ήπιες σε σχέση με την περίπτωση του $Ha=100$.

Μελετώντας την κατανομή της κινητικής ενέργειας της τύρβης, που προκύπτει από την εξίσωση (6.3) και παρουσιάζεται στα Σχήματα 6.51α και 6.51β, παρατηρείται αρχικά η ίδια μεταβολή στα άκρα των πλαϊνών οριακών στρωμάτων, όπως και στο Σχήμα 6.50. Ο σκοπός του μεγεθυμένου τμήματος του αγωγού είναι η καλύτερη παρατήρηση των οριακών στρωμάτων Hartmann. Με τη μεγέθυνση είναι πιο φανερές οι διαταραχές που αναπτύσσονται στην περιοχή αυτή. Να σημειωθεί ότι λόγω του μικρού τους μεγέθους και του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε, κάποιες ενδεχόμενες τοπικές διαταραχές ίσως να μην ήταν δυνατόν να ανιχνευθούν.



α) $Ha=100$, $Re=20000$ (άνω), 40000 (κάτω)



β) $Ha=1000$, $Re=454705$ (άνω), 909410 (κάτω)

Σχήμα 6.51 Ακτινική κατανομή κινητικής ενέργειας της τύρβης

Στην ακτινική κατανομή της κινητικής ενέργειας της τύρβης, δεξιά στο ίδιο Σχήμα 6.51, παρατηρούνται μεγαλύτερες και απότομες μεταβολές στην περίπτωση

του μεγαλύτερου αριθμού Reynolds, ειδικά όταν ο αριθμός Hartmann είναι μικρός. Οι μεγαλύτερες τιμές της κινητικής ενέργειας εμφανίζονται ωστόσο στην περίπτωση του μεγαλύτερου $Ha=1000$. Πρέπει να σημειωθεί πως η αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχει ως άμεσο αποτέλεσμα να αυξάνει η δύναμη Lorentz, ώστε να ευνοείται η αύξηση των δινών στο ρευστό, που θα οδηγήσουν στην αποσταθεροποίηση της ροής. Έτσι, φαίνεται ότι οι μέγιστες τιμές της κινητικής ενέργειας της τύρβης αυξάνονται για $Ha=1000$, ωστόσο αυτό συμβαίνει για μικρή περιοχή του αγωγού, ενώ το υπόλοιπο τμήμα χαρακτηρίζεται από μικρότερη κινητική ενέργεια, σε σχέση με την περίπτωση $Ha=100$.



α) $Ha=100$, $Re=20000$, 40000

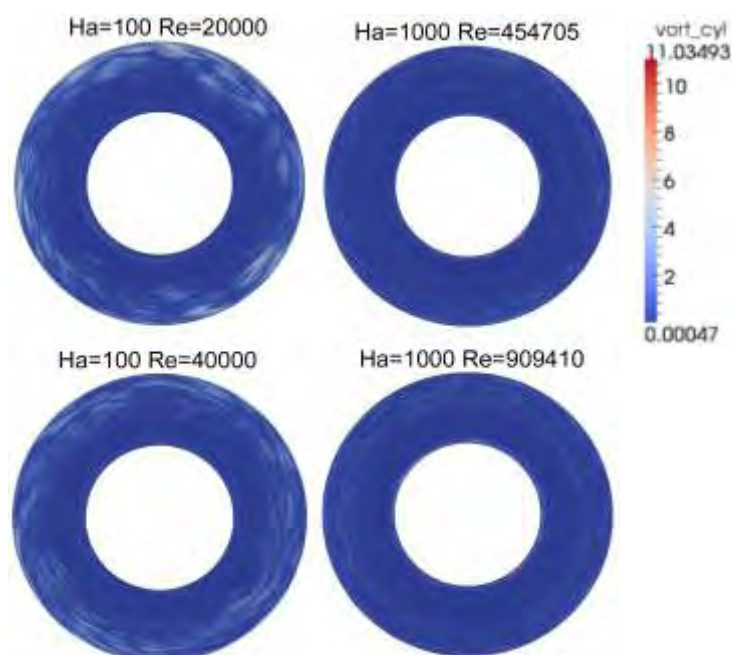


β) $Ha=1000$, $Re=454705$, 909410

Σχήμα 6.52 Κατανομή μέσης εφαπτομενικής στροβιλότητας στο μέσο ύψος του αγωγού

Από τη μέση εφαπτομενική στροβιλότητα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.52, φαίνεται ότι στην περίπτωση του υψηλού $Ha=1000$ εμφανίζονται σε κάποια σημεία του αγωγού οι μέγιστες τιμές στροβιλότητας. Αυτό συμβαίνει κυρίως κοντά στα πλαϊνά οριακά στρώματα, ενώ στην κεντρική περιοχή του αγωγού η στροβιλότητα δείχνει να κυμαίνεται σε ίδια επίπεδα για τους δύο αριθμούς Hartmann, ή ελαφρώς μεγαλύτερα για τον μικρότερο, $Ha=100$. Πρέπει να τονισθεί πως οι υπό εξέταση περιπτώσεις του μεγαλύτερου αριθμού Hartmann, συνοδεύονται από πολύ μεγάλη αύξηση του αριθμού Reynolds, ο οποίος ευνοεί την αύξηση της στροβιλότητας και της κινητικής ενέργειας. Αυτό επίσης εξηγεί γιατί οι περιπτώσεις του ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου χαρακτηρίζονται και από μεγαλύτερες τιμές κινητικής ενέργειας ή στροβιλότητας.

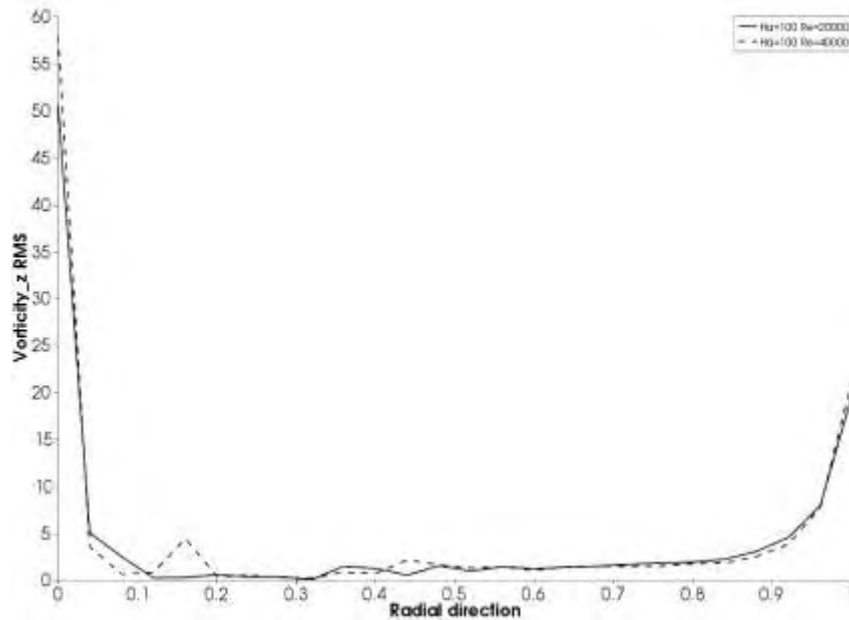
Οι περισσότερες διακυμάνσεις και η έντονη κυματοειδής μορφή της κατανομής της στροβιλότητας συμβαίνουν κοντά στα εξωτερικά τοιχώματα μέχρι το κέντρο της διατομής, όπως δείχνει το Σχήμα 6.53 όπου παρουσιάζεται η κατανομή των τιμών rms της εφαπτομενικής στροβιλότητας σε οριζόντια διατομή στο μέσο ύψος του τόρου.



