

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΠΟΛΥΦΑΣΙΚΑ
ΜΕΤΑΛΛΑ**

υπό

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΓΙΟΜΠΛΙΑΚΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος 2012



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 11108/1
Ημερ. Εισ.: 25-01-2013
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2012
ΓΙΟ

© 2012 Γιομπλιάκης Αναστάσιος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Νικόλαος Αράβας Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Γρηγόρης Χαϊδεμενόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Αλέξης Κερμανίδης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, καθηγητή κ. Νικόλαο Αράβα, για όλα όσα έμαθα δουλεύοντας μαζί του, τη διαρκή ενασχόλησή του με την εργασία μου και την άμεση και πολύτιμη βοήθεια του οποιαδήποτε στιγμή και αν τη χρειάστηκα. Είναι προνόμιο και κίνητρο για οποιοδήποτε φοιτητή να δουλέψει με έναν τόσο επιτυχημένο καθηγητή.

Ευχαριστώ θερμά τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Λεωνίδα Σπύρου, για την υπομονή του και την πραγματικά μεγάλη βοήθεια κατά τη διάρκεια της άψογης συνεργασίας μας. Χωρίς τη διαρκή παρουσία του, η ολοκλήρωση της εργασίας θα ήταν αδύνατη.

Επίσης, ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ. Χαϊδεμενόπουλο Γρηγόρη και κ. Κερμανίδη Αλέξη για τη προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου, και την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους φίλους μου Στάθη, Στέφανο, Βασίλη, Κωνσταντίνα, Αρχοντία, Δημήτρη, Ηλία, Θανάση και Αλκμήνη για την ηθική υποστήριξη και τις υπέροχες στιγμές που περάσαμε μαζί κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτή τη διπλωματική εργασία στους γονείς και τον αδερφό μου, για όλα όσα μου πρόσφεραν και μου προσφέρουν.

**ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΠΟΛΥΦΑΣΙΚΑ
ΜΕΤΑΛΛΑ**

ΓΙΟΜΠΛΙΑΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2012

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Νικόλαος Αράβας, Καθηγητής
Υπολογιστικής Μηχανικής των Κατασκευών

Περίληψη

Στη διπλωματική αυτή, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των ιδιοτήτων των πολυφασικών μετάλλων, καθώς και της συμπεριφοράς τους κάτω από συγκεκριμένα φορτία.

Αρχικά θα προσεγγίσουμε θεωρητικά τις ιδιότητες αυτών των μετάλλων, με βάση τις θεωρίες ομογενοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, θα δουλέψουμε με τη μέθοδο του Ponte Castaneda για τον προσδιορισμό του ορίου διαρροής του συνολικού υλικού μακροσκοπικά, εφόσον ξέρουμε τα όρια διαρροής και τα κλάσματα όγκου των επιμέρους φάσεων. Βασικός σκοπός μας θα είναι, να βρούμε τις ιδιότητες ενός μετάλλου το οποίο θα προσομοιώνει τη συμπεριφορά του αντίστοιχου πολυφασικού.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε πιο εντατικά με την ειδική περίπτωση, όπου έχουμε ένα υλικό αποτελούμενο από μόνο δυο τέλεια πλαστικές φάσεις. Θα υπολογίσουμε σύμφωνα με τη θεωρία του Ponte Castaneda, τις μακροσκοπικές ιδιότητες του υλικού, όπου μας ενδιαφέρει κυρίως το όριο διαρροής του σύνθετου υλικού.

Έπειτα, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά, για το πώς μπορούμε να περάσουμε από το μακροσκοπικό κομμάτι της μελέτης του συνολικού υλικού, στη μελέτη της συμπεριφοράς της κάθε φάσης του μετάλλου ξεχωριστά.

Έχοντας πάρει τις τιμές για 4 συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις, θα περάσουμε στο υπολογιστικό κομμάτι της διπλωματικής. Θα χρησιμοποιήσουμε υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων, και πιο συγκεκριμένα θα δουλέψουμε με το ABAQUS, για να υπολογίσουμε και αριθμητικά τις ιδιότητες του στοιχείου μας, στις τέσσερις ειδικές περιπτώσεις. Τέλος θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα από την αριθμητική μελέτη, με τα αντίστοιχα θεωρητικά της θεωρίας ομογενοποίησης.

Abstract

In the following pages, we will deal the properties of multiphase materials and their behavior under certain loads.

To start with, we will approach theoretically the properties of these materials, based on the homogenization theories. More specifically, we will work with the Ponte Castaneda method, for defining the overall yield stress of a multi-phase metal, given that we know the yield stresses and volume fractions of the individual phases. Our basic goal is to find the properties of a material that can simulate the behavior of the multi-phase metal we examine.

Next, we will work with the special case of a two-perfectly plastic-phase material, and we will define its overall properties according to the Ponte Castaneda method.

We will also make a brief report on how we can go from the study of the overall composite material, to the study of the behavior of the individual phases.

After that, we will go to the computational part of this study. We will work with finite element calculations and specifically with ABAQUS in order to calculate the properties of a two-phase material, using Unit cell calculations. Here we will work with four different models, in order to achieve more accurate results.

To conclude with, we will compare the results of the Unit cell calculations, with those taken from the Homogenization theory for the special case of two-perfectly plastic-phases.

Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
1.1. Κίνητρο και υπόβαθρο	1
1.2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση	2
1.3. Οργάνωση διπλωματικής εργασίας	4
Κεφάλαιο 2. Θεωρία ομογενοποίησης	5
2.1 Βασικοί ορισμοί.....	5
2.2 Γενίκευση για περισσότερες από μια φάσεις	6
2.3 Βασική Θεωρία ομογενοποίησης	8
2.3.1 Ολικό πλαστικό δυναμικό	8
2.3.2 Όρια Hashin - Shtrikman.....	9
2.3.3 Τελική μορφή πλαστικού δυναμικού	9
2.4 Όλες οι φάσεις ίσες	11
2.5 Τέλεια πλαστικότητα	13
2.6 Ειδική περίπτωση δύο φάσεων	14
Κεφάλαιο 3. Μελέτη επιμέρους φάσεων	15
3.1 Εκτίμηση των τανυστών συγκέντρωσης	16
3.2 Ασυμπίεστες φάσεις	17
Κεφάλαιο 4. Υπολογισμοί μοναδιαίου κελιού	21
4.1 Εισαγωγή	21
4.2 Μοντελοποίηση της δομής ενός διφασικού μετάλλου	21
4.3 Το πρόβλημα μοναδιαίου κελιού	22
4.4 Μετατόπιση και Συνοριακές συνθήκες	25
4.5 Ορισμός υλικών	26

4.6	Ανάλυση σε τέσσερα μοντέλα	27
4.7	Σύγκριση των προβλέψεων από τη θεωρία ομογενοποίησης με τους αντίστοιχους υπολογισμούς μοναδιαίου κελιού	31
4.8	Μελέτη 2 ^{ης} περίπτωσης για φάσεις με όρια διαρροής 1,2.....	34
Κεφάλαιο 5. Σύνοψη - Συμπεράσματα		40
Βιβλιογραφία		41
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		42

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 4.1: Τρισδιάστατη περιοδική κατανομή εξαγωνικών κελιών

Σχήμα 4.2: Προσέγγιση εξαγωνικού κελιού από κυλινδρικό

Σχήμα 4.3: Διαστάσεις κυλινδρικού κελιού

Σχήμα 4.4: Τελικό μοναδιαίο κελί

Σχήμα 4.5: Κάνναβος μοναδιαίου κελιού που αντιστοιχεί σε κλάσμα όγκου της φάσης 2, $c^{(2)} = 0.10$ ή 10%

Σχήμα 4.6: Γεωμετρικές προσεγγίσεις συνοπτικά

Σχήμα 4.7: Σχηματική απεικόνιση συνοριακών συνθηκών

Σχήμα 4.8: Παραμορφωμένοι κάνναβοι, στην τελική επιμήκυνση για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύονται.

Σχήμα 4.9: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=10\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3

Σχήμα 4.10: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=20\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3

Σχήμα 4.11: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=40\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3

Σχήμα 4.12: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=50\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3

Σχήμα 4.13: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης-Παραμόρφωσης για $C(2)=10\%$

Σχήμα 4.14: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=20\%$

Σχήμα 4.15: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=40\%$

Σχήμα 4.16: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=50\%$

Σχήμα 4.17: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης-Παραμόρφωσης για $C(2)=10\%$ 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.18: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=20\%$ 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.19: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=40\%$ 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.20: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για $C(2)=50\%$ 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.21: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=10\%$ στη 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.22: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=20\%$ στη 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.23: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=40\%$ στη 2^η περίπτωση

Σχήμα 4.24: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=50\%$ στη 2^η περίπτωση

Πίνακας 4.1: $c^{(2)}$, R/a και $\bar{\sigma}_0$ για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύουμε.

Πίνακας 4.2: $c^{(2)}$, R/a και $\bar{\sigma}_0$ για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύουμε στη 2^η περίπτωση

1. Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο και υπόβαθρο

Με τον όρο πολυφασικά μέταλλα, εννοούμε μέταλλα τα οποία αποτελούνται από μια μητρική φάση που καταλαμβάνει τον κύριο όγκο και από διάφορες άλλες φάσεις του ίδιου μετάλλου με διαφορετικές ιδιότητες, διεσπαρμένες μέσα στη μητρική φάση. Η κατανομή των διάφορων φάσεων μέσα στη μητρική φάση, είναι συνήθως τυχαία και σπάνια περιοδική.

Απαραίτητα για το καθορισμό των μακροσκοπικών ιδιοτήτων, ενός τέτοιου ετερογενούς υλικού, είναι ο καθορισμός των ιδιοτήτων των επιμέρους φάσεων του υλικού. Δηλαδή των ορίων διαρροής: $\sigma_0^{(r)}$, καθώς και των κλασμάτων όγκου: $c^{(r)}$, των $r=1, \dots, N$ φάσεων του υλικού. Όπου: $\sum_1^N c^{(r)} = 1$. Ένας τρόπος να εκτιμήσουμε τις μακροσκοπικές ιδιότητες αυτών των υλικών, είναι η χρήση γραμμικών και μη-γραμμικών μεθόδων ομογενοποίησης.

Η δυσκολία στη μελέτη τέτοιων υλικών, έγκειται στο γεγονός ότι λόγω των διαφορετικών ιδιοτήτων των φάσεων, προκύπτει ένα μη γραμμικό πρόβλημα, το οποίο δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Οπότε το ζητούμενο είναι, να ανάγουμε αυτό το μη γραμμικό πρόβλημα σε μια σειρά γραμμικών προβλημάτων, μέσω προσεγγίσεων, τα οποία μπορούν να λυθούν.

Με την παρακάτω μη γραμμική μέθοδο ομογενοποίησης, είναι δυνατή η χρήση των κλασσικών ορίων-περιορισμών από Hashin – Strickman για γραμμικά υλικά, ώστε να πάρουμε όρια για τα αντίστοιχα μη γραμμικά.

Απώτερος σκοπός μας, θα είναι να μοντελοποιήσουμε τη συμπεριφορά ενός μετάλλου, και πιο συγκεκριμένα ενός χάλυβα, ο οποίος αποτελείται από διάφορες φάσεις του ίδιου μετάλλου, όπως μαρτενσίτης και ωστενίτης, οι οποίες μπορεί να σκληραίνουν και να μετασχηματίζονται κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης, μέσω μαρτενσιτικών μετασχηματισμών. Τέτοιου είδους χάλυβες, εκ των οποίων, πιο γνωστό

παράδειγμα είναι οι TRIP χάλυβες, χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία, και ιδιαίτερα στην αυτοκινητοβιομηχανία.

Στη παρούσα διπλωματική, γίνεται το πρώτο βήμα για τη μοντελοποίηση τέτοιων μετάλλων, εξετάζοντας την απλή περίπτωση όπου οι φάσεις του μετάλλου συμπεριφέρονται ως τέλεια πλαστικά υλικά. Σε αυτή τη περίπτωση, μας αρκεί ο καθορισμός του μέσου ορίου διαρροής από τη θεωρία ομογενοποίησης για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Τελικά, θέλουμε να ελέγξουμε τη μέθοδο ομογενοποίησης που χρησιμοποιούμε, συγκρίνοντας την με αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων, και πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας υπολογισμούς μοναδιαίου κελιού σε ABAQUS, για να δούμε κατά πόσο συγκλίνει σε επιθυμητά αποτελέσματα για κάποιες συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές επιστημονικές εργασίες που ασχολούνται με την ομογενοποίηση γραμμικών ελαστικών υλικών. Πρώτες απλές εκτιμήσεις είχαν γίνει με τις εργασίες των Voigt(1889) και Reuss (1926). Οι οποίες δεν είχαν ακριβή αποτελέσματα.

Αργότερα οι Hashin-Shtrikman (1962, 1963) εισήγαγαν μια νέα τεχνική, και χρησιμοποιώντας την αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας, κατάφεραν να βελτιστοποιήσουν τα άνω και κάτω φράγματα των Voigt και Reuss. Χρησιμοποιώντας μια παρόμοια μέθοδο, οι Hershey (1954) και Kroner (1958) πρότειναν την “συνεπή” (self consistent) μέθοδο. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι γενικεύτηκαν και επεκτάθηκαν σε ανισότροπα σύνθετα υλικά από τον Willis (1977, 1978, 1981, 1982)

Το ενδιαφέρον της παρούσης εργασίας επικεντρώνεται στις θεωρίες ομογενοποίησης για μη γραμμικά σύνθετα υλικά. Σε αυτόν τον τομέα, πρώτα βήματα έγιναν από τον Taylor (1938), ο οποίος πρότεινε ανάλογες εκφράσεις με αυτές του Voigt για τη περίπτωση ελαστοπλαστικών υλικών. Αργότερα, ο Hill (1965) διαμόρφωσε την “συνεπή” (self

consistent) μέθοδο, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ελαστοπλαστικούς πολυκρυστάλλους.

