ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

ΜΑΡΙΑ ΚΑΡΑΜΠΕΡΗ

ΒΟΛΟΣ
2011

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Η προέλευση, απόκτηση, βελτίωση και χρήση της μαθηματικής ικανότητας στον άνθρωπο έχει απασχολήσει πληθώρα ειδικών, από διάφορες ειδικότητες: ιατρούς, ψυχολόγους, φιλοσόφους, βιολόγους, μαθηματικούς κ.ά. Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες ερμηνείες και έχουν διατυπωθεί ποικίλες θεωρίες, οι οποίες είναι απόρροια των εκάστοτε κοινωνικών και πολιτισμικών συνθηκών, αλλά και του επιστημονικού ρεύματος που έχει περισσότερη απήχηση την κάθε εποχή.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη μελέτη της έννοιας των μαθηματικών στα παιδιά, από την προσχολική ηλικία ως την εφηβεία, ήταν ο Ελβετός ψυχολόγος Jean Piaget. Πραγματοποιώντας μια σειρά πειραμάτων, διερεύνησε έννοιες όπως η διατήρηση, η ταξινόμηση, η σειροθέτηση, ο χώρος, ο χρόνος οποίες εξελίσσονται ανάλογα με τη γνωστική ανάπτυξη του παιδιού και επηρεάζονται από περιβαλλοντικά ερεθίσματα. Τα πιο γνωστά του πειράματα περιλάμβαναν προβλήματα με ποσότητες υγρών ή αντικειμένων, μήκη ταινιών, με τη ταξινόμηση και σειροθέτηση αντικειμένων καθώς επίσης προβλήματα διαδοχικών γεγονότων για το χρόνο, για την ταχύτητα πρόβλημα με κινούμενα αυτοκίνητα, προβλήματα μέτρησης αντικειμένων κατασκευάζοντας όμοια με κάποιο αρχικό αντικείμενα, επίσης ασχολήθηκε με το χώρο (τοπολογικός, ευκλείδειος και προβολικός) έκανε πειράματα που αφορούν την σταδιακή κατάκτηση των εννοιών αυτών, και τέλος πειράματα με κέρματα (κορόνα ή γράμματα) για να εξηγήσει το τυχαίο και πείραμα με ένα χαλάκι που βυθίζεται στο νερό και μεταβάλλεται η στάθμη του νερού για να εξηγήσει το αιτιατό. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε, η μαθηματική ικανότητα αναπτύσσεται αυτόματα και αυθόρμητα από τα μικρά παιδιά, περνώντας από διάφορα στάδια, τα οποία αντιστοιχούν στο εκάστοτε επίπεδο της γνωστικής τους ανάπτυξης. Επομένως, είναι αδύνατο τα παιδιά να διδαχτούν και να επιτύχουν σε μαθηματικές διαδικασίες, αν δεν έχουν προηγουμένως κατακτήσει βασικές έννοιες και κατανοήσει διαστάσεις της πραγματικής ζωής. Επίσης, είναι αδύνατο να επιτύχουν σε μαθηματικές δοκιμασίες που αντιστοιχούν σε επίπεδο ανώτερο των ικανοτήτων που συνάδουν με την ηλικία τους.

Βασική στη θεωρία του Piaget είναι η έννοια της διατήρησης, η οποία είναι απαραίτητο να κατακτηθεί από τα παιδιά, προκειμένου να επιτύχουν σε μαθηματικά προβλήματα. Η κατάκτηση της έννοιας της διατήρησης υπονοεί την ύπαρξη ενός σταθερού συστήματος αναφοράς, ανεξάρτητου από αντιληπτικές, αναπαραστατικές και λεκτικές πληροφορίες, και βαθιά ριζωμένου στην αντίληψη του υποκειμένου για τις δικές του πράξεις.

Η διαδικασία κατάκτησης της έννοιας της διατήρησης διέρχεται από τρία στάδια, που αντιστοιχούν στο επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών. Στο πρώτο στάδιο, τα παιδιά αντιλαμβάνονται μόνο μια διάσταση των αντικειμένων, και αδυνατούν να κατανοήσουν τη διατήρηση μιας ποσότητας. Στο δεύτερο, τα παιδιά κάνουν συγκρίσεις μεταξύ των ποσοτήτων που παρουσιάζονται, και προτείνουν λύσεις, σαν αποτέλεσμα γνωστικών συγκρούσεων. Στο τελευταίο στάδιο, κάνουν συγκρίσεις των ποσοτήτων με αναλογία ένα προς ένα, και δείχνουν να έχουν κατανοήσει τη διατήρηση της ισότητας.

Ο Martin Hughes στο βιβλίο του «Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών», αντίθετα, όπως και πολλοί άλλοι, άσκησε δριμύτατη κριτική στο έργο του Piaget, υποστηρίζοντας πως υποτίμησε τις ικανότητες των παιδιών, καθώς διερεύνησε όχι το τι είναι σε θέση να κάνουν τα παιδιά, αλλά το τι δεν είναι. Σύμφωνα με τον Hughes (Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών»), αλλά και τον Brian Butterworth (The mathematical brain), τα παιδιά εισέρχονται στο σχολείο διαθέτοντας ήδη κάποιες μαθηματικές γνώσεις, οι οποίες αποκτώνται από εμπειρίες της καθημερινής ζωής. Επίσης, αναπτύσσουν δικά τους συστήματα μέτρησης και υπολογισμού, και χρησιμοποιούν καθημερινά αντικείμενα, όπως τα δάχτυλα, ως βοηθητικά μέσα. Τα δύο αυτά γεγονότα θα πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη και να χρησιμοποιηθούν κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Ο Butterworth (the mathematical brain), επιπλέον, διατύπωσε τη θεωρία πως ο άνθρωπος διαθέτει έμφυτες μαθηματικές ικανότητες, που τις ονομάζει Αριθμητικές Μονάδες, τις οποίες, ωστόσο, θα πρέπει να καλλιεργήσει μέσα από τη χρήση πολιτισμικά παρεχόμενων εργαλείων.

Πέραν τούτων, ο Núñez στο πρώτο μέρος του βιβλίου του «Where the mathematics comes from» αναφέρει την ύπαρξη γνωστικών σχημάτων που αντιστοιχούν σε μαθηματικές έννοιες, αλλά και τη χρήση μεταφορών και συσχετίσεων, για τη δόμηση γνωστικών διαδρομών, που οδηγούν στην ανάπτυξη σύνθετων μαθηματικών νόμων και θεωριών. Οι μεταφορές είναι αυτές που επιτρέπουν τη χρησιμοποίηση εννοιών από ένα γνωστικό πεδίο στην επίλυση προβλημάτων από ένα άλλο. Επιπλέον, οι μαθηματικοί νόμοι είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού αθροισμάτων, των πρώιμων εμπειριών, των έμφυτων αριθμητικών ικανοτήτων και των θεμελιωδών μεταφορών. Με τη γενίκευση των συσχετίσεων αυτών αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο με αριθμούς και αριθμητικές σχέσεις, που υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς και πρέπει να ανακαλυφτούν από εμάς.

Επίσης στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια εφαρμογή η οποία διεξήχθη στην τάξη κατά την διάρκεια της Πρακτικής Άσκησης η οποία είχε ως σκοπό να παρατηρήσουμε και εμείς την συμπεριφορά των παιδιών στην επίλυση προβλήματος που συνδυάζει γεωμετρική και αριθμητική αντίληψη καθώς επίσης και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην πρόσθεση και πώς αντιδρούν σε πράξεις που περιγράφονται με τρόπο μη παραδοσιακό.

Τέλος, η παρούσα εργασία είναι βιβλιογραφική με στόχο την παράθεση και σύγκριση των θεωριών για τη μαθηματική σκέψη μέσα από τις προσεγγίσεις διαφόρων θεωρητικών και κυρίως της θεωρίας του Piaget αυτών που βρίσκονται στον αντίποδα. Γίνεται μια προσπάθεια προβολής όλων των οπτικών υπό τις οποίες έχουν εξεταστεί διάφορες μαθηματικές έννοιες από την Piaget και εξάγονται κάποια γενικά συμπεράσματα για τη φύση και τις δυνατότητες ανάπτυξης της μαθηματικής ικανότητας στον άνθρωπο.

Μέρος 1ο : Παρουσίαση Βιβλίων

Κεφάλαιο 1ο: «Οι προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες: Συμβολή στην Κατανόηση της Γνωστικής Ψυχολογίας του J. Piaget» - C.Botson, M. Deliege

Για να δώσει ο παιδαγωγός ένα σωστό σκοπό στη διδασκαλία του θα πρέπει να γνωρίζει τους τύπους συλλογισμού μπορεί να αναπτύξει ένα παιδί σε μια δοσμένη ηλικία. Και θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τα κατάλληλα μέσα για να μπορέσει το παιδί να κατακτήσει γνώσεις, συλλογισμούς και συμπεριφορές. Ο Piaget ασχολήθηκε με την λεπτομερειακή περιγραφή των αντιδράσεων των παιδιών ηλικίας 3 ως 12 ετών. Οι καταστάσεις που επινόησε του επέτρεψαν να αποκαλύψει τα κύρια χαρακτηριστικά του συλλογισμού των παιδιών και να τα παρακολουθήσει μέχρι η λογική τους να φτάσει το επίπεδο της λογικής του ενηλίκου. Οι έρευνες του Piaget επαληθεύονται συχνά εφόσον τα παιδιά χρησιμοποιούν τα ίδια σχεδόν επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν τις καταστάσεις που παρουσιάζονται.

Ο Piaget υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη της σκέψης του παιδιού είναι κατασκευαστική (constructiviste). Με τον όρο κατασκευαστική εννοεί πως οι πνευματικές ικανότητες του παιδιού δεν αναπτύσσονται αυτόνομα όσο προχωρά στην ηλικία για να προσαρμοστεί στη συνέχεια στο περιβάλλον ούτε πως το παιδί αποθηκεύει παθητικά τα δεδομένα του περιβάλλοντος. Πρόκειται από τη μια μεριά για μια διαρκή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη διανοητική δομή και την επίδρασή του στο περιβάλλον και από την άλλη μεριά τις πληροφορίες που δέχεται από αυτό.

Ο Piaget ονόμασε την αλληλεπίδραση του παιδιού με το περιβάλλον, η οποία μεταβάλλεται από ηλικία σε ηλικία στάδια ανάπτυξης. Διέκρινε τα στάδια ανάπτυξης σε τέσσερα επίπεδα. Τα επίπεδα είναι τα εξής: Το αισθησιοκινητικό στάδιο, το προλογικό ή προενεργητικό στάδιο, το στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών πράξεων και το στάδιο της τυπικής λογικής.

Το Νηπιαγωγείο και το Δημοτικό σχολείο αποτελούν την πιο σημαντική περίοδο των νοητικών δομών του παιδιού.

Οι προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες που μελετώνται με την συμβολή της γνωστικής ψυχολογίας του Piaget είναι η διατήρηση, η ταξινόμηση, η σειροθέτηση, ο αριθμός, ο χρόνος, η ταχύτητα, η μέτρηση, ο τοπολογικός χώρος, ο ευκλείδειος χώρος, ο προβολικός χώρος, το τυχαίο και η αιτιότητα, και τέλος η αιτιότητα.

Στη συνέχεια αναφέρουμε τα πειράματα του Piaget τα οποία εφάρμοσε αυτός και οι συνεργάτες του για να παρατηρήσουν την συμπεριφορά παιδιών διαφορετικών ηλικιακών ομάδων πάνω σε διάφορες μαθηματικές έννοιες (διατήρηση, ταξινόμηση, σειροθέτηση. αριθμός, χρόνος, ταχύτητα, μέτρηση, χώρος, τυχαίο και αιτιότητα).

Διατήρηση των συνεχών ποσοτήτων (ύλη, βάρος, όγκος)

Δίνουμε στα παιδιά δύο βόλους πλαστελίνης ίσης ποσότητας (Μ,Ε). Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την ποσότητα Ε σε E_1, E_2 και E_3 ώστε να δούμε πως αντιλαμβάνονται τα υποκείμενα διαφορετικών ηλικιών τη σχέση μεταξύ της ύλης, του βάρους και του όγκου ανάμεσα στην αρχική ποσότητα Μ και στους μετασχηματισμούς E_1, E_2 και E_3. Στα παιδιά ηλικίας 3-4 ετών η παρατηρούμενη συμπεριφορά είναι ότι οι απαντήσεις που δίνονται από τα υποκείμενα συμμορφώνονται ανάλογα με το σχήμα πού έχει η πλαστελίνη στον εκάστοτε μετασχηματισμό. Τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών αρχίζουν να κατακτούν την ιδέα της διατήρησης της ύλης όμως όχι πλήρως. Η έννοια της διατήρησης της ύλης κατακτάται πλήρως από τα υποκείμενα ηλικίας 7-8 ετών. Για να κατανοηθούν οι έννοιες του βάρους και του όγκου θα πρέπει να περάσουν ένα με δύο χρόνια από την ηλικία των 9-10 γιατί δεν είναι τόσο συγκεκριμένες όσο η ύλη. Τέλος, και την κατανόηση του όγκου θα πρέπει να περάσουν τέσσερα έτη από την ηλικία 11-12 για να κατανοηθεί η έννοια του όγκου.

Διατήρηση συνεχών ποσοτήτων (υγρών) ή ασυνεχών ποσοτήτων (χάντρες)

Η τεχνική που χρησιμοποιούμε στην συγκεκριμένη κατάσταση είναι να δώσουμε δοχεία με υγρό ή χάντρες που έχουν το ίδιο βάθος. Οι μετασχηματισμοί τους οποίους κάνουμε είναι να τοποθετούμε την ποσότητα του υγρού σε άλλα δοχεία με διαφορετικό σχήμα από τα αρχικά. Τα παιδιά ηλικίας 3-4 ετών διαμορφώνουν την άποψη ότι η ποσότητα του υγρού είναι διαφορετικά εφόσον κρίνουν με βάση το ύψος που φτάνει η στάθμη του υγρού. Τα παιδιά στην ηλικία των 5-6 ετών αρχίζουν να λαμβάνουν υπόψη τους πλάτος του δοχείου όταν προσπαθεί να βάλει σε ένα δοχείο E_1 όσο υγρό υπάρχει στο ένα δοχείο Μ με διαφορετικό σχήμα. Τέλος, όταν τα παιδιά βρίσκονται στην ηλικία 7-8 ετών τα υποκείμενα λαμβάνουν υπόψη τους το πλάτος αλλά και το ύψος. Επίσης καταλαβαίνουν ότι οι διαστάσεις μεταβάλλονται.

Διατήρηση ενός αριθμητικού συνόλου

Για την διατήρηση ενός αριθμητικού συνόλου χρησιμοποιούμενα ένα παράδειγμα με αυγά και αυγοθήκες. Αρχικά παρουσιάζουμε στα παιδιά μια σειρά από αυγοθήκες και τους ζητάμε να τοποθετήσουν τόσα αυγά όσες είναι οι αβγοθήκες. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε στα παιδιά δύο σειρές με αυγοθήκες και αυγά. Κάθε αυγοθήκη έχει απέναντί της το αυγό της. Βεβαιωνόμαστε ότι τα αυγά είναι τόσα όσα οι αυγοθήκες. Επίσης προσέχουμε οι σειρές να έχουν τα αυτά άκρα. Έπειτα μεταθέτουμε τα άκρα την σειρών. Αυτό που ζητάμε από τα παιδιά είναι να κάνει τις σειρές ξανά να πιστεύει ότι ο αριθμός των αυγών και των αυγοθηκών είναι ο ίδιος. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει ως εξής: Για την ηλικία των 3-4 ετών το μόνο που κάνει το παιδί είναι να κάνει τις σειρές να έχουν τα ίδια άκρα εφόσον δεν έχει καμία επίγνωση τις έννοιας του αριθμού. Στην ηλικία των 5 ετών έχουμε το παιδί ενστικτωδώς τοποθετεί απέναντι από κάθε αυγοθήκη ένα αυγό. Σε περίπτωση όμως που αραιώσουμε τα στοιχεία της μιας σειράς τότε το παιδί στην άλλη σειρά προσθέτει τόσα στοιχεία ώστε οι δύο σειρές να έχουν το ίδιο μήκος γιατί πιστεύει ότι οι δύο σειρές δεν έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Στην ηλικία των 6 ετών το παιδί οικοδομεί σωστά μια σειρά ισοδύναμη με την αρχική. Σε περίπτωση που αλλάξουμε τη διάταξη το παιδί θα απαντήσει σωστά από τη στιγμή που ξέρει να μετράει. Στην ηλικία των 7-8 ετών το παιδί απαντά σωστά γιατί στο μυαλό του παιδιού έχει γίνει σύνδεση του αριθμού με την ποσότητα.

Διατήρηση του μήκους

Για την διατήρηση του μήκους χρησιμοποιούμε δύο κομμάτια σπάγκου από τα οποία κρατάμε το ένα για να κάνουμε την σύγκριση και τεμαχίζουμε την άλλη. Κάνοντας ερωτήσεις βεβαιωνόμαστε ότι το παιδί έχει κατανοήσει την ισότητα των δύο κομματιών σπάγκου. Μετασχηματίζουμε το ένα κομμάτι και ρωτάμε να περπατήσουμε πάνω σε κάθε μια από τις δύο διαδρομές θα διανύσουμε την ίδια απόσταση; Η άποψη που διαμορφώνουν τα παιδιά 5 ετών είναι ότι θα διανύσουμε την ίδια απόσταση μόνο αν ο σπάγκος ελέγχου και ο σπάγκος-μάρτυρας έχουν τα αυτά άκρα. Αν αλλάξουμε το ένα κομμάτι σπάγκου τότε το παιδί θα πιστεύει πως πιο μακρύ κομμάτι σπάγκου είναι η μεγαλύτερη απόσταση. Στην ηλικία των 6 ετών το παιδί παρατηρεί την μια μόνο πλευρά ή το πλήθος των κομματιών στο οποίο τεμαχίσαμε το αρχικό κομμάτι σπάγκου και οδηγείται σε λάθος συμπεράσματα. Στην ηλικία 7-8 ετών με τις αμφιταλαντεύσεις και με τις ψηλαφήσεις οδηγείται στα σωστά συμπεράσματα. Και στην ηλικία 9-10 ετών το παιδί είναι σε θέση να ακυρώνει τους μετασχηματισμούς και να επιστρέφει στην αρχική κατάσταση.

Απλές ταξινομήσεις (γενικές έννοιες)

Για τις απλές ταξινομήσεις χρησιμοποιούμε 23 αντικείμενα που βρίσκονται σε αταξία τα οποία διαφέρουν ως προς το σχήμα, το χρώμα και το μέγεθος και ζητάμε από το παιδί να τα βάλει μαζί όπως αυτά ταιριάζουν. Το παιδί που βρίσκεται στην ηλικία 3-4 ετών τοποθετεί όλα τα αντικείμενα σε μια γραμμή και το κριτήριο ταξινόμησης είναι το αντικείμενο που προσθέτει κάθε φορά να μοιάζει με το προηγούμενο. Στην ηλικία των 5 ετών το κριτήριο για την ταξινόμηση είναι η επιφάνεια. Το παιδί ηλικίας 6 ετών η ταξινόμηση που πραγματοποιεί το παιδί έχει σχέση είτε με την ομοιότητα των αντικειμένων είτε με τη μορφή που παίρνει η συλλογή. Το παιδί είναι σε θέση να υιοθετήσει κριτήρια ταξινόμησης όταν είναι 7-8 ετών. Και τελικά το παιδί 9-10 ετών έχει κατανοήσει πλήρως την έννοια της ταξινόμησης και μπορεί να ταξινομεί με ιεράρχηση κριτηρίων.

Αυθόρμητες ταξινομήσεις

Δίνοντας στο παιδί ένα σύνολο από εικόνες και λέγοντάς του να βάλει σε ομάδες αυτά που ταιριάζουν του επιτρέπουμε να κάνει όσες ομάδες θέλει. Το παιδί κάνει αταίριαστες ομαδοποιήσεις με βάση ένα αυθόρμητο κριτήριο όταν είναι3-4 ετών. Στην ηλικία των 5 ετών η ταξινόμηση γίνεται με βάση τα κατηγορούμενα που αποδίδονται στα στοιχεία που πρέπει να ταξινομήσουν. Επίσης και το παιδί 6 ετών κάνει συλλογές που δεν μοιάζουν μορφικά. Όταν το παιδί φτάσει στην ηλικία 7-8 ετών μπορεί να ταξινομήσει ορθά εφόσον το παιδί περνά από την χωρική στην αφαιρετική συνάφεια.

Εγκλεισμός. Κατανόηση των όρων «όλα» και «μερικά»

Η τεχνική-υλικό που χρησιμοποιούμε για να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά του παιδιού για τον εγκλεισμό και την κατανόηση των όρων «όλα» και «μερικά» είναι πέντε μπλε στρογγυλά και τέσσερα τετράγωνα δύο κόκκινα και δύο μπλε. Επίσης θέτουμε τις ερωτήσεις: όλα τα στρογγυλά είναι μπλε και όλα τα κόκκινα είναι τετράγωνα. Μεταξύ 3-4 ετών το παιδί θα έπρεπε να δώσει καταφατική απάντηση όμως μπορεί η απάντηση του να είναι αρνητική επειδή ερμηνεύει την ερώτηση διαφορετικά. Στα 5 έτη επίσης απαντά όχι γιατί και σε αυτή την ηλικία παρερμηνεύει την ερώτηση. Για τα παιδιά ηλικίας 6 ετών προσθέτουμε κόκκινα στρογγυλά. Σε αυτή την περίπτωση το παιδί ξεπερνά τις δυσκολίες που αντιμετώπιζε πριν, όμως προκύπτει νέα δυσκολία. Τώρα το παιδί από την ορθή κατανόηση δηλαδή αποκλείει τα μπλε και επεκτείνεται στην ολότητα και οδηγείται στην σωστή απάντηση. Το παιδί επιτυγχάνει το συντονισμό ανάμεσα στη κατανόηση και την επέκταση σε ηλικία 7-8 ετών.

Ποσοτικοποίηση εγκλεισμού (περισσότερα)

Δίνουμε στο παιδί δέκα ξύλινες χάντρες από τις οποίες οι οχτώ είναι κίτρινες και οι δύο είναι κόκκινες. Θέτουμε την ερώτηση ποιες είναι πιο πολλές οι ξύλινες ή οι κόκκινες χάντρες; Στην ηλικία 5-6 ετών το παιδί δεν ακολουθεί το σωστό συλλογισμό που είναι να σκεφτεί ότι οι ξύλινες χάντρες είναι το σύνολο των χαντρών και σκέφτεται πως από τις χάντρες που βλέπει οι περισσότερες είναι οι κίτρινες και απαντά πως οι κίτρινες είναι περισσότερες από τις ξύλινες. Το παιδί φτάνει στο σωστό συλλογισμό όταν είναι 7-8 ετών γιατί σκέφτεται πως το σύνολο των κίτρινων χαντρών είναι έγκλειστο στο σύνολο των ξύλινων χαντρών.

Ιεραρχική ταξινόμηση ζώων και εγκλεισμός

Στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζουμε εικόνες στα παιδιά από πάπιες, πουλιά και από διάφορα ζώα. Κάνουμε επίσης της εξής ερωτήσεις: εάν πάρουμε όλες τις πάπιες, μένουν άλλα ζώα; Και εάν πάρουμε όλα τα ζώα μένουν πάπιες; Ο συλλογισμός που ακολουθεί το παιδί 4-5 ετών έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με εκείνον με τις χάντρες. Το παιδί απαντά σωστά γιατί έχει τις εικόνες μπροστά του. Παρόλα αυτά πέφτει σε λάθη επειδή οι έννοιες πάπια, ζώο κτλ δεν έχουν κατακτηθεί πλήρως. Στο παιδί που είναι στη ηλικία των 6 ετών οι λεκτικές έννοιες έχουν κατακτηθεί από το παιδί και εκείνο με τη σειρά του είναι σε θέση να κατανοήσει την ιεράρχηση.

Τάξη με ένα μόνο στοιχείο

Δίνουμε στα παιδιά υλικό που αποτελείται από τετράγωνα και στρογγυλά χρώματος μπλε και ένα στρογγυλό κόκκινο. Τα παιδιά που βρίσκονται στο 5-6 έτος δεν μπορούν να ταξινομήσουν με βάση το χρώμα. Τα παιδιά σε αυτή την ηλικία αντιμετωπίζουν τις παρακάτω δυσκολίες: το παιδί σχηματίζει τάξεις που έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων και το να αντιλαμβάνεται τάξεις που αποτελούνται από πολλά στοιχεία. Τα παιδιά 7-8 ετών μπορούν να κατανοήσουν την τάξη με ένα στοιχείο γιατί σε αυτή την ηλικία κατανοούν ότι η συμπληρωματικότητα βασίζεται στην ετερότητα.

Τάξη με ένα μόνο στοιχείο

Στην περίπτωση που δώσουμε στα παιδιά διαδοχικά σειρές με γεωμετρικά σχήματα που στην κάθε σειρά ένα στοιχείο θα διαφέρει από τα υπόλοιπα και ζητήσουμε να μας πουν ποιο στοιχείο πιστεύουν ότι φέρει ένα σταυρό τότε τα παιδιά που βρίσκονται στο 5 έτος θα το επιτύχουν διαισθητικά χωρίς να είναι σε θέση να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Στο παιδί ηλικίας 6 ετών το παιδί απαντά και πάλι ενορατικά αλλά αναφέροντας το χρώμα στις αιτιολογήσεις τους. Όπως αναφέραμε παραπάνω το παιδί όταν φτάσει στην ηλικία 7-8 ετών μπορεί να κατανοήσει την τάξη με ένα μόνο στοιχείο και είναι σε θέση να απαντήσει σκεφτόμενο είτε θετικά είτε αρνητικά. Αν και, τα παιδία έχουν αρχίσει να κατανοούν την τάξη με ένα στοιχείο στο 11-12 έτος παρουσιάζεται μια υποχώρηση, δηλαδή τα παιδιά πλανώνται παρά το ότι στην ηλικία αυτή δεν θα έπρεπε.

Δευτερεύουσα τάξη. Υποχρεωτική διχοτομία

Παρέχουμε στα παιδιά x λουλούδια του ίδιου είδους και y διαφορετικά λουλούδια και τους ζητάμε να τα βάλουν σε ομάδες. Το παιδί ηλικίας 5-6 ετών χωρίζει τα λουλούδια σε δύο ομάδες μια ομάδα με τα όμοια λουλούδια και μία ομάδα με τα διαφορετικά. Αν όμως δώσουμε ένα ακόμα λουλούδι που δεν υπάρχει σε καμιά από τις δύο ομάδες τότε αρνείται να το τοποθετήσει σε κάποια ομάδα γιατί αυτό το είδος δεν υπάρχει σε καμία ομάδα. Ακόμη και τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας (7-8 ετών) ικανοποιούνται με απλές αρνήσεις όπως και τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών. Το παιδί εντάσσει το διαφορετικό λουλούδι σε κάποια από τις δύο ομάδες όταν κατανοήσει την συμπληρωματική τάση σε ηλικία 9-10 ετών.

Η άρνηση

Όταν αναφερόμαστε στην άρνηση εννοούμε «όχι-Α». Τα παιδιά από μικρή κιόλας ηλικία 3-4 ετών ταξινομούν σωστά «όλα όσα δεν είναι» έχοντας βέβαια ένα μόνο κριτήριο. Τα παιδιά 5-6 ετών ένα ποσοστό περίπου 25% καταφέρνει να ταξινομήσει σωστά χρησιμοποιώντας δύο κριτήρια. Και, τέλος στην ηλικία 7-8 ετών είναι μικρό το ποσοστό το οποίο καταφέρνει να χωρίσει στοιχεία χρησιμοποιώντας τρία κριτήρια.

