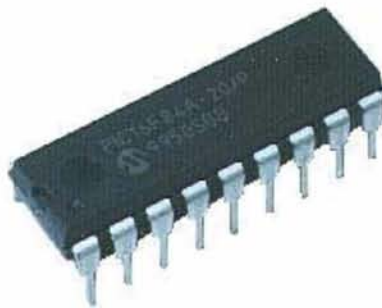




**Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πολυτεχνική Σχολή Πανεπιστημίου Θεσσαλίας**

Διπλωματική εργασία

*Θερμική ανάλυση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σε
νανοκλίμακα. Τεχνικές και αλγόριθμοι*



Αποστολίδης Απόστολος

Οκτώβριος, 2012

Βόλος

*στην επαναστατική και προοδευτική διάνοηση κάθε
περιόδου της ταξικής μας ιστορίας*

*και στον Αθάνατο Ernesto Guevara καθώς σήμερα
συμπληρώθηκαν 45 χρόνια από τη δολοφονία του*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή – Πρόβλημα θερμικής ανάλυσης των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.....	5
---	---

Κεφάλαιο 2

Η θερμική διαφορική εξίσωση.....	8
2.1 Γενικά.....	8
2.2 Μακροσκελής ανάλυση βασισμένη στο Fourier.....	10
2.3 Οι συνοριακές συνθήκες.....	11

Κεφάλαιο 3

Αλγόριθμοι θερμικής ανάλυσης.....	14
3.1 Αλγόριθμοι Σταθερής Κατάστασης (steady-state).....	14
3.2 Ανάλυση με συναρτήσεις Green.....	15

3.3 Αλγόριθμοι Χρονικά Μεταβαλλόμενης Κατάστασης.....	18
3.4 Ανάλυση με τη μέθοδο ADI.....	18

Κεφάλαιο 4

Υλοποίηση θερμικής ανάλυσης με τη βοήθεια του MATLAB

4.1 Λίγα λόγια για το rde toolbox.....	22
4.2 Το πρόβλημα της θερμαινόμενης μεταλλικής πλάκας.....	23

Κεφάλαιο 5

Πειραματικά αποτελέσματα σε σταθερή και μεταβαλλόμενη κατάσταση.....	31
---	-----------

Παράρτημα.....	52
-----------------------	-----------

Βιβλιογραφία.....	54
--------------------------	-----------

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή – Πρόβλημα θερμικής ανάλυσης ολοκληρωμένων κυκλωμάτων

Εξαιτίας της ραγδαίας αύξησης της ισχύος και της πυκνότητας των πακέτων ολοκλήρωσης, τα θερμικά ζητήματα έχουν γίνει ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την αξιοπιστία και την απόδοση στη σχεδίαση και τη βιομηχανική υλοποίηση προχωρημένων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων πολύ υψηλής κλίμακας ολοκλήρωσης (VLSI).

Γενικότερα, τα θερμικά φαινόμενα προκαλούνται από την κατανομή και τη διασπορά της ισχύος στην επιφάνεια του ολοκληρωμένου. Η πρωτογενής κατανάλωση ισχύος εξαρτάται από τις συσκευές. Όμως, τα θερμικά φαινόμενα στις διασυνδέσεις γίνονται πιο σημαντικά παρόλο που η θερμότητα Joule συνεισφέρει σε ένα μικρό ποσοστό της κατανάλωσης ισχύος του ολοκληρωμένου κυκλώματος. Οι έρευνες έχουν δείξει ότι οι τάσεις για όλο και υψηλότερη ολοκλήρωση επηρεάζονται αρνητικά από τα θερμικά φαινόμενα εξαιτίας της αύξησης των επιπέδων της διασύνδεσης, της πυκνότητας των μικρών ρευμάτων, του “thermal coupling” καθώς επίσης και της εισαγωγής χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας μονωτών.

Οι υψηλές θερμοκρασίες όχι μόνο προκαλούν χρονικές αποτυχίες (timing failures) τόσο στα transistor όσο και στις διασυνδέσεις αλλά επίσης υποβαθμίζουν την αξιοπιστία του chip. Για παράδειγμα σε έναν 10-bit αθροιστή το μεγάλο gradient της θερμοκρασίας επηρεάζει το χρόνο άφιξης του input-signal στο δέκατο bit να γίνει βραδύτερο από το αναμενόμενο.

Για να μπορέσουμε να κωδικοποιήσουμε τα θερμικά φαινόμενα είναι ανάγκη πρώτα να αναλυθεί και να προβλεφθεί η θερμική συμπεριφορά ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος. Πολλοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία που σχετίζονται με τη θερμική ανάλυση ενός chip, με πεδία εφαρμογών που κυμαίνονται από ανάλυση σε επίπεδο αρχιτεκτονικής (architecture level analysis) μέχρι ανάλυση σε επίπεδο κελιού (cell level analysis) και transistor (transistor level analysis). Εδώ θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τις μεθόδους (αλγορίθμους) για να δώσουμε το υπόβαθρο που χρειάζεται με σκοπό να γίνουν κατανοητές οι

τεχνικές διατύπωσης και επίλυσης της θερμικής μερικής διαφορετικής εξίσωσης (thermal Partial Differential Equation).

Οι θεμελιώδεις αρχές της θερμικής ανάλυσης είναι γνωστές από την κλασική θεωρία μετάδοσης θερμότητας που αναπτύχθηκε ως αυτοτελής κλάδος της φυσικής ήδη από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα. Υπάρχουν πολλά στοιχεία της θεωρίας αυτής που είναι χρήσιμα στα πλαίσια της θερμικής ανάλυσης πάνω σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα. Για παράδειγμα:

- Οι γεωμετρίες των chip είναι κατά βάση ευθυγραμμισμένες. Όλα τα καλώδια διαγραμμίζονται σε συντονισμένες διευθύνσεις στις πιο διαδεδομένες τεχνολογίες. Τα κελιά (cells) είναι σε γενικές γραμμές ευθυγραμμισμένα, όπως και τα περισσότερα λειτουργικά κομμάτια ενός chip. Επομένως είναι λογικό να υποθέσουμε, πάνω από το device level, ότι οι τοπολογίες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ευθυγραμμισμένες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σίγουρα ένα σύνολο από ευθύγραμμες γεωμετρικές συμμετρίες που μπορούμε να αξιοποιήσουμε.
- Οι συσκευές (devices), τα εξαρτήματα που παράγουν την περισσότερη θερμότητα, μπορεί να βρίσκονται σε ένα απλό (διδιάστατες τεχνολογίες) ή σε πολλαπλά επίπεδα (τρισδιάστατες τεχνολογίες) πάνω από ένα υπόστρωμα, και τα σημεία για τα οποία ο χρήστης ενδιαφέρεται να αναλύσει τη θερμοκρασία βρίσκονται μέσα στο device layer. Άρα το υπόστρωμα, που είναι πολύ περισσότερο ογκώδες από το device layer, μπορεί να αφαιρεθεί από το μοντέλο θερμικής ανάλυσης. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία όταν επαναλαμβάνονται υπολογισμοί που αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλαίσια μέσα σε μια μεγάλη «νεκρή» περιοχή του chip (δηλαδή το μεγαλύτερο ποσοστό της περιοχής δεν μας ενδιαφέρει να το αναλύσουμε από θερμικής πλευράς).
- Εξαιτίας της φύσης της διαδικασίας σχεδίασης του ολοκληρωμένου κυκλώματος, το επίπεδο ακριβείας της εκτίμησης ισχύος μεταβάλλεται στα διάφορα στάδια αυτού του κύκλου. Αντιστοίχως, οι απαιτήσεις ακριβείας είναι μεταβλητές. Τα πρώτα στάδια του κύκλου σχεδίασης μπορεί να έχουν μεγάλη επίδραση στη συνολική απόδοση της σχεδίασης: είναι γεγονός ότι οι πιο αποτελεσματικές βελτιστοποιήσεις μπορούν να γίνουν σε αυτά τα στάδια,

αλλά η πληροφορία που «έχουμε στα χέρια μας» για να δουλέψουμε είναι περιορισμένη. Στα τελευταία επίπεδα του κύκλου σχεδίασης, όπου η σχεδίαση παγιτοποιείται, η διαθέσιμη πληροφορία είναι επαρκέστερη. Ο ρόλος της θερμικής ανάλυσης στα τελευταία στάδια είναι για να επιβεβαιώσουμε τις υποθέσεις που έγιναν στα πρώτα στάδια της σχεδίασης, να τις διατηρήσουμε ή ακόμα και να τις βελτιστοποιήσουμε περισσότερο αν αυτό είναι εφικτό.

Εδώ, θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια συνολική εικόνα των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την θερμική ανάλυση σε όλη την επιφάνεια του chip (full-chip thermal analysis). Ένα άλλο πολύ σημαντικό θέμα, της θερμικής ενέργειας που προκαλείται από τις καλωδιώσεις του ολοκληρωμένου (Joule heating) είναι έξω από τους στόχους της παρούσας εργασίας. Θα ξεκινήσουμε με μια περιγραφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το θερμικό σύστημα. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τις τεχνικές για να λύσουμε αυτή τη διαφορική εξίσωση σε στατική κατάσταση (steady-state), χρησιμοποιώντας τις κλασσικές μεθόδους λύσης γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν μετά από διακριτοποίηση (discretizing). Τέλος θα προτείνουμε τεχνικές λύσεις του προβλήματος δυναμικής ανάλυσης (transient analysis).

Κεφάλαιο 2

Η θερμική διαφορική εξίσωση

2.1 Γενικά

Το πρόβλημα θερμικής ανάλυσης ολοκληρωμένου κυκλώματος προϋποθέτει λύση της εξίσωσης θερμότητας, η οποία περιγράφεται από μια μερική διαφορική εξίσωση (PDE). Συνήθως, οι PDEs επιλύονται με διακριτοποίηση, όπου μετατρέπονται σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που είναι γραμμικό ως προς τις μεταβλητές. Πολλές προσεγγίσεις και πολλοί αλγόριθμοι με στόχο τη θερμική ανάλυση έχουν δημοσιευτεί στη βιβλιογραφία. Αναλόγως με τις ανάγκες, το στάδιο σχεδίασης, και τον βαθμό ακριβείας που απαιτείται, διαφορετικές κλάσεις αλγορίθμων μπορεί να είναι κατάλληλες για την εκάστοτε περίπτωση. Πολλές επιλογές θα μπορούσαν να υιοθετηθούν όσον αφορά τη μορφή της PDE που θα χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση του προβλήματος θερμικής ανάλυσης, όσον αφορά το σχήμα διακριτοποίησης για την επίλυση της PDE, καθώς και τις τεχνικές επίλυσης των (γραμμικών) εξισώσεων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτές οι μέθοδοι εστιάζουν στην ομοιόμορφη διακριτοποίηση για απλούστευση. Όταν όμως επιδιώκουμε μεγαλύτερη ακρίβεια λύσεων για πιο ευαίσθητες περιοχές του chip, χρειαζόμαστε πιο πυκνές διακριτοποιήσεις στις περιοχές αυτές.

Η ακρίβεια της μερικής διαφορικής εξίσωσης, που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του θερμικού προβλήματος, εξαρτάται από τη δοσμένη κλίμακα μεγέθους. Για θερμική ανάλυση σε όλο το chip (full-chip thermal analysis), επαρκεί μια μακροσκελής ανάλυση βασισμένη σε μια εξίσωση Fourier. Όμως, αν θέλουμε η ανάλυσή μας να αποδώσει σε μικρότερες τάξεις μεγέθους, τότε απαιτείται μια πιο λεπτομερής λύση που παίρνει υπόψη της ακόμα και τις επιδράσεις σε επίπεδο κβαντομηχανικής. Μια άλλη επιλογή έχει να κάνει με την απόφαση αν το θερμικό πρόβλημα θα επιλυθεί σε στατική (steady-state) ή σε δυναμική εκδοχή (transient). Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι οι κυματομορφές της θερμοκρασίας είναι σταθερές συναρτήσει του χρόνου, οπότε οι χρονικές-παράγωγοι της διαφορικής εξίσωσης απαλείφονται, ενώ στη δεύτερη οι αποκρίσεις του συστήματος επηρεάζονται από τις χρονικά μεταβαλλόμενες διεγέρσεις στην

είσοδο. Με άλλα λόγια η transient ανάλυση επιλύει ολόκληρη τη μερική διαφορική εξίσωση, θεωρώντας και τις χωρικές μεταβλητές r , και την χρονική μεταβλητή t ως ανεξάρτητες, σε αντίθεση με την ανάλυση στατικής κατάστασης (steady-state analysis), που τοποθετεί σε όλες τις χρονικές μερικές παραγώγους της μερικής διαφορικής εξίσωσης την τιμή μηδέν και ασχολείται μόνο με τις χωρικές μεταβλητές r .

Πρωτίστως, θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα full-chip thermal analysis, όπου δίνεται έμφαση στη θερμική μερική διαφορική εξίσωση που προκύπτει από το νόμο του Fourier. Για να λυθεί το πρόβλημα αριθμητικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολλούς τρόπους επίλυσης της PDE, όπως είναι η μέθοδος της συνάρτησης Green, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (FDM), καθώς και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Στη περίπτωση των (FDM) και (FEM), παράγεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο πρέπει να επιλυθεί για να καθοριστεί η κατανομή της θερμοκρασίας στο σύστημα. Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τους κλασσικούς από την γραμμική άλγεβρα αλγορίθμους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως είναι η παραγοντοποίηση LU και Cholesky, τους επαναληπτικούς αριθμητικούς αλγορίθμους ICCG και GMRES, ή τη μέθοδο του “τυχαίου περιπάτου” την οποία και θα εξηγήσουμε παρακάτω.

2.2 Μακροσκελής ανάλυση βασισμένη στο Fourier

Η συμβατική μεταφορά θερμότητας σε ένα ολοκληρωμένο περιγράφεται από το νόμο του Fourier. Σύμφωνα με αυτόν, η θερμική ροή q (σε W/m^2) είναι ανάλογη του αρνητικού gradient της θερμοκρασίας T (σε K), πολλαπλασιασμένο με τη σταθερά που αντιστοιχεί στη θερμική αγωγιμότητα του υλικού, k_t (σε $W/(mK)$), δηλαδή:

$$q = -k_t \nabla T \quad (2.2.1)$$

Το divergence του q σε μια περιοχή είναι η διαφορά μεταξύ της ισχύος που παράγεται και του ρυθμού της χρονικής μεταβολής της θερμικής ενέργειας στην περιοχή αυτή. Με άλλα λόγια:

$$\nabla \cdot q = -k_t \nabla \cdot \nabla T = -k_t \nabla^2 T = g(r,t) - \rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

Εδώ, το r προσδιορίζει με τις χωρικές συντεταγμένες του το σημείο στο οποίο η θερμοκρασία είναι καθορισμένη, η μεταβλητή t αναπαριστά το χρόνο (σε sec), το g είναι η πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα όγκου (σε W/m^3), το c_p είναι η θερμική χωρητικότητα (θερμοχωρητικότητα) του υλικού του chip (σε $J/(kg K)$), και το ρ είναι η πυκνότητα του υλικού (σε kg/m^3). Η σχέση μπορεί να ξαναγραφεί στην ακόλουθη θερμική εξίσωση, η οποία είναι μια **παραβολική** μερική διαφορική εξίσωση:

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = k_t \nabla^2 T(r,t) + g(r,t) \quad (2.2.3)$$

Η θερμική αγωγιμότητα, k_t , σε ένα ομοιόμορφο μέσο είναι **ισοτροπική**. Είναι διαφορετική στη σιλικόνη, στο διοξείδιο της σιλικόνης, και σε μέταλλα όπως το αλουμίνιο και ο χαλκός που έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες των οποίων οι τιμές μπορούν να καθοριστούν από ένα δοσμένο πίνακα. Στην πράξη, κατά τα πρώτα στάδια της ανάλυσης, και για σκοπούς βελτιστοποίησης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ολοκληρωμένο κύκλωμα είναι κατά επίπεδα ομοιόμορφο ως προς τη θερμική αγωγιμότητα. Το “χοντρικό” επίπεδο έχει την αγωγιμότητα της “χοντρικής” σιλικόνης, και η αγωγιμότητα των επιπέδων μετάλλου μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας μια μέση προσέγγιση: αυτή η περιοχή αποτελείται από μια μίξη διοξειδίου της σιλικόνης και μετάλλου, και εξαρτώμενη από την πυκνότητα μετάλλου στην περιοχή αυτή, μια αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μακροσκοπική ανάλυση. Η τιμή της k_t είναι ασθενώς εξαρτώμενη από τη θερμοκρασία, και αυτό δυστυχώς κάνει την θερμική εξίσωση μη γραμμική. Όμως, κατά την ανάλυση του chip, αυτή η μη γραμμικότητα συνήθως αγνοείται, αν και έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία τρόποι για να λυθεί το πρόβλημα και με μη γραμμικές αγωγιμότητες. Σε πολλές περιπτώσεις που απαιτείται η ακριβής γνώση της χειρότερης περίπτωσης του επιπέδου ισχύος, τέτοιου είδους προσεγγίσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες.

Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση σε ανάλυση στατικής κατάστασης (steady-state), αρκεί να μηδενίσουμε τις χρονικές παραγώγους της και να απαλείψουμε τη μεταβλητή t :

$$\nabla^2 T(r) = -\frac{g(r)}{k_t} \quad (2.2.4)$$

είναι η γνωστή σε όλους μας εξίσωση poisson.