Το 1985 οι Talbot και Willis, καινοτόμησαν εισάγοντας την ιδέα ενός «γραμμικού ομογενούς υλικού συγκρίσεως» (linear homogeneous composite) για να γενικεύσουν τα όρια των Hashin-Shtrikman στη περίπτωση των μη-γραμμικών σύνθετων υλικών. Λίγο αργότερα, ο Ponte Castaneda (1991) παρουσίασε μια γενικότερη κατηγορία μεθόδων ομογενοποίησης μη γραμμικών υλικών χρησιμοποιώντας ένα «ισότροπο γραμμικό σύνθετο υλικό συγκρίσεως», το οποίο έχει την ίδια μικροδομή με το μη-γραμμικό σύνθετο υλικό υπό μελέτη. Οι Michel και Suquet (1992) και ο Suquet (1993,1995) κατέληξαν στα ίδια φράγματα συμπεριφοράς με αυτά του Ponte Castaneda (1991) για τη περίπτωση που οι φάσεις του υλικού περιγράφονται από μια συνάρτηση ενέργειας που ακολουθεί εκθετικό νόμο ('Power-law energy functions').

Πιο πρόσφατα, ο Ponte Castaneda (1996, 2002) πρότεινε την επέκταση της αρχικής μεθόδου του με την οποία και θα ασχοληθούμε, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά ως βάση «ανισότροπο γραμμικό σύνθετο υλικό σύγκρισης». Αυτή η καινούργια κατηγορία μεθόδων σε αντίθεση με τη προηγούμενη, δεν υπολογίζει φράγματα συμπεριφοράς, αλλά παρέχει μια εκτίμηση της μακροσκοπικής συμπεριφοράς μη-γραμμικών σύνθετων υλικών με μεγαλύτερη ακρίβεια.

1.3 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας

Το υπόλοιπο της εργασίας χωρίζεται σε δύο κύριες ενότητες. Η πρώτη ενότητα που καταλαμβάνει τα κεφάλαια 2 και 3, έχει να κάνει με το θεωρητικό κομμάτι της εργασίας. Ενώ η δεύτερη ενότητα, που έχει να κάνει με τους αριθμητικούς υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων, παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 2, γίνεται η παρουσίαση της θεωρίας ομογενοποίησης με την οποία θα δουλέψουμε, καθώς και των διαφόρων ειδικών περιπτώσεων που μπορούμε να διακρίνουμε. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου έχουμε δύο τέλεια πλαστικές φάσεις και θα δούμε πως μπορούμε να πάρουμε αναλυτικά ένα μέσο όριο διαρροής, εφόσον ξέρουμε τα όρια διαρροής και τα κλάσματα όγκου των επιμέρους φάσεων.

Στο Κεφάλαιο 3, ασχολούμαστε με τη θεωρητική μελέτη των επιμέρους φάσεων ξεχωριστά. Εδώ μας ενδιαφέρει το πώς μια ολική παραμόρφωση επηρεάζει τη συμπεριφορά της κάθε φάσης ξεχωριστά ανάλογα με το όριο διαρροής και το κλάσμα όγκου της.

Τέλος, στο κεφάλαιο 4, θα δούμε πως μπορούμε να μελετήσουμε ένα πρόβλημα δυο φάσεων αριθμητικά με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Τις προσεγγίσεις που πρέπει να γίνουν, και τους περιορισμούς που πρέπει να πάρουμε, ώστε να πάρουμε αποτελέσματα, τα οποία μπορούμε να συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα που προέκυψαν από τη θεωρία ομογενοποίησης.

2. Θεωρία ομογενοποίησης

2.1 Βασικοί ορισμοί

Η εντατική κατάσταση ενός σημείου του υλικού, ορίζεται πλήρως από

τον τανυστή των τάσεων σ , όπου
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Για τη μελέτη της πλαστικής παραμόρφωσης, ορίζουμε τον αποκλίνοντα

τανυστή τάσεων ως:
$$[s] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}.$$

Όπου ισχύει: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}p\delta_{ij}$ και $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$.

Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε: $[\sigma] = [s] + p[I]$.

Σε σύνθετες πολυαξονικές εντατικές καταστάσεις, ορίζουμε την ισοδύναμη τάση ως:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{13}^2)}$$

Ομοίως ορίζεται η αύξηση της ισοδύναμης παραμόρφωσης

(σε τανυστική μορφή):
$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p$$

Μπορούμε τώρα να διακρίνουμε δύο γενικότερες περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή της καταστατικής εξίσωσης.

➤ *Rate independent*

Σε αυτή τη περίπτωση, η αύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται ως εξής: $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} N_{ij}$ όπου $N_{ij} = \frac{3}{2\bar{\sigma}}$

Ενώ, αύξηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ορίζεται

ως εξής:
$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \dots = \dot{\lambda}$$

Άρα η τελική εξίσωση παίρνει τη μορφή: $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon} N_{ij}$

Όπου το $\dot{\epsilon}$ σε αυτήν τη περίπτωση, προκύπτει από μια εξίσωση της μορφής $\Phi = 0 \Rightarrow \dot{\Phi} = 0$

Όπου αυτή η έκφραση όπως θα δούμε παρακάτω σχετίζεται συνήθως με το όριο διαρροής.

➤ *Rate dependent*

Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε πάλι την εξίσωση στη μορφή:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon} N_{ij}$$

Μόνο που τώρα, η αύξηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, δίνεται από μία εξίσωση της μορφής: $\dot{\epsilon} = B \bar{\sigma}^n$

Όπου, $B = \frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0^n}$, Άρα $\dot{\epsilon}_{ij} = B \bar{\sigma}^n = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n N_{ij}$

2.2 Γενίκευση για περισσότερες από μια φάσεις

Θέλουμε τώρα να γενικεύσουμε τα παραπάνω, για τη περίπτωση όπου έχουμε περισσότερες φάσεις ενός υλικού.

Για τις $r = 1, \dots, N$ φάσεις του υλικού, ορίζουμε πρώτα το πλαστικό

δυναμικό ως:
$$U^{(r)}(\sigma) = \frac{1}{n^{(r)}+1} \sigma_0^{(r)} \dot{\epsilon}_0^{(r)} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0^{(r)}}\right)^{n^{(r)}+1}$$

Όπου το $\bar{\sigma}$ ορίστηκε παραπάνω.

Σε αυτή τη περίπτωση, η καταστατική εξίσωση είναι rate dependent, και προκύπτει από το δυναμικό ως εξής:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial U^{(r)}}{\partial \sigma} = \dot{\epsilon} N = \frac{1}{2\mu^{(r)}(s)} s = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0^{(r)} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}-1} \frac{s}{\sigma_0^{(r)}} \quad \text{με} \quad N = \frac{3}{2\bar{\sigma}} s$$

Όπου η αύξηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, δίνεται ως εξής:

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{\bar{\sigma}}{3\mu^{(r)}(\bar{\sigma})} = \dot{\epsilon}_0^{(r)} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}} = B^{(r)} \bar{\sigma}^{n^{(r)}}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, για εμάς, ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου έχουμε: $n^{(r)} \rightarrow \infty$ (Τέλεια πλαστικό υλικό), καθώς τότε περνάμε από τη rate dependent περίπτωση σε μια rate independent περίπτωση.

Ειδικές περιπτώσεις :

- Για $n^{(r)} = 1$ (Γραμμικό υλικό)

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } U_L^{(r)} &= \frac{1}{2} \sigma_0^{(r)} \dot{\epsilon}_0^{(r)} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^2 = \frac{\sigma_{eq}^2}{6\mu^{(r)}} \quad \text{με} \\ \mu^{(r)} &= \frac{1}{3B^{(r)}} = \frac{\sigma_0^{(r)}}{3\dot{\epsilon}_0^{(r)}} \end{aligned}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial U_L}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}}{3\mu}$$

Και

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon} N = \frac{1}{2\mu^{(r)}} s$$

- Για $n^{(r)} \rightarrow \infty$ (Τέλεια πλαστικό υλικό)

$$\text{Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } A \leq 1 \\ \infty & \text{εάν } A > 1 \end{cases}$$

συμπεραίνουμε ότι :

$$U^{(r)} = \lim_{n^{(r)} \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^{(r)}+1} \sigma_0^{(r)} \dot{\varepsilon}_0^{(r)} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}+1} \right] = \begin{cases} 0 & \text{εάν } \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} \leq 1 \\ \infty & \text{εάν } \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} > 1 \end{cases}$$

Όπου $\sigma_0^{(r)}$ το όριο διαρροής της r φάσης του υλικού.

Βλέπουμε τώρα ότι για $n^{(r)} \rightarrow \infty$, καταλήξαμε σε μια rate independent περίπτωση, όπου το $\dot{\varepsilon}$, προκύπτει από μία εξίσωση της μορφής $\Phi = 0$, η οποία σε αυτή τη περίπτωση έχει να κάνει με το όριο διαρροής του υλικού.

Δηλαδή, αν η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη του ορίου διαρροής, τότε το πλαστικό δυναμικό μηδενίζεται ($U=0$). Άρα και $\dot{\varepsilon} = 0$. Και αν η ισοδύναμη τάση είναι μεγαλύτερη του ορίου διαρροής, τότε το πλαστικό δυναμικό απειρίζεται.

2.3 Βασική Θεωρία ομογενοποίησης

2.3.1 Ολικό πλαστικό δυναμικό

Διαπιστώνουμε τελικά, ότι το ζητούμενο για εμάς, είναι να βγάλουμε μια έκφραση για το πλαστικό δυναμικό U του συνολικού υλικού μας, έτσι ώστε να μπορέσουμε παραγωγίζοντάς την, να καταλήξουμε σε μια έκφραση για την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση του σύνθετου υλικού συνολικά.

Το ολικό πλαστικό δυναμικό του σύνθετου υλικού, ορίζεται από τον Ponte, ως εξής:

$$\bar{U}(\bar{\sigma}) = \sup_{\mu^{(r)} \geq 0} \left\{ \bar{U}_L(\bar{\sigma}_{eq}, \bar{\mu}(\mu^{(r)})) - \sup_{\sigma_{eq}^{(r)} \geq 0} \sum_{r=1}^N c^{(r)} [U_L^{(r)}(\sigma_{eq}^{(r)}, \mu^{(r)}) - U^{(r)}(\sigma_{eq}^{(r)})] \right\}$$

$$\text{Με} \quad \tilde{U}_L = \frac{\bar{\sigma}_{eq}^2}{6\bar{\mu}(\mu^{(r)})} \quad \text{και} \quad U_L^{(r)} = \frac{(\sigma_{eq}^{(r)})^2}{6\mu^{(r)}}$$

Το παραπάνω μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά με έναν κώδικα στη Fortran.

Έχοντας πλέον μια έκφραση, για το ολικό πλαστικό δυναμικό του προς εξέταση υλικού, η αντίστοιχη ισοδύναμη αύξηση πλαστικής παραμόρφωσης του υλικού, δίνεται παραγωγίζοντας ως εξής :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{\sigma}}$$

2.3.2 Όρια Hashin-Shtrikman

Το ολικό $\bar{\mu}$ για σύνθετα υλικά, υπολογίζεται σύμφωνα με τους Hashin-Shtrikman ως εξής :

$$\bar{\mu}(\mu^{(r)}) = \frac{\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)} \mu^{(s)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(s)}}}{\sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(r)}}} \quad \text{ή} \quad \frac{\mu^{(1)}}{\bar{\mu}} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)} \mu^{(1)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(r)}}}{\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(s)}}} \quad (4)$$

Ένα ανώτατο όριο για το $\bar{\mu}$, έχουμε όταν από την (4), επιλέγουμε το $\mu^{(1)}$, έτσι ώστε να είναι το μεγαλύτερο από όλα τα $\mu^{(r)}$.

