

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

«Μελέτη ηλεκτρομαγνητικών διατάξεων και υπολογισμός πεδιακών
μεγεθών με την μέθοδο Dufort-Frankel»



Μουραζούκος Ευάγγελος

Βόλος 2010



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 8877/1
Ημερ. Εισ.: 21-10-2010
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜ
2010
ΜΟΥ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την πραγματοποίηση αυτής της εργασίας ήταν απαραίτητη η εξοικείωση με το υπολογιστικό περιβάλλον της εφαρμογής MATLAB και γνώσεις προγραμματισμού ικανές να προσαρμόσουν αριθμητικές μεθόδους επίλυσης σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση προβλήματος, με προϋπόθεση πάντα τη θεωρητική γνώση για επιλογή και σύγκριση μεθόδων. Ο επιβλέπων καθηγητής κ. Θεόδωρος Κοσμάνης με ξενάγησε από την αρχή της προσπάθειας στα κατάλληλα εργαλεία για την αντιμετώπιση των στοιχείων της εργασίας και με καθοδηγούσε με υπομονή σε κάθε δυσκολία που αντιμετώπισα, τόσο στον προγραμματισμό όσο και στο θεωρητικό μέρος. Τον ευχαριστώ θερμά.

Θα νοσταλγώ τις ώρες δραστηριότητας στο εργαστήριο και θα θυμάμαι πάντα με εκτίμηση κάθε συνεργάτη, που διαμόρφωσε πάντα κατάλληλα τις συνθήκες σχετικά με ωράρια και εξοπλισμό.

Μουρτζούκος Ευάγγελος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	
1.1 Αριθμητική επίλυση εξισώσεων.....	3
1.2 Η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων στο πρόβλημα της εργασίας.....	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ Dufort-Frankel	
2.1 Εισαγωγή στην μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (FDM).....	8
2.2 Εφαρμογή της FDM στην εξίσωση Laplace.....	10
2.3 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD).....	16
2.4 Επιλογή της μεθόδου Dufort-Frankel.....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΥΒΡΙΔΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΕΔΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ	
3.1 Η λογική της υβριδικής μεθοδολογίας.....	24
3.2 Η υβριδική μεθοδολογία.....	26
3.2.1 Επίλυση πεδιακών εξισώσεων.....	26
3.2.2 Διακριτοποίηση των περιοχών της διάταξης.....	29
3.2.3 Συσχέτιση κελιών και αλγορίθμων.....	30
3.3 Σύνοψη και πλεονεκτήματα.....	34
3.3.1 Σύνοψη.....	34
3.3.2 Πλεονεκτήματα υβριδικής μεθοδολογίας.....	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ Dufort – Frankel.....	36
4.1 Ορισμός της διάταξης / του προβλήματος.....	37
4.1.1 Ορισμός διαστάσεων και θέσης των υλικών στη διάταξη.....	37
4.1.2 Δήλωση φυσικών σταθερών – υπολογισμένων παραμέτρων.....	38

4.1.3 Ρευματική διέγερση - αναγνώριση διάταξης από το πρόγραμμα	41
4.2 Αποτελέσματα	42
4.2.1 Γραφήματα	42
4.2.2 Παρατηρήσεις	46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ ΜΕ ΤΗΝ

ΜΕΘΟΔΟ Dufort – Frankel	48
5.1 Εισαγωγή των παραμέτρων της διάταξης	48
5.2 Αποτελέσματα - Γραφήματα και τελικές τιμές παραμέτρων	50
5.2.1 Προσομοίωση της διάταξης σε διαφορετικές συχνότητες f – σταθερές τιμές ιδιοτήτων μ , σ	51
5.2.2 Προσομοίωση της διάταξης σε διαφορετικές τιμές μαγνητικής διαπερατότητας μ – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και διαστάσεων της διάταξης	60
5.2.3 Μεταβολή των ορίων του αέρα γύρω από τον μετασχηματιστή (air) – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ	69
5.2.4 Μεταβολή του μεγέθους του πυρήνα του μετασχηματιστή (rachos) – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ	77
5.2.5 Προσομοίωση της διάταξης όταν το δεύτερο πηνίο λειτουργεί με ρεύμα – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ	87
Συμπεράσματα	90
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ	91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1.1 Αριθμητική επίλυση εξισώσεων.

Η απλούστερη και πιο χαρακτηριστική περίπτωση αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων είναι η αριθμητική επίλυση εξισώσεων.

Γενικά, θα ήταν πάρα πολύ σημαντικό για την επιστήμη και την τεχνολογία αν για οποιαδήποτε εξίσωση υπήρχε αναλυτική (κλειστή) έκφραση, η οποία να μας δίνει την λύση της εξίσωσης. Δηλαδή να υπάρχουν εκφράσεις που δίνουν τις λύσεις της εξίσωσης αναλυτικά ως συναρτήσεις των συντελεστών της. Εδώ θα αναφερθούμε με εισαγωγικό σκοπό στην απλούστερη περίπτωση, δηλαδή στην επίλυση *αλγεβρικής* εξίσωσης σε μία διάσταση, όπου δηλαδή οι συναρτήσεις που συνθέτουν την εξίσωση έχουν μόνο μία μεταβλητή, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα την εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1)$$

με $\alpha, \beta = \text{σταθερά}$, της οποίας οι δύο ρίζες $r_{1,2}$ προκύπτουν αναλυτικά από την έκφραση

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Επειδή δεν είναι πάντα δυνατό να βρεθεί αναλυτικός τύπος που να δίνει τις ακριβείς λύσεις (ρίζες) μίας εξίσωσης, όπως για παράδειγμα δεν μπορεί να συμβεί για *αλγεβρικές εξισώσεις ανωτέρου του τετάρτου βαθμού*, καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους (αλγορίθμους) που υπολογίζουν τις εξισώσεις των λύσεων αυτών. Σε πιο οικεία διατύπωση, θα αναφερθούμε στην εύρεση των ριζών *πολυωνυμικών εξισώσεων* μίας μεταβλητής με αριθμητικό τρόπο, ως μία εισαγωγή στις μεθόδους αριθμητικής επίλυσης *διαφορικών εξισώσεων*.

Μία συνηθισμένη, αποδοτική και εύκολα κατανοητή μέθοδος προσέγγισης ριζών εξισώσεων είναι η μέθοδος *Newton-Raphson*. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται από ένα

επαναληπτικό σχήμα που παράγεται από το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)$. Αναλυτικότερα, αν r είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή D του σημείου r , τότε για κάθε $x_k \in D$ θα έχουμε ότι :

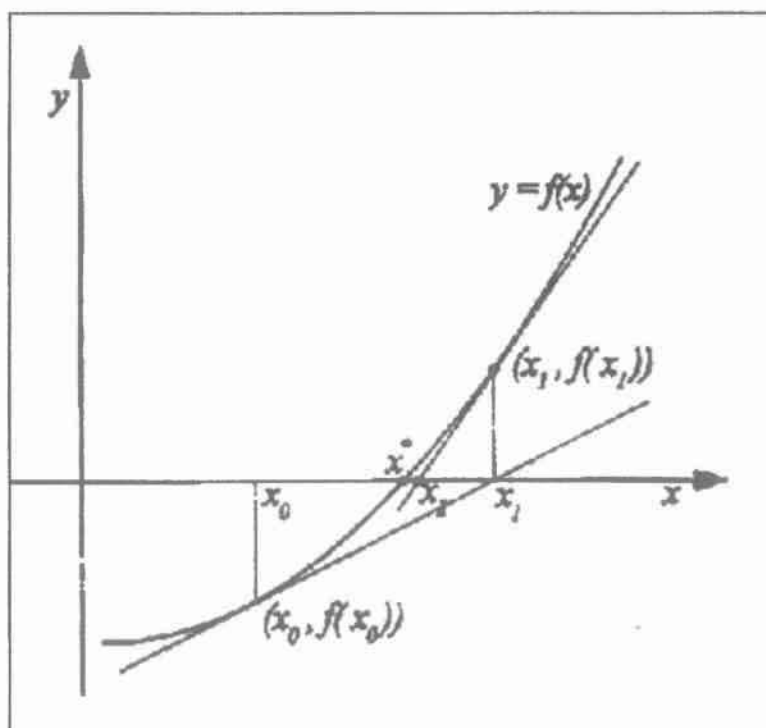
$$0 = f(r) = f(x_k) + (r - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(r - x_k)^2 f''(x_k) \Rightarrow$$

$$r = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}(r - x_k)^2 \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}$$

Επομένως αν το σημείο x_k είναι αρκετά κοντά στο σημείο r τότε από την παραπάνω σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

που είναι ο **επαναληπτικός αλγόριθμος της μεθόδου Newton-Raphson**. Η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να είναι το πολυώνυμο της εξίσωσης (1.1) και x_0 μια δεδομένη αρχική προσέγγιση της ρίζας r . Δύο πρώτες προσεγγίσεις της μεθόδου μιας τυχούσας συνάρτησης $f(x)$ ξεκινώντας από την αρχική τιμή x_0 φαίνονται στο σχήμα της Εικ.1.1.



Εικ.1.1 Στο σχήμα φαίνονται οι προσεγγίσεις της μεθόδου *Newton-Raphson* στο γράφημα της συνάρτησης $f(x)$. Με μία αρχική τιμή x_0 , η πρώτη προσέγγιση x_1 θα δίνεται από την τομή με τον άξονα των x της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, η προσέγγιση x_2 θα δίνεται από την τομή με τον άξονα των x της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ κ.ο.κ. μέχρι να βρεθεί η προσέγγιση x^* της λύσης r .

Έτσι, μετά τις σχετικά απλές αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων, μπορεί να γίνει κατανοητή η χρησιμοποίηση του αναπτύγματος Taylor ή σειράς Taylor για την *διακριτοποίηση μερικών διαφορικών εξισώσεων* και επομένως τον σχηματισμό *σχέσεων πεπερασμένων διαφορών*, που θα επιλυθούν στη συνέχεια με κάποια αριθμητική μέθοδο.

Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται αναλυτικά η διακριτοποίηση της εξίσωσης

$$\nabla^2 A - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (I)$$

με αντικατάσταση των μερικών παραγώγων με διακριτές σχέσεις αλγεβρικής μορφής μέσω των αναπτυγμάτων Taylor, με αποτέλεσμα την αντικατάσταση της μερικής διαφορικής εξίσωσης από μια διακριτοποιημένη αλγεβρική σχέση, την σχέση πεπερασμένων διαφορών Dufort-Frankel.

$$\frac{A_{i-1,j}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j-1}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - \mu\sigma \frac{A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = 0$$

Στην παραπάνω σχέση, οι δείκτες i, j μπορούν να παρουσιαστούν ως σημεία του διακριτοποιημένου χώρου διαστάσεων x, y με διακριτοποίηση

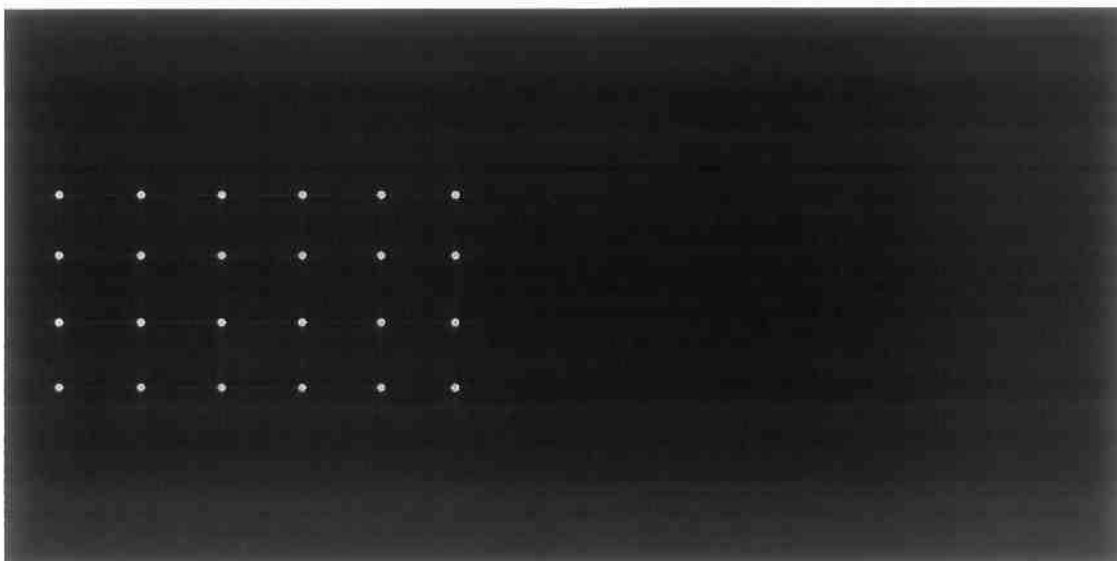
$$i = \frac{x}{\Delta x} + 1 \quad j = \frac{y}{\Delta y} + 1$$

που μοιάζει με πλέγμα της Εικ.1.2, ενώ οι εκθέτες $n-1, n, n+1$ βήματα του διακριτοποιημένου χρόνου t .

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται επίσης αναλυτικά η διακριτοποίηση της εξίσωσης

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (II)$$

με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Taylor, όπου όμως τώρα λαμβάνουμε, όχι μια άμεση αλγεβρική σχέση (αλγόριθμο) όπου τα αποτελέσματα της προηγούμενης επανάληψης είναι τα δεδομένα της επόμενης, αλλά ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που θα πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα με κάποια αριθμητική μέθοδο π.χ. με την μέθοδο απαλοιφής Gauss.



Εικ.1.2 Γενική άποψη πλέγματος διακριτοποίησης.

1.2 Η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων στο πρόβλημα της εργασίας

Το αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (I) σε διδιάστατο χώρο, που περιβάλλεται από υλικό σε περιοχή που ορίζεται με ορθογώνια όρια (Εικ.3.1), το οποίο υπακούει στην εξίσωση (II) (εξίσωση Laplace) που επίσης θα πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά ταυτόχρονα με την εξίσωση (I) καθώς και τις συνθήκες που ισχύουν στο σύνορο των περιοχών που υπακούουν στις εξισώσεις (I) και (II) αντίστοιχα.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μια γενική περιγραφή για την φύση των προβλημάτων αυτού του είδους και την εφαρμογή της υβριδικής μεθοδολογίας, δηλαδή την ταυτόχρονη αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (I) και (II) με τα δεδομένα ενός ενιαίου προβλήματος, ενώ στα κεφάλαια 4 και 5 γίνεται εφαρμογή σε δύο διατάξεις

διαφορετικής γεωμετρίας και εκτίθενται τα αποτελέσματα των μεγεθών που θέλουμε να μελετήσουμε (π.χ. διανυσματικό δυναμικό A) σε γραφήματα καθώς και οι πίνακες με τις αριθμητικές τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ Dufort-Frankel

2.1 Εισαγωγή στην μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (FDM).

Η κατηγορία των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με την βοήθεια των κλασικών μεθόδων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εμφανίζεται αρκετά περιορισμένη. Πράγματι, οι πρακτικές περιπτώσεις εφαρμογής των μεθόδων αυτών προϋποθέτουν, συνήθως, μέσα με απλές γεωμετρίες και φυσικές ιδιότητες, ενώ αδυνατούν κατά κανόνα, να επιλύσουν προβλήματα στα οποία :

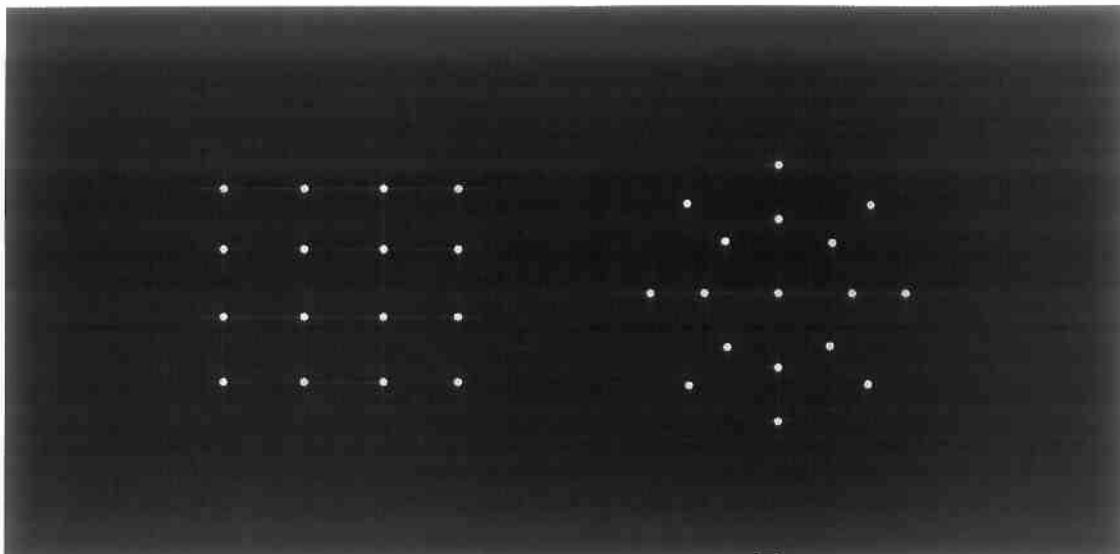
- α) Η περιοχή του εξεταζόμενου προβλήματος είναι γεωμετρικά πολύπλοκη.
- β) Τα θεωρούμενα μέσα είναι ανομοιογενή ή ανισότροπα.
- γ) Οι οριακές συνθήκες είναι μικτού τύπου ή χρονικά εξαρτημένες.
- δ) Οι προς επίλυση διαφορικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές.

Ο συνηθέστερος, ευχερέστερος και αποτελεσματικότερος τρόπος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι με τη βοήθεια κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων.

Από τις χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μεθόδους οι απλούστερες και, ίσως, οι πλέον διαδεδομένες είναι εκείνες που εισάγουν εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών για την προσεγγιστική επίλυση πεδιακών προβλημάτων που περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Ιστορικά, πρώτος ο Taylor το 1715 με το έργο του, χάρισε στα μαθηματικά αυτό το νέο κλάδο που ονομάζουμε *λογισμό των πεπερασμένων διαφορών* (calculus of finite differences). Το 1922 ο Richardson δημοσίευσε τα αποτελέσματα από την χρήση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών (finite difference method-FDM) για την πρόβλεψη του καιρού.

Οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών βασίζονται στην υποκατάσταση των διαφορικών εξισώσεων με προσεγγιστικές εκφράσεις διαφορών αλγεβρικής μορφής.



