

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ, ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΑΝΤΙΡΡΥΠΑΝΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία:

***ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΧΑΜΗΛΟ ΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΑΝΤΛΙΑΣ
ΤΥΠΟΥ KNUDSEN***

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΜΕΣΚΟΣ Γ. ΣΤΑΥΡΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΒΑΛΟΥΓΕΩΡΓΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 10263/1
Ημερ. Εισ.: 16-02-2012
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2012
ΜΕΣ

© 2012 Μέσκος Γ. Σταύρος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

(Ν.5343/32 αρ.202 παρ.2)

Εγκρίθηκε από τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής :

Πρώτος εξεταστής: Δρ. Βαλουγεώργης Δημήτρης

Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Δεύτερος εξεταστής: Δρ. Σταμάτης Αναστάσιος

Αν. Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Τρίτος εξεταστής Δρ. Νάρης Στέργιος

Διδάσκων (Π.Δ. 407/80)
Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστημίου
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήθελα αρχικά να εκφράσω το σεβασμό μου και τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Δημήτριο Βαλουγεώργη καθώς και στον Δρ. Στέργιο Νάρη. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξαν, καθώς και η σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, υπήρξαν καταλυτικοί παράγοντες στην ολοκλήρωση της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και το τρίτο μέλος της επιτροπής για την μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου, κ. Αναστάσιο Σταμάτη.

Στη συνέχεια θα ήθελα να σταθώ στην οικογένειά μου και στους γονείς μου. Οι θυσίες που έχουν κάνει, η υπομονή τους, η εμπιστοσύνη τους και η αγάπη τους σε όλα τα στάδια της ζωής μου μέχρι τώρα, δε θα μπορούσαν να εκφραστούν σε λίγες γραμμές ευχαριστιών. Η μόνη υπόσχεση και ελπίδα που μπορώ να δώσω σε αυτούς και στον εαυτό μου είναι οι προσπάθειές μου να μη σταματήσουν εδώ, αλλά η εκπόνηση αυτής της εργασίας και η απόκτηση του πτυχίου, να αποτελέσει ένα εφόδιο και παράλληλα το πρώτο βήμα για την έξοδό μου στον πραγματικό κόσμο της παραγωγής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου για την πολύτιμη υποστήρηξή τους τόσο σε υλικό όσο και σε ψυχολογικό επίπεδο κατά την προετοιμασία της παρούσας εργασίας.

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΧΑΜΗΛΟ ΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΑΝΤΛΙΑΣ ΤΥΠΟΥ KNUDSEN

ΜΕΣΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2012

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης, Καθηγητής Αναλυτικών και
Υπολογιστικών Μεθόδων Μεσοκλίμακας σε Φαινόμενα Ροής και Μεταφοράς

Περίληψη

Η μελέτη των ροών σε διατάξεις μικροκλίμακας αποτελεί μια επιστημονική περιοχή που έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η ροή αερίων σε μικροαγωγό ορθογωνικής αυλακωτής διατομής λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας. Μικροαγωγοί αυτής της διατομής μπορεί να αποτελούν τμήμα της αντλίας Knudsen. Χαρακτηριστικό μιας τέτοιας αντλίας είναι η έλλειψη μηχανικών τμημάτων ενώ η ροή στους αγωγούς επιτυγχάνεται λόγω του φαινομένου του θερμικού ερπησμού, το οποίο παρατηρείται σε αραιοποιημένες ροές αερίων, δηλαδή σε συνθήκες κενού ή σε διατάξεις μικροκλίμακας. Για τη μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιείται η κινητική θεωρία και η εξίσωση Boltzmann. Τον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων αντικαθιστά η εξίσωση Maxwell. Ενώ επίλυση του συστήματος γίνεται προσεγγιστικά με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου DVM.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	10
3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΕΡΠΥΣΜΟΥ	
3.1. Θεωρητική εξήγηση του φαινομένου.....	16
3.2. Πειραματική επαλήθευση.....	18
4. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
4.1. Γεωμετρική διατύπωση του προβλήματος.....	21
4.2. Διατύπωση εξίσωσης Boltzmann.....	22
4.3. Ο όρος των συγκρούσεων και η κατανομή Maxwell.....	24
4.4. Κινητικό μοντέλο Shakhon (S).....	25
4.5. Γραμμικοποίηση κινητικών εξισώσεων.....	25
4.6. Αδιαστατοποίηση κινητικών εξισώσεων.....	26
4.7. Διαμόρφωση εξισώσεων με προβολή της τρίτης διάστασης.....	29
4.8. Οριακές συνθήκες.....	31
4.9. Αριθμητικό σχήμα.....	32
5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ	
5.1. Δεδομένα.....	37
5.2. Παροχές και Θερμορροές.....	37
5.3. Μακροσκοπικές κατανομές.....	38
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	52
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιστημονική περιοχή της αεροδυναμικής σε αραιοποιημένες συνθήκες, έχει κάνει μεγάλα βήματα προόδου και εξέλιξης από τη δεκαετία του 90' μέχρι σήμερα. Τόσο η εξέλιξη των υπολογιστών σε δύναμη επεξεργασίας και ανάλυσης, όσο και η εξέλιξη κατασκευαστικών τεχνικών έχουν κάνει πλέον δυνατή τη κατασκευή συσκευών σε διαστάσεις νανοκλίμακας. Τεχνολογικές εφαρμογές που σχετίζονται άμεσα με την επιστήμη της αεροδυναμικής σε αραιοποιημένες συνθήκες είναι η τεχνολογία κενού, τα πορώδη υλικά, η τεχνολογία αεροζόλ, η τεχνολογία επικαλύψεων επιφανειών, η αεροδυναμική μεγάλου υψομέτρου και πιο πρόσφατες εφαρμογές παρατελούνται σε συσκευές μικροηλεκτρομηχανολογικών συστημάτων, γνωστά ως MEMS. Οι εφαρμογές σε μικροσυστήματα MEMS σχετίζονται με το σχεδιασμό και τη κατασκευή συσκευών – μινιατούρες σε μικρογραφία. Για την ανάπτυξη και ομαλή λειτουργία των συσκευών αυτών απαιτείται ο λεπτομερής και πλήρης ρευστο - θερμοδυναμικός σχεδιασμός.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην μελέτη φαινομένων ροής και μεταφοράς σε διατάξεις MEMS και ειδικότερα στη μελέτη αντλίας Knudsen. Αρχικά, στις πρώτες διατάξεις με σχετικά μικρές διαστάσεις που δημιουργήθηκαν και θα μπορούσαν να καταταχθούν στη κατηγορία της μικρομηχανικής, η μελέτη των ρευστών γινόταν με τη χρήση των εξισώσεων συνέχειας. Προοδευτικά όμως, και καθώς οι δυνατότητες για δημιουργία όλο και μικρότερων διατάξεων γινόταν περισσότερες, φάνηκε ότι η μελέτη των ροών που παρουσιαζόταν σε αυτές δεν

μπορούσε να γίνει πλέον με τις εξισώσεις αυτές. Η κλασσική ρευστοδυναμική και μετάδοση θερμότητας η οποία βασίζεται στις καταστατικές εξισώσεις Newton και Fourier, με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης δεν δύναται να εφαρμοστεί στις ειδικές συνθήκες που επικρατούν σε μικροδιατάξεις. Η πιο αποτελεσματική προσέγγιση προκύπτει με τη βοήθεια της κινητικής θεωρίας που εστιάζεται στη συμπεριφορά των μορίων από τα οποία αποτελείται το ρευστό. Όπως είναι φυσικό, είναι αδύνατη η μελέτη κάθε μορίου ξεχωριστά και για αυτό το λόγο, υιοθετείται μια στατιστική αντιμετώπιση τους. Οι μακροσκοπικές ιδιότητες όπως η πυκνότητα, η ταχύτητα και η θερμοκρασία, προκύπτουν ως δευτερεύοντα μεγέθη και το βασικό στοιχείο το οποίο μελετάται είναι μια συνάρτηση κατανομής η οποία υπακούει στη γνωστή εξίσωση Boltzmann.

Βασικοί παράμετροι στην αεριοδυναμική σε αραιοποιημένες συνθήκες είναι οι αριθμοί Reynolds, Mach και κυρίως ο αριθμός Knudsen. Ο αριθμός Knudsen εκφράζει το λόγο του μήκους της μέσης ελεύθερης διαδρομής ενός μορίου μεταξύ δυο συγκρούσεων με άλλα μόρια, προς ένα χαρακτηριστικό μήκος της γεωμετρίας του προβλήματος που εξετάζεται. Το μέγεθος του αριθμού Knudsen εκφράζει το είδος της ροής μέσα στον μικροαγωγό. Συγκεκριμένα, για $Kn < 0.1$ το ρευστό μπορεί να μελετηθεί ως συνεχές μέσο και να περιγραφεί από τις εξισώσεις Navier – Stokes, όπου οι άγνωστες ποσότητες είναι τα μακροσκοπικά μεγέθη. Η επόμενη περιοχή είναι για $0.1 < Kn < 10$, η λεγόμενη και ως μεταβατική περιοχή, όπου λαμβάνεται υπόψιν η ελεύθερη κίνηση των μορίων, οι συγκρούσεις μεταξύ τους και με τα τοιχώματα. Στην περιοχή αυτή η ροή μελετάται με την κινητική θεωρία και την εξίσωση Boltzmann, έχοντας ως βασικό άγνωστο τη συνάρτηση κατανομής. Τέλος, η περιοχή για $Kn > 10$, όπου οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων είναι πολύ λιγότερες σε σχέση με τις συγκρούσεις μεταξύ μορίων και τοιχωμάτων και για το λόγο αυτό οι συγκρούσεις μεταξύ μορίων μπορεί να αγνοηθούν. Η περιοχή αυτή γνωστή και ως ελεύθερη μοριακή περιοχή, βασίζεται επίσης στη κινητική θεωρία και την εξίσωση Boltzmann, χωρίς όμως τον όρο των συγκρούσεων. Γενικότερα η κινητική θεωρία και η εξίσωση Boltzmann μπορεί να εκφράσει τη ροή σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen, λόγω όμως της δυσκολίας επίλυσής της και της απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο, αποφεύγεται σε περιοχές συνεχούς μέσου, όπου η ροή μπορεί να μελετηθεί με τις εξισώσεις Navier – Stokes.

Όλες οι διατάξεις συσκευών MEMS αποτελούνται από εξαρτήματα τα οποία ενώνουν οι μικροαγωγοί. Είναι σαφές ότι οι μικροαγωγοί αποτελούν βασικό στοιχείο των διατάξεων αυτών και η μελέτη της ροής των αερίων στους μικροαγωγούς αποτελεί θέμα έρευνας τη τελευταία δεκαετία.

Η ροή μέσα στους μικροαγωγούς μπορεί να δημιουργηθεί λόγω ενός κινούμενου τμήματος τους αγωγού, διαφοράς πίεσης και θερμοκρασίας ή και συνδιασμού αυτών. Η παρούσα εργασία μελετά τη χαμηλοδιάστατη αντλία τύπου Knudsen, αυλακωτής – ορθογωνικής διατομής, της οποίας η λειτουργία βασίζεται στη δημιουργία ροής λόγω διαφοράς θερμοκρασίας στα άκρα του μικροαγωγού.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στη ροή που οφείλεται στη διαφορά θερμοκρασίας. Η ροή αυτή είναι γνωστή ως ροή θερμικού ερπησμού, ή *thermal creep flow* από την διεθνή βιβλιογραφία [10,16,18,19]. Χαρακτηριστικό της ροής αυτής είναι ότι δεν οφείλεται σε βαρυτικές δυνάμεις, όπως η ροή φυσικής συναγωγής, αλλά εξαρτάται αποκλειστικά από το γεγονός ότι το αέριο βρίσκεται εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας και για το λόγο αυτό εμφανίζεται μόνο σε αραιωμένες ατμόσφαιρες ενώ παύει να υφίσταται καθώς πλησιάζουμε στο υδροδυναμικό όριο.

Κλείνοντας το εισαγωγικό κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η δομή της παρούσας εργασίας. Στο 2^ο κεφάλαιο γίνεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση, στην οποία αναφέρονται συγγράματα και άρθρα τα οποία μελετήθηκαν με σκοπό τη δημιουργία του απαραίτητου θεωρητικού υπόβαθρου καθώς και για την σύγκριση και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται πλήρης περιγραφή του φαινομένου του θερμικού ερπησμού. Το 4^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη κινητική θεωρία, περιγραφή των εξισώσεων Boltzmann και Maxwell, διατύπωση και επεξήγηση όλων των όρων που θα χρησιμοποιηθούν, τη γεωμετρική διατύπωση του προβλήματος, τις οριακές συνθήκες καθώς και το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται. Τέλος, στο 5^ο κεφάλαιο εμπεριέχεται λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν καθώς και τα συμπεράσματα που εξάγονται από την επεξεργασία τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το θέμα της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη αραιοποιημένης ροής αερίου σε μικρο-αγωγό ορθογωνικής – αυλακωτής διατομής. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης αυτής το οποίο αποτέλεσε η κινητική θεωρία καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο εξελίχθηκε στο πέρασμα των χρόνων με την ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Η κινητική θεωρία, η οποία αποτελεί έναν από τους κλάδους της στατιστικής μηχανικής, επιτρέπει την περιγραφή των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των αερίων με τη θεώρηση της σύστασής τους σε μοριακό επίπεδο. Η ανάπτυξη της θεωρίας ξεκίνησε τον 17^ο αιώνα (Hooke, Descartes) και εξελίχθηκε τον 18^ο αιώνα (Bernoulli, Boyle). Το θεμέλιο λίθο, πάνω στον οποίο βασίστηκαν άλλοι εξίσου σημαντικοί επιστήμονες κατά την διάρκεια του 20^{ου} αιώνα, έθεσαν δύο μεγάλοι φυσικοί, ο Maxwell και ο Boltzmann. Παρόλα αυτά, η θεωρία του Boltzmann εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη μελέτη προβλημάτων μικροσκοπικής κλίμακας τη δεκαετία του '50. Η μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια που απαιτεί η επίλυση της εξίσωσης Boltzmann και η απαίτηση ενός υπολογιστικού συστήματος με ικανοποιητική ισχύ αποτέλεσαν σημαντικά εμπόδια στην εφαρμογή της.

Η εφαρμογή της εξίσωσης Boltzmann σε προβλήματα μικρορευστοδυναμικής ροής σε αγωγούς γίνεται έπειτα από θεωρητικές προσεγγίσεις βασισμένες στη κινητική θεωρία. Οι προσεγγίσεις αυτές αφορούν τον προσδιορισμό των οριακών συνθηκών και τη μοντελοποίηση του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων. Ο προσδιορισμός των οριακών συνθηκών είναι ένα σημαντικό βήμα για την επίλυση καθώς αποτελεί κριτήριο για το πόσο ακριβείς είμαστε στην προσομοίωση του φαινομένου. Η πλέον συνήθης συνθήκη η οποία

εφαρμόζεται μέχρι σήμερα οφείλεται στον Maxwell [4]. Σύμφωνα με τη συνθήκη αυτή (συνθήκη τύπου διάχυσης), η κατανομή των εισερχομένων προς τη ροή σωματιδίων ακολουθεί κανατομή Maxwell όπως αυτή ορίζεται από τις μακροσκοπικές ιδιότητες του στερεού τοιχώματος τα σωματίδια δηλαδή καθώς προσπίπτουν στα τοιχώματα χάνουν τη μνήμη τους και συνεχίζουν μόνο με βάση την πληροφορία του τοιχώματος. Η εφαρμογή της όμως, σε αραιά αέρια ή σε τοιχώματα μικρής τραχύτητας δε συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα και το γεγονός αυτό οδήγησε σε τροποποίηση της συνθήκης από τον Maxwell έτσι ώστε τα σωματίδια να μην εμφανίζουν ολική απώλεια μνήμης αλλά μερική. Πιο συγκεκριμένα, ένα ποσοστό των σωματιδίων δεν απορροφάται από το τοίχωμα αλλά ανακλάται πάνω σε αυτό. Ο συντελεστής α αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της αλληλεπίδρασης ρευστού – τοιχώματος, γνωστός ως “accommodate coefficient”.

Η μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων στην εξίσωση Boltzmann αποτελεί εξίσου σημαντικό παράγοντα για την επίλυση. Σε μια ιδανική περίπτωση η εξίσωση θα συμπεριελάμβανε όλους τους τύπους των συγκρούσεων, οι οποίοι θα είναι ίσοι με τον αριθμό των σωματιδίων στο σύστημα. Προφανώς όμως είναι αδύνατο να υπολογιστεί αυτή η περίπτωση. Στην πραγματικότητα, όλοι οι όροι δεν έχουν την ίδια σημασία αλλά και την ίδια συχνότητα. Ειδικά στην αραιοποιημένη ροή είναι αρκετός ο υπολογισμός μόνο των συγκρούσεων στις οποίες εμπλέκονται δύο σωματίδια.

Το πρώτο μοντέλο που παρουσιάστηκε ήταν το BGK (από τους Bhatnagar-Gross-Krook) [20]. Χρησιμοποιείται σε μεγάλη έκταση για ροές ενός συστατικού μέχρι και σήμερα, αφού τα αποτελέσματα που δίνει είναι σε αρκετές περιπτώσεις ικανοποιητικά. Μια βελτιωμένη εκδοχή παρουσιάστηκε το 1974, το μοντέλο S (από τον Shakhov) [21]. Η διαφοροποίηση υπήρξε στην κατανομή ισορροπίας η οποία πλέον περιελάμβανε και τον όρο της θερμοροής, καθιστώντας πλέον δυνατή την εξαγωγή αποτελεσμάτων με ικανοποιητική ακρίβεια για μη ισοθερμοκρασιακές ροές. Το μοντέλο S εφαρμόζεται και επιλύεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Στη συνέχεια εφόσον έχουν καθορισθεί οι οριακές συνθήκες και το μοντέλο συγκρούσεων, απομένει η επιλογή της μεθοδολογίας επίλυσης. Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι οι καθαρά αριθμητικές λύσεις. Σε

αυτόν το τομέα διακρίνονται δυο κυρίαρχες, η μέθοδος απευθείας προσομοίωσης Monte Carlo (DSMC) [2] και η μέθοδος των διακριτών ταχυτήτων (DVM) [22,23]. Η μέθοδος DSMC, η οποία βασίζεται στην διακριτή αντιμετώπιση καθορισμένων σωματιδίων είναι αρκετά αποτελεσματική σε πολύ αραιοποιημένες ροές.

