



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ-ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

Καθολική Ευστάθεια Προσομοιώματος Ανισοσκελούς  
Τριγωνικής Αψίδας από Μη Γραμμικό Ελαστικό Υλικό

Παπαδήμας Βασίλειος

ΑΕΜ : 0807052

Επιβλέπων καθηγητής:

Σοφιανόπουλος Δημήτριος, Επίκουρος καθηγητής Π.Θ.

ΒΟΛΟΣ 2013



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 12044/1  
Ημερ. Εισ.: 17-12-2013  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2013  
ΠΑΠ

<b>Περιεχόμενα</b>	<b>σελίδα</b>
<b>Σκοπός και Αντικείμενο</b>	3
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγικά Στοιχεία</b>	4
1.1 Μη γραμμικά ελαστικά/υπερελαστικά υλικά και προσομοίωση με καταστατικούς νόμους	4
1.2 Λυγισμός τριαρθρωτών δικτυωτών τριγωνικών αψίδων	9
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μη γραμμική καθολική ευστάθεια διβάθμιου μοντέλου</b>	17
2.1 Γεωμετρία και χαρακτηριστικά του μοντέλου	17
2.2 Ανάλυση ευστάθειας με την ενεργειακή μέθοδο	18
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός</b>	27
3.1 Επιλογή παραμέτρων υλικού και γεωμετρίας μοντέλου και φόρτισης	27
3.2 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ1	29
3.3 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ2	32
3.4 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ3	34
3.5 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ4	36
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα</b>	39
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	40
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	41

## Σκοπός και Αντικείμενο

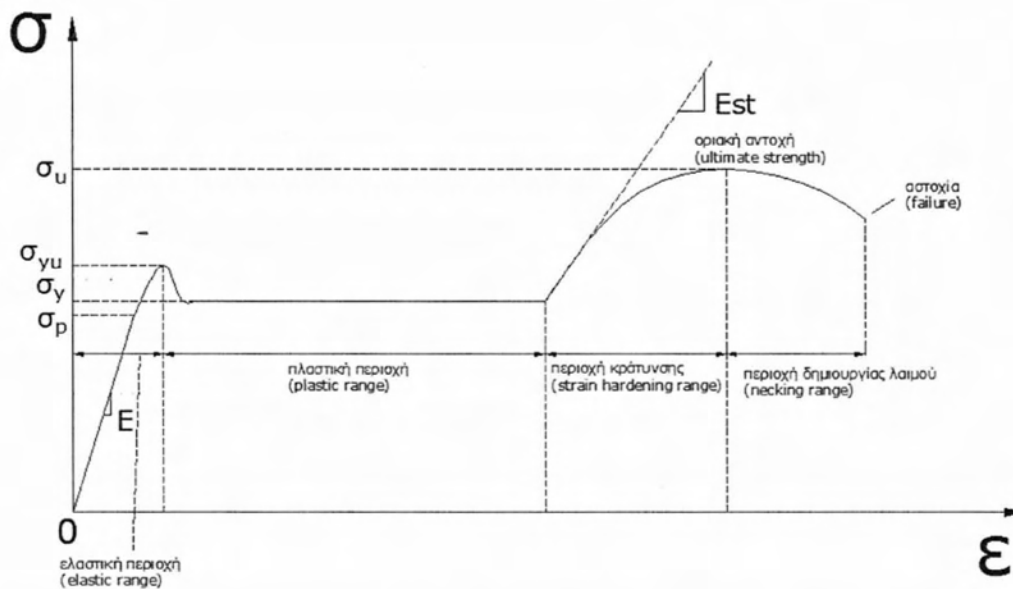
Η παρούσα Διπλωματική Εργασία παρουσιάζει κάποια εισαγωγικά αποτελέσματα τα οποία σχετίζονται με την καθολική ευστάθεια διβάθμιου προσομοιώματος ανισοσκελούς τριγωνικής αψίδας από μη γραμμικά ελαστικό υλικό με χρήση της ενεργειακής μεθόδου.

Απαρτίζεται από τέσσερα κεφάλαια, τη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε και παράρτημα. Πιο συγκεκριμένα στα κεφάλαια αυτά αναλύονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες σχετικά με τα μη γραμμικά ελαστικά / υπερελαστικά υλικά και τους καταστατικούς νόμους που τα αντιπροσωπεύουν καθώς και την συμπεριφορά τριαρθρωτής δικτυωτής τριγωνικής αψίδας σε λυγισμό. Στη συνέχεια αναλύεται η γεωμετρία, τα χαρακτηριστικά του μοντέλου που προσομοιώθηκε και η ενεργειακή μέθοδος με βάση την οποία μελετήθηκε. Ακολούθως παρουσιάζονται οι παράμετροι που λήφθηκαν υπόψη για το προσομοίωμα και τα αποτελέσματα για συνδυασμούς αυτών των παραμέτρων. Τέλος παραθέτονται κάποια συμπεράσματα με βάση τα αποτελέσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Στο παράρτημα ο κωδικας με βάση τον οποίο μελετήθηκε η ενεργειακή μέθοδος στο πρόγραμμα Mathematica 8.

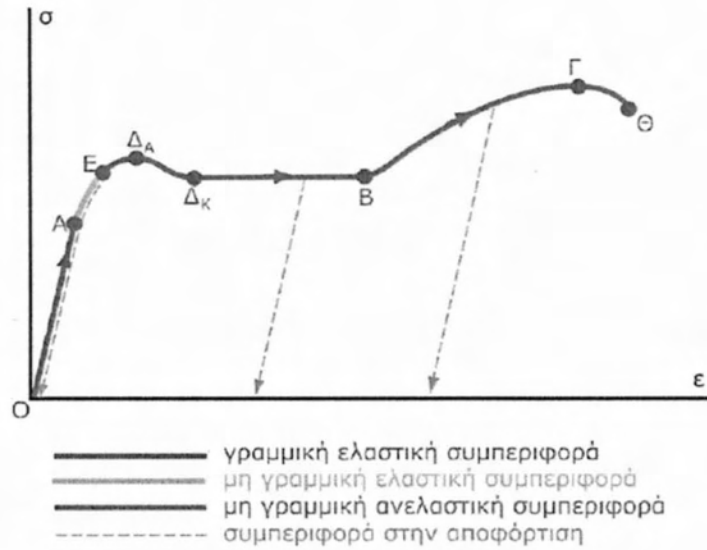
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγικά Στοιχεία

## 1.1 Μη γραμμικά ελαστικά/υπερελαστικά υλικά και προσομοίωση με καταστατικούς νόμους

Ως γνωστόν, κανένα από τα γνωστά όλκιμα δομικά υλικά (π.χ. χάλυβας ή κράματα αλουμινίου) δεν παρουσιάζουν γραμμικά ελαστική συμπεριφορά για όλο το εύρος των επιτρεπτών ανηγμένων παραμορφώσεων (τροπών - strains). Για τον χάλυβα, το τυπικό διάγραμμα  $\sigma - \epsilon$  του οποίου απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1, είναι προφανής η μη γραμμικότητα της συμπεριφοράς του, και η εντελώς διαφορετική απόκριση του ανάλογα με το μέγεθος των παραμορφώσεων. Έτσι, μπορεί να διακρίνει κανείς τις αντίστοιχες περιοχές στο Σχήμα 1.2, με τις οποίες είναι εν πολλοίς εξοικειωμένοι οι Μηχανικοί.

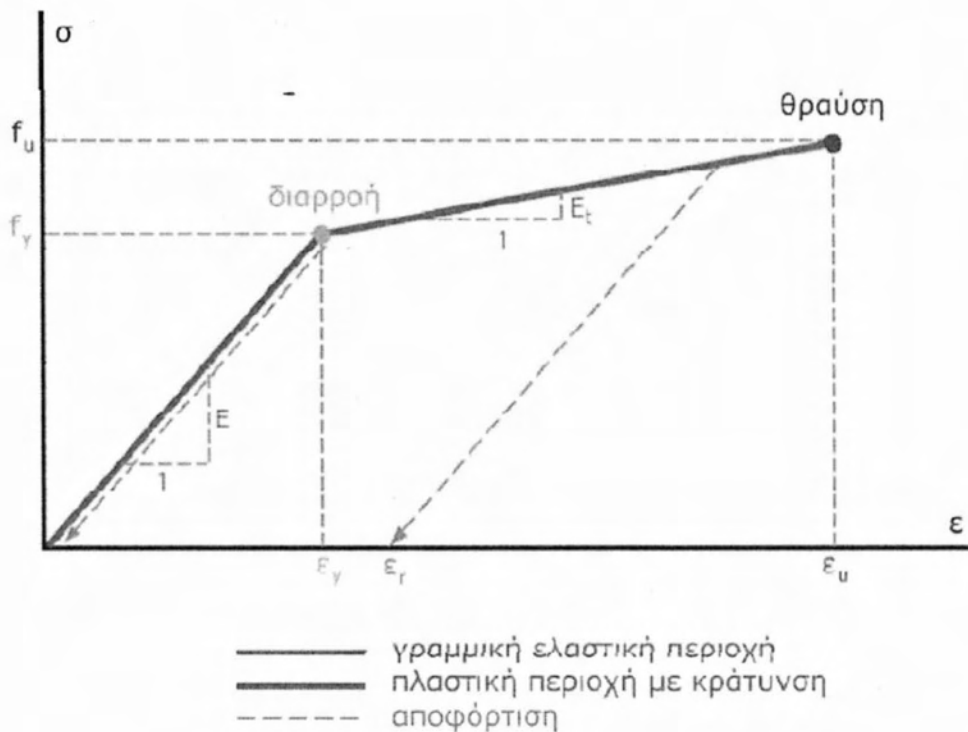


Σχήμα 1.1. Τυπικό Διάγραμμα τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων του δομικού χάλυβα

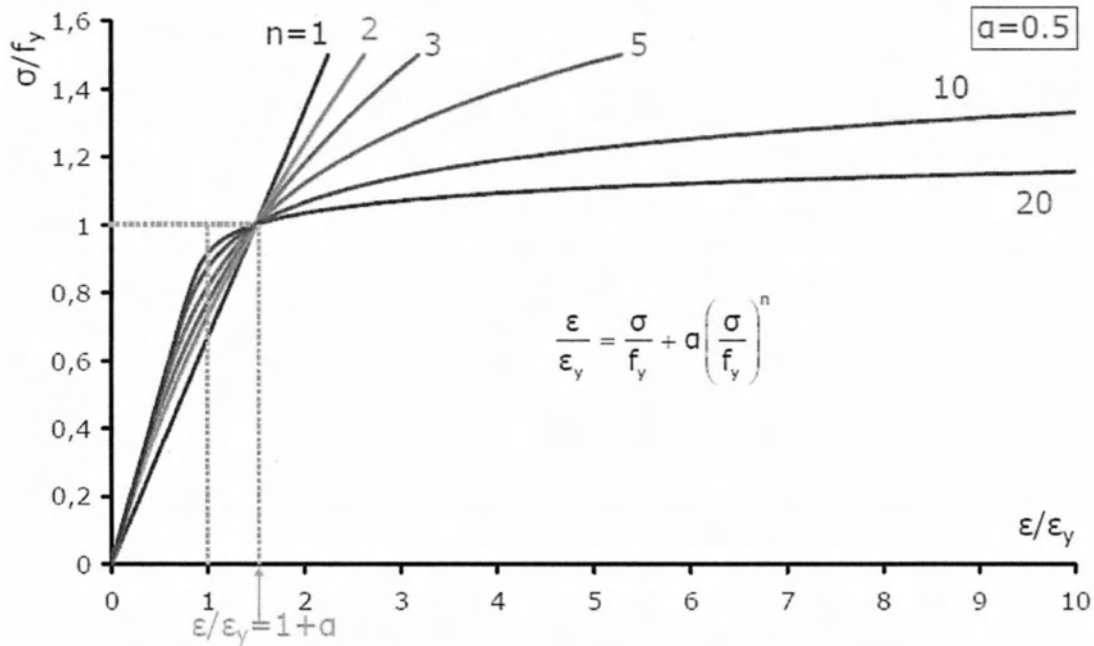


Σχήμα 1.2. Περιοχές απόκρισης δομικού χάλυβα

Η έντονη αυτή μη γραμμικότητα ανάγκασε την Επιστημονική κοινότητα, τόσο για πρακτικές εφαρμογές όσο και για προσανατολισμένη έρευνα, να προβεί στην προσομοίωση αυτής της συμπεριφοράς με διάφορα απλουστευμένα μοντέλα, όπως αυτό της γραμμικά ελαστικής – γραμμικά κρατυνόμενης, που φαίνεται στο Σχήμα 1.3 αλλά και το πιο ακριβές μοντέλο των Ramberg – Osgood, που δίδεται στο Σχήμα 1.4.