Η χρονική περίοδος όπου η θερμότητα μένει αμετάβλητη είναι της τάξης των milliseconds, και είναι μεγαλύτερη από τις περιόδους των ρολογιών στα σύγχρονα VLSI κυκλώματα που είναι της τάξης των subnanosecond. Γι' αυτό αν ένα κύκλωμα παραμένει στην ίδια κατάσταση ισχύος για μια μεγάλη χρονική περίοδο, και η πυκνότητα κατανομής της ισχύος παραμένει σχετικά σταθερή, η steady-state ανάλυση μπορεί να περιγράψει με ακρίβεια τη θερμική συμπεριφορά του κυκλώματος. Ακόμα κι αν δεν ισχύει αυτή η περίπτωση, η steady-state ανάλυση μπορεί να αξιοποιηθεί σε πρώιμες και πιο προσεγγιστικές (ανακριβείς) αναλύσεις, στο ίδιο πνεύμα που η steady-state ανάλυση είναι χρήσιμη για να αναλύει δίκτυα ισχύος στην αρχή του σχεδιαστικού κύκλου. Απ' την άλλη πλευρά, όταν υπάρχει αρκετή λεπτομέρεια για τις εισόδους ή όταν ένα κύκλωμα κάνει αλλαγές στην κατάσταση ισχύος μεταξύ χρονικών διαστημάτων μέσα στη χρονική περίοδο όπου δεν μεταδίδεται θερμότητα, η transient ανάλυση είναι καταλληλότερη.

2.3 Οι συνοριακές συνθήκες

Για να προσδιορίσουμε σωστά την θερμική εξίσωση (2.2.3) (δηλαδή την παραβολική μερική διαφορική εξίσωση που ορίσαμε στην αρχή) πρέπει να εισάγουμε τις συνοριακές συνθήκες (όπως σε κάθε διαφορική εξίσωση). Η πιο δημοφιλής συνοριακή συνθήκη που χρησιμοποιείται στη θερμική ανάλυση κατά τη σχεδίαση του ολοκληρωμένου περιγράφεται από την τύπο του Dirichlet ο οποίος δίνει πληροφορία για το σύνορο Γ της περιοχής στην οποία καθορίζεται η εξίσωση. Έστω ότι T_c είναι μια σταθερή θερμοκρασία, n είναι η εξωτερική κατεύθυνση του συνόρου της επιφάνειας, h είναι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας του περιβάλλοντος, και T_a η θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Παραδείγματα τυπικών συνοριακών συνθηκών για το πρόβλημα θερμικής ανάλυσης ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος δίνονται από κάτω:

- Η **ισοθερμική** συνοριακή συνθήκη μπορεί να εφαρμοστεί όταν η επιφάνεια του chip επισυνάπτεται σε μια θερμική “δεξαμενή” σταθερής θερμοκρασίας με σημαντικά υψηλότερη θερμική χωρητικότητα και μεγαλύτερη θερμική αγωγιμότητα απ' ότι το ίδιο το chip και εκφράζεται με την απλή εξίσωση:

$$T(r,t) = T_c \quad \text{όπου } r \in \Gamma. \quad (2.3.1)$$

Αυτή η συνθήκη μερικές φορές χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει το αποτέλεσμα της θερμικής εξάπλωσης (heat spreader) και της θερμικής κατάπτωσης (heat sink) στη στοίβα πακέτων του chip. Όμως, η υπόθεση σταθερής θερμοκρασίας στο σύνορο που κάναμε εδώ σε πραγματική σχεδίαση δεν είναι κατάλληλη όταν απαιτούνται υψηλές ακρίβειες.

- Η συνοριακή συνθήκη της **θερμικής ροής** (heat flux boundary condition) εφαρμόζεται όταν στην επιφάνεια του chip υπάρχουν πηγές ισχύος. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε αμελητέα τη θερμική μετάδοση μέσα στα διασυνδεδεμένα επίπεδα, η παραγόμενη ισχύς από τις συσκευές μπορεί να μοντελοποιηθεί κάνοντας χρήση αυτής συνοριακής συνθήκης η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$k_t \frac{\partial T(r,t)}{\partial n} = p(r,t) \quad \text{με } r \in \Gamma, \quad (2.3.2)$$

όπου $p(r,t)$ είναι η θερμική ροή στο συνοριακό σημείο r , ως συνάρτηση του χρόνου. Σε αυτή τη περίπτωση, η θερμική πηγή ιδανικά είναι μέρος των συνοριακών συνθηκών: στην πραγματικότητα είναι μέρος της δομής των υλικών που μελετάμε.

- Μια ειδική περίπτωση της συνοριακής συνθήκης θερμικής ροής που θα μπορούσε να είναι χρήσιμη, είναι η **αδιαβατική** συνοριακή συνθήκη, και επιτυγχάνεται άμα θέσουμε μηδέν στον όρο της ισχύος στην εξίσωση της συνθήκης. Η αδιαβατική συνοριακή συνθήκη μπορεί να εφαρμοστεί όταν δεν έχουμε ανταλλαγή θερμότητας δια μέσου της επιφάνειας του chip, και συχνά είναι μια πολύ καλή προσέγγιση όταν η αντίστοιχη επιφάνεια του chip καλύπτεται από λεπτό οξειδίο, το οποίο λειτουργεί ως θερμικός μονωτής, ή για ανταλλαγή θερμότητας στις πλευρές του chip.
- Η συνοριακή συνθήκη διάδοσης (**convective boundary condition**) συχνά χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει την επίδραση “εξάπλωσης” (heat spread) και της “κατάπτωσης”

(heat sink) στη θερμική ανάλυση και δίνεται από την εξής σχέση:

$$-k_t \frac{\partial T(r,t)}{\partial n} = h_c (T(r,t) - T_a), \quad \text{με } r \in \Gamma \quad (2.3.3)$$

Αυτή η συνθήκη δηλώνει ότι η θερμική ροή στην επιφάνεια της πλευράς του chip ισούται με τη θερμότητα που “διασκορπίζεται” στο περιβάλλον από το “heat sink” και τον περιβαλλόμενο αέρα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αποτελεσματικότητα του h_c που χρησιμοποιείται στη θερμική ανάλυση για την σχεδίαση του chip είναι μια ιδιότητα του “heat sink” και είναι ο συντελεστής αυτός είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερος από αυτόν του αέρα, εξαιτίας του γεγονότος ότι το “heat sink” αυξάνει σημαντικά την περιοχή αποτελεσματικής θερμικής διασποράς του chip.

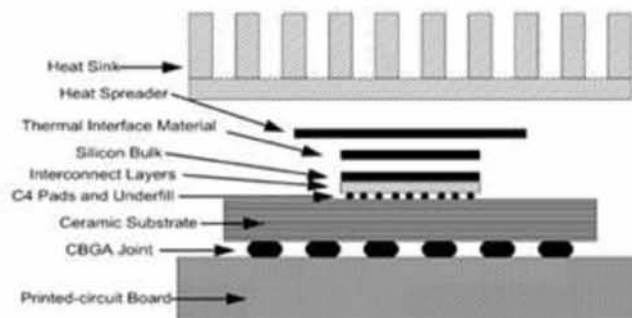


Figure 1

Κεφάλαιο 3

Αλγόριθμοι θερμικής ανάλυσης

3.1 Αλγόριθμοι θερμικής ανάλυσης σε σταθερή κατάσταση (steady-state analysis)

Ο στόχος της θερμικής ανάλυσης σε σταθερή κατάσταση είναι να καθορίσουμε την κατανομή της θερμοκρασίας μέσα σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα με δεδομένη την πυκνότητα κατανομής ισχύος η οποία δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Μαθηματικά, η θερμοκρασιακή κατανομή σταθερής κατάστασης υπακούει στην εξίσωση poisson, που ορίσαμε πιο πάνω, κάτω από ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών. Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε τις τεχνικές ανάλυσης σταθερής κατάστασης βασισμένες στις συναρτήσεις Green ωστόσο θα αναφέρουμε επιγραμματικά και τις (FDM), (FEM) τεχνικές όσον αφορά την υπολογιστική τους απόδοση και ακρίβεια.

Τόσο η μέθοδος FDM όσο και η FEM διακριτοποιούν ολόκληρο το chip για να κατασκευάσουν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων οι οποίες συσχετίζουν τη θερμοκρασιακή κατανομή του chip με την πυκνότητα κατανομής ισχύος. Η κυριότερη διαφορά ανάμεσα στην FDM και τη FEM είναι ότι ενώ η FDM διακριτοποιεί τη διαφορική λειτουργία της εξίσωσης (τη μερική παράγωγο της θερμοκρασίας στην προκειμένη περίπτωση) η FEM διακριτοποιεί το πεδίο της θερμοκρασίας. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα των δύο αυτών μεθόδων είναι η ικανότητα να διαχειρίζονται πολύπλοκες δομές υλικών, ειδικά ανομοιομορφες διασυνδεδεμένες κατανομές σε ένα VLSI chip. Όμως, μια απευθείας εφαρμογή αυτών των μεθόδων μπορεί να είναι υπολογιστικά ασύμφορη εφόσον πρέπει να διακριτοποιηθεί ολόκληρος ο όγκος του chip. Μια τέτοια προσέγγιση αποτυγχάνει να αναγνωρίσει ότι οι περιοχές στο chip όπου παράγεται η ενέργεια, ή οι περιοχές στις οποίες μας ενδιαφέρει η θερμοκρασιακή κατανομή συνήθως βρίσκονται σε λίγα διακριτά πλαίσια, για παράδειγμα το device layer, ή τα επίπεδα διασυνδέσεων. Με άλλα λόγια η απευθείας εφαρμογή αυτών των μεθόδων θα έχει ως αποτέλεσμα ένα εξωφρενικά μεγάλο σύστημα από αλγεβρικές εξισώσεις, που απαιτούν ένα μεγάλο αριθμό κύκλων της CPU για να λυθούν, οδηγώντας σε συγκριτικά χαμηλής ποιότητας αποτελέσματα στη θερμική

ανάλυση. Χρησιμοποιώντας μακροσκοπικές τεχνικές, είναι εφικτό να απαλείψουμε κόμβους από τα τεράστια δίκτυα που δημιουργούνται από τις FDM και FEM. Ωστόσο και αυτές οι τεχνικές συνήθως δεν επιφέρουν στην προσομοίωση τα αναμενόμενα αποτελέσματα και δεν βελτιώνουν ικανοποιητικά τον υπολογιστικό φόρτο.

Σε αντίθεση με αυτές, η μέθοδος της συνάρτησης Green παρέχει μια ημι-αναλυτική λύση όσον αφορά τα μεμονωμένα επίπεδα στα οποία μας ενδιαφέρει η παραγόμενη ισχύς και η θερμοκρασιακή κατανομή. Συνεπώς, το μέγεθος του προβλήματος είναι εμφανώς μικρότερο συγκριτικά με αυτό των προηγούμενων μεθόδων που αναλύσαμε., γιατί μειώνει τον αναγκαίο χρόνο για να φτάσουμε στη λύση του προβλήματος. Όμως, αυτή η βελτίωση έχει ένα κόστος: η εφαρμογή της Green function μεθόδου βασίζεται στην υπόθεση ότι τα υλικά του chip είναι κατά επίπεδο ομοιόμορφα πράγμα που πολλές φορές δεν ανταποκρίνεται απόλυτα στην πραγματικότητα, ιδιαίτερα στα επίπεδα διασυνδέσεων. Ως αποτέλεσμα λοιπόν, η Green function μέθοδος είναι καταλληλότερη για αρχικά στάδια του κύκλου της φυσικής σχεδίασης, όπου οι προϋποθέσεις ακριβείας είναι μέτριες ενώ η ανάγκη για γρηγορότερα αποτελέσματα είναι υψηλή. Η υπολογιστική της αποτελεσματικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι δεν χρειάζεται να λυθούν αλγεβρικές εξισώσεις εφόσον έχει καθοριστεί η συνάρτηση Green. Ως εκ τούτου, ένα σημαντικό κομμάτι της ερευνητικής δουλειάς που σχετίζεται με την εφαρμογή της Green Function μεθόδου στη θερμική ανάλυση σχεδίασης ολοκληρωμένων, επικεντρώνεται στην αναζήτηση και αξιολόγηση γρήγορων τρόπων επίλυσης της συνάρτησης Green.

3.2 Ανάλυση με συναρτήσεις Green

Η συνάρτηση Green που συμβολίζεται ως $G(r, r')$ ορίζει την κατανομή της θερμοκρασίας στο σημείο του chip με συντεταγμένες r , όπου μια σημειακή πηγή ισχύος βρίσκεται στην τοποθεσία με συντεταγμένες r' . Ο υπολογισμός της συνάρτησης Green προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης Poisson κάτω από μια απλή κρουστική διέγερση στο σημείο r' , κάτω από ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών που απαιτεί το πρόβλημα, εκτός από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος T_a , η οποία δίνεται σαν σημείο αναφοράς. Αν μπορεί να καθοριστεί

αυτή η συνάρτηση, τότε η θερμοκρασιακή κατανομή μέσα στο chip με δεδομένη πυκνότητα κατανομής ισχύος μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης :

$$T(r) = T_a + \int_V G(r, r') g(r') dV, \quad (3.2.1)$$

όπου $g(r')$ είναι η πυκνότητα κατανομής ισχύος ανά μονάδα όγκου, και V ο όγκος του chip.

Οι μέθοδοι που βασίζονται στην χρήση της συνάρτησης Green για τη θερμική ανάλυση είναι πολλές, και υπάρχει μια εκτενής λίστα δημοσιευμένων άρθρων με διάφορους τρόπους, και προσεγγίσεις.

Εμείς όμως θα επικεντρωθούμε και θα αναλύσουμε την πιο σημαντική από αυτές τις προσεγγίσεις επίλυσης. Ξεκινάει με την ιδέα των συναρτήσεων Green και εισάγει έναν αριθμό αποτελεσματικών βελτιώσεων που αξιοποιούν τις ιδιότητες του προβλήματος της θερμικής ανάλυσης πάνω στο chip. Μια τέτοια ιδιότητα είναι ότι οι βασικές θερμικές πηγές πάνω στο chip είναι οι συσκευές (devices), και τα σημεία στα οποία η θερμοκρασία θέλουμε να υπολογιστεί αντιστοιχούν στις περιοχές πάνω από τα device layers ή σε ένα από τα επίπεδα διασύνδεσης. Με άλλα λόγια, τα σημεία όπου πρέπει να υπολογιστεί η θερμοκρασία είναι τυπικά ένα σύνολο από διακριτά πλαίσια, τα οποία θα αναφέρονται από δω και στο εξής ως “field planes”, και οι πηγές ισχύος επίσης βρίσκονται σε ένα σύνολο από διακριτά πλαίσια τα οποία θα καλούνται με την ορολογία “source planes”. Κατά την ανάπτυξη αλγορίθμων θερμικής ανάλυσης που βασίζονται στη συνάρτηση Green, συνήθως είναι αρκετό να εστιάζουμε σε ένα ζευγάρι από source και field planes. Όταν υπάρχουν πολλαπλά source και field planes, η κατανομή της θερμοκρασίας μπορεί να επιτευχθεί μέσω της υπέρθεσης, εφόσον η θερμική PDE είναι γραμμική. Η ακόλουθη συζήτηση υποθέτει οι διαστάσεις του chip στις διευθύνσεις x και y είναι a και b αντίστοιχα. Για τις εφαρμογές στα ολοκληρωμένα κυκλώματα έχουμε τη δυνατότητα να υποθέσουμε ότι τα source και field planes είναι παράλληλα μεταξύ τους, και ότι αντιστοιχούμε σε διαφορετικές τιμές από τις συντεταγμένες με την ονομασία έστω z , συντεταγμένες με την ονομασία z' . Με δεδομένο ένα σημείο (x, y) στο field plane και

ένα σημείο (x', y') στο source plane, η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$$G(x, y, x', y') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \times \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right). \quad (3.2.2)$$

Ο φορμαλισμός αυτός υποθέτει ότι στις άκρες του chip εφαρμόζονται αδιαβατικές συνοριακές συνθήκες. Η κατανομή της θερμοκρασίας σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο field plane μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη έκφραση που προκύπτει από τη γενική εξίσωση (3.2.1):

$$T(x, y) = T_a + \int_{x_range} dx' \int_{y_range} dy' G(x, y, x', y') p(x', y'). \quad (3.2.3)$$

όπου $p(x', y')$ είναι η πυκνότητα ισχύος στο source plane.

Το πρόβλημα με τον υπολογισμό της κατανομής θερμοκρασίας στο field plane χρησιμοποιεί απευθείας την εξίσωση (3.2.3) όπου η συνάρτηση Green που δίνεται από τη σχέση (3.2.2) περιέχει άπειρα αθροίσματα, και σε πραγματικές υλοποιήσεις των αλγορίθμων θερμικής ανάλυσης, τα αθροίσματα πρέπει να “κομματιαστούν”, στην προσπάθειά μας να εξασφαλίσουμε ένα λογικό επίπεδο ακριβείας και αυτό πολλές φορές οδηγεί σε υπερβολικά μεγάλους χρόνους εκτέλεσης.