Η μέθοδος DVM αποτελεί τη δεύτερη εναλλακτική μέθοδο για την αριθμητική επίλυση της κινητικής εξίσωσης και είναι αυτή που χρησιμοποιείται στη παρούσα εργασία. Η βασική της αρχή είναι η επιλογή ορισμένων διευθύνσεων και τιμών των μοριακών ταχυτήτων, για τις οποίες αν είναι γνωστή η λύση της εξίσωσης Boltzmann, είναι δυνατός ο προσδιορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων. Όπως είναι φυσικό, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των διευθύνσεων και των ταχυτήτων τόσο πιο ακριβής θα είναι η προσέγγιση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων. Για να επιτευχθεί η βελτιστοποίηση στην επιλογή των ταχυτήτων επιλέγεται αυτές να είναι ρίζες κάποιου ορθογώνιου πολυωνύμου. Αυτό συμβαίνει διότι οι μακροσκοπικές ιδιότητες αποτελούν ροπές της λύσης της εξίσωσης Boltzmann ως προς τη μικροσκοπική ταχύτητα και επομένως ολοκληρώματά της. Το σχήμα είναι επαναληπτικό και στη γενική περίπτωση συγκλίνει. Ο χρόνος σύγκλισης του συστήματος εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό Knudsen και για μικρούς αριθμούς Kn η σύγκλιση είναι αρκετά αργή.

Όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, βασική μελέτη της εργασίας αυτής είναι η αραιοποιημένη ροή, σε μικροκανάλια ορθογωνικής- αυλακωτής διατομής, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας, το οποίο αποτελεί και την βασική λειτουργία μιας αντλίας Knudsen.

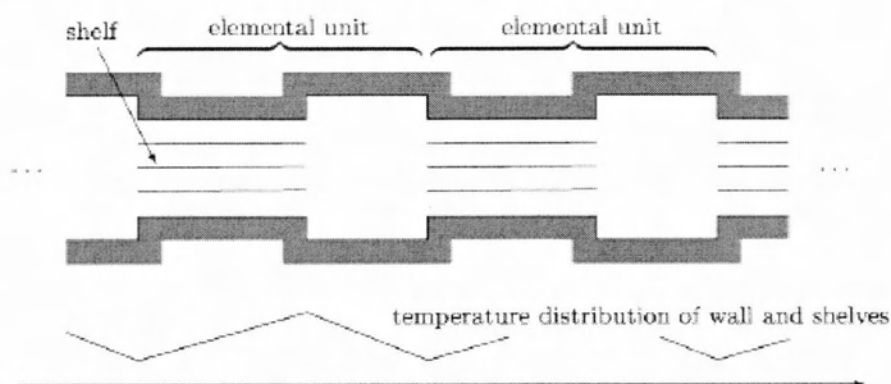
Ένα από τα πιο κλασσικά αλλά σπουδαία ευρήματα της κινητικής θεωρίας είναι η δημιουργία μιας σταθερής ροής αερίου, χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων σε συνθήκες πολύ χαμηλής πίεσης (συνθήκες κενού) ή σε μικροσυστήματα, όταν υπάρχει μια θερμοκρασιακή διαφορά κατα μήκος της επιφάνειας κίνησης του ρευστού. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα τέτοιας ροής είναι ο θερμικός ερπυσμός. Η πρώτη πειραματική προσπάθεια που έγινε πρότεινε δυο δεξαμενές οι οποίες συνδέονταν με ένα πολύ λεπτό αγωγό. Επιβάλλοντας μια θερμοκρασιακή διαφορά κατα μήκος του αγωγού, θα μπορούσε να μεταφερθεί συγκεκριμένη ποσότητα αερίου από τη μία δεξαμενή στην άλλη. Ωστόσο για να

αυξηθεί αυτό το αντλητικό φαινόμενο σε πρακτικά επίπεδα θα απαιτούνταν υπερβολική αύξηση της θερμοκρασιακής διαφοράς ή την μεγέθυνση του αγωγού.

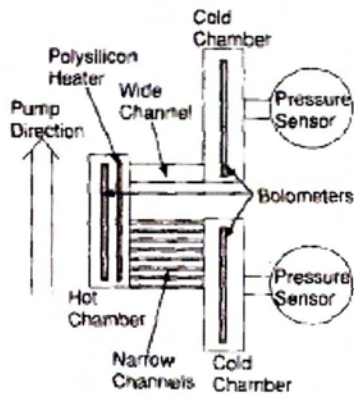
Πρώτος εξήγησε το φαινόμενο ο Reynolds 1879 [25]. Στις αρχές τις δεκαετίας του 1900 μια βελτίωση της παραπάνω ιδέας προτάθηκε από τον Knudsen [26]. Στη θέση του απλού αγωγού, ο Knudsen δημιούργησε μια συσκευή με περιοδικά τμήματα. Κάθε τμήμα περιλαμβάνει μια σειρά από, παράλληλα τοποθετημένα, πολύ λεπτά και πυκνά πλακίδια. Η θερμοκρασιακή διαφορά υπάρχει κατά μήκος αυτών. Ακολουθεί ένα τμήμα αγωγού χωρίς πλακίδια όπου η πίεση παραμένει σταθερή ενώ η θερμοκρασία μειώνεται στην αρχική της τιμή. Χρησιμοποιώντας αυτή τη συσκευή ο Knudsen πέτυχε μια διαφορά πίεσης δέκα μονάδων μεταξύ των δυο δεξαμενών, αποφεύγοντας τις μεγάλες θερμοκρασιακές διαφορές στον αγωγό. Ωστόσο, η πρωτοποριακή του εργασία δεν αποτέλεσε αντικείμενο σοβαρής έρευνας. Στις αρχές του '90, ήταν που σύγχρονοι ερευνητές της κινητικής θεωρίας, ασχολήθηκαν σοβαρά με ροές σε μικροκανάλια λόγω θερμοκρασιακής κλήσης και γίνεται μια συστηματική προσπάθεια βελτιστοποίησης της αντλίας Knudsen μέχρι και σήμερα. Η πρώτη εκδοχή (1995) της αντλίας Knudsen έχει προταθεί από τον Pham-Van-Diep [27] και την κατέδειξαν οι Vargo και Muntz (1997) [28]. Αξιόλογες προσπάθειες έγιναν κυρίως από δυο ερευνητικές ομάδες των πανεπιστημίων του Kyoto (Ιαπωνία) και του Los Angeles (ΗΠΑ). Και οι δυο ομάδες έχουν μελετήσει τόσο σε θεωρητικό, όσο και σε πειραματικό επίπεδο τη ροή λόγω θερμικού ερπυσμού. Το πρωτότυπο της αντλίας Knudsen που προτάθηκε (1996) από την ομάδα του Kyoto φαίνεται στην Εικ. 1. Το 2003 δημοσιεύθηκε μια προσπάθεια τοποθέτησης αντλίας Knudsen σε chip από τους S.McNamara και Y.B.Gianchandani Εικ.2. Από τις τελευταίες εξελίξεις (2010-11) στην τεχνολογία αντλίας Knudsen αποτελεί οι εργασία των Kunal Pharas και Shamus McNamara οι οποίοι κατασκεύασαν δυο αντλίες μια πλευρικής και μια ακτινικής σχεδίασης (lateral pump design και radial pump design) Εικ. 3. Και για τις δύο συσκευές όταν το θερμοηλεκτρικό υλικό δέχεται ενέργεια, η μία πλευρά γίνεται η ζεστή, ενώ η άλλη κρύα. Οι πλάκες λειτουργούν ως αγωγοί θερμότητας και μεταφέρουν την ενέργεια (θερμική) και από τις δυο πλευρές του θερμοηλεκτρικού υλικού προς κάθε πλευρά του νανο-πορώδους υλικού, διατηρώντας τις ζεστές και κρύες θερμοκρασίες των καναλιών μέσα στο πορώδες

υλικό. Το αέριο αντλείται από την κρύα πλευρά (inlet) στην ζεστή πλευρά (outlet) εξαιτίας του θερμικού ερπησμού.

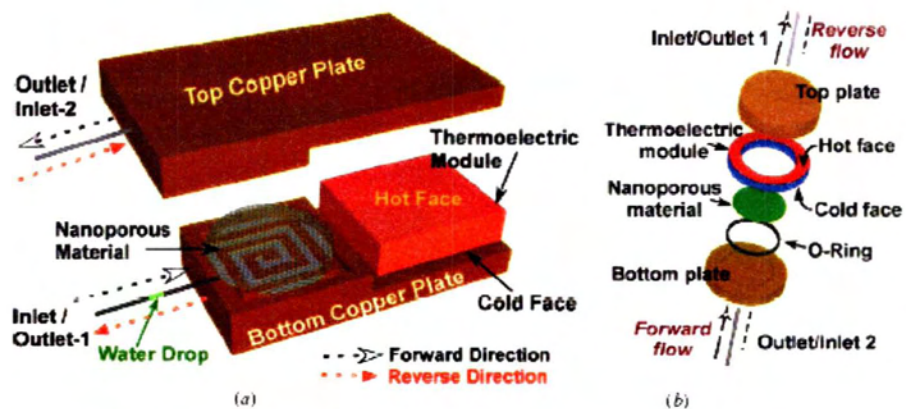
Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονιστεί ότι εκτός των προαναφερθέντων ερευνητικών ομάδων που ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την κατασκευή και τη βελτιστοποίηση της αντλίας Knudsen, έχουν γίνει και πολλές έρευνες και μελέτες σε θεωρητικό επίπεδο. Η κατασκευή αλγορίθμων και κωδίκων για την προσομοίωση αυτών των ροών σε διάφορες γεωμετρίες και διατομές αποτελούν το θεμέλιο λήθο κάθε πειραματικής προσπάθειας. Σε αυτόν το τομέα εξειδικεύεται και η ερευνητική ομάδα του Εργαστηρίου Φυσικών και Χημικών Διεργασιών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, με πολυετή εμπειρία και παρουσία στα διεθνή συνέδρια της σχετικής επιστημονικής έρευνας. Μεγάλο τμήμα της εργασίας αυτής στηρίζεται στο έργο και στις δημοσιεύσεις της προαναφερθείσας ερευνητικής ομάδας [3,5,7,8,9, 30,31], καθώς επίσης και σε ξένες δημοσιεύσεις [1,2,6,11,12,13,14,15,17,18,19,24,29,30,31].



Εικ.1. Y. Sone, Y.Waniguchi, K. Aoki



Εικ.2. Στη διάταξη παρατηρούμε μια αντλία Knudsen που αποτελείται από δύο κρύες δεξαμενές, μία ζεστή δεξαμενή, τα παράλληλα και πυκνά κανάλια και το πλατύ κανάλι.



Εικ.3. Σχήματα αμφίδρομης αντλίας Knudsen, lateral design (a) , radial design (b)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

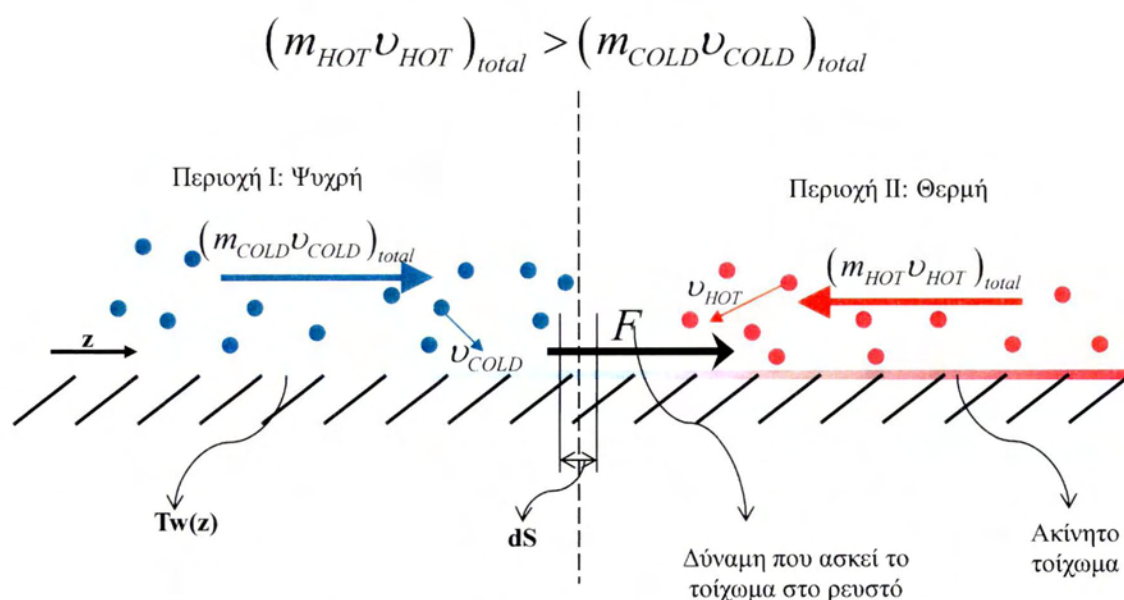
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΕΡΠΥΣΜΟΥ

3.1 Θεωρητική εξήγηση φαινομένου

Θεωρούμε ένα αέριο σε ηρεμία πάνω από ένα ακίνητο επίπεδο τοίχωμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Το τοίχωμα βρίσκεται στο επίπεδο $y = 0$, ενώ το αέριο καταλαμβάνει την περιοχή $y > 0$. Η θερμοκρασία του τοιχώματος και του αερίου είναι γνωστή και περιγράφεται από μία θερμοκρασιακή κατανομή της μορφής $T = T(z)$ με $dT/dz > 0$. Δηλαδή η θερμοκρασία είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z και αυξάνεται μονότονα καθώς αυξάνεται το z . Έστω ένα οποιοδήποτε σημείο S κατά μήκος του τοιχώματος και μια μικρή περιοχή dS γύρω από το σημείο S . Η περιοχή που καταλαμβάνει το αέριο χωρίζεται από την νοητή γραμμή $z = z_S$ σε δύο περιοχές την I και II για $z < z_S$ και $z > z_S$ αντίστοιχα, όπου η μέση θερμοκρασία της περιοχής I είναι μικρότερη από την αντίστοιχη θερμοκρασία της περιοχής II, δηλαδή $T_I < T_{II}$. Αντίστοιχα αφού η ταχύτητα των μορίων είναι ανάλογη κάποιας δύναμης της θερμοκρασίας, εύκολα προκύπτει ότι η μέση μοριακή ταχύτητα των μορίων της περιοχής I είναι μικρότερη από αυτή της περιοχής II, δηλαδή $v_I < v_{II}$.

Μόρια προερχόμενα και από τις δύο περιοχές, την ψυχρή και τη θερμή, συγκρούονται με το στοιχειώδες τμήμα του τοιχώματος dS . Μάλιστα όσο περισσότερο αραιή είναι η ατμόσφαιρα τόσο μεγαλύτερες είναι οι ελεύθερες τροχιές των μορίων πριν συγκρουσθούν με το τοίχωμα. Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στην επιφάνεια dS προερχόμενα από τις περιοχές I και II είναι περίπου ίσος ($m_I \approx m_{II}$) είναι προφανές ότι η μέση ορμή των μορίων της περιοχής I που μεταφέρεται στο τοίχωμα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ορμή των μορίων της περιοχής II, δηλαδή $m_I v_I < m_{II} v_{II}$. Όσο αυξάνει ο αριθμός Knudsen τόσο μεγαλύτερο είναι και το μέτρο της διαφοράς ορμής

$|m_I v_I - m_{II} v_{II}|$, αφού τα μόρια που προσκρούουν στην επιφάνεια dS προέρχονται από απομακρυσμένες περιοχές και για το λόγο αυτό στατιστικά έχουν μεγάλες διαφορές στην θερμοκρασία και στην μοριακή τους ταχύτητα. Αντίθετα, σε μικρούς αριθμούς Knudsen, λόγω των πολλαπλών συγκρούσεων μεταξύ γειτονικών μορίων τα μόρια που προσκρούουν στην επιφάνεια dS βρίσκονται πολύ κοντά στην επιφάνεια dS και έχουν περίπου τις ίδιες θερμοκρασίες με αποτέλεσμα να ελαττώνεται και τέλος στο υδροδυναμικό όριο να μηδενίζεται η διαφορά ορμής. Επομένως, συνολικά ασκείται από το αέριο στο τοίχωμα μία δύναμη που μάλιστα αυξάνει με την αύξηση του αριθμού Knudsen. Η συνιστώσα της δύναμης αυτής που είναι παράλληλη με το τοίχωμα έχει φορά από την περιοχή II προς την περιοχή I. Επειδή όμως το τοίχωμα είναι ακίνητο λόγω δράσης και αντίδρασης το τοίχωμα ασκεί στο αέριο μία δύναμη ίση και αντίθετη, της οποίας η συνιστώσα που είναι παράλληλη με το τοίχωμα έχει φορά από την περιοχή I προς την περιοχή II, δηλαδή από την ψυχρή προς τη θερμή περιοχή. Η δύναμη αυτή αποτελεί την κινητήρια δύναμη για την δημιουργία της ροής θερμικού ερπυσμού που έχει φορά από τις χαμηλές προς τις υψηλές θερμοκρασίες.



Σχήμα1: Σχηματική αναπαράσταση της ροής θερμικού ερπυσμού.

3.2 Πειραματική επαλήθευση

Η ροή θερμικού ερπυσμού έχει παρατηρηθεί και επιβεβαιωθεί πειραματικά [10]. Μία τέτοια πειραματική διάταξη που χαρακτηρίζεται για την απλότητά της παρουσιάζεται και σχολιάζεται στη παρούσα παράγραφο.

Η πειραματική διάταξη, όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 2, αποτελείται από ένα διαφανές υάλινο περίβλημα, ώστε να υπάρχει οπτική επαφή με τα τεκταινόμενα εντός του περιβλήματος και μία βάση στην οποία στηρίζεται το περίβλημα και ο υπόλοιπος εξοπλισμός της διάταξης. Όπως φαίνεται και στο σχήμα εντός του περιβλήματος τοποθετείται κατακόρυφα ένα ορθογώνιο υάλινο πλακίδιο που στηρίζεται σε κατάλληλο στήριγμα. Το πλακίδιο μπορεί να θερμανθεί με τη βοήθεια ηλεκτρικής αντίστασης νικελίου – χρωμίου που βρίσκεται στο κάτω τμήμα του πλακιδίου. Με τον τρόπο αυτό η θέρμανση του κατακόρυφου πλακιδίου είναι ανομοιόμορφη έχοντας τις υψηλές θερμοκρασίες κοντά στην ηλεκτρική αντίσταση στο κάτω τμήμα του και τις χαμηλότερες θερμοκρασίες στο πάνω άκρο του πλακιδίου. Επιπλέον, εντός του περιβλήματος μπροστά στο γυάλινο πλακίδιο και σε μικρή απόσταση από αυτό τοποθετείται πτερωτή με σκοπό την ανίχνευση κάθετων ρευμάτων αέρα. Τέλος, η πίεση στο εσωτερικό του περιβλήματος μπορεί να μεταβάλλεται, με την βοήθεια αντλίας κενού, από την ατμοσφαιρική πίεση (10^5 Pascal) μέχρι και μερικά Pascal. Όταν το υάλινο πλακίδιο θερμαίνεται η θερμοκρασία στο άνω και κάτω άκρα είναι 34°C και 140°C αντίστοιχα.

