

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Διπλωματική Εργασία



*Εφαρμογές της μεθόδου διαταραχών
με χρήση του Mathematica*

Φοιτητής: Άγγελος Χιώτης
Επιβλέπων: Δ. Σ. Σοφιανόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής ΠΘ

Βόλος, Μάρτιος 2011



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 9677/1
Ημερ. Εισ.: 05-09-2011
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ
2011
ΧΙΩ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή.....	1
1.1. Προεισαγωγικά Σχόλια.....	1
1.2. Συμβολικός Υπολογισμός.....	2
1.2.1. Καθολικοί Κανόνες	2
1.2.2. Τοπικοί Κανόνες	7
1.2.3. Ταίριασμα Υποδειγμάτων	10
1.2.4. Χρησιμοποιώντας Υποδείγματα σε Κανόνες	12
1.2.5. Περιορίζοντας το Ταίριασμα Υποδειγμάτων με Συναρτήσεις Κριτηρίου	14
1.2.6. Καθαρές Συναρτήσεις	17
1.2.7. <i>Map</i> και <i>Apply</i>	18
1.2.8. <i>Nest</i> και <i>Fold</i>	21
2. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Η εξίσωση Duffing	22
2.1. Η εξίσωση Duffing	22
2.2. Απ'ευθείας Ανάπτυξη	24
2.3. Η τεχνική Lindstedt – Poincaré	27
2.4. Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων	29
2.4.1. Δεύτερης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	30
2.4.2. Πρώτης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	33
2.4.3. Πρώτης-τάξης σύστημα μιγαδικών τιμών	35
2.5. Μεταβολή των Παραμέτρων	36
2.6 Η Μέθοδος της Μεσοστάθμισης	38
3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Συστήματα με δευτεροβάθμιες και κυβικές μη-γραμμικότητες	40
3.1. Αδιάστατη Εξίσωση Κίνησης	40
3.2. Απ'ευθείας ανάπτυξη	41
3.3. Η τεχνική Lindstedt – Poincaré	42
3.4. Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων	44
3.4.1. Δεύτερης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	45
3.4.2. Πρώτης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	48
3.4.3. Πρώτης-τάξης σύστημα μιγαδικών τιμών	51
3.5. Η μέθοδος της μεσοστάθμισης	53
3.6. Η γενικευμένη μέθοδος της μεσοστάθμισης	54
3.7. Η τεχνική Krylov – Bogoliubov – Mitropolsky	59
3.8. Η μέθοδος των κανονικών μορφών	61

4.	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της εξίσωσης Duffing	65
4.1.	Απ' ευθείας ανάπτυξη	65
4.2.	Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων	69
4.2.1.	Προκαταρκτικές παρατηρήσεις	69
4.2.2.	Κύριος Συντονισμός	69
4.2.3.	Δευτερεύοντες συντονισμοί λόγω κυβικών μη-γραμμικότητων	71
4.2.4.	Δευτερεύοντες συντονισμοί λόγω δευτεροβάθμιων μη-γραμμικότητων	74
4.2.5.	Πρώτης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	77
4.2.6.	Πρώτης-τάξης σύστημα μιγαδικών τιμών	85
4.2.7.	Η συνάρτηση <i>MMS1</i>	88
4.3.	Η γενικευμένη μέθοδος της μεσοστάθμισης	93
4.4.	Η μέθοδος των κανονικών μορφών	98
5.	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις για συστήματα με εσωτερικούς συντονισμούς	105
5.1.	Εξισώσεις Euler – Lagrange	105
5.2.	Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων	106
5.2.1.	Δεύτερης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	107
5.2.2.	Πρώτης-τάξης σύστημα πραγματικών τιμών	113
5.2.3.	Πρώτης-τάξης σύστημα μιγαδικών τιμών	118
5.3.	Η μέθοδος των κανονικών μορφών	121
5.4.	Γενικευμένη μέθοδος της μεσοστάθμισης	127
6.	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : Εξαναγκασμένοι ταλαντωτές συστημάτων με πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας ...	132
6.1.	Εξωτερικά διεγερόμενα γραμμικώς μη-συζευγμένα συστήματα	134
6.1.1.	$\Omega \approx \omega_2$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$	135
6.1.2.	Η συνάρτηση <i>MMS</i>	151
6.1.3.	$\Omega \approx \omega_1$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$	157
6.1.4.	$\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$	159
6.1.5.	$\Omega \approx \omega_2$ και $\omega_2 \approx 3\omega_1$	162
6.1.6.	$\Omega \approx \omega_2 - 2\omega_1$ και $\omega_2 \approx 3\omega_1$	163
6.1.7.	$\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$ και $\omega_2 \approx \omega_1$	165
6.1.8.	$\Omega \approx 2\omega_2 - \omega_1$ και $\omega_2 \approx \omega_1$	168
6.2.	Γραμμικά συζευγμένα συστήματα με παραμετρικές διεγέρσεις	169
6.2.1.	Ταλαντωτής δύο εκκρεμών	169
6.2.2.	Η συνάρτηση <i>MMSC</i>	175
7.	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : Συνεχή συστήματα με κυβικές μη-γραμμικότητες	179

7.1. Συνθήκες επιλυσιμότητας και η έννοια του συζυγούς τελεστή	181
7.1.1. Μονόπακτη (με άρθρωση-πάκτωση) δοκός	184
7.1.2. Πρόβολος	185
7.2. Μονόπακτη δοκός	186
7.2.1. EOM και Οριακές Συνθήκες	186
7.2.2. Απ'ευθείας χειρισμός του συνεχούς προβλήματος	186
7.2.3. Διακριτοποίηση του συνεχούς προβλήματος	201
7.2.4. Μέθοδος της χρονικά μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής	204
7.3. Πρόβολος	209
7.3.1. EOM και BC	209
7.3.2. Απ'ευθείας χειρισμός του συνεχούς προβλήματος	211
7.3.3. Διακριτοποίηση του συνεχούς προβλήματος	216
7.3.4. Η μέθοδος της χρονικά μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής	222
8. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : Συνεχή συστήματα με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες	226
8.1. Λυγισμένες δοκοί	227
8.1.1. Μετακαμπτική μετατόπιση	228
8.1.2. Ανάλυση Διαταραχής	233
8.1.3. Η συνάρτηση <i>MMSDIRECT11</i>	240
8.1.4. Τρία-προς-ένα εσωτερικοί συντονισμοί ανάμεσα στις δύο πρώτες μορφές	242
8.1.5. Ένα-προς-ένα και τρία-προς-ένα εσωτερικοί συντονισμοί ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες μορφές	243
8.1.6. Ένα-προς-ένα και τρία-προς-ένα εσωτερικοί συντονισμοί ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές	245
8.2. Κυκλικά Κυλινδρικά Κελύφη	247
8.2.1. Πρώτης-τάξης λύση	249
8.2.2. Δεύτερης-τάξης λύση	250
8.2.3. Συνθήκες επιλυσιμότητας	255
8.3. Σχεδόν-τετράγωνες Πλάκες	256
8.3.1. Πρώτης-τάξης λύση	260
8.3.2. Δεύτερης-τάξης λύση	261
8.3.3. Συνθήκες επιλυσιμότητας	267
8.3.4. Μικτή προσέγγιση	270
9. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 : Ακριβέστερες προσεγγίσεις των συνεχών συστημάτων που έχουν δύο-προς-ένα εσωτερικούς συντονισμούς	276

9.1. Διμορφικές Αλληλεπιδράσεις σε Καμπτόμενες Δοκούς	277
9.1.1. Πρώτης-τάξης λύση	279
9.1.2. Δεύτερης-τάξης λύση	280
9.1.3. Συνθήκες επιλυσιμότητας	286
9.2. Τεσσάρων-μορφών αλληλεπιδράσεις σε αιωρούμενα καλώδια	288
9.2.1. Πρώτης-τάξης λύση	289
9.2.2. Δεύτερης-τάξης λύση	290
9.2.3. Συνθήκες επιλυσιμότητας	300
10. Βιβλιογραφία.....	304
11. Λεξικό Βασικών Όρων.....	307

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Προεισαγωγικά σχόλια

Πολλά προβλήματα ταλαντώσεων στη μηχανική είναι μη-γραμμικά στη φύση και η συνήθης γραμμική ανάλυση πιθανότατα να αποδειχθεί ανεπαρκής για πολλές τέτοιες εφαρμογές. Μια κύρια διαφορά στη μελέτη των μη-γραμμικών συστημάτων είναι ότι οι γενικές λύσεις δεν μπορούν να ληφθούν με γραμμική επαλληλία, όπως στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων. Επιπλέον, η μη-γραμμικότητα προκαλεί αρκετά νέα φαινόμενα, τα οποία δεν συμβαίνουν στα γραμμικά συστήματα. Για να μελετήσει κανείς τα μη-γραμμικά συστήματα, θα πρέπει να μάθει νέες μαθηματικές τεχνικές, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί σε αρκετούς κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών, της φυσικής και της μηχανικής. Κατά τα προηγούμενα χρόνια, ένας αριθμός ισχυρών υπολογιστικών πακέτων λογισμικού αναπτύχθηκαν, τα οποία επιτρέπουν σε κάποιον να προβεί σε περίπλοκους συμβολικούς υπολογισμούς. Ένα από τα πιο γνωστά είναι το *Mathematica*, το οποίο έχει σχεδιαστεί από την Wolfram Research, Inc. Στην παρούσα Εργασία, γίνεται χρήση των συμβολικών τεχνικών προγραμματισμού για να εφαρμοστούν διάφορες *μέθοδοι διαταραχών* για τη μελέτη της δυναμικής των ασθενώς μη-γραμμικών συστημάτων. Αντί να απαιτούνται κοπιώδεις και χρονοβόροι αλγεβρικοί υπολογισμοί για την εξεύρεση λύσεων, μέσω του *Mathematica* παρέχεται η δυνατότητα εστίασης της προσοχής στην κατανόηση των τεχνικών και του φυσικού προβλήματος, και ως εκ τούτου δημιουργικής σκέψης.

Οι συμβολικοί αλγόριθμοι είναι ισχυρά εργαλεία. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πραγματοποιήσουν αναλύσεις είτε με διαδραστικό είτε με αυτόματο τρόπο. Μαθαίνοντας το *Mathematica* στη διαδικασία της μελέτης των μεθόδων διαταραχής μπορεί να αυξηθούν οι έννοιες των προγραμματικών τεχνικών του *Mathematica* όπως και των διαφόρων τεχνικών διαταραχής.

Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφεται πώς διάφορες τεχνικές διαταραχής, όπως η τεχνική Lindstedt-Poincare, η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων, και η μέθοδος της μεσοστάθμισης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ληφθούν ομοιόμορφα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των λύσεων της χωρίς-απόσβεση και μη-εξαναγκασμένης εξίσωσης Duffing. Στο Κεφάλαιο 3, εφαρμόζεται η τεχνική Lindstedt-Poincare, η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων, η μέθοδος της μεσοστάθμισης, η γενικευμένη μέθοδος της μεσοστάθμισης, η τεχνική των Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky και η μέθοδος των κανονικών μορφών για να ληφθούν ομοιόμορφα αναπτύγματα των λύσεων ενός μονοβάθμιου και μη-εξαναγκασμένου ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες.

Στο Κεφάλαιο 4, γίνεται χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων, της γενικευμένης μεθόδου της μεσοστάθμισης, και της μεθόδου των κανονικών μορφών για να λάβουμε ομοιόμορφα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των λύσεων ενός εξαναγκασμένου μονοβάθμιου ταλαντωτή με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες. Στο Κεφάλαιο 5, εφαρμόζεται η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων, η μέθοδος των κανονικών μορφών και η γενικευμένη μέθοδος της μεσοστάθμισης για τη μελέτη υψηλής τάξης προσεγγίσεων για συστήματα με εσωτερικούς συντονισμούς. Στο Κεφάλαιο 6, εφαρμόζεται η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων για να ληφθούν ομοιόμορφα αναπτύγματα των λύσεων των γραμμικά συζευγμένων ή μη-συζευγμένων ταλαντωτών υπό εξωτερική ή παραμετρική διέγερση.

Στο Κεφάλαιο 7, εστιάζεται η προσοχή στα συνεχή συστήματα με κυβικές μη-γραμμικότητες. Στην Παράγραφο 7.1, σχολιάζονται οι έννοιες των συνθηκών γειννίας και επιλυσιμότητας. Κατόπιν,

χρησιμοποιείται η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων για να παραχθούν ομοιόμορφα έγκυρα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των λύσεων των μονόπακτων δοκών στην Παράγραφο 7.2 και των προβόλων στην Παράγραφο 7.3. Στο Κεφάλαιο 8, γίνεται χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων για να επιλυθούν απευθείας τρία συνεχή συστήματα με τετραγωνικές και κυβικές μη γραμμικότητες. Επιλύονται προβλήματα λυγισμού δοκού στην Παράγραφο 8.1, κυκλικών κυλινδρικών κελυφών στην Παράγραφο 8.2 και σχεδόν τετραγωνικών πλακών στην Παράγραφο 8.3.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 9, δεικνύεται πώς κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να κατασκευάσει υψηλής τάξης προσεγγίσεις των λύσεων των συνεχών συστημάτων που έχουν 2:1 εσωτερικούς συντονισμούς. Σχολιάζονται αλληλεπιδράσεις δύο μορφών σε λυγισμένες δοκούς και 4 μορφών σε ανηρημένα καλώδια (§ 9.1 και 9.2, αντίστοιχα).

1.2 Συμβολικός Υπολογισμός

Η γλώσσα προγραμματισμού Mathematica επιτρέπει όχι μόνο τους διαδραστικούς χειρισμούς ενός ευρέος πλήθους αντικειμένων, αλλά επίσης ενθαρρύνει τον αυτοματισμό στους πολύπλοκους υπολογισμούς. Το Mathematica στην πραγματικότητα δουλεύει με τη χρήση συστημάτων επαναγραφής κανόνων, και ο χρήστης μπορεί ελεύθερα να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί το δικό του σύστημα κανόνων. Αυτό το διαφοροποιεί από τις παραδοσιακές γλώσσες προγραμματισμού, οι οποίες κανονικά δεν έχουν τέτοια χαρακτηριστικά. Στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας εφαρμόζονται τεχνικές προγραμματισμού βασισμένες τόσο σε κανόνες όσο και σε συναρτήσεις, που καλύπτονται συνοπτικά οι μεν πρώτες στις §1.2.1 – 1.2.5, οι δε δεύτερες στις §1.2.6 – 1.2.8.

Σε όλο το κείμενο που ακολουθεί, φαίνονται με έντονο μωβ συναρτήσεις που ορίζονται από το χρήστη ενώ με έντονο μαύρο συναρτήσεις που περιέχονται στο *Mathematica*.

1.2.1 Καθολικοί Κανόνες

Οι καθολικοί κανόνες εφαρμόζονται όποτε το κατάλληλο αριστερό σκέλος απαντάται ή ταιριάζει. Το πλεονέκτημα της χρήσης καθολικών κανόνων είναι ότι δεν χρειάζεται κανείς να εφαρμόζει σαφώς μια πράξη για να βγει το αποτέλεσμα. Όμως, είναι σχεδόν αδύνατον να εμποδίσουμε τέτοιες οικουμενικές πράξεις απ' το να εφαρμοστούν σε μια ορισμένη έκφραση. Υπάρχουν 2 τύποι καθορισμένων από το χρήστη καθολικών κανόνων επαναγραφής: όσοι χρησιμοποιούν το = και όσοι χρησιμοποιούν το :=. Η διάκριση ανάμεσά τους βρίσκεται στο πότε το δεξί σκέλος υπολογίζεται. Επιπλέον, κάθε μια από τις πράξεις έχει 2 μορφές, ανάλογα με το πού αποθηκεύεται ο κανόνας, παράγοντας 4 κανόνες που συμβολίζονται με =, ^=, := και ^=:=.

1.2.1.1 Κανόνες με =

Μπορούμε να σκεφτούμε το =, σαν μια οικουμενική εντολή. Η χαρακτηριστική αρχή της χρησιμοποίησης του =, είναι ότι το στα δεξιά του μέλος υπολογίζεται αμέσως μόλις η ανάθεση δοθεί, και όλες οι επακόλουθες ταιριαζόμενες αριστερά του = πλευρές αντικαθίστανται από την υπολογισμένη στα δεξιά πλευρά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εντολή : a=2. Το αποτέλεσμα κρύβεται με το να γράψουμε ; δεξιά της άνω τελείας. Από τώρα και στο εξής, όποτε το απαντάται σε οποιαδήποτε έκφραση, το Mathematica θα το αντικαταστήσει με το ισοδύναμο του 2.

```
expr1 = a2 + 3 - a + Tan[a]
```

```
5 - Tan[2]
```

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το expr1 για μια άλλη τιμή, a=3


```
a = 3;
expr1
5 - Tan[2]
```

Η νέα τιμή του α δεν αναγνωρίζεται στην expr1.

Ας προσπαθήσουμε να εκκαθαρίσουμε τον ορισμό του χρησιμοποιώντας το **Clear** ή **a=**.

Κατόπιν, ας υπολογίσουμε την expr1.

```
expr1
5 - Tan[2]
```

Ξανά, η expr1 δεν μεταβάλλεται αντιστοίχως.

Για να μπορούμε να υπολογίζουμε την expr1 για διαφορετικές τιμές του α, πρέπει είτε να ορίσουμε την expr1 πριν τον προσδιορισμό του α είτε να χρησιμοποιήσουμε το “:=” αντί για το “=”. Η ακριβής έννοια του := εξηγείται στην επόμενη παράγραφο. Εδώ, διευκρινίζουμε την προηγούμενη επιλογή.

```
Clear[a]; expr1 = a^2 + 3 - a + Tan[a]
```

```
3 - a - a^2 - Tan[a]
```

```
a = 2; expr1
```

```
5 - Tan[2]
```

```
a = 3; expr1
```

```
9 - Tan[3]
```

Στις παραδοσιακές γλώσσες προγραμματισμού, το αριστερό σκέλος της ανατεθείσας εντολής εκλαμβάνεται ως σύμβολο. Στην υπολογιστική άλγεβρα, το αριστερό σκέλος μπορεί να είναι αυθαίρετα πολύπλοκο. Για παράδειγμα,

```
look[here + 9] = Expand[(1 + x)^2 + y]
```

```
1 - 2 x - x^2 - y
```

Σημειώτεον ότι το εξαγόμενο μιας έκφρασης = είναι η υπολογισθείσα μορφή της δεξιάς πλευράς. Το *Mathematica* εκλαμβάνει το αριστερό σκέλος σαν υπόδειγμα. Όποτε το *Mathematica* βρίσκει κάτι που ταιριάζει με αυτό το υπόδειγμα, αντικαθιστά αυτό το κάτι με το υπολογισθέν δεξιό σκέλος.

```
look[there + look[here + 5 + 2^2]]
```

```
look[1 - there + 2 x - x^2 - y]
```

Σε αυτό τον υπολογισμό, το υπόδειγμα `look[here + 5 + 2^2]` απλοποιείται σε `look[here - 9]`, το οποίο αντικαθίσταται από το `1 + 2x + x^2 + y`. Η παραγόμενη έκφραση δεν ταιριάζει με κανένα υπόδειγμα που εμπλέκει το `look` και άρα αφήνεται σε μη υπολογισμένη μορφή. Αυτός ο κανόνας αποθηκεύεται με το `look`.

```
?look
```

```
Global`look
```

```
look[9 - here] = 1 - 2 x - x^2 + y
```

Ξανά, βλέπουμε την υπολογισμένη μορφή στη δεξιά πλευρά.

Υπάρχουν κάποια προβλήματα σχετιζόμενα με τις αριστερές πλευρές οι οποίες δεν είναι σύμβολα. Για παράδειγμα, ας υποθεθεί ότι προσπαθούμε να παράξουμε τον ακόλουθο κανόνα :

```
x + y = z
```

```
Beauvilliers : Tag Plus in x - y is Expected
```

z

Λαμβάνουμε ένα μήνυμα σφάλματος που λέει ότι το **Plus** προστατεύεται, το οποίο σημαίνει ότι νέοι κανόνες δεν μπορούν να προστεθούν για το **Plus**. Κάθε φορά που το *Mathematica* "αναγνωρίζει" το **Plus**, αναζητά ανάμεσα στους κανόνες για το **Plus**, για να δει αν κάτι εφαρμόζεται. Αν προσθέσουμε έναν νέο κανόνα για το **Plus**, τότε αυτός ο κανόνας θα πρέπει να εξεταστεί σε κάθε επακόλουθη πρόσθεση. Όταν ένας κανόνας της μορφής $x + y = z$ ζίδεται, το *Mathematica* τον ερμηνεύει σαν έναν κανόνα της μορφής **Plus**[x,y] = z. Οι κανόνες πρέπει να αποθηκευτούν κάπου και ο αρχικός κανόνας (default rule) είναι αυτός που προηγείται στο αριστερό σκέλος. Ένας τρόπος προσθήκης ενός νέου κανόνα για το **Plus** είναι να απασφαλιστεί το **Plus**, να ορισθεί ο κανόνας, και μετά να επανασφαλιστεί.

```
Unprotect [Plus] ;
```

```
x + y = z ;
```

```
Protect [Plus] ;
```

Τώρα, όποτε το *Mathematica* βλέπει $x + y$, το ξαναγράφει σαν z.

```
x + s + y + t
```

```
s - t - z
```

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το **UpValues** για να συσχετίσουμε τον κανόνα με το ανασφάλιστο επιχείρημα της αριστερής πλευράς. (Ορισμοί που επικολλούν μια τιμή στην κορυφή-κεφαλή της αριστερής πλευράς αποκαλούνται **ΚάτωΤιμές (DownValues)** της κεφαλής). Για παράδειγμα,

```
s + t ^= u
```

```
u
```

Σημειώστε το σύμβολο \wedge πριν το σημείο =. Αυτός ο κανόνας συσχετίζεται με το σύμβολο s^h το t .

```
? s
```

```
Global` s
```

```
s : s + t = u
```

```
t + s + t
```

```
t + u
```

Ένα δοθέν σύμβολο μπορεί να έχει τόσο πάνω (up) όσο και κάτω (down) τιμές. Ας δώσουμε στο s μια κάτω τιμή επιπλέον της άνω τιμής που ήδη έχει.

```
s[x_] := Exp[I a x] ;
```

Τότε, κοιτώντας το s , βλέπουμε και τα δύο είδη τιμών :

```
? s
```

```
Global` s
```

```
s : s + t = u
```

```
s[x_] := Exp[I a x]
```

Τελικά, μπορούμε να προσεγγίσουμε τις άνω και κάτω τιμές ατομικά.

```
{UpValues [s], DownValues [s]}
```

```
{{HoldPattern [s - t] => u}, {HoldPattern [s[x_]] => Exp[I a x]}}
```

Τώρα ας προσπαθήσουμε να καθορίσουμε την απλήμητονική συνάρτηση χρησιμοποιώντας το = ως κανόνα σύμφωνα με :

```
m[x] = Sin[x];
```

Δουλεύει σωστά για το σύμβολο καλλά όχι για κάτι άλλο.

```
{m[x], m[y], m[1]}
```

```
{Sin[x], m[y], m[1]}
```

Εκεί είναι που υπεισέρχεται το ειδικό σύμβολο `_`. Η μορφή `x_` σημαίνει ένα υπόδειγμα με το όνομα `x`. Μπορούμε να δείξουμε την εσωτερική αναπαράσταση οποιασδήποτε έκφρασης, όπως η `x_`, είτε χρησιμοποιώντας είτε

```
FullForm[x_]
```

```
Pattern[x, Blank[]]
```

είτε

```
x_ // FullForm
```

```
Pattern[x, Blank[]]
```

Ένα `_` σε ένα υπόδειγμα ταιριάζει σε οτιδήποτε, οπότε είναι μία ψευδής μεταβλητή ή ένα “κενό σύμβολο”. Αν εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά του κανόνα “=” με ένα όνομα, π.χ. `x`, τότε η αριστερή πλευρά ξαναγράφεται σαν τη δεξιά πλευρά, με το `x` να αντικαθίσταται από την επιθυμητή μεταβλητή. Ας το χρησιμοποιήσουμε αυτό για να επανακαθορίσουμε το `m`, δηλαδή,

```
m[x_] = Sin[x];
```

Τώρα το `m` λειτουργεί για κάθε επιχείρημα (έκφραση, `argument`) :

```
{m[x], m[y], m[1], m[s - t]}
```

```
{Sin[x], Sin[y], Sin[1], Sin[s - t]}
```

Έτσι, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τους κανόνες = για να ορίσει συναρτήσεις.

1.2.1.2. Κανόνες :=

Οι κανόνες που χρησιμοποιούν το `:=` δεν εκτιμούν τη δεξιά πλευρά αμέσως αλλά αντίθετα την αφήνουν ανεκτίμητη μέχρις ότου η συνάρτηση να χρησιμοποιηθεί πραγματικά. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν με απλές αριστερές πλευρές ή με αριστερές πλευρές που περιέχουν υποδείγματα. Σαν παράδειγμα, ας ορίσουμε και συγκρίνουμε δύο κανόνες που χρησιμοποιούν = ή :=.

```
Clear[x];
```

```
lhs1 = Expand[(x + 1)^2];
```

```
lhs2 := Expand[(x + 1)^2];
```

Αν αυτοί υπολογιστούν, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

```
{lhs1, lhs2}
```

```
{1 - 2 x - x^2, 1 - 2 x - x^2}
```

Αν τώρα δώσουμε μια τιμή στο `x`, τότε τα `lhs1` και `lhs2` θα χρησιμοποιήσουν αυτή την τιμή κατά διαφορετικούς τρόπους.

```
x = p + q;
```

```
{lhs1, lhs2}
```

```
{1 - 2 (p + q) - (p + q)^2, 1 - 2 p - p^2 - 2 q - 2 p q - q^2}
```

δεξιάς πλευράς αντικαθιστώνται από τα αληθινά ορίσματα και τότε η δεξιά πλευρά υπολογίζεται. Έτσι, κάθε φορά που η αριστερή πλευρά ενός τέτοιου κανόνα ταιριάζει κάτι, αυτό αντικαθίσταται από μια νέα εκτίμηση της δεξιάς πλευράς. Για να φανεί η διαφορά, ξαναπροβάλλουμε τους δύο κανόνες :

```
f[k_] = Expand[k^2]
```

k^2

```
g[k_] := Expand[k^2]
```

Σημειώνουμε ότι η δεξιά πλευρά του κανόνα για το f εκτιμάται αμέσως μόλις οριστεί, ενώ η δεξιά πλευρά του g μένει ανεκτίμητη. Τώρα, ας δοκιμάσουμε αυτούς τους δύο ορισμούς πάνω στην ίδια τιμή.

```
{f[p+q], g[p+q]}
```

```
{(p+q)^2, p^2+2pq+q^2}
```

Επειδή η δεξιά πλευρά του κανόνα για το f εκτιμήθηκε αμέσως όταν ορίστηκε, δεν υπάρχει τίποτα να αναπτυχθεί, και το k αντικαθίσταται από το $p+q$ χωρίς να αναπτυχθεί το αποτέλεσμα. Αντίθετα, η δεξιά πλευρά του κανόνα για το g δεν αναπτύχθηκε όταν ορίστηκε και διατηρεί ολόκληρη την έκφραση `Expand[k^2]`. Όταν οι δύο συναρτήσεις χρησιμοποιούνται επακολούθως, η $f[p+q]$ αντικαθίσταται από το $(p+q)^2$, ενώ η $g[p+q]$ αντικαθίσταται από το `Expand[(p+q)^2]`, το οποίο αποτιμάται σε $p^2+2pq+q^2$. Η εσωτερική αναπαράσταση ενός τέτοιου ορισμού έχει την ακόλουθη μορφή :

```
FullForm[g[k_] := p]
```

```
Null
```

Για να δούμε την αληθινή κεφαλή μιας έκφρασης πριν αυτή εκτιμηθεί, εγκλείουμε την έκφραση στο `Hold` και μετά ζητούμε την ΠλήρηΜορφή (`FullForm`) της.

```
FullForm[Hold[g[k_] := p]]
```

```
Hold[SetDelayed[g[Pattern[k, Blank[]]], p]]
```

Έτσι, το σύμβολο `:=` είναι η ενθεματική μορφή του `SetDelayed`. Αυτό διακρίνει δραματικά την διαφορά μεταξύ της εκτίμησης όταν ο κανόνας δίδεται από την εκτίμηση όταν ο κανόνας χρησιμοποιείται.

Όταν η κεφαλή της αριστερής πλευράς προστατεύεται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε `ΑνωΤιμές` (`UpValues`) για να συσχετίσουμε το απροστάτευτο όρισμα της αριστερής πλευράς. Για παράδειγμα, όταν προσπαθούμε να παραγωγίσουμε ένα καθορισμένο από το χρήστη ορισμένο ολοκλήρωμα με σταθερά όρια, λαμβάνουμε :

```
D[int[f[x], {x, 0, 1}], x]
```

```
int[f'[x], {x, 0, 1}]
```

```
int(0, {1, 0, 0})[f[x], {x, 0, 1}] + f'[x] int(1, {0, 0, 0})[f[x], {x, 0, 1}]
```

το οποίο δεν είναι αυτό που προσδοκούσαμε. Μπορούμε είτε να απασφαλίσουμε το `D` και να προσθέσουμε έναν κανόνα ή να χρησιμοποιήσουμε `^:=` για να προσδιορίσουμε τον ορισμό με το `int`, δηλαδή :

```
D[int[x_, a_], y_] ^= int[D[x, y], a]
```

Τώρα ελέγχουμε να δούμε αν το *Mathematica* μας δίνει την απάντηση που θέλουμε :

```
D[int[f[x], {x, 0, 1}], x]
```

```
int[f'[x], {x, 0, 1}]
```

Σαν δεύτερο παράδειγμα, ορίζουμε το $\text{Cos}[n \pi] = (-1)^n$ και το $\text{Sin}[n \pi] = 0$ για τον ακέραιο n :

```
Unprotect[Cos, Sin];
```

```
Cos[n_ π] := (-1)^n /; IntegerQ[n]
```

```
Sin[n_ π] := 0 /; IntegerQ[n]
```

```
Protect[Cos, Sin];
```

Αν θεωρήσουμε το m ότι είναι ακέραιος (εδώ χρησιμοποιείται το **UpValues**),

```
IntegerQ[m] ^= True;
```

τότε

```
{Cos[m π], Sin[m π]}
```

```
{{(-1)^m, 0}
```

1.2.2 Τοπικοί Κανόνες

Οι τοπικοί κανόνες επαναγραφής ($\text{lhs} \rightarrow \text{rhs}$ ή $\text{lhs} := \text{rhs}$) είναι χρήσιμοι για να γίνονται αντικαταστάσεις χωρίς να γίνονται οι ορισμοί μόνιμοι. Αυτοί οι κανόνες εφαρμόζονται σε μια έκφραση χρησιμοποιώντας την λειτουργία `/.` (σημαίνει **ΑντικατέστησέΌλα**) ή `//.` (σημαίνει **Επαναλαμβανόμενη Αντικατάσταση** στο *Mathematica*).

1.2.2.1 Κανόνες \rightarrow

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το **Solve** για να λάβουμε τις λύσεις κάποιων αλγεβρικών εξισώσεων.

Για παράδειγμα,

```
eq1 = u^2 - 3 u + 2 == 0;
```

```
sol1 = Solve[eq1, u]
```

```
{{u -> 1}, {u -> 2}}
```

Μπορούμε να ελέγξουμε το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας το `sol1` με το `eq1` και λαμβάνουμε :

```
eq1 /. sol1
```

```
{True, True}
```

Το εξαγόμενο (output) του **Solve** είναι μια λίστα από λίστες τοπικών κανόνων. Έτσι, το `u -> 1` είναι ένας τοπικός κανόνας, ο οποίος είναι το ανάλογο του οικουμενικού κανόνα $u = 1$. Ο κανόνας εφαρμόζεται σε μια έκφραση μέσω της χρήσης του `/.`, άρα η έκφραση `eq1 /. sol1` σημαίνει "χρησιμοποίησε τους κανόνες επαναγραφής `u -> 1` και `u -> 2` στο `eq1`." Το αποτέλεσμα αυτού είναι `{0 == 0, 0 == 0}`, το οποίο κατόπιν εκτιμάται ως `{Αληθές, Αληθές}`. Η συνήθης μορφή της δεξιάς πλευράς του `/.` είναι μια λίστα από τοπικούς κανόνες για κάποια από τα σύμβολα που εμφανίζονται στην αριστερή πλευρά.

```
u v w /. {u -> 3, w -> 5}
```

```
15 v
```

Στη δεξιά πλευρά υπάρχει μια λίστα από λίστες τοπικών κανόνων, όταν το αποτέλεσμα είναι μια λίστα από τροποποιημένες εκφράσεις, μία για κάθε αντικατάσταση στη λίστα.

```
u v w /. {{u -> 3, w -> 5}, {v -> 2, w -> 3}}
```

```
{15 v, 6 u}
```

Οι κανόνες τοπικής αντικατάστασης επίσης εφαρμόζονται σε εκφράσεις που έχουν ένα **Hold** πιασμένο πάνω τους. Για παράδειγμα, χωρίς ένα **Hold**, η $\partial_x \text{Cos}[x]$ αμέσως εκτιμάται σε $-\text{Sin}[x]$.

$\partial_x \text{Cos}[x]$

$-\text{Sin}[x]$

Εντούτοις, ο κανόνας επαναγραφής μπαίνει κάτω από το **Hold** για να κάνει την αντικατάσταση.

`Hold[$\partial_x \text{Cos}[x]$] /. Cos -> Sin`

`Hold[$\partial_x \text{Sin}[x]$]`

Οι τοπικοί κανόνες με “ \rightarrow ” μοιράζονται με τους κανόνες “ $=$ ” την ιδιότητα ότι οι δεξιές πλευρές τους εκτιμώνται τη στιγμή που καθορίζονται.

1.2.2.2 Κανόνες \rightarrow

Το τοπικό ανάλογο ενός κανόνα “ $=$ ” είναι ο κανόνας “ \rightarrow ”, δηλαδή, ένας τοπικός κανόνας που εκτιμά (υπολογίζει) τη δεξιά του πλευρά μόνο όταν αυτή χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα,

`expr1 = Exp[I ($\omega_2 - \omega_1$) T0] ;`

`Clear[a]`

`expr1 /. Exp[a_] -> Exp[Expand[a]]`

`$E^{IT_0(-\omega_1+\omega_2)}$`

`{expr1 /. Exp[a_] :> Exp[Expand[a]], expr1 // ExpandAll}`

`{ $E^{-IT_0\omega_1+IT_0\omega_2}$, $E^{-IT_0\omega_1+IT_0\omega_2}$ }`

όπου ο άμεσος κανόνας (lhs \rightarrow rhs) αποτυγχάνει να κάνει την ανάπτυξη. Οι αριστερές πλευρές των τοπικών κανόνων εμπλέκουν υποδείγματα μάλλον παρά απλώς σύμβολα. Η διαφορά είναι ότι ο άμεσος κανόνας για το `Exp[a_]` το αντικαθιστά μέσω της εκτίμησης του `Exp[Expand[a]]`, το οποίο ισούται με `Exp[a]`. Έτσι, όταν αυτό χρησιμοποιείται με το `a` ίσο με $I(\omega_2 - \omega_1)T_0$, παίρνουμε το αποτέλεσμα $E^{IT_0(-\omega_1+\omega_2)}$. Αντίθετα, ο κανόνας αναβολής (lhs.>rhs) για την `Exp[a_]` το αντικαθιστά από το μη εκτιμημένο `Exp[Expand[a]]`, το οποίο όταν χρησιμοποιείται με `a` ίσο με $I(\omega_2 - \omega_1)T_0$, δίνει $E^{-IT_0\omega_1+IT_0\omega_2}$. Εναλλακτικά, για αυτό το απλό παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το `ExpandAll` για να λάβουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Μπορούμε να ελέγξουμε τώρα πώς αυτές οι εκφράσεις αναπαριστώνται εσωτερικά.

`FullForm[Hold[p /. q -> r]]`

`Hold[ReplaceAll[p, Rule[q, r]]]`

`FullForm[Hold[p /. q :> r]]`

`Hold[ReplaceAll[p, RuleDelayed[q, r]]]`

Έτσι, το `/.` είναι η ενθεματική μορφή του `ReplaceAll`, το τόξο \rightarrow είναι η ενθεματική μορφή του `Rule`, και το τόξο \rightarrow είναι η ενθεματική μορφή του `RuleDelayed`, αντιστοιχώντας στο `Set` και στο `SetDelayed` για τα `=` και `:=`.

1.2.2.3 `/.` και `//`.

Υπάρχει άλλη μια μορφή του `/.` που δίνεται από το `//`, το οποίο εφαρμόζει έναν τοπικό κανόνα επαναληπτικά μέχρι η έκφραση να μην αλλάζει πλέον. Εσωτερικά, το `//` αναπαρίσταται από το

`p //. q -> r // FullForm // HoldForm`

`ReplaceRepeated[p, Rule[q, r]]`

Ένα παράδειγμα της διαφοράς μεταξύ /. και //. ακολουθεί. Αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιεί μια λίστα από κανόνες παρά απλώς έναν μόνο κανόνα. Όταν μια λίστα από κανόνες εφαρμόζεται σε μία μόνο έκφραση, τότε ο κανόνας για κάθε σύμβολο δοκιμάζεται από τα αριστερά έως ότου να βρεθεί ένα ταίριασμα. Στο ακόλουθο παράδειγμα, η δεξιά πλευρά της έκφρασης /. αποτελείται από μια λίστα από δύο κανόνες για το ίδιο σύμβολο, fac. Αυτή η λίστα αναζητείται από τα αριστερά μέχρι ένα υπόδειγμα να βρεθεί, το οποίο να ταιριάζει με την αριστερή πλευρά της έκφρασης /. . Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιώντας /. , εφόσον βρεθεί ένα ταίριασμα, η εκτίμηση τερματίζεται. Στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιώντας //. , οι κανόνες δοκιμάζονται επαναληπτικά από τα αριστερά στο εξαγόμενο (output) της προηγούμενης εκτίμησης (υπολογισμού) μέχρι να μη βρίσκονται ταίριασματα.

```
fac[5] /. {fac[1] -> 1, fac[i_] -> i fac[i - 1]}
```

```
5 fac[4]
```

```
fac[5] //. {fac[1] -> 1, fac[i_] -> i fac[i - 1]}
```

```
120
```

Στην πρώτη περίπτωση, η αριστερή πλευρά του κανόνα $\text{fac}[1] \rightarrow 1$ δεν ταιριάζει με τίποτα στο $\text{fac}[5]$, αλλά το $\text{fac}[i] \rightarrow i \text{ fac}[i-1]$ ταιριάζει με το i ίσο με 5, άρα το εξαγόμενο είναι $5\text{fac}[4]$. Στη δεύτερη περίπτωση, η αριστερή πλευρά του κανόνα $\text{fac}[i] \rightarrow i \text{ fac}[i-1]$ συνεχίζει να ταιριάζει με ένα μέρος της υπάρχουσας έκφρασης μέχρι το $120\text{fac}[1]$ να ληφθεί. Τότε η αριστερή πλευρά του κανόνα $\text{fac}[1] \rightarrow 1$ ταιριάζει, οδηγώντας στο $120*1$, το οποίο απλοποιείται στο 120 όπου κανένας κανόνας πλέον δεν ταιριάζει, άρα το εξαγόμενο είναι 120.

Αν τέτοιοι κανόνες δίνονται οικουμενικά (καθολικά), τότε η σειρά με την οποία δίνονται δεν έχει σημασία, εφόσον το *Mathematica* θα τοποθετήσει τον πιο ειδικό κανόνα, $\text{fac}[1] \rightarrow 1$ πρώτο. Όμως, σε μια λίστα τοπικών κανόνων, εφαρμοζόμενων με το //. , είμαστε απόλυτα υπεύθυνοι για την σειρά. Έτσι, το ακόλουθο δίνει τη λάθος απάντηση :

```
fac[5] //. {fac[i_] -> i fac[i - 1], fac[1] -> 1}
```

```
0
```

Αν αρκετοί τοπικοί κανόνες δίνονται για διαφορετικά σύμβολα, τότε αυτοί οι κανόνες εφαρμόζονται ταυτοχρόνως. Λόγου χάρη,

```
{u, v, w} /. {u -> v, v -> w, w -> s}
```

```
{v, w, s}
```

Αν οι αντικαταστάσεις εκτελεστούν ακολουθητικά, τότε τα αποτελέσματα είναι αρκετά διαφορετικά.

```
{u, v, w} /. {u -> v} /. {v -> w} /. {w -> s}
```

```
{s, s, s}
```

Ιδιαίτερα, αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές μπορούν να εναλλαχθούν χωρίς να εισαχθεί μία ενδιάμεση προσωρινή μεταβλητή.

```
{u, v} /. {u -> v, v -> u}
```

```
{v, u}
```

1.2.3 Ταίριασμα Υποδειγμάτων

Το *Mathematica* είναι μια γλώσσα βασισμένη στο ταίριασμα υποδειγμάτων (pattern matching). Τα υποδείγματα αναφέρονται στη δομή των εκφράσεων. Το σύμβολο _ από μόνο του, χωρίς άλλο σύμβολο στα αριστερά του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει ένα υπόδειγμα. (Θυμηθείτε

ότι η **FullForm** του `_` είναι το **Blank[]**). Για παράδειγμα, η έκφραση `_^_` ταιριάζει οτιδήποτε της μορφής x^y , όπου x και y είναι οποιεσδήποτε (κενές) εκφράσεις.

```
Clear[a, x]
```

```
g1[_ , _^_] := u;  
{g1[a, a^a], g1[a, b^c]}  
  
{u, u}
```

Ένα υπόδειγμα της μορφής `x_` ταιριάζεται από οποιαδήποτε έκφραση, η οποία τότε χρησιμοποιείται για υπολογισμό της δεξιάς πλευράς.

```
g2[x_ ^ y_ , z_] := u[x, y, v[z]];  
{g2[a^a, a], g2[a^b, c]}  
  
{u[a, a, v[a]], u[a, b, v[c]]}
```

```
g3[x_ ^ y_ , x_] := u[y, v[x]];  
{g3[a^a, a], g3[a^b, c], g3[a^b, a]}  
  
{u[a, v[a]], g3[a^b, c], u[b, v[a]]}
```

Ένα υπόδειγμα της μορφής `x_h` ζευγαρώνεται από οποιαδήποτε έκφραση της οποίας η κεφαλή είναι h .

```
g4[x_ ^ y_Integer , z_] := u[x, y, v[z]];  
{g4[a^a, a], g4[a^3, arg2]}  
  
{g4[a^a, a], u[a, 3, v[arg2]]}
```

Αν δώσουμε έναν κανόνα για μια έκφραση που εμπλέκει δύο χωριστά ορίσματα με υπογραμμίσεις (underscores), τότε κατασκευάζουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Μια τέτοια συνάρτηση δουλεύει μόνο αν τις δίδονται ακριβώς δύο ορίσματα.

```
g5[x_ , y_] := x + y;  
{g5[a], g5[a, b], g5[a, b, c]}  
  
{g5[a], a + b, g5[a, b, c]}
```

Πέρα από τα σχήματα κανόνων (rule-schemes) που χρησιμοποιούν μία υπογράμμιση `_`, υπάρχουν σχήματα κανόνων που χρησιμοποιούν διπλές και τριπλές υπογραμμίσεις. Μία διπλή υπογράμμιση, `__`, ταιριάζεται από οποιονδήποτε αριθμό ορισμάτων, εξαιρώντας τα μηδενικά ορίσματα, χωρισμένα με κόμμα, ενώ μία τριπλή υπογράμμιση, `___`, ταιριάζεται από οποιονδήποτε αριθμό ορισμάτων, περιλαμβάνοντας τα μηδενικά ορίσματα. Η μορφή `x__` σημαίνει μια ακολουθία από ένα ή περισσότερα ορίσματα, τα ονομασθέντα x και `x__Head` σημαίνει 0 ή περισσότερα ορίσματα, ονομαζόμενα x , με την κεφαλή κάθε ορίσματος να είναι `Head`.

```
g6[x__] := Length[{x}];  
{g6[], g6[a], g6[a, b], g6[a, b, c]}  
  
{g6[], 1, 2, 3}  
  
g7[x___] := Length[{x}];  
{g7[], g7[a], g7[a, b], g7[a, b, c]}  
  
{0, 1, 2, 3}
```

Οι αρχικές (προεπιλεγμένες) τιμές (default values) και οι διπλές και τριπλές υπογραμμίσεις είναι σημαντικές τεχνικές, οι οποίες δίνουν έναν προαιρετικό αριθμό από ορίσματα στις συναρτήσεις δηλαδή, ένας μεταβλητός αριθμός από ορίσματα μπορεί να δοθεί σε τέτοιες συναρτήσεις.

Εναλλακτικά, υπάρχει ένας άλλος κανόνας στον οποίο ένα συγκεκριμένο όρισμα μπορεί να είναι προαιρετικό.

```
g8[x_^y_, z_] := u[x, y, z];
{g8[a^b, c], g8[a, c]}
{u[a, b, c], g8[a, c]}
```

Επειδή $a = a^1$, κανείς μπορεί να σκεφτεί ότι το $g8[a, c]$ θα πρέπει να ταιριάζει με το υπόδειγμα $g8[a^1, c]$, το οποίο θα σήμαινε ότι θα πρέπει να ξαναγραφεί σαν $u[a, 1, c]$, αλλά φυσικά το *Mathematica* δεν μπορεί να μαντέψει ότι αυτό είναι που σκοπεύουμε. Εντούτοις, υπάρχει μία πρόνοια να τυγχάνουν προσοχής τέτοιες αρχικές τιμές. Για να αναθέσει μία αρχική τιμή v σε ένα υπόδειγμα, κανείς μπορεί να γράψει $_.v$. Άρα, το αποτέλεσμα που θέλαμε να πετύχουμε δίνεται στη μορφή :

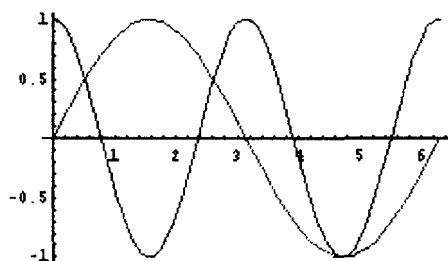
```
g9[x_^(y_:1), z_] := u[x, y, z];
{g9[a^b, c], g9[a, c]}
{u[a, b, c], u[a, 1, c]}
```

Σε αυτή την περίπτωση, η αρχική (αθέλητη) τιμή 1 για τον εκθέτη είναι η φυσική και προφανής επιλογή, και το *Mathematica* το γνωρίζει αυτό. Έχει τυπικές ενσωματωμένες αθέλητες τιμές για έναν αριθμό τέτοιων θέσεων. Η γραφή $_.$ λέει στο *Mathematica* να χρησιμοποιήσει την ενσωματωμένη αθέλητη τιμή. Προσέξτε την σχεδόν αόρατη τελεία μετά την υπογράμμιση. Έτσι, το αποτέλεσμα που θέλαμε στην αρχή δίνεται από μία ελάχιστη τροποποίηση της αυθεντικής μορφής.

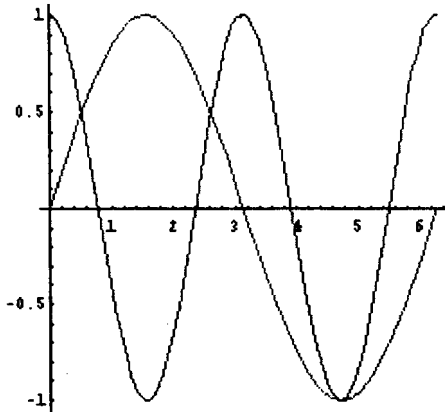
```
g10[x_^y_., z_] := u[x, y, z];
{g10[a^b, c], g10[a, c]}
{u[a, b, c], u[a, 1, c]}
```

Υπάρχει ένας ακόμα τρόπος που τα προαιρετικά ορίσματα υφίστανται στο *Mathematica*. Κάποιες συναρτήσεις, όπως η **Plot**, μπορούν να λάβουν ονομαστικά προαιρετικά ορίσματα όπως το $\text{AspectRatio} \rightarrow 1$. Με το να ενσωματώσουμε τέτοιες συναρτήσεις στους ορισμούς μας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και αυτά τα ονομαστικά προαιρετικά ορίσματα επίσης. Θεωρήστε ένα παράδειγμα του γραφήματος μιας συνάρτησης.

```
plotwithSin[func_, var_, opts___] :=
  Plot[{Sin[var], func[var]}, {var, 0, 2 Pi}, opts,
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]};
plotwithSin[Cos[2 #] &, x];
```



```
plotwithSin [Cos [2 #] &, x, AspectRatio -> 1];
```



Σε μια έκφραση της μορφής $g[x_n_Integer, z_]$, τα υποδείγματα ονομάζονται με τα σύμβολα x , n και z , αλλά δεν υπάρχει όνομα για ολόκληρο το πλεγματούχο υπόδειγμα $x_n_Integer$. Υπάρχει ένας τρόπος να δώσουμε ονόματα σε τέτοια πλεγματούχα υποδείγματα, έτσι ώστε αυτά να αναφέρονται απευθείας στη δεξιά πλευρά. Η σύνταξη αποτελείται από ένα όνομα που ακολουθείται από άνω και κάτω τελεία (:), που ακολουθείται από ένα πλεγματούχο υπόδειγμα.

```
g11[expr : x_ y_Real, z_] := z expr :
{g11[(a + b - 2)^0.5, 2], g11[(a + b - 2)^3, 2]}
{2 (-2 + a + b)^0.5, g11[(-2 + a + b)^3, 2]}
```

1.2.4 Χρησιμοποιώντας Υποδείγματα σε Κανόνες

Τα υποδείγματα παίζουν έναν σημαντικό ρόλο τόσο στους καθολικούς όσο και στους τοπικούς κανόνες.

1.2.1.4 Υποδείγματα σε Οικουμενικούς Κανόνες

Για παράδειγμα, είναι πολύ εύκολο να δώσουμε κανόνες επαναγραφής (rewrite rules) για την παραγωγή πολυωνύμων μιας μεταβλητής.

```
diff[x^n_, x_] := n x^(n-1);
diff[a_ + b_, x_] := diff[a, x] + diff[b, x];
```

Προσέξτε την προεπιλεγμένη τιμή για το n στον πρώτο κανόνα. Δοκιμάστε την σε κάποιες τυπικές συναρτήσεις.

```
{diff[y, y], diff[z^2.1, z], diff[u^2 + v^3, u]}
{1, 2.1 z^1.1, 2 u + diff[v^3, u]}
```

Αλλά προσέξτε ότι το `diff` δεν γνωρίζει τί να κάνει με μια σταθερά επί x , ή απλώς μια σταθερά γι' αυτό το λόγο, και δεν έχουμε εμφανή τρόπο ακόμα να το διδάξουμε τι πρέπει να γίνει.

```
{diff[3, x], diff[3 x, x]}
{diff[3, x], diff[3 x, x]}
```

Θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε το ακόλουθο: πρώτα, να δώσουμε έναν κανόνα για τα αποτελέσματα.

```
diff[a_ b_, x] := a diff[b, x] + b diff[a, x]
```

Χρησιμοποιώντας αυτό για το ax , δίνει

```
diff[a x, x]
a + x diff[a, x]
```

Το πρόγραμμα δεν γνωρίζει ότι το a υποτίθεται ότι είναι σταθερά, οπότε πρέπει να το δηλώσουμε αυτό σαφώς, με έναν τελευταίο κανόνα.

```
diff[a, x] = 0;
```

Τότε αυτό δίνει την “ορθή” απάντηση.

```
diff[a x, x]
```

```
a
```

Εντούτοις, αυτό δεν είναι πολύ ικανοποιητικό. Θα θέλαμε κάποιο γενικό τρόπο να πούμε ότι το a δεν είναι συνάρτηση του x . Η παράγραφος 1.2.5 παρακάτω θα συνεχίσει αυτή τη συζήτηση.

1.2.4.2 Υποδείγματα σε Τοπικούς Κανόνες

Θα συναντήσουμε αυτό τον τύπο εφαρμογής αρκετά συχνά στα ακόλουθα Κεφάλαια. Στο επόμενο παράδειγμα, δείχνουμε πώς να αλλάξουμε την εμφάνιση ενός μητρώου. Χρησιμοποιώντας το `Array` για να κάνουμε ένα μητρώο από στοιχεία με δείκτες, κατόπιν χρησιμοποιούμε έναν τοπικό κανόνα για να δείξουμε τους δείκτες σαν υποστίξεις.

```
Array[x, {3, 5}] /. x[i_] -> xi // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} & x_{3,5} \end{pmatrix}$$

όπου οι δύο συνεχόμενες υπογραμμίσεις δίπλα στο i στην αριστερή πλευρά του κανόνα αναπαριστούν ένα ή περισσότερα ορίσματα.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε ταίριασμα υποδειγμάτων (pattern matching) για να αντικαταστήσουμε τους συντελεστές διαφόρων όρων με όποιον τρόπο θέλουμε. Για παράδειγμα,

```
Clear[f]
```

```
eq1 = u''[t] + u[t] f'[x0] +  $\frac{1}{2}$  u[t]2 f''[x0] +  $\frac{1}{6}$  u[t]3 f(3)[x0] == 0;
```

```
eq2 = eq1 /. _ . u[t]^b_ . -> kb u[t]^b
```

```
k1 u[t] + k2 u[t]2 + k3 u[t]3 + u''[t] == 0
```

Μερικές φορές μπορεί να λάβουμε, σε μια ανάλυση διακλάδωσης, ένα σύνολο δεδομένων, το οποίο περιλαμβάνει ένα σύνολο από σημεία διακλάδωσης x_i και τις αντίστοιχες παραμέτρους ελέγχου `cpSearch` και `cpFix`, τέτοιες όπως $\{x_1, x_2, x_3, x_4, cpSearch\}$, `cpFix`. Αν θελήσουμε να αλλάξουμε αυτές τις δύο παραμέτρους και τότε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο format δεδομένων όπως η αρχική μας είσοδος (input) σε ένα πρόγραμμα, έχουμε τουλάχιστον δύο επιλογές. Πρώτα, να τεμαχίσουμε τη λίστα δεδομένων και μετά να τα συναθροίσουμε :

```
data1 = {{x1, x2, x3, x4, cp1}, cp2};
```

```
{Append[Drop[data1[[1]], -1], data1[[2]]], data1[[1, -1]]}
```

```
{{x1, x2, x3, x4, cp2}, cp1}
```

Δεύτερον, απλά εφαρμόζουμε έναν τοπικό κανόνα χρησιμοποιώντας παραμέτρους στη λίστα δεδομένων σαν ένα σύνολο :

```
data1 /. {{a_, b_}, c_} -> {{a, c}, b}
```

```
{{x1, x2, x3, x4, cp2}, cp1}
```

1.2.5 Περιορίζοντας το Ταίριασμα Υποδειγμάτων με Συναρτήσεις Κριτηρίου

Ως τώρα, όλοι οι κανόνες που έχουμε θεωρήσει ήταν “ελεύθεροι γενικού πλαισίου” κανόνες επαναγραφής. Όποτε το υπόδειγμα συνταιριάζεται, η επαναγραφή πραγματοποιείται. Μπορεί να υπάρχει ένας περιορισμός στην κεφαλή της έκφρασης ταιριάσματος που περιλαμβάνεται στο υπόδειγμα. Όμως, υπάρχουν επίσης εξαρτημένοι κανόνες αναγραφής, οι οποίοι εφαρμόζονται μόνο όταν κάποια προϋπόθεση ικανοποιείται. Πρώτα, πρέπει να συζητήσουμε τις συναρτήσεις κριτηρίου (predicate functions) (συναρτήσεις που επιστρέφουν την τιμή Αληθές ή Ψευδές) στο *Mathematica* επειδή όλες οι προϋποθέσεις πάντα θα εκφράζονται σε όρους αυτών. Όλες οι ενσωματωμένες συναρτήσεις κριτηρίου που ορίζονται για όλες τις εκφράσεις, τελειώνουν με το **Q**. Είναι εύκολο να τις καταδείξουμε όλες.

? * Q

ArgumentCountQ	LinkConnectedQ	OrderedQ
AtomQ	LinkReadyQ	PartitionsQ
DigitQ	ListQ	PolynomialQ
EllipticNomeQ	LowerCaseQ	PrimeQ
EvenQ	MachineNumberQ	SameQ
ExactNumberQ	MatchLocalNameQ	StringMatchQ
FreeQ	MatchQ	StringQ
HypergeometricPFQ	MatrixQ	SyntaxQ
InexactNumberQ	MemberQ	TrueQ
IntegerQ	NameQ	UnsameQ
IntervalMemberQ	NumberQ	UpperCaseQ
InverseEllipticNomeQ	NumericQ	ValueQ
LegendreQ	OddQ	VectorQ
LetterQ	OptionQ	

Ειδικά αιτητικές (requesting) πληροφορίες για τη συνάρτησή μας δίνουν το μήνυμα χρησιμότητας.

? OddQ

OddQ[expr] gives True if expr is an odd integer, and False otherwise.

Οι συναρτήσεις κριτηρίου χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο του ταιριάσματος υποδειγμάτων. Γενικά, εφαρμόζονται χρησιμοποιώντας /; , το οποίο είναι η ενθεματική μορφή του **Condition**. (condition σημαίνει “όρος”, “προϋπόθεση”, “συνθήκη”).

FullForm[Hold[x /; y]]

Hold[Condition[x, y]]

Εντούτοις, η θέση της συνάρτησης κριτηρίου σε μια έκφραση της επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί κατά διαφορετικούς τρόπους. Αν η συνάρτηση κριτηρίου τοποθετηθεί στο τέλος ενός ορισμού καθολικού κανόνα, θα περιορίσει την εφαρμογή του κανόνα. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις κριτηρίου για να επεκτείνουμε τον ορισμό μας της παραγωγίσης στην υποπαράγραφο 1.2.4.1 για να χειριστούμε αυθαίρετα πολυώνυμα κατ’ έναν πολύ φυσικό τρόπο, με το να προσθέσουμε έναν μόνο κανόνα προϋπόθεσης.

Clear[diff]

Clear[diff]

```
diff[x_^n_, x_] := n x^(n-1);
diff[a_ + b_, x_] := diff[a, x] + diff[b, x];
diff[a_ b_, x_] := a diff[b, x] + b diff[a, x];
diff[a_, x_] := 0 /; FreeQ[a, x]
```

Τώρα οι σταθερές και τα προϊόντα μεταχειρίζονται κατάλληλα.

```
diff[a[x] + b x^2 + c, x]
```

```
2 b x + diff[a[x], x]
```

Χρησιμοποιώντας **rule/Predicate** περιορίζουμε τον κανόνα σε εκείνες τις καταστάσεις όπου η συνάρτηση κριτηρίου εκτιμά (υπολογίζει) το **Αληθές (True)**. Δηλαδή, σε αυτές τις εκφράσεις που ανήκουν στον τύπο που δίνεται από τη συνάρτηση κριτηρίου. Ένας μη περιορισθείς κανόνας είναι ο ίδιος με έναν εξαρτώμενο (από όρους) κανόνα όπου ο ισχυρισμός πάντα ισούται με **True**.

Αν μία συνάρτηση κριτηρίου εφαρμοστεί αμέσως μετά από ένα υπόδειγμα, θα περιορίσει το ταίριασμα υποδείγματος παρά την εφαρμογή του κανόνα. Για παράδειγμα,

```
fac1[1] = 1; fac1[n_] := n fac1[n - 1]
```

Αυτό θα δουλέψει τέλεια αν οι θετικοί ακέραιοι δοθούν ως ορίσματα.

```
fac1[5]
```

```
120
```

Όμως, αν ένας άλλος ισχυρισμός δοθεί, τότε θα υπάρξει δυσάρεστη αποτυχία.

```
{fac1[-3], fac1[endless]};
```

```
$RecursionLimit::reclim: Recursion depth of 256 exceeded
```

```
$RecursionLimit::reclim: Recursion depth of 256 exceeded
```

```
$RecursionLimit::reclim: Recursion depth of 256 exceeded
```

```
General::stop :
```

Further output of \$RecursionLimit::reclim will be suppressed during this calculation

Ένα πολύ μεγάλο μέρος του εξαγόμενου (output) συγκαλύπτεται. Αυτό που συμβαίνει, φυσικά, σε αυτές τις περιπτώσεις είναι ότι η τιμή 1 ποτέ δεν αντιμετωπίζεται ως όρισμα, οπότε η συνάρτηση συνεχίζει να ανακαλεί τον εαυτό της αναδρομικά μέχρι φτάσει στο ενσωματωμένο όριο αναδρομής. Αυτή η κακή συμπεριφορά μπορεί να διορθωθεί χρησιμοποιώντας έναν εξαρτημένο κανόνα.

```
fac2[1] = 1; fac2[n_] := n fac2[n - 1] /; n > 1;
```

```
{fac2[5], fac2[-2], fac2[something]}
```

```
{120, fac2[-2], fac2[something]}
```

Μπορεί επίσης κανείς να χρησιμοποιήσει τη μορφή **_?Predicate**, η οποία περιορίζει το υπόδειγμα σε κάτι για το οποίο το υπόδειγμα εκτιμά το **Αληθές**.

```
fac3[1] = 1; fac3[n_?Positive] := n fac3[n - 1];
```

```
fac4[1] = 1; fac4[n_ /; Positive[n]] := n fac4[n - 1];
```

```
{fac3[5], fac3[-2], fac4[5], fac4[-2]}
```

```
{120, fac3[-2], 120, fac4[-2]}
```

Στο **n_?Positive**, η **Positive** (Θετική) είναι μια καθαρή συνάρτηση, ενώ στη μορφή που χρησιμοποιεί το **/;**, η προϋπόθεση είναι η τιμή του κατηγορήματος για το όνομα του υποδείγματος. Σε κάθε περίπτωση, το **Positive** ή **Positive[n]** είναι ένα θετικό τεστ με την έννοια ότι το υπόδειγμα ταιριάζεται και ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο αν ο έλεγχος (τεστ) πετύχει. Τώρα δοκιμάζεται το **fac4** σε έναν πραγματικό αριθμό και βλέπουμε τί συμβαίνει.

```
fac4[3.6]
```

```
3.9856 fac4[-0.4]
```

Αυτός ο κανόνας εφαρμόζεται μέχρι η αρνητική τιμή **-0.4** να επιτευχθεί, όπου η προϋπόθεση αποτυγχάνει οπότε το **fac4[-0.4]** επιστρέφεται σε ανεκτίμητη (μη υπολογισμένη) μορφή. Φυσικά, το

πραγματικό πρόβλημα είναι ότι απλώς θέλουμε η συνάρτηση να εφαρμοστεί στους ακεραίους. Αλλά ο επιπλέον περιορισμός μπορεί εύκολα να προστεθεί.

```
fac5[1] = 1; fac5[n_Integer?Positive] := n fac5[n - 1];
```

```
{fac5[5], fac5[3.6], fac5[-2]}
```

```
{120, fac5[3.6], fac5[-2]}
```

Το κατηγορήμα που εμφανίζεται μετά το /; ή το ? μπορεί επίσης να είναι μία καθορισμένη από τον χρήστη (user defined) έκφραση.

```
test[x_Integer?((# > 2) &)] := x + 1
```

```
{test[1], test[2], test[3], test[4], test[5]}
```

```
{test[1], test[2], 4, 5, 6}
```

Η μορφή `? Predicate` μπορεί μόνο να χρησιμοποιηθεί μετά από απλές εγκοπές (slots), αλλά η μορφή `/;Predicate` μπορεί να χρησιμοποιηθεί μετά από κάθε υπόδειγμα, απλό ή πλεγματικό (σύνθετο). Για παράδειγμα,

```
f1[a_, b_] /; EvenQ[a + b] := a^b;
```

```
f1[a_, b_] /; OddQ[a + b] := a^(-b);
```

```
{f1[1, 3], f1[2, 3], f1[3, 3]}
```

```
{1,  $\frac{1}{8}$ , 27}
```

Τα κατηγορήματα επίσης παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στο χειρισμό των λιστών.

```
Select[Range[-5, 5], Positive]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

```
Cases[Range[-5, 5], _?Positive]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

```
Cases[Range[-5, 5], a_ /; a > 0]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

Υπάρχει επίσης μια άλλη μορφή του `Cases` (case : περίπτωση) στην οποία μια λειτουργία εφαρμόζεται στις εισόδους που επιλέγονται.

```
Cases[Range[-5, 5], (a_ /; a > 0) :> Sqrt[a]]
```

```
{1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 2,  $\sqrt{5}$ }
```

Το ακόλουθο παράδειγμα ήταν η ερώτηση του 1992 στον διαγωνισμό προγραμματισμού του *Mathematica*. Το πρόβλημα ήταν να γραφεί μια συνάρτηση με το όνομα `maxima` η οποία αρχίζει με μια λίστα από αριθμούς και δομεί μια υπολίστα των αριθμών των μεγαλύτερων από όλους τους προηγούμενους της δοθείσας λίστας. Για παράδειγμα, η `maxima[{3, 6, 4, 2, 8, 7, 9}]` θα πρέπει να επιστρέφει το `{3, 6, 8, 9}`. Η λύση περιελάμβανε ένα υπόδειγμα με μια προϋπόθεση σε έναν τοπικό κανόνα.

```
maxima[List_List] := List //. {a___, x_, y_, b___} /; y <= x -> {a, x, b}
```

```
maxima[{3, 6, 4, 2, 8, 7, 9}]
```

```
{3, 6, 8, 9}
```

1.2.6 Καθαρές Συναρτήσεις (Pure Functions)

Δοθείσας μιας έκφρασης *expr* που εμπλέκει μια μεταβλητή *x*, μπορούμε να θεωρήσουμε την *expr* ότι περιγράφει μια συνάρτηση με το *x* να είναι το όρισμα (μεταβλητή). Αν χρειαστεί να αναφερθούμε σε αυτή τη συνάρτηση ονομαστικά, μπορούμε είτε να ορίσουμε έναν κανόνα για την *f* στη μορφή $f[x_] := expr$ ή να χρησιμοποιήσουμε το αντικείμενο **Function**[*x*, *expr*]. Είτε το *f* είτε το **Function**[*x*, *expr*] είναι ένα όνομα γι' αυτή τη συνάρτηση, και μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τα δύο εναλλακτικά. Για να τα εφαρμόσουμε σε ένα όρισμα, γράφουμε $f[arg]$ κατά το γνωστό τρόπο ή κατά την αποκαλούμενη μορφή καθαρής συνάρτησης **Function**[*x*, *expr*][*arg*].

```
f[x_] := 1 + x^2
g = Function[x, 1 + x^2];
```

```
{f[2], g[2]}
```

```
{5, 5}
```

Το όνομα του τυπικού ορίσματος (τυπικής μεταβλητής) σε μια καθαρή συνάρτηση δεν έχει σημασία. Η **Function**[*x*, *x*²] είναι η ίδια με τη **Function**[*y*, *y*²]. Αυτό φαίνεται εύκολα αν εφαρμοστεί μια τέτοια συνάρτηση σε ένα όρισμα, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

```
{Function[x, x^2][a], Function[y, y^2][a], Sin[a]}
```

```
{a^2, a^2, Sin[a]}
```

Σημειώτεον ότι η **Sin** και όλες οι ενσωματωμένες συναρτήσεις, είναι καθαρές συναρτήσεις. Επειδή τα ονόματα των μεταβλητών σε μια καθαρή συνάρτηση δεν έχουν σημασία, το *Mathematica* δηλώνει αυτές τις μεταβλητές με σύμβολα. Τα σύμβολα #1, #2,.. .. χρησιμοποιούνται για την πρώτη, δεύτερη,...μεταβλητή. Η εσωτερική μορφή του #*i* είναι **Slot**[*i*]. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις μορφές, τότε δεν δίνουμε τα ορίσματα της **Function**[] με σκοπό να κατονομάσουμε τις μεταβλητές. Έτσι, αντί του **Function**[*x*, *x*²] απλά γράφουμε **Function**[#1²]. Μία βολική συντόμηση του #1 είναι το #, οπότε μπορούμε να απλοποιήσουμε το παράδειγμά μας λίγο ακόμα και να γράψουμε **Function**[#²]. Τελικά, υπάρχει ένας μεταθεματικός τελεστής & για το **Function**. Δηλαδή, το νόημα **body**& είναι το ίδιο με το **Function**[**body**]. Χρησιμοποιώντας αυτό τον τελεστή, φτάνουμε στη βραχύτερη μορφή #²& που το παράδειγμά μας μπορεί να πάρει. Έχουμε χρησιμοποιήσει αυτή την μορφή αρκετά συχνά στην παρούσα εργασία. Ας δούμε την εσωτερική μορφή αυτής της σύντομης μορφής μιας καθαρής συνάρτησης.

```
FullForm[#^2 &]
```

```
Function[Power[Slot[1], 2]]
```

Ο τελεστής & έχει πολύ χαμηλή προτεραιότητα, μόλις πάνω από την ανατεθείσα εργασία. Επομένως, το $x = \text{body}\&$ γίνεται κατανοητό ως $x = \text{Function}[\text{body}]$, αλλά το $x \rightarrow \text{body}\&$ ερμηνεύεται ως **Function**[$x \rightarrow \text{body}$]. Αν θέλουμε η δεξιά πλευρά του κανόνα να είναι καθαρή συνάρτηση, χρησιμοποιούμε το $x \rightarrow (\text{body}\&)$. Προσοχή στο $x \rightarrow (\text{body}\&)$. Μια άλλη περίπτωση όπου η χαμηλή προτεραιότητα των καθαρών συναρτήσεων απαιτεί τη χρήση παρενθέσεων είναι σε ισχυρισμούς για υποδείγματα: $x_?\text{body}\&$ δεν είναι το ίδιο με το $x_?(\text{body}\&)$. Το δεύτερο είναι συνήθως σωστό.

```
1 + # + #^2 & [3]
```

```
13
```

Η όλη έκφραση στα αριστερά του & είναι μέρος του σώματος (**body**) της καθαρής συνάρτησης. Δεν είναι απαραίτητες οι παρενθέσεις. Σε άλλες καταστάσεις, οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες.

```
h[a] /. h -> (#^2 &)
```

```
a^2
```

Παρενθέσεις γύρω από την καθαρή συνάρτηση χρειάζονται εδώ. Αλλιώς, ο όλος κανόνας θα θεωρούνταν μέρος του σώματος της συνάρτησης.

Καθαρές συναρτήσεις γραμμένες στη μορφή με τα # και &, είναι πολύ ακριβείς και χρήσιμες, ειδικά, στις συναρτησιακές λειτουργίες, όπως **Map**, **Apply**, **Thread**, και σε επαναληπτικές συναρτήσεις, όπως η **FoldList**. Για παράδειγμα,

```
eq1 = D[u[x, t] / a + u[x, t] == F[x] / a
```

$$u[x, t] + \frac{u^{(0,2)}[x, t]}{a} == \frac{F[x]}{a}$$

```
Clear[lhs2]
```

```
eq2 = lhs2 == rhs2;
```

```
eq3 = lhs3 == rhs3;
```

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές του eq1 με το a και να κάνουμε χρήση του **Thread**, και να λάβουμε :

```
eq1 // Thread[a #, Equal] & // ExpandAll
```

```
a u[x, t] + u^{(0,2)}[x, t] == F[x]
```

Επιπλέον, μπορούμε να προσθέσουμε το eq2 στο eq3 ως εξής

```
eq2 + eq3 // Thread[#, Equal] &
```

```
lhs2 + lhs3 == rhs2 + rhs3
```

1.2.7 Map και Apply

Στο *Mathematica*, δύο σημαντικές εντολές που λαμβάνουν συναρτήσεις ως ορίσματα είναι οι **Map** [] και **Apply** []. Οι διάφορες εκδοχές της **Map** δρουν στα ορίσματα μιας έκφρασης, ενώ η **Apply** δρα μόνο στην κεφαλή της.

1.2.7.1 Απεικονίζοντας Συναρτήσεις σε Εκφράσεις

Η λειτουργία **Map**[f , $list$] ή σε προθεματική μορφή f /@ $list$ εφαρμόζει τη συνάρτηση f σε κάθε στοιχείο της λίστας $list$. Το δεύτερο όρισμα της **Map** [] δεν χρειάζεται να είναι λίστα, όμως. Μπορεί να είναι κάθε έκφραση της μορφής $h[e_1, e_2, \dots, e_n]$. Το αποτέλεσμα της αντιστοίχισης (mapping) είναι η έκφραση $h[f[e_1], f[e_2], \dots, f[e_n]]$.

```
Clear[f]
```

```
{Map[f, a + b + c], #^2 & /@ {1, 2, 3}}
```

```
{f[a] + f[b] + f[c], {1, 4, 9}}
```

Το **Map**[f , $expr$, $levels$ spec] έχει ένα προαιρετικό τρίτο όρισμα που εξειδικεύει τα επίπεδα στα οποία θα απεικονίσει. Το προεπιλεγμένο επίπεδο (default level) είναι {1}, δηλαδή, στα στοιχεία του $expr$. Σε ένα μητρώο, οι εισοδοί είναι στο επίπεδο 2 ((υπάρχουν δύο επίπεδα λιστών). Αν θέλουμε να αντιστοιχίσουμε μια συνάρτηση σε αυτές τις εισόδους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το **Map**[f , $matrix$, {2}].


```
expr1 = {{a1,1, a1,2}, {a2,1, a2,2}};
```

```
Map[entry, expr1, {2}] // MatrixForm
```

```
( entry[a1,1] entry[a1,2]
  entry[a2,1] entry[a2,2] )
```

Αυτή είναι μια πολύ ισχυρή διευκόλυνση και είναι ένα από τα κύρια εργαλεία για το χειρισμό εκφράσεων. Ο σκοπός των λειτουργιών που βασίζονται στη **Map** είναι να γίνει δυνατό να πραγματοποιείται χειρισμός των λιστών σαν ολότητα. Για παράδειγμα, ένας πραγματικά φτωχός τρόπος να υψώσουμε στο τετράγωνο τις εισόδους σε μια λίστα, είναι ως ακολούθως :

```
list1 = {a, b, c};
```

```
Table[list1[[i]]^2, {i, Length[list1]}]
```

```
{a^2, b^2, c^2}
```

Ο όρος `list1[[i]]` καταλύει την αυθεντική λίστα με το να αποσπά τα τμήματά της, ένα τη φορά, $\wedge 2$ τετράγωνα τη φορά, και μετά το **Table** επαναφέρει τα τμήματα σε μια νέα λίστα. Η **Map**, εντούτοις, μας επιτρέπει να χειριστούμε τις μαθηματικές δομές σαν ολότητες, οπότε δεν τις καταλύουμε και επαναδημιουργούμε.

Η **Map[]** πάντα αντιστοιχίζει τη συνάρτηση σε όλα τα στοιχεία των δοθέντων επιπέδων. Η εντολή **MapAt[f, expr, postlist]** επιτρέπει την εφαρμογή μιας συνάρτησης σε επιλεκτικές θέσεις.

```
MapAt[G, a b + c d + e f, {2, 1}]
```

```
a b + e f + d G[c]
```

```
expr2 = a + b / a + c Exp[a + 1]
```

```
a +  $\frac{b}{a}$  + c E1+a
```

Αν θέλουμε να απεικονίσουμε μια συνάρτηση f σε όλες τις εμφανίσεις του a , πρώτα βρίσκουμε όλες τις εμφανίσεις του a στην έκφρασή μας.

```
Position[expr2, a]
```

```
{{1}, {2, 1, 1}, {3, 2, 2, 2}}
```

Αυτή η λίστα των θέσεων είναι σε ορθή μορφή για το **MapAt** και μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας.

```
MapAt[f, expr2, %]
```

```
c E1+f[a] +  $\frac{b}{f[a]}$  + f[a]
```

Αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσε να είχε γίνει πιο απλό με έναν κανόνα αντικατάστασης.

```
expr2 /. a -> f[a]
```

```
c E1+f[a] +  $\frac{b}{f[a]}$  + f[a]
```

Σε κάποιες εφαρμογές, η συνάρτηση που θα εφαρμοστεί σε ένα στοιχείο e_i μπορεί να εξαρτάται από τη θέση του i . Η λειτουργία **MapIndexed[f, {e₁, e₂, ... e_n}]** συμπεριφέρεται ουσιαστικά σαν τη **Map[]**, αλλά πέραν τη θέση κάθε στοιχείου σαν δεύτερο επιχείρημα στην f . Η παραγόμενη έκφραση είναι :

MapIndexed [1 + #^2 &, {a, b, c, d}]

{1 + a², 1 + b², 1 + c², 1 + d²}

MapIndexed [1 + #^2 &, {{a, b}, {c, d}}, {2}]

{{1 + a², 1 + b²}, {1 + c², 1 + d²}}

Επομένως, η συνάρτηση που αντιστοιχίζεται πρέπει να είναι μια συνάρτηση 2 ορισμάτων. Το δεύτερο όρισμα είναι μια θέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να τροποποιηθεί η λειτουργία που επιτελέστηκε στο πρώτο όρισμα.

MapIndexed [#1^First[#2] &, {a, b, c, d, e}]

{a, b², c³, d⁴, e⁵}

1.2.7.2 Apply

Ο κανόνας **Apply**[*h*, *expr*] ή *h* @@ *expr* αντικαθιστά την κεφαλή του *expr* με το *h*.

a + b + c // FullForm

Plus[a, b, c]

Αντικαθιστώντας την κεφαλή **Plus** από την **Times**, παίρνουμε το προϊόν τριών όρων στο άθροισμα από πάνω.

{Apply[Times, a + b + c], Times @@ (a + b + c)}

{a b c, a b c}

Με ένα τρίτο όρισμα, η **Apply**[*h*, *expr*, *levelspec*] αντικαθιστά κεφαλές στα τμήματα του *expr* που περιγράφονται από το *levelspec* από το *h*.

Apply[b, {{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}, {2}]

{{b[1, 1], b[1, 2]}, {b[2, 1], b[2, 2]}}

Αυτός ο απλός ορισμός βρίσκει το μέσο όρο από μια λίστα αριθμών :

average[List1_List] := **Apply**[**Plus**, List1] / **Length**[List1]

average[{a, b, c}]

$\frac{1}{3} (a + b + c)$

Σημειωτέον ότι ο υπολογισμός του μέσου όρου μιας λίστας με αυτό τον τρόπο, δεν απαιτεί do-loops ή γνώση του μήκους της λίστας. Η **Apply** συχνά χρησιμοποιείται αν κανείς θέλει πρώτα να προετοιμάσει έναν αριθμό από συστατικά και μετά να εφαρμόσει κάποια λειτουργία σε αυτά. Τα συστατικά μπορούν να κρατηθούν σε μια λίστα μέχρι να είναι έτοιμα και μετά η κεφαλή της λίστας μετατρέπεται στην κατάλληλη λειτουργία με τη χρήση του **Apply**.

Για να παράξουμε πιο ακριβείς σημειογραφίες για τα εξαγόμενα που θα υπάρξουν στα επόμενα κεφάλαια, μπορούμε να εισάγουμε την **displayRule** για να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες μας. Για παράδειγμα,

output = $u_2^{(2,0,0)} [T_0, T_1, T_2] + \omega^2 u_2 [T_0, T_1, T_2] == 2 u_1^{(1,1,0)} [T_0, T_1, T_2] - \delta u_1 [T_0, T_1, T_2]^2$;

displayRule =

{Derivative [a_] [u_] [___] := **SequenceForm** [**Times** @@ **MapIndexed** [**D**₂²_{[[1]]-1} &, {a}], u_],
u_ [___] -> u_];

output /. **displayRule**

$D_2^2 u_2 + \omega^2 u_2 == 2 (D_0 D_1 u_1) - \delta u_1^2$

1.2.8 Nest και Fold

Η Nest και οι σχετικές λειτουργίες της NestList και FixedPoint εφαρμόζουν μια συνάρτηση στο όρισμά της πολλές φορές. Η Nest[function, x, n] εφαρμόζει τη function στο x και επαναλαμβάνει την εφαρμογή n φορές.

```
Nest[(1 + #)^2 &, x, 3]
```

$$(1 + (1 + (1 + x)^2)^2)^2$$

```
NestList[(1 + #)^2 &, x, 3]
```

$$\{x, (1 + x)^2, (1 + (1 + x)^2)^2, (1 + (1 + (1 + x)^2)^2)^2\}$$

Να ένα παράδειγμα που παράγει ένα απλό συνεχόμενο κλάσμα.

```
Nest[1 / (1 + #) &, a, 3]
```

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + a}}}$$

Μια λειτουργία που σχετίζεται στενά με τη Nest, είναι η FixedPoint, η οποία “φωλιάζει” (nests) τη λειτουργία της μέχρι να μην υπάρχει αλλαγή. Για παράδειγμα, όλοι γνωρίζουν τι συμβαίνει αν το κλειδί Cos σε ένα κομπιουτεράκι τσέπης πατηθεί επαναληπτικά. Βασικά, το FixedPoint είναι ο,τι συμβαίνει αν αυτό πατιέται για πάντα.

```
{Nest[Cos, 0.3, 5], Nest[Cos, 0.3, 10], FixedPoint[Cos, 0.3]}
```

```
{0.784436, 0.732698, 0.739085}
```

Στην πραγματικότητα, το FixedPoint σταματά αφότου η ακρίβεια της μηχανής επιτευχθεί. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή SameTest για να έχουμε κάποιον έλεγχο επί του FixedPoint.

```
FixedPoint[Cos, 0.3, SameTest -> (Abs[#1 - #2] < 10^-5 &)]
```

```
0.739089
```

Το δεύτερο ζευγάρι συναρτήσεων, Fold και FoldList, κάνει κάτι παρόμοιο με τη Nest και τη NestList, αλλά για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

```
Fold[f, u, {x, y, z}]
```

```
f[f[f[u, x], y], z]
```

```
FoldList[f, u, {x, y, z}]
```

```
{u, f[u, x], f[f[u, x], y], f[f[f[u, x], y], z]}
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Η ΕΞΙΣΩΣΗ DUFFING

2.1 Η εξίσωση Duffing

Οι ελεύθερες ταλαντώσεις πολλών συντηρητικών συστημάτων που έχουν έναν μόνο βαθμό ελευθερίας, διέπονται από μια εξίσωση της μορφής :

$$\text{eq21a} = x''[t] + f[x[t]] == 0;$$

όπου η f είναι μια μη γραμμική συνάρτηση του $x[t]$. Εδώ, η $x''[t]$ είναι η επιτάχυνση του συστήματος, ενώ η $f[x[t]]$ είναι η δύναμη επαναφοράς. Έστω ότι θέση $x = x_0$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Τότε η x_0 είναι μια σταθερά και άρα $f[x_0] = 0$. Με σκοπό το *Mathematica* να ερμηνεύσει τη x_0 ως σταθερά, χρειάζεται να το συμβολίσουμε. Διαφορετικά, αν αντικαταστήσουμε το x με μια έκφραση $g[t]$, το *Mathematica* θα αντικαταστήσει το x_0 με το $g[t]$ και δεν θα το μεταχειριστεί σαν σταθερά. Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας το x με το $\text{Sin}[t]$ στην έκφραση $x^2 + x_0$, δίνει :

$$x^2 + x_0 /. x \rightarrow \text{Sin}[t]$$

$$\text{Sin}[t]^2 + (\text{Sin}[t])_0$$

Εκάθαρα, το x_0 μεταχειρίζεται σαν μια μεταβλητή με υπόστιξη 0, το οποίο είναι λάθος. Επομένως, χρειάζεται να συμβολίσουμε το x_0 ως :

$$\text{Symbolize}[x_0];$$

Τότε, το *Mathematica* αντιμετωπίζει την συμβολιζόμενη έκφραση x_0 σαν σταθερά. Ακολουθώντας, αντικαθιστώντας το x με το $\text{Sin}[t]$ στην έκφραση $x^2 + x_0$, προκύπτει :

$$x^2 + x_0 /. x \rightarrow \text{Sin}[t]$$

$$x_0 - \text{Sin}[t]^2$$

το οποίο είναι σωστό.

Μετά, υποθέτουμε ότι η f είναι μια αναλυτική συνάρτηση του x στο $x = x_0$ και την αναπτύσσουμε σε μια σειρά Taylor γύρω από το x_0 ως

$$f_{\text{exp}} = \text{Series}[f[x[t]], \{x[t], x_0, 3\}]$$

$$f[x_0] + f'[x_0](x[t] - x_0) + \frac{1}{2} f''[x_0](x[t] - x_0)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[x_0](x[t] - x_0)^3 + O[x[t] - x_0]^4$$

όπου οι όροι έως την κυβική διατηρούνται. Χρησιμοποιώντας το *Normal* για να περικόψουμε τους υψηλότερης τάξης όρους από το f_{exp} , έχουμε

$$f_{\text{poly}} = f_{\text{exp}} // \text{Normal}$$

$$f[x_0] + (-x_0 - x[t]) f'[x_0] - \frac{1}{2} (-x_0 - x[t])^2 f''[x_0] - \frac{1}{6} (-x_0 - x[t])^3 f^{(3)}[x_0]$$

Αντικαθιστώντας την f_{poly} την $f[x[t]]$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισορροπίας $f[x_0] = 0$, παίρνουμε

$$temp = \text{eq21a} /. \{f[x[t]] \rightarrow f_{\text{poly}}\} /. f[x_0] \rightarrow 0$$

$$(-x_0 - x[t]) f'[x_0] - \frac{1}{2} (-x_0 - x[t])^2 f''[x_0] - x''[t] - \frac{1}{6} (-x_0 - x[t])^3 f^{(3)}[x_0] == 0$$

Τώρα, εισάγουμε τον μετασχηματισμό $x[t] \rightarrow x_0 + u[t]$ στο $temp$ για να λάβουμε την τελική μορφή της εξίσωσης που θα χρησιμοποιηθεί στην επακόλουθη ανάλυση. Για να το πετύχουμε αυτό, χρειάζεται να εκφράσουμε αυτό το μετασχηματισμό σε μια μορφή καθαρής συνάρτησης όπως η $x \rightarrow (x_0 + u[\#] \&)$. Διαφορετικά, το *Mathematica* δεν θα μετασχηματίσει τις παραγώγους του $x[t]$ σε όρους των παραγώγων

του $u[t]$ εκτός αν καθορίσουμε σαφώς τους κανόνες γι' αυτές τις παραγώγους. Δηλαδή, δεν θα αντικαταστήσει τη $x'[t]$ με την $u'[t]$ και την $x''[t]$ με τη $u''[t]$ με το να αντικαταστήσει απλώς το $x[t] \rightarrow x_0 + u[t]$. Επιπλέον, δεν θα αντικαταστήσει τη $x[p]$ με τη $x_0 + u[p]$, όπως ήταν επιθυμητό. Για να δούμε τη διαφορά ανάμεσα σε αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς, συγκρίνουμε τους ακόλουθους δύο ισχυρισμούς:

$$\{x[t], x[p], x'[t], x''[t]\} /. x[t] \rightarrow x_0 + u[t]$$

$$\{x_0 + u[t], x[p], x'[t], x''[t]\}$$

$$\{x[t], x[p], x[a, b], y[t], x'[t], x''[t]\} /. x \rightarrow (x_0 + u[#] \&)$$

$$\{x_0 + u[t], x_0 + u[p], x_0 + u[a], y[t], u'[t], u''[t]\}$$

Σημειώνουμε ότι η μορφή καθαρής συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε έκφραση με την κεφαλή x , ειδικά για τις παραγώγους. Επομένως, εισάγουμε αυτό το μετασχηματισμό της μορφής καθαρής συνάρτησης σε `temp` και παίρνουμε:

$$\text{eq21b} = \text{temp} /. x \rightarrow (x_0 + u[#] \&)$$

$$u[t] \&''[x_0] - \frac{1}{2} u[t]^2 \&''[x_0] - u''[t] - \frac{1}{6} u[t]^3 \&''^{(3)}[x_0] == 0$$

Για να απλοποιήσουμε τη σημειογραφία σε `eq21b`, δηλώνουμε τον συντελεστή $u[t]^b$ με το k_b . Το αποτέλεσμα είναι

$$\text{eq21c} = \text{eq21b} /. _ . u[t]^b _ \rightarrow k_b u[t]^b$$

$$k_1 u[t] - k_2 u[t]^2 - k_3 u[t]^3 - u''[t] == 0$$

Συσχετίζουμε το k_b με τις παραγώγους της συνάρτησης $f[x]$ χρησιμοποιώντας την ενσωματωμένη συνάρτηση `Cases` ως:

$$\text{Cases}[\text{eq21c}, a_ . u[t]^b _ \rightarrow \{k_b \rightarrow a\}, \{2\}] // \text{Flatten}$$

$$\{k_1 \rightarrow \&''[x_0], k_2 \rightarrow \frac{1}{2} \&''[x_0], k_3 \rightarrow \frac{1}{6} \&''^{(3)}[x_0]\}$$

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του Κεφαλαίου αφιερώνεται στην ειδική περίπτωση των κυβικών μη γραμμικοτήτων. Έτσι, θέτουμε τον συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου στο `eq21c` με το μηδέν και παίρνουμε:

$$\text{eq21d} = \text{eq21c} /. k_2 \rightarrow 0$$

$$k_1 u[t] - k_3 u[t]^3 - u''[t] == 0$$

η οποία αποκαλείται εξίσωση Duffing (χωρίς απόσβεση, χωρίς όρο εξαναγκασμού). Επισημαίνουμε ότι τα k_1 και k_3 μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά.

Είναι μια καλή εξάσκηση να αδιαστασιοποιήσουμε τις κυρίαρχες εξισώσεις προτού τις μεταχειριστούμε με μεθόδους διαταραχής (perturbation methods). Γι' αυτό το λόγο, αδιαστασιοποιούμε το u και το χρησιμοποιώντας ένα χαρακτηριστικό μήκος U και έναν χαρακτηριστικό χρόνο T της κίνησης και δηλώνουμε τις αδιάστατες μεταβλητές με έναν αστερίσκο. Στην αδιάστατη μορφή, το `eq21d` γίνεται:

$$\text{eq21e} = \text{eq21d} /. u \rightarrow (U u^*[# / T] \&) /. t \rightarrow T t^*$$

$$U k_1 u^*[t^*] - U^3 k_3 u^*[t^*]^3 - \frac{U u^*''[t^*]}{T^2} == 0$$

Μετά, πολλαπλασιάζουμε την αριστερή πλευρά του eq21d με το T^2/U έτσι ώστε ο συντελεστής του $u''[t^*]$ να είναι μονάδα. Άρα :

$$\text{eq21f} = (\text{eq21e}[[1]] T^2 / U // \text{Expand}) == 0$$

$$T^2 k_1 u''[t^*] - T^2 U^2 k_2 u'[t^*]^2 - (u'[t^*])^2 == 0$$

Διαλέγουμε το T έτσι ώστε η γραμμική φυσική συχνότητα του συστήματος είναι μονάδα. Δηλαδή, λέμε $k_1/T^2 = 1$, για ευκολία σημειογραφίας, λέμε $\epsilon = k_2 T^2 U^2$, ρίχνουμε τον αστερίσκο, και ξαναγράφουμε την eq21f ως :

$$\text{DuffingEq} = \text{eq21f} /. \{k_1 T^2 \rightarrow 1, k_2 T^2 U^2 \rightarrow \epsilon\} /. \text{anything_}^* \rightarrow \text{anything}$$

$$u[t] - \epsilon u[t]^2 + u''[t] == 0$$

Σημειώνουμε ότι το ϵ είναι μια αδιάστατη ποσότητα, και είναι ένα μέτρο της ισχύος της μη-γραμμικότητας.

2.2 Από ευθείας Ανάπτυγμα

Για να λύσουμε την DuffingEq, την συσχετίζουμε με τις αρχικές συνθήκες

$$\text{ic} = \{u[0] == u_0, u'[0] == v_0\};$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (IVP), αποτελούμενη από την DuffingEq και τις σχετιζόμενες αρχικές συνθήκες ic, είναι μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής και της παραμέτρου ϵ . Μετά, καθορίζουμε μια προσέγγιση του IVP για την ασθενή μη-γραμμικότητα. Δηλαδή, για μικρά αλλά πεπερασμένα ϵ .

Πρώτα, θέτουμε το ϵ ίσο με το μηδέν στην DuffingEq, συμπληρώνουμε το αποτέλεσμα με τις αρχικές συνθήκες χρησιμοποιώντας την εντολή του *Mathematica* Join, και λαμβάνουμε το ακόλουθο γραμμικό IVP :

$$\text{linearIVP} = \text{Join}[\{\text{DuffingEq} /. \epsilon \rightarrow 0\}, \text{ic}]$$

$$\{u[t] - u''[t] == 0, u[0] == u_0, u'[0] == v_0\}$$

Η λύση αυτού του γραμμικού IVP μπορεί να ληφθεί με το κάνουμε χρήση της εντολής του *Mathematica* DSolve. Το αποτέλεσμα είναι

$$\text{linearSol} = \text{DSolve}[\text{linearIVP}, u[t], t][[1]]$$

$$\{u[t] \rightarrow u_0 \text{Cos}[t] + v_0 \text{Sin}[t]\}$$

Όταν το ϵ είναι μικρό αλλά διάφορο του μηδενός, η λύση του μη-γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών δεν δίνεται πια από την LinearSol, αλλά αποκλίνει από αυτήν. Δοκιμάζουμε μια διόρθωση στη μορφή μιας δυναμοσειράς στο ϵ , δηλαδή αναπτύσσουμε το $u[t]$ σε μια δυναμοσειρά (powerseries) στο ϵ ως εξής :

$$\text{uExpRule}[\text{maxOrder_}] := u \rightarrow (\text{Sum}[\epsilon^i u_i[t], \{i, 0, \text{maxOrder}\}]) \&$$

όπου $u_0[t]$ είναι η λύση του γραμμικού προβλήματος. Για παράδειγμα, στην πρώτη τάξη, έχουμε :

$$u[t] /. \text{uExpRule}[1]$$

$$u_0[t] - \epsilon u_1[t]$$

και στην τρίτη τάξη, έχουμε :

`u[t] /. uExprRule[3]`

$u_0[t] - \epsilon u_1[t] - \epsilon^2 u_2[t] - \epsilon^3 u_3[t]$

και στην πέμπτη τάξη έχουμε :

`u[t] /. uExprRule[5]`

$u_0[t] - \epsilon u_1[t] - \epsilon^2 u_2[t] - \epsilon^3 u_3[t] - \epsilon^4 u_4[t] - \epsilon^5 u_5[t]$

Μετά, περιορίζουμε τη συζήτησή μας στην πρώτη τάξη. Δηλαδή, κρατούμε δύο όρους στη δυναμοσειρά. Έτσι, εφαρμόζουμε τον κανόνα `uExprRule[1]` στην `DuffingEq`, αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα, και λαμβάνουμε

`eqEps = CoefficientList[eq22a[[1]], ε] == 0 // Thread`

$\{u_0[t] - u_0''[t] == 0, u_0[t]^3 - u_1[t] - u_1''[t] == 0\}$

Εφόσον κρατάμε μόνο όρους μέχρι το $O(\epsilon)$ στην ανάπτυξη του $u[t]$, χρειάζεται να παραλείψουμε όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ στην `eq22atemp` για συνέπεια. Για να το επιτύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τον κανόνα $\epsilon^{n, m} \rightarrow 0$ για να παραμερίσουμε όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^k , και λαμβάνουμε

`eq22a = eq22atemp /. εn, m -> 0`

$u_0[t] - \epsilon u_0[t]^3 - \epsilon u_1[t] - u_0''[t] - \epsilon u_1''[t] == 0$

Θέτοντας τους συντελεστές των παρόμοιων δυνάμεων του ϵ στην `eq22a` ίσους με 0, λαμβάνουμε την ακόλουθη ιεραρχία γραμμικών εξισώσεων :

`eqEps = CoefficientList[eq22a[[1]], ε] == 0 // Thread`

$\{u_0[t] + u_0''[t] == 0, u_0[t]^3 - u_1[t] - u_1''[t] == 0\}$

η οποία χρειάζεται να λυθεί διαδοχικά. Δηλαδή, πρώτα λύνουμε την πρώτη εξίσωση των `eqEps` για να λάβουμε το $u_0[t]$, και κατόπιν αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στη 2^η εξίσωση των `eqEps` για να αποκτήσουμε μια γραμμική μη ομογενή εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί ως προς $u_1[t]$.

Η γενική λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος (`eqEps[[1]]`) μπορεί να εκφραστεί σε Καρτεσιανή μορφή ως :

`DSolve[eqEps[[1]], u_0[t], t][[1]]`

$\{u_0[t] \rightarrow C[2] \text{Cos}[t] - C[1] \text{Sin}[t]\}$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος στην πολική μορφή $u_0[t] \rightarrow a_0 \text{Cos}[t + \beta_0]$ με το να προσθέσουμε δύο κατάλληλες αρχικές συνθήκες στο `eqEps[[1]]` ως εξής :

`sol0 = DSolve[{eqEps[[1]], u_0[0] == a_0 Cos[β_0], u_0'[0] == -a_0 Sin[β_0]}, u_0[t], t][[1]] // Simplify`

$\{u_0[t] \rightarrow \text{Cos}[t - \beta_0] a_0\}$

όπου a_0 και β_0 είναι αυθαίρετες σταθερές. Επειδή η `eqEps[[1]]` αναπαριστά έναν γραμμικό ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, μπορεί κανείς να γράψει τη γενική της λύση είτε σε Καρτεσιανή είτε σε πολική μορφή χωρίς να χρησιμοποιήσει την εντολή του *Mathematica* `DSolve`.

Αντικαθιστώντας για $u_0[t]$ στην πρώτης τάξης εξίσωση (`eqEps[[2]]`) και προσδιορίζοντας τη γενική λύση της παραγόμενης εξίσωσης για $u_1[t]$, λαμβάνουμε :

`sol1temp = DSolve[eqEps[[2]] /. sol0, u1[t], t][[1]] // Simplify`

$$\{u_1[t] - \frac{1}{32} (32 C[2] \cos[t] - C[1] \sin[t]) - (-6 \cos[t - \beta_0] - \cos[3(t - \beta_0)] - 12 t \sin[t - \beta_0]) a_0^3\}$$

Σημειώτεον ότι το ομογενές τμήμα της `sol1temp` αποτελείται από τους όρους που εμπλέκουν τα $C[i]$ (η συνήθης περίπτωση) και το $\cos[t + \beta_0]$ (που λαμβάνονται από την `DSolve` σε αυτή την περίπτωση). Έτσι, τους αντικαθιστούμε με το $a_1 \cos[t + \beta_1]$ και ξαναγράφουμε `sol1temp` ως εξής :

`sol1 = u1[t] -> (sol1temp[[1, 2]] /. {C[_] -> 0, Cos[t + _] -> 0}) + a1 Cos[t + \beta1]`

$$u_1[t] - \frac{1}{32} (\cos[3(t - \beta_0)] - 12 t \sin[t - \beta_0]) a_0^3 - \cos[t - \beta_1] a_1$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις των μηδενικής και των πρώτης τάξης προβλημάτων, λαμβάνουμε τη γενική λύση της `DuffingEq`, ως εξής :

`sol = u[t] == (u[t] /. uExprRule[1] /. sol0 /. sol1)`

$$u[t] == \cos[t - \beta_0] a_0 + \epsilon \left\{ \frac{1}{32} (\cos[3(t - \beta_0)] - 12 t \sin[t - \beta_0]) a_0^3 - \cos[t - \beta_1] a_1 \right\}$$

όπου a_0 , a_1 , β_0 και β_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Ξεκινήσαμε με μια δεύτερης τάξης εξίσωση η οποία μπορεί να υποστηρίξει δυο αρχικές συνθήκες, αλλά μοιάζει να καταλήξαμε με τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι μόνο δύο από τις σταθερές a_0 , a_1 , β_0 και β_1 είναι αυθαίρετες και ότι οι δύο αρχικές συνθήκες στο $t=0$ είναι επαρκείς για να τις καθορίσουμε όλες τους. Για να το δούμε αυτό, πρώτα αλλάζουμε τη μορφή `Equal` στο ιεστή μορφή `Rule` ως εξής :

`icRule = ic /. Equal -> Rule`

`{u[0] -> u0, u'[0] -> v0}`

Τότε, επιβάλλουμε τις αρχικές συνθήκες `icRule` με το να υπολογίσουμε τηςόκαι την παράγωγό της στο $t = 0$, σύμφωνα με :

`eq22b = {sol, D[sol, t]} /. t -> 0 /. icRule`

$$\{u0 == \cos[\beta_0] a_0 + \epsilon \left\{ \frac{1}{32} \cos[3 \beta_0] a_0^3 - \cos[\beta_1] a_1 \right\},$$

$$v0 == -\sin[\beta_0] a_0 - \epsilon \left\{ \frac{1}{32} (-12 \sin[\beta_0] - 3 \sin[3 \beta_0]) a_0^3 - \sin[\beta_1] a_1 \right\}\}$$

Εξισώνουμε το συντελεστή κάθε δύναμης του ϵ στην `eq22b` και λαμβάνουμε τέσσερις αλγεβρικές εξισώσεις για τις σταθερές a_0 , a_1 , β_0 και β_1 . Το αποτέλεσμα είναι

`eq22c = Table[Map[Coefficient[#, \epsilon, i] &, eq22b, {2}], {i, 0, 1}]`

$$\{u0 == \cos[\beta_0] a_0, v0 == -\sin[\beta_0] a_0,$$

$$0 == \frac{1}{32} \cos[3 \beta_0] a_0^3 - \cos[\beta_1] a_1, 0 == \frac{1}{32} (-12 \sin[\beta_0] - 3 \sin[3 \beta_0]) a_0^3 - \sin[\beta_1] a_1\}$$

Έτσι, εφόσον οι a_0 και β_0 είναι γνωστές από την `eq22c[[1]]`, οι a_1 και β_1 μπορούν να υπολογιστούν από την `eq22c[[2]]`.

Εναλλακτικά, αντί να συμπεριλάβουμε την ομογενή λύση σε κάθε τάξη και να θεωρήσουμε τις αυθαίρετες σταθερές ως ανεξάρτητες του ϵ όπως έγινε παραπάνω, κανείς μπορεί να μη θεωρήσει την ομογενή λύση σε όλες τις τάξεις εκτός της πρώτης και να θεωρήσει τις αυθαίρετες σταθερές ως

εξαρτώμενες του ε στο να επιβάλλει τις αρχικές συνθήκες. Με την τελευταία προσέγγιση, η λύση στην πρώτη τάξη μπορεί να ξαναγραφεί ως :

```
sol /. {ac -> a, βc -> β, a1 -> 0} // ExpandAll
```

$$u[t] == a \cos[t - \beta] - \frac{1}{32} a^3 \varepsilon \cos[3t - 3\beta] - \frac{3}{8} a^3 t \varepsilon \sin[t - \beta]$$

Σημειωτέον ότι ο διορθωτικός όρος $(1/32)a^3 \varepsilon \cos[3t+3\varepsilon] - (3/8)a^3 t \varepsilon \sin[t+\beta]$ είναι μικρός συγκρινόμενος με τον αρχικό όρο $a \cos[t+\beta]$, όπως υποτίθεται ότι είναι, μόνο όταν το ε είναι μικρό συγκρινόμενο με τη μονάδα. Όταν το ε είναι $O(1)$, ο όρος που υποτίθεται ότι είναι μια μικρή διόρθωση γίνεται της ίδιας τάξης με τον αρχικό όρο. Επιπλέον, όταν $\varepsilon t > O(1)$, ο όρος της μικρής διόρθωσης γίνεται μεγαλύτερος από τον αρχικό όρο. Έτσι, η παραπάνω ληφθείσα ευθεία ανάπτυξη ισχύει μόνο για χρόνους τέτοιους ώστε $\varepsilon t < O(1)$. Δηλαδή, $t < O(\varepsilon^{-1})$.

Ακολουθώντας, ισχυριζόμαστε ότι τέτοιες επεκτάσεις είναι μη-ενιαίες ή καταρρέουσες για μακρούς χρόνους και τις αποκαλούμε πεζές ή αφελείς επεκτάσεις. Ο λόγος για την κατάρρευση της παραπάνω ανάπτυξης, είναι η παρουσία του όρου $t \sin[t + \beta]$, ενός γινομένου αλγεβρικών και κυκλικών όρων. Τέτοιοι όροι αποκαλούνται **μικτοί-προσωρινοί** όροι. Σε επόμενα Κεφάλαια, εφαρμόζουμε τέσσερις μεθόδους που απόφευγουν τους προσωρινούς (secular) όρους, και έτσι (θα) έχουμε ενιαίες επεκτάσεις.

2.3 Η Τεχνική Lindstedt-Poincaré

Η κατάρρευση του ευθεος ανάπτυγματος οφείλεται στην αποτυχία της να εξηγήσει τη μη-γραμμική εξάρτηση της συχνότητας του συστήματος από τη μη-γραμμικότητα. Ένας αριθμός τεχνικών που αποφέρουν ομοιόμορφα έγκυρες αναπτύξεις έχουν αναπτυχθεί. Τέσσερις από αυτές τις τεχνικές συζητούνται σε αυτό το Κεφάλαιο. Αρχίζουμε με την τεχνική Lindstedt-Poincaré στην παρούσα ενότητα.

Για να εξηγήσουμε την εξάρτηση της συχνότητας ω του συστήματος από τη μη-γραμμικότητα, εκθέτουμε το ω στην κυρίαρχη διαφορική εξίσωση. Γι' αυτό το λόγο, εισάγουμε τον μετασχηματισμό $\tau = \omega t$, όπου ω είναι η σταθερά που εξαρτάται από το ε , και παίρνουμε :

$$\text{DuffingEq} = u''[t] + u[t] + \varepsilon u[t]^3 == 0:$$

$$\text{eq23a} = \text{DuffingEq} /. u -> (u[\omega \#] \&) /. t -> \tau / \omega$$

$$u''[\tau] - \varepsilon u[\tau]^3 - \omega^2 u'[\tau] == 0$$

Για να καθορίσουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης του eq23a, αναπτύσσουμε τόσο το $u[t; \varepsilon]$ όσο και το $\omega[\varepsilon]$ σε δυνάμεις του ε χρησιμοποιώντας το `uExpRule[k]` και

$$\text{expRule}[\text{maxOrder}_] := \omega -> \omega_0 + \text{Sum}[\varepsilon^i \omega_i, \{i, \text{maxOrder}\}]$$

όπου ω_0 είναι η γραμμική φυσική συχνότητα του συστήματος. Στην παρούσα περίπτωση, η γραμμική φυσική συχνότητα κανονικοποιήθηκε στη μονάδα. Έτσι, θέτουμε $\omega_0 = 1$. Οι διορθώσεις στη γραμμική συχνότητα καθορίζονται κατά την εξέλιξη της ανάλυσης με το να απαιτούν η ανάπτυξη του u να είναι ομοιόμορφη (ενιαία) για όλα τα τ . Μετά, δείχνουμε πώς μπορεί να υπολογιστεί το ω_1 .

Αντικαθιστώντας τις αναπτύξεις του u και του ω στην eq23a, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\omega_0 = 1$, θέτοντας $\text{maxOrder} = 1$, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα, και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ , λαμβάνουμε

`eq23b = ExpandAll[eq23a /. uExprRule[1] /. omgRule[1]] /. $\omega_0 \rightarrow 1$ /. $\epsilon^{n_/:;n>1} \rightarrow 0$`

$$u_0[\tau] + \epsilon u_0[\tau]^3 + \epsilon u_1[\tau] + u_0''[\tau] + 2\epsilon \omega_1 u_0''[\tau] + \epsilon u_1''[\tau] == 0$$

Εξισώνοντας συντελεστές ομοίων δυνάμεων του ϵ και στα δύο μέλη της eq23b, παίρνουμε

`eqEps = CoefficientList[eq23b[[1]], ϵ] == 0 // Thread`

$$\{u_0[\tau] + u_0''[\tau] == 0, u_0[\tau]^3 + u_1[\tau] + 2\omega_1 u_0''[\tau] + u_1''[\tau] == 0\}$$

Η γενική λύση της eqEps[[1]], η εξίσωση μηδενικής τάξης, μπορεί να εκφραστεί σε πολική μορφή ως εξής :

`sol0 = DSolve[{eqEps[[1]], $u_0[0] == a \text{Cos}[\beta]$, $u_0'[0] == -a \text{Sin}[\beta]$ }, u_0, τ][[1]]`

$$\{u_0 \rightarrow (a \text{Cos}[\beta] \text{Cos}[\tau] - a \text{Sin}[\beta] \text{Sin}[\tau]) \epsilon\}$$

όπου a και β είναι σταθερές. Έχουμε εκφράσει το u_0 σαν μια καθαρή συνάρτηση, έτσι ώστε να μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραγώγους του στα προβλήματα υψηλότερης τάξης.

Αντικαθιστώντας για $u_0[\tau]$ στην eqEps[[2]], την πρώτης τάξης εξίσωση, παίρνουμε

`order1Eq = eqEps[[2]] /. sol0 // Simplify`

$$a^3 \text{Cos}[\beta + \tau]^3 - 2a \text{Cos}[\beta + \tau] \omega_1 + u_1[\tau] + u_1''[\tau] == 0$$

της οποίας η ειδική λύση είναι

`u1pSol = DSolve[order1Eq, $u_1[\tau], \tau$][[1]] /. C[_] -> 0 // Simplify`

$$\left\{u_1[\tau] \rightarrow \frac{1}{32} a \left\{a^2 (-6 \text{Cos}[\beta + \tau] + \text{Cos}[3(\beta + \tau)] - 12\tau \text{Sin}[\beta + \tau]) + 16(\text{Cos}[\beta + \tau] + 2\tau \text{Sin}[\beta + \tau]) \omega_1\right\}\right\}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι η u1pSol περιέχει έναν μικτό-προσωρινό όρο, ο οποίος κάνει την ανάπτυξη ανομοιομορφη. Σε αντίθεση με την ευθεία ανάπτυξη, όπου ο προσωρινός όρος δεν γίνεται να εκμηδενιστεί εκτός αν το u είναι ασήμαντο, σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να επιλέξουμε την παράμετρο ω_1 για να ελαχιστοποιήσουμε τον προσωρινό όρο, σύμφωνα με :

`omg1Rule = Solve[Coefficient[u1pSol[[1, 2]], $\text{Sin}[\beta + \tau]$] == 0, ω_1][[1]]`

$$\left\{\omega_1 \rightarrow \frac{3a^2}{8}\right\}$$

Αντικαθιστώντας για ω_1 στην u1pSol, έχουμε

`sol1 = u1pSol /. omg1Rule // Simplify`

$$\left\{u_1[\tau] \rightarrow \frac{1}{32} a^3 \text{Cos}[3(\beta + \tau)]\right\}$$

Σημειωτέον ότι, για να καθορίσουμε τη συνθήκη για την ελαχιστοποίηση του προσωρινού όρου από το u_1 , δεν χρειάζεται να καθορίσουμε την ειδική λύση πρώτα, όπως έγινε παραπάνω. Αντίθετα, πρέπει μόνο να ελέγξουμε το order1Eq και να επιλέξουμε ω_1 έτσι ώστε ο συντελεστής του $\text{Cos}[\beta + \tau]$, ο οποίος παράγει προσωρινούς όρους στο u_1 , να είναι ίσος με μηδέν. Γι' αυτό το λόγο, υπολογίζουμε το μη-ομογενές τμήμα της order1Eq και απλοποιούμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες ως εξής :

`expr23a = order1Eq[[1]] /. ω1 -> (0 &) // TrigReduce`

$$\frac{1}{4} \{ 3 a^3 \text{Cos}[\beta + \tau] + a^3 \text{Cos}[3 \beta + 3 \tau] - 3 a \text{Cos}[\beta + \tau] \omega_1 \}$$

Μετά, επιλέγουμε το ω_1 για να εκμηδενίσουμε τον όρο στην `expr23a` που παράγει προσωρινούς όρους, δηλαδή τον $\text{Cos}[\beta + \tau]$, οπότε :

`Solve[Coefficient[expr23a, Cos[β + τ]] == 0, ω1][[1]]`

$$\left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{3 a^2}{8} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τα `sol0` και `sol1` με το `uExprRule[[1]]`, προκύπτει

`u[τ] = (u[τ] /. uExprRule[1] /. sol0 /. sol1 // Simplify)`

$$a \text{Cos}[\beta + \tau] + \frac{1}{32} a^3 \in \text{Cos}[3 (\beta + \tau)]$$

Αντικαθιστώντας το τ με το ωt , αντικαθιστώντας το ω , χρησιμοποιώντας το ότι $\omega_0 = 1$ και αναπτύσσοντας τα ορίσματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, παίρνουμε

`solLP = u[t] == (u[t] /. τ -> ω t /. omgRule[1] /. omg1Rule /. ω0 -> 1 /. f_[arg_] := f[arg // Expand])`

$$u[t] == a \text{Cos}\left[t + \beta + \frac{3}{8} a^2 t \in\right] + \frac{1}{32} a^3 \in \text{Cos}\left[3 t + 3 \beta + \frac{9}{8} a^2 t \in\right]$$

Ξεκάθαρα, η ανάπτυξη `solLP` είναι ελεύθερη από προσωρινούς όρους και ο διορθωτικός όρος

$$\frac{1}{32} a^3 \in \text{Cos}\left[3 t + 3 \beta + \frac{9}{8} a^2 t \in\right]$$

είναι μικρός συγκριτικά με τον αρχικό όρο

$$a \text{Cos}\left[t + \beta + \frac{3}{8} a^2 t \in\right]$$

για όλα τα t και έτσι είναι *ομοιόμορφα έγκυρος*.

2.4 Η Μέθοδος των Πολλαπλών Κλίμακων

Σημειώνουμε από το `solLP` ότι η συναρτησιακή εξάρτηση του u από το t και το \in δεν είναι ασύνδετη.

Στην πραγματικότητα, το u εξαρτάται από τόσο το συνδυασμό $\in t$ όσο και από τα \in και t ξεχωριστά.

Εκτελώντας την ανάπτυξη σε υψηλότερη τάξη, βρίσκουμε ότι το u εξαρτάται από τους συνδυασμούς

$\in t, \in^2 t, \in^3 t, \dots$, όπως και από μόνα τους τα \in και t . Έτσι, $u = u(\in t, \in^2 t, \in^3 t, \dots; \in)$. Για μικρά \in , το

$T_n = \in^n t$, με $n = 1, 2, 3, \dots$, αναπαριστά διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Για παράδειγμα, αν $\in = 1/60$,

μπορούν να παρατηρηθούν παραλλαγές στις χρονικές κλίμακες T_0, T_1 και T_2 , αντιστοίχως, στους

δευτερολεπτοδείκτες, λεπτοδείκτες, και ωροδείκτες ενός ρολογιού. Έτσι, το T_0 αναπαριστά μια

γρήγορη χρονική κλίμακα, το T_1 αναπαριστά μία βραδύτερη χρονική κλίμακα, το T_2 αναπαριστά μία

ακόμα πιο βραδεία χρονική κλίμακα, και ούτω καθεξής. Εφόσον η εξάρτηση του u από τα από τα t και

\in συμβαίνει σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, φανταζόμαστε ότι έχουμε ένα ρολόι και επιχειρούμε

να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του u χρησιμοποιώντας τις διαφορετικές κλίμακες του ρολογιού.

Επομένως, αντί να προσδιορίσουμε το u ως συνάρτηση του t , προσδιορίζουμε το u σαν συνάρτηση των

T_0, T_1, T_2, \dots . Γι' αυτό το λόγο, αλλάζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή t στην κυρίαρχη εξίσωση από t

σε T_0, T_1, T_2, \dots τα οποία συμβολίζονται ως εξής :

`Symbolize[T0]; Symbolize[T1]; Symbolize[T2];`

`timeScales = {T0, T1, T2};`

Ορίζουμε τους τελεστές παραγωγίσης ως:

`dt[1][expr_] := Sum[εi D[expr, timeScales[[i + 1]]], {i, 0, maxOrder}];`

`dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. εi_/:i>maxOrder -> 0;`

και μεταχειριζόμαστε τις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 σαν ανεξάρτητες μεταβλητές.

Μετά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να προσδιορίσουμε μία προσεγγιστική λύση για την `DuffingEq`. Στην υποπαράγραφο 2.4.1, χειριζόμαστε την `DuffingEq` στην δεύτερης τάξης μορφή της. Στην 2.4.2, την μετατρέπουμε πρώτα σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πραγματικών τιμών, και στην 2.4.3, την μετατρέπουμε πρώτα σε μια μοναδική εξίσωση μιγαδικών τιμών.

2.4.1 Δεύτερης Τάξης Σύστημα Πραγματικών Τιμών

`DuffingEq = u''[t] + u[t] + ε u[t]3 == 0;`

Για να καθορίσουμε μία πρώτης τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της εξίσωσης `Duffing`, χρησιμοποιούμε τις δύο χρονικές κλίμακες T_0 και T_1 και έτσι έστω

`maxOrder = 1;`

Εκφράζοντας τη χρονική παράγωγο στην `DuffingEq` σε όρους των δύο χρονικών κλιμάκων T_0 και T_1 , έχουμε

`eq241a = DuffingEq /. {u[t] -> u[T0, T1], Derivative[n_][u][t] -> dt[n][u[T0, T1]]}`

`u[T0, T1] + ε u[T0, T1]3 + 2 ε u(1,1)[T0, T1] + u(2,0)[T0, T1] == 0`

Ακολουθώντας, έχουμε αντικαταστήσει την αυθεντική συνήθη διαφορική εξίσωση από μια μερική διαφορική εξίσωση, και φαίνεται ότι, σαν αποτέλεσμα, έχουμε περιπλέξει το πρόβλημα. Αυτό είναι εν μέρει αληθές, αλλά η εμπειρία με αυτή τη μέθοδο έχει δείξει ότι τα μειονεκτήματα του να εισαχθεί αυτή η περιπλοκή μακράν υποσκελίζονται από τα πλεονεκτήματα. Όχι μόνο αυτή η μέθοδος παρέχει μία ενιαία ανάπτυξη, αλλά επίσης παρέχει όλα τα ποικίλα μη-γραμμικά φαινόμενα συντονισμών, όπως θα δούμε σε επόμενα Κεφάλαια.

Αναζητούμε μια ομοιόμορφη δεύτερης τάξης ανάπτυξη της λύσης του `eq241a` στη μορφή

`solRule = u -> (Sum[εi ui[#1, #2], {i, 0, maxOrder}] &);`

Αντικαθιστώντας αυτή την επέκταση στην `eq241a`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα, και αμελώντας όρους υψηλότερης τάξης του ϵ , παίρνουμε :

`eq241b = (eq241a /. solRule // ExpandAll) /. εi_/:i>maxOrder -> 0`

`u0[T0, T1] + ε u0[T0, T1]3 + ε u1[T0, T1] + 2 ε u0(1,1)[T0, T1] + u0(2,0)[T0, T1] + ε u1(2,0)[T0, T1] == 0`

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ϵ στην `eq241a`, αποφέρει

`eqEps = CoefficientList[eq241b[[1]], ε] == 0 // Thread`

`{u0[T0, T1] + u0(2,0)[T0, T1] == 0, u0[T0, T1]3 - u1[T0, T1] + 2 u0(1,1)[T0, T1] + u1(2,0)[T0, T1] == 0}`

Η γενική λύση της `eqEps[[1]]` μπορεί να γραφεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

`sol0 = u0 -> (a[#2] Cos[#1 + β[#2]] &);`

όπου το #1 αντιπροσωπεύει την κλίμακα T_0 και το #2 την κλίμακα T_1 . Η συναρτησιακή εξάρτηση του α και του β από το T_1 δεν είναι γνωστή σε αυτό το επίπεδο προσέγγισης. Καθορίζεται σε επόμενα επίπεδα προσέγγισης μέσω ελαχιστοποίησης των προσωρινών όρων.

Αντικαθιστώντας το `sol0` στην `eqEps[[2]]` και μετακινώντας τα μη-ομογενή τμήματα στη δεξιά πλευρά της παραγόμενης εξίσωσης, δίνει :

$$eq241c = (eqEps[[1, 1]] /. u_0 \rightarrow u_1) - \# \& /@ Reverse[eqEps[[2]] /. sol0 // Simplify]$$

$$u_1[T_0, T_1] + u_1^{(2,0)}[T_0, T_1] == -a[T_1]^3 \text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]]^3 + 2 \text{Sin}[T_0 + \beta[T_1]] a'[T_1] + 2 a[T_1] \text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]] \beta'[T_1]$$

Μετά, αναπτύσσουμε τη δεξιά πλευρά της `eq241c` σε μια σειρά Fourier χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, και παίρνουμε :

$$eq241c[[2]] = eq241c[[2]] // TrigFactor // Expand$$

$$-\frac{3}{4} a[T_1]^3 \text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]] - \frac{1}{4} a[T_1]^3 \text{Cos}[3 T_0 + 3 \beta[T_1]] + 2 \text{Sin}[T_0 + \beta[T_1]] a'[T_1] + 2 a[T_1] \text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]] \beta'[T_1]$$

Για να παράξουμε μία ομοιόμορφη ανάπτυξη, ελαχιστοποιούμε τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους από την `eq241c[[2]]`. Δηλαδή, επιλέγουμε τα $\alpha_1'[T_1]$ και $\beta_1'[T_1]$ να εκμηδενίζουν καθέναν από τους συντελεστές του $\text{Sin}[T_0 + \beta[T_1]]$ και του $\text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]]$. Το αποτέλεσμα είναι :

$$eq241d = Coefficient[eq241c[[2]], \#] == 0 \& /@ \{ \text{Sin}[T_0 + \beta[T_1]], \text{Cos}[T_0 + \beta[T_1]] \}$$

$$\{ 2 a'[T_1] == 0, -\frac{3}{4} a[T_1]^3 + 2 a[T_1] \beta'[T_1] == 0 \}$$

Λύνοντας την `eq241d` για $\alpha_1'[T_1]$ και $\beta_1'[T_1]$ όταν $\alpha_1[T_1] \neq 0$, δίνει

$$SCond = Solve[eq241d, \{ a'[T_1], \beta'[T_1] \}][[1]]$$

$$\{ a'[T_1] \rightarrow 0, \beta'[T_1] \rightarrow \frac{3}{8} a[T_1]^2 \}$$

Η λύση της `SCond[[1]]` είναι $\alpha = \alpha_0 = \text{σταθερά}$. Τότε, η λύση της `SCond[[2]]` είναι

$$betaRule = DSolve[eq241d[[2]] /. a[T_1] \rightarrow a_0, \beta[T_1], T_1][[1]] /. C[1] \rightarrow \beta_0$$

$$\{ \beta[T_1] \rightarrow \frac{3}{8} T_1 a_0^2 + \beta_0 \}$$

Με τις παραπάνω συνθήκες επιλυσιμότητας, η `eq241c` γίνεται

$$eq241e = eq241c /. SCond$$

$$u_1[T_0, T_1] + u_1^{(2,0)}[T_0, T_1] == -\frac{1}{4} a[T_1]^3 \text{Cos}[3 T_0 + 3 \beta[T_1]]$$

Η ειδική λύση της `eq241e` μπορεί να ληφθεί ως

$$sol1 = DSolve[eq241e, u_1[T_0, T_1], \{ T_0, T_1 \}][[1]] /. C[_] \rightarrow (0 \&) // Simplify$$

$$\{ u_1[T_0, T_1] \rightarrow \frac{1}{32} a[T_1]^3 \text{Cos}[3 (T_0 + \beta[T_1])] \}$$

$$eq241f = u[T_0, T_1] == (u[T_0, T_1] /. solRule /. sol0 /. sol1 /. a[T_1] \rightarrow a_0 /. betaRule)$$

$$u[T_0, T_1] == \text{Cos}[T_0 + \frac{3}{8} T_1 a_0^2 + \beta_0] a_0 + \frac{1}{32} \text{Cos}[3 (T_0 + \frac{3}{8} T_1 a_0^2 + \beta_0)] a_0^3$$

όπου α_0 και β_0 είναι σταθερές στις οποίες η τάξη του λάθους καταδεικνύεται. Σε όρους της γνήσιας μεταβλητής t , η `eq241f` μπορεί να εκφραστεί ως

$$u[t] == \text{eq241f}[[2]] /. \{T_0 \rightarrow t, T_1 \rightarrow \epsilon t\}$$

$$u[t] == \text{Cos}\left[t + \frac{3}{8} t \in a_0^2 + \beta_0\right] a_0 + \frac{1}{32} \in \text{Cos}\left[3\left(t + \frac{3}{8} t \in a_0^2 + \beta_0\right)\right] a_0^3$$

σε συμφωνία με την ανάπτυξη που λήφθηκε χρησιμοποιώντας την Τεχνική Lindstedt-Poincaré.

Στις υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις, περιλαμβάνουμε τις κλίμακες T_0, T_1, \dots, T_N αλλά δεν περιλαμβάνουμε τον όρο $O(\epsilon^N)$ σε μία N-τάξης επέκταση.

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των λύσεων των εξισώσεων διαταραχών. Αντί της πραγματικών-τιμών μορφής sol0 , αναπαριστούμε τη λύση της $\text{eqEps}[[1]]$ σε μία μιγαδικών-τιμών μορφή. Δηλαδή

$$\text{sol0} = u_0 \rightarrow (A[\#2] \text{Exp}[I \#1] + \bar{A}[\#2] \text{Exp}[-I \#1] \&);$$

όπου το \bar{A} είναι το μιγαδικό συζυγές του A και

$$\text{ruleA} = \left\{ A \rightarrow \left(\frac{1}{2} a[\#] \text{Exp}[I \beta[\#]] \& \right), \bar{A} \rightarrow \left(\frac{1}{2} a[\#] \text{Exp}[-I \beta[\#]] \& \right) \right\};$$

Αντικαθιστώντας την sol0 στην $\text{eqEps}[[2]]$ και μετακινώντας τους μη-ομογενείς όρους στη δεξιά πλευρά της παραγόμενης εξίσωσης, παίρνουμε :

$$\text{eq241g} = u_1[T_0, T_1] + u_1^{(2,0)}[T_0, T_1] - \# \& / \in (\text{eqEps}[[2]] /. \text{sol0}) // \text{ExpandAll} // \text{Reverse}$$

$$u_1[T_0, T_1] + u_1^{(2,0)}[T_0, T_1] == -E^{2IT_0} A[T_1]^2 - 3E^{IT_0} A[T_1]^2 \bar{A}[T_1] - 3E^{-IT_0} A[T_1] \bar{A}[T_1]^2 - E^{-2IT_0} \bar{A}[T_1]^3 - 2IE^{IT_0} A[T_1] + 2IE^{-IT_0} \bar{A}[T_1]$$

Σημειωτέον ότι οι όροι οι ανάλογοι στην $\text{Exp}[IT_0]$ και στην $\text{Exp}[-IT_0]$ παράγουν προσωρινούς όρους στην ειδική λύση του u_1 . Έτσι, για να παράγουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη, θέτουμε τον συντελεστή καθενιάς από αυτές τις συναρτήσεις ίσο με το μηδέν. Δηλαδή,

$$\text{eq241h} = \text{Coefficient}[\text{eq241g}[[2]], \#] == 0 \& / \in \{\text{Exp}[IT_0], \text{Exp}[-IT_0]\}$$

$$\{-3A[T_1]^2 \bar{A}[T_1] - 2IA'[T_1] == 0, -3A[T_1] \bar{A}[T_1]^2 + 2I\bar{A}'[T_1] == 0\}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις δεν είναι ανεξάρτητες επειδή είναι μιγαδική συζυγής η μία της άλλης. Έτσι, αν μια από αυτές ικανοποιείται, η άλλη ικανοποιείται αυτόματα.

Για να αναλύσουμε τις λύσεις της $\text{eq241h}[[1]]$, την πολλαπλασιάζουμε με το $\text{Exp}[-I\beta[T_1]]$ και αντικαθιστούμε το A με την πολική του μορφή ruleA . Το αποτέλεσμα είναι

$$\text{eq241i} = \text{Expand}[\text{eq241h}[[1, 1]] \text{Exp}[-I\beta[T_1]] /. \text{ruleA}] == 0$$

$$-\frac{3}{8} a[T_1]^3 - IA'[T_1] + a[T_1] \beta'[T_1] == 0$$

Μετά, διαχωρίζουμε τα πραγματικά από τα φανταστικά μέρη της eq241i . Για να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε τον ακόλουθο κανόνα :

$$\text{realRule} = \{\text{Re}[s_] \rightarrow s, \text{Im}[s_] \rightarrow 0\};$$

Χρησιμοποιώντας το realRule , βρίσκουμε ότι το φανταστικό μέρος της eq241i είναι

$$\text{ampEq} = \text{Im}[\text{eq241i}[[1]]] == 0 /. \text{realRule}$$

$$-a'[T_1] == 0$$

το οποίο είναι το κυρίαρχο στη διαμόρφωση του εύρους ταλαντώσεως. Παρομοίως, το πραγματικό μέρος της eq241i είναι

phaseEq = Re[eq241i[[1]]] == 0 /. realRule

$$-\frac{3}{8} a[T_1]^3 + a[T_1] \beta'[T_1] == 0$$

το οποίο είναι το κυρίαρχο στη διαμόρφωση της φάσης. Αυτές οι εξισώσεις διαμόρφωσης είναι σε συμφωνία με αυτές που λήφθηκαν παραπάνω μέσω της έκφρασης της λύσης σε πραγματική μορφή.

Συγκρίνοντας τις μιγαδικών τιμών και πραγματικών τιμών αναπαραστάσεις, το βρίσκουμε πιο συμβατικό να χρησιμοποιούμε την μιγαδικών τιμών μορφή. Επομένως, η μορφή μιγαδικών τιμών χρησιμοποιείται στο υπόλοιπο του βιβλίου.

2.4.2 Πρώτης Τάξης Σύστημα Πραγματικών Τιμών

Έστω $v[t] = u'[t]$ και μετατρέπουμε την DuffingEq στο ακόλουθο σύστημα των δύο πρώτης τάξης εξισώσεων :

$$\text{eq242a} = \{u'[t] == v[t], v'[t] + u[t] == -\epsilon u[t]^3\};$$

Ψάχνουμε μία πρώτης τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq242a με όρους των δύο χρονικών κλιμάκων T_0 και T_1 , στη μορφή :

$$\text{solRule} = \{u \rightarrow (\text{Sum}[e^j u_j[\#1, \#2], \{j, 0, 1\}] \ \&), v \rightarrow (\text{Sum}[e^j v_j[\#1, \#2], \{j, 0, 1\}] \ \&)\};$$

Αντικαθιστώντας τη SolRule στην eq242a, μετατρέποντας την παράγωγο σε σχέση με το t σε όρους των παραγώγων σε σχέση με τα T_0 και T_1 , και αμελώντας όρους τάξης υψηλότερης του ϵ , παίρνουμε

$$\text{eq242b} = (\text{eq242a} /. \{u'[t] \rightarrow \text{dt}[1][u[T_0, T_1]], u[t] \rightarrow u[T_0, T_1]\} /. \text{solRule} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{\#1/\#2} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \{\epsilon u_0^{(0,1)}[T_0, T_1] + u_0^{(1,0)}[T_0, T_1] - \epsilon u_1^{(1,0)}[T_0, T_1] &== v_0[T_0, T_1] + \epsilon v_1[T_0, T_1], \\ u_0[T_0, T_1] - \epsilon u_1[T_0, T_1] - \epsilon v_0^{(0,1)}[T_0, T_1] + v_0^{(1,0)}[T_0, T_1] + \epsilon v_1^{(1,0)}[T_0, T_1] &== -\epsilon u_0[T_0, T_1]^3\} \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ , έχουμε

$$\text{eqEps} = \text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract} \ @\ @ \ \#, \ \epsilon] == 0] \ \& \ /@\ \text{eq242b} // \text{Transpose}$$

$$\begin{aligned} \{ \{-v_0[T_0, T_1] + u_0^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0, u_0[T_0, T_1] + v_0^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0\}, \\ \{-v_1[T_0, T_1] + u_0^{(0,1)}[T_0, T_1] + u_1^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0, \\ u_0[T_0, T_1]^3 + u_1[T_0, T_1] - v_0^{(0,1)}[T_0, T_1] + v_1^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0\} \} \end{aligned}$$

- **Μηδενικής Τάξης Πρόβλημα : Γραμμικό Σύστημα**

Το μηδενικής τάξης πρόβλημα δίνεται από το γραμμικό σύστημα :

$$\text{linearSys} = \#[[1]] \ \& \ /@\ \text{eqEps}[[1]]$$

$$\{-v_0[T_0, T_1] + u_0^{(1,0)}[T_0, T_1], u_0[T_0, T_1] + v_0^{(1,0)}[T_0, T_1]\}$$

Για να προσδιορίσουμε τη λύση αυτού του γραμμικού συστήματος, αναζητούμε μια λύση ανάλογη με το $\text{Exp}[T_0]$, ως εξής :

$$\text{coefList} = \text{E}^{-1 T_0} \text{linearSys} /. \{u_0 \rightarrow (P \text{E}^1 \ \&), v_0 \rightarrow (Q \text{E}^1 \ \&)\} // \text{Expand}$$

$$\{I P - Q, P + I Q\}$$

Μετά, προσδιορίζουμε το μητρώο των συντελεστών ως εξής :

`coefMat = Outer[Coefficient, coefList, {P, Q}]`

`{{I, -1}, {1, I}}`

Για να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του `coefMat`, ορίζουμε τον ακόλουθο κανόνα συζυγίας και το Ερμιτιανό μητρώο :

`conjugateRule = {A -> \bar{A} , \bar{A} -> A, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

`hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose`

Τότε το αριστερό και το δεξί ιδιοδιάνυσμα του `coefMat` δίνονται από :

`leftVec = {1, c1} /. Solve[(hermitian[coefMat].{1, c1})[[1]] == 0, c1][[1]]`

`{1, I}`

`rightVec = {1, c1} /. Solve[(coefMat.{1, c1})[[1]] == 0, c1][[1]]`

`{1, I}`

Για να εκφράσουμε τη λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος, εισάγουμε την ακόλουθη βασική συνάρτηση :

`basicH = A[T1] EI T0;`

Με όρους αυτής της συνάρτησης και του δεξιού ιδιοδιανύσματος, η λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος μπορεί να εκφραστεί με όρους του

`sol0Form = rightVec basicH`

`{EI T0 A[T1], I EI T0 A[T1]}`

και το μιγαδικό συζυγές του ως

`sol0 =`

`{u0 -> Function[{T0, T1}, sol0Form[[1]] + (sol0Form[[1]] /. conjugateRule) // Evaluate],
v0 -> Function[{T0, T1}, sol0Form[[2]] + (sol0Form[[2]] /. conjugateRule) // Evaluate]}`

`{u0 -> Function[{T0, T1}, EI T0 A[T1] - E-I T0 \bar{A} [T1]],`

`v0 -> Function[{T0, T1}, I EI T0 A[T1] - I E-I T0 \bar{A} [T1]]}`

Έχουμε εκφράσει τη λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος σε μορφή συνάρτησης έτσι ώστε οι μερικές της παράγωγοι μπορούν να εκτιμηθούν (υπολογιστούν) άμεσα.

• Πρώτης-Τάξης Πρόβλημα

Αντικαθιστώντας τη μηδενικής τάξης λύση `sol0` στο πρώτης τάξης πρόβλημα `eqEps[[2]]` και μετακινώντας του μη-ομογενείς όρους στις δεξιές πλευρές των παραγομένων εξισώσεων, λαμβάνουμε

`order1Eq =`

`(linearSys /. u_0 -> u1) ==`

`(linearSys /. u_0 -> u1) - (Subtract @@ # & /@ eqEps[[2]] /. sol0 // Expand) // Thread`

`{-v1[T0, T1] + u1(1,0)[T0, T1] == -EI T0 A'[T1] - E-I T0 \bar{A} '[T1],`

`u1[T0, T1] + v1(1,0)[T0, T1] == -E3 I T0 A[T1]3 - 3 EI T0 A[T1]2 \bar{A} [T1] -`

`3 E-I T0 A[T1] \bar{A} [T1]2 - E-3 I T0 \bar{A} [T1]3 - I EI T0 A'[T1] - I E-I T0 \bar{A} '[T1]}`

Ελαχιστοποιώντας τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στην `order1Eq` σημαίνει ότι οι δεξιές τους πλευρές είναι ορθογωνικές σε κάθε λύση του συζυγούς ομογενούς προβλήματος. Για να καθορίσουμε αυτές τις συνθήκες, πρώτα υπολογίζουμε το διάνυσμα-συντελεστή της $\text{Exp}[I T_0]$ ως εξής :

`STerms = Coefficient[#[[2]], Exp[I T0]] & /@ order1Eq`

`{-A'[T1], -3 A[T1]2 Ā[T1] - I A'[T1]}`

Τότε, απαιτούμε αυτό το διάνυσμα να είναι ορθογωνικό στο αριστερό ιδιοδιάνυσμα και λαμβάνουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας :

`SCond = Expand[Conjugate[leftVec].STerms] == 0`

`3 I A[T1]2 Ā[T1] - 2 A'[T1] == 0`

η οποία είναι σε συμφωνία με ότι προήλθε από τη μεταχείριση της δεύτερης-τάξης μορφής της `DuffingEq`. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για το διάνυσμα-συντελεστή του `Exp[-I T0]`, λαμβάνουμε το μιγαδικό συζυγές της `SCond`.

2.4.3 Πρώτης-Τάξης Σύστημα Μιγαδικών Τιμών

Σε αυτή την ενότητα, προσδιορίζουμε μια πρώτης τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `DuffingEq` με το να την μετατρέψουμε πρώτα σε μία πρώτης τάξης εξίσωση σύνθετων τιμών. Γι' αυτό το λόγο, εισάγουμε το μετασχηματισμό :

`transfRule = {u[t] -> ζ[t] + ζ[t], u'[t] -> I (ζ[t] - ζ[t])};`

της οποίας το αντίστροφο είναι

`zetaRule = Solve[transfRule /. Rule -> Equal, {ζ[t], ζ[t]}][[1]]`

`{ζ[t] -> 1/2 (u[t] - I u'[t]), ζ[t] -> 1/2 (u[t] + I u'[t])}`

Συνάγεται από την `DuffingEq` ότι η επιτάχυνση σχετίζεται με τη μετατόπιση σύμφωνα με

`acceleration = Solve[DuffingEq, u''[t]][[1]]`

`{u''[t] -> -u[t] - ε u[t]3}`

Παραγωγίζοντας την `ζ[t]`, `zetaRule[[1]]`, σε σχέση με το t και υποκαθιστώντας για $u[t]$, $u'[t]$ και $u''[t]$ χρησιμοποιώντας την `acceleration` και την `transfRule`, λαμβάνουμε

`eq243a = D[zetaRule[[1]], t] /. acceleration /. transfRule /. Rule -> Equal // ExpandAll`

`ζ'[t] == I ζ[t] + 1/2 I ε ζ[t]3 + 3/2 I ε ζ[t]2 ζ[t] + 3/2 I ε ζ[t] ζ[t]2 + 1/2 I ε ζ[t]3`

Μετά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να προσδιορίσουμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `eq243a` στη μορφή :

`solRule = {ζ -> (Sum[εj ζj, {j, 0, 1}] &), ζ' -> (Sum[εj ζj' , {j, 0, 1}] &)};`

Αντικαθιστώντας αυτή την ανάπτυξη στην `eq243a`, επεκτείνοντας το αποτέλεσμα, και παραμερίζοντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ , έχουμε

`eq243b =`

`(eq243a /. {ζ[t] -> ζ[T0, T1], ζ'[t] -> ζ[T0, T1], ζ'[t] -> dt[[1]][ζ[T0, T1]]} /. solRule // ExpandAll) /. εn_ /; n > 1 -> 0`

`ε ζ0(0,1)[T0, T1] - ζ0(1,0)[T0, T1] - ε ζ1(1,0)[T0, T1] == I ζ0[T0, T1] + 1/2 I ε ζ0[T0, T1]3 -`

`I ε ζ1[T0, T1] - 3/2 I ε ζ0[T0, T1]2 ζ0[T0, T1] - 3/2 I ε ζ0[T0, T1] ζ0[T0, T1]2 + 1/2 I ε ζ0[T0, T1]3`

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην `eq243b`, προκύπτει :

`eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq243b, ε] == 0 // Thread`

$$\left\{ -I \zeta_0[T_0, T_1] + \zeta_0^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} I \zeta_0[T_0, T_1]^2 - I \zeta_1[T_0, T_1] - \frac{3}{2} I \zeta_0[T_0, T_1]^2 \zeta_0[T_0, T_1] - \frac{3}{2} I \zeta_0[T_0, T_1] \zeta_0[T_0, T_1]^2 - \right. \\ \left. \frac{1}{2} I \zeta_0[T_0, T_1]^3 + \zeta_0^{(0,1)}[T_0, T_1] + \zeta_1^{(1,0)}[T_0, T_1] == 0 \right\}$$

Η λύση του μηδενικής τάξης προβλήματος, `eqEps[[1]]`, μπορεί να εκφραστεί ως :

`sol0Form = DSolve[eqEps[[1]], ζ0[T0, T1], {T0, T1}[[1]] /. C[1] -> A`

$$\{\zeta_0[T_0, T_1] \rightarrow E^{IT_0} A[T_1]\}$$

το οποίο το εκφράζουμε σε συναρτησιακή μορφή ως

`sol0 = {ζ0 -> Function[{T0, T1}, sol0Form[[1, 2]] // Evaluate]}`

$$\{\zeta_0 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1\}, E^{IT_0} A[T_1]]\}$$

Για να υπολογίσουμε τα μιγαδικά συζυγή του A και του ζ , ορίζουμε τον κανόνα συζυγίας

$$\text{conjugateRule} = \{A \rightarrow \bar{A}, \bar{A} \rightarrow A, \zeta \rightarrow \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \rightarrow \zeta, \text{Complex}[0, n] \rightarrow \text{Complex}[0, -n]\};$$

Αντικαθιστώντας τη `sol0` στο πρώτης-τάξης πρόβλημα, `eqEps[[2]]`, χρησιμοποιώντας τον `conjugateRule`, και μετακινώντας τους μη-ομογενείς όρους στη δεξιά πλευρά της παραγόμενης εξίσωσης, λαμβάνουμε

`order1Eq = (eqEps[[1, 1]] /. ζ0 -> ζ1) ==`

$$(eqEps[[1, 1]] /. \zeta_0 \rightarrow \zeta_1) - (eqEps[[2, 1]] /. sol0 /. (sol0 /. conjugateRule))$$

$$-I \zeta_1[T_0, T_1] - \zeta_1^{(1,0)}[T_0, T_1] ==$$

$$\frac{1}{2} I E^{2IT_0} A[T_1]^2 - \frac{3}{2} I E^{IT_0} A[T_1]^2 \bar{A}[T_1] + \frac{3}{2} I E^{-IT_0} A[T_1] \bar{A}[T_1]^2 + \frac{1}{2} I E^{-3IT_0} \bar{A}[T_1]^3 - E^{IT_0} A'[T_1]$$

Ελαχιστοποιώντας τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από την `order1Eq`, οδηγούμαστε σε συνθήκη επιλυσιμότητας :

$$\text{SCond} = \text{Coefficient}[\text{order1Eq}[[2]], E^{IT_0}] == 0$$

$$\frac{3}{2} I A[T_1]^2 \bar{A}[T_1] - A'[T_1] == 0$$

σε συμφωνία με ότι λήφθηκε από τη μεταχείριση της δεύτερης-τάξης μορφής της `DuffingEq` όπως και με ότι λήφθηκε από το ότι τη μετασχηματίσαμε πρώτα σε δύο πρώτης-τάξης εξισώσεις πραγματικών τιμών.

2.5 Μεταβολή των Παραμέτρων

Στην επόμενη ενότητα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μεσοστάθμισης (averaging) για να προσδιορίσουμε μια πρώτης τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της εξίσωσης Duffing. Γι' αυτό το λόγο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μεταβολής (variation) των παραμέτρων για να τη μετατρέψουμε σε ένα σύστημα δύο πρώτης-τάξης εξισώσεων. Η εξίσωση Duffing επαναλαμβάνεται εδώ, δηλαδή :

$$\text{DuffingEq} = u''[t] + u[t] + \epsilon u[t]^3 == 0;$$

Όταν $\epsilon = 0$, η λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$\text{usolEq} = u[t] == a \text{Cos}[t + \beta];$$

όπου a και β είναι σταθερές, οι οποίες μερικές φορές αναφέρονται ως παράμετροι. Ακολουθεί από την `usolEq` ότι :

`cond01 = D[usolEq, t]`

`u'[t] == -a Sin[t + β]`

Όταν $\epsilon \neq 0$, θεωρούμε ότι η λύση της `DuffingEq` ακόμα δίνεται από την `usolEq` αλλά με χρονο-μεταβολή των a και β . Δηλαδή,

`tdepRule = {a -> a[t], β -> β[t]};`

και έτσι

`usolEq_t = usolEq /. tdepRule`

`u[t] == a[t] Cos[t + β[t]]`

Με άλλα λόγια, θεωρούμε την `usolEq` σαν μετασχηματισμό από το $u[t]$ στο $a[t]$ και το $\beta[t]$. Γι' αυτό και αυτή η προσέγγιση λέγεται μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων. Χρησιμοποιώντας αυτή τη προσέγγιση, παρατηρούμε ότι έχουμε δύο εξισώσεις, την `DuffingEq` και την `usolEq`, για τους τρεις αγνώστους $u[t]$, $a[t]$ και $\beta[t]$. Έτσι, έχουμε την ελευθερία του να επιβάλλουμε μια τρίτη συνθήκη (τρίτη εξίσωση). Αυτή η συνθήκη είναι αυθαίρετη εκτός του ότι πρέπει να είναι ανεξάρτητη της `DuffingEq` και της `usolEq`. Αυτή η αυθαιρεσία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν πλεονέκτημα, δηλαδή να παράγει έναν απλό και συμβατικό μετασχηματισμό. Από όλες τις πιθανές συνθήκες, επιλέγουμε να επιβάλλουμε τη συνθήκη `cond01`, ως εκ τούτου θεωρώντας ότι η $u[t]$ και η $u'[t]$ έχουν την ίδια μορφή με τη γραμμική περίπτωση. Αυτή η συνθήκη οδηγεί σε έναν συμβατό μετασχηματισμό. Οδηγεί σε ένα σύνολο από πρώτης τάξης παρά από δεύτερης τάξης εξισώσεις για τα $a[t]$ και $\beta[t]$.

Παραγωγίζοντας τη `usolEq` ως προς το t και ενθυμούμενοι το ότι τα a και β είναι συναρτήσεις του t , έχουμε

`cond02 = D[usolEq_t, t]`

`u'[t] == Cos[t + β[t]] a'[t] - a[t] Sin[t + β[t]] (1 + β'[t])`

Συγκρίνοντας την `cond02` με την `cond01`, συμπεραίνουμε ότι

`cond1 = Expand[cond02[[2]] - (cond01[[2]] /. tdepRule)] == 0`

`Cos[t + β[t]] a'[t] - a[t] Sin[t + β[t]] β'[t] == 0`

Παραγωγίζοντας την `cond01` ως προς t , λαμβάνουμε

`cond03 = D[cond01 /. tdepRule, t]`

`u''[t] == -Sin[t + β[t]] a'[t] - a[t] Cos[t + β[t]] (1 + β'[t])`

Αντικαθιστώντας για $u[t]$ και $u''[t]$ από τη `usolEq_t` και την `cond03` στην `DuffingEq`, έχουμε

`cond2 = DuffingEq /. ({usolEq_t, cond03} /. Equal -> Rule) // ExpandAll`

`ε a[t]^3 Cos[t + β[t]]^3 - Sin[t + β[t]] a'[t] - a[t] Cos[t + β[t]] β'[t] == 0`

Λύνοντας την `cond01` και την `cond02` για $a'[t]$ και $\beta'[t]$, λαμβάνουμε τις επιθυμητές δύο πρώτης-τάξης εξισώσεις:

`transformedEq = (Solve[{cond1, cond2}, {a'[t], β'[t]}][[1]] // Simplify) /. Rule -> Equal`

`{a'[t] == ε a[t]^3 Cos[t + β[t]]^3 Sin[t + β[t]], β'[t] == ε a[t]^2 Cos[t + β[t]]^4}`

αν $\epsilon \neq 0$. Έτσι, η αυθεντική δεύτερης τάξης `DuffingEq` για $u[t]$ έχει αντικατασταθεί από δύο πρώτης-τάξης εξισώσεις για $a[t]$ και $\beta[t]$. Δίνουμε έμφαση στο ότι δεν έγιναν προσεγγίσεις στην εξαγωγή της `transformedEq`. Συγκρίνοντας την `transformedEq` με την `DuffingEq`, βρίσκουμε ότι οι

μετασχηματισμένες εξισώσεις είναι πιο μη-γραμμικές από την αυθεντική (αρχική) εξίσωση. Τότε, προκύπτει το ερώτημα, ποιά είναι η τιμή αυτής του μετασχηματισμού; Η απάντηση εξαρτάται από την τιμή του ϵ . Αν το ϵ είναι μικρό, τα μεγάλα τμήματα των a και β αλλάζουν πιο αργά με το t παρά με το u . Αυτό το γεγονός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν πλεονέκτημα αριθμητικά και αναλυτικά. Το αναλυτικό πλεονέκτημα χρησιμοποιείται στη μέθοδο της μεσοστάθμισης (averaging), όπως συζητείται στην επόμενη ενότητα. Αριθμητικά, πλεονεκτεί στο να λύνει τις μετασχηματισμένες εξισώσεις αντί για την αυθεντική εξίσωση, επειδή ένα μεγάλο μέγεθος βήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ολοκλήρωση. Γι' αυτό το λόγο οι αστρονόμοι λύνουν αριθμητικά τις αποκλίνουσες εξισώσεις παρά τις αυθεντικές εξισώσεις. Συνήθως, οι αστρονόμοι και οι ουράνιοι μηχανικοί αναφέρονται σε αυτή την προσέγγιση ως *η ειδική μέθοδος των διαταραχών*.

2.6 Η Μέθοδος της Μεσοστάθμισης

Σε αυτή την ενότητα, προσδιορίζουμε μια πρώτης-τάξης προσέγγιση στις μετασχηματισμένες εξισώσεις, που λήφθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Γι' αυτό το λόγο, ξαναγράφουμε την `transformedEq` ως εξής :

```
ampEq = TrigReduce /@ transformedEq[[1]]
```

$$a'[t] == \frac{1}{3} \left(2 \epsilon a[t]^3 \text{Sin}[2 t + 2 \beta[t]] + \epsilon a[t]^3 \text{Sin}[4 t + 4 \beta[t]] \right)$$

```
phaseEq = TrigReduce /@ transformedEq[[2]]
```

$$\beta'[t] == \frac{1}{3} \left(3 \epsilon a[t]^2 + 4 \epsilon a[t]^2 \text{Cos}[2 t + 2 \beta[t]] + \epsilon a[t]^2 \text{Cos}[4 t + 4 \beta[t]] \right)$$

Τα κύρια τμήματα των a και β είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου αν το ϵ είναι μικρό. Έτσι, αλλάζουν πολύ λίγο κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος π (η περίοδος των κυκλικών συναρτήσεων) και, στην πρώτη προσέγγιση, μπορούν να θεωρηθούν σταθερές στο διάστημα $[0, \pi]$. Έτσι, αντικαθιστούμε το $a[t]$ και το $\beta[t]$ στις δεξιές πλευρές των `ampEq` και `phaseEq` με τα χρονικά ανεξάρτητα a και β , και λαμβάνουμε :

```
ampEq[[2]] = ampEq[[2]] /. (Reverse /@ tdepRule)
```

$$\frac{1}{3} \left(2 a^3 \epsilon \text{Sin}[2 t + 2 \beta] + a^3 \epsilon \text{Sin}[4 t + 4 \beta] \right)$$

```
phaseEq[[2]] = phaseEq[[2]] /. (Reverse /@ tdepRule)
```

$$\frac{1}{3} \left(3 a^2 \epsilon + 4 a^2 \epsilon \text{Cos}[2 t + 2 \beta] + a^2 \epsilon \text{Cos}[4 t + 4 \beta] \right)$$

Μεσοσταθμίζουμε τις δεξιές πλευρές των `ampEq` και `phaseEq` επί του διαστήματος $[0, \pi]$ και λαμβάνουμε :

