



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΑΞΗΣ

ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

υπό

ΚΥΡΙΑΚΟΥ ΓΙΑΝΝΟΥΛΑ ΙΩΑΝΝΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών

2014

© 2014 Κυριακού Γιαννούλα Ιωάννα

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Διμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Ευμορφόπουλος Νέστωρ, Επίκουρος Καθηγητής
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σταμούλης Γεώργιος, Καθηγητής
Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΑΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΚΥΡΙΑΚΟΥ ΓΙΑΝΝΟΥΛΑ ΙΩΑΝΝΑ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών,
2014

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Ευμορφόπουλος Νέστωρ, Επίκουρος Καθηγητής, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Περίληψη

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία αναπτύσσουμε αριθμητικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση ενός μοντέλου σε ένα μικρότερο κρατώντας όμως τα βασικά χαρακτηριστικά του πρώτου αλλά προσθέτοντας ένα μικρό error. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι χρησιμοποιούνται στον σχεδιασμό κυκλωμάτων και κυρίως στην προσομοίωση αυτών κατά την επαλήθευσή τους. Πιο συγκεκριμένα υλοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί αλγόριθμοι οι Prima, SPRIM και BSMOR και στην συνέχεια αξιολογήθηκε η συμπεριφορά τους τόσο σε θέματα ακρίβειας όσο και σε θέματα απόδοσης.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ειλικρινείς και θερμές ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας :

Και πρώτα απ' όλα, στους επιβλέπων καθηγητές μου Κ. Ευμορφόπουλο Νέστωρ και Κ. Σταμούλη Γεώργιο για τη συνεχή καθοδήγηση, την αμέριστη υποστήριξη, τις ουσιώδεις συμβουλές, καθώς και την αδιάκοπη συμπαράσταση και ενθάρρυνση που μου παρείχαν σε όλο αυτό το διάστημα. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους Νταλούκα Κωνσταντή και Αντωνιάδη Μπάμπη για την πολύτιμη βοήθεια τους σχετικά με το υλικό αλλά και με την διευθέτηση της πτυχιακής μου εργασίας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με έμαθαν να «προσπερνώ» και βοήθησαν να γίνουν «ανεκτοί» οι συμβιβασμοί των τελευταίων χρόνων: την οικογένεια μου, τους φίλους μου, τους συναδέλφους μου. Σε αυτούς, που με την καθημερινή τους συμπαράσταση, την υπομονή τους και την θετική τους σκέψη, ιδιαίτερα τις εποχές των μεγάλων διλημμάτων, συνέβαλαν στην εκπλήρωση του στόχου μου, αφιερώνεται η εργασία αυτή.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1: Μαθηματικό μοντέλο	2
1.1 MNA εξισώσεις	3
1.2 Υπόχωροι Krylov	5
1.3 Ορθοκανονική βάση	7
1.4 QR παραγοντοποίηση	8
1.5 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα	9
1.6 Πόλοι και μηδενικά	10
Κεφάλαιο 2: Μέθοδοι που υλοποιήθηκαν	11
2.1 PRIMA	12
2.2 SPRIM	14
2.3 BSMOR	16
2.4 Συγκριτικά μεθόδων	19
Κεφάλαιο 3: Υλοποίηση	20
3.1 Υλοποίηση Prima	21
3.2 Υλοποίηση SPRIM	22
3.3 Υλοποίηση BSMOR	24
Κεφάλαιο 4: Εξαγόμενα αποτελέσματα- Συμπεράσματα	26
4.1 PRIMA	27
4.2 SPRIM	28

4.3 BSMOR	29
4.4 Συγκριτικοί Πίνακες	30
4.5 Επίλογος	31
Βιβλιογραφία	32

Ονοματολογία

MOR: Model Order Reduction

PRIMA: Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm

SPRIM: Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling

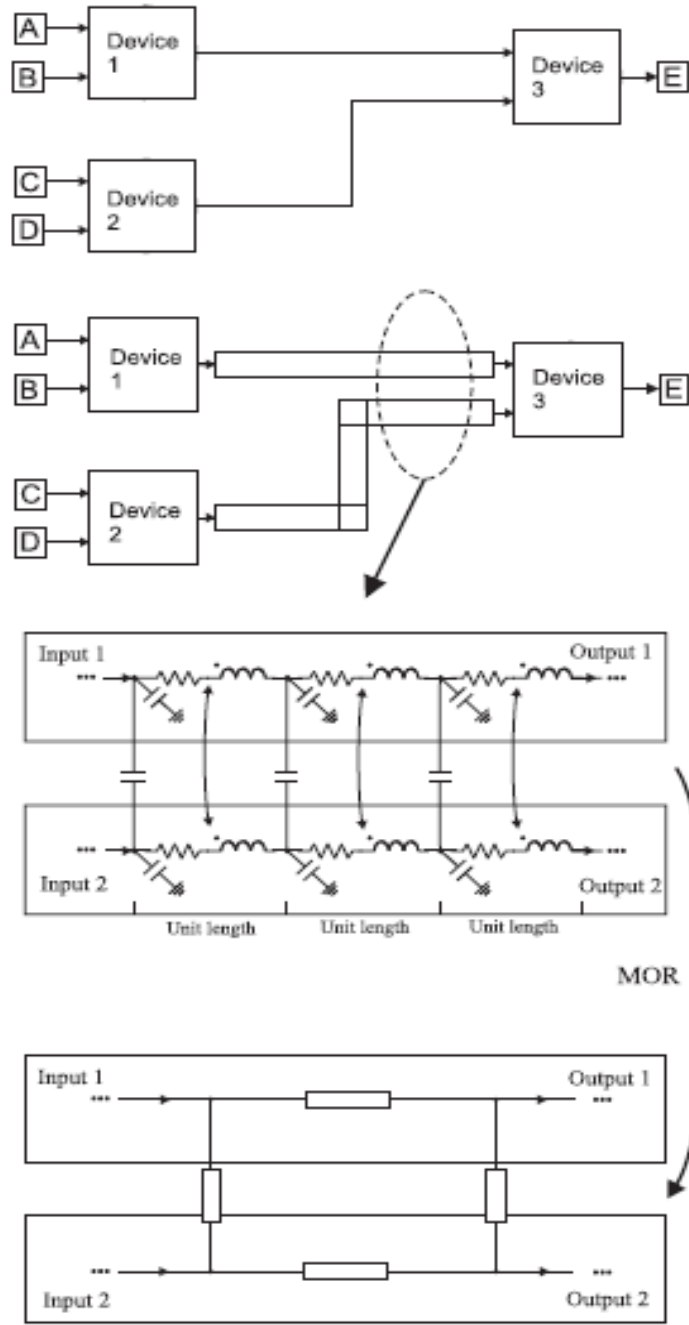
BSMOR: Block Structure Model Order Reduction