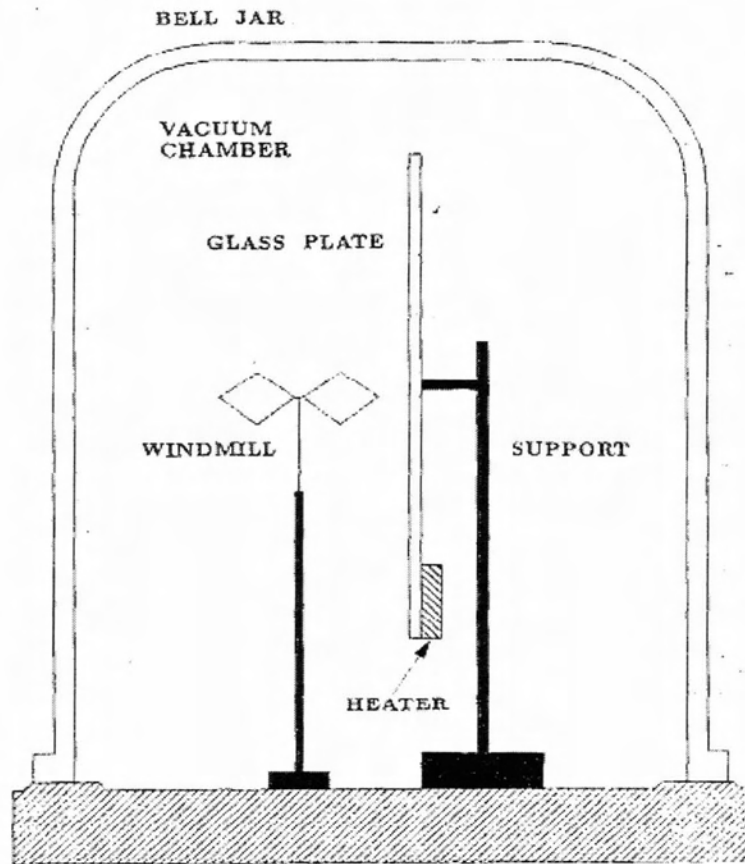
Με τη συσκευή αυτή εξετάζονται ανοδικά και καθοδικά ρεύματα αέρα παράλληλα με το υάλινο πλακίδιο που οφείλονται στην διαφορετική θερμοκρασία του πλακιδίου σε σχέση με τον αέρα που βρίσκεται εντός του περιβλήματος και στην θερμοκρασιακή κατανομή του ίδιου του πλακιδίου. Η ύπαρξη τέτοιων ρευμάτων γίνεται εμφανής με την περιστροφή της πτερωτής. Τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων έχουν ως εξής:

- Όταν το πλακίδιο δεν θερμαίνεται η πτερωτή παραμένει ακίνητη για όλο το εύρος πίεσης στο οποίο διεξάγεται το πείραμα.
- Όταν το πλακίδιο θερμαίνεται και το αέριο έχει ατμοσφαιρική πίεση η πτερωτή γυρίζει με περίπου 110 στροφές ανά λεπτό, κάτι το οποίο αποδεικνύει ότι δημιουργείται ροή κατά μήκος του υάλινου πλακιδίου. Από

την συσχέτιση μεταξύ της γωνίας των πτερυγίων της πτερωτής και από την φορά περιστροφής γίνεται αντιληπτό ότι η ροή έχει ανοδική διεύθυνση και επομένως οφείλεται σε φυσική συναγωγή.

- Με τη βοήθεια της αντλίας κενού μειώνεται σταδιακά η πίεση εντός του περιβλήματος. Παρατηρείται ότι παράλληλα με την πίεση μειώνεται σταδιακά η ταχύτητα περιστροφής της πτερωτής που τελικά μηδενίζεται και η πτερωτή ακινητοποιείται όταν η πίεση είναι περίπου 1400 Pa. Καθώς η πίεση μειώνεται περαιτέρω περίπου στα 40 Pa, η πτερωτή αρχίζει να περιστρέφεται και πάλι, όμως αυτή τη φορά προς την αντίθετη κατεύθυνση καταδεικνύοντας την ύπαρξη καθοδικού ρεύματος. Το καθοδικό ρεύμα ισχυροποιείται καθώς μειώνεται περαιτέρω η πίεση όπως φαίνεται και από την αύξηση των στροφών της πτερωτής. Η ταχύτητα περιστροφής φτάνει την μέγιστη τιμή της περίπου 140 στροφές ανά λεπτό όταν η πίεση είναι γύρω στα 3 Pa που αποτελεί και το όριο χαμηλής πίεσης που δύναται να αναπαραχθεί από την συγκεκριμένη αντλία κενού.

Είναι λοιπόν προφανές ότι καθώς η πίεση μειώνεται αρχικά η ροή θερμικού ερπυσμού είναι το ίδιο ισχυρή με τη ροή φυσικής συναγωγής, ενώ στη συνέχεια με την περαιτέρω μείωση της πίεσης η ροή θερμικού ερπυσμού ισχυροποιείται, ενώ αντίθετα η ροή φυσικής συναγωγής αδυνατίζει και τελικά βέβαια σε πολύ χαμηλές πιέσεις μηδενίζεται. Το πείραμα που παρουσιάστηκε αν και έχει ποιοτικά και όχι λεπτομερή ποσοτικά χαρακτηριστικά, δείχνει ξεκάθαρα τη ροή πάνω σε ένα θερμαινόμενο υάλινο πλακίδιο λόγω θερμικού ερπυσμού, από τη χαμηλή προς την υψηλή θερμοκρασία. Παράλληλα τονίζει την έντονη διαφορά μεταξύ της ροής λόγω θερμικού ερπυσμού σε συνθήκες χαμηλής πίεσης και της ροής λόγω φυσικής συναγωγής σε συνθήκες ατμοσφαιρικής πίεσης.

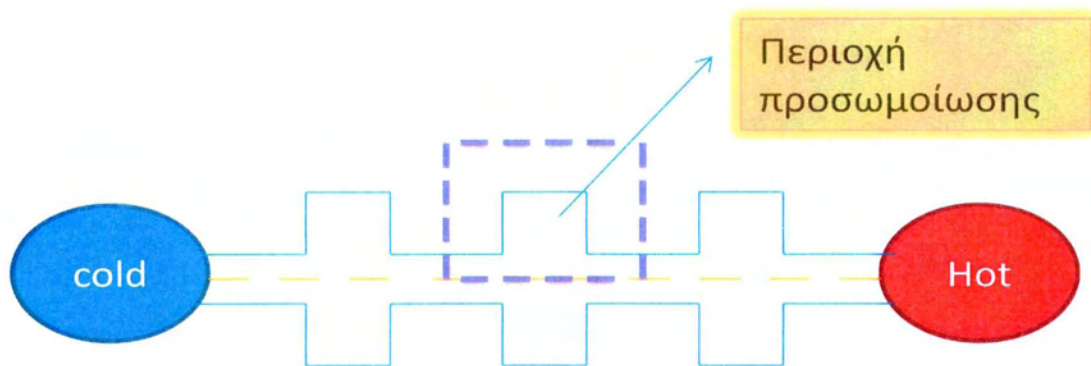


Σχήμα 2: Πειραματική διάταξη επίδειξης της ροής θερμικού ερπυσμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4.1 Γεωμετρική διατύπωση του προβλήματος

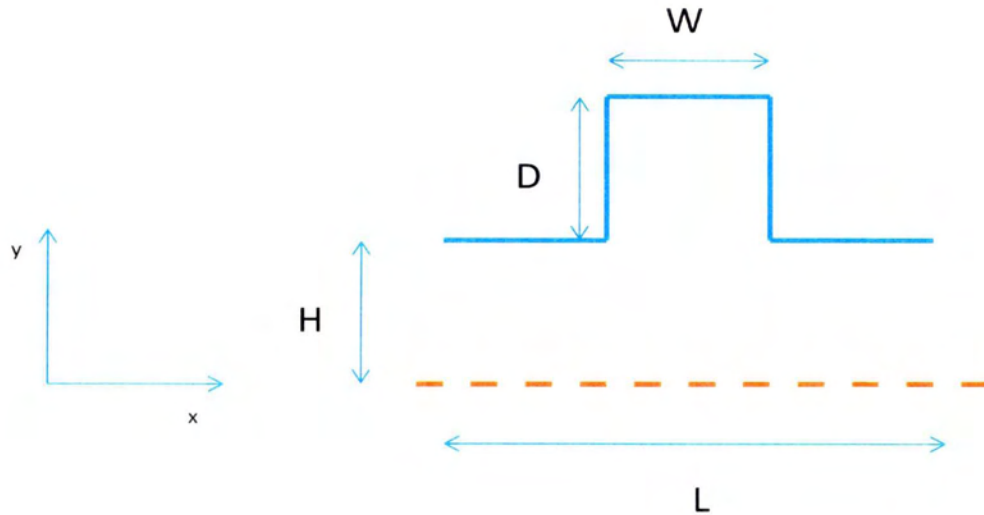


Σχήμα 4.1 Η διατομή του προβλήματος.

Η υπο μελέτη ροή διαμορφώνεται εντός της διάταξης όπως φένεται στο Σχήμα 4.1. Υπάρχουν μία κρύα και μία ζεστή δεξαμενή, τις οποίες ενώνει ένας αγωγός, που αποτελείται από περιοδικά τμήματα ορθογωνικών καναλιών τα οποία ενώνουν ορθογωνικές κοιλότητες. Δεν υπάρχει κινούμενο τμήμα στην διάταξη. Η τρίτη διάσταση z , θεωρείται ότι έχει άπειρο μήκος, με αποτέλεσμα η ροή να αντιμετωπίζεται ως δισδιάστατη.

Το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος ως προς το οποίο αδιαστατοποιούνται όλα τα γεωμετρικά μεγέθη είναι το μήκος H . Έτσι προκύπτουν

τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη: $\frac{L}{H}$, $\frac{D}{H}$, $\frac{W}{H}$ Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Οι διαστάσεις του προβλήματος W , D , L και το χαρακτηριστικό μήκος H .

Λόγω περιοδικότητας δε χρειάζεται να σαρώσουμε όλο τον αγωγό. Αρκεί ο υπολογισμός των ταχυτήτων σε διάστημα μήκους L , έτσι όπως φέεται στο Σχήμα 4.2. Επίσης λόγω συμμετρίας στον άξονα x και με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες σαρώνουμε μόνο το άνω μισό του περιοδικού τμήματος.

4.2 Διατύπωση εξίσωσης Boltzmann

Θεωρούμε μία συνάρτηση κατανομής f , η οποία προσδιορίζει τη πιθανότητα να υπάρχει ορισμένος αριθμός σωματιδίων στην περιοχή $[x_i, x_i+dx)$ με ταχύτητα $[\xi_i, \xi_i+d\xi)$ τη χρονική στιγμή t για όλο το πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση f υπακούει στην **εξίσωση Boltzmann**:

$$\frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial r} + X_i \frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial \xi} = Q(f, f^*) \quad (4.1)$$

όπου:

r_i : το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου i

ξ_i : το αντίστοιχο διάνυσμα της ταχύτητας

χ_i : το ανηγμένο ως προς τη μάζα του σωματιδίου i διάνυσμα της συνισταμένης των δυνάμεων στο σημείο r_i

όπου :

$Q(f, f^*)$: αποτελεί τον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων, δηλαδή της αλληλεπίδρασης του κάθε σωματιδίου με το υπόλοιπο σύστημα.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.1) αποτελεί τη μεταβολή της ποσότητας f κατά μήκος μια χαρακτηριστικής καμπύλης που ορίζεται από την ταχύτητα ξ και το πεδίο δυνάμεων χ . Πιο συγκεκριμένα η εξίσωση Boltzmann ορίζει ότι : Η μεταβολή της συνάρτησης κατανομής κατά μήκος μια χαρακτηριστικής καμπύλης είναι ίση με το ολοκλήρωμα του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων πάνω στην καμπύλη αυτή.

Εφόσον έχει υπολογισθεί η κατανομή f τότε γίνεται ο υπολογισμός των μακροσκοπικών μεγεθών:

$$\text{Αριθμητική πυκνότητα} \quad n(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\xi \quad (4.2)$$

$$\text{Μακροσκοπική ταχύτητα} \quad u(r, t) = \frac{1}{n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f d\xi \quad (4.3)$$

$$\text{Πίεση} \quad P(r, t) = \frac{m}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d\xi \quad (4.4)$$

$$\text{Μητρώο τάσεων} \quad P_{i,j}(r, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} \Xi_i \Xi_j f d\xi \quad (4.5)$$

$$\text{Θερμοκρασία} \quad T(r, t) = \frac{m}{3 k_B n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d\xi \quad (4.6)$$

Θερμορροή $q(r, t) = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 \Xi f d \xi$ (4.7)

Εσωτερική ενέργεια $\varepsilon(r, t) = \frac{1}{2n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d \xi$ (4.8)

Όπου:

Ξ : είναι η σχετική ταχύτητα και ορίζεται ως: $\Xi = \xi - u$

k_B : η σταθερά του Boltzmann ($k_B = 1.380658 \cdot 10^{-23}$ J/K)

m : η μοριακή μάζα του αερίου

4.3 Ο όρος των συγκρούσεων και η κατανομή Maxwell

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης Boltzmann (4.1) εμπεριέχει τον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων. Ο υπολογισμός του όρου αυτού είναι εφικτός κάνοντας κάποιες παραδοχές για τον τύπο των συγκρούσεων και για τον τύπο των σωματιδίων. Εάν θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει πεδίο εξωτερικών δυνάμεων μια δυνατή λύση της εξίσωσης είναι

$$f_{loc}^{(eq)}(r, \xi, t) = n(r, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(r, t)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\xi - u(r, t))^2}{2k_B T(r, t)}} \quad (4.9)$$

η οποία είναι γνωστή ως **κατανομή Maxwell**. Αποτελεί μια κανονική κατανομή ως προς ξ με μέση τιμή την μακροσκοπική ταχύτητα u και τυπική απόκλιση ε . Επίσης η κατανομή Maxwell αποτελεί το όριο προς το οποίο τήνει να συγκλίνει το σύστημα.

4.4 Κινητικό Μοντέλο Shakhov (S)

Οι εξισώσεις που προκύπτουν από την αντικατάσταση του δεύτερου όρου της εξίσωση Boltzmann (του όρου των συγκρούσεων) από μια αριθμητική έκφραση αποτελούν τις κινητικές εξισώσεις. Η αντικατάσταση αυτή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα. Τα πιο διαδεδομένα μοντέλα είναι το BGK και το S που αποτελεί μια προέκταση του πρώτου. Όπως έχει προαναφερθεί στη παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το μοντέλο S εφόσον παρέχει τον σωστό αριθμό Prandtl και είναι καταλληλότερο για τον υπολογισμό ροών που οφείλονται σε βαθμίδα θερμοκρασίας. Η εξίσωση του μοντέλου S είναι

$$Q(f, f^*) = -\nu(f - f^s) = -\nu \left(f - n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\xi-u)^2}{2k_B T}} \left[1 + \frac{2m}{15n(k_B T)^2} q\xi \left(\frac{m\xi^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) \right] \right)$$

(4.10)

4.5 Γραμμικοποίηση κινητικών εξισώσεων

Σε αρκετές περιπτώσεις ροών που αντιμετωπίζονται στην πραγματικότητα, οι αποκλίσεις της ταχύτητας, της πυκνότητας και της θερμοκρασίας μπορούν να θεωρηθούν σχετικά μικρές κι αυτό εξ αιτίας των ήπιων φαινομένων που παρατηρούνται. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση κατανομής μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως προς μία κατανομή Maxwell που προσδιορίζεται από κάποιες ποσότητες αναφοράς και ονομάζεται απόλυτη κατανομή ισορροπίας. Σαν ποσότητες αναφοράς επιλέγονται συνήθως τιμές κοντά στη μέση θερμοκρασία και τη μέση πυκνότητα της ροής ενώ ως ταχύτητα αναφοράς επιλέγεται η μηδενική.

Η απόλυτη κατανομή ισορροπίας δίνεται από την έκφραση:

$$f_o = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\xi^2}{2k_B T_0}} \quad (4.11)$$

Η γραμμικοποίηση της τοπικής κατανομής ισορροπίας ως προς την απόλυτη κατανομή ισορροπίας γίνεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης προκύπτει ότι

$$f_{loc}^{(eq)} = f_o \left[1 + \rho + \frac{m}{k_B T_0} \xi \cdot u + \tau \left(\frac{m \xi^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (4.12)$$

όπου:

$$\rho = \frac{n - n_0}{n_0} \quad (4.13)$$

$$\tau = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (4.14)$$

είναι οι διαταραχές της πυκνότητας και θερμοκρασίας αντίστοιχα. Ορίζεται η ποσότητα h ώστε να ισχύει:

$$f = f_o (1 + h) \quad (4.15)$$

Από τις (4.11), (4.13) και (4.15) προκύπτει η γραμμικοποιημένη εξίσωση Boltzmann με μοντέλο συγκρούσεων Shakhov:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \xi \frac{\partial h}{\partial r} = \nu \left[\rho + \frac{m}{k_B T_0} \xi \cdot u + \tau \left(\frac{m \xi^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2m}{15n_0 (k_B T_0)^2} q \cdot \xi \left(\frac{m \xi^2}{2k_B T_0} - \frac{5}{2} \right) - h \right] \quad (4.16)$$

4.6 Αδιαστατοποίηση κινητικών εξισώσεων και παροχών

Στη γενική περίπτωση που δε μελετάται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, τα διαστατά μεγέθη μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν χαρακτηριστικά αδιάστατα μεγέθη. Απαιτείται βέβαια ο προσδιορισμός ορισμένων χαρακτηριστικών μεγεθών. Έτσι ορίζεται το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος H . Επίσης η πίεση αναφοράς

$$P_0 = n_0 k_B T \quad (4.17)$$

ενώ η χαρακτηριστική ταχύτητα είναι

$$u_0 = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}} \quad (4.18)$$

και η θερμορροή

$$\hat{q} = \frac{q}{u_0 P_0} = q \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} \frac{1}{n_0 k_B T_0} \quad (4.19)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην γραμμικοποιημένη εξίσωση Boltzmann η σχέση 4.16 παίρνει τη μορφή:

$$c \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{L\sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} v_0 \left[\rho + 2c \cdot \hat{u} + \tau \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) + \frac{4}{15} c \cdot \hat{q} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) - h \right] \quad (4.20)$$

Όπου c η αδιάστατη μοριακή ταχύτητα και x το αδιάστατο άνωσμα θέσης. Η ποσότητα v_0 συνδέεται με τα μακροσκοπικά μεγέθη μέσω της σχέσης:

$$v_0 = \frac{P_0}{\mu(T_0)} \quad (4.21)$$

Όπου μ το ιξώδες στη θερμοκρασία T_0 .