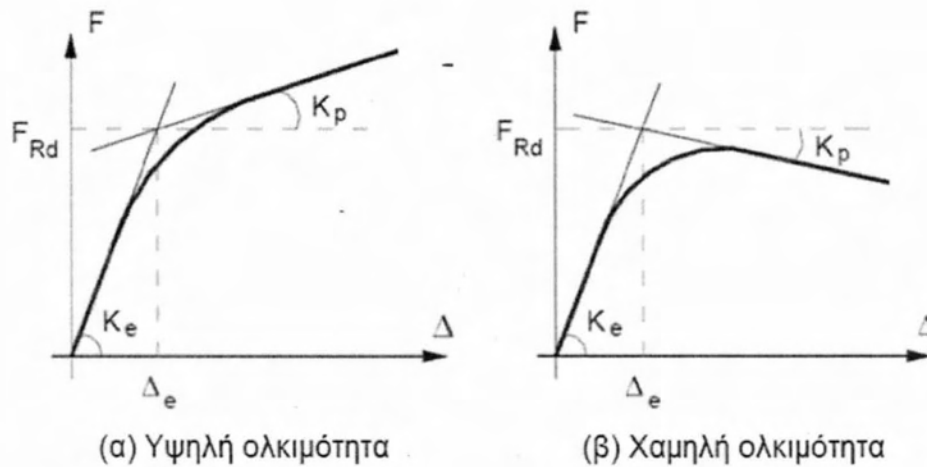


Σχήμα 1.3. Γραμμικά ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο μοντέλο χάλυβα



Σχήμα 1.4. Μοντέλο χάλυβα των Ramberg - Osgood

Επιπρόσθετα δε, σε ορισμένα δομικά μέρη κατασκευών από χάλυβα, όπως για παράδειγμα οι κόμβοι πλαισίων με μετωπικές πλάκες, έχουν παρατηρηθεί ιδιάζουσες μη γραμμικές αποκρίσεις σε σχέση με την ολκιμότητα αυτών, οι καταστατικοί νόμοι των οποίων παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5. Καταστατικοί νόμοι για συστατικά κόμβων με μετωπικές πλάκες

Όλα τα μοντέλα αυτά – χωρίς σκοπό ιδιαίτερης περαιτέρω αναφοράς – έχουν προκύψει είτε από καθαρά θεωρητική επεξεργασία είτε από πειράματα (ή συνδυασμό τους) και αρκετά εξ αυτών έχουν ενσωματωθεί σε ευρέως αποδεκτά

προγράμματα ανάλυσης κατασκευών με πεπερασμένα στοιχεία αλλά και πιο εξειδικευμένα πακέτα λογισμικού.

Πέραν όμως από τα «κλασσικά» δομικά υλικά, η τάση για προσομοίωση με κατάλληλους καταστατικούς νόμους νέων υλικών έχει ευρύτατα αναπτυχθεί την τελευταία 50ετία. Πρόκειται για τα καλούμενα υπερελαστικά υλικά, τα οποία αποκρίνονται ελαστικά, ακόμα και όταν υπόκεινται σε πολύ μεγάλες παραμορφώσεις. Οι σχετικοί καταστατικοί νόμοι λαμβάνουν υπόψη τόσο τη μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού, όσο και τις μεγάλες αλλαγές σχήματος, και ως επί το πλείστον προσομοιάζουν την ελαστομερούς τύπου (rubbery) απόκριση πολυμερών καθώς πλαστικών ενισχυμένων με ίνες ελαστομερών.

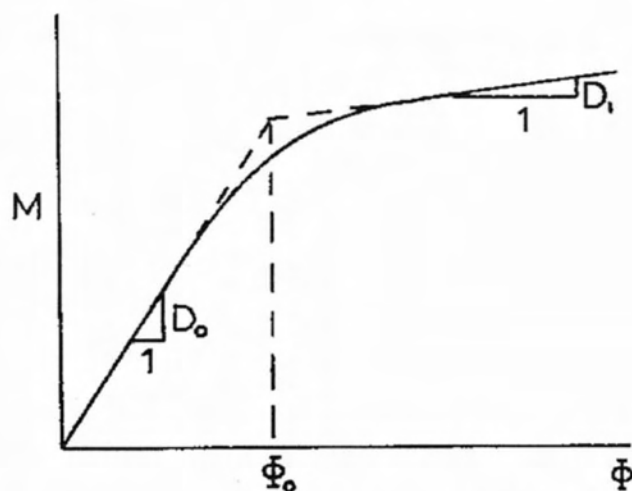
Γενικά υφίστανται δύο (2) βασικοί τύποι μοντέλων υπερελαστικής συμπεριφοράς, τα ασυμπιεστά και τα συμπιεστά. Στα ασυμπιεστά μοντέλα κατατάσσονται αυτά των Mooney – Rivlin (για υλικά ελαστικών αυτοκινήτων, με τροπές έως 200%), των Arruda – Boyce (κατάλληλο για συνθετικά ελαστομερή – π.χ. νεοπρένιο – με τροπές έως 300%) και του Ogden(με τροπές έως 700%). Αντίστοιχα, τα σπουδαιότερα συμπιεστά μοντέλα είναι των Blatz – Ko (το οποίο έχει αποκλειστική εφαρμογή σε ελαστομερή αφρών πολυουρεθάνης) και το Hyperfoam (που μπορεί να προσομοιάσει πολύ συμπιεστά υλικά όπως π.χ. σπογγώδη και αφρώδη πλαστικά γεμίσματος).

Πλην όμως, η προσομοίωση μέσω μοντέλων *ισότροπων υλικών* με *ομαλή μετάβαση* από την *ελαστική στην πλαστική περιοχή* έχουν αναφερθεί ήδη από τις αρχές της προηγούμενης εκατονταετίας, χαρακτηριστικότερο των οποίων είναι αυτό που προτάθηκε από τον Prager, υπό μορφή σχέσης ροπής – καμπυλότητας ( $M - \varphi$ ) ως εξής:

$$M(\Phi) = (D_0 - D_1) \Phi_0 \tanh(\Phi / \Phi_0) + D_1 \Phi \quad (1.1)$$

που γραφικά περιγράφεται στο Σχήμα 1.6.



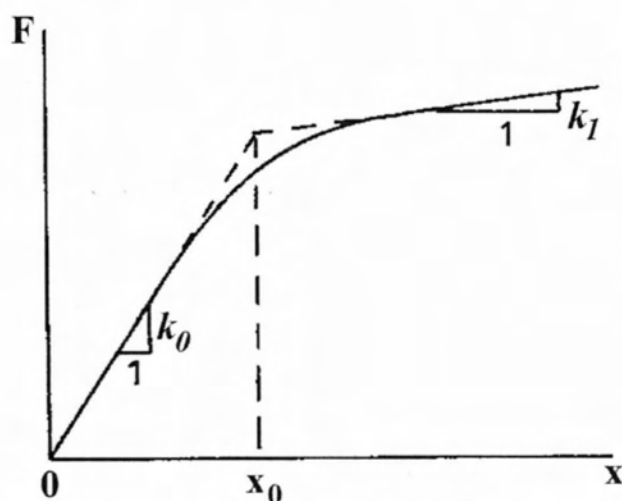


Σχήμα 1.6. Σχέση ροπής – καμπυλότητας (από Wang, 1996)

Κατ' αναλογία, η παραπάνω προσομοίωση μπορεί να επεκταθεί και σε καταστατικό νόμο, ο οποίος να προβλέπει τη μη γραμμική απόκριση μιας πρισματικής ράβδου σε εφελκυσμό – θλίψη, υπό μορφή της αναπτυσσόμενης αντίστοιχης εσωτερικής δύναμης  $F$  σε σχέση με την αλλαγή του μήκους της ράβδου  $x$ , δηλαδή

$$F(x) = (k_0 - k_1)x_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) + k_1x \quad (1.2)$$

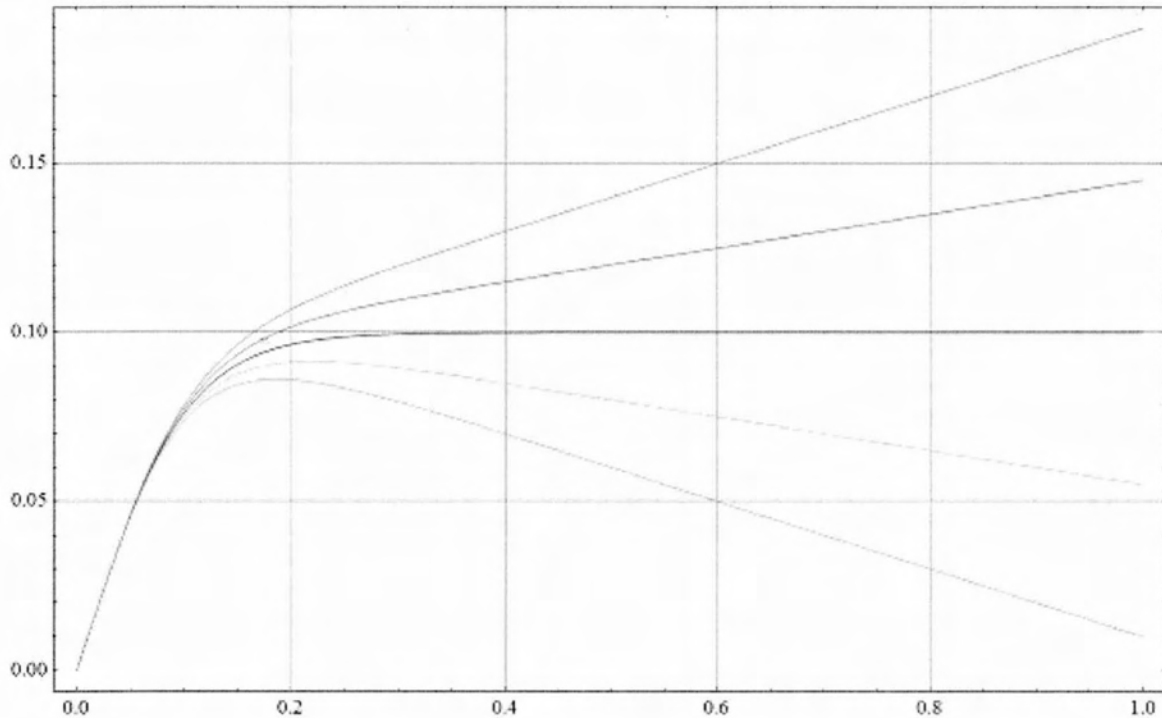
που αναλογικά έχει την μορφή του Σχήματος 1.7.



Σχήμα 1.7. Σχέση εσωτερικής δύναμης – αλλαγής μήκους μη γραμμικά ελαστικού υλικού

Η συγκεκριμένη συνάρτηση, που δίδεται στην εξίσωση (1.2), με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της  $k_0$ ,  $k_1$  και  $x_0$  μπορεί να προσομοιάσει μεγάλη

γκάμα γραμμικά ελαστικών και υπερελαστικών υλικών (με κράτυνση ή χαλάρωση) αλλά και το κλασσικό ελαστικό – ιδεατά πλαστικό μοντέλο μεταλλικών υλικών (όπου  $k_I=0$ ), όπως εποπτικά φαίνεται στο Σχήμα 1.8.



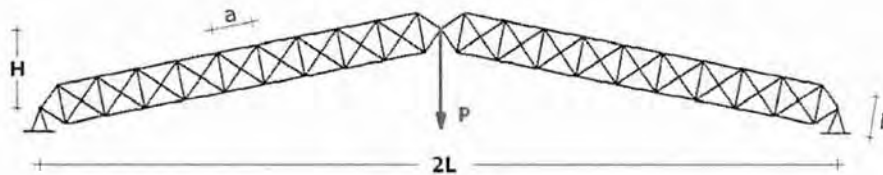
Σχήμα 1.8. Προσομοίωση διαφόρων μη γραμμικά ελαστικών υλικών μέσω της εξίσωσης (1.2)

## 1.2 Λυγισμός τριαρθρωτών δικτυωτών τριγωνικών αψίδων

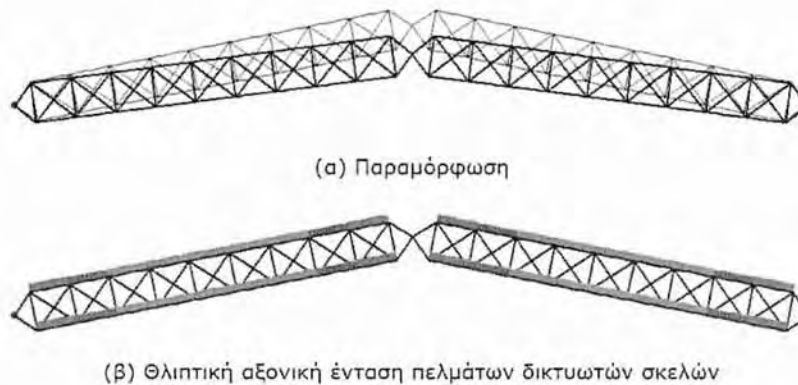
Οι τριαρθρωτές τριγωνικές χαλύβδινες αψίδες αποτελούν απλό αλλά αντιπροσωπευτικό παράδειγμα κατασκευών τύπου δικτυωτού θόλου που εφαρμόζονται συχνά για την στέγαση χώρων μεγάλου ανοίγματος. Ο λυγισμός τους υπό ομαλά μεταβαλλόμενο φορτίο στη στέψη (κορυφή) αποτελεί το αντικείμενο αυτής της παραγράφου, υπό την προϋπόθεση ελαστικού – ιδεατά πλαστικού υλικού. Θεωρούμε συνεπώς την αψίδα του Σχήματος 1.9, σκέλη της οποίας αποτελούνται από επιμέρους δικτυώματα, αποτελούμενα από πέλματα με ράβδους μήκους  $a$  και διατομής με εμβαδόν  $A$  και ροπή αδράνειας  $I$ , τοποθετημένες σε απόσταση  $b$  μεταξύ τους, και συνδεόμενες με ορθοστάτες και διαγώνιες. Η αψίδα φορτίζεται με κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο στον μεσαίο κόμβο της, οπότε παραμορφώνεται με κατακόρυφη μετατόπιση του μεσαίου κόμβου (Σχήμα 1.10α) και στα μέλη αναπτύσσεται κυρίαρχη θλιπτική ένταση, ιδιαίτερα στα πέλματα των δικτυωμάτων