Στο άρθρο [1], οι εμπνευστές ανέπτυξαν αρκετά υψηλή αποτελεσματικότητα στους αλγορίθμους θερμικής ανάλυσης βασισμένους στη συνάρτηση Green, χρησιμοποιώντας παρόμοιες ιδέες με αυτά που πρότειναν οι Ghurpurey και Meyer στο άρθρο [2] και ο Costa στο άρθρο [3], στα γενικότερα πλαίσια της παρασιτικής εξαγωγής στο υπόστρωμα, και αυτοί οι αλγόριθμοι μπορούν να αξιοποιηθούν για την εκτέλεση τόσο τοπικής ανάλυσης (localized analysis) όσο και ανάλυσης θερμοκρασίας ολόκληρου του chip (full thermal analysis). Ο πρώτος αλγόριθμος εκτελεί τοπική ανάλυση, ο δεύτερος εκτελεί full-chip ανάλυση με ίσα επίπεδα ακριβείας σε όλο το chip, ενώ ο τρίτος εκτελεί full-chip ανάλυση για περιπτώσεις όπου διαφορετικές περιοχές του chip χρειάζονται διαφορετικά επίπεδα ακριβείας. Κάθε ένας από αυτούς λειτουργεί κάτω από απλοποιημένες υποθέσεις: οι θερμικές πηγές είναι ένα επίπεδο πλαίσιο στη κορυφή του chip, και το chip έχει ομοιόμορφες θερμικές αγωγιμότητες κατά επίπεδο. Ο πρώτος αλγόριθμος είναι κατάλληλος για περιορισμένους ή επταυξημένους

υπολογισμούς, ο δεύτερος για full-chip ανάλυση και ο τρίτος για full-chip ανάλυση όπου χρειάζεται διαφορετική ακρίβεια στα διαφορετικά κομμάτια του ολοκληρωμένου.

3.3 Αλγόριθμοι χρονικά μεταβαλλόμενης κατάστασης (transient analysis)

Σε αυτή την υποενότητα, θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για θερμική ανάλυση που μεταβάλλεται στο χρόνο. Η περιγραφή μας θα επικεντρωθεί πρωταρχικά στις μαθηματικές φόρμες που βασίζονται στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (FDM), εφόσον αυτές είναι σήμερα οι πλέον διαδεδομένες στη βιομηχανία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Εναλλακτικά, είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν τεχνικές που βασίζονται στο “πεδίο συχνότητας” (frequency – domain). Το “πεδίο συχνότητας” χρησιμοποιείται κατά κόρον στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων που έχουν χρονικά μεταβαλλόμενα στοιχεία όπως πηνία και πυκνωτές.

Για τη θερμική ανάλυση χρονικά μεταβαλλόμενης κατάστασης, όπως έχουμε άλλωστε πει στην αρχή, η χρονική παράγωγος στο αριστερό μέρος της θερμικής εξίσωσης (2.2.3) δεν είναι μηδέν και πρέπει να την λάβουμε σοβαρά υπόψη μας. Κάνοντας χρήση της (FDM) η θερμική διαφορική εξίσωση (2.2.3) διακρίτοποιείται ως εξής:

$$\rho C_p \frac{\partial T_{i,j,k}}{\partial t} = k_t \left[\frac{\delta_x^2 T_{i,j,k}^{n+1} + \delta_x^2 T_{i,j,k}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{\delta_y^2 T_{i,j,k}^{n+1} + \delta_y^2 T_{i,j,k}^n}{2(\Delta y)^2} + \frac{\delta_z^2 T_{i,j,k}^{n+1} + \delta_z^2 T_{i,j,k}^n}{2(\Delta z)^2} \right] + \frac{g_{i,j,k}^n}{\rho C_p} \quad (3.3.1)$$

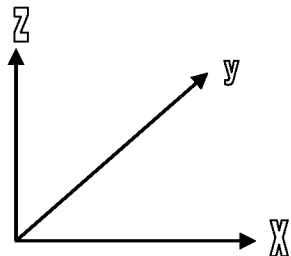
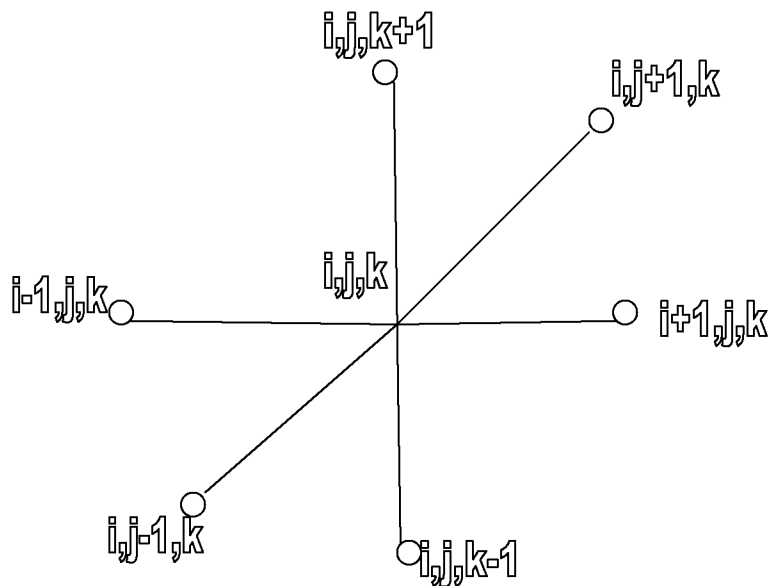
3.4 Ανάλυση με τη μέθοδο ADI

Μια εναλλακτική επαναληπτική προσέγγιση η οποία χρησιμοποιείται συχνά στον τομέα της μετάδοσης θερμότητας είναι η λεγόμενη ADI μέθοδος (που θα πει alternating – direction – implicit). Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή και υπάρχει σε πολλά βιβλία που ασχολούνται με το πρόβλημα του heat transfer, και χρησιμοποιήθηκε στο [4] για transient θερμική

ανάλυση σε ένα ολοκληρωμένο. Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (3.3.1) διακριτοποιείται σχετικά με την μεταβλητή του χρόνου t για να επιτύχουμε:

$$\frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (3.4.1)$$

Η εργασία [4] υιοθετεί τη μέθοδο Crank – Nicholson για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (2.2.3), η οποία χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές στο χώρο και τον κανόνα του τραπεζίου στο χρόνο.



Όπως γίνεται κατανοητό η μεταβλητή i μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα x , η μεταβλητή j κατά μήκος του άξονα y , ενώ η μεταβλητή k κατά μήκος του άξονα z αντίστοιχα.

Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να βρεθούν τα $T_{i,j,k}^{n+1}$ για όλα τα i, j, k υποθέτοντας ότι τα $T_{i,j,k}^n$ είναι γνωστά. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, η εκτίμηση της κατανομής της θερμοκρασίας ως συνάρτηση του χρόνου μπορεί να επιτευχθεί. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς πως όταν αριθμούμε τους κόμβους με σειρά λεξικού και συγκεντρώνουμε τις γραμμικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στον κάθε κόμβο, ο πίνακας συντελεστών των εξισώσεων που προκύπτει μπορεί να αραιωθεί και να ομαδοποιηθεί. Όμως, για να λυθεί αυτό το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων απευθείας παίρνει έναν “υπεργραμμικό” χρόνο. Για να βελτιωθεί η συνολική αποτελεσματικότητα της θερμικής ανάλυσης, οι συγγραφείς του άρθρου [4] υιοθέτησαν έναν ADI αλγόριθμο για να λύσουν την εξίσωση (3.3.1). Συγκεκριμένα, κάθε χρονικό στάδιο χωρίζεται σε 3 υποστάδια, και σε κάθε ένα από αυτά τα υποστάδια, ένα σύστημα από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών όπου λαμβάνονται υπόψη οι μεταβλητές μόνο στη μία κατεύθυνση. Τελικά, ο πίνακας που πρέπει να λυθεί για κάθε μία από αυτές τις κατευθύνσεις είναι τριδιαγώνιος οπότε ο υπολογιστικός χρόνος είναι γραμμικός. Ας ονομάσουμε κάθε ένα από αυτά τα υποστάδια ως step.

Step 1:

$$T_{i,j,k}^{n+(1/3)} - T_{i,j,k}^n = \frac{r_x \delta_x^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+(1/3)} + T_{i,j,k}^n) + r_y \delta_y^2 T_{i,j,k}^n + r_z \delta_z^2 T_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\rho C_p} g_{i,j,k}^n \quad (3.4.2)$$

Step 2:

$$T_{i,j,k}^{n+(2/3)} - T_{i,j,k}^n = \frac{r_x \delta_x^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+(1/3)} + T_{i,j,k}^n) + \frac{r_y \delta_y^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+(2/3)} + T_{i,j,k}^n) + r_z \delta_z^2 T_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\rho C_p} g_{i,j,k}^n \quad (3.4.3)$$

Step 3:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n &= \frac{r_x \delta_z^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+(1/3)} + T_{i,j,k}^n) \\
 &+ \frac{r_y \delta_y^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+(2/3)} + T_{i,j,k}^n) + \frac{r_z \delta_z^2}{2} (T_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k}^n) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} g_{i,j,k}^n
 \end{aligned}
 \tag{3.4.4}$$

όπου:

$$r_x = \frac{k_t \Delta t}{\rho C_p} \frac{1}{\Delta x^2}, \quad r_y = \frac{k_t \Delta t}{\rho C_p} \frac{1}{\Delta y^2}, \quad r_z = \frac{k_t \Delta t}{\rho C_p} \frac{1}{\Delta z^2}
 \tag{3.4.5}$$

Οι άγνωστοι όροι στα τρία αυτά step είναι τα $T_{i,j,k}^{n+(1/3)}$, $T_{i,j,k}^{n+(2/3)}$ και $T_{i,j,k}^{n+1}$ αντίστοιχα. Όπως προείπαμε για να βρεθούν αυτοί οι όροι απαιτείται η λύση τριδιαγώνιων πινάκων που λύνονται μέσα σε γραμμικό χρόνο. Ως αποτέλεσμα λοιπόν, ο συνολικός χρόνος για να εκτελεστεί μια transient θερμική ανάλυση με τη μέθοδο ADI είναι $O(ns)$, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων μέσα στο πλέγμα πεπερασμένων διαφορών και s είναι ο αριθμός των step times.

Κεφάλαιο 4

Υλοποίηση θερμικής ανάλυσης με το MATLAB

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ορισμένα εργαλεία που υπάρχουν στο MATLAB για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, και πως μπορούμε να τα αξιοποιήσουμε στα προβλήματα θερμικής ανάλυσης για ολοκληρωμένα κυκλώματα. Δεν θα μπορούμε σε λεπτομερείς αναλύσεις αυτών των εργαλείων σαν να γράφαμε manual. Θεωρείται ότι ο αναγνώστης διαθέτει μια στοιχειώδη εξοικείωση σε MATLAB, επομένως είναι σε θέση να καταλάβει εύκολα και χωρίς πολλές δυσκολίες τα βήματα που κάνουμε, ανάλογα με την περίπτωση, για να λύσουμε το πρόβλημα της θερμικής ανάλυσης με τη βοήθεια software.

4.1 Λίγα λόγια για το pde toolbox

Το Partial Differential Equation Toolbox software είναι μία από τις βασικές βιβλιοθήκες όλων των εκδόσεων των πακέτων του MATLAB. Ο αντικειμενικός σκοπός του είναι προφανώς η λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων και παρέχει στο χρήστη εργαλεία τα οποία:

- Ορίζουν ένα πρόβλημα μερικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή τους συντελεστές της, τις διδιάστατες περιοχές της, και τις συνοριακές συνθήκες της.
- Επιλύουν αριθμητικά το πρόβλημα μερικής διαφορικής εξίσωσης. Δηλαδή παράγουν αδόμητα δίκτυα (τα mesh), διακριτοποιούν τις εξισώσεις και προτείνουν μια προσεγγιστική λύση.
- Οπτικοποιούν τα αποτελέσματα

Το PDE Toolbox software έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να είναι εύχρηστο για τον αρχάριο χρήστη αλλά ταυτόχρονα παρέχει δυνατότητες και για τους πλέον απαιτητικούς χρήστες.

Η βασική προϋπόθεση για το χρήστη είναι να μπορεί να περιγράψει ένα πρόβλημα μερικής διαφορικής εξίσωσης στο χαρτί (να σχεδιάσει το πεδίο της λύσης, να ορίσει τις συνοριακές συνθήκες και τη μερική διαφορική εξίσωση). Οπότε, στη γραμμή εντολών του MATLAB πληκτρολογούμε:

```
pdetool
```

Με αυτή την απλή εντολή ανοίγει ένα graphical user interface (GUI), που είναι ένα γραφικό περιβάλλον για τη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDE). Για κοινές εφαρμογές ο χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τους φυσικούς όρους του συγκεκριμένου προβλήματος καλύτερα από αφηρημένους συντελεστές. Για να χρησιμοποιήσει κάποιος το pdetool δεν είναι απαραίτητο να ξέρει τίποτα από λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων, ή από αριθμητικά σχήματα (numerical schemes).

Για πιο προχωρημένες εφαρμογές ίσως απαιτείται να κατεβάσει κανείς εξειδικευμένα (από γεωμετρικής άποψης) πεδία λύσεων και συνοριακές συνθήκες στο workspace του MATLAB. Από τη γραμμή εντολών, ή από ειδικά αρχεία του MATLAB, μπορούμε να καλέσουμε συναρτήσεις για να κάνουμε τη “βρώμικη” δουλειά όπως είναι η παραγωγή πλεγμάτων (meshes), η διακριτοποίηση ενός φυσικού προβλήματος, η εκτέλεση παρεμβολής (interpolation στην αριθμητική ανάλυση), η σκιαγράφηση δεδομένων πάνω σε αδόμητα δίκτυα κ.ο.κ, διατηρώντας τον πλήρη έλεγχο πάνω στον γενικό αριθμητικό αλγόριθμο.

4.2 Το πρόβλημα της θερμαινόμενης μεταλλικής πλάκας

Είναι ένα από τα κλασσικά προβλήματα λύσης της θερμικής διαφορικής εξίσωσης και υπάγεται στην κατηγορία των παραβολικών εξισώσεων.

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (4.2.1)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάχυση της θερμότητας σε ένα σώμα με καθορισμένες ιδιότητες.

Στο πρώτο παράδειγμα θα εξετάσουμε μια θερμαινόμενη μεταλλική πλάκα που έχει σχήμα ορθογωνίου. Η αριστερή της πλευρά θερμαίνεται στους 100 βαθμούς. Στη δεξιά πλευρά η θερμότητα ρέει προς το περιβάλλον με σταθερό ρυθμό. Στις άλλες πλευρές της πλάκας (την πάνω και την κάτω) υποθέτουμε ότι δεν ρέει θερμότητα από και προς το περιβάλλον, ότι είναι θερμικά απομονωμένες. Με αυτά τα δεδομένα που έχουμε μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα τις συνοριακές συνθήκες της εξίσωσης του προβλήματος:

- $u = 100$ στην αριστερή πλευρά (συνθήκη Dirichlet)
- $\frac{\partial u}{\partial n} = -10$ στη δεξιά πλευρά (συνθήκη Neumann)
- $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ στις υπόλοιπες πλευρές (συνθήκη Neumann)

Επιπλέον, για να λύσουμε τη θερμική εξίσωση (όπως άλλωστε και κάθε διαφορική εξίσωση) χρειαζόμαστε μια αρχική τιμή: την τιμή της θερμοκρασίας στη μεταλλική πλάκα την αρχική χρονική στιγμή t_0 . Σε αυτή τη περίπτωση, υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία της πλάκας είναι 0 βαθμοί τη στιγμή που ξεκινάμε να τη θερμαίνουμε.

Τέλος, για να ολοκληρώσουμε τη διατύπωση του προβλήματος, καθορίζουμε ότι την αρχική χρονική στιγμή (t_0) είναι μηδέν (η θερμοκρασία) και ότι θέλουμε να καθορίσουμε την κατανομή θερμοκρασίας μέσα στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα.

Οδηγίες για το πώς χρησιμοποιούμε το GUI

Αφού έχουμε ανοίξει το pdetool GUI και έχουμε επιλέξει **Generic Scalar** mode μπορούμε να σχεδιάσουμε πολύ γρήγορα το μοντέλο της μεταλλικής πλάκας: απλά σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο (R1) που έχει γωνίες στο $x = [-0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ -0.5]$ και στο $y = [-0.8 \ -0.8 \ 0.8 \ 0.8]$. Σχεδιάζουμε ένα άλλο ορθογώνιο (R2) για να προσομοιώσουμε μια ορθογώνια κοπή πάνω στη πλάκα. Οι γωνίες της κοπής έχουν $x = [-0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ -0.05]$ και $y = [-0.4 \ -0.4 \ 0.4 \ 0.4]$. Για να γίνει πιο εύκολη η σχεδίαση της κοπής αυτής πάνω στο σχήμα της πλάκας, ανοίγουμε το

παράθυρο διαλόγου *Grid Spacing* από το μενού *Options* και βάζουμε το **x-axis extra ticks** από -0.05 μέχρι 0.05.



Στη συνέχεια πατάμε το πλήκτρο $\partial\Omega$, και επιλέγουμε τα σύνορα στα οποία ορίζουμε τις συνοριακές συνθήκες που θέλουμε. Επιλέγοντας την επιλογή **Select All** από το μενού **Edit** και ορίζοντας τη συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

για όλα τα σύνορα στην αρχή, είναι μια καλή ιδέα να ξεμπερδεύουμε και μένει μόνο το αριστερό και δεξιό σύνορο για να οριστούν ξεχωριστά οι συνοριακές τους συνθήκες.