Η μέση ελεύθερη διαδρομή των σωματιδίων μεταξύ δυο διαδοχικών συγκρούσεων λ είναι:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mu}{P_0} \left(\frac{2k_B T_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

Οπότε ο όρος που πολλαπλασιάζει το δεξί μέρος της εξίσωσης 4.20 είναι:

$$\frac{L\sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{L}{\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \quad (4.23)$$

Ο αδιάστατος αριθμός Knudsen (Kn) αποτελεί την κύρια παράμετρο που χαρακτηρίζει τις ροές στην περιοχή των αραιών αερίων και είναι ο λόγος της μέσης ελεύθερης διαδρομής των σωματιδίων προς την χαρακτηριστική διάσταση της ροής.

Στο συνεχές μέσο μηδενίζεται, ενώ για ροές χωρίς συγκρούσεις τείνει στο άπειρο.

Συνδέεται με τους αδιάστατους αριθμούς Reynolds (Re) και Mach (Ma) από τη παρακάτω σχέση:

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}} \frac{M_\alpha}{Re} \quad (4.24)$$

Παράμετρος αραίωσης

$$\delta = \frac{PH}{\mu u_0} \quad (4.25)$$

οπότε η εξίσωση (4.20) παίρνει τη μορφή:

$$c \frac{\partial h}{\partial x} = \delta \left[\rho + 2cu + \tau \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{4}{15} \right) cq \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) - h \right] \quad (4.26)$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αδιαστατες μακροσκοπικές ποσότητες της πυκνότητας, ταχύτητας, θερμοκρασίας και θερμοροής:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h e^{-c^2} dc \quad (4.27)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} c h e^{-c^2} dc \quad (4.28)$$

$$\tau(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} c^2 - 1 \right) h e^{-c^2} dc \quad (4.29)$$

$$q(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} c \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) h e^{-c^2} dc \quad (4.30)$$

Όπου $\int_{-\infty}^{+\infty} (\square) dc = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\square) dc_x dc_y dc_z$. Άλλες μακροσκοπικές ποσότητες που μας ενδιαφέρουν είναι το μητρώο τάσεων:

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} c_x c_y h e^{-c^2} dc \quad (4.31)$$

Και η αδιάστατη πίεση:

$$p(x, y) = \frac{P - P_0}{P_0} = \tau + \rho \quad (4.32)$$

Τέλος υπολογίζονται άλλες δυο μακροσκοπικές ποσότητες. Πρώτα, ολοκληρώνοντας κατα μήκος του εσωτερικού του καναλιού κατά την x διάσταση του προφίλ ταχυτήτων, έχουμε την αδιάστατη ροή:

$$G = 2 \int_0^1 u_x \left(-\frac{L}{2H}, y \right) dy \quad (4.33)$$

Και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας κατά μήκος της x διεύθυνσης της θερμοροής, υπολογίζουμε την αδιάστατη ολική θερμοροή:

$$Q = 2 \frac{H}{L} \int_0^l q_x(x, y) dy dx \quad (4.34)$$

4.7 Διαμόρφωση εξισώσεων με προβολή της τρίτης διάστασης

Η ροή που εξετάζεται στη συγκεκριμένη εργασία αποτελεί περίπτωση δισδιάστατης ροής. Θεωρώντας το βάθος της κοιλότητας άπειρο τα οριακά φαινόμενα στην τρίτη διάσταση παραβλέπονται. Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής h και οι μακροσκοπικές ποσότητες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της διάστασης z και ισχύει $h(s, c) = h(x, y, c_x, c_y, c_z)$, ενώ οι μακροσκοπικές ποσότητες είναι συναρτήσεις μόνο των x και y .

Έτσι η συνιστώσα της μικροσκοπικής ταχύτητας στη τρίτη διάσταση μπορεί να απαλειφθεί εφαρμόζοντας τη τεχνική των προβολών.

Η εξίσωση μεταφοράς προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της κινητικής εξίσωσης

4.26 με $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(c_z^2 - \frac{1}{2} \right) e^{c_z^2}$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε στο διάστημα

$-\infty < c_z < +\infty$. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία έχουμε πλέον δυο εξισώσεις.

Ωστόσο εφόσον έγινε η προβολή, δεν περιέχεται σε αυτές τις εξισώσεις ο όρος c_z , η υπολογιστική προσπάθεια με τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων που χρησιμοποιούμε μειώνεται αισθητά.

Επιπροσθέτως, για υπολογιστικούς λόγους, είναι πιο βολικό να εκφράσουμε τις δυο εναπομείναντες συνιστώσες, της μικροσκοπικής ταχύτητας, c_x και c_y σε πολικές συντεταγμένες. Οι οποίες ορίζονται πλέον από το μέτρο μ και την πολική της γωνία θ :

$$\mu = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{c_y}{c_x} \right) \quad (4.35)$$

αντίστοιχα, όπου $0 \leq \mu < \infty$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Με αντικατάσταση των c_x και c_y με τις πολικές συντεταγμένες στις δυο πλέον νέες εξισώσεις όπως διαμορφώθηκαν από την προβολή, το μοντέλο S περιγράφεται πλέον από τις εξείς σχέσεις:

$$\mu \frac{d\varphi}{ds} + \delta\varphi = \delta \left[\rho + 2\mu(u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) + \tau(\mu^2 - 1) + \frac{4}{15}(c_x q_x + c_y q_y)(\mu^2 - 2) \right] \quad (4.36)$$

και

$$\mu \frac{d\psi}{ds} + \delta\psi = \delta \left[\frac{\tau}{2} + \frac{2}{15}(c_x q_x + c_y q_y) \right] \quad (4.37)$$

Τέλος εφαρμόζουμε την αντίστοιχη μεθοδολογία και για την εξαγωγή των αδιάστατων μακροσκοπικών ποσοτήτων. Έτσι οι εξισώσεις 4.27 – 4.31 θα γίνουν:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \varphi \mu e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (4.38)$$

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \varphi \mu^2 e^{-\mu^2} \cos \theta d\mu d\theta \quad (4.39)$$

$$\tau(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2}{3} [(\mu^2 - 1)\varphi + \psi] \mu e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (4.40)$$

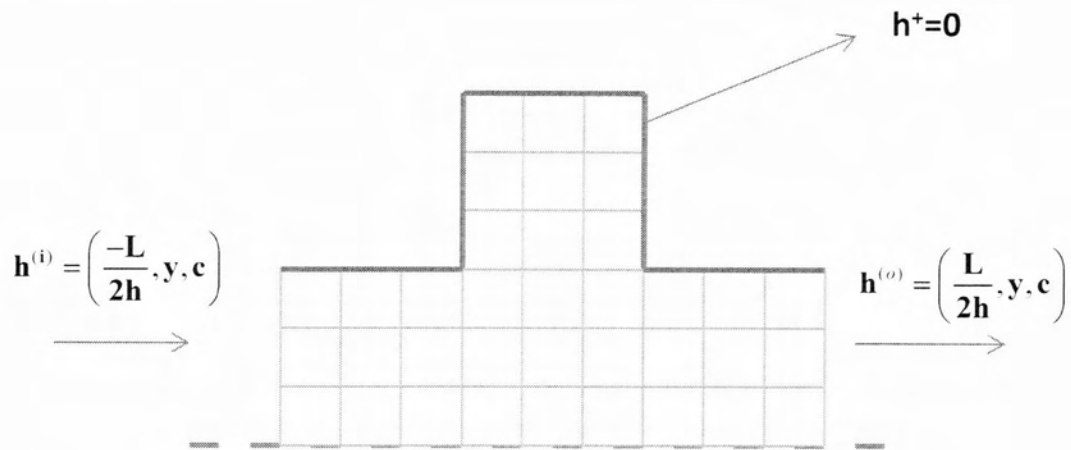
$$q_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [(\mu^2 - 1)\varphi + \psi] \mu e^{-\mu^2} \cos \theta d\mu d\theta \quad (4.41)$$

$$q_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [(\mu^2 - 1)\varphi + \psi] \mu e^{-\mu^2} \sin \theta d\mu d\theta \quad (4.42)$$

και

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \varphi \mu^3 e^{-\mu^2} \sin \theta \cos \theta d\mu d\theta \quad (4.43)$$

4.8 Οριακές Συνθήκες



Σχήμα 4.3 Οι οριακές συνθήκες Maxwell και περιοδικότητας.

Εξαιτίας της γεωμετρίας και της φυσικής του προβλήματος εφαρμόζονται τρεις συνθήκες. Η συνοριακή συνθήκη Maxwell στη διεπιφάνεια αερίου – τοιχώματος:

$$h^+ = n_w, \quad c \cdot n > 0 \quad (4.44)$$

και η συνθήκη περιοδικότητας στα άκρα του του περιδικού τμήματος :

$$h^{(i)} = \left(-\frac{L}{2h}, y, c\right) = h^{(o)} = \left(\frac{L}{2h}, y, c\right) \quad (4.45)$$

Οι οριακές συνθήκες μετά τη προβολή της τρίτης διάστασης διαμορφώνονται ως εξής:

$$\varphi^+ = n_w \text{ και } \psi^+ = 0, \quad c \cdot n > 0 \quad (4.46)$$

για τη διεπιφάνεια αερίου – τοιχώματος.

Και

$$\varphi\left(-\frac{L}{2H}, y, \mu, \theta\right) = \varphi\left(\frac{L}{2H}, y, \mu, \theta\right) \quad (4.47)$$

$$\psi\left(-\frac{L}{2H}, y, \mu, \theta\right) = \psi\left(\frac{L}{2H}, y, \mu, \theta\right) \quad (4.48)$$

για τις περιοδικές συνθήκες.

Τέλος εφαρμόζεται και το τρίτο σετ οριακών συνθηκών, στο όριο συμμετρίας ($H=0$):

$$\varphi_{(1)}(i=1 \acute{\epsilon}\omega\varsigma I, j=1) = \varphi_{(3)}(i=1 \acute{\epsilon}\omega\varsigma I, j=1) \quad (4.49)$$

$$\varphi_{(2)}(i=1 \acute{\epsilon}\omega\varsigma I, j=1) = \varphi_{(4)}(i=1 \acute{\epsilon}\omega\varsigma I, j=1) \quad (4.50)$$

4.9 Αριθμητικό Σχήμα

Η διακριτοποίηση των κινητικών εξισώσεων στο χώρο των μικροσκοπικών ταχυτήτων βασίζεται στη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων. Στη περίπτωση της εξεταζόμενης ροής, η διακριτοποίηση πραγματοποιείται σε ορθογωνικό πλέγμα.

Ο διανυσματικός χώρος αποτελείται από το χώρο των μοριακών ταχυτήτων και από τον φυσικό χώρο. Στο χώρο των μοριακών ταχυτήτων η διακριτοποίηση γίνεται διαλέγοντας ένα σύνολο από ταχύτητες (μ_m, θ_n) , όπου $0 \leq \mu_m \leq \infty$ και $0 \leq \theta_n \leq 2\pi$, με $m=1, 2, \dots, M$ και $n=1, 2, \dots, N$. Οπότε έχουμε ένα σύνολο από $M \times N$ διακριτές ταχύτητες. Η διακριτοποίηση στο φυσικό χώρο (x, y) γίνεται διαιρώντας τη περιοχή ροής σε τετραγωνικά στοιχεία, δημιουργώντας ένα πλέγμα. Οι κόμβοι του πλέγματος δηλώνονται με (i, j) , όπου $i=1, 2, \dots, I$ και $j=1, 2, \dots, J$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\mu_m \frac{d\varphi_{m,n}}{ds} + \delta\varphi_{m,n}(x, y) = \delta u(x, y) \quad (4.51)$$

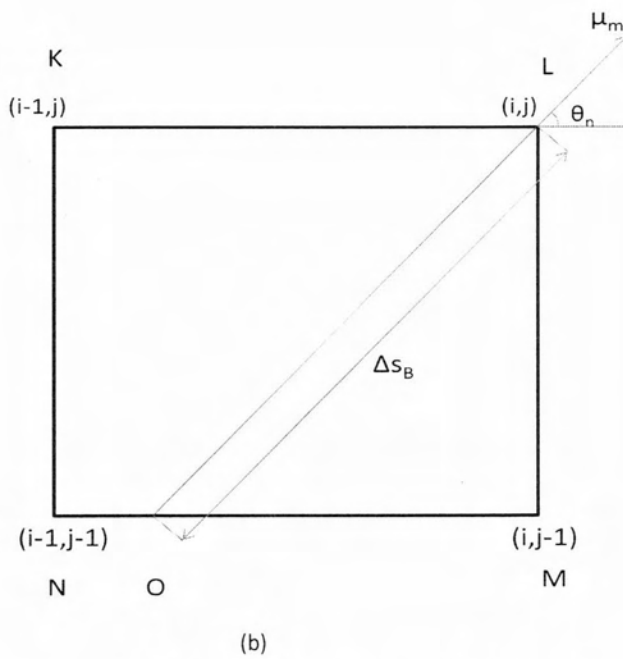
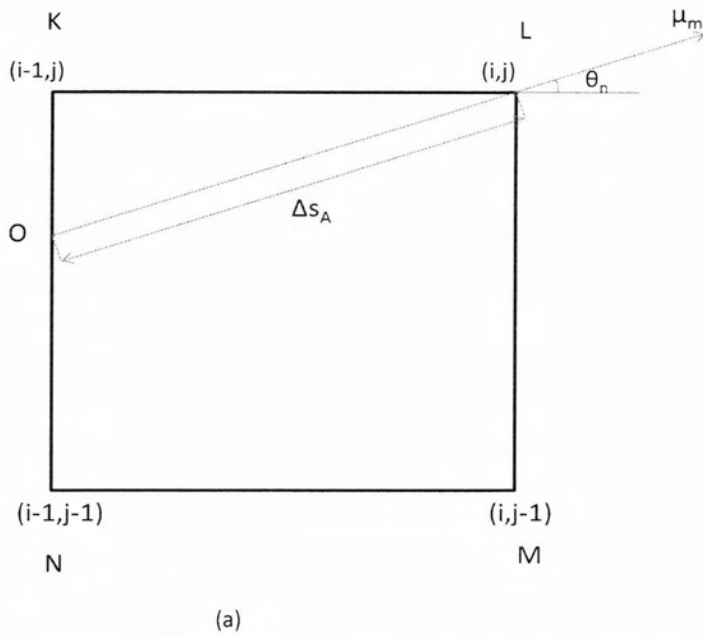
Ενώ η εξίσωση για τις ταχύτητες γίνεται:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_m \sum_n w_m w_n \varphi_{m,n} \quad (4.52)$$

Όπου:

- Για τη μεταβλητή μ χρησιμοποιείται ολοκλήρωση Gauss
- Για τη μεταβλητή θ εφαρμόζεται ο κανόνας του τραπεζίου
- w_m, w_n : οι συντελεστές βαρύτητας

Σε κάθε κόμβο i, j του πλέγματος γίνεται διακριτοποίηση του συστήματος των εξισώσεων (4.51) και (4.52) καταλήγοντας σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης ως προς s προσεγγίζεται μέσω ενός σχήματος κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης.



Σχήμα 4.4 Οι δυο περιπτώσεις υπολογισμού του Δs_e ανάλογα της γωνίας θ_n (α και β αντίστοιχα).

Για την εξαγωγή της παραγώγου $\mu_m \frac{d\varphi_{m,n}}{ds}$ στον κόμβο L έχουμε:

$$\mu_m \left. \frac{d\varphi_{m,n}}{ds} \right|_L = \mu_m \frac{\varphi_{Lm,n} - \varphi_{Om,n}}{\Delta s_{LO}} \quad (4.53)$$

Ενώ οι τιμές στο σημείο Ο υπολογίζονται από τα δυο γειτονικά σημεία του πλέγματος K-N ή N-M μέσω γραμμικής παρεμβολής Σχήμα 4.4 (a) και (b) αντίστοιχα. Αυτές οι δυο περιπτώσεις που διακρίνουμε εξαρτώνται από την γωνία θ_n .

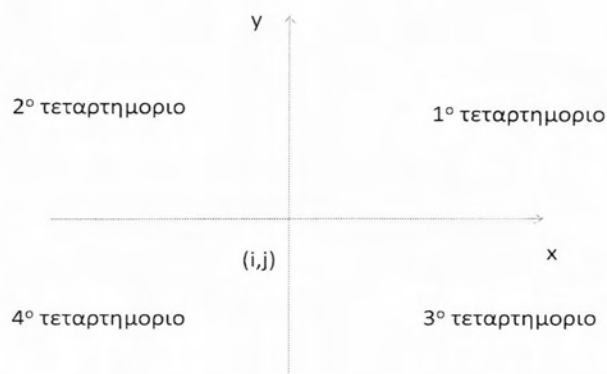
Συγκεκριμένα αν

$$0 < \theta_n < \tan^{-1}\left(\frac{KN}{NM}\right) \text{ τότε } \Delta s_A = \frac{\Delta x}{\cos \theta_n} \quad (\text{Σχήμα 4.6}) \quad (4.54)$$

και,

$$\tan^{-1}\left(\frac{KN}{NM}\right) < \theta_n < \frac{\pi}{2} \text{ τότε } \Delta s_B = \frac{\Delta y}{\sin \theta_n} \quad (\text{Σχήμα 4.7}) \quad (4.55)$$

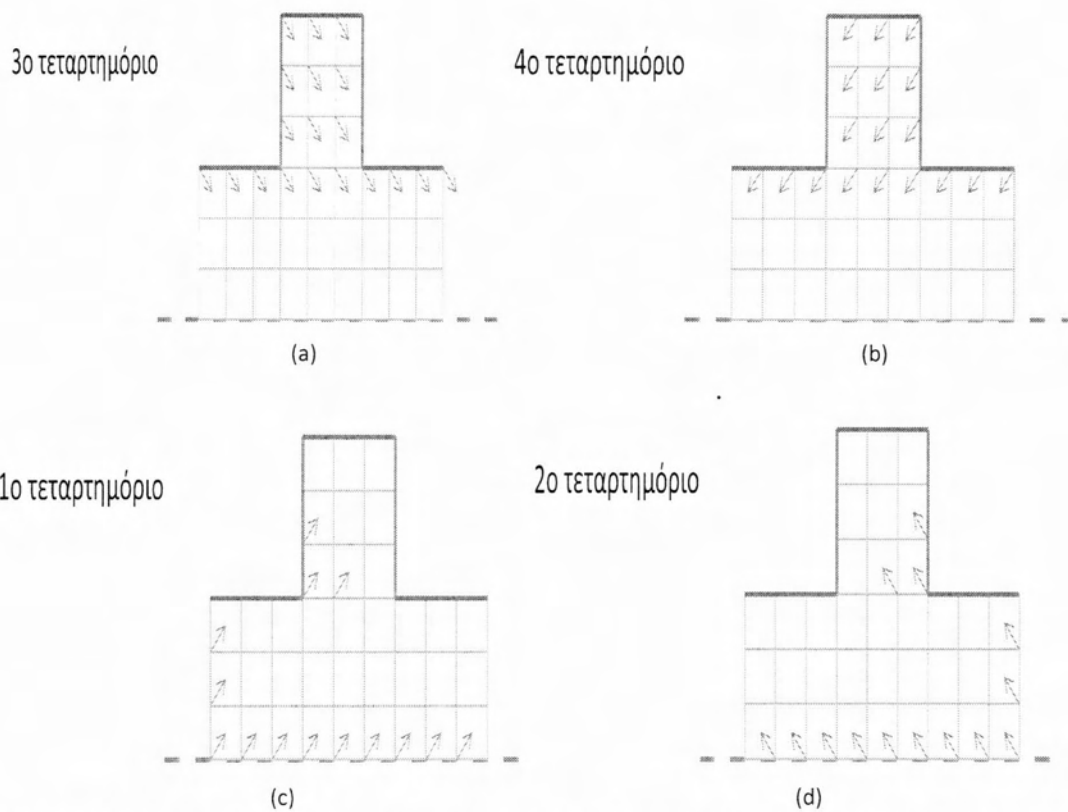
Ορίζουμε στον κώδικα τα τεταρτημόρια, ανάλογα με τη γωνία θ_n , της μοριακής ταχύτητας, όπως φαίνονται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Ορισμός τεταρτημορίων στον καρτεσιανό χώρο.