Εικ.2.1 Τυπικά πλέγματα διακριτοποίησης : ορθογωνικό και ακτινικό πλέγμα

Οι εξισώσεις διαφορών συσχετίζουν την τιμή του αγνώστου πεδιακού μεγέθους σ' ένα σημείο της περιοχής του προβλήματος προς τις τιμές του σ' ένα σύνολο γειτονικών σημείων.

Γενικά, η επίλυση ενός πεδιακού προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών περιλαμβάνει τα ακόλουθα βασικά βήματα :

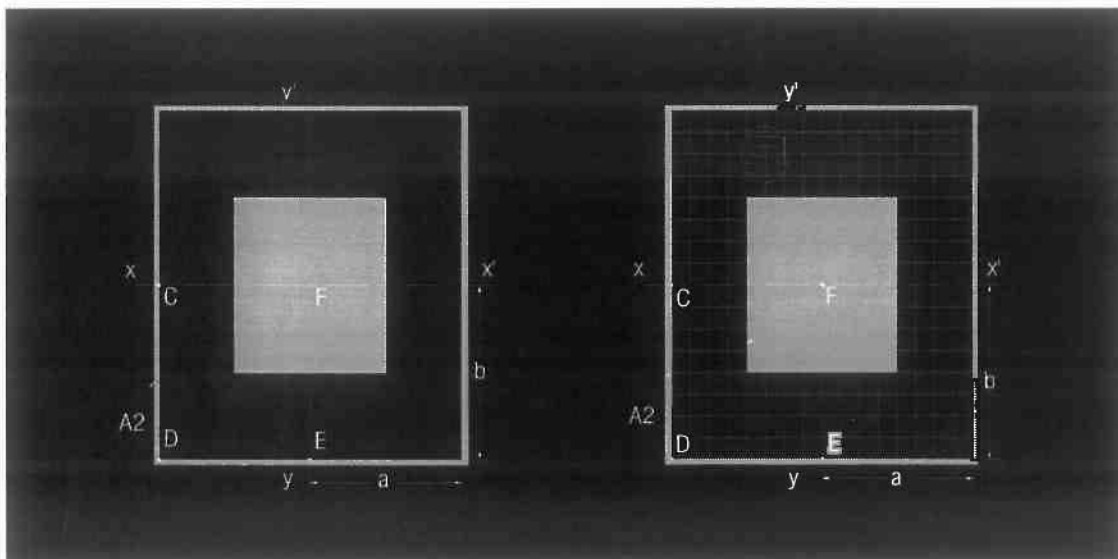
- α) Αντικατάσταση της συνεχούς περιοχής του προβλήματος από ένα πλέγμα διακριτών σημείων (διακριτοποίηση).
- β) Αντικατάσταση της διαφορικής εξίσωσης με την "ισοδύναμη" προσεγγιστική έκφραση διαφορών σε κάθε σημείο του πλέγματος.
- γ) Εισαγωγή των οριακών ή /και αρχικών συνθηκών του προβλήματος.
- δ) Επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων και προσδιορισμός της τιμής του ζητούμενου αγνώστου μεγέθους σε κάθε κόμβο του πλέγματος.

2.2 Εφαρμογή της FDM στην εξίσωση Laplace.

Η καινοτομία λοιπόν των μεθόδων FDM συνίσταται στην απαλοιφή των παραγώγων από την μερική διαφορική εξίσωση (Partial differential equation-PDE) με την βοήθεια αναπτυγμάτων Taylor, και την μετατροπή της έτσι σε μια αλγεβρική διακριτοποιημένη σχέση. Μπορούμε να δούμε την εφαρμογή της μεθόδου με ένα παράδειγμα : την διακριτοποίηση της διδιάστατης εξίσωσης Laplace

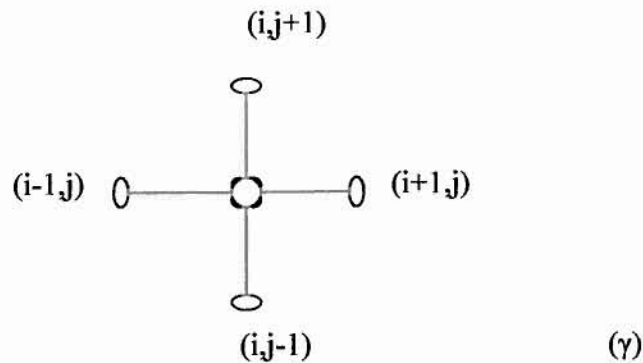
$$\nabla^2 A \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

όπου από την επίλυση της διακριτοποιημένης σχέσης θα προκύψει η τιμή του διανυσματικού δυναμικού A , στα σημεία της περιοχής που περικλείεται από ένα όριο στο οποίο η τιμή του A είναι γνωστή έστω $A1, A2$ (Εικ.2.2).



(α)

(β)



Εικ.2.2 Στα σχήματα 2.2(α),(β) φαίνεται η διδιάστατη περιοχή λύσης της εξίσωσης Laplace, στο σχήμα 2.2(α) χωρίς πλέγμα διακριτοποίησης ενώ στο 2.2(β) με διακριτοποιημένη την περιοχή όπου θα μπει σε εφαρμογή η εξίσωση. Στο σχήμα 2.2(γ) φαίνεται σε μεγέθυνση η περιοχή του “μπαλώματος” στο παραπάνω πλέγμα. Συμβολίζονται οι κόμβοι γύρω από τον κεντρικό κόμβο (i, j) που βρίσκεται στο κέντρο του σχήματος.

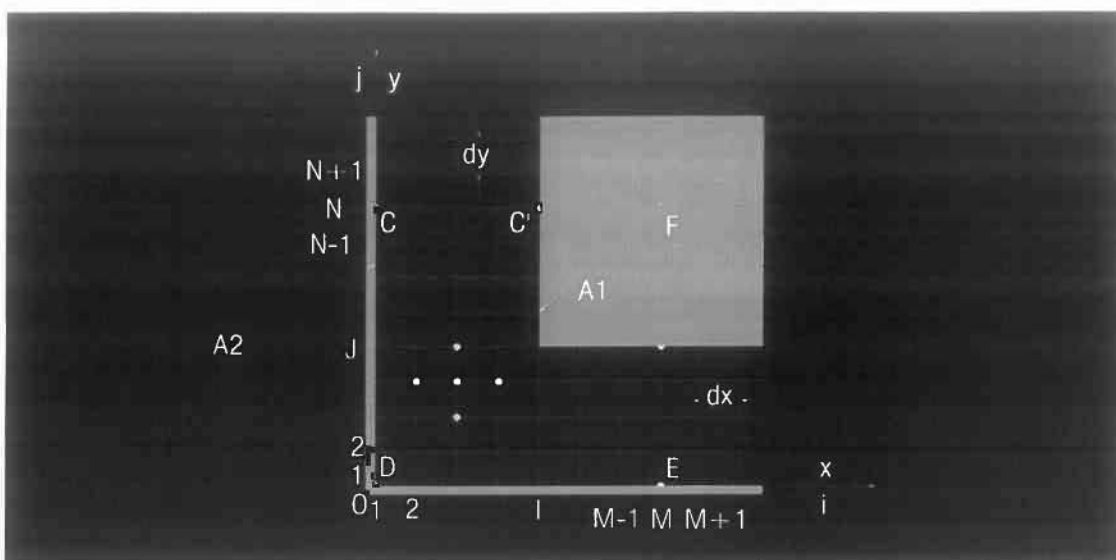
Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το πρόβλημα του παραπάνω σχήματος (Εικ.2.2), όπου τα ορθογωνικά όρια μπορούν να χρησιμεύσουν ως καλό εισαγωγικό παράδειγμα στη μέθοδο.

Σε παρόμοια διάταξη παρακάτω, θα γίνει η διακριτοποίηση της περιοχής του διηλεκτρικού, για το συγκεκριμένο πρόβλημα αυτής της εργασίας, όπου και εκεί θα επιλύσουμε την εξίσωση Laplace.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η ύπαρξη ακόμη και πολύπλοκων καμπύλων-ορίων μπορεί να προσεγγιστεί επαρκώς με κατάλληλη εκλογή του πλέγματος.

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος (ως προς τους άξονες x και y), θα μελετηθεί μόνο το τεταρτημόριο $CDEF$ που φαίνεται ευκρινέστερα στο παρακάτω σχήμα (Εικ.2.3).

Το πρώτο βήμα στην πορεία της μεθόδου είναι να καλύψουμε την περιοχή του πεδίου με ένα πλέγμα, όπως αυτό του σχήματος. Ένα ορθογωνικό πλέγμα – αν και όχι απαραίτητο – είναι ιδιαίτερα εύχρηστο. Ξεκινώντας γενικά, με αρχή των συντεταγμένων στο κάτω αριστερό άκρο του σχήματος ($D = O$), οι γραμμές του πλέγματος αριθμούνται κατά τις διευθύνσεις x και y , των αξόνων Ox και Oy , αντίστοιχα. Έτσι, αν Δx και Δy τα διαστήματα – βήματα – κατά τους άξονες x και y (στο σχήμα dx και dy αντίστοιχα),



Εικ.2.3 Ορθογώνιο πλέγμα για το τεταρτημόριο $CDEF$ της παραπάνω διάταξης. Στο κέντρο του πλέγματος φαίνονται με κουκίδες οι γειτονικοί κόμβοι στον (i, j) , όπως απεικονίστηκαν σε μεγέθυνση στο σχήμα της Εικ.2.2.

ένα τυπικό σημείο (x, y) του πλέγματος υποδηλώνεται με τις συντεταγμένες (i, j) , όπου

$$i = \frac{x}{\Delta x} + 1 \quad j = \frac{y}{\Delta y} + 1 \quad (2.2)$$

και το δυναμικό του κόμβου (i, j) ως $A_{i,j}$. Υποθέτουμε, ακόμη, ότι $M-1$ και $N-1$ είναι τα βήματα κατά τους άξονες Ox και Oy , αντίστοιχα.

Το *δεύτερο βήμα* στην πορεία της μεθόδου είναι η αντικατάσταση της διαφορικής εξίσωσης (2.1) με μια εξίσωση διαφορών, που σχετίζει το δυναμικό οποιουδήποτε κόμβου (i, j) με τα δυναμικά των γειτονικών κόμβων.

Έτσι, αν πάρουμε το κατά Taylor ανάπτυγμα γύρω από το σημείο (i, j) κατά τα θετικά και αρνητικά, έχουμε αντίστοιχα

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} + \Delta x \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{(i,j)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right|_{(i,j)} + O[(\Delta x)^4] \quad (2.3)$$

$$A_{i-1,j} = A_{i,j} - \Delta x \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{(i,j)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right|_{(i,j)} + O[(\Delta x)^4] \quad (2.4)$$

και με κατά μέλη πρόσθεση των (2.3) και (2.4)

$$A_{i+1,j} + A_{i-1,j} = 2A_{i,j} + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} + O[(\Delta x)^4] \quad (2.5)$$

όπου με τον συμβολισμό $O[(\Delta x)^4]$ δηλώνονται οι παραστάσεις με όρους που περιλαμβάνουν δυνάμεις του Δx μεγαλύτερες ή ίσες του τέσσερα.

Αν λοιπόν αγνοήσουμε τους όρους αυτούς, από την (2.5) παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (2.6)$$

Εντελώς ανάλογα, από την σειρά Taylor, για τις μετατοπίσεις κατά τον άξονα Oy , θα προκύπτει

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \Big|_{(i,j)} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2] \quad (2.7)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (2.6) και (2.7) και λάβουμε υπόψη την (2.1), παίρνουμε την

$$\frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \cong 0 \quad (2.8)$$

που συσχετίζει το δυναμικό του κόμβου (i, j) με τα δυναμικά των γειτονικών κόμβων. Η (2.8) αποτελεί την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που αντιστοιχεί στην εξίσωση Laplace (2.1) για τον κόμβο (i, j) .

Αν επίσης, για ευκολία, εκλεγεί τετραγωνικό πλέγμα ($\Delta x = \Delta y$), η (2.8) καταλήγει στην γνωστή έκφραση των "πέντε σημείων"

$$A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j} = 0 \quad (2.9)$$

Το *τρίτο βήμα* στην πορεία εφαρμογής της μεθόδου είναι η εισαγωγή των οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Έτσι, σε κάποιους από τους κόμβους του πλέγματος, οι τιμές του εξεταζόμενου μεγέθους είναι γνωστές και αντικαθιστώνται στους αντίστοιχους όρους των εξισώσεων. Για το παραπάνω σχήμα (Εικ.2.3), έχουμε αρχικά τις ακόλουθες συνθήκες (συνθήκες τύπου Dirichlet)

$$\begin{aligned} A_{i,1} &= A2 & (1 < i < M) \\ A_{i,j} &= A2 & (1 < j < N) \\ A_{i,J} &= A1 & (1 \leq i \leq M) \\ A_{I,j} &= A1 & (J < j \leq N) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Επίσης, από τη συμμετρία ως προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ (στα τμήματα CC' και EE' έχουμε τις οριακές συνθήκες τύπου Neumann $\partial A / \partial y|_{y=b} = \partial A / \partial x|_{x=a} = 0$), έχουμε

$$\begin{aligned} A_{i,N+1} &= A_{i,N-1} & (j = N) \\ A_{M+1,j} &= A_{M-1,j} & (i = M) \end{aligned} \quad (2.11)$$

και συνεπώς, για $j = N$, η (2.9) δίνει

$$A_{i+1,N} + A_{i-1,N} + 2A_{i,N-1} - 4A_{i,N} = 0 \quad (2.12)$$

ενώ για $i = M$

$$2A_{M-1,j} + A_{M,j+1} + A_{M,j-1} - 4A_{M,j} = 0 \quad (2.13)$$

Το *τέταρτο βήμα* στην πορεία εφαρμογής της μεθόδου είναι η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.9) και των οριακών συνθηκών (2.10), (2.12) και (2.13), για κάθε κόμβο. Έτσι για την γραμμή $j = 2$ του παραδείγματος έχουμε

$$\begin{aligned}
2(A_2) + A_{3,2} + A_{2,3} - 4A_{2,2} &= 0 \\
A_{2,2} + (A_2) + A_{4,2} + A_{3,3} - 4A_{3,2} &= 0 \\
A_{3,2} + (A_2) + A_{3,2} + A_{4,3} - 4A_{4,2} &= 0 \\
\text{.....} \\
A_{M-2,2} + (A_2) + A_{M,2} + A_{M-1,3} - 4A_{M-1,2} &= 0 \\
2A_{M-1,2} + (A_2) + A_{M,3} - 4A_{M,2} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Παρόμοιες εξισώσεις μπορούν να γραφούν και για τις υπόλοιπες γραμμές μέχρις ότου σαρωθούν όλοι οι κόμβοι του πλέγματος. Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων αυτών σχετίζει το διανυσματικό δυναμικό των κόμβων με τις οριακές συνθήκες. Αν οι εξισώσεις αυτές αναταχθούν μπορούν να γραφούν στη γενική μορφή ως

$$\begin{aligned}
c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + \dots + c_{1m}A_m &= b_1 \\
c_{21}A_1 + c_{22}A_2 + \dots + c_{2m}A_m &= b_2 \\
\text{.....} \\
c_{m1}A_1 + c_{m2}A_2 + \dots + c_{mm}A_m &= b_m
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

όπου A_1, A_2, \dots, A_m είναι το διανυσματικό δυναμικό των κόμβων του πλέγματος, που αριθμούνται από αριστερά προς τα δεξιά πάνω στις γραμμές του πλέγματος για σάρωση από κάτω προς τα πάνω. Οι άγνωστες τιμές A_j του διανυσματικού δυναμικού, θεωρούνται ότι ανήκουν σε ένα διάνυσμα στήλη, του πινακοποιημένου συστήματος

$$[c] \cdot [A] = [b] \tag{2.16}$$

όπου ο πίνακας $[c]$ είναι διάστασης $m \times m$ και οι $[A], [b]$ διάστασης $m \times 1$.

Το σύστημα των εξισώσεων (2.15) επιλύεται στη συνέχεια με κάποια μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων π.χ. με τη μέθοδο *απαλοιφής Gauss*.

Στον κώδικα που θα χρησιμοποιήσουμε σε Matlab, θα ορίσουμε αρχικά τους παραπάνω πίνακες και εισάγοντας απλώς την σχέση που ισχύει μεταξύ τους, το Matlab θα επιλύσει το σύστημα, χωρίς να χρειάζεται επιλογή κάποιας αριθμητικής μεθόδου.

2.3 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD).

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου – Finite Difference Time Domain (FDTD) method – παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Yee στα 1966, ενώ η πλήρης ανάπτυξή της αποδίδεται στον Taflov. Ο πρωταρχικός στόχος της μεθόδου ήταν η άμεση επίλυση των χρονικά εξαρτώμενων εξισώσεων Maxwell (time-dependent Maxwell's equations). Παρόλο που η μέθοδος όταν πρωτοπαρουσιάστηκε, δεν έτυχε της απαιτούμενης προσοχής, σήμερα αποτελεί την πιο διαδεδομένη μέθοδο στον ηλεκτρομαγνητισμό και χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πληθώρα εφαρμογών όπως :

- επίλυση προβλημάτων σκέδασης (scattering problems)
- μικροκυματικά κυκλώματα (microwave circuits)
- ακτινοβολία κεραιών (antenna radiation)
- προβλήματα ιδιοτιμών (eigenvalue problems)
- απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από ανθρώπινους ιστούς (bio-electromagnetics)

Η λογική της μεθόδου FDTD δεν διαφέρει από αυτήν της FDM, παρά μόνο στο ότι οι σχέσεις FDTD περιέχουν διακριτοποίηση και ως προς τον χρόνο. Δηλαδή η αρχική διαφορική εξίσωση περιέχει όρο ή όρους με μερική παράγωγο ως προς τον χρόνο. Τέτοιες εξισώσεις είναι και οι εξισώσεις Maxwell, στις οποίες εφαρμόστηκε αρχικά η μέθοδος FDTD. Η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση του Maxwell είναι οι

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (2.17)$$

και

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.18)$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα βασιστούμε στις δύο παραπάνω εξισώσεις για να εξάγουμε την εξίσωση διάχυσης που ισχύει στο εσωτερικό σιδηρομαγνητικών υλικών.