των δύο σκελών, μέσω της οποίας το φορτίο μεταφέρεται στις ακραίες στηρίξεις. Η ένταση αυτή είναι σχεδόν σταθερή κατά μήκος των πελμάτων των δικτυωτών σκελών (Σχήμα 1.10β) και η τιμή της μπορεί να προκύψει κατά προσέγγιση από ισορροπία του μεσαίου κόμβου στην απαραμόρφωτη κατάσταση ως:

$$N = \frac{P \sqrt{L^2 + H^2}}{4H} \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.9. Τριγωνική δικτυωτή αψίδα



Σχήμα 1.10. Απόκριση δικτυωτής αψίδας υπό κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο

Ένας πιθανός μηχανισμός αστοχίας είναι η αστοχία υλικού μίας ή περισσότερων ράβδων λόγω της αναπτυσσόμενης θλιπτικής έντασης, που θα συμβεί όταν η θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στις περισσότερες καταπονούμενες ράβδους υπερβεί το όριο διαρροής  $f_y$  του υλικού. Συνεπώς μία εκτίμηση της τιμής του φορτίου που θα προκαλέσει αστοχία αυτού του τύπου είναι:

$$P = 4Af_y \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}} \quad (1.4)$$

Η προσέγγιση αυτή θα είναι καλή για δύσκαμπτες αψίδες, οι οποίες θα αστοχήσουν σε διαρροή πριν αναπτύξουν έντονες παραμορφώσεις, επομένως η σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι μικρή και το σφάλμα που εισάγεται διατυπώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία είναι μικρό.

Λόγω της αναπτυσσόμενης θλίψης, άλλη δυνατή μορφή αστοχίας είναι να συμβεί λυγισμός Euler μεμονωμένων ράβδων της αψίδας (Σχήμα 1.11). Αυτός ο μηχανισμός αστοχίας θα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι κρίσιμος, αν οι ράβδοι που χρησιμοποιούνται για τα πέλματα των δικτυωτών σκελών έχουν σχετικά μικρή ροπή αδράνειας και επομένως μεγάλη λυγηρότητα. Αυτός ο τύπος λυγισμού είναι **τοπικός**.

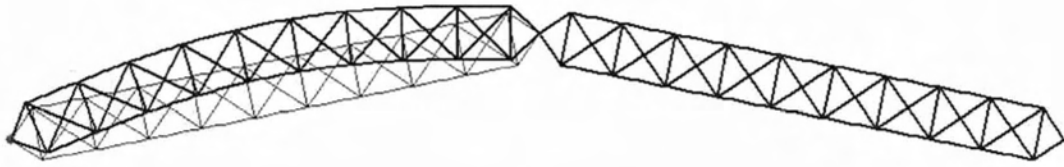


Σχήμα 1.11. Αστοχία δικτυωτής αψίδας μέσω ελαστικού λυγισμού (Euler) μεμονωμένων ράβδων

Μία εκτίμηση της τιμής του φορτίου που θα προκαλέσει αστοχία αυτού του τύπου μπορεί να γίνει εξισώνοντας το φορτίο Euler μίας μεμονωμένης ράβδου πέλματος, με μήκος  $a$  και ασθενή ροπή αδράνειας  $I$ , με την αξονική ένταση που έχει υπολογιστεί προσεγγιστικά από τη σχέση (1.3):

$$P = 4\pi^2 \frac{EI}{a^2} \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}} \quad (1.5)$$

Μία τρίτη δυνατή περίπτωση είναι να συμβεί λυγισμός Euler του ενός ή και των δύο σκελών της αψίδας (Σχήμα 1.12). Αυτός ο μηχανισμός αστοχίας ενδέχεται να επικρατήσει αν για τα πέλματα των δικτυωτών σκελών χρησιμοποιούνται ισχυρές διατομές σε σχετικά μικρή απόσταση μεταξύ τους, οπότε η συνολική λυγηρότητα του δικτυωτού σκέλους είναι μεγάλη. Το φορτίο που θα προκαλέσει αστοχία αυτού του τύπου μπορεί να εκτιμηθεί εξισώνοντας το φορτίο Euler ολόκληρου του δικτυωτού σκέλους, με μήκος ίσο με  $(L^2 + H^2)^{1/2}$  και ροπή αδράνειας προσεγγιστικά υπολογιζόμενη μόνον από τους όρους Steiner, επομένως ίση με  $Ab^2$ , με την αξονική ένταση που υπολογίζεται προσεγγιστικά από τη σχέση (1.3):



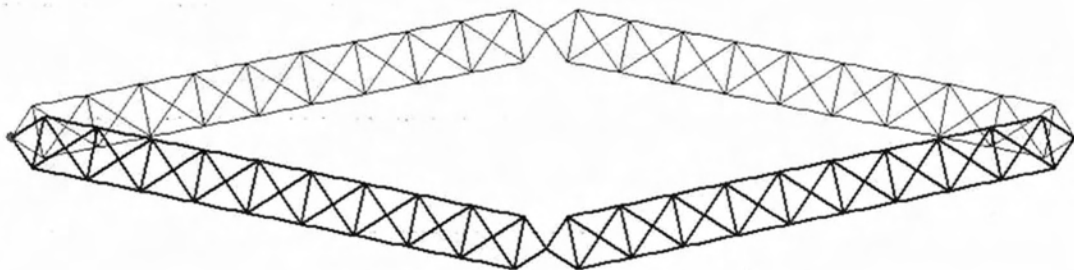
Σχήμα 1.12. Αστοχία δικτυωτής αψίδας μέσω λυγισμού Euler ενός σκέλους

$$P = 4\pi^2 EA \frac{b^2 H}{(L^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.6)$$

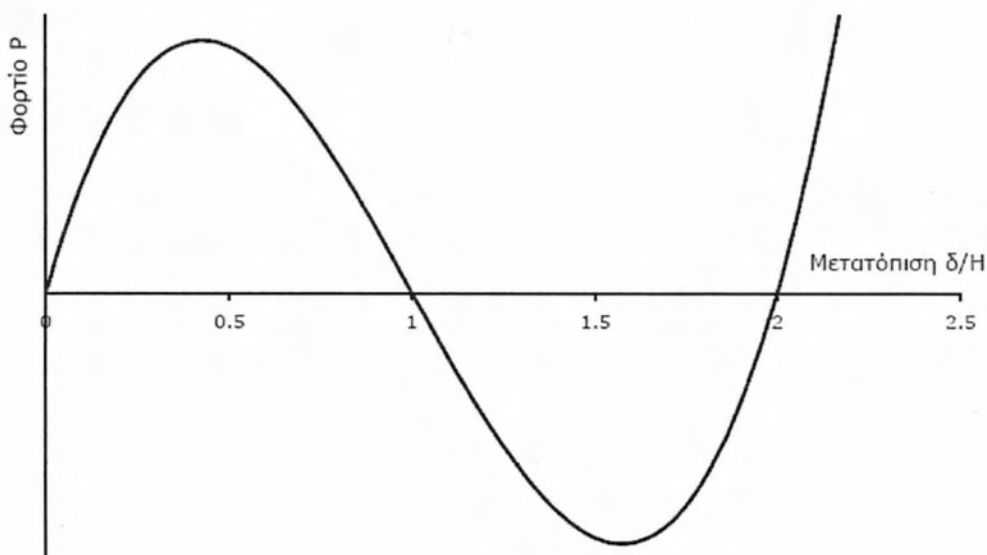
Τέλος, σε αψίδες με μικρό λόγο ύψους  $H$  προς άνοιγμα  $2L$  μπορεί να συμβεί ακαριαίος λυγισμός ολόκληρης της αψίδας (Σχήμα 1.13). Ο δρόμος ισορροπίας που περιγράφει αυτή τη συμπεριφορά και συσχετίζει το φορτίο  $P$  με την κατακόρυφη μετατόπιση  $\delta$  του μεσαίου κόμβου, μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση (1.7) που έπεται.

$$\frac{P}{2EA} = 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{\left(\frac{L}{H}\right)^2 + \left(1 - \frac{\delta}{H}\right)^2}{\left(\frac{L}{H}\right)^2 + 1}} \right) \frac{1 - \frac{\delta}{H}}{\sqrt{\frac{L^2}{H^2} + \left(1 - \frac{\delta}{H}\right)^2}} \quad (1.7)$$

Η γραφική παράσταση αυτού του δρόμου ισορροπίας, κλασικό παράδειγμα **ακαριαίου καθολικού ελαστικού λυγισμού** απεικονίζεται στο Σχήμα 1.14.



Σχήμα 1.13. Αστοχία δικτυωτής αψίδας μέσω ακαριαίου λυγισμού

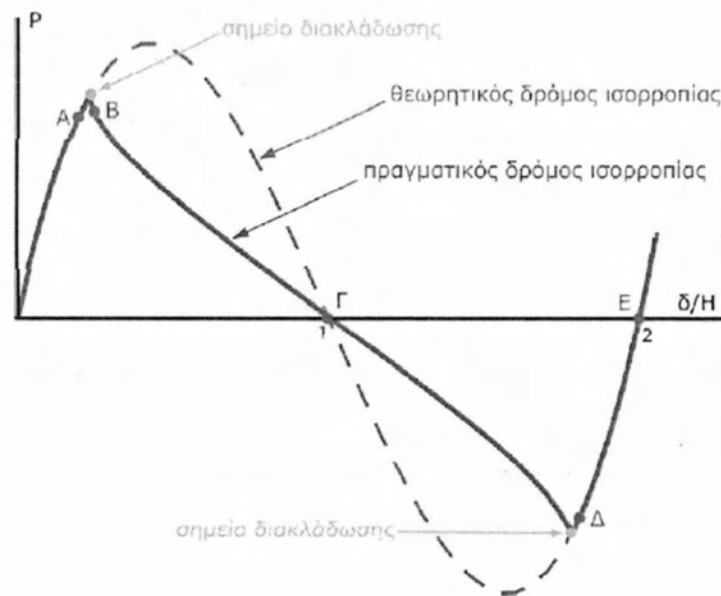


Σχήμα 1.14. Δρόμος ισορροπίας δικτυωτής αψίδας

Διαπιστώθηκαν επομένως τέσσερις διαφορετικοί τρόποι αστοχίας, γνωστοί και ως «μηχανισμοί αστοχίας» για την τριγωνική, δικτυωτή αψίδα: (i) καθολικός ακαριαίος λυγισμός (snap-through) ολόκληρης της αψίδας (Σχήμα 1.13), (ii) λυγισμός τύπου Euler ενός σκέλους της αψίδας (Σχήμα 1.12), (iii) λυγισμός τύπου Euler μεμονωμένων ράβδων ενός σκέλους της αψίδας (Σχήμα 1.11) και (iv) αστοχία υλικού. Στην πραγματικότητα όμως, είναι πολύ πιθανόν να υπάρξει αλληλεπίδραση δύο ή περισσότερων από αυτούς τους μηχανισμούς αστοχίας. Καθώς το εξωτερικό φορτίο αυξάνεται σταδιακά, η αψίδα ακολουθεί τον δρόμο ισορροπίας του Σχήματος 1.14. Παράλληλα, αυξάνονται οι θλιπτικές εντάσεις των μελών. Αυτό ενδέχεται να έχει ως αποτέλεσμα, κάπου κατά μήκος του δρόμου ισορροπίας η θλιπτική ένταση ενός ή περισσότερων ράβδων να αποκτήσει τέτοια τιμή, που να ενεργοποιηθεί κάποιος από τους άλλους μηχανισμούς αστοχίας, οπότε ο φορέας θα εγκαταλείψει τον δρόμο ισορροπίας του Σχήματος 1.14, και θα ισορροπήσει σε άλλες καταστάσεις παραμόρφωσης και έντασης.