Ο κώδικας ξεκινάει ελέγχοντας τη γωνία θ_n όπως εξηγήσαμε παραπάνω με τις σχέσεις 4.54 και 4.55 αντίστοιχα. Στη συνέχεια ξεκινάει το υπολογισμό των ταχυτήτων με γωνίες του 3^{ου} και 4^{ου} τεταρτημόριου Σχήμα 4.6 (a) και (b) αντίστοιχα, εφόσον είναι οι μόνες αρχικές γνωστές ταχύτητες λόγω της οριακής συνθήκης Maxwell. Ξεκινώντας από το τοίχωμα υπολογίζει όλες τις ταχύτητες σε αυτές τις γωνίες μέχρι το συμμετρικό όριο. Στη συνέχεια υπολογίζει τις ταχύτητες με γωνίες του 1^{ου} και 2^{ου} τεταρτημόριου Σχήμα 4.6 (c) και (d) αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δυο περιπτώσεις ανάλογα με τον έλεγχο που έγινε παραπάνω.

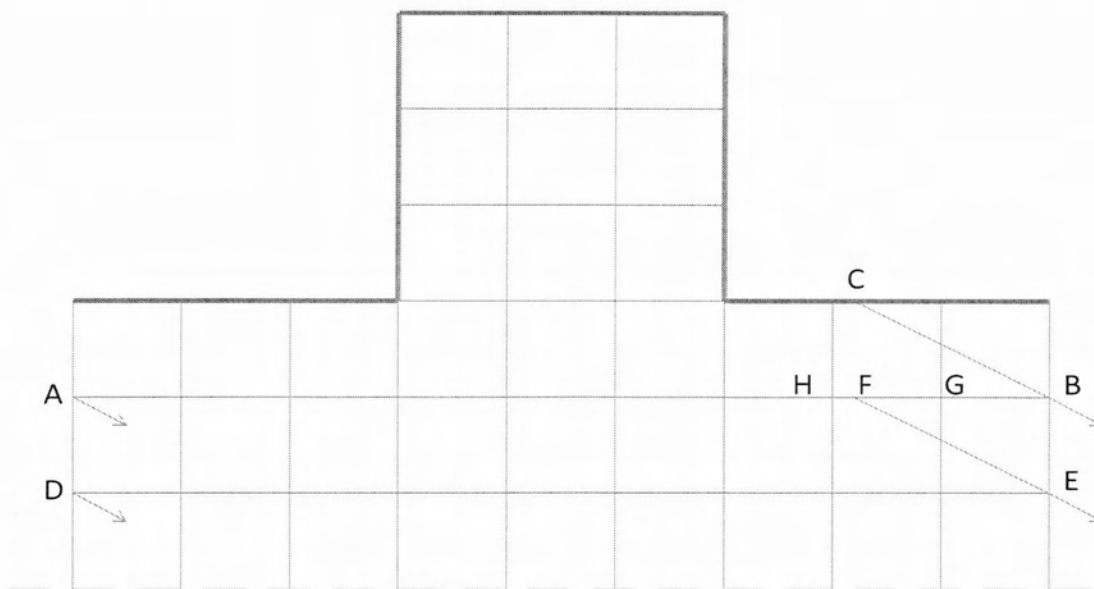
- Όταν $0 < \theta_n < \tan^{-1}\left(\frac{KN}{NM}\right)$, (Σχέση 4.54) η σειρά με την οποία υπολογίζονται οι ταχύτητες είναι $\boxed{3} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{2}$
- Όταν $\tan^{-1}\left(\frac{KN}{NM}\right) < \theta_n < \frac{\pi}{2}$, (Σχέση 4.55) η σειρά με την οποία υπολογίζονται οι ταχύτητες είναι $\boxed{3} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$



Σχήμα 4.6 Οι κατευθύνσεις των μοριακών ταχυτήτων στον διακριτοποιημένο χώρο στα τέσσερα τεταρτημόρια.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι ανεξαρτήτως περίπτωσης οι ταχύτητες του 1^{ου} και 2^{ου} τεταρτημόριου είναι άγνωστες. Εδώ εφαρμόζουμε μια τρίτη οριακή συνθήκη λόγω συμμετρίας. Και στις δυο περιπτώσεις, όταν υπολογιστούν οι ταχύτητες του 3^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, οι τελευταίες που βρίσκονται πάνω στο όριο συμμετρίας (ως προς τη διεύθυνση x) δίνονται ως αρχικές τιμές για τον υπολογισμό του 1^{ου} και 2^{ου} αντίστοιχα Σχέσεις 4.49, 4.50.

Τέλος, οι περιοδικές συνθήκες, σχέσεις 4.47 και 4.48 αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ταχυτήτων στους πρώτους κόμβους κάθε σειράς. Λόγω περιοδικότητας, θεωρούμε ότι η ταχύτητα στον κόμβο A είναι ίδια με αυτήν στον κόμβο B. Στον κόμβο A δεν υπάρχει κάποια πληροφορία για την επίληση των εξισώσεών μας, την ταχύτητα όμως στον κόμβο B μπορούμε να την υπολογίσουμε φαίροντας την χαρακτηριστική γραμμή της, μέχρι αυτή να τέμνει το αμέσως προηγούμενο οριζόντιο τετραγωνικό πλέγμα Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7 Υπολογισμός ταχυτήτων στο περιοδικό όριο

Το σημείο C το οποίο τέμνει η χαρακτηριστική το τοίχωμα είναι γνωστό, οπότε επιλύοντας τις κινητικές εξισώσεις κατά μήκος της χαρακτηριστικής υπολογίζουμε το B, έτσι είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι ταχύτητες σε όλους τους κόμβους της οριζόντιας γραμμής A-B. Στην συνέχεια για τον υπολογισμό του D, επαλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Υπολογίζεται η ταχύτητα στον κόμβο E, φέρνοντας τη χαρακτηριστική στο σημείο F, το F υπολογίζεται εύκολα με μία παρεμβολή εφόσον είναι γνωστά πλέον τα H και G. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλα τα σετ ταχυτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

5.1 Δεδομένα

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν έπειτα από προσομοιώσεις. Τα αποτελέσματα αφορούν τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης $\delta=0, 10^{-1}, 1, 10$, ενώ οι γεωμετρίες που εξετάστηκαν φαίνονται στον πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1

Case:	a	b	c	d
$\frac{L}{H}$	2	2	3	3
$\frac{W}{H}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{D}{H}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1

Όπως προαναφέρθηκε το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος είναι το μήκος H , το οποίο θεωρούμε ίσο με τη μονάδα ($H=1$). Ο κώδικας που χρησιμοποιούμε δεν περιέχει το μήκος D , αλλά τον λόγο $A = \frac{D}{W}$, οπότε εφόσον σε όλες οι περιπτώσεις

που εξετάζουμε ισχύει $\frac{W}{H} = \frac{D}{H}$, τότε θα έχουμε πάντα $A=1$.

Το κριτήριο σύγκλισης ορίστηκε 10^{-8} και αφορά το αθροιστικό απόλυτο σφάλμα των μακροσκοπικών ποσοτήτων στο κάθε σημείο.

5.2 Παροχές και Θερμορροές

Στο Πίνακα 5.2 και 5.3 φαίνονται οι τιμές της αδιάστατης παροχής μάζας(G) και θερμοροής(Q), αντίστοιχα, στο εύρος του δ που εξετάζουμε. Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνει το δ το G ελλατώνεται αισθητά, γεγονός αναμενόμενο, όσο

απομακρυνόμαστε από την ελεύθερη μοριακή περιοχή τόσο εξασθαινεί το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού.

Αντίστοιχη συμπεριφορά ακολουθεί και η θερμοροή (Q).

5.3 Μακροσκοπικές κατανομές

Στη συνέχεια ακολουθούν τα προφίλ ταχυτήτων U_x ως προς τον άξονα Y , στο μέσο της διατομής μας, ($x=L/4$) Σχήματα 5.1 έως 5.4 και στην είσοδο της διατομής στα σχήματα 5.5 έως 5.8 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ανεξαρτήτως δ , και στα τέσσερα σχήματα, την υψηλότερη ταχύτητα την έχουμε στην περίπτωση c . Αξίζει να σημειωθεί ότι το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση της μαζικής ροής (αναμενόμενο εφόσον η μαζική ροή υπολογίζεται από την ολοκλήρωση των ταχυτήτων στη διεύθυνση x). Για ίδιο δ το G της περίπτωσης c είναι πάντα μεγαλύτερο. Γεγονός από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι από τις γεωμετρίες που εξετάσαμε, αυτή της περίπτωσης c είναι η πιο αποδοτική.

Στα Σχήματα 5.9 έως 5.22 αποτυπώνονται τα θερμοκρασιακά προφίλ καθώς και οι ροϊκές γραμμές στη διατομή του προβλήματός μας για όλες τις εξεταζόμενες γεωμετρίες και τις παραμέτρους αραιοποίησης αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα. Σε όλες τις περιπτώσεις, για $\delta=0, 0.1$ και 1 έχουμε μια δίνη, ενώ αυτή τίνει να εξαφανιστεί καθώς πλησιάζουμε στο $\delta=10$. Χαρακτηριστικό αποτελεί το γεγονός της μη ύπαρξης δεύτερης δίνης. Γεγονός που μπορεί να εξηγηθεί από τη γεωμετρία του προβλήματος. Ο λόγος των μηκών W και D , (οι δύο πλευρές της κοιλότητας) είναι ίσος πάντα με τη μονάδα, δηλαδή έχει πάντα τετραγωνική διατομή. Δύο δίνες σε σειρά ή παράλληλα παρατηρούνται όταν ο λόγος των μηκών

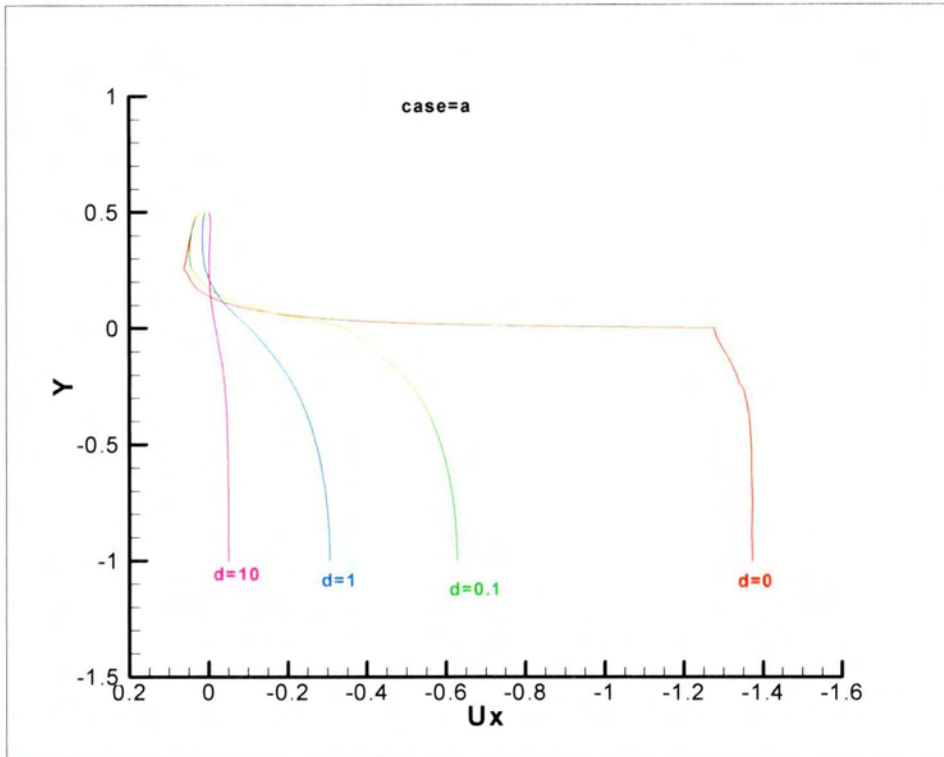
είναι $\frac{W}{D} > 1$ ή $\frac{W}{D} < 1$ αντίστοιχα.

Πίνακας 5.2

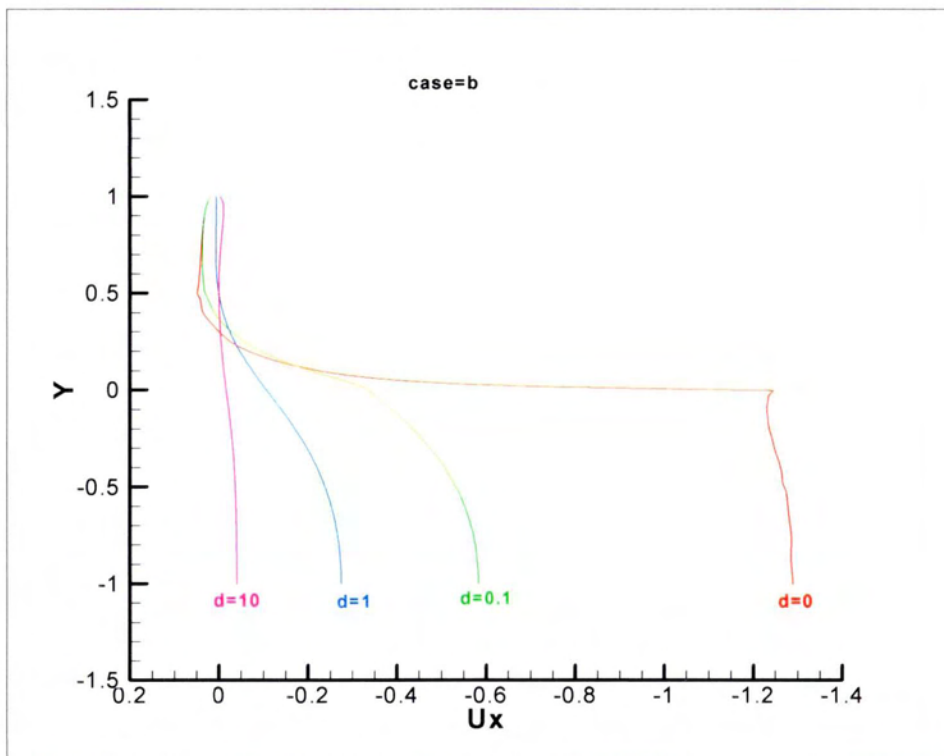
case				
	a	b	c	d
δ	G			
0	2.74179	2.6101	2.78844	2.70367
0.1	1.134	1.07592	1.15969	1.11903
1	0.515189	0.482639	0.52526	0.50299
10	0.0936489	0.0780431	0.0979224	0.087915

Πίνακας 5.3

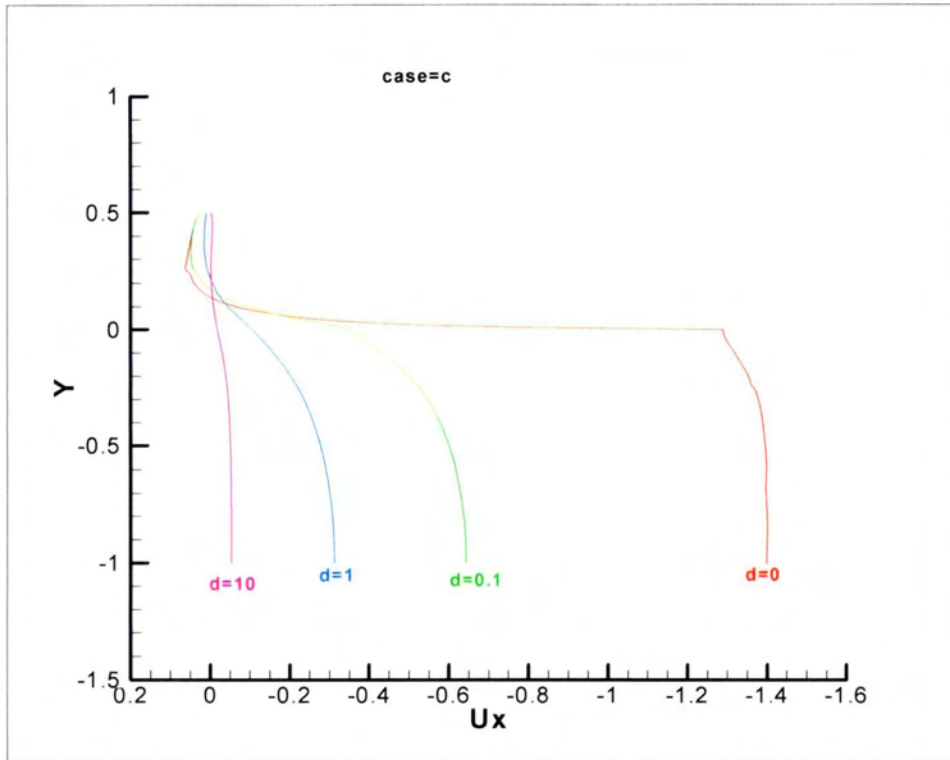
case				
	a	b	c	d
δ	Q			
0	13.0558	13.4255	13.0304	13.2627
0,1	6.68455	7.00824	6.65322	6.86069
1	2.41746	2.54781	2.40071	2.48146
10	0.359614	0.365929	0.3583	0.360962