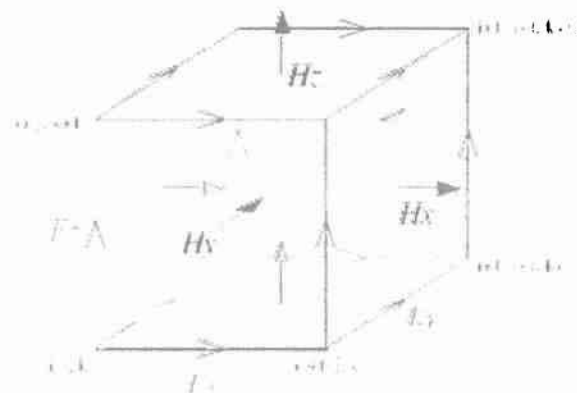
Η διακριτοποίηση αυτών των εξισώσεων περιλαμβάνει εκτός από τις δύο διαστάσεις του χώρου, και μία διάσταση του χρόνου. Επομένως, το πλέγμα διακριτοποίησης για αυτές τις εξισώσεις είναι τρισδιάστατο. Ένα στοιχείο του πλέγματος φαίνεται στην Εικ.2.4, όπου σημειώνονται οι γειτονικοί κόμβοι, καθώς και τα διανύσματα των μεγεθών που εμπλέκονται στις εξισώσεις Maxwell (\vec{E}, \vec{H}).

Η μέθοδος FDTD παρουσιάζει ορισμένα συγκριτικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων μεθόδων. Ορισμένα από αυτά τα πλεονεκτήματα είναι τα παρακάτω :

- έχει εξαιρετικά απλή εφαρμογή
- ο αλγόριθμος της μεθόδου δεν απαιτεί την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων, όπως στην μέθοδο των ροπών, ενώ χρησιμοποιεί τη διαθέσιμη μνήμη σειριακά.
- οι απαιτήσεις σε υπολογιστική μνήμη δεν είναι απαγορευτικές για πολλές ρεαλιστικές διατάξεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρον.
- από τον ορισμό της, εφαρμόζεται και δίνει αποτελέσματα απευθείας στο πεδίο του χρόνου. Έτσι, προσφέρεται η δυνατότητα οι υπολογισμοί να γίνονται χωρίς να απαιτείται μετάβαση στο πεδίο της συχνότητας.

Ωστόσο, η μέθοδος FDTD παρουσιάζει και ορισμένα μειονεκτήματα. Τα βασικότερα από αυτά είναι τα εξής :

- η ακρίβεια είναι τουλάχιστον μιας τάξης χειρότερη από αυτή της μεθόδου των ροπών
- οι τιμές των μεγεθών είναι γνωστές μόνο στους *κόμβους* (nodes) του πλέγματος.



Εικ.2.4 Το στοιχείο του Yee. Φαίνονται ταυτόχρονα και τα διανύσματα κάποιων μεγεθών (\vec{E}, \vec{H}).

Τα χαρακτηριστικά που οριοθετούν την χρησιμότητα των μεθόδων FDM και FDTD, ώστε σε κάθε πρόβλημα να χρησιμοποιείται η κατάλληλη, είναι η *ακρίβεια* (accuracy), που αναφέρθηκε μόλις παραπάνω, και η *ευστάθεια* (stability).

Με τον όρο *ακρίβεια* υποδηλώνουμε την απαίτησή μας η εκτιμώμενη λύση να βρίσκεται όσο το δυνατόν εγγύτερα στην πραγματική λύση. Με άλλα λόγια ελέγχεται η συνέπεια της μεθόδου διακριτοποίησης ως προς την αρχική διαφορική εξίσωση (PDE).

Με τον όρο *ευστάθεια* υποδηλώνουμε την απαίτησή μας να μην αυξάνεται το πλάτος της απόκρισης του συστήματος με την πάροδο του χρόνου.

Στη συνέχεια, θα γίνει ολοκληρωμένη ανάλυση ή απλή αναφορά για κάποια σημεία σχετικά με τα *κριτήρια* για ακρίβεια και ευστάθεια, για τους διάφορους τρόπους διακριτοποίησης που μπορούν να γίνουν στην βασική εξίσωση γι' αυτήν την εργασία :

$$\nabla^2 A - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

Να σημειώσουμε ότι η μέθοδος FDTD δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη σε ψευδοστατικά πεδία.

Ως ψευδοστατικά πεδία ορίζονται τα πεδία που χαρακτηρίζονται από χαμηλές συχνότητες (της τάξης των 100 Hz). Σε αυτές τις συχνότητες, ο όρος του ρεύματος μετατόπισης $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ στην εξίσωση (2.17) παραλείπεται. Άρα, η μέθοδος FDTD δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτές τις συχνότητες, λόγω απουσίας του ρεύματος μετατόπισης που χαλάει την συμμετρία των εξισώσεων Maxwell.

2.4 Επιλογή της μεθόδου Dufort-Frankel

Ο αλγόριθμος Dufort-Frankel παρουσιάζει την βέλτιστη ισορροπία ανάμεσα στην υπολογιστική πολυπλοκότητα και την ακρίβεια. Αποτελεί ουσιαστικά το ψευδοστατικό ανάλογο της μεθόδου FDTD.

Αφενός, πρόκειται για έναν άμεσο αλγόριθμο (explicit method), δηλαδή δεν απαιτεί την επίλυση συστήματος εξισώσεων. Αφετέρου, έχει επίσης την ικανότητα να απομονώνει το εξωτερικό στατικό πρόβλημα (διηλεκτρικό) από το εσωτερικό πρόβλημα

διάχυσης (σιδηρομαγνήτες), σε διατάξεις όπως αυτή που είδαμε παραπάνω, και έτσι να δημιουργείται για την όλη διάταξη ένα απλούστερο και ευκολότερο σύστημα προς επίλυση.

Η εξίσωση διάχυσης (2.19) ισχύει στο εσωτερικό των σιδηρομαγνητών και ανήκει στην κατηγορία των *παραβολικών εξισώσεων*. Η διακριτοποίησή της θα γίνει αμέσως παρακάτω, και η εξίσωση που θα προκύψει είναι η εξίσωση που επεξεργαζόμαστε με ειδικές μαθηματικές τεχνικές, για να εξετάσουμε την *ακρίβεια* και την *ευστάθεια* της μεθόδου διακριτοποίησης που χρησιμοποιήσαμε. Παρακάτω, γίνεται λεπτομερής ανάλυση για την ακρίβεια της μεθόδου Dufort-Frankel, ενώ για την ευστάθεια δίνεται το κριτήριο που θα πρέπει να ισχύει, χωρίς αναφορά σε λεπτομέρειες.

Τα αναπτύγματα Taylor για μεταβολή στην μια διάσταση του χώρου δίνονται στις (2.3) και (2.4) και ισχύουν αντίστοιχα και για την άλλη διάσταση, όπως είπαμε παραπάνω, ενώ για τον χρόνο είναι

$$A_{i,j,n+1} = A_{i,j,n} + \Delta t \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{(i,j,n)} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right|_{(i,j,n)} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \right|_{(i,j,n)} + O[(\Delta t)^4] \quad (2.20)$$

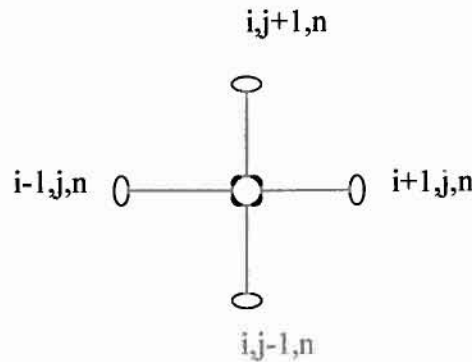
$$A_{i,j,n-1} = A_{i,j,n} - \Delta t \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{(i,j,n)} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right|_{(i,j,n)} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \right|_{(i,j,n)} + O[(\Delta t)^4] \quad (2.21)$$

και με αφαίρεση κατά μέλη

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{(i,j,k)} = \frac{A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.22)$$

Από τις (2.6), (2.7) και (2.22), και αντικαθιστώντας τον όρο $A_{i,j}^n$ με τον μέσο όρο των τιμών στους εκατέρωθεν κόμβους η αρχική διαφορική εξίσωση (2.19) μετατρέπεται στην εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

$$\frac{A_{i-1,j}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j-1}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - \mu\sigma \frac{A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = 0 \quad (2.23)$$



Εικ.2.5 Οι γειτονικοί κόμβοι στον i,j,n που εισέρχονται στην εξίσωση Dufort-Frankel. Ο κόμβος i,j,n βρίσκεται στο κέντρο του σχήματος. Οι άλλοι δύο κόμβοι της εξίσωσης, $i,j,n+1$ και $i,j,n-1$ βρίσκονται πάνω και κάτω από τον i,j,n αντίστοιχα, κάθετα στο σχήμα.

Η εξίσωση (2.23) που συσχετίζει τις τιμές των κόμβων του πλέγματος κατά τις τρεις διαδοχικές στιγμές $(n-1)\Delta t$, $n\Delta t$, $(n+1)\Delta t$ χαρακτηρίζεται ως 3-βηματική.

► Σφάλμα αποκοπής ή σφάλμα διακριτοποίησης (truncation error-*T.E.*) για την Dufort-Frankel, κατά την διακριτοποίηση της (2.19):

Το σφάλμα αποκοπής προκύπτει από την αποβολή των όρων υψηλότερης τάξης των αναπτυγμάτων Taylor, κατά την διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης. Γι' αυτό ονομάζεται και σφάλμα διακριτοποίησης.

Αν αντικαταστήσουμε σε κάθε όρο της (2.23) το κατάλληλο από τα αναπτύγματα Taylor (ακολουθήσουμε δηλαδή την αντίστροφη διαδικασία), κάνουμε τις πράξεις και αγνοήσουμε τους όρους με παραγώγους μεγαλύτερης από $2^{\text{ης}}$ τάξης, θα προκύψει για το σφάλμα αποκοπής (T.E.) ότι :

$$T.E. = A_{xx} + A_{yy} + \mu\sigma A_t + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} A_{tt}$$

όπου A_x , A_{xx} , ... είναι οι μερικές παράγωγοι $1^{\text{ης}}$, $2^{\text{ης}}$, κτλ. τάξης αντίστοιχα, ως προς x της συνάρτησης $A(x,y,t)$ στο σημείο (i,j,n) του διακριτοποιημένου χώρου.

Το ίδιο ισχύει και για τις μερικές παραγώγους ως προς y και t .

Για $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$T.E. = A_{xx} + A_{yy} + \mu\sigma A_t + A_u$$

με την οποία όμως δεν ανακτούμε την αρχική εξίσωση (2.19), εκτός εάν $\Delta t = \alpha\Delta x^2$, όπου α είναι σταθερά, οπότε για $\Delta x \rightarrow 0$

$$T.E. = A_{xx} + A_{yy} + \mu\sigma A_t$$

Στο σημείο αυτό ανακτούμε την μερική διαφορική εξίσωση (2.19). Προκειμένου λοιπόν η μέθοδος να είναι αποτελεσματική, θα πρέπει να ισχύει μια σχέση της μορφής $\Delta t = \alpha\Delta x^2$. Όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, αυτή η σχέση θα προκύψει έμμεσα από τους φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος, αφενός για τα μήκη κύματος στις δύο διευθύνσεις του χώρου και αφετέρου για την τιμή του Δx , που θα πρέπει να ισούται με ένα κλάσμα του βάθους διεύδυσης δ (τελικά $\delta t = \frac{(\delta x)^2 \mu\sigma}{2\sqrt{2}}$).

Από την παραπάνω ανάλυση βλέπουμε ότι η Dufort-Frankel έχει ακρίβεια $2^{\text{η}}$ τάξης στο χώρο και στο χρόνο $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Παρόμοια ανάλυση για τις μεθόδους Euler και Crank-Nicolson στην ίδια διαφορική εξίσωση δίνει ακρίβεια τάξης $O(\Delta x^2, \Delta t)$ και $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ αντίστοιχα. Να σημειώσουμε ότι για την Crank-Nicolson απαιτείται χρήση και του διπλού σχήματος Taylor, διότι η διακριτοποιήσιμη συνάρτηση εμφανίζεται να μεταβάλλεται σε δύο διαστάσεις ταυτόχρονα. Επίσης, με την ευκαιρία της αναφοράς στο σχήμα Crank-Nicolson, σημειώνεται ότι απαιτείται η λύση ενός συστήματος εξισώσεων σε κάθε χρονικό βήμα (implicit method).

► *Ευστάθεια* (stability) της Dufort-Frankel.

Από την εξίσωση (2.23) και για $\Delta x = \Delta y$, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ οδηγούμαστε στη σχέση

$$-2\lambda(A_{i,j}^{n+1} + A_{i,j}^{n-1}) = -\lambda(A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n) - \lambda(A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n) - \frac{\mu\sigma}{2}(A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1}) \Rightarrow$$

$$A^{n+1} + A^{n-1} = \frac{1}{2}(A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n) + \frac{1}{2}(A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n) + \frac{\mu\sigma}{4\lambda}(A^{n+1} - A^{n-1}) \quad (2.24)$$

Χρησιμοποιώντας μαθηματικές ιδιότητες, τροποποιούμε τη σχέση (2.24) και εκτελούμε την **ανάλυση ευστάθειας von Neumann**. Η μέθοδος είναι ευσταθής όταν ικανοποιείται το κριτήριο ευστάθειας $|\lambda| < 1$.

Παρόμοια ανάλυση για τις μεθόδους Euler και Crank-Nicolson δίνει ότι η Euler είναι ευσταθής υπό όρους ενώ η Crank-Nicolson είναι ευσταθής άνευ όρων.

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, συγκρίνοντας την ακρίβεια και την ευστάθεια των περισσότερο χρησιμοποιούμενων μεθόδων συμπεραίνουμε ότι : η Euler είναι μια άμεση (explicit) μέθοδος που όμως έχει ακρίβεια 1ης τάξης ως προς τον χρόνο και είναι ευσταθής υπό όρους. Η Crank-Nicolson έχει τα ίδια χαρακτηριστικά ακρίβειας και ευστάθειας με την Dufort-Frankel αλλά ως έμμεση μέθοδος (implicit method) απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων σε κάθε χρονικό βήμα, με αποτέλεσμα να αυξάνεται κατά πολύ ο υπολογιστικός φόρτος. Σταθμίζοντας πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, η Dufort-Frankel πλεονεκτεί έναντι των άλλων μεθόδων για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.23).

Να αναφέρουμε ότι υπάρχει ακόμα ένας υποψήφιος αλγόριθμος, ο αλγόριθμος **leapfrog** ή **Richardson**, που μοιάζει με αυτόν της Dufort-Frankel χωρίς όμως την αντικατάσταση του όρου $A_{i,j}^n$ από τον μέσο όρο των τιμών των εκατέρωθεν κόμβων. Η λογική του αλγόριθμου leapfrog που χρησιμοποιείται ευρύτατα ως μέθοδος FDTD, δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη σε ψευδοστατικά πεδία. Ο αλγόριθμος leapfrog στηρίζεται στην συμμετρία των εξισώσεων του Maxwell, η οποία παραβιάζεται στα ψευδοστατικά πεδία εξαιτίας της απουσίας του ρεύματος μετατόπισης.

Συμπληρώνοντας όσα έχουμε ήδη αναφέρει παραπάνω για τα ψευδοστατικά πεδία και την FDTD, να σημειώσουμε ότι έχουν επιπλέον γίνει προσπάθειες να εφαρμοστεί η

συμβατική μέθοδος FDTD σε χαμηλές συχνότητες, διατηρώντας τον όρο του ρεύματος μετατόπισης στις εξισώσεις, όμως οι προϋποθέσεις για ακρίβεια και ευστάθεια είναι πολύ περιοριστικές στην επιλογή του χρονικού βήματος (Yioultsis, 2002). Οι ίδιες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του αλγορίθμου leapfrog υποχρεώνουν στην εκλογή χρονικού βήματος μιας τάξης μικρότερου από την μικρότερη χωρική διάσταση της διάταξης. Έτσι ο leapfrog είναι απαγορευτικός για μεγάλες χρονικές περιόδους (Schuhmann & Weiland, 2003).

Συνοψίζοντας, τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου Dufort-Frankel είναι :

- παρουσιάζει ακρίβεια 2^{ns} τάξης στο χώρο και στο χρόνο $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$, σε αντίθεση με μεθόδους που χρησιμοποιούν forward difference και backward difference.
- χαρακτηρίζεται ως άμεση (explicit), δηλαδή δεν επιβάλλει την επίλυση ενός συστήματος για την εξεύρεση της τελικής λύσης.

Ο αλγόριθμος Dufort-Frankel προτιμάται στο συγκεκριμένο πρόβλημα αντί άλλων μεθόδων (Euler, Crank-Nicolson).

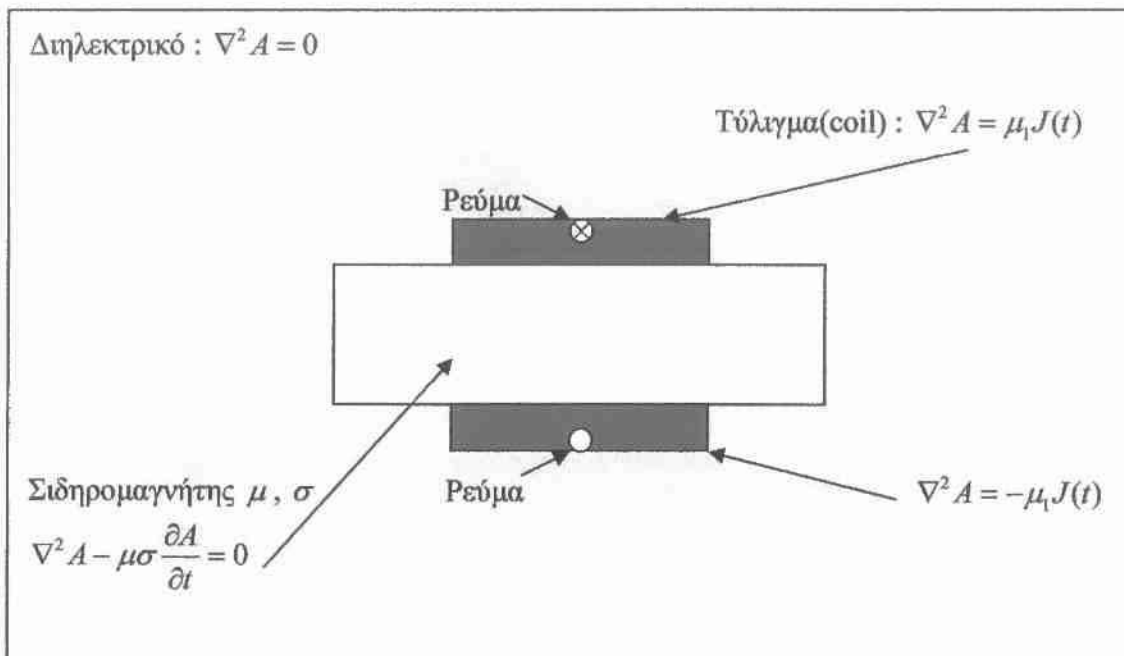
Το βασικότερο μειονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι για μεγάλα χρονικά βήματα παρουσιάζει συμπεριφορά ταλάντωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΥΒΡΙΔΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΕΔΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

3.1 Η λογική της υβριδικής μεθοδολογίας.