Το επόμενο βήμα είναι να ανοίξουμε το παράθυρο διαλόγου PDE Specification που βρίσκεται στο μενού PDE (εναλλακτικά μπορούμε να πατήσουμε απευθείας το πλήκτρο PDE).

Η χαρακτηριστική παραβολική PDE στο Partial Differential Equation Toolbox την οποία πρέπει να προσαρμόσουμε για να λύσουμε το εκάστοτε πρόβλημα που έχουμε είναι της μορφής:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

με αρχικές τιμές $u_0 = u(t_0)$ και οι στιγμές κατά τις οποίες θα υπολογίσουμε τη λύση κωδικοποιούνται στο πίνακα `tlist`.

Στην περίπτωση μας έχουμε $d=1$, $c=1$, $a=0$ και $f=0$.

Αρχικοποιούμε το πλέγμα (mesh) πατώντας το πλήκτρο Δ . Αν θέλουμε μπορούμε να μεγαλώσουμε το πλέγμα πατώντας το πλήκτρο **Refine**. Αυτό γίνεται όταν θέλουμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση της λύσης μας επιζητώντας μεγαλύτερη ακρίβεια.

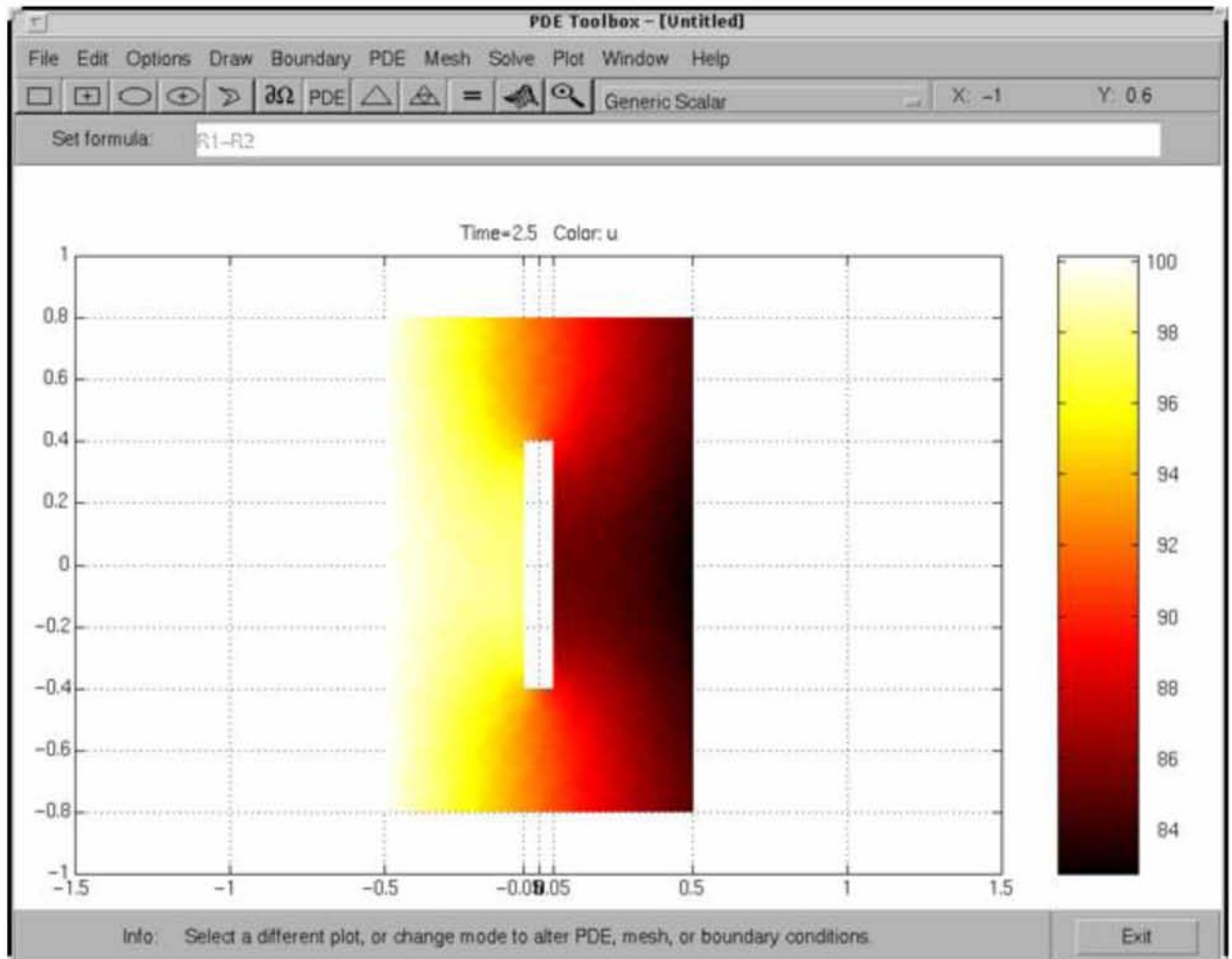
Οι αρχικές τιμές $u_0=0$, και η λίστα των στιγμών εισάγονται στον πίνακα του MATLAB `[0:0.5:5]`, στο παράθυρο διαλόγου `solve parameters` επιλέγοντας **Parameters** από το μενού **Solve**.

Πλέον το πρόβλημα μας μπορεί να λυθεί. Πατάμε το πλήκτρο $=$ για να λυθεί η θερμική εξίσωση σε 11 διαφορετικά χρονικά σημεία από το 0 μέχρι τα 5 δευτερόλεπτα. Σχηματίζεται ένα διάγραμμα με την κατανομή θερμοκρασίας μετά το πέρας της τελευταίας χρονικής στιγμής που ορίσαμε (στην προκειμένη περίπτωση μόλις περάσουν 5 seconds).

Ένας πιο ενδιαφέρων τρόπος για να οπτικοποιήσουμε δυναμική τη διαδικασία της θερμικής κατανομής είναι να κάνουμε *animate* τη λύση. Για να ξεκινήσει το animation, τσεκάρουμε το **Animation** στο παράθυρο διαλόγου **Plot Selection**. Επίσης, στην επιλογή `colormap` επιλέγουμε `hot`. Κάνουμε κλικ το πλήκτρο **Plot** για να αρχίσει η διαδικασία του Animation plot σε ένα ξεχωριστό παράθυρο. Παρατηρούμε ότι το Animation εκτυλίσσεται σε 5 χρόνους.

Η θερμοκρασία της πλάκας αυξάνεται πολύ γρήγορα. Για να βελτιώσουμε το Animation και να επικεντρωθούμε στο πρώτο δευτερόλεπτο, προσπαθούμε να αλλάξουμε τη λίστα των χρονικών σημείων στο MATLAB με την έκφραση `logspace(-2,0.5,20)`.

Επίσης, μπορούμε να αλλάξουμε το συντελεστή θερμικής χωρητικότητας d και τη θερμική ροή στο δεξιό σύνορο για να δούμε πως αυτά επηρεάζουν την θερμική κατανομή πάνω στη μεταλλική πλάκα.



Λύση του προβλήματος απευθείας από τη γραμμή εντολών

Αρχικά, πρέπει να δημιουργηθούν αρχεία με τις συνοριακές συνθήκες και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Τα αρχεία που θα χρησιμοποιηθούν εδώ δημιουργήθηκαν κάνοντας χρήση του `pdetool`. Η γεωμετρία της μεταλλικής πλάκας περιγράφεται στο `crackg.m`, ενώ οι συνοριακές συνθήκες βρίσκονται στο αρχείο `crackb.m`.

Για να φτιάξουμε ένα αρχικό πλέγμα (mesh), καλούμε τη συνάρτηση `initmesh`:

```
[p, e, t] = initmesh ( 'crackg ' );
```

Η θερμική εξίσωση μπορεί να λυθεί τώρα με τη συνάρτηση `parabolic` του PDE toolbox. Η γενική παραβολική PDE που λύνει αυτή η συνάρτηση (όπως άλλωστε έχουμε ξαναπεί) είναι η:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

με αρχική τιμή $u_0 = u(t_0)$ και χρονικές στιγμές στις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση στον πίνακα `tlist`. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $d=1$, $c=1$, $a=0$ και $f=0$. Η αρχική τιμή $u_0=0$, και η λίστα των χρονικών σημείων, `tlist`, θέτονται στον πίνακα `0 : 0.5 : 5`.

Δεν μένει κάτι άλλο να κάνουμε από το να καλέσουμε την `parabolic`:

```
u = parabolic (0, 0:0.5:5, 'crackb', p, e, t, 1, 0, 0, 1);
```

Η λύση `u` δημιούργησε με αυτό τον τρόπο ένα πίνακα με 11 στήλες όπου σε κάθε στήλη αντιστοιχεί η λύση σε κάθε ένα από τα 11 σημεία του χρόνου `0, 0.5, ..., 4.5, 5.0`.

Για να δούμε το `plot` της λύσης τη χρονική στιγμή $t = 0.5$ καλούμε τη συνάρτηση `pdeplot`:

```
pdeplot = (p, e, t, 'xydata', u(:, 11), 'mesh', 'off', ..., 'colormap', 'hot');
```

Θερμική κατανομή με ραδιενεργή ράβδο

Το πρόβλημα της θερμικής κατανομής είναι ένα παράδειγμα ενός τρισδιάστατου προβλήματος παραβολικής PDE που γίνεται δυσδιάστατο με τη χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων.

Υποθέτουμε μια κυλινδρική ραδιενεργή ράβδο. Στην αριστερή της άκρη, προστίθεται συνεχώς θερμότητα. Στη δεξιά άκρη διατηρείται μια σταθερή θερμοκρασία. Στις υπόλοιπες, ανταλλάσσεται ενέργεια με το περιβάλλον. Την ίδια στιγμή, παράγεται ομοιόμορφα θερμότητα σε όλη τη ράβδο εξαιτίας της ραδιενεργής διαδικασίας. Υποθέτουμε ότι η αρχική θερμοκρασία είναι μηδέν. Αυτό οδηγεί στο παρακάτω πρόβλημα:

$$\rho C \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) = f$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, C είναι η θερμική χωρητικότητα της ράβδου, k η θερμική αγωγιμότητα και f η ραδιενεργή πηγή θερμότητας.

Η πυκνότητα γι' αυτή τη μεταλλική ράβδο είναι 7800 kg/m^3 , η θερμική χωρητικότητα $500 \text{ Ws/kg}^\circ\text{C}$ και η θερμική αγωγιμότητα είναι $40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Η θερμική πηγή είναι 20000 W/m^3 . Η θερμοκρασία στη δεξιά άκρη είναι 100°C . Η περικλειόμενη θερμοκρασία στις άλλες άκρες (πάνω και κάτω) είναι 100°C και ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας είναι $50 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$. Η θερμική ροή στο αριστερό άκρο είναι 5000 W/m^2 .

Αλλά επειδή αυτό είναι ένα κυλινδρικό πρόβλημα, χρειάζεται να μετατρέψουμε την εξίσωση, κάνοντας χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων r , z και θ . Εξαιτίας της συμμετρικής ιδιότητας, η λύση είναι ανεξάρτητη του θ , επομένως η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται ως:

$$r\rho C \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(kr \frac{\partial u}{\partial z} \right) = fr$$

με συνοριακές συνθήκες:

- $\vec{n} \cdot (k\nabla u) = 5000$ στο αριστερό άκρο της ράβδου (συνθήκη Neumann). Εφόσον στο PDE toolbox software η συνθήκη του Neumann δίνεται από τη γενικότερη σχέση: $\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$ και το c εξαρτάται από το r σε αυτό το πρόβλημα ($c = kr$), η συνοριακή συνθήκη εκφράζεται ως $\vec{n} \cdot (c\nabla u) = 5000r$.
- $u = 100$ στο δεξιό άκρο της ράβδου (συνθήκη Dirichlet)
- $\vec{n} \cdot (k\nabla u) = 50(100 - u)$ στα υπόλοιπα σύνορα της ράβδου (Neumann condition). Στο PDE toolbox software, αυτή η σχέση εκφράζεται ως $\vec{n} \cdot (c\nabla u) + 50r \cdot u = 50r \cdot 100$.
- Ο κυλινδρικός άξονας $r = 0$ δεν αποτελεί σύνορο στο κανονικό πρόβλημα, αλλά στο μετασχηματισμένο μετατρέπεται σε σύνορο. Πρέπει να θέσουμε επίσης μια τεχνητή συνοριακή συνθήκη $\vec{n} \cdot (c\nabla u) = 0$.

Η αρχική τιμή είναι $u(t_0) = 0$.

Χρήση του Graphical User Interface

Αυτό το πρόβλημα λύνεται με τη χρήση του pde tool GUI. Μοντελοποιούμε τη ράβδο ως ένα ορθογώνιο με τη βάση κατά μήκος του άξονα x , με τον άξονα x να κείται επί της διεύθυνσης z και τον άξονα y επί της διεύθυνσης r . Ένα ορθογώνιο με γωνίες στα σημεία $(-1.5, 0)$, $(1.5, 0)$, $(1.5, 0.2)$ και $(-1.5, -0.2)$ θα μοντελοποιούσε μια ράβδο με μήκος 3 και ακτίνα 0.2.

Εισάγουμε τις συνοριακές συνθήκες με διπλό κλικ στα σύνορα του σχήματος ώστε να ανοίξει το παράθυρο διαλόγου **Boundary Condition**. Στο αριστερό άκρο, εφαρμόζουμε τη συνθήκη Neumann με 0 για q και $5000 \cdot y$ για g . Στο δεξιό άκρο χρησιμοποιούμε τη συνθήκη Dirichlet με τιμή 1 για το h , και 100 για το r . Στα υπόλοιπα άκρα, εφαρμόζουμε συνθήκες Neumann με $50 \cdot y$ για q και $50 \cdot y \cdot 100$ για g . Για τον άξονα εφαρμόζουμε επίσης Neumann με 0 για q και g .

Στο **PDE Specification** εισάγουμε τους συντελεστές: για c βάζουμε $40 \cdot y$, $a = 0$, το d είναι $7800 \cdot 500 \cdot y$, και το f είναι $20000 \cdot y$.

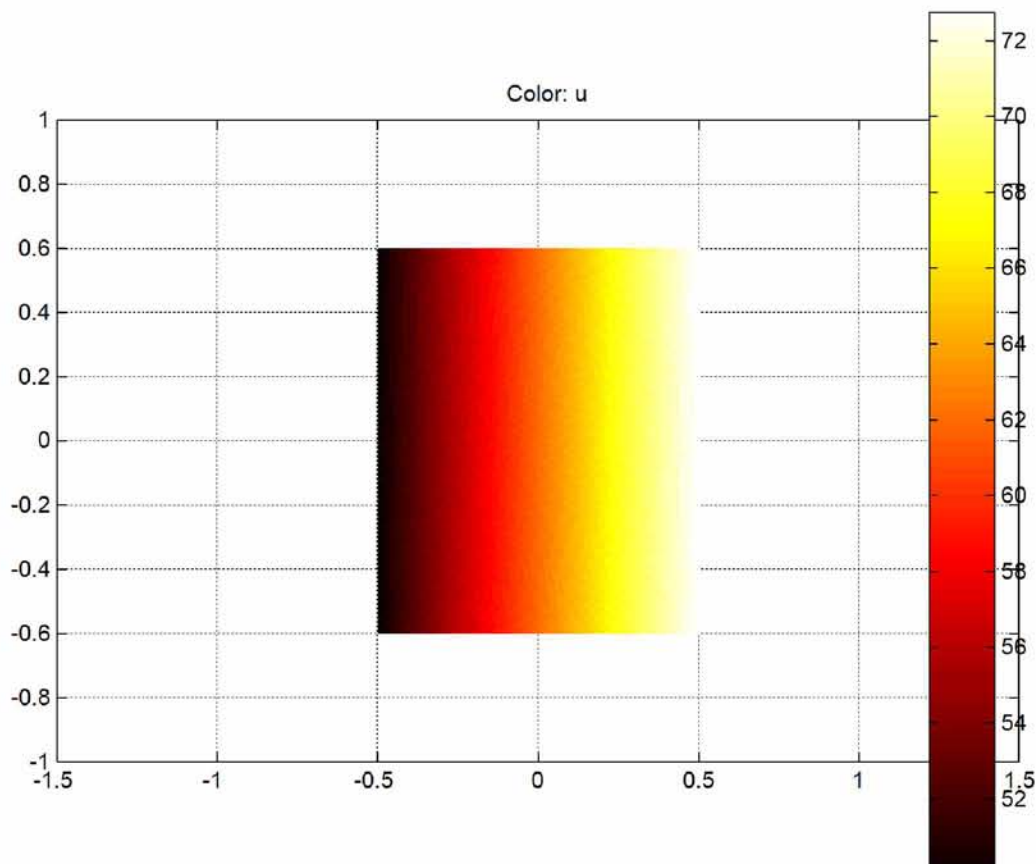
Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα επιστρατεύσουμε όλες τις γνώσεις μας που σχετίζονται με τη θερμική μερική διαφορική εξίσωση για να προσομοιώσουμε με τα εργαλεία του PDE toolbox software του πακέτου MATLAB τη θερμική κατανομή μιας πλάκας αλουμινίου (βασικό μέταλλο που χρησιμοποιείται ευρέως στη βιομηχανία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων) θέτοντας διάφορες συννοριακές συνθήκες στις άκρες του, προσπαθώντας να ερμηνεύσουμε από φυσικής πλευράς τη συμπεριφορά του. Από τη θεωρία υλικών είναι γνωστό ότι η θερμική διαγωγιμότητα του αλουμινίου k_t σε συνθήκες δωματίου κυμαίνεται από 204.3 έως 250 W/m°C. Στα πειράματα που θα κάνουμε υποθέτουμε ότι το αλουμίνιο έχει k_t ίσο με 240 W/ m°C. Επίσης, υποθέτουμε ότι η θερμική χωρητικότητα του αλουμινίου C_p ισούται με 940 Joule/kg °C , ενώ η πυκνότητα του ρ είναι 2707 kg/m³.

