

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Διπλωματική Εργασία

Γραμμικοποιημένη Δυναμική Απόκριση
Χαμηλών Ελαστικών Κυκλικών Τόξων
υπό Κινούμενο Φορτίο



Φοιτήτρια: Παναγιώτα Κούσουλα
Επιβλέπων: Δ. Σ. Σοφιανόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Π. Θ.

ΒΟΛΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 9832/1
Ημερ. Εισ.: 28-09-2011
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ
2011
ΚΟΥ

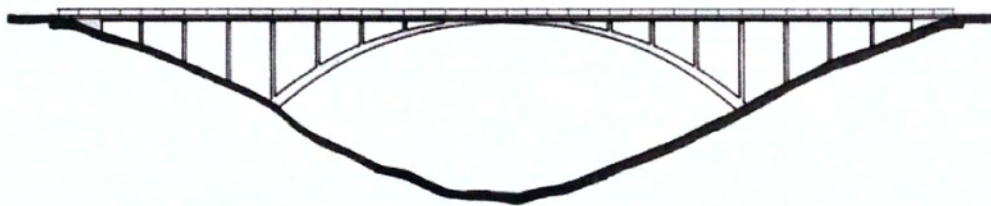
Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	2
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1. ΓΕΝΙΚΑ	4
2. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ	4
3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΔΟΚΩΝ	5
4. ΧΑΜΗΛΟ ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο : ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΑΜΗΛΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ	6
1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ	6
2. ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ	6
3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	7
4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.....	9
5. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	11
6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο : ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο : ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ.....	20
1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.....	20
2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	21
3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	22
4. ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ	25
5. ΦΟΡΤΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ.....	25
6. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο : ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	85
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	89
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΒΕΛΩΝ.....	91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	92
Βιβλιογραφία.....	94

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

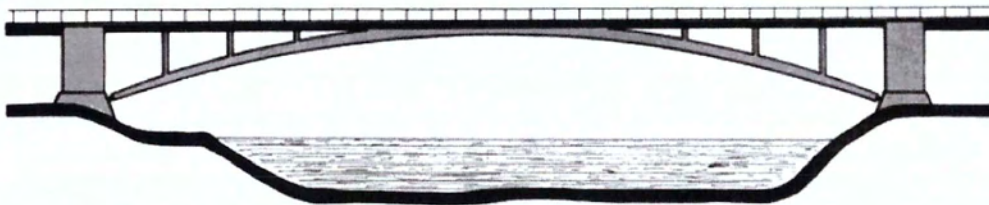
Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά χαμηλών κυκλικών τόξων, υπό την επίρεια απλουστευμένου μοντέλου οχήματος κινούμενου με σταθερή ταχύτητα, από αυτά που χρησιμοποιούνται συνήθως σαν φορείς καταστροφμάτων γεφυρών, και δίνονται εμπειριστατωμένα διαγράμματα από την μελέτη αρκετών περιπτώσεων τέτοιων τόξων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ



Shallow arch: deck and arch are joined at crown.

Εικόνα 1: Χαμηλό τόξο: κατάστρωμα και τόξο ενώνονται στην στέψη



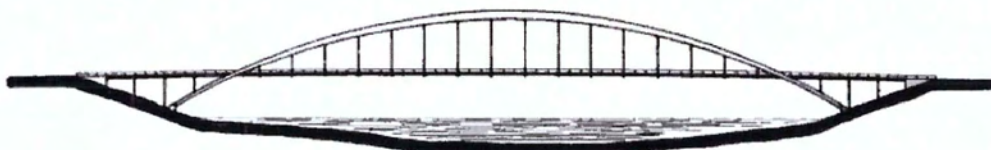
Elegant shape of two-hinged arch.

Εικόνα 2: Κομψό σχήμα αμφιαρθωτού τόξου



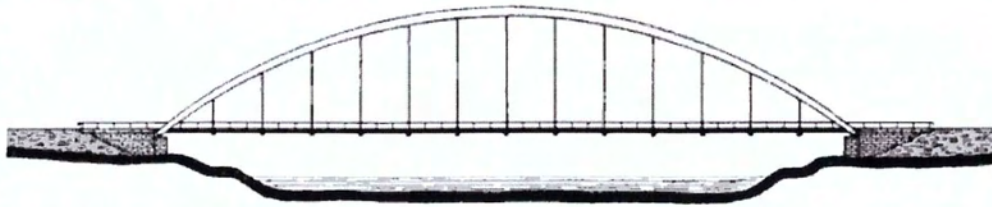
Sequence of flat two-hinged arches.

Εικόνα 3: Ακολουθία επίπεδων αμφιαρθρωτών τόξων



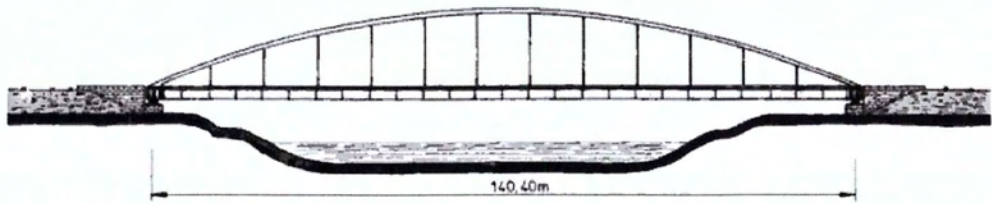
Best form of sickle-shaped arch with suspended deck.

Εικόνα 4: Καλύτερη μορφή δρεπανοειδούς τόξου με αναρτημένο κατάστρωμα



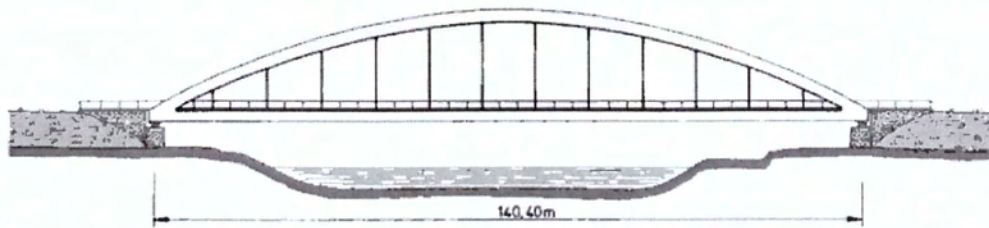
Tied arch: strong arch and thin suspended deck.

Εικόνα 5: Ισχυρό τόξο και λεπτό αναρτημένο κατάστρωμα.

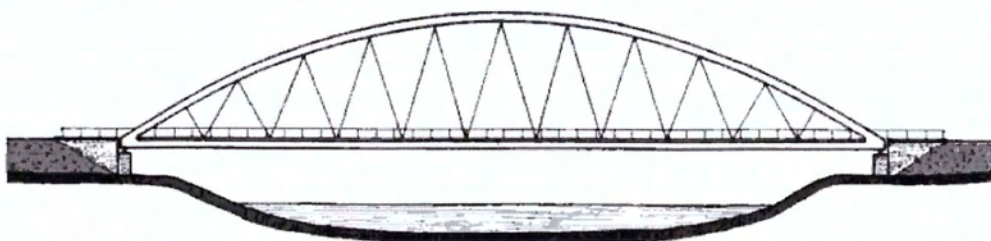


Tied arch: thin arch and strong deck beam.

Εικόνα 6: Λεπτό τόξο και ισχυρό κατάστρωμα δοκού.



Tied arch: arch and beam almost equally deep; not very expressive.



Tied arch: arch and beam slender through use of inclined hangers.



Arch bridge with cantilevering side span arches.

Εικόνα 7: Υπόλοιπες μορφές τοξωτών γεφυρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Η δυναμική ανάλυση εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης των φορέων κάτω από την επίδραση φορτίων με μεταβαλλόμενο μέγεθος ή και θέση, σε συνάρτηση με το χρόνο. Τέτοιου είδους φορτία καλούνται Δυναμικά φορτία (π.χ. σεισμός, κινούμενο όχημα), σε αντιδιαστολή με τα Στατικά φορτία της κατασκευής (π.χ. ίδιο βάρος).

Σαν συνέπεια της εφαρμογής δυναμικών φορτίων σε μια κατασκευή, η εντατική και η παραμορφωσιακή της κατάσταση μεταβάλλονται με το χρόνο, καθώς τα «σημεία» της αποκτούν ταχύτητα και επιτάχυνση. Έτσι, οι διάφορες απόπειρες προσομοίωσης των δυναμικών φορτίσεων με στατικά μοντέλα σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγούμενα, δίνουν αποτελέσματα που απέχουν από την πραγματικότητα.

Οι δυσχέρειες που προκύπτουν κατά την ανάλυση των φορέων με δυναμικές μεθόδους, είναι κύρια η αυξημένη εργασία που απαιτείται καθώς και η εφαρμογή δύσκολα επιλυόμενων διαφορικών εξισώσεων και ολοκληρωμάτων. Αυτές όμως αντισταθμίζονται τόσο από την χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, όσο και από την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που παίρνουμε. Τα προκύπτοντα αποτελέσματα είναι σε μεγάλο βαθμό αντιπροσωπευτικά (σε σχέση βέβαια με τις απλοποιητικές παραδοχές που γίνονται στην πορεία της ανάλυσης) της πραγματικής συμπεριφοράς των κατασκευών κάτω από δυναμικές φορτίσεις.

2. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ

Η τιμή ενός εντατικού μεγέθους σε μια διατομή ενός φορέα μεταβάλλεται συναρτήσει της θέσης του κινούμενου φορτίου πάνω στο φορέα. Έτσι για κάποια θέση φορτίου το αντίστοιχο μέγεθος στην υπό μελέτη διατομή γίνεται μέγιστο.

Στην περίπτωση ενός δυναμικού φορτίου, για οποιαδήποτε θέση του πάνω στο φορέα, χαράσσουμε διαγράμματα που έχουν σαν τετμημένες τις εκάστοτε θέσεις του φορτίου και σαν τεταγμένες τις τιμές του μεγέθους (αντίδραση, τέμνουσα δύναμη, καμπτική ροπή, βέλος κ.λπ.) σε μια διατομή, θεωρώντας μοναδιαία τιμή του φορτίου. Συνηθίζεται εξάλλου και η παράσταση των παραπάνω μεγεθών υπό αδιάστατη μορφή. Τα διαγράμματα που παίρνουμε με τον πιο πάνω τρόπο τα ονομάζουμε Δυναμικές Γραμμές Επιρροής του υπό μελέτη μεγέθους στην συγκεκριμένη διατομή.

Έχοντας κατασκευάσει τις δυναμικές γραμμές επιρροής για οποιοδήποτε μέγεθος, είμαστε πλέον σε θέση να γνωρίζουμε την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα για κάθε χρονική στιγμή, σε οποιαδήποτε διατομή του, κατά συνέπεια και την μέγιστη τιμή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει, στην υπ' όψη διατομή, για οποιαδήποτε μορφής δυναμική φόρτιση.

3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΔΟΚΩΝ

Το πρόβλημα της ταλάντωσης καμπύλων δοκών, δεν μπορεί να λυθεί άμεσα, εκτός της περίπτωσης των κυκλικών τόξων με σταθερή διατομή της δοκού. Εκτός αυτού όμως ένας τέτοιος υπολογισμός στην πράξη είναι και δυσχερής και χρονοβόρος.

Για να παρακαμφθούν αυτές οι δυσκολίες υπάρχει η τάση της χρησιμοποίησης των εμμέσων ή προσεγγιστικών μεθόδων, αν και η ελεύθερη ταλάντωση των ταλαντουμένων στο επίπεδο τους τόξων, είναι αντικείμενο πολυαρίθμων δημοσιεύσεων, μικρός αριθμός από αυτές αναφέρονται στις κύριες φυσικές συχνότητες. Έτσι τα χαρακτηριστικά εν γένει, των ελευθέρως ταλαντουμένων αυτών συστημάτων, δεν έχουν αρκούντως μελετηθεί.

4. ΧΑΜΗΛΟ ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΟΞΟ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η ελεύθερη ταλάντωση χαμηλών κυκλικών τόξων με σταθερή διατομή, τόσο αμφιαρθρωτών όσο και αμφίπακτων στα άκρα στηρίξεων. Από τις συναρτήσεις σχήματος των τόξων τις οποίες και προσδιορίζουμε, προχωρούμε στην απόδειξη ισχύος της μεταξύ τους σχέσεως ορθογωνικότητας και στην συνέχεια καταστρώνονται οι εξισώσεις κινήσεως υπό την επίδραση συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου πάνω στο τόξο.

Η παραπάνω ανάλυση καταλήγει σε εκφράσεις των δυναμικών βελών των τόξων κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης και της ακτίνας.

Για πληρέστερη εποπτεία του όλου θέματος, παρατίθενται τα αποτελέσματα από την επεξεργασία μιας σειράς χαμηλών κυκλικών τόξων κατάλληλα εκλεγμένων. Στο τέλος εκτίθενται και σχολιάζονται τα συμπεράσματα από την μελέτη των τόξων αυτών και γίνεται σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα των δυναμικών και στατικών γραμμών επιρροής.

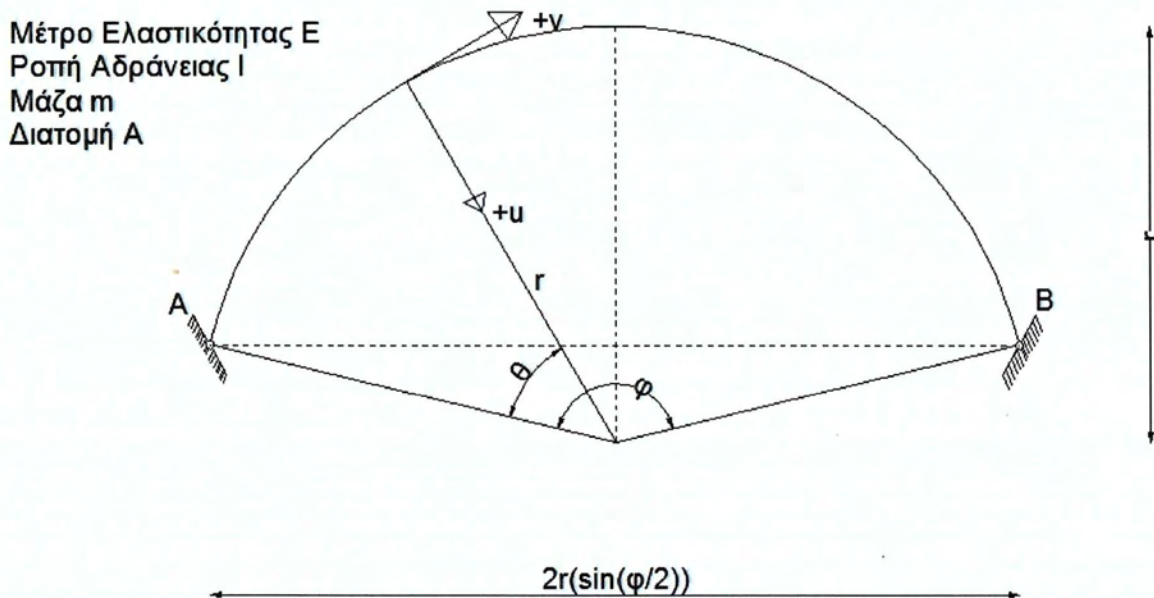
Θεωρείται σκόπιμο για την πληρέστερη κατανόηση του όλου θέματος, να αναφέρουμε στοιχεία από την ανάλυση με την μέθοδο των συναρτήσεων σχήματος, της ελεύθερης ταλάντωσης χαμηλών κυκλικών τόξων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΑΜΗΛΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Τα γεωμετρικά στοιχεία του φορέα φαίνονται στο Σχήμα 1. Ο φορέας είναι κατασκευασμένος από υλικό ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό, με μέτρο ελαστικότητας E . Το όλο σύστημα αναφέρεται στις πολικές συντεταγμένες (r, θ) , με αρχή μετρήσεως των γωνιών τον άξονα OA .

Οι παραμορφώσεις u, v του τυχόντος σημείου K του φορέα και οι θετικές φορές τους φαίνονται επίσης στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Γεωμετρικά στοιχεία του φορέα, άξονες πολικών συντεταγμένων, θετικές φορές των μετατοπίσεων.

2. ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σύμφωνα με τις πολικές συντεταγμένες του Σχήματος 1 και τις μικρές τιμές της γωνίας ϕ ($\phi \ll 120^\circ$) ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{1}{r + \Delta r} = \frac{-u + r - \frac{d^2 u}{d\theta^2}}{r^2}$$

$$-\frac{1}{r + \Delta r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

Επομένως :

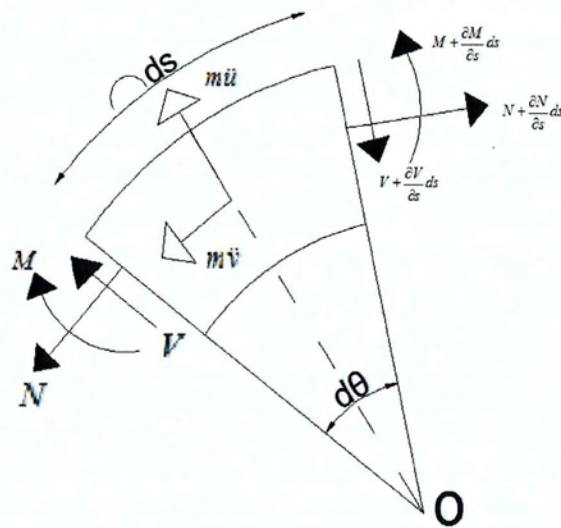
$$M = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (1.1\alpha)$$

$$e = \frac{u}{r} - \frac{dv}{rd\theta}$$

Επίσης η αξονική παραμόρφωση γράφεται ως:

$$N = EAe = \frac{EA}{r} \left(u - \frac{dv}{d\theta} \right) \quad (1.1\beta)$$

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



Σχήμα 2: Ισορροπία εντάσεων στο στοιχειώδες τμήμα ds του τόξου

Εξετάζοντας το στοιχειώδες τμήμα ds του Σχήματος 2 θα έχουμε:

- i. Προβολή σε άξονα κάθετο προς την εφαπτόμενη του κυκλικού τμήματος.

$$N \cdot \frac{d\theta}{2} - V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} ds \right) + \left(N + \frac{\partial N}{\partial s} ds \right) \frac{d\theta}{2} - m\ddot{u} ds = 0$$

Και επειδή $ds = rd\theta$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{N}{r} - m\ddot{u} = 0 \quad (1.2\alpha)$$

- ii. Προβολή σε άξονα παράλληλο προς την εφαπτόμενη του κυκλικού τμήματος.

$$-N - V \frac{d\theta}{2} + \left(N + \frac{\partial N}{\partial s} ds \right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} ds \right) \frac{d\theta}{2} - m\ddot{v}ds = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} - \frac{V}{r} - m\ddot{v} = 0 \quad (1.2\beta)$$

- iii. Ισοροπία ροπών.

$$M - N \frac{d\theta}{2} ds + V ds + m\ddot{u} \frac{ds}{2} - \left(M + \frac{\partial M}{\partial s} ds \right) = 0$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial s} \quad (1.2\gamma)$$

Οι σχέσεις (1.1) σε συνδυασμό με τις (1.2) δίνουν αντίστοιχα:

$$V = \frac{\partial M}{\partial s} = -\frac{EI}{r^3} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{EI}{r^4} \left(\frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -\frac{EA}{r^2} \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

και ακολούθως αντικαθιστώντας στις (1.2) λαμβάνουμε

$$-\frac{EI}{r^4} u^{(4)} - \frac{EI}{r^4} u^{(2)} + \frac{EI}{r^2} u - \frac{EA}{r^2} v^{(1)} - m\ddot{u} = 0 \quad (1.3\alpha)$$

$$\frac{EI}{r^4} u^{(3)} + \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{EI}{r^4} \right) u^{(1)} - \frac{EA}{r^2} v^{(2)} - m\ddot{v} = 0 \quad (1.3\beta)$$

Για ελεύθερη ταλάντωση η λύση των (1.3) έχει τη μορφή:

$$u(\theta, t) = \bar{u}(\theta) e^{-i\omega t}$$

$$v(\theta, t) = \bar{v}(\theta) e^{-i\omega t}$$

όπου ω η ιδιοσυχνότητα και $i = \sqrt{-1}$ (η φανταστική μονάδα).

Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στις (1.3) και γνωρίζοντας ότι $m = A \cdot \gamma$

(A η διατομή του φορέα και γ η πυκνότητα του υλικού) λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$-\frac{EI}{r^4}\bar{u}^{(4)} - \frac{EI}{r^4}\bar{u}^{(2)} + \frac{EA}{r^2}\bar{u} - \frac{EA}{r^2}\bar{v}^{(1)} - A\gamma\omega^2\bar{u} = 0 \quad (1.4\alpha)$$

$$\frac{EI}{r^4}\bar{u}^{(3)} + \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{EI}{r^4}\right)\bar{u}^{(1)} - \frac{EA}{r^2}\bar{v}^{(2)} - A\gamma\omega^2\bar{v} = 0 \quad (1.4\beta)$$

Θέτοντας :

$$\alpha_1 = \frac{A \cdot r^2}{I}, \quad \alpha_2 = \frac{A\gamma r^4 \omega^2}{EI}$$

οι παραπάνω γράφονται:

$$\frac{d^4\bar{u}}{d\theta^4} + \frac{d^2\bar{u}}{d\theta^2} - (\alpha_1 + \alpha_2)\bar{u} + a_1 \frac{d\bar{v}}{d\theta} = 0 \quad (1.5\alpha)$$

$$\frac{d^3\bar{u}}{d\theta^3} + (a_1 + 1)\frac{d\bar{u}}{d\theta} - \alpha_1 \frac{d^2\bar{v}}{d\theta^2} + a_2\bar{v} = 0 \quad (1.5\beta)$$

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Παραγωγίζοντας την (1.5α) και προσθέτοντας την προκύπτουσα με την (1.5β) λαμβάνουμε:

$$\bar{v} = -\frac{1}{\alpha_2}(\bar{u}^{(5)} + 2\bar{u}^{(3)} + (1 - a_2)\bar{u}^{(1)}) \quad (1.6)$$

η οποία τιθέμενη στη (1.1β) δίδει:

$$\frac{a_1}{\alpha_2}\bar{u}^{(6)} + \left(-1 + \frac{2a_1}{a_2}\right)\bar{u}^{(4)} + \left[-1 + \frac{a_1(1-a_2)}{a_2}\right]\bar{u}^{(2)} + (a_1 + a_2)\bar{u} = 0 \quad (1.7)$$

Η χαρακτηριστική της παραπάνω ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\frac{a_1}{\alpha_2}\rho^6 + \left(-1 + \frac{2a_1}{a_2}\right)\rho^4 + \left[-1 + \frac{a_1(1-a_2)}{a_2}\right]\rho^2 + (a_1 + a_2) = 0$$

Αν δε τεθεί $\rho^2 = k$ έχουμε:

$$k^3 + \left(2 - \frac{a_2}{a_1}\right)k^2 - \frac{a_2 - a_1 + a_1 a_2}{a_1}k + \frac{a_2}{a_1}(a_1 + a_2) = 0 \quad (1.8)$$

Η ανωτέρω δίνει τρεις πραγματικές ρίζες, καθόσον ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος του Sturm [...].

Έστω k_1, k_2, k_3 οι τρεις ρίζες της (1.8).

Τότε είναι:

$$S_1 = k_1 + k_2 + k_3 = -\left(2 - \frac{a_2}{a_1}\right)$$

$$S_2 = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 = -\frac{a_1 a_2 - a_1 + a_2}{a_1}$$

$$S_3 = -\frac{a_2(a_1 + a_2)}{a_1}$$

Για ελαστικά συστήματα από χάλυβα, ισχύει πάντα:

$$\omega r < \sqrt{\frac{E}{\gamma}} = 5123$$

ενώ για δυσταλάντωτες κατασκευές (π.χ. από σκυρόδεμα ή συνδυασμό υψηλών διατομών χάλυβα) ισχύει:

$$\omega \cdot r > \sqrt{\frac{E}{\gamma}} = 5123$$

Στην περίπτωση μας επειδή ισχύει το πρώτο (εύκαμπτα στοιχεία) έχουμε $\alpha_1 > \alpha_2$. Επομένως και τα γινόμενα:

$$S_1 < 0 \quad \& \quad S_2 < 0$$

Συνέπεια αυτού είναι να υπάρχουν δυο ρίζες θετικές και μια αρνητική. Έστω $K_1, K_2 > 0$ και $K_3 < 0$. Έχει τεθεί προηγουμένως όμως $\rho^2 = k$, οπότε έχουμε τρία ζεύγη ριζών της εκτοβαθμίου:

$$\rho_{1,2} = \pm \bar{\rho}_1 = \pm \sqrt{k_1}$$

$$\rho_{3,4} = \pm \bar{\rho}_2 = \pm \sqrt{k_2}$$

$$\rho_{5,6} = \pm \bar{\rho}_3 \cdot i = \pm i \cdot \sqrt{|k_3|}$$

και η γενική λύση της (1.7) γράφεται:

$$u(\theta) = C_1 \sinh(\bar{\rho}_1 \theta) + C_2 \cosh(\bar{\rho}_1 \theta) + C_3 \sinh(\bar{\rho}_2 \theta) + C_4 \cosh(\bar{\rho}_2 \theta) + C_5 \sinh(\bar{\rho}_3 \theta) + C_6 \cosh(\bar{\rho}_3 \theta) \quad (1.9\alpha)$$

η δε $v(\theta)$ από την (1.6) και την (1.9α) είναι:

$$v(\theta) = -\frac{1}{\alpha_2} [(-\bar{\rho}_1^{-5} + (\alpha_2 + 1)\bar{\rho}_1) [C_1 \cosh(\bar{\rho}_1 \theta) + C_2 \sinh(\bar{\rho}_1 \theta)] + (-\bar{\rho}_2^{-5} + (\alpha_2 + 1)\bar{\rho}_2) [C_3 \cosh(\bar{\rho}_2 \theta) + C_4 \sinh(\bar{\rho}_2 \theta)] + (-\bar{\rho}_3^{-5} + (\alpha_2 + 1)\bar{\rho}_3) [C_5 \cosh(\bar{\rho}_3 \theta) + C_6 \sinh(\bar{\rho}_3 \theta)]] \quad (1.9\beta)$$

5. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος για την περίπτωση αμφιαρθωτού τόξου είναι:

$$\bar{u}(0) = 0$$

$$\bar{u}(\varphi) = 0$$

$$\bar{v}(0) = 0$$

$$\bar{v}(\varphi) = 0$$

$$\bar{M}(0) = 0 \Rightarrow \bar{u}''(0) + \bar{u}(0) = 0$$

$$\bar{M}(\varphi) = 0 \Rightarrow \bar{u}''(\varphi) + \bar{u}(\varphi) = 0$$

$$\bar{u}(0) = 0$$

$$\bar{u}(\varphi) = 0$$

$$\bar{v}(0) = 0$$

$$\bar{v}(\varphi) = 0$$

$$\bar{u}''(0) = 0$$

$$\bar{u}''(\varphi) = 0$$

(1.10α)

Για την περίπτωση του αμφίπακτου τόξου αντί της συνθήκης μηδενισμού των ροπών στις στηρίξεις έχουμε μηδενισμό των στρεφών σε αυτές. Έτσι, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\bar{u}(0) &= 0 \\ \bar{u}(\varphi) &= 0 \\ \bar{v}(0) &= 0 \\ \bar{v}(\varphi) &= 0 \\ \bar{u}''(0) &= 0 \\ \bar{u}'(\varphi) &= 0\end{aligned}\tag{1.10β}$$

Οι (1.10) σε συνδυασμό με τις (1.9) δίνουν ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ως προς τα C_i , του οποίου για να υπάρχει λύση πλην της μηδενικής πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να μηδενίζεται. Αυτή είναι η συνθήκη την οποία πρέπει να πληρούν οι ιδιοσυχνότητες των διαφόρων τόξων. Η ελάχιστη τιμή ιδιοσυχνότητας, πλην της μηδενικής, για την οποία ισχύει η παραπάνω συνθήκη, είναι η φυσική ιδιοσυχνότητα (ιδιοσυχνότητα πρώτης κανονικής μορφής) του υπό μελέτη τόξου.

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Στην παρούσα εργασία προσδιορίστηκαν οι βασικές ιδιοσυχνότητες για ένα σύνολο τοξοτών αμφιαρθρωτών φορέων, καθώς και των αντιστοίχων τους αμφιπάκτων, με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των παρακάτω δεδομένων:

$$r = 10, 20, 30 \text{ (μέτρα)}$$

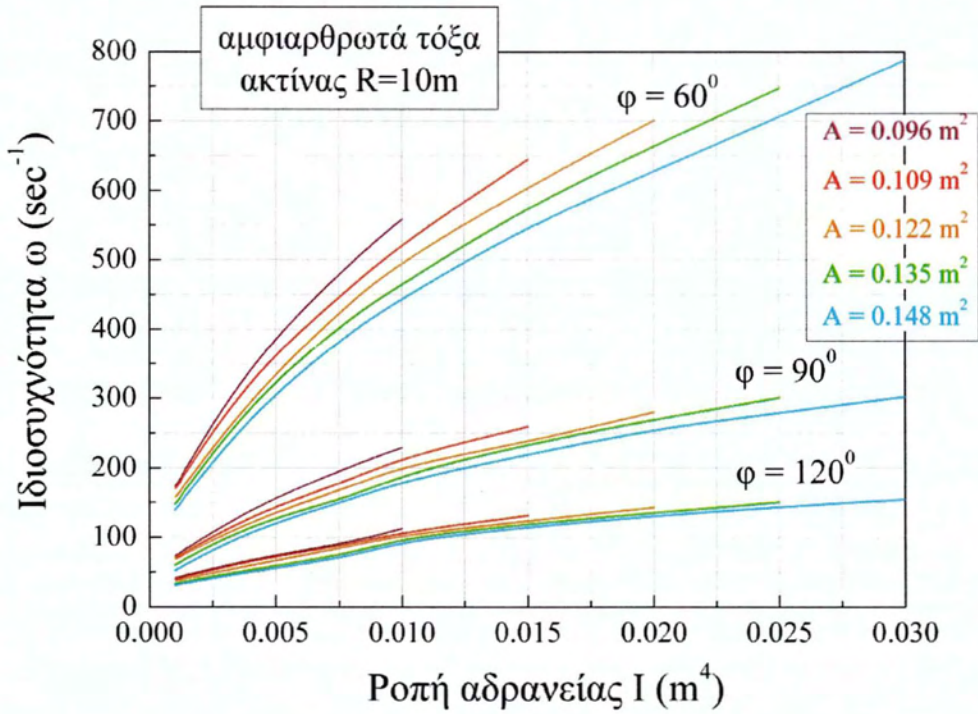
$$\varphi = 60, 90, 120 \text{ (μοίρες)}$$

$$A = .096, .109, .122, .135, .148 \text{ (μέτρα}^2\text{)}$$

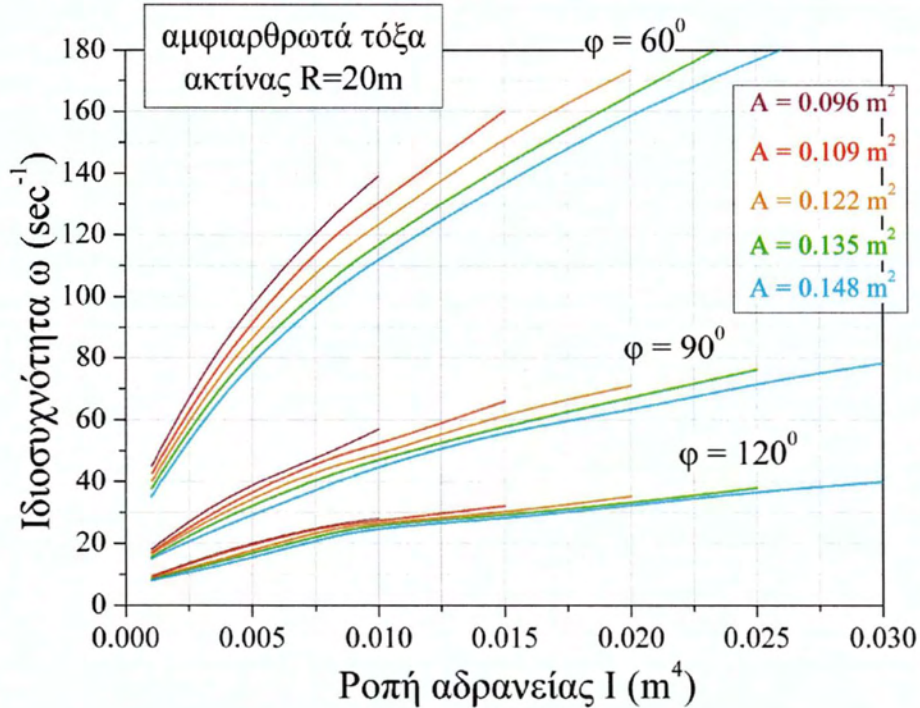
$$I = .001 - .030 \text{ (μέτρα}^4\text{)}$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, φαίνονται στους επόμενους πίνακες. Ακολουθεί ο σχολιασμός και τα συμπεράσματα από την ανάλυση τους στο Κεφάλαιο 5.