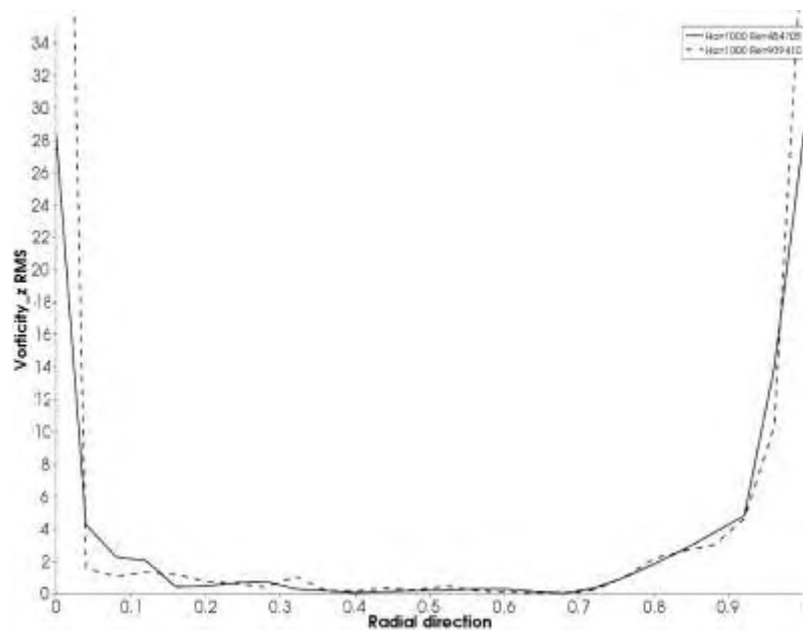
Σχήμα 6.53 Κατανομή εφαπτομενικής στροβιλότητας rms στο μέσο ύψος του τόρου

Μελετώντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις rms τιμές της κατακόρυφης στροβιλότητας του ρευστού, Σχήμα 6.54, κοντά στα εξωτερικά πλαϊνά οριακά στρώματα εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της, όπου φαίνεται πως είναι μεγαλύτερη για $Ha=100$, δηλαδή για την μικρότερη τιμή του αριθμού Hartmann. Επίσης γενικά οι τιμές της στροβιλότητας είναι μεγαλύτερες όταν και ο αριθμός

Reynolds είναι αυξημένος. Πέραν των οριακών στρωμάτων, στο υπόλοιπο τμήμα του αγωγού οι rms τιμές της στροβιλότητας κυμαίνονται στα ίδια περίπου επίπεδα για τις δύο περιπτώσεις του αριθμού Hartmann.



α) Ha=100, Re=20000, 40000



β) Ha=1000, Re=454705, 909410

Σχήμα 6.54 Κατανομή τιμών rms κατακόρυφης στροβιλότητας

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

7.1 Γενικά Συμπεράσματα

Κατά την υλοποίηση της παρούσας διατριβής αναπτύχθηκαν νέα αριθμητικά μοντέλα για τη μελέτη της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη της μαγνητο-υδροδυναμικής ροής σε τοροειδή αγωγό τετραγωνικής διατομής, υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Τα μοντέλα αυτά εισήχθησαν στην ανοικτή βιβλιοθήκη υπολογιστικής ρευστοδυναμικής OpenFOAM και δημιουργήθηκε ο τροποποιημένος κώδικας «mhdBoussinesqBuoyantFOAM» κατάλληλος για την παραπάνω μελέτη.

Υλοποιήθηκαν αριθμητικές προσομοιώσεις για μία ευρεία σειρά αριθμών Hartmann και Reynolds. Οι προσομοιώσεις έγιναν σε συγκεκριμένους αριθμούς Hartmann, ξεκινώντας από μικρές τιμές αριθμών Reynolds που αντιστοιχούν σε στρωτή ροή και αυξάνοντας σταδιακά τον αριθμό Reynolds κατά την εφαρμογή του μοντέλου, μέχρι να επιτευχθεί μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Κατασκευάστηκαν πίνακες και διαγράμματα με την χαρτογράφηση της μετάβασης της ροής, αποτυπώνοντας τα κρίσιμα μεγέθη (Re_c , Ha_c) που διαχωρίζουν την στρωτή από την τυρβώδη περιοχή.

Μελετήθηκαν στρωτές, μεταβατικές και τυρβώδεις ροές, με την δημιουργία σχημάτων που απεικονίζουν όλες τις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις που προέκυψαν από τη μελέτη της ροής στη συγκεκριμένη τοροειδή γεωμετρία. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα και τα στρώματα Hartmann, τα οποία σχηματίζονται αντίστοιχα στα παράλληλα και στα κάθετα τοιχώματα στο μαγνητικό πεδίο, παίζουν σημαντικό ρόλο στη φάση της μετάβασης, καθώς είναι τα τμήματα του αγωγού στα οποία εμφανίζονται σημαντικές διαταραχές της στρωτής ροής.

Τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα έρευνα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

7.1.1 Στρωτή ροή

Σε πολλές περιπτώσεις της στρωτής ροής, παρατηρείται συμμετρική δομή που περιλαμβάνει δίνες Taylor και μια διαταραχή στο μέσο του εξωτερικού κυλινδρικού τοιχώματος του αγωγού. Η αρχική εξέλιξη των δινών Taylor εμφανίζει συμμετρία, όπως φαίνεται από τις διάφορες κατανομές σε οριζόντιες και κατακόρυφες διατομές. Η επιφανειακή μελέτη των δινών μπορεί να τις χαρακτηρίσει ως στοιχεία τύρβης, αν και ανήκουν στη στρωτή περιοχή (όπως φαίνεται από το πεδίο

ταχυτήτων και την κινητική ενέργεια των διαταραχών της ροής που παραμένουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα) και την μεταξύ τους συμμετρία. Ωστόσο οι δίνες και οι διαταραχές της ταχύτητας του ρευστού εξελίσσονται σταδιακά και στη συνέχεια προκαλούν μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη.

Η ταχύτητα του ρευστού, τόσο σε χαμηλούς αριθμούς Hartmann όσο και για τους υψηλότερους, φαίνεται πως είναι μεγαλύτερη κοντά στα πλαϊνά (κυλινδρικά) τοιχώματα παρά στο κεντρικό τμήμα του αγωγού. Η αρχική εμφάνιση των διαταραχών ξεκινά, σε πολλές περιπτώσεις χαμηλών αριθμών Hartmann, στα άνω και κάτω τμήματα των πλαϊνών τοιχωμάτων, και έπειτα συνεχίζει προς το μέσο, αναδεικνύοντας μια έντονη δραστηριότητα στο σύνολο πλέον των κυλινδρικών τοιχωμάτων.

Καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds, παρατηρείται πως η ταχύτητα του ρευστού αποκτά μεγάλες τιμές και σε περιοχές μακριά από τα πλαϊνά τοιχώματα. Για $Ha < 18$, η ροή χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος δινών, το οποίο εμφανίζει συμμετρία. Σε υψηλότερους αριθμούς Hartmann, το μοναδικό ζεύγος δινών αντικαθίσταται από περισσότερα, λόγω της αύξησης της μαγνητικής δύναμης Lorentz.

Σε πολλές περιπτώσεις κυρίως αδύναμου μαγνητικού πεδίου ($Ha < 50$), η ροή είναι πιο ευαίσθητη στις μεταβολές του αριθμού Reynolds, οδηγούμενη εύκολα σε μεταβατική ροή και σε τύρβη. Για ισχυρά μαγνητικά πεδία, και ενώ η κινητική ενέργεια διαταραχών μπορεί να είναι πολύ κοντά σε τιμές που προσεγγίζουν τη μετάβαση, ο αριθμός Reynolds πρέπει να αυξηθεί πολύ ώστε τελικά να συμβεί μετάβαση.

7.1.2 Κατανομή θερμοκρασιών

Το μαγνητικό πεδίο έχει γενικά την τάση να επιβραδύνει την μεταφορά θερμότητας στο ρευστό. Παρατηρείται μια γραμμική εξάρτηση της θερμοκρασίας με την ακτίνα του αγωγού, από το εξωτερικό κρύο τοίχωμα προς το θερμό εσωτερικό τοίχωμα, σύμφωνα με τις αρχικές οριακές συνθήκες. Κοντά στα τοιχώματα, η μεταβολή της θερμοκρασίας επηρεάζεται ελάχιστα από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των αριθμών Hartmann και Reynolds. Η θερμοκρασία μεταβάλλεται κυρίως στην ακτινική κατεύθυνση, καθώς στην κατακόρυφη και αζιμούθια διεύθυνση παραμένει σχεδόν ίδια.

Μετά από προσεκτική μελέτη των θερμοκρασιών στο μέσο ύψος του αγωγού, παρατηρήθηκε ότι η αύξηση του αριθμού Hartmann έχει ως αποτέλεσμα το ρευστό να διατηρεί θερμοκρασίες και διαταραχές σε χαμηλά επίπεδα, κυρίως για

$Ha > 18$, ενώ η αύξηση του αριθμού Reynolds προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας, σε όλο το φάσμα των αριθμών Ha . Η διαφορετική συμπεριφορά της θερμοκρασίας που συμβαίνει στο όριο $Ha = 18$ εξηγείται από τη γενική αλλαγή στη συμπεριφορά της ροής σε αυτή την τιμή του αριθμού Hartmann, καθώς η δύναμη Lorentz για $Ha < 18$ δρα ενάντια στις ιξώδεις δυνάμεις, ενώ για τιμές $Ha > 18$, εξισορροπείται από τις αδρανειακές δυνάμεις. Παρατηρείται ότι λόγω της χαμηλής τιμής του αριθμού Prandtl του παρόντος ρευστού η μετάδοση θερμότητας γίνεται με αγωγή, ενώ για την περίπτωση όπου ο αριθμός Prandtl αυξηθεί αρκετά, τότε πρωταρχικό ρόλο στη μεταφορά θερμότητας αποκτά η συναγωγή, εξαναγκασμένης μορφής, λόγω της επιβολής μαγνητικού πεδίου.