Θερμική ανάλυση αλουμινίου σε σταθερή κατάσταση

Όπως είπαμε στην αρχή, όταν κάνουμε ανάλυση σε σταθερή κατάσταση αφαιρούμε τη μεταβλητή του χρόνου και μηδενίζουμε τη χρονική παράγωγο της εξίσωσης. Η αρχική παραβολική διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε $-\nabla \cdot (k\nabla T(r)) = g(r)$, η οποία είναι μια ελλειπτική εξίσωση. Οπότε η μοναδική διαφορά σε σχέση με την ανάλυση μεταβαλλόμενης κατάστασης είναι ότι επιλέγουμε Elliptic στο παράθυρο διαλόγου **PDE Specification** αντί για parabolic. Και προφανώς δεν έχει νόημα να θέσουμε ακολουθία χρονικών στιγμών κατά τη λύση της εξίσωσης ή να ορίσουμε μια αρχική τιμή στο χρόνο.

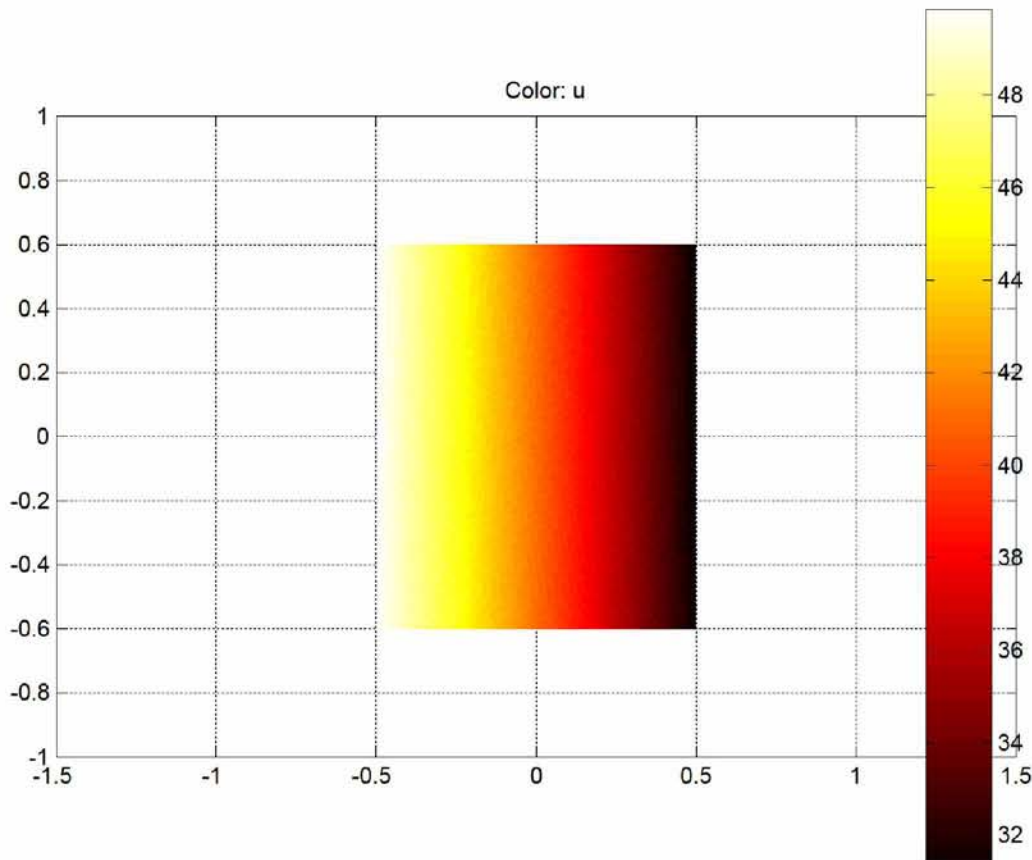
Πείραμα 1

Σε αυτή τη περίπτωση θα προσομοιώσουμε μια πλάκα αλουμινίου διαστάσεων 1 x 1.2 στην οποία επιδρά πηγή θερμότητας των 1000 W/m³ με το αριστερό άκρο να έχει θερμανθεί στους 50 °C, στο δεξιό άκρο προστίθεται συνεχώς θερμότητα με σταθερό ρυθμό 5.000 W/m² και στα υπόλοιπα (πάνω και κάτω) θεωρούμε ότι δεν ανταλλάσσεται θερμότητα με το περιβάλλον.



Παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία είναι πιο υψηλή στο δεξιό άκρο (72.5 βαθμοί) ενώ στο αριστερό παραμένει σταθερή στους 50 βαθμούς, πράγμα αναμενόμενο αφού βάλαμε να αυξάνεται η θερμότητα στο δεξιό άκρο.

Ανάποδα, αν τώρα υποθέσουμε ότι στο δεξιό άκρο αφαιρείται συνεχώς θερμότητα με σταθερό ρυθμό 5.000 W/m^2 (η μόνη αλλαγή σε σχέση με πριν είναι ότι στη συνοριακή συνθήκη Neumann βάζουμε $g = -5.000$) τότε το διάγραμμα αλλάζει ως εξής:

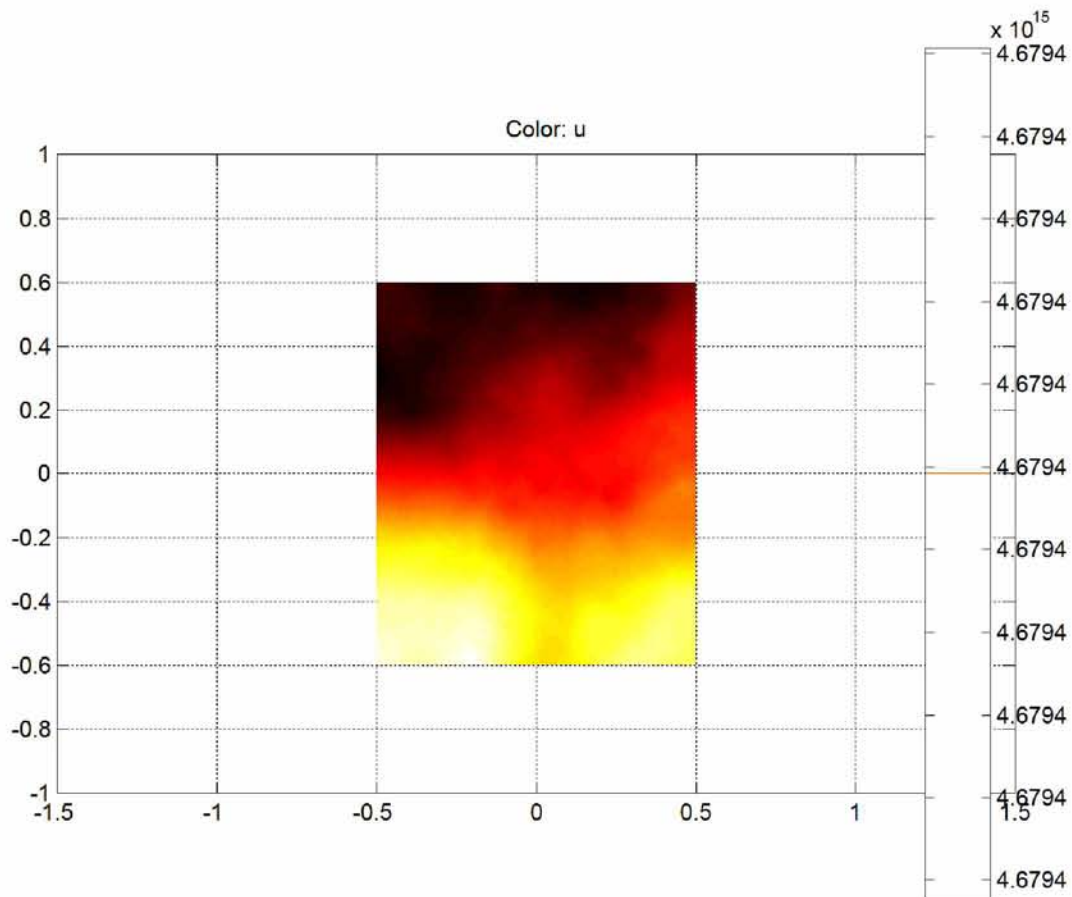


Αντίθετα με πριν η μεγαλύτερη θερμοκρασία είναι στο αριστερό άκρο όπου παραμένει σταθερά στους 50 °C ενώ στο δεξιό άκρο μειώθηκε στους 31.

Πείραμα 2

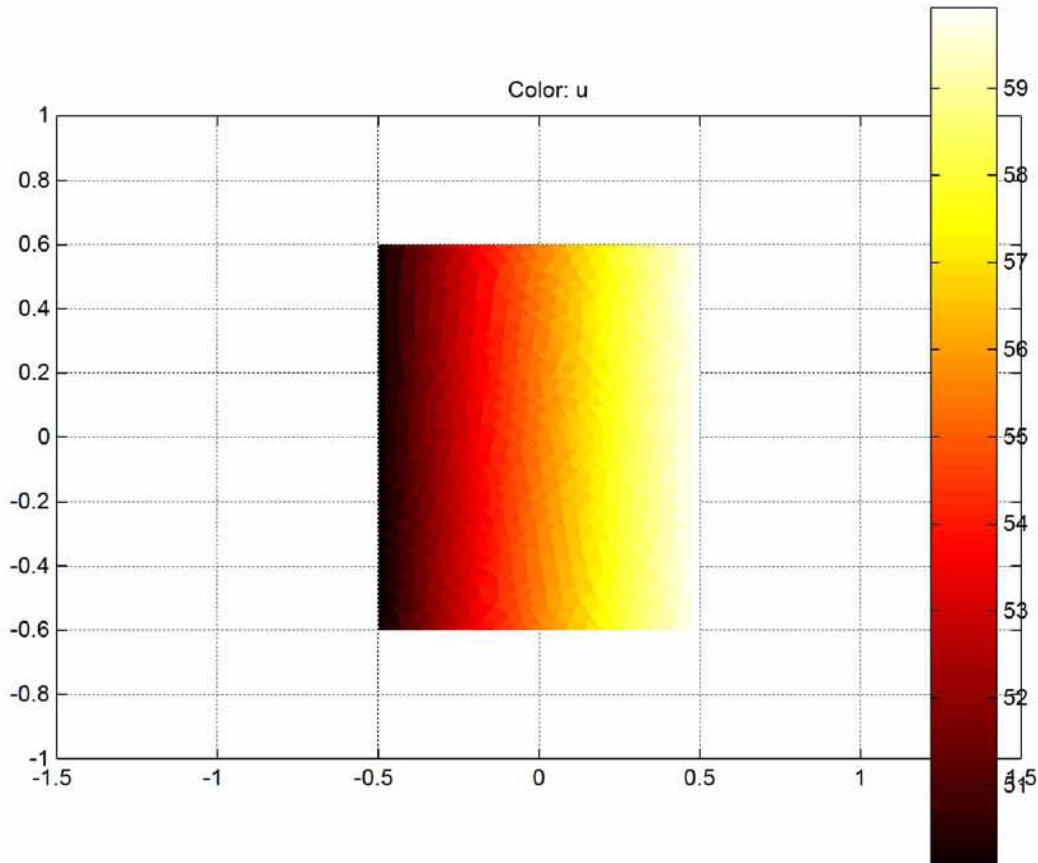
Η αλλαγή σε σχέση με το προηγούμενο είναι ότι στο αριστερό άκρο υποθέτουμε επίσης ότι προστίθεται συνεχώς θερμότητα με σταθερό ρυθμό 5.000 W/m².

Αν στο δεξιό άκρο επίσης προσθέτουμε συνεχώς θερμότητα με τον ίδιο ρυθμό τότε προφανώς η θερμοκρασία της πλάκας θα φτάσει σε εξωφρενικά υψηλές τιμές, δηλαδή κάποια στιγμή αναπόφευκτα θα υπερθερμανθεί και θα καταστραφεί:



Βλέπουμε δηλαδή ότι η θερμοκρασία γίνεται τάξης μεγέθους 10^{15} . Αλλά και στην περίπτωση που στο δεξιό άκρο αφαιρείται συνεχώς θερμότητα με σταθερό ρυθμό, πάλι η τιμή της θερμοκρασίας φτάνει σε υψηλά επίπεδα γιατί δεν γίνεται ένα υλικό να αποβάλλει την ίδια θερμότητα που δέχεται συνεχώς εξαιτίας της φύσης του, με αποτέλεσμα να συσσωρεύετε υπέρμετρα θερμότητα.

Αν κρατήσουμε και στο αριστερό και στο δεξιό άκρο σταθερή θερμοκρασία (50 και 60 βαθμούς αντίστοιχα) τότε:

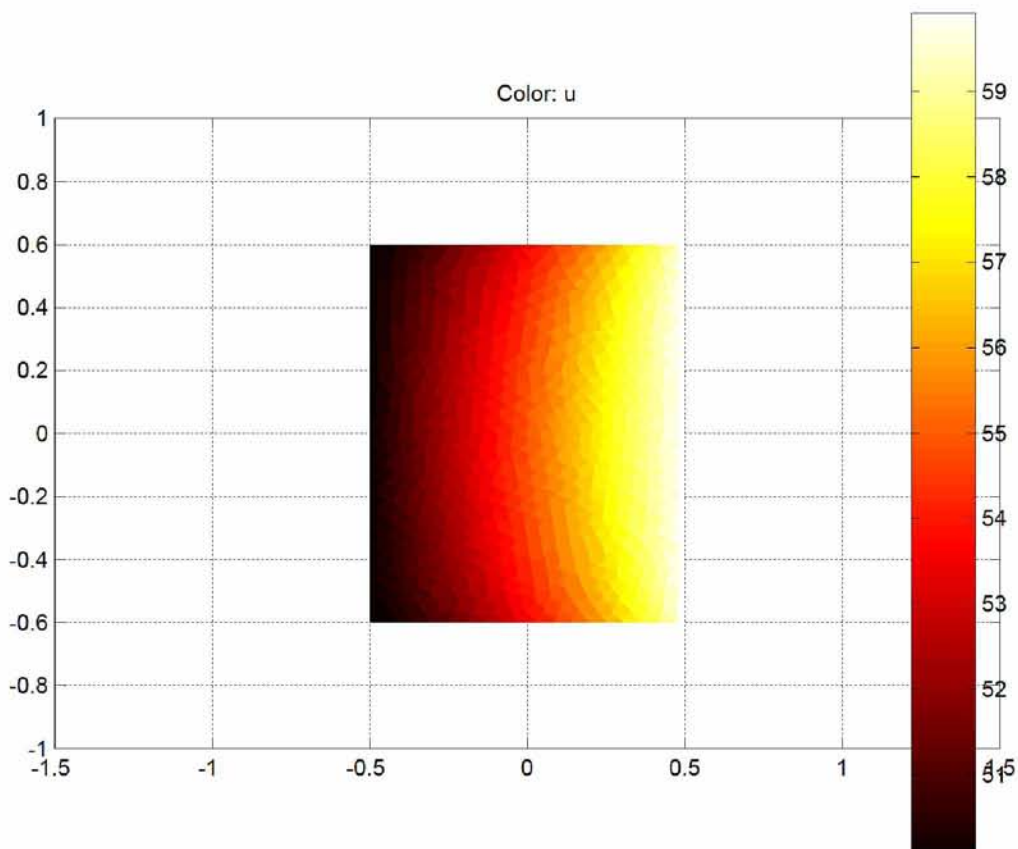


Δηλαδή η θερμοκρασία κυμαίνεται από τους 50 μέχρι τους 60 βαθμούς και ακριβώς στη μεσαία γραμμή που το χωρίζει κάθετα έχει 55.