Αντίστοιχα ένα κατώτατο όριο παίρνουμε όταν επιλέγουμε ως $\mu^{(1)}$ το μικρότερο από όλα τα $\mu^{(r)}$

2.3.3 Τελική μορφή πλαστικού δυναμικού

$$\text{Ορίζουμε τους όρους :} \quad y^{(r)} = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(r)}} \quad \text{και} \quad F(y^{(r)}) = \frac{\mu^{(1)}}{\bar{\mu}}$$

Έτσι ώστε η εξίσωση (3) για το \bar{U} , παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\bar{U} = \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)} = 1}} \sup_{\mu^{(1)} > 0} \left[F(y^{(r)}) \frac{\bar{\sigma}_{eq}^2}{6\mu^{(1)}} - I(\mu^{(1)}, y^{(r)}) \right] \quad (5)$$

Όπου
$$F(y^{(r)}) = \frac{\mu^{(1)}}{\bar{\mu}} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)} y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2}}{\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)}}{3y^{(s)} + 2}}$$

Και

$$I(\mu^{(1)}, y^{(r)}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N c^{(r)} \frac{n^{(r)} - 1}{n^{(r)} + 1} \left[\frac{\sigma_0^{(r) n^{(r)}}}{\dot{\epsilon}_0^{(r)}} \right]^{\frac{2}{n^{(r)} - 1}} \left(\frac{y^{(r)}}{3\mu^{(1)}} \right)^{\frac{n^{(r)} + 1}{n^{(r)} - 1}}$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (5) ως προς $\mu^{(1)}$ και $y^{(r)}$, παίρνουμε τις εξισώσεις :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mu^{(1)}} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial y^{(r)}} = 0 \quad \text{οι οποίες καταλήγουν σε 2}$$

πολύπλοκες εξισώσεις, οι οποίες ορίζουν τις βέλτιστες τιμές :

$$\mu^{(1)} = \hat{\mu}^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}, c^{(s)}, \sigma_0^{(s)}) \quad \text{και} \quad y^{(r)} = \hat{y}^{(r)}(\bar{\sigma}_{eq}, c^{(s)}, \sigma_0^{(s)})$$

Τελικά, η εξίσωση για το πλαστικό δυναμικό, θα προκύψει από την (5) λαμβάνοντας υπόψη τις βέλτιστες τιμές για τα $\mu^{(1)}$ και $y^{(r)}$, ως εξής :

$$\bar{U}(\bar{\sigma}_{eq}) = \frac{1}{6} \frac{F(\hat{y}^{(r)}(\bar{\sigma}_{eq}))}{\hat{\mu}^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq})} \bar{\sigma}_{eq}^2 - I(\hat{\mu}^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}), \hat{y}^{(r)}(\bar{\sigma}_{eq}))$$

Και η πλαστική ροή, θα είναι :

$$\bar{D} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\sigma}_{eq}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{eq}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\varepsilon} N$$

$$\text{με } N = \frac{\partial \bar{\sigma}_{eq}}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}_{eq}} \bar{S}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες βελτιστοποίησης που προκύπτουν από τις $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mu^{(1)}} = 0$ και $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y^{(r)}} = 0$, η ροή παίρνει την τελική μορφή :

$$\bar{D} = \dot{\varepsilon} N = \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{3\bar{\mu}} N = \frac{\bar{S}}{2\bar{\mu}},$$

$$\text{με } \bar{\mu} = \bar{\mu}(\hat{\mu}^{(r)}) \quad \text{και} \quad \hat{\mu}^{(r)} = \frac{\hat{\mu}^{(1)}(\bar{\sigma}_{eq}, c^{(s)}, \sigma_0^{(s)})}{y^{(r)} = \hat{y}^{(r)}(\bar{\sigma}_{eq}, c^{(s)}, \sigma_0^{(s)})}$$

2.4 Όλες οι φάσεις ίσες

Στη συνέχεια εξετάζουμε την ειδική περίπτωση όπου όλες οι φάσεις είναι ίσες. Δηλαδή: $n^{(1)} = n^{(2)} = \dots = n^{(N)} = n$

Τότε η συνάρτηση για το ολικό πλαστικό δυναμικό παίρνει τη μορφή :

$$\bar{U} = \sup_{\mu^{(r)} \geq 0} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{eq}^2}{6\bar{\mu}(\mu^{(r)})} - \frac{n-1}{2(n+1)} \sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)}}{(3\mu^{(r)})^{\frac{n+1}{n-1}}} \left[\frac{\sigma_0^{(r)n}}{\dot{\varepsilon}_0^{(r)}} \right]^{\frac{2}{n-1}} \right\}$$

Η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή :

$$\tilde{U} = \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)} = 1}} \sup_{\mu^{(1)} > 0} \left[\frac{\bar{\sigma}_{eq}^2}{6\mu^{(1)}} F(y^{(r)}) - \frac{n-1}{2(n+1)} \frac{1}{(3\mu^{(1)})^{\frac{n+1}{n-1}}} H(y^{(r)}) \right]$$

Όπου τώρα :

$$F(y^{(r)}) = \frac{\mu^{(1)}}{\tilde{\mu}} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)} y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2}}{\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)}}{3y^{(s)} + 2}}$$

και
$$H(y^{(r)}) = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left[\frac{\sigma_0^{(r)n}}{\dot{\epsilon}_0} \right]^{\frac{2}{n-1}} (y^{(r)})^{\frac{n+1}{n-1}}$$

Με τις συνθήκες βελτιστοποίησης, όπως είδαμε παραπάνω, παίρνουμε τις βέλτιστες τιμές για το $y^{(i)} = \hat{y}^{(i)}(c^{(r)}, \sigma_0^{(r)})$ και το $\mu^{(1)} = \hat{\mu}^{(1)}(y^{(r)})$, και βρίσκουμε το:

$$\tilde{U} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}^{n+1}}{n+1} \sqrt{\sup_{y^{(r)} \geq 0} \left\{ \frac{[F(y^{(r)})]^{n+1}}{[H(y^{(r)})]^{n-1}} \right\}} = \frac{\bar{\sigma}_{eq}^{n+1}}{n+1} \sqrt{\frac{F(\hat{y}^{(r)})^{n+1}}{H(\hat{y}^{(r)})^{n-1}}}$$

Όπου τα $y^{(i)} = \hat{y}^{(i)}(c^{(r)}, \sigma_0^{(r)})$, είναι οι βέλτιστες τιμές, και είναι ανεξάρτητα του $\bar{\sigma}_{eq}$

Η ροή παίρνει τώρα τη μορφή:

$$\bar{D} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{\sigma}_{eq}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{eq}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\epsilon} N \quad , \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{\sigma}_{eq}} = \bar{\sigma}_{eq}^n \sqrt{\frac{F(\hat{y}^{(r)})^{n+1}}{H(\hat{y}^{(r)})^{n-1}}}$$

2.5 Τέλεια πλαστικότητα

Αντίστοιχα μελετούμε τη περίπτωση όπου έχουμε τέλεια πλαστικότητα, δηλαδή $n \rightarrow \infty$

Για τη περίπτωση, όπου όλες οι φάσεις είναι ίσες, μπορούμε να γράψουμε το πλαστικό δυναμικό ως εξής:

$$\tilde{U} = \frac{1}{n+1} \left\{ \bar{\sigma}_{eq}^2 \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{F(y^{(r)})}{H(y^{(r)})^{\frac{n-1}{n+1}}} \right] \right\}^{\frac{n+1}{2}}$$

Και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{a(x)}{x} \right]^{x/2} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{εαν } a(\infty) \leq 1 \\ \infty & \text{εαν } a(\infty) > 1 \end{cases}$

Καταλήγουμε στο:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{U} = \begin{cases} 0 & \text{όταν } \bar{\sigma}_{eq}^2 \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{F(y^{(r)})}{H^\infty(y^{(r)})} \right] \leq 1 \\ \infty & \text{όταν } \bar{\sigma}_{eq}^2 \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{F(y^{(r)})}{H^\infty(y^{(r)})} \right] > 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Όπου τα F και H, δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$F(y^{(r)}) = \frac{\mu^{(1)}}{\bar{\mu}} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{c^{(r)} y^{(r)}}{3y^{(r)}+2}}{\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)}}{3y^{(s)}+2}} \quad \text{και}$$

$$H^\infty(y^{(r)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(y^{(r)}) = \sum_{r=1}^N c^{(r)} (\sigma_0^{(r)})^2 y^{(r)} \equiv \sigma_\infty^2(y^{(r)})$$

Το όριο της (5.1), στο 1, αντιστοιχεί στο όριο διαρροής σ_0 , δηλαδή:

$$\bar{\sigma}_{eq}^2 \sup_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{F(y^{(r)})}{\sigma_x^2(y^{(r)})} \right] = 1 \Rightarrow \bar{\sigma}_{eq}^2 = \inf_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{\sigma_x^2(y^{(r)})}{F(y^{(r)})} \right] \equiv \bar{\sigma}_0^2$$

$$\text{Άρα} \quad \bar{\sigma}_0 = \sqrt{\inf_{\substack{y^{(r)} \geq 0 \\ y^{(1)}=1}} \left[\frac{\sigma_x^2(y^{(r)})}{F(y^{(r)})} \right]}$$

2.6 Ειδική περίπτωση δύο φάσεων

Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε την ειδική περίπτωση, όπου έχουμε μόνο 2 φάσεις, τέλεια πλαστικές.

Η συνθήκη διαρροής είναι : $\tilde{\Phi}(\bar{\sigma}_{eq}) = \bar{\sigma}_{eq} - \sigma_0 = 0$

$$\sigma_0 = \sqrt{\inf_{y^{(r)} \geq 0} \left[\frac{\sigma_x^2(y^{(r)})}{F(y^{(r)})} \right]} = \sqrt{\inf_{y^{(r)} \geq 0} \left[\frac{H^x(y^{(r)})}{F(y^{(r)})} \right]} \equiv \sqrt{\inf_{y^{(r)} \geq 0} R(y^{(r)})} \quad (5.2.1)$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, θέτουμε $y^{(1)}=1$, $c^{(1)} = 1 - c^{(2)}$

Και υπολογίζουμε το $y^{(2)} = \hat{y}$, Τελικά, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\inf_{y^{(r)} \geq 0} R = \begin{cases} R(\hat{y}^{(r)}) & \text{εαν} \quad 1 \leq \frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(1)}} \leq \frac{5}{2\sqrt{1 + \frac{3}{2}c^{(2)}}} \\ R(0) = (\sigma_0^{(1)})^2 \left(1 + \frac{3}{2}c^{(2)}\right) & \text{εαν} \quad \frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(1)}} \geq \frac{5}{2\sqrt{1 + \frac{3}{2}c^{(2)}}} \end{cases}$$

Δηλαδή, βρίσκουμε το \hat{y} .

Αν $\frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(1)}} \leq \frac{5}{2\sqrt{1+\frac{3}{2}c^{(2)}}}$, τότε ελάχιστο R , είναι το $R(\hat{y}^{(r)})$,

αλλιώς ελάχιστο R , είναι το $R(0)$. Όπου

$$R(\hat{y}^{(2)}) = (\sigma_0^{(1)})^2 \left[\frac{5c^{(2)}}{3+2c^{(2)}} \frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(1)}} + \frac{\sqrt{3}(1-c^{(2)})}{3+2c^{(2)}} \sqrt{3+2c^{(2)} - 2c^{(2)} \left(\frac{\sigma_0^{(2)}}{\sigma_0^{(1)}} \right)^2} \right]^2$$

Και το όριο διαρροής, προκύπτει από την (5.2.1)

3. Μελέτη επιμέρους φάσεων

Με τα παραπάνω, έχουμε μια συνολική εικόνα της συμπεριφοράς του σύνθετου υλικού, όταν υπόκειται σε κάποια φόρτιση. Μπορέσαμε δηλαδή να υπολογίσουμε τα $\bar{\sigma}$ και $\dot{\epsilon}$ συνολικά σε όλο το στοιχείο μας.

Παρακάτω θα δούμε πως μπορούμε να μελετήσουμε τις τάσεις και παραμορφώσεις στις επιμέρους φάσεις του υλικού, προσδιορίζοντας την αντίστοιχη συμπεριφορά στη καθεμία.

Μας ενδιαφέρει επί της ουσίας να βρούμε το $\alpha^{(r)}$ εκείνο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το συνολικό \bar{D} , να μας δίνει το επιμέρους $\bar{D}^{(r)}$ για τη κάθε φάση.

3.1 Εκτίμηση των τανυστών συγκέντρωσης του $\bar{D} = \dot{\bar{\epsilon}} : A^{(r)}$

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα στοιχείο που αποτελείται από N γραμμικές φάσεις. Έστω η μητρική φάση είναι η 1, οπότε οι υπόλοιπες είναι $2 \dots N$. Τότε, η κάθε φάση r , περιγράφεται από ένα ελαστικό ισότροπο μέσο : $\mathbf{L}^{(r)} = 3\kappa^{(r)} \mathbf{J} + 2\mu^{(r)} \mathbf{K}$

Τέτοιο ώστε : $\mathbf{L}^{(r)} - \mathbf{L}^{(1)} = 2(\mu^{(r)} - \mu^{(1)}) \mathbf{K} + 3(\kappa^{(r)} - \kappa^{(1)}) \mathbf{J}$

Όπου : $\mu^{(r)} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: Μέτρο διάτμησης

Και : $\kappa^{(r)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$: Μέτρο διόγκωσης

- Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ορθογωνικότητα των \mathbf{K} , \mathbf{J} . Δηλαδή ότι : $\bar{\mathbf{L}} : \bar{\mathbf{L}}^{-1} = \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{I}}$,

Έχουμε ότι : $(\mathbf{L}^{(r)})^{-1} = \frac{1}{2\mu^{(r)}} \mathbf{K} + \frac{1}{3\kappa^{(r)}} \mathbf{J}$

- Από τις εκτιμήσεις του Willis (1977,1978) για στοιχεία αποτελούμενα από μία ισότροπη και ομοιόμορφη κατανομή των φάσεων, βρίσκουμε παίρνοντας τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\mathbf{S}^{(r)} = \frac{6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{5(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \mathbf{K} + \frac{3\kappa^{(1)}}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J}$$

Και

$$\mathbf{P}^{(r)} = \mathbf{S}^{(r)} : (\mathbf{L}^{(1)})^{-1} = \frac{1}{2\mu^{(1)}} \frac{6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})}{5(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})} \mathbf{K} + \frac{1}{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J}$$

Για $r=2 \dots N$

3.2 Ασυμπίεστες φάσεις

Το ενδιαφέρον εδώ εντοπίζεται για ασυμπίεστες φάσεις, με $\kappa^{(r)} \rightarrow \infty$
 $r=1, \dots, N$

Παίρνοντας το όριο ασυμπιεστότητας στο αποκλίνων κομμάτι του

$$\left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(r)} : (\mathbf{L}^{(r)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} = \frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(r)}} \mathbf{K} + \frac{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{3\kappa^{(r)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J}$$

Οπότε παίρνουμε:

$$\lim_{\kappa^{(1)} \rightarrow \infty} \mathbf{K} : \left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(r)} : (\mathbf{L}^{(r)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} = \frac{5\mu^{(1)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(r)}} \mathbf{K}$$

Το οποίο ορίζεται μοναδικά.