7.1.3 Μετάβαση σε τυρβώδη ροή

Η μελέτη της μετάβασης της στρωτής ροής σε τυρβώδη στον τοροειδή αγωγό με τετραγωνική διατομή αδιάστατης πλευράς 1 έγινε για δύο βασικές γεωμετρίες: (α) με εσωτερική ακτίνα 1 και εξωτερική 2, και (β) με εσωτερική 4 και εξωτερική 5. Το μέρος του αγωγού, στο οποίο πρωτοεμφανίζονται διαταραχές είναι τα πλαϊνά (κυλινδρικά) οριακά στρώματα και κυρίως αυτά στον εξωτερικό κατακόρυφο τοίχωμα του αγωγού. Και στις δύο γεωμετρίες (α και β) η ροή χωρίζεται σε δύο βασικές κατηγορίες σύμφωνα με την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Η πρώτη αφορά ροή σε μαγνητικό πεδίο με αριθμό Hartmann $Ha < 18$, όπου χαρακτηρίζεται από ιξώδεις δυνάμεις που εξισορροπούν τη δύναμη Lorentz, η οποία είναι χαμηλή, λόγω του χαμηλού μαγνητικού πεδίου και άρα η ροή εμφανίζει μικρή κίνηση. Ως αποτέλεσμα, ο κρίσιμος αριθμός Re πρέπει να γίνει πολύ μεγάλος, ώστε να μειώσει τους γραμμικούς όρους διάχυσης (μέσω του παράγοντα $1/Re$ της διάχυσης) και να προκαλέσει μετάβαση της ροής.

Η δεύτερη βασική κατηγορία ροής αφορά για $Ha > 18$, όπου η δύναμη Lorentz εξισορροπείται από τις δυνάμεις αδρανείας. Το ισχυρό μαγνητικό πεδίο αυξάνει τη δύναμη Lorentz μέσω του γινόμενου $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, με αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας της ροής. Ωστόσο αυξάνει αισθητά και ο όρος της διάχυσης. Έτσι, για να επιτευχθεί η μετάβαση πρέπει να γίνει πολύ μεγάλος ο Re ώστε οι μη γραμμικοί όροι που αντιπροσωπεύουν τις αδρανειακές δυνάμεις να κυριαρχήσουν έναντι των μαγνητικών δυνάμεων. Αυτό συμβαίνει κυρίως στα πλαϊνά τοιχώματα, καθώς εκεί η κλίση ταχύτητας καταλαμβάνει υψηλές τιμές και καθιστά τον όρο της αδρανείας μεγαλύτερο από τη διάχυση.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η εξίσωση που περιγράφει τη μετάβαση της ροής για την μικρή και τη μεγάλη γεωμετρία είναι, αντίστοιχα: $Re = 16.486 Ha^{1.3567}$

και $Re=16.803 Ha^{1.4345}$. Ο κρίσιμος λόγος $R=Re/Ha$ κυμαίνεται στο εύρος τιμών $48 < R < 360$ για εύρος τιμών αριθμού Hartmann $10 < Ha < 5000$ στην περίπτωση του μικρού τόρου, και αντίστοιχα $81 < R < 840$ για $10 < Ha < 5000$ στην περίπτωση του μεγάλου τόρου.

Κατά τη μεταβατική φάση της ροής με μαγνητικό πεδίο $Ha < 18$, παρατηρείται ανάπτυξη ενός ζεύγους δινών Taylor-Couette, που δεν καλύπτει όλο το μήκος του πλαϊνού κατακόρυφου τοιχώματος, όπως συνηθίζεται σε άλλες ροές εντός τοροειδούς αγωγού που όμως υπάρχουν κινούμενα τοιχώματα. Η ανάπτυξη των δινών εξελίσσεται σταδιακά στην κεντρική περιοχή του εξωτερικού οριακού στρώματος του τοροειδούς αγωγού. Το ζεύγος αυτό είναι εμφανές σε πολλές περιπτώσεις από τα αρχικά στάδια της στρωτής ροής, ωστόσο όμως ακολουθεί πιστά τη συμμετρία και ομοιομορφία που κυριαρχεί στη στρωτή ροή. Κατά την μετάβαση της ροής, οι δίνες αρχίζουν να διογκώνονται, χάνουν τη συμμετρία τους και αναπτυσσόμενες ελικοειδώς οδηγούν τη ροή σε τύρβη.

Ειδικότερα στην περίπτωση όπου $Ha > 18$, τα ζεύγη δινών είναι περισσότερα από ένα, καθώς το μαγνητικό πεδίο αν και αναμένεται να επιβραδύνει τη ροή, τελικά μέσω της αύξησης της δύναμης Lorentz, μπορεί ως ένα βαθμό να την ενισχύει. Όμως, καθώς το μαγνητικό πεδίο γίνεται πιο ισχυρό, η αυξημένη δύναμη Lorentz εξουδετερώνει αποτελεσματικότερα τις δυνάμεις αδρανείας και έτσι υπάρχει η τάση να μειωθούν τα φαινόμενα που ευνοούν την ανάπτυξη της τύρβης. Συγκρίνοντας τη ροή σε μικρές τιμές του αριθμού Hartmann με τη ροή σε μεγάλες τιμές, παρατηρείται ότι στην δεύτερη περίπτωση για να επιτευχθεί μετάβαση σε τύρβη, ο αριθμός Reynolds πρέπει να αυξηθεί ποσοστιαία πολύ περισσότερο. Σε χαμηλές τιμές του Ha , μια μικρή μεταβολή του Re έχει πολύ μεγαλύτερες συνέπειες στη μορφή της ροής, σε σχέση με τις μεγαλύτερες τιμές Ha , όπου για να παρατηρηθούν αλλαγές στη ροή θα πρέπει ο αριθμός Reynolds να μεταβληθεί σε μεγαλύτερο ποσοστό.

Οι κατανομές ταχυτήτων που αντιστοιχούν σε ισχυρά μαγνητικά πεδία περιλαμβάνουν δίνες, οι οποίες είναι λιγότερες, καταλαμβάνουν ωστόσο μεγαλύτερο χώρο στον αγωγό, έναντι των αντίστοιχων για ασθενή μαγνητικά πεδία. Επίσης σε πολλές περιπτώσεις, αν και οι κατανομές ταχυτήτων μπορεί να μαρτυρούν μια ήρεμη και συμμετρική ροή, ωστόσο το ρευστό μπορεί να εισέρχεται σε μεταβατικά στάδια και μόνο η κατάλληλη σχηματική απεικόνιση της κινητικής ενέργειας των διαταραχών υποδεικνύει τη μετάβαση, μέσα από την απότομη αύξησή της κινητικής ενέργειας. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα αντιληπτό όταν ο

αριθμός Hartmann είναι πολύ μεγάλος ($Ha > 1000$) καθώς το μεταβατικό στάδιο διατηρείται για μεγαλύτερο εύρος αριθμών Reynolds, ώστε εκ πρώτης όψεως να εμφανίζεται συμμετρία της ροής ακόμη και σε προχωρημένα στάδια μετάβασης, και μόνο σε σποραδικά σημεία των πλαϊνών οριακών στρωμάτων να «προδίδεται» η εμφάνιση τύρβης.

Συγκρίνοντας τις δύο γεωμετρίες ως προς τη μεταβατική συμπεριφορά τους, στη μεγάλη γεωμετρία η καμπύλη μετάβασης σε μικρούς αριθμούς Hartmann είναι σχεδόν παράλληλη προς την καμπύλη της μικρής γεωμετρίας. Καθώς αυξάνει ο αριθμός Hartmann, οι δύο καμπύλες δείχνουν να απομακρύνονται, που σημαίνει ότι στις δύο γεωμετρίες η μετάβαση συμβαίνει σε όλο και μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά του αριθμού Reynolds. Δηλαδή όσο ισχυρότερο γίνεται το μαγνητικό πεδίο, τόσο ο αγωγός με τη μεγαλύτερη γεωμετρία απαιτεί μεγαλύτερο αριθμό Reynolds για μετάβαση σε τύρβη. Αντίθετα, η κινητική ενέργεια διαταραχών κατά τη μετάβαση τείνει να είναι οριακά μεγαλύτερη στη γεωμετρία με τη μικρή ακτίνα.