Τάξη κενή ή μηδενική

Για να κατανοήσουν τα παιδιά την μηδενικά τάξη χρησιμοποιούμε την παρακάτω δραστηριότητα: Δίνουμε στα παιδιά χαρτόνια σε σχήμα τετράγωνο, στρογγυλό και τρίγωνο από τα οποία άλλα έχουν επάνω εικόνες και άλλα όχι. Έπειτα ζητάμε να μας τα ταξινομήσουν αρχικά σε όσες ομάδες θέλουν και στη συνέχεια σε δύο τάξεις. Το παιδί 5-6ετών δεν κατανοεί ακόμα «το τίποτα» ως κριτήριο τάξης και ταξινομεί το υλικό με βάση το σχήμα και τις εικόνες. Και στην ηλικία 7-8 ετών η κενή τάξη είναι ακατανόητη για το παιδί. Το παιδί είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει την κενή τάξη στην ηλικία των 10-11 ετών.

Ταξινόμηση μέσω της αφής

Σε αυτό το είδος της ταξινόμησης το υλικό είναι κρυμμένη και τα παιδιά ψηλαφίζοντας τα σχήματα που τους δίνουμε τα ταξινομούν. Τα παιδιά στην ηλικία των 7 ετών μπορούν να κάνουν λογικές ταξινομήσεις χρησιμοποιώντας δύο ή τρία κριτήρια. Σε μικρότερη ηλικία για παράδειγμα 6 ετών το παιδί σταματά να κάνει μορφικές συλλογές όπως έκανε στο 5 έτος της ηλικίας του. Επίσης στην ηλικία των 3-4 ετών το παιδί διαλέγει να ταξινομεί τα όμοια αντικείμενα μεταξύ τους.

Αυθόρμητες πολλαπλασιαστικές ταξινομήσεις

Δίνουμε στο παιδί στρογγυλές σφαίρες που διαφέρουν στο μέγεθος (μικρά- μεγάλα) και στο χρώμα (κόκκινο- μαύρο). Το ζητούμενο στην προκειμένη περίπτωση είναι το παιδί να ταξινομήσει τα στοιχεία σε ένα κουτί χωρισμένο σε τέσσερα μέρη αφού πρώτα τα ταξινομήσουν ελεύθερα. Το παιδί 4-5 ετών τοποθετεί τα στοιχεία σε μορφική σειρά ενώ στην ηλικία 5-6 ετών περνά στις μη μορφικές συλλογές χωρίζει τα στοιχεία ανάλογα με το σχήμα σε δύο ομάδες ή σε τέσσερες ομάδες με κριτήριο το χρώμα και το μέγεθος. Στην ηλικία των κατανοεί την υποομάδα. Συγκεκριμένα, χωρίζει αρχικά με κριτήριο το σχήμα και μετά δημιουργεί υποομάδες με κριτήριο το χρώμα. Αποτέλεσμα του παραπάνω είναι το παιδί να κατανοήσει την μήτρα και την πολλαπλασιαστική ταξινόμηση σε ηλικία 9-10 ετών.

Έννοια της τομής

Δίνουμε στα παιδιά δύο τεμνόμενα κάθετα χαρτόνια στα οποία υπάρχουν δύο ομάδες και ζητάμε να συμπληρώσουν το αντικείμενο που λείπει. Το παιδί 3-4 ετών επιλέγει να ζωγραφίσει ένα από τα γειτονικά αντικείμενα. Και στην ηλικία των 6 ετών το παιδί ζωγραφίζει ένα αντικείμενο το οποίο δεν σχετίζεται με κάποια από τις δύο ομάδες. Το παιδί 7 ετών κατανοεί την τομή δύο ιδιοτήτων όμως δεν μπορεί ακόμα να ζωγραφίσει το σωστό αντικείμενο. Το παιδί στην ηλικία των 8 ετών λειτουργεί με βάση επιμεριστικές ή λειτουργικές σχέσεις και δεν μπορεί να ιχνογραφήσει το σωστό αντικείμενο. Το παιδί καταφέρνει να κατανοήσει την έννοια της τομής και να ζωγραφίσει το σωστό αντικείμενο όταν είναι 9-10 ετών.

Μήτρες έτοιμες για συμπλήρωση

Η μήτρα είναι ένα είδος μορφικής συλλογής. Για να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά των παιδιών σε αυτή την περίπτωση δίνουμε στα παιδιά κάποια σχήματα για να συμπληρώσουν τη μήτρα που τους δίνουμε. Τα παιδιά 4-5 ετών επιλέγουν ένα αντικείμενο το οποίο μοιάζει με ένα από αυτό που βρίσκονται στην μήτρα. Τα εξάχρονα παιδιά οι λύσεις που δίνουν τα παιδιά μπορεί να είναι προϊόν σκέψης ή να προκύπτουν από το σχήμα. Στα παιδιά 7-8 ετών ο «λογικός» και ο «μορφικός» τρόπος προσέγγισης αλληλοϋποστηρίζονται. Και τέλος τα παιδιά όταν φτάσουν σε ηλικία 9-10 ετών μπορούν να κατανοήσουν λογικά την επιλογή που έκαναν χρησιμοποιώντας τα σωστά κριτήρια.

Σειροθέτηση των υψών (προσθετικά)

Η έρευνα που πραγματοποίησε ο Piaget για να εξετάσει την συμπεριφορά του παιδιού είχε δύο σκέλη την σειροθέτηση και την παρεμβολή. Κατά την σειροθέτηση το παιδί πρέπει να βάλει δέκα ραβδάκια στη σειρά ανάλογα με το ύψος. Το παιδί 3 ετών δεν είναι σε θέση να τοποθετήσει τα ραβδάκια σε αύξουσα σειρά. Και το παιδί 4 ετών δεν μπορεί να τοποθετήσει τα ραβδάκια σε σειρά παρά μόνο να σχηματίζει δυάδες ή τριάδες. Στην ηλικία των 5 ετών αρχίζει να κατανοεί την σειροθέτηση και να τοποθετεί τα στοιχεία σε μια διάταξη αλλά όχι αύξουσα. Στο 6 έτος τοποθετεί τα ραβδάκια ώστε οι βάσεις να είναι στην ίδια γραμμή και οι κορυφές να σχηματίζουν σκάλα. Το παιδί φτάνει στο επιθυμητό αποτέλεσμα μετά από πολλές μετατοπίσεις. Ο επιθυμητό αποτέλεσμα ακολουθώντας την σωστή μέθοδο έρχεται στην ηλικία των 7-8 ετών. Στην παρεμβολή το παιδί έχει μπροστά του μια σειρά με ραβδάκια σε σειροθέτηση και του δίνουμε ένα επιπλέον ραβδάκι το οποίο πρέπει να τοποθετήσει στη σωστή θέση. Το πεντάχρονο παιδί τοποθετεί το ραβδάκι στην αρχή ή στο τέλος της σειράς.

Στην ηλικία των 6 ετών μετά από μερικές δοκιμές. Τέλος, στο 7-8 έτος το παιδί με την πρώτη προσπάθεια παρεμβάλει το ραβδάκι στη σωστή θέση.

Σειροθέτηση των υψών οπτικά

Ζητάμε από το παιδί να ιχνογραφήσει τη διάταξη που έχουν τα ραβδάκια που είναι άτακτα ριγμένα μπροστά του. Επίσης του έχουμε δώσει χρώματα αντίστοιχα με τα χρώματα των ράβδων. Στην ηλικία ων 4 ετών αδυνατεί να κατανοήσει τη σειρά που πρέπει να τοποθετήσουμε τα στοιχεία. Όμως και στην ηλικία των 5 ετών το παιδί σχεδιάζει μια σειρά από ένα τυχαίο αριθμό ράβδος χρησιμοποιώντας ένα μόνο χρώμα. Στο 6 έτος της ηλικίας του αρχίζει να ιχνογραφεί την διάταξη κάνοντας κάποια λάθη. Στην ηλικία των 7 ετών το παιδί χρησιμοποιεί και σε αυτή την περίπτωση την μέθοδο που έχει κατακτήσει, στην αντίστοιχη ηλικία, στη σειροθέτηση των υψών (προσθετικά) δηλαδή εντοπίζει το μεγαλύτερο το ζωγραφίσει, από αυτά που απομένουν εντοπίζει το μεγαλύτερο το ζωγραφίζει και συνεχίζει μέχρι να τελειώσουν οι ράβδοι.

Σειροθέτηση των υψών οπτικά- πνευματικές εικόνες, εικόνες- ενθύμια

Σε αυτή την περίπτωση ζητάμε από τα παιδιά να θυμούνται τη σειρά των ράβδων που τους ζητήσαμε γιατί θα τους ζητηθεί να την ιχνογραφήσουν αργότερα. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ζητάμε από το παιδί να το ιχνογραφήσει. αν το ιχνογράφημα είναι λάθος του δείχνουμε το σωστό και τα συγκρίνουμε. Επαναλαμβάνεται αυτή η διαδικασία μετά από κάποιο χρονικό διάστημα και μέχρις ότου το παιδί ιχνογραφήσει τη διάταξη σωστά. Το μικρό παιδί ηλικίας 4 ετών ιχνογραφεί ράβδους με το ίδιο ύψος. Στο 5 έτος της ηλικίας ιχνογραφεί ζεύγη ή τριάδες ράβδων. Επίσης στο 6 έτος τα παιδί ιχνογραφεί ράβδους όπως πριν αλλά περισσότερους αυτή τη φορά. Το ιχνογράφημα είναι πλήρης ως προς τον αριθμό των ράβδων και τη σειροθέτηση όταν το παιδί είναι 7-8 ετών.

Σειροθέτηση αναπαραγωγή εικόνων

Για να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε δύο τεχνικές: τεχνική Α (αντίληψη) και την τεχνική Β («αντιγραφή»). Στην τεχνική Α δίνουμε στο παιδί τετράγωνα διαφορετικού χρώματος και μεγέθους το ένα μέσα στο άλλο. Αφήνουμε το παιδί να τα παρατηρήσει και χαλάμε την διάταξη. Στη συνέχεια του ζητάμε να την ξανασχηματίσει. Στην τεχνική Β το παιδί έχει μπροστά του ένα μοντέλο και το ανακατασκευάζει με υλικά που του παρέχουμε. Έπειτα, από δεκαπέντε μέρες παιδιά που εξετάστηκαν αρχικά με την τεχνική Α τώρα εξετάζονται με την Β, και αντίστροφα. Στα παιδιά ηλικίας 6 ετών τα παιδία που εξετάστηκα πρώτα με την Β και μετά με την Α εμφάνισαν σημεία λογικής σειροθέτησης, σε αντίθεση με όσα εξετάστηκαν με την αντίστροφη διαδικασία. Όμοια αποτελέσματα είχαμε και στα παιδιά ηλικίας 8 ετών και 9 ετών.

Λεκτική διατύπωση της σειροθέτησης

Δίνουμε μια διάταξη υψών στα παιδιά και ζητάμε να μας περιγράψει τα στοιχεία που βλέπει. Στην ηλικία 4-5 ετών στο παιδί διαφεύγουν οι σχέσεις του αντικειμένου με τα υπόλοιπα του συνόλου και εστιάζει σε ένα μόνο αντικείμενο. Όταν το παιδί είναι 6 ετών μπορεί πλέον να λαμβάνει υπόψη του όλα τα στοιχεία, όμως μπορεί να κάνει συγκρίσεις από το μεγάλο στο μικρό και αντίστροφα. Η σχετικότητα και η αμοιβαιότητα κατακτώνται από το παιδί στην ηλικία 7-8 ετών και καταλήγει σε συμπεράσματα.

Απτική σειροθέτηση. Απτικό-κιναισθητική δοκιμή

Σε ένα κουτί τοποθετούμε δέκα ραβδάκια και ζητάμε από τα παιδιά να εκτελέσει σειροθέτηση μόνο με την αφή του. Όσα παιδιά βρίσκονται στην ηλικία των 5 ετών αποτυγχάνουν. Στην ηλικία των 6 ετών σειροθετεί τις ράβδος κάνοντας διαδοχικές ψηλαφήσεις, παρ'όλα αυτά δεν καταφέρνει να σειροθετήσει όλα όπως και δεν καταφέρνει να τα ιχνογραφήσει. Το παιδί σειροθετεί και ιχνογραφεί σωστά τις ράβδους όταν ηλικιακά βρίσκεται 7-8 ετών.

Πολλαπλή σειροθέτηση. Ορατές δοκιμές

Παρουσιάζουμε στα παιδιά δεκαέξι στοιχεία, για παράδειγμα τρίγωνα, τα οποία έχουν τέσσερα διαφορετικά μεγέθη και τέσσερις διαφορετικές αποχρώσεις του ίδιου χρώματος. Στην ηλικία των 5 ετών το παιδί ομαδοποιεί τα στοιχεία με βάση μόνο το μέγεθος είτε σαν μια μάζα όλα μαζί είτε δημιουργώντας στήλες. Το παιδί που βρίσκεται στο 6-7 έτος συνεχίζει να διατάσσει τα στοιχεία με ένα μόνο κριτήριο είτε το μέγεθος είτε την απόχρωση. Με δύο κριτήρια το παιδί σειροθετεί όταν φτάσει στο7-8 ηλικιακό έτος. Σε αυτή την ηλικία συνειδητοποιεί ότι πρέπει να λαμβάνει υπόψη του και το μέγεθος και την απόχρωση. Στην ηλικία των 9 ετών το παιδί φτάνει στη σειροθέτηση χρησιμοποιώντας τα δύο κριτήρια χωρίς δυσκολία.

Σχέση ανάμεσα στην τακτική και την απόλυτη έννοια του αριθμού

Ο Piaget για να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στην τακτική και την απόλυτη έννοια του αριθμού χρησιμοποιεί ως βάση τη σειροθέτηση οποιωνδήποτε σχέσεων. Όταν ενώνουμε στοιχεία σε μια τάξη λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο το κοινό τους χαρακτηριστικό και ας ξέρουμε ότι τα στοιχεία αυτά παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους. Όμοια όταν σειροθετούμε στοιχεία μεταξύ τους. Από τη μία η τάξη ενώνει τα στοιχεία με βάση το κοινό τους χαρακτηριστικό, ενώ από την άλλη η ασυμμετρική σχέση τα διαχωρίζει. Ο αριθμός είναι αυτός που ενώνει τις δύο όψεις την απόλυτη και την τακτική. Η απόλυτη όψη σχετίζεται με την κατανόηση της ταξινόμησης και η τακτική με την έννοια της σειροθέτησης. Επομένως, για να κατανοήσει το παιδί τον αριθμό πρέπει να κατανοήσει την ταξινόμηση και την σειροθέτηση. Ο Piaget για ελέγξει αν μπορεί ο μαθητής να το κατανοήσει εκτέλεσε το εξής πείραμα με δύο σκέλη: Στο ένα έδωσε σειροθετημένες ράβδους για να πει το παιδί πόσα σκαλοπάτια πρέπει να ανέβει το παιδί για να φτάσει σε ένα συγκεκριμένο σκαλί. Στο δεύτερο σκέλος παρουσίασε σκόρπιες ράβδους και ζήτησε να του πει το παιδί πόσα σκαλοπάτια θα ανέβει για να ανέβει σε ένα συγκεκριμένο σκαλοπάτι. Το παιδί 5 ετών και στις δύο περιπτώσεις έδωσε μία τυχαία απάντηση. Το παιδί όταν είναι στη ηλικία των 6 ετών απαντά σωστά στο πρώτο σκέλος του πειράματος μετρώντας τα σκαλοπάτια. Στο δεύτερος σκέλος, το παιδί δεν μπορεί να απαντήσει γιατί δεν είναι ικανό να κάνει νοερή σειροθέτηση, όταν όμως συνειδητοποιήσει ότι πρέπει να κατασκευάσει τη σειρά και να κάνει ότι στο πρώτο σκέλος σχηματίζει τη σειρά με όλα τα ραβδάκια γιατί δεν ξεχωρίζει μέσα στην ολότητα αυτά που δεν του είναι αναγκαία. Στην ηλικία των 7 ετών στην πρώτη περίπτωση από την αρχή αντιλαμβάνεται ότι μπορεί να χωρίσει τα στοιχεία σε δύο μέρη αυτά που οφείλει να χρησιμοποιήσει και σε αυτά που μπορεί να αποκλείσει. Στην δεύτερη περίπτωση δημιουργεί νοερά με ευκολία τη σειρά των ράβδων και μετρά πόσα σκαλοπάτια πρέπει να ανέβει κάποιος.

Σχέσεις ανάμεσα στην τακτική και την απόλυτη έννοια του αριθμού

Για τις σχέσεις ανάμεσα στην τακτική και την απόλυτη έννοια του αριθμού η βάση που χρησιμοποιεί ο Piaget είναι η σειροθέτηση που στηρίζεται στη σύνθεση μονάδων. Παρουσιάζουμε στο παιδία μια σειροθετημένη σειρά με χαρτόνι του ίδιο πλάτους και ύψους αυξανόμενο έτσι ώστε Α=1 και Κ=10Α. Το ερώτημα που θα θέσουμε στα παιδιά είναι πόσες μονάδες είναι μια συγκεκριμένη ράβδος; Δίνουμε εξηγήσεις μέχρι να καταλάβει το σύστημα που του δώσαμε. Η σωστή απάντηση σχετίζεται με την απόλυτη αξία δηλαδή η αξία ενός ορθογωνίου σε μονάδες είναι ίση με την τακτική αξία δηλαδή με το άθροισμα των ορθογωνίων που προηγούνται του δοσμένου. Το παιδί 5 ετών δεν καταφέρνει να οικοδομήσει καμία σχέση ανάμεσα στην αξία σε μονάδες ενός τετραγώνου και της θέσης του σε μια σειρά. Στην ηλικία των 6 ετών το παιδί απαντά σωστά αν θέσουμε το πρόβλημα εξελικτικά χωρίς όμως να κατανοεί. Επίσης αν σκορπίσουμε τη σειρά οικοδομεί όλη τη σειρά για να απαντήσει, δεν μπορεί να καταλάβει ότι για να απαντήσει αρκεί ο αριθμός των μικρών τετραγώνων από το καθορισμένο. Το παιδί είναι ικανό να καταλάβει την απόλυτη αξία ενός τριγώνου από τη σειρά είτε είναι σε σειρά τα ορθογώνια είτε διασκορπισμένα στην ηλικία των 7 ετών.

Η τακτική αντιστοιχία

Για τη μελέτη αυτής της περίπτωσης δίνουμε δύο σειρές μα ασυμμετρικές σχέσεις που έχουν τεθεί σε αντιστοιχία ένα προς ένα. Έπειτα μετατοπίζουμε τη μία σειρά με την άλλη και ζητάμε να μας πουν ποιο αντικείμενο της άλλης σειράς αντιστοιχεί το αντικείμενο που τους δείξαμε. Το παιδί στην ηλικία 3-4 ετών αντιστοιχεί τα αντικείμενα που βρίσκονται απέναντι. Δεν υπάρχει εκλογή αλλά μιμητική πράξη. Το παιδί κατανοεί την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο σειρές όταν είναι 5-6 ετών. Για να απαντήσει στο πρόβλημα ακολουθεί τις δύο σειρές με τα δάχτυλα των χεριών ταυτόχρονα ένα προς ένα (εμπειρικές διαδικασίες) ή αριθμοί τη μία σειρά μέχρι το στοιχείο που πρέπει να αντιστοιχήσει και μετά αριθμεί την άλλη σειρά. Όμως η σχέση ανάμεσα στην τακτικότητα και την απολυτότητα είναι ακόμα ανεπαρκής. Τέλος στην ηλικία των 7 ετών οι σχέσεις ανάμεσα στην απολυτότητα και την σχετικότητα έχουν οικοδομηθεί σωστά. Το παιδί είναι πλέον ικανό να αντιληφθεί τις σχέσεις ανάμεσα στις δύο σειρές με αντιστρέψιμο τρόπο σε δύο αντιστοιχισμένες σειρές.

Η πληθυκή αντιστοιχία

1η Δοκιμή

Παρουσιάζουμε δύο σύνολα που είναι άνισα και ζητάμε με μεταφορά από το ένα σύνολο στο άλλο να τα κάνει ίσα. Το παιδί ηλικίας 3-4 ετών μόλις μπορεί να αριθμεί και δεν μπορεί να εξισώνει διαφορές. Επομένως το μόνο που κάνει είναι να μεταφέρει αντικείμενα από το ένα σύνολο στο άλλο ώστε να φαίνονται τα σύνολο ίσα. Και στην ηλικία των 5 ετών το παιδί δεν έχει επίγνωση του σκοπού προσπαθεί απλά να αλλάξει τα σύνολα για να είναι πιο εύκολη η σύγκρισή τους. Το παιδί που είναι 6 ετών δεν μετρά τα στοιχεία που βρίσκονται στα σύνολα, προτιμά να κατασκευάσει από την αρχή τα σύνολο τοποθετώντας κάθε φορά από ένα αντικείμενο σε κάθε σύνολο. Τέλος, στην ηλικία των 7 ετών το παιδί κατανοεί την αμοιβαία αντιστρεψιμότητα που σημαίνει ότι κατανοεί ότι η πρόσθεση μιας μονάδας στη μια συλλογή συνεπάγεται την αφαίρεσή της από την άλλη.

2η δοκιμή

Δύο ίσα σύνολα υποδιαιρούνται σε δύο άνισα υποσύνολα και ζητάμε από τα παιδιά να μας πουν αν τα δύο σύνολα που παρουσιάζονται είναι ίσα. Σύμφωνα με την παρατηρούμε συμπεριφορά στην ηλικία των 3-4 ετών για την πρώτη δοκιμή δεν υπάρχει λόγος να εφαρμόσουμε τη δοκιμή σε αυτή την ηλικία. Το παιδί ηλικία 5 ετών δεν μπορεί να συγκρίνει το άθροισμα των δύο υποσυνόλων, το μόνο που κάνει είναι να συγκρίνει ένα υποσύνολο του πρώτου συνόλου με ένα υποσύνολο του δευτέρου συνόλου με αποτέλεσμα να οδηγείται σε λάθος συμπεράσματα. Το παιδί 6 ετών σε αυτό το στάδιο διακυμαίνεται ανάμεσα σε δύο αντίθετους συλλογισμούς τους οποίους επίπονα προσπαθεί να συμφιλιώσει. Τελικά, στην ηλικία των 7 ετών συγχωνεύει όλους τους επιμέρους συλλογισμούς σε μια ενεργητική σύνθεση και παίρνει υπόψη του όλες τις αριθμητικές σχέσεις. Ενώνει όλα τα υποσύνολα σε αθροίσματα και συγκρίνει το πρώτο άθροισμα με το δεύτερο και επιβεβαιώνει την ισότητα των συνόλων.

Ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός («πολλαπλή αντιστοιχία»)

Σε αυτή την μελέτη περίπτωσης χρησιμοποιούμε την παρακάτω τεχνική και τα ακόλουθα ερωτήματα. Ζητάμε από το παιδί να δημιουργήσει την ισοδυναμία ανάμεσα σε μια συλλογή από λουλούδια και βάζα αντιστοιχίζοντάς τα ένα προς ένα. Επαναλαμβάνουμε την δοκιμή ανάμεσα σε μια συλλογή από τον ίδιο αριθμό βάζων με πριν και μια νέα συλλογή λουλουδιών. Τα ερωτήματα που θέτουμε στο παιδί είναι: αν τα δύο σύνολα λουλουδιών είναι ίσα τη στιγμή που ο αριθμός των βάζων είναι ο ίδιος , αν βάλουμε τα λουλούδια στον ίδιο αριθμό βάζων πόσα λουλούδια θα έχει το κάθε βάζο και τέλος πόσα βάζα χρειαζόμαστε για να βάλουμε μέσα από ένα λουλούδι αν τα λουλούδια που έχουμε είναι τα λουλούδια και τον δύο ομάδων. Το παιδί στην ηλικία των 4 ετών δεν είναι ικανό να απαντήσει σε καμία από τις ερωτήσεις που του θέσαμε. Στην ηλικία των 5 ετών, όμως, ενεργεί με τυχαίους χειρισμούς και όχι με λογικούς συλλογισμούς. Το παιδί σε αυτή την ηλικία (6 ετών) φτάνει σε σωστές λύσεις μέσα από οπτικές αντιστοιχίες. Αυτό φαίνεται από τον τρόπο που χειρίζεται το υλικό που έχει στη διάθεσή του. Για παράδειγμα, για την δεύτερη από τις τρείς ερωτήσεις που θέσαμε στην αρχή το παιδί τοποθετεί ένα λουλούδι σε κάθε βάζο που σημαίνει ότι δεν έχει καταλάβει επαρκώς την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ώστε να βρει μια λογική λύση. Το δεύτερο λουλούδι το τοποθετεί στα βάζο όταν καταλάβει ότι του περισσεύουν λουλούδια. Το παιδί (7 ετών) μπορεί να αντιληφθεί τις σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα και να φτιάξει σωστές απαντήσεις με λογική. Οδηγείται σε αυτό το συμπέρασμα γιατί κατά τους χειρισμούς μέχρι τώρα κατάλαβε ότι πρέπει να βάζει μπουκέτα στα βάζα και όχι μεμονωμένα λουλούδια.

Χρόνος

Η κατανόηση του χρόνου προϋποθέτει τρεις τύπους «πράξεων: τη σωστή σειρά σε μια σειρά διαδοχικών γεγονότων, τη διαδοχή ως εγκλεισμό των μεσοδιαστημάτων και ότι η διάρκεια μπορεί να μετρηθεί. Για να εξετάσουμε πως κατανοεί το παιδί το χρόνο και του τύπους των «πράξεων» που σχετίζονται με αυτόν χρησιμοποιούμε τις παρακάτω τεχνικές: ένα γεμάτο δοχείο με νερό τοποθετείται κάθετα σε ένα άδειο σωλήνα και με ένα διακόπτη το δοχείο να αδειάζει διαδοχικά σε ένα σωλήνα. Έπειτα στη σειρά τοποθετούνται έξι ιχνογραφήματα που παρουσιάζουν το σταδιακό άδειασμα του δοχείου στους σωλήνες. Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι: 1. Ζητάμε από το παιδί να διατάξει τα ιχνογραφήματα τα οποία έχουμε ανακατέψει. 2. Τεμαχίζομε τα ιχνογραφήματα σε δώδεκα κομμάτια. δίνουμε στο παιδί ένα κομμάτι και ζητάμε να βρει το αντίστοιχό του. 3. Ρωτάμε αν χρειάζεται περισσότερος χρόνος για να πάει από ένα δοχείο σε ένα άλλο ή από τους αντίστοιχους σωλήνες των δοχείων αυτών και 4. Στο σωλήνα αν χρησιμοποιήσουμε ισοδυναμικά επίπεδα θα βοηθήσουν το παιδί να καταλήξει σε μια χρονική μέτρηση. Στο παιδί 5 ετών η έννοια της διάρκειας είναι αντιληπτική και μπορεί να απαντήσει σωστά μόνο στην ερώτηση 1. Στην ηλικία των6 ετών η έννοια της διάρκειας είναι ενορατική (σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις «πολύς χρόνος» ή «λίγος χρόνος» είναι υποκειμενικές), έτσι και σε αυτή την ηλικία το παιδί δεν απαντά σωστά στα ερωτήματα 2 και 3. Η έννοια του χρόνου γίνεται αντικειμενική στην ηλικία των 7-8 ετών. Σε αυτή την ηλικία απαντά σωστά στα ερωτήματα 1 και 2. Τέλος, το παιδί κατακτά τις μετρικές πράξεις, αυτό είναι αποτέλεσμα της ικανότητας του να κάνει κατάτμηση και μετατόπιση δηλαδή σε αυτή την ηλικία (9-10 ετών) μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα 3.