Ωστόσο, το όριο ασυμπιεστότητας δεν μπορεί να βρεθεί για το υδροστατικό κομμάτι της παραπάνω έκφρασης.

Επί της ουσίας, αυτό που πρέπει να κάνουμε, είναι να πάρουμε το όριο ασυμπιεστότητας στη τελευταία έκφραση, για να πάρουμε :

$$\begin{aligned} c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(s)} : (\mathbf{L}^{(s)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} &= \\ &= c^{(1)} (\mathbf{J} + \mathbf{K}) + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \left(\frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(s)}} \mathbf{K} + \frac{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{3\kappa^{(s)} + 4\mu^{(1)}} \mathbf{J} \right) = \\ &= \left(\sum_{s=1}^N c^{(s)} \frac{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{3\kappa^{(s)} + 4\mu^{(1)}} \right) \mathbf{J} + \left(c^{(1)} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(s)}} \right) \mathbf{K} \end{aligned}$$

Έτσι ώστε:

$$\left\{ c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(s)} : (\mathbf{L}^{(s)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} \right\}^{-1} = \left(\sum_{s=1}^N c^{(s)} \frac{3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{3\kappa^{(s)} + 4\mu^{(1)}} \right)^{-1} \mathbf{J} + \left(c^{(1)} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(s)}} \right)^{-1} \mathbf{K}$$

Τελικά, για $r=2 \dots N$, (Δηλαδή για όλες τις φάσεις εκτός της μητρικής $r=1$) έχουμε ότι:

$$\mathbf{A}^{(r)} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(r)} : (\mathbf{L}^{(r)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} : \left\{ c^{(1)} \mathbf{I} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{(s)} : (\mathbf{L}^{(s)} - \mathbf{L}^{(1)}) \right]^{-1} \right\}^{-1}$$

Το οποίο είναι απλά:

$$\mathbf{A}^{(r)} = \frac{1}{3\kappa^{(r)} + 4\mu^{(1)}} \left(\sum_{s=1}^N c^{(s)} \frac{1}{3\kappa^{(s)} + 4\mu^{(1)}} \right)^{-1} \mathbf{J} + \frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(r)}} \left(c^{(1)} + \sum_{s=2}^N c^{(s)} \frac{5\mu^{(1)}(3\kappa^{(1)} + 4\mu^{(1)})}{\mu^{(1)}(9\kappa^{(1)} + 8\mu^{(1)}) + 6(\kappa^{(1)} + 2\mu^{(1)})\mu^{(s)}} \right)^{-1} \mathbf{K}$$

• **Αποκλίνων κομμάτι**

Όσο αφορά το αποκλίνων κομμάτι του $\mathbf{A}^{(r)}$, το όριο ασυμπίεστότητας είναι ασήμαντο, και οδηγεί στο :

$$\lim_{\kappa^{(1)} \rightarrow \infty} \mathbf{K} : \mathbf{A}^{(r)} = \frac{5\mu^{(1)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(r)}} \left(c^{(1)} + \sum_{s=2}^N \frac{5c^{(s)}\mu^{(1)}}{3\mu^{(1)} + 2\mu^{(s)}} \right)^{-1} \mathbf{K} = \frac{5y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2} \left(c^{(1)} + \sum_{s=2}^N \frac{5c^{(s)}y^{(s)}}{3y^{(s)} + 2} \right)^{-1} \mathbf{K} = \frac{5y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2} \left(\sum_{s=1}^N \frac{5c^{(s)}y^{(s)}}{3y^{(s)} + 2} \right)^{-1} \mathbf{K} = \frac{y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2} \left(\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)}y^{(s)}}{3y^{(s)} + 2} \right)^{-1} \mathbf{K}$$

- **Υδροστατικό κομμάτι**

Όσον αφορά το υδροστατικό κομμάτι του $\mathbf{A}^{(r)}$, πρέπει να γίνουν κάποιες υποθέσεις. Όπως ότι για ασυμπίεστες φάσεις : $\kappa^{(r)} = \kappa^{(1)} = \kappa \rightarrow \infty$.

(Όταν $\kappa^{(r)} = \kappa^{(1)} = \kappa$, το σύνθετο στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί απλά ως ένα ομογενές υλικό, κάτω από υδροστατική φόρτιση):

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbf{J}: \mathbf{A}^{(r)} = \mathbf{J}$$

Παρατήρηση: Εφόσον το $\bar{\mathbf{D}}$ είναι αποκλίνον, έχουμε ότι για $r=2, \dots, N$

$$\bar{\mathbf{D}}^{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} : \bar{\mathbf{D}} = \frac{y^{(r)}}{3y^{(r)} + 2} \left(\sum_{s=1}^N \frac{c^{(s)} y^{(s)}}{3y^{(s)} + 2} \right)^{-1} \bar{\mathbf{D}} = \alpha^{(r)} \bar{\mathbf{D}}$$

Το οποίο υπονοεί ότι το $\bar{\mathbf{D}}^{(r)}$ δεν εξαρτάται από το υδροστατικό κομμάτι του $\mathbf{A}^{(r)}$, καθώς το υλικό έχει μια συνολική ασυμπίεστη συμπεριφορά.

Επιπλέον, για τον υπολογισμό του $\mathbf{A}^{(r)}$, για τη **μητρική φάση 1**, κάνουμε χρήση της ταυτότητας:

$$\sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbf{A}^{(r)} = \mathbf{I} \quad \text{ή} \quad \mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}} \left(\mathbf{I} - \sum_{r=2}^N c^{(r)} \mathbf{A}^{(r)} \right)$$

Έτσι ώστε :

$$\bar{\mathbf{D}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)} : \bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{c^{(1)}} \left(\mathbf{I} - \sum_{r=2}^N c^{(r)} \mathbf{A}^{(r)} \right) : \bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{c^{(1)}} \left(\bar{\mathbf{D}} - \sum_{r=2}^N c^{(r)} \mathbf{A}^{(r)} : \bar{\mathbf{D}} \right) = \frac{1}{c^{(1)}} \left(\bar{\mathbf{D}} - \sum_{r=2}^N c^{(r)} \alpha^{(r)} \bar{\mathbf{D}} \right)$$

Ή

$$\bar{\mathbf{D}}^{(1)} = \alpha^{(1)} \bar{\mathbf{D}} \quad \text{όπου} \quad \alpha^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}} \left(1 - \sum_{r=2}^N c^{(r)} \alpha^{(r)} \right)$$

Σημείωση:

$$\sum_{r=1}^N c^{(r)} \alpha^{(r)} = \mathbf{1} \quad , \quad \sum_{r=1}^N c^{(r)} \bar{\mathbf{D}}^{(r)} = \bar{\mathbf{D}} \quad ,$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(i)} = \alpha^{(i)} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

4. Υπολογισμοί μοναδιαίου κελιού

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θέλουμε να υπολογίσουμε τις ιδιότητες ενός πολυφασικού μετάλλου αριθμητικά. Πιο συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένα στοιχεία (abaqus), για να υπολογίσουμε τις ιδιότητες ενός υλικού, αποτελούμενο από δύο τέλεια πλαστικές φάσεις.

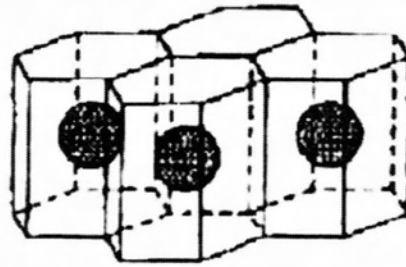
Για να το πετύχουμε αυτό, θα ορίσουμε ένα μοναδιαίο κελί του υλικού, αποτελούμενο από μία μητρική φάση 1 και διεσπαρμένη φάση 2, πάνω στο οποίο θα κάνουμε τους υπολογισμούς μας. Απώτερος σκοπός μας θα είναι να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολικό όριο διαρροής του σύνθετου υλικού.

Τέλος, θα κάνουμε μια σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε μοναδιαίο κελί, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη θεωρία ομογενοποίησης.

4.2 Μοντελοποίηση της δομής ενός διφασικού μετάλλου

Το διφασικό μέταλλο που θα μελετήσουμε, θεωρούμε ότι αποτελείται από σωματίδια φάσης 2 διεσπαρμένα ισοτροπικά και ομοιόμορφα σε μια μήτρα φάσης 1.

Η μικροδομή του σύνθετου υλικού, μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά ως μια τρισδιάστατη περιοδική κατανομή ίσων κελιών, όπου το κάθε κελί είναι εξαγωνικό, αποτελείται από τη μητρική φάση 1 ενώ περιέχει μια σφαίρα φάσης δύο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

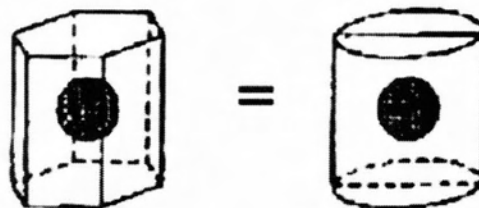


Σχήμα 4.1: Τρισδιάστατη περιοδική κατανομή εξαγωνικών κελιών

4.3 Το πρόβλημα μοναδιαίου κελιού

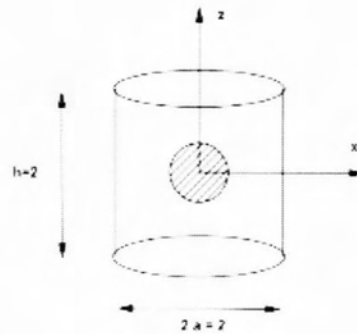
Θεωρώντας την παραπάνω κατανομή του υλικού, βλέπουμε ότι το κάθε εξαγωνικό κελί, μπορεί να προσομοιώσει τις ιδιότητες ολόκληρου του υλικού. Άρα μας αρκεί να δουλέψουμε με ένα τέτοιο κελί.

Για να μειώσουμε περισσότερο τους υπολογισμούς, προσεγγίζουμε το εξαγωνικό κελί, με ένα αντίστοιχο κυλινδρικό, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Προσέγγιση εξαγωνικού κελιού από κυλινδρικό

Το σχήμα και οι διαστάσεις του κυλινδρικού κελιού φαίνονται πιο αναλυτικά στο σχήμα 4.3. Όπου h το ύψος του κυλινδρικού κελιού, a η ακτίνα του κυλίνδρου και R η ακτίνα της σφαίρας που βρίσκεται εντός του κελιού.



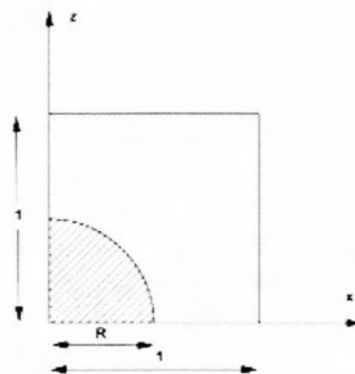
Σχήμα 4.3: Διαστάσεις κυλινδρικού κελιού

Δουλεύοντας τώρα πάνω στο κυλινδρικό κελί, βλέπουμε ότι η ακτίνα R της σφαίρας, που αποτελείται από τη φάση 2 του υλικού, σχετίζεται άμεσα με το κλάσμα όγκου $c^{(2)}$, της φάσης 2, ως εξής:

$$c^{(2)} = \frac{V_{\text{σφαίρας}}}{V_{\text{ολικό}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi a^3} = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{a} = \left(\frac{3c^{(2)}}{2}\right)^{1/3}$$

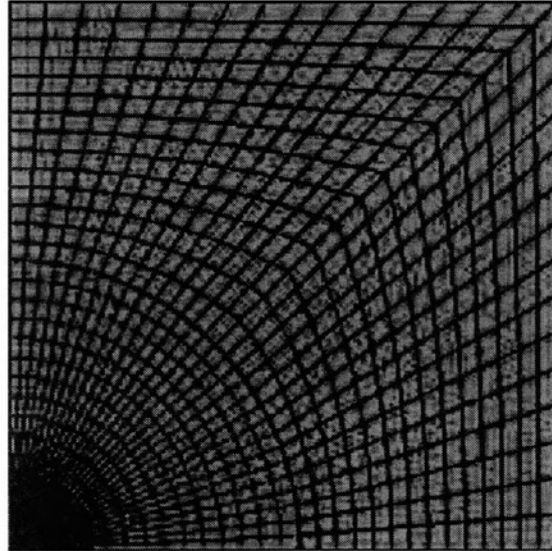
Όπου έχουμε θεωρήσει προφανώς ότι το ύψος του κελιού, h , ισούται με $2a$.

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 4.3, το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό ως προς τον άξονα z , και συμμετρικό ως προς τον άξονα x , οπότε χρειάζεται να μοντελοποιήσουμε μόνο το ένα τέταρτο της τομής στο z - x επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4, όπου η σκιαγραφημένη περιοχή αντιπροσωπεύει τη φάση 2.



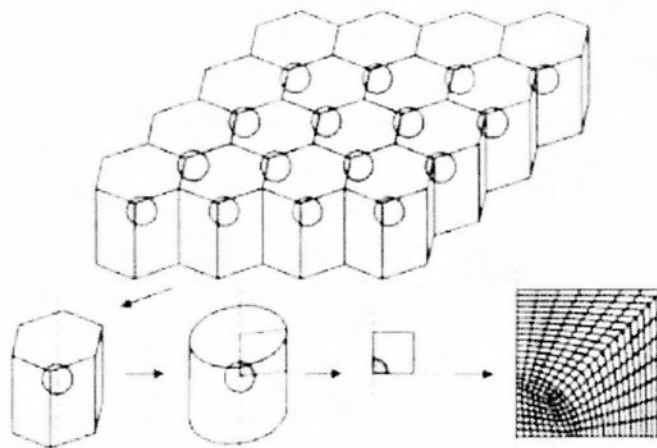
Σχήμα 4.4: Τελικό μοναδιαίο κελί

Ο κάρναβος πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε για τους υπολογισμούς μας, φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Όπου τα κόκκινα στοιχεία αντιστοιχούν στην μητρική φάση 1, ενώ τα μπλε στη φάση 2.