CPU: Central Processing Unit

MNA: Modified Nodal Analysis

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα προσομοιώνεται με την χρήση υπολογιστικών μοντέλων ώστε να εξακριβωθεί η σωστή λειτουργία του πριν βγει στην παραγωγή. Αυτή η διαδικασία είναι πολύ σημαντική καθώς φαινόμενα που προκαλούνται στο φυσικό επίπεδο πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και τα οποία απαιτούν κατά την προσομοίωση του κυκλώματος έντονη χρήση της CPU και την μνήμη. Αυτό λύνεται χρησιμοποιώντας το MOR κατά το οποίο τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των παρασιτικών φαινομένων διατηρούνται και οι λιγότερο σημαντικοί παράγοντες παραλείπονται με αποτέλεσμα να μειώνεται ο χρόνος προσομοίωσης σημαντικά.



Κεφάλαιο 1: Μαθηματικό μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά σχετικά με τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν με βάση τους ψευδοκώδικες κάθε μεθόδου. Τα κυριότερα είναι οι ΜΝΑ εξισώσεις που μοντελοποιούν το σύστημα μας και βάση αυτών προκύπτουν οι εξισώσεις μεταφοράς, μέθοδοι που δημιουργούν υποχώρους Krylov και που τους χρειαζόμαστε καθώς επίσης γίνεται αναλυτική αναφορά στον τι είναι οι ορθοκανονικές βάσεις και πως προκύπτουν και πως πραγματοποιείται η QR παραγοντοποίηση.

1.1 MNA εξισώσεις

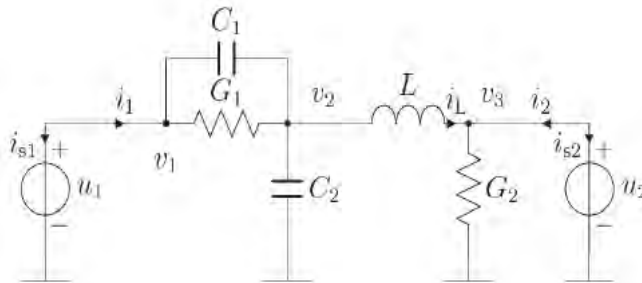
Οι MNA εξισώσεις ενός κυκλώματος RLC είναι της μορφής:

$$\begin{cases} C \frac{dx_n(t)}{dt} = -Gx_n(t) + Bu_N(t) \\ i_N(t) = L^T x_n(t) \end{cases}$$

όπου ο πίνακας $C \in R^{n \times n}$ περιέχει τους πυκνωτές, ο πίνακας $G \in R^{n \times n}$ περιέχει τις αγωγιμότητες και οι πίνακες και $B \in R^{n \times N}$ και L περιέχουν 1,-1 και 0 και ισχύει $B=L$. Πιο συγκεκριμένα κάθε υποπίνακας είναι της μορφής:

$$C \equiv \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \quad G \equiv \begin{bmatrix} N & E \\ -E^T & 0 \end{bmatrix}, \quad x_n \equiv \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

Όπου ο Q περιέχει τις τιμές των πυκνωτών, ο H των επαγωγών και ο N των αντιστάσεων αντίστοιχα. Ο πίνακας E περιέχει 1,0,-1 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι νόμοι του Kirchoff. Για παράδειγμα:



$$\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 + C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{i}_L \\ \dot{i}_{S1} \\ \dot{i}_{S2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G_1 & G_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_L \\ i_{S1} \\ i_{S2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$C \dot{x}_n = -G x_n + B u_N$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_n = L^T x_n$$

Και παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace έχουμε για τον πίνακα των αγωγιμοτήτων

$$Y(s) = L^T (I - sA)^{-1} R$$

όπου ο πίνακας I είναι ένας μοναδιαίος πίνακας μεγέθους $n \times n$. Επίσης είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A αναπαριστούν τους πόλους της $Y(s)$.

Τα στιγμιότυπα της $Y(s)$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως συντελεστές της σειράς Taylor γύρω από το $s = 0$:

$$Y(s) = M_0 + M_1s + M_2s^2 + \dots$$

Όπου το $M_i \in R^{N \times N}$ και υπολογίζεται από την σχέση

$$M_i = L^T A^i R$$

Το οποίο σε ορολογία κυκλώματος η τιμή στην j γραμμή και k στήλη του M_i είναι το i -οστό στιγμιότυπο του ρεύματος που πάει στο port j όταν η πηγή τάσης στο port k είναι η μοναδική μη μηδενική πηγή.

1.2 Υπόχωροι Krylov

Στόχος του MOR είναι να ελαχιστοποιηθούν οι διαστάσεις των πινάκων και αυτό πραγματοποιείται μέσα από μεθόδους προβολών. Η ακολουθία Krylov δημιουργία μία βάση ενός πίνακα αλλά αυτή δεν είναι ορθοκανονική, υπάρχουν όμως μέθοδοι όπως αυτή του Arnoldi που την κάνουν ορθοκανονική. Ο βασικός αλγόριθμος Prisma χρησιμοποιεί την επαναληπτική μέθοδο του Arnoldi για την δημιουργία του υποχώρου Krylov που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\text{colsp}(R, AR, A^2R, \dots, A^kR) = \text{Kry}(A, R, q)$$

$k=q/N$ που δηλώνει τις επαναλήψεις.

Πιο συγκεκριμένα στο δικό μας πρόβλημα ο A και R είναι οι γεννήτορες του υπόχωρου και ορίζονται ως εξής:

$$A \equiv -G^{-1}C, R \equiv G^{-1}B$$

Αναλυτικότερα η μέθοδος του Arnoldi για την δημιουργία του υποχώρου $K_m(A, v)$ υλοποιείται ως εξής:

Choose a vector v and set $q_1 = \frac{v}{\|v\|}$

for $j = 1, 2, \dots, m$ do

Compute $z = Aq_j$

for $i = 1, 2, \dots, j$ do

$h_{i,j} = q_i^T z$

$z = z - h_{i,j}q_i$

end

$h_{j+1,j} = \|z\|$

if $h_{j+1,j} = 0$ quit

$q_{j+1} = \frac{z}{h_{j+1,j}}$

end

Έτσι δημιουργούνται ένας πίνακας Q_m διαστάσεων $n \times m$ και ένας πίνακας H_m διάστασης $(m + 1) \times m$ που ικανοποιούν την εξίσωση $AQ_m = Q_{m+1} H_m$

$$Q_m = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m)$$

$$H_m = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{m+1,m} \end{pmatrix}$$

Υπάρχουν και άλλοι γνωστοί μέθοδοι οι οποίοι χρησιμοποιούν τους υποχώρους όπως είναι οι Lanczos, Conjugate gradient, GMRES και άλλες.