Αυτό απεικονίζεται χαρακτηριστικά στο Σχήμα 1.15, όπου καταγράφεται ένας πραγματικός δρόμος ισορροπίας μίας τέτοιας αψίδας με αλληλεπίδραση μηχανισμών αστοχίας (με συνεχή κόκκινη γραμμή) και συγκρίνεται με τον αντίστοιχο θεωρητικό δρόμο ισορροπίας χωρίς αλληλεπίδραση μηχανισμών αστοχίας (με διακεκομμένη μπλε γραμμή). Είναι ευκολότερο να κατανοήσει κάποιος

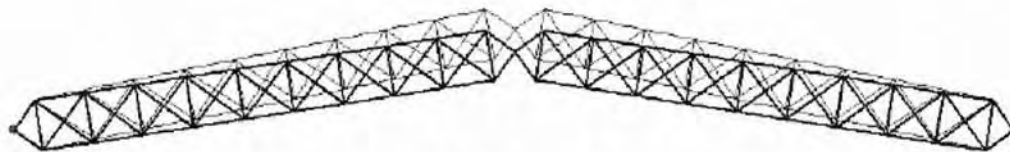
αυτόν τον δρόμο ισορροπίας, συσχετίζοντάς τον με την παραμόρφωση σε χαρακτηριστικά σημεία του, που δίνεται στο Σχήμα 1.16.



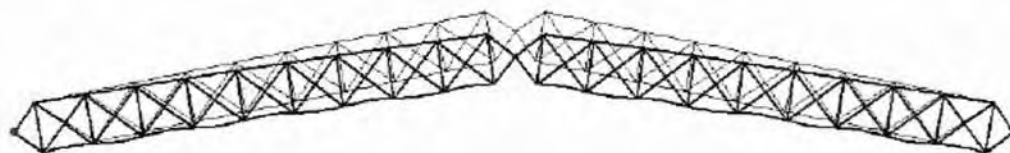
Σχήμα 1.15. Δρόμος ισορροπίας δικτυωτής αψίδας με αλληλεπίδραση μηχανισμών αστοχίας

Ο δρόμος ισορροπίας του Σχήματος 1.15 αντιστοιχεί σε επιβολή κατακόρυφης μετατόπισης του μεσαίου κόμβου, με παραδοχή γραμμικά ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού. Αρχικά λοιπόν ο φορέας ακολουθεί τον δρόμο ισορροπίας του Σχήματος 1.14, και μάλιστα πιστά, κάτι που επιβεβαιώνει την ακρίβεια που επιτυγχάνεται με χρήση της προσεγγιστικής σχέσης (1.7). Η παραμόρφωση χαρακτηρίζεται από απλή βράχυνση των μελών (Σχήμα 1.15α), ενώ παράλληλα τα πέλματα των δικτυωτών σκελών αναπτύσσουν συνεχώς αυξανόμενη θλιπτική ένταση. Για κάποια όμως τιμή της επιβαλλόμενης μετατόπισης η παραμόρφωση αλλάζει και παρατηρείται λυγισμός τύπου Euler των ράβδων στα κάτω πέλματα των δικτυωτών σκελών (Σχήμα 1.15β). Παράλληλα ο φορέας εγκαταλείπει τον θεωρητικό δρόμο ισορροπίας και αρχίζει να ακολουθεί έναν δευτερεύοντα, καθοδικό δρόμο ισορροπίας. Το σημείο τομής των δύο δρόμων ισορροπίας λέγεται σημείο διακλάδωσης. Λόγω της συνεχώς αυξανόμενης βράχυνσης η θλιπτική ένταση γίνεται εντονότερη, με αποτέλεσμα να εμφανιστεί και καθολική καμπύλωση των σκελών, δηλαδή λυγισμός τους τύπου Euler (Σχήμα 1.15γ) που εκδηλώνεται περισσότερο καθώς ο φορέας περνά από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τις στηρίξεις. Για περαιτέρω αύξηση της επιβαλλόμενης μετατόπισης η βράχυνση μειώνεται, με

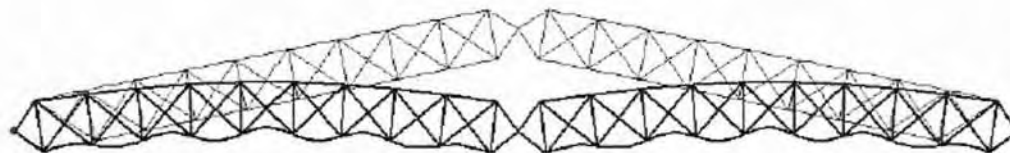
αποτέλεσμα να εξαφανιστούν αρχικά ο καθολικός λυγισμός των σκελών και στη συνέχεια και ο τοπικός λυγισμός των ράβδων (Σχήμα 1.15δ), που άλλωστε ήταν ελαστικοί, επομένως δεν συνδέονταν με παραμένουσες παραμορφώσεις. Τότε ο φορέας, μέσω ενός νέου σημείου διακλάδωσης, επιστρέφει στον αρχικό, θεωρητικό δρόμο ισορροπίας, τον οποίο και ακολουθεί μέχρις ότου φθάσει στην κατοπτρική θέση από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση του (Σχήμα 1.15ε).



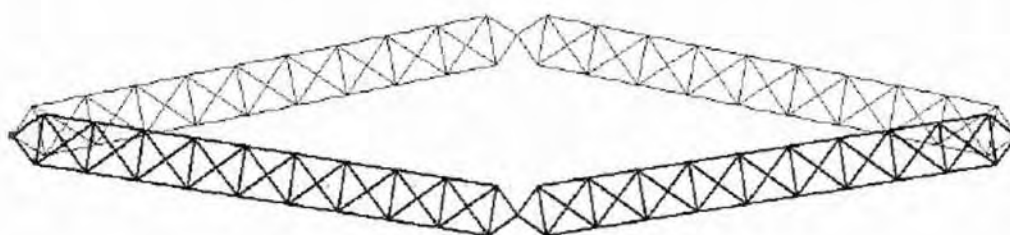
(α) Σημείο Α



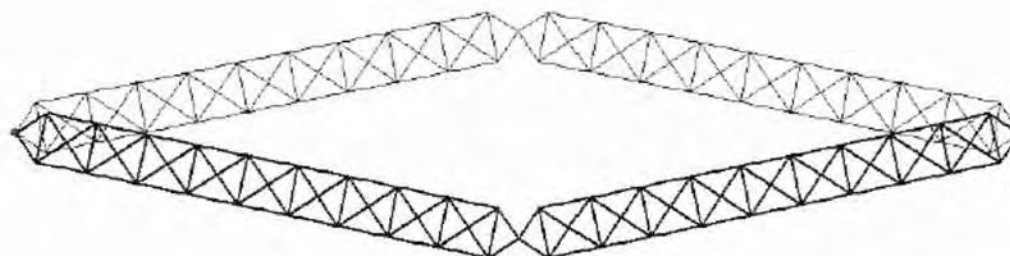
(β) Σημείο Β



(γ) Σημείο Γ



(δ) Σημείο Δ



(ε) Σημείο Ε

Σχήμα 1.15. Απαραμόρφωτη (με μπλε χρώμα) και παραμορφωμένη (με μαύρο χρώμα) γεωμετρία δικτυωτής αψίδας σε χαρακτηριστικές θέσεις



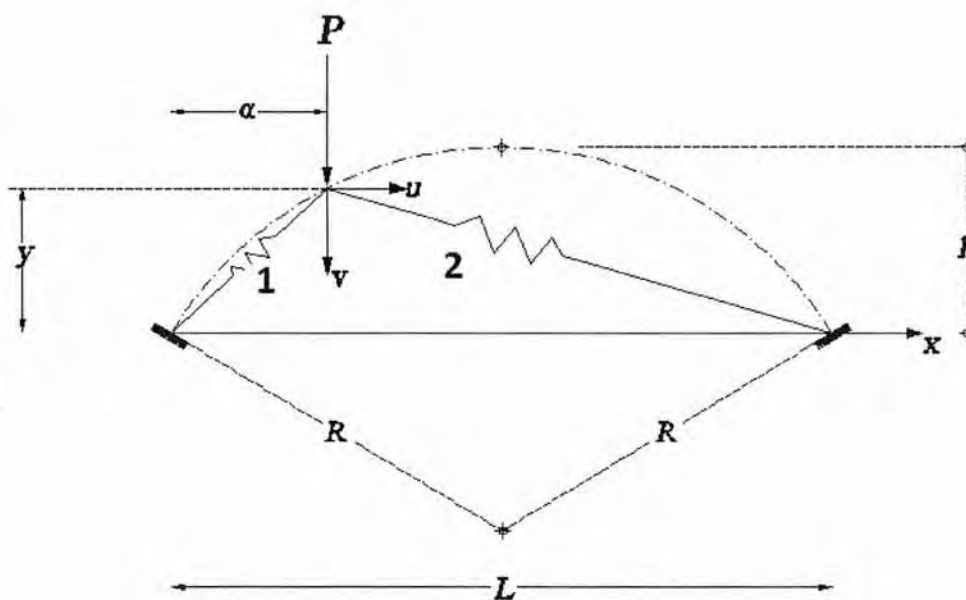
Παρατηρείται δηλαδή αλληλεπίδραση των τριών πιθανών μορφών λυγισμού της αψίδας, του καθολικού ακαριαίου λυγισμού ολόκληρης της αψίδας, του λυγισμού τύπου Euler ενός σκέλους της, και του λυγισμού τύπου Euler μεμονωμένων ράβδων. Στη γενικότερη περίπτωση θα εκδηλωθεί και μη γραμμικότητα υλικού, δηλαδή θα υπάρχει συνδυασμένη αστοχία από όλους τους δυνατούς μηχανισμούς. Το παράδειγμα αυτό είναι χαρακτηριστικό του προβλήματος της αλληλεπίδρασης των μηχανισμών αστοχίας, που εκδηλώνεται εντονότερα με την παρουσία αρχικών ατελειών ή την ασυμμετρία της αψίδας (με την έννοια ανίσων σκελών) και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη για τον ασφαλή σχεδιασμό κατασκευών που είναι επιρρεπείς σε τέτοια φαινόμενα.

Πλην όμως, δεν υφίσταται κανένας άμεσος τρόπος για την ποιοτική ανάλυση ευστάθειας μίας τέτοιας κατασκευής, αν το υλικό της είναι μη γραμμικά ελαστικό. Αν δε αποκλειστεί η περίπτωση τοπικού λυγισμού, η οποία δεν βρίσκεται εντός των σκοπών της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, κανείς πρέπει να προβεί σε προσεγγιστική προσομοίωση του φορέα - διακριτοποίηση του μέσω μηχανικού μοντέλου. Τούτο, που αποτελεί τον κατ' εξοχήν σκοπό της παρούσας, παρουσιάζεται εκτενώς στο επόμενο Κεφάλαιο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μη γραμμική καθολική ευστάθεια διβάθμιου μοντέλου

### 2.1 Γεωμετρία και χαρακτηριστικά του μοντέλου

Θεωρούμε το εκ δύο βαθμών ελευθερίας μηχανικό μοντέλο του Σχήματος 2.1, που αποτελείται από δύο ελατήρια διαφορετικού μήκους εν γένει, τα οποία συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους και στο έδαφος και ακολουθούν τον καταστατικό νόμο της σχέσης 1.2. Για λόγους καθαρά γεωμετρικούς υποθέτουμε ότι η κορυφή είναι εγγεγραμμένη σε τόξο κύκλου. Εκεί δρα κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  και αναζητούμε την προ- και μεταλυσισμική μη γραμμική απόκριση του προσομοιώματος. Προφανώς ως γενικευμένες συντεταγμένες επιλέγονται η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση του σημείου εφαρμογής του φορτίου,  $v$  και  $u$  αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1. Διβάθμιο μηχανικό μοντέλο ασύμμετρης τριγωνικής αψίδας

Λόγω της γεωμετρίας του μοντέλου, τα αρχικά μήκη των ελατηρίων,  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα, στην τετριμμένη θέση ισορροπίας  $u=v=0$  (πριν την επιβολή του φορτίου, θέση που τα ελατήρια θεωρούνται χωρίς ένταση) ισούνται με:

$$L_1 = \sqrt{y^2 + a^2} \quad (2.1)$$

$$L_2 = \sqrt{y^2 + (L - a)^2} \quad (2.2)$$

όπου

$$y = \frac{-\left(\frac{L^2}{4h} - h\right) + \sqrt{\left(\frac{L^2}{4h} - h\right)^2 - 4(a^2 - aL)}}{2} \quad (2.3)$$

Στις παραπάνω σχέσεις  $a$  είναι η οριζόντια απόσταση στην οποία ασκείται το φορτίο,  $h$  το ύψος του τόξου και  $L$  το συνολικό άνοιγμα του τόξου.

