

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΝΑΘΕΣΗ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΕ ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής

Δρ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΒΟΛΟΣ 2013



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 12066/1
Ημερ. Εισ.: 15-11-2013
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜ
2013
ΠΑΠ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΝΑΘΕΣΗ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΕ ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής

Δρ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΒΟΛΟΣ 2013

Εξεταστική Επιτροπή

Πρώτος Εξεταστής
(Επιβλέπων)

Δρ. Δημήτριος Παντελής,
Επίκουρος Καθηγητής,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος,
Καθηγητής,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης,
Επίκουρος Καθηγητής,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας κ. Δημήτριο Παντελή, επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για την βοήθεια, τις γνώσεις, την παρότρυνση αλλά και για τις πολύτιμες συμβουλές κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο και τον κ. Γεώργιο Κοζανίδη, για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και φίλες για την συμπαράσταση, την ανοχή όλο το διάστημα της εργασίας καθώς και τη βοήθεια που λίγο πολύ όλοι μου προσέφεραν. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για όλα τα εφόδια που μου έχουν προσφέρει και για την συνεχή υποστήριξή τους. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία που ακολουθεί αναφέρεται στην βέλτιστη ανάθεση εργατικού δυναμικού σε γραμμές παραγωγής. Η εργασία μας αναφέρεται σε ένα σύστημα εκκαθάρισης (χωρίς αφίξεις) που αποτελείται από δύο σταθμούς εξυπηρέτησης σε σειρά, όπου ο καθένας εξυπηρετεί με έναν σταθερό εξυπηρετητή (εξειδικευμένο), ενώ υπάρχει και ένας ευέλικτος ο οποίος μπορεί να τίθεται σε λειτουργία ή να απενεργοποιείται και να μεταφέρεται από τον έναν σταθμό στον άλλο ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε σταθμού για πρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης. Η συνεργασία μεταξύ σταθερού και ευέλικτου εξυπηρετητή για την διεκπεραίωση κοινής εργασίας δεν επιτρέπεται. Μία εργασία εξέρχεται από το σύστημα μόνο όταν εξυπηρετηθεί και από τον δεύτερο σταθμό. Η κάθε εργασία χαρακτηρίζεται από ένα κόστος παραμονής ανά μονάδα χρόνου που είναι διαφορετικό για κάθε σταθμό. Ακόμα, επιτρέπεται η αδρανοποίηση (idling) κάθε εξυπηρετητή. Ξεκινώντας την εργασία μας θα παρουσιάσουμε σχετικές εργασίες με το πρόβλημα μας όπου μέσα από μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση θα συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά της κάθε εργασίας σε σχέση με την παρούσα. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στον τρόπο που προσδιορίζεται η εξίσωση βελτιστοποίησης και πως αυτή διαμορφώνεται σε κάθε περίπτωση. Στο τελικό κομμάτι, με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου Matlab, μέσα από μία σειρά αποτελεσμάτων και γραφημάτων θα προσπαθήσουμε να ελέγξουμε τις ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής σε κάθε περίπτωση με σκοπό να παρουσιάσουμε ένα συνολικό συμπέρασμα.

Περιεχόμενα

Εξεταστική Επιτροπή.....	2
Περίληψη	4
Λίστα Πινάκων	7
Λίστα Εικόνων.....	8
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	10
1.1 Περιγραφή και σχετική βιβλιογραφία.....	10
1.2 Στόχος της εργασίας	11
1.3 Υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε.....	12
Κεφάλαιο 2. Περιγραφή και ανάλυση προβλήματος.....	13
2.1 Διαμόρφωση μοντέλου βελτιστοποίησης	14
2.2 Η βέλτιστη πολιτική.....	15
2.3 Η βέλτιστη πολιτική για $h_1 \geq h_2$	17
2.3.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	18
2.3.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	19
2.3.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	20
2.3.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	20
2.3.5 Ιδιότητες προς έλεγχο	21
2.4 Η βέλτιστη πολιτική για $h_1 < h_2$	22
2.4.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	24
2.4.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	25
2.4.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	25
2.4.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	27
2.4.5 Ιδιότητες προς έλεγχο	27

Κεφάλαιο 3. Αριθμητικά αποτελέσματα	29
3.1 Αποτελέσματα για $h_1 \geq h_2$	29
3.1.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	29
3.1.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	37
3.1.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	38
3.1.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	38
3.1.5 Γενικά συμπεράσματα για $h_1 \geq h_2$	39
3.2 Αποτελέσματα για $h_1 < h_2$	40
3.2.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	40
3.2.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	49
3.2.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$	50
3.2.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$	52
3.2.5 Γενικά συμπεράσματα για $h_1 < h_2$	53
Κεφάλαιο 4. Σύνοψη αποτελεσμάτων – Μελλοντικά θέματα έρευνας	55
Βιβλιογραφία	56
Παράρτημα.....	57

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1: Βέλτιστη ανάθεση πόρων για $h_1 \geq h_2$	17
Πίνακας 2: Βέλτιστη ανάθεση πόρων για $h_1 < h_2$	23
Πίνακας 3: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής	38
Πίνακας 4: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής	39
Πίνακας 5: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή	48
Πίνακας 6: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή	51

Λίστα Εικόνων

Εικόνα 1: Σχεδιάγραμμα λειτουργίας του συστήματος	14
Εικόνα 2: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αρχικές τιμές παραμέτρων.....	30
Εικόνα 3: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου μ_1	31
Εικόνα 4: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου ν_1	32
Εικόνα 5: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου μ_2	33
Εικόνα 6: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου ν_2	34
Εικόνα 7: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου h_2	35
Εικόνα 8: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου h_1	36
Εικόνα 9: Διάγραμμα σημείων αλλαγής που δεν ισχύει η μονοτονία	37
Εικόνα 10: Διάγραμμα σημείων αλλαγής που δεν ισχύει η μονοτονία	39
Εικόνα 11: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αρχικές τιμές παραμέτρων.....	41
Εικόνα 12: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου μ_1	42
Εικόνα 13: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου ν_1	43
Εικόνα 14: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου μ_2	44
Εικόνα 15: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου ν_2	45
Εικόνα 16: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου h_1	46
Εικόνα 17: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου h_2	47

Εικόνα 18: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία	49
Εικόνα 19: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία	50
Εικόνα 20: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία	52
Εικόνα 21: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία	53

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.1 Περιγραφή και σχετική βιβλιογραφία

Στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας θα εξεταστεί ένα πρόβλημα το οποίο αφορά ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σταθμούς εξυπηρέτησης σε σειρά που ο καθένας εξυπηρετείται από έναν σταθερό (εξειδικευμένο) εξυπηρετητή ενώ υπάρχει κι ένας ευέλικτος εξυπηρετητής ο οποίος μπορεί να τοποθετείται και στους δύο σταθμούς. Στο πρόβλημά μας θα μελετήσουμε την βέλτιστη ανάθεση του ευέλικτου στους σταθμούς εξυπηρέτησης.

Μία σχετική εργασία πραγματοποίησε ο Farrar[1,2] όπου μελέτησε δύο παραλλαγές ενός συστήματος εκκαθάρισης (χωρίς αφίξεις) με σταθερούς εξυπηρετητές και στους δύο σταθμούς και έναν ευέλικτο εξυπηρετητή. Στην περιορισμένη έκδοση ο ευέλικτος εξυπηρετητής μπορεί να εργαστεί μόνο στον ανάντη σταθμό, ενώ στην περίπτωση χωρίς περιορισμό μπορεί να εργαστεί και στους δύο σταθμούς. Για τις δύο παραπάνω παραλλαγές έδειξε ότι ο ευέλικτος εξυπηρετητής παραμένει σε αδράνεια ή τοποθετείται στον κατάντη σταθμό όταν ο αριθμός των εργασιών εκεί υπερβαίνει ένα ορισμένο όριο το οποίο εξαρτάται από τον αριθμό των εργασιών στην ουρά του πρώτου σταθμού. Αυτό σημαίνει ότι η βέλτιστη πολιτική χαρακτηρίζεται από μία καμπύλη αλλαγής η οποία αντιπροσωπεύει τα παραπάνω όρια για τα οποία ο ευέλικτος τοποθετείται στον κατάντη σταθμό. Επίσης έδειξε ότι η κλίση της καμπύλης αλλαγής είναι μεγαλύτερη ή ίση του -1 . Ο Pandelis[3] έδειξε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων, που λαμβάνονται από τον Farrar[1,2], για την περίπτωση που οι εργασίες θα μπορούσαν να εγκαταλείψουν το σύστημα ύστερα από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης από τον πρώτο σταθμό. Επίσης προσδιόρισε υποσύνολα του χώρου καταστάσεων όπου η βέλτιστη πολιτική μπορεί να προσδιοριστεί επακριβώς. Η ίδια δομή για την βέλτιστη πολιτική αποδείχθηκε από τους Wu, Lewis και Veatch[6] για ένα σύστημα με έναν αριθμό ευέλικτων εξυπηρετητών με το πρόσθετο χαρακτηριστικό ότι όλοι οι εξυπηρετητές υπόκεινται σε βλάβες. Ακόμα ο Pandelis[4] απέδειξε ότι οι ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής ισχύουν και στην περίπτωση που υπάρχει κόστος λειτουργίας των εξυπηρετητών σε κάθε σταθμό. Στις παραπάνω εργασίες έχει υποτεθεί ότι οι

εξυπηρετητές μπορούν να συνεργάζονται στην εξυπηρέτηση μίας εργασίας και ποτέ δεν αδρανοποιούνται.

Στην εργασία μας εξετάζουμε την πιο γενική περίπτωση όπου δεν επιτρέπεται η συνεργασία μεταξύ των εξυπηρετητών για την διεκπεραίωση μίας εργασίας αλλά ο καθένας πρέπει να αναλαμβάνει από μία ξεχωριστή. Επιπλέον, επιτρέπεται και η αδρανοποίηση (idling) των εξυπηρετητών.

1.2 Στόχος της εργασίας

Η γενική περίπτωση που θα μελετήσουμε έχει αναλυθεί στην εργασία Pandelis[5], όπου για κάποιες ειδικές περιπτώσεις αποδείχθηκε ότι ισχύουν οι ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής όπως αυτές παρουσιάστηκαν από τις παραπάνω εργασίες. Επιπλέον για το πρόβλημα μας, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, έχει αποδειχθεί και η ύπαρξη μοναδικότητας σημείου τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή στον πρώτο σταθμό.

Στόχος της εργασίας μας είναι να ελέγξουμε αν οι ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις και όχι μόνο σε αυτές που έχουν ήδη αποδειχθεί. Ακόμα θέλουμε να μελετήσουμε την ύπαρξη μονοτονίας των σημείων αλλαγής όπως επίσης και την μονοτονία των σημείων που αφορούν τον τερματισμό λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή. Ακόμα θα μελετήσουμε τον τρόπο που επηρεάζει κάθε παράμετρος του προβλήματος την λήψη των αποφάσεων μας.

Για την εκπλήρωση του στόχου αυτού στηριχθήκαμε στις εξισώσεις βελτιστοποίησης και τα θεωρητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εργασία Pandelis[5] για να προσδιορίσουμε την βέλτιστη πολιτική. Για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής για διάφορες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό πακέτο Matlab, μία περιγραφή του οποίου δίνεται στο παρακάτω υποκεφάλαιο.

1.3 Υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήθηκε

Το Matlab είναι ένα λογισμικό πακέτο για υψηλής απόδοσης αριθμητικούς υπολογισμούς. Παρέχει στο χρήστη ένα διαδραστικό περιβάλλον με χιλιάδες ενσωματωμένες συναρτήσεις, κατάλληλες για την υλοποίηση απαιτητικών υπολογιστικών αναλύσεων, γραφημάτων καθώς επίσης και για την παραγωγή διαφόρων animations. Επιπλέον, το Matlab προσφέρει τη δυνατότητα επέκτασης σε ποικίλα πεδία εφαρμογών με τη αξιοποίηση την υψηλού επιπέδου γλώσσας προγραμματισμού, την οποία διαθέτει σε όλες τις εκδόσεις του.

Το Matlab αποτελεί ένα εξελιγμένο υπολογιστικό εργαλείο, το οποίο μπορεί να βρει εφαρμογή σε διάφορους τομείς της επιστήμης αλλά βέβαια και της πράξης, όπως για παράδειγμα τη μηχανική, την ιατρική, τις θετικές επιστήμες (Μαθηματικά–Φυσική), την οικονομία καθώς και γενικά τη βιομηχανική παραγωγή. Μάλιστα, το φάσμα των εφαρμογών του συγκεκριμένου πακέτου λογισμικού διευρύνεται συνεχώς και περισσότερο, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τις πολλαπλές δυνατότητες του, όπως:

- ☒ Υψηλή απόδοση και ταχύτητα υπολογιστικών αναλύσεων.
- ☒ Δυνατότητα προσομοίωσης φυσικών συστημάτων.
- ☒ Δυνατότητα υλοποίησης αλγορίθμων.
- ☒ Υψηλής ποιότητας γραφικές απεικονίσεις και animations.
- ☒ Φιλικότητα προς το χρήστη και διαδραστικός χαρακτήρας.

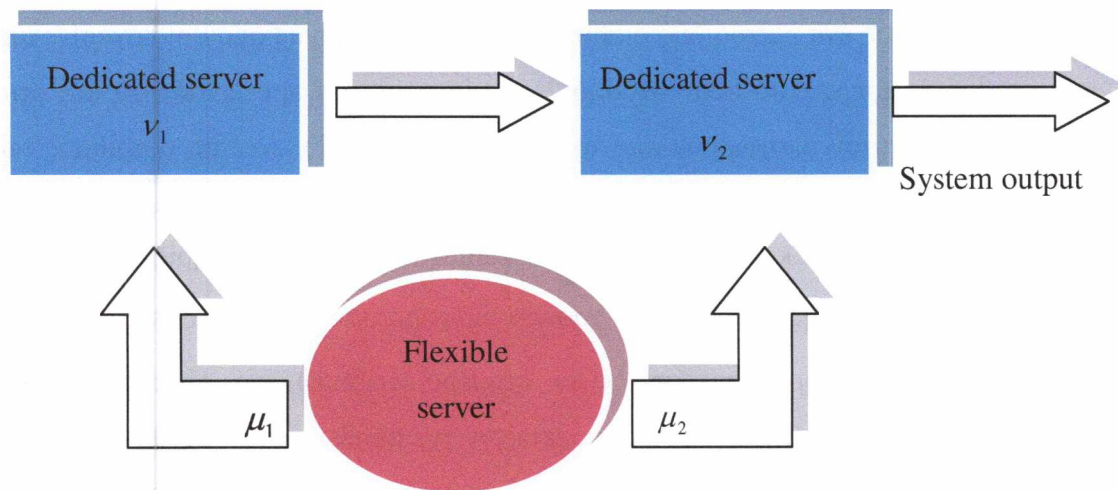
Οι ενσωματωμένες συναρτήσεις του λογισμικού παρέχουν τα απαραίτητα πακέτα εργαλείων για υπολογισμούς γραμμικής άλγεβρας, ανάλυσης δεδομένων, επεξεργασία σημάτων, αριθμητικές λύσεις κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Οι περισσότερες από τις προαναφερόμενες συναρτήσεις εφαρμόζουν την πλέον πρόσφατη και εξελιγμένη γνώση στο κάθε τομέα επιστήμης (state-of-the-art algorithms). Επίσης ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να αναπτύξει τις δικές του συναρτήσεις, κάνοντας χρήση της δικής του γλώσσας προγραμματισμού. Από τη στιγμή που θα αναπτυχθούν οι συναρτήσεις αυτές, λειτουργούν ως ενσωματωμένες συναρτήσεις του εν λόγω λογισμικού. Επίσης παρέχονται από το Matlab πολλές προαιρετικές εργαλειακές, οι οποίες προορίζονται για την ανάπτυξη ειδικών εφαρμογών.

Κεφάλαιο 2. Περιγραφή και ανάλυση προβλήματος

Θεωρούμε ένα δίκτυο δύο διαδοχικών ουρών αναμονής όπου οι εργασίες από τον σταθμό 1 εισέρχονται στον σταθμό 2 με μία ορισμένη προτεραιότητα και όταν εξέλθουν από αυτόν αποχωρούν από το σύστημα (εικόνα 1). Ακόμα, ο αριθμός των εργασιών στο σύστημα είναι από την αρχή ορισμένος και δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές αφίξεις. Η κάθε εργασία στον σταθμό i , $i=1,2$, χαρακτηρίζεται και από ένα κόστος παραμονής ανά μονάδα χρόνου διαφορετικό για τον κάθε σταθμό h_i . Κάθε σταθμός εξυπηρετείται από έναν σταθερό-εξειδικευμένο εξυπηρετητή και υπάρχει και ένας ευέλικτος που ή τοποθετείται για βοήθεια στον σταθμό 1 ή στον σταθμό 2. Ο ευέλικτος μπορεί να τίθεται σε λειτουργία ή να απενεργοποιείται και να μεταφέρεται από τον ένα σταθμό στον άλλο. Ακόμα, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, υπάρχει και η δυνατότητα της αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1. Ο ευέλικτος εξυπηρετητής δεν μπορεί να συνεργάζεται με τον σταθερό του κάθε σταθμού για μία εργασία αλλά ο καθένας αναλαμβάνει από μία ξεχωριστή. Επιπλέον πρέπει να τονιστεί ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης για τον κάθε σταθμό θα συμβολίζονται ως εξής :

- Για τον σταθμό 1 ο ρυθμός του σταθερού εξυπηρετητή συμβολίζεται με ν_1 ενώ του ευέλικτου με μ_1 .
- Αντίστοιχα για τον σταθμό 2 ο ρυθμός του σταθερού συμβολίζεται με ν_2 ενώ του ευέλικτου με μ_2 .



Εικόνα 1: Σχεδιάγραμμα λειτουργίας του συστήματος

2.1 Διαμόρφωση μοντέλου βελτιστοποίησης

Έστω $x_1, x_2: x_1, x_2 \geq 0$ ο χώρος καταστάσεων του συστήματος, όπου x_1, x_2 είναι ο αριθμός των εργασιών στο σταθμό 1 και 2 αντίστοιχα, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που εξυπηρετούνται. Συμβολίζουμε με $A(x_1, x_2)$ το σύνολο των εφικτών τιμών των συνολικών ρυθμών εξυπηρέτησης ρ_1, ρ_2 , στην κατάσταση (x_1, x_2) , όπου $\rho_i, i=1,2$, είναι ο ρυθμός που αντιστοιχεί στον σταθμό i . Οι τιμές ρ_1, ρ_2 είναι εφικτές εφόσον πληρούνται τα ακόλουθα: **i)** $\rho_i \in \{0, v_i, \mu_i, v_i + \mu_i\}$, **ii)** $\rho_i = 0$ εάν $x_i = 0$ (δεν αντιστοιχεί κάποιος ρυθμός εξυπηρέτησης εφόσον ο σταθμός είναι κενός), **iii)** $\rho_i < v_i + \mu_i$ εάν $x_i = 1$ (δεν υφίσταται συνεργασία), και **iv)** $(\rho_1, \rho_2) \notin \{\mu_1, v_1 + \mu_1\} \times \{\mu_2, v_2 + \mu_2\}$ (ο ευέλικτος εξυπηρετητής δεν μπορεί να ανατεθεί σε δύο ουρές ταυτόχρονα). Ξεκινώντας από την κατάσταση (x_1, x_2) , ορίζουμε το $V(x_1, x_2)$ να είναι το συνολικό ελάχιστο αναμενόμενο κόστος εξυπηρέτησης μέχρι να αδειάσει το σύστημα με αρχική τιμή $V(0,0)=0$. Αντί του προβλήματος συνεχούς χρόνου θεωρούμε το ισοδύναμο πρόβλημα διακριτού χρόνου που λαμβάνεται με ομοιομορφοποίηση (uniformization), όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $v_1 + v_2 + \mu_1 + \mu_2 = 1$. Η συνάρτηση του ελάχιστου κόστους $V(x_1, x_2)$, ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + \min_{(\rho_1, \rho_2) \in A(x_1, x_2)} W_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2), \quad (1)$$

όπου

$$W_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2) = \rho_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \rho_2 V(x_1, x_2 - 1) + (1 - \rho_1 - \rho_2) V(x_1, x_2). \quad (2)$$

Όταν μία από τις δύο ουρές είναι άδεια, φαίνεται εύκολα ότι η βέλτιστη πολιτική είναι να ανατίθενται όσο περισσότεροι πόροι είναι δυνατόν στην μη κενή ουρά, έτσι οι εξισώσεις βελτιστοποίησης έχουν την παρακάτω μορφή:

$$V(1, 0) = \frac{h_1}{\max\{\nu_1, \mu_1\}} + V(0, 1), \quad (3)$$

$$V(x_1, 0) = \frac{h_1 x_1}{\nu_1 + \mu_1} + V(x_1 - 1, 1), \quad x_1 > 1, \quad (4)$$

$$V(0, 1) = \frac{h_2}{\max\{\nu_2, \mu_2\}} + V(0, 0), \quad (5)$$

$$V(0, x_2) = \frac{h_2 x_2}{\nu_2 + \mu_2} + V(0, x_2 - 1), \quad x_2 > 1. \quad (6)$$

Τελειώνουμε αυτή την ενότητα με ένα προκαταρκτικό αποτελέσματα, το ότι η συνάρτηση του ελάχιστου κόστους, $V(x_1, x_2)$, αυξάνεται όσο μεγαλώνουν τα x_1, x_2 και θεσπίζει την μονοτονία της συνάρτησης σε σχέση με τον αριθμό των θέσεων εργασίας στο σύστημα.