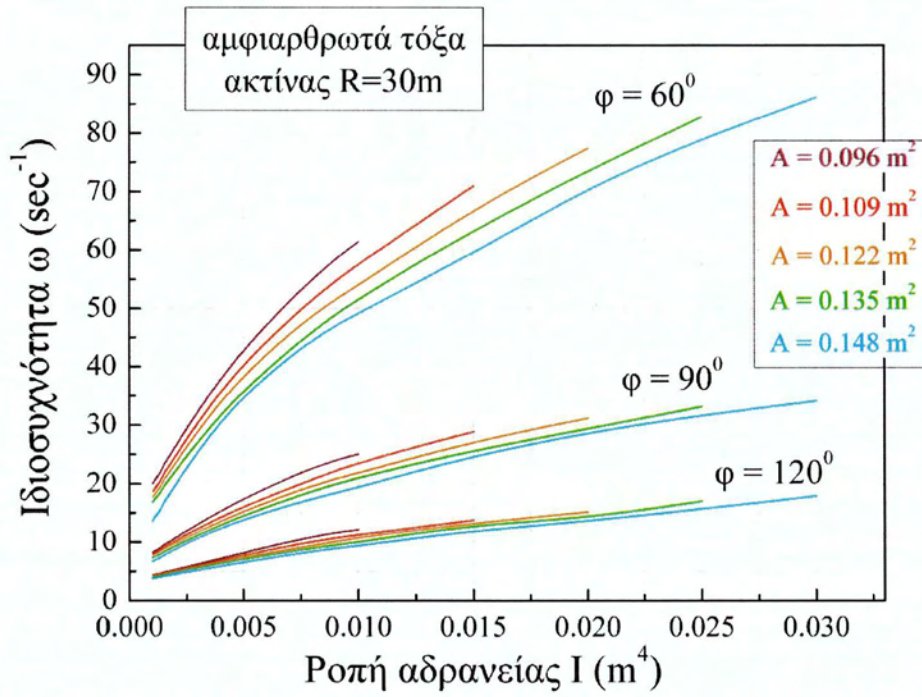
α/α	Ακτίνα (m)	Γωνία (μοίρες)	Διατομή (m ²)	Ροπή Αδράνειας (m ⁴)	Ιδιοσυχνότητες	
					Αμφιαρθρωτών	Αμφιάκτων
					(1/sec)	
1	10	60	.096	.004	352.515	564.061
2	10	60	.109	.008	468.650	750.327
3	10	60	.122	.012	543.216	869.327
4	10	90	.096	.004	144.228	237.387
5	10	90	.109	.008	191.701	315.387
6	10	90	.122	.012	222.175	366.189
7	10	120	.096	.004	72.549	124.228
8	10	120	.109	.008	96.397	165.194
9	10	120	.122	.012	111.692	191.521
10	20	60	.096	.008	116.810	186.797
11	20	60	.109	.012	135.279	216.362
12	20	60	.122	.016	148.535	237.601
13	20	90	.096	.008	47.802	78.624
14	20	90	.109	.012	55.355	91.065
15	20	90	.122	.016	60.778	100.000
16	20	120	.096	.008	24.052	41.159
17	20	120	.109	.012	27.851	47.667
18	20	120	.122	.016	30.576	52.341
19	30	60	.096	.012	60.075	96.045
20	30	60	.109	.016	65.953	105.451
21	30	60	.122	.020	70.431	112.619
22	30	90	.096	.012	24.587	40.403
23	30	90	.109	.016	26.992	44.387
24	30	90	.122	.020	28.823	47.404
25	30	120	.096	.012	12.372	21.167
26	30	120	.109	.016	13.581	23.238
27	30	120	.122	.020	14.504	24.817



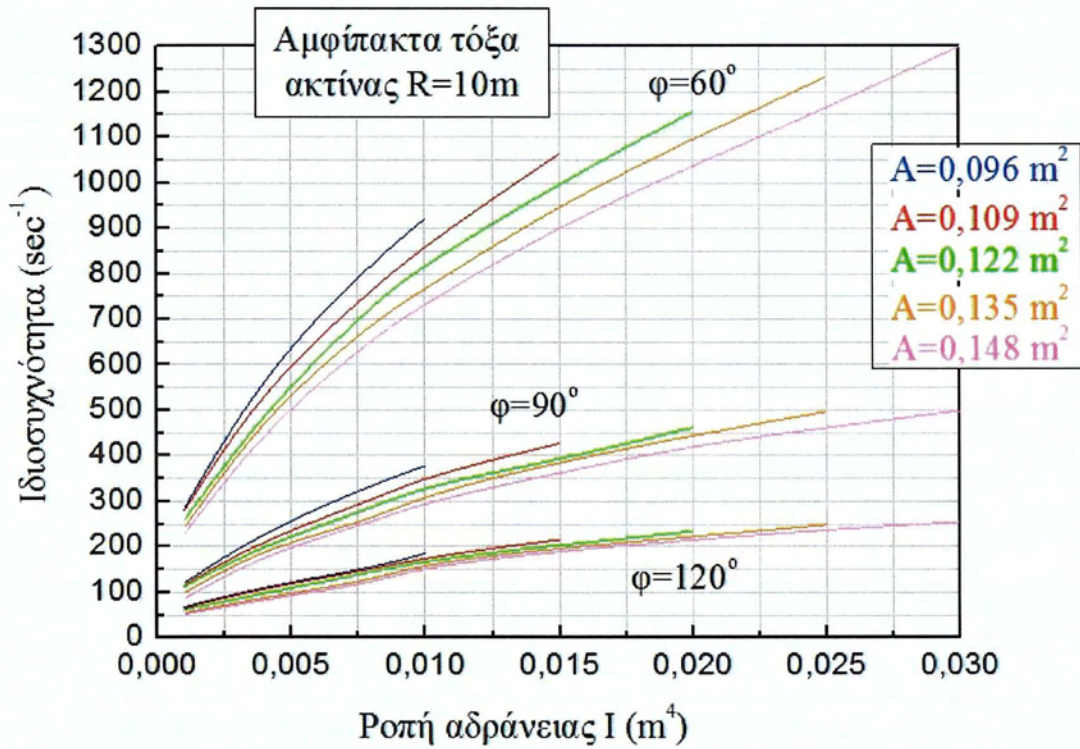
Διάγραμμα 1: Ιδιοσυχνότητες αμφιαρθρωτών τόξων ακτίνας 10m



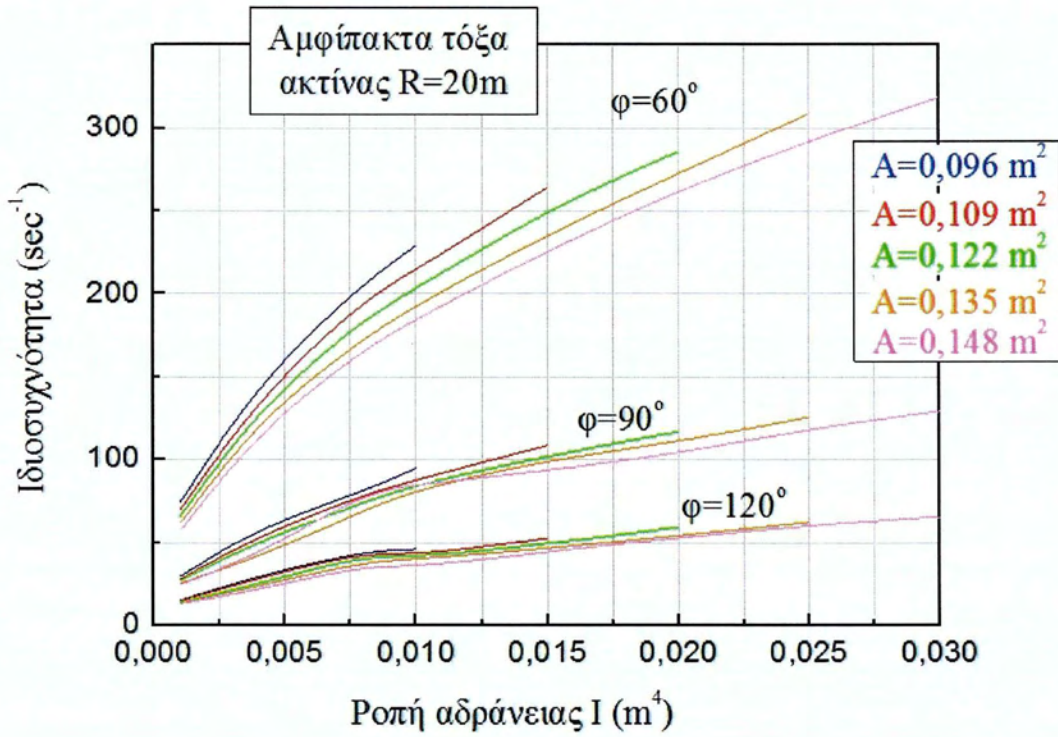
Διάγραμμα 2: Ιδιοσυχνότητες αμφιαρθρωτών τόξων 20m



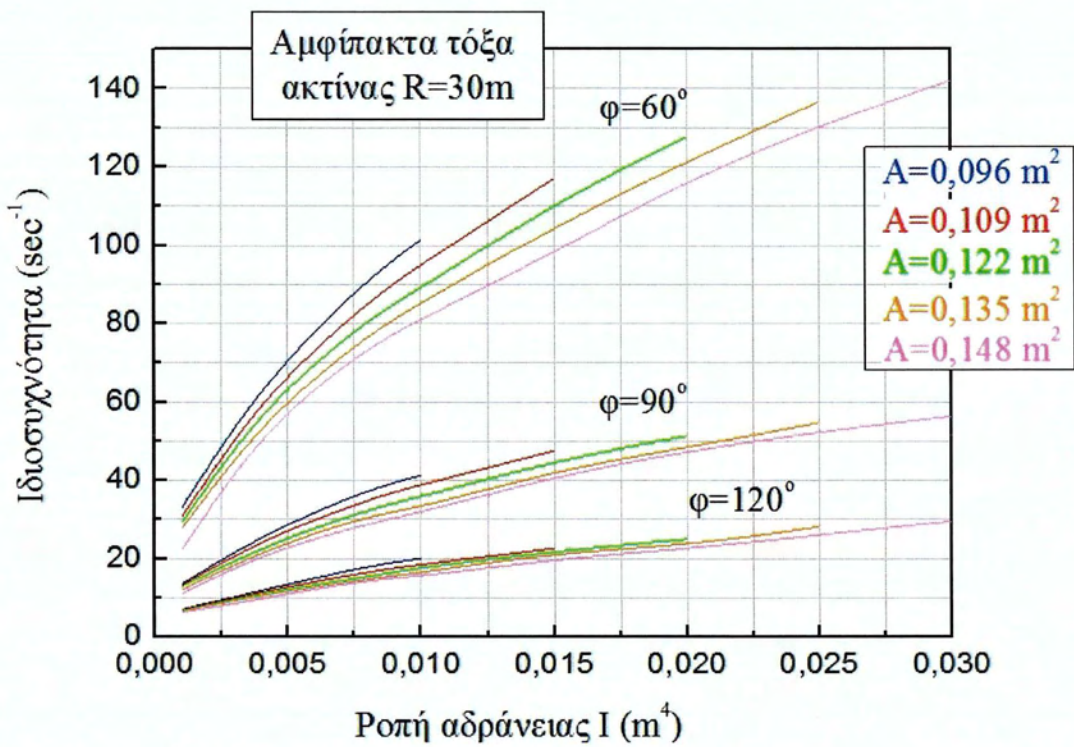
Διάγραμμα 3: Ιδιοσυχνότητες αμφιαρθρωτών τόξων ακτίνας 30m



Διάγραμμα 4: Ιδιοσυχνότητες αμφίπακτων τόξων ακτίνας 10m



Διάγραμμα 5: Ιδιοσυχνότητες αμφίπακτων τόξων ακτίνας 20m



Διάγραμμα 6: Ιδιοσυχνότητες αμφίπακτων τόξων ακτίνας 30m

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Ως γνωστόν (από τις 1.4) ισχύουν οι σχέσεις:

$$-\frac{EI}{r^4} \overline{u_n^{(4)}} - \frac{EI}{r^4} \overline{u_n^{(2)}} + \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_n^2 \right) \overline{u_n} - \frac{EA}{r^2} \overline{v_n^{(1)}} = 0 \quad (2.1\alpha)$$

και

$$-\frac{EI}{r^4} \overline{u_n^{(3)}} - \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{EA}{r^4} \right) \overline{u_n^{(1)}} - \frac{EA}{r^2} \overline{v_n^{(2)}} + m \cdot \omega_n^2 \overline{v_n} = 0 \quad (2.1\beta)$$

όπου ο δείκτης «n» εκφράζει τη ν-στή κανονική μορφή της ταλαντώσεως. Οι παραπάνω τύποι για την κ-στη κανονική μορφή γράφονται:

$$-\frac{EI}{r^4} \overline{u_k^{(4)}} - \frac{EI}{r^4} \overline{u_k^{(2)}} + \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_k^2 \right) \overline{u_k} - \frac{EA}{r^2} \overline{v_k^{(1)}} = 0 \quad (2.2\alpha)$$

και

$$-\frac{EI}{r^4} \overline{u_k^{(3)}} - \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{EA}{r^4} \right) \overline{u_k^{(1)}} - \frac{EA}{r^2} \overline{v_k^{(2)}} + m\omega_k^2 \overline{v_k} = 0 \quad (2.2\beta)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.1α) με $-u_k \cdot d\theta$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε από το 0 έως το φ . Ακολούθως πολλαπλασιάζουμε την (2.2α) με $-u_n \cdot d\theta$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε από το 0 έως το φ . Έτσι :

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_n^{(4)}} \overline{u_k} d\theta + \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_n^{(2)}} \overline{u_k} d\theta - \int_0^\varphi \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_n^2 \right) \overline{u_n} \overline{u_k} d\theta + \\ & + \frac{EA}{r^2} \int_0^\varphi \overline{v_n^{(1)}} \overline{u_k} d\theta = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_k^{(4)}} \overline{u_n} d\theta + \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_k^{(2)}} \overline{u_n} d\theta - \int_0^\varphi \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_k^2 \right) \overline{u_k} \overline{u_n} d\theta + \\ & + \frac{EA}{r^2} \int_0^\varphi \overline{v_k^{(1)}} \overline{u_n} d\theta = 0 \end{aligned}$$

Οι δυο προηγούμενες εξισώσεις κατόπιν διαδοχικών παραγοντικών ολοκληρώσεων και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, γίνονται:

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_n^{(2)}} \overline{u_k^{(2)}} d\theta + \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_n^{(1)}} \overline{u_k^{(1)}} d\theta - \int_0^\varphi \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_n^2 \right) \overline{u_n} \overline{u_k} d\theta + \\ & + \frac{EA}{r^2} \int_0^\varphi \overline{v_n^{(1)}} \overline{u_k} d\theta = 0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_k^{(2)}} \overline{u_n^{(2)}} d\vartheta + \frac{EI}{r^4} \int_0^\varphi \overline{u_k^{(1)}} \overline{u_n^{(1)}} d\vartheta - \int_0^\varphi \left(\frac{EA}{r^2} + m\omega_k^2 \right) \overline{u_k} \overline{u_n} d\vartheta + \frac{EA}{r^2} \int_0^\varphi \overline{v_k^{(1)}} \overline{u_n} d\vartheta = 0$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^\varphi m \overline{u_n} \overline{u_k} d\vartheta + \frac{EA}{r^2} \int_0^\varphi \left(\overline{v_n^{(1)}} \overline{u_k} - \overline{v_k^{(1)}} \overline{u_n} \right) d\vartheta = 0 \quad (2.3\alpha)$$

Εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο και για τις (2.1β) και (2.2β), εξάγουμε την ακόλουθη σχέση:

$$(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^\varphi m \overline{u_n} \overline{u_k} d\vartheta + \frac{EA}{r^4} \int_0^\varphi \left(\overline{u_k^{(2)}} \overline{v_n^{(1)}} - \overline{u_n^{(2)}} \overline{v_k^{(1)}} \right) d\vartheta - \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{EI}{r^4} \right) \int_0^\varphi \left(\overline{u_n^{(1)}} \overline{v_k} - \overline{u_k^{(1)}} \overline{v_n} \right) d\vartheta = 0 \quad (2.3\beta)$$

Ακολούθως προσθέτουμε κατά μέλη τις (2.3) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες της παραγοντικής ολοκλήρωσεως καθώς και τις συνοριακές συνθήκες, καταλήγουμε στη σχέση:

$$(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^\varphi m \left(\overline{u_n} \overline{u_k} + \overline{v_n} \overline{v_k} \right) d\vartheta = \frac{EA}{r^4} \left[\int_0^\varphi \left(\overline{u_k^{(3)}} - \overline{u_k^{(1)}} \right) \overline{v_n} d\vartheta - \int_0^\varphi \left(\overline{u_n^{(3)}} - \overline{u_n^{(1)}} \right) \overline{v_k} d\vartheta \right] = 0 \quad (2.4)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος $\overline{u}(\theta), \overline{v}(\theta)$ είναι μονότονες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0, \varphi]$ ως άθροισμα μονότονων και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Εξάλλου οι συναρτήσεις $\overline{u}^{(1)}(\theta), \overline{v}^{(1)}(\theta)$ είναι ολοκληρώσιμες στο ίδιο διάστημα, οπότε θα υπάρχει $\xi \in [0, \varphi] = [0^\circ, 180^\circ]$ τέτοιο ώστε :

$$\int_0^\varphi \left(\overline{u_k^{(3)}} - \overline{u_k^{(1)}} \right) \overline{v_n} d\vartheta = \overline{v_n}(0) \int_0^\xi \left(\overline{u_k^{(3)}} - \overline{u_k^{(1)}} \right) d\vartheta + \overline{v_n}(\varphi) \int_\xi^\varphi \left(\overline{u_n^{(3)}} - \overline{u_n^{(1)}} \right) d\vartheta$$

Από τις αρχικές συνθήκες γνωρίζουμε :

$$\overline{v_n}(0) = \overline{v_n}(\varphi) = 0$$

Κατά συνέπεια η (2.4) γίνεται:

$$(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^\varphi m \left(\overline{u_n} \overline{u_k} + \overline{v_n} \overline{v_k} \right) d\vartheta = 0$$

Αν $n \neq k$ τότε και $\omega_n \neq \omega_k$.

Έτσι εξάγεται η σχέση:

$$\int_0^{\varphi} m(\overline{u_n u_k} + \overline{v_n v_k}) d\vartheta = 0 \quad (2.5)$$

Η (2.5) είναι η συνθήκη ορθογωνικότητας των κανονικών μορφών της ταλάντωσης στο διάστημα $[0, \varphi]$. Στην περίπτωση που $n = k$ τότε και $\omega_n = \omega_k$, η (2.5) προφανώς ικανοποιείται και ισχύει:

$$\int_0^{\varphi} m(\overline{u_n^2} + \overline{v_n^2}) d\vartheta = Ct, \text{ όπου } Ct = \text{πραγματική σταθερά}$$

Στην παραπάνω συνθήκη ορθογωνικότητας η μάζα m είναι ανηγμένη ανά μέτρο μήκους (ds) του τόξου. Αν την εκφράσουμε ανά μονάδα της γωνίας του ανοίγματος του τόξου ($m \cdot r$) τότε:

$$\int_0^{\varphi} m(\overline{u_n^2} + \overline{v_n^2}) d\vartheta = Ct \quad (2.6)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ως γνωστόν (9) η εξαναγκασμένη ταλάντωση ημπóρει να αναλυθεί σε ανάπτυγμα σειράς των κανονικών μορφών του φορέα, δηλαδή:

$$\bar{u}(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\theta) T_n(t) \quad (3.1\alpha)$$

$$\bar{v}(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(\theta) T_n(t) \quad (3.1\beta)$$

όπου:

$\bar{u}(\theta, t), \bar{v}(\theta, t)$: τα δυναμικά βέλη κατά τις διευθύνσεις u και v αντίστοιχα.

$\bar{u}_n(\theta), \bar{v}_n(\theta)$: οι συναρτήσεις σχήματος (shape functions) του φορέα (αδιάστατες)

$T_n(t)$: η προσδιοριστέα συνάρτηση χρόνου (time function) του φορέα, καλούμενη εύρος της n -οστής κανονικής μορφής καμπτικής ταλάντωσης (με διαστάσεις μήκους).

Επίσης ισχύουν και οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$u_n^{(v)}(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^{(v)}(\theta) T_n(t)$$

$$v_n^{(v)}(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n^{(v)}(\theta) T_n(t)$$

$$\dot{u}_n(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\theta) \dot{T}_n(t)$$

$$\ddot{u}_n(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\theta) \ddot{T}_n(t)$$

$$\dot{v}_n(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(\theta) \dot{T}_n(t)$$

$$\ddot{v}_n(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(\theta) \ddot{T}_n(t)$$

όπου ο δείκτης (n) αντιπροσωπεύει την μερική n -οστή παράγωγο ως προς θ και η τελεία άνω την μερική παράγωγο ως προς τον χρόνο.

Επίσης για την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως που οφείλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο P οι εξισώσεις ισορροπίας (1.2) παίρνουν τη μορφή:

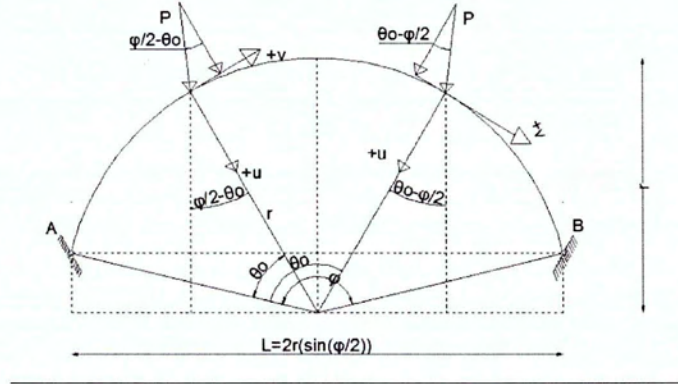
$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{N}{r} = P \alpha \kappa \tau \nu \iota \kappa \acute{o} = P_u \quad (3.2\alpha)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} - \frac{V}{r} = P \varepsilon \varphi \alpha \pi / \kappa \acute{o} = P_v \quad (3.2\beta)$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial s} \quad (3.2\gamma)$$

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Οι εξισώσεις ισορροπίας (3.2) λαμβανομένων υπ' όψιν των (3.1), του ότι $ds = rd\theta$ και σύμφωνα με την εποπτεία του Σχήματος 3 γίνονται:



Σχήμα 3: Κινούμενο φορτίο πάνω στο τόξο. Ανάλυση στους άξονες u και v.

Για την ισορροπία ως προς τον άξονα u:

$$-\frac{EI}{r^4} \frac{d^4 u}{d\theta^4} - \frac{EI}{r^4} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{EA}{r^2} u - \frac{EA}{r^2} \frac{dv}{d\theta} - m\ddot{u} + P_u = 0 \quad (3.3\alpha)$$

όπου:

$$P_u = \begin{cases} P \cdot \cos(\varphi/2 - \theta)(s - s_0), & 0 \leq \theta \leq \varphi/2 \\ P \cdot \cos(\frac{\varphi}{2} - \theta)\delta(s - s_0), & \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \varphi \end{cases}$$

Για την ισορροπία ως προς τον άξονα v:

$$-\frac{EI}{r^4} \frac{d^3 u}{d\theta^3} + \left(\frac{EI}{r^4} + \frac{EA}{r^2}\right) \frac{du}{d\theta} - \frac{EA}{r^2} \frac{d^2 v}{d\theta^2} - m\ddot{v} + P_v = 0 \quad (3.3\beta)$$

όπου:

$$P_v = \begin{cases} P \cdot \cos(\varphi/2 - \theta)\delta(s - s_0), & 0 \leq \theta \leq \varphi/2 \\ -P \cdot \sin(\frac{\varphi}{2} - \theta)\delta(s - s_0), & \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \varphi \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\delta(s-s_0)$ είναι η συμβολική συνάρτηση DIRAC.

Με αντικατάσταση των σχέσεων (3.1) στις (3.3) προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} & -\frac{EI}{r^4} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^{(4)} T_n - \frac{EI}{r^4} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^{(2)} T_n + \frac{EA}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n T_n - \\ & -\frac{EA}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n^{(1)} T_n - m \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \ddot{T}_n = -P \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

ή με εφαρμογή της προφανούς ιδιότητας του αθροίσματος σειρών:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(4)} T_n - \frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(2)} T_n + \frac{EA}{r^2} \bar{u}_n T_n - \right. \\ & \left. -\frac{EA}{r^2} \bar{v}_n^{(1)} T_n - m \bar{u}_n \ddot{T}_n \right) = -P \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.4\alpha)$$

Αντίστοιχα δε:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(3)} + \left(\frac{EI}{r^2} + \frac{EI}{r^4} \right) \bar{u}_n^{(1)} - \frac{EA}{r^2} \bar{v}_n^{(2)} \right] T_n - \\ & - m \bar{v}_n \ddot{T}_n = P \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.4\beta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις (3.4) είναι οι εξισώσεις κίνησης του φορέα υπό την επίδραση του φορτίου P, όταν αναλυθεί η ταλάντωση σε συνάρτηση κανονικών μορφών κατά τις διευθύνσεις u,v αντίστοιχα.

3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Όπως έχουμε δείξει στα προηγούμενα ισχύουν:

$$\begin{aligned} & -\frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(4)} - \frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(2)} + \frac{EA}{r^2} \bar{u}_n - \frac{EA}{r^2} \bar{v}_n^{(1)} = -m \omega_n^{(2)} \bar{u}_n \\ & -\frac{EI}{r^4} \bar{u}_n^{(3)} + \left(\frac{EI}{r^2} + \frac{EA}{r^2} \right) \bar{u}_n^{(1)} - \frac{EA}{r^2} \bar{v}_n^{(2)} = -m \omega_n^{(2)} \bar{v}_n \end{aligned}$$

οι παραπάνω σχέσεις συνδυαζόμενες με τις (3.4) δίνουν:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-m \omega_n^{(2)} \bar{u}_n T_n - m \bar{u}_n \ddot{T}_n \right) = -P \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-m \omega_n^{(2)} \bar{v}_n T_n - m \bar{v}_n \ddot{T}_n \right) = P \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των προηγούμενων με $\bar{u}_k \cdot d\theta$ και την δεύτερη με $\bar{v}_k \cdot d\theta$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-m\omega_n^{(2)} \bar{u}_n \bar{u}_k T_n - m\bar{u}_n \bar{u}_k \ddot{T}_n \right) d\vartheta = -P\bar{u}_k \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-m\omega_n^{(2)} \bar{v}_n \bar{v}_k T_n - m\bar{v}_n \bar{v}_k \ddot{T}_n \right) = P\bar{v}_k \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \delta(\theta - \theta_0)$$

Αυτές τις προσθέτουμε κατά μέλη και το εξαγόμενο το ολοκληρώνουμε από 0 έως φ :

$$\int_0^{\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\bar{u}_n \bar{u}_k + \bar{v}_n \bar{v}_k) m\omega_n^{(2)} T_n - (\bar{u}_n \bar{u}_k + \bar{v}_n \bar{v}_k) m\ddot{T}_n \right] d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\varphi} P \left(-\bar{u}_k \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) + \bar{v}_k \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \right) \delta(\theta - \theta_0) d\vartheta$$

Δεδομένου ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα αθροίσματος συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων και λόγω της αποδεδειγμένης σχέσης ορθογωνικότητας (2.5), (2.6) η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$-\omega_n^2 T_n m r \int_0^{\varphi} (\bar{u}_n^{(2)} + \bar{v}_n^{(2)}) d\vartheta - \ddot{T}_n m r \int_0^{\varphi} (\bar{u}_n^{(2)} + \bar{v}_n^{(2)}) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\varphi} P \left[-\bar{u}_n \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) + \bar{v}_n \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \right] \delta(\theta - \theta_0) d\vartheta$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της συναρτήσεως DIRAC για το δεύτερο μέλος της παραπάνω, έχουμε:

$$-\left[\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) \right] m r \int_0^{\varphi} (\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2) d\vartheta =$$

$$= P \left[-\bar{u}_n(\theta_0) \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right) + \bar{v}_n(\theta_0) \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right) \right]$$

Και έτσι προκύπτει τελικά η γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{P(\bar{u}_n(\theta_0) \cos(\varphi/2 - \theta_0) - \bar{v}_n(\theta_0) \sin(\varphi/2 - \theta_0))}{m r \int_0^{\varphi} (\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2) d\vartheta} \quad (3.5)$$

Αναζητούμε τη λύση της παραπάνω γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Πρώτα όμως θα βρούμε τη σχέση μεταξύ γωνίας θ και της σταθερής ταχύτητας v με την οποία κινείται το φορτίο πάνω στο τόξο.

Από το Σχήμα 4 έχουμε:

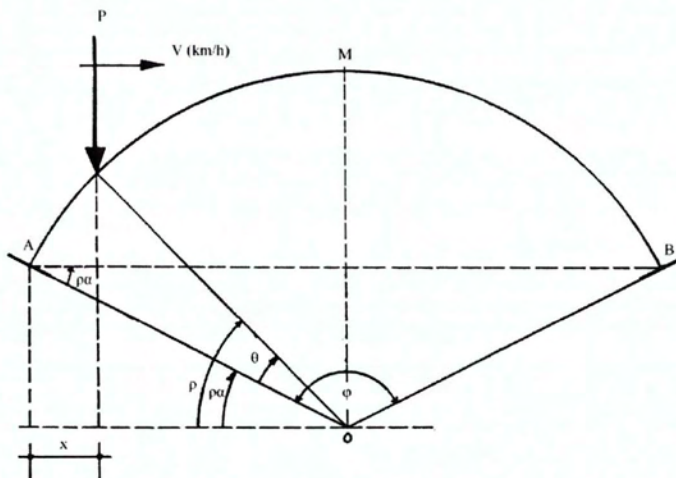
$$x = r \cos(\rho_A) - r \cos(\rho) = r \cos(\pi/2 - \varphi/2) - r \cos(\rho_A + \theta_0)$$

$$\rho_A = \pi/2 - \varphi/2$$

$$x = r[\sin(\varphi/2) - \sin(\varphi/2 - \theta_0)]$$

$$\theta_0 = \varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - x/r]$$

$$x = vt$$



Σχήμα 4: Σχέση μεταξύ πολικής γωνίας θ και οριζόντιας θέσης x του κινούμενου φορτίου.

$$\theta_0 = \varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - vt/r]$$

Έτσι η διαφορική εξίσωση (3.5) γίνεται:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{P}{mrB_n(\varphi)} A_n(t) \quad (3.6)$$

όπου:

$$A_n(t) = u_n \{\varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - vt/r]\} \cos[\arcsin[\sin(\varphi/2) - vt/r] - v_n \{\varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - vt/r]\} [\sin(\varphi/2) - vt/r]$$

και

$$B_n(\varphi) = \int_0^\varphi (\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2) d\vartheta$$

Η λύση της (3.6) δίνεται ως γνωστόν από τον γενικό τύπο:

$$T_n(t) = \frac{\dot{T}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + T_n(0) \cos(\omega_n t) + \frac{P}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^\varphi A_n(\tau) \sin(\omega_n t)(t - \tau) d\tau$$

4. ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ

Λόγω των σχέσεων (3.1) αφενός, των αρχικών συνθηκών:

$$u(\theta, 0) = \dot{u}(\theta, 0) = 0$$

$$v(\theta, 0) = \dot{v}(\theta, 0) = 0$$

αφετέρου και του γεγονότος ότι $u_n(\theta), v_n(\theta)$ όχι κατ' ανάγκη μηδέν, η λύση της διαφορικής εξίσωσης του χρόνου παίρνει τη μορφή:

$$T_n(t) = \frac{P}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^t [A_n(\tau) \sin(\omega_n(t-\tau))] d\tau \quad (3.7)$$

5. ΦΟΡΤΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ

Όταν το φορτίο έχει βγει από το τόξο, δηλαδή όταν $t > t^* = L/v$, όπου L το άνοιγμα του τόξου, με $L = 2r \sin(\varphi/2)$ ο φορέας εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση.

Η συνάρτηση χρόνου δίνεται από την σχέση:

$$T_n = C_n^{(1)} \sin(\omega_n(t-t^*)) + C_n^{(2)} \cos(\omega_n(t-t^*)) \quad (3.8)$$

με $t > t^*$ και $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ σταθερές που προσδιορίζονται βάσει των αρχικών συνθηκών στην αφετηρία μετρήσεως αυτής της φάσης ($x = L, t > t^*$). Από την (3.8) παίρνουμε:

$$C_n^{(1)} = \frac{T_n(t^*)}{\omega_n}$$

Επομένως έχουμε:

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^{t^*} A_n(\tau) \sin \omega_n(t^* - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

Επίσης:

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{\omega_n} \frac{d}{dt} [T_n(t^*)]$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[T_n(t^*)] &= \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \frac{d}{dt} \int_0^{t^*} A_n(\tau) \sin[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \{A_n(t) \sin[\omega_n(t - t^*)] + \int_0^{t^*} \frac{\partial}{\partial t} \sin[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau\} = \\ &= \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^{t^*} A_n(\tau) \cos[\omega_n(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

Λόγω της κατωτέρω μαθηματικής ιδιότητας:

$$F(x) = \int_0^x k(x,t) \partial(t) dt$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = k(x,t) \partial(t) + \int_0^x \frac{dk(x,t)}{dx} \partial(t) dt$$

λαμβάνουμε:

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^{t^*} A_n(\tau) \cos[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau \quad (3.10)$$

Οι (3.8), (3.9), (3.10) συνδυαζόμενες μας δίνουν την συνάρτηση χρόνου όταν το φορτίο ευρίσκεται εκτός ανοίγματος :

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \{ \sin[\omega_n(t - t^*)] \int_0^{t^*} A_n(\tau) \cos[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau + \\ &+ \cos[\omega_n(t - t^*)] \int_0^{t^*} A_n(\tau) \sin[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

6. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ

Ανακεφαλαιώνοντας, και εργαζόμενοι στο εξής μόνο με την πρώτη κανονική μορφή ταλαντώσεως μπορούμε να γράψουμε:

A. Φορτίο κινούμενο μέσα στο άνοιγμα του τόξου (εξαναγκασμένη ταλάντωση).

$$u(\theta, t) = \bar{u}_1(\theta) T_1(t) \quad (3.12\alpha)$$

$$v(\theta, t) = \bar{v}_1(\theta) T_1(t) \quad (3.12\beta)$$

$$T_n(t) = \frac{P}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \int_0^t [A_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau))] d\tau$$

B. Φορτίο κινούμενο εκτός του ανοίγματος του τόξου (ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές συνθήκες τις τελικές της προηγούμενης φάσης,)

$$u(\theta, t) = \bar{u}_1(\theta) T_1(t)$$

$$T_n(t) = \frac{1}{mr\omega_n B_n(\varphi)} \left\{ \sin[\omega_n(t-t^*)] \int_0^{t^*} A_n(\tau) \cos[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau + \right. \\ \left. + \cos[\omega_n(t-t^*)] \int_0^{t^*} A_n(\tau) \sin[\omega_n(t^* - \tau)] d\tau \right\}$$

Με βάση πλέον τα προηγούμενα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των δυναμικών γραμμών επιρροής του φορέα για μοναδιαίο φορτίο κινούμενο εντός και εκτός του ανοίγματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

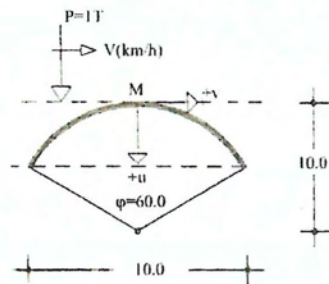
Στα επόμενα διαγράμματα δίνονται οι γραμμές επιρροής της ακτινικής και της εφαιπτομενικής μετατόπισης για 18 περιπτώσεις χαμηλών κυκλικών τόξων για τη διατομή στο μέσο κάθε τόξου και για 10 περιπτώσεις χαμηλών κυκλικών τόξων για διατομή στο πρώτο τεταρτημόριο.

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.