Όμοια, αν μετά την επιβολή του φορτίου η κορυφή μετατοπιστεί κατά  $u$ ,  $v$ , τα μήκη των ελατηρίων θα δίδονται από:

$$L'_1 = \sqrt{(y-v)^2 + (a+u)^2} \quad (2.4)$$

$$L'_2 = \sqrt{(y-v)^2 + (L-a-u)^2} \quad (2.5)$$

και κατά συνέπεια η αλλαγή του μήκους τους θα είναι

$$\delta_1 = L'_1 - L_1 \quad (2.6)$$

$$\delta_2 = L'_2 - L_2 \quad (2.7)$$

## 2.2 Ανάλυση ευστάθειας με την ενεργειακή μέθοδο

Αν  $V$  είναι το συνολικό δυναμικό του συστήματος, αυτό θα ισούται με  $V = U + \Omega$ , όπου  $U$  η ενέργεια παραμόρφωσης των ελατηρίων και  $\Omega$  το έργο του φορτίου. Για κάθε ελατήριο, η ενέργεια παραμόρφωσης θα ισούται με

$$U_i = \int_0^{\delta_i} F(\delta_i) d\delta'_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

με την  $F$  να δίνεται από τη σχέση (1.2), οπότε το ως άνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται συμβολικά και βρίσκεται ίσο με:

$$U_i = x_0^2 (k_0 - k_1) \log \left( \cosh \left( \frac{\delta_i}{x_0} \right) \right) + \frac{k_1 \delta_i^2}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

ενώ προφανώς ισχύει ότι

$$\Omega = -Pv \quad (2.10)$$

Σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία ευστάθειας οι δρόμοι ισορροπίας του συστήματος θα προκύψουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας, που δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \quad (2.11\alpha, \beta)$$

Λόγω της εξαιρετικής μαθηματικής δυσκολίας υπολογισμού των εξισώσεων ισορροπίας, αυτός πραγματοποιήθηκε συμβολικά, με τα εξής αποτελέσματα:

$$\frac{\partial V}{\partial u}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X0(a+u)(K0-K1)\tanh\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a+u)^2}-\sqrt{a^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h\right)^2}}{X0}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a+u)^2}} \\
&+ \frac{(K1(a+u)\left(\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a+u)^2}-\sqrt{a^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h\right)^2}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a+u)^2}\right)} \\
&+ \frac{X0(K0-K1)(a-L+u)\tanh\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a-L+u)^2}-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h\right)^2+(a-L)^2}}{X0}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a-L+u)^2}} \\
&+ \frac{K1(a-L+u)\left(\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a-L+u)^2}-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h\right)^2+(a-L)^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{4a(L-a)}+\left(h-\frac{L^2}{4h}\right)^2-\frac{L^2}{4h}+h-2v\right)^2+(a-L+u)^2}} = 0
\end{aligned}$$

(2.12a)

$$\frac{\partial V}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
& X0(K0 - K1) \left( -\sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} + \frac{L^2}{4h} - h + 2v \right) \tanh \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a+u)^2} - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h \right)^2}}{X0} \right) \\
= & \frac{2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a+u)^2}}{K1 \left( -\sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} + \frac{L^2}{4h} - h + 2v \right) \left( \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a+u)^2} - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h \right)^2} \right)} \\
+ & \frac{2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a+u)^2}}{X0(K0 - K1) \left( -\sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} + \frac{L^2}{4h} - h + 2v \right) \tanh \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a-L+u)^2} - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h \right)^2 + (a-L)^2}}{X0} \right)} \\
- 2P + & \frac{2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a-L+u)^2}}{K1 \left( -\sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} + \frac{L^2}{4h} - h + 2v \right) \left( \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a-L+u)^2} - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h \right)^2 + (a-L)^2} \right)} \\
+ & \frac{2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{4a(L-a) + \left(h - \frac{L^2}{4h}\right)^2} - \frac{L^2}{4h} + h - 2v \right)^2 + (a-L+u)^2}}{= 0}
\end{aligned}$$

(2.12β)

Εισάγοντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$\bar{u} = \frac{u}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{a} = \frac{a}{L}, \bar{h} = \frac{h}{L} \quad (2.13\alpha)$$

$$\bar{k} = \frac{k_0}{k_1}, \lambda = \frac{P}{k_0 L}, \bar{x}_0 = \frac{x_0}{L} \quad (2.13\beta)$$

οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις ισορροπίας δίδονται στις επόμενες σελίδες, προϊόντα επίσης συμβολικών υπολογισμών.

$$\begin{aligned}
& (\bar{a} + \bar{u}) \left( \sqrt{2\bar{k}} \sqrt{\frac{(1+8\bar{h}^2(-1+4\bar{a}+2\bar{h}^2) + \bar{h}(-1+4\bar{h}^2)) \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2}} \right) \\
\hline
& \sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})) + (1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(-1+2\bar{h}^2+4(\bar{a}+2\bar{u}\bar{a}+\bar{u}^2)-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}} \\
& + \frac{(\bar{a} + \bar{u}) \left( \sqrt{2\bar{k}} \sqrt{\frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})) + (1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(-1+2\bar{h}^2+4(\bar{a}+2\bar{u}\bar{a}+\bar{u}^2)-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}} \right)}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})) + (1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(-1+2\bar{h}^2+4(\bar{a}+2\bar{u}\bar{a}+\bar{u}^2)-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}}} \\
& 8(-1+\bar{k})\bar{x}_0 \tanh\left( \frac{-\sqrt{\bar{a}^2 + \left(-\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h} + \sqrt{-4(-1+\bar{a})\bar{a} + \left(-\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h}\right)^2}\right)^2} + \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}} \right)}{\bar{x}_0} \\
\hline
& \sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})) + (1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(-1+2\bar{h}^2+4(\bar{a}+2\bar{u}\bar{a}+\bar{u}^2)-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}} \\
& 8(-1+\bar{k})\bar{x}_0 \tanh\left( \frac{-\sqrt{(1-\bar{a})^2 + \left(-\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h} + \sqrt{-4(-1+\bar{a})\bar{a} + \left(-\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h}\right)^2}\right)^2} + \sqrt{(1-\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}} \right)}{\bar{x}_0} \\
\hline
& \sqrt{2} \sqrt{\frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}}{\bar{h}^2} (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})) + (1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(3+2\bar{h}^2+4(-2+\bar{u})\bar{u} + \bar{a}(-4+8\bar{u})-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1+\bar{a}+\bar{u})\sqrt{2\bar{k}}\sqrt{\frac{\bar{h}\sqrt{(1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2}(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))+(1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(3+2\bar{h}^2+4(-2+\bar{u})\bar{u}+\bar{a}(-4+8\bar{u})-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\bar{h}\sqrt{(1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2}(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))+(1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(3+2\bar{h}^2+4(-2+\bar{u})\bar{u}+\bar{a}(-4+8\bar{u})-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}}} \\
& + \frac{(-1+\bar{a}+\bar{u})\sqrt{2\bar{k}}\sqrt{\frac{1+8\bar{h}^2(3-4\bar{a}+2\bar{h}^2)+\bar{h}(-1+4\bar{h}^2)}{\bar{h}^2}}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\bar{h}\sqrt{(1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2}(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))+(1+8\bar{h}(\bar{v}+\bar{h}(3+2\bar{h}^2+4(-2+\bar{u})\bar{u}+\bar{a}(-4+8\bar{u})-4\bar{h}\bar{v}+4\bar{v}^2)))}{\bar{h}^2}}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{8\bar{h}\sqrt{(\bar{a}+\bar{u})^2 + \frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}{64\bar{h}^2}}} + \\
& \frac{(-1+\bar{k})\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))}{\bar{x}_0} \tanh\left(\frac{-\sqrt{\bar{a}^2 + \left(\frac{-1}{4\bar{h}} + \bar{h} + \sqrt{-4(-1+\bar{a})\bar{a} + \left(\frac{-1}{4\bar{h}} + \bar{h}\right)^2}\right)^2} + \sqrt{(\bar{a}+\bar{u})^2 + \frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}{64\bar{h}^2}}}{\bar{x}_0}\right)}{8\bar{h}\sqrt{(\bar{a}+\bar{u})^2 + \frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}{64\bar{h}^2}}}
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& \bar{k} \frac{\left( \sqrt{\bar{a}^2 + \left( -\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h} + \sqrt{-4(-1+\bar{a})\bar{a} + \left( -\frac{1}{4\bar{h}} + \bar{h} \right)^2} \right)^2} - \sqrt{8\bar{h} \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}}{64\bar{h}^2} \right)}{8\bar{h} \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}} \quad * \\
& + \frac{8\bar{h} \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}}{8\bar{h} \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}} \\
& - \frac{\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))}{8\bar{h} \sqrt{(\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}} \\
& + \frac{\lambda}{8\bar{h} \sqrt{(-1+\bar{a} + \bar{u})^2 + \frac{(\bar{h} \sqrt{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2 + 16\bar{h}^4)}{\bar{h}^2} + (-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v})))^2}}{64\bar{h}^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1+\bar{k})\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0 \tanh\left(\frac{-\sqrt{(1-\bar{a})^2+\left(\frac{1}{4\bar{h}}+\bar{h}+\sqrt{\frac{-4(-1+\bar{a})\bar{a}+\left(\frac{1}{4\bar{h}}+\bar{h}\right)^2}}{4}}\right)^2+\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}{\bar{x}_0}\right)}{8\bar{h}\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}} + \\
& \frac{\bar{k}\left(\sqrt{(1-\bar{a})^2+\left(\frac{1}{4\bar{h}}+\bar{h}+\sqrt{\frac{-4(-1+\bar{a})\bar{a}+\left(\frac{1}{4\bar{h}}+\bar{h}\right)^2}}{4}}\right)^2}-\sqrt{8\bar{h}\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}\right)}{8\bar{h}\sqrt{(\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}} * \\
& \frac{8\bar{h}\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}}{\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0}} = 0 \\
& \frac{8\bar{h}\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}}{8\bar{h}\sqrt{(-1+\bar{a}+\bar{u})^2+\frac{(\bar{h}\sqrt{\frac{1-8(1+8(-1+\bar{a})\bar{a})\bar{h}^2+16\bar{h}^4}{\bar{h}^2}}+(-1+4\bar{h}(\bar{h}-2\bar{v}))\bar{x}_0)^2}{64\bar{h}^2}}}}
\end{aligned}$$

Η ευστάθεια των μη κρίσιμων σημείων ισορροπίας υπολογίζεται με βάση το κριτήριο της δεύτερης μεταβολής, ενώ τα κρίσιμα σημεία και η ευστάθεια τους βρίσκονται με ταυτόχρονο μηδενισμό της ορίζουσας ευστάθειας και κριτήρια μεταβολών ανωτέρων τάξεων κατά περίπτωση. Η εν λόγω ορίζουσα (Hessian) ισούται κατά τα γνωστά με:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

και αδιαστατοποιείται με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως, αλλά για λόγους οικονομίας της ύλης δεν παρουσιάζεται στο πλήρες κείμενο της εργασίας.

Σύμφωνα με όλα τα ανωτέρω δυνάμεθα να επιλύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις ισορροπίας για οποιονδήποτε συνδυασμό των υπεισερχομένων παραμέτρων υλικού και γεωμετρίας του μοντέλου. Η περίπτωση όπου  $k_j=0$ , που αντιστοιχεί στο κλασσικό προσομοίωμα απλού ακαριαίου λυγισμού του von Mises, είναι ειδική αλλά παρ' όλα ταύτα μπορεί να αναλυθεί με βάση την προηγηθείσα επεξεργασία.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός

### 3.1 Επιλογή παραμέτρων υλικού και γεωμετρίας μοντέλου και φόρτισης

Σε ό,τι ακολουθεί και λόγω του γεγονότος ότι πλήρης παραμετρική ανάλυση δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσας, λόγω τεράστιου όγκου απαιτούμενων υπολογισμών, επιλέγονται δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις υλικού σε συνδυασμό με δύο χαρακτηριστικές θέσεις του φορτίου και της γεωμετρίας του προσομοιώματος.

Πιο συγκεκριμένα, η γεωμετρία φόρτισης - μοντέλου χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες δύο καταστάσεις, που συντομογραφικά θα αναφέρονται ως **Γ1** και **Γ2**.

$$\mathbf{\Gamma 1} \quad : \quad \bar{h} = 0.20 \quad \bar{a} = 0.20$$

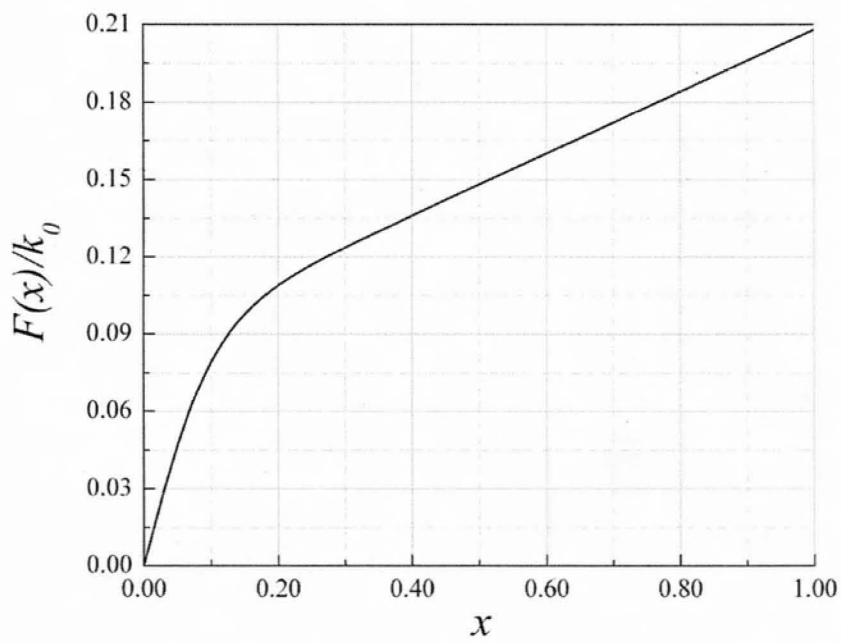
$$\mathbf{\Gamma 2} \quad : \quad \bar{h} = 0.60 \quad \bar{a} = 0.35$$

Για το υλικό των ελατηρίων έγινε η παρακάτω επιλογή, η οποία με την ίδια λογική συντομογραφείται ως **Υ1** και **Υ2**.