2.2 Η βέλτιστη πολιτική

Ξεκινάμε αυτή την ενότητα με ένα ευρύ χαρακτηρισμό της βέλτιστης πολιτικής που μειώνει την έρευνα για την βέλτιστη ανάθεση των εξυπηρετητών σε ένα υποσύνολο των εφικτών τιμών των ρυθμών εξυπηρέτησης. Επειδή, δεν υπάρχει κανένα κέρδος από τη διατήρηση εργασιών στον κατάντη σταθμό, είναι λογικό να διατεθεί όσο το δυνατόν περισσότερος ρυθμός εξυπηρέτησης σε αυτό το σταθμό για να ωθήσει εργασίες έξω από το σύστημα. Αυτό έχει καθοριστεί στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 1: Για δεδομένο ρ_1 , η συνάρτηση $W_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2)$ ελαχιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το ρ_2 .

Συνέπεια της Πρότασης 1 είναι ότι η βέλτιστη πολιτική δεν αδρανοποιεί τον σταθερό εξυπηρετητή στο σταθμό 2 όταν υπάρχουν τουλάχιστον δύο εργασίες εκεί. Ακολούθως, όσον αφορά τη βέλτιστη ανάθεση πόρων στον ανάντη σταθμό ορίζουμε συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ ως ακολούθως:

$$f(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) - V(x_1 - 1, x_2 + 1), \quad x_1 \geq 1, x_2 \geq 0.$$

Σημειώστε ότι για αρχικές τιμές ρυθμών εξυπηρέτησης ρ_1, ρ_2 το κίνητρο για να διατεθεί επιπλέον ρυθμός ρ στον σταθμό 1 δίνεται από:

$$W_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2) - W_{\rho_1 + \rho, \rho_2}(x_1, x_2) = \rho f(x_1, x_2).$$

Ως εκ τούτου, το πρόσημο του $f(x_1, x_2)$ καθορίζει εάν θα πρέπει να προστεθεί ρυθμός εξυπηρέτησης στο σταθμό 1 ή όχι. Αυτό επιβεβαιώνεται με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2: Για δεδομένο ρ_2 , το $W_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2)$ ελαχιστοποιείται μεγιστοποιώντας το ρ_1 εφόσον $f(x_1, x_2) \geq 0$ και ελαχιστοποιώντας το ρ_1 εφόσον $f(x_1, x_2) < 0$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2, ανάλογα με το πρόσημο της $f(x_1, x_2)$, η βέλτιστη πολιτική θα πρέπει είτε να διαθέσει όσο περισσότερο ρυθμό εξυπηρέτησης είναι δυνατόν στον ανάντη σταθμό ή να μην εξυπηρετήσει τον σταθμό αυτό καθόλου. Ειδικότερα, όσον αφορά τον σταθερό εξυπηρετητή στον σταθμό 1, η βέλτιστη πολιτική δεν θα πρέπει να σταματάει την λειτουργία του όταν $f(x_1, x_2) \geq 0$ και υπάρχουν τουλάχιστον δύο εργασίες στον σταθμό 1, και να την σταματάει όταν $f(x_1, x_2) < 0$.

Στην συνέχεια αναλύεται περαιτέρω η δομή της βέλτιστης πολιτικής. Για ορισμένα εύρη των ρυθμών εξυπηρέτησης και των υποσυνόλων του χώρου καταστάσεων δείχνεται ότι η βέλτιστη ανάθεση του εξυπηρετητή χαρακτηρίζεται από μια καμπύλη αλλαγής όταν $h_1 \geq h_2$, και από δύο καμπύλες αλλαγής όταν $h_1 < h_2$.

2.3 Η βέλτιστη πολιτική για $h_1 \geq h_2$

Όταν δεν είναι λιγότερο δαπανηρό να υπάρχουν εργασίες στον σταθμό 1 σε σύγκριση με τον σταθμό 2, είναι λογικό να μην αδρανοποιούνται οι εξυπηρετητές και να παραμένουν εργασίες στον παραπάνω σταθμό.

Όταν έχουμε $h_1 \geq h_2$, έχει αποδειχθεί ότι $f(x_1, x_2) > 0$ για όλα τα $x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$ επομένως ο σταθερός εξυπηρετητής στον σταθμό 1 δεν σταματάει να λειτουργεί (Pandelis[5]).

Ως αποτέλεσμα των Προτάσεων 1, 2 και του παραπάνω αποτελέσματος, η βέλτιστη ανάθεση του εξυπηρετητή είναι είτε ρητά καθορισμένη (σε ορισμένες περιπτώσεις με μία εργασία σε έναν ή και στους δύο σταθμούς) ή περιορίζεται σε δύο επιλογές (βλέπε Πίνακα 1).

	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3	Περίπτωση 4
	$v_1 \geq \mu_1$ $v_2 \geq \mu_2$	$v_1 \geq \mu_1$ $v_2 < \mu_2$	$v_1 < \mu_1$ $v_2 \geq \mu_2$	$v_1 < \mu_1$ $v_2 < \mu_2$
(1,1)	(v_1, v_2)	(v_1, μ_2)	(μ_1, v_2)	(v_1, μ_2) ή (μ_1, v_2)
(1, x_2)	$(v_1, v_2 + \mu_2)$		$(v_1, v_2 + \mu_2)$ ή (μ_1, v_2)	
(x_1 , 1)	$(v_1 + \mu_1, v_2)$	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή (v_1, μ_2)	$(v_1 + \mu_1, v_2)$	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή (v_1, μ_2)
(x_1 , x_2)	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή $(v_1, v_2 + \mu_2)$			

Πίνακας 1: Βέλτιστη ανάθεση πόρων για $h_1 \geq h_2$

2.3.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Σε αυτή την (πιο ρεαλιστική) περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στους σταθερούς εξυπηρετητές, όταν υπάρχει μόνο μία εργασία σε κάθε σταθμό. Η μόνη απόφαση που πρέπει να ληφθεί είναι πού θα τοποθετηθεί ο ευέλικτος εξυπηρετητής όταν υπάρχουν τουλάχιστον δύο εργασίες σε κάθε σταθμό. Οι εξισώσεις ελάχιστου κόστους έχουν την παρακάτω μορφή:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min \{ \mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2) \}, \quad x_1, x_2 > 1, \quad (7)$$

όπου ο πρώτος και ο δεύτερος όρος στις αγκύλες αντιστοιχεί στην εκχώρηση του ευέλικτου εξυπηρετητή στον πρώτο και δεύτερο σταθμό. Αντίστοιχα ,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + (v_1 + \mu_1) V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2) V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + v_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (\mu_1 + \mu_2) V(1, 1) .$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $d(x_1, x_2)$ ως ακολούθως:

$$d(x_1, x_2) = \mu_1 f(x_1, x_2) + \mu_2 [V(x_1, (x_2 - 1)^+) - V(x_1, x_2)], \quad x_1 \geq 1, x_2 \geq 0,$$

$$d(0, x_2) = \mu_2 [V(0, x_2 - 1) - V(0, x_2)], \quad x_2 \geq 1 .$$

Σημειώστε ότι για $x_1, x_2 > 1$, η $d(x_1, x_2)$ είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ του δεύτερου και του πρώτου όρου σε αγκύλες στην εξίσωση (7), δηλαδή, δίνει το κίνητρο για να ανατεθεί ο ευέλικτος εξυπηρετητής στο σταθμό 1 αντί του σταθμού 2. Ως εκ τούτου, το πρόσημο αυτής της συνάρτησης καθορίζει τη βέλτιστη ανάθεση για τον ευέλικτο εξυπηρετητή. Ο εξυπηρετητής τοποθετείται στον ανάντη σταθμό όταν $d(x_1, x_2) \geq 0$, και στον κατάντη διαφορετικά.

Έχει αποδειχθεί ότι αυτή η συνάρτηση είναι φθίνουσα ως προς το x_2 και τείνει στο $-\infty$ όταν το x_2 τείνει στο ∞ (Pandelis[5]). Συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι η βέλτιστη πολιτική χαρακτηρίζεται από μία καμπύλη αλλαγής που τυπικά ορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1. Έστω $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$. Τότε για κάθε $x_1 > 1$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $t(x_1) \geq 2$ έτσι ώστε η βέλτιστη πολιτική να τοποθετεί τον ευέλικτο εξυπηρετητή στον κατάντη σταθμό αν και μόνο αν $x_2 \geq t(x_1)$.

Πιστεύουμε επίσης ότι η καμπύλη αλλαγής των σημείων $t(x_1)$ είναι μη φθίνουσα για τον εξής λόγο. Αν ήταν φθίνουσα, για σταθερό αριθμό εργασιών στον σταθμό 2, η βέλτιστη πολιτική θα μετακινούσε τον ευέλικτο από τον πρώτο σταθμό στον δεύτερο καθώς ο αριθμός των εργασιών στον σταθμό 1 θα αυξάνονταν. Επιβεβαίωση του παραπάνω θα γίνει με αριθμητική ανάλυση.

2.3.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Στην προηγούμενη περίπτωση έχει αποδειχθεί θεωρητικά η ύπαρξη ενός μοναδικού σημείου αλλαγής, όπου ο ευέλικτος τοποθετείται στον σταθμό 2 και δεν επιστρέφει ξανά στον σταθμό 1. Έτσι και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε λογικό ότι κάτι τέτοιο θα ισχύει και θα το επιβεβαιώσουμε με αριθμητική επίλυση για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στον σταθερό εξυπηρετητή, όταν υπάρχει μόνο μία εργασία στον πρώτο σταθμό ενώ για τον δεύτερο δίνει προτεραιότητα στον ευέλικτο εξυπηρετητή. Εδώ η απόφαση που πρέπει να ληφθεί είναι πού να τοποθετηθεί ο ευέλικτος εξυπηρετητής όταν υπάρχει τουλάχιστον μία εργασία στον δεύτερο σταθμό ενώ στον πρώτο τουλάχιστον δύο. Οι εξισώσεις για το ελάχιστο κόστος έχουν την παρακάτω μορφή:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{\mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2)\}, \quad x_1, x_2 > 1,$$

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), v_1 V(x_1 - 1, 2) + \mu_2 V(x_1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(x_1, 1)\}, \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + v_1 V(0, 2) + \mu_2 V(1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(1, 1).$$

2.3.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι κι εδώ θα θεωρήσουμε ότι ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής και θα προσπαθήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με ένα πλήθος αριθμητικών επιλύσεων της συγκεκριμένης περίπτωσης.

Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στον ευέλικτο εξυπηρετητή όταν υπάρχει μόνο μία εργασία στον πρώτο σταθμό ενώ στον δεύτερο δίνει προτεραιότητα στον σταθερό. Έτσι εδώ η απόφαση που πρέπει να ληφθεί είναι πού μας συμφέρει να βρίσκεται ο ευέλικτος στην περίπτωση που υπάρχει τουλάχιστον μία εργασία στον δεύτερο σταθμό ενώ στον πρώτο τουλάχιστον δύο. Εδώ οι εξισώσεις μας παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min \{ \mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2) \}, \quad x_1, x_2 > 1.$$

Επιπλέον ,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + (v_1 + \mu_1) V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min \{ v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2) V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \mu_1 V(0, x_2 + 1) + v_2 V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_2) V(1, x_2) \}, \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \mu_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_2) V(1, 1).$$

Η ύπαρξη σημείου αλλαγής έχει αποδειχθεί για την περίπτωση που υπάρχει μία εργασία στον σταθμό 1 (Pandelis[5]).

Θεώρημα 2. Έστω $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$. Τότε όταν υπάρχει μία εργασία στον πρώτο σταθμό υπάρχει θετικός ακέραιος $t \geq 2$ έτσι ώστε η βέλτιστη πολιτική να τοποθετεί τον ευέλικτο εξυπηρετητή στον κατάντη σταθμό αν και μόνο αν $x_2 \geq t$.

2.3.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής θα θεωρηθεί κι εδώ ότι ισχύει και θα το επιβεβαιώσουμε με το πρόγραμμα μας με έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι η πιο περίπλοκη διότι ακόμα και όταν υπάρχει από μία εργασία σε κάθε σταθμό η βέλτιστη πολιτική δεν δίνει προτεραιότητα σε κανέναν από τους δύο σταθερούς εξυπηρετητές. Επομένως, εδώ πρέπει να μας απασχολήσει η τοποθέτηση του ευέλικτου από την στιγμή ύπαρξης μίας τουλάχιστον εργασίας σε κάθε σταθμό και όχι όταν ο αριθμός των εργασιών σε κάθε σταθμό είναι τουλάχιστον δύο. Έτσι οι εξισώσεις για την μείωση του κόστους διαμορφώνονται ως εξής:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{\mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2)\}, \quad x_1, x_2 > 1,$$

Ακόμα ,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \quad x_1 > 1, \\ v_1 V(x_1 - 1, 2) + \mu_2 V(x_1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(x_1, 1)\}$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min\{v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \quad x_2 > 1, \\ \mu_1 V(0, x_2 + 1) + v_2 V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_2)V(1, x_2)\},$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \min\{v_1 V(0, 2) + \mu_2 V(1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(1, 1), \\ \mu_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_2)V(1, 1)\}.$$

2.3.5 Ιδιότητες προς έλεγχο

Για τις περιπτώσεις 2,3,4 θα ελέγξουμε εάν ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής όπως είναι λογικό, ενώ για όλες τις περιπτώσεις θα γίνει έλεγχος για την μονοτονία αυτών των σημείων. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, περιμένουμε η ακολουθία των σημείων να είναι μη φθίνουσα, δηλαδή το επόμενο σημείο αλλαγής θα είναι μεγαλύτερο ή θα είναι ίσο με το προηγούμενο. Τα παραπάνω θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ισχύουν με την βοήθεια του προγράμματος μας (Matlab) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του ελάχιστου κόστους, έτσι όπως διαμορφώνονται για κάθε περίπτωση, και τις εξισώσεις (3)-(6).

2.4 Η βέλτιστη πολιτική για $h_1 < h_2$

Όταν είναι πιο ακριβό να υπάρχουν εργασίες στον δεύτερο σταθμό από ότι στον πρώτο, μπορεί να συμφέρει να μην εισέρχονται εργασίες στον σταθμό 2, το οποίο προϋποθέτει να μην παρέχονται πόροι στον σταθμό 1 ούτως ώστε να μην εξυπηρετούνται οι εργασίες εκεί. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 αυτό θα συμβεί στις καταστάσεις με $f(x_1, x_2) < 0$. Επομένως η βέλτιστη τοποθέτηση του ευέλικτου εξυπηρετητή θα δίνεται από τον πίνακα 1 με την προσθήκη της ανάθεσης $(0, \max\{\nu_2, \mu_2\})$ εάν $x_2 = 1$ και $(0, \nu_2 + \mu_2)$ εάν $x_2 > 1$. Επειδή ο αριθμός των πιθανών βέλτιστων αναθέσεων είναι μεγαλύτερος από ότι στην περίπτωση για $h_1 \geq h_2$ η ανάλυση γίνεται πολύ πιο δύσκολη και δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε γενικές ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής όπως πριν στο Θεώρημα 1. Αντ' αυτού, κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση σχετικά με τη δομή της βέλτιστης πολιτικής.

Υπόθεση: Για ένα σταθερό αριθμό εργασιών στον σταθμό 1, ο ρυθμός εξυπηρέτησης που διατίθεται στον εν λόγω σταθμό από την βέλτιστη πολιτική μειώνεται καθώς ο αριθμός των θέσεων εργασίας στον σταθμό 2 αυξάνεται.

Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται την ακόλουθη δομή της βέλτιστης πολιτικής. Για $\nu_1 \geq \mu_1$ και μία εργασία στον σταθμό 1 υπάρχει ένα μοναδικό σημείο αλλαγής: όταν ο αριθμός των εργασιών στον σταθμό 2 είναι κάτω από αυτό το σημείο ο σταθερός εξυπηρετητής στον σταθμό 1 χρησιμοποιείται, αλλιώς παραμένει αδρανής. Για $\nu_1 < \mu_1$ και μία εργασία στον σταθμό 1 υπάρχουν δύο σημεία αλλαγής: όταν ο αριθμός των εργασιών στον σταθμό 2 είναι κάτω από το κατώτερο σημείο αλλαγής ο ευέλικτος τοποθετείται στον σταθμό 1, όταν είναι μεταξύ των δύο σημείων ο σταθερός του σταθμού 1 χρησιμοποιείται, και όταν είναι πιο πάνω από το ανώτερο σημείο κανένas εξυπηρετητής δεν τοποθετείται στον σταθμό 1. Για περισσότερες από μία εργασίες στον σταθμό 2 η βέλτιστη πολιτική καθορίζεται από δύο καμπύλες αλλαγής: για αριθμό εργασιών στον σταθμό 2 κάτω από την πρώτη καμπύλη ο σταθμός 1 εξυπηρετείται με τον σταθερό αλλά και με τον ευέλικτο εξυπηρετητή, για αριθμό εργασιών ανάμεσα στις δύο καμπύλες εξυπηρετείται μόνο με τον σταθερό του εξυπηρετητή, και για εργασίες που ο αριθμός τους είναι πάνω από την ανώτερη καμπύλη δεν εξυπηρετείται καθόλου.

Σύμφωνα με την πρόταση 1 και 2 αλλά και την παρατήρηση ότι για $h_1 < h_2$ δεν ισχύει πάντα $f(x_1, x_2) \geq 0$ η βέλτιστη τοποθέτηση του ευέλικτου εξυπηρετητή αλλά και η λειτουργία του σταθερού του πρώτου σταθμού αποφασίζονται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2):

	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3	Περίπτωση 4
	$v_1 \geq \mu_1$ $v_2 \geq \mu_2$	$v_1 \geq \mu_1$ $v_2 < \mu_2$	$v_1 < \mu_1$ $v_2 \geq \mu_2$	$v_1 < \mu_1$ $v_2 < \mu_2$
(1,1)	(v_1, v_2) ή $(0, v_2)$	(v_1, μ_2) ή $(0, \mu_2)$	(μ_1, v_2) ή $(0, v_2)$	(v_1, μ_2) ή (μ_1, v_2) ή $(0, \mu_2)$
(1, x_2)	$(v_1, v_2 + \mu_2)$ ή $(0, v_2 + \mu_2)$		$(v_1, v_2 + \mu_2)$ ή (μ_1, v_2) ή $(0, v_2 + \mu_2)$	
(x_1 , 1)	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή $(0, v_2)$	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή (v_1, μ_2) ή $(0, \mu_2)$	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή $(0, v_2)$	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή (v_1, μ_2) ή $(0, \mu_2)$
(x_1, x_2)	$(v_1 + \mu_1, v_2)$ ή $(v_1, v_2 + \mu_2)$ ή $(0, v_2 + \mu_2)$			

Πίνακας 2: Βέλτιστη ανάθεση πόρων για $h_1 < h_2$

2.4.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στους σταθερούς εξυπηρετητές όταν υπάρχει μία εργασία σε κάθε σταθμό αλλά οι αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε είναι δύο. Αρχικά, ακόμα και με μία εργασία στον πρώτο σταθμό θα πρέπει να ελέγχουμε εάν συμφέρει να αδρανοποιούμε τον σταθερό εξυπηρετητή στον σταθμό αυτό και έπειτα να παρθεί η απόφαση που θα τοποθετηθεί ο ευέλικτος όταν υπάρχουν τουλάχιστον δύο εργασίες σε κάθε σταθμό. Έτσι οι εξισώσεις ελαχιστοποίησης του κόστους διαμορφώνονται ως εξής:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \\ v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(x_1, x_2)\}, \\ x_1, x_2 > 1,$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι μέσα στις αγκύλες αφορούν την τοποθέτηση του ευέλικτου εξυπηρετητή ενώ ο τρίτος την απόφαση για τον τερματισμό λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1.

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \\ v_2 V(x_1, 0) + (v_1 + \mu_1 + \mu_2)V(x_1, 1)\} \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min\{v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \\ (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(1, x_2)\}, \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \min\{v_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (\mu_1 + \mu_2)V(1, 1), \\ v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_1 + \mu_2)V(1, 1)\}.$$

Η ύπαρξη ενός ή δύο σημείων αλλαγής έχει αποδειχθεί για μία και για δύο εργασίες στον σταθμό 1 (Pandelis[5]).

Θεώρημα 3. Έστω $h_1 < h_2$, $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$. Τότε

- i) Όταν υπάρχει μία εργασία στον πρώτο σταθμό, υπάρχει θετικός ακέραιος $t \geq 1$ τέτοιος ώστε η βέλτιστη πολιτική αδρανοποιεί τον σταθερό εξυπηρετητή μόνο όταν $x_2 \geq t$.
- ii) Όταν υπάρχουν δύο εργασίες στον πρώτο σταθμό, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $t_2 \geq t_1 \geq 1$ τέτοιοι ώστε η βέλτιστη πολιτική αδρανοποιεί τον

σταθερό εξυπηρετητή μόνο όταν $x_2 \geq t_2$ και τοποθετεί τον ευέλικτο εξυπηρετητή στον σταθμό 2 μόνο όταν $x_2 \geq t_1$.