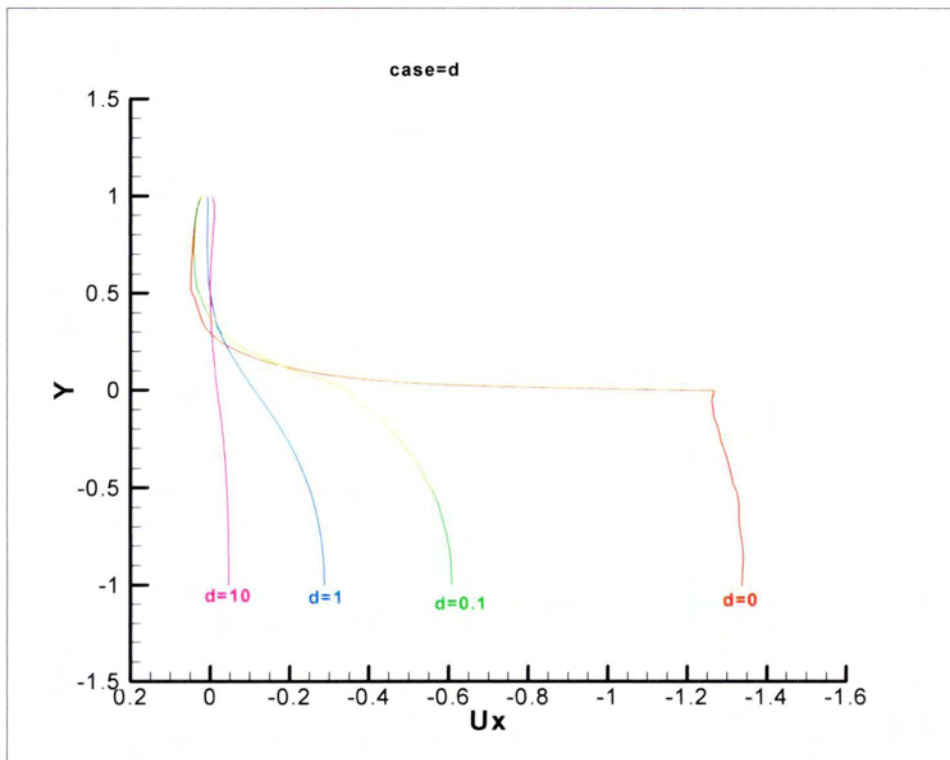
Σχήμα 5.1 Case:a, προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στο σημείο $x = L/4$ (επίπεδο συμμετρίας), για $\delta=0, 0.1, 1, 10$.



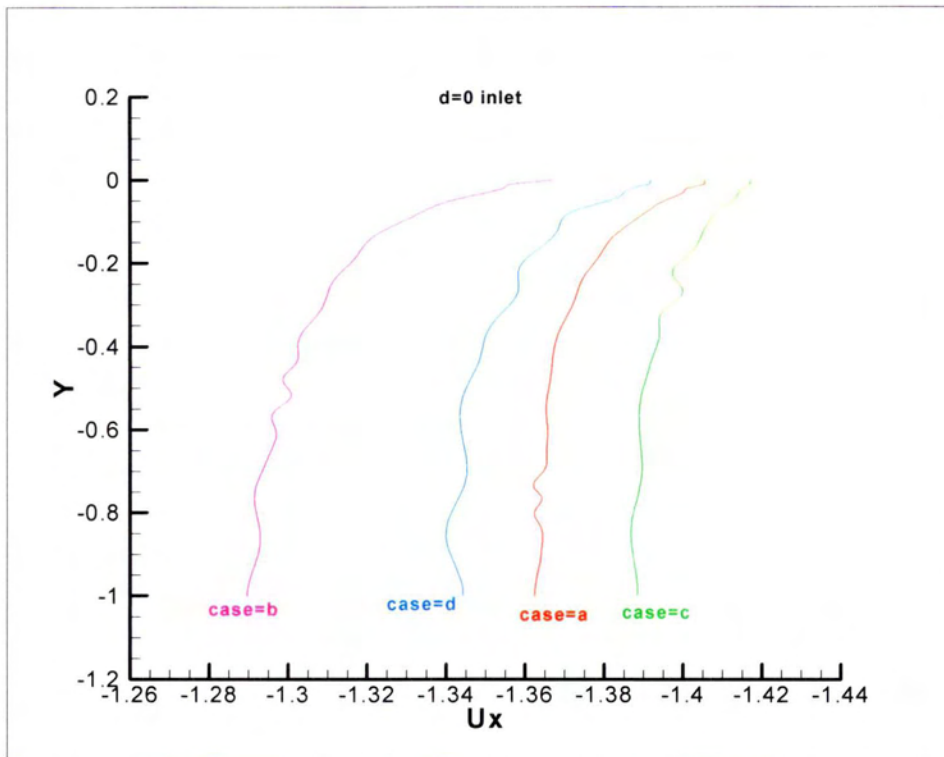
Σχήμα 5.2 Case: b, προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στο σημείο $x = L/4$ (επίπεδο συμμετρίας), για $\delta=0, 0.1, 1, 10$.



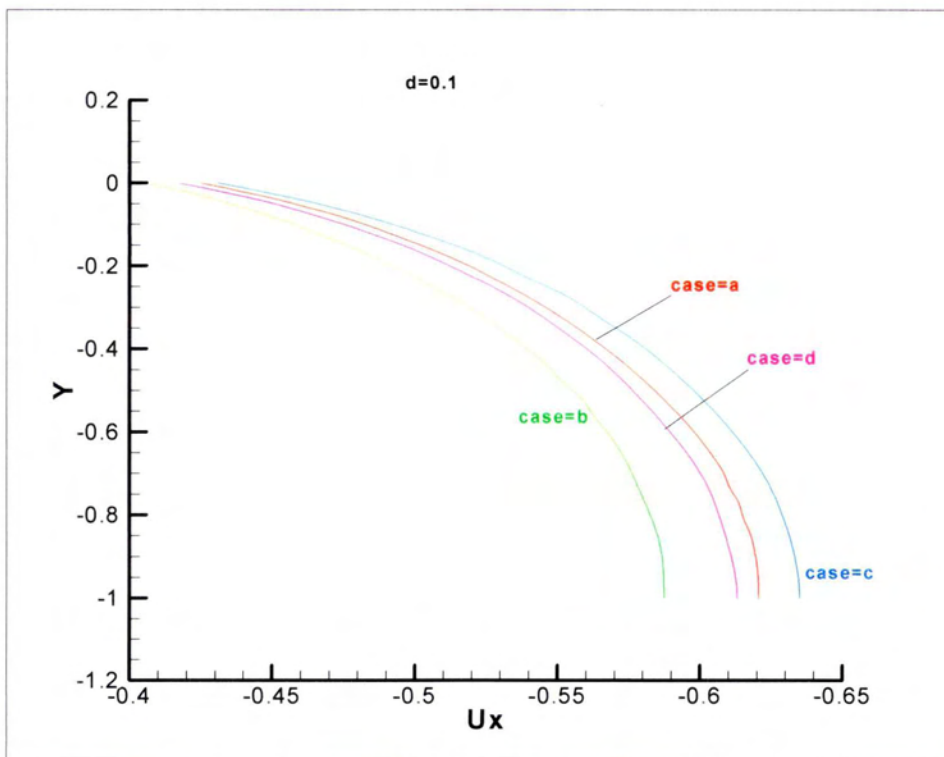
Σχήμα 5.3 Case: c, προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στο σημείο $x=L/4$ (επίπεδο συμμετρίας), για $\delta=0, 0.1, 1, 10$.



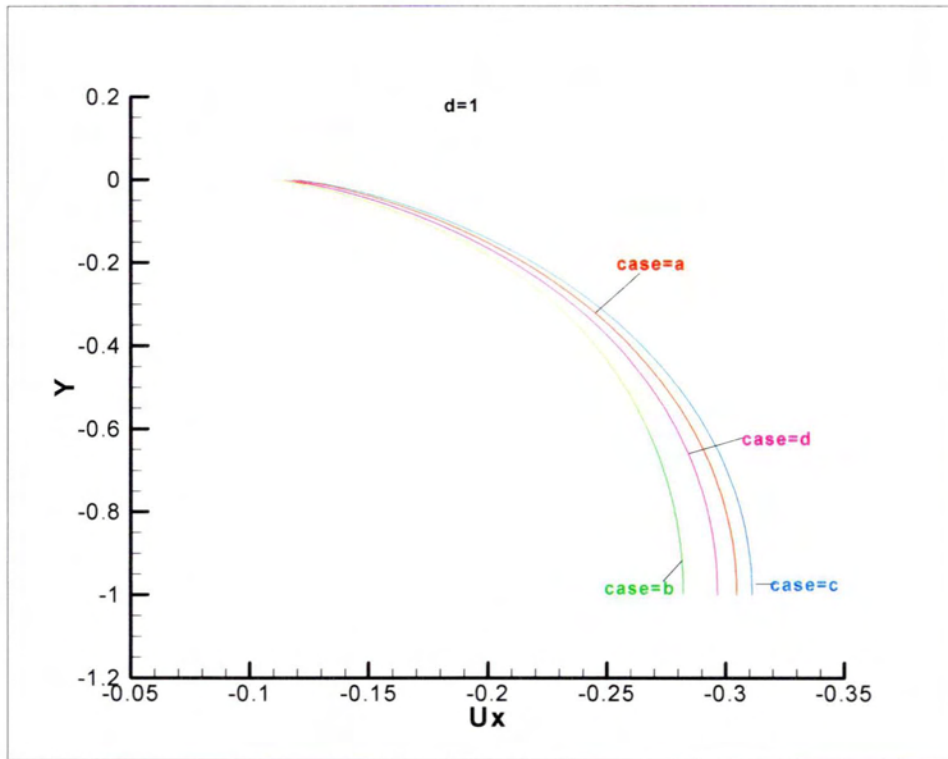
Σχήμα 5.4 Case:d, προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στο σημείο $x=L/4$ (επίπεδο συμμετρίας), για $\delta=0, 0.1, 1, 10$.



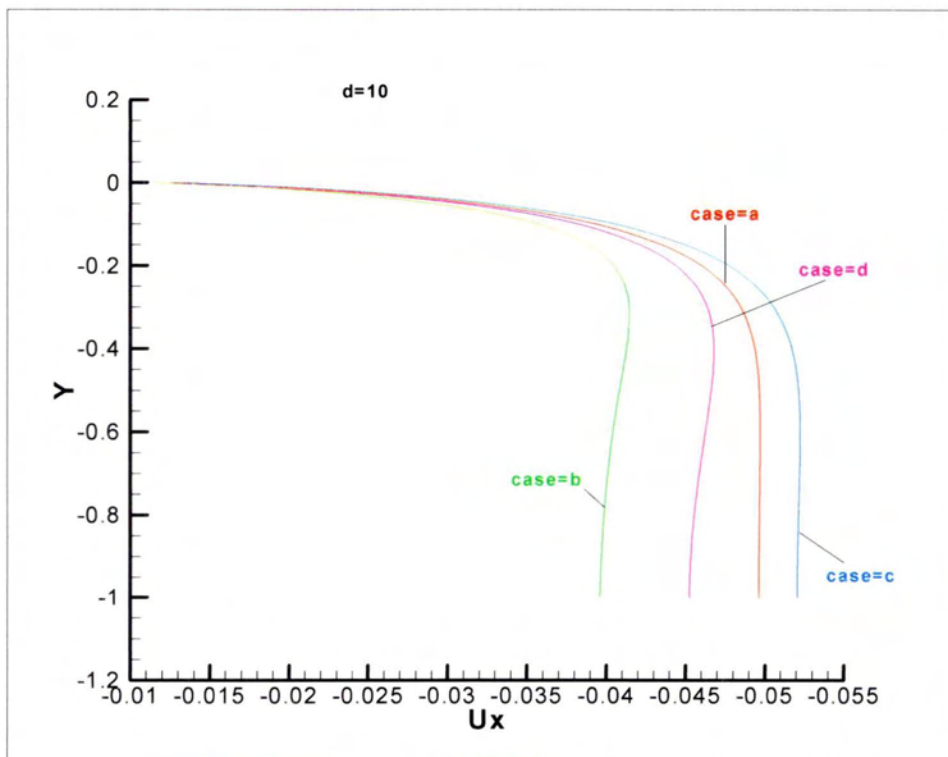
Σχήμα 5.5 προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στην είσοδο για $\delta=0$ και case: a, b, c, d.



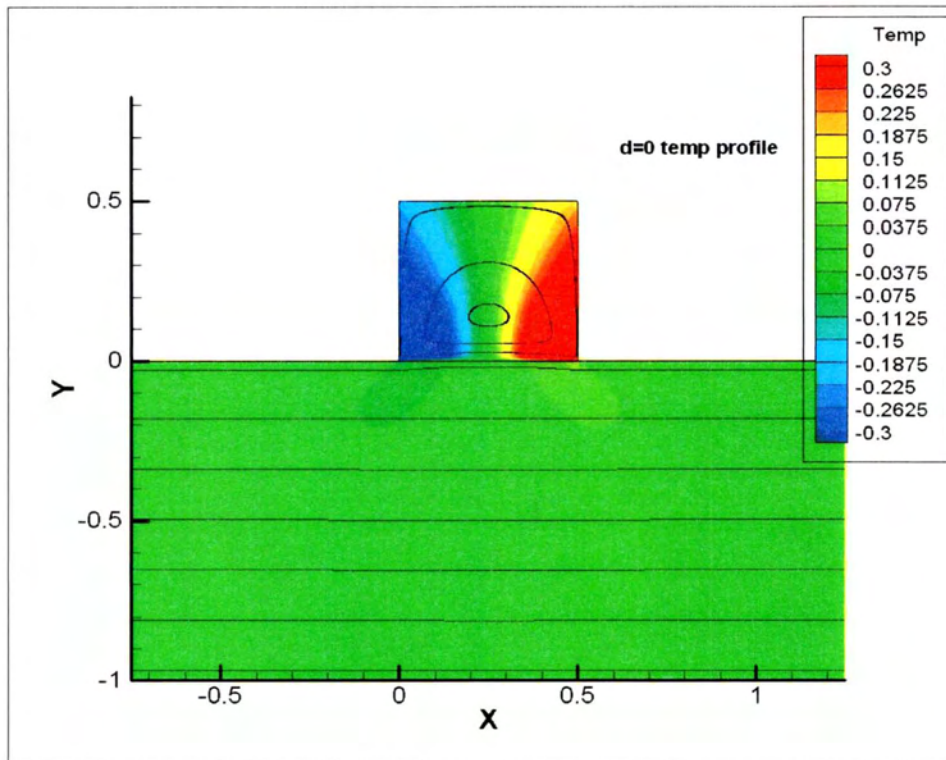
Σχήμα 5.6 προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στην είσοδο για $\delta=0.1$ και case: a, b, c, d.



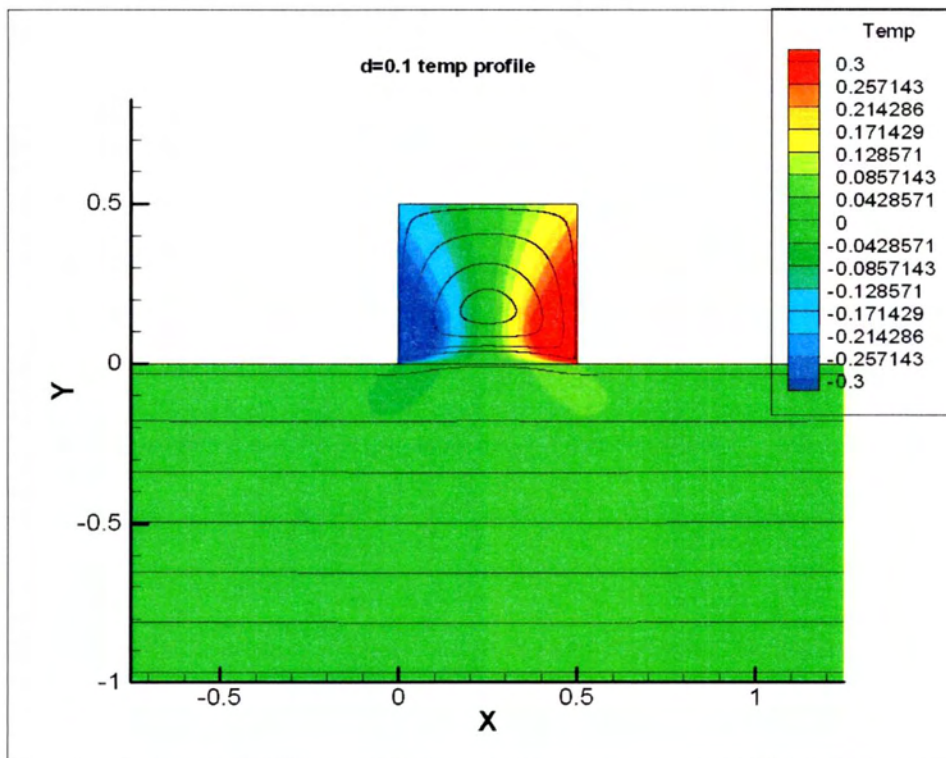
Σχήμα 5.7 προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στην είσοδο για $\delta=1$ και case: a, b, c, d.