Σχήμα 4.5: Κάρναβος μοναδιαίου κελιού που αντιστοιχεί σε κλάσμα όγκου της φάσης 2,
 $c^{(2)} = 0.10$ ή 10%

Το Σχήμα 4.6, δείχνει συνοπτικά τις διαδοχικές γεωμετρικές προσεγγίσεις που κάνουμε προκειμένου να καταλήξουμε από το τρισδιάστατο πρόβλημα, στο μοντέλο του μοναδιαίου κελιού



Σχήμα 4.6: Γεωμετρικές προσεγγίσεις συνοπτικά

4.4 Μετατόπιση και Συνοριακές συνθήκες

Προκειμένου να εξάγουμε αποτελέσματα από τη μελέτη του μοναδιαίου κελιού, θέλουμε να ασκήσουμε μια ομοιόμορφη κατακόρυφη μετατόπιση της τάξεως του 20% στην πάνω πλευρά του κελιού. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε “δένοντας” όλους τους κόμβους της πάνω πλευράς σε έναν εξωτερικό κόμβο.

Έπειτα ασκούμε τη μετατόπιση σε αυτό το κόμβο, και μετράμε εκεί τη δύναμη αντίδρασης, συναρτήσει της μετατόπισης. Μετρώντας και το μήκος της πάνω πλευράς συναρτήσει της μετατόπισης, μπορούμε να εξάγουμε και την πραγματική τάση συναρτήσει της μετατόπισης.

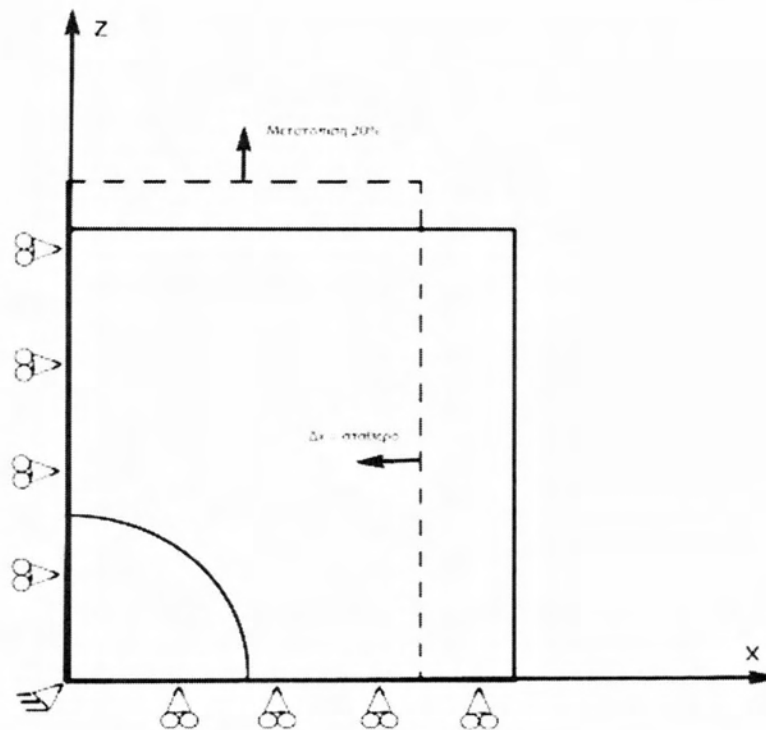
Στις υπόλοιπες τρεις πλευρές, ασκούμε συνοριακές συνθήκες ώστε να διατηρείται η συμμετρικότητα του προβλήματος, καθώς και η περιοδικότητα των κελιών .

Όλοι οι κόμβοι πάνω στον z άξονα, περιορίζονται να έχουν μηδενική μετατόπιση στη διεύθυνση του άξονα x .

Όλοι οι κόμβοι πάνω στον x άξονα αντίστοιχα, περιορίζονται να έχουν μηδενική μετατόπιση στη διεύθυνση του άξονα z .

Τέλος, όλοι οι κόμβοι στην εξωτερική πλευρά του κελιού, περιορίζονται να έχουν ίσες μετατοπίσεις στην διεύθυνση του άξονα x .

Τα παραπάνω μπορούμε να τα δούμε και σχηματικά στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Σχηματική απεικόνιση συνοριακών συνθηκών

4.5 Ορισμός υλικών

Τις δύο φάσεις με τις οποίες δουλεύουμε, τις μοντελοποιούμε ως τέλεια πλαστικά υλικά, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Φάση 1:** Όριο διαρροής: $\sigma_0^{(1)} = 1 \text{ MPa}$
 Μέτρο ελαστικότητας: $E = 1000 \text{ MPa}$
 Συντελεστής Poisson: $\nu = 0$
- Φάση 2:** Όριο διαρροής: $\sigma_0^{(2)} = 1.3 \text{ MPa}$
 Μέτρο ελαστικότητας: $E = 1300 \text{ MPa}$
 Συντελεστής Poisson: $\nu = 0$

4.6 Ανάλυση σε τέσσερα μοντέλα

Για να πάρουμε πιο ακριβή αποτελέσματα, επιλέγουμε να δουλέψουμε με τέσσερα διαφορετικά μοντέλα, που αντιστοιχούν σε τέσσερα διαφορετικά κλάσματα όγκου της φάσης 2. Πιο συγκεκριμένα, θα δουλέψουμε με τα ακόλουθα κλάσματα όγκου: $c^{(2)} = 0.10, 0.20, 0.40, 0.50$

Στον πίνακα 4.1, παρουσιάζονται συνοπτικά τα τέσσερα διαφορετικά μοντέλα, με τα αντίστοιχα κλάσματα όγκου και κλάσματα R/a .

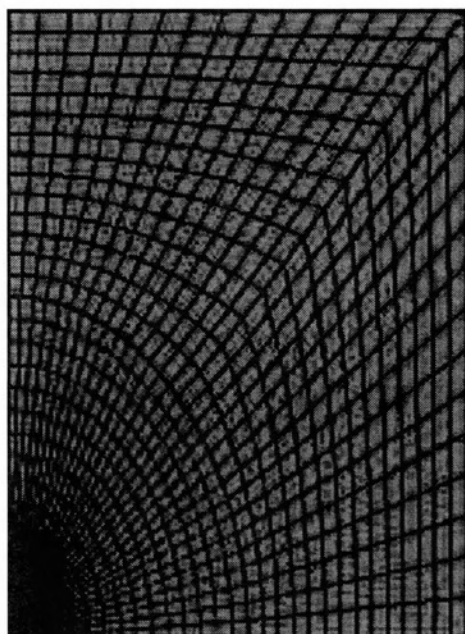
Επίσης στον πίνακα 4.1 βλέπουμε το μέσο όριο διαρροής ($\bar{\sigma}_0$), για το κάθε μοντέλο, όπως αυτό προκύπτει από τη θεωρία ομογενοποίησης. Τα αποτελέσματα τα παίρνουμε από τον κώδικα στην Fortran, και τα έχουμε επαληθεύσει και αναλυτικά. Το θεωρητικό μέσο όριο διαρροής, θα αποτελέσει το μέτρο σύγκρισης για τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

ΜΟΝΤΕΛΟ	$c^{(2)}$ (%)	R/a	$\bar{\sigma}_0$
1	10	0.531	1.027
2	20	0.660	1.054
3	40	0.840	1.112
4	50	0.908	1.141

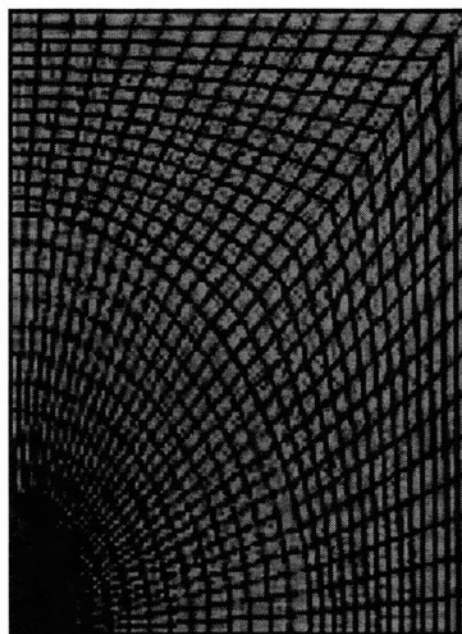
Πίνακας 4.1: $c^{(2)}$, R/a και $\bar{\sigma}_0$ για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύουμε.

Το πρόβλημα μοναδιαίου κελιού, λύνεται με το ABAQUS για τα τέσσερα μοντέλα που φαίνονται στον Πίνακα 4.1. Ο κάρναβος πεπερασμένων στοιχείων στη παραμορφωμένη κατάσταση, έπειτα από μια παραμόρφωση 20% φαίνεται στο Σχήμα 4.8 για τις τέσσερις περιπτώσεις.

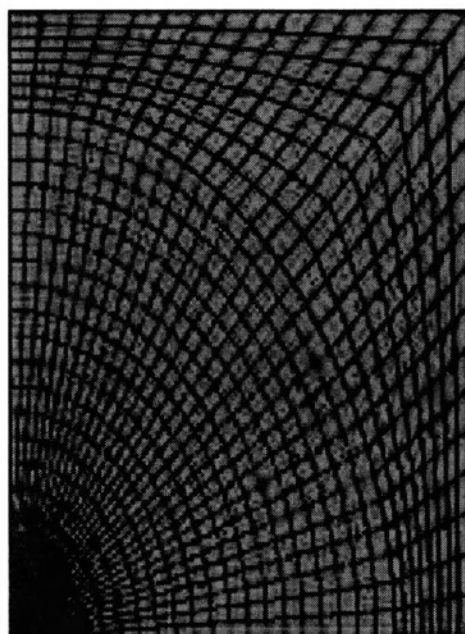
Επίσης στα σχήματα 4.9-4.12, βλέπουμε τις πλαστικές ζώνες, στη παραμορφωμένη κατάσταση, για τα τέσσερα μοντέλα.