2.4.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Εδώ η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στον σταθερό εξυπηρετητή για τον σταθμό 1 και στον ευέλικτο για τον σταθμό 2 όταν υπάρχει από μια εργασία σε κάθε σταθμό. Οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν είναι το πότε και εάν σταματήσει η λειτουργία του σταθερού στον πρώτο σταθμό και που θα τοποθετείται ο ευέλικτος όταν υπάρχει τουλάχιστον μία εργασία στον δεύτερο σταθμό ενώ στον πρώτο τουλάχιστον δύο. Έτσι οι εξισώσεις ελαχιστοποίησης του κόστους έχουν την παρακάτω μορφή:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \\ v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(x_1, x_2)\}, \\ x_1, x_2 > 1,$$

όπου οι όροι μέσα στις αγκύλες αφορούν τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε. Ακόμα,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \\ v_1 V(x_1 - 1, 2) + \mu_2 V(x_1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(x_1, 1), \mu_2 V(x_1, 0) + (v_1 + \mu_1 + v_2)V(x_1, 1)\}, \quad x_1 > 1,$$

όπου κι εδώ οι δύο πρώτοι είναι για την απόφαση τοποθέτησης του ευέλικτου ενώ ο τρίτος για τον τερματισμό λειτουργίας του σταθερού του σταθμού 1. Επιπλέον,

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min\{v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \\ (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(1, x_2)\}, \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \min\{v_1 V(0, 2) + \mu_2 V(1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(1, 1), \\ \mu_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_1 + v_2)V(1, 1)\}.$$

2.4.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δίνει προτεραιότητα στον ευέλικτο για τον σταθμό 1 και στον σταθερό εξυπηρετητή για τον σταθμό 2 όταν υπάρχει από μία εργασία σε κάθε σταθμό. Οι αποφάσεις που έχουμε να

αντιμετωπίσουμε εδώ είναι το πότε και εάν μας συμφέρει να σταματήσει η λειτουργία του σταθερού εξυπηρετητή του πρώτου σταθμού και που θα τοποθετείται ο ευέλικτος όταν υπάρχει τουλάχιστον μία εργασία στον πρώτο σταθμό ενώ στον δεύτερο τουλάχιστον δύο. Οι εξισώσεις ελάχιστου κόστους είναι οι εξής:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \\ v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(x_1, x_2)\}, \\ x_1, x_2 > 1,$$

όπου οι όροι μέσα στις αγκύλες αφορούν τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε.

Ακόμα,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \\ v_2 V(x_1, 0) + (v_1 + \mu_1 + \mu_2)V(x_1, 1)\}, \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min\{v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \\ \mu_1 V(0, x_2 + 1) + v_2 V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_2)V(1, x_2), \\ (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(1, x_2)\}, \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \min\{\mu_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_2)V(1, 1), \\ v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_1 + \mu_2)V(1, 1)\}.$$

Η ύπαρξη δύο σημείων αλλαγής έχει αποδειχθεί όταν υπάρχει μία εργασία στον πρώτο σταθμό (Pandelis[5]).

Θεώρημα 4. Όταν έχουμε $h_1 < h_2$ με ρυθμούς εξυπηρέτησης $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$ τότε στην περίπτωση που υπάρχει μια εργασία στον πρώτο σταθμό, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $t_2 \geq t_1 \geq 1$ ώστε η βέλτιστη πολιτική να αδρανοποιεί τον σταθερό εξυπηρετητή όταν $x_2 \geq t_2$, να τοποθετεί τον ευέλικτο στον σταθμό 2 ενώ ο σταθερός του σταθμού 1 λειτουργεί όταν $t_1 \leq x_2 \leq t_2$, και να τοποθετεί τον ευέλικτο στον σταθμό 1 ενώ ο σταθερός εκεί δεν λειτουργεί όταν $x_2 < t_1$.

2.4.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι η πιο περίπλοκη διότι ακόμα και όταν υπάρχει από μία εργασία σε κάθε σταθμό, η βέλτιστη πολιτική δεν δίνει προτεραιότητα σε κανέναν από τους δύο σταθερούς εξυπηρετητές. Επομένως, εδώ πρέπει να μας απασχολήσει η τοποθέτηση του ευέλικτου από την στιγμή ύπαρξης μία τουλάχιστον εργασία σε κάθε σταθμό και το που μας συμφέρει και αν να τερματιστεί η λειτουργία του σταθερού στον σταθμό 1. Έτσι οι εξισώσεις για την μείωση του κόστους διαμορφώνονται ως εξής:

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + v_2 V(x_1, x_2 - 1) + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2), \\ v_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + \mu_1 V(x_1, x_2), \mu_2 V(x_1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(x_1, x_2)\}, \\ x_1, x_2 > 1,$$

όπου οι όροι μέσα στις αγκύλες αφορούν τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε. Αντίστοιχα,

$$V(x_1, 1) = h_1 x_1 + h_2 + \min\{(v_1 + \mu_1)V(x_1 - 1, 2) + v_2 V(x_1, 0) + \mu_2 V(x_1, 1), \\ v_1 V(x_1 - 1, 2) + \mu_2 V(x_1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(x_1, 1), \mu_2 V(x_1, 0) + (v_1 + \mu_1 + v_2)V(x_1, 1)\}, \quad x_1 > 1,$$

$$V(1, x_2) = h_1 + h_2 x_2 + \min\{v_1 V(0, x_2 + 1) + (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + \mu_1 V(1, x_2), \\ \mu_1 V(0, x_2 + 1) + v_2 V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_2)V(1, x_2), \\ (v_2 + \mu_2)V(1, x_2 - 1) + (v_1 + \mu_1)V(1, x_2)\}, \quad x_2 > 1,$$

$$V(1, 1) = h_1 + h_2 + \min\{v_1 V(0, 2) + \mu_2 V(1, 0) + (\mu_1 + v_2)V(1, 1), \\ \mu_1 V(0, 2) + v_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_2)V(1, 1), \mu_2 V(1, 0) + (v_1 + \mu_1 + v_2)V(1, 1)\}.$$

2.4.5 Ιδιότητες προς έλεγχο

Στις παραπάνω περιπτώσεις που ισχύει $h_1 < h_2$ θεωρούμε ότι ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής του ευέλικτου εξυπηρετητή και θα προσπαθήσουμε να το δείξουμε με αριθμητικές επιλύσεις της κάθε περίπτωσης με ένα σύνολο επαναλήψεων που θα μας δώσει την δυνατότητα να είμαστε σε θέση να βγάλουμε συμπέρασμα. Ακόμα θα μελετήσουμε την μονοτονία των σημείων αυτών που θεωρούμε λογικό ότι πρέπει να είναι μη φθίνουσα. Γι αυτές τις περιπτώσεις θα

γίνει έλεγχος για την μοναδικότητα και του σημείου τερματισμού λειτουργίας του σταθερού στον σταθμό 1, όπως επίσης θα γίνει έλεγχος και για την μονοτονία των σημείων αυτών που όπως θα θεωρήσουμε αρχικά, σύμφωνα με την λογική, ότι δεν θα είναι φθίνουσα. Όλα τα παραπάνω θα ελεγχθούν με το πρόγραμμα μας (Matlab) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του ελάχιστου κόστους έτσι όπως διαμορφώνονται για κάθε περίπτωση και τις εξισώσεις (3)-(6) .

Κεφάλαιο 3. Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα για την κάθε περίπτωση που θα αναλυθεί προήλθαν από έναν αριθμό επαναλήψεων το λιγότερο της τάξεως $2 \cdot 10^5$ με τυχαίες τιμές που προήλθαν από γεννήτρια τυχαίων αριθμών και ακολουθούσαν τους περιορισμούς της εκάστοτε περίπτωσης. Τα παρακάτω αποτελέσματα βασίζονται στον αριθμό των επαναλήψεων. Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα μας έγιναν στο πρόγραμμα Matlab .

Επιπλέον πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι στα διαγράμματα μας τα σημεία που παρατηρούμε θα είναι αυξημένα κατά +1. Για παράδειγμα εάν στο διάγραμμα φαίνεται ότι η αλλαγή πραγματοποιείται για $x_2 = 6$ στην πραγματικότητα το σημείο αλλαγής είναι το $x_2 = 5$ και στα αποτελέσματα γράφεται το πραγματικό σημείο αλλαγής κι όχι αυτό που φαίνεται στο αντίστοιχο διάγραμμα. Η παραπάνω ιδιαιτερότητα παρουσιάζεται διότι το Matlab στους πίνακες δεν επιτρέπει την εκχώρηση σε θέση (0,0) κι έτσι το σημείο που αντιστοιχεί σε αυτή την κατάσταση βρίσκεται στην θέση (1,1). Επίσης, προσοχή πρέπει να δοθεί και στις κλίμακες κάθε διαγράμματος διότι ανάλογα από πού αρχίζει το διάγραμμα διαμορφώνεται και η κλίμακα του κάθετου άξονα.

3.1 Αποτελέσματα για $h_1 \geq h_2$

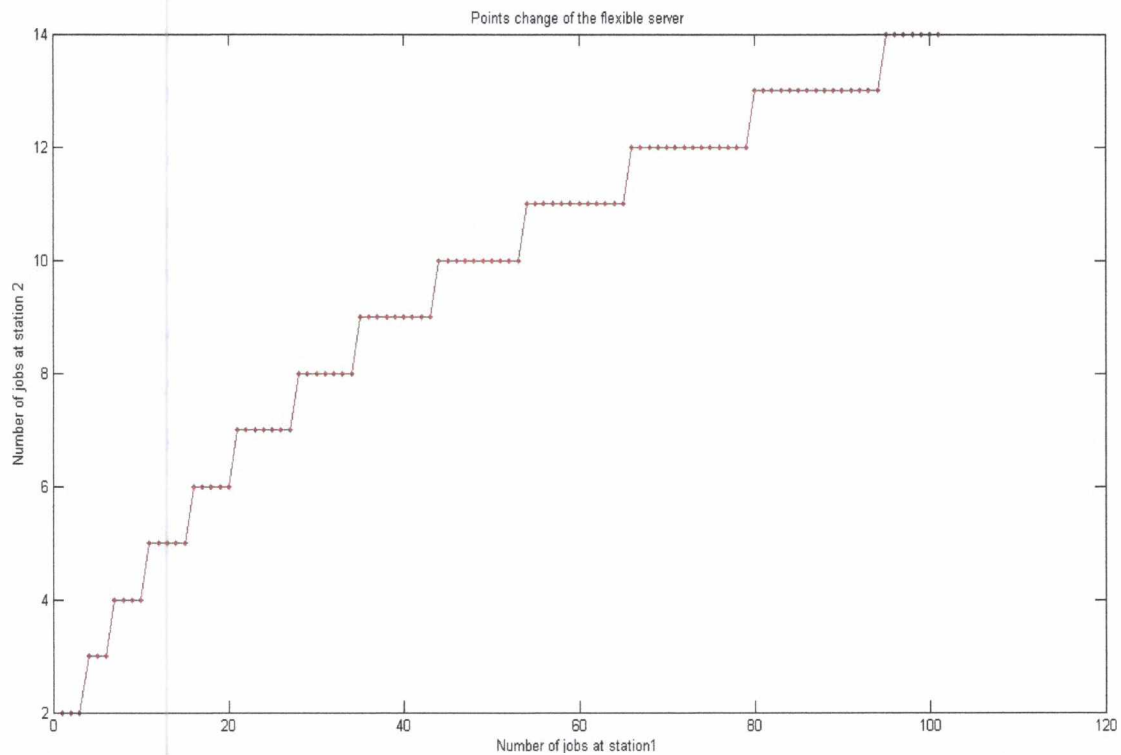
Σε αυτή την ενότητα θα γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κάθε περίπτωσης για την οποία ισχύει $h_1 \geq h_2$. Θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που αφορούν την μοναδικότητα του σημείου αλλαγής σε κάθε περίπτωση, όπως επίσης και τα αποτελέσματα για τον έλεγχο της μονοτονίας των σημείων αυτών. Επιπλέον, θα παρουσιάσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε τον τρόπο που επηρεάζει κάθε παράμετρος του προβλήματος την λήψη των αποφάσεων μας.

3.1.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Για την περίπτωση αυτή αποδείχτηκε η ύπαρξη μοναδικού σημείου αλλαγής του ευέλικτου από τον πρώτο σταθμό στον δεύτερο . Επίσης σε αυτή την περίπτωση ισχύει και η μονοτονία των σημείων αυτών. Γι' αυτή την περίπτωση θα δοθεί ένα

παράδειγμα παρακάτω για να γίνει κατανοητός ο ρόλος των παραμέτρων μας στην λήψη της απόφασης αλλαγής.

Οι αρχικές τιμές των παραμέτρων μας είναι οι εξής: $\nu_1 = 0.56$, $\nu_2 = 0.72$, $\mu_1 = 0.26$, $\mu_2 = 0.23$, $h_1 = 4.39$ και $h_2 = 2.98$. Το διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζει τα σημεία αλλαγής για μεγέθη ουρών σε κάθε σταθμό $L_1 = 100$ και $L_2 = 100$. Όπου L_1 , L_2 είναι το αρχικό πλήθος εργασιών σε κάθε σταθμό.

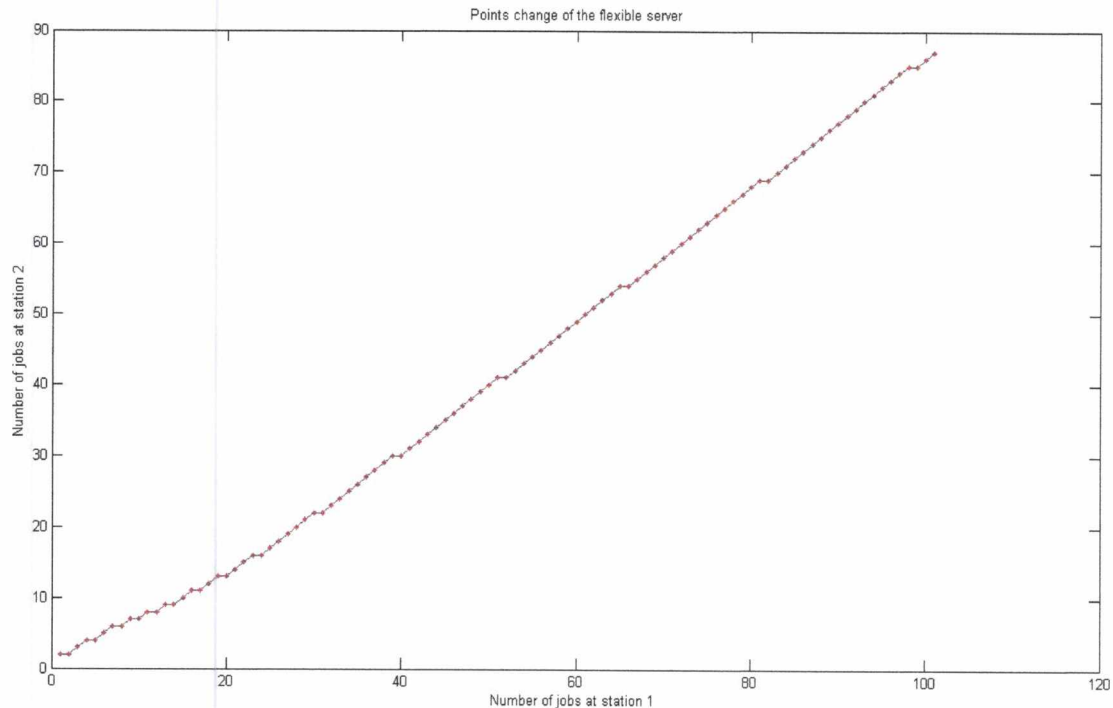


Εικόνα 2: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αρχικές τιμές παραμέτρων

Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται το x_1 , το σημείο αλλαγής αυξάνεται κι αυτό ή παραμένει ίδιο με το προηγούμενο κάτι το οποίο σημαίνει ότι ισχύει η μονοτονία που θέλαμε.

Αρχικά ας επικεντρωθούμε στο τρόπο που επηρεάζουν οι ρυθμοί εξυπηρέτησης που σχετίζονται με τον σταθμό 1. Στην περίπτωση που αλλάξουμε την τιμή του μ_1 και την αυξήσουμε τόσο ώστε να είναι ίση με το ν_1 (μέγιστη τιμή του

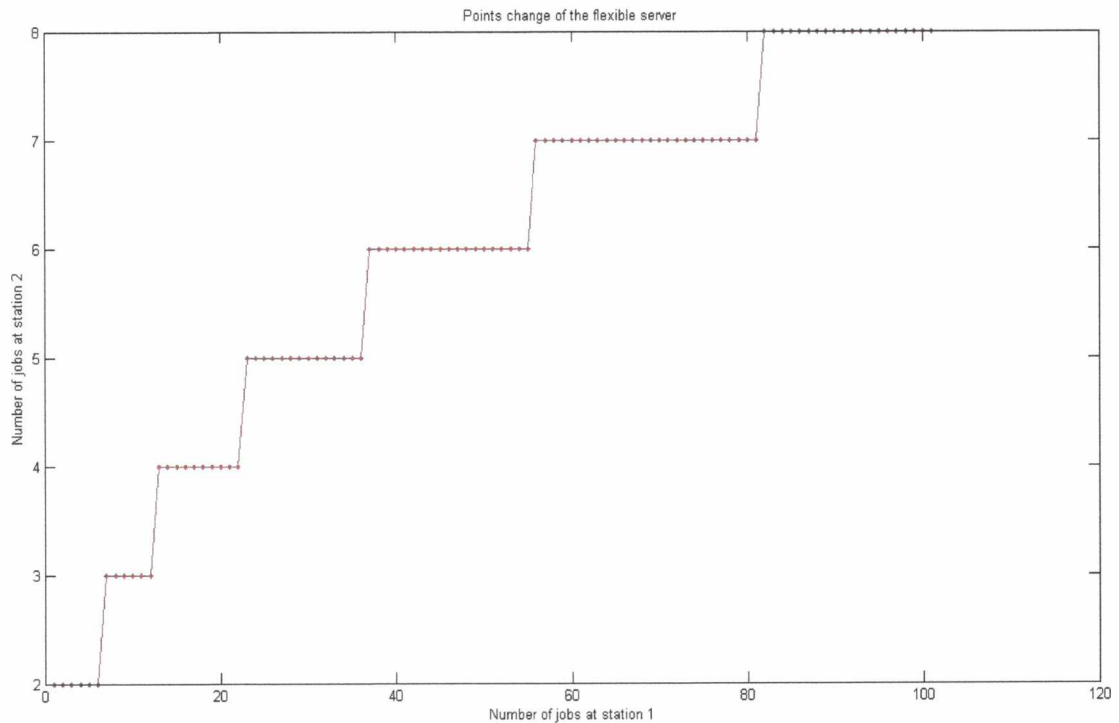
μ_1), ενώ τα κόστη και τους υπόλοιπους ρυθμούς εξυπηρέτησης τα κρατάμε με τις αρχικές τιμές τους, το νέο διάγραμμα έχει την παρακάτω μορφή:



Εικόνα 3: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου μ_1

Με την αύξηση αυτή του μ_1 παρατηρήθηκε ότι τα σημεία αλλαγής είναι αυξημένα σε σχέση με την αρχική περίπτωση. Αυτό οφείλεται στο ότι το $h_1 \geq h_2$ και αφού αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης του ευέλικτου που σχετίζεται με τον σταθμό 1, λογικό είναι να μας συμφέρει να παραμένει σε αυτή την θέση περισσότερη ώρα σε σύγκριση με τις αρχικές τιμές.