```
list26a = \frac{1}{\pi} \text{Integrate}[\#, \{t, 0, \pi\}] \& /@ \{ampEq[[2]], phaseEq[[2]]\} // Expand
```

$$\left\{ 0, \frac{3 a^2 \epsilon}{3} \right\}$$

Ακολουθεί από το παραπάνω αποτέλεσμα ότι :

`averagingEq = {a'[t], β'[t]} == list26a // Thread`

$$\left\{ a'[t] == 0, \beta'[t] == \frac{3 a^2 \varepsilon}{\vartheta} \right\}$$

Αυτή η μέθοδος μεσοστάθμισης συνήθως αναφέρεται ως τεχνική Krylov-Bogoliubov ή van der Pol.

Λύνοντας τις μεσοσταθμισμένες εξισώσεις, προκύπτει :

`rule26a = DSolve[averagingEq, {a[t], β[t]}, t][[1]] /. {C[1] -> a0, C[2] -> β0}`

$$\left\{ a[t] \rightarrow a_0, \beta[t] \rightarrow \frac{1}{\vartheta} (3 a^2 t \varepsilon + \vartheta \beta_0) \right\}$$

Αντικαθιστώντας για $a[t]$ και $\beta[t]$ στην `solEq`, λαμβάνουμε, στην πρώτη προσέγγιση, το εξής :

`solEq /. tdepRule /. rule26a /. Cos[arg_] :> Cos[Expand[arg]]`

$$u[t] == \text{Cos} \left[t + \frac{3}{\vartheta} a^2 t \varepsilon + \beta_0 \right] a_0$$

σε συμφωνία με τις λύσεις που λήφθηκαν χρησιμοποιώντας την τεχνική Lindstedt-Poincaré και τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα, σημειώνουμε ότι μπορεί κανείς να φτάσει στα τελικά αποτελέσματα στην `ampEq` και την `phaseEq` χωρίς να περάσει από την διαδικασία μεσοστάθμισης. Οι δεξιές πλευρές της `ampEq` και της `phaseEq` είναι το άθροισμα δύο ομάδων όρων, μιας ομάδας που είναι γραμμικός συνδυασμός γρήγορα μεταβαλλόμενων όρων και μιας ομάδας που είναι γραμμικός συνδυασμός από βραδέως μεταβαλλόμενους όρους. Τότε, στην πρώτη προσέγγιση, το $a'[t]$ στην `ampEq` είναι ίσο με την βραδέως μεταβαλλόμενη ομάδα στη δεξιά του πλευρά, δηλαδή μηδέν. Και, στην πρώτη προσέγγιση, το $\beta'[t]$ στην `phaseEq` είναι ίσο με τη βραδέως μεταβαλλόμενη ομάδα στη

δεξιά του πλευρά, το οποίο ισούται με $\frac{3}{8} \varepsilon a^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ

3.1 Αδιάστατη Εξίσωση Κίνησης

Θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις ενός σωματιδίου μάζας m υπό τη δράση της βαρύτητας και το οποίο συγκρατείται από ένα μη-γραμμικό ελατήριο. Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$\text{eq31a} = m D[x^*[t^*], \{t^*, 2\}] + f[x^*[t^*]] == m g$$

$$f[x^*[t^*]] + m (x^*)''[t^*] == g m$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $f[x^*]$ είναι η δύναμη συγκράτησης του ελατηρίου. Θεωρούμε ότι η $f[x^*]$ είναι μια περιττής τάξης κυβική συνάρτηση του x^* . Δηλαδή,

$$\text{eq31b} = \text{eq31a} /. f[a_] \rightarrow k_1 a + k_3 a^3$$

$$k_1 x^*[t^*] + k_3 x^*[t^*]^3 + m (x^*)''[t^*] == g m$$

Οι θέσεις ισορροπίας $x^* = x_s^*$, μπορεί να ληφθούν μηδενίζοντας τους αδρανειακούς όρους.

Το αποτέλεσμα είναι

$$\text{eq31c} = \text{eq31b} /. x^* \rightarrow (x_s^* \&)$$

$$k_1 (x_s^*)' + k_3 ((x_s^*)')^3 == g m$$

Σε αυτό το Κεφάλαιο, ερευνούμε τις μικρές ταλαντώσεις περί μιας εκ των θέσεων ισορροπίας. Προς τούτο, μετακινούμε αυτή τη θέση ισορροπίας προς την αρχή των αξόνων χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό :

$$\text{xRule} = \{x^* \rightarrow (x_s^* + u^*[\#] \&)\};$$

Αντικαθιστώντας αυτό τον μετασχηματισμό στην eq31b και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ισορροπίας eq31c, λαμβάνουμε :

$$\text{eq31d} = \text{Expand}[\text{Subtract} @@ \text{eq31b} /. \text{xRule}] == 0 /. (\text{eq31c} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule})$$

$$k_1 u^*[t^*] + 3 k_3 ((x_s^*)')^2 u^*[t^*] + 3 k_3 (x_s^*)' u^*[t^*]^2 + k_3 u^*[t^*]^3 + m (u^*)''[t^*] == 0$$

Όπως και πριν, εισάγουμε τις ακόλουθες αδιάστατες ποσότητες :

$$\text{dimenRule} = \{u^* \rightarrow (x_s^* u[\# / T] \&), t^* \rightarrow T t\};$$

στην eq31d και λαμβάνουμε :

$$\text{eq31e} = (\text{eq31d}[[1]] T^2 / (m x_s^*) /. \text{dimenRule} // \text{Expand}) == 0$$

$$\frac{T^2 k_1 u[t]}{m} + \frac{3 T^2 k_3 ((x_s^*)')^2 u[t]}{m} + \frac{3 T^2 k_3 ((x_s^*)')^2 u[t]^2}{m} + \frac{T^2 k_3 ((x_s^*)')^2 u[t]^3}{m} + u''[t] == 0$$

Ξαναγράφουμε την eq31e ως :

$$\text{eq31f} = (\text{Collect}[\text{eq31e}[[1]], u[t]] /. \{u[t]^n \rightarrow \alpha_n u[t]^n\}) == 0$$

$$\alpha_1 u[t] + \alpha_2 u[t]^2 + \alpha_3 u[t]^3 + u''[t] == 0$$

όπου τα α_i δίνονται από :

$$\text{alphas} = (\alpha_n \rightarrow \text{Coefficient}[\text{eq31e}[[1]], u[t]^n]) \& /@ \{1, 2, 3\}$$

$$\left\{ \alpha_1 \rightarrow \frac{T^2 k_1}{m} + \frac{3 T^2 k_3 ((x_s^*)')^2}{m}, \alpha_2 \rightarrow \frac{3 T^2 k_3 ((x_s^*)')^2}{m}, \alpha_3 \rightarrow \frac{T^2 k_3 ((x_s^*)')^2}{m} \right\}$$

Επιλέγουμε το T έτσι ώστε $\alpha_1 = 1$ και έτσι η φυσική συχνότητα είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή

TRule = Solve[α₁ == 1 /. alphas, T] [[2]]

$$\left\{ T \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1 + 3 k_2 ((x_2)^*)^2}} \right\}$$

Επομένως, τα α₂ και α₃ μπορούν να ξαναγραφούν ως :

alphas = alphas /. TRule // Rest

$$\left\{ \alpha_2 \rightarrow \frac{3 k_2 ((x_2)^*)^2}{k_1 + 3 k_2 ((x_2)^*)^2}, \alpha_3 \rightarrow \frac{k_3 ((x_2)^*)^2}{k_1 + 3 k_2 ((x_2)^*)^2} \right\}$$

Με το α₁ ίσο με τη μονάδα, η eq31f γίνεται

eq31g = eq31f /. α₁ -> 1

$$u[t] + \alpha_2 u[t]^2 + \alpha_3 u[t]^3 + u''[t] == 0$$

Σε αντίθεση με την DuffingEq, η eq31g περιέχει τόσο έναν τετραγωνικό όσο και έναν κυβικό όρο.

Στην επόμενη ενότητα, προσδιορίζουμε μια δεύτερης τάξης απ' ευθείας ανάπτυξη των λύσεων της eq31g για μικρά αλλά πεπερασμένα εύρη ταλαντώσεων. Στην ενότητα 3.3, προσδιορίζουμε μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη χρησιμοποιώντας την τεχνική Lindstedt-Poincaré. Στην ενότητα 3.4, προσδιορίζουμε μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Στην ενότητα 3.5, δείχνουμε ότι η πρώτη προσέγγιση που λήφθηκε με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης, οδηγεί σε μια μη-πλήρη λύση. Στην ενότητα 3.6, εισάγουμε τη γενικευμένη μέθοδο της μεσοστάθμισης και λαμβάνουμε μια ομοιόμορφη δεύτερης τάξης ανάπτυξη. Τέλος, στις ενότητες 3.7 και 3.8, εισάγουμε την τεχνική Krylov-Bogoliubov-Mitropolski και τη μέθοδο των κανονικών μορφών, αντιστοίχως.

3.2 Απ' ευθείας Ανάπτυξη

Για να εκτελέσουμε μια απ' ευθείας ανάπτυξη για μικρά αλλά πεπερασμένα εύρη ταλαντώσεων των λύσεων της eq31g, πρέπει να εισάγουμε μια μικρή παράμετρο ε σαν μια λογιστική παράμετρο. Με όρους αυτής της παραμέτρου, αναζητούμε μια τρίτης-τάξης ανάπτυξη της μορφής :

$$u \text{ExpRule}[\text{maxOrder}_] := u \rightarrow (\text{Sum}[\epsilon^i u_i[\#], \{i, 1, \text{maxOrder}\}]) \&$$

όπου maxOrder είναι η τάξη της ανάπτυξης που αναζητήθηκε. Για τα επόμενα, ορίζουμε maxOrder = 3 για μια ανάπτυξη της τάξης τρία. Ξεκάθαρα, το ε είναι ένα μέτρο του εύρους της ταλάντωσης και μπορεί να τεθεί ίσο με το 1 στην τελική λύση, αν το εύρος ληφθεί μικρό, όπως περιγράφεται παρακάτω. Αντικαθιστώντας αυτή την ανάπτυξη στην eq31g, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε³, έχουμε

$$\text{eq32a} = (\text{eq31g} /. u \text{ExpRule}[3] // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{_/:>3} \rightarrow 0$$

$$\epsilon u_1[t] + \epsilon^2 \alpha_2 u_1[t]^2 - \epsilon^3 \alpha_3 u_1[t]^3 + \epsilon^2 u_2[t] + 2 \epsilon^3 \alpha_2 u_1[t] u_2[t] + \epsilon^3 u_3[t] + \epsilon u_1''[t] + \epsilon^2 u_2''[t] + \epsilon^3 u_3''[t] == 0$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων με του ε, στην eq32a, προκύπτει

$$\text{eqEps} = \text{Table}[\text{Coefficient}[\text{eq32a}[[1]], \epsilon^i] == 0, \{i, 3\}]$$

$$\{u_1[t] + u_1''[t] == 0, \alpha_2 u_1[t]^2 - u_2[t] - u_2''[t] == 0, \alpha_3 u_1[t]^3 - 2 \alpha_2 u_1[t] u_2[t] - u_3[t] + u_3''[t] == 0\}$$

το οποίο μπορεί να λυθεί ακολουθώντας ως προς u₁, u₂ και u₃.

Η γενική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, eqEps[[1]], μπορεί να εκφραστεί ως

```
sol1 = DSolve[{eqEps[[1]], u1[0] == a Cos[β], u1'[0] == -a Sin[β]}, u1[t], t][[1]] // Simplify
```

```
{u1[t] -> a Cos[t + β]}
```

όπου a και β είναι σταθερές. Αντικαθιστώντας το $sol1$, $u_1[t]$, στην δεύτερης τάξης εξίσωση, $eqEps[[2]]$, και λύνοντας την παραγόμενη εξίσωση ως προς $u_2[t]$, λαμβάνουμε

```
sol2 = DSolve[eqEps[[2]] /. sol1, u2[t], t][[1]] /. C[_] -> 0 // Simplify
```

```
{u2[t] -> 1/6 a^2 (-3 + Cos[2 (t + β)]) α2}
```

Όπως και πριν, δεν περιλαμβάνουμε τη λύση του ομογενούς προβλήματος ως προς $u_2[t]$.

Αντικαθιστώντας τις $sol1$ και $sol2$ στην τρίτης-τάξης εξίσωση, $eqEps[[3]]$, και λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς $u_3[t]$, έχουμε :

```
sol3 = DSolve[eqEps[[3]] /. sol1 /. sol2, u3[t], t][[1]] /. C[_] -> 0 // Simplify
```

```
{u3[t] -> 1/36 a^3 (2 (10 Cos[t + β] + Cos[3 (t + β)] + 20 t Sin[t + β]) α2^2 + 3 (-6 Cos[t + β] + Cos[3 (t + β)] - 12 t Sin[t + β]) α3)}
```

Απλά θέτοντας $C[_] \rightarrow 0$, αυτό δεν απομάκρυνε όλες τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης σε αυτή την περίπτωση. Επομένως, το εκκαθαρίζουμε άλλη μια φορά, και λαμβάνουμε

```
sol3 = sol3 /. Cos[t + _] -> 0 // ExpandAll
```

```
{u3[t] -> 1/48 a^3 Cos[3 t + 3 β] α2^2 + 5/12 a^3 t Sin[t + β] α2^2 + 1/32 a^3 Cos[3 t + 3 β] α3 - 3/8 a^3 t Sin[t + β] α3}
```

Συνδυάζοντας τις πρώτης-, δεύτερης- και τρίτης- τάξης λύσεις, λαμβάνουμε, στην τρίτη προσέγγιση, ότι

```
sol = u[t] == (u[t] /. uExpRule[3] /. Flatten[{sol1, sol2, sol3}])
```

```
u[t] == a ε Cos[t + β] + 1/6 a^2 ε^2 (-3 + Cos[2 (t + β)]) α2 + ε^3 (1/48 a^3 Cos[3 t + 3 β] α2^2 + 5/12 a^3 t Sin[t + β] α2^2 + 1/32 a^3 Cos[3 t + 3 β] α3 - 3/8 a^3 t Sin[t + β] α3)
```

Σημειωτέον ότι η εξάρτηση του u από το ϵ και το a είναι στο συνδυασμό ϵa . Έτσι, μπορεί κανείς να θέσει $\epsilon = 1$ και να θεωρήσει το a ως την παράμετρο διαταραχής.

Η απ' ευθείας (straightforward) ανάπτυξη sol καταρρέει για $t \geq O(\epsilon^{-1} a^{-1})$ επειδή ο τρίτης τάξης όρος είναι της ίδιας τάξης ή μεγαλύτερης από τον δεύτερης τάξης όρο λόγω της παρουσίας του μικτού-προσωρινού όρου. Μετά, χρησιμοποιούμε την τεχνική Lindstedt – Poincaré για να προσδιορίσουμε μια τρίτης-τάξης ομοιόμορφη λύση.

3.3 Η Τεχνική Lindstedt – Poincaré

Για να εφαρμόσουμε την τεχνική Lindstedt – Poincaré στην $eq31g$, εισάγουμε τον μετασχηματισμό $\tau = \omega t$ και την ξαναγράφουμε ως :

```
eq33a = eq31g /. u -> (u[ω #] &) /. t -> τ / ω
```

```
u[τ] + α2 u[τ]^2 + α3 u[τ]^3 + ω^2 u''[τ] == 0
```

Για να καθορίσουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη της τάξης $maxOrder$ της λύσης της $eq33a$, αναπτύσσουμε το ω και το $u[\tau]$ σε δυνάμεις του ϵ :

```
omgRule[maxOrder_] := ω -> 1 + Sum[ε^i ω_i, {i, maxOrder}]
```

```
uExpRule[maxOrder_] := u -> (Sum[ε^i u_i[#], {i, maxOrder + 1}] &)
```


Όπως συζητήθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, ο πρώτος όρος στην ανάπτυξη του ω λαμβάνεται ως η γραμμική φυσική συχνότητα του συστήματος, η οποία ισούται με 1 σε αυτή την περίπτωση. Σημειωτέον ότι η τάξη της ανάπτυξης για το u είναι μεγαλύτερη από αυτή του ω και της ομοιόμορφης ανάπτυξης που απαιτείται. Όπως συζητείται κάτωθι, απαλείφουμε τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από την εξίσωση τάξης $\maxOrder + 1$ αλλά δεν περιλαμβάνουμε τη λύση του στην προκύπτουσα εξίσωση της ανάπτυξης.

Για μια ομοιόμορφη δεύτερης τάξης ανάπτυξη, έστω

`maxOrder = 2;`

Αντικαθιστώντας τις αναπτύξεις των u και ω στην eq33a, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε

`eq33b = (eq33a /. {uExpRule[maxOrder], omgRule[maxOrder]} // ExpandAll) /. $\epsilon^{n./n > \maxOrder - 1} \rightarrow 0$`

$$\epsilon u_1[\tau] + \epsilon^2 \alpha_2 u_1[\tau]^2 + \epsilon^3 \alpha_3 u_1[\tau]^3 - \epsilon^2 u_2[\tau] + 2 \epsilon^3 \alpha_2 u_1[\tau] u_2[\tau] + \epsilon^3 u_2[\tau] + \epsilon u_1''[\tau] + 2 \epsilon^2 \omega_1 u_1''[\tau] - \epsilon^2 \omega_1^2 u_1''[\tau] + 2 \epsilon^2 \omega_2 u_1''[\tau] + \epsilon^2 u_2''[\tau] + 2 \epsilon^2 \omega_1 u_2''[\tau] + \epsilon^2 u_3''[\tau] == 0$$

`eqEps = Table[Coefficient[eq33b[[1]], ϵ^i] == 0, {i, 3}]`

$$\{u_1[\tau] + u_1''[\tau] == 0, \alpha_2 u_1[\tau]^2 + u_2[\tau] + 2 \omega_1 u_1''[\tau] + u_2''[\tau] == 0, \alpha_3 u_1[\tau]^3 + 2 \alpha_2 u_1[\tau] u_2[\tau] + u_2[\tau] + \omega_1^2 u_1''[\tau] + 2 \omega_2 u_1''[\tau] + 2 \omega_1 u_2''[\tau] + u_3''[\tau] == 0\}$$

Η γενική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, eqEps[[1]], μπορεί να εκφραστεί ως

`sol1 = DSolve[{eqEps[[1]], u1[0] == a Cos[β], u1'[0] == -a Sin[β]}, u1, τ][[1]]`

$$\{u_1 \rightarrow (a \cos[\beta] \cos[\tau] - a \sin[\beta] \sin[\tau]) \epsilon\}$$

όπου a και β είναι σταθερές. Αντί του να χρησιμοποιήσουμε το $u_1[\tau]$, χρησιμοποιούμε το u_1 στο δεύτερο όρισμα στο DSolve ώστε το sol1 να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στους όρους που εμπλέκονται με τις παραγώγους.

Υποκαθιστώντας τα sol1, $u_1[\tau]$, στην δεύτερης τάξης εξίσωση, την eqEps[[2]], και μετακινώντας τους μη-ομογενείς όρους στο δεξί μέλος της παραγόμενης εξίσωσης, λαμβάνουμε

`eq33c = u2[\tau] + u2''[\tau] - # & /@ Reverse[eqEps[[2]]] /. sol1 // Simplify`

$$u_2[\tau] + u_2''[\tau] == -a^2 \cos[\beta + \tau]^2 \alpha_2 + 2 a \cos[\beta + \tau] \omega_1$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος της eq33c σε μια σειρά Fourier χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, προκύπτει

`eq33c[[2]] = eq33c[[2]] // TrigReduce`

$$\frac{1}{2} \{-a^2 \alpha_2 - a^2 \cos[2\beta + 2\tau] \alpha_2 + 4 a \cos[\beta + \tau] \omega_1\}$$

Για την απαλοιφή των όρων $\cos[\beta + \tau]$ και $\sin[\beta + \tau]$, απαιτείται να τεθεί $\omega_1 = 0$. Τότε, η ειδική λύση της eq33c μπορεί να εκφραστεί ως :

`sol2 = DSolve[eq33c /. $\omega_1 \rightarrow 0$, u2[\tau], τ][[1]] /. C[_] -> 0 // Simplify`

$$\{u_2[\tau] \rightarrow \frac{1}{6} a^2 (-3 + \cos[2(\beta + \tau)]) \alpha_2\}$$

ή σε μορφή (format) καθαρής συνάρτησης, ως :

`sol21 = u2 -> Function[\tau, sol2[[1, 2]] // Evaluate]`

$$u_2 \rightarrow \text{Function}[\tau, \frac{1}{6} a^2 (-3 + \cos[2(\beta + \tau)]) \alpha_2]$$

Αντικαθιστώντας τα sol1 και sol21 στην τρίτης τάξης εξίσωση, eqEps[[3]], και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\omega_1 = 0$, λαμβάνουμε :

$$\text{eq33d} = u_3[\tau] + u_3''[\tau] - \# \& / @ \text{Reverse}[\text{eqEps}[[3]] / . \omega_1 \rightarrow 0 / . \text{sol1} / . \text{sol21} // \text{Simplify}]$$

$$u_3[\tau] + u_3''[\tau] == -\frac{1}{3} a^3 \text{Cos}[\beta + \tau] (-3 + \text{Cos}[2(\beta + \tau)]) \alpha_2^2 - a^3 \text{Cos}[\beta + \tau]^2 \alpha_2 + 2 a \text{Cos}[\beta + \tau] \omega_2$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος της eq33d σε μια σειρά Fourier χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, έχουμε :

$$\text{eq33d}[[2]] = \text{eq33d}[[2]] // \text{TrigReduce}$$

$$\frac{1}{12}$$

$$[10 a^3 \text{Cos}[\beta + \tau] \alpha_2^2 - 2 a^3 \text{Cos}[3\beta + 3\tau] \alpha_2^2 - 9 a^3 \text{Cos}[\beta + \tau] \alpha_2 - 3 a^3 \text{Cos}[3\beta + 3\tau] \alpha_2 + 24 a \text{Cos}[\beta + \tau] \omega_2]$$

Η απαλοιφή των όρων που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από την eq33d[[2]], απαιτεί ότι :

$$\text{omg2Rule} = \text{Solve}[\text{Coefficient}[\text{eq33d}[[2]], \text{Cos}[\tau + \beta]] == 0, \omega_2][[1]] // \text{ExpandAll}$$

$$\left\{ \omega_2 \rightarrow -\frac{5}{12} a^2 \alpha_2^2 + \frac{3 a^2 \alpha_3}{\varepsilon} \right\}$$

Όπως συζητήθηκε παραπάνω, για μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη, δεν χρειάζεται να λύσουμε ως προς $u_3[\tau]$. Συνδυάζοντας τις πρώτης- με τις δεύτερης- τάξης λύσεις, λαμβάνουμε, στη δεύτερη προσέγγιση, ότι

$$u[\tau] == (u[\tau] / . \text{uExprRule}[2] / . \text{sol1} / . \text{sol21} // \text{Simplify} // \text{Expand})$$

$$u[\tau] == a \varepsilon \text{Cos}[\beta + \tau] - \frac{1}{2} a^2 \varepsilon^2 \alpha_2 + \frac{1}{6} a^2 \varepsilon^2 \text{Cos}[2(\beta + \tau)] \alpha_2 + \varepsilon^3 u_3[\tau]$$

όπου

$$\tau == \omega t / . \text{omgRule}[2] / . \text{omg2Rule} / . \omega_1 \rightarrow 0$$

$$\tau == t \left(1 + \varepsilon^2 \left(-\frac{5}{12} a^2 \alpha_2^2 + \frac{3 a^2 \alpha_3}{\varepsilon} \right) \right)$$

Η παραπάνω ανάπτυξη είναι ομοιόμορφη στη δεύτερη τάξη επειδή οι προσωρινοί όροι δεν εμφανίζονται σε αυτή και ο διορθωτικός όρος (ο όρος ο ανάλογος με το ε^3) είναι μικρός εν συγκρίσει με τον πρώτο όρο.

Επιστρέφοντας στην sol στην προηγούμενη ενότητα, σημειώνουμε ότι ο πρώτος προσωρινός όρος εμφανίζεται με $O(\varepsilon^3)$. Επομένως, θα μπορούσαμε να είχαμε συμπεράνει ότι $\omega_1 = 0$ προτού εκτελέσουμε την ανάπτυξη επειδή ο όρος $\in \omega_1$ στον omgRule[2] δημιουργεί προσωρινούς όρους σε $O(\varepsilon^2)$ και όχι σε $O(\varepsilon^3)$, όπως χρειαζόταν για την απαλοιφή του προσωρινού όρου από την sol.

3.4 Η Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να ασχοληθούμε άμεσα με την eq31g της υποενότητας 3.4.1, με τις αντίστοιχες πρώτης-τάξης εξισώσεις πραγματικών τιμών της eq31g στην υποενότητα 3.4.2, και με την αντίστοιχη πρώτης-τάξης μιγαδικών τιμών εξίσωση της eq31g στην υποενότητα 3.4.3. Για να λάβουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, χρειαζόμαστε τις τρεις χρονικές κλίμακες $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, και $T_2 = \varepsilon^2 t$, τις οποίες συμβολίζουμε ως εξής :

Needs["Utilities`Notation`"]

Symbolize[T₀]; Symbolize[T₁]; Symbolize[T₂];

και ταξινομούμε ως εξής :

`timeScales = {T0, T1, T2};`

Σε όρους των χρονικών κλιμάκων T_n , οι χρονικές παράγωγοι γίνονται

`dt[1][expr_] := Sum[ε1D[expr, timeScales[[i+1]]], {i, 0, maxOrder}];`

`dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. ε1 /: i > maxOrder -> 0;`

Για μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη, έστω

`maxOrder = 2;`

Για να παραστήσουμε κάποιες από τις εκφράσεις κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον ακόλουθο κανόνα εμφάνισης :

`displayRule = {Derivative[a_][u_][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D2ε[[1]]-1 &, {a}], u_],
Derivative[a_][A][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D2ε[[1]] &, {a}], A],
Derivative[a_][Ā][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D2ε[[1]] &, {a}], Ā],
u_[_] -> u_, A[_] -> A, Ā[_] -> Ā};`

3.4.1 Δεύτερης-Τάξης Σύστημα Πραγματικών Τιμών

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της παραγώγου, μετατρέπουμε την eq31g σε μία μερική διαφορική εξίσωση

`eq341a = eq31g /. {u[t] -> u[T0, T1, T2], Derivative[n_][u][t] -> dt[n][u[T0, T1, T2]]}`

$$u[T_0, T_1, T_2] + \alpha_2 u[T_0, T_1, T_2]^2 + \alpha_3 u[T_0, T_1, T_2]^3 + \epsilon^2 u^{(0,2,0)}[T_0, T_1, T_2] + 2\epsilon^2 u^{(1,0,1)}[T_0, T_1, T_2] + 2\epsilon u^{(1,1,0)}[T_0, T_1, T_2] + u^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] = 0$$

Ξανά, για να καθορίσουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη της τάξης \maxOrder , αναπτύσσουμε το u στην τάξη $\maxOrder + 1$, απαλείφουμε τους προσωρινούς όρους από την εξίσωση $\maxOrder + 1$, αλλά δεν περιλαμβάνουμε τη λύση της στην τελική προσεγγιστική λύση. Έτσι, αναζητούμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq341a της μορφής :

`solRule = u -> (Sum[εi ui [#1, #2, #3], {i, maxOrder + 1}] &);`

Αντικαθιστώντας αυτή την ανάπτυξη στην eq341a, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , έχουμε

`eq341b = (eq341a /. solRule // ExpandAll) /. εn /: n > maxOrder+1 -> 0`

$$\epsilon u_1[T_0, T_1, T_2] + \epsilon^2 \alpha_2 u_1[T_0, T_1, T_2]^2 + \epsilon^3 \alpha_3 u_1[T_0, T_1, T_2]^3 + \epsilon^2 u_2[T_0, T_1, T_2] + 2\epsilon^3 \alpha_2 u_1[T_0, T_1, T_2] u_2[T_0, T_1, T_2] - \epsilon^3 u_3[T_0, T_1, T_2] + \epsilon^3 u_1^{(0,2,0)}[T_0, T_1, T_2] + 2\epsilon^3 u_1^{(1,0,1)}[T_0, T_1, T_2] + 2\epsilon^2 u_1^{(1,1,0)}[T_0, T_1, T_2] - 2\epsilon^3 u_2^{(1,1,0)}[T_0, T_1, T_2] + \epsilon u_1^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] + \epsilon^2 u_2^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] + \epsilon^3 u_3^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] = 0$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ιδίων δυνάμεων με του ϵ στην eq341b, λαμβάνουμε

`eqEps = CoefficientList[eq341b[[1]], ε] == 0 // Thread // Rest`

$$\begin{aligned} & \{u_1[T_0, T_1, T_2] + u_1^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] == 0, \\ & \alpha_2 u_1[T_0, T_1, T_2]^2 + u_2[T_0, T_1, T_2] + 2 u_1^{(1,1,0)}[T_0, T_1, T_2] + u_2^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] == 0, \\ & \alpha_3 u_1[T_0, T_1, T_2]^3 + 2 \alpha_2 u_1[T_0, T_1, T_2] u_2[T_0, T_1, T_2] - u_3[T_0, T_1, T_2] + \\ & \quad u_1^{(0,2,0)}[T_0, T_1, T_2] + 2 u_1^{(1,0,1)}[T_0, T_1, T_2] + 2 u_2^{(1,1,0)}[T_0, T_1, T_2] + u_3^{(2,0,0)}[T_0, T_1, T_2] == 0\} \end{aligned}$$

Για να τοποθετήσουμε το γραμμικό τελεστή στη μια πλευρά και τους υπόλοιπους όρους στην άλλη, ορίζουμε

`eqOrder[i_] := (eqEps[[1, 1]] /. u1 -> ui) - # & /@ eqEps[[i]] // Reverse`

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

Array[eqOrder, 3] /. displayRule // TableForm

$$D_0^2 u_1 + u_1 == 0$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 == -2 (D_0 D_1 u_1) - u_1^2 \alpha_2$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 == -2 (D_0 D_1 u_2) - D_1^2 u_1 - 2 (D_0 D_2 u_1) - 2 u_1 u_2 \alpha_2 - u_1^3 \alpha_3$$

όπου

$$D_n u_i = \partial u_i [T_0, T_1, T_2] / \partial T_n$$

Η γενική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, eqOrder[1], μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\text{sol1} = \{u_1 \rightarrow (A[\#2, \#3] \text{Exp}[I \#1] + \bar{A}[\#2, \#3] \text{Exp}[-I \#1] \&)\};$$

όπου \bar{A} είναι ο συζυγής μιγαδικός του A οριζόμενος από τον κανόνα συζυγίας :

$$\text{conjugateRule} = \{A \rightarrow \bar{A}, \bar{A} \rightarrow A, \text{Complex}[0, n_] \rightarrow \text{Complex}[0, -n]\};$$

Τότε, η δεύτερης-τάξης εξίσωση, eqOrder[2], γίνεται

$$\text{eq341c} = \text{eqOrder}[2] /. \text{sol1} // \text{ExpandAll};$$

$$\text{eq341c} /. \text{displayRule}$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 == -2 I E^{IT_0} (D_1 A) + 2 I E^{-IT_0} (D_1 \bar{A}) - A^2 E^{2IT_0} \alpha_2 - 2 A \bar{A} \alpha_2 - E^{-2IT_0} \bar{A}^2 \alpha_2$$

Απαλείφοντας τον όρο E^{IT_0} που παράγει προσωρινούς όρους στην u_2 από το δεξί μέλος της eq341c, απαιτεί ότι :

$$\text{SCond1} = \text{Coefficient}[\text{eq341c}[[2]], \text{Exp}[I T_0]] == 0$$

$$-2 I A^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0$$

ή

$$\text{SCond1Rule} = \text{Solve}[\text{SCond1}, A^{(1,0)} [T_1, T_2]] [[1]]$$

$$\{A^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Η απαλοιφή του όρου E^{IT_0} που παράγει προσωρινούς όρους στο u_2 από το δεξί μέλος της eq341c δίνει το συζυγές μιγαδικό του SCond1Rule, δηλαδή :

$$\text{ccSCond1Rule} = \text{SCond1Rule} /. \text{conjugateRule}$$

$$\{\bar{A}^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Συνεπάγεται από την SCond1 ότι $A = A[T_2]$. Υποκαθιστώντας τις συνθήκες επιλυσιμότητας στην eq341c, έχουμε

$$\text{eq341d} = \text{eq341c} /. \text{SCond1Rule} /. \text{ccSCond1Rule}$$

$$u_2 [T_0, T_1, T_2] + u_2^{(2,0,0)} [T_0, T_1, T_2] == -E^{2IT_0} A [T_1, T_2]^2 \alpha_2 - 2 A [T_1, T_2] \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2] - E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2]^2$$

Η ειδική λύση της eq341d μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας το DSolve. Το αποτέλεσμα είναι :

$$u_2 \text{Sol} = \text{DSolve}[\text{eq341d}, u_2 [T_0, T_1, T_2], \text{timeScales}] [[1]] /. \text{C}[_] \rightarrow (0 \&) // \text{TrigToExp} // \text{ExpandAll}$$

$$\{u_2 [T_0, T_1, T_2] \rightarrow \frac{1}{3} E^{2IT_0} A [T_1, T_2]^2 \alpha_2 - 2 A [T_1, T_2] \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2] + \frac{1}{3} E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2]^2\}$$

του οποίου το δεξί μέλος μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας για να εκφράσουμε τη u_2 σε μια μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

$$\text{sol2} = \{u_2 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, u_2 \text{Sol}[[1, 2]] // \text{Evaluate}]\}$$

$$\{u_2 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{1}{3} E^{2IT_0} A [T_1, T_2]^2 \alpha_2 - 2 A [T_1, T_2] \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2] - \frac{1}{3} E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A} [T_1, T_2]^2]\}$$

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις, sol1 και sol2, στην τρίτης-τάξης εξίσωση, eqOrder[3], λαμβάνουμε :

```
eq341e = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;
eq341e /. displayRule
```

$$\alpha_0^2 u_3 - u_2 == -E^{i T_0} (D_1^2 A) - E^{-i T_0} (D_1^2 \bar{A}) - 2 I E^{i T_0} (D_2 A) - 2 I E^{-i T_0} (D_2 \bar{A}) - \frac{3}{3} I A E^{2 i T_0} (D_1 A) \alpha_2 + \frac{3}{3} I E^{-2 i T_0} \bar{A} (D_1 \bar{A}) \alpha_2 - \frac{2}{3} A^2 E^{i T_0} \alpha_2^2 - \frac{10}{3} A^2 E^{i T_0} \bar{A} \alpha_2^2 + \frac{10}{3} A E^{-i T_0} \bar{A}^2 \alpha_2^2 - \frac{2}{3} E^{-2 i T_0} \bar{A}^2 \alpha_2^2 - A^3 E^{2 i T_0} \alpha_2 - 3 A^2 E^{i T_0} \bar{A} \alpha_2 - 3 A E^{-i T_0} \bar{A}^2 \alpha_2 - E^{-2 i T_0} \bar{A}^3 \alpha_2$$

Για την απαλοιφή των όρων που παράγουν προσωρινούς όρους στη u_3 από το δεξί μέλος της eq341e, απαιτείται όπως :

```
SCond2 = Coefficient[eq341e[[2]], Exp[I T_0]] == 0
```

$$\frac{10}{3} A [T_1, T_2]^2 \alpha_2^2 \bar{A} [T_1, T_2] - 3 A [T_1, T_2]^2 \alpha_3 \bar{A} [T_1, T_2] - 2 I A^{(0,1)} [T_1, T_2] - A^{(2,0)} [T_1, T_2] == 0$$

Χρησιμοποιώντας τον SCond1Rule και το γεγονός ότι $A = A/T_2$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την SCond2 ως εξής :

```
SCond = SCond2 /. D[SCond1Rule, T_1] /. {A -> (A[#2] &), \bar{A} -> (\bar{A}[#2] &)}
```

$$\frac{10}{3} A [T_2]^2 \alpha_2^2 \bar{A} [T_2] - 3 A [T_2]^2 \alpha_3 \bar{A} [T_2] - 2 I A' [T_2] == 0$$

Εκφράζοντας το A στην πολική μορφή

$$\text{ruleA} = \left\{ A \rightarrow \left(\frac{1}{2} a[\#] \text{Exp}[I \beta[\#]] \& \right), \bar{A} \rightarrow \left(\frac{1}{2} a[\#] \text{Exp}[-I \beta[\#]] \& \right) \right\};$$

όπου a και β είναι πραγματικοί και χρησιμοποιώντας τον κανόνα

```
realRule = (Re[s_] -> s, Im[s_] -> 0);
```

ξαναγράφουμε το SCond σαν

```
eq341f = SCond[[1]] Exp[-I \beta[T_2]] /. ruleA // Expand
```

$$\frac{5}{12} a [T_2]^3 \alpha_2^2 - \frac{3}{3} a [T_2]^3 \alpha_3 - I a' [T_2] - a [T_2] \beta' [T_2]$$

Διαχωρίζοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά τμήματα στην eq341f, λαμβάνουμε τις *εξισώσεις διαμόρφωσης* :

```
ampEq = Im[eq341f] == 0 /. realRule
```

$$-a' [T_2] == 0$$

```
phaseEq = Re[eq341f] == 0 /. realRule
```

$$\frac{5}{12} a [T_2]^3 \alpha_2^2 - \frac{3}{3} a [T_2]^3 \alpha_3 + a [T_2] \beta' [T_2] == 0$$

Η λύση της ampEq είναι $a = a_0 = \text{σταθερό}$. Τότε, αν $a_0 \neq 0$, η λύση της phaseEq είναι :

```
betaRule = DSolve[phaseEq /. a[T_2] -> a_0, \beta[T_2], T_2][[1]] /. C[1] -> \beta_0 // ExpandAll
```

$$\left\{ \beta [T_2] \rightarrow -\frac{5}{12} T_2 a_0^2 \alpha_2^2 + \frac{3}{3} T_2 a_0^2 \alpha_3 + \beta_0 \right\}$$

όπου β_0 είναι μια σταθερά. Αντικαθιστώντας τον ruleA στην sol1 και τη sol2 και ενθυμούμενοι ότι

$T_0 = t$ και $T_2 = e^{i t}$, λαμβάνουμε, στη δεύτερη προσέγγιση, ότι :

```
u[t] ==
```

```
((u[T_0, T_1, T_2] /. solRule /. sol1 /. sol2 /. e^3 -> 0 /. {A[___] -> A[T_2], \bar{A}[___] -> \bar{A}[T_2]} /. ruleA // ExpToTrig) /. {a[T_2] -> a_0} /. betaRule /. {T_0 -> t, T_2 -> e^i t} /. Cos[arg_] -> Cos[Collect[arg, t]])
```

$$u[t] == e \text{Cos} \left[t \left(1 - \frac{5}{12} e^2 a_0^2 \alpha_2^2 + \frac{3}{3} e^2 a_0^2 \alpha_3 \right) + \beta_0 \right] a_0 - \frac{1}{2} e^2 a_0^2 \alpha_2 + \frac{1}{6} e^2 \text{Cos} \left[t \left(2 - \frac{5}{6} e^2 a_0^2 \alpha_2^2 + \frac{3}{4} e^2 a_0^2 \alpha_3 \right) + 2 \beta_0 \right] a_0^2 \alpha_2$$

το οποίο είναι σε πλήρη συμφωνία με ότι προήλθε από τη χρησιμοποίηση της τεχνικής Lindstedt-Poincaré.

3.4.2 Πρώτης-Τάξης Σύστημα Πραγματικών Τιμών

Σε αυτή την ενότητα, πρώτα μετασχηματίζουμε την eq31g σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πραγματικών-τιμών 1^{ης}-τάξης εξισώσεων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $v[t] = u'[t]$ και λαμβάνουμε :

$$\text{eq342a} = \{u'[t] == v[t], \text{eq31g} /. u''[t] \rightarrow v'[t]\}$$

$$\{u'[t] == v[t], u[t] + \alpha_2 u[t]^2 + \alpha_3 u[t]^3 + v'[t] == 0\}$$

Για να προσδιορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq342a χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, πρώτα εισάγουμε :

$$\text{multiScales} = \{u[t] \rightarrow u[T_0, T_1, T_2], v[t] \rightarrow v[T_0, T_1, T_2], u'[t] \rightarrow \text{dt}[1][u[T_0, T_1, T_2]], v'[t] \rightarrow \text{dt}[1][v[T_0, T_1, T_2]]\};$$

για να μετατρέψουμε την παράγωγο ως προς το t σε όρους των παραγώγων ως προς τις τρεις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , και μετά αναπτύσσουμε τα u και v υπό μορφή :

$$\text{solRule} = \{u \rightarrow (\text{Sum}[e^j u_j, \{j, 1, 3\}], \{j, 3\}) \&, v \rightarrow (\text{Sum}[e^j v_j, \{j, 1, 3\}], \{j, 3\}) \&\};$$

Αντικαθιστώντας την multiScales και τη solRule στην eq342a, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

$$\text{eq342b} = (\text{eq342a} /. \text{multiScales} /. \text{solRule} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{n/:n>3} \rightarrow 0;$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων με του ϵ στην eq342b, προκύπτει :

$$\text{eqEps} = \text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract} @@ \#, \epsilon] == 0] \& /@ \text{eq342b} // \text{Transpose} // \text{Rest};$$

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή στη μια πλευρά και τους υπόλοιπους όρους στην άλλη, ορίζουμε :

$$\text{eqOrder}[i_] := (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. u_1 \rightarrow u.) == (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. u_1 \rightarrow u.) - (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[i]]) // \text{Thread}$$

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο, ως εξής :

$$\text{eqOrder}[1] /. \text{displayRule} // \text{TableForm}$$

$$\text{eqOrder}[2] /. \text{displayRule} // \text{TableForm}$$

$$\text{eqOrder}[3] /. \text{displayRule} // \text{TableForm}$$

$$D_0 u_1 - v_1 == 0$$

$$D_0 v_1 + u_1 == 0$$

$$D_0 u_2 - v_2 == -(D_1 u_1)$$

$$D_0 v_2 + u_2 == -(D_1 v_1) - u_1^2 \alpha_2$$

$$D_0 u_3 - v_3 == -(D_1 u_2) - D_2 u_1$$

$$D_0 v_3 + u_3 == -(D_1 v_2) - D_2 v_1 - 2 u_1 u_2 \alpha_2 - u_1^3 \alpha_3$$

$$D_0 u_3 - v_3 == -(D_1 u_2) - D_2 u_1$$

$$D_0 v_3 + u_3 == -(D_1 v_2) - D_2 v_1 - 2 u_1 u_2 \alpha_2 - u_1^3 \alpha_3$$

- Πρώτης-Τάξης Εξισώσεις : Γραμμικό Σύστημα

Για να καθορίσουμε τη λύση των πρώτης-τάξης εξισώσεων, των eqOrder[1], τοποθετούμε σε λίστα τα αριστερά τους μέλη και έχουμε :

linearSys = #[[1]] & /@ eqOrder[1]

$\{-v_1 [T_0, T_1, T_2] + u_1^{(1,0,0)} [T_0, T_1, T_2], u_1 [T_0, T_1, T_2] + v_1^{(1,0,0)} [T_0, T_1, T_2]\}$

Μετά, αναζητούμε μια λύση της linearSys της μορφής $u_1 = P E^{I T_0}$ και $v_1 = Q E^{I T_0}$, και λαμβάνουμε :

coefList = E^{-I T₀} linearSys /. {u₁ -> (P E^{I T₀} &), v₁ -> (Q E^{I T₀} &)} // Expand

{I P - Q, P + I Q}

Το μητρώο συντελεστών της coefList είναι :

coefMat = Outer[Coefficient, coefList, {P, Q}]

{{I, -1}, {1, I}}

και ο συζυγής τελεστής (ερμιτιανή συζυγία) του ορίζεται από

hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose

Έτσι, τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα της coefMat είναι :

rightVec = {1, c1} /. Solve[(coefMat.{1, c1}][[1]] == 0, c1][[1]]

{1, I}

leftVec = {1, c1} /. Solve[(hermitian[coefMat].{1, c1}][[1]] == 0, c1][[1]]

{1, I}

Τότε η λύση των πρώτης τάξης εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί ως :

sol1Form = rightVec A[T₁, T₂] E^{I T₀}

{E^{I T₀} A[T₁, T₂], I E^{I T₀} A[T₁, T₂]}

και ως εκ τούτου τα u_1 και v_1 μπορούν να εκφραστούν σε μια μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

order1Sol = {u₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, sol1Form[[1]] + (sol1Form[[1]] /. conjugateRule) // Evaluate],
v₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, sol1Form[[2]] + (sol1Form[[2]] /. conjugateRule) // Evaluate]}

{u₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, E^{I T₀} A[T₁, T₂] - E^{-I T₀} Ā[T₁, T₂]],
v₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, I E^{I T₀} A[T₁, T₂] - I E^{-I T₀} Ā[T₁, T₂]}]}

- Δεύτερης Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση, την order1Sol, στις δεύτερης-τάξης εξισώσεις, τις eqOrder[2], έχουμε :

order2Eq = eqOrder[2] /. order1Sol // ExpandAll;

order2Eq /. displayRule

{D₀u₂ - v₂ == -E^{I T₀} (D₁A) - E^{-I T₀} (D₁Ā), D₀v₂ + u₂ == -I E^{I T₀} (D₁A) + I E^{-I T₀} (D₁Ā) - A² E^{2 I T₀} α₂ - 2 A Ā α₂ - E^{-2 I T₀} Ā² α₂}

Για να απαλείψουμε τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στις u₂ και v₂, ορίζουμε το διάνυσμα το ανάλογο στην E^{I T₀} στα δεξιά σκέλη της order2Eq και λαμβάνουμε :

STerms1 = Coefficient[#[[2]], Exp[I T₀]] & /@ order2Eq

{-A^(1,0) [T₁, T₂], -I A^(1,0) [T₁, T₂]}

Επομένως, η συνθήκη για την απαλοιφή των όρων που παράγουν προσωρινούς όρους, η συνθήκη επιλυσιμότητας, απαιτεί η STerms1 να είναι ορθογωνική στο συζυγές (adjoint), αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Το αποτέλεσμα είναι :

SCond1 = Solve[Conjugate[leftVec].STerms1 == 0, A^(1,0) [T₁, T₂]][[1]]

{A^(1,0) [T₁, T₂] -> 0}

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι :

`ccSCondi = SCondi /. conjugateRule`

$\{\bar{A}^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow 0\}$

Με αυτή τη συνθήκη επιλυσιμότητας, η `order2Eq` γίνεται :

`DSolve[order2Eqm, {u2[T0, T1, T2], v2[T0, T1, T2]}, timeScales]`

`DSolve::pde: Partial differential equation may not have a general solution. Try loading Calculus`DSolveIntegrals` to find special solutions.`

`DSolve[{-v2[T0, T1, T2] + u2^{(1,0,0)}[T0, T1, T2] == 0,`

`u2[T0, T1, T2] + v2^{(1,0,0)}[T0, T1, T2] == -E^{2IT0} A[T1, T2]^2 \alpha_2 - 2 A[T1, T2] \alpha_2 \bar{A}[T1, T2] - E^{-2IT0} \alpha_2 \bar{A}[T1, T2]^2},`
`{u2[T0, T1, T2], v2[T0, T1, T2]}, {T0, T1, T2}]`

`DSolve::pde: Partial differential equation may not have a general solution. Try loading Calculus`DSolveIntegrals` to find special solutions.`

Εδώ, το να εφαρμόσουμε την `DSolve` για να επιλύσουμε για `order2Eqm` δεν έχει αποτέλεσμα.

Εφόσον οι διαφορικοί τελεστές στα αριστερά σκέλη της `order2Eqm` είναι ουσιαστικά συνήθεις διαφορικοί τελεστές σε όρους του I , μπορούμε πρώτα να μετασχηματίσουμε την `order2Eqm` σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση και τότε να χρησιμοποιήσουμε την `DSolve` για να λάβουμε την ειδική λύση ως εξής :

`sol2pForm =`

`DSolve[order2Eqm /. {u2 -> (u2[#1] &), v2 -> (v2[#1] &)}, {u2[T0], v2[T0]}, T0][[1]] /. C[_] -> 0 //`
`TrigToExp // ExpandAll`

$\{u_2[T_0] \rightarrow \frac{1}{3} E^{2IT_0} A[T_1, T_2]^2 \alpha_2 - 2 A[T_1, T_2] \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2] + \frac{1}{3} E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2]^2,$

$v_2[T_0] \rightarrow \frac{2}{3} I E^{2IT_0} A[T_1, T_2]^2 \alpha_2 - \frac{2}{3} I E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2]^2\}$

Μπορούμε κατόπιν να εκφράσουμε τη λύση των δεύτερης-τάξης εξισώσεων σε μια καθαρή συναρτησιακή μορφή, ως :

`order2Sol = {u2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2pForm[[1, 2]] // Evaluate],`
`v2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2pForm[[2, 2]] // Evaluate]}`

$\{u_2 \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{1}{3} E^{2IT_0} A[T_1, T_2]^2 \alpha_2 - 2 A[T_1, T_2] \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2] + \frac{1}{3} E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2]^2],$

$v_2 \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{2}{3} I E^{2IT_0} A[T_1, T_2]^2 \alpha_2 - \frac{2}{3} I E^{-2IT_0} \alpha_2 \bar{A}[T_1, T_2]^2]\}$

• Τρίτης Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τις πρώτη- και δεύτερης-τάξης λύσεις στις τρίτης-τάξης εξισώσεις, τις `eqOrder[3]`, προκύπτει :

`order3Eq = eqOrder[3] /. order1Sol /. order2Sol // ExpandAll;`

`order3Eq /. displayRule`

$\{D_0 u_3 - v_3 == -E^{IT_0} (D_2 A) - E^{-IT_0} (D_2 \bar{A}) - \frac{2}{3} A E^{2IT_0} (D_1 \bar{A}) \alpha_2 + 2 \bar{A} (D_1 A) \alpha_2 - 2 A (D_1 \bar{A}) \alpha_2 - \frac{2}{3} E^{-2IT_0} \bar{A} (D_1 \bar{A}) \alpha_2,$

$D_0 v_3 + u_3 == -I E^{IT_0} (D_2 A) + I E^{-IT_0} (D_2 \bar{A}) - \frac{4}{3} I A E^{2IT_0} (D_1 \bar{A}) \alpha_2 + \frac{4}{3} I E^{-2IT_0} \bar{A} (D_1 A) \alpha_2 - \frac{2}{3} A^4 E^{3IT_0} \alpha_2^2 -$

$\frac{10}{3} A^2 E^{IT_0} \bar{A} \alpha_2^2 + \frac{10}{3} A E^{-IT_0} \bar{A}^2 \alpha_2^2 - \frac{2}{3} E^{-3IT_0} \bar{A}^3 \alpha_2^2 - A^3 E^{3IT_0} \alpha_3 - 3 A^2 E^{IT_0} \bar{A} \alpha_3 - 3 A E^{-IT_0} \bar{A}^2 \alpha_3 - E^{-1IT_0} \bar{A}^3 \alpha_3\}$

Για να απαλείψουμε όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από τις `order3Eq`, υπολογίζουμε το διάνυσμα το ανάλογο στην E^{IT_0} στα δεξιά τους σκέλη και λαμβάνουμε :

`STerms2 = Coefficient[#[[2]], Exp[I T0]] & /@ order3Eq`

$$\left\{-A^{(3,1)}[T_1, T_2], \frac{10}{3} A[T_1, T_2]^2 \alpha_2^2 \bar{A}[T_1, T_2] - 3 A[T_1, T_2]^2 \alpha_3 \bar{A}[T_1, T_2] - I A^{(0,1)}[T_1, T_2]\right\}$$

Έτσι, η συνθήκη επιλυσιμότητας σε αυτή την τάξη είναι :

`SCond2 = Conjugate[leftVec].STerms2 == 0 // ExpandAll`

$$-\frac{10}{3} I A[T_1, T_2]^2 \alpha_2^2 \bar{A}[T_1, T_2] + 3 I A[T_1, T_2]^2 \alpha_3 \bar{A}[T_1, T_2] - 2 A^{(0,1)}[T_1, T_2] == 0$$

Αυτή η συνθήκη επιλυσιμότητας είναι η ίδια με εκείνη που λήφθηκε με την ενασχόληση με τη δεύτερης-τάξης μορφή της διέπουσας εξίσωσης.

3.4.3 Πρώτης-Τάξης Σύστημα Μιγαδικών Τιμών

Σε αυτή την ενότητα, πρώτα μετασχηματίζουμε την eq31g σε μία μόνη πρώτης-τάξης μιγαδικών-τιμών εξίσωση χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό :

`transfRule = {u[t] -> z[t] + z[t], u'[t] -> I (z[t] - z[t])};`

του οποίου το αντίστροφο δίδεται από :

`zetaRule = Solve[transfRule /. Rule -> Equal, {z[t], z[t]}][[1]]`

$$\left\{z[t] \rightarrow \frac{1}{2} (u[t] - I u'[t]), z[t] \rightarrow \frac{1}{2} (u[t] + I u'[t])\right\}$$

όπου ζ με παύλα είναι το μιγαδικό συζυγές του ζ, όπως εκείνο ορίστηκε από τον κανόνα μιγαδικού συζυγούς :

`conjugateRule = {A -> \bar{A}, \bar{A} -> A, z -> \bar{z}, \bar{z} -> z, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

Έπεται από την eq31g ότι η επιτάχυνση δίδεται από :

`acceleration = Solve[eq31g, u''[t]][[1]]`

$$\{u''[t] \rightarrow -u[t] - \alpha_2 u[t]^2 - \alpha_3 u[t]^3\}$$

Παραγωγίζοντας την zetaRule[[1]] μία φορά ως προς t και χρησιμοποιώντας τις acceleration και transfRule, λαμβάνουμε την ακόλουθη πρώτης-τάξης μιγαδικών-τιμών εξίσωση :

`eq343a = D[zetaRule[[1]], t] /. acceleration /. transfRule /. Rule -> Equal // ExpandAll`

$$z'[t] == I z[t] + \frac{1}{2} I \alpha_2 z[t]^2 + \frac{1}{2} I \alpha_3 z[t]^3 + I \alpha_2 z[t] z[t] - \frac{3}{2} I \alpha_3 z[t]^2 z[t] + \frac{1}{2} I \alpha_2 z[t]^2 + \frac{3}{2} I \alpha_3 z[t] z[t]^2 - \frac{1}{2} I \alpha_3 z[t]^3$$

Για να ορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq343a χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, πρώτα εισάγουμε :

`multiScales = {z[t] -> z[T0, T1, T2], z[t] -> z[T0, T1, T2], z'[t] -> dt[[1]][z[T0, T1, T2]]};`

και κατόπιν επεκτείνουμε τα ζ και ζ-παύλα στη μορφή :

`solRule = {z -> (Sum[e^j z_j[{#1, #2, #3}], {j, 3}] &), \bar{z} -> (Sum[e^j \bar{z}_j[{#1, #2, #3}], {j, 3}] &)};`

Αντικαθιστώντας τις multiScales και solRule στην eq343a, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα του μικρού ϵ , και απομακρύνοντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

`eq343b = (eq343a /. multiScales /. solRule // ExpandAll) /. \epsilon^{n_}/\epsilon^{n_}>3 -> 0;`

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ϵ , προκύπτει :

`eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq343b, \epsilon] == 0 // Thread // Rest;`

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή από το ένα σκέλος και τους υπόλοιπους όρους από το άλλο, ορίζουμε :

`eqOrder[i_] := (eqEps[[1, 1]] /. ζ1 -> ζi) - # & /@ eqEps[[1]] // Reverse`

Χρησιμοποιώντας τις `eqOrder[i]` και `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο, ως :

`Array[eqOrder, 3] /. displayRule // TableForm`

$$D_0 \zeta_1 - I \zeta_1 == 0$$

$$D_0 \zeta_2 - I \zeta_2 == -(D_1 \zeta_1) + \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta_1^2 + I \alpha_2 \zeta_1 \zeta_1 - \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta_1^2$$

$$D_0 \zeta_3 - I \zeta_3 == -(D_1 \zeta_2) - D_2 \zeta_1 + \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta_1^2 + I \alpha_2 \zeta_1 \zeta_2 + \frac{3}{2} I \alpha_2 \zeta_1^2 \zeta_1 + I \alpha_2 \zeta_2 \zeta_1 - \frac{3}{2} I \alpha_2 \zeta_1 \zeta_1^2 - \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta_1^2 + I \alpha_2 \zeta_1 \zeta_2 + I \alpha_2 \zeta_1 \zeta_2$$

Η γενική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, της `eqOrder[1]`, μπορεί να εκφραστεί σε καθαρής μορφή συνάρτηση, ως :

`sol1 = DSolve[eqOrder[1], ζ1, timeScales][[1]] /. C[1] -> A`

$$\{\zeta_1 \rightarrow (E^{I t} A[\#2, \#3] \&)\}$$

της οποίας το μιγαδικό συζυγές είναι :

`ccsol1 = sol1 /. conjugateRule`

$$\{\zeta_1 \rightarrow (E^{\text{Complex}[0, -1] t} \bar{A}[\#2, \#3] \&)\}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση στην δεύτερης-τάξης εξίσωση, την `eqOrder[2]`, έχουμε :

`order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 /. ccsol1;`

`order2Eq /. displayRule`

$$D_0 \zeta_2 - I \zeta_2 == -E^{I T_0} (D_1 A) + \frac{1}{2} I A^2 E^{2 I T_0} \alpha_2 + I A \bar{A} \alpha_2 + \frac{1}{2} I E^{-2 I T_0} \bar{A}^2 \alpha_2$$

Απαλείφοντας τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους στην ζ_2 από την `order2Eq`, προκύπτει :

`SCond1 = Coefficient[order2Eq[[2]], E^{I T_0}] == 0`

$$-A^{(1,0)}[T_1, T_2] == 0$$

ή

`SCond1Rule = Solve[SCond1, A^{(1,0)}[T1, T2]][[1]]`

$$\{A^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Με αυτή τη συνθήκη επιλυσιμότητας, η ειδική λύση της `order2Eq` μπορεί να εκφραστεί σε καθαρής μορφή συνάρτησης, ως :

`sol2 = DSolve[order2Eq /. SCond1Rule, ζ2, timeScales][[1]] /. C[_] -> (0 &)`

$$\{\zeta_2 \rightarrow (E^{I t} (0 \&)[\#2, \#3] + \frac{1}{6} E^{-2 I t} \alpha_2 (3 E^{4 I t} A[\#2, \#3]^2 - 6 E^{2 I t} A[\#2, \#3] \bar{A}[\#2, \#3] - \bar{A}[\#2, \#3]^2) \&)\}$$

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι :

`ccsol2 = sol2 /. conjugateRule;`

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης-τάξης λύσεις στην τρίτης-τάξης εξίσωση, την `eqOrder[3]`, λαμβάνουμε :

`order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. ccsol1 /. sol2 /. ccsol2 // ExpandAll;`

`order3Eq /. displayRule`

$$D_0 \zeta_3 - I \zeta_3 == -E^{I T_0} (D_2 A) - A E^{2 I T_0} (D_1 A) \alpha_2 + \bar{A} (D_1 A) \alpha_2 + A (D_1 \bar{A}) \alpha_2 - \frac{1}{3} E^{-2 I T_0} \bar{A} (D_1 \bar{A}) \alpha_2 + \frac{1}{3} I A^2 E^{2 I T_0} \alpha_2^2 - \frac{5}{3} I A^2 E^{I T_0} \bar{A} \alpha_2^2 - \frac{5}{3} I A E^{-I T_0} \bar{A}^2 \alpha_2^2 - \frac{1}{3} I E^{-2 I T_0} \bar{A}^3 \alpha_2^2 - \frac{1}{2} I A^2 E^{3 I T_0} \alpha_2 + \frac{3}{2} I A^2 E^{I T_0} \bar{A} \alpha_2 + \frac{3}{2} I A E^{-I T_0} \bar{A}^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} I E^{-2 I T_0} \bar{A}^3 \alpha_2$$

Απαλείφοντας τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στη ζ_3 από την `order3Eq`, απαιτεί τη ακόλουθη συνθήκη :

SCond2 = Coefficient[order3Eq[[2]], Ξ^{1T0}] == 0;

SCond2 /. displayRule

$$-(D_2A) - \frac{5}{3} I A^2 \bar{A} \alpha_2^2 + \frac{3}{2} I A^2 \bar{A} \alpha_3 == 0$$

το οποίο είναι σε πλήρη συμφωνία με ότι λήφθηκε από την απ'ευθείας ενασχόληση με την eq31g.

3.5 Η Μέθοδος της Μεσοστάθμισης (Averaging)

Όπως και πριν, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να μετασχηματίσουμε την εξαρτημένη μεταβλητή u σε a και β σύμφωνα με :

$$\text{eq35a} = u[t] == \epsilon a \text{Cos}[t + \beta];$$

υποκείμενη στην δέσμευση

$$\text{eq35b} = D[\text{eq35a}, t]$$

$$u'[t] == -\epsilon a \text{Sin}[t + \beta]$$

όπου a και β είναι συναρτήσεις του t .

$$\text{tdependentRule} = \{a \rightarrow a[t], \beta \rightarrow \beta[t]\};$$

και το ϵ είναι μια μικρή αδιάστατη παράμετρος, η οποία είναι μέτρο του εύρους της ταλάντωσης.

Παραγωγίζοντας την eq35a ως προς t , προκύπτει :

$$\text{eq35c} = D[\text{eq35a} /. \text{tdependentRule}, t]$$

$$u'[t] == \epsilon \text{Cos}[t + \beta[t]] a'[t] - \epsilon a[t] \text{Sin}[t + \beta[t]] (1 + \beta'[t])$$

Συγκρίνοντας την eq35b με την eq35c, συμπεραίνουμε ότι :

$$\text{cond35a} = \text{Expand}[\text{eq35c}[[2]] - (\text{eq35b}[[2]] /. \text{tdependentRule})] == 0$$

$$\epsilon \text{Cos}[t + \beta[t]] a'[t] - \epsilon a[t] \text{Sin}[t + \beta[t]] \beta'[t] == 0$$

Παραγωγίζοντας την eq35b μια φορά ως προς t , δίνει :

$$\text{eq35d} = D[\text{eq35b} /. \text{tdependentRule}, t]$$

$$u''[t] == -\epsilon \text{Sin}[t + \beta[t]] a'[t] - \epsilon a[t] \text{Cos}[t + \beta[t]] (1 + \beta'[t])$$

Αντικαθιστώντας τις eq35a και eq35d στην eq31g, έχουμε :

$$\text{cond35b} = \text{eq31g} /. (\{\text{eq35a} /. \text{tdependentRule}, \text{eq35d}\} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) // \text{ExpandAll}$$

$$\epsilon^2 a[t]^2 \text{Cos}[t + \beta[t]]^2 \alpha_2 + \epsilon^3 a[t]^2 \text{Cos}[t + \beta[t]]^3 \alpha_3 - \epsilon \text{Sin}[t + \beta[t]] a'[t] - \epsilon a[t] \text{Cos}[t + \beta[t]] \beta'[t] == 0$$

Λύνοντας την cond35a και την cond35b ως προς $a'[t]$ και $\beta'[t]$, έχουμε :

$$\text{transformedEq} = \text{Solve}\{\{\text{cond35a}, \text{cond35b}\}, \{a'[t], \beta'[t]\}[[1]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal} // \text{Simplify}$$

$$\{a'[t] == \epsilon a[t]^2 \text{Cos}[t + \beta[t]]^2 \text{Sin}[t + \beta[t]] (\alpha_2 + \epsilon a[t] \text{Cos}[t + \beta[t]] \alpha_3),$$

$$\beta'[t] == \epsilon a[t] \text{Cos}[t + \beta[t]]^3 (\alpha_2 + \epsilon a[t] \text{Cos}[t + \beta[t]] \alpha_3)\}$$

όπου το a έχει υποθεθεί ότι είναι διάφορο του 0 φτάνοντας στην transformedEq[[2]].

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, επεκτείνουμε τις δεξιές πλευρές της transformedEq σε σειρές Fourier και λαμβάνουμε :

$$\text{ampEq1} = \text{TrigReduce} /@ \text{transformedEq}[[1]]$$

$$a'[t] == \frac{1}{3} (2 \epsilon a[t]^2 \text{Sin}[t + \beta[t]] \alpha_2 +$$

$$2 \epsilon a[t]^2 \text{Sin}[3t + 3\beta[t]] \alpha_2 - 2 \epsilon^2 a[t]^3 \text{Sin}[2t + 2\beta[t]] \alpha_3 + \epsilon^2 a[t]^3 \text{Sin}[4t + 4\beta[t]] \alpha_3)$$

phaseEq1 = TrigReduce /@ transformedEq[[2]]

$$\beta'[t] == \frac{1}{2} \left(6 \epsilon a[t] \cos[t + \beta[t]] \alpha_2 + 2 \epsilon a[t] \cos[3t + 3\beta[t]] \alpha_2 + 3 \epsilon^2 a[t]^2 \alpha_3 + 4 \epsilon^2 a[t]^2 \cos[2t + 2\beta[t]] \alpha_3 + \epsilon^2 a[t]^2 \cos[4t + 4\beta[t]] \alpha_3 \right)$$

Καθώς το ϵ είναι μικρό, τα $\alpha'[t]$ και $\beta'[t]$ είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του t . Τότε, σύμφωνα με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης, μπορούμε να παραλείψουμε τους γρήγορα μεταβαλλόμενους όρους στην ampEq1 και στην phaseEq1 και να λάβουμε τις ακόλουθες μεσοσταθμισμένες (averaged) εξισώσεις :

$$\text{ampAvgEq} = \text{ampEq1} / . \text{Sin}[_ . t + _] \rightarrow 0$$

$$\alpha'[t] == 0$$

$$\text{phaseAvgEq} = \text{phaseEq1} / . \text{Cos}[_ . t + _] \rightarrow 0$$

$$\beta'[t] == \frac{3}{8} \epsilon^2 a[t]^2 \alpha_3$$

Ενώ η ampAvgEq συμφωνεί με την ampEq, η phaseAvgEq δεν συμφωνεί με την phaseEq που λήφθηκε στην προηγούμενη υποενότητα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

Υπάρχει ένας όρος $\frac{5}{12} \epsilon^2 a^2 \alpha_3^2$ που λείπει από την phaseAvgEq. Ακολουθώντας τις λεπτομέρειες της λύσης στην προηγούμενη υποενότητα, βρίσκει κανείς ότι αυτός ο όρος είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των πρώτης- και των δεύτερης- τάξης προσεγγίσεων. Αυτή η αλληλεπίδραση δεν είχε ληφθεί υπόψη κατά τον υπολογισμό των ampAvgEq και phaseAvgEq. Για να συμπεριλάβουμε την επιρροή αυτής της αλληλεπίδρασης, χρειάζεται να αναζητήσουμε τις λύσεις της ampEq1 και της phaseEq1 σε υψηλότερη τάξη. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης της γενικευμένης μεθόδου της μεσοστάθμισης, η οποία συζητείται κατόπιν, ή της παραλλαγής της, της τεχνικής Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, η οποία συζητείται στην ενότητα 3.7.

3.6 Η Γενικευμένη Μέθοδος της Μεσοστάθμισης

Για να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο, εισάγουμε τη μεταβλητή $\varphi = t + \beta$, και ξαναγράφουμε την ampEq1 και την phaseEq1 ως εξής :

$$\text{ampEq2} = \text{ampEq1} / . \text{Sin}[n . t + a_] \rightarrow \text{Sin}[\text{Expand}[n (\varphi[t] - \beta[t]) + a]]$$

$$\alpha'[t] ==$$

$$\frac{1}{8} \left(2 \epsilon a[t]^2 \sin[\varphi[t]] \alpha_2 + 2 \epsilon a[t]^2 \sin[3\varphi[t]] \alpha_2 + 2 \epsilon^2 a[t]^3 \sin[2\varphi[t]] \alpha_3 + \epsilon^2 a[t]^3 \sin[4\varphi[t]] \alpha_3 \right)$$

$$\text{phaseEq2} = \varphi'[t] == 1 + \text{phaseEq1}[[2]] / . \text{Cos}[n . t + a_] \rightarrow \text{Cos}[\text{Expand}[n (\varphi[t] - \beta[t]) + a]]$$

$$\varphi'[t] ==$$

$$1 + \frac{1}{8} \left(6 \epsilon a[t] \cos[\varphi[t]] \alpha_2 + 2 \epsilon a[t] \cos[3\varphi[t]] \alpha_2 + 3 \epsilon^2 a[t]^2 \alpha_3 + 4 \epsilon^2 a[t]^2 \cos[2\varphi[t]] \alpha_3 + \epsilon^2 a[t]^2 \cos[4\varphi[t]] \alpha_3 \right)$$

Αναζητούμε προσεγγιστικές λύσεις των ampEq2 και phaseEq2, της μορφής :

$$asol = a[t] == a_0[t] + \text{Sum}[\epsilon^i a_i[a_0[t], \varphi_0[t]], \{i, 2\}]$$

$$a[t] == a_0[t] + \epsilon a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 a_2[a_0[t], \varphi_0[t]]$$

$$phisol = \varphi[t] == \varphi_0[t] + \text{Sum}[\epsilon^i \varphi_i[a_0[t], \varphi_0[t]], \{i, 2\}]$$

$$\varphi[t] = \varphi_0[t] + \epsilon \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 \varphi_2[a_0[t], \varphi_0[t]]$$

όπου τα $a_0[t]$ και $\varphi_0[t]$ έχουν αναπτυχθεί σε δυναμοσειρές του ϵ , ως :

$$a0Eq = a_0'[t] == \text{Sum}[\epsilon^i A_i[a_0[t]], \{i, 2\}]$$

$$a_0[t] == \epsilon A_1[a_0[t]] + \epsilon^2 A_2[a_0[t]]$$

$$phi0Eq = \varphi_0'[t] == 1 + \text{Sum}[\epsilon^i \Phi_i[a_0[t]], \{i, 2\}]$$

$$\varphi_0[t] == 1 + \epsilon \Phi_1[a_0[t]] + \epsilon^2 \Phi_2[a_0[t]]$$

Οι συναρτήσεις a_1, a_2, \dots, a_n και $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ είναι γρήγορα μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του φ_0 , ενώ συνεπάγεται από την $a0Eq$ και την $phi0Eq$ ότι το a_0 , και άρα και η A_n και η Φ_n είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του t .

Στην δεύτερη προσέγγιση, παραγωγίζουμε το $a[t]$ και το $\varphi[t]$ μια φορά ως προς t , χρησιμοποιούμε την $a0Eq$ και την $phi0Eq$, επεκτείνουμε το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , παραμερίζουμε (αμελούμε) όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^2 , και λαμβάνουμε :

$$aEq1 = (D[asol, t] /. ({a0Eq, phi0Eq} /. Equal -> Rule) // ExpandAll) /. \epsilon^{_}/:n>2 -> 0$$

$$a'[t] == \epsilon A_1[a_0[t]] + \epsilon^2 A_2[a_0[t]] + \epsilon a_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 \varphi_1[a_0[t]] a_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 a_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 A_1[a_0[t]] a_1^{(1,0)}[a_0[t], \varphi_0[t]]$$

$$phiEq1 = (D[phisol, t] /. ({a0Eq, phi0Eq} /. Equal -> Rule) // ExpandAll) /. \epsilon^{_}/:n>2 -> 0$$

$$\varphi'[t] == 1 + \epsilon \Phi_1[a_0[t]] + \epsilon^2 \Phi_2[a_0[t]] + \epsilon \varphi_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 \varphi_1[a_0[t]] \varphi_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 \varphi_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \epsilon^2 A_1[a_0[t]] \varphi_1^{(1,0)}[a_0[t], \varphi_0[t]]$$

Μετά, αντικαθιστούμε την $asol$ και την $phisol$ στην $ampEq2$ και την $phaseEq2$, αναπτύσσουμε τα δεξιά μέλη για μικρό ϵ κρατώντας τους όρους ως το $O(\epsilon^2)$, και ξαναγράφουμε τα δεξιά τους μέλη ως εξής :

$$ampEqrhs = \text{Series}[ampEq2[[2]] /. ({asol, phisol} /. Equal -> Rule), \{\epsilon, 0, 2\}] // \text{Normal}$$

$$\frac{1}{8} \epsilon (2 \text{Sin}[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 + 2 \text{Sin}[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2) +$$

$$\frac{1}{8} \epsilon^2 (2 \text{Sin}[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \text{Sin}[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 +$$

$$2 \alpha_2 (2 \text{Sin}[\varphi_0[t]] a_0[t] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + \text{Cos}[\varphi_0[t]] a_0[t]^2 \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]]) +$$

$$2 \alpha_2 (2 \text{Sin}[3 \varphi_0[t]] a_0[t] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + 3 \text{Cos}[3 \varphi_0[t]] a_0[t]^2 \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]])$$

$$\text{phaseEqrhs} = \text{Series}[\text{phaseEq2}[[2]] /. ({asol, phisol} /. Equal -> Rule), \{\epsilon, 0, 2\}] // \text{Normal}$$

$$1 + \frac{1}{8} \epsilon (6 \text{Cos}[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + 2 \text{Cos}[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) +$$

$$\frac{1}{9} \epsilon^2 (3 \alpha_3 a_0[t]^2 + 4 \text{Cos}[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \text{Cos}[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 +$$

$$6 \alpha_2 (\text{Cos}[\varphi_0[t]] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] - \text{Sin}[\varphi_0[t]] a_0[t] \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]]) +$$

$$2 \alpha_2 (\text{Cos}[3 \varphi_0[t]] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] - 3 \text{Sin}[3 \varphi_0[t]] a_0[t] \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]])$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του \in από τις $aEq1$, $ampEqrhs$, $phiEq1$ και $phaseEqrhs$, λαμβάνουμε :

$ampEq3 = \text{CoefficientList}[\#, \in] \& /@ (aEq1[[2]] == ampEqrhs) // \text{Thread} // \text{Rest}$

$$\left\{ \begin{aligned} A_1[a_0[t]] + a_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] &== \frac{1}{8} (2 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 + 2 \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2), \\ A_2[a_0[t]] + \Phi_1[a_0[t]] a_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + a_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \\ & \lambda_1[a_0[t]] a_1^{(1,0)}[a_0[t], \varphi_0[t]] == \\ & \frac{1}{8} (2 \sin[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \sin[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \\ & 2 \alpha_2 (2 \sin[\varphi_0[t]] a_0[t] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + \cos[\varphi_0[t]] a_0[t]^2 \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]]) + \\ & 2 \alpha_2 (2 \sin[3 \varphi_0[t]] a_0[t] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] + 3 \cos[3 \varphi_0[t]] a_0[t]^2 \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]])) \end{aligned} \right\}$$

$phaseEq3 = \text{CoefficientList}[\#, \in] \& /@ (phiEq1[[2]] == phaseEqrhs) // \text{Thread} // \text{Rest}$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1[a_0[t]] + \varphi_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] &== \frac{1}{8} (6 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + 2 \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]), \\ \Phi_2[a_0[t]] + \Phi_1[a_0[t]] \varphi_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \varphi_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] + \\ & \lambda_1[a_0[t]] \varphi_1^{(1,0)}[a_0[t], \varphi_0[t]] == \\ & \frac{1}{8} (3 \alpha_3 a_0[t]^2 + 4 \cos[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \cos[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \\ & 6 \alpha_2 (\cos[\varphi_0[t]] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] - \sin[\varphi_0[t]] a_0[t] \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]]) + \\ & 2 \alpha_2 (\cos[3 \varphi_0[t]] a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] - 3 \sin[3 \varphi_0[t]] a_0[t] \varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]])) \end{aligned} \right\}$$

Μετά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών για να χωρίσουμε ταχέως και βραδέως μεταβαλλόμενους όρους στις πρώτης-τάξης εξισώσεις, $ampEq3[[1]]$ και $phaseEq3[[1]]$. Τα βραδέως μεταβαλλόμενα τμήματα δίνουν :

$cond36a = \{A_1[a_0[t]] \rightarrow 0, \Phi_1[a_0[t]] \rightarrow 0\};$

ενώ τα ταχέως μεταβαλλόμενα τμήματα δίνουν

$order1Eq = \{ampEq3[[1]], phaseEq3[[1]]\} /. cond36a$

$$\left\{ \begin{aligned} a_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] &== \frac{1}{8} (2 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 + 2 \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2), \\ \varphi_1^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] &== \frac{1}{8} (6 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + 2 \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) \end{aligned} \right\}$$

Για να προσδιορίσουμε τις λύσεις της $order1Eq$ χρησιμοποιώντας την **DSolve**, τις μετατρέπουμε από μερικές διαφορικές σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αντικαθιστούμε το $\varphi_0[t]$ με το s και λαμβάνουμε:

$order1EqTransf = order1Eq /. \{a_1 \rightarrow (a_1[\#2] \&), \varphi_1 \rightarrow (\varphi_1[\#2] \&)\} /. f_[t] \rightarrow f /. \varphi_0 \rightarrow s$

$$\left\{ a_1'[s] == \frac{1}{8} (2 \sin[s] \alpha_0^2 \alpha_2 + 2 \sin[3 s] \alpha_0^2 \alpha_2), \varphi_1'[s] == \frac{1}{8} (6 \cos[s] \alpha_0 \alpha_2 + 2 \cos[3 s] \alpha_0 \alpha_2) \right\}$$

Αντί να αντικαταστήσουμε το $\varphi_0[t]$, θα μπορούσαμε να το είχαμε συμβολίσει. Χρησιμοποιώντας τη **DSolve**, βρίσκουμε ότι τα a_1 και φ_1 δίνονται από :

```
rule36[1] =
DSolve[order1EqTransf[[1]], a1[s], s][[1]] /. C[_] -> 0 /. {s -> φ0[t], a0 -> a0[t]} /.
a1[arg_] -> a1[a0[t], arg]
```

$$\{a_1[a_0[t], \varphi_0[t]] \rightarrow \frac{1}{12} (-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2)\}$$

```
rule36[2] =
DSolve[order1EqTransf[[2]], φ1[s], s][[1]] /. C[_] -> 0 /. {s -> φ0[t], a0 -> a0[t]} /.
φ1[arg_] -> φ1[a0[t], arg]
```

$$\{\varphi_1[a_0[t], \varphi_0[t]] \rightarrow \frac{1}{12} (9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t])\}$$

το οποίο μπορεί να συνδυαστεί σε

```
cond36b = Join[rule36[1], rule36[2]];
```

Αντικαθιστώντας τα βραδέως- και τα ταχέως- μεταβαλλόμενα συστατικά της πρώτης-τάξης λύσης, cond36a και cond36b, σε δεύτερης- τάξης εξισώσεις, έχουμε :

```
order2Eq = {ampEq3[[2]], phaseEq3[[2]]} /. cond36a /. cond36b
```

$$\begin{aligned} & \{A_2[a_0[t]] + a_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] == \\ & \frac{1}{8} \left(2 \sin[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \sin[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \right. \\ & 2 \alpha_2 \left(\frac{1}{12} \cos[\varphi_0[t]] a_0[t]^2 (9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) + \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{6} \sin[\varphi_0[t]] a_0[t] (-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2) \right) \right) + \\ & 2 \alpha_2 \left(\frac{1}{4} \cos[3 \varphi_0[t]] a_0[t]^2 (9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) + \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{6} \sin[3 \varphi_0[t]] a_0[t] (-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2) \right) \right) \}, \\ & \varphi_2[a_0[t]] + \varphi_2^{(0,1)}[a_0[t], \varphi_0[t]] == \\ & \frac{1}{8} \left(3 \alpha_3 a_0[t]^2 + 4 \cos[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \cos[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \right. \\ & 6 \alpha_2 \left(-\frac{1}{12} \sin[\varphi_0[t]] a_0[t] (9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) + \right. \\ & \left. \frac{1}{12} \cos[\varphi_0[t]] (-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2) \right) \right) + \\ & 2 \alpha_2 \left(-\frac{1}{4} \sin[3 \varphi_0[t]] a_0[t] (9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]) + \right. \\ & \left. \frac{1}{12} \cos[3 \varphi_0[t]] (-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2) \right) \} \} \end{aligned}$$

Μετά, χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να αναπτύξουμε τα δεξιά μέλη των δεύτερης-τάξης εξισώσεων στις σειρές Fourier και λαμβάνουμε :

order2Eqrhs = (#[[2]] // TrigReduce // Expand) & /@ order2Eq

$$\left\{ -\frac{9}{32} \sin[2 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^3 + \frac{5}{24} \sin[4 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^3 + \frac{1}{96} \sin[6 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^3 + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \sin[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3 + \frac{1}{8} \sin[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^3, \right. \\ \left. -\frac{5}{12} \alpha_2^2 a_0[t]^2 - \frac{3}{16} \cos[2 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^2 + \frac{1}{4} \cos[4 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{48} \cos[6 \varphi_0[t]] \alpha_2^2 a_0[t]^2 + \frac{3}{8} \alpha_3 a_0[t]^2 + \frac{1}{2} \cos[2 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 + \frac{1}{8} \cos[4 \varphi_0[t]] \alpha_3 a_0[t]^2 \right\}$$

Εφόσον αναζητούμε μια ανάπτυξη έγκυρη στο $O(\epsilon^2)$, δεν χρειάζεται να επιλύσουμε ως προς α_2 και φ_2 . Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να ερευνήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις για να καθορίσουμε τα βραδέως μεταβαλλόμενα τμήματα και τα A_2 και Φ_2 . Το αποτέλεσμα είναι:

$$\text{cond36c} = \{A_2[a_0[t]], \Phi_2[a_0[t]]\} \rightarrow (\text{order2Eqrhs} /. \{\sin[_] \rightarrow 0, \cos[_] \rightarrow 0\}) // \text{Thread} \\ \{A_2[a_0[t]] \rightarrow 0, \Phi_2[a_0[t]] \rightarrow -\frac{5}{12} \alpha_2^2 a_0[t]^2 + \frac{3}{8} \alpha_3 a_0[t]^2\}$$

Αντικαθιστώντας τα ταχέως-μεταβαλλόμενα συστατικά της πρώτης-τάξης λύσης, της cond36b, στις αναπτύξεις για τα a και φ και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , λαμβάνουμε, στη δεύτερη προσέγγιση, ότι :

$$\text{asolF} = \text{asol} /. \text{cond36b} /. \epsilon^2 \rightarrow 0$$

$$a[t] == a_0[t] + \frac{1}{12} \epsilon \left(-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 \right)$$

$$\text{phisolF} = \text{phisol} /. \text{cond36b} /. \epsilon^2 \rightarrow 0$$

$$\varphi[t] == \frac{1}{12} \epsilon \left(9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] \right) + \varphi_0[t]$$

Αντικαθιστώντας τα βραδέως-μεταβαλλόμενα συστατικά των πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεων, cond36a και cond36c, στις a0Eq και phi0Eq, δίνει :

$$\text{a0Eq1} = \text{a0Eq} /. \text{cond36a} /. \text{cond36c}$$

$$a_0'[t] == 0$$

$$\text{phi0Eq1} = \text{phi0Eq} /. \text{cond36a} /. \text{cond36c}$$

$$\varphi_0'[t] == 1 + \epsilon^2 \left(-\frac{5}{12} \alpha_2^2 a_0[t]^2 + \frac{3}{8} \alpha_3 a_0[t]^2 \right)$$

Συνεπάγεται από τις παραπάνω εξισώσεις ότι $a_0 =$ σταθερά, και :

$$\text{phi0Rule} = \text{DSolve}[\text{phi0Eq1} /. a_0[t] \rightarrow a_0, \varphi_0[t], t][[1]] /. C[1] \rightarrow \beta_0$$

$$\{\varphi_0[t] \rightarrow t \left(1 - \frac{5}{12} \epsilon^2 a_0^2 \alpha_2^2 + \frac{3}{8} \epsilon^2 a_0^2 \alpha_3 \right) + \beta_0\}$$

όπου το β_0 είναι σταθερά. Αντικαθιστώντας αυτές τις αναπτύξεις στην eq35a, λαμβάνουμε την ακόλουθη δεύτερης τάξης ανάπτυξη :

$$\text{eq36a} = u[t] == a[t] \cos[\varphi[t]] /. (\{\text{asolF}, \text{phisolF}\} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule})$$

$$u[t] == \epsilon \cos \left[\frac{1}{12} \epsilon \left(9 \sin[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] + \sin[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t] \right) + \varphi_0[t] \right]$$

$$\left(a_0[t] + \frac{1}{12} \epsilon \left(-3 \cos[\varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 - \cos[3 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2 \right) \right)$$

Για να συγκρίνουμε την παρούσα λύση με εκείνες που λήφθηκαν από τη χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων και της τεχνικής Lindstedt-Poincaré, αναπτύσσουμε τις κυκλικές συναρτήσεις στην eq36a για μικρό ϵ περί το φ_0 και λαμβάνουμε :

$$u[t] == (\text{Series}[\text{eq36a}[[2]], \{\epsilon, 0, 2\}] // \text{Normal} // \text{TrigReduce} // \text{Expand})$$

$$u[t] == \epsilon \text{Cos}[\varphi_0[t]] a_0[t] - \frac{1}{2} \epsilon^2 \alpha_2 a_0[t]^2 + \frac{1}{6} \epsilon^2 \text{Cos}[2 \varphi_0[t]] \alpha_2 a_0[t]^2$$

Αυτή η ανάπτυξη και η phi0Rule είναι σε πλήρη συμφωνία με ότι προήλθε από τη χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων.

3.7 Η Τεχνική Krylov – Bogoliubov – Mitropolsky

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε μια παραλλαγή της γενικευμένης μεθόδου της μεσοστάθμισης, δηλαδή την τεχνική Krylov – Bogoliubov – Mitropolsky. Συχνά αναφέρεται ως η ασυμπτωτική μέθοδος. Όταν οι μη-γραμμικοί όροι αμελούνται, η λύση της eq31g είναι :

$$\text{LinearSol} = u == \epsilon a \text{Cos}[t + \beta];$$

όπου a και β είναι σταθερές και $\eta \in$ είναι μια μικρή αδιάστατη παράμετρος η οποία είναι μέτρο του εύρους ταλάντωσης. Όταν οι μη-γραμμικοί όροι περιλαμβάνονται, θεωρούμε ότι η linearSol είναι ο πρώτος όρος σε μια προσεγγιστική λύση της eq31g αλλά με βραδέως μεταβαλλόμενα αντί για σταθερά a και β . Επιπλέον, εισάγουμε την γρήγορη κλίμακα $\varphi = t + \beta$ και χρησιμοποιούμε το a για να αναπαραστήσουμε τις βραδείες μεταβολές. Έτσι, αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq31g της μορφής :

$$u\text{Sol} = u[a[t], \varphi[t]] == \epsilon a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] + \text{Sum}[\epsilon^i u_i[a[t], \varphi[t]], \{i, 2, 3\}]$$

$$u[a[t], \varphi[t]] == \epsilon a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] + \epsilon^2 u_2[a[t], \varphi[t]] + \epsilon^3 u_3[a[t], \varphi[t]]$$

Και πάλι, όροι τάξης ϵ^3 έχουν περιληφθεί στην ανάπτυξη, αλλά αυτοί οι όροι δεν θα περιληφθούν στο τελικό αποτέλεσμα. Εφόσον τα a και β είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του t , τις εκφράζουμε σε δυναμοσειρές του ϵ σε όρους του a , ως εξής :

$$\text{apEq} = a'[t] == \text{Sum}[\epsilon^i A_i[a[t]], \{i, 2\}]$$

$$a'[t] == \epsilon A_1[a[t]] + \epsilon^2 A_2[a[t]]$$

$$\text{phipEq} = \varphi'[t] == 1 + \text{Sum}[\epsilon^i \Phi_i[a[t]], \{i, 2\}]$$

$$\varphi'[t] == 1 + \epsilon \Phi_1[a[t]] + \epsilon^2 \Phi_2[a[t]]$$

Σε ότι ακολουθεί, χρειαζόμαστε τα $a''[t]$ και $\varphi''[t]$. Γι' αυτό το λόγο, παραγωγίζουμε την apEq και την phipEq ως προς το t , χρησιμοποιούμε αυτές τις εξισώσεις για να εκφράσουμε τα $a''[t]$ και $\varphi''[t]$ ως προς $A_i[a[t]]$ και $\Phi_i[a[t]]$, αμελούμε όρους τάξης υψηλότερης του ϵ^2 και παίρνουμε :

$$\text{appEq} = (\text{D}[\text{apEq}, t] /. (\text{apEq} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{\text{n_}/:\text{n}>2} \rightarrow 0$$

$$a''[t] == \epsilon^2 A_1[a[t]] A_1'[a[t]]$$

$$\text{phippEq} = (\text{D}[\text{phipEq}, t] /. (\text{apEq} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{\text{n_}/:\text{n}>2} \rightarrow 0$$

$$\varphi''[t] == \epsilon^2 A_1[a[t]] \Phi_1'[a[t]]$$

Έτσι, αυτή η μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία πολλαπλών κλιμάκων με τα a και φ να είναι οι κλίμακες.

Αντικαθιστώντας τη θεωρούμενη ανάπτυξη του $u[t]$, εκφρασμένη σε μορφή συνάρτησης, και τις αναπτύξεις των παραγώγων των $a[t]$ και $\varphi[t]$ στην eq31g, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και κρατώντας όρους έως την τάξη του ϵ^3 , έχουμε :

eq37a =

$$\begin{aligned} & (\text{eq31g} /. u \rightarrow \text{Function}[t, \text{uSol}[[2]] // \text{Evaluate}] /. \\ & (\{\text{apEq}, \text{phipEq}, \text{appEq}, \text{phippEq}\} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{\text{"/:}n>3} \rightarrow 0 \\ & \epsilon^2 a[t]^2 \text{Cos}[\varphi[t]]^2 \alpha_2 + \epsilon^3 a[t]^3 \text{Cos}[\varphi[t]]^3 \alpha_3 - 2 \epsilon^2 \text{Sin}[\varphi[t]] A_1[a[t]] - \\ & 2 \epsilon^3 \text{Sin}[\varphi[t]] A_2[a[t]] + \epsilon^2 u_2[a[t], \varphi[t]] + 2 \epsilon^3 a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] \alpha_2 u_2[a[t], \varphi[t]] + \\ & \epsilon^3 u_3[a[t], \varphi[t]] - 2 \epsilon^2 a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] \phi_1[a[t]] - 2 \epsilon^3 \text{Sin}[\varphi[t]] A_1[a[t]] \phi_1[a[t]] - \\ & \epsilon^3 a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] \phi_1[a[t]]^2 - 2 \epsilon^3 a[t] \text{Cos}[\varphi[t]] \phi_2[a[t]] + \epsilon^3 \text{Cos}[\varphi[t]] A_1[a[t]] A_1'[a[t]] - \\ & \epsilon^3 a[t] \text{Sin}[\varphi[t]] A_1[a[t]] \phi_1'[a[t]] + \epsilon^2 u_2^{(0,2)}[a[t], \varphi[t]] + \\ & 2 \epsilon^3 \phi_1[a[t]] u_2^{(0,2)}[a[t], \varphi[t]] + \epsilon^3 u_3^{(0,2)}[a[t], \varphi[t]] + 2 \epsilon^3 A_1[a[t]] u_2^{(1,1)}[a[t], \varphi[t]] == \\ & 0 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ϵ στην eq37a, οδηγεί :

$$\text{eqEps} = \text{Table}[\text{Coefficient}[\text{eq37a}[[1]], \epsilon^i] == 0, \{i, 2, 3\}] /. f_ [t] \rightarrow f$$

$$\begin{aligned} & \{a^2 \text{Cos}[\varphi]^2 \alpha_2 - 2 \text{Sin}[\varphi] A_1[a] + u_2[a, \varphi] - 2 a \text{Cos}[\varphi] \phi_1[a] + u_2^{(0,2)}[a, \varphi] == 0, \\ & a^3 \text{Cos}[\varphi]^3 \alpha_3 - 2 \text{Sin}[\varphi] A_2[a] + 2 a \text{Cos}[\varphi] \alpha_2 u_2[a, \varphi] + u_3[a, \varphi] - 2 \text{Sin}[\varphi] A_1[a] \phi_1[a] - \\ & a \text{Cos}[\varphi] \phi_1[a]^2 - 2 a \text{Cos}[\varphi] \phi_2[a] + \text{Cos}[\varphi] A_1[a] A_1'[a] - a \text{Sin}[\varphi] A_1[a] \phi_1'[a] + \\ & 2 \phi_1[a] u_2^{(0,2)}[a, \varphi] + u_3^{(0,2)}[a, \varphi] + 2 A_1[a] u_2^{(1,1)}[a, \varphi] == 0\} \end{aligned}$$

Μετά, χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να αναπτύξουμε τους μη-ομογενείς όρους στην eqEps[[1]] σε μια σειρά Fourier και λαμβάνουμε :

$$\text{order2Eq} = \text{TrigReduce} /@ \text{eqEps}[[1]]$$

$$\frac{1}{2} (a^2 \alpha_2 + a^2 \text{Cos}[2 \varphi] \alpha_2 - 4 \text{Sin}[\varphi] A_1[a] + 2 u_2[a, \varphi] - 4 a \text{Cos}[\varphi] \phi_1[a] + 2 u_2^{(0,2)}[a, \varphi]) == 0$$

Η απαλοιφή όρων που παράγουν προσωρινούς όρους στην u_2 από την order2Eq, απαιτεί ότι :

rule37a =

$$\text{Solve}[\text{Coefficient}[\text{order2Eq}[[1]], \{\text{Cos}[\varphi], \text{Sin}[\varphi]\}] == 0 // \text{Thread}, \{\phi_1[a], A_1[a]\}][[1]]$$

$$\{\phi_1[a] \rightarrow 0, A_1[a] \rightarrow 0\}$$

Τότε, η λύση στην παραγόμενη order2Eq μπορεί να γραφεί ως :

$$\text{rule37b} = \text{DSolve}[\text{order2Eq} /. \text{rule37a}, u_2[a, \varphi], \{a, \varphi\}][[1]] /. C[_] \rightarrow (0 \&) // \text{Simplify}$$

$$\{u_2[a, \varphi] \rightarrow \frac{1}{6} a^2 (-3 + \text{Cos}[2 \varphi]) \alpha_2\}$$

το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή συνάρτησης ως εξής :

$$\text{rule37c} = \{u_2 \rightarrow \text{Function}[\{a, \varphi\}, \text{rule37b}[[1, 2]] // \text{Evaluate}]\}$$

$$\{u_2 \rightarrow \text{Function}[\{a, \varphi\}, \frac{1}{6} a^2 (-3 + \text{Cos}[2 \varphi]) \alpha_2]\}$$

Αντικαθιστώντας τον rule37a και τον rule37c στην eqEps[[2]], λαμβάνουμε :

eq37b = eqEps[[2]] /. rule37a /. rule37c

$$\frac{1}{3} a^3 \cos[\varphi] (-3 + \cos[2\varphi]) \alpha_2^2 + a^3 \cos[\varphi]^3 \alpha_3 - 2 \sin[\varphi] A_2[a] + u_3[a, \varphi] - 2 a \cos[\varphi] \phi_2[a] + u_3^{(0,2)}[a, \varphi] == 0$$

Η απαλοιφή των όρων που παράγουν προσωρινούς όρους στην u_3 από την eq37b, απαιτεί ότι :

eq37c = Coefficient[eq37b[[1]] // TrigReduce, {Cos[φ], Sin[φ]}] == 0 // Thread

$$\left\{ -\frac{5}{6} a^3 \alpha_2^2 + \frac{3 a^3 \alpha_3}{4} - 2 a \phi_2[a] == 0, -2 A_2[a] == 0 \right\}$$

ή

rule37d = Solve[eq37c, {A₂[a], φ₂[a]}][[1]]

$$\left\{ A_2[a] \rightarrow 0, \phi_2[a] \rightarrow -\frac{1}{24} a^2 (10 \alpha_2^2 - 9 \alpha_3) \right\}$$

Αντικαθιστώντας τον rule37a και τον rule37d στους αρEq και ρhipEq, λαμβάνουμε :

αρEq /. (rule37a~Join~rule37d /. a -> a[t])

$$a'[t] == 0$$

ρhipEq /. (rule37a~Join~rule37d /. a -> a[t]) // ExpandAll

$$\varphi'[t] == 1 - \frac{5}{12} \epsilon^2 a[t]^2 \alpha_2^2 + \frac{3}{8} \epsilon^2 a[t]^2 \alpha_3$$

τα οποία είναι σε πλήρη συμφωνία με εκείνα που λήφθηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων και τη γενικευμένη μέθοδο της μεσοστάθμισης.

3.8 Η Μέθοδος των Κανονικών Μορφών

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των κανονικών μορφών για να καθορίσουμε μια δευτέρας-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της eq31g. Γι' αυτό το λόγο, αρχίζουμε με την αντίστοιχη πρώτης-τάξης εξίσωση μιγαδικών τιμών.

$$\begin{aligned} \text{eq343a} = \zeta'[t] == & I \zeta[t] + \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta[t]^2 + \frac{1}{2} I \alpha_3 \zeta[t]^3 + I \alpha_2 \zeta[t] \bar{\zeta}[t] + \frac{3}{2} I \alpha_3 \zeta[t]^2 \bar{\zeta}[t] + \\ & \frac{1}{2} I \alpha_2 \zeta[t]^2 + \frac{3}{2} I \alpha_3 \zeta[t] \bar{\zeta}[t]^2 + \frac{1}{2} I \alpha_3 \zeta[t]^3; \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών μορφών, εισάγουμε τον σχεδόν ταυτοτικό (near-identity) μετασχηματισμό :

$$\text{basicTerms} = \{\eta[t], \bar{\eta}[t]\};$$

zetaRule = {

$$\zeta \rightarrow \text{Function}[t, \epsilon \eta[t] + \text{Sum}[\epsilon^j h_j @ \text{basicTerms}, \{j, 2, 3\}] // \text{Evaluate}],$$

$$\bar{\zeta} \rightarrow \text{Function}[t, \epsilon \bar{\eta}[t] + \text{Sum}[\epsilon^j \bar{h}_j @ \text{basicTerms}, \{j, 2, 3\}] // \text{Evaluate}]\}$$

$$\{\zeta \rightarrow \text{Function}[t, \epsilon \eta[t] + \epsilon^2 h_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + \epsilon^3 h_3[\eta[t], \bar{\eta}[t]]],$$

$$\bar{\zeta} \rightarrow \text{Function}[t, \epsilon \bar{\eta}[t] + \epsilon^2 \bar{h}_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + \epsilon^3 \bar{h}_3[\eta[t], \bar{\eta}[t]]]\}$$

που οδηγεί στην απλούστερη δυνατή εξίσωση

$$\text{etaRule} = \{\eta'[t] \rightarrow I \eta[t] + \text{Sum}[\epsilon^j g_j[t], \{j, 2\}]\}$$

$$\{\eta'[t] \rightarrow I \eta[t] + \epsilon g_1[t] + \epsilon^2 g_2[t]\}$$

όπου η άνω παύλα (overbar) υποδεικνύει το συζυγές μιγαδικό :

`conjugateRule = {η -> η̄, η̄ -> η, σ -> σ̄, σ̄ -> σ, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

Αντικαθιστώντας την ανάπτυξη για το ζ, τον `zetaRule`, στην `eq343a`, χρησιμοποιώντας τον `etaRule`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ^3 , έχουμε :

`eq38a = (eq343a /. zetaRule /. etaRule /. (etaRule /. conjugateRule) // ExpandAll) /.
ε^n_/:n>3 -> 0;`

Εξισώνοντας τους συντελεστές της ίδιας δύναμης του ϵ στην `eq38a`, δίνει :

`eqEps = Table[Coefficient[Subtract @@ eq38a, ε^i] == 0, {i, 2, 3}]`

$$\left\{ -\frac{1}{2} I \alpha_2 \eta[t]^2 - I \alpha_2 \eta[t] \bar{\eta}[t] - \frac{1}{2} I \alpha_2 \bar{\eta}[t]^2 + g_1[t] - \right. \\ \left. I h_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - I \bar{\eta}[t] h_2^{(0,1)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + I \eta[t] h_2^{(1,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] == 0, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} I \alpha_3 \eta[t]^3 - \frac{3}{2} I \alpha_3 \eta[t]^2 \bar{\eta}[t] - \frac{3}{2} I \alpha_3 \eta[t] \bar{\eta}[t]^2 - \frac{1}{2} I \alpha_3 \bar{\eta}[t]^3 + g_2[t] - \right. \\ \left. I \alpha_2 \eta[t] h_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - I \alpha_2 \bar{\eta}[t] h_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - I h_3[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - \right. \\ \left. I \alpha_2 \eta[t] \bar{h}_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - I \alpha_2 \bar{\eta}[t] \bar{h}_2[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + \bar{g}_1[t] h_2^{(0,1)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] - \right. \\ \left. I \bar{\eta}[t] h_2^{(0,1)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + g_1[t] h_2^{(1,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] + I \eta[t] h_2^{(1,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t]] == 0 \right\}$$

• Δεύτερης-Τάξης Λύση

Επιλέγουμε το h_i να απαλείφει όσο πιο πολλούς όρους του `eqEps`, κι έτσι να τους ανάγει στην απλούστερη δυνατή μορφή τους. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να απαλείψουμε όλους τους όρους μη-συντονισμού (non resonance terms). Για να καθορίσουμε τους όρους συντονισμού στην `eqEps[[1]]`, σημειώνουμε ότι όλες οι πιθανές μορφές των μη-ομογενών της όρων είναι :

`possibleQTerms = Outer[Times, basicTerms, basicTerms] // Flatten // Union`

$$\{\eta[t]^2, \eta[t] \bar{\eta}[t], \bar{\eta}[t]^2\}$$

Συνεπάγεται από τα γραμμικά τμήματα του `etaRule` ότι :

$$\text{form} = \{\eta[t] \rightarrow E^{i t}, \bar{\eta}[t] \rightarrow E^{-i t}\};$$

Έτσι, οι πιθανοί όροι συντονισμού δίνονται από :

$$\text{ResonantQTerm} = (E^{-i t} \text{possibleQTerms} /. \text{form} /. E^{-t} \rightarrow 0) \text{possibleQTerms} // \text{Union} // \text{Rest}$$

{}

Επομένως, δεν υπάρχουν όροι συντονισμού στο δεύτερης-τάξης πρόβλημα και οι όροι μη-συντονισμού μπορούν να οριστούν ως :

`NRQT = Complement[possibleQTerms, ResonantQTerm]`

$$\{\eta[t]^2, \eta[t] \bar{\eta}[t], \bar{\eta}[t]^2\}$$

Συσχετίζουμε με καθέναν από αυτούς έναν συντελεστή σύμφωνα με :

`coeffsQ = Table[Γ_j, {j, Length[NRQT]}]`

$$\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$$

Επομένως, το h_2 και το συζυγές μιγαδικό του έχουν τη μορφή :

```
hFormQ = {h2 -> (Evaluate[coeffsQ.NRQT /. Thread[basicTerms -> {#1, #2}]] &),
  h2 -> (Evaluate[coeffsQ.NRQT /. conjugateRule /. Thread[basicTerms -> {#1, #2}]] &)}
{h2 -> {#1^2 Γ1 + #1 #2 Γ2 + #2^2 Γ3 &}, h2 -> {#2^2 Γ1 + #1 #2 Γ2 + #1^2 Γ3 &}}
```

Αντικαθιστώντας την h_2 στην eqEps[[1]], εξισώνοντας τους συντελεστές των πιθανών όρων μη-συντονισμού με το 0, και λύνοντας τις παραγόμενες εξισώσεις ως προς Γ_i , λαμβάνουμε :

```
coeffsQRule =
  Solve[Coefficient[eqEps[[1, 1]] /. hFormQ, NRQT] == 0 // Thread, coeffsQ][[1]]
{Γ1 -> α2/2, Γ2 -> -α2, Γ3 -> -α2/6}
```

Επιλέγουμε τα g_1 ώστε να απαλείφουν τους όρους συντονισμού στην eqEps[[1]], σύμφωνα με :

```
gRuleQ = g1[t] -> -Coefficient[eqEps[[1, 1]], ResonantQTerm].ResonantQTerm
g1[t] -> 0
```

Σε αυτή την περίπτωση, δεν υφίστανται όροι συντονισμού και άρα $g_1 = 0$.

• Τρίτης - Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τα δεύτερης-τάξης αποτελέσματα στην τρίτης-τάξης εξίσωση, λαμβάνουμε :

```
order3expr =
  eqEps[[2, 1]] /. hFormQ /. coeffsQRule /. gRuleQ /. (gRuleQ /. conjugateRule) // Expand
-1/3 I α2^2 η[t]^3 - 1/2 I α3 η[t]^3 + 5/3 I α2^2 η[t]^2 η̄[t] - 3/2 I α3 η[t]^2 η̄[t] +
  5/3 I α2^2 η[t] η̄[t]^2 - 3/2 I α3 η[t] η̄[t]^2 - 1/3 I α2^2 η̄[t]^3 - 1/2 I α3 η̄[t]^3 + g2[t] -
  I h3[η[t], η̄[t]] - I η̄[t] h3^(0,1)[η[t], η̄[t]] + I η[t] h3^(1,0)[η[t], η̄[t]]
```

Οι μη-ομογενείς όροι στην order3expr είναι ανάλογοι με :

```
possibleCTerms = Outer[Times, possibleQTerms, basicTerms] // Flatten // Union
{η[t]^3, η[t]^2 η̄[t], η[t] η̄[t]^2, η̄[t]^3}
```

Μετά, βρίσκουμε τους όρους συντονισμού σύμφωνα με :

```
ResonantCTerm = (E^-t possibleCTerms /. form /. E^-t -> 0) possibleCTerms // Union // Rest
{η[t]^2 η̄[t]}
```

Τότε, οι όροι μη-συντονισμού είναι το συμπλήρωμα αυτών των όρων συντονισμού, δηλαδή,

```
NRCT = Complement[possibleCTerms, ResonantCTerm]
{η[t]^3, η[t] η̄[t]^2, η̄[t]^3}
```

Εανά, συσχετίζουμε συντελεστές με αυτούς τους όρους ως ακολούθως :

```
coeffsC = Table[Λj, {j, Length[NRCT]}]
{Λ1, Λ2, Λ3}
```

Συνεπώς, το h_3 και το συζυγές μιγαδικό του έχουν τις μορφές :

```
hFormC = {h3 -> (Evaluate[coeffsC.NRCT /. Thread[basicTerms -> {#1, #2}]] &),
  h3 -> (Evaluate[coeffsC.NRCT /. conjugateRule /. Thread[basicTerms -> {#1, #2}]] &)}
{h3 -> {#1^3 Λ1 - #1 #2^2 Λ2 + #2^3 Λ3 &}, h3 -> {#2^3 Λ1 - #1^2 #2 Λ2 + #1^3 Λ3 &}}
```

Αντικαθιστώντας το h_3 στην order3expr, εξισώνοντας τον συντελεστή κάθε πιθανού όρου μη-συντονισμού με το 0, και λύνοντας τις παραγόμενες αλγεβρικές εξισώσεις ως προς Λ_i , λαμβάνουμε

coeffsCRule =

Solve[Coefficient[order3expr /. hFormC, NRCT] == 0 // Thread, coeffsC][[1]]

$$\left\{ \Lambda_1 \rightarrow \frac{1}{12} (2 \alpha_2^2 + 3 \alpha_3), \Lambda_2 \rightarrow \frac{1}{12} (10 \alpha_2^2 - 9 \alpha_3), \Lambda_3 \rightarrow \frac{1}{24} (-2 \alpha_2^2 - 3 \alpha_3) \right\}$$

Επιλέγοντας το g_2 για να περιορίσει τους όρους συντονισμού από την order3expr, προκύπτει :

gRuleC = $g_2[t] \rightarrow -$ Coefficient[order3expr, ResonantCTerm].ResonantCTerm

$$g_2[t] \rightarrow - \left(\frac{5 I \alpha_2^2}{3} - \frac{3 I \alpha_3}{2} \right) \eta[t]^2 \bar{\eta}[t]$$

Συνδυάζοντας τα etaRule, gRuleQ και gRuleC και έστω $\eta = A[t] E^{i t}$, λαμβάνουμε την εξίσωση διαμόρφωσης :

moduEq =

$2 I E^{-i t} (\eta'[t] - (\eta'[t] /. etaRule /. gRuleQ /. gRuleC)) == 0 /.$

$\{\eta \rightarrow (A[\#] E^{i \# t}), \bar{\eta} \rightarrow (\bar{A}[\#] E^{-i \# t})\} // ExpandAll$

$$-\frac{10}{3} \epsilon^2 A[t]^2 \alpha_2^2 \bar{A}[t] + 3 \epsilon^2 A[t]^2 \alpha_3 \bar{A}[t] + 2 I A'[t] == 0$$

η οποία είναι σε πλήρη συμφωνία με ότι λήφθηκε από τη χρήση των άλλων τεχνικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ DUFFING

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα Κεφάλαια, τα οποία πραγματεύονται τις ελεύθερες ταλαντώσεις, αυτό το Κεφάλαιο και τα επόμενα δύο ασχολούνται με τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Θεωρούμε

$$FDuffingEq = u''[t] + \omega^2 u[t] + 2 \hat{\mu} u'[t] + \delta u[t]^2 + \alpha u[t]^3 == F \text{Cos}[\Omega t];$$

όπου $\hat{\mu}$ είναι μια θετική σταθερά. Σε αυτό το Κεφάλαιο, προσδιορίζουμε τις δεύτερης-τάξης λύσεις στην $FDuffingEq$ ξεκινώντας με την απ' ευθείας ανάπτυξη στην επόμενη ενότητα. Ερευνούμε αυτή την απ' ευθείας ανάπτυξη και καθορίζουμε υπό ποιές συνθήκες αυτή καταρρέει. Αυτό οδηγεί στις αποκαλούμενες τιμές συντονισμού του Ω . Στην ενότητα 4.2, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να προσδιορίσουμε τις δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες αναπτύξεις των λύσεων της $FDuffingEq$ για όλες τις περιπτώσεις συντονισμού, συμπεριλαμβανομένης της επιρροής της ελαφριάς ιξώδους απόσβεσης. Στις ενότητες 4.3 και 4.4, χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη μέθοδο της μεσοστάθμισης (averaging) και τη μέθοδο των κανονικών μορφών, αντίστοιχα, για να καθορίσουμε τις δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες αναπτύξεις για την περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού της τάξης 1:2. Δηλαδή, με $\Omega \approx 2\omega$.

4.1 Απ' ευθείας Ανάπτυξη

Αναζητούμε μια απ' ευθείας ανάπτυξη για τις λύσεις της $FDuffingEq$ της μορφής :

$$uSol = u \rightarrow (\text{Sum}[e^{i u_i [\#]}, \{i, 3\}] \&);$$

Αντικαθιστώντας τη $uSol$ στην $FDuffingEq$, έστω ότι $F = \epsilon f$ και $\hat{\mu} = \epsilon \mu$, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης υψηλότερης του ϵ^3 , έχουμε :

$$eq41a = (FDuffingEq /. uSol /. \{F \rightarrow \epsilon f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon \mu\} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{n-1} /: n > 3 \rightarrow 0$$

$$\epsilon \omega^2 u_1[t] + \delta \epsilon^2 u_1[t]^2 + \alpha \epsilon^3 u_1[t]^3 + \epsilon^2 \omega^2 u_2[t] + 2 \delta \epsilon^3 u_1[t] u_2[t] + \epsilon^3 \omega^2 u_3[t] + 2 \epsilon^2 \mu u_1'[t] + 2 \epsilon^3 \mu u_2'[t] + \epsilon u_1''[t] + \epsilon^2 u_2''[t] + \epsilon^3 u_3''[t] == f \epsilon \text{Cos}[t \Omega]$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ϵ , και στα δύο μέλη, λαμβάνουμε :

$$eqEpsa = \text{CoefficientList}[\text{Subtract} @@ eq41a, \epsilon] == 0 // \text{Thread} // \text{Rest}$$

$$\{-f \text{Cos}[t \Omega] + \omega^2 u_1[t] + u_1''[t] == 0, \delta u_1[t]^2 - \omega^2 u_2[t] + 2 \mu u_1'[t] + u_2''[t] == 0, \alpha u_1[t]^3 + 2 \delta u_1[t] u_2[t] + \omega^2 u_3[t] + 2 \mu u_2'[t] + u_3''[t] == 0\}$$

Η ειδική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, του γραμμικού προβλήματος χωρίς απόσβεση (undamped), μπορεί να εκφραστεί ως :

$$sol1p = \text{DSolve}[eqEpsa[[1]], u_1[t], t][[1]] /. C[_] \rightarrow 0 // \text{TrigToExp} // \text{Simplify}$$

$$\{u_1[t] \rightarrow -\frac{e^{-I t \Omega} (1 + e^{2 I t \Omega}) f}{2 (-\omega^2 + \Omega^2)}\}$$

Σημειωτέον ότι η $sol1p$ αποτελείται από έναν όρο του οποίου ο παρονομαστής είναι πολύ μικρός όταν $\Omega \approx \omega$. Ένας τέτοιος όρος αποκαλείται όρος μικρού διαιρέτη. Επιπλέον, το $u[t]$ τείνει στο άπειρο ενώ $\Omega \rightarrow \omega$, και η διέγερση αναφέρεται ως διέγερση συντονισμού. Επειδή ο όρος του μικρού διαιρέτη εμφανίζεται στο πρώτης-τάξης πρόβλημα, μιλάμε για πρωταρχικό ή κύριο συντονισμό. Όταν οι όροι του μικρού διαιρέτη εμφανίζονται στα υψηλότερης τάξης προβλήματα, μιλάμε για δευτερεύοντες συντονισμούς. Στην περίπτωση του πρωταρχικού συντονισμού, η κλιμάκωση $F \rightarrow \epsilon f$ δεν είναι

έγκυρη. Φυσικά, μόλις η κίνηση γίνει ευρεία, η απόσβεση και η μη-γραμμικότητα ενεργοποιούνται για να αντιπαρατεθούν στην επιρροή του συντονισμού. Επομένως, για να λάβουμε μια ομοιόμορφη ανάπτυξη σε αυτή την περίπτωση, επανακλιμακώνουμε (rescale) τα F και $\hat{\mu}$, όπως συζητήθηκε στην υποενότητα 4.2, έτσι ώστε η επιρροή της απόσβεσης και της μη-γραμμικότητας να εξισορροπεί την επιρροή του κύριου συντονισμού.

Όταν η τιμή του Ω διαφέρει πολύ από αυτήν του ω , προσθέτουμε την ομογενή λύση στο `sol1p` και λαμβάνουμε τη γενική λύση του πρώτης-τάξης προβλήματος, ως εξής :

$$fRule = \{f \rightarrow 2\Lambda(\Omega^2 - \omega^2)\};$$

$$sol1 = u_1 \rightarrow \text{Function}[t, A E^{i\omega t} + \bar{A} E^{-i\omega t} + \text{sol1p}[[1, 2]] /. fRule // \text{Expand} // \text{Evaluate}]$$

$$u_1 \rightarrow \text{Function}[t, A E^{i\omega t} - E^{-i\omega t} \Lambda - E^{i\omega t} \Lambda + E^{-i\omega t} \bar{A}]$$

όπου A είναι μία σταθερά μιγαδικών τιμών. Αντικαθιστώντας τη `sol1` στη δεύτερης-τάξης εξίσωση, την `eqEpsa[[2]]`, προκύπτει :

$$\text{order2Eq} = u_2''[t] + \omega^2 u_2[t] - \# \& /@ \text{eqEpsa}[[2]] /. \text{sol1} // \text{ExpandAll} // \text{Reverse}$$

$$\omega^2 u_2[t] + u_2''[t] == -A^2 E^{2i\omega t} \delta + 2A E^{i\omega t} \delta \Lambda - 2A E^{i\omega t} \delta \Lambda - 2\delta \Lambda^2 - E^{-2i\omega t} \delta \Lambda^2 - E^{2i\omega t} \delta \Lambda^2 - 2iA E^{i\omega t} \mu \omega - 2iE^{-i\omega t} \Lambda \mu \Omega + 2iE^{i\omega t} \Lambda \mu \Omega - 2A\delta \bar{A} + 2E^{-i\omega t} \delta \Lambda \bar{A} + 2E^{i\omega t} \delta \Lambda \bar{A} + 2iE^{-i\omega t} \mu \omega \bar{A} - E^{-2i\omega t} \delta \bar{A}^2$$

Λύνοντας για την ειδική λύση της `order2Eq`, λαμβάνουμε :

$$\text{sol2p} = (u_2[t] /. \text{DSolve}[\text{order2Eq}[[1]] == \#, u_2[t], t] [[1]] /. C[_] \rightarrow 0 // \text{TrigToExp} // \text{Simplify}) \& /@ \text{order2Eq}[[2]]$$

$$\frac{A^2 E^{2i\omega t} \delta}{3\omega^2} - \frac{2\delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{A E^{i\omega t} \mu (1 + 2t\omega)}{2\omega} + \frac{2A E^{i\omega t} \delta \Lambda}{(2\omega - \Omega)\Omega} - \frac{2A E^{i\omega t} \delta \Lambda}{\Omega(2\omega + \Omega)} + \frac{2iE^{i\omega t} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{2iE^{-i\omega t} \Lambda \mu \Omega}{-\omega^2 + \Omega^2} - \frac{E^{-2i\omega t} \delta \Lambda^2}{-\omega^2 + 4\Omega^2} - \frac{E^{2i\omega t} \delta \Lambda^2}{-\omega^2 + 4\Omega^2} - \frac{2A\delta \bar{A}}{\omega^2} - \frac{E^{-i\omega t} \mu (-1 + 2t\omega) \bar{A}}{2\omega} + \frac{2E^{-i\omega t} \delta \Lambda \bar{A}}{(2\omega - \Omega)\Omega} - \frac{2E^{-i\omega t} \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega(2\omega + \Omega)} - \frac{E^{-2i\omega t} \delta \bar{A}^2}{3\omega^2}$$

Ξεκάθαρα, η `sol2p` καταρρέει επειδή περιέχει προσωρινούς όρους ανάλογους με τον συντελεστή απόσβεσης μ . Επιπλέον, η `sol2p` καταρρέει όταν $\Omega \approx 2\omega$, $\Omega \approx \omega/2$, ή $\Omega \approx 0$ επειδή παράγουν όρους μικρού διαιρέτη και άρα δευτερεύοντες συντονισμούς. Όπως συζητείται στην ενότητα 4.2, η περίπτωση $\Omega \approx 2\omega$ αποκαλείται υποαρμονικός συντονισμός της τάξης 1:2 και η περίπτωση $\Omega \approx \omega/2$ αποκαλείται υπεραρμονικός συντονισμός της τάξης δύο.

Όταν το Ω διαφέρει πολύ από τα ω , 2ω , $\omega/2$, ή 0 , η `sol2p` είναι έγκυρη μόνο αν επανακλιμακώσουμε τον όρο απόσβεσης έτσι ώστε αυτός πρώτα εμφανίζεται στην τρίτης-τάξης εξίσωση. Δηλαδή,

$\hat{\mu} \rightarrow \epsilon^2 \mu$. Χρησιμοποιώντας αυτή την κλιμάκωση, ξαναγράφουμε την `eq41a` ως εξής :

$$\text{eq41b} = \text{eq41a} /. \mu \rightarrow \epsilon \mu /. \epsilon^4 \rightarrow 0$$

$$\epsilon \omega^2 u_1[t] + \delta \epsilon^2 u_1[t]^2 + \alpha \epsilon^3 u_1[t]^3 + \epsilon^2 \omega^2 u_2[t] + 2\delta \epsilon^3 u_1[t] u_2[t] + \epsilon^3 \omega^2 u_3[t] + 2\epsilon^3 \mu u_1'[t] + \epsilon u_1''[t] - \epsilon^2 u_2''[t] + \epsilon^3 u_3''[t] == f \epsilon \text{Cos}[t\Omega]$$

$$\text{eqEpsb} = \text{CoefficientList}[\text{Subtract} @@ \text{eq41b}, \epsilon] == 0 // \text{Thread} // \text{Rest}$$

$$\{-f \text{Cos}[t\Omega] + \omega^2 u_1[t] + u_1''[t] == 0, \delta u_1[t]^2 + \omega^2 u_2[t] + u_2''[t] == 0, \alpha u_1[t]^3 + 2\delta u_1[t] u_2[t] + \omega^2 u_3[t] + 2\mu u_1'[t] + u_3''[t] == 0\}$$

Συγκρίνοντας την `eqEpsb` με την `eqEpsa`, αμέσως λαμβάνουμε τη λύση της από την `sol2p` ως εξής :

sol2pNew = sol2p / . μ -> 0

$$\frac{A^2 E^{2I\tau} \delta}{3\omega^2} - \frac{2\delta A^2}{\omega^2} + \frac{2AE^{I\tau(\omega-\Omega)} \delta A}{(2\omega-\Omega)\Omega} - \frac{2AE^{I\tau(\omega+\Omega)} \delta A}{\Omega(2\omega+\Omega)} +$$

$$\frac{E^{-2I\tau\Omega} \delta A^2}{-\omega^2+4\Omega^2} + \frac{E^{2I\tau\Omega} \delta A^2}{-\omega^2+4\Omega^2} - \frac{2A\delta\bar{A}}{\omega^2} + \frac{2E^{-I\tau(\omega-\Omega)} \delta A\bar{A}}{(2\omega-\Omega)\Omega} - \frac{2E^{-I\tau(\omega+\Omega)} \delta A\bar{A}}{\Omega(2\omega+\Omega)} + \frac{E^{-2I\tau\omega} \delta \bar{A}^2}{3\omega^2}$$

Έτσι, η γενική λύση της eqEpsb[[2]] μπορεί να γραφεί ως :

sol2New = u₂ -> Function[t, BE^{Iωt} + B̄E^{-Iωt} + sol2pNew // Evaluate]

$$u_2 \rightarrow \text{Function}[t, BE^{I\tau\omega} + \frac{A^2 E^{2I\tau\omega} \delta}{3\omega^2} - \frac{2\delta A^2}{\omega^2} + \frac{2AE^{I\tau(\omega-\Omega)} \delta A}{(2\omega-\Omega)\Omega} - \frac{2AE^{I\tau(\omega+\Omega)} \delta A}{\Omega(2\omega+\Omega)} +$$

$$\frac{E^{-2I\tau\Omega} \delta A^2}{-\omega^2+4\Omega^2} + \frac{E^{2I\tau\Omega} \delta A^2}{-\omega^2+4\Omega^2} - \frac{2A\delta\bar{A}}{\omega^2} + \frac{2E^{-I\tau(\omega-\Omega)} \delta A\bar{A}}{(2\omega-\Omega)\Omega} - \frac{2E^{-I\tau(\omega+\Omega)} \delta A\bar{A}}{\Omega(2\omega+\Omega)} + \frac{E^{-2I\tau\omega} \delta \bar{A}^2}{3\omega^2} + E^{-I\tau\omega} B]$$

όπου το B είναι μια μιγαδικών τιμών σταθερά.

Αντικαθιστώντας τη sol1 και τη sol2New στην eqEpsb[[3]], προκύπτει :

order3Eqb = u₃''[t] + ω² u₃[t] - # & /@ eqEpsb[[3]] /. sol1 /. sol2New // ExpandAll // Reverse

$$\omega^2 u_3[t] + u_3''[t] == -A^2 E^{2I\tau\omega} \alpha - 2ABE^{2I\tau\omega} \delta + 3A^2 E^{2I\tau\omega - I\tau\Omega} \alpha A + 3A^2 E^{2I\tau\omega + I\tau\Omega} \alpha A + 2BE^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \delta A +$$

$$2BE^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \delta A - 6AE^{I\tau\omega} \alpha A^2 - 3AE^{I\tau\omega - 2I\tau\Omega} \alpha A^2 - 3AE^{I\tau\omega + 2I\tau\Omega} \alpha A^2 + 3E^{-I\tau\Omega} \alpha A^3 + 3E^{I\tau\Omega} \alpha A^3 + E^{-2I\tau\omega} \alpha A^3 +$$

$$E^{2I\tau\omega} \alpha A^3 - \frac{2A^3 E^{2I\tau\omega} \delta^2}{3\omega^2} - \frac{2A^3 E^{2I\tau\omega - I\tau\Omega} \delta^2 A}{3\omega^2} - \frac{2A^3 E^{2I\tau\omega + I\tau\Omega} \delta^2 A}{3\omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega} \delta^2 A^2}{\omega^2} - \frac{4E^{-I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{\omega^2} - \frac{4E^{I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{\omega^2} -$$

$$\frac{2IAE^{I\tau\omega} \mu\omega - 2IE^{-I\tau\Omega} \Lambda\mu\Omega + 2IE^{I\tau\Omega} \Lambda\mu\Omega - \frac{4A^2 E^{2I\tau\omega - I\tau\Omega} \delta^2 A}{2\omega\Omega - \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega} \delta^2 A^2}{2\omega\Omega - \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega + 2I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{2\omega\Omega - \Omega^2} +$$

$$\frac{4A^2 E^{2I\tau\omega + I\tau\Omega} \delta^2 A}{2\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega} \delta^2 A^2}{2\omega\Omega - \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega + 2I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{2\omega\Omega - \Omega^2} - \frac{2AE^{I\tau\omega + 2I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{-\omega^2 + 4\Omega^2} - \frac{2E^{I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{-\omega^2 + 4\Omega^2} - \frac{2E^{2I\tau\omega} \delta^2 A^2}{-\omega^2 + 4\Omega^2} -$$

$$\frac{2AE^{I\tau\omega} \delta^2 A^2}{-E^{2I\tau\Omega} \omega^2 + 4E^{2I\tau\Omega} \Omega^2} + \frac{2E^{-I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{-E^{2I\tau\Omega} \omega^2 + 4E^{2I\tau\Omega} \Omega^2} - \frac{2E^{I\tau\Omega} \delta^2 A^2}{-E^{2I\tau\Omega} \omega^2 + 4E^{2I\tau\Omega} \Omega^2} - 3A^2 E^{I\tau\omega} \alpha \bar{A} - 2B\delta\bar{A} -$$

$$6AE^{-I\tau\Omega} \alpha A\bar{A} + 6AE^{I\tau\Omega} \alpha A\bar{A} - 6E^{-I\tau\omega} \alpha A^2 \bar{A} - 3E^{-I\tau\omega - 2I\tau\Omega} \alpha A^2 \bar{A} - 3E^{-I\tau\omega + 2I\tau\Omega} \alpha A^2 \bar{A} + \frac{10A^2 E^{I\tau\omega} \delta^2 \bar{A}}{3\omega^2} -$$

$$\frac{4AE^{-I\tau\Omega} \delta^2 A\bar{A}}{\omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\Omega} \delta^2 A\bar{A}}{\omega^2} - \frac{4E^{-I\tau\omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{\omega^2} + 2IE^{-I\tau\omega} \mu\omega \bar{A} - \frac{4AE^{-I\tau\Omega} \delta^2 A\bar{A}}{2\omega\Omega - \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\Omega} \delta^2 A\bar{A}}{2\omega\Omega + \Omega^2} -$$

$$\frac{2E^{-I\tau\omega - 2I\tau\Omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{-\omega^2 + 4\Omega^2} - \frac{2E^{-I\tau\omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{-E^{2I\tau\Omega} \omega^2 + 4E^{2I\tau\Omega} \Omega^2} - \frac{4AE^{I\tau\omega} \delta^2 A\bar{A}}{2E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \Omega^2} + \frac{4E^{-I\tau\Omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{2E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \Omega^2} +$$

$$\frac{4E^{I\tau\Omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{2E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \Omega^2} + \frac{4AE^{I\tau\omega} \delta^2 A\bar{A}}{2E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \Omega^2} - \frac{4E^{-I\tau\Omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{2E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \Omega^2} -$$

$$\frac{4E^{I\tau\Omega} \delta^2 A^2 \bar{A}}{2E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \omega\Omega + E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \Omega^2} - 3AE^{-I\tau\omega} \alpha \bar{A}^2 + 3E^{-2I\tau\omega - I\tau\Omega} \alpha \Lambda \bar{A}^2 + 3E^{-2I\tau\omega + I\tau\Omega} \alpha \Lambda \bar{A}^2 + \frac{10AE^{-I\tau\omega} \delta^2 \bar{A}^2}{3\omega^2} -$$

$$\frac{2E^{-2I\tau\omega - I\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{3\omega^2} - \frac{2E^{-2I\tau\omega + I\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{3\omega^2} - \frac{4E^{-I\tau\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{2E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \omega\Omega - E^{I\tau\omega - I\tau\Omega} \Omega^2} - \frac{4E^{-I\tau\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{2E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \omega\Omega + E^{I\tau\omega + I\tau\Omega} \Omega^2} -$$

$$E^{-2I\tau\omega} \alpha \bar{A}^3 - \frac{2E^{-2I\tau\omega} \delta^2 \bar{A}^3}{3\omega^2} - 2A\delta\bar{B} - 2E^{-I\tau\omega - I\tau\Omega} \delta A\bar{B} - 2E^{-I\tau\omega + I\tau\Omega} \delta A\bar{B} - 2E^{-2I\tau\omega} \delta \bar{A}\bar{B}$$

Η ειδική λύση της order3Eqb δίνεται από :

(sol3p = (u₃[t] /. DSolve[order3Eqb[[1]] == #, u₃[t], t][[1]] /. C[_] -> 0 // TrigToExp // Simplify) & /@ order3Eqb[[2]]) // Timing

$$\begin{aligned}
 & \left(64.803 \text{ Second, } \frac{A^3 E^{2i\omega} \delta^2}{12 \omega^4} - \frac{A^3 E^{2i\omega} \alpha}{8 \omega^2} + \frac{2 A B E^{2i\omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{A E^{i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (1 - 2 I \tau \omega)}{\omega^4} + \frac{3 I A E^{i\omega} \alpha \Lambda^2 (I + 2 \tau \omega)}{2 \omega^2} \right. \\
 & \frac{A E^{i\omega} \mu (I + 2 \tau \omega)}{2 \omega} - \frac{3 A E^{i\omega} (\omega - 2\Omega) \alpha \Lambda^2}{4 (\omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 B E^{i\omega} (\omega - \Omega) \delta \Lambda}{(2\omega - \Omega) \Omega} + \frac{A E^{i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (1 - 2 I \tau \omega)}{\omega^2 (2\omega - \Omega) \Omega} + \frac{3 A E^{i\omega} (\omega + 2\Omega) \alpha \Lambda^2}{4 \Omega (\omega + \Omega)} \\
 & \frac{2 B E^{i\omega} (\omega - \Omega) \delta \Lambda}{\Omega (2\omega + \Omega)} + \frac{I A E^{i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (I + 2 \tau \omega)}{\omega^2 \Omega (2\omega + \Omega)} + \frac{A E^{i\omega} (\omega + 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2}{\Omega^2 (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} - \frac{3 A^2 E^{i\omega} (2\omega - \Omega) \alpha \Lambda}{(\omega + \Omega) (3\omega + \Omega)} - \frac{2 A^2 E^{i\omega} (2\omega - \Omega) \delta^2 \Lambda}{3 \omega^2 (\omega + \Omega) (3\omega + \Omega)} \\
 & \frac{4 A^2 E^{i\omega} (2\omega + \Omega) \delta^2 \Lambda}{\Omega (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega) (3\omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i\tau\Omega} \alpha \Lambda^3}{\omega^2 - 9\Omega^2} + \frac{E^{2i\tau\Omega} \alpha \Lambda^3}{\omega^2 - 9\Omega^2} - \frac{A E^{i\omega} (\omega - 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2}{2 (\omega - \Omega) \Omega (\omega^2 - 4\Omega^2)} - \frac{A E^{i\omega} (\omega + 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2}{2 \Omega (\omega + \Omega) (\omega^2 - 4\Omega^2)} \\
 & \frac{3 E^{-i\tau\Omega} \alpha \Lambda^3}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{3 E^{i\tau\Omega} \alpha \Lambda^3}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 I E^{i\tau\Omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{4 E^{-i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^2 (-\omega^2 + \Omega^2)} + \frac{4 E^{i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^2 (-\omega^2 - \Omega^2)} + \frac{2 I E^{-i\tau\Omega} \Lambda \mu \Omega}{-\omega^2 + \Omega^2} \\
 & \frac{3 A^2 E^{i\omega} (2\omega - \Omega) \alpha \Lambda}{3 \omega^2 - 4\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{2 A^2 E^{i\omega} (2\omega - \Omega) \delta^2 \Lambda}{3 \omega^2 (3\omega^2 - 4\omega\Omega + \Omega^2)} + \frac{A E^{i\omega} (\omega - 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2}{\Omega^2 (2\omega^2 - 3\omega\Omega + \Omega^2)} - \frac{4 A^2 E^{i\omega} (2\omega - \Omega) \delta^2 \Lambda}{\Omega (-6\omega^3 + 11\omega^2\Omega - 6\omega\Omega^2 + \Omega^3)} \\
 & \frac{2 E^{-i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^4 - 5\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^4} - \frac{2 E^{i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^4 - 5\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^4} - \frac{2 E^{-2i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^4 - 13\omega^2\Omega^2 + 36\Omega^4} - \frac{2 E^{2i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda^2}{\omega^4 - 13\omega^2\Omega^2 + 36\Omega^4} - \frac{2 B \delta \bar{A}}{\omega^2} \\
 & \frac{5 A^2 E^{i\omega} \delta^2 (1 - 2 I \tau \omega) \bar{A}}{6 \omega^4} + \frac{E^{-i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (1 + 2 I \tau \omega) \bar{A}}{\omega^4} - \frac{3 I E^{-i\omega} \alpha \Lambda^2 (-I + 2 \tau \omega) \bar{A}}{2 \omega^2} - \frac{E^{-i\omega} \mu (-I + 2 \tau \omega) \bar{A}}{2 \omega} \\
 & \frac{3 I A^2 E^{i\omega} \alpha (I + 2 \tau \omega) \bar{A}}{4 \omega^2} + \frac{E^{-i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (1 + 2 I \tau \omega) \bar{A}}{\omega^2 (2\omega - \Omega) \Omega} + \frac{3 E^{-i\omega} (\omega + 2\Omega) \alpha \Lambda^2 \bar{A}}{4 \Omega (\omega + \Omega)} - \frac{4 A E^{-i\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\Omega (-2\omega + \Omega) (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)} \\
 & \frac{4 A E^{i\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\Omega (-2\omega - \Omega) (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)} - \frac{I E^{-i\omega} \delta^2 \Lambda^2 (-I + 2 \tau \omega) \bar{A}}{\omega^2 \Omega (2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-i\omega} (\omega + 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2 \bar{A}}{\Omega^2 (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} - \frac{4 A E^{-i\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} \\
 & \frac{4 A E^{i\omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-i\omega} (\omega - 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2 \bar{A}}{2 (\omega - \Omega) \Omega (\omega^2 - 4\Omega^2)} - \frac{E^{-i\omega} (\omega + 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2 \bar{A}}{2 \Omega (\omega + \Omega) (\omega^2 - 4\Omega^2)} + \frac{6 A E^{-i\tau\Omega} \alpha \Lambda \bar{A}}{\omega^2 - \Omega^2} \\
 & \frac{6 A E^{i\tau\Omega} \alpha \Lambda \bar{A}}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{4 A E^{-i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\omega^2 (-\omega^2 + \Omega^2)} + \frac{4 A E^{i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}}{\omega^2 (-\omega^2 + \Omega^2)} + \frac{E^{-i\omega} (\omega - 2\Omega) \delta^2 \Lambda^2 \bar{A}}{\Omega^2 (2\omega^2 - 3\omega\Omega + \Omega^2)} + \frac{3 E^{-i\tau\omega - 2i\tau\Omega} \alpha \Lambda^2 \bar{A}}{-4\omega\Omega - 4\Omega^2} \\
 & \frac{5 A E^{-i\omega} \delta^2 (1 - 2 I \tau \omega) \bar{A}^2}{6 \omega^4} - \frac{3 I A E^{-i\omega} \alpha (-I + 2 \tau \omega) \bar{A}^2}{4 \omega^2} - \frac{3 E^{-i\omega} (2\omega - \Omega) \alpha \Lambda \bar{A}^2}{(\omega - \Omega) (3\omega + \Omega)} - \frac{2 E^{-i\omega} (2\omega - \Omega) \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{3 \omega^2 (\omega + \Omega) (3\omega + \Omega)} \\
 & \frac{4 E^{-i\omega} (2\omega - \Omega) \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{\Omega (\omega + \Omega) (2\omega - \Omega) (3\omega + \Omega)} - \frac{3 E^{-2i\tau\omega - i\tau\Omega} \alpha \Lambda \bar{A}^2}{3 \omega^2 - 4\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{2 E^{-2i\tau\omega - i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{3 \omega^2 (3\omega^2 - 4\omega\Omega + \Omega^2)} - \frac{4 E^{-2i\tau\omega - i\tau\Omega} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{\Omega (-6\omega^3 + 11\omega^2\Omega - 6\omega\Omega^2 - \Omega^3)} \\
 & \left. \frac{E^{-2i\tau\omega} \delta^2 \bar{A}^3}{12 \omega^4} + \frac{E^{-2i\tau\omega} \alpha \bar{A}^3}{8 \omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{B}}{\omega^2} - \frac{2 E^{-i\omega} (\omega - \Omega) \delta \Lambda \bar{B}}{(2\omega - \Omega) \Omega} - \frac{2 E^{-i\omega} (\omega + \Omega) \delta \Lambda \bar{B}}{\Omega (2\omega + \Omega)} + \frac{2 E^{-2i\tau\omega} \delta \bar{A} \bar{B}}{3 \omega^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Εκκάθαρα η sol3p καταρρέει επειδή περιέχει προσωρινούς όρους και όρους μικρού διαιρέτη όταν $\Omega \approx \omega$, $\Omega \approx 0$, $\Omega \approx 2\omega$, $\Omega \approx \omega/2$, $\Omega \approx 3\omega$, και $\Omega \approx \omega/3$. Όπως φαίνεται στην επόμενη υποενότητα, οι όροι μικρού διαιρέτη που εμφανίζονται από το $\Omega \approx 3\omega$ παράγουν έναν υποαρμονικό συντονισμό τάξης 1:3 και εκείνες που προκύπτουν από το $\Omega \approx \omega/3$ παράγουν έναν υπεαρμονικό συντονισμό τάξης τρία. Εκτελώντας την ανάπτυξη σε υψηλότερη τάξη, βρίσκει κανείς ότι και άλλοι συντονισμοί μπορεί να συμβούν.

Σημειωτέον ότι οι συντονισμοί που συμβαίνουν εξαρτώνται από την τάξη της μη-γραμμικότητας. Οι τετραγωνικές μη-γραμμικότητες παράγουν (α) υποαρμονικούς συντονισμούς τάξης 1:2 και υπεαρμονικούς συντονισμούς τάξης δύο στη δεύτερη τάξη και (β) υποαρμονικούς συντονισμούς τάξεως 1:3 και υπεαρμονικούς συντονισμούς τάξης τρία στην τρίτη τάξη. Αντίθετα, οι κυβικές μη-γραμμικότητες παράγουν υποαρμονικούς συντονισμούς τάξης 1:3 και υπεαρμονικούς συντονισμούς τάξης 3 στην τρίτη τάξη. Για ένα δοθέν σύστημα και μια δοθείσα τάξη προσέγγισης, οι συντονισμοί που παράγονται μπορούν εύκολα να αναγνωριστούν μέσω εκτέλεσης μιας απ' ευθείας ανάπτυξης όπως έγινε παραπάνω.

Στις επόμενες τρεις ενότητες, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, τη γενικευμένη μέθοδο της μεσοστάθμισης, και τη μέθοδο των κανονικών μορφών για να καθορίσουμε τις δεύτερης-

τάξης ομοιόμορφες αναπτύξεις για τις λύσεις της `FDuffingEq` που δεν περιέχουν προσωρινούς ή μικρού διαιρέτη όρους.

4.2 Η Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων

4.2.1 Προκαταρκτικές Παρατηρήσεις

Για μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη, χρειαζόμαστε τρεις χρονικές κλίμακες, τις οποίες συμβολίζουμε και τοποθετούμε σε λίστες ως εξής :

```
Needs["Utilities`Notation`"]
```

```
Symbolize[T0]; Symbolize[T1]; Symbolize[T2];
```

```
timeScales = {T0, T1, T2};
```

Η μέγιστη τάξη της ανάπτυξης σχετίζεται, γενικά, με τον αριθμό των χρονικών κλιμάκων από

```
maxOrder = Length[timeScales] - 1;
```

Σε όσα ακολουθούν, χρειαζόμαστε τα συζυγή μιγαδικά των A , ζ , και Γ , τα οποία τα ορίζουμε από

```
conjugateRule = {Complex[0, n_] -> Complex[0, -n], A -> Ā, Ā -> A, ζ -> ζ̄, ζ̄ -> ζ, Γ -> Γ̄, Γ̄ -> Γ};
```

Σε όρους των χρονικών κλιμάκων T_n , οι χρονικές παράγωγοι γίνονται

```
dt[1][expr_] := Sum[ε^i D[expr, timeScales[[i + 1]]], {i, 0, maxOrder}];
```

```
dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. ε^i /: i > maxOrder -> 0;
```

Για να αναπαραστήσουμε μερικές από τις εκφράσεις κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον ακόλουθο κανόνα εμφάνισης :

```
displayRule = {Derivative[a_][z_i][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{z_i}^{#1} a, {a}], z_i],
  Derivative[a_][A][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_A^{#1} a, {a}], A],
  Derivative[a_][Ā][_] -> SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{Ā}^{#1} a, {a}], Ā],
  z_i[_] -> z_i, A[_] -> A, Ā[_] -> Ā};
```

Χρησιμοποιώντας τις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , μετατρέπουμε την `FDuffingEq` από μια συνήθη διαφορική εξίσωση σε μια μερική διαφορική εξίσωση σύμφωνα με τον κανόνα :

```
multiScalesRule = {u[t] -> u[T0, T1, T2], Derivative[n_][u][t] -> dt[n][u][T0, T1, T2], t -> T0};
```

Αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `FDuffingEq` της μορφής :

```
solRule = u -> (Sum[ε^i u_i[#1, #2, #3], {i, maxOrder + 1}] &);
```

Για μια ομοιόμορφη ανάπτυξη, χρειάζεται να απαλείψουμε τους προσωρινούς και τους μικρού διαιρέτη όρους. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει να κάνουμε διάκριση μεταξύ κύριων και δευτερευόντων συντονισμών. Αντιμετωπίζονται ξεχωριστά ξεκινώντας από την περίπτωση του κύριου συντονισμού.

4.2.2 Κύριος Συντονισμός

Κλιμακώνουμε την απόσβεση $\hat{\mu}$ και τη δύναμη F έτσι ώστε ο όρος απόσβεσης και οι όροι συντονισμού να εμφανίζονται στην ίδια τάξη στην οποία οι προσωρινοί ή /και του μικρού διαιρέτη όροι παράχθηκαν λόγω της ύπαρξης των μη-γραμμικοτήτων. Σε αυτή την περίπτωση, εμφανίζονται στην τάξη ϵ^3 , και έτσι κλιμακώνουμε τη δύναμη και την απόσβεση ως εξής :

```
scaling = {F -> ε^3 f, μ̂ -> ε^2 μ};
```

Αντικαθιστώντας τον `solRule` στην `FDuffingEq`, χρησιμοποιώντας την `scaling` και τον `multiScalesRule`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αγνοώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

```
eq422a = (FDuffingEq /. scaling /. multiScalesRule /. solRule // ExpandAll) /.  $\epsilon^{\text{Order}[\#] > \text{maxOrder} + 1} \rightarrow 0$  ;  
eq422a /. displayRule
```

$$2 \epsilon^2 \mu (D_0 u_1) - \epsilon (D_0^2 u_1) + \epsilon^2 (D_0^2 u_2) + \epsilon^2 (D_0^2 u_3) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_1) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_2) + \epsilon^2 (D_1^2 u_1) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_2 u_1) + \epsilon \omega^2 u_1 + \delta \epsilon^2 u_1^2 + \alpha \epsilon^2 u_1^2 + \epsilon^2 \omega^2 u_2 + 2 \delta \epsilon^2 u_1 u_2 + \epsilon^2 \omega^2 u_2 = f \epsilon^2 \text{Cos}[T_0 \Omega]$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ϵ στην `eq422a`, λαμβάνουμε

```
eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq422a,  $\epsilon$ ] == 0 // Thread // Rest // TrigToExp;
```

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή στο ένα μέλος και τους μη-ομογενείς όρους στο άλλο, ορίζουμε :

```
eqOrder[i_] := (eqEps[[1, 1]] /.  $u_1 \rightarrow u_i$ ) - # & /@ eqEps[[i]] // Reverse
```

Χρησιμοποιώντας την `eqOrder[i]` και τον `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

```
Array[eqOrder, 3] /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= 0, \quad D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2 (D_0 D_1 u_1) - \delta u_1^2, \\ D_0^2 u_3 + \omega^2 u_3 &= \frac{1}{2} (E^{-IT_0 \Omega} + E^{IT_0 \Omega}) f - 2 \mu (D_0 u_1) - 2 (D_0 D_1 u_2) - D_1^2 u_1 - 2 (D_0 D_2 u_1) - \alpha u_1^2 - 2 \delta u_1 u_2 \end{aligned} \right\}$$

Η γενική λύση της `eqOrder[1]` μπορεί να εκφραστεί ως :

```
sol1 =  $u_1 \rightarrow$  Function[{T0, T1, T2}, A[T1, T2] Exp[I  $\omega$  T0] +  $\bar{A}$ [T1, T2] Exp[-I  $\omega$  T0]];
```

Χρησιμοποιώντας τη `sol1`, ξαναγράφουμε την `eqOrder[2]` ως εξής :

```
order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;
```

```
order2Eq /. displayRule
```

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -A^2 E^{2IT_0 \omega} \delta - 2 A \delta \bar{A} - E^{-2IT_0 \omega} \delta \bar{A}^2 - 2 I E^{IT_0 \omega} \omega (D_1 A) + 2 I E^{-IT_0 \omega} \omega (D_1 \bar{A})$$

Η απαλοιφή των όρων που παράγουν προσωρινούς όρους στην `order2Eq`, απαιτεί ότι :

```
SCond1 = Coefficient[order2Eq[[2]], Exp[I  $\omega$  T0]] == 0
```

$$-2 I \omega A^{(1,0)}[T_1, T_2] = 0$$

Λύνοντας την `SCond1` ως προς $A^{(1,0)}[T_1, T_2]$ παίρνουμε :

```
SCond1Rule = Solve[SCond1, A^{(1,0)}[T1, T2]] [[1]]
```

$$\{A^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Έτσι, $A = A[T_2]$.