1.3 Ορθοκανονική βάση

Μια βάση $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ του διανυσματικού χώρου Δ με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται ορθοκανονική, ακριβώς όταν τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο ($\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$) και έχουν μέτρο 1 ($\|\varepsilon_i\| = 1$). Πιο γνωστή μέθοδος είναι η Gram Schmidt.

Από οποιαδήποτε βάση μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική βάση με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt. Η διαδικασία διαίρεσης ενός διανύσματος με το μέτρο του ονομάζεται κανονικοποίηση και ως αποτέλεσμα προκύπτει ένα διάνυσμα με μέτρο 1.

Έστω $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V στο οποίο ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο τότε τα διανύσματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \dots, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}$ όπου

$$\xi_1 = \eta_1$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_2$$

...

$$\xi_n = \eta_n - \frac{\eta_n \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_n \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_2 - \dots - \frac{\eta_n \cdot \xi_{n-1}}{\xi_{n-1} \cdot \xi_{n-1}} \xi_{n-1}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του χώρου V .

Ένας πίνακας Q με πραγματικά στοιχεία καλείται ορθογώνιος εάν είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του ισούται με τον ανάστροφο του.

$$Q^{-1} = Q^T$$

Και ισοδύναμα πρέπει να ισχύει $QQ^T = Q^TQ = I$.

1.4 QR παραγοντοποίηση

Το QR factorization ενός πίνακα είναι η παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in R^{m \times n}$ σε έναν ορθογώνιο πίνακα $Q \in R^{m \times m}$ κι έναν άνω τριγωνικό πίνακα $R \in R^{m \times n}$ τέτοιοι ώστε ο A να ισούται με το γινόμενο του Q επί του R ($A = QR$).

$$(a_1 \quad \dots \quad a_n) = (q_1 \quad \dots \quad q_n) \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Όπου τα $(a_1 \quad \dots \quad a_n)$ και τα $(q_1 \quad \dots \quad q_n)$ είναι στηλοδιανύσματα.

Οι στήλες του A μπορούν να γραφτούν σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών του Q.

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}q_1 \\ a_2 &= r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \\ &\vdots \\ a_n &= r_{1n}q_1 + r_{2n}q_2 + \dots + r_{nn}q_n \end{aligned}$$

1.5 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n . Η τιμή $\lambda \in R$ θα λέγεται ιδιοτιμή του A αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα-στήλη $u \in R_n$ τέτοιο ώστε

$$Au = \lambda u$$

Κάθε διάνυσμα που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Επίσης ένας πίνακας μπορεί να έχει πολλές ιδιοτιμές και σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν πολλά ιδιοδιανύσματα.

Εύρεση ιδιοτιμής

1. Αρχικά λύνουμε την εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$, δηλαδή αφαιρούμε το λ από την κύρια διαγώνιο και λύνουμε την

$$\left| \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

2. Στην συνέχεια για κάθε ιδιοτιμή λ ξεχωριστά λύνουμε το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Για να βρούμε τον αντίστοιχο ιδιοχώρο. Ουσιαστικά βρίσκουμε μια βάση από ιδιοδιανύσματα.

1.6 Πόλοι και μηδενικά

Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις (εκθετικά σήματα, συστήματα που περιγράφονται από διαφορική εξίσωση) ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση (rational function) του s , δηλαδή είναι λόγος πολυωνύμων του s :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Ρίζες του αριθμητή: Μηδενικά (Zeroes) $X(s) = 0$.

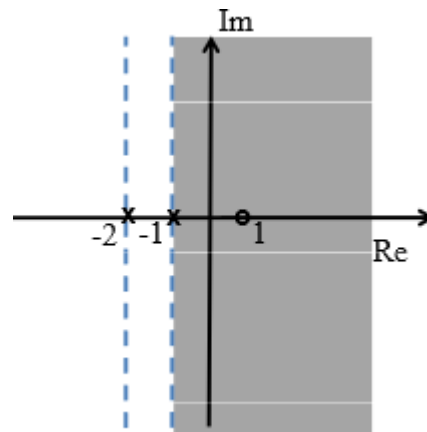
Ρίζες του παρονομαστή: Πόλοι (Poles) $X(s) \rightarrow \infty$.

Κάθε σήμα $x(t)$ που είναι γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών σημάτων για $t < 0$ και $t > 0$ έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace. Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γίνει στο μιγαδικό επίπεδο s (s -plane) προσδιορίζοντας τη θέση των μηδενικών και πόλων (διάγραμμα πόλων-μηδενικών/pole-zero plot).

Ένα παράδειγμα αναπαράστασης πόλων και μηδενικών φαίνεται στο διπλανό σχήμα όπου το -2 και το -1 είναι οι πόλοι και το 1 είναι το μηδενικό. Η περιοχή σύγκλισης (λωρίδα παράλληλη στον φανταστικό άξονα) καθορίζεται από τους πόλους.

Μηδενικά: o

Πόλοι: x



Κεφάλαιο 2: Μέθοδοι που υλοποιήθηκαν

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική αναφορά στις μεθόδους Prima, SPrim και BSMOR που υλοποιήθηκαν και οι οποίες έχουν στηριχθεί στους αντίστοιχους ψευδοκωδικές που παρουσιάζονται παρακάτω για την κάθε μία ξεχωριστά. Αναφέρονται αναλυτικά όλοι οι πίνακες που είναι απαραίτητοι καθώς και η μορφή που είτε έχουν είτε δίνουμε εμείς ώστε να υπάρχουν βελτιστοποιήσεις. Ακόμα φαίνονται όλες οι πράξεις που γίνονται ανάμεσα στους πίνακες ώστε να προκύψουν οι πίνακες μικρότερων διαστάσεων σε σχέση με τους αρχικούς και η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς.

2.1 PRIMA

Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι βασισμένη στην επαναληπτική μέθοδο Arnoldi μέσω της οποίας δημιουργεί τον πίνακα X διάστασης $n \times q$ ο οποίος χρησιμοποιείται στην συνέχεια ώστε να μειωθούν οι διαστάσεις των πινάκων που περιέχονται στην εξίσωση MNA που μοντελοποιεί το κύκλωμα, διατηρώντας όμως τα παθητικότερα στοιχεία των πινάκων C και G . Ο ψευδοκώδικας παρακάτω περιγράφει την υλοποίηση της.