Ταχύτητα

Για τη δοκιμή δύο αυτοκίνητα με διαφορετικό χρώμα. Οι ευθείες που διανύουν είναι παράλληλες. Τα σημεία εκκίνησής τους είναι διαφορετικά. Οι ταχύτητές τους είναι ρυθμισμένες έτσι ώστε: το ένα αυτοκίνητο να προσπερνά το άλλο, το ένα να προλαβαίνει το άλλο και το ένα σχεδόν να προλαβαίνει το άλλο. Καλούμε το παιδί να μας αναπαραστήσεις τις κινήσεις και να μας πει τι θα συμβεί αν τα αυτοκίνητα θα συνεχίσουν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα. Το παιδί 5 ετών βρίσκεται στο προλογικό στάδιο θεωρεί πιο γρήγορο το όχημα που βρίσκεται μπροστά τη στιγμή που του τίθεται η ερώτηση. Στην ηλικία των 6 ετών το παιδί συλλαμβάνει την έννοια της ταχύτητας από την έννοια των αφίξεων, χωρίς να λαμβάνει υπόψη το διάστημα που διανύθηκε. Το παιδί φτάνει σε μια υπερτακτική εκτίμηση, παίρνει υπόψη του το μέγεθος των αποστάσεων μεταξύ των αυτοκινήτων, αυτό συμβαίνει στην ηλικία των 7-8 ετών. Τέλος, όταν το παιδί φτάσει στην ηλικία των 11-12 ετών μπορεί να καταλάβει ότι η ταχύτητα είναι μια συνάρτηση απόστασης και χρόνου ($v=s/t$).

Μέτρηση

Παρουσιάζουμε στο παιδί ένα πύργο από άνισα τουβλάκια και ζητάμε να μας κατασκευάσει έναν ίδιο πύργο σε ένα τραπέζι διαφορετικού ύψους. Τα υλικά που έχει στη διάθεσή του είναι σπάγκοι, πηχάκια ξύλου κ.ά. το παιδί ηλικίας 3-4 ετών παρατηρεί το μοντέλο και κατασκευάζει ένα νέο πύργο κατά προσέγγιση. Επίσης σε αυτή την ηλικία παρουσιάζει τις πρώτες ενδείξεις σύγκρισης. Όταν το παιδί είναι 5 ετών χρησιμοποιεί τεχνικές που διευκολύνουν τις οπτικές μεταφορές, γενικά τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο δεν αρκούνται σε οπτική μεταφορά. Η πρώτη χρήση «αντικειμένων για μέτρηση» εμφανίζεται στην ηλικία των 6 και κυρίως το παιδί χρησιμοποιεί το σώμα του για να κάνει την μέτρηση. Στην ηλικία 7-8 ετών το παιδί αναζητεί ένα αντικείμενο που να έχει το ίδιο ύψος με το μοντέλο του για να μπορέσει να τα συγκρίνει. Είναι φανερό ότι εξακολουθεί και σε αυτό το στάδιο να εκτιμά το ύψος συνολικά. Το παιδί αντιλαμβάνεται ότι δεν είναι απαραίτητο να μετρά το ύψος του μοντέλου συνολικά, σε αυτό το σημείο υιοθετεί ένα πηχάκι ως μονάδα. Αντιλαμβάνεται ότι το αντικείμενο μονάδα επαναλαμβανόμενο ισούται με το μοντέλο και έπειτα με το αντίγραφο. Το παιδί οδηγείται σε αυτά τα συμπεράσματα στην ηλικία των 9-10 ετών. Τελικά, στην ηλικία των 11-12 ετών το παιδί συνειδητοποιεί ότι η μέτρηση είναι συντονισμός, σύνθεση της κατάτμησης και της μετατόπισης, όπως ο αριθμός είναι σύνθεση του εγκλεισμού και της σειράς. Όμως η μέτρηση κατανοείται έξι μήνες μετά τον αριθμό γιατί στη μέτρηση το παιδί πρέπει να υιοθετήσει τον αριθμό μόνο του.

Χώρος

Σύμφωνα με τον Piaget, υπάρχουν τρεις τύποι λογικών πράξεων που χώρου, οι οποίες είναι: οι τοπολογικές, οι ευκλείδειες και οι προβολικές. Οι τοπολογικές αναφέρονται στο μετρικό σύστημα, στην τάξη, στην ανάπτυξη και τη συνέχεια των στοιχείων. Οι ευκλείδειες αφορούν στο μετρικό σύστημα, στις φυσικές συντεταγμένες και στην ανάλυση των σχημάτων. Και οι προβολικές αφορούν το συντονισμό των απόψεων για το αντικείμενο. Στο παιδί πρώτα εμφανίζονται οι τοπολογικές έννοιες και ακολουθούν διαδοχικά ο ευκλείδειος χώρος και ο προβολικός αλλά ανεξάρτητος ο ένας από τον άλλο.

Το παιδί κατανοεί τις τοπολογικές σχέσεις όταν βρίσκεται στο αισθησιοκινητικό στάδιο (1-2 ετών). Η πιο στοιχειώδης τοπολογική σχέση είναι η γειτνίαση δηλαδή η εγγύτητα αντικειμένων που βλέπει ταυτόχρονα το παιδί. Όσο πιο μικρό είναι το παιδί τόσο πιο εύκολα παρασύρεται σε άλλους παράγοντες οργάνωσης. Σημαντική είναι επίσης η έννοια του χωρισμού γιατί το παιδί χάρη στις σχέσεις χωρισμού αναλύει τα διάφορα στοιχεία τα οποία πρώτα εκλαμβάνονταν ως ένα. Η τάξη, η ανάπτυξη και περιτύλιξη κατακτώνται στο 5-6 έτος και αφορούν η μεν τάξη τη σχέση ανάμεσα στα στοιχεία και η δε ανάπτυξη και περιτύλιξη αφορά τον τρόπο που αντιλαμβάνεται ένα παιδί τη σειρά διατεταγμένων αντικειμένων γραμμικά και πότε ένα αντικείμενο είναι περιβαλλόμενο από άλλα στοιχεία. Οι σχέσεις συνέχειας κατακτιούνται στην ηλικία των 7 ετών, το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση έγκειται στο πως οι διάφορες αντιλήψεις θα συντεθούν μεταξύ τους ώστε να δοθεί το αίσθημα της συνέχειας. Για την αναπαράσταση του τοπολογικού χώρου πραγματοποιήθηκε η εξής εφαρμογή και η ακόλουθη συμπεριφορά εκ μέρους των παιδιών: Σε ένα καλυμμένα κιβώτιο τοποθετήσαμε στερεά σώματα και ζητήσαμε από το παιδί να μας δείξει μέσα από ένα σύνολο ζωγραφισμένων στερεών αυτό που ψηλάφησε και να το ιχνογραφήσει. Το παιδί 5–6 ετών αναγνωρίζει τα ευκλείδεια σχήματα. Η εξερεύνηση παραμένει σφαιρική και η διαφοροποίηση που κάνει είναι με κριτήριο αν περικλείονται από ευθείες ή καμπύλες.

Προοδευτικά το παιδί διαφοροποιεί τα σχήματα ανάλογα με τις γωνίες και τις διαστάσεις. Στην ηλικία των 6 ετών το παιδί μέσα από πολλούς χειρισμούς ανακαλύπτει το ρόμβο και το τραπέζιο. Τέλος, όταν είναι 7 ετών ομαδοποιεί τις αντιλήψεις του με βάση ένα πλάνο και με αφετηρία ένα σταθερό σημείο αναφοράς στο οποίο είναι δυνατό να επανέρχεται αδιάκοπα.

Ο ευκλείδειος χώρος περιλαμβάνει τις έννοιες της παραλληλίας, της ομοιότητας σχημάτων, των φυσικών συντεταγμένων, της μέτρησης και της ανάλυσης των σχημάτων. Το παιδί όταν κατανοήσει των ευκλείδειο χώρο είναι ικανό να συλλάβει τη διατήρηση της παραλληλίας, τη διατήρηση των γωνιών και τη διατήρηση των ίσων μηκών κατά τη μέτρηση των αποστάσεων. Ο Piaget για να μελετήσει την εξέλιξη των εννοιών αυτών έκανε την εξής δοκιμή: παρουσίασε στο παιδί ένα σχήμα και του ζήτησε να το αναπαράγει με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια μπορεί. Το παιδί είχε στη διάθεσή του χαρτοταινίες, φύλλα με ορθές γωνίες, μολύβια κ.λπ. Το παιδί που βρίσκεται στην ηλικία των 5-6 ετών αρκείται σε διαδικασίες καθαρά αντιληπτικές για την αναπαραγωγή του σχήματος, λαμβάνει υπόψη του μόνο το σχήμα αυτό καθαυτό και δεν χρησιμοποιεί του υλικό που διαθέτει. Το παιδί οδηγείται μόνο από τις τοπολογικές σχέσεις των στοιχείων του σχήματος. Στην ηλικία των 7-8 ετών το παιδί αρχίζει να χρησιμοποιεί εξωτερικές αναφορές στα στοιχεία του σχήματος. Όμως ακόμα δεν μπορεί να ενώσει τις σχέσεις τάξης και τις αποστάσεις σε έναν μόνο συντονισμό. Η συμπεριφορά που παρατηρείται στην ηλικία των 9-10 ετών είναι ίδια με εκείνη στην ηλικία 7-8 ετών. Το παιδί μπορεί να συλλάβει συστήματα αναφοράς που του επιτρέπουν να κρίνει ταυτόχρονα θέσεις και αποστάσεις, αυτό γίνεται στην ηλικία των 11-12 ετών.

Ο προβολικός χώρος στηρίζεται στις προοπτικές ενός αντικειμένου. Η τεχνική που εφαρμόσαμε για αυτή περίπτωση ήταν να παρουσιάσουμε στο παιδί ένα κερί και μια κάθετα στηριγμένη οθόνη με ένα αντικείμενο ανάμεσά τους. Δείχνουμε στο παιδί τη σκιά του αντικειμένου και πως αλλάζει η σκιά όταν αλλάζει η θέση του αντικειμένου. Ζητάμε από το παιδί να προεικάσει το σχήμα που θα έχει η σκιά μιας ράβδου και ενός δαχτυλιδιού μέχρι η ράβδος από κάθετη να έρθει σε οριζόντια θέση και το δαχτυλίδι η σκιά του να είναι γραμμή. Το παιδί αδυνατεί να απαντήσει στην ηλικία των 3-4 ετών. Το παιδί στην ηλικία των 5 ετών απλά αντιλαμβάνεται ότι αλλάζει το μέγεθος του αντικειμένου αλλά δεν μπορεί να καταλάβει ότι αλλάζει η γωνία που βλέπει το αντικείμενο για αυτό ιχνογραφεί το αντικείμενο όπως αυτό είναι κάθε φορά. Το παιδί συνειδητοποιεί το πρόβλημα όταν είναι 6 ετών. Το αποτέλεσμα της ιχνογράφησης είναι λίγο καλύτερο από το προηγούμενο στάδιο. Όταν είναι 7-8 ετών επιτυγχάνει μερικώς την λύση του προβλήματος, η αρχική και τελική αναπαράσταση είναι σωστές όμως οι ενδιάμεσες θέσεις είναι πιο δύσκολες. Το παιδί κατανοεί την κανονικότητα των αλλαγών σε ηλικία 9-10 ετών.

Τέλος, με τον όρο αιτιότητα εννοούμε τον τρόπο σύλληψης του σύμπαντος και η συναγωγή νόμων. Για παράδειγμα ποια φαινόμενα συνδέονται με ποια; Ποια φαινόμενα προκαλούν ποια φαινόμενα; Με τον όρο τυχαίο εννοούμε τα φαινόμενα για τα οποία δεν έχουμε απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα. Για το τυχαίο χρησιμοποιούμε την εξής τεχνική: παίζουμε «κορόνα- γράμματα» με μάρκες που στη μια μεριά έχουν κύκλο και στην άλλη σταυρό. Τις ρίχνουμε αρχικά μια- μια και μετά δέκα ή είκοσι μαζί και ζητάμε από τα παιδιά . στην συνέχεια ρίχνουμε μια χούφτα από μάρκες που και στις δύο όψεις σταυρό και παρατηρούμε τις αντιδράσεις τους. Στα παιδιά 5 ετών η παρατηρούμενη συμπεριφορά είναι να πιστεύουν ότι μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα και επίσης λένε ότι αρκεί να τα ρίξουμε με συγκεκριμένο τρόπο. Η ερμηνεία της συγκεκριμένης παρατηρούμενης είναι ότι το παιδί είναι δέσμιο του φαινομένου. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά για τα παιδιά 8 ετών είναι ότι αμφισβητεί την δεύτερη δοκιμή γιατί δεν μπορεί να δεχτεί το αποτέλεσμα των στημένων μαρκών. Αυτό σημαίνει ότι το τυχαίο και η πιθανότητα συνδυάζονται, μπορούν να εκτιμούν μεμιάς ότι το αποτέλεσμα είναι αντίθετο των πιθανοτήτων, αλλά δεν μπορεί να κάνει πιο λεπτές αξιολογήσεις. Τέλος, στην ηλικία 10 ετών οι απαντήσεις είναι λογικές κατανοεί ότι στην πρώτη περίπτωση είναι τυχαίο και στην δεύτερη περίπτωση με τις στημένες μάρκες είναι αδύνατο. Η ερμηνεία της συμπεριφοράς των παιδιών σημαίνει ενίσχυση των πιθανοτήτων, το οποίο σχετίζεται με την ανάπτυξη των λογικών συνδυασμών. Για την αιτιότητα ζητάμε από το παιδί να αιτιολογήσει τις μεταβολές της στάθμης του νερού σε ένα στενόμακρο ποτήρι στο οποίο βυθίσαμε ένα χαλίκι. Στην ηλικία 3-4 ετών το παιδί αντιδρά με προλογικές αντιδράσεις. Το νερό ανεβαίνει εξαιτίας του βάρους του νερού και έχει σχέση με τν ρεαλισμό. Στην ηλικία 5 ετών αρχίζει η αντικειμενικότητα και η συστηματικότητα των λειτουργιών και ερμηνεύεται με ανιμισμό και μυθοπλασία. Ο σχηματισμός των νοητικών πράξεων όπως είναι η τάξη , αριθμοί, ο χώρος και οι σχέσεις, οι πρώτες αμετάβλητες και η μεταβατικότητα είναι παρατηρούμενη συμπεριφορά στα παιδία ηλικίας 7-8 ετών. Ερμηνεία που δίνεται για το φαινόμενο είναι ότι όσο κατεβαίνει το χαλίκι τόσο ανεβαίνει στη στάθμη του νερού. Το παιδί όταν φτάσει στην ηλικία των 9-10 ετών αποκτά αντιστρέψιμη σκέψη, τότε φτάνει στην έννοια του τυχαίο. Επίσης μπορεί να φτάσει στο συμπέρασμα ότι κάποια φαινόμενα είναι απρόβλεπτα. Στην ηλικία του των 11-12 ετών γίνεται η ποσοτικοποίηση του τυχαίου δηλαδή το παιδί είναι σε θέση να εκτιμά την πιθανότητα ότι το φαινόμενο πραγματοποιείται με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια.

Κεφάλαιο 2ο :«Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών: Δυσκολίες στην Εκμάθηση των Μαθηματικών»- M.Hughes

Το βιβλίο αναφέρεται στις προσπάθειες των παιδιών να κατανοήσουν των κόσμο των μαθηματικών. Το παρόν συγκεκριμένο βιβλίο περιγράφει τις ικανότητες που έχουν τα παιδιά στα μαθηματικά πριν ακόμα εκείνα πάνε στο σχολείο. Επίσης εξετάζει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την διδασκαλία τυπικών μαθηματικών οι οποίες έρχονται σε αντίθεση με τις γνώσεις των παιδιών πριν μάθουν μαθηματικά. Εν τέλει παρουσιάζονται προσεγγίσεις που μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να ξεπεράσουν οποιεσδήποτε δυσκολίες αντιμετωπίζουν, οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν και από τους δασκάλους αλλά και από τους γονείς.

Η έρευνα για το βιβλίο «Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών: Δυσκολίες στην Εκμάθηση των Μαθηματικών» που διεξήγαγε ο συγγραφέας του βιβλίου Martin Hughes έγινε με αφορμή το γεγονός ότι δεν ήταν ικανοποιημένος από τις διάφορες ισχύουσες υποθέσεις για τις ικανότητες των παιδιών όσο αναφορά τους αριθμούς και ιδιαίτερα με τις θεωρίες του Piaget.

Ο Martin Hughes αρχικά με την γνώση του αποκτούν τα παιδιά άτυπα κατά την προσχολική ηλικία πριν πάνε στο σχολείο και έπειτα να την αντιπαραβάλλει με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά όταν διδάσκονται πιο τυπικά μαθηματικά. Η έρευνα διεξήχθη χρησιμοποιώντας ως υλικά διάφορα παιχνίδια και αργότερα με την είσοδο της τεχνολογίας στα σχολεία με τη χρήση της LOGO

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται οι αντιδράσεις που έχουν παρατηρηθεί σχετικά με την τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών στα σχολεία, η οποία αφορά την ανεπάρκεια των διδακτικών στόχων, την αναποτελεσματικότητα των μεθόδων διδασκαλίας, την περιορισμένη γνώση των ίδιων των εκπαιδευτικών, καθώς και την ανάγκη επιμόρφωσης των νέων εργαζομένων. Την αμφισβήτηση αυτή ενισχύει η ραγδαία εξέλιξη και χρήση τεχνολογικών μέσων, όπως οι αριθμομηχανές και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, και το αν θα πρέπει να λειτουργήσουν ως βοήθημα ή ως υποκατάστατο στη μαθησιακή διαδικασία. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η κατανόηση της απόκτησης μαθηματικών εννοιών από μέρους των παιδιών, αλλά και η επίγνωση των σύγχρονων κοινωνικών απαιτήσεων από αυτά, ώστε να υπάρξει ομοφωνία των ειδικών σχετικά με το σχεδιασμό και την εφαρμογή μεθόδων διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σύμφωνα με την αναφορά της Επιτροπής Διερεύνησης της Διδασκαλίας των Μαθηματικών στα Σχολεία, το 1982, «Τα Μαθηματικά έχουν Σημασία» (αναφορά Cockcroft),ένα μικρό ποσοστό των εργοδοτών είναι δυσαρεστημένοι με τα μαθηματικά προσόντα των νέων τους εργαζομένων. Μόνο ένα μικρό ποσοστό εργοδοτών (14%) αξιολογεί το επίπεδο εκπαίδευσης των νέων υπαλλήλων οι υπόλοιποι εργοδότες εστιάζουν σε άλλους τομείς όπως πόσο σοβαρά παίρνει ο εργαζόμενος την δουλειά του. Η επιτροπή Cockcroft αναφέρει ότι πολλά είναι τα παιδιά που αφήνουν το σχολείο με αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και υπάρχουν ενήλικη που εμφανίζουν άγχος. Σε έρευνα που προσπάθησαν να πραγματοποιήσουν σε ενήλικους για τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν στη καθημερινότητα τους οι μισοί αρνήθηκαν να απαντήσουν διότι η έρευνα αφορούσα μαθηματικά.

Ένα κεντρικό θέμα της αναφοράς Cockcroft είναι η επίλυση προβλημάτων. Η επιτροπή ισχυρίστηκε πως πρέπει να δίνεται λιγότερη έμφαση στις βασικές δεξιότητες και να δίνεται έμφαση στις δεξιότητες μέσα όμως από πραγματικές καταστάσεις. Και, κυρίως, η επιτροπή υποστήριξε ότι στόχος των δασκάλων δεν θα έπρεπε να είναι μόνο η διδασκαλία των δεξιοτήτων και των εννοιών άλλα και η χρήση των δεξιοτήτων και των εννοιών στην πράξη. Μια εξίσου σημαντική επισήμανση της αναφοράς Cockcroft είναι ότι οι αριθμομηχανές δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να υποκαταστήσουν την κατανόηση μαθηματικών εννοιών επειδή αν δεν καταφέρουμε πρώτα να καταλάβουμε ποια αριθμητική πράξη πρέπει να κάνουμε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αριθμομηχανή.

Πολλές έρευνες υποστηρίζουν τον ισχυρισμό της Επιτροπής Cockcroft ότι οι αποτυχίες των παιδιών βρίσκονται στην επίλυση προβλημάτων και όχι στην έλλειψη βασικών δεξιοτήτων. Αυτό συμβαίνει όπως αναφέρει και η αναφορά Cockcroft γιατί πολλά παιδιά δεν μπορούν να μεταφράσουν σε μαθηματικούς όρους το πρόβλημα και το λύσουν.

Από έρευνα που έγινε σε Πανεπιστήμιο του Λονδίνου ζητήθηκε από παιδιά ηλικίας 11-13 ετών να διαλέξουν ποια είναι η σωστή απάντηση στο πρόβλημα που τους δόθηκε (σελ.23) μόνο το 60% απάντησε σωστά.

Η κατανόηση των μαθηματικών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και διεξάγονται σχετικές έρευνες σε όλη την Δυτική Ευρώπη, Βόρεια Αμερική, Βρετανία και Αυστραλία.

Το προοδευτικό κίνημα που εφαρμόστηκε στη Βρετανία γεννά το ερώτημα αν όντως είχε ως στόχο την αντικατάσταση των μεθόδων που βασίζονται στη μάθηση μέσω της επανάληψης και της αποστήθισης με άλλες. Όλες η προοδευτικές αρχές και αντιλήψεις θεωρούν σημαντική την κατανόηση. Από διάφορες έρευνες έχουν αναφερθεί διάφοροι λόγοι που το προοδευτικό κίνημα δεν κατάφερε να ευδοκιμήσει όπως περίμεναν. Ένας λόγος που δεν κατάφερε κατά των Hughes να αποδώσει το προοδευτικό κίνημα είναι επειδή θεμελιώνεται θεωρητικά στις απόψεις του Piaget.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ο συγγραφέας ασχολήθηκε με την θεωρία του Piaget όσο αναφορά τη διαδικασία εκμάθησης μαθηματικών από τα παιδιά και τις αμφισβητήσεις που δέχτηκε από διάφορους Βρετανούς και Αμερικανούς ψυχολόγους, ειδικά για την πρώιμη κατανόηση των αριθμών από τα παιδιά. Παρά την άσκηση έντονης κριτικής σχετικά με ορισμένες πλευρές της θεωρίας του, η γενικότερη συμβολή του Piaget στην κατανόηση της διαδικασίας απόκτησης μαθηματικών εννοιών από τα παιδιά είναι κοινώς αποδεκτή.

Ο Piaget και οι συνεργάτες του δημοσίευσαν μια πληθώρα βιβλίων και άρθρων (πάνω από 1500) τα οποία σχετίζονται με την Ψυχολογία και την Επιστημολογία. Ο αριθμός όμως των δημοσιεύσεων που αφορούν την εκμάθηση των μαθηματικών είναι μικρός σε σχέση με τον όγκο του έργου του.

Τα δύο σημαντικά στοιχεία της δουλειάς του Piaget είναι: Πρώτον ότι ενδιαφερόταν για την Επιστημολογία περισσότερο παρά για την Ψυχολογία. Ήθελα να κατανοήσει πως αποκτιέται και αναπτύσσεται η γνώση από το ανθρώπινο είδος. Επίσης προσπαθούσε να βρει διασυνδέσεις ή παραλληλισμούς για τον τρόπο που αναπτύσσεται η γενική και η ατομική γνώση. Δεύτερον, η κατανόηση της απόκτησης μαθηματικών εννοιών θεωρείται δευτερεύουσα στη θεωρία του, καθώς αποτελεί, απλώς, αποτέλεσμα της γενικότερης θεώρησης της γνωστικής ανάπτυξης.

Κατά των Piaget υπάρχουν διακεκριμένα στάδια ανάπτυξης από τα οποία κάθε παιδί πρέπει να περάσει από τη γέννηση ως την ενηλικίωση του. Το κάθε ένα στάδιο έχει τις δικές του ιδιότητες και τα δικά του χαρακτηριστικά. Σύμφωνα με τον Piaget το στάδιο στο οποίο βρίσκεται το παιδί καθορίζει τις ικανότητες του για την μάθηση και την κατανόηση.

Τα στάδια ανάπτυξης του παιδιού είναι: : Το αισθησιοκινητικό στάδιο, το προλογικό ή προενεργητικό στάδιο, το στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών πράξεων και το στάδιο της τυπικής λογικής. Αναλυτικότερα, : Το αισθησιοκινητικό στάδιο (γέννηση-18 μηνών) αφορά διαφοροποίηση του νηπίου από τον υπόλοιπο κόσμο των αντικειμένων, που δεν εξαρτάται από τις δικές του πράξεις, το προλογικό ή προενεργητικό στάδιο αφορά εγωκεντρική σκέψη των παιδιών, κατανόηση του κόσμου μόνο από τη δική τους οπτική, το στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών πράξεων αφορά λογική σκέψη επάνω σε πράξεις του φυσικού κόσμου, απόκτηση εννοιών όπως η αντιστροφή, η συνέπεια κλπ. και Μτέλος το στάδιο της τυπικής λογικής αφορά): ώριμη λογική σκέψη, απόκτηση εννοιών όπως οι υποθέσεις, οι πιθανότητες κλπ.

Ο Piaget στηρίζει την θεωρία του σε ευρήματα που προκύπτουν έναν μεγάλο αριθμό πειραμάτων τα οποία ήταν επινόηση του ίδιου και των συνεργατών του. Το βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων είναι ότι παρουσιάζεται από τον ενήλικα ένα πρόβλημα στο παιδί και παρατηρείται ο συλλογισμός του και τα σχόλια του ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ανάπτυξη του.

Ο Martin Hughes στο 2^{ο} κεφάλαιο του βιβλίου του αναφέρεται στο πρόβλημα της συμπερίληψης σε ομάδα το οποίο σχεδιάστηκε με σκοπό να παρατηρηθεί η ικανότητα σύγκρισης ενός συνόλου με ένα υποσύνολό του. Το πείραμα που χρησιμοποίησε στην προκειμένη περίπτωση είναι ένα πείραμα με χάντρες (Προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες, σελ. 27). Ο Piaget πίστευε ότι το παιδί του προεννοιολογικού σταδίου αντιμετωπίζει πρόβλημα στο συγκεκριμένο πείραμα γιατί με απλά λόγια το παιδί είναι ανίκανο να συγκρίνει ένα σύνολο με ένα υποσύνολο. Κατά τον Piaget το παιδί δε μπορεί να εστιάσει και στο σύνολο και στο υποσύνολο ταυτόχρονα αλλά μόνο σε ένα από τα δυο.

Σύμφωνα με τον Piaget η συμπερίληψη σε ομάδα έχει σχέση και με το πώς τα παιδιά κατανοούν την έννοια των αριθμών Στο βιβλίο The child's conception of number (1952) ο Piaget αναφέρει ότι για την κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης η συμπερίληψη είναι μια βασική έννοια που πρέπει να κατανοηθεί από τα παιδιά. Έτσι, για τον Piaget τα παιδιά δεν μπορούν να κατανοήσουν πραγματικά την πρόσθεση και την αφαίρεση μέχρι την ηλικία των επτά περίπου χρόνων γιατί από την ηλικία αυτή και μετά τα παιδιά κατανοούν την συμπερίληψη.

Το δεύτερο έργο του Piaget για την πρώιμη μαθηματική σκέψη είναι το πείραμα με την αντιστοιχία των αντικειμένων. Το πείραμα αυτό αφορά την διατήρηση των αριθμών. Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται και στο βιβλίο Προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες (1998) ως το πείραμα με τις αβγοθήκες (σελ.16)

Ο Piaget από το παραπάνω πείραμα οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά επτά ετών και μικρότερα δεν διατηρούν τον αριθμό. Ενώ, τα παιδιά μεγαλύτερα των επτά ετών κατανοούν την διατήρηση των αριθμών και δείχνουν η κρίση τους για τον αριθμό να μην επηρεάζεται από αυτήν την αλλαγή.

Πολλοί αναπτυξιακή ψυχολόγοι έχουν ασχοληθεί με τα έργα του Piaget για την διατήρηση και πολλοί είναι εκείνοι δεν δέχονται πλέον τα συμπεράσματά του.