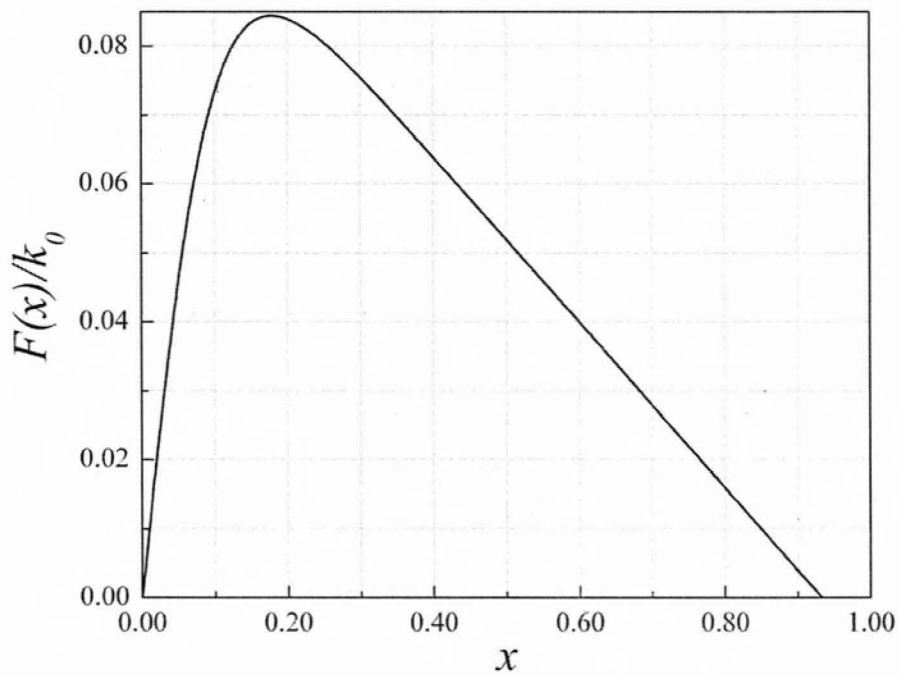
$$\mathbf{Y1} \quad : \quad \bar{k} = 0.12 \quad \bar{x}_0 = 0.1$$

$$\mathbf{Y2} \quad : \quad \bar{k} = -0.12 \quad \bar{x}_0 = 0.05$$

Η γραφική παράσταση του καταστατικού νόμου των υλικών αυτών παρατίθεται στα Σχήματα 3.1 και 3.2 απ' όπου είναι ευδιάκριτο ότι το **Υ1** αποτελεί καθαρή περίπτωση υπερελαστικού υλικού ενώ το **Υ2** είναι μη γραμμικά ελαστικό με χαλάρωση.



Σχήμα 3.1. Καταστατικός νόμος υλικού Y1



Σχήμα 3.2. Καταστατικός νόμος υλικού Y2

Κατά συνέπεια προκύπτουν οι συνδυασμοί:

$$\Sigma 1 : Y1 + \Gamma 1$$

$$\Sigma 2 : Y2 + \Gamma 1$$

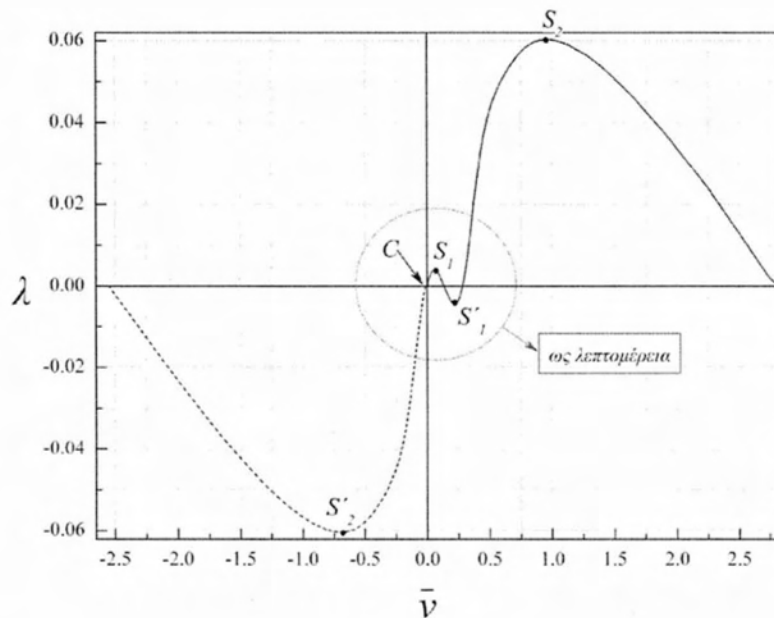
$$\Sigma 3 : Y1 + \Gamma 2$$

$$\Sigma 4 : Y2 + \Gamma 2$$

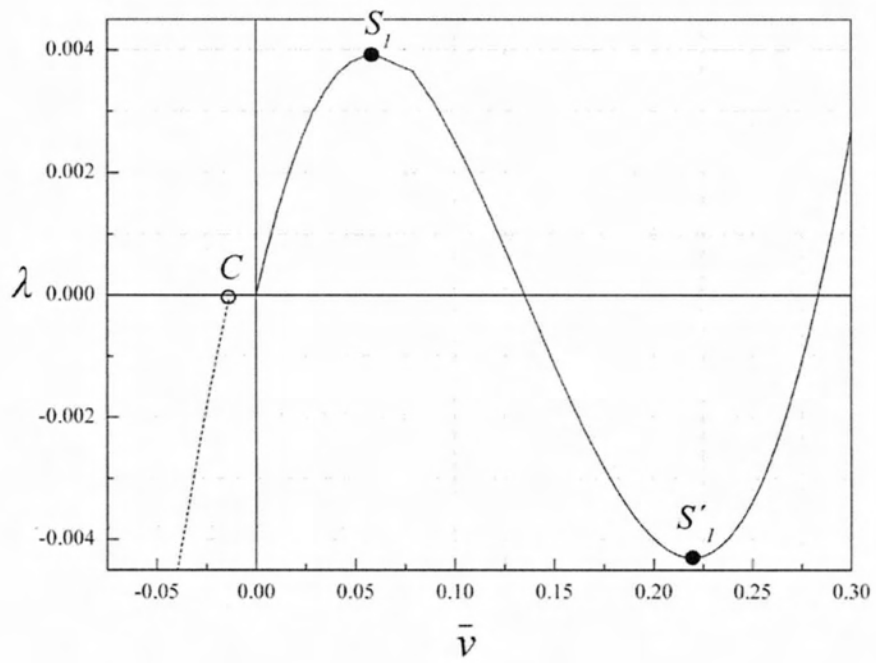
απ τους οποίους θα προκύψουν τα αριθμητικά αποτελέσματα.

### 3.2 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ1

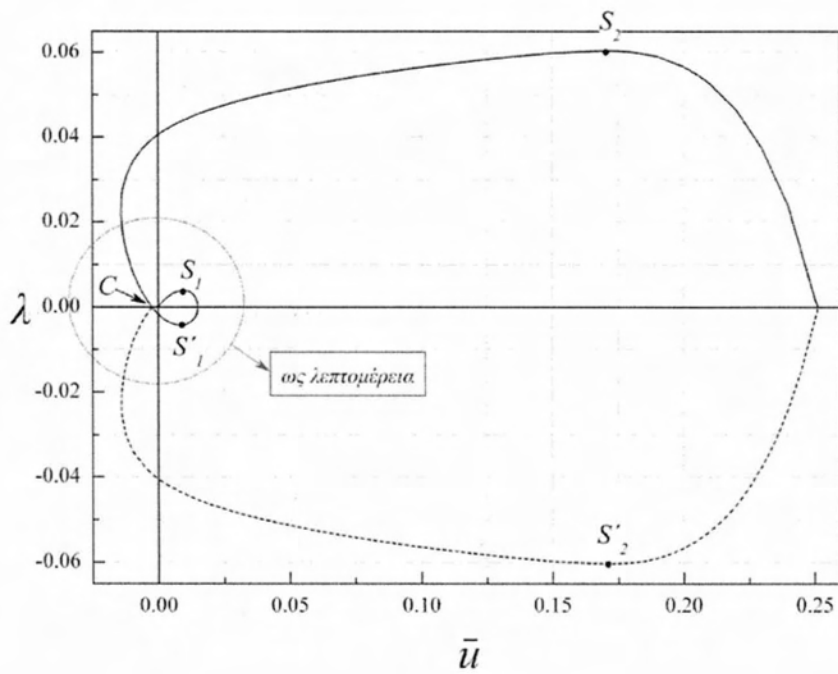
Παρουσιάζονται γραφικά οι δρόμοι ισορροπίας του συστήματος για τον συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων χωρίς καταγραφή της ευστάθειας των διαφόρων κλάδων, η οποία θα αναφερθεί αναλυτικά κατά τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων.



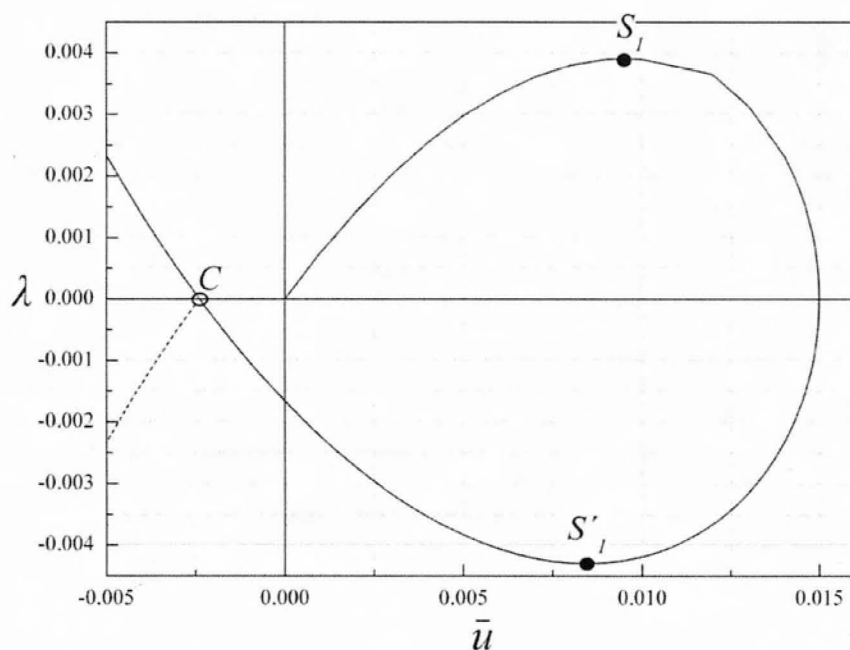
Σχήμα 3.3. Δρόμος ισορροπίας της κατακόρυφης μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ1



Σχήμα 3.4. Λεπτομέρεια του Σχήματος 3.3



Σχήμα 3.5. Δρόμος ισορροπίας της οριζόντιας μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ1



Σχήμα 3.6. Λεπτομέρεια του Σχήματος 3.5

Παρατηρούμε ότι υφίσταται ένας κύριος δρόμος ισορροπίας με τρία οριακά σημεία ( $S_1$ ,  $S'_1$  και  $S_2$ ) και ένας δευτερεύων που διακλαδίζεται από το ασύμμετρο σημείο  $C$  και διαθέτει με τη σειρά του ένα οριακό σημείο  $S'_2$ . Ο δρόμος αυτός που παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή αποτελεί προϊόν μετάθεσης μέρους του κύριου δρόμου ο οποίος τελικά καταλήγει στον κύριο δρόμο για σχετικά μεγάλες μετατοπίσεις. Τα χαρακτηριστικά φορτίου - μετατοπίσεων των παραπάνω κρίσιμων σημείων δίδονται στον Πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας του συνδυασμού Σ1

Κρίσιμο Σημείο	Κατακόρυφη Μετατόπιση	Οριζόντια Μετατόπιση	Φορτίο
$S_1$	0.0579891	0.00948797	0.00391515
$S'_1$	0.219092	0.00850474	-0.00430107
$S_2$	0.961617	0.171	0.0603474
$S'_2$	-0.691579	0.171	-0.0603474
$C$	-0.0138353	-0.0025	0

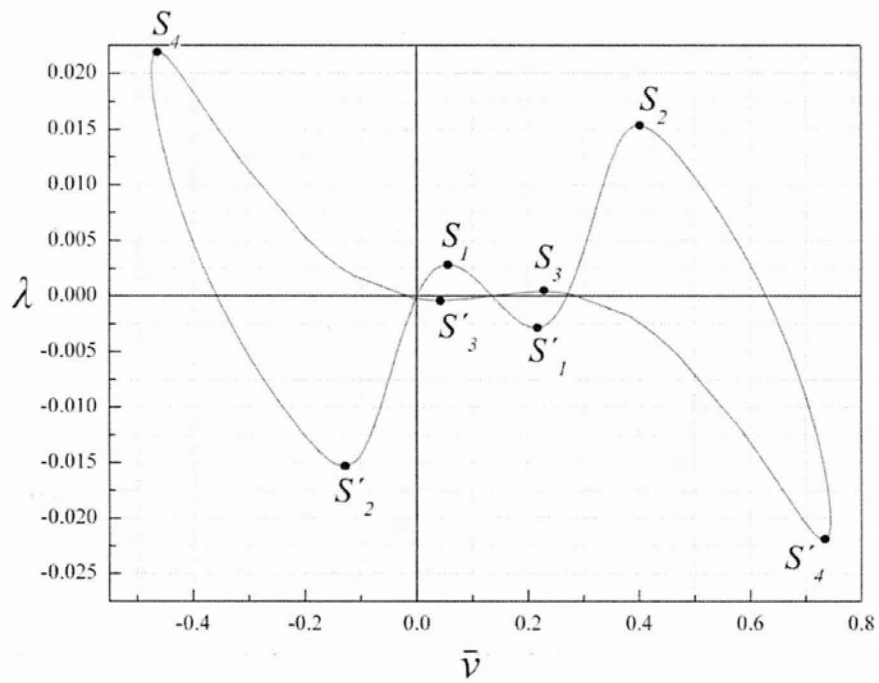


Από πλευράς ευστάθειας ο κύριος δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής στους κλάδους  $0-S_1$  και  $S'_1-S_2$  και ασταθής στους υπόλοιπους, ενώ ο δευτερεύων ευσταθής στον κλάδο  $C-S'_2$  και ασταθής περαιτέρω. Εξ ορισμού τα οριακά σημεία είναι ασταθή ενώ το διακλαδικό είναι ευσταθές.