Η σύγκριση του πεδίου ταχυτήτων μεταξύ των δύο γεωμετριών δείχνει ότι οι ταχύτητες καταλαμβάνουν μεγαλύτερο εύρος τιμών στην περίπτωση της μικρής γεωμετρίας, με αποτέλεσμα η ροή στη μικρή γεωμετρία να παρουσιάζει τις μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές ταχυτήτων. Κατά ένα μεγάλο ποσοστό οι δύο γεωμετρίες εμφανίζουν παρόμοια χαρακτηριστικά ροής, για τους ίδιους αριθμούς Hartmann και σε ανάλογους αριθμούς Reynolds κοντά στη μετάβαση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει για $Ha > 100$ η κατανομή ταχυτήτων στη μεγάλη γεωμετρία, όπου η ροή γίνεται μορφής M-προφίλ, που σημαίνει ότι η δευτερεύουσα ροή ισχυροποιείται αισθητά έναντι της βασικής ροής, καθώς οι δίνες στα πλαϊνά είναι συμπιεσμένες στα πολύ λεπτά πλαϊνά οριακά στρώματα, λόγω του υψηλού μαγνητικού πεδίου, και βρίσκουν διέξοδο μέσα από τα ίδια τα πλαϊνά τοιχώματα του αγωγού.

Οι δίνες εμφανίζονται στη μεγάλη γεωμετρία πολύ πριν τη μετάβαση, όταν δηλαδή η ροή είναι καθαρά στρωτή. Επίσης, καθώς ο αριθμός Reynolds προσεγγίζει τιμές μετάβασης, η ακτινική ταχύτητα στη μεγάλη γεωμετρία παρουσιάζει μεγαλύτερες διακυμάνσεις και διαφορετικότητα με την μεταβολή του αριθμού Reynolds, αν και το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας είναι συνήθως μικρότερο σε σχέση με την αντίστοιχη ταχύτητα της μικρής γεωμετρίας κατά τη μεταβατική φάση. Επίσης, κατά τη μεταβατική ροή στη μικρή γεωμετρία, φαίνεται πως η ταχύτητα λαμβάνει τις μέγιστες τιμές της νωρίτερα από ό,τι στη μεγάλη γεωμετρία, στην οποία η ταχύτητα αυξάνει με μειούμενο ρυθμό. Εάν όμως

αγνοηθούν οι απόλυτες τιμές των ταχυτήτων στις δύο γεωμετρίες, η σύγκριση εμφανίζει παρόμοιες μορφές, δηλώνοντας πως στον τοροειδή αγωγό ανεξάρτητα από την μέση ακτίνα του η συμπεριφορά της ροής είναι γενικά η ίδια. Οι κρίσιμες τιμές των ταχυτήτων της ροής και η τιμή του κρίσιμου αριθμού Reynolds για κάθε αριθμό Hartmann, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην έναρξη της μετάβασης σε τύρβη, είναι αυτά που κυρίως διαφέρουν μεταξύ των δύο γεωμετριών.

Σχετικά με τα οριακά στρώματα της μικρής και μεγάλης τοροειδούς γεωμετρίας, παρατηρείται ότι και στις δύο γεωμετρίες τα πάχη των στρωμάτων Hartmann κυμαίνονται στις ίδιες τιμές, ενώ υπολογίζονται λίγο μεγαλύτερα από τις θεωρητικές τιμές (Ha^{-1}), με τη διαφορά τους αυτή να μεγαλώνει για υψηλούς αριθμούς Ha. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα είναι λίγο μικρότερα από τη θεωρητική τους τιμή ($Ha^{-1/2}$), με τη διαφορά τους να μειώνεται καθώς το μαγνητικό πεδίο γίνεται ισχυρότερο. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα είναι λεπτότερα στην μικρή γεωμετρία για χαμηλές τιμές αριθμού Hartmann έως $Ha=50$, ενώ για υψηλότερες τιμές γίνονται παχύτερα, σε σχέση με τη μεγάλη τοροειδή γεωμετρία. Για $Ha \geq 200$, το μεγαλύτερο πάχος του στρώματος Hartmann παρατηρείται όλο και κοντύτερα προς τα εσωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα και στις δύο γεωμετρίες. Τα πλαϊνά οριακά στρώματα στα εσωτερικά κυλινδρικά τοιχώματα της μεγάλης γεωμετρίας είναι παχύτερα από τα αντίστοιχα των εξωτερικών για $Ha < 1000$, ενώ στην μικρή γεωμετρία αυτό ισχύει για περιπτώσεις αριθμών $Ha < 200$, καθώς σε αυτές τις τιμές του Ha το πάχος του εξωτερικού οριακού στρώματος αυξάνεται, και συνοδεύεται από την εμφάνιση πολλών δινών κοντά στο εξωτερικό κυλινδρικό τοίχωμα.

7.1.4 Τυρβώδης ροή

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις αριθμητικές προσομοιώσεις της τυρβώδους ροής στον τοροειδή αγωγό με λόγο μέσης ακτίνας προς πλευρά 1,5:1 ήταν πυκνότερο από αυτό που χρησιμοποιήθηκε για τις υπόλοιπες προσομοιώσεις της μεταβατικής ροής. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιήθηκε ακόμη πυκνότερο πλέγμα είναι κυρίως η περιορισμένη προσβασιμότητα σε υπολογιστικές μονάδες (clusters) με παράλληλη επεξεργασία και αριθμό πυρήνων άνω των 64, αναγκαίο ειδικά στις περιπτώσεις των αριθμητικών προσομοιώσεων ροής με πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds. Επίσης ο βασικός σκοπός της παρούσας διατριβής ήταν η μελέτη κυρίως της μετάβαση της ροής καθώς και τα πρώτα στάδια της τύρβης.

Για την έναρξη και εξέλιξη της τύρβης, βασικό ρόλο παίζουν πρώτα τα πλαϊνά οριακά στρώματα που σχηματίζονται στα κατακόρυφα (κυλινδρικά) τοιχώματα, κυρίως τα εξωτερικά, και έπειτα τα οριακά στρώματα τύπου Hartmann στα

οριζόντια (άνω και κάτω) τοιχώματα του τόρου. Οι διαταραχές που σημειώνονται κοντά στα τοιχώματα, σταδιακά μεταφέρονται στο κέντρο του αγωγού. Σε υψηλούς αριθμούς Hartmann αυτή η μεταφορά μπορεί να συμβαίνει μέσω κατακόρυφων τμηματικών λωρίδων, αναδεικνύοντας μια μορφή εξάρτησης των διαταραχών από την ακτίνα του αγωγού. Με την αύξηση του αριθμού Reynolds, χάνεται οποιοδήποτε είδος ομοιομορφίας της ροής και οι διαταραχές είναι τελείως τυχαίες.

Στην περίπτωση ισχυρών μαγνητικών πεδίων, η ταχύτητα του ρευστού παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση στην διατομή του αγωγού. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σημαντικά στην ακτινική διεύθυνση, καθώς στην αζιμούθια και στην αξονική διεύθυνση δεν παρατηρούνται μεγάλες αλλαγές. Στην περίπτωση του χαμηλού αριθμού Hartmann ($Ha=100$), η ελάχιστη και μέγιστη ταχύτητα βρίσκονται πιο κοντά, αλλά ωστόσο σημειώνεται μεγαλύτερη χωρική διασπορά τιμών. Αυτό σημαίνει πως οι αποσταθεροποιημένες δίνες της ροής έχουν πολύ μικρότερο μέγεθος σε ροές με μικρούς αριθμούς Hartmann.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν τα άκρα των εσωτερικών κυλινδρικών τοιχωμάτων του αγωγού, είτε ως βασικό σημείο έναρξης διαταραχών που μετακινούνται προς το μέσο των τοιχωμάτων αυτών και έπειτα προς το κέντρο του αγωγού, είτε ως σημείο αλληλεπίδρασης των πλαϊνών οριακών στρωμάτων με τα οριακά στρώματα Hartmann.

7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να συνεχιστεί με προσομοιώσεις που θα περιλαμβάνουν την ίδια διατομή με ακόμη μεγαλύτερη μέση ακτίνα του τόρου, με σκοπό τον προσδιορισμό μιας εξίσωσης για τη μετάβαση της ροής, σε συνάρτηση με το μέγεθος της μέσης ακτίνας του τοροειδούς αγωγού. Αυξάνοντας την ακτίνα και υλοποιώντας προσομοιώσεις, ενδιαφέρον θα παρουσιάζει η εύρεση της ακτίνας του αγωγού, στην οποία η ροή θα συμπεριφέρεται όπως σε ευθύγραμμο αγωγό, όπου δηλαδή η περαιτέρω αύξηση της ακτίνας δεν θα μεταβάλλει σημαντικά τα αποτελέσματα.