Αντικαθιστώντας τη συνθήκη επιλυσιμότητας στην `order2Eq`, έχουμε :

```
order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule /. (SCond1Rule /. conjugateRule);
```

```
order2Eqm /. displayRule
```

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -A^2 E^{2IT_0 \omega} \delta - 2 A \delta \bar{A} - E^{-2IT_0 \omega} \delta \bar{A}^2$$

Η ειδική λύση της `order2Eqm` μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας τη `DSolve`. Το αποτέλεσμα είναι :

```
sol2p = DSolve[order2Eqm, u2 @@ timeScales, timeScales] [[1]] /. C[_] -> (0 &) // TrigToExp // ExpandAll;  
sol2p /. displayRule
```

$$\left\{ u_2 \rightarrow \frac{A^2 E^{2IT_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} + \frac{E^{-2IT_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right\}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την `sol2p[[1,2]]` απευθείας για να εκφράσουμε το u_2 υπό μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

`sol2 = u2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2p[[1, 2]] // Evaluate];`

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις, `sol1` και `sol2`, στην τρίτης-τάξης εξίσωση, `eqOrder[3]`, λαμβάνουμε :

`order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;`
`order3Eq /. displayRule`

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == & \frac{1}{2} E^{-i T_0} f + \frac{1}{2} E^{i T_0} f - A^2 E^{2 i T_0} \alpha - \frac{2 A^2 E^{2 i T_0} \delta^2}{3 \omega^2} - 2 I A E^{i T_0} \mu \omega - 3 A^2 E^{i T_0} \alpha \bar{A} + \\ & \frac{10 A^2 E^{i T_0} \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} + 2 I E^{-i T_0} \mu \omega \bar{A} - 3 A E^{-i T_0} \alpha \bar{A}^2 + \frac{10 A E^{-i T_0} \delta^2 \bar{A}^2}{3 \omega^2} - E^{-i T_0} \alpha \bar{A}^2 - \frac{2 E^{-i T_0} \delta^2 \bar{A}^3}{3 \omega^2} - \\ & \frac{8 I A E^{2 i T_0} \delta (D_1 A)}{3 \omega} + \frac{8 I E^{-2 i T_0} \delta \bar{A} (D_1 \bar{A})}{3 \omega} - E^{i T_0} (D_1^2 A) - E^{-i T_0} (D_1^2 \bar{A}) - 2 I E^{i T_0} \omega (D_2 A) + 2 I E^{-i T_0} \omega (D_2 \bar{A}) \end{aligned}$$

Για να εκφράσουμε την εγγύτητα του Ω με το ω , εισάγουμε μια αποσυντονιστική (detuning) παράμετρο $\sigma = O(1)$ η οποία ορίζεται ως εξής :

`OmgRule = {Ω -> ω + ε^2 σ};`

Χρησιμοποιώντας τον `OmgRule`, μετατρέπουμε τον όρο του μικρού διαιρέτη που προκύπτει από τη διέγερση, σε προσωρινό όρο. Τότε, η απαλοιφή των προσωρινών όρων από το u_3 , απαιτεί ότι :

`expRule1 = Exp[a_] :> Exp[Expand[a /. OmgRule] /. ε^2 T0 -> T2];`

`SCond2 = Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule1, Exp[I ω T0]] == 0;`

`SCond2 /. displayRule`

$$\frac{1}{2} E^{i T_2} f - 2 I A \mu \omega - 3 A^2 \alpha \bar{A} + \frac{10 A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - D_1^2 A - 2 I \omega (D_2 A) == 0$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A = A[T_2]$ από τον `SCond1Rule`, ξαναγράφουμε την `SCond2` ως εξής :

`SCond = SCond2 /. D[SCond1Rule, T1] /. {A -> (A[#2] &), A -> (A[#2] &)}`

$$\frac{1}{2} E^{i T_2} f - 2 I \mu \omega A[T_2] - 3 \alpha A[T_2]^2 \bar{A}[T_2] + \frac{10 \delta^2 A[T_2]^2 \bar{A}[T_2]}{3 \omega^2} - 2 I \omega A'[T_2] == 0$$

4.2.3 Δευτερεύοντες Συντονισμοί λόγω Κυβικών Μη-Γραμμικότητας

Σε αυτή την περίπτωση το Ω διαφέρει αρκετά από τα ω , 2ω και $\omega/2$ και οι όροι μικρού διαιρέτη πρώτα εμφανίζονται στην $O(\epsilon^3)$. Κλιμακώνουμε την απόσβεση $\hat{\mu}$ και τη δύναμη F έτσι ώστε ο όρος απόσβεσης και οι όροι συντονισμού να εμφανίζονται στην ίδια τάξη με την κυβική μη-γραμμικότητα σύμφωνα με :

`scaling = {F -> ε f, μ -> ε^2 μ};`

`eq423a = (FDuffingEq /. scaling /. multiScalesRule /. solRule // ExpandAll) /. ε^(n/3) -> maxOrder+1 -> 0;`
`eq423a /. displayRule`

$$\begin{aligned} 2 \epsilon^3 \mu (D_0 u_1) - \epsilon (D_0^2 u_1) + \epsilon^2 (D_0^2 u_2) - \epsilon^3 (D_0^2 u_3) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_1) + 2 \epsilon^3 (D_0 D_1 u_2) + \\ \epsilon^1 (D_1^2 u_1) - 2 \epsilon^3 (D_0 D_2 u_1) + \epsilon \omega^2 u_1 - \delta \epsilon^2 u_1^2 + \alpha \epsilon^3 u_1^3 - \epsilon^2 \omega^2 u_2 + 2 \delta \epsilon^1 u_1 u_2 + \epsilon^3 \omega^2 u_2 == f \in \text{Cos}[T_0 \Omega] \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ϵ , λαμβάνουμε :

`eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq423a, ε] == 0 // Thread // Rest // TrigToExp;`

Για να τοποθετήσουμε το γραμμικό τελεστή από το ένα μέλος και τους μη-ομογενείς όρους από το άλλο, ορίζουμε :

`eqOrder[i_] := (eqEps[[1, 1]] /. f -> 0 /. u1 -> u2) - # & /@ eqEps[[i]] // Reverse`

Χρησιμοποιώντας την `eqOrder[i]` και τον `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο, ως εξής :

`Array[eqOrder, 3] /. displayRule // TableForm`

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 == \frac{1}{2} (E^{-i T_0} + E^{i T_0}) f$$

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -2 (D_0 D_1 u_1) - \delta u_1^2$$

$$D_0^2 u_3 + \omega^2 u_3 == -2 \mu (D_0 u_1) - 2 (D_0 D_1 u_2) - D_1^2 u_1 - 2 (D_0 D_2 u_1) - \alpha u_1^3 - 2 \delta u_1 u_2$$

Η ειδική λύση της `eqOrder[1]` μπορεί να εκφραστεί ως :

`sollp = DSolve[eqOrder[1], u1 @@ timeScales, timeScales][[1]] /. C[_] -> (0 &) // Simplify`

$$\{u_1[T_0, T_1, T_2] \rightarrow -\frac{E^{-i T_0} (1 + E^{2 i T_0}) f}{2 (-\omega^2 + \Omega^2)}\}$$

Η γενική λύση της `eqOrder[1]` μπορεί να γραφεί ως :

$$fRule = \{f \rightarrow -2 \Lambda (-\omega^2 + \Omega^2)\};$$

`soll =`

`u1 -> Function[{T0, T1, T2}, A[T1, T2] Exp[I \omega T0] + \bar{A}[T1, T2] Exp[-I \omega T0] + sollp[[1, 2]] /. fRule // Expand // Evaluate]`

`u1 -> Function[{T0, T1, T2}, E^{-i T_0} \Lambda + E^{i T_0} \bar{\Lambda} + E^{i T_0} A[T_1, T_2] - E^{-i T_0} \bar{A}[T_1, T_2]`

Αντικαθιστώντας τη `soll` στην `eqOrder[2]`, δίνει :

`order2Eq = eqOrder[2] /. soll // ExpandAll;`

`order2Eq /. displayRule`

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2 i T_0} \delta - 2 A E^{i T_0} \omega - i T_0 \delta \Lambda - 2 A E^{i T_0} \omega + i T_0 \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2 i T_0} \delta \Lambda^2 - E^{2 i T_0} \delta \Lambda^2 - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-i T_0} \omega - i T_0 \delta \Lambda \bar{A} - 2 E^{-i T_0} \omega + i T_0 \delta \Lambda \bar{A} - E^{-2 i T_0} \delta \bar{A}^2 - 2 I E^{i T_0} \omega (D_1 A) + 2 I E^{-i T_0} \omega (D_1 \bar{A})$$

• Η Περίπτωση $\Omega \approx 3\omega$

Για να εκφράσουμε την εγγύτητα του Ω στο 3ω , εισάγουμε μια αποσυντονιστική παράμετρο $\sigma = O(1)$, η οποία ορίζεται ως εξής :

$$OmegRule = \{\Omega \rightarrow 3 \omega + \epsilon^2 \sigma\};$$

`expRule1 = {Exp[arg_] :=> Exp[Expand[arg /. OmegRule] /. \epsilon^2 T0 -> T2]};`

Για την απαλοιφή των προσωρινών όρων, από το u_2 , απαιτείται όπως :

`SCond1 = Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule1, Exp[I \omega T0]] == 0`

$$-2 I \omega A^{(1,0)}[T_1, T_2] == 0$$

`SCond1Rule = Solve[SCond1, A^{(1,0)}[T1, T2]][[1]]`

$$\{A^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

του οποίου το συζυγές μιγαδικό είναι

`ccSCond1Rule = SCond1Rule /. conjugateRule`

$$\{\bar{A}^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Αντικαθιστώντας τη συνθήκη επιλυσιμότητας, `SCond1Rule`, και το συζυγές μιγαδικό της, στην `order2Eq`, έχουμε :

`(order2Eqm = order2Eq /. SCondiRule /. ccSCondiRule) /. displayRule`

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2IT_0} \delta - 2 A E^{IT_0} \omega^{-IT_0} \delta \Lambda - 2 A E^{IT_0} \omega^{+IT_0} \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2IT_0} \delta \Lambda^2 - E^{2IT_0} \delta \Lambda^2 - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-IT_0} \omega^{-IT_0} \delta \Lambda \bar{A} - 2 E^{-IT_0} \omega^{+IT_0} \delta \Lambda \bar{A} - E^{-2IT_0} \delta \bar{A}^2$$

Με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε επαρκώς την `DSolve` για να βρούμε την ειδική λύση της `order2Eqm`, πρώτα μετατρέπουμε τη μερική διαφορική εξίσωση σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Κατόπιν λύνουμε για την ειδική λύση της παραγόμενης εξίσωσης και παίρνουμε :

`sol2p =`

`(u2[T0] /. DSolve[order2Eqm[[1]] /. u2 -> (u2[#1] &)) == #, u2[T0], T0][[1]] /. C[_] -> 0 // TrigToExp // Expand) & /@ order2Eqm[[2]];`

`sol2p /. displayRule`

$$\frac{A^2 E^{2IT_0} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{2 A E^{IT_0} (\omega - \Omega) \delta \Lambda}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 A E^{IT_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2IT_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2 \Omega) (\omega + 2 \Omega)} + \frac{E^{2IT_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2 \Omega) (\omega + 2 \Omega)} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} - \frac{2 E^{-IT_0} (\omega - \Omega) \delta \Lambda \bar{A}}{(2 \omega - \Omega) \Omega} - \frac{2 E^{-IT_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2IT_0} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2}$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για να εκφραστεί το u_2 σε μια μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

`sol2 = u2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2p // Evaluate];`

Αντικαθιστώντας τη `sol1` και τη `sol2` στην τρίτης-τάξης εξίσωση, τη `eqOrder[3]`, λαμβάνουμε :

`order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;`

Για να απαλειφθούν οι προσωρινοί όροι από το u_3 , χρειάζεται να ισχύει ότι :

`SCond2 = Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule1 /. \Omega -> 3 \omega, Exp[I \omega T0]] == 0 /. D[SCondiRule, T1];`
`SCond2 /. displayRule`

$$-6 A \alpha \Lambda^2 + \frac{12 A \delta^2 \Lambda^2}{5 \omega^2} - 2 I A \mu \omega - 3 A^2 \alpha \bar{A} + \frac{10 A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - 3 E^{IT_2} \sigma \alpha \Lambda \bar{A}^2 - \frac{2 E^{IT_2} \sigma \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{\omega^2} - 2 I \omega (D_2 \Lambda) == 0$$

- Η Περίπτωση $\Omega \approx (1/3) \omega$

Για να εκφράσουμε την εγγύτητα του Ω στο $(1/3)\omega$, εισάγουμε μια αποσυντονιστική παράμετρο $\sigma = O(1)$ η οποία ορίζεται ως εξής :

$$\Omega \text{mgRule} = \left\{ \Omega \rightarrow \frac{1}{3} (\omega + \epsilon^2 \sigma) \right\};$$

`expRule1 = {Exp[arg_] := Exp[Expand[arg /. \Omega \text{mgRule}] /. \epsilon^2 T0 -> T2]};`

Για την απαλοιφή των προσωρινών όρων από το u_2 , απαιτείται όπως :

`SCondi = Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule1, Exp[I \omega T0]] == 0`

$$-2 I \omega A^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0$$

ή

`SCondiRule = Solve[SCondi, A^{(1,0)} [T1, T2]][[1]]`

$$\{A^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

του οποίου το συζυγές μιγαδικό ισούται με

`ccSCondiRule = SCondiRule /. conjugateRule;`

Αντικαθιστώντας τη συνθήκη επιλυσιμότητας, `SCondiRule`, και το συζυγές μιγαδικό της, στην `order2Eq`, έχουμε :

```
order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule /. ccSCond1Rule;
order2Eqm /. displayRule
```

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2i T_0} \delta - 2 A E^{i T_0} \omega - i T_0 \delta \Lambda - 2 A E^{i T_0} \omega + i T_0 \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2 - E^{2i T_0} \delta \Lambda^2 - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-i T_0} \omega - i T_0 \delta \Lambda \bar{A} - 2 E^{-i T_0} \omega + i T_0 \delta \Lambda \bar{A} - E^{-2i T_0} \delta \bar{A}^2$$

Εανά, μετατρέπουμε τη μερική διαφορική εξίσωση σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση και τότε χρησιμοποιούμε το DSolve για να λάβουμε την ειδική λύση της order2Eqm ως εξής :

```
(sol2p =
(u2[T0] /. DSolve[(order2Eqm[[1]] /. u2 -> (u2[#1] &)) == #, u2[T0], T0][[1]] /. C[_] -> 0 //
TrigToExp) & /@ order2Eqm[[2]]) /. displayRule
```

$$\frac{A^2 E^{2i T_0} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{2 A E^{i T_0} (\omega - \Omega) \delta \Lambda}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 A E^{i T_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2 \Omega) (\omega + 2 \Omega)} + \frac{E^{2i T_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2 \Omega) (\omega + 2 \Omega)} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} - \frac{2 E^{-i T_0} (\omega - \Omega) \delta \Lambda \bar{A}}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 E^{-i T_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i T_0} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2}$$

```
sol2 = u2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2p // Evaluate];
```

Αντικαθιστώντας τις sol1 και sol2 στην τρίτης-τάξης εξίσωση, την eqOrder[3], λαμβάνουμε :

```
order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;
```

Μετατρέποντας τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη σε όρους που παράγουν προσωρινούς όρους και περιορίζοντας τότε τους προσωρινούς όρους από το u3, θα απαιτηθεί όπως :

```
SCond2 = Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule1 /. \Omega -> \frac{1}{3} \omega, Exp[I \omega T_0]] == 0 /. D[SCond1Rule, T1];
SCond2 /. displayRule
```

$$-6 A \alpha \Lambda^2 - E^{i T_2} \alpha \Lambda^3 + \frac{212 A \delta^2 \Lambda^2}{35 \omega^2} - \frac{19 E^{i T_2} \delta^2 \Lambda^2}{5 \omega^2} - 2 I A \mu \omega - 3 A^2 \alpha \bar{A} + \frac{10 A^2 \delta^2 \bar{A}}{5 \omega^2} - 2 I \omega (D_2 A) == 0$$

Ας περιορισθούμε σε ω^2

4.2.4 Δευτερεύοντες Συντονισμοί Λόγω Κεθτικών Μη-Γραμμικότητων

Σε αυτή την περίπτωση το Ω διαφέρει πολύ από το ω και τους όρους μικρού διαιρέτη που πρώτα εμφανίζονται στο $O(\epsilon^2)$. Κλιμακώνουμε την απόσβεση $\hat{\mu}$ και τη δύναμη F έτσι ώστε ο όρος απόσβεσης και οι όροι συντονισμού να εμφανίζονται στην ίδια τάξη με την κυβική μη-γραμμικότητα, δηλαδή :

```
scaling = {F -> \epsilon f, \hat{\mu} -> \epsilon \mu};
```

```
eq424a = (EDuffingEq /. scaling /. multiScalesRule /. solRule // ExpandAll) /. \epsilon^{n_}/>maxOrder-1 -> 0;
eq424a /. displayRule
```

$$2 \epsilon^2 \mu (D_0 u_1) - 2 \epsilon^3 \mu (D_0 u_2) + \epsilon (D_0^2 u_1) - \epsilon^2 (D_0^2 u_2) - \epsilon^3 (D_0^2 u_3) + 2 \epsilon^3 \mu (D_1 u_1) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_1) - 2 \epsilon^3 (D_0 D_1 u_2) - \epsilon^2 (D_1^2 u_1) + 2 \epsilon^3 (D_0 D_2 u_1) + \epsilon \omega^2 u_1 + \delta \epsilon^2 u_1^2 + \alpha \epsilon^3 u_1^3 - \epsilon^2 \omega^2 u_2 + 2 \delta \epsilon^3 u_1 u_2 + \epsilon^2 \omega^2 u_3 == f \epsilon \cos[T_0 \Omega]$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ϵ , λαμβάνουμε

```
eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq424a, \epsilon] == 0 // Thread // Rest // TrigToExp;
```

Για να τοποθετήσουμε το γραμμικό τελεστή από τη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους από την άλλη, ορίζουμε

```
eqOrder[i_] := (eqEps[[1, i]] /. f -> 0 /. u1 -> u1) - # & /@ eqEps[[1]] // Reverse
```

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

Array[eqOrder, 3] /. displayRule // TableForm

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 == \frac{1}{2} (E^{-IT_0 \Omega} + E^{IT_0 \Omega}) f$$

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -2 \mu (D_0 u_1) - 2 (D_0 D_1 u_1) - \delta u_1^2$$

$$D_0^2 u_3 + \omega^2 u_3 == -2 \mu (D_0 u_2) - 2 \mu (D_1 u_1) - 2 (D_0 D_2 u_1) - D_1^2 u_1 - 2 (D_0 D_2 u_1) - \alpha u_1^3 - 2 \delta u_1 u_2$$

Η ειδική λύση της eqOrder[1] μπορεί να εκφραστεί ως :

sollp = DSolve[eqOrder[1], u1 @@ timeScales, timeScales][[1]] /. C[_] -> (0 &) // Simplify

sollp = DSolve[eqOrder[1], u1 @@ timeScales, timeScales][[1]] /. C[_] -> (0 &) // Simplify

$$\left\{ u_1[T_0, T_1, T_2] \rightarrow -\frac{E^{-IT_0 \Omega} (1 - E^{2IT_0 \Omega}) f}{2 (-\omega^2 + \Omega^2)} \right\}$$

$$fRule = f \rightarrow -2 (-\omega^2 + \Omega^2) \Lambda;$$

Η γενική λύση της eqOrder[1] μπορεί να γραφεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

soll =

u1 -> Function[{T0, T1, T2},

A[T1, T2] Exp[I \omega T0] + \bar{A}[T1, T2] Exp[-I \omega T0] + sollp[[1, 2]] /. fRule // Expand // Evaluate]

u1 -> Function[{T0, T1, T2}, E^{-IT_0 \Omega} \Lambda + E^{IT_0 \Omega} \Lambda + E^{IT_0 \Omega} A[T1, T2] + E^{-IT_0 \Omega} \bar{A}[T1, T2]]

Αντικαθιστώντας τη soll στην eqOrder[2], οδηγεί σε :

order2Eq = eqOrder[2] /. soll // ExpandAll;

order2Eq /. displayRule

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2IT_0 \Omega} \delta - 2 A E^{IT_0 \Omega} E^{-IT_0 \Omega} \delta \Lambda - 2 A E^{IT_0 \Omega} E^{IT_0 \Omega} \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2IT_0 \Omega} \delta \Lambda^2 - E^{2IT_0 \Omega} \delta \Lambda^2 - 2 I A E^{IT_0 \Omega} \mu \omega + 2 I E^{-IT_0 \Omega} \Lambda \mu \Omega - 2 I E^{IT_0 \Omega} \Lambda \mu \Omega - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-IT_0 \Omega} E^{-IT_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A} - 2 E^{-IT_0 \Omega} E^{IT_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A} + 2 I E^{-IT_0 \Omega} \mu \omega \bar{A} - E^{-2IT_0 \Omega} \delta \bar{A}^2 - 2 I E^{IT_0 \Omega} \omega (D_1 A) + 2 I E^{-IT_0 \Omega} \omega (D_1 \bar{A})$$

• Η Περίπτωση $\Omega \approx 2\omega$

Για να εκφράσουμε την εγγύτητα του Ω στο 2ω , εισάγουμε μια αποσυντονιστική παράμετρο $\sigma = O(1)$ που ορίζεται από :

$$\Omega \mu gRule = \{\Omega \rightarrow 2 \omega + \epsilon \sigma\};$$

sigRule = Solve[\Omega \mu gRule /. Rule -> Equal, \sigma][[1]]

$$\left\{ \sigma \rightarrow -\frac{2 \omega - \Omega}{\epsilon} \right\}$$

expRule2 = {Exp[arg_] := Exp[Expand[arg /. \Omega \mu gRule] /. \epsilon T_0 -> T_1]};

Μετατρέποντας τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη σε όρους που παράγουν προσωρινούς όρους, και απαλείφοντας κατόπιν τους προσωρινούς όρους από το u_2 , απαιτείται όπως :

SCond1 = Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule2, Exp[I \omega T_0]] == 0;

SCond1 /. displayRule

$$-2 I A \mu \omega - 2 E^{IT_1 \sigma} \delta \Lambda \bar{A} - 2 I \omega (D_1 A) == 0$$

ή

SCond1Rule = {Solve[SCond1, A^{(1,0)}[T1, T2]][[1]] // ExpandAll};

SCond1Rule /. displayRule

$$\left\{ D_1 A \rightarrow -A \mu - \frac{I E^{IT_1 \sigma} \delta \Lambda \bar{A}}{\omega} \right\}$$

Υποκαθιστώντας τον sigRule στον SCond1Rule, προκύπτει :

SCond1Rulem = SCond1Rule /. Exp[a_] := Exp[a /. sigRule /. T1 -> ε T0 // Expand];
SCond1Rulem /. displayRule

$$\left\{ D_1 A \rightarrow -A \mu + \frac{I E^{-2IT_0} \omega + I T_0^2 \delta \Lambda \bar{A}}{\omega} \right\}$$

του οποίου το σύνθετο συζυγές είναι :

ccSCond1Rulem = SCond1Rulem /. conjugateRule;

Αντικαθιστώντας αυτές τις συνθήκες στην order2Eq, προκύπτει :

order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rulem /. ccSCond1Rulem // ExpandAll;
order2Eqm /. displayRule

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2IT_0} \delta - 2 A E^{IT_0} \omega + I T_0^2 \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2IT_0} \delta \Lambda^2 - E^{2IT_0} \delta \Lambda^2 + 2 I E^{-IT_0} \Lambda \mu \Omega - 2 I E^{IT_0} \Lambda \mu \Omega - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-IT_0} \omega - I T_0^2 \delta \Lambda \bar{A} - E^{-2IT_0} \delta \bar{A}^2$$

Μετατρέποντας την order2Eqm σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση, μπορούμε να λάβουμε την ειδική λύση ως εξής :

sol2p =

(u2[T0] /. DSolve[(order2Eqm[[1]] /. u2 -> (u2[#1] &)) == #, u2[T0], T0][[1]] /. C[_] -> 0 // TrigToExp) & /@ order2Eqm[[2]];

sol2p /. displayRule

$$\frac{A^2 E^{2IT_0} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{2 I E^{-IT_0} \Lambda \mu \Omega}{(-\omega + \Omega)(\omega + \Omega)} + \frac{2 I E^{IT_0} \Lambda \mu \Omega}{(-\omega + \Omega)(\omega + \Omega)} + \frac{2 A E^{IT_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda}{\Omega(2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-2IT_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2\Omega)(\omega + 2\Omega)} + \frac{E^{2IT_0} \delta \Lambda^2}{(-\omega + 2\Omega)(\omega + 2\Omega)} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} + \frac{2 E^{-IT_0} (\omega + \Omega) \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega(2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-2IT_0} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2}$$

sol2 = u2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2p // Evaluate];

Τότε, χρησιμοποιώντας τη sol1 και τη sol2 στην eqOrder[3], έχουμε :

order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;

Μετατρέποντας τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη σε όρους που παράγουν προσωρινούς όρους και απαλείφοντας κατόπιν τους προσωρινούς όρους από το u3, απαιτείται όπως :

SCond2 =

Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule2 /. Ω -> 2 ω, Exp[I ω T0]] == 0 /. D[SCond1Rule, T1] /. SCond1Rule /. (SCond1Rule /. conjugateRule) // ExpandAll;

SCond2 /. displayRule

$$-6 A \alpha \Lambda^2 + A \mu^2 + \frac{5 A \delta^2 \Lambda^2}{2 \omega^2} - 3 A^2 \alpha \bar{A} + \frac{10 A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{8 I E^{IT_1} \delta \Lambda \mu \bar{A}}{3 \omega} - \frac{E^{IT_1} \delta \Lambda \sigma \bar{A}}{\omega} - 2 I \omega (D_2 A) == 0$$

ή

SCond2Rule = Solve[SCond2, A^(0,1)[T1, T2]][[1]] // ExpandAll;

SCond2Rule /. displayRule

$$\left\{ D_2 A \rightarrow -\frac{5 I A \delta^2 \Lambda^2}{4 \omega^2} - \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} - \frac{I A \mu^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{4 E^{IT_1} \delta \Lambda \mu \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{I E^{IT_1} \delta \Lambda \sigma \bar{A}}{2 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right\}$$

Οι δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις, η SCond1Rule και η SCond2Rule, μπορούν να επανασυγκροτηθούν για να ληφθεί μια συνήθης διαφορική εξίσωση που διέπει το A. Το αποτέλεσμα είναι :

```
(2 I ω A' == (2 I ω dt[1][A[T1, T2]] /. SCond1Rule /. SCond2Rule // Expand // Collect[#, ε]) //
displayRule
2 I ω A' ==
ε [-2 I A μ ω - 2 Ei T1 σ δ Λ Ā] + ε2 [-6 A α Λ2 - A μ2 +  $\frac{5 A δ^2 Λ^2}{2 ω^2}$  - 3 A2 α Ā -  $\frac{10 A^2 δ^2 Ā}{3 ω^2}$  -  $\frac{3 I Ei T1 σ δ Λ μ Ā}{3 ω}$  -  $\frac{Ei T1 σ δ Λ σ Ā}{ω}$ ]
```

4.2.5 Πρώτης-Τάξης Σύστημα Πραγματικών Τιμών

Όπως και στην ενότητα 4.2.4, προσδιορίζουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `FDuffingEq` για την περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού τάξης 1:2. Όμως, αντί να μεταχειριστούμε τη δεύτερης-τάξης μορφή αυτής της εξίσωσης, μεταχειριζόμαστε την αντίστοιχη της πρώτης-τάξης μορφή. Δηλαδή, πρώτα την μετατρέπουμε σε ένα σύστημα από δύο πραγματικών-τιμών, πρώτης-τάξης εξισώσεις. Γι' αυτό το λόγο, εισάγουμε το μετασχηματισμό

```
vRule = u'[t] -> v[t];
```

Με σκοπό η επιρροή της μη-γραμμικότητας και της απόσβεσης να εξισορροπεί τον υποαρμονικό συντονισμό, κλιμακώνουμε τον συντελεστή απόσβεσης $\hat{\mu}$ και το εύρος εξαναγκασμού F ως εξής :

```
scaling = {F -> ε f, μ̂ -> ε μ};
```

Χρησιμοποιώντας την `scaling` και τον `vRule`, μετατρέπουμε την `FDuffingEq` στο ακόλουθο σύστημα των πραγματικών-τιμών πρώτης-τάξης εξισώσεων :

```
eq425a = {vRule /. Rule -> Equal, FDuffingEq /. scaling /. vRule /. D[vRule, t]}
{u'[t] == v[t], ω2 u[t] + δ u[t]2 + α u[t]3 + 2 ε μ v[t] + v'[t] == f ε Cos[t Ω]}
```

Για να προσδιορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `eq425a` χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, πρώτα μετατρέπουμε αυτές τις εξισώσεις από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις σε μερικές διαφορικές εξισώσεις σε όρους των τριών χρονικών κλιμάκων T_0 , T_1 και T_2 , σύμφωνα με :

```
multiScales = {u[t] -> u[T0, T1, T2], v[t] -> v[T0, T1, T2], u'[t] -> dt[1][u[T0, T1, T2]], t -> T0};
```

Μετά, αναπτύσσουμε τα u και v στη μορφή

```
solRule = {u -> (Sum[εj uj[#1, #2, #3], {j, 3}] &), v -> (Sum[εj vj[#1, #2, #3], {j, 3}] &)};
```

Αντικαθιστώντας τη `multiScales` και τη `solRule` στην `eq425a`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

```
eq425b = (eq425a /. multiScales /. solRule // ExpandAll) /. εn_/:n>3 -> 0;
```

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ϵ στην `eq425b`, προκύπτει :

```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0] & /@ eq425b // Transpose // Rest // TrigToExp;
```

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή από τη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους από την άλλη, ορίζουμε

```
linearSys = #[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. f -> 0;
linearSys /. displayRule
```

```
{D0 u1 - v1, D0 v1 + ω2 u1}
```

```
eqOrder[i_] := (linearSys /. u1 -> ui) == (linearSys /. u1 -> ui) - (#[[1]] & /@ eqEps[[i]]) // Thread
```

Χρησιμοποιώντας την `eqOrder[i]` και τον `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο, ως εξής :

```
eqOrder[1] /. displayRule // TableForm
eqOrder[2] /. displayRule // TableForm
eqOrder[3] /. displayRule // TableForm
```

$$D_0 u_1 - v_1 == 0$$

$$D_0 v_1 + \omega^2 u_1 == \frac{1}{2} (E^{-i T_0 \Omega} + E^{i T_0 \Omega}) f$$

$$D_0 u_2 - v_2 == -(D_1 u_1)$$

$$D_0 v_2 + \omega^2 u_2 == -(D_1 v_1) - \delta u_1^2 - 2 \mu v_1$$

$$D_0 u_3 - v_3 == -(D_1 u_2) - D_2 u_1$$

$$D_0 v_3 + \omega^2 u_3 == -(D_1 v_2) - D_2 v_1 - \alpha u_1^3 - 2 \delta u_1 u_2 - 2 \mu v_2$$

• Πρώτης-Τάξης Εξισώσεις : Γραμμικό Σύστημα

Αναζητούμε μια λύση της linearSys της μορφής $u_1 = P E^{i \omega T_0}$ και $v_1 = Q E^{i \omega T_0}$ και λαμβάνουμε :

```
coefList = E^{-i * T_0} linearSys /. {u_1 -> (P E^{i * * * * *}), v_1 -> (Q E^{i * * * * *})} // Expand
{-Q + I P \omega, I Q \omega + P \omega^2}
```

Το μητρώο συντελεστών της coefList είναι :

```
coefMat = Outer[Coefficient, coefList, {P, Q}]
{{I \omega, -1}, {\omega^2, I \omega}}
```

του οποίου ο συζυγής τελεστής (adjoint) ορίζεται ως εξής :

```
hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose
```

Έτσι, τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα της coefMat είναι :

```
rightVec = {1, c1} /. Solve[(coefMat.{1, c1})[[1]] == 0, c1][[1]]
{1, I \omega}
```

```
leftVec = {c1, 1} /. Solve[(hermitian[coefMat].{c1, 1})[[1]] == 0, c1][[1]]
{-I \omega, 1}
```

Το συζυγές μιγαδικό του leftVec είναι :

```
cleftVec = leftVec /. conjugateRule
{I \omega, 1}
```

Επομένως, η ομογενής λύση της eqOrder[1] είναι

```
sol1h = # + (# /. conjugateRule) & /@ (rightVec A[T_1, T_2] E^{i * T_0})
{E^{i T_0} A[T_1, T_2] + E^{-i T_0} \bar{A}[T_1, T_2], I E^{i T_0} \omega A[T_1, T_2] - I E^{-i T_0} \omega \bar{A}[T_1, T_2]}
```

Μετατρέπουμε την eqOrder[1] σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τη DSolve, λαμβάνουμε την ειδική λύση της eqOrder[1] ως εξής :

```
sol1p = DSolve[eqOrder[1] /. {u_1 -> (u_1[#1] &), v_1 -> (v_1[#1] &)}, {u_1[T_0], v_1[T_0]}, T_0][[1]] /. C[_] -> 0 //
TrigToExp // Simplify
```

$$\left\{ u_1[T_0] \rightarrow -\frac{E^{-i T_0 \Omega} (1 + E^{2 i T_0 \Omega}) f}{2 (-\omega^2 + \Omega^2)}, v_1[T_0] \rightarrow -\frac{I E^{-i T_0 \Omega} (-1 + E^{2 i T_0 \Omega}) f \Omega}{2 (-\omega^2 + \Omega^2)} \right\}$$

Τότε, η γενική λύση των πρώτης-τάξης εξισώσεων μπορούν να εκφραστούν σε μορφή καθαρών συναρτήσεων ως εξής :

$$fRule = f \rightarrow -2 (-\omega^2 + \Omega^2) \Lambda;$$

$$\begin{aligned} sol1 = \{ & u_1 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \text{sol1h}[\{1\}] + (u_1[T_0] /. \text{sol1p} /. fRule // \text{Expand}) // \text{Evaluate}], \\ & v_1 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \text{sol1h}[\{2\}] + (v_1[T_0] /. \text{sol1p} /. fRule // \text{Expand}) // \text{Evaluate}] \} \\ \{ & u_1 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, E^{-iT_0} \Lambda + E^{iT_0} \Lambda - E^{iT_0} A[T_1, T_2] + E^{-iT_0} \bar{A}[T_1, T_2]], \\ & v_1 \rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, -I E^{-iT_0} \Lambda \Omega + I E^{iT_0} \Lambda \Omega + I E^{iT_0} \omega A[T_1, T_2] - I E^{-iT_0} \omega \bar{A}[T_1, T_2]] \} \end{aligned}$$

• Δεύτερης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση, την $sol1$, στις δεύτερης-τάξης εξισώσεις, τις $eqOrder[2]$, έχουμε :

$$order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // \text{ExpandAll};$$

$$order2Eq /. \text{displayRule}$$

$$\begin{aligned} \{ & D_0 u_2 - v_2 == -E^{iT_0} (D_1 A) - E^{-iT_0} (D_1 \bar{A}), \\ & D_0 v_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2iT_0} \delta - 2 A E^{iT_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda - 2 A E^{iT_0} \omega + I T_0 \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2iT_0} \delta \Lambda^2 - \\ & E^{2iT_0} \delta \Lambda^2 - 2 I A E^{iT_0} \omega \mu + 2 I E^{-iT_0} \Lambda \mu \Omega - 2 I E^{iT_0} \Lambda \mu \Omega - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-iT_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \bar{A} - \\ & 2 E^{-iT_0} \omega + I T_0 \delta \Lambda \bar{A} + 2 I E^{-iT_0} \omega \mu \bar{A} - E^{-2iT_0} \delta \bar{A}^2 - I E^{iT_0} \omega (D_1 A) + I E^{-iT_0} \omega (D_1 \bar{A}) \} \end{aligned}$$

Για να εκφράσουμε ποσοτικά την εγγύτητα του υποαρμονικού συντονισμού της τάξης 1:2, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ , που ορίζεται :

$$\Omega \sigma Rule = \{\Omega \rightarrow 2 \omega + \epsilon \sigma\};$$

Για να μετατρέψουμε τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη σε όρους που παράγουν προσωρινούς όρους, χρησιμοποιούμε τον κανόνα :

$$\text{expRule1} = \text{Exp}[arg_] \rightarrow \text{Exp}[\text{Expand}[arg /. \Omega \sigma Rule] /. \epsilon T_0 \rightarrow T_1];$$

Για να περιορίσουμε τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στο u_2 και το v_2 (δηλ., τη συνθήκη επιλυσιμότητας της $order2Eq$), πρώτα υπολογίζουμε το διάνυσμα το ανάλογο με το $E^{I \omega T_0}$ στα δεξιά μέλη των $order2Eq$ και λαμβάνουμε :

$$STerms1 = \text{Coefficient}[\#[\{2\}] /. \text{expRule1}, \text{Exp}[I \omega T_0]] \& /@ order2Eq$$

$$\{-A^{(1,0)}[T_1, T_2], -2 I \mu \omega A[T_1, T_2] - 2 E^{iT_1} \delta \Lambda \bar{A}[T_1, T_2] - I \omega A^{(1,0)}[T_1, T_2]\}$$

Τότε, η συνθήκη επιλυσιμότητας της $order2Eq$ απαιτεί ότι η $STerms1$ να είναι ορθογωνική ως προς τη λύση του συζυγούς. Δηλαδή, της $cleftVec$. Το αποτέλεσμα είναι :

$$SCond1 = \text{Solve}[cleftVec.STerms1 == 0, A^{(1,0)}[T_1, T_2]][\{1\}]$$

$$\{A^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow -\frac{\mu \omega A[T_1, T_2] - I E^{iT_1} \delta \Lambda \bar{A}[T_1, T_2]}{\omega}\}$$

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι :

$$ccSCond1 = SCond1 /. \text{conjugateRule}$$

$$\{\bar{A}^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow -\frac{I E^{-iT_1} \delta \Lambda A[T_1, T_2] + \mu \omega \bar{A}[T_1, T_2]}{\omega}\}$$

Μετά, χρησιμοποιούμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας για να απαλείψουμε το $D_1 A$ και το συζυγές μιγαδικό του από την $order2Eq$ και μετά βρίσκουμε την ειδική τους λύση. Για να απλοποιήσουμε τις παραγόμενες εξισώσεις χρησιμοποιώντας το *Mathematica*, χρειάζεται να αντικαταστήσουμε το T_1 με το ϵT_0 . Γι' αυτό το λόγο, εκφράζουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ σε όρους του ω και του Ω , ήτοι

sigRule = Solve[OmigRule /. Rule -> Equal, σ][[1]]

$$\left\{ \sigma \rightarrow -\frac{2\omega - \Omega}{\varepsilon} \right\}$$

και ορίζουμε τον κανόνα

expRule2 = Exp[a_] := Exp[a /. T1 -> ε T0 /. sigRule // Expand];

Αυτός ο κανόνας μας επιτρέπει να ξαναγράψουμε την SCond1 και την ccSCond1 ως εξής :

SCond1f = Join[SCond1, ccSCond1] /. expRule2;

SCond1f /. displayRule

$$\left\{ D_1 A \rightarrow -\frac{A \mu \omega - I E^{-2IT_0} \omega + IT_0^2 \delta \Lambda \bar{A}}{\omega}, D_1 \bar{A} \rightarrow -\frac{I A E^{2IT_0} \omega - IT_0^2 \delta \Lambda + \mu \omega \bar{A}}{\omega} \right\}$$

Με αυτή τη μορφή της συνθήκης επιλυσιμότητας, η order2Eq γίνεται :

order2Eqm = order2Eq /. SCond1f // ExpandAll;

order2Eqm /. displayRule

$$\left\{ D_0 u_2 - v_2 == A E^{IT_0} \mu + \frac{I A E^{IT_0} \omega - IT_0^2 \delta \Lambda}{\omega} - E^{-IT_0} \mu \bar{A} - \frac{I E^{-IT_0} \omega + IT_0^2 \delta \Lambda \bar{A}}{\omega}, \right. \\ \left. D_0 v_2 + \omega^2 u_2 == -A^2 E^{2IT_0} \delta - A E^{IT_0} \omega - IT_0^2 \delta \Lambda - 2 A E^{IT_0} \omega + IT_0^2 \delta \Lambda - 2 \delta \Lambda^2 - E^{-2IT_0} \delta \Lambda^2 - E^{2IT_0} \delta \Lambda^2 - I A E^{IT_0} \mu \omega + \right. \\ \left. 2 I E^{-IT_0} \delta \Lambda \mu \omega - 2 I E^{IT_0} \delta \Lambda \mu \omega - 2 A \delta \bar{A} - 2 E^{-IT_0} \omega - IT_0^2 \delta \Lambda \bar{A} - E^{-IT_0} \omega + IT_0^2 \delta \Lambda \bar{A} - I E^{-IT_0} \mu \omega \bar{A} - E^{-2IT_0} \delta \bar{A}^2 \right\}$$

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για να προσδιορίσουμε την ειδική λύση της order2Eqm. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναγνωρίζουμε τη μορφή των μη-ομογενών τους όρων, στους οποίους θα αναφερόμαστε ως *πιθανούς όρους*, και μετά αναζητούμε τη λύση ως έναν γραμμικό συνδυασμό αυτών. Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στην order2Eqm και εξισώνοντας τον συντελεστή κάθε πιθανού όρου με το μηδέν, λαμβάνουμε ένα σύστημα από ζεύγη αλγεβρικών εξισώσεων που χρειάζεται να λυθούν για τους άγνωστους συντελεστές. Οι λύσεις αυτών των ζευγών είναι μοναδικές εκτός από τους συντελεστές του $E^{I\omega T_0}$ και του $E^{-I\omega T_0}$. Για να προσδιορίσουμε μια μοναδική λύση αντίστοιχη με αυτούς τους όρους, χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

Προσέγγιση 1 :

Στην πρώτη προσέγγιση, αντικαθιστούμε το ω με ένα άλλο σύμβολο, έστω ω_0 , βρίσκουμε τη λύση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων, και μετά παίρνουμε το όριο ω_0 τείνοντος ω . Για να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε

collectForm = {E^{IT₀} A[T₁, T₂], E^{-IT₀} Ā[T₁, T₂], E^{IT₀} Λ, E^{-IT₀} Λ};

Τότε, η μορφή των πιθανών όρων στα δεξιά μέλη της order2Eqm μπορεί να ευρεθεί ως :

possibleTerms = (collectForm /. ω -> ω₀) ~ Join~

(Outer[Times, collectForm, collectForm] // Flatten // Union)

$$\left\{ E^{IT_0 \omega_0} A[T_1, T_2], E^{-IT_0 \omega_0} \bar{A}[T_1, T_2], E^{IT_0^2} \Lambda, E^{-IT_0^2} \Lambda, \Lambda^2, E^{-2IT_0^2} \Lambda^2, \right. \\ \left. E^{2IT_0^2} \Lambda^2, E^{IT_0 \omega - IT_0^2} \Lambda A[T_1, T_2], E^{IT_0 \omega + IT_0^2} \Lambda A[T_1, T_2], E^{2IT_0 \omega} A[T_1, T_2]^2, \right. \\ \left. E^{-IT_0 \omega - IT_0^2} \Lambda \bar{A}[T_1, T_2], E^{-IT_0 \omega + IT_0^2} \Lambda \bar{A}[T_1, T_2], A[T_1, T_2] \bar{A}[T_1, T_2], E^{-2IT_0 \omega} \bar{A}[T_1, T_2]^2 \right\}$$

Μετά, συσχετίζουμε με κάθε πιθανό όρο έναν απροσδιόριστο συντελεστή στο u_2 :

symbolList1 = Table[Γ_i, {i, Length[possibleTerms]}]

{Γ₁, Γ₂, Γ₃, Γ₄, Γ₅, Γ₆, Γ₇, Γ₈, Γ₉, Γ₁₀, Γ₁₁, Γ₁₂, Γ₁₃, Γ₁₄}

και έναν απροσδιόριστο συντελεστή στο v_2 :

`symbolList2 = symbolList1 /. Γ -> Λ`

`{Λ1, Λ2, Λ3, Λ4, Λ5, Λ6, Λ7, Λ8, Λ9, Λ10, Λ11, Λ12, Λ13, Λ14}`

Τότε, αναζητούμε μια ειδική λύση της `order2Eqm` της μορφής :

`sol2Rule = {u2 -> Function[{T0, T1, T2}, symbolList1.possibleTerms // Evaluate],
v2 -> Function[{T0, T1, T2}, symbolList2.possibleTerms // Evaluate]};`

Αντικαθιστώντας τον `sol2Rule` στην `order2Eqm` και αντικαθιστώντας το $E^{\pm i \omega T_0}$ στα δεξιά μέλη της `order2Eqm` με $E^{\pm i \omega_0 T_0}$, έχουμε :

`order2Eqf =
Subtract @@ # & /@ order2Eqm /. sol2Rule /. {Exp[I ω T0] -> Exp[I ω0 T0], Exp[-I ω T0] -> Exp[-I ω0 T0]} //
Expand;`

Εφαρμόζοντας απευθείας τη συνάρτηση `Coefficient` για να συλλέξουμε τους συντελεστές όλων των `possibleTerms`, θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα επιπλέον όρους που θα είναι συναρτήσεις του T_0 , τους οποίους απαλείφουμε. Το αποτέλεσμα είναι

`algEqs = Flatten[Coefficient[order2Eqf, #] & /@ possibleTerms] == 0 /. Exp[_ T0] -> 0 // Thread`

`algEqs = Flatten[Coefficient[order2Eqf, #] & /@ possibleTerms] == 0 /. Exp[_ T0] -> 0 // Thread`

$$\left\{ \begin{aligned} -\mu - \Lambda_1 + I \Gamma_1 \omega_0 == 0, & I \mu \omega + \omega^2 \Gamma_1 - I \Lambda_1 \omega_0 == 0, & -\mu - \Lambda_2 - I \Gamma_2 \omega_0 == 0, & -I \mu \omega + \omega^2 \Gamma_2 - I \Lambda_2 \omega_0 == 0, \\ I \Omega \Gamma_2 - \Lambda_3 == 0, & 2 I \mu \Omega + \omega^2 \Gamma_3 + I \Omega \Lambda_3 == 0, & -I \Omega \Gamma_4 - \Lambda_4 == 0, & -2 I \mu \Omega + \omega^2 \Gamma_4 - I \Omega \Lambda_4 == 0, \\ -\Lambda_5 == 0, & 2 \delta + \omega^2 \Gamma_5 == 0, & -2 I \Omega \Gamma_6 - \Lambda_6 == 0, & \delta + \omega^2 \Gamma_6 - 2 I \Omega \Lambda_6 == 0, & 2 I \Omega \Gamma_7 - \Lambda_7 == 0, \\ \delta + \omega^2 \Gamma_7 + 2 I \Omega \Lambda_7 == 0, & -\frac{I \delta}{\omega} - I \omega \Gamma_8 - I \Omega \Gamma_8 - \Lambda_8 == 0, & \delta + \omega^2 \Gamma_9 + I \omega \Lambda_9 - I \Omega \Lambda_9 == 0, \\ I \omega \Gamma_9 - I \Omega \Gamma_9 - \Lambda_9 == 0, & 2 \delta + \omega^2 \Gamma_9 + I \omega \Lambda_9 + I \Omega \Lambda_9 == 0, & 2 I \omega \Gamma_{10} - \Lambda_{10} == 0, & \delta + \omega^2 \Gamma_{10} + 2 I \omega \Lambda_{10} == 0, \\ -I \omega \Gamma_{11} - I \Omega \Gamma_{11} - \Lambda_{11} == 0, & 2 \delta + \omega^2 \Gamma_{11} - I \omega \Lambda_{11} - I \Omega \Lambda_{11} == 0, & \frac{I \delta}{\omega} - I \omega \Gamma_{12} + I \Omega \Gamma_{12} - \Lambda_{12} == 0, \\ \delta + \omega^2 \Gamma_{12} - I \omega \Lambda_{12} + I \Omega \Lambda_{12} == 0, & -\Lambda_{12} == 0, & 2 \delta + \omega^2 \Gamma_{12} == 0, & -2 I \omega \Gamma_{13} - \Lambda_{13} == 0, & \delta + \omega^2 \Gamma_{13} - 2 I \omega \Lambda_{13} == 0 \end{aligned} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `Solve`, λύνουμε απευθείας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων `algEqs` για αυτούς τους απροσδιόριστους συντελεστές, και λαμβάνουμε :

`var = Join[symbolList1, symbolList2];`

`coefs = Solve[algEqs, var][[1]];`

Αντικαθιστώντας την `coefs` στην `sol2Rule` και μετατρέποντας το ω_0 ξανά σε ω , λαμβάνουμε τη λύση των δεύτερης-τάξης εξισώσεων σε καθαρή συναρτησιακή μορφή ως εξής :

`sol2a =
sol2Rule /. Function[{T0, T1, T2}, b_] :>
Function[{T0, T1, T2} // Evaluate, b /. coefs /. ω0 -> ω // Evaluate];
sol2a /. displayRule`

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 \rightarrow & \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, \right. \\ & \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} \frac{E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} \frac{E^{2i T_0} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} + \frac{2 I E^{-i T_0} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{2 I E^{i T_0} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{I E^{i T_0} \mu \Lambda}{2 \omega} \frac{E^{i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \Lambda}{\omega \Omega} \\ & \frac{2 E^{i T_0} \omega + I T_0 \delta \Lambda \Lambda}{\Omega (2 \omega - \Omega)} \frac{E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2}{3 \omega^2} + \frac{I E^{-i T_0} \mu \bar{\Lambda}}{2 \omega} \frac{E^{-i T_0} \omega + I T_0 \delta \Lambda \bar{\Lambda}}{\omega \Omega} - \frac{2 E^{-i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \bar{\Lambda}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{2 \delta \Lambda \bar{\Lambda}}{\omega^2} \frac{E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2}{3 \omega^2} \left. \right], \\ v_2 \rightarrow & \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, \right. \\ & \frac{2 I E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2 \Omega}{\omega^2 - 4 \Omega^2} \frac{2 I E^{2i T_0} \delta \Lambda^2 \Omega}{\omega^2 - 4 \Omega^2} + \frac{2 E^{-i T_0} \Lambda \mu \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{2 E^{i T_0} \Lambda \mu \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \\ & \frac{1}{2} \frac{E^{i T_0} \mu \Lambda}{E^{i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \Lambda} - \frac{I E^{i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \Lambda}{\Omega} \frac{2 I E^{i T_0} \omega + I T_0 \delta \Lambda \Lambda}{\Omega (2 \omega - \Omega)} \frac{2 I E^{2i T_0} \delta \Lambda^2}{3 \omega} \\ & \frac{1}{2} \frac{E^{-i T_0} \mu \bar{\Lambda}}{E^{-i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \bar{\Lambda}} - \frac{I E^{-i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \bar{\Lambda}}{\Omega} \frac{2 I E^{-i T_0} \omega - I T_0 \delta \Lambda \bar{\Lambda}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} \frac{2 I E^{-2i T_0} \delta \Lambda^2}{3 \omega} \left. \right] \end{aligned} \right\}$$

Προσέγγιση 2 :

Όπως συζητήθηκε παραπάνω, οι λύσεις των αλγεβρικών εξισώσεων που προήλθαν από την εφαρμογή της μεθόδου των απροσδιορίστων συντελεστών είναι μοναδικές εκτός από εκείνες που αντιστοιχούν στο $E^{I \omega T_0}$ και στο $E^{-I \omega T_0}$. Για να τις καταστήσουμε μοναδικές, απαιτούμε να είναι ορθογωνικές στις λύσεις των αντίστοιχων συζυγών προβλημάτων. Δηλαδή, αξιώνουμε το διάνυσμα συντελεστή της $E^{I \omega T_0}$ να είναι (u_2, v_2) , ορθογωνικό στο $cleftVec$. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα προσδιορίζουμε τη μορφή όλων των δυνατών όρων στα δεξιά μέλη της $order2Eqm$ και κατόπιν αναγνωρίζουμε όσες από αυτές αντιστοιχούν στους όρους συντονισμού και εκείνους που αντιστοιχούν σε όρους μη-συντονισμών.

```
possibleTerms = collectForm~Join~(Outer[Times, collectForm, collectForm] // Flatten // Union)
{E^{I T_0} A[T_1, T_2], E^{-I T_0} \bar{A}[T_1, T_2], E^{I T_0} \Lambda, E^{-I T_0} \bar{\Lambda}, \Lambda^2, E^{-2 I T_0} \bar{\Lambda}^2,
E^{2 I T_0} \Lambda^2, E^{I T_0} \omega^{-I T_0} \Lambda A[T_1, T_2], E^{I T_0} \omega^{I T_0} \bar{\Lambda} A[T_1, T_2], E^{2 I T_0} A[T_1, T_2]^2,
E^{-I T_0} \omega^{-I T_0} \bar{\Lambda} \bar{A}[T_1, T_2], E^{-I T_0} \omega^{I T_0} \Lambda \bar{A}[T_1, T_2], A[T_1, T_2] \bar{A}[T_1, T_2], E^{-2 I T_0} \bar{A}[T_1, T_2]^2}
```

Κατόπιν, αναγνωρίζουμε τους όρους συντονισμού, ανάμεσά στους ως άνω, ως εξής :

```
RT = (# /. {a_ /; a != 0 -> 1} & /@ (E^{-I \omega T_0} possibleTerms /. expRule1 /. Exp[_ T_0 + _.] -> 0)) possibleTerms //
Union // Rest
{E^{I T_0} A[T_1, T_2], E^{-I T_0} \omega^{I T_0} \bar{\Lambda} \bar{A}[T_1, T_2]}
```

Έτσι, το τμήμα μη-συντονισμών της $possibleTerms$ είναι το συμπληρωματικό της RT , δηλαδή :

```
NRT = Complement[possibleTerms, Join[RT, RT /. conjugateRule]]
{E^{-I T_0} \bar{\Lambda}, E^{I T_0} \Lambda, \Lambda^2, E^{-2 I T_0} \bar{\Lambda}^2, E^{2 I T_0} \Lambda^2, E^{I T_0} \omega^{I T_0} \bar{\Lambda} A[T_1, T_2],
E^{2 I T_0} A[T_1, T_2]^2, E^{-I T_0} \omega^{-I T_0} \bar{\Lambda} \bar{A}[T_1, T_2], A[T_1, T_2] \bar{A}[T_1, T_2], E^{-2 I T_0} \bar{A}[T_1, T_2]^2}
```

Κατόπιν, συσχετίζουμε με κάθε πιθανό όρο συντονισμού έναν απροσδιόριστο συντελεστή, χρησιμοποιώντας τον κανόνα :

```
RTsymbolList = Table[\Gamma_j, {j, Length[RT]}]
{\Gamma_1, \Gamma_2}
```

και συσχετίζουμε με κάθε πιθανό όρο μη-συντονισμού έναν μη προσδιορισμένο συντελεστή, χρησιμοποιώντας τον κανόνα :

```
NRTsymbolList[i_] = Table[\Lambda_{i,j}, {j, Length[NRT]}]
{\Lambda_{i,1}, \Lambda_{i,2}, \Lambda_{i,3}, \Lambda_{i,4}, \Lambda_{i,5}, \Lambda_{i,6}, \Lambda_{i,7}, \Lambda_{i,8}, \Lambda_{i,9}, \Lambda_{i,10}}
```

Έτσι, οι συντελεστές του RT στους μη-ομογενείς όρους στην $order2Eqm$ είναι :

```
coefRT = Coefficient[#[[2]], RT] & /@ order2Eqm /. Exp[_ T_0 + _.] -> 0
{{\mu, -\frac{I \delta}{\omega}}, \{-I \mu \omega, -\delta\}}
```

Έπεται από το

```
cleftVec.coefRT == {0, 0}
```

True

ότι η $coefRT$ είναι ορθογωνική στη λύση της συζυγούς, $cleftVec$, όπως θα έπρεπε άλλωστε !

Επιβάλλοντας τη συνθήκη ότι το $\{u_2, v_2\}$ είναι ορθογωνικό στο $cleftVec$, αναζητούμε τα u_2 και v_2 σε μορφή καθαρής συνάρτησης, ήτοι


```
sol2Form = {
  u2 -> Function[{T0, T1, T2},
    RTsymbolList.RT + (RTsymbolList.RT /. conjugateRule) + NRTsymbolList[1].NRT // Evaluate],
  v2 -> Function[{T0, T1, T2},
    -I ω RTsymbolList.RT + (-I ω RTsymbolList.RT /. conjugateRule) + NRTsymbolList[2].NRT // Evaluate];
```

Αντικαθιστώντας τη sol2Form στην order2Eqm και συλλέγοντας συντελεστές του NRT, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων :

```
algEqs1 = (Coefficient[Subtract @@ #, NRT] & /@ (order2Eqm /. sol2Form) /. Exp[_ T0] -> 0 // Flatten) == 0 // Thread
```

$$\begin{aligned} & \{-I \Omega \Lambda_{1,1} - \Lambda_{2,1} == 0, I \Omega \Lambda_{1,2} - \Lambda_{2,2} == 0, -\Lambda_{2,3} == 0, -2 I \Omega \Lambda_{1,4} - \Lambda_{2,4} == 0, 2 I \Omega \Lambda_{1,5} - \Lambda_{2,5} == 0, \\ & I \omega \Lambda_{1,6} + I \Omega \Lambda_{1,6} - \Lambda_{2,6} == 0, 2 I \omega \Lambda_{1,7} - \Lambda_{2,7} == 0, -I \omega \Lambda_{1,8} - I \Omega \Lambda_{1,8} - \Lambda_{2,8} == 0, -\Lambda_{2,9} == 0, \\ & -2 I \omega \Lambda_{1,10} - \Lambda_{2,10} == 0, -2 I \mu \Omega + \omega^2 \Lambda_{1,1} - I \Omega \Lambda_{2,1} == 0, 2 I \mu \Omega + \omega^2 \Lambda_{1,2} + I \Omega \Lambda_{2,2} == 0, 2 \delta + \omega^2 \Lambda_{1,2} == 0, \\ & \delta + \omega^2 \Lambda_{1,4} - 2 I \Omega \Lambda_{2,4} == 0, \delta + \omega^2 \Lambda_{1,5} + 2 I \Omega \Lambda_{2,5} == 0, 2 \delta + \omega^2 \Lambda_{1,6} + I \omega \Lambda_{2,6} + I \Omega \Lambda_{2,6} == 0, \\ & \delta + \omega^2 \Lambda_{1,7} + 2 I \omega \Lambda_{2,7} == 0, 2 \delta + \omega^2 \Lambda_{1,8} - I \omega \Lambda_{2,8} - I \Omega \Lambda_{2,8} == 0, 2 \delta + \omega^2 \Lambda_{1,9} == 0, \delta + \omega^2 \Lambda_{1,10} - 2 I \omega \Lambda_{2,10} == 0 \} \end{aligned}$$

Λύνοντας την algEqs1 για τους απροσδιόριστους συντελεστές NRTsymbolList προκύπτει :

```
coef1 = Solve[algEqs1, Array[NRTsymbolList, 2] // Flatten][[1]]
```

$$\begin{aligned} & \left\{ \Lambda_{2,9} \rightarrow 0, \Lambda_{1,3} \rightarrow -\frac{2 \delta}{\omega^2}, \Lambda_{1,9} \rightarrow -\frac{2 \delta}{\omega^2}, \Lambda_{2,2} \rightarrow 0, \Lambda_{1,1} \rightarrow \frac{2 I \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \Lambda_{1,4} \rightarrow -\frac{\delta}{\omega^2 - 4 \Omega^2}, \Lambda_{1,2} \rightarrow -\frac{2 I \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \Lambda_{1,5} \rightarrow -\frac{\delta}{\omega^2 - 4 \Omega^2}, \right. \\ & \Lambda_{2,1} \rightarrow \frac{2 \mu \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \Lambda_{1,7} \rightarrow \frac{\delta}{3 \omega^2}, \Lambda_{2,2} \rightarrow \frac{2 \mu \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \Lambda_{2,5} \rightarrow -\frac{2 I \delta \Omega}{\omega^2 - 4 \Omega^2}, \Lambda_{1,10} \rightarrow \frac{\delta}{3 \omega^2}, \Lambda_{2,10} \rightarrow -\frac{2 I \delta}{3 \omega}, \Lambda_{2,4} \rightarrow \frac{2 I \delta \Omega}{\omega^2 - 4 \Omega^2}, \\ & \left. \Lambda_{2,7} \rightarrow \frac{2 I \delta}{3 \omega}, \Lambda_{2,6} \rightarrow \frac{2 I \delta (\omega + \Omega)}{\Omega (2 \omega - \Omega)}, \Lambda_{1,6} \rightarrow \frac{2 \delta}{\Omega (2 \omega + \Omega)}, \Lambda_{1,8} \rightarrow \frac{2 \delta}{2 \omega \Omega - \Omega^2}, \Lambda_{2,8} \rightarrow -\frac{2 I \delta (\omega + \Omega)}{2 \omega \Omega + \Omega^2} \right\} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη sol2Form σε οποιαδήποτε από τις δύο order2Eqm και συλλέγοντας τους συντελεστές του RT, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων :

```
algEqs2 = Coefficient[Subtract @@ order2Eqm[[1]] /. sol2Form, RT] == 0 /. Exp[_ T0] -> 0 // Thread
```

$$\left\{ -\mu + 2 I \omega \Gamma_1 == 0, \frac{I \delta}{\omega} + I \Omega \Gamma_2 == 0 \right\}$$

Λύνοντας την algEqs2 για τους απροσδιόριστους συντελεστές RTsymbolList, προκύπτει :

```
coef2a = Solve[algEqs2, RTsymbolList][[1]]
```

$$\left\{ \Gamma_1 \rightarrow -\frac{I \mu}{2 \omega}, \Gamma_2 \rightarrow -\frac{\delta}{\omega \Omega} \right\}$$

```
coef2 = Join[coef2a, coef2a /. conjugateRule]
```

$$\left\{ \Gamma_1 \rightarrow -\frac{I \mu}{2 \omega}, \Gamma_2 \rightarrow -\frac{\delta}{\omega \Omega}, \bar{\Gamma}_1 \rightarrow \frac{I \mu}{2 \omega}, \bar{\Gamma}_2 \rightarrow -\frac{\delta}{\omega \Omega} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την coef1 και την coef2 στην sol2Form, λαμβάνουμε τη λύση των δεύτερης-τάξης εξισώσεων σε μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

```
sol2b =
```

```
sol2Form /. Function[{T0, T1, T2}, b_] :=
```

```
Function[{T0, T1, T2} // Evaluate, b /. coef1 /. coef2 // Expand // Evaluate];
```

```
sol2b /. displayRule
```

$$\begin{aligned}
 \{u_2 \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), & \\
 \frac{2\delta\Lambda^2}{\omega^2} - \frac{E^{-2iT_0}\delta\Lambda^2}{\omega^2 - 4\Omega^2} - \frac{E^{2iT_0}\delta\Lambda^2}{\omega^2 - 4\Omega^2} + \frac{2IE^{-iT_0}\Lambda\mu\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2IE^{iT_0}\Lambda\mu\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{IE^{iT_0}\mu\Lambda}{2\omega} - \frac{E^{iT_0} - I T_0^2 \delta\Lambda\Lambda}{\omega\Omega} - & \\
 \frac{2E^{iT_0} + iT_0^2 \delta\Lambda\Lambda}{\Omega(2\omega + \Omega)} + \frac{E^{2iT_0}\delta\Lambda^2}{3\omega^2} + \frac{IE^{-iT_0}\mu\bar{A}}{2\omega} - \frac{E^{-iT_0} + iT_0^2 \delta\Lambda\bar{A}}{\omega\Omega} + \frac{2E^{-iT_0} - iT_0^2 \delta\Lambda\bar{A}}{2\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{2\delta\Lambda\bar{A}}{\omega^2} + \frac{E^{-2iT_0}\delta\bar{A}^2}{3\omega^2}], & \\
 v_2 \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), & \\
 \frac{2IE^{-2iT_0}\delta\Lambda^2\Omega}{\omega^2 - 4\Omega^2} - \frac{2IE^{2iT_0}\delta\Lambda^2\Omega}{\omega^2 - 4\Omega^2} - \frac{2E^{-iT_0}\Lambda\mu\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2E^{iT_0}\Lambda\mu\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} - & \\
 \frac{1}{2}E^{iT_0}\mu\Lambda - \frac{IE^{iT_0} - I T_0^2 \delta\Lambda\Lambda}{\Omega} - \frac{2IE^{iT_0} + iT_0^2 \delta\Lambda\Lambda}{2\omega + \Omega} - \frac{2IE^{iT_0} + iT_0^2 \delta\Lambda\omega\Lambda}{\Omega(2\omega + \Omega)} + \frac{2IE^{2iT_0}\delta\Lambda^2}{3\omega} - & \\
 \frac{1}{2}E^{-iT_0}\mu\bar{A} + \frac{IE^{-iT_0} + I T_0^2 \delta\Lambda\bar{A}}{\Omega} - \frac{2IE^{-iT_0} - I T_0^2 \delta\Lambda\omega\bar{A}}{2\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{2IE^{-iT_0} - I T_0^2 \delta\Lambda\Omega\bar{A}}{2\omega\Omega + \Omega^2} - \frac{2IE^{-2iT_0}\delta\bar{A}^2}{3\omega}]] &
 \end{aligned}$$

Αυτές οι δύο προσεγγίσεις παράγουν τα ίδια αποτελέσματα επειδή ισχύει ότι

`Subtract @@ (u2[T0, T1, T2] /. {sol2a, sol2b}) // Simplify`

0

`Subtract @@ (v2[T0, T1, T2] /. {sol2a, sol2b}) // Simplify`

0

Η δεύτερη προσέγγιση είναι πιο βολική στο να χρησιμοποιείται για ένα γενικό σύστημα εξισώσεων. Έτσι, θα υιοθετήσουμε αυτή την προσέγγιση στο υπόλοιπο της Διπλωματικής Εργασίας.

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης-τάξης εξισώσεις στις τρίτης-τάξης εξισώσεις, `eqOrder[3]`, προκύπτει :

`order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2b // ExpandAll;`

Χρησιμοποιώντας τον `expRule1` για να μετατρέψουμε τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαρέτη σε όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στα δεξιά μέλη της `order3Eq` και συλλέγοντας τους όρους που θα μπορούσαν να παράξουν προσωρινούς όρους, έχουμε :

`STerms2 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1 /. Ω -> 2 ω, Exp[I ω T0]] & /@ order3Eq;`

`STerms2 /. displayRule`

$$\left\{ \frac{I\mu(D_1A)}{2\omega} + \frac{E^{iT_1}\delta\Lambda(D_1\bar{A})}{2\omega^2} - D_2A, -6A\alpha\Lambda^2 + A\mu^2 + \frac{9A\delta^2\Lambda^2}{2\omega^2} - \right. \\
 \left. 3A^2\alpha\bar{A} + \frac{10A^2\delta^2\bar{A}}{3\omega^2} - \frac{14IE^{iT_1}\delta\Lambda\mu\bar{A}}{3\omega} + \frac{1}{2}\mu(D_1A) - \frac{IE^{iT_1}\delta\Lambda(D_1\bar{A})}{2\omega} - I\omega(D_2A) \right\}$$

Τότε, η συνθήκη επιλυσιμότητας απαιτεί η `STerms2` να είναι ορθογωνική στη λύση της συζυγούς `cleftVec`. Το αποτέλεσμα είναι :

`SCond2 = Solve[cleftVec.STerms2 == 0, A^(0,1)[T1, T2]] [[1]] // ExpandAll;`

`SCond2 /. displayRule`

$$\left\{ D_2A \rightarrow -\frac{9IA\delta^2\Lambda^2}{4\omega^3} + \frac{3IA\alpha\Lambda^2}{\omega} - \frac{IA\mu^2}{2\omega} - \frac{5IA^2\delta^2\bar{A}}{3\omega^3} - \frac{7E^{iT_1}\delta\Lambda\mu\bar{A}}{3\omega^2} + \frac{3IA^2\alpha\bar{A}}{2\omega} \right\}$$

Οι δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις, η `SCond1` και η `SCond2`, γίνεται να επανασυγκροτηθούν για να λάβουμε μια συνήθη διαφορική εξίσωση που θα διέπει το A . Το αποτέλεσμα είναι :

```
(2 I ω A' == (2 I ω dt[1][A[T1, T2]] /. SCondi /. SCond2 // Expand //
Collect[#, ε] &)) /. displayRule
```

$$2 I \omega A' == \epsilon \left(-2 I A \mu \omega - 2 E^{I T_1 \sigma} \delta \Lambda \bar{A} \right) + \epsilon^2 \left[-6 A \alpha \Lambda^2 + A \mu^2 + \frac{9 A \delta^2 \Lambda^2}{2 \omega^2} - 3 A^2 \alpha \bar{A} + \frac{10 A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{14 I E^{I T_1 \sigma} \delta \Lambda \mu \bar{A}}{3 \omega} \right]$$

4.2.6 Πρώτης-Τάξης Σύστημα Μιγαδικών Τιμών

Σε αυτή την ενότητα, πρώτα μετατρέπουμε την `FDuffingEq` σε μία πρώτης-τάξης εξίσωση μιγαδικών τιμών, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό :

```
transformRule = {u -> (ζ + ζ), u' -> I ω (ζ - ζ)};
```

```
gRule = g -> -2 ε μ u' - δ u^2 - α u^3 + ε f Cos[Ω t];
```

τότε η `FDuffingEq` γίνεται :

```
eq426a = ζ' == I ω ζ - I / (2 ω) g /. gRule /. transformRule // ExpandAll
```

$$\zeta' == -\epsilon \zeta \mu + \frac{I \delta \zeta^2}{2 \omega} - \frac{I \alpha \zeta^3}{2 \omega} + I \zeta \omega - \frac{I f \epsilon \text{Cos}[t \Omega]}{2 \omega} + \epsilon \mu \zeta + \frac{I \delta \zeta \zeta}{\omega} + \frac{3 I \alpha \zeta^2 \zeta}{2 \omega} + \frac{I \delta \zeta^2}{2 \omega} + \frac{3 I \alpha \zeta \zeta^2}{2 \omega} + \frac{I \alpha \zeta^3}{2 \omega}$$

Για να προσδιορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της `eq426a` χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, πρώτα εισάγουμε :

```
multiScales = {ζ -> ζ[T0, T1, T2], ζ -> ζ[T0, T1, T2], ζ' -> dt[1][ζ[T0, T1, T2]],
t -> T0};
```

και μετά αναπτύσσουμε τα ζ και $\bar{\zeta}$ στη μορφή :

```
solRule = {ζ -> (Sum[ε^j ζ_j[#, #2, #3], {j, 1, 3}] &),
ζ -> (Sum[ε^j ζ_j[#, #2, #3], {j, 1, 3}] &)};
```

Αντικαθιστώντας τη `multiScales` και τη `solRule` στην `eq426a`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

```
eq426b = (eq426a /. multiScales /. solRule // ExpandAll) /. ε^n_/:n>3 -> 0;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίσης δύναμης του ϵ , προκύπτει :

```
eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq426b, ε] == 0 // Thread // Rest // TrigToExp;
```

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή σε μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους στην άλλη, ορίζουμε :

```
eqOrder[i_] := (eqEps[[1, 1]] /. f -> 0 /. ζ1 -> ζ1) - # & /@ eqEps[[i]] // Reverse
```

Χρησιμοποιώντας την `eqOrder[i]` και τον `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

```
Array[eqOrder, 3] /. displayRule // TableForm
```

$$D_0 \zeta_1 - I \omega \zeta_1 == - \frac{I f e^{-I T_0 \sigma} e^{I T_0 \sigma}}{4 \omega} \epsilon$$

$$D_0 \zeta_2 - I \omega \zeta_2 == -(D_1 \zeta_1) - \mu \zeta_1 - \frac{I \delta \zeta_1^2}{2 \omega} + \mu \zeta_1 + \frac{I \delta \zeta_1 \zeta_1}{\omega} - \frac{I \delta \zeta_1^2}{2 \omega}$$

$$D_0 \zeta_3 - I \omega \zeta_3 == -(D_1 \zeta_2) - D_2 \zeta_1 + \frac{I \alpha \zeta_1^3}{2 \omega} - \mu \zeta_2 + \frac{I \delta \zeta_1 \zeta_2}{\omega} + \frac{3 I \alpha \zeta_1^2 \zeta_1}{2 \omega} + \frac{I \delta \zeta_2 \zeta_1}{\omega} - \frac{3 I \alpha \zeta_1 \zeta_1^2}{2 \omega} + \frac{I \alpha \zeta_1^3}{2 \omega} + \mu \zeta_2 + \frac{I \delta \zeta_1 \zeta_2}{\omega} - \frac{I \delta \zeta_1 \zeta_2}{\omega}$$

Η γενική λύση της πρώτης-τάξης εξίσωσης, της eqOrder[1], μπορεί να εκφραστεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

```
sol1Form = (DSolve[eqOrder[1], ζ1[T0, T1, T2], timeScales][[1, 1, 2]] /. C[1] -> A // Expand) /.  
Exp[a_] := Exp[a // Expand] //. c1_ Exp[x_] + c2_ Exp[x_] := Factor[c1 + c2] Exp[x]
```

$$\frac{E^{i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega - \Omega)} + \frac{E^{-i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega + \Omega)} + E^{i T_0 \omega} A[T_1, T_2]$$

```
sol1 = {ζ1 -> Function[{T0, T1, T2}, sol1Form // Evaluate],  
ζ1 -> Function[{T0, T1, T2}, sol1Form /. conjugateRule // Evaluate]}
```

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{E^{i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega - \Omega)} + \frac{E^{-i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega + \Omega)} + E^{i T_0 \omega} A[T_1, T_2]], \\ \zeta_1 &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{E^{-i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega - \Omega)} + \frac{E^{i T_0 \omega} f}{4 \omega (\omega + \Omega)} + E^{-i T_0 \omega} \bar{A}[T_1, T_2]] \end{aligned} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση στην δεύτερης-τάξης εξίσωση, την eqOrder[2], έχουμε :

```
order2Eq = Expand /@ (eqOrder[2] /. sol1);  
order2Eq /. displayRule
```

$$\begin{aligned} \Delta_0 \zeta_2 - I \omega \zeta_2 = & -A E^{i T_0 \omega} \mu + \frac{I A^2 E^{2 i T_0 \omega} \delta}{2 \omega} + \frac{I f^2 \delta}{16 \omega^2 (\omega - \Omega)^2} + \frac{I E^{-2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{32 \omega^2 (\omega - \Omega)^2} + \frac{I E^{2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{32 \omega^2 (\omega + \Omega)^2} \\ & + \frac{I A E^{i T_0 \omega} E^{-i T_0 \omega} f \delta}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)} + \frac{I A E^{i T_0 \omega} E^{i T_0 \omega} f \delta}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)} + \frac{E^{-i T_0 \omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega)} - \frac{E^{i T_0 \omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega)} + \frac{I f^2 \delta}{16 \omega^2 (\omega + \Omega)^2} + \frac{I E^{-2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{32 \omega^2 (\omega + \Omega)^2} \\ & + \frac{I E^{2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{32 \omega^2 (\omega + \Omega)^2} + \frac{I A E^{i T_0 \omega} E^{-i T_0 \omega} f \delta}{4 \omega^2 (\omega + \Omega)} + \frac{I A E^{i T_0 \omega} E^{i T_0 \omega} f \delta}{4 \omega^2 (\omega + \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \omega} f \mu}{4 \omega (\omega + \Omega)} + \frac{E^{i T_0 \omega} f \mu}{4 \omega (\omega + \Omega)} - \frac{I f^2 \delta}{8 \omega^2 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} \\ & + \frac{I E^{-2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{16 \omega^2 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} + \frac{I E^{2 i T_0 \omega} f^2 \delta}{16 \omega^2 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} + E^{-i T_0 \omega} \mu \bar{A} + \frac{I A \delta \bar{A}}{\omega} + \frac{I E^{-i T_0 \omega} E^{-i T_0 \omega} f \delta \bar{A}}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)} + \\ & + \frac{I E^{-i T_0 \omega} E^{i T_0 \omega} f \delta \bar{A}}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)} - \frac{I E^{-i T_0 \omega} E^{-i T_0 \omega} f \delta \bar{A}}{4 \omega^2 (\omega + \Omega)} - \frac{I E^{-i T_0 \omega} E^{i T_0 \omega} f \delta \bar{A}}{4 \omega^2 (\omega + \Omega)} + \frac{I E^{-2 i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{2 \omega} - E^{i T_0 \omega} (D_1 A) \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους στη ζ₂ από την order2Eq, προκύπτει :

```
SCond1 = Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule1, Exp[I ω T0]] == 0
```

$$-\mu \bar{A}[T_1, T_2] + \frac{I E^{i T_1 \omega} f \delta \bar{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)} + \frac{I E^{i T_1 \omega} f \delta \bar{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega + \Omega)} - A^{(1,0)}[T_1, T_2] == 0$$

ή

```
SCond1Rule = (Solve[SCond1, A^{(1,0)}[T1, T2]][[1]] // ExpandAll) /. c1_ μ + c2_ μ := Factor[c1 + c2] μ  
{A^{(1,0)}[T1, T2] - μ A[T1, T2] + \frac{I E^{i T_1 \omega} f \delta \bar{A}[T_1, T_2]}{2 \omega^2 - 2 \omega \Omega^2}}
```

Με αυτή τη συνθήκη επιλυσιμότητας, ξαναγράφουμε την order2Eq ως εξής :

```
order2Eqm = Expand /@ (order2Eq /. SCond1Rule /. Exp[arg_] := Exp[arg /. T1 -> e T0 /. sigRule // Expand]);
```

Υπάρχουν τουλάχιστον δύο προσεγγίσεις που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την ειδική λύση της order2Eqm. Στην πρώτη προσέγγιση, μετατρέπουμε την order2Eqm σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση και τότε χρησιμοποιούμε την DSolve και τη Map για να προσδιορίσουμε την ακόλουθη ειδική λύση :

```
(sol2a =  
ζ2[T0] /. DSolve[(order2Eqm[[1]] /. ζ2 -> (ζ2[#1] &)) == #, ζ2[T0], T0][[1]] /. C[_] -> 0) & /@  
order2Eqm[[2]] /. Exp[a_] := Exp[Expand[a] // Expand] // Timing
```

$$\begin{aligned}
 & \left[6.629 \text{ Second, } -\frac{f^2 \delta}{16 \omega^4 (\omega - \Omega)^2} - \frac{I E^{i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega)^2} - \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega - \Omega)^2} - \frac{f^2 \delta}{16 \omega^4 (\omega + \Omega)^2} - \frac{I E^{-i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega + \Omega)^2} \right. \\
 & \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega + \Omega)^2} - \frac{f^2 \delta}{8 \omega^4 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} + \frac{I E^{-i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega) (\omega - \Omega)} - \frac{I E^{i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega) (\omega - \Omega)} - \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{16 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} \\
 & \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - \Omega)^2 (\omega + 2\Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega + \Omega)^2 (\omega + 2\Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{16 \omega^3 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega) (\omega - 2\Omega)} - \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) \Omega} \\
 & \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) \Omega} - \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 \Omega (\omega + \Omega)} + \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 \Omega (\omega + \Omega)} + \frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta A[T_1, T_2]^2}{2 \omega^2} \\
 & \frac{I E^{-i T_0 \Omega} \mu \tilde{A}[T_1, T_2]}{2 \omega} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) (2\omega - \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (2\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) (2\omega + \Omega)} \\
 & \left. \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{2 \omega (2\omega - \Omega) (\omega^2 - \Omega^2)} - \frac{\delta A[T_1, T_2] \tilde{A}[T_1, T_2]}{\omega^2} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \tilde{A}[T_1, T_2]^2}{6 \omega^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Στην δεύτερη προσέγγιση, πολλαπλασιάζουμε την `order2Eqm` με έναν παράγοντα ολοκλήρωσης και τότε χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `Integrate`. Για να μειώσουμε τον χρόνο υπολογισμού, ορίζουμε πρώτα τον κανόνα

```
intRule = int[a_ + b_, arg_] -> int[a, arg] + int[b, arg];
```

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας αυτό τον κανόνα και έναν ολοκληρωτικό παράγοντα, βρίσκουμε μια ειδική λύση της `order2Eqm` ως εξής :

```
(sol2b =
  ((int[order2Eqm[[2]] * Exp[-I T0 ω] // Expand, T0] // intRule /. int -> Integrate) * Exp[I T0 ω] // Expand) /.
  Exp[a_] := Exp[Expand[a]] // Timing
```

$$\begin{aligned}
 & \left[0.841 \text{ Second, } -\frac{f^2 \delta}{16 \omega^4 (\omega - \Omega)^2} - \frac{I E^{i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega)^2} - \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega - \Omega)^2} - \frac{f^2 \delta}{16 \omega^4 (\omega + \Omega)^2} - \frac{I E^{-i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega)^2} \right. \\
 & \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega + \Omega)^2} - \frac{f^2 \delta}{8 \omega^4 (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} + \frac{I E^{-i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega) (\omega - \Omega)} - \frac{I E^{i T_0 \Omega} f \mu}{4 \omega (\omega - \Omega) (\omega - \Omega)} - \frac{E^{2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{16 \omega^3 (\omega - 2\Omega) (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)} \\
 & \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega - \Omega)^2 (\omega + 2\Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{32 \omega^3 (\omega + \Omega)^2 (\omega + 2\Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} f^2 \delta}{16 \omega^3 (\omega - \Omega) (\omega - \Omega) (\omega - 2\Omega)} - \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) \Omega} \\
 & \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) \Omega} - \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 \Omega (\omega + \Omega)} + \frac{E^{i T_0 \Omega} f \delta A[T_1, T_2]}{4 \omega^2 \Omega (\omega + \Omega)} + \frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta A[T_1, T_2]^2}{2 \omega^2} \\
 & \frac{I E^{-i T_0 \Omega} \mu \tilde{A}[T_1, T_2]}{2 \omega} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) (2\omega - \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (2\omega - \Omega) (\omega - \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega) (2\omega + \Omega)} \\
 & \left. \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{4 \omega^2 (\omega + \Omega) (2\omega + \Omega)} + \frac{E^{-i T_0 \Omega} f \delta \tilde{A}[T_1, T_2]}{2 \omega (2\omega - \Omega) (\omega^2 - \Omega^2)} - \frac{\delta A[T_1, T_2] \tilde{A}[T_1, T_2]}{\omega^2} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \tilde{A}[T_1, T_2]^2}{6 \omega^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Ο χρόνος της CPU (KME) μειώνεται κατά τον παράγοντα

```
%%[[1]] / %[[1]]
```

```
7.88228
```

```
sol2a === sol2b
```

```
True
```

Τότε, η ειδική λύση της `order2Eqm` μπορεί να εκφραστεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

```
sol2 = {ζ2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2b // Evaluate],
```

```
  ζ2 -> Function[{T0, T1, T2}, sol2b /. conjugateRule // Evaluate]};
```

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις στην τρίτης-τάξης εξίσωση, την `eqOrder[3]`, λαμβάνουμε

```
order3Eq = Expand /@ (eqOrder[3] /. sol1 /. sol2);
```

Απαλείφοντας τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους στη ζ_3 από την `order3Eq`, προκύπτει :

SCond2Rule =

```
(Solve[Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule1, Exp[I ω T0]] == 0, A^(0,1)[T1, T2]][[1]] /. SCond1Rule /.  
(SCond1Rule /. conjugateRule) // ExpandAll] //
```

```
{c1_ μ + c2_ μ := Factor[c1 + c2] μ, c1_ f^2 δ^2 + c2_ f^2 δ^2 := Factor[c1 + c2] f^2 δ^2,  
c1_ f^2 α + c2_ f^2 α := Factor[c1 + c2] f^2 α};
```

SCond2Rule /. displayRule

$$\left\{ D_2 A \rightarrow -\frac{I A \mu^2}{2 \omega} + \frac{3 I A f^2 \alpha}{4 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} - \frac{I A f^2 \delta^2 (5 \omega + 2 \Omega)}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^3} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} - \frac{E^{I T_1 \sigma} f \delta \mu (2 \omega^2 + \omega^2 \Omega - 6 \omega \Omega^2 - \Omega^2) \bar{A}}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)^2 \Omega (\omega + \Omega)^2} \right\}$$

ή

```
fRule = {f -> 2 (ω^2 - Ω^2) Λ};
```

SCond2Rule /. fRule /. Ω -> 2 ω /. displayRule

$$\left\{ D_2 A \rightarrow -\frac{9 I A \delta^2 \Lambda^2}{4 \omega^3} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} - \frac{I A \mu^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^3} - \frac{7 E^{I T_1 \sigma} \delta \Lambda \mu \bar{A}}{3 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right\}$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με ότι λήφθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

4.2.7 Η Συνάρτηση MMS1

Συλλέγοντας τα βήματα που περιγράφηκαν στην ενότητα 4.2.5 για ένα σύστημα από δύο πραγματικών-τιμών πρώτης-τάξης εξισώσεις, μπορούμε να χτίσουμε μια συνάρτηση με το όνομα MMS1 (Method of Multiple Scales for 1DOF system) ειδικά για την FDuffingEq. Μια πιο γενική συνάρτηση (ένα πακέτο) μπορεί ομοίως να δημιουργηθεί αν εκλάβουμε ως ορίσματα την διέπουσα εξίσωση, σύμβολα για την εξαρτημένη μεταβλητή, την ανεξάρτητη μεταβλητή, τα εύρη διέγερσης και συχνότητες διέγερσης, και όλες τις άλλες σχετιζόμενες ποσότητες που επιτρέπουν στο πρόγραμμα να αναγνωρίσει τις αντίστοιχες σημασίες τους. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την MMS1 για να λύσουμε για διάφορες περιπτώσεις συντονισμού.

```
MMS1[scaling_List, ResonanceCond : {__Equal}] :=
```

```
Module[{,
```

```
vRule = u'[t] -> v[t];
```

```
OmegRule = Solve[ResonanceCond, Ω][[1]];
```

```
eqa = {vRule /. Rule -> Equal, FDuffingEq /. scaling /. vRule /. D[vRule, t]};
```

```
multiScales = {u[t] -> u[T0, T1, T2], v[t] -> v[T0, T1, T2],
```

```
u'[t] -> dt[1][u[T0, T1, T2]], t -> T0};
```

```
solRule = {u -> (Sum[ε^j u_j[#1, #2, #3], {j, 3}] &),
```

```
v -> (Sum[ε^j v_j[#1, #2, #3], {j, 3}] &)};
```

```
eqb = (eqa /. multiScales /. solRule // TrigToExp // ExpandAll) /. ε^n_/; n > 3 -> 0;
```

```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0] & /@ eqb // Transpose //
```

```
Rest;
```

(* First-Order Problem *)

linearSys = #[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. f -> 0;

eqOrder[i_] :=

(linearSys /. u₁ -> u_i) == (linearSys /. u₁ -> u_i) - (#[[1]] & /@ eqEps[[i]]) //

Thread;

coefList = $E^{-1} \omega T_0$ linearSys /. {u₁ -> (P E^{i ω t} &), v₁ -> (Q E^{i ω t} &)} // Expand;

coefMat = Outer[Coefficient, coefList, {P, Q}];

hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose;

rightVec = {1, c1} /. Solve[(coefMat.{1, c1})[[1]] == 0, c1][[1]];

leftVec = {c1, 1} /. Solve[(hermitian[coefMat].{c1, 1})[[1]] == 0, c1][[1]];

ccleftVec = leftVec /. conjugateRule;

solih = # + (# /. conjugateRule) & /@ (rightVec A[T₁, T₂] E^{i ω T₀});

solip =

DSolve[eqOrder[1] /. {u₁ -> (u₁[[#1]] &), v₁ -> (v₁[[#1]] &)}, {u₁[T₀], v₁[T₀]},

T₀][[1]] /. C[_] -> 0 // TrigToExp // Simplify;

fRule = f -> -2 (-ω² + Ω²) Λ;

sol1 =

{u₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, solih[[1]] + (u₁[T₀] /. solip /. fRule // Expand) // Evaluate],

v₁ -> Function[{T₀, T₁, T₂}, solih[[2]] + (v₁[T₀] /. solip /. fRule // Expand) // Evaluate]};

(* Second-Order Problem *)

order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;

expRule1 = Exp[arg_] := Exp[Expand[arg /. OmgRule] /. εⁿ T₀ :=> timeScales[[n + 1]]];

STerms1 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1, Exp[I ω T₀]] & /@ order2Eq;

SCond1 = Solve[ccleftVec.STerms1 == 0, A^(1,0)[T₁, T₂]][[1]];

ccSCond1 = SCond1 /. conjugateRule;

sigRule = Solve[OmgRule /. Rule -> Equal, σ][[1]];

expRule2 = Exp[a_] := Exp[a /. {T₁ -> ε T₀, T₂ -> ε² T₀} /. sigRule // Expand];

SCond1f = Join[SCond1, ccSCond1] /. expRule2;

order2Eqm = order2Eq /. SCond1f // ExpandAll;

collectForm = Join[{E^{i T₀ ω} A[T₁, T₂], E^{-i T₀ ω} Ā[T₁, T₂]},

If[(F/f /. scaling) == ε, {E^{i T₀ ω} Λ, E^{-i T₀ ω} Λ}, {}];

possibleTerms =

collectForm ~Join~ (Outer[Times, collectForm, collectForm] // Flatten // Union);

```

RT =
  (# /. {a_ /; a != 0 -> 1} & /@
    (E^-I ω T0 possibleTerms /. expRule1 /. Exp[_ T0 + _.] -> 0)) possibleTerms //
  Union // Rest;
  NRT = Complement[possibleTerms, Join[RT, RT /. conjugateRule]];
  RTsymbolList = Table[Γj, {j, Length[RT]}];
  NRTsymbolList[i_] = Table[Ai,j, {j, Length[NRT]}];
  sol2Form = {

u2 -> Function[{T0, T1, T2},
  RTsymbolList.RT + (RTsymbolList.RT /. conjugateRule) + NRTsymbolList[1].NRT //
  Evaluate],
v2 -> Function[{T0, T1, T2},
  -I ω RTsymbolList.RT + (-I ω RTsymbolList.RT /. conjugateRule) +
  NRTsymbolList[2].NRT // Evaluate]];

algEqs1 =
  (Coefficient[Subtract @@ #, NRT] & /@ (order2Eqm /. sol2Form) /. Exp[_ T0] -> 0 //
  Flatten) == 0 // Thread;
  coef1 = Solve[algEqs1, Array[NRTsymbolList, 2] // Flatten][[1]];

algEqs2 = Coefficient[Subtract @@ order2Eqm[[1]] /. sol2Form, RT] == 0 /.
  Exp[_ T0] -> 0 // Thread;
  coef2a = Solve[algEqs2, RTsymbolList][[1]];
  coef2 = Join[coef2a, coef2a /. conjugateRule];

sol2 =
  sol2Form /. Function[{T0, T1, T2}, b_] :=>
  Function[{T0, T1, T2} // Evaluate, b /. coef1 /. coef2 // Expand // Evaluate];

(* Third-Order Problem *)
order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;

STerms2 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1 /. (CmgRule /. ε -> 0), Exp[I ω T0]] & /@
  order3Eq;
  SCond2 = Solve[CcleftVec.STerms2 == 0, A(0,1)[T1, T2]][[1]] // ExpandAll;

(* Reconstitution *)

moduEq = 2 I ω A' == (2 I ω dt[1][A[T1, T2]] /. SCond1 /. SCond2 // Collect[#, ε] &);
  Print["The second-order approximate solution:"];

Print[
  u[t] == (u @@ timeScales /. solRule /. ε^3 -> 0 /. sol1 /. sol2 /. displayRule)];
  If[(F/f /. scaling) === ε, Print["where\n Λ == f / (2(ω2 - Ω2))"];
  ];
  Print["\n\nThe modulation equations:"];
  Print[moduEq /. displayRule]
]

```


• **Κόριος Συντονισμός: $\Omega \approx \omega$**

$$\text{scaling1} = \{F \rightarrow \epsilon^3 f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon^2 \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond1} = \{\Omega == \omega + \epsilon^2 \sigma\};$$

MMS1[scaling1, ResonanceCond1] // Timing

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση:

$$u[\tau] == \epsilon (A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \omega} \bar{A}) + \epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης:

$$2 I \omega A' == 2 I \epsilon^2 \omega \left(-A \mu - \frac{I E^{i T_2 \sigma} f}{4 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right)$$

{1.513 Second, Null}

• **Υποαρμονικός Συντονισμός Τάξης 1/2: $\Omega \approx 2\omega$**

$$\text{scaling2} = \{F \rightarrow \epsilon f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond2} = \{\Omega == 2 \omega + \epsilon \sigma\};$$

MMS1[scaling2, ResonanceCond2] // Timing

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση:

$$u[\tau] == \epsilon (A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \omega} \bar{A}) + \epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{I A E^{i T_0 \omega} \mu}{2 \omega} - \frac{A E^{i T_0 \omega} \delta \Lambda}{\omega \Omega} + \frac{2 A E^{i T_0 \omega} \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \frac{E^{2i T_0 \omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} + \frac{2 I E^{-i T_0 \omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 I E^{i T_0 \omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} + \frac{I E^{-i T_0 \omega} \mu \bar{A}}{2 \omega} - \frac{E^{-i T_0 \omega} \delta \Lambda \bar{A}}{\omega \Omega} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega} \delta \Lambda \bar{A}}{2 \omega \Omega + \Omega^2} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

όπου

$$\Lambda == f / (2 (\omega^2 - \Omega^2))$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης:

$$2 I \omega A' == -2 I \epsilon (A \mu \omega - I E^{i T_1 \sigma} \delta \Lambda \bar{A}) +$$

$$2 I \epsilon^2 \omega \left(-\frac{9 I A \delta^2 \Lambda^2}{4 \omega^2} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} - \frac{I A \mu^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{7 E^{i T_1 \sigma} \delta \Lambda \mu \bar{A}}{3 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right)$$

{3.562 Second, Null}

• **Υποαρμονικός Συντονισμός της Τάξης 1/3: $\Omega \approx 3\omega$**

$$\text{scaling3} = \{F \rightarrow \epsilon f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon^2 \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond3} = \{\Omega == 3 \omega + \epsilon^2 \sigma\};$$

MMS1[scaling3, ResonanceCond3] // Timing

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση:

$$u[\tau] == \epsilon (A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \Omega} \Lambda + E^{i T_0 \Omega} \Lambda + E^{-i T_0 \omega} \bar{A}) +$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{2 A E^{i T_0 \omega} - i T_0 \Omega \delta \Lambda}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 A E^{i T_0 \omega} + i T_0 \Omega \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \right.$$

$$\left. \frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega} + i T_0 \Omega \delta \Lambda \bar{A}}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega} - i T_0 \Omega \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

όπου

$$\Lambda == f / (2(\omega^2 - \Omega^2))$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$2 I \omega A' = 2 I \epsilon^2 \omega$$

$$\left(-A \mu - \frac{6 I A \delta^2 \Lambda^2}{5 \omega^2} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} + \frac{I E^{i T_2 \sigma} \delta^2 \Lambda \bar{A}^2}{\omega^2} + \frac{3 I E^{i T_2 \sigma} \alpha \Lambda \bar{A}^2}{2 \omega} \right)$$

{7.03 Second, Null}

• Υποαρμονικός Συντονισμός της Τάξης 2 : $2\Omega \approx \omega$

$$\text{scaling4} = \{F \rightarrow \epsilon f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond4} = \{2 \Omega == \omega + \epsilon \sigma\};$$

`NMS1[scaling4, ResonanceCond4] // Timing`

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$u[\tau] == \epsilon (A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \Omega} \Lambda + E^{i T_0 \Omega} \Lambda + E^{-i T_0 \omega} \bar{A}) +$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{I A E^{i T_0 \omega} \mu}{2 \omega} + \frac{2 A E^{i T_0 \omega} + i T_0 \Omega \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{2 \omega (\omega + 2 \Omega)} - \right.$$

$$\frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{2 \omega (\omega + 2 \Omega)} + \frac{2 I E^{-i T_0 \Omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 I E^{i T_0 \Omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 A E^{i T_0 \omega} - i T_0 \Omega \delta \Lambda}{2 \omega \Omega - \Omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} +$$

$$\left. \frac{I E^{-i T_0 \omega} \mu \bar{A}}{2 \omega} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega} - i T_0 \Omega \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega} + i T_0 \Omega \delta \Lambda \bar{A}}{2 \omega \Omega - \Omega^2} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

όπου

$$\Lambda == f / (2(\omega^2 - \Omega^2))$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$2 I \omega A' = -I \epsilon (-I E^{i T_1 \sigma} \delta \Lambda^2 + 2 A \mu \omega) +$$

$$2 I \epsilon^2 \omega \left(-\frac{46 I A \delta^2 \Lambda^2}{15 \omega^2} + \frac{13 E^{i T_1 \sigma} \delta \Lambda^2 \mu}{12 \omega^2} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} - \frac{I A \mu^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} - \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right)$$

{3.993 Second, Null}

• Υπεραρμονικός Συντονισμός της Τάξης 3 : $3\Omega \approx \omega$

$$\text{scaling5} = \{F \rightarrow \epsilon f, \hat{\mu} \rightarrow \epsilon^2 \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond5} = \{3 \Omega == \omega + \epsilon^2 \sigma\};$$

`NMS1[scaling5, ResonanceCond5] // Timing`

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$u(t) == \epsilon \left(A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \Omega} \Lambda + E^{i T_0 \Omega} \bar{\Lambda} + E^{-i T_0 \omega} \bar{A} \right) + \\ \epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{2 A E^{i T_0 \omega} E^{-i T_0 \Omega} \delta \Lambda}{(2 \omega - \Omega) \Omega} - \frac{2 A E^{i T_0 \omega} E^{i T_0 \Omega} \delta \Lambda}{\Omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \right. \\ \left. \frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega} E^{i T_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A}}{(2 \omega - \Omega) \Omega} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega} E^{-i T_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A}}{\Omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

όπου

$$\Lambda == f / (2(\omega^2 - \Omega^2))$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$2 I \omega A' ==$$

$$2 I \epsilon^2 \omega \left(-A \mu - \frac{106 I A \delta^2 \Lambda^2}{35 \omega^2} - \frac{9 I E^{i T_2 \sigma} \delta^2 \Lambda^2}{5 \omega^2} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} + \frac{I E^{i T_2 \sigma} \alpha \Lambda^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^2} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right)$$

{7.08 Second, Null}

- Βραδέως-Διαμορφούμενη Φόρτιση : $\Omega \approx 0$

$$\text{scaling6} = \{F \rightarrow \epsilon f, \bar{\mu} \rightarrow \epsilon \mu\};$$

$$\text{ResonanceCond6} = \{\Omega == \epsilon \sigma\};$$

`MMS1[scaling6, ResonanceCond6] // Timing`

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$u(t) == \epsilon \left(A E^{i T_0 \omega} + E^{-i T_0 \Omega} \Lambda + E^{i T_0 \Omega} \bar{\Lambda} + E^{-i T_0 \omega} \bar{A} \right) + \\ \epsilon^2 \left(\frac{A^2 E^{2i T_0 \omega} \delta}{3 \omega^2} - \frac{2 \delta \Lambda^2}{\omega^2} - \frac{I A E^{i T_0 \omega} \mu}{2 \omega} - \frac{A E^{i T_0 \omega} E^{-i T_0 \Omega} \delta \Lambda}{\omega (2 \omega - \Omega)} - \frac{A E^{i T_0 \omega} E^{i T_0 \Omega} \delta \Lambda}{\omega (2 \omega + \Omega)} - \right. \\ \left. \frac{E^{-2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} - \frac{E^{2i T_0 \Omega} \delta \Lambda^2}{\omega^2 - 4 \Omega^2} + \frac{2 I E^{-i T_0 \Omega} \Lambda \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 I E^{i T_0 \Omega} \bar{\Lambda} \mu \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{2 A \delta \bar{A}}{\omega^2} + \right. \\ \left. \frac{I E^{-i T_0 \omega} \mu \bar{A}}{2 \omega} - \frac{E^{-i T_0 \omega} E^{i T_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A}}{\omega (2 \omega - \Omega)} - \frac{E^{-i T_0 \omega} E^{-i T_0 \Omega} \delta \Lambda \bar{A}}{\omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{E^{-2i T_0 \omega} \delta \bar{A}^2}{3 \omega^2} \right)$$

όπου

$$\Lambda == f / (2(\omega^2 - \Omega^2))$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$2 I \omega A' == -2 I A E^{-i T_1 \sigma} \epsilon \left(-I \delta \Lambda - I E^{2i T_1 \sigma} \delta \Lambda + E^{i T_1 \sigma} \mu \omega \right) +$$

$$2 I \epsilon^2 \omega \left(-\frac{3 I A \delta^2 \Lambda^2}{\omega^3} - \frac{3 I A E^{-2i T_1 \sigma} \delta^2 \Lambda^2}{2 \omega^3} - \frac{3 I A E^{2i T_1 \sigma} \delta^2 \Lambda^2}{2 \omega^3} + \frac{3 I A \alpha \Lambda^2}{\omega} + \right. \\ \left. \frac{3 I A E^{-2i T_1 \sigma} \alpha \Lambda^2}{2 \omega} + \frac{3 I A E^{2i T_1 \sigma} \alpha \Lambda^2}{2 \omega} - \frac{I A \mu^2}{2 \omega} - \frac{5 I A^2 \delta^2 \bar{A}}{3 \omega^3} + \frac{3 I A^2 \alpha \bar{A}}{2 \omega} \right)$$

{8.002 Second, Null}

4.3 Η Γενικευμένη Μέθοδος της Μεσοστάθμισης

Για να εφαρμόσουμε είτε τη μέθοδο της μεσοστάθμισης είτε τη γενικευμένη τοιαύτη στην `FDuffingEq`, χρειάζεται πρώτα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να την μετατρέψουμε σε ένα σύστημα από πρώτης-τάξης εξισώσεων που διέπουν το εύρος και τη φάση. Γι' αυτό το λόγο, εισάγουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό :

states = {a[t], ξ[t]}:

transformRule = {u -> a[t] Cos[ξ[t]] + Λ Cos[Ψ[t]], u' -> -ω a[t] Sin[ξ[t]] - Ω Λ Sin[Ψ[t]]};

gRule = g -> -2 ε μ u' - ε δ u² - ε² α u³;

Μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς (Nayfeh, 1973, 1981), μετατρέπουμε την $FDuffingEq$ σε δύο πρώτης-τάξης εξισώσεις :

eq43a =

D[states, t] ==

$$\left(\left\{ -\frac{g}{\omega} \text{Sin}[\xi[t]], \omega - \frac{g}{a[t] \omega} \text{Cos}[\xi[t]] \right\} /. \text{gRule} /. \text{transformRule} // \text{Expand} // \text{TrigReduce} // \text{Expand} \right) // \text{Thread};$$

Αναζητούμε προσεγγιστικές λύσεις στην eq43a, της μορφής :

solRule = {a -> (Evaluate[η[t] + Sum[ε^j a_j @@ basicTerms, {j, 2}] /. t -> #] &),
 ξ -> (Evaluate[φ[t] + Sum[ε^j ξ_j @@ basicTerms, {j, 2}] /. t -> #] &)}

{a -> (η[#1] + ε a₁[η[#1], φ[#1], Ψ[#1]] + ε² a₂[η[#1], φ[#1], Ψ[#1]] &),
 ξ -> (φ[#1] + ε ξ₁[η[#1], φ[#1], Ψ[#1]] + ε² ξ₂[η[#1], φ[#1], Ψ[#1]] &)}

όπου τα η[t] και φ[t] αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές στο ε ως εξής :

basicDRule =

D[basicTerms[{{1, 2}], t] -> {Sum[εⁱ A_i @@ basicTerms, {i, 2}],
 ω + Sum[εⁱ Φ_i @@ basicTerms, {i, 2}]} // Thread

{η'[t] -> ε A₁[η[t], φ[t], Ψ[t]] + ε² A₂[η[t], φ[t], Ψ[t]],
 φ'[t] -> ω + ε Φ₁[η[t], φ[t], Ψ[t]] + ε² Φ₂[η[t], φ[t], Ψ[t]]}

Οι συναρτήσεις a₁, a₂, ξ₁ και ξ₂ είναι ταχέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του φ, ενώ συνεπάγεται από τον basicDRule ότι το η, και άρα το A_n και το Φ_n είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του t. Στην δεύτερη προσέγγιση, παραγωγίζουμε τα a[t] και ξ[t] μια φορά ως προς το t, χρησιμοποιούμε τον solRule και τον basicDRule, αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα για μικρό ε, αμελούμε όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ε², και λαμβάνουμε :

eq43bLHS = CoefficientList[Expand[#[[1]] /. solRule /. basicDRule] /. ε^{n_/:>2} -> 0, ε] & /@ eq43a;

Μετά, αντικαθιστούμε τον solRule στις δεξιές πλευρές της eq43a, επεκτείνουμε το αποτέλεσμα για μικρό ε, κρατάμε τους όρους έως το O(ε²), και ξαναγράφουμε τις δεξιές τους πλευρές ως εξής :

eq43bRHS =

CoefficientList[Series[#[[2]] /. solRule, {ε, 0, 2}] // Normal // Expand, ε] & /@ eq43a;

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ε στην eq43bLHS και στην eq43bRHS, λαμβάνουμε :

eqEps = MapThread[Equal, {eq43bLHS, eq43bRHS}, 2] // Transpose // Rest;

Μετά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών για να διαχωρίσουμε τους ταχέως από τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους στις πρώτης-τάξης εξισώσεις, eqEps[[1]]. Πρώτα εισάγουμε τους κανόνες :

SVT[j_] := {A, @@ basicTerms, φ, @@ basicTerms}

solVar[j_] := {a_j, ξ_j}

psiRule = {φ[t] -> ω t + β[t], Ψ[t] -> Ω t};

betaRule = Solve[psiRule /. Rule -> Equal, {β[t], Ω}][[1]]

$$\left\{ \beta[t] \rightarrow -t\omega + \phi[t], \Omega \rightarrow \frac{\Psi[t]}{t} \right\}$$

Για την περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού τάξης O(1/2), ορίζουμε :

OmγRule = {Ω -> 2ω + εσ};

sigRule = Solve[OmγRule /. Rule -> Equal, σ][[1]]

$$\left\{ \sigma \rightarrow -\frac{2\omega - \Omega}{\epsilon} \right\}$$

expRule1 = f_[a_] := f[Expand[a /. psiRule /. OmγRule] /. ε t -> t1];

expRule2 = f_[a_] := f[Expand[a /. t1 -> ε t /. sigRule /. betaRule]];

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους κανόνες, βρίσκουμε ότι τα βραδέως μεταβαλλόμενα τμήματα της eqEps[[1]] δίνονται από :

SVT1Rule =

Table[
Solve[eqEps[[1, i]] /. Thread[solVar[1] -> {0 &}] /. expRule1 /. f_[_ t + _] -> 0 /.
expRule2, SVT[1][[i]]][[1]], {i, 2}] // Flatten

$$\left\{ \begin{aligned} A_1[\eta[t], \phi[t], \Psi[t]] &\rightarrow -\frac{2\mu\omega\eta[t] - \delta\Lambda\sin[2\phi[t] - \Psi[t]]\eta[t]}{2\omega}, \\ \phi_1[\eta[t], \phi[t], \Psi[t]] &\rightarrow \frac{\delta\Lambda\cos[2\phi[t] - \Psi[t]]}{2\omega} \end{aligned} \right\}$$

ενώ τα ταχέως μεταβαλλόμενα τμήματα δίνονται από

FVT1 =

Table[Subtract @@ eqEps[[1, i]] /. Thread[solVar[1] -> {0 &}],
{i, 2}] /. SVT1Rule // Expand

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\Lambda\mu\Omega\cos[\phi[t] - \Psi[t]]}{\omega} - \frac{\Lambda\mu\Omega\cos[\phi[t] + \Psi[t]]}{\omega} - \frac{\delta\Lambda^2\sin[\phi[t]]}{2\omega} - \\ &\frac{\delta\Lambda^2\sin[\phi[t] - 2\Psi[t]]}{4\omega} - \frac{\delta\Lambda^2\sin[\phi[t] + 2\Psi[t]]}{4\omega} - \mu\cos[2\phi[t]]\eta[t] - \\ &\frac{\delta\Lambda\sin[2\phi[t] + \Psi[t]]\eta[t]}{2\omega} - \frac{\delta\sin[\phi[t]]\eta[t]^2}{4\omega} - \frac{\delta\sin[3\phi[t]]\eta[t]^2}{4\omega}, \\ &\frac{\delta\Lambda\cos[\Psi[t]]}{\omega} - \frac{\delta\Lambda\cos[2\phi[t] + \Psi[t]]}{2\omega} - \mu\sin[2\phi[t]] - \\ &\frac{\delta\Lambda^2\cos[\phi[t]]}{2\omega\eta[t]} - \frac{\delta\Lambda^2\cos[\phi[t] - 2\Psi[t]]}{4\omega\eta[t]} - \\ &\frac{\delta\Lambda^2\cos[\phi[t] + 2\Psi[t]]}{4\omega\eta[t]} - \frac{\Lambda\mu\Omega\sin[\phi[t] - \Psi[t]]}{\omega\eta[t]} + \\ &\frac{\Lambda\mu\Omega\sin[\phi[t] - \Psi[t]]}{\omega\eta[t]} - \frac{3\delta\cos[\phi[t]]\eta[t]}{4\omega} - \frac{\delta\cos[3\phi[t]]\eta[t]}{4\omega} \end{aligned} \right\}$$

Για να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση αντίστοιχη με αυτούς τους ταχέως μεταβαλλόμενους όρους, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα προσδιορίζουμε τις πιθανές μορφές των όρων στην FVT1, ως εξής :

FVT1Forms =

```
(Cases[#, (Cos | Sin)[a_] -> {Cos[a], Sin[a]}, Infinity] //
  Flatten // Union) & /@ FVT1
```

```
{Cos[φ[t]], Cos[2 φ[t]], Cos[3 φ[t]],
  Cos[φ[t] - 2 Ψ[t]], Cos[φ[t] - Ψ[t]], Cos[φ[t] + Ψ[t]],
  Cos[2 φ[t] + Ψ[t]], Cos[φ[t] + 2 Ψ[t]], Sin[φ[t]],
  Sin[2 φ[t]], Sin[3 φ[t]], Sin[φ[t] - 2 Ψ[t]], Sin[φ[t] - Ψ[t]],
  Sin[φ[t] + Ψ[t]], Sin[2 φ[t] + Ψ[t]], Sin[φ[t] + 2 Ψ[t]]},
{Cos[φ[t]], Cos[2 φ[t]], Cos[3 φ[t]], Cos[φ[t] - 2 Ψ[t]],
  Cos[φ[t] - Ψ[t]], Cos[Ψ[t]], Cos[φ[t] + Ψ[t]],
  Cos[2 φ[t] + Ψ[t]], Cos[φ[t] + 2 Ψ[t]], Sin[φ[t]], Sin[2 φ[t]],
  Sin[3 φ[t]], Sin[φ[t] - 2 Ψ[t]], Sin[φ[t] - Ψ[t]], Sin[Ψ[t]],
  Sin[φ[t] + Ψ[t]], Sin[2 φ[t] + Ψ[t]], Sin[φ[t] + 2 Ψ[t]}}
```

Χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης, αναζητούμε μια ειδική λύση, αντίστοιχη με τους ταχέως μεταβαλλόμενους όρους σαν ένα γραμμικό συνδυασμό αυτών των πιθανών μορφών :

sol1Form =

```
MapIndexed[(coeffs1[#2[[1]]] = Array[c, Length[#1]]) . #1 &,
  FVT1Forms]
```

```
{c[1] Cos[φ[t]] + c[2] Cos[2 φ[t]] + c[3] Cos[3 φ[t]] +
  c[4] Cos[φ[t] - 2 Ψ[t]] + c[5] Cos[φ[t] - Ψ[t]] +
  c[6] Cos[φ[t] + Ψ[t]] + c[7] Cos[2 φ[t] + Ψ[t]] +
  c[8] Cos[φ[t] + 2 Ψ[t]] + c[9] Sin[φ[t]] + c[10] Sin[2 φ[t]] +
  c[11] Sin[3 φ[t]] + c[12] Sin[φ[t] - 2 Ψ[t]] -
  c[13] Sin[φ[t] - Ψ[t]] + c[14] Sin[φ[t] + Ψ[t]] +
  c[15] Sin[2 φ[t] + Ψ[t]] + c[16] Sin[φ[t] + 2 Ψ[t]],
c[1] Cos[φ[t]] - c[2] Cos[2 φ[t]] + c[3] Cos[3 φ[t]] +
  c[4] Cos[φ[t] - 2 Ψ[t]] + c[5] Cos[φ[t] - Ψ[t]] +
  c[6] Cos[Ψ[t]] + c[7] Cos[φ[t] + Ψ[t]] + c[8] Cos[2 φ[t] + Ψ[t]] +
  c[9] Cos[φ[t] + 2 Ψ[t]] + c[10] Sin[φ[t]] - c[11] Sin[2 φ[t]] -
  c[12] Sin[3 φ[t]] + c[13] Sin[φ[t] - 2 Ψ[t]] +
  c[14] Sin[φ[t] - Ψ[t]] + c[15] Sin[Ψ[t]] + c[16] Sin[φ[t] - Ψ[t]] +
  c[17] Sin[2 φ[t] + Ψ[t]] + c[18] Sin[φ[t] + 2 Ψ[t]}}
```

Αντικαθιστώντας τη sol1Form στην eqEps[[1]], χρησιμοποιώντας τον SVT1Rule, συλλέγοντας τους συντελεστές των FVT1Forms, λύνοντας τις παραγόμενες αλγεβρικές εξισώσεις για τους απροσδιόριστους συντελεστές, και κατόπιν αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα πίσω στην sol1Form, λαμβάνουμε τη λύση :

```
sol1rhs =
Table[
sol1Form[[i]] /.
Solve[
Coefficient[Subtract @@ eqEps[[1, i]] /. SVT1Rule /.
solVar[1][[i]] ->
(Evaluate[sol1Form[[i]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3}]] &),
FVT1Forms[[i]] == 0 // Thread, coeffs1[i]][[1]] /. D[psiRule, t] //
Expand, {i, 2}]
```

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\phi[t]]}{2 \omega^2} - \frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\phi[t] - 2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega - 2 \Omega)} - \frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\phi[t] + 2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega + 2 \Omega)} - \\ & \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Sin}[\phi[t] - \Psi[t]]}{\omega (\omega - \Omega)} + \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Sin}[\phi[t] + \Psi[t]]}{\omega (\omega + \Omega)} - \frac{\delta \Lambda \text{Cos}[2 \phi[t] + \Psi[t]] \eta[t]}{2 \omega (2 \omega + \Omega)} + \\ & \frac{\mu \text{Sin}[2 \phi[t]] \eta[t]}{2 \omega} - \frac{\delta \text{Cos}[\phi[t]] \eta[t]^2}{4 \omega^2} - \frac{\delta \text{Cos}[3 \phi[t]] \eta[t]^2}{12 \omega^2}, \\ & \frac{\mu \text{Cos}[2 \phi[t]]}{2 \omega} + \frac{\delta \Lambda \text{Sin}[\Psi[t]]}{\omega \Omega} + \frac{\delta \Lambda \text{Sin}[2 \phi[t] + \Psi[t]]}{2 \omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Cos}[\phi[t] - \Psi[t]]}{\omega (\omega - \Omega) \eta[t]} + \\ & \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Cos}[\phi[t] + \Psi[t]]}{\omega (\omega + \Omega) \eta[t]} + \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\phi[t]]}{2 \omega^2 \eta[t]} + \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\phi[t] - 2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega - 2 \Omega) \eta[t]} - \\ & \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\phi[t] + 2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega + 2 \Omega) \eta[t]} + \frac{3 \delta \text{Sin}[\phi[t]] \eta[t]}{4 \omega^2} + \frac{\delta \text{Sin}[3 \phi[t]] \eta[t]}{12 \omega^2} \end{aligned} \right\}$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

```
sol1Rule =
Table[solVar[1][[i]] ->
(Evaluate[sol1rhs[[i]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3}]] &), {i, 2}]
```

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 \rightarrow & \left\{ -\frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\#2]}{2 \omega^2} - \frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\#2 - 2 \#3]}{4 \omega (\omega - 2 \Omega)} - \right. \\ & \frac{\delta \Lambda^2 \text{Cos}[\#2 + 2 \#3]}{4 \omega (\omega + 2 \Omega)} - \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Sin}[\#2 - \#3]}{\omega (\omega - \Omega)} + \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Sin}[\#2 + \#3]}{\omega (\omega + \Omega)} - \\ & \left. \frac{\delta \Lambda \text{Cos}[2 \#2 + \#3] \#1}{2 \omega (2 \omega + \Omega)} + \frac{\mu \text{Sin}[2 \#2] \#1}{2 \omega} - \frac{\delta \text{Cos}[\#2] \#1^2}{4 \omega^2} - \frac{\delta \text{Cos}[3 \#2] \#1^2}{12 \omega^2} \right\}, \\ \#1 \rightarrow & \left\{ \frac{\mu \text{Cos}[2 \#2]}{2 \omega} + \frac{\delta \Lambda \text{Sin}[\#3]}{\omega \Omega} + \frac{\delta \Lambda \text{Sin}[2 \#2 + \#3]}{2 \omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Cos}[\#2 - \#3]}{\omega (\omega - \Omega) \#1} + \right. \\ & \frac{\Lambda \mu \Omega \text{Cos}[\#2 + \#3]}{\omega (\omega + \Omega) \#1} + \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\#2]}{2 \omega^2 \#1} + \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\#2 - 2 \#3]}{4 \omega (\omega - 2 \Omega) \#1} + \\ & \left. \frac{\delta \Lambda^2 \text{Sin}[\#2 + 2 \#3]}{4 \omega (\omega + 2 \Omega) \#1} + \frac{3 \delta \text{Sin}[\#2] \#1}{4 \omega^2} + \frac{\delta \text{Sin}[3 \#2] \#1}{12 \omega^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τα βραδέως- και τα ταχέως- μεταβαλλόμενα συστατικά της πρώτης-τάξης λύσης, SVT1Rule και sol1Rule, στις δεύτερης-τάξης εξισώσεις, έχουμε

```
(order2Expr =
Table[TrigReduce /@
(Subtract @@ eqEps[[2, i]] /. SVT1Rule /. sol1Rule // Expand), {i, 2}]; //
Timing
{12.36 Second, Null}
```

Εφόσον αναζητούμε μια ανάπτυξη έγκυρη ως το $O(\epsilon^2)$, δεν χρειάζεται να λύσουμε για a_2 και ξ_2 . Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να ερευνήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις για να προσδιορίσουμε τα βραδέως-μεταβαλλόμενα τμήματα και τα A_2 και B_2 . Προκύπτει :

```
SVT2Rule =
Table[
  Solve[
    order2Expr[[i]] == 0 /. Thread[solVar[2] -> {0 &}] /. expRule1 /.
    f[_t+_.] -> 0 /. expRule2 /. (OmegRule /. e -> 0), SVT[2][[i]]], {i, 2}] //
Flatten // ExpandAll
```

$$\left\{ A_2[\eta[t], \varphi[t], \Psi[t]] \rightarrow -\frac{7 \delta \Lambda \mu \cos[2 \varphi[t] - \Psi[t]] \eta[t]}{6 \omega^2}, \Phi_2[\eta[t], \varphi[t], \Psi[t]] \rightarrow \right. \\ \left. -\frac{9 \delta^2 \Lambda^2}{16 \omega^3} + \frac{3 \alpha \Lambda^2}{4 \omega} - \frac{\mu^2}{2 \omega} - \frac{7 \delta \Lambda \mu \sin[2 \varphi[t] - \Psi[t]]}{6 \omega^2} - \frac{5 \delta^2 \eta[t]^2}{12 \omega^3} + \frac{3 \alpha \eta[t]^2}{8 \omega} \right\}$$

Έτσι, στην δεύτερη προσέγγιση, βρίσκουμε ότι :

```
u[t] ==
(TrigReduce /@
  (Normal[Series[u /. transformRule /. solRule, {ε, 0, 1}]] /. sol1Rule //
  Expand) // Collect[#, ε] &)
```

$$u[t] == \Lambda \cos[\Psi[t]] + \cos[\varphi[t]] \eta[t] + \\ \epsilon \left(-\frac{\delta \Lambda^2}{2 \omega^2} - \frac{\delta \Lambda^2 \cos[2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega - 2 \Omega)} - \frac{\delta \Lambda^2 \cos[2 \Psi[t]]}{4 \omega (\omega + 2 \Omega)} + \frac{\Lambda \mu \Omega \sin[\Psi[t]]}{\omega (\omega - \Omega)} + \right. \\ \left. \frac{\Lambda \mu \Omega \sin[\Psi[t]]}{\omega (\omega + \Omega)} - \frac{\delta \Lambda \cos[\varphi[t] - \Psi[t]] \eta[t]}{2 \omega \Omega} + \frac{\delta \Lambda \cos[\varphi[t] + \Psi[t]] \eta[t]}{2 \omega \Omega} - \right. \\ \left. \frac{\delta \Lambda \cos[\varphi[t] + \Psi[t]] \eta[t]}{2 \omega (2 \omega + \Omega)} - \frac{\mu \sin[\varphi[t]] \eta[t]}{2 \omega} - \frac{\delta \eta[t]^2}{2 \omega^2} + \frac{\delta \cos[2 \varphi[t]] \eta[t]^2}{6 \omega^2} \right)$$

όπου οι εξισώσεις που διέπουν το εύρος και τη φάση είναι :

```
{ampEqs, phaseEqs} =
(basicDRule /. SVT1Rule /. SVT2Rule // ExpandAll) /.
f[_a_] := f[Collect[a /. psiRule, t]] /. Rule -> Equal
```

$$\left\{ \eta'[t] == -\epsilon \mu \eta[t] - \right. \\ \left. \frac{7 \delta \epsilon^2 \Lambda \mu \cos[t (2 \omega - \Omega) + 2 \beta[t]] \eta[t]}{6 \omega^2} - \frac{\delta \epsilon \Lambda \sin[t (2 \omega - \Omega) + 2 \beta[t]] \eta[t]}{2 \omega}, \right. \\ \left. \varphi'[t] == -\frac{9 \delta^2 \epsilon^2 \Lambda^2}{16 \omega^3} + \frac{3 \alpha \epsilon^2 \Lambda^2}{4 \omega} - \frac{\epsilon^2 \mu^2}{2 \omega} + \omega + \frac{\delta \epsilon \Lambda \cos[t (2 \omega - \Omega) + 2 \beta[t]]}{2 \omega} - \right. \\ \left. \frac{7 \delta \epsilon^2 \Lambda \mu \sin[t (2 \omega - \Omega) + 2 \beta[t]]}{6 \omega^2} - \frac{5 \delta^2 \epsilon^2 \eta[t]^2}{12 \omega^3} + \frac{3 \alpha \epsilon^2 \eta[t]^2}{8 \omega} \right\}$$

4.4 Η Μέθοδος των Κανονικών Μορφών

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των κανονικών μορφών για να προσδιορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της $FDuffingEq$. Γι' αυτό το λόγο, αρχίζουμε με την αντίστοιχη πρώτης-τάξης μιγαδικών-τιμών εξίσωση, η οποία παρήχθη στην ενότητα 4.2.6 και μία σύνοψη της παραγωγής αυτής δίνεται ακολούθως :


```
transformRule = {u[t] -> (ζ[t] + ζ̄[t]), u'[t] -> I ω (ζ[t] - ζ̄[t]),  
  f Cos[Ω t] -> 1/2 (z[t] + z̄[t])};
```

```
gRule = g -> -2 ε μ u'[t] - ε δ u[t]^2 - ε^2 α u[t]^3 + f Cos[Ω t];
```

```
eq44a = {ζ'[t] == I ω ζ[t] - I g / (2 ω) /. gRule /. transformRule // ExpandAll,  
  z'[t] == I Ω z[t]}
```

$$\left\{ \zeta'[t] == -\frac{I z[t]}{4 \omega} - \epsilon \mu \zeta[t] + I \omega \zeta[t] + \frac{I \delta \epsilon \zeta[t]^2}{2 \omega} + \right.$$

$$\frac{I \alpha \epsilon^2 \zeta[t]^3}{2 \omega} - \frac{I \bar{z}[t]}{4 \omega} + \epsilon \mu \bar{\zeta}[t] + \frac{I \delta \epsilon \zeta[t] \bar{\zeta}[t]}{\omega} + \frac{3 I \alpha \epsilon^2 \zeta[t]^2 \bar{\zeta}[t]}{2 \omega} +$$

$$\left. \frac{I \delta \epsilon \zeta[t]^2}{2 \omega} + \frac{3 I \alpha \epsilon^2 \zeta[t] \bar{\zeta}[t]^2}{2 \omega} + \frac{I \alpha \epsilon^2 \bar{\zeta}[t]^3}{2 \omega}, z'[t] == I \Omega z[t] \right\}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών μορφών, εισάγουμε έναν σχεδόν-ταυτοτικό (near-identity) μετασχηματισμό:

```
basicTerms = {η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]};
```

```
zetaRule =
```

```
{ζ -> Function[t, η[t] + Sum[ε^j h_j[Sequence @@ basicTerms], {j, 0, 2}] //  
  Evaluate],  
  ζ̄ -> Function[t, η̄[t] + Sum[ε^j h̄_j[Sequence @@ basicTerms], {j, 0, 2}] //  
  Evaluate]}
```

```
{ζ -> Function[t, η[t] + h_0[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]] +  
  ε h_1[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]] + ε^2 h_2[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]]],  
  ζ̄ -> Function[t, η̄[t] + h̄_0[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]] +  
  ε h̄_1[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]] + ε^2 h̄_2[η[t], η̄[t], z[t], z̄[t]]]}
```

ο οποίος έχει ως αποτέλεσμα την απλούστερη δυνατή εξίσωση:

```
etaRule = {η'[t] -> I ω η[t] + Sum[ε^j g_j[t], {j, 2}], z'[t] -> I Ω z[t]}  
{η'[t] -> I ω η[t] + ε g_1[t] + ε^2 g_2[t], z'[t] -> I Ω z[t]}
```

όπου η παύλα (περισπωμένη) σημαίνει το συζυγές μιγαδικό:

```
conjugateRule = {η -> η̄, η̄ -> η, g -> ḡ, ḡ -> g, z -> z̄, z̄ -> z,  
  Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};
```

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα για ζ, τον zetaRule, στην eq44a, χρησιμοποιώντας τον etaRule, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε, και αγνοώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε², έχουμε:

```
eq44b =
```

```
(eq44a[1] /. zetaRule /. etaRule /. (etaRule /. conjugateRule) // ExpandAll) /.  
  ε^_/:n>2 -> 0;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιας δύναμης του ε στην eq44b, λαμβάνουμε:

```
eqEps = CoefficientList[Subtract @@ eq44b, ε] == 0 // Thread;
```

• Πρώτης-Τάξης Λύση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, υποθέτουμε ότι :

`coeffsL = Table[Δi, {i, Length[basicTerms]}]`

`{Δ1, Δ2, Δ3, Δ4}`

`hFormL =`

`{h0 ->`
`(Evaluate[coeffsL.basicTerms /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),`
`h̄0 ->`
`(Evaluate[coeffsL.basicTerms /. conjugateRule /.`
`Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &)};`

Αντικαθιστώντας την `hFormL` στην `eqEps[[1]]`, συλλέγοντας τους συντελεστές των `basicTerms`, και λύνοντας για την `coeffsL`, λαμβάνουμε :

`coeffsLRule =`

`Solve[Coefficient[eqEps[[1, 1]] /. hFormL, basicTerms] == 0 // Thread,`
`coeffsL][[1]]`

`Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.`

$$\left\{ \Delta_2 \rightarrow 0, \Delta_3 \rightarrow \frac{1}{4\omega(\omega - \Omega)}, \Delta_4 \rightarrow \frac{1}{4\omega(\omega + \Omega)} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την `coeffsLRule` στην `hFormL`, προκύπτει :

`hSolL = h0 @@ basicTerms /. hFormL /. coeffsLRule /. Δi -> 0`

$$\frac{z[\tau]}{4\omega(\omega - \Omega)} + \frac{\bar{z}[\tau]}{4\omega(\omega + \Omega)}$$

Τότε, γράφουμε την πρώτης-τάξης λύση σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

`hRuleL = {h0 -> (Evaluate[hSolL /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),`

`h̄0 ->`

`(Evaluate[hSolL /. conjugateRule /.`
`Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &)}`

$$\left\{ h_0 \rightarrow \left(\frac{\#3}{4\omega(\omega - \Omega)} + \frac{\#4}{4\omega(\omega + \Omega)} \right) \&, \bar{h}_0 \rightarrow \left(\frac{\#3}{4\omega(\omega + \Omega)} + \frac{\#4}{4\omega(\omega - \Omega)} \right) \& \right\}$$

• Δεύτερης-Τάξης Λύση

Αντικαθιστώντας την `hRuleL` στο δεξί μέλος της δεύτερης-τάξης εξίσωσης, της `eqEps[[2]]`, προκύπτει:

order2expr = eqEps[[2, 1]] /. hRuleL // Expand

$$\begin{aligned} & \frac{\mu z[t]}{4\omega(\omega-\Omega)} - \frac{\mu z[t]}{4\omega(\omega+\Omega)} - \frac{I\delta z[t]^2}{32\omega^2(\omega-\Omega)^2} - \frac{I\delta z[t]^2}{32\omega^2(\omega+\Omega)^2} - \frac{I\delta z[t]^2}{16\omega^2(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)} + \\ & \mu\eta[t] - \frac{I\delta z[t]\eta[t]}{4\omega^2(\omega-\Omega)} - \frac{I\delta z[t]\eta[t]}{4\omega^2(\omega+\Omega)} - \frac{I\delta\eta[t]^2}{2\omega} - \frac{\mu\bar{z}[t]}{4\omega(\omega-\Omega)} + \frac{\mu\bar{z}[t]}{4\omega(\omega+\Omega)} - \\ & \frac{I\delta z[t]\bar{z}[t]}{16\omega^2(\omega-\Omega)^2} - \frac{I\delta z[t]\bar{z}[t]}{16\omega^2(\omega+\Omega)^2} - \frac{I\delta z[t]\bar{z}[t]}{8\omega^2(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)} - \frac{I\delta\eta[t]\bar{z}[t]}{4\omega^2(\omega-\Omega)} - \frac{I\delta\eta[t]\bar{z}[t]}{4\omega^2(\omega+\Omega)} - \\ & \frac{I\delta\bar{z}[t]^2}{32\omega^2(\omega-\Omega)^2} - \frac{I\delta\bar{z}[t]^2}{32\omega^2(\omega+\Omega)^2} - \frac{I\delta\bar{z}[t]^2}{16\omega^2(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)} - \mu\bar{\eta}[t] - \frac{I\delta z[t]\bar{\eta}[t]}{4\omega^2(\omega-\Omega)} - \\ & \frac{I\delta z[t]\bar{\eta}[t]}{4\omega^2(\omega+\Omega)} - \frac{I\delta\eta[t]\bar{\eta}[t]}{\omega} - \frac{I\delta z[t]\bar{\eta}[t]}{4\omega^2(\omega-\Omega)} - \frac{I\delta z[t]\bar{\eta}[t]}{4\omega^2(\omega+\Omega)} - \frac{I\delta\bar{\eta}[t]^2}{2\omega} + g_1[t] - \\ & I\omega h_1[\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t]] - I\Omega\bar{z}[t] h_1^{(0,0,0,1)}[\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t]] + \\ & I\Omega z[t] h_1^{(0,0,1,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t]] - \\ & I\omega\bar{\eta}[t] h_1^{(0,1,0,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t]] + I\omega\eta[t] h_1^{(1,0,0,0)}[\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t]] \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το h_1 για να απαλείψουμε όσο περισσότερους όρους της order2expr, κι έτσι ανάγοντάς την στην απλούστερη δυνατή μορφή της. Προκύπτει ότι μπορούμε να απαλείψουμε όλους τους όρους μη-συντονισμού. Για να προσδιορίσουμε τους όρους συντονισμού στην order2expr, πρώτα προσδιορίζουμε όλες τις πιθανές μορφές των μη-ομογενών της όρων :

possibleQTerms =

basicTerms~Join~(Outer[Times, basicTerms, basicTerms] // Flatten // Union)

$$\{\eta[t], \bar{\eta}[t], z[t], \bar{z}[t], z[t]^2, z[t]\eta[t], \eta[t]^2, z[t]\bar{z}[t], \eta[t]\bar{z}[t], \bar{z}[t]^2, z[t]\bar{\eta}[t], \eta[t]\bar{\eta}[t], \bar{z}[t]\bar{\eta}[t], \bar{\eta}[t]^2\}$$

Έπεται από τα γραμμικά τμήματα του etaRule, ότι :

$$form = \{\eta[t] \rightarrow E^{i\omega t}, \bar{\eta}[t] \rightarrow E^{-i\omega t}, z[t] \rightarrow E^{i\Omega t}, \bar{z}[t] \rightarrow E^{-i\Omega t}\};$$

Έτσι, οι πιθανοί όροι συντονισμού δίνονται από :

ResonantQTerm =

$$(E^{i\omega t} possibleQTerms /. form /. \Omega \rightarrow 2\omega /. E^{-t} \rightarrow 0) possibleQTerms // Union // Rest$$

$$\{\eta[t], z[t]\bar{\eta}[t]\}$$

Επιλέγουμε το g_1 για να ελαχιστοποιήσουμε τους όρους συντονισμού στην order2expr σύμφωνα με :

gRuleQ =

$$g_1[t] \rightarrow$$

$$-(Coefficient[order2expr /. h_1 \rightarrow (0 \&), ResonantQTerm] /.$$

$$Thread[basicTerms \rightarrow 0]) . ResonantQTerm$$

$$g_1[t] \rightarrow -\mu\eta[t] - \left(-\frac{I\delta}{4\omega^2(\omega-\Omega)} - \frac{I\delta}{4\omega^2(\omega+\Omega)} \right) z[t]\bar{\eta}[t]$$

Οι όροι μη-συντονισμού είναι το συμπλήρωμα των όρων συντονισμού, δηλαδή :

$$NRQT = Complement[possibleQTerms, ResonantQTerm];$$

Συσχετίζουμε με καθέναν από αυτούς έναν απροσδιόριστο συντελεστή, σύμφωνα με :

$$coeffsQ = Table[\Gamma_j, \{j\}, Length[NRQT]]$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10}, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}\}$$

Επομένως, το h_1 έχει τη μορφή :

$hFormQ =$

$$\{h_1 \rightarrow (Evaluate[coeffsQ.NRQT /. Thread[basicTerms \rightarrow \{#1, #2, #3, #4\}]] \&)\}$$

$$\{h_1 \rightarrow (\#3 \Gamma_1 + \#3^2 \Gamma_2 + \#1 \#3 \Gamma_3 + \#1^2 \Gamma_4 + \#4 \Gamma_5 +$$

$$\#3 \#4 \Gamma_6 + \#1 \#4 \Gamma_7 + \#4^2 \Gamma_8 + \#2 \Gamma_9 + \#1 \#2 \Gamma_{10} + \#2 \#4 \Gamma_{11} + \#2^2 \Gamma_{12} \&)\}$$

Αντικαθιστώντας για h_1 στην $order2expr$, εξισώνοντας τους συντελεστές των πιθανών όρων μη-συντονισμού με το 0, και λύνοντας τις παραγόμενες εξισώσεις για το Γ_i , λαμβάνουμε :

$coeffsQRule =$

$$Solve[Coefficient[order2expr /. gRuleQ /. hFormQ // Expand, NRQT] == 0 /. Thread[basicTerms \rightarrow 0] // Thread, coeffsQ][[1]]$$

$$\left\{ \Gamma_3 \rightarrow -\frac{\delta}{2 \omega \Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)}, \Gamma_4 \rightarrow \frac{\delta}{2 \omega^2}, \Gamma_6 \rightarrow -\frac{\delta}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2}, \right.$$

$$\Gamma_7 \rightarrow \frac{\delta}{2 \omega \Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)}, \Gamma_9 \rightarrow \frac{I \mu}{2 \omega}, \Gamma_{10} \rightarrow -\frac{\delta}{\omega^2}, \Gamma_{12} \rightarrow -\frac{\delta}{6 \omega^2},$$

$$\Gamma_1 \rightarrow -\frac{I \mu \Omega}{2 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)}, \Gamma_2 \rightarrow -\frac{\delta}{8 \omega (\omega - 2 \Omega) (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2}, \Gamma_5 \rightarrow \frac{I \mu \Omega}{2 \omega (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)^2},$$

$$\left. \Gamma_{11} \rightarrow -\frac{\delta}{2 \omega (\omega - \Omega) (\omega + \Omega) (2 \omega + \Omega)}, \Gamma_8 \rightarrow -\frac{\delta}{8 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (\omega + 2 \Omega)} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την $coeffsQRule$ στην $hFormQ$ προκύπτει :

$hSolQ = h_1 @@ basicTerms /. hFormQ /. coeffsQRule$

$$\frac{I \mu \Omega z[t]}{2 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)} - \frac{\delta z[t]^2}{8 \omega (\omega - 2 \Omega) (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} -$$

$$\frac{\delta z[t] \eta[t]}{2 \omega \Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)} + \frac{\delta \eta[t]^2}{2 \omega^2} + \frac{I \mu \Omega \bar{z}[t]}{2 \omega (\omega - \Omega) (\omega + \Omega)^2} -$$

$$\frac{\delta z[t] \bar{z}[t]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} + \frac{\delta \eta[t] \bar{z}[t]}{2 \omega \Omega (-\omega + \Omega) (\omega + \Omega)} - \frac{\delta \bar{z}[t]^2}{8 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (\omega + 2 \Omega)} -$$

$$\frac{I \mu \bar{\eta}[t]}{2 \omega} - \frac{\delta \eta[t] \bar{\eta}[t]}{\omega^2} - \frac{\delta \bar{z}[t] \bar{\eta}[t]}{2 \omega (\omega - \Omega) (\omega + \Omega) (2 \omega + \Omega)} - \frac{\delta \bar{\eta}[t]^2}{6 \omega^2}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τη δεύτερης-τάξης λύση σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

$$hRuleQ = \{h_1 \rightarrow (Evaluate[hSolQ /. Thread[basicTerms \rightarrow \{#1, #2, #3, #4\}]] \&),$$

$$\bar{h}_1 \rightarrow$$

$$(Evaluate[hSolQ /. conjugateRule /. Thread[basicTerms \rightarrow \{#1, #2, #3, #4\}]] \&)\};$$

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τις $hRuleL$, $hRuleQ$ και $gRuleQ$ στο αριστερό μέλος της τρίτης-τάξης εξίσωσης, της $eqEps[[3]]$, προκύπτει :

$order3expr =$

$$eqEps[[3, 1]] /. hRuleL /. hRuleQ /. gRuleQ /. (gRuleQ /. conjugateRule) // Expand;$$

Οι μη-ομογενείς όροι στην $order3expr$ είναι ανάλογοι με :

`possibleCTerms = Outer[Times, possibleQTerms, basicTerms] // Flatten // Union`

```
{z[t]^2, z[t]^3, z[t] η[t], z[t]^2 η[t], η[t]^2, z[t] η[t]^2, η[t]^3,
z[t] z̄[t], z[t]^2 z̄[t], η[t] z̄[t], z[t] η[t] z̄[t], η[t]^2 z̄[t], z̄[t]^2,
z[t] z̄[t]^2, η[t] z̄[t]^2, z̄[t]^3, z[t] η̄[t], z[t]^2 η̄[t], η[t] η̄[t],
z[t] η[t] η̄[t], η[t]^2 η̄[t], z̄[t] η̄[t], z[t] z̄[t] η̄[t], η[t] z̄[t] η̄[t],
z̄[t]^2 η̄[t], η̄[t]^2, z[t] η̄[t]^2, η[t] η̄[t]^2, z̄[t] η̄[t]^2, η̄[t]^3}
```

`possibleTerms = Join[possibleQTerms, possibleCTerms] // Union`

```
{z[t], z[t]^2, z[t]^3, η[t], z[t] η[t], z[t]^2 η[t], η[t]^2, z[t] η[t]^2,
η[t]^3, z̄[t], z[t] z̄[t], z[t]^2 z̄[t], η[t] z̄[t], z[t] η[t] z̄[t], η[t]^2 z̄[t],
z̄[t]^2, z[t] z̄[t]^2, η[t] z̄[t]^2, z̄[t]^3, η̄[t], z[t] η̄[t], z[t]^2 η̄[t],
η[t] η̄[t], z[t] η[t] η̄[t], η[t]^2 η̄[t], z̄[t] η̄[t], z[t] z̄[t] η̄[t],
η[t] z̄[t] η̄[t], z̄[t]^2 η̄[t], η̄[t]^2, z[t] η̄[t]^2, η[t] η̄[t]^2, z̄[t] η̄[t]^2, η̄[t]^3}
```

Μετά, προσδιορίζουμε τους συντονιστικούς όρους σύμφωνα με

`ResonantCTerm =`

`{E^-i ω t possibleTerms /. form /. Ω -> 2 ω /. E^-t -> 0} possibleTerms // Union // Rest`

```
{η[t], z[t] η[t] z̄[t], z[t] η̄[t], η[t]^2 η̄[t]}
```

Επιλέγοντας το g_2 για να απαλείψουμε τους όρους συντονισμού από την `order2expr`, προκύπτει :

`gRuleC =`

`g2[t] ->`

`-Factor[Coefficient[order3expr /. h2 -> {0 &}, ResonantCTerm] /.
Thread[basicTerms -> 0]].ResonantCTerm`

$$g_2[t] \rightarrow -\frac{I \mu^2 \eta[t]}{2 \omega} - \frac{I (-5 \delta^2 \omega + 6 \alpha \omega^3 - 2 \delta^2 \Omega + 3 \alpha \omega^2 \Omega) z[t] \eta[t] \bar{z}[t]}{4 \omega^3 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} -$$

$$\frac{\delta \mu (2 \omega^3 + \omega^2 \Omega - 6 \omega \Omega^2 - \Omega^3) z[t] \bar{\eta}[t]}{4 \omega^2 (\omega - \Omega)^2 \Omega (\omega + \Omega)^2} - \frac{I (10 \delta^2 - 9 \alpha \omega^2) \eta[t]^2 \bar{\eta}[t]}{6 \omega^3}$$

Οι όροι μη-συντονισμού είναι το συμπλήρωμα των όρων συντονισμού, δηλαδή :

`NRCT = Complement[possibleTerms, ResonantCTerm];`

Εανά, συσχετίζουμε έναν απροσδιόριστο συντελεστή με καθέναν από αυτούς τους όρους, ως ακολούθως :

`coeffsC = Table[Λj, {j, Length[NRCT]}]`

```
{Λ1, Λ2, Λ3, Λ4, Λ5, Λ6, Λ7, Λ8, Λ9, Λ10, Λ11, Λ12, Λ13, Λ14, Λ15,
Λ16, Λ17, Λ18, Λ19, Λ20, Λ21, Λ22, Λ23, Λ24, Λ25, Λ26, Λ27, Λ28, Λ29, Λ30}
```

Επομένως, το h_2 έχει τη μορφή :

`hFormC =`

`{h2 -> (Evaluate[coeffsC.NRCT /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &)};`

Αντικαθιστώντας το h_2 στην `order3expr`, εξισώνοντας τον συντελεστή κάθε πιθανού όρου μη-συντονισμού με το 0, και λύνοντας τις παραγόμενες αλγεβρικές εξισώσεις ως προς Λ_i , λαμβάνουμε :

`coeffsCRule =`

`Solve[Coefficient[order3expr /. gRuleC /. hFormC // Expand, NRCT] == 0 /. Thread[basicTerms -> 0] //
Thread, coeffsC][[1]] // ExpandAll;`

Αντικαθιστώντας την `coeffsCRule` στην `hFormC`, προκύπτει :

hSolC = h2 @@ basicTerms /. hFormC /. coeffsCRule;

Συνδυάζοντας τις etaRule, gRuleQ και gRuleC, και θέτοντας

solForm = {η -> (A[#] E^{1 ω t} ξ), η̄ -> (Ā[#] E^{-1 ω t} ξ), z -> (f E^{1 Ω t} ξ), z̄ -> (f E^{-1 Ω t} ξ)};

λαμβάνουμε την εξίσωση διαμόρφωσης :

moduEq =

(2 I ω E^{-1 ω t} (η' [t] - (η' [t] /. etaRule /. gRuleQ /. gRuleC)) /. solForm //
Expand // Collect[# , ξ] == 0

$$\begin{aligned} & \in \left(2 I \mu \omega A[t] + \frac{E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \bar{A}[t]}{2 \omega (\omega - \Omega)} + \frac{E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \bar{A}[t]}{2 \omega (\omega + \Omega)} \right) + \\ & \in^2 \left(-\mu^2 A[t] - \frac{5 f^2 \delta^2 A[t]}{2 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} + \frac{3 f^2 \alpha \omega A[t]}{(\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} + \right. \\ & \frac{3 f^2 \alpha \Omega A[t]}{2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} - \frac{f^2 \delta^2 \Omega A[t]}{\omega^2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2 (2 \omega + \Omega)} + \\ & \frac{I E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \mu \omega \bar{A}[t]}{2 (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} + \frac{I E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \mu \omega^2 \bar{A}[t]}{(\omega - \Omega)^2 \Omega (\omega + \Omega)^2} - \frac{3 I E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \mu \Omega \bar{A}[t]}{(\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} - \\ & \left. \frac{I E^{-2I t \omega + I t \Omega} f \delta \mu \Omega^2 \bar{A}[t]}{2 \omega (\omega - \Omega)^2 (\omega + \Omega)^2} + 3 \alpha A[t]^2 \bar{A}[t] - \frac{10 \delta^2 A[t]^2 \bar{A}[t]}{3 \omega^2} \right) + 2 I \omega A'[t] == 0 \end{aligned}$$

ή

moduEq /. f -> 2 Λ (Ω² - ω²) /. Ω -> 2 ω

$$\begin{aligned} & \in (2 I \mu \omega A[t] - 2 \delta \Lambda \bar{A}[t]) + \in^2 \left(6 \alpha \Lambda^2 A[t] - \mu^2 A[t] - \frac{9 \delta^2 \Lambda^2 A[t]}{2 \omega^2} - \right. \\ & \left. \frac{14 I \delta \Lambda \mu \bar{A}[t]}{3 \omega} + 3 \alpha A[t]^2 \bar{A}[t] - \frac{10 \delta^2 A[t]^2 \bar{A}[t]}{3 \omega^2} \right) + 2 I \omega A'[t] == 0 \end{aligned}$$

η οποία είναι σε συμφωνία με εκείνες που λήφθηκαν από τη χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων και της γενικευμένης μεθόδου της μεσοστάθμισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥΣ

5.1 Εξισώσεις Euler – Lagrange

Σε αυτό το Κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε διαφορετικές μεθόδους για να προσδιορίσουμε προσεγγιστικές λύσεις των μη-γραμμικών συστημάτων που διαθέτουν εσωτερικούς συντονισμούς σε τάξεις υψηλότερες από την τάξη στην οποία η επιρροή του εσωτερικού συντονισμού εμφανίζεται πρώτη. Για να περιγράψουμε τις μεθόδους με την ελάχιστη δυνατή άλγεβρα, θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις ενός δύο-βαθμών-ελευθερίας συντηρητικού συστήματος που κατέχει έναν 2:1 εσωτερικό συντονισμό και έχει απλές τετραγωνικές μη-γραμμικότητες. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα σύστημα που διέπεται από τη Lagrangian (Λαγκραντζιανή)

$$\text{Lagrangian} = \frac{1}{2} u_1' [t]^2 + \frac{1}{2} u_2' [t]^2 - \frac{1}{2} \omega_1^2 u_1 [t]^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 u_2 [t]^2 + \delta u_1 [t]^2 u_2 [t];$$

όπου $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Γράφοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στη Lagrangian, λαμβάνουμε τις ακόλουθες δεύτερης-τάξης εξισώσεις κίνησης :

$$\text{EOM1} = \text{Table}[D[D[\text{Lagrangian}, u_1' [t]], t] - D[\text{Lagrangian}, u_1 [t]] == 0, \{i, 2\}]$$

$$\{\omega_1^2 u_1 [t] - 2 \delta u_1 [t] u_2 [t] + u_1'' [t] == 0, -\delta u_1 [t]^2 + \omega_2^2 u_2 [t] + u_2'' [t] == 0\}$$

Προσεγγιστικές λύσεις του γενικού δύο-βαθμών-ελευθερίας συστήματος με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες που να έχει έναν 2:1 εσωτερικό συντονισμό, μπορούν να ληφθούν με αντικατάσταση της Lagrangian με τη Λαγκραντζιανή που αντιστοιχεί στο γενικό σύστημα.

Όπως συζητείται στην επόμενη ενότητα, η μεταχείριση αυτή της δεύτερης-τάξης μορφής, της EOM1, των κυρίαρχων εξισώσεων μέσω χρήσης της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων, μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα που καταστρατηγούν την συντηρητική φύση του συστήματος που θεωρείται. Για να προσδιορίσουμε μια προσεγγιστική λύση που διατηρεί τη συντηρητική φύση του συστήματος, μεταχειριζόμαστε μια πρώτης-τάξης μορφή των κυρίαρχων εξισώσεων. Για να μετατρέψουμε την EOM1 σε ένα σύστημα από πρώτης-τάξης εξισώσεις, σχηματίζουμε μια τροποποιημένη Lagrangian μέσω εισαγωγής δύο ακόμα καταστάσεων, $v_1[t]$ και $v_2[t]$, τέτοιων ώστε :

$$\text{velRule} = \{u_1' [t] \rightarrow v_1 [t], u_2' [t] \rightarrow v_2 [t]\};$$

Τότε, η Lagrangian γίνεται :

$$\text{Lag1} = \text{Lagrangian} /. \text{velRule}$$

$$-\frac{1}{2} \omega_1^2 u_1 [t]^2 + \delta u_1 [t]^2 u_2 [t] - \frac{1}{2} \omega_2^2 u_2 [t]^2 + \frac{1}{2} v_1 [t]^2 + \frac{1}{2} v_2 [t]^2$$

Αντικαθιστώντας τη Lag1 στις εξισώσεις Euler-Lagrange, λαμβάνουμε τις ακόλουθες πρώτης-τάξης εξισώσεις :

$$\text{eq51a} = \text{Table}[D[D[\text{Lag1}, v_1 [t]], t] - D[\text{Lag1}, u_1 [t]] == 0, \{i, 2\}]$$

$$\{\omega_1^2 u_1 [t] - 2 \delta u_1 [t] u_2 [t] + v_1' [t] == 0, -\delta u_1 [t]^2 + \omega_2^2 u_2 [t] + v_2' [t] == 0\}$$

Χρησιμοποιώντας τη velRule και την eq51a, λαμβάνουμε τις ακόλουθες πρώτης-τάξης εξισώσεις κίνησης :

`EOM2 = {velRule /. Rule -> Equal, eq51a} // Transpose // Flatten`

$$\{u_1'[t] == v_1[t], \omega_1^2 u_1[t] - 2\delta u_1[t] u_2[t] + v_1'[t] == 0, \\ u_2'[t] == v_2[t], -\delta u_1[t]^2 + \omega_2^2 u_2[t] + v_2'[t] == 0\}$$

Το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα της EOM2 μπορεί να οριστεί ως $\epsilon = A x$, όπου x είναι το διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή :

`states = Table[{ui[t], vi[t]}, {i, 2}] // Flatten`

$$\{u_1[t], v_1[t], u_2[t], v_2[t]\}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις καταστάσεις (states), βρίσκουμε ότι το μητρώο συντελεστών A του γραμμικού τμήματος EOM2 δίνεται από :

`matrixA = Outer[D, #[[2]] & /@ Solve[EOM2, D[states, t]][[1]] /. δ -> 0, \\ states]`

$$\{\{0, 1, 0, 0\}, \{-\omega_1^2, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, -\omega_2^2, 0\}\}$$

του οποίου ο συζυγής τελεστής ορίζεται από :

`conjugateRule = {A -> \bar{A} , \bar{A} -> A, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

`hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose`

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της matrixA μπορούν να ληφθούν ως εξής :

`matrixA // Eigensystem`

$$\{\{-I\omega_1, I\omega_1, -I\omega_2, I\omega_2\}, \\ \{\{\frac{I}{\omega_1}, 1, 0, 0\}, \{-\frac{I}{\omega_1}, 1, 0, 0\}, \{0, 0, \frac{I}{\omega_2}, 1\}, \{0, 0, -\frac{I}{\omega_2}, 1\}\}\}$$

Έτσι, τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της matrixA που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $I\omega_1$ και $I\omega_2$, αντίστοιχα, είναι :

`rightVec = Eigenvectors[matrixA][[2, 4]]`

$$\{\{-\frac{I}{\omega_1}, 1, 0, 0\}, \{0, 0, -\frac{I}{\omega_2}, 1\}\}$$

Επιπλέον, τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της matrixA που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $I\omega_1$ και $I\omega_2$, αντίστοιχα, είναι :

`leftVec = Eigenvectors[hermitian[matrixA]][[1, 3]]`

$$\{\{-I\omega_1, 1, 0, 0\}, \{0, 0, -I\omega_2, 1\}\}$$

των οποίων τα συζυγή μιγαδικά είναι :

`ccleftVec = leftVec /. conjugateRule`

$$\{\{I\omega_1, 1, 0, 0\}, \{0, 0, I\omega_2, 1\}\}$$

5.2 Η Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να λάβουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της EOM1 στην ενότητα 5.2.1, της EOM2 στην ενότητα 5.2.2, και των αντίστοιχων πρώτης-τάξης μιγαδικών τιμών εξισώσεων της EOM1 στην ενότητα 5.2.3. Ξανά, χρειαζόμαστε τις τρεις χρονικές κλίμακες $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, και $T_2 = \epsilon^2 t$, τις οποίες συμβολίζουμε με :

Needs["Utilities`Notation`"]

Symbolize[T₀]; Symbolize[T₁]; Symbolize[T₂];

timeScales = {T₀, T₁, T₂};

Με όρους των νέων χρονικών κλιμάκων, μπορούμε να εκφράσουμε τις χρονικές παραγώγους ως εξής :

dt[1][expr_] := Sum[εⁱ D[expr, timeScales[[i + 1]]], {i, 0, 2}];

dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. ε^{n_ /: n > 3} -> 0;

Για να αναπαραστήσουμε κάποιες από τις εκφράσεις κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον ακόλουθο κανόνα κατάδειξης :

displayRule =

```
{Derivative[a_][u_{i,j}][_] :=
  SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{#2}^{#1} &, {a}], u_{i,j}],
Derivative[a_][A_i][_] :=
  SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{#2}^{#1} &, {a}], A_i],
u_{i,j}[_] -> u_{i,j}, A_i[_] -> A_i};
```

5.2.1 Δεύτερης-Τάξης Σύστημα Πραγματικών-Τιμών

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, υποθέτουμε ότι η λύση της EOM1 μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή :

solRule = u_i -> (Sum[ε^j u_{i,j}{#1, #2, #3}, {j, 3}] &);

multiScales = {u_i[t] -> u_i[T₀, T₁, T₂] ,

Derivative[n_][u_i][t] := dt[n][u_i[T₀, T₁, T₂]]};

Αντικαθιστώντας τη multiScales και τη solRule στην EOM1, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε, και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε³, λαμβάνουμε :

eq521a = (EOM1 /. multiScales /. solRule // ExpandAll) /. ε^{n_ /: n > 3} -> 0;

eq521a /. displayRule

$$\begin{aligned} & \{ \epsilon (D_0^2 u_{1,1}) + \epsilon^2 (D_0^2 u_{1,2}) + \epsilon^3 (D_0^2 u_{1,3}) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_{1,1}) + \\ & 2 \epsilon^3 (D_0 D_1 u_{1,2}) + \epsilon^3 (D_1^2 u_{1,1}) + 2 \epsilon^3 (D_0 D_2 u_{1,1}) + \epsilon \omega_1^2 u_{1,1} + \epsilon^2 \omega_1^2 u_{1,2} + \\ & \epsilon^3 \omega_1^2 u_{1,3} - 2 \delta \epsilon^2 u_{1,1} u_{2,1} - 2 \delta \epsilon^3 u_{1,2} u_{2,1} - 2 \delta \epsilon^3 u_{1,1} u_{2,2} == 0, \\ & \epsilon (D_0^2 u_{2,1}) + \epsilon^2 (D_0^2 u_{2,2}) + \epsilon^3 (D_0^2 u_{2,3}) + 2 \epsilon^2 (D_0 D_1 u_{2,1}) + 2 \epsilon^3 (D_0 D_1 u_{2,2}) + \epsilon^3 (D_1^2 u_{2,1}) + \\ & 2 \epsilon^3 (D_0 D_2 u_{2,1}) - \delta \epsilon^2 u_{1,1}^2 - 2 \delta \epsilon^3 u_{1,1} u_{1,2} + \epsilon \omega_2^2 u_{2,1} + \epsilon^2 \omega_2^2 u_{2,2} + \epsilon^3 \omega_2^2 u_{2,3} == 0 \} \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε, λαμβάνουμε :

eqEps = Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0]] & /@ eq521a //

Transpose;

Για να τοποθετήσουμε τους γραμμικούς τελεστές από τη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους από την άλλη, ορίζουμε :

eqOrder[i_] :=

```
{#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. u_{k,1} -> u_{k,i}} ==
  {#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. u_{k,1} -> u_{k,i}} - {#[[1]] & /@ eqEps[[i]]} //
```

Thread

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

```
eqOrder[1] /. displayRule // TableForm
eqOrder[2] /. displayRule // TableForm
eqOrder[3] /. displayRule // TableForm
```

$$D_0^2 u_{1,1} + \omega_1^2 u_{1,1} == 0$$

$$D_0^2 u_{2,1} + \omega_2^2 u_{2,1} == 0$$

$$D_0^2 u_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} == -2 (D_0 D_1 u_{1,1}) + 2 \delta u_{1,1} u_{2,1}$$

$$D_0^2 u_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} == -2 (D_0 D_1 u_{2,1}) + \delta u_{1,1}^2$$

$$D_0^2 u_{1,3} + \omega_1^2 u_{1,3} == -2 (D_0 D_1 u_{1,2}) - D_1^2 u_{1,1} - 2 (D_0 D_2 u_{1,1}) + 2 \delta u_{1,2} u_{2,1} + 2 \delta u_{1,1} u_{2,2}$$

$$D_0^2 u_{2,3} + \omega_2^2 u_{2,3} == -2 (D_0 D_1 u_{2,2}) - D_1^2 u_{2,1} - 2 (D_0 D_2 u_{2,1}) + 2 \delta u_{1,1} u_{1,2}$$

- Πρώτης-Τάξης Εξισώσεις : Γραμμικό Σύστημα

Για να λάβουμε τη λύση της eqOrder[1] χρησιμοποιώντας τη DSolve, μετατρέπουμε την eqOrder[1] σε ένα σύνολο από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ως εξής :

```
order1Eq = eqOrder[1] /. u_{i,j} -> (u_{i,j} [#1] &)
{ω1^2 u_{1,1}[T0] + u_{1,1}'[T0] == 0, ω2^2 u_{2,1}[T0] + u_{2,1}'[T0] == 0}
```

Η ειδική λύση της order1Eq μπορεί να εκφραστεί ως :

```
sol1p = DSolve[order1Eq, {u_{1,1}[T0], u_{2,1}[T0]}, T0][[1]] /. C[_] -> 0
{u_{1,1}[T0] -> 0, u_{2,1}[T0] -> 0}
```

Έτσι, γράφουμε την πρώτης-τάξης λύση σε συναρτησιακή μορφή ως εξής :

```
sol1 =
Table[
  u_{i,1} -> Function[{T0, T1, T2},
    A1[T1, T2] Exp[I ω1 T0] + A1bar[T1, T2] Exp[-I ω1 T0] + u_{i,1}[T0] /. sol1p //
    Evaluate], {i, 2}]
{u_{1,1} -> Function[{T0, T1, T2}, E^{I T0 ω1} A1[T1, T2] + E^{-I T0 ω1} A1bar[T1, T2]},
  u_{2,1} -> Function[{T0, T1, T2}, E^{I T0 ω2} A2[T1, T2] + E^{-I T0 ω2} A2bar[T1, T2]}}
```

- Δεύτερης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τη sol1 στην eqOrder[2] προκύπτει :

```
order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;
order2Eq /. displayRule
{D0^2 u_{1,2} + ω1^2 u_{1,2} == 2 E^{I T0 ω1 + I T0 ω2} δ A1 A2 - 2 I E^{I T0 ω1} (D1 A1) ω1 + 2 I E^{-I T0 ω1} (D1 A1bar) ω1 +
  2 E^{-I T0 ω1 + I T0 ω2} δ A2 A1bar + 2 E^{I T0 ω1 - I T0 ω2} δ A1 A2bar + 2 E^{-I T0 ω1 - I T0 ω2} δ A1bar A2bar,
  D0^2 u_{2,2} + ω2^2 u_{2,2} == E^{2 I T0 ω1} δ A1^2 - 2 I E^{I T0 ω2} (D1 A2) ω2 +
  2 I E^{-I T0 ω2} (D1 A2bar) ω2 + 2 δ A1 A1bar + E^{-2 I T0 ω1} δ A1bar^2}
```

Για να περιγράψουμε ποσοτικά την εγγύτητα του δύο-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού $\omega_2 \approx 2\omega_1$, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ που ορίζεται από :

```
ResonanceCond = {ω2 == 2 ω1 + ε σ};
```

Για να απαλείψουμε τους προσωρινούς όρους, χρειάζεται να εκφράσουμε το ω_2 συναρτήσει του ω_1 σε κάποιες από τις εξισώσεις και το ω_1 συναρτήσει του ω_2 στις άλλες εξισώσεις. Για να το επιτύχουμε αυτό, θέτουμε

`omgList = Table[ω_i , {i, 2}];`

`omgRule = Solve[ResonanceCond, Drop[omgList, {#}]][[1]] & /@ {1, 2}`

$$\left\{ \left\{ \omega_2 \rightarrow \varepsilon \sigma + 2 \omega_1 \right\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{2} (-\varepsilon \sigma - \omega_2) \right\} \right\}$$

Για να μετατρέψουμε τους όρους μικρού διαιρέτη σε προσωρινούς όρους, ορίζουμε τον κανόνα :

`expRule1[j_] := Exp[arg_] -> Exp[Expand[arg /. omgRule[[j]]] /. $\varepsilon T_0 \rightarrow T_1$]`

Αντικαθιστώντας την `expRule1[i]` στα δεξιά μέλη της `order2Eq` και συλλέγοντας τους συντελεστές της $E^{j \omega_i T_0}$, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας ως εξής :

`SCond1 = Coefficient[order2Eq[{#, 2}] /. expRule1[#, Exp[I $\omega_{\#} T_0$]] == 0 & /@ {1, 2}`

$$\left\{ \begin{aligned} 2 E^{i T_1 \sigma} \delta A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2] - 2 I \omega_1 A_1^{(1,0)}[T_1, T_2] &== 0, \\ E^{-i T_1 \sigma} \delta A_1[T_1, T_2]^2 - 2 I \omega_2 A_2^{(1,0)}[T_1, T_2] &== 0 \end{aligned} \right\}$$

Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, οι εξισώσεις διαμόρφωσης που δίνονται από την `SCond1` πρέπει να προέρχονται από μία Λαγκραντζιανή. Αυτές οι εξισώσεις είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στη Λαγκραντζιανή

$$\begin{aligned} \text{Lag} = & E^{i T_1 \sigma} \delta A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]^2 + E^{-i T_1 \sigma} \delta A_1[T_1, T_2]^2 \bar{A}_2[T_1, T_2] - \\ & I \omega_1 \bar{A}_1[T_1, T_2] A_1^{(1,0)}[T_1, T_2] - I \omega_2 \bar{A}_2[T_1, T_2] A_2^{(1,0)}[T_1, T_2] + \\ & I \omega_1 A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1^{(1,0)}[T_1, T_2] + I \omega_2 A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2^{(1,0)}[T_1, T_2]; \end{aligned}$$

καθόσον

`a1SCond1 = Table[-D[D[Lag, $\bar{A}_k^{(1,0)}[T_1, T_2]$], T1] + D[Lag, $\bar{A}_k[T_1, T_2]$] == 0, {k, 2}`

$$\left\{ \begin{aligned} 2 E^{i T_1 \sigma} \delta A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2] - 2 I \omega_1 A_1^{(1,0)}[T_1, T_2] &== 0, \\ E^{-i T_1 \sigma} \delta A_1[T_1, T_2]^2 - 2 I \omega_2 A_2^{(1,0)}[T_1, T_2] &== 0 \end{aligned} \right\}$$

Οι εξισώσεις `a1SCond1` είναι ταυτόσημες με τις εξισώσεις `SCond1` όπως δείχνεται παρακάτω :

`a1SCond1 === SCond1`

`True`

Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης χρησιμοποιώντας τη χρονική μεσοσταθμισμένη (time-averaged) Λαγκραντζιανή. Γι' αυτό το λόγο, πρώτα ορίζουμε τον κανόνα :

`expRule2 =`

`Exp[a_] -> Exp[Expand[a /. (ResonanceCond /. Equal -> Rule)] /. $\varepsilon T_0 \rightarrow T_1$];`

Αντικαθιστώντας τη `multiScales`, την `solRule`, την `sol1`, και την `expRule2` στην `Lagrangian` και επιλέγοντας τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους, λαμβάνουμε την ακόλουθη χρονικά μεσοσταθμισμένη Λαγκραντζιανή :

TAL1 =

```
Select[
  ((Lagrangian /. multiScales /. solRule // Expand) /. ε^n /;>n>3 -> 0 /. sol1 //
  Expand) /. expRule2, FreeQ[#, T0] &] /. ε -> 1;
```

TAL1 /. displayRule

$$I (D_1 \bar{A}_1) A_1 \omega_1 + I (D_1 \bar{A}_2) A_2 \omega_2 - I (D_1 A_1) \omega_1 \bar{A}_1 + \\ E^{iT_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1^2 + E^{-iT_1 \sigma} \delta A_1^2 \bar{A}_2 - I (D_1 A_2) \omega_2 \bar{A}_2$$

Κανείς μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι η TAL1 είναι ταυτόσημη με την Lag. Όντως,

TAL1 == Lag

True

Μετά, ξαναγράφουμε την SCond1 ως εξής :

SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A1^(1,0)[T1, T2], A2^(1,0)[T1, T2]}][[1]]

$$\left\{ \begin{aligned} A_1^{(1,0)}[T_1, T_2] &\rightarrow -\frac{I E^{iT_1 \sigma} \delta A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\omega_1}, \\ A_2^{(1,0)}[T_1, T_2] &\rightarrow -\frac{I E^{-iT_1 \sigma} \delta A_1[T_1, T_2]^2}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

της οποίας το συζυγές μιγαδικό είναι :

ccSCond1Rule1 = SCond1Rule1 /. conjugateRule;

Για να επιλύσουμε για την ειδική λύση της order2Eq, εκφράζουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ σε όρους του ω_i , δηλαδή :

sigRule = Solve[ResonanceCond, σ][[1]]

$$\left\{ \sigma \rightarrow -\frac{2 \omega_1 - \omega_2}{\varepsilon} \right\}$$

Επιπλέον, εκφράζουμε την κλίμακα T_1 με όρους της κλίμακας T_0 μέσω χρήσης του κανόνα :

expRule3 = Exp[a_] :> Exp[a /. T1 -> ε T0 /. sigRule // Expand];

Με τις συνθήκες επιλυσιμότητας και τον expRule3, η order2Eq γίνεται :

order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule1 /. ccSCond1Rule1 /. expRule3;

order2Eqm /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_0^2 u_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} &== 2 E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2 + 2 E^{-iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2, \\ D_0^2 u_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} &== 2 \delta A_1 \bar{A}_1 \end{aligned} \right\}$$

Ξανά, για να χρησιμοποιήσουμε την DSolve, πρώτα μετατρέπουμε την order2Eqm σε ένα σύνολο από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και τότε λαμβάνουμε την ειδική λύση της order2Eqm ως εξής :

sol2p =

DSolve[order2Eqm /. u_{i,j} -> (u_{i,j} [#1] &), {u_{1,2}[T0], u_{2,2}[T0]}, T0][[1]] /. \\ C[_] -> 0 // Simplify

$$\left\{ \begin{aligned} u_{1,2}[T_0] &\rightarrow -\frac{1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \\ &\quad \left(2 E^{-iT_0 (\omega_1 + \omega_2)} \delta \left[E^{2iT_0 (\omega_1 + \omega_2)} A_1[T_1, T_2] A_2[T_1, T_2] + \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2] \right] \right), \\ u_{2,2}[T_0] &\rightarrow \frac{2 \delta A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\omega_2^2} \end{aligned} \right\}$$

Η δευτέρης-τάξης λύση μπορεί να εκφραστεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως εξής :

sol2 =

Table[

u_{i,2} -> Function[{T₀, T₁, T₂},

B_i[T₁, T₂] Exp[I ω_i T₀] + B̄_i[T₁, T₂] Exp[-I ω_i T₀] + sol2p[[i, 2]] // Expand //

Evaluate], {i, 2}];

sol2 /. displayRule

{u_{1,2} -> Function[{T₀, T₁, T₂},

$$\frac{2 E^{I T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \delta A_1 A_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + E^{I T_0 \omega_1} B_1 - \frac{2 E^{-I T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + E^{-I T_0 \omega_1} \bar{B}_1],$$

u_{2,2} -> Function[{T₀, T₁, T₂}, E^{I T₀ ω₂} B₂ + $\frac{2 \delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2} + E^{-I T_0 \omega_2} \bar{B}_2]$ }

Όπως δείχνεται κάτωθι, οι ληφθείσες εξισώσεις διαμόρφωσης θα διαταράξουν τη συντηρητική φύση του συστήματος, εκτός αν συμπεριλάβουμε και ένα κατάλληλο τμήμα των ομογενών λύσεων του δεύτερης-τάξης προβλήματος. Αυτός είναι ο λόγος που συμπεριλάβαμε τις ομογενείς λύσεις με τις απροσδιόριστες συναρτήσεις B_i[t]. Αυτές θα προσδιοριστούν έτσι ώστε να διατηρούν τη συντηρητική φύση του συστήματος.