Ο Piaget εκτός από τα στάδια ανάπτυξης έχει ασχοληθεί και με την διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλά από τα γραπτά του είναι δύσκολο να κατανοηθούν εξαιτίας της ορολογίας εξαίρεση αποτελεί το άρθρο που αναφέρει ο Hughes στο κεφάλαιο αυτό (σελ. 38)

Κατά τον Piaget τα παιδιά δεν πρέπει να διδαχθούν μαθηματικά πριν είναι εννοιολογικά «έτοιμα» τότε η μάθηση θα είναι επιφανειακή και ότι η πραγματική μάθηση έρχεται μαζί με την νοητική ανάπτυξη. Επίσης, υποστηρίζει ότι αν τα παιδιά δεν μπορούν να διατηρήσουν τον αριθμό τότε δεν μπορούν ακόμα να διδαχθούν την αρίθμηση ανεξαρτήτως αν τα παιδιά όταν πηγαίνουν στο σχολείο ξέρουν να απαριθμούν. Επίσης, τόνισε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν γίνεται με μετάδοση γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή και ότι η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης έρχεται ως φυσικό αποτέλεσμα της γενικότερης ανάπτυξης των λογικών ικανοτήτων του παιδιού. Γι'αυτό ο Piaget και οι συνεχιστές του θεωρούν ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι μη παρεμβατικός διανοητικά και σχετικά ασήμαντος.

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται σύγκριση της θεωρίας του Piaget και της θεωρίας του Thorndike (1992), ο οποίος υποστηρίζει ότι η μάθηση της αριθμητικής είναι βασικά μια διαδικασία σχηματισμού δεσμών ανάμεσα σε ένα ερέθισμα και μια αντίδραση. Ο Thorndike είναι υποστηρικτής της μπιχεβιοριστικής θεωρίας και η ενλόγω θεωρία παίρνει πολύ λίγο το επίπεδο τη εννοιολογικής ανάπτυξης. Οι εκπαιδευτικοί που είναι απογοητευμένοι από τις παραδοσιακές μεθόδους του Thorndike είναι εύκολα να τους είναι ελκυστικές οι θεωρίες του Piaget. Σε μεγάλη αντίθεση έρχονται οι απόψεις του Piaget με του Thorndike όσο αναφορά το ρόλο των παιδιών στη δόμηση της γνώσης και παίρνοντας υπόψη το επίπεδο.

Τα τελευταία χρόνια γίνονται αρκετές αμφισβητήσεις σχετικά με ορισμένες απόψεις της θεωρίας του Piaget. Οι ψυχολόγοι έχουν εστιάσει κυρίως στα έργα που έκανε ο Piaget για να εκτιμήσει το στάδιο ανάπτυξης των παιδιών και πιστεύουν ότι η αποτυχία των παιδιών δεν οφείλεται στην έλλειψη ικανότητας αλλά σε άλλους παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, δεν διευκρινίζεται τι πρέπει να κάνουν τα παιδιά. Ο James McGarrigle ασχολήθηκε με τις έννοιες που περιγράψαμε παραπάνω (Διατήρηση – Συμπερίληψη). Ο McGarrigle για την συμπερίληψη επινόησε ορισμένα πειράματα ώστε να κάνει κάποιες διακρίσεις στις εξηγήσεις που δόθηκαν στα πειράματα με τις χάντρες (τα παιδιά και η έννοια των αριθμών, σελ. 42). Επίσης. Ο McGarrigle μαζί με την Donaldson ασχολήθηκαν με την διατήρηση των αριθμών το αρχικό έργο είχε να κάνει με την μετατόπιση της μιας σειράς αντικειμένων που αρχικά ήταν σε διάταξη ένα προς ένα με μια άλλη σειρά αντικειμένων. Γι'αυτό το λόγο επινόησαν ένα εναλλακτικό τρόπο παρουσίασης της διατήρησης (σελ.43). Με το αμετάβλητο των αριθμών ασχολήθηκαν και άλλοι ερευνητές όπως η Rochel Gelman, από την ερευνά της προκύπτει ότι τα παιδιά ηλικίας τριών ετών και μικρότερα κατανοούν το αμετάβλητο των αριθμών και μοιάζουν να καταλαβαίνουν ότι η μετατόπιση των αντικειμένων σε μια διάταξη δεν επηρεάζει το πλήθος όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση.

Οι παραπάνω έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά είναι πιο ικανά στους αριθμούς σε σχέση με το πόσο ικανά τα θεωρεί ο Piaget στο προεννοιολογικό στάδιο.

Η Donaldson υποστηρίζει για τα έργα της διατήρησης και της συμπερίληψης ότι και τα δυο προβλήματα απαιτούν αυτό που ονομάζεται μη ενσωματωμένη σκέψη δηλαδή ότι το παιδί πρέπει να κατανοεί τη γλώσσα που μιλάει ο ενήλικας ανεξάρτητα με το πλαίσιο μέσα στο πλαίσιο το οποίο χρησιμοποιείται. Κατά την Donaldson, η ενσωματωμένη σκέψη σε ένα πλαίσιο που έχει νόημα προκύπτει σχετικά εύκολα.

Η θεωρία του Piaget δέχτηκε σοβαρή κριτική, καθώς θεωρήθηκε ότι υποτίμησε τις ικανότητες των μικρών παιδιών και αγνόησε το πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η σκέψη. Σαν αποτέλεσμα, προτάθηκε η επανεξέταση των ικανοτήτων των παιδιών κατά την προσχολική ηλικία, η διερεύνηση των δεξιοτήτων των παιδιών που σχετίζονται με τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο και, κυρίως, η εξέταση του *τι μπορούν* να κάνουν τα παιδιά, παρά του *τι δεν μπορούν*, το οποίο διερεύνησε ο Piaget, ώστε να κατανοηθούν, στη συνέχεια, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν.

Στο κεφάλαιο τρία ο συγγραφέας δίνει έμφαση στην πρόσθεση και την αφαίρεση που είναι δυο πράξεις τις οποίες χρησιμοποιούμε ιδιαίτερα στην καθημερινότητα μας. Βέβαια, για την εκτέλεση των πράξεων αυτών χρησιμοποιούμε ιδιαίτερα τις αριθμομηχανές, όμως η χρήση των αριθμομηχανών προϋποθέτει να μπορούμε να κατανοήσουμε ποια πράξη πρέπει να εκτελέσουμε.

Η πρόσθεση και η αφαίρεση δεν εμφανίζονται ιδιαίτερα στη θεωρία του Piaget παρά την σπουδαιότητά τους. Όταν ασχολήθηκε με αυτές τις πράξεις ασχολήθηκε κυρίως με τη σχέση τους με τις έννοιες της διατήρησης και της συμπερίληψης σε ομάδα γιατί πίστευε ότι πριν την κατάκτηση των εννοιών αυτών τα παιδιά δεν μπορούν να μάθουν πρόσθεση και αφαίρεση.

Το ενδιαφέρον του Hughes για την πρόσθεση και την αφαίρεση προέκυψε όταν έπαιζε αριθμητικά παιχνίδια με τον Γκόρντον ένα παιδί ηλικίας 4 ετών και 8 μηνών. Το παιχνίδι που έπαιζε ο Martin Hughes με τον Γκόρντον ήταν ένα παιχνίδι με ένα κουτί και τούβλα που τα έβαζε και τα έβγαζε στο κουτί και έκανε ερωτήσεις στο Γκόρντον για να δει αν μπορεί να υπολογίσει σωστά (σελ. 50). Ο Martin Hughes ανέπτυξε τον έργο με το κουτί και έκανε παρόμοια πειράματα και σε άλλα παιδιά από τον παιδικό σταθμό του τμήματος Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου του Εδιμβούργου. Τα παιδιά του παιδικό σταθμού ήταν εξοικειωμένα με το παίζουν παιχνίδια με ενήλικες και να λύνουν προβλήματα μαζί τους. Τα αποτελέσματα στο παιχνίδι του «κουτιού» ήταν θετικά τα παιδιά δεν δυσκολεύονταν ιδιαίτερα, μόνη δυσκολία που αντιμετώπιζαν ήταν όταν ασχολιόντουσαν με πιο μεγάλους αριθμούς και κυρίως την δυσκολία αυτή την αντιμετώπιζαν παιδιά μικρότερης ηλικίας. Κατά την διάρκεια του έργου υπήρχαν παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας που είχαν ιδιαίτερα καλή επίδοση (σελ. 52).

Γενικότερα, έχει γεννηθεί το ερώτημα εάν τα παιδιά αντιμετωπίζουν τους μικρούς αριθμούς με έναν διαφορετικό τρόπο από ότι τους μεγαλύτερους. Τα παιδία κατά τη διεξαγωγή του έργου τα παιδιά αντιμετώπιζαν πιο εύκολα τους μικρούς αριθμούς όπως παρατηρήθηκε στο πείραμα αντιμετώπιζαν τους μικρούς αριθμούς με διαφορετικό τρόπο από τους μεγαλύτερους. Επίσης, υπήρχαν και παιδιά που χρησιμοποιούσαν τα δάκτυλά τους για να απαντήσουν σωστά, όπως η Τζουλιέτ (σελ. 54). Ακόμη υπήρχαν παιδιά που χρησιμοποίησαν μια εντελώς διαφορετική στρατηγική που φαινόταν να βασίζεται σε μια άμεση οπτική εικόνα των τούβλων (σελ. 55)

Ο Martin Hughes επειδή δεν θεωρούσε αντιπροσωπευτικό το δείγμα που είχε στο σταθμό πραγματοποίησε μια έρευνα εκτός σταθμού (σελ. 56). Η συνολική επίδοση του δείγματος έμοιαζε πολύ με εκείνη του σταθμού (σελ.57). Από την έρευνα αυτή ενισχύθηκε η ιδέα ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές για τα προβλήματα με μικρούς ή με μεγάλους αριθμούς.

Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούν να κάνουν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με μικρούς αριθμούς κυρίως. Βέβαια η ικανότητα δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη ανάμεσα στα παιδιά. Τα παιδιά της μέσης αστικής τάξης παρουσιάζουν διαφορές με τα παιδιά της εργατικής τάξης. Η διαφορά ισοδυναμεί με μια ηλικιακή χρονιά δηλαδή τετράχρονα παιδιά τη εργατικής τάξης έχουν το ίδιο περίπου με τρίχρονα παιδιά της μέσης αστικής τάξης. Η διαφορά αυτή δεν προκαλεί εντύπωση από μόνη της, το εντυπωσιακό εδώ είναι η διαφορά ενός χρόνου. Η εξήγηση για αυτή τη διαφορά είναι η παροχή διαφορετικών ερεθισμάτων στα παιδιά στο σπίτι τους. Σύμφωνα με τον Martin Hughes έρευνες που έγιναν στην Αμερική χρησιμοποιώντας ένα έργο παρόμοιο με το κουτί και τα αποτελέσματα ήταν περίπου τα ίδια.

Στο τέταρτο κεφάλαιο του βιβλίου ο Hughes ασχολείται με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Ασχολείται με την δυσκολία που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στο να εκτελέσουν προσθαφαιρέσεις όταν του ρωτάμε «πόσο κάνει ένα και δυο;». Τα παιδιά μπορούν να μας δώσουν εύκολα απάντηση στο ερώτημα αυτό όταν τους πούμε πόσα τουβλάκια θα έχουμε αν σε δυο τουβλάκια βάλουμε και άλλο ένα πόσα θα είναι τώρα τουβλάκια. Με την πρώτη ματιά η διαφορά δεν προκαλεί μεγάλη έκπληξη διότι ερωτήσεις του τύπου «πόσο κάνει δυο και ένα» είναι πιο δύσκολες για τα παιδιά. Έτσι γεννιέται το ερώτημα σε τι συνιστάται η δυσκολία. Η απάντηση στο ερώτημα δεν είναι τόσο άμεση.

Μια συνιστώσα που έπρεπε να λάβει υπόψη του ο Hughes έχει να κάνει με τη χρήση οικείων λέξεων σε ανοίκειο πλαίσιο. Αν βέβαια η δυσκολία ήταν μόνο αυτή θα μπορούσε να έχει θετικά αποτελέσματα αν σε ερωτήματα του τύπου «πόσο κάνει ένα και ακόμη ένα;». Όταν δοκίμασε εναλλακτικές φράσεις στον παιδικό σταθμό του τμήματος Ψυχολογίας δεν παρατήρησε αλλαγές στη επίδοση των παιδιών. Ο συγγραφέας ασχολήθηκε με μια πιο άμεση παρουσίαση του θέματος χρησιμοποιώντας το έργο με το κουτί που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτή τη φορά, έκανε ερωτήσεις στα παιδιά και στη συνέχεια σε μια επαναληπτική πορεία ερωτήσεων παρέλειπε να κάνει αναφερθεί στην ερώτηση. Από αυτό συμπέρανε ότι τα παιδιά είχαν εγκλωβιστεί σε ένα θέμα και δεν χρειαζότανε να διατυπώνεται κάθε φορά το θέμα. Ο Hughes έκανε εσκεμμένα την παράληψη του θέματος και σε μια άλλη ομάδα παιδιών και αναφέρει το παράδειγμα του Άντριαν (σελ.68). Η ερμηνεία του Hughes για το αποτέλεσμα θεωρείται πολλές φορές λανθασμένη και ότι η απάντηση δεκαπέντε του Άντριαν είναι αξιοσημείωτη. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι επειδή με την ερώτηση «δυο και ακόμη ένα» ο Άντριαν προσθέτει στο προηγούμενο σύνολο των δώδεκα «δυο και ακόμη ένα» και βρίσκει δεκατρία. Κατά των Hughes αυτό είναι λάθος γιατί έχει περάσει ένα χρονικό διάστημα και το παιδί ασχολήθηκε με άλλα πράγματα για να θυμάται το προηγούμενο αποτέλεσμα. Και όταν του γινόταν ερωτήσεις του τύπου «πόσο κάνουν δυο και ακόμα ένα» δεν μπορούσε να απαντήσει.

Όταν τα παιδιά ξεκινούν το σχολείο σε ηλικία πέντε ετών είναι ικανά να εκτελέσουν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις οι οποίες εκτελούνται μέσα σε πλαίσια συγκεκριμένων αντικειμένων. Ενώ, αν τους παρουσιάσουμε παρόμοιες προσθέσεις και αφαιρέσεις χωρίς συγκεκριμένα αντικείμενα δεν μπορούν να απαντήσουν. Μια πιθανή προσέγγιση του φαινομένου αυτού βρίσκεται στην ιδέα της αφαιρετικής διαδικασίας. Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι τα παιδιά δεν μπορούν να κάνουν πράξεις του τύπου «δυο και δυο κάνουν τέσσερα» γιατί δεν έχουν επιδοθεί ακόμα στην αφαιρετική διαδικασία. Η θέση αυτή έχει κάποια ομοιότητα με την θεωρία του Piaget –ότι δίνει έμφαση στο κομμάτι που οι έννοιες βρίσκονται σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Ο Piaget δεν χρησιμοποίησε την έννοια της αφαιρετικής διαδικασίας αλλά θεώρησε την απόκτηση μαθηματικών εννοιών ως εξέλιξη της νοητικής ανάπτυξης. Με την αφαιρετική διαδικασία ασχολήθηκε ο Richard Skemp, κατά τον οποίο η δόμηση μαθηματικών εννοιών γίνεται με μια αφαιρετική διαδικασία. Η αφαιρετική διαδικασία έχει μεγάλη γοητεία. Ο Hughes δεν έδειξε να είναι ικανοποιημένος από της συνέπειες της αφαιρετικής διαδικασίας. Κατά τα λεγόμενα του όταν συναντάμε παιδιά που τους λείπει η αφηρημένη έννοια πρέπει να τα βοηθήσουμε ώστε η αφαιρετική διαδικασία να επιστρέψει αυθόρμητα. Εμβαθύνοντας περισσότερο στο παράδειγμα με το υποθετικό κατάστημα φάνηκε ότι τα παιδία που απάντησαν σε μερικές ερωτήσεις κατείχαν την έννοια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης που ως ένα βαθμό ήταν αφηρημένη. Σημαντικό ρόλο στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατέχει η γλώσσα, οι δυσκολίες στην κατανόηση βρίσκονταν στην κατανόηση και χρήση του συγκεκριμένου τύπου γλώσσας σε προτάσεις « Δυο και δυο κάνουν τέσσερα».

Τα τελευταία χρόνια ολοένα αποδέχονται και περισσότερο την ιδέα ότι πρέπει να θεωρούμε τα μαθηματικά ως μια γλώσσα. Το πρώτο κεφάλαιο της αναφοράς Cockcroft (1982) προσπαθεί να απαντήσει γιατί πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά και επισημαίνει τις χρήσεις των μαθηματικών. Η ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα συμφωνεί με τα αισθήματα όσον μαθαίνουν μαθηματικά, και μάλιστα πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι μια ξένη και μη οικεία γλώσσα. Η μάθηση των μαθηματικών δεν μπορεί να ταυτιστεί με την μάθηση μιας οποιαδήποτε άλλης γλώσσας. Η μάθηση της γλώσσας των μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει πρόβλημα στα παιδιά γιατί πολλές από τις λέξεις που χρησιμοποιούμε στη μαθηματική γλώσσα έχουν διαφορετική χρήση στην καθημερινότητα. Ένα κύριο έργο που πρέπει να επιτευχθεί είναι να κατανοήσει το παιδί πότε μιλάμε μαθηματικά. Η ιδέα τις μετάφρασης των μαθηματικών υπονοείται και από τον Robert Davis που συγκρίνει την μαθηματική συμπεριφορά με την ερμηνεία ενός ξένου τραγουδιού και τονίζει και τα δυο μπορούν να εμφανιστούν είτε ως επιτυχημένη μίμηση είτε ως θεμελιώδη κατανόηση.

Τα παιδιά πρέπει να κατανοήσουν ότι η ερωτήσεις «πόσο κάνει ένα και ένα;» η πρώτη του επαφή με την μαθηματική γλώσσα. Μέχρι τότε απαντούσαν σε μαθηματικές ερωτήσεις που είχαν να κάνουν με συγκεκριμένα αντικείμενα ή γεγονότα. Το πρόβλημα των ερωτήσεων «πόσο κάνει ένα και ένα;» είναι ότι δεν αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός. Αυτό βέβαια είναι κάτι που κάνει την αριθμητική ένα ισχυρό εργαλείο για την σκέψη και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Είναι αυτή ακριβώς η αφηρημένη ή ελεύθερη φύση των αριθμητικών προτάσεων που είναι η πηγή πολλών δυσκολιών. Μια βασική στρατηγική στην κατανόηση της προφορικής γλώσσας είναι να προσδιορίσουμε το θέμα δηλαδή τι εννοεί η φράση. Τα παιδιά προσπαθούν συνήθως να προσδιορίσουν το θέμα της ερώτησης γιατί είναι προετοιμασμένα να μεταφράσουν την αφηρημένη ερώτηση σε συγκεκριμένη μορφή. Δεν είναι εύκολα να κατανοήσουμε γιατί τα παιδιά θεωρούν πιο εύκολο να μεταφράζουν σε συγκεκριμένα πλαίσια τις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν λέξεις για αριθμούς. Αυτό μπορεί να έχει σχέση με τις δικές μας λέξεις για τους αριθμούς.

Τα παιδιά πολλές φορές χρησιμοποιούν τα δάκτυλα τους για να κάνουν υπολογισμούς όπως και στο τρίτο κεφάλαιο τα παιδιά χρησιμοποιούσαν τα δάκτυλα τους έτσι και σε αυτό το κεφάλαιο τα χρησιμοποιούν ώστε να υπολογίσουν (σελ.80). Η χρήση των δακτύλων πιθανόν είναι μια στρατηγική που έχουν παρατηρήσει στο σπίτι από τους γονείς τους. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι γονείς εξασκούν συνειδητά τα παιδιά σε αυτή τη στρατηγική. Η χρήση φαίνεται ότι είναι ένας φυσικός τρόπος να αναπαραστήσουμε ομάδες αντικειμένων. Ένα μικρό αλλά κρίσιμο βήμα είναι η μετάβαση από τη χρήση των δακτύλων για την αναπαράσταση απόντων αντικειμένων στη χρήση των δακτύλων για να διερευνήσουμε σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς. Τέλος, τα δάκτυλα μπορούν να παίξουν ένα σημαντικό ρόλο στη σύνδεση του αφηρημένου και του συγκεκριμένου γιατί μπορούν να είναι ταυτόχρονα αναπαραστάσεις αντικείμενων και αντικείμενα από μόνα τους.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μας απασχόλησε η δυσκολία των παιδιών να συνδέσουν την κατανόηση που έχουν για τους αριθμούς στο επίπεδο του συγκεκριμένου με προτάσεις στην αφηρημένη γλώσσα της αριθμητικής. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την έκφραση των προτάσεων όπως «δυο και δυο κάνει τέσσερα» σε τυπική γραφή «2+2=4». Οι προτάσεις αυτές είναι πιο αφηρημένες παρά συγκεκριμένες.

Τα παιδιά και βλέπουν παντού γύρω τους γραπτά ψηφία, δεν μαθαίνουν για αυτά μέχρι να πάνε στο σχολείο. Το κύριο πρόβλημα που προκύπτει είναι αν πρέπει να μάθουν τα παιδιά να συνδέουν την νέα γραπτή μορφή αναπαράστασης με την κατανόηση των αριθμών στο επίπεδο του συγκεκριμένου, δηλαδή αν θα πρέπει τα παιδιά να μάθουν ότι το ένα και δύο τούβλα κάνουν τρία τούβλα μπορεί να γραφεί 1+2=3 και το αντίστροφα. Για να δούμε τις γνώσεις των παιδιών για τον γραπτό συμβολισμό μπορούμε να δώσουμε στα παιδιά χαρτί και μολύβι και να ζητήσουμε να κάνουν προσθέσεις και αφαιρέσεις να μας γράψουν με έναν τρόπο στο χαρτί την πράξη που έκαναν. Η μέθοδος αυτή εκτός του ότι μας λέει τις ιδέες των παιδιών για τον γραπτό συμβολισμό μπορεί να εισάγει τα παιδιά στο συμβολισμό.

Όταν ο Hughes ξεκίνησε την διερεύνηση βρήκε την έρευνα της Barbara Allardice η οποία ζητούσε από παιδιά τριών ως επτά ετών να γράψουν μηνύματα που θα τα διάβαζε αργότερα ένα παιχνίδι που είχε κλειστά τα μάτια του. Με αυτή τη μέθοδο κατάφερε να αναδύσει τις αυθόρμητες αναπαραστάσεις για ποσότητες, προσθέσεις και αφαιρέσεις. Ο

Hughes εκτέλεσε και αυτός μια μέθοδο που έμοιαζε πολύ με της Allardice. Επειδή όμως η μέθοδος αυτή του φάνηκε περίπλοκή άφησε στην άκρη το παιχνίδι και ζήτησε από τα παιδιά να γράψουν στο χαρτί τι συνέβαινε με τα τούβλα. Τα περισσότερα παιδιά ανταποκρίθηκαν πρόθυμα.

Ο Hughes σε συνεργασία με μια φοιτήτρια του τελευταίου έτους του τμήματος Ψυχολογίας εκτέλεσαν μια μεγάλης κλίμακας έρευνα (σελ.89) για να συγκεντρώσουν τις απαντήσεις των παιδιών για την απεικόνιση των απαντήσεων. Οι απαντήσεις που έδωσαν τα παιδιά διακρίνονταν σε τέσσερις βασικές κατηγορίες: τις ιδιοσυγκρασικές που ήταν απεικονίσεις οι οποίες είχαν νόημα για τα παιδιά και μπορούσαν να τις κατανοήσουν, τις εικονογραφικές τα παιδιά σε αυτή την περίπτωση προσπάθησαν να απεικονίσουν κάτι από την εμφάνιση των αντικειμένων και των πληθικό αριθμό τους, τις εικονικές και εδώ το παιδί αναπαριστά τα αντικείμενα με ένα ασυνεχές σημάδι που έχει εφεύρει και τις συμβολικές εδώ τα παιδιά χρησιμοποιούν συμβατικά σύμβολα για να αναπαραστήσουν την ποσότητα.

Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας προτιμούσαν τις εικονικές και τις ιδιοσυγκρασικές μεθόδους, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά ήταν πιο πιθανό να παράγουν εικονογραφικές και συμβολικές απαντήσεις. Κάθε τρόπος αναπαράστασης αν χρησιμοποιείται συστηματικά μπορεί να θεωρηθεί μια αποδεκτή γραπτή αναπαράσταση των αριθμών. Εκεί που οι διαφορετικές μέθοδοι διαφέρουν είναι στον τρόπο που μεταφέρουν πληροφορίες για τον αριθμό, καθώς και στο πλήθος των επιπλέον πληροφοριών που δίνουν.

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα συστήματα αναπαράστασης είναι πώς αναπαριστά κανείς την απουσία μιας ποσότητας. Για να ανακαλύψουμε τον τρόπο που τα παιδιά αντιλαμβάνονται την απουσία μιας ποσότητας αδειάζουμε το τραπέζι από τούβλα και ρωτάμε πως μπορούν να δείξουν ότι δεν υπάρχουν τούβλα στο τραπέζι. Όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν συμβολικές μεθόδους για την αναπαράσταση και τον συμβατικό σύμβολο «0». Υπήρχαν και κάποιες ιδιοσυγκρασικές απαντήσεις.

Ο Hughes αποφάσισε να επινοήσει ένα παιχνίδι μεταλλικό κουτί οι γραπτές αναπαραστάσεις των παιδιών θα εξυπηρετούσαν ένα καθαρά επικοινωνιακό σκοπό (σελ. 101) και επανέλαβε το παιχνίδι στα παιδιά μετά από μια εβδομάδα (σελ. 109). Για τις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης χρησιμοποίησε δυο έργα: το έργο των «ολοκληρωμένων λειτουργιών» (σελ, 111) και το έργο του «Σωρού» (σελ. 113). Μια πιθανότητα που θα έπρεπε να σκεφτούμε σοβαρά ήταν ότι τα παιδιά μπορούν να παράγουν πιο επιτυχείς αναπαραστάσεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης όταν υπάρχει ένας πιο ξεκάθαρος σκοπός για να το κάνουν.

Στο κεφάλαιο έξι θα ασχοληθούμε με τα αριθμητικά συστήματα άλλων πολιτισμών. Τα διάφορα σύμβολα που χρησιμοποιούν τα μικρά παιδιά όταν καλούνται να αναπαραστήσουν μαθηματικές έννοιες ομοιάζουν με γραπτά αριθμητικά σύμβολα που εντοπίζονται σε ποικίλες εποχές και περιοχές. Το γεγονός αυτό έχει επεξηγηθεί από θεωρίες οι οποίες υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη ενός ατόμου (οντογένεση) αντανακλά και ενσωματώνει την ανάπτυξη του είδους (φυλογένεση).

Η αναπαράσταση αριθμών με τα δάχτυλα θεωρείται, συχνά, αυτονόητη, ενώ φαίνεται να έχει χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στους διάφορους πολιτισμούς, από ανθρώπους οι οποίοι δεν είχαν ακόμη αναπτύξει αριθμητικές έννοιες. Βασική απόδειξη αποτελεί το γεγονός ότι τα περισσότερα αριθμητικά συστήματα, και κατ' επέκταση ο τρόπος σκέψης, βασίζονται στους αριθμούς 5, 10 και 20, που αντιστοιχούν στον αριθμό των δαχτύλων του ανθρώπου. Τα ανθρώπινα δάχτυλα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν με αντιστοιχία ένα προς ένα για τη μέτρηση απείρων συνόλων αντικειμένων και είναι πάντα εύκαιρα. Ωστόσο, η ανάγκη όχι μόνο μέτρησης, αλλά και αναπαράστασης των διαφόρων αντικειμένων, οδήγησε στην εφεύρεση της γραφής.

Οι πιο πρωτόγονες μορφές γραφής περιλαμβάνουν γραμμές, όμοιες με αυτές που παρατηρούνται στις αυθόρμητες αναπαραστάσεις των παιδιών. Τα γραμμικά συστήματα χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές περιπτώσεις οικονομικών και εμπορικών συναλλαγών, από την αρχαία Αίγυπτο και Βαβυλώνα ως τη Ρώμη, για να καταλήξουν στις άπειρες χρήσεις της σύγχρονης εποχής.