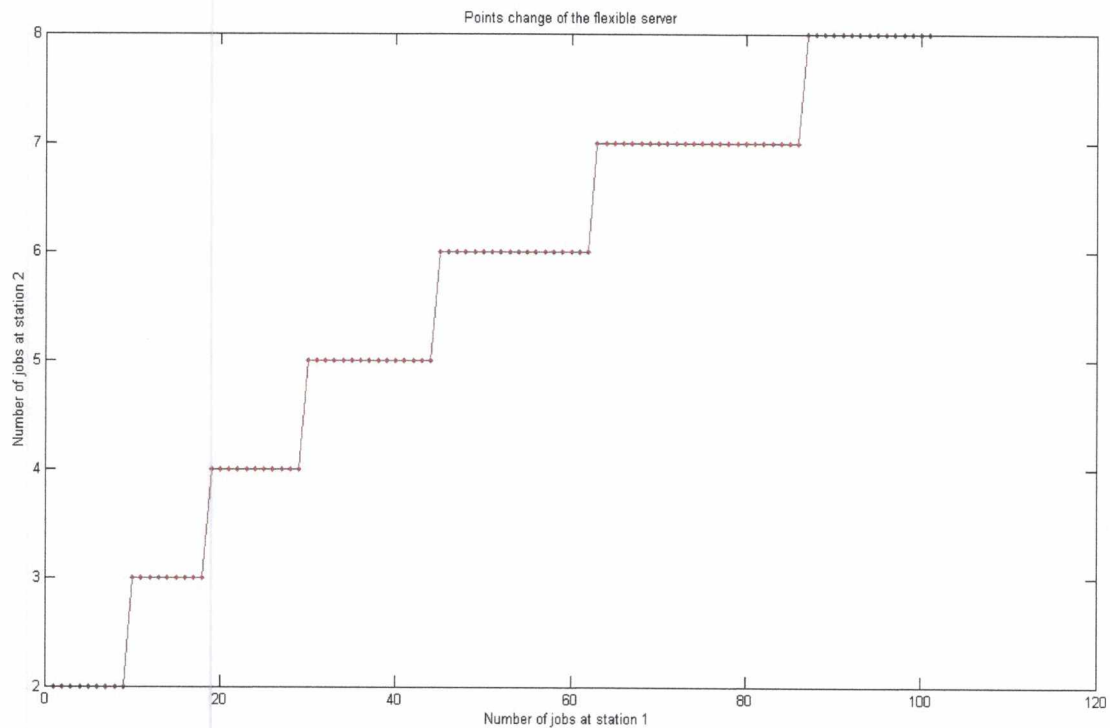
Στην περίπτωση αλλαγής μόνο της τιμής του ν_1 και στην συγκεκριμένη περίπτωση στην αύξηση της (από $\nu_1 = 0.56$ σε $\nu_1 = 0.76$) το διάγραμμα διαμορφώνεται ως εξής:



Εικόνα 4: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου ν_1

Εδώ παρατηρούμε ότι οι αλλαγές πραγματοποιούνται πιο νωρίς, κάτι το οποίο θα έπρεπε να περιμένουμε αφού αυτή η αύξηση ελαχιστοποιεί την ανάγκη του σταθμού 1 για επιπρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης σε σχέση με πριν και έτσι ο ευέλικτος τοποθετείται στον σταθμό 2 συντομότερα. Εάν υπήρχε μείωση της τιμής του ν_1 τα αποτελέσματα θα ήταν όμοια με αυτά της αύξησης του μ_1 .

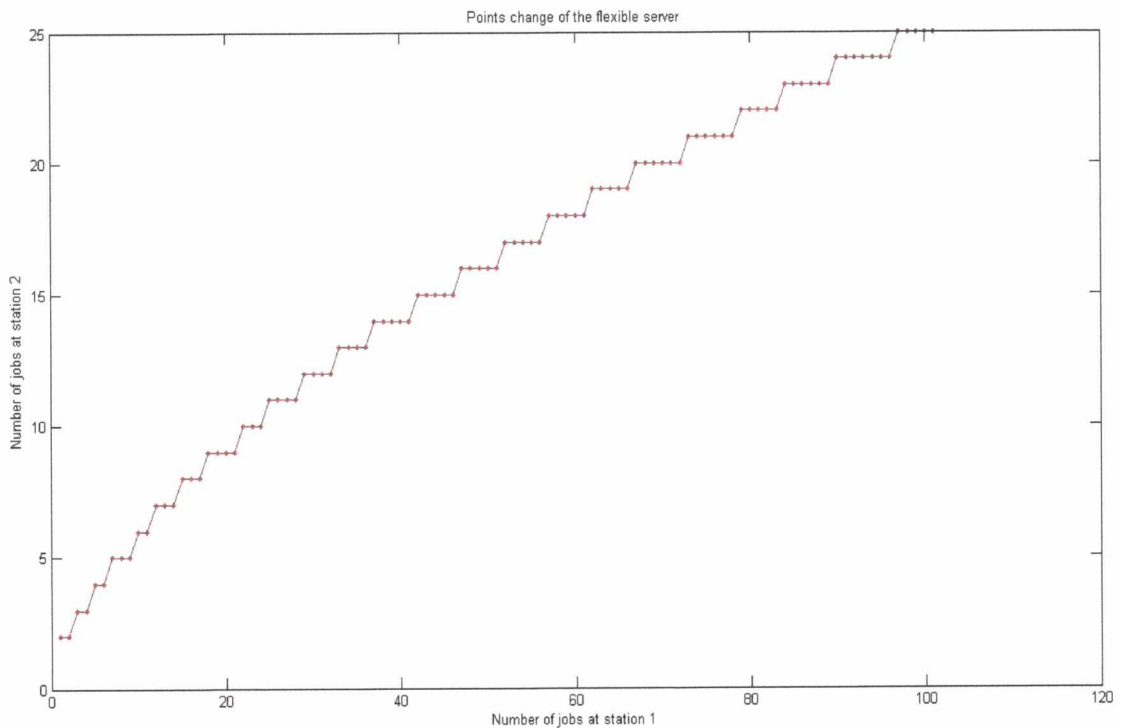
Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τους ρυθμούς εξυπηρέτησης που αφορούν τον σταθμό 2 και για αρχή θα εξετάσουμε την περίπτωση αλλαγής (αύξηση) της τιμής του μ_2 τέτοια ώστε να ισούται με το ν_2 και το διάγραμμα μας παίρνει την εξής μορφή:



Εικόνα 5: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου μ_2

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ότι η τοποθέτηση του ευέλικτου στον σταθμό 2 γίνεται πολύ πιο γρήγορα από τις άλλες περιπτώσεις λόγω της αύξησης του μ_2 κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο. Στην περίπτωση μας η αύξηση της τιμής του είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με την αρχική του τιμή και γι' αυτό παρατηρείται η τόσο μεγάλη απόκλιση των σημείων αλλαγής σε σύγκριση με τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις.

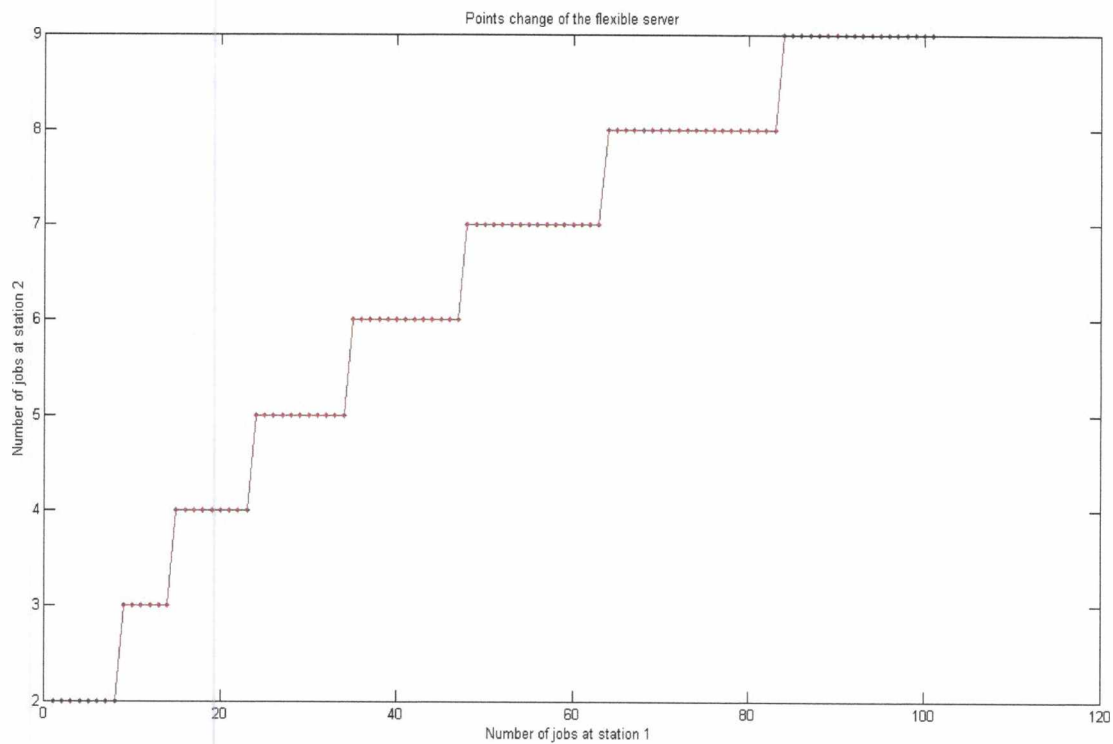
Στην περίπτωση της αλλαγής του ν_2 , όπως παρατηρήθηκε και για τον σταθμό 1, εάν υπάρξει μείωση στην τιμή της μεταβλητής αυτής τα αποτελέσματα θα είναι όμοια με την περίπτωση της αύξησης του μ_2 . Έτσι θα δώσουμε το διάγραμμα για την αύξηση της τιμής του ν_2 (από $\nu_2 = 0.72$ σε $\nu_2 = 0.92$) που είναι το εξής:



Εικόνα 6: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου V_2

Είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι συμβαίνει ό,τι και στον σταθμό 1. Δηλαδή, ότι όσο αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης του σταθερού εξυπηρετητή τόσο η ανάγκη για επιπλέον βοήθεια από τον ευέλικτο παρουσιάζεται αργότερα. Έτσι κι εδώ τα σημεία αλλαγής σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα είναι πιο μετά.

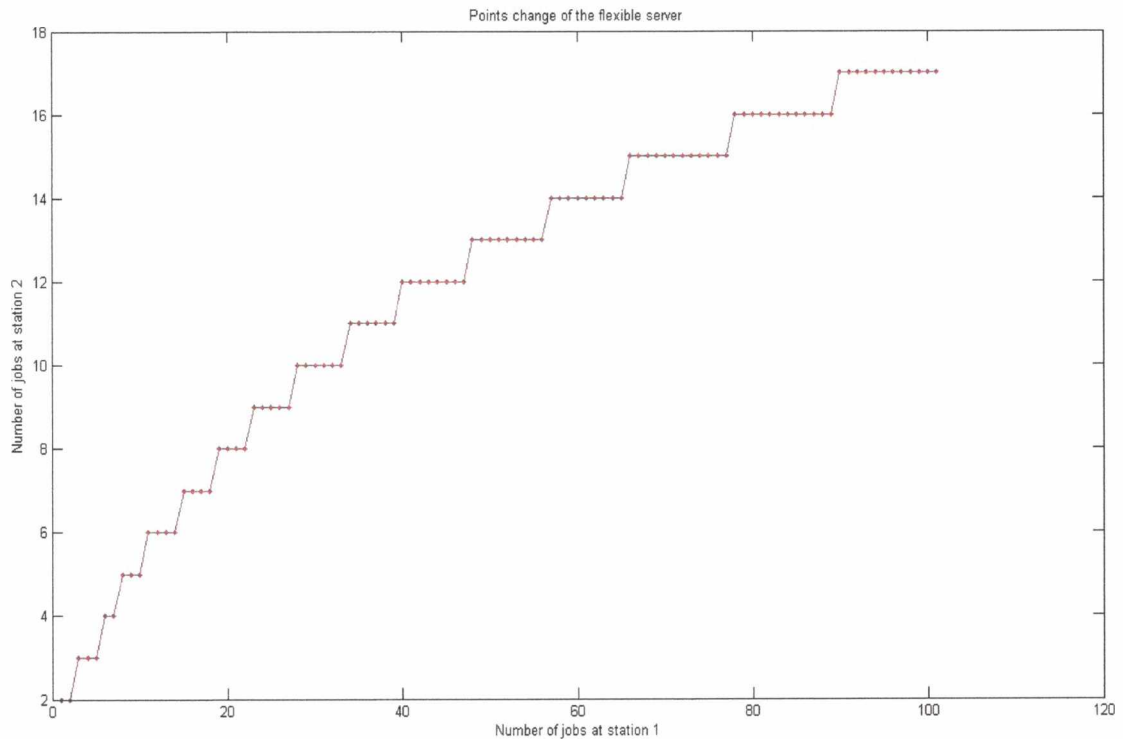
Επίσης τα κόστη έχουν σημαντικό ρόλο στην απόφαση αλλαγής και γι αυτό η επόμενη περίπτωση θα επικεντρωθεί αποκλειστικά στην αλλαγή των τιμών αυτών με το h_2 να φτάνει την τιμή του h_1 ενώ οι ρυθμοί εξυπηρέτησης παραμένουν σταθεροί. Το διάγραμμα που προκύπτει από την αλλαγή αυτή είναι το παρακάτω:



Εικόνα 7: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου h_2

Στο διάγραμμα αυτό η αύξηση του h_2 φαίνεται ξεκάθαρα ότι επηρέασε σημαντικά στην μεγάλη πτώση των σημείων αλλαγής. Αυτό γίνεται διότι αυξήθηκε το κόστος στην ουρά του δεύτερου σταθμού κι έτσι η ανάγκη για πρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης εμφανίστηκε πιο νωρίς επομένως η τοποθέτηση του ευέλικτου εκεί γίνεται συντομότερα σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα.

Εάν τώρα αλλάξουμε την τιμή του h_1 και την αυξήσουμε (από $h_1 = 4.39$ σε $h_1 = 4.99$) το διάγραμμα μας διαμορφώνεται όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 8: Διάγραμμα σημείων αλλαγής με αύξηση της παραμέτρου h_1

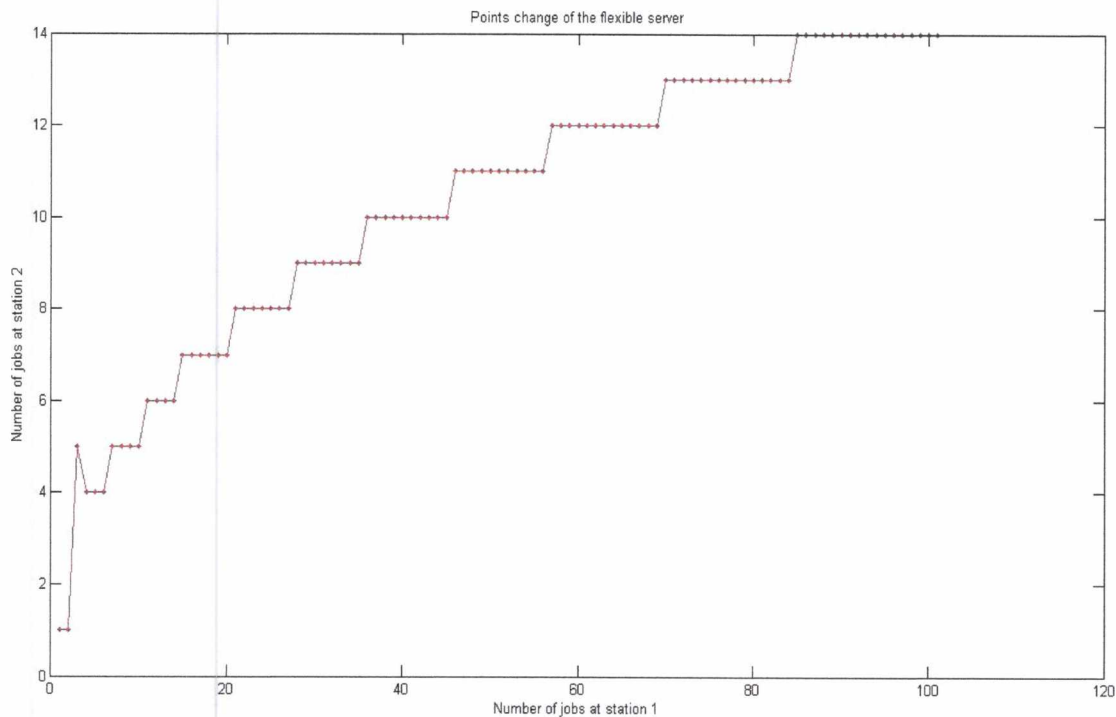
Με την αλλαγή αυτή που πραγματοποιήσαμε είναι εμφανές ότι ο ευέλικτος παραμένει στον σταθμό 1 παραπάνω, διότι το κόστος στην ουρά εκεί αυξήθηκε και μας συμφέρει να έχουμε εκεί μεγάλο ρυθμό εξυπηρέτησης για να εξυπηρετούνται οι εργασίες συντομότερα. Εάν τώρα είχαμε μειώσει το συγκεκριμένο κόστος τα αποτελέσματα θα ήταν ίδια με την αύξηση του h_2 .

Εν κατακλείδι, από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε τα εξής:

- Με την αύξηση του μ_1 ή του h_1 επιτυγχάνεται η παραμονή του ευέλικτου για περισσότερο χρόνο στον σταθμό 1.
- Με την αύξηση του μ_2 ή του h_2 η τοποθέτηση του ευέλικτου στον σταθμό 2 γίνεται πιο γρήγορα.
- Εάν υπάρξει αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης ενός εκ των δύο σταθερών εξυπηρετητών τότε σε εκείνο τον σταθμό μειώνεται η ανάγκη για πρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης κι έτσι ο ευέλικτος ή φεύγει νωρίτερα (σταθμός 1) ή τοποθετείται αργότερα (σταθμός 2).

3.1.2 Περίπτωση 2: $\nu_1 \geq \mu_1$ και $\nu_2 < \mu_2$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ύπαρξη μοναδικότητας του σημείου αλλαγής, μέσα στο πλαίσιο των επαναλήψεων που πραγματοποιήσαμε, φαίνεται να ισχύει. Όμως εδώ προέκυψε ένα ποσοστό 1-4 % όπου δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής. Μία τέτοια περίπτωση είναι για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων: $\nu_1 = 0.11$, $\nu_2 = 0.16$, $\mu_1 = 0.07$, $\mu_2 = 0.85$, $h_1 = 4.77$ και $h_2 = 0.49$, όπου το διάγραμμα των σημείων αλλαγής έχει την εξής μορφή:



Εικόνα 9: Διάγραμμα σημείων αλλαγής που δεν ισχύει η μονοτονία

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι πραγματοποιείται αλλαγή για $x_1 = 2$ στο $x_2 = 4$ και ενώ περιμένουμε οι επόμενες αλλαγές, καθώς αυξάνεται το x_1 , να πραγματοποιηθούν στην ίδια τιμή ή σε μεγαλύτερη αυτή η αλλαγή πραγματοποιείται σε χαμηλότερη τιμή $x_2 = 3$, όταν έχουμε $x_1 = 3$. Έτσι παρόλο το μικρό ποσοστό εμφάνισης τέτοιων περιπτώσεων, η μονοτονία εδώ δεν ισχύει.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις αυτές παρατηρήθηκε ότι η τιμή του μ_2 ήταν αρκετά μεγαλύτερη από τους άλλους τρεις ρυθμούς εξυπηρέτησης και επίσης τα κόστη στις δύο ουρές είχαν μεγάλη απόκλιση το ένα με το άλλο. Για

παράδειγμα θα δώσουμε έναν πίνακα με τιμές που προήλθαν από χίλιες επαναλήψεις και φαίνεται ξεκάθαρα η παραπάνω παρατήρηση.

v_1	μ_1	v_2	μ_2	h_1	h_2
0,13	0,09	0,06	0,94	3,61	0,37
0,23	0,18	0,05	0,88	2,49	0,49
0,13	0,09	0,01	0,68	4,52	0,81
0,29	0,26	0,07	0,81	2,65	0,64
0,02	0,01	0,13	0,71	2,19	0,05
0,03	0,02	0,07	0,53	3,51	0,15
0,15	0,09	0,01	0,49	1,21	0,23
0,12	0,09	0,21	0,72	1,47	0,19
0,26	0,22	0,23	0,93	4,48	0,98

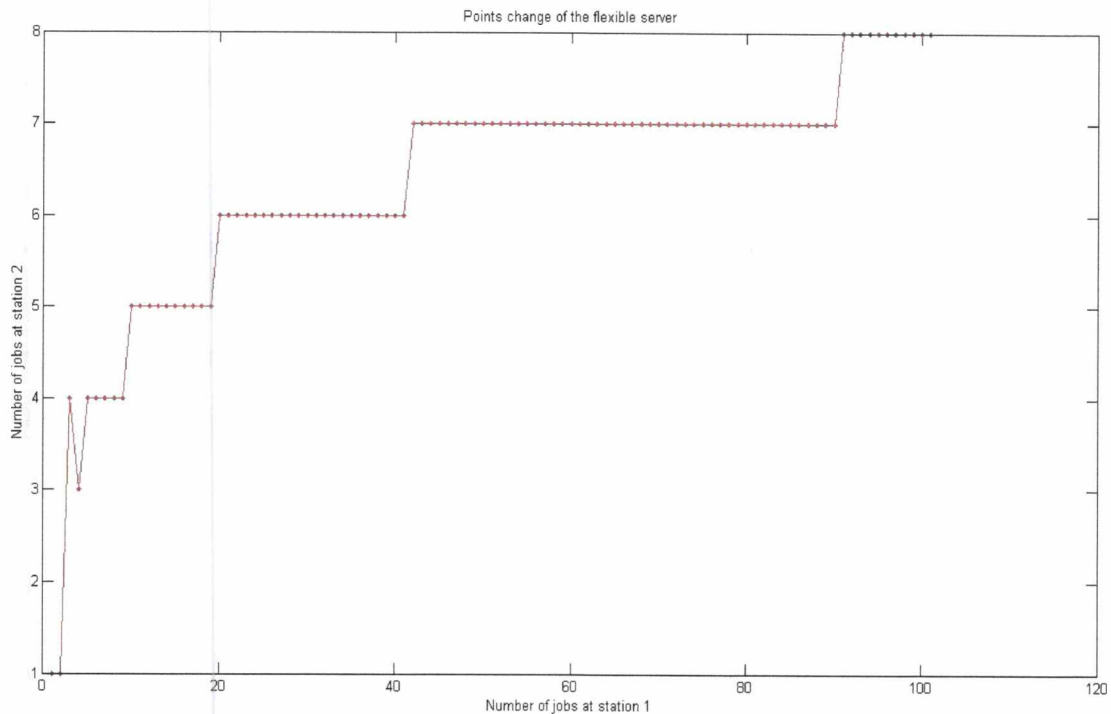
Πίνακας 3: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής

3.1.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Στην περίπτωση 3 ύστερα από τις επαναλήψεις που πραγματοποιήθηκαν είμαστε σε θέση να πούμε ότι η ύπαρξη μοναδικότητας του σημείου αλλαγής, αλλά και η μονοτονία των σημείων αυτών ισχύουν όπως και στη περίπτωση 1.