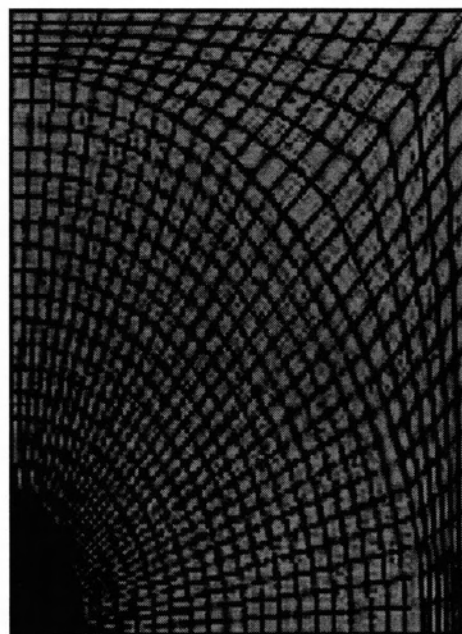
Μοντέλο 1



Μοντέλο 2

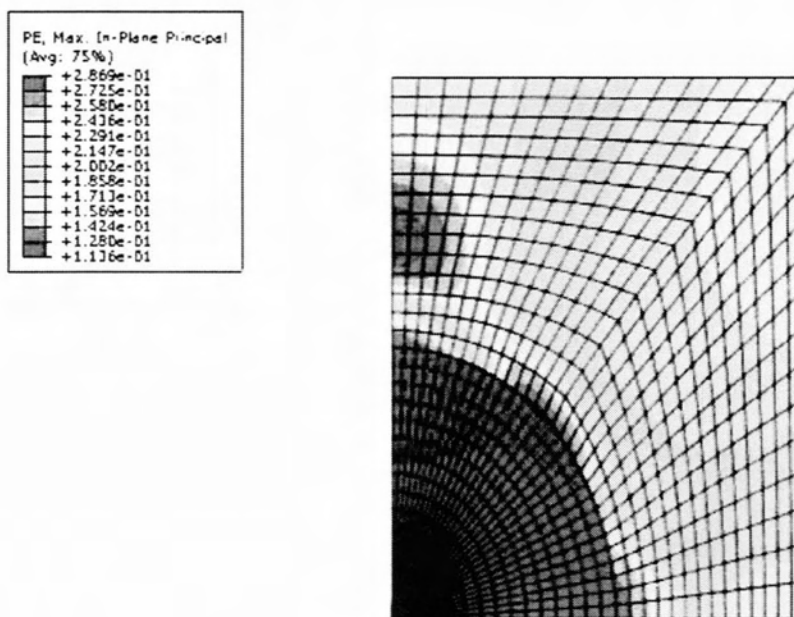


Μοντέλο 3

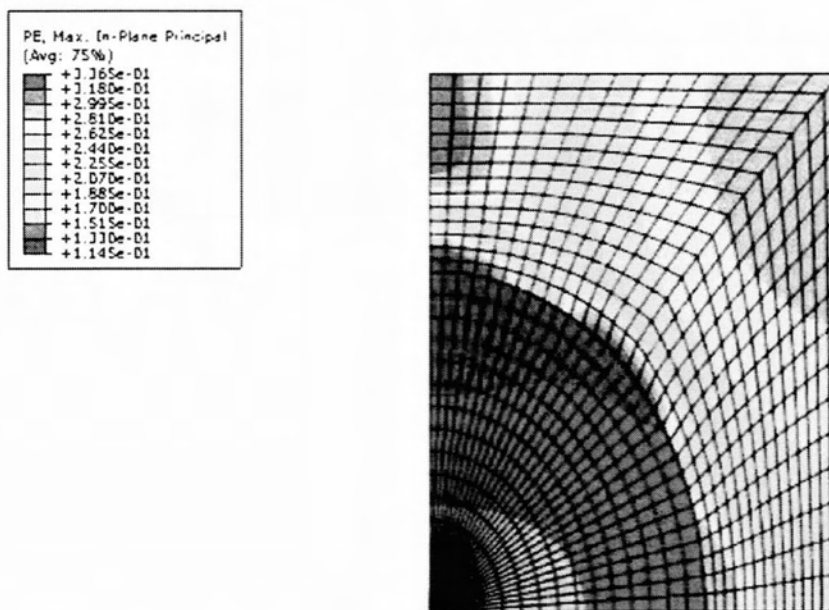


Μοντέλο 4

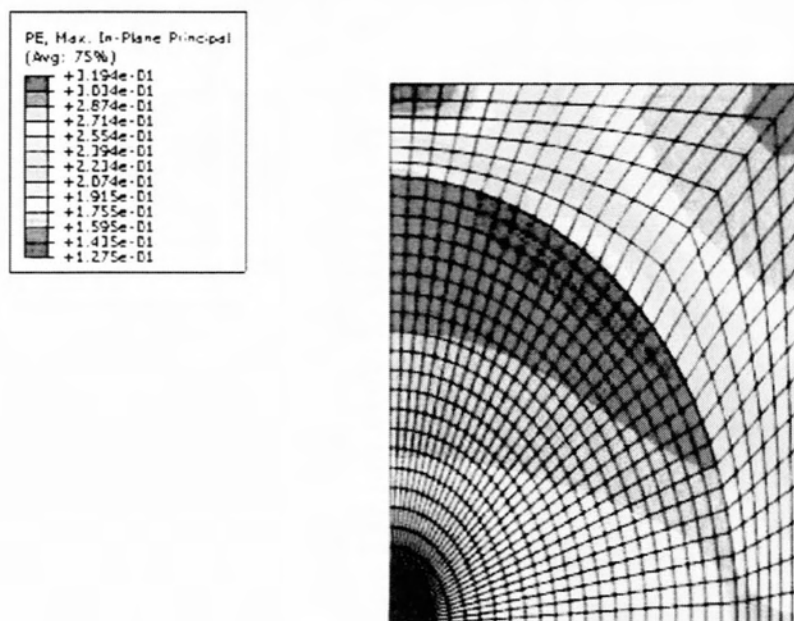
Σχήμα 4.8: Παραμορφωμένοι κάναβι, στην τελική επιμήκυνση για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύονται.



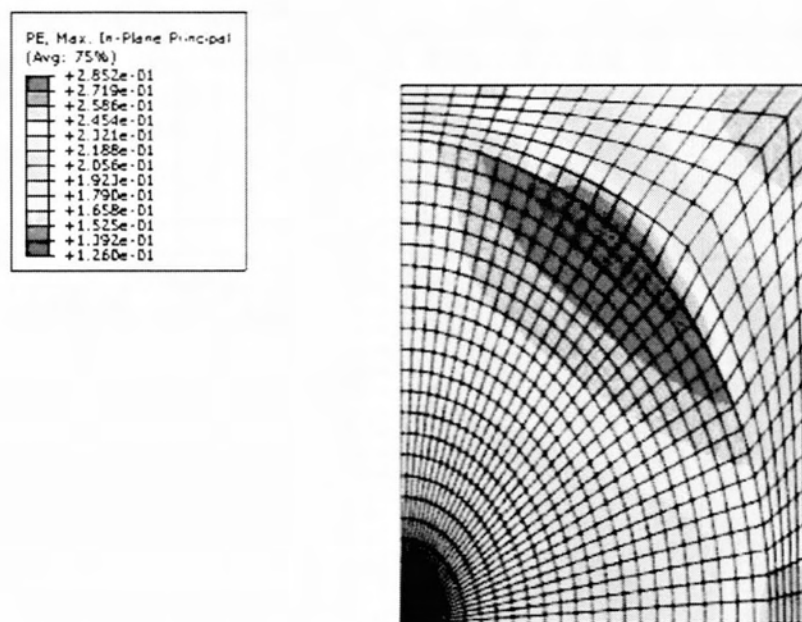
Σχήμα 4.9: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=10\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3



Σχήμα 4.10: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=20\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3



Σχήμα 4.11: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=40\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3



Σχήμα 4.12: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=50\%$ στη 1^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 1.3

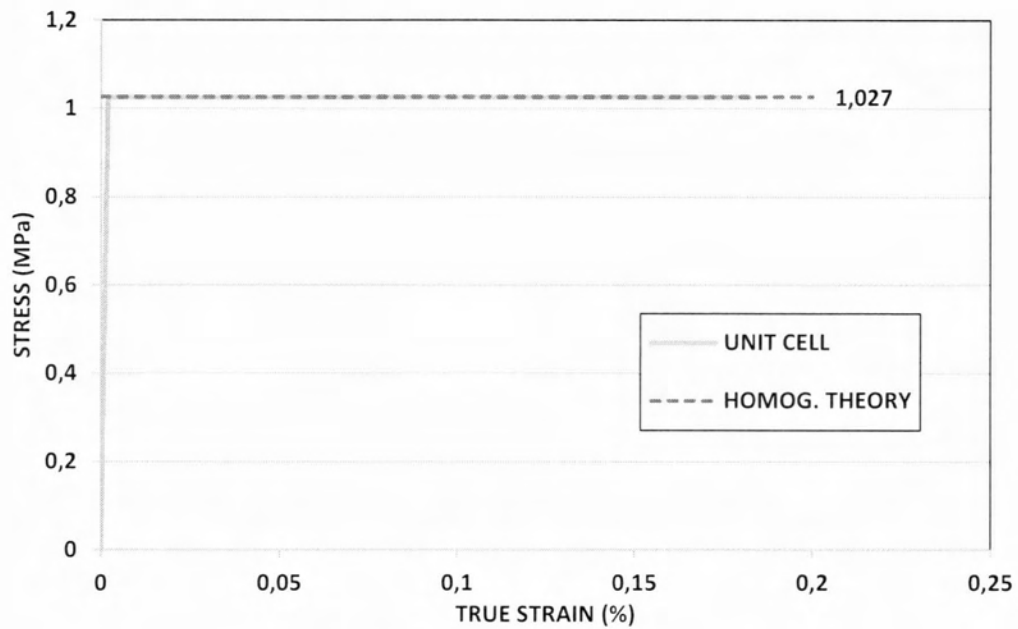
4.7 Σύγκριση των προβλέψεων από τη θεωρία ομογενοποίησης με τους αντίστοιχους υπολογισμούς μοναδιαίου κελιού.

Έχοντας πάρει τα αποτελέσματα από τη μελέτη με πεπερασμένα στοιχεία για τα τέσσερα μοντέλα που εξετάζουμε, όπως αυτά φαίνονται στον Πίνακα 4.1, μπορούμε να τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα μέσα όρια διαρροής που έχουμε πάρει από τη θεωρία ομογενοποίησης.

Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω βλέπουμε το διάγραμμα σ - ϵ που προκύπτει από τους υπολογισμούς στο ABAQUS σε συνδυασμό με το θεωρητικό όριο διαρροής του σύνθετου υλικού. Όπου σ είναι η πραγματική τάση σε MPa όπως αυτή υπολογίζεται στην πάνω πλευρά του μοναδιαίου κελιού και ϵ η πραγματική παραμόρφωση, που ορίζεται ως: $\epsilon_{true} = \ln(1 + \epsilon_{nominal}) = \ln(1 + \frac{l-L}{L})$.

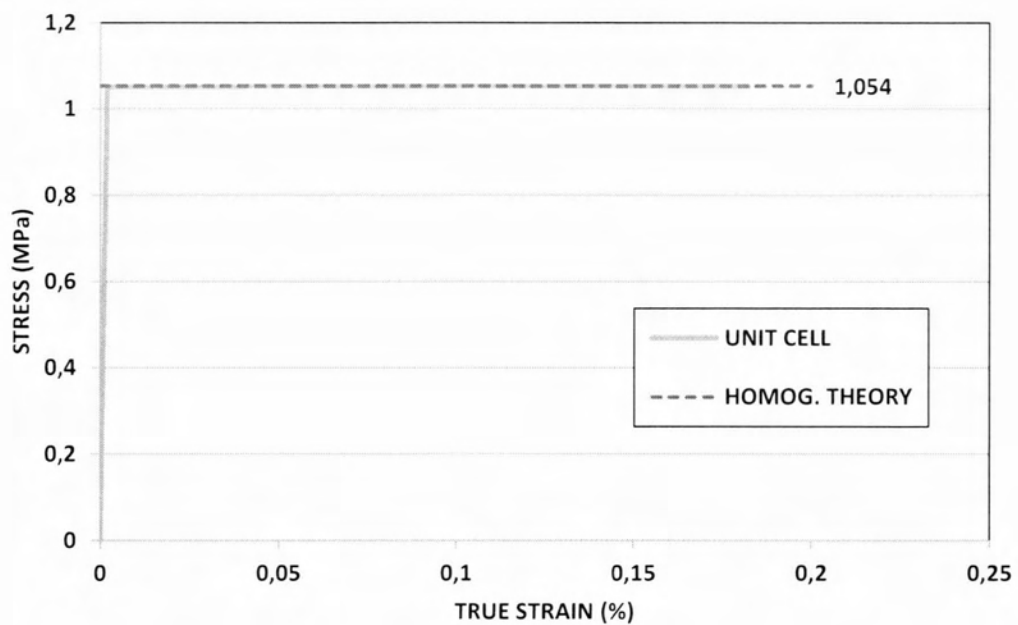
Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι δουλεύουμε με ένα τέλεια πλαστικό υλικό, βλέπουμε ότι τα δύο αποτελέσματα συγκλίνουν αρκετά ικανοποιητικά και για τα τέσσερα μοντέλα όπως φαίνεται στα σχήματα 4.9 - 4.12.

- Μοντέλο 1 [C(2)=10%]



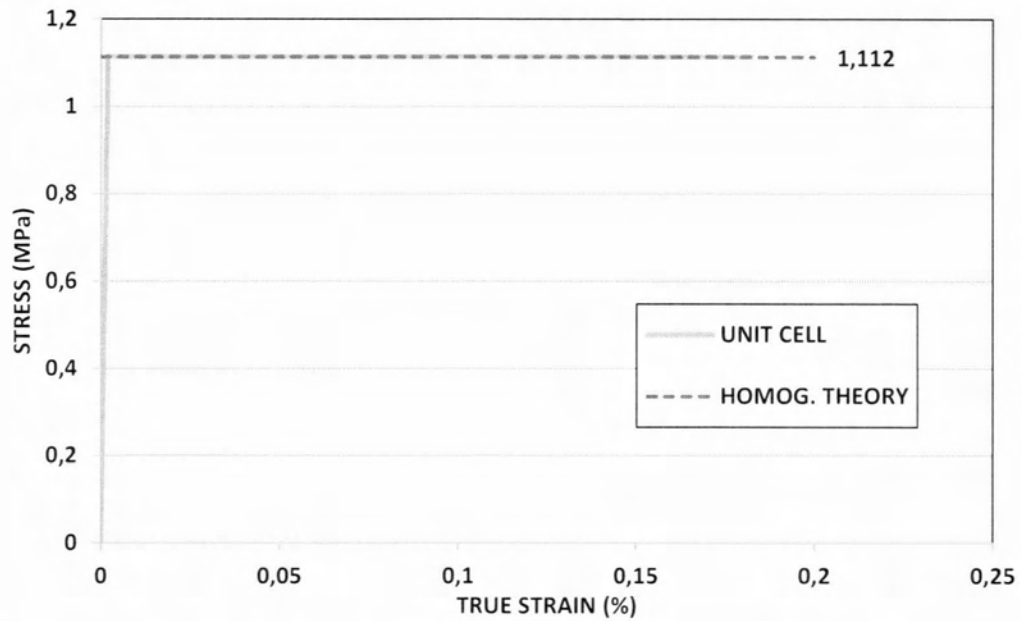
Σχήμα 4.13: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης-Παραμόρφωσης για C(2)=10%

- Μοντέλο 2 [C(2)=20%]



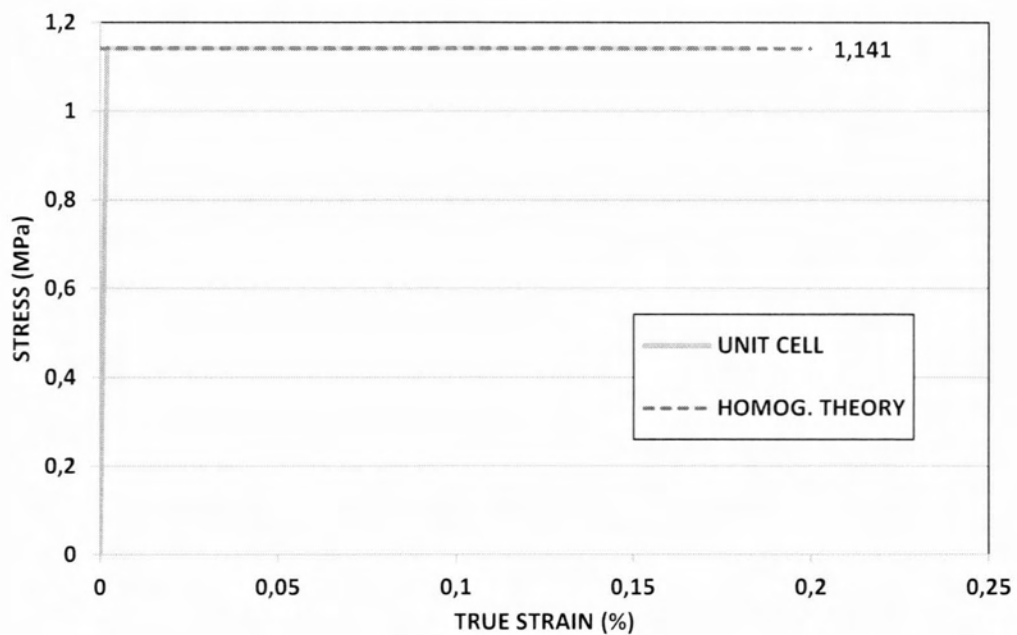
Σχήμα 4.14: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=20%

- Μοντέλο 3 [C(2)=40%]



Σχήμα 4.15: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=40%

- Μοντέλο 4 [C(2)=50%]



Σχήμα 4.16: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=50%

4.8 Μελέτη 2^{ης} περίπτωσης για φάσεις με όρια διαρροής 1 και 2

Όπως βλέπουμε, έχουμε πολύ καλή σύγκλιση για τη περίπτωση όπου τα όρια διαρροής των δύο φάσεων έχουν μικρή διαφορά μεταξύ τους.