Η διαπίστωση ότι τα αυθόρμητα σύμβολα των παιδιών αντιστοιχούν στους τρόπους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τον άνθρωπο για την αναπαράσταση αριθμητικών πράξεων αναδεικνύει έναν βασικό παράγοντα της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην εκμάθηση των μαθηματικών: το γεγονός ότι καλλιεργείται εμμέσως στους μαθητές η άποψη ότι τα αριθμητικά συστήματα αποτελούν τον μοναδικό τρόπο αναπαράστασης των πράξεων. Επομένως, θα ήταν πολύ χρήσιμο να διδάσκονται τα παιδιά την πορεία εξέλιξης των αριθμητικών συμβόλων, μέσα από διάφορα άλλα συμβολικά συστήματα, ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσουν σταδιακά το σύγχρονο, συμπυκνωμένο τρόπο αναπαράστασης των μαθηματικών πράξεων.

Τα παιδιά που ασχολήθηκαν με την γραφή της αριθμητικής παρουσίασαν μια προθυμία να χρησιμοποιήσουν τον συμβατικό συμβολισμό της αριθμητικής για την αναπαράσταση συγκεκριμένων προσθέσεων και αφαιρέσεων που εκτελούσαν με τούβλα. Η πραγματική κατανόηση του νοήματος των αριθμητικών συμβόλων συμπεριλαμβάνει την ετοιμότητα να εφαρμόζουν αυτά τα σύμβολα σε ένα ευρύ φάσμα συγκεκριμένων καταστάσεων, δηλαδή να μεταφράζει εύκολα και με ευχέρεια ανάμεσα στο γραπτό και το συγκεκριμένο. Το παρόν κεφάλαιο εξετάζει το χάσμα αυτό.

Ο συμβατικός αριθμητικός συμβολισμός που διδάσκεται στο σχολείο περιλαμβάνει δυο κύρια στοιχεία: την αναπαράσταση ποσοτήτων με ψηφία (1,2,3 κ.ά.)και τη χρήση των σημείων των πράξεων (-,=,+ κ.ά.). Τα ψηφία χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινότητα των παιδιών και πριν ακόμα πάνε στο σχολείο προκειμένου να εξοικειωθούν με την εμφάνιση γραπτών αριθμών. Αντίθετα, τα πιο γνωστά σημεία των πράξεων «+» και «-» δεν βρίσκονται σχεδόν ποτέ στην καθημερινότητα. Τα αριθμητικά ψηφία χρησιμοποιούνται για να μεταφέρουν ένα ευρύ φάσμα διαφορετικού τύπου πληροφοριών.

Στο συγγραφέα γεννήθηκε το ερώτημα πώς θα αντιδρούσαν τα παιδιά αν τους ζητούσε να κάνουν το αντίθετο από ότι έκαναν στο κεφάλαιο πέντε, δηλαδή αν θα μπορούσαν να μας αναπαραστήσουν το «3+4=7». Για να εξετάσει αυτή την περίπτωση χρησιμοποίησε κάρτες που επάνω τους έγραφαν αριθμούς, ένα μέρος της πράξης και την πράξη ολοκληρωμένη. Τα παιδιά δεν αντιμετώπισαν κάποιο πρόβλημα στην απεικόνιση του αριθμού και της ολοκληρωμένης πράξης. Η δυσκολία παρουσιάστηκε όταν έπρεπε να απεικονίσουν το +4 ή -6. Υπήρχαν βέβαια και περιπτώσεις όπου με διευκρινιστικές ερωτήσεις τα παιδιά μας έλεγαν ότι «προσθέτουμε τρία» ή «αφαιρούμε έξι». Ήταν ιδιαίτερα σημαντικό να διερευνήσουμε αυτό το θέμα και να παρατηρήσουμε τις αναπαραστάσεις των παιδιών και να συσχετίσουμε τις απαντήσεις με την μαθηματική ικανότητα των παιδιών.

Το παρόν κεφάλαιο ασχολείται με τις εξηγήσεις των παιδιών για τα αριθμητική σύνολα. Η Anna Stallard χρησιμοποίησε βελτιωμένη τη διαδικασία που χρησιμοποίησε ο Hughes παρουσιάζοντας μια πιο ξεκάθαρη λογική για την εξήγηση του νοήματος των συμβόλων. Χρησιμοποίησε ένα παιχνίδι-πάντα στο οποίο τα παιδιά έπρεπε να εξηγήσουν τι ήταν γραμμένο στις κάρτες. Η Stallard χρησιμοποίησε περισσότερες κάρτες (σελ. 157) από τον Hughes τα αποτελέσματα τους για κάθε κάρτα ήταν ποικίλα μεταξύ τους. Τα παιδιά αντιμετώπισαν την μεγαλύτερη δυσκολία όταν έπρεπε να εξηγήσουν το «3=3». Η κάρτα στην οποία απάντησαν σχεδόν όλα τα παιδιά σωστά ήταν εκείνη που απεικόνιζε αριθμούς.

Όπως αναφέραμε στην αρχή τα παιδιά μαθαίνουν τους ψηφία-αριθμούς από την καθημερινότητα τους ενώ συναντούν τα σύμβολα μόνο στο πλαίσιο της τάξης. Επιπλέον φτάνουν να συνδέουν τα σύμβολα με συγκεκριμένες δραστηριότητες στην τάξη. Τα αθροίσματα έχουν την διάταξη «3+4= », ο κενός χώρος στα δεξιά λέει στα παιδιά να συμπληρώσουν την ισότητα. Το «=» σημαίνει κάνε κάτι στα αριστερά το οποίο καθορίζεται από το αν υπάρχει «-» αφαιρούμε και αν υπάρχει «+» προσθέτουμε. Έτσι το παιδί αποκτά συγκεκριμένο νόημα για τα σημεία των πράξεων και θα βιωθεί από το ως ερέθισμα για να «κάνει κάτι» στους γύρω αριθμούς. Είναι φανερό ότι σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να κατανοήσουμε τα σημεία των πράξεων ως οδηγίες.

Σε αυτό το κεφάλαιο (όγδοο κεφάλαιο) εξετάζονται οι τρόποι που τα προβλήματα μετάφρασης σχετίζονται με τις δυσκολίες των παιδιών στη σχολική αριθμητική. Παρατηρούνται ομάδες παιδιών που λύνουν προβλήματα αφαίρεσης σε στήλες και αν τα βοηθάει η χρήση συγκεκριμένων υλικών όταν δυσκολεύονται. Τα παιδιά συναντούν δυσκολίες στις αφαιρέσεις σε στήλες. Στην περίπτωση που πρέπει να κάνουν την αφαίρεση 97-43 σε στήλη δεν δυσκολεύονται ιδιαίτερα γιατί γρήγορα μαθαίνουν ότι κάνουν απλά τις αφαιρέσεις 7-3 και 9-4 το πρόβλημα προκύπτει όταν πρέπει να κάνουν την αφαίρεση 93-47 διότι δεν γίνεται ξέρουν ότι δεν μπορούν να αφαιρέσουν το «7 από το 3» και πρέπει να μάθουν μια καινούρια μέθοδο. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με περισσότερες από μία μεθόδους: Με την παραδοσιακή μέθοδο «δανείζομαι και ξεπληρώνω» και την μέθοδο της αποσύνθεσης. Και οι δυο μέθοδοι έχουν προβλήματα και μειονεκτήματα.

Τα τελευταία χρόνια έχουν ερευνηθεί πολύ οι δυσκολίες των παιδιών με προβλήματα αφαίρεσης σε στήλες. και ιδιαίτερα μια έρευνα όπου αναλύθηκαν οι επιδόσεις των παιδιών στα προβλήματα αφαίρεσης σε σχέση με τις λανθασμένες τους διαδικασίες ή τους αποκαλούμενους «ιούς». Οι ιοί διαφέρουν από τα λάθη στο ότι εμφανίζονται στο ότι εμφανίζονται συστηματικά οι ίδιοι σε πολλές διαφορετικές καταστάσεις. Ένας από τους πιο συνηθισμένους ιούς είναι γνωστός ως «μικρότερο από μεγαλύτερο». Ένα παιδί που η μέθοδος την οποία χρησιμοποιεί έχει προσβληθεί από τον ιό αυτό θα αφαιρεί τον μεγαλύτερο αριθμό από τον μικρότερο χωρίς να δανείζεται η να χρησιμοποιεί την μέθοδο της αποσύνθεσης, με αποτέλεσμα στις αφαιρέσεις που αναφέραμε παραπάνω να δίνει καις τις δυο το αποτέλεσμα «54».

Το ενδιαφέρον του συγγραφέα για το πρόβλημα της αφαίρεσης σε στήλες προέκυψε από την θέληση του να μάθει αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στις δυσκολίες των παιδιών σε αυτά τα προβλήματα και στην ικανότητα τους να μεταφράζουν από συγκεκριμένες γραπτές αναπαραστάσεις και αντίστροφα. Ήθελε να ξέρει αν τα παιδιά που αντιμετωπίζουν πρόβλημα στην αφαίρεση θεωρούν χρήσιμο να το μεταφράσουν σε μια αντίστοιχη συγκεκριμένη αναπαράσταση. Ο Hughes παρατήρησε μια τάξη σε ένα σχολείο του Εδιμβούργου όπου τα παιδιά ήταν ηλικίας περίπου 8 ετών και εκείνη την περίοδο μάθαιναν να κάνουν αφαιρέσεις τριψήφιων αριθμών με τη μέθοδο της αποσύνθεσης. Την περισσότερη ώρα του μαθήματος τα παιδιά έκαναν υπολογισμούς και είχαν στη διάθεση του σε περίπτωση που αντιμετώπιζαν κάποια δυσκολία τους υπολογισμούς αντικείμενα έκδοσης της Dienes multi-base Arithmetic Block. Τα παιδιά ήταν εξοικειωμένα με το υλικό και γνώριζαν πώς να το χρησιμοποιήσουν για να κάνουν υπολογισμούς. Όμως, τα παιδιά δεν χρησιμοποιούσαν το υλικό προτιμούσαν να μένουν προσκολλημένα στο χαρτί και στο μολύβι. Τα μόνα παιδιά που χρησιμοποίησα αυθόρμητα το υλικό ήταν εκείνα που ο δάσκαλος τους έδωσε τον χαρακτηρισμό παιδιά με χαμηλότερη επίδοση. Από την παρατήρηση παιδιών διαφορετικών επιπέδων προέκυψε ότι τα παιδιά βρήκαν τόσο δύσκολο α μεταφράσουν τα γραπτά τους προβλήματα σε συγκεκριμένη μορφή. Πράγματι, η δυνατότητα της συγκεκριμένης αναλογίας λέγεται ότι είναι το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου της αποσύνθεσης.

Τα παιδία πολλές φορές δυσκολεύονται να κάνουν πράξεις και ειδικά όταν οι πράξεις είναι δοσμένες με τον συμβατικό συμβολισμό. Ένα παιδί δεν αντιμετωπίζει με την ίδια δυσκολία με πρόσθεση της μορφής «9+5» και αντίστοιχα μια αφαίρεση της μορφής «9-5». Είναι καλύτερο να δίνονται οι πράξει με εικονογραφική ή εικονική αναπαράσταση γιατί τα παιδιά και από μόνο τους όταν έχουν να λύσουν μια πρόσθεση ή μια αφαίρεση προσπαθούν ν βρουν μια πιο χρηστική μέθοδο αναπαράστασης από τον συμβατικό συμβολισμό.

Τέλος, σκοπός του κεφαλαίου αυτού να επιβεβαιωθεί η σπουδαιότητα της ιδέας της μετάφρασης. Η ικανότητα της κατάλληλης και σωστής μετάφρασης ανάμεσα στις συγκεκριμένες και στις γραπτές αναπαραστάσεις αριθμητικών προβλημάτων φαίνεται να είναι ουσιώδης στην κατανόηση της αριθμητικής. Δεν είναι μόνο ένα αναπόσπαστο μέρος της πρακτικής της επίλυσης προβλημάτων, αλλά απαιτείται στην επίλυση ασκήσεων στην τάξη. Παρολ'αυτά, φαίνεται να είναι μια συνεχής πηγή δυσκολιών για τα μικρά παιδιά.

Όπως ειπώθηκε, η εισαγωγή νέων, εναλλακτικών τρόπων συμβολισμού των αριθμητικών εννοιών στη διδασκαλία είναι πολύ πιθανόν να βοηθήσει τα παιδιά να κατακτήσουν σταδιακά τις σύνθετες συνδέσεις μεταξύ αριθμητικών συμβόλων και εννοιών. Τέτοιοι τρόποι ευαισθητοποίησης και κινητοποίησης των παιδιών να χρησιμοποιήσουν το δυναμικό τους είναι τα επιτραπέζια παιχνίδια με ζάρια (αρχικά με τελείες και στη συνέχεια με αριθμούς), τα παιχνίδια με μαγνητικά ψηφία και τα μεταλλικά κουτιά. Σταδιακά, εισάγονται τα σύμβολα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, σε πλαίσια που έχουν ήδη γίνει οικεία στα παιδιά, με άμεσο, σαφές και κατανοητό νόημα. Τελικά, τα παιδιά ενθαρρύνονται να μεταφέρουν και να μεταφράσουν τα σύμβολα αυτά σε διαφορετικές, αλλά ανάλογες συγκεκριμένες καταστάσεις, όπου θα κληθούν να ελέγξουν ή να υπολογίσουν την απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Στο κεφάλαιο δέκα θα ασχοληθούμε με την LOGO. Η LOGO είναι μια γλώσσα προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών, η οποία επιτρέπει τη σχεδίαση εικόνων με βάση εντολές του τύπου «100 βήματα μπροστά, δεξιά στροφή 90^{o}, 100 βήματα μπροστά». Ένα σύνολο εντολών αποθηκεύεται ως «διαδικασία» για το σχηματισμό ενός σχήματος (πχ. τρίγωνο), η οποία, σε συνδυασμό με άλλες, αποτελεί ένα σύνολο «διαδικασιών», που σχηματίζουν κάτι συγκεκριμένο, για παράδειγμα ένα σπίτι (αποτελούμενο από ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο). Με παρόμοιο τρόπο σκέφτονται και τα μικρά παιδιά, προκειμένου να επιτύχουν ένα στόχο.

Η χρήση της γλώσσας αυτής επιτρέπει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ συγκεκριμένων αναπαραστάσεων και της μαθηματικής γλώσσας, επιτρέποντας, επιπλέον, στα παιδιά να συζητήσουν τους τρόπους σκέψης και τις ιδέες τους, να εξερευνήσουν πιθανές λύσεις σε προβλήματα, να διορθώσουν τα λάθη τους, και, κυρίως, να μάθουν να χρησιμοποιούν τη συμβολική γλώσσα με έναν τρόπο πραγματικό και με νόημα.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το κατά πόσο επιτεύχθηκε η ανάγκη για την εκτίμηση του πως τα μικρά παιδιά μαθαίνουν την έννοια των αριθμών, καθώς επίσης και τις προϋποθέσεις για την πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση.

Η θεωρία του Piaget τόνιζε πάντα την έλλειψη ικανότητας στα παιδιά προσχολικής ηλικίας τα περιέγραψε εγωκεντρικά, άλογα και χωρίς να διαθέτουν μια επαρκή έννοια των αριθμών. Αντίθετα, με την πιαζετική θεωρία στο βιβλίο αυτό είδαμε πολλά παραδείγματα παιδιών να επιδεικνύουν εντυπωσιακές μαθηματικές ικανότητες. Τα περισσότερα παιδιά διαθέτουν στρατηγικές επίλυσης απλών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, συνήθως χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά τους, επινοούν αυθόρμητα σύμβολα, αντιστοιχίας ένα προς ένα με ποσοτικές αναπαραστάσεις, χρησιμοποίησαν με επιτυχία την LOGO. Ένας οπαδός του Piaget θα προέβλεπε ότι θα μπέρδευαν τον αριθμό με το μήκος, θα αποτύγχαναν στην κατανόηση της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, θα πίστευαν ότι με την πρόσθεση και την αφαίρεση δεν μεταβάλλεται ο πληθικός αριθμός. Ωστόσο, οι ικανότητες αυτές των παιδιών περιορίζονται, συνήθως, σε μικρούς, παρά σε μεγάλους, αριθμούς. Επιπλέον, παιδιά που προέρχονται από μεσοαστικά κοινωνικά στρώματα τείνουν να έχουν καλύτερες επιδόσεις από αυτά που προέρχονται από εργατικές τάξεις. Οι ικανότητες των παιδιών εμφανίζονται σε πλαίσια ενδιαφέροντα, όταν οι απαιτήσεις του προβλήματος εκφράζονται με απλό και κατανοητό τρόπο.

Στο σχολείο τα παιδιά καταπιάνονται με ένα νέο και πολύ διαφορετικό είδος μαθηματικών. Ο συγγραφέας έχει αναφερθεί σε αυτό ως τυπικό κώδικα της αριθμητικής. Ένα βασικό είναι ότι είναι αφηρημένου πλαισίου, επίσης στηρίζεται στον γραπτό συμβολισμό. Η γραπτή και αφηρημένου πλαισίου φύση του τυπικού κώδικα είναι η αιτία σημαντικών δυσκολιών. Η κατάσταση του τυπικού κώδικα της αριθμητικής περιλαμβάνει τη δυνατότητα διαπραγμάτευσης ενός συμπλέγματος λεπτών και αλληλεξαρτώμενων μεταβάσεων. Μπορούμε να διακρίνουμε μερικές από τις μεταβάσεις αυτές: από πραγματικές σε φανταστικές καταστάσεις, από συγκεκριμένα σε αφηρημένα στοιχεία, από τον γραπτό στον προφορικό λόγο, από την ενσωματωμένη στην μη ενσωματωμένη σκέψη, από λέξεις σε σύμβολα και από το άτυπο στο τυπικό. Τις μεταβάσεις αυτές τις βρίσκουμε σε κάθε στάδιο της μαθηματικής ανάπτυξης του παιδιού. Επίσης, η έννοια της μετάφρασης παρέχει έναν σημαντικό τρόπο σκέψης για τη μαθηματική κατανόηση. Για να λύσουμε πρακτικά ένα πρόβλημα πρέπει να είμαστε ικανοί όχι μόνο να λειτουργούμε μέσα στον τυπικό κώδικα αλλά να μπορούμε επίσης να μεταφράζουμε ανάμεσα στις τυπικές και στις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις του ίδιου προβλήματος.

Η ικανότητα να μεταφράζουμε ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντική. Όμως, κατά τη μελέτη του βιβλίου παρατηρήθηκε ότι η μετάφραση είναι μια δυσκολία που αντιμετωπίζουν τα παιδιά. Πολύ λίγα παιδιά προσχολικής ηλικίας και κάποια παιδιά μεγαλύτερη ηλικίας τα καταφέρνουν στη μετάφραση. Τέλος, πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά μέσα στην τάξη σχετίζονται με την δυσκολία που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στη μετάφραση με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένα χάσμα. Αυτό, στην καλύτερη περίπτωση σημαίνει ότι θα εκτελούν τα παιδιά τις τυπικές τους διαδικασίες εύκολα αλλά αυτόματα και με πολύ μικρή κατανόηση της αιτιολόγησής τους.

Ο όρος μετάφραση είναι χρήσιμος γιατί δίνει έμφαση στις λεκτικές πλευρές των μαθηματικών. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι πρέπει να απορρίπτουμε τις οπτικές πλευρές. Στην προσπάθεια να μεταδώσουν δύσκολες ιδέες στα παιδιά πολλοί δάσκαλοι ψάχνουν να βρουν εικόνες οι οποίες θα βοηθήσουν τα παιδιά.

Για την πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση ο Hughes αναφέρει ότι υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις οι οποίες πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη ώστε να εξελίχθη η μαθηματική επιστήμη:

1. Επαναπροσδιορισμός των στόχων και των αντικειμένων

Χρειάζεται να επαναπροσδιορίσουμε τους στόχους και τα αντικείμενα της πρώιμης μαθηματικής εκπαίδευσης ώστε να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε την σύνδεση τυπικού με το συγκεκριμένο καλύτερα από πριν.

2. Εξακρίβωση του μαθηματικού υποβάθρου των παιδιών

Είναι σημαντικό για τον δάσκαλο να γνωρίζει το μαθηματικό υπόβαθρο των παιδιών της τάξης του. Δηλαδή, τι τους αρέσεις στα μαθηματικά ποια είναι τα ενδιαφέροντά τους. Για να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα θα λάβουμε υπόψη μας τις απαντήσεις των γονέων.

3. Οικοδόμηση πάνω στης ιδέες των παιδιών

Αρχικά, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε τις άτυπες στρατηγικές που διαθέτουν τα παιδιά όταν ξεκινούν το σχολείο. Πράγματι, θα μπορούσαμε να αρχίσουμε βοηθώντας τα παιδιά να καλυτερέψουν τις στρατηγικές αυτές πριν τους εισάγουμε νέες. Είναι αυτονόητο ότι θέλουμε τα παιδιά να προχωρήσουν σε νέες και πιο δυναμικές στρατηγικές, οι οποίες δεν πρέπει να τους επιβληθούν ανεξάρτητα από της μεθόδους των ίδιων.

4. Σεβασμό στο συμβολισμό που επινοούν τα παιδιά

Τα μικρά παιδιά έχουν μια εντυπωσιακή ικανότητα για τον γραπτό συμβολισμό ακόμα και πριν αρχίσουν το σχολείο. Οι πρώιμες γραπτές αναπαραστάσεις των αριθμών από τα παιδιά βασίζονται στη θεμελιώδη αρχή ένα-προς-ένα. Ο δάσκαλος από τη μεριά του πρέπει να σέβεται τους συμβολισμούς τον παιδιών και να τους λαμβάνει υπόψη του στη διδασκαλία.

5. Εξήγηση της ιστορίας και του σκοπού του συμβατικού συμβολισμού

Το βασικό θέμα εδώ δεν είναι το πότε θα γίνει αυτό, αλλά το πώς θα γίνει αυτό. Θα πρέπει να είμαστε όσο το δυνατό πιο σαφείς όταν εξηγήσουμε στα παιδιά πώς ονομάζονται τα σύμβολα, με τι μοιάζουν και γιατί χρησιμοποιούνται. Επίσης, θα πρέπει να συνεχίσουμε αυτή τη γενική εισαγωγή στα σύμβολα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες δραστηριότητες που να δείχνουν την ιδιαίτερη χρήση τους.

6. Προσοχή στους μη συμβατικούς συμβολισμούς

Οποιοσδήποτε συμβολισμός και αν χρησιμοποιηθεί, οι βασικές αρχές παραμένουν οι ίδιες, και πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στην εξήγηση του υποβάθρου και του στόχου των συμβολισμών που χρησιμοποιούνται. Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί εάν χρησιμοποιούμε συγχρόνως περισσότερους από έναν μη τυπικούς συμβολισμούς.

7. Χρήση παιχνιδιών αντί αθροισμάτων

Στο σχολείο ο περισσότερος χρόνος ξοδεύεται στο να κάνουν τα παιδιά ασκήσεις προκειμένου να εξασκηθούν στην πρόσθεση, την αφαίρεση κ.ο.κ. Παιχνίδια όπως ζάρια, χαρτιά ή ντόμινο μπορούν να παρέχουν αντίστοιχη εξάσκηση στις βασικές δεξιότητες, αλλά μέσα σε πλαίσια που έχουν νόημα και είναι διασκεδαστικά

8. Επεξηγηματική διδασκαλία χωρίς φόβο

Ορισμένες φορές μπορεί να είναι χρήσιμο να εκφράζουμε τη σχέση ανάμεσα στις γραπτές μεθόδους και τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις αυτών των μεθόδων με έναν πολύ επεξηγηματικό τρόπο.

9. Χρήση της νέας τεχνολογίας

Η ξαφνική διαθεσιμότητα αριθμομηχανών και ηλεκτρονικών υπολογιστών κατέλαβε πολλούς δάσκαλους εξ απροόπτου, και υπάρχει ακόμη σημαντική αντίσταση στην ιδέα της χρησιμοποιήσεις τέτοιων επινοήσεων με μικρά παιδιά.

Τέλος, στη πορεία του βιβλίου αυτού δεν εξετάστηκε μόνο το πώς τα παιδιά μαθαίνουν την έννοια των αριθμών αλλά και τους διαφορετικούς τρόπους και τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να τους αναπαραστήσουν.

Κεφάλαιο 3°: «Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being»- G. Lakoff, R. Núnez

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το γιατί η γνωστική επιστήμη μετράει για τα Μαθηματικά. Τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινο δημιούργημα. Η μαθηματική ικανότητα είναι περιορισμένη και δομημένη από τον ανθρώπινο νου και τις πνευματικές του ικανότητες, όπως συμβαίνει και με την όραση, την κίνηση, τη χωρική αντίληψη, το συντονισμό, τα συναισθήματα, τη γλώσσα. Εύλογα τίθεται το ερώτημα από πού προέρχονται οι μαθηματικές έννοιες και πώς αναλύονται από γνωστική οπτική, το οποίο μελετάται από τη Γνωστική Επιστήμη.

Τα τελευταία χρόνια, τα επαναστατικά ευρήματα της γνωστικής επιστήμης προσφέρουν πολύτιμες πληροφορίες για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Τα σημαντικότερα αυτών αναλύονται στο παρόν βιβλίο και είναι τα εξής:

α) η ενσωμάτωση του μυαλού: η λεπτομερής μελέτη της φύσης του ανθρώπινου σώματος, του εγκεφάλου και της καθημερινής του λειτουργίας στον κόσμο δομούν τις ανθρώπινες ιδέες και τη λογική, και, κατ' επέκταση, τις μαθηματικές ιδέες και τη μαθηματική λογική

β) το γνωστικό ασυνείδητο: το μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης σκέψης είναι ασυνείδητο, και, κατά συνέπεια, το ίδιο συμβαίνει και με τη μαθηματική σκέψη

γ) η μεταφορική σκέψη: ο μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο γίνεται κατανοητό με συγκεκριμένους όρους, για παράδειγμα οι αριθμοί γίνονται αντιληπτοί σαν σημάδια πάνω σε μια γραμμή.

Το επόμενο κεφάλαιο αναφέρεται στην έμφυτη αριθμητική του μυαλού. Η μαθηματική ικανότητα θεωρείται ότι είναι έμφυτη, αλλά πρέπει να διδαχτεί και να επεκταθεί. Ωστόσο, τα αποτελέσματα μιας σειράς πειραμάτων απέδειξαν ότι ορισμένες δεξιότητες είναι εμφανείς, ακόμα και σε βρέφη: διάκριση μεταξύ δύο, τριών ή και τεσσάρων αντικειμένων, κατανόηση της πρόσθεσης «1+1=2» και της αφαίρεσης «2-1=1», λίγο αργότερα «2+1=3» και «3-1=2», διάκριση αριθμών, αλλά και ήχων, συσχετισμός αντικειμένων με ισάριθμους χτύπους ενός τύμπανου. Οι δεξιότητες αυτές παραμένουν σε όλη τη διάρκεια της ζωής, καθώς ο άνθρωπος είναι ικανός να διακρίνει με μια ματιά τον αριθμό των αντικειμένων που βλέπει μπροστά του, αν είναι σχετικά μικρός.

Μια άλλη σειρά πειραμάτων έχει αποδείξει ότι ορισμένα ζωικά είδη, όπως οι πίθηκοι, οι αρουραίοι και κάποια είδη πουλιών διαθέτουν μαθηματικές ικανότητες όπως η άθροιση, η εκτίμηση αριθμών, και οι απλές προσθαφαιρέσεις, τις οποίες μπορούν να εξασκήσουν και να επεκτείνουν μέσα από την εκπαίδευση.

Υπάρχουν δύο πλευρές του συμβολισμού ενός αριθμού: το γραπτό σύμβολο και η αντίστοιχη λέξη, η οποία βασίζεται στη γλώσσα. Επομένως, η ικανότητα του ανθρώπου να κατονομάσει αριθμούς περιλαμβάνει και δύο συμβολικές ικανότητες: τη γραπτή και την προφορική. Οι αριθμητικές ικανότητες θεωρείται ότι βρίσκονται στον αριστερό λοβό του εγκεφάλου, όπου βρίσκονται επίσης οι νευρικές συνδέσεις της όρασης, της ακοής και της αφής. Βλάβες στην περιοχή αυτή επηρεάζουν τις μαθηματικές ικανότητες, αλλά και τη γραφή, την αναπαράσταση των δαχτύλων (που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στο μέτρημα), και τη διάκριση αριστερού-δεξιού.