3.1.4 Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Ελέγχοντας αυτή την περίπτωση με το πλήθος των επαναλήψεων που έχει αναφερθεί πιο νωρίς μπορούμε να πούμε ότι η ύπαρξη μοναδικότητας του σημείου αλλαγής ισχύει, ενώ η μονοτονία των σημείων αυτών όχι. Όπως και στην περίπτωση 2 έτσι κι εδώ θα δοθεί ένα παράδειγμα για την μη ύπαρξη της μονοτονίας. Οι τιμές μας είναι οι εξής: $v_1 = 0.14$, $v_2 = 0.15$, $\mu_1 = 0.19$, $\mu_2 = 0.60$, $h_1 = 1.75$ και $h_2 = 0.46$. Το διάγραμμα που προκύπτει φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 10: Διάγραμμα σημείων αλλαγής που δεν ισχύει η μονοτονία

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω διάγραμμα μία αλλαγή του ευέλικτου πραγματοποιείται πιο νωρίς από ότι πριν. Στην περίπτωση 4, σύμφωνα πάντα με τον αριθμό επαναλήψεων που έχουμε πραγματοποιήσει, βλέπουμε ότι το ποσοστό τέτοιων περιπτώσεων είναι στο 0.1- 0.4 % πιο μικρό από ότι στην περίπτωση 2. Για παράδειγμα σε χίλιες επαναλήψεις εμφανίστηκαν οι δύο παρακάτω περιπτώσεις .

v1	μ1	v2	μ2	h1	h2
0,12	0,13	0,06	0,96	4,83	0,84
0,09	0,11	0,08	0,51	1,61	0,37

Πίνακας 4: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής

3.1.5 Γενικά συμπεράσματα για $h_1 \geq h_2$

Τελικά τα συμπεράσματα μας, από όλα τα παραπάνω, για τις περιπτώσεις που ισχύει $h_1 \geq h_2$ είναι τα εξής:

- Για όλες τις περιπτώσεις ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής του ευέλικτου εξυπηρετητή.
- Στις περιπτώσεις 1 και 3 η ακολουθία των σημείων αλλαγής είναι μη φθίνουσα ενώ στις περιπτώσεις 2 και 4 δεν ισχύει πάντα αυτό.
- Μεταξύ των δύο περιπτώσεων που δεν ισχύει η μονοτονία που υποθέσαμε, υπήρχε διαφορά στην συχνότητα που εμφανίζεται μία περίπτωση που δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής.
- Σε όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες η ακολουθία των σημείων αλλαγής είναι εν μέρει φθίνουσα, το σημείο που παρατηρείται αυτή η συμπεριφορά είναι το $x_1 = 2$.

3.2 Αποτελέσματα για $h_1 < h_2$

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κάθε περίπτωσης για την οποία ισχύει $h_1 < h_2$. Οι τιμές των παραμέτρων για τις περιπτώσεις που δεν ισχύουν οι ιδιότητες που περιμέναμε έχουν έξι δεκαδικά ψηφία, σε αντίθεση με την περίπτωση $h_1 \geq h_2$ που έχουμε κρατήσει δύο δεκαδικά, διότι τα αποτελέσματα είναι ευαίσθητα στην αποκοπή δεκαδικών.

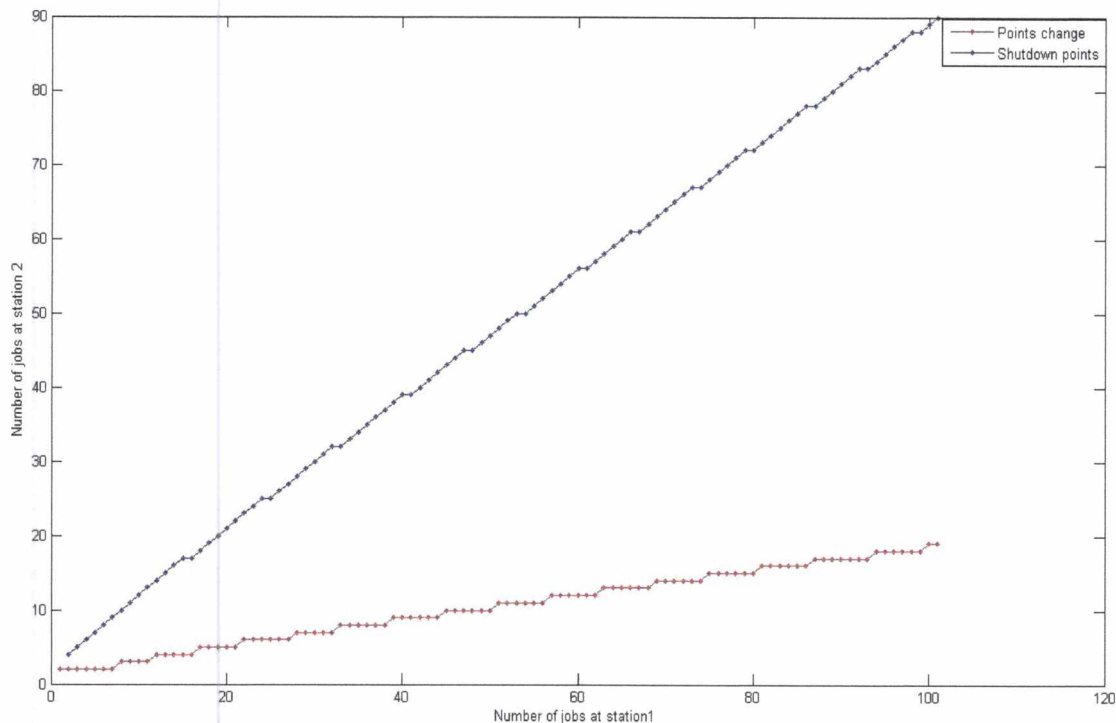
3.2.1 Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

Για την περίπτωση αυτή, ύστερα από τον καθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, μπορούμε με βάση τα αποτελέσματα που εξάγαμε να πούμε ότι ισχύει η ύπαρξη μοναδικότητας του σημείου αλλαγής, όπως επίσης και η μονοτονία των σημείων αυτών. Ακόμα, η υπόθεση μας για ύπαρξη μοναδικού σημείου τερματισμού του σταθερού στον σταθμό 1 βγαίνει αληθής όμως όχι και η μονοτονία των σημείων αυτών.

Για να διασαφηνιστεί καλύτερα ο ρόλος των παραμέτρων στην λήψη της απόφασης για τον ευέλικτο εξυπηρετητή αλλά και για να αναλύσουμε τον ρόλο αυτών στην απόφαση τερματισμού της λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή στον

σταθμό 1, θα δώσουμε ένα παράδειγμα με ανάλυση διαγραμμάτων και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις με $v_1 \geq \mu_1$, $v_2 \geq \mu_2$.

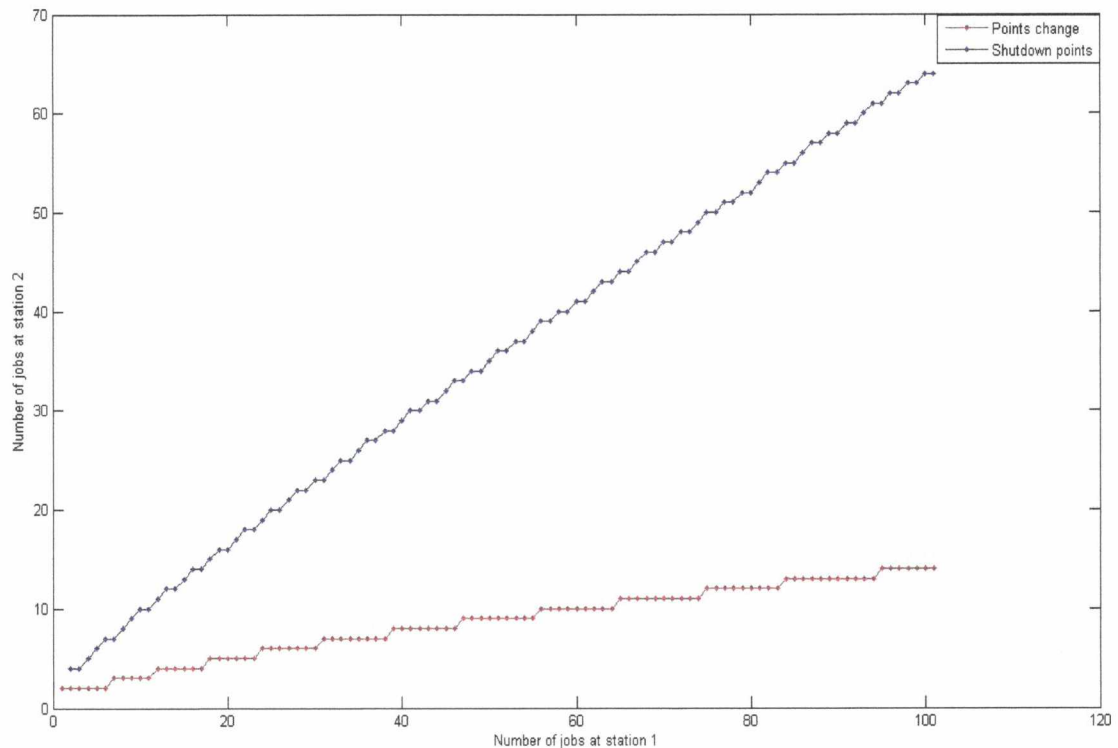
Στο παράδειγμα που ακολουθεί οι αρχικές τιμές είναι οι εξής: $v_1 = 0.28$, $v_2 = 0.68$, $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.18$, $h_1 = 1.90$ και $h_2 = 3.14$. Τα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν έχουν σχεδιαστεί για μεγέθη ουρών σε κάθε σταθμό $L_1 = 100$ και $L_2 = 100$. Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζονται ταυτόχρονα τα σημεία αλλαγής του ευέλικτου εξυπηρετητή (*Points change*) με τα σημεία τερματισμού λειτουργίας του σταθερού στον σταθμό 1 (*Shutdown points*).



Εικόνα 11: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αρχικές τιμές παραμέτρων

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται εύκολα ότι ο ευέλικτος τοποθετείται νωρίς στον σταθμό 2. Με βάση το παραπάνω διάγραμμα θα παρατηρηθεί παρακάτω το πώς οι αλλαγές των παραμέτρων επηρεάζουν την απόφαση τερματισμού και αλλαγής.

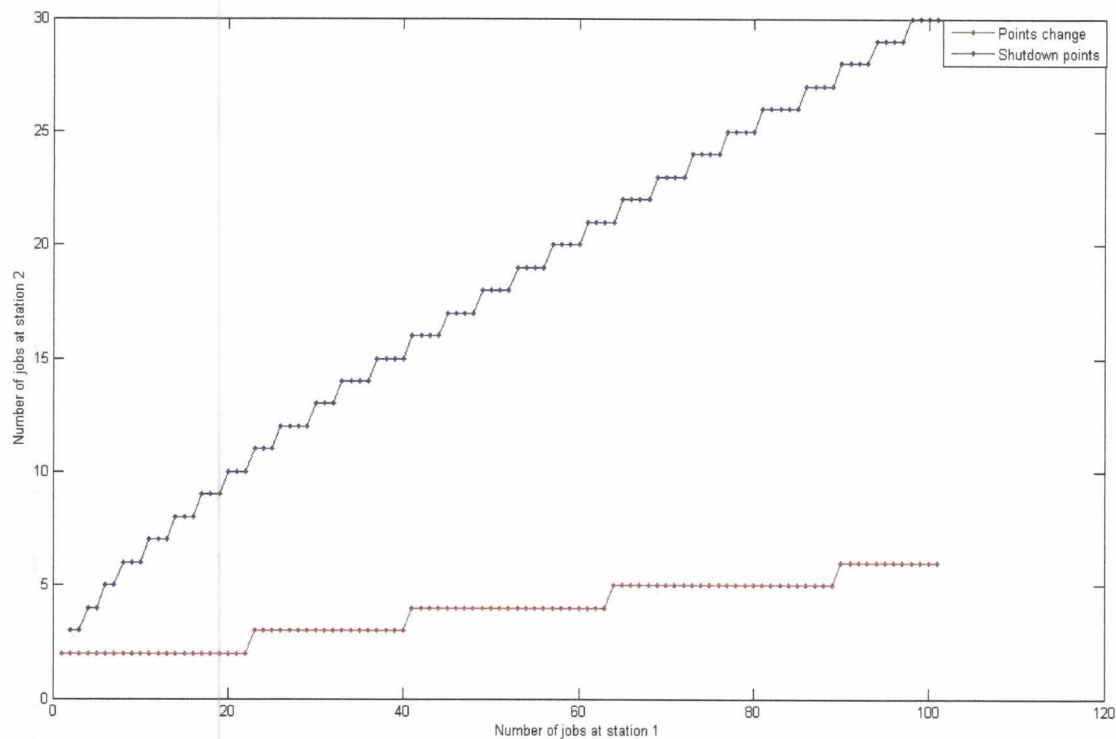
Οι αλλαγές που θα πραγματοποιηθούν θα είναι όμοιες με του παραδείγματος της περίπτωσης για $h_1 \geq h_2$, επομένως θα ξεκινήσουμε με αλλαγή της τιμής του μ_1 και θα την αυξήσουμε τόσο ώστε να είναι ίση με το ν_1 (μέγιστη τιμή του μ_1), ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Το παραπάνω διάγραμμα διαμορφώνεται ως εξής:



Εικόνα 12: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου μ_1

Σε αυτό το διάγραμμα ενώ θα περιμέναμε τα σημεία αλλαγής να είναι αυξημένα σε σχέση με το αρχικό μας παρατηρούμε πτώση των σημείων. Η πιο λογική εξήγηση γι' αυτή την πτώση είναι ότι: η αύξηση του μ_1 αύξησε πιο γρήγορα τον αριθμό εργασιών στον δεύτερο σταθμό και δεδομένου ότι ισχύει $h_1 < h_2$ είναι λογικό η ανάγκη για πρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης στον σταθμό 2 να εμφανίζεται νωρίτερα. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε επίσης ότι ο τερματισμός του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1 γίνεται συντομότερα σε σχέση με το αρχικό μας διάγραμμα.

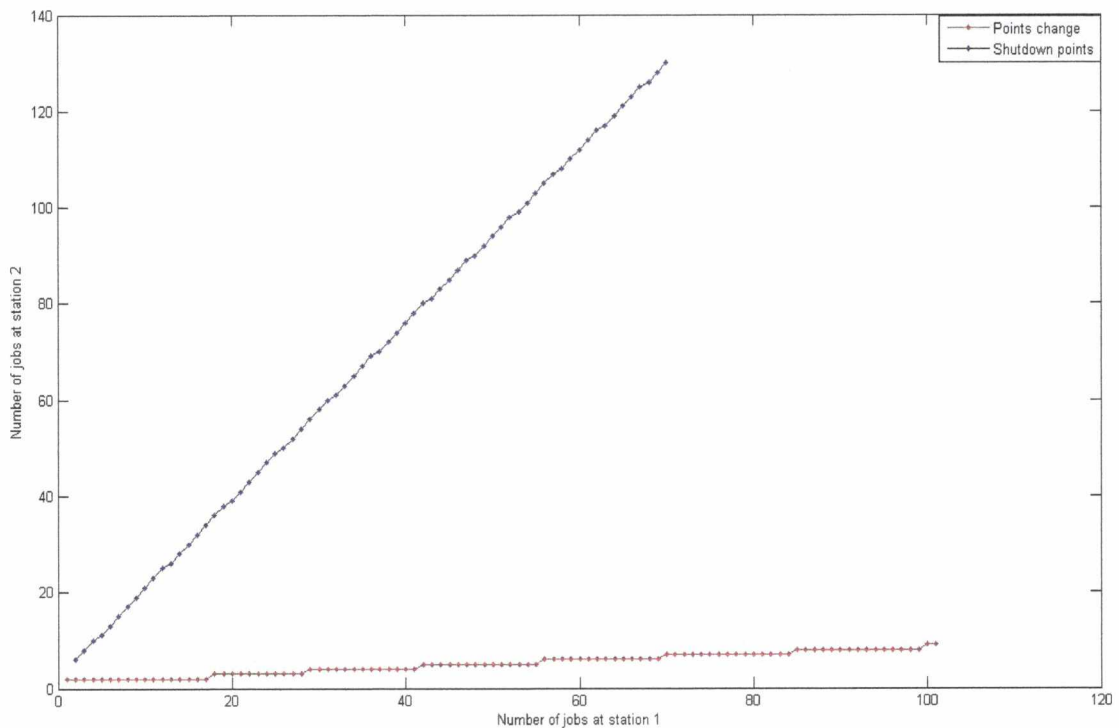
Εάν τώρα αυξήσουμε την τιμή του ν_1 (από $\nu_1 = 0.28$ σε $\nu_1 = 0.58$) το αρχικό μας διάγραμμα διαμορφώνεται όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 13: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου ν_1

Σε αυτό το διάγραμμα, όπως και στο πρώτο παράδειγμα που δώσαμε, εύκολα παρατηρείται ότι με αυτή την αύξηση ο ευέλικτος τοποθετείται πιο γρήγορα στον σταθμό 2 αφού η αύξηση αυτή μείωσε την ανάγκη για περαιτέρω βοήθεια στον σταθμό 1. Επιπλέον αυτή η αλλαγή είχε και ως αποτέλεσμα ο σταθερός εξυπηρετητής να σταματάει αρκετά πιο νωρίς σε σχέση με τις αρχικές τιμές. Σε περίπτωση μείωσης της τιμής ν_1 οι αλλαγές θα ήταν όμοιες με αυτές της αύξησης του μ_1 .

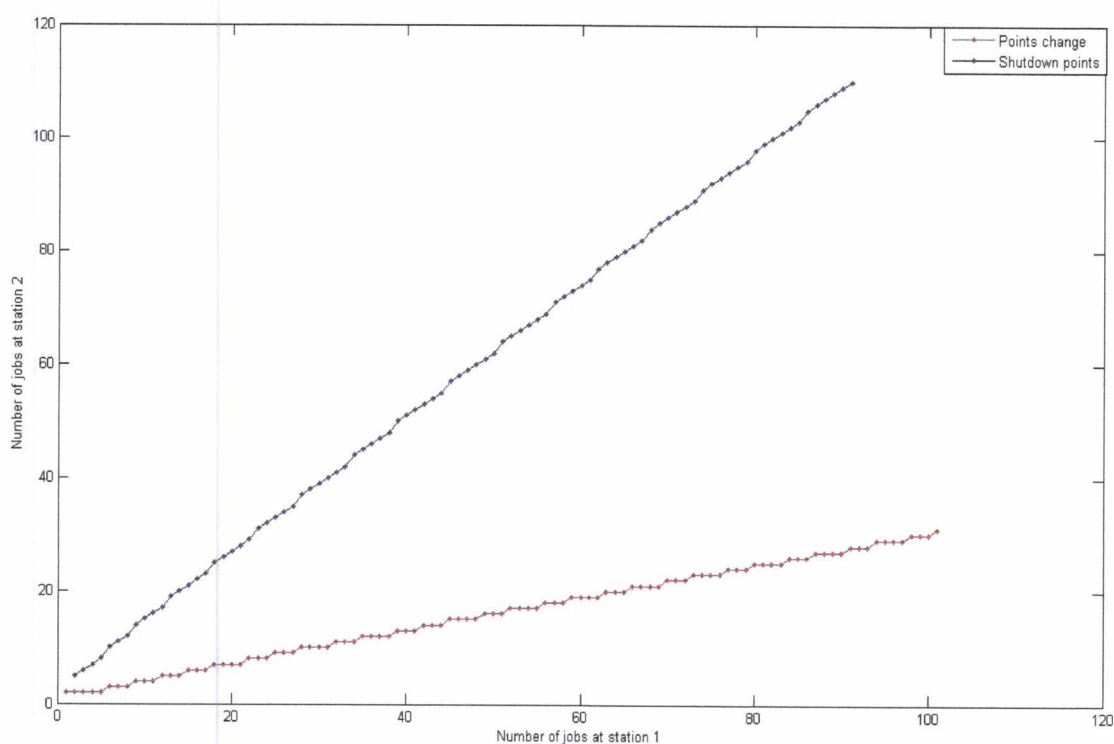
Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις παραμέτρους που αφορούν τον σταθμό 2 για να παρατηρήσουμε την επίδρασή τους και στις δύο αποφάσεις. Θα ξεκινήσουμε με την αύξηση του μ_2 και θα φτάσουμε την τιμή του μέχρι την τιμή του ν_2 (μέγιστη τιμή του μ_2) για να είναι πιο εμφανής η επίδραση του συγκεκριμένου ρυθμού εξυπηρέτησης στην λήψη των προαναφερθεισών αποφάσεων. Το διάγραμμα μας διαμορφώνεται ως εξής:



Εικόνα 14: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου μ_2

Ξεκινώντας, είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται η τιμή του μ_2 τόσο πιο νωρίς γίνεται η τοποθέτηση του ευέλικτου στον σταθμό 2, κάτι το οποίο οφείλεται στο μεγαλύτερο κόστος αναμονής στην ουρά του σταθμού 2 (περιπτώσεις $h_1 < h_2$) και είναι λογικό να θέλουμε να εξυπηρετούνται πιο γρήγορα οι εργασίες εκεί. Έπειτα, παρατηρούμε ότι η αύξηση του συγκεκριμένου ρυθμού εξυπηρέτησης έχει ως αποτέλεσμα ο σταθερός εξυπηρετητής του σταθμού 1 να σταματάει την λειτουργία του αργότερα ή και να μην έχει προλάβει να σταματήσει όπως φαίνεται και από το αντίστοιχο διάγραμμα που υπάρχουν σημεία τερματισμού μέχρι $x_1 = 69$. Αυτό οφείλεται στο ότι οι εργασίες του σταθμού 2 εξυπηρετούνται πιο γρήγορα κι έτσι δεν είναι αναγκαία η διακοπή του σταθερού εξυπηρετητή στον πρώτο σταθμό τόσο νωρίς όσο στην αρχή αφού οι εργασίες που αποστέλλει εξυπηρετούνται πιο νωρίς.