Πείραμα 3

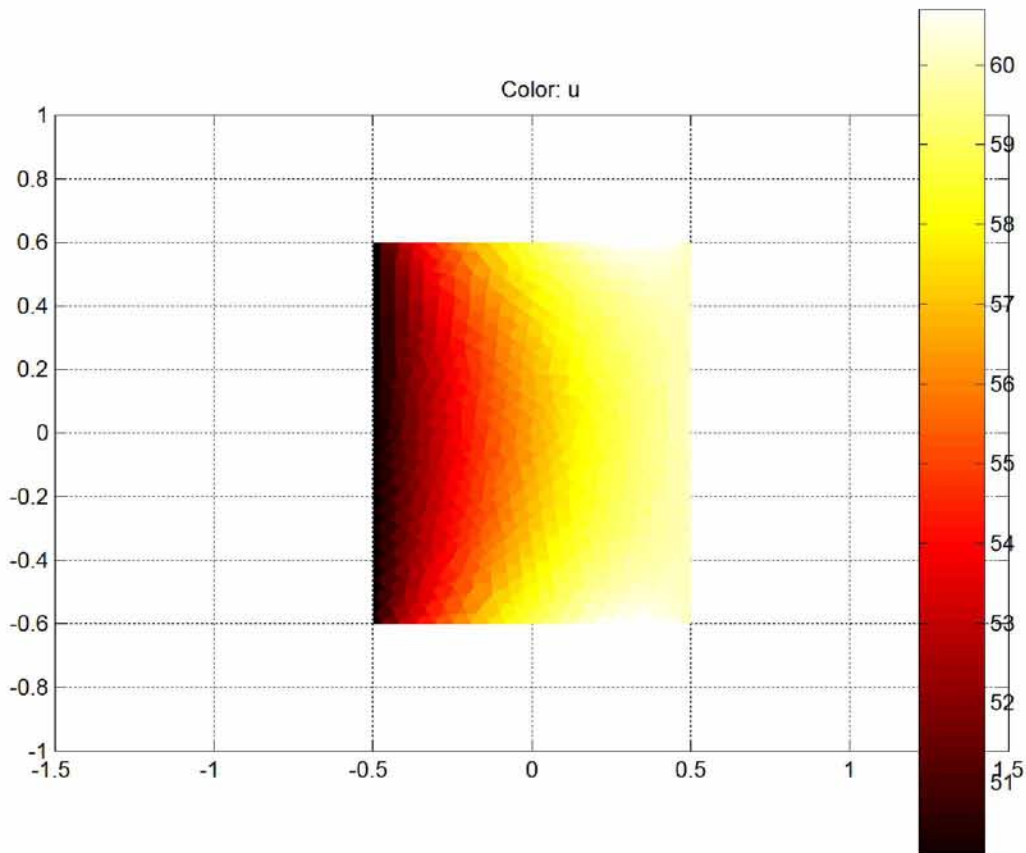
Εδώ θα αλλάξουμε τα πάνω και κάτω άκρα. Υποθέτουμε ότι ακολουθούν τη συνοριακή συνθήκη διάδοσης και ανταλλάσσουν θερμότητα με το περιβάλλον με συντελεστή μεταφοράς θερμότητας $h = 50 \text{ W/m}^2\text{C}$. Έστω ότι στο δεξιό και αριστερό άκρο εφαρμόζουμε σταθερή θερμοκρασία (60 και 50 βαθμούς αντίστοιχα).

Αν η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία των 50 βαθμών (έστω 30 βαθμοί) τότε η θερμική κατανομή στην πλάκα προσομοιώνεται ως:



Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή θερμοκρασίας δεν είναι ομοιόμορφη κατά μήκος των κάθετων γραμμών. Αυξάνεται σταδιακά από αριστερά προς τα δεξιά όμως όσο πιο κοντά είμαστε στο το πάνω και το κάτω άκρο τόσο πιο πολύ “αργεί” η αύξηση της θερμοκρασίας. Αυτό είναι λογικό εφόσον τα άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με το περιβάλλον που είναι ψυχρότερο, οπότε τείνουν να κρατήσουν χαμηλότερη θερμοκρασία απ’ ότι η μέση της πλάκας (η μέση ως προς το πάνω και το κάτω άκρο). Με απλά λόγια τα άκρα θερμαίνονται δυσκολότερα.

Αν τώρα τα άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με ένα περιβάλλον στο οποίο η θερμοκρασία είναι πολύ πιο πάνω από τους 60 βαθμούς (έστω στους 100) τότε η θερμοκρασία μεταβάλλεται γρηγορότερα κατά μήκος του πάνω και του κάτω άκρου σε σχέση με τη μέση:

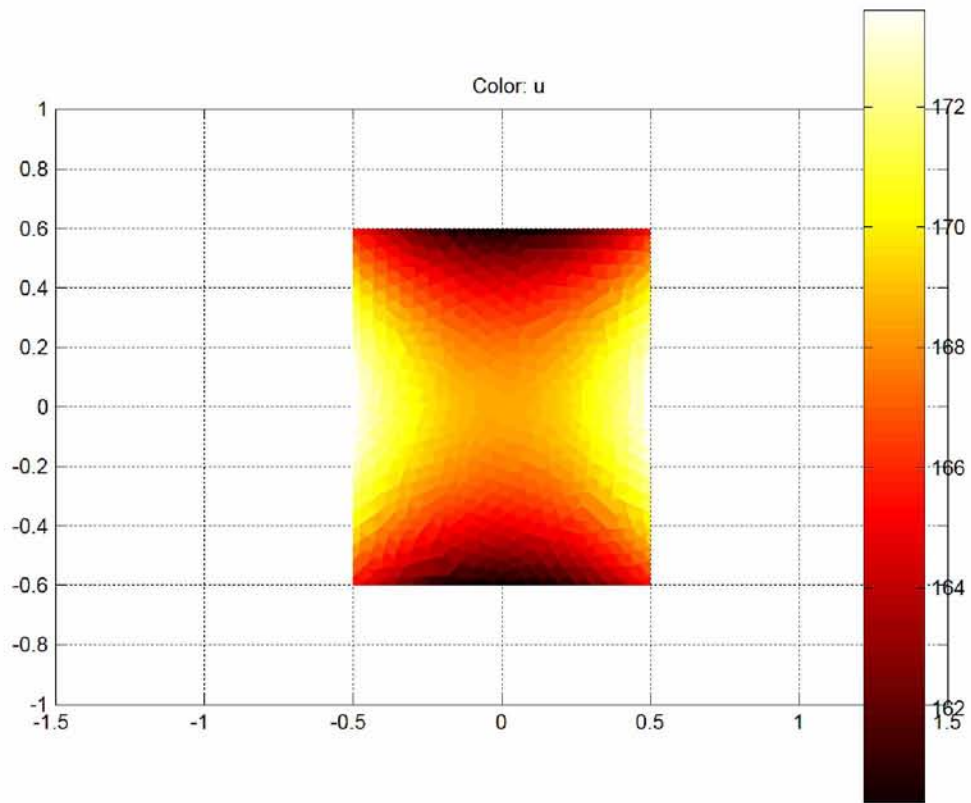


Με απλά λόγια τα άκρα θερμαίνονται ευκολότερα.

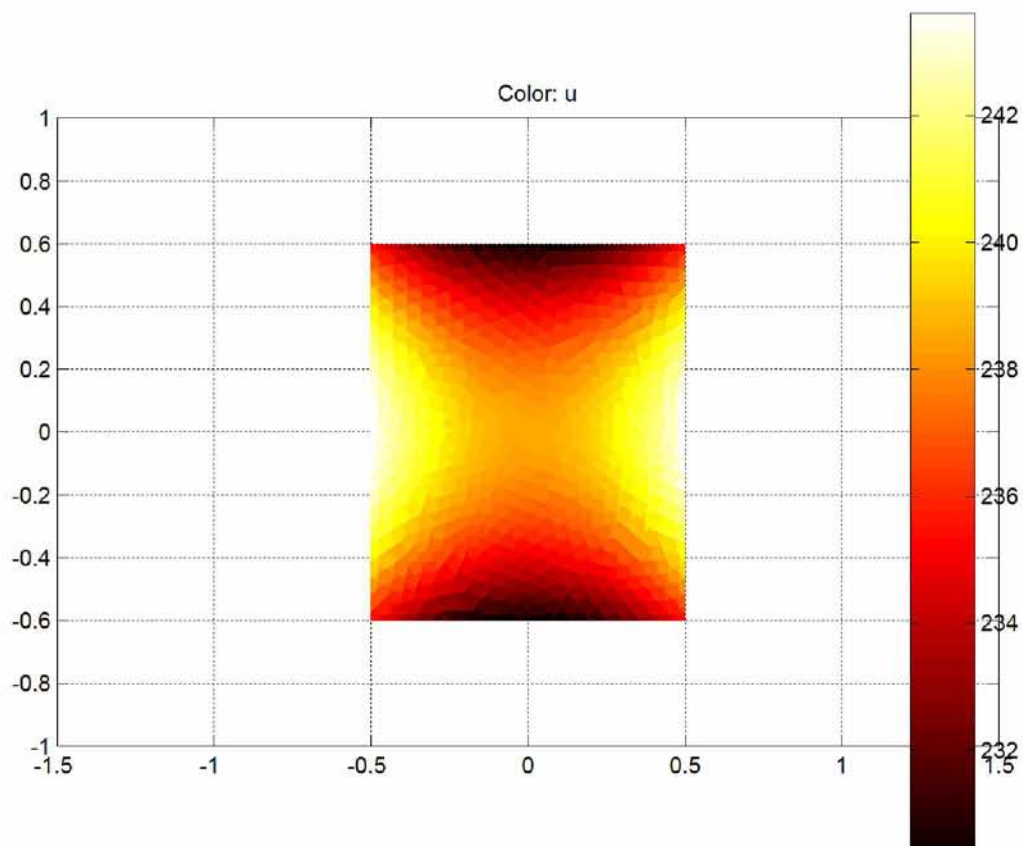
Πείραμα 4

Ενδιαφέρον έχει να δούμε τι συμβαίνει όταν το δεξιό και αριστερό άκρο αυξάνουν η μειώνουν συνεχώς θερμότητα με σταθερό ρυθμό ενώ το πάνω και κάτω άκρο συνεχίζουν να ανταλλάσσουν θερμότητα με το περιβάλλον:

Στην περίπτωση που το δεξιό και αριστερό άκρο αυξάνουν τη θερμότητα τους με ρυθμό 5.000 W/m^2 ενώ τα πάνω και κάτω άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 30 βαθμών και υποθέτοντας συντελεστή μεταφοράς $50 \text{ W/m}^2\text{C}$ τότε:

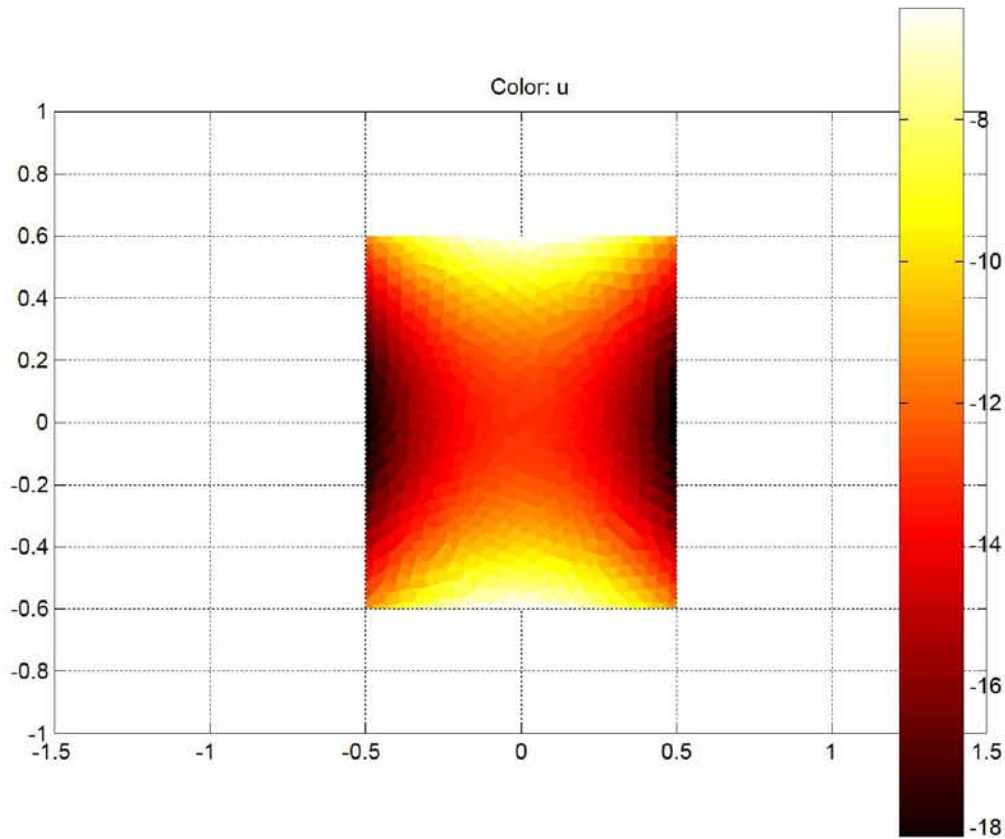


Όταν τα πάνω και κάτω άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον 100 βαθμών τότε:



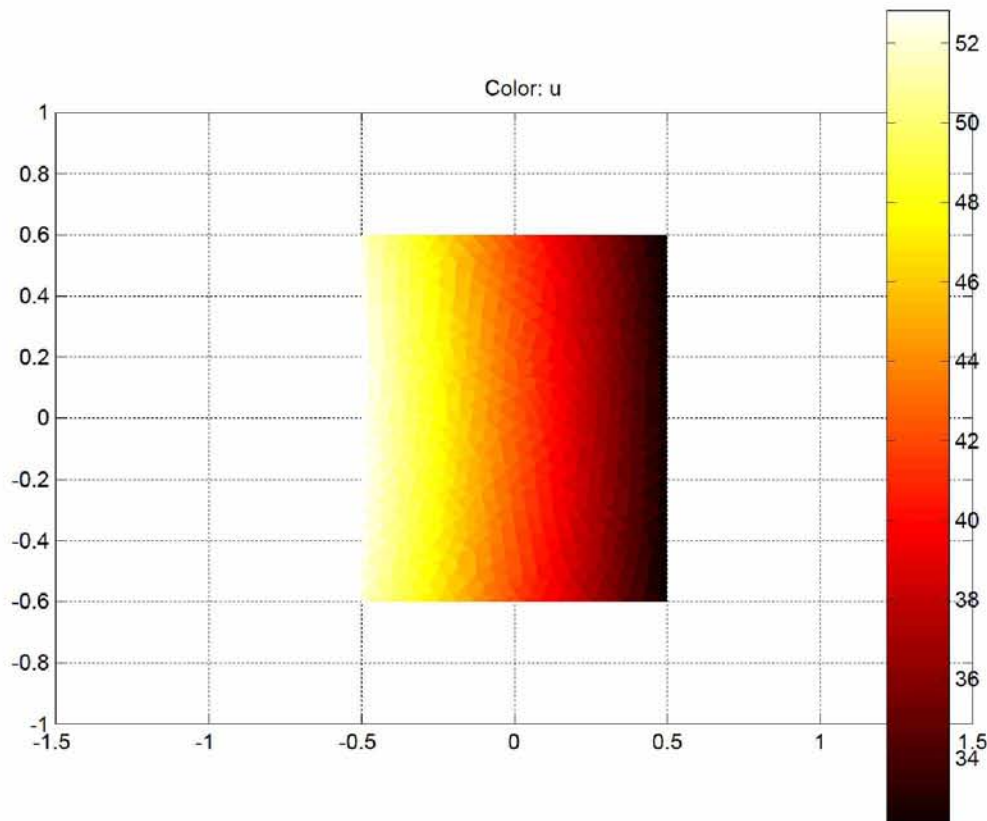
Παρατηρούμε ότι στην ουσία δεν αλλάζει η κατανομή της θερμοκρασίας απλώς ανεβαίνει 70 βαθμούς περισσότερο. Όσο δηλαδή είναι η απόκλιση μεταξύ των θερμοκρασιών στο περιβάλλον (από τους 30 πήγαμε στους 100).

Αν τώρα αντί στο δεξιό και το αριστερό άκρο να αυξάνεται η θερμότητα, μειώνεται κατά τον ίδιο ρυθμό ενώ τα πάνω και κάτω άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 100 βαθμών τότε:



αντίστροφα σε σχέση με πριν οι υψηλότερες θερμοκρασίες είναι στο μέσο των πάνω και κάτω άκρων, ενώ στο μέσο των δεξιών και αριστερών είναι οι χαμηλότερες. Οι θερμοκρασίες είναι βορείου πόλου πράγμα που σημαίνει ότι το συγκεκριμένο σενάριο δύσκολα μπορεί να συμβεί στην πραγματικότητα.

Τέλος, θεωρούμε ότι στο δεξιό άκρο η θερμοκρασία μειώνεται με ρυθμό 5000 W/m^2 , στο αριστερό αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό ενώ τα πάνω-κάτω άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 30 βαθμών, ενώ ο συντελεστής θερμικής μεταφοράς είναι $h = 50 \text{ W/m}^2\text{°C}$. Τότε τα αποτελέσματα δείχνουν:



Στο αριστερό άκρο έχουμε την υψηλότερη θερμοκρασία (52.5 βαθμούς) ενώ στο δεξιό τη χαμηλότερη (περίπου 33 βαθμοί). Παρατηρούμε ότι η κατανομή μεταβάλλεται ομαλά και ομοιόμορφα από το ένα άκρο στο άλλο και οι τιμές είναι αρκετά φυσιολογικές για συνθήκες ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.