Όπως αναλύσαμε στο κεφάλαιο 2, η μέθοδος Dufort-Frankel πλεονεκτεί έναντι άλλων μεθόδων όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου απαιτείται η ταυτόχρονη εφαρμογή στατικής και δυναμικής ανάλυσης. Έτσι, απαιτείται η εφαρμογή μιας υβριδικής μεθοδολογίας, μέσω της οποίας θα μπορέσει αυτό να πραγματοποιηθεί. Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να αντιστοιχεί σε μια διάταξη, όπως αυτή του σχήματος της Εικ.3.1 .



Εικ.3.1 Με καφέ χρώμα συμβολίζεται το πηνίο (coil) που τυλίγει το σιδηρομαγνητικό υλικό. Τα σύμβολα στο πηνίο δείχνουν την φορά του ρεύματος. Το διηλεκτρικό περιβάλλει τον σιδηρομαγνήτη και το πηνίο. Το σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ως τομή μιας τρισδιάστατης διάταξης, που μπορεί να γίνει ευκολότερα αντιληπτή από την διαίσθηση.

Να αναφέρουμε ότι η *στατική ανάλυση* υπολογίζει τις παραμέτρους της διάταξης ή της περιοχής της διάταξης, όπου τίθεται σε εφαρμογή, θεωρώντας ότι αυτές είναι ανεξάρτητες της συχνότητας. Δηλαδή, η εφαρμογή της συνίσταται στην επίλυση μιας σχέσης πεπερασμένων διαφορών, που προέρχεται από μια εξίσωση ή σύστημα εξισώσεων ανεξάρτητων του χρόνου. Εδώ θα γίνει εφαρμογή της με την εξίσωση Laplace, που επίσης παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Η εξίσωση Laplace θα επιλυθεί στο χώρο που καταλαμβάνεται από διηλεκτρικό.

Η *δυναμική ανάλυση* ωστόσο υπολογίζει τις παραμέτρους, λαμβάνοντας υπόψη την εξάρτησή τους από την συχνότητα. Στο πρόβλημα αυτής της εργασίας, θα λυθεί η σχέση (2.23), σε μορφή που θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, στο χώρο που καταλαμβάνεται από σιδηρομαγνητικό υλικό. Όπως είδαμε, η σχέση αυτή προέρχεται από την διακριτοποίηση της εξίσωσης (2.19) με την μέθοδο Dufort-Frankel. Η εξίσωση αυτή περιέχει χρονικό όρο, που οδηγεί σε σχέση πεπερασμένων διαφορών όπου οι τιμές της παραμέτρου σε κάθε χρονικό βήμα, εξαρτώνται από τις τιμές της παραμέτρου που έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενα χρονικά βήματα.

Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω ειδών προβλημάτων, ακολουθώντας υβριδική μεθοδολογία, αποτελεί μία ξεχωριστή ομάδα προβλημάτων, στην οποία ανήκει και το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στην εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για διατάξεις που περιλαμβάνουν σιδηρομαγνητικό υλικό (π.χ. σίδηρος), διηλεκτρικό υλικό (π.χ. αέρας), και το τύλιγμα διέγερσης (πηνίο-coil) που προσαρμόζεται στο σιδηρομαγνητικό υλικό και αποτελεί την πηγή της διάταξης, όπως απεικονίζεται στην Εικ.3.1 .

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην κατηγορία της στατικής ανάλυσης, ανήκουν και οι σχέσεις για το τύλιγμα διέγερσης, στις οποίες υπάρχει ο όρος της πυκνότητας ρεύματος $J(t)$ που είναι συνάρτηση του χρόνου. Η *διαφορά αυτών των σχέσεων από την σχέση Dufort-Frankel που ισχύει στο εσωτερικό των σιδηρομαγνητών*, είναι ότι οι τιμές της παράμετρου που υπολογίζονται απ' αυτές σε κάθε χρονικό βήμα *δεν εξαρτώνται από τις τιμές της παραμέτρου που έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενα χρονικά βήματα, αλλά μόνο από την τιμή που παίρνει η συνάρτηση $J(t)$ στο ίδιο χρονικό βήμα.*

Ο κώδικας που θα ενσωματώνει την υβριδική μεθοδολογία, και θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των παραμέτρων σε όλη την διάταξη, θα πρέπει να επιτυγχάνει την ταυτόχρονη επίλυση των σχέσεων πεπερασμένων διαφορών που αντιστοιχούν σε κάθε τμήμα της διάταξης. Δηλαδή θα πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα ένα στατικό πρόβλημα για το διηλεκτρικό, και ένα δυναμικό πρόβλημα για τον σιδηρομαγνήτη. Για το τύλιγμα θα εφαρμόσουμε επίσης στατική ανάλυση, δεδομένου ότι το υλικό του τυλίγματος (χαλκός → διαμαγνητικό υλικό) έχει την ίδια μαγνητική διαπερατότητα με αυτή του διηλεκτρικού, αν θεωρήσουμε ότι αυτό είναι αέρας.

3.2 Η υβριδική μεθοδολογία

3.2.1 Επίλυση πεδιακών εξισώσεων

Πριν από την συσχέτιση των κόμβων των διακριτοποιημένων περιοχών, με τους αλγορίθμους που εφαρμόζονται σε κάθε μία από αυτές, θα προηγηθεί η πεδιακή ανάλυση των εξισώσεων και η εξαγωγή αυτών των αλγορίθμων.

Όπως ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι αλγόριθμοι που θα εξάγουμε αμέσως παρακάτω, εφαρμόζονται στις περιοχές : (α) των σιδηρομαγνητών και (β) του διηλεκτρικού που τους περιβάλλει. Με ιδιαίτερο τρόπο αντιμετωπίζουμε το τύλιγμα, το οποίο θεωρούμε ως αέρα όπου όμως εφαρμόζεται μία ρευματική κατανομή \bar{J} . Η αντιμετώπιση του προβλήματος απαιτεί τον συνδυασμό δύο τύπων εξισώσεων, ενός για την περιοχή των σιδηρομαγνητών και ενός για την περιοχή διηλεκτρικού-τυλίγματος (με διαφορά μιας σταθεράς για την ρευματική κατανομή του τυλίγματος). Αναλυτικότερα :

- ▶ στο εσωτερικό των σιδηρομαγνητών ισχύει η εξίσωση διάχυσης

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \bar{0} \quad (3.1)$$

Θεωρώντας τα διανύσματα ως πίνακες, στους οποίους η θέση των στοιχείων θα αποδίδεται από τον συμβολισμό της διακριτοποίησης που θα εισαχθεί παρακάτω, η (3.1) γράφεται ισοδύναμα

$$\nabla^2 A - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

που μας είναι γνωστή από το κεφάλαιο 2.

► στον αέρα ισχύει η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 A = 0 \quad (3.2)$$

ενώ στο τύλιγμα η

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (3.3)$$

για ρεύμα που επιστρέφει, ενώ για ρεύμα που πηγαίνει η

$$\nabla^2 A = \mu J \quad (3.4)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις που ισχύουν στο διηλεκτρικό και στο τύλιγμα διαφέρουν μόνο κατά τον σταθερό όρο.

Για τις δύο χωρικές διαστάσεις του προβλήματος, η εξίσωση (2.19) γράφεται

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

Όπως είδαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2, για την διακριτοποίηση της εξίσωσης (3.5) χρησιμοποιούμε τους δείκτες i και j για να απεικονίσουμε τις μεταβολές κατά x και y αντίστοιχα, και τον δείκτη n για την μεταβολή του χρόνου t . Με την βοήθεια αναπτυγμάτων κατά Taylor όπου υιοθετήσαμε κεντρικές διαφορές, και αντικαθιστώντας τον όρο $A_{i,j}^n$ με το ημίαθροισμα της προηγούμενης και της επόμενης χρονικής στιγμής,

δηλαδή $\frac{A_{i,j}^{n+1} + A_{i,j}^{n-1}}{2}$, καταλήξαμε στον αλγόριθμο DuFort-Frankel

$$\frac{A_{i-1,j}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j-1}^n - A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1} + A_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - \mu\sigma \frac{A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = 0 \quad (2.23)$$

όπου Δx , Δy είναι το μέγεθος του κελιού στις δύο διευθύνσεις και Δt το χρονικό βήμα.

Λύνοντας την (2.23) ως προς τον όρο $A_{i,j}^{n+1}$ έχουμε

$$A_{i,j}^{n+1} = \alpha_{1,0}^x (A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n) + \alpha_{0,1}^y (A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n) + \alpha_{0,1} A_{i,j}^{n-1} \quad (3.6)$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε, ότι κάθε διακριτοποίηση πρέπει να περιλαμβάνει την *κρίσιμη παράμετρο* (critical parameter) λ , η οποία για καθεμία από τις δύο διαστάσεις του χώρου x, y ορίζεται ως

$$\lambda_x = \frac{\delta t}{\mu\sigma (\Delta x)^2}, \quad \lambda_y = \frac{\delta t}{\mu\sigma (\Delta y)^2}$$

αντίστοιχα. Επομένως, οι συντελεστές (coefficients) της (3.6) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\alpha_{1,0}^x = \frac{2\lambda_x}{1+2\lambda_x+2\lambda_y} \quad (3.7) \quad \alpha_{1,0}^y = \frac{2\lambda_y}{1+2\lambda_x+2\lambda_y} \quad (3.8)$$

$$\alpha_{0,1} = \frac{1-2\lambda_x-2\lambda_y}{1+2\lambda_x+2\lambda_y} \quad (3.9)$$

Αν θεωρήσουμε όπως κάναμε παραπάνω για το λ ότι $\Delta x = \Delta y$, τότε

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\mu\sigma (\Delta x)^2}$$

και έτσι, οι συντελεστές (3.7)-(3.9) συμπύσσονται στους

$$\alpha_{1,0} = \frac{1-4\lambda}{1+4\lambda} \quad (3.10) \quad \alpha_{0,1} = \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \quad (3.11)$$

και η σχέση (3.6) στην

$$A_{i,j}^{n+1} = \alpha_{1,0} (A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n + A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n) + \alpha_{0,1} A_{i,j}^{n-1} \quad (3.12)$$

Βλέπουμε πάλι, ότι στις σχέσεις DuFort-Frankel (3.6) και (3.12) συμμετέχουν τρία χρονικά επίπεδα : A^{n+1} , A^n και A^{n-1} . Δηλαδή με την μέθοδο αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του πεδίου στο επόμενο χρονικό επίπεδο A^{n+1} με βάση τις τιμές του πεδίου στα δύο προηγούμενα επίπεδα A^n και A^{n-1} .

Να σημειώσουμε πάλι, ότι οι σχέσεις DuFort-Frankel είναι άμεσες (explicit), και έτσι επιτρέπουν τον άμεσο υπολογισμό της $A(x,y,t)$ σε ένα χρονικό βήμα, με βάση τις τιμές της στα δύο προηγούμενα χρονικά βήματα, χωρίς να απαιτείται η επίλυση συστήματος εξισώσεων σε κάθε χρονικό βήμα.

Με την ίδια μεθοδολογία προκύπτουν για τις εξισώσεις (3.2) και (3.3)-(3.4), με $(\Delta x = \Delta y)$, οι σχέσεις πεπερασμένων διαφορών

$$A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n + A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n - 4A_{i,j}^n = 0 \quad (3.13)$$

και

$$A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n + A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n - 4A_{i,j}^n = -\mu \Delta x J \quad (3.14\alpha)$$

ή

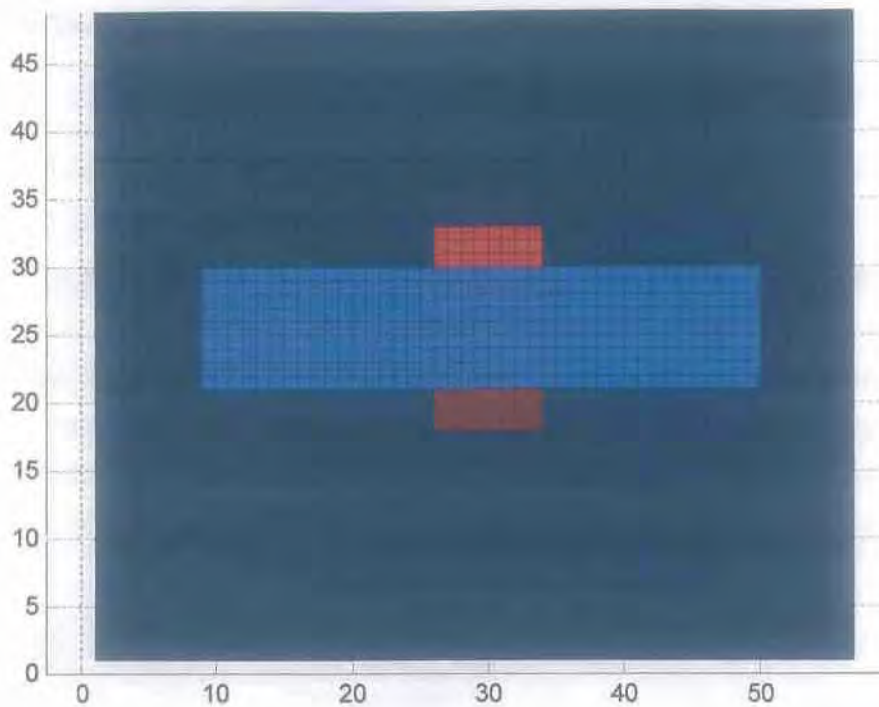
$$A_{i-1,j}^n + A_{i+1,j}^n + A_{i,j-1}^n + A_{i,j+1}^n - 4A_{i,j}^n = \mu \Delta x J \quad (3.14\beta)$$

Κάθε μια από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις, αποτελεί σύμπτυξη μιας ομάδας εξισώσεων, και όλες μαζί το σύστημα που απαιτεί επίλυση.

3.2.2 Διακριτοποίηση των περιοχών της διάταξης

Ο τρόπος που επιλέξαμε για να πραγματοποιήσουμε την αναγνώριση της διάταξης από το πρόγραμμα, είναι η χαρτογράφηση του πλέγματος (με ορισμένη πυκνότητα), όπως αυτό της Εικ.3.2 ως εξής : βαπτίζουμε κάθε κόμβο με κάποιο σύμβολο (προτιμήθηκαν αριθμοί, επειδή μπορούν να δώσουν άπειρα σύμβολα και είναι εύκολοι ως προς την εποπτεία, αφού μπορούμε εύκολα να χειριστούμε την διαδοχή τους π.χ. με loops) σύμφωνα με το υλικό που ανήκουν και την θέση τους στην διάταξη. Έτσι, το πρόγραμμα αναγνωρίζει κάθε κόμβο, ως κόμβο σιδηρομαγνήτη, κόμβο αέρα ή κόμβο

συνόρου, ώστε τώρα να είναι ευκολότεροι οι υπολογισμοί των πεδιακών μεγεθών, στους χαρακτηρισμένους πλέον κόμβους, καθώς και των οριακών συνθηκών.



Εικ.3.2 Τυπικό πλέγμα διακριτοποίησης σε δύο διαστάσεις. Στο κέντρο της διάταξης βρίσκεται το σιδηρομαγνητικό υλικό, ορθογώνιου σχήματος, με το πηνίο που το τυλίγει (με κόκκινο χρώμα) εκατέρωθεν δύο πλευρών του, παρόμοια με την Εικ.3.1. Η διάταξη που θα επιλυθεί, είναι όπως αυτή που απεικονίζεται σ' αυτό το σχήμα, δηλαδή δύο διαστάσεων, με τα στοιχεία που φαίνονται παραπάνω να αποτελούν τα συστατικά μέρη της διάταξης που δίδονται στο πρόγραμμα.

3.2.3 Συσχέτιση κελιών και αλγορίθμων

Το επόμενο βήμα σχηματισμού του κώδικα είναι η συσχέτιση των χαρακτηρισμένων κόμβων, στις διαφορετικές περιοχές της διάταξης, με τους αλγορίθμους. Αυτό γίνεται με

εφαρμογή της εξίσωσης Laplace στην περιοχή του διηλεκτρικού και του τυλίγματος, (3.13) και (3.14) αντίστοιχα, και της DuFort-Frankel (3.6) ή (3.12) στην περιοχή των σιδηρομαγνητών.

Ιδιαιτερότητα παρουσιάζεται στους συνοριακούς κόμβους, όπου θα πρέπει να εφαρμόσουμε κάποια οριακή συνθήκη. Σχετικά με τις οριακές συνθήκες ισχύουν τα εξής:

Με βάση την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, στην διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε αγωγίμες /μαγνητικές και μη αγωγίμες /μη μαγνητικές περιοχές θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω οριακή συνθήκη

$$\left. \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\partial\Omega^+} = \left. \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\partial\Omega^-} \quad (3.15)$$

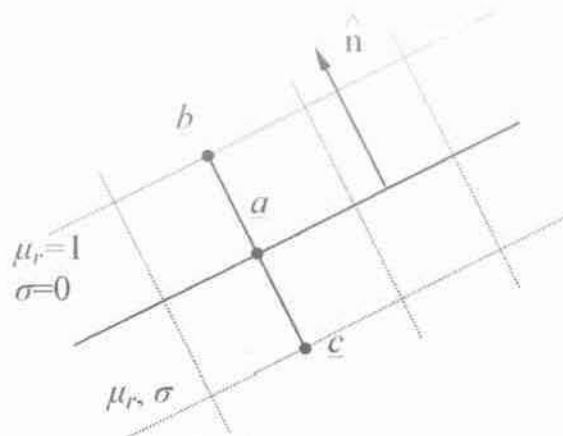
όπου ως $\partial\Omega$ συμβολίζεται η διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στις δύο περιοχές, $\partial\Omega^+$ και $\partial\Omega^-$ οι δύο πλευρές εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας και n είναι το κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια διάνυσμα. Η εξίσωση (3.15) διακριτοποιείται με την χρήση πεπερασμένων διαφορών και οδηγεί στην παρακάτω σχέση

$$A_{i,j}^n = \frac{A_{i,j+1}^n + \mu_r A_{i,j-1}^n}{1 + \mu_r} \quad (3.16)$$

ή για όριο στην κάθετη αυτής κατεύθυνση

$$A_{i,j}^n = \frac{A_{i+1,j}^n + \mu_r A_{i-1,j}^n}{1 + \mu_r} \quad (3.17)$$

όπου $A_{i,j}^n$ είναι ένα σημείο επάνω στην επιφάνεια και $A_{i,j+1}^n$, $A_{i,j-1}^n$ ή $A_{i+1,j}^n$, $A_{i-1,j}^n$ είναι τα αμέσως γειτονικά σημεία (κόμβοι) έξω από το αγωγίμο /μαγνητικό υλικό και μέσα σε αυτό, αντίστοιχα. Αν και μια τέτοια διαδικασία φαίνεται αυθαίρετη, ωστόσο στην πράξη αποδεικνύεται εξαιρετικά απλή και αποτελεσματική. Στην Εικ.3.3 απεικονίζεται η κατάταξη των τριών σημείων επάνω στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των υλικών.