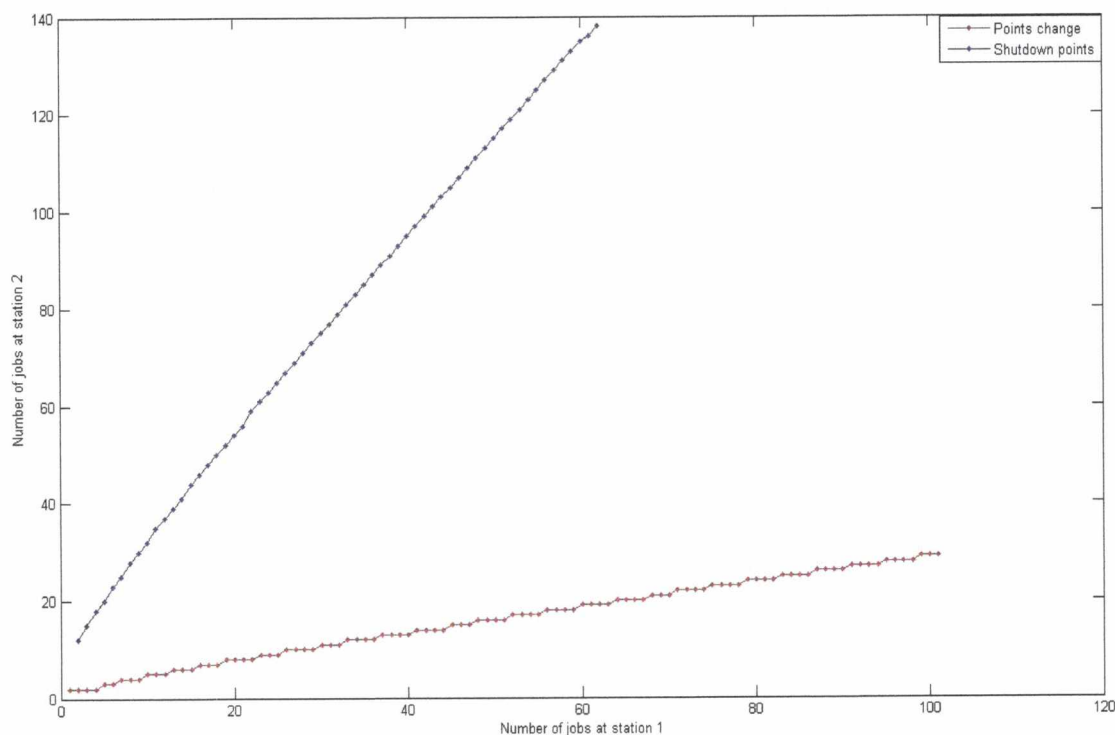
Παραμένοντας στον σταθμό 2 θα πραγματοποιήσουμε αύξηση του ν_2 (από $\nu_2 = 0.68$ σε $\nu_2 = 0.88$) ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι διατηρούνται πάντα σταθερές. Το διάγραμμα μας διαμορφώνεται ως εξής:



Εικόνα 15: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου ν_2

Η αύξηση του ν_2 έχει ως αποτέλεσμα τα σημεία αλλαγής να εμφανίζονται αργότερα σε σχέση με τις αρχικές τιμές όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα, που είναι απολύτως λογικό διότι μειώνεται η ανάγκη για προσθήκη και άλλου ρυθμού εξυπηρέτησης στον συγκεκριμένο σταθμό. Έπειτα, παρατηρούμε ότι με την αύξηση του συγκεκριμένου ρυθμού εξυπηρέτησης τα σημεία τερματισμού της λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1 εμφανίζονται αργότερα και ακόμα από $x_1 = 90$ και μετά δεν έχουν προλάβει να εμφανιστούν αυτά τα σημεία και ο λόγος είναι όμοιος με αυτόν που αναφέραμε και στην περίπτωση αύξησης του μ_2 .

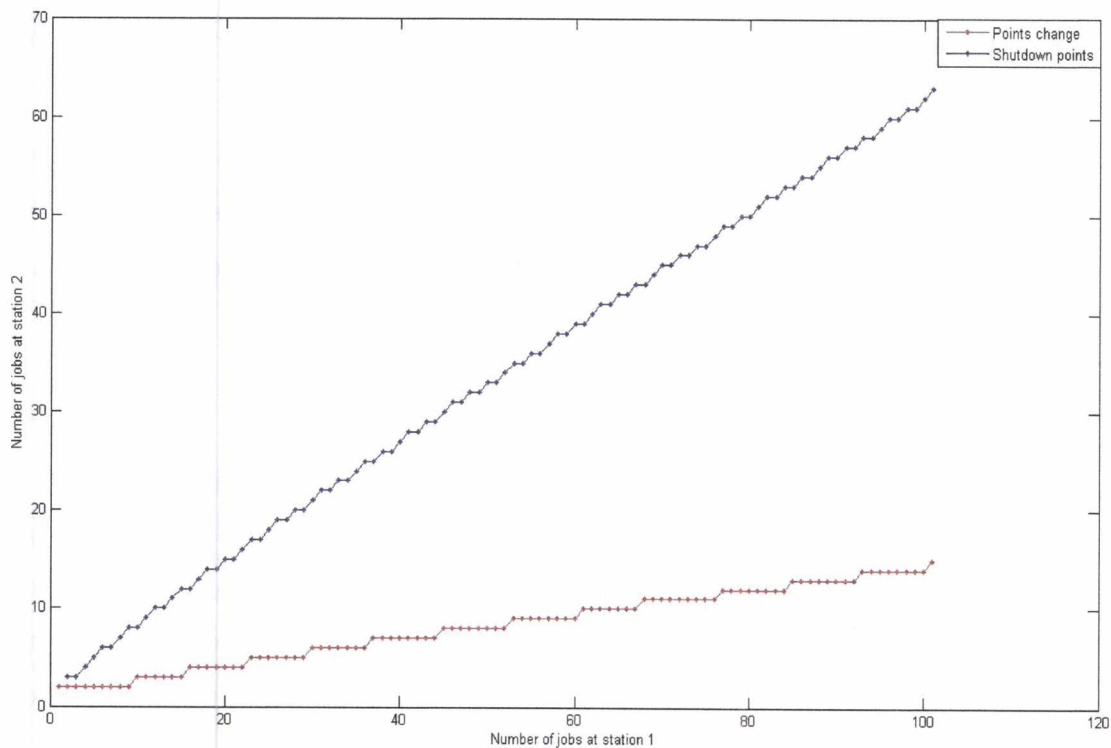
Τέλος θα ασχοληθούμε με το πώς επηρεάζουν τα κόστη των σταθμών στην λήψη των δύο αποφάσεων που μας απασχολούν. Ξεκινώντας θα αλλάξουμε το κόστος παραμονής στην ουρά του σταθμού 1 και θα το αυξήσουμε (από $h_1 = 1.90$ σε $h_1 = 3.00$) τόσο ώστε να πλησιάσει το h_2 αλλά να μην ισούται με αυτό. Το διάγραμμα μας είναι το εξής:



Εικόνα 16: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου h_1

Στο πάνω διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι η μετατόπιση του ευέλικτου στον σταθμό 2 γίνεται πιο μετά απ' ότι στο αρχικό. Αυτό οφείλεται στο ότι αυξήσαμε το κόστος στην ουρά του πρώτου σταθμού και είναι λογικό ο ευέλικτος να παραμείνει παραπάνω για να ενισχύσει τον σταθερό εξυπηρετητή, εάν το είχαμε μειώσει το συγκεκριμένο κόστος οι αλλαγές θα παρουσιάζονταν πιο νωρίς. Επιπλέον βλέπουμε ότι ο σταθερός του σταθμού 1 σταματάει να λειτουργεί πιο αργά και όπως εμφανίστηκε και σε μερικές περιπτώσεις παραπάνω κάποια σημεία τερματισμού δεν πραγματοποιήθηκαν και συγκεκριμένα εδώ από το $x_1 = 63$ και μετά .

Στο τέλος θα ασχοληθούμε με το κόστος παραμονής στην ουρά του σταθμού 2 (h_2), όπου εάν το μειώσουμε η επιρροή που έχει στην λήψη των αποφάσεων που μας ενδιαφέρουν είναι όμοια με την αύξηση του h_1 . Έτσι θα αυξήσουμε την μεταβλητή μας (από $h_2 = 3.14$ σε $h_2 = 4.14$) και θα πάρουμε τις εξής αλλαγές στο διάγραμμα μας:



Εικόνα 17: Διάγραμμα σημείων αλλαγής και σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή με αύξηση της παραμέτρου h_2

Από αυτό το διάγραμμα είναι εμφανές ότι τα σημεία αλλαγής του ευέλικτου εμφανίζονται νωρίτερα και αυτό διότι αυξήσαμε το κόστος παραμονής στην ουρά του δεύτερου σταθμού και γι' αυτό οι εργασίες εκεί πρέπει να φύγουν πιο γρήγορα, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με την πρόσθεση του ρυθμού εξυπηρέτησης του ευέλικτου εκεί. Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι ο τερματισμός λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή πραγματοποιείται νωρίτερα απ' ό,τι με τις αρχικές τιμές διότι δεν μας συμφέρει να τελειώνουν οι εργασίες από τον πρώτο σταθμό και να προστίθενται στην ουρά εξυπηρέτησης του δεύτερου λόγω του μεγάλου κόστους αναμονής εκεί.

Εν τέλει, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε τα εξής:

- Με την αύξηση του h_1 επιτυγχάνεται η παραμονή του ευέλικτου για περισσότερο χρόνο στον σταθμό 1.
- Στην περίπτωση αύξησης του μ_1 ενώ περιμέναμε ο ευέλικτος να παραμείνει στον σταθμό 1 περισσότερο συνέβη το αντίθετο.

- Με την αύξηση του μ_2 ή του h_2 η τοποθέτηση του ευέλκτου στον σταθμό 2 γίνεται πιο γρήγορα.
- Εάν υπάρξει αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης ενός εκ των δύο σταθερών εξυπηρετητών τότε σε εκείνο τον σταθμό μειώνεται η ανάγκη για πρόσθετο ρυθμό εξυπηρέτησης κι έτσι ο ευέλκτος ή φεύγει νωρίτερα (σταθμός 1) ή τοποθετείται αργότερα (σταθμός 2).

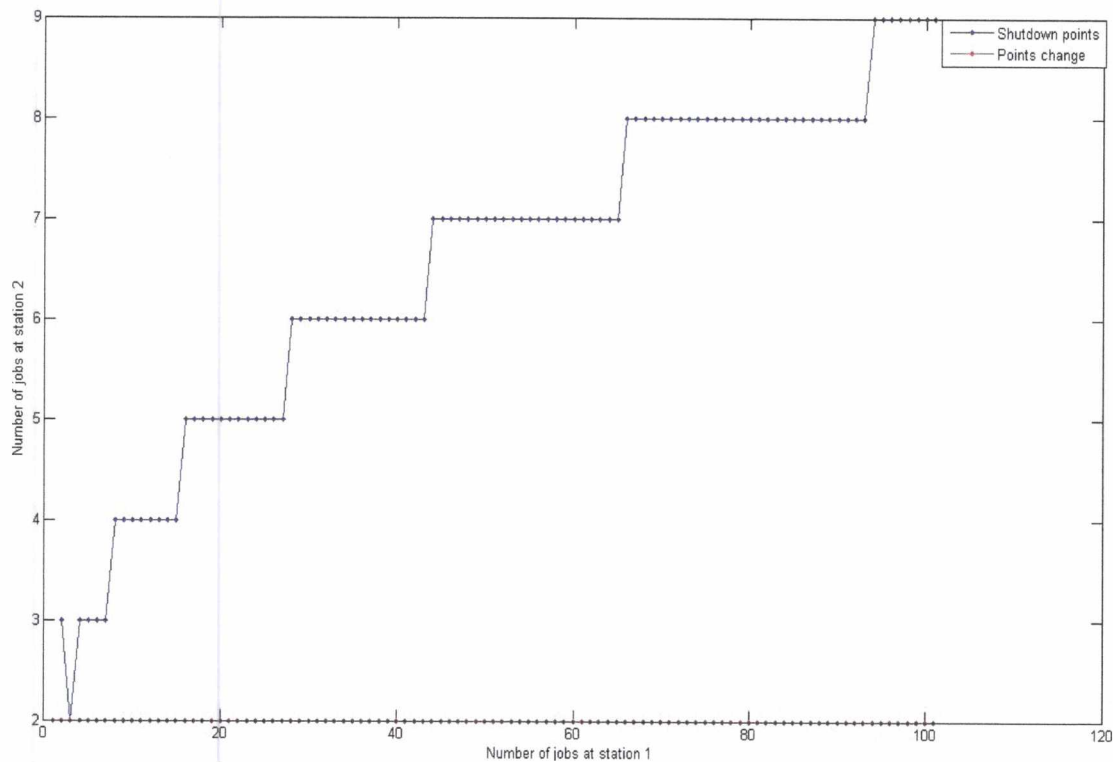
Παραπάνω, δόθηκε ένα παράδειγμα για την περίπτωση που ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού στον σταθμό 1. Όμως υπάρχει ένα ποσοστό περιπτώσεων, 0.4-0.8%, για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων αυτών. Ως παράδειγμα θα δοθούν οι περιπτώσεις που προέκυψαν από χίλιες επαναλήψεις, πίνακας 5, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι παντού ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής.

v_1	μ_1	v_2	μ_2	h_1	h_2
0,417744	0,410664	0,301455	0,211350	1,976090	3,665355
0,637709	0,610730	0,240707	0,162747	1,448592	2,156258
0,755220	0,740460	0,234783	0,124096	0,912598	1,205744
0,250306	0,203085	0,084423	0,044850	3,104899	4,202492
0,398005	0,277238	0,064641	0,048329	2,175630	2,681602
0,839179	0,570840	0,416922	0,268035	1,145856	1,856326

Πίνακας 5: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή

Σε όλες τις περιπτώσεις που δεν ισχύει η μονοτονία παρατηρήθηκε ένα κοινό χαρακτηριστικό, ότι το σημείο στο οποίο χαλαίει η μονοτονία είναι όταν υπάρχουν δύο εργασίες στον σταθμό 1 όπου η αλλαγή γίνεται σε ένα σημείο πιο κάτω από ότι

πριν. Αυτό θα φανεί στο διάγραμμα που θα γίνει για το τελευταίο σύνολο τιμών του παραπάνω πίνακα.



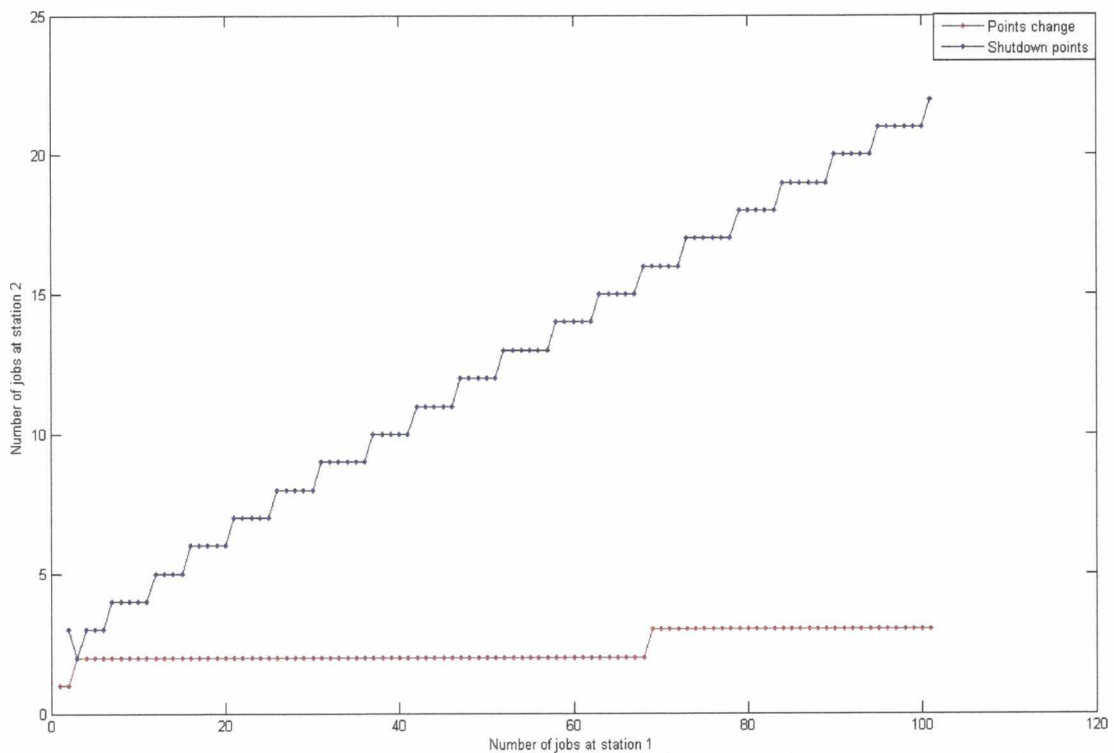
Εικόνα 18: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία

Στο διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα το σημείο που τονίσαμε πριν ότι χαλαίει την μονοτονία κι ακόμα παρατηρείται ότι τα σημεία αλλαγής παραμένουν σταθερά .

3.2.2 Περίπτωση 2: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

Στην περίπτωση 2, σύμφωνα με τις επαναλήψεις που πραγματοποιήσαμε, μπορούμε να πούμε ότι η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής όπως και η μονοτονία των σημείων αυτών ισχύουν. Για το σημείο τερματισμού λειτουργίας του σταθερού εξυπηρετητή του σταθμού 1 φαίνεται κι εδώ να ισχύει η μοναδικότητά του αλλά όχι η μονοτονία των σημείων αυτών, ότι ακριβώς και στη περίπτωση 1. Τα σημεία για τα οποία δεν ισχύει η μονοτονία είναι ένα μικρό ποσοστό της τάξεως 0.01-0.05%, δηλαδή σε χίλιες επαναλήψεις μπορεί να υπάρξει μία ή και καμία τέτοια περίπτωση.

Μία περίπτωση θα δοθεί παρακάτω για τις εξής τιμές: $v_1 = 0.727669$, $v_2 = 0.753265$, $\mu_1 = 0.623846$, $\mu_2 = 0.759460$, $h_1 = 0.516921$ και $h_2 = 1.584164$.



Εικόνα 19: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία

Από το διάγραμμα επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που προαναφέρθηκαν πιο πάνω για την συγκεκριμένη περίπτωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε όσες περιπτώσεις δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού, αυτό οφείλεται σε ένα μοναδικό σημείο το οποίο εμφανίζεται όταν υπάρχουν δύο εργασίες στον σταθμό 1.