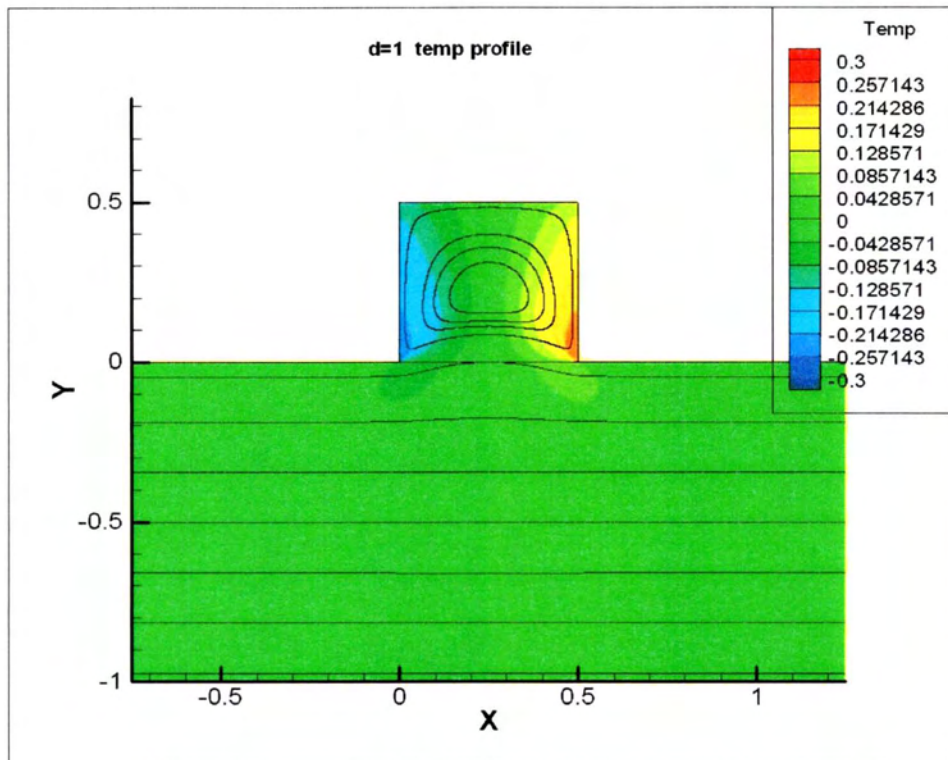
Σχήμα 5.8 προφίλ των οριζόντιων ταχυτήτων στην είσοδο για $\delta=0$ και case: a, b, c, d.