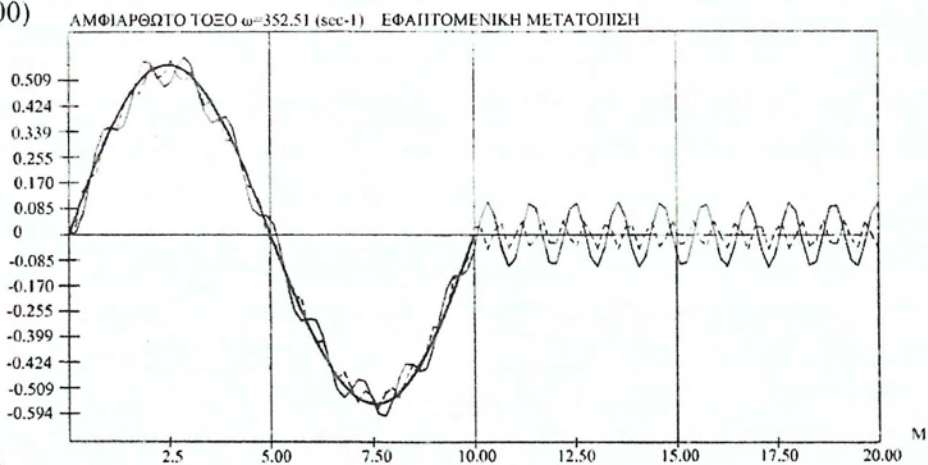
$A = 0.096 \text{ m}^2$
 $I = 0.0040 \text{ m}^4$

10

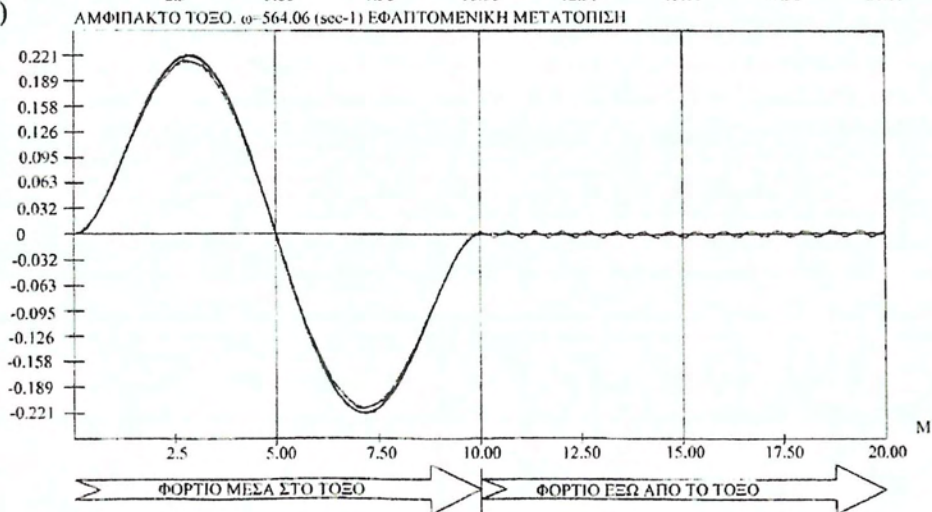
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



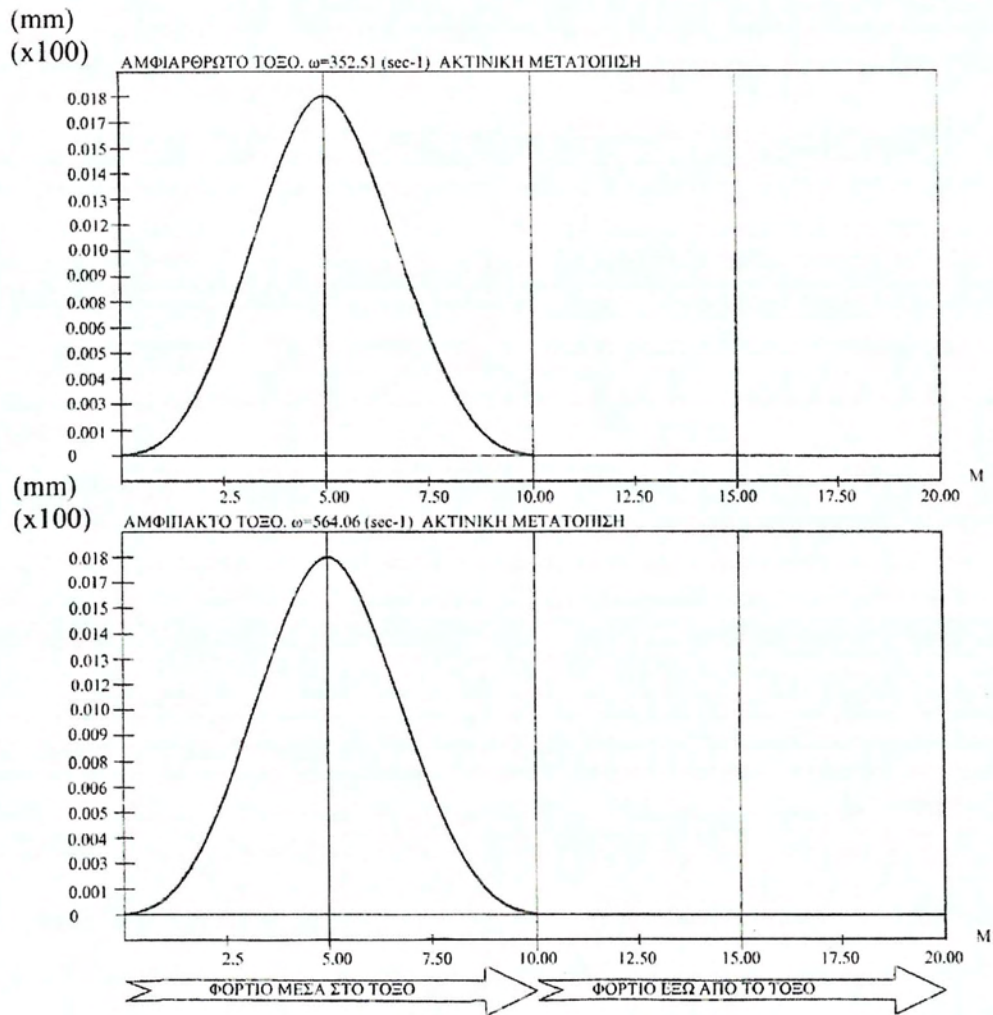
(mm)
(x100)



(mm)
(x100)



Διάγραμμα 7: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου Μ για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.096 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0040 \text{ m}^4$.



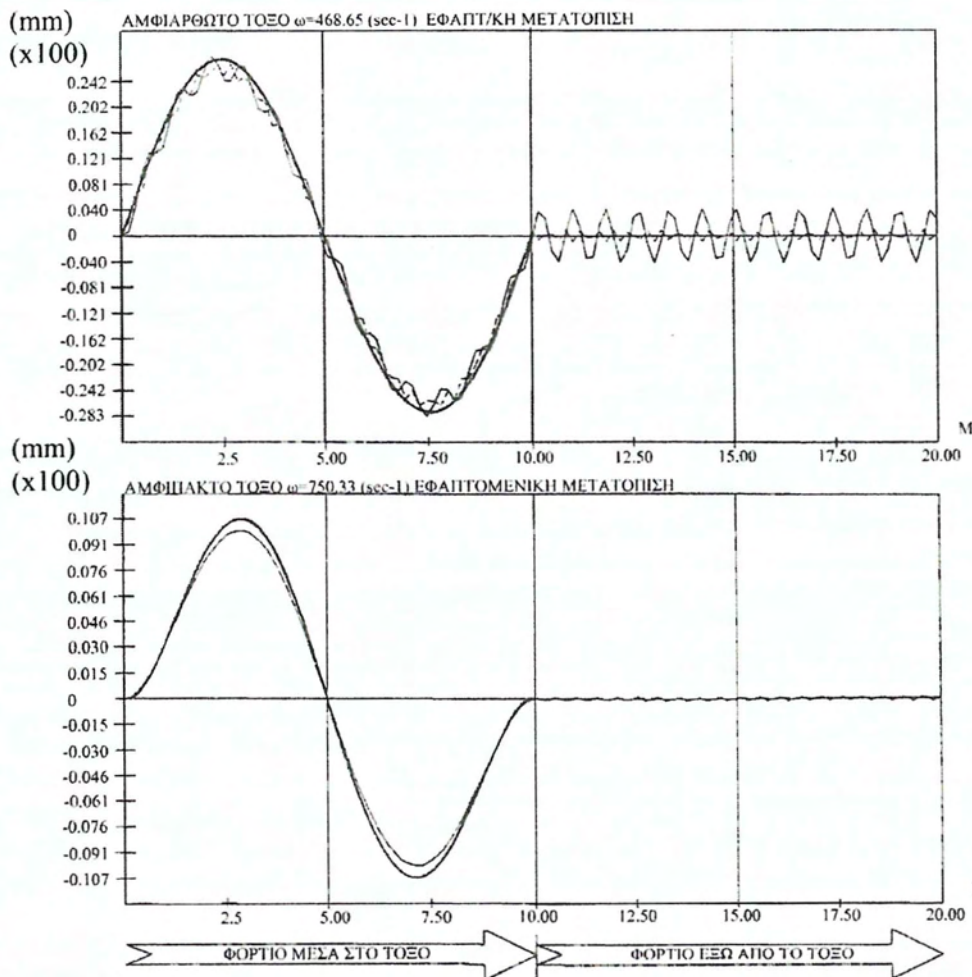
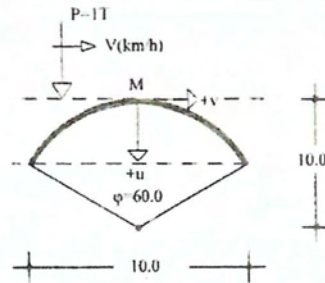
Διάγραμμα 8: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.096\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0040\text{m}^4$.

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.

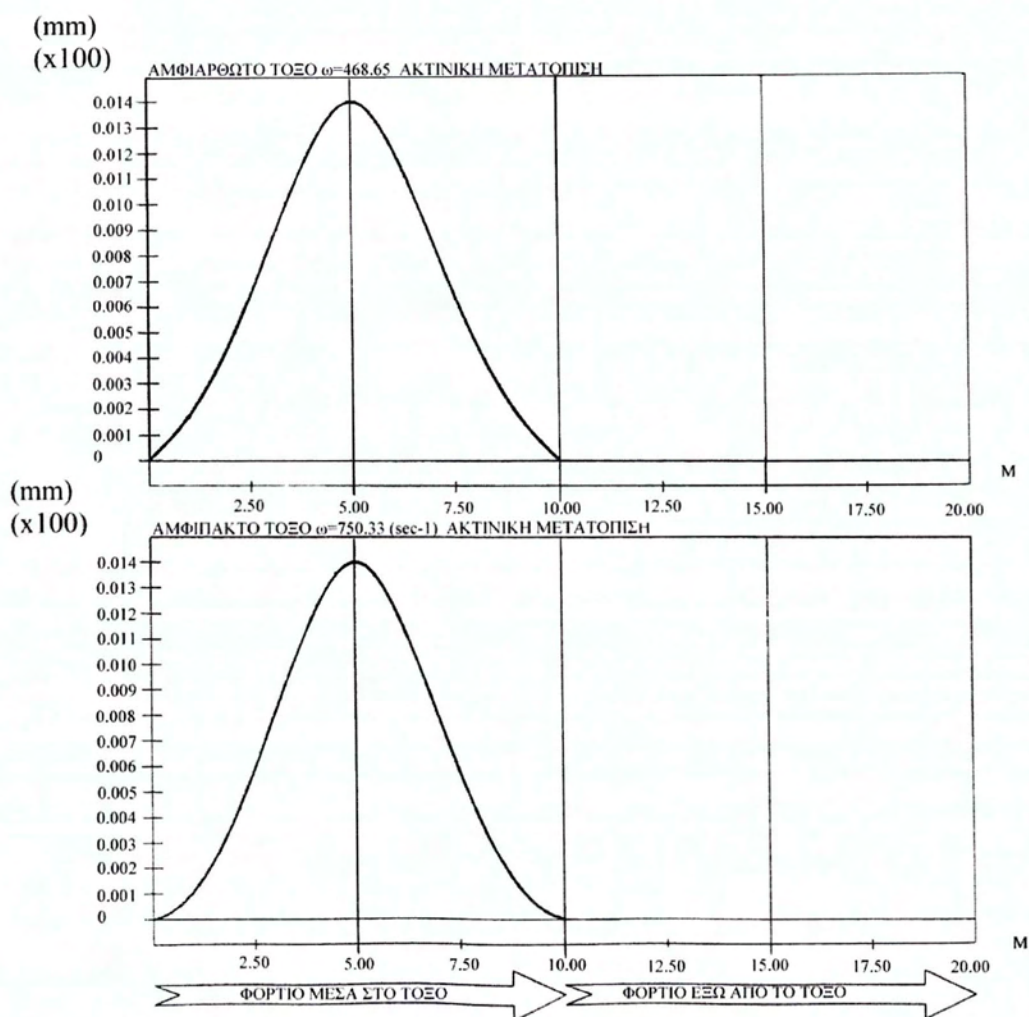
2ο

$A = 0.1090 \text{ m}^2$
 $I = 0.0080 \text{ m}^4$

--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



Διάγραμμα 9: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

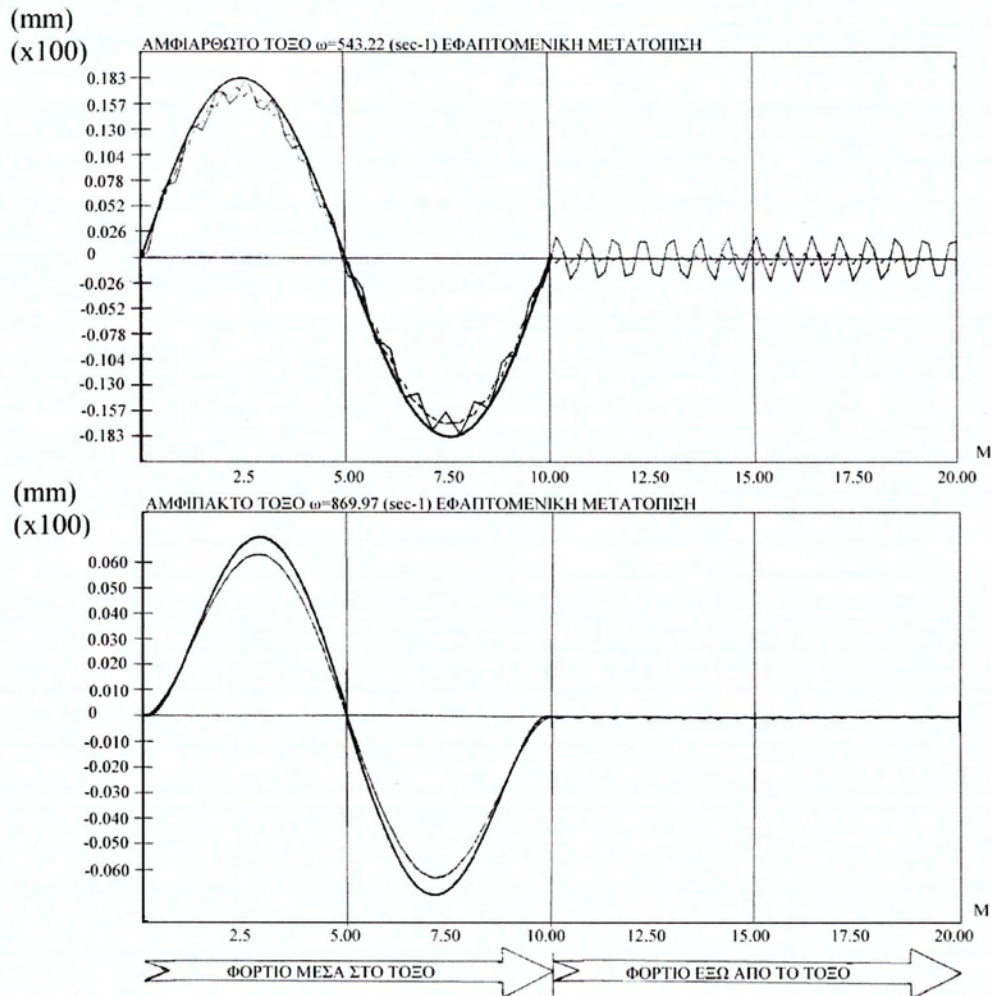
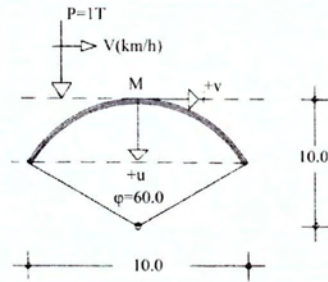


Διάγραμμα 10: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080m^4$.

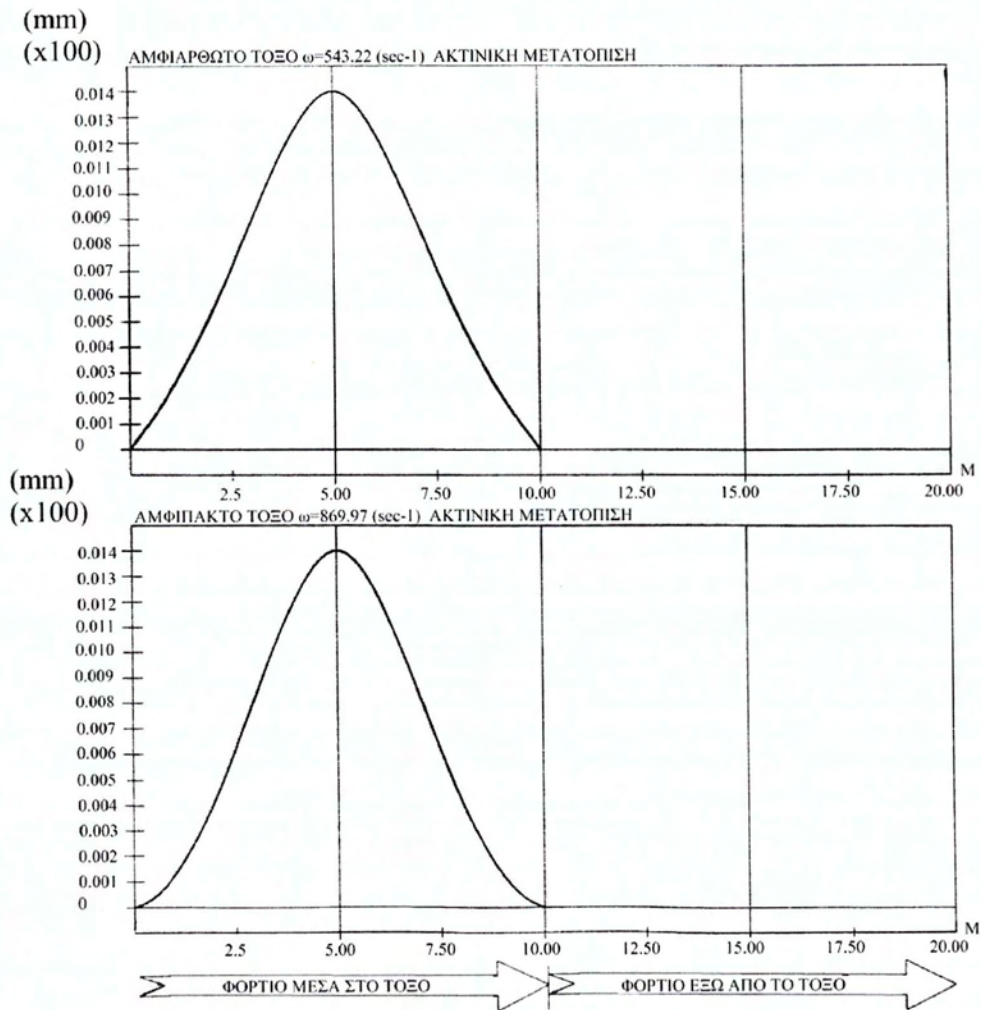
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
3ο

$A=0.1220 \text{ m}^2$
 $I=0.0120 \text{ m}^4$

--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



Διάγραμμα 11: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\phi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



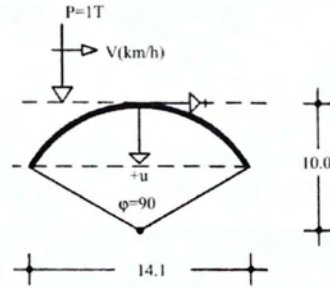
Διάγραμμα 12: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.

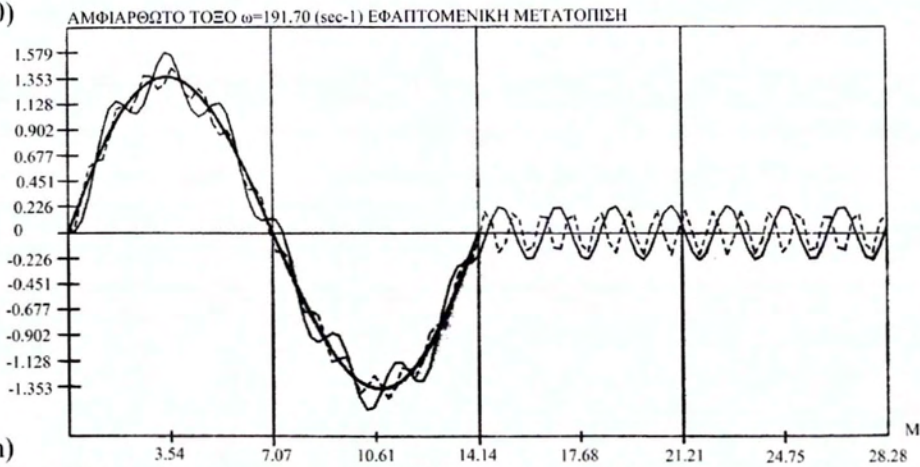
$A=0.1090 \text{ m}^2$
 $I=0.0080 \text{ m}^4$

40

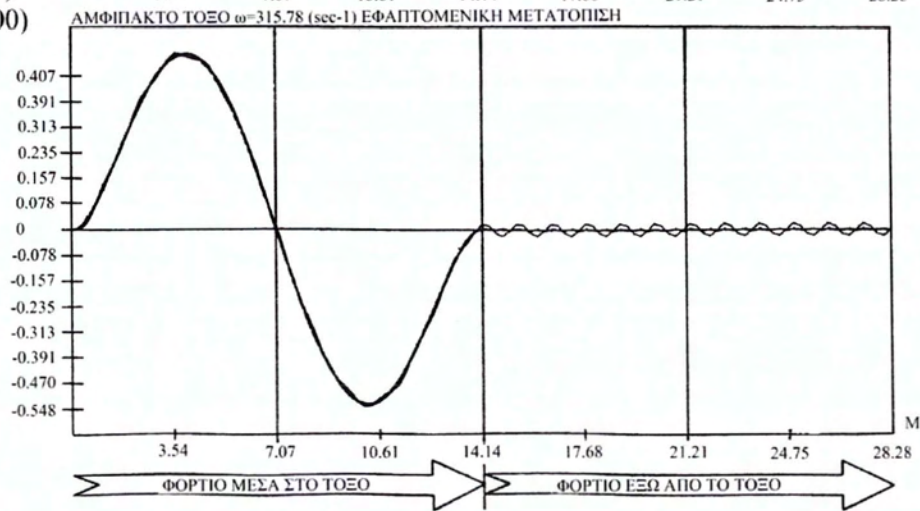
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



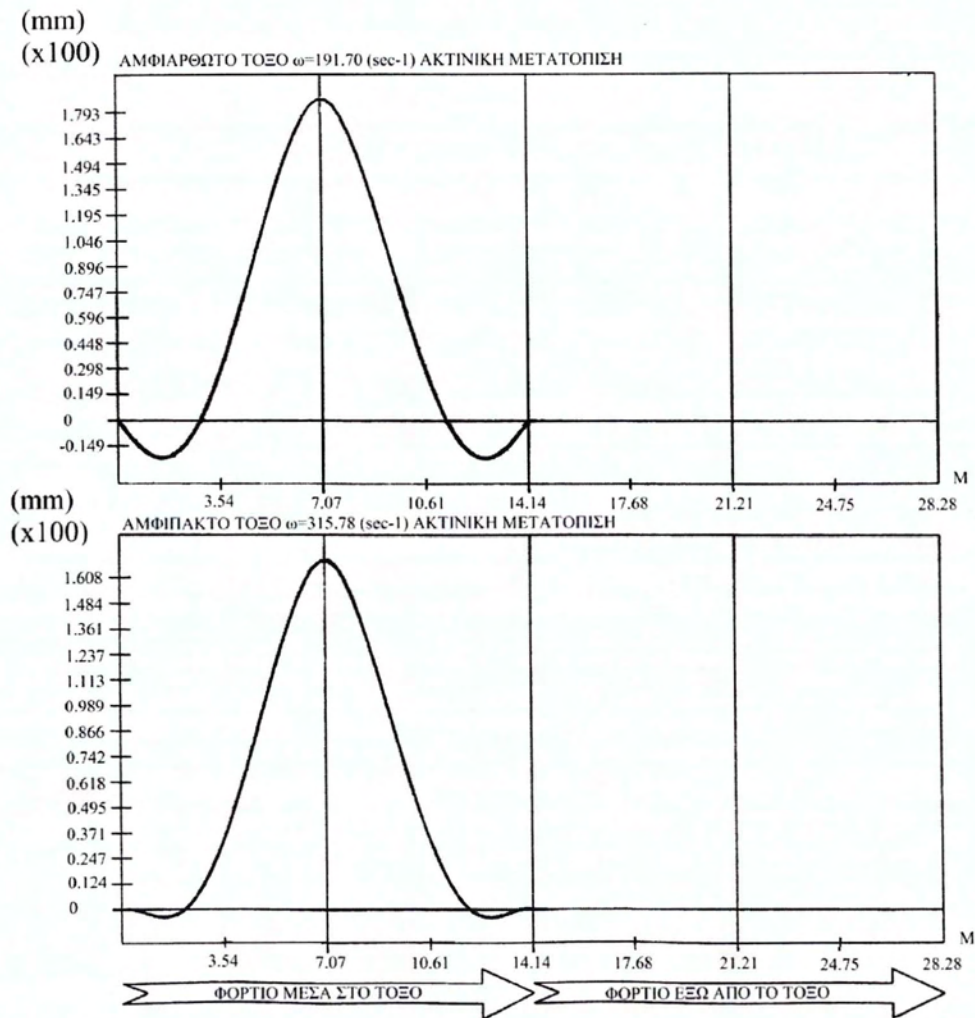
(mm)
(x100)



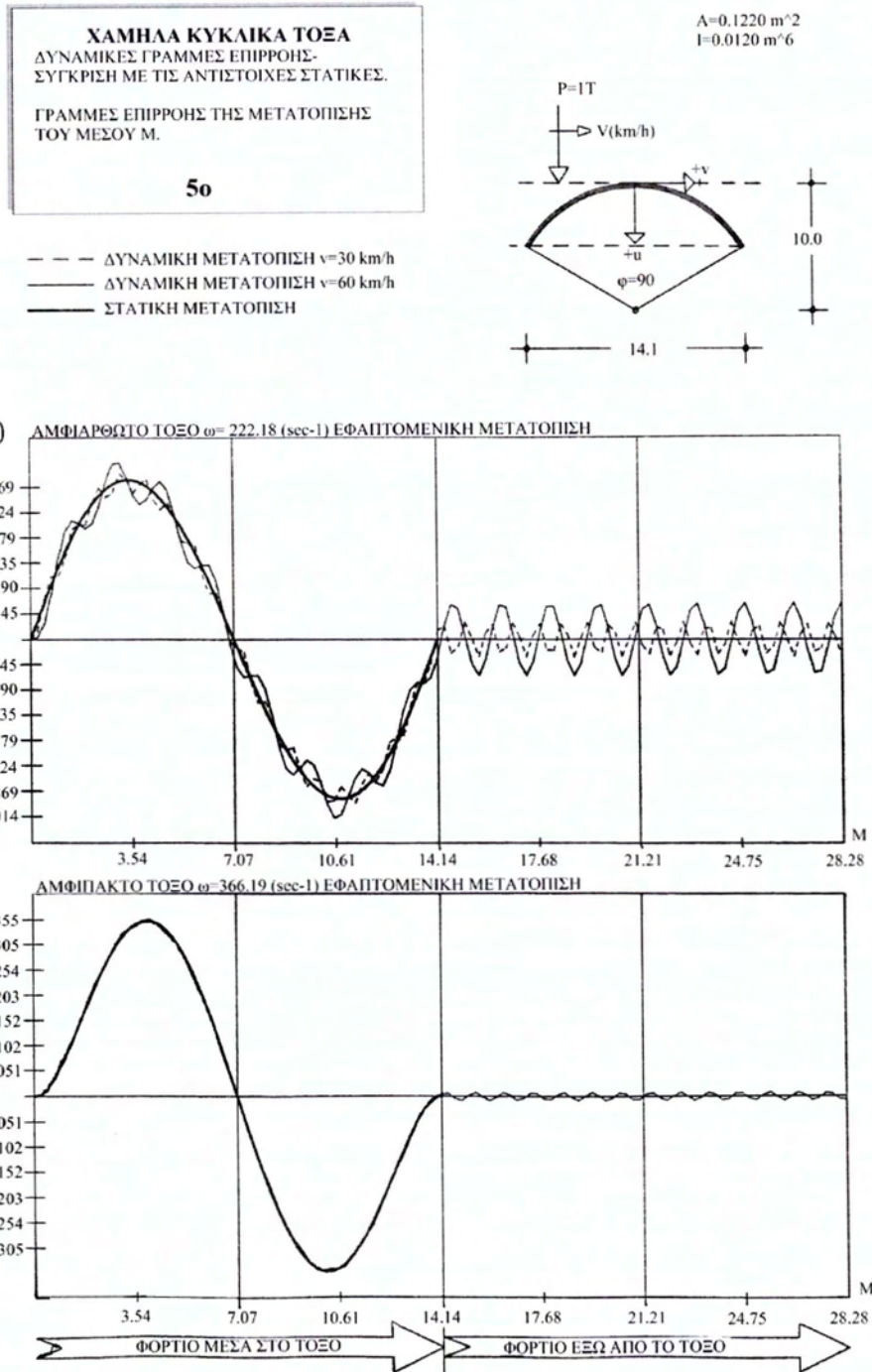
(mm)
(x100)



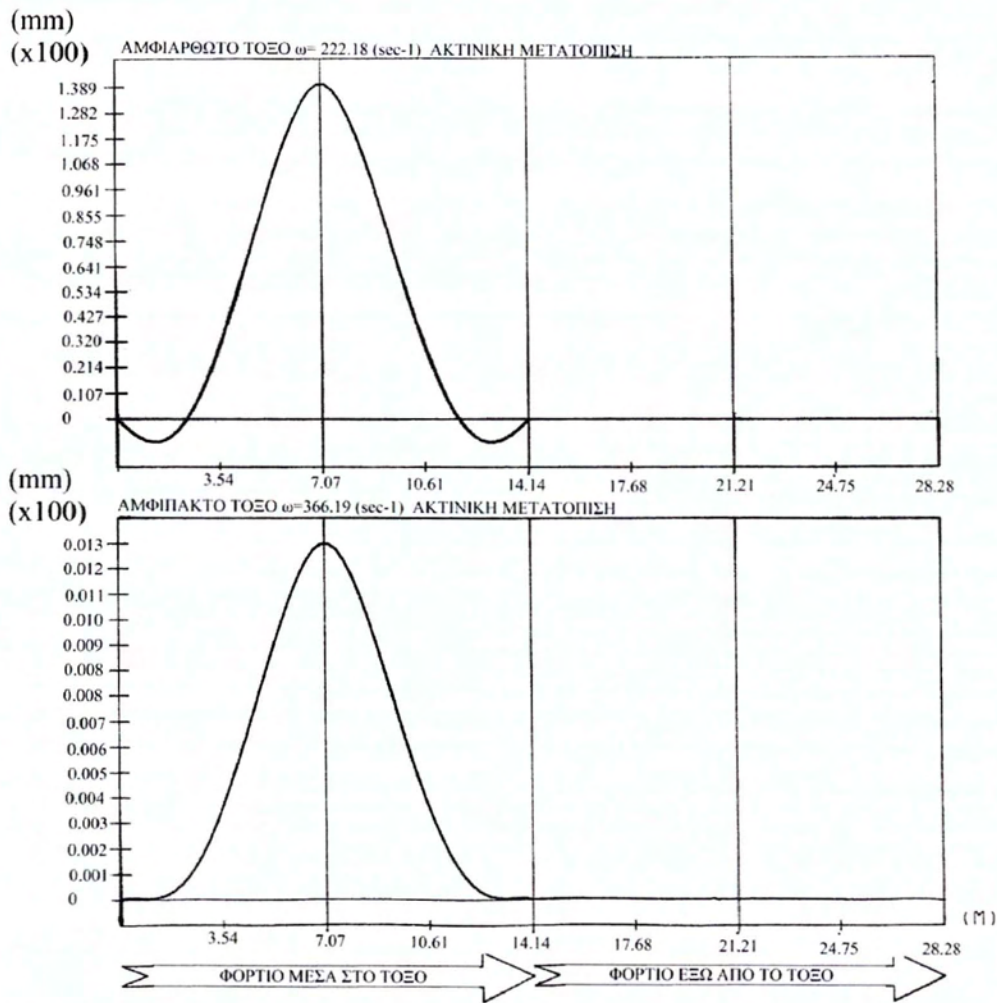
Διάγραμμα 13: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080 \text{ m}^4$.



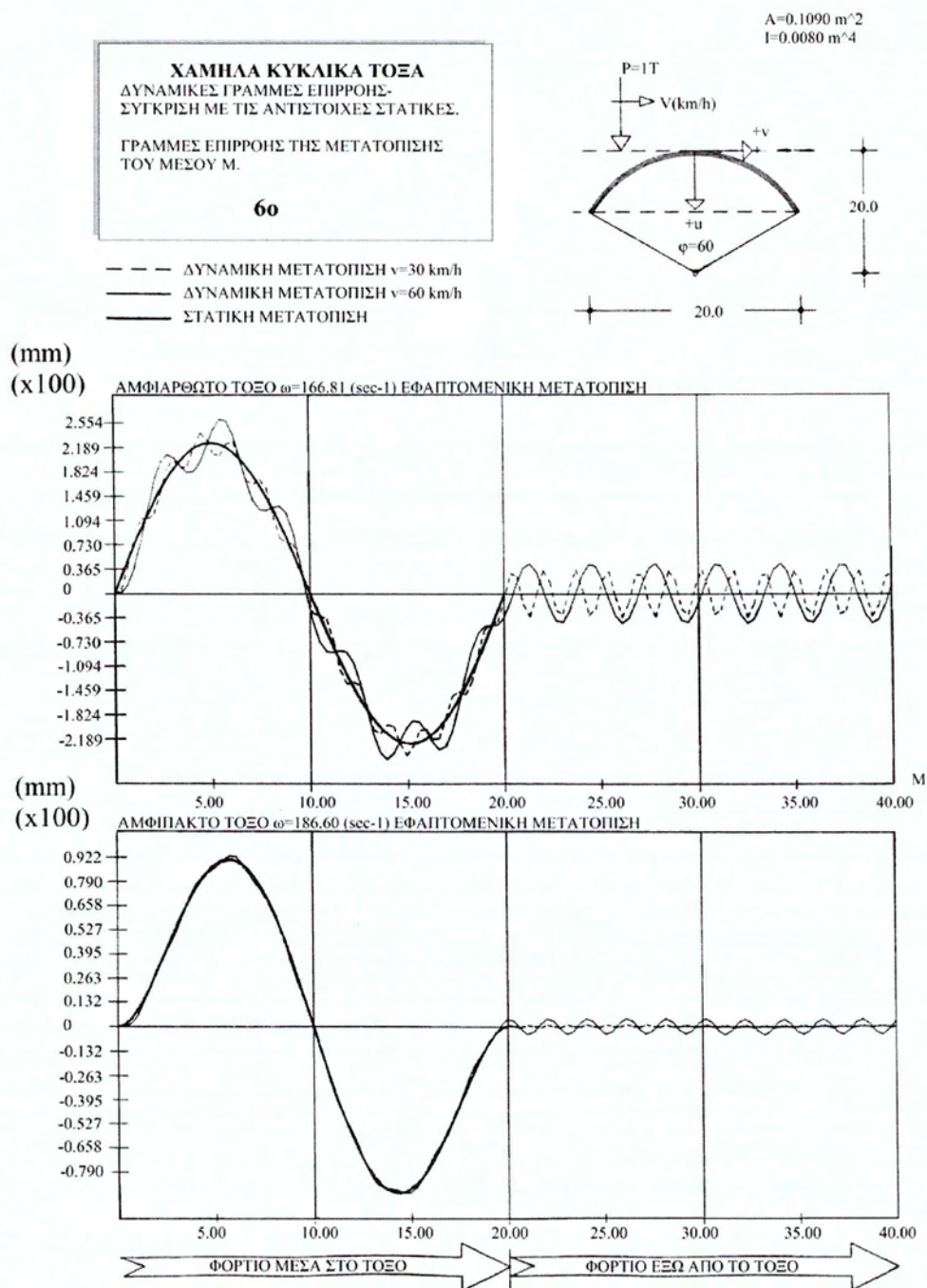
Διάγραμμα 14: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.