3.2.3 Περίπτωση 3: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

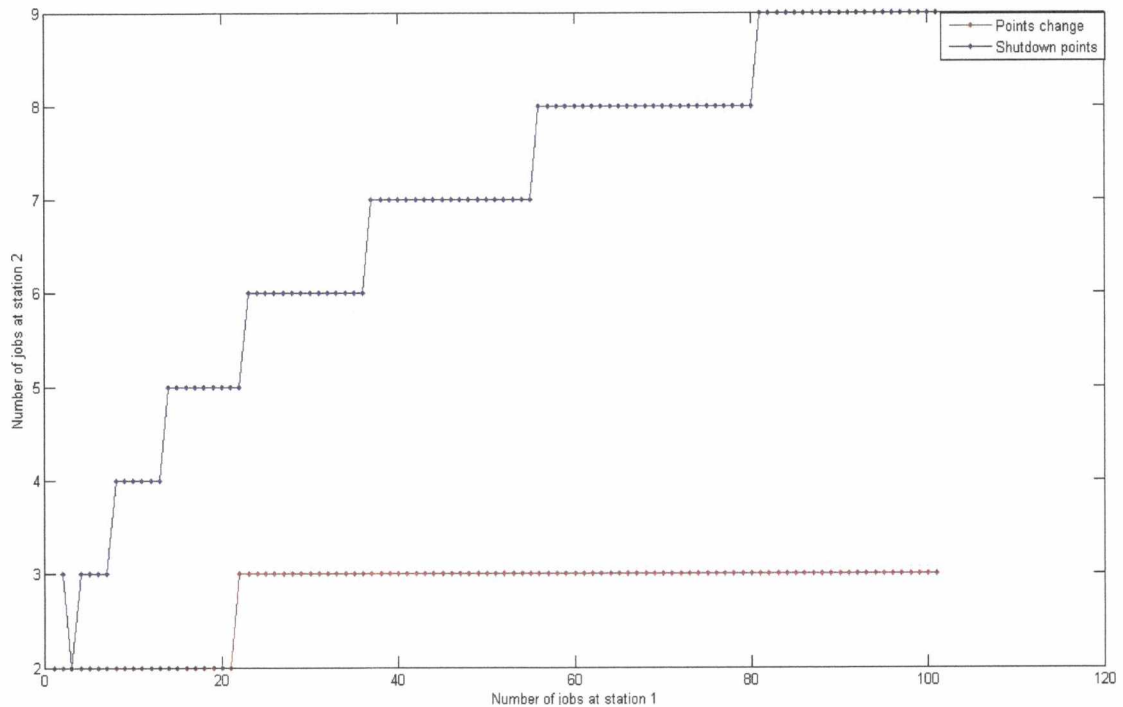
Σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις δύο παραπάνω, βγάλαμε το συμπέρασμα ότι ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής όπως και η μονοτονία των σημείων αυτών. Επιπλέον μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι ισχύει η μοναδικότητα του σημείου τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1

αλλά όπως και στις άλλες περιπτώσεις όχι και η μονοτονία των σημείων αυτών. Το ποσοστό εμφάνισης τέτοιων περιπτώσεων είναι 0.4-0.8%, όμοιο με το ποσοστό που εμφανίζεται στην περίπτωση 1, και μερικές από αυτές που παρατηρήθηκαν σε χίλιες επαναλήψεις φαίνονται στον πίνακα 6 .

v1	μ1	v2	μ2	h1	h2
0,519606	0,656613	0,543673	0,210228	2,553347	4,288928
0,295758	0,324159	0,290517	0,255356	1,623628	4,116577
0,375578	0,425668	0,466378	0,198179	1,961682	2,820840
0,830212	0,912124	0,629536	0,082780	0,970799	1,248546

Πίνακας 6: Τιμές παραμέτρων για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή

Παρακάτω θα δώσουμε ένα παράδειγμα με τις τιμές της τελευταίας γραμμής του πίνακα 6.

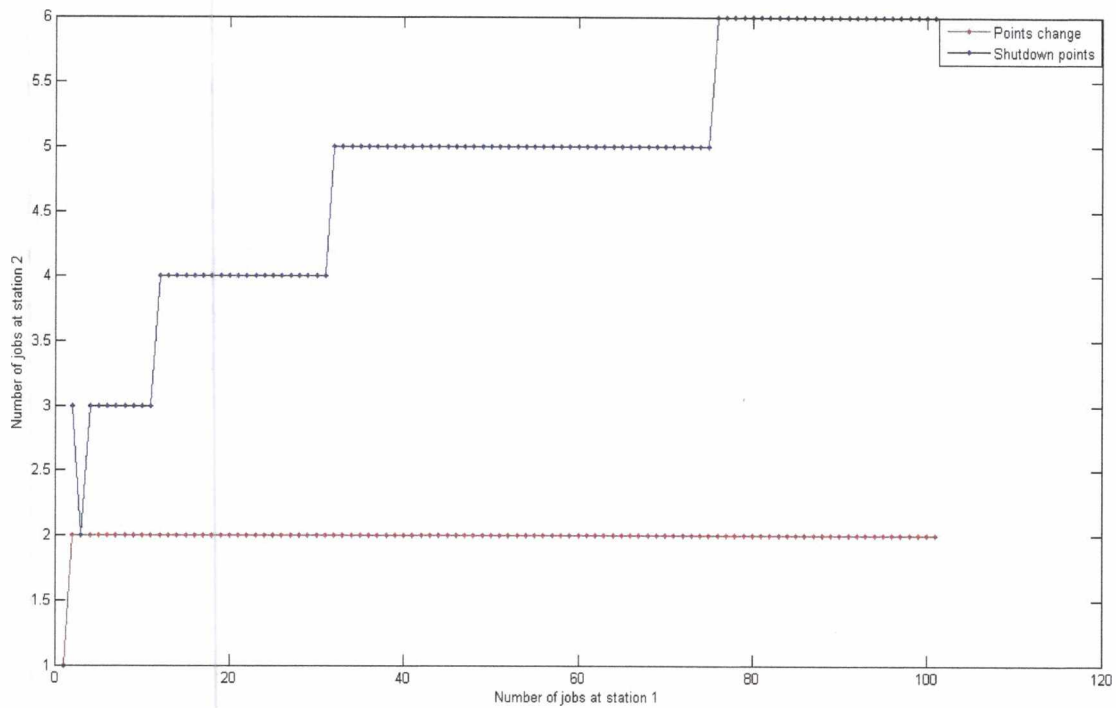


Εικόνα 20: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία

Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι ενώ ισχύει η μονοτονία των σημείων αλλαγής δεν ισχύει αυτή των σημείων τερματισμού, παρατήρηση που έχει γίνει και στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις.

3.2.4 Περίπτωση 4: $\nu_1 < \mu_1$ και $\nu_2 < \mu_2$

Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε γι' αυτή την περίπτωση είναι όμοια με αυτά των περιπτώσεων που προηγήθηκαν. Δηλαδή, ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής και η μονοτονία των σημείων αυτών, σε αντίθεση με τα σημεία τερματισμού όπου δεν ισχύει η μονοτονία (μη φθίνουσα) τους άλλα μόνο η μοναδικότητα του κάθε σημείου. Οι περιπτώσεις για τις οποίες δεν ισχύει η μονοτονία ανέρχονται στο ποσοστό 0.1-0.2%. Έτσι ένα παράδειγμα ενδεικτικό που πρόεκυψε από χίλιες επαναλήψεις είναι για τις παρακάτω τιμές: $\nu_1 = 0.093634$, $\nu_2 = 0.020684$, $\mu_1 = 0.125536$, $\mu_2 = 0.025151$, $h_1 = 1.943873$ και $h_2 = 2.657716$.



Εικόνα 21: Διάγραμμα σημείων αδρανοποίησης του σταθερού εξυπηρετητή όπου δεν ισχύει η μονοτονία

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η μη φθίνουσα μονοτονία των σημείων τερματισμού του σταθερού ενώ η μονοτονία των σημείων αλλαγής του εύελκτου είναι όπως την περιμέναμε.

3.2.5 Γενικά συμπεράσματα για $h_1 < h_2$

Τελικά τα συμπεράσματα μας, από όλα τα παραπάνω, για τις περιπτώσεις που ισχύει $h_1 < h_2$ είναι τα εξής:

- Για όλες τις περιπτώσεις ισχύει η μοναδικότητα του σημείου αλλαγής και η μονοτονία των σημείων αυτών.
- Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει η μοναδικότητα του σημείου τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1 αλλά όχι η μονοτονία των σημείων αυτών.

- Μεταξύ των τεσσάρων περιπτώσεων υπήρχε διαφορά στην συχνότητα που εμφανίζεται μία περίπτωση που δεν ισχύει η μονοτονία των σημείων τερματισμού.
- Τέλος μία σημαντική παρατήρηση, σύμφωνα με τα διαγράμματα που συμβολίζονται στις εικόνες 18-21, είναι ότι το σημείο το οποίο απορρίπτει την υπόθεση μας ότι η ακολουθία των σημείων τερματισμού είναι μη φθίνουσα εμφανίζεται πάντα όταν υπάρχουν δύο εργασίες στον σταθμό 1.

Κεφάλαιο 4. Σύνοψη αποτελεσμάτων – Μελλοντικά θέματα έρευνας

Όπως παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα αποτελέσματα για κάθε περίπτωση είμαστε σε θέση να πούμε ότι η βέλτιστη πολιτική χαρακτηρίζεται από καμπύλη αλλαγής και για το γενικό μοντέλο που μελετήσαμε. Ακόμα οι υποθέσεις που κάναμε σε σχέση με την μονοτονία της καμπύλης αλλαγής φαίνεται ότι δεν βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις περιπτώσεις αλλά απορρίπτεται σε δύο από αυτές και συγκεκριμένα όταν έχουμε $h_1 \geq h_2$ και για τους ρυθμούς εξυπηρέτησης ισχύει $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$ ή $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$.

Συνεχίζοντας, για τις περιπτώσεις που ισχύει $h_1 < h_2$ σύμφωνα με τα αποτελέσματα μας μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις η ύπαρξη μοναδικότητας του σημείου τερματισμού του σταθερού εξυπηρετητή στον σταθμό 1. Επίσης η υπόθεσή μας ότι η ακολουθία των σημείων αυτών θα είναι μη φθίνουσα απορρίφθηκε σε όλες τις περιπτώσεις.

Στο μέλλον θα ασχοληθούμε με ένα πιο γενικευμένο πρόβλημα, από αυτό που παρουσιάσαμε στα πλαίσια της εργασίας μας, το οποίο θα έχει αφίξεις εργασιών και θα υπάρχει πιθανότητα η εργασία να αποχωρεί από το σύστημα μας αφού θα έχει εξυπηρετηθεί από τον πρώτο σταθμό. Σε αυτήν ο στόχος μας θα είναι να δείξουμε εάν ισχύουν οι ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής όπως πραγματοποιήσαμε και στην παρούσα εργασία.

Βιβλιογραφία

1. Farrar, T.M. (1992). Resource allocation in systems of queues. Ph.D. dissertation, Cambridge University, Cambridge.
2. Farrar, T.M. (1993). Optimal use of an extra server in a two station tandem queueing network. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38: 1296–1299.
3. Pandelis, D.G. (2007). Optimal use of excess capacity in two interconnected queues. *Mathematical Methods of Operations Research* 65: 179–192.
4. Pandelis, D.G. (2008). Optimal control of flexible servers in two tandem queues with operating costs. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 22: 107-131.
5. Pandelis, D.G. (2013). Optimal control of non-collaborative servers in two stage tandem queueing systems. Working paper.
6. Wu, C.H., Lewis, M.E., & Veatch, M. (2006). Dynamic allocation of reconfigurable resources in a two-stage tandem queueing system with reliability considerations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51: 309–314.

Παράρτημα

Στο παράρτημα θα παρατεθούν τα προγράμματα τα οποία συντάξαμε στην γλώσσα προγραμματισμού μας (Matlab).

Αρχικά θα δοθούν τα προγράμματα για τις περιπτώσεις που ισχύει $h_1 \geq h_2$ και έπειτα τα προγράμματα για $h_1 < h_2$.

Συμβολισμοί που χρησιμοποιήθηκαν:

- Παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την σύγκριση του κόστους: K, G, T, Q, Z, r1, r2, F και P.
- Ο πίνακας που λαμβάνει τις τιμές του ελάχιστου κόστους συμβολίζεται με $V(x_1, x_2)$.
- Ο πίνακας που αποθηκεύει την θέση του ευέλκτου σε κάθε κατάσταση είναι ο $W(x_1, x_2)$.
- Ο πίνακας που αποθηκεύει το σημείο αλλαγής του ευέλκτου είναι ο $B(x_1)$.
- Ο πίνακας που αποθηκεύει την θέση του σταθερού του σταθμού 1 σε κάθε κατάσταση είναι ο $O(x_1, x_2)$.
- Ο πίνακας που αποθηκεύει την θέση που αδρανοποιείται ο σταθερός εξυπηρετητής του πρώτου σταθμού είναι ο $M(x_1)$.
- Ρυθμοί εξυπηρέτησης: n3, m3, n4 και m4, όπου με τον δείκτη 3 αναφερόμαστε στον πρώτο σταθμό ενώ με τον 4 στον δεύτερο.
- Αντίστοιχες πιθανότητες στο διακριτοποιημένο μοντέλο: n1, m1, n2 και m2.
- Κόστη παραμονής: h1 (σταθμός 1) και h2 (σταθμός 2).
- Αρχικό πλήθος εργασιών: L1 (σταθμός 1) και L2 (σταθμός 2).
- Πίνακες που χρησιμοποιούνται για έλεγχο: A, C, X, U.
- Μετρητές που χρησιμοποιούμε: i, j και rep.
- Βοηθητικές παράμετροι: pl, e, s, d.

Προγράμματα για $h_1 \geq h_2$

Περίπτωση 1: $\nu_1 \geq \mu_1$ και $\nu_2 \geq \mu_2$

```
%{  
case for n1>=m1  
and n2>=m2 (h1>=h2)  
%}  
L1=100;  
L2=100;  
L3=L1+L2;  
C=[ ];  
A=[ ];  
rep=1000;  
for d=1:rep  
%assigning values to the service rates  
n3=rand(1,1);  
m3=rand(1,1);  
m3=m3*n3;  
n4=rand(1,1);  
m4=rand(1,1);  
m4=m4*n4;  
con=n3+n4+m3+m4;  
n1=n3/con;  
n2=n4/con;  
m1=m3/con;  
m2=m4/con;  
% set the values of h1, h2  
h1=1+4*rand(1,1);  
h2=rand(1,1);  
h2=h2*h1;  
%}  
Set the values of the dynamic tables  
and specify the minimum cost  
%}  
V(1,1)=0;  
W(1,1)=0;  
V(1,2)=h2/n2+V(1,1);  
W(1,2)=0;  
for j=2:L3  
V(1,j+1)=(h2*j)/(n2+m2)+V(1,j);  
W(1,j+1)=2;  
end
```

```

V(2,1)=(h1/n1)+V(1,2);
W(2,1)=0;
V(2,2)=(h1+h2+(n1*V(1,3))+(n2*V(2,1)))/(1-m1-m2);
W(2,2)=0;
for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+(h2*j)+(n1*V(1,j+2))+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    W(2,j+1)=2;
end
for i=2:L1
    V(i+1,1)=(h1*i)/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+(n2*V(i+1,1)))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    for j=2:L3-i
        V(i+1,j+1)=(h1*i)+(h2*j)+(n1+m1)*V(i,j+2)+(n2*V(i+1,j))/(1-m2);
        W(i+1,j+1)=1;
        Q=((h1*i)+(h2*j)+(n1*V(i,j+2))+(n2+m2)*V(i+1,j))/(1-m1);
        if (Q<=V(i+1,j+1))
            V(i+1,j+1)=Q;
            W(i+1,j+1)=2;
        end
    end
end
end
%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
    if (s<L3-i)
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end
end
%check uniqueness point change
for i=0:L1
    if(B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
end

```



```

n1=n3/con;
n2=n4/con;
m1=m3/con;
m2=m4/con;
% set the values of h1, h2
h1=1+4*rand(1,1);
h2=rand(1,1);
h2=h2*h1;
%{
    Set the values of the dynamic tables
    and specify the minimum cost
%}
V(1,1)=0;
W(1,1)=0;
V(1,2)=(h2/m2)+V(1,1);
W(1,2)=2;
V(2,1)=(h1/n1)+V(1,2);
W(2,1)=0;
for j=2:L3
    V(1,j+1)=(h2*j)/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
end
V(2,2)=(h1+h2+(n1*V(1,3))+(m2*V(2,1)))/(1-m1-n2);
W(2,2)=2;
for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+(h2*j)+(n1*V(1,j+2))+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    W(2,j+1)=2;
end

for i=2:L1
    V(i+1,1)=(h1*i)/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i)+h2+((n1+m1)*V(i,3))+(n2*V(i+1,1))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    G=((h1*i)+h2+(n1*V(i,3))+(m2*V(i+1,1)))/(1-n2-m1);
    if (V(i+1,2)>G)
        V(i+1,2)=G;
        W(i+1,2)=2;
    end

    for j=2:L3-i
        V(i+1,j+1)=(h1*i)+(h2*j)+((n1+m1)*V(i,j+2))+(n2*V(i+1,j))/(1-m2);
        W(i+1,j+1)=1;
        Q=((n1*V(i,j+2))+(n2+m2)*V(i+1,j)+(h1*i)+(h2*j))/(1-m1);
        if(Q< V(i+1,j+1))
            V(i+1,j+1)=Q;

```

```

        W(i+1,j+1)=2;
    end
end
end
%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end

    if s<L3-i
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end
%check uniqueness point change
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end

    if B(i+1)==L3
        for j=0:L3-i
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
%check the monotonicity of points change
for i=0:L1-2
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B(i+1) B(i+2)];
    end
end
end

```


Περίπτωση 3 : $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

```
%{  
  case for n1<m1  
  and n2>=m2 (h1>=h2)  
%}  
L1=100;  
L2=100;  
L3=L1+L2;  
C=[];  
A=[];  
rep=1000;  
for d=1:rep  
  %assigning values to the service rates  
  n3=rand(1,1);  
  m3=rand(1,1);  
  n3=n3*m3;  
  % in case n1=m1. we want n1<m1  
  while (n3==m3)  
    n3=rand(1,1);  
    m3=rand(1,1);  
    n3=n3*m3;  
  end  
  n4=rand(1,1);  
  m4=rand(1,1);  
  m4=m4*n4;  
  con=n3+n4+m3+m4;  
  n1=n3/con;  
  n2=n4/con;  
  m1=m3/con;  
  m2=m4/con;  
  % set the values of h1, h2  
  h1=1+4*rand(1,1);  
  h2=rand(1,1);  
  h2=h2*h1;  
  %{  
    Set the values of the dynamic tables  
    and specify the minimum cost  
  %}  
  V(1,1)=0;  
  W(1,1)=0;  
  V(1,2)=h2/n2+V(1,1);  
  W(1,2)=0;  
  V(2,1)=h1/m1+V(1,2);  
  W(2,1)=1;
```

```

for j=2:L3
    V(1,j+1)=h2*j/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
end
V(2,2)=(h1+h2+m1*V(1,3)+n2*V(2,1))/(1-n1-m2);
W(2,2)=1;
for j=2:L3-1
    K=(h1+h2*j+n1*V(1,j+2)+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    G=(h1+h2*j+m1*V(1,j+2)+n2*V(2,j))/(1-n1-m2);
    if (K<=G)
        V(2,j+1)=K;
        W(2,j+1)=2;
    else
        V(2,j+1)=G;
        W(2,j+1)=1;
    end
end
for i=2:L1
    V(i+1,1)=h1*i/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+n2*V(i+1,1))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    for j=2:L3-i
        T=(h1*(i)+h2*(j)+(n1+m1)*V(i,j+2)+(n2)*V(i+1,j))/(1-m2);
        Q=((n1)*V(i,j+2)+(n2+m2)*V(i+1,j)+(h1)*(i)+(h2)*(j))/(1-m1);
        if (T<=Q)
            V(i+1,j+1)=T;
            W(i+1,j+1)=1;
        else
            V(i+1,j+1)=Q;
            W(i+1,j+1)=2;
        end
    end
end
end
%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end

    if (s<L3-i)
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end

```

```

end

end

%check uniqueness point change
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end

if (B(i+1)==L3)
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)==2)
            A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
            %A=[A d];
        end
    end
end
end

end

%check the monotonicity of points change
for i=0:L1-2
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B];
    end
end
end
end

```

Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

```

%{
case for n1<m1
and n2<m2 (h1>=h2)
%}
L1=100;
L2=100;
L3=L1+L2;
C=[];
A=[];
rep=1000;
for d=1:rep
    n3=rand(1,1);

```

```

m3=rand(1,1);
n3=n3*m3;
% in case n1=m1. we want n1<m1
while (n3==m3)
n3=rand(1,1);
n3=n3*m3;
end
n4=rand(1,1);
m4=rand(1,1);
n4=n4*m4;
% in case n2=m2. we want n2<m2
while (n4==m4)
n4=rand(1,1);
n4=n4*m4;
end
con=n3+n4+m3+m4;
n1=n3/con;
n2=n4/con;
m1=m3/con;
m2=m4/con;
% set the values of h1. h2
h1=1+4*rand(1,1);
h2=rand(1,1);
h2=h2*h1;
%{
    Set the values of the dynamic tables
    and specify the minimum cost
%}
V(1,1)=0;
W(1,1)=0;
V(1,2)=(h2/m2)+V(1,1);
W(1,2)=2;
V(2,1)=(h1/m1)+V(1,2);
W(2,1)=1;
for j=2:L3
    V(1,j+1)=(h2*j)/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
end
r1=(h1+h2+(n1*V(1,3))+(m2*V(2,1)))/(1-m1-n2);
r2=(h1+h2+(m1*V(1,3))+(n2*V(2,1)))/(1-n1-m2);
if (r1<=r2)
    V(2,2)=r1;
    W(2,2)=2;
else
    V(2,2)=r2;
    W(2,2)=1;