Επαναληπτική μέθοδος Arnoldi:

Με αυτή την επαναληπτική μέθοδο μειώνουμε το μέγεθος του πίνακα A μετατρέποντας τον σε ένα άνω Hessenberg πίνακα H_q . Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε μία ορθοκανονική βάση X για τον υπόχωρο Krylov που θα ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \text{colsp}(X) &= \text{Kr}(A, R, \lfloor \frac{q}{N} \rfloor) \\ X^T A X &= H_q \\ X^T X &= I_q \end{aligned}$$

Όπου το N είναι ο αριθμός των ports και ο I_q είναι ένας $q \times q$ μοναδιαίος πίνακας

1. $(X_0, K) = qr(R)$; *qr factorization of R*
2. Set $n = \text{int}(\frac{q}{N}) + 1$
3. for $k = 1, 2, \dots, n$
 - Set $V = C X_{k-1}$
 - Solve $G X_k^{(0)} = V$ for $X_k^{(0)}$
 - for $j = 1, \dots, k$
 - $H = X_{k-j}^{(T)} X_k^{(j-1)}$
 - $X_k^{(j)} = X_k^{(j-1)} - X_{k-j} H$
 - $(X_k, K) = qr(X_k^{(k)})$; *qr factorization of $X_k^{(k)}$*
4. Set $X = [X_0, X_1, \dots, X_{k-1}]$
5. Compute $\tilde{C} = X^T C X, \tilde{G} = X^T G X, \tilde{B} = X^T B$

Και πλέον χρησιμοποιούνται οι πίνακες \tilde{C} , \tilde{G} , \tilde{B} οι οποίοι πλέον έχουν πολύ μικρότερο μέγεθος.

Και οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι της μορφής

$$\begin{cases} \tilde{C} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -\tilde{G}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ i(t) = \tilde{L}^T\tilde{x}(t) \end{cases}$$

$$\tilde{C} = X^T C X$$

$$\tilde{G} = X^T G X$$

$$\tilde{B} = X^T B$$

$$\tilde{L} = X^T L$$

Και αντίστοιχα έχουμε $\hat{Y}(s) = \tilde{L}^T (\tilde{G} + s\tilde{C}) \tilde{B}$ όπου μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά της $\hat{Y}(s)$ μέσω των ιδιοτιμών.

Ιδιότητες της συγκεκριμένης:

- το κύκλωμα παραμένει να είναι παθητικό και μετά την ελαχιστοποίηση του
- διατηρεί τα q/N στιγμιότυπα του αρχικού συστήματος για κάθε Port άρα αφού έχουμε N port διατηρεί q στιγμιότυπα όσο ακριβώς και της block Arnoldi αλλά τα μισά σε σχέση με αυτά της Lanczos.

2.2 SPRIM

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι σχεδόν ίδιος με τον PRIMA με την διαφορά ότι διατηρεί την δομή του συστήματος. Το κύριο χαρακτηριστικό του ότι οι πίνακες αποτελούνται από υποπίνακες και αντίστοιχα οι πράξεις γίνονται στα υπομπλόκ του πίνακα. Αρχικά οι πίνακες είναι $C, G \in R^{n \times n}$ και $B \in R^{n \times N}$. Ο αλγόριθμος παρακάτω αναφέρει αναλυτικά το πώς γίνεται αυτό.

1. Αρχικά δημιουργούμε τα υπομπλόκ:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Όπου το G_1, C_1, B_1 έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών.

2. Δημιουργούμε τους A και R

$$A \equiv (G + s_0 C)^{-1} C$$

$$R \equiv (G + s_0 C)^{-1} B$$

3. Χρησιμοποιούμε όποια μέθοδο θέλουμε για την δημιουργία του υποχώρου krylon και έχουμε

$$\text{span}V_n = K_n(A, R)$$

Όπου σκανάροντας από τα αριστερά προς τα δεξιά διαγράφουμε κάθε στήλη που είναι γραμμικά εξαρτημένη.

4. Αντίστοιχα σπάμε σε block και τον πίνακα V_n .

$$V_n = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Και με το padding έχουμε $V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$

5. Και ακολουθεί η δημιουργία των νέων πινάκων

$$\widetilde{G}_1 = V_1^T G_1 V_1$$

$$\widetilde{G}_2 = V_2^T G_2 V_1$$

$$\widetilde{C}_1 = V_1^T C_1 V_1$$

$$\widetilde{C}_2 = V_2^T C_2 V_2$$

$$\widetilde{B}_1 = V_1^T B_1$$

Και

$$\widetilde{G}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 & \widetilde{G}_2^T \\ -\widetilde{G}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{C}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_2 \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{B}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.Και στο τέλος έχουμε:

$$\widetilde{Z}_n(s) = \widetilde{B}_n^T (\widetilde{G}_n + s\widetilde{C}_n)^{-1} \widetilde{B}_n$$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούμε τον ίδιο υπόχωρο απλά το κλειδί είναι ο σωστός διαχωρισμός των υπομπλόκ και αντίστοιχα του πίνακα V που προκύπτει. Ακολουθούν οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ των υποπινάκων για να προκύψει το αντίστοιχο αποτέλεσμα και η κατάλληλη συνάρτησης μεταφοράς. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι πλέον οι πίνακες G, C, B, L που προκύπτουν μετά τον πολλαπλασιασμό με τον πίνακα V είναι μεγέθους n μικρότερο του αρχικού.

Ιδιότητες της συγκεκριμένης:

- Διατηρεί τουλάχιστον τον ίδιο αριθμό στιγμιοτύπων αλλά μπορεί να διατηρεί μέχρι και τον διπλάσιο αριθμό με κατάλληλη επιλογή του s .
- Το κύκλωμα συνεχίζει να παραμένει παθητικό.
- Είναι εύκολο να γίνει η σύνθεση του νέου κυκλώματος που προκύπτει.

2.3 BSMOR

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι επέκταση του SPRIM όπου πλέον χωρίζουμε τους υποπίνακες σε ακόμα περισσότερα υπομπλόκ. Όταν θέτουμε $m = x$ ξέρουμε ότι υπάρχουν $(x + 1)$ υπομπλόκ καθώς ο G_1 είναι αυτός ο οποίος χωρίζεται σε περισσότερα κομμάτια και ο G_2 παραμένει όπως έχει. Το αντίστοιχο γίνεται και στους C και $B = L$ για να γίνουν οι πράξεις με τα αντίστοιχα υπομπλόκ. Και έχουμε αντίστοιχα για τον κάθε υποπίνακα τον εξής διαχωρισμό.