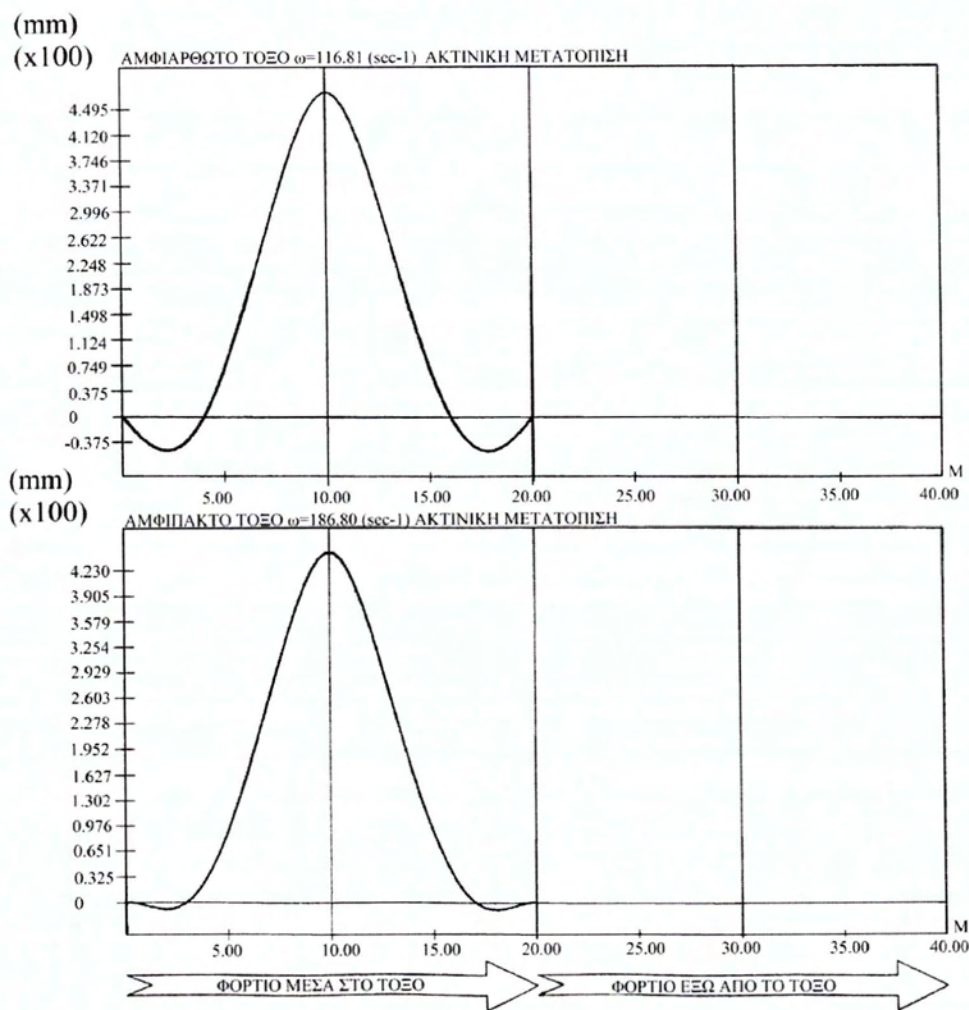
Διάγραμμα 15: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



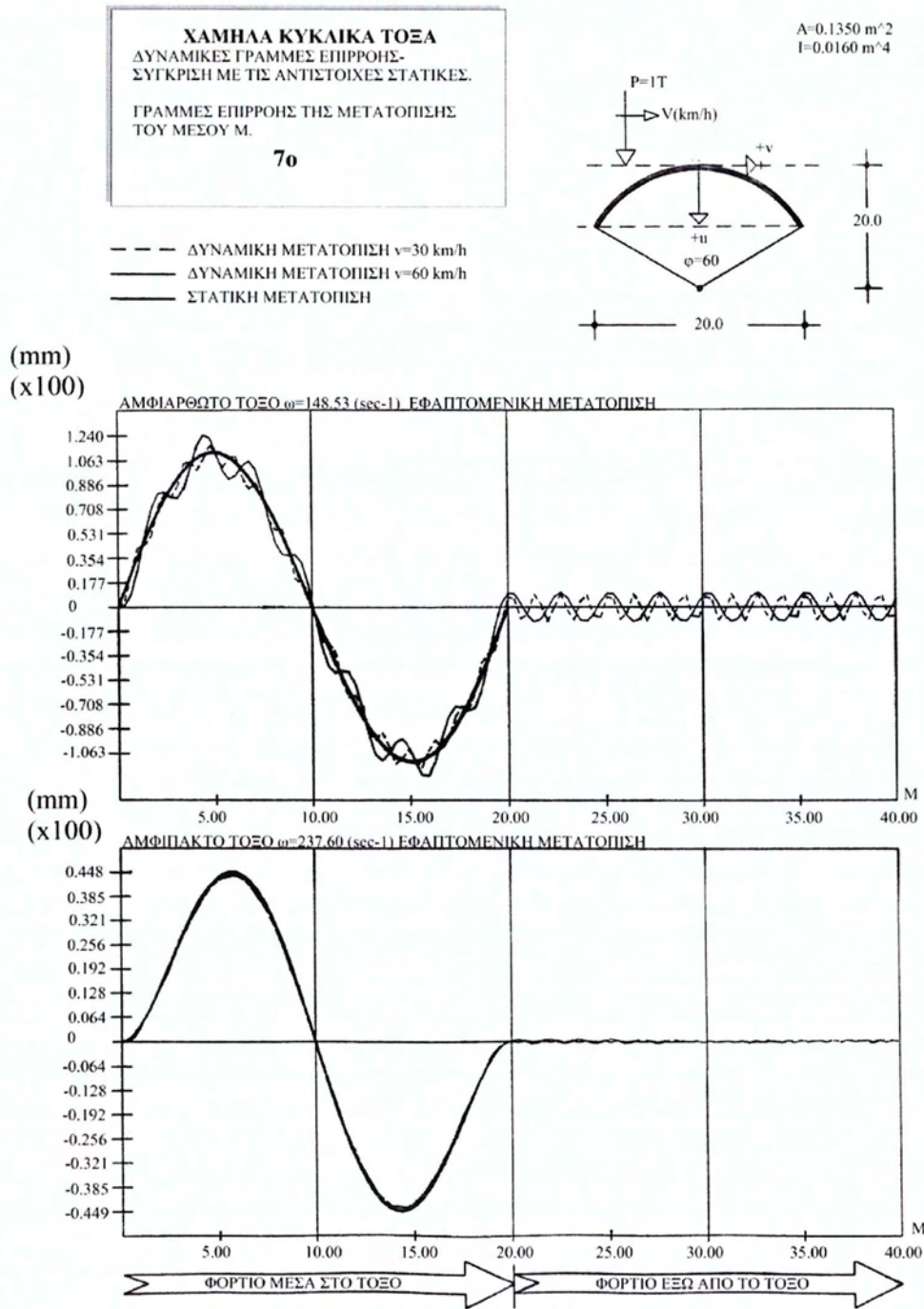
Διάγραμμα 16: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



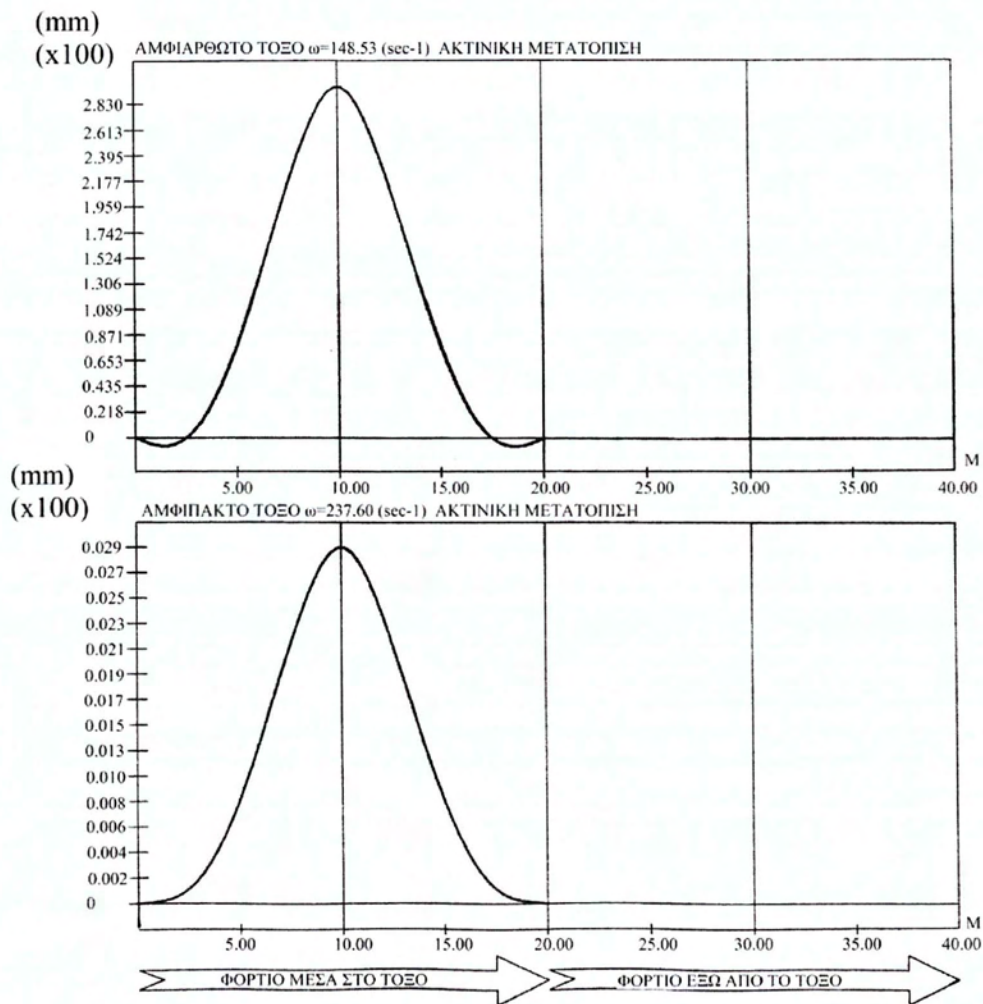
Διάγραμμα 17: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080m^4$.



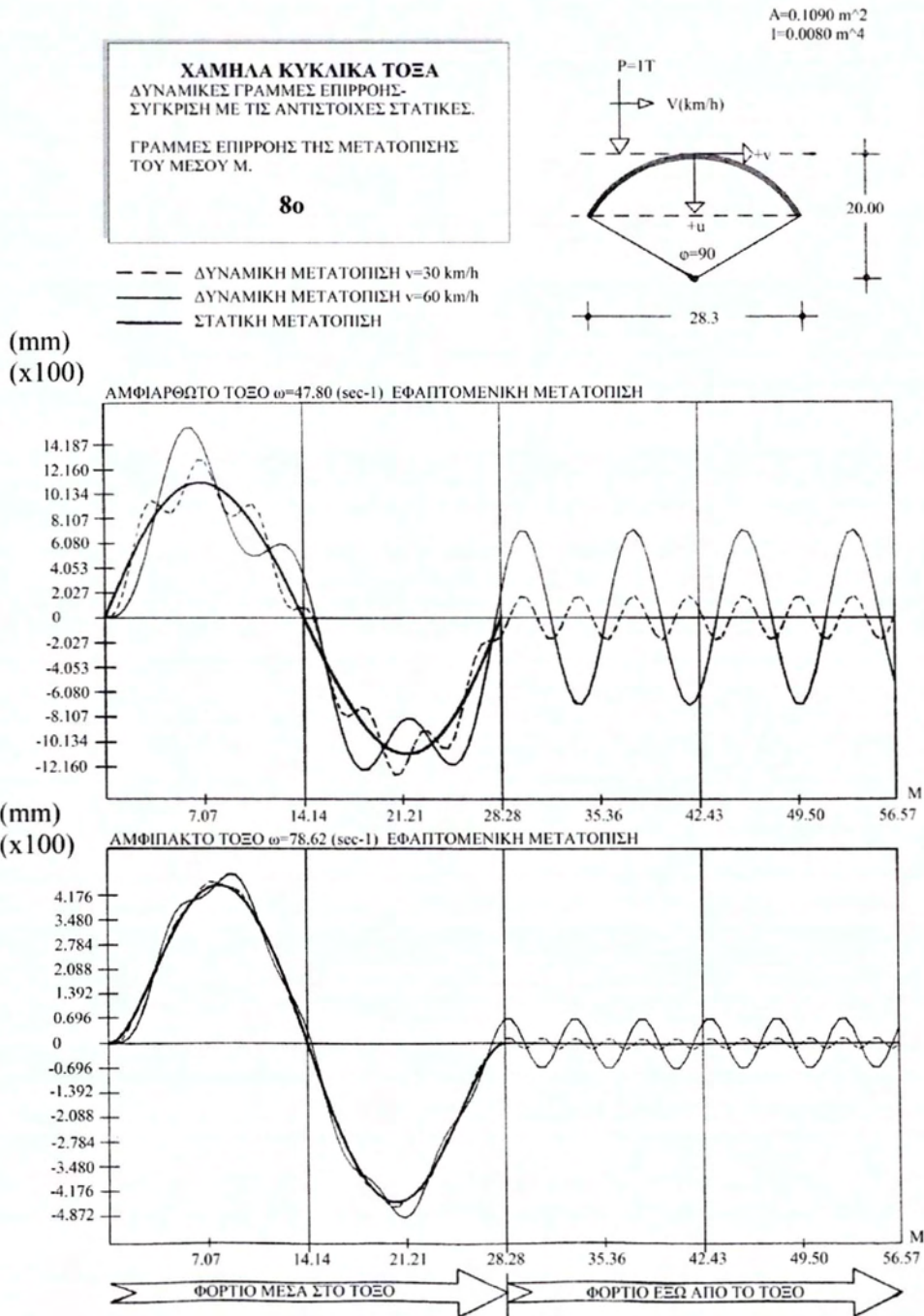
Διάγραμμα 18: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.



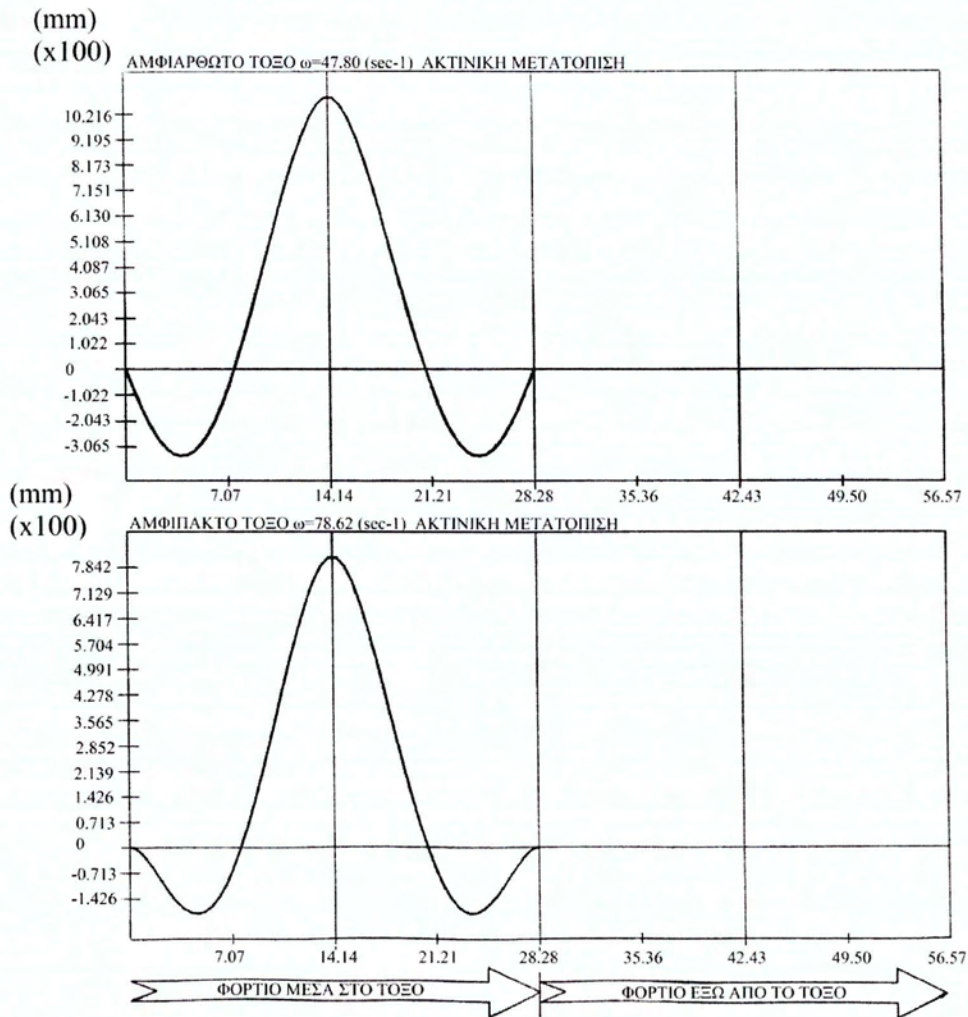
Διάγραμμα 19: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 20: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία φ=60 μοίρες, διατομή A=0.1350m², ροπή αδράνειας I=0.0160m⁴.



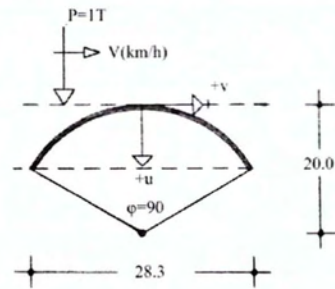
Διάγραμμα 21: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\phi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.



Διάγραμμα 22: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

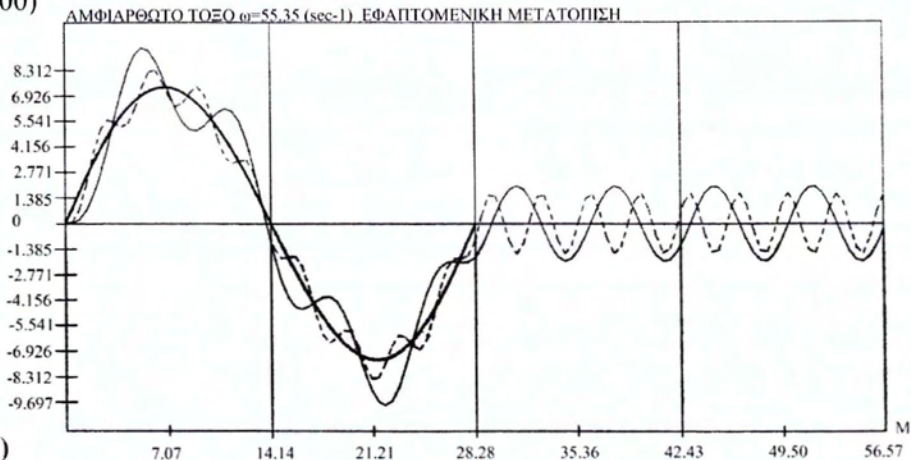
$A=0.1220 \text{ m}^2$
 $I=0.0120 \text{ m}^6$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
9ο

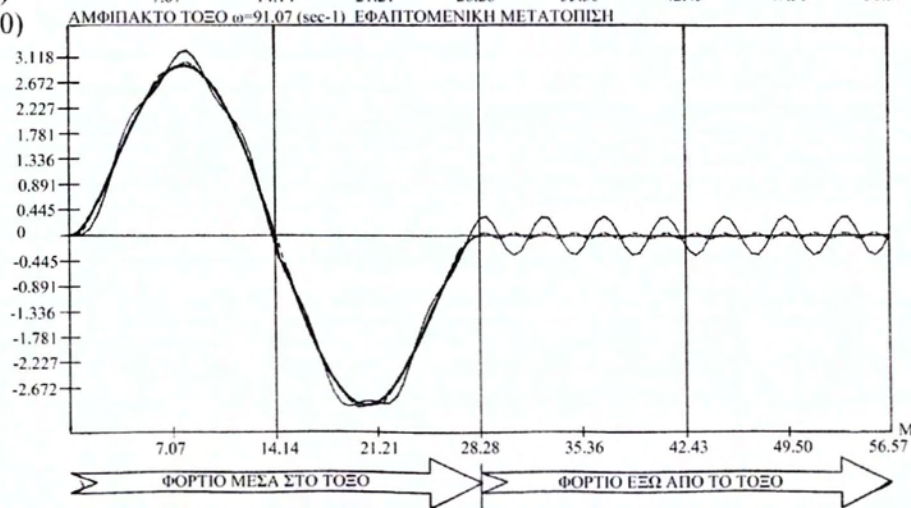


--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

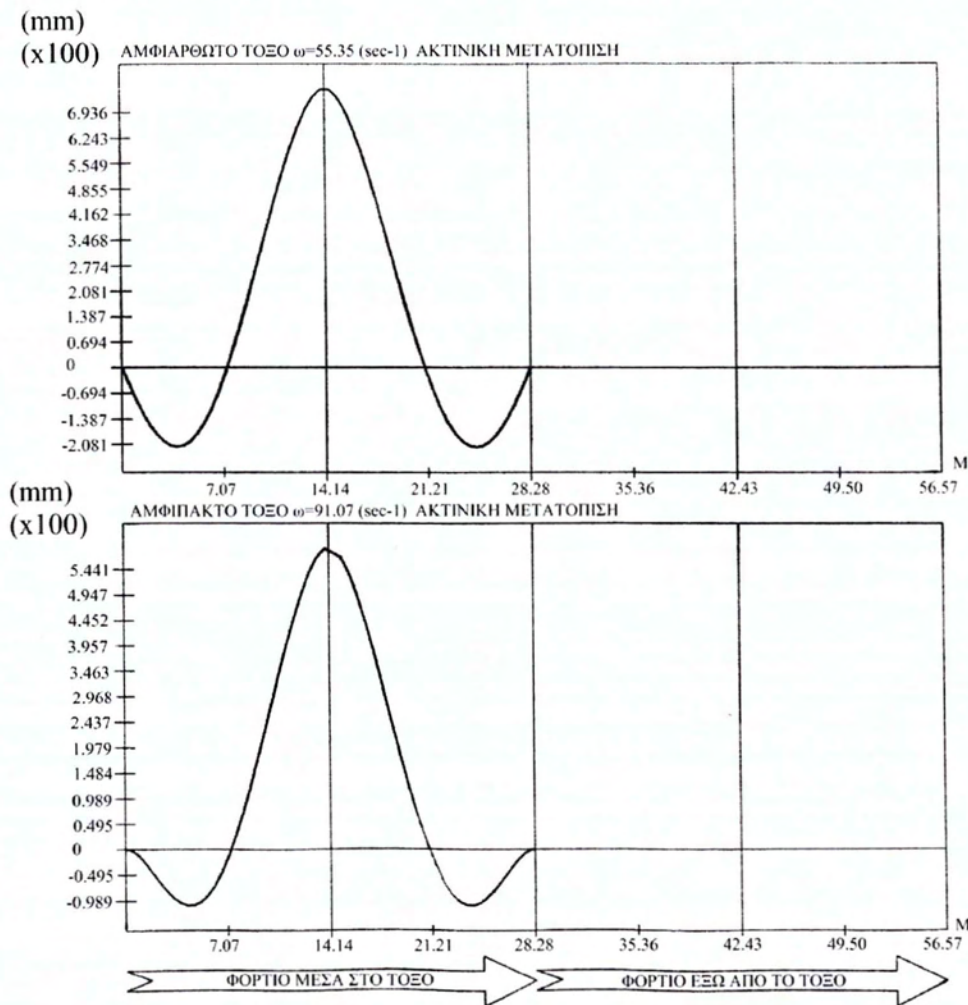
(mm)
(x100)



(mm)
(x100)



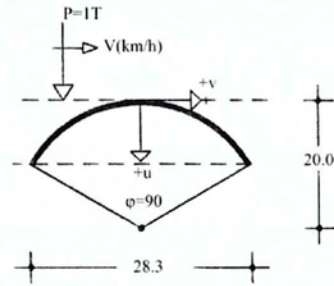
Διάγραμμα 23: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 24: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.

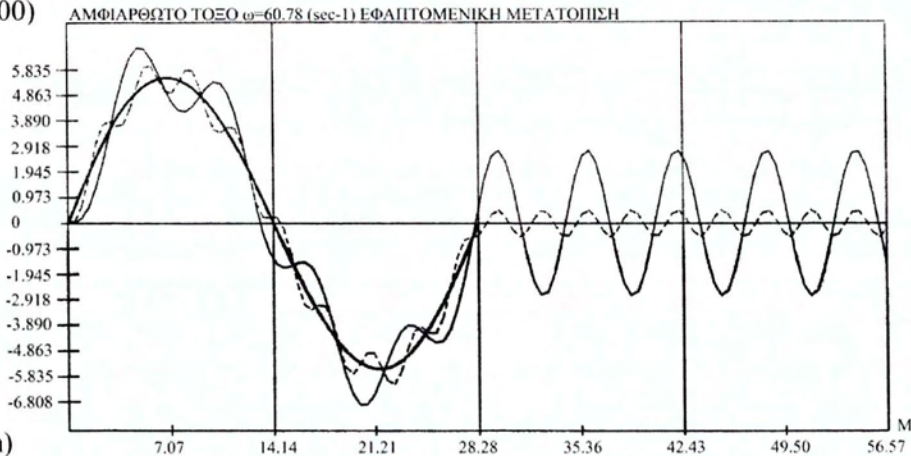
$A=0.1350 \text{ m}^2$
 $I=0.0160 \text{ m}^4$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
10ο

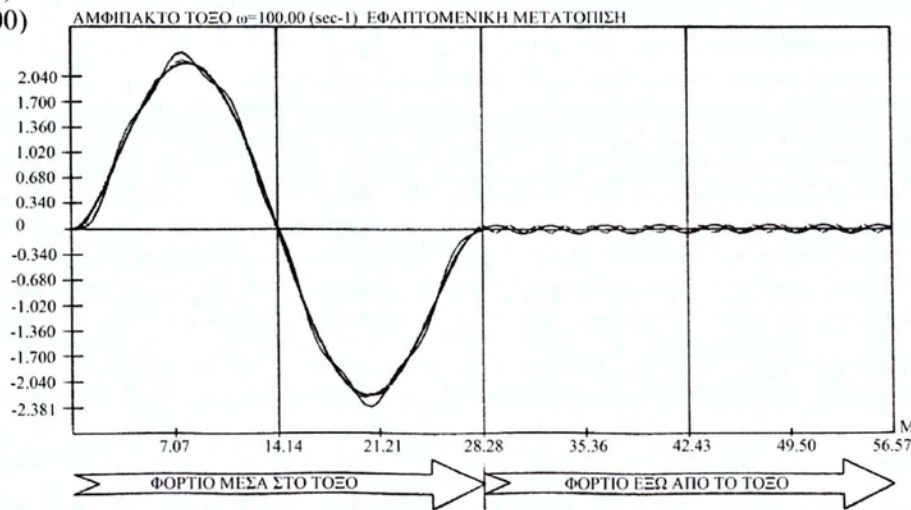


--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

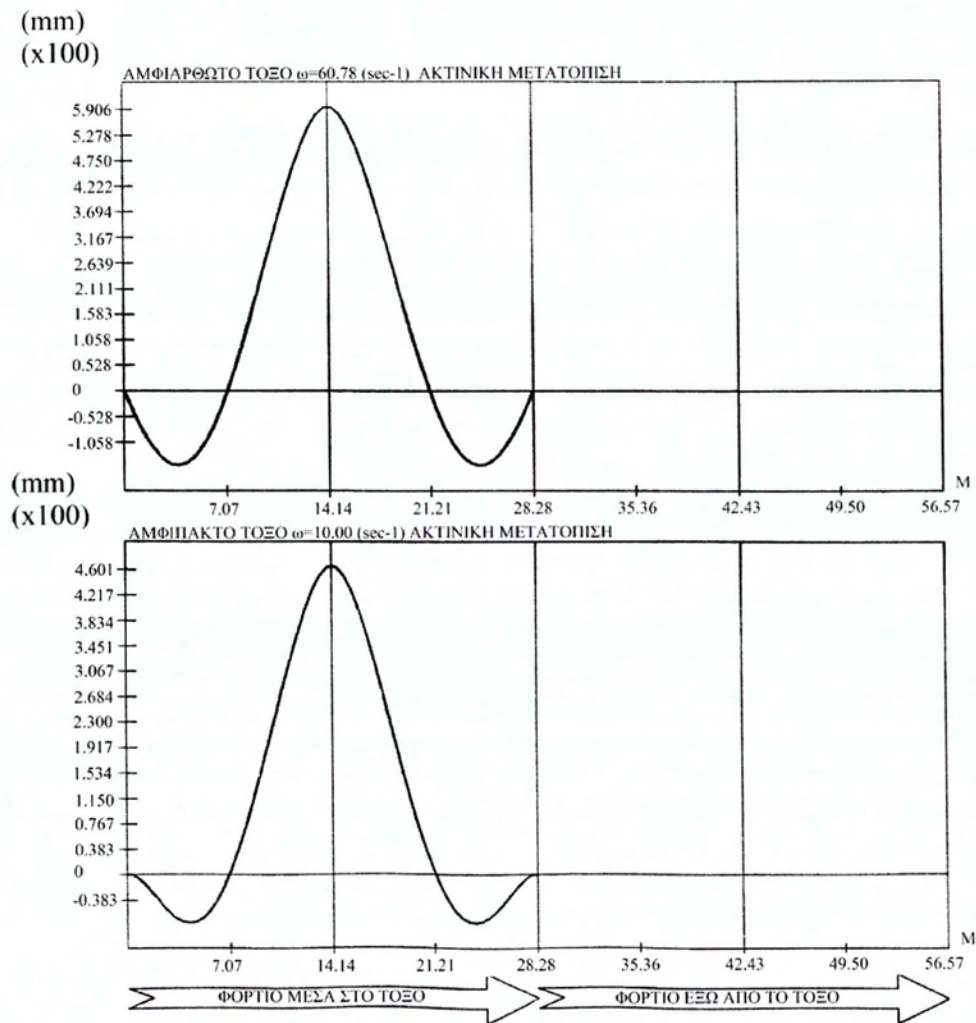
(mm)
(x100)



(mm)
(x100)



Διάγραμμα 25: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.

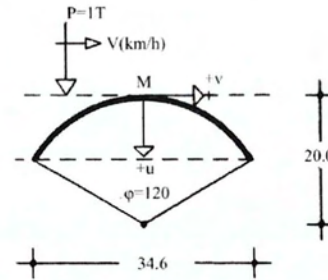


Διάγραμμα 26: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίστακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160\text{m}^4$.

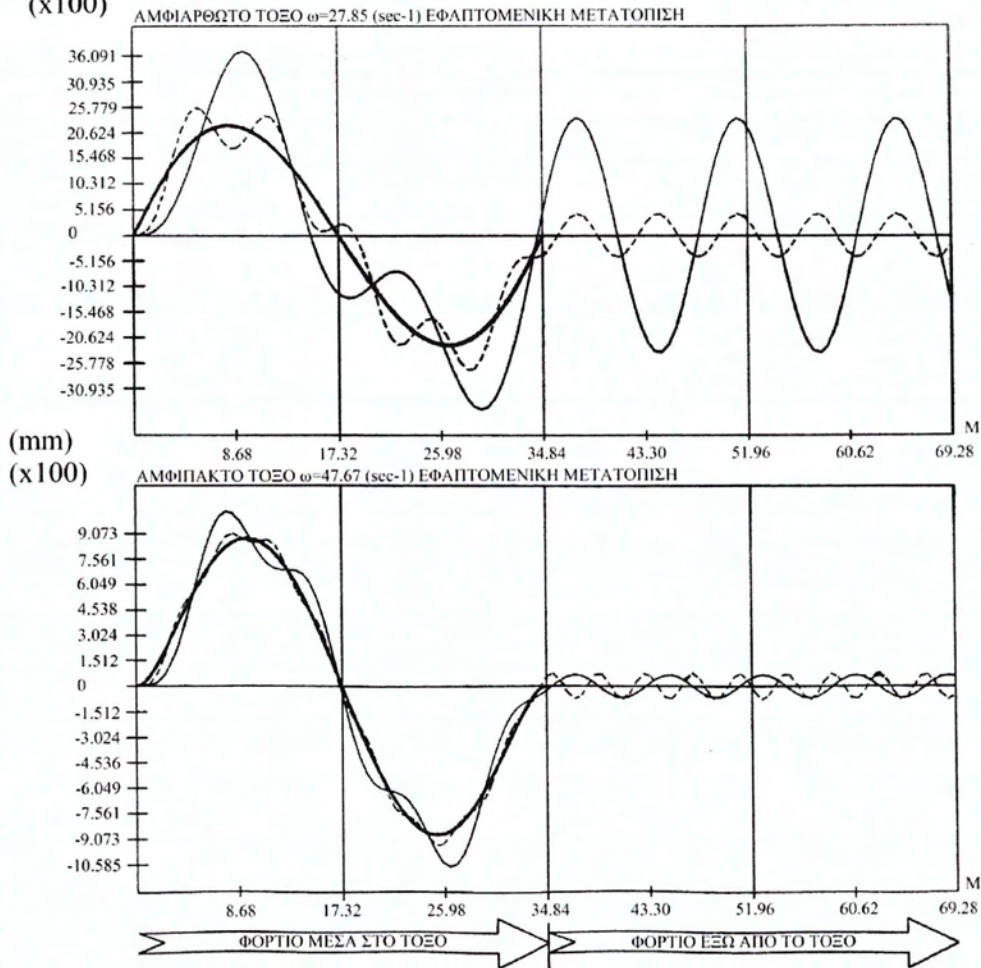
$A=0.1220 \text{ m}^2$
 $I=0.0120 \text{ m}^4$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.