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τη sol1 και τη sol2 στην eqOrder[3] προκύπτει :

order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;

Αντικαθιστώντας την expRule1[i] στα δεξιά μέλη της order3Eq και συλλέγοντας συντελεστές του E^{I ω_i T₀}, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας ως εξής :

SCond2 = Coefficient[order3Eq[[#, 2]] /. expRule1[#, Exp[I ω_# T₀]] == 0 & /@

{1, 2};

SCond2 /. displayRule

$$\left\{ - (D_1^2 A_1) - 2 I (D_1 B_1) \omega_1 - 2 I (D_2 A_1) \omega_1 + \right.$$

$$\left. 2 E^{I T_1 \sigma} \delta B_2 \bar{A}_1 + \frac{4 \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2^2} - \frac{4 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} + 2 E^{I T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{B}_1 == 0, \right.$$

$$\left. - (D_1^2 A_2) + 2 E^{-I T_1 \sigma} \delta A_1 B_1 - 2 I (D_1 B_2) \omega_2 - 2 I (D_2 A_2) \omega_2 - \frac{4 \delta^2 \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} == 0 \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες επιλυσιμότητας στη δεύτερη τάξη, SCond1Rule1, λαμβάνουμε :

SCond1Rule2 = D[SCond1Rule1, T₁] /. SCond1Rule1 /. ccSCond1Rule1;

SCond1Rule2 /. displayRule

$$\left\{ D_1^2 A_1 \rightarrow \frac{E^{I T_1 \sigma} \delta \sigma A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{\delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2} + \frac{\delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2}, D_1^2 A_2 \rightarrow - \frac{E^{-I T_1 \sigma} \delta \sigma A_1^2}{2 \omega_2} - \frac{\delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2} \right\}$$

Έτσι, ξαναγράφουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας στην τρίτη τάξη ως εξής :

SCond2Rule1 =

Solve[SCond2, {A₁^(0,1)[T₁, T₂], A₂^(0,1)[T₁, T₂]}][[1]] /. SCond1Rule2 //

ExpandAll;

SCond2Rule1 /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_2 A_1 \rightarrow & -(D_1 B_1) + \frac{I E^{i T_1 \sigma} \delta \sigma A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{I E^{i T_1 \sigma} \delta B_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{2 I \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2^2} \\ & \frac{I \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{2 I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1 (2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2)} - \frac{I E^{i T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{B}_1}{\omega_1}, \\ D_2 A_2 \rightarrow & -(D_1 B_2) - \frac{I E^{-i T_1 \sigma} \delta \sigma A_1^2}{4 \omega_2^2} - \frac{I E^{-i T_1 \sigma} \delta A_1 B_1}{\omega_2} - \frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2^2} + \frac{2 I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2)} \end{aligned} \right\}$$

• Επανασύσταση

Χρησιμοποιώντας την SCond1Rule1 και την SCond2Rule1, επανασυστήνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης ως εξής :

moduEq =

Table[2 I ω_k A_k' , {k, 2}] ==

(Table[2 I ω_k dt[1][A_k[T₁, T₂]], {k, 2}) /. SCond1Rule1 /. SCond2Rule1 //

Expand // Collect[#, ε] & // Thread;

moduEq /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} 2 I \omega_1 A_1' == & 2 E^{i T_1 \sigma} \delta \in A_2 \bar{A}_1 + \epsilon^2 \left(-2 I (D_1 B_1) \omega_1 + 2 E^{i T_1 \sigma} \delta B_2 \bar{A}_1 - \frac{E^{i T_1 \sigma} \delta \sigma A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{4 \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2^2} + \right. \\ & \left. \frac{\delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{\delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} + 2 E^{i T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{B}_1 \right), 2 I \omega_2 A_2' == E^{-i T_1 \sigma} \delta \in A_1^2 + \\ & \epsilon^2 \left(2 E^{-i T_1 \sigma} \delta A_1 B_1 + \frac{E^{-i T_1 \sigma} \delta \sigma A_1^2}{2 \omega_2} - 2 I (D_1 B_2) \omega_2 + \frac{\delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2} - \frac{4 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

Χωρίς να περιλάβουμε το B_i στην δεύτερης-τάξης λύση, οι ακόλουθοι δύο συντελεστές :

Coefficient[moduEq[[1, 2]], A₁[T₁, T₂] A₂[T₁, T₂] \bar{A}_2 [T₁, T₂]] /. ω₂ -> 2 ω₁ //

Simplify

$$\frac{3 \delta^2 \epsilon^2}{2 \omega_1^2}$$

Coefficient[moduEq[[2, 2]], A₁[T₁, T₂] A₂[T₁, T₂] \bar{A}_1 [T₁, T₂]] /. ω₂ -> 2 ω₁ //

Simplify

0

δεν είναι οι ίδιοι, κάτι που διαταράσσει τη συντηρητική φύση του συστήματος στο ότι οι εξισώσεις διαμόρφωσης πρέπει να παράγονται από μία Λαγκραντζιανή. Χρησιμοποιώντας την ευκαμψία (flexibility) που δίνεται από τα ομογενή μέρη των λύσεων του δεύτερης-τάξης προβλήματος, επιλέγουμε τις συναρτήσεις B_i[t] έτσι ώστε αυτοί οι συντελεστές να είναι οι ίδιοι. Γι' αυτό το λόγο, υποθέτουμε ότι :

```
BForm = {B1 -> Function[{T1, T2}, c1 E^{T1} \bar{A}_1[T1, T2] A2[T1, T2] },
  B1 -> Function[{T1, T2}, c1 E^{-T1} A1[T1, T2] \bar{A}_2[T1, T2] ],
  B2 -> Function[{T1, T2}, c2 E^{-T1} A1[T1, T2]^2 ]};
```

όπου c_1 και c_2 είναι απροσδιόριστες σταθερές. Αντικαθιστώντας την BForm και τις συνθήκες επιλυσιμότητας στα δεξιά μέλη της moduEq, προκύπτει :

```
moduEqMod =
  (Expand[# /. BForm /. SCondiRule1 /. ccSCondiRule1] & /@ moduEq) //
  ExpandAll;
moduEqMod /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} 2 I \omega_1 A_1' &== 2 E^{IT_1} \delta \in A_2 \bar{A}_1 + 2 \delta \epsilon^2 A_1^2 c_2 \bar{A}_1 - \\ &\frac{E^{IT_1} \delta \epsilon^2 \sigma A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + 2 E^{IT_1} \epsilon^2 \sigma A_2 c_1 \omega_1 \bar{A}_1 + \frac{4 \delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2^2} + \frac{\delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \\ &\frac{\delta \epsilon^2 A_1^2 c_1 \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - 4 \delta \epsilon^2 A_1 A_2 c_1 \bar{A}_2 - \frac{\delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2}, \\ 2 I \omega_2 A_2' &== E^{-IT_1} \delta \in A_1^2 + \frac{E^{-IT_1} \delta \epsilon^2 \sigma A_1^2}{2 \omega_2} - 2 E^{-IT_1} \epsilon^2 \sigma A_1^2 c_2 \omega_2 + \\ &2 \delta \epsilon^2 A_1 A_2 c_1 \bar{A}_1 + \frac{\delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2} - \frac{4 \delta \epsilon^2 A_1 A_2 c_2 \omega_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{4 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} \end{aligned} \right\}$$

Με σκοπό η moduEqMod να είναι παραγόμενη από μία Λαγκραντζιανή, η ακόλουθη συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται :

```
Coefficient[moduEqMod[[1, 2]], A1[T1, T2] A2[T1, T2] \bar{A}_2[T1, T2]] -
  Coefficient[moduEqMod[[2, 2]], A1[T1, T2] A2[T1, T2] \bar{A}_1[T1, T2]] == 0 /.
  \epsilon -> 1 /. \omega_2 -> 2 \omega_1
```

$$2 \delta c_1 + 8 \delta c_2 - \frac{3 \delta^2}{2 \omega_1^2} == 0$$

Αυτό παρέχει μία συνθήκη συμβιβαστού. Όμως, μια επιπλέον σταθερά εμφανίζεται !!!

Για να λάβουμε μια συνεπή δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων στο σύστημα των τεσσάρων πρώτης-τάξης πραγματικών-τιμών εξισώσεων EOM2 στην Ενότητα 5.2.2 και σε ένα σύστημα από δύο πρώτης-τάξης μιγαδικών-τιμών εξισώσεις στην Ενότητα 5.2.3.

5.2.2 Πρώτης-Τάξης Πραγματικών-Τιμών Σύστημα

Όπως δείχτηκε στην προηγούμενη ενότητα, ασχολούμενοι με τη δεύτερης-τάξης μορφή των εξισώσεων που διέπουν ένα σύστημα, μπορεί να οδηγηθούμε σε ασυνεπή αποτελέσματα εκτός αν περιλαμβάνονται κατάλληλα τμήματα των ομογενών λύσεων των εξισώσεων διαταραχών. Επιπλέον, οι συνεπείς αναπτύξεις ίσως περιέχουν αυθαίρετες σταθερές που να πρέπει να επιλεγούν με σύνεση. Σε αυτή την ενότητα, δείχνουμε ότι η μεταχείριση ενός ισοδύναμου συστήματος από πρώτης-τάξης πραγματικών-τιμών εξισώσεις, δηλαδή των EOM2, οδηγεί σε συνεπή αποτελέσματα χωρίς αιωρούμενες σταθερές.

Αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη επέκταση της λύσης της EOM2 της μορφής :

$$\text{solRule} = \{u_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[\epsilon^j u_{i,j}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&), \\ v_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[\epsilon^j v_{i,j}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&)\};$$

Εκφράζοντας τη χρονική παράγωγο στην EOM2 σε όρους των χρονικών κλιμάκων T_0 , T_1 και T_2 , έχουμε :

$$\text{multiScales} = \{u_{i_}[t] \rightarrow u_i[T_0, T_1, T_2], \\ \text{Derivative}[n_][u_{i_}][t] \rightarrow \text{dt}[n][u_i[T_0, T_1, T_2]]\};$$

Αντικαθιστώντας τη multiScales και τη solRule στην EOM2, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

$$\text{eq522a} = (\text{EOM2} /. \text{multiScales} /. \text{solRule} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{\#1/\#2 > 3} \rightarrow 0;$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ϵ , λαμβάνουμε :

$$\text{eqEps} = \text{Rest}[\text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract} @@ \#, \epsilon] == 0]] \& /@ \text{eq522a} // \\ \text{Transpose};$$

Για να τοποθετήσουμε τους γραμμικούς τελεστές από τη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους από την άλλη, ορίζουμε :

$$\text{eqOrder}[i_]:= \\ (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. u_{k,1} \rightarrow u_{k,i}) == \\ (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. u_{k,1} \rightarrow u_{k,i}) - (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[i]]) // \\ \text{Thread}$$

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

$$\text{eqOrder}[1] /. \text{displayRule} // \text{TableForm} \\ \text{eqOrder}[2] /. \text{displayRule} // \text{TableForm} \\ \text{eqOrder}[3] /. \text{displayRule} // \text{TableForm}$$

$$D_0 u_{1,1} - v_{1,1} == 0$$

$$D_0 v_{1,1} + \omega_1^2 u_{1,1} == 0$$

$$D_0 u_{2,1} - v_{2,1} == 0$$

$$D_0 v_{2,1} + \omega_2^2 u_{2,1} == 0$$

$$D_0 u_{1,2} - v_{1,2} == -(D_1 u_{1,1})$$

$$D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} == -(D_1 v_{1,1}) + 2 \delta u_{1,1} u_{2,1}$$

$$D_0 u_{2,2} - v_{2,2} == -(D_1 u_{2,1})$$

$$D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} == -(D_1 v_{2,1}) + \delta u_{1,1}^2$$

$$D_0 u_{1,3} - v_{1,3} == -(D_1 u_{1,2}) - D_2 u_{1,1}$$

$$D_0 v_{1,3} + \omega_1^2 u_{1,3} == -(D_1 v_{1,2}) - D_2 v_{1,1} + 2 \delta u_{1,2} u_{2,1} + 2 \delta u_{1,1} u_{2,2}$$

$$D_0 u_{2,3} - v_{2,3} == -(D_1 u_{2,2}) - D_2 u_{2,1}$$

$$D_0 v_{2,3} + \omega_2^2 u_{2,3} == -(D_1 v_{2,2}) - D_2 v_{2,1} + 2 \delta u_{1,1} u_{1,2}$$

• Πρώτης-Τάξης Εξισώσεις

Η ομογενής λύση της eqOrder[1] μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας :

$$\text{eigenForm} = \#[[2]] \text{Exp}[\#[[1]] T_0] \& /@ \text{Transpose}[\text{Eigensystem}[\text{matrixA}]]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{\omega_1} E^{-i T_0 \omega_1}, E^{-i T_0 \omega_1}, 0, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{\omega_1} E^{i T_0 \omega_1}, E^{i T_0 \omega_1}, 0, 0 \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ 0, 0, \frac{1}{\omega_2} E^{-i T_0 \omega_2}, E^{-i T_0 \omega_2} \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{1}{\omega_2} E^{i T_0 \omega_2}, E^{i T_0 \omega_2} \right\} \right\}$$

Καθόσον οι πρώτης-τάξης εξισώσεις είναι ομογενείς, η λύση της eqOrder[1] μπορεί να εκφραστεί ως:

```
sol1 =
Table[states1[[i]] -> Function[{T0, T1, T2}, solihForm[[i]] // Evaluate],
  {i, 4}]
{u1,1 -> Function[{T0, T1, T2}, E^{I T0 \omega_1} A1[T1, T2] + E^{-I T0 \omega_1} \bar{A}_1[T1, T2]},
v1,1 -> Function[{T0, T1, T2}, I E^{I T0 \omega_1} \omega_1 A1[T1, T2] - I E^{-I T0 \omega_1} \omega_1 \bar{A}_1[T1, T2]},
u2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, E^{I T0 \omega_2} A2[T1, T2] + E^{-I T0 \omega_2} \bar{A}_2[T1, T2]},
v2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, I E^{I T0 \omega_2} \omega_2 A2[T1, T2] - I E^{-I T0 \omega_2} \omega_2 \bar{A}_2[T1, T2]}]
```

• Δεύτερης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση στις δεύτερης-τάξης εξισώσεις, τις eqOrder[2], προκύπτει:

```
order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;
order2Eq /. displayRule
```

$$\{D_0 u_{1,2} - v_{1,2} == -E^{I T_0 \omega_1} (D_1 A_1) - E^{-I T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1),$$

$$D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} == 2 E^{I T_0 \omega_1 + I T_0 \omega_2} \delta A_1 A_2 - I E^{I T_0 \omega_1} (D_1 A_1) \omega_1 + I E^{-I T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 +$$

$$2 E^{-I T_0 \omega_1 + I T_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1 + 2 E^{I T_0 \omega_1 - I T_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2 + 2 E^{-I T_0 \omega_1 - I T_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2,$$

$$D_0 u_{2,2} - v_{2,2} == -E^{I T_0 \omega_2} (D_1 A_2) - E^{-I T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2), D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} ==$$

$$E^{2 I T_0 \omega_1} \delta A_1^2 - I E^{I T_0 \omega_2} (D_1 A_2) \omega_2 + I E^{-I T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \omega_2 + 2 \delta A_1 \bar{A}_1 + E^{-2 I T_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2\}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τον expRule1[i] στα δεξιά (ως προς το =) μέλη της order2Eq για να μετατρέψουμε τους όρους μικρού διαιρέτη σε προσωρινούς όρους, συλλέγουμε τους όρους τους υπεύθυνους για τους προσωρινούς όρους, και λαμβάνουμε:

```
ST11 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[1], Exp[I \omega_1 T_0]] & /@ order2Eq;
ST11 /. displayRule
```

$$\{-(D_1 A_1), -I (D_1 A_1) \omega_1 + 2 E^{I T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1, 0, 0\}$$

```
ST12 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[2], Exp[I \omega_2 T_0]] & /@ order2Eq;
ST12 /. displayRule
```

$$\{0, 0, -(D_1 A_2), E^{-I T_1 \sigma} \delta A_1^2 - I (D_1 A_2) \omega_2\}$$

Οι συνθήκες επιλυσιμότητας των δεύτερης-τάξης εξισώσεων απαιτούν οι ST11 και ST12 να είναι ορθογωνικές σε κάθε λύση των συζυγών ομογενών προβλημάτων, δηλαδή των συστατικών της cleftVec. Εφαρμόζοντας αυτές τις συνθήκες, λαμβάνουμε:

```
SCond1 = {cleftVec[[1]].ST11 == 0, cleftVec[[2]].ST12 == 0};
SCond1 /. displayRule
```

$$\{-2 I (D_1 A_1) \omega_1 + 2 E^{I T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1 == 0, E^{-I T_1 \sigma} \delta A_1^2 - 2 I (D_1 A_2) \omega_2 == 0\}$$

ή

```
SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A1^{(1,0)}[T1, T2], A2^{(1,0)}[T1, T2]}][[1]];
SCond1Rule1 /. displayRule
```

$$\{D_1 A_1 \rightarrow -\frac{I E^{I T_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1}, D_1 A_2 \rightarrow -\frac{I E^{-I T_1 \sigma} \delta A_1^2}{2 \omega_2}\}$$

των οποίων τα συζυγή μιγαδικά είναι:

```
ccSCond1Rule1 = SCond1Rule1 /. conjugateRule;
```

Χρησιμοποιώντας αυτές τις συνθήκες επιλυσιμότητας και τον `expRule3`, ξαναγράφουμε την `order2Eqm` ως εξής :

```
order2Eqm = order2Eq /. SCondiRule1 /. ccSCondiRule1 /. expRule3;
order2Eqm /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 u_{1,2} - v_{1,2} &= \frac{I E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_1}, \\ D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} &= 2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2 + E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1 + E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2 + \\ & 2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2, D_0 u_{2,2} - v_{2,2} = \frac{I E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2}{2 \omega_2} - \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 \omega_2}, \\ D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} &= \frac{1}{2} E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2 + 2 \delta A_1 \bar{A}_1 + \frac{1}{2} E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2 \end{aligned} \right\}$$

Μετατρέποντας την `order2Eqm` σε ένα σύνολο από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τη `DSolve`, λαμβάνουμε τις ειδικές λύσεις ως εξής :

```
(sol2p =
  DSolve[order2Eqm /. u_>,2 -> (u_i,2[#1] &),
    {u_{1,2}[T_0], v_{1,2}[T_0], u_{2,2}[T_0], v_{2,2}[T_0]}, T_0][[1]] /. C[_] -> 0 //
  Simplify;) // Timing
```

{13.139 Second, Null}

Έτσι, οι δεύτερης-τάξης λύσεις της `order2Eqm` μπορούν να εκφραστούν ως :

```
states2 = states1 /. u_>,1 -> u_i,2
```

```
{u_{1,2}, v_{1,2}, u_{2,2}, v_{2,2}}
```

```
sol2 =
```

```
Table[states2[[i]] -> Function[{T_0, T_1, T_2},
  Expand[sol2p[[i, 2]]] /. Exp[a_] := Exp[a // Expand] // Evaluate],
  {i, 4}];
sol2 /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} u_{1,2} &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \\ & - \frac{2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \\ & \frac{E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}], \\ v_{1,2} &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, - \frac{2 I E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{2 \omega_1 + \omega_2} - \frac{2 I E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta \omega_1 A_1 A_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \\ & \frac{I E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 + \omega_2} - \frac{2 I E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta \omega_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1 + \omega_2} + \\ & \frac{2 I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \omega_1 A_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{2 I E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{2 I E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \omega_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}], \\ u_{2,2} &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2}{2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{4 \delta \omega_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \\ & \frac{2 \delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}], \\ v_{2,2} &\rightarrow \text{Function}[\{T_0, T_1, T_2\}, - \frac{I E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2}{2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 (2 \omega_1 + \omega_2)}] \end{aligned} \right\}$$

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις στις δεξιές πλευρές των τρίτης-τάξης εξισώσεων, eqOrder[3], προκύπτει :

order3Eqrhs = Expand[#[[2]] /. sol1 /. sol2] & /@ eqOrder[3];

Για να απαλείψουμε τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από την order3Eqrhs, χρησιμοποιούμε τον expRule1[i] για να μετασχηματίσουμε τους όρους που μετατρέπουν τους όρους μικρού διαιρέτη σε προσωρινούς όρους, υπολογίζουμε τα διανύσματα τα ανάλογα με το $E^{i \omega_i T_0}$ και λαμβάνουμε :

ST21 = Coefficient[order3Eqrhs /. expRule1[1], Exp[I ω₁ T₀]];

ST21 /. displayRule

$$\left\{ - (D_2 A_1) - \frac{E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 \bar{A}_1) A_2}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{2 E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 \bar{A}_1) A_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 A_2) \bar{A}_1}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{2 E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 A_2) \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \right. \\ \left. -I (D_2 A_1) \omega_1 + \frac{I E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 \bar{A}_1) A_2}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{2 I E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 \bar{A}_1) A_2 \omega_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{I E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 A_2) \bar{A}_1}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{3 \delta^2 A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{5 \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 I E^{i T_1} \sigma \delta (D_1 A_2) \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)}, 0, 0 \right\}$$

ST22 = Coefficient[order3Eqrhs /. expRule1[2], Exp[I ω₂ T₀]];

ST22 /. displayRule

$$\left\{ 0, 0, - (D_2 A_2) - \frac{E^{-i T_1} \sigma \delta (D_1 A_1) A_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \right. \\ \left. -I (D_2 A_2) \omega_2 + \frac{I E^{-i T_1} \sigma \delta (D_1 A_1) A_1}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{2 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right\}$$

Έτσι, απαιτώντας οι ST21 και ST22 να είναι ορθογωνικές στα συστατικά της cleftVec, προκύπτουν οι συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond2 = {Expand[cleftVec[[1]].ST21] == 0,

Expand[cleftVec[[2]].ST22] == 0};

SCond2 /. displayRule

$$\left\{ -2 I (D_2 A_1) \omega_1 + \frac{3 \delta^2 A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{5 \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} == 0, \right. \\ \left. -2 I (D_2 A_2) \omega_2 + \frac{2 \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} == 0 \right\}$$

ή

SCond2Rule1 = Solve[SCond2, {A₁^(0,1)[T₁, T₂], A₂^(0,1)[T₁, T₂]}][[1]];

SCond2Rule1 /. displayRule

$$\left\{ D_2 A_1 \rightarrow - \frac{I (3 \delta^2 A_1^2 \omega_1^2 \bar{A}_1 + 5 \delta^2 A_1^2 \omega_1 \omega_2 \bar{A}_1 + 2 \delta^2 A_1 A_2 \omega_2^2 \bar{A}_2)}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, D_2 A_2 \rightarrow - \frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right\}$$

• Επανασύσταση

Επανασυστήνουμε την SCond2Rule1 και την SCond2Rule1 και λαμβάνουμε :

moduEq =

Table[2 I ω_k A_k' , {k, 2}] ==
(Table[2 I ω_k dt[[1]] [A_k [T₁, T₂]] , {k, 2}] /. SCond1Rule1 /. SCond2Rule1 // Expand) // Thread;

moduEq /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} 2 I \omega_1 A_1' &== 2 E^{IT_1 \sigma} \delta \in A_2 \bar{A}_1 + \frac{\delta \delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{5 \delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ 2 I \omega_2 A_2' &== E^{-IT_1 \sigma} \delta \in A_1^2 + \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} \end{aligned} \right\}$$

Αυτές οι εξισώσεις παράγονται από μία Λαγκραντζιανή επειδή :

Coefficient[moduEq[[1, 2]], A₁[T₁, T₂] A₂[T₁, T₂] \bar{A}_2 [T₁, T₂]] -
Coefficient[moduEq[[2, 2]], A₁[T₁, T₂] A₂[T₁, T₂] \bar{A}_1 [T₁, T₂]] == 0 /.
ε -> 1 /. ω₂ -> 2 ω₁

True

Επομένως, η μεταχείριση της πρώτης-τάξης εκδοχής των κυρίαρχων εξισώσεων δίνει συνεπή αποτελέσματα χωρίς αιωρούμενες (floating) σταθερές.

5.2.3 Πρώτης-Τάξης Μιγαδικών-Τιμών Σύστημα

Σε αυτή την ενότητα, δείχνουμε ότι η μεταχείριση μιας πρώτης-τάξης σύνθετων-τιμών εκδοχής των κυρίαρχων εξισώσεων δίνει συνεπή αποτελέσματα χωρίς αιωρούμενες (floating) σταθερές. Ξεκινάμε με το μετασχηματισμό της δεύτερης-τάξης μορφής EOM1 των κυρίαρχων εξισώσεων σε ένα σύστημα από πρώτης-τάξης σύνθετων-τιμών εξισώσεις μέσω εισαγωγής ου μετασχηματισμού :

transfRule = {u_k[t] -> ζ_k[t] + ζ_k'[t], u_k'[t] -> I ω_k (ζ_k[t] - ζ_k'[t])};

Τότε, ορίζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές :

depVar = {u₁[t], u₁'[t], u₂[t], u₂'[t]};

nmodes = {ζ₁[t], ζ₁'[t], ζ₂[t], ζ₂'[t]};

Αντικαθιστώντας την transfRule στην depVar και επιλύοντας για τις nmodes, λαμβάνουμε :

zetaRule = Solve[depVar == (depVar /. transfRule) // Thread, nmodes][[1]]

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_1[t] &\rightarrow -\frac{-\omega_1 u_1[t] + I u_1'[t]}{2 \omega_1}, \quad \zeta_1'[t] \rightarrow -\frac{-\omega_1 u_1[t] - I u_1'[t]}{2 \omega_1}, \\ \zeta_2[t] &\rightarrow -\frac{-\omega_2 u_2[t] + I u_2'[t]}{2 \omega_2}, \quad \zeta_2'[t] \rightarrow -\frac{-\omega_2 u_2[t] - I u_2'[t]}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

Έπεται από την EOM1 ότι η επιτάχυνση δίνεται από :

acceleration = Solve[EOM1, {u₁''[t], u₂''[t]}][[1]]

$$\{u_1''[t] \rightarrow -\omega_1^2 u_1[t] + 2 \delta u_1[t] u_2[t], \quad u_2''[t] \rightarrow \delta u_1[t]^2 - \omega_2^2 u_2[t]\}$$

Τότε, παραγωγίζοντας τις εξαρτημένες μεταβλητές στον zetaRule και χρησιμοποιώντας τον transfRule και την acceleration, μετατρέπουμε το σύστημα των δύο δεύτερης-τάξης εξισώσεων, EOM1, στις ακόλουθες δύο πρώτης-τάξης μιγαδικών-τιμών εξισώσεις :

EOM3 =

```
{z'[t] == (D[{z#[t] /. zetaRule, t] /. acceleration /. transRule //
Expand) & /@ {1, 2}
```

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_1'[t] &== \\ & I \omega_1 \zeta_1[t] - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_2[t] \zeta_1[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1}, \\ \zeta_2'[t] &== -\frac{I \delta \zeta_1[t]^2}{2 \omega_2} + I \omega_2 \zeta_2[t] - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_1[t]}{\omega_2} - \frac{I \delta \zeta_1[t]^2}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

Για να προσδιορίσουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της EOM3 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, αναπτύσσουμε τα ζ και ζ' κατά τη μορφή :

```
solRule = {ζi -> (Sum[ej ζi,j[#1, #2, #3], {j, 3}] &),
ζi' -> (Sum[ej ζi,j'[#1, #2, #3], {j, 3}] &)};
```

```
eq523a = (EOM3 /. multiScales /. solRule // ExpandAll) /. en_/:n>3 -> 0;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ , λαμβάνουμε :

```
eqEps = Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0]] & /@ eq523a //
```

Transpose:

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή από τη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους από την άλλη, ορίζουμε :

```
eqOrder[i_] :=
{#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. uk,1 -> uk,i} ==
{#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. uk,1 -> uk,i} - (#[[1]] & /@ eqEps[[i]]) //
Thread
```

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

```
eqOrder[1] /. displayRule // TableForm
```

```
eqOrder[2] /. displayRule // TableForm
```

```
eqOrder[3] /. displayRule // TableForm
```

$$D_0 \zeta_{1,1} - I \omega_1 \zeta_{1,1} == 0$$

$$D_0 \zeta_{2,1} - I \omega_2 \zeta_{2,1} == 0$$

$$D_0 \zeta_{1,2} - I \omega_1 \zeta_{1,2} == - (D_1 \zeta_{1,2}) - D_2 \zeta_{1,1} - \frac{I \delta \zeta_{1,2} \zeta_{2,1}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{1,2}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{2,2} \zeta_{1,1}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{2,1} \zeta_{1,2}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{1,2} \zeta_{2,1}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{2,2}}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{2,2}}{\omega_1}$$

$$D_0 \zeta_{2,2} - I \omega_2 \zeta_{2,2} == - (D_1 \zeta_{2,2}) - D_2 \zeta_{2,1} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{1,2}}{\omega_2} - \frac{I \delta \zeta_{1,2} \zeta_{1,1}}{\omega_2} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{1,2}}{\omega_2} - \frac{I \delta \zeta_{1,1} \zeta_{1,2}}{\omega_2}$$

• Πρώτης-Τάξης Εξισώσεις

Καθόσον οι eqOrder[1] είναι ομογενείς, μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις τους ως εξής :

```
sol1 =
```

```
Table[{ζi,1 -> Function[{T0, T1, T2}, Ai[T1, T2] Exp[I ωi T0] // Evaluate],
ζi,1 -> Function[{T0, T1, T2}, Āi[T1, T2] Exp[-I ωi T0] // Evaluate]}, {i, 2}] // Flatten
{ζ1,1 -> Function[{T0, T1, T2}, EI T0 ω1 A1[T1, T2]}, ζ1,1 -> Function[{T0, T1, T2}, E-I T0 ω1 Ā1[T1, T2]},
ζ2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, EI T0 ω2 A2[T1, T2]}, ζ2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, E-I T0 ω2 Ā2[T1, T2]}}
```

• Δεύτερης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση στις δεύτερης-τάξης εξισώσεις, τις eqOrder[2], έχουμε :

```
order2Eq = eqOrder[2] /. sol1;
order2Eq /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 \zeta_{1,2} - I \omega_1 \zeta_{1,2} &== -E^{IT_0 \omega_1} (D_1 A_1) - \frac{I E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_1} \\ &\frac{I E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_1} - \frac{I E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_1}, \\ D_0 \zeta_{2,2} - I \omega_2 \zeta_{2,2} &== -E^{IT_0 \omega_2} (D_1 A_2) - \frac{I E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2}{2 \omega_2} - \frac{I \delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

Μετατρέποντας τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη μέσω χρήσης του expRule1 και κατόπιν απαλείφοντας τους όρους που οδηγούν σε προσωρινούς όρους από την order2Eq, προκύπτει :

```
SCond1 = Coefficient[order2Eq[#, 2]] /. expRule1[#, Exp[I \omega # T_0]] == 0 & /@ {1, 2};
SCond1 /. displayRule
```

$$\left\{ -(D_1 A_1) - \frac{I E^{IT_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} == 0, -(D_1 A_2) - \frac{I E^{-IT_1 \sigma} \delta A_1^2}{2 \omega_2} == 0 \right\}$$

ή

```
SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A_1^{(1,0)}[T_1, T_2], A_2^{(1,0)}[T_1, T_2]}][[1]];
SCond1Rule1 /. displayRule
```

$$\left\{ D_1 A_1 \rightarrow -\frac{I E^{IT_1 \sigma} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1}, D_1 A_2 \rightarrow -\frac{I E^{-IT_1 \sigma} \delta A_1^2}{2 \omega_2} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις SCond1Rule1 και expRule3 στην order2Eq, προκύπτει :

```
order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule1 /. expRule3;
order2Eqm /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 \zeta_{1,2} - I \omega_1 \zeta_{1,2} &== -\frac{I E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_1} - \frac{I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_1} - \frac{I E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_1}, \\ D_0 \zeta_{2,2} - I \omega_2 \zeta_{2,2} &== -\frac{I \delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

Μετατρέπουμε την order2Eqm σε ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και λαμβάνουμε τις ειδικές τους λύσεις ως :

```
sol2p = DSolve[order2Eqm /. \zeta_{i,2} -> (\zeta_{i,2}[#1] &), {\zeta_{1,2}[T_0], \zeta_{2,2}[T_0]}, T_0][[1]] /. C[_] -> 0;
```

```
expRule4 = Exp[a_] := Exp[Expand[a]];

```

Γράφουμε τη δεύτερης-τάξης λύση σε μορφή συνάρτησης, ως εξής :

```
sol2 =
Table[{\zeta_{i,2} -> Function[{T_0, T_1, T_2}, (sol2p[[i, 2]] // Expand) /. expRule4 // Evaluate],
\zeta_{i,2} -> Function[{T_0, T_1, T_2}, (sol2p[[i, 2]] // Expand) /. expRule4 /. conjugateRule // Evaluate]},
{i, 2}] // Flatten;
sol2 /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_{1,2} &\rightarrow \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, -\frac{E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta A_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} \right], \\ \zeta_{1,2} &\rightarrow \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_1 A_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} \delta A_2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} - \frac{E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} - \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \right], \\ \zeta_{2,2} &\rightarrow \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{2 \delta \omega_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{E^{-2IT_0 \omega_1} \delta \bar{A}_1^2}{2 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \right], \\ \zeta_{2,2} &\rightarrow \text{Function} \left[\{T_0, T_1, T_2\}, \frac{E^{2IT_0 \omega_1} \delta A_1^2}{2 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta \omega_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta A_1 \bar{A}_1}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \right] \end{aligned} \right\}$$

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης εξισώσεις στα δεξιά μέλη των τρίτης-τάξης εξισώσεων, των eqOrder[3], λαμβάνουμε :

```
order3Eqrhs = Expand[#[[2]] /. sol1 /. sol2] & /@ eqOrder[3];
```

Μετατρέποντας τους όρους που παράγουν όρους μικρού διαιρέτη και απαλείφοντας τους όρους που παράγουν εγκόσμιους όρους στο $\zeta_{i,3}$ από την order3Eqrhs απαιτούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

```
SCond2 = Coefficient[order3Eqrhs[[#]] /. expRule1[#], Exp[I \omega_* T_0]] == 0 & /@ {1, 2};
SCond2 /. displayRule
```

$$\left\{ -(D_2 A_1) - \frac{4 I \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)} - \frac{5 I \delta^2 A_1^2 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} - \frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 (2\omega_1 + \omega_2)} == 0, -(D_2 A_2) - \frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} == 0 \right\}$$

ή

```
SCond2Rule1 = Solve[SCond2, {A_1^{(0,1)}[T_1, T_2], A_2^{(0,1)}[T_1, T_2]}][[1]];
SCond2Rule1 /. displayRule
```

$$\left\{ D_2 A_1 \rightarrow -\frac{I (8 \delta^2 A_1^2 \omega_1^2 \bar{A}_1 + 5 \delta^2 A_1^2 \omega_1 \omega_2 \bar{A}_1 + 2 \delta^2 A_1 A_2 \omega_2^2 \bar{A}_2)}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)}, D_2 A_2 \rightarrow -\frac{I \delta^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \right\}$$

• Επανασύσταση

Επανασυστήνουμε τις SCond1Rule1 και SCond2Rule1 και παίρνουμε :

```
moduEq =
Table[2 I \omega_k A_k', {k, 2}] ==
(Table[2 I \omega_k dt[1][A_k[T_1, T_2]], {k, 2}] /. SCond1Rule1 /. SCond2Rule1 // Expand) // Thread;
moduEq /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} 2 I \omega_1 A_1' &== 2 E^{IT_1 \sigma} \delta \in A_2 \bar{A}_1 + \frac{8 \delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1}{\omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{5 \delta^2 \epsilon^2 A_1^2 \bar{A}_1}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)}, \\ 2 I \omega_2 A_2' &== E^{-IT_1 \sigma} \delta \in A_1^2 + \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)} \end{aligned} \right\}$$

5.3 Η Μέθοδος των Κανονικών Μορφών

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των κανονικών μορφών, είναι βολικό να αρχίσουμε με την πρώτης-τάξης μιγαδικών τιμών μορφή EOM3 :

$$EOM3 = \left\{ \zeta_1'[t] == I \omega_1 \zeta_1[t] - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_2[t] \zeta_1[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1} - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_2[t]}{\omega_1}, \right. \\ \left. \zeta_2'[t] == -\frac{I \delta \zeta_1[t]^2}{2 \omega_2} + I \omega_2 \zeta_2[t] - \frac{I \delta \zeta_1[t] \zeta_1[t]}{\omega_2} - \frac{I \delta \zeta_1[t]^2}{2 \omega_2} \right\};$$

των κυρίαρχων εξισώσεων. Τότε, σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών μορφών, εισάγουμε τον σχεδόν-ταυτοτικό (near-identity) μετασχηματισμό :

`basicTerms = Table[{ηk[t], η̄k[t]}, {k, 2}] // Flatten`

`{η1[t], η̄1[t], η2[t], η̄2[t]}`

`zetaRule = {ζi -> Function[t, ε ηi[t] + Sum[ei-1 hi,j[Sequence @@ basicTerms], {j, 2}] // Evaluate],`
`ζi -> Function[t, ε η̄i[t] + Sum[ei-1 h̄i,j[Sequence @@ basicTerms], {j, 2}] // Evaluate]}`

`{ζi -> Function[t, ε ηi[t] + ε2 hi,1[η1[t], η̄1[t], η2[t], η̄2[t]] + ε2 hi,2[η1[t], η̄1[t], η2[t], η̄2[t]]],`
`ζi -> Function[t, ε η̄i[t] + ε2 h̄i,1[η1[t], η̄1[t], η2[t], η̄2[t]] + ε2 h̄i,2[η1[t], η̄1[t], η2[t], η̄2[t]]]}`

το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τις απλούστερες δυνατές εξισώσεις :

`etaRule = ηi'[t] -> I ωi ηi[t] + Sum[ej gi,j[t], {j, 2}]`

`ηi'[t] -> I ωi ηi[t] + ε gi,1[t] + ε2 gi,2[t]`

όπου η άνω παύλα υποδηλώνει το συζυγές μιγαδικό

`conjugateRule = {η -> η̄, η̄ -> η, σ -> σ̄, σ̄ -> σ, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

Αντικαθιστώντας την ανάπτυξη του ζ_i, τον zetaRule, στην EOM3, χρησιμοποιώντας τον etaRule, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε, και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε³, έχουμε :

`eq53a = (EOM3 /. zetaRule /. etaRule /. (etaRule /. conjugateRule) // ExpandAll) /. εn_ /; n > 3 -> 0;`

• Δεύτερης-Τάξης Εξισώσεις

Συλλέγοντας τους συντελεστές του ε² στην eq53a, προκύπτει :

`order2expr = Coefficient[Subtract @@ #, ε2] & /@ eq53a;`

Για να προσδιορίσουμε τους όρους συντονισμών στην order2expr, σημειώνουμε ότι όλες οι πιθανές μορφές των μη-ομογενών της όρων είναι :

`possibleQTerms = Outer[Times, basicTerms, basicTerms] // Flatten // Union`

`{η1[t]2, η1[t] η2[t], η2[t]2, η1[t] η̄1[t],`
`η2[t] η̄1[t], η̄1[t]2, η1[t] η̄2[t], η2[t] η̄2[t], η̄1[t] η̄2[t], η̄2[t]2}`

Έπεται από τα γραμμικά τμήματα του etaRule ότι στην πρώτη προσέγγιση :

`form = {ηi[t] -> Ei ωi t, η̄i[t] -> E-i ωi t};`

Έτσι, οι πιθανοί όροι συντονισμών δίνονται από :

`ResonantQTerm[1] = (E-i ω1 t possibleQTerms /. form /. ω2 -> 2 ω1 /. E-t -> 0) possibleQTerms // Union //`
`Rest`

`{η2[t] η̄1[t]}`

`ResonantQTerm[2] = (E-i ω2 t possibleQTerms /. form /. ω1 -> 1/2 ω2 /. E-t -> 0) possibleQTerms // Union //`
`Rest`

`{η1[t]2}`

Κατόπιν, οι όροι μη-συντονισμού και οι σχετικοί με αυτούς συντελεστές μπορούν να οριστούν ως :

`Do[NRQT[i] = Complement[possibleQTerms, ResonantQTerm[i]];`

`coeffsQ[i] = Table[Γi,j, {j, Length[NRQT[i]]}], {i, 2}]`

Έτσι, τα $h_{i,l}$ και τα μιγαδικά συζυγή τους έχουν τη μορφή :

hFormQ =

```
Table[
  {hi,1 ->
    (Evaluate[coeffsQ[i].NRQT[i] /.
      Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),
     $\bar{h}_{i,1}$  ->
    (Evaluate[coeffsQ[i].NRQT[i] /. conjugateRule /.
      Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &)}, {i, 2}] // Flatten;
```

Αντικαθιστώντας τα $h_{i,l}$ στην order2expr, εξισώνοντας τους συντελεστές των πιθανών όρων μη-συντονισμού με το 0, και επιλύοντας τις προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $\Gamma_{i,j}$, παίρνουμε :

coeffsQRule =

```
Table[Solve[Coefficient[order2expr[[i]] /. hFormQ, NRQT[i]] == 0 // Thread,
  coeffsQ[i][[1]], {i, 2}] // Flatten
```

$$\left\{ \begin{aligned} &\Gamma_{1,1} \rightarrow 0, \Gamma_{1,2} \rightarrow -\frac{\delta}{\omega_1 \omega_2}, \Gamma_{1,4} \rightarrow 0, \Gamma_{1,5} \rightarrow 0, \Gamma_{1,6} \rightarrow \frac{\delta}{\omega_1 \omega_2}, \Gamma_{1,7} \rightarrow 0, \\ &\Gamma_{1,8} \rightarrow 0, \Gamma_{1,8} \rightarrow \frac{\delta}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)}, \Gamma_{1,9} \rightarrow 0, \Gamma_{2,1} \rightarrow 0, \Gamma_{2,2} \rightarrow 0, \Gamma_{2,3} \rightarrow \frac{\delta}{\omega_2^2}, \\ &\Gamma_{2,4} \rightarrow 0, \Gamma_{2,7} \rightarrow 0, \Gamma_{2,9} \rightarrow 0, \Gamma_{2,5} \rightarrow \frac{\delta}{2\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)}, \Gamma_{2,6} \rightarrow 0, \Gamma_{2,8} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συντελεστές, ξαναγράφουμε την hFormQ ως εξής :

hSolQ =

```
Table[hi,1[Sequence @@ basicTerms] ->
  (hi,1[Sequence @@ basicTerms] /. hFormQ /. coeffsQRule), {i, 2}]
```

$$\left\{ \begin{aligned} &h_{1,1}[\eta_1[t], \bar{\eta}_1[t], \eta_2[t], \bar{\eta}_2[t]] \rightarrow -\frac{\delta \eta_1[t] \eta_2[t]}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\delta \eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\delta \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 (2\omega_1 + \omega_2)}, \\ &h_{2,1}[\eta_1[t], \bar{\eta}_1[t], \eta_2[t], \bar{\eta}_2[t]] \rightarrow \frac{\delta \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_2^2} + \frac{\delta \bar{\eta}_1[t]^2}{2\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \end{aligned} \right\}$$

ή, σε καθαρή συναρτησιακή μορφή, ως εξής :

hRuleQ =

```
Table[
  {hi,1 -> (Evaluate[hSolQ[[i, 2]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),
     $\bar{h}_{i,1}$  ->
    (Evaluate[hSolQ[[i, 2]] /. conjugateRule /.
      Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &)}, {i, 2}] // Flatten;
```

Επιλέγουμε τα $g_{i,1}$ έτσι ώστε να περιορίσουμε τους όρους συντονισμού στην order2expr σύμφωνα με :

gRuleQ =

```
Table[
  gi,1[t] -> -Coefficient[order2expr[[i]], ResonantQTerm[i].ResonantQTerm[i],
  {i, 2}]
```

$$\left\{ g_{1,1}[t] \rightarrow -\frac{I \delta \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1}, g_{2,1}[t] \rightarrow -\frac{I \delta \eta_1[t]^2}{2\omega_2} \right\}$$

• Τρίτης-Τάξης Εξισώσεις

Συλλέγοντας τους συντελεστές του ϵ^3 στην eq53a και χρησιμοποιώντας τους hRuleQ και gRuleQ, έχουμε :

order3expr =

```
Map[Coefficient[Subtract @@ #,  $\epsilon^3$ ] &, eq53a] /. hRuleQ /. gRuleQ /.  
(gRuleQ /. conjugateRule) // Expand;
```

Οι μη-ομογενείς όροι στην order3expr είναι ανάλογοι με :

possibleCTerms = Outer[Times, possibleQTerms, basicTerms] // Flatten // Union

```
{ $\eta_1[t]^2$ ,  $\eta_1[t]^2 \eta_2[t]$ ,  $\eta_1[t] \eta_2[t]^2$ ,  $\eta_2[t]^2$ ,  $\eta_1[t]^2 \bar{\eta}_1[t]$ ,  $\eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]$ ,  
 $\eta_2[t]^2 \bar{\eta}_1[t]$ ,  $\eta_1[t] \bar{\eta}_1[t]^2$ ,  $\eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]^2$ ,  $\bar{\eta}_1[t]^3$ ,  $\eta_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]$ ,  
 $\eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_2[t]$ ,  $\eta_2[t]^2 \bar{\eta}_2[t]$ ,  $\eta_1[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]$ ,  $\eta_2[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]$ ,  
 $\bar{\eta}_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]$ ,  $\eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2$ ,  $\eta_2[t] \bar{\eta}_2[t]^2$ ,  $\bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2$ ,  $\bar{\eta}_2[t]^3$ }
```

Κατόπιν, προσδιορίζουμε τους όρους συντονισμού σύμφωνα με :

ResonantCTerm[1] =

```
( $E^{-i \omega_1 t}$  possibleCTerms /. form /.  $\omega_2 \rightarrow 2 \omega_1$  /.  $E^{-t} \rightarrow 0$ ) possibleCTerms // Union //  
Rest
```

```
{ $\eta_1[t]^2 \bar{\eta}_1[t]$ ,  $\eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_2[t]$ }
```

ResonantCTerm[2] =

```
( $E^{-i \omega_2 t}$  possibleCTerms /. form /.  $\omega_1 \rightarrow \frac{1}{2} \omega_2$  /.  $E^{-t} \rightarrow 0$ ) possibleCTerms // Union //  
Rest
```

```
{ $\eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]$ ,  $\eta_2[t]^2 \bar{\eta}_2[t]$ }
```

Τότε, οι όροι μη-συντονισμών και οι σχετικοί με αυτούς συντελεστές δίνονται από :

Do[NRCT[i] = Complement[possibleCTerms, ResonantCTerm[i]];

```
coeffsC[i] = Table[ $\Lambda_{i,j}$ , {j, Length[NRCT[i]]}], {i, 2}]
```

Ακολουθώντας, τα $h_{i,2}$ και τα μιγαδικά συζυγή τους έχουν τις μορφές :

hFormC =

```
Table[
```

```
{ $h_{i,2} \rightarrow$ 
```

```
(Evaluate[coeffsC[i].NRCT[i] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),
```

```
 $\bar{h}_{i,2} \rightarrow$ 
```

```
(Evaluate[coeffsC[i].NRCT[i] /. conjugateRule /.
```

```
Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &), {i, 2}] // Flatten;
```

Αντικαθιστώντας τα $h_{i,2}$ στην order3expr, εξισώνοντας τον συντελεστή κάθε δυνατού όρου μη-συντονισμού με το 0, και επιλύοντας τις προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $\Lambda_{i,j}$, παίρνουμε :

coeffsCRule =

```
Table[Solve[Coefficient[order3expr[[i]] /. hFormC, NRCT[i]] == 0 // Thread,  
coeffsC[i]][[1]], {i, 2}] // Flatten
```

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda_{1,1} &\rightarrow -\frac{\delta^2 \omega_1 + \delta^2 \omega_2}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,3} \rightarrow \frac{\delta^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,7} \rightarrow -\frac{-5 \delta^2 \omega_1 - 3 \delta^2 \omega_2}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ \Lambda_{1,9} &\rightarrow \frac{\delta^2}{4 \omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,13} \rightarrow -\frac{\delta^2}{\omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,15} \rightarrow -\frac{-\delta^2 \omega_1 - \delta^2 \omega_2}{\omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ \Lambda_{1,2} &\rightarrow 0, \Lambda_{1,16} \rightarrow 0, \Lambda_{1,4} \rightarrow 0, \Lambda_{1,17} \rightarrow -\frac{\delta^2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ \Lambda_{1,5} &\rightarrow 0, \Lambda_{1,18} \rightarrow 0, \Lambda_{1,10} \rightarrow 0, \Lambda_{1,8} \rightarrow 0, \Lambda_{1,6} \rightarrow \frac{\delta^2}{\omega_1^2 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2}, \Lambda_{1,11} \rightarrow 0, \\ \Lambda_{1,14} &\rightarrow 0, \Lambda_{1,12} \rightarrow 0, \Lambda_{2,2} \rightarrow \frac{\delta^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{2,4} \rightarrow 0, \Lambda_{2,8} \rightarrow 0, \\ \Lambda_{2,12} &\rightarrow \frac{\delta^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{2,16} \rightarrow 0, \Lambda_{2,18} \rightarrow 0, \Lambda_{2,1} \rightarrow 0, \Lambda_{2,3} \rightarrow 0, \\ \Lambda_{2,5} &\rightarrow 0, \Lambda_{2,6} \rightarrow 0, \Lambda_{2,7} \rightarrow 0, \Lambda_{2,9} \rightarrow 0, \Lambda_{2,10} \rightarrow -\frac{\delta^2}{\omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2^2}, \Lambda_{2,11} \rightarrow 0, \\ \Lambda_{2,17} &\rightarrow 0, \Lambda_{2,13} \rightarrow 0, \Lambda_{2,14} \rightarrow -\frac{\delta^2}{\omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{2,15} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συντελεστές, ξαναγράφουμε την hFormC ως εξής :

hSolC =

Table[h_{i,2}[Sequence @@ basicTerms] ->

(h_{i,2}[Sequence @@ basicTerms] /. hFormC /. coeffsCRule), {i, 2}]

$$\left\{ \begin{aligned} h_{1,2}[\eta_1[t], \bar{\eta}_1[t], \eta_2[t], \bar{\eta}_2[t]] &\rightarrow -\frac{(\delta^2 \omega_1 + \delta^2 \omega_2) \eta_1[t]^2}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \\ &\frac{\delta^2 \eta_2[t]^2 \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1^2 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2} - \frac{(-5 \delta^2 \omega_1 - 3 \delta^2 \omega_2) \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t]^2}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t]^3}{4 \omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \\ &\frac{\delta^2 \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{(-\delta^2 \omega_1 - \delta^2 \omega_2) \eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ h_{2,2}[\eta_1[t], \bar{\eta}_1[t], \eta_2[t], \bar{\eta}_2[t]] &\rightarrow \frac{\delta^2 \eta_1[t]^2 \eta_2[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \eta_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2^2} + \\ &\frac{\delta^2 \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)} \end{aligned} \right\}$$

ή, σε μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

hRuleC =

Table[

{h_{i,2} ->

(Evaluate[hSolC[[i, 2]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),

$\bar{h}_{i,2}$ ->

(Evaluate[hSolC[[i, 2]] /. conjugateRule /.

Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &), {i, 2}] // Flatten;

Επιλέγοντας τα g_{i,2} έτσι ώστε να απαλείφονται οι όροι συντονισμού από την order3expr, προκύπτει :

gRuleC =

Table[

g_{1,2}[t] -> - Coefficient[order3expr[[i]], ResonantCTerm[i]].ResonantCTerm[i],
{i, 2}]

$$\{g_{1,2}[t] \rightarrow - \left(\frac{2 I \delta^2}{\omega_1 \omega_2^2} + \frac{I \delta^2}{2 \omega_1 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right) \eta_1[t]^2 \bar{\eta}_1[t] - \frac{I \delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1^2 (2 \omega_1 + \omega_2)},$$

$$g_{2,2}[t] \rightarrow - \frac{I \delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \}$$

Συνδυάζοντας τους etaRule, gRuleQ, και gRuleC και θέτοντας $\eta_i = A_i[t] E^{i \omega_i t}$, παίρνουμε την εξίσωση διαμόρφωσης :

moduEq =

Table[

$$2 I \omega_k E^{-i \omega_k t} (\eta_k'[t] - (\eta_k'[t] /. etaRule /. gRuleQ /. gRuleC)) == 0 /.$$

$$\{\eta_{i_} \rightarrow (A_{i_}[\#] E^{i \omega_{i_} \# t} \delta), \bar{\eta}_{i_} \rightarrow (\bar{A}_{i_}[\#] E^{-i \omega_{i_} \# t} \delta)\} /.$$

$$\text{Exp}[a_] \rightarrow \text{Exp}[a_ / . \omega_2 \rightarrow 2 \omega_1 + \epsilon^2 \sigma // \text{Expand}] // \text{ExpandAll}, \{k, 2\}]$$

$$\left\{ - \frac{4 \delta^2 \epsilon^2 A_1[t]^2 \bar{A}_1[t]}{\omega_2^2} - \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 \omega_1 A_1[t]^2 \bar{A}_1[t]}{4 \omega_1^2 \omega_2 + 2 \omega_1 \omega_2^2} \right.$$

$$\left. 2 E^{I t \epsilon^2 \sigma} \delta \in A_2[t] \bar{A}_1[t] - \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 \omega_1 A_1[t] A_2[t] \bar{A}_2[t]}{2 \omega_1^2 + \omega_1^2 \omega_2} + 2 I \omega_1 A_1[t] == 0, \right.$$

$$\left. - E^{-I t \epsilon^2 \sigma} \delta \in A_1[t]^2 - \frac{2 \delta^2 \epsilon^2 \omega_2 A_1[t] A_2[t] \bar{A}_1[t]}{2 \omega_1^2 \omega_2 + \omega_1 \omega_2^2} + 2 I \omega_2 A_2[t] == 0 \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τους zetaRule, hRuleQ και hRuleC, παίρνουμε την ακόλουθη δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης της EOM3 :

solution = Table[u_k[t] == Collect[{ζ_k[t] + ζ_k[t] /. zetaRule /. hRuleQ /. hRuleC, ε],
{k, 2}]

{u₁[t] ==

$$\in (\eta_1[t] + \bar{\eta}_1[t]) + \epsilon^2 \left(- \frac{\delta \eta_1[t] \eta_2[t]}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\delta \eta_1[t] \eta_2[t]}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\delta \eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2} - \right.$$

$$\left. \frac{\delta \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\delta \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right) + \epsilon^3 \left(\frac{\delta^2 \eta_1[t]^3}{4 \omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \right.$$

$$\left. \frac{(\delta^2 \omega_1 + \delta^2 \omega_2) \eta_1[t]^3}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)} \right.$$

$$\left. \frac{(-5 \delta^2 \omega_1 - 3 \delta^2 \omega_2) \eta_1[t]^2 \bar{\eta}_1[t]}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \eta_2[t]^2 \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1^2 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2} - \frac{(-\delta^2 \omega_1 - \delta^2 \omega_2) \eta_2[t]^2 \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right.$$

$$\left. \frac{(-5 \delta^2 \omega_1 - 3 \delta^2 \omega_2) \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t]^2}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t]^3}{4 \omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{(\delta^2 \omega_1 + \delta^2 \omega_2) \bar{\eta}_1[t]^3}{2 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right.$$

$$\left. \frac{\delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1^2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1^2 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2} \right.$$

$$\left. \frac{(-\delta^2 \omega_1 - \delta^2 \omega_2) \eta_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]^2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)} \right\},$$

$$u_2[t] == \epsilon^2 \left(\frac{\delta \eta_1[t]^2}{2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{2 \delta \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_2^2} + \frac{\delta \bar{\eta}_1[t]^2}{2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \right) + \epsilon (\eta_2[t] + \bar{\eta}_2[t]) +$$

$$\epsilon^3 \left(\frac{\delta^2 \eta_1[t]^2 \eta_2[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \eta_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \eta_1[t] \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \eta_2[t] \bar{\eta}_1[t]^2}{\omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2^2} - \right.$$

$$\left. \frac{\delta^2 \eta_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \omega_2^2} + \frac{\delta^2 \eta_1[t] \bar{\eta}_1[t] \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_1 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta^2 \bar{\eta}_1[t]^2 \bar{\eta}_2[t]}{\omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2) (2 \omega_1 + \omega_2)} \right)$$

5.4 Γενικευμένη Μέθοδος της Μεσοστάθμισης

Ορίζουμε ως το μη-γραμμικό τμήμα της EOM1, έναν κανόνα μετασχηματισμού, και το διάνυσμα καταστάσεων (states) ως εξής :

$$\text{NLTerms} = \{f_1 \rightarrow 2 \epsilon \delta u_1[t] u_2[t], f_2 \rightarrow \epsilon \delta u_1[t]^2\};$$

$$\text{transformRule} = u_i \rightarrow (a_i[\#] \text{Sin}[\chi_i[\#]] \&);$$

$$\text{states} = \{a_1[t], a_2[t], \chi_1[t], \chi_2[t]\};$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω κανόνες στις τέσσερις πρώτης-τάξης εξισώσεις που λήφθηκαν μέσω χρήσης της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων, έχουμε :

eq54a =

$$D[\text{states}, t] ==$$

$$\left\{ \frac{f_1}{\omega_1} \text{Cos}[\chi_1[t]], \frac{f_2}{\omega_2} \text{Cos}[\chi_2[t]], \omega_1 - \frac{f_1}{a_1[t] \omega_1} \text{Sin}[\chi_1[t]], \right.$$

$$\left. \omega_2 - \frac{f_2}{a_2[t] \omega_2} \text{Sin}[\chi_2[t]] \right\} /. \text{NLTerms} /. \text{transformRule} // \text{TrigReduce} //$$

Expand) // Thread

$$\{a_1'[t] == \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \chi_1[t] - \chi_2[t]] a_1[t] a_2[t]}{2 \omega_1} - \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \chi_1[t] + \chi_2[t]] a_1[t] a_2[t]}{2 \omega_1},$$

$$a_2'[t] == -\frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \chi_1[t] - \chi_2[t]] a_1[t]^2}{4 \omega_2} + \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[\chi_2[t]] a_1[t]^2}{2 \omega_2} -$$

$$\frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \chi_1[t] + \chi_2[t]] a_1[t]^2}{4 \omega_2},$$

$$\chi_1'[t] == \omega_1 - \frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \chi_1[t] - \chi_2[t]] a_2[t]}{2 \omega_1} - \frac{\delta \epsilon \text{Sin}[\chi_2[t]] a_2[t]}{\omega_1} +$$

$$\frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \chi_1[t] + \chi_2[t]] a_2[t]}{2 \omega_1},$$

$$\chi_2'[t] == \omega_2 - \frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \chi_1[t] - \chi_2[t]] a_1[t]^2}{4 \omega_2 a_2[t]} - \frac{\delta \epsilon \text{Sin}[\chi_2[t]] a_1[t]^2}{2 \omega_2 a_2[t]} +$$

$$\frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \chi_1[t] + \chi_2[t]] a_1[t]^2}{4 \omega_2 a_2[t]}\}$$

Αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση της eq54a στη μορφή :

$$\text{basicTerms} = \{\eta_1[t], \eta_2[t], \varphi_1[t], \varphi_2[t]\};$$

solRule =

$$\{a_i \rightarrow$$

$$(\text{Evaluate}[\eta_i[t] + \text{Sum}[\epsilon^j a_{i,j}[\text{Sequence} @@ \text{basicTerms}], \{j, 2\}] /. t \rightarrow \#] \&),$$

$\chi_i \rightarrow$

$$(\text{Evaluate}[\varphi_i[t] + \text{Sum}[\epsilon^j \chi_{i,j}[\text{Sequence} @@ \text{basicTerms}], \{j, 2\}] /. t \rightarrow \#] \&)\};$$

όπου τα $\eta_i[t]$ και $\varphi_i[t]$ αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές στο ϵ ως εξής :

basicDRule =

```
D[basicTerms, t] -> {Sum[εi A1,i[η1[t], η2[t]], {i, 2}],
  Sum[εi A2,i[η1[t], η2[t]], {i, 2}], ω1 + Sum[εi Φ1,i[η1[t], η2[t]], {i, 2}],
  ω2 + Sum[εi Φ2,i[η1[t], η2[t]], {i, 2}]} // Thread
{η1'[t] -> ε A1,1[η1[t], η2[t]] + ε2 A1,2[η1[t], η2[t]],
 η2'[t] -> ε A2,1[η1[t], η2[t]] + ε2 A2,2[η1[t], η2[t]],
 φ1'[t] -> ω1 + ε Φ1,1[η1[t], η2[t]] + ε2 Φ1,2[η1[t], η2[t]],
 φ2'[t] -> ω2 + ε Φ2,1[η1[t], η2[t]] + ε2 Φ2,2[η1[t], η2[t]]}
```

Οι συναρτήσεις a_{ij} και χ_{ij} είναι ταχέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του ϕ_i , ενώ έπεται από τον basicDRule ότι τα η_i , και άρα τα A_{ij} και τα Φ_{ij} , είναι βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του t .

Στη δεύτερη προσέγγιση, παραγωγίζουμε τα $a_i[t]$ και $\chi_i[t]$ μια φορά ως προς το t , χρησιμοποιούμε τους solRule και basicDRule, αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , αμελούμε όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^2 , και παίρνουμε :

eq54bLHS =

```
CoefficientList[Expand[#[[1]] /. solRule /. basicDRule] /. εn-/:n>2 -> 0, ε] & /@
eq54a;
```

Μετά, αντικαθιστούμε τον solRule στις δεξιά μέλη της eq54a, αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , διατηρούμε όρους έως το $O(\epsilon^2)$, και ξαναγράφουμε τα δεξιά τους μέλη ως εξής :

```
eq54bRHS = CoefficientList[Series[#[[2]] /. solRule, {ε, 0, 2}] // Normal, ε] & /@
eq54a;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην eq54bLHS και στην eq54bRHS, παίρνουμε :

```
eqEps = MapThread[Equal, {eq54bLHS, eq54bRHS}, 2] // Transpose // Rest;
```

Για να εκφράσουμε την εγγύτητα του 2:1 εσωτερικού συντονισμού, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ , που ορίζεται σύμφωνα με :

```
omgRule = {ω2 -> 2 ω1 + ε σ};
```

Έτσι, το σ μπορεί να σχετίζεται με τα ω_i από :

```
sigRule = Solve[omgRule /. Rule -> Equal, σ][[1]]
```

$$\left\{ \sigma \rightarrow -\frac{2\omega_1 - \omega_2}{\epsilon} \right\}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μεσοστάθμισης (averaging), ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

```
psiRule = {φ1[t] -> ω1 t + β1, φ2[t] -> ω2 t + β2};
```

```
betaRule = Solve[psiRule /. Rule -> Equal, {β1, β2}] [[1]]
```

```
{β1 -> -τ ω1 + φ1[τ], β2 -> -τ ω2 + φ2[τ]}
```

```
expRule1 = f_[a_] -> f[Expand[a /. psiRule /. omgRule] /. ε t -> t1];
```

```
expRule2 = f_[a_] -> f[Expand[a /. t1 -> ε t /. sigRule /. betaRule]];
```

Κατόπιν, διαχωρίζουμε τους ταχέως από τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους στις πρώτης-τάξης εξισώσεις, eqEps[[1]]. Γι' αυτό το σκοπό, ορίζουμε ένα διάνυσμα βραδείας κατάστασης και ένα διάνυσμα ταχείας κατάστασης σύμφωνα με :

$$\begin{aligned} \text{SVT}[j_] &:= \{A_{1,j}[\eta_1[t], \eta_2[t]], A_{2,j}[\eta_1[t], \eta_2[t]], \phi_{1,j}[\eta_1[t], \eta_2[t]], \\ &\quad \phi_{2,j}[\eta_1[t], \eta_2[t]]\} \\ \text{solVar}[j_] &:= \{a_{1,j}, a_{2,j}, \chi_{1,j}, \chi_{2,j}\} \end{aligned}$$

Κατόπιν, τα βραδέως μεταβαλλόμενα τμήματα της eqEps[[1]] δίνονται από :

$$\begin{aligned} \text{SVT1Rule} = & \\ & \text{Table}[\\ & \quad \text{Solve}[\\ & \quad \quad \text{eqEps}[[1, i]] /. \text{Thread}[\text{solVar}[1] \rightarrow \{0 \&\}] /. \text{expRule1} /. f[_t + _.] \rightarrow 0 /. \\ & \quad \quad \text{expRule2} /. f[_a_] \rightarrow f[\text{Expand}[a]], \text{SVT}[1][[i]][[1]], \{i, 4\}] // \text{Flatten} \\ & \left\{ \begin{aligned} A_{1,1}[\eta_1[t], \eta_2[t]] &\rightarrow \frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{2 \omega_1}, \\ A_{2,1}[\eta_1[t], \eta_2[t]] &\rightarrow -\frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2}, \\ \phi_{1,1}[\eta_1[t], \eta_2[t]] &\rightarrow -\frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_2[t]}{2 \omega_1}, \\ \phi_{2,1}[\eta_1[t], \eta_2[t]] &\rightarrow -\frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 \eta_2[t]} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ενώ τα ταχέως μεταβαλλόμενα τμήματα δίνονται από :

$$\begin{aligned} \text{FVT1} = & \text{Table}[\text{Subtract} @@ \text{eqEps}[[1, i]] /. \text{Thread}[\text{solVar}[1] \rightarrow \{0 \&\}], \{i, 4\}] /. \\ & \text{SVT1Rule} \\ & \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{2 \omega_1}, \\ &-\frac{\delta \text{Cos}[\phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{2 \omega_2} + \frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2}, \\ &\frac{\delta \text{Sin}[\phi_2[t]] \eta_2[t]}{\omega_1} - \frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_2[t]}{2 \omega_1}, \\ &\frac{\delta \text{Sin}[\phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{2 \omega_2 \eta_2[t]} - \frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 \eta_2[t]} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε τη λύση που αντιστοιχεί σε αυτούς τους ταχέως μεταβαλλόμενους όρους, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναγνωρίζουμε τις πιθανές μορφές των μη-ομογενών όρων. Το αποτέλεσμα είναι :

$$\begin{aligned} \text{FVT1Forms} = & \\ & \text{Flatten}[\text{Cases}[\#, (\text{Cos} | \text{Sin})[a_] \rightarrow \{\text{Cos}[a], \text{Sin}[a]\}, \text{Infinity}]] \& /@ \text{FVT1} \\ & \{ \{ \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], \text{Sin}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]] \}, \\ & \{ \text{Cos}[\phi_2[t]], \text{Sin}[\phi_2[t]], \text{Cos}[2 \phi_1[t] - \phi_2[t]], \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \}, \\ & \{ \text{Cos}[\phi_2[t]], \text{Sin}[\phi_2[t]], \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \}, \\ & \{ \text{Cos}[\phi_2[t]], \text{Sin}[\phi_2[t]], \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \} \} \end{aligned}$$

Το ταχέως-μεταβαλλόμενο συστατικό της πρώτης-τάξης λύσης μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των μορφών, δηλαδή :

$$\text{sol1Form} = \text{MapIndexed}[(\text{coeffs1}[\#2[[1]]] = \text{Array}[c, \text{Length}[\#1]]) . \#1 \&, \text{FVT1Forms}]$$

$$\begin{aligned} & \{c[1] \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] + c[2] \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], \\ & c[1] \text{Cos}[\phi_2[t]] + c[3] \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] + c[2] \text{Sin}[\phi_2[t]] + \\ & c[4] \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], c[1] \text{Cos}[\phi_2[t]] + c[3] \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] + \\ & c[2] \text{Sin}[\phi_2[t]] + c[4] \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]], c[1] \text{Cos}[\phi_2[t]] + \\ & c[3] \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] + c[2] \text{Sin}[\phi_2[t]] + c[4] \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]]\} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη sol1Form στην eqEps[[1]], χρησιμοποιώντας τον SVT1Rule, συλλέγοντας τους συντελεστές των FVT1Forms, επιλύοντας την προκύπτουσα αλγεβρική εξίσωση για τους απροσδιόριστους συντελεστές, και μετά αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα πίσω στην sol1Form, παίρνουμε :

`sol1rhs =`

`Table[`

`sol1Form[[i]] /.`

`Solve[`

`Coefficient[Subtract @@ eqEps[[1, i]] /. SVT1Rule /.`

`solVar[1][[i]] ->`

`(Evaluate[sol1Form[[i]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &),`

`FVT1Forms[[i]] == 0 // Thread, coeffs1[i][[1]], {i, 4}]`

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{2 \omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \frac{\delta \text{Sin}[\phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{2 \omega_2^2} - \frac{\delta \text{Sin}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ & \frac{\delta \text{Cos}[\phi_2[t]] \eta_2[t]}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_2[t]}{2 \omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ & \frac{\delta \text{Cos}[\phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{2 \omega_2^2 \eta_2[t]} - \frac{\delta \text{Cos}[2 \phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2) \eta_2[t]} \end{aligned} \right\}$$

ή, σε καθαρής μορφής συνάρτηση :

`sol1Rule =`

`Table[`

`solVar[1][[i]] ->`

`(Evaluate[sol1rhs[[i]] /. Thread[basicTerms -> {#1, #2, #3, #4}]] &), {i, 4}]`

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{1,1} \rightarrow \left(-\frac{\delta \text{Sin}[2 \Pi 3 + \Pi 4] \Pi 1 \Pi 2}{2 \omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} \epsilon \right), a_{2,1} \rightarrow \left(\frac{\delta \text{Sin}[\Pi 4] \Pi 1^2}{2 \omega_2^2} - \frac{\delta \text{Sin}[2 \Pi 3 + \Pi 4] \Pi 1^2}{4 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \epsilon \right), \\ & \Pi_{1,1} \rightarrow \left(\frac{\delta \text{Cos}[\Pi 4] \Pi 2}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\delta \text{Cos}[2 \Pi 3 + \Pi 4] \Pi 2}{2 \omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} \epsilon \right), \Pi_{2,1} \rightarrow \left(\frac{\delta \text{Cos}[\Pi 4] \Pi 1^2}{2 \Pi 2 \omega_2^2} - \frac{\delta \text{Cos}[2 \Pi 3 + \Pi 4] \Pi 1^2}{4 \Pi 2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \epsilon \right) \end{aligned} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τα βραδέως- και τα ταχέως- μεταβαλλόμενα συστατικά της πρώτης-τάξης λύσης, τα SVT1Rule και sol1Rule, στις δευτέρας-τάξης εξισώσεις, έχουμε :

`(order2Expr = Table[Subtract @@ eqEps[[2, i]] /. SVT1Rule /. sol1Rule // Expand // TrigReduce, {i, 4}];) // Timing`

`{5.748 Second, Null}`

Εφόσον αναζητούμε μια ανάπτυξη έγκυρη έως το $O(\epsilon^2)$, δεν χρειάζεται να λύσουμε για τα $a_{i,2}$ και $\chi_{i,2}$. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να ερευνήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις για να προσδιορίσουμε τα βραδέως μεταβαλλόμενα τμήματα και έτσι να προσδιορίσουμε τα $A_{i,2}$ και $\Phi_{i,2}$. Το αποτέλεσμα είναι :

SVT2Rule =

```
Table[
  Solve[
    order2Expr[[i]] == 0 /. Thread[solVar[2] -> {0 &}] /. expRule1 /. f[_ t + _] -> 0 /.
    expRule2 /. f[_ a_] := f[Expand[a]], SVT[2][[i]], {i, 4}] // Flatten
  {A1,2[η1[t], η2[t]] -> 0, A2,2[η1[t], η2[t]] -> 0,
  φ1,2[η1[t], η2[t]] -> -  $\frac{8 \delta^2 \omega_1^2 \eta_1[t]^2 + 5 \delta^2 \omega_1 \omega_2 \eta_1[t]^2 + 2 \delta^2 \omega_2^2 \eta_2[t]^2}{8 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}$ ,
  φ2,2[η1[t], η2[t]] -> -  $\frac{\delta^2 \eta_1[t]^2}{4 \omega_1 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}$  }]
```

Έτσι, βρίσκουμε ότι, στη δεύτερη προσέγγιση, η λύση δίνεται από :

eq54c =

```
{u1[t], u2[t]} ==
  (Normal[Series[{u1[t], u2[t]} /. transformRule /. solRule, {ε, 0, 1}]] /. sol1Rule //
  TrigReduce // Expand) // Thread
{u1[t] ==  $\frac{2 \text{Sin}[\phi_1[t]] \omega_1 \eta_1[t]}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{\text{Sin}[\phi_1[t]] \omega_2 \eta_1[t]}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[\phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{2 \omega_1 (2 \omega_1 + \omega_2)} +$   

 $\frac{\delta \epsilon \text{Cos}[\phi_1[t] - \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} + \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[\phi_1[t] + \phi_2[t]] \eta_1[t] \eta_2[t]}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}$ ,
u2[t] ==  $\frac{\delta \epsilon \omega_1 \eta_1[t]^2}{\omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta \epsilon \eta_1[t]^2}{2 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \phi_1[t]] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} +$   

 $\frac{2 \text{Sin}[\phi_2[t]] \omega_1 \eta_2[t]}{2 \omega_1 + \omega_2} + \frac{\text{Sin}[\phi_2[t]] \omega_2 \eta_2[t]}{2 \omega_1 + \omega_2}$  }
```

όπου τα εύρη και οι φάσεις δίδονται από :

ampEqs =

```
basicDRule[{{1, 2}}] /. SVT1Rule /. SVT2Rule /. psiRule /. f[_ a_] := f[Collect[a, t]] /.
  Rule -> Equal
{η1'[t] ==  $\frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \beta_1 - \beta_2 - t (-2 \omega_1 + \omega_2)] \eta_1[t] \eta_2[t]}{2 \omega_1}$ ,
η2'[t] == -  $\frac{\delta \epsilon \text{Cos}[2 \beta_1 - \beta_2 - t (-2 \omega_1 + \omega_2)] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2}$  }
```

phaseEqs =

```
basicDRule[{{3, 4}}] /. SVT1Rule /. SVT2Rule /. psiRule /. f[_ a_] := f[Collect[a, t]] /.
  Rule -> Equal
{φ1'[t] == ω1 -  $\frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \beta_1 - \beta_2 - t (-2 \omega_1 + \omega_2)] \eta_2[t]}{2 \omega_1} -$   

 $\frac{\epsilon^2 (8 \delta^2 \omega_1^2 \eta_1[t]^2 + 5 \delta^2 \omega_1 \omega_2 \eta_1[t]^2 + 2 \delta^2 \omega_2^2 \eta_2[t]^2)}{8 \omega_1^2 \omega_2^2 (2 \omega_1 + \omega_2)}$ ,
φ2'[t] == ω2 -  $\frac{\delta^2 \epsilon^2 \eta_1[t]^2}{4 \omega_1 \omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} - \frac{\delta \epsilon \text{Sin}[2 \beta_1 - \beta_2 - t (-2 \omega_1 + \omega_2)] \eta_1[t]^2}{4 \omega_2 \eta_2[t]}$  }
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Σε αυτό το Κεφάλαιο, εξετάζουμε τα μη-γραμμικά συστήματα που έχουν πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας. Η όλη διερεύνηση περιορίζεται στα ασθενώς μη-γραμμικά συστήματα, και οι προσεγγιστικές λύσεις λαμβάνονται μέσω χρήσης της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων. Στην περίπτωση των ισχυρώς μη-γραμμικών συστημάτων, οι μέθοδοι διαταραχών μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις για τις οποίες υπάρχει μια βασική ακριβής μη-γραμμική λύση. Για τις άλλες περιπτώσεις, γίνεται συχνά προσφυγή σε αριθμητικές μεθόδους και /ή σε γεωμετρικές μεθόδους για να ληφθεί μια ποιοτική περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος, περιλαμβάνοντας και την ευστάθειά του.

Σε αντίθεση με ένα ενός-βαθμού-ελευθερίας σύστημα, το οποίο έχει μόνο μία ~~μοναδική~~ γραμμική φυσική συχνότητα και μία μοναδική μορφή (mode) ταλάντωσης, ένα n -βαθμού-ελευθερίας σύστημα έχει n γραμμικές φυσικές συχνότητες και n αντίστοιχες μορφές. Ας καταδείξουμε αυτές τις συχνότητες ως $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ και ας υποθέσουμε ότι όλες τους είναι πραγματικές και διάφορες του 0. Μια σημαντική περίπτωση συμβαίνει όποτε δύο ή περισσότερες από αυτές τις συχνότητες είναι ανάλογες ή σχεδόν ανάλογες. Παραδείγματα σχεδόν-αναλογίας είναι τα εξής :

$$\{\omega_2 \approx 2\omega_1, \omega_3 \approx \omega_2 \pm \omega_1, \omega_2 \approx 3\omega_1, \omega_3 \approx 2\omega_2 \pm \omega_1, \omega_4 \approx \omega_3 \pm \omega_2 \pm \omega_1\}$$

Εξαρτώμενες από την τάξη της μη-γραμμικότητας στο σύστημα, αυτές οι σχέσεις αναλογίας των συχνοτήτων μπορεί να γίνουν αίτιο ώστε οι αντίστοιχες μορφές να καταστούν έντονα συζευγμένες, και τότε λέγεται ότι υπάρχει εσωτερικός ή αυτοπαραμετρικός συντονισμός. Για παράδειγμα, αν το σύστημα έχει τετραγωνικές μη-γραμμικότητες, τότε στην πρώτη τάξη ένας εσωτερικός συντονισμός μπορεί να υπάρχει αν $\omega_m \approx 2\omega_l$ ή $\omega_p \approx \omega_q \pm \omega_m$. Για ένα σύστημα με κυβικές μη-γραμμικότητες, στην πρώτη τάξη ένας εσωτερικός συντονισμός μπορεί να υπάρχει αν $\omega_m \approx 3\omega_l$ ή $\omega_q \approx \omega_p \pm \omega_m \pm \omega_l$ ή $\omega_m \approx \omega_l$ ή $\omega_q \approx 2\omega_p \pm \omega_m$. Όταν ένας εσωτερικός συντονισμός υφίσταται σε ένα ελεύθερα ταλαντούμενο σύστημα χωρίς απόσβεση (undamped), η ενέργεια που μεταδίδεται αρχικά σε μια από τις μορφές που εμπλέκονται στον εσωτερικό συντονισμό θα ανταλλάσσεται συνεχώς ανάμεσα στις μορφές που εμπλέκονται στον εσωτερικό συντονισμό. Αν υπάρχει και απόσβεση (damping) στο σύστημα, τότε η ενέργεια θα ελαττώνεται (θα υποστεί εντροπία) με το χρόνο καθώς θα ανταλλάσσεται συνεχώς.

Σε ένα συντηρητικό μη-γυροσκοπικό σύστημα, αν η γραμμική κίνηση είναι ταλαντωτική, τότε η μη-γραμμική κίνηση είναι φραγμένη. Για ένα συντηρητικό γυροσκοπικό πολλών-βαθμών-ελευθερίας σύστημα, η μη-γραμμική κίνηση ίσως να είναι μη-φραγμένη και έτσι ασταθής αν υφίσταται ένας εσωτερικός συντονισμός.

Αν μια εξωτερική αρμονική διέγερση συχνότητας Ω δρα επί ενός πολλών-βαθμών-ελευθερίας συστήματος, τότε επιπλέον όλων των πρωτευόντων και δευτερευόντων συντονισμών ($p\Omega \approx q\omega_m$, με τα

p και q να είναι ακέραιοι) ενός μονοβάθμιου συστήματος, ίσως να υπάρχουν άλλοι συνδυασμοί συντονισμών των συχνοτήτων, στη μορφή :

$$p\Omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots + a_N\omega_N$$

όπου το p και το a_n είναι θετικοί ή αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε :

$$|p| + \sum_{n=1}^N |a_n| = M$$

όπου M είναι η τάξη της μη-γραμμικότητας συν ένα και N είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας. Ο τύπος του συνδυαστικού συντονισμού, που ίσως να υπάρχει σε ένα σύστημα, εξαρτάται από την τάξη της μη-γραμμικότητάς του. Για ένα σύστημα που έχει τετραγωνικές μη-γραμμικότητες, στην πρώτη τάξη οι συντονισμοί συνδυασμών που ίσως να υπάρχουν εμπλέκουν δύο συχνότητες επιπλέον της Ω . Δηλαδή, $\Omega \approx \omega_m + \omega_k$ ή $\Omega \approx \omega_m - \omega_k$. Ο πρώτος εξ αυτών αποκαλείται συντονισμός αθροιστικού συνδυασμού (summed combination resonance) ή συνδυαστικός συντονισμός του προσθετικού τύπου (combination resonance of the additive type), ενώ ο δεύτερος αποκαλείται συντονισμός διαφορικού συνδυασμού (difference combination resonance) ή συνδυαστικός συνδυασμός του αφαιρετικού τύπου (combination resonance of the difference type). Αυτοί οι τύποι συνδυαστικών συντονισμών είχαν προβλεφθεί θεωρητικά από τον Malkin (1956) και ευρέθησαν πειραματικά από τον Yamamoto (1957, 1960). Για ένα σύστημα που έχει κυβικές μη-γραμμικότητες, στην πρώτη τάξη οι συντονισμοί συνδυασμού που ίσως να υπάρχουν εμπλέκουν είτε δύο ή τρεις από τις φυσικές συχνότητες επιπλέον της Ω , δηλαδή :

$$\{\Omega \approx \omega_p \pm \omega_m \pm \omega_k, \Omega \approx 2\omega_p \pm \omega_m, \Omega \approx \omega_p \pm 2\omega_m, 2\Omega \approx \omega_m \pm \omega_k\}$$

Προεισαγωγικά Σχόλια

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, εισάγουμε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, που τις συμβολίζουμε ως :

`Symbolize[T0]; Symbolize[T1]; Symbolize[T2];`

και σχηματίζουμε μια λίστα αυτών ως ακολούθως :

`timeScales = {T0, T1, T2};`

Σε όρους των χρονικών κλιμάκων T_n , οι χρονικές παράγωγοι γίνονται :

`dt[1][expr_] := Sum[ε^i D[expr, timeScales[[i+1]]], {i, 0, maxOrder}];`

`dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. ε^i_/:i>maxOrder -> 0;`

Στην πορεία της ανάλυσης, χρειαζόμαστε τα συζυγή μιγαδικά των A και Γ . Τα ορίζουμε χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα :

`conjugateRule = {A -> Ā, Ā -> A, Γ -> Γ̄, Γ̄ -> Γ, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};`

Για να αναπαραστήσουμε μερικές από τις εκφράσεις κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον ακόλουθο κανόνα κατάδειξης :

`displayRule =`

```
{Derivative[a_][u_{i,j}][_] :=
  SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{i,j}^{a1}[1]-1 &, {a}], u_{i,j}],
Derivative[a_][A_{i,j}][_] :=
  SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_{i,j}^{a1}[1] &, {a}], A_{i,j}], u_{i,j}[_] := u_{i,j},
A_{i,j}[_] := A_{i,j}];
```

6.1 Εξωτερικά Διεγερόμενα Γραμμικώς μη-Συζευγμένα Συστήματα

- Σύστημα Εξισώσεων

Θεωρούμε την απόκριση του ακόλουθου δύο-βαθμών-ελευθερίας συστήματος με τετραγωνικές και κυβικές γεωμετρικές μη-γραμμικότητες σε μία εξωτερική (προσθετική) διέγερση :

$$\begin{aligned} \text{eq61a} = \{ \\ u_1''[t] + \omega_1^2 u_1[t] + 2 \hat{\mu}_1 u_1'[t] + D[V[u_1[t], u_2[t]], u_1[t]] &== F_1 \text{Cos}[\Omega t + \tau_1], \\ u_2''[t] + \omega_2^2 u_2[t] + 2 \hat{\mu}_2 u_2'[t] + D[V[u_1[t], u_2[t]], u_2[t]] &== F_2 \text{Cos}[\Omega t + \tau_2] \} \\ \{ \omega_1^2 u_1[t] + 2 \hat{\mu}_1 u_1'[t] + u_1''[t] + V^{(1,0)}[u_1[t], u_2[t]] &== \text{Cos}[t\Omega + \tau_1] F_1, \\ \omega_2^2 u_2[t] + 2 \hat{\mu}_2 u_2'[t] + u_2''[t] + V^{(0,1)}[u_1[t], u_2[t]] &== \text{Cos}[t\Omega + \tau_2] F_2 \} \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση δυναμικού V περιέχει τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες. Η πιο γενική τέτοια συνάρτηση δυναμικού μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως :

$$\text{basicModes} = \{u_1[t], u_2[t]\};$$

$$\begin{aligned} \text{cubicTerms} = \text{Nest}[\text{Outer}[\text{Times}, \text{basicModes}, \#] \&, \text{basicModes}, 2] // \text{Flatten} // \text{Union} \\ \{u_1[t]^3, u_1[t]^2 u_2[t], u_1[t] u_2[t]^2, u_2[t]^3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quarticTerms} = \text{Outer}[\text{Times}, \text{basicModes}, \text{cubicTerms}] // \text{Flatten} // \text{Union} \\ \{u_1[t]^4, u_1[t]^3 u_2[t], u_1[t]^2 u_2[t]^2, u_1[t] u_2[t]^3, u_2[t]^4\} \end{aligned}$$

$$\text{potential} =$$

$$V \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\text{Evaluate}[\text{Sum}[\delta_i \text{cubicTerms}[[i]], \{i, \text{Length}[\text{cubicTerms}]\}] + \\ \text{Sum}[\alpha_i \text{quarticTerms}[[i]], \{i, \text{Length}[\text{quarticTerms}]\}] // \\ \text{Thread}[\text{basicModes} \rightarrow \{\#1, \#2\}]] \&) \end{aligned}$$

$$V \rightarrow$$

$$\{\pi_1^4 \alpha_1 + \pi_1^3 \pi_2 \alpha_2 + \pi_1^2 \pi_2^2 \alpha_3 + \pi_1 \pi_2^3 \alpha_4 + \pi_2^4 \alpha_5 + \pi_1^3 \delta_1 + \pi_1^2 \pi_2 \delta_2 + \pi_1 \pi_2^2 \delta_3 + \pi_2^3 \delta_4 \&\}$$

Οι προσεγγιστικές λύσεις ενός τέτοιου συστήματος μπορούν να ληφθούν μέσω της χρήσης ενός αριθμού τεχνικών, συμπεριλαμβανομένων της μεθόδου των κανονικών μορφών, της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων, της τεχνικής Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, και της μεθόδου της μεσοστάθμισης. Με αυτές τις μεθόδους, κανείς προσδιορίζει ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις διαμόρφωσης) που διέπουν τη χρονική εξέλιξη των ευρών και των φάσεων των μορφών (modes) που συμμετέχουν στην απόκριση. Αν αυτές οι εξισώσεις είναι χρονοεξαρτώμενες, κανείς συνήθως τις μεταμορφώνει σε ένα σύστημα από αυτόνομες εξισώσεις. Σε αυτό το Κεφάλαιο, περιγράφουμε πώς η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε ομοιόμορφες αναπτύξεις αυτού του συστήματος, συμπεριλαμβανομένων και των εξισώσεων διαμόρφωσης.

Οι δευτερεύοντες συντονισμοί των μη-γραμμικών συστημάτων περιλαμβάνουν υποαρμονικούς, υπεαρμονικούς, και συνδυαστικούς συντονισμούς. Ένας ή περισσότεροι από αυτούς τους συντονισμούς μπορεί να ενεργοποιηθεί με τη παρουσία ή απουσία των εσωτερικών συντονισμών. Όταν ένας συνδυαστικός συντονισμός ενεργοποιείται λόγω της παρουσίας ενός εσωτερικού συντονισμού, κλασματικές αρμονικές (fractional harmonics) μπορεί να διεγερθούν.

Για μια συνεπή ανάπτυξη, πρώτα μετατρέπουμε την eq61a σε ένα σύστημα από τέσσερις πρώτης-τάξης εξισώσεις. Γι' αυτό το σκοπό, εισάγουμε τις δύο καταστάσεις $v_1[t]$ και $v_2[t]$ που ορίζονται από :

$$vel = \{u_1'[t] \rightarrow v_1[t], u_2'[t] \rightarrow v_2[t]\};$$

Αντικαθιστώντας τους όρους της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, χρησιμοποιώντας τις vel και potential στην eq61a και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τη vel, μετατρέπουμε την eq61a στο ακόλουθο σύστημα από τέσσερις πρώτης-τάξης εξισώσεις :

eq61b = {vel /. Rule -> Equal, eq61a /. D[vel, t] /. vel /. potential} // Transpose // Flatten

$$\begin{aligned} \{u_1'[t] == v_1[t], \\ \omega_1^2 u_1[t] + 3 \delta_1 u_1[t]^2 + 4 \alpha_1 u_1[t]^3 + 2 \delta_2 u_1[t] u_2[t] + 3 \alpha_2 u_1[t]^2 u_2[t] + \delta_3 u_2[t]^2 + \\ 2 \alpha_3 u_1[t] u_2[t]^2 + \alpha_4 u_2[t]^3 + 2 \hat{\mu}_1 v_1[t] + v_1'[t] == \text{Cos}[t \Omega + \tau_1] F_1, u_2'[t] == v_2[t], \\ \delta_2 u_1[t]^2 + \alpha_2 u_1[t]^3 + \omega_2^2 u_2[t] + 2 \delta_3 u_1[t] u_2[t] + 2 \alpha_3 u_1[t]^2 u_2[t] + 3 \delta_4 u_2[t]^2 + \\ 3 \alpha_4 u_1[t] u_2[t]^2 + 4 \alpha_5 u_2[t]^3 + 2 \hat{\mu}_2 v_2[t] + v_2'[t] == \text{Cos}[t \Omega + \tau_2] F_2\} \end{aligned}$$

Αναζητούμε μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη της λύσης της eq61b στη μορφή :

$$\begin{aligned} solRule = \{u_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[e^{j u_{i,j}}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&), \\ v_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[e^{j v_{i,j}}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&)\}; \end{aligned}$$

και θέτουμε

maxOrder = 2;

Οι όροι απόσβεσης και δύναμης (εξαναγκασμού) στην eq61b πρέπει να κλιμακωθούν ώστε να εξισορροπήσουν την επιρροή της μη-γραμμικότητας. Η κλιμάκωση των εξαναγκασμών (forcing) εξαρτάται από τον τύπο του συντονισμού. Σε ότι ακολουθεί, εξετάζουμε διαφορετικές περιπτώσεις συντονισμών.

6.1.1 $\Omega \approx \omega_2$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ένα συνδυασμό ενός πρωτεύοντος συντονισμού της δεύτερης μορφής, έναν υποαρμονικό συντονισμό της τάξης 1:2 της πρώτης μορφής, και έναν δύο-προς-ένα (2:1) εσωτερικό συντονισμό. Με σκοπό να φέρουμε τα αποτελέσματα της απόσβεσης, του εξαναγκασμού, και της μη-γραμμικότητας στην ίδια τάξη, θέτουμε

$$scaling = \{\hat{\mu}_n \rightarrow \epsilon \mu_n, F_1 \rightarrow \epsilon F_1, F_2 \rightarrow \epsilon^2 F_2\};$$

Για να περιγράψουμε ποσοτικά την εγγύτητα των συντονισμών, εισάγουμε τις δύο αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_1 και σ_2 που ορίζονται από :

$$ResonanceCond = \{\omega_2 == 2 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

Κατόπιν, ορίζουμε τις ακόλουθες λίστες :

$$omgList = \{\omega_1, \omega_2\};$$

$$omgRule = \text{Solve}[ResonanceCond, \{\Omega, \#\} // Flatten][[1]] \& /@ omgList // Reverse$$

$$\left\{ \left\{ \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 2 \omega_1, \omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 2 \omega_1 \right\}, \left\{ \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_2 + \omega_2, \omega_1 \rightarrow \frac{1}{2} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2) \right\} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , εκφράζουμε τη χρονική παράγωγο ως :

$$\begin{aligned} multiScales = \{u_{i_}[t] \rightarrow u_{i_} @@ \text{timeScales}, v_{i_}[t] \rightarrow v_{i_} @@ \text{timeScales}, \\ \text{Derivative}[1][u_{i_}][t] \rightarrow dt[1][u_{i_} @@ \text{timeScales}], t \rightarrow T_0\}; \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις `scaling`, `multiScales` και `solRule` στην `eq61b`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

```
eq611a = (eq61b /. scaling /. multiScales /. solRule // TrigToExp // ExpandAll) /.  
  ε^n_/:n>3 -> 0;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ϵ , λαμβάνουμε :

```
eqEps = Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0]] & /@ eq611a //  
  Transpose;
```

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή στη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους στην άλλη, ορίζουμε :

```
eqOrder[i_] :=  
  (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. f_ε -> 0 /. u_κ,1 -> uκ,i) ==  
  (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. f_ε -> 0 /. u_κ,1 -> uκ,i) - (#[[1]] & /@ eqEps[[i]]) //  
  Thread
```

Χρησιμοποιώντας τις `eqOrder[i]` και `displayRule`, ξαναγράφουμε την `eqEps` κατ' έναν ακριβή τρόπο ως εξής :

```
eqOrder[1] /. displayRule  
eqOrder[2] /. displayRule  
eqOrder[3] /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 u_{1,1} - v_{1,1} &== 0, & D_0 v_{1,1} + \omega_1^2 u_{1,1} &== \frac{1}{2} E^{-i\tau_0 \mathcal{R} - i\tau_1} f_1 + \frac{1}{2} E^{i\tau_0 \mathcal{R} + i\tau_1} f_1, \\ D_0 u_{2,1} - v_{2,1} &== 0, & D_0 v_{2,1} + \omega_2^2 u_{2,1} &== 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 u_{1,2} - v_{1,2} &== -(D_1 u_{1,1}), \\ D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} &== -(D_1 v_{1,1}) - 3 \delta_1 u_{1,1}^2 - 2 \delta_2 u_{1,1} u_{2,1} - \delta_3 u_{2,1}^2 - 2 \mu_1 v_{1,1}, \\ D_0 u_{2,2} - v_{2,2} &== -(D_1 u_{2,1}), & D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} &== \\ &-(D_1 v_{2,1}) + \frac{1}{2} E^{-i\tau_0 \mathcal{R} - i\tau_2} f_2 + \frac{1}{2} E^{i\tau_0 \mathcal{R} + i\tau_2} f_2 - \delta_2 u_{1,1}^2 - 2 \delta_3 u_{1,1} u_{2,1} - 3 \delta_4 u_{2,1}^2 - 2 \mu_2 v_{2,1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 u_{1,3} - v_{1,3} &== -(D_1 u_{1,2}) - D_2 u_{1,1}, & D_0 v_{1,3} + \omega_1^2 u_{1,3} &== \\ &-(D_1 v_{1,2}) - D_2 v_{1,1} - 4 \alpha_1 u_{1,1}^3 - 6 \delta_1 u_{1,1} u_{1,2} - 3 \alpha_2 u_{1,1}^2 u_{2,1} - 2 \delta_2 u_{1,2} u_{2,1} - 2 \alpha_3 u_{1,1} u_{2,1}^2 - \\ &\alpha_4 u_{2,1}^3 - 2 \delta_2 u_{1,1} u_{2,2} - 2 \delta_3 u_{2,1} u_{2,2} - 2 \mu_1 v_{1,2}, & D_0 u_{2,3} - v_{2,3} &== -(D_1 u_{2,2}) - D_2 u_{2,1}, \\ D_0 v_{2,3} + \omega_2^2 u_{2,3} &== -(D_1 v_{2,2}) - D_2 v_{2,1} - \alpha_2 u_{1,1}^3 - 2 \delta_2 u_{1,1} u_{1,2} - 2 \alpha_3 u_{1,1}^2 u_{2,1} - \\ &2 \delta_3 u_{1,2} u_{2,1} - 3 \alpha_4 u_{1,1} u_{2,1}^2 - 4 \alpha_5 u_{2,1}^3 - 2 \delta_3 u_{1,1} u_{2,2} - 6 \delta_4 u_{2,1} u_{2,2} - 2 \mu_2 v_{2,2} \end{aligned} \right\}$$

• Πρώτης-Τάξης Πρόβλημα :Γραμμικό Σύστημα

Το πρώτης-τάξης πρόβλημα, `eqOrder[1]`, αποτελείται από δύο συστήματα από μη-συζευγμένες γραμμικές μη-ομογενείς διαφορικές εξισώσεις. Έτσι, η γενική λύση του κάθε συστήματος μπορεί να ληφθεί μέσω χρήσης της αρχής της υπέρθεσης ως το άθροισμα κάθε ειδικής λύσης και της λύσης των ομογενών εξισώσεων. Για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση των ομογενών συστημάτων, ξαναγράφουμε το ομογενές μέρος της `eqOrder[1]` ως εξής :

```
linearSys = #[[1]] & /@ eqOrder[1];  
linearSys /. displayRule
```

$$\left\{ D_0 u_{1,1} - v_{1,1}, D_0 v_{1,1} + \omega_1^2 u_{1,1}, D_0 u_{2,1} - v_{2,1}, D_0 v_{2,1} + \omega_2^2 u_{2,1} \right\}$$

Κατόπιν, αναζητούμε μια λύση της linearSys στη μορφή $u_{i,1} = P E^{I \omega_i T_0}$ και $v_{i,1} = Q E^{I \omega_i T_0}$ και λαμβάνουμε :

```
expr1 = linearSys /. {u_{i,1} -> (P E^{I \omega_i #1} &), v_{i,1} -> (Q E^{I \omega_i #1} &)} /. Exp[a_] -> 1 //
Partition[#, 2] &
```

```
{{{-Q + I P \omega_1, I Q \omega_1 + P \omega_1^2}, {-Q + I P \omega_2, I Q \omega_2 + P \omega_2^2}}}
```

Τα μητρώα συντελεστών της expr1 είναι :

```
coefMat = Outer[D, #, {P, Q}] & /@ expr1
```

```
{{{I \omega_1, -1}, {\omega_1^2, I \omega_1}}, {{I \omega_2, -1}, {\omega_2^2, I \omega_2}}}
```

και τα συζυγή τους ορίζονται από :

```
hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose
```

Έτσι, τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα της coefMat είναι :

```
rightVec = # / #[[1]] & /@ (NullSpace[#] [[1]] & /@ coefMat)
```

```
{{1, I \omega_1}, {1, I \omega_2}}
```

```
leftVec = NullSpace[hermitian[#]] [[1]] & /@ coefMat
```

```
{{-I \omega_1, 1}, {-I \omega_2, 1}}
```

των οποίων τα συζυγή μιγαδικά είναι

```
ccleftVec = leftVec /. conjugateRule
```

```
{{I \omega_1, 1}, {I \omega_2, 1}}
```

Για να προσδιορίσουμε ειδικές λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων eqOrder[1] χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Mathematica DSolve, πρώτα τις μετατρέπουμε σε ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ως εξής :

```
order1Eq = eqOrder[1] /. u_{i,1} -> (u_{i,1} [#1] &)
```

$$\begin{cases} -v_{1,1}[T_0] + u_{1,1}[T_0] == 0, \omega_1^2 u_{1,1}[T_0] + v_{1,1}[T_0] == \frac{1}{2} E^{-I T_0 \Omega - I \tau_1} f_1 + \frac{1}{2} E^{I T_0 \Omega + I \tau_1} f_1, \\ -v_{2,1}[T_0] + u_{2,1}[T_0] == 0, \omega_2^2 u_{2,1}[T_0] + v_{2,1}[T_0] == 0 \end{cases}$$

Τότε, οι ειδικές λύσεις της order1Eq είναι :

```
sol1p = DSolve[order1Eq, {u_{1,1}[T_0], v_{1,1}[T_0], u_{2,1}[T_0], v_{2,1}[T_0]}, T_0] [[1]] /.
C[_] -> 0 // Simplify
```

$$\begin{aligned} u_{1,1}[T_0] &\rightarrow -\frac{E^{-I (T_0 \Omega + \tau_1)} (1 + E^{2I (T_0 \Omega + \tau_1)}) f_1}{2 (\Omega^2 - \omega_1^2)}, \\ v_{1,1}[T_0] &\rightarrow -\frac{I E^{-I (T_0 \Omega + \tau_1)} (-1 + E^{2I (T_0 \Omega + \tau_1)}) \Omega f_1}{2 (\Omega^2 - \omega_1^2)}, u_{2,1}[T_0] \rightarrow 0, v_{2,1}[T_0] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμε μερικές από τις εκφράσεις, θέτουμε :

```
fRule = {f_{i} -> 2 \Lambda_i (\omega_i^2 - \Omega^2)};
```

και εκφράζουμε τα $u_{i,1}$ και $v_{i,1}$ σε μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

```

sol1u =
Table[
  ui,1 -> Function[{T0, T1, T2},
    Ai[T1, T2] Exp[I ωi T0] +  $\bar{A}_i$ [T1, T2] Exp[-I ωi T0] +
    (ui,1[T0] /. sol1p /. {Rule // Simplify // Expand} // Evaluate], {i, 2}]
{u1,1 -> Function[{T0, T1, T2},
  E-IT0Ω - Iτ1 Λ1 + EIT0Ω + Iτ1 Λ1 + EIT0ω1 A1[T1, T2] + E-IT0ω1  $\bar{A}_1$ [T1, T2]},
u2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, EIT0ω2 A2[T1, T2] + E-IT0ω2  $\bar{A}_2$ [T1, T2]}}

sol1v =
Table[vi,1 -> Function[{T0, T1, T2}, D[ui,1 @@ timeScales, T0] /. sol1u // Evaluate],
  {i, 2}]
{v1,1 -> Function[{T0, T1, T2},
  -I E-IT0Ω - Iτ1 Ω Λ1 + I EIT0Ω + Iτ1 Ω Λ1 + I EIT0ω1 ω1 A1[T1, T2] - I E-IT0ω1 ω1  $\bar{A}_1$ [T1, T2]},
v2,1 -> Function[{T0, T1, T2}, I EIT0ω2 ω2 A2[T1, T2] - I E-IT0ω2 ω2  $\bar{A}_2$ [T1, T2]}}

```

Κατόπιν, τις συνδυάζουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του *Mathematica* Join, ως εξής :

```
sol1 = Join[sol1u, sol1v];
```

- Δεύτερης-Τάξης Πρόβλημα

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση sol1 στο δεύτερης-τάξης πρόβλημα, eqOrder[2], προκύπτει:

```

order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;
order2Eq /. displayRule

```

$$\begin{aligned}
\{D_0 u_{1,2} - v_{1,2} == & -E^{IT_0 \omega_1} (D_1 A_1) - E^{-IT_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1), \\
D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} == & -3 E^{2IT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1 - 2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2 - E^{2IT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_3 - \\
& 6 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \Lambda_1 - 6 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \Lambda_1 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \Lambda_1 - \\
& 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \Lambda_1 - 6 \delta_1 \Lambda_1^2 - 3 E^{-2IT_0 \Omega - 2I\tau_1} \delta_1 \Lambda_1^2 - 3 E^{2IT_0 \Omega + 2I\tau_1} \delta_1 \Lambda_1^2 + \\
& 2 I E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1} \Omega \Lambda_1 \mu_1 - 2 I E^{IT_0 \Omega + I\tau_1} \Omega \Lambda_1 \mu_1 - I E^{IT_0 \omega_1} (D_1 A_1) \omega_1 + \\
& I E^{-IT_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 - 2 I E^{IT_0 \omega_1} A_1 \mu_1 \omega_1 - 6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - \\
& 6 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1 - 6 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1 + 2 I E^{-IT_0 \omega_1} \mu_1 \omega_1 \bar{A}_1 - \\
& 3 E^{-2IT_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2 - 2 E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2 - 2 A_2 \delta_3 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 - \\
& 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 - E^{-2IT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2, \\
D_0 u_{2,2} - v_{2,2} == & -E^{IT_0 \omega_2} (D_1 A_2) - E^{-IT_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2), \\
D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} == & \\
\frac{1}{2} E^{-IT_0 \Omega - I\tau_2} f_2 + \frac{1}{2} E^{IT_0 \Omega - I\tau_2} f_2 - & E^{2IT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2 - 2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_3 - \\
& 3 E^{2IT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_1 - 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_1 - \\
& 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \Lambda_1 - 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \Lambda_1 - 2 \delta_2 \Lambda_1^2 - E^{-2IT_0 \Omega - 2I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1^2 - \\
& E^{2IT_0 \Omega + 2I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1^2 - I E^{IT_0 \omega_2} (D_1 A_2) \omega_2 + I E^{-IT_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \omega_2 - 2 I E^{IT_0 \omega_2} A_2 \mu_2 \omega_2 - \\
& 2 A_1 \delta_2 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 - \\
& 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 - E^{-2IT_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2 - 2 E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_3 \bar{A}_2 - \\
& 6 A_2 \delta_4 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I\tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2 - 2 E^{IT_0 \Omega + I\tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2 + \\
& 2 I E^{-IT_0 \omega_2} \mu_2 \omega_2 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2 - 3 E^{-2IT_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2\}
\end{aligned}$$

Κάθε ειδική λύση της order2Eq περιέχει προσωρινούς όρους και όρους μικρού διαιρέτη, κάνοντας την ανάπτυξη μη-ομοιόμορφη. Για μια ομοιόμορφη ανάπτυξη, επιλέγουμε τα $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$ για να

απαλείψουμε αυτούς τους όρους. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα μετατρέπουμε τους όρους μικρού διαιρέτη σε προσωρινούς όρους χρησιμοποιώντας τον κανόνα :

`expRule1[i_] := Exp[a_] :=> Exp[Expand[a /. omgRule[[i]]] /. # $\in T_0 \rightarrow T_1$]`

Για να απαλείψουμε τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους (δηλ., για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας) από την `order2Eq`, συλλέγουμε τους όρους τους ανάλογους με $E^{i \omega_1 T_0}$ και με $E^{i \omega_2 T_0}$ και παίρνουμε :

`ST11 = Coefficient[order2Eq[[#, 2]] /. expRule1[1], Exp[I \omega_1 T_0]] & /@ {1, 2};`

`ST11 /. displayRule`

$$\left\{ -(D_1 A_1), -I (D_1 A_1) \omega_1 - 2 I A_1 \mu_1 \omega_1 - 2 E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - 6 E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1 \right\}$$

`ST12 = Coefficient[order2Eq[[#, 2]] /. expRule1[2], Exp[I \omega_2 T_0]] & /@ {3, 4};`

`ST12 /. displayRule`

$$\left\{ -(D_1 A_2), \frac{1}{2} E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} f_2 - E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 - I (D_1 A_2) \omega_2 - 2 I A_2 \mu_2 \omega_2 \right\}$$

Έτσι, οι συνθήκες επιλυσιμότητας (συνθήκες για τον περιορισμό των όρων που παράγουν προσωρινούς όρους), απαιτούν οι `ST11` και `ST12` να είναι ορθογωνικές σε κάθε λύση του αντίστοιχου προβλήματος του συζυγούς, δηλαδή, των συστατικών του `cleftVec`. Το αποτέλεσμα είναι :

`SCond1 = {cleftVec[[1]].ST11 == 0, cleftVec[[2]].ST12 == 0};`

`SCond1 /. displayRule`

$$\left\{ -2 I (D_1 A_1) \omega_1 - 2 I A_1 \mu_1 \omega_1 - 2 E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - 6 E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1 == 0, \frac{1}{2} E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} f_2 - E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 - 2 I (D_1 A_2) \omega_2 - 2 I A_2 \mu_2 \omega_2 == 0 \right\}$$

Λύνοντας την `SCond1` για $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$, προκύπτει :

`SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A1^{(1,0)} [T1, T2], A2^{(1,0)} [T1, T2]}][[1]] // ExpandAll;`

`SCond1Rule1 /. displayRule`

$$\left\{ D_1 A_1 \rightarrow -A_1 \mu_1 + \frac{I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_1}, D_1 A_2 \rightarrow -A_2 \mu_2 - \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} f_2}{4 \omega_2} - \frac{I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} \right\}$$

Με αυτές τις συνθήκες, οι `order2Eq` είναι επιλύσιμες. Εντούτοις, οι λύσεις τους δεν είναι μοναδικές. Για να τις καταστήσουμε μοναδικές, αξιώνουμε αυτές να είναι ορθογωνικές στις λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων των συζυγών· δηλαδή, απαιτούμε το $\{u_{1,2}, v_{1,2}\}$ να είναι ορθογωνικό στο `cleftVec[[1]]` και το $\{u_{2,2}, v_{2,2}\}$ να είναι ορθογωνικό στο `cleftVec[[2]]`.

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας για να απαλείψουμε τα $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$ από την `order2Eq`. Για να απλοποιήσουμε τις προκύπτουσες εξισώσεις χρησιμοποιώντας το *Mathematica*, αντικαθιστούμε την κλίμακα T_i στην `SCond1Rule1` με την ϵT_0 . Γι' αυτό το σκοπό, εκφράζουμε τις αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_i με όρους του ω_i και του Ω , ως εξής :

sigRule = Solve[ResonanceCond, {σ₁, σ₂}][[1]]

$$\left\{ \sigma_1 \rightarrow -\frac{2\omega_1 - \omega_2}{\epsilon}, \sigma_2 \rightarrow -\frac{-\Omega + \omega_2}{\epsilon} \right\}$$

και αντικαθιστούμε το T_l με το εT₀ χρησιμοποιώντας τον κανόνα :

expRule2 = Exp[a_] := Exp[a /. T₁ -> ε T₀ /. sigRule // Expand];

Χρησιμοποιώντας την expRule2, ξαναγράφουμε την SCondiRule1 ως :

SCondiRule2 = SCondiRule1 /. expRule2;

SCondiRule2 /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_1 A_1 \rightarrow -A_1 \mu_1 + \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - 2IT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_1}, \\ D_1 A_2 \rightarrow -A_2 \mu_2 - \frac{I E^{IT_0 \Omega + I \tau_2 - IT_0 \omega_2} f_2}{4 \omega_2} + \frac{I E^{2IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

της οποίας το μιγαδικό συζυγές είναι :

ccSCondiRule2 = SCondiRule2 /. conjugateRule;

Αντικαθιστώντας αυτή τη μορφή για τις συνθήκες επιλυσιμότητας στην order2Eq, προκύπτει :

order2Eqm = order2Eq /. SCondiRule2 /. ccSCondiRule2 // ExpandAll;

order2Eqm /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 u_{1,2} - v_{1,2} == & E^{IT_0 \omega_1} A_1 \mu_1 + \frac{3 I E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + E^{-IT_0 \omega_1} \mu_1 \bar{A}_1 - \\ & \frac{I E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{3 I E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{I E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1}, \\ D_0 v_{1,2} + \omega_1^2 u_{1,2} == & -3 E^{2IT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1 - 2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2 - E^{2IT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_3 - \\ & 3 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \bar{A}_1 - 6 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \bar{A}_1 - \\ & 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - 6 \delta_1 \bar{A}_1^2 - \\ & 3 E^{-2IT_0 \Omega - 2I \tau_1} \delta_1 \bar{A}_1^2 - 3 E^{2IT_0 \Omega + 2I \tau_1} \delta_1 \bar{A}_1^2 + 2 I E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1} \Omega A_1 \mu_1 - \\ & 2 I E^{IT_0 \Omega + I \tau_1} \Omega A_1 \mu_1 - I E^{IT_0 \omega_1} A_1 \mu_1 \omega_1 - 6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1 - E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1 - \\ & 6 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1 - 3 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1 + I E^{-IT_0 \omega_1} \mu_1 \omega_1 \bar{A}_1 - \\ & 3 E^{-2IT_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2 - E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2 - 2 A_2 \delta_2 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2 - \\ & 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 - E^{-2IT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} D_0 u_{2,2} - v_{2,2} == & E^{IT_0 \omega_2} A_2 \mu_2 - \frac{I E^{-IT_0 \Omega - I \tau_2} f_2}{4 \omega_2} + \\ & \frac{I E^{IT_0 \Omega + I \tau_2} f_2}{4 \omega_2} - \frac{I E^{2IT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} + \frac{I E^{-2IT_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2}{2 \omega_2} + E^{-IT_0 \omega_2} \mu_2 \bar{A}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 v_{2,2} + \omega_2^2 u_{2,2} == & \frac{1}{4} E^{-IT_0 \Omega - I \tau_2} f_2 + \frac{1}{4} E^{IT_0 \Omega + I \tau_2} f_2 - \frac{1}{2} E^{2IT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2 - \\ & 2 E^{IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_3 - 3 E^{2IT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 - IT_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \bar{A}_1 - \\ & 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 + IT_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_1 - 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_1 - \\ & 2 \delta_2 \bar{A}_1^2 - E^{-2IT_0 \Omega - 2I \tau_1} \delta_2 \bar{A}_1^2 - E^{2IT_0 \Omega + 2I \tau_1} \delta_2 \bar{A}_1^2 - I E^{IT_0 \omega_2} A_2 \mu_2 \omega_2 - \\ & 2 A_1 \delta_2 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 + IT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_1 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1 - \\ & 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - IT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1 - \frac{1}{2} E^{-2IT_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2 - 2 E^{IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_3 \bar{A}_2 - \\ & 6 A_2 \delta_4 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \Omega - I \tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2 - 2 E^{IT_0 \Omega + I \tau_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2 + \\ & I E^{-IT_0 \omega_2} \mu_2 \omega_2 \bar{A}_2 - 2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2 - 3 E^{-2IT_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2 \end{aligned}$$

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για να προσδιορίσουμε τις ειδικές λύσεις της `order2Eqm`. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναγνωρίζουμε τη μορφή των μη-ομογενών όρων. Γι' αυτό το σκοπό, θέτουμε :

```
basicH = Table[{A1[T1, T2] E^i ω1 T0, A1_bar[T1, T2] E^-i ω1 T0}, {i, 2}] // Flatten
{E^i T0 ω1 A1[T1, T2], E^-i T0 ω1 A1_bar[T1, T2], E^i T0 ω2 A2[T1, T2], E^-i T0 ω2 A2_bar[T1, T2]}
```

```
collectForm = Join[basicH, {Λ1 E^i ω T0 - i ν1, Λ1 E^-i ω T0 - i ν1}]
```

```
{E^i T0 ω1 A1[T1, T2], E^-i T0 ω1 A1_bar[T1, T2],
 E^i T0 ω2 A2[T1, T2], E^-i T0 ω2 A2_bar[T1, T2], E^i T0 ω + i ν1 Λ1, E^-i T0 ω - i ν1 Λ1}
```

Κατόπιν, η πιθανή μορφή των μη-ομογενών όρων στην `order2Eqm` είναι :

```
possibleTerms = Join[collectForm, {E^i ω T0 - i ν2, E^-i ω T0 - i ν2},
 Outer[Times, collectForm, collectForm] // Flatten // Union]
```

```
{E^i T0 ω1 A1[T1, T2], E^-i T0 ω1 A1_bar[T1, T2], E^i T0 ω2 A2[T1, T2],
 E^-i T0 ω2 A2_bar[T1, T2], E^i T0 ω + i ν1 Λ1, E^-i T0 ω - i ν1 Λ1, E^i T0 ω + i ν2, E^-i T0 ω - i ν2,
 Λ1^2, E^-2 i T0 ω - 2 i ν1 Λ1^2, E^2 i T0 ω + 2 i ν1 Λ1^2, E^-i T0 ω - i ν1 + i T0 ω1 Λ1 A1[T1, T2],
 E^i T0 ω + i ν1 - i T0 ω1 Λ1 A1[T1, T2], E^2 i T0 ω1 A1[T1, T2]^2, E^-i T0 ω - i ν1 + i T0 ω2 Λ1 A2[T1, T2],
 E^i T0 ω + i ν1 - i T0 ω2 Λ1 A2[T1, T2], E^i T0 ω1 + i T0 ω2 A1[T1, T2] A2[T1, T2],
 E^2 i T0 ω2 A2[T1, T2]^2, E^-i T0 ω - i ν1 - i T0 ω1 Λ1 A1_bar[T1, T2], E^i T0 ω + i ν1 - i T0 ω1 Λ1 A1_bar[T1, T2],
 A1[T1, T2] A1_bar[T1, T2], E^-i T0 ω1 + i T0 ω2 A2[T1, T2] A1_bar[T1, T2], E^-2 i T0 ω1 A1_bar[T1, T2]^2,
 E^-i T0 ω - i ν1 - i T0 ω2 Λ1 A2_bar[T1, T2], E^i T0 ω + i ν1 - i T0 ω2 Λ1 A2_bar[T1, T2],
 E^i T0 ω1 - i T0 ω2 A1[T1, T2] A2_bar[T1, T2], A2[T1, T2] A2_bar[T1, T2],
 E^-i T0 ω1 - i T0 ω2 A1_bar[T1, T2] A2_bar[T1, T2], E^-2 i T0 ω2 A2_bar[T1, T2]^2}
```

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, θεωρούμε ότι τα $u_{i,2}$ και $v_{i,2}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των πιθανών (δυνατών) όρων, αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στις κυρίαρχες εξισώσεις `order2Eqm`, εξισώνουμε τους συντελεστές καθενός από τους πιθανούς όρους και στις δύο πλευρές της κάθε εξίσωσης, και λαμβάνουμε ένα σύστημα από μη-ομογενείς αλγεβρικές εξισώσεις που διέπουν τους άγνωστους συντελεστές. Σχετικό με κάθε πιθανό όρο είναι ένα ζεύγος από δύο αλγεβρικές εξισώσεις. Οι λύσεις όλων των ζευγών, εκτός από αυτές που σχετίζονται με όρους συντονισμού, είναι μοναδικές. Οι λύσεις των ζευγών που αντιστοιχούν στους πιθανούς όρους συντονισμού καθίστανται μοναδικές με το να απαιτούμε αυτές να είναι ορθογωνικές στα συστατικά του `cleftVec`. Οι πιθανοί όροι συντονισμών είναι ανάλογοι με τα $E^{i ω1 T0}$, $E^{i ω2 T0}$, και με τα συζυγή μιγαδικά τους, δηλαδή :

```
ResonantTerms[i_] :=
 (# /. {a_ /; a != 0 -> 1} & /@
 (E^-i ω1 T0 possibleTerms /. expRule1[i] /. Exp[_ T0 + _.] -> 0))
 possibleTerms // Union // Rest
```

```
RT = Array[ResonantTerms, 2]
```

```
{{E^i T0 ω1 A1[T1, T2],
 E^i T0 ω + i ν1 - i T0 ω1 Λ1 A1_bar[T1, T2], E^-i T0 ω1 + i T0 ω2 A2[T1, T2] A1_bar[T1, T2]},
 {E^i T0 ω + i ν2, E^i T0 ω + i ν1 Λ1, E^2 i T0 ω1 A1[T1, T2]^2, E^i T0 ω2 A2[T1, T2]}}
```

Έτσι, οι συντελεστές του RT στους μη-ομογενείς όρους της `order2Eqm[[1]]` είναι :

r1Rule =

MapIndexed[r1, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[1, 2]], #1] &, RT[[1]]] /.

Exp[_ T0 + _.] -> 0

$$\left\{ r_{1,1} \rightarrow \mu_1, r_{1,2} \rightarrow -\frac{3 I \delta_1}{\omega_1}, r_{1,3} \rightarrow -\frac{I \delta_2}{\omega_1} \right\}$$

και οι συντελεστές της RT στους μη-ομογενείς όρους στην order2Eqm[[2]] είναι :

r2Rule =

MapIndexed[r2, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[2, 2]], #1] &, RT[[1]]] /.

Exp[_ T0 + _.] -> 0

$$\{r_{2,1} \rightarrow -I \mu_1 \omega_1, r_{2,2} \rightarrow -3 \delta_1, r_{2,3} \rightarrow -\delta_2\}$$

Έπεται από το ότι :

Table[ccleftVec[[1]].{r1,i, r2,i}, {i, 3}] /. r1Rule /. r2Rule

$$\{0, 0, 0\}$$

ότι τα τμήματα r1Rule και r2Rule είναι ορθογωνικά στη λύση του συζυγούς τελεστή, το πρώτο συστατικό του ccleftVec, ως άλλωστε όφειλαν.

Παρομοίως, οι συντελεστές της RT στους μη-ομογενείς όρους της order2Eqm[[3]] είναι :

r3Rule = MapIndexed[r3, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[3, 2]], #1] &, RT[[2]]]

RT[[2]]

$$\left\{ r_{3,1} \rightarrow \frac{I f_2}{4 \omega_2}, r_{3,2} \rightarrow 0, r_{3,3} \rightarrow -\frac{I \delta_2}{2 \omega_2}, r_{3,4} \rightarrow \mu_2 \right\}$$

και οι συντελεστές του RT στους μη-ομογενείς όρους στην order2Eqm[[4]] είναι :

r4Rule =

MapIndexed[r4, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[4, 2]], #1] &, RT[[2]]] /.

Exp[_ T0 + _.] -> 0

$$\left\{ r_{4,1} \rightarrow \frac{f_2}{4}, r_{4,2} \rightarrow 0, r_{4,3} \rightarrow -\frac{\delta_2}{2}, r_{4,4} \rightarrow -I \mu_2 \omega_2 \right\}$$

Εανά, έπεται από το ότι

Table[ccleftVec[[2]].{r3,i, r4,i}, {i, 4}] /. r3Rule /. r4Rule

$$\{0, 0, 0, 0\}$$

ότι το διάνυσμα {r3,i, r4,i} είναι ορθογωνικό στη λύση του συζυγούς τελεστή, το δεύτερο συστατικό του ccleftVec, ως όφειλε.

Το συμπλήρωμα των όρων συντονισμού RT στην possibleTerms δίνει τους όρους μη-συντονισμού, δηλαδή :

NRT = Complement[possibleTerms, Join[#, # /. conjugateRule]] & /@ RT

$$\{ \{ E^{-IT_0^2 - I\tau_2}, E^{IT_0^2 + I\tau_2}, E^{-IT_0^2 - I\tau_1} \Lambda_1, E^{IT_0^2 + I\tau_1} \Lambda_1, \Lambda_1^2, E^{-2IT_0^2 - 2I\tau_1} \Lambda_1^2, \\ E^{2IT_0^2 + 2I\tau_1} \Lambda_1^2, E^{IT_0^2 + I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_1[T_1, T_2], E^{2IT_0^2} A_1[T_1, T_2]^2, \\ E^{IT_0^2} A_2[T_1, T_2], E^{-IT_0^2 - I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_2[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_2[T_1, T_2], \\ E^{IT_0^2 + IT_0^2} A_1[T_1, T_2] A_2[T_1, T_2], E^{2IT_0^2} A_2[T_1, T_2]^2, \\ E^{-IT_0^2 - I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_1[T_1, T_2], A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2], E^{-2IT_0^2} \bar{A}_1[T_1, T_2]^2, \\ E^{-IT_0^2} \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{-IT_0^2 - I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_2[T_1, T_2], \\ A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{-IT_0^2 + I\tau_1 - IT_0^2} \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{-2IT_0^2} \bar{A}_2[T_1, T_2]^2 \}, \\ \{ \Lambda_1^2, E^{-2IT_0^2 - 2I\tau_1} \Lambda_1^2, E^{2IT_0^2 + 2I\tau_1} \Lambda_1^2, E^{IT_0^2} A_1[T_1, T_2], \\ E^{-IT_0^2 - I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_1[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_1[T_1, T_2], \\ E^{-IT_0^2 - I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_2[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 + IT_0^2} \Lambda_1 A_2[T_1, T_2], \\ E^{IT_0^2 + IT_0^2} A_1[T_1, T_2] A_2[T_1, T_2], E^{2IT_0^2} A_2[T_1, T_2]^2, E^{-IT_0^2} \bar{A}_1[T_1, T_2], \\ E^{-IT_0^2 - I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_1[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_1[T_1, T_2], \\ A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2], E^{-IT_0^2 + I\tau_1 + IT_0^2} A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2], \\ E^{-IT_0^2 - I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{IT_0^2 + I\tau_1 - IT_0^2} \Lambda_1 \bar{A}_2[T_1, T_2], \\ E^{IT_0^2 + IT_0^2} A_1[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2], A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2], \\ E^{-IT_0^2 + I\tau_1 - IT_0^2} \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2], E^{-2IT_0^2} \bar{A}_2[T_1, T_2]^2 \} \}$$

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των απροσδιοριστών συντελεστών, συσχετίζουμε με κάθε πιθανό όρο συντονισμού έναν άγνωστο συντελεστή, χρησιμοποιώντας τους κανόνες :

RTsymbolList1 = Table[$\Gamma_{1,j}$, {j, Length[RT[[1]]}]}

{ $\Gamma_{1,1}$, $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{1,3}$ }

RTsymbolList2 = Table[$\Gamma_{3,j}$, {j, Length[RT[[2]]}]}

{ $\Gamma_{3,1}$, $\Gamma_{3,2}$, $\Gamma_{3,3}$, $\Gamma_{3,4}$ }

και συσχετίζουμε με κάθε πιθανό όρο μη-συντονισμού δύο άγνωστους συντελεστές, χρησιμοποιώντας τους κανόνες :

NRTsymbolList1[i_] = Table[$\Lambda_{i,j}$, {j, Length[NRT[[1]]}]}

{ $\Lambda_{i,1}$, $\Lambda_{i,2}$, $\Lambda_{i,3}$, $\Lambda_{i,4}$, $\Lambda_{i,5}$, $\Lambda_{i,6}$, $\Lambda_{i,7}$, $\Lambda_{i,8}$, $\Lambda_{i,9}$, $\Lambda_{i,10}$, $\Lambda_{i,11}$, $\Lambda_{i,12}$,
 $\Lambda_{i,13}$, $\Lambda_{i,14}$, $\Lambda_{i,15}$, $\Lambda_{i,16}$, $\Lambda_{i,17}$, $\Lambda_{i,18}$, $\Lambda_{i,19}$, $\Lambda_{i,20}$, $\Lambda_{i,21}$, $\Lambda_{i,22}$, $\Lambda_{i,23}$ }

NRTsymbolList2[i_] = Table[$\Lambda_{i+2,j}$, {j, Length[NRT[[2]]}]}

{ $\Lambda_{2+i,1}$, $\Lambda_{2+i,2}$, $\Lambda_{2+i,3}$, $\Lambda_{2+i,4}$, $\Lambda_{2+i,5}$, $\Lambda_{2+i,6}$, $\Lambda_{2+i,7}$, $\Lambda_{2+i,8}$, $\Lambda_{2+i,9}$, $\Lambda_{2+i,10}$, $\Lambda_{2+i,11}$,
 $\Lambda_{2+i,12}$, $\Lambda_{2+i,13}$, $\Lambda_{2+i,14}$, $\Lambda_{2+i,15}$, $\Lambda_{2+i,16}$, $\Lambda_{2+i,17}$, $\Lambda_{2+i,18}$, $\Lambda_{2+i,19}$, $\Lambda_{2+i,20}$, $\Lambda_{2+i,21}$ }

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις συνθήκες ορθογωνικότητας, δηλαδή ότι το $\{u_{1,2}, v_{1,2}\}$ πρέπει να είναι ορθογωνικό στο cleftVec[[1]] και το $\{u_{2,2}, v_{2,2}\}$ πρέπει να είναι ορθογωνικό στο cleftVec[[2]], για τους όρους συντονισμού, RT, εκφράζουμε τα $u_{i,2}$ και $v_{i,2}$ στην ακόλουθη μορφή συνάρτησης

{ratio1, ratio2} = Table[-cleftVec[[i, 1]], {i, 2}]

{-I ω_1 , -I ω_2 }

```
sol2Form =
(u1,2 -> Function[{T0, T1, T2},
  RTSymbolList1.RT[[1]] + (RTSymbolList1.RT[[1]] /. conjugateRule) +
  NRTSymbolList1[1].NRT[[1]] // Evaluate],
v1,2 -> Function[{T0, T1, T2},
  ratio1 * RTSymbolList1.RT[[1]] +
  (ratio1 * RTSymbolList1.RT[[1]] /. conjugateRule) +
  NRTSymbolList1[2].NRT[[1]] // Evaluate],
u2,2 -> Function[{T0, T1, T2},
  RTSymbolList2.RT[[2]] + (RTSymbolList2.RT[[2]] /. conjugateRule) +
  NRTSymbolList2[1].NRT[[2]] // Evaluate],
v2,2 -> Function[{T0, T1, T2},
  ratio2 * RTSymbolList2.RT[[2]] +
  (ratio2 * RTSymbolList2.RT[[2]] /. conjugateRule) +
  NRTSymbolList2[2].NRT[[2]] // Evaluate]);
```

Αντικαθιστώντας τη sol2Form στην order2Eqm και συλλέγοντας τους συντελεστές του NRT, λαμβάνουμε δύο συστήματα από αλγεβρικές εξισώσεις, ως εξής :

eq611b =

```
(Coefficient[Subtract @@ # /. sol2Form, NRT[[1]]] /. Exp[_ T0 + _.] -> 0 & /@
order2Eqm[{{1, 2}}] // Flatten) == 0 // Thread
{-I Ω Λ1,1 - Λ2,1 == 0, I Ω Λ1,2 - Λ2,2 == 0, -I Ω Λ1,3 - Λ2,3 == 0, I Ω Λ1,4 - Λ2,4 == 0,
-Λ2,5 == 0, -2 I Ω Λ1,6 - Λ2,6 == 0, 2 I Ω Λ1,7 - Λ2,7 == 0, I Ω Λ1,8 + I ω1 Λ1,8 - Λ2,8 == 0,
2 I ω1 Λ1,9 - Λ2,9 == 0, I ω2 Λ1,10 - Λ2,10 == 0, -I Ω Λ1,11 + I ω2 Λ1,11 - Λ2,11 == 0,
I Ω Λ1,12 + I ω2 Λ1,12 - Λ2,12 == 0, I ω1 Λ1,13 + I ω2 Λ1,13 - Λ2,13 == 0,
2 I ω2 Λ1,14 - Λ2,14 == 0, -I Ω Λ1,15 - I ω1 Λ1,15 - Λ2,15 == 0, -Λ2,16 == 0,
-2 I ω1 Λ1,17 - Λ2,17 == 0, -I ω2 Λ1,18 - Λ2,18 == 0, -I Ω Λ1,19 - I ω2 Λ1,19 - Λ2,19 == 0,
I Ω Λ1,20 - I ω2 Λ1,20 - Λ2,20 == 0, -Λ2,21 == 0, -I ω1 Λ1,22 - I ω2 Λ1,22 - Λ2,22 == 0,
-2 I ω2 Λ1,23 - Λ2,23 == 0, ω1^2 Λ1,1 - I Ω Λ2,1 == 0, ω1^2 Λ1,2 + I Ω Λ2,2 == 0,
-2 I Ω μ1 + ω1^2 Λ1,3 - I Ω Λ2,3 == 0, 2 I Ω μ1 + ω1^2 Λ1,4 + I Ω Λ2,4 == 0,
6 δ1 + ω1^2 Λ1,5 == 0, 3 δ1 + ω1^2 Λ1,6 - 2 I Ω Λ2,6 == 0, 3 δ1 + ω1^2 Λ1,7 + 2 I Ω Λ2,7 == 0,
6 δ1 + ω1^2 Λ1,8 + I Ω Λ2,8 + I ω1 Λ2,8 == 0, 3 δ1 + ω1^2 Λ1,9 + 2 I ω1 Λ2,9 == 0,
ω1^2 Λ1,10 + I ω2 Λ2,10 == 0, 2 δ2 + ω1^2 Λ1,11 - I Ω Λ2,11 + I ω2 Λ2,11 == 0,
2 δ2 - ω1^2 Λ1,12 + I Ω Λ2,12 + I ω2 Λ2,12 == 0, 2 δ2 + ω1^2 Λ1,13 + I ω1 Λ2,13 + I ω2 Λ2,13 == 0,
δ3 + ω1^2 Λ1,14 + 2 I ω2 Λ2,14 == 0, 6 δ1 + ω1^2 Λ1,15 - I Ω Λ2,15 - I ω1 Λ2,15 == 0,
6 δ1 + ω1^2 Λ1,16 == 0, 3 δ1 + ω1^2 Λ1,17 - 2 I ω1 Λ2,17 == 0,
ω1^2 Λ1,18 - I ω2 Λ2,18 == 0, 2 δ2 + ω1^2 Λ1,19 - I Ω Λ2,19 - I ω2 Λ2,19 == 0,
2 δ2 + ω1^2 Λ1,20 + I Ω Λ2,20 - I ω2 Λ2,20 == 0, 2 δ3 + ω1^2 Λ1,21 == 0,
2 δ2 + ω1^2 Λ1,22 - I ω1 Λ2,22 - I ω2 Λ2,22 == 0, δ3 + ω1^2 Λ1,23 - 2 I ω2 Λ2,23 == 0}
```

eq611c =

```
(Coefficient[Subtract @@ # /. sol2Form, NRT[[2]]] /. Exp[_ T0 + _.] -> 0 & /@
order2Eqm[{{3, 4}}] // Flatten) == 0 // Thread
```

$$\begin{aligned} & \{-\Lambda_{4,1} == 0, -2 I \Omega \Lambda_{3,2} - \Lambda_{4,2} == 0, 2 I \Omega \Lambda_{3,3} - \Lambda_{4,3} == 0, I \omega_1 \Lambda_{3,4} - \Lambda_{4,4} == 0, \\ & -I \Omega \Lambda_{3,5} + I \omega_1 \Lambda_{3,5} - \Lambda_{4,5} == 0, I \Omega \Lambda_{3,6} + I \omega_1 \Lambda_{3,6} - \Lambda_{4,6} == 0, \\ & -I \Omega \Lambda_{3,7} + I \omega_2 \Lambda_{3,7} - \Lambda_{4,7} == 0, I \Omega \Lambda_{3,8} + I \omega_2 \Lambda_{3,8} - \Lambda_{4,8} == 0, \\ & I \omega_1 \Lambda_{3,9} + I \omega_2 \Lambda_{3,9} - \Lambda_{4,9} == 0, 2 I \omega_2 \Lambda_{3,10} - \Lambda_{4,10} == 0, -I \omega_1 \Lambda_{3,11} - \Lambda_{4,11} == 0, \\ & -I \Omega \Lambda_{3,12} - I \omega_1 \Lambda_{3,12} - \Lambda_{4,12} == 0, I \Omega \Lambda_{3,13} - I \omega_1 \Lambda_{3,13} - \Lambda_{4,13} == 0, -\Lambda_{4,14} == 0, \\ & -I \omega_1 \Lambda_{3,15} + I \omega_2 \Lambda_{3,15} - \Lambda_{4,15} == 0, -I \Omega \Lambda_{3,16} - I \omega_2 \Lambda_{3,16} - \Lambda_{4,16} == 0, \\ & I \Omega \Lambda_{3,17} - I \omega_2 \Lambda_{3,17} - \Lambda_{4,17} == 0, I \omega_1 \Lambda_{3,18} - I \omega_2 \Lambda_{3,18} - \Lambda_{4,18} == 0, \\ & -\Lambda_{4,19} == 0, -I \omega_1 \Lambda_{3,20} - I \omega_2 \Lambda_{3,20} - \Lambda_{4,20} == 0, -2 I \omega_2 \Lambda_{3,21} - \Lambda_{4,21} == 0, \\ & 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,1} == 0, \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,2} - 2 I \Omega \Lambda_{4,2} == 0, \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,3} + 2 I \Omega \Lambda_{4,3} == 0, \\ & \omega_2^2 \Lambda_{3,4} + I \omega_1 \Lambda_{4,4} == 0, 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,5} - I \Omega \Lambda_{4,5} + I \omega_1 \Lambda_{4,5} == 0, \\ & 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,6} + I \Omega \Lambda_{4,6} + I \omega_1 \Lambda_{4,6} == 0, 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,7} - I \Omega \Lambda_{4,7} + I \omega_2 \Lambda_{4,7} == 0, \\ & 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,8} + I \Omega \Lambda_{4,8} + I \omega_2 \Lambda_{4,8} == 0, 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,9} + I \omega_1 \Lambda_{4,9} + I \omega_2 \Lambda_{4,9} == 0, \\ & 3 \delta_4 + \omega_2^2 \Lambda_{3,10} + 2 I \omega_2 \Lambda_{4,10} == 0, \omega_2^2 \Lambda_{3,11} - I \omega_1 \Lambda_{4,11} == 0, \\ & 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,12} - I \Omega \Lambda_{4,12} - I \omega_1 \Lambda_{4,12} == 0, 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,13} + I \Omega \Lambda_{4,13} - I \omega_1 \Lambda_{4,13} == 0, \\ & 2 \delta_2 + \omega_2^2 \Lambda_{3,14} == 0, 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,15} - I \omega_1 \Lambda_{4,15} + I \omega_2 \Lambda_{4,15} == 0, \\ & 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,16} - I \Omega \Lambda_{4,16} - I \omega_2 \Lambda_{4,16} == 0, 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,17} + I \Omega \Lambda_{4,17} - I \omega_2 \Lambda_{4,17} == 0, \\ & 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,18} + I \omega_1 \Lambda_{4,18} - I \omega_2 \Lambda_{4,18} == 0, 6 \delta_4 + \omega_2^2 \Lambda_{3,19} == 0, \\ & 2 \delta_3 + \omega_2^2 \Lambda_{3,20} - I \omega_1 \Lambda_{4,20} - I \omega_2 \Lambda_{4,20} == 0, 3 \delta_4 + \omega_2^2 \Lambda_{3,21} - 2 I \omega_2 \Lambda_{4,21} == 0 \} \end{aligned}$$

Επιλύοντας την eq611b για την NRTsymbolList1, λαμβάνουμε :

coef11 = Solve[eq611b, Array[NRTsymbolList1, 2] // Flatten][[1]]

$$\begin{aligned} & \left\{ \Lambda_{2,5} \rightarrow 0, \Lambda_{2,16} \rightarrow 0, \Lambda_{2,21} \rightarrow 0, \Lambda_{1,5} \rightarrow -\frac{6 \delta_1}{\omega_1^2}, \Lambda_{1,16} \rightarrow -\frac{6 \delta_1}{\omega_1^2}, \Lambda_{1,21} \rightarrow -\frac{2 \delta_3}{\omega_1^2}, \Lambda_{2,1} \rightarrow 0, \Lambda_{2,2} \rightarrow 0, \right. \\ & \Lambda_{2,3} \rightarrow -\frac{2 \Omega^2 \mu_1}{\Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{2,4} \rightarrow -\frac{2 \Omega^2 \mu_1}{\Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{2,6} \rightarrow -\frac{6 I \Omega \delta_1}{4 \Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{2,7} \rightarrow \frac{6 I \Omega \delta_1}{4 \Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{2,9} \rightarrow \frac{2 I \delta_1}{\omega_1}, \\ & \Lambda_{2,10} \rightarrow 0, \Lambda_{2,14} \rightarrow -\frac{2 I \delta_3 \omega_2}{\omega_1^2 - 4 \omega_2^2}, \Lambda_{2,17} \rightarrow -\frac{2 I \delta_1}{\omega_1}, \Lambda_{2,18} \rightarrow 0, \Lambda_{2,23} \rightarrow \frac{2 I \delta_2 \omega_2}{\omega_1^2 - 4 \omega_2^2}, \Lambda_{1,1} \rightarrow 0, \\ & \Lambda_{1,2} \rightarrow 0, \Lambda_{1,3} \rightarrow -\frac{2 I \Omega \mu_1}{\Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{1,4} \rightarrow \frac{2 I \Omega \mu_1}{\Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{1,6} \rightarrow \frac{3 \delta_1}{4 \Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{1,7} \rightarrow \frac{3 \delta_1}{4 \Omega^2 - \omega_1^2}, \Lambda_{1,9} \rightarrow \frac{\delta_1}{\omega_1^2}, \\ & \Lambda_{1,10} \rightarrow 0, \Lambda_{1,14} \rightarrow -\frac{\delta_3}{\omega_1^2 - 4 \omega_2^2}, \Lambda_{1,17} \rightarrow \frac{\delta_1}{\omega_1^2}, \Lambda_{1,18} \rightarrow 0, \Lambda_{1,23} \rightarrow -\frac{\delta_3}{\omega_1^2 - 4 \omega_2^2}, \Lambda_{2,8} \rightarrow \frac{6 I \delta_1 (\Omega + \omega_1)}{\Omega (\Omega + 2 \omega_1)}, \\ & \Lambda_{2,11} \rightarrow -\frac{2 I \delta_2 (\Omega - \omega_2)}{\Omega^2 - \omega_1^2 - 2 \Omega \omega_2 + \omega_2^2}, \Lambda_{2,12} \rightarrow \frac{2 I \delta_2 (\Omega + \omega_2)}{\Omega^2 - \omega_1^2 + 2 \Omega \omega_2 + \omega_2^2}, \Lambda_{2,13} \rightarrow \frac{2 I \delta_2 (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \\ & \Lambda_{2,15} \rightarrow -\frac{6 I \delta_1 (\Omega + \omega_1)}{\Omega (\Omega + 2 \omega_1)}, \Lambda_{2,19} \rightarrow -\frac{2 I \delta_2 (\Omega + \omega_2)}{\Omega^2 - \omega_1^2 + 2 \Omega \omega_2 + \omega_2^2}, \Lambda_{2,20} \rightarrow \frac{2 I \delta_2 (\Omega - \omega_2)}{\Omega^2 - \omega_1^2 - 2 \Omega \omega_2 + \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{2,22} \rightarrow -\frac{2 I \delta_2 (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,8} \rightarrow \frac{6 \delta_1}{\Omega (\Omega + 2 \omega_1)}, \Lambda_{1,11} \rightarrow -\frac{2 \delta_2}{-\Omega^2 + \omega_1^2 + 2 \Omega \omega_2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{1,12} \rightarrow -\frac{2 \delta_2}{-\Omega^2 + \omega_1^2 - 2 \Omega \omega_2 - \omega_2^2}, \Lambda_{1,13} \rightarrow \frac{2 \delta_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)}, \Lambda_{1,15} \rightarrow \frac{6 \delta_1}{\Omega (\Omega + 2 \omega_1)}, \\ & \Lambda_{1,19} \rightarrow -\frac{2 \delta_2}{-\Omega^2 + \omega_1^2 - 2 \Omega \omega_2 - \omega_2^2}, \Lambda_{1,20} \rightarrow -\frac{2 \delta_2}{-\Omega^2 + \omega_1^2 + 2 \Omega \omega_2 - \omega_2^2}, \Lambda_{1,22} \rightarrow \frac{2 \delta_2}{\omega_2 (2 \omega_1 + \omega_2)} \} \end{aligned}$$

Επιλύοντας την eq611c για την NRTsymbolList2, λαμβάνουμε :

coef12 = Solve[eq611c, Array[NRTsymbolList2, 2] // Flatten][[1]]

$$\left. \begin{aligned} & \{\Lambda_{4,1} \rightarrow 0, \Lambda_{4,14} \rightarrow 0, \Lambda_{4,19} \rightarrow 0, \Lambda_{3,1} \rightarrow -\frac{2\delta_2}{\omega_2^2}, \Lambda_{3,14} \rightarrow -\frac{2\delta_2}{\omega_2^2}, \Lambda_{3,19} \rightarrow -\frac{6\delta_4}{\omega_2^2}, \Lambda_{4,2} \rightarrow -\frac{2I\Omega\delta_2}{4\Omega^2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{4,3} \rightarrow \frac{2I\Omega\delta_2}{4\Omega^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{4,4} \rightarrow 0, \Lambda_{4,10} \rightarrow \frac{2I\delta_4}{\omega_2}, \Lambda_{4,11} \rightarrow 0, \Lambda_{4,21} \rightarrow -\frac{2I\delta_4}{\omega_2}, \Lambda_{3,2} \rightarrow \frac{\delta_2}{4\Omega^2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{3,3} \rightarrow \frac{\delta_2}{4\Omega^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{3,4} \rightarrow 0, \Lambda_{3,10} \rightarrow \frac{\delta_4}{\omega_2^2}, \Lambda_{3,11} \rightarrow 0, \Lambda_{3,21} \rightarrow \frac{\delta_4}{\omega_2^2}, \Lambda_{4,5} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\Omega - \omega_1)}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{4,6} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\Omega + \omega_1)}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{4,7} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\Omega - \omega_2)}{\Omega(\Omega - 2\omega_2)}, \Lambda_{4,8} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\Omega + \omega_2)}{\Omega(\Omega + 2\omega_2)}, \\ & \Lambda_{4,9} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)}, \Lambda_{4,12} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\Omega + \omega_1)}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{4,13} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\Omega - \omega_1)}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{4,15} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_2)}, \Lambda_{4,16} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\Omega + \omega_2)}{\Omega(\Omega + 2\omega_2)}, \Lambda_{4,17} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\Omega - \omega_2)}{\Omega(\Omega - 2\omega_2)}, \\ & \Lambda_{4,18} \rightarrow \frac{2I\delta_2(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_2)}, \Lambda_{4,20} \rightarrow -\frac{2I\delta_2(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)}, \Lambda_{3,5} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ & \Lambda_{3,6} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{3,7} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega(\Omega - 2\omega_2)}, \Lambda_{3,8} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega(\Omega + 2\omega_2)}, \Lambda_{3,9} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)}, \\ & \Lambda_{3,12} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega^2 + 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{3,13} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega^2 - 2\Omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2}, \Lambda_{3,15} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_2)}, \\ & \Lambda_{3,16} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega(\Omega + 2\omega_2)}, \Lambda_{3,17} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\Omega(\Omega - 2\omega_2)}, \Lambda_{3,18} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_2)}, \Lambda_{3,20} \rightarrow \frac{2\delta_2}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} \} \end{aligned} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τη sol2Form στην order2Eqm και συλλέγοντας τους συντελεστές του RT, λαμβάνουμε δύο συστήματα από αλγεβρικές εξισώσεις, ως εξής :

$$\text{eq1} = \text{MapIndexed}[\text{Coefficient}[\text{order2Eqm}[[1, 1]] /. \text{sol2Form}, \#1] == r_{1, \#2[[1]]} \ \&, \text{RT}[[1]]] /. \text{Exp}[_T_0 + _.] \rightarrow 0$$

$$\{2I\omega_1\Gamma_{1,1} == r_{1,1}, I\Omega\Gamma_{1,2} == r_{1,2}, I\omega_2\Gamma_{1,3} == r_{1,3}\}$$

$$\text{eq2} = \text{MapIndexed}[\text{Coefficient}[\text{order2Eqm}[[3, 1]] /. \text{sol2Form}, \#1] == r_{3, \#2[[1]]} \ \&, \text{RT}[[2]]] /. \text{Exp}[_T_0 + _.] \rightarrow 0$$

$$\{I\Omega\Gamma_{3,1} + I\omega_2\Gamma_{3,1} == r_{3,1}, I\Omega\Gamma_{3,2} - I\omega_2\Gamma_{3,2} == r_{3,2}, \\ 2I\omega_1\Gamma_{3,3} + I\omega_2\Gamma_{3,3} == r_{3,3}, 2I\omega_2\Gamma_{3,4} == r_{3,4}\}$$

Επιλύοντας τις eq1 και eq2 για τις RTsymbolList1 και RTsymbolList2, λαμβάνουμε :

$$\text{coef21} = \text{Solve}[\text{eq1}, \text{RTsymbolList1}][[1]] /. \text{r1Rule}$$

$$\left\{ \Gamma_{1,1} \rightarrow -\frac{I\mu_1}{2\omega_1}, \Gamma_{1,2} \rightarrow -\frac{3\delta_1}{\Omega\omega_1}, \Gamma_{1,3} \rightarrow -\frac{\delta_2}{\omega_1\omega_2} \right\}$$

$$\text{coef22} = \text{Solve}[\text{eq2}, \text{RTsymbolList2}][[1]] /. \text{r3Rule}$$

$$\left\{ \Gamma_{3,4} \rightarrow -\frac{I\mu_2}{2\omega_2}, \Gamma_{3,1} \rightarrow \frac{\varepsilon_2}{4\omega_2(\Omega + \omega_2)}, \Gamma_{3,2} \rightarrow 0, \Gamma_{3,3} \rightarrow -\frac{\delta_2}{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)} \right\}$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους συντελεστές χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Join, προκύπτει :

$$\text{coeffs} = \text{Join}[\text{coef11}, \text{coef12}, \text{coef21}, \text{coef22}, \text{coef21} /. \text{conjugateRule}, \\ \text{coef22} /. \text{conjugateRule}] /. (\text{omgRule}[[1]] /. \varepsilon \rightarrow 0);$$

Κατόπιν, εκφράζουμε τη λύση των δεύτερης-τάξης εξισώσεων σε καθαρής μορφής συνάρτηση :

sol2 =

```
sol2Form /. Function[{T0, T1, T2}, a_] :=  
Function[{T0, T1, T2} // Evaluate, a /. coeffs // Expand // Evaluate];  
sol2 /. displayRule
```

{u1,2 →

$$\text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{-6 \delta_1 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2i T_0} e^{-2i T_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{2i T_0} e^{-2i T_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{4 i E^{-i T_0} e^{-i T_1} \Lambda_1 \mu_1}{3 \omega_1} - \frac{4 i E^{i T_0} e^{i T_1} \Lambda_1 \mu_1}{3 \omega_1} - \frac{3 E^{-i T_0} e^{-i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} - \frac{3 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{i E^{i T_0} e^{i T_1} \mu_1 \Lambda_1}{2 \omega_1} - \frac{E^{-i T_0} e^{i T_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} + \frac{E^{2i T_0} \delta_2 \Lambda_2^2}{15 \omega_1^2} - \frac{3 E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{4 \omega_1^2} - \frac{3 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1^2} + \frac{i E^{-i T_0} e^{i T_1} \mu_1 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1} - \frac{6 \delta_1 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{-2i T_0} \delta_1 \bar{\Lambda}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{15 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{\omega_1^2} - \frac{E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2}{\omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2}{4 \omega_1^2} + \frac{E^{-2i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_2^2}{15 \omega_1^2}],$$

$$v_{1,2} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), -\frac{3}{3} E^{-i T_0} e^{-i T_1} \Lambda_1 \mu_1 - \frac{3}{3} E^{i T_0} e^{i T_1} \Lambda_1 \mu_1 - \frac{4 i E^{-2i T_0} e^{-2i T_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1} + \frac{4 i E^{2i T_0} e^{2i T_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1} - \frac{1}{2} E^{i T_0} e^{i T_1} \mu_1 \Lambda_1 - \frac{3 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \Lambda_1}{2 \omega_1} - \frac{9 i E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \Lambda_1}{4 \omega_1} + \frac{2 i E^{2i T_0} e^{i T_0} \delta_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{8 i E^{i T_0} e^{i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1} - \frac{3 i E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1} - \frac{4 i E^{2i T_0} e^{i T_0} \delta_2 \Lambda_2^2}{15 \omega_1} - \frac{1}{2} E^{-i T_0} e^{i T_1} \mu_1 \bar{\Lambda}_1 - \frac{9 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{4 \omega_1} + \frac{3 i E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_1 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1} - \frac{i E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1} - \frac{2 i E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_1 \bar{\Lambda}_1^2}{\omega_1} - \frac{8 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{15 \omega_1} - \frac{i E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{2 \omega_1} - \frac{3 i E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2}{4 \omega_1} - \frac{4 i E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_2^2}{15 \omega_1}],$$

$$u_{2,2} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_2} f_2}{32 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0} e^{-i T_2} f_2}{32 \omega_1^2} - \frac{\delta_2 \Lambda_1^2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{-2i T_0} e^{-2i T_1} \delta_2 \Lambda_1^2}{12 \omega_1^2} - \frac{E^{2i T_0} e^{2i T_1} \delta_2 \Lambda_1^2}{12 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_1}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{2i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{6 \omega_1^2} - \frac{i E^{i T_0} e^{i T_0} \mu_2 \Lambda_2}{4 \omega_1} - \frac{2 E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{2i T_0} e^{i T_0} \delta_4 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_1^2}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{6 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{i E^{-i T_0} e^{i T_0} \mu_2 \bar{\Lambda}_2}{4 \omega_1} - \frac{2 E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_4 \bar{\Lambda}_2^2}{4 \omega_1^2}],$$

$$v_{2,2} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), -\frac{i E^{-2i T_0} e^{-2i T_1} \delta_2 \Lambda_1^2}{3 \omega_1} - \frac{i E^{2i T_0} e^{2i T_1} \delta_2 \Lambda_1^2}{3 \omega_1} - \frac{i E^{-i T_0} e^{-i T_2} f_2 \omega_2}{32 \omega_1^2} + \frac{2 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_1}{3 \omega_1} + \frac{6 i E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_1}{5 \omega_1} - \frac{i E^{2i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \omega_2 \Lambda_1^2}{16 \omega_1^2} + \frac{2 i E^{i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{3 \omega_1} - \frac{E^{i T_0} e^{i T_0} \mu_2 \omega_2 \Lambda_2}{4 \omega_1} + \frac{6 i E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{5 \omega_1} - \frac{i E^{2i T_0} e^{i T_0} \delta_4 \Lambda_2^2}{\omega_1} - \frac{6 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{5 \omega_1} - \frac{2 i E^{i T_0} e^{i T_1 + i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1}{3 \omega_1} - \frac{2 i E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_1}{3 \omega_1} - \frac{i E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \omega_2 \bar{\Lambda}_1^2}{16 \omega_1^2} - \frac{2 i E^{-i T_0} e^{-i T_1 - i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{3 \omega_1} - \frac{E^{-i T_0} e^{-i T_0} \mu_2 \omega_2 \bar{\Lambda}_2}{4 \omega_1} + \frac{2 i E^{i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_2}{3 \omega_1} - \frac{6 i E^{-i T_0} e^{-i T_0} \delta_2 \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2}{5 \omega_1} - \frac{i E^{-2i T_0} e^{-i T_0} \delta_4 \bar{\Lambda}_2^2}{\omega_1}],$$