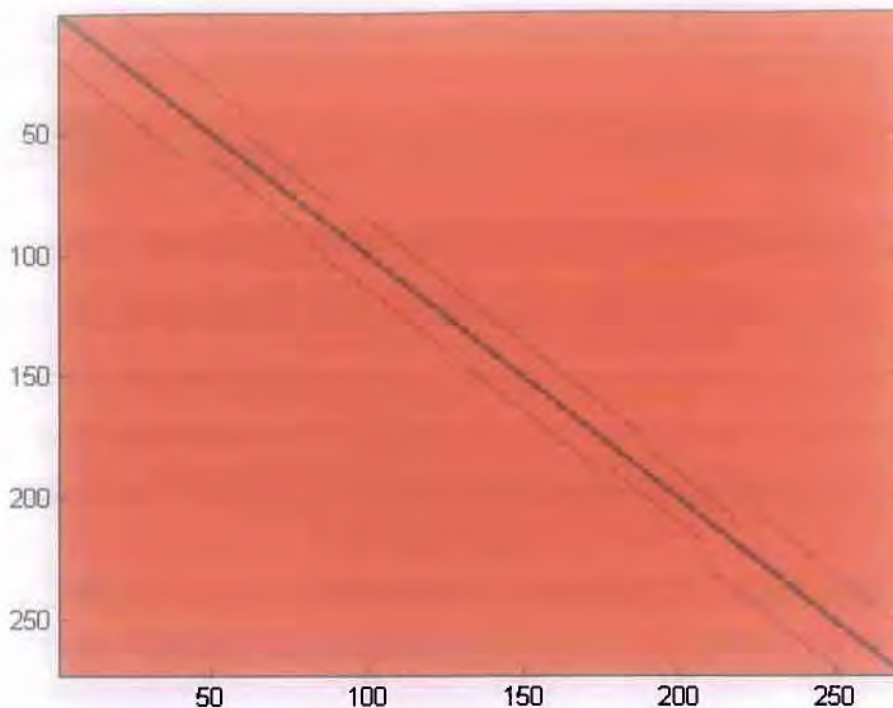


Εικ.3.3 Απεικονίζεται η διαχωριστική επιφάνεια, με το σημείο a πάνω σ' αυτήν και το κάθετο διάνυσμα \hat{n} . Το b αντιστοιχεί σε σημείο έξω από το αγώγιμο /μαγνητικό υλικό ενώ το c σε σημείο μέσα σ' αυτό.

Να σημειώσουμε ότι κρίσιμο σημείο στην παραπάνω διαδικασία, αποτελεί η συσχέτιση των κελιών του διηλεκτρικού και του τυλίγματος με τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων S , της πινακοποιημένης εξίσωσης Laplace των σχέσεων (3.13) και (3.14). Το πινακοποιημένο σύστημα έχει την γενική μορφή $A = S^{-1} \cdot b$, όπου b ο πίνακας των σταθερών όρων.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι κατά την εκτέλεση αυτού του σταδίου του προγράμματος συμμετέχει ο μετρητής k . Ο μετρητής k προγραμματίζεται να βαίνει αυξανόμενος κατά την σάρωση του πλέγματος της διακριτοποιημένης διάταξης, με σκοπό οι τιμές του να αριθμοδοτούν ξεχωριστά κάθε κόμβο, αποδίδοντας έτσι ξεχωριστή ταυτότητα στον καθένα. Σκοπός του μετρητή είναι η δημιουργία πίνακα συσχέτισης διαστάσεων $k \times k$ με τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων S , ώστε να είναι δυνατή η ανάθεση των τιμών του συστήματος Laplace, στους κόμβους του πλέγματος αυτών των περιοχών όπου ισχύει.

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να αναθέσουμε τις τιμές του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων S στα κελιά του πίνακα $k \times k$. Εάν η διαδικασία ανάθεσης γίνει σωστά



Εικ.3.5 Το ιχνογράφημα του πίνακα S για αριθμό κελιών 20×20 . Είναι ενδεικτικό ότι ακόμα και για τόσο μικρό αριθμό κελιών, οι διαστάσεις του πίνακα είναι 272×272 .

3.3 Σύνοψη και πλεονεκτήματα

3.3.1 Σύνοψη

Ως σύνοψη όλων των παραπάνω, θα παρουσιάσουμε την ροή εκτέλεσης του κώδικα που θα χρησιμοποιήσουμε, για την εφαρμογή της υβριδικής μεθοδολογίας σε συγκεκριμένη διάταξη, που θα δούμε αναλυτικά παρακάτω.

Αρχικά, δίνουμε τις διαστάσεις του χώρου της διάταξης και ορίζουμε το πλέγμα διακριτοποίησης.

Αφού ορίσουμε τις φυσικές σταθερές και την συχνότητα διέγερσης f , που εισέρχονται στις εξισώσεις των αλγορίθμων, χαρτογραφούμε την διάταξη δηλώνοντας το υλικό, την γεωμετρία, και την μεταξύ τους θέση. Ορίζουμε, επίσης, τα όρια μεταξύ των περιοχών διαφορετικού υλικού.

Στη συνέχεια ορίζουμε τους πίνακες για την Laplace, που δόθηκε σε μορφή εξισώσεων στις (3.13) και (3.14). :

- τον πίνακα που σχηματίζεται από τις άγνωστες τιμές του πεδιακού μεγέθους, στους κόμβους του πλέγματος, για τις περιοχές του διηλεκτρικού και του τυλίγματος.
- τον πίνακα των συντελεστών των παραπάνω άγνωστων τιμών (Εικ.3.4-3.5).
- τον πίνακα των σταθερών όρων του συστήματος.

Μπορούμε, τώρα, να αναθέσουμε τις τιμές του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, καθώς και του πίνακα των σταθερών όρων, στους κόμβους του πλέγματος των περιοχών του διηλεκτρικού και του τυλίγματος, όπως αναφέραμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου.

Αμέσως μετά, ακολουθεί η άμεση εξίσωση (3.6) ή (3.12) που υπολογίζει τις τιμές του άγνωστου πεδιακού μεγέθους στους κόμβους (i,j,n) , στις περιοχές της διάταξης που καταλαμβάνονται από υλικό σιδηρομαγνήτη. Οι τιμές στον κόμβο (i,j,n) , υπολογίζονται με βάση τις τιμές στα δύο προηγούμενα χρονικά επίπεδα, $(i,j,n-1)$ και $(i,j,n-2)$.

Έτσι, τοποθετώντας στην *ίδια χρονική επανάληψη*, τις παραπάνω σχέσεις για τις τρεις περιοχές της διάταξης (τυλίγματος-διηλεκτρικού και σιδηρομαγνητών), υπολογίζουμε στην *ίδια χρονική επανάληψη*, τις τιμές του άγνωστου πεδιακού μεγέθους, αρχικά στις περιοχές του τυλίγματος-διηλεκτρικού, και στη συνέχεια, στις περιοχές σιδηρομαγνήτη. Τέλος, γι' αυτές τις τιμές που προέκυψαν, υπολογίζουμε την τιμή του μεγέθους και στους οριακούς κόμβους (οριακές περιοχές), με χρήση των εξισώσεων (3.16) και (3.17), πριν μπούμε στην επόμενη χρονική επανάληψη.

3.3.2 Πλεονεκτήματα υβριδικής μεθοδολογίας

Ορισμένα από τα πλεονεκτήματα της υβριδικής μεθοδολογίας είναι τα εξής :

- κερδίζουμε σε υπολογιστική ταχύτητα
- Μπορούμε να περιγράψουμε ένα φαινόμενο όπως εξελίσσεται στο χρόνο, δηλαδή, μπορούμε να εισάγουμε δεδομένα και να πάρουμε αποτελέσματα, απευθείας στο πεδίο του χρόνου, χωρίς να απαιτείται μετάβαση στο πεδίο της συχνότητας
- βρίσκει εφαρμογή και σε χαμηλές συχνότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ Dufort – Frankel

Για την επίλυση του προβλήματος και την εξαγωγή των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν, χρησιμοποιήσαμε πρόγραμμα σε υπολογιστή. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα συστατικά στοιχεία του προγράμματος :

Δίνουμε τις διαστάσεις και τη θέση των υλικών - σιδηρομαγνητών και διηλεκτρικού - στο χώρο που καταλαμβάνει η διάταξη, μαζί με τον ορισμό εκείνων των φυσικών σταθερών τους, που καθορίζουν την ηλεκτρομαγνητική τους συμπεριφορά (μαγνητική διαπερατότητα μ – ηλεκτρική αγωγιμότητα σ).

Διακριτοποιούμε εξ' αρχής το χώρο με κατάλληλο μέγεθος κελιού και ορίζουμε χρονικό βήμα, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί που επιβάλουν οι υπολογισμένες παράμετροι, που θα οριστούν στις επόμενες παραγράφους. Για παράδειγμα, αφού ορίσουμε τις τιμές των συχνοτήτων f , για τις οποίες θα εφαρμοστεί η διέγερση της διάταξης, και για τις οποίες θα λάβουμε αποτελέσματα, καθορίζουμε αμέσως μετά και τον αριθμό των χρονικών βημάτων, όπως απαιτούν οι περιορισμοί.

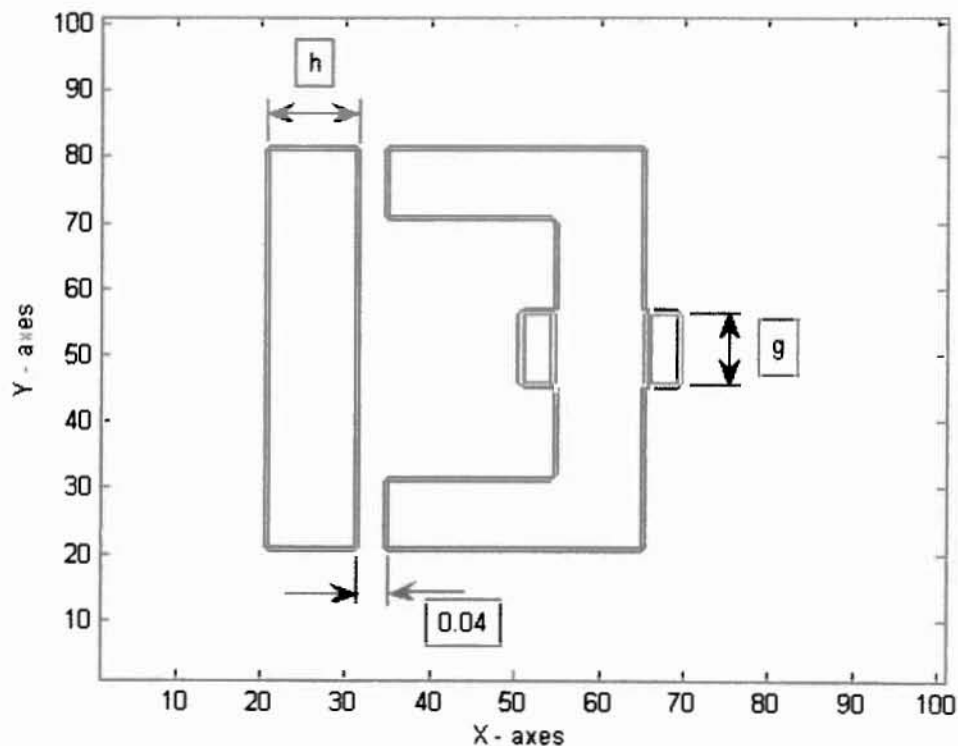
Εκτελούμε τον κώδικα, όπου οι αλγόριθμοι των αριθμητικών μεθόδων που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3, εφαρμόζονται στις κατάλληλες περιοχές της διακριτοποιημένης διάταξης (περιοχές σιδηρομαγνητών, διηλεκτρικού, οριακές ζώνες). Όπως, ίσως, να έχει γίνει αντιληπτό μέχρι τώρα, ο τρόπος καθορισμού των περιοχών αυτών και η συσχέτισή τους με τους αλγορίθμους των μεθόδων, αποτελεί το πιο λεπτό σημείο αυτής της εργασίας.

4.1 Ορισμός της διάταξης / του προβλήματος

4.1.1 Ορισμός διαστάσεων και θέσης των υλικών στη διάταξη

Η δήλωση των διαστάσεων των στοιχείων που αποτελούν την διάταξη και της μεταξύ τους απόστασης, προηγείται στο πρόγραμμα από τον υπολογισμό της πυκνότητας του πλέγματος διακριτοποίησης καθώς και της εφαρμογής των αλγορίθμων.

Έτσι το τύλιγμα (coil) έχει πάχος $w = 0.05[\text{m}]$ και πλάτος $g = 0.1[\text{m}]$ εκατέρωθεν του αγωγού σχήματος Π, ενώ οι δύο αγωγοί της διάταξης έχουν πάχος $h = 0.1[\text{m}]$. Οι δύο ηλεκτρομαγνήτες τοποθετούνται όπως φαίνεται στο σχήμα (Εικ.4.1), με την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους να είναι $0.04[\text{m}]$.



Εικ.4.1 Φαίνεται η διάταξη των ηλεκτρομαγνητών, που θα θεωρήσουμε ότι περιβάλλεται από αέρα ως διηλεκτρικό. Στο κέντρο του ηλεκτρομαγνήτη σχήματος Π διακρίνεται το τύλιγμα (coil), στο οποίο εφαρμόζεται το ρεύμα διέγερσης I_0 της διάταξης.

4.1.2 Δήλωση φυσικών σταθερών – υπολογισμένων παραμέτρων

Όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα (Εικ.4.1), η διάταξη αποτελείται από:

- σιδηρομαγνητικό υλικό με ορισμένες τιμές μ , σ . Σημειώνεται ότι κάθε υλικό, σιδηρομαγνητικό ή μη, έχει τις δικές του φυσικές σταθερές μ , σ . Έτσι, για τον αέρα είναι $\sigma_0 = 0 \left[\frac{S}{m} \right]$, $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right]$. Η μαγνητική διαπερατότητα μ όλων των άλλων υλικών συνηθίζεται να δίνεται μέσω της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας μ_r από την σχέση $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$. Το εύρος τιμών της μ_r για σιδηρομαγνητικά υλικά κυμαίνεται από 500 έως 5000 $\left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right]$. Τα αποτελέσματα που θα λάβουμε από το πρόγραμμα είναι για σιδηρομαγνητικό υλικό $\mu_r = 500 \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right]$ και $\sigma = 100 \left[\frac{S}{m} \right]$.

- αέρα (που αποτελεί το διηλεκτρικό υλικό), που περιβάλλει την διάταξη και παρεμβάλλεται μεταξύ των κομματιών από σιδηρομαγνητικό υλικό.
- το τύλιγμα (coil) από το οποίο διέρχεται το ρεύμα διέγερσης I_0 της διάταξης. Έστω ότι το τύλιγμα είναι από χαλκό, που ως διαμαγνητικό υλικό έχει μαγνητική διαπερατότητα περίπου ίση με αυτή του αέρα. Στη συνέχεια, όταν θα προχωρήσουμε στη στοιχειοθέτηση της διάταξης στο πρόγραμμα, θα θεωρήσουμε ότι το τύλιγμα έχει φυσικές σταθερές ίδιες με αυτές του αέρα και έτσι δεν υπάρχει οριακή επιφάνεια γύρω του. Συνιστά δηλαδή μια περιοχή με υλικό αέρα όπου όμως εφαρμόζεται εναλλασσόμενο ρεύμα I_0 με ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος J_0 στο εσωτερικό του, όπως θα δούμε αναλυτικά στην παράγραφο 4.1.3.

Προχωρώντας τώρα στον ορισμό των υπολογισμένων παραμέτρων ορίζουμε το βάθος διείσδυσης $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$, στο οποίο εισέρχονται ταυτόχρονα τα μ , σ (που παραμένουν

σταθερά σε όλη την διάρκεια των υπολογισμών) αλλά και η συχνότητα διέγερσης f .

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα δοκιμάσουμε τον κώδικα για διάφορες τιμές της f (0Hz, 50Hz, 500Hz). Γι' αυτές τις συχνότητες, θα πρέπει να τηρούμε ταυτόχρονα τους περιορισμούς του προβλήματος, για τις διαστάσεις των κελιών: Τηρώντας τον συσχετισμό με τις υπολογισμένες παραμέτρους, οι διαστάσεις των κελιών πρέπει να είναι συγκρίσιμες με ένα κλάσμα του βάθους διείσδυσης δ (στη συγκεκριμένη διάταξη $\delta/4$), για τη συγκεκριμένη τιμή της f . Σε αυτό το πρόβλημα, θα ορίσουμε εξ' αρχής την πυκνότητα του πλέγματος (αριθμός κόμβων). Οι διαστάσεις των κελιών που προκύπτουν γι' αυτήν την πυκνότητα πλέγματος, υπερκαλύπτουν τον παραπάνω περιορισμό.

Να σημειώσουμε εδώ ότι, η διακριτοποίηση που θα γίνει είναι ενιαία σε όλη την διάταξη. Δηλαδή, η πυκνότητα πλέγματος είναι ίδια σε όλες τις περιοχές της διάταξης (αέρας, σιδηρομαγνήτες, πηνίο).