Επίσης μπορούν να γίνουν προσομοιώσεις με πολύ πυκνότερο πλέγμα, με σκοπό να διερευνηθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων της παρούσας διατριβής από την λύση που θα προέκυπτε στην περίπτωση ενός πιο πυκνού πλέγματος, κάτι που όμως απαιτεί πολύ μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ και περισσότερο χρόνο επίλυσης ειδικά στα ισχυρά μαγνητικά πεδία.

Να μελετηθεί εις βάθος η περιοχή της μετάβασης για τις χαμηλές τιμές του αριθμού Hartmann ($Ha < 18$) όπου οι ιξώδεις δυνάμεις υπερισχύουν των δυνάμεων Lorentz. Πιο συγκεκριμένα στο εύρος τιμών $1 < Ha < 5$, η ροή παρουσίασε ενδιαφέροντα αποτελέσματα μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη για υψηλούς αριθμούς Reynolds. Προτείνεται η διερεύνηση με προσομοιώσεις πυκνότερου πλέγματος, για την πληρέστερη μελέτη της συμπεριφοράς της ροής σε αυτήν την περιοχή τιμών του αριθμού Hartmann.

Ενδιαφέρον θα είχε και η πληρέστερη μελέτη της μεταφοράς θερμότητας στον τοροειδή αγωγό είτε με εξαναγκασμένη είτε με μικτή συναγωγή. Ο προσδιορισμός των συντελεστών μεταφοράς θερμότητας υπό μορφή αριθμών Nusselt από και προς τα τοιχώματα θα είχε σημαντικό τεχνολογικό ενδιαφέρον για την επιτυχή υλοποίηση της μελλοντικής μηχανής σύντηξης αλλά και για άλλες εφαρμογές.

Ακόμη, προτείνεται η προσομοίωση της παρούσης ροής για την τυρβώδη περιοχή με χρήση πολύ πιο πυκνού πλέγματος, για εξαγωγή αποτελεσμάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια στην ενδιαφέρουσα περιοχή της τύρβης.

Τέλος, ενδιαφέρον θα ήταν να μελετηθούν οι περιπτώσεις μαγνητικού πεδίου με ακτινική ή εφαπτομενική συνιστώσα καθώς και η περίπτωση επίλυσης των εξισώσεων του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για περιπτώσεις όπου δεν ισχύει το μοντέλο χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ιατρίδης, A.I., Σαρρής, I.E., Δριτσέλης, Χ.Δ., και Βλάχος, Ν.Σ., "Επίδραση μαγνητικού πεδίου στη ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο με ελεύθερη συναγωγή", ΡΟΗ 2008, 6^η Συνάντηση "Ερευνητικές Δραστηριότητες στα Φαινόμενα Ροής Ρευστών στην Ελλάδα", Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, 28 Νοεμβρίου 2008
2. Aldoss, T.K., Alkam, M., and Sharatah, M., "Natural convection from a horizontal annulus partially filled with porous medium", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 31 (3), pp. 441-452, 2004
3. Alfvén, H., "On the cosmogony of the solar system", *Stockholms Observatoriums Annaler*, 1942
4. Al-Najem, N.M., Khanafer, K.M., and El-Refaei, M.M., "Numerical study of laminar natural convection in tilted enclosure with transverse magnetic field", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 8(6), pp. 651-672, 1998
5. Barleon, L., Buhler, L., Burr, U., and Stieglitz, R., "Integral MHD-heat transfer behaviour in ducts with electrically insulated coated walls", 18 SOFT, Karlsruhe, Germany, Aug. 22-26, 1994
6. Branover, R., "Magnetohydrodynamic flow in ducts", Halsted Press, New York, 1978
7. Burr, U., Barleon, L., Müller, U., and Tsinober, A., "Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong sidewall jets", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 406, pp. 247-279, 2000
8. Burr, U., and Müller, U., "Rayleigh-Benard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 453, pp. 345-369, 2002
9. Burr, U., Barleon, L., Jochmann, P., and Tsinober, A., "Magnetohydrodynamic convection in a vertical slot with horizontal magnetic field", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 475, pp. 21-40, 2003
10. Carlson, D., Widnall, S., and Peeters, M., "A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 121, pp. 487-505, 1982

11. Chaudhary, R., Vanka, S.P., and Thomas, B.G., "Direct numerical simulations of magnetic field effects on turbulent flow in a square duct", *Physics of Fluids*, Vol. 22, 075102, 2010
12. Culham Centre for Fusion Energy, <http://www.ccf.ac.uk/>, 2012
13. DiPrima, R.C., Eagles, P.M., and Ng, B.S., "The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow", *Physics of Fluids*, Vol. 27, 2403, 1984
14. Dousset, V., and Potherat, A., "Numerical simulations of a cylinder wake under a strong axial magnetic field", *Physics of Fluids*, Vol. 20, 017104, 2008
15. Dousset, V., and Potherat, A., "Characterization of the flow past a truncated square cylinder in a duct under a spanwise magnetic field", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 691, pp. 341-367, 2012
16. Dyko, M.P., Vafai, K., and Mojtabi, K., "A numerical and experimental investigation of stability of natural convective flows within a horizontal annulus", *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 381, pp. 27-61, 1999
17. EFDA, European Fusion Development Agreement, <http://www.efda.org/>, 2012
18. Evtushenko, I.A., Hua, T.Q., Kirillov, I.R., Reed, C.B., and Sidorenkov, S.S., "The effect of a magnetic field on heat transfer in a slotted channel", *Fusion Engineering and Design*, Vol. 27, pp. 587-592, 1995
19. Faisst, H., and Eckhardt, B., "Sensitive dependence on initial conditions in transition to turbulence in pipe flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 504, pp.343-352, 2004
20. Fidaros, D.K., Sarris, I.E., Kakarantzas, S.C., and Vlachos, N.S., "Estimation of the MHD effects on the flow of Pb-17Li under magnetic fields produced by the Demo machine in the proposed ENEA design for the DCLL blanket", FPN FUS STG Nr. 23110, ENEA-Rome & University of Thessaly, 2008
21. Fidaros, D. K., Buehler, L., Grecos, A.P., and Vlachos, N.S., "Numerical modelling of rotating tangential layers (jets) in shells under strong uniform magnetic field", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 62, pp. 660-682, 2010
22. Gardner, R.A., Uherka, K.L., and Lykoudis, P.S., "Influence of a transverse magnetic field on forced convection liquid metal heat transfer", *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 848-852, 1966

23. Gardner, R.A., "Laminar pipe flow in a transverse magnetic field with heat transfer", International Journal of Heat & Mass Transfer, Vol. 11, pp. 1076–1081, 1968
24. Gardner, R.A., and Lykoudis, P.S., "Magneto-fluid-mechanic pipe flow in a transverse magnetic field", part 2 heat transfer, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 48, pp. 129–141, 1971
25. Genin, L.G., and Sviridov, V.G., "Heat transfer and temperature distributions in the initial thermal section of a flow of liquid metal in a longitudinal magnetic field", Magnetohydrodynamics, Vol. 19, pp. 140–145, 1983
26. Genin, L.G., Krasnoshchekova, T.E., and Sviridov, V.G., "Heat exchange upon the flow of an electrically conducting liquid in a tube in a longitudinal magnetic field", Magnetohydrodynamics, Vol. 19, pp. 263–267, 1983a
27. Genin, L.G., Ninh, K.B., Pakhotin, Y.A., and Sviridov, V.G., "Heat exchange of a liquid metal in a tube in the longitudinal magnetic field of a solenoid with account taken of end effects", Magnetohydrodynamics, Vol. 19, pp. 268–273, 1983b
28. Genin, L.G., Krasnoshchekova, T.E., and Petrina, L.V., "The hydrodynamics and heat exchange of a conducting fluid in a tube within a longitudinal magnetic field", Magnetohydrodynamics, Vol. 26, pp. 50–56, 1983c
29. Gissinger, C., Ji, H., and Goodman, J., "Instabilities in magnetized spherical Couette flow", arXiv:1106.0319v1 [astro-ph], 2011
30. Greenshields, C.J., and Reese, J.M., "The structure of shock waves as a test of Brenner's modifications to the Navier-Stokes equations", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 580, pp. 407–409, 2007
31. Iatridis, A.I., Sarris, I.E., Dritselis, C.D., and Vlachos, N.S., "MHD natural convection cooling in cylindrical domains", 8th School of Fusion Physics and Technology, University of Thessaly, Greece, 6-11 April 2009
32. Iatridis, A.I., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., "Direct numerical simulation of magnetohydrodynamic flow in toroidal ducts", 10th School of Fusion Physics and Technology, University of Thessaly, Greece, 9-13 May 2011
33. Iatridis, A.I., Dritselis, C.D., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., "Transient laminar MHD natural convection cooling in a vertical cylinder", Numerical Heat Transfer A, Vol. 62, pp. 531-546, 2012a