Η μαθηματική ικανότητα, ωστόσο, βρίσκεται σε διαφορετική εγκεφαλική περιοχή από τη μνημονική ικανότητα ή τους νοητικούς πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Η ικανότητα υπολογισμού είναι ξεχωριστή από τις βασικές αριθμητικές ικανότητες, όπως και οι αλγεβρικές ικανότητες.

Το παρόν κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στη Γνωστική Επιστήμη του ενσωματωμένου νου. Το μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης σκέψης, συμπεριλαμβανομένης και της μαθηματικής, είναι ασυνείδητο, όπως άλλωστε και η μνήμη· θυμόμαστε χωρίς να είμαστε ενήμεροι ότι θυμόμαστε. Πολλές εμπειρίες που δεν μπορούμε να ανακαλέσουμε, στην πραγματικότητα έχουν μια ανιχνεύσιμη, και συχνά μετρήσιμη, επίδραση στη συμπεριφορά μας. Μια πληθώρα ασυνείδητων γνωστικών μηχανισμών, που δεν είναι αμιγώς μαθηματικοί, χρησιμοποιείται για το χαρακτηρισμό των μαθηματικών εννοιών. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι οι ίδιοι που χρησιμοποιούνται για τις χωρικές σχέσεις, την ομαδοποίηση, την κίνηση, την αλλαγή, τον προσανατολισμό κλπ. Έτσι, για τη σύλληψη της μαθηματικής έννοιας της τάξης χρησιμοποιείται η καθημερινή έννοια της συλλογής αντικειμένων σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Αντίστοιχα, στη σύλληψη της μαθηματικής έννοιας της επανάληψης χρησιμοποιείται η καθημερινή έννοια μιας επαναλαμβανόμενης πράξης κ.ο.κ.

Η θεωρία των ενσωματωμένων μαθηματικών ορίζεται από τις μελέτες της ενσωματωμένης γνώσης. Όλες οι εννοιολογικοποιήσεις, γνώσεις και σκέψεις χρησιμοποιούν τη φυσική νευρολογική δομή του εγκεφάλου. Κατά συνέπεια, ό.τι μαθαίνεται, μαθαίνεται μέσα από αυτόν το νευρολογικό μηχανισμό μάθησης, με κατάλληλη δομή, που επιτρέπει τη συγκεκριμένη μάθηση. Τα μαθηματικά είναι νοητικό δημιούργημα, που αναπτύσσεται για τη μελέτη αντικειμένων στον κόσμο. Με δεδομένο ότι αυτά τα αντικείμενα έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, υποθέτουμε ότι οι ίδιες αυτές ιδιότητες υπάρχουν και στα μαθηματικά.

Κάθε γλώσσα διαθέτει ένα σύστημα χωρικών σχέσεων, που αναπαρίσταται στον εγκέφαλο με σχήματα εικόνων. Το πιο σημαντικό σχήμα στα μαθηματικά είναι αυτό του «κιβώτιου», που περιέχει ένα εσωτερικό, ένα οριακό και ένα εξωτερικό τμήμα και εξυπηρετεί την οπτική αναπαράσταση εννοιών όπως «μέσα» και «έξω». Οι έννοιες αυτές είναι κεντρικές στα μαθηματικά, αλλά και στη γλώσσα. Στη μαθηματική σκέψη εμπλέκεται, επίσης, ο κινητικός έλεγχος, που έχει την ίδια δομή με τη λεκτική *άποψη*. Ένα άλλο σχήμα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά είναι αυτό του τύπου *Πηγή-Διαδρομή-Στόχος*, ενώ πολύ συχνά χρησιμοποιείται και η μεταφορά, που επιτρέπει τη χαρτογράφηση και τη γενίκευση εννοιών.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το θέμα της ενσωματωμένη Αριθμητικής: Οι Θεμελιώδεις Μεταφορές. Ως υποσυστήματα του ανθρώπινου γνωστικού συστήματος, τα μαθηματικά σχετίζονται με την έννοια του χώρου με πολλούς τρόπους: είναι ακριβή, συνεχή, σταθερά στο χρόνο και τις διάφορες κοινότητες, κατανοητά μεταξύ διαφόρων πολιτισμών, μπορούν να αναπαρασταθούν με σύμβολα, μπορούν να υπολογιστούν και να γενικευτούν, ενώ είναι αποτελεσματικά για την περιγραφή, επεξήγηση και πρόβλεψη καθημερινών και επιστημονικών δραστηριοτήτων.

Όπως αναφέρθηκε, οι βασικές μαθηματικές ικανότητες, όπως η άθροιση, η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι έμφυτες στον άνθρωπο. Ωστόσο, η αριθμητική απαιτεί επιπλέον ικανότητες, όπως η ομαδοποίηση, η σειροθέτηση, η σύζευξη, η μνήμη, η ανίχνευση, αλλά και ο συνδυασμός κατηγοριών, ο συμβολισμός, και, για πιο σύνθετες πράξεις, η μεταφορά και η γνωστική ανάμιξη. Ως μεταφορά δεν εννοείται, απλώς, η αντιστοίχιση των μαθηματικών εννοιών με οπτικοποιημένες καταστάσεις, αλλά ο τρόπος επιχειρηματολογίας για μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από μια άλλη, π.χ. η επίλυση ενός αλγεβρικού προβλήματος με γεωμετρικούς όρους. Η εννοιολογική μεταφορά περιγράφεται ως ένας μηχανισμός συνάρτησης μεταξύ διαφορετικών εννοιολογικών πεδίων, που επιτρέπει την επιχειρηματολογία για θέματα του ενός με αξιοποίηση της συμπερασματικής δομής του άλλου. Οι *θεμελιώδεις* μεταφορές επιτρέπουν την προβολή καθημερινών εμπειριών σε αφηρημένες έννοιες. Οι *συνδετικές* μεταφορές, αντίθετα, επιτρέπουν την αναπαράσταση αριθμητικών εννοιών με χωρικούς όρους.

Όσον αφορά τα μαθηματικά, υπάρχουν τέσσερα είδη μεταφορών:

1. Τα μαθηματικά ως μεταφορά συλλογής αντικειμένων: οι αριθμοί αντιστοιχούν (ως πληθικός αριθμός) σε συλλογές αντικειμένων που έχουν το ίδιο μέγεθος. Για παράδειγμα, το τέσσερα είναι μια συλλογή τεσσάρων αντικειμένων, για παράδειγμα, τεσσάρων μήλων.

2. Τα μαθηματικά ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων: οι αριθμοί αντιστοιχούν σε αντικείμενα που αποτελούνται από χωριστές μονάδες. Για παράδειγμα, το τέσσερα είναι ένα αντικείμενο δομημένο από τέσσερεις ίσες μονάδες, είναι 1 και 1 και 1 και 1 μονάδες.

3. Τα μαθηματικά ως μεταφορά μονάδων μέτρησης: οι αριθμοί είναι τμήματα που δομούνται από χωριστά τμήματα μονάδων. Το τέσσερα, για παράδειγμα, είναι ένα τμήμα που είναι αποτέλεσμα της διαδοχικής τοποθέτησης τεσσάρων τμημάτων μονάδων σε μια ευθεία

4. Τα μαθηματικά ως μεταφορά κίνησης πάνω σε ένα μονοπάτι: οι πράξεις είναι οι κινήσεις πάνω σε ένα μονοπάτι. Το τέσσερα, για παράδειγμα, είναι τέσσερα βήματα μακριά από την αρχή του μονοπατιού, το μηδέν.

Μια από τις πρώτες αριθμητικές έννοιες που αποκτάται από τα παιδιά είναι η συλλογή αντικειμένων, όπως παιχνίδια. Συσχετίσεις όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση μιας ποσότητας από μία άλλη οδηγούν σε νευρικές συνδέσεις μεταξύ αισθησιο-κινητικών χειρισμών, οι οποίες σχηματίζουν γνωστικές μεταφορές. Οι μεταφορές αυτές επιτρέπουν την αναπαράσταση φυσικών αντικειμένων με αριθμούς. Σταδιακά, η διαδικασία της γνωστικής ανάμιξης θα επεκτείνει τη μεταφορά αυτή και θα οδηγήσει στην απόκτηση πιο σύνθετων εννοιών, όπως ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Αργότερα, τα παιδιά αποκτούν γνωστικές μεταφορές που τους επιτρέπουν να κατανοήσουν έννοιες όπως το μηδέν, ενώ αντιλαμβάνονται την αριθμητική σαν μέσο κατασκευής αντικειμένων, και όχι, απλώς, συλλογής τους. Τελικά, η μεταφορά παίρνει τη μορφή κλίμακας σημείων και επιτρέπει την κίνηση επάνω σε μια διαδρομή που ενώνει δύο ή και περισσότερα σημεία.

Εδώ εξετάζεται το θέμα από πού προέρχονται οι Νόμοι της Αριθμητικής; Οι έμφυτες αριθμητικές ικανότητες εξυπηρετούν τη συλλογή και κατασκευή αντικειμένων, την κίνηση και το χειρισμό φυσικών αντικειμένων, μεταβλητές οι οποίες επεκτείνονται με τη χρήση μεταφορών, που σχηματίζουν ισομορφισμούς (συσχετίσεις), από τις οποίες προκύπτουν οι νόμοι των μαθηματικών. Επομένως, οι μαθηματικοί νόμοι, όπως και οι φυσικοί αριθμοί, είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού αθροισμάτων, των πρώιμων εμπειριών, των έμφυτων αριθμητικών ικανοτήτων και των θεμελιωδών μεταφορών. Με τη γενίκευση των συσχετίσεων αυτών αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο με αριθμούς και αριθμητικές σχέσεις, που υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς και πρέπει να ανακαλυφτούν από εμάς.

Κεφάλαιο 4ο: «The essential Piaget: An Interpretive Reference and Guide»- H. Grunber, J.J. Vonceche

Το βιβλίο αφορά την πρώτη ακριβή μελέτη του Piaget σχετικά με την αντίληψη των παιδιών για τη διατήρηση της ύλης, ενώ επιχειρείται μια σε βάθος μελέτη της απαρχής της έννοιας των αριθμών. Αφορά περισσότερο την ανάπτυξη της διατήρησης των αριθμητικών εννοιών, παρά τη διατήρηση φυσικών ποσοτήτων.

Σύμφωνα με τον Piaget, κάθε έννοια, είτε επιστημονική, είτε καθημερινή, προϋποθέτει μια σειρά από αρχές διατήρησης, είτε εσωτερικές, είτε εξωτερικές. Με την έννοια της διατήρησης, ο Piaget εννοεί τους λογικούς χειρισμούς με τους οποίους ένα υποκείμενο αντιλαμβάνεται ως σταθερά διάφορα μεγέθη και σχέσεις, παρά τις όποιες αντικαταστάσεις ή μετασχηματισμούς που μπορεί να υφίστανται. Η κατάκτηση της έννοιας της διατήρησης υπονοεί την ύπαρξη ενός σταθερού συστήματος αναφοράς, ανεξάρτητου από αντιληπτικές, αναπαραστατικές και λεκτικές πληροφορίες, και βαθιά ριζωμένου στην αντίληψη του υποκειμένου για τις δικές του πράξεις. Η διατήρηση αποτελεί απαραίτητη συνθήκη για κάθε λογική δραστηριότητα, συμπεριλαμβανομένης και της αριθμητικής σκέψης. Ένα άθροισμα γίνεται αντιληπτό μόνο εάν παραμένει αμετάβλητο, άσχετα με διάφορες αλλαγές που μπορεί να συμβαίνουν στις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που το αποτελούν. Η έννοια της διατήρησης δεν είναι έμφυτη, σύμφωνα με τον Piaget, αλλά δομείται από το παιδί κατά την περίοδο δόμησης των εννοιών της ποσότητας και του αριθμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά δεν αποκτούν πρώτα την έννοια της ποσότητας, και στη συνέχεια την έννοια της διατήρησης της ποσότητας. Οι δυο αυτές έννοιες αποκτώνται ταυτόχρονα.

Στα διάφορα πειράματα που διεξήγαγαν ο Piaget και οι συνεργάτες του, τα παιδιά κλήθηκαν να επιλύσουν μια σειρά από γνωστικά προβλήματα που περιλάμβαναν ποσότητες υγρών (που μεταφέρονται σε διάφορα δοχεία, διαφορετικού ύψους και διαμέτρου), σύνολα αντικειμένων κλπ. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών, η έννοια της σταθερής ποσότητας δεν φαίνεται να είναι συνεχής στα παιδιά, και η αντίληψη της διατήρησης δομείται σταδιακά μέσω ενός πνευματικού μηχανισμού. Οι προσπάθειες των παιδιών να επιλύσουν τα προβλήματα αυτά διέρχονταν συνήθως από ορισμένα στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο, ένα παιδί θεωρεί λογικό η ποσότητα ενός υγρού να ποικίλει, ανάλογα με το σχήμα και τις διαστάσεις του δοχείου στο οποίο μεταφέρεται. Στο δεύτερο στάδιο, που αποτελεί μια μεταβατική περίοδο, η έννοια της διατήρησης εμφανίζεται σταδιακά, αλλά όχι γενικευμένα, σε όλες τις περιπτώσεις. Στο τρίτο στάδιο, το παιδί έχει πλέον κατακτήσει την έννοια της διατήρησης, παρά τους όποιους μετασχηματισμούς των ποσοτήτων. Η κατάκτηση αυτή επιτρέπει την ανάπτυξη της έννοιας των αριθμών, και αποτελεί αποτέλεσμα της απόκτησης αυτού που ο Piaget ονόμασε «λογική σκέψη».

Αναλυτικότερα, τα παιδιά που βρίσκονται στο πρώτο στάδιο, αυτό της απουσίας της διατήρησης, δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν την ποσότητα ως σύνολο, καθώς υπάρχει έλλειψη συντονισμού μεταξύ των ποσοτικών σχέσεων που εμπλέκονται στην αντίληψη και μπορούν να αντιληφθούν μόνο μια διάσταση της ποσότητας κάθε φορά. Αυτή η έλλειψη συνοχής, εξηγεί τόσο τις διαρκείς αντιφάσεις στις εκτιμήσεις που κάνουν τα παιδιά, όσο και την απουσία ενός κριτηρίου για την έννοια της διατήρησης. Τα ευρήματα αυτά, που προέκυψαν από τα πειράματα του Piaget με τα υγρά, επιβεβαιώθηκαν και από άλλα πειράματα, στα οποία χρησιμοποιήθηκαν μετρήσιμα με αριθμούς υλικά, όπως χάντρες, που μπορούν να γίνουν αντιληπτά ως χωριστές μονάδες. Και πάλι, τα παιδιά του πρώτου σταδίου δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν τη διατήρηση της ποσότητας των υλικών, καθώς δεν έχουν κατακτήσει την έννοια της ένα-προς-ένα αναλογίας, η οποία είναι βασική για τη μαθηματική σκέψη.

Στο δεύτερο στάδιο, τα παιδιά κάνουν συγκρίσεις μεταξύ των ποσοτήτων που παρουσιάζονται, και προτείνουν λύσεις, σαν αποτέλεσμα γνωστικών συγκρούσεων. Συγκεκριμένα, ενώ αντιλαμβάνονται ότι η ποσότητα των χρησιμοποιούμενων υλικών είναι κάθε φορά η ίδια, η αντίληψή τους αυτή έρχεται σε αντίθεση με την αλλαγή που αυτή υφίσταται αν μεταβληθεί το ύψος, το μήκος ή το φάρδος των αντικειμένων που περιέχουν τα υλικά. Επομένως τα παιδιά του σταδίου αυτού δεν αντιλαμβάνονται τη διατήρηση της ισότητας μεταξύ των ποσοτήτων.

Στο τρίτο στάδιο, τα παιδιά δείχνουν να έχουν κατανοήσει την έννοια της διατήρησης. Τα παιδιά κάνουν συγκρίσεις των ποσοτήτων με αναλογία ένα προς ένα, και δείχνουν να έχουν κατανοήσει τη διατήρηση της ισότητας. Ο συντονισμός των σχέσεων είναι συνεχής και αυτόματος, και δεν δομείται, πλέον, βήμα-βήμα, όπως συμβαίνει με τα παιδιά που βρίσκονται σε προηγούμενα στάδια. Η σύγκρουση μεταξύ της αναλογίας ένα προς ένα και της αντίληψης δεν υφίσταται πλέον, καθώς ο πνευματικός μηχανισμός επιτρέπει τη δόμηση κάθε μιας από τις έννοιες αυτές ως αυτόνομη και ανεξάρτητη. Η επιτυχία του τρίτου σταδίου έγκειται στη μετάβαση από την ποιοτική στην αριθμητική αλληλουχία. Συγκεκριμένα, η διάκριση των διαφόρων στοιχείων ανάλογα με τη σειρά που εμφανίζονται οδηγεί στην απόκτηση της έννοιας της διατήρησης, η οποία είναι κρίσιμη για τη μετέπειτα απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών.

Ο Lay διεξήγαγε μια λεπτομερή μελέτη του τρόπου με τον οποίο διάφορα σύνολα τριών και πάνω αντικειμένων που σχηματίζουν τρίγωνα, τετράγωνα κλπ. γίνονται διακριτά από τα παιδιά, από τη σκοπιά της αντίληψης των αριθμών. Διαπιστώθηκε ότι ο αριθμός τέσσερα, για παράδειγμα, αναγνωρίζεται πιο εύκολα αν τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα στις τέσσερεις γωνίες ενός τετραγώνου, παρά σε τυχαίες θέσεις. Εξετάζοντας την αναπαραγωγή των σχημάτων, καθιστά δυνατή τη μελέτη του μηχανισμού της αντιστοιχίας. Ο μηχανισμός αυτός δομείται σε στάδια, που αντιστοιχούν σε αυτά της απόκτησης της έννοιας της διατήρησης.

Στο πρώτο στάδιο, της *σφαιρικής σύγκρισης*, τα παιδιά δεν αισθάνονται την ανάγκη να αξιολογήσουν τις ποσότητες που χρησιμοποιούνται στα πειράματα, καθώς δεν έχουν σαφή αντίληψη των αριθμών. Η μόνη σύγκριση που είναι σε θέση να κάνουν μεταξύ των ποσοτήτων που τους παρουσιάζονται έχει να κάνει με έννοιες απλές και γενικές, όπως «περισσότερο» και «λιγότερο». Η σύγκριση αυτή είναι αντιληπτική και διαισθητική, καθώς τα παιδιά δεν είναι σε θέση να απομονώσουν και να αναλύσουν τα διάφορα στοιχεία και δεν αντιλαμβάνονται την έννοια της αντιστρεψιμότητας.

Στο δεύτερο στάδιο, της *διαισθητικής αντιστοιχίας*, οι συγκρίσεις των παιδιών βασίζονται στην αντίληψη της ποιότητας των στοιχείων που παρουσιάζονται, δηλαδή σε ιδιότητες όπως το χρώμα. Επομένως, αν και τα παιδιά είναι πλέον σε θέση να κάνουν συγκρίσεις, οι συγκρίσεις αυτές είναι περισσότερο αντιληπτικές, παρά αριθμητικές, και αφορούν τα μέρη των διάφορων συνόλων από αντικείμενα που τους παρουσιάζονται, παρά την ολότητά τους. Η αντιστοιχία των παιδιών είναι ένα-προς ένα, αλλά βασίζεται σε συγκεκριμένες και μεμονωμένες ιδιότητες των αντικειμένων.

Στο τρίτο στάδιο, τα παιδιά κατακτούν τη *λειτουργική αντιστοιχία*, πραγματοποιούν, δηλαδή, «πνευματικές» συγκρίσεις, καθώς αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των διάφορων ποσοτήτων, αλλά και την αντιστρεψιμότητα τους. Στο στάδιο αυτό, τα παιδιά έχουν πλέον κατακτήσει την έννοια της διατήρησης. Τα διάφορα αντικείμενα που απαρτίζουν τις διάφορες ποσότητες μετατρέπονται σε μονάδες, ίσες μεταξύ τους, και η αντιστοιχία αποτελεί εφαρμογή της ίδιας σειράς αρίθμησης σε δύο σύνολα ίσων μονάδων. Η εξίσωση των διαφορών (για παράδειγμα, η πιθανή αύξηση του μήκους μιας ποσότητας αντισταθμίζεται από την αύξηση της πυκνότητάς της) οδηγεί στην αντίληψη της έννοιας της μονάδας, και, κατά συνέπεια, του αριθμού.

Σταδιακά, και με τον ίδιο τρόπο, τα παιδιά είναι ικανά να κατακτήσουν πλήρως τις αριθμητικές έννοιες, με πρώτες αυτές της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Έχοντας κατακτήσει τις παραπάνω έννοιες, τα παιδιά είναι σε θέση να ενοποιήσουν μέρη σε σύνολα, να διαιρέσουν σύνολα σε μέρη, να συντονίσουν ισότητες και να πολλαπλασιάσουν σχέσεις.

Κεφάλαιο 5^{o}: «The Mathematical Brain»- B.Butterworth

Το βιβλίο του Brain Butterworth τίτλο «The mathematical brain» είναι μια απόπειρα να μας εξηγήσει ότι όλοι εμείς σκεφτόμαστε τον κόσμο από την σκοπιά των αριθμών καθώς και για τις έμφυτες μαθηματικές ικανότητες που διαθέτει ο καθένας από εμάς είτε τις έχει δείχνει είτε όχι. Επίσης στο παρόν βιβλίο γίνεται λόγος για τον ανθρώπινο εγκέφαλο και του βρίσκονται οι μαθηματικές ικανότητες. Τέλος γίνεται αναφορά στις βασικές λειτουργίες των Αριθμητικών Μονάδων.

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στην σκέψη με αριθμούς. Η σημαντικότερη, ίσως, ικανότητα που οδήγησε το ανθρώπινο είδος από τα σπήλαια στις σύγχρονες μεγαλουπόλεις και την επιστήμη, είναι η χρήση μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, η ικανότητα αυτή είναι και η λιγότερο κατανοητή. Στο βιβλίο αυτό γίνεται μια απόπειρα εξήγησης του γιατί ο άνθρωπος σκέφτεται τον κόσμο με αριθμητικούς όρους.

Οι αριθμοί χρησιμοποιούνται στην καθημερινή μας ρουτίνα για να μετρήσουμε, να μάθουμε την ώρα, να αγοράσουμε και να πουλήσουμε, να βαθμολογήσουμε, να σημειώσουμε διευθύνσεις, να τηλεφωνήσουμε, να κάνουμε τραπεζικές συναλλαγές, να πούμε το ύψος, το βάρος, την ηλικία μας κλπ. Επιπλέον, οι αριθμοί είναι αυτοί που διαμορφώνουν τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο και που οδήγησαν στη διατύπωση θεωριών που εξηγούν τα καθημερινά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα γύρω μας. Το ερώτημα που προκύπτει, το πώς, δηλαδή, συνέβη αυτό, έχει γίνει απόπειρα να εξηγηθεί με διάφορους τρόπους.

Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι κάποιος άνθρωπος στην αρχαιότητα (ένας αρχαίος Αϊνστάιν) εφηύρε τους αριθμούς και τους διέδωσε σε άλλους ανθρώπους, και αυτοί με τη σειρά τους σε άλλους, ώσπου διαδόθηκαν σε όλο τον κόσμο, όπως συνέβη με το αλφάβητο. Μία δεύτερη ερμηνεία είναι ότι οι αριθμοί αποτελούν μια εύκολη εφεύρεση, την οποία έκαναν διάφοροι άνθρωποι ανά τον κόσμο, ενώ μια τρίτη υποστηρίζει ότι η ιδέα των αριθμών είναι έμφυτη στην ανθρώπινη φύση. Ωστόσο, οι μαθηματικές έννοιες είναι αρκετά αφηρημένες, και η εκμάθησή τους απαιτεί πολύ χρόνο.

Σύμφωνα με τον J. Fodor, οι γνωστικές λειτουργίες μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: τις γνωστικές μονάδες και τις κεντρικές επεξεργασίες. Οι γνωστικές μονάδες εξάγουν αυτόματα μόνο έναν τύπο πληροφοριών από τις αισθήσεις (χρώμα, σχήμα κλπ), και είναι έμφυτες στον οργανισμό. Οι κεντρικές επεξεργασίες, αντίθετα, χρησιμοποιούνται επιλεκτικά από τον άνθρωπο, και είναι αποτέλεσμα μάθησης. Για τον Fodor, κεντρικές επεξεργασίες είναι η μνήμη, η λογική, αλλά και η αριθμητική ικανότητα.

Ωστόσο, το σύνολο των ανθρώπινων γονιδίων περιλαμβάνει πληροφορίες για τη δόμηση εξειδικευμένων εγκεφαλικών κυκλωμάτων, που ονομάζονται Αριθμητικές Μονάδες. Σκοπός τους είναι η κατηγοριοποίηση του κόσμου σε πληθικούς αριθμούς (ο αριθμός των αντικειμένων που ανήκουν σε ένα σύνολο). Η ικανότητα αυτή, αν και έμφυτη, είναι δυνατόν να επεκταθεί με την εκμάθηση και χρήση πολιτισμικών εργαλείων, όπως το μέτρημα με τα δάχτυλα, αλλά και τα διάφορα μαθηματικά θεωρήματα, ενώ ευνοείται από την καλή διδασκαλία, την υψηλή νοημοσύνη, τη σκληρή δουλειά και την άριστη μνήμη.

Αν η ικανότητα αυτή είναι όντως έμφυτη, τότε θα πρέπει όλοι οι άνθρωποι να επιτυγχάνουν σε έργα που βασίζονται στην κατηγοριοποίηση του κόσμου με αριθμούς, είτε την έχουν διδαχτεί, είτε όχι. Επιπλέον, θα πρέπει να υπάρχουν αποδείξεις της ύπαρξης αυτής της ικανότητας ακόμη και στα βρέφη. Τρίτον, τα κυκλώματα που δημιουργούν την ικανότητα αυτή θα πρέπει να μπορούν να εντοπιστούν στον εγκέφαλο. Ακόμη, θα πρέπει να τηρούνται τα κριτήρια του Fodor για τις γνωστικές μονάδες: ταχύτατοι και αυτόματοι χειρισμοί αριθμών. Πέμπτον, θα πρέπει να εξηγηθεί το γεγονός ότι κάποιοι άνθρωποι είναι πολύ καλύτεροι στα μαθηματικά από κάποιους άλλους. Έκτον, αν τα εγκεφαλικά αυτά κυκλώματα είναι κληρονομικά στο ανθρώπινο είδος, σημαίνει ότι και οι πρόγονοί μας ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά το ίδιο με εμάς. Επίσης, τι προτείνει η θεωρία αυτή για τη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών και εν γένει του εκπαιδευτικού συστήματος; Και τέλος, γιατί κάποιοι αριθμοί θεωρούνται περισσότερο τυχεροί ή απορρίπτονται από τη θρησκεία κλπ;

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται η υπόθεση του Μαθηματικού Μυαλού, σύμφωνα με την οποία όλοι οι άνθρωποι διαθέτουν έμφυτες Αριθμητικές Μονάδες, είτε τις έχουν διδαχτεί, είτε όχι.

Για κάθε δεξιότητα, υπήρχε μια περίοδος που κανένας δεν την κατείχε, και κάποιος έπρεπε να την ανακαλύψει ή να την εφεύρει. Για την ύπαρξη της μαθηματικής ικανότητας υπάρχουν οι εξής αποδείξεις: Πρώτον, η γλώσσα: αν μια γλώσσα περιλαμβάνει λέξεις που αντιστοιχούν σε αριθμούς, σημαίνει ότι τα άτομα που τη μιλούν γνωρίζουν αριθμητική, χωρίς, ωστόσο, η απουσία τέτοιων λέξεων να σημαίνει και απουσία μαθηματικής ικανότητας. Δεύτερον, τα διάφορα σύμβολα που αναπαριστούν μορφές αρίθμησης και έχουν βρεθεί επάνω σε εργαλεία, κόκκαλα και τοιχογραφίες. Όπως έχει προταθεί, τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιήθηκαν αρχικά στο εμπόριο, πριν ακόμη ανακαλυφτεί το αλφάβητο. Από αναρίθμητες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, προκύπτει ότι τα αριθμητικά σύμβολα πρωτοεμφανίστηκαν στους Σουμέριους και τους Βαβυλώνιους, στη συνέχεια στους

Αιγύπτιους, τους Έλληνες και τους Κινέζους, για να καταλήξουν στη σύγχρονη Ευρώπη, την Αμερική, και ολόκληρο τον κόσμο.