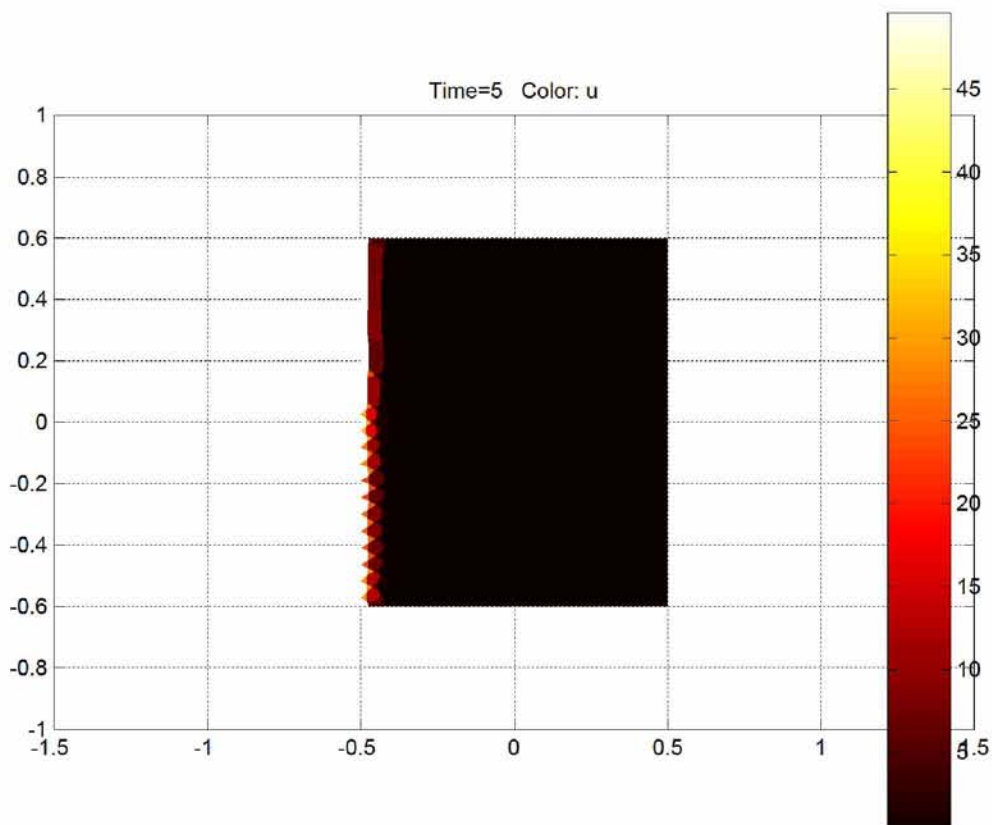
Θερμική ανάλυση αλουμινίου σε μεταβαλλόμενη κατάσταση

Η διαφορά μας με πριν είναι ότι τώρα λαμβάνουμε υπόψη τη μεταβλητή του χρόνου στη θερμική εξίσωση και πρέπει να ορίσουμε αρχική τιμή και χρονικές στιγμές στις οποίες θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα. Θα υποθέσουμε σε όλα τα πειράματα ότι $u(t_0) = 0$ και ότι οι χρονικές στιγμές που θα λυθεί το πρόβλημα είναι από 0 μέχρι 5 δευτερόλεπτα σε βήμα 0.5 . Τώρα έχουμε να λύσουμε μια παραβολική εξίσωση όπου εκτός της θερμικής αγωγιμότητας του αλουμινίου k_t λαμβάνουμε υπόψη και την πυκνότητα του ρ που είναι 2707 kg/m^3 αλλά και τη θερμική χωρητικότητα C η οποία είναι $940 \text{ Joule/kg } ^\circ\text{C}$. Προφανώς και δεν είναι εύκολο στα πειράματα να δούμε τα Animations (πράγμα που

είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον), οπότε το αποτέλεσμα της θερμικής κατανομής που θα απεικονίσουμε είναι τη χρονική στιγμή αμέσως μετά τα 5 δευτερόλεπτα.

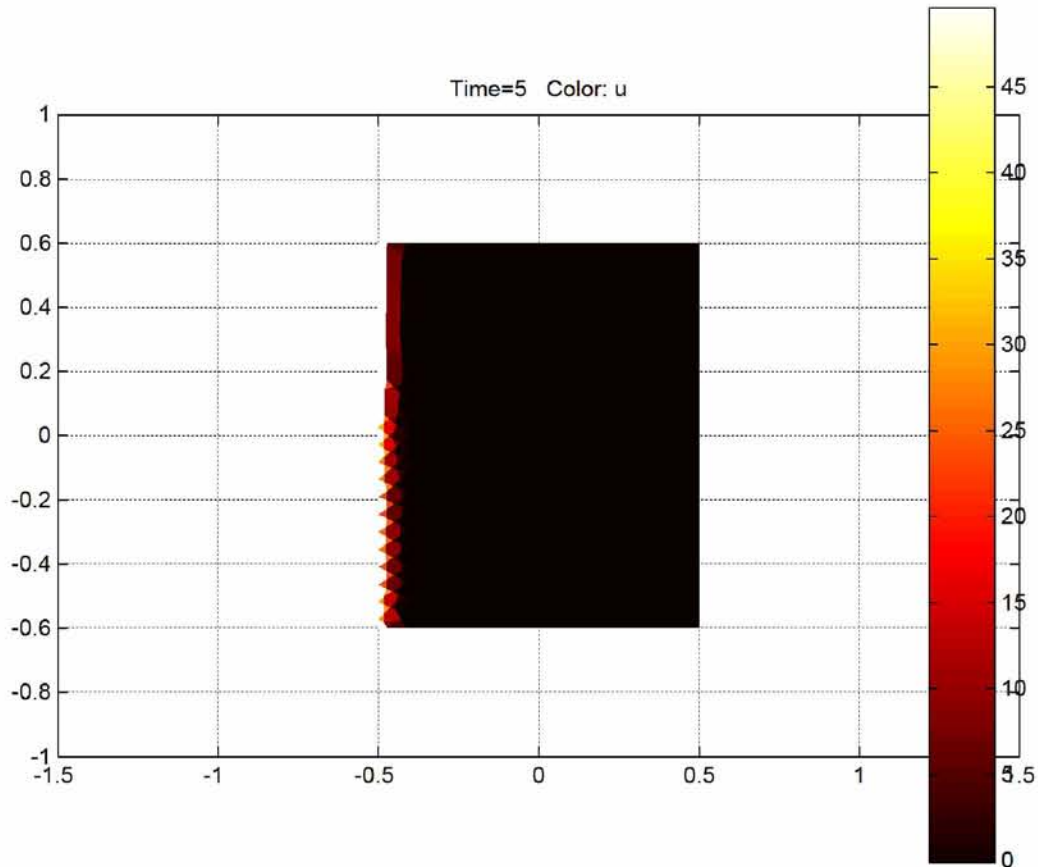
Πείραμα 1

Έστω ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε μεταλλική πλάκα αλουμινίου με διαστάσεις 1×1.2 , στην οποία επιδρά πηγή θερμότητας 1.000 W/m^3 , στο αριστερό της άκρο διατηρούμε μια σταθερή θερμοκρασία (έστω 50 βαθμούς), στο δεξιό άκρο προστίθεται συνεχώς θερμότητα με ρυθμό 5.000 W/m^2 ενώ στο πάνω και κάτω άκρο δεν ανταλλάσσεται θερμότητα με το περιβάλλον. Σε αυτή τη περίπτωση η προσομοίωση που κάναμε δίνει:



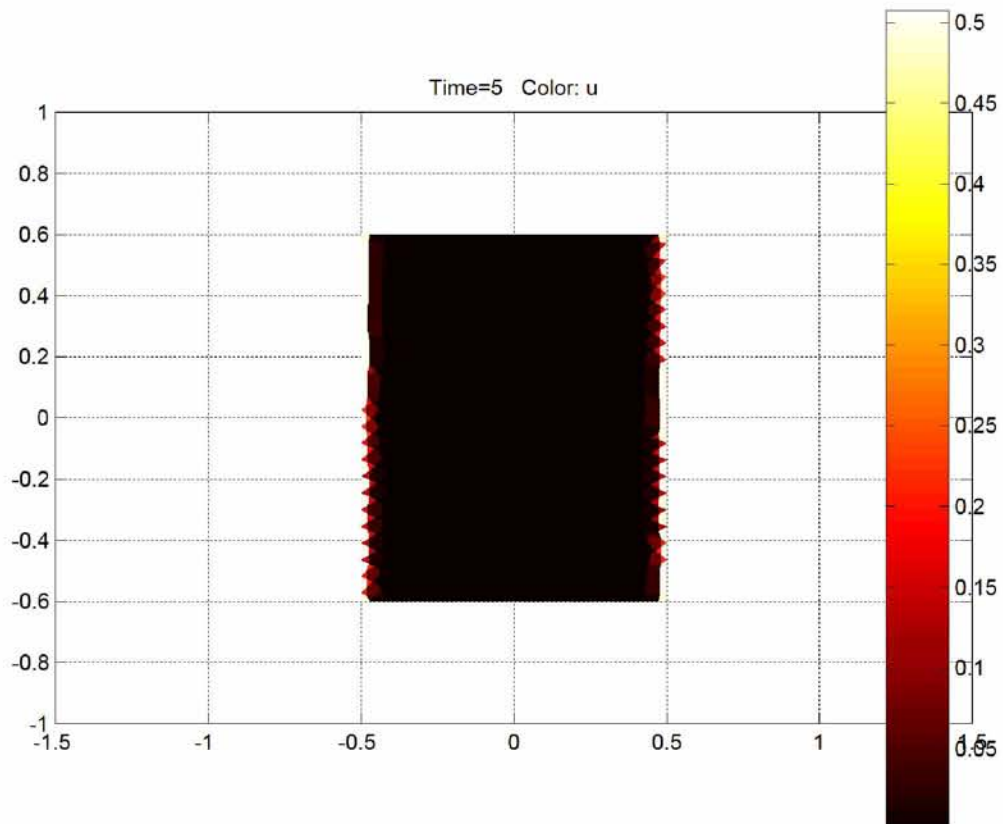
Παρατηρούμε ότι η ψηλότερη θερμοκρασία είναι στο αριστερό άκρο (όπου υποθέσαμε σταθερή θερμοκρασία 50 βαθμών) ενώ μειώνεται απότομα και κάτω από 5 μόλις προχωρήσουμε ελάχιστα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι στο δεξιό άκρο αντί να προστίθεται θερμότητα, αφαιρείται με τον ίδιο ρυθμό στην προσομοίωση διαπιστώνουμε ότι δεν αλλάζει σχεδόν τίποτα:



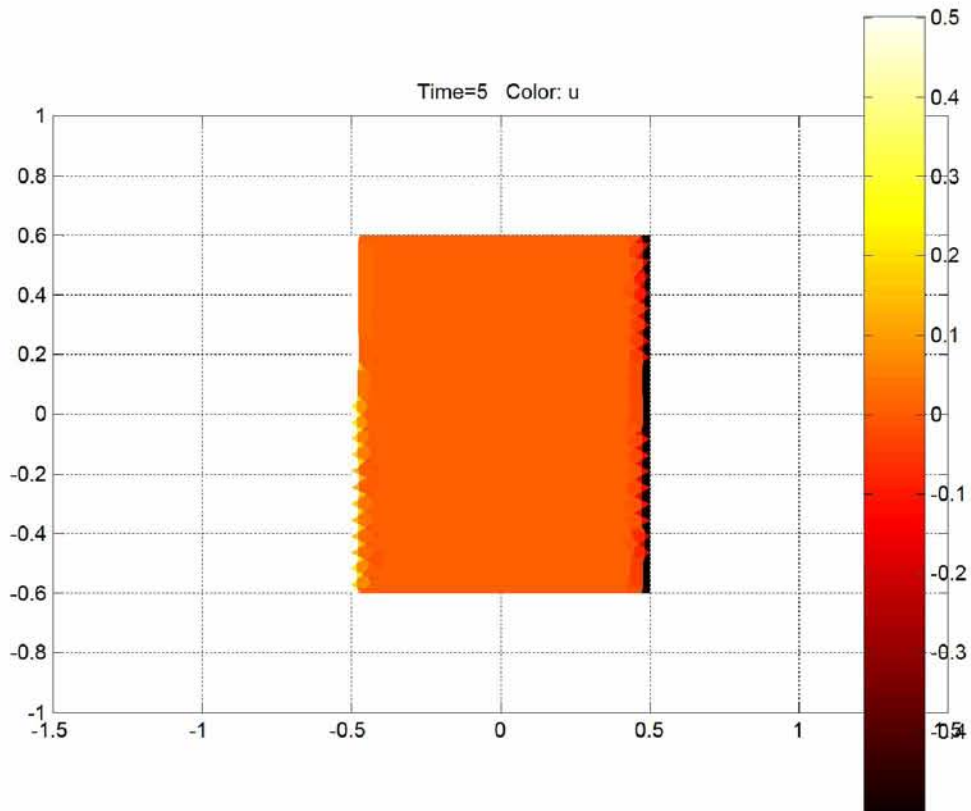
Πείραμα 2

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι δεξιό και το αριστερό άκρο προστίθεται θερμότητα με τον ίδιο σταθερό ρυθμό, η προσομοίωση μας δείχνει:



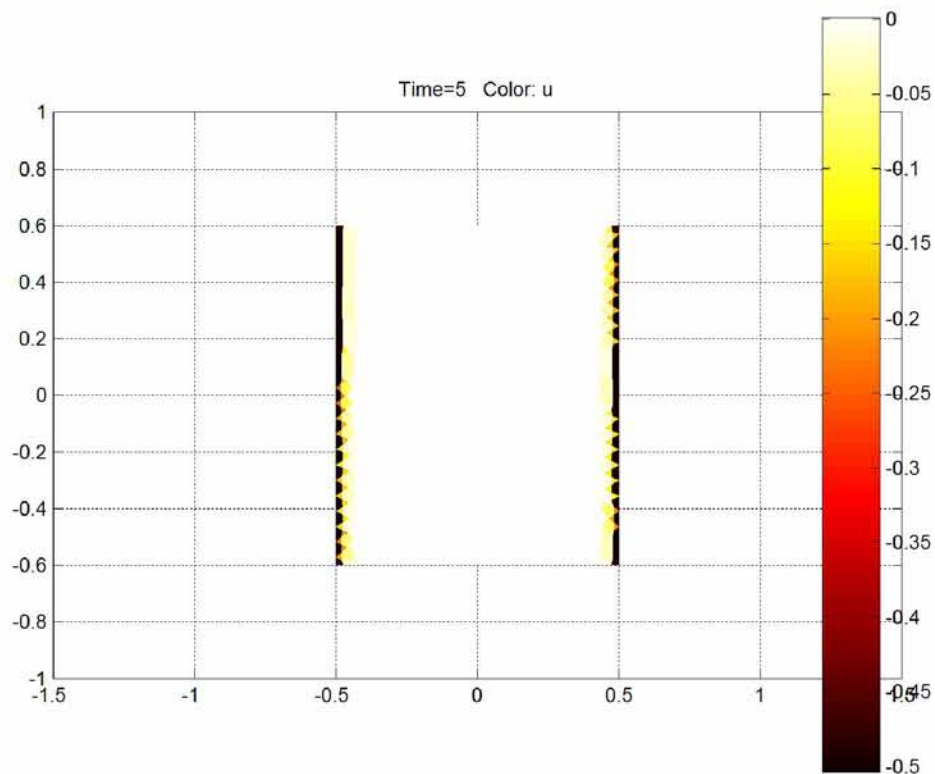
Οι υψηλότερες θερμοκρασίες αναπτύσσονται στα 2 κάθετα άκρα (με θερμοκρασία λίγο πιο πάνω από 0.5 βαθμούς) ενώ μειώνεται απότομα αν προχωρήσουμε ελάχιστα προς το μέσο της πλάκας.

Αν αντί να προστίθεται υποθέσουμε ότι αφαιρείται θερμότητα στο δεξιό άκρο με τον ίδιο σταθερό ρυθμό τότε:



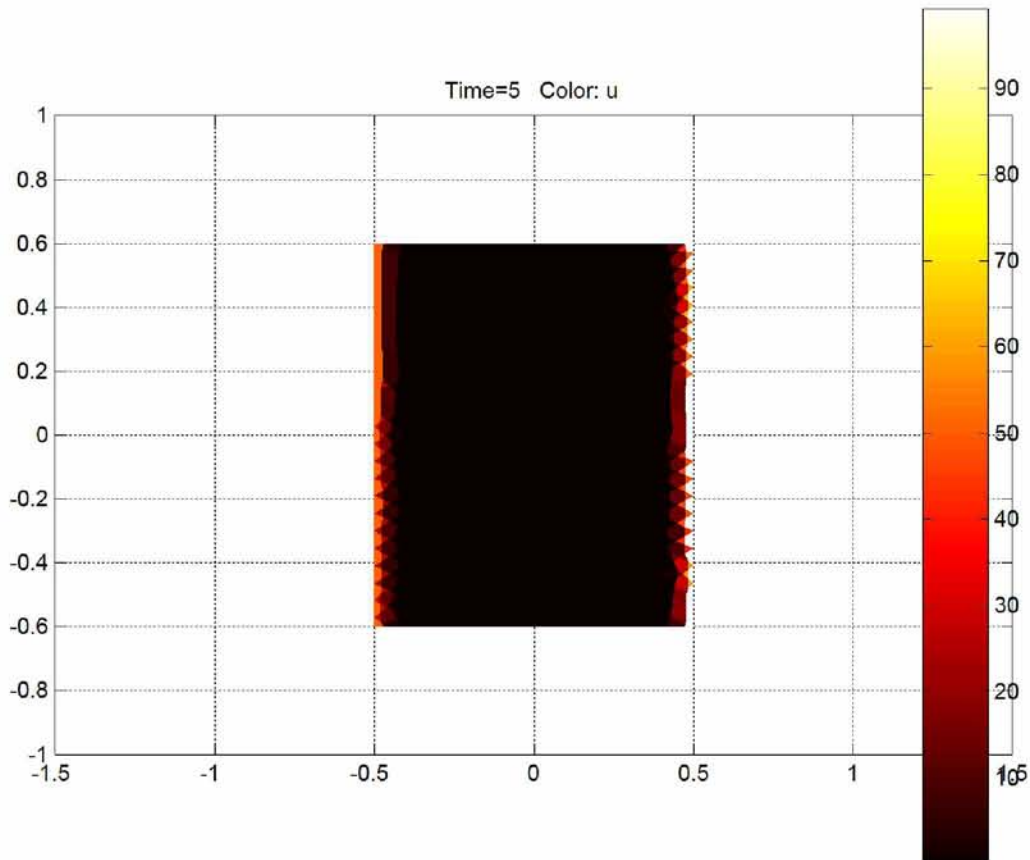
Σε αυτή τη περίπτωση η υψηλότερη θερμοκρασία βρίσκεται στο αριστερό άκρο (0.5 βαθμοί), ενώ η χαμηλότερη στο δεξιό (-0.5 βαθμοί) ενώ είναι 0 σχεδόν σε όλα τα υπόλοιπα σημεία της πλάκας.