Στη συνέχεια, καθορίζουμε το χρονικό βήμα δt , από την απαίτηση να τηρείται κάποιος παρόμοιος περιορισμός. Πιο συγκεκριμένα :

- για την συνιστώσα του μήκους κύματος λ της διέγερσης κατά την x -διεύθυνση ισχύει

$$\lambda_x = \frac{\delta t}{\mu\sigma(\delta x)^2} \quad (4.1)$$

όπου το μήκος κελιού κατά την x -διεύθυνση δx , προκύπτει από τον τύπο του βάθους διείσδυσης δ για τη συγκεκριμένη τιμή της f , για $\delta x = \delta/4$, ή από την διαίρεση της διάστασης κατά την x -διεύθυνση με την προκαθορισμένη πυκνότητα πλέγματος. Αντίστοιχος τύπος ισχύει και για την συνιστώσα λ_y . Συνολικά, για τις δύο διευθύνσεις διάδοσης του κύματος ισχύει

$$\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \leq \underline{1/2} \quad (4.2)$$

Θεωρώντας ότι $\delta x = \delta y$, από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$\frac{\delta t}{\mu\sigma(\delta x)^2}\sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\delta t = \frac{\mu\sigma(\delta x)^2}{2\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

που είναι το αντίστοιχο χρονικό βήμα ■

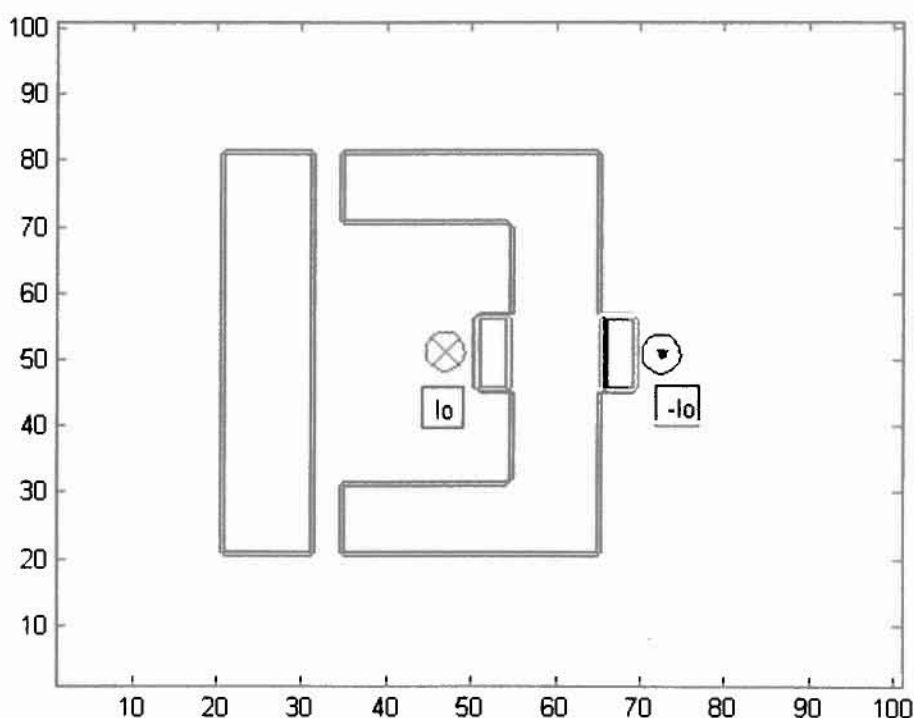
Για να υπολογίσουμε, τώρα, τον αριθμό των χρονικών βημάτων Nt που θα πρέπει να τρέξει το πρόγραμμα, λαμβάνουμε υπόψη ότι το σύστημα θα πρέπει να φτάσει στο σημείο να βρίσκεται στη *μόνιμη κατάσταση* (steady state). Για την ημιτονοειδή διέγερση που θα εφαρμόσουμε και θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, θα πρέπει να έχουν παρέλθει ορισμένες περιόδοι μέχρι την εξάλειψη της *μεταβατικής κατάστασης*. Σε αυτό το πρόβλημα, θα απαιτήσουμε να καλυφθούν 5 χρονικές περιόδοι ($5T$), όπου $T = 1/f$. Έτσι, ο ελάχιστος αριθμός των χρονικών βημάτων θα υπολογιστεί για κάθε συχνότητα, από τον τύπο $Nt = 5T/\delta t$ (Πίνακας 4.1).

	συχνότητα (σε Hz)	βάθος διείσδυσης δ (σε m)	αριθμός βημάτων		διακριτοποίηση	
			αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	αριθμός χρονικών βημάτων Nt	χώρου (σε m) $\delta x = \delta y$	χρόνου (σε sec x 10^{-8}) δt
Αραιό Πλέγμα	50	0.318	50 x 50	11255	0.02	888.5
Πυκνότερο Πλέγμα	0	–	100 x 100	2252	0.01	222.1
	50	0.318	100 x 100	45025	0.01	222.1
	500	0.101	100 x 100	4502	0.01	222.1

Πίνακας 4.1 Τα χαρακτηριστικά της διάταξης, για αραιό και πυκνότερο πλέγμα, σε διαφορετικές συχνότητες.

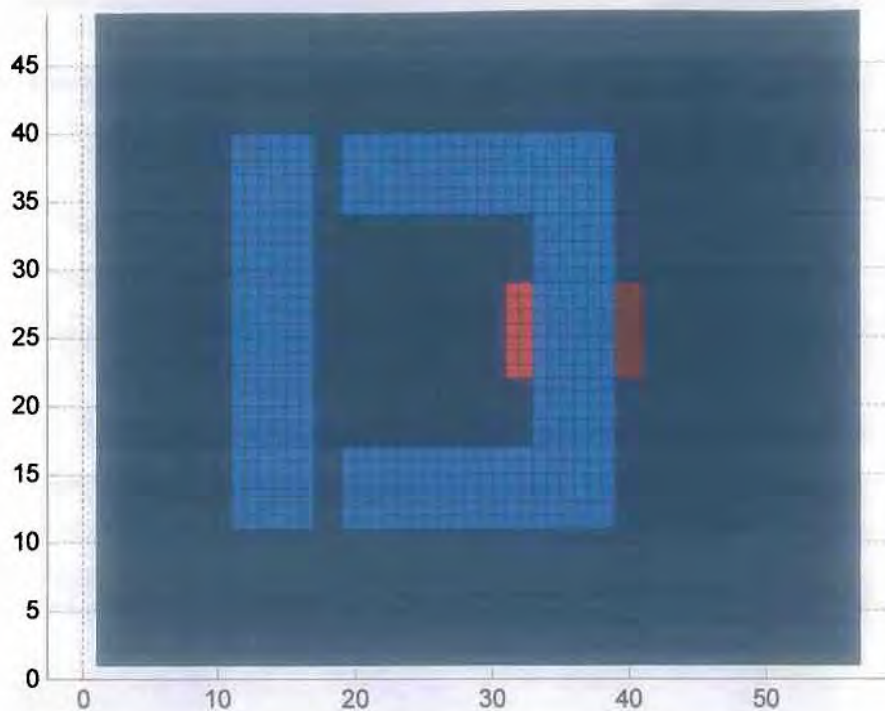
4.1.3 Ρευματική διέγερση - αναγνώριση διάταξης από το πρόγραμμα

Θεωρούμε ότι το τυλίγμα (coil) διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, πλάτους I_0 , οπότε κάθε τμήμα του τυλίγματος εκατέρωθεν του ηλεκτρομαγνήτη διαρρέεται από ένα μέγιστο ρεύμα I_0 (I_0 για ρεύμα που πάει και $-I_0$ για ρεύμα που επιστρέφει,) όπως φαίνεται Εικ.4.2. Η πυκνότητα ρεύματος J_0 είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τυλίγματος και ίση με $\frac{I_0}{wg}$ και $-\frac{I_0}{wg}$ αντίστοιχα (όπου $S = wg$ η διατομή κάθε τμήματος του τυλίγματος). Η πυκνότητα ρεύματος J_0 εκφράζει το πλάτος της ημιτονοειδούς διέγερσης $\vec{J} = J_0 \sin(2\pi fnt) \cdot \hat{i}_0$ που επιβάλλουμε στη διάταξη. Βέβαια, δεν είναι απαραίτητη η ημιτονοειδής διέγερση, αλλά επιλέχτηκε ως η πιο γνώριμη από τις περιοδικές συναρτήσεις. Στη θέση της θα μπορούσε να επιλεγεί άλλου τύπου διέγερση, όπως : σειρά παλμών, δέλτα του Dirac, βηματική διέγερση, κ.ά.



Εικ.4.2 Η κουκίδα συμβολίζει φορά ρεύματος προς τα έξω, ενώ το x προς τα μέσα.

Ακολουθεί η αναγνώριση της διάταξης από το πρόγραμμα, όπως περιγράφηκε αναλυτικά στην παράγραφο 3.2.2 . Ένα τυπικό πλέγμα διακριτοποίησης για την διάταξη του προβλήματος, φαίνεται στην Εικ.4.3.



Εικ.4.3 Τυπικό πλέγμα διακριτοποίησης (αραιό πλέγμα) για την διάταξη του προβλήματος.

4.2 Αποτελέσματα

4.2.1 Γραφήματα

Θα εφαρμόσουμε τον κώδικα, για δύο περιπτώσεις πυκνότητας πλέγματος : αραιό πλέγμα και πυκνότερο πλέγμα, με αριθμό κελιών που φαίνεται στον Πίνακα 4.1 .

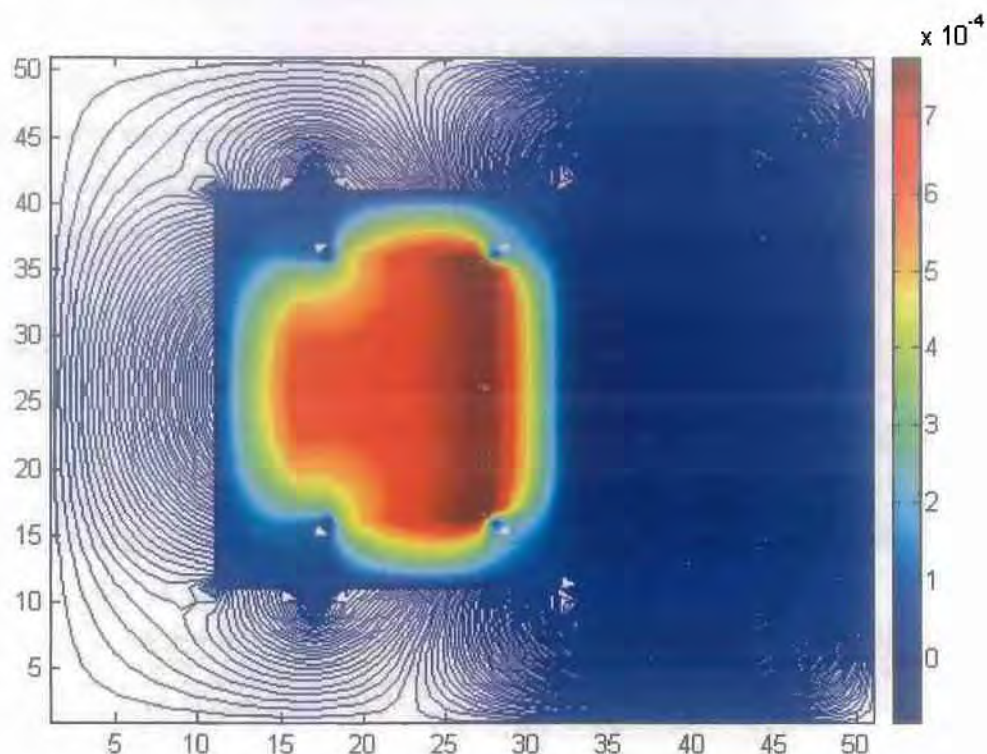
Αν θεωρήσουμε ότι η διάταξη έχει τετράγωνο σχήμα με μήκος πλευράς $L = 1 [m]$, τότε με δεδομένο τον αριθμό κελιών N , το μήκος των κελιών προκύπτει το ίδιο για τις δύο διαστάσεις, και ίσο με $\delta x = \delta y = \frac{L}{\sqrt{N}} = \frac{1}{50} = 0.02 [m]$ για αραιό πλέγμα και $0.01 [m]$ για πυκνότερο πλέγμα. Στη συνέχεια, το χρονικό βήμα δt προκύπτει από την

σχέση (4.3), για αραιό και πυκνότερο πλέγμα αντίστοιχα. Τέλος, ο αριθμός των χρονικών βημάτων Nt , υπολογίζεται από όσα αναφέραμε στο τέλος της παραγράφου 4.1.2. Ιδιαιτερότητα παρουσιάζεται για την περίπτωση $f = 0$ Hz, που θα αναλυθεί ειδικά παρακάτω.

Όλα τα μεγέθη της διακριτοποίησης στο χώρο και στο χρόνο, φαίνονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 4.1.

Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από το πρόγραμμα, για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, παρουσιάζονται με πολύχρωμα γραφήματα του MATLAB:

■ αραιό πλέγμα ($f = 50$ Hz)



Εικ.4.4 Εναλλασσόμενη διέγερση, με $f = 50$ Hz, πλέγμα 50×50 , $Nt = 11255$. Ο χρόνος που χρειάστηκε το Matlab μέχρι την εξαγωγή του γραφήματος, ήταν περίπου 20min.

■ πυκνότερο πλέγμα

- $f = 0$ Hz : για μηδενική συχνότητα, δεν ορίζεται περίοδος (συνεχές ρεύμα). Η διέγερση ορίζεται ως $J_0 \rightarrow$ σταθερό.

Ως τιμή J_0 , Θα λάβουμε την μέγιστη τιμή της $J(t)$, εάν είχαμε εναλλασσόμενο ρεύμα με $f = 50$ Hz .

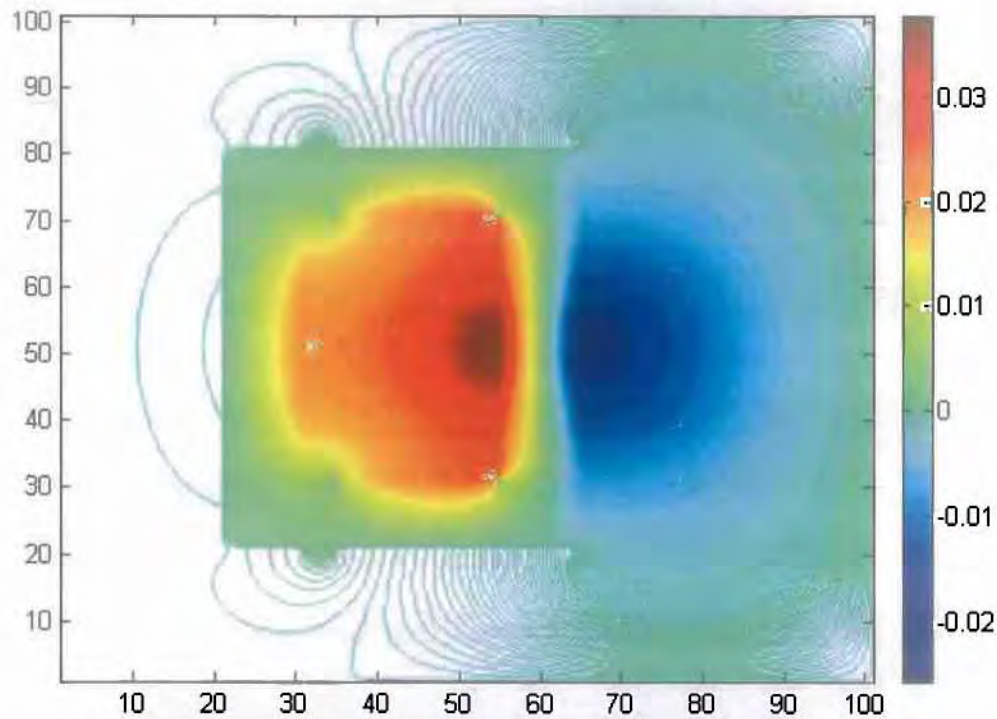
Αν η σχέση που χρησιμοποιούμε στο πρόγραμμα, για διέγερση με εναλλασσόμενο ρεύμα, είναι

$$J(t) = 1 \cdot \sin(2\pi f \cdot Nt \cdot dt) \quad (\text{σε rad})$$

τότε είναι

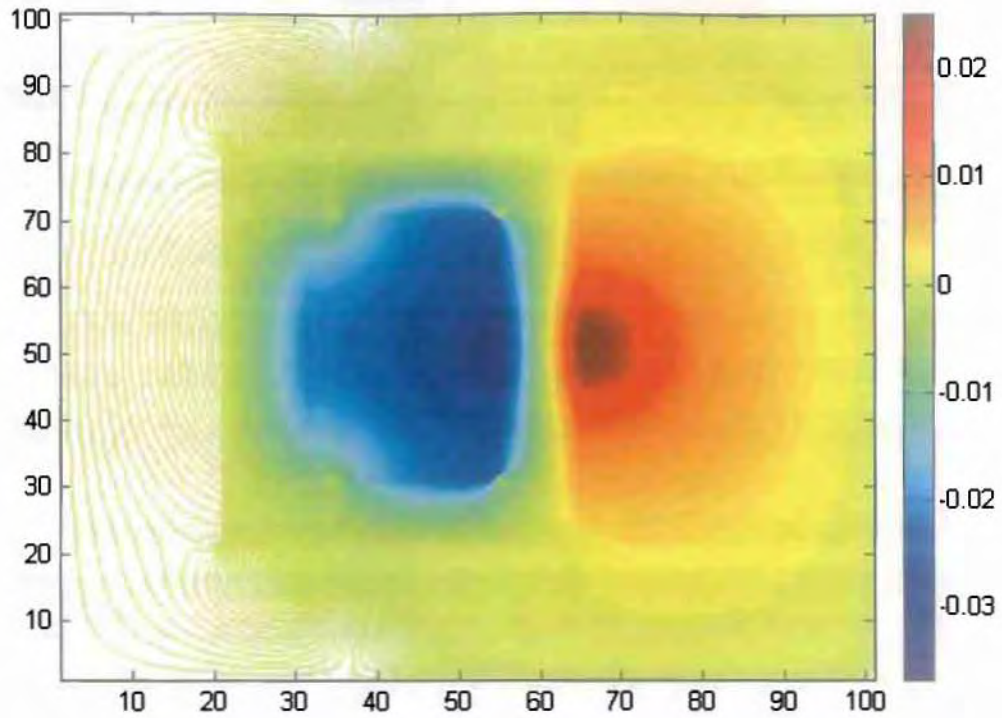
$$\begin{aligned} \max J(t) &= 1 \quad \Rightarrow \\ 1 &= \sin(2\pi f \cdot Nt \cdot dt) \quad \Rightarrow \\ Nt &= 2252 \end{aligned}$$

όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1 .