Στη συνέχεια, θέλουμε να εξετάσουμε μια επιπλέον περίπτωση, όπου έχουμε το ίδιο πρόβλημα, άλλα τώρα τα όρια διαρροής των δυο φάσεων έχουν μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ τους. Ο λόγος που το κάνουμε αυτό, είναι για να ελέγξουμε τη σύγκλιση των δύο αποτελεσμάτων σε μια πιο ακραία περίπτωση,

Επίσης, θα μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τις πλαστικές ζώνες που δημιουργούνται κατά τη παραμόρφωση, καθώς στη προηγούμενη περίπτωση, οι δύο φάσεις περνάνε κατευθείαν στη πλαστική περιοχή.

Οι κάνναβοι στη παραμορφωμένη κατάσταση, είναι ίδιοι με τη προηγούμενη περίπτωση, άρα τελικά αυτό που μας ενδιαφέρει, είναι τα διαγράμματα τάσης παραμόρφωσης, συγκριτικά με τη θεωρία ομογενοποίησης, καθώς και οι πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση.

Οι δύο τέλεια πλαστικές φάσεις που θα επιλέξουμε σε αυτή τη περίπτωση έχουν ως εξής:

Φάση 1: Όριο διαρροής: $\sigma_0^{(1)} = 1 \text{ MPa}$

Μέτρο ελαστικότητας: $E = 1000 \text{ MPa}$

Συντελεστής Poisson: $\nu = 0$

Φάση 2: Όριο διαρροής: $\sigma_0^{(2)} = 2 \text{ MPa}$

Μέτρο ελαστικότητας: $E = 2000 \text{ MPa}$

Συντελεστής Poisson: $\nu = 0$

Όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, στον Πίνακα 4.2 μπορούμε να δούμε τα δεδομένα του νέου προβλήματος, για τα τέσσερα διαφορετικά μοντέλα που μελετήσαμε και προηγουμένως, καθώς και τα θεωρητικά όρια διαρροής που προκύπτουν από τη FORTRAN για τη νέα περίπτωση.

Τα οποία θα χρησιμεύσουν ως μέτρο σύγκρισης με τους υπολογισμούς μοναδιαίου κελιού.

ΜΟΝΤΕΛΟ	$c^{(2)}$ (%)	R/a	$\bar{\sigma}_0$
1	10	0.531	1.067
2	20	0.660	1.135
3	40	0.840	1.264
4	50	0.908	1.322

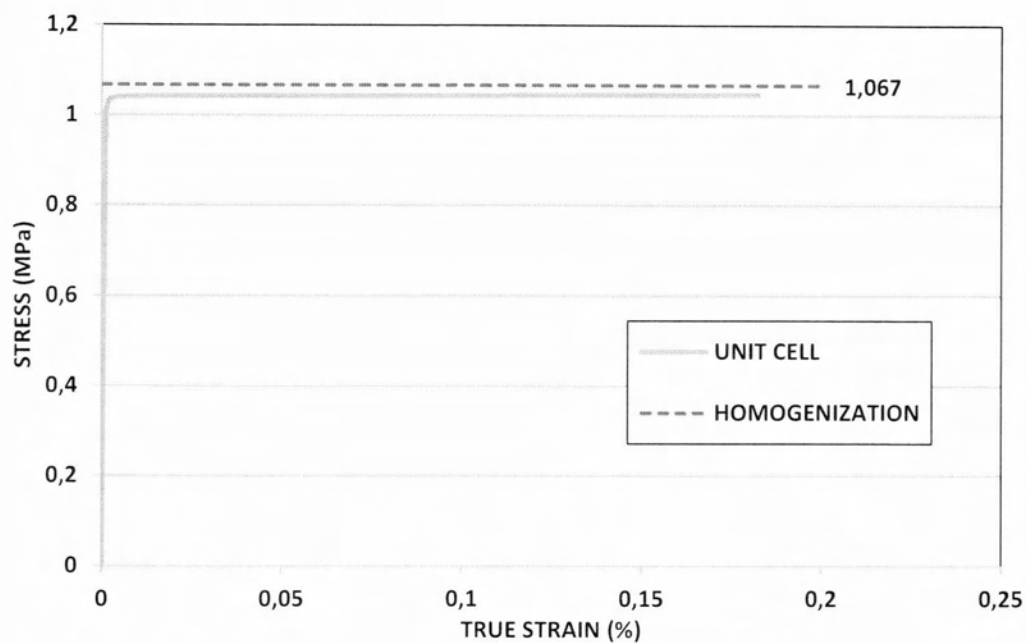
Πίνακας 4.2: $c^{(2)}$, R/a και $\bar{\sigma}_0$ για τα τέσσερα μοντέλα που αναλύουμε στη νέα περίπτωση.

Παρακάτω, στα Σχήματα 4.13-4.16, βλέπουμε τα διαγράμματα $\sigma - \epsilon$ των αποτελεσμάτων από το ABAQUS για τη νέα περίπτωση σε συνδυασμό με τα θεωρητικά όρια διαρροής, για τα τέσσερα μοντέλα που μελετάμε.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, παρουσιάζουν εξίσου μεγάλο ενδιαφέρον, οι πλαστικές ζώνες που διαμορφώνονται στη παραμορφωμένη κατάσταση, οι οποίες όπως θα δούμε στα Σχήματα 4.17-4.20 εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το κλάσμα όγκου της φάσης 2.

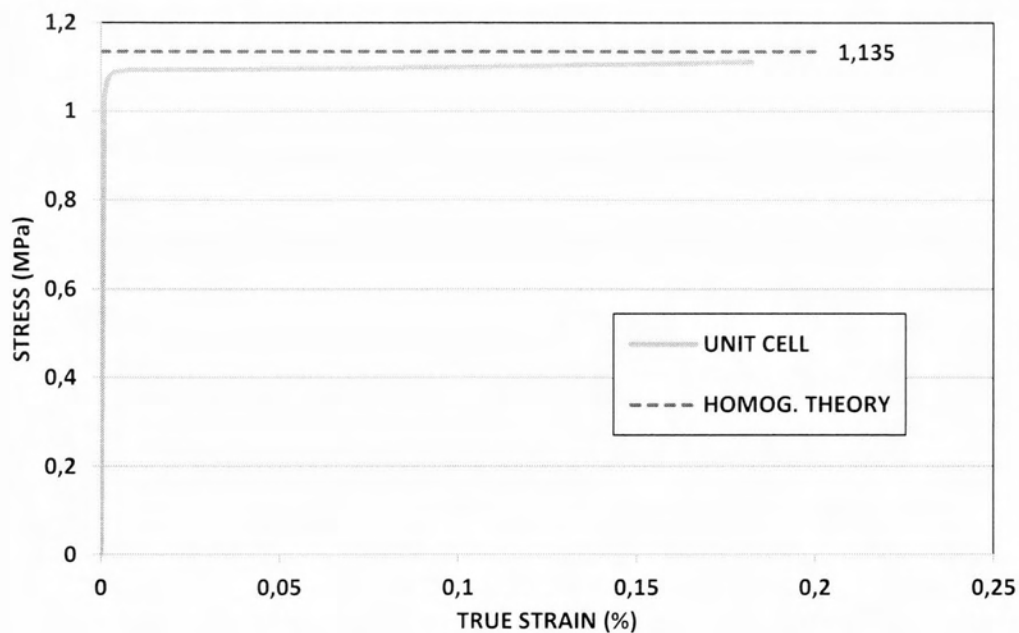
Υπενθυμίζουμε ότι η τάση είναι σε MPa, και η παραμόρφωση είναι η πραγματική (λογαριθμική).

- Μοντέλο 1 [C(2)=10%]



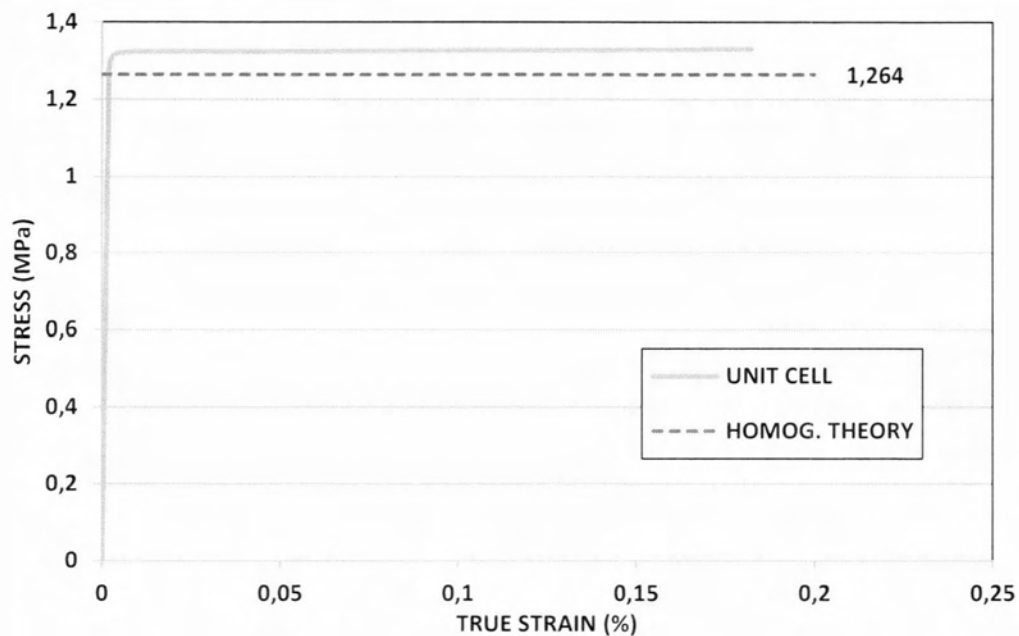
Σχήμα 4.17: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης-Παραμόρφωσης για C(2)=10% στη 2^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2

- Μοντέλο 2 [C(2)=20%]



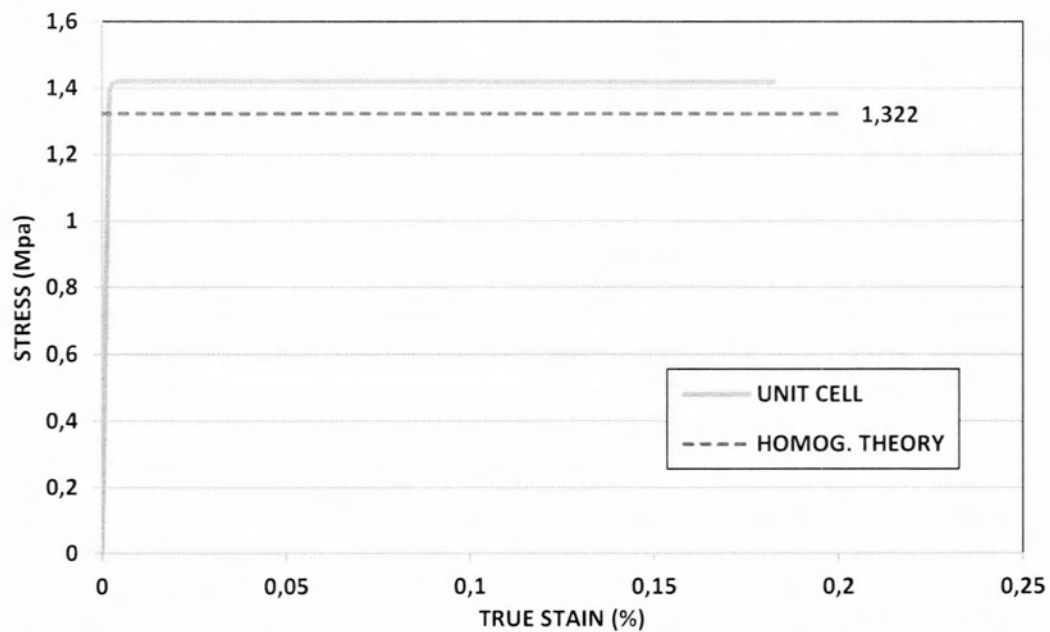
Σχήμα 4.18: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=20% στη 2^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2

- Μοντέλο 3 [C(2)=40%]