34. [Iatridis](#), A.J., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S. "Numerical study of transition to turbulence of electromagnetically driven flow in a toroidal square duct", *Physics of Fluids*, *under review*, 2012b
35. [Ilgisonis](#), V.I., and [Khalzov](#), I.V., "Magnetorotational instability in a non-uniform magnetic field", *JETP Letters*, Vol. 86(11), pp. 705-708, 2007
36. Inoue, A., Aritomi, M., Takahashi, M., Narita, Y., Yano, T., and Matsuzaki, M., "Studies on MHD pressure drop and heat transfer of helium-lithium annular-mist bow in a transverse magnetic field", *JSME International Journal*, Vol. 30, pp. 1768–1775, 1987
37. [Issa](#), R.I., "Solution of the implicit discretised fluid flow equations by operator-splitting", *J. of Computational Physics*, Vol. 62, pp. 40-65, 1985
38. [Jasak](#), H., [Jemcov](#), A., and [Tukovic](#), Z., "OpenFOAM: A C++ library for complex physics simulations", *International Workshop on Coupled Methods in Numerical Dynamics IUC*, Dubrovnik, Croatia, September 19th-21st, 2007
39. [Joung](#), Y., [Choi](#), S., and [Choi](#), J., "Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct: Analysis of secondary flows", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 133(213), 2007
40. [Kageyama](#), A., [Ji](#), H., [Goodman](#), J., [Chen](#), F., and [Shoshan](#), E., "Numerical and experimental investigation of circulation in short cylinders", *Journal Physical Society of Japan*, Vol. 73, pp. 2424–2437, 2004
41. [Kakarantzas](#), S.C, [Sarris](#), I.E., [Grecos](#), A.P., and [Vlachos](#), N.S., "Magneto-hydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 250-259, 2009
42. [Khalzov](#), I.V., and [Smolyakov](#), A.I., "On the calculation of steady-state Magnetohydrodynamic flows of liquid metals in circular ducts of a rectangular cross section", *Technical Physics*, Vol. 51, No. 1, pp. 26-33, 2005
43. [Khalzov](#), I.V., [Smolyakov](#), A.I., and [Ilgisonis](#), V.I., "Magnetorotational instability in electrically driven flow of liquid metal: Spectral analysis of global modes", *Physics of Fluids*, Vol. 18, 124107, 2006
44. [Khalzov](#), V., [Smolyakov](#), A.I., and [Ilgisonis](#), V.I., "Magnetorotational instability in electrically driven fluids", arXiv:0711.2818v1 [astro-ph], 2007
45. [Khalzov](#), V., [Smolyakov](#), A.I., and [Ilgisonis](#), V.I., "Equilibrium magneto-hydrodynamic flows of liquid metals in magnetorotational instability experiments", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 644, pp. 257–280, 2010

46. Kinet, M., Knaepen, B., and Molokov, S., "Instabilities and transition in Magnetohydrodynamic flows in ducts with electrically conducting walls", *Physical Review Letters*, PRL 103, 154501, 2009
47. Knaepen, B., Kassinos, S., and Carati, D., "**Magnetohydrodynamic turbulence at moderate magnetic Reynolds number**", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 513, pp 199-220, 2004
48. Kobayashi, H., "Large eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulent **duct flows**", *Physics of Fluids*, Vol. 20, 015102, 2008
49. Krasnov, D.S., Zienicke, E., Zikanov, O., Boeck, T., and Thess, A., "Numerical study of the instability of the Hartmann layer", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 504, pp 183-211, 2004
50. **Krasnov, D., Zikanov, O., Rossi, M., and Boeck, T., "Optimal linear growth in magnetohydrodynamic duct flow"**, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 653, pp. 273-299, 2010
51. **Lee, D., and Choi, H., "Magnetohydrodynamic turbulent flow in a channel at low magnetic Reynolds number"**, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 439, pp. 367-394, 2001
52. Lin, W., and Armfield, S.W., "**Scaling laws for unsteady natural convection cooling of fluid with Prandtl number less than one in a vertical cylinder**", *Physical Review E*, Vol. 72, Article no. 016306, pp. 1-12, 2005
53. Lin, W., Armfield, S.W., and Patterson, J.C., "**Cooling of a $Pr < 1$ fluid in a rectangular container**", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 574, pp. 85-108, 2007
54. Lingwood, R.J., and Alboussierre, T., "**On the stability of the Hartman layer**", *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 2058-2068, 1999
55. Lu, D., and Hetsroni, G., "**Direct numerical simulation of a turbulent open channel flow with passive heat transfer**", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38(17), pp. 3241-3251, 1995.
56. **Messadek, K., and Moreau, R., "An experimental investigation of MHD quasi-two-dimensional turbulent shear flows"**, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 456, pp. 137-159, 2002
57. **Miiyazaki, K., Shimakawa, Y., Inoue, S., Yamaoka, N., and Fujiie, Y., "Flow and heat transfer characteristics in lithium loop under transverse magnetic field"**, *Nuclear Technology Fusion*, Vol. 4, pp. 733-738, 1983

58. Miiyazaki, K., Inoue, H., Kimoto, T., Yamashita, S., Inoue, S., and Yamaoka, N., "Heat transfer and temperature fluctuation of lithium flowing under transverse magnetic field", *Journal of Nuclear Science & Technology*, Vol. 23, pp. 582-593, 1986
59. Moresco, P., and Alboussi re, T., "Experimental study of the instability of the Hartmann layer", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 504, pp. 167-181, 2004
60. Moser, R.D., Kim, J., and Mansour, N.N., "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau=590$ ", *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 943-945, 1999
61. Muck, B., Gunther, C., Muller, U., and Buhler, L., "Three-dimensional MHD flows in rectangular ducts with internal obstacles", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 418, pp 265-295, 2000
62. Mullin, T., Toya, Y., and Tavener, S.J., "Symmetry breaking and multiplicity of states in small aspect ratio Taylor-Couette flow", *Physics of Fluids*, Vol. 14, 2778, 2002
63. Murgatroyd, W., "Experiments on magneto-hydrodynamic channel flow", *Philosophical Magazine Series 7*, 44: 359, 1348 – 1354, 1953
64. Mutschke, G., Shatrov, V., and Gerbeth, G., "Cylinder wake control by magnetic fields in liquid metal flows", *Experimental Thermal & Fluid Science*, Vol. 16, pp. 92-99, 1998
65. OpenFOAM, the Open Source CFD Toolbox, "Programmers guide", Version 1.7.1, 2010a
66. OpenFOAM, the Open Source CFD Toolbox, "User guide", Version 1.7.1, 2010b
67. Ozoe, H., and Okada, K., "The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubical enclosure", *International Journal of Heat & Mass Transfer*, Vol. 32, No. 10, pp. 1939-1954, 1989
68. Piller, M., Nobile, E., and Hanratty, T.J., "DNS study of turbulent transport at low Prandtl numbers in a channel flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 458, pp. 419-441, 2002
69. Potherat, A., Sommeria, J., and Moreau, R., "2D models for MHD flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 328, pp. 129-134, 2000