```

```

end
for j=2:L3-1
    K=(h1+(h2*j)+(n1*V(1,j+2))+((n2+m2)*V(2,j)))/(1-m1);
    G=(h1+(h2*j)+(m1*V(1,j+2))+((n2)*V(2,j)))/(1-n1-m2);
    if (K<=G)
        V(2,j+1)=K;
        W(2,j+1)=2;
    else
        V(2,j+1)=G;
        W(2,j+1)=1;
    end
end
for i=2:L1
    V(i+1,1)=(h1*i)/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    Z=(h1*i)+h2+((n1+m1)*V(i,3))+((n2*V(i+1,1)))/(1-m2);
    F=(h1*i)+h2+(n1*V(i,3))+((m2*V(i+1,1)))/(1-n2-m1);

    if (Z<=F)
        V(i+1,2)=Z;
        W(i+1,2)=1;
    else
        V(i+1,2)=F;
        W(i+1,2)=2;
    end
end
for j=2:L3-i
    T=(h1*i)+(h2*j)+((n1+m1)*V(i,j+2))+((n2*V(i+1,j)))/(1-m2);
    Q=((n1*V(i,j+2))+((n2+m2)*V(i+1,j)))+(h1*i)+(h2*j))/(1-m1);

    if (T<=Q)
        V(i+1,j+1)=T;
        W(i+1,j+1)=1;
    else
        V(i+1,j+1)=Q;
        W(i+1,j+1)=2;
    end
end

end
end
% Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
end
end

```

```

if (s<L3-i)
    B(i+1)=s+1;
else
    B(i+1)=L3;
end
end
%check uniqueness point change
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
    if (B(i+1)==L3)
        for j=0:L3-i
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
%check the monotonicity of points change
for i=0:L1-2
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B];
    end
end
end

```

Προγράμματα για $h_1 < h_2$

Περίπτωση 1: $v_1 \geq \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

```
%{
  case for n1>=m1
  and n2>=m2 (h1<h2)
%}
L1=100;
L2=100;
L3=L1+L2;
C=[];
A=[];
U=[];
X=[];
rep=1000;
for d=1:rep
  %assigning values to the service rates
  n3=rand(1,1);
  m3=rand(1,1);
  m3=m3*n3;
  n4=rand(1,1);
  m4=rand(1,1);
  m4=m4*n4;
  con=n3+n4+m3+m4;
  n1=n3/con;
  n2=n4/con;
  m1=m3/con;
  m2=m4/con;
  % set the values of h1, h2
  h2=1+4*rand(1,1);
  h1=rand(1,1);
  h1=h1*h2;
  %{
    Set the values of the dynamic tables
    and specify the minimum cost
  %}
  V(1,1)=0;
  W(1,1)=0;
  O(1,1)=0;
  V(1,2)=(h2/n2)+V(1,1);
  W(1,2)=0;
```

```

O(1,2)=0;

for j=2:L3
    V(1,j+1)=(h2*j)/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
    O(1,j+1)=0;
end
V(2,1)=(h1/n1)+V(1,2);
W(2,1)=0;
O(2,1)=1;
V(2,2)=(h1+h2+n1*V(1,3)+n2*V(2,1))/(1-m1-m2);
W(2,2)=0;
O(2,2)=1;
F=(h1+h2+(n2*V(2,1)))/(1-m1-m2-n1);
if (F<V(2,2))
    V(2,2)=F;
    O(2,2)=0;
end

for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+h2*j+n1*V(1,j+2)+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    W(2,j+1)=2;
    O(2,j+1)=1;
    P=(h1+h2*j+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1-n1);
    if (P<V(2,j+1))
        V(2,j+1)=P;
        O(2,j+1)=0;
    end
end

for i=2:L1
    V(i+1,1)=h1*i/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    O(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+(n2*V(i+1,1)))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    O(i+1,2)=1;
    R=((h1*i)+h2+(n2*V(i+1,1)))/(1-m2-n1-m1);
    if (R<V(i+1,2))
        V(i+1,2)=R;
        O(i+1,2)=0;
        W(i+1,2)=0;
    end

for j=2:L3-i
    V(i+1,j+1)=(h1*i+h2*j+(n1+m1)*V(i,j+2)+(n2*V(i+1,j)))/(1-m2);
    W(i+1,j+1)=1;
    O(i+1,j+1)=1;

```



```

T=(h1*i+h2*j+(n1*V(i,j+2))+((n2+m2)*V(i+1,j)))/(1-m1);
Q=(h1*i+h2*j+((n2+m2)*V(i+1,j)))/(1-m1-n1);
if (T<V(i+1,j+1)&&Q>=T)
    V(i+1,j+1)=T;
    W(i+1,j+1)=2;
    O(i+1,j+1)=1;
elseif (Q<T&&Q<V(i+1,j+1))
    V(i+1,j+1)=Q;
    W(i+1,j+1)=2;
    O(i+1,j+1)=0;
end

end

end

%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
    if (s<L3-i)
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end

%check uniqueness of change point
for i=0:L1
    if B(i+1)<L3
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
if (B(i+1)==L3)
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)==2)
            A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
            %A=[A d];
        end
    end
end
end
end

```

```

end
%check the monotonicity of change points
for i=0:L1-1
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B];
    end
end
%Specify the shutdown points
for i=1:L1
    for j=0:L3-i
        if(O(i+1,j+1)==1)
            e=j;
        end
    end

    if (e<(L3-i))
        M(i+1)=e+1;
    else
        M(i+1)=L3;
    end
end
%check uniqueness of shutdown point
for i=1:L1
    if (M(i+1)<L3)
        for j=0:M(i+1)-1
            if(O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M(i+1) j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
end

    if (M(i+1)==L3)
        for j=0:L3-i
            if (O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M(i+1) j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
end
%check the monotonicity of shutdown points
for i=1:L1-1
    if (M(i+1)>M(i+2))
        X=[X; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M];
    end
end

```

```
end
end
end
```

Περίπτωση 2 : $\nu_1 \geq \mu_1$ και $\nu_2 < \mu_2$

```
%{
case for n1>=m1
and n2<m2 (h1<h2)
%}
L1=100;
L2=100;
L3=L1+L2;
C=[];
A=[];
U=[];
X=[];
rep=1000;
for d=1:rep
    %assigning values to the service rates
    n3=rand(1,1);
    m3=rand(1,1);
    m3=m3*n3;
    n4=rand(1,1);
    m4=rand(1,1);
    n4=n4*m4;
    % in case n2=m2. we want n2<m2
    while (n4==m4)
        n4=rand(1,1);
        n4=n4*m4;
    end
    con=n3+n4+m3+m4;
    n1=n3/con;
    n2=n4/con;
    m1=m3/con;
    m2=m4/con;
    % set the values of h1, h2
    h2=1+4*rand(1,1);
    h1=rand(1,1);
    h1=h1*h2;
    %{
    Set the values of the dynamic tables
    and specify the minimum cost
    %}
    V(1,1)=0;
```

```

W(1,1)=0;
O(1,1)=0;
V(1,2)=h2/m2+V(1,1);
W(1,2)=2;
O(1,2)=0;
V(2,1)=h1/n1+V(1,2);
W(2,1)=0;
O(2,1)=1;
for j=2:L3
    V(1,j+1)=h2*j/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
    O(1,j+1)=0;
end

V(2,2)=(h1+h2+n1*V(1,3)+m2*V(2,1))/(1-m1-n2);
W(2,2)=2;
O(2,2)=1;
F=(h1+h2+m2*V(2,1))/(1-m1-n2-n1);
if (F<V(2,2))
    V(2,2)=F;
    O(2,2)=0;
end

for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+h2*j+n1*V(1,j+2)+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    W(2,j+1)=2;
    O(2,j+1)=1;
    P=(h1+(h2*(j))+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1-n1);
    if (P<V(2,j+1))
        V(2,j+1)=P;
        O(2,j+1)=0;
    end
end

for i=2:L1
    V(i+1,1)=h1*i/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    O(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+n2*V(i+1,1))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    O(i+1,2)=1;
    K=(h1*(i)+h2+m2*V(i+1,1))/(1-n2-n1-m1);
    G=(h1*(i)+h2+(n1)*V(i,3)+m2*V(i+1,1))/(1-n2-m1);

    if (K<V(i+1,2)&&G>=K)
        V(i+1,2)= K;
        W(i+1,2)=2;
    end
end

```

```

O(i+1,2)=0;
elseif (G<V(i+1,2)&&G<K)
    V(i+1,2)= G;
    W(i+1,2)=2;
    O(i+1,2)=1;
end
for j=2:L3-i
    V(i+1,j+1)=(h1*i+h2*j+(n1+m1)*V(i,j+2)+n2*V(i+1,j))/(1-m2);
    W(i+1,j+1)=1;
    O(i+1,j+1)=1;
    T=((n1*V(i,j+2)) + ((n2+m2)*V(i+1,j)) + (h1*i) +(h2*j) )/(1-m1);
    Q=((h1*i)+(h2*j) +((n2+m2)*V(i+1,j)))/(1-m1-n1);
    if (T<V(i+1,j+1)&&Q>=T)
        V(i+1,j+1)=T;
        W(i+1,j+1)=2;
        O(i+1,j+1)=1;
        elseif (Q<T &&Q<V(i+1,j+1))
            V(i+1,j+1)=Q;
            W(i+1,j+1)=2;
            O(i+1,j+1)=0;
        end
    end
end
end
% Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
    if (s<L3-i)
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end
end
%check uniqueness of change point
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
end

```



```

        %U=[U d];
    end
end
end
end
%check the monotonicity of shutdown points
for i=1:L1-1
    if (M(i+1)>M(i+2))
        X=[X; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M];
    end
end
end
end

```

Περίπτωση 3 : $v_1 < \mu_1$ και $v_2 \geq \mu_2$

```

%{
    case for n1<m1
    and n2>=m2 (h1<h2)
%}
L1=100;
L2=100;
L3=L1+L2;
C=[];
A=[];
U=[];
X=[];
rep=1000;
for d=1:rep
    %assigning values to the service rates
    n3=rand(1,1);
    m3=rand(1,1);
    n3=n3*m3;
    n4=rand(1,1);
    m4=rand(1,1);
    m4=m4*n4;
    % in case n1=m1 we want n1<m1
    while (n3==m3)
        n3=rand(1,1);
        n3=n3*m3;
    end
    con=n3+n4+m3+m4;
    n1=n3/con;
    n2=n4/con;
    m1=m3/con;
    m2=m4/con;

```

```

% set the values of h1, h2
h2=1+4*rand(1,1);
h1=rand(1,1);
h1=h1*h2;
%{
    Set the values of the dynamic tables
    and specify the minimum cost
%}
V(1,1)=0;
W(1,1)=0;
O(1,1)=0;
V(1,2)=h2/n2+V(1,1);
W(1,2)=0;
O(1,2)=0;
V(2,1)=h1/m1+V(1,2);
W(2,1)=1;
O(2,1)=0;
for j=2:L3
    V(1,j+1)=h2*j/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
    O(1,j+1)=0;
end

V(2,2)=(h1+h2+m1*V(1,3)+n2*V(2,1))/(1-n1-m2);
W(2,2)=1;
O(2,2)=0;
G=(h1+h2+n2*V(2,1))/(1-m1-m2-n1);
if (G<V(2,2))
    V(2,2)=G;
    O(2,2)=0;
    W(2,2)=0;
end

for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+(h2*j)+(m1*V(1,j+2))+(n2*V(2,j)))/(1-n1-m2);
    W(2,j+1)=1;
    O(2,j+1)=0;
    P=(h1+(h2*(j))+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1-n1);
    F=(h1+(h2*(j))+(n1*V(1,j+2))+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    if (F<V(2,j+1) && P>=F)
        V(2,j+1)=F;
        W(2,j+1)=2;
        O(2,j+1)=1;
    elseif (P<V(2,j+1) && P<F)
        V(2,j+1)=P;
        W(2,j+1)=2;
    end
end

```



```

        O(2,j+1)=0;
    end
end
for i=2:L1
    V(i+1,1)=h1*i/(n1+m1)+V(i,2);
    W(i+1,1)=1;
    O(i+1,1)=1;
    V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+n2*V(i+1,1))/(1-m2);
    W(i+1,2)=1;
    O(i+1,2)=1;
    K=(h1*(i)+h2+n2*V(i+1,1))/(1-m2-n1-m1);
    if (K<V(i+1,2))
        V(i+1,2)= K;
        W(i+1,2)=0;
        O(i+1,2)=0;
    end

    for j=2:L3-i
        V(i+1,j+1)=(h1*i+h2*j+(n1+m1)*V(i,j+2)+n2*V(i+1,j))/(1-m2);
        W(i+1,j+1)=1;
        O(i+1,j+1)=1;
        T=( (n1)*V(i,j+2) + (n2+m2)*V(i+1,j) + (h1)*(i) + (h2)*(j) )/(1-m1);
        Q=( h1*(i) + h2*(j) + (n2+m2)*V(i+1,j))/(1-m1-n1);
        if (T<V(i+1,j+1)&&Q>=T)
            V(i+1,j+1)=T;
            W(i+1,j+1)=2;
            O(i+1,j+1)=1;
        elseif ( Q<T &&Q<V(i+1,j+1))
            V(i+1,j+1)=Q;
            W(i+1,j+1)=2;
            O(i+1,j+1)=0;
        end
    end
end
end
%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
    if (s<L3-i_)
        B(i+1)=s+1;
    else
        B(i+1)=L3;
    end
end

```

```

    end
end
%check uniqueness of change point
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
if (B(i+1)==L3)
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)==2)
            A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
            %A=[A d];
        end
    end
end
end
%check the monotonicity of change points
for i=0:L1-1
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B];
    end
end
%Specify the shutdown points
pl=L3+50;
for j=0:L3-1
    if (O(2,j+1)==1)
        pl=j;
    end
    if (pl<(L3-1))
        M(2)=pl+1;
    elseif (pl==L3-1)
        M(2)=L3;
    elseif (pl==L3+50)
        M(2)=1;
    end
end
for i=2:L1
    for j=0:L3-i
        if (O(i+1,j+1)==1)
            e=j;
        end
    end
end

```

```

end

if (e<(L3-i))
    M(i+1)=e+1;
else
    M(i+1)=L3;
end
end
end

%check uniqueness of shutdown point
for j=0:M(2)-1
    if (O(2,j+1)==0 && W(2,j+1)==2)
        U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M(2)];
        %U=[U d];
    end
end

for i=2:L1
    if (M(i+1)<L3)
        for j=0:M(i+1)-1
            if (O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
    if (M(i+1)==L3)
        for j=0:L3-i
            if (O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
end

%check the monotonicity of shutdown points
for i=1:L1-1
    if (M(i+1)>M(i+2))
        X=[X; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M ];
    end
end
end
end

```

Περίπτωση 4: $v_1 < \mu_1$ και $v_2 < \mu_2$

```
%{  
    case for n1<m1  
    and n2<m2 (h1<h2)  
%}  
L1=100;  
L2=100;  
L3=L1+L2;  
C=[];  
A=[];  
X=[];  
U=[];  
rep=1000;  
for d=1:rep  
    n3=rand(1,1);  
    m3=rand(1,1);  
    n3=n3*m3;  
    n4=rand(1,1);  
    m4=rand(1,1);  
    n4=n4*m4;  
    % in case n2=m2. we want n2<m2  
    while (n4==m4)  
        n4=rand(1,1);  
        n4=n4*m4;  
    end  
    % in case n1=m1 we want n1<m1  
    while (n3==m3)  
        n3=rand(1,1);  
        n3=n3*m3;  
    end  
    con=n3+n4+m3+m4;  
    n1=n3/con;  
    n2=n4/con;  
    m1=m3/con;  
    m2=m4/con;  
    % set the values of h1, h2  
    h2=1+4*rand(1,1);  
    h1=rand(1,1);  
    h1=h1*h2;  
%}  
    Set the values of the dynamic tables  
    and specify the minimum cost  
%}  
V(1,1)=0;  
W(1,1)=0;
```

```

O(1,1)=0;
V(1,2)=h2/m2+V(1,1);
W(1,2)=2;
O(1,2)=0;
V(2,1)=h1/m1+V(1,2);
W(2,1)=1;
O(2,1)=0;
for j=2:L3
    V(1,j+1)=(h2*j)/(n2+m2)+V(1,j);
    W(1,j+1)=2;
    O(1,j+1)=0;
end

V(2,2)=(h1+h2+(m1*V(1,3))+(n2*V(2,1)))/(1-n1-m2);
W(2,2)=1;
O(2,2)=0;
r1=(h1+h2+m2*V(2,1))/(1-m1-n2-n1);
r2=(h1+h2+(n1*V(1,3))+m2*V(2,1))/(1-m1-n2);
if (r1<V(2,2))&& r2>=r1)
    V(2,2)=r1;
    W(2,2)=2;
    O(2,2)=0;
elseif (r2<V(2,2) && r1>r2)
    V(2,2)=r2;
    W(2,2)=2;
    O(2,2)=1;
end

for j=2:L3-1
    V(2,j+1)=(h1+h2*j+m1*V(1,j+2)+n2*V(2,j))/(1-n1-m2);
    W(2,j+1)=1;
    O(2,j+1)=0;
    P=(h1+(h2*j)+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1-n1);
    F=(h1+(h2*j)+n1*V(1,j+2)+(n2+m2)*V(2,j))/(1-m1);
    if (F<V(2,j+1) && P>=F)
        V(2,j+1)= F;
        W(2,j+1)=2;
        O(2,j+1)=1;
    elseif (P<V(2,j+1) && P<F)
        V(2,j+1)=P;
        W(2,j+1)=2;
        O(2,j+1)=0;
    end
end
end

for i=2:L1
    V(i+1,1)=h1*i/(n1+m1)+V(i,2);

```

```

W(i+1,1)=1;
O(i+1,1)=1;
V(i+1,2)=(h1*i+h2+(n1+m1)*V(i,3)+n2*V(i+1,1))/(1-m2);
W(i+1,2)=1;
O(i+1,2)=1;
K=(h1*(i)+h2+m2*V(i+1,1))/(1-n2-n1-m1);
G=(h1*(i)+h2+(n1)*V(i,3)+m2*V(i+1,1))/(1-n2-m1);
if (K<=G&&K<V(i+1,2))
    V(i+1,2)= K;
    W(i+1,2)=2;
    O(i+1,2)=0;
elseif (G<V(i+1,2)&& G<K)
    V(i+1,2)= G;
    W(i+1,2)=2;
    O(i+1,2)=1;
end

for j=2:L3-i
    V(i+1,j+1)=( (n1)*V(i,j+2) + (n2+m2)*V(i+1,j) + (h1)*(i) +(h2)*(j) )/(1-m1);
    W(i+1,j+1)=2;
    O(i+1,j+1)=1;
    T=(h1*i+h2*j+(n1+m1)*V(i,j+2)+n2*V(i+1,j))/(1-m2);
    Q=( h1*(i) + h2*(j) + (n2+m2)*V(i+1,j) )/(1-m1-n1);
    if (T<V(i+1,j+1)&&Q>=T)
        V(i+1,j+1)=T;
        W(i+1,j+1)=1;
        O(i+1,j+1)=1;
    elseif( Q<T && Q<V(i+1,j+1))
        V(i+1,j+1)=Q;
        W(i+1,j+1)=2;
        O(i+1,j+1)=0;
    end
end
end

%Specify the changes points
for i=0:L1
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)<2)
            s=j;
        end
    end
end
if (s<L3-i)
    B(i+1)=s+1;
else
    B(i+1)=L3;
end
end

```

```

end
%Specify the changes points
for i=0:L1
    if (B(i+1)<L3)
        for j=0:B(i+1)-1
            if (W(i+1,j+1)==2)
                A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
                %A=[A d];
            end
        end
    end
end
end
if (B(i+1)==L3)
    for j=0:L3-i
        if (W(i+1,j+1)==2)
            A=[A; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i B(i+1) j];
            %A=[A d];
        end
    end
end
end

```

```

end
%check the monotonicity of change points

```

```

for i=0:L1-1
    if (B(i+1)>B(i+2))
        C=[C; n1 m1 n2 m2 h1 h2 B];
    end
end

```

```

%Specify the shutdown points

```

```

pl=L3+50;
for j=0:L3-1
    if (O(2,j+1)==1)
        pl=j;
    end
    if (pl<(L3-1))
        M(2)=pl+1;
    elseif (pl==L3-1)
        M(2)=L3;
    elseif (pl==L3+50)
        M(2)=1;
    end
end
end

```

```

for i=2:L1
    for j=0:L3-i
        if (O(i+1,j+1)==1)
            e=j;
        end
    end
end

```

```

    end
end
if (e<(L3-i))
    M(i+1)=e+1;
else
    M(i+1)=L3;
end
end
%check uniqueness of shutdown point
for j=0:M(2)-1
    if (O(2,j+1)==0 && W(2,j+1)==2)
        U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M(2)];
        %U=[U d];
    end
end
for i=2:L1
    if (M(i+1)<L3)
        for j=0:M(i+1)-1
            if (O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
    if (M(i+1)==L3)
        for j=0:L3-i
            if (O(i+1,j+1)==0)
                U=[U; n1 m1 n2 m2 h1 h2 i M j];
                %U=[U d];
            end
        end
    end
end
%check the monotonicity of shutdown points
for i=1:L1-1
    if (M(i+1)>M(i+2))
        X=[X; n1 m1 n2 m2 h1 h2 M ];
    end
end
end

```




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000118283