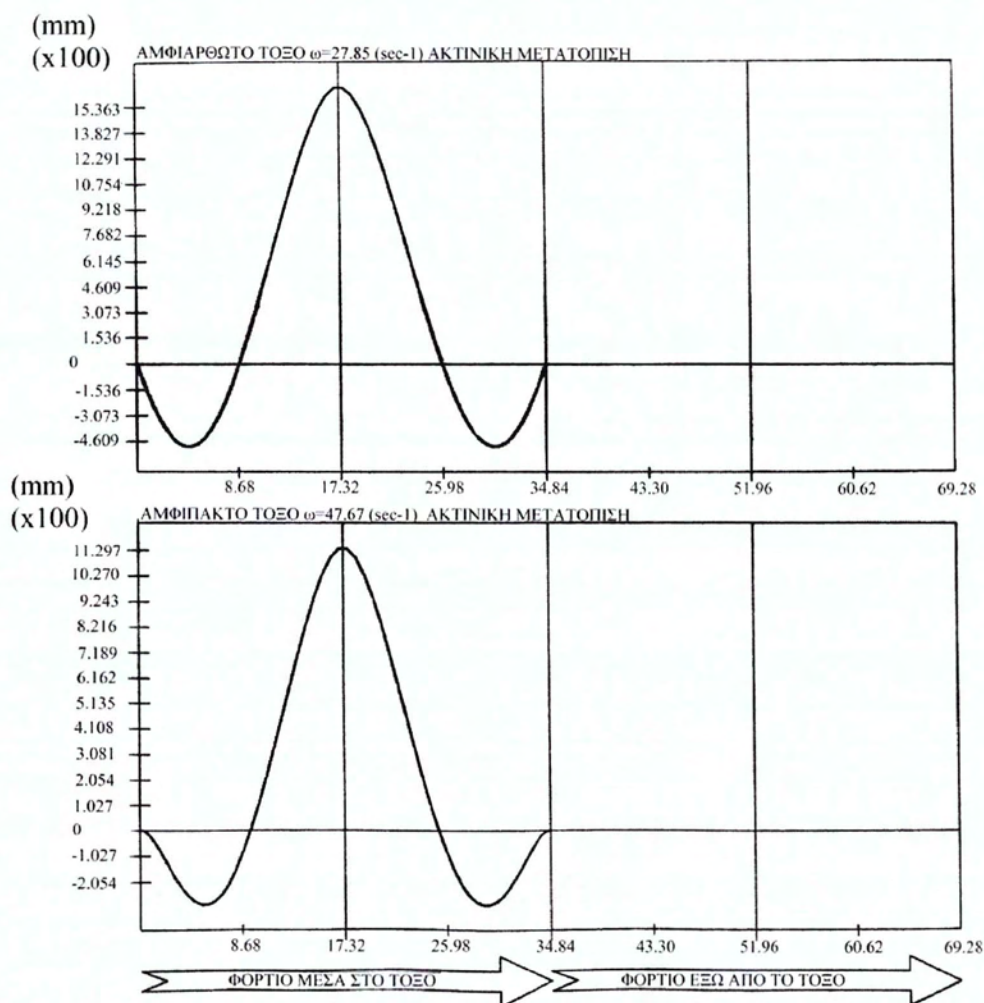
11ο



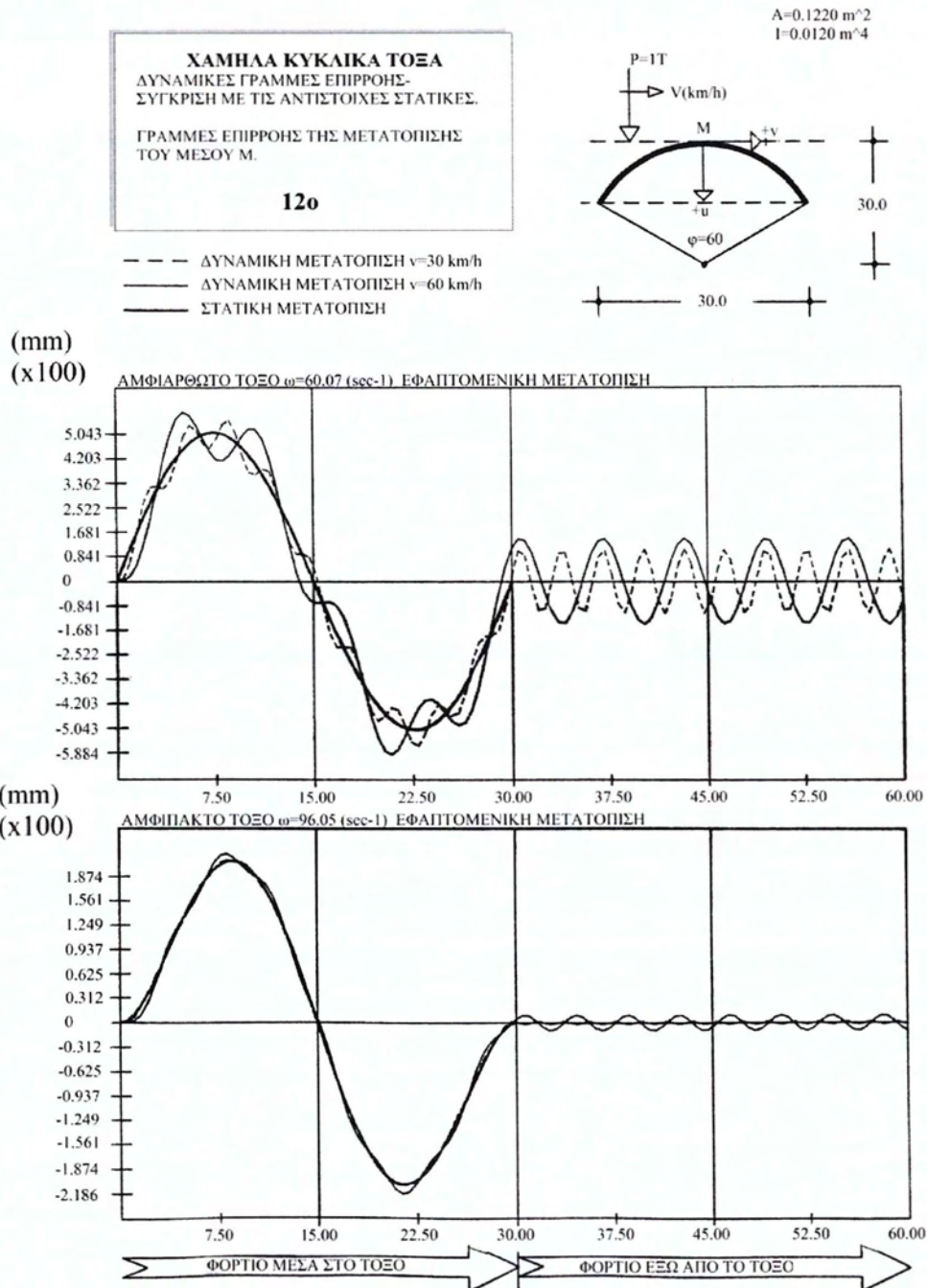
(mm)
(x100)
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



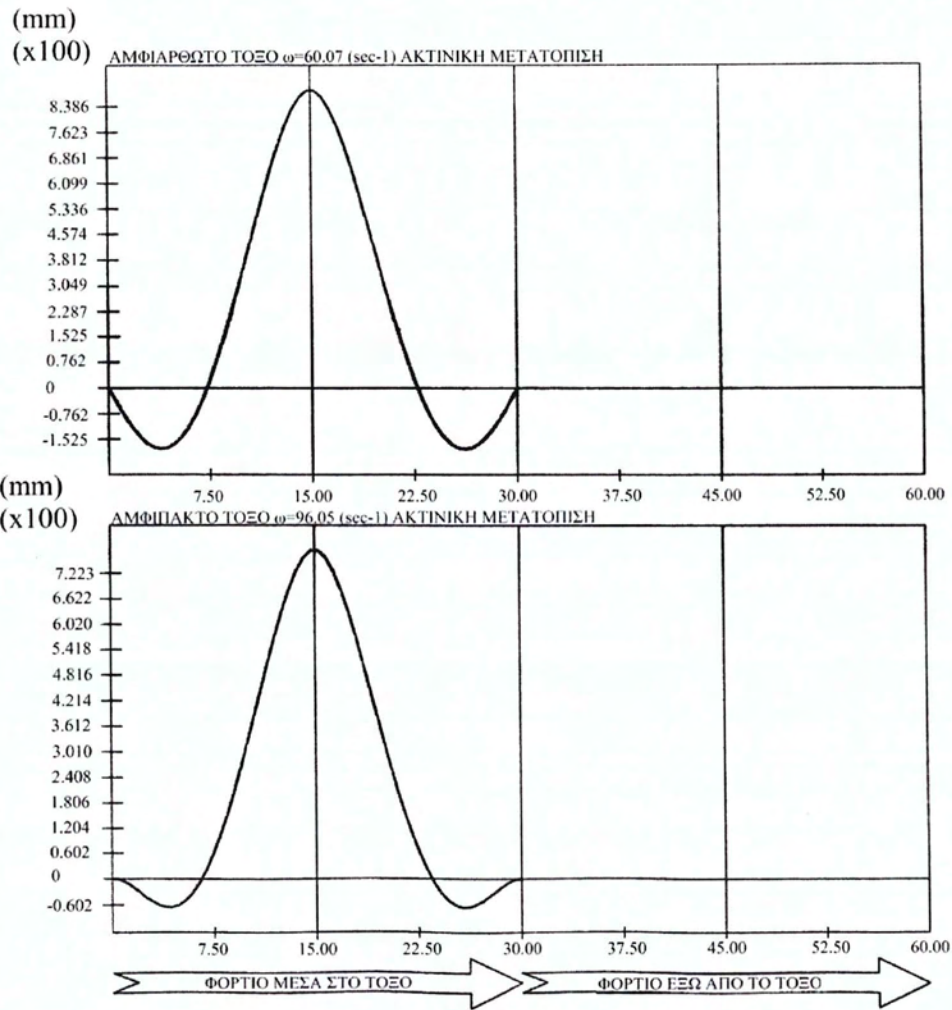
Διάγραμμα 27: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου Μ για αμφιαρθρωτό και αμφίλακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



Διάγραμμα 28: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



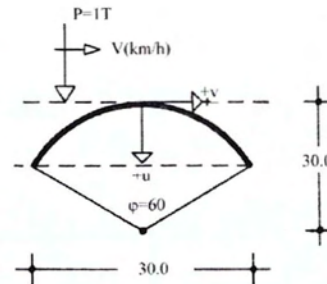
Διάγραμμα 29: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



Διάγραμμα 30: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1220m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120m^4$.

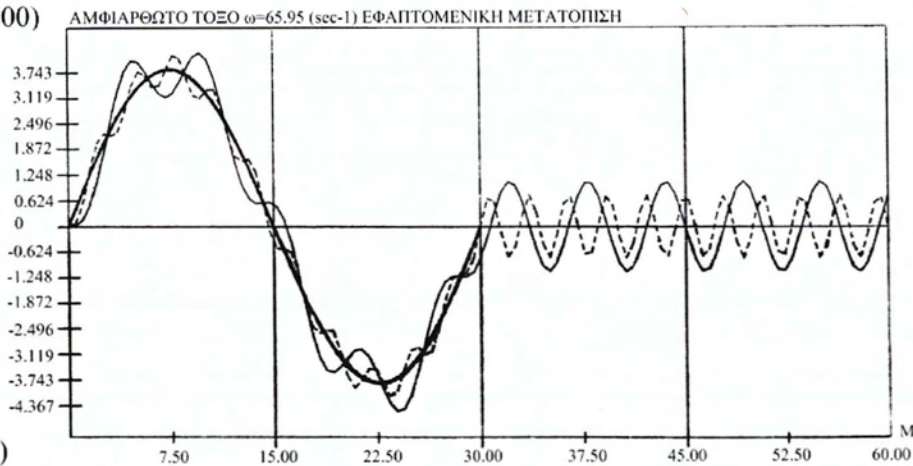
$A=0.1350 \text{ m}^2$
 $I=0.0160 \text{ m}^4$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
13ο

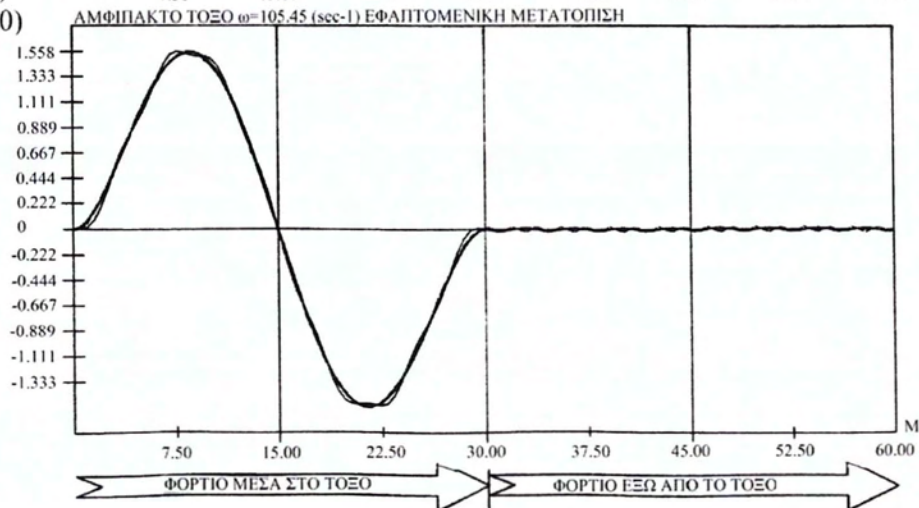


--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

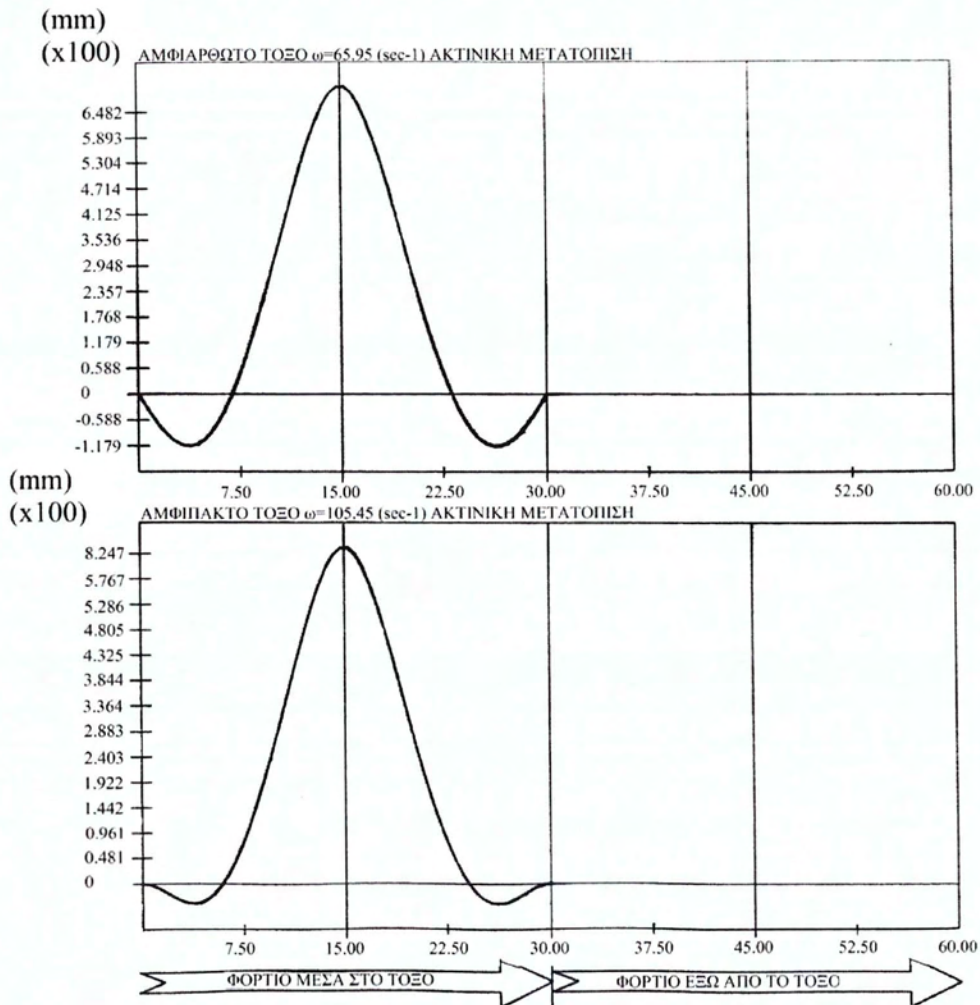
(mm)
(x100)



(mm)
(x100)



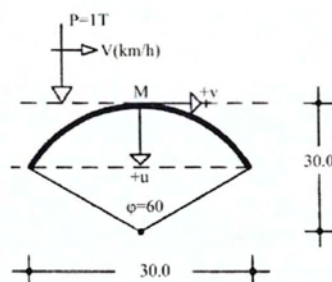
Διάγραμμα 31: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.



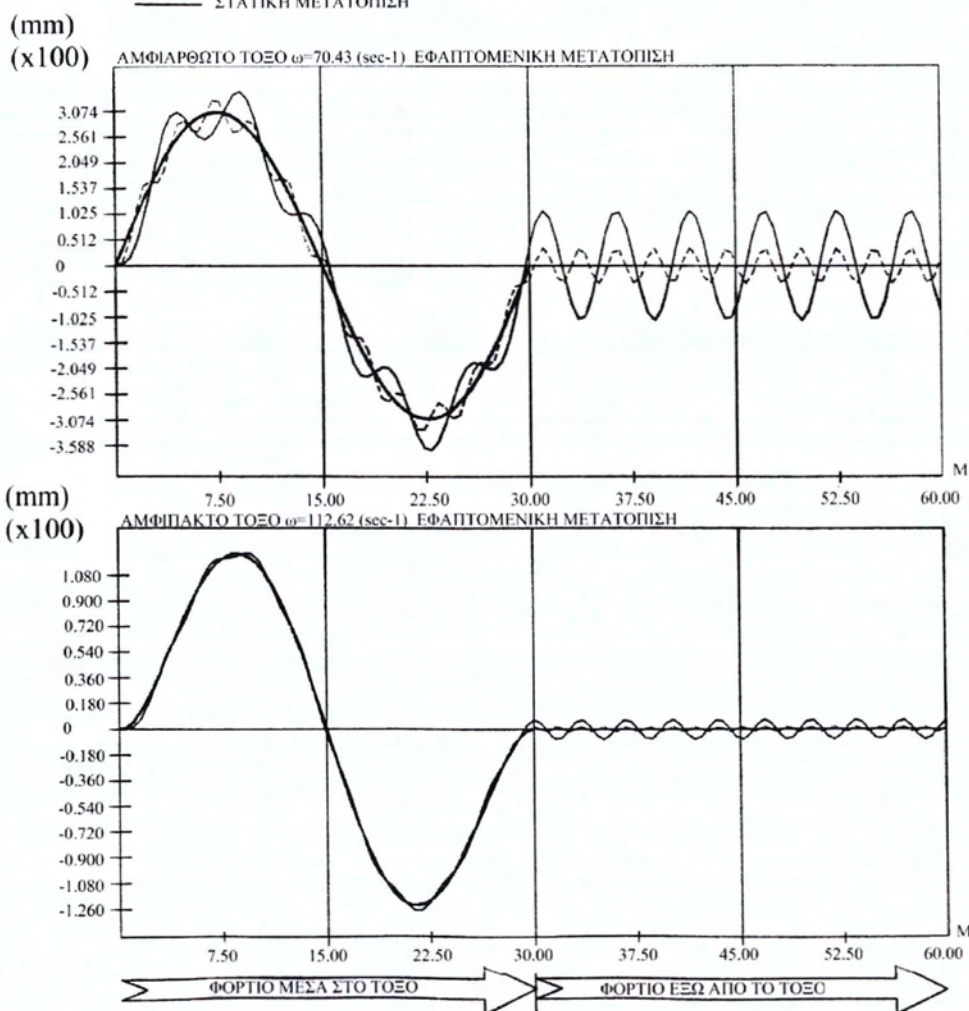
Διάγραμμα 32: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1350\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160\text{m}^4$.

$A=0.1480 \text{ m}^2$
 $I=0.0200 \text{ m}^4$

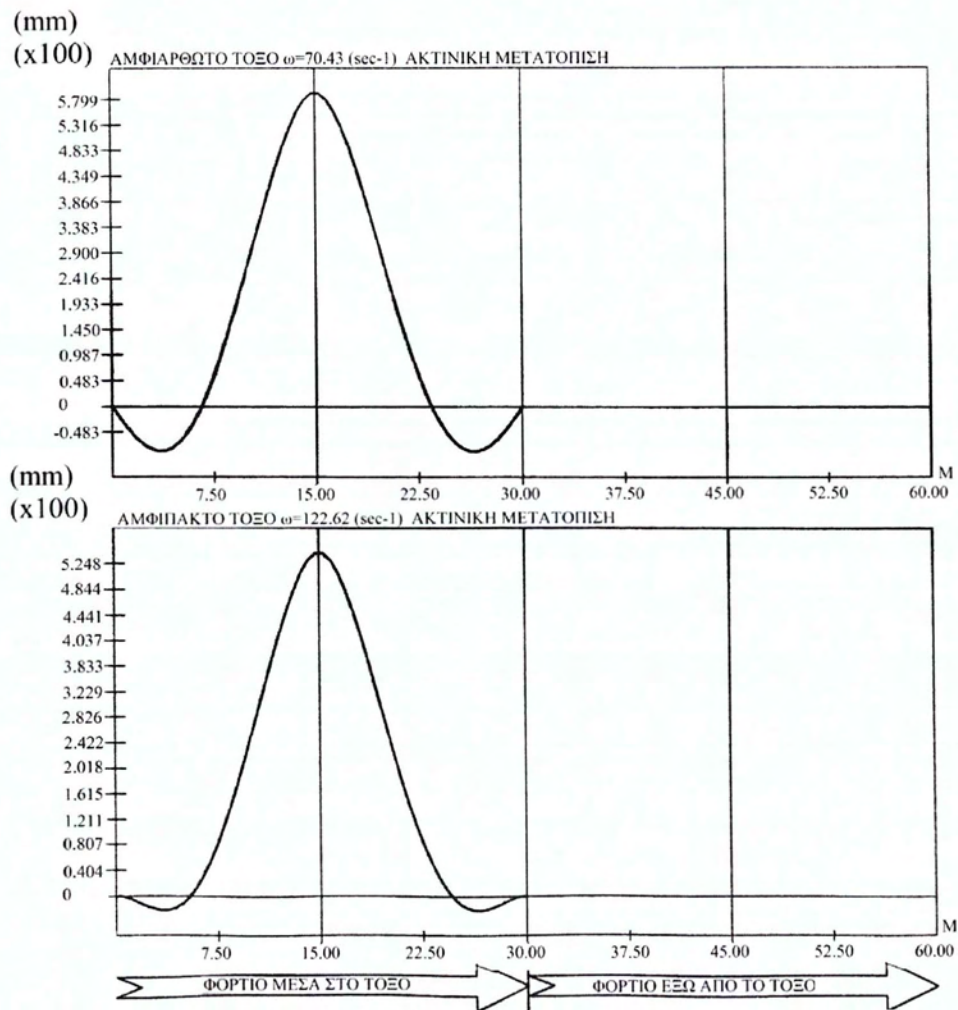
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
14ο



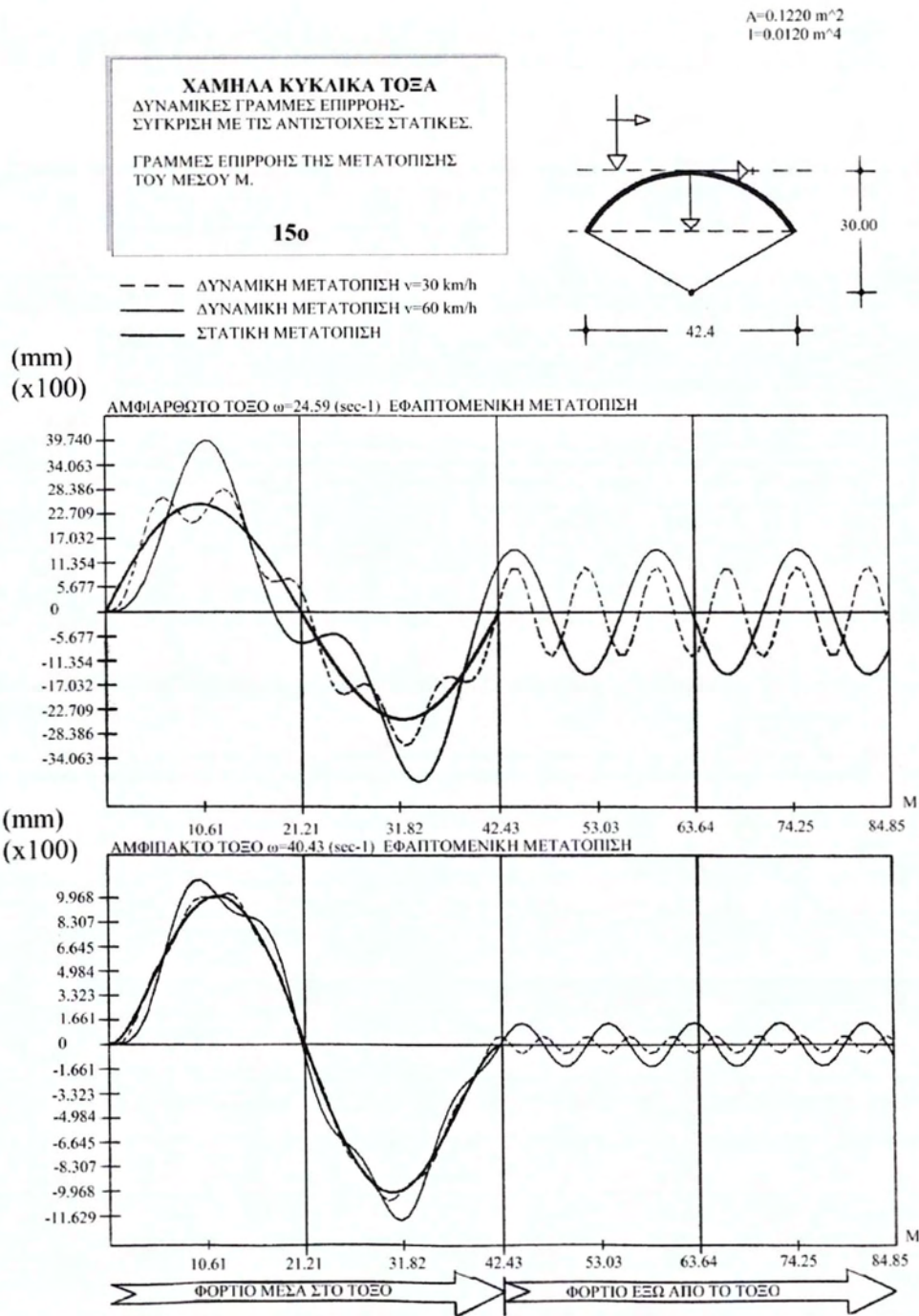
- - - ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
- ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



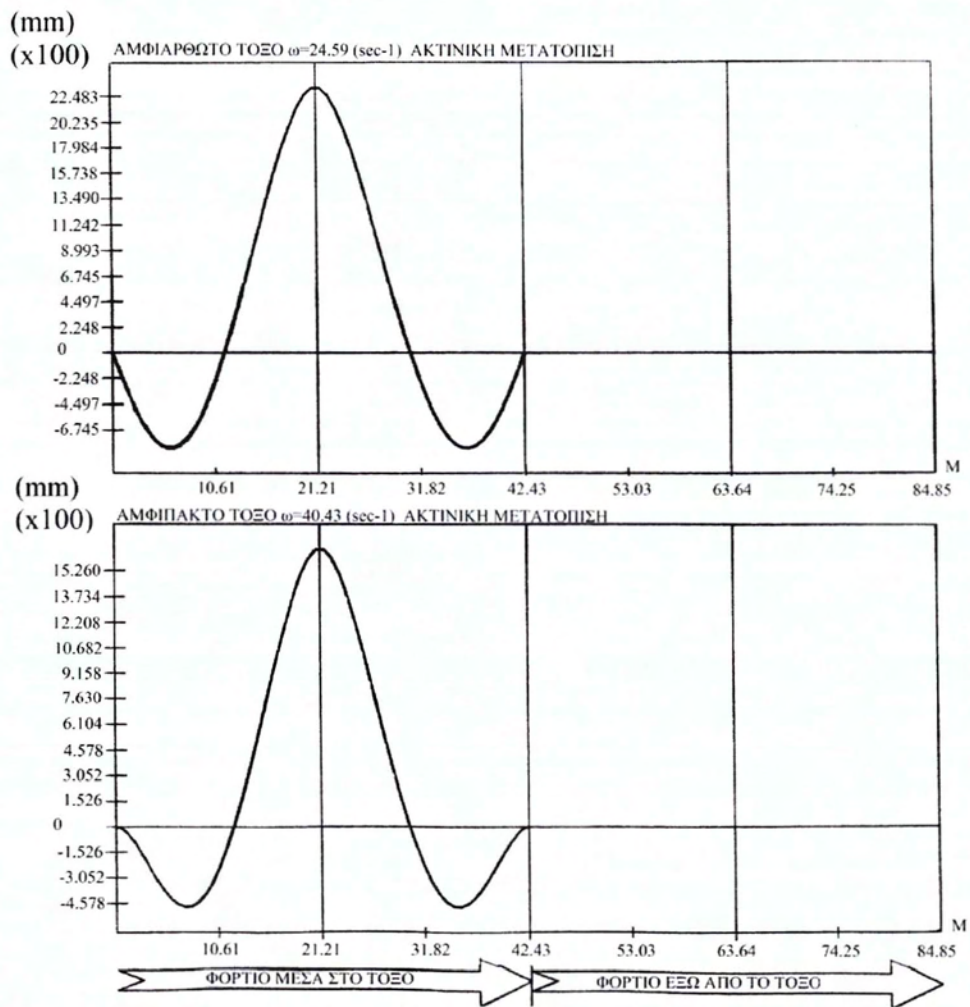
Διάγραμμα 33: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου Μ για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\phi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1480 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0200 \text{ m}^4$.



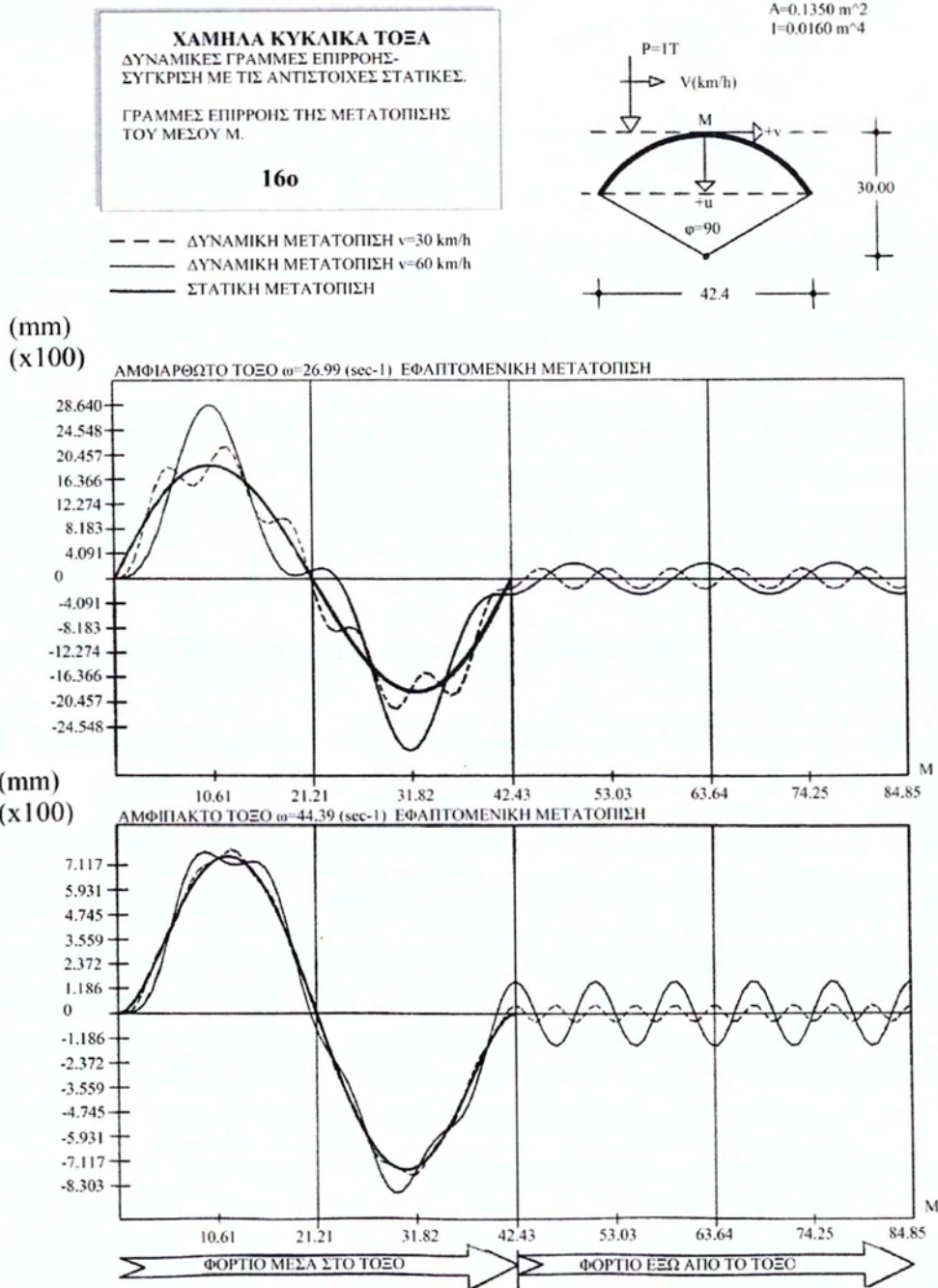
Διάγραμμα 34: : Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1480m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0200m^4$.