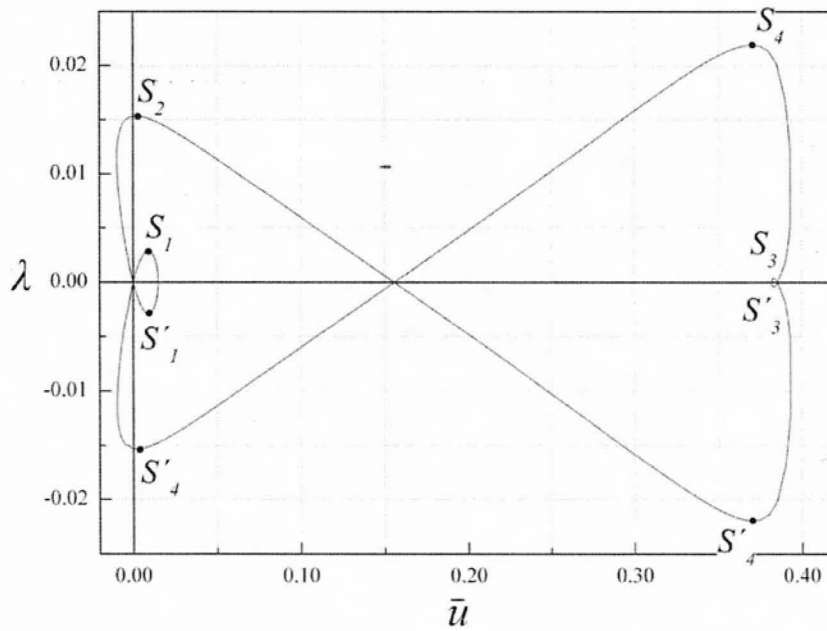
Η κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζει διπλό ακαριαίο λυγισμό του κυρίου δρόμου προς θετικά πρόσημα αυτής ενώ η οριζόντια ανάστροφο απλό ακαριαίο λυγισμό. Το φαινόμενο της διακλάδωσης με άλμα δεν έχει ποτέ παρατηρηθεί σε περιπτώσεις ελαστικού λυγισμού παρόμοιων διβάθμιων προσομοιωμάτων. Εικάζεται ότι προέρχεται από μαθηματική ιδιαιτερότητα των εξισώσεων ισορροπίας λόγω της μορφής του καταστατικού νόμου του υλικού.

### **3.3 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ2**

Στην περίπτωση αυτή οι δρόμοι ισορροπίας φαίνονται γραφικά στα Σχήματα 3.7 και 3.8 για την κατακόρυφη και οριζόντια μετακίνηση αντίστοιχα, απ' όπου αποκαλύπτεται κλειστός βρόγχος πολλαπλών ακαριαίων λυγισμών συμμετρίας ως προς σημείο για την κατακόρυφη (σημείο μηδενισμού του φορτίου για πρώτη φορά μετά την τετριμμένη θέση ισορροπίας) και ως προς τον άξονα των τετμημένων για την οριζόντια. Εμφανίζονται οκτώ οριακά σημεία, τα οποία διαχωρίζουν από πλευράς ευστάθειας τον δρόμο κατά τα γνωστά (οι ανιόντες κλάδοι ευσταθείς και οι κατιόντες ασταθείς). Τα χαρακτηριστικά των κρίσιμων σημείων περιέχονται στον Πίνακα 3.2.



Σχήμα 3.7. Δρόμος ισορροπίας της κατακόρυφης μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ2



Σχήμα 3.8. Δρόμος ισορροπίας της οριζόντιας μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ2

Πίνακας 3.2. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας του συνδυασμού Σ2

Κρίσιμο Σημείο	Κατακόρυφη Μετατόπιση	Οριζόντια Μετατόπιση	Φορτίο
$S_1$	0.0561495	0.00919479	0.00286822
$S'_1$	0.213888	0.0019479	-0.00286822
$S_2$	0.399629	0.00206545	0.0153428
$S'_2$	-0.129591	0.00206545	-0.0153428
$S_3$	0.227014	0.383175	0.000394503
$S'_3$	0.0430244	0.383175	0.000394503
$S_4$	-0.461665	0.3704	0.0219257
$S'_4$	0.731703	0.3704	-0.0219257

Τα ευρήματα αυτά διαφέρουν κατά πολύ των αντιστοιχών εκείνων της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας με γραμμικά ελατήρια και καταδεικνύουν (όπως και στον προηγούμενο συνδυασμό αλλά πολύ πιο έντονα) την προεξάρχουσα επιρροή της μη γραμμικότητας του υλικού που υιοθετήθηκε εδώ.

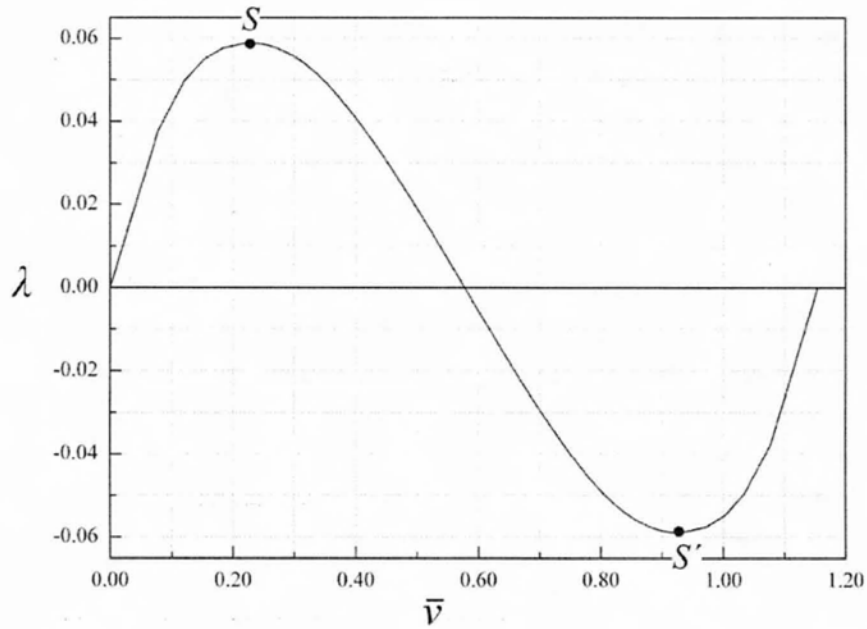
### 3.4 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ3 -

Σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες παραγράφους, το περιεχόμενο της τρέχουσας αλλά και της επόμενης σχετίζεται με πολύ πιο "αιχμηρή" αψίδα και φορτίο αρκετά κοντά στην κορυφή. Όπως θα φανεί στη συνέχεια το γεγονός αυτό καταστρατηγεί τη συμμετρία κλειστού βρόγχου της κατακόρυφης μετατόπισης, η οποία πάντως διατηρείται για την οριζόντια, ενώ μπορεί να εμφανιστεί είτε απλός είτε διπλός ακαριαίος λυγισμός.

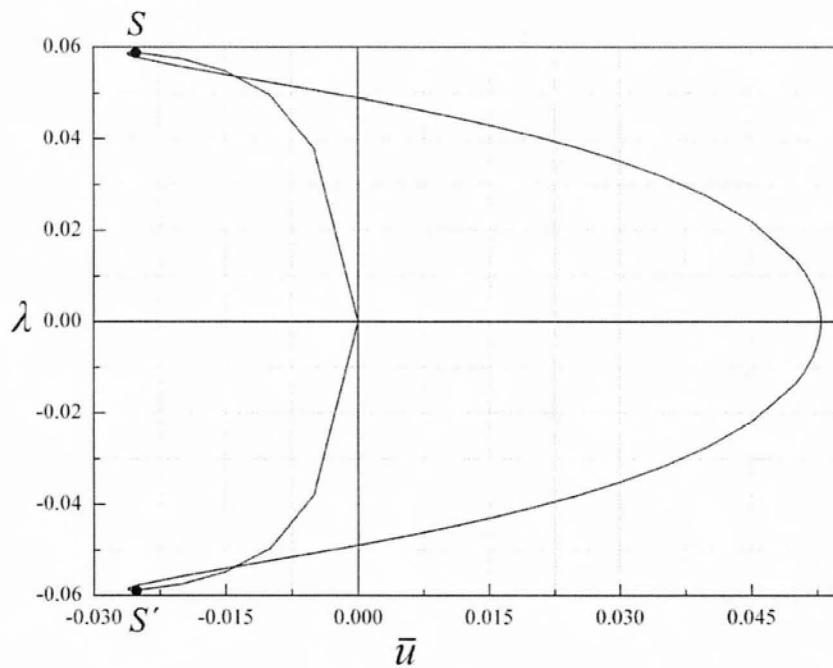
Για τον συγκεκριμένο συνδυασμό η κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζει κλασική αστάθεια ακαριαίου λυγισμού σχετιζόμενη με δύο οριακά σημεία, ενώ η οριζόντια τοιαύτη χαρακτηρίζεται από ανάστροφο ακαριαίο λυγισμό, μικρού εύρους όμως (small amplitude snap-back), που έχει παρατηρηθεί και σε γραμμικά μοντέλα υλικού, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.9 και 3.10. Από πλευράς ευστάθειας κλάδων ισορροπίας ισχύει και εδώ ο συνήθης διαχωρισμός τους από τα

οριακά σημεία (ανιόντες ευσταθείς, κατιόντες ασταθείς). Τα χαρακτηριστικά των κρισιμίων σημείων δίνονται στον Πίνακα 3.3.