• Τρίτης-Τάξης Πρόβλημα

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις στο τρίτης-τάξης πρόβλημα, eqOrder[[3]], προκύπτει :

order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;

Αντικαθιστώντας την exprRule1 στις δεξιές πλευρές της order3Eq, και συλλέγοντας τους όρους που θα μπορούσαν να παράγουν προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους στα $E^{I \omega_1 T_0}$ και $E^{I \omega_2 T_0}$, έχουμε :

ST21 = Coefficient[order3Eq[[#, 2]] /. exprRule1[1], Exp[I ω₁ T₀]] & /@ {1, 2};

ST21 /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} & - (D_2 A_1) + \frac{E^{I T_1 \sigma_1} (D_1 \bar{A}_1) A_2 \delta_2}{2 \omega_1^2} + \\ & \frac{3 E^{I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} (D_1 \bar{A}_1) \delta_1 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} + \frac{I (D_1 A_1) \mu_1}{2 \omega_1} + \frac{E^{I T_1 \sigma_1} (D_1 A_2) \delta_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2}, \\ & - 6 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \alpha_2 \Lambda_1 - 24 A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2 + \frac{1}{2} (D_1 A_1) \mu_1 + A_1 \mu_1^2 + \frac{27 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} + \\ & \frac{23 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_1^2} + \frac{81 A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{2 \omega_1^2} + \frac{23 A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_1^2} - \frac{I E^{I T_1 \sigma_1} (D_1 \bar{A}_1) A_2 \delta_2}{2 \omega_1} - \\ & \frac{3 I E^{I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} (D_1 \bar{A}_1) \delta_1 \Lambda_1}{2 \omega_1} - I (D_2 A_1) \omega_1 - 12 A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1 + \frac{30 A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\ & \frac{E^{I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 - I \tau_2} \delta_2 \delta_2 \bar{A}_1}{16 \omega_1^2} + \frac{9 A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{8 \omega_1^2} - \frac{I E^{I T_1 \sigma_1} (D_1 A_2) \delta_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1} - \frac{2 I E^{I T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \\ & \frac{14 I E^{I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} \delta_1 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I E^{I T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1} - 4 A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2 - \\ & 6 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 + \frac{A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{12 A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{8 A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} + \\ & \left. \frac{3 A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} + \frac{27 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{23 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

ST22 = Coefficient[order3Eq[[#, 2]] /. exprRule1[2], Exp[I ω₂ T₀]] & /@ {3, 4};

ST22 /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} & - (D_2 A_2) + \frac{E^{-I T_1 \sigma_1} (D_1 \bar{A}_1) A_1 \delta_2}{8 \omega_1^2} + \frac{I (D_1 A_2) \mu_2}{4 \omega_1}, \\ & - 3 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1 - 4 A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2 - 3 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} \alpha_2 \Lambda_1^3 + \frac{58 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_1^2} - \\ & \frac{5 E^{-I T_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} - \frac{56 A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_1^2} - \frac{12 A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{3 \omega_1^2} - \frac{3 A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} - \\ & \frac{58 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^3}{5 \omega_1^2} + \frac{5 E^{I T_1 \sigma_2 + I \tau_1} \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^3}{6 \omega_1^2} + \frac{I E^{-I T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_1}{\omega_1} - I (D_2 A_2) \omega_2 - \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{I E^{-IT_1 \sigma_1} (D_1 A_1) A_1 \delta_2 \omega_2}{8 \omega_f^2} + \frac{I E^{IT_1 \sigma_2 + IT_2} f_2 \mu_2 \omega_2}{16 \omega_f^2} - \frac{I E^{-IT_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_2 \omega_2}{8 \omega_f^2} + \frac{(D_1 A_2) \mu_2 \omega_2}{4 \omega_1} + \\ & \frac{A_2 \mu_2^2 \omega_2}{2 \omega_1} - 4 A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1 - 6 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 + \frac{A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{2 \omega_f^2} + \frac{12 A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_f^2} + \\ & \frac{8 A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_f^2} + \frac{3 A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_f^2} + \frac{27 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{2 \omega_f^2} + \frac{23 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_1}{15 \omega_f^2} - \\ & 12 A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2 - 6 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2 - 2 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \alpha_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 + \frac{58 A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} + \frac{15 A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} + \\ & \frac{116 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} + \frac{5 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_f^2} + \frac{4 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_f^2} - \\ & \left. \frac{2 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{5 \omega_f^2} + \frac{E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \delta_3^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_f^2} - \frac{E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} \right\} \end{aligned}$$

Τότε, οι συνθήκες επίλυσιμότητας απαιτούν τα ST21 και ST22 να είναι ορθογωνικά στις λύσεις των αντίστοιχών τους συζυγών τελεστών (adjoints), των συστατικών της cleftVec. Το αποτέλεσμα είναι :

SCond2 = {ccleftVec[[1]].ST21 == 0, ccleftVec[[2]].ST22 == 0} // ExpandAll;
SCond2 /. displayRule

$$\begin{aligned} & \left\{ -6 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_1 A_2 \alpha_2 \Lambda_1 - 24 A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2 + A_1 \mu_1^2 + \frac{27 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1}{2 \omega_f^2} + \right. \\ & \frac{23 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_f^2} + \frac{81 A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{2 \omega_f^2} + \frac{23 A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_f^2} - 2 I (D_2 A_1) \omega_1 - 12 A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1 + \frac{30 A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_f^2} - \\ & \frac{E^{IT_1 \sigma_1 + IT_1 \sigma_2 + IT_2} f_2 \delta_2 \bar{A}_1}{16 \omega_f^2} + \frac{9 A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{8 \omega_f^2} - \frac{2 I E^{IT_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{14 I E^{IT_1 \sigma_1 + IT_1 \sigma_2 + IT_1} \delta_1 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \\ & \frac{I E^{IT_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1} - 4 A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2 - 6 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 + \frac{A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} + \frac{12 A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_f^2} + \\ & \frac{8 A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} - \frac{3 A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_f^2} + \frac{27 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} + \frac{23 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} = 0, \\ & -3 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1 - 4 A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2 - 3 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} \alpha_2 \Lambda_1^3 + \frac{58 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_f^2} + \\ & \frac{5 E^{-IT_1 \sigma_2 - IT_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{2 \omega_f^2} + \frac{56 A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_f^2} + \frac{12 A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_f^2} - \frac{2 A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{3 \omega_f^2} + \frac{3 A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{\omega_f^2} + \\ & \frac{58 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^3}{5 \omega_f^2} + \frac{5 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^3}{6 \omega_f^2} + \frac{I E^{-IT_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_1}{\omega_1} - 2 I (D_2 A_2) \omega_2 + \\ & \frac{I E^{IT_1 \sigma_2 + IT_2} f_2 \mu_2 \omega_2}{16 \omega_f^2} - \frac{I E^{-IT_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_2 \omega_2}{8 \omega_f^2} + \frac{A_2 \mu_2^2 \omega_2}{2 \omega_1} - 4 A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1 - \\ & 6 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 + \frac{A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{2 \omega_f^2} + \frac{12 A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_f^2} + \frac{8 A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_f^2} + \frac{3 A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_f^2} + \\ & \frac{27 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{2 \omega_f^2} + \frac{23 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_1}{15 \omega_f^2} - 12 A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2 - \\ & 6 E^{IT_1 \sigma_2 + IT_1} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2 - 2 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2IT_1} \alpha_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 + \frac{58 A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} + \frac{15 A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} + \end{aligned}$$

$$\frac{116 E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} + \frac{5 E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_f^2} + \frac{4 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_f^2} - \left. \begin{aligned} & \frac{2 E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{5 \omega_f^2} + \frac{E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_3^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_f^2} - \frac{E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} \right. = 0 \end{aligned}$$

Επιλύοντας την SCond2 για $D_2 A_1$ και $D_2 A_2$, έχουμε :

SCond2Rule1 = Solve[SCond2, { $A_1^{(0,1)}$ [T1, T2], $A_2^{(0,1)}$ [T1, T2]}] [[1]] // ExpandAll;

SCond2Rule1 /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_2 A_1 \rightarrow & -\frac{27 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1}{4 \omega_f^2} - \frac{23 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{30 \omega_f^2} - \frac{81 I A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_f^2} - \frac{23 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{30 \omega_f^2} \\ & + \frac{3 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_1 A_2 \alpha_2 \Lambda_1}{\omega_1} + \frac{12 I A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{I A_1 \mu_1^2}{2 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_f^2} + \frac{I E^{IT_1 \sigma_1 + I \tau_1} \sigma_2 + I \tau_2 \epsilon_2 \delta_2 \bar{A}_1}{32 \omega_f^2} \\ & + \frac{9 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{16 \omega_f^2} - \frac{E^{IT_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_f} - \frac{7 E^{IT_1 \sigma_1 + I \tau_1} \sigma_2 + I \tau_1 \delta_1 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_f} + \frac{E^{IT_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{4 \omega_f} \\ & + \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{4 \omega_f^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_f^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{15 \omega_f^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_f^2} \\ & + \frac{27 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{4 \omega_f^2} - \frac{23 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{30 \omega_f^2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1} \\ D_2 A_2 \rightarrow & \frac{E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_2} \epsilon_2 \mu_2}{32 \omega_f^2} - \frac{E^{-IT_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_2}{16 \omega_f^2} - \frac{I A_2 \mu_2^2}{4 \omega_1} - \frac{3 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1}{2 \omega_2} + \frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} \\ & + \frac{3 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} \alpha_2 \Lambda_1^3}{2 \omega_2} - \frac{29 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_f \omega_2} - \frac{5 I E^{-IT_1 \sigma_2 - I \tau_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{4 \omega_f \omega_2} - \frac{28 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_f \omega_2} \\ & + \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_f \omega_2} - \frac{I A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{3 \omega_f \omega_2} - \frac{3 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{2 \omega_f \omega_2} - \frac{29 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2}{5 \omega_f \omega_2} - \frac{5 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2}{12 \omega_f \omega_2} \\ & + \frac{E^{-IT_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{3 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{4 \omega_f \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_f \omega_2} \\ & + \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_f \omega_2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{2 \omega_f \omega_2} - \frac{27 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{4 \omega_f \omega_2} - \frac{23 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_1}{30 \omega_f \omega_2} \\ & + \frac{6 I A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{I E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \alpha_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{29 I A_2^2 \delta_1^2 \bar{A}_2}{15 \omega_f \omega_2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{4 \omega_f \omega_2} \\ & + \frac{58 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_f \omega_2} - \frac{5 I E^{IT_1 \sigma_2 + I \tau_1} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_f \omega_2} - \frac{2 I E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_f \omega_2} \\ & + \frac{I E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{5 \omega_f \omega_2} - \frac{I E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_3^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{2 \omega_f \omega_2} - \frac{I E^{2IT_1 \sigma_2 + 2I \tau_1} \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{4 \omega_f \omega_2} \end{aligned} \right\}$$

• Επανασύσταση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επανασύστασης, $A_k' = \epsilon D_1 A_k + \epsilon^2 D_2 A_k + \dots$, συνδυάζουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις SCond1Rule1 και SCond2Rule1 στις ακόλουθες δύο συνήθειες διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των μιγαδικών-τιμών συναρτήσεων A_k :

moduEq =

Table[2 I ω_k A_k' , {k, 2}] ==

(Table[2 I ω_k dt[1] [A_k [T1, T2]], {k, 2}) /. SCond1Rule1 /. SCond2Rule1 // Collect[#, ϵ] & //

Thread:

moduEq /. displayRule

$$\begin{aligned}
 & \left(2 I \omega_1 A_1' = 2 I \in \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 + \frac{I E^{I T_1} \sigma_1 A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{I T_1} \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I T_1 \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_1} \right) \right. \\
 & 2 I \in^2 \omega_1 \left(-\frac{27 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{23 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{30 \omega_1^2} - \frac{31 I A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2} - \frac{23 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{30 \omega_1^2} \right. \\
 & \frac{3 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_1 A_2 \alpha_2 \Lambda_1}{\omega_1} + \frac{12 I A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{I A_1 \mu_1^2}{2 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{I E^{I T_1} \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I T_2 f_2 \delta_2 \bar{A}_1}{32 \omega_1^2} - \\
 & \frac{9 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{I T_1} \sigma_1 A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{7 E^{I T_1} \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 + I T_1 \delta_1 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{I T_1} \sigma_1 A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} + \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \\
 & \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{27 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{23 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{30 \omega_1^2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1} \right), \\
 & 2 I \omega_2 A_2' = 2 I \in \left(-A_2 \mu_2 - \frac{I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_2 f_2}{4 \omega_2} + \frac{I E^{-I T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} \right) \omega_2 + \\
 & 2 I \in^2 \omega_2 \left(\frac{E^{I T_1} \sigma_2 + I T_2 f_2 \mu_2}{32 \omega_2^2} - \frac{E^{-I T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2 \mu_2}{16 \omega_2^2} - \frac{I A_2 \mu_2^2}{4 \omega_1} - \frac{3 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1}{2 \omega_2} - \frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} + \right. \\
 & \frac{3 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 \alpha_2 \Lambda_1^2}{2 \omega_2} - \frac{29 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_2^2} - \frac{5 I E^{-I T_1} \sigma_2 - I T_1 A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{4 \omega_2^2} - \frac{28 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_2^2} - \\
 & \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_2^2} - \frac{I A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{3 \omega_2^2} - \frac{3 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{2 \omega_2^2} - \frac{29 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2}{5 \omega_2^2} - \frac{5 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2}{12 \omega_2^2} + \\
 & \frac{E^{-I T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{3 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{4 \omega_2^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_2^2} - \\
 & \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_2^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{2 \omega_2^2} - \frac{27 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{4 \omega_2^2} - \frac{23 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_1}{30 \omega_2^2} - \\
 & \frac{6 I A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{3 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{I E^{2 I T_1} \sigma_2 + 2 I T_1 \alpha_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{29 I A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{15 \omega_2^2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{4 \omega_2^2} - \\
 & \frac{58 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_2^2} - \frac{5 I E^{I T_1} \sigma_2 + I T_1 A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_2^2} - \frac{2 I E^{2 I T_1} \sigma_2 + 2 I T_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_2^2} + \\
 & \left. \frac{I E^{2 I T_1} \sigma_2 + 2 I T_1 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{5 \omega_2^2} - \frac{I E^{2 I T_1} \sigma_2 + 2 I T_1 \delta_3^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{2 \omega_2^2} - \frac{I E^{2 I T_1} \sigma_2 + 2 I T_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{4 \omega_2^2} \right) \}
 \end{aligned}$$

6.1.2 Η συνάρτηση MMS

Σύμφωνα με τις διαδικασίες που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση με το όνομα MMS (Method of Multiple Scales) (Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων) ειδικά για την eq61b. Μια πιο γενική συνάρτηση (ένα Πακέτο) μπορεί να δημιουργηθεί μέσω του να θεωρήσουμε ως ορίσματα (arguments) τις κυρίαρχες εξισώσεις, σύμβολα για τις εξαρτημένες μεταβλητές, την ανεξάρτητη μεταβλητή, τα εύρη και τις συχνότητες της διέγερσης, και όλες τις άλλες σχετιζόμενες ποσότητες που επιτρέπουν στο πρόγραμμα να αναγνωρίζει τις αντίστοιχες έννοιές (σημασίες) τους. Θα χρησιμοποιήσουμε την MMS για να επιλύσουμε για διάφορες περιπτώσεις συντονισμού στις ακόλουθες ενότητες :

```
MMS[scaling_List, ResonanceCond : {__Equal}] :=
```

```
Module[{},
```

```
omgList = {ω1, ω2};
```

```
omgRule = Solve[ResonanceCond, {Q, #} // Flatten][[1]] & /@ omgList // Reverse;
```

```

multiScales = {ui[t] -> ui @@ timeScales, vi[t] -> vi @@ timeScales,
  Derivative[1][ui][t] -> dt[1][u @@ timeScales], t -> T0};

eqa = (eq61b /. scaling /. multiScales /. solRule // TrigToExp // ExpandAll) /. eni/ai3 -> 0;
eqEps = Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0]] & /@ eqa // Transpose;

eqOrder[i_] :=
  (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. fε -> 0 /. uk,1 -> uk,i) ==
  (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. fε -> 0 /. uk,1 -> uk,i) - (#[[1]] & /@ eqEps[[1]]) // Thread;
  (* First-Order Problem *)
  linearSys = #[[1]] & /@ eqOrder[1];

expri = linearSys /. {ui,1 -> (P Ei ωi t ε), vi,1 -> (Q Ei ωi t ε)} /. Exp[ai] -> 1 //
  Partition[#, 2] &;
  coefMat = Outer[D, #, {P, Q}] & /@ expri;
  hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose;
  rightVec = # / #[[1]] & /@ (NullSpace[#] [[1]] & /@ coefMat);
  leftVec = NullSpace[hermitian[#]] [[1]] & /@ coefMat;
  cleftVec = leftVec /. conjugateRule;
  order1Eq = eqOrder[1] /. ui,1 -> (ui,1 [#] ε);

solip = DSolve[order1Eq, {u1,1[T0], v1,1[T0], u2,1[T0], v2,1[T0]}, T0][[1]] /. C[_] -> 0 //
  Simplify;
  fRule = {fi -> 2 Λi (ωi2 - Ω2)};

solliu =
  Table[
    ui,1 -> Function[{T0, T1, T2},
      Ai[T1, T2] Exp[I ωi T0] + Āi[T1, T2] Exp[-I ωi T0] +
      (ui,1[T0] /. solip /. fRule // Simplify // Expand) // Evaluate], {i, 2}];

solli = Table[vi,1 -> Function[{T0, T1, T2}, D[ui,1 @@ timeScales, T0] /. solliu // Evaluate],
  {i, 2}];
  solli = Join[solliu, solli];

  (* Second-Order Problem *)
  order2Eq = eqOrder[2] /. solli // ExpandAll;

expRule1[i_] := Exp[ai] :=> Exp[Expand[a /. omgRule[[i]]] /. eni-T0 :=> timeScales[[n+1]]];
ST11 = Coefficient[order2Eq[[#, 2]] /. expRule1[1], Exp[I ω1 T0]] & /@ {1, 2};
ST12 = Coefficient[order2Eq[[#, 2]] /. expRule1[2], Exp[I ω2 T0]] & /@ {3, 4};

SCond1 = {cleftVec[[1]].ST11 == 0, cleftVec[[2]].ST12 == 0};
SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A1(1,0)[T1, T2], A2(1,0)[T1, T2]}][[1]] // ExpandAll;

sigRule = Solve[ResonanceCond, {σ1, σ2}] [[1]];
expRule2 = Exp[ai] :=> Exp[a /. {T1 -> ε T0, T2 -> ε2 T0}] /. sigRule // Expand];

```

```

SCondiRule2 = SCondiRule1 /. expRule2;
ccSCondiRule2 = SCondiRule2 /. conjugateRule;
order2Eqm = order2Eq /. SCondiRule2 /. ccSCondiRule2 // ExpandAll;
If[Union[#[[2]] & /@ order2Eqm] == {0},
  sol2 = {u1,2 -> (0 &), v1,2 -> (0 &), u2,2 -> (0 &), v2,2 -> (0 &)},
  basicH = Table[{Ai[T1, T2] Ei ai T0,  $\bar{A}_i[T_1, T_2] E^{-i a_i T_0}$ }, {i, 2}] // Flatten;

collectForm =
Join[basicH, If[list1 = List @@ Plus @@ (#[[2]] & /@ eqOrder[1]) /. c- fi Ea -> Ai Ea;
  Head[list1] == List, list1, {}]];

possibleTerms =
Join[collectForm,
  If[list1 = List @@ Plus @@ (#[[2]] & /@ eqOrder[2]) /. u-i,j -> (0 &) /. c- fi Ea -> Ea;
  Head[list1] == List, list1, {}],
  Outer[Times, collectForm, collectForm] // Flatten // Union];

ResonantTerms[i_] :=
(# /. {a_ /; a != 0 -> 1} & /@ (E-i ai T0 possibleTerms /. expRule1[i] /. Exp[_ T0 + _] -> 0))
  possibleTerms // Union // Rest;
RT = Array[ResonantTerms, 2];

```

```

r1Rule = MapIndexed[r1, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[1, 2]], #1] &, RT[[1]] /.
  Exp[_ T0 + _] -> 0;

(* r2Rule=MapIndexed[r2, #2[[1]]->Coefficient[order2Eqm[[2,2]],#1] &, RT[[1]]] /.
  Exp[_ T0+_]->0: *)

r3Rule = MapIndexed[r3, #2[[1]] -> Coefficient[order2Eqm[[3, 2]], #1] &, RT[[2]] /.
  Exp[_ T0 + _] -> 0;

(* r4Rule=MapIndexed[r4, #2[[1]]->Coefficient[order2Eqm[[4,2]],#1] &, RT[[2]]] /.
  Exp[_ T0+_]->0: *)

NRT = Complement[possibleTerms, Join[#, # /. conjugateRule]] & /@ RT;
RTsymbolList1 = Table[F1, j, {j, Length[RT[[1]]]};
RTsymbolList2 = Table[F3, j, {j, Length[RT[[2]]]};
NRTsymbolList1[i_] = Table[A1, j, {j, Length[NRT[[1]]]};
NRTsymbolList2[i_] = Table[A1, 2, j, {j, Length[NRT[[2]]]};
(ratio1, ratio2) = Table[-ccleftVec[{i, 1}], {i, 2}];

sol2Form =
  {u1, 2 -> Function[{T0, T1, T2},
    RTsymbolList1.RT[[1]] + (RTsymbolList1.RT[[1]] /. conjugateRule) +
    NRTsymbolList1[1].NRT[[1]] // Evaluate},
  v1, 2 -> Function[{T0, T1, T2},
    ratio1 * RTsymbolList1.RT[[1]] + (ratio1 * RTsymbolList1.RT[[1]] /. conjugateRule) +
    NRTsymbolList1[2].NRT[[1]] // Evaluate},
  u2, 2 -> Function[{T0, T1, T2},
    RTsymbolList2.RT[[2]] + (RTsymbolList2.RT[[2]] /. conjugateRule) +
    NRTsymbolList2[1].NRT[[2]] // Evaluate},
  v2, 2 -> Function[{T0, T1, T2},
    ratio2 * RTsymbolList2.RT[[2]] + (ratio2 * RTsymbolList2.RT[[2]] /. conjugateRule) +
    NRTsymbolList2[2].NRT[[2]] // Evaluate}];

eqb =
  (Coefficient[Subtract @@ # /. sol2Form, NRT[[1]]] /. Exp[_ T0 + _] -> 0 & /@
  order2Eqm[{{1, 2}}] // Flatten) == 0 // Thread;

eqc =
  (Coefficient[Subtract @@ # /. sol2Form, NRT[[2]]] /. Exp[_ T0 + _] -> 0 & /@
  order2Eqm[{{3, 4}}] // Flatten) == 0 // Thread;
  coef11 = Solve[eqb, Array[NRTsymbolList1, 2] // Flatten][[1]];
  coef12 = Solve[eqc, Array[NRTsymbolList2, 2] // Flatten][[1]];

eqd = MapIndexed[Coefficient[order2Eqm[[1, 1]] /. sol2Form, #1] == r1, #2[[1]]] &, RT[[1]] /.
  Exp[_ T0 + _] -> 0;

eqe = MapIndexed[Coefficient[order2Eqm[[3, 1]] /. sol2Form, #1] == r3, #2[[1]]] &, RT[[2]] /.
  Exp[_ T0 + _] -> 0;
  coef21 = Solve[eqd, RTsymbolList1][[1]] /. r1Rule;
  coef22 = Solve[eqe, RTsymbolList2][[1]] /. r3Rule;

```



```

coeffs = Join[coef11, coef12, coef21, coef22, coef21 /. conjugateRule,
  coef22 /. conjugateRule] /. (omgRule[[1]] /. ε -> 0);

sol2 = sol2Form /. Function[{T0, T1, T2}, a_] :=>
  Function[{T0, T1, T2} // Evaluate, a /. coeffs // Expand // Evaluate]
  ];

(* Third-Order Problem *)
order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;
ST21 = Coefficient[order3Eq[[#, 2]] /. expRule1[1], Exp[I ω1 T0]] & /@ {1, 2};
ST22 = Coefficient[order3Eq[[#, 2]] /. expRule1[2], Exp[I ω2 T0]] & /@ {3, 4};
SCond2 = (ccleftVec[[1]].ST21 == 0, ccleftVec[[2]].ST22 == 0) // ExpandAll;
SCond2Rule1 = Solve[SCond2, {Λ1^(0,1)[T1, T2], Λ2^(0,1)[T1, T2]}][[1]] // ExpandAll;

(* Reconstitution *)

moduEq =
  Table[2 I ωk Ak', {k, 2}] ==
  (Table[2 I ωk dt[1][ Ak[T1, T2]], {k, 2}] /. SCond1Rule1 /. SCond2Rule1 //
  Collect[#, ε] &) // Thread;
  Print["The second-order approximate solution:"];

Print[Table[u_i[t] == (u_i @@ timeScales /. solRule /. ε^3 -> 0 /. sol1 /. sol2 /. displayRule),
  {i, 2}]];
  If[Or @@ Table[(F_i / f_i /. scaling) == ε, {i, 2}],
    Print["where"];
    Print["Λ_1 ==  $\frac{f_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$ "];
  ];
  Print["\n\nThe modulation equations:"];
  Print[moduEq /. displayRule]
]

]

Σαν παράδειγμα, ελέγχουμε την περίπτωση στην ενότητα 6.1.1 :
scaling1 = {μr_ -> ε μr, F1 -> ε f1, F2 -> ε^2 f2};

ResonanceCond1 = {ω2 == 2 ω1 + ε σ1, Ω == ω2 + ε σ2};

NMS[scaling1, ResonanceCond1] // Timing

```

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 \{u_1[\tau] = &= (E^{i\tau\omega_1} A_1 + E^{-i\tau\omega_2} A_1 + E^{i\tau\omega_2} A_1 + E^{-i\tau\omega_1} \bar{A}_1) + \\
 &e^2 \left(\frac{E^{2i\tau\omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_1 A_2 \delta_2}{4\omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau\omega_2} A_2^2 \delta_3}{15\omega_1^2} - \frac{3 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1+i\tau\omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{2\omega_1^2} - \right. \\
 &\frac{3 E^{i\tau\omega_2-i\tau\omega_1+i\tau\omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{4\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_2 \delta_2 A_1}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_2 \delta_2 A_1}{15\omega_1^2} - \\
 &\frac{6 \delta_1 A_1^2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau\omega_2-2i\tau\omega_1} \delta_1 A_1^2}{5\omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau\omega_2+2i\tau\omega_1} \delta_1 A_1^2}{5\omega_1^2} - \frac{I E^{i\tau\omega_1} A_1 \mu_1}{2\omega_1} - \frac{4 I E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1} A_1 \mu_1}{3\omega_1} + \\
 &\frac{4 I E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1} A_1 \mu_1}{3\omega_1} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{-i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} + \frac{3 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{4\omega_1^2} - \\
 &\frac{3 E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} - \frac{I E^{-i\tau\omega_1} \mu_1 \bar{A}_1}{2\omega_1} + \frac{E^{-2i\tau\omega_1} \delta_1 A_1^2}{\omega_1^2} - \frac{E^{i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{2\omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \\
 &\left. \frac{2 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{15\omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{4\omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau\omega_2} \delta_2 \bar{A}_2^2}{15\omega_1^2} \right) \},
 \end{aligned}$$

$u_2[\tau] =$

$$\begin{aligned}
 &= (E^{i\tau\omega_2} A_2 + E^{-i\tau\omega_2} \bar{A}_2) + e^2 \left(\frac{E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_2} f_2}{32\omega_1^2} + \frac{E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_2} f_2}{32\omega_1^2} - \frac{E^{2i\tau\omega_1} A_1^2 \delta_2}{16\omega_1^2} + \frac{2 E^{i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_1 A_2 \delta_3}{5\omega_1^2} + \right. \\
 &\frac{E^{2i\tau\omega_2} A_2^2 \delta_4}{4\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} A_1 \delta_2 A_1}{3\omega_1^2} + \frac{2 E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} A_1 \delta_2 A_1}{5\omega_1^2} - \frac{E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} A_2 \delta_3 A_1}{2\omega_1^2} - \\
 &\frac{E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} A_2 \delta_3 A_1}{6\omega_1^2} - \frac{\delta_2 A_1^2}{2\omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau\omega_2-2i\tau\omega_1} \delta_2 A_1^2}{12\omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau\omega_2+2i\tau\omega_1} \delta_2 A_1^2}{12\omega_1^2} - \frac{I E^{i\tau\omega_2} A_2 \mu_2}{4\omega_1} - \\
 &\frac{A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3\omega_1^2} + \frac{2 E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{5\omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{3\omega_1^2} - \\
 &\frac{E^{-2i\tau\omega_1} \delta_2 A_1^2}{16\omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{3\omega_1^2} - \frac{3 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2\omega_1^2} - \frac{E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2}{6\omega_1^2} - \\
 &\left. \frac{E^{i\tau\omega_2+i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2}{2\omega_1^2} - \frac{I E^{-i\tau\omega_2} \mu_2 \bar{A}_2}{4\omega_1} - \frac{2 E^{-i\tau\omega_1-i\tau\omega_2} \delta_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{5\omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau\omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{4\omega_1^2} \right) \}
 \end{aligned}$$

όπου

$$A_1 = \frac{f_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\begin{aligned}
 \{2 I \omega_1 A_1 = &= 2 I \varepsilon \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 + \frac{I E^{i\tau\omega_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_1} \right) - \\
 &2 I \varepsilon^2 \omega_1 \left(-\frac{27 I E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 A_1}{4\omega_1^2} - \frac{23 I E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 A_1}{30\omega_1^2} - \right. \\
 &\frac{31 I A_1 \delta_1^2 A_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{23 I A_1 \delta_2^2 A_1^2}{30\omega_1^2} + \frac{3 I E^{-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1} A_1 A_2 \alpha_2 A_1}{\omega_1} - \frac{12 I A_1 \alpha_1 A_1^2}{\omega_1} - \frac{I A_1 \mu_1^2}{2\omega_1} - \\
 &\frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{I E^{i\tau\omega_1+i\tau\omega_2} f_2 \delta_2 \bar{A}_1}{32\omega_1^2} - \frac{9 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{16\omega_1^2} - \frac{E^{i\tau\omega_1} A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\
 &\left. \frac{7 E^{i\tau\omega_1-i\tau\omega_2-i\tau\omega_1} \delta_1 A_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{i\tau\omega_1} A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{4\omega_1^2} - \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{4\omega_1^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{27 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} \\
 & \frac{23 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{30 \omega_1^2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1} \right\}, \\
 2 I \omega_2 A_2' = & 2 I \epsilon \left(-A_2 \mu_2 - \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_2} f_2}{4 \omega_2} + \frac{I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} \right) \omega_2 + \\
 2 I \epsilon^2 \omega_2 & \left(\frac{E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_2} f_2 \mu_2}{32 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_2}{16 \omega_1^2} - \frac{I A_2 \mu_2^2}{4 \omega_1} + \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_2 - i \tau_1} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1}{2 \omega_2} + \frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} + \right. \\
 & \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} \alpha_2 \Lambda_1^2}{2 \omega_2} - \frac{29 I E^{-i T_1 \sigma_2 - i \tau_1} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_2 - i \tau_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{29 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{15 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{I A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{2 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{29 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2}{12 \omega_1^2 \omega_2} + \\
 & \frac{E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{27 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{23 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_1 \delta_2 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{30 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{6 I A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_2 + 2 i \tau_1} \alpha_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{29 I A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \left. \frac{59 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_2 + i \tau_1} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{2 I E^{2 i T_1 \sigma_2 + 2 i \tau_1} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} + \right. \\
 & \left. \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_2 + 2 i \tau_1} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_2 + 2 i \tau_1} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_2 + 2 i \tau_1} \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} \right\}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

{82.98 Second, Null}

6.1.3 $\Omega \approx \omega_1$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ένα συνδυασμό από έναν πρωτεύοντα συντονισμό της πρώτης μορφής (mode), έναν υπεραρμονικό συντονισμό της δεύτερης μορφής, και έναν δύο-προς-ένα (2:1) εσωτερικό συντονισμό. Με σκοπό να φέρουμε τις επιδράσεις της απόσβεσης (damping), των εξαναγκασμών (forcing), και της μη-γραμμικότητας στην ίδια τάξη, θέτουμε :

$$\text{scaling3} = \{ \hat{\mu}_n \rightarrow \epsilon \mu_n, F_1 \rightarrow \epsilon^2 f_1, F_2 \rightarrow \epsilon f_2 \};$$

Για να περιγράψουμε ποσοτικά την εγγύτητα των συντονισμών, εισάγουμε τις αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_1 και σ_2 που ορίζονται σύμφωνα με :

$$\text{ResonanceCond3} = \{ \omega_2 = 2 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega = \omega_1 + \epsilon \sigma_2 \};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των μιγαδικών-τιμών συναρτήσεων A_k :

$$\text{MMS}[\text{scaling3}, \text{ResonanceCond3}] // \text{Timing}$$

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 u_1(t) = & \left(e^{i T_0 \omega_1 A_1} + e^{-i T_0 \omega_1 \bar{A}_1} \right) - \varepsilon^2 \left\{ \frac{E^{-i T_0 \omega_1 - i T_1} f_1}{8 \omega_1^2} + \frac{E^{i T_0 \omega_1 + i T_1} f_1}{8 \omega_1^2} - \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2}{4 \omega_1^2} - \right. \\
 & \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_2}{15 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 - i T_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} \\
 & \frac{E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2 - 2 i T_2} \delta_2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2 + 2 i T_2} \delta_2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \\
 & \frac{I E^{i T_0 \omega_1} A_1 \mu_1}{2 \omega_1} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 - i T_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 - i T_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{I E^{-i T_0 \omega_1} \mu_1 \bar{A}_1}{2 \omega_1} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1} \\
 & \left. \frac{E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 - i T_0 \omega_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 - i T_0 \omega_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{E^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_2^2}{15 \omega_1^2} \right\}, \\
 u_2(t) = & \left(e^{i T_0 \omega_2 A_2} + e^{-i T_0 \omega_2 \bar{A}_2} + e^{i T_0 \omega_2 + i T_2} A_2 + e^{-i T_0 \omega_2 \bar{A}_2} \right) + \\
 & \varepsilon^2 \left\{ - \frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2}{16 \omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2}{5 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4}{4 \omega_1^2} - \right. \\
 & \frac{E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_3 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_3 \Lambda_2}{8 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{\omega_1^2} + \\
 & \frac{6 E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} - \frac{3 \delta_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1^2} - \frac{3 E^{-2 i T_0 \omega_2 - 2 i T_2} \delta_4 \Lambda_2^2}{16 \omega_1^2} - \frac{3 E^{2 i T_0 \omega_2 + 2 i T_2} \delta_4 \Lambda_2^2}{16 \omega_1^2} - \\
 & \frac{I E^{i T_0 \omega_2} A_2 \mu_2}{4 \omega_1} + \frac{2 I E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2} \Lambda_2 \mu_2}{3 \omega_1} - \frac{2 I E^{i T_0 \omega_2 + i T_2} \Lambda_2 \mu_2}{3 \omega_1} - \frac{A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 - i T_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{8 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 - i T_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2}{16 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 \delta_3 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{3 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{6 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_2 - i T_0 \omega_2} \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_2 - i T_0 \omega_2} \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{I E^{-i T_0 \omega_2} \mu_2 \bar{A}_2}{4 \omega_1} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{4 \omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{f_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\begin{aligned}
 2 I \omega_1 \bar{A}_1 = & 2 I \varepsilon \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 - \frac{I E^{i T_1 \omega_2 + i T_1} f_1}{4 \omega_1} - \frac{I E^{i T_1 \omega_1 - i T_1 \omega_2 - i T_2} A_2 \delta_3 \Lambda_2}{\omega_1} + \frac{I E^{i T_1 \omega_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} \right) - \\
 2 I \varepsilon^2 \omega_1 & \left\{ \frac{I E^{i T_1 \omega_1 - i T_1 \omega_2 - i T_1} A_2 f_1 \delta_2}{8 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \omega_2 - i T_2} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{9 I E^{-i T_1 \omega_2 - i T_2} A_1^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2}{16 \omega_1^2} - \right. \\
 & \frac{4 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 \delta_1 \delta_3 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} - \frac{5 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{8 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{i T_1 \omega_2 + i T_2} \delta_2 \delta_3 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \\
 & \frac{27 I E^{i T_1 \omega_2 + i T_2} \delta_3 \delta_4 \Lambda_2^2}{16 \omega_1^2} + \frac{E^{i T_1 \omega_2 + i T_1} f_1 \mu_1}{8 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_1 \omega_1 - i T_1 \omega_2 - i T_2} A_2 \delta_3 \Lambda_2 \mu_1}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{5 E^{i T_1 \omega_1 - i T_1 \omega_2 - i T_2} A_2 \delta_3 \Lambda_2 \mu_2}{12 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{-i T_1 \omega_2 - i T_2} A_1^2 \alpha_2 \Lambda_2}{2 \omega_1} + \frac{2 I A_1 \alpha_3 \Lambda_2^2}{\omega_1} - \\
 & \left. \frac{3 I E^{i T_1 \omega_2 + i T_2} \alpha_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1} - \frac{I A_1 \mu_1^2}{2 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{9 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{16 \omega_1^2} - \frac{10 I E^{i T_1 \omega_2 + i T_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{9 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{8 \omega_1^2} - \frac{2 I E^{2 i T_1} \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_2^2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{I E^{2 i T_1} \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_1 \delta_3 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} \\
 & \frac{I E^{2 i T_1} \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_3^2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{3 I E^{2 i T_1} \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_1} \sigma_1 A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{i T_1} \sigma_1 A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} \\
 & \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{I E^{2 i T_1} \sigma_2^{-2 i T_2} \alpha_3 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} \\
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{9 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} \\
 & \left. \frac{23 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{10 \omega_1^2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_1} \right\}, 2 I \omega_2 \Lambda_2 == \\
 & 2 I \epsilon \left(-A_2 \mu_2 + \frac{I E^{-i T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} + \frac{I E^{-i T_1} \sigma_1 + i T_1 \sigma_2^{-i T_2} A_1 \delta_3 \Lambda_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-i T_1} \sigma_1 + 2 i T_1 \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_2} \right) \omega_2 + \\
 & 2 I \epsilon^2 \omega_2 \left(-\frac{E^{-i T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2 \mu_2}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_1} \sigma_1 + i T_1 \sigma_2^{-i T_2} A_1 \delta_3 \Lambda_2 \mu_2}{8 \omega_1^2} - \right. \\
 & \left. \frac{3 E^{-i T_1} \sigma_1 + 2 i T_1 \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_4 \Lambda_2^2 \mu_2}{16 \omega_1^2} - \frac{I A_2 \mu_2^2}{4 \omega_1} + \frac{3 I E^{-i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_1 A_2 \alpha_4 \Lambda_2}{\omega_2} + \right. \\
 & \left. \frac{12 I A_2 \alpha_5 \Lambda_2^2}{\omega_2} + \frac{I E^{-i T_1} \sigma_1 + i T_1 \sigma_2^{-i T_2} A_1 f_1 \delta_2}{8 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{-i T_1} \sigma_1 + 2 i T_1 \sigma_2^{-i T_2} + i T_1 + i T_2 f_1 \delta_3 \Lambda_2}{8 \omega_1^2 \omega_2} \right. \\
 & \left. \frac{9 I E^{-i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{23 I E^{-i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_1 A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2}{10 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I A_2 \delta_3^2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{69 I A_2 \delta_4^2 \Lambda_2^2}{10 \omega_1^2 \omega_2} \right. \\
 & \left. \frac{E^{-i T_1} \sigma_1 A_1^2 \delta_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{E^{-i T_1} \sigma_1 + i T_1 \sigma_2^{-i T_2} A_1 \delta_3 \Lambda_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} + \frac{2 E^{-i T_1} \sigma_1 + i T_1 \sigma_2^{-i T_2} A_1 \delta_3 \Lambda_2 \mu_2}{3 \omega_1 \omega_2} + \right. \\
 & \left. \frac{2 E^{-i T_1} \sigma_1 + 2 i T_1 \sigma_2^{-2 i T_2} \delta_4 \Lambda_2^2 \mu_2}{\omega_1 \omega_2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} + \frac{3 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} \right. \\
 & \left. \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} \right. \\
 & \left. \frac{23 I E^{i T_1} \sigma_2^{-i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_1}{10 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{6 I A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{29 I A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} \right\}
 \end{aligned}$$

{66.906 Second, Null}

6.1.4 $\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$ και $\omega_2 \approx 2\omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε έναν συνδυασμό συντονισμού και ενός 2:1 εσωτερικού συντονισμού.

Θέτουμε :

$$\text{scaling4} = \{\hat{\mu}_n \rightarrow \epsilon \mu_n, F_1 \rightarrow \epsilon f_1, F_2 \rightarrow \epsilon f_2\};$$

$$\text{ResonanceCond4} = \{\omega_2 == 2 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == \omega_1 + \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των συναρτήσεων μιγαδικών τιμών, A_k :

$$\text{MMS}[\text{scaling4}, \text{ResonanceCond4}] // \text{Timing}$$

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 u_1(t) = & \epsilon \left(E^{iT_0 \omega_1} A_1 + E^{-iT_0 \omega_1} A_1 - E^{iT_0 \omega_1} \bar{A}_1 - E^{-iT_0 \omega_1} \bar{A}_1 \right) + \\
 & \epsilon^2 \left\{ \frac{E^{2iT_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_2} A_1^2 \delta_2}{4\omega_1^2} + \frac{E^{2iT_0 \omega_2} A_1^2 \delta_2}{15\omega_1^2} + \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{\omega_1^2} - \right. \\
 & \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{5\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 A_1}{2\omega_1^2} + \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 A_1}{12\omega_1^2} - \frac{6\delta_1 A_1^2}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{3E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1^2}{35\omega_1^2} - \frac{3E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1^2}{35\omega_1^2} + \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 A_2}{3\omega_1^2} + \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 A_2}{15\omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} A_1 \delta_3 A_2}{2\omega_1^2} + \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_2} A_1 \delta_3 A_2}{12\omega_1^2} - \frac{2E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 A_2}{35\omega_1^2} - \\
 & \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 A_2}{\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 A_2}{\omega_1^2} + \frac{2E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 A_2}{35\omega_1^2} - \frac{2\delta_3 A_2^2}{\omega_1^2} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_3 A_2^2}{35\omega_1^2} + \\
 & \frac{E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_3 A_2^2}{35\omega_1^2} - \frac{IE^{iT_0 \omega_1} A_1 \mu_1}{2\omega_1} - \frac{3IE^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_1 \mu_1}{4\omega_1} + \frac{3IE^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_1 \mu_1}{4\omega_1} - \frac{6A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} - \frac{2A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{5\omega_1^2} + \\
 & \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{12\omega_1^2} - \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} + \\
 & \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_2 A_2 \bar{A}_1}{15\omega_1^2} + \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_2 A_2 \bar{A}_1}{3\omega_1^2} + \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_2} \delta_3 A_2 \bar{A}_1}{12\omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_3 A_2 \bar{A}_1}{2\omega_1^2} + \frac{IE^{-iT_0 \omega_1} \mu_1 \bar{A}_1}{2\omega_1} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1^2}{15\omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$u_2(t) =$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \left(E^{iT_0 \omega_2} A_2 + E^{-iT_0 \omega_2} A_2 + E^{iT_0 \omega_2} \bar{A}_2 + E^{-iT_0 \omega_2} \bar{A}_2 \right) + \epsilon^2 \left\{ -\frac{E^{2iT_0 \omega_1} A_2^2 \delta_2}{16\omega_1^2} + \frac{2E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_2}{5\omega_1^2} + \right. \\
 & \frac{E^{2iT_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4}{4\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_2 \delta_2 A_1}{2\omega_1^2} + \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_2 \delta_2 A_1}{6\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_2 \delta_3 A_1}{3\omega_1^2} - \\
 & \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_2 \delta_3 A_1}{21\omega_1^2} - \frac{\delta_2 A_1^2}{2\omega_1^2} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1^2}{32\omega_1^2} + \frac{E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1^2}{32\omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_2 \delta_2 A_2}{3\omega_1^2} + \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_2 \delta_2 A_2}{6\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_2 \delta_4 A_2}{\omega_1^2} + \\
 & \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_2 \delta_4 A_2}{7\omega_1^2} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_3 A_1 A_2}{16\omega_1^2} - \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_3 A_1 A_2}{2\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_3 A_1 A_2}{2\omega_1^2} + \\
 & \frac{E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_3 A_1 A_2}{16\omega_1^2} - \frac{3\delta_4 A_2^2}{2\omega_1^2} + \frac{3E^{-2iT_0 \omega_2 - 2iT_0 \omega_1} \delta_4 A_2^2}{32\omega_1^2} + \frac{3E^{2iT_0 \omega_2 + 2iT_0 \omega_1} \delta_4 A_2^2}{32\omega_1^2} - \\
 & \frac{IE^{iT_0 \omega_2} A_2 \mu_2}{4\omega_1} - \frac{6IE^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} A_2 \mu_2}{5\omega_1} + \frac{6IE^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} A_2 \mu_2}{5\omega_1} - \frac{A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{2\omega_1^2} - \frac{2E^{iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_2}{3\omega_1^2} - \\
 & \frac{3A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2\omega_1^2} + \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{6\omega_1^2} - \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{8\omega_1^2} + \\
 & \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_2}{21\omega_1^2} - \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_2}{3\omega_1^2} - \frac{E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_3 A_2 \bar{A}_2}{6\omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_3 A_2 \bar{A}_2}{3\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_2 - iT_0 \omega_1} \delta_4 A_2 \bar{A}_2}{7\omega_1^2} - \frac{2E^{iT_0 \omega_2 + iT_0 \omega_1} \delta_4 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{IE^{-iT_0 \omega_2} \mu_2 \bar{A}_2}{4\omega_1} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_2^2}{16\omega_1^2} - \frac{2E^{-iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2}{5\omega_1^2} - \frac{E^{-2iT_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{4\omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\bar{\epsilon}_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης:

$$\begin{aligned}
 & \{ 2 I \omega_1 \bar{A}_1 = \\
 & 2 I \varepsilon^2 \omega_1 \left(\frac{I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_2^2 \delta_2^2 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} - \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_2^2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1}{5 \omega_1^2} - \frac{2 I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_2^2 \delta_2^2 \Lambda_1}{3 \omega_1^2} \right. \\
 & \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_2^2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{54 I A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{11 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{24 \omega_1^2} - \frac{13 I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_2} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2}{30 \omega_1^2} \\
 & \frac{7 I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_2} A_2^2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{18 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} - \frac{18 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} \\
 & \frac{11 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{24 \omega_1^2} - \frac{11 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{24 \omega_1^2} + \frac{4 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} \\
 & \frac{6 I A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} - \frac{I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{24 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1^2} - \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_2^2 \alpha_3 \Lambda_1}{\omega_1} - \frac{12 I A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} \\
 & \frac{3 I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_2} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_2}{2 \omega_1} - \frac{3 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} + \frac{2 I A_1 \alpha_3 \Lambda_2^2}{\omega_1} \\
 & \frac{I A_1 \mu_1^2}{2 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{9 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{16 \omega_1^2} - \frac{E^{I\tau_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{I\tau_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \mu_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} + \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} \\
 & \frac{9 I E^{I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_1^2 \Lambda_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{3 I E^{I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_2^2 \Lambda_1 \bar{A}_1^2}{16 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_1 \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} \\
 & \frac{3 I E^{I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1^2}{16 \omega_1^2} + \frac{6 I E^{I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \alpha_1 \Lambda_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \alpha_2 \Lambda_2 \bar{A}_1^2}{2 \omega_1} \\
 & \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} - \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{5 E^{I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} \\
 & \left. \frac{E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_2 \Lambda_2 \mu_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{29 E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_2}{20 \omega_1^2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} \right) + \\
 & 2 I \varepsilon \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 - \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_1} \right), \\
 & 2 I \omega_2 \bar{A}_2 = 2 I \varepsilon \omega_2 \left(-A_2 \mu_2 + \frac{I E^{-I\tau_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2}{2 \omega_2} - \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_2} \right) + \\
 & 2 I \varepsilon^2 \omega_2 \left(\frac{E^{-I\tau_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_2}{16 \omega_1^2} - \frac{I A_2 \mu_2^2}{4 \omega_1} - \frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} - \frac{3 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} \right. \\
 & \frac{12 I A_2 \alpha_5 \Lambda_2^2}{\omega_2} - \frac{5 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{12 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{7 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{29 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{12 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{29 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_2 \delta_2 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{12 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{45 I E^{I\tau_1 - I\tau_2} A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{14 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{45 I E^{-I\tau_1 + I\tau_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{14 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{29 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{12 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{135 I A_2 \delta_4^2 \Lambda_2^2}{14 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{E^{-I\tau_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \mu_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} \\
 & \frac{E^{I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{15 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{3 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 E^{I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{4 \omega_1 \omega_2} - \frac{E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_1 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{6 E^{I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_1}{5 \omega_1 \omega_2} \\
 & \left. \frac{6 I A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{2 I E^{-I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 - I\tau_1} A_1 \alpha_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{3 I E^{-I\tau_1 \sigma_1 - I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_2} A_1 \alpha_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{29 I A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2 \omega_2} \right) \\
 & \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} A_1 \delta_2^2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{2 I E^{-I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} A_1 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \left. \frac{4 I E^{-I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} A_1 \delta_3^2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{-I\tau_1 \sigma_1 + I\tau_1 \sigma_2 + I\tau_1} A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \left. \frac{13 E^{-i T_1 \omega_1 + i T_1 \omega_2 + i T_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{7 E^{-i T_1 \omega_1 + i T_1 \omega_2 + i T_2} A_1 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \right\} \right\}$$

{192.266 Second, Null}

6.1.5 $\Omega \approx \omega_2$ και $\omega_2 \approx 3\omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ένα πρωτεύοντα συντονισμό της 2^{ης} μορφής, έναν υποαρμονικό συντονισμό της 1^{ης} μορφής, και έναν 3:1 εσωτερικό συντονισμό. Θέτουμε:

$$\text{scaling5} = \{\bar{\mu}_{\pi_1} \rightarrow \varepsilon^2 \mu_{\pi_1}, F_1 \rightarrow \varepsilon f_1, F_2 \rightarrow \varepsilon^3 f_2\};$$

$$\text{ResonanceCond5} = \{\omega_2 == 3 \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \Omega == \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των συναρτήσεων μιγαδικών τιμών A_k :

MMS[scaling5, ResonanceCond5] // Timing

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση:

$$\left. \left. \begin{aligned} \{u_1[t] == & (E^{i T_0 \omega_1} A_1 + E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1} A_1 + E^{i T_0 \omega_2 + i T_1} A_1 + E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1) + \\ & \varepsilon^2 \left(\frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2}{15 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_3}{35 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{\omega_1^2} - \right. \\ & \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 - i T_0 \omega_1} A_1 \delta_1 A_1}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 A_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 A_1}{35 \omega_1^2} - \\ & \frac{6 \delta_1 A_1^2}{\omega_1^2} - \frac{3 E^{-2 i T_0 \omega_2 - 2 i T_1} \delta_1 A_1^2}{35 \omega_1^2} - \frac{3 E^{2 i T_0 \omega_2 + 2 i T_1} \delta_1 A_1^2}{35 \omega_1^2} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\ & \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 - i T_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 - i T_0 \omega_1} \delta_1 A_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\ & \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 - i T_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{35 \omega_1^2} - \\ & \left. \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 - i T_0 \omega_2} \delta_2 A_1 \bar{A}_2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{15 \omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2}{35 \omega_1^2} \right) \Bigg\}, \\ u_2[t] == & (E^{i T_0 \omega_2} A_2 + E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2) + \varepsilon^2 \left(- \frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2}{5 \omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_3}{7 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4}{9 \omega_1^2} - \right. \\ & \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 - i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 A_1}{5 \omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 A_1}{7 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_3 A_1}{9 \omega_1^2} - \\ & \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_3 A_1}{27 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 A_1^2}{9 \omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2 - 2 i T_1} \delta_2 A_1^2}{27 \omega_1^2} - \frac{E^{2 i T_0 \omega_2 + 2 i T_1} \delta_2 A_1^2}{27 \omega_1^2} - \frac{2 A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{9 \omega_1^2} - \\ & \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 - i T_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{7 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 - i T_0 \omega_1} \delta_2 A_1 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2} - \\ & \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_2 - i T_1 - i T_0 \omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2}{27 \omega_1^2} - \\ & \left. \frac{2 E^{i T_0 \omega_2 + i T_1 - i T_0 \omega_2} \delta_3 A_1 \bar{A}_2}{9 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{7 \omega_1^2} - \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{9 \omega_1^2} \right) \Bigg\} \end{aligned} \right\}$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\left\{ 2 I \omega_1 A_1 == 2 I \epsilon^2 \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 - \frac{19 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1}{5 \omega_1^2} - \frac{106 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{315 \omega_1^2} - \frac{54 I A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} \right. \right.$$

$$\frac{106 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{315 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_1 A_2 \alpha_2 \Lambda_1}{\omega_1} + \frac{12 I A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{19 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{45 \omega_1^2} +$$

$$\frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \bar{A}_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{9 I E^{IT_2} \sigma_1 + IT_2 \sigma_2 + IT_1}{\omega_1^2} \delta_1^2 \Lambda_1 \bar{A}_1^2 -$$

$$\frac{3 I E^{IT_2} \sigma_1 - IT_2 \sigma_2 + IT_1}{5 \omega_1^2} \delta_2^2 \Lambda_1 \bar{A}_1^2 - \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_1 A_2 \alpha_2 \bar{A}_1^2}{2 \omega_1} - \frac{6 I E^{IT_2} \sigma_1 + IT_2 \sigma_2 + IT_1}{\omega_1} \alpha_1 \Lambda_1 \bar{A}_1^2 + \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} -$$

$$\frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{35 \omega_1^2} - \frac{2 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{18 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{5 \omega_1^2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 -$$

$$\left. \frac{106 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{315 \omega_1^2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2 - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{\omega_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_2 \right\},$$

$$2 I \omega_2 A_2 == 2 I \epsilon^2 \omega_2 \left(-A_2 \mu_2 - \frac{I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_2}{4 \omega_2} f_2 - \frac{I E^{-IT_2} \sigma_1 A_1^2 \alpha_2}{2 \omega_2} - \frac{3 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_2^2 \alpha_4 \Lambda_1}{2 \omega_2} +
 \right.$$

$$\frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{2 \omega_2} \alpha_2 \Lambda_1^2 + \frac{I E^{-IT_2} \sigma_1 A_1^2 \delta_1 \delta_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-IT_2} \sigma_1 A_1^2 \delta_2 \delta_3}{5 \omega_1^2 \omega_2} -$$

$$\frac{69 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_2^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-IT_2} \sigma_2^{-IT_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1}{9 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{68 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{35 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_1^2 \omega_2} -$$

$$\frac{4 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{27 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{2 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{207 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2 - \frac{5 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{27 \omega_1^2 \omega_2} \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2 +$$

$$\frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} + \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{\omega_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 + \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} -$$

$$\frac{2 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{18 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{5 \omega_1^2 \omega_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1 - \frac{106 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{315 \omega_1^2 \omega_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_1 +$$

$$\frac{6 I A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{\omega_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \bar{A}_2 + \frac{I E^{2IT_2} \sigma_2 + 2IT_1}{\omega_2} \alpha_1 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 - \frac{69 I A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{35 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I A_2^2 \delta_1^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} -$$

$$\left. \frac{138 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2 - \frac{10 I E^{IT_2} \sigma_2 + IT_1}{9 \omega_1^2 \omega_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \bar{A}_2 - \frac{2 I E^{2IT_2} \sigma_2 + 2IT_1}{\omega_1^2 \omega_2} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 - \right.$$

$$\left. \frac{3 I E^{2IT_2} \sigma_2 + 2IT_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 - \frac{2 I E^{2IT_2} \sigma_2 + 2IT_1}{9 \omega_1^2 \omega_2} \delta_2^2 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 - \frac{I E^{2IT_2} \sigma_2 + 2IT_1}{9 \omega_1^2 \omega_2} \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2 \bar{A}_2 \right\}$$

{66.906 Second, Null}

6.1.6 $\Omega \approx \omega_2 - 2\omega_1$ και $\omega_2 \approx 3\omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε έναν πρωτεύοντα συντονισμό της πρώτης μορφής, έναν υπεραρμονικό συντονισμό της δεύτερης μορφής, και έναν τρία-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό. Θέτουμε :

$$\text{scaling6} = \{ \hat{\mu}_r \rightarrow \epsilon^2 \mu_r, F_1 \rightarrow \epsilon^3 f_1, F_2 \rightarrow \epsilon f_2 \};$$

$$\text{ResonanceCond6} = \{ \omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == \omega_2 - 2 \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_2 \};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των μιγαδικών-τιμών συναρτήσεων A_k :

$$\text{MMS}[\text{scaling6}, \text{ResonanceCond6}] // \text{Timing}$$

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 u_1[\tau] &= e^{(E^{i\tau_0 \omega_1} A_1 + E^{-i\tau_0 \omega_1} \bar{A}_1)} + \\
 &= e^2 \left\{ \frac{E^{2i\tau_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_1 + i\tau_0 \omega_2} A_1^2 \delta_2}{15 \omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau_0 \omega_2} A_1^2 \delta_3}{35 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 - i\tau_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \right. \\
 &\quad \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 + i\tau_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 + i\tau_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 + i\tau_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} + \\
 &\quad \frac{E^{-2i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2} \delta_2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau_0 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_1 - i\tau_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_1 + i\tau_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \\
 &\quad \frac{2 A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 - i\tau_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 - i\tau_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 - i\tau_0 \omega_2} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{15 \omega_1^2} - \\
 &\quad \left. \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 - i\tau_0 \omega_2} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_1 - i\tau_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1^2}{15 \omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1^2}{35 \omega_1^2} \right\}, \\
 u_2[\tau] &= e^{(E^{i\tau_0 \omega_2} A_2 + E^{-i\tau_0 \omega_2} \bar{A}_2)} + \\
 &= e^2 \left\{ \frac{E^{2i\tau_0 \omega_1} A_2^2 \delta_2}{5 \omega_1^2} + \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_1 + i\tau_0 \omega_2} A_2^2 \delta_3}{7 \omega_1^2} + \frac{E^{2i\tau_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4}{9 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 + i\tau_0 \omega_1} A_2 \delta_2 \Lambda_2}{9 \omega_1^2} - \right. \\
 &\quad \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 + i\tau_0 \omega_1} A_2 \delta_2 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} - \frac{6 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 + i\tau_0 \omega_2} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{5 \omega_1^2} - \frac{6 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 + i\tau_0 \omega_2} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{7 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_4 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} + \\
 &\quad \frac{3 E^{-2i\tau_0 \omega_2 - 2i\tau_2} \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} - \frac{3 E^{2i\tau_0 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{9 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_1 - i\tau_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_1 + i\tau_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \\
 &\quad \frac{2 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 - i\tau_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \frac{2 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 - i\tau_0 \omega_1} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_2}{9 \omega_1^2} + \frac{6 E^{-i\tau_0 \omega_2 - i\tau_2 - i\tau_0 \omega_2} \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{7 \omega_1^2} - \\
 &\quad \left. \frac{6 E^{i\tau_0 \omega_2 + i\tau_2 - i\tau_0 \omega_2} \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{-2i\tau_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_2^2}{5 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-i\tau_0 \omega_1 - i\tau_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2}{7 \omega_1^2} + \frac{E^{-2i\tau_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{9 \omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\Lambda_i = \frac{f_i}{2(\omega_i^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\begin{aligned}
 (2 I \omega_1 \bar{A}_1 &= 2 I e^{2 \omega_1} \\
 -A_1 \omega_1 &- \frac{5 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{19 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_1^2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2}{45 \omega_1^2} - \frac{4 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} + \\
 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - 2i\tau_2 \omega_2 - 2i\tau_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2^2 &- \frac{2 \theta I A_1 \delta_3^2 \Lambda_2^2}{45 \omega_1^2} - \frac{2 I A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2}{3 \omega_1^2} - \frac{9 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - 2i\tau_2 \omega_2 - 2i\tau_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} - \\
 5 I E^{i\tau_2 \omega_1 + i\tau_2 \omega_2 + i\tau_2} \delta_2 \delta_3 \Lambda_2^2 &- \frac{19 I E^{i\tau_2 \omega_1 + i\tau_2 \omega_2 + i\tau_2} \delta_3 \delta_4 \Lambda_2^2}{15 \omega_1^2} - \frac{I E^{i\tau_2 \omega_1 - i\tau_2 \omega_2 + i\tau_1} f_1}{4 \omega_1} + \\
 3 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_1^2 \alpha_2 \Lambda_2 &- \frac{2 I A_1 \alpha_2 \Lambda_2^2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - 2i\tau_2 \omega_2 - 2i\tau_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1} - \frac{3 I E^{i\tau_2 \omega_1 + i\tau_2 \omega_2 + i\tau_2} \alpha_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_1} + \\
 15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1 &- \frac{19 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{45 \omega_1^2} - \frac{10 I E^{-i\tau_2 \omega_1 - i\tau_2 \omega_2 + i\tau_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{4 I E^{-i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_2 \delta_2^2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} + \\
 2 I E^{-i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1 &- \frac{3 \theta I E^{i\tau_2 \omega_1 + i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{45 \omega_1^2} - \frac{4 I E^{-i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_2 \delta_3^2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2} - \\
 6 I E^{-i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_1 &- \frac{2 I E^{2i\tau_2 \omega_1 + 2i\tau_2 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_2^2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{I E^{2i\tau_2 \omega_1 + 2i\tau_2 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_1 \delta_2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\
 2 I E^{2i\tau_2 \omega_1 - 2i\tau_2 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_3^2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1 &- \frac{3 I E^{2i\tau_2 \omega_1 - 2i\tau_2 \omega_2 + 2i\tau_2} \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2} + \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \\
 3 I E^{i\tau_2 \omega_1 + i\tau_2 \omega_2 + i\tau_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_2 \bar{A}_1 &- \frac{2 I E^{-i\tau_2 \omega_2 - i\tau_2} A_2 \alpha_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I E^{2i\tau_2 \omega_1 + 2i\tau_2 \omega_2 - 2i\tau_2} \alpha_2 \Lambda_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1} A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \bar{A}_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1} A_2 \alpha_2 \bar{A}_1^2}{2 \omega_1} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} \\
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{35 \omega_1^2} - \frac{2 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{5 \omega_1^2} \\
 & \frac{106 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{105 \omega_1^2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_1} \Bigg\} \\
 & 2 I \omega_2 A_2' = 2 I \varepsilon^2 \omega_2 \left(-A_2 \mu_2 + \frac{I E^{-i T_2 \sigma_1} A_1^3 \alpha_2}{2 \omega_2} + \frac{I E^{i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_1^3 \alpha_3 \Lambda_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-i T_2 \sigma_1 - i T_2 \sigma_2 - i T_2} A_1 A_2 \alpha_4 \Lambda_2}{\omega_2} \right. \\
 & \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1 + 2 i T_2 \sigma_2 + 2 i T_2} A_1 \alpha_4 \Lambda_2^2}{2 \omega_2} + \frac{12 I A_2 \alpha_5 \Lambda_2^2}{\omega_2} + \frac{2 I E^{2 i T_2 \sigma_1 + 3 i T_2 \sigma_2 + 3 i T_2} \alpha_5 \Lambda_2^3}{\omega_2} + \\
 & \frac{I E^{-i T_2 \sigma_1} A_1^3 \delta_1 \delta_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-i T_2 \sigma_1} A_1^3 \delta_2 \delta_3}{5 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{2 I E^{i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_1^2 \delta_2^2 \Lambda_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2}{\omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{6 I E^{-i T_2 \sigma_1 - i T_2 \sigma_2 - i T_2} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{2 I E^{i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_1^2 \delta_2^2 \Lambda_2}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_1^2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2}{5 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{106 I E^{-i T_2 \sigma_1 - i T_2 \sigma_2 - i T_2} A_1 A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2}{105 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{i T_2 \sigma_1 + 2 i T_2 \sigma_2 + 2 i T_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2^2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{9 I E^{i T_2 \sigma_1 + 2 i T_2 \sigma_2 + 2 i T_2} A_1 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{106 I A_2 \delta_4^2 \Lambda_2^2}{35 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{2 i T_2 \sigma_1 + 3 i T_2 \sigma_2 + 3 i T_2} \delta_3^2 \Lambda_2^3}{3 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{9 I E^{2 i T_2 \sigma_1 + 3 i T_2 \sigma_2 + 3 i T_2} \delta_4^2 \Lambda_2^3}{5 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{3 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{35 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{2 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{5 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \left. \frac{106 I E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2 + i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_1}{105 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2^2 \alpha_5 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{69 I A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{35 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} \right\}
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

{72.154 Second, Null}

6.1.7 $\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$ και $\omega_2 \approx \omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε έναν υποαρμονικό συντονισμό, 1^{ns} ή 2^{ns} μορφής, και έναν ένα-προς-ένα (1:1) εσωτερικό συντονισμό. Θέτουμε :

$$\text{scaling7} = \{ \bar{\mu}_n \rightarrow \varepsilon \mu_n, F_1 \rightarrow \varepsilon f_1, F_2 \rightarrow \varepsilon f_2 \};$$

$$\text{ResonanceCond7} = \{ \omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1, \Omega = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon \sigma_2 \};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των σύνθετων-τιμών συναρτήσεων A_k :

$$\text{MMS}[\text{scaling7}, \text{ResonanceCond7}] // \text{Timing}$$

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 \{ u_1[\tau] = & \left(E^{i T_0 \omega_1} A_1 + E^{-i T_0 \Omega - i \tau_1} \Lambda_1 + E^{i T_0 \Omega + i \tau_1} \Lambda_1 + E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 \right) + \\
 \varepsilon^2 \left(& \frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_1^2 \delta_2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_1^2 \delta_3}{3 \omega_1^2} - \frac{3 E^{-i T_0 \Omega - i \tau_1 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} + \right. \\
 & \frac{3 E^{i T_0 \Omega + i \tau_1 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_1 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0 \Omega - i \tau_1 + i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \Omega + i \tau_1 + i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{6 \delta_1 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} \\
 & \left. \frac{E^{-2 i T_0 \Omega - 2 i \tau_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{2 i T_0 \Omega + 2 i \tau_1} \delta_1 \Lambda_1^2}{5 \omega_1^2} - \frac{E^{-i T_0 \Omega - i \tau_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_0 \Omega - i \tau_2 + i T_0 \omega_1} A_1 \delta_2 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} \right)
 \end{aligned}$$

Άγγελος Χιώτης
Διπλωματική Εργασία

$$\begin{aligned}
 & \frac{E^{-IT_0} \delta_1 \delta_2 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} + \frac{E^{IT_0} \delta_1 \delta_2 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{2 E^{-2IT_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{IT_1+IT_2} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-IT_1+IT_2} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{2IT_0} \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2IT_0} \delta_2 \Lambda_2^2}{15 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{2IT_0} \delta_2 \Lambda_2^2}{15 \omega_1^2} - \frac{I E^{IT_0} \mu_1}{2 \omega_1} - \frac{4 I E^{-IT_0} \mu_1}{3 \omega_1} - \frac{4 I E^{IT_0} \mu_1}{3 \omega_1} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{IT_0} \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-IT_0} \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 A_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{3 E^{-IT_0} \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{3 E^{IT_0} \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} + \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{IT_0} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{IT_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{4 \omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{E^{IT_0} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{I E^{-IT_0} \mu_1 \bar{A}_1}{2 \omega_1} - \frac{E^{-2IT_0} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{-IT_0} \delta_2 \bar{A}_1^2}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{-2IT_0} \delta_3 \bar{A}_1^2}{3 \omega_1^2} \right\} \\
 u_2(t) = & \left(E^{IT_0} \delta_2 \Lambda_2 + E^{-IT_0} \delta_2 \Lambda_2 + E^{IT_0} \delta_2 \Lambda_2 + E^{-IT_0} \delta_2 \bar{A}_2 \right) + \\
 e^{2t} & \left\{ \frac{E^{2IT_0} A_2^2 \delta_2}{3 \omega_1^2} + \frac{2 E^{IT_0} A_2^2 \delta_2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{2IT_0} A_2^2 \delta_4}{\omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} A_2 \delta_2 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} + \right. \\
 & \frac{E^{IT_0} A_2 \delta_2 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} A_2 \delta_2 \Lambda_1}{2 \omega_1^2} + \frac{E^{IT_0} A_2 \delta_3 \Lambda_1}{4 \omega_1^2} - \frac{2 \delta_2 \Lambda_1^2}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-2IT_0} \delta_2 \Lambda_1^2}{15 \omega_1^2} + \frac{E^{2IT_0} \delta_2 \Lambda_1^2}{15 \omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} A_2 \delta_3 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{IT_0} A_2 \delta_3 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{3 E^{-IT_0} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \frac{3 E^{IT_0} A_2 \delta_4 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-2IT_0} \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{IT_1+IT_2} \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-IT_1+IT_2} \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{2IT_0} \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{15 \omega_1^2} - \frac{6 \delta_4 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2IT_0} \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{2IT_0} \delta_4 \Lambda_2^2}{5 \omega_1^2} - \frac{I E^{IT_0} \mu_2}{2 \omega_1} - \frac{4 I E^{-IT_0} \mu_2}{3 \omega_1} - \frac{4 I E^{IT_0} \mu_2}{3 \omega_1} - \frac{2 A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{2 E^{IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{6 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{E^{-IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \frac{E^{IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{3 E^{-IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \left. \frac{3 E^{IT_0} \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{I E^{-IT_0} \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1} - \frac{E^{-2IT_0} \delta_2 \bar{A}_2^2}{3 \omega_1^2} + \frac{2 E^{-IT_0} \delta_3 \bar{A}_2^2}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{-2IT_0} \delta_4 \bar{A}_2^2}{\omega_1^2} \right\}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{f_1}{2 (\omega_1^2 - \Omega^2)}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\begin{aligned}
 & \left(2 I \omega_1 A_1' == 2 I \varepsilon^2 \omega_1 \right. \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{81 I A_1 \delta_1^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2} - \frac{27 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2} - \frac{9 I A_1 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2} - \frac{9 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2} - \frac{27 I E^{i T_1 - i T_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{27 I E^{-i T_1 + i T_2} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{7 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_2 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_2 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_2 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{9 I E^{i T_1 - i T_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{9 I E^{-i T_1 + i T_2} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{7 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 - i T_2} A_2 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_2 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 - i T_2} A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2} - \frac{I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2} - \\
 & \frac{6 I A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} - \frac{9 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \delta_2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2} - \frac{I A_1 \delta_2^2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2}{\omega_1^2} - \frac{27 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2} + \\
 & \frac{12 I A_1 \alpha_1 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \alpha_2 \Lambda_1^2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{i T_1 - i T_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{-i T_1 + i T_2} A_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} - \\
 & \frac{2 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_2 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} + \frac{2 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_2 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_1} - \frac{2 I A_1 \alpha_3 \Lambda_2^2}{\omega_1} - \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2 \alpha_4 \Lambda_2^2}{\omega_1} - \\
 & \frac{I A_1 \mu_1^2}{2 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{10 I E^{i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{5 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 I E^{2 i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \\
 & \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{10 I E^{i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 I E^{2 i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{7 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_1 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_2 \Lambda_2 \mu_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{4 I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_2 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} + \\
 & \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \alpha_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{I E^{2 i T_1 \sigma_1} A_2^2 \alpha_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \\
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \\
 & \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{11 I E^{i T_1 \sigma_2 - i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_2}{6 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_2 - i T_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_1 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \\
 & \frac{11 I E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_2}{6 \omega_1^2} + \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \alpha_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2^2 \alpha_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1} \Big) + \\
 & 2 I \varepsilon \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 + \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_1 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_2 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_1} - \right. \\
 & \left. \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_1} - \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 - i T_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_1} \right), \\
 & 2 I \omega_2 A_2' == 2 I \varepsilon \omega_2 \left(-A_2 \mu_2 + \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \bar{A}_1}{\omega_2} + \right. \\
 & \left. \frac{I E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_3 \Lambda_2 \bar{A}_1}{\omega_2} + \frac{I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_3 \Lambda_1 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_4 \Lambda_2 \bar{A}_2}{\omega_2} \right) + \\
 & 2 I \varepsilon^2 \omega_2 \left(-\frac{I A_2 \mu_2^2}{2 \omega_1} + \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \alpha_2 \Lambda_1^2}{\omega_2} + \frac{2 I A_2 \alpha_3 \Lambda_1^2}{\omega_2} + \frac{2 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_1 \alpha_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} - \right. \\
 & \frac{2 I E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_1 \alpha_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{i T_1 - i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} - \frac{3 I E^{-i T_1 + i T_2} A_2 \alpha_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{\omega_2} + \\
 & \left. \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \alpha_4 \Lambda_2^2}{\omega_2} - \frac{12 I A_2 \alpha_5 \Lambda_2^2}{\omega_2} - \frac{27 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \delta_1 \delta_2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I A_2 \delta_2^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1^2}{\omega_1^2 \omega_2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{9 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I A_2 \delta_3^2 \Lambda_1^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_2 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1^2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_1 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{7 I E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_1 \delta_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_1 \delta_1 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_1 \delta_1 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{9 I E^{i T_1 - i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I E^{-i T_1 + i T_2} A_2 \delta_2 \delta_3 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_1 \delta_3^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{7 I E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_1 \delta_3^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 - i T_2} A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 + i T_2} A_1 \delta_2 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{2 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{27 I E^{i T_1 - i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{27 I E^{-i T_1 - i T_2} A_2 \delta_3 \delta_4 \Lambda_1 \Lambda_2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \delta_2 \delta_3 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I A_2 \delta_3^2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{27 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 \delta_3 \delta_4 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{9 I A_2 \delta_4^2 \Lambda_2^2}{4 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_2 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_1}{2 \omega_1^2} \\
 & \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \alpha_2 \bar{A}_1}{2 \omega_2} - \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} - \frac{3 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2^2 \alpha_4 \bar{A}_1}{2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_3 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{5 I E^{i T_1 \sigma_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{11 E^{i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_2 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_1}{6 \omega_1 \omega_2} - \frac{E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_2 \Lambda_2 \mu_1 \bar{A}_1}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{4 E^{i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_3 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1 \omega_2} \\
 & \frac{E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_3 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} - \frac{3 E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 - i T_2} \delta_4 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1^2} + \frac{I E^{-2 i T_1 \sigma_1} A_1^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \alpha_4 \bar{A}_2}{\omega_2} \\
 & \frac{6 I A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{2 I E^{-2 i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-2 i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{10 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_3 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} \\
 & \frac{2 I E^{-2 i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-2 i T_1 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{10 I E^{-i T_1 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_3 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} \\
 & \left. \frac{4 E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_3 \Lambda_1 \mu_1 \bar{A}_2}{3 \omega_1 \omega_2} - \frac{E^{-i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 + i T_1} \delta_3 \Lambda_1 \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1 \omega_2} - \frac{11 E^{-i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2 + i T_2} \delta_4 \Lambda_2 \mu_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1 \omega_2} \right\}
 \end{aligned}$$

{194.159 Second, Null}

6.1.8 $\Omega \approx 2\omega_2 - \omega_1$ και $\omega_2 \approx \omega_1$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε έναν πρωτεύοντα συντονισμό είτε 1^{ns} είτε 2^{ns} μορφής και έναν ένα-προς-ένα (1:1) εσωτερικό συντονισμό. Θέτουμε :

$$\text{scaling8} = \{\hat{\mu}_{r-} \rightarrow \epsilon^2 \mu_r, F_1 \rightarrow \epsilon^3 f_1, F_2 \rightarrow \epsilon^3 f_2\};$$

$$\text{ResonanceCond8} = \{\omega_2 == \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2 \omega_2 - \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMS, λαμβάνουμε τη δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση και τις δύο εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των σύνθετων-τιμών συναρτήσεων A_k :

MMS[scaling8, ResonanceCond8] // Timing

Η δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση :

$$\begin{aligned}
 u_1[t] & == \epsilon \left(E^{i T_0 \omega_1} A_1 + E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 \right) + \\
 & \epsilon^2 \left(\frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_3}{3 \omega_1^2} - \frac{6 A_1 \delta_1 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} \right. \\
 & \left. - \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_1 \bar{A}_1^2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{2 A_2 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} + \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \delta_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_2^2}{3 \omega_1^2} \right), \\
 u_2[t] & == \epsilon \left(E^{i T_0 \omega_2} A_2 + E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{E^{2 i T_0 \omega_1} A_1^2 \delta_2}{3 \omega_1^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2 E^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} A_1 A_2 \delta_3}{3 \omega_1^2} - \frac{E^{2 i T_0 \omega_2} A_2^2 \delta_4}{\omega_1^2} - \frac{2 A_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} A_2 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{E^{-2 i T_0 \omega_1} \delta_2 \bar{A}_1^2}{3 \omega_1^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} A_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{6 A_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{2 E^{-IT_0 \omega_1 - IT_0 \omega_2} \delta_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} + \frac{E^{-2IT_0 \omega_2} \delta_4 \bar{A}_2^2}{\omega_1^2} \end{aligned} \right\}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης :

$$\left. \begin{aligned} 2 I \omega_1 A_1 & == 2 I \epsilon^2 \omega_1 \left(-A_1 \mu_1 - \frac{I E^{2IT_2 \sigma_1 + IT_2 \sigma_2 + IT_1} f_1}{4 \omega_1} - \frac{15 I A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{10 I E^{IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{5 I A_1^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} \right. \\ & - \frac{2 I E^{2IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{I E^{2IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2} - \frac{10 I E^{IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2} - \frac{2 I E^{2IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} \\ & - \frac{I E^{2IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \frac{6 I A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \alpha_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{I E^{2IT_2 \sigma_1} A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_1} - \frac{5 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} \\ & - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{5 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{5 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2} \\ & \left. - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{5 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{3 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \alpha_2 \bar{A}_2}{2 \omega_1} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_2 \bar{A}_2}{\omega_1} + \frac{3 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \alpha_4 \bar{A}_2}{2 \omega_1} \right), \\ 2 I \omega_2 A_2 & == 2 I \epsilon^2 \omega_2 \left(-A_2 \mu_2 - \frac{I E^{IT_2 \sigma_1 + IT_2 \sigma_2 + IT_2} f_2}{4 \omega_2} + \frac{3 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \alpha_2 \bar{A}_1}{2 \omega_2} + \frac{2 I A_1 A_2 \alpha_3 \bar{A}_1}{\omega_2} + \frac{3 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \alpha_4 \bar{A}_1}{2 \omega_2} \right. \\ & - \frac{5 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_2^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} \\ & - \frac{4 I A_1 A_2 \delta_3^2 \bar{A}_1}{3 \omega_1^2 \omega_2} - \frac{6 I A_1 A_2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I E^{IT_2 \sigma_1} A_2^2 \delta_3 \delta_4 \bar{A}_1}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{I E^{-2IT_2 \sigma_1} A_1^2 \alpha_1 \bar{A}_2}{\omega_2} + \frac{3 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \alpha_4 \bar{A}_2}{\omega_2} \\ & - \frac{6 I A_2^2 \alpha_3 \bar{A}_2}{\omega_2} - \frac{2 I E^{-2IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_1^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{-2IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_1 \delta_3 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{10 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_2 \delta_2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} \\ & \left. - \frac{2 I E^{-2IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{5 I A_2^2 \delta_3^2 \bar{A}_2}{3 \omega_1^2 \omega_2} + \frac{I E^{-2IT_2 \sigma_1} A_1^2 \delta_2 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{10 I E^{-IT_2 \sigma_1} A_1 A_2 \delta_1 \delta_4 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} - \frac{15 I A_2^2 \delta_4^2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 \omega_2} \right) \end{aligned} \right\}$$

{16.664 Second, Null}

6.2 Γραμμικά Συζευγμένα Συστήματα με Παραμετρικές Διεγέρσεις

6.2.1 Ταλαντωτής Δύο Εκκρεμών

Ως παράδειγμα, θεωρούμε έναν παραμετρικά διεγερμένο δύο-εκκρεμών ταλαντωτή με έναν 3:1 εσωτερικό συντονισμό :

eq621a =

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1''[t] + \alpha \theta_2''[t] + \theta_1[t] & == \frac{1}{2} \alpha (\theta_2[t] - \theta_1[t])^2 \theta_2''[t] + \frac{1}{6} \theta_1[t]^3 + \alpha (\theta_2[t] - \theta_1[t]) \theta_2'[t]^2 - \\ & 2 F_1 \Omega^2 \theta_1[t] \text{Cos}[\Omega t], \\ \theta_2''[t] + \theta_1''[t] + \theta_2[t] & == \frac{1}{2} (\theta_2[t] - \theta_1[t])^2 \theta_1''[t] + \frac{1}{6} \theta_2[t]^3 - (\theta_2[t] - \theta_1[t]) \theta_1'[t]^2 - \\ & 2 F_1 \Omega^2 \theta_2[t] \text{Cos}[\Omega t] \end{aligned} \right\};$$

όπου

$$\text{params} = \left\{ \alpha \rightarrow \frac{16}{25} + \epsilon^2 \sigma_1 \right\};$$

για μικρό ϵ . Εδώ, η συχνότητα διεγερσης, Ω , θεωρείται ότι είναι σχεδόν ίση με δύο φορές τη φυσική συχνότητα της δεύτερης μορφής, ω_2 , η οποία είναι τρεις φορές η φυσική συχνότητα της πρώτης μορφής, ω_1 . Έτσι, ορίζουμε τις ακόλουθες λίστες :

omgList = { ω_1 , ω_2 };

ResonanceCond = { $\Omega == 2 \omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2$, $\omega_2 == 3 \omega_1$ };

omgRule = Solve[ResonanceCond, { Ω , #} // Flatten][[1]] & /@ omgList // Reverse

$$\left\{ \left\{ \Omega \rightarrow \varepsilon^2 \sigma_2 + 6 \omega_1, \omega_2 \rightarrow 3 \omega_1 \right\}, \left\{ \Omega \rightarrow \varepsilon^2 \sigma_2 + 2 \omega_2, \omega_1 \rightarrow \frac{\omega_2}{3} \right\} \right\}$$

Με σκοπό να φέρουμε τις επιδράσεις των εξαναγκασμών (forcing) και της μη-γραμμικότητας στην ίδια τάξη, θέτουμε :

$$\text{scaling} = \{F_1 \rightarrow \varepsilon^2 f_1\};$$

Για μια συνεπή ανάπτυξη, πρώτα μετατρέπουμε την eq621a σε ένα σύστημα από τέσσερις πρώτης-τάξης εξισώσεις. Γι' αυτό το σκοπό, εισάγουμε τις δύο καταστάσεις $v_1[t]$ και $v_2[t]$ που ορίζονται από :

$$\text{vel} = \{\theta_1'[t] \rightarrow v_1[t], \theta_2'[t] \rightarrow v_2[t]\};$$

Αντικαθιστώντας τους όρους της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, χρησιμοποιώντας τη vel, στην eq621a και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τη vel, μετασχηματίζουμε την eq621a στο ακόλουθο σύστημα από τέσσερις πρώτης-τάξης εξισώσεις :

$$\text{eq621b} = \{\text{vel} /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal}, \text{eq621a} /. \text{D}[\text{vel}, t] /. \text{vel}\} // \text{Transpose} // \text{Flatten}$$

$$\begin{aligned} \{\theta_1'[t] == v_1[t], \theta_1[t] + v_1'[t] - \alpha v_2'[t] == \\ -2 \Omega^2 \text{Cos}[t \Omega] F_1 \theta_1[t] + \frac{1}{6} \theta_1[t]^3 + \alpha v_2[t]^2 (-\theta_1[t] + \theta_2[t]) + \frac{1}{2} \alpha (-\theta_1[t] + \theta_2[t])^2 v_2[t], \\ \theta_2'[t] == v_2[t], \theta_2[t] + v_1'[t] + v_2'[t] == \\ -2 \Omega^2 \text{Cos}[t \Omega] F_1 \theta_2[t] + \frac{1}{6} \theta_2[t]^3 - v_1[t]^2 (-\theta_1[t] + \theta_2[t]) + \frac{1}{2} (-\theta_1[t] + \theta_2[t])^2 v_1[t]\} \end{aligned}$$

Αναζητούμε μια ομοιόμορφη δεύτερης-τάξης ανάπτυξη της λύσης της eq621b στη μορφή :

$$\text{solRule} = \{\theta_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[\varepsilon^j \theta_{i,j}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&), v_{i_} \rightarrow (\text{Sum}[\varepsilon^j v_{i,j}[\#1, \#2, \#3], \{j, 3\}] \&)\};$$

$$\text{maxOrder} = 2;$$

Χρησιμοποιώντας τις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , εκφράζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές και τις χρονικές τους παραγώγους ως :

$$\begin{aligned} \text{multiScales} = \{\theta_{i_}[t] \rightarrow \theta_{i_} @@ \text{timeScales}, v_{i_}[t] \rightarrow v_{i_} @@ \text{timeScales}, \\ \text{Derivative}[1][u_][t] \rightarrow \text{dt}[1][u @@ \text{timeScales}], t \rightarrow T_0\}; \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις params, scaling, multiScales και solRule στην eq621b, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε^3 , παίρνουμε :

$$\text{eq621c} = (\text{eq621b} /. \text{params} /. \text{scaling} /. \text{multiScales} /. \text{solRule} // \text{TrigToExp} // \text{ExpandAll}) /. \varepsilon^{\text{#} / :> 3} \rightarrow 0;$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε , παίρνουμε :

$$\text{eqEps} = \text{Rest}[\text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract} @@ \#, \varepsilon] == 0]] \& /@ \text{eq621c} // \text{Transpose};$$

Για να τοποθετήσουμε τον γραμμικό τελεστή στη μια πλευρά και τους μη-ομογενείς όρους στην άλλη πλευρά, ορίζουμε :

$$\begin{aligned} \text{eqOrder}[i_]:= \\ (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. f_{\varepsilon_} \rightarrow 0 /. u_{\varepsilon_k,1} \rightarrow u_{\varepsilon,k}) == \\ (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]] /. f_{\varepsilon_} \rightarrow 0 /. u_{\varepsilon_k,1} \rightarrow u_{\varepsilon,k}) - (\#[[1]] \& /@ \text{eqEps}[[1]]) // \text{Thread} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την eqOrder[i] και τον displayRule, ξαναγράφουμε την eqEps κατ' έναν ακριβή τρόπο, ως εξής :

$$\text{eqOrder}[1] /. \text{displayRule}$$

$$\text{eqOrder}[2] /. \text{displayRule}$$

$$\text{eqOrder}[3] /. \text{displayRule}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 \theta_{1,1} - v_{1,1} &= 0, D_0 v_{1,1} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,1}) + \theta_{1,1} = 0, D_0 \theta_{2,1} - v_{2,1} = 0, D_0 v_{1,1} + D_0 v_{2,1} + \theta_{2,1} = 0 \\ D_0 \theta_{1,2} - v_{1,2} &= -(D_1 \theta_{1,1}), D_0 v_{1,2} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,2}) + \theta_{1,2} = -(D_1 v_{1,1}) - \frac{16}{25} (D_1 v_{2,1}), \\ D_0 \theta_{2,2} - v_{2,2} &= -(D_1 \theta_{2,1}), D_0 v_{1,2} - D_0 v_{2,2} - \theta_{2,2} = -(D_1 v_{1,1}) - D_1 v_{2,1} \\ D_0 \theta_{1,3} - v_{1,3} &= -(D_1 \theta_{1,2}) - D_2 \theta_{1,1}, \\ D_0 v_{1,3} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,3}) + \theta_{1,3} &= -(D_1 v_{1,2}) - \frac{16}{25} (D_1 v_{2,2}) - D_2 v_{1,1} - \frac{16}{25} (D_2 v_{2,1}) - (D_0 v_{2,1}) \sigma_1 - E^{-i\tau_0} \Omega^2 \mathbf{f}_1 \theta_{1,1} - \\ E^{i\tau_0} \Omega^2 \mathbf{f}_1 \theta_{1,1} - \frac{16}{25} v_{2,1}^2 \theta_{1,1} - \frac{9}{25} (D_0 v_{2,1}) \theta_{1,1}^2 + \frac{\theta_{1,1}^2}{6} + \frac{16}{25} v_{2,1}^2 \theta_{2,1} - \frac{16}{25} (D_0 v_{2,1}) \theta_{1,1} \theta_{2,1} + \frac{9}{25} (D_0 v_{2,1}) \theta_{2,1}^2, \\ D_0 \theta_{2,3} - v_{2,3} &= -(D_1 \theta_{2,2}) - D_2 \theta_{2,1}, D_0 v_{1,3} + D_0 v_{2,3} + \theta_{2,3} = -(D_1 v_{1,2}) - D_1 v_{2,2} - D_2 v_{1,1} - D_2 v_{2,1} - v_{1,1}^2 \theta_{1,1} - \\ \frac{1}{2} (D_0 v_{1,1}) \theta_{1,1}^2 - E^{-i\tau_0} \Omega^2 \mathbf{f}_1 \theta_{2,1} - E^{i\tau_0} \Omega^2 \mathbf{f}_1 \theta_{2,1} - v_{1,1}^2 \theta_{2,1} - (D_0 v_{1,1}) \theta_{1,1} \theta_{2,1} - \frac{1}{2} (D_0 v_{1,1}) \theta_{2,1}^2 - \frac{\theta_{2,1}^2}{6} \end{aligned} \right\}$$

• Πρώτης-Τάξης Πρόβλημα : Γραμμικό Σύστημα

Το πρώτης-τάξης πρόβλημα, eqOrder[1], αποτελείται από ένα σύνολο από συζευγμένες γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις. Έτσι, η γενική λύση είναι η λύση των ομογενών εξισώσεων. Για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος, ξαναγράφουμε την eqOrder[1] ως εξής :

```
linearSys = # [[1]] & /@ eqOrder[1];
linearSys /. displayRule
```

$$\left\{ D_0 \theta_{1,1} - v_{1,1}, D_0 v_{1,1} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,1}) + \theta_{1,1}, D_0 \theta_{2,1} - v_{2,1}, D_0 v_{1,1} + D_0 v_{2,1} + \theta_{2,1} \right\}$$

Κατόπιν, αναζητούμε μια λύση της linearSys στη μορφή :

$$\text{assumedForm} = \{ \theta_{i,1} \rightarrow (c_i E^{i \omega t} \mathbf{e}_i), v_{i,1} \rightarrow (d_i E^{i \omega t} \mathbf{e}_i) \};$$

Αντικαθιστώντας την assumedForm στην linearSys και συλλέγοντας συντελεστές των c_i και d_i , λαμβάνουμε το μητρώο συντελεστών ως εξής :

$$\text{coefMat} = \text{Outer}[D, E^{-i \omega t} \text{linearSys} /. \text{assumedForm} // \text{Expand}, \{c_1, d_1, c_2, d_2\}]$$

$$\left\{ \{I \omega, -1, 0, 0\}, \left\{ 1, I \omega, 0, \frac{16 I \omega}{25} \right\}, \{0, 0, I \omega, -1\}, \{0, I \omega, 1, I \omega\} \right\}$$

του οποίου ο συζυγής τελεστής ορίζεται από :

$$\text{hermitian}[\text{mat}_? \text{MatrixQ}] := \text{mat} /. \text{conjugateRule} // \text{Transpose}$$

Οι φυσικές συχνότητες των δύο εμπλεκόμενων μορφών, είναι :

$$\text{evals} = \text{Cases}[\omega /. \text{Solve}[\text{Det}[\text{coefMat}] == 0, \omega], n_ /; n > 0]$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{5}}{3}, \sqrt{5} \right\}$$

Έτσι, τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα της coefMat που αντιστοιχούν στην evals, είναι :

$$\text{rightVec} = \# / \# [[1]] \& /@ (\text{NullSpace}[\text{coefMat} /. \omega \rightarrow \#] [[1]] \& /@ \text{evals})$$

$$\left\{ \left\{ 1, \frac{I \sqrt{5}}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5 I \sqrt{5}}{12} \right\}, \left\{ 1, I \sqrt{5}, -\frac{5}{4}, -\frac{5 I \sqrt{5}}{4} \right\} \right\}$$

$$\text{leftVec} = \text{NullSpace}[\text{hermitian}[\text{coefMat}] /. \omega \rightarrow \#] [[1]] \& /@ \text{evals}$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{3 I \sqrt{5}}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3 I}{\sqrt{5}}, 1 \right\}, \left\{ \frac{I \sqrt{5}}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{I}{\sqrt{5}}, 1 \right\} \right\}$$

των οποίων τα συζυγή μιγαδικά είναι :

`ccleftVec = leftVec /. conjugateRule`

$$\left\{ \left\{ \frac{3 I \sqrt{5}}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3 I}{\sqrt{5}}, 1 \right\}, \left\{ -\frac{I \sqrt{5}}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{I}{\sqrt{5}}, 1 \right\} \right\}$$

Βασισμένοι στο `rightVec`, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μορφή της γενικής λύσης ως εξής :

`sollForm = Transpose[rightVec].{A1[T1, T2] Ei ω1 T0, A2[T1, T2] Ei ω2 T0}`

$$\left\{ E^{i T_0 \omega_1} A_1[T_1, T_2] + E^{i T_0 \omega_2} A_2[T_1, T_2], \frac{1}{3} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} A_1[T_1, T_2] - I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} A_2[T_1, T_2], \right. \\ \left. \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_1} A_1[T_1, T_2] - \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_2} A_2[T_1, T_2], \frac{5}{12} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} A_1[T_1, T_2] - \frac{5}{4} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} A_2[T_1, T_2] \right\}$$

όπου

$$\omega_1 = \sqrt{5}/3$$

και

$$\omega_2 = \sqrt{5}$$

Επομένως, η γενική λύση της `eqOrder[1]` μπορεί να εκφραστεί σε μορφή καθαρής συνάρτησης ως :

`soll =`

`{θ1,1, v1,1, θ2,1, v2,1} -> (Function[{T0, T1, T2}, # + (# /. conjugateRule) // Evaluate] & /@ sollForm) // Thread;`

`soll /. displayRule`

$$\left\{ \theta_{1,1} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), E^{i T_0 \omega_1} A_1 - E^{i T_0 \omega_2} A_2 + E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 + E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2], \right. \\ v_{1,1} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{1}{3} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} A_1 - I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} A_2 - \frac{1}{3} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 - I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2], \\ \theta_{2,1} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_1} A_1 - \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_2} A_2 + \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 - \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2], \\ \left. v_{2,1} \rightarrow \text{Function}[(T_0, T_1, T_2), \frac{5}{12} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} A_1 - \frac{5}{4} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} A_2 - \frac{5}{12} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 + \frac{5}{4} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2] \right\}$$

όπου τα A_1 και A_2 θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες επιλυσιμότητας στα επόμενα επίπεδα προσέγγισης.

• Δεύτερης-Τάξης Πρόβλημα

Αντικαθιστώντας την πρώτης-τάξης λύση `soll` στο δεύτερης-τάξης πρόβλημα, `eqOrder[2]`, προκύπτει:

`order2Eq = eqOrder[2] /. soll // ExpandAll;`

`order2Eq /. displayRule`

$$\left\{ D_0 \theta_{1,2} - v_{1,2} == -E^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) - E^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) - E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) - E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2), \right. \\ D_0 v_{1,2} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,2}) + \theta_{1,2} == \\ -\frac{4 I E^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1)}{3 \sqrt{5}} - \frac{1}{3} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) + \frac{4 I E^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2)}{\sqrt{5}} - I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) + \\ \frac{4 I E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1)}{3 \sqrt{5}} - \frac{1}{3} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) - \frac{4 I E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2)}{\sqrt{5}} + I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2), \\ D_0 \theta_{2,2} - v_{2,2} == -\frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) + \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) - \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) - \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2), \\ \left. D_0 v_{1,2} + D_0 v_{2,2} + \theta_{2,2} == \right. \\ \left. -\frac{3}{4} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) + \frac{1}{4} I \sqrt{5} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) + \frac{3}{4} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) - \frac{1}{4} I \sqrt{5} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \right\}$$

Για μια ομοιόμορφη ανάπτυξη, επιλέγουμε τα $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$ για να απαλείψουμε τους προσωρινούς ή τους μικρού-διαίρητη όρους. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα μετατρέπουμε τους όρους μικρού διαίρητη σε προσωρινούς όρους χρησιμοποιώντας τον κανόνα :

`exprRule1[i_] := Exp[a_] -> Exp[Expand[a /. omgRule[[i]]] /. e2 T0 -> T2]`

Για να απαλείψουμε τους όρους που παράγουν προσωρινούς όρους (δηλ., να προσδιορίσουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας) από την order2Eq, συλλέγουμε τους όρους τους ανάλογους με $E^{i\omega_1 T_0}$ και $E^{i\omega_2 T_0}$ και παίρνουμε :

ST11 = Coefficient[order2Eq[#, 2]] /. expRule1[1], E^{i ω₁ T₀} & /@ Range[4]

$$\left\{ -A_1^{(1,0)} [T_1, T_2], -\frac{3 I A_1^{(1,0)} [T_1, T_2]}{\sqrt{5}}, -\frac{5}{4} A_1^{(1,0)} [T_1, T_2], -\frac{3}{4} I \sqrt{5} A_1^{(1,0)} [T_1, T_2] \right\}$$

ST12 = Coefficient[order2Eq[#, 2]] /. expRule1[2], E^{i ω₂ T₀} & /@ Range[4]

$$\left\{ -A_2^{(1,0)} [T_1, T_2], -\frac{I A_2^{(1,0)} [T_1, T_2]}{\sqrt{5}}, \frac{5}{4} A_2^{(1,0)} [T_1, T_2], \frac{1}{4} I \sqrt{5} A_2^{(1,0)} [T_1, T_2] \right\}$$

Τότε, οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν τα ST11 και ST12 να είναι ορθογωνικά σε κάθε λύση του αντίστοιχου προβλήματος του συζυγούς τελεστή, δηλαδή, στα συστατικά του cleftVec. Το αποτέλεσμα είναι:

SCond11 = ccleftVec[[1]].ST11 == 0

$$-3 I \sqrt{5} A_1^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0$$

SCond12 = ccleftVec[[2]].ST12 == 0

$$I \sqrt{5} A_2^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0$$

Επιλύοντας τις SCond11 και SCond12 για $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$, αντίστοιχα, προκύπτει :

SCond11Rule = Solve[SCond11, A₁^(1,0) [T₁, T₂]] [[1]]

$$\{A_1^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

SCond12Rule = Solve[SCond12, A₂^(1,0) [T₁, T₂]] [[1]]

$$\{A_2^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

SCond1Rule = Join[SCond11Rule, SCond12Rule];

του οποίου το συζυγές μιγαδικό είναι

ccSCond1Rule = SCond1Rule /. conjugateRule;

Αντικαθιστώντας τις SCond1Rule και ccSCond1Rule στην order2Eq, παίρνουμε :

order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule /. ccSCond1Rule // ExpandAll;

order2Eqm /. displayRule

$$\{D_0 \theta_{1,2} - v_{1,2} == 0, D_0 v_{1,2} + \frac{16}{25} (D_0 v_{2,2}) + \theta_{1,2} == 0, D_0 \theta_{2,2} - v_{2,2} == 0, D_0 v_{1,2} + D_0 v_{2,2} + \theta_{2,2} == 0\}$$

το οποίο είναι ένα σύστημα από ομογενείς εξισώσεις. Κατόπιν, εκφράζουμε τη λύση των δεύτερης-τάξης εξισώσεων σε μορφή καθαρής συνάρτησης, ως εξής :

$$\text{sol2} = \{\theta_{1,2} \rightarrow (0 \ \&), v_{1,2} \rightarrow (0 \ \&), \theta_{2,2} \rightarrow (0 \ \&), v_{2,2} \rightarrow (0 \ \&)\};$$

- Τρίτης-Τάξης Πρόβλημα

Αντικαθιστώντας τις πρώτης- και δεύτερης- τάξης λύσεις στο τρίτης-τάξης πρόβλημα, eqOrder[3], προκύπτει :

order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;

Αντικαθιστώντας την `expRule1` στις δεξιές πλευρές των `order3Eq` και συλλέγοντας τους όρους που θα μπορούσαν να παράγουν προσωρινούς όρους, τους όρους ανάλογους στα $E^{i\omega_1 T_0}$ και $E^{i\omega_2 T_0}$, έχουμε:

`ST21 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[1], E^{i\omega_1 T_0}] & /@ order3Eq;`

`ST21 /. displayRule`

$$\left\{ -(D_2 A_1), -\frac{3 I (D_2 A_1)}{\sqrt{5}} + \frac{5}{12} \sqrt{5} A_1 \sigma_1 \omega_1 + \frac{23}{36} A_1^2 \bar{A}_1 - \frac{A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1}{3 \sqrt{5}} + \frac{11}{12} A_2 \bar{A}_1^2 + \frac{3 A_2 \omega_1 \bar{A}_1^2}{4 \sqrt{5}} + \frac{A_2 \omega_2 \bar{A}_1^2}{3 \sqrt{5}} - \frac{7}{2} A_1 A_2 \bar{A}_2 - \frac{27 A_1 A_2 \omega_1 \bar{A}_2}{4 \sqrt{5}} - \frac{9 A_1 A_2 \omega_2 \bar{A}_2}{2 \sqrt{5}}, -\frac{5}{4} (D_2 A_1), -\frac{3}{4} I \sqrt{5} (D_2 A_1) + \frac{965 A_1^2 \bar{A}_1}{1152} - \frac{1}{32} \sqrt{5} A_1^2 \omega_1 \bar{A}_1 - \frac{1175}{384} A_2 \bar{A}_1^2 + \frac{3}{16} \sqrt{5} A_2 \omega_1 \bar{A}_1^2 - \frac{1}{32} \sqrt{5} A_2 \omega_2 \bar{A}_1^2 - \frac{35}{64} A_1 A_2 \bar{A}_2 - \frac{27}{16} \sqrt{5} A_1 A_2 \omega_1 \bar{A}_2 + \frac{9}{8} \sqrt{5} A_1 A_2 \omega_2 \bar{A}_2 \right\}$$

`ST22 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[2], E^{i\omega_2 T_0}] & /@ order3Eq;`

`ST22 /. displayRule`

$$\left\{ -(D_2 A_2), -\frac{I (D_2 A_2)}{\sqrt{5}} + \frac{A_1^2}{36} - \frac{A_1^2 \omega_1}{24 \sqrt{5}} - \frac{5}{4} \sqrt{5} A_2 \sigma_1 \omega_2 - \frac{3}{2} A_1 A_2 \bar{A}_1 + \frac{3 A_1 A_2 \omega_1 \bar{A}_1}{2 \sqrt{5}} + \frac{A_1 A_2 \omega_2 \bar{A}_1}{4 \sqrt{5}} - \frac{43}{4} A_2^2 \bar{A}_2 - E^{i T_2 \sigma_2} \Omega^2 f_1 \bar{A}_2 + \frac{243 A_2^2 \omega_2 \bar{A}_2}{8 \sqrt{5}}, \frac{5}{4} (D_2 A_2), \frac{1}{4} I \sqrt{5} (D_2 A_2) + \frac{535 A_1^2}{1152} - \frac{1}{96} \sqrt{5} A_1^2 \omega_1 + \frac{35}{64} A_1 A_2 \bar{A}_1 + \frac{3}{8} \sqrt{5} A_1 A_2 \omega_1 \bar{A}_1 - \frac{1}{16} \sqrt{5} A_1 A_2 \omega_2 \bar{A}_1 + \frac{1315}{128} A_2^2 \bar{A}_2 + \frac{5}{4} E^{i T_2 \sigma_2} \Omega^2 f_1 \bar{A}_2 - \frac{243}{32} \sqrt{5} A_2^2 \omega_2 \bar{A}_2 \right\}$$

Κατόπιν, οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν τα `ST21` και `ST22` να είναι ορθογωνικά στους αντίστοιχους συζυγείς τελεστές (adjoints) τους. Το αποτέλεσμα:

`SCond21 = Solve[ccleftVec[[1]].ST21 == 0, A_1^{(0,1)}[T_1, T_2]][[1]] /. {omega_1 -> sqrt(5)/3, omega_2 -> sqrt(5)} //`

`ExpandAll;`

`SCond21 /. displayRule`

$$\left\{ D_2 A_1 + \frac{25}{432} I \sqrt{5} A_1 \sigma_1 - \frac{353 I \sqrt{5} A_1^2 \bar{A}_1}{3456} + \frac{11}{128} I \sqrt{5} A_2 \bar{A}_1^2 + \frac{23}{192} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_2 \right\}$$

`SCond22 = Solve[ccleftVec[[2]].ST22 == 0, A_2^{(0,1)}[T_1, T_2]][[1]] /.`

`{Omega -> 2 sqrt(5), omega_1 -> sqrt(5)/3, omega_2 -> sqrt(5)} // ExpandAll;`

`SCond22 /. displayRule`

$$\left\{ D_2 A_2 + \frac{11}{128} I \sqrt{5} A_1^2 + \frac{25}{16} I \sqrt{5} A_2 \sigma_1 + \frac{23}{64} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_1 - \frac{1337}{128} I \sqrt{5} A_2^2 \bar{A}_2 + 10 I \sqrt{5} E^{i T_2 \sigma_2} f_1 \bar{A}_2 \right\}$$

• Επανασύσταση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επανασύστασης, συνδυάζουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις `SCond1Rule` και `SCond2Rule` στις ακόλουθες δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των μιγαδικών-τιμών συναρτήσεων A_k :

```

moduEq =
  Table[2 I ωk Ak', {k, 2}] == (Table[2 I ωk dt[1][ Ak[T1, T2]], {k, 2}) /. SCond1Rule /. SCond2Rule //
  Thread;
moduEq /. displayRule

```

$$\left\{ \begin{aligned}
2 I \omega_1 A_1' &== 2 I \epsilon^2 \omega_1 \left[-\frac{25}{432} I \sqrt{5} A_1 \sigma_1 - \frac{353 I \sqrt{5} A_1^2 \bar{A}_1}{3456} + \frac{11}{128} I \sqrt{5} A_2 \bar{A}_1^2 + \frac{23}{192} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_2 \right], \\
2 I \omega_2 A_2' &== 2 I \epsilon^2 \omega_2 \left[\frac{11}{128} I \sqrt{5} A_1^2 + \frac{25}{16} I \sqrt{5} A_2 \sigma_1 + \frac{23}{64} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_1 - \frac{1337}{128} I \sqrt{5} A_2^2 \bar{A}_2 + 10 I \sqrt{5} E^{i T_2 \omega_2} f_1 \bar{A}_2 \right]
\end{aligned} \right\}$$

6.2.2 Η συνάρτηση MMSC

Σύμφωνα με τις διαδικασίες που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, δημιουργούμε μια συνάρτηση με το όνομα MMSC (Method of Multiple Scales for Linearly Coupled Systems) για να αυτοματοποιήσουμε τη διαδικασία.

```

MMSC[eqs_List, depVar_List, scaling_List, ResonanceCond : {__Equal}] :=
  Module[{}],
    omgList = {ω1, ω2};
    omgRule = Solve[ResonanceCond, {0, #} // Flatten][[1]] & /@ omgList //
    Reverse;
    mydepVar = {u1, v1, u2, v2};
    solRule = {ui -> (Sum[ε^j ui,j[#1, #2, #3], {j, 3}] &),
      vi -> (Sum[ε^j vi,j[#1, #2, #3], {j, 3}] &)};
    maxOrder = 2;

    multiScales = {ui[t] -> ui @@ timeScales, vi[t] -> vi @@ timeScales,
      Derivative[1][ui][t] -> dt[1][u @@ timeScales], t -> T0};

    eqa =
      (eqs /. Thread[depVar -> mydepVar] /. scaling /. multiScales /. solRule //
        TrigToExp // ExpandAll) /. ε^(n_ /; n > 3) -> 0;

    eqEps = Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0]] & /@ eqa // Transpose;
    eqOrder[i_] :=
      (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. fs_ -> 0 /. uk,1 -> uk,i) ==
      (#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. fs_ -> 0 /. uk,1 -> uk,i) - (#[[1]] & /@ eqEps[[i]]) //
      Thread;

    (* First-Order Problem *)
    linearSys = #[[1]] & /@ eqOrder[1];
    assumedForm = {ui,1 -> (ci E^(I ω #) &), vi,1 -> (di E^(I ω #) &)};

    coefMat = Outer[D, E^(-I ω T0) linearSys /. assumedForm // Expand, {c1, d1, c2, d2};
    hermitian[mat_?MatrixQ] := mat /. conjugateRule // Transpose;
    evals = Cases[ω /. Solve[Det[coefMat] == 0, ω], n_ /; n > 0];
    values = Append[omgRule[[1]] /. ε -> 0 /. ω1 -> evals[[1]], ω1 -> evals[[1]]];

```

```

rightVec = # / # [[1]] & /@ (NullSpace[coefMat /. ω -> #] [[1]] & /@ evals);
leftVec = NullSpace[hermitian[coefMat] /. ω -> #] [[1]] & /@ evals;
ccleftVec = leftVec /. conjugateRule;
order1Eq = eqOrder[1] /. u_{i,1} -> (u_{i,1} #1 &);
sol1p = DSolve[order1Eq, {u_{1,1}[T0], v_{1,1}[T0], u_{2,1}[T0], v_{2,1}[T0]}, T0] [[1]] /.
C[_] -> 0 // Simplify;
fRule = {f_i -> 2 A_i (ω_i^2 - Ω^2)};

sol1Form = (# [[2]] & /@ sol1p) +
((# + (# /. conjugateRule)) & /@
(Transpose[rightVec].{A_1[T_1, T_2] E^(I ω_1 T_0), A_2[T_1, T_2] E^(I ω_2 T_0)}));

sol1 =
{u_{1,1}, v_{1,1}, u_{2,1}, v_{2,1}} -> (Function[{T_0, T_1, T_2}, # // Evaluate] & /@ sol1Form) //
Thread;

(* Second-Order Problem *)
order2Eq = eqOrder[2] /. sol1 // ExpandAll;

expRule1[i_] :=
Exp[a_] := Exp[Expand[a /. omgRule[[i]]] /. ε^n_ . T_0 -> timeScales[[n+1]]];
ST11 = Coefficient[# [[2]] /. expRule1[1], E^(I ω_1 T_0)] & /@ order2Eq;
ST12 = Coefficient[# [[2]] /. expRule1[2], E^(I ω_2 T_0)] & /@ order2Eq;
SCond1 = {ccleftVec[[1]].ST11 == 0, ccleftVec[[2]].ST12 == 0};

SCond1Rule1 = Solve[SCond1, {A_1^{(1,0)}[T_1, T_2], A_2^{(1,0)}[T_1, T_2]}] [[1]] // ExpandAll;
(* sigRule=Solve[ResonanceCond, {σ_1, σ_2}] [[1]]; *)
sigRule = Solve[ResonanceCond, σ_2] [[1]];
expRule2 = Exp[a_] := Exp[a /. {T_1 -> ε T_0, T_2 -> ε^2 T_0} /. sigRule // Expand];
SCond1Rule2 = SCond1Rule1 /. expRule2;
ccSCond1Rule2 = SCond1Rule2 /. conjugateRule;
order2Eqm = order2Eq /. SCond1Rule2 /. ccSCond1Rule2 // ExpandAll;
If[Union[# [[2]] & /@ order2Eqm] === {0},
sol2 = {u_{1,2} -> {0 &}, v_{1,2} -> {0 &}, u_{2,2} -> {0 &}, v_{2,2} -> {0 &}},]

(* Third-Order Problem *)
order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;
ST21 = Coefficient[# [[2]] /. expRule1[1], Exp[I ω_1 T_0]] & /@ order3Eq;
ST22 = Coefficient[# [[2]] /. expRule1[2], Exp[I ω_2 T_0]] & /@ order3Eq;
SCond2 = {ccleftVec[[1]].ST21 == 0, ccleftVec[[2]].ST22 == 0} // ExpandAll;

SCond2Rule1 = Solve[SCond2, {A_1^{(0,1)}[T_1, T_2], A_2^{(0,1)}[T_1, T_2]}] [[1]] /. values //
ExpandAll;

```

(* Reconstitution *)

```

moduEq =
  Table[2 I ωk Ak', {k, 2}] ==
    (Table[2 I ωk dt[1][ Ak[T1, T2]], {k, 2}) /. (SCond1Rule1 /. values) /.
      SCond2Rule1 // Collect[#, ε] & // Thread:
    Print["The second-order approximate solution:"];

Print[
  Table[
    ui[t] == (ui @@ timeScales /. solRule /. ε^3 -> 0 /. sol1 /. sol2 /. displayRule),
    {i, 2}] /. Thread[mydepVar -> depVar]];
  If[Or @@ Table[(Fi / fi /. scaling) === ε, {i, 2}],
    Print["where"];
    Print["Λi==fi / (2 (ωi2-Ω2)) "];
  ];
  Print["\n\nThe modulation equations:"];
  Print[moduEq /. displayRule]

```

(* Third-Order Problem *)

```

order3Eq = eqOrder[3] /. sol1 /. sol2 // ExpandAll;
ST21 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[1], Exp[I ω1 T0]] & /@ order3Eq;
ST22 = Coefficient[#[[2]] /. expRule1[2], Exp[I ω2 T0]] & /@ order3Eq;
SCond2 = (ccleftVec[[1]].ST21 == 0, ccleftVec[[2]].ST22 == 0) // ExpandAll;
SCond2Rule1 = Solve[SCond2, {A1(0,1)[T1, T2], A2(0,1)[T1, T2]}][[1]] /. values // ExpandAll;

```

(* Reconstitution *)

```

moduEq = Table[2 I ωk Ak', {k, 2}] == (Table[2 I ωk dt[1][ Ak[T1, T2]], {k, 2}) /. (SCond1Rule1 /. values) /. SCond2Rule1 // Collect[#,
Print["The second-order approximate solution:"];
Print[Table[ui[t] == (ui @@ timeScales /. solRule /. ε^3 -> 0 /. sol1 /. sol2 /. displayRule), {i, 2}] /. Thread[mydepVar -> depVar];
If[Or @@ Table[(Fi / fi /. scaling) === ε, {i, 2}],
  Print["where"];
  Print["Λi==fi / (2 (ωi2-Ω2)) "];
];
Print["\n\nThe modulation equations:"];
Print[moduEq /. displayRule]

```

Σαν παράδειγμα, ελέγχουμε την περίπτωση της υποεπνότητας 6.2.1 :

$$\text{eqtest} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_1'[t] == v_1[t], \\ v_1'[t] + \alpha v_2'[t] + \theta_1[t] == \\ -2 \Omega^2 \text{Cos}[t \Omega] F_1 \theta_1[t] + \frac{1}{6} \theta_1[t]^3 + \alpha v_2[t]^2 (-\theta_1[t] + \theta_2[t]) + \\ \frac{1}{2} \alpha (-\theta_1[t] + \theta_2[t])^2 v_2'[t], \\ \theta_2'[t] == v_2[t], \\ v_2'[t] + v_1'[t] + \theta_2[t] == \\ -2 \Omega^2 \text{Cos}[t \Omega] F_1 \theta_2[t] + \frac{1}{6} \theta_2[t]^3 - v_1[t]^2 (-\theta_1[t] + \theta_2[t]) + \\ \frac{1}{2} (-\theta_1[t] + \theta_2[t])^2 v_1'[t] \end{array} \right\} /. \left\{ \alpha \rightarrow \frac{16}{25} + \epsilon^2 \sigma_1 \right\};$$

$$\text{scaling1} = \{F_1 \rightarrow \epsilon^2 f_1\};$$

$$\text{ResonanceCond1} = \{\omega_2 == 3 \omega_1, \Omega == 2 \omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

MSC[eqtest, {θ₁, v₁, θ₂, v₂}, scaling1, ResonanceCond1] // Timing

Η προσεγγιστική λύση 2^{ης} τάξης:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1[t] == \epsilon \left(E^{i T_0 \omega_1} A_1 + E^{i T_0 \omega_2} A_2 + E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 + E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2 \right), \\ \theta_2[t] == \epsilon \left(\frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_1} A_1 - \frac{5}{4} E^{i T_0 \omega_2} A_2 + \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_1} \bar{A}_1 - \frac{5}{4} E^{-i T_0 \omega_2} \bar{A}_2 \right) \end{array} \right\}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 I \omega_1 A_1' == \\ 2 I \epsilon^2 \omega_1 \left(-\frac{25}{432} I \sqrt{5} A_1 \sigma_1 - \frac{353 I \sqrt{5} A_1^2 \bar{A}_1}{3456} + \frac{11}{128} I \sqrt{5} A_2 \bar{A}_1^2 + \frac{23}{192} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_2 \right), \\ 2 I \omega_2 A_2' == 2 I \epsilon^2 \omega_2 \left(\frac{11}{128} I \sqrt{5} A_1^3 + \frac{25}{16} I \sqrt{5} A_2 \sigma_1 + \right. \\ \left. \frac{23}{64} I \sqrt{5} A_1 A_2 \bar{A}_1 - \frac{1337}{128} I \sqrt{5} A_2^2 \bar{A}_2 + 10 I \sqrt{5} E^{i T_2 \omega_2} f_1 \bar{A}_2 \right) \end{array} \right\}$$

{7.691 Second, Null}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΚΥΒΙΚΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ

Τα ελαστικά συστήματα, τέτοια όπως οι δοκοί, οι πλάκες και τα κελύφη, συνήθως μοντελοποιούνται από μερικές διαφορικές εξισώσεις με καθορισμένες συνοριακές συνθήκες. Για μικρές ταλαντώσεις, οι αποκρίσεις τέτοιων παραμορφωσίμων σωμάτων, συνεχών ή κατανεμημένων-παραμέτρων συστημάτων, μπορούν κατάλληλα να περιγραφούν από γραμμικές εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες. Όμως, ενώ το εύρος (amplitude) των ταλαντώσεων αυξάνει, μη-γραμμικές επιδράσεις στις κυρίαρχες εξισώσεις, τις συνοριακές συνθήκες, ή και στα δύο, υπεισέρχονται. Οι πηγές των μη-γραμμικοτήτων μπορεί να είναι γεωμετρικές, αδρανειακές, υλικού ή απόσβεσης.

Οι γεωμετρικές μη-γραμμικότητες μπορεί να οφείλονται σε ένα ή περισσότερα από τα ακόλουθα : μη-γραμμικές σχέσεις μεταξύ των ανηγμένων παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων, μεγάλες στροφές, ελεύθερες επιφάνειες σε ρευστά, χρονοεξαρτώμενοι εξαναγκασμοί, μεγάλες καμπυλότητες κλπ. Η μη-γραμμική ένταση του μεσοεπιπέδου ενός παραμορφωσίμου σώματος συνοδεύει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις του αν αυτό στηρίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να περιορίζεται η κίνηση των άκρων του. Αν μεγάλου μήκους κύματος ταλαντώσεις συνοδεύονται από μεγάλες αλλαγές στην καμπυλότητα, είναι απαραίτητο να εφαρμόσουμε μια μη-γραμμική σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα και την μετατόπιση. Οι αδρανειακές μη-γραμμικότητες προκαλούνται από συγκεντρωμένες ή /και κατανεμημένες μάζες, επιταχύνσεις στην κατακόρυφη μεταφορά θερμότητας (convection), και κεντρομόλες και Coriolis επιταχύνσεις. Οι υλικές μη-γραμμικότητες συμβαίνουν όποτε οι καταστατικές σχέσεις είναι μη-γραμμικές, όπως στην περίπτωση όπου οι τάσεις είναι μη-γραμμικές συναρτήσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων. Τα αντιστατικά (της αντίστασης), επαγωγικά και χωρητικότητας κυκλωματικά στοιχεία είναι μη-γραμμικά, και οι δυνάμεις αναδραστικού ελέγχου (feedback control forces) και οι περίοδοι στους σερβομηχανισμούς είναι μη-γραμμικά. Οι αποσβεστικές μη-γραμμικότητες οφείλονται σε τριβή και στην υστέρηση (hysteresis).

Εφόσον ακριβείς λύσεις δεν είναι, γενικά, διαθέσιμες για τον προσδιορισμό των δυναμικών αποκρίσεων των μη-γραμμικών συνεχών συστημάτων λόγω εξωτερικές ή παραμετρικές διεγέρσεων, έχει βρεθεί διέξοδος σε προσεγγιστικές λύσεις μέσω χρήσης είτε καθαρά αριθμητικών τεχνικών, ή καθαρά αναλυτικών τεχνικών, ή ενός συνδυασμού αριθμητικών και αναλυτικών τεχνικών. Η εφαρμογή των καθαρά αριθμητικών τεχνικών σε τέτοια προβλήματα μπορεί να κοστίζει σε όρους υπολογιστικού χρόνου και μπορεί να μην αποκαλύπτει μερικές από τις πολύπλοκες αποκρίσεις. Με τις καθαρά αναλυτικές μεθόδους, μπορεί να είναι δύσκολο να μεταχειριστόμαστε συστήματα με ανομοιογένειες ή πολύπλοκες γεωμετρίες. Με έναν συνδυασμό αριθμητικών και αναλυτικών τεχνικών, μπορεί κανείς να προσδιορίσει μερικές από τις πολύπλοκες αποκρίσεις των συστημάτων με ανομοιογένειες και πολύπλοκα σχήματα.

Οι αριθμητικές-αναλυτικές προσεγγίσεις μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες : τις μεθόδους διακριτοποίησης (discretization) και τις ευθείες μεθόδους. Στις μεθόδους διακριτοποίησης, κανείς απαιτεί η λύση να είναι της μορφής :

$$w[x,t] = \sum_{m=1}^M \phi_m(x) q_m(t)$$

όπου το M είναι ένας πεπερασμένος ακέραιος. Κατόπιν, θεωρούμε είτε τις χωρικές συναρτήσεις $\varphi_m(x)$ (χωρική διακριτοποίηση), είτε τις χρονικές συναρτήσεις $q_m(t)$ (χρονική διακριτοποίηση). Με αυτή τη διακριτοποίηση, τα $q_m(t)$ συνήθως θεωρούνται αρμονικά και η μέθοδος της αρμονικής εξισορρόπησης χρησιμοποιείται για να λάβουμε ένα σύνολο από μη-γραμμικά, προβλήματα συνοριακών τιμών για τα $\varphi_m(x)$.

Με τη χωρική διακριτοποίηση, τα $\varphi_m(x)$ (και άρα και η χωρική εξάρτηση) θεωρούνται εκ των προτέρων. Αν οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς, τα $\varphi_m(x)$ συνήθως λαμβάνονται ότι είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του γραμμικοποιημένου προβλήματος. Η μέθοδος των βαρυτικών υπολοίπων (weighted residuals) ή των αρχών του λογισμού των μεταβολών (variational principles) μπορεί τότε να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί ένα σύνολο από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, που διέπουν τα $q_m(t)$. Το λαμβανόμενο σύνολο των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας μία πληθώρα μεθόδων, που αναπτύχθηκαν για τα διακεκριμένα συστήματα.

Η πιο κοινή εφαρμογή των βαρυτικών υπολοίπων είναι η μέθοδος Galerkin. Η μεγάλη πλειοψηφία των μελετών πάνω στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις θεωρεί ότι η απόκριση μπορεί να εκφραστεί σε όρους μόνο των γραμμικών μορφών που απευθείας ή εμμέσως διεγείρονται (Nayfeh και Mook, 1979). Για παράδειγμα, αν ένα σύστημα οδηγείται εγγύς της φυσικής συχνότητας μιας γραμμικής μορφής και αυτή η μορφή (mode) δεν εμπλέκεται σε έναν εσωτερικό συντονισμό με άλλες μορφές, η απόκριση θεωρείται ότι αποτελείται από μόνο αυτή τη μορφή. Μια τέτοια προσέγγιση συχνά αναφέρεται ως μια προσέγγιση μοναδικής ιδιομορφής (mode shape).

Στην απ' ευθείας προσέγγιση, μια μέθοδος μείωσης, τέτοια όπως η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων, εφαρμόζεται απευθείας στις κυρίαρχες μερικές διαφορικές εξισώσεις και τις σχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες και δεν γίνονται υποθέσεις εκ των προτέρων αναφορικά με τη χωρική ή χρονική εξάρτηση της απόκρισης. Το κυρίαρχο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι στην μεταχείριση των συνοριακών συνθηκών σε υψηλότερες τάξεις. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε από τους Nayfeh και Nayfeh (1979), Nayfeh (1975, 1996), Nayfeh και Asfar (1986), Nayfeh και Bouguerra (1990), Pai και Nayfeh (1990), Raouf και Nayfeh (1990), Nayfeh, Nayfeh και Mook (1992), Nayfeh και Nayfeh (1993), Nayfeh, Nayfeh και Pakdemirli (1995), Pakdemirli, Nayfeh και Nayfeh (1995), Chin και Nayfeh (1996), Nayfeh και Lacarbonara (1997, 1998) Lacarbonara, Nayfeh και Kreider (1998), και Rega et.al (1999) κλπ.

Μερικές από τις προαναφερθείσες μελέτες δείχνουν ότι η διακριτοποίηση και οι απ' ευθείας προσεγγίσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα για συστήματα με κυβικές μη-γραμμικότητες δεδομένου ότι έχουν αναζητηθεί οι πρώτης-τάξης προσεγγίσεις. Για συστήματα με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες, η προσέγγιση της διακριτοποίησης ίσως παράξει ποσοτικά, και σε κάποιες περιπτώσεις ποιοτικά λάθη, εκτός αν πολλές μορφές περιληφθούν στο διακριτοποιημένο μοντέλο. Με άλλα λόγια, πρέπει κανείς να περιλάβει τόσους όρους στο διακριτοποιημένο μοντέλο όσους χρειάζεται για τη σύγκλιση. Εφόσον έχουμε να κάνουμε με συστήματα με κυβικές μη-γραμμικότητες σε αυτό το Κεφάλαιο, θα λάβουμε πρώτης-τάξης αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τόσο "διακριτοποιητικές" όσο και απ' ευθείας προσεγγίσεις.

Προεισαγωγικά

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, εισάγουμε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, και $T_2 = \epsilon^2 t$ που τις συμβολίζουμε ως :

```
Symbolize[T0]; Symbolize[T1]; Symbolize[T2];
```

και μορφοποιούμε μια λίστα αυτών, ως ακολούθως :

```
timeScales = {T0, T1, T2};
```

Σε όρους των χρονικών κλιμάκων T_n , οι χρονικές παράγωγοι γίνονται :

```
dt[0][expr_] := expr; dt[1][expr_] := Sum[εi D[expr, timeScales[[i+1]]], {i, 0, 1}];
```

```
dt[2][expr_] := (dt[1][dt[1][expr]] // Expand) /. εi_ /; i > 1 -> 0;
```

Κατά τη ροή της ανάλυσης, χρειαζόμαστε τα μιγαδικά συζυγή των A και Γ . Τα ορίζουμε βάσει του ακόλουθου κανόνα :

```
conjugateRule = {A -> Ā, Ā -> A, Γ -> Γ̄, Γ̄ -> Γ, Complex[0, n_] -> Complex[0, -n]};
```

Για να χειριστούμε μερικά πολύπλοκα ολοκληρώματα χωρίς το Mathematica να δυσκολευτεί πολύ, ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

```
intRule1 = {int[fun_, arg2_] := int[Expand[fun], arg2]};
```

```
intRule2 = {int[a + b_, arg2_] := int[a, arg2] + int[b, arg2],
```

```
int[εn fun_, arg2_] := εn int[fun, arg2],
```

```
int[a fun_, a1_, b1_] := a int[fun, a1, b1] /; FreeQ[a, First[a1]],
```

```
int[int[a1_, a2_] fun_, a3_] :=
```

```
int[a1, a2] int[fun, a3] /; FreeQ[Rest[a2], First[a2]]};
```

Για να αναπαραστήσουμε μερικές από τις εκφράσεις κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον ακόλουθο κανόνα κατάδειξης :

```
displayRule =
```

```
{Derivative[a_, b_][wi][x, _] :=
```

```
SequenceForm[If[arg1 = Times @@ MapIndexed[D#1#2[[1]]-1 &, {b}]; arg1 != 1, arg1, ""],  
wi SequenceForm @@ Table["", {a}]],
```

```
Derivative[a_][Ai][_] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D#1#2[[1]] &, {a}], Ai,
```

```
Derivative[a_][Āi][_] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D#1#2[[1]] &, {a}], Āi,
```

```
wi[x, _] -> wi, Ai[_] -> Ai, Āi[_] -> Āi,
```

```
Exp[a_. + b_. Complex[0, m_] T0 + c_. Complex[0, n_] T0] := Exp[a + (m * b + n * c) I T0],
```

```
int -> Integrate};
```

7.1 Συνθήκες Επιλυσιμότητας και η Έννοια του Συζυγούς Τελεστή

Εάν απευθείας αντιμετωπίσει κανείς τα συνεχή συστήματα, συχνά αντιμετωπίζει μη-ομογενή συνοριακών-τιμών προβλήματα των οποίων τα ομογενή τμήματα έχουν μη-τετριμμένες λύσεις. Επομένως, τα μη-ομογενή προβλήματα έχουν λύσεις μόνο αν οι συνθήκες επιλυσιμότητας ή συνέπειας ικανοποιούνται (Nayfeh, 1981). Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε πώς θα προσδιοριστούν τέτοιες συνθήκες επιλυσιμότητας.

Αρχίζουμε την ενασχόληση με το απλό πρόβλημα :

```
eq1 = y''[x] + π2 y[x] == π Sin[π x];
```

```
bc1 = {y[0] == β1, y[1] == β2};
```

Το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει τη μη-τετριμμένη λύση :

```
DSolve[{eq1[[1]] == 0} ~Join~ bc1 /. βi -> 0, y[x], x][[1]]
```

```
{y[x] -> -C[1] Sin[π x]}
```

Έτσι, το μη-ομογενές πρόβλημα δεν θα έχει λύση εκτός αν ικανοποιείται μια συνθήκη επιλυσιμότητας. Για να προσδιορίσουμε αυτή τη συνθήκη επιλυσιμότητας, έχουμε δύο προσεγγίσεις.

Στην πρώτη προσέγγιση, βρίσκουμε τη γενική λύση της eq1 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση DSolve ως εξής :

```
yRule = DSolve[eq1, y[x], x][[1]] // Simplify
```

```
{y[x] -> (-x/2 + C[2]) Cos[π x] - C[1] Sin[π x]}
```

όπου C[1] και C[2] είναι αυθαίρετες σταθερές. Εκμεταλλευόμενοι τις συνοριακές συνθήκες bc1, έχουμε :

```
bc2 = bc1 /. Flatten[yRule /. {{x -> 0}, {x -> 1}}]
```

```
{C[2] == β1, 1/2 - C[2] == β2}
```

Αυτές οι εξισώσεις είναι μη συμβατές εκτός αν

```
Equal @@ Plus @@ (List @@ # & /@ bc2)
```

```
1/2 == β1 + β2
```

που είναι η επιθυμητή συνθήκη επιλυσιμότητας.

Στη δεύτερη προσέγγιση, αντί να προσδιορίσουμε τη γενική λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων και κατόπιν να επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας, χρησιμοποιούμε την έννοια του adjoint όπως περιγράφεται παρακάτω. Αυτή η προσέγγιση είναι ελκυστική, αν κάποιος δεν ενδιαφέρεται για τον προσδιορισμό της λύσης του μη-ομογενούς προβλήματος αλλά ενδιαφέρεται μόνο να προσδιορίσει τις συνθήκες επιλυσιμότητας, όπως είναι η πραγματικότητα στις πολλές εφαρμογές των μεθόδων διαταραχών.

Για να προσδιορίσουμε τον συζυγή τελεστή (adjoint) και κατόπιν τις συνθήκες επιλυσιμότητας, χρειάζεται να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση σε τμήματα μερικών ^{συνολικών} προϊόντων. Για να το επιτύχουμε αυτό με το *Mathematica*, ορίζουμε μια συνάρτηση με το όνομα intByParts σύμφωνα με :

```
intByParts[expr_ /; Head[expr] != Equal, depVar_] :=
```

```
Module[{intRule1, intRule2, intRule3},
```

```
intRule1 = f_[terms_, x_] := int[Expand[terms], x];
```

```
intRule2 = int[term1 + term2, x_] := int[term1, x] + int[term2, x];
```

```
intRule3 = c1_. int[term1, x_] + c2_. int[term2, x_] := int[c1 term1 + c2 term2, x];
```

```
IBP[u_, v_, n_ /; n >= 1, range : {x_, a_, b_}] :=
```

```
(u Derivative[n-1][v][x] /. x -> b) - (u Derivative[n-1][v][x] /. x -> a) -
```

```
IBP[D[u, x], v, n-1, range];
```

```
IBP[u_, v_, 0, range : {x_, a_, b_}] := int[u v[x], range];
```

```
expr /. intRule1 // intRule2 /. int[u_ Derivative[n_][depVar][x_], arg2_] :=
```

```
IBP[u, depVar, n, arg2] // intRule3 /. int -> Integrate
```

```
]
```

Για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας της eq1 και της bc1 με αυτή την προσέγγιση, πολλαπλασιάζουμε την eq1 με το $u[x]$, ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα τμηματικά από το $x = 0$ ως το $x = 1$, και λαμβάνουμε :

`eq1a = IntByParts[Int[u[x] #, {x, 0, 1}], y] & /@ eq1`

$$\int_0^1 (\pi^2 u[x] y[x] + y[x] u''[x]) dx + y[0] u'[0] - y[1] u'[1] - u[0] y'[0] + u[1] y'[1] == \pi \int_0^1 \text{Sin}[\pi x] u[x] dx$$

Για να προσδιορίσουμε τον συζυγή τελεστή, θέτουμε τον συντελεστή του $y[x]$ στη συνάρτηση προς ολοκλήρωση (integrand) στην αριστερή πλευρά της eq1a ίσον με το 0, δηλαδή :

`adjointEq1 = Cases[eq1a[[1]], Integrate[expr_, _] :=> Coefficient[expr, y[x]]][[1]] == 0`
 `$\pi^2 u[x] + u''[x] == 0$`

Για να προσδιορίσουμε τις οριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θεωρούμε το ομογενές πρόβλημα (δηλ. $f[x]=0$, $\beta_1 = 0$ και $\beta_2 = 0$), χρησιμοποιούμε την adjointEq1, και λαμβάνουμε από την eq1a ότι :

`bc1a = eq1a /. Integrate -> (0 &) /. (bc1 /. Equal -> Rule /. β_i -> 0)`
 `$-u[0] y'[0] + u[1] y'[1] == 0$`

Για να προσδιορίσουμε τις οριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θέτουμε καθέναν από τους συντελεστές του $y'[0]$ και του $y'[1]$ στην bc1a ίσους με το μηδέν και παίρνουμε :

`adjointBC1 = Solve[Coefficient[bc1a[[1]], {y'[0], y'[1]}] == 0, {u[0], u[1]}][[1]] /. Rule -> Equal`

`{u[0] == 0, u[1] == 0}`

Επομένως, ο συζυγής τελεστής u ορίζεται από το σύστημα συζυγούς τελεστή, που αποτελείται από τις adjointEq1 και adjointBC1. Εφόσον αυτές είναι ίδιες με τα ομογενή τμήματα της eq1 και της bc1, το πρόβλημα καλείται *αυτο-συζυγές* (self-adjoint). Άρα, $u[x] = \text{Sin}[x]$.

`adjoint = {u -> Function[x, Sin[π x]]}`

`{u -> Function[x, Sin[π x]]}`

Εφόσον το πρόβλημα του συζυγούς έχει οριστεί, επιστρέφουμε στο μη-ομογενές πρόβλημα για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας. Αντικαθιστώντας για τον συζυγή τελεστή και τις συνοριακές συνθήκες bc1 στην eq1a προκύπτει η συνθήκη επιλυσιμότητας:

`SolvCond1 = eq1a[[2]] == (eq1a[[1]] /. Integrate -> (0 &) /. (bc1 /. Equal -> Rule) /. (adjointBC1 /. Equal -> Rule))`

$$\pi \int_0^1 \text{Sin}[\pi x] u[x] dx == \beta_1 u'[0] - \beta_2 u'[1]$$

`SolvCond1f = SolvCond1 /. adjoint`

$$\frac{\pi}{2} == \pi \beta_1 + \pi \beta_2$$

η οποία είναι η ίδια με τη συνθήκη επιλυσιμότητας που λήφθηκε με την άλλη μέθοδο.

7.1.1 Μονόπακτη (με άρθρωση-πάκτωση) Δοκός

Έχοντας να κάνουμε με μια μονόπακτη δοκό, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τον συζυγή τελεστή του προβλήματος συνοριακών τιμών.

$$\text{eq1a} = -\omega^2 \varphi[x] - 2 P \varphi''[x] + \varphi^{(4)}[x] == f[x];$$

$$\text{bc1a} = \{\varphi[0] == 0, \varphi''[0] == 0, \varphi[1] == 0, \varphi'[1] == 0\};$$

Πολλαπλασιάζοντας την eq1a με u/x και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα τμηματικά από $x = 0$ έως 1, λαμβάνουμε :

$$\text{eq1b} = \text{intByParts}[\text{int}[u[x] \#, \{x, 0, 1\}], \square] \& /@ \text{eq1a}$$

$$\int_0^1 (-\omega^2 u[x] \varphi[x] - 2 P \varphi[x] u''[x] + \varphi[x] u^{(4)}[x]) dx - 2 P \varphi[0] u'[0] + 2 P \varphi[1] u'[1] + 2 P u[0] \varphi'[0] - 2 P u[1] \varphi'[1] - \varphi'[0] u''[0] + \varphi'[1] u''[1] + u'[0] \varphi''[0] - u'[1] \varphi''[1] + \varphi[0] u^{(3)}[0] - \varphi[1] u^{(3)}[1] - u[0] \varphi^{(3)}[0] + u[1] \varphi^{(3)}[1] == \int_0^1 f[x] u[x] dx$$

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση του συζυγούς τελεστή, θέτουμε τον συντελεστή της $\varphi[x]$ στη συνάρτηση προς ολοκλήρωση στην αριστερή πλευρά της eq1b ίση με 0, δηλαδή :

$$\text{adjointEq1} = \text{Cases}[\text{eq1b}[[1]], \text{Integrate}[\text{expr}_, _] \> \text{Coefficient}[\text{expr}, \varphi[x]] [[1]] == 0$$

$$-\omega^2 u[x] - 2 P u''[x] + u^{(4)}[x] == 0$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θεωρούμε το ομογενές πρόβλημα, χρησιμοποιούμε την adjointEq1, και λαμβάνουμε από την eq1b ότι :

$$\text{bc1b} = \text{eq1b} /. \text{Integrate} \rightarrow (0 \&) /. (\text{bc1a} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule})$$

$$2 P u[\varphi] \varphi'[0] - \varphi'[0] u''[0] - u'[1] \varphi''[1] - u[0] \varphi^{(3)}[0] + u[1] \varphi^{(3)}[1] == 0$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θέτουμε καθέναν από τους συντελεστές των $\varphi'[0]$, $\varphi^{(3)}[0]$, $\varphi''[1]$ και $\varphi^{(3)}[1]$ στην bc1b ίσο με 0 και λαμβάνουμε :

$$\text{adjointBC1} =$$

$$\text{Solve}[\text{Coefficient}[\text{bc1b}[[1]], \{\varphi'[0], \varphi^{(3)}[0], \varphi''[1], \varphi^{(3)}[1]\}] == 0, \{u[0], u''[0], u[1], u'[1]\} [[1]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal}$$

$$\{u''[0] == 0, u[1] == 0, u'[1] == 0, u[0] == 0\}$$

Επομένως, ο συζυγής τελεστής u ορίζεται από το συζυγές σύστημα, που αποτελείται από τις adjointEq1 και adjointBC1. Εφόσον αυτές είναι οι ίδιες με τα ομογενή τμήματα της eq1a και της bc1a, το πρόβλημα λέμε ότι είναι αυτο-συζυγές.

Μόλις το συζυγές πρόβλημα έχει οριστεί, επιστρέφουμε στο μη-ομογενές πρόβλημα για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας. Αντικαθιστώντας για τους συζυγείς τελεστές και τις συνοριακές συνθήκες bc1a και eq1b προκύπτει η συνθήκη επιλυσιμότητας:

$$\text{SolvCond1} =$$

$$\text{eq1b}[[2]] == (\text{eq1b}[[1]] /. \text{Integrate} \rightarrow (0 \&) /. (\text{bc1a} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) /. (\text{adjointBC1} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}))$$

$$\int_0^1 f[x] u[x] dx == 0$$

7.1.2 Πρόβολος

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για έναν πρόβολο μπορεί να γραφεί ως :

$$\text{eq2a} = -\omega^2 \varphi[x] + \varphi^{(4)}[x] == f[x];$$

$$\text{bc2a} = \{\varphi[0] == 0, \varphi'[0] == 0, \varphi''[1] == 0, \varphi^{(3)}[1] == 0\};$$

Για να προσδιορίσουμε τον συζυγή τελεστή αυτού του προβλήματος, πολλαπλασιάζουμε την eq2a με $u[x]$, ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα τμηματικά από $x = 0$ έως 1, και παίρνουμε :

$$\text{eq2b} = \text{intByParts}[\text{int}[u[x] \#, \{x, 0, 1\}], \varphi] \& /@ \text{eq2a}$$

$$\int_0^1 (-\omega^2 u[x] \varphi[x] + \varphi[x] u^{(4)}[x]) dx - \varphi'[0] u''[0] + \varphi'[1] u''[1] + u'[0] \varphi''[0] - u'[1] \varphi''[1] + \varphi[0] u^{(3)}[0] - \varphi[1] u^{(3)}[1] - u[0] \varphi^{(3)}[0] + u[1] \varphi^{(3)}[1] == \int_0^1 f[x] u[x] dx$$

Θέτουμε τον συντελεστή της $\varphi[x]$ στη συνάρτηση προς ολοκλήρωση στην αριστερή πλευρά της eq2b ίσο με 0 και λαμβάνουμε την εξίσωση συζυγούς τελεστή ως εξής :

$$\text{adjointEq2} = \text{Cases}[\text{eq2b}[[1]], \text{Integrate}[\text{expr}_, _] := \text{Coefficient}[\text{expr}, \varphi[x]]][[1]] == 0$$

$$-\omega^2 u[x] + u^{(4)}[x] == 0$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θεωρούμε το ομογενές πρόβλημα, χρησιμοποιούμε την adjointEq2, και λαμβάνουμε από την eq2b ότι :

$$\text{bc2b} = \text{eq2b} /. \text{Integrate} \rightarrow (0 \&) /. (\text{bc2a} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule})$$

$$\varphi'[1] u''[1] + u'[0] \varphi''[0] - \varphi[1] u^{(3)}[1] - u[0] \varphi^{(3)}[0] == 0$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες του συζυγούς τελεστή, θέτουμε καθέναν από τους συντελεστές των $\varphi''[0]$, $\varphi^{(3)}[0]$, $\varphi[1]$ και $\varphi'[1]$ στην bc2b ίσους με 0 και λαμβάνουμε :

$$\text{adjointBC2} =$$

$$\text{Solve}[\text{Coefficient}[\text{bc2b}[[1]], \{\varphi''[0], \varphi^{(3)}[0], \varphi[1], \varphi'[1]\}] == 0, \{u[0], u'[0], u''[1], u^{(3)}[1]\}][[1]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal}$$

$$\{u[0] == 0, u'[0] == 0, u''[1] == 0, u^{(3)}[1] == 0\}$$

Επομένως, ο συζυγής τελεστής u ορίζεται από το συζυγές σύστημα που αποτελείται από τις adjointEq2 και adjointBC2. Εφόσον αυτές είναι οι ίδιες με τα ομογενή τμήματα των eq2a και bc2a, το πρόβλημα λέμε ότι είναι αυτο-συζυγές.

Από τη στιγμή που το πρόβλημα του συζυγούς τελεστή έχει οριστεί, επιστρέφουμε στο μη-ομογενές πρόβλημα για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας. Αντικαθιστώντας για τον συζυγή τελεστή και τις συνοριακές συνθήκες bc2a και eq2b, προκύπτει η συνθήκη επιλυσιμότητας :

$$\text{SolveCond2} =$$

$$\text{eq2b}[[2]] ==$$

$$(\text{eq2b}[[1]] /. \text{Integrate} \rightarrow (0 \&) /. (\text{bc2a} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}) /. (\text{adjointBC2} /. \text{Equal} \rightarrow \text{Rule}))$$

$$\int_0^1 f[x] u[x] dx == 0$$

7.2 Μονόπακτη Δοκός

7.2.1 EOM και Οριακές Συνθήκες

Θεωρούμε τη μη γραμμική επίπεδη απόκριση μιας μονόπακτης ομοιόμορφης πρισματικής δοκού σε ένα αρμονικό αξονικό φορτίο. Η δοκός υπόκειται σε ένα στατικό αξονικό φορτίο και μια από τις

στηρίζεις της φέρει ένα γραμμικό ελατήριο. Θεωρούμε ότι οι μη γραμμικότητες λόγω καμπυλότητας και αδράνειας είναι πολύ μικρότερες από τη μη γραμμικότητα που προκαλείται από την μεσοεπιπεδική ένταση. Η εγκάρσια μετατόπιση $w(x, t)$ της δοκού στη θέση x και στο χρόνο t διέπεται από την αδιάστατη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (Nayfeh και Mook, 1979) :

$$\begin{aligned} \text{EOM} = \partial_{t,t} w[x, t] - 2 P \partial_{x,x} w[x, t] + \partial_{x,x,x} w[x, t] = & \\ -2 \in \mu[x] \partial_x w[x, t] + 4 \in F \partial_{x,x} w[x, t] \text{Cos}[\Omega t] + \in \alpha \partial_{x,x} w[x, t] \int_0^1 (\partial_x w[x, t])^2 dx & \\ w^{(0,2)}[x, t] - 2 P w^{(2,0)}[x, t] + w^{(4,0)}[x, t] = & \\ -2 \in \mu[x] w^{(0,1)}[x, t] + 4 F \in \text{Cos}[t \Omega] w^{(2,0)}[x, t] + \alpha \in \left(\int_0^1 w^{(1,0)}[x, t]^2 dx \right) w^{(2,0)}[x, t] & \end{aligned}$$

και από τις ομογενείς οριακές συνθήκες :

$$\begin{aligned} \text{BC} = \{w[0, t] = 0, \partial_{x,x} w[x, t] = 0 / . x \rightarrow 0, w[1, t] = 0, \partial_x w[x, t] = 0 / . x \rightarrow 1\} & \\ \{w[0, t] = 0, w^{(2,0)}[0, t] = 0, w[1, t] = 0, w^{(1,0)}[1, t] = 0\} & \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι το στατικό αξονικό φορτίο είναι τέτοιο ώστε οι χαμηλότερες δύο φυσικές συχνότητες της δοκού είναι σε αναλογία τρία-προς-ένα, δηλαδή, υπάρχει ένας τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ανάμεσα στην δεύτερη και την πρώτη μορφή. Επιπλέον, θεωρούμε ότι καμιά από τις δύο μορφές δεν εμπλέκεται σε εσωτερικό συντονισμό με οποιονδήποτε άλλη μορφή. Θεωρούμε τρεις παραμετρικούς συντονισμούς, ήτοι, τον κύριο παραμετρικό συντονισμό της 1^{ης} μορφής, τον κύριο παραμετρικό συντονισμό της 2^{ης} μορφής και τον συνδυαστικό παραμετρικό συντονισμό της 1^{ης} με τη 2^η μορφή.

7.2.2 Απευθείας Χειρισμός του Συνεχούς Προβλήματος

Σε αυτή την υποενότητα, χειριζόμαστε απευθείας την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση EOM και τις σχετικές συνοριακές συνθήκες BC και αναζητούμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης τους, της μορφής :

$$\text{solRule} = w \rightarrow (\text{Evaluate}[\text{Sum}[\epsilon^j w_j[\#1, \#2, \#3], \{j, 0, 1\}]] \&)$$

$$w \rightarrow (w_0[\#1, \#2, \#3] + \epsilon w_1[\#1, \#2, \#3] \&)$$

όπου η πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x και οι τελευταίες δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δύο χρονικές κλίμακες T_0 και T_1 . Αντικαθιστώντας τη solRule στην EOM, μετασχηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους σε μερικές παραγώγους με όρους των T_0 και T_1 , αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , και χρησιμοποιώντας την intRule2 για να απλοποιήσουμε τις αναπτύξεις των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση, λαμβάνουμε :

eq722a =

$$\begin{aligned} ((\text{Join}[\{\text{EOM}\}, \text{BC}] /. \text{Integrate} \rightarrow \text{int} /. \{w[x_, t] \rightarrow w[x, T_0, T_1], & \\ \text{Derivative}[m_, n_][w][x_, t] \rightarrow \text{dt}[n][D[w[x, T_0, T_1], \{x, m\}]], t \rightarrow T_0\} /. & \\ \text{solRule} // \text{ExpandAll}) // . \text{intRule2} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^{n_/:n>1} \rightarrow 0; & \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην eq722a, λαμβάνουμε :


```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0] & /@ eq722a // Transpose;
eqEps /. displayRule
```

$$\left\{ \left\{ -2 P (w_0''') + w_0'''' + D_0^2 w_0 == 0, w_0[0, T_0, T_1] == 0, \right. \right. \\ \left. \left. w_0^{(2,0,0)}[0, T_0, T_1] == 0, w_0[1, T_0, T_1] == 0, w_0^{(1,0,0)}[1, T_0, T_1] == 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -4 F \text{Cos}[T_0 \Omega] (w_0''') - \alpha (w_0')^2 (w_0''') - 2 P (w_1''') + w_1'''' + D_0^2 w_1 + 2 (D_0 D_1 w_0) + 2 (D_0 w_0) \mu[x] == 0, \right. \right. \\ \left. \left. w_1[0, T_0, T_1] == 0, w_1^{(2,0,0)}[0, T_0, T_1] == 0, w_1[1, T_0, T_1] == 0, w_1^{(1,0,0)}[1, T_0, T_1] == 0 \right\} \right\}$$

Επειδή με την παρουσία της απόσβεσης, όλοι οι μορφές που δεν διεγείρονται απευθείας από τη δύναμη ή διεγείρονται έμμεσα από τον εσωτερικό συντονισμό θα εξασθενίσουν με τον χρόνο, η λύση της eqEps[[1]] μπορεί να εκφραστεί με όρους των χαμηλότερων δύο γραμμικών ιδιομορφών ελεύθερης ταλάντωσης, δηλαδή :

```
sol0 =
  w0 -> Function[{x, T0, T1}, Sum[A1[T1] C1[x] Exp[I ω1 T0] + A1[T1] C1[x] Exp[-I ω1 T0],
    {i, 2}]]];
```

όπου ω_1 και ω_2 είναι οι φυσικές συχνότητες αυτών των μορφών. Για μεταγενέστερη χρήση, ορίζουμε τη λίστα :

```
omgList = {ω1, ω2};
```

Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι οι συναρτήσεις σχήματος $\phi_i[x]$ είναι ορθογωνικές. Θεωρούμε ότι αυτές οι μορφές κανονικοποιούνται, ήτοι

$$\int_0^1 \phi_i[x] \phi_j[x] dx \rightarrow \delta_{ij}$$

όπου δ_{ij} είναι η συνάρτηση του δέλτα του Kronecker.