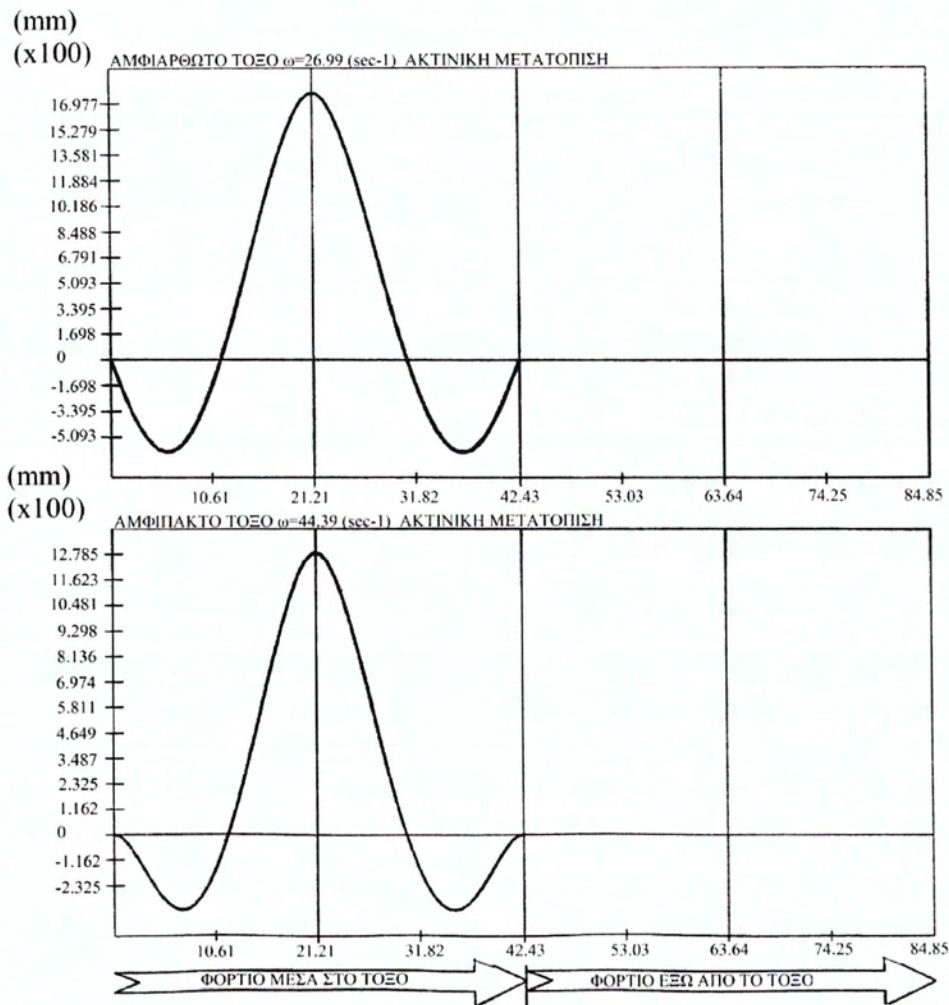
Διάγραμμα 35: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφιάκτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 36: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.



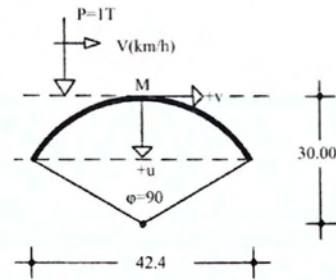
Διάγραμμα 37: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160\text{m}^4$.



Διάγραμμα 38: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160m^4$.

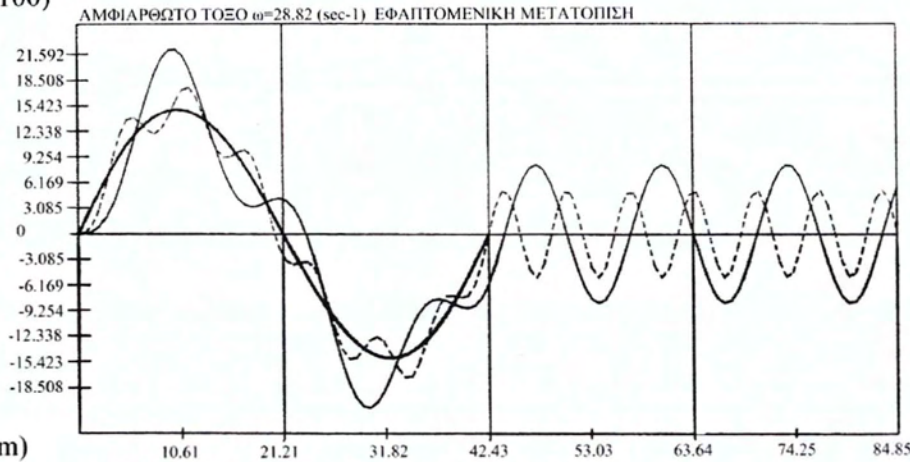
$A=0.1480 \text{ m}^2$
 $I=0.0200 \text{ m}^4$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.
17ο

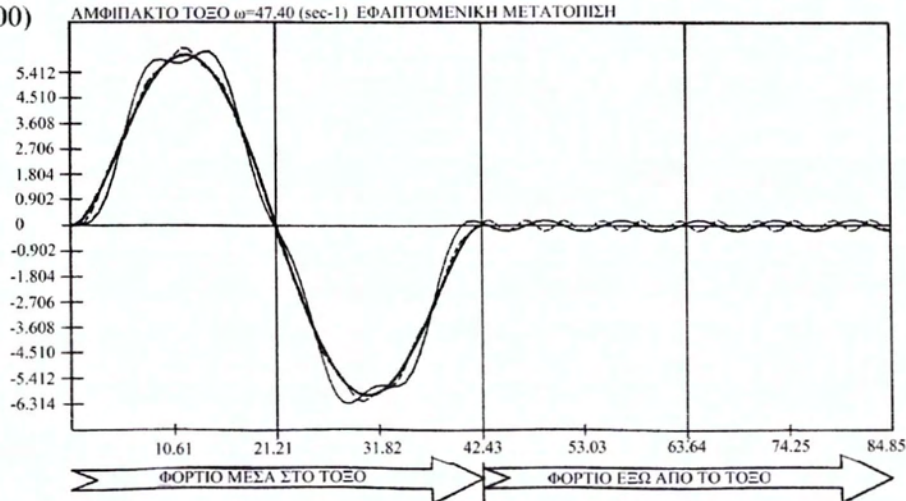


--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

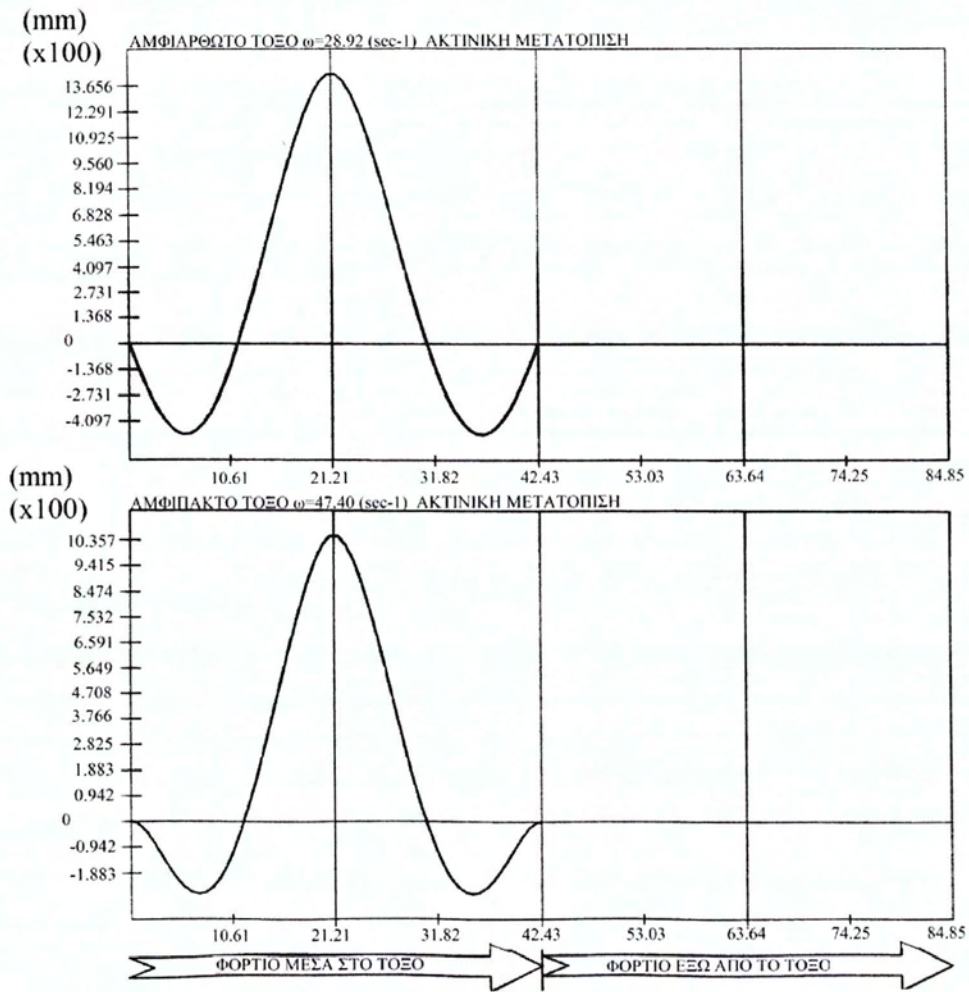
(mm)
(x100)



(mm)
(x100)



Διάγραμμα 39: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου Μ για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\phi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1480 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0200 \text{ m}^4$.



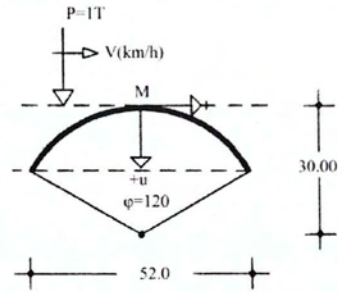
Διάγραμμα 40: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1480\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0200\text{m}^4$.

$A=0.1350 \text{ m}^2$
 $I=0.0160 \text{ m}^4$

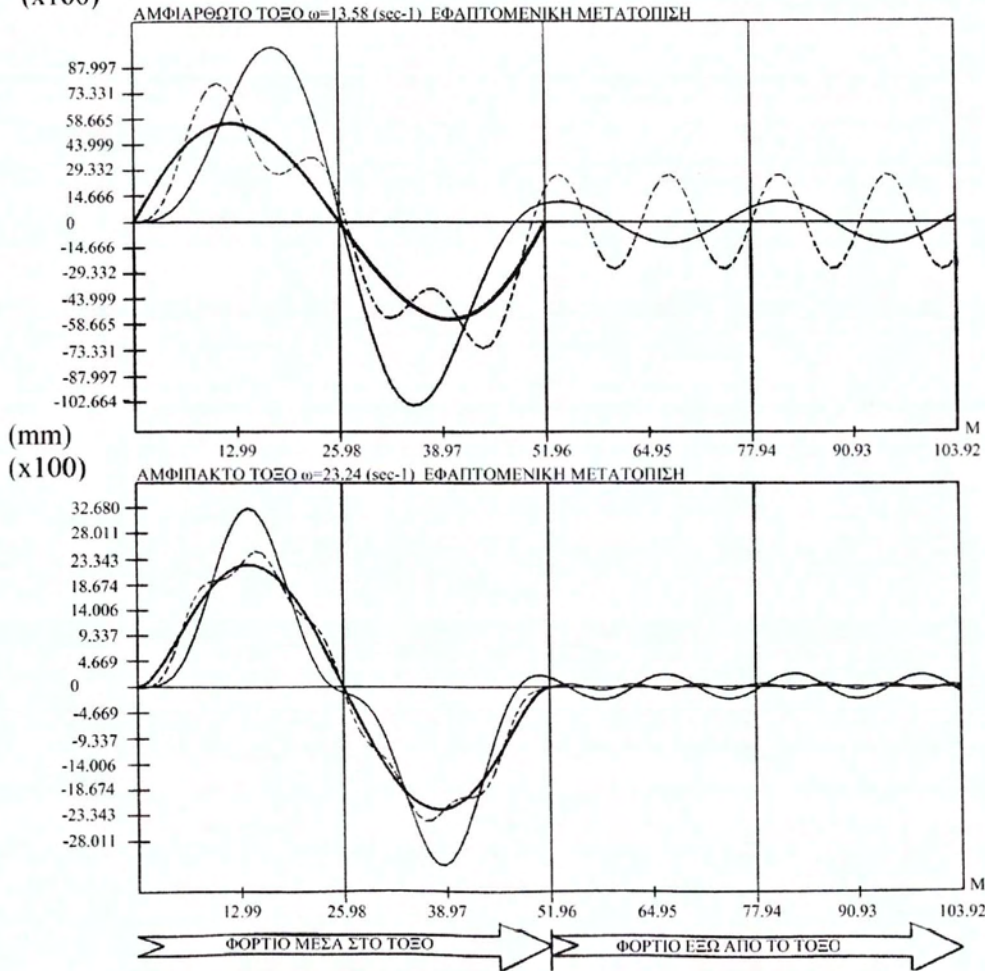
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Μ.

18ο

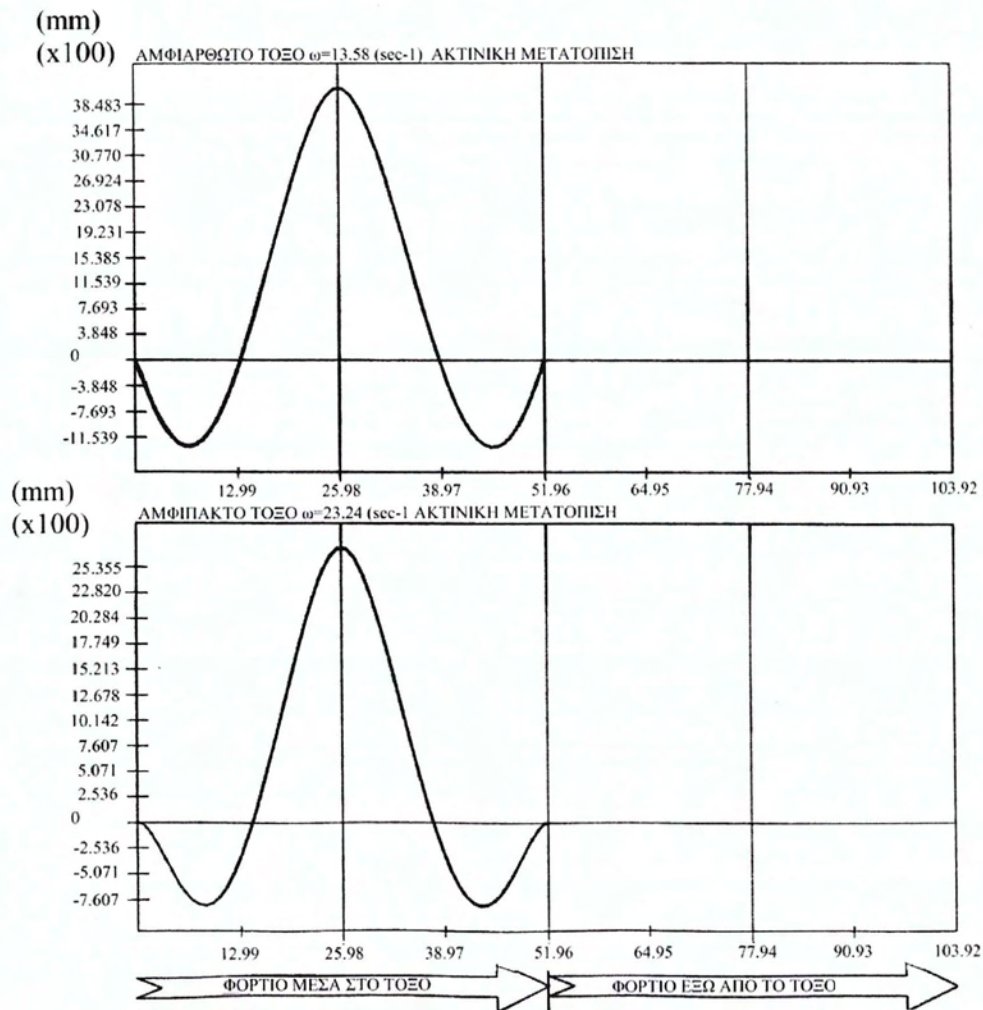
- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
- ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



(mm)
(x100)



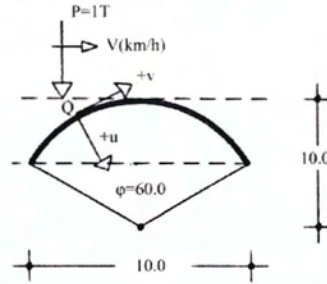
Διάγραμμα 41: Εφαπτομενική μετατόπιση του μέσου Μ για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.



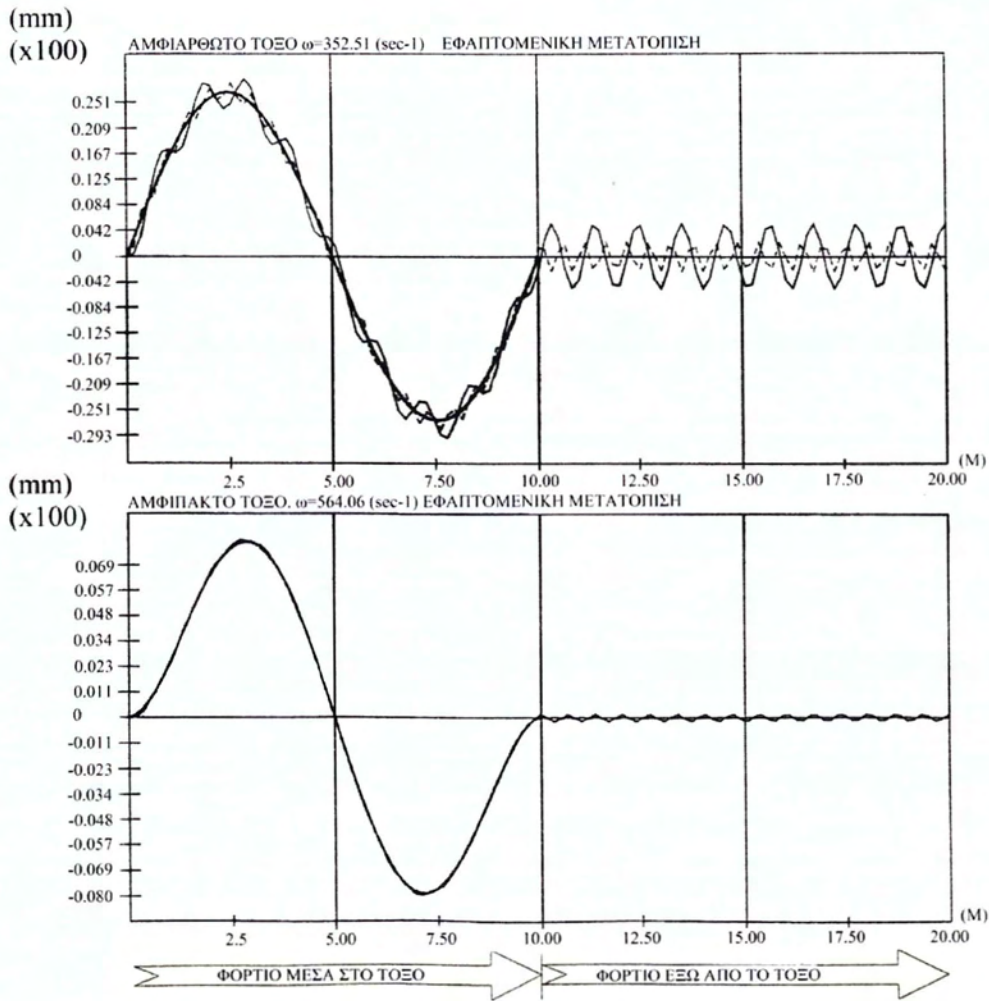
Διάγραμμα 42: Ακτινική μετατόπιση του μέσου M για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1350m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160m^4$.

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.
1ο

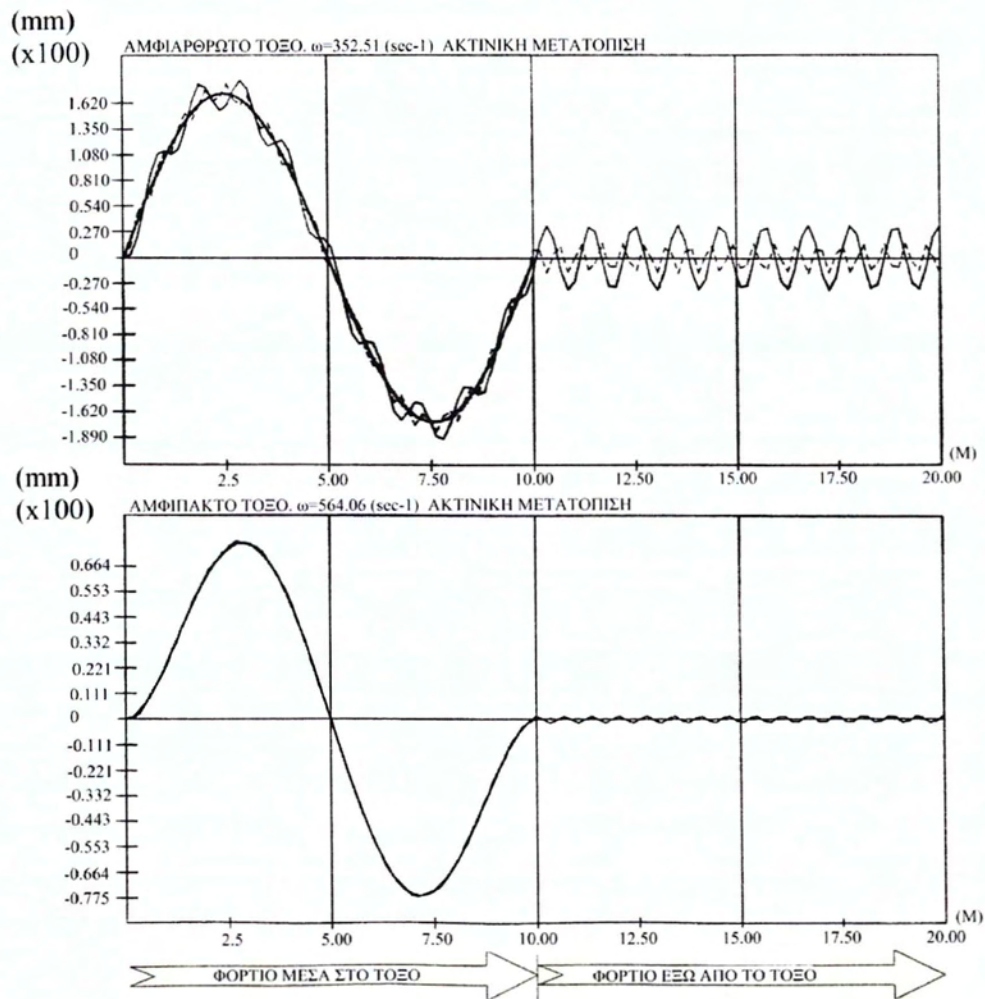
$A=0.0960 \text{ m}^2$
 $I=0.0040 \text{ m}^4$



--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



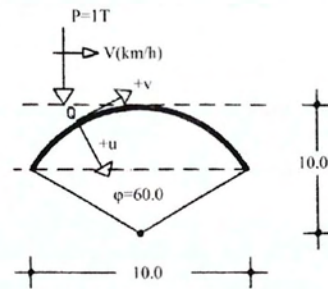
Διάγραμμα 43: Εφαλτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.0960 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0040 \text{ m}^4$.



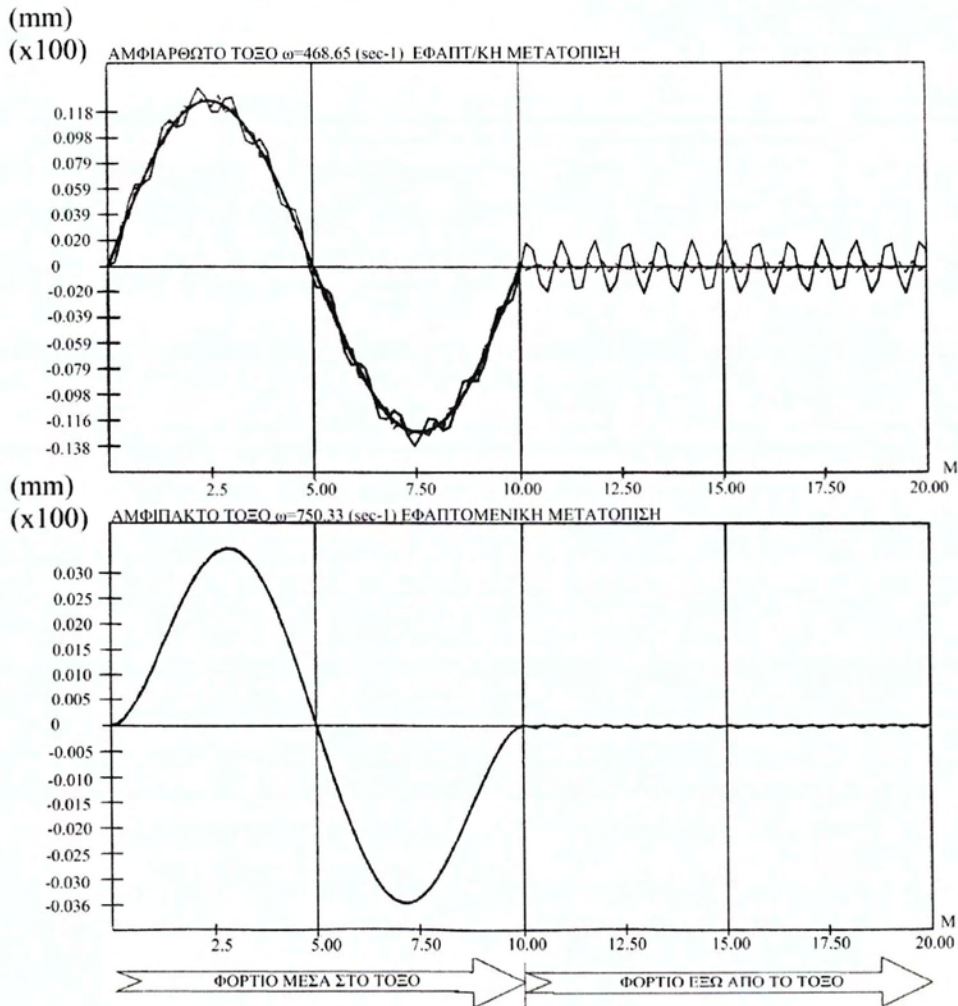
Διάγραμμα 44: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.0960\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0040\text{m}^4$.

$A=0.1090 \text{ m}^2$
 $I=0.0080 \text{ m}^4$

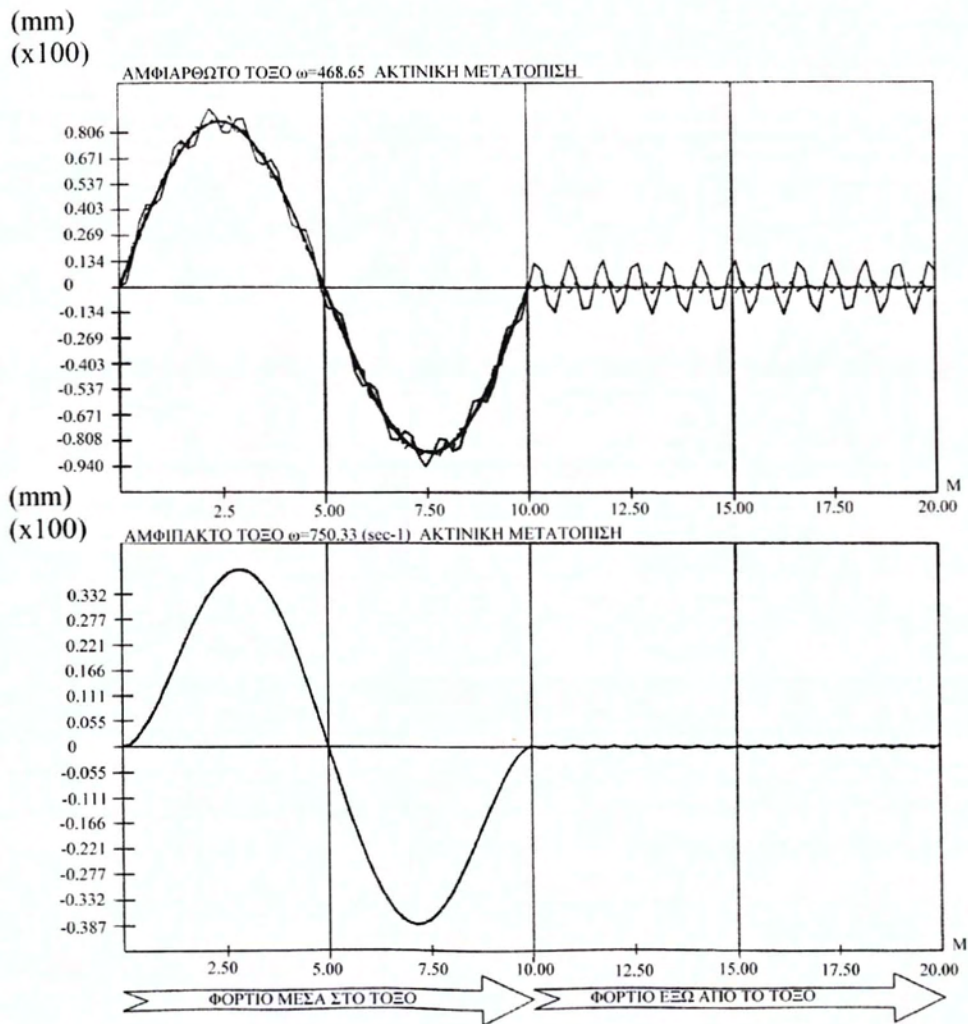
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.
2ο



--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



Διάγραμμα 45: Εφαλτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\phi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080 \text{ m}^4$.

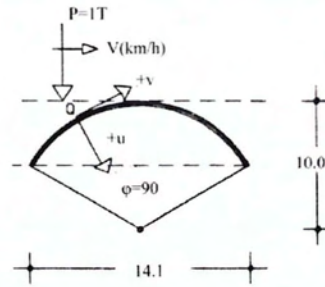


Διάγραμμα 46: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

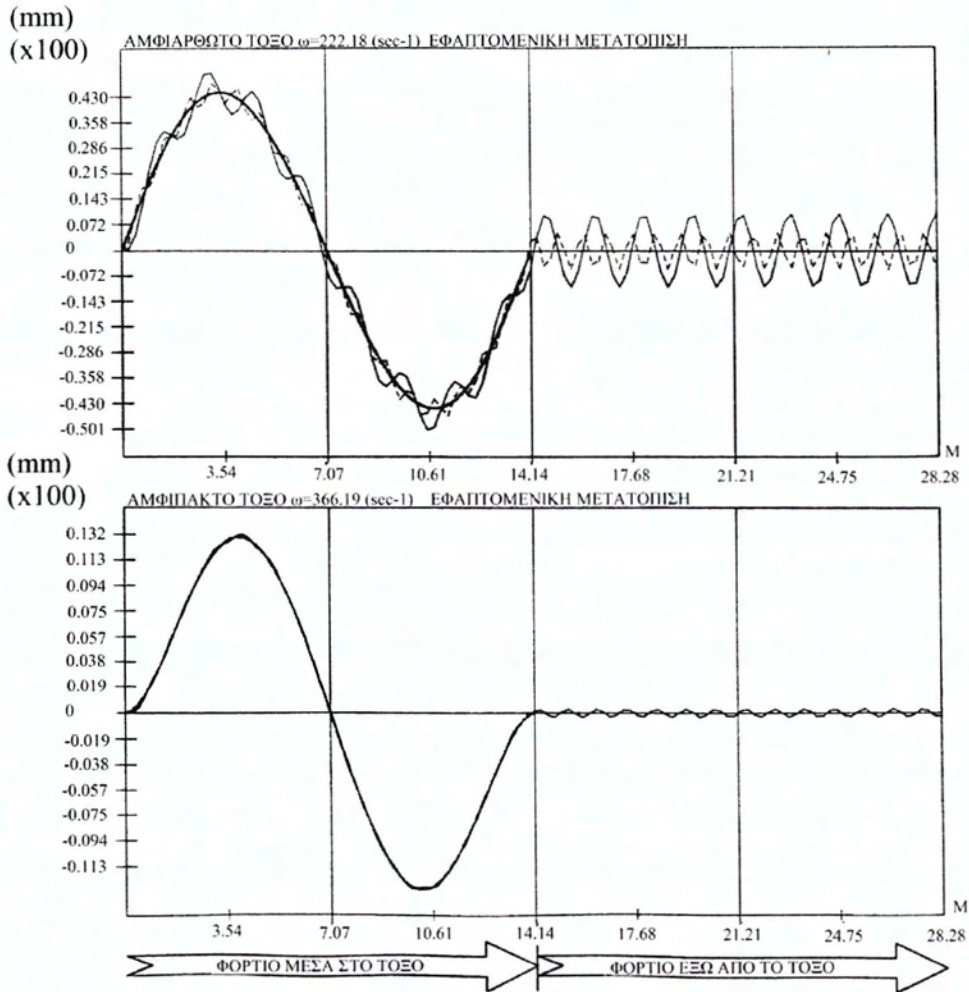
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.