Για τον πίνακα G έχουμε:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{1,1(n_1 \times n_1)} & G_{1,2(n_1 \times n_2)} & \dots & G_{1,m(n_1 \times n_m)} \\ G_{2,1(n_2 \times n_1)} & G_{2,2(n_2 \times n_2)} & & G_{2,m(n_2 \times n_m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m,1(n_m \times n_1)} & G_{m,1(n_m \times n_2)} & \dots & G_{m,m(n_m \times n_m)} \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα C έχουμε:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1,1(n_1 \times n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{2,2(n_2 \times n)} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{m,m(n_m \times n)} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = C_{m,m(n_m \times n)}$$

Για τον πίνακα B έχουμε:

$$B = [B_1, 0]$$

$$B_1 = [B_{1(n_1 \times n)}, B_{2(n_2 \times n)}, \dots, B_{m(n_m \times n)}]^T$$

Για τον πίνακα V έχουμε:

$$V = \begin{bmatrix} V_{1(n_1 \times n)} \\ V_{2(n_2 \times n)} \\ \vdots \\ V_{m+1(n_{m+1} \times n)} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{V} = \begin{pmatrix} V_{1(n_1 \times n)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{2(n_2 \times n)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{m+1(n_{m+1} \times n)} \end{pmatrix}$$

Και αντίστοιχα γίνονται οι πολλαπλασιασμοί για την δημιουργία των τελικών πινάκων που τους είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το αρχικό :

$$\hat{G}_n = \hat{V}^T G \hat{V}, \quad \hat{C}_n = \hat{V}^T C \hat{V}, \quad \hat{B}_n = \hat{V}^T B$$

Ή με διαφορετικό τρόπο:

$$\hat{G}_{i,j} = V_i^T G_{i,j} V_j, \quad \hat{C}_{i,j} = V_i^T C_{i,j} V_j, \quad \hat{B}_i = V_i^T B_i$$

Και για συνάρτηση μεταφοράς έχουμε:

$$\hat{Z}_n(s) = \hat{V}^T (\hat{G} + s\hat{C})^{-1} \hat{B}$$

Με τον αλγόριθμο αυτό όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των υπομπλόκ τόσο μεγαλώνει και ο αριθμός των στιγμιοτύπων που διατηρούνται χρησιμοποιώντας τον ίδιο υπόχωρο krylon. Πειράματα έχουν δείξει ότι μπορεί ο χρόνος μπορεί να μειωθεί στο εικοσαπλάσιο ακόμα και σε κυκλώματα που έχουν 1000 στοιχεία.

Ιδιότητες της συγκεκριμένης:

- Διατηρεί μεγαλύτερο αριθμό στιγμιότυπων σε σχέση με τις δυο προηγούμενες
- Το κύκλωμα συνεχίζει να παραμένει παθητικό.
- Απαιτείται λιγότερος χρόνος σε σχέση με την Prima.

2.4 Συγκριτικά μεθόδων

Πριν από τις τρεις μεθόδους που αναπτύσσονται πιο πάνω είχαν αναπτυχθεί και άλλες όπως είναι η AWE και μέθοδοι που ήταν βασισμένοι στον αλγόριθμο Lanczos. Συγκριτικά με τις μεθόδους που αναπτύσσουμε εμείς η AWE είναι πιο εύκολο να κατανοηθεί και να υλοποιηθεί αλλά είναι αριθμητικά ασταθής και αντίστοιχα οι αλγόριθμοι που ήταν βασισμένοι στον Lanczos ενώ ήταν αριθμητικά σταθεροί και αποδοτικοί ωστόσο είχαν ένα μειονέκτημα, το κύκλωμα δεν μπορούσε να παραμείνει παθητικό. Σχετικά με την PRIMA, SRPIM, BSMOR υπάρχει ο παρακάτω πίνακας που παρουσιάζει τις ιδιότητες της κάθε μία.

Πίνακας: Ιδιότητες Μεθόδων

Μέθοδοι Ιδιότητες	PRIMA	SRPIM	BSMOR
Αριθμός Στιγμιότυπων	q	$> q$	$> q$
Παραμένει παθητικό	×	×	×
Σύνθεση νέου κυκλώματος		×	
Απαιτούμενος χρόνος*	x	$< x$	$< x$

*Εστω x ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης

Κεφάλαιο 3: Υλοποίηση

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο περιγράφονται όλα τα βήματα που ακολούθησα ώστε να υλοποιήσω τους συγκεκριμένους αλγορίθμους καθώς επίσης και τα δεδομένα που μου δόθηκαν ώστε να γίνουν οι αντίστοιχες προσομοιώσεις. Στη συνέχεια φαίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν πριν την ελαχιστοποίηση και μετά την ελαχιστοποίηση καθώς επίσης αναφέρονται και οι χρόνοι που χρειάστηκαν για την παραγωγή των υποπινάκων και η κατανάλωση πόρων του συστήματος.

Ξεκινώντας έχουμε τους πίνακες G, C που έχουν μέγεθος 578×578 και τον πίνακα B με μέγεθος 578×9 και σκοπός μας είναι να τους κάνουμε μικρότερους σε μέγεθος. Από αυτά τα 569 είναι ο αριθμός των κόμβων του κυκλώματος. Και στους αλγορίθμους χρησιμοποιήθηκε η ίδια μέθοδος Arnoldi για την δημιουργία των υπόχωρων Krylov. Αναλυτικότερα τώρα για την κάθε μία έχουμε:

3.1 Υλοποίηση Prima

Για την συγκεκριμένη μέθοδο ξεκινήσαμε με την αρχικοποίηση του $f = 1e8$ διότι το $s_0 = 2\pi f$ και χρειάζεται η κατάλληλη αρχικοποίηση ώστε οι πίνακες που προκύπτουν να μην είναι singular. Στην συνέχεια γίνονται οι αρχικοποιήσεις των πινάκων A, R ώστε να ξεκινήσει η διαδικασία με την κλήση της συνάρτησης prima η οποία παίρνει τους παραπάνω πίνακες και με την χρήση της μεθόδου του Arnoldi η οποία τρέχει για $n = \frac{q}{N}$ ή $n = \frac{q}{N} + 1$ ανάλογα με το αν το $\frac{q}{N}$ είναι ακέραιος ή όχι για δημιουργεί τον πίνακα X και αντίστοιχα από τον πίνακα που προκύπτει κρατάω τις q τελευταίες στήλες του που είναι μεγέθους μικρότερο του 578 και αυτός με την σειρά του χρησιμοποιείται για να πολλαπλασιαστεί με τους αντίστοιχους G, C, B με σκοπό να μειώσει τα μεγέθη τους αντίστοιχα στο δικό του μέγεθος. Άρα τελικά έχουμε τους αντίστοιχους πίνακες οι οποίοι έχουν μέγεθος qxq και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση του κυκλώματος.