Αντικαθιστώντας τη sol0 στην πρώτης-τάξης εξίσωση, την eqEps[[2, 1]], και χρησιμοποιώντας τις intRule1 και intRule2, λαμβάνουμε :

```
order1Eq = (eqEps[[1, 1, 1]] /. w0 -> w1) ==
  ((eqEps[[1, 1, 1]] /. w0 -> w1) -
    (Subtract @@ eqEps[[2, 1]] /. sol0 // TrigToExp // Expand) /. intRule1 //
    intRule2 // Expand);
```

```
order1Eq /. displayRule
```

$$\begin{aligned} & -2 P w_1'''' + w_1'''' + D_0^2 w_1 == -2 I E^{1 T_0 \omega_1} (D_1 A_1) \omega_1 \phi_1[x] + 2 I E^{-1 T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 \phi_1[x] - \\ & 2 I E^{1 T_0 \omega_1} A_1 \omega_1 \mu[x] \phi_1[x] + 2 I E^{-1 T_0 \omega_1} \omega_1 \bar{A}_1 \mu[x] \phi_1[x] - 2 I E^{1 T_0 \omega_2} (D_1 A_2) \omega_2 \phi_2[x] + \\ & 2 I E^{-1 T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \omega_2 \phi_2[x] - 2 I E^{1 T_0 \omega_2} A_2 \omega_2 \mu[x] \phi_2[x] + 2 I E^{-1 T_0 \omega_2} \omega_2 \bar{A}_2 \mu[x] \phi_2[x] + \\ & 2 E^{1 T_0 (-2 \omega_1)} F A_1 \phi_1''[x] + 2 E^{1 T_0 (2 \omega_1)} F \bar{A}_1 \phi_1''[x] + E^{3 I T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1^3 \phi_1''[x] + \\ & 2 E^{1 T_0 (2 \omega_1 + \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1^2 A_2 \phi_1''[x] + E^{1 T_0 (\omega_1 + 2 \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_1 A_2^2 \phi_1''[x] + \\ & 2 E^{1 T_0 (-2 \omega_1)} F \bar{A}_1 \phi_1''[x] + 2 E^{1 T_0 (2 \omega_1)} F \bar{A}_1 \phi_1''[x] + 3 E^{1 T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] + \\ & 4 E^{1 T_0 \omega_2} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] + E^{1 T_0 (-\omega_1 + 2 \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_2^2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] + \\ & 3 E^{-1 T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1 \bar{A}_1^2 \phi_1''[x] + 2 E^{1 T_0 (-2 \omega_1 - \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \phi_1''[x] + \\ & E^{-3 I T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) \bar{A}_1^3 \phi_1''[x] + 2 E^{1 T_0 (2 \omega_1 - \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1^2 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + \\ & 2 E^{1 T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + 4 E^{-1 T_0 \omega_2} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + \\ & 2 E^{-1 T_0 \omega_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + 2 E^{1 T_0 (-2 \omega_1 - \omega_2)} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}^{1T_0} (\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_1 \bar{A}_2^2 \varphi_1''[x] + \mathbb{E}^{1T_0} (-\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \varphi_1''[x] + \\
 & 2 \mathbb{E}^{1T_0} (-2\omega_1 - \omega_2) F A_2 \varphi_2''[x] + 2 \mathbb{E}^{1T_0} (2\omega_1 - \omega_2) F A_2 \varphi_2''[x] + \mathbb{E}^{1T_0} (2\omega_1 - \omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 A_2 \varphi_2''[x] + \\
 & 2 \mathbb{E}^{1T_0} (\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2^2 \varphi_2''[x] + \mathbb{E}^{31T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2^3 \varphi_2''[x] + \\
 & 2 \mathbb{E}^{1T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \varphi_2''[x] + 2 \mathbb{E}^{1T_0} (-\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2^2 \bar{A}_1 \varphi_2''[x] + \\
 & \mathbb{E}^{1T_0} (-2\omega_1 - \omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \varphi_2''[x] + 2 \mathbb{E}^{1T_0} (-2\omega_1 - \omega_2) F \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + 2 \mathbb{E}^{1T_0} (2\omega_1 - \omega_2) F \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \\
 & \mathbb{E}^{1T_0} (2\omega_1 - \omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + 4 \mathbb{E}^{1T_0} \omega_1 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \\
 & 3 \mathbb{E}^{1T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + 2 \mathbb{E}^{-1T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \\
 & 4 \mathbb{E}^{-1T_0} \omega_1 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \mathbb{E}^{1T_0} (-2\omega_1 - \omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \\
 & 2 \mathbb{E}^{1T_0} (\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 \bar{A}_2^2 \varphi_2''[x] + 3 \mathbb{E}^{-1T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_2^2 \varphi_2''[x] + \\
 & 2 \mathbb{E}^{1T_0} (-\omega_1 - 2\omega_2) \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \varphi_2''[x] + \mathbb{E}^{-31T_0} \omega_2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \bar{A}_2^3 \varphi_2''[x]
 \end{aligned}$$

Έπεται από την eqEps[[2]] ότι οι πρώτης-τάξης συνοριακές συνθήκες είναι :

`order1BC = eqEps[[2]] // Rest`

`{w1[0, T0, T1] == 0, w1^{(2,0,0)}[0, T0, T1] == 0, w1[1, T0, T1] == 0, w1^{(1,0,0)}[1, T0, T1] == 0}`

• Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της Πρώτης Μορφής

Σε αυτή την περίπτωση, $\Omega \approx 2\omega_1$. Για να περιγράψουμε την εγγύτητα των εσωτερικών και των κύριων παραμετρικών συντονισμών, εισάγουμε τις δύο αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_1 και σ_2 που ορίζονται ως εξής :

`ResonanceConds = {w2 == 3 w1 + e sigma1, Omega == 2 w1 + e sigma2};`

και ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

`Omgrule = Solve[ResonanceConds, Drop[omgList, {#}] ~ Join ~ {Omega}][[1]] & /@ {1, 2}`

`{ {w2 -> e sigma1 + 3 w1, Omega -> e sigma2 + 2 w1}, {w1 -> 1/3 (-e sigma1 + Omega), Omega -> 1/3 (-2 e sigma1 + 3 e sigma2 + 2 w2)} }`

`expRule[i_] := Exp[arg_] := Exp[Expand[arg /. Omgrule[[i]]] /. e T0 -> T1]`

`expRule[i_] := Exp[arg_] := Exp[Expand[arg /. Omgrule[[i]]] /. e T0 -> T1]`

Αντικαθιστούμε τις ResonanceConds στη δεξιά πλευρά της order1Eq και λαμβάνουμε την πηγή των προσωρινών όρων ως εξής :

`ST = Table[Coefficient[order1Eq[[2]] /. expRule[i], Exp[I w1 T0]], {i, 2}];`

`ST /. displayRule`

$$\begin{aligned} & \left\{ -2 \mathbf{I} (D_1 A_1) \omega_1 \varphi_1[x] - 2 \mathbf{I} A_1 \omega_1 \mu[x] \varphi_1[x] + 2 E^{1 \tau_1 \sigma_2} F \bar{A}_1 \varphi_1''[x] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 \varphi_1''[x] + \right. \\ & 2 E^{1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \varphi_1''[x] + 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \varphi_1''[x] + \\ & 2 E^{1 \tau_1 \sigma_1 - 1 \tau_1 \sigma_2} F A_2 \varphi_2''[x] + E^{1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \varphi_2''[x] + \\ & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x], \\ & -2 \mathbf{I} (D_1 A_2) \omega_2 \varphi_2[x] - 2 \mathbf{I} A_2 \omega_2 \mu[x] \varphi_2[x] + 2 E^{-1 \tau_1 \sigma_1 + 1 \tau_1 \sigma_2} F A_1 \varphi_1''[x] + \\ & E^{-1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^3 \varphi_1''[x] + 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \varphi_1''[x] + \\ & \left. 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \varphi_2''[x] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] \right\} \end{aligned}$$

Επειδή το ομογενές τμήμα της orderIEq και της orderIBC έχει μια μη-τετριμμένη λύση, το αντίστοιχο μη-ομογενές πρόβλημα έχει μια λύση μόνο αν οι συνθήκες επιλυσιμότητας ικανοποιούνται. Έπεται από την υποενότητα 7.1.1 ότι το ομογενές πρόβλημα είναι αυτο-συζυγές και ότι οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν η ST να είναι ορθογωνική στο $\varphi_1[x]$ και στο $\varphi_2[x]$, αντίστοιχα. Εκμεταλλευόμενοι αυτές τις συνθήκες, έχουμε :

SCond =

```
Table[int[ $\varphi_j[x]$  ST[[j]], {x, 0, 1}] /. intRule1 /. intRule2 /. int -> Integrate, {j, 2}] == 0 // Thread;
```

SCond /. displayRule

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 E^{1 \tau_1 \sigma_1 - 1 \tau_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2 - 2 \mathbf{I} \left(\int_0^1 \varphi_1[x]^2 dx \right) (D_1 A_1) \omega_1 - \right. \\ & 2 \mathbf{I} \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_1[x]^2 dx \right) A_1 \omega_1 + 2 E^{1 \tau_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) \bar{A}_1 + \\ & 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 + \\ & 2 E^{1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\ & E^{1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\ & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\ & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 == 0, \\ & 2 E^{-1 \tau_1 \sigma_1 + 1 \tau_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 + E^{-1 \tau_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^3 - \\ & 2 \mathbf{I} \left(\int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \right) (D_1 A_2) \omega_2 - 2 \mathbf{I} \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_2[x]^2 dx \right) A_2 \omega_2 + \\ & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \\ & \left. 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 == 0 \right\} \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμε τη σημειογραφία των συνθηκών επιλυσιμότητας, χρησιμοποιούμε την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων σχήματος και ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους :

$$\text{notationRule} = \left\{ \int_0^1 \varphi_{i-}[x]^2 dx \rightarrow 1, \int_0^1 \mu[x] \varphi_{i-}[x]^2 dx \rightarrow \mu_i, F \int_0^1 \varphi_{i-}[x] \varphi_{j-}''[x] dx \rightarrow -\omega_i s_{i,j} \bar{f} \right\};$$

Για να αναγνωρίσουμε τις μορφές των μη-γραμμικών όρων στις συνθήκες επιλυσιμότητας, πρώτα αναγνωρίζουμε όλες τις πιθανές μορφές των μη-ομογενών όρων στο πρώτης-τάξης πρόβλημα. Γι' αυτό το λόγο, θεωρούμε

`basicTerms = Table[{Ai[T1] Ei σ1 T0, $\bar{A}_i[T_1] E^{-i \sigma_1 T_0}$ }, {i, 2}] // Flatten`

`{Ei T0 σ1 Ai[T1], E-i T0 σ1 \bar{A}_i [T1], Ei T0 σ2 A2[T1], E-i T0 σ2 \bar{A}_2 [T1]}`

Τότε, όλες οι πιθανές μορφές των μη-γραμμικών όρων στο πρώτης-τάξης πρόβλημα δίνονται από :

`cubicTerms = Nest[Outer[Times, basicTerms, #] &, basicTerms, 2] // Flatten // Union;
cubicTerms /. displayRule`

`{E3 i T0 σ1 A13, Ei T0 (2 σ1 + σ2) A12 A2, Ei T0 (σ1 + 2 σ2) A1 A22, E3 i T0 σ2 A23, Ei T0 σ1 A12 \bar{A}_1 ,
Ei T0 σ2 A1 A2 \bar{A}_1 , Ei T0 (-σ1 + 2 σ2) A22 \bar{A}_1 , E-i T0 σ1 A1 \bar{A}_1 2, Ei T0 (-2 σ1 + σ2) A2 \bar{A}_1 2, E-3 i T0 σ1 \bar{A}_1 3,
Ei T0 (2 σ1 - σ2) A12 \bar{A}_2 , Ei T0 σ1 A1 A2 \bar{A}_2 , Ei T0 σ2 A22 \bar{A}_2 , E-i T0 σ2 A1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 , E-i T0 σ1 A2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 ,
Ei T0 (-2 σ1 - σ2) \bar{A}_1 2 \bar{A}_2 , Ei T0 (σ1 - 2 σ2) A1 \bar{A}_2 2, E-i T0 σ2 A2 \bar{A}_2 2, Ei T0 (-σ1 - 2 σ2) \bar{A}_1 \bar{A}_2 2, E-3 i T0 σ2 \bar{A}_2 3}`

Από αυτούς τους όρους, μόνο οι όροι που μπορεί να οδηγήσουν σε εγκόσμους όρους εμφανίζονται στις συνθήκες επιλυσιμότητας, οι οποίες μπορούν να αναγνωριστούν σύμφωνα με :

`secularTerms = (E-i σ1 T0 cubicTerms /. expRule[#] /. Exp[_ T0 + _.] -> 0 // Union // Rest) & /@
{1, 2}`

`{A1[T1]2 \bar{A}_1 [T1], Ei T1 σ1 A2[T1] \bar{A}_1 [T1]2, A1[T1] A2[T1] \bar{A}_2 [T1]},
{E-i T1 σ1 A1[T1]3, A1[T1] A2[T1] \bar{A}_1 [T1], A2[T1]2 \bar{A}_2 [T1]}`

Κατόπιν, ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους :

`symbolList = {-8 ω1 {γ11, δ1, γ12}, -8 ω2 {δ2, γ21, γ22}}`

`{{-8 γ11 ω1, -8 δ1 ω1, -8 γ12 ω1}, {-8 δ2 ω2, -8 γ21 ω2, -8 γ22 ω2}}`

και εκφράζουμε την SCond κατά μια πιο ακριβή μορφή, ως εξής :

`eqMod =`

`Expand[- $\frac{1}{\omega_{\#}}$ ((SCond[#[#, 1]) /. notationRule /. Thread[secularTerms[#[#]] -> 0]) +
symbolList[#[#]].secularTerms[#[#]]) == 0 & /@ {1, 2}`

`{2 I μ1 A1[T1] + 2 Ei T1 σ1 - i T1 σ2 f s1,2 A2[T1] + 2 Ei T1 σ2 f s1,1 \bar{A}_1 [T1] + 8 γ11 A1[T1]2 \bar{A}_1 [T1] +
8 Ei T1 σ1 δ1 A2[T1] \bar{A}_1 [T1]2 + 8 γ12 A1[T1] A2[T1] \bar{A}_2 [T1] + 2 I A1'[T1] == 0,
2 E-i T1 σ1 + i T1 σ2 f s2,1 A1[T1] + 8 E-i T1 σ1 δ2 A1[T1]3 + 2 I μ2 A2[T1] +
8 γ21 A1[T1] A2[T1] \bar{A}_1 [T1] + 8 γ22 A2[T1]2 \bar{A}_2 [T1] + 2 I A2'[T1] == 0}`

όπου

`-symbolList[[1]] -> (-Coefficient[SCond[[1, 1]], #] & /@ secularTerms[[1]]) // Thread //
TableForm`

`8 γ11 ω1 -> -3 α (∫01 φ1'[x]2 dx) ∫01 φ1[x] φ1'[x] dx`

`8 δ1 ω1 -> -2 α (∫01 φ1'[x] φ2'[x] dx) ∫01 φ1[x] φ1'[x] dx - α (∫01 φ1'[x]2 dx) ∫01 φ1[x] φ2'[x] dx`

`8 γ12 ω1 -> -2 α (∫01 φ2'[x]2 dx) ∫01 φ1[x] φ1'[x] dx - 4 α (∫01 φ1'[x] φ2'[x] dx) ∫01 φ1[x] φ2'[x] dx`

`-symbolList[[2]] -> (-Coefficient[SCond[[2, 1]], #] & /@ secularTerms[[2]]) // Thread //
TableForm`

$$\begin{aligned} \delta \delta_2 \omega_2 &\rightarrow -\alpha \left(\int_0^1 \phi_1^2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_1^2[x] dx \\ \delta \gamma_{21} \omega_2 &\rightarrow -4\alpha \left(\int_0^1 \phi_1^2[x] \phi_2^2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_1^2[x] dx - 2\alpha \left(\int_0^1 \phi_1^2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_2^2[x] dx \\ \delta \gamma_{22} \omega_2 &\rightarrow -3\alpha \left(\int_0^1 \phi_2^2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_2^2[x] dx \end{aligned}$$

Εξίσωση (1)

Οι μιγαδικών-τιμών συνθήκες επιλυσιμότητας μπορούν να εκφραστούν σε πραγματικών-τιμών μορφή μέσω εισαγωγής του μετασχηματισμού σε πολικές συντεταγμένες :

$$\text{ruleA} = \left\{ A_i \rightarrow \left(\frac{1}{2} a_i[\#] \text{Exp}[I \theta_i[\#]] \right) \&, \bar{A}_i \rightarrow \left(\frac{1}{2} a_i[\#] \text{Exp}[-I \theta_i[\#]] \right) \& \right\};$$

στην eqMod και να λάβουμε :

$$\text{expr1} = \text{Expand}[\text{eqMod}[\#, 1]] \text{Exp}[-I \theta_{\#}[\text{T}_1]] /. \text{ruleA} \& /@ \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} &\{ I \mu_1 a_1[\text{T}_1] + E^{I \text{T}_1 \sigma_2 - 2 I \theta_1[\text{T}_1]} f s_{1,1} a_1[\text{T}_1] + \\ &\quad \gamma_{11} a_1[\text{T}_1]^2 + E^{I \text{T}_1 \sigma_1 - I \text{T}_1 \sigma_2 - I \theta_1[\text{T}_1] + I \theta_2[\text{T}_1]} f s_{1,2} a_2[\text{T}_1] + \\ &\quad E^{I \text{T}_1 \sigma_1 - 3 I \theta_1[\text{T}_1] + I \theta_2[\text{T}_1]} \delta_1 a_1[\text{T}_1]^2 a_2[\text{T}_1] + \gamma_{12} a_1[\text{T}_1] a_2[\text{T}_1]^2 + I a_1'[\text{T}_1] - a_1[\text{T}_1] \theta_1'[\text{T}_1], \\ &\quad E^{-I \text{T}_1 \sigma_1 + I \text{T}_1 \sigma_2 + I \theta_1[\text{T}_1] - I \theta_2[\text{T}_1]} f s_{2,1} a_1[\text{T}_1] + E^{-I \text{T}_1 \sigma_1 + 3 I \theta_1[\text{T}_1] - I \theta_2[\text{T}_1]} \delta_2 a_1[\text{T}_1]^2 + \\ &\quad I \mu_2 a_2[\text{T}_1] + \gamma_{21} a_1[\text{T}_1]^2 a_2[\text{T}_1] + \gamma_{22} a_2[\text{T}_1]^3 + I a_2'[\text{T}_1] - a_2[\text{T}_1] \theta_2'[\text{T}_1] \} \end{aligned}$$

Κατόπιν, διαχωρίζουμε τα πραγματικά από τα φανταστικά μέρη της expr1 για να λάβουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη διαμόρφωση των ευρών a_i και των φάσεων θ_i . Για να το επιτύχουμε αυτό, ορίζουμε τον κανόνα :

$$\text{realRule} = \{ \text{Re}[s_] \rightarrow s, \text{Im}[s_] \rightarrow 0 \};$$

Κατόπιν, οι εξισώσεις που διέπουν τα εύρη ταλάντωσης της κίνησης αντιστοιχούν στα φανταστικά μέρη της expr1, δηλαδή :

ampEq =

$$\text{Solve}[\text{ComplexExpand}[\text{Im}[\#]] == 0 /. \text{realRule} \& /@ \text{expr1}, \{a_1'[\text{T}_1], a_2'[\text{T}_1]\}][[1]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal} // \text{ExpandAll}$$

$$\begin{aligned} &\{ a_1'[\text{T}_1] == -\mu_1 a_1[\text{T}_1] - f \text{Sin}[\text{T}_1 \sigma_2 - 2 \theta_1[\text{T}_1]] s_{1,1} a_1[\text{T}_1] - \\ &\quad f \text{Sin}[\text{T}_1 \sigma_1 - \text{T}_1 \sigma_2 - \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] s_{1,2} a_2[\text{T}_1] - \\ &\quad \text{Sin}[\text{T}_1 \sigma_1 - 3 \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] \delta_1 a_1[\text{T}_1]^2 a_2[\text{T}_1], \\ &\quad a_2'[\text{T}_1] == f \text{Sin}[\text{T}_1 \sigma_1 - \text{T}_1 \sigma_2 - \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] s_{2,1} a_1[\text{T}_1] + \\ &\quad \text{Sin}[\text{T}_1 \sigma_1 - 3 \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] \delta_2 a_1[\text{T}_1]^2 - \mu_2 a_2[\text{T}_1] \} \end{aligned}$$

Επιπλέον, οι εξισώσεις που διέπουν τις φάσεις της κίνησης αντιστοιχούν στα πραγματικά τμήματα της expr1, δηλαδή :

phaseEq =

$$\text{Solve}[\text{ComplexExpand}[\text{Re}[\#]] == 0 /. \text{realRule} \& /@ \text{expr1}, \{\theta_1'[\text{T}_1], \theta_2'[\text{T}_1]\}][[1]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal} // \text{ExpandAll}$$

$$\begin{aligned} &\{ \theta_1'[\text{T}_1] == f \text{Cos}[\text{T}_1 \sigma_2 - 2 \theta_1[\text{T}_1]] s_{1,1} + \\ &\quad \gamma_{11} a_1[\text{T}_1]^2 + \frac{f \text{Cos}[\text{T}_1 \sigma_1 - \text{T}_1 \sigma_2 - \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] s_{1,2} a_2[\text{T}_1]}{a_1[\text{T}_1]} + \\ &\quad \text{Cos}[\text{T}_1 \sigma_1 - 3 \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] \delta_1 a_1[\text{T}_1] a_2[\text{T}_1] + \gamma_{12} a_2[\text{T}_1]^2, \\ &\quad \theta_2'[\text{T}_1] == \gamma_{21} a_1[\text{T}_1]^2 + \frac{f \text{Cos}[\text{T}_1 \sigma_1 - \text{T}_1 \sigma_2 - \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] s_{2,1} a_1[\text{T}_1]}{a_2[\text{T}_1]} + \\ &\quad \frac{\text{Cos}[\text{T}_1 \sigma_1 - 3 \theta_1[\text{T}_1] + \theta_2[\text{T}_1]] \delta_2 a_1[\text{T}_1]^3}{a_2[\text{T}_1]} + \gamma_{22} a_2[\text{T}_1]^2 \} \end{aligned}$$

Αυτές οι εξισώσεις διαμόρφωσης είναι μη-αυτόνομες επειδή εξαρτώνται σαφώς από το T_1 .

Για να προσδιορίσουμε ένα αυτόνομο σύνολο από εξισώσεις διαμόρφωσης, αρχίζουμε με την expr1 και αναγνωρίζουμε τα ανεξάρτητης-φάσης στοιχεία σε αυτήν. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναγνωρίζουμε όλα τα δυνατά στοιχεία φάσης, δηλαδή :

`expTerms = I Cases[expr1, Exp[arg_] -> arg, Infinity] // Expand`

$\{-T_1 \sigma_2 + 2 \theta_1 [T_1], -T_1 \sigma_1 + T_1 \sigma_2 + \theta_1 [T_1] - \theta_2 [T_1],$
 $-T_1 \sigma_1 + 3 \theta_1 [T_1] - \theta_2 [T_1], T_1 \sigma_1 - T_1 \sigma_2 - \theta_1 [T_1] + \theta_2 [T_1], T_1 \sigma_1 - 3 \theta_1 [T_1] + \theta_2 [T_1]\}$

Από αυτά τα στοιχεία, μόνο δύο είναι ανεξάρτητα διότι

`Outer[D, expTerms, {theta1[T1], theta2[T1]}] // RowReduce`

$\{\{1, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 0\}, \{0, 0\}, \{0, 0\}\}$

Δηλώνοντας αυτά τα δύο ανεξάρτητα στοιχεία ως γ_1 και γ_2 , έχουμε :

`gammaList = {2 gamma1[T1], gamma2[T1]} == expTerms[{{1, 2}}] // Thread`

$\{2 \gamma_1 [T_1] == -T_1 \sigma_2 + 2 \theta_1 [T_1], \gamma_2 [T_1] == -T_1 \sigma_1 + T_1 \sigma_2 + \theta_1 [T_1] - \theta_2 [T_1]\}$

τα οποία μπορούν να λυθούν για θ_1 και θ_2 για να λάβουμε :

`thetaRule = Solve[gammaList, {theta1[T1], theta2[T1]}][[1]] // ExpandAll`

$\{\theta_1 [T_1] \rightarrow \frac{T_1 \sigma_2}{2} + \gamma_1 [T_1], \theta_2 [T_1] \rightarrow -T_1 \sigma_1 + \frac{3 T_1 \sigma_2}{2} + \gamma_1 [T_1] - \gamma_2 [T_1]\}$

Αντικαθιστώντας για θ_i στην expr1 προκύπτει :

`expr2 = expr1 /. Table[theta_i -> (Evaluate[thetaRule[[i, 2]] /. T1 -> #] &), {i, 2}] /.`

`Exp[arg_] := Exp[Expand[arg]] // Expand`

$\{I \mu_1 a_1 [T_1] - \frac{1}{2} \sigma_2 a_1 [T_1] + E^{-2I \gamma_1 [T_1]} f s_{1,1} a_1 [T_1] + \gamma_{11} a_1 [T_1]^3 + E^{-I \gamma_2 [T_1]} f s_{1,2} a_2 [T_1] +$
 $E^{-2I \gamma_1 [T_1] - I \gamma_2 [T_1]} \delta_1 a_1 [T_1]^2 a_2 [T_1] + \gamma_{12} a_1 [T_1] a_2 [T_1]^2 + I a_1' [T_1] - a_1 [T_1] \gamma_1 [T_1],$
 $E^{I \gamma_2 [T_1]} f s_{2,1} a_1 [T_1] + E^{2I \gamma_1 [T_1] + I \gamma_2 [T_1]} \delta_2 a_1 [T_1]^3 + I \mu_2 a_2 [T_1] + \sigma_1 a_2 [T_1] -$
 $\frac{3}{2} \sigma_2 a_2 [T_1] + \gamma_{21} a_1 [T_1]^2 a_2 [T_1] + \gamma_{22} a_2 [T_1]^3 + I a_2' [T_1] - a_2 [T_1] \gamma_1 [T_1] + a_2 [T_1] \gamma_2 [T_1]\}$

Κατόπιν, οι εξισώσεις που διέπουν τα εύρη της κίνησης αντιστοιχούν με τα φανταστικά μέρη της expr2 , δηλαδή :

`(ampEq =`

`Solve[ComplexExpand[Im[#]] == 0 /. realRule & /@ expr2, {a1'[T1], a2'[T1]}][[1]] /.`

`Rule -> Equal // ExpandAll) /. f_ [T1] -> f`

$\{a_1' == \text{Sin}[2 \gamma_1 + \gamma_2] a_1^2 a_2 \delta_1 - a_1 \mu_1 + f \text{Sin}[2 \gamma_1] a_1 s_{1,1} + f \text{Sin}[\gamma_2] a_2 s_{1,2},$
 $a_2' == -\text{Sin}[2 \gamma_1 + \gamma_2] a_1^2 \delta_2 - a_2 \mu_2 - f \text{Sin}[\gamma_2] a_1 s_{2,1}\}$

Επιπλέον, οι εξισώσεις που διέπουν τις φάσεις κίνησης αντιστοιχούν στα πραγματικά μέρη της expr2 , δηλαδή :

(phaseEq =

Solve[ComplexExpand[Re[#]] == 0 /. realRule & /@ expr2, {y1'[T1], y2'[T1]}][[1]] /.
Rule -> Equal // ExpandAll) /. f_[T1] -> f

$$\left\{ \begin{aligned} y_2 &== a_1^2 y_{11} + a_2^2 y_{12} - a_1^2 y_{21} - a_2^2 y_{22} + \cos[2 y_1 + y_2] a_1 a_2 \delta_1 - \\ &\frac{\cos[2 y_1 + y_2] a_1^3 \delta_2}{a_2} - \sigma_1 + \sigma_2 + f \cos[2 y_1] s_{1,1} + \frac{f \cos[y_2] a_2 s_{1,2}}{a_1} - \frac{f \cos[y_2] a_1 s_{2,1}}{a_2}, \\ y_1 &== a_1^2 y_{11} + a_2^2 y_{12} + \cos[2 y_1 + y_2] a_1 a_2 \delta_1 - \frac{\sigma_2}{2} + f \cos[2 y_1] s_{1,1} + \frac{f \cos[y_2] a_2 s_{1,2}}{a_1} \end{aligned} \right\}$$

Οι εξισώσεις διαμόρφωσης είναι αυτόνομες επειδή είναι ανεξάρτητες από την ανεξάρτητη μεταβλητή T_1 .

E

Εφαρμόζοντας αναλύσεις διακλάδωσης της δυναμικής του συστήματος, κανείς μπορεί να το βρει πιο πρόσφορο, σε μερικές περιπτώσεις, να αναπαράσχει τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή παρά σε πολική μορφή. Σαν υποπροϊόν, μπορεί κανείς επίσης να λάβει τις συμμετρίες του συστήματος. Γι' αυτό το λόγο, εισάγουμε τον Καρτεσιανό μετασχηματισμό :

cartRule = {A_k -> $\left(\frac{1}{2} (p_k[\#] - I q_k[\#]) \text{Exp}[I \lambda_k[\#]] \right) \&$,
A_k -> $\left(\frac{1}{2} (p_k[\#] + I q_k[\#]) \text{Exp}[-I \lambda_k[\#]] \right) \&$ };
realRule = {Im[x_k] -> 0, Re[x_k] -> x, λ_k'[T₁] -> ν_k};

όπου τα λ_i επιλέγονται για να καταστήσουν τις παραγόμενες εξισώσεις διαμόρφωσης αυτόνομες. Αντικαθιστώντας τον cartRule στην eqMod, προκύπτει :

eqModCart[k_] := Exp[-I λ_k[T₁]] Subtract @@ eqMod[[k]] /. cartRule // Expand;

Κατόπιν, επιλέγουμε τα λ_i ώστε να καταστήσουν την eqModCart αυτόνομη. Για να το επιτύχουμε αυτό, αναγνωρίζουμε τα ανεξάρτητα της ορίσματα μέσω αναγνώρισης όλων των ορισμάτων της. Αυτά δίνονται από :

list1 = -I (Cases[#, Exp[x_k] -> x, Infinity] & /@ Array[eqModCart, 2] // Flatten // Union) // Expand

{T₁ σ₂ - 2 λ₁[T₁], -T₁ σ₁ + T₁ σ₂ + λ₁[T₁] - λ₂[T₁],
-T₁ σ₁ + 3 λ₁[T₁] - λ₂[T₁], T₁ σ₁ - T₁ σ₂ - λ₁[T₁] + λ₂[T₁], T₁ σ₁ - 3 λ₁[T₁] + λ₂[T₁]}

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων σχέσεων στην list1, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση RowReduce και παίρνουμε

Outer[D, list1, {λ₁[T₁], λ₂[T₁]}] // RowReduce

{{1, 0}, {0, 1}, {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}}

Έτσι, υπάρχουν μόνο δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ορίσματα στην list1. Επιλέγουμε τα πρώτα δύο για να προσδιορίσουμε το λ_i. Για ένα αμετάβλητο σύνολο των εξισώσεων διαμόρφωσης, θέτουμε καθεμία από αυτές τις σχέσεις να είναι ένα ζυγό πολλαπλάσιο του π. Λύνοντας τις παραγόμενες εξισώσεις για τα λ_i, λαμβάνουμε :

list1 = list1[[{1, 2}]];

lambdaRule = Solve[list1 + {m₁, m₂} 2 π == 0 // Thread, Table[λ_i[T₁], {i, 2}]]][[1]]

{λ₁[T₁] -> $\frac{1}{2} (2 \pi m_1 + T_1 \sigma_2)$, λ₂[T₁] -> $\frac{1}{2} (2 \pi m_1 + 4 \pi m_2 - 2 T_1 \sigma_1 + 3 T_1 \sigma_2)$ }

όπου τα m_i είναι θετικοί ή αρνητικοί ακέραιοι. Θέτοντας $v_i = \lambda_i'$, προκύπτει :

`D[lambdaRule, T1] /. realRule`

$$\left\{ v_1 \rightarrow \frac{\sigma_2}{2}, v_2 \rightarrow \frac{1}{2} (-2 \sigma_1 + 3 \sigma_2) \right\}$$

Κατόπιν, διαχωρίζοντας τα πραγματικά από τα φανταστικά μέρη της `eqModCart`, λαμβάνουμε την ακόλουθη Καρτεσιανή μορφή των εξισώσεων διαμόρφωσης :

```
(eqs =
  Solve[
    Flatten[Table[ComplexExpand[{{Im[#], Re[#]]} & /@ (eqModCart[k] /. Exp[_] -> 1) /. realRule,
      {k, 2}]] == 0 // Thread, Table[{p_'[T1], q_'[T1]}, {k, 2}] // Flatten][[1]] /.
    Rule -> Equal] /. f_[T1] -> f // TableForm

p1 == p1^2 q1 y11 + q1^2 y11 + p2^2 q1 y12 + q1 q2^2 y12 - 2 p1 p2 q1 delta_1 + p1^2 q2 delta_1 - q1^2 q2 delta_1 - p1 mu_1 - q1 v_1 - f q1 s1,1 + f q2 s1,2
q1 == -p1^2 y11 - p1 q1^2 y11 - p1 p2^2 y12 - p1 q2^2 y12 - p1^2 p2 delta_1 + p2 q1^2 delta_1 - 2 p1 q1 q2 delta_1 - q1 mu_1 + p1 v_1 - f p1 s1,1 - f p2 s1,2
p2 == p1^2 q2 y21 + q1^2 q2 y21 + p2^2 q2 y22 + q2^2 y22 + 3 p1^2 q1 delta_2 - q1^2 delta_2 - p2 mu_2 - q2 v_2 + f q1 s2,1
q2 == -p1^2 p2 y21 - p2 q1^2 y21 - p2^2 y22 - p2 q2^2 y22 - p1^2 delta_2 + 3 p1 q1^2 delta_2 - q2 mu_2 + p2 v_2 - f p1 s2,1

Η ιδιότητα συμμετρίας του συστήματος μπορεί επίσης να ληφθεί ως εξής :
phase = Flatten[Table[Mod[#[[2]] & /@ lambdaRule /. T1 -> 0, 2 pi], {m1, 0, 10}, {m2, 0, 10}], 1] //
  Union
{{0, 0}, {pi, pi}}

rotMat[a_] := {{Cos[a], Sin[a]}, {-Sin[a], Cos[a]}};
symmetryList = Join @@ Table[rotMat[#[[i]]].{p_i, q_i}, {i, 2}] & /@ phase
{{p1, q1, p2, q2}, {-p1, -q1, -p2, -q2}}
```

Έτσι, αν η (p_1, q_1, p_2, q_2) είναι μια λύση των εξισώσεων διαμόρφωσης, τότε η $(-p_1, -q_1, -p_2, -q_2)$ είναι μια άλλη λύση αυτών των εξισώσεων. Αν αυτά τα δύο σύνολα λύσεων είναι τα ίδια, τότε η απόκριση του συστήματος είναι συμμετρική. Διαφορετικά, θα είναι ασύμμετρη.

- **Οι Συναρτήσεις PolarForm και CartesianForm**

Ακολουθώντας τις διαδικασίες που περιγράφηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, δομούμε δύο συναρτήσεις, τις `PolarForm` και `CartesianForm`, για να αυτοματοποιήσουμε τη διαδικασία, δεδομένου ότι οι σύνθετες εξαρτημένες μεταβλητές στις εξισώσεις διαμόρφωσης είναι γραμμένες στη μορφή S_i , $i = 1, \dots, neq$ και τα αντίστοιχα μιγαδικά συζυγή είναι \bar{S}_i . Οι συναρτήσεις μπορούν ελάχιστα να τροποποιηθούν για να επιτρέψουν μια πιο γενική μορφή για τις εξισώσεις διαμόρφωσης. Για να λάβουμε την πολική μορφή ή την Καρτεσιανή μορφή των σύνθετων εξισώσεων διαμόρφωσης, απλά παρέχουμε τη λίστα των εξισώσεων διαμόρφωσης και του S σαν δύο απαιτούμενες εισόδους (inputs) στην `PolarForm` και την `CartesianForm`, αντίστοιχα. Αν $S = A$, η λίστα των εξισώσεων διαμόρφωσης είναι το μόνο απαιτούμενο input.


```

PolarForm[eqs_List, S_Symbol: A] :=
Module[{neq = Length[eqs], t},
  t = Cases[eqs, S_i[a_] -> a, ∞][[1]];
  polarRule = {S_k ->  $\left(\frac{1}{2} a_k[\#] \text{Exp}[I \beta_k[\#]] \ \&\right)$ ,  $\bar{S}_k -> \left(\frac{1}{2} a_k[\#] \text{Exp}[-I \beta_k[\#]] \ \&\right)$ };
  realRule = {Im[x_] -> 0, Re[x_] -> x};
  eqModPolar[k_] := Exp[-I β_k[t]] Subtract @@ eqs[[k]] /. polarRule // Expand;
  list1 = I Cases[Array[eqModPolar, neq], Exp[a_] -> a, ∞] // Expand // Union;
  newList1[list_, n_] :=
    With[{v = Table[Unique[], {n}]},

      ReplaceList[list, Append[Flatten[{{___, Pattern[#, _]} & /@ v}, ___] -> v]];
      betaList = Table[β_i[t], {i, neq}];
      list2 = {};

Scan[If[NullSpace[Outer[Coefficient, #, betaList]] === {}, list2 = -#; Return[]] &,
  newList1[list1, neq]];

If[list2 === {}, Print["Autonomous system is not possible!!!\nThe phase list is:"];
  Return[list1]
];
  betaRule1 = Solve[list3 = Table[γ_i[t], {i, neq}] == list2 // Thread, betaList][[1]];

  betaRule2 = Table[β_i -> Function[t // Evaluate, β_i[t] /. betaRule1 // Evaluate], {i, neq}];
  Do[eq0[i] = eqModPolar[i] /. betaRule2 /. Exp[a_] :=> Exp[Expand[a]];
  eq[i] = Solve[ComplexExpand[Im[eq0[i]]] == 0 /. realRule, a_i'[t]][[1, 1]] /.
  Rule -> Equal;
  eqRe[i] = ComplexExpand[Re[eq0[i]]] == 0 /. realRule, {i, neq}
];
  gammapList = Table[γ_i'[t], {i, neq}];

```

```

CartesianForm[eqs_List, S_Symbol: A] :=
  Module[{neq = Length[eqs], t},
    t = Cases[eqs, S_i[a_] -> a, ∞][[1]];

    cartRule = {S_k -> (1/2 (p_k[#] - I q_k[#]) Exp[I λ_k[#]] &),
      S_k -> (1/2 (p_k[#] + I q_k[#]) Exp[-I λ_k[#]] &)};
    realRule = {Im[x_] -> 0, Re[x_] -> x, λ_k'[t] -> ν_k};
    eqModCart[k_] := Exp[-I λ_k[t]] Subtract @@ eqs[[k]] /. cartRule // Expand;

    eqs1 =
      {ComplexExpand[Im[#]] == 0, ComplexExpand[Re[#]] == 0} & /@
      (Array[eqModCart, neq] /. E^_ -> 1) // realRule // Flatten;
    eqs2 = Solve[eqs1, Table[{p_k'[t], q_k'[t]}, {k, neq}]] // Flatten][[1]] /.
    Rule -> Equal;
    list1 = I Cases[Array[eqModCart, neq], Exp[a_] -> a, ∞] // Expand // Union;
    newList1[list_, n_] :=
      With[{v = Table[Unique[], {n}]},

        ReplaceList[list, Append[Flatten[{{___, Pattern[#, _]} & /@ v}, ___] -> v]];
        lambdaList = Table[λ_k[t], {i, neq}];
        list2 = {};

        Scan[If[NullSpace[Outer[Coefficient, #, lambdaList]] === {}, list2 = -#; Return[]] &,
          newList1[list1, neq]];

        If[list2 === {}, Print["Autonomous system is not possible!!!\n\nThe phase list is:"];
        Return[list1]
      ];
      lambdaRule = Solve[list2 + 2 Table[m_i, {i, neq}] π == 0 // Thread, lambdaList][[1]];
      iterList = Table[{m_i, 0, 10}, {i, neq}];

    phase =
      Flatten[
        Table[Mod[Select[#, ! FreeQ[#, π] &] & /@ (lambdaList /. lambdaRule // Expand), 2 π] //
          Evaluate, Sequence @@ iterList // Evaluate], neq - 1] // Union;
        rotMat[θ_] := {{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}};
        symmetryList = Flatten[Table[rotMat[#[[k]]].{p_k, q_k}, {k, 2}]] & /@ phase;
        {eqs2, D[lambdaRule, t] /. realRule, symmetryList}
      ]
  ]

```

• **Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της 2^{ης} Μορφής**

Σε αυτή την περίπτωση, $\Omega \approx \omega_2$. Για να περιγράψουμε την εγγύτητα των εσωτερικών και των κύριων παραμετρικών συντονισμών, εισάγουμε τις δύο αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_1 και σ_2 που ορίζονται από :

$$\text{ResonanceConds} = \{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == 2 \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

και ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

$$\text{OmgRule} = \text{Solve}[\text{ResonanceConds}, \text{Drop}[\text{omgList}, \{\#\}] \sim \text{Join}[\{\Omega\}][[1]] \& /@ \{1, 2\}$$

$$\left\{ \{\omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow 2 \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 6 \omega_1\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2), \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_2 + 2 \omega_2 \right\} \right\}$$

`expRule[i_] := Exp[arg_] :=> Exp[Expand[arg /. CmgRule[[i]]] /. ε T0 -> T1]`

Αντικαθιστούμε τις ResonanceConds στη δεξιά πλευρά της orderIEq και λαμβάνουμε την πηγή των προσωρινών όρων ως εξής :

`ST = Table[Coefficient[orderIEq[[2]] /. expRule[i], Exp[I ω1 T0]], {i, 2}];
ST /. displayRule`

$$\left\{ -2 I (D_1 A_1) \omega_1 \varphi_1[x] - 2 I A_1 \omega_1 \mu[x] \varphi_1[x] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 \varphi_1''[x] + \right. \\ 2 E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \varphi_1''[x] + 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \varphi_1''[x] + \\ E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \varphi_2''[x] + 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x], \\ -2 I (D_1 A_2) \omega_2 \varphi_2[x] - 2 I A_2 \omega_2 \mu[x] \varphi_2[x] + E^{-i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1^3 \varphi_1''[x] + \\ 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \varphi_1''[x] + 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \varphi_2''[x] + 2 E^{i T_1 \sigma_2} F \bar{A}_2 \varphi_2''[x] + \\ \left. 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 \varphi_2''[x] \right\}$$

Όπως συζητήθηκε στην περίπτωση του κύριου παραμετρικού συντονισμού της πρώτης μορφής, οι συνθήκες επιλυσιμότητας της orderIEq και της orderIBC απαιτούν η ST να είναι ορθογωνική στο $\varphi_1[x]$ και στο $\varphi_2[x]$ αντίστοιχα. Εκμεταλλευόμενοι αυτές τις συνθήκες, έχουμε :

`SCond =
Table[int[φj[x] ST[[j]], {x, 0, 1}] /. intRule1 /. intRule2 /. int -> Integrate, {j, 2}] ==
0 // Thread;`

`SCond /. displayRule`

$$\left\{ -2 I \left(\int_0^1 \varphi_1[x]^2 dx \right) (D_1 A_1) \omega_1 - 2 I \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_1[x]^2 dx \right) A_1 \omega_1 + \right. \\ 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 + \\ 2 E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\ E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\ 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\ 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 == 0, \\ E^{-i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^3 - 2 I \left(\int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \right) (D_1 A_2) \omega_2 - \\ 2 I \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_2[x]^2 dx \right) A_2 \omega_2 + 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \\ 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + 2 E^{i T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) \bar{A}_2 + \\ \left. 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 == 0 \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία που εισήχθη σε προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να εκφράσουμε την SCond σε μια πιο ακριβή μορφή ως εξής :

eqMod =

$$\text{Expand}\left[-\frac{1}{\omega_1} \left((\text{SCond}[\{ \#, 1 \}] /. \text{notationRule} /. \text{Thread}[\text{secularTerms}[\{ \# \}] \rightarrow 0]) + \text{symbolList}[\{ \# \}].\text{secularTerms}[\{ \# \}] \right) == 0 \& /@ \{ 1, 2 \}$$

$$\left\{ 2 I \mu_1 A_1[T_1] + 8 \gamma_{11} A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \right.$$

$$\left. 8 E^{i T_1 \sigma_1} \delta_1 A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1]^2 + 8 \gamma_{12} A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] + 2 I A_1'[T_1] == 0, \right.$$

$$\left. 8 E^{-i T_1 \sigma_1} \delta_2 A_1[T_1]^2 + 2 I \mu_2 A_2[T_1] + 8 \gamma_{21} A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] + \right.$$

$$\left. 2 E^{i T_1 \sigma_2} f s_{2,2} \bar{A}_2[T_1] + 8 \gamma_{22} A_2[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] + 2 I A_2'[T_1] == 0 \right\}$$

όπου

-symbolList[[1]] -> (-Coefficient[SCond[[1, 1]], #] & /@ secularTerms[[1]]) // Thread // TableForm

$$8 \gamma_{11} \omega_1 \rightarrow -3 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_1[x] \phi_1'[x] dx$$

$$8 \delta_1 \omega_1 \rightarrow -2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x] \phi_2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_1[x] \phi_1'[x] dx - \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_1[x] \phi_2'[x] dx$$

$$8 \gamma_{12} \omega_1 \rightarrow -2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_2[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_1[x] \phi_1'[x] dx - 4 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x] \phi_2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_1[x] \phi_2'[x] dx$$

-symbolList[[2]] -> (-Coefficient[SCond[[2, 1]], #] & /@ secularTerms[[2]]) // Thread // TableForm

$$8 \delta_2 \omega_2 \rightarrow -\alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_1'[x] dx$$

$$8 \gamma_{21} \omega_2 \rightarrow -4 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x] \phi_2[x] dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_1'[x] dx - 2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_2'[x] dx$$

$$8 \gamma_{22} \omega_2 \rightarrow -3 \alpha \left(\int_0^1 \phi_2[x]^2 dx \right) \int_0^1 \phi_2[x] \phi_2'[x] dx$$

Εξισώσεις Διαμόρφωσης σε Πολική Μορφή

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση PolarForm που ορίστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, λαμβάνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε πολική μορφή και τους ορισμούς για τα γ_i ως εξής :

PolarForm[eqMod]

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} a_1'[T_1] &== -\mu_1 a_1[T_1] - \text{Sin}[\gamma_1[T_1]] \delta_1 a_1[T_1]^2 a_2[T_1], \\ a_2'[T_1] &== \text{Sin}[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^3 - \mu_2 a_2[T_1] - f \text{Sin}[\gamma_2[T_1]] s_{2,2} a_2[T_1], \\ \gamma_1'[T_1] &== \sigma_1 + f \text{Cos}[\gamma_2[T_1]] s_{2,2} - 3 \gamma_{11} a_1[T_1]^2 + \gamma_{21} a_1[T_1]^2 + \\ &\quad \frac{\text{Cos}[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^3}{a_2[T_1]} - 3 \text{Cos}[\gamma_1[T_1]] \delta_1 a_1[T_1] a_2[T_1] - 3 \gamma_{12} a_2[T_1]^2 + \gamma_{22} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_2'[T_1] &== \sigma_2 - 2 f \text{Cos}[\gamma_2[T_1]] s_{2,2} - 2 \gamma_{21} a_1[T_1]^2 - \frac{2 \text{Cos}[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^3}{a_2[T_1]} - 2 \gamma_{22} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_1[T_1] &== T_1 \sigma_1 - 3 \beta_1[T_1] + \beta_2[T_1], \gamma_2[T_1] == T_1 \sigma_2 - 2 \beta_2[T_1] \end{aligned} \right\} \right\}$$

Εξισώσεις Διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή Μορφή και η Ιδιότητα Συμμετρίας

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση CartesianForm που ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβάνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή μορφή, τους ορισμούς για τα v_i και την ιδιότητα συμμετρίας ως εξής :

CartesianForm[eqMod]

$$\left\{ \begin{aligned} p_1'[T_1] &= -\mu_1 p_1[T_1] - \nu_1 q_1[T_1] + \gamma_{11} p_1[T_1]^2 q_1[T_1] - 2 \delta_1 p_1[T_1] p_2[T_1] q_1[T_1] + \\ &\quad \gamma_{12} p_2[T_1]^2 q_1[T_1] - \gamma_{11} q_1[T_1]^2 + \delta_1 p_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \delta_1 q_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{12} q_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ q_1'[T_1] &= \nu_1 p_1[T_1] - \gamma_{11} p_1[T_1]^2 - \delta_1 p_1[T_1]^2 p_2[T_1] - \gamma_{12} p_1[T_1] p_2[T_1]^2 - \mu_1 q_1[T_1] - \\ &\quad \gamma_{11} p_1[T_1] q_1[T_1]^2 - \delta_1 p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - 2 \delta_1 p_1[T_1] q_1[T_1] q_2[T_1] - \gamma_{12} p_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ p_2'[T_1] &= -\mu_2 p_2[T_1] + 3 \delta_2 p_1[T_1]^2 q_1[T_1] - \delta_2 q_1[T_1]^2 - \nu_2 q_2[T_1] - f s_{2,2} q_2[T_1] + \\ &\quad \gamma_{21} p_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{22} p_2[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{21} q_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{22} q_2[T_1]^2, \\ q_2'[T_1] &= -\delta_2 p_1[T_1]^2 + \nu_2 p_2[T_1] - f s_{2,2} p_2[T_1] - \gamma_{21} p_1[T_1]^2 p_2[T_1] - \gamma_{22} p_2[T_1]^2 - \\ &\quad 3 \delta_2 p_1[T_1] q_1[T_1]^2 - \gamma_{21} p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - \mu_2 q_2[T_1] - \gamma_{22} p_2[T_1] q_2[T_1]^2, \\ \nu_1 &\rightarrow \frac{1}{6} (2 \sigma_1 + \sigma_2), \nu_2 \rightarrow \frac{\sigma_2}{2}, \{p_1, q_1, p_2, q_2\}, \left\{ \frac{p_1}{2} - \frac{\sqrt{3} q_1}{2}, \frac{\sqrt{3} p_1}{2} + \frac{q_1}{2}, -p_2, -q_2 \right\}, \\ &\left\{ -\frac{p_1}{2} - \frac{\sqrt{3} q_1}{2}, \frac{\sqrt{3} p_1}{2} - \frac{q_1}{2}, p_2, q_2 \right\}, \{-p_1, -q_1, -p_2, -q_2\}, \\ &\left\{ -\frac{p_1}{2} + \frac{\sqrt{3} q_1}{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{3} p_1 - \frac{q_1}{2}, p_2, q_2 \right\}, \left\{ \frac{p_1}{2} + \frac{\sqrt{3} q_1}{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{3} p_1 + \frac{q_1}{2}, -p_2, -q_2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

• Συνδυαστικός Παραμετρικός Συντονισμός των Δύο Μορφών

Σε αυτή την περίπτωση, $\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$. Για να περιγράψουμε την εγγύτητα των εσωτερικών και συνδυαστικών παραμετρικών συντονισμών, εισάγουμε τις δύο αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_1 και σ_2 που ορίζονται από :

$$\text{ResonanceConds} = \{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == \omega_1 + \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

και ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

$$\text{OmgRule} = \text{Solve}[\text{ResonanceConds}, \text{Drop}[\text{omgList}, \{\#\}] \sim \text{Join} \sim \{\Omega\}][[1]] \& /@ \{1, 2\}$$

$$\left\{ \left\{ \omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 4 \omega_1 \right\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2), \Omega \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + 3 \epsilon \sigma_2 + 4 \omega_2) \right\} \right\}$$

$$\text{expRule}[i_] := \text{Exp}[arg_] :=> \text{Exp}[\text{Expand}[arg /. \text{OmgRule}[\{i\}]] /. \epsilon T_0 \rightarrow T_1]$$

Αντικαθιστούμε την ResonanceConds στη δεξιά πλευρά της orderIEq και λαμβάνουμε την πηγή των προσωρινών όρων ως εξής :

$$\text{ST} = \text{Table}[\text{Coefficient}[\text{orderIEq}[\{2\}] /. \text{expRule}[i], \text{Exp}[I \omega_i T_0]], \{i, 2\}];$$

$$\text{ST} /. \text{displayRule}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ -2 I (D_1 A_1) \omega_1 \phi_1[x] - 2 I A_1 \omega_1 \mu[x] \phi_1[x] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] + \right. \\ &\quad 2 E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \phi_1''[x] + 2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \phi_1''[x] + \\ &\quad E^{i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 \phi_2''[x] + 2 E^{i T_1 \sigma_2} F \bar{A}_2 \phi_2''[x] + 4 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 \phi_2''[x], \\ &\quad -2 I (D_1 A_2) \omega_2 \phi_2[x] - 2 I A_2 \omega_2 \mu[x] \phi_2[x] + E^{-i T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1^3 \phi_1''[x] + \\ &\quad 2 E^{i T_1 \sigma_2} F \bar{A}_1 \phi_1''[x] + 4 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x] \phi_2'[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] + 2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_1'[x]^2 dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 \phi_2''[x] + \\ &\quad \left. 3 \alpha \left(\int_0^1 \phi_2'[x]^2 dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 \phi_2''[x] \right\} \end{aligned}$$

Οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν η ST να είναι ορθογωνική σε λύσεις του ομογενούς προβλήματος του συζυγούς τελεστή. Εφόσον το πρόβλημα είναι αυτο-συζυγές, έχουμε :

$$\text{SCond} =$$

$$\text{Table}[\text{int}[\phi_j[x] \text{ST}[\{j\}], \{x, 0, 1\}] /. \text{intRule1} /. \text{intRule2} /. \text{int} \rightarrow \text{Integrate}, \{j, 2\}] == 0 // \text{Thread};$$

$$\text{SCond} /. \text{displayRule}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-2 I \left(\int_0^1 \varphi_1[x]^2 dx \right) (D_1 A_1) \omega_1 - 2 I \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_1[x]^2 dx \right) A_1 \omega_1 + \right. \\
 & \quad 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^2 \bar{A}_1 + \\
 & \quad 2 E^{1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\
 & \quad E^{1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2 \bar{A}_1^2 + \\
 & \quad 2 E^{1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) \bar{A}_2 + \\
 & \quad 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\
 & \quad 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 == 0, \\
 & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1^3 - 2 I \left(\int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \right) (D_1 A_2) \omega_2 - \\
 & \quad 2 I \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_2[x]^2 dx \right) A_2 \omega_2 + 2 E^{1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) \bar{A}_1 + \\
 & \quad 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \\
 & \quad 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \\
 & \quad \left. 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \right) A_2^2 \bar{A}_2 == 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σημειογραφίες που εισήχθησαν στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να εκφράσουμε την SCond κατ' έναν πιο ακριβή τρόπο, ως εξής :

eqMod =

$$\text{Expand} \left[-\frac{1}{\omega_*} \left((\text{SCond}[\{ \#, 1 \}] /. \text{notationRule} /. \text{Thread}[\text{secularTerms}[\{ \# \}] \rightarrow 0]) + \right. \right. \\
 \left. \left. \text{symbolList}[\{ \# \}].\text{secularTerms}[\{ \# \}] \right) == 0 \ \& \ /@ \{ 1, 2 \}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 2 I \mu_1 A_1 [T_1] + \theta \gamma_{11} A_1 [T_1]^2 \bar{A}_1 [T_1] + \theta E^{1 T_1 \sigma_1} \delta_1 A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1]^2 + \right. \\
 & \quad 2 E^{1 T_1 \sigma_2} f \vartheta_{1,2} \bar{A}_2 [T_1] + \theta \gamma_{12} A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] + 2 I A_1' [T_1] == 0, \\
 & \theta E^{-1 T_1 \sigma_1} \delta_2 A_1 [T_1]^2 + 2 I \mu_2 A_2 [T_1] + 2 E^{1 T_1 \sigma_2} f \vartheta_{2,1} \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & \quad \left. \theta \gamma_{21} A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] + \theta \gamma_{22} A_2 [T_1]^2 \bar{A}_2 [T_1] + 2 I A_2' [T_1] == 0 \right\}
 \end{aligned}$$

όπου

$$-\text{symbolList}[\{ 1 \}] \rightarrow (-\text{Coefficient}[\text{SCond}[\{ 1, 1 \}], \#] \ \& \ /@ \text{secularTerms}[\{ 1 \}]) // \text{Thread} // \text{TableForm}$$

$$\begin{aligned}
 \theta \gamma_{11} \omega_1 & \rightarrow -3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx \\
 \theta \delta_1 \omega_1 & \rightarrow -2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx - \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx \\
 \theta \gamma_{12} \omega_1 & \rightarrow -2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_1''[x] dx - 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \int_0^1 \varphi_1[x] \varphi_2''[x] dx
 \end{aligned}$$

$$-\text{symbolList}[\{ 2 \}] \rightarrow (-\text{Coefficient}[\text{SCond}[\{ 2, 1 \}], \#] \ \& \ /@ \text{secularTerms}[\{ 2 \}]) // \text{Thread} // \text{TableForm}$$

$$\begin{aligned}
 \theta \delta_2 \omega_2 & \rightarrow -\alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx \\
 \theta \gamma_{21} \omega_2 & \rightarrow -4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) \int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_1''[x] dx - 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx \\
 \theta \gamma_{22} \omega_2 & \rightarrow -3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) \int_0^1 \varphi_2[x] \varphi_2''[x] dx
 \end{aligned}$$

Εξισώσεις Διαμόρφωσης σε Πολική Μορφή

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση PolarForm, παίρνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε πολική μορφή και τους ορισμούς για γ_i ως εξής :

PolarForm[eqMod]

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} a_1[T_1] &== -\mu_1 a_1[T_1] - f \sin[\gamma_2[T_1]] s_{1,2} a_2[T_1] - \sin[\gamma_1[T_1]] \delta_1 a_1[T_1]^2 a_2[T_1], \\ a_2[T_1] &== -f \sin[\gamma_2[T_1]] s_{2,1} a_1[T_1] + \sin[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^2 - \mu_2 a_2[T_1], \\ \gamma_1[T_1] &== \sigma_1 - 3 \gamma_{11} a_1[T_1]^2 + \gamma_{21} a_1[T_1]^2 + \frac{f \cos[\gamma_2[T_1]] s_{2,1} a_1[T_1]}{a_2[T_1]} + \frac{\cos[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^3}{a_2[T_1]} - \\ &\quad \frac{3 f \cos[\gamma_2[T_1]] s_{1,2} a_2[T_1]}{a_1[T_1]} - 3 \cos[\gamma_1[T_1]] \delta_1 a_1[T_1] a_2[T_1] - 3 \gamma_{12} a_2[T_1]^2 + \gamma_{22} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_2[T_1] &== \sigma_2 - \gamma_{11} a_1[T_1]^2 - \gamma_{21} a_1[T_1]^2 - \frac{f \cos[\gamma_2[T_1]] s_{2,1} a_1[T_1]}{a_2[T_1]} - \frac{\cos[\gamma_1[T_1]] \delta_2 a_1[T_1]^3}{a_2[T_1]} - \\ &\quad \frac{f \cos[\gamma_2[T_1]] s_{1,2} a_2[T_1]}{a_1[T_1]} - \cos[\gamma_1[T_1]] \delta_1 a_1[T_1] a_2[T_1] - \gamma_{12} a_2[T_1]^2 - \gamma_{22} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_1[T_1] &== T_1 \sigma_1 - 3 \beta_1[T_1] + \beta_2[T_1], \gamma_2[T_1] == T_1 \sigma_2 - \beta_1[T_1] - \beta_2[T_1] \end{aligned} \right\} \right\}$$

Εξισώσεις Διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή Μορφή

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση CartesianForm, λαμβάνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή μορφή, τους ορισμούς για v_i , και την ιδιότητα συμμετρίας ως εξής :

CartesianForm[eqMod]

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} p_1[T_1] &== -\mu_1 p_1[T_1] - v_1 q_1[T_1] + \gamma_{11} p_1[T_1]^2 q_1[T_1] - 2 \delta_1 p_1[T_1] p_2[T_1] q_1[T_1] + \gamma_{12} p_2[T_1]^2 q_1[T_1] + \\ &\quad \gamma_{11} q_1[T_1]^3 - f s_{1,2} q_2[T_1] + \delta_1 p_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \delta_1 q_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{12} q_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ q_1[T_1] &== v_1 p_1[T_1] - \gamma_{11} p_1[T_1]^3 - f s_{1,2} p_2[T_1] - \delta_1 p_1[T_1]^2 p_2[T_1] - \gamma_{12} p_1[T_1] p_2[T_1]^2 - \\ &\quad \mu_1 q_1[T_1] - \gamma_{11} p_1[T_1] q_1[T_1]^2 + \delta_1 p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - 2 \delta_1 p_1[T_1] q_1[T_1] q_2[T_1] - \gamma_{12} p_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ p_2[T_1] &== -\mu_2 p_2[T_1] - f s_{2,1} q_1[T_1] + 3 \delta_2 p_1[T_1]^2 q_1[T_1] - \delta_2 q_1[T_1]^2 - v_2 q_2[T_1] + \\ &\quad \gamma_{21} p_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{22} p_2[T_1]^2 q_2[T_1] + \gamma_{21} q_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \gamma_{22} q_2[T_1]^3, \\ q_2[T_1] &== -f s_{2,1} p_1[T_1] - \delta_2 p_1[T_1]^3 + v_2 p_2[T_1] - \gamma_{21} p_1[T_1]^2 p_2[T_1] - \gamma_{22} p_2[T_1]^3 + \\ &\quad 3 \delta_2 p_1[T_1] q_1[T_1]^2 - \gamma_{21} p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - \mu_2 q_2[T_1] - \gamma_{22} p_2[T_1] q_2[T_1]^2, \\ \{v_1 \rightarrow \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2), v_2 \rightarrow \frac{1}{4} (-\sigma_1 + 3 \sigma_2)\}, \{ \{p_1, q_1, p_2, q_2\}, \{-q_1, p_1, q_2, -p_2\}, \\ \{-p_1, -q_1, -p_2, -q_2\}, \{q_1, -p_1, -q_2, p_2\} \} \end{aligned} \right\} \right\}$$

7.2.3 Διακριτοποίηση του Συνεχούς Προβλήματος

Σαν εναλλακτική, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων στο διακριτοποιημένο σύστημα των EOM και BC. Για να προσδιορίσουμε τη διακριτοποιημένη μορφή, αναπτύσσουμε το $w[x, t]$ σε όρους των γραμμικών συναρτήσεων σχήματος $\varphi_m[x]$ ως εξής :

$$wRule1 = w \rightarrow \text{Function}[\{x, t\}, \sum_{m=1}^{\infty} u_m[t] \varphi_m[x]];$$

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό, προσωρινά παραλείπουμε το σύμβολο αθροίσματος Σ στον wRule1, εφόσον γνωρίζουμε ότι το επαναλαμβανόμενο m αναπαριστά έναν δείκτη άθροισης, και τον ξαναγράφουμε ως:

$$wRule1 = w \rightarrow \text{Function}[\{x, t\}, \sum_{m=1}^{\infty} u_m[t] \varphi_m[x]];$$

όπου τα $u_m[t]$ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Αντικαθιστώντας τον wRule2 στην EOM, πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με $\varphi_n[x]$, και ολοκληρώνοντας το εξαγόμενο από $x = 0$ ως 1

χρησιμοποιώντας τους `intRule1` και `intRule2`, λαμβάνουμε την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων που περιγράφουν την απόκριση της δοκού :

`eq723a =`

$$\begin{aligned} & \text{int}[\varphi_n[x] \{ \# / . \text{Integrate} \rightarrow \text{int} / . \text{wRule2} \}, \{x, 0, 1\}] / . \text{intRule1} // . \text{intRule2} / . \\ & \text{int} \rightarrow \text{Integrate} \& / @ \text{EOM} \\ & -2 P \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \right) u_n[t] + \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n^{(4)}[x] dx \right) u_n[t] + \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n[x] dx \right) u_n''[t] == \\ & 4 F \in \text{Cos}[t \Omega] \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \right) u_n[t] + \alpha \in \left(\int_0^1 \varphi_n'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \right) u_n[t]^3 - \\ & 2 \in \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_n[x] \varphi_n[x] dx \right) u_n'[t] \end{aligned}$$

όπου η απόσβεση υποτίθεται ότι είναι ιδιομορφική. Ο μη-γραμμικός όρος, γενικά, θα πρέπει να ξαναγραφεί ως :

$$\text{NT} = \{ \text{Coefficient}[\text{eq723a}[[2]], u_n[t]^3] / . \varphi_n'[x]^2 \rightarrow \varphi_k'[x] \varphi_l'[x] \} u_n[t] u_k[t] u_l[t]$$

$$\alpha \in \left(\int_0^1 \varphi_k'[x] \varphi_l'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \right) u_k[t] u_n[t] u_l[t]$$

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των *συναρτήσεων σχήματος /ιδιομορφών* (mode shapes) $\varphi_l[x]$ και τα αποτελέσματα από το αντίστοιχο πρόβλημα των ιδιοτιμών, ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

$$\text{notationRule1} = \left\{ \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_n[x] dx \rightarrow \delta_{m,n}, \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n^{(4)}[x] dx \rightarrow 2 P \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx + \omega_n^2 \delta_{n,n} \right\};$$

$$\begin{aligned} \text{notationRule2} = & \left\{ \int_0^1 \mu[x] \varphi_m[x] \varphi_n[x] dx \rightarrow \mu_m \delta_{m,n}, \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \rightarrow -\gamma_{n,m}, \right. \\ & \left. \left(\int_0^1 \varphi_k'[x] \varphi_l'[x] dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] dx \right) \rightarrow -\gamma_{k,l} \gamma_{n,m}, \alpha \delta_{m,n} :> (\alpha / . m \rightarrow n) \right\}; \end{aligned}$$

και τότε ξαναγράφουμε την `eq723a` ως εξής :

$$\text{EOM1} = \text{Expand}[\text{eq723a}[[1]] / . \text{notationRule1}] == (\text{eq723a}[[2]] / . u_n[t]^3 \rightarrow 0) + \text{NT} // . \text{notationRule2}$$

$$\omega_n^2 u_n[t] + u_n''[t] == -4 F \in \text{Cos}[t \Omega] \gamma_{n,m} u_n[t] - \alpha \in \gamma_{k,l} \gamma_{n,m} u_k[t] u_n[t] u_l[t] - 2 \in \mu_n u_n'[t]$$

όπου m, k και l αναπαριστούν δείκτες άθροισης.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, αναζητούμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη στη μορφή :

$$\text{solRule} = u_n \rightarrow \left(\sum_{j=0}^1 \epsilon^j u_{n,j}[\#1, \#2] \& \right);$$

Μετασχηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους στην `EOM1` σε μερικές παραγώγους σε όρους των T_0 και T_1 , αντικαθιστώντας τη `solRule` στην `EOM1`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , παίρνουμε :

`eq723b =`

$$\{ \text{EOM1} / . \{ u_n[t] \rightarrow u_n[T_0, T_1], \text{Derivative}[n_][u_n][t] \rightarrow \text{dt}[n][u_n[T_0, T_1]], t \rightarrow T_0 \} / . \text{solRule} // \text{ExpandAll} \} / . \epsilon^{n/;n>1} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & \omega_n^2 u_{n,0}[T_0, T_1] + \epsilon \omega_n^2 u_{n,1}[T_0, T_1] - 2 \in u_{n,0}^{(1,1)}[T_0, T_1] + u_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] + \epsilon u_{n,1}^{(2,0)}[T_0, T_1] == \\ & -4 F \in \text{Cos}[T_0 \Omega] \gamma_{n,m} u_{n,0}[T_0, T_1] - \\ & \alpha \in \gamma_{k,l} \gamma_{n,m} u_{k,0}[T_0, T_1] u_{n,0}[T_0, T_1] u_{l,0}[T_0, T_1] - 2 \in \mu_n u_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1] \end{aligned}$$

Εξισώνοντας συντελεστές ιδίων δυνάμεων του ϵ στην `eq723b`, παίρνουμε :

eqEps = CoefficientList[#, ε] & /@ eq723b // Thread

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega_n^2 u_{n,0}[T_0, T_1] + u_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] == 0, \right. \\ & \left. \omega_n^2 u_{n,1}[T_0, T_1] + 2 u_{n,0}^{(1,1)}[T_0, T_1] + u_{n,1}^{(2,0)}[T_0, T_1] == -4 F \cos[T_0 \Omega] \gamma_{n,m} u_{m,0}[T_0, T_1] - \right. \\ & \left. \alpha \gamma_{k,l} \gamma_{n,m} u_{k,0}[T_0, T_1] u_{m,0}[T_0, T_1] u_{r,0}[T_0, T_1] - 2 \mu_n u_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1] \right\} \end{aligned}$$

Επειδή με την παρουσία της απόσβεσης, όλες οι μορφές που δεν διεγείρονται άμεσα ή έμμεσα φθίνουν με το χρόνο, όλα τα $u_{n,0}$ φθίνουν με το χρόνο εκτός των $u_{1,0}$ και $u_{2,0}$. Τότε, έπεται από την eqEps[[1]] ότι :

sol0 = u_{i,0} -> Function[{T0, T1}, A_i[T1] Exp[I ω_i T0] + Ā_i[T1] Exp[-I ω_i T0]];

Λαμβάνοντας υπόψη τους δείκτες άθροισης, ορίζουμε

$$\text{sumRule} = \left\{ \gamma_{k,l} \gamma_{n,m} u_{k,0}[a_] u_{m,0}[a_] u_{r,0}[a_] \rightarrow \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 \gamma_{k,l} \gamma_{n,m} u_{k,0}[a] u_{m,0}[a] u_{r,0}[a], \right.$$

$$\left. \gamma_{n,m} u_{m,0}[a_] \rightarrow \sum_{s=1}^2 \gamma_{n,m} u_{m,0}[a] \right\};$$

Έτσι, ξαναγράφουμε την eqEps[[2]] ως :

order1Eq[n_] =

$$\left(\text{eqEps}[[1, 1]] /. u_{n,0} \rightarrow u_{n,1} \right) == \left(\text{eqEps}[[1, 1]] /. u_{n,0} \rightarrow u_{n,1} \right) - \left(\text{Subtract} @@ \text{eqEps}[[2]] \right) /. \text{sumRule}$$

$$\begin{aligned} & \omega_n^2 u_{n,1}[T_0, T_1] + u_{n,1}^{(2,0)}[T_0, T_1] == -4 F \cos[T_0 \Omega] (\gamma_{n,1} u_{1,0}[T_0, T_1] + \gamma_{n,2} u_{2,0}[T_0, T_1]) - \\ & \alpha \left\{ \gamma_{1,1} \gamma_{n,1} u_{1,0}[T_0, T_1]^3 + \gamma_{1,2} \gamma_{n,1} u_{1,0}[T_0, T_1]^2 u_{2,0}[T_0, T_1] + \right. \\ & \quad \gamma_{2,1} \gamma_{n,1} u_{1,0}[T_0, T_1]^2 u_{2,0}[T_0, T_1] + \gamma_{1,1} \gamma_{n,2} u_{1,0}[T_0, T_1]^2 u_{2,0}[T_0, T_1] + \\ & \quad \gamma_{2,2} \gamma_{n,1} u_{1,0}[T_0, T_1] u_{2,0}[T_0, T_1]^2 + \gamma_{1,2} \gamma_{n,2} u_{1,0}[T_0, T_1] u_{2,0}[T_0, T_1]^2 + \\ & \quad \left. \gamma_{2,1} \gamma_{n,2} u_{1,0}[T_0, T_1] u_{2,0}[T_0, T_1]^2 + \gamma_{2,2} \gamma_{n,2} u_{2,0}[T_0, T_1]^3 \right\} - 2 \mu_n u_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1] - 2 u_{n,0}^{(1,1)}[T_0, T_1] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη sol0 στην order1Eq[1] και την order1Eq[2], προκύπτει :

eqOrder1 = Array[order1Eq, 2] /. sol0 // TrigToExp // ExpandAll;

• Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της Πρώτης Μορφής

$$\text{ResonanceConds} = \{ \omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == 2 \omega_1 + \epsilon \sigma_2 \};$$

OmgRule = Solve[ResonanceConds, Drop[omgList, {#}] ~ Join ~ {Ω}][[1]] & /@ {1, 2}

$$\left\{ \left\{ \omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_2 + 2 \omega_1 \right\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2), \Omega \rightarrow \frac{1}{3} (-2 \epsilon \sigma_1 + 3 \epsilon \sigma_2 + 2 \omega_2) \right\} \right\}$$

expRule[i_] := Exp[arg_] :=> Exp[Expand[arg /. OmgRule[[i]]] /. ε T0 -> T1]

Αντικαθιστούμε τις ResonanceConds στα δεξιά μέλη της eqOrder1 και παίρνουμε τις συνθήκες επίλυσιμότητας, ως εξής :

SCond = Table[Coefficient[-eqOrder1[[i, 2]] /. expRule[i], Exp[I ω_i T0]] == 0, {i, 2}];
SCond /. displayRule

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 I (D_1 A_1) \omega_1 + 2 I A_1 \mu_1 \omega_1 + 2 E^{I T_1 \sigma_2} F \bar{A}_1 \gamma_{1,1} + \right. \\ & \quad 3 \alpha A_1^2 \bar{A}_1 \gamma_{1,1}^2 + 2 E^{I T_1 \sigma_1 - I T_1 \sigma_2} F A_2 \gamma_{1,2} + 2 E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 \gamma_{1,1} \gamma_{1,2} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 \gamma_{1,2}^2 + \\ & \quad \left. E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 \gamma_{1,1} \gamma_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 \gamma_{1,2} \gamma_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 \gamma_{1,1} \gamma_{2,2} == 0, \right. \\ & \quad 2 I (D_1 A_2) \omega_2 + 2 I A_2 \mu_2 \omega_2 + 2 E^{-I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2} F A_1 \gamma_{2,1} + E^{-I T_1 \sigma_1} \alpha A_1^3 \gamma_{1,1} \gamma_{2,1} + \\ & \quad \left. 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 \gamma_{1,2} \gamma_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 \gamma_{2,1}^2 + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 \gamma_{1,1} \gamma_{2,2} - 3 \alpha A_2^2 \bar{A}_2 \gamma_{2,2}^2 == 0 \right\} \end{aligned}$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με ότι λήφθηκε από την απευθείας προσέγγιση.

• **Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της Δεύτερης Μορφής**

$$\text{ResonanceConds} = \{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == 2 \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

$$\text{Omgrule} = \text{Solve}[\text{ResonanceConds}, \text{Drop}[\text{omgList}, \{\#\}] \sim \text{Join}[\{\Omega\}][[1]] \& /@ \{1, 2\}$$

$$\left\{ \{\omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow 2 \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 6 \omega_1\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2), \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_2 + 2 \omega_2 \right\} \right\}$$

$$\text{expRule}[i_] := \text{Exp}[arg_] \rightarrow \text{Exp}[\text{Expand}[arg / . \text{Omgrule}[[i]]] / . \epsilon T_0 \rightarrow T_1]$$

Αντικαθιστούμε τη ResonanceConds στις δεξιές πλευρές της eqOrder1 και παίρνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας ως :

$$\text{SCond} = \text{Table}[\text{Coefficient}[-\text{eqOrder1}[[i, 2]] / . \text{expRule}[i], \text{Exp}[I \omega_i T_0]] == 0, \{i, 2\}];$$

SCond /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 I (D_1 A_1) \omega_1 + 2 I A_1 \mu_1 \omega_1 + 3 \alpha A_1^2 \bar{A}_1 V_{1,1}^2 + 2 E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 V_{1,1} V_{1,2} + \\ & 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,2}^2 + E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 V_{1,1} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,2} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,1} V_{2,2} == 0, \\ & 2 I (D_1 A_2) \omega_2 + 2 I A_2 \mu_2 \omega_2 + E^{-I T_1 \sigma_1} \alpha A_1^3 V_{1,1} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{1,2} V_{2,1} + \\ & 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{2,1}^2 + 2 E^{I T_1 \sigma_2} F \bar{A}_2 V_{2,2} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{1,1} V_{2,2} + 3 \alpha A_2^2 \bar{A}_2 V_{2,2}^2 == 0 \end{aligned} \right\}$$

η οποία είναι σε συμφωνία με ότι λήφθηκε από την απευθείας προσέγγιση.

• **Συνδυαστικός Παραμετρικός Συντονισμός των Δύο Μορφών**

$$\text{ResonanceConds} = \{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == \omega_1 + \omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

$$\text{Omgrule} = \text{Solve}[\text{ResonanceConds}, \text{Drop}[\text{omgList}, \{\#\}] \sim \text{Join}[\{\Omega\}][[1]] \& /@ \{1, 2\}$$

$$\left\{ \{\omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 4 \omega_1\}, \left\{ \omega_1 \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + \omega_2), \Omega \rightarrow \frac{1}{3} (-\epsilon \sigma_1 + 3 \epsilon \sigma_2 + 4 \omega_2) \right\} \right\}$$

$$\text{expRule}[i_] := \text{Exp}[arg_] \rightarrow \text{Exp}[\text{Expand}[arg / . \text{Omgrule}[[i]]] / . \epsilon T_0 \rightarrow T_1]$$

Αντικαθιστούμε τη ResonanceConds στη δεξιά πλευρά της eqOrder1 και λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας ως εξής :

$$\text{SCond} = \text{Table}[\text{Coefficient}[-\text{eqOrder1}[[i, 2]] / . \text{expRule}[i], \text{Exp}[I \omega_i T_0]] == 0, \{i, 2\}];$$

SCond /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 I (D_1 A_1) \omega_1 + 2 I A_1 \mu_1 \omega_1 + 3 \alpha A_1^2 \bar{A}_1 V_{1,1}^2 + 2 E^{I T_1 \sigma_2} F \bar{A}_2 V_{1,2} + 2 E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 V_{1,1} V_{1,2} + \\ & 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,2}^2 + E^{I T_1 \sigma_1} \alpha A_2 \bar{A}_1^2 V_{1,1} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,2} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 V_{1,1} V_{2,2} == 0, \\ & 2 I (D_1 A_2) \omega_2 + 2 I A_2 \mu_2 \omega_2 + 2 E^{I T_1 \sigma_2} F \bar{A}_1 V_{2,1} + E^{-I T_1 \sigma_1} \alpha A_1^3 V_{1,1} V_{2,1} + \\ & 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{1,2} V_{2,1} + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{2,1}^2 + 2 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 V_{1,1} V_{2,2} + 3 \alpha A_2^2 \bar{A}_2 V_{2,2}^2 == 0 \end{aligned} \right\}$$

η οποία είναι σε συμφωνία με ότι λήφθηκε από την απευθείας προσέγγιση.

7.2.4 Μέθοδος της Χρονικά Μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής

Σαν δεύτερη εναλλακτική, εξάγουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης μέσω χρήσης της μεθόδου της χρονικά μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής. Η αδιάστατη Λαγκραντζιανή της δοκού μπορεί να εκφραστεί ως (Nayfeh, 1998) :

$$\text{Lagr1} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_t w[x, t])^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_{x,x} w[x, t])^2 dx - (P + 2 \epsilon F \text{Cos}[\Omega t]) \int_0^1 (\partial_x w[x, t])^2 dx - \frac{1}{4} \epsilon \alpha \left(\int_0^1 (\partial_x w[x, t])^2 dx \right)^2 + C[t];$$

όπου το C[t] είναι ανεξάρτητο του w. Μετασηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους σε μερικές παραγώγους σε όρους των T₀ και T₁, τροποποιούμε την Lagr1 ως εξής :

Lagr2 = Lagr1 /. Integrate -> int /.

{w[x_, t] -> w[x, T0, T1], Derivative[m_, n_][w][x_, t] -> dt[n][D[w[x, T0, T1], {x, m}]]},
t -> T0}

C[T0] + $\frac{1}{2}$ int [(ε w^(0,0,1)[x, T0, T1] + w^(0,1,0)[x, T0, T1])², {x, 0, 1}] -

(P + 2 F ε Cos[T0 Ω]) int [w^(1,0,0)[x, T0, T1]², {x, 0, 1}] -

$\frac{1}{4}$ α ε int [w^(1,0,0)[x, T0, T1]², {x, 0, 1}]² - $\frac{1}{2}$ int [w^(2,0,0)[x, T0, T1]², {x, 0, 1}]

Γι' αυτό το σκοπό, θέτουμε :

solRule = w -> (Evaluate[Sum[A_i[#3] φ_i[#1] E^{i ω₁ t} + \bar{A}_i [#3] φ_i[#1] E^{-i ω₁ t}, {i, 2}]] ε)

w ->

(E^{i ω₂ t} A₁[#3] φ₁[#1] + E^{i ω₂ t} A₂[#3] φ₂[#1] + E^{-i ω₂ t} φ₁[#1] \bar{A}_1 [#3] + E^{-i ω₂ t} φ₂[#1] \bar{A}_2 [#3]) ε

όπου η πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή (#1) αφορά το x και οι τελευταίες δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (#2 και #3) αφορούν τις δύο χρονικές κλίμακες T₀ και T₁. Αντικαθιστώντας τη solRule στην Lagr2, χρησιμοποιώντας τις intRule1 και intRule2 για να απλοποιήσουμε τις αναπτύξεις των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση, και συλλέγοντας τους συντελεστές του ε, παίρνουμε :

order1Lagr = Lagr2 /. solRule /. intRule1 //. intRule2 // TrigToExp // Expand // Coefficient[#, ε] &;

• Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της 1^{ης} Μορφής

ResonanceConds = {ω₂ == 3 ω₁ + ε σ₁, Ω == 2 ω₁ + ε σ₂} /. Equal -> Rule

{ω₂ -> ε σ₁ + 3 ω₁, Ω -> ε σ₂ + 2 ω₁}

Χρησιμοποιώντας τις ResonanceConds, λαμβάνουμε τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους από την order1Lagr ως

TAL = order1Lagr /. Exp[a_] := Exp[Expand[a /. ResonanceConds] /. ε T0 -> T1] /. Exp[_ T0 + _] -> 0 /. int -> Integrate

E^{-i T₁ σ₂} F (∫₀¹ φ₁'[x]² dx) A₁[T₁]² -

2 E^{i T₁ σ₁ - i T₁ σ₂} F (∫₀¹ φ₁'[x] φ₂'[x] dx) A₂[T₁] \bar{A}_1 [T₁] -

E^{i T₁ σ₂} F (∫₀¹ φ₁'[x]² dx) \bar{A}_1 [T₁]² - $\frac{3}{2}$ α (∫₀¹ φ₁'[x]² dx)² A₁[T₁]² \bar{A}_1 [T₁]² -

E^{i T₁ σ₁} α (∫₀¹ φ₁'[x]² dx) (∫₀¹ φ₁'[x] φ₂'[x] dx) A₂[T₁] \bar{A}_1 [T₁]³ -

2 E^{-i T₁ σ₁ - i T₁ σ₂} F (∫₀¹ φ₁'[x] φ₂'[x] dx) A₁[T₁] \bar{A}_2 [T₁] -

E^{-i T₁ σ₁} α (∫₀¹ φ₁'[x]² dx) (∫₀¹ φ₁'[x] φ₂'[x] dx) A₁[T₁]³ \bar{A}_2 [T₁] -

4 α (∫₀¹ φ₁'[x] φ₂'[x] dx)² A₁[T₁] A₂[T₁] \bar{A}_1 [T₁] \bar{A}_2 [T₁] -

2 α (∫₀¹ φ₁'[x]² dx) (∫₀¹ φ₂'[x]² dx) A₁[T₁] A₂[T₁] \bar{A}_1 [T₁] \bar{A}_2 [T₁] -

$\frac{3}{2}$ α (∫₀¹ φ₂'[x]² dx)² A₂[T₁]² \bar{A}_2 [T₁]² - I (∫₀¹ φ₁[x]² dx) ω₁ \bar{A}_1 [T₁] A₁'[T₁] -

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \omega_2 \bar{A}_2[T_1] A_2'[T_1] + \int_0^1 \varphi_1[x]^2 dx \omega_1 A_1[T_1] \bar{A}_1'[T_1] + \\ & \int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \omega_2 A_2[T_1] \bar{A}_2'[T_1] \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Euler – Lagrange που αντιστοιχούν στην TAL μπορούν να γραφούν ως

$$eqMod1 = D[D[TAL, \bar{A}_1'[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_1[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned} & 2 E^{-1 T_1 \sigma_1 - 1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2[T_1] + \\ & 2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \bar{A}_1[T_1] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right)^2 A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \\ & 3 E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1]^2 + \\ & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right)^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] + \\ & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] + \\ & 2 \int_0^1 \varphi_1[x]^2 dx \omega_1 A_1'[T_1] == 0 \end{aligned}$$

και

$$eqMod2 = D[D[TAL, \bar{A}_2'[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_2[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned} & 2 E^{-1 T_1 \sigma_1 - 1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1[T_1] + \\ & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1[T_1]^3 + \\ & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right)^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] + \\ & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] + \\ & 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right)^2 A_2[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] + 2 \int_0^1 \varphi_2[x]^2 dx \omega_2 A_2'[T_1] == 0 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας γραμμική ιξώδη απόσβεση στις eqMod1 και eqMod2 και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε τις ίδιες εξισώσεις διαμόρφωσης όπως λήφθηκαν από απευθείας επίλυση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων.

• Κύριος Παραμετρικός Συντονισμός της 2^{ης} Μορφής

$$ResonanceConds = Solve[\{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == 2 \omega_2 + \epsilon \sigma_2\}, \{\omega_2, \Omega\}][[1]]$$

$$\{\omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow 2 \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 6 \omega_1\}$$

Χρησιμοποιώντας τις ResonanceConds, λαμβάνουμε τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους από την order1Lagr ως εξής :

$$TAL = order1Lagr /. Exp[a_] := Exp[Expand[a /. ResonanceConds] /. \epsilon T_0 \rightarrow T_1] /.$$

$$Exp[_ T_0 + _] \rightarrow 0 /. int \rightarrow Integrate$$

$$\begin{aligned} & -E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2'[x]^2 dx \right) A_2[T_1]^2 - \frac{3}{2} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right)^2 A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1]^2 - \\ & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1]^3 - \\ & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1'[x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1'[x] \varphi_2'[x] dx \right) A_1[T_1]^3 \bar{A}_2[T_1] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) \bar{A}_2 [T_1]^2 - \frac{3}{2} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right)^2 A_2 [T_1]^2 \bar{A}_2 [T_1]^2 - \\
 & I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 \bar{A}_1 [T_1] A_1' [T_1] - I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 \bar{A}_2 [T_1] A_2' [T_1] + \\
 & I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 A_1 [T_1] \bar{A}_1' [T_1] + I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 A_2 [T_1] \bar{A}_2' [T_1]
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στην TAL μπορούν να γραφούν ως :

$$eqMod1 = D[D[TAL, \bar{A}_1[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_1[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned}
 & 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right)^2 A_1 [T_1]^2 \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 3 E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1 [x] \varphi_2 [x] dx \right) A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1]^2 + \\
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 2 I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 A_1' [T_1] == 0
 \end{aligned}$$

και

$$eqMod2 = D[D[TAL, \bar{A}_2[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_2[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned}
 & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1 [x] \varphi_2 [x] dx \right) A_1 [T_1]^3 + \\
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) \bar{A}_2 [T_1] + 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right)^2 A_2 [T_1]^2 \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 2 I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 A_2' [T_1] == 0
 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας γραμμική ιξώδη απόσβεση στις eqMod1 και eqMod2 και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε τις ίδιες εξισώσεις διαμόρφωσης όπως λήφθηκαν από απευθείας επίλυση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων.

- Συνδυαστικός Παραμετρικός Συντονισμός των Δύο Μορφών

$$ResonanceConds = Solve[\{\omega_2 == 3 \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == \omega_1 + \omega_2 + \epsilon \sigma_2\}, \{\omega_2, \Omega\}][[1]]$$

$$\{\omega_2 \rightarrow \epsilon \sigma_1 + 3 \omega_1, \Omega \rightarrow \epsilon \sigma_1 + \epsilon \sigma_2 + 4 \omega_1\}$$

Χρησιμοποιώντας τις ResonanceConds, λαμβάνουμε τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους από την order1Lagr ως εξής:

$$TAL = order1Lagr /. Exp[a_] := Exp[Expand[a /. ResonanceConds] /. \epsilon T_0 \rightarrow T_1] /.$$

$$Exp[_ T_0 + _.] \rightarrow 0 /. int \rightarrow Integrate$$

$$\begin{aligned}
 & -2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] - \\
 & \frac{3}{2} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right)^2 A_1 [T_1]^2 \bar{A}_1 [T_1]^2 - \\
 & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1]^3 - \\
 & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) A_1 [T_1]^3 \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & 2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) \bar{A}_1 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] - \\
 & \frac{3}{2} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right)^2 A_2 [T_1]^2 \bar{A}_2 [T_1]^2 - I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 \bar{A}_1 [T_1] A_1' [T_1] - \\
 & I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 \bar{A}_2 [T_1] A_2' [T_1] + I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 A_1 [T_1] \bar{A}_1' [T_1] + \\
 & I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 A_2 [T_1] \bar{A}_2' [T_1]
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στην TAL μπορούν να γραφτούν ως :

$$eqMod1 = D[D[TAL, \bar{A}_1'[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_1[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned}
 & 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right)^2 A_1 [T_1]^2 \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 3 E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1]^2 + \\
 & 2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_2 [T_1] + \\
 & 2 I \left(\int_0^1 \varphi_1 [x]^2 dx \right) \omega_1 A_1' [T_1] == 0
 \end{aligned}$$

και

$$eqMod2 = D[D[TAL, \bar{A}_2'[T_1]], T_1] - D[TAL, \bar{A}_2[T_1]] == 0$$

$$\begin{aligned}
 & E^{-1 T_1 \sigma_1} \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) A_1 [T_1]^3 + \\
 & 2 E^{-1 T_1 \sigma_2} F \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right) \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 4 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x] \varphi_2' [x] dx \right)^2 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 2 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_1' [x]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right) A_1 [T_1] A_2 [T_1] \bar{A}_1 [T_1] + \\
 & 3 \alpha \left(\int_0^1 \varphi_2' [x]^2 dx \right)^2 A_2 [T_1]^2 \bar{A}_2 [T_1] + 2 I \left(\int_0^1 \varphi_2 [x]^2 dx \right) \omega_2 A_2' [T_1] == 0
 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας γραμμική ιξώδη απόσβεση στις eqMod1 και eqMod2 και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε τις ίδιες εξισώσεις διαμόρφωσης όπως λήφθηκαν από απευθείας επίλυση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων.

7.3 Πρόβολος

7.3.1 EOM και BC

Θεωρούμε τη μη-γραμμική μη-επίπεδη απόκριση μιας μη εκτατικής δοκού - προβόλου λόγω εξωτερικής διέγερσης μιας των καμπτικών μορφών της. Οι χαμηλότερες στρεπτικές συχνότητες της δοκού που θεωρήσαμε είναι πολύ υψηλότερες από τις συχνότητες των διεγερμένων καμπτικών μορφών, έτσι ώστε η στρεπτική αδράνεια να μπορεί να παραλειφθεί. Υποθέτουμε ότι η δοκός είναι ομοιόμορφη και ομογενής. Οι εγκάρσιες παραμορφώσεις $v[x, t]$ και $w[x, t]$ της δοκού στη θέση x και για χρόνο t διέπονται από τη αδιάστατη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (Crespo da Silva και Glynn, 1978) :

EOM1 =

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial_{t,t} v[x, t] + \beta_y \partial_{x,x,x} v[x, t] == \right. \\ & -2 \in \mu[x] \partial_t v[x, t] + \\ & \in (1 - \beta_y) \\ & \partial_x \left(\partial_{x,x} w[x, t] \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx - \partial_{x,x} w[x, t] \int_0^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_x w[x, t] dx \right) - \\ & \in \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \partial_{x,x} \left(\partial_{x,x} w[x, t] \int_0^x \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx dx \right) - \\ & \in \beta_y \partial_x \left(\partial_x v[x, t] \partial_x \left(\partial_x v[x, t] \partial_{x,x} v[x, t] + \partial_x w[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] \right) \right) - \\ & \in \frac{1}{2} \partial_x \left(\partial_x v[x, t] \int_1^x \partial_{t,t} \left(\int_0^x \left((\partial_x v[x, t])^2 + (\partial_x w[x, t])^2 \right) dx \right) dx \right) - \in F[x] \text{Cos}[\Omega t], \\ & \partial_{t,t} w[x, t] + \partial_{x,x,x} w[x, t] == \\ & -2 \in \mu[x] \partial_t w[x, t] - \\ & \in (1 - \beta_y) \\ & \partial_x \left(\partial_{x,x} v[x, t] \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx - \partial_{x,x} v[x, t] \int_0^x \partial_{x,x} w[x, t] \partial_x v[x, t] dx \right) - \\ & \in \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \partial_{x,x} \left(\partial_{x,x} v[x, t] \int_0^x \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx dx \right) - \\ & \in \partial_x \left(\partial_x w[x, t] \partial_x \left(\partial_x v[x, t] \partial_{x,x} v[x, t] + \partial_x w[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] \right) \right) - \\ & \in \frac{1}{2} \partial_x \left(\partial_x w[x, t] \int_1^x \partial_{t,t} \left(\int_0^x \left((\partial_x v[x, t])^2 + (\partial_x w[x, t])^2 \right) dx \right) dx \right) \}; \end{aligned}$$

μαζί με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\text{BC1} = \{ v[0, t] == 0, \partial_x v[x, t] == 0 / . x \rightarrow 0, \partial_{x,x} v[x, t] == 0 / . x \rightarrow 1, \\ \partial_{x,x,x} v[x, t] == 0 / . x \rightarrow 1 \}$$

$$\{ v[0, t] == 0, v^{(1,0)}[0, t] == 0, v^{(2,0)}[1, t] == 0, v^{(3,0)}[1, t] == 0 \}$$

$$\text{BC} = \text{Join}[\text{BC1}, \text{BC1} / . v \rightarrow w]$$

$$\{ v[0, t] == 0, v^{(1,0)}[0, t] == 0, v^{(2,0)}[1, t] == 0, v^{(3,0)}[1, t] == 0, \\ w[0, t] == 0, w^{(1,0)}[0, t] == 0, w^{(2,0)}[1, t] == 0, w^{(3,0)}[1, t] == 0 \}$$

Οι χωρικές παράγωγοι εκτός των ολοκληρωμάτων στις δεξιές πλευρές της EOM1 οδηγούν σε μακρές εκφράσεις. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολικό υπολογισμό, πρώτα ορίζουμε κάποιους τελεστές ως

$$\text{opl}[v_, w_] =$$

$$\partial_{x,x} w[x, t] \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx - \partial_{x,x,x} w[x, t] \int_0^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_x w[x, t] dx / .$$

$$\text{Integrate} \rightarrow \text{int}[1]$$

```

int[1] [v(2,0)[x, t] w(2,0)[x, t], {x, 1, x}] w(2,0)[x, t] -
int[1] [w(1,0)[x, t] v(2,0)[x, t], {x, 0, x}] w(3,0)[x, t]
op2[v_, w_] = Hold[∂x,xw[x, t] ∫0x ∫1x ∂x,xv[x, t] ∂x,xw[x, t] dx dx] /. Integrate -> int[2] //
ReleaseHold
int[2] [v(2,0)[x, t] w(2,0)[x, t], {x, 0, x}, {x, 1, x}] w(2,0)[x, t]
op3[v_, w_] = ∂xv[x, t] ∫1x ∂t,t (∫0x ((∂xv[x, t])2 + (∂xw[x, t])2) dx) dx /. Integrate -> int[1]
int[1] [
int[1] [2 v(1,1)[x, t]2 + 2 w(1,1)[x, t]2 + 2 v(1,0)[x, t] v(1,2)[x, t] + 2 w(1,0)[x, t] w(1,2)[x, t],
{x, 0, x}], {x, 1, x}] v(1,0)[x, t]

```

όπου το *int[i]* καταδεικνύει την όλη έκφραση, περιλαμβάνοντας την συνάρτηση προς ολοκλήρωση και τον όρο τον πολλαπλασιασμένο με *int[i] [expr]*, το οποίο αργότερα θα “πιαστεί” από την *i*-οστή χωρική παράγωγο στη συνθήκη επιλυσιμότητας.

Τότε ξαναγράφουμε την EOM1 ως :

EOM =

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \partial_{t,t} v[x, t] + \beta_y \partial_{x,x,x} v[x, t] == \right. \\
 & -2 \epsilon \mu[x] \partial_t v[x, t] + \epsilon (1 - \beta_y) \text{op1}[v, w] - \epsilon \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \text{op2}[v, w] - \\
 & \epsilon \beta_y \partial_x (\partial_x v[x, t] \partial_x (\partial_x v[x, t] \partial_{x,x} v[x, t] + \partial_x w[x, t] \partial_{x,x} w[x, t])) - \\
 & \epsilon \frac{1}{2} \text{op3}[v, w] - \epsilon F[x] \text{Cos}[\Omega t], \\
 & \partial_{t,t} w[x, t] + \partial_{x,x,x} w[x, t] == -2 \epsilon \mu[x] \partial_t w[x, t] - \epsilon (1 - \beta_y) \text{op1}[w, v] - \\
 & \epsilon \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \text{op2}[w, v] - \epsilon \partial_x (\partial_x w[x, t] \partial_x (\partial_x v[x, t] \partial_{x,x} v[x, t] + \partial_x w[x, t] \partial_{x,x} w[x, t])) - \\
 & \left. \epsilon \frac{1}{2} \text{op3}[w, v] \right\};
 \end{aligned}$$

Έπεται από τις EOM1 και BC ότι οι γραμμικές μη-αποσβεστικές φυσικές συχνότητες και οι αντίστοιχες τους συναρτήσεις σχήματος (ιδιομορφές) δίνονται από

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \hat{\omega}_{1,m} == \lambda_m^2 \sqrt{\beta_y}, \omega_{2,n} == \lambda_n^2, \right. \\
 & \psi_i[x] == \text{Cosh}[\lambda_i x] - \text{Cos}[\lambda_i x] + \frac{\text{Cos}[\lambda_i] + \text{Cosh}[\lambda_i]}{\text{Sin}[\lambda_i] + \text{Sinh}[\lambda_i]} (\text{Sin}[\lambda_i x] - \text{Sinh}[\lambda_i x]) \quad (* i=m, n *) \left. \right\};
 \end{aligned}$$

όπου τα $\hat{\omega}_{1,m}$ και $\omega_{2,n}$ είναι οι φυσικές συχνότητες στις διευθύνσεις *y* και *z* και τα λ_i είναι οι ρίζες της εξίσωσης συχνότητας

$$1 + \text{Cos}[\lambda_i] \text{Cosh}[\lambda_i] == 0$$

Θεωρούμε την περίπτωση του ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στην μορφή τάξης *m* στην διεύθυνση *y* ή *v* και στην μορφή τάξης *n* στη διεύθυνση *z* ή *w*. Δηλαδή, $\hat{\omega}_{1,m} \approx \omega_{2,n}$. Για να εκφράσουμε την εγγύτητα αυτών των συχνοτήτων ποσοτικά, θέτουμε

$$\text{betaRule} = \{ \beta_y \rightarrow 1 + \delta_0 + \epsilon \delta_1 \};$$

έτσι ώστε $\hat{\omega}_{1,m} = \lambda_m^2 (1 + \delta_0) = \lambda_n^2 = \omega_{2,n}$. Η δοκός έχει μια σχεδόν τετραγωνική τομή όταν $\delta_0 = 0$.

Υποθέτουμε ότι καμιά από τις δύο μορφές δεν εμπλέκεται σε έναν εσωτερικό συντονισμό με

οποιαδήποτε άλλη μορφή. Επιπλέον, θεωρούμε έναν κύριο συντονισμό της καμπτικής μορφής στη διεύθυνση y .

Για να μεταχειριστούμε κάποια πολύπλοκα ολοκληρώματα, ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :

```
intRule3 = {int[i_][fun_, arg2_] := int[i][Expand[fun], arg2]};
intRule4 = {int[i_][a_ + b_, arg2_] := int[i][a, arg2] + int[i][b, arg2],
  int[i_][ε^n_· fun_, arg2_] := ε^n int[i][fun, arg2],
  int[i_][a_ fun_, a1_, b1_] := a int[i][fun, a1, b1] /; FreeQ[a, First[a1]],
  int[i_][int[i_][a1_, a2_] fun_., a3_] :=
  int[i][a1, a2] int[i][fun, a3] /; FreeQ[Rest[a2], First[a2]],
  int[i_][int[i_][a1_, a2_], a3_] := int[i][a1, a3, a2]};
```

7.3.2 Απευθείας Χειρισμός του Συνεχούς Προβλήματος

Σε αυτή την ενότητα, χειριζόμαστε απευθείας την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση EOM και τις σχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες BC και αναζητούμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη της λύσης τους, της μορφής :

```
solRule = {v -> (Evaluate[Sum[ε^j v_j[#1, #2, #3], {j, 0, 1}]] &),
  w -> (Evaluate[Sum[ε^j w_j[#1, #2, #3], {j, 0, 1}]] &)}
```

$\{v \rightarrow (v_0[\#1, \#2, \#3] + \epsilon v_1[\#1, \#2, \#3] \&), w \rightarrow (w_0[\#1, \#2, \#3] + \epsilon w_1[\#1, \#2, \#3] \&)\}$

όπου η πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή αντιπροσωπεύει το x και οι τελευταίες δύο ανεξάρτητες μεταβλητές αντιπροσωπεύουν τις δύο χρονικές κλίμακες T_0 και T_1 . Μετασχηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους στην EOM σε μερικές παραγώγους σε όρους των T_0 και T_1 , αντικαθιστώντας τους solRule και betayRule στις EOM και BC, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , και χρησιμοποιώντας τους intRule3 και intRule4 για να απλοποιήσουμε τις αναπτύξεις των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση, λαμβάνουμε

```
(eq732a =
  ((Join[EOM, BC] /. {v[x_, t] -> v[x, T0, T1], w[x_, t] -> w[x, T0, T1],
    Derivative[m_, n_][v_][x_, t] -> dt[n][D[w[x, T0, T1], {x, m}]], t -> T0} /.
    solRule /. betayRule // ExpandAll) /. intRule3 // intRule4 // ExpandAll) /.
  ε^n_/:>1 -> 0; // Timing
{12.629 Second, Null}
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην eq732a, λαμβάνουμε

```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, ε] == 0] & /@ eq732a // Transpose;
```

```
eqEps[[1]] /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} v_0'''' + D_0^2 v_0 + (v_0''''') \delta_0 &== 0, & w_0'''' + D_0^2 w_0 &== 0, & v_0[0, T_0, T_1] &== 0, \\ v_0^{(1,0,0)}[0, T_0, T_1] &== 0, & v_0^{(2,0,0)}[1, T_0, T_1] &== 0, & v_0^{(3,0,0)}[1, T_0, T_1] &== 0, \\ w_0[0, T_0, T_1] &== 0, & w_0^{(1,0,0)}[0, T_0, T_1] &== 0, & w_0^{(2,0,0)}[1, T_0, T_1] &== 0, & w_0^{(3,0,0)}[1, T_0, T_1] &== 0 \end{aligned} \right\}$$

Με την παρουσία της απόσβεσης, όλες οι μορφές που δεν είναι απευθείας διεγερμένοι από την εξωτερική φόρτιση ή εμμέσως διεγερμένοι από τον εσωτερικό συντονισμό θα φθίνουν με το χρόνο. Έτσι, η λύση της eqEps[[1]] μπορεί να εκφραστεί σε όρους των δύο διεγερμένων γραμμικών ιδιομορφών ελεύθερης ταλάντωσης, δηλαδή :

```
sol0 = {v0 -> Function[{x, T0, T1}, A1[T1] φm[x] Exp[I ω1,m T0] + Ā1[T1] φm[x] Exp[-I ω1,m T0]},  
w0 -> Function[{x, T0, T1}, A2[T1] φn[x] Exp[I ω2,n T0] + Ā2[T1] φn[x] Exp[-I ω2,n T0]};
```

Μπορεί εύκολα ναδειχτεί ότι οι συναρτήσεις σχήματος $\phi_i[x]$ είναι ορθογωνικές. Θεωρούμε ότι αυτές οι μορφές κανονικοποιούνται έτσι ώστε

$$\int_0^1 \phi_i[x] \phi_j[x] dx \rightarrow \delta_{ij}$$

όπου το δ_{ij} είναι η συνάρτηση του δέλτα του Kronecker.

Αντικαθιστώντας τη sol0 στις πρώτης-τάξης εξισώσεις, τις eqEps[[2, 1]] και eqEps[[2, 2]] και χρησιμοποιώντας τους intRule3 και intRule4, λαμβάνουμε :

```
Clear[orderIEq]  
  
orderIEq[1] = (eqEps[[1, 1, 1]] /. v0 -> v1) ==  
((eqEps[[1, 1, 1]] /. v0 -> v1) -  
(Subtract @@ eqEps[[2, 1]] /. sol0 // TrigToExp // Expand) /. intRule3 // intRule4 //  
Expand);  
  
orderIEq[2] = (eqEps[[1, 2, 1]] /. w0 -> w1) ==  
((eqEps[[1, 2, 1]] /. w0 -> w1) -  
(Subtract @@ eqEps[[2, 2]] /. sol0 // TrigToExp // Expand) /. intRule3 // intRule4 //  
Expand);
```

Έπεται από την eqEps[[2]] ότι οι πρώτης-τάξης συνοριακές συνθήκες είναι

```
orderIBC = Drop[eqEps[[2]], 2]  
  
{v1[0, T0, T1] == 0, v1(1,0,0)[0, T0, T1] == 0,  
v1(2,0,0)[1, T0, T1] == 0, v1(3,0,0)[1, T0, T1] == 0, w1[0, T0, T1] == 0,  
w1(1,0,0)[0, T0, T1] == 0, w1(2,0,0)[1, T0, T1] == 0, w1(3,0,0)[1, T0, T1] == 0}
```

Θεωρούμε την περίπτωση του κύριου συντονισμού της καμπτικής μορφής στην διεύθυνση y, $\Omega \approx \omega_{1,m}$. Για να περιγράψουμε την εγγύτητα του κύριου συντονισμού, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ από

```
omgList = {ω1,m, ω2,n};  
  
ResonanceConds = {ω2,n == ω1,m, Ω == ω1,m + ε σ};  
και ορίζουμε τους ακόλουθους κανόνες :  
OmgRule = Solve[ResonanceConds, Drop[omgList, {#}] ~ Join ~ {Ω}][[1]] & /@ {1, 2}  
{ω2,n → ω1,m, Ω → ε σ + ω1,m}, {ω1,m → ω2,n, Ω → ε σ + ω2,n}
```

```
expRule[i_] := Exp[arg_] :=> Exp[Expand[arg /. OmgRule[[i]]] /. ε T0 -> T1]
```

Αντικαθιστούμε τις ResonanceConds στα δεξιά μέλη των orderIEq[1] και orderIEq[2] και λαμβάνουμε την πηγή των προσωρινών όρων ως

```
ST = Table[Coefficient[orderIEq[i][[2]] /. expRule[i], Exp[I omgList[[i]] T0]],  
{i, 2}];
```

Οι συνθήκες επιλυσιμότητας των orderIEq[i] και orderIBC απαιτούν η ST[[i]] να είναι ορθογωνική στο $\phi_i[x]$. Επιβάλλοντας αυτές τις συνθήκες, έχουμε :

```
SCond1 = int[φm[x] ST[[1]], {x, 0, 1}] == 0 /. intRule1 // intRule2;  
SCond2 = int[φn[x] ST[[2]], {x, 0, 1}] == 0 /. intRule1 // intRule2;
```

Ενθυμούμεθα ότι η i -οστή χωρική παράγωγος θα πρέπει να ανακτηθεί από το $\text{int}[i]$ όπως τέθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι, ορίζουμε

```
intRule5[mode_] = int[mode a_int[i_][b_, c_], d_] :=  
  int[mode HoldForm[D[a int[b, c], {x, i}]], d];
```

και ξαναγράφουμε τις SCond1 και SCond2 ως

```
SCond = {SCond1 /. intRule5[φn[x]], SCond2 /. intRule5[φn[x]]};
```

Για να απλοποιήσουμε τη σημειογραφία στις συνθήκες επιλυσιμότητας, χρησιμοποιούμε την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων σχήματος και ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους :

```
notationRule = {int[φi[x]2, {x, 0, 1}] -> 1, int[φi[x] φi(4)[x], {x, 0, 1}] -> λi4,  
  int[μ[x] φi[x]2, {x, 0, 1}] -> μi, int[F[x] φi[x], {x, 0, 1}] -> ω1,i f};
```

Για να αναγνωρίσουμε τις μορφές των μη-γραμμικών όρων στις συνθήκες επιλυσιμότητας, πρώτα αναγνωρίζουμε όλες τις πιθανές μορφές των μη-ομογενών όρων στο πρώτης-τάξης πρόβλημα. Γι' αυτό το σκοπό, θέτουμε

```
basicTerms = Table[{Ai[T1] Ei omgList[[i]] T0,  $\bar{A}_i[T_1] E^{-i omgList[[i]] T_0}$ }, {i, 2}] //  
  Flatten
```

```
{Ei T0 ω1,n A1[T1], E-i T0 ω1,n  $\bar{A}_1$ [T1], Ei T0 ω2,n A2[T1], E-i T0 ω2,n  $\bar{A}_2$ [T1]}
```

Τότε, όλες οι πιθανές μορφές των μη-γραμμικών όρων στο πρώτης-τάξης πρόβλημα δίνονται από

```
cubicTerms =  
  Nest[Outer[Times, basicTerms, #] &, basicTerms, 2] // Flatten // Union;  
cubicTerms /. displayRule
```

```
{E3 i T0 ω1,n A13, Ei T0 (2 ω1,n - ω2,n) A12 A2, Ei T0 (ω1,n - 2 ω2,n) A1 A22, E3 i T0 ω2,n A23,  
  Ei T0 ω1,n A12  $\bar{A}_1$ , Ei T0 ω2,n A1 A2  $\bar{A}_1$ , Ei T0 (-ω1,n + 2 ω2,n) A22  $\bar{A}_1$ , E-i T0 ω1,n A1  $\bar{A}_1$ 2,  
  Ei T0 (-2 ω1,n + ω2,n) A2  $\bar{A}_1$ 2, E-2 i T0 ω1,n  $\bar{A}_1$ 3, Ei T0 (2 ω1,n - ω2,n) A12  $\bar{A}_2$ , Ei T0 ω1,n A1 A2  $\bar{A}_2$ ,  
  Ei T0 ω2,n A22  $\bar{A}_2$ , E-i T0 ω2,n A1  $\bar{A}_1$   $\bar{A}_2$ , E-i T0 ω1,n A2  $\bar{A}_1$   $\bar{A}_2$ , Ei T0 (-2 ω1,n - ω2,n)  $\bar{A}_1$ 2  $\bar{A}_2$ ,  
  Ei T0 (ω1,n - 2 ω2,n) A1  $\bar{A}_2$ 2, E-i T0 ω2,n A2  $\bar{A}_2$ 2, Ei T0 (-ω1,n - 2 ω2,n)  $\bar{A}_1$   $\bar{A}_2$ 2, E-3 i T0 ω2,n  $\bar{A}_2$ 3}
```

Από αυτούς τους όρους, μόνο οι όροι που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους εμφανίζονται στις συνθήκες επιλυσιμότητας, οι οποίοι μπορούν να αναγνωριστούν σύμφωνα με

```
secularTerms =  
  (E-i omgList[[#]] T0 cubicTerms /. expRule[#] /. Exp[_ T0 + _.] -> 0 // Union //  
  Rest) & /@ {1, 2}
```

```
{{A1[T1]2  $\bar{A}_1$ [T1], A1[T1] A2[T1]  $\bar{A}_1$ [T1], A2[T1]2  $\bar{A}_1$ [T1],  
  A1[T1]2  $\bar{A}_2$ [T1], A1[T1] A2[T1]  $\bar{A}_2$ [T1], A2[T1]2  $\bar{A}_2$ [T1]},  
  {A1[T1]2  $\bar{A}_1$ [T1], A1[T1] A2[T1]  $\bar{A}_1$ [T1], A2[T1]2  $\bar{A}_1$ [T1],  
  A1[T1]2  $\bar{A}_2$ [T1], A1[T1] A2[T1]  $\bar{A}_2$ [T1], A2[T1]2  $\bar{A}_2$ [T1]}}
```

Κατόπιν, ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους :

```
coef = Table[Coefficient[SCond[[i, 1]], secularTerms[[i]]], {i, 2}] //  
  Collect[#, δ0] &;
```

```
Clear[symbolList]
```

```

symbolList[1] = MapIndexed[If[#1 != 0, 8 ω1,m α1,#2[[1]], 0] &, coef[[1]]]
{8 α1,1 ω1,m, 0, 8 α1,2 ω1,m, 0, 8 α1,5 ω1,m, 0}
symbolList[2] = MapIndexed[If[#1 != 0, 8 ω2,n α2,#2[[1]], 0] &, coef[[2]]]
{0, 8 α2,2 ω2,n, 0, 8 α2,4 ω2,n, 0, 8 α2,6 ω2,n}

```

και εκφράζουμε την SCond σε μια πιο ακριβή μορφή, ως :

eqMod =

$$\text{Expand} \left[-\frac{1}{\text{omgList}[\{ \# \}]} \right. \\
 \left. \left((\text{SCond}[\{ \#, 1 \}] /. \text{notationRule} /. \right. \right. \\
 \left. \left. \text{Thread}[\text{secularTerms}[\{ \# \}] \rightarrow 0]) + \right. \right. \\
 \left. \left. \text{symbolList}[\{ \# \}].\text{secularTerms}[\{ \# \}] \right) \right] == 0 \ \& \ /@ \{1, 2\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} E^{IT_1} f + 2 I \mu_m A_1[T_1] + \frac{\delta_1 \lambda_m^4 A_1[T_1]}{\omega_{1,m}} - 8 \alpha_{1,1} A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] - \right. \\
 8 \alpha_{1,3} A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] - 8 \alpha_{1,5} A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] + 2 I A_1'[T_1] == 0, \\
 2 I \mu_m A_2[T_1] - 8 \alpha_{2,2} A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] - 8 \alpha_{2,4} A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] - \\
 \left. 8 \alpha_{2,6} A_2[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] + 2 I A_2'[T_1] == 0 \right\}$$

όπου

(symbolList[1] -> coef[[1]] // Thread // Union // Rest) /. int -> Integrate //

Timing

{29.683 Second,

$$\left\{ 8 \alpha_{1,1} \omega_{1,m} \rightarrow -3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x]^3 dx - 12 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \right. \\
 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x]^2 \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\
 \left(-3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x]^3 dx - 12 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \right. \\
 \left. 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x]^2 \varphi_m^{(4)}[x] dx \right) \delta_0 + \\
 2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m'[x] \int_1^x \varphi_m'[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \omega_{1,m}^2, \\
 8 \alpha_{1,3} \omega_{1,m} \rightarrow - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_m''[x]^2 dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\
 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\
 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi_m''[x] \varphi_m''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \right. \\
 \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_m''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_m''[x]^2 dx - \\
 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\
 \left. \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx \right) \delta_0 - \\
 \frac{\left(\int_0^1 \partial_{\{x,2\}} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_m''[x] dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \delta_0^2}{\beta_V} +$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi'_m[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_r[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \omega_{2,n}^2, \\
 & 8 \alpha_{1,5} \omega_{1,m} \rightarrow -2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_r''[x]^2 dx - 2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_r'[x] \varphi_m''[x] \varphi_r^{(3)}[x] dx - \\
 & 6 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_r''[x] \varphi_r^{(3)}[x] dx - 2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_r'[x] \varphi_r^{(4)}[x] dx + \\
 & \left(2 \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_r^{(3)}[x] \int_0^x \varphi'_r[x] \varphi_m''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \right. \\
 & 2 \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_r''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \\
 & 2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_r''[x]^2 dx - 2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_r'[x] \varphi_m''[x] \varphi_r^{(3)}[x] dx - \\
 & \left. 6 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_r''[x] \varphi_r^{(3)}[x] dx - 2 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_r'[x] \varphi_r^{(4)}[x] dx \right) \delta_0 - \\
 & \frac{2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,2\}} \left(\varphi_r''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \delta_0^2}{\beta_V} \}
 \end{aligned}$$

(sympollist[2] -> coef[[2]] // Thread // Union // Rest) /. int -> Integrate // Timing

{22.282 Second,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 8 \alpha_{2,2} \omega_{2,n} \rightarrow -2 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m''[x]^2 \varphi_r''[x] dx - 6 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_r'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \right. \\
 & 2 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m'[x] \varphi_r''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - 2 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m'[x] \varphi_r'[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\
 & \left(-2 \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi'_m[x] \varphi_r''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx + \right. \\
 & 2 \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \left. \right) \delta_0 - \\
 & \left. \frac{2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,2\}} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \delta_0^2}{\beta_V} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 8 \alpha_{2,4} \omega_{2,n} \rightarrow - \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m''[x]^2 \varphi_r''[x] dx - 3 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_r'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\
 & \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m'[x] \varphi_r''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m'[x] \varphi_r'[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\
 & \left(- \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi'_m[x] \varphi_r''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx + \right. \\
 & \left. \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \delta_0 - \\
 & \left. \frac{\left(\int_0^1 \partial_{\{x,2\}} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_r''[x] dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \delta_0^2}{\beta_V} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_r'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_m[x]^2 dx dx \right) \varphi_r[x] dx \right) \omega_{1,m}^2,$$

$$\begin{aligned}
 & 8 \alpha_{2,6} \omega_{2,n} \rightarrow -3 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_r''[x]^3 dx - 12 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_r'[x] \varphi_r''[x] \varphi_r^{(3)}[x] dx - \\
 & 3 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_r'[x]^2 \varphi_r^{(4)}[x] dx + \\
 & 2 \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_r'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_r[x]^2 dx dx \right) \varphi_r[x] dx \right) \omega_{2,n}^2 \}
 \end{aligned}$$

Ε.3.2 Διακριτοποίηση του Συνεχούς Προβλήματος

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση PolarForm που ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβάνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή μορφή, και τους ορισμούς για τα γ_i ως :

PolarForm[eqMod]

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} a_1'[T_1] &== \frac{1}{2} \left(-f \text{Sin}[\gamma_1[T_1]] - 2 \mu_m a_1[T_1] + 2 \text{Sin}[\gamma_2[T_1]] \alpha_{1,3} a_1[T_1] a_2[T_1]^2 \right), \\ a_2'[T_1] &== -\mu_m a_2[T_1] - \text{Sin}[\gamma_2[T_1]] \alpha_{2,4} a_1[T_1]^2 a_2[T_1], \\ \gamma_2'[T_1] &== -\frac{\delta_1 \lambda_m^4}{\omega_{1,m}} - \frac{f \text{Cos}[\gamma_1[T_1]]}{a_1[T_1]} + 2 \alpha_{1,1} a_1[T_1]^2 - 2 \alpha_{2,2} a_1[T_1]^2 - 2 \text{Cos}[\gamma_2[T_1]] \\ &\quad \alpha_{2,4} a_1[T_1]^2 + 2 \text{Cos}[\gamma_2[T_1]] \alpha_{1,3} a_2[T_1]^2 + 2 \alpha_{1,5} a_2[T_1]^2 - 2 \alpha_{2,6} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_1'[T_1] &== \sigma - \frac{\delta_1 \lambda_m^4}{2 \omega_{1,m}} - \frac{f \text{Cos}[\gamma_1[T_1]]}{2 a_1[T_1]} + \alpha_{1,1} a_1[T_1]^2 + \\ &\quad \text{Cos}[\gamma_2[T_1]] \alpha_{1,3} a_2[T_1]^2 + \alpha_{1,5} a_2[T_1]^2, \\ \gamma_1[T_1] &== T_1 \sigma - \beta_1[T_1], \quad \gamma_2[T_1] == -2 \beta_1[T_1] + 2 \beta_2[T_1] \end{aligned} \right\} \right\}$$

Ε.3.3 Διακριτοποίηση του Συνεχούς Προβλήματος

Χρησιμοποιώντας την eqMod και τη συνάρτηση CartesianForm που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, λαμβάνουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης σε Καρτεσιανή μορφή, τους ορισμούς για τα v_i και την ιδιότητα συμμετρίας ως

CartesianForm[eqMod]

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} p_1'[T_1] &== -\mu_m p_1[T_1] - v_1 q_1[T_1] + \frac{\delta_1 \lambda_m^4 q_1[T_1]}{2 \omega_{1,m}} - \\ &\quad \alpha_{1,1} p_1[T_1]^2 q_1[T_1] + \alpha_{1,3} p_2[T_1]^2 q_1[T_1] - \alpha_{1,5} p_2[T_1]^2 q_1[T_1] - \alpha_{1,1} q_1[T_1]^3 - \\ &\quad 2 \alpha_{1,3} p_1[T_1] p_2[T_1] q_2[T_1] - \alpha_{1,3} q_1[T_1] q_2[T_1]^2 - \alpha_{1,5} q_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ q_1'[T_1] &== -\frac{f}{2} + v_1 p_1[T_1] - \frac{\delta_1 \lambda_m^4 p_1[T_1]}{2 \omega_{1,m}} + \alpha_{1,1} p_1[T_1]^3 + \alpha_{1,3} p_1[T_1] p_2[T_1]^2 + \\ &\quad \alpha_{1,5} p_1[T_1] p_2[T_1]^2 - \mu_m q_1[T_1] + \alpha_{1,1} p_1[T_1] q_1[T_1]^2 + \\ &\quad 2 \alpha_{1,3} p_2[T_1] q_1[T_1] q_2[T_1] - \alpha_{1,3} p_1[T_1] q_2[T_1]^2 + \alpha_{1,5} p_1[T_1] q_2[T_1]^2, \\ p_2'[T_1] &== -\mu_m p_2[T_1] - 2 \alpha_{2,4} p_1[T_1] p_2[T_1] q_1[T_1] - v_2 q_2[T_1] - \\ &\quad \alpha_{2,2} p_1[T_1]^2 q_2[T_1] + \alpha_{2,4} p_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \alpha_{2,6} p_2[T_1]^2 q_2[T_1] - \\ &\quad \alpha_{2,2} q_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \alpha_{2,4} q_1[T_1]^2 q_2[T_1] - \alpha_{2,6} q_2[T_1]^3, \\ q_2'[T_1] &== v_2 p_2[T_1] + \alpha_{2,2} p_1[T_1]^2 p_2[T_1] + \alpha_{2,4} p_1[T_1]^2 p_2[T_1] + \\ &\quad \alpha_{2,6} p_2[T_1]^3 + \alpha_{2,2} p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - \alpha_{2,4} p_2[T_1] q_1[T_1]^2 - \\ &\quad \mu_m q_2[T_1] + 2 \alpha_{2,4} p_1[T_1] q_1[T_1] q_2[T_1] + \alpha_{2,6} p_2[T_1] q_2[T_1]^2, \\ \{v_1 \rightarrow \sigma, v_2 \rightarrow \sigma\}, \{ \{p_1, q_1, p_2, q_2\}, \{p_1, q_1, -p_2, -q_2\} \} \end{aligned} \right\} \right\}$$

7.3.3 Διακριτοποίηση του Συνεχούς Προβλήματος

Σαν εναλλακτική, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων στο διακριτοποιημένο σύστημα των EOM και BC. Για να προσδιορίσουμε τη διακριτοποιημένη μορφή, εκφράζουμε τα $v[x,t]$ και $w[x,t]$ σε όρους των γραμμικών συναρτήσεων σχήματος $\phi_m[x]$ και $\phi_n[x]$, αντίστοιχα, ως :

```
discretRule = {v -> Function[{x, t}, q_m[t] \phi_m[x]],
  w -> Function[{x, t}, q_n[t] \phi_n[x] ]};

modes = { \phi_m[x], \phi_n[x] };
```

όπου τα $q_{ii}[t]$ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες. Θεωρούμε μόνο τα $q_m[t]$ και $q_n[t]$ επειδή με την παρουσία της απόσβεσης, όλες οι άλλες μορφές που δεν είναι απευθείας ή εμμέσως διεγερμένες φθίνουν με τον χρόνο. Αντικαθιστώντας την `discretRule` σε καθεμία από τις EOM, πολλαπλασιάζοντας τα αποτελέσματα με $\varphi_m[x]$ και $\varphi_n[x]$, αντίστοιχα, και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα από $x = 0$ έως 1, χρησιμοποιώντας τους `intRule3`, `intRule4`, `intRule1`, `intRule2` και `intRule5`, λαμβάνουμε την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων που περιγράφουν την απόκριση της δοκού :

eq733a =

```
Table[
  int[modes[[k]] # /. discretRule, {x, 0, 1}] /. intRule3 //. intRule4 /.
    intRule1 //. intRule2 /. intRule5[modes[[k]]] //.
    int[a_, b_] -> HoldForm[Integrate[a, b]] & /@ EOM[[k]], {k, 2}]
{
  (∫₀¹ φₘ[x] φₘ⁽⁴⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t] + (∫₀¹ φₘ[x]² dx) α'ₘ[t] ==
  -ε Cos[t Ω] ∫₀¹ F[x] φₘ[x] dx - ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ''[x]³ dx) βᵧ qₘ[t]³ -
  4ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ'[x] φₘ''[x] φₘ⁽³⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t]³ -
  ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ'[x]² φₘ⁽⁴⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t]³ -
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,1)} (φₙ⁽³⁾[x] ∫₀ˣ φₙ'[x] φₙ''[x] dx) φₘ[x] dx) qₘ[t] qₙ[t]² +
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,1)} (φₙ''[x] ∫₁ˣ φₙ''[x] φₙ''[x] dx) φₘ[x] dx) qₘ[t] qₙ[t]² +
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,1)} (φₙ⁽³⁾[x] ∫₀ˣ φₙ'[x] φₙ''[x] dx) φₘ[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,1)} (φₙ''[x] ∫₁ˣ φₙ''[x] φₙ''[x] dx) φₘ[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ''[x] φₙ''[x]² dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  ε (∫₀¹ φₘ[x] φₙ'[x] φₙ''[x] φₙ⁽³⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  3ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ'[x] φₙ''[x] φₙ⁽³⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  ε (∫₀¹ φₘ[x] φₘ'[x] φₙ'[x] φₙ⁽⁴⁾[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]² -
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,2)} (φₙ''[x] ∫₀ˣ ∫₁ˣ φₙ''[x] φₙ''[x] dx dx) φₘ[x] dx) qₘ[t] qₙ[t]²
  / βᵧ +
  2ε (∫₀¹ ∂_{(x,2)} (φₙ''[x] ∫₀ˣ ∫₁ˣ φₙ''[x] φₙ''[x] dx dx) φₘ[x] dx) βᵧ qₘ[t] qₙ[t]²
  / βᵧ -
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,2)} (φₙ''[x] ∫₀ˣ ∫₁ˣ φₙ''[x] φₙ''[x] dx dx) φₘ[x] dx) βᵧ² qₘ[t] qₙ[t]²
  / βᵧ
  2ε (∫₀¹ μ[x] φₘ[x]² dx) α'ₘ[t] -
  ε (∫₀¹ ∂_{(x,1)} (φₘ'[x] ∫₁ˣ ∫₀ˣ φₘ'[x]² dx dx) φₘ[x] dx) qₘ[t] α'ₘ[t]² -

```

$$\begin{aligned}
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi'_m[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_n[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \alpha_m[t] \alpha'_n[t]^2 - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi'_m[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_m[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha'_m[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi'_m[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_n[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \alpha_m[t] \alpha_n[t] \alpha'_n[t], \\
 & \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n^{(4)}[x] dx \right) \alpha_n[t] + \left(\int_0^1 \varphi_n[x]^2 dx \right) \alpha'_n[t] = \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi'_m[x] \varphi_n''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_m''[x]^2 \varphi_n''[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & 3 \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi'_m[x] \varphi_n''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi'_m[x] \varphi_n''[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi'_m[x] \varphi_n''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \beta_y \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] + \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \beta_y \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t] - \\
 & \in \frac{\left(\int_0^1 \partial_{(x,2)} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t]}{\beta_y} + \\
 & 2 \in \frac{\left(\int_0^1 \partial_{(x,2)} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \beta_y \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t]}{\beta_y} - \\
 & \in \frac{\left(\int_0^1 \partial_{(x,2)} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \beta_y^2 \alpha_m[t]^2 \alpha_n[t]}{\beta_y} - \\
 & \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x]^3 dx \right) \alpha_n[t]^3 - 4 \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x] \varphi_n''[x] \varphi_n^{(3)}[x] dx \right) \alpha_n[t]^3 - \\
 & \in \left(\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x]^2 \varphi_n^{(4)}[x] dx \right) \alpha_n[t]^3 - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_n''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_m[x]^2 dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_n[t] \alpha'_m[t]^2 - \\
 & 2 \in \left(\int_0^1 \mu[x] \varphi_n[x]^2 dx \right) \alpha'_n[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_n''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_n''[x]^2 dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_n[t] \alpha'_n[t]^2 - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_n''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi'_m[x]^2 dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_m[t] \alpha_n[t] \alpha'_m[t] - \\
 & \in \left(\int_0^1 \partial_{(x,1)} \left(\varphi_n''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_n''[x]^2 dx dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \alpha_n[t]^2 \alpha'_n[t] \}
 \end{aligned}$$

όπου η απόσβεση θεωρείται ότι είναι ιδιομορφική. Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων σχήματος $\varphi_i[x]$, ορίζουμε :

notationRule =

$$\left\{ \int [\varphi_i[x]^2, \{x, 0, 1\}] \rightarrow 1, \int [\varphi_i[x] \varphi_i^{(4)}[x], \{x, 0, 1\}] \rightarrow \lambda_i^4, \right. \\ \left. \int [\mu[x] \varphi_i[x]^2, \{x, 0, 1\}] \rightarrow \mu_i, \int [F[x] \varphi_i[x], \{x, 0, 1\}] \rightarrow \omega_{1,i} f \right\} /. \\ \int [a_, b_] \rightarrow \text{HoldForm[Integrate[a, b]]}$$

$$\left\{ \int_0^1 \varphi_i[x]^2 dx \rightarrow 1, \int_0^1 \varphi_i[x] \varphi_i^{(4)}[x] dx \rightarrow \lambda_i^4, \int_0^1 \mu[x] \varphi_i[x]^2 dx \rightarrow \mu_i, \right. \\ \left. \int_0^1 F[x] \varphi_i[x] dx \rightarrow f \omega_{1,i} \right\}$$

Για να απλοποιήσουμε την έκφραση για την eq733a, πρώτα βρίσκουμε πιθανούς μη-γραμμικούς όρους, ως ακολούθως :

basicTerms = Table[D[q_m[t], {t, i}], {i, 0, 2}]

{q_m[t], q'_m[t], q''_m[t]}

linearTerms = Join[basicTerms, basicTerms /. m -> n]

{q_n[t], q'_n[t], q''_n[t], q_m[t], q'_m[t], q''_m[t]}

cubicTerms = Nest[Outer[Times, linearTerms, #] &, linearTerms, 2] // Flatten // Union;

Οι συντελεστές που αντιστοιχούν στην cubicTerms στην eq733a λαμβάνονται ως :

coefList = Coefficient[eq733a[#[, 2]], cubicTerms] & /@ {1, 2};

Αντικαθιστούμε αυτούς τους συντελεστές με τα $\alpha_{i,j}$ ως εξής :

symbolList = MapIndexed[If[#1 != 0, $\alpha_{\text{Sequence} @@ \#2}$, 0] &, coefList, {2}];

Χρησιμοποιώντας τις notationRule, symbolList και cubicTerms, μπορούμε να ξαναγράψουμε την eq733a ως εξής :

EOM1 =

Table[

$$\text{eq733a}[[k, 1]] == (\text{eq733a}[[k, 2]] /. \text{Thread}[\text{cubicTerms} \rightarrow 0]) + \\ \text{symbolList}[[k]] . \text{cubicTerms} /. \text{notationRule}, \{k, 2\}]$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 3\gamma \lambda_m^4 q_m[t] + q''_m[t] == -f \in \text{Cos}[t \Omega] \omega_{1,m} + \\ & \in \alpha_{1,1} q_m[t]^3 + \in \alpha_{1,3} q_m[t] q_n[t]^2 - 2 \in \mu_m q'_m[t] + \in \alpha_{1,8} q_m[t] q''_m[t]^2 - \\ & \in \alpha_{1,17} q_m[t] q'_n[t]^2 + \in \alpha_{1,21} q_m[t]^2 q''_m[t] + \in \alpha_{1,37} q_m[t] q_n[t] q''_n[t], \\ & \lambda_n^4 q_n[t] + q''_n[t] == \in \alpha_{2,2} q_m[t]^2 q_n[t] + \in \alpha_{2,4} q_m[t]^3 + \in \alpha_{2,9} q_m[t] q'_m[t]^2 - \\ & 2 \in \mu_n q'_n[t] - \in \alpha_{2,18} q_n[t] q'_n[t]^2 + \in \alpha_{2,22} q_m[t] q_n[t] q''_m[t] + \in \alpha_{2,38} q_n[t]^2 q''_n[t] \end{aligned} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, αναζητούμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ανάπτυξη στη μορφή

$$\text{solRule} = q_n \rightarrow \left(\sum_{j=0}^1 \epsilon^j q_{n,j}[\#1, \#2] \right) \& ;$$

Μετασχηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους στην EOM1 σε μερικές παραγώγους με όρους των T_0 και T_1 , αντικαθιστώντας τους solRule και betayRule στην EOM1, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , λαμβάνουμε :

eq733b =

```
(EOM1 /. {q_x_[t] -> q_x_[T0, T1], Derivative[n_][q_x_][t] -> dt[n][q_x_[T0, T1]],
t -> T0} /. solRule /. betaRule // ExpandAll) /. e^{n/;n>1} -> 0;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην eq733b, λαμβάνουμε :

```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #, \epsilon] == 0] & /@ eq733b //
Transpose
```

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \lambda_n^4 q_{n,0}[T_0, T_1] + \delta_0 \lambda_n^4 q_{n,0}[T_0, T_1] + q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] == 0, \right. \\ & \lambda_n^4 q_{n,0}[T_0, T_1] + q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] == 0, \\ & \left\{ f \cos[T_0 \Omega] \omega_{1,n} + \delta_1 \lambda_n^4 q_{n,0}[T_0, T_1] - \alpha_{1,1} q_{n,0}[T_0, T_1]^2 + \lambda_n^4 q_{n,1}[T_0, T_1] + \right. \\ & \delta_0 \lambda_n^4 q_{n,1}[T_0, T_1] - \alpha_{1,2} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}[T_0, T_1]^2 + 2 \mu_n q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1] - \\ & \alpha_{1,8} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1]^2 - \alpha_{1,17} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1]^2 + \\ & 2 q_{n,0}^{(1,1)}[T_0, T_1] - \alpha_{1,21} q_{n,0}[T_0, T_1]^2 q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] + \\ & q_{n,1}^{(2,0)}[T_0, T_1] - \alpha_{1,37} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] == 0, \\ & -\alpha_{2,2} q_{n,0}[T_0, T_1]^2 q_{n,0}[T_0, T_1] - \alpha_{2,4} q_{n,0}[T_0, T_1]^2 + \lambda_n^4 q_{n,1}[T_0, T_1] - \\ & \alpha_{2,9} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1]^2 + 2 \mu_n q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1] - \\ & \alpha_{2,18} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}^{(1,0)}[T_0, T_1]^2 + 2 q_{n,0}^{(1,1)}[T_0, T_1] - \alpha_{2,22} q_{n,0}[T_0, T_1] q_{n,0}[T_0, T_1] \\ & \left. \left. q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] - \alpha_{2,38} q_{n,0}[T_0, T_1]^2 q_{n,0}^{(2,0)}[T_0, T_1] + q_{n,1}^{(2,0)}[T_0, T_1] == 0 \right\} \right\} \end{aligned} \right.$$

Κι έτσι, έπεται από την eqEps[[1]] ότι

```
sol0 = {q_{n,0} -> Function[{T0, T1}, A1[T1] Exp[I \omega_{1,n} T0] + \bar{A}1[T1] Exp[-I \omega_{1,n} T0]},
q_{n,0} -> Function[{T0, T1}, A2[T1] Exp[I \omega_{2,n} T0] + \bar{A}2[T1] Exp[-I \omega_{2,n} T0]];
```

Αντικαθιστώντας τη sol0 στην eqEps[[2]] προκύπτει :

```
order1Eq =
```

```
(#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. q_{k,0} -> q_{k,1}) ==
(#[[1]] & /@ eqEps[[1]] /. q_{k,0} -> q_{k,1}) - (#[[1]] & /@ eqEps[[2]]) /.
sol0 // TrigToExp // ExpandAll // Thread;
```

Θεωρούμε την περίπτωση του κύριου συντονισμού της καμπτικής μορφής στην διεύθυνση y , $\Omega \approx \omega_{1,m}$.

Για να περιγράψουμε την εγγύτητα του κύριου συντονισμού, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ και ορίζουμε :

```
omgList = {\omega_{1,m}, \omega_{2,n}};
```

```
ResonanceConds = {\omega_{2,n} == \omega_{1,m}, \Omega == \omega_{1,m} + \epsilon \sigma};
```

```
OmgRule = Solve[ResonanceConds, Drop[omgList, {#}] ~Join~ {\Omega}] [[1]] & /@
{1, 2}
```

```
{{\omega_{2,n} \to \omega_{1,m}, \Omega \to \epsilon \sigma + \omega_{1,m}}, {\omega_{1,m} \to \omega_{2,n}, \Omega \to \epsilon \sigma + \omega_{2,n}}}
```

```
expRule[i_] := Exp[arg_] :> Exp[Expand[arg /. OmgRule[[i]]] /. \epsilon T0 -> T1]
```

Αντικαθιστούμε τις ResonanceConds στα δεξιά μέλη των order1Eq και λαμβάνουμε τη συνθήκη επιλυσιμότητας ως εξής :

```
SCond =
```

```
Table[Coefficient[-order1Eq[[i, 2]] /. expRule[i], Exp[I omgList[[i]] T0]] ==
0, {i, 2}];
```

```
SCond /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 \delta_1 \lambda_m^4 - 3 A_1^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,1} - A_2^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,3} - 2 A_1 A_2 \bar{A}_2 \alpha_{1,2} + \frac{1}{2} E^{IT_1} \sigma \neq \omega_{1,m} + \\ & 2 I (D_1 A_1) \omega_{1,m} + 2 I A_1 \mu_m \omega_{1,m} - A_1^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,8} \omega_{1,m}^2 + 3 A_1^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,21} \omega_{1,m}^2 + \\ & A_2^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,17} \omega_{2,n}^2 - 2 A_1 A_2 \bar{A}_2 \alpha_{1,17} \omega_{2,n}^2 + A_2^2 \bar{A}_1 \alpha_{1,37} \omega_{2,n}^2 + 2 A_1 A_2 \bar{A}_2 \alpha_{1,37} \omega_{2,n}^2 = 0, \\ & -2 A_1 A_2 \bar{A}_1 \alpha_{2,2} - A_1^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,2} - 3 A_2^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,4} - 2 A_1 A_2 \bar{A}_1 \alpha_{2,9} \omega_{1,m}^2 + A_1^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,9} \omega_{1,m}^2 + \\ & 2 A_1 A_2 \bar{A}_1 \alpha_{2,22} \omega_{1,m}^2 + A_1^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,22} \omega_{1,m}^2 + 2 I (D_1 A_2) \omega_{2,n} + \\ & 2 I A_2 \mu_n \omega_{2,n} - A_2^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,18} \omega_{2,n}^2 + 3 A_2^2 \bar{A}_2 \alpha_{2,38} \omega_{2,n}^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

όπου

$\# \rightarrow (\# /. \alpha_{i,j} :> \text{coefList}[[i, j]] /. \text{betayRule} /. \epsilon \rightarrow 0 // \text{Expand} //$
 $\text{Collect}[\#, \delta_0] \& \& /@ (\text{symbolList} // \text{Flatten} // \text{Union} // \text{Rest})$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{1,1} \rightarrow & - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x]^3 dx - 4 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\ & \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x]^2 \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\ & \left(- \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x]^3 dx - 4 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \right. \\ & \left. \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x]^2 \varphi_m^{(4)}[x] dx \right) \delta_0, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} \rightarrow & - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_m'''[x]^2 dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\ & 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m'''[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx + \\ & \left(\int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m^{(3)}[x] \int_0^x \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \right. \\ & \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_m'''[x] dx \right) \varphi_m[x] dx - \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m''[x] \varphi_m'''[x]^2 dx - \\ & \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'''[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - 3 \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m''[x] \varphi_m^{(3)}[x] dx - \\ & \left. \int_0^1 \varphi_m[x] \varphi_m'[x] \varphi_m'''[x] \varphi_m^{(4)}[x] dx \right) \delta_0 - \\ & \frac{\left(\int_0^1 \partial_{\{x,2\}} \left(\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_m'''[x] dx dx \right) \varphi_m[x] dx \right) \delta_0^2}{\beta_\gamma}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{1,8} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m'[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx,$$

$$\alpha_{1,17} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m''[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx,$$

$$\alpha_{1,21} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m'''[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m'''[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx,$$

$$\alpha_{1,37} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_m^{(4)}[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m^{(4)}[x]^2 dx dx \right) \varphi_m[x] dx,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,2} \rightarrow & - \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x]^2 \varphi_n'''[x] dx - 3 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n'[x] \varphi_n''[x] \varphi_n^{(3)}[x] dx - \\ & \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n'[x] \varphi_n''[x] \varphi_n^{(3)}[x] dx - \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n'[x] \varphi_n'''[x] \varphi_n^{(4)}[x] dx + \\ & \left(- \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_n^{(3)}[x] \int_0^x \varphi_n'[x] \varphi_n''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx + \right. \\ & \left. \int_0^1 \partial_{\{x,1\}} \left(\varphi_n''[x] \int_1^x \varphi_n''[x] \varphi_n'''[x] dx \right) \varphi_n[x] dx \right) \delta_0 - \end{aligned}$$

$$\frac{(\int_0^1 \partial_{(x,2)} (\varphi_m''[x] \int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx) \varphi_n[x] dx) \delta_0^2}{\beta_Y},$$

$$\alpha_{2,4} \rightarrow - \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n''[x]^3 dx - 4 \int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n'[x] \varphi_n''[x] \varphi_n^{(3)}[x] dx -$$

$$\int_0^1 \varphi_n[x] \varphi_n'[x]^2 \varphi_n^{(4)}[x] dx,$$

$$\alpha_{2,9} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{(x,1)} (\varphi_n'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m'[x]^2 dx dx) \varphi_n[x] dx,$$

$$\alpha_{2,18} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{(x,1)} (\varphi_n'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_n'[x]^2 dx dx) \varphi_n[x] dx,$$

$$\alpha_{2,22} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{(x,1)} (\varphi_n'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_m'[x]^2 dx dx) \varphi_n[x] dx,$$

$$\alpha_{2,38} \rightarrow - \int_0^1 \partial_{(x,1)} (\varphi_n'[x] \int_1^x \int_0^x \varphi_n'[x]^2 dx dx) \varphi_n[x] dx \}$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με ότι λήφθηκε από την απ' ευθείας προσέγγιση.