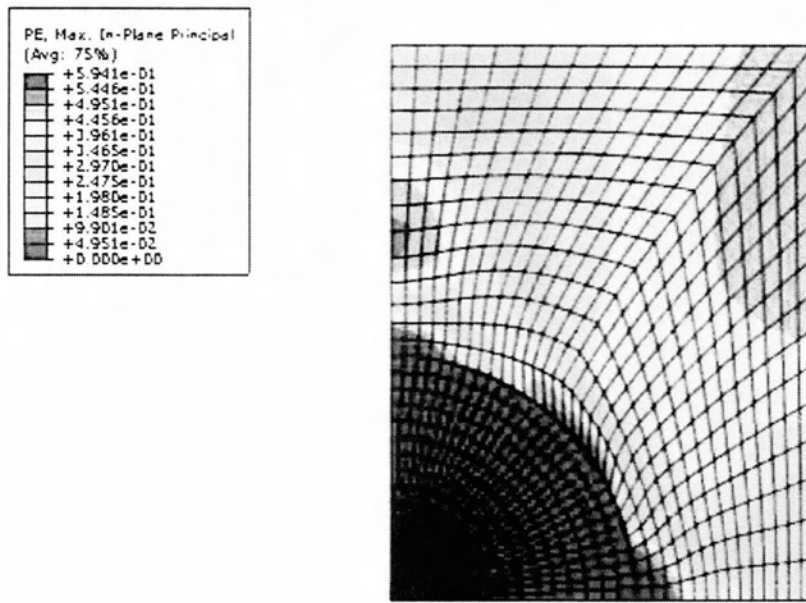


Σχήμα 4.19: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=40% στη 2^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2

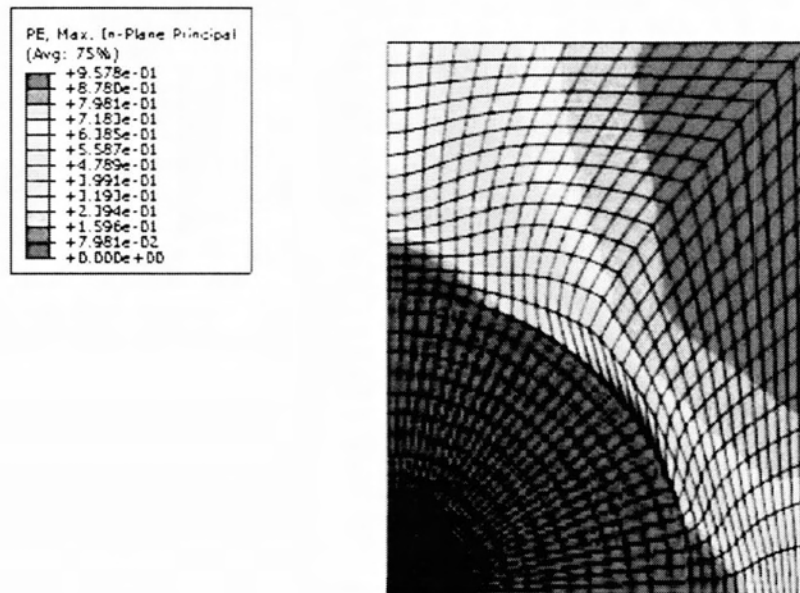
- Μοντέλο 4 [C(2)=50%]



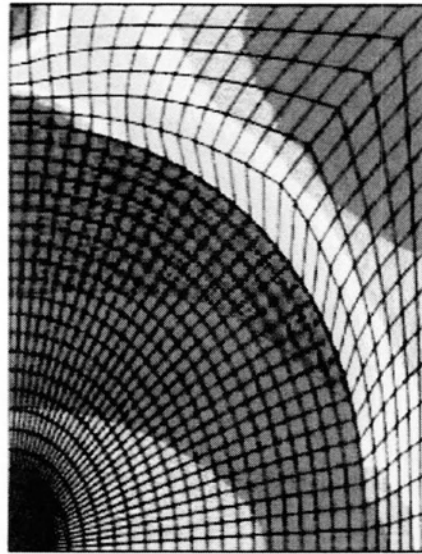
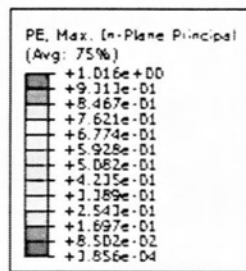
Σχήμα 4.20: Σύγκριση αποτελεσμάτων τάσης- Παραμόρφωσης για C(2)=50% στη 2^η περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2



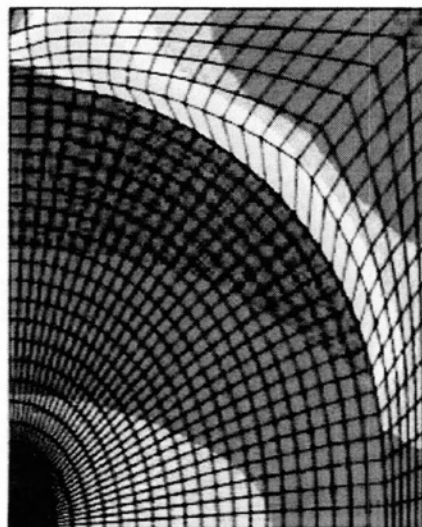
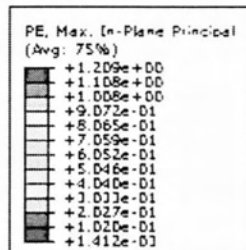
Σχήμα 4.21: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=10\%$ στη 2^{η} περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2



Σχήμα 4.22: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=20\%$ στη 2^{η} περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2



Σχήμα 4.23: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=40\%$ στη $2^{\text{η}}$ περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2



Σχήμα 4.24: Πλαστικές ζώνες στη παραμορφωμένη κατάσταση για $C(2)=50\%$ στη $2^{\text{η}}$ περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής 1 και 2

5. Σύνοψη – Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, σ' αυτή τη διπλωματική εργασία είδαμε τις διάφορες θεωρίες ομογενοποίησης που υπάρχουν για τη πρόβλεψη των μακροσκοπικών ιδιοτήτων ενός σύνθετου υλικού. Πιο συγκεκριμένα, δουλέψαμε με τη μέθοδο ομογενοποίησης του Ponte Castaneda, η οποία αποτελεί ότι πιο σύγχρονο υπάρχει αυτή τη στιγμή στο συγκεκριμένο τομέα, καθώς είναι η μόνη που μπορεί να δώσει αναλυτικά αποτελέσματα. Δουλέψαμε ιδιαίτερα στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε δυο τέλεια πλαστικές φάσεις, την οποία και θέλουμε να ελέγξουμε.

Έπειτα, χρησιμοποιώντας υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων συγκρίναμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη θεωρία ομογενοποίησης με τα αντίστοιχα από τους υπολογισμούς στο ABAQUS. Είδαμε ότι και για τις δύο περιπτώσεις που αντιμετωπίσαμε, τα αποτελέσματα συγκλίνουν αρκετά ικανοποιητικά και για τα τέσσερα μοντέλα. Πιο συγκεκριμένα, για τη περίπτωση που έχουμε όρια διαρροής των δύο φάσεων 1 και 1.3, όπου 1 βάζουμε τη μητρική φάση, τα αποτελέσματα σχεδόν ταυτίζονται. Ενώ για τη περίπτωση όπου έχουμε όρια διαρροής των δύο φάσεων 1 και 2, τα αποτελέσματα συγκλίνουν αρκετά ικανοποιητικά. Από τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος επαληθεύεται ικανοποιητικά σε όλες τις περιπτώσεις, και πιο συγκεκριμένα, στη περίπτωση όπου τα όρια διαρροής των δύο φάσεων δεν έχουν μεγάλη διαφορά μεταξύ τους, η μέθοδος φαίνεται να δίνει τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Προφανώς, από τη παραπάνω μελέτη προκύπτουν αρκετά αναπάντητα ερωτήματα και περιπτώσεις, τα οποία θα μπορούσαν να διερευνηθούν. Μια θα μπορούσε να είναι η περίπτωση όπου οι δύο φάσεις δεν είναι τέλεια πλαστικές, αλλά εμφανίζουν σκλήρυνση κατά τη παραμόρφωση. Είτε η περίπτωση όπου τα κλάσματα όγκου των φάσεων αλλάζουν κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης, λόγω κάποιου μετασχηματισμού των φάσεων, όπως μαρτενσιτικός μετασχηματισμός.

Τα παραπάνω και πολλά άλλα, θα μπορούσαν να αποτελέσουν το αντικείμενο μιας περαιτέρω εργασίας προς την τελική κατεύθυνση της μοντελοποίησης ενός πολυφασικού χάλυβα.

Βιβλιογραφία

- [1] ABAQUS, Analysis User's Manual, Version 6.10, © Dassault Systèmes, 2010.
- [2] Aravas, Danas, Ponte Castaneda, September 2008, "Paper in preparation"
- [3] Ioannis Christou Papatriantafillou, (June 2005), "TRIP steels: constitutive modeling and computational issues"
- [4] I. Papatriantafillou, M. Agoras, N. Aravas, G. Haidemenopoulos, (September 2005), "Constitutive modeling and finite element methods for TRIP steels"
- [5] P. M. Suquet, (1993), "Bounds and estimates for the overall properties of nonlinear composites"
- [6] E. H. Kaufman Jr., D. J. Leeming, J. D. Taylor, (1995) "An ODE-based approach to nonlinearly constrained minimax problems"
- [7] Danas, K., Idiart, M.I., Ponte Castañeda, P.,(2008), "A homogenization-based constitutive model for two-dimensional viscoplastic porous media"
- [8] Haidemenopoulos G.N., Katsamas A.I., Aravas N.,(2006), "Stability and constitutive modeling in multiphase TRIP steels"
- [9] Hughes T. J. R., The Finite Element Method, Dover Publications, 2000.
- [10] Suquet, P., Overall potentials and flow stresses of ideally plastic or power law materials, *J. Mech. Phys. Solids* **41** (1993) 981-1002.
- [11] Γρηγόρης Ν. Χαϊδεμενόπουλος, (2007), "Φυσική Μεταλλουργία"
- [12] Μ. Παπαδρακάκης, (2001), "Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων"
- [13] Νίκος Αράβας, (2008), "Σημειώσεις πλαστικότητας"

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Input file για την ανάλυση του προβλήματος στο ABAQUS

```
*HEADING
```

```
UnitCell
```

```
*PREPRINT,ECHO=YES,MODEL=YES
```

```
**
```

```
*****MESH*****
```

```
**
```

```
**
```

```
*NODE
```

```
1, 0.,0.
```

```
31,0.,0.
```

```
*NGEN,NSET=center
```

```
1,31,1
```

```
*NODE,SYSTEM=C
```

```
496,0.53,0.
```

```
466,0.53,90.
```

```
*NGEN, NSET=arc,LINE=C
```

```
466,496,1,1,-1
```

```
*NFILL,BIAS=1
```

```
center,arc,15,31
```

```
**
```

```
*NODE
```

```
900,0.,1.
915,1.,1.
930,1.,0.
**
*NGEN,NSET=square
900,915,1
915,930,1
**
*NFILL,NSET=rest
arc,square,14,31
*****elements*****
*ELEMENT,TYPE=CAX4H
1,1,33,32,2
*ELGEN,ELSET=ROW1
1,30,1,1,1,31,30
**
*ELEMENT,TYPE=CAX4H
31,32,33,64,63
*ELGEN,ELSET=RESTROWS
31,30,1,1,28,31,30
**
*****end mesh*****
**
*ELSET,ELSET=FASH1,GENERATE
```

1,450,1

*ELSET,ELSET=FASH2,GENERATE

451,870,1

**

*MPC

TIE,2,1

TIE,3,1

TIE,4,1

TIE,5,1

TIE,6,1

TIE,7,1

TIE,8,1

TIE,9,1

TIE,10,1

TIE,11,1

TIE,12,1

TIE,13,1

TIE,14,1

TIE,15,1

TIE,16,1

TIE,17,1

TIE,18,1

TIE,19,1

TIE,20,1

TIE,21,1

TIE,22,1

TIE,23,1

TIE,24,1

TIE,25,1

TIE,26,1

TIE,27,1

TIE,28,1

TIE,29,1

TIE,30,1

TIE,31,1

**

**

*****BOUNDARY CONDITIONS*****

**

*NSET,NSET=BOT,GENERATE

31,930,31

*NSET,NSET=LEFT,GENERATE

1,900,31

*NSET,NSET=TOP,GENERATE

900,915,1

*NSET,NSET=RIGHT,GENERATE

915,929,1

*BOUNDARY

BOT,2,2

LEFT,1,1

1,1,2

**

**

*NODE

1000,0.,1.5

**

**

*EQUATION

2

TOP,2,1.0,1000,2,-1.0

**

**

*EQUATION

2

RIGHT,1,1.0,930,1,-1.0

**

**

END OF BOUNDARY CONTITIONS AND CONSTRAINTS

```
**  
  
**  
  
*****MATERIAL DEFINITIONS*****  
  
**  
  
*SOLID SECTION,ELSET=FASH1,MATERIAL=ONE  
*SOLID SECTION,ELSET=FASH2,MATERIAL=TWO  
  
**  
  
*MATERIAL,NAME=ONE  
  
*ELASTIC  
1300.,0.  
  
*PLASTIC  
1.3,0.0  
  
*MATERIAL,NAME=TWO  
  
*ELASTIC  
1000.,0.  
  
*PLASTIC  
1.,0.0  
  
**  
  
**  
  
*****STEP*****  
  
**  
  
*STEP,INC=500,NLGEOM=YES  
  
*STATIC  
0.01,1.,,0.01
```

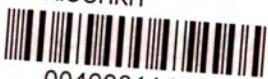
*BOUNDARY

1000,2,2,0.2

*END STEP



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000114154