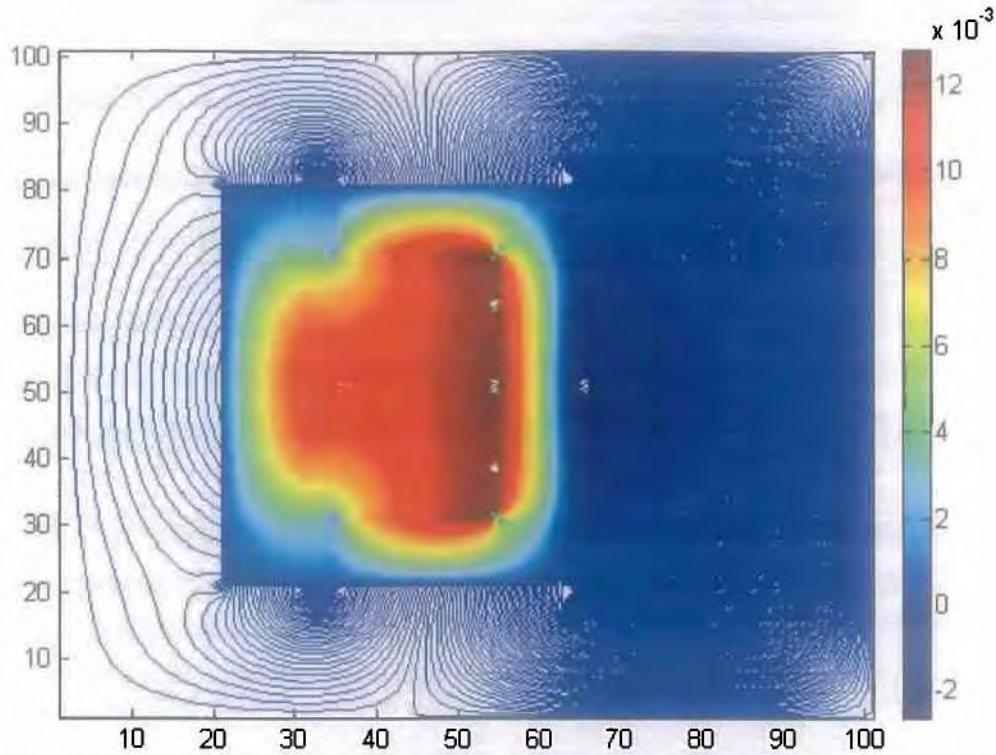
Εικ.4.5 Διέγερση συνεχούς ρεύματος, πλέγμα 100x100, $Nt = 2252$. Χρόνος ~ 7 min.

• $f = 50 \text{ Hz}$



Εικ. 4.6 Εναλλασσόμενη διέγερση, $f = 50 \text{ Hz}$, πλέγμα 100×100 . Χρησιμοποιήσαμε $N_t = 20000$, αντί της τιμής που υπάρχει στον πίνακα 4.1, λόγω περιορισμού στην υπολογιστική μνήμη του υπολογιστή που χρησιμοποιούμε.

- $f = 500 \text{ Hz}$



Εικ.4.7 Εναλλασσόμενη διέγερση, με $f = 500 \text{ Hz}$, πλέγμα 100×100 , $Nt = 4502$. Χρόνος $\sim 20 \text{ min}$.

Να σημειωθεί ότι, ο χρωματισμός αντιστοιχεί σε διαφορετικές τιμές του διανυσματικού δυναμικού σε κάθε γράφημα. Για την εξέταση του κάθε γραφήματος ξεχωριστά, είναι απαραίτητο να γίνει σύγκριση με την αριθμημένη χρωματοταινία (colorbar) στα δεξιά κάθε γραφήματος.

4.2.2 Παρατηρήσεις

Όπως φαίνεται από τα γραφήματα, για την ίδια πυκνότητα πλέγματος, για διέγερση συνεχούς ρεύματος έχουμε μικρότερη διάχυση μεγαλύτερων τιμών του διανυσματικού δυναμικού, απ' ότι για διέγερση εναλλασσόμενου ρεύματος.

Επίσης, συγκρίνοντας τα γραφήματα που πήραμε για διέγερση εναλλασσόμενου ρεύματος, παρατηρούμε ότι, σε μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίζεται μεγαλύτερη διάχυση μικρότερων τιμών διανυσματικού δυναμικού.

Να αναφέρουμε ότι για πυκνότητα πλέγματος 200x200, και τα αντίστοιχα δεδομένα εισόδου που υπολογίζονται, ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος φτάνει τις 2 ημέρες. Για πλέγμα 300x300, ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται σε μία εβδομάδα, ενώ για πλέγμα 450x450 ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται υπερβολικά, περιορίζοντας έτσι κατά πολύ τον αριθμό των χρονικών βημάτων που μπορούμε να αναθέσουμε στο πρόγραμμα.

Τέλος, όπως φάνηκε στο γράφημα για εναλλασσόμενη διέγερση 50 Hz, ακόμα και για πλέγμα 100x100, οι απαιτήσεις σε υπολογιστική μνήμη είναι αυξημένες, περιορίζοντας την δυνατότητα για ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ Dufort – Frankel

Το πρόγραμμα που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση της διάταξης μετασχηματιστή, με σκοπό τον υπολογισμό των ηλεκτρομαγνητικών πεδιακών μεγεθών, χαρακτηρίζεται από τις ίδιες παραμέτρους και υπακούει στους ίδιους περιορισμούς, όπως εκείνοι του προβλήματος του κεφαλαίου 4.

Τα δεδομένα του προβλήματος εισάγονται αρχικά στο πρόγραμμα, και για τις τιμές αυτές υπολογίζονται το αντίστοιχο μέγεθος κελιού δx και το χρονικό βήμα δt , υπό την προϋπόθεση να τηρούνται οι περιορισμοί που σχετίζονται με τις υπολογισμένες παραμέτρους, όπως είδαμε να γίνεται στο κεφάλαιο 4.

Στη συνέχεια, οι κατάλληλοι αλγόριθμοι των αριθμητικών μεθόδων εφαρμόζονται στις αντίστοιχες περιοχές της διακριτοποιημένης διάταξης, υλοποιώντας την ιδέα εφαρμογής της μεθόδου Dufort – Frankel στην περιοχή των σιδηρομαγνητών.

Οι παράγραφοι που θα ακολουθήσουν, αναφέρονται σε ομάδες αποτελεσμάτων, που θα ληφθούν για διαφορετικές τιμές κάθε τύπου δεδομένων, κρατώντας σταθερές τις τιμές των υπόλοιπων τύπων δεδομένων.

Ως τύποι δεδομένων, μπορούν να αναφερθούν οι διαστάσεις και η σχετική θέση των υλικών, οι φυσικές σταθερές του προβλήματος (*μαγνητική διαπερατότητα μ – ηλεκτρική αγωγιμότητα σ*), καθώς επίσης, η συχνότητα της διέγερσης f , μαζί με την οποία αλλάζουν το μέγεθος των κελιών δx του πλέγματος διακριτοποίησης, ή ακόμη το χρονικό βήμα δt .

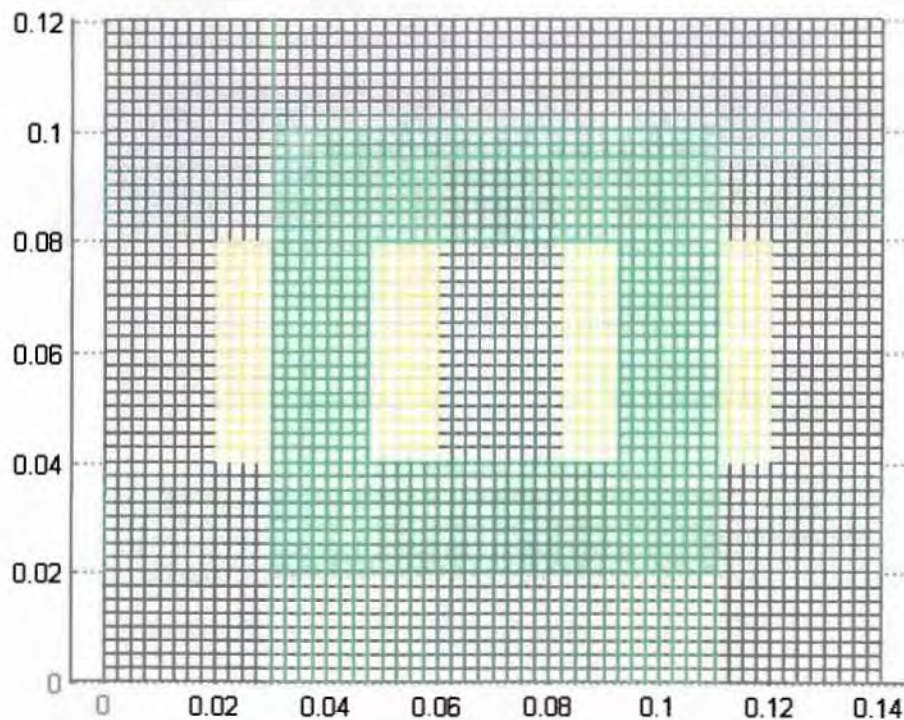
5.1 Εισαγωγή των παραμέτρων της διάταξης

Η διάταξη του μετασχηματιστή που θα εξετάσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο, ανήκει επίσης στην ίδια κατηγορία διατάξεων με αυτές που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, και επομένως, έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτές :

Αποτελείται από πυρήνα σιδηρομαγνητικού υλικού, τύλιγμα από χαλκό, και αέρα ως διηλεκτρικό. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μαγνητική διαπερατότητα του αέρα ($\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right]$) και του χαλκού είναι περίπου ίσες, και άρα ισχύει και εδώ η παραδοχή ότι το υλικό του τυλίγματος είναι αέρας, όπου όμως, εφαρμόζεται εναλλασσόμενο ρεύμα I_0 .

Επίσης, να αναφέρουμε ότι για το σιδηρομαγνητικό υλικό είναι $\sigma = 100 \left[\frac{S}{m} \right]$, ενώ η μαγνητική διαπερατότητα μ αλλάζει, και η τιμή της φαίνεται παρακάτω στον εκάστοτε πίνακα, που παρουσιάζει τα δεδομένα κάθε ομάδας προσομοιώσεων.

Η διέγερση της διάταξης είναι και εδώ ημιτονοειδής, και εξαρτάται, βεβαίως, από την συχνότητα f και το χρονικό βήμα δt .



Εικ.5.1 Η διάταξη του προβλήματος, μαζί με τις διαστάσεις και το πλέγμα διακριτοποίησης, πυκνότητας 56×48 . Στο κέντρο του σχήματος διακρίνεται ο πυρήνας (core) του μετασχηματιστή, με τα πηνία στις δύο πλευρές του.

Τέλος, σημειώνουμε ότι στον κώδικα και αυτού του κεφαλαίου, όλες οι περιοχές της διάταξης (αέρας, σιδηρομαγνήτες, πηνίο), διακριτοποιούνται με κοινή, κάθε φορά, πυκνότητα πλέγματος (ενιαία διακριτοποίηση σε όλη την διάταξη). Η πυκνότητα αυτή, καθορίζεται από τους περιορισμούς, για κάθε ομάδα δεδομένων.

5.2 Αποτελέσματα

Γραφήματα και τελικές τιμές παραμέτρων

Όπως στο κεφάλαιο 4, έτσι και εδώ, ορίζουμε εξ' αρχής την πυκνότητα του πλέγματος διακριτοποίησης για τις περισσότερες ομάδες προσομοιώσεων γι' αυτή την πυκνότητα πλέγματος υπολογίζονται τα $\delta x = \frac{L_x}{N_x}$, $\delta y = \frac{L_y}{N_y}$, όπου L_x , L_y και N_x , N_y είναι τα μήκη των πλευρών της διάταξης και ο (προκαθορισμένος) αριθμός των κόμβων για τις δύο διαστάσεις αντίστοιχα, καθώς και το βάθος διείσδυσης $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ για κάθε νέα τιμή δεδομένων. Στη συνέχεια, ελέγχεται αν ικανοποιείται ο περιορισμός $\delta x \leq \frac{\delta}{4}$ ή $\delta y < \frac{\delta}{4}$, για την μεγαλύτερη από τις διαστάσεις δx , δy (στην περίπτωση που προκύψει $\delta x = \delta y$ σημειώνουμε μόνο το δx). Επίσης υπολογίζεται το χρονικό βήμα δt , από την σχέση (4.3).

Σε μία από τις ομάδες προσομοιώσεων, ακολουθείται η αντίστροφη διαδικασία. Απαιτούμε, δηλαδή, σταθερό μέγεθος κελιού δx και δy , και για κάθε τιμή διαστάσεων της διάταξης L_x , L_y , υπολογίζουμε τον αριθμό των κόμβων N_x , N_y από τους παραπάνω τύπους. Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στην παράγραφο (5.2.3).

Όλες οι τιμές σημειώνονται στον αντίστοιχο πίνακα, για κάθε ομάδα προσομοιώσεων.

Η βασική διαφορά με τα δεδομένα του κεφαλαίου 4, είναι ότι εδώ, ο αριθμός των χρονικών βημάτων Nt ορίζεται εξ' αρχής, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο περιορισμός που απαιτεί να έχει παρέλθει η μεταβατική κατάσταση του συστήματος (ελάχιστος αριθμός χρονικών περιόδων της ημιτονοειδούς διέγερσης $\vec{J} = J_0 \sin(2\pi fnt) \cdot \hat{i}_0$).

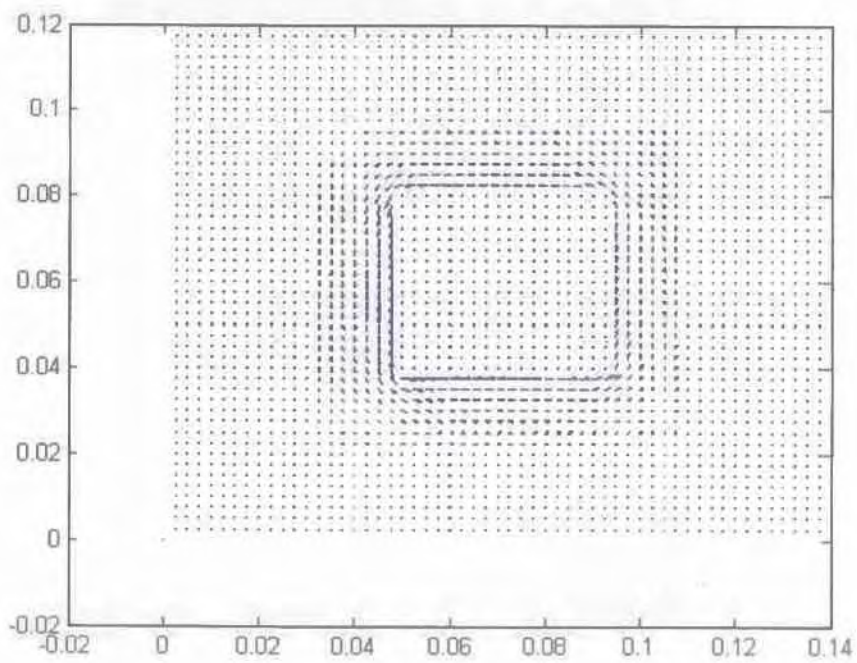
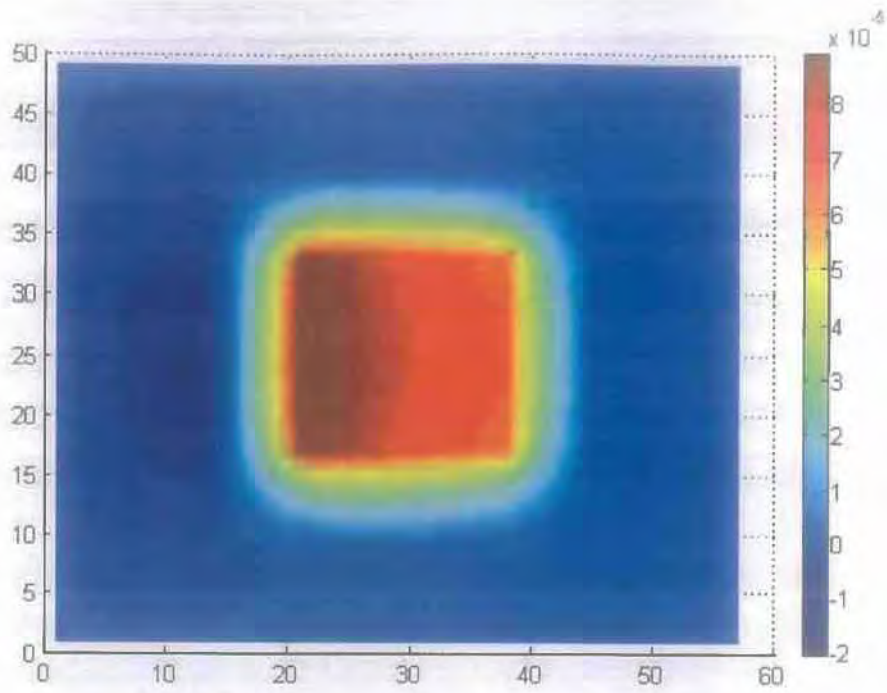
5.2.1 Προσομοίωση της διάταξης σε διαφορετικές συχνότητες f – σταθερές τιμές ιδιοτήτων μ, σ .