7.3.4 Η Μέθοδος της χρονικά μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής

Σαν δεύτερη εναλλακτική, εξάγουμε τις εξισώσεις διαμόρφωσης με το να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της χρονικά μεσοσταθμισμένης Λαγκραντζιανής. Η αδιάστατη Λαγκραντζιανή της δοκού μπορεί να εκφραστεί ως (Crespo da Silva and Glynn, 1978; Arafat, Nayfeh, and Chin, 1998)

Lagr1 =

$$\text{Hold} [$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\epsilon \left(\partial_x \int_0^x \frac{1}{2} \left((\partial_x v[x, t])^2 + (\partial_x w[x, t])^2 \right) dx \right)^2 + (\partial_x v[x, t])^2 + \right.$$

$$\left. (\partial_x w[x, t])^2 \right) -$$

$$\epsilon (1 - \beta_Y) \left(\partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] \int_0^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx \right) -$$

$$\frac{1}{2} \left((\partial_{x,x} v[x, t])^2 + \epsilon (\partial_x w[x, t])^2 (\partial_{x,x} v[x, t])^2 \right) -$$

$$\frac{1}{2} \beta_Y \left((\partial_{x,x} v[x, t])^2 + \epsilon (\partial_x v[x, t])^2 (\partial_{x,x} v[x, t])^2 + \right.$$

$$\left. \epsilon 2 \partial_x v[x, t] \partial_{x,x} v[x, t] \partial_x w[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] \right) -$$

$$\epsilon \frac{(1 - \beta_Y)^2}{2 \beta_Y} \left(\left(\int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx \right)^2 + \right.$$

$$\left. 2 \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] \int_0^x \int_1^x \partial_{x,x} v[x, t] \partial_{x,x} w[x, t] dx dx \right) -$$

$$\left. \epsilon F[x] \text{Cos}[\Omega t] v[x, t] \right) dx] /. \text{Integrate} \rightarrow \text{int} /.$$

HoldPattern[∂_ε int[a, b]] := int[∂_εa, b] // ReleaseHold;

όπου τα **Hold** και **int** χρησιμοποιούνται για να μην υπολογιστεί το **Integrate**. Μετασχηματίζοντας τις ολικές χρονικές παραγώγους σε μερικές παραγώγους με όρους των T₀ και T₁, τροποποιούμε την Lagr1 ως

Lagr2 = Lagr1 /. {v[x_, t] -> v[x, T0, T1], w[x_, t] -> w[x, T0, T1],

Derivative[m_, n_][w_][x_, t] -> dt[n][D[w[x, T0, T1], {x, m}]], t -> T0};

Γι' αυτό το σκοπό, θέτουμε

```
solRule =
  {v -> Function[{x, T0, T1}, A1[T1] φm[x] Exp[I ω1,m T0] +
    Ā1[T1] φm[x] Exp[-I ω1,m T0]},
  w -> Function[{x, T0, T1}, A2[T1] φn[x] Exp[I ω2,n T0] +
    Ā2[T1] φn[x] Exp[-I ω2,n T0]}};
```

και ορίζουμε

```
intRule6 =
  {int[c1_ int[a1_] ^ n_., b1_] :=
    c1 int[int[a1] ^ n /. intRule1 //. intRule2 /. ε -> 0, b1] /.
    FreeQ[c1, First[b1]], int[c1_ int[a1_] ^ n_., b1_] :=
    int[c1 int[a1] ^ n /. intRule1 //. intRule2 /. ε -> 0, b1]};
```

Αντικαθιστώντας τις solRule και betayRule στην Lagr2, χρησιμοποιώντας τους intRule1, intRule2 και intRule6 για να απλοποιήσουμε τις αναπτόξεις των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση, και συλλέγοντας τους συντελεστές του ε, λαμβάνουμε

```
{order1Lagr =
  Lagr2 /. solRule /. betayRule /. intRule1 //. intRule2 //. intRule6 /.
    intRule1 //. intRule2 //. intRule6 /. intRule1 //. intRule2 //.
    TrigToExp // Expand // Coefficient[#, ε] &)} // Timing
{14.951 Second, Null}
```

```
ResonanceConds = {ω2,n == ω1,m, Ω == ω1,m + ε σ} /. Equal -> Rule
{ω2,n -> ω1,m, Ω -> ε σ + ω1,m}
```

```
notationRule1 = {int[φi_[x]^2, {x, 0, 1}] -> 1, int[F[x] φi_[x], {x, 0, 1}] -> f ω1,i,
  int[φi'[x]^2, {x, 0, 1}] -> λi^4};
```

Χρησιμοποιώντας τις ResonanceConds και τον notationRule1, λαμβάνουμε τους βραδέως μεταβαλλόμενους όρους από την order1Lagr ως εξής :

```
TAL = order1Lagr /. Exp[a_] := Exp[Expand[a /. ResonanceConds] /. ε T0 -> T1] /.
  Exp[_ T0 + _] -> 0 /. notationRule1;
```

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στην TAL μπορούν να γραφούν ως :

```
eqMod1 = D[D[TAL, Ā1'[T1]], T1] - D[TAL, Ā1[T1]] == 0 //.
  int[a_, b_] -> HoldForm[Integrate[a, b]]
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon^{1 T_1 \sigma} f \omega_{1,m} + \delta_1 \lambda_m^4 A_1[T_1] + 6 \left(\int_0^1 \phi_m'[x]^2 \phi_m''[x]^2 dx \right) A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \\ & 6 \left(\int_0^1 \phi_m'[x]^2 \phi_m''[x]^2 dx \right) \delta_0 A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] - \\ & 2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \phi_m'[x]^2 dx \right)^2 dx \right) \omega_{1,m}^2 A_1[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \\ & 2 \left(\int_0^1 \phi_m'[x] \phi_n'[x] \phi_m''[x] \phi_n''[x] dx \right) A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] - \\ & 2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \phi_n'[x] \phi_m''[x] dx \right) \phi_m''[x] \phi_n''[x] dx \right) \delta_0 A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \\ & 2 \left(\int_0^1 \phi_m'[x] \phi_n'[x] \phi_m''[x] \phi_n''[x] dx \right) \delta_0 A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] + \end{aligned}$$

$$\frac{\left(\int_0^1 \left(\int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right)^2 dx\right) \delta_0^2 A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1]}{\beta_V} +$$

$$\frac{2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0^2 A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1]}{\beta_V} -$$

$$2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_m'[x]^2 dx\right) \int_0^x \varphi_n'[x]^2 dx dx\right) \omega_{1,m} \omega_{2,n} A_2[T_1]^2 \bar{A}_1[T_1] +$$

$$4 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] -$$

$$4 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] +$$

$$4 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1] +$$

$$\frac{2 \left(\int_0^1 \left(\int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right)^2 dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1]}{\beta_V} +$$

$$\frac{4 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_2[T_1]}{\beta_V} +$$

$$2 I \omega_{1,m} A_1'[T_1] == 0$$

και

$$\text{eqMod2} = D[D[\text{TAL}, \bar{A}_1'[T_1]], T_1] - D[\text{TAL}, \bar{A}_2[T_1]] == 0 //.$$

`int[a_, b_] -> HoldForm[Integrate[a, b]]`

$$4 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] -$$

$$4 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] +$$

$$4 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1] +$$

$$\frac{2 \left(\int_0^1 \left(\int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right)^2 dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1]}{\beta_V} +$$

$$\frac{4 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1] A_2[T_1] \bar{A}_1[T_1]}{\beta_V} +$$

$$2 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] -$$

$$2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] +$$

$$2 \left(\int_0^1 \varphi_m'[x] \varphi_n'[x] \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0 A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] +$$

$$\frac{\left(\int_0^1 \left(\int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right)^2 dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1]}{\beta_V} +$$

$$\frac{2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \int_1^x \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx dx\right) \varphi_m''[x] \varphi_n''[x] dx\right) \delta_0^2 A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1]}{\beta_V} -$$

$$2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_m'[x]^2 dx\right) \int_0^x \varphi_n'[x]^2 dx dx\right) \omega_{1,m} \omega_{2,n} A_1[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] +$$

$$6 \left(\int_0^1 \varphi_n'[x]^2 \varphi_n''[x]^2 dx\right) A_2[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] -$$

$$2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_n'[x]^2 dx\right)^2 dx\right) \omega_{2,n}^2 A_2[T_1]^2 \bar{A}_2[T_1] + 2 I \omega_{2,n} A_2'[T_1] == 0$$

Προσθέτοντας γραμμική εξώδη απόσβεση στην $eqMod1$ και την $eqMod2$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε τις ίδιες εξισώσεις διαμόρφωσης όπως λήφθηκαν από απευθείας επίλυση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 – ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ

Σε αυτό το Κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να προσδιορίσουμε τις δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες ασυμπτωτικές λύσεις των συνεχών ή κατανεμημένης-παραμέτρου συστημάτων με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες. Θεωρούμε κάποιους από τους εσωτερικούς συντονισμούς που προκύπτουν από τις κυβικές μη-γραμμικότητες, ονομαστικά, τους συντονισμούς ένα-προς-ένα (1:1) και τρία-προς-ένα (3:1). Οι εσωτερικοί συντονισμοί δύο-προς-ένα γίνονται αντικείμενο ενασχόλησης στο Κεφάλαιο 9. Επιλύουμε απευθείας αυτά τα συνεχή συστήματα επειδή η μεταχείριση των ανηγμένης-τάξης μοντέλων που λήφθηκε από τη διαδικασία Galerkin μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα. Θεωρούμε τις λυγισμένες δοκούς στην Ενότητα 8.1, τα κυκλικά κυλινδρικά κελύφη στην Ενότητα 8.2, και τις σχεδόν-τετράγωνες πλάκες στην Ενότητα 8.3.

Προεισαγωγικά

Για να προσδιορίσουμε τις δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες ασυμπτωτικές αναπτύξεις των λύσεων των λυγισμένων δοκών, των κυκλικών κυλινδρικών κελυφών και των σχεδόν-τετράγωνων πλακών μέσω της χρήσης της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων, εισάγουμε τις τρεις χρονικές κλίμακες $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, και $T_2 = \epsilon^2 t$, όπου ϵ είναι μια μικρή αδιάστατη παράμετρος και η τάξη του εύρους των ταλαντώσεων. Επιπλέον, συμβολίζουμε αυτές τις κλίμακες σύμφωνα με :

Symbolize{ T_0 }; **Symbolize**{ T_1 }; **Symbolize**{ T_2 };

timeScales = { T_0 , T_1 , T_2 };

Ως προς τις χρονικές κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , οι χρονικές παράγωγοι μπορούν να εκφραστούν ως :

dt[0][*expr*_] := *expr*; **dt**[1][*expr*_] := **Sum**[$\epsilon^i D[\textit{expr}, \textit{timeScales}[[i+1]]]$, {*i*, 0, 2}];
dt[2][*expr*_] := (**dt**[1][**dt**[1][*expr*]] // **Expand**) /. $\epsilon^{i/2} \rightarrow 0$;

Στην πορεία της ανάλυσης, χρειαζόμαστε τα συζυγή μιγαδικά του A και των άλλων μεταβλητών. Τα ορίζουμε μέσω της χρήσης του ακόλουθου κανόνα :

conjugateRule = { $A \rightarrow \bar{A}$, $\bar{A} \rightarrow A$, **Complex**[*m*, *n*] -> **Complex**[*m*, -*n*]};

Για να επιταχύνουμε τους χειρισμούς των ολοκληρωμάτων που εμπλέκονται στις διέπουσες εξισώσεις εισάγουμε τους κανόνες:

intRule1 = {**int**[*fun*_, *arg2*_] :=> **int**[**Expand**[*fun*], *arg2*]};

intRule2 = {**int**[*a* + *b*_, *arg2*_] :=> **int**[*a*, *arg2*] + **int**[*b*, *arg2*],

int[ϵ^n *fun*_, *arg2*_] := ϵ^n **int**[*fun*, *arg2*],

int[*a* *fun*_, *a1*_, *b1*_] := *a* **int**[*fun*, *a1*, *b1*] /; **FreeQ**[*a*, **First**[*a1*]],

int[**int**[*a1*_, *a2*_] *fun*_, *a3*_] := **int**[*a1*, *a2*] **int**[*fun*, *a3*] /; **FreeQ**[**Rest**[*a2*], **First**[*a2*]];

Για να εμφανίσουμε τα εξαγόμενα σε ευκόλως αναγνώσιμες εκφράσεις, εισάγουμε τους κανόνες


```
displayRule =
{Derivative[a_, b_][w_] [_, T0, _] :=
SequenceForm[If[arg1 = Times @@ MapIndexed[D#1#2{[1]}-1 &, {b}]; arg1 != 1, arg1, ""],
w_ SequenceForm @@ Table["", {a}],
Derivative[a_][A_] [ ] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D#1#2{[1]} &, {a}], A_],
Derivative[a_][A_] [ ] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D#1#2{[1]} &, {a}], A_],
w_ [_, T0, _] -> w_, A_ [ ] -> A_, A_ [ ] -> A_,
Exp[a_ + b_ . Complex[0, m] T0 + c_ . Complex[0, n] T0] -> Exp[a + (m * b + n * c) I T0];
```

8.1 Λυγισμένες Δοκοί

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε τη μη-γραμμική εγκάρσια απόκριση μιας λυγισμένης δοκού, η οποία διαθέτει είτε έναν 1:1 είτε έναν 3:1 εσωτερικό συντονισμό με έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό υψηλότερης ιδιομορφής.

Η εξίσωση που διέπει τις μη-γραμμικές εγκάρσιες ταλαντώσεις μιας παραμετρικά διεγερμένης ομογενούς δοκού είναι η (Nayfeh και Mook, 1979) :

$$eq81a = m w_{x,x} + c w_x + E_s I_s w_{x,x,x,x} + \left(P - f_p \cos[\Omega t] - \frac{E_s A}{2 \ell} \int_0^\ell (w_x)^2 dx \right) w_{x,x} = 0 / . w_{x,x} := \partial_{xx} w[x, t];$$

όπου P είναι η στατική αξονική φόρτιση, $f_p \cos[\Omega t]$ είναι μία αξονική αρμονική διέγερση, $w[x, t]$ είναι η εγκάρσια μετατόπιση της δοκού, x είναι η απόσταση κατά μήκος της απαραμόρφωτης δοκού, και t είναι ο χρόνος. Άλλες διαστατικές παράμετροι είναι ο συντελεστής απόσβεσης c και το μήκος δοκού ℓ , η μάζα ανά μονάδα μήκους m , η επιφάνεια της διατομής A , το μέτρο ελαστικότητας E_s , και η ροπή αδραναίας της διατομής I_s . Σημειώνουμε ότι η υπόστιξη s χρησιμοποιείται στα I και E έτσι ώστε το *Mathematica* να μην τα συγχέει με την $\sqrt{-1}$ και με την εκθετική συνάρτηση. Η εξίσωση eq81a συμπληρώνεται με τις τέσσερις γραμμικές ομογενείς συνοριακές συνθήκες :

$$bc81a = \{B_1[w[0, t]] == 0, B_2[w[0, t]] == 0, B_3[w[\ell, t]] == 0, B_4[w[\ell, t]] == 0\};$$

όπου οι B_i είναι γραμμικοί ομογενείς τελεστές.

Καλό είναι να διαμορφώσουμε τις διέπουσες εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες σε αδιάστατη μορφή. Έτσι, εισάγουμε τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές :

$$T = \sqrt{\frac{m \ell^4}{E_s I_s}};$$

$$nondimRule = \{w \rightarrow (\ell \tilde{w}[\#1/\ell, \#2/T] \&), x \rightarrow \ell \tilde{x}, t \rightarrow T \tilde{t}, \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}/T, P \rightarrow \tilde{P} E_s I_s / \ell^2, \\ f_p \rightarrow \tilde{f} E_s I_s / \ell^2, c \rightarrow \tilde{c} \sqrt{E_s I_s m} / \ell^2, A \rightarrow 2 \alpha I_s / \ell^2\};$$

όπου η περισπωμένη (άνω στίξη) υποδηλώνει μια αδιάστατη μεταβλητή. Αντικαθιστώντας τη nondimRule στην eq81a και απομακρύνοντας τις άνω στίξεις, παίρνουμε :

eq81b =

$$\left(\frac{f^3}{E_s I_s} \text{eq81a}[[1]] /. \text{Integrate} \rightarrow \text{int} /. \text{nondimRule} /. \tilde{s}_- \rightarrow s /. \right. \\ \left. \text{int}[a_, \{x', _ \}] \rightarrow f \text{int}[a, \{x, 0, 1\}] // \text{Expand} // \text{PowerExpand} \right) == 0;$$

eq81b /. int -> Integrate

$$c w^{(0,1)}[x, t] + w^{(0,2)}[x, t] + P w^{(2,0)}[x, t] - \\ f \text{Cos}[t \Omega] w^{(2,0)}[x, t] - \alpha \left(\int_0^1 w^{(1,0)}[x, t]^2 dx \right) w^{(2,0)}[x, t] + w^{(4,0)}[x, t] == 0$$

8.1.1 Μεταλυσισμική παραμόρφωση

Το πρώτο βήμα στο να αναλύσουμε τις μη-γραμμικές ταλαντώσεις μιας λυγισμένης (καμπτόμενης) δοκού είναι ο προσδιορισμός των κρίσιμων φορτίων καμπτικού λυγισμού P_k και των αντίστοιχών τους συναρτήσεων σχήματος (ιδιομορφών) $\phi_k[x]$. Συμβολίζουμε τις P_k ως :

Symbolize[P_k]:

Παραμερίζοντας την χρονική παράγωγο και αμελώντας τους εξαναγκασμούς και μη-γραμμικούς όρους στην eq81b, ορίζουμε το γραμμικό καμπτικό πρόβλημα ως :

$$\text{buckEq} = \text{eq81b} /. \text{int} \rightarrow (0 \ \&) /. \{P \rightarrow P_k, f \rightarrow 0, w \rightarrow (\phi_k[1] \ \&)\}$$

$$P_k \phi_k''[x] + \phi_k^{(4)}[x] == 0$$

Επιλύοντας την buckEq για $\phi_k^{(4)}[x]$, προκύπτει :

$$\text{buckRule} = \text{Solve}[\text{buckEq}, \phi_k^{(4)}[x]] [[1]]$$

$$\{\phi_k^{(4)}[x] \rightarrow -P_k \phi_k''[x]\}$$

Κατόπιν, αυξάνουμε το αξονικό φορτίο P πέραν του P_k και θεωρούμε ότι η μεταλυσισμική μετατόπιση είναι $b\phi_k$, όπου b ένα αδιάστατο μέτρο του μεγέθους της κάμψης. Αντικαθιστώντας αυτή την μετατόπιση στην eq81b, αποβάλλοντας τον εντατικό όρο και την χρονική παράγωγο, και χρησιμοποιώντας τις intRule2 και buckRule, λαμβάνουμε :

$$\text{bEq} = \text{Factor}[\text{eq81b}[[1]] /. \{f \rightarrow 0, w \rightarrow (b \phi_k[1] \ \&)\} /. \text{intRule2} /. \text{buckRule}] == 0$$

$$-b (-P + P_k + b^2 \alpha \text{int}[\phi_k'[x]^2, \{x, 0, 1\}]) \phi_k''[x] == 0$$

Έπεται από την bEq ότι είτε $b = 0$ (απουσία λυγισμού) ή το b δίνεται από :

$$(\text{bRule} = b^2 \rightarrow (b^2 /. \text{Solve}[\text{bEq}, b] [[2]])) /. \text{int} \rightarrow \text{Integrate}$$

$$b^2 \rightarrow \frac{P - P_k}{\alpha \int_0^1 \phi_k'[x]^2 dx}$$

Και επιλύοντας την bEq ως προς P , προκύπτει :

$$(\text{PRule} = \text{Solve}[\text{bEq}, P] [[1]]) /. \text{int} \rightarrow \text{Integrate}$$

$$\{P \rightarrow P_k + b^2 \alpha \int_0^1 \phi_k'[x]^2 dx\}$$

Επειδή το P είναι μεγαλύτερο από το P_k , από την PRule προκύπτει το εύρος της k τάξης καμπτικής μορφής.

Έχοντας λύσει το μεταλυγισμικό πρόβλημα, θεωρούμε ότι η μετατόπιση της δοκού είναι το άθροισμα της στατικής λυγισμικής μετατόπισης $b\phi_k[x]$, η οποία αντιστοιχεί στην k -οστή καμπτική μορφή, και της χρονικά εξαρτώμενης σχετικής μετατόπισης $u[x, t]$, δηλδ :

$$wRule = \{w \rightarrow (b \phi_k[\#1] + u[\#1, \#2] \&)\};$$

Αντικαθιστώντας τον $wRule$ στην $eq81b$ και κάνοντας χρήση των $intRule1$, $intRule2$, $buckRule$ και $PRule$, βρίσκουμε ότι οι μη-γραμμικές εγκάρσιες ταλαντώσεις της δοκού γύρω από την καμπτική διαμόρφωσή της δίδονται από

$$EOM = eq81b /. wRule /. intRule1 /. intRule2 /. buckRule /. PRule // ExpandAll;$$

$$EOM /. int \rightarrow Integrate$$

$$\begin{aligned} & -bf \cos[t\Omega] \phi_k''[x] - 2b^2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_k'[x] u^{(1,0)}[x, t] dx \right) \phi_k''[x] - \\ & b\alpha \left(\int_0^1 u^{(1,0)}[x, t]^2 dx \right) \phi_k''[x] + cu^{(0,1)}[x, t] + u^{(0,2)}[x, t] + P_k u^{(2,0)}[x, t] - \\ & f \cos[t\Omega] u^{(2,0)}[x, t] - 2b\alpha \left(\int_0^1 \phi_k'[x] u^{(1,0)}[x, t] dx \right) u^{(2,0)}[x, t] - \\ & \alpha \left(\int_0^1 u^{(1,0)}[x, t]^2 dx \right) u^{(2,0)}[x, t] + u^{(4,0)}[x, t] == 0 \end{aligned}$$

$$BC = bc81a /. \{w \rightarrow u, l \rightarrow 1\}$$

$$\{B1[u[0, t]] == 0, B2[u[0, t]] == 0, B3[u[1, t]] == 0, B4[u[1, t]] == 0\}$$

Στην ακόλουθη ανάλυση, εστιάζουμε στον 1^{ns} μορφής λυγισμό αμφιαρθρωτών δοκών. Άρα, οι συνοριακές συνθήκες για τη στατική μετατόπιση $\phi_k[x]$ μπορούν να γραφούν ως :

$$bBC = \{\phi_k[0] == 0, \phi_k''[0] == 0, \phi_k[1] == 0, \phi_k''[1] == 0\};$$

και οι συνοριακές συνθήκες για τη δυναμική μετατόπιση $u[x, t]$ μπορούν να γραφούν ως :

$$BC1 = \{u[0, t] == 0, \partial_{x,x} u[x, t] == 0 /. x \rightarrow 0, u[1, t] == 0, \partial_{x,x} u[x, t] == 0 /. x \rightarrow 1\}$$

$$\{u[0, t] == 0, u^{(2,0)}[0, t] == 0, u[1, t] == 0, u^{(2,0)}[1, t] == 0\}$$

Για την περίπτωση της πρώτης καμπτικής μορφής, έπεται από τις $buckEq$ και bBC ότι το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και η σχετιζόμενη συνάρτηση σχήματος είναι :

$$bucklingLoad = P_k \rightarrow \pi^2;$$

$$modeshape = \{\phi_k \rightarrow (\sin[\pi \#] \&)\};$$

όπου η καμπτική συνάρτηση σχήματος κανονικοποιήθηκε έτσι ώστε $\phi_k[1/2] = 1$.

■ Γραμμικές Ταλαντώσεις

Το επόμενο βήμα στην ανάλυση των μη-γραμμικών ταλαντώσεων μιας λυγισμένης δοκού είναι ο υπολογισμός των γραμμικών φυσικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων συναρτήσεων σχήματος. Γι' αυτό το λόγο, γραμμικοποιούμε την EOM ως προς $u[x, t]$, αμελούμε τους όρους εξαναγασμού, απόσβεσης και μη γραμμικότητας, και λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned} linearEq & = EOM /. \{c \rightarrow 0, f \rightarrow 0\} /. u \rightarrow (\epsilon u[\#1, \#2] \&) /. intRule2 /. e^{-t/\tau} \rightarrow 0 /. \epsilon \rightarrow 1; \\ linearEq & /. int \rightarrow Integrate \end{aligned}$$

$$-2b^2 \alpha \left(\int_0^1 \phi_k'[x] u^{(1,0)}[x, t] dx \right) \phi_k''[x] + u^{(0,2)}[x, t] + P_k u^{(2,0)}[x, t] + u^{(4,0)}[x, t] == 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες με της $BC1$:

$$linearBC = BC1$$

$$\{u[0, t] == 0, u^{(2,0)}[0, t] == 0, u[1, t] == 0, u^{(2,0)}[1, t] == 0\}$$

Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας χωρισμό των μεταβλητών, αναζητούμε τη λύση της linearEq και της linearBC στη μορφή :

`uSol = u -> Function[{x, t}, $\Phi[x]$ Exp[I ω t]];`

όπου ω είναι η αδιάστατη γραμμική φυσική συχνότητα και $\Phi[x]$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση σχήματος. Αντικαθιστώντας την uSol στην linearEq και στην linearBC και χρησιμοποιώντας τον intRule2 και το Thread, λαμβάνουμε την εξίσωση που διέπει την $\Phi[x]$, ως :

`Φ Eq = linearEq /. uSol /. intRule2 // Thread[E-I ω t #, Equal] & // ExpandAll;
 Φ Eq /. int -> Integrate`

$$-\omega^2 \Phi[x] + P_k \Phi''[x] - 2 b^2 \alpha \left(\int_0^1 \Phi'[x] \phi_k'[x] dx \right) \phi_k''[x] + \Phi^{(4)}[x] == 0$$

και τις συνοριακές συνθήκες ως εξής :

`Φ BC = linearBC /. u -> (Φ [#1] &)`

`{ Φ [0] == 0, Φ'' [0] == 0, Φ [1] == 0, Φ'' [1] == 0}`

Για να βρούμε τη γενική λύση της Φ Eq και της Φ BC, ακολουθούμε τους Nayfeh, Kreider και Anderson (1995) και χρησιμοποιούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν μια σταθερά B . Έτσι, έχουμε μια μη-ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Οπότε, η γενική της λύση μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των ομογενών και των ειδικών λύσεων. Επειδή η $\phi_k[x]$ είναι μια λύση της buckEq, η ειδική λύση είναι ανάλογη με την $\phi_k''[x]$. Συνεπώς, εκφράζουμε τη γενική λύση της Φ Eq και της Φ BC ως :

`cList = Table[ci, {i, 5}];`

`shapeFunc = {Cos[λ_1 x], Sin[λ_1 x], Cosh[λ_2 x], Sinh[λ_2 x], $\phi_k''[x]}$ };`

`Φ Sol = Φ -> Function[x, cList.shapeFunc /. modeshape // Evaluate]`

`Φ -> Function[x, Cos[x λ_1] c1 + Sin[x λ_1] c2 + Cosh[x λ_2] c3 + Sinh[x λ_2] c4 - π^2 Sin[π x] c5]`

όπου το λ_i ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση :

`charEq = Φ Eq /. b -> 0 /. bucklingLoad /. Φ -> (Exp[λ #] &) // Thread[E- λ x #, Equal] & // ExpandAll`

$$\pi^2 \lambda^2 + \lambda^4 - \omega^2 == 0$$

`λ Rule = { $-\lambda_1^2$, λ_2^2 } -> (λ^2 /. Solve[charEq, λ] // Union) // Thread`

$$\left\{ -\lambda_1^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\pi^2 - \sqrt{\pi^4 + 4 \omega^2} \right), \lambda_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\pi^2 + \sqrt{\pi^4 + 4 \omega^2} \right) \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις bucklingLoad, modeshape και Φ Sol στα δεξιά μέλη των Φ BC και Φ Eq και κάνοντας χρήση των intRule1 και intRule2, λαμβάνουμε :

`expr1=Append[#[[1]] & /@ Φ BC/. Φ Sol, Φ Eq[[1]]/.bucklingLoad/.modeshape/.`

`Φ Sol/.intRule1//.intRule2/.int->Integrate]`

$$\begin{aligned} & (c_1+c_3, -c_1 \lambda_1^2+c_3 \lambda_2^2, \cos[\lambda_1] c_1+\sin[\lambda_1] c_2+\cosh[\lambda_2] c_3+\sinh[\lambda_2] c_4, \\ & -\cos[\lambda_1] c_1 \lambda_1^2-\sin[\lambda_1] c_2 \lambda_1^2+\cosh[\lambda_2] c_3 \lambda_2^2+\sinh[\lambda_2] c_4 \lambda_2^2, \\ & -\pi^6 \sin[\pi x] c_5-\omega^2 (\cos[x \lambda_1] c_1+\sin[x \lambda_1] c_2+\cosh[x \lambda_2] c_3+ \\ & +\sinh[x \lambda_2] c_4-\pi^2 \sin[\pi x] c_5)+\cos[x \lambda_1] c_1 \lambda_1^4+\sin[x \lambda_1] c_2 \lambda_1^4+ \\ & \cosh[x \lambda_2] c_3 \lambda_2^4+\sinh[x \lambda_2] c_4 \lambda_2^4+\pi^2 (\pi^4 \sin[\pi x] c_5-\cos[x \lambda_1] c_1 \lambda_1^2- \\ & -\sin[x \lambda_1] c_2 \lambda_1^2+\cosh[x \lambda_2] c_3 \lambda_2^2+\sinh[x \lambda_2] c_4 \lambda_2^2)+ \end{aligned}$$

$$2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \left\{ -\frac{1}{2} \pi^4 c_5 + \frac{\pi \sin[\lambda_1] c_2 \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)} - \pi c_1 \lambda_1 \left(-\frac{\lambda_1}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)} - \frac{\cos[\lambda_1] \lambda_1}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)} \right) - \frac{\pi \sinh[\lambda_2] c_4 \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} + \pi c_3 \lambda_2 \left(-\frac{\lambda_2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} - \frac{\cosh[\lambda_2] \lambda_2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} \right) \right\}$$

Το μητρώο συντελεστών της cList στην expr1 μπορεί να ληφθεί ως :

coefMat = Outer[Coefficient, expr1, cList]

$$\left\{ \{1, 0, 1, 0, 0\}, \{-\lambda_1^2, 0, \lambda_2^2, 0, 0\}, \{\cos[\lambda_1], \sin[\lambda_1], \cosh[\lambda_2], \sinh[\lambda_2], 0\}, \{-\cos[\lambda_1] \lambda_1^2, -\sin[\lambda_1] \lambda_1^2, \cosh[\lambda_2] \lambda_2^2, \sinh[\lambda_2] \lambda_2^2, 0\}, \left\{ -\omega^2 \cos[\pi x] - \pi^2 \cos[\pi x] \lambda_1^2 + \cos[\pi x] \lambda_1^4 + \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)} + \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \cos[\lambda_1] \sin[\pi x] \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)}, -\omega^2 \sin[\pi x] - \pi^2 \sin[\pi x] \lambda_1^2 + \sin[\pi x] \lambda_1^4 + \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \sin[\lambda_1] \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)}, -\omega^2 \cosh[\pi x] + \pi^2 \cosh[\pi x] \lambda_2^2 - \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} - \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \cosh[\lambda_2] \sin[\pi x] \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} + \cosh[\pi x] \lambda_2^4, -\omega^2 \sinh[\pi x] + \pi^2 \sinh[\pi x] \lambda_2^2 - \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \sinh[\lambda_2] \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} + \sinh[\pi x] \lambda_2^4, -b^2 \pi^6 \alpha \sin[\pi x] + \pi^2 \omega^2 \sin[\pi x] \right\} \right\}$$

Αντικαθιστώντας την charEq στην coefMat[[5]] και αμελώντας τον κοινό παράγοντα Sin[π x], έχουμε:

coefMat[[5]] = Coefficient[coefMat[[5]], Sin[π x]]

$$\left\{ \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)} + \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \cos[\lambda_1] \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)}, \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sin[\lambda_1] \lambda_1^2}{(\pi - \lambda_1)(\pi + \lambda_1)}, -\frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)} - \frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \cosh[\lambda_2] \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)}, -\frac{2 b^2 \pi^2 \alpha \sinh[\lambda_2] \lambda_2^2}{(\pi - i \lambda_2)(\pi + i \lambda_2)}, -b^2 \pi^6 \alpha + \pi^2 \omega^2 \right\}$$

Θέτοντας την ορίζουσα της coefMat ίση με το μηδέν, προκύπτει η ακόλουθη χαρακτηριστική εξίσωση για τις φυσικές συχνότητες :

Factor[Det[coefMat]] == 0

$$\pi^2 (b^2 \pi^4 \alpha - \omega^2) \sin[\lambda_1] \sinh[\lambda_2] (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 == 0$$

Υπάρχουν δύο δυνατότητες : $b^2 \pi^4 \alpha - \omega^2 = 0$ και $\sin[\lambda_1] = 0$. Έτσι, είτε

ωSol1 = Solve[b^2 π^4 α - ω^2 == 0, ω][[2]]

$$\{\omega \rightarrow b \pi^2 \sqrt{\alpha}\}$$

ή

ωSol2 = Solve[-λ₁² + (n π)² == 0 /. λRule, ω][[2]]

$$\{\omega \rightarrow n \sqrt{-1 + \pi^2} \pi^2\}$$

για $n > 1$.

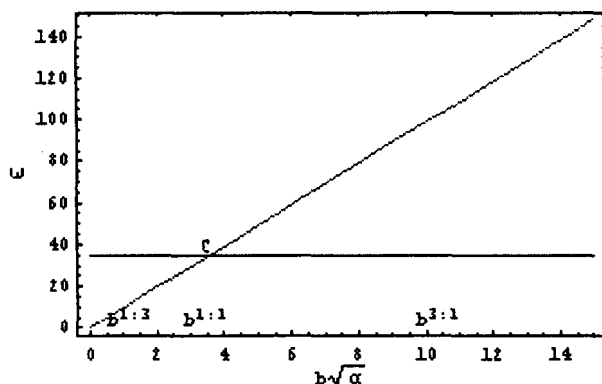
Οι χαμηλότερες πέντε φυσικές συχνότητες είναι :

frequencies = {ω₁ -> (ω /. ωSol1), ω₂ -> (ω /. ωSol2 /. n -> 2), ω₃ -> (ω /. ωSol2 /. n -> 3), ω₄ -> (ω /. ωSol2 /. n -> 4), ω₅ -> (ω /. ωSol2 /. n -> 5)}

$$\{\omega_1 \rightarrow b \pi^2 \sqrt{\alpha}, \omega_2 \rightarrow 2 \sqrt{3} \pi^2, \omega_3 \rightarrow 6 \sqrt{2} \pi^2, \omega_4 \rightarrow 4 \sqrt{15} \pi^2, \omega_5 \rightarrow 10 \sqrt{6} \pi^2\}$$

Οι πρώτες δύο συχνότητες ως προς τη στάθμη λυγισμού αναπαρίστανται ως :

```
Plot[ω /. {aSol1 /. b√α -> s, aSol2 /. n -> 2} // Evaluate, {s, 0, 15},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, Frame -> True, FrameLabel -> {"b√α", "ω"},
RotateLabel -> False,
Epilog -> {Text["C", {2√3, 2√3 π² + 5}], Text["b1:3", {2/√3, 3}],
Text["b1:1", {2√3, 3}], Text["b3:1", {6√3, 3}]}];
```



όπου η χαμηλής συχνότητας μορφή (κόκκινη γραμμή) είναι συμμετρική και η δεύτερη μορφή (μπλε γραμμή) είναι αντισυμμετρική. Καθώς η στάθμη λυγισμού αυξάνει από το μηδέν, η συχνότητα ω_1 της πρώτης μορφής αυξάνει από το 0 και τέμνει τη συχνότητα ω_2 της δεύτερης μορφής στο σημείο C. Έτσι, υπάρχουν δύο δυνατοί τρία-προς-ένα εσωτερικοί συντονισμοί: $\omega_2 = 3\omega_1$ όταν $b\sqrt{a} = b^{1:3}$ και $\omega_1 = 3\omega_2$ όταν $b^{3:1}$. Υπάρχει επίσης ένας πιθανός ένα-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός $\omega_2 = \omega_1$ όταν $b\sqrt{a} = b^{1:1}$. Το αν αυτοί οι υποψήφιοι εσωτερικοί συντονισμοί ενεργοποιηθούν ή όχι, εξαρτάται από τις αντιστοιχούσες συναρτήσεις σχήματος. Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε την περίπτωση ενός ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στην πρώτη και τη δεύτερη μορφή (mode). Στην ενότητα 8.1.4, θεωρούμε τρία-προς-ένα εσωτερικούς συντονισμούς ανάμεσα στις πρώτες δύο μορφές. Στις Ενότητες 8.1.5 και 8.1.6, θεωρούμε τους ένα-προς-ένα και τρία-προς-ένα εσωτερικούς συντονισμούς ανάμεσα στην πρώτη και την τρίτη μορφή και την πρώτη και την τέταρτη μορφή, αντίστοιχα.

Στην επόμενη ενότητα, θεωρούμε έναν συνδυασμό ενός ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις κατώτερες δύο μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της δεύτερης μορφής, δηλαδή:

```
omgList = {ω1, ω2};
ResonanceConds = {ω2 == ω1 + ε2 σ1, Ω == 2 ω2 + ε2 σ2};
```

όπου οι σ_i είναι αποσυντονιστικές παράμετροι που περιγράφουν την εγγύτητα των συντονισμών. Η στάθμη λυγισμού, για την οποία οι φυσικές συχνότητες των πρώτων και δεύτερων μορφών είναι ίσες (δηλ., $\omega_2 = \omega_1$), δίνεται από:

```
values1 = Solve[ω1 == ω2 /. frequencies, b][[1]]
```

$$\left\{ b \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \right\}$$

Τα αντίστοιχα λ_m είναι:

```
λRuleN = Solve[λRule /. ω -> ω1 /. frequencies /. values1 /. Rule -> Equal, {λ1, λ2}][[4]]
```

$$\{\lambda_1 \rightarrow 2\pi, \lambda_2 \rightarrow \sqrt{3}\pi\}$$

Με σκοπό η επιρροή της απόσβεσης και της μη-γραμμικότητας να ισορροπεί την επιρροή της διέγερσης, κλιμακώνουμε τους όρους της απόσβεσης και της δύναμης ως εξής :

$$\text{scaling} = \{c \rightarrow 2\epsilon^2 \mu, f \rightarrow \epsilon^2 f\};$$

Αντικαθιστώντας για τη φυσική συχνότητα ω_1 πίσω στην `coefMat`, προσδιορίζουμε τη συνάρτηση σχήματος ως :

$$\text{NullSpace}[\text{coefMat} /. \omega \rightarrow \omega_1 /. \text{frequencies}][[1]].\text{shapeFunc} /. \text{modeshape} \\ -\pi^2 \text{Sin}[\pi x]$$

την οποία κανονικοποιούμε ως :

$$\text{shape1} = c \text{Sin}[\pi x] /. \text{Solve}\left[\int_0^1 c^2 \text{Sin}[\pi x]^2 dx == 1, c\right][[2]] \\ \sqrt{2} \text{Sin}[\pi x]$$

Αντικαθιστώντας την ω_2 στην `coefMat`, προσδιορίζουμε τη συνάρτηση σχήματος ως :

$$\text{NullSpace}[\text{coefMat} /. \lambda \text{RuleN} /. \omega \rightarrow \omega_2 /. \text{frequencies}][[1]].\text{shapeFunc} /. \lambda \text{RuleN} \\ \text{Sin}[2\pi x]$$

την οποία επίσης κανονικοποιούμε ως :

$$\text{shape2} = c \text{Sin}[2\pi x] /. \text{Solve}\left[\int_0^1 c^2 \text{Sin}[2\pi x]^2 dx == 1, c\right][[2]] \\ \sqrt{2} \text{Sin}[2\pi x]$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε ότι οι επόμενες τρεις κανονικοποιημένες συναρτήσεις σχήματος είναι

$$\text{shape3} = \sqrt{2} \text{Sin}[3\pi x];$$

$$\text{shape4} = \sqrt{2} \text{Sin}[4\pi x];$$

$$\text{shape5} = \sqrt{2} \text{Sin}[5\pi x];$$

Για να μεταχειριστούμε έναν ένα-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό ανάμεσα στις πρώτες και τις δεύτερες μορφές, ορίζουμε το ϕ_k και τις πρώτες δύο ιδιομορφές (eigenmodes) της καμπτικής δοκού ως

$$\text{modeshapes} = \\ \text{Join}[\text{modeshape}, \{\phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}], \\ \phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape2} // \text{Evaluate}]\}];$$

8.1.2 Ανάλυση Διαταραχών

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των *πολλαπλών κλιμάκων* για να χειριστούμε απευθείας τις EOM και BC1. Για να μετασχηματίσουμε τις χρονικές παραγώγους στην EOM ως προς τις κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , θέτουμε :

$$\text{multiScales} = \{u[x_, t] \rightarrow u[x, T_0, T_1, T_2], \\ \text{Derivative}[m_, n_][u_][x_, t] \rightarrow \text{dt}[n][D[u[x, T_0, T_1, T_2], \{x, m\}], t \rightarrow T_0]\};$$

Κατόπιν, αναζητούμε μιας δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση της μορφής :

$$\text{solRule} = u \rightarrow (\text{Evaluate}[\text{Sum}[\epsilon^j u_j[\#1, \#2, \#3, \#4], \{j, 3\}]] \epsilon) \\ u \rightarrow (\epsilon u_1[\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^2 u_2[\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^3 u_3[\#1, \#2, \#3, \#4] \epsilon)$$

όπου το #1 εκπροσωπεί το x , και τα #2, #3 και #4 εκπροσωπούν τα T_0 , T_1 και T_2 , αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τις multiScales, solRule και scaling τις EOM και BC1, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρά ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

eq81c =

```
(Join[{EOM}, BC1] /. multiScales /. solRule /. scaling /. intRule1 //. intRule2 //
  TrigToExp // ExpandAll) /.  $\epsilon^{n_1/n_2} \rightarrow 0$ ;
```

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ , λαμβάνουμε :

```
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract @@ #,  $\epsilon$ ] == 0] & /@ eq81c // Transpose // Rest;
eqEps /. displayRule
```

$$\left\{ \begin{aligned} & \{P_1 (u_1'') + u_1'''' + D_0^2 u_1 - 2b^2 \alpha \text{int}[(u_1') \phi_1[x], \{x, 0, 1\}] \phi_1[x] == 0, \\ & u_1 == 0, u_1' == 0, u_1 == 0, u_1' == 0\}, \\ & \{-2b \alpha \text{int}[(u_1') \phi_1[x], \{x, 0, 1\}] (u_1'') + P_1 (u_2'') + u_2'''' + D_0^2 u_2 + 2(D_0 D_1 u_1) - \\ & \frac{1}{2} b E^{-IT_0} f \phi_1[x] - \frac{1}{2} b E^{IT_0} f \phi_1[x] - b \alpha \text{int}[(u_1')^2, \{x, 0, 1\}] \phi_1[x] - \\ & 2b^2 \alpha \text{int}[(u_2') \phi_2[x], \{x, 0, 1\}] \phi_2[x] == 0, u_2 == 0, u_2' == 0, u_2 == 0, u_2' == 0\}, \\ & \{-\frac{1}{2} E^{-IT_0} f (u_1'') - \frac{1}{2} E^{IT_0} f (u_1'') - \alpha \text{int}[(u_1')^2, \{x, 0, 1\}] (u_1'') - \\ & 2b \alpha \text{int}[(u_2') \phi_2[x], \{x, 0, 1\}] (u_1'') - 2b \alpha \text{int}[(u_1') \phi_1[x], \{x, 0, 1\}] (u_2'') + \\ & P_1 (u_3'') + u_3'''' + 2\mu (D_0 u_1) + D_0^2 u_3 + 2(D_0 D_1 u_2) + D_1^2 u_1 + 2(D_0 D_2 u_1) - \\ & 2b \alpha \text{int}[(u_1') (u_2'), \{x, 0, 1\}] \phi_2[x] - 2b^2 \alpha \text{int}[(u_3') \phi_3[x], \{x, 0, 1\}] \phi_3[x] == 0, \\ & u_3 == 0, u_3' == 0, u_3 == 0, u_3' == 0\} \end{aligned} \right\}$$

■ Πρώτης-Τάξης Λύση

Επειδή με την παρουσία της απόσβεσης όλες οι μορφές που δεν είναι απευθείας ή εμμέσως διεγερμένες φθίνουν με τον χρόνο, η λύση της eqEps[[1]] λαμβάνεται ως αποτελούμενη από τις δύο μορφές που πιθανόν να εμπλέκονται στον εσωτερικό συντονισμό, δηλαδή :

```
sol1 = {u1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, Sum[Ai[T1, T2]  $\Phi_i[x]$  Exp[I $\omega_i T_0$ ] +
  Ai[T1, T2]  $\Phi_i[x]$  Exp[-I $\omega_i T_0$ ], {i, 2}]} // Evaluate];
```

όπου τα Φ_i είναι οι ιδιομορφές (eigenmodes), οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη ορθοκανονικότητας

$$\int_0^1 \Phi_n[x] \Phi_m[x] dx = \delta_{nm}$$

■ Δεύτερης-Τάξης Λύση

Αντικαθιστώντας τη sol1 στην eqEps[[2,1]] και κάνοντας χρήση των intRule1, intRule2 προκύπτει :

```
order2Eq = (eqEps[[1,1,1]] /. u1 -> u2) == (eqEps[[1,1,1]] /. u1 -> u2) -
  eqEps[[2,1,1]] /. sol1 /. intRule1 //. intRule2 // ExpandAll; order2Eq /. displayRule
```

οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 P_k(u_2'''''' + u_2'''''' + D_0^2 u_2 - 2b^2 \text{aint}[(u_2'')\phi_k', \{x, 0, 1\}])\phi_k''[x] = & \\
 = -2IE^{\Gamma_0 \omega_1} (D_1 A_1) \omega_1 \phi_1[x] + 2IE^{-\Gamma_0 \omega_1} (D_1 A_1) \omega_1 \phi_1[x] & \\
 - 2IE^{\Gamma_0 \omega_2} (D_1 A_2) \omega_2 \phi_2[x] + 2IE^{-\Gamma_0 \omega_2} (D_1 A_2) \omega_2 \phi_2[x] & \\
 + \frac{1}{2} b E^{-\Gamma_0 \Omega} f \phi_k''[x] + \frac{1}{2} b E^{\Gamma_0 \Omega} f \phi_k''[x] & \\
 + b E^{2\Gamma_0 \omega_1} \text{aint}[\phi_1'[x]^2, \{x, 0, 1\}] A_1^2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_1'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 A_2 \phi_k''[x] & \\
 + b E^{2\Gamma_0 \omega_2} \text{aint}[\phi_2'[x]^2, \{x, 0, 1\}] A_2^2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b \text{aint}[\phi_1'[x]^2, \{x, 0, 1\}] A_1 \bar{A}_1 \phi_k''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_1'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_2 \bar{A}_1 \phi_k''[x] & \\
 + b E^{-2\Gamma_0 \omega_1} \text{aint}[\phi_1'[x]^2, \{x, 0, 1\}] \bar{A}_1^2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_1'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 \bar{A}_2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b \text{aint}[\phi_2'[x]^2, \{x, 0, 1\}] A_2 A_2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_1'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] \bar{A}_1 \bar{A}_2 \phi_k''[x] & \\
 + b E^{-2\Gamma_0 \omega_2} \text{aint}[\phi_2'[x]^2, \{x, 0, 1\}] \bar{A}_2^2 \phi_k''[x] & \\
 + 2b E^{2\Gamma_0 \omega_1} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] A_1^2 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 A_2 \phi_1''[x] & \\
 + 4b \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 \bar{A}_1 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_2 \bar{A}_1 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{-2\Gamma_0 \omega_1} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] \bar{A}_1^2 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 \bar{A}_2 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 A_2 \phi_1''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 A_2 \phi_2''[x] & \\
 + 2b E^{2\Gamma_0 \omega_2} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_2^2 \phi_2''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 + \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] A_2 \bar{A}_1 \phi_2''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_1'[x], \{x, 0, 1\}] A_1 A_2 \phi_2''[x] & \\
 + 4b \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] A_2 A_2 \phi_2''[x] & \\
 + 2b E^{\Gamma_0(-\omega_1 - \omega_2)} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] \bar{A}_1 \bar{A}_2 \phi_2''[x] & \\
 + 2b E^{-2\Gamma_0 \omega_2} \text{aint}[\phi_k'[x] \phi_2'[x], \{x, 0, 1\}] \bar{A}_2^2 \phi_2''[x] &
 \end{aligned}$$

Για να συλλέξουμε τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους από το δεξί μέλος της order2Eq, ορίζουμε τους κανόνες :

```
OmGRule = Solve[ResonanceConds, Complement[omgList, {#}] ~Join~ {Ω}][[1]] & /@ omgList
```

```
{{ω2 -> ε^2 σ1 + ω1, Ω -> 2 ε^2 σ1 + ε^2 σ2 + 2 ω1}, {ω1 -> -ε^2 σ1 + ω2, Ω -> ε^2 σ2 + 2 ω2}}
```

```
expRule1[i_] := Exp[arg_] -> Exp[Expand[arg /. OmGRule[[i]]] /. ε^2 T0 -> T2]
```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους με το $E^{\Gamma \omega_i T_0}$, έχουμε :

ST1 = Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule1[#, E^{1*#*T0}] & /@ {1, 2};
ST1 /. displayRule

$$\{-2I(D_1 A_1) \omega_1 \Phi_1[x] - 2IE^{i\tau_2 \sigma_1} (D_1 A_2) \omega_2 \Phi_2[x], -2IE^{-i\tau_2 \sigma_1} (D_1 A_1) \omega_1 \Phi_1[x] - 2I(D_1 A_2) \omega_2 \Phi_2[x]\}$$

Επειδή τα ομογενή τμήματα της order2Eq και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες έχουν μια μη-τετριμμένη λύση, το αντίστοιχο μη-ομογενές πρόβλημα έχει μια λύση μόνο αν οι συνθήκες επιλυσιμότητας ικανοποιούνται. Αυτές οι συνθήκες απαιτούν η ST1 να είναι ορθογωνική σε κάθε λύση του ομογενούς προβλήματος του συζυγούς τελεστή. Σ' αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα είναι αυτο-συζυγές και έτσι λύσεις του προβλήματος του συζυγούς τελεστή δίδονται από την $\Phi_i[x]$. Απαιτώντας η ST1[[1]] να είναι ορθογωνική στο $\Phi_i[x]$, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond1 = Table[\int_0^1 ST1[[k]] $\bar{\Phi}_k[x] dx == 0$, {k, 2}] /. modeshapes

$$\{-2 I \omega_1 A_1^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0, -2 I \omega_2 A_2^{(1,0)} [T_1, T_2] == 0\}$$

SCond1Rule = Solve[SCond1, {A1^(1,0)[T1, T2], A2^(1,0)[T1, T2]}] [[1]]

$$\{A_1^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0, A_2^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι :

ccSCond1Rule = SCond1Rule /. conjugateRule

$$\{\bar{A}_1^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0, \bar{A}_2^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0\}$$

Αντικαθιστώντας τις SCond1Rule και ccSCond1Rule στην order2Eq και με χρήση των modeshapes, παίρνουμε :

order2Eqm=order2Eq/.SCond1Rule/.ccSCond1Rule/.modeshapes/.int->Integrate/.Integrate->int;
order2Eqm/.displayRule

$$P_k(u_2^{(k)}) + u_2^{(k)} + D_0^2 u_2 + 2b^2 \pi^3 \alpha \text{int}[\text{Cos}[\pi x] (u_2^{(k)}), \{x, 0, 1\}] \text{Sin}[\pi x] == -\frac{1}{2} b E^{-i\tau_0 \Omega} f \pi^2 \text{Sin}[\pi x] - \frac{1}{2} b E^{i\tau_0 \Omega} f \pi^2 \text{Sin}[\pi x] - 3b E^{2i\tau_0 \omega_1} \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] A_1^2 - 8b E^{i\tau_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^4 \alpha \text{Sin}[2\pi x] A_1 A_2 - 4b E^{2i\tau_0 \omega_2} \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] A_2^2 - 6b \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] A_1 \bar{A}_1 - 8b E^{i\tau_0 (-\omega_1 + \omega_2)} \pi^4 \alpha \text{Sin}[2\pi x] A_2 \bar{A}_1 - 3b E^{-2i\tau_0 \omega_1} \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] \bar{A}_1^2 - 8b E^{i\tau_0 (\omega_1 - \omega_2)} \pi^4 \alpha \text{Sin}[2\pi x] A_1 \bar{A}_2 - 8b \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] A_2 \bar{A}_2 - 8b E^{i\tau_0 (-\omega_1 - \omega_2)} \pi^4 \alpha \text{Sin}[2\pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2 - 4b E^{-2i\tau_0 \omega_2} \pi^4 \alpha \text{Sin}[\pi x] \bar{A}_2^2$$

Οι σχετιζόμενες οριακές συνθήκες είναι :

order2BC = eqEps[[2]] // Rest

$$\{u_2[0, T_0, T_1, T_2] == 0, u_2^{(2,0,0,0)}[0, T_0, T_1, T_2] == 0, u_2[1, T_0, T_1, T_2] == 0, u_2^{(2,0,0,0)}[1, T_0, T_1, T_2] == 0\}$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση των order2Eqm και order2BC. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα προσδιορίζουμε τις μορφές των μη-ομογενών όρων (δηλ., των όρων στο δεξί μέλος της order2Eqm) ως εξής :

```
rhsTerms = Cases[order2Eqm[[2]], #]&/@{a_f[b_x]:>
f[bx]//FreeQ[a, T_0], _E^a.T_0+b.f[_c_x]-> E^a.T_0+b f[cx]//Flatten//Union
```

```
{Sin[πx], E^{-T_0.Ω} Sin[πx], E^{T_0.Ω} Sin[πx], E^{-2T_0.ω_1} Sin[πx],
E^{2T_0.ω_1} Sin[πx], E^{-2T_0.ω_2} Sin[πx], E^{2T_0.ω_2} Sin[πx], E^{-T_0.ω_1 - T_0.ω_2} Sin[2πx],
E^{T_0.ω_1 - T_0.ω_2} Sin[2πx], E^{-T_0.ω_1 + T_0.ω_2} Sin[2πx], E^{T_0.ω_1 + T_0.ω_2} Sin[2πx]}
```

οι οποίοι όλοι ικανοποιούν την order2BC. Εφόσον έχουμε μόνο άρτιες (ζυγές) χωρικές παραγώγους στην αριστερή (του =) πλευρά της order2Eqm, αναζητούμε μια ιδιαίτερη λύση σαν γραμμικό συνδυασμό της rhsTerms ως ακολούθως :

```
symbolList=Table[αi, {i, Length[rhsTerms]}]
{α1, α2, α3, α4, α5, α6, α7, α8, α9, α10, α11}
sol2Form=u_2->Function[{x, T_0, T_1, T_2}, symbolList.rhsTerms//Evaluate];
Αντικαθιστώντας τη sol2Form στην order2Eqm, εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων,
symbolRule = Solve[Coefficient[Subtract@@order2Eqm/.sol2Form/.intRule1//
.intRule2/.int-> Integrate, rhsTerms] == 0/. Exp[_T_0 + _.]-> 0//
Thread, symbolList][[1]]
```

$$\alpha_1 \rightarrow -\frac{2(3b\pi^2\alpha A_1[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2] + 4b\pi^2\alpha A_2[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2])}{\pi^2 - P_k + b^2\pi^2\alpha}$$

$$\alpha_2 \rightarrow -\frac{bf\pi^2}{2(\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - \Omega^2)}, \alpha_3 \rightarrow -\frac{bf\pi^2}{2(\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - \Omega^2)}, \alpha_4 \rightarrow -\frac{3b\pi^4\alpha\bar{A}_1[T_1, T_2]^2}{\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - 4\omega_1^2}$$

$$\alpha_5 \rightarrow -\frac{3b\pi^4\alpha A_1[T_1, T_2]^2}{\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - 4\omega_1^2}, \alpha_6 \rightarrow -\frac{4b\pi^4\alpha\bar{A}_2[T_1, T_2]^2}{\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - 4\omega_2^2}, \alpha_7 \rightarrow -\frac{4b\pi^4\alpha A_2[T_1, T_2]^2}{\pi^4 - \pi^2 P_k + b^2\pi^4\alpha - 4\omega_2^2}$$

$$\alpha_8 \rightarrow -\frac{8b\pi^4\alpha\bar{A}_1[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2]}{16\pi^4 - 4\pi^2 P_k - \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}, \alpha_9 \rightarrow -\frac{8b\pi^4\alpha A_1[T_1, T_2]A_2[T_1, T_2]}{16\pi^4 - 4\pi^2 P_k - \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}$$

$$\alpha_{10} \rightarrow -\frac{3b\pi^4\alpha A_2[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2]}{16\pi^4 - 4\pi^2 P_k - \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}, \alpha_{11} \rightarrow -\frac{3b\pi^4\alpha A_1[T_1, T_2]A_2[T_1, T_2]}{16\pi^4 - 4\pi^2 P_k - \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}$$

Αντικαθιστώντας για τις παραμετρικές τιμές στην symbolRule, προκύπτει :

symbolRuleN=symbolRule/.Ω->2ω2/.frequencies/.bucklingLoad/.values1

$$\{ \alpha_1 \rightarrow -\frac{6\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2] + 8\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2]}{6\pi^2}, \alpha_2$$

$$\rightarrow \frac{f}{12\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}}, \alpha_3 \rightarrow \frac{f}{12\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}}, \alpha_4 \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1, T_2]^2}{2\sqrt{3}}, \alpha_5$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]^2}{2\sqrt{3}}, \alpha_6 \rightarrow \frac{2\sqrt{\alpha}\bar{A}_2[T_1, T_2]^2}{3\sqrt{3}}, \alpha_7 \rightarrow \frac{2\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]^2}{3\sqrt{3}}, \alpha_8$$

$$\rightarrow \frac{4\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2]}{3\sqrt{3}}, \alpha_9 \rightarrow -\frac{4\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2]}{\sqrt{3}}, \alpha_{10}$$

$$\rightarrow -\frac{4\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2]}{\sqrt{3}}, \alpha_{11} \rightarrow \frac{4\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]A_2[T_1, T_2]}{3\sqrt{3}} \}$$

Αντικαθιστώντας τη symbolRuleN στην sol2Form, προκύπτει :

sol2=sol2Form/.symbolRuleN

$$u_2 \rightarrow \text{Function}[\{x, T_0, T_1, T_2\}, \frac{1}{6\pi^2} \text{Sin}[\pi x] (- (6\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2]$$

$$+ 8\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2])) + \frac{E^{-T_0\Omega} \text{Sin}[\pi x] f}{12\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}}$$

$$+ \frac{E^{T_0\Omega} \text{Sin}[\pi x] f}{12\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}} + \frac{E^{-2T_0\omega_1} \text{Sin}[\pi x] (\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1, T_2]^2)}{2\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{2T_0\omega_1} \text{Sin}[\pi x] (\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]^2)}{2\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{-2T_0\omega_2} \text{Sin}[\pi x] (2\sqrt{\alpha}\bar{A}_2[T_1, T_2]^2)}{3\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{2T_0\omega_2} \text{Sin}[\pi x] (2\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]^2)}{3\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{-T_0\omega_1 - T_0\omega_2} \text{Sin}[2\pi x] (4\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2])}{3\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{T_0\omega_1 - T_0\omega_2} \text{Sin}[2\pi x] (-4\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]\bar{A}_2[T_1, T_2])}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{-T_0\omega_1 + T_0\omega_2} \text{Sin}[2\pi x] (-4\sqrt{\alpha}A_2[T_1, T_2]\bar{A}_1[T_1, T_2])}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{E^{T_0\omega_1 + T_0\omega_2} \text{Sin}[2\pi x] (4\sqrt{\alpha}A_1[T_1, T_2]A_2[T_1, T_2])}{3\sqrt{3}}]$$

■ Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Αντικαθιστώντας τη sol1 και τη sol2 στην eqEps[[3,1]] και χρησιμοποιώντας τους intRule1 και intRule2, προκύπτει :

```
order3Eq=(eqEps[[1,1,1]]/.u1->u3)==((eqEps[[1,1,1]]/.u1->u3)-
eqEps[[3,1,1]]/.sol1/.sol2/.intRule1//.intRule2/.modeshapes/.int-
>Integrate//Expand); //Timing
{10.475 Second, Null}
```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους με την $E^{i\omega_1 T_0}$, έχουμε :

ST2=Coefficient[order3Eq[[2]]/.expRule1[#, E^{i ω₁ T₀}] & /@ {1,2};

ST2/.displayRule

$$\begin{aligned}
 & \{-\sqrt{2}(D_1^2 A_1) \sin[\pi x] - \sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1} (D_1^2 A_2) \sin[2\pi x] - 2I\sqrt{2}(D_2 A_1) \sin[\pi x] \omega_1 \\
 & \quad - 2I\sqrt{2} \mu \sin[\pi x] A_1 \omega_1 - 2I\sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1} (D_2 A_2) \sin[2\pi x] \omega_2 \\
 & \quad - 2I\sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1} \mu \sin[2\pi x] A_2 \omega_2 - \frac{E^{2i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sin[\pi x] \bar{A}_1}{\sqrt{2}} \\
 & \quad - \frac{b E^{2i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin[\pi x] \bar{A}_1}{2\sqrt{6}} - 3\sqrt{2} \pi^4 \alpha \sin[\pi x] A_1^2 \bar{A}_1 \\
 & \quad + 5 \sqrt{\frac{3}{2}} b \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[\pi x] A_1^2 \bar{A}_1 - 8\sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha \sin[2\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
 & \quad + \frac{68}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b E^{i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[2\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
 & \quad - 4\sqrt{2} E^{2i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha \sin[\pi x] A_2^2 \bar{A}_1 + 14 \sqrt{\frac{2}{3}} b E^{2i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[\pi x] A_2^2 \bar{A}_1 \\
 & \quad - 2\sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sin[2\pi x] \bar{A}_2 \\
 & \quad - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin[2\pi x] \bar{A}_2 \\
 & \quad - 4\sqrt{2} E^{-i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha \sin[2\pi x] A_1^2 \bar{A}_2 \\
 & \quad + 14 \sqrt{\frac{2}{3}} b E^{-i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[2\pi x] A_1^2 \bar{A}_2 - 8\sqrt{2} \pi^4 \alpha \sin[\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_2 \\
 & \quad + \frac{68}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_2 - 48\sqrt{2} E^{i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha \sin[2\pi x] A_2^2 \bar{A}_2 \\
 & \quad + \frac{40}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b E^{i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[2\pi x] A_2^2 \bar{A}_2, -\sqrt{2} E^{-i T_2 \sigma_1} (D_1^2 A_1) \sin[\pi x] \\
 & \quad - \sqrt{2}(D_1^2 A_2) \sin[2\pi x] - 2I\sqrt{2} E^{-i T_2 \sigma_1} (D_2 A_1) \sin[\pi x] \omega_1 \\
 & \quad - 2I\sqrt{2} E^{-i T_2 \sigma_1} \mu \sin[\pi x] A_1 \omega_1 - 2I\sqrt{2} (D_2 A_2) \sin[2\pi x] \omega_2 \\
 & \quad - 2I\sqrt{2} \mu \sin[2\pi x] A_2 \omega_2 - \frac{E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sin[\pi x] \bar{A}_1}{\sqrt{2}} \\
 & \quad - \frac{b E^{i T_2 \sigma_1 + i T_2 \sigma_2} f \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin[\pi x] \bar{A}_1}{2\sqrt{6}} \\
 & \quad 3\sqrt{2} E^{-i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha \sin[\pi x] A_1^2 \bar{A}_1 + 5 \sqrt{\frac{3}{2}} b E^{-i T_2 \sigma_1} \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[\pi x] A_1^2 \bar{A}_1 \\
 & \quad - 8\sqrt{2} \pi^4 \alpha \sin[2\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_1 + \frac{68}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} b \pi^4 \alpha^{3/2} \sin[2\pi x] A_1 A_2 \bar{A}_1 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4\sqrt{2}E^{\pi_2\sigma_1}\pi^4\alpha\text{Sin}[\pi x]A_2^2\bar{A}_1 + 14\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{\pi_2\sigma_1}\pi^4\alpha^{3/2}\text{Sin}[\pi x]A_2^2\bar{A}_1 \\
 & - 2\sqrt{2}E^{\pi_2\sigma_2}f\pi^2\text{Sin}[2\pi x]\bar{A}_2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{\pi_2\sigma_2}f\pi^2\sqrt{\alpha}\text{Sin}[2\pi x]\bar{A}_2 \\
 & - 4\sqrt{2}E^{-2i\tau_2\sigma_1}\pi^4\alpha\text{Sin}[2\pi x]A_1^2\bar{A}_2 \\
 & + 14\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{-2i\tau_2\sigma_1}\pi^4\alpha^{3/2}\text{Sin}[2\pi x]A_1^2\bar{A}_2 \\
 & - 8\sqrt{2}E^{-\pi_2\sigma_1}\pi^4\alpha\text{Sin}[\pi x]A_1A_2\bar{A}_2 \\
 & + \frac{68}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{-\pi_2\sigma_1}\pi^4\alpha^{3/2}\text{Sin}[\pi x]A_1A_2\bar{A}_2 - 48\sqrt{2}\pi^4\alpha\text{Sin}[2\pi x]A_2^2\bar{A}_2 \\
 & + \frac{40}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}b\pi^4\alpha^{3/2}\text{Sin}[2\pi x]A_2^2\bar{A}_2\}
 \end{aligned}$$

Απαιτώντας η ST2[[i]] να είναι ορθογωνική στο $\Phi_i[x]$, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

```

SCond2=Table[int[ST2[[k]]
 $\Phi_k[x], \{x, 0, 1\}] == 0, \{k, 2\}]/.intRule1/.intRule2/.modeshapes/.values1/.i
nt->Integrate/.D[SCond1Rule, T1];
SCond2/.displayRule$ 
```

$$\begin{aligned}
 & \{-2I(D_2A_1)\omega_1 - 2I\mu A_1\omega_1 - E^{2i\tau_2\sigma_1+\pi_2\sigma_2}f\pi^2\bar{A}_1 + 12\pi^4\alpha A_1^2\bar{A}_1 \\
 & + 24E^{2i\tau_2\sigma_1}\pi^4\alpha A_2^2\bar{A}_1 + \frac{112}{3}\pi^4\alpha A_1A_2\bar{A}_2 = \\
 & = 0, -2I(D_2A_2)\omega_2 - 2I\mu A_2\omega_2 + \frac{112}{3}\pi^4\alpha A_1A_2\bar{A}_1 - \frac{8}{3}E^{\pi_2\sigma_2}f\pi^2\bar{A}_2 \\
 & + 24E^{-2i\tau_2\sigma_1}\pi^4\alpha A_1^2\bar{A}_2 - \frac{64}{3}\pi^4\alpha A_2^2\bar{A}_2 == 0\}
 \end{aligned}$$

8.1.3 Η Συνάρτηση MMSDirect11

Συλλέγοντας τις εντολές της προηγούμενης ενότητας, χτίζουμε μια συνάρτηση MMSDirect11, ειδικά για τις μη-γραμμικές αντίστροφες ταλαντώσεις μιας αμφιπροέχουσας δοκού γύρω από την πρώτη της καμπτική μορφή (EOM και BC1), για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας για διαφορετικούς συνδυασμούς των frequencies, modeshapes και ResonanceConds στις οποίες η πρώτη μορφή ίσως να εμπλέκεται σε είτε έναν ένα-προς-ένα είτε σε έναν τρία-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό με μία από τις άλλες μορφές.

```

MMSDirect11[frequencies_, modeshapes_, ResonanceConds_] := Module[{},
multiScales = {u[x_, t] -> u[x, T0, T1, T2], Derivative[m_, n_][u][x_, t] ->
dt[n][D[u[x, T0, T1, T2], {x, m}]], t -> T0};

```

```

solRule = u -> (Evaluate[Sum[ $\epsilon^j u_j$  [#1, #2, #3, #4], {j, 3}]] &); scaling = {c ->
2  $\epsilon^2 \mu$ , f ->  $\epsilon^2 f$ };

eqs = (Join[{EOM}, BC1] /. multiScales /. solRule /. scaling /. intRule1 /. intRule2 /.
TrigToExp /. ExpandAll) /.  $\epsilon^{n_j}; n > 3 \rightarrow 0$ ;
eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract@@#,  $\epsilon$ ] == 0] & / @ eqs /. Transpose /.
Rest;
sol1 = {u1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, Sum[Ai[T1, T2]  $\Phi_i$ [x] Exp[I  $\omega_i T_0$ ] +
 $\bar{A}_i$ [T1, T2]  $\Phi_i$ [x] Exp[-I  $\omega_i T_0$ ], {i, 2}]] /. Evaluate];

order2Eq = (eqEps[[1, 1, 1]] /. u1 -> u2) == (eqEps[[1, 1, 1]] /. u1 -
> u2) - eqEps[[2, 1, 1]] /. sol1 /. intRule1 /. intRule2 /. ExpandAll;
omgList = { $\omega_1, \omega_2$ };

OmgRule = Solve[ResonanceConds, Complement[omgList, {#}] ~ Join ~ { $\Omega$ }][[1]] &
/@ omgList; expRule1[l_]:= Exp[arg_];
> Exp[Expand[arg /. OmgRule[[l]]] /.  $\epsilon^2 T_0 \rightarrow T_2$ ]; ST1
= Coefficient[order2Eq[[2]] /. expRule1[#,  $E^{I \omega \# T_0}$ ] &
/ @ {1, 2}; SCond1 = Table[ $\int_0^1$  ST1[[k]]  $\Phi_k$ [x] dx =
= 0, {k, 2}] /. modeshapes; SCond1Rule
= Solve[SCond1, { $A_1^{(1,0)}$ [T1, T2],  $A_2^{(1,0)}$ [T1, T2]}][[1]]; ccSCond1Rule
= SCond1Rule /. conjugateRule; order2Eqm
= order2Eq /. SCond1Rule /. ccSCond1Rule /. modeshapes /. int -
> Integrate /. Integrate -> int;

rhsTerms = Cases[order2Eqm[[2]], #] & / @ {a_ f_[b_ x] :> f[b
 $E^{a T_0 + b x}$ 
x] /. FreeQ[a, T0], _ f_[c_ x] ->  $E^{a T_0 + b x}$  f[c
x]} /. Flatten /. Union;
symbolList = Table[ $\alpha_i$ , {i, Length[rhsTerms]}];
sol2Form = u2 -
> Function[{x, T0, T1, T2}, symbolList.rhsTerms /. Evaluate];
symbolRule = Solve[Coefficient[Subtract @ @
order2Eqm /. sol2Form /. intRule1 /. intRule2 /. int -
> Integrate, rhsTerms] == 0 /. Exp[_  $T_0 + \_$ ] -
> 0 /. Thread, symbolList][[1]];
values1 = Solve[Select[ResonanceConds, FreeQ[#,  $\Omega$ ]
&] /.  $\epsilon \rightarrow 0$  /. frequencies, b] /. Flatten;
symbolRuleN = symbolRule /.  $\Omega$  -
> 2  $\omega_2$  /. frequencies /. bucklingLoad /. values1;
sol2 = sol2Form /. symbolRuleN;

order3Eq = (eqEps[[1, 1, 1]] /. u1 -> u3) == ((eqEps[[1, 1, 1]] /. u1 -
> u3) -
eqEps[[3, 1, 1]] /. sol1 /. sol2 /. intRule1 /. intRule2 /. modeshap
es /. int -> Integrate /. Expand);
ST2 = Coefficient[order3Eq[[2]] /. expRule1[#,  $E^{I \omega \# T_0}$ ] &
/ @ {1, 2};

```

```
SCond2 = Table[int[ST2[[k]]Φk[x], {x, 0, 1}] =
    = 0, {k, 2}]/.intRule1/.intRule2/.modeshapes/.values1/.int-
    > Integrate/.D[SCond1Rule, T1]; Return[SCond2/.Ai-
    > (Ai[#2]&)/.f_[T1, T2]-> f[T2]]
```

8.1.4 3:1 εσωτερικοί συντονισμοί μεταξύ των δύο πρώτων μορφών

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε την περίπτωση $\omega_2 \approx 3 \omega_1$ και $\Omega \approx 2 \omega_2$. Για να περιγράψουμε την εγγύτητα των συντονισμών, εισάγουμε τις αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_i που ορίζονται από :

$$\text{ResonanceConds1} = \{\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMSDirect11, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

```
MMSDirect11[frequencies, modeshapes, ResonanceConds1]//Timing
```

{21.501 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + \frac{624}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] -$$

$$2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0, -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] + \frac{624}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] -$$

$$\frac{72}{35} E^{i\pi_2 \sigma_2} f \pi^2 \bar{A}_2[T_2] - \frac{576}{35} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

το οποίο καταδεικνύει ότι αυτός η τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός δεν είναι ενεργοποιημένος.

Κατόπιν, θεωρούμε την περίπτωση στην οποία η συχνότητα της πρώτης μορφής είναι τρεις φορές αυτή της δεύτερης μορφής, δηλαδή, το καμπτικό φορτίο είναι πάνω από την πρώτη μικτή (crossover) μορφή. Για να το επιτύχουμε αυτό, επανακαθορίζουμε τις συχνότητες και συμβολίζουμε τη συχνότητα της πρώτης μορφής με ω_2 και αυτή της δεύτερης με ω_1 , ως ακολούθως :

```
frequencies2={ω2->(ω/.ωSol1), ω1->(ω/.ωSol2/.n->2)}
```

$$\{\omega_2 \rightarrow b\pi^2 \sqrt{\alpha}, \omega_1 \rightarrow 2\sqrt{3}\pi^2\}$$

Επιπλέον, επανακαθορίζουμε τις συναρτήσεις σχήματος (modeshapes) σύμφωνα με :

```
modeshapes2 = Join[modeshape, {Φ1->Function[x, shape2//Evaluate], Φ2->
Function[x, shape1//Evaluate]}];
```

Για να περιγράψουμε την εγγύτητα των συντονισμών, εισάγουμε τις δύο αποσυντονιστικές παραμέτρους σ_i , που ορίζονται από :

$$\text{ResonanceConds2} = \{\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMSDirect11, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

```
MMSDirect11[frequencies2, modeshapes2, ResonanceConds2]//Timing
```

{21.721 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + \frac{64}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] - \frac{496}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] -$$

$$- 2I\omega_1 A_1'[T_2] =$$

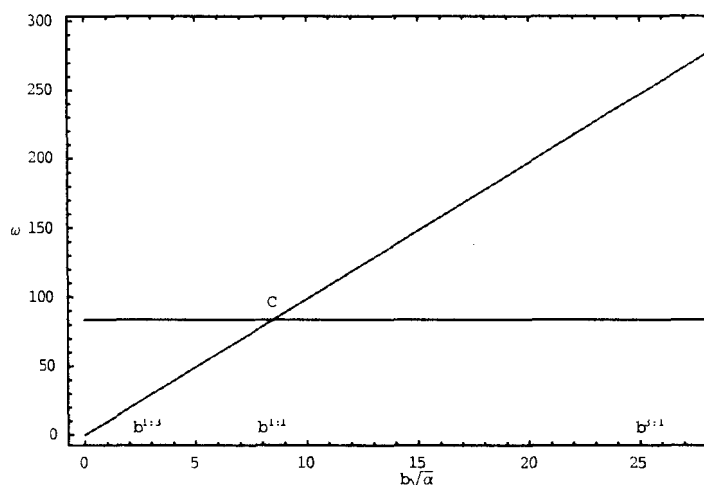
$$= 0, -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] - \frac{496}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2]$$

$$- E^{i\pi_2 \sigma_2} f \pi^2 \bar{A}_2[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

Ξανά, αυτός ο τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός δεν είναι ενεργοποιημένος.

8.1.5 1:1 και 3:1 εσωτερικοί συντονισμοί μεταξύ 1^{ης} - 3^{ης} μορφής

Οι διαφοροποιήσεις των πρώτων και τρίτων φυσικών συχνοτήτων με το επίπεδο λυγισμού απεικονίζονται ως ακολούθως :



Έπεται από αυτό το σχήμα ότι οι συχνότητες των πρώτων και τρίτων μορφών είναι ίσες όταν $b\sqrt{\alpha} = b^{1:1}$, η συχνότητα της τρίτης μορφής είναι τρεις φορές εκείνη της πρώτης μορφής όταν $b\sqrt{\alpha} = b^{1:3}$, και η συχνότητα της πρώτης μορφής είναι τρεις φορές εκείνη της τρίτης όταν $b\sqrt{\alpha} = b^{3:1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `MMSDirect11` για να χειριστούμε αυτές τις 3 περιπτώσεις.

■ Ένα-προς-Ένα Εσωτερικός Συντονισμός

Συμβολίζουμε τη συχνότητα της τρίτης μορφής με ω_2 και εκείνη της πρώτης μορφής με ω_1 , ως ακολούθως :

`frequencies3 = {ω1->(ω/.ωSol1), ω2->(ω/.ωSol2/.n->3)}`

$$\{\omega_1 \rightarrow b\pi^2\sqrt{\alpha}, \omega_2 \rightarrow 6\sqrt{2}\pi^2\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τρίτες ιδιομορφές (eigenmodes) της καμπτόμενης δοκού ως εξής :

`modeshapes3 = Join[modeshape, {Φ1->Function[x,shape1//Evaluate], Φ2->Function[x,shape3//Evaluate]}];`

Θεωρούμε έναν συνδυασμό ενός ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στην πρώτη και την τρίτη μορφή και έναν πρωτεύοντα παραμετρικό συντονισμό της τρίτης μορφής, δηλαδή :

$$\text{ResonanceConds3} = \{\omega_2 == \omega_1 + \epsilon^2\sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2\sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την `MMSDirect11`, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

`MMSDirect11[frequencies3,modeshapes3,ResonanceConds3]//Timing`

{26.809 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] - E^{2IT_2\sigma_2 + IT_2\sigma_2} f\pi^2 \bar{A}_1[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + 144E^{2IT_2\sigma_2} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + 144\pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0, -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] + 144\pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] - 6E^{IT_2\sigma_2} f\pi^2 \bar{A}_2[T_2] + 144E^{-2IT_2\sigma_2} \pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 108\pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

γεγονός που υποδεικνύει ότι ο ένα-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες μορφές είναι ενεργοποιημένος.

■ Τρία-προς-Ένα Εσωτερικοί Συντονισμοί

Για να μεταχειριστούμε την περίπτωση στην οποία η φυσική συχνότητα της τρίτης μορφής είναι περίπου τρεις φορές εκείνη της πρώτης μορφής χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `MMSDirect11`, συμβολίζουμε αυτές τις συχνότητες με ω_2 και ω_1 , αντίστοιχα, σύμφωνα με :

$$\text{frequencies4} = \{\omega_1 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol1}}), \omega_2 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol2}} / n \rightarrow 3)\}$$

$$\{\omega_1 \rightarrow b\pi^2 \sqrt{a}, \omega_2 \rightarrow 6\sqrt{2}\pi^2\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τρίτες ιδιομορφές της καμπτόμενης δοκού ως :

$$\text{modeshapes4} = \text{Join}[\text{modeshape}, \{\phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}], \phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape3} // \text{Evaluate}]\};$$

Θεωρούμε έναν συνδυασμό ενός τρία-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της τρίτης μορφής, δηλαδή :

$$\text{modeshapes4} = \text{Join}[\text{modeshape}, \{\phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}], \phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape3} // \text{Evaluate}]\};$$

Χρησιμοποιώντας την `MMSDirect11`, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{MMSDirect11}[\text{frequencies4}, \text{modeshapes4}, \text{ResonanceConds4}] // \text{Timing}$$

{21.651 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + \frac{1584}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0,$$

$$-2I\mu\omega_2 A_2[T_2] + \frac{1584}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] -$$

$$\frac{162}{35} E^{i\pi_2} \sigma_2 f \pi^2 \bar{A}_2[T_2] - \frac{2916}{35} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

που σημαίνει ότι αυτός ο τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες τιμές δεν είναι ενεργοποιημένο2.

Όταν η συχνότητα της πρώτης μορφής είναι περίπου τρεις φορές εκείνη της τρίτης μορφής, ορίζουμε τις συχνότητες ως :

$$\text{frequencies5} = \{\omega_2 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol1}}), \omega_1 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol2}} / n \rightarrow 3)\}$$

$$\{\omega_2 \rightarrow b\pi^2 \sqrt{a}, \omega_1 \rightarrow 6\sqrt{2}\pi^2\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τρίτες ιδιομορφές της καμπτόμενης δοκού ως :

$$\text{modeshapes5} = \text{Join}[\text{modeshape}, \{\phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape3} // \text{Evaluate}], \phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}]\};$$

Θεωρούμε έναν συνδυασμό ενός τρία-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της τρίτης μορφής, δηλαδή :

$$\text{ResonanceConds5} = \{\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την `MMSDirect11`, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{MMSDirect11}[\text{frequencies5}, \text{modeshapes5}, \text{ResonanceConds5}] // \text{Timing}$$

{21.712 Second,

$$\left\{ -2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + \frac{324}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] - \frac{2736}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] \right\} = 0,$$

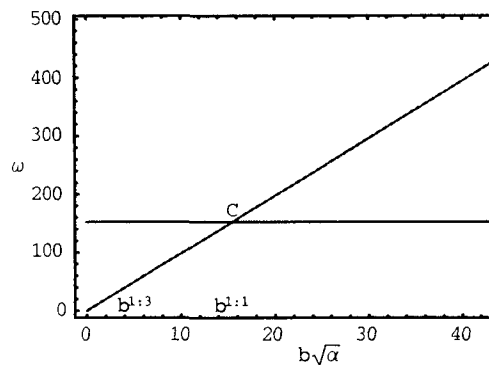
$$\left\{ -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] - \frac{2736}{5} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] - \right.$$

$$\left. E^{\pi^2 \alpha_2} f \pi^2 \bar{A}_2[T_2] + 12 \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] \right\} = 0 \}$$

το οποίο φανερώνει ότι αυτός ο τρία-προς-ένα εσωτερ. συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τρίτες μορφές δεν είναι ενεργοποιημένος.

8.1.6 1:1 και 3:1 εσωτερικοί συντονισμοί μεταξύ 1^{ης} - 4^{ης} μορφής

Διαφοροποιήσεις των πρώτων και τετάρτων φυσικών συχνοτήτων με το λυγισμικό επίπεδο απεικονίζονται ως ακολούθως :



Ξανά, υπάρχουν λυγισμικές καταστάσεις, για τις οποίες οι συχνότητες των πρώτων και τετάρτων μορφών είναι σε μια αναλογία 1:1, 3:1 και 1:3. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση MMSDirect11 για να χειριστούμε αυτές τις περιπτώσεις.

■ Ένα-προς-Ένα Εσωτερικός Συντονισμός

Όταν οι συχνότητες των πρώτων και τετάρτων μορφών είναι περίπου ίσες, τις συμβολίζουμε με ω_1 και ω_2 , αντίστοιχα, σύμφωνα με :

$$\text{frequencies6} = \{\omega_1 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol1}}), \omega_2 \rightarrow (\omega / \omega_{\text{Sol2}} / n \rightarrow 4)\}$$

$$\{\omega_1 \rightarrow b\pi^2 \sqrt{\alpha}, \omega_2 \rightarrow 4\sqrt{15}\pi^2\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τέταρτες ιδιομορφές (eigenmodes) της καμπτόμενης δοκού ως :

$$\text{modeshapes6} = \text{Join}[\text{modeshape}, \{\phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}], \phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape4} // \text{Evaluate}]\}];$$

Θεωρούμε ένα συνδυασμό ενός ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της τέταρτης μορφής, δηλαδή :

$$\text{ResonanceConds6} = \{\omega_2 == \omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MMSDirect11, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{MMSDirect11}[\text{frequencies6}, \text{modeshapes6}, \text{ResonanceConds6}] // \text{Timing}$$

{29.522 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] - E^{2iT_2\sigma_1 + iT_2\sigma_2} f\pi^2 \bar{A}_1[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + 480E^{2iT_2\sigma_1} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + \frac{1216}{3} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0, -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] + \frac{1216}{3} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] - \frac{32}{3} E^{i\pi_2\sigma_2} f\pi^2 \bar{A}_2[T_2] + 480E^{-2iT_2\sigma_1} \pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - \frac{1024}{3} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

το οποίο υποδεικνύει ότι αυτός ο ένα-προς-ένα εσωτερ. συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές είναι ενεργοποιημένος.

■ Τρία-προς-Ένα Εσωτερικοί Συντονισμοί

Όταν η συχνότητα της τέταρτης μορφής είναι περίπου τρεις φορές αυτή της πρώτης, συμβολίζουμε αυτές τις συχνότητες με ω_2 και ω_1 , αντίστοιχα, σύμφωνα με :

$$\text{frequencies7} = \{\omega_1 \rightarrow (\omega / \omega\text{Sol1}), \omega_2 \rightarrow (\omega / \omega\text{Sol2} / n \rightarrow 4)\}$$

$$\{\omega_1 \rightarrow b\pi^2 \sqrt{\alpha}, \omega_2 \rightarrow 4\sqrt{15}\pi^2\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τέταρτες ιδιομορφές (eigenmodes) της καμπτόμενης δοκού ως :

$$\text{modeshapes7} = \text{Join}[\text{modeshape}, \{\Phi_1 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape1} // \text{Evaluate}], \Phi_2 \rightarrow \text{Function}[x, \text{shape4} // \text{Evaluate}]\};$$

Θεωρούμε ένα συνδυασμό ενός τρία-προς-ένα εσωτερ. συντονισμού ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές και έναν πρωταρχικό παραμετρικό συντονισμό της τέταρτης μορφής, δηλαδή :

$$\text{ResonanceConds7} = \{\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

Χρησιμοποιώντας την MSDirect11, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{ResonanceConds7} = \{\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2 \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2 \sigma_2\};$$

{22.653 Second,

$$\{-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + 12\pi^4 \alpha A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] + \frac{3264}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0, -2I\mu\omega_2 A_2[T_2] + \frac{3264}{35} \pi^4 \alpha A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] - \frac{288}{35} E^{i\pi_2\sigma_2} f\pi^2 \bar{A}_2[T_2] - \frac{9216}{35} \pi^4 \alpha A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0\}$$

το οποίο καταδεικνύει ότι αυτός ο τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές δεν είναι ενεργοποιημένος.

Όταν η συχνότητα της πρώτης μορφής είναι περίπου τρεις φορές αυτή της τέταρτης μορφής, συμβολίζουμε αυτές τις συχνότητες με ω_2 και ω_1 , αντίστοιχα, σύμφωνα με :

frequencies8 = { $\omega_2 \rightarrow (\omega/.\omegaSol1), \omega_1 \rightarrow (\omega/.\omegaSol2/.n \rightarrow 4)$ }

{ $\omega_2 \rightarrow b\pi^2\sqrt{a}, \omega_1 \rightarrow 4\sqrt{15}\pi^2$ }

Επιπλέον, ορίζουμε την ϕ_k και τις πρώτες και τέταρτες ιδιομορφές (eigenmodes) της καμπτόμενης δοκού ως :

modeshapes8 = Join[modeshape, { $\Phi_1 \rightarrow$ Function[x, shape4//Evaluate], $\Phi_2 \rightarrow$ Function[x, shape1//Evaluate]}];

Θεωρούμε έναν συνδυασμό ενός τρία-προς-ένα εσωτερ. συντονισμού ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της τέταρτης μορφής, δηλαδή :

ResonanceConds8 = { $\omega_2 == 3\omega_1 + \epsilon^2\sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon^2\sigma_2$ };

Χρησιμοποιώντας την MSDirect11, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

{22.072 Second,

{ $-2I\mu\omega_1 A_1[T_2] + \frac{1024}{5}\pi^4 a A_1[T_2]^2 \bar{A}_1[T_2] -$

$\frac{8896}{5}\pi^4 a A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_2[T_2] - 2I\omega_1 A_1'[T_2] == 0,$

$-2I\mu\omega_2 A_2[T_2] - \frac{8896}{5}\pi^4 a A_1[T_2] A_2[T_2] \bar{A}_1[T_2] -$

$E\pi^2 \alpha_2 f \pi^2 \bar{A}_2[T_2] + 12\pi^4 a A_2[T_2]^2 \bar{A}_2[T_2] -$

$2I\omega_2 A_2'[T_2] == 0$ }}

το οποίο καταδεικνύει ξανά ότι αυτός ο τρία-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ανάμεσα στις πρώτες και τέταρτες μορφές δεν είναι ενεργοποιημένος.

8.2 Κυκλικά Κυλινδρικά Κελύφη

Σε συμφωνία με τους McInor (1966) και Raouf και Nayfeh (1990), γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν τη δυναμική απόκριση ενός απείρωσ μακρού κυλινδρικού κελύφους σε μια πρωταρχικού-συντονισμού διέγερση μιας από τις δυο της ορθογωνικές καμπτικές μορφές, ως εξής :

$$\begin{aligned} \text{EOM} = \{w - \psi_\theta + w_{t,t} + \alpha^2(w + 2w_{\theta,\theta} + w_{\theta,\theta,\theta,\theta}) = \\ = -\frac{w_\theta^2}{2} - ww_\theta^2 - \psi_\epsilon^2 + w\psi_\epsilon^2 - 2w\psi_\theta + \frac{1}{2}w_\theta^2\psi_\theta + \psi_\theta^2 - w\psi_\theta^2 \\ + f\epsilon^3 \text{Cos}[n\theta] \text{Cos}[\Omega t] (1 - w + \psi_\theta) - ww_{\theta,\theta} - w^2w_{\theta,\theta} + \frac{3}{2}w_\theta^2w_{\theta,\theta} \\ + \psi_\theta w_{\theta,\theta} + w\psi_\theta w_{\theta,\theta} - \psi_\theta^2 w_{\theta,\theta} + w_\theta \psi_{\theta,\theta} + ww_\theta \psi_{\theta,\theta} - 2w_\theta \psi_\theta \psi_{\theta,\theta} \\ + \alpha^2(-3w^2 - \frac{11w_\theta^2}{2} - 11ww_{\theta,\theta} + 4\psi_\theta w_{\theta,\theta} - 6w_\theta^2 + 4w_\theta \psi_{\theta,\theta} \\ - 8w_\theta w_{\theta,\theta,\theta} + 8\psi_{\theta,\theta} w_{\theta,\theta,\theta} + w\psi_{\theta,\theta,\theta} + 5w_{\theta,\theta} \psi_{\theta,\theta,\theta} - 4ww_{\theta,\theta,\theta,\theta} \\ + 4\psi_\theta w_{\theta,\theta,\theta,\theta} + w_\theta \psi_{\theta,\theta,\theta,\theta}), w_\theta + \psi_{t,t} - \psi_{\theta,\theta} = \\ = 2ww_\theta + \frac{w_\theta^3}{2} + 2w_t \psi_t - 2ww_t \psi_t - 2w_\theta \psi_\theta + 2ww_\theta \psi_\theta + w_\theta w_{\theta,\theta} \\ + ww_\theta w_{\theta,\theta} - 2w_\theta \psi_\theta w_{\theta,\theta} + 2w\psi_{t,t} - w^2 \psi_{t,t} - 2w\psi_{\theta,\theta} + w^2 \psi_{\theta,\theta} \\ - w_\theta^2 \psi_{\theta,\theta} + \alpha^2(w_\theta w_{\theta,\theta} - ww_{\theta,\theta,\theta} - w_{\theta,\theta} w_{\theta,\theta,\theta} \\ + w_\theta w_{\theta,\theta,\theta,\theta})\} /. \{w \rightarrow w[\theta, t], (s: w|\psi)_{m_} :> \partial_{m_s} s[\theta, t]\}; \end{aligned}$$

Αναζητούμε μια 2ης τάξης ομοιόμορφη ασυμπτωτική ανάπτυξη της λύσης της EOM, της μορφής :

$$\text{solRule} = \{w \rightarrow (\text{Evaluate}[\text{Sum}[\epsilon^j w_j, \{ \#1, \#2, \#3, \#4 \}, \{j, 3\}]] \&), \psi \rightarrow (\text{Evaluate}[\text{Sum}[\epsilon^j \psi_j, \{ \#1, \#2, \#3, \#4 \}, \{j, 3\}]] \&)\}$$

$$\{w \rightarrow (\epsilon w_1 [\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^2 w_2 [\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^3 w_3 [\#1, \#2, \#3, \#4] \&),$$

$$\psi \rightarrow (\epsilon \psi_1 [\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^2 \psi_2 [\#1, \#2, \#3, \#4] + \epsilon^3 \psi_3 [\#1, \#2, \#3, \#4] \&)\}$$

όπου το #1 συμβολίζει το θ και τα #2, #3 και #4 συμβολίζουν αντίστοιχα τα T_0 , T_1 και T_2 . Μετασχηματίζοντας τις χρονικές παραγώγους στην EOM ως προς τις κλίμακες T_0 , T_1 και T_2 , αντικαθιστώντας την solRule στην EOM, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρά ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

eq82a =

$$(\text{EOM}/. \{w[x, t] \rightarrow w[x, T_0, T_1, T_2], \psi[x, t] \rightarrow \psi[x, T_0, T_1, T_2],$$

$$\text{Derivative}[m, n][w_][x, t] \rightarrow \text{dt}[n][D[w[x, T_0, T_1, T_2], \{x, m\}]]],$$

$$t \rightarrow T_0\} /. \text{solRule} // \text{ExpandAll} / . \epsilon^{_} / : n > 3 \rightarrow 0;$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων δυνάμεων του ϵ , έχουμε :

$$\text{eqEps} = \text{Rest}[\text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract}[\text{@@\#}, \epsilon] = 0]] \& / @ \text{eq82a} // \text{Transpose}; \text{eqEps} /. \text{displayRule}$$

$$\begin{aligned} & \{ \{ 2 \alpha^2 (w_1'') + \alpha^2 (w_1''''') - \psi_1' + D_0^2 w_1 + w_1 + \alpha^2 w_1 == 0, w_1' - \psi_1'' + D_0^2 \psi_1 == 0 \}, \\ & \left\{ \frac{1}{2} (w_1')^2 + \frac{11}{2} \alpha^2 (w_1')^2 + 6 \alpha^2 (w_1'')^2 + 8 \alpha^2 (w_1') (w_1''') + 2 \alpha^2 (w_2'') + \alpha^2 (w_2''''') - (w_1'') (\psi_1') - \right. \\ & \quad 4 \alpha^2 (w_1'') (\psi_1') - 4 \alpha^2 (w_1''''') (\psi_1') - (\psi_1')^2 - (w_1') (\psi_1'') - 4 \alpha^2 (w_1') (\psi_1'') - 8 \alpha^2 (w_1''') (\psi_1'') - \\ & \quad 5 \alpha^2 (w_1'') (\psi_1''') - \alpha^2 (w_1') (\psi_1''''') - \psi_2' + (D_0 \psi_1)^2 + D_0^2 w_2 + 2 (D_0 D_1 w_1) + (w_1'') w_1 + \\ & \quad 11 \alpha^2 (w_1'') w_1 + 4 \alpha^2 (w_1''''') w_1 + 2 (\psi_1') w_1 - \alpha^2 (\psi_1''') w_1 + 3 \alpha^2 w_1^2 + w_2 + \alpha^2 w_2 == 0, \\ & \quad - (w_1') (w_1'') - \alpha^2 (w_1') (w_1'') + \alpha^2 (w_1'') (w_1''') - \alpha^2 (w_1') (w_1''''') + w_2' + \\ & \quad 2 (w_1') (\psi_1') - \psi_2'' - 2 (D_0 w_1) (D_0 \psi_1) + D_0^2 \psi_2 + 2 (D_0 D_1 \psi_1) - \\ & \quad \left. 2 (w_1') w_1 + \alpha^2 (w_1''') w_1 + 2 (\psi_1'') w_1 - 2 (D_0^2 \psi_1) w_1 == 0 \right\}, \\ & \left\{ -f \text{Cos}[n \theta] \text{Cos}[T_0 \Omega] - \frac{3}{2} (w_1')^2 (w_1'') + (w_1') (w_2') + 11 \alpha^2 (w_1') (w_2') + 8 \alpha^2 (w_1''') (w_2') + \right. \\ & \quad 12 \alpha^2 (w_1'') (w_2'') + 8 \alpha^2 (w_1') (w_2''') + 2 \alpha^2 (w_2'') + \alpha^2 (w_2''''') - \frac{1}{2} (w_1')^2 (\psi_1') - \\ & \quad (w_2'') (\psi_1') - 4 \alpha^2 (w_2'') (\psi_1') - 4 \alpha^2 (w_2''''') (\psi_1') + (w_1'') (\psi_1')^2 - (w_2') (\psi_1'') - \\ & \quad 4 \alpha^2 (w_2') (\psi_1'') - 8 \alpha^2 (w_2''') (\psi_1'') + 2 (w_1') (\psi_1') (\psi_1'') - 5 \alpha^2 (w_2'') (\psi_1''') - \\ & \quad \alpha^2 (w_2') (\psi_1''''') - (w_1'') (\psi_2') - 4 \alpha^2 (w_1'') (\psi_2') - 4 \alpha^2 (w_1''''') (\psi_2') - 2 (\psi_1') (\psi_2') - \\ & \quad (w_1') (\psi_2'') - 4 \alpha^2 (w_1') (\psi_2'') - 8 \alpha^2 (w_1''') (\psi_2'') - 5 \alpha^2 (w_1'') (\psi_2''') - \alpha^2 (w_1') (\psi_2''''') - \\ & \quad \psi_3' + 2 (D_0 \psi_1) (D_0 \psi_2) + D_0^2 w_3 + 2 (D_0 \psi_1) (D_1 \psi_1) + 2 (D_0 D_1 w_2) + D_1^2 w_1 + 2 (D_0 D_2 w_1) + \\ & \quad (w_1'')^2 w_1 + (w_2'') w_1 + 11 \alpha^2 (w_2'') w_1 + 4 \alpha^2 (w_2''''') w_1 - (w_1'') (\psi_1') w_1 + (\psi_1'')^2 w_1 - \\ & \quad (w_1') (\psi_1'') w_1 + 2 (\psi_2') w_1 - \alpha^2 (\psi_2''') w_1 - (D_0 \psi_1)^2 w_1 + (w_1'') w_1^2 + (w_1'') w_2 + \\ & \quad \left. 11 \alpha^2 (w_1'') w_2 + 4 \alpha^2 (w_1''''') w_2 + 2 (\psi_1'') w_2 - \alpha^2 (\psi_1''') w_2 + 6 \alpha^2 w_1 w_2 + w_2 + \alpha^2 w_3 == 0, \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} (w_1')^3 - (w_1'') (w_2') - \alpha^2 (w_1''') (w_2') - \alpha^2 (w_1''''') (w_2') - (w_1') (w_2'') - \\
 & \alpha^2 (w_1') (w_2'') + \alpha^2 (w_1''') (w_2'') + \alpha^2 (w_1'') (w_2''') - \alpha^2 (w_1') (w_2''''') + \\
 & w_3' + 2 (w_1') (w_1'') (\psi_1') + 2 (w_2') (\psi_1') + (w_1')^2 (\psi_1'') + 2 (w_1') (\psi_2') - \psi_3'' - \\
 & 2 (D_0 w_2) (D_0 \psi_1) - 2 (D_0 w_1) (D_0 \psi_2) + D_0^2 \psi_3 - 2 (D_0 \psi_1) (D_1 w_1) - 2 (D_0 w_1) (D_1 \psi_1) + \\
 & 2 (D_0 D_1 \psi_2) + D_1^2 \psi_1 + 2 (D_0 D_2 \psi_1) - (w_1') (w_1'') w_1 - 2 (w_2') w_1 + \alpha^2 (w_2''') w_1 - \\
 & 2 (w_1') (\psi_1') w_1 + 2 (\psi_2'') w_1 + 2 (D_0 w_1) (D_0 \psi_1) w_1 - 2 (D_0^2 \psi_2) w_1 - 4 (D_0 D_1 \psi_1) w_1 - \\
 & (\psi_1'') w_1^2 + (D_0^2 \psi_1) w_1^2 - 2 (w_1') w_2 + \alpha^2 (w_1''') w_2 + 2 (\psi_1'') w_2 - 2 (D_0^2 \psi_1) w_2 == 0 \}
 \end{aligned}$$

8.2.1 Πρώτης - τάξης λύση

Για να προσδιορίσουμε τη λύση του πρώτης-τάξης προβλήματος, την eqEps[[1]], χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών και θέτουμε :

$$svRule = \{w_1 \rightarrow (A E^{Im\#1} E^{I\omega_m\#2} \&), \psi_1 \rightarrow (B E^{Im\#1} E^{I\omega_m\#2} \&)\};$$

Αντικαθιστώντας την svRule στην eqEps[[1]], λαμβάνουμε τις χαρακτηριστικές εξισώσεις :

$$eqEps1lhs = Expand[E^{-Im\theta - I\omega_m T_0} \#[[1]] /. svRule] \& / @eqEps[[1]]$$

$$\{A - IBm + A\alpha^2 - 2Am^2\alpha^2 + Am^4\alpha^2 - A\omega_m^2, IAm + Bm^2 - B\omega_m^2\}$$

Θέτοντας την ορίζουσα του μητρώου συντελεστών στην eqEps1lhs ίση με το 0 προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση που διέπει τις φυσικές συχνότητες ω_m του κελύφους :

$$(Outer[D, eqEps1lhs, \{A, B\}] // Det // Collect[\#, \omega_m] \&) == 0$$

$$m^3\alpha^2 - 2m^4\alpha^2 + m^6\alpha^2 + (-1 - m^2 - \alpha^2 + 2m^2\alpha^2 - m^4\alpha^2)\omega_m^2 + \omega_m^4 == 0$$

Έπεται από την eqEps1lhs ότι η αναλογία $\Gamma_m = I*(B/A)$ των ευρών ταλάντωσης των ψ_1 και w_1 δίνεται από :

$$\GammaRule = \Gamma_m \rightarrow Factor[I \frac{B}{A} /. Solve[eqEps1lhs[[1]] == 0, B] [[1]]]$$

$$\Gamma_m \rightarrow \frac{1 + \alpha^2 - 2m^2\alpha^2 + m^4\alpha^2 - \omega_m^2}{m}$$

Έτσι, η λύση της eqEps[[1]] μπορεί να εκφραστεί σε όρους των μορφών ελεύθερης γραμμικής ταλάντωσης:

$$modeShapes = ComplexExpand[\{Re[\#], Im[\#]\}] \& / @\{Exp[In\theta], -I\Gamma_n Exp[In\theta]\} \\ \{\{Cos[n\theta], Sin[n\theta]\}, \{Sin[n\theta]\Gamma_n, -Cos[n\theta]\Gamma_n\}\}$$

ως

$$sol1Form = modeShapes.Table[A_{i,n}[T_1, T_2] Exp[I\omega_n T_0] \\ + \bar{A}_{i,n}[T_1, T_2] Exp[-I\omega_n T_0], \{i, 2\}] // Expand$$

$$\begin{aligned}
 & \{E^{IT_0\omega_n} Cos[n\theta] A_{1,n}[T_1, T_2] + E^{IT_0\omega_n} Sin[n\theta] A_{2,n}[T_1, T_2] \\
 & + E^{-IT_0\omega_n} Cos[n\theta] \bar{A}_{1,n}[T_1, T_2] \\
 & + E^{-IT_0\omega_n} Sin[n\theta] \bar{A}_{2,n}[T_1, T_2], E^{IT_0\omega_n} Sin[n\theta] \Gamma_n A_{1,n}[T_1, T_2] \\
 & - E^{IT_0\omega_n} Cos[n\theta] \Gamma_n A_{2,n}[T_1, T_2] + E^{-IT_0\omega_n} Sin[n\theta] \Gamma_n \bar{A}_{1,n}[T_1, T_2] \\
 & - E^{-IT_0\omega_n} Cos[n\theta] \Gamma_n \bar{A}_{2,n}[T_1, T_2]\}
 \end{aligned}$$

Έπεται από την `sol1Form` ότι όλες οι καμπτικές μορφές είναι εκφυλισμένες επειδή δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις, οι $\text{Cos}[n \theta]$ και $\text{Sin}[n \theta]$, αντιστοιχούν στην ίδια συχνότητα ω_n για ένα n .

Θεωρούμε την περίπτωση μιας κύριου-συντονισμού διέγερσης της μορφής $\text{Cos}[n \theta]$ που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_n , η οποία καλείται ως επηρεασμένη μορφή (*driven mode*). Εξαιτίας του εκφυλισμού, αυτή η μορφή έχει να κάνει με έναν ένα-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό με την $\text{Sin}[n \theta]$ μορφή, η οποία αποκαλείται συνοδευτική μορφή (*companion mode*). Θεωρούμε ότι καμία από αυτές τις δύο μορφές δεν εμπλέκεται σε έναν εσωτερικό συντονισμό με οποιαδήποτε άλλη μορφή. Επομένως, με την παρουσία της *ιξώδους απόσβεσης* (*viscous damping*), από τον άπειρο αριθμό μορφών που είναι παρούσες στις ω_1 και ψ_1 , μόνο η επηρεασμένη μορφή $\text{Cos}[n \theta]$ και η συνοδευτική μορφή της $\text{Sin}[n \theta]$ θα συμβάλλουν στην σταθερής-κατάστασης απόκριση (Nayfeh και Mook, 1979). Επομένως, παίρνουμε τη λύση του πρώτης-τάξης προβλήματος ως αποτελούμενη μόνο από αυτές τις δύο μορφές και την εκφράζουμε ως :

```
sol1 = {w1 -> Function[{θ, T0, T1, T2}, sol1Form[[1]]//Evaluate], ψ1 -
      > Function[{θ, T0, T1, T2}, sol1Form[[2]]//Evaluate]];
```

Για να περιγράψουμε την εγγύτητα του κύριου συντονισμού, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ που ορίζεται από :

```
ResonanceCond = {Ω == ωn + ε²σ};
```

όπου ο αποσυντονισμός είναι διατεταγμένος στο ϵ^2 επειδή οι προσωρινοί όροι εμφανίζονται πρώτοι στην τάξη ϵ^3 .

8.2.2 Δεύτερης - τάξης λύση

Αντικαθιστώντας τη `sol1` στο δεύτερης-τάξης πρόβλημα, το `eqEps[[2]]`, λαμβάνουμε :

```
order2Eq = Table[(eqEps[[1,i,1]]/.{w1->w2, ψ1->ψ2}) =
      = (eqEps[[1,i,1]]/.{w1->w2, ψ1->ψ2}) - (Subtract@@eqEps[[2,i]]/.sol1//Expand), {i,2}];
```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους ανάλογους στο $E^{i\omega_i T_0}$, έχουμε :

```
ST1 = Coefficient[#[[2]], E^{ωn T0}]&/@order2Eq
```

```
{-2ICos[nθ]ωn A_{1,n}^{(1,0)}[T1, T2] - 2ISin[nθ]ωn A_{2,n}^{(1,0)}[T1, T2],
 -2ISin[nθ]Γn ωn A_{1,n}^{(1,0)}[T1, T2] + 2ICos[nθ]Γn ωn A_{2,n}^{(1,0)}[T1, T2]}
```

Επειδή τα ομογενή τμήματα της `order2Eq` έχουν μια μη-τετριμμένη λύση, οι αντίστοιχες μη-ομογενείς εξισώσεις έχουν μια λύση μόνο αν οι συνθήκες επιλυσιμότητας ικανοποιούνται. Αυτές οι συνθήκες απαιτούν η `ST1` να είναι ορθογωνική σε κάθε λύση των ερμιτιανής συζυγίας ομογενών εξισώσεων. Σε αυτή την περίπτωση, αυτές οι εξισώσεις είναι αυτο-συζυγείς και έτσι οι λύσεις των συζυγών εξισώσεων δίνονται από το ανάστροφο των `modeShapes`. Απαιτώντας η `ST1` να είναι ορθογωνική στο ανάστροφο των `modeShapes`, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

```
SCond1 = Solve[(int[#, {θ, 0, 2π}]&/@(Transpose[modeShapes].ST1)]/.
```


$$\text{intRule1} // \text{intRule2} /. \{ \text{int}[\text{Cos}[s_]\text{Sin}[s_], _] \rightarrow 0, \text{int}[f_ [n\theta]^2, \text{arg}_] \rightarrow \pi \} =$$

$$= 0 // \text{Thread}, \{ A_{1,n}^{(1,0)} [T_1, T_2], A_{2,n}^{(1,0)} [T_1, T_2] \} \{ \{ 1 \} \}$$

$$\{ A_{1,n}^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0, A_{2,n}^{(1,0)} [T_1, T_2] \rightarrow 0 \}$$

Έχοντας προσδιορίσει τις συνθήκες επιλυσιμότητας των δεύτερης-τάξης εξισώσεων, των order2Eq, χρησιμοποιούμε έναν συνδυασμό της αρχής της υπέρθεσης και της μεθόδου των απροσδιόριστων συντελεστών για να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση αυτών. Γι' αυτό το λόγο, συλλέγουμε τις μορφές όλων των πιθανών όρων στα δεξιά μέλη των order2Eq, ως ακολούθως :

collectForm

$$= \text{Outer}[\text{Times}, \{ \text{Cos}[n\theta], \text{Sin}[n\theta] \}, \text{Table}[\{ A_{i,n} [T_1, T_2] E^{i\omega_n T_0}, \bar{A}_{i,n} [T_1, T_2] E^{-i\omega_n T_0} \}, \{ i, 2 \}]] // \text{Flatten} // \text{Flatten}$$

$$\{ E^{i\omega_n T_0} \text{Cos}[n\theta] A_{1,n} [T_1, T_2], E^{-i\omega_n T_0} \text{Cos}[n\theta] \bar{A}_{1,n} [T_1, T_2],$$

$$E^{i\omega_n T_0} \text{Cos}[n\theta] A_{2,n} [T_1, T_2], E^{-i\omega_n T_0} \text{Cos}[n\theta] \bar{A}_{2,n} [T_1, T_2],$$

$$E^{i\omega_n T_0} \text{Sin}[n\theta] A_{1,n} [T_1, T_2], E^{-i\omega_n T_0} \text{Sin}[n\theta] \bar{A}_{1,n} [T_1, T_2],$$

$$E^{i\omega_n T_0} \text{Sin}[n\theta] A_{2,n} [T_1, T_2], E^{-i\omega_n T_0} \text{Sin}[n\theta] \bar{A}_{2,n} [T_1, T_2] \}$$

$$\text{possibleTerms} = \text{Flatten}[\text{If}[\text{Head}[\#] ==$$

$$= \text{Plus}, \text{List}@@\#, \#] \& / @ (\text{Outer}[\text{Times}, \text{collectForm}, \text{collectForm}] / \text{Flatten} // \text{Union} // \text{TrigReduce} // \text{Expand})] /. c_? \text{NumberQ} \text{form}_ \rightarrow$$

$$> \text{form} // \text{Union};$$

possibleTerms/.displayRule

$$\{ E^{2iT_0\omega_n} A_{1,n}^2, E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] A_{1,n}^2, E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] A_{1,n}^2,$$

$$E^{2iT_0\omega_n} A_{1,n} A_{2,n}, E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] A_{1,n} A_{2,n}, E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] A_{1,n} A_{2,n},$$

$$E^{2iT_0\omega_n} A_{2,n}^2, E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] A_{2,n}^2, E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] A_{2,n}^2, A_{1,n} \bar{A}_{1,n},$$

$$\text{Cos}[2n\theta] A_{1,n} \bar{A}_{1,n}, \text{Sin}[2n\theta] A_{1,n} \bar{A}_{1,n}, A_{2,n} \bar{A}_{1,n}, \text{Cos}[2n\theta] A_{2,n} \bar{A}_{1,n},$$

$$\text{Sin}[2n\theta] A_{2,n} \bar{A}_{1,n}, E^{-2iT_0\omega_n} \bar{A}_{1,n}^2, E^{-2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] \bar{A}_{1,n}^2,$$

$$E^{-2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] \bar{A}_{1,n}^2, A_{1,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Cos}[2n\theta] A_{1,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Sin}[2n\theta] A_{1,n} \bar{A}_{2,n},$$

$$A_{2,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Cos}[2n\theta] A_{2,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Sin}[2n\theta] A_{2,n} \bar{A}_{2,n}, E^{-2iT_0\omega_n} \bar{A}_{1,n} \bar{A}_{2,n},$$

$$E^{-2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] \bar{A}_{1,n} \bar{A}_{2,n}, E^{-2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] \bar{A}_{1,n} \bar{A}_{2,n},$$

$$E^{-2iT_0\omega_n} \bar{A}_{2,n}^2, E^{-2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] \bar{A}_{2,n}^2, E^{-2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] \bar{A}_{2,n}^2 \}$$

possibleTerms//Length

30

Σημειώνουμε ότι το συζυγές μιγαδικό του κάθε όρου στα δεξιά μέλη των order2Eq είναι επίσης ένας όρος των δεξιών τους μελών. Επομένως, χρησιμοποιούμε αυτό το γεγονός για να περιορίσουμε την άλγεβρα και να υπολογίσουμε μόνο τις ειδικές λύσεις που αντιστοιχούν σε σχεδόν μισούς από τους όρους, επειδή οι ειδικές λύσεις που αντιστοιχούν στους εναπομείναντες όρους είναι τα συζυγή

μιγαδικά εκείνων που ήδη υπολογίστηκαν. Κατόπιν, εκφράζουμε τη δεξιά πλευρά της $order2Eq[[i]]$ ως το άθροισμα των δύο όρων, $tempList[[i]]$ και του συζυγούς μιγαδικού της, για $i = 1$ και 2 , σύμφωνα με :

```
Do[eq2rhsList = List@@order2Eq[[i, 2]]; tempList[i] = eq2rhsList;
If[term = #/.conjugateRule; MemberQ[tempList[i], term],
tempList[i] = Complement[tempList[i], {#}];
If[# === term, AppendTo[tempList[i],  $\frac{1}{2}$  #]]&/@Reverse[eq2rhsList],
{i, 2}]
```

Κατόπιν, προσδιορίζουμε τους συντελεστές της $possibleTerms$ σε καθεμιά από τις $tempList[[i]]$, σύμφωνα με :

```
Do[rhs = Plus@@tempList[i]/.SCond1//TrigReduce//Expand; coeffs[i]
= Coefficient[rhs, possibleTerms]/.(Cos|Sin)[2nθ]-> 0, {i, 2}]
```

και τους συμβολίζουμε με $c_{i,j}$ ως :

```
symbolList1 = MapIndexed[If[#1 = !
= 0, cSequence@@#2, 0 &, Array[coeffs, 2], {2}]
```

```
{{c1,1, c1,2, 0,0,0, c1,6, c1,7, c1,8, 0, c1,10, c1,11, 0,
0,0, c1,15, 0,0,0,0,0,0, c1,22, c1,23, 0,0,0,0,0,0,0},
{0,0, c2,3, 0, c2,5, 0,0,0, c2,9, 0,0, c2,12, 0, c2,14,
0,0,0,0,0,0,0,0,0, c2,24, 0,0,0,0,0,0}}
```

```
symbolList2[s_] = Plus@@symbolList1/.c->s;
symbolList2[s_] = Plus @@ symbolList1/.c->s;
```

όπου $c_{i,j} = coeffs[i][[j]]$. Επιπλέον, συσχετίζουμε με τον j -οστό όρο στην $symbolList1[[i]]$ τον απροσδιόριστο συντελεστή $d_{i,j}$ στο w_2 και τον απροσδιόριστο συντελεστή $e_{i,j}$ στο ψ_2 μέσω αντικατάστασης του $c_{i,j}$ στην $symbolList1[[i]]$ με τα $d_{i,j}$ και $e_{i,j}$, σύμφωνα με :

```
sol2temp =
{w2 -> Function[{θ, T0, T1, T2}, symbolList2[d].possibleTerms//Evaluate],
ψ2 -> Function[{θ, T0, T1, T2}, symbolList2[e].possibleTerms//Evaluate]};
```

Αντικαθιστώντας την $sol2temp$ στα αριστερά μέλη των δεύτερης-τάξης εξισώσεων, των $order2Eq$, θέτοντας τον συντελεστή του j όρου στη $possibleTerms$ στην i τάξης εξίσωσης ίσο με $c_{i,j}$, και λύνοντας τις προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις, λαμβάνουμε :

```
deRule = Solve[Flatten[Table[Coefficient[order2Eq[[i, 1]]
/. sol2temp, possibleTerms]/.f_[2nθ]-> 0, {i, 2}]] =
= Flatten[symbolList1]//Thread/
/Union, {symbolList2[d], symbolList2[e]}//Flatten//Union/
/Rest][[1]]
```

$$\begin{aligned}
 & \{e_{1,11} \rightarrow 0, e_{1,7} \rightarrow 0, d_{1,10} \rightarrow \frac{c_{1,10}}{1+\alpha^2}, d_{1,22} \rightarrow \frac{c_{1,22}}{1+\alpha^2}, \\
 & e_{1,11} \rightarrow 0, e_{1,15} \rightarrow 0, e_{1,23} \rightarrow 0, e_{2,12} \rightarrow -\frac{-2nc_{1,11} - c_{2,12}}{4n^2(-1+4n^2)^2\alpha^2} + \frac{c_{2,12}}{4n^2}, \\
 & e_{2,14} \rightarrow \frac{c_{2,14}}{4n^2} + \frac{-2nc_{1,15} + c_{2,14}}{4n^2(-1+4n^2)^2\alpha^2}, e_{2,24} \rightarrow -\frac{-2nc_{1,23} - c_{2,24}}{4n^2(-1+4n^2)^2\alpha^2} + \frac{c_{2,24}}{4n^2}, \\
 & d_{1,1} \rightarrow \frac{c_{1,1}}{1+\alpha^2 - 4\omega_n^2}, d_{1,7} \rightarrow \frac{c_{1,7}}{1+\alpha^2 - 4\omega_n^2}, e_{1,2} \rightarrow 0, e_{1,6} \rightarrow 0, e_{1,8} \rightarrow 0, e_{2,3} \rightarrow \\
 & \frac{c_{2,3}}{4n^2 - 4\omega_n^2} \\
 & - \frac{2n(-(4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,2} - 2nc_{2,3})}{(4n^2 - 4\omega_n^2)(-4n^2 + (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2))}, \\
 & e_{2,5} \rightarrow \frac{c_{1,6}}{2n} + \frac{(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2)((4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,6} - 2nc_{2,5})}{2n(4n^2 - (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2))}, \\
 & e_{2,9} \rightarrow -\frac{c_{1,8}}{2n} - \frac{(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2)((4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,8} + 2nc_{2,9})}{2n(4n^2 - (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2))}, \\
 & d_{1,11} \rightarrow -\frac{-2nc_{1,11} - c_{2,12}}{2n(-1+4n^2)^2\alpha^2}, d_{1,15} \rightarrow -\frac{-2nc_{1,15} + c_{2,14}}{2n(-1+4n^2)^2\alpha^2}, \\
 & d_{1,23} \rightarrow -\frac{-2nc_{1,23} - c_{2,24}}{2n(-1+4n^2)^2\alpha^2}, d_{2,12} \rightarrow 0, d_{2,14} \rightarrow 0, d_{2,24} \rightarrow 0, \\
 & d_{1,2} \rightarrow -\frac{-(4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,2} - 2nc_{2,3}}{-4n^2 + (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2)}, \\
 & d_{1,6} \rightarrow -\frac{(4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,6} - 2nc_{2,5}}{4n^2 - (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2)}, \\
 & d_{1,8} \rightarrow -\frac{(4n^2 - 4\omega_n^2)c_{1,8} + 2nc_{2,9}}{4n^2 - (4n^2 - 4\omega_n^2)(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2)}, \\
 & d_{2,3} \rightarrow 0, d_{2,5} \rightarrow 0, d_{2,9} \rightarrow 0\}
 \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις στην δεύτερης-τάξης λύση, εισάγουμε τον συμβολισμό:

`paperNotationRule = Thread[(symbolList2[c]//Union//Rest)->`

$$\{c_2, c_1, 2c_1, c_2, -c_1, -c_4, -\frac{1}{2}c_3, -c_3, -c_4, \frac{1}{2}c_3, d_1, -2d_1, -d_1, -\frac{1}{2}d_2, d_2, \frac{1}{2}d_2\} \sim \text{Join} \sim$$

$$\begin{aligned}
 & \{(1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2) - \\
 & \quad > \frac{\Delta_n + 4n^2}{4n^2 - 4\omega_n^2}, \text{Power}[-1 + 4n^2, -2] \text{Power}[\alpha, -2] \rightarrow \frac{4n^2}{\theta_n}\}
 \end{aligned}$$

$$\{c_{1,1} \rightarrow c_2, c_{1,2} \rightarrow c_1, c_{1,6} \rightarrow 2c_1, c_{1,7} \rightarrow c_2, c_{1,8} \rightarrow -c_1,$$

$$c_{1,10} \rightarrow -c_4, c_{1,11} \rightarrow -\frac{c_3}{2}, c_{1,15} \rightarrow -c_3, c_{1,22} \rightarrow -c_4, c_{1,23} \rightarrow \frac{c_3}{2}$$

$$c_{2,3} \rightarrow d_1, c_{2,5} \rightarrow -2d_1, c_{2,9} \rightarrow -d_1, c_{2,12} \rightarrow -\frac{d_2}{2}, c_{2,14} \rightarrow d_2, c_{2,24} \rightarrow \frac{d_2}{2},$$

$$1 + \alpha^2 - 8n^2\alpha^2 + 16n^4\alpha^2 - 4\omega_n^2 \rightarrow \frac{4n^2 + \Delta_n}{4n^2 - 4\omega_n^2}, \frac{1}{(-1 + 4n^2)^2\alpha^2} \rightarrow \frac{4n^2}{\theta_n}]$$

Κατόπιν, εκφράζουμε τη δεύτερης-τάξης λύση ως :

w2Sol = symbolList2[d].possibleTerms/.deRule//.paperNotationRule;

w2Sol/.displayRule

$$\frac{E^{2iT_0\omega_n} c_2 A_{1,n}^2}{1 + \alpha^2 - 4\omega_n^2} - \frac{E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta](-2nd_1 - c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))A_{1,n}^2}{\Delta_n} +$$

$$\frac{E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta](4nd_1 + 2c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))A_{1,n}A_{2,n}}{\Delta_n} + \frac{E^{2iT_0\omega_n} c_2 A_{2,n}^2}{1 + \alpha^2 - 4\omega_n^2} +$$

$$\frac{E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta](-2nd_1 - c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))A_{2,n}^2}{\Delta_n} - \frac{c_4 A_{1,n} \bar{A}_{1,n}}{1 + \alpha^2}$$

$$\frac{2n \text{Cos}[2n\theta](nc_3 + \frac{d_2}{2})A_{1,n} \bar{A}_{1,n}}{\theta_n} - \frac{2n \text{Sin}[2n\theta](2nc_3 + d_2)A_{2,n} \bar{A}_{1,n}}{\theta_n}$$

$$\frac{c_4 A_{2,n} \bar{A}_{2,n}}{1 + \alpha^2} - \frac{2n \text{Cos}[2n\theta](-nc_3 - \frac{d_2}{2})A_{2,n} \bar{A}_{2,n}}{\theta_n}$$

ψ2Sol = symbolList2[e].possibleTerms/.deRule//.paperNotationRule/.

e_i → 0;

ψ2Sol/.displayRule

$$E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] \left(\frac{d_1}{4n^2 - 4\omega_n^2} - \frac{2n(-2nd_1 - c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))}{\Delta_n(4n^2 - 4\omega_n^2)} \right) A_{1,n}^2 +$$

$$E^{2iT_0\omega_n} \text{Cos}[2n\theta] \left(\frac{c_1}{n} - \frac{(4n^2 + \Delta_n)(4nd_1 + 2c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))}{2n\Delta_n(4n^2 - 4\omega_n^2)} \right) A_{1,n}A_{2,n} +$$

$$E^{2iT_0\omega_n} \text{Sin}[2n\theta] \left(\frac{c_1}{2n} + \frac{(4n^2 + \Delta_n)(-2nd_1 - c_1(4n^2 - 4\omega_n^2))}{2n\Delta_n(4n^2 - 4\omega_n^2)} \right) A_{2,n}^2 +$$

$$\text{Sin}[2n\theta] \left(-\frac{d_2}{8n^2} - \frac{nc_3 + \frac{d_2}{2}}{\theta_n} \right) A_{1,n} \bar{A}_{1,n} +$$

$$\text{Cos}[2n\theta] \left(\frac{d_2}{4n^2} + \frac{2nc_3 + d_2}{\theta_n} \right) A_{2,n} \bar{A}_{1,n} + \text{Sin}[2n\theta] \left(\frac{d_2}{8n^2} - \frac{-nc_3 - \frac{d_2}{2}}{\theta_n} \right) A_{2,n} \bar{A}_{2,n}$$

Εκφράζουμε αυτή τη λύση σε καθαρή συναρτησιακή μορφή ως :

sol2 =

{w₂ → Function[{θ, T₀, T₁, T₂},

w2Sol + (w2Sol/.conjugateRule)//Evaluate],

ψ₂ → Function[{θ, T₀, T₁, T₂},

$\psi 2 \text{Sol} + (\psi 2 \text{Sol} /. \text{conjugateRule}) // \text{Evaluate}]];$

8.2.3 Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Αντικαθιστώντας τις sol1 και sol2 στην $\text{eqEps}[3]$, προκύπτει :

```
order3Eq=Table[(eqEps[[1,i,1]]/.{w1->w3,
ψ1->ψ3})==(eqEps[[1,i,1]]/.{w1->w3,ψ1->ψ3})-(Subtract@@
eqEps[[3,i]]/.sol1/.sol2//TrigToExp//Expand),{i,2}];//Timing
{90.5 Second,Null}
```

Για να μετατρέψουμε τους όρους που δίνουν όρους μικρού διαιρέτη σε τρίτης-τάξης εξισώσεις, τις order3Eq , σε όρους που δίνουν προσωρινούς όρους, εισάγουμε τον κανόνα :

$\text{expRule1} =$

$\text{Exp}[\text{arg}_:]>$

$\text{Exp}[\text{Expand}[\text{arg}/.(\text{ResonanceCond}/.\text{Equal}\rightarrow\text{Rule})]/.\square^2 T_0 \rightarrow T_2];$

Κατόπιν, οι πηγές των προσωρινών όρων στην order3Eq , οι όροι οι ανάλογοι με την $\text{Exp}[\pm I n\theta + I \omega_n T_0]$, είναι :

$\text{ST2} =$

$\text{Expand}[\text{Coefficient}[\#[[2]]/. \text{Exp}[c1_. + \text{Complex}[0, s_]; \text{Abs}[s]! = 1]n\theta] \rightarrow 0/.$

$\text{expRule1}, \text{Exp}[I\omega_n T_0]]/. \text{Exp}[c1_. + \text{Complex}[0, m_]n\theta] \rightarrow$

$(\text{Cos}[n\theta] + \text{ImSin}[n\theta])\text{Exp}[c1]] \&/@\text{order3Eq}; // \text{Timing}$

$\{64.343 \text{ Second}, \text{Null}\}$

Αυτοί οι όροι αποτελούνται από τετραγωνικούς και κυβικούς όρους στα μιγαδικών-τιμών εύρη A_i . Οι κυβικοί όροι είναι ανάλογοι με :

$\text{cubicTerms} =$

$\text{Flatten}[\text{If}[\text{Head}[\#] === \text{Plus}, \text{List}@@\#, \#] \&/@$

$(\text{Nest}[\text{Outer}[\text{Times}, \text{collectForm}, \#] \&, \text{collectForm}, 2] // \text{Flatten} // \text{Union} //$

$\text{TrigReduce} // \text{Expand})] /.$

$\{f[s_n\theta] \rightarrow 0, \text{Exp}[c1_. + \text{Complex}[0, s_]; s! = 1]\omega_n T_0] \rightarrow 0\} / . \text{Exp}[_] \rightarrow 1 /.$

$c_? \text{NumberQform}_\rightarrow \text{form} // \text{Union} // \text{Rest};$

$\text{cubicTerms} /. \text{displayRule}$

$\{\text{Cos}[n\theta]A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n}, \text{Cos}[n\theta]A_{1,n}A_{2,n} \bar{A}_{1,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{1,n}A_{2,n} \bar{A}_{1,n},$

$\text{Cos}[n\theta]A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n}, \text{Cos}[n\theta]A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n},$

$\text{Cos}[n\theta]A_{1,n}A_{2,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{1,n}A_{2,n} \bar{A}_{2,n}, \text{Cos}[n\theta]A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n}, \text{Sin}[n\theta]A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n}\}$

Και, οι συντελεστές τους στην ST2 είναι :

$\text{coef2} = \text{Outer}[\text{Coefficient}, \text{ST2}, \text{cubicTerms}];$

που συμβολίζουμε με

$\text{symbolList3} = \text{MapIndexed}[\text{If}[\#1 == 0, g_{\text{Sequence}@@\#2, 0}] \&, \text{coef2}, \{2\}];$

notationRule = (symbolList3//Flatten//Union//Rest)-
 > {E₂, E₁, E₃, E₃, E₁, E₂, -G₂, G₁, -G₃, G₃, -G₁, G₂}//Thread

{g_{1,1} → E₂, g_{1,4} → E₁, g_{1,5} → E₃, g_{1,8} → E₃, g_{1,9} → E₁, g_{1,12} → E₂,

g_{2,2} → -G₂, g_{2,3} → G₁, g_{2,6} → -G₃, g_{2,7} → G₃, g_{2,10} → -G₁, g_{2,11} → G₂}

Σε όρους αυτού του συμβολισμού, η ST2 μπορεί να ξαναγραφεί ως :

ST2New = (#/.Thread[cubicTerms->0]&/@ST2) + symbolList3.cubicTerms/.
 notationRule/.D[SCond1,T₁];

ST2New/.displayRule

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} E^{\Gamma_2 \sigma} f \cos[n\theta] - 2I \cos[n\theta] (D_2 A_{1,n}) \omega_n - 2I (D_2 A_{2,n}) \sin[n\theta] \omega_n + \right. \\ & \cos[n\theta] E_2 A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n} + \sin[n\theta] E_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{1,n} + \cos[n\theta] E_3 A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n} + \\ & \sin[n\theta] E_3 A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n} + \cos[n\theta] E_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{2,n} + \sin[n\theta] E_2 A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n}, \\ & 2I \cos[n\theta] (D_2 A_{2,n}) \Gamma_n \omega_n - 2I (D_2 A_{1,n}) \sin[n\theta] \Gamma_n \omega_n - \sin[n\theta] G_2 A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n} + \\ & \cos[n\theta] G_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{1,n} - \sin[n\theta] G_3 A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n} + \\ & \left. \cos[n\theta] G_3 A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n} - \sin[n\theta] G_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{2,n} + \cos[n\theta] G_2 A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n} \right\} \end{aligned}$$

Οι συνθήκες επιλυσιμότητας της order3Eq απαιτούν το διάνυσμα ST2New να είναι ορθογωνικό κατά τη μεταφορά των modeShapes, δηλαδή :

SCond2=Expand[1/π*int[#, {θ, 0, 2π}&]/θ

(Transpose[modeShapes].ST2New)/.intRule1//.intRule2/.{int[Cos[s_]

Sin[s_],_]->0,int[f_[n θ]^2,_]->π]}==0//Thread;

SCond2/.displayRule

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} E^{\Gamma_2 \sigma} f - 2I (D_2 A_{1,n}) \omega_n - 2I (D_2 A_{1,n}) \Gamma_n^2 \omega_n + E_2 A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n} - \right. \\ & G_2 \Gamma_n A_{1,n}^2 \bar{A}_{1,n} + E_3 A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n} - G_3 \Gamma_n A_{2,n}^2 \bar{A}_{1,n} + E_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{2,n} - G_1 \Gamma_n A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{2,n} = \\ & = 0, \\ & -2I (D_2 A_{2,n}) \omega_n - 2I (D_2 A_{2,n}) \Gamma_n^2 \omega_n + E_1 A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{1,n} - G_1 \Gamma_n A_{1,n} A_{2,n} \bar{A}_{1,n} + \\ & \left. E_3 A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n} - G_3 \Gamma_n A_{1,n}^2 \bar{A}_{2,n} + E_2 A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n} - G_2 \Gamma_n A_{2,n}^2 \bar{A}_{2,n} == 0 \right\} \end{aligned}$$

8.3 Σχεδόν Τετράγωνες Πλάκες

Θεωρούμε τις μη-γραμμικές εγκάρσιες ταλαντώσεις μιας σχεδόν τετραγωνικής απλά υποστηριζόμενης πλάκας η οποία είναι αρχικώς επίπεδη. Εισάγουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x y z, με τους άξονες x και y να βρίσκονται στο ελεύθερο επίπεδο της μεσαίας επιφάνειας του δίσκου, και έστω u, v και w ότι συμβολίζουν τις μετατοπίσεις της μεσαίας επιφάνειας στις κατευθύνσεις x, y και z, αντίστοιχα. Τότε, οι εξισώσεις κίνησης είναι (Chu και Hermann, 1956) :

BH[w] = Biharmonic[w[x, y, t], Cartesian[x, y, z]]

w^(0,4,0)[x, y, t] + 2w^(2,2,0)[x, y, t] + w^(4,0,0)[x, y, t]

EOM = {

$$u_{,xx} + w_x w_{,xx} + v(v_{,xy} + w_y w_{,xy}) + \frac{1}{2}(1-v)(u_{,yy} + v_{,xy} + w_x w_{,yy} + w_y w_{,xy}) = c_p^{-2} u_{,tt}$$

$$v_{,yy} + w_y w_{,yy} + v(u_{,xy} + w_x w_{,xy}) + \frac{1}{2}(1-v)(v_{,xx} + u_{,xy} + w_y w_{,xx} + w_x w_{,xy}) = c_p^{-2} v_{,tt}$$

$$\frac{1}{12} h^2 BH[w] - N_1^i \square_{,xx} - 2N_{12}^i w_{,xy} - N_2^i w_{,yy} - u_x w_{,xx} - \frac{1}{2} w_x^2 w_{,xx} - v_y w_{,yy} - \frac{1}{2} w_y^2 w_{,yy} -$$

$$v(v_y w_{,xx} + \frac{1}{2} w_y^2 w_{,xx} + u_x w_{,yy} + \frac{1}{2} w_x^2 w_{,yy}) - (1-v)(u_y + v_x + w_x w_y) w_{,xy} == -c_p^{-2} (w_x u_{,tt} + w_y v_{,tt} + w_{,tt}) + \frac{F(1-v^2)}{E_s h}$$

}/. (s: u|v|w)_{m_} :> \partial_{,m} s[x, y, t];

και οι οριακές συνθήκες είναι :

BC = {{u[x, y, t] == 0, w[x, y, t] == 0, \partial_{,xx} w[x, y, t] == 0}/. {{x-> 0}, {x-> a}}, {v[x, y, t] == 0, w[x, y, t] == 0, \partial_{,yy} w[x, y, t] == 0}/. {{y-> 0}, {y-> b}}}/Flatten

{u[0, y, t] == 0, w[0, y, t] == 0, w^{(2,0,0)}[0, y, t] == 0, u[a, y, t] == 0,

w[a, y, t] == 0, w^{(2,0,0)}[a, y, t] == 0, v[x, 0, t] == 0, w[x, 0, t] == 0,

w^{(0,2,0)}[x, 0, t] == 0, v[x, b, t] == 0, w[x, b, t] == 0, w^{(0,2,0)}[x, b, t] == 0}

όπου $c_p^2 = E_s / (\rho(1 - \nu^2))$, είναι το μέτρο του Young, ν είναι ο λόγος του Poisson, ρ και h είναι η πυκνότητα και το πάχος της πλάκας, αντίστοιχα, F είναι το εγκάρσιο φορτίο, οι N_k^i είναι οι ομοιόμορφα κατανομημένες εντός της πλάκας εφαρμοσμένες ακραίες φορτίσεις, και a και b είναι τα μήκη των ακρών (παρυφών), με $b \approx a$. Οι EOM αποκαλούνται συχνά ως το δυναμικό ανάλογο των εξισώσεων von Karman επειδή ανάγονται σε εξισώσεις von Karman (1910) με την απουσία των χρονικών παραγώγων.

Για λεπτές πλάκες, το h/a είναι πολύ μικρό, το οποίο συμβολίζουμε με $\sqrt{\epsilon}$. Κατόπιν, εισάγουμε την αναλογία πλευράς $c = a/b$, ορίζουμε τον κανόνα :

scaleRule1={h^2->\epsilon a^2, a->c b};

και αδιαστασιοποιούμε τις μεταβλητές ως :

charT = \sqrt{12/\epsilon a/c_p}; (* characteristic time *)

x-> ax, y-> by, t-> charTt};

Αντικαθιστώντας τους nondimRule και scaleRule1 στις EOM και BC και θεωρώντας την περίπτωση μη ύπαρξης εντός επιπέδου φορτίων παρυφών λαμβάνουμε :

EOM1 = (a(Subtract@@#)/.N_{k_}^i -> 0/.nondimRule//.scaleRule1//Expand) = 0&/@EOM;

BC1 = BC/. nondimRule/. c_h_[a_, t]:> h[a, t]

{u[0, y, t] == 0, w[0, y, t] == 0, w^(2,0,0)[0, y, t] == 0, u[1, y, t] == 0,

w[1, y, t] == 0, w^(2,0,0)[1, y, t] == 0, v[x, 0, t] == 0, w[x, 0, t] == 0,

w^(0,2,0)[x, 0, t] == 0, v[x, 1, t] == 0, w[x, 1, t] == 0, w^(0,2,0)[x, 1, t] == 0}

Για να γράψουμε την EOM1 κατά έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον κανόνα κατάδειξης :

display1[expr_] := expr /. {Derivative[a_, b_, c_] [w_] [x, y, t] :> Subscript[w, Sequence @@ Join[Table[x, {a}], Table[y, {b}], Table[t, {c}]]]}

και λαμβάνουμε

EOM1[[1]]//display1

EOM1[[2]]//display1

EOM1[[3]]//display1

$$-\frac{1}{12}\epsilon u_{t,t} + u_{x,x} + \frac{1}{2}c^2 u_{y,y} - \frac{1}{2}c^2 v u_{y,y} + \frac{1}{2}c v_{x,y} + \frac{1}{2}c v v_{x,y} +$$

$$w_x w_{x,x} + \frac{1}{2}c^2 w_y w_{x,y} + \frac{1}{2}c^2 v w_y w_{x,y} + \frac{1}{2}c^2 w_x w_{y,y} - \frac{1}{2}c^2 v w_x w_{y,y} == 0$$

$$\frac{1}{2}c u_{x,y} + \frac{1}{2}c v u_{x,y} - \frac{1}{12}\epsilon v_{t,t} + \frac{v_{x,x}}{2} - \frac{1}{2}v v_{x,x} + c^2 v_{y,y} +$$

$$\frac{1}{2}c w_y w_{x,x} - \frac{1}{2}c v w_y w_{x,x} + \frac{1}{2}c w_x w_{x,y} + \frac{1}{2}c v w_x w_{x,y} + c^3 w_y w_{y,y} == 0$$

$$-\frac{F}{12} + \frac{1}{12}\epsilon w_x u_{t,t} + \frac{1}{12}c \epsilon w_y v_{t,t} + \frac{1}{12}\epsilon w_{t,t} - u_x w_{x,x} - c v v_y w_{x,x} - \frac{1}{2}w_x^2 w_{x,x} - \frac{1}{2}c^2 v w_y^2 w_{x,x} -$$

$$c^2 u_y w_{x,y} + c^2 v u_y w_{x,y} - c v_x w_{x,y} + c v v_x w_{x,y} - c^2 w_x w_y w_{x,y} + c^2 v w_x w_y w_{x,y} - c^2 v u_x w_{y,y} -$$

$$c^3 v_y w_{y,y} - \frac{1}{2}c^2 v w_x^2 w_{y,y} - \frac{1}{2}c^4 w_y^2 w_{y,y} + \frac{1}{12}\epsilon w_{x,x,x,x} + \frac{1}{6}c^2 \epsilon w_{x,x,y,y} + \frac{1}{12}c^4 \epsilon w_{y,y,y,y} == 0$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να ασχοληθούμε απευθείας με τις EOM1 και BC1. Για να μετασχηματίσουμε τις χρονικές παραγώγους στην EOM1 σε όρους των κλιμάκων T_0 και T_1 , θέτουμε

multiScales = {(dv: u|v|w)[x_, y_, t] -> dv[x, y, T₀, T₁],

Derivative[m_, n_, o_] [u_] [x_, y_, t] -> dt[o] [D[u[x, y, T₀, T₁], {x, m}, {y, n}]]];

Κατόπιν, αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση της μορφής

solRule = {(dv: u|v) -> (Evaluate[Sum[εⁱ⁺¹ dv_j[#1, #2, #3, #4], {j, 2}]]&),

w -> (Evaluate[Sum[εⁱ w_j[#1, #2, #3, #4], {j, 3}]]&)}

{dv: u|v -> (ε² dv₁[#1, #2, #3, #4] + ε³ dv₂[#1, #2, #3, #4]&),

w -> (ε w₁[#1, #2, #3, #4] + ε² w₂[#1, #2, #3, #4] + ε³ w₃[#1, #2, #3, #4]&)}

όπου #1, #2, #3 και #4 αντιπροσωπεύουν τα x , y , T_0 και T_1 , αντίστοιχα.

Εισάγουμε την αποσυντονιστική σ_1 για να περιγράψουμε την εγγύτητα των μηκών παρυφών (edge lengths) a και b , θεωρούμε την περίπτωση του κύριου συντονισμού, και έτσι θέτουμε

$$\text{scaleRule2} = \{c \rightarrow 1 + \epsilon \sigma_1, F \rightarrow \epsilon^3 F[x, y] \text{Cos}[\Omega T_0]\};$$

Αντικαθιστώντας τις `multiScales`, `solRule` και `scaleRule2` στις `EOM1` και `BC1`, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

$$\text{eq83a} = (\text{EOM1} /. \text{multiScales} /. \text{solRule} /. \text{scaleRule2} // \text{TrigToExp} // \text{ExpandAll}) /. \epsilon^n /; n > 3 \rightarrow 0;$$

$$\text{bc83a} = \text{BC1} /. \text{multiScales} /. \text{solRule};$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στις `eq83a` και `bc83a`, προκύπτει :

$$\begin{aligned} \text{bcEpsuv} &= \text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract}@@\#, \epsilon] = \\ &= 0] \& / \text{Select}[\text{bc83a}, \text{FreeQ}[\#, w] \&] // \text{Transpose} // \text{Rest} // \text{Rest} \\ &\{\{u_1[0, y, T_0, T_1] == 0, u_1[1, y, T_0, T_1] == 0, v_1[x, 0, T_0, T_1] == 0, v_1[x, 1, T_0, T_1] = \\ &= 0\}, \\ &\{u_2[0, y, T_0, T_1] == 0, u_2[1, y, T_0, T_1] == 0, v_2[x, 0, T_0, T_1] == 0, v_2[x, 1, T_0, T_1] = \\ &= 0\}\} \end{aligned}$$

$$\text{bcEpsw} = \text{Thread}[\text{CoefficientList}[\text{Subtract}@@\#, \epsilon] = \\ = 0] \& / \text{Select}[\text{bc83a}, ! \text{FreeQ}[\#, w] \&] // \text{Transpose} // \text{Rest}$$

$$\begin{aligned} &\{\{w_1[0, y, T_0, T_1] == 0, w_1^{(2,0,0,0)}[0, y, T_0, T_1] == 0, \\ &w_1[1, y, T_0, T_1] == 0, w_1^{(2,0,0,0)}[1, y, T_0, T_1] == 0, w_1[x, 0, T_0, T_1] == 0, \\ &w_1^{(0,2,0,0)}[x, 0, T_0, T_1] == 0, w_1[x, 1, T_0, T_1] == 0, w_1^{(0,2,0,0)}[x, 1, T_0, T_1] == 0\}, \\ &\{w_2[0, y, T_0, T_1] == 0, w_2^{(2,0,0,0)}[0, y, T_0, T_1] == 0, w_2[1, y, T_0, T_1] == 0, \\ &w_2^{(2,0,0,0)}[1, y, T_0, T_1] == 0, w_2[x, 0, T_0, T_1] == 0, w_2^{(0,2,0,0)}[x, 0, T_0, T_1] == 0, \\ &w_2[x, 1, T_0, T_1] == 0, w_2^{(0,2,0,0)}[x, 1, T_0, T_1] == 0\}, \\ &\{w_3[0, y, T_0, T_1] == 0, w_3^{(2,0,0,0)}[0, y, T_0, T_1] == 0, w_3[1, y, T_0, T_1] == 0, \\ &w_3^{(2,0,0,0)}[1, y, T_0, T_1] == 0, w_3[x, 0, T_0, T_1] == 0, w_3^{(0,2,0,0)}[x, 0, T_0, T_1] == 0, \\ &w_3[x, 1, T_0, T_1] == 0, w_3^{(0,2,0,0)}[x, 1, T_0, T_1] == 0\}\} \end{aligned}$$

Κατόπιν, εισάγουμε τον κανόνα κατάδειξης :

$$\begin{aligned} \text{displayRule1} &= \\ &\{\text{Derivative}[a, b, c_][w_][x, y, T_0, _]: > \\ &\text{SequenceForm}[\text{If}[\text{arg1} = \text{Times}@@\text{MapIndexed}[D_{\#2[[1]]-1} \&, \{c\}]; \text{arg1} = ! \\ &= 1, \text{arg1}, ""], \\ &\text{Subscript}[w, \text{Sequence}@@\text{Join}[\{i\}, \text{Table}[x, \{a\}], \text{Table}[y, \{b\}]]], \end{aligned}$$

Derivative[a_][A_i_][_]:

> SequenceForm[Times@@MapIndexed[D_{#2[[1]]}^{#1}&, {a}], A_i],

Derivative[a_][Ā_i_][_]:

> SequenceForm[Times@@MapIndexed[D_{#2[[1]]}^{#1}&, {a}], Ā_i],

w_{-i}[_ T₀, _] -> w_i, A_i[_] -> A_i, Ā_i[_] -> Ā_i;

και γράφουμε την eqEps κατά έναν πιο ακριβή τρόπο, ως :

(eqEpsm = {eqEps[[1,3]], eqEps[[1,{1,2}]], eqEps[[2,3]]})/. displayRule1

$$\left\{ \frac{1}{12} ({}''''w_{1,x,x,x,x}) + \frac{1}{6} ({}''''w_{1,x,x,y,y}) + \frac{1}{12} ({}''''w_{1,y,y,y,y}) + \frac{1}{12} (D_0^2 w_1) \right\} == 0,$$

$$\left\{ {}''''u_{1,x,x} + \frac{1}{2} ({}''''u_{1,y,y}) - \frac{1}{2} v ({}''''u_{1,y,y}) + \frac{1}{2} ({}''''v_{1,x,y}) + \frac{1}{2} v ({}''''v_{1,x,y}) \right. \\ \left. + ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,x,x}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) + \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) + \frac{1}{2} ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,y,y}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,y,y}) \right\} == 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{2} ({}''''u_{1,x,y}) + \frac{1}{2} v ({}''''u_{1,x,y}) + \frac{1}{2} ({}''''v_{1,x,x}) - \frac{1}{2} v ({}''''v_{1,x,x}) + {}''''v_{1,y,y} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,x}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,x}) + \frac{1}{2} ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,x,y}) + \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,x,y}) \right. \\ \left. + ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,y,y}) \right\} == 0,$$

$$\left\{ -\frac{1}{24} E^{-i\tau_0 \Omega} F[x,y] - \frac{1}{24} E^{i\tau_0 \Omega} F[x,y] - ({}''''u_{1,x}) ({}''''w_{1,x,x}) - v ({}''''v_{1,y}) ({}''''w_{1,x,x}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} ({}''''w_{1,x})^2 ({}''''w_{1,x,x}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,y})^2 ({}''''w_{1,x,x}) - ({}''''u_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) + v ({}''''u_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) - ({}''''v_{1,x}) ({}''''w_{1,x,y}) \right. \\ \left. + v ({}''''v_{1,x}) ({}''''w_{1,x,y}) - \right.$$

$$\left\{ ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) + v ({}''''w_{1,x}) ({}''''w_{1,y}) ({}''''w_{1,x,y}) - v ({}''''u_{1,x}) ({}''''w_{1,y,y}) \right. \\ \left. - ({}''''v_{1,y}) ({}''''w_{1,y,y}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} v ({}''''w_{1,x})^2 ({}''''w_{1,y,y}) - \frac{1}{2} ({}''''w_{1,y})^2 ({}''''w_{1,y,y}) + \frac{1}{12} ({}''''w_{2,x,x,x,x}) + \frac{1}{6} ({}''''w_{2,x,x,y,y}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{12} ({}''''w_{2,y,y,y,y}) + \frac{1}{12} (D_0^2 w_2) + \frac{1}{6} (D_0 D_1 w_1) + \frac{1}{3} ({}''''w_{1,x,x,y,y}) \sigma_1 + \frac{1}{3} ({}''''w_{1,y,y,y,y}) \sigma_1 \right\} \\ == 0$$

8.3.1 1^{ης} τάξης λύση

Οι γραμμικές ταλαντώσεις διέπονται από τις eqEpsm[[1]] και hcEpsw[[1]], δηλαδή :

(order1Eq = eqEpsm[[1]])/. displayRule1

$$\frac{1}{12}(\text{""}w_{1,x,x,x,x}) + \frac{1}{6}(\text{""}w_{1,x,x,y,y}) + \frac{1}{12}(\text{""}w_{1,y,y,y,y}) + \frac{1}{12}(D_0^2 w_1) == 0$$

order1BC = bcEpsw[[1]]

$$\{w_1[0, y, T_0, T_1] == 0, w_1^{(2,0,0,0)}[0, y, T_0, T_1] == 0,$$

$$w_1[1, y, T_0, T_1] == 0, w_1^{(2,0,0,0)}[1, y, T_0, T_1] == 0, w_1[x, 0, T_0, T_1] == 0,$$

$$w_1^{(0,2,0,0)}[x, 0, T_0, T_1] == 0, w_1[x, 1, T_0, T_1] == 0, w_1^{(0,2,0,0)}[x, 1, T_0, T_1] == 0\}$$

Έπεται από τις order1Eq και order1BC ότι οι γραμμικές συναρτήσεις σχήματος και οι σχετικές τους συχνότητες δίνονται από :

$$\text{modeshapes} = \{\phi_{m,n} : > (\text{Sin}[m\pi\#1]\text{Sin}[n\pi\#2]\&)\};$$

$$\text{frequencies} = \{\omega_{m,n} : > (m^2 + n^2)\pi^2\};$$

Για να μελετήσουμε την περίπτωση του 1:1 εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις mn-οστές και nm-οστές μορφές, θέτουμε :

w1sol =

$$\{w_1 \rightarrow \text{Function}[\{x, y, T_0, T_1\}, A_1[T_1]E^{i\omega_{m,n}T_0} \phi_{m,n}[x, y] + \bar{A}_1[T_1]E^{-i\omega_{m,n}T_0} \phi_{m,n}[x, y] +$$

$$A_2[T_1]E^{i\omega_{n,m}T_0} \phi_{n,m}[x, y] + \bar{A}_2[T_1]E^{-i\omega_{n,m}T_0} \phi_{n,m}[x, y]\};$$

8.3.2 2^{ης} τάξης λύση

Αντικαθιστώντας την w1sol στην eqEpsm[[2]], λαμβάνουμε :

$$\text{order2Equ} = (\text{eqEpsm}[[2,1,1]]/.w_1 \rightarrow (0\&)) ==$$

$$((\text{eqEpsm}[[2,1,1]]/.w_1 \rightarrow (0\&)) - \text{eqEpsm}[[2,1,1]]/.w1sol/.modeshapes//\text{TrigReduce}//\text{Expand})//\text{Timing}$$

{4.39 Second, Null}

$$\text{order2Eqv} = (\text{eqEpsm}[[2,2,1]]/.w_1 \rightarrow (0\&)) ==$$

$$(\text{eqEpsm}[[2,2,1]]/.w_1 \rightarrow (0\&)) - \text{eqEpsm}[[2,2,1]]/.w1sol/.modeshapes//\text{TrigReduce}//\text{Expand})//\text{Timing}$$

{4.28 Second, Null}

Οι σχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες είναι :

$$\text{order2BC} = \text{bcEpsuv}[[1]]$$

$$\{u_1[0, y, T_0, T_1] == 0, u_1[1, y, T_0, T_1] == 0, v_1[x, 0, T_0, T_1] == 0, v_1[x, 1, T_0, T_1] == 0\}$$

Για να λάβουμε ειδικές λύσεις για τα u_1 και v_1 , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναζητούμε όλους τους δυνατούς όρους που εμφανίζονται στα δεξιά μέλη των order2Equ και order2Eqv :

$$\text{possibleTerms1} = \text{Cases}[\{\text{order2Equ}[[2]], \text{order2Eqv}[[2]]\}, _ \text{Sin}[a_] E^{b_ } : > \text{Sin}[a] E^{b, \infty} // \text{Union};$$

possibleTerms2 = possibleTerms1/.Exp[_]->1//Union;

possibleTerms = Join[possibleTerms1, possibleTerms2]

$\{E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x], E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi y], E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi y],$
 $E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi y], E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x - 2m\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x - 2m\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x + 2m\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2n\pi x + 2m\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x - 2n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x - 2n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y$
 $- n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y$
 $- n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y$
 $- n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y$
 $+ n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y$
 $+ n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y$
 $+ n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y$
 $+ n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y], E^{-2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x + 2n\pi y],$
 $E^{2iT_0\omega_{m,n}} \sin[2m\pi x + 2n\pi y], \sin[2m\pi x], \sin[2n\pi x], \sin[2m\pi y],$
 $\sin[2n\pi y], \sin[2n\pi x - 2m\pi y], \sin[2n\pi x + 2m\pi y], \sin[2m\pi x - 2n\pi y],$
 $\sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y], \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y],$
 $\sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y], \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y],$
 $\sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y], \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y],$
 $\sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y], \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y], \sin[2m\pi x$
 $+ 2n\pi y]\}$

που ικανοποιούν την order2BC. Ορίζουμε κατόπιν τις ακόλουθες λίστες συμβόλων για να αναπαραστήσουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές.

usymbolList = Table[c_i, {i, Length[possibleTerms]}]

{c₁, c₂, c₃, c₄, c₅, c₆, c₇, c₈, c₉, c₁₀, c₁₁, c₁₂, c₁₃, c₁₄, c₁₅, c₁₆, c₁₇,
c₁₈, c₁₉, c₂₀, c₂₁, c₂₂, c₂₃, c₂₄, c₂₅, c₂₆, c₂₇, c₂₈, c₂₉, c₃₀, c₃₁, c₃₂,
c₃₃, c₃₄, c₃₅, c₃₆, c₃₇, c₃₈, c₃₉, c₄₀, c₄₁, c₄₂, c₄₃, c₄₄, c₄₅, c₄₆, c₄₇, c₄₈}

vsymbolList = usymbolList/.c -> d

{d₁, d₂, d₃, d₄, d₅, d₆, d₇, d₈, d₉, d₁₀, d₁₁, d₁₂, d₁₃, d₁₄, d₁₅, d₁₆, d₁₇,
d₁₈, d₁₉, d₂₀, d₂₁, d₂₂, d₂₃, d₂₄, d₂₅, d₂₆, d₂₇, d₂₈, d₂₉, d₃₀, d₃₁, d₃₂,
d₃₃, d₃₄, d₃₅, d₃₆, d₃₇, d₃₈, d₃₉, d₄₀, d₄₁, d₄₂, d₄₃, d₄₄, d₄₅, d₄₆, d₄₇, d₄₈}

Κατόπιν, εκφράζουμε τη λύση ως :

u1sol = u₁ -> Function[{x, y, T₀, T₁}, usymbolList.possibleTerms//Evaluate];

v1sol = v₁ -> Function[{x, y, T₀, T₁}, vsymbolList.possibleTerms//Evaluate];

Αντικαθιστώντας τη u1sol και τη v1sol στις order2Eqn και order2Eqv, συλλέγοντας τους συντελεστές των possibleTerms, και λύνοντας για τις usymbolList και vsymbolList, λαμβάνουμε :

**algEq1 = Coefficient[Subtract@@order2Eqv/.u1sol/.v1sol, possibleTerms] =
= 0/.Exp[_T₀] -> 0//Thread;//Timing**

{67.45 Second, Null}

**algEq2 = Coefficient[Subtract@@order2Eqv/.u1sol/.v1sol, possibleTerms] =
= 0/.Exp[_T₀] -> 0//Thread;//Timing**

{65.91 Second, Null}

**symbolRule1 = Solve[Join[algEq1, algEq2], Join[usymbolList, vsymbolList]][[1]]/
/Simplify**

$$\begin{aligned} \{c_1 \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)\bar{A}_1[T_1]^2}{16m}, c_2 \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)A_1[T_1]^2}{16m}, c_3 \\ \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)\bar{A}_2[T_1]^2}{16n}, \\ c_4 \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)A_2[T_1]^2}{16n}, c_{33} \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1]}{8m}, \\ c_{34} \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{8n}, d_5 \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)\bar{A}_2[T_1]^2}{16m}, \\ d_6 \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)A_2[T_1]^2}{16m}, d_7 \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)\bar{A}_1[T_1]^2}{16n}, d_8 \\ \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)A_1[T_1]^2}{16n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{35} &\rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2\nu)A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{8m}, d_{36} \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2\nu)A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1]}{8n}, c_5 \rightarrow 0, \\
 c_6 &\rightarrow 0, c_7 \rightarrow 0, c_8 \rightarrow 0, c_{35} \rightarrow 0, c_{36} \rightarrow 0, d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow 0, d_3 \rightarrow 0, d_4 \rightarrow 0, d_{33} \rightarrow 0, \\
 d_{34} &\rightarrow 0, c_9 \rightarrow \frac{1}{32}n\pi\bar{A}_2[T_1]^2, c_{10} \rightarrow \frac{1}{32}n\pi A_2[T_1]^2, c_{11} \rightarrow \frac{1}{32}n\pi\bar{A}_2[T_1]^2, \\
 c_{12} &\rightarrow \frac{1}{32}n\pi A_2[T_1]^2, c_{13} \rightarrow \frac{1}{32}m\pi\bar{A}_1[T_1]^2, c_{14} \rightarrow \frac{1}{32}m\pi A_1[T_1]^2, \\
 c_{31} &\rightarrow \frac{1}{32}m\pi\bar{A}_1[T_1]^2, c_{32} \rightarrow \frac{1}{32}m\pi A_1[T_1]^2, c_{37} \rightarrow \frac{1}{16}n\pi A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1], \\
 c_{38} &\rightarrow \frac{1}{16}n\pi A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1], c_{39} \rightarrow \frac{1}{16}m\pi A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1], c_{48} \rightarrow \frac{1}{16}m\pi A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1], \\
 d_9 &\rightarrow -\frac{1}{32}m\pi\bar{A}_2[\square_1]^2, d_{10} \rightarrow -\frac{1}{32}m\pi A_2[T_1]^2, d_{11} \rightarrow \frac{1}{32}m\pi\bar{A}_2[T_1]^2, \\
 d_{12} &\rightarrow \frac{1}{32}m\pi A_2[T_1]^2, d_{13} \rightarrow -\frac{1}{32}n\pi\bar{A}_1[T_1]^2, d_{14} \rightarrow -\frac{1}{32}n\pi A_1[T_1]^2, \\
 d_{31} &\rightarrow \frac{1}{32}n\pi\bar{A}_1[T_1]^2, d_{32} \rightarrow \frac{1}{32}n\pi A_1[T_1]^2, d_{37} \rightarrow -\frac{1}{16}m\pi A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1], \\
 d_{38} &\rightarrow \frac{1}{16}m\pi A_2[T_1]\bar{A}_2[T_1], d_{39} \rightarrow -\frac{1}{16}n\pi A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1], d_{48} \rightarrow \frac{1}{16}n\pi A_1[T_1]\bar{A}_1[T_1], \\
 c_{15} &\rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], c_{16} \\
 &\quad \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1], \\
 c_{21} &\rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], c_{22} \\
 &\quad \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1], \\
 c_{25} &\rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], c_{26} \\
 &\quad \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1], \\
 c_{27} &\rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], c_{28} \\
 &\quad \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1], \\
 c_{40} &\rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]), \\
 c_{43} &\rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]), \\
 c_{45} &\rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]).
 \end{aligned}$$

$$c_{46} \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]),$$

$$d_{15} \rightarrow -\frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], d_{16} \\ \rightarrow -\frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1],$$

$$d_{21} \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], d_{22} \\ \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1],$$

$$d_{25} \rightarrow -\frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], d_{26} \\ \rightarrow -\frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1],$$

$$d_{27} \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1], d_{28} \\ \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)A_1[T_1]A_2[T_1],$$

$$d_{40} \rightarrow -\frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]),$$

$$d_{43} \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]),$$

$$d_{45} \rightarrow -\frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]),$$

$$d_{46} \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+\nu)(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]),$$

$$c_{17} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$c_{18} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$c_{19} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$c_{20} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$c_{23} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$c_{24} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$c_{29} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$c_{30} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$c_{41} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m+n)},$$

$$c_{42} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m-n)},$$

$$c_{44} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m-n)},$$

$$c_{47} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m+n)},$$

$$d_{17} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$d_{18} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$d_{19} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$d_{20} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$d_{23} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$d_{24} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m-n)},$$

$$d_{29} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))\bar{A}_1[T_1]\bar{A}_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$d_{30} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))A_1[T_1]A_2[T_1]}{32(m+n)},$$

$$d_{41} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m+n)},$$

$$d_{42} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m-n)},$$

$$d_{44} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) + 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m-n)},$$

$$d_{47} \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+\nu) + n^2(-1+\nu) - 2mn(1+\nu))(A_2[T_1]\bar{A}_1[T_1] + A_1[T_1]\bar{A}_2[T_1])}{32(m+n)},$$

8.3.3 Συνθήκες επιλυσιμότητας

Αντικαθιστώντας τις $w1sol$, $u1sol$, και $v1sol$ στην $eqEpsm[[3]]$, προκύπτει :

```
order3Eq = (order1Eq[[1]]/.w1 -> w2) == ((order1Eq[[1]]/.w1 -> w2) -
eqEpsm[[3,1]]/.w1sol/.u1sol/.v1sol/.modeshapes//Expand);//Timing
{4.18 Second, Null}
```

Οι σχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες είναι :

```
order3BC = bcEpsw[[2]]
```

$$\{w_2[0, y, T_0, T_1] == 0, w_2^{(2,0,0,0)}[0, y, T_0, T_1] == 0,$$

$$w_2[1, y, T_0, T_1] == 0, w_2^{(2,0,0,0)}[1, y, T_0, T_1] == 0, w_2[x, 0, T_0, T_1] == 0,$$

$$w_2^{(0,2,0,0)}[x, 0, T_0, T_1] == 0, w_2[x, 1, T_0, T_1] == 0, w_2^{(0,2,0,0)}[x, 1, T_0, T_1] == 0\}$$

Για να περιγράψουμε την εγγύτητα του κύριου συντονισμού, εισάγουμε την αποσυντονιστική παράμετρο σ_2 , που ορίζεται από :

```
ResonanceCond = {Ω -> ωm,n + εσ2};
```

Επειδή τα ομογενή τμήματα των $order3Eq$ και $order3BC$ έχουν μια μη-τετριμμένη λύση, το αντίστοιχο μη-ομογενές πρόβλημα έχει μια λύση μόνο αν οι συνθήκες επιλυσιμότητας ικανοποιούνται. Αυτές οι συνθήκες απαιτούν η δεξιά πλευρά της $order3Eq$ να είναι ορθογωνική σε κάθε λύση του συζυγούς-ομογενούς προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα είναι αυτο-συζυγές.

Για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας, συλλέγουμε τους όρους που ίσως να δώσουν προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους με το $E^{i\omega_{m,n}T_0}$. Γι' αυτό το λόγο, χρησιμοποιούμε τον κανόνα :

```
expRule = Exp[a_];> Exp[Expand[a/.ResonanceCond]/.εT0 -> T1];
```

και λαμβάνουμε :

```
ST = Coefficient[order3Eq[[2]]/.expRule, Eiωm,nT0]/TrigReduce;//Timing
{132.53 Second, Null}
```

Ανάμεσα σε όλους τους χωρικά-εξαρτημένους μη-εντατικούς όρους στην ST , μόνο οι ακόλουθοι όροι δεν είναι ορθογωνικοί στους $modeshapes$:

```
terms1 = Cases[ST, Cos[mπx + a_.nπy;/; Abs[a] == 1], ∞]//Union
{Cos[mπx - nπy], Cos[mπx + nπy]}
```

```
terms2 = Cases[ST, Cos[nπx + a_.mπy;/; Abs[a] == 1], ∞]//Union
{Cos[nπx - mπy], Cos[nπx + mπy]}
```

Οι συντελεστές αυτών των όρων στην ST είναι :

terms1Coef = Coefficient[ST, terms1];

terms2Coef = Coefficient[ST, terms2];

Η προβολή της terms1 επί της $\text{Sin}[m \pi x] \text{Sin}[n \pi y]$ μπορεί να ληφθεί ως :

trigRule = {Cos[2_.π]-> 1, Sin[_.π]-> 0};

$$\text{proj1Coef} = \int_0^1 \int_0^1 \text{Sin}[m\pi x] \text{Sin}[n\pi y] \# \, dx \, dy \&/@\text{terms1}/. \text{trigRule}$$

$$\left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$$

και η προβολή της terms2 επί της $\text{Sin}[n \pi x] \text{Sin}[m \pi y]$ μπορεί να ληφθεί ως :

$$\text{proj2Coef} = \int_0^1 \int_0^1 \text{Sin}[n\pi x] \text{Sin}[m\pi y] \# \, dx \, dy \&/@\text{terms2}/. \text{trigRule}$$

$$\left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$$

Ο όρος εξαναγκασμού (έντασης) στην ST είναι :

f0 = ST/.Cos[_]-> 0

$$\frac{1}{24} E^{iT_1 \sigma_2} F[x, y]$$

Κατόπιν, οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν η ST να είναι ορθογωνική σε κάθε γραμμική ιδιοσυνάρτηση, την modeshapes, δηλ.:

**intRule3 = {int[a_fun_, a1_, b1_]:
> aint[fun, a1, b1]//FreeQ[a, First[a1]|First[b1]]};**

**SCond1 = Expand[24(int[Sin[mπx] Sin[nπy] f0, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
+ proj1Coef.terms1Coef/.symbolRule1//.intRule3/.int-
> Integrate)] == 0;**

**SCond2 = Expand[24(int[Sin[nπx] Sin[mπy] f0, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
+ proj2Coef.terms2Coef/.symbolRule1//.intRule3/.int-
> Integrate)] == 0;**

Για να εκφράσουμε αυτές τις συνθήκες επιλυσιμότητας σε μια πιο αναγνώσιμη μορφή, ορίζουμε :

basicTerms = {A1[T1]E^{iω_{m,n}T₀}, A1[T1]E^{-iω_{m,n}T₀}, A2[T1]E^{iω_{m,n}T₀}, A2[T1]E^{-iω_{m,n}T₀}};

**cubicTerms = (E^{-iω_{m,n}T₀} Nest[Outer[Times, basicTerms, #]&, basicTerms, 2]/
/Flatten)/.Exp[_T0]-> 0//Union//Rest**

{A1[T1]²A1[T1], A1[T1]A2[T1]A1[T1], A2[T1]²A1[T1],

A1[T1]²A2[T1], A1[T1]A2[T1]A2[T1], A2[T1]²A2[T1]}

Επειτα, συλλέγουμε τους συντελεστές των cubicTerms από τις SCond1, SCond2 και λαμβάνουμε :

coef1 = Coefficient[SCond1[[1]], cubicTerms]//Simplify

$$\left\{\frac{9}{8}\pi^4(-4m^2n^2v + m^4(-3 + v^2) + n^4(-3 + v^2)), 0\right\}$$

$$\frac{3}{8}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2)), 0,$$

$$\frac{3}{4}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2)), 0\}$$

coef2 = Coefficient[SCond2[[1]], cubicTerms]//Simplify

$$\left\{0, \frac{3}{4}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2)),\right.$$

$$0, \frac{3}{8}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2)),$$

$$\left.0, \frac{9}{8}\pi^4(-4m^2n^2v + m^4(-3 + v^2) + n^4(-3 + v^2))\right\}$$

Έτσι, οι SCond1 και SCond2 μπορούν να ξαναγραφούν και συνδυαστούν ως :

SCond = {Collect[SCond1[[1]]/.Thread[cubicTerms->0], $\sigma_1 A_1[T_1]$] + coef1.cubicTerms == 0,

Collect[SCond2[[1]]/.Thread[cubicTerms->0], $\sigma_1 A_2[T_1]$] + coef2.cubicTerms == 0};

SCond/.displayRule1

$$\{E^{i\tau_1 \sigma_2} \int_0^1 \int_0^1 F[x, y] \sin[m\pi x] \sin[n\pi y] dy dx +$$

$$(-2m^2n^2\pi^4 - 2n^4\pi^4)A_1\sigma_1 + \frac{9}{8}\pi^4(-4m^2n^2v + m^4(-3 + v^2) + n^4(-3 + v^2))A_1^2\bar{A}_1 +$$

$$\frac{3}{8}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2))A_2^2\bar{A}_1 +$$

$$\frac{3}{4}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2))A_1A_2\bar{A}_2$$

$$- I(D_1A_1)\omega_{m,n} == 0,$$

$$E^{i\tau_1 \sigma_2} \int_0^1 \int_0^1 F[x, y] \sin[n\pi x] \sin[m\pi y] dy dx + (-2m^4\pi^4 - 2m^2n^2\pi^4)A_2\sigma_1 +$$

$$\frac{3}{4}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2))A_1A_2\bar{A}_1 +$$

$$\frac{3}{8}\pi^4(4m^2n^2(-2 + v^2) + m^4(-1 - 2v + v^2) + n^4(-1 - 2v + v^2))A_1^2\bar{A}_2 +$$

$$\frac{9}{8}\pi^4(-4m^2n^2v + m^4(-3 + v^2) + n^4(-3 + v^2))A_2^2\bar{A}_2 - I(D_1A_2)\omega_{m,n} == 0\}$$

8.3.4 Μικτή Προσέγγιση

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μικτή προσέγγιση, έναν συνδυασμό διακριτοποίησης και απ' ευθείας προσεγγίσεων, για να ασχοληθούμε με το πρόβλημα, των EOM1 και BC1. Πρώτα ορίζουμε :

$$\text{scaleRule3} = \{(\text{dv}; u|v) \rightarrow (\epsilon^2 \text{dv}[\#1, \#2, \#3] \&), w \rightarrow (\epsilon w[\#1, \#2, \#3] \&)\};$$

Αντικαθιστώντας τη scaleRule2 και τη scaleRule3 στην EOM1, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης αυτής του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

$$\text{eq83b} = (\text{EOM1} /. \text{scaleRule2} /. \text{scaleRule3} /. \text{TrigToExp} /. \text{ExpandAll}) /$$

$$. \epsilon^{n_1 / n > 3} \rightarrow 0;$$

Για να γράψουμε την eq83b κατά έναν πιο ακριβή τρόπο, εισάγουμε τον κανόνα κατάδειξης :

$$\text{display2}[\text{expr}_:] := \text{expr} /. \{\text{Derivative}[\text{a}_, \text{b}_, \text{c}_][\text{w}_][\text{x}, \text{y}, \text{t}]:$$

$$> \text{Subscript}[\text{w}, \text{Sequence}@@\text{Join}[\text{Table}[\text{x}, \{\text{a}\}], \text{Table}[\text{y}, \{\text{b}\}], \text{Table}[\text{t}, \{\text{c}\}]]]\}$$

Έτσι,

$$(\text{uEOM} = \text{Coefficient}[\text{eq83b}[[1, 1]], \epsilon^2] == 0) // \text{display2}$$

$$\frac{u_{x,y}}{2} + \frac{1}{2} v u_{x,y} + \frac{v_{x,x}}{2} - \frac{1}{2} v v_{x,x} + v_{y,y} + \frac{1}{2} w_y w_{x,x} - \frac{1}{2} v w_y w_{x,x} + \frac{1}{2} w_x w_{x,y}$$

$$+ \frac{1}{2} v w_x w_{x,y} + w_y w_{y,y} == 0$$

$$(\text{wEOM} = \text{eq83b}[[3]] // \text{Thread}[\epsilon^{-2} \#, \text{Equal}] \& /. \text{ExpandAll}) // \text{display2}$$

$$-\frac{1}{24} E^{-i\tau_0 \Omega} \epsilon F[x, y] - \frac{1}{24} E^{i\tau_0 \Omega} \epsilon F[x, y] + \frac{w_{t,t}}{12} - \epsilon u_x w_{x,x} - \epsilon v_y w_{x,x} - \frac{1}{2} \epsilon w_x^2 w_{x,x}$$

$$- \frac{1}{2} \epsilon v w_y^2 w_{x,x} -$$

$$\epsilon u_y w_{x,y} + \epsilon v u_y w_{x,y} - \epsilon v_x w_{x,y} + \epsilon v v_x w_{x,y} - \epsilon w_x w_y w_{x,y} + \epsilon v w_x w_y w_{x,y}$$

$$- \epsilon v u_x w_{y,y} - \epsilon v_y w_{y,y} -$$

$$\frac{1}{2} \epsilon v w_x^2 w_{y,y} - \frac{1}{2} \epsilon w_y^2 w_{y,y} + \frac{1}{12} w_{x,x,x,x} + \frac{1}{6} w_{x,x,y,y} + \frac{1}{3} \epsilon \sigma_1 w_{x,x,y,y} + \frac{1}{12} w_{y,y,y,y}$$

$$+ \frac{1}{3} \epsilon \sigma_1 w_{y,y,y,y} == 0$$

Οι γραμμικές ταλαντώσεις διέπονται από την wEOM με $\epsilon = 0$. Δηλαδή :

$$(\text{order1Eqw} = \text{wEOM} /. \epsilon \rightarrow 0) // \text{display2}$$

$$\frac{w_{t,t}}{12} + \frac{1}{12} w_{x,x,x,x} + \frac{1}{6} w_{x,x,y,y} + \frac{1}{12} w_{y,y,y,y} == 0$$

υποκείμενες στις συνοριακές συνθήκες BC1. Έπεται από τις order1Eqw και BC1 ότι οι γραμμικές συναρτήσεις σχήματος (mode shapes) και οι σχετιζόμενες συχνότητες δίνονται από

$$\phi_{m,n}[x, y] /. \text{modeshapes}$$

$$\text{Sin}[m\pi x] \text{Sin}[n\pi y]$$

$$\omega_{m,n} /. \text{frequencies}$$

$$(m^2 + n^2)\pi^2$$

Για να ερευνήσουμε την περίπτωση του ένα-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στη μη-οστή και τη nm-οστή έκφραση ($m \neq n$), θέτουμε :

$$w1sol = \{w \rightarrow$$

$$\text{Function}[\{x, y, t\}, \eta[t] \text{Sin}[m\pi x] \text{Sin}[n\pi y] + \zeta[t] \text{Sin}[n\pi x] \text{Sin}[m\pi y]\};$$

Αντικαθιστώντας την w1sol στις uEOM και vEOM, λαμβάνουμε :

$$\text{order2Equ} = (\text{uEOM}[[1]]/.w \rightarrow (0\&)) ==$$

$$((\text{uEOM}[[1]]/.w \rightarrow (0\&)) - \text{uEOM}[[1]]/.w1sol//\text{TrigReduce});$$

$$\text{order2Equ//display2}$$

$$u_{xx} + \frac{u_{yy}}{2} - \frac{1}{2}vu_{yy} + \frac{v_{xy}}{2} + \frac{1}{2}vv_{xy} ==$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} [4n^3n^3 \text{Sin}[2n\pi x] \zeta[t]^2 - 4m^2n^3 \nu \text{Sin}[2n\pi x] \zeta[t]^2 - 2m^2n^3 \text{Sin}[2n\pi x - 2m\pi y] \zeta[t]^2 - \\ & 2n^2n^3 \text{Sin}[2n\pi x - 2m\pi y] \zeta[t]^2 - 2m^2n^3 \text{Sin}[2n\pi x + 2m\pi y] \zeta[t]^2 - 2n^2n^3 \text{Sin}[2n\pi x + 2m\pi y] \zeta[t]^2 + \\ & m^3n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - 3m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & 3mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + 3m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & 3mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + 3m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & 3mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - 3m^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & 3mn^2n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\ & mn^2n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3n^3 \nu \text{Sin}[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\ & 4m^3n^3 \text{Sin}[2m\pi x] \eta[t]^2 - 4mn^2n^3 \nu \text{Sin}[2m\pi x] \eta[t]^2 - 2m^2n^3 \text{Sin}[2m\pi x - 2n\pi y] \eta[t]^2 - \\ & 2mn^2n^3 \text{Sin}[2m\pi x - 2n\pi y] \eta[t]^2 - 2m^2n^3 \text{Sin}[2m\pi x + 2n\pi y] \eta[t]^2 - 2mn^2n^3 \text{Sin}[2m\pi x + 2n\pi y] \eta[t]^2) \end{aligned}$$

$$\text{order2Eqv} = (\text{vEOM}[[1]]/.w \rightarrow (0\&)) == ((\text{vEOM}[[1]]/.w \rightarrow (0\&)) - \text{vEOM}[[1]]/.w1sol//\text{TrigReduce});$$

$$\text{order2Eqv//display2}$$

$$\frac{u_{xy}}{2} + \frac{1}{2}vu_{xy} + \frac{v_{xx}}{2} - \frac{1}{2}vv_{xx} + v_{yy} ==$$

$$\begin{aligned}
 & 16 \left(4m^3 n^3 \sin[2m\pi y] \zeta[t]^2 - 4mn^2 n^2 \nu \sin[2m\pi y] \zeta[t]^2 + 2m^3 n^2 \sin[2n\pi x - 2m\pi y] \zeta[t]^2 + \right. \\
 & 2mn^2 n^3 \sin[2n\pi x - 2m\pi y] \zeta[t]^2 - 2m^3 n^3 \sin[2n\pi x + 2m\pi y] \zeta[t]^2 - 2mn^2 n^3 \sin[2n\pi x + 2m\pi y] \zeta[t]^2 - \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + 3m^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & 3mn^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + 3m^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & 3mn^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y - n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - 3m^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & 3mn^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x - m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + m^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & mn^2 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x - n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & m^3 n^2 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - 3m^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & 3mn^2 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - n^3 n^3 \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & m^3 n^2 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - m^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] - \\
 & mn^2 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + n^3 n^3 \nu \sin[m\pi x + n\pi x + m\pi y + n\pi y] \zeta[t] \eta[t] + \\
 & 4n^3 n^3 \sin[2n\pi y] \eta[t]^2 - 4m^2 n^3 \nu \sin[2n\pi y] \eta[t]^2 + 2m^2 n^3 \sin[2m\pi x - 2n\pi y] \eta[t]^2 + \\
 & 2n^2 n^3 \sin[2m\pi x - 2n\pi y] \eta[t]^2 - 2m^2 n^3 \sin[2m\pi x + 2n\pi y] \eta[t]^2 - 2n^2 n^3 \sin[2m\pi x + 2n\pi y] \eta[t]^2 \Big)
 \end{aligned}$$

Για να λάβουμε τις ειδικές λύσεις για u και v , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρώτα αναζητούμε για όλους τους πιθανούς όρους που εμφανίζονται στα δεξιά μέλη των `order2Equ` και `order2Eqv` ως ακολούθως :

`possibleTerms =`

`Cases[{order2Equ[[2]],order2Eqv[[2]]},#,∞]&/@`

`{_Sin[a_]h1_[t]^2->Sin[a]h1[t]^2,_Sin[a_]h1_[t]h2_[t]-`
`>Sin[a]h1[t]h2[t]}/Flatten//Union`

`{Sin[2nπx]ζ[t]^2,Sin[2mπy]ζ[t]^2,Sin[2nπx-2mπy]ζ[t]^2,Sin[2nπx`
`+2mπy]ζ[t]^2,`

`Sin[mπx-nπx-mπy-nπy]ζ[t]η[t],Sin[mπx+nπx-mπy-nπy]ζ[t]η[t],`

`Sin[mπx-nπx+mπy-nπy]ζ[t]η[t],Sin[mπx+nπx+mπy-nπy]ζ[t]η[t],`

`Sin[mπx-nπx-mπy+nπy]ζ[t]η[t],Sin[mπx+nπx-mπy+nπy]ζ[t]η[t],`

`Sin[mπx-nπx+mπy+nπy]ζ[t]η[t],Sin[mπx+nπx+mπy+nπy]ζ[t]η[t].`

$$\text{Sin}[2m\pi x]\eta[t]^2, \text{Sin}[2n\pi y]\eta[t]^2, \text{Sin}[2m\pi x - 2n\pi y]\eta[t]^2, \text{Sin}[2m\pi x + 2n\pi y]\eta[t]^2\}$$

που ικανοποιούν την BCI. Κατόπιν ορίζουμε τις ακόλουθες λίστες συμβόλων για να αναπαραστήσουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές.