Αν υποθέσουμε ότι και στα 2 άκρα αφαιρείται θερμότητα τότε το διάγραμμα τροποποιείται ως:



Χαμηλότερη τιμή στα άκρα (-0.5 βαθμοί) και 0 βαθμοί στο 99% της επιφάνειας της πλάκας.

Αν στο δεξιό και αριστερό άκρο υπάρχει σταθερή θερμοκρασία (100 και 50 βαθμοί αντίστοιχα) τότε έχουμε:

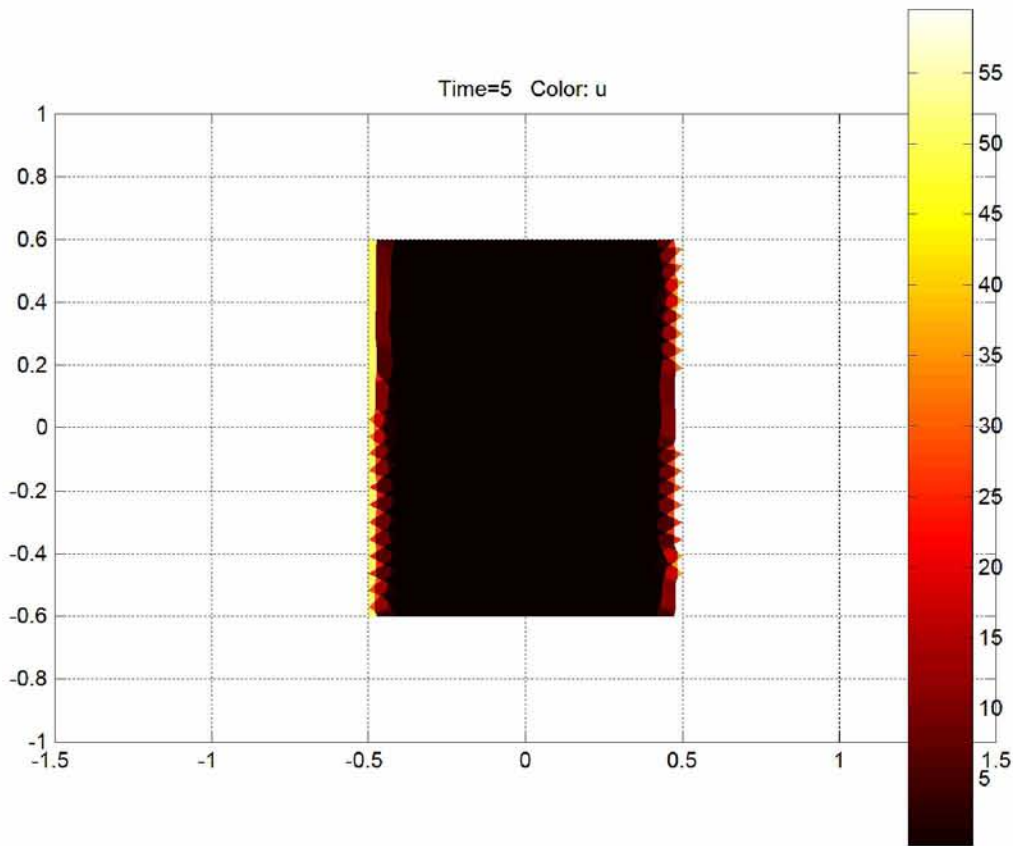


Θερμοκρασία σταθερή όπως ορίσαμε στην υπόθεση στα άκρα και στο 99% της επιφάνειας της πλάκας περίπου 0 βαθμοί.

Πείραμα 3

Εδώ θα αλλάξουμε τα πάνω και κάτω άκρα. Υποθέτουμε ότι ακολουθούν τη συνοριακή συνθήκη διάδοσης και ανταλλάσσουν θερμότητα με το περιβάλλον με συντελεστή μεταφοράς θερμότητας $h = 50 \text{ W/m}^2\text{°C}$. Έστω ότι στο δεξιό και αριστερό άκρο εφαρμόζουμε σταθερή θερμοκρασία (60 και 50 βαθμούς αντίστοιχα).

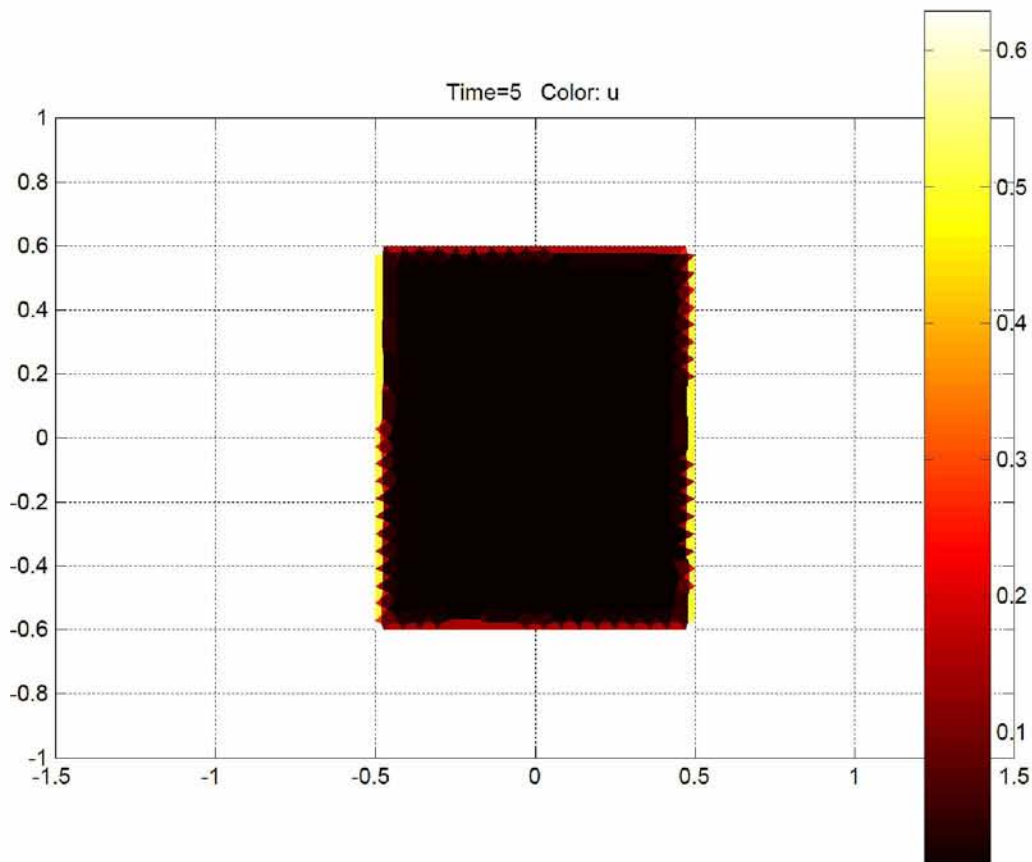
Αν η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία των 50 βαθμών (έστω 30 βαθμοί) τότε η θερμική κατανομή στην πλάκα προσομοιώνεται ως:



Καμία ουσιαστική διαφορά με πριν. Το ίδιο κι αν υποθέσουμε ότι τα πάνω και κάτω άκρα ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 100 βαθμών.

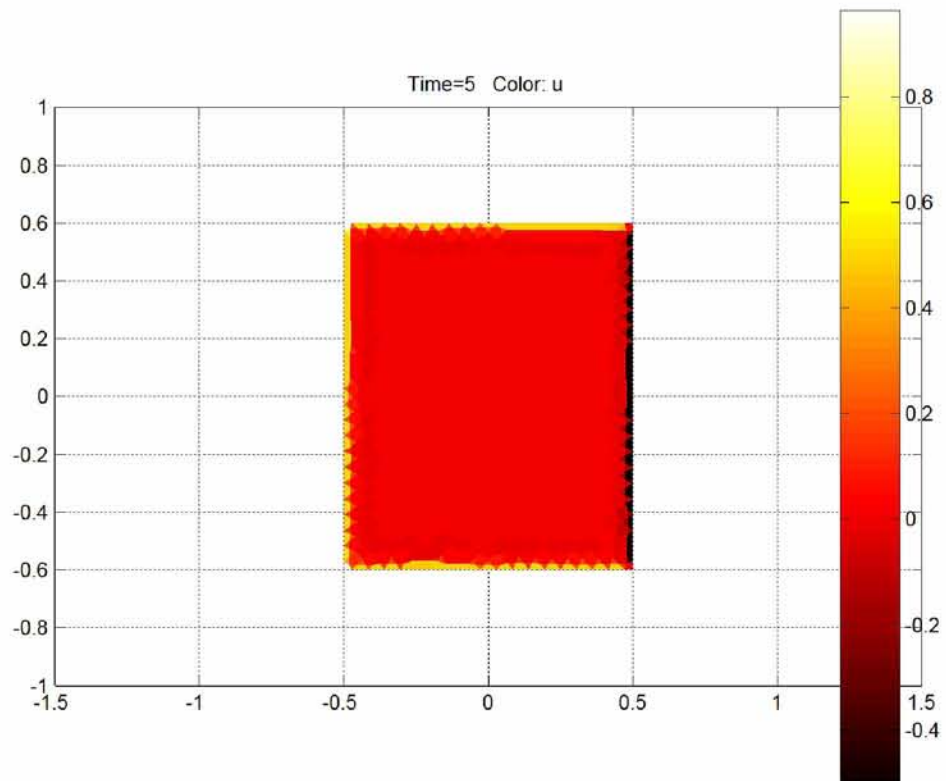
Πείραμα 4

Αν τώρα υποθέσουμε ότι στο αριστερό και δεξιό άκρο προστίθεται θερμότητα με σταθερό ρυθμό ενώ τα πάνω και κάτω ανταλλάσσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 30 βαθμών το διάγραμμα της προσομοίωσης έχει ως εξής:

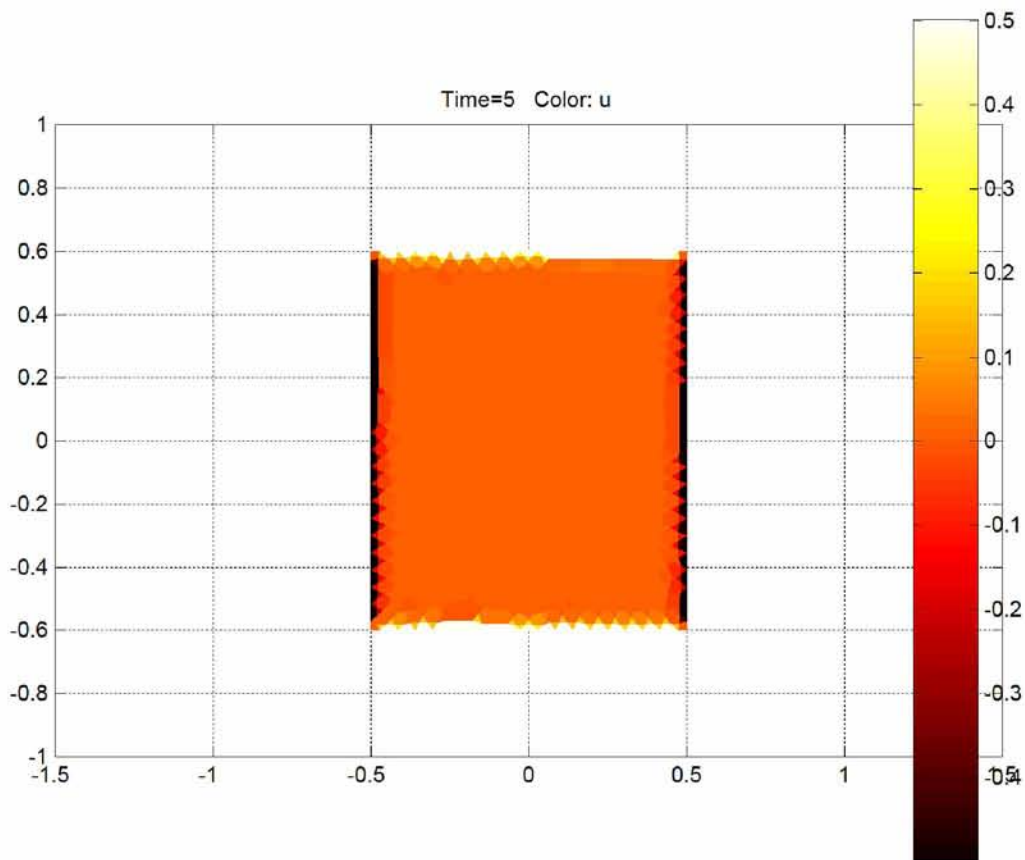


υψηλότερες θερμοκρασίες έχουμε στο δεξιό και αριστερό άκρο (περίπου 0.5 βαθμούς), στο πάνω και κάτω έχουμε 0.2 βαθμούς ενώ στο υπόλοιπο η θερμοκρασία είναι περίπου στους 0 βαθμούς. Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα πάνω-κάτω άκρα ανταλλάσουν θερμότητα με περιβάλλον θερμοκρασίας 100 βαθμών δεν αλλάζουν πολλά πράγματα αλλά υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση που πρέπει να επισημάνουμε. Οι ψηλότερες θερμοκρασίες εμφανίζονται στις **γωνίες** της πλάκας (0.8 βαθμοί) ενώ σε όλα τα άκρα βλέπουμε 0.4 . Στην υπόλοιπη επιφάνεια πάλι οι τιμές προσεγγίζουν το μηδέν. Το σχήμα δεν παρουσιάζεται γιατί οι ατέλειες του print το καταστρέφουν αρκετά κατά τη μεταφορά του από το MATLAB, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να διακρίνουμε αυτή τη μικρολεπτομέρεια.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι στο δεξιό άκρο αφαιρείται θερμότητα με τον ίδιο ρυθμό που προστίθεται στο αριστερό και τα πάνω-κάτω ανταλλάσουν θερμότητα με περιβάλλον 30 βαθμών η προσομοίωση δείχνει:



ενώ αν και στο αριστερό άκρο αφαιρείται θερμότητα τότε:



Απ' όσα έχουμε εξηγήσει παραπάνω μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε και να ερμηνεύσουμε την κατανομή στη μεταλλική πλάκα.

Ενδεικτικός κώδικας MATLAB

```

function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',1);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[3 2 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-1 1]);
set(ax,'XTick',[ -1.5,...
    -1,...
    -0.5,...
    -0.0500000000000000003,...
    0,...
    0.0500000000000000003,...
    0.5,...
    1,...
    1.5,...
]);
set(ax,'YTickMode','auto');
setappdata(ax,'extraspacex','-0.05 0.05');

% Geometry description:
pderect([-0.49312977099236632 0.50229007633587752 0.59541984732824393
-0.61068702290076371], 'R1');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','R1')
% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(4,...
'neu',...
1,...
'0',...
'5000')
pdesetbd(3,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(2,...
'dir',...
1,...
'1',...
'50')
pdesetbd(1,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')

```

```
pdetool('refine')
pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'240',...
'0.0',...
'5000',...
'1.0',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
['240 '];...
'0.0 '];...
'5000 '];...
'1.0 '])
```

1. Y. Zhan and S.S. Saparnekar , “High efficiency Green function- based thermal simulation algorithms,” IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated, vol.26, no.9 pp. 1661-1675, September 2007
2. R. Gharpurey and R.G. Meyer , “Modeling and analysis of substrate coupling in integrated circuits,” IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol.31, no.3, pp. 344-353, March 1996
3. J.P. Costa, M. Chou, and L.M. Silveira, “Efficient techniques for accurate modeling and simulation of substrate coupling in mixed-signal IC’s,” IEEE Transactions on computer-Aided Design of Integrated, vol.18, no.5, pp. 597-607, May 1999
4. T.-Y. Wang and C. C. – P. Chen, “3-D Thermal-ADI: A linear-time chip level transient thermal simulator,” IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated, vol.21, no.12, pp. 1434-1445, December 2002
5. Partial Differential Equation Toolbox User’s Guide, MATLAB®