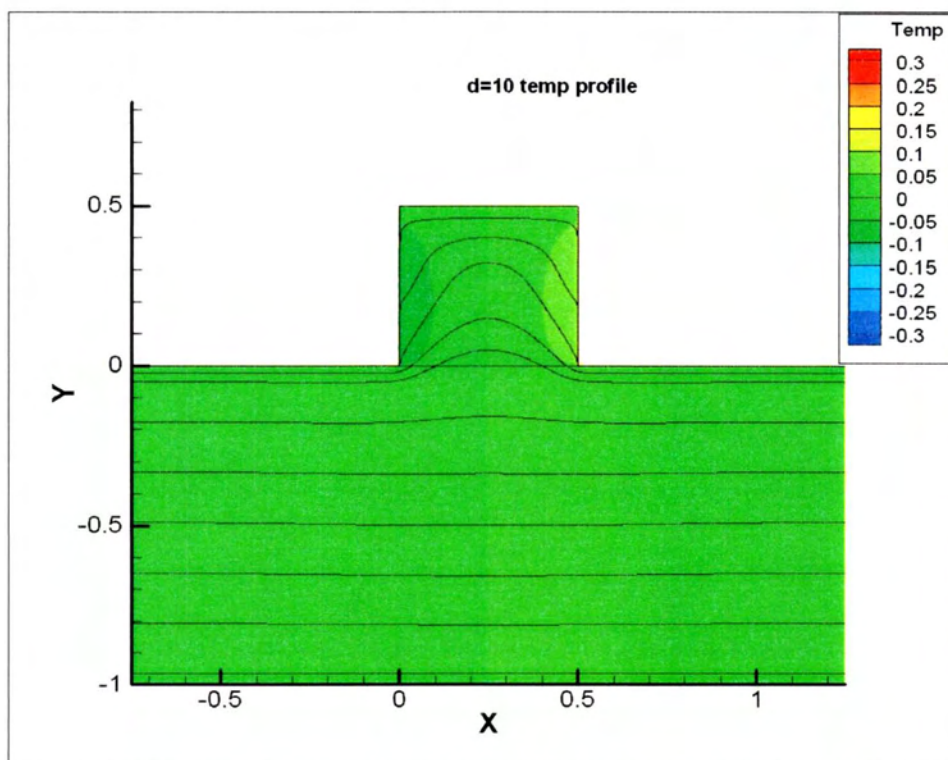
Σχήμα 5.9 case = a $\delta=0$



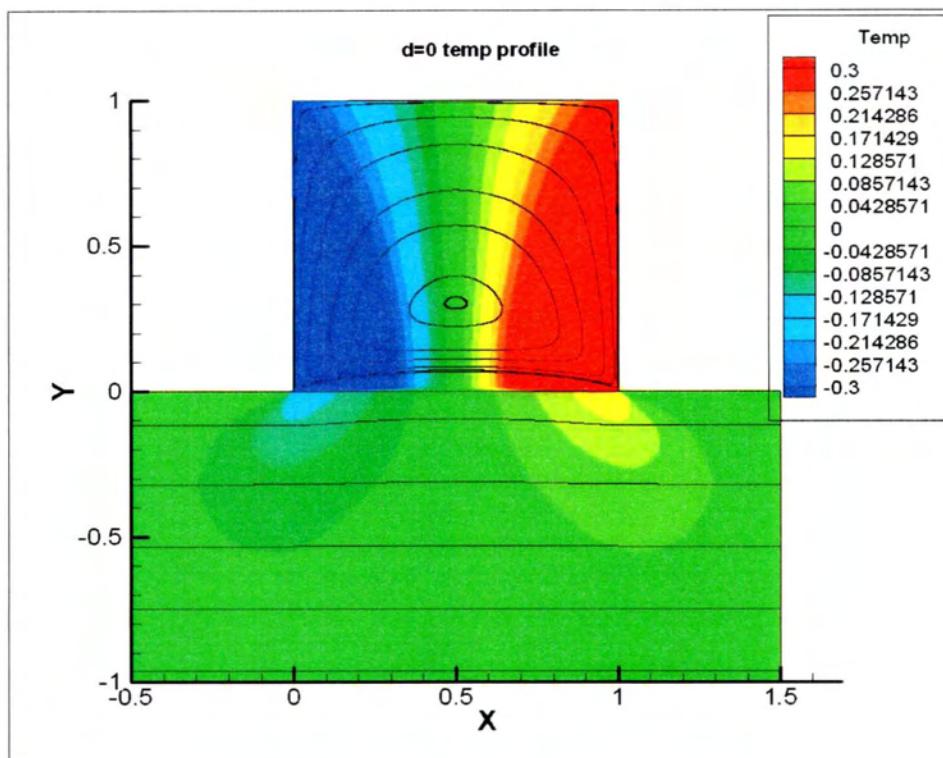
Σχήμα 5.10 case = a $\delta=0.1$



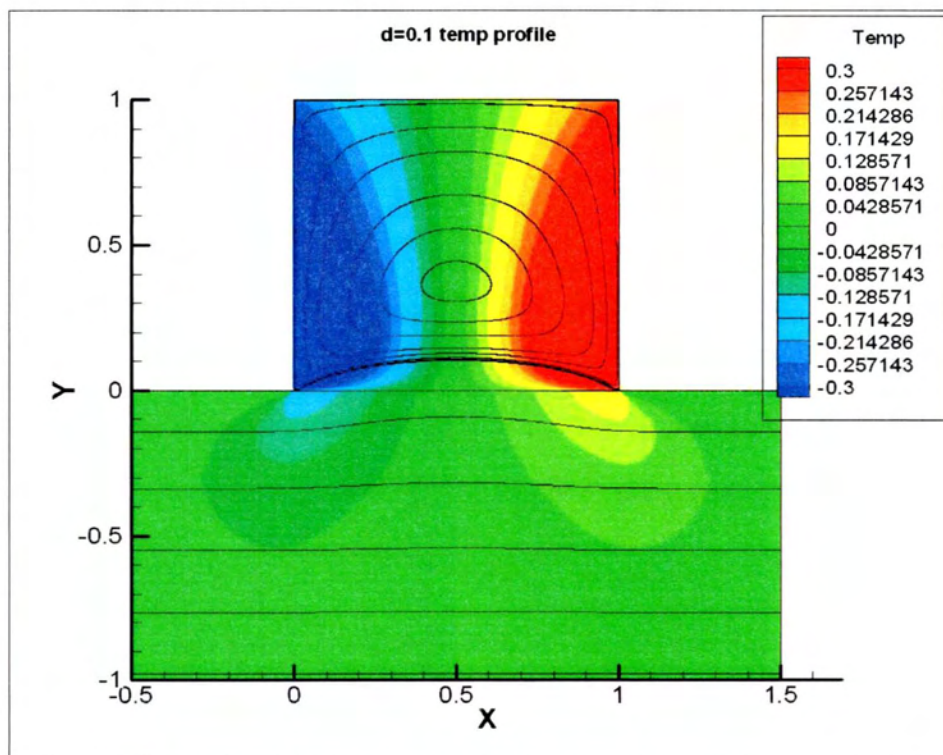
Σχήμα 5.11 case = a $\delta=1$



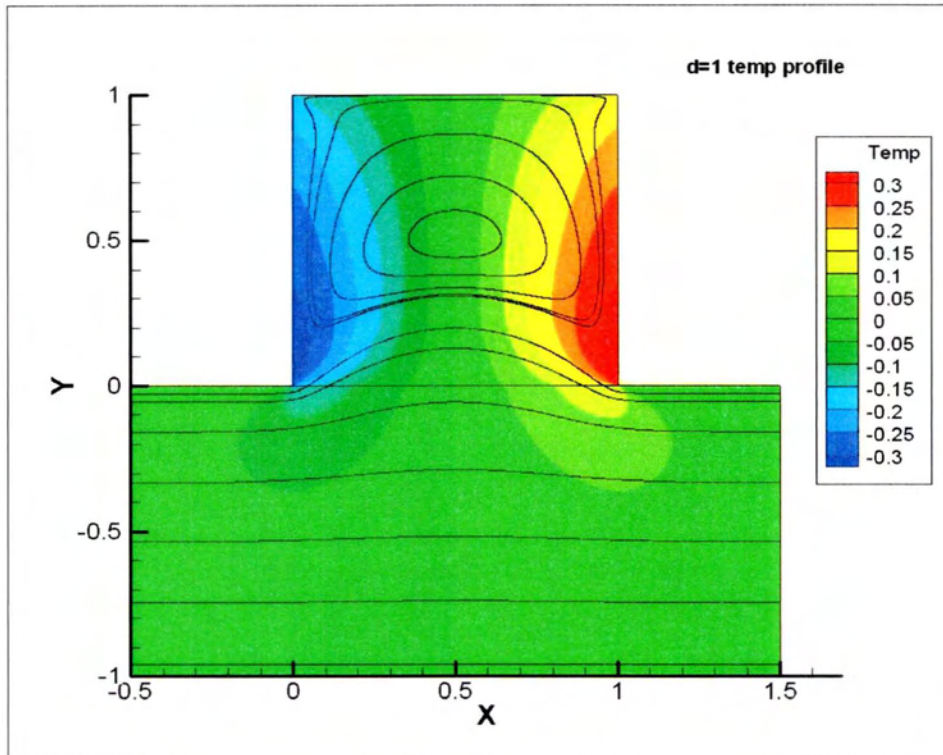
Σχήμα 5.12 case = a $\delta=10$



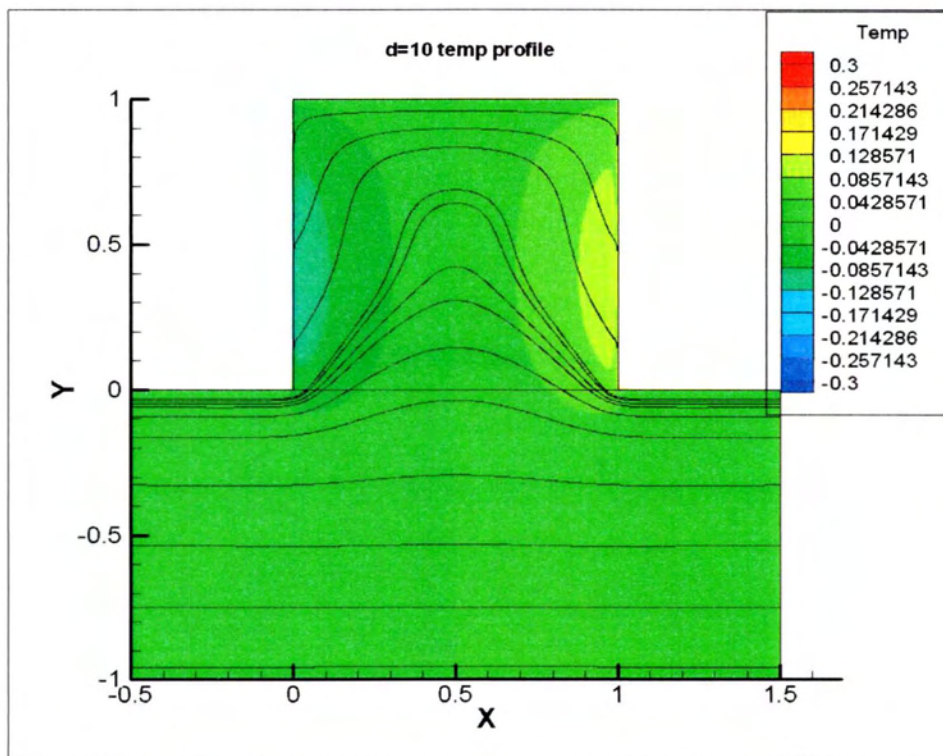
Σχήμα 5.13 case = b $\delta=0$



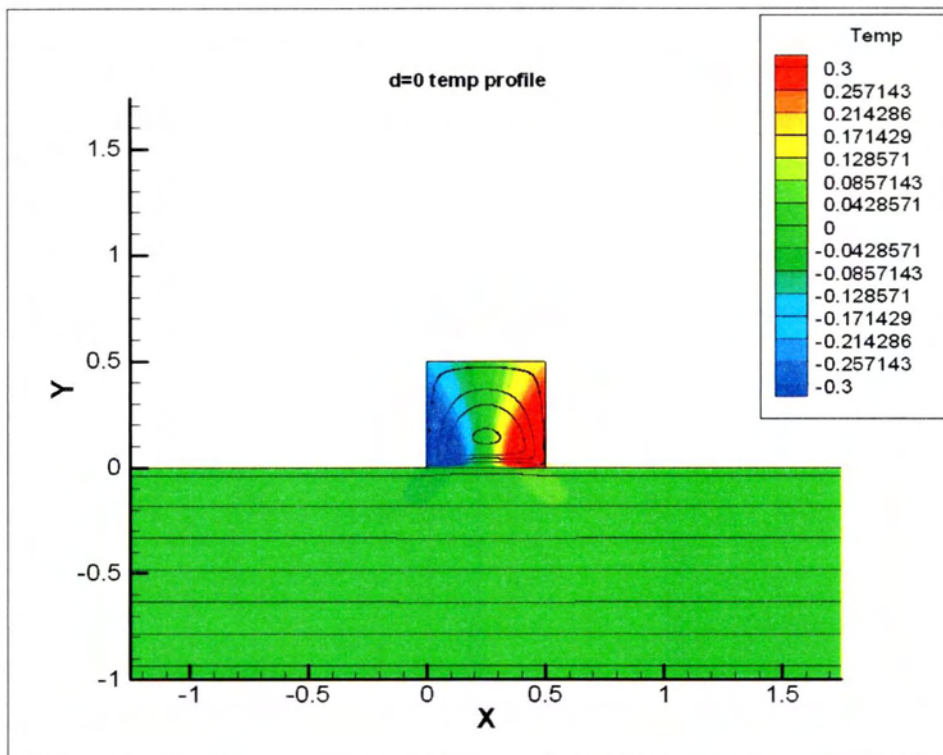
Σχήμα 5.14 case = b $\delta=0.1$



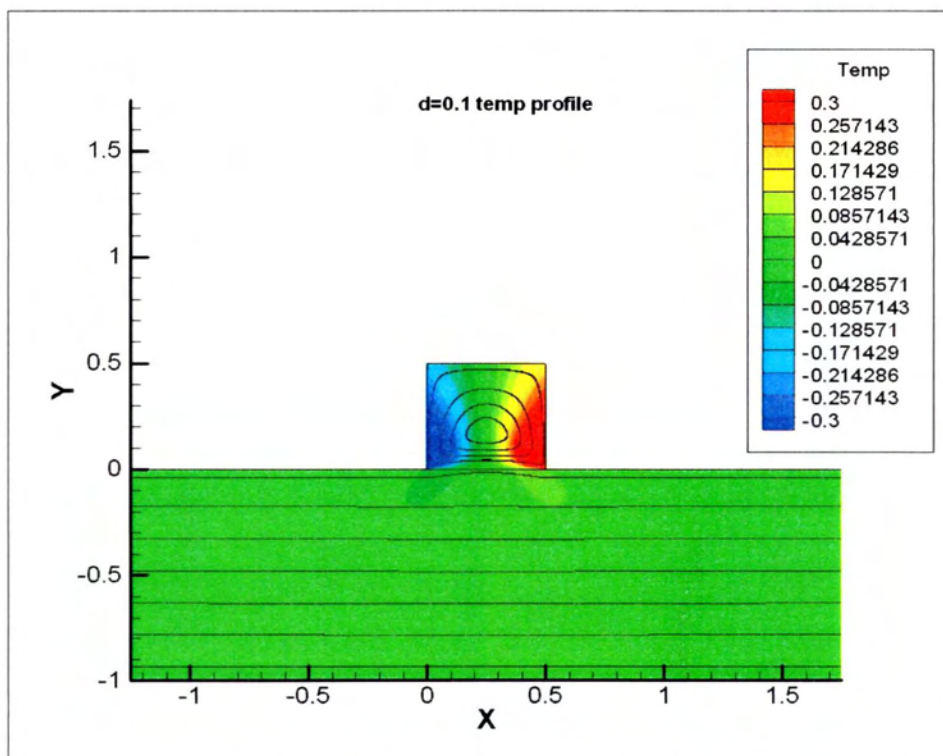
Σχήμα 5.15 case = b $\delta=1$



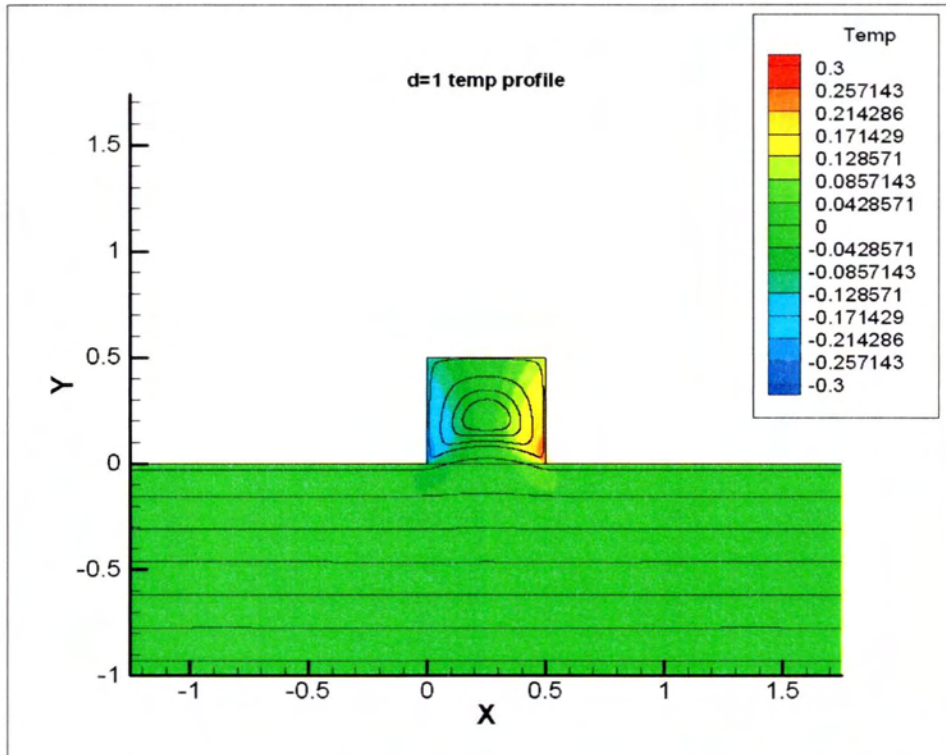
Σχήμα 5.16 case = b $\delta=10$



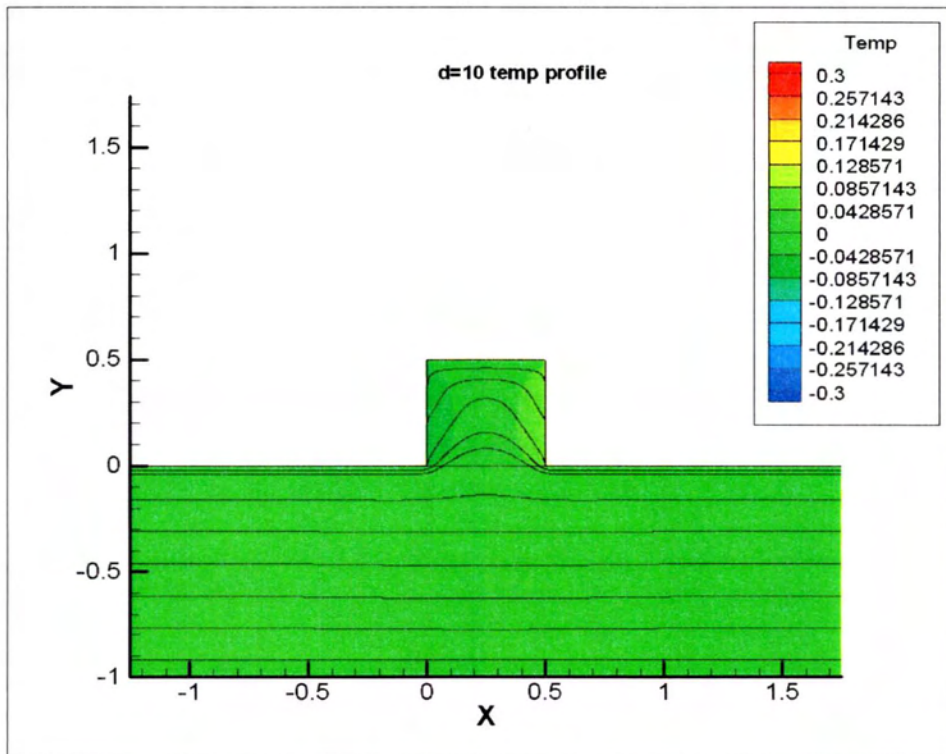
Σχήμα 5.17 case = c $\delta=0$



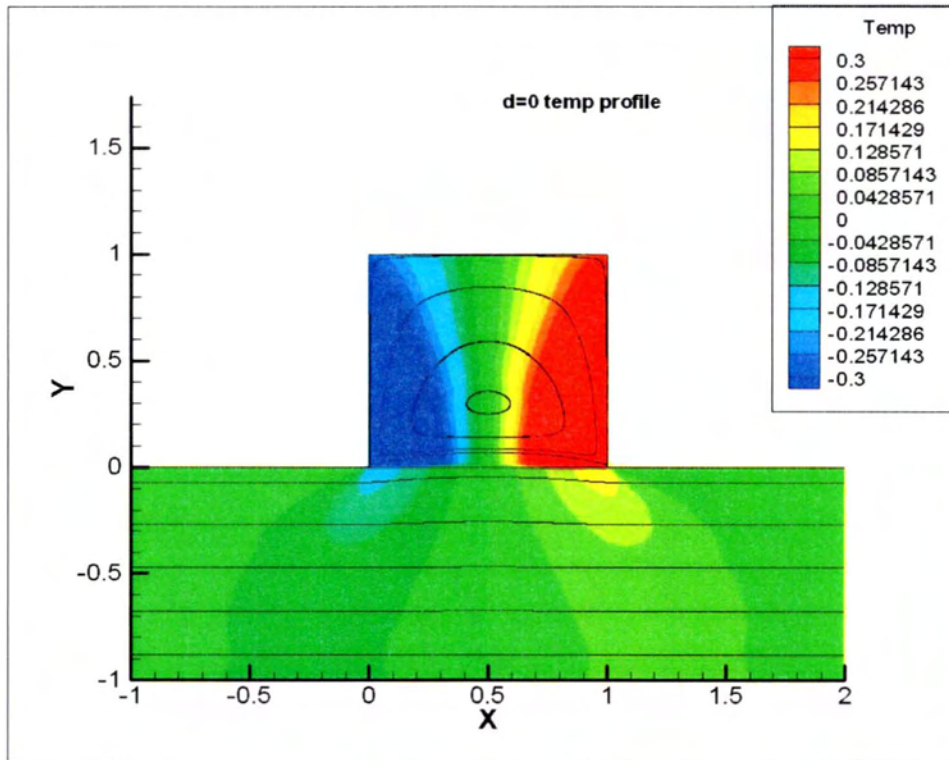
Σχήμα 5.18 case = b $\delta=0.1$



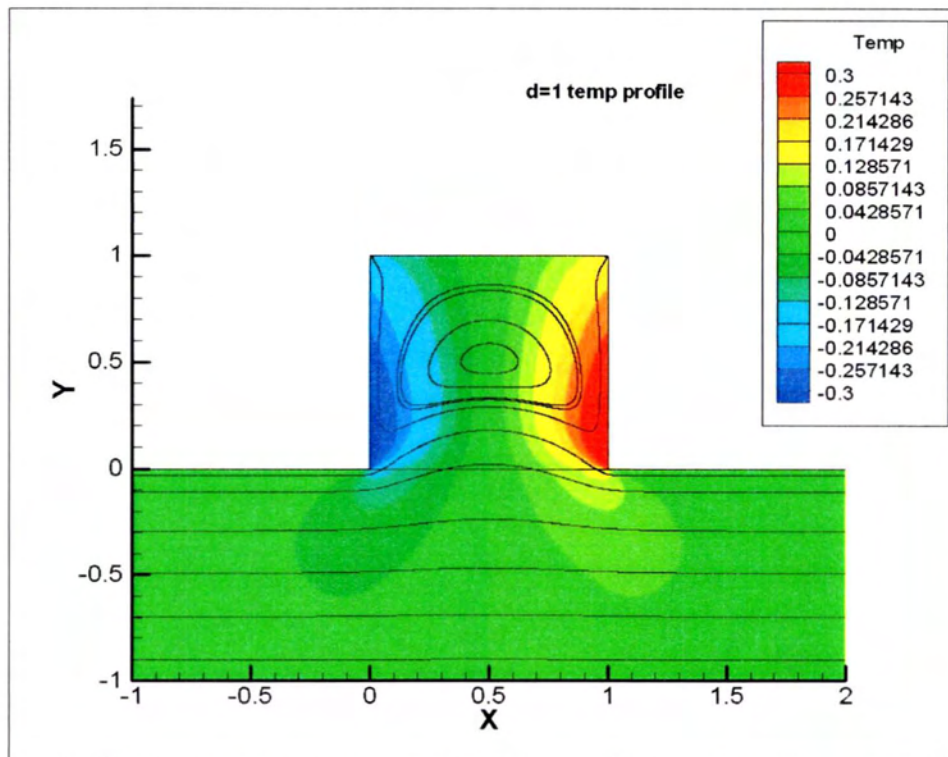
Σχήμα 5.19 case = c $\delta=1$



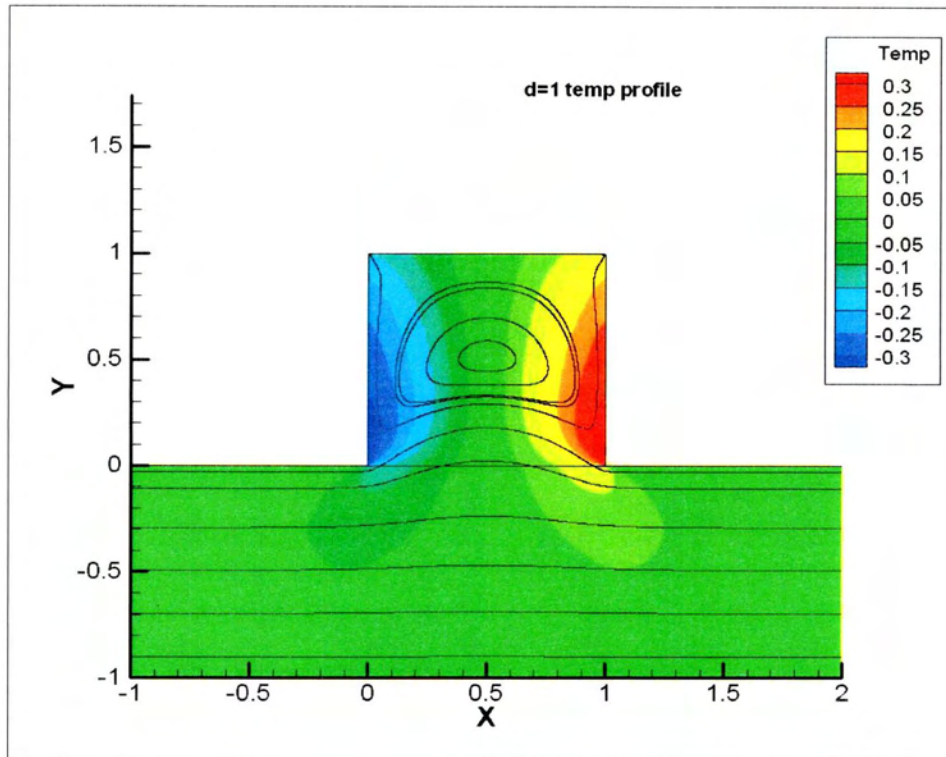
Σχήμα 5.20 case = c $\delta=10$



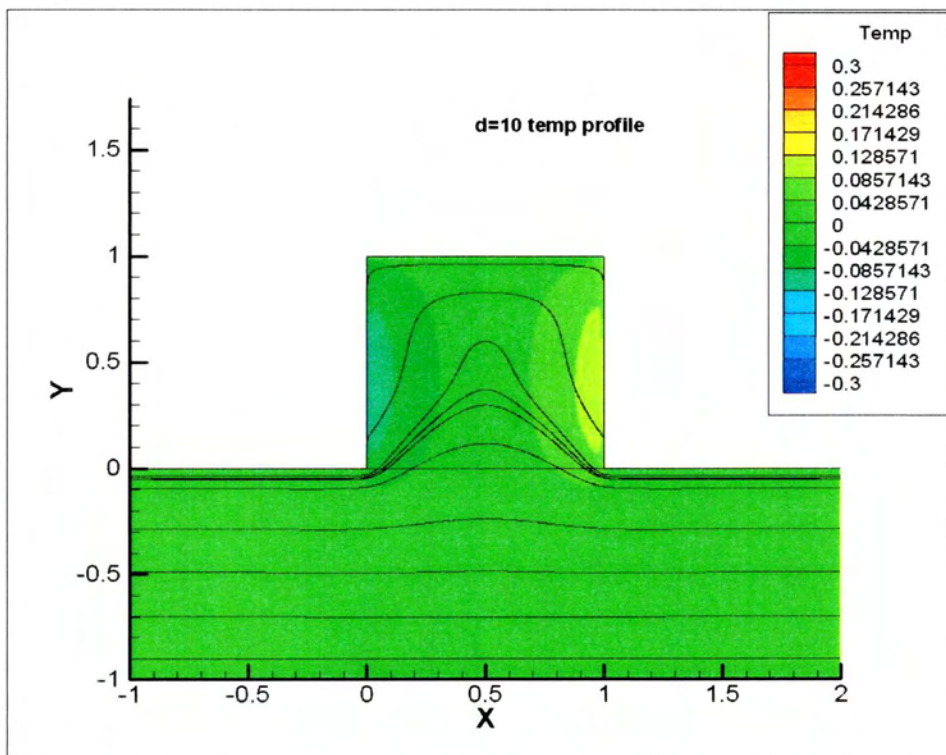
Σχήμα 5.21 case = d $\delta=0$



Σχήμα 5.22 case = d $\delta=0.1$



Σχήμα 5.21 case = d $\delta=1$



Σχήμα 5.22 case = d $\delta=10$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζονται ροές λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας σε μικροαγωγό ορθογωνικής αυλακωτής διατομής. Η ροή στον αγωγό μοντελοποιήθηκε με το γραμμικοποιημένο κινητικό μοντέλο Shakhov (S). Εφαρμόζονται οριακές συνθήκες Maxwell διαχυτική ανάκλασης. Οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των παραπάνω μοντέλων επιλύονται αριθμητικά με τη χρήση της μεθόδου των διακριτών ταχυτήτων (DVM). Παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τις αδιάστατες μικροσκοπικές ποσότητες του αερίου για τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης (δ) 0, 0.1, 1 και 10. Αποδεικνύεται η ισχύς του φαινομένου του θερμικού ερπυσμού για μικρά δ (περιοχές υψηλής αραιοποίησης).

Σαν συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα μπορούσαν να μελετηθούν αντίστοιχες ροές σε πειραματικές διατάξεις και να γίνει σύγκριση και έλεγχος των αποτελεσμάτων. Επίσης θα μπορούσε να μελετηθεί η ροή μίγματος αερίων στη συγκεκριμένη διάταξη, καθώς και η χρήση πιο σύγχρονων οριακών συνθηκών όπως οι τύποι των C.Cercignani και M.Lampis.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- [1] C Cercignani. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1975.
- [2] G A Bird. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [3] S Naris, D Valougeorgis. Rarefaction effects in the driven cavity flow over the whole range of Knudsen number. Phys. Fluids, 2005.
- [4] J C Maxwell. On stress in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Phil Trans. R. Soc. Lond., 1879.
- [5] D Valougeorgis. An analytical solution of the s-model kinetic equation. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 2003.
- [6] A Beskok and G E Karniadakis. Simulation of heat and moment transfer in complex micro-geometries. J. Thermophys. Heat Tr. 1994.
- [7] S Naris and D Valougeorgis. The driven cavity flow over the whole range of the Knudsen number. Phys. Fluids, 2005.
- [8] S Naris and D Valougeorgis. Boundary-driven nonequilibrium gas flow in a grooved channel via kinetic theory. Phys. Fluids, 19,067103 (2007).
- [9] Στέργιος Νάρης. Ροές αερίων σε μικροδιατάξεις με βελτιωμένες μεθόδους διακριτών ταχυτήτων (Διδακτορική Διατριβή), 2005.
- [10] Yoshio Sone. A simple demonstration of a rarefied gas flow induced over a plane wall with a temperature gradient. Kyoto University. 1990.

- [11] Yoshio Sone. Flows induced by temperature fields in a rarefied gas and their ghost effect on the behavior of a gas in the continuum limit. *Annu.Rev.Fluid Mech.* 2000.
- [12] Shamus McNamara and Yogesh B. Gianchandani. A micromachined Knudsen pump for on – chip vacuum. 2003.
- [13] Y.L.Han, M. Young, E.P. Muntz and G. Shiflett. Knudsen compressor performance at low pressures. University of southern California, CA 90089-1191.
- [14] S.E. Vargo, E.P. Muntz and W.C. Tang. The mems Knudsen compressor as a vacuum pump for space exploration applications.
- [15] W Steckelmacher. Knudsen flow 75 years on: the current state of the art flow of rarefied gases in tubes and systems. University of Sussex, Brinhton. 1986.
- [16] Thomas Hallqvist and Veronica Eliasson. Thermal creep flow.
- [17] M.Young, E.P. Muntz, and G. Shiflett. The Knudsen compressor as an energy efficient micro – scale vacuum pump. University of southern California. 2002.
- [18] Stephen Vargo, E.P. Muntz, and G. Shiflett. Microscale thermal – transpiration gas pump. For Nasa’s jet propulsion laboratory. California. 2003.
- [19] Yoshio Sone, Yorifumi Waniguchi, and Kazuo Aoki. One way flow of a rarefied gas induced in a channel with a periodic temperature distribution. Kyoto University. 1996.
- [20] P L Bhatnagar, E P Gross and M A Krook. A model for collision processes in gases. *Phys.* 1954.

- [21] E M Shakhov. Method of Investigation of Rarefied Gas Flows. Nauka, Moscow, 1974. [in Russian].
- [22] J Broadwell. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. J. Fluid Mech., 1964.
- [23] H Cabannes. Couette flow for a gas with a discrete velocity distribution. J Fluid Mech., 1976.
- [24] S.E. Vargo, E.P. Muntz, G.R. Shiflett and W.C. Tang. Knudsen compressor as a micro and macroscale vacuum pump without moving parts or fluids. 1999.
- [25] O. Reynolds, Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. B 170, 727. 1879
- [26] M. Knudsen. Ann. Phys. (Leipzig) 31,205. 1910.
- [27] G. Pham- Van-Diep, P. Keeley, E.P. Muntz and D.P. Weaver. A micromechanical Knudsen Compressor, in rarefied gas dynamics. Oxford University Press. 1995
- [28] S.E. Vargo and E.P. Muntz. An evaluation of a multiple stage micromechanical Knudsen compressor and Vacuum Pump. Peking University Press, Beijing. 1997.
- [29] A.A. Alexeenko, S.F. Gimelshein, and E.P. Muntz , U.S.C., LA. And Andrew Ketsdever, Air Force Research Laboratory. Modeling of thermal transpiration flows for Knudsen Compressor optimization. Aerospace Sciences Meeting, Nevada. 2005.
- [30] Κ.Δ. Ρήτος. Μελέτη ροών σε μικροκανάλια διάφορων διατομών λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας. (Διπλωματική Εργασία) Βόλος. 2009.
- [31] Ε. Κουτάντου. Ροή αερίου σε μικροκοιλότητα τριγωνικής και τραπεζοειδούς διατομής. (Διπλωματική Εργασία) Βόλος. 2010.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000109294