3ο

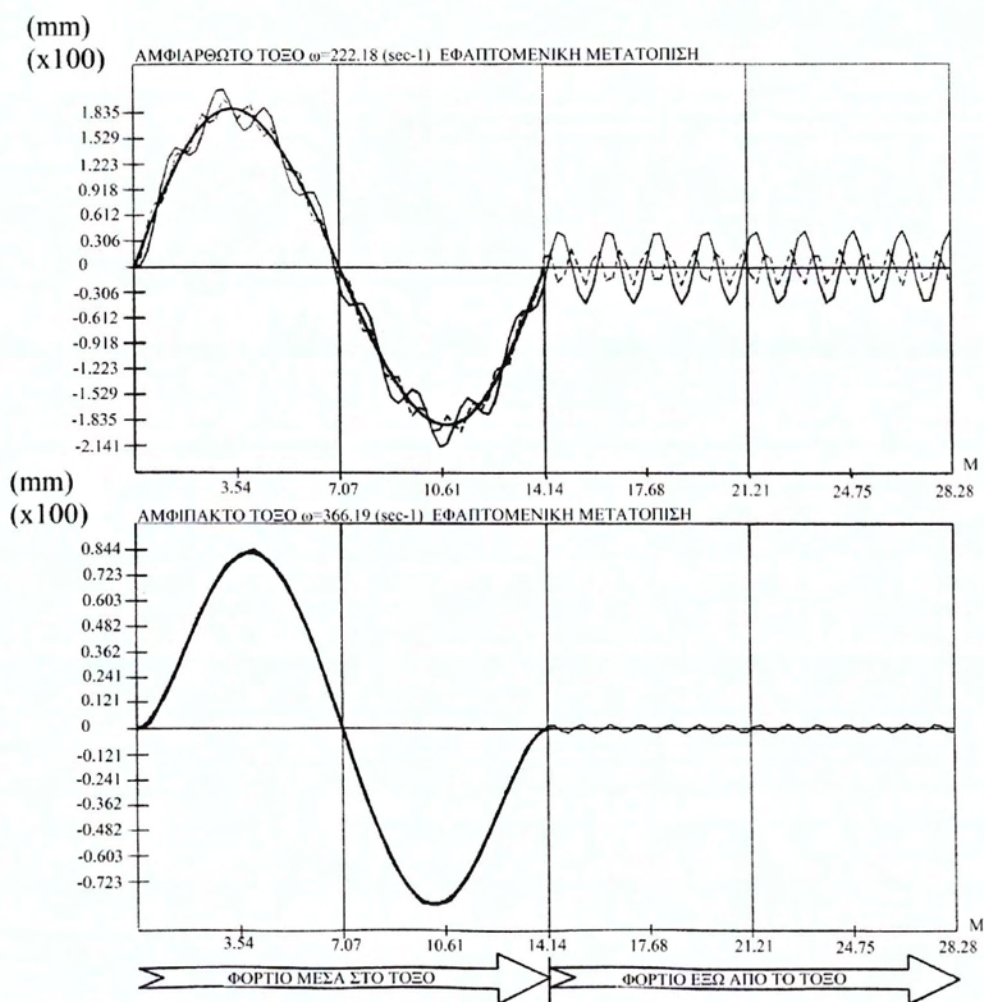
$A=0.1220 \text{ m}^2$
 $I=0.0120 \text{ m}^4$



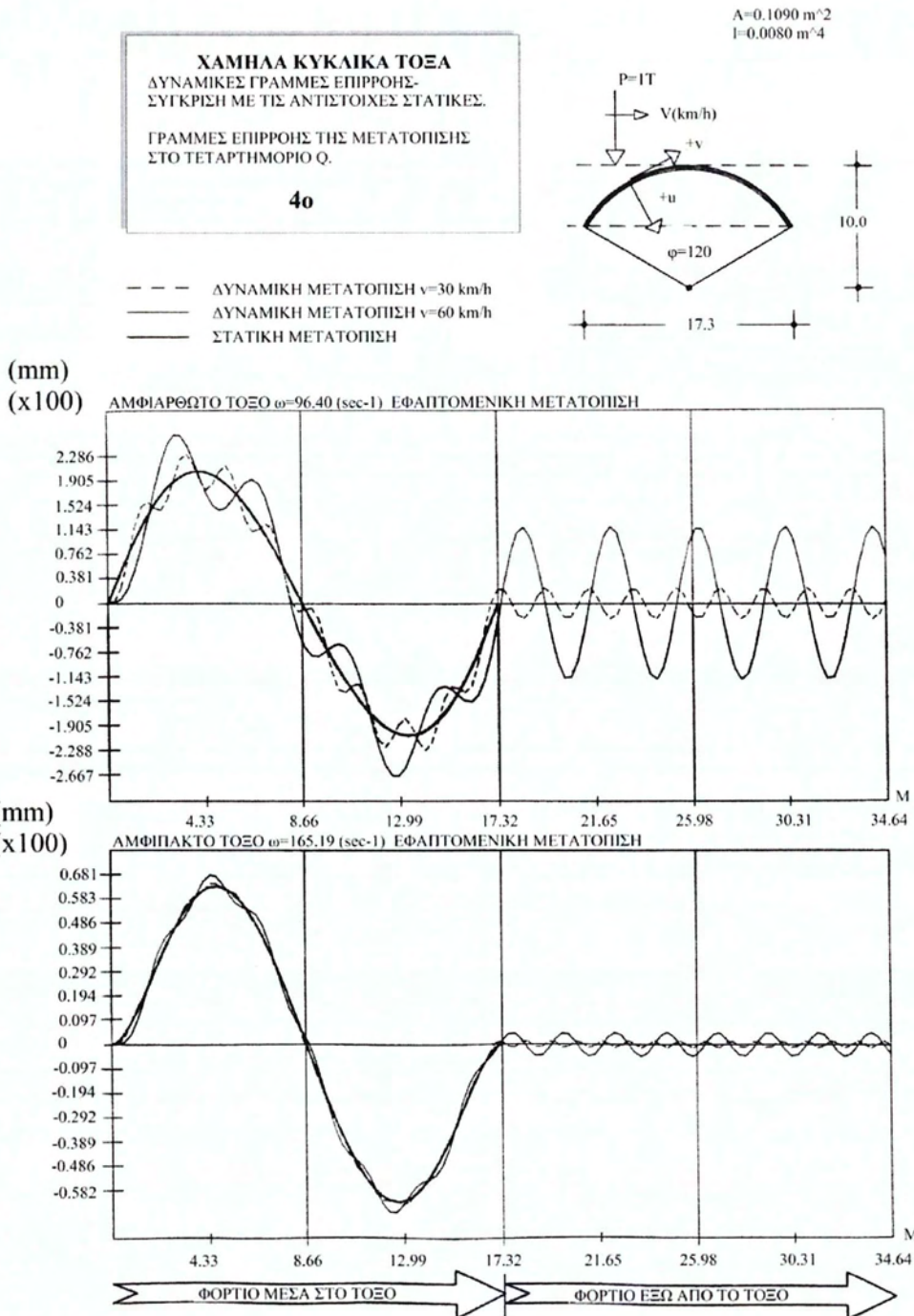
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



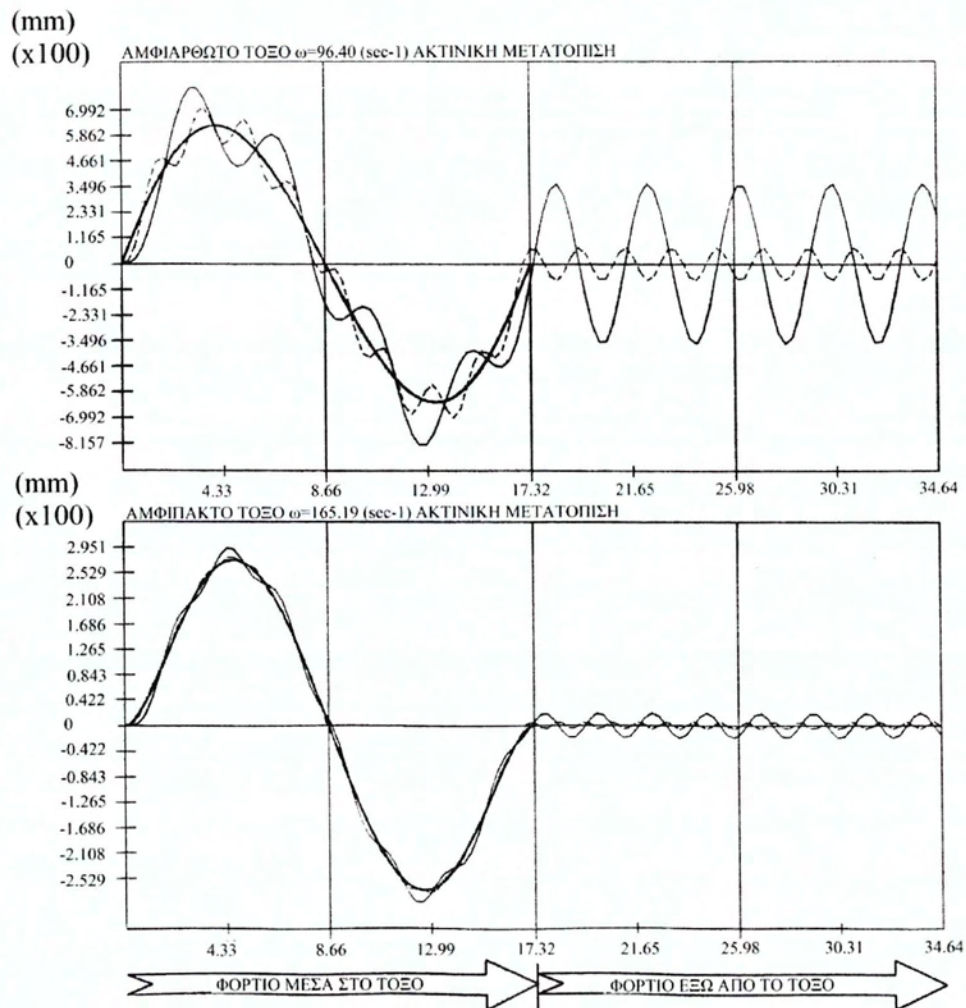
Διάγραμμα 47: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 48: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120m^4$.



Διάγραμμα 49: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

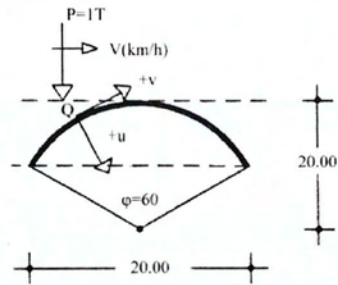


Διάγραμμα 50: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

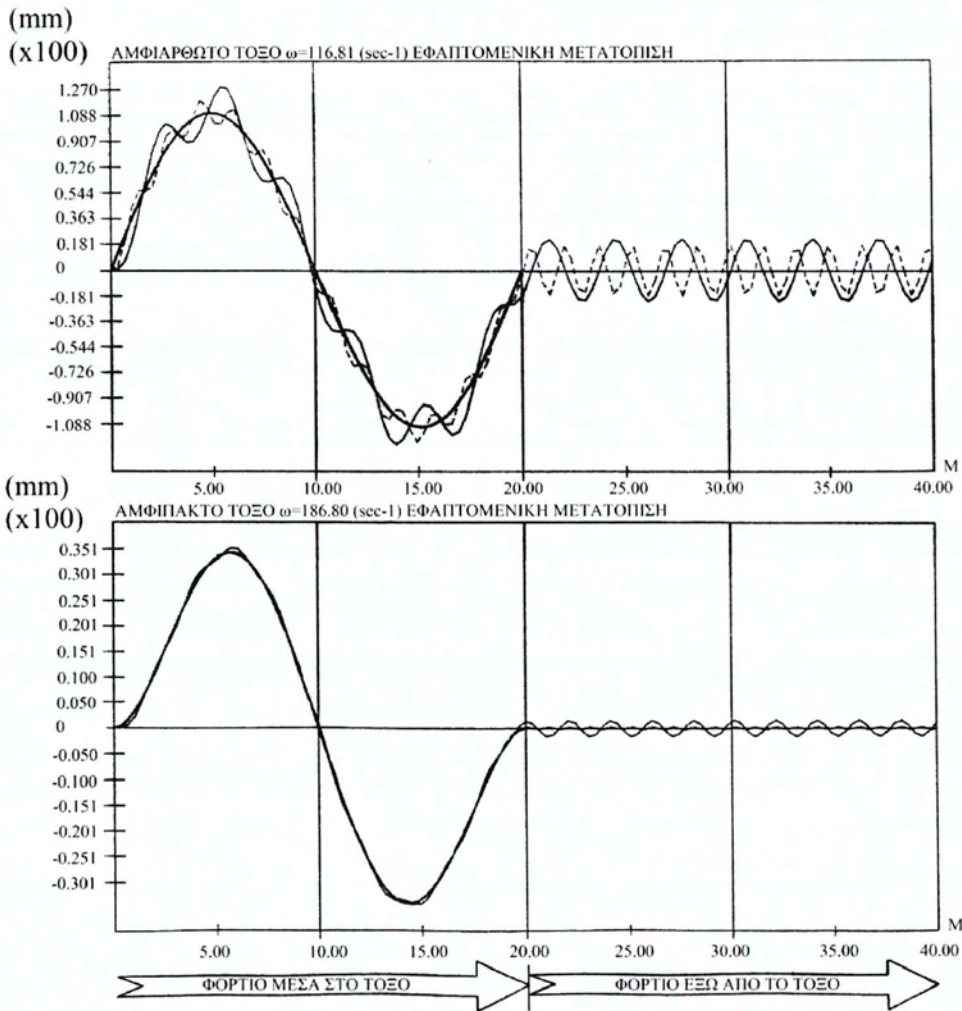
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.

50

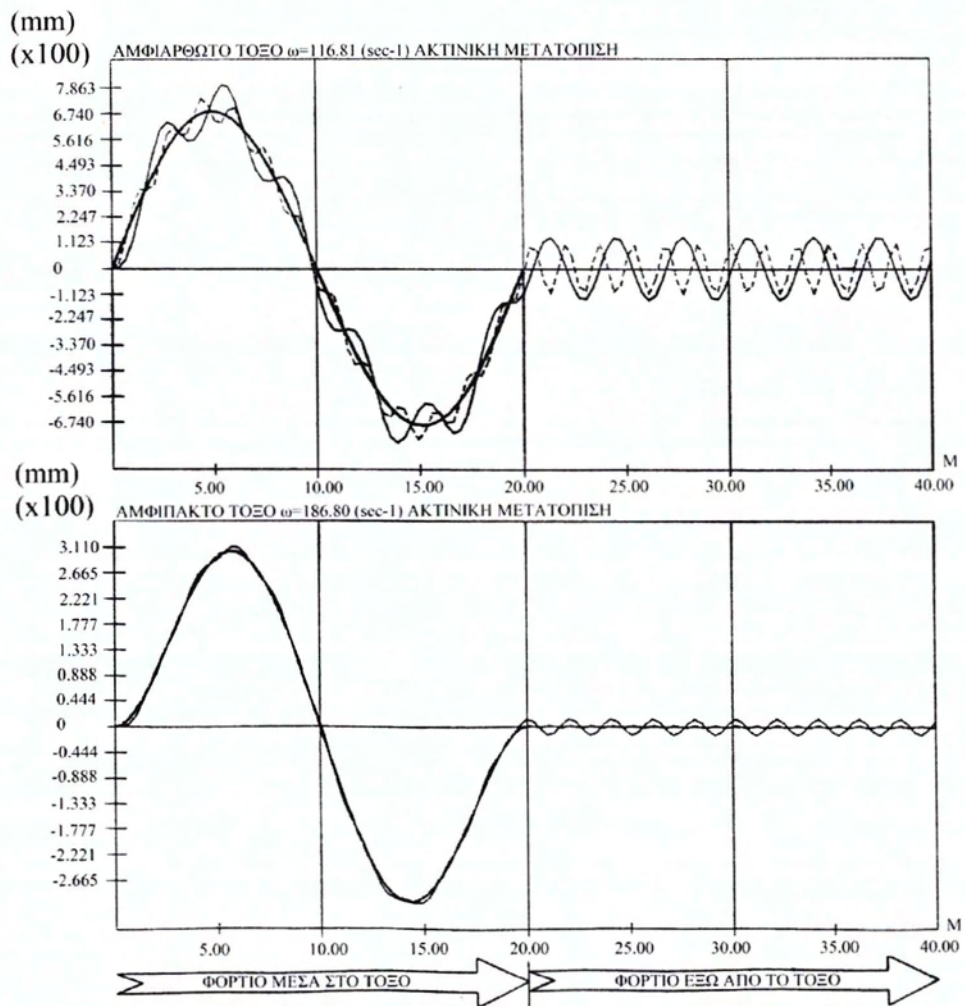
$A=0.1090 \text{ m}^2$
 $I=0.0080 \text{ m}^4$



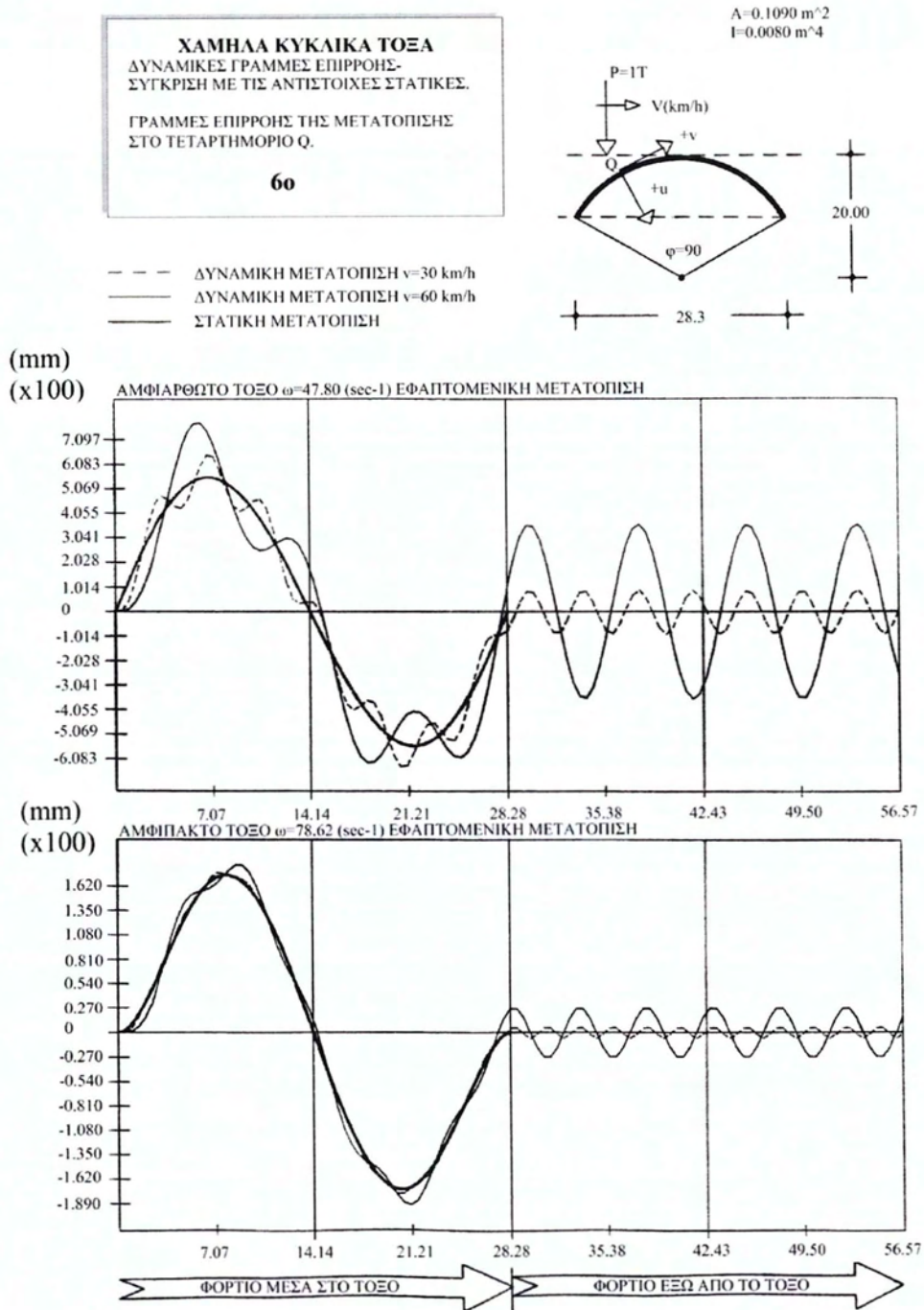
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



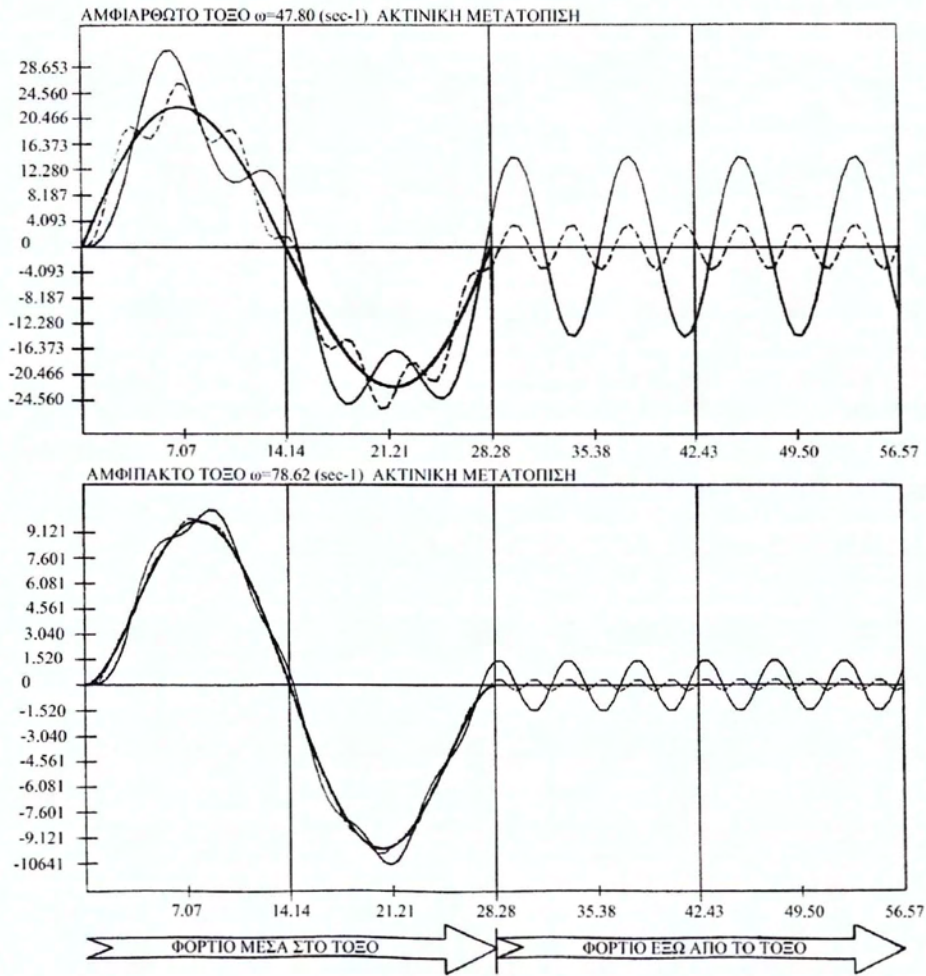
Διάγραμμα 51: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\phi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 52: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 10m, γωνία $\varphi=60$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.



Διάγραμμα 53: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080 \text{ m}^4$.

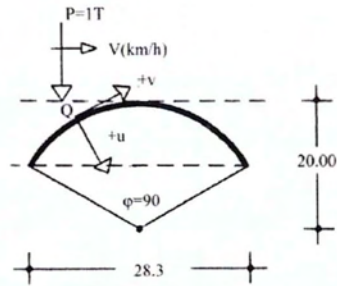


Διάγραμμα 54: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1090\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0080\text{m}^4$.

$A=0.1220 \text{ m}^2$
 $I=0.0120 \text{ m}^4$

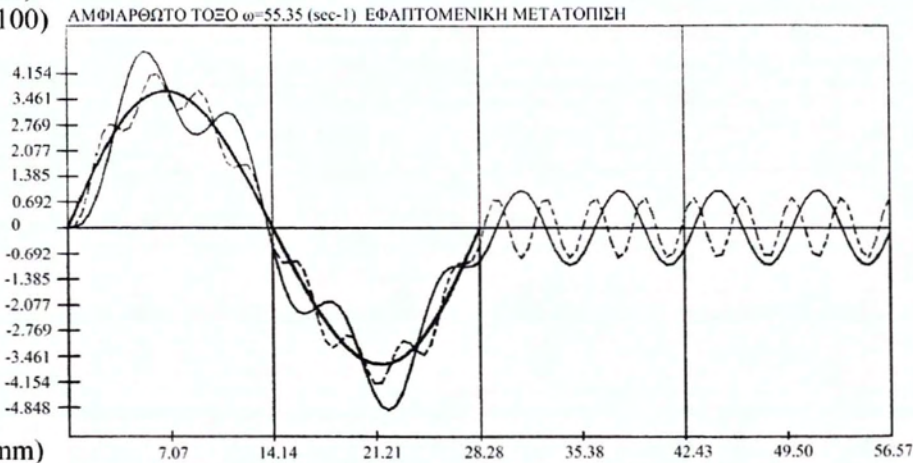
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.

7ο



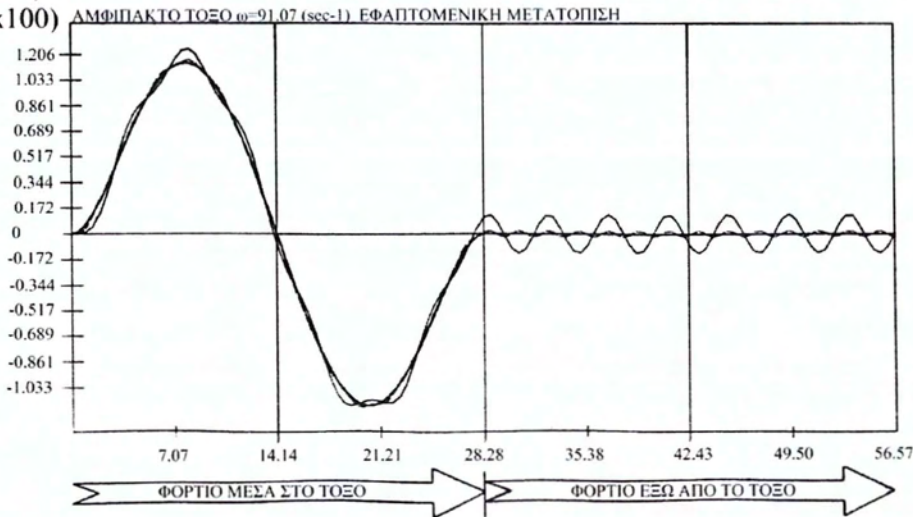
--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
— ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

(mm)
(x100)

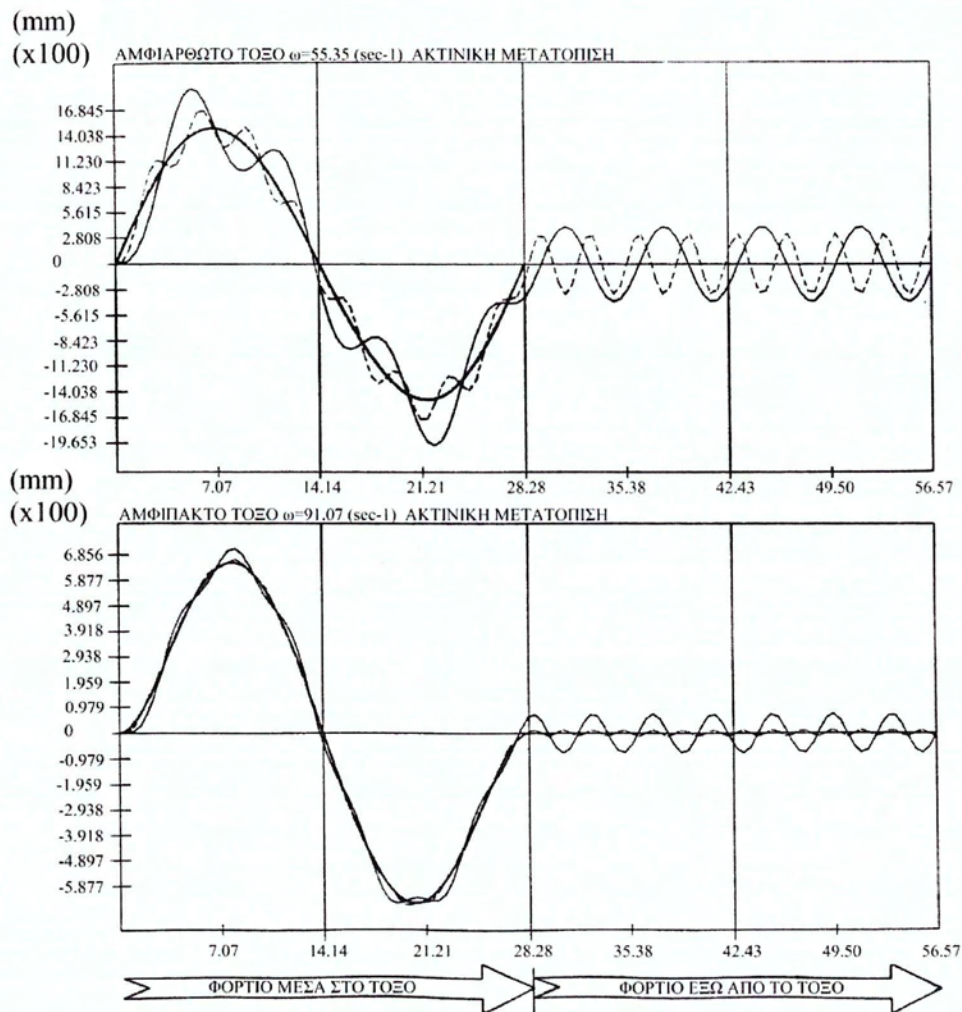


(mm)

(x100)



Διάγραμμα 55: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπλακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120 \text{ m}^4$.



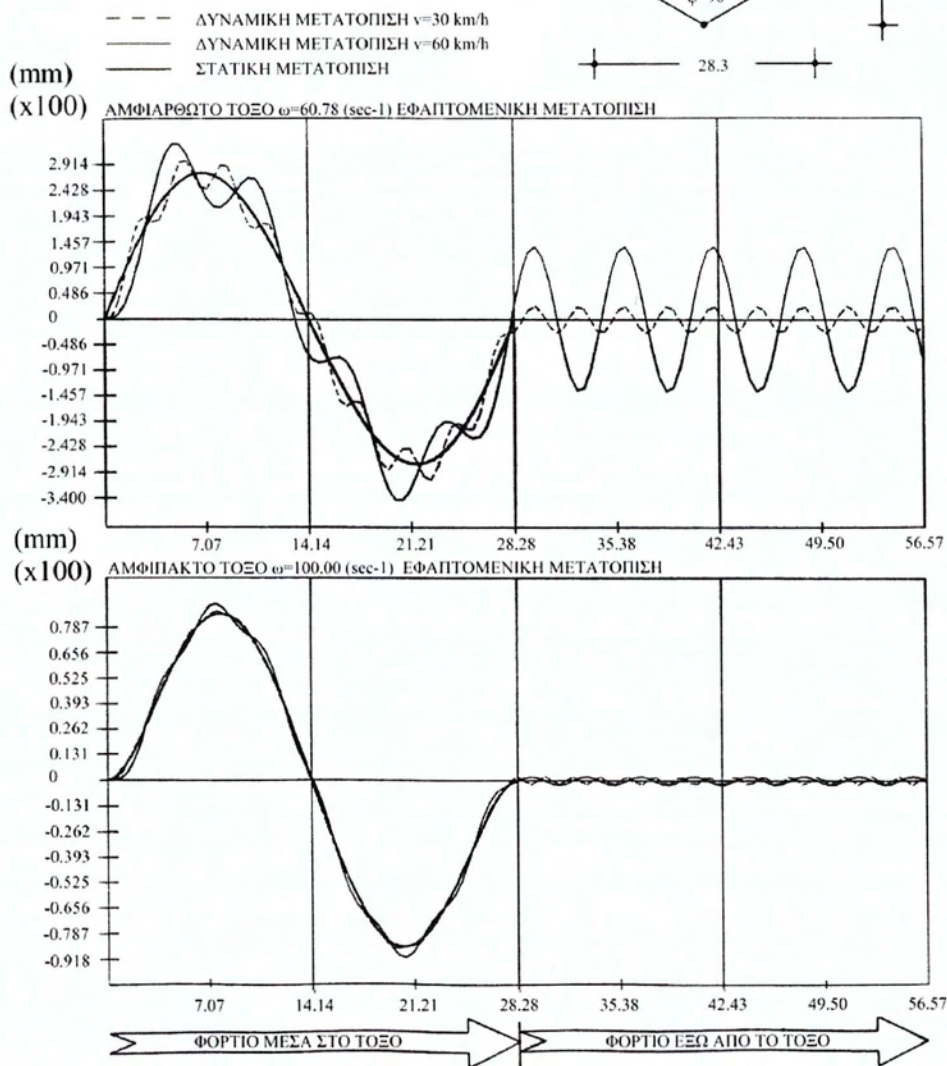
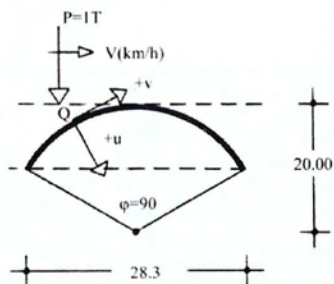
Διάγραμμα 56: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.

$A=0.1350 \text{ m}^2$
 $I=0.0160 \text{ m}^4$

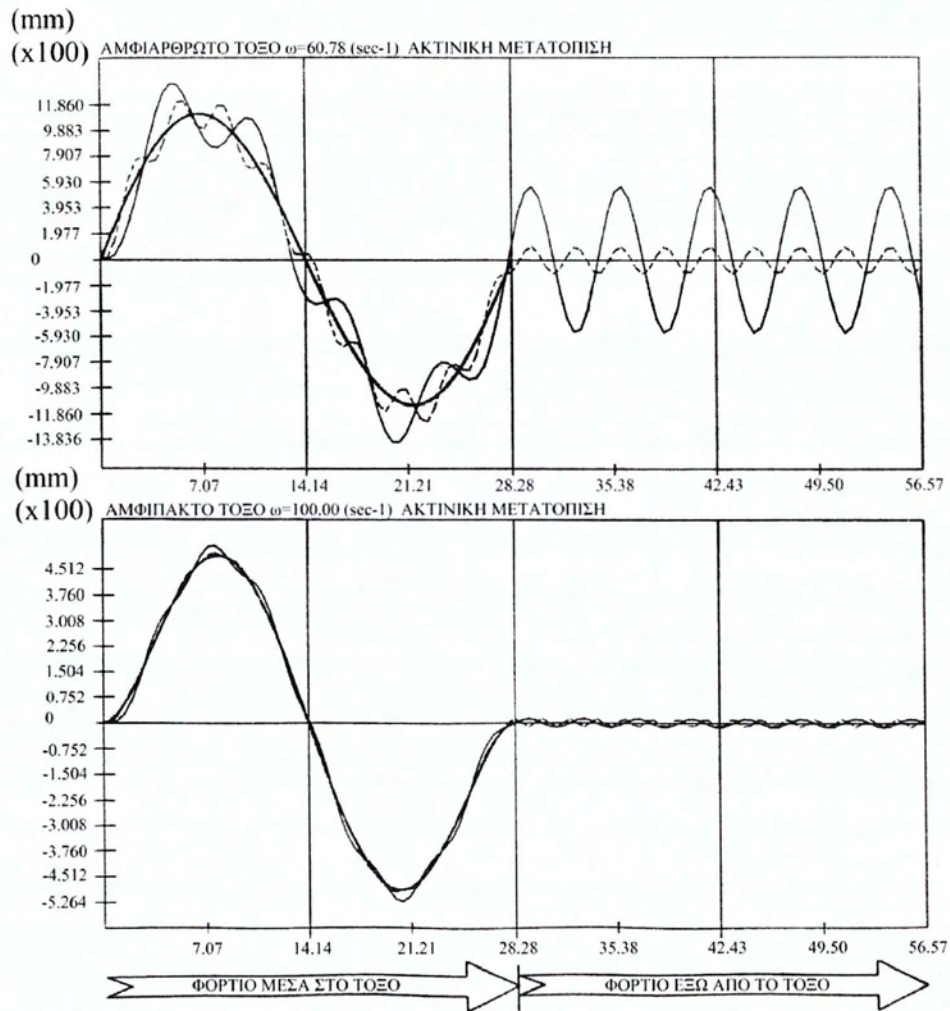
ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.

ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.