Σημειώνεται εδώ η εξαιρετική μαθηματική δυσκολία εύρεσης σημείων ισορροπίας αριθμητικά, για το λόγο δε αυτό επιστρατεύτηκε πολύ μικρό βήμα ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.9. Δρόμος ισορροπίας της κατακόρυφης μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ3



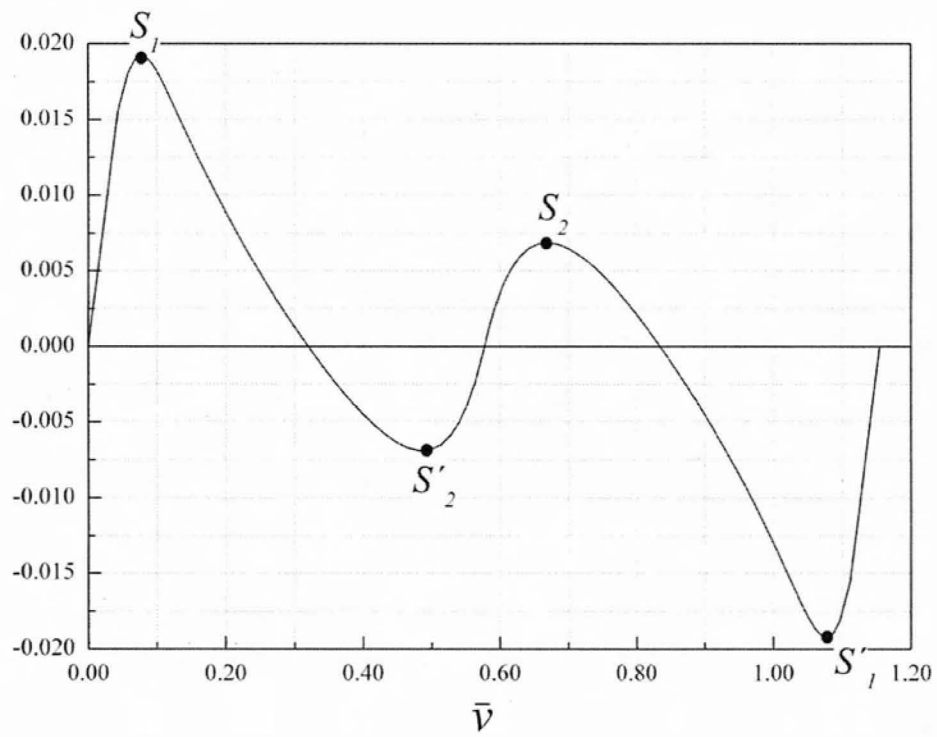
Σχήμα 3.10. Δρόμος ισορροπίας της οριζόντιας μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ3

Πίνακας 3.3. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας του συνδυασμού Σ3

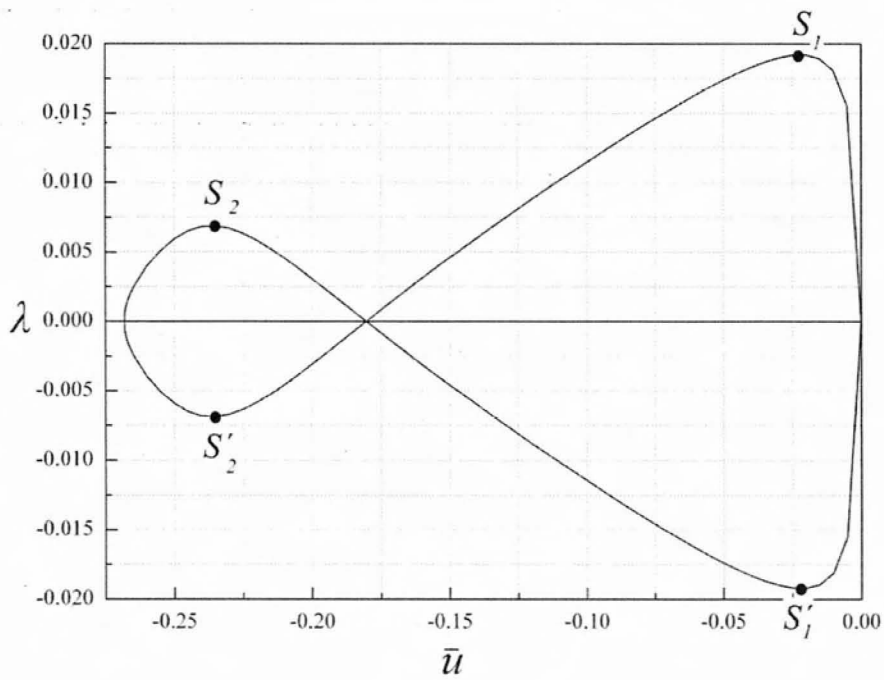
Κρίσιμο Σημείο	Κατακόρυφη Μετατόπιση	Οριζόντια Μετατόπιση	Φορτίο
$S$	0.227631	-0.02549	0.0588622
$S'$	0.927099	-0.02549	-0.0588622

### 3.5 Αποτελέσματα συνδυασμού Σ4

Εκτός από τις γενικές παρατηρήσεις στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου στην εν λόγω περίπτωση εμφανίζεται διπλός ακαριαίος λυγισμός της κατακόρυφης μετατόπισης σχετιζόμενος με τέσσερα οριακά σημεία συμμετρίας κέντρου, και ανάστροφος ακαριαίος λυγισμός συμμετρίας ως προς τον άξονα τετμημένων για την οριζόντια μετατόπιση (με μεγάλες αυτή τη φορά μετατοπίσεις), σύμφωνα με τους δρόμους ισορροπίας των Σχημάτων 3.11 και 3.12. Η ευστάθεια των κλάδων ακολουθεί τον νόμο ανιών-ευσταθής / κατιών-ασταθής, ενώ τα χαρακτηριστικά των οριακών σημείων περιέχονται στον Πίνακα 3.4.



Σχήμα 3.11. Δρόμος ισορροπίας της κατακόρυφης μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ4



Σχήμα 3.12. Δρόμος ισορροπίας της οριζόντιας μετατόπισης για τον συνδυασμό Σ4

Πίνακας 3.4. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας του συνδυασμού Σ4

Κρίσιμο Σημείο	Κατακόρυφη Μετατόπιση	Οριζόντια Μετατόπιση	Φορτίο
$S_1$	0.077833	-0.02173	0.0192243
$S'_1$	1.0769	-0.02173	-0.0192243
$S_2$	0.668498	-0.23634	0.00689443
$S'_2$	0.486232	-0.23634	-0.00689443

#### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα**

Τα σπουδαιότερα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από την έρευνα της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχουν ως εξής:

- Η επιρροή της μη γραμμικότητας υλικού στην καθολική ευστάθεια του υιοθετηθέντος προσομοιώματος είναι ιδιάζουσα και άκρως μη αναμενόμενη, καθώς οδηγεί σε πολλαπλούς ακαριαίους λυγισμούς και κλειστούς ή ανοιχτούς συμμετρικούς ή μη συμμετρικούς βρόγχους δρόμων ισορροπίας.
- Όταν το υλικό είναι υπερελαστικό η επιρροή του είναι πιο χαρακτηριστική για μη ομαλές γεωμετρίες αψίδας και φορτία κοντά στη στέψη του τόξου.
- Στην περίπτωση του μη γραμμικά ελαστικού υλικού με χαλάρωση είναι έντονη η παρουσία κλειστών βρόγχων στις φυσιολογικές γεωμετρίες και για φορτίο απομακρυσμένο από τη στέψη.
- Το όλο επιστημονικό θέμα επ' ουδενί θεωρείται εξαντληθέν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας και για το λόγο αυτό προτείνεται διενέργεια μελλοντικής έρευνας που να περιλαμβάνει:
  1. Πλήρη παραμετρική ανάλυση με χρήση μη γραμμικά ελαστικών υλικών με δυσκαμψίες που έχουν προέλθει από πειράματα.
  2. Χρήση και άλλων γεωμετριών ασύμμετρης αψίδας (χωρίς τον περιορισμό του περιγεγραμμένου κυκλικού τόξου) καθώς και ελαστικών στηρίξεων.
  3. Μόρφωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης του Lagrange και μη γραμμική δυναμική ανάλυση ευστάθειας με χρήση παραμέτρων απόσβεσης πραγματικών υλικών.



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Prager, W. (1939): “On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state”, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Congress on Applied Mechanics*, 234 – 237.
2. Timoshenko S.P. and Gere. J.M.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
3. Williams, D.J.: *Polymer science and engineering*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1971.
4. Plaut, R.H. (1979): “Influence of Load Position on the Stability of Shallow Arches”, *Journal of Applied Mathematics and Physics* 30, 548 – 552.
5. Ogden, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover, 1984.
6. Haslach, H.W. Jr. (1985): “Post-buckling behavior of columns with non-linear constitutive equations, *International Journal of Nonlinear Mechanics* 20(1), 53 – 67.
7. Bazant, Z.P. and Cedolin, L.: *Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1991.
8. Wang, C.Y. (1996): “Global buckling load of a nonlinearly elastic bar”, *ActaMechanica* 119, 229 – 234.
9. Sophianopoulos, D.S., Michaltsos, G.T. (2001): “The Effect of a Rotational Spring on the Global Stability Aspects of the Classical von Mises Model under Step Loading, *CMES* 2(1), 15 – 26.
10. Κουνάδης, Α.Ν.: *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας με Στοιχεία από την Θεωρίαν Καταστροφών*, Συμμεών, Αθήνα, 2004.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Α.ΚΩΔΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

#### Α.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

##### Α.1.1 ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΗ $F(x) = (k_0 - k_1)x_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) + k_1x$

```
ClearAll [F, K0, K1, X0, X, U, V, P, v, Vt, a, adot, L, u, udot, vdot, h, hdot, Xodot, Xdot, lamda, kdot, Vdot, D1, D2, y]
```

```
F= (K0-K1)*X0*Tanh [X/X0] +K1*X;
```

```
U=FullSimplify [Integrate [F, X] ];
```

```
V=-P*v;
```

```
Vt=FullSimplify [U+V] ;
```

```
a=adot*L;
```

```
u=udot*L;
```

```
v=vdot*L;
```

```
h=hdot*L;
```

```
X0=Xodot*L;
```

```
X=Xdot*L;
```

```
P=lamda*(K0*L) ;
```

```
K1=K0*kdot;
```

```
L>0;
```

```
y=((( - ((L^2/(4*h) -h) ) +Sqrt [ ((L^2/(4*h) ) -h) ^2 -4*(a^2 -a*L) ] )/2));
```

```
X=FullSimplify [Sqrt [(y-v) ^2+(a+u) ^2] -Sqrt [y^2+a^2] ];
```

```
Vdot=FullSimplify [Vt/(K0*L^2) ];
```

```
D1=FullSimplify [D [Vdot, udot] ]
```

```
D2=FullSimplify [D [Vdot, vdot] ]
```

##### Α.1.2 ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΗ $F(x) = (k_0 - k_1)x_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) - k_1x$

```
ClearAll [F, K0, K1, X0, X, U, V, P, v, Vt, a, adot, L, u, udot, vdot, h, hdot, Xodot, Xdot, lamda, kdot, Vdot, D1, D2, y]
```

```
F= (K0-K1)*X0*Tanh [X/X0] -K1*X;
```

```
U=FullSimplify [Integrate [F, X] ];
```

```

V=-P*v;
Vt=FullSimplify[U+V];

a=adot*L;
u=udot*L;
v=vdot*L;
h=hdot*L;
X0=Xodot*L;
X=Xdot*L;
P=lamda*(K0*L);
K1=K0*kdot;
L>0;

y=(((L^2/(4*h)-h)+Sqrt[((L^2/(4*h))-h)^2-4*(a^2-a*L)])/2));
X=FullSimplify[Sqrt[(y-v)^2+(a+u)^2]-Sqrt[y^2+a^2]];

```

```
Vdot=FullSimplify[Vt/(K0*L^2)];
```

```

D1=FullSimplify[D[Vdot,udot]]
D2=FullSimplify[D[Vdot,vdot]]

```

## A.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

A.2.1 ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΗ  $F(x) = (k_0 - k_1)x_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) + k_1x$

```

ClearAll[F,K0,K1,X0,X,U,V,P,v,Vt,a,adot,L,u,udot,vdot,h,h
dot,Xodot,Xdot,lamda,kdot,Vdot,D1,D2,y]
F=(K0-K1)*X0*Tanh[X/X0]+K1*X;

```

```

U=FullSimplify[Integrate[F,X]];
V=-P*v;
Vt=FullSimplify[U+V];

```

```

a=adot*L;
u=udot*L;
v=vdot*L;
h=hdot*L;
X0=Xodot*L;
X=Xdot*L;
P=lamda*(K0*L);
K1=K0*kdot;
L>0;

```

```

y=((( -(L^2/(4*h) -h) +Sqrt[((L^2/(4*h) -h)^2-4*(a^2-
a*L)]/2)));
X=FullSimplify[Sqrt[(y-v)^2+(L-a-u)^2]-Sqrt[y^2+(L-
a)^2]];

```

```

Vdot=FullSimplify[Vt/(K0*L^2)];

```

```

D1=FullSimplify[D[Vdot, udot]]
D2=FullSimplify[D[Vdot, vdot]]

```

**A.2.2 ΓΙΑ ΔYNAMH  $F(x) = (k_0 - k_1)x_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) - k_1x$**

```

ClearAll[F, K0, K1, X0, X, U, V, P, v, Vt, a, adot, L, u, udot, vdot, h, h
dot, Xodot, Xdot, lamda, kdot, Vdot, D1, D2, y]
F=(K0-K1)*X0*Tanh[X/X0]-K1*X;

```

```

U=FullSimplify[Integrate[F, X]];
V=-P*v;
Vt=FullSimplify[U+V];

```

```

a=adot*L;
u=udot*L;
v=vdot*L;
h=hdot*L;
X0=Xodot*L;
X=Xdot*L;
P=lamda*(K0*L);
K1=K0*kdot;
L>0;

```

```

y=((( -(L^2/(4*h) -h) +Sqrt[((L^2/(4*h) -h)^2-4*(a^2-
a*L)]/2)));
X=FullSimplify[Sqrt[(y-v)^2+(L-a-u)^2]-Sqrt[y^2+(L-
a)^2]];

```

```

Vdot=FullSimplify[Vt/(K0*L^2)];

```

```

D1=FullSimplify[D[Vdot, udot]]
D2=FullSimplify[D[Vdot, vdot]]

```

### **A.3.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

```
D1total=D1+D1
D2total=D2+D2
FindRoot[{D1total==0,D2total==0},{lamda,0.1},{vdot,0}]
```

#### A.4.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

```
D11=D[D1total,udot];
D12=D[D1total,vdot];
D22=D[D2total,vdot];
```

```
FindRoot[{D1total==0,D2total==0,D11*D22-
D12^2==0},{udot,0.009},{lamda,0.-0.0028},{vdot,0.056}]
```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000049004