3.2 Υλοποίηση SPrim

Όπως είδαμε και παραπάνω σχετικά με την υλοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου είναι πανομοιότυπη με αυτή της SPrim καθώς χρησιμοποιείται η ίδια λογική για την δημιουργία του υπόχωρου που χρησιμοποιείται με σκοπό την μείωση του μεγέθους. Πριν γίνουν όμως όλα αυτά γίνεται ο κατάλληλος διαχωρισμός των βασικών μας πινάκων G, C, B με τον τρόπο που αναφέρεται παραπάνω και φαίνεται παρακάτω με περισσότερη λεπτομέρεια.

Πίνακας G

$$G_1 = 569 \times 569$$

$$G_2 = 9 \times 569$$

Πίνακας C

$$C_1 = 569 \times 569$$

$$C_2 = 9 \times 9$$

Πίνακας B

$$B_1 = 569 \times 9$$

$$B_2 = 9 \times 9$$

Σχετικά με τον πίνακα V ο οποίος προκύπτει κατά με τον ίδιο τρόπο που προκύπτει ο αντίστοιχος X της Prima χωρίζεται και αυτός σε δύο κομμάτια

$$V_1 = 569 \times q$$

$$V_2 = 9 \times q$$

Ακολουθεί το padding για την δημιουργία του πίνακα V όπου οι υπόλοιπες θέσεις γεμίζονται με μηδενικά.

Ακολουθούν οι αντίστοιχες πράξεις με τα υπομπλόκ που φαίνονται και παραπάνω στον ψευδοκώδικα και φτάνουμε στην εξίσωση μεταφοράς η οποία αντίστοιχα ελέγχεται για να εξετάσουμε αν τα αποτελέσματα που βγαίνουν είναι ίδια ή έχουν μία μικρή διαφορά σχετικά με τα αποτελέσματα που εξάγονται από το κύκλωμα χωρίς να γίνει ελαχιστοποίηση.

3.3 Υλοποίηση BSMOR

Ξεκινώντας με την συγκεκριμένη μέθοδο πρέπει να αποφασίσουμε σε πόσα υπομπλόκ θα χωρίσουμε του πίνακες μας δηλαδή τι τιμή θα δώσουμε στην μεταβλητή m . Στο συγκεκριμένο κύκλωμα χωρίζουμε με $m=2$ άρα το αντίστοιχο G_1 θα χωριστεί σε δύο υπομπλόκ και το αντίστοιχο G_2 θα παραμείνει όπως έχει. Ο αντίστοιχος διαχωρισμός θα γίνει και στο πίνακα C και για τον B. Έτσι έχουμε τα εξής για τον κάθε πίνακα ξεχωριστά:

Πίνακας G

$$G_{1,1} = 284x284$$

$$G_{1,2} = 284x285$$

$$G_{1,3} = 284x9$$

$$G_{2,1} = 285x284$$

$$G_{2,2} = 285x285$$

$$G_{2,3} = 285x9$$

$$G_{3,1} = 9x284$$

$$G_{3,2} = 9x285$$

$$G_{3,3} = 9x9$$

Πίνακας C

$$C_{1,1} = 284x284$$

$$C_{1,2} = 284x285$$

$$C_{1,3} = 284x9$$

$$C_{2,1} = 285x285$$

$$C_{2,2} = 285x285$$

$$C_{2,3} = 285x9$$

$$C_{3,1} = 9x284$$

$$C_{3,2} = 9x285$$

$$C_{3,3} = 9x9$$

Πίνακας Β

$$B_{1,1} = 284x9$$

$$B_{2,1} = 285x9$$

$$B_{3,1} = 9x9$$

Στην συνέχεια μετά την δημιουργία του πίνακα V που είναι ίδιος με τις προηγούμενες μεθόδου έχουμε πρέπει να χωριστεί και αυτός στα αντίστοιχα τμήματα. Επομένως έχουμε:

$$V_{1,1} = 284xq$$

$$V_{2,1} = 285xq$$

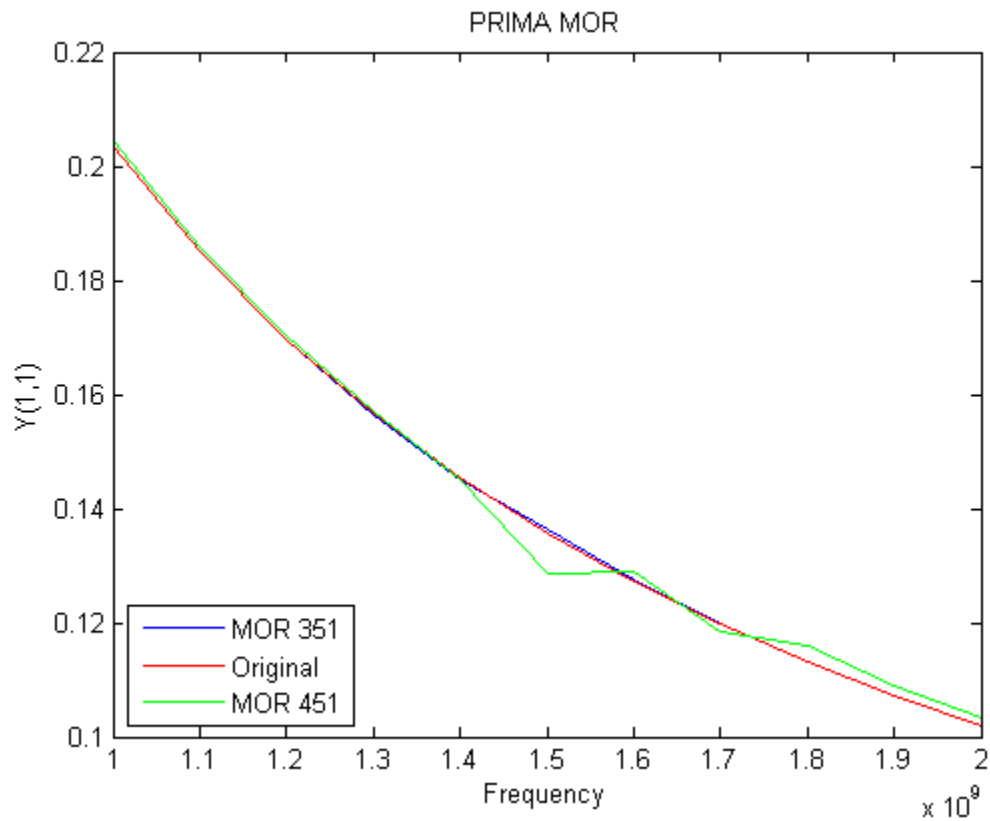
$$V_{3,1} = 9xq$$

Ακολουθούν οι απαραίτητοι πολλαπλασιασμοί ώστε να προκύψουν οι πίνακες που θα έχουν μέγεθος μικρότερο του αρχικού.