70. Potherat, A., "Quasi-two-dimensional perturbations in duct flow under transverse magnetic field", *Physics of Fluids*, Vol. 19, 074104, 2007
71. Sarris, I.E., Zikos, G.K., Grecos, A.P., and Vlachos, N.S., "On the limits of validity of the low magnetic Reynolds number approximation in MHD natural-convection heat transfer", *Numerical Heat Transfer: Part B*, Vol. 50, pp. 157-180, 2006
72. Sarris, I. E., Iatridis, A. I., Dritselis, C. D., and Vlachos, N. S., "Magnetic field effect on the cooling of a low-Pr fluid in a vertical cylinder", *Physics of Fluids*, Vol. 22, 017101, 2010
73. Satake, S., Kunugi, T., Takase, K., Ose, Y., "Direct numerical simulation of turbulent channel flow under a uniform magnetic field for large-scale structures at high Reynolds number", *Physics of Fluids*, Vol.18, 125106, 2006
74. Shatrov, V., and Gerbeth, G., "Marginal turbulent magnetohydrodynamic flow in a square duct", *Physics of Fluids*, Vol. 22, 084101, 2010
75. Sidorenkov, S.I., Hua, T.Q., Araseki, H., "Magnetohydrodynamics and heat transfer benchmark problems for liquid metal flow in rectangular ducts", *Fusion Engineering & Design*, Vol. 27, pp. 711–718, 1995
76. Smolentsev, S., and Moreau, R., "Modeling quasi-two-dimensional turbulence in MHD duct flows", *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 2006*, pp. 419-430
77. Sommeria, J., and Moreau, R., "Why, how, and when MHD turbulence becomes two-dimensional", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 118, pp. 507-518, 1982
78. Takahashi, M., Inoue, A., Aritomi, M., and Matsuzaki, M., "Numerical analysis for laminar and turbulent liquid-metal flow in a transverse magnetic field", *Fusion Engineering & Design*, Vol. 8, pp. 249–256, 1989
79. Takahashi, M., Noda, H., Momozaki, Y., and Inoue, A., "Flow and heat transfer characteristics of mercury single-phase and air-mercury two-phase flows in the presence of a strong parallel magnetic field", *Magnetohydrodynamics*, Vol. 31, pp. 397–406, 1995a
80. Takahashi, M., Inoue, A., Aritomi, M., and Matsuzaki, M., "Studies on magneto-hydrodynamic flow characteristics and heat transfer of liquid metal two-phase flow cooling systems for a magnetically confined fusion reactor", *Fusion Engineering & Design*, Vol. 27, pp. 663–677, 1995b

81. **Takahashi, M., Aritomi, M., Inoue, A., and Matsuzaki, M., "MHD pressure drop and heat transfer of lithium single-phase flow in a rectangular channel under transverse magnetic field", Fusion Engineering & Design, Vol. 42, pp. 365-372, 1998**
82. Thess, A., Krasnov, D., Boeck, T., Zienicke, E., Zikanov, O., Moresco, P., and Alboussi re, T., "Transition to turbulence in the Hartmann boundary layer", GAMM-Mitt. 30, 125–132, 2007
83. **Tillack, M.S., "Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow quantity", UCLA-FNT-41, 1990**
84. Uhlmann, M., Pinelli, A., Kawahara, G., and Sekimoto, A., "Marginally turbulent flow in a square duct", Journal of Fluid Mechanics, vol. 588, pp 153-162, 2007
85. **Vantieghe, S., and Knaepen, B., "Numerical simulation of magneto-hydrodynamic flow in a toroidal duct of square cross-section", International Journal of Heat & Fluid Flow, Vol. 32, pp. 1120-1128, 2011**
86. Vargas, M., Sierra, F.Z., Ramos, E., and Avramenko, A.A., "Steady natural convection in a cylindrical cavity", International Communications in Heat & Mass Transfer, Vol. 29 (2), pp. 213-221, 2002
87. **Weller, H.G., Tabor, G., Jasak, H., and Fureby, C., "A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques", Computers in Physics, Vol. 12 (6), pp. 620-631, 1998**
88. Witkowski, L.M. and Walker, J.S., "Numerical solutions for the liquid-metal flow in a rotating cylinder with a weak transverse magnetic field", Fluid Dynamics Research, Vol. 40, pp. 127–137, 2002
89. **Xiao, Q., Lim, T.T., and Chew, Y.T., "Second Taylor vortex flow: Effects of radius ratio and aspect ratio", Physics of Fluids, Vol. 14, 1537, 2002**
90. Yoo, J.S., "Dual free-convective flows in a horizontal annulus with a constant heat flux wall", International Journal of Heat & Mass Transfer, Vol. 46, pp. 2499-2503, 2003
91. Young, H.D., "Πανεπιστημιακή φυσική", Τόμος Β, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, **Νοέμβριος 1991**
92. Zhao, Y., Zikanov, O., and Krasnov, D., "Instability of magnetohydrodynamic flow in an annular channel at high Hartmann number", Physics of Fluids, Vol. 23, 084103, 2011

93. Zhao, Y., and Zikanov, O., "Instabilities and turbulence in magnetohydrodynamic flow in a toroidal duct prior to transition in Hartmann layers ", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 692, pp. 288-316, 2012
94. Zienicke, E.A., and Krasnov, D., "Parametric study of streak breakdown mechanism in Hartmann flow", *Physics of Fluids*, Vol. 17, 114101, 2005
95. Zigel, R., "Effect of magnetic field on convective heat transfer in a channel formed by parallel plates", *Mekhanika*, Vol. 3, pp. 1-5, 1959
96. Zikanov, O., and Thess, A., "Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 358, pp. 299-333, 1998

ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

B	Πυκνότητα μαγνητικής ροής, Tesla
b	Αδιάστατο μαγνητικό πεδίο, \mathbf{B}/b_0
b_0	Χαρακτηριστικό μαγνητικό πεδίο, $\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
c_p	Ειδική θερμοχωρητικότητα ρευστού, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
d	Υδραυλική διάμετρος, m
E	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου, Volt/m
$E_{\text{kin RMS}}$	RMS κινητικής ενέργειας ρευστού, $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
g	Επιτάχυνση βαρύτητας, ms^{-2}
H	Ένταση μαγνητικού πεδίου, Ampere/m
Ha	Αριθμός Hartmann, $B_0 H (\sigma \mu^{-1})^{0.5}$
J	Ηλεκτρικό ρεύμα, Ampere
κ	Θερμική αγωγιμότητα ρευστού, $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
ρ	Πίεση ρευστού, $\text{Pa} = \text{Nm}^{-2}$
P	Αδιάστατη πίεση, $\rho / (\rho U_0^2)$
Pr	Αριθμός Prandtl, $Pr = \nu / \alpha$
Q	Πηγή θερμότητας, W m^{-3}
r, θ, z	Κυλινδρικές συντεταγμένες, m
R	Τροποποιημένος αριθμός Reynolds, Re/Ha
R_1	Εσωτερική ακτίνα τόρου, m
R_2	Εξωτερική ακτίνα τόρου, m
Ra	Αριθμός Rayleigh, $g \beta \Delta T R^3 / \nu \alpha$
Re	Αριθμός Reynolds, $U_0 d / \nu$
R_h	Μαγνητική πίεση, $\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-2}$
Rm	Μαγνητικός αριθμός Reynolds, $\mu \sigma U_0 d$
S	Επιφάνεια, m^2
t	Χρόνος, sec
t^*	Αδιάστατος χρόνος, $t U_0 / d$
T	Θερμοκρασία ρευστού, K
u_r, u_θ, u_z	Ακτινική, εφαπτομενική, αξονική ταχύτητα ρευστού, m sec^{-1}
u_{RMS}	RMS ταχύτητας ρευστού, ms^{-1}
U_0	Χαρακτηριστική ταχύτητα, $\Delta \Phi / b_0 d$
V_r, V_θ, V_z	Αδιάστατη ακτινική, εφαπτομενική, αξονική ταχύτητα ρευστού, u / U_0
V	Όγκος, m^3
χ_e	Ηλεκτρική επιδεκτικότητα, F m^{-1}

Greek letters

α	Θερμική διαχυτότητα ρευστού, m^2s^{-1}
β	συντελεστής θερμικής διαστολής ρευστού, K^{-1}
$\Delta\phi$	Διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού, Volt
ϵ	Ηλεκτρική διαπερατότητα ρευστού, Fm^{-1}
μ	Δυναμικό ιξώδες ρευστού, $kgm^{-1}s^{-1}$
μ	Μαγνητική διαπερατότητα ρευστού, Hm^{-1}
ν	Κινηματικό ιξώδες ρευστού, m^2s^{-1}
ρ	Πυκνότητα ρευστού, $kg\ m^{-3}$
σ	Ηλεκτρική αγωγιμότητα ρευστού, Siemens m^{-1}
Φ	Ηλεκτρικό δυναμικό, Volt
Φ_B	Μαγνητική ροή, Tesla m^2
Ψ	Αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Ι. ΙΑΤΡΙΔΗΣ

ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ημ/νια γέννησης: 20 Νοεμβρίου 1977
Εθνικότητα: Ελληνική
Διεύθυνση: Βασσάνη 94, 38333 Βόλος
Τηλέφωνο: +30 24210 44810, Κινητό: +30 6977 706081
E-mail: iatrid@yahoo.gr
Μέλος ΤΕΕ από 28/02/2003, ΜΕΚ (Μητρώο Εμπειρίας Κατασκευαστών): Α/Α 32194, Α΄ Βαθμίδα

ΣΠΟΥΔΕΣ

Μαρτ. 2009-σημ. Υποψήφιος Διδάκτωρ στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Παν. Θεσσαλίας.
Τίτλος διατριβής: «Μαγνητοϋδροδυναμική Турβώδης Ροή και Μεταφορά Θερμότητας σε Αγωγούς Μηχανών Σύντηξης: Μετάβαση της Ροής»
2000 - 2001 MSc in Computer Science, Univ. of Manchester, Department of Computer Science
1996 - 2000 Δίπλωμα Μηχανολόγου Μηχανικού, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πολυτεχνική Σχολή, Παν. Θεσσαλίας. Σειρά εισαγωγής: 4^{ος}, Βαθμός πτυχίου: 7.98

ΕΡΕΥΝΑ

Μεταπτυχιακή Εργασία MSc - University of Manchester (2001)

"Systemic analysis of key variables in Athens Stock Exchange case study",
Επιβλέπων: Dr Peter Kawalek: Στατιστική ανάλυση χρηματιστηριακών μεταβλητών που οδήγησαν το Χρηματιστήριο Αθηνών στην πτώση του Οκτωβρίου 1999.