Τα περισσότερα συστήματα αρίθμησης που έχουν βρεθεί ανά τον κόσμο και τους αιώνες χρησιμοποιούν μία *βάση*, συνήθως το 5 ή το 10, η οποία προφανώς αντιστοιχεί στα δάχτυλα του ανθρώπινου σώματος. Επίσης, διαθέτουν ξεχωριστές λέξεις για τους πρώτους 10 ή είκοσι αριθμούς, και οι υπόλοιπες προκύπτουν από το συνδυασμό αυτών, καθώς δεν είναι πρακτικό να υπάρχει ξεχωριστή λέξη για κάθε αριθμό. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν την άποψη ότι η μαθηματική ικανότητα είναι έμφυτη στο ανθρώπινο είδος.

Το κεφάλαιο τρία πραγματεύεται το γεγονός ότι πολλές ικανότητες είναι έμφυτες στον ανθρώπινο οργανισμό επιβεβαιώνεται από έρευνες, οι οποίες έχουν αποδείξει ότι ακόμα και τα έμβρυα είναι σε θέση να διακρίνουν χρώματα, ήχους, και, σε λίγες μόλις εβδομάδες από τη γέννησή τους, να εστιάσουν το βλέμμα τους και να δουν καθαρά. Επιπλέον, είναι σε θέση να κατηγοριοποιήσουν τον κόσμο με βάση αντικείμενα που παρουσιάζονται με μια χρονική συνέχεια (αν ένα αντικείμενο εξαφανιστεί από το οπτικό τους πεδίο, εκπλήσσονται). Επιπλέον, δείχνουν να κατανοούν ότι ένα αντικείμενο δεν μπορεί να περάσει μέσα από ένα άλλο, χωρίς να το έχουν διδαχτεί.

Σύμφωνα με τον Piaget, η αριθμητική ικανότητα είναι έμφυτη και συνδέεται με την ανάπτυξη της ικανότητας για λογική και αφηρημένη σκέψη, η οποία αποκτάται στην πλήρη της μορφή γύρω στην εφηβεία. Οι εμπειριστές, αντίστοιχα, υποστηρίζουν ότι όλες οι ιδέες και έννοιες προέρχονται από αισθητηριακές εμπειρίες, και οι αφηρημένες έννοιες δομούνται με βάση γενικεύσεις συγκεκριμένων εμπειριών. Με την έννοια αυτή, τα παιδιά αποκτούν αριθμητικές ικανότητες μέσα από το χειρισμό αντικειμένων και τη μνημόνευση των αποτελεσμάτων που έχουν οι διάφορες μεταβολές στην ποσότητα των αντικειμένων αυτών. Από πληθώρα ερευνών, ωστόσο, προκύπτει ότι ακόμα και βρέφη μιας εβδομάδας είναι ικανά να οργανώσουν τον κόσμο με βάση πληθικούς αριθμούς, ενώ βρέφη λίγων εβδομάδων είναι ικανά να προσθέτουν και να αφαιρούν.

Από πειράματα σε βρέφη μόλις μιας ημέρας βρέθηκε ότι κοιτούν περισσότερη ώρα αντικείμενα που είναι νέα για αυτά. Αν, ωστόσο, τα ίδια αντικείμενα εξακολουθούν να παρουσιάζονται συνέχεια, τα βρέφη χάνουν το ενδιαφέρον τους, καθώς εξοικειώνονται με τα αντικείμενα αυτά. Ένα νέο αντικείμενο που εξάπτει εκ νέου το ενδιαφέρον τους μπορεί να είναι ένας διαφορετικός ήχος σε μια σειρά επαναλήψεων του ίδιου ήχου, ένα νέο χρώμα, σχήμα η ένας νέος αριθμός μαύρων κουκίδων σε ένα λευκό χαρτί. Αν, για παράδειγμα, στα βρέφη παρουσιάζονται διαρκώς λευκές κάρτες με δύο μαύρες κουκίδες, η παρουσίαση μιας λευκής κάρτας με τρεις μαύρες κουκίδες προκαλεί εκ νέου το ενδιαφέρον τους. Το ίδιο συμβαίνει και αν οι κάρτες αναπαριστούν δύο και στη συνέχεια τρία αντικείμενα, έστω και διαφορετικά μεταξύ τους ή αν αναπαριστούν αρχικά τρία αντικείμενα, και στη συνέχεια δύο. Τα πειράματα αυτά αποδεικνύουν την έμφυτη ικανότητα κατηγοριοποίησης συνόλων.

Η ικανότητα αυτή των βρεφών δεν περιλαμβάνει μόνο σύνολα αντικειμένων, αλλά και πράξεις. Συγκεκριμένα, τα βρέφη κοιτούν με περισσότερο ενδιαφέρον μια μαριονέτα που ξαφνικά κάνει τρία άλματα, ενώ μέχρι εκείνη τη στιγμή έκανε δύο, σε τακτά χρονικά διαστήματα (ή το αντίθετο). Το ίδιο συμβαίνει και αν μια από τις δύο μαριονέτες που χρησιμοποιούνται σε άλλα πειράματα εξαφανιστεί ή εμφανιστεί ξαφνικά στη σκηνή, χωρίς τα βρέφη να έχουν δει το χέρι του ερευνητή. Αντιθέτως, αν δουν τον ερευνητή να παίρνει τη μια μαριονέτα, αναμένουν ότι την επόμενη φορά που θα σηκωθεί η αυλαία θα δουν μόνο μια μαριονέτα. Επιπλέον, άλλα πειράματα κατέδειξαν ότι η ικανότητα κατηγοριοποίησης που διαθέτουν τα βρέφη συνοδεύεται από την ικανότητα αποθήκευσης των κατηγοριών στη βραχύχρονη μνήμη και ανάκλησής τους έπειτα από κάποιες ημέρες.

Οι έμφυτες αυτές ικανότητες πρόσθεσης και αφαίρεσης καλλιεργούνται με τη διδασκαλία και τα παιδιά μαθαίνουν, σταδιακά να κατανοούν και να χρησιμοποιούν τις συμβολικές τους αναπαραστάσεις. Αρχικά, καλούνται να μάθουν τις λέξεις για τους αριθμούς που υπάρχουν στη γλώσσα τους. Στη συνέχεια, να αντιστοιχίσουν κάθε λέξη με έναν και μόνο αριθμό. Σταδιακά, θα πρέπει να μάθουν να εφαρμόζουν τους αριθμούς σε αντικείμενα (π.χ. από το «τρία», να μεταβούν στο «τρία παιχνίδια»). Όπως έχει παρατηρηθεί, το πρώτο διάστημα που μαθαίνουν τα παιδιά να μετρούν συνηθίζουν να δείχνουν τα αντικείμενα ή τα πρόσωπα, ενώ ταυτόχρονα μετρούν. Η ικανότητα να κατανοήσουν ότι ο τελευταίος αριθμός του μετρήματος δίνει και το συνολικό αριθμό των αντικειμένων αποκτάται αργότερα, όπως και η ικανότητα να κατανοήσουν ότι δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα μετρήσουν τα αντικείμενα (ποιο αντικείμενο θα μετρήσουν πρώτο, δεύτερο κλπ.). Επιπλέον, τα μικρά παιδιά εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις σε έργα με μικρότερους αριθμούς, καθώς σε αυτούς έχουν, συνήθως, εξασκηθεί.

Ένα ερώτημα που τίθεται είναι γιατί τα αγόρια παρουσιάζουν, συνήθως, καλύτερες επιδόσεις στα μαθηματικά από ότι τα κορίτσια, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο σε άλλα μαθήματα. Η άποψη αυτή είναι διαδεδομένη από τα αρχαία χρόνια, παρά την ύπαρξη μεγάλων γυναικών μαθηματικών, τόσο στην αρχαιότητα, όσο και σε σύγχρονες εποχές. Ωστόσο, η πιο λογική εξήγηση για αυτό είναι το γεγονός ότι σε όλη τη διάρκεια της Ιστορίας οι γυναίκες απολάμβαναν σημαντικά λιγότερες ευκαιρίες εκπαίδευσης, καθώς στα περισσότερα μέρη του κόσμου αναμενόταν από αυτές να γίνουν, απλώς, νοικοκυρές και μητέρες. Επομένως, οι έμφυτες ικανότητες που διαθέτουν –στον ίδιο βαθμό με τους άντρες- δεν ενισχύθηκαν από πολιτισμικά εργαλεία, με αποτέλεσμα να μείνουν ακαλλιέργητες. Απόδειξη για την απουσία βιολογικών διαφορών μεταξύ ανδρών και γυναικών ως προς τις Αριθμητικές Μονάδες αποτελεί η απουσία διαφορών ως προς το γενικότερο δείκτη νοημοσύνης μεταξύ των δύο φύλων.

Όπως αναφέρθηκε, αν η μαθηματική ικανότητα είναι έμφυτη και κληρονομική, θα πρέπει να εντοπίζεται και στους βιολογικούς μας προγόνους. Όπως αποδείχτηκε, ακόμα και οι προϊστορικοί άνθρωποι διέθεταν μαθηματικές ικανότητες και συστήματα αρίθμησης. Από πληθώρα πειραμάτων, κάποια από τα οποία ομοιάζουν με αυτά που γίνονται σε βρέφη, προκύπτει ότι ακόμα και οι πρόγονοί μας από το ζωικό βασίλειο (κυρίως οι πίθηκοι, αλλά και τα δελφίνια, και κάποια είδη πουλιών) διαθέτουν κάποιες στοιχειώδεις μαθηματικές ικανότητες, τις οποίες, μάλιστα, είναι δυνατόν να επεκτείνουν, με κατάλληλη εκπαίδευση.

Το κεφάλαιο τέσσερα αναφέρει ότι οι περισσότεροι, άνθρωποι, όπως και τα βρέφη, αλλά και κάποια είδη ζώων, είναι ικανοί να αθροίσουν οπτικά, μικρά σύνολα αντικειμένων, χωρίς να χρειαστεί να μετρήσουν. Αυτή η έμφυτη ικανότητα, ωστόσο, είναι απούσα από κάποιους ανθρώπους. Για παράδειγμα, ασθενείς που έχουν υποστεί εγκεφαλικό επεισόδιο παρουσιάζουν βλάβη στον αριστερό λοβό του εγκεφάλου, με αποτέλεσμα να μη θυμούνται τις ημέρες της εβδομάδας, την ηλικία, τον αριθμό του τηλεφώνου τους κλπ.

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι οργανωμένος σε διαφορετικές περιοχές, με διαφορετική λειτουργία (μαθηματικές ικανότητες, λεκτικές ικανότητες, μνήμη, λογική κλπ). Προκειμένου να εντοπιστεί η λειτουργία κάθε περιοχής, ερευνώνται ασθενείς που δεν μπορούν να επιτελέσουν συγκεκριμένες λειτουργίες. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για κάθε ικανότητα υπάρχουν άνθρωποι που υστερούν σε αυτή, αλλά είναι πολύ καλοί στα μαθηματικά, αλλά και το αντίστροφο. Επιπλέον, η μαθηματική ικανότητα φαίνεται να είναι εγκατεστημένη στον αριστερό λοβό του εγκεφάλου.

Το ερώτημα που τίθεται είναι για ποιο λόγο η μαθηματική ικανότητα βρίσκεται στη συγκεκριμένη αυτή περιοχή του εγκεφάλου.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρει ότι ο οπτικός φλοιός του ανθρώπου συνδέεται με το όργανο του ματιού, το οποίο ανιχνεύει τις οπτικές πληροφορίες του περιβάλλοντος. Όπως αναφέρθηκε, ο άνθρωπος είναι ικανός να υπολογίσει οπτικά σύνολα, χωρίς να χρειαστεί να μετρήσει. Ωστόσο, μπορεί να μετρήσει αντικείμενα που δεν παρουσιάζονται οπτικά. Το γεγονός ότι η δυσλειτουργία ενός εγκεφαλικού λοβού προκαλεί προβλήματα, εκτός από την αριθμητική ικανότητα, και στον προσανατολισμό στο χώρο και την οπτική αναπαράσταση του σώματος μας, προκαλεί το ερώτημα γιατί η μαθηματική ικανότητα βρίσκεται στον αριστερό λοβό και συνδέεται με αυτές τις λειτουργίες.

Παρόλο που λίγοι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τους αριθμούς με οπτικές αναπαραστάσεις, οι περισσότεροι μαθαίνουν να μετρούν με τα δάχτυλα, τα οποία αναλογούν ένα προς ένα στους αριθμούς 1 έως 10. Μάλιστα, χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους αυθόρμητα και σχηματίζουν δικά τους συστήματα μέτρησης, χωρίς να τα έχουν διδαχτεί. Επιπλέον, ακόμα και στην ενήλικη ζωή, πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να δείχνουν με το δάχτυλο ή να ακουμπούν αντικείμενα που πρόκειται να μετρήσουν. Επομένως, η αναπαράσταση πληθικών αριθμών στον εγκέφαλο είναι πιθανόν να συνδέεται με την οπτική αναπαράσταση των δαχτύλων.

Όπως γνωρίζουμε, η εξάσκηση μιας δεξιότητας προκαλεί ανάλογη αύξηση των συνάψεων μεταξύ των κυττάρων στην αντίστοιχη περιοχή του εγκεφάλου, ενώ όταν μια εγκεφαλική περιοχή δε χρησιμοποιείται συχνά, ατροφεί. Τα ανθρώπινα δάχτυλα χρησιμοποιούνται για την οπτική αναπαράσταση των αριθμών σε όλο τον κόσμο, ήδη από χιλιάδες χρόνια πριν. Σύμφωνα με έρευνες, η συχνή χρήση των δαχτύλων για το μέτρημα (κυρίως κατά την παιδική ηλικία) αυξάνει, το μέγεθος, τη δομή και τη λειτουργία των περιοχών του εγκεφάλου στον αριστερό λοβό, και, κατά συνέπεια, τη μαθηματική ικανότητα. Επιπλέον, τουλάχιστον πέντε εγκεφαλικές περιοχές εμπλέκονται στην αναπαράσταση των αριθμών με τα δάχτυλα. Ακόμη, τυφλά άτομα που διαβάζουν με το σύστημα Braille εμφανίζουν πολύ περισσότερα εγκεφαλικά κύτταρα τα οποία αναπαριστούν το δάχτυλο που χρησιμοποιούν κατά την ανάγνωση, σε σχέση με τα κύτταρα που αναπαριστούν τα υπόλοιπα δάχτυλα. Η αναπαράσταση αυτή ομοιάζει με αυτές των βλεπόντων ατόμων.

Το γεγονός αυτό εξηγεί γιατί η μαθηματική ικανότητα βρίσκεται στον αριστερό λοβό: επειδή εκεί βρίσκονται οι αναπαραστάσεις των δαχτύλων. Επομένως, βλάβη στον αριστερό λοβό επηρεάζει και τα δύο. Αυτό συμβαίνει γιατί πλήττεται η ικανότητα ενσωμάτωσης των αναπαραστάσεων των αριθμών στις εγκεφαλικές αναπαραστάσεις των δαχτύλων και των χεριών, καθώς οι αριθμοί δεν μπορούν να αναπαρασταθούν μόνοι τους.

Σύμφωνα με επιστημονικά δεδομένα, για τα περισσότερα παιδιά, η νοητική αναπαράσταση της σειράς των αριθμών έχει τη μορφή μιας γραμμής, η οποία έχει, συνήθως, φορά από αριστερά προς τα δεξιά ή από κάτω προς τα πάνω, ακόμη κι αν όταν σκέφτονται τους αριθμούς δεν φέρνουν στο μυαλό τους την εικόνα μιας τέτοιας γραμμής ή σκάλας. Η αναπαράσταση αυτή παραμένει μέχρι και την ενήλικη ζωή. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί απόρροια πολιτισμικών επιρροών, καθώς τα άτομα που έχουν μάθει να διαβάζουν από δεξιά προς τα αριστερά εμφανίζουν αυτή τη νοητική γραμμή αριθμών με φορά από δεξιά προς τα αριστερά. Επομένως, η εκμάθηση των αριθμών φαίνεται να συνδέεται με την εκμάθηση της γλώσσας, της ανάγνωσης και της γραφής, οι οποίες συνδέονται με την αναπαράσταση του χώρου.

Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται οι βασικές λειτουργίες των Αριθμητικών Μονάδων είναι να κατηγοριοποιούν τον κόσμο σε πληθικούς αριθμούς και να ταξινομούν τους αριθμούς αυτούς ανάλογα με το μέγεθος. Σύμφωνα με τον Fodor, θα πρέπει να μπορούν να λειτουργούν γρήγορα, αυτόματα και με συγκεκριμένο τρόπο, να χειρίζονται, δηλαδή, μόνο έναν τύπο δεδομένων κάθε φορά. Επιπλέον, θα πρέπει να αποτελείται από νευρικά δίκτυα, τα οποία είναι έμφυτα.

Από πειράματα που έχουν διεξαχθεί, στα οποία ζητείται από τα υποκείμενα να συγκρίνουν αριθμούς μεταξύ τους, έχει βρεθεί ότι όσο μεγαλύτερη απόσταση έχουν δύο αριθμοί, τόσο γρηγορότερα τα υποκείμενα απαντούν. Επίσης, σε πειράματα στα οποία ζητείται από τα υποκείμενα να συγκρίνουν δύο αριθμούς αφενός σε αριθμητικό και αφετέρου σε φυσικό μέγεθος (ο ένας αριθμός είναι γραμμένος με μεγαλύτερα γράμματα –συνήθως ο μεγαλύτερος αριθμητικά), τα υποκείμενα απαντούν με μεγαλύτερη ευκολία στην πρώτη εκδοχή. Επομένως, φαίνεται πως τα αριθμητικά μεγέθη ενεργοποιούνται και συγκρίνονται αυτόματα στον εγκέφαλο, αρκετά γρήγορα, ώστε να προληφθεί η σύγκριση των φυσικών μεγεθών των αριθμών. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται ασυνείδητα, αλλά είναι αποτέλεσμα μάθησης.

Όταν τα παραπάνω πειράματα πραγματοποιούνται σε παιδιά, η σύγκριση των φυσικών μεγεθών των αριθμών συμβαίνει πιο γρήγορα από αυτή των αριθμητικών. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι είναι τόσο δύσκολο για τον εγκέφαλο να μην επεξεργαστεί το αριθμητικό μέγεθος των αριθμών, όσο δύσκολο του είναι να μην επεξεργαστεί το φυσικό τους μέγεθος. Ο εγκέφαλος είναι προγραμματισμένος με τέτοιο τρόπο, ώστε να εξάγει τέτοιου είδους πληροφορίες από το περιβάλλον, είτε τις χρειαζόμαστε, είτε όχι. Άτομα με προβλήματα όπως η δυσαριθμησία, είναι ικανά να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τα διάφορα αριθμητικά σύνολα, χωρίς, ωστόσο, να μπορούν να αντιληφθούν το νόημά τους. Αυτό συμβαίνει λόγω της μη ενεργοποίησης των Αριθμητικών Μονάδων τους.

Στο κεφάλαιο επτά το βασικό ερώτημα που απασχολεί ακόμα και σήμερα τους ψυχολόγους (και εν γένει τους επιστήμονες) είναι το αν οι διάφορες ικανότητες που διαθέτει ο άνθρωπος, μεταξύ των οποίων και οι μαθηματικές, είναι αποτέλεσμα της φύσης ή της ανατροφής. Από αυτό το ερώτημα πηγάζει και το ερώτημα γιατί κάποιοι άνθρωποι είναι καλύτεροι στα μαθηματικά από κάποιους άλλους.

Όπως έχει υποστηριχθεί, οι Αριθμητικές Μονάδες είναι έμφυτες στον άνθρωπο, και επεκτείνονται με τη μάθηση. Δεν υπάρχει γενετική διαφορά όσον αφορά τη μαθηματική ικανότητα συγκεκριμένα. Ωστόσο, τα άτομα με καλύτερες μαθηματικές ικανότητες είναι πιθανόν να έχουν γεννηθεί με μεγαλύτερη χωρητικότητα εγκεφάλου από άλλους ανθρώπους, αλλά όχι με υψηλότερη νοημοσύνη.

Η επίδοση σε ικανότητες όπως τα μαθηματικά είναι πιθανόν να επηρεάζεται από τις περιβαλλοντικές συνθήκες, τη διατροφή, το κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο, την προσπάθεια, και άλλους παρόμοιους παράγοντες. Η μαθηματική ικανότητα, επομένως, είναι πολύ πιθανόν να επηρεάζεται από πολιτισμικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, τα άτομα που έχουν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά συνήθως «ακούν» αριθμούς στο μυαλό τους καθώς υπολογίζουν, σε αντίθεση με αυτούς που «βλέπουν» αριθμούς. Επομένως, η παροχή πολιτισμικών ερεθισμάτων είναι πιθανόν να ενεργοποιήσει ή να βελτιώσει τις μαθηματικές ικανότητες ενός ανθρώπου. Ακόμα και το γεγονός ότι οι μονοζυγωτικοί δίδυμοι τείνουν να έχουν παρόμοιες μαθηματικές ικανότητες μπορεί να εξηγηθεί από την ταυτόχρονη παροχή ερεθισμάτων και ενίσχυσης από το οικογενειακό και πολιτισμικό πλαίσιο.

Καθώς η μαθηματική ικανότητα αποκτάται προοδευτικά και αθροιστικά, ελλείμματα στην ανάπτυξη βασικών εννοιών, π.χ. λόγω αποτυχίας που συνοδεύτηκε από άσχημες αντιδράσεις των εκπαιδευτικών, των γονέων ή των συμμαθητών, είναι πιθανόν να εμποδίσουν την περαιτέρω απόκτηση σύνθετων εννοιών. Τέτοια βιώματα μειώνουν την αυτοπεποίθηση και την ικανοποίηση από την επίλυση μαθηματικών έργων, ενώ αυξάνουν το άγχος. Σαν αποτέλεσμα, μειώνεται η προθυμία εξάσκησης των μαθηματικών δεξιοτήτων, με αποτέλεσμα η επίδοση να μην φτάνει το επιθυμητό επίπεδο.

Σε άτομα με προβλήματα όπως η δυσαριθμησία, τα γονίδια που έχουν κληρονομήσει δεν περιέχουν τις κατάλληλες οδηγίες για τη διαμόρφωση του τμήματος του εγκεφάλου που εμπεριέχει τις μαθηματικές ικανότητες. Αν οι Αριθμητικές Μονάδες δεν δομηθούν ή αποτύχουν κατά τις κρίσιμες περιόδους ανάπτυξης, κανένα άλλο μέρος του εγκεφάλου δεν μπορεί να αναπληρώσει τη λειτουργία τους.

Το κεφάλαιο οχτώ έχει ως θέμα τα μαθηματικά στο σπίτι, στους δρόμους και στο σχολείο. Πολλοί άνθρωποι εμφανίζουν αυτό που ονομάζεται «χάσμα της μη κατανόησης», χάσμα, δηλαδή, μεταξύ αυτού που πιστεύουν ότι *έχουν* καταλάβει και αυτού που πιστεύουν ότι *οφείλουν* να καταλάβουν. Το χάσμα αυτό είναι αποτέλεσμα της εκπαίδευσης που έχουν λάβει. Η εκπαίδευση έχει ως στόχο τη σταδιακή δόμηση σύνθετων εννοιών και στρατηγικών από άλλες απλούστερες. Αν η κατανόηση ενός μαθητή δεν προοδεύει, αλλά η κατανόηση του τι οφείλει να κατανοήσει προοδεύει, τότε το χάσμα γίνεται όλο και μεγαλύτερο. Τόσο το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, όσο και ο εκπαιδευτικός είναι δυνατόν να επηρεάσουν το χάσμα αυτό.

Η απόκτηση μαθηματικών ικανοτήτων είναι δυνατόν να λάβει χώρα τόσο στο σχολικό, όσο και σε άλλα πλαίσια. Οι έμποροι, για παράδειγμα, είναι πιθανόν να έχουν αποκτήσει αρκετά καλές μαθηματικές ικανότητες, αλλά και να έχουν αναπτύξει δικά τους συστήματα υπολογισμού, διαφορετικά από αυτά που διδάσκονται στα σχολεία, που να βασίζονται σε ποσότητες υλικών ή στα χρήματα. Επίσης, πολλοί αγρότες είναι ικανοί να χαρτογραφήσουν εκτάσεις γης, αποδεικνύοντας τη χρησιμότητα της μάθησης «εντός κάποιοι πλαισίου». Επομένως, το σχολικό πλαίσιο επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την απόκτηση μαθηματικών, και όχι μόνο, δεξιοτήτων.

Η απόκτηση δεξιοτήτων επηρεάζεται από την ενίσχυση που λαμβάνει κάποιος, είτε εξωτερικά (αναγνώριση, έπαινος, ανταμοιβή), είτε εσωτερικά (αίσθημα ικανοποίησης, απώλεια άγχους, αίσθημα ελέγχου). Στα μαθηματικά, το αίσθημα ελέγχου είναι περιορισμένο ή απόν, καθώς τα παιδιά δεν έχουν την ευκαιρία να δείξουν ότι έχουν βρει τη σωστή απάντηση σε ένα πρόβλημα, παρά μόνο αν ο δάσκαλος τους ρωτήσει. Σαν αποτέλεσμα, βιώνουν αισθήματα άγχους και χαμηλής αυτοπεποίθησης, ώστε σταματούν να προσπαθούν, και επομένως εξακολουθούν να βιώνουν την αποτυχία, εμπλεκόμενοι σε ένα φαύλο κύκλο.

Επιπλέον, αν τα παιδιά μεταφέρουν τις μαθηματικές γνώσεις που έχουν αποκτήσει στο σχολείο σε άλλα πλαίσια, όπως το οικογενειακό, το πιθανότερο είναι να λάβουν ενίσχυση, η οποία θα επηρεάσει θετικά την προσπάθειά τους, και, συνακόλουθα, την επίδοσή τους. Ωστόσο, τα περισσότερα παιδιά δεν κατανοούν τη χρησιμότητα της εφαρμογής των δεξιοτήτων τους σε διαφορετικά πλαίσια. Αντίθετα, η διαμόρφωση ενός ατομικού συστήματος υπολογισμού (και άρα δεξιότητας), όπως στην περίπτωση των «μαθηματικών του δρόμου» προκαλεί αίσθημα ικανοποίησης. Δυστυχώς, τα συστήματα τα οποία διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί θεωρούνται πάντα σωστά, ενώ αυτά που αυθόρμητα αναπτύσσουν τα παιδιά θεωρούνται λανθασμένα. Για το λόγο αυτό, τα συστήματα των παιδιών θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη διδασκαλία, και πάνω σε αυτά να προσαρμόζεται η δόμηση των «σωστών» συστημάτων. Για παράδειγμα, πολλά παιδιά αποστηθίζουν τον πίνακα του πολλαπλασιασμού, χωρίς, ωστόσο, να είναι σε θέση να απαντήσουν σε ερωτήσεις του τύπου «πόσο κάνει 5 επί 7;», παρά μόνο αν απαγγείλουν τον πολλαπλασιασμό του 5 από την αρχή και φτάσουν στο ζητούμενο.