```
usymbolList=Table[ci, {i, Length[possibleTerms]}]
```

```
vsymbolList=usymbolList/.c->d
```

```
{d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9, d10, d11, d12, d13, d14, d15, d16}
```

Κατόπιν, εκφράζουμε τη λύση ως :

```
usol=u->Function[{x, y, t}, usymbolList.possibleTerms//Evaluate];
```

```
vsol=v->Function[{x, y, t}, vsymbolList.possibleTerms//Evaluate];
```

Αντικαθιστώντας τις usol και vsol στις order2Eqn και order2Eqv, συλλέγοντας συντελεστές των possibleTerms, και επλύνοντας για usymbolList και vsymbolList, λαμβάνουμε :

```
algEq1 = Coefficient[Subtract@@order2Eqn/.usol/.vsol, possibleTerms] =  
= 0//Thread;
```

```
algEq2 = Coefficient[Subtract@@order2Eqv/.usol/.vsol, possibleTerms] =  
= 0//Thread;
```

```
(symbolRule2 = Solve[Join[algEq1, algEq2], Join[usymbolList, vsymbolList]][[1]]  
//Simplify)//Timing
```

{2.48 Second,

$$\{c_1 \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)}{16n}, c_{13} \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)}{16m}, d_2 \rightarrow -\frac{\pi(m^2 - n^2 v)}{16m}, d_{14} \rightarrow -\frac{\pi(n^2 - m^2 v)}{16n}, c_2 \rightarrow 0, c_{14} \rightarrow 0,$$

$$d_1 \rightarrow 0, d_{13} \rightarrow 0, c_3 \rightarrow \frac{n\pi}{32}, c_4 \rightarrow \frac{n\pi}{32}, c_{15} \rightarrow \frac{m\pi}{32}, c_{16} \rightarrow \frac{m\pi}{32}, d_3 \rightarrow -\frac{m\pi}{32}, d_4 \rightarrow \frac{m\pi}{32}, d_{15} \rightarrow -\frac{n\pi}{32}, d_{16} \rightarrow \frac{n\pi}{32},$$

$$c_7 \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) + 2mn(1+v))}{32(m-n)}, c_{12} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) - 2mn(1+v))}{32(m+n)},$$

$$d_7 \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) + 2mn(1+v))}{32(m-n)}, d_{12} \rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) - 2mn(1+v))}{32(m+n)},$$

$$c_5 \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+v), c_6 \rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) - 2mn(1+v))}{32(m+n)}, c_8 \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+v),$$

$$\begin{aligned}
 c_9 &\rightarrow -\frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) + 2mn(1+v))}{32(m-n)}, c_{10} \\
 &\rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+v), c_{11} \rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+v), \\
 d_5 &\rightarrow -\frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+v), d_6 \\
 &\rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) - 2mn(1+v))}{32(m+n)}, d_8 \\
 &\rightarrow \frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+v), \\
 d_9 &\rightarrow \frac{\pi(m^2(-1+v) + n^2(-1+v) + 2mn(1+v))}{32(m-n)}, d_{10} \\
 &\rightarrow -\frac{1}{32}(m-n)\pi(-1+v), d_{11} \rightarrow \frac{1}{32}(m+n)\pi(-1+v)
 \end{aligned}$$

■ Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Εισάγουμε δύο χρονικές κλίμακες T_0 και T_1 και αναζητούμε μια πρώτης-τάξης ομοιόμορφη ασυμπτωτική ανάπτυξη της λύσης της wEOM στη μορφή :

$$\text{solRule} = \{\mathbf{w} \rightarrow \text{Function}[\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, T_0, T_1\}, \text{Sum}[\epsilon^{j-1} \mathbf{w}_j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, T_0, T_1], \{j, 2\}]]\};$$

Μετασχηματίζοντας τις χρονικές παραγώγους στην wEOM ως προς τις κλίμακες T_0 και T_1 , αντικαθιστώντας την solRule στην wEOM, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ , λαμβάνουμε :

$$\text{eq83c} =$$

$$(\text{wEOM} /. \{(s: u|v|w)[x, y, t] \rightarrow s[x, y, T_0, T_1],$$

$$\text{Derivative}[a_b_c_][h_][x, y, t] \rightarrow \text{dt}[\square][D[h[x, y, T_0, T_1], \{x, a\}, \{y, b\}]]] /.$$

$$\text{solRule} // \text{ExpandAll} /. \epsilon^{n_} /; n > 1 \rightarrow 0;$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ , έχουμε :

$$\text{eqEps} = \text{CoefficientList}[\text{eq83c}[[1]], \epsilon] == 0 // \text{Thread};$$

Έχοντας υπόψη τις δύο χρονικές κλίμακες T_0 και T_1 , δημιουργούμε έναν κανόνα για $\eta[t]$ και $\zeta[t]$:

$$\text{ampRule} = \{\eta[t] \rightarrow A_1[T_1]E^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_1[T_1]E^{-i\omega_{m,n}T_0}, \zeta[t] \rightarrow A_2[T_1]E^{i\omega_{m,n}T_0} + \bar{A}_2[T_1]E^{-i\omega_{m,n}T_0}\};$$

και ξαναγράφουμε τις w1sol, usol και vsol ως :

$$\text{sol1} = \{\mathbf{w}_1 \rightarrow \text{Function}[\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, T_0, T_1\}, \mathbf{w}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, t] /. \text{w1sol} /. \text{ampRule} // \text{Evaluate}], \mathbf{u} \rightarrow \text{Function}[\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, T_0, T_1\}, \mathbf{u}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, t] /. \text{usol} /. \text{ampRule} // \text{Evaluate}], \mathbf{v} \rightarrow \text{Function}[\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, T_0, T_1\}, \mathbf{v}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, t] /. \text{vsol} /. \text{ampRule} // \text{Evaluate}]\};$$

Αντικαθιστώντας τη sol1 στο δεύτερης-τάξης πρόβλημα, το eqEps[[2]], λαμβάνουμε :

$$\text{order2Eqw} = (\text{eqEps}[[1,1]] /. \mathbf{w}_1 \rightarrow \mathbf{w}_2) == (\text{eqEps}[[1,1]] /. \mathbf{w}_1 \rightarrow \mathbf{w}_2) - \text{eqEps}[[2,1]] /. \text{sol1} // \text{ExpandAll} // \text{Timing}$$

$$\{11.09 \text{ Second}, \text{Null}\}$$

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, όρους ανάλογους στην $E^{i\omega(m,n)T_0}$ έχουμε :

ST = Coefficient[order2Eqw[[2]]/.expRule, $E^{i\omega m \pi T_0}$]/TrigReduce; //Timing
{156.76 Second, Null}

Ανάμεσα σε όλους τους χωρικά-εξαρτώμενους όρους μη-εξαναγκασμών στην ST, μόνο οι ακόλουθοι όροι δεν είναι ορθογωνικοί στους modeshapes :

terms1 = Cases[ST, Cos[mπx + a_ nπy/; Abs[a] == 1], ∞]//Union
{Cos[mπx - nπy], Cos[mπx + nπy]}

terms2 = Cases[ST, Cos[nπx + a_ mπy/; Abs[a] == 1], ∞]//Union
{Cos[nπx - mπy], Cos[nπx + mπy]}

Οι συντελεστές αυτών των όρων στην ST είναι :

terms1Coef = Coefficient[ST, terms1];

terms2Coef = Coefficient[ST, terms2];

Η προβολή των terms1 επί της $\text{Sin}[m \pi x] \text{Sin}[n \pi y]$ μπορεί να ληφθεί ως :

$$p1Coef = \int_0^1 \int_0^1 \text{Sin}[m\pi x] \text{Sin}[n\pi y] \# dx dy \&/@terms1/. trigRule$$

$$\left\{ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$$

και η προβολή των terms2 επί της $\text{Sin}[n \pi x] \text{Sin}[m \pi y]$ μπορεί να ληφθεί ως :

$$p2Coef = \int_0^1 \int_0^1 \text{Sin}[n\pi x] \text{Sin}[m\pi y] \# dx dy \&/@terms2/. trigRule$$

$$\left\{ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$$

Ο όρος εξαναγκασμού στην ST είναι :

f0 = ST/.Cos[_]-> 0

$$\frac{1}{24} E^{T_1 \sigma_2} F[x, y]$$

Τότε, οι συνθήκες επιλυσιμότητας απαιτούν η ST να είναι ορθογωνική σε κάθε γραμμική ιδιοσυνάρτηση modeshapes, δηλαδή :

SC1 = Expand[24(int[Sin[mπx] Sin[nπy] f0, {x, 0,1}, {y, 0,1}]
+ p1Coef.terms1Coef/.symbolRule2//.intRule3/.int-
> Integrate)] == 0;

SC2 = Expand[24(int[Sin[nπx] Sin[mπy] f0, {x, 0,1}, {y, 0,1}]
+ p2Coef.terms2Coef/.symbolRule2//.intRule3/.int-
> Integrate)] == 0;

Συμφωνούν με τα αποτελέσματα που ελήφθησαν στην προηγούμενη υποεξήγηση, καθόσον

{SC1, SC2} == {SCond1, SCond2} **True**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 – Ακριβέστερες Προσεγγίσεις των Συνεχών Συστημάτων που Έχουν Δύο-προς-Ένα Εσωτερικούς Συντονισμούς

Σε αυτό το Κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να προσδιορίσουμε τις δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες ασυμπτωτικές αναπτύξεις των λύσεων των συνεχών συστημάτων με τετραγωνικές και κυβικές μη-γραμμικότητες που διέπονται από δύο-προς-ένα εσωτερικούς συντονισμούς. Υψηλότερης-τάξης χειρισμοί τέτοιων συστημάτων οδηγούν σε ασυνεπή αποτελέσματα αν οι χρονικές παράγωγοι στις διέπουσες εξισώσεις τους εκφράζονται σε δεύτερης-τάξης παρά σε πρώτης-τάξης μορφή. Επομένως, εκφράζουμε τις χρονικές παραγώγους στις διέπουσες εξισώσεις σε πρώτης-τάξης μορφή πριν τις χειριστούμε με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Περιγράφουμε τη μεθοδολογία χρησιμοποιώντας δύο παραδείγματα : δύο-εκφράσεων αλληλεπιδράσεις σε αμφιπροέχουσες καμπτόμενες δοκούς και τεσσάρων-μορφών αλληλεπιδράσεις σε κρεμαστά καλώδια.

```
intRule1 = {int[fun_, arg2_] := int[Expand[fun], arg2]};
intRule2 = {int[a_ + b_, arg2_] := int[a, arg2] + int[b, arg2], int[e^a_ fun_, arg2_] := e^a int[fun, arg2],
int[a_ fun_, a1_, b1_] := a int[fun, a1, b1] /; FreeQ[a, First[a1]],
int[int[a1_, a2_] fun_, a3_] := int[a1, a2] int[fun, a3] /; FreeQ[Rest[a2], First[a2]]};
```

Προαπαιτούμενα

Για να προσδιορίσουμε δεύτερης-τάξης ομοιόμορφες ασυμπτωτικές αναπτύξεις των λύσεων των καμπτόμενων δοκών και των κρεμαστών καλωδίων μέσω χρήσης της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων, λαμβάνοντας υπόψη δύο-προς-ένα εσωτερικούς συντονισμούς, εισάγουμε τις τρεις χρονικές κλίμακες $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$ και $T_2 = \epsilon^2 t$, όπου ϵ είναι μια μικρή αδιάστατη παράμετρος και η τάξη του εύρους των ταλαντώσεων. Επιπλέον, συμβολίζουμε αυτές τις κλίμακες σύμφωνα με :

Symbolize[T_0]; Symbolize[T_1]; Symbolize[T_2];

timeScales = { T_0, T_1, T_2 };

Ός προς τις χρονικές κλίμακες T_0, T_1 και T_2 , οι χρονικές παράγωγοι μπορούν να εκφραστούν ως :

dt[0][expr_] := expr; dt[1][expr_] := Sum[ϵ^i D[expr, timeScales[[i+1]]], {i, 0, 2}];

Για να επιταχύνουμε τους χειρισμούς των ολοκληρωμάτων που εμπλέκονται στις διέπουσες εξισώσεις με το *Mathematica*, εισάγουμε τους κανόνες :

```
intRule1 = {int[fun_, arg2_] := int[Expand[fun], arg2]};
intRule2 = {int[a_ + b_, arg2_] := int[a, arg2] + int[b, arg2], int[en_
fun_, arg2_] := en int[fun, arg2], int[a_
fun_, a1_, b1_] := a
int[fun, a1, b1] /; FreeQ[a, First[a1]], int[int[a1_, a2_]
fun_, a3_] := int[a1, a2] int[fun, a3] /; FreeQ[Rest[a2], First[a2]]};
```

Στην επακόλουθη ανάλυση, εκφράζουμε τις λύσεις σε όρους των μιγαδικών-μεταβλητών συναρτήσεων και έτσι εισάγουμε τον κανόνα μιγαδικού συζυγούς :

conjugateRule = { A_z := \bar{A}_z , \bar{A}_z := A_z , Complex[m_, n_] := Complex[m, -n]};

Για να καταδείξουμε τα αποτελέσματα σε ευκρινή μορφή, εισάγουμε τους κανόνες :

```
displayRule = {Derivative[a_, b_] [w_i_] [_, T0, ___] := SequenceForm[If[arg1 =
Times @@ MapIndexed[D^#1 [a][b], {b}]; arg1 != 1, arg1, ""], w_i SequenceForm @@ Table["", {a}]];
```

```
Derivative[a_][A_i_][_] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_##[1] &, {a}], A_i],
Derivative[a_][A_bar_i_][_] := SequenceForm[Times @@ MapIndexed[D_##[1] &, {a}], A_bar_i],
w_i_[_ , T_0, _] -> w_i, A_i_[_] -> A_i, A_bar_i_[_] -> A_bar_i,
Exp[a_ + b_ . Complex[0, n_] T_0 + c_ . Complex[0, n_] T_0] -> Exp[a + (m * b + n * c) I T_0]};
```

9.1 Διμορφικές Αλληλεπιδράσεις σε Καμπτόμενες Δοκούς

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε τη μη-γραμμική απόκριση μιας αμφιπροέχουσας καμπτόμενης δοκού που διέπεται από έναν δύο-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό σε έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της ακριβέστερης μορφής. Η ανάλυση υποθέτει μια μονομορφική (unimodal) στατική λυγερή μετατόπιση. Η μη-διαστατική εξίσωση κίνησης είναι (Υποενότητα 8.1.1) :

$$\begin{aligned} \text{EOM} = & u_{t,t} + u_{x,x,x,x} + P_k u_{x,x} - 2 b^2 \alpha \left(\int_0^1 u_x \phi_k' [x] dx \right) \phi_k' [x] = \\ & -c u_t + b \alpha \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right) \phi_k' [x] + 2 b \alpha \left(\int_0^1 u_x \phi_k' [x] dx \right) u_{x,x} + \alpha \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right) u_{x,x} + \\ & \text{Cos}[t \Omega] f u_{x,x} + b \text{Cos}[t \Omega] f \phi_k' [x] / . u_{x,x} := \partial_x u [x, t]; \end{aligned}$$

και οι σχετιζόμενες οριακές συνθήκες είναι :

$$\text{BC} = \{u[0, t] == 0, u^{(2,0)}[0, t] == 0, u[1, t] == 0, u^{(2,0)}[1, t] == 0\};$$

όπου P_k είναι η k -οστή κρίσιμη καμπτική φόρτιση, ϕ_k είναι η k -οστή καμπτική συνάρτηση σχήματος (modeshape), και b είναι το αδιάστατο καμπτικό επίπεδο.

Επειδή ο δύο-προς-ένα εσωτερικός συντονισμός ενεργοποιείται από τις δευτεροβάθμιες μη-γραμμικότητες, όπως καταδείχθηκε στο Κεφάλαιο 5, οι δεύτερης- και υψηλότερης-τάξης χειρισμοί τέτοιων συστημάτων οδηγούν σε ασυνεπή αποτελέσματα αν οι χρονικές παράγωγοι στις διέπουσες εξισώσεις τους εκφράζονται σε δεύτερης-τάξης παρά σε πρώτης-τάξης μορφή. Επομένως, εκφράζουμε τις χρονικές παραγώγους σε πρώτης-τάξης μορφή θέτοντας $v[x, t] = \partial_t u[x, t]$, τις προσθέτουμε στην EOM, και παίρνουμε :

$$\text{EOM1} = \{\partial_t u[x, t] - v[x, t] == 0, \text{EOM} / . \partial_{t,t} u[x, t] \rightarrow \partial_t v[x, t]\};$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλίμακων για να χειριστούμε απευθείας τις EOM1 και BC. Για να μετασχηματίσουμε τις χρονικές παραγώγους στην EOM1 ως προς τις κλίμακες T_0, T_1 και T_2 , ορίζουμε :

```
multiScales={u[x_, t]->u[x, T_0, T_1, T_2], v[x, t]-
>v[x, T_0, T_1, T_2], Derivative[m_, n_][u_][x_, t]->dt[n][D[u[x, T_0, T_1, T_2], {x, m}]], t-
>T_0};
```

Κατόπιν, αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης προσεγγιστική λύση των EOM1 και BC της μορφής :

$$\text{solRule} = h : u | v \rightarrow (\text{Evaluate}[\text{Sum}[e_j h_j[\#1, \#2, \#3, \#4], \{j, 3\}]] \&);$$

όπου #1 συμβολίζει το x , και τα #2, #3 και #4 συμβολίζουν τα T_0, T_1 και T_2 , αντίστοιχα.

Θεωρούμε την περίπτωση ενός δύο-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού ανάμεσα στις κατώτερες δύο μορφές και έναν κύριο παραμετρικό συντονισμό της δεύτερης μορφής, δηλαδή :

$$\text{omgList} = \{\omega_1, \omega_2\};$$

$$\text{ResonanceConds} = \{\omega_2 == 2\omega_1 + \epsilon \sigma_1, \Omega == 2\omega_2 + \epsilon \sigma_2\};$$

όπου οι σ_i είναι αποσυντονιστικές παράμετροι που περιγράφουν την εγγύτητα των συντονισμών. Επειδή η επιρροή του δύο-προς-ένα εσωτερικού συντονισμού εμφανίζεται στο $O(\epsilon)$, κλιμακώνουμε τους όρους των αποσβέσεων και των εξαναγκασμών ως :

scaling={c->2ε μ, f->ε f};

Αντικαθιστώντας τις multiScales, solRule και scaling στην EOM1, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ε, και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ε³, λαμβάνουμε :

```
eq91a=(EOM1/.Integrate-
>int/.multiScales/.solRule/.scaling/.intRule1//.intRule2//TrigToExp//ExpandA
11)/.en_/;n>3->0;
```

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε, λαμβάνουμε :

eqEps = Thread[CoefficientList[Subtract@@#, ε] =
= 0]&/@eq91a//Transpose//Rest;

eqEps/.displayRule

$$\left\{ \left\{ D_0 u_1 - v_1 == 0, u_1'''' + D_0 v_1 + (u_1'') P_k - \frac{1}{2} b E^{-i T_0} f \phi_k^c[x] - \frac{1}{2} b E^{i T_0} f \phi_k^c[x] - 2 b^2 \alpha \text{int}[(u_1') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x] == 0 \right\}, \left\{ D_0 u_2 + D_1 u_1 - v_2 == 0, -\frac{1}{2} E^{-i T_0} f (u_1'') - \frac{1}{2} E^{i T_0} f (u_1'') - 2 b \alpha \text{int}[(u_1') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] (u_1'') + u_2'''' + 2 \mu (D_0 u_1) + D_0 v_2 + D_1 v_1 + (u_2'') P_k - b \alpha \text{int}[(u_1')^2, \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x] - 2 b^2 \alpha \text{int}[(u_2') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x] == 0 \right\}, \left\{ D_0 u_3 + D_1 u_2 + D_2 u_1 - v_3 == 0, -\alpha \text{int}[(u_1')^2, \{x, 0, 1\}] (u_1'') - 2 b \alpha \text{int}[(u_2') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] (u_1'') - \frac{1}{2} E^{-i T_0} f (u_2'') - \frac{1}{2} E^{i T_0} f (u_2'') - 2 b \alpha \text{int}[(u_1') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] (u_2'') + u_3'''' + 2 \mu (D_0 u_2) + D_0 v_3 + 2 \mu (D_1 u_1) + D_1 v_2 + D_2 v_1 + (u_3'') P_k - 2 b \alpha \text{int}[(u_1') (u_2'), \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x] - 2 b^2 \alpha \text{int}[(u_2') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x] == 0 \right\} \right\}$$

9.1.1 Πρώτης-Τάξης Λύση

Το ομογενές τμήμα των πρώτης-τάξης εξισώσεων, το eqEps[[1]], μπορεί να γραφεί ως :

linearSys=#[[1]] & /@ eqEps[[1]]/.f->0;

linearSys/.displayRule

$$\{D_0 u_1 - v_1, u_1'''' + D_0 v_1 + (u_1'') P_k - 2 b^2 \alpha \text{int}[(u_1') \phi_k^c[x], \{x, 0, 1\}] \phi_k^c[x]\}$$

Επειδή με την παρουσία της απόσβεσης όλες οι μορφές που δεν είναι απευθείας ή εμμέσως διεγερμένες φθίνουν με το χρόνο (Nayfeh και Mook, 1979), η λύση της eqEps[[1]] παίρνεται ως αποτελούμενη από τις κατώτερες δύο μορφές, δηλαδή :

solForm = Ψ[x] Exp[i Ω T_0] + Ψ[x] Exp[-i Ω T_0] +

Sum[A_i[T_1, T_2] ϕ_i[x] Exp[i ω_i T_0] + Ā_i[T_1, T_2] ϕ_i[x] Exp[-i ω_i T_0], {i, 2}];

sol1={u_1->Function[{x, T_0, T_1, T_2}, solForm//Evaluate], v_1->

Function[{x, T_0, T_1, T_2}, D[solForm, T_0]//Evaluate]}

$$\{u_1 \rightarrow \text{Function}[\{x, T_0, T_1, T_2\}, E^{-i T_0} \Psi[x] + E^{i T_0} \Psi[x] + E^{i T_0} \omega_1 A_1[T_1, T_2] \phi_1[x] + E^{i T_0} \omega_2 A_2[T_1, T_2] \phi_2[x] + E^{-i T_0} \omega_1 \bar{A}_1[T_1, T_2] \phi_1[x] + E^{-i T_0} \omega_2 \bar{A}_2[T_1, T_2] \phi_2[x]], v_1 \rightarrow \text{Function}[\{x, T_0, T_1, T_2\}, -i E^{-i T_0} \Omega \Psi[x] + i E^{i T_0} \Omega \Psi[x] + i E^{i T_0} \omega_1 A_1[T_1, T_2] \phi_1[x] + i E^{i T_0} \omega_2 A_2[T_1, T_2] \phi_2[x] - i E^{-i T_0} \omega_1 \bar{A}_1[T_1, T_2] \phi_1[x] - i E^{-i T_0} \omega_2 \bar{A}_2[T_1, T_2] \phi_2[x]]\}$$

όπου τα ϕ_i είναι οι ιδιομορφές (eigenmodes), οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη ορθοκανονικότητας $\int_0^1 \Phi_n[x] dx = \delta_{n,m}$, και το Ψ προσδιορίζεται μοναδικά από το ακόλουθο οριακής-τιμής πρόβλημα :

eq91b =

Coefficient[eqEps[[1, 2, 1]] /. {sol1 /. {A_i -> (0 &), A_i -> (0 &)}} /. intRule1 /.
intRule2, E^{1 a T 0}] == 0

$$-\Omega^2 \Psi[x] + P_k \Psi''[x] - \frac{1}{2} b f \phi_k^2[x] - 2 b^2 \alpha \text{int}[\Psi'[x] \phi_k'[x], \{x, 0, 1\}] \phi_k''[x] + \Psi^{(4)}[x] == 0$$

bc91b=BC/.u->Ψ

{Ψ[0, t]==0, Ψ^(2,0)[0, t]==0, Ψ[1, t]==0, Ψ^(2,0)[1, t]==0}

Σε ότι επακολουθεί, θεωρούμε μη-γραμμικές ταλαντώσεις μιας πρώτης-μορφής καμπτόμενης δοκού.

Έτσι, το κρίσιμο καμπτικό φορτίο είναι :

bucklingLoad=P_k->π²;

Σημειώνουμε ότι, καθώς το επίπεδο λυγισμού αυξάνεται από το μηδέν, η συμμετρική μορφή (mode) είναι η πρώτη μορφή. Εντούτοις, όταν το επίπεδο λυγισμού ξεπερνά την πρώτη κρίσιμη τιμή, η συμμετρική έκφραση γίνεται η δεύτερη μορφή. Έτσι, η δεύτερη φυσική συχνότητα ω_2 εξαρτάται από το επίπεδο κάμψης. Για επίπεδα κάμψης μεγαλύτερα από την κρίσιμη τιμή, η πρώτη στατική καμπτική μετατόπιση και οι πρώτες δύο κανονικοποιημένες συναρτήσεις σχήματος και οι σχετιζόμενες φυσικές συχνότητες, είναι :

modeshapes = {ϕ₁ -> (Sin[π #] &), ϕ₁ -> (√2 Sin[2 π #] &), ϕ₂ -> (√2 Sin[π #] &)};

frequencies = {ω₂ -> b π² √α, ω₁ -> 2 √3 π²};

Το επίπεδο κάμψης στο οποίο $\omega_2 = 2\omega_1$, είναι :

values1=Solve[ω₂==2ω₁/.frequencies,b][[1]]

$$\left\{ b \rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha}} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις bucklingLoad και modeshapes στην eq91b, προκύπτει :

eq91c=eq91b/.bucklingLoad/.modeshapes

$$\frac{1}{2} b f \pi^2 \text{Sin}[\pi x] +$$

$$2 b^2 \pi^2 \alpha \text{int}[\pi \text{Cos}[\pi x] \Psi'[x], \{x, 0, 1\}] \text{Sin}[\pi x] - \Omega^2 \Psi[x] + \pi^2 \Psi''[x] + \Psi^{(4)}[x] == 0$$

Ο έλεγχος των eq91c και bc91b δείχνει ότι η Ψ[x] έχει τη μορφή :

Ψsol=Ψ->(Γ Sin[π #] &);

Αντικαθιστώντας την Ψsol στην eq91c, συλλέγοντας τον συντελεστή της Sin[π x], επιλύοντας την προκύπτουσα εξίσωση για Γ, και απλοποιώντας την χρησιμοποιώντας τις frequencies και values1, λαμβάνουμε :

ΓRule=Solve[Coefficient[eq91c[[1]]/.Ψsol/.int-

>Integrate, Sin[πx]]==0, Γ][[1]]/.Ω->2ω2/.frequencies/.values1

$$\left\{ \Gamma \rightarrow \frac{f}{24 \cdot \sqrt{3} \pi^2 \cdot \sqrt{\alpha}} \right\}$$

Επειδή το πρόβλημα καμπτόμενης δοκού είναι αυτο-συζυγές, έχουμε :

adjoint={{-I ω₁ ϕ₁[x], ϕ₁[x]}, {-I ω₂ ϕ₂[x], ϕ₂[x]}};

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι

```
adjointC=adjoint/.conjugateRule
{{I ω1 Φ1[x], Φ1[x]}, {I ω2 Φ2[x], Φ2[x]}}
```

9.1.2 Δεύτερης-Τάξης Λύση

Αντικαθιστώντας τις sol1, Ψsol και κάποιες από τις παραμετρικές τιμές, στην eqEps[[2]], προκύπτει :

```
order2Eq =
  (linearSys /. u_1 -> u2) ==
    ((linearSys /. u_1 -> u2) - (#[[1]] & /@ eqEps[[2]]) /. sol1 /. Ψsol /. ΓRule /.
      intRule1 //. intRule2 /. modeshapes /. int -> Integrate // Expand) /.
    bucklingLoad /. values1 // Thread;
order2Eq /. displayRule
```

$$\left\{ D_0 u_1 - v_2 - \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) \sin(\pi x) - \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) \sin(\pi x) - \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) \sin(2 \pi x) - \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) \sin(2 \pi x), \right. \\ \pi^2 (\bar{u}_2) + \bar{u}_2 + D_0 v_2 - 96 \operatorname{Im}((\bar{u}_2) (\phi_t)'(x), (x, 0, 1)) (\phi_t)'(x) = -\frac{\sin(\pi x) f^2}{16 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} - \frac{e^{-2 i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{32 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} - \frac{e^{2 i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{32 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} + \\ \frac{e^{-i T_0 \Omega} i \mu \Omega \sin(\pi x) f}{12 \sqrt{3} \pi^2 \sqrt{\alpha}} - \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (\omega_1 - \Omega)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (\Omega + \omega_1)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \\ \sqrt{2} e^{i T_0 (\omega_2 - \Omega)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f - \sqrt{2} e^{i T_0 (\Omega + \omega_2)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f - \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (-\Omega - \omega_1)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \\ \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (\Omega - \omega_1)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \sqrt{2} e^{i T_0 (-\Omega - \omega_2)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f - \sqrt{2} e^{i T_0 (\Omega - \omega_2)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f - \frac{i e^{i T_0 \Omega} \mu \Omega \sin(\pi x) f}{12 \sqrt{3} \pi^2 \sqrt{\alpha}} - \\ 16 \sqrt{3} e^{2 i T_0 \omega_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1^2 - 12 \sqrt{3} e^{2 i T_0 \omega_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2^2 - 16 \sqrt{3} e^{-2 i T_0 \omega_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1^2 - \\ 12 \sqrt{3} e^{-2 i T_0 \omega_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2^2 - 32 \sqrt{3} e^{i T_0 (\omega_1 - \omega_2)} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1 A_2 - i \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_1} (D_1 A_1) \sin(2 \pi x) \omega_1 + \\ \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_1} i (D_1 A_1) \sin(2 \pi x) \omega_1 - 2 i \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_1} \mu \sin(2 \pi x) A_1 \omega_1 - i \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_2} (D_1 A_2) \sin(\pi x) \omega_2 + \\ \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_2} i (D_1 A_2) \sin(\pi x) \omega_2 - 2 i \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) A_2 \omega_2 - 32 \sqrt{3} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1 A_1 - \\ 32 \sqrt{3} e^{i T_0 (\omega_2 - \omega_1)} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1 A_1 + 2 \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_1} i \mu \sin(2 \pi x) \omega_1 A_1 - 32 \sqrt{3} e^{i T_0 (\omega_1 - \omega_2)} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1 A_2 - \\ 24 \sqrt{3} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1 A_2 + 2 \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_2} i \mu \sin(\pi x) \omega_2 A_2 - 32 \sqrt{3} e^{i T_0 (-\omega_1 - \omega_2)} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1 A_2 \left. \right\}$$

Με σκοπό να συλλέξουμε τους όρους που ίσως οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους από τα δεξιά μέλη των order2Eq, ορίζουμε τους κανόνες :

```
OmgRule=Solve[ResonanceConds, Complement[omgList, {#}]~Join~{Ω}][[1]] &
/@ omgList
{{ω2->ε σ1+2 ω1, Ω->2 ε σ1+ε σ2+4 ω1}, {ω1->1/2 (-ε σ1+ω2), Ω->ε σ2+2 ω2}}
expRule1[i_]:=Exp[arg_]>Exp[Expand[arg/.OmgRule[[i]]]/.ε T_0->T_1]
```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να δώσουν προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους στην $E^{i \omega T_0}$, έχουμε :

```
ST11=Coefficient[#[[2]] & /@ order2Eq /. expRule1[1], E^{ω1 T_0};
ST11 /. displayRule
```

$$\{-\sqrt{2}(D_1 A_1) \operatorname{Sin}[2 \pi x], -I \sqrt{2}(D_1 A_1) \operatorname{Sin}[2 \pi x] \omega_1 -$$

```
ST12=Coefficient[#[[2]] & /@ order2Eq /. expRule1[2], E^{ω2 T_0};
ST12 /. displayRule
```

$$\{-\sqrt{2}(D_1 A_2) \operatorname{Sin}[\pi x], -16 \sqrt{3} E^{-i T_1 \sigma_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \operatorname{Sin}[\pi x] A_1^2 -$$

$$I \sqrt{2}(D_1 A_2) \operatorname{Sin}[\pi x] \omega_2 - 2 I \sqrt{2} \mu \operatorname{Sin}[\pi x] A_2 \omega_2 - \sqrt{2} E^{i T_1 \sigma_2} f \pi^2 \operatorname{Sin}[\pi x] A_2 \}$$

Απαιτώντας η ST11 να είναι ορθογωνική στην $\text{adjointC}[[1]]$, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{SCond11} = \text{Solve}[\text{int}[\text{adjointC}[[1]].\text{ST11}, \{x, 0, 1\}] == 0 /. \text{intRule1} /. \text{intRule2} /. \text{modeshapes} /. \text{int} \rightarrow \text{Integrate}, A_1^{(1,0)}[T_1, T_2]] [[1]] // \text{ExpandAll}$$

$$\{A_1^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow -\mu A_1[T_1, T_2] + \frac{3 I \sqrt{6} E^{i T_1 \sigma_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} A_2[T_1, T_2] A_1[T_1, T_2]}{\omega_1}\}$$

Απαιτώντας η ST12 να είναι ορθογωνική στην $\text{adjointC}[[2]]$, λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{SCond12} = \text{Solve}[\text{int}[\text{adjointC}[[2]].\text{ST12}, \{x, 0, 1\}] == 0 /. \text{intRule1} /. \text{intRule2} /. \text{modeshapes} /. \text{int} \rightarrow \text{Integrate}, A_2^{(1,0)}[T_1, T_2]] [[1]] // \text{ExpandAll}$$

$$\{A_2^{(1,0)}[T_1, T_2] \rightarrow \frac{4 I \sqrt{6} E^{-i T_1 \sigma_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} A_1[T_1, T_2]^2}{\omega_2} - \mu A_2[T_1, T_2] + \frac{I E^{i T_1 \sigma_2} f \pi^2 A_2[T_1, T_2]}{2 \omega_2}\}$$

Έτσι, έχουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

$$\text{SCond1} = \text{Join}[\text{SCond11}, \text{SCond12}];$$

των οποίων τα μιγαδικά συζυγή είναι

$$\text{ccSCond1} = \text{SCond1} /. \text{conjugateRule};$$

Για να απομακρύνουμε τα $D_1 A_1$ και $D_1 A_2$, από τα δεξιά μέλη των order2Eq , πρώτα ορίζουμε τους κανόνες :

$$\text{sigRule} = \text{Solve}[\text{ResonanceConds}, \{\sigma_1, \sigma_2\}] [[1]]$$

$$\{\sigma_1 \rightarrow -((2 \omega_1 - \omega_2) / \epsilon), \sigma_2 \rightarrow -((-\Omega + 2 \omega_2) / \epsilon)\}$$

$$\text{expRule2} = \text{Exp}[a_] \rightarrow \text{Exp}[a /. \text{sigRule} /. T_1 \rightarrow \epsilon T_0] // \text{Expand};$$

Αντικαθιστώντας τις SCond1, ssSCond1 και expRule2 στην order2Eq, παίρνουμε :

$$\text{order2Eqm} = \text{order2Eq} /. \text{SCond1} /. \text{ccSCond1} /. \text{expRule2} // \text{ExpandAll};$$

$$\text{order2Eqm} /. \text{displayRule}$$

$$\begin{aligned} & \{D_0 u_2 - v_2 = \\ & - \frac{8 i \sqrt{3} e^{2 i T_0 \omega_1} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1^2}{\omega_2} + \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_1} \mu \sin(2 \pi x) A_1 + \\ & \frac{16 \sqrt{3} e^{i T_0 (\omega_1 - \omega_2)} i \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) \bar{A}_2 A_1}{\omega_1} + \frac{8 \sqrt{3} e^{-2 i T_0 \omega_1} i \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) \bar{A}_1^2}{\omega_2} + \\ & \sqrt{2} e^{i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) A_2 + \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_1} \mu \sin(2 \pi x) \bar{A}_1 + \sqrt{2} e^{-i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) \bar{A}_2 - \\ & \frac{16 i \sqrt{3} e^{i T_0 (\omega_2 - \omega_1)} \pi^4 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_2 \bar{A}_1}{\omega_1} + \frac{e^{i T_0 (\omega_2 - \Omega)} f i \pi^2 \sin(\pi x) A_2}{\sqrt{2} \omega_2} - \frac{i e^{i T_0 (\Omega - \omega_2)} f \pi^2 \sin(\pi x) \bar{A}_2}{\sqrt{2} \omega_2}, \\ & \pi^2 (u_2''''') + u_2'''' + D_0 v_2 - 96 \text{int}((u_2')(\phi_k)'(x), \{x, 0, 1\})(\phi_k)''(x) \cup - \frac{\sin(\pi x) f^2}{16 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} - \\ & \frac{e^{-2 i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{32 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} - \frac{e^{2 i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{32 \sqrt{3} \sqrt{\alpha}} + \frac{e^{-i T_0 \Omega} i \mu \Omega \sin(\pi x) f}{12 \sqrt{3} \pi^2 \sqrt{\alpha}} - \\ & \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (\omega_1 - \Omega)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \frac{8}{3} \sqrt{2} e^{i T_0 (\Omega + \omega_1)} \pi^2 \sin(2 \pi x) A_1 f - \\ & \sqrt{2} e^{i T_0 (\omega_2 - \Omega)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f + \frac{e^{i T_0 (\omega_2 - \Omega)} \pi^2 \sin(\pi x) A_2 f}{\sqrt{2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2}e^{iT_0(\Omega+\omega_2)}\pi^2\sin(\pi x)A_2f - \frac{8}{3}\sqrt{2}e^{iT_0(-\Omega-\omega_1)}\pi^2\sin(2\pi x)\bar{A}_1f - \\
 & \frac{8}{3}\sqrt{2}e^{iT_0(\Omega-\omega_1)}\pi^2\sin(2\pi x)\bar{A}_1f - \sqrt{2}e^{iT_0(-\Omega-\omega_2)}\pi^2\sin(\pi x)\bar{A}_2f - \\
 & \sqrt{2}e^{iT_0(\Omega-\omega_2)}\pi^2\sin(\pi x)\bar{A}_2f + \frac{e^{iT_0(\Omega-\omega_2)}\pi^2\sin(\pi x)\bar{A}_2f}{\sqrt{2}} - \frac{ie^{iT_0\Omega}\mu\Omega\sin(\pi x)f}{12\sqrt{3}\pi^2\sqrt{a}} - \\
 & 8\sqrt{3}e^{2iT_0\omega_1}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)A_1^2 - 12\sqrt{3}e^{2iT_0\omega_2}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)A_2^2 - \\
 & 8\sqrt{3}e^{-2iT_0\omega_1}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)\bar{A}_1^2 - \\
 & 12\sqrt{3}e^{2iT_0\omega_2}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)A_2^2 - 8\sqrt{3}e^{-2iT_0\omega_1}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)\bar{A}_1^2 - \\
 & 12\sqrt{3}e^{-2iT_0\omega_2}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)\bar{A}_2^2 - 32\sqrt{3}e^{iT_0(\omega_1+\omega_2)}\pi^4\sqrt{a}\sin(2\pi x)A_1A_2 - \\
 & i\sqrt{2}e^{iT_0\omega_1}\mu\sin(2\pi x)A_1\omega_1 - i\sqrt{2}e^{iT_0\omega_2}\mu\sin(\pi x)A_2\omega_2 - \\
 & 32\sqrt{3}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)A_1\bar{A}_1 - 16\sqrt{3}e^{iT_0(\omega_2-\omega_1)}\pi^4\sqrt{a}\sin(2\pi x)A_2\bar{A}_1 + \\
 & \sqrt{2}e^{-iT_0\omega_1}i\mu\sin(2\pi x)\omega_1\bar{A}_1 - 16\sqrt{3}e^{iT_0(\omega_1-\omega_2)}\pi^4\sqrt{a}\sin(2\pi x)A_1\bar{A}_2 - \\
 & 24\sqrt{3}\pi^4\sqrt{a}\sin(\pi x)A_2\bar{A}_2 + \sqrt{2}e^{-iT_0\omega_2}i\mu\sin(\pi x)\omega_2\bar{A}_2 - \\
 & 32\sqrt{3}e^{iT_0(-\omega_1-\omega_2)}\pi^4\sqrt{a}\sin(2\pi x)\bar{A}_1\bar{A}_2\}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για να προσδιορίσουμε τη λύση των order2Eqm και των σχετιζόμενων με αυτές οριακών συνθηκών. Για να το εφαρμόσουμε αυτό, πρώτα προσδιορίζουμε όλες τις δυνατές μορφές των όρων στα δεξιά μέλη των order2Eqm, ως ακολούθως :

sol2Form =

```

Table[Cases[order2Eqm[[k, 2]], #] & /@
  {_ Ea - T0 * b f[c x] -> Ea T0 + b f[c x], a_ f[b x] :> f[b x] /; FreeQ[a, T0]},
{k, 2}] // Flatten // Union
{Sin[π x], E-I T0 2 Sin[π x], EI T0 2 Sin[π x], E-2 I T0 2 Sin[π x],
E2 I T0 2 Sin[π x], E-2 I T0 ω1 Sin[π x], E2 I T0 ω1 Sin[π x], E-I T0 ω2 Sin[π x],
EI T0 ω2 Sin[π x], E-2 I T0 ω2 Sin[π x], E2 I T0 ω2 Sin[π x], E-I T0 2 - I T0 ω2 Sin[π x],
EI T0 2 - I T0 ω2 Sin[π x], E-I T0 2 + I T0 ω2 Sin[π x], EI T0 2 + I T0 ω2 Sin[π x],
E-I T0 ω1 Sin[2 π x], EI T0 ω1 Sin[2 π x], E-I T0 2 - I T0 ω1 Sin[2 π x], EI T0 2 - I T0 ω1 Sin[2 π x],
E-I T0 2 + I T0 ω1 Sin[2 π x], EI T0 2 + I T0 ω1 Sin[2 π x], E-I T0 ω1 - I T0 ω2 Sin[2 π x],
EI T0 ω1 - I T0 ω2 Sin[2 π x], E-I T0 ω1 + I T0 ω2 Sin[2 π x], EI T0 ω1 + I T0 ω2 Sin[2 π x]}

```

όπου όλες οι χωρικά εξαρτώμενες συναρτήσεις ικανοποιούν τις αμφιπροέχουσας-δοκού οριακές συνθήκες. Σημειώνουμε ότι η sol2Form αποτελείται από (α) τους όρους που είναι ανάλογοι στα $E^{-l\omega_1 T_0}$, $E^{l\omega_1 T_0}$, $E^{-l\omega_2 T_0}$, $E^{l\omega_2 T_0}$, και (β) τους υπόλοιπους όρους. Οι θέσεις των προηγούμενων όρων, οι οποίοι είναι ορθογωνικοί στον συζυγή τελεστή, στην sol2Form, είναι :

pos[1] =

```

(Position[# sol2Form /. expRule1[1] /. Exp[_ + _ T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] //
  Flatten // Rest) & /@ {E-I ω1 T0, EI ω1 T0}
{{17, 24}, {16, 23}}

```



```
pos[2] =
(Position[# sol2Form /. expRule1[2] /. Exp[_ . + _ T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] //
Flatten // Rest) & /@ {E^-I * ω2 T0, E^I * ω2 T0}
{{(7, 9, 13), (6, 8, 14)}}
```

Κατόπιν, αναζητούμε τη λύση των u_2 και v_2 σε δύο τμήματα. Πρώτα, θεωρούμε το τμήμα της `sol2Form` που δεν σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους :

```
sol2Forma=Delete[sol2Form, {#} & /@ Flatten[Array[pos, 2]]]
{Sin[π x], E^-I T0 ω Sin[π x], E^I T0 ω Sin[π x], E^-2 I T0 ω Sin[π x], E^2 I T0 ω Sin[π x],
E^-2 I T0 ω2 Sin[π x], E^2 I T0 ω2 Sin[π x], E^-I T0 ω - I T0 ω2 Sin[π x], E^I T0 ω + I T0 ω2 Sin[π x],
E^-I T0 ω - I T0 ω1 Sin[2 π x], E^I T0 ω - I T0 ω1 Sin[2 π x], E^-I T0 ω + I T0 ω1 Sin[2 π x],
E^I T0 ω + I T0 ω1 Sin[2 π x], E^-I T0 ω1 - I T0 ω2 Sin[2 π x], E^I T0 ω1 + I T0 ω2 Sin[2 π x]}
```

και ορίζουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές ως :

```
uSymbola=Table[ψi, {i, Length[sol2Forma]}];
```

```
vSymbola=uSymbola/.ψ->η;
```

Η γενική λύση ως προς την `sol2Forma` μπορεί να γραφεί ως :

```
sol2a={u2->Function[{x, T0, T1, T2}, uSymbola.sol2Forma//Evaluate],
v2->Function[{x, T0, T1, T2}, vSymbola.sol2Forma//Evaluate]};
```

Δεύτερον, θεωρούμε το τμήμα της `sol2Form` που σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους :

```
sol2Formb1=sol2Form[[pos[1][[1]]]]
{E^I T0 ω1 Sin[2 π x], E^-I T0 ω1 + I T0 ω2 Sin[2 π x]}
sol2Formb2=sol2Form[[pos[2][[1]]]]
{E^2 I T0 ω1 Sin[π x], E^I T0 ω2 Sin[π x], E^I T0 ω - I T0 ω2 Sin[π x]}
```

και ορίζουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές ως :

```
uSymbolb1=Table[ψs1,i, {i, Length[sol2Formb1]}];
```

```
uSymbolb2=Table[ψs2,i, {i, Length[sol2Formb2]}];
```

όπου οι απροσδιόριστοι συντελεστές για v_2 σχετίζονται με τα `uSymbolb1` και `uSymbolb2` λόγω της συνθήκης ορθογωνικότητας. Επομένως, η γενική λύση ως προς τις `sol2Formb1` και `sol2Formb2` μπορεί να γραφτεί ως :

```
sol2b = {u2->Function[{x, T0, T1, T2}, uSymbolb1.sol2Formb1 + uSymbolb2.sol2Formb2//
Evaluate], v2->
Function[{x, T0, T1, T2}, -I ω1 uSymbolb1.sol2Formb1 - I ω2 uSymbolb2.sol2Formb2//
Evaluate]};
```

Η ολική λύση είναι το άθροισμα των `sol2a`, `sol2b`, και το μιγαδικό συζυγές της `sol2b`.

Κατόπιν, επιλύουμε για αυτούς τους απροσδιόριστους συντελεστές. Αντικαθιστώντας τη `sol2a` στην `order2Eqm` και εξισώνοντας τους συντελεστές της `sol2Forma`, έχουμε :

```
algEqa = Flatten[Coefficient[Subtract@@#/.sol2a/.intRule1//.intRule2/.modeshapes/.int->
Integrate,sol2Forma]&/@order2Eqm]==0/.Exp[_T0+_]->0//Thread;
```

Αντικαθιστώντας μερικές από τις παραμετρικές τιμές στην `algEqa` και επιλύοντας για `uSymbola` και `vSymbola`, λαμβάνουμε :

```
symbolaRule = Solve[algEqa, uSymbola~Join~vSymbola][[1]]/.Ω->2ω2/.frequencies/
.values1
```

$$\begin{aligned} & \{\eta_1 \rightarrow 0, \psi_1 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}f^2+1536\sqrt{3}\pi^4\alpha A_1[T_1,T_2]\bar{A}_1[T_1,T_2]+1152\sqrt{3}\pi^4\alpha A_2[T_1,T_2]\bar{A}_2[T_1,T_2]}{2304\pi^4\sqrt{\alpha}}, \eta_2 \rightarrow -\frac{f\mu}{9\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}}, \eta_3 \rightarrow \\ & -\frac{f\mu}{9\sqrt{3}\pi^2\sqrt{\alpha}}, \eta_4 \rightarrow -\frac{f^2}{1440\pi^2\sqrt{\alpha}}, \eta_5 \rightarrow \frac{f^2}{1440\pi^2\sqrt{\alpha}}, \eta_6 \rightarrow -2I\pi^2\sqrt{\alpha}\bar{A}_2[T_1,T_2]^2, \eta_7 \rightarrow \\ & 2I\pi^2\sqrt{\alpha}A_2[T_1,T_2]^2, \psi_2 \rightarrow -\frac{f\mu}{216\pi^4\sqrt{\alpha}}, \psi_3 \rightarrow \frac{f\mu}{216\pi^4\sqrt{\alpha}}, \psi_4 \rightarrow \frac{f^2}{23040\sqrt{3}\pi^4\sqrt{\alpha}}, \psi_5 \rightarrow \frac{f^2}{23040\sqrt{3}\pi^4\sqrt{\alpha}}, \psi_6 \rightarrow \\ & \frac{\sqrt{\alpha}\bar{A}_2[T_1,T_2]^2}{4\sqrt{3}}, \psi_7 \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}A_2[T_1,T_2]^2}{4\sqrt{3}}, \eta_8 \rightarrow -\frac{1}{16}I\sqrt{\frac{3}{2}}f\bar{A}_2[T_1,T_2], \eta_9 \rightarrow \frac{1}{16}I\sqrt{\frac{3}{2}}fA_2[T_1,T_2], \eta_{10} \rightarrow \\ & -\frac{5f\bar{A}_1[T_1,T_2]}{9\sqrt{6}}, \eta_{11} \rightarrow \frac{f\bar{A}_1[T_1,T_2]}{\sqrt{6}}, \eta_{12} \rightarrow -\frac{fA_1[T_1,T_2]}{\sqrt{6}}, \eta_{13} \rightarrow \frac{5fA_1[T_1,T_2]}{9\sqrt{6}}, \eta_{14} \rightarrow \\ & -6I\pi^2\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_2[T_1,T_2], \eta_{15} \rightarrow 6I\pi^2\sqrt{\alpha}A_1[T_1,T_2]A_2[T_1,T_2], \psi_8 \rightarrow \frac{f\bar{A}_2[T_1,T_2]}{192\sqrt{2}\pi^2}, \psi_9 \rightarrow \\ & \frac{fA_2[T_1,T_2]}{192\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{10} \rightarrow \frac{f\bar{A}_1[T_1,T_2]}{54\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{11} \rightarrow \frac{fA_1[T_1,T_2]}{18\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{12} \rightarrow \frac{fA_1[T_1,T_2]}{18\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{13} \rightarrow \frac{fA_1[T_1,T_2]}{54\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{14} \rightarrow \\ & \frac{\sqrt{\alpha}\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_2[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{15} \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}A_1[T_1,T_2]A_2[T_1,T_2]}{\sqrt{3}} \} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη sol2b σε μία απο τις δύο εξισώσεις στην order2Eqm, εξισώνοντας τους συντελεστές των sol2Formb1 και sol2Formb2, και επιλύοντας για uSymbolb1 και uSymbolb2, έχουμε :

symbolbRule =

Solve[Coefficient[Subtract@@order2Eqm[[1]]/.sol2b,sol2Formb1~Join~sol2Formb2]==
0/.Exp[_T0+_.->0//Thread,uSymbolb1~Join~uSymbolb2][[1]]/.Ω->2ω2/.frequencies/
.values1

$$\begin{aligned} & \{\psi_{S1,1} \rightarrow -\frac{I\mu A_1[T_1,T_2]}{2\sqrt{6}\pi^2}, \psi_{S1,2} \rightarrow -\frac{2\sqrt{\alpha}A_2[T_1,T_2]\bar{A}_1[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{S2,2} \rightarrow -\frac{I\mu A_2[T_1,T_2]}{4\sqrt{6}\pi^2}, \psi_{S2,3} \rightarrow \\ & -\frac{f\bar{A}_2[T_1,T_2]}{96\sqrt{2}\pi^2}, \psi_{S2,1} \rightarrow -\frac{\sqrt{\alpha}A_1[T_1,T_2]^2}{4\sqrt{3}} \} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές συμβόλων στις sol2a και sol2b, προκύπτει :

sol2aForm={u2[x,T0,T1,T2],v2[x,T0,T1,T2]}/.sol2a/.symbolaRule;

sol2bForm={u2[x,T0,T1,T2],v2[x,T0,T1,T2]}/.sol2b/.symbolbRule;

sol2={u2->Function[{x,T0,T1,T2},sol2aForm[[1]]+sol2bForm[[1]]+(sol2bForm[[1]]/
.conjugateRule)//Expand//Evaluate],v2->Function[{x,T0,T1,T2},sol2aForm[[2]]+so
l2bForm[[2]]+(sol2bForm[[2]]/.conjugateRule)//Expand//Evaluate]}

$$\begin{aligned} & \left\{ u_2 \rightarrow \left\{ \{x, T_0, T_1, T_2\} \mapsto \frac{e^{-2i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{23040 \sqrt{3} \pi^4 \sqrt{\alpha}} + \frac{e^{2i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{23040 \sqrt{3} \pi^4 \sqrt{\alpha}} - \right. \right. \\ & \frac{\sin(\pi x) f^2}{768 \sqrt{3} \pi^4 \sqrt{\alpha}} + \frac{e^{i T_0 \Omega} i \mu \sin(\pi x) f}{216 \pi^4 \sqrt{\alpha}} + \frac{e^{i T_0 \Omega} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{18 \sqrt{2} \pi^2} + \\ & \frac{e^{i \Omega T_0 + i \omega_1 T_0} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{54 \sqrt{2} \pi^2} + \frac{e^{i \Omega T_0 + i \omega_2 T_0} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f}{192 \sqrt{2} \pi^2} + \\ & \left. \frac{e^{i T_0 \Omega - i T_0 \omega_1} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{18 \sqrt{2} \pi^2} + \frac{e^{-i \Omega T_0 - i \omega_1 T_0} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{54 \sqrt{2} \pi^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-i\Omega T_0 - i\omega_2 T_0} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f}{192 \sqrt{2} \pi^2} - \frac{e^{i T_0 \omega_2 - i T_0 \Omega} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f}{96 \sqrt{2} \pi^2} - \\
 & \frac{e^{i T_0 \Omega - i T_0 \omega_2} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f}{96 \sqrt{2} \pi^2} - \frac{i e^{-i T_0 \Omega} \mu \sin(\pi x) f}{216 \pi^4 \sqrt{\alpha}} + \\
 & \frac{e^{2i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} + \frac{e^{-2i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} + \\
 & \frac{e^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(2\pi x) A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} + \\
 & \frac{e^{-i T_0 \omega_1} i \mu \sin(2\pi x) A_1(T_1, T_2)}{2 \sqrt{6} \pi^2} + \frac{e^{-i T_0 \omega_2} i \mu \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)}{4 \sqrt{6} \pi^2} - \\
 & \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2) + \\
 & \frac{e^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(2\pi x) A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{2 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1(T_1, T_2) A_1(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{2 e^{i T_0 \omega_2 - i T_0 \omega_1} \sqrt{\alpha} \sin(2\pi x) A_2(T_1, T_2) A_1(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{2 e^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(2\pi x) A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{e^{2i T_0 \omega_1} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} - \frac{e^{-2i T_0 \omega_1} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_1(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} - \\
 & \frac{i e^{i T_0 \omega_1} \mu \sin(2\pi x) A_1(T_1, T_2)}{2 \sqrt{6} \pi^2} - \frac{i e^{i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)}{4 \sqrt{6} \pi^2} \right\}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 \rightarrow & \left\{ (x, T_0, T_1, T_2) \mapsto \frac{e^{-2i T_0 \Omega} i \sin(\pi x) f^2}{1440 \pi^2 \sqrt{\alpha}} - \frac{i e^{-2i T_0 \Omega} \sin(\pi x) f^2}{1440 \pi^2 \sqrt{\alpha}} + \right. \\
 & \frac{5 e^{i \Omega T_0 + i \omega_1 T_0} i \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{9 \sqrt{6}} + \\
 & \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i \Omega T_0 + i \omega_2 T_0} i \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f + \frac{e^{i T_0 \Omega - i T_0 \omega_1} i \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{\sqrt{6}} - \\
 & \frac{1}{16} i \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-i \Omega T_0 - i \omega_2 T_0} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2) f + \\
 & \frac{e^{i T_0 \Omega - i T_0 \omega_2} i \sin(\pi x) \omega_2 A_2(T_1, T_2) f}{96 \sqrt{2} \pi^2} - \frac{i e^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \Omega} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{\sqrt{6}} - \\
 & \frac{5 i e^{-i \Omega T_0 - i \omega_1 T_0} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) f}{9 \sqrt{6}} - \frac{i e^{i T_0 \omega_2 - i T_0 \Omega} \sin(\pi x) \omega_2 A_2(T_1, T_2) f}{96 \sqrt{2} \pi^2} - \\
 & \frac{e^{-i T_0 \Omega} \mu \sin(\pi x) f}{9 \sqrt{3} \pi^2 \sqrt{\alpha}} - \frac{e^{i T_0 \Omega} \mu \sin(\pi x) f}{9 \sqrt{3} \pi^2 \sqrt{\alpha}} + \frac{e^{2i T_0 \omega_1} i \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) \omega_2 A_1(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} + \\
 & 2 e^{2i T_0 \omega_2} i \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)^2 - 2 i e^{-2i T_0 \omega_2} \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) A_2(T_1, T_2)^2 + \\
 & 6 e^{i T_0 \omega_1 + i T_0 \omega_2} i \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2) + \\
 & \frac{2 e^{i T_0 \omega_2 - i T_0 \omega_1} i \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) \omega_1 A_2(T_1, T_2) A_1(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{6 i e^{-i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \pi^2 \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{2 i e^{i T_0 \omega_1 - i T_0 \omega_2} \sqrt{\alpha} \sin(2 \pi x) \omega_1 A_1(T_1, T_2) A_2(T_1, T_2)}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{i e^{-2i T_0 \omega_1} \sqrt{\alpha} \sin(\pi x) \omega_2 A_1(T_1, T_2)^2}{4 \sqrt{3}} - \\
 & \frac{e^{i T_0 \omega_1} \mu \sin(2 \pi x) \omega_1 A_1(T_1, T_2)}{2 \sqrt{6} \pi^2} - \frac{e^{-i T_0 \omega_1} \mu \sin(2 \pi x) \omega_1 A_1(T_1, T_2)}{2 \sqrt{6} \pi^2} - \\
 & \left. \frac{e^{i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) \omega_2 A_2(T_1, T_2)}{4 \sqrt{6} \pi^2} - \frac{e^{-i T_0 \omega_2} \mu \sin(\pi x) \omega_2 A_2(T_1, T_2)}{4 \sqrt{6} \pi^2} \right\}
 \end{aligned}$$

9.1.3 Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Αντικαθιστώντας τις sol1, Ψsol, sol2, και μερικές από τις παραμετρικές τιμές στην eqEps[[3]], προκύπτει :

```

order3Eq = (linearSys/(. {u_ / _1} → u_3) == ((linearSys/(. {u_ / _1} → u_3) -
(#[[1]]&/@eqEps[[3]])/(. sol1/(. Ψsol/(. ΓRule/(. sol2/(. (intRule1/)/(. (intRule2/)/
Expand)))))))/(. (values1/)/Thread); (/)/Timing

```

{21.141 Second,Null}

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους με το $E^{i\omega_1 T_0}$, έχουμε :

ST21 = Coefficient[#[[2]] & /@ order3Eq /. expRule1[1], $E^{i\omega_1 T_0}$] /. modeshapes /.
int -> Integrate;

ST22 = Coefficient[#[[2]] & /@ order3Eq /. expRule1[2], $E^{i\omega_2 T_0}$] /. modeshapes /.
int -> Integrate;

Απαιτώντας η ST21 να είναι ορθογωνική στο adjointC[[1]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond21=Solve[(int[adjointC[[1]].ST21,{x,0,1}]/.intRule1//.intRule2)=
=0, $A_1^{(0,1)}$ [T₁, T₂]][[1]]/.modeshapes/.int-
>Integrate/.SCond1/.frequencies/.values1//ExpandAll;

SCond21/.displayRule

$$\left\{ D_2 A_1 \rightarrow \frac{13 I f^2 A_1}{648 \sqrt{3} \pi^2} - \frac{I \mu^2 A_1}{4 \sqrt{3} \pi^2} + I \sqrt{3} \pi^2 \alpha A_1^2 A_1 - \right. \\ \left. \sqrt{\frac{3}{2}} E^{i T_1 \sigma_1} \sqrt{\alpha} \mu A_2 A_1 - \frac{8 I \pi^2 \alpha A_1 A_2 A_2}{\sqrt{3}} + \frac{31 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2} f \sqrt{\alpha} A_1 A_2}{72 \sqrt{2}} \right\}$$

Απαιτώντας η ST22 να είναι ορθογωνική στο adjointC[[2]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond22 =

Solve[(int[adjointC[[2]].ST22,{x,0,1}]/.intRule1//.intRule2)==0,
 $A_2^{(0,1)}$ [T₁, T₂]][[1]] /. modeshapes /. int -> Integrate /. SCond1 /. $\Omega \rightarrow 2 \omega_2$ /.
frequencies /. values1 // ExpandAll;

SCond22 /. displayRule

$$\left\{ D_2 A_2 \rightarrow \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} E^{-i T_1 \sigma_1} \sqrt{\alpha} \mu A_1^2 - \frac{19 I f^2 A_2}{9216 \sqrt{3} \pi^2} - \frac{I \mu^2 A_2}{8 \sqrt{3} \pi^2} - \right. \\ \left. \frac{4 I \pi^2 \alpha A_1 A_2 A_1}{\sqrt{3}} + \frac{31 I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2} f \sqrt{\alpha} A_1^2}{288 \sqrt{2}} - \frac{5 E^{i T_1 \sigma_2} f \mu A_2}{288 \pi^2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \pi^2 \alpha A_2^2 A_2 \right\}$$

Επειδή με την απουσία της απόσβεσης το σύστημα είναι συντηρητικό, οι εξισώσεις διαμόρφωσης, οι συνθήκες επιλυσιμότητας, πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες συμμετρίας. Για να ελέγξουμε αυτές τις συμμετρίες, θέτουμε :

formList1a = { \bar{A}_1 [T₁, T₂] \bar{A}_2 [T₁, T₂], A_1 [T₁, T₂] A_2 [T₁, T₂] \bar{A}_2 [T₁, T₂]};

alcoefs={s₁₁, s₁₂}->Coefficient[(2 ω_1 I)

SCond21[[1,2]], formList1a]//Thread

$$\left\{ s_{11} \rightarrow -\frac{31 E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1 \sigma_2} f \sqrt{\alpha} \omega_1}{36 \sqrt{2}}, s_{12} \rightarrow \frac{16 \pi^2 \alpha \omega_1}{\sqrt{3}} \right\}$$

formList2a = { A_1 [T₁, T₂] A_2 [T₁, T₂] \bar{A}_1 [T₁, T₂], \bar{A}_1 [T₁, T₂]²};

a2coefs = {s₂₁, s₂₂} -> Coefficient[(2 ω_2 I) SCond22[[1,2]], formList2a] // Thread

$$\{s_{21} \rightarrow (8 \pi^2 \alpha \omega^2) / \sqrt{3}, s_{22} \rightarrow -((31 E^I T_1 \sigma_1 + I T_1 \sigma_2 \int \sqrt{\alpha} \omega^2) / (144 \sqrt{2}))\}$$

Η συνθήκη συμμετρίας απαιτεί $s_{12} = s_{21}$, το οποίο είναι αληθές επειδή

$$s_{12} - s_{21} / .a1coefs / .a2coefs / .frequencies / .values1$$

0

9.2 Τεσσάρων-Μορφών Αλληλεπιδράσεις σε Κρεμαστά Καλώδια

Προσδιορίζουμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ασυμπτωτική ανάπτυξη της τριδιάστατης απόκρισης ενός κρεμαστού καλωδίου σε μια εγκάρσια αρμονική κατανεμημένη διέγερση μιας εκ των δύο οριζοντίων ή κατακόρυφων μορφών όταν οι συχνότητές τους είναι στην αναλογία είτε δύο-προς-ένα είτε ένα-προς-ένα και κανένας άλλος εσωτερικός συντονισμός δεν είναι ενεργός. Οι Benedettini, Rega και Alaggio (1995) εξήγαγαν τις μη-διαστατικές εξισώσεις που διέπουν τις τριδιάστατες, πεπερασμένου εύρους ταλαντώσεις ενός κρεμαστού ομογενούς ελαστικού καλωδίου διεγερμένου από αρμονικές κατανεμημένες οριζόντιες και κατακόρυφες φορτίσεις. Οι χρονικές παράγωγοι εκφράζονται σε δεύτερης-τάξης μορφή. Όπως συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5, οι δεύτερης- και ανώτερης-τάξης χειρισμοί τέτοιων εξισώσεων οδηγούν σε ελλιπή αποτελέσματα εκτός αν οι χρονικές παράγωγοι εκφράζονται σε πρώτης-τάξης παρά σε δεύτερης-τάξης μορφή. Επομένως, ξαναγράφουμε αυτές τις εξισώσεις ως :

$$\delta_{i_Integer, j_Integer} := \text{If}[i == j, 1, 0]$$

$$\mathbf{eq1} = \text{Table}[u_{j,t} - v_j = 0, \{j, 2\}];$$

eq2 =

$$\text{Table}\left[v_{j,t} + 2 \mu_j v_j - u_{j,x,x} - \alpha (b y''[x] \delta_{1,j} + u_{j,x,x}) \int_0^1 \left(b y'[x] u_{1,x} + \frac{1}{2} (u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2) \right) dx = P_j[x] \cos[\Omega t + \tau_j], \{j, 2\}\right];$$

$$\text{EOM} = \text{Transpose}[\{\mathbf{eq1}, \mathbf{eq2}\}] / .\{u_{s,m} :> \partial_m u_s[x,t], v_s :> v_s[x,t]\} // \text{Flatten}$$

$$\{-v_1[x,t] + u_1^{(0,1)}[x,t] == 0, 2 \mu_1 v_1[x,t] + v_1^{(0,1)}[x,t] -$$

$$u_1^{(2,0)}[x,t] - \alpha \int_0^1 b y'[x] u_1^{(1,0)}[x,t] + \frac{1}{2} (u_1^{(1,0)}[x,t]^2 + u_2^{(1,0)}[x,t]^2) dx -$$

$$(b y''[x] + u_1^{(2,0)}[x,t]) == \cos[t \Omega + \tau_1] P_1[x],$$

$$-v_2[x,t] + u_2^{(0,1)}[x,t] == 0, 2 \mu_2 v_2[x,t] + v_2^{(0,1)}[x,t] - u_2^{(2,0)}[x,t] -$$

$$\alpha \int_0^1 b y'[x] u_2^{(1,0)}[x,t] + \frac{1}{2} (u_1^{(1,0)}[x,t]^2 + u_2^{(1,0)}[x,t]^2) dx - u_2^{(2,0)}[x,t] ==$$

$$\cos[t \Omega + \tau_2] P_2[x]\}$$

$$yRule = \{y \rightarrow (4 \# (1 - \#) \&)\};$$

Επιπλέον, γράφουμε τις σχετιζόμενες οριακές συνθήκες ως :

$$\text{BC} = \{u_j[0,t] == 0, u_j[1,t] == 0\};$$

Εδώ, ο δείκτης $j = 1$ αναφέρεται στην κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης και $j = 2$ αναφέρεται στην οριζόντια συνιστώσα. Τα μ_j είναι οι συντελεστές ιξώδους απόσβεσης, τα $P_j[x]$ είναι τα κατανεμημένα εύρη της διέγερσης με τη συχνότητα Ω , το δ_{ij} συμβολίζει το δέλτα του Kronecker, και το $b y[x]$, όπου $y[x] = 4x(1-x)$, οριζόμενο στον $yRule$, είναι η αρχική στατική διαμόρφωση. Οι χωρικές και χρονικές μεταβλητές είχαν αδιαστατοποιηθεί χρησιμοποιώντας το άνοιγμα του καλωδίου

ℓ και τον χαρακτηριστικό χρόνο $\ell \sqrt{\rho/E}$, όπου ρ και E είναι η πυκνότητα του καλωδίου και το μέτρο ελαστικότητας, αντίστοιχα.

Αναζητούμε μια ασυμπτωτική ανάπτυξη της απόκρισης του καλωδίου όταν το άνοιγμά του είναι τέτοιο ώστε οι πρώτες κατακόρυφες και οριζόντιες φυσικές συχνότητες είναι στην αναλογία δύο-προς-ένα, δηλαδή, $b^2 a \approx \pi^2/16$. Όταν $b^2 a = \pi^2/16$, οι φυσικές συχνότητες είναι :

`params={ωj_ / ; j!=3 :>2 π, ω3->π, b^2 α->π^2/16};`

και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες συναρτήσεις σχήματος (modeshapes) είναι :

`modeshapes={Φ1->(√(2/3) (1-Cos[2π #] &)), Φ2->(√2 Sin[2π #] &), Φ3->(√2 Sin[π #] &), Φ4->(√2 Sin[2π #] &)};`

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων και αναζητούμε μια δεύτερης-τάξης ομοιόμορφη ασυμπτωτική ανάπτυξη της απόκρισης του καλωδίου σε μια κύριου-συντονισμού διέγερση της πρώτης κατακόρυφης μορφής του είδους :

`multiScales={u_j_[x,t]->u_j[x,T0,T1,T2], Derivative[m_,n_][u_][x,t]->Dt[n][D[u[x,T0,T1,T2],{x,m}],t->T0];`

`solRule={u_i_->(Evaluate[Sum[εj u_i,j[#1,#2,#3,#4],{j,3}]] &), v_i_->(Evaluate[Sum[εj v_i,j[#1,#2,#3,#4],{j,3}]] &)};`

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες συντονισμού, κλιμακώνουμε τους όρους αποσβέσεων και εξαναγκασμών ως :

`scaling={μj_->ε2 μj, Pj_[x]->ε3 Pj[x]};`

όπου ο εξαναγκασμός (δύναμη) έχει κλιμακωθεί σε τάξη ϵ^3 έτσι ώστε η επιρροή του πρώτα εμφανίζεται στην ίδια τάξη με τη μη-γραμμική μεταβολή στις συχνότητες με την απουσία του εσωτερικού συντονισμού.

Θεωρούμε την περίπτωση στην οποία οι τάξεις μεγέθους των επιπέδων εξαναγκασμού τόσο για τις οριζόντιες όσο και για τις κατακόρυφες κινήσεις είναι ίδιες. Διαφορετικά, ένας πρωταρχικός συντονισμός των κατακόρυφων μορφών (τρέχουσα μελέτη) θα μπορούσε επίσης να προκαλέσει έναν υποαρμονικό συντονισμό τάξης ενάμιση ως προς την πρώτη οριζόντια μορφή και έναν κύριο συντονισμό της δεύτερης οριζόντιας μορφής σε διαφορετικά επίπεδα προσέγγισης.

Αντικαθιστώντας τις `multiScales`, `solRule` και `scaling` στην EOM, αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα για μικρό ϵ , και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης του ϵ^3 , λαμβάνουμε :

`eq92a=(EOM/.Integrate->int/.multiScales/.solRule/.scaling//ExpandAll)//.intRule2//ExpandAll)/.en_/; n>3->0;`

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ϵ στην `eq92a`, παίρνουμε :

`eqEps=Rest[Thread[CoefficientList[Subtract @@ #,ε]==0]] & /@ eq92a//Transpose//TrigToExp;`

9.2.1 Πρώτης-Τάξης Λύση

Τα ομογενή τμήματα των πρώτης-τάξης εξισώσεων είναι :

`(linearSys=#[[1]] & /@ eqEps[[1]])/.displayRule`

$$\begin{cases} D_0 u_{1,1} - v_{1,1}, - \{u'_{1,1}\} + D_0 v_{1,1} - b^2 \alpha \int [u'_{1,1}] y'[x], \{x, 0, 1\} y''[x], \\ D_0 u_{2,1} - v_{2,1}, - \{u'_{2,1}\} - D_0 v_{2,1} \end{cases}$$

Τα πρώτης-τάξης προβλήματα είναι ταυτόσημα με τα προβλήματα γραμμικών ιδιοτιμών. Για να εξηγήσουμε τις αλληλεπιδράσεις που προκύπτουν από τους πολλαπλούς εσωτερικούς συντονισμούς και τον κύριο συντονισμό, περιλαμβάνουμε τις κατώτερες δύο μορφές σε κάθε επίπεδο. Οι άλλες μορφές θα φθίνουν λόγω της απόσβεσης. Έτσι, η λύση της eqEps[[1]] μπορεί να εκφραστεί ως :

```
sollu =
  {u1,1 -> Function[{x, T0, T1, T2},
    Sum[A1[T1, T2] Φ1[x] Exp[I ω1 T0] + A2[T1, T2] Φ2[x] Exp[-I ω1 T0], {i, 1, 2}] //
    Evaluate],
  u2,1 -> Function[{x, T0, T1, T2},
    Sum[A3[T1, T2] Φ3[x] Exp[I ω1 T0] + A4[T1, T2] Φ4[x] Exp[-I ω1 T0], {i, 3, 4}] //
    Evaluate]};
```

```
sollv=Table[vk,1->Function[{x, T0, T1, T2}, D[uκ,1[x, T0, T1, T2], T0] /. sollu // Evaluate], {k, 2}];
```

```
soll=Join[sollu, sollv]
```

```
{u1,1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, EI T0 ω1 A1[T1, T2] Φ1[x] +
  EI T0 ω2 A2[T1, T2] Φ2[x] + E-I T0 ω1 Φ1[x] A1[T1, T2] + E-I T0 ω2 Φ2[x] A2[T1, T2]},
  u2,1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, EI T0 ω3 A3[T1, T2] Φ3[x] + EI T0 ω4 A4[T1, T2] Φ4[x] +
  E-I T0 ω3 Φ3[x] A3[T1, T2] + E-I T0 ω4 Φ4[x] A4[T1, T2]},
  v1,1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, I EI T0 ω1 ω1 A1[T1, T2] Φ1[x] + I EI T0 ω2 ω2 A2[T1, T2] Φ2[x] -
  I E-I T0 ω1 ω1 Φ1[x] A1[T1, T2] - I E-I T0 ω2 ω2 Φ2[x] A2[T1, T2]},
  v2,1 -> Function[{x, T0, T1, T2}, I EI T0 ω3 ω3 A3[T1, T2] Φ3[x] + I EI T0 ω4 ω4 A4[T1, T2] Φ4[x] -
  I E-I T0 ω3 ω3 Φ3[x] A3[T1, T2] - I E-I T0 ω4 ω4 Φ4[x] A4[T1, T2]}]
```

όπου $\Phi_1[x]$ και $\Phi_2[x]$ είναι οι κατώτατες συμμετρικές και αντισυμμετρικές κατακόρυφες ιδιομορφές (eigenmodes), και $\Phi_3[x]$ και $\Phi_4[x]$ είναι οι κατώτατες συμμετρικές και αντισυμμετρικές οριζόντιες ιδιομορφές. Οι $\Phi_n[x]$ είναι ορθογωνικοί. Κανονικοποιούνται έτσι ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ορθοκανονικότητας $\int_0 \Phi_n[x] \Phi_m[x] dx = \delta_{n,m}$.

Επειδή το πρόβλημα είναι αυτο-συζυγές, έχουμε :

```
adjoint=Table[{-I ωk Φk[x], Φk[x]}, {k, 4}];
```

του οποίου το μιγαδικό συζυγές είναι :

```
adjointC=adjoint/.conjugateRule
```

```
{{I ω1 Φ1[x], Φ1[x]}, {I ω2 Φ2[x], Φ2[x]}, {I ω3 Φ3[x], Φ3[x]}, {I ω4
Φ4[x], Φ4[x]}}
```

9.2.2 Δεύτερης-Τάξης Λύση

Αντικαθιστώντας τη soll στην eqEps[[2]], προκύπτει :

```
order2Eq=(linearSys/.u_κ,1->u_κ,2)==((linearSys/.u_κ,1->u_κ,2)-#[[1]] & /@
eqEps[[2]])/.soll/.intRule1//.intRule2/.modeshapes/.yRule/.int-
>Integrate//Expand//Thread;
order2Eq/.displayRule
```


$$\begin{aligned}
 (D_0 u_{1,2} - v_{1,2} == & -\sqrt{\frac{2}{3}} E^{i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) + \sqrt{\frac{2}{3}} E^{i T_0 \omega_1} \cos[2 \pi x] (D_1 \bar{A}_1) - \sqrt{\frac{2}{3}} E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) + \\
 & \sqrt{\frac{2}{3}} E^{-i T_0 \omega_1} \cos[2 \pi x] (D_1 \bar{A}_1) - \sqrt{2} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[2 \pi x] - \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[2 \pi x], \\
 -(u'_{1,2}) + D_0 v_{1,2} - b^2 \alpha \operatorname{Int}[(u'_{1,2}) Y'[x], (x, 0, 1)] Y'[x] == & -\frac{16}{3} b E^{2 i T_0 \omega_1} \pi^2 \alpha \bar{A}_1^2 + \\
 & \frac{64}{3} b E^{2 i T_0 \omega_1} \pi^2 \alpha \cos[2 \pi x] \bar{A}_1^2 - \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - 16 b E^{2 i T_0 \omega_2} \pi^2 \alpha \bar{A}_2^2 - \\
 & 4 b E^{2 i T_0 \omega_2} \pi^2 \alpha \bar{A}_2^2 - 16 b E^{2 i T_0 \omega_4} \pi^2 \alpha \bar{A}_4^2 - I \sqrt{\frac{2}{3}} E^{i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 + I \sqrt{\frac{2}{3}} E^{i T_0 \omega_1} \cos[2 \pi x] (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 + \\
 & I \sqrt{\frac{2}{3}} E^{-i T_0 \omega_1} (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 - I \sqrt{\frac{2}{3}} E^{-i T_0 \omega_1} \cos[2 \pi x] (D_1 \bar{A}_1) \omega_1 - I \sqrt{2} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[2 \pi x] \omega_2 + \\
 & I \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[2 \pi x] \omega_2 - \frac{32}{3} b \pi^2 \alpha \bar{A}_1 \bar{A}_1 + \frac{128}{3} b \pi^2 \alpha \cos[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_1 - \\
 & \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_2 \bar{A}_1}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3} b E^{-2 i T_0 \omega_1} \pi^2 \alpha \bar{A}_1^2 + \frac{64}{3} b E^{-2 i T_0 \omega_1} \pi^2 \alpha \cos[2 \pi x] \bar{A}_1^2 - \\
 & \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - 32 b \pi^2 \alpha \bar{A}_2 \bar{A}_2 - \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - \\
 & 16 b E^{-2 i T_0 \omega_2} \pi^2 \alpha \bar{A}_2^2 - 8 b \pi^2 \alpha \bar{A}_2 \bar{A}_2 - 4 b E^{-2 i T_0 \omega_2} \pi^2 \alpha \bar{A}_2^2 - 32 b \pi^2 \alpha \bar{A}_4 \bar{A}_4 - 16 b E^{-2 i T_0 \omega_4} \pi^2 \alpha \bar{A}_4^2, \\
 D_0 u_{2,2} - v_{2,2} == & -\sqrt{2} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[\pi x] - \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[\pi x] - \\
 & \sqrt{2} E^{i T_0 \omega_4} (D_1 \bar{A}_4) \sin[2 \pi x] - \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_4} (D_1 \bar{A}_4) \sin[2 \pi x], - (u'_{2,2}) + D_0 v_{2,2} == \\
 & \frac{16 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_4)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_4}{\sqrt{3}} - I \sqrt{2} E^{i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[\pi x] \omega_2 + \\
 & I \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_2} (D_1 \bar{A}_2) \sin[\pi x] \omega_2 - I \sqrt{2} E^{i T_0 \omega_4} (D_1 \bar{A}_4) \sin[2 \pi x] \omega_4 + I \sqrt{2} E^{-i T_0 \omega_4} (D_1 \bar{A}_4) \sin[2 \pi x] \omega_4 - \\
 & \frac{16 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_2 \bar{A}_1}{\sqrt{3}} - \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_4)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_4 \bar{A}_1}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{16 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_2)} \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - \frac{16 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_4)} \pi^2 \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}} - \\
 & \left. \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_4)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_4}{\sqrt{3}} - \frac{64 b E^{i T_0 (\omega_1 + \omega_4)} \pi^2 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_4}{\sqrt{3}} \right\}
 \end{aligned}$$

Θεωρούμε την περίπτωση του κύριου συντονισμού της πρώτης κατακόρυφης μορφής, έναν δύο-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό ανάμεσα στις πρώτες κατακόρυφες και οριζόντιες μορφές, έναν ένα-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό ανάμεσα στις πρώτες και δεύτερες κατακόρυφες μορφές, και έναν ένα-προς-ένα εσωτερικό συντονισμό ανάμεσα στις πρώτες κατακόρυφες και δεύτερες οριζόντιες μορφές. Με σκοπό να συλλέξουμε τους όρους που ίσως οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους από τα δεξιά μέλη της order2Eq, ορίζουμε τους κανόνες :

```

omgList=Table[wi, {i, 4}];
ResonanceConds={Ω==ω1+ε σ1, ω2==ω1+ε σ2, 2ω3==ω1+ε σ3, ω4==ω1+ε σ4};
OmgRule=Solve[ResonanceConds, Complement[omgList, {#}]~Join~{Ω}][[1]] &
/@ omgList
{{ω2->ε σ2+ω1, ω3->1/2 (ε σ3+ω1), ω4->ε σ4+ω1, Ω->ε σ1+ω1}, {ω1->-ε
σ2+ω2, ω3->1/2 (-ε σ2+ε σ3+ω2), ω4->-ε σ2+ε σ4+ω2, Ω->ε σ1-ε σ2+ω2}, {ω1->-ε
σ3+2 ω3, ω2->ε σ2-ε σ3+2 ω3, ω4->-ε σ3+ε σ4+2 ω3, Ω->ε σ1-ε σ3+2 ω3}, {ω1->-
ε σ4+ω4, ω2->ε σ2-ε σ4+ω4, ω3->1/2 (ε σ3-ε σ4+ω4), Ω->ε σ1-ε σ4+ω4}}
expRule1[i_]:=Exp[arg_]>Exp[Expand[arg/.OmgRule[[i]]]/.ε T0->T1]

```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους στην $E^{i \omega_i T_0}$, από τις εξισώσεις που διέπουν τις κατακόρυφες εκφράσεις, έχουμε

**ST1v=Coefficient#[[2]] & /@ order2Eq[[{1,2}]]/.expRule1[#],
E^{i ω t} & /@ {1,2};**

ST1v/.displayRule

$$\left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}}(D_1 A_1) + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos[2\pi x](D_1 A_1) - \sqrt{2}E^{i T_1 \sigma_2}(D_1 A_2)\sin[2\pi x], -4bE^{i T_1 \sigma_3}\pi^2 \alpha A_3^2 - \right. \\ \left. I\sqrt{\frac{2}{3}}(D_1 A_1)\omega_1 + I\sqrt{\frac{2}{3}}\cos[2\pi x](D_1 A_1)\omega_1 - I\sqrt{2}E^{i T_1 \sigma_2}(D_1 A_2)\sin[2\pi x]\omega_2, \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}}E^{-i T_1 \sigma_2}(D_1 A_1) + \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{\frac{2}{3}}E^{-i T_1 \sigma_2}\cos[2\pi x](D_1 A_1) - \sqrt{2}(D_1 A_2)\sin[2\pi x], -4bE^{-i T_1 \sigma_2 + i T_1 \sigma_3}\pi^2 \alpha A_3^2 - \right. \right. \\ \left. \left. I\sqrt{\frac{2}{3}}E^{-i T_1 \sigma_2}(D_1 A_1)\omega_1 + I\sqrt{\frac{2}{3}}E^{-i T_1 \sigma_2}\cos[2\pi x](D_1 A_1)\omega_1 - I\sqrt{2}(D_1 A_2)\sin[2\pi x]\omega_2 \right\} \right\}$$

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους από τις εξισώσεις που διέπουν τις οριζόντιες εκφράσεις, έχουμε

**ST1h = Coefficient#[[2]] & /@ order2Eq[[{3,4}]]/.expRule1[#], E^{i ω t} & /@
{3,4};**

ST1h/.displayRule

$$\left\{ -\sqrt{2}(D_1 A_3)\sin[\pi x], -I\sqrt{2}(D_1 A_3)\sin[\pi x]\omega_3 - \right. \\ \left. \frac{16bE^{-i T_1 \sigma_3}\pi^2 \alpha \sin[\pi x]A_1 \bar{A}_3}{\sqrt{3}}, \left\{ -\sqrt{2}(D_1 A_4)\sin[2\pi x], -I\sqrt{2}(D_1 A_4)\sin[2\pi x]\omega_4 \right\} \right\}$$

Απαιτώντας η ST1v[[i]] να είναι ορθογωνική στο adjointC[[i]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας

SCond1v=Solve[(int[adjointC[#]].ST1v[#]),{x,0,1}]/.intRule1//.intRule2/.modeshapes/.params/.int->Integrate)==0, A^(1,0)[T₁, T₂]][[1]] & /@ {1,2} // Flatten;

SCond1v/.displayRule

$$\{D_1 A_1 \rightarrow I\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{i T_1 \sigma_3}\pi \alpha A_3^2, D_1 A_2 \rightarrow 0\}$$

Απαιτώντας η ST1h[[i]] να είναι ορθογωνική στο adjointC[[i+2]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας

SCond1h=Solve[(int[adjointC[#+2]].ST1h[#]),{x,0,1}]/.intRule1//.intRule2/.modeshapes/.params/.int->Integrate)==0, A^(1,0)[T₁, T₂]][[1]] & /@ {1,2} // Flatten;

SCond1h/.displayRule

$$\{D_1 A_3 \rightarrow 4I\sqrt{\frac{2}{3}}bE^{-i T_1 \sigma_3}\pi \alpha A_1 \bar{A}_3, D_1 A_4 \rightarrow 0\}$$

SCond1=Join[SCond1v, SCond1h];

των οποίων τα μιγαδικά συζυγή είναι

ccSCond1=SCond1/.conjugateRule;

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας για να ελαχιστοποιήσουμε το D₁A_i από τα δεξιά μέλη της order2Eq. Γι' αυτό το λόγο, ορίζουμε τους κανόνες

sigRule=Solve[ResonanceConds, Table[σ_i, {i,4}]] [[1]]

{σ₁→-((-Ω+ω₁)/ε), σ₂→-((ω₁-ω₂)/ε), σ₃→-((ω₁-2 ω₃)/ε), σ₄→-((ω₁-ω₄)/ε)}

`expRule2=Exp[a_]>Exp[a/.sigRule/.T1->e T0//Expand];`

Αντικαθιστώντας τις `SCond1`, `ccSCond1` και `expRule2` στην `order2Eq`, λαμβάνουμε :

`order2Eqm=order2Eq/.SCond1/.ccSCond1/.expRule2;`

Για να προσδιορίσουμε τη λύση της `order2Eqm` και των σχετιζόμενων οριακών συνθηκών, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. Για να επιτευχθεί αυτό, πρώτα προσδιορίζουμε τις μορφές των όρων των δεξιών μελών της `order2Eqm` μέσω του να συλλέξουμε τους x -εξαρτώμενους ή τους x - και T_0 -εξαρτώμενους όρους μέσω ορισμού του κανόνα :

`baits = { _E^a-T0^b . f[c_x] :=> E^a-T0^b f[c_x], a_f[b_x] :=> f[b_x] /; FreeQ[a, T0]};`

Κατόπιν, συλλέγουμε τις μορφές λύσης για τις οριζόντιες εκφράσεις, σύμφωνα με :

`sol2Formh=Table[Cases[order2Eqm[[k,2]],#] & /@`

`baits, {k,3,4}]]//Flatten//Union`

`{E^-IT0^ω1-IT0^ω3 Sin[π x], E^IT0^ω1-IT0^ω2 Sin[π x],`
`E^-IT0^ω1+IT0^ω3 Sin[π x], E^IT0^ω1+IT0^ω2 Sin[π x], E^-IT0^ω1-IT0^ω4 Sin[2 π x],`
`E^IT0^ω1-IT0^ω4 Sin[2 π x], E^-IT0^ω1+IT0^ω4 Sin[2 π x], E^IT0^ω1+IT0^ω4 Sin[2 π x]}`

Καθένας εξ αυτών των όρων ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Εντούτοις, όχι όλες εκ των μορφών λύσης

`sol2Formv=Table[Cases[order2Eqm[[k,2]],#] & /@`

`baits, {k,2}]]//Flatten//Union`

`{Cos[2 π x], E^-2IT0^ω1 Cos[2 π x], E^2IT0^ω1 Cos[2 π x],`
`E^-2IT0^ω3 Cos[2 π x], E^2IT0^ω3 Cos[2 π x], E^-IT0^ω1-IT0^ω2 Sin[2 π x],`
`E^IT0^ω1-IT0^ω2 Sin[2 π x], E^-IT0^ω1+IT0^ω2 Sin[2 π x], E^IT0^ω1+IT0^ω2 Sin[2 π x]}`

για τις κατακόρυφες εκφράσεις ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Πέραν τούτου, υπάρχουν όροι που δεν είναι συναρτήσεις του x στα δεξιά μέλη της `order2Eqm[[{1,2}]]`, δηλαδή

`#[[2]] & /@ order2Eqm[[{1,2}]]/.Thread[sol2Formv->0]/.displayRule`

`{-2/3 I b E^2IT0^ω3 π α A3^2 + 2/3 I b E^-2IT0^ω3 π α A3^2, -16/3 b E^2IT0^ω1 π^2 α A1^2 - 16 b E^2IT0^ω2 π^2 α A2^2 -`
`4 b E^2IT0^ω3 π^2 α A3^2 - 16 b E^2IT0^ω4 π^2 α A4^2 + 2/3 b E^2IT0^ω3 π α A3^2 ω1 - 32/3 b π^2 α A1 A1 - 16/3 b E^-2IT0^ω1 π^2 α A1^2 -`
`32 b π^2 α A2 A2 - 16 b E^-2IT0^ω2 π^2 α A2^2 - 8 b π^2 α A3 A3 - 4 b E^-2IT0^ω3 π^2 α A3^2 + 2/3 b E^-2IT0^ω3 π α ω1 A3^2 -`
`32 b π^2 α A4 A4 - 16 b E^-2IT0^ω4 π^2 α A4^2}`

Έτσι, χρειάζεται είτε να θεωρήσουμε κάποιες αλγεβρικές μορφές ή συνδυασμένες αλγεβρικές και ημιτονοειδείς μορφές για το x ώστε με το χέρι να ρυθμίσουμε τις μορφές στην `sol2Formv` ή να χρησιμοποιήσουμε μια πιο γενική προσέγγιση για να αφήσουμε το *Mathematica* να συλλέξει τις σωστές μορφές. Η δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιείται εδώ.

Κατακόρυφες Μορφές

Αντί να αναζητούμε για τις x -εξαρτώμενες μορφές, αναζητούμε όλες τις T_0 -εξαρτώμενες μορφές, ως :

`sol2Formv1=Join[{1}, Table[Cases[order2Eqm[[k,2]], Exp[_], ∞], {k,2}]]//Flatten//Union]`

`{1, E^-2IT0^ω1, E^2IT0^ω1, E^-2IT0^ω2, E^2IT0^ω2, E^-IT0^ω1-IT0^ω2, E^IT0^ω1-IT0^ω2,`
`E^-IT0^ω1+IT0^ω2, E^IT0^ω1+IT0^ω2, E^-2IT0^ω3, E^2IT0^ω3, E^-2IT0^ω4, E^2IT0^ω4}`

όπου το πρώτο στοιχείο στην `sol2Formv1` περιλαμβάνεται στον υπολογισμό των T_0 -ανεξάρτητων μορφών.

Ορίζουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές για $u_{1,2}$ και $v_{1,2}$ ως :

```
uSymbolv=Table[ψ1, i[x], {i, Length[sol2Formv1]}];
```

```
vSymbolv=uSymbolv/.ψ->η;
```

και γράφουμε τη γενική λύση στη μορφή

```
sol2v={u1,2->Function[{x, T0, T1, T2}, uSymbolv.sol2Formv1/Evaluate], v1,2->Function[{x, T0, T1, T2}, vSymbolv.sol2Formv1/Evaluate]};
```

Αντικαθιστώντας τη `sol2v` στην `order2Eqm[[1]]` και εξισώνοντας τους συντελεστές της `sol2Formv1` και στα δύο μέλη, δίνει :

```
expr1=Subtract @@ order2Eqm[[1]].sol2v;
```

```
eqv1=Join[{expr1==0/.Exp[_]-
```

```
>0}, Coefficient[expr1, Rest[sol2Formv1]]==0//Thread]
```

```
{-η1,1[x] == 0, -η1,2[x] - 2Iω1ψ1,2[x] == 0, -η1,3[x] + 2Iω1ψ1,3[x] == 0, -η1,4[x] - 2Iω2ψ1,4[x] == 0, -η1,5[x] + 2Iω2ψ1,5[x] == 0, -η1,6[x] - Iω1ψ1,6[x] - Iω2ψ1,6[x] == 0, -η1,7[x] + Iω1ψ1,7[x] - Iω2ψ1,7[x] == 0, -η1,8[x] - Iω1ψ1,8[x] + Iω2ψ1,8[x] == 0, -η1,9[x] + Iω1ψ1,9[x] + Iω2ψ1,9[x] == 0, -2/3IbπαĀ3[T1, T2]^2 + 2/3IbπαCos[2πx]Ā3[T1, T2]^2 - η1,10[x] - 2Iω3ψ1,10[x] == 0, 2/3IbπαA3[T1, T2]^2 - 2/3IbπαCos[2πx]A3[T1, T2]^2 - η1,11[x] + 2Iω3ψ1,11[x] == 0, -η1,12[x] - 2Iω4ψ1,12[x] == 0, -η1,13[x] + 2Iω4ψ1,13[x] == 0}
```

Λύνοντας για `vSymbolv` από την `eqv1`, λαμβάνουμε

```
eta1Sol=Solve[eqv1, vSymbolv][[1]]
```

```
{η1,1[x] → 0, η1,2[x] → -2Iω1ψ1,2[x], η1,3[x] → 2Iω1ψ1,3[x], η1,4[x] → -2Iω2ψ1,4[x], η1,5[x] → 2Iω2ψ1,5[x], η1,6[x] → -I(ω1ψ1,6[x] + ω2ψ1,6[x]), η1,7[x] → I(ω1ψ1,7[x] - ω2ψ1,7[x]), η1,8[x] → -I(ω1ψ1,8[x] - ω2ψ1,8[x]), η1,9[x] → I(ω1ψ1,9[x] + ω2ψ1,9[x]), η1,10[x] → 2/3I(-bπαĀ3[T1, T2]^2 + bπαCos[2πx]Ā3[T1, T2]^2 - 3ω3ψ1,10[x]), η1,11[x] → -2/3I(-bπαA3[T1, T2]^2 + bπαCos[2πx]A3[T1, T2]^2 - 3ω3ψ1,11[x]), η1,12[x] → -2Iω4ψ1,12[x], η1,13[x] → 2Iω4ψ1,13[x]}
```

Αντικαθιστώντας τις `sol2v` και `eta1Sol` στην `order2Eqm[[2]]` και εξισώνοντας τους συντελεστές της `sol2Formv1` και στις 2 πλευρές, προκύπτει :

```
expr2=Subtract @@
```

```
order2Eqm[[2]].sol2v/.eta1Sol/.intRule1//.intRule2/.int[y'^[x] Subscript[ψ, 1, k]^(x), _1->βk]/.yRule;
```

```
eqv2=Join[{expr2==0/.Exp[_]-
```

```
>0}, Coefficient[expr2, Rest[sol2Formv1]]==0//Thread]/.params
```

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\pi^2 \beta_1}{2} + \frac{32}{3} b \pi^2 \alpha A_1 [T_1, T_2] \bar{A}_1 [T_1, T_2] - \\
 & \quad \frac{128}{3} b \pi^2 \alpha \cos [2 \pi x] A_1 [T_1, T_2] \bar{A}_1 [T_1, T_2] + 32 b \pi^2 \alpha A_2 [T_1, T_2] \bar{A}_2 [T_1, T_2] + \\
 & \quad 8 b \pi^2 \alpha A_3 [T_1, T_2] \bar{A}_3 [T_1, T_2] + 32 b \pi^2 \alpha A_4 [T_1, T_2] \bar{A}_4 [T_1, T_2] - \Psi_{1,1}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_2}{2} + \frac{16}{3} b \pi^2 \alpha \bar{A}_1 [T_1, T_2]^2 - \frac{64}{3} b \pi^2 \alpha \cos [2 \pi x] \bar{A}_1 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,2} [x] - \Psi_{1,2}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_3}{2} + \frac{16}{3} b \pi^2 \alpha A_1 [T_1, T_2]^2 - \frac{64}{3} b \pi^2 \alpha \cos [2 \pi x] A_1 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,3} [x] - \Psi_{1,3}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_4}{2} - 16 b \pi^2 \alpha \bar{A}_2 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,4} [x] - \Psi_{1,4}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_5}{2} + 16 b \pi^2 \alpha A_2 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,5} [x] - \Psi_{1,5}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_6}{2} + \frac{64 b \pi^2 \alpha \sin [2 \pi x] \bar{A}_1 [T_1, T_2] \bar{A}_2 [T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - 16 \pi^2 \Psi_{1,6} [x] - \Psi_{1,6}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_7}{2} + \frac{64 b \pi^2 \alpha \sin [2 \pi x] A_1 [T_1, T_2] \bar{A}_2 [T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \Psi_{1,7}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_8}{2} + \frac{64 b \pi^2 \alpha \sin [2 \pi x] A_2 [T_1, T_2] \bar{A}_1 [T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \Psi_{1,8}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_9}{2} + \frac{64 b \pi^2 \alpha \sin [2 \pi x] A_1 [T_1, T_2] A_2 [T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - 16 \pi^2 \Psi_{1,9} [x] - \Psi_{1,9}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_{10}}{2} + \frac{4}{3} b \pi^2 \alpha \bar{A}_3 [T_1, T_2]^2 + \frac{8}{3} b \pi^2 \alpha \cos [2 \pi x] \bar{A}_3 [T_1, T_2]^2 - 4 \pi^2 \Psi_{1,10} [x] - \Psi_{1,10}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_{11}}{2} + \frac{4}{3} b \pi^2 \alpha A_3 [T_1, T_2]^2 + \frac{8}{3} b \pi^2 \alpha \cos [2 \pi x] A_3 [T_1, T_2]^2 - 4 \pi^2 \Psi_{1,11} [x] - \Psi_{1,11}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_{12}}{2} + 16 b \pi^2 \alpha \bar{A}_4 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,12} [x] - \Psi_{1,12}' [x] == 0, \\
 & \frac{\pi^2 \beta_{13}}{2} + 16 b \pi^2 \alpha A_4 [T_1, T_2]^2 - 16 \pi^2 \Psi_{1,13} [x] - \Psi_{1,13}' [x] == 0 \}
 \end{aligned} \right.$$

Κατόπιν, προσδιορίζουμε τις λύσεις των οριακής-τιμής προβλημάτων : της eqn2 και των σχετιζόμενων οριακών συνθηκών. Πρώτα, λαμβάνουμε πληροφόρηση σχετικά με τις μορφές λύσης uSymboln σύμφωνα με

`ψForm =`

```
DSolve[{{#[[1]], #[[2]] == 0 /. x -> 0, #[[2]] == 0 /. x -> 1}, #[[2]], x][[1]] /.
  C[i_] -> 0 & /@ Transpose[{eqv2, uSymboln}] // Flatten // ExpandAll;
```

`ψForm /. displayRule`

$$\begin{aligned} \psi_{1,1}[x] &\rightarrow -\frac{1}{4} \pi^2 x \beta_1 + \frac{1}{4} \pi^2 x^2 \beta_1 - \frac{32}{3} b \alpha \bar{A}_1 \bar{A}_1 - \frac{16}{3} b \pi^2 x \alpha \bar{A}_1 \bar{A}_1 + \frac{16}{3} b \pi^2 x^2 \alpha \bar{A}_1 \bar{A}_1 + \frac{32}{3} b \alpha \text{Cos}[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_1 - \\ &16 b \pi^2 x \alpha \bar{A}_2 \bar{A}_2 + 16 b \pi^2 x^2 \alpha \bar{A}_2 \bar{A}_2 - 4 b \pi^2 x \alpha \bar{A}_3 \bar{A}_3 + 4 b \pi^2 x^2 \alpha \bar{A}_3 \bar{A}_3 - 16 b \pi^2 x \alpha \bar{A}_4 \bar{A}_4 + 16 b \pi^2 x^2 \alpha \bar{A}_4 \bar{A}_4, \\ \psi_{1,2}[x] &\rightarrow \frac{\beta_2}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_2 + \frac{1}{3} b \alpha \bar{A}_1^2 - \frac{16}{9} b \alpha \text{Cos}[2 \pi x] \bar{A}_1^2 + \frac{13}{9} b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_1^2, \\ \psi_{1,3}[x] &\rightarrow \frac{1}{3} b \alpha \bar{A}_1^2 - \frac{16}{9} b \alpha \text{Cos}[2 \pi x] \bar{A}_1^2 + \frac{13}{9} b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_1^2 + \frac{\beta_2}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_2, \\ \psi_{1,4}[x] &\rightarrow \frac{\beta_4}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_4 + b \alpha \bar{A}_2^2 - b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_2^2, \\ \psi_{1,5}[x] &\rightarrow b \alpha \bar{A}_2^2 - b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_2^2 + \frac{\beta_5}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_5, \\ \psi_{1,6}[x] &\rightarrow \frac{\beta_6}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_6 + \frac{16 b \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{3 \sqrt{3}}, \\ \psi_{1,7}[x] &\rightarrow -\frac{1}{4} \pi^2 x \beta_7 + \frac{1}{4} \pi^2 x^2 \beta_7 - \frac{16 b \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\sqrt{3}}, \\ \psi_{1,8}[x] &\rightarrow -\frac{1}{4} \pi^2 x \beta_8 + \frac{1}{4} \pi^2 x^2 \beta_8 - \frac{16 b \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_2 \bar{A}_1}{\sqrt{3}}, \\ \psi_{1,9}[x] &\rightarrow \frac{16 b \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_1 \bar{A}_2}{3 \sqrt{3}} + \frac{\beta_9}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_9, \\ \psi_{1,10}[x] &\rightarrow \frac{\beta_{10}}{9} - \frac{1}{8} \text{Cos}[2 \pi x] \beta_{10} + \frac{1}{3} b \alpha \bar{A}_2^2 - \frac{1}{3} b \alpha \text{Cos}[2 \pi x] \bar{A}_2^2 + \frac{2}{3} b \pi x \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_2^2, \\ \psi_{1,11}[x] &\rightarrow \frac{1}{3} b \alpha \bar{A}_2^2 - \frac{1}{3} b \alpha \text{Cos}[2 \pi x] \bar{A}_2^2 + \frac{2}{3} b \pi x \alpha \text{Sin}[2 \pi x] \bar{A}_2^2 + \frac{\beta_{11}}{8} - \frac{1}{8} \text{Cos}[2 \pi x] \beta_{11}, \\ \psi_{1,12}[x] &\rightarrow \frac{\beta_{12}}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_{12} + b \alpha \bar{A}_4^2 - b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_4^2, \\ \psi_{1,13}[x] &\rightarrow b \alpha \bar{A}_4^2 - b \alpha \text{Cos}[4 \pi x] \bar{A}_4^2 + \frac{\beta_{12}}{32} - \frac{1}{32} \text{Cos}[4 \pi x] \beta_{12} \end{aligned}$$

Κατόπιν, σύμφωνα με την ψ Form, συλλέγουμε τις μορφές χωρικών συναρτήσεων για u Symboln, ως

```
bait1={a_. x^n->x^n;/FreeQ[a,x],a_ f_[b_ x]:>f[b x]/;FreeQ[a,x],a_ f_[b_ x]:>x f[b x]};
```

```
funcList=Table[Prepend[Cases[ψForm[[i,2]],#] & /@
bait1//Flatten//Union,1],{i,Length[ψForm]}]
```

```
{ {1, x, x^2, Cos[2 π x]}, {1, Cos[2 π x], Cos[4 π x]}, {1, Cos[2 π x], Cos[4 π x]},
{1, Cos[4 π x]}, {1, Cos[4 π x]}, {1, Cos[4 π x], Sin[2 π x]}, {1, x, x^2, Sin[2 π x]},
{1, x, x^2, Sin[2 π x]}, {1, Cos[4 π x], Sin[2 π x]}, {1, Cos[2 π x], x Sin[2 π x]},
{1, Cos[2 π x], x Sin[2 π x]}, {1, Cos[4 π x]}, {1, Cos[4 π x]} }
```

Παίρνουμε τη λύση για $\psi_{1,1}$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό των $\text{funcList}[[i]]$, την αντικαθιστούμε στην ψ Form[[i]], εξισώνουμε και τα δύο μέλη, επιλύουμε για τους απροσδιόριστους συντελεστές, και λαμβάνουμε τη λύση για $\psi_{1,1}$ ως

```
psi1Sol = Table[
form = funcList[[k]];
cList = Table[c_i, {i, Length[form]}];
sol = cList.form;
algExpr = sol - ψForm[[k, 2]] /. β_k -> Integrate[Expand[y'[x] D[sol, x] /. γRule], {x, 0, 1}];
algEq = Append[Coefficient[algExpr, Rest[form]], algExpr /. Thread[Rest[form] -> 0]] == 0 //
Thread;
ψ1,k -> Function[x, sol /. Solve[algEq, cList][[1]] // Expand // Evaluate],
{k, Length[ψForm]}]
```

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1} &\rightarrow \text{Function}\left[x, -\frac{32}{3} b \alpha A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2] + \frac{48 b \pi^2 \kappa \alpha A_1[T_1, T_2] A_1[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} - \right. \\
&\quad \frac{48 b \pi^2 \kappa^2 \alpha A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} + \frac{32}{3} b \alpha \cos[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2] - \\
&\quad \frac{48 b \pi^2 \kappa \alpha A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} + \frac{48 b \pi^2 \kappa^2 \alpha A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} - \frac{12 b \pi^2 \kappa \alpha A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} + \\
&\quad \left. \frac{12 b \pi^2 \kappa^2 \alpha A_2[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} - \frac{48 b \pi^2 \kappa \alpha A_4[T_1, T_2] \bar{A}_4[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} + \frac{48 b \pi^2 \kappa^2 \alpha A_4[T_1, T_2] \bar{A}_4[T_1, T_2]}{3 + \pi^2} \right], \\
\psi_{1,2} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{9} b \alpha \bar{A}_1[T_1, T_2]^2 - \frac{16}{9} b \alpha \cos[2 \pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2]^2 + \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,3} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{9} b \alpha A_1[T_1, T_2]^2 - \frac{16}{9} b \alpha \cos[2 \pi x] A_1[T_1, T_2]^2 + \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] A_1[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,4} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{3} b \alpha \bar{A}_2[T_1, T_2]^2 - \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] \bar{A}_2[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,5} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{3} b \alpha A_2[T_1, T_2]^2 - \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] A_2[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,6} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{16 b \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_2[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} \right], \\
\psi_{1,7} &\rightarrow \text{Function}\left[x, -\frac{16 b \alpha \sin[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] A_2[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} \right], \\
\psi_{1,8} &\rightarrow \text{Function}\left[x, -\frac{16 b \alpha \sin[2 \pi x] A_2[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} \right], \\
\psi_{1,9} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{16 b \alpha \sin[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] A_2[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} \right], \\
\psi_{1,10} &\rightarrow \text{Function}\left[x, -c_2 + \cos[2 \pi x] c_2 + \frac{2}{3} b \pi \kappa \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_2[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,11} &\rightarrow \text{Function}\left[x, -c_2 + \cos[2 \pi x] c_2 + \frac{2}{3} b \pi \kappa \alpha \sin[2 \pi x] A_2[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,12} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{3} b \alpha \bar{A}_4[T_1, T_2]^2 - \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] \bar{A}_4[T_1, T_2]^2 \right], \\
\psi_{1,13} &\rightarrow \text{Function}\left[x, \frac{4}{3} b \alpha A_4[T_1, T_2]^2 - \frac{4}{3} b \alpha \cos[4 \pi x] A_4[T_1, T_2]^2 \right]
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι χωρικά εξαρτώμενες συναρτήσεις ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες.

Η sol2Formv1 αποτελείται από δύο μέρη : ένα μέρος σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους, το οποίο αποτελείται από όρους ανάλογους στα $E^{\pm i \omega_1 T_0}$ και $E^{\pm i \omega_2 T_0}$, και το άλλο μέρος αποτελείται από όρους που δεν σχετίζονται με τους προσωρινούς όρους. Οι θέσεις των πρώτων είναι :

```
pos[1] =
(Position[# sol2Formv1 /. expRule1[1] /. Exp[_. + _T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] //
Flatten // Rest) & /@ {E^-i * ω1 T0, E^i * ω1 T0}
{{11}, {10}}
pos[2] =
(Position[# sol2Formv1 /. expRule1[2] /. Exp[_. + _T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] //
Flatten // Rest) & /@ {E^-i * ω2 T0, E^i * ω2 T0}
{{11}, {10}}
```

Εφόσον οι pos[1] και pos[2] είναι οι ίδιες, απλά ορίζουμε :

```
{pos1, pos1cc} = pos[1] // Flatten
{11, 10}
```

Κατόπιν, επαυξάνουμε τις $\psi_{1, pos1}$ και $\eta_{1, pos1}$ μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού όλων των δυνατών ομογενών λύσεων. Οι άγνωστοι συντελεστές μπορούν να προσδιοριστούν από τις συνθήκες ορθογωνικότητας (τα $\psi_{1, pos1cc}$ και $\eta_{1, pos1cc}$ είναι απλώς τα μιγαδικά συζυγή των $\psi_{1, pos1}$ και $\eta_{1, pos1}$, αντίστοιχα). Πρώτα, εκφράζουμε τις μορφές λύσης τους χρησιμοποιώντας τις psi1Sol και eta1Sol ως :

STFormv={ψ1, pos1[x]+Sum[c1,j Φj[x], {j,2}], η1, pos1[x]+Sum[c1,j I ωj
Φj[x], {j,2}]} /. eta1Sol /. psi1Sol /. c1_>0 /. modeshapes /. params // Expand

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} c_{1,1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos[2\pi x] c_{1,1} + \sqrt{2} \sin[2\pi x] c_{1,2} + \frac{2}{3} b\pi\alpha \sin[2\pi x] A_3[T_1, T_2]^{2,2I} \sqrt{\frac{2}{3}} \pi c_{1,1} - \right.$$

$$2I \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \cos[2\pi x] c_{1,1} + 2I \sqrt{2} \pi \sin[2\pi x] c_{1,2} + \frac{2}{3} I b\pi\alpha A_3[T_1, T_2]^2 - \frac{2}{3} I b\pi\alpha \cos[2\pi x] A_3[T_1, T_2]^2 +$$

$$\left. \frac{4}{3} I b\pi^2 \alpha \sin[2\pi x] A_3[T_1, T_2]^2 \right\}$$

Απαιτώντας η STFormv να είναι ορθογωνική στο adjointC[[i]], λαμβάνουμε τους άγνωστους συντελεστές :

c1Rule=Solve[int[adjointC[[#]].STFormv, {x,0,1}]==0 /. modeshapes /. params /. intRule1 /. intRule2 /. int->Integrate, c1, #] & /@ {1,2} // Flatten

$$\left\{ c_{1,1} \rightarrow 0, c_{1,2} \rightarrow -\frac{b\pi\alpha A_3[T_1, T_2]^2}{3\sqrt{2}} \right\}$$

Κατόπιν, τροποποιούμε την psi1Sol σύμφωνα με

psi1Sol[[pos1]] = ψ1, pos1 -> Function[x, STFormv[[1]] /. c1Rule // Evaluate]

$$\psi_{1,11} \rightarrow \text{Function}[x, -\frac{1}{3} b\pi\alpha \sin[2\pi x] A_3[T_1, T_2]^2 + \frac{2}{3} b\pi\alpha \sin[2\pi x] A_3[T_1, T_2]^2]$$

psi1Sol[[pos1cc]] = ψ1, pos1cc -

> Function[x, STFormv[[1]] /. c1Rule /. conjugateRule // Evaluate]

$$\psi_{1,10} \rightarrow \text{Function}[x, -\frac{1}{3} b\pi\alpha \sin[2\pi x] \bar{A}_3[T_1, T_2]^2 + \frac{2}{3} b\pi\alpha \sin[2\pi x] \bar{A}_3[T_1, T_2]^2]$$

Οριζόντιες Μορφές

Η sol2Formh αποτελείται από δύο μέρη : ένα μέρος σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους, το οποίο αποτελείται από όρους ανάλογους στα $E^{\pm i\omega_3 T_0}$ και $E^{\pm i\omega_4 T_0}$, και το άλλο μέρος αποτελείται από όρους που δεν σχετίζονται με τους προσωρινούς όρους. Οι θέσεις των πρώτων είναι :

pos[3] =

(Position[# sol2Formh /. expRule1[3] /. Exp[._ + _ T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] // Flatten // Rest) & /@ {E^-i ω3 T0, E^i ω3 T0}

{{2}, {3}}

pos[4] =

(Position[# sol2Formh /. expRule1[4] /. Exp[._ + _ T0] -> 0, a_ /; a != 0, 1] // Flatten // Rest) & /@ {E^-i ω4 T0, E^i ω4 T0}

{{}, {}}

Έτσι, υποθέτουμε ότι η λύση για $u_{2,2}$ και $v_{2,2}$ αποτελείται από δύο μέρη που αντιστοιχούν στα μέρη της sol2Formh. Το τμήμα, που δεν σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους, είναι

sol2Formha=Delete[sol2Formh, pos[3]]

$$\left\{ E^{-iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_2} \sin[\pi x], E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_2} \sin[\pi x], E^{-iT_0 \omega_1 - iT_0 \omega_4} \sin[2\pi x], \right.$$

$$\left. E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_4} \sin[2\pi x], E^{-iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_4} \sin[2\pi x], E^{iT_0 \omega_1 + iT_0 \omega_4} \sin[2\pi x] \right\}$$

Ορίζουμε τους αντίστοιχους απροσδιόριστους συντελεστές ως :

uSymbolha=Table[ψ2, i, {i, Length[sol2Formha]}];

vSymbolha=uSymbolha/.ψ->η;

Έτσι, η γενική λύση σε σχέση με την sol2Formha μπορεί να γραφεί ως :

sol2ha={u_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},uSymbolha.sol2Formha//Evaluate],v_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},vSymbolha.sol2Formha//Evaluate]};

Το τμήμα της sol2Formh, που σχετίζεται με τους προσωρινούς όρους, είναι το :

sol2Formhb=sol2Formh[{pos[3][1]}]

$\{E^{iT_0\omega_1 - iT_0\omega_3} \text{Sin}[\pi x]\}$

και ορίζουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές ως :

uSymbolhb=Table[ψ_{s_{2,i}},{i,Length[sol2Formhb]}];

όπου οι απροσδιόριστοι συντελεστές για v_{2,2} σχετίζονται με τη uSymbolhb λόγω της συνθήκης ορθογωνικότητας. Επομένως, η γενική λύση σε σχέση με την sol2Formhb μπορεί να γραφτεί ως :

sol2hb={u_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},uSymbolhb.sol2Formhb//Evaluate],v_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},-I ω₃ uSymbolhb.sol2Formhb//Evaluate]};

Η ολική λύση είναι ένας συνδυασμός των sol2ha, sol2hb, και του μιγαδικού συζυγούς της sol2hb.

Αντικαθιστώντας τη sol2ha στην order2Eqm[{{3,4}}] και εξισώνοντας τους συντελεστές της sol2Formha και στα δύο μέλη, έχουμε

algEqa =
Flatten[Coefficient[Subtract @@ # /. sol2ha, sol2Formha] & /@
order2Eqm[{{3, 4}}]] == 0 // Thread;

Επλύοντας για τις uSymbolha και vSymbolha προκύπτει :

symbolaRule=Solve[algEqa,uSymbolha~Join~vSymbolha][[1]]/.params

$\{\psi_{2,1} \rightarrow \frac{2ba\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_3[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{2,2} \rightarrow \frac{2baA_1[T_1,T_2]A_3[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{2,3} \rightarrow \frac{16ba\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_4[T_1,T_2]}{3\sqrt{3}}, \psi_{2,4} \rightarrow$
 $-\frac{16baA_1[T_1,T_2]A_4[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{2,5} \rightarrow -\frac{16baA_4[T_1,T_2]\bar{A}_1[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}, \psi_{2,6} \rightarrow \frac{16baA_1[T_1,T_2]A_4[T_1,T_2]}{3\sqrt{3}}, \eta_{2,1} \rightarrow$
 $-2I\sqrt{3}b\pi\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_3[T_1,T_2], \eta_{2,2} \rightarrow 2I\sqrt{3}b\pi A_1[T_1,T_2]A_3[T_1,T_2], \eta_{2,3} \rightarrow$
 $-\frac{64Ib\pi\bar{A}_1[T_1,T_2]\bar{A}_4[T_1,T_2]}{3\sqrt{3}}, \eta_{2,4} \rightarrow 0, \eta_{2,5} \rightarrow 0, \eta_{2,6} \rightarrow \frac{64Ib\pi A_1[T_1,T_2]A_4[T_1,T_2]}{3\sqrt{3}}\}$

Αντικαθιστώντας τη sol2hb σε μία από τις order2Eqm[{{3,4}}], εξισώνοντας τους συντελεστές της sol2Formhb και στα δύο μέλη, και επλύοντας για uSymbolhb, παίρνουμε :

symbolbRule=Solve[Coefficient[Subtract @@
order2Eqm[3] /. sol2hb, sol2Formhb]==0//Thread,uSymbolhb][[1]]/.params
 $\{\psi_{s_{2,1}} \rightarrow -\frac{4baA_1[T_1,T_2]\bar{A}_3[T_1,T_2]}{\sqrt{3}}\}$

Αντικαθιστώντας τις symbolaRule και symbolbRule στις sol2ha και sol2hb, προκύπτει :

sol2haForm={u_{2,2}[x,T₀,T₁,T₂],v_{2,2}[x,T₀,T₁,T₂]} /. sol2ha /. symbolaRule;

sol2hbForm={u_{2,2}[x,T₀,T₁,T₂],v_{2,2}[x,T₀,T₁,T₂]} /. sol2hb /. symbolbRule;

sol2h={u_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},sol2haForm[[1]]+sol2hbForm[[1]]+(sol2hbForm[[1]]/.conjugateRule)//Expand//Evaluate],v_{2,2}->Function[{x,T₀,T₁,T₂},sol2haForm[[2]]+sol2hbForm[[2]]+(sol2hbForm[[2]]/.conjugateRule)//Expand//Evaluate]}

$$\begin{aligned}
 \{u_{2,2} \rightarrow \text{Function}[\{x, T_0, T_1, T_2\}, & \frac{2 b E^{I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] A_1[T_1, T_2] A_3[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} + \\
 & \frac{16 b E^{I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_4 \alpha \sin[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] A_4[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} - \\
 & \frac{4 b E^{-I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] A_3[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{16 b E^{-I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_4 \alpha \sin[2 \pi x] A_4[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{4 b E^{I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] A_1[T_1, T_2] \bar{A}_3[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} + \\
 & \frac{2 b E^{-I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_3[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \\
 & \frac{16 b E^{I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_4 \alpha \sin[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] \bar{A}_4[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} + \\
 & \left. \frac{16 b E^{-I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_4 \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_4[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} \right], \\
 v_{2,2} \rightarrow \text{Function}[\{x, T_0, T_1, T_2\}, & 2 I \sqrt{3} b E^{I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_3 \pi \alpha \sin[\pi x] A_1[T_1, T_2] A_3[T_1, T_2] + \\
 & \frac{64 I b E^{I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_4 \pi \alpha \sin[2 \pi x] A_1[T_1, T_2] A_4[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} - \\
 & \frac{4 I b E^{-I T_0} \omega_1 + I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] \omega_3 A_3[T_1, T_2] \bar{A}_1[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} + \\
 & \frac{4 I b E^{I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_3 \alpha \sin[\pi x] \omega_3 A_1[T_1, T_2] \bar{A}_3[T_1, T_2]}{\sqrt{3}} - \\
 & \left. \frac{2 I \sqrt{3} b E^{-I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_3 \pi \alpha \sin[\pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_3[T_1, T_2] - 64 I b E^{-I T_0} \omega_1 - I T_0 \omega_4 \pi \alpha \sin[2 \pi x] \bar{A}_1[T_1, T_2] \bar{A}_4[T_1, T_2]}{3 \sqrt{3}} \right] \}
 \end{aligned}$$

9.2.3 Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Αντικαθιστώντας τις sol1, sol2v και sol2h στην eqEps[[3]], προκύπτει :

```

order3Eq =
  (linearSys /. u_k_1 -> u_k,3) ==
  ((linearSys /. u_k_1 -> u_k,3) - (#[[1]] & /@ eqEps[[3]]) /. sol1 /.
    sol2v /. eta1Sol /. psi1Sol /. sol2h /. intRule1 /. intRule2 /.
    modeshapes /. γRule /. int -> Integrate // Expand) // Thread; //
  
```

Timing

```
{43.242 Second, Null}
```

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους, τους όρους τους ανάλογους στο $E^{i \omega T_0}$, από τις εξισώσεις που διέπουν τις κατακόρυφες εκφράσεις, έχουμε :

Συλλέγοντας τους όρους που ίσως να οδηγήσουν σε προσωρινούς όρους από τις εξισώσεις που διέπουν τις οριζόντιες εκφράσεις, έχουμε:

```
ST2v = Coefficient[#[[2]] & /@ order3Eq[{{1, 2}}] /. expRule1[#, E^{i * # T_0}] & /@ {1, 2};
```

ST2h = Coefficient#[[2]]&/@order3Eq[[{3,4}]]/.expRule1[#], E^{iω#T₀}&/@{3,4};

Απαιτώντας η ST2v[[i]] να είναι ορθογωνική στο adjointC[[i]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond2v =

Solve[

(int[adjointC[[#]].ST2v[[#]], {x, 0, 1}] /. intRule1 /. intRule2 /.
modeshapes /. params /. int -> Integrate) == 0, A₉^(0,1) [T₁, T₂]] [[1]] & /@

{1, 2} // Flatten // ExpandAll;

SCond2v /. displayRule

$$\left\{ \begin{aligned} D_2 A_1 \rightarrow & -\frac{\int_0^1 (P_1[x] - \cos[2\pi x] P_1[x]) dx}{4\sqrt{6}\pi} - A_1 \mu_1 + \frac{2}{3} I \pi^3 \alpha A_1^2 \bar{A}_1 - \\ & \frac{224}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_1^2 \bar{A}_1 + \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2 A_1^2 \bar{A}_1}{3 + \pi^2} + \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1^2 \bar{A}_1}{9 + 3\pi^2} + \frac{2}{3} I E^{2i T_1 \sigma_2} \pi^3 \alpha A_2^2 \bar{A}_1 - \\ & \frac{352}{9} I b^2 E^{2i T_1 \sigma_2} \pi \alpha^2 A_2^2 \bar{A}_1 + \frac{2}{3} I E^{2i T_1 \sigma_4} \pi^3 \alpha A_4^2 \bar{A}_1 - \frac{352}{9} I b^2 E^{2i T_1 \sigma_4} \pi \alpha^2 A_4^2 \bar{A}_1 + \\ & \frac{4}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_2 - \frac{256}{9} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_2 \bar{A}_2 - \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{3 + \pi^2} - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_2 \bar{A}_2}{9 + 3\pi^2} + \\ & \frac{1}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_3 \bar{A}_3 - \frac{4}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_3 \bar{A}_3 - \frac{64 I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_3 \bar{A}_3}{3 + \pi^2} - \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_3 \bar{A}_3}{9 + 3\pi^2} + \\ & \frac{4}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_4 \bar{A}_4 - \frac{256}{9} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_4 \bar{A}_4 - \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_4 \bar{A}_4}{3 + \pi^2} - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_4 \bar{A}_4}{9 + 3\pi^2}, \\ D_2 A_2 \rightarrow & -\frac{\int_0^1 \sin[2\pi x] P_1[x] dx}{4\sqrt{2}\pi} - A_2 \mu_1 + \frac{4}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_2 \bar{A}_1 - \\ & \frac{1024}{9} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_2 \bar{A}_1 + \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_2 \bar{A}_1}{3 + \pi^2} + \frac{2}{3} I E^{-2i T_1 \sigma_2} \pi^3 \alpha A_1^2 \bar{A}_2 - \\ & \frac{352}{9} I b^2 E^{-2i T_1 \sigma_2} \pi \alpha^2 A_1^2 \bar{A}_2 + 6 I \pi^3 \alpha A_2^2 \bar{A}_2 + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_2^2 \bar{A}_2 - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_2^2 \bar{A}_2}{3 + \pi^2} + \\ & 2 I E^{-2i T_1 \sigma_2 + 2i T_1 \sigma_4} \pi^3 \alpha A_4^2 \bar{A}_2 + \frac{32}{3} I b^2 E^{-2i T_1 \sigma_2 + 2i T_1 \sigma_4} \pi \alpha^2 A_4^2 \bar{A}_2 + I \pi^3 \alpha A_2 A_3 \bar{A}_3 - \\ & \left. \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_2 A_3 \bar{A}_3}{3 + \pi^2} + 4 I \pi^3 \alpha A_2 A_4 \bar{A}_4 - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_2 A_4 \bar{A}_4}{3 + \pi^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

Απαιτώντας η ST2h[[i]] να είναι ορθογωνική στο adjointC[[i + 2]], λαμβάνουμε τις συνθήκες επιλυσιμότητας :

SCond2h=Solve[(int[adjointC[[#+2]].ST2h[[#]], {x, 0, 1}]/.intRule1/.int

Rule2/.modeshapes/.params/.int->Integrate)==0, A₉^(0,2) [T₁, T₂]] [[1]] &

/@ {1, 2} // Flatten // ExpandAll;

SCond2h/.displayRule

$$\begin{aligned}
 & \left\{ D_2 A_3 \rightarrow -A_3 \mu_2 + \frac{2}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_3 \bar{A}_1 - \frac{136}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_3 \bar{A}_1 + \right. \\
 & \quad \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_3 \bar{A}_1}{3 + \pi^2} + 2 I \pi^3 \alpha A_2 A_3 \bar{A}_2 - \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_2 A_3 \bar{A}_2}{3 + \pi^2} + \frac{3}{4} I \pi^3 \alpha A_3^2 \bar{A}_3 - \\
 & \quad \frac{4}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_3^2 \bar{A}_3 - \frac{8 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_3^2 \bar{A}_3}{3 + \pi^2} + 2 I \pi^3 \alpha A_3 A_4 \bar{A}_4 - \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_3 A_4 \bar{A}_4}{3 + \pi^2}, \\
 & D_2 A_4 \rightarrow - \frac{I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_4 + i T_2} \int_0^1 \text{Sin}[2 \pi x] P_2[x] dx}{4 \sqrt{2} \pi} - A_4 \mu_2 + \frac{4}{3} I \pi^3 \alpha A_1 A_4 \bar{A}_1 - \\
 & \quad \frac{1024}{9} I b^2 \pi \alpha^2 A_1 A_4 \bar{A}_1 + \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_1 A_4 \bar{A}_1}{3 + \pi^2} + 4 I \pi^3 \alpha A_2 A_4 \bar{A}_2 - \\
 & \quad \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_2 A_4 \bar{A}_2}{3 + \pi^2} + I \pi^3 \alpha A_3 A_4 \bar{A}_3 - \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_3 A_4 \bar{A}_3}{3 + \pi^2} + \\
 & \quad \frac{2}{3} I E^{-2 i T_1 \sigma_4} \pi^3 \alpha A_1^2 \bar{A}_4 - \frac{352}{9} I b^2 E^{-2 i T_1 \sigma_4} \pi \alpha^2 A_1^2 \bar{A}_4 + 2 I E^{i T_1 \sigma_2 - 2 i T_1 \sigma_4} \pi^3 \alpha A_2^2 \bar{A}_4 + \\
 & \quad \left. \frac{32}{3} I b^2 E^{i T_1 \sigma_2 - 2 i T_1 \sigma_4} \pi \alpha^2 A_2^2 \bar{A}_4 + 6 I \pi^3 \alpha A_4^2 \bar{A}_4 + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 A_4^2 \bar{A}_4 - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2 A_4^2 \bar{A}_4}{3 + \pi^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την SCond2v και την SCond2h σε συμπαγή μορφή μέσω συλλογής των συντελεστών της ίδιας μορφής, ως ακολούθως :

```

collectForm = Table[{A_i[T1, T2] E^{i \sigma_i T_0}, \bar{A}_i[T1, T2] E^{-i \sigma_i T_0}}, {i, 4}] // Flatten;
cubicTerms = Nest[Outer[Times, collectForm, #] &, collectForm, 2] // Flatten // Union;
cubicST[i_] := E^{-i \sigma_i T_0} cubicTerms /. expRule1[i] /. Exp[_ T_0 + _] -> 0 // Union // Rest
moduEq =
MapIndexed[{term = cubicST[#2][[1]]; coef = Coefficient[#1[[2]], term];
#1[[1]] == (#1[[2]] /. Thread[term -> 0]) + coef.term} &, Join[SCond2v, SCond2h]];
moduEq /. displayRule

```

$$\begin{aligned}
 \{D_2 A_1 == & - \frac{I E^{i T_1 \sigma_1 + i T_1} \int_0^1 (P_1[x] - \text{Cos}[2 \pi x] P_1[x]) dx}{4 \sqrt{6} \pi} - A_1 \mu_1 + \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{224}{3} I b^2 \pi \alpha^2 + \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2}{3 + \pi^2} + \right. \\
 & \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{9 + 3 \pi^2}) A_1^2 \bar{A}_1 + E^{2 i T_1 \sigma_2} \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{352}{9} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_2^2 \bar{A}_1 + E^{2 i T_1 \sigma_4} \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{352}{9} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_4^2 \bar{A}_1 + \\
 & \left(\frac{4}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{256}{9} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2}{3 + \pi^2} - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{9 + 3 \pi^2} \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \left(\frac{1}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{4}{3} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{64 I b^2 \pi \alpha^2}{3 + \pi^2} - \right. \\
 & \left. \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{9 + 3 \pi^2} \right) A_1 A_3 \bar{A}_3 + \left(\frac{4}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{256}{9} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{256 I b^2 \pi \alpha^2}{3 + \pi^2} - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{9 + 3 \pi^2} \right) A_1 A_4 \bar{A}_4, D_2 A_2 == \\
 & - \frac{I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_2 + i T_1} \int_0^1 \text{Sin}[2 \pi x] P_1[x] dx}{4 \sqrt{2} \pi} - A_2 \mu_1 + \left(\frac{4}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{1024}{9} I b^2 \pi \alpha^2 + \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \\
 & E^{-2 i T_1 \sigma_2} \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{352}{9} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_1^2 \bar{A}_2 + \left(6 I \pi^3 \alpha + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_2^2 \bar{A}_2 + \\
 & E^{-2 i T_1 \sigma_2 + 2 i T_1 \sigma_4} \left(2 I \pi^3 \alpha + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_4^2 \bar{A}_2 + \left(I \pi^3 \alpha - \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_2 A_3 \bar{A}_3 + \left(4 I \pi^3 \alpha - \right. \\
 & \left. \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_2 A_4 \bar{A}_4, D_2 A_3 == -A_3 \mu_2 + \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{136}{3} I b^2 \pi \alpha^2 + \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_1 A_3 \bar{A}_1 + \left(2 I \pi^3 \alpha - \right. \\
 & \left. \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_2 A_3 \bar{A}_2 + \left(\frac{3}{4} I \pi^3 \alpha - \frac{4}{3} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{8 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_3^2 \bar{A}_3 + \left(2 I \pi^3 \alpha - \frac{32 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_3 A_4 \bar{A}_4, D_2 A_4 == \\
 & - \frac{I E^{i T_1 \sigma_1 - i T_1 \sigma_4 + i T_2} \int_0^1 \text{Sin}[2 \pi x] P_2[x] dx}{4 \sqrt{2} \pi} - A_4 \mu_2 + \left(\frac{4}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{1024}{9} I b^2 \pi \alpha^2 + \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_1 A_4 \bar{A}_1 + \left(4 I \pi^3 \alpha - \right. \\
 & \left. \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_2 A_4 \bar{A}_2 + \left(I \pi^3 \alpha - \frac{16 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_3 A_4 \bar{A}_3 + E^{-2 i T_1 \sigma_4} \left(\frac{2}{3} I \pi^3 \alpha - \frac{352}{9} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_1^2 \bar{A}_4 + \\
 & E^{2 i T_1 \sigma_2 - 2 i T_1 \sigma_4} \left(2 I \pi^3 \alpha + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 \right) A_2^2 \bar{A}_4 + \left(6 I \pi^3 \alpha + \frac{32}{3} I b^2 \pi \alpha^2 - \frac{64 I b^2 \pi^3 \alpha^2}{3 + \pi^2} \right) A_4^2 \bar{A}_4 \}
 \end{aligned}$$

Αυτές οι συνθήκες επιλυσιμότητας ικανοποιούν τις ιδιότητες συμμετρίας ελειδί :

```

formList = Table[A, {T1, T2} Table[A, {T1, T2}  $\bar{A}_i$ {T1, T2}, {i, 4}], {j, 4}];
formList /. displayRule
{{A12A1, A1 A2 A2, A1 A3 A3, A1 A4 A4}, {A1 A2 A1, A22A2, A2 A3 A3, A2 A4 A4},
 {A1 A3 A1, A2 A3 A2, A32A3, A3 A4 A4}, {A1 A4 A1, A2 A4 A2, A3 A4 A3, A42A4}}
notationList=Table[si,j, {i, 4}, {j, 4}]
{{s1,1, s1,2, s1,3, s1,4}, {s2,1, s2,2, s2,3, s2,4}, {s3,1, s3,2, s3,3, s3,4}, {s4,1, s4,2, s4,3, s4,4}}
coefRule =
  MapThread[Rule,
    {notationList, Coefficient[(2 ωπ I) moduEq[#, 2]], formList[[#]]} & /@
    Range[4]}, 2] // Flatten;
testList=Table[si,j-sj,i, {i, 4}, {j, i, 4}]/Flatten//Union//Rest
{s1,2-s2,1, s1,3-s3,1, s2,3-s3,2, s1,4-s4,1, s2,4-s4,2, s3,4-s4,3}
testList/.coefRule/.params//Factor
{0,0,0,0,0,0}

```

Βιβλιογραφία

1. Arafat, H. N., Nayfeh, A. H., and Chin, C-M., 1998, "Nonlinear Nonplanar Dynamics of Parametrically Excited Cantilever Beams," *Nonlinear Dynamics*, **15**, 31-61.
2. Benedettini, F., Rega, G., and Alaggio, R., 1995a, "Experimental Analysis of the Finite Dynamics of a Suspended Cable," *Proceedings of the 15th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibrations and Noise*, **DE Vol. 84-1**, 543-552.
3. Benedettini, F., Rega, G., and Alaggio, R., 1995b, "Non-Linear Oscillations of a Four-Degree-of-Freedom Model of a Suspended Cable under Multiple Internal Resonance Conditions," *J. Sound and Vibration*, **182**, 775-798.
4. Chin, C-M. and Nayfeh, A. H., 1996, "Bifurcation and Chaos in Externally Excited Circular Cylindrical Shells," *J. Applied Mechanics*, **63**, 565-574.
5. Chin, C-M. and Nayfeh, A. H., 1997, "Three-to-One Internal Resonances in Hinged-Clamped Beams," *Nonlinear Dynamics*, **12**, 129-154.
6. Chin, C-M., Nayfeh, A. H., and Lacarbonara, W., 1997, "Two-to-One Internal Resonances in Parametrically Excited Buckled Beams," *Proceedings of the AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, **1**, 213-223
7. Chu, H-N. and Herrmann, G., 1956, "Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates," *J. Applied Mechanics*, **23**, 532-540.
8. Crespo da Silva, M. R. M., 1978, "Flexural-Flexural Oscillations of Beck's Column Subjected to a Planar Harmonic Excitation," *J. Sound and Vibration*, **60**, 133-144.
9. Crespo da Silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978a, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams, I. Equations of Motion," *J. Structural Mechanics*, **6**, 437-448.
10. Crespo da Silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978b, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams, I. Forced Motion," *J. Structural Mechanics*, **6**, 449-461.
11. Lacarbonara, W., Nayfeh, A. H., and Kreider, W., 1998, "Experimental Validation of Reduction Methods for Nonlinear Vibrations of Distributed-Parameter Systems: Analysis of a Buckled Beam," *Nonlinear Dynamics*, **17**, 95-117.
12. Malkin, I. G., 1956, *Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations*, GITTL, Moscow.

13. McIvor, I. K., 1966, "The Elastic Cylindrical Shell under Radial Impulse," *J. Applied Mechanics*, **33**, 831-837.
14. Nayfeh, A. H., 1975, "Nonlinear Propagation of a Wave Packet in a Hard-Walled Circular Duct," *J. Acoustical Society of America*, **57**, 803-809.
15. Nayfeh, A. H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley, New York.
16. Nayfeh, A. H., 1998, "Reduced-Order Models of Weakly Nonlinear Spatially Continuous Systems," *Nonlinear Dynamics*, **16**, 105-125.
17. Nayfeh, A. H. and Asfar, K. R., 1986, "Response of a Bar Constrained by a Non-Linear Spring to a Harmonic Excitation," *J. Sound and Vibrations*, **105**, 1-15.
18. Nayfeh, A. H. and Bouguerra, H., 1990, "Non-Linear Response of a Fluid Valve," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **25**, 433-439.
19. Nayfeh, A. H., Kreider, W., and Anderson, T. J., 1995, "Investigation of Natural Frequencies and Mode Shapes of Buckled Beams," *AIAA J.*, **33**, 1121-1126.
20. Nayfeh, A. H. and Lacarbonara, W., 1997, "On the Discretization of Distributed-Parameter Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities," *Nonlinear Dynamics*, **13**, 203-220.
21. Nayfeh, A. H. and Lacarbonara, W., 1998, "On the Discretization of Spatially Continuous Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities," *JSME Int. J.*, **C41**, 510-531.
22. Nayfeh, A. H., Lacarbonara, W., and Chin, C-M., 1999, "Nonlinear Normal Modes of Buckled Beams: Three-to-One and One-to-One Internal Resonances," *Nonlinear Dynamics*, in press.
23. Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York.
24. Nayfeh, A. H., Nayfeh, J. F., and Mook, D. T., 1992, "On Methods for Continuous Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities," *Nonlinear Dynamics*, **3**, 145-162.
25. Nayfeh, S. A. and Nayfeh, A. H., 1993, "Nonlinear Interactions Between Two Widely Spaced Modes - External Excitation," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **3**, 417-427.
26. Nayfeh, A. H. and Nayfeh, S. A., 1995, "Nonlinear Normal Modes of a Continuous System with Quadratic Nonlinearities," *J. Vibration and Acoustics*, **117**, 199-205.
27. Nayfeh, A. H., Nayfeh, S. A., and Pakdemirli, M., 1995, "On the Discretization of Weakly Nonlinear Spatially Continuous Systems," in *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, W. Kliemann and N. Sri Namachchivaya, eds., CRC Press, Boca Raton, Florida, 175-200.
28. Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990a, "Non-Linear Non-Planar Oscillations of a Cantilever

- Beam under Lateral Base Excitations," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **25**, 455-474.
29. Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990b, "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams- I. Equations of Motion," *Nonlinear Dynamics*, **1**, 477-502.
 30. Pakdemirli, M., Nayfeh, S. A., and Nayfeh, A. H., 1995, "Analysis of One-to-One Autoparametric Resonances in Cables - Discretization vs. Direct Treatment," *Nonlinear Dynamics*, **8**, 65-83.
 31. Raouf, R. A. and Nayfeh, A. H., 1990a, "Nonlinear Axisymmetric Response of Spherical Shells to a Radial Harmonic Excitation," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **25**, 475-492.
 32. Raouf, R. A. and Nayfeh, A. H., 1990b, "One-to-One Autoparametric Resonances in Infinitely Long Cylindrical Shells," *Computers & Structures*, **35**, 163-173.
 33. Rega, G., Lacarbonara, W., Nayfeh, A. H., and Chin, C-M., 1999, "Multiple Resonances in Suspended Cables: Direct versus Reduced-Order Models," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, accepted for publication.
 34. von Kármán, T., 1910, "Festigkeitsprobleme in Maschinenbau," *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, P. R. Halmos, ed., *American Mathematical Society*, **3**, 211-385.
 35. Yamamoto, T. 1957, "On the Vibrations of a Rotating Shaft," *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, **9**, 19-115.
 36. Yamamoto, T. 1960, "Response Curves at the Critical Speeds of Subharmonic and Summed and Differential Harmonic Oscillations," *Bull. JSME*, **3**, 397-403.

ΛΕΞΙΚΟ ΒΑΣΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Αμφιαρθρωτή δοκός	Hinged-hinged beam
Ανάδραση	Feedback
Ανάλυση διακλάδωσης	Bifurcation analysis
Ανάπτυξη	Expansion
Άνευ απόσβεσης	Undamped
Αντικατάσταση	Substitution
Αντιστοίχιση, Συνάρτηση	Mapping
Αποσυντονιστικός	Detuning
Αυτο-συζυγής	Self-adjoint
Γραμμικός ταλαντωτής	Linear Oscillator
Διαταραχή	Perturbation
Διατομή	Cross-section
Διέγερση	Excitation
Δοκός	Beam, Girder
Δύναμη, Εξαναγκασμός	Forcing
Δυναμοσειρά	Power series
Μη-Εκτατός, Μη - εκτατικός	Inextensional
Ελατήριο	Spring
Εξίσωση διαμόρφωσης	Modulation equation
Εύρος ταλάντωσης	Amplitude
Ιδιομορφή	Eigenmode
Ιδιομορφικός	Modal
Ιξώδης απόσβεση	Viscous damping
Κέλυφος	Shell
Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών	Method of undetermined coefficients
Μέθοδος βαρυτικών υπολοίπων	Method of weighted residuals
Μέθοδος κανονικών μορφών	Method of normal forms
Μέθοδος μεσοστάθμισης	Method of averaging
Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων	Method of multiple scales
Μετασηματισμός	Transformation
Μετατόπιση	Deflection
Μήκος παρυφής	Edge length
Μη-συζευγμένος	Uncoupled
Μιγαδικό συζυγές	Complex conjugate
Μονόπακτη δοκός	Hinged-clamped beam
Μορφή	Mode

Όρισμα

Argument

Πλάκα

Plate

Πρόβολος

Cantilever beam

Προσωρινός όρος

Secular term

Στρεπτική αδράνεια

Torsional inertia

Συζυγής τελεστής (Ερμιτιανή συζυγία)

Adjoint (Hermitian Conjugation)

Συνάρτηση κριτηρίου

Predicate (function)

Συνάρτηση σχήματος, Ιδιομορφή

Mode shape

Συντονισμός

Resonance

Σχεδόν ταυτοτικός

Near-identity

Ταίριασμα υποδειγμάτων

Pattern matching

Ταλάντωση

Vibration, Oscillation

Υπέρθωση

Superposition

Χρονική κλίμακα

Time scale



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000106693