Διπλωματική Εργασία - Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας (2000)

"Χαρακτηρισμός χυτών, ανοξείδωτων και πυρίμαχων χαλύβων", Επιβλέπων: Καθ. Γρηγόριος Χαϊδεμενόπουλος. Υλοποίηση μεθόδων ελέγχου βελτιστοποίησης χαλύβων. Στατιστική ανάλυση αποτελεσμάτων.

ΕΡΓΑΣΙΑ - ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ

Αύγ. 2009 - σημ. Μηχ/γος Μηχ/κός στο Τμήμα Ύδρευσης Δήμου Νοτίου Πηλίου.
Νοεμ. 2005 - Ιουλ. 2009 Ιδιοκτήτης εκπαιδευτικής σχολής και επιχείρησης Πληροφορικής.
Φεβρ. 2003 - Ιουλ. 2009 Ιδιοκτήτης Τεχνικού Γραφείου. Σύμβουλος επιχειρήσεων. Μελέτη - σχεδίαση μεταλλικών κατασκευών. ΗλεκτροΜηχανολογικές μελέτες.
Οκτ. 2006 - Ιουν. 2008 Τεχνικός συνεργάτης Η/Υ - Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.
Νοέμ. 2006 - Ιουλ. 2009 Τεχνικός ασφαλείας: Έπιπλα "Στύλλας", Βόλος
Ιαν. 2006 - Ιουλ. 2009 Τεχνικός ασφαλείας: "FIAT", "Ψυγεία Λομβάρδος ΑΕ", Βόλος
Ιαν. 2004 - Ιουλ. 2009 Τεχνικός ασφαλείας "Συνεργείο αυτ/των Ιωάννης Ιατρίδης", Βόλος
Μαρ. 2005 - Μαΐου 2006 Μηχ/γος Μηχ/κός στην εταιρεία Κύκλωψ Γαλανός ΑΕ, Α΄ Βιομ. Περιοχή Βόλου. (Μηχανήματα επεξεργασίας σιδήρου μπετόν). Σχεδίαση-μελέτη.
Δεκ. 2004- Ιουν. 2005 Αναπληρωτής καθηγητής Πληροφορικής. Β΄θμια Εκπαίδευση Μαγνησίας
Οκτ. 2003 - Οκτ. 2004 Μηχ/γος Μηχ/κός στην εταιρεία Ν. Κιολεΐδης ΑΕΒΕ, Α΄ Βιομ. Περιοχή Βόλου (Αμαξώματα, οχήματα, κα). Σχεδίαση - Μελέτη - Παραγωγή.
Ιουν. 2003 - Οκτ. 2003 Μηχ/γος Μηχ/κός στην εταιρεία Κύκλωψ Γαλανός & Σια Ο.Ε., Α΄ Βιομ. Περιοχή Βόλου. (Μηχανήματα επεξεργασίας σιδήρου μπετόν). Σχεδίαση-μελέτη, Παραγωγή.

- Φεβρ. 2001 – σημ. Μαθήματα στα ΙΕΚ Δήμου Βόλου
13 εξάμηνα στο 1^ο ΙΕΚ Βόλου, διάρκεια 361 ώρες. 2 εξάμηνα στο 2^ο ΙΕΚ Βόλου, διάρκεια 98 ώρες. 3 εξάμηνα στο ΔΙΕΚ Βόλου.
Εισηγητής σε φορείς: ΟΑΕΔ-ΛΑΕΚ, ΚΕΚΑΝΑΜ ΑΕ, Σύλλογος Φροντιστών Ν. Μαγνησίας, Σχολή Πληροφορικής Computer Center, ΚΕΚ ΙΒΕΠΕ.
- Προγράμματα Κατάρτισης Εισηγητής σε 14 σεμινάρια συνολ. διάρκειας 768 ωρών
Αντικείμενο: Σχεδίαση AutoCAD 2D-3D, Χρήση Η/Υ, Προγραμματισμός, Internet & Web Design, Μηχανολογία-Ηλεκτρολογία, ECDL, SPSS.
- Μάιος – Σεπτ. 2000 ΕΒΕΤΑΜ ΑΕ - Υλοποίηση Διπλωματικής εργασίας για λήψη Πτυχίου.
Τίτλος: "Χαρακτηρισμός Χυτών, Ανοξειδωτων και Πυρίμαχων Χαλύβων".
Χύτευση, τέστ εφελκυσμού, ραδιογραφία.

ΥΠΟΤΡΟΦΙΣ

- 1997 & 1998 Κρατική υποτροφία ΙΚΥ για επίδοση στο 1^ο και 2^ο έτος σπουδών Προπτ. Σπουδών

ΑΛΛΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- 9μηνη εξειδίκευση στο ατομικό μικροσκόπιο AFM, στο Τμήμα Μηχ/γων Μηχ/κών Παν. Θεσσαλίας.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

- Iatridis, A.I., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., Numerical study of transition to turbulence of electro-magnetically driven flow in a toroidal square duct", *Physics of Fluids*, under review, 2012
- Iatridis, A.I., Dritselis, C.D., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., "Transient laminar MHD natural convection cooling in a vertical cylinder", *Numerical Heat Transfer A*, Vol. 62, pp. 531-546, 2012a
- Dritselis, C.D., Iatridis, A.J., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., Buoyancy assisted mixed convection in a vertical channel with spatially periodic wall temperature, *International Journal of Thermal Sciences*, in print, 2012
- Sarris, I.E., Iatridis, A.I., Dritselis, C.D., Vlachos, N.S., Magnetic field effect on the cooling of a low-Pr fluid in a vertical cylinder, *Phys. Fluids* 22, 017101, 2010

ΣΥΝΕΔΡΙΑ

- Iatridis, A.I., Sarris, I.E., and Vlachos, N.S., Direct numerical simulation of magnetohydrodynamic flow in toroidal ducts, 10ο Σχολείο Φυσικής & Τεχνολογίας Σύντηξης, Παν. Θεσσαλίας, 9-13 Μαΐου 2011
- Ιατριδής, Α.Ι., Σαρρής, Ι.Ε., Δριτσέλης, Χ.Δ., και Βλάχος, Ν.Σ., "Επίδραση μαγνητικού πεδίου στη ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο με ελεύθερη συναγωγή", 8ο Σχολείο Φυσικής & Τεχνολογίας Σύντηξης, Παν. Θεσσαλίας, 6-11 Απριλίου 2009
- Ιατριδής, Α.Ι., Σαρρής, Ι.Ε., Δριτσέλης, Χ.Δ., και Βλάχος, Ν.Σ., "Επίδραση μαγνητικού πεδίου στη ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο με ελεύθερη συναγωγή", Έκτη Συνάντηση ΡΟΗ 2008, "Ερευνητικές Δραστηριότητες στα Φαινόμενα Ροής Ρευστών στην Ελλάδα", Παν. Δ. Μακεδονίας, 28 Νοεμβρίου 2008

POSTERS ΣΕ ΣΥΝΕΔΡΙΑ

- Iatridis, A.I., Sarris, I.E., Dritselis, C.D., and Vlachos, N.S., "MHD natural convection cooling in cylindrical domains", 9ο Σχολείο Φυσικής & Τεχνολογίας Σύντηξης, Παν. Θεσσαλίας, 19-23 Απριλίου 2010
- Ιατριδής, Α.Ι., Σαρρής, Ι.Ε., Δριτσέλης, Χ.Δ., και Βλάχος, Ν.Σ., "Επίδραση μαγνητικού πεδίου στη ψύξη ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο με ελεύθερη συναγωγή", 7ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Φαινόμενα Ροής Ρευστών» Θεσσαλονίκη 12-13 Νοεμβρίου 2010