Αν οι αριθμοί, λοιπόν, αποθηκεύονται στο μυαλό σαν λέξεις (καθώς τα παιδιά, κατά τα πρώτα χρόνια, ακούν, παρά βλέπουν αριθμούς), τότε θα πρέπει να έχουν λεκτική μορφή. Τα δεδομένα ερευνών, ωστόσο, δείχνουν ότι οι αριθμοί είναι οργανωμένοι στο μυαλό με βάση το μέγεθος ή σαν «πνευματικές μήτρες». Για το λόγο αυτό, τα λάθη σε μαθηματικές πράξεις περιλαμβάνουν, συνήθως, την εύρεση «γειτονικών» αριθμών αυτών που είναι οι σωστοί.

Τα περισσότερα μαθηματικά λάθη οφείλονται σε λάθος διαδικασίες επίλυσης. Η έννοια της κατανόησης είναι αυτή που συνδέει τα δεδομένα με τις διαδικασίες. Αυτός θα πρέπει να είναι και ο στόχος του εκπαιδευτικού συστήματος. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προωθήσουν την «αντανάκλαση» των διαδικασιών που ακολουθούν οι μαθητές, παρέχοντας ενίσχυση και ενθαρρύνοντας τους μαθητές να μεταφέρουν τις αποκτηθείσες γνώσεις σε εξωσχολικά πλαίσια.

Θέμα του ένατου και τελευταίου κεφαλαίου είναι οι δύσκολοι και οι εύκολοι αριθμοί. Είναι γεγονός ότι η σύλληψη κάποιων μαθηματικών εννοιών (αρνητικοί αριθμοί, κλάσματα, πιθανότητες) είναι δυσκολότερη από τη σύλληψη άλλων. Ο λόγος έγκειται στο ότι δεν σκεφτόμαστε τους δύσκολους αριθμούς με όρους που είναι οι πλέον οικείοι σε εμάς: ως πληθικούς αριθμούς, δηλαδή. Ωστόσο, υπάρχουν τρόποι μετατροπής των δύσκολων αριθμών σε εύκολους. Καθώς οι έμφυτες Αριθμητικές Μονάδες που διαθέτουμε ανιχνεύουν και αναγνωρίζουν πληθικούς αριθμούς το πολύ ως το 5, έχουμε αναπτύξει ένα φάσμα γνωστικών, αλλά και απτών εργαλείων, προκειμένου να τους επεκτείνουμε, όπως τα δάχτυλα, τις λέξεις, τους πίνακες, τον υπολογιστή και την αριθμομηχανή.

Η μαθηματική ικανότητα, αν και απαραίτητη στη σύγχρονη εποχή, βασίζεται στην έμφυτη έννοια των πληθικών αριθμών και τα εγκεφαλικά κυκλώματα, παρά στην εκπαίδευση. Τα κυκλώματα αυτά έχουν αναπτυχθεί στην προσπάθειά μας να οργανώσουμε έναν κόσμο ο οποίος αποτελείται από μετρήσιμα στοιχεία. Για το λόγο αυτό, οι νευρολογικές βλάβες επηρεάζουν περισσότερο τις αριθμητικές ικανότητες και κάποιοι άνθρωποι γεννιούνται με δυσαριθμησία. Ωστόσο, η ικανότητα του ανθρώπου να μετρά και να δημιουργεί νοητικές αναπαραστάσεις για κάθε πληθικό αριθμό, τον διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα θηλαστικά.

Συμπερασματικά

Από τη σύγκριση των θεωριών που έχουν προταθεί κατά καιρούς για τη μαθηματική σκέψη, προκύπτει ότι είναι γενικά παραδεκτό ότι αποτελεί μια ικανότητα έμφυτη στον άνθρωπο, αλλά και σε πολλά ζωικά είδη, κυρίως της οικογένειας των πιθήκων. Μάλιστα, έχει εντοπιστεί ότι υπάρχουν συγκεκριμένες εγκεφαλικές περιοχές, στον αριστερό λοβό, οι οποίες διευρύνονται με την εξάσκηση των μαθηματικών. Οι περιοχές αυτές συνδέονται, επίσης, με τα κέντρα της όρασης, της μνήμης και του προσανατολισμού, όπως φαίνεται από ασθενείς με εγκεφαλικές βλάβες ή δυσαριθμησία, οι οποίοι χάνουν (ή δε διαθέτουν) τις μαθηματικές ικανότητες, αλλά και δυσκολεύονται να θυμηθούν την ηλικία τους, τον αριθμό του τηλεφώνου τους κλπ. ή να προσανατολιστούν.

Από πληθώρα ερευνών που έχουν διεξαχθεί φαίνεται πως οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν μαθηματικές έννοιες και συστήματα μέτρησης ήδη από την αρχαιότητα, όπως φαίνεται σε τοιχογραφίες και σύμβολα σε εργαλεία και καθημερινά αντικείμενα. Σε πολλές περιοχές του κόσμου είχαν εφευρεθεί αριθμητικά συστήματα και σύμβολα, που αποτέλεσαν τους προγόνους των σημερινών. Στη σημερινή εποχή, ο κόσμος δομείται και γίνεται αντιληπτός με βάση αριθμούς και αριθμητικές σχέσεις, κάνοντας την απόκτηση και χρήση μαθηματικών εννοιών απαραίτητη, τόσο σε επιστημονικό επίπεδο, όσο και στην καθημερινή ζωή. Για το λόγο αυτό, πολλοί ειδικοί έχουν ασχοληθεί με τη διερεύνηση της μαθηματικής σκέψης στον άνθρωπο, σε μια προσπάθεια βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα.

Σε παλαιότερες δεκαετίες, μεγάλη απήχηση στον επιστημονικό κόσμο είχε η θεωρία του Ελβετού ψυχολόγου Jean Piaget, ο οποίος υποστήριξε ότι η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται αυθόρμητα στα μικρά παιδιά, και συνάδει με τη γνωστική τους ανάπτυξη, η οποία πραγματοποιείται σε στάδια, ενώ ενισχύεται από την παροχή περιβαλλοντικών ερεθισμάτων από τους γονείς και τους εκπαιδευτικούς. Προκειμένου να ελέγξει τις υποθέσεις του, διεξήγαγε μια σειρά πειραμάτων σε παιδιά ηλικίας 3 έως 12 ετών, στα οποία χρησιμοποιήθηκε πληθώρα αντικειμένων και παιχνιδιών.

Ο Piaget διερεύνησε και ανέλυσε τον τρόπο συλλογισμού των παιδιών από την ηλικία των τριών ετών ως την εφηβεία, μέσα από τις αντιδράσεις τους. Τα ευρήματά του έχουν επιβεβαιωθεί από ποικιλία ερευνών, που αποδεικνύουν τη χρησιμότητά τους ως εκπαιδευτικό εργαλείο.

Ο Piaget αντιλαμβανόταν τη σκέψη των παιδιών ως κατασκευαστική, ως αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης της διανοητικής τους δομής και των περιβαλλοντικών επιδράσεων. Μέρος των επιδράσεων αυτών αποτελεί και ο εκπαιδευτικός, ο οποίος καλείται να χρησιμοποιήσει «ενεργητικές» μεθόδους αλληλεπίδρασης με τους μαθητές του, ώστε να είναι σε θέση να ελέγξουν και να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα των πράξεών τους. Στις αλληλεπιδράσεις αυτές θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το στάδιο στο οποίο βρίσκεται η σκέψη των παιδιών.

Τα πειράματα του Piaget είχαν ως στόχο τη διερεύνηση των από μέρους του παιδιού τρόπων εσωτερίκευσης των ενεργειών και μετατροπής τους σε πνευματικές ενέργειες που εκτελούνται με το μυαλό. Τα παιδία 3-4 ετών κρίνουν μόνο με βάση αυτό που βλέπουν, και δεν αντιλαμβάνονται την έννοια της διατήρησης. Τα παιδιά 5-6 ετών αμφιβάλλουν για την αλλαγή της ποσότητας, αλλά αντιλαμβάνονται μία μόνο διάσταση, π.χ. μόνο το ύψος, αλλά όχι το πλάτος. Αργότερα (7-8 έτη), αντιλαμβάνεται την έννοια της διατήρησης, και στη συνέχεια (9-10 έτη) κατανοεί, επιπλέον, την έννοια της αντιστρεψιμότητας. Από τις απαντήσεις των παιδιών προκύπτει ότι σε μικρές ηλικίες (3-4 ετών), τα παιδιά ταξινομούν τα αντικείμενα αυθαίρετα (πχ. ο άνθρωπος με την καρέκλα, για να κάθεται) και δεν αντιλαμβάνονται τη έννοια του εγκλεισμού. Στην επόμενη ηλικιακή φάση (5-6) τα παιδιά κατανοούν κάποιες διαστάσεις της ταξινόμησης και ταξινομούν μόνο με βάση ένα χαρακτηριστικό, συνήθως το μέγεθος. Τα παιδιά 7-8 ετών, εξακολουθούν να μην κατανοούν ορισμένες έννοιες, όπως της κενής τάξης και να ταξινομούν με βάση ένα κριτήριο (αντιλαμβάνονται, ωστόσο, πιο σύνθετα κριτήρια). Τέλος, τα παιδιά 9-10 ετών είναι σε θέση να ταξινομήσουν με βάση πολλαπλά κριτήρια (π.χ. μικρά και κόκκινα, μεγάλα και μπλε) και δημιουργούν νέα κριτήρια, με βάση το συνδυασμό άλλων. Τα παιδιά 4-5 ετών αποτυγχάνουν, συνήθως, σε τέτοιες δοκιμασίες και εστιάζουν μόνο στην ολότητα των αντικειμένων, και όχι στις σχέσεις τους με τα άλλα (π.χ. μικρό, μεγάλο, μεγάλο, μεγάλο και όχι μικρό, μεγάλο, πιο μεγάλο). Σε ηλικία 6 ετών, τα παιδιά σειροθετούν με βάση ένα μόνο κριτήριο, ενώ αργότερα (7-8 ετών και έπειτα) κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ αντικειμένων και μπορούν να ανακαλέσουν μια σειρά αντικειμένων από τη μνήμη τους. Τα παιδιά 3-4 ετών επιλέγουν να αντιστοιχίσουν αντικείμενα με βάση τη θέση τους, παρά τον αριθμό ή το μέγεθός τους. Τα παιδιά 5-6 ετών βασίζονται στην οπτική ταξινόμηση και τη διαδοχική αρίθμηση (προχωρώ ένα, άρα βάζω ένα παραπάνω). Από την ηλικία των 7 και μετά κατανοούν την έννοια της απολυτότητας και της αντιστροφής και μπορεί να δημιουργήσει κατηγορίες με βάση τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων.

Ο Piaget και οι συνεργάτες του κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ορισμένες έννοιες, όπως οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, ο συντονισμός, η μετατόπιση, η κατάτμηση και η συνέχεια γίνονται αρχικά αντιληπτές μόνο μέσω οπτικών εικόνων (ή δεν γίνονται καθόλου αντιληπτές), ενώ μετά την ηλικία των 9-10 ετών τα παιδιά είναι σε θέση να τις κατανοήσουν πνευματικά και να τις αναπαράγουν νοητικά και πρακτικά.

Παρά τη συμβολή των ευρημάτων του Piaget στις εκπαιδευτικές μεθόδους για πολλές δεκαετίες, νεότεροι ειδικοί άσκησαν κριτική στο έργο του και υποστήριξαν ότι υποτιμά τις ικανότητες των μικρών παιδιών. Από πολυάριθμα πειράματα σε βρέφη, διαπιστώθηκε ότι αυτά είναι σε θέση όχι μόνο να κατανοήσουν και να ομαδοποιήσουν μικρά σύνολα αντικειμένων, αλλά και να προβλέψουν την αλλαγή στον αριθμό των αντικειμένων που αποτελούν τα σύνολα αυτά, και να εκπλαγούν αν, για παράδειγμα, σε ένα σύνολο δύο αντικειμένων που εξαφανίζονται και επανεμφανίζονται συστηματικά, εμφανιστεί ένα αντικείμενο παραπάνω, χωρίς να δουν τον ερευνητή να το τοποθετεί. Μάλιστα, είναι σε θέση να ανακαλέσουν κάποιες κατηγορίες αντικειμένων από τη μνήμη τους, ακόμη και μετά από μέρες.

Ο Butterworth διατύπωσε τη θεωρία πως το σύνολο των ανθρώπινων γονιδίων περιλαμβάνει πληροφορίες για τη δόμηση εξειδικευμένων εγκεφαλικών κυκλωμάτων, που ονομάζονται Αριθμητικές Μονάδες. Σκοπός τους είναι η κατηγοριοποίηση του κόσμου σε πληθικούς αριθμούς (ο αριθμός των αντικειμένων που ανήκουν σε ένα σύνολο). Επιπλέον, όπως αναφέρει και ο Núñez, Οι αριθμητικές ικανότητες θεωρείται ότι βρίσκονται στον αριστερό λοβό του εγκεφάλου, όπου βρίσκονται επίσης οι νευρικές συνδέσεις της όρασης, της ακοής και της αφής. Βλάβες στην περιοχή αυτή επηρεάζουν τις μαθηματικές ικανότητες, αλλά και τη γραφή, την αναπαράσταση των δαχτύλων (που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στο μέτρημα), και τη διάκριση αριστερού-δεξιού. Επιπλέον, κάθε μαθηματική έννοια είναι και μια μεταφορά, που γίνεται αντιληπτή μέσω του εννοιολογικού μηχανισμού του ενσωματωμένου ανθρώπινου μυαλού. Με τη γενίκευση των μεταφορών, ο άνθρωπος είναι σε θέση να ανακαλύψει και να κατανοήσει τις μαθηματικές σχέσεις πάνω στις οποίες δομείται ο κόσμος, οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και καθορίζουν την ύπαρξή του.

Εφόσον, επομένως, η μαθηματική ικανότητα είναι έμφυτη, τα μικρά παιδιά εισέρχονται στο σχολείο έχοντας ήδη κατακτήσει ορισμένες βασικές μαθηματικές ικανότητες από βιώματα της καθημερινής τους ζωής. Πολλά παιδιά δημιουργούν δικά τους συστήματα μέτρησης και υπολογισμού προτού πάνε στο σχολείο, όπως συμβαίνει και με κάποιους εμπόρους ή αγρότες, οι οποίοι δεν έχουν εκπαιδευτεί στα μαθηματικά. Παρόλα αυτά, πολλοί ειδικοί τόνισαν τη σημασία της ανάγκης για βελτίωση και επέκταση των έμφυτων αυτών ικανοτήτων, μέσα από την παροχή πολιτισμικών εργαλείων. Όπως δείχνουν έρευνες, πολλά άτομα εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά (π.χ. γυναίκες, σε παλαιότερες εποχές), οι οποίες είναι δυνατόν να εξηγηθούν από την απουσία ευκαιριών εξάσκησης, παρά από το επίπεδο νοημοσύνης.

Όπως προτείνει ο Butterworth, αλλά και ο Hughes, ο τρόπος συλλογισμού των παιδιών και τα αυθαίρετα συστήματα που δημιουργούν στα μαθηματικά θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη μαθησιακή διαδικασία, ώστε με βάση αυτά να δομηθεί η απόκτηση γνώσεων και η εκμάθηση νέων συστημάτων και συμβόλων. Επιπλέον, κατά τα πρώτα σχολικά χρόνια, είναι αποτελεσματική η χρήση παιχνιδιών και καθημερινών αντικειμένων, ώστε οι προς εκμάθηση έννοιες να συνοδεύονται από οπτική αναπαράσταση και να συνδέονται με την καθημερινή ζωή. Ακόμη, είναι πολύ σημαντική η ενίσχυση των μαθητών, ώστε να αυξηθεί το αίσθημα ικανοποίησης και αυτοπεποίθησης, που θα οδηγήσει σε καταβολή περισσότερης προσπάθειας και ανώτερη επίδοση.

Τέλος, σύγχρονος εκπαιδευτικός, επομένως, καλείται να ακολουθήσει μια σειρά από στρατηγικές, οι οποίες βασίζονται όχι στην υποτίμηση των ικανοτήτων των παιδιών, όπως προέκυψε από το έργο του Piaget, αλλά στη χρησιμοποίησή τους για την οικοδόμηση νέων εννοιών, σε πραγματικά, αλλά και ευχάριστα περιβάλλοντα.

Μέρος 2^{ο} :Εφαρμογή στη τάξη

«Εφαρμογή στην τάξη»

Κατά την διάρκεια των δεκαπενθήμερων διδασκαλιών του Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας που γίνεται στο 8^{ο} εξάμηνο εφαρμόσαμε ένα φύλλο εργασίας στα μαθηματικά που σχετίζονταν με την πρόσθεση αριθμών και ένα τέχνασμα για να βρουν τα παιδιά τον αριθμό των γραμμών που ενώνουν σημεία. Η εφαρμογή έγινε στην Α τάξη του 25^{ου} Δημοτικού σχολείου Βόλου. Η τάξη είχε δεκαέξι μαθητές το επίπεδο των οποίων ήταν μέτριο προς χαμηλό σε ότι αφορά τα μαθηματικά. Το φύλλο εργασίας αποτελούνταν από τρείς ασκήσεις (παράρτημα).

Στην πρώτη άσκηση (κουκίδες) τα παιδιά τα παιδιά έπρεπε να τραβήξουν γραμμές με τον χάρακα τους και να πουν πόσες γραμμές ενώνουν δυο κουκκίδες, δίπλα τους δίναμε την άσκηση λυμένη. Έπειτα, τα παιδιά έπρεπε μόνα τους να ενώσουν με γραμμές τέσσερις και να γράψουν την απάντηση τους. εξηγούμε στα παιδιά ότι ο αριθμός των κουκίδων σε κάθε σχήμα προκύπτει εάν προσθέσουμε τον αριθμό των γραμμών με τον αριθμό των κουκκίδων του προηγούμενου σχήματος. Δηλαδή, για τις τέσσερις κουκίδες αρκεί να προσθέσουμε τρία (αριθμός γραμμών που ενώνει τις τρεις κουκκίδες) με το τρία (αριθμός κουκκίδων) και βρίσκουμε έξι (γραμμές που ενώνουν τις τέσσερις κουκίδες). Τέλος, ζητάμε από τα παιδιά να μαντέψουν πόσες γραμμές θα ενώνουν τις πέντε κουκκίδες και μετά να τραβήξουν τις γραμμές για να επαληθεύσουν την απάντησή τους.

Στην δεύτερη άσκηση (δεξιά- αριστερά) δώσαμε στα παιδιά αριθμούς και έπρεπε να βάλουν σε κύκλο τον αριθμό που βρίσκεται στα δεξιά και σε τετράγωνο τον αριθμό που βρίσκεται στα αριστερά και στο τετράγωνο να γράψουν το άθροισμα των αριθμών.

Και τέλος στην τρίτη άσκηση (συμπλήρωσε τα σχήματα) ζητήσαμε από τα παιδιά να συμπληρώσουν το τρίγωνο του Pascal και να αιτιολογήσουν γιατί συμπλήρωσαν τα κενά με αυτόν τρόπο.

Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή ήταν ικανοποιητικά για το επίπεδο και την ηλικία των παιδιών. Στην άσκηση με τις κουκκίδες τα παιδιά ενθουσιάστηκαν με το τράβηγμα των γραμμών έδειξαν όμως να δυσκολεύονται αρχικά να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζαμε τις γραμμές. Γι'αυτό χρειάστηκε να τους εξηγήσουμε και δεύτερη φορά τον τρόπο υπολογισμού των γραμμών. Όταν όμως το κατανόησαν συνεχίσαμε μέσα στην τάξη την άσκηση προφορικά βρίσκοντας τις γραμμές που ενώνουν περισσότερες από πέντε κουκκίδες. Στην άσκηση δεξιά- αριστερά τα παιδία δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία στο να κάνουν αυτό που τους ζητήσαμε. Και στην άσκηση συμπλήρωσε τα σχήματα τα σχήματα συμπληρώθηκαν με ευκολία εξαιτίας τις προηγούμενης άσκησης που τους υποδείκνυε τον τρόπο με τον οποίο να το κάνουν. Το κομμάτι που δυσκόλεψε τα παιδιά ήταν να απαντήσουν γραπτά την ερώτηση που υπήρχε στο τέλος. Η δυσκολία επάγεται στο γεγονός ότι τα παιδιά εκτέλεσαν σωστά αλλά μηχανικά την άσκηση χωρίς να καταλαβαίνουν γιατί το έκαναν για αυτά απλά συνεχιζόταν αυτό που έκαναν στην άσκηση δεξιά αριστερά.

Παράρτημα

ΟΝΟΜΑΤΟΕΠΩΝΥΜΟ:...

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:...

Κουκίδες

- Τραβώ με τον χάρακά μου όλες τις ευθείες γραμμές που μπορώ ανάμεσα στις 2 κουκίδες που είναι κάτω αριστερά.

Βλέπω ότι υπάρχει μόνο μία.

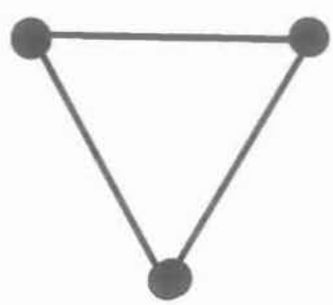
2 κουκίδες

1 γραμμή

- Τραβώ με τον χάρακά μου όλες τις ευθείες γραμμές που μπορώ ανάμεσα στις τρεις κουκίδες που είναι αριστερά.

Βλέπω ότι υπάρχουν μόνον τρεις.

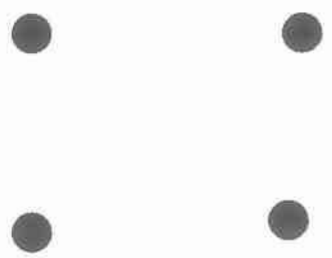
3 κουκίδες



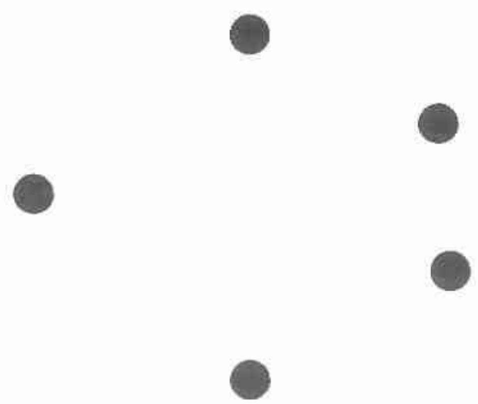
3 γραμμέ

➢ Τώρα τράβα με τον χάρακά σου όλες τις ευθείες γραμμές που μπορείς ανάμεσα στις τέσσερις κουκίδες που βλέπεις.

Μέτρα πόσες γραμμές τράβηξες.



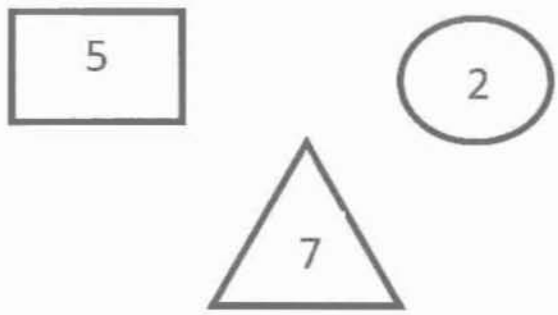
Μπορείς να **μαντέψεις** πόσες γραμμές θα τραβήξεις αν οι κουκίδες είναι 5;



Τράβα τες με τον χάρακά σου για να δεις αν μάντεψες σωστά.

Αριστερά-Δεξιά

- **Βάλε σε κύκλο τον αριθμό που είναι στα δεξιά και σε τετράγωνο τον αριθμό που είναι στα αριστερά. Και στο τρίγωνο που είναι από κάτω γράψε το άθροισμά τους.**



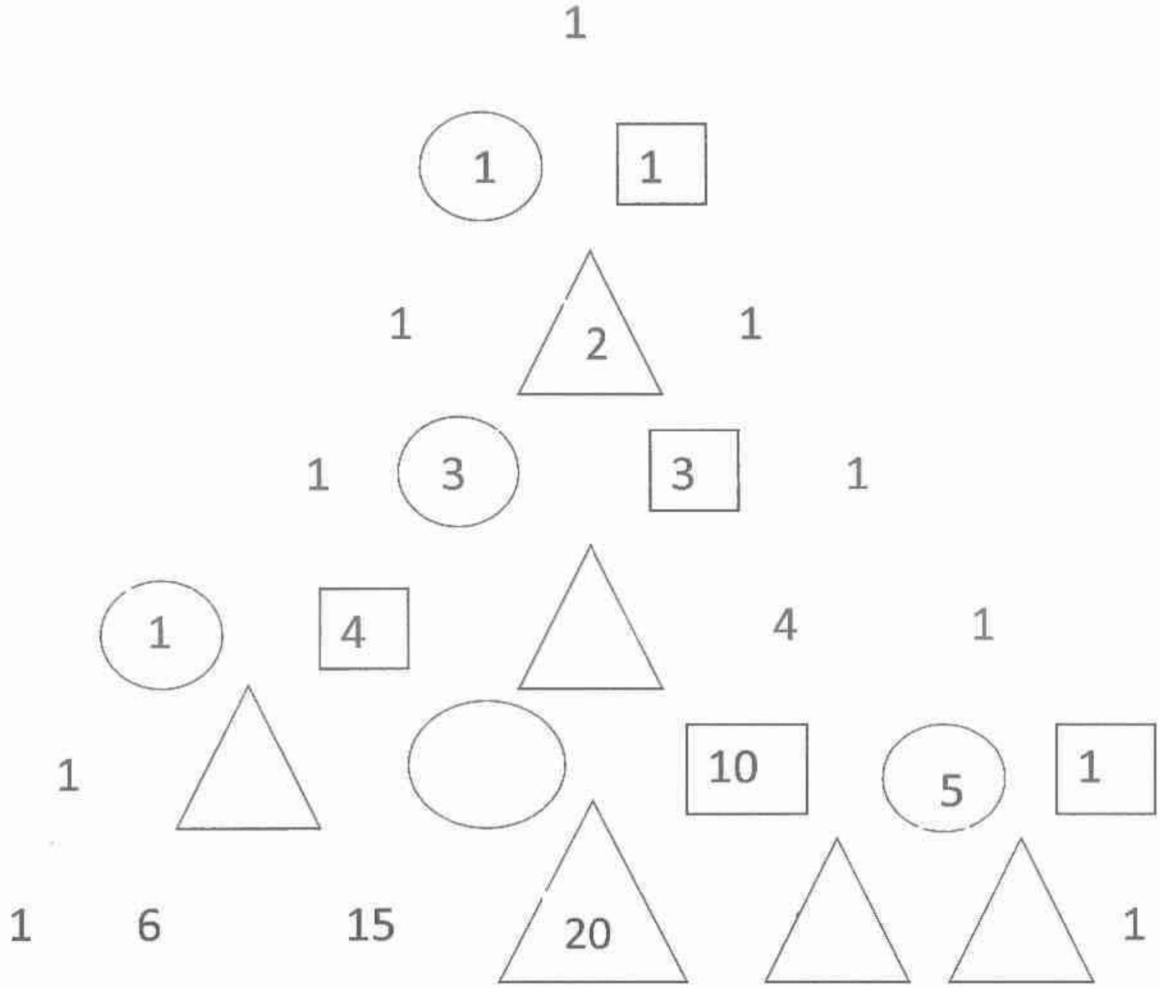
Α) 1 7

Β) **8** 4

Γ) **11** 7

Συμπλήρωσε τα σχήματα

- Συμπλήρωσε τα κενά τρίγωνα, τετράγωνα και κύκλους στο παρακάτω σχήμα.



Γιατί τα συμπλήρωσες με τον τρόπο που τα συμπλήρωσες;

Βιβλιογραφία

- M. Hughes, Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών: Δυσκολίες στην εκμάθηση των Μαθηματικών, Αθήνα,1996, επιμ. Στέλλα Βοσνιάδου
- C.Botson, M. Deliege, Προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες: Συμβολή στην κατανόηση της γνωστικής Ψυχολογίας του J.Piaget , Αθήνα,1998, επιμ. Γ.Μ. Τρούλης
- B. Butterworth, The Mathematical brain, London, 1999
- G. Lakoff, R. Núñez, Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, 2000
- H. Grunber, J.J. Vonceche, The essential Piaget: An Interpretive Reference and Guide,USA,1977