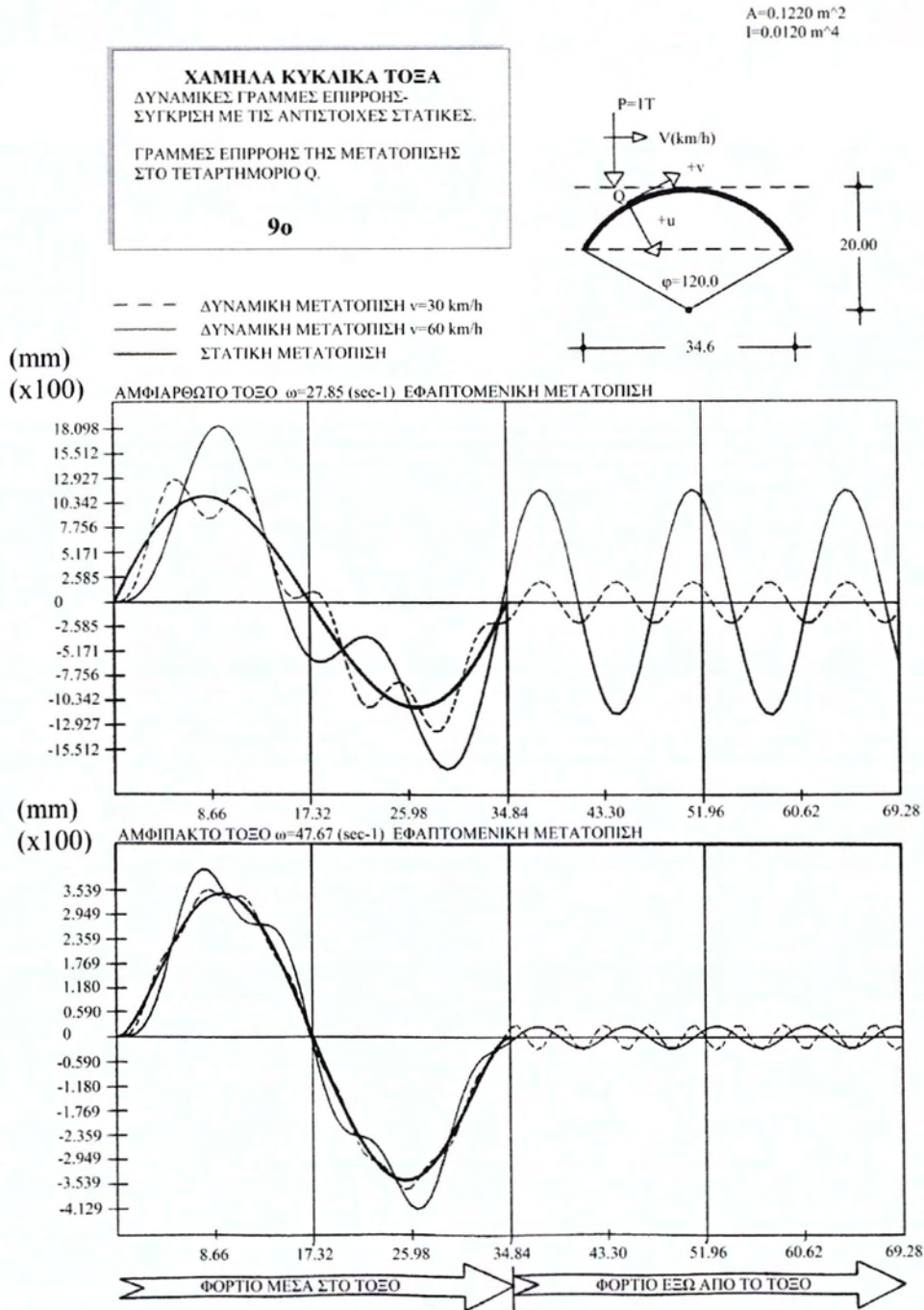
8ο



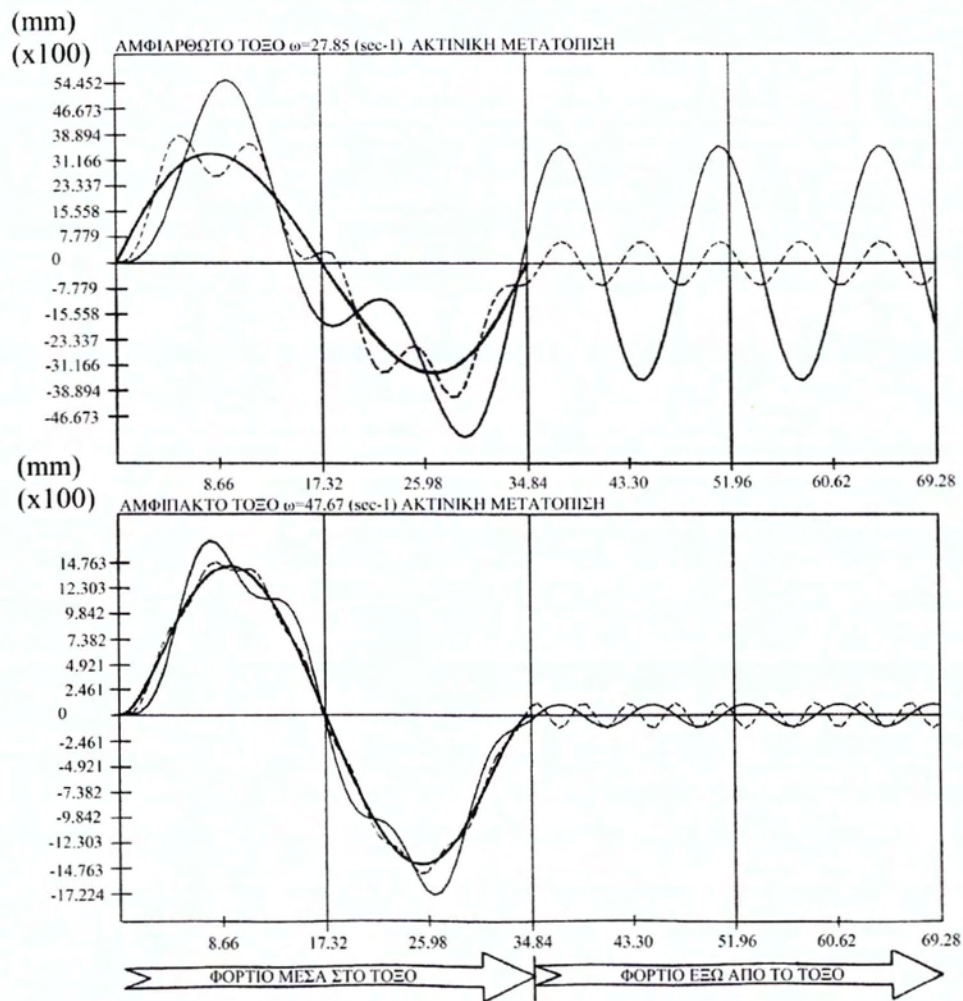
Διάγραμμα 57: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\phi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 58: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=90$ μοίρες, διατομή $A=0.1350m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160m^4$.



Διάγραμμα 59: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\phi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.

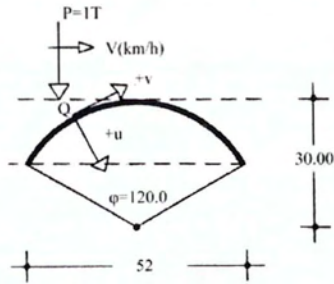


Διάγραμμα 60: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 20m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1220\text{m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0120\text{m}^4$.

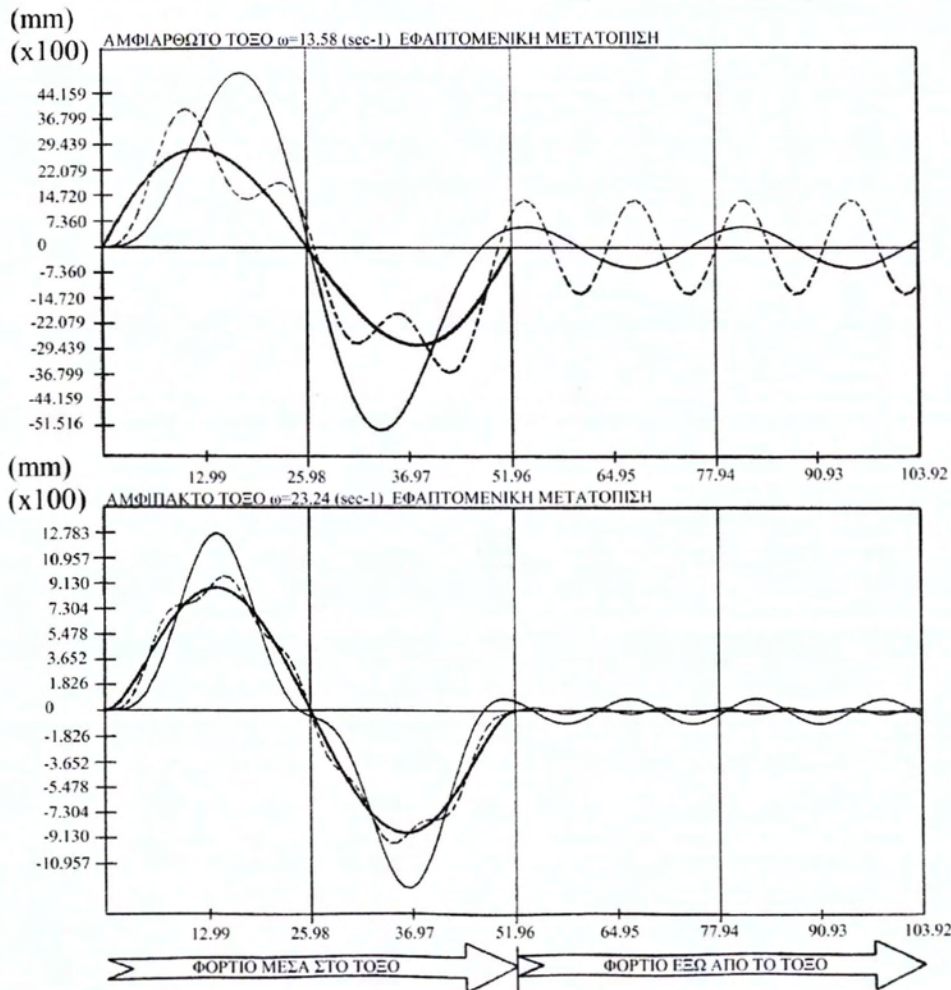
$A=0.1350 \text{ m}^2$
 $I=0.0160 \text{ m}^4$

ΧΑΜΗΛΑ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΟΞΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ-
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ.
ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ
ΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ Q.

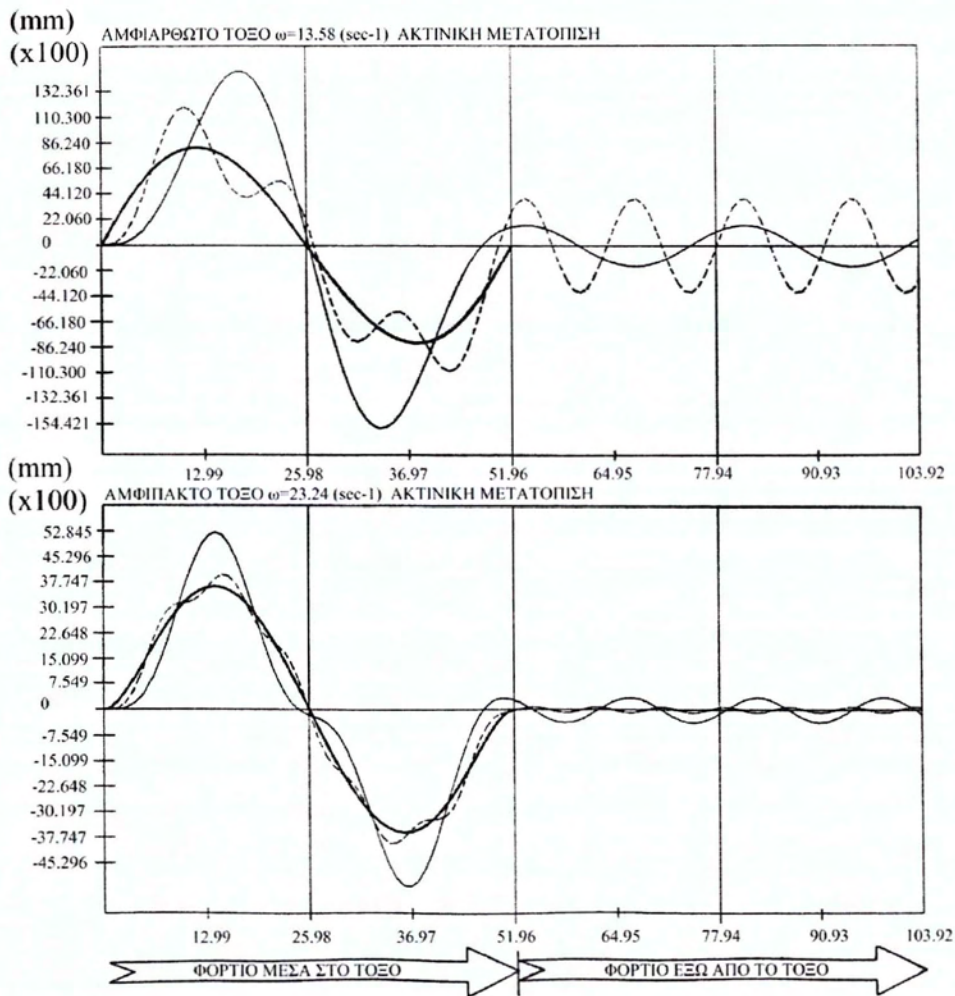
10ο



--- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=30 \text{ km/h}$
- - - ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ $v=60 \text{ km/h}$
— ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ



Διάγραμμα 61: Εφαπτομενική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφιπλάκτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\varphi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1350 \text{ m}^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160 \text{ m}^4$.



Διάγραμμα 62: Ακτινική μετατόπιση στο τεταρτημόριο Q για αμφιαρθρωτό και αμφίπακτο τόξο με ακτίνα 30m, γωνία $\phi=120$ μοίρες, διατομή $A=0.1350m^2$, ροπή αδράνειας $I=0.0160m^4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

A. ΜΕΡΟΣ (Ελεύθερη Ταλάντωση)

Βάσει λοιπόν της θεωρητικής αναλύσεως που εξετάθη στο Κεφάλαιο 1 και της αριθμητικής αναλύσεως που ακολούθησε στο ίδιο Κεφάλαιο έχουμε τις ακόλουθες βασικές παρατηρήσεις:

1. Για βαθμό ταλαντώσεως $\sqrt{(E/\gamma)} > \omega r$ οι φορείς μπορούν να χαρακτηριστούν ως εύκαμπτοι, οι δε σχέσεις που δίνουν τις συναρτήσεις σχήματος δίνονται από την (1.9). Όταν $\sqrt{(E/\gamma)} < \omega r$ οι φορείς μπορεί να χαρακτηριστούν ως δύσκαμπτοι, οι δε ρίζες της (1.8) είναι πλέον μια αρνητική και μια θετική, οι δε συναρτήσεις σχήματος δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$u(\theta) = C_1 \cdot \sinh(\bar{\rho}_1 \cdot \theta) + C_2 \cdot \cosh(\bar{\rho}_1 \cdot \theta) + C_3 \cdot \sinh(\bar{\rho}_2 \cdot \theta) + C_4 \cdot \cosh(\bar{\rho}_2 \cdot \theta) + C_5 \cdot \sinh(\bar{\rho}_3 \cdot \theta) + C_6 \cdot \cosh(\bar{\rho}_3 \cdot \theta)$$

$$v(\theta) = -\frac{1}{\alpha_2} \cdot [(-\bar{\rho}_1^{-5} + (\alpha_2 + 1) \cdot \bar{\rho}_1) \cdot [C_1 \cdot \cosh(\bar{\rho}_1 \cdot \theta) + C_2 \cdot \sinh(\bar{\rho}_1 \cdot \theta)] + (-\bar{\rho}_2^{-5} + (\alpha_2 + 1) \cdot \bar{\rho}_2) \cdot [C_3 \cdot \cosh(\bar{\rho}_2 \cdot \theta) + C_4 \cdot \sinh(\bar{\rho}_2 \cdot \theta)] + (-\bar{\rho}_3^{-5} + (\alpha_2 + 1) \cdot \bar{\rho}_3) \cdot [C_5 \cdot \cosh(\bar{\rho}_3 \cdot \theta) + C_6 \cdot \sinh(\bar{\rho}_3 \cdot \theta)]]$$

2. Όπως αναμενόταν, από τα διαγράμματα των φυσικών ιδιοσυχνότητες φαίνεται ότι τα πλέον εύκαμπτα τόξα έχουν μικρότερες ιδιοσυχνότητες, με συνέπεια να εμφανίζουν καλύτερη απόκριση στις δυναμικές διεγέρσεις.
3. Αναλυτικότερα μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:
 - i. Η ιδιοσυχνότητα ω παρουσιάζεται σημαντική μείωση όσον αυξάνει η ακτίνα r και επίσης σημαντική μείωση όσο αυξάνει η γωνία φ του τόξου.
 - ii. Εξ' άλλου, η αύξηση του εμβαδού της διατομής A , προκαλεί και αυτή μείωση του ω .
 - iii. Το ω αυξάνεται όσο αυξάνει η ροπή αδράνειας I της διατομής του τόξου,
 - iv. Για μικρότερες γωνίες ($\varphi=60^\circ$), η ιδιοσυχνότητα ω αυξάνει ταχύτερα συναρτήσει των I , με άλλα λόγια η μεταβολή της αυξήσεως του ω

αυξάνει. Αντίθετα, για μεγάλες γωνίες φ η αύξηση του ω είναι βραδύτερη.

- v. Για μεγάλες γωνίες φ , την σημαντικότερη επιρροή επί της ιδιοσυχνότητας έχουν κατά σειρά τα r , A και I , ενώ η αντίστοιχη σειρά όταν πρόκειται για μικρές γωνίες φ , είναι ρ , I και A .
- vi. Τα παρακάτω ισχύουν και για τα αμφιαρθωτά και τα αμφίπακτα τόξα. Όσον αφορά την μεταξύ τους σύγκριση, τα αμφίπακτα τόξα εμφανίζουν σαφώς μεγαλύτερες τιμές των ω από ότι τα αμφιαρθωτά, πράγμα που αναμενόταν εφόσον οι πακτώσεις των στηρίξεων αυξάνουν την ακαμψία του όλου φορέα. Υπενθυμίζεται ότι μεταξύ δυο ελαστικών συστημάτων το πλέον εύκαμπτο έχει τις μικρότερες ιδιοσυχνότητες (και μεγαλύτερες τις αντίστοιχες υποπεριόδους).
- vii. Συγκρίνοντας τις ιδιοσυχνότητες ω μεταξύ δυο τόξων ενός αμφιαρθωτού και ενός αμφίπακτου με τα ίδια λοιπά χαρακτηριστικά θα καταλήγαμε στον εμπειρικό τύπο:
$$\omega_{\text{αμφίπακτο}} = (1.52 - 1.72) \omega_{\text{αμφιαρθωτό}}$$
- viii. Οι καμπύλες των ω , όπως φαίνεται στα διαγράμματα, σταματούν σε σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε κατασκευαστικά και πραγματικά αποδεκτές σχέσεις μεταξύ διατομών και αντίστοιχων ροπών αδρανείας. Οι επιλεχθέντες δε συνδυασμοί των (A , I) αναλογούν σε κατασκευή τόξου αποτελούμενη από 4 δοκούς της σειράς HEB. (HEB 500-1000)

B. ΜΕΡΟΣ (Εξαναγκασμένη ταλάντωση)

Για τις μετατοπίσεις του μέσου και του πρώτου τεταρτημορίου των χαμηλών κυκλικών τόξων, έχουμε να σχολιάσουμε τα εξής:

1. Υπολογίστηκαν οι μετατοπίσεις για σταθερές ταχύτητες του κινούμενου φορτίου 30 και 60 km/h ταχύτητες που εκλέχθηκαν βάσει των πραγματικών ταχυτήτων διελεύσεως συνήθων τοξοτών γεφυρών.
2. Μαζί με τις δυναμικές γραμμές επιρροής των μετατοπίσεων δίνονται και οι αντίστοιχες στατικές γραμμές επιρροής. Τα στατικά βέλη υπολογίστηκαν τόσο με τη «δυναμική» μέθοδο όπως αναφέρεται στο παράρτημα Β., όσο και για την αμιγώς στατική επίλυση βάσει της αρχής των δυνατών έργων, όπως επίσης

αναφέρεται στο παράρτημα C. Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων επαληθεύτηκαν με σημαντική προσέγγιση (ακρίβεια της τάξεως του 99%).

3. Στα διαγράμματα, οι μετατοπίσεις δίνονται σε mm πολλαπλασιαζόμενες επί 100 για καθαρά πρακτικούς λόγους (παράστασης των αποτελεσμάτων), ενώ όλοι οι υπολογισμοί έχουν γίνει θεωρώντας μοναδιαίο φορτίο ($P=1t$), με άλλα λόγια παριστάνουν mm/ μονάδα φορτίου.
4. Οι δυναμικές μετατοπίσεις υπολογίζονται τόσο για φορτίο μέσα στο άνοιγμα του τόξου όσο και όταν το φορτίο διανύει απόσταση ίση με το άνοιγμα του τόξου, αλλά βρίσκεται εκτός αυτού.
5. Από τη σύγκριση ανάμεσα στις μετατοπίσεις του μέσου M του κάθε τόξου, μπορούμε να συμπεράνουμε τα ακόλουθα:
 - i. Για κάθε δυναμική φόρτιση, η ακτινική μετατόπιση του μέσου M είναι μηδενική για όλα τα τόξα, δηλαδή το μέσο M μετατοπίζεται μόνο οριζόντια όταν το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και λαμβάνεται υπόψη η επιρροή της πρώτης κανονικής μορφής. Η επιρροή των υπολοίπων δίνει μετατοπίσεις ακτινικές και εφαπτομενικές οι οποίες μπορούν πρακτικά να αγνοηθούν.
 - ii. Όπως αναμενόταν για τόξα με τις αυτές συνθήκες στηρίξεως (αμφίπακτα ή αμφιαρθωτά), οι μετατοπίσεις αυξάνουν όσο μειώνεται η ακαμψία του φορέα (τόξα με μικρότερες φυσικές ιδιοσυχνότητες εμφανίζουν μεγαλύτερες μετατοπίσεις).
 - iii. Για ταχύτητα 60 km/h, οι αντίστοιχες μετατοπίσεις του μέσου στα αμφιαρθωτά είναι σαφώς μεγαλύτερες από τις μετατοπίσεις για ταχύτητα 30 km/h. Οι καμπύλες των στατικών μετατοπίσεων στα δύσκαμπτα τόξα εμφανίζονται κατά κανόνα σαν η μέση καμπύλη των αντίστοιχων δυναμικών ενώ στα εύκαμπτα τόξα οι δυναμικές παραμορφώσεις μπορεί να είναι ως και 50% μεγαλύτερες των αντίστοιχων στατικών. Εδώ σημειώνεται πως οι στατικές καμπύλες θα μπορούσαν να προκύψουν μέσω των σχέσεων που δίνουν τις

δυναμικές μετατοπίσεις όταν η ταχύτητα τείνει στο μηδέν. Όσον αφορά τα αμφίπακτα τόξα, οι διαφορές ανάμεσα στις δυναμικές μετατοπίσεις για $v=60\text{km/h}$ τείνουν να εξαφανιστούν (πλήρης ταύτιση των καμπυλών) όσο πιο δύσκαμπτα είναι τα τόξα.

- iv. Για όλα τα τόξα, τα μέγιστα των στατικών μετατοπίσεων σε απόλυτη τιμή είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα μέγιστα των δυναμικών μετατοπίσεων, η δε διαφορά αυτή αυξάνει όσο αυξάνεται η ευκαμψία του τόξου. Παρατηρούμε πως η αναφερθείσα διαφορά είναι μικρότερη για τα αμφίπακτα τόξα παρά για τα αμφιαρθωτά, ο δε ρυθμός με τον οποίο αυξάνει αυτή η διαφορά είναι μεγαλύτερος πάλι στα αμφιαρθωτά από ότι στα αμφίπακτα. Αυτό εξηγείται από το ότι τα αμφιαρθωτά τόξα είναι όπως προαναφέραμε πλέον εύκαμπτα, με συνέπεια να εμφανίζονται περισσότερο «ευαίσθητα» σε δυναμικές διεγέρσεις, όταν τα αντίστοιχα αμφίπακτα εμφανίζονται να αντιδρούν περισσότερο μονολιθικά για ταχύτητες αυτής της τάξης.
 - v. Όσον αφορά όλα τα τόξα (αμφιαρθωτά και αμφίπακτα), όταν το φορτίο βρίσκεται έξω από το τόξο, οι μετατοπίσεις του μέσου M μειώνονται με την αύξηση της ακαμψίας του τόξου. Εξάλλου όταν το φορτίο βρίσκεται έξω από το τόξο, οι καμπύλες των μετατοπίσεων δεν φθίνουν, πράγμα που οφείλεται στο ότι δεν λάβαμε υπόψη την απόσβεση της κατασκευής θέμα που ξεφεύγει από τη Γραμμική Δυναμική.
 - vi. Τα αμφιαρθωτά τόξα εμφανίζουν σαφώς μεγαλύτερες δυναμικές, όσο και στατικές μετατοπίσεις από τα αμφίπακτα, γεγονός αναμενόμενο εξ αρχής.
6. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων στο πρώτο τεταρτημόριο όπου υπάρχουν τόσο η ακτινική όσο και η εφαπτομενική μετατόπιση, μπορούμε να πούμε ότι:
- i. Ισχύουν τα συμπεράσματα ii έως vi που εξήχθηκαν για το μέσο M .
 - ii. Η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση της ακτίνας είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη εφαπτομενική και όσο αφορά όλες τις μετατοπίσεις,

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Θεωρούμε τις αδιάστατες ποσότητες:

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{EI}{mr^4}} t$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{mr^2}{EI}} v$$

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\frac{mr^4}{EI}} \omega_k = \sqrt{a_2}$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{EI}{mr^4}} \tau$$

$$\bar{x} = \frac{x}{r}$$

$$L = \frac{L}{2r} = \frac{2r \sin(\varphi/2)}{2r} = \sin(\varphi/2)$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\bar{x} = \bar{v} \bar{t}$$

$$v \tau = \bar{v} \bar{t} r$$

$$t - \tau = \sqrt{\frac{mr^4}{EI}} (\bar{t} - \bar{\tau})$$

Επίσης:

$$d\tau = \sqrt{\frac{mr^4}{EI}} d\bar{\tau}$$

Και ανάλογα τα όρια ολοκλήρωσεως είναι:

Για $\tau=0$, προκύπτει $d\tau=0$.

Για $\tau=t$, προκύπτει $\bar{\tau} = \sqrt{\frac{EI}{mr^4}} t = \bar{t}$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στη σχέση που δίνει το $A_n(\tau)$, παίρνουμε:

$$A_n(t) = \bar{u}_n \{ \varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - \bar{v}\bar{\tau}] \} \cos[\arcsin[\sin(\varphi/2) - \bar{v}\bar{\tau}] - \bar{v}\bar{\tau}] \\ - \bar{v}_n \{ \varphi/2 - \arcsin[\sin(\varphi/2) - \bar{v}\bar{\tau}] \} [\sin(\varphi/2) - \bar{v}\bar{\tau}]$$

Μετά από αυτά η σχέση (3.7) γράφεται:

$$T_n(t) = \frac{\text{Pr}^3}{EI \omega_n B_n(\varphi)} \int_0^{\bar{t}} [A_n(\bar{\tau}) \sin(\bar{\omega}_n(\bar{t} - \bar{\tau}))] d\bar{\tau}$$

όπου ο παράγοντας: $\left(\frac{\text{Pr}^3}{EI \omega_n B_n(\varphi)}\right)$ έχει διαστάσεις μήκους και $B_n(\varphi)$ όπως έχει οριστεί και σε προηγούμενο σημείο αδιάστατος.

Έτσι αν ορίσουμε με: $\underline{u}(\bar{x}, \bar{t})$ και $\underline{v}(\bar{x}, \bar{t})$ αντίστοιχα τις τελικές αδιάστατες μετατοπίσεις κατά την ακτίνα και την εφαπτόμενη αντίστοιχα, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\underline{u}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\frac{\text{Pr}^3}{EI}} u(\bar{x}, \bar{t}) \text{ και}$$

$$\underline{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\frac{\text{Pr}^3}{EI}} v(\bar{x}, \bar{t})$$

όπου:

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\frac{\text{Pr}^3}{EI}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \bar{u}_k(\bar{x}) \int_0^{\bar{t}} A_k(\bar{\tau}) \sin[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{\tau})] d\bar{\tau}$$

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\frac{\text{Pr}^3}{EI}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \bar{v}_k(\bar{x}) \int_0^{\bar{t}} A_k(\bar{\tau}) \sin[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{\tau})] d\bar{\tau}$$

Αντίστοιχη διαδικασία οδηγεί στους αδιάστατους τύπους για το φορτίο εκτός του τόξου:

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\bar{x}) \left\{ \sin[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{t}^*)] - \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \int_0^{\bar{t}^*} A_k(\tau) \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t}^* - \tau)] d\tau \right.$$

$$\left. + \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{t}^*)] \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \int_0^{\bar{t}^*} A_k(\tau) \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t}^* - \tau)] d\tau \right\}$$

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k(\bar{x}) \left\{ \sin[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{t}^*)] - \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \int_0^{\bar{t}^*} A_k(\tau) \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t}^* - \tau)] d\tau \right.$$

$$\left. + \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t} - \bar{t}^*)] \frac{1}{\omega_k B_k(\varphi)} \int_0^{\bar{t}^*} A_k(\tau) \cos[\bar{\omega}_k(\bar{t}^* - \tau)] d\tau \right\}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΒΕΛΩΝ

Ισχύει ως γνωστόν η εξίσωση:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{P}{mr\omega_n B_n(\varphi)} A_n(t) \text{ με}$$

$$A_n(t) = u_n \{ \varphi / 2 - \arcsin[\sin(\varphi / 2) - vt / r] \} \cos[\arcsin[\sin(\varphi / 2) - vt / r] - v_n \{ \varphi / 2 - \arcsin[\sin(\varphi / 2) - vt / r] \} [\sin(\varphi / 2) - vt / r]$$

$$B_n(\varphi) = \int_0^\varphi (\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2) d\vartheta$$

Θέτοντας: $\ddot{T}_n(t) = 0$ και $T_n(t) = T_{n,st}$ παίρνουμε για τα στατικά βέλη την εξής συνάρτηση χρόνου:

$$T_{n,st} = \frac{P}{mr\omega_n^2 B_n(\varphi)} A_n(t) \text{ και έτσι:}$$

$$u_{st}(x) = \frac{P}{mrB_n(\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \bar{u}_n(x) A_n(t)$$

$$v_{st}(x) = \frac{P}{mrB_n(\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \bar{v}_n(x) A_n(t)$$

που είναι οι σχέσεις για τα στατικά βέλη του τόξου κατά την ακτίνα και την εφαπτόμενη αντίστοιχα, όπως προκύπτουν μέσω της δυναμικής αναλύσεως.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ.

1. ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

A. Αμφιαρθρωτό τόξο

Λαμβάνουμε ως υποστατικό μέγεθος την οριζόντια αντίδραση μίας εκ των στηρίξεων του κυκλικού τόξου. Αυτή υπολογίζεται [13] από τον τύπο:

$$H_1 = \frac{\int_0^{\infty} myds}{\int_0^{\infty} y^2 ds + (I/A) \int_0^{\infty} ds}$$

όπου m η ροπή κάμψεως σε τυχαίο σημείο της αντίστοιχης προς την κυκλική, ευθύγραμμης δοκού, όταν την φορτίζουμε με την αντίστοιχη φόρτιση.

όπου x, y οι συντεταγμένες ως προς το ορθοκανονικό σύστημα με αρχή την αριστερή στήριξη.

B. Αμφίπακτο

Σε αυτή την περίπτωση τα υπερστατικά μεγέθη είναι τρία. Αν θεωρήσουμε ως υπερστατικά μεγέθη τις τρεις αντιδράσεις της μια εκ των στηρίξεων του τόξου, τότε αυτές υπολογίζονται από την επίλυση της μητρικής εξίσωσης:

$$[A][X] = [B]$$

όπου:

$$[A] = \begin{pmatrix} \int_0^{\varphi} d\theta & -\int_0^{\varphi} xd\theta & \int_0^{\varphi} yd\theta \\ -\int_0^{\varphi} xd\theta & \int_0^{\varphi} x^2 d\theta & -\int_0^{\varphi} xyd\theta \\ \int_0^{\varphi} yd\theta & -\int_0^{\varphi} xyd\theta & \int_0^{\varphi} [y^2 + (I/A)]d\theta \end{pmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} M \\ V \\ N \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \int_0^{\varphi} md\theta \\ -\int_0^{\varphi} mxd\theta \\ \int_0^{\varphi} myd\theta \end{bmatrix}$$

όπου τα x , y , m ορίζονται όπως και προηγουμένως. Οι παραπάνω δυο στατικές επιλύσεις βασίζονται στην αρχή των δυνατών έργων, σύμφωνα με την οποία ως γνωστόν, ισχύουν οι συνθήκες:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial N} = 0$$

όπου M , N , V τα υπερστατικά μεγέθη των αντιδράσεων και U η έκφραση της ενέργειας του φορέα συμβολιζόμενη ως ακολούθως:

$$U = \int_0^s \frac{M^2}{2EI} ds + \int_0^s \frac{N^2}{2EI} ds$$

2. ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό των μετακινήσεων σε τυχόν σημείο του τόξου, όταν φορτίζεται με μοναδιαίο φορτίο σε τυχόν σημείο του γνωρίζουμε επίσης από την αρχή των δυνατών έργων και την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου ότι ισχύει:

$$1 \cdot \bar{\delta} = \int_0^s \frac{M \bar{M}}{EI} ds + \int_0^s \frac{N \bar{N}}{EA} ds$$

όπου M η έκφραση της καμπτικής ροπής κατά μήκος του φορέα όταν ενεργεί η κανονική φόρτιση, \bar{M} η έκφραση της καμπτικής ροπής κατά μήκος του φορέα όταν ενεργεί η μοναδιαία φόρτιση και $\bar{\delta}$ η μετακίνηση στο σημείο που μας ενδιαφέρει όταν το φορτίο κινείται πάνω στο φορέα.

Βιβλιογραφία

Timoshenko, St. (1961): “Vibration Problems in Engineering”, McGraw-Hill.

Fryba, L. (1999): “Vibration of Solids and Structures under Moving Loads”, Thomas Telford.

Kolousek, V. (1973): “Dynamics in Engineering Structures”, Newnes- ButterWorths.

Κουνάδης, Α.Ν. (1989): “Δυναμική των Συνεχών Ελαστικών Συστημάτων”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.

Intel Visual Fortran for Windows, www.intel.com, version XE 2011.

OriginPro 8, Data Analysis and Graphing Software, www.originlab.com, OriginLab Corporation, Northampton, U.S.A.

ΛΗΞΗ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΔΑΝΕΙΖΟΜΕΝΟΥ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ**

Τηλ.: 24210 06300-1



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000106809