Κεφάλαιο 4^ο: Εξαγόμενα αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που πήραμε από κάθε μέθοδο που υλοποιήθηκε σε Matlab. Για κάθε μέθοδο έγινε η προσομοίωση του κυκλώματος χωρίς ελαχιστοποίηση και στην συνέχεια με ελαχιστοποίηση. Επιλέξαμε να ελαχιστοποιήσουμε το κύκλωμα στις 351 και 451 στήλες και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης παρουσιάζονται παρακάτω. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν.

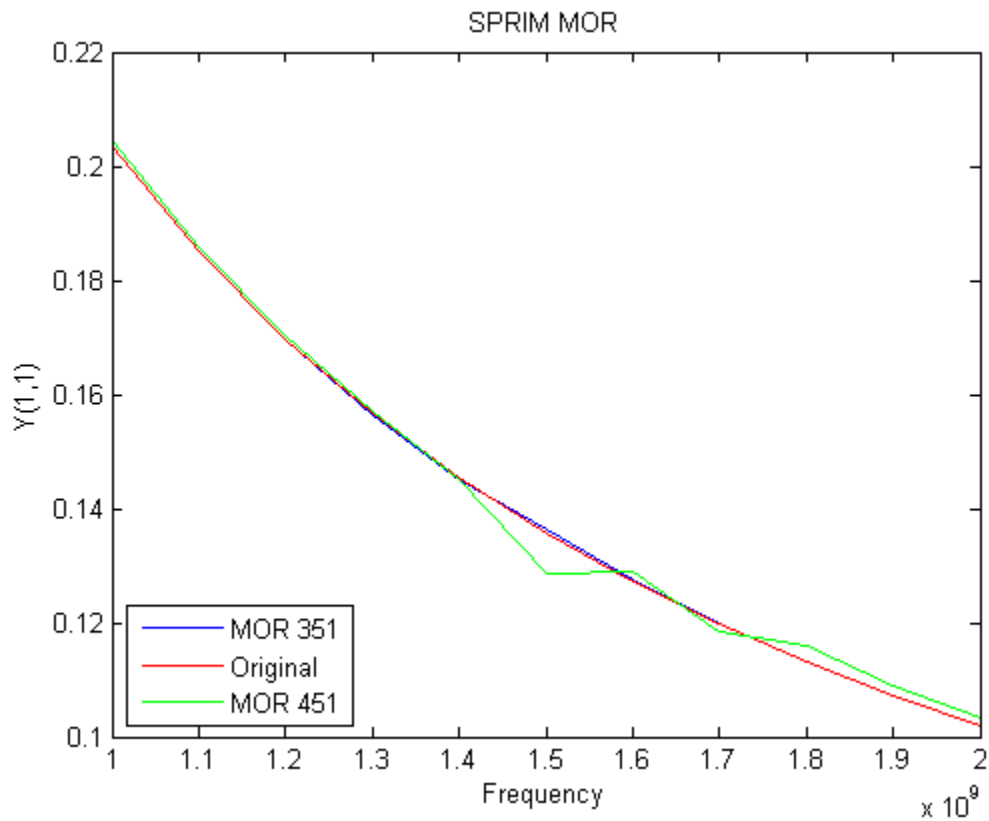
4.1 PRIMA



Οι χρόνοι που χρειάστηκαν για την εξαγωγή των πινάκων μικρότερων διαστάσεων και για την τελική προσομοίωση του κυκλώματος είναι οι παρακάτω:

PRIMA	q=351	q=451
Χρόνος εξαγωγής πινάκων	346.58 sec	891.73 sec
Χρόνος προσομοίωσης	0.31 sec	0.54 sec

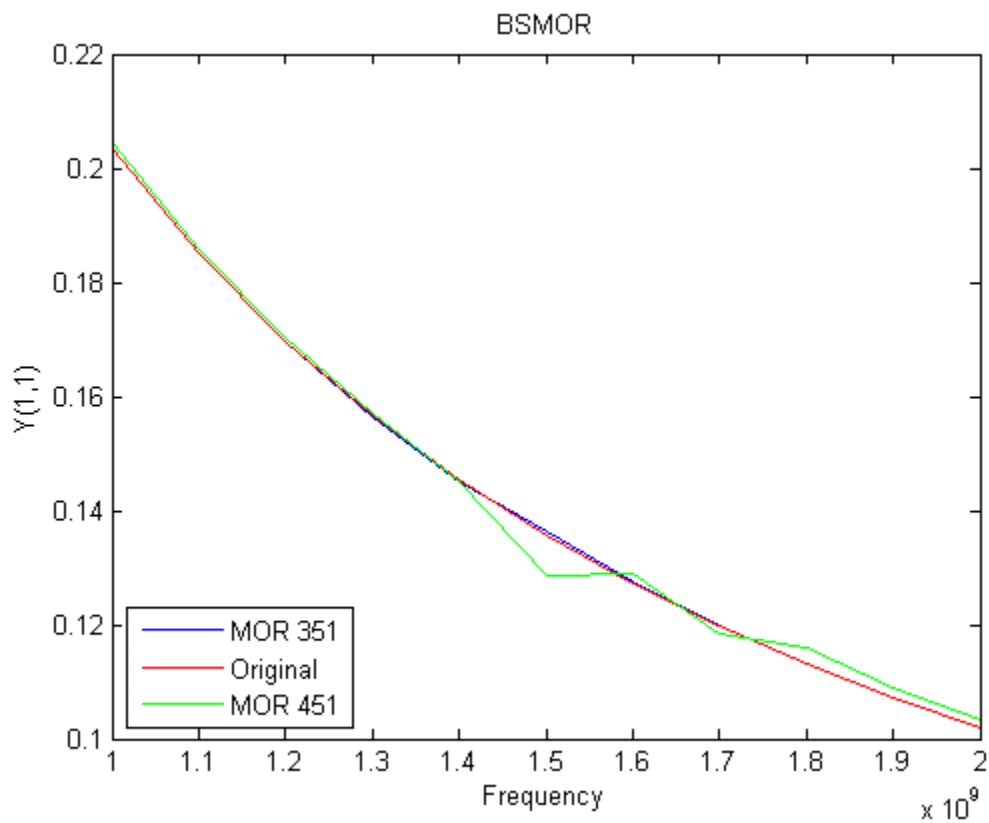
4.2 SPRIM



Οι χρόνοι που χρειάστηκαν για την εξαγωγή των πινάκων μικρότερων διαστάσεων και για την τελική προσομοίωση του κυκλώματος είναι οι παρακάτω:

SPRIM	q=351	q=451
Χρόνος εξαγωγής πινάκων	338 sec	900.72 sec
Χρόνος προσομοίωσης	0.28 sec	0.52 sec

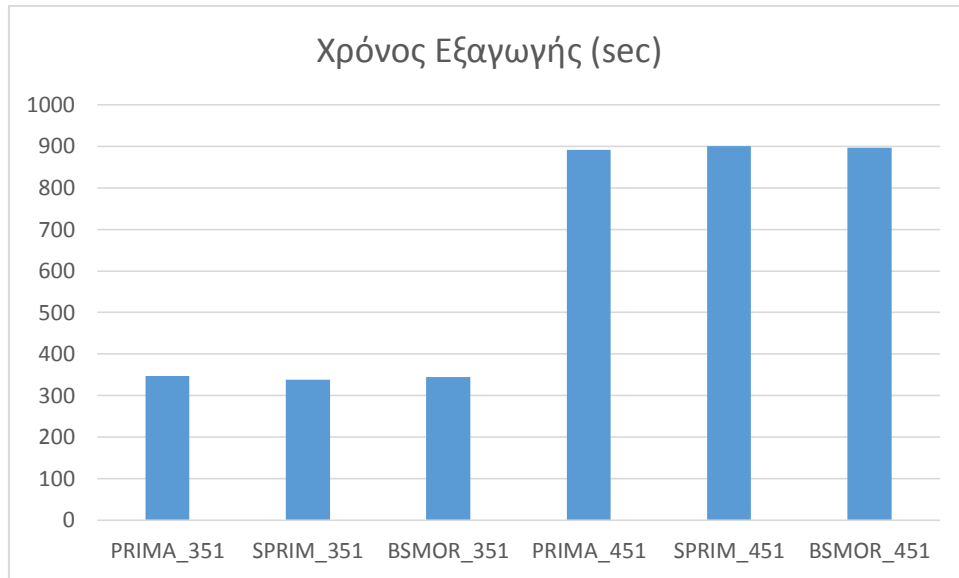
4.3 BSMOR



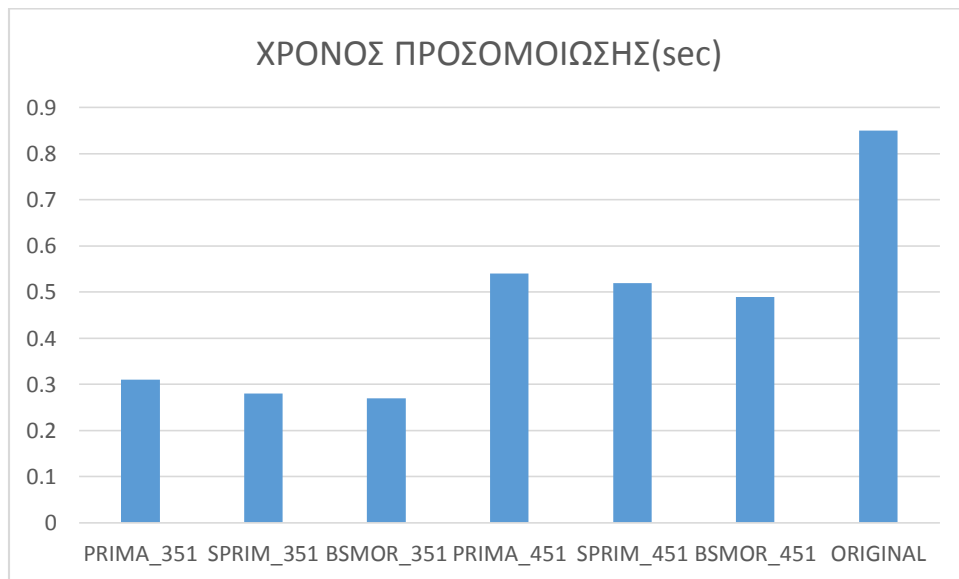
Οι χρόνοι που χρειάστηκαν για την εξαγωγή των πινάκων μικρότερων διαστάσεων και για την τελική προσομοίωση του κυκλώματος είναι οι παρακάτω:

BSMOR	q=351	q=451
Χρόνος εξαγωγής πινάκων	344.57 sec	897.36 sec
Χρόνος προσομοίωσης	0.27 sec	0.49 sec

4.4 Συγκριτικοί πίνακες



Παραπάνω φαίνονται οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα που χρειάζονται για να γίνει η εξαγωγή των πινάκων μικρότερου μεγέθους και βλέπουμε ότι και για τις τρεις μεθόδους είναι περίπου ίδιοι και προφανώς για μικρότερο q η εξαγωγή γίνεται γρηγορότερα.



Στο συγκεκριμένο γράφο φαίνεται ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η προσομοίωση του κυκλώματος πριν την ελαχιστοποίηση καθώς και μετά από αυτήν. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το q τόσο γρηγορότερα γίνεται η προσομοίωση και έχει μειωθεί ο χρόνος προσομοίωσης κατά το τριπλάσιο.

4.5 Επίλογος

Μέσα από την μελέτη που έγινε πάνω στο MOR με την χρήση των αλγορίθμων PRIMA, SPRIM, BSMOR καταφέραμε να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο προσομοίωσης των κυκλωμάτων και να μειώσουμε την χρήση της CPU και της μνήμης που απαιτούνταν αρχικά για την προσομοίωση των κυκλωμάτων αυτών.

Βιβλιογραφία

1. Odabasioglu, Altan, Mustafa Celik, and Lawrence T. Pileggi. "PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm." *Proceedings of the 1997 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*. IEEE Computer Society, 1997.
2. Freund, Roland W. "SPRIM: structure-preserving reduced-order interconnect macromodeling." *Proceedings of the 2004 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design*. IEEE Computer Society, 2004.
3. Yu, Hao, Lei He, and S. X. D. Tar. "Block structure preserving model order reduction." *Behavioral Modeling and Simulation Workshop, 2005. BMAS 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International*. IEEE, 2005.
4. Joshi, Sumant Y. *Reduced-Order Modeling of Large Linear RC Circuits Using Pade Via Lanczos Algorithm*. Diss. Indian Institute of Technology, Bombay, 2002.