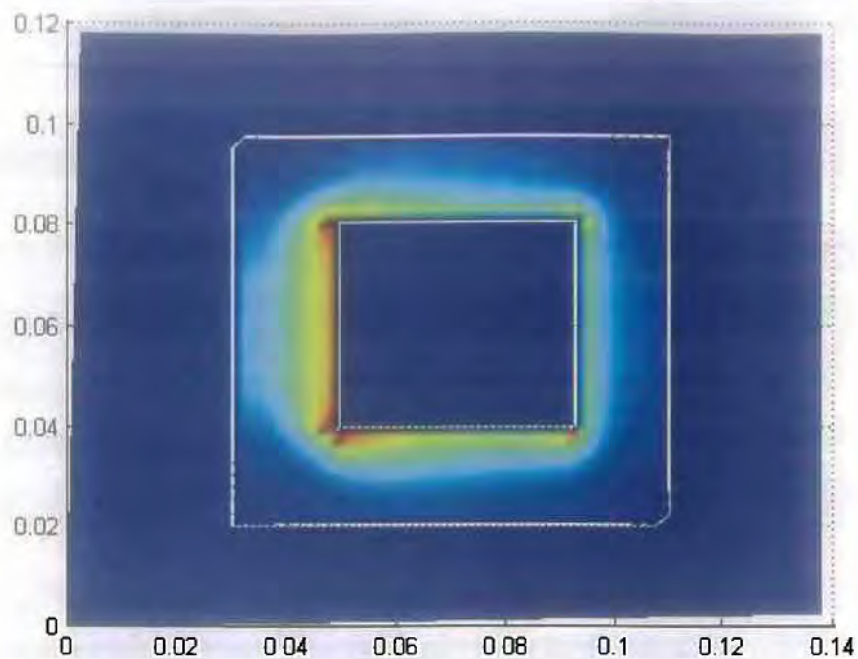
Η πρώτη ομάδα προσομοιώσεων, αφορά την εξαγωγή γραφημάτων και τον υπολογισμό τελικών τιμών των παραμέτρων του προβλήματος, αλλάζοντας την συχνότητα της διέγερσης f , ενώ ταυτόχρονα παραμένουν σταθερά οι ιδιότητες των υλικών και οι διαστάσεις της διάταξης. Οι τιμές των δεδομένων, καθώς και οι σχετικές ποσότητες που υπολογίζονται από αυτές και είναι αναγκαίες για το πρόβλημα, φαίνονται στον Πίνακα 5.1 .

αριθμός βημάτων		συχνότητα f (σε Hz)	σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r	βάθος διείσδυσης δ (σε m)	διακριτοποίηση	
αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	αριθμός χρονικών βημάτων N_t				χώρου (σε m) $\delta x = \delta y$	χρόνου (σε sec x 10^{-8}) δt
56 x 48	200	50	200	0.503	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	200	0.252	0.0025	5.5
56 x 48	200	500	200	0.159	0.0025	5.5
56 x 48	200	1000	200	0.113	0.0025	5.5

Πίνακας 5.1 Τα δεδομένα του προβλήματος, για διαφορετικές συχνότητες διέγερσης.

• $f = 50 \text{ Hz}$



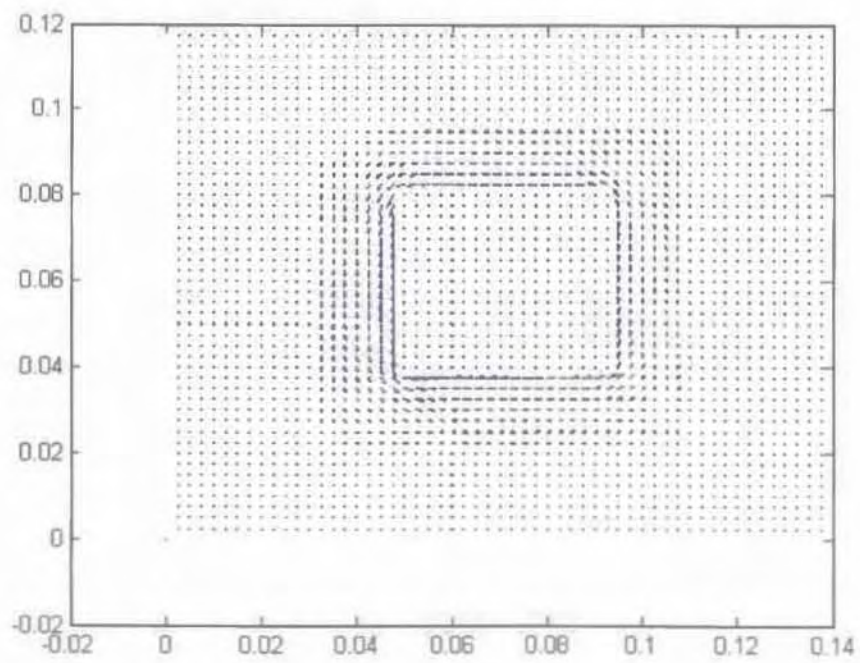
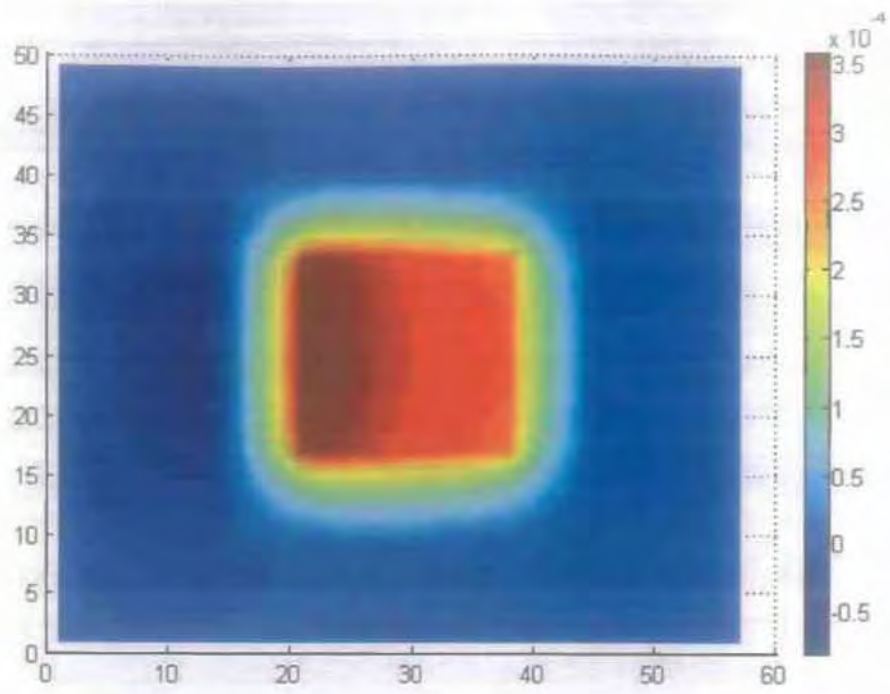


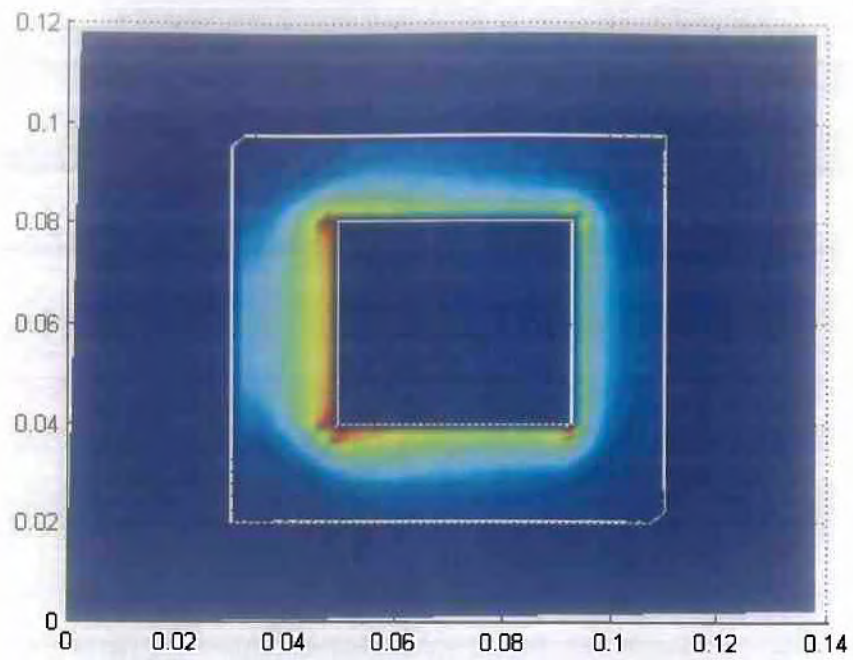
Εικ.5.2 Στα τρία παραπάνω σχήματα, εμφανίζονται διαδοχικά : η κατανομή του διανυσματικού δυναμικού A στο επίπεδο, οι δυναμικές γραμμές της έντασης του μαγνητικού πεδίου H , και η κατανομή του H στο επίπεδο.

Ταυτόχρονα με τα γραφήματα, θα παραθέτουμε τις τιμές της ενέργειας του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου, W_m και W_e αντίστοιχα. Εδώ, για $f = 50$ Hz, είναι $W_m = 0.1446$ [J = joule] και $W_e = 48.3380$ [J]. Στη συνέχεια, θα παρουσιάζουμε τις τιμές αυτές συγκεντρωτικά σε πίνακες, έναν για κάθε ομάδα αποτελεσμάτων. Έτσι, γι' αυτήν την ομάδα αποτελεσμάτων, οι τιμές W_m και W_e παρουσιάζονται στο τέλος των προσομοιώσεων για τις τέσσερις διαφορετικές συχνότητες.

Να επισημάνουμε εξ' αρχής ότι, για την εξέταση των γραφημάτων του διανυσματικού δυναμικού A , είναι απαραίτητη η σύγκριση με την αριθμημένη χρωματοταινία (colorbar) στα δεξιά κάθε γραφήματος.

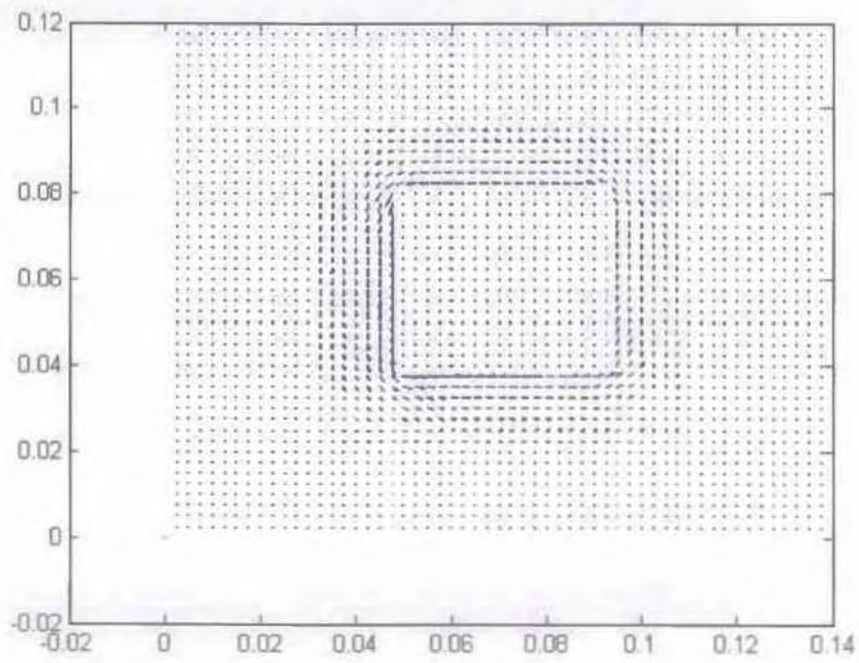
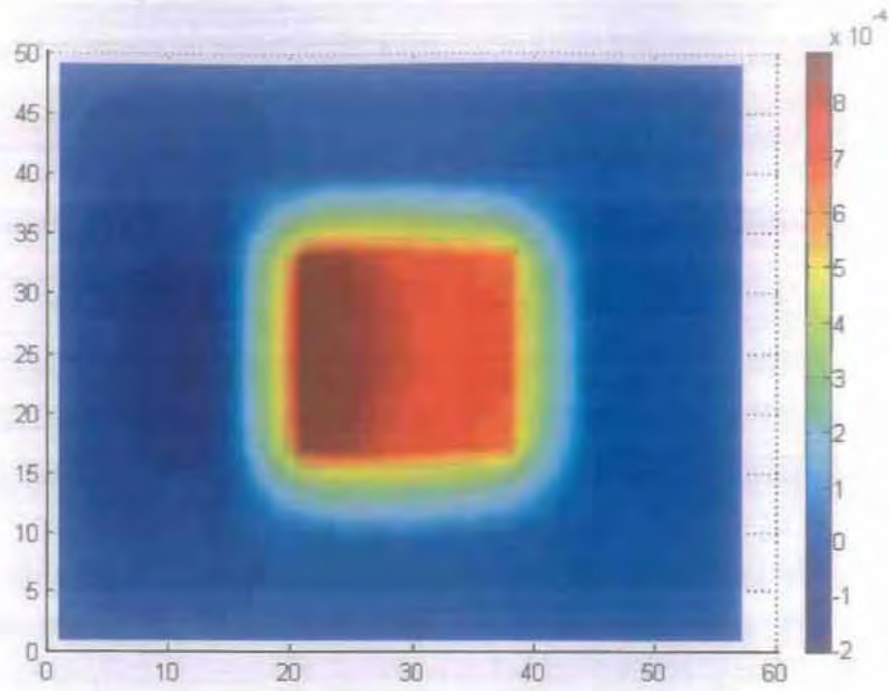
$f = 200 \text{ Hz}$

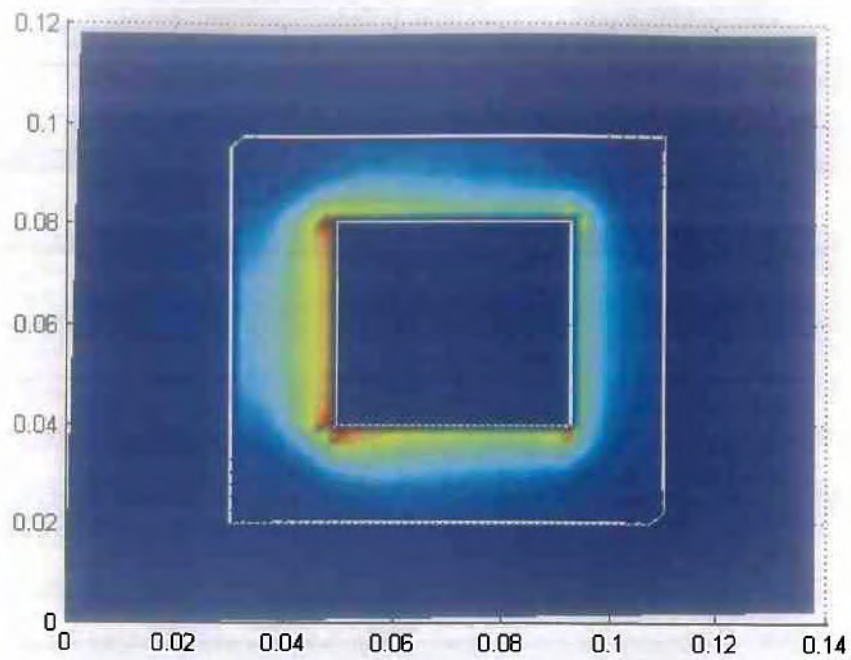




Εικ.5.3 Τα A και H για $f=200$ Hz .

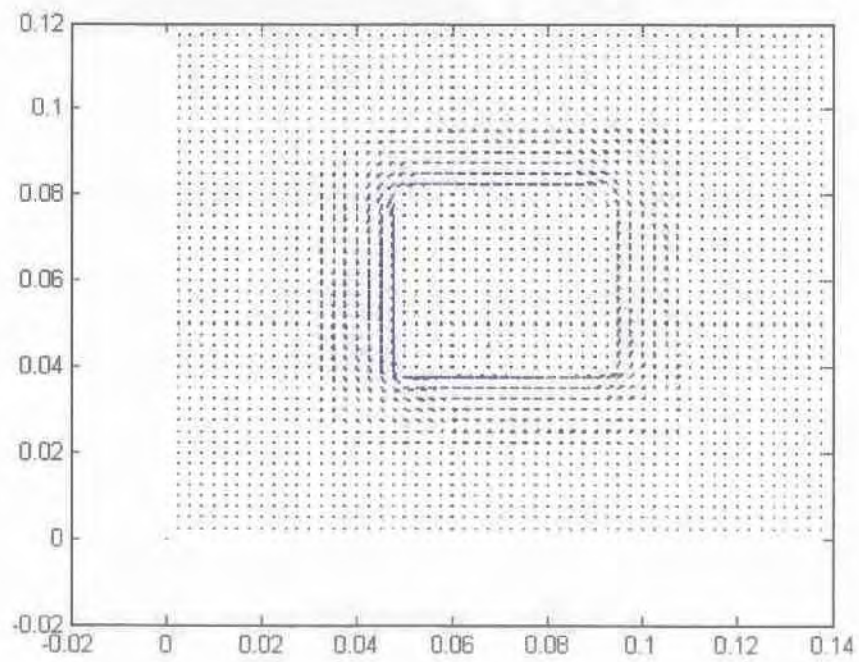
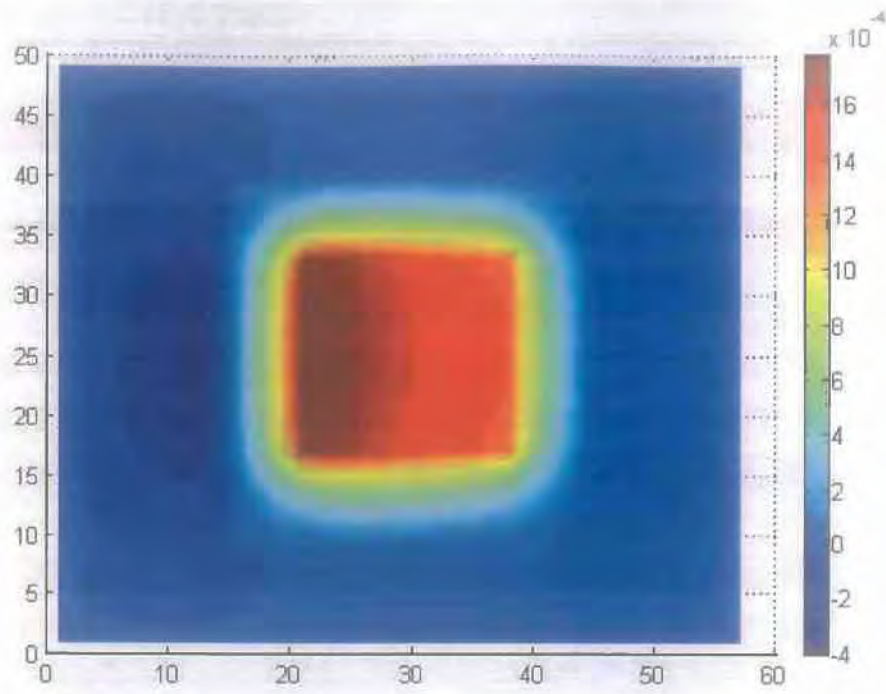
• $f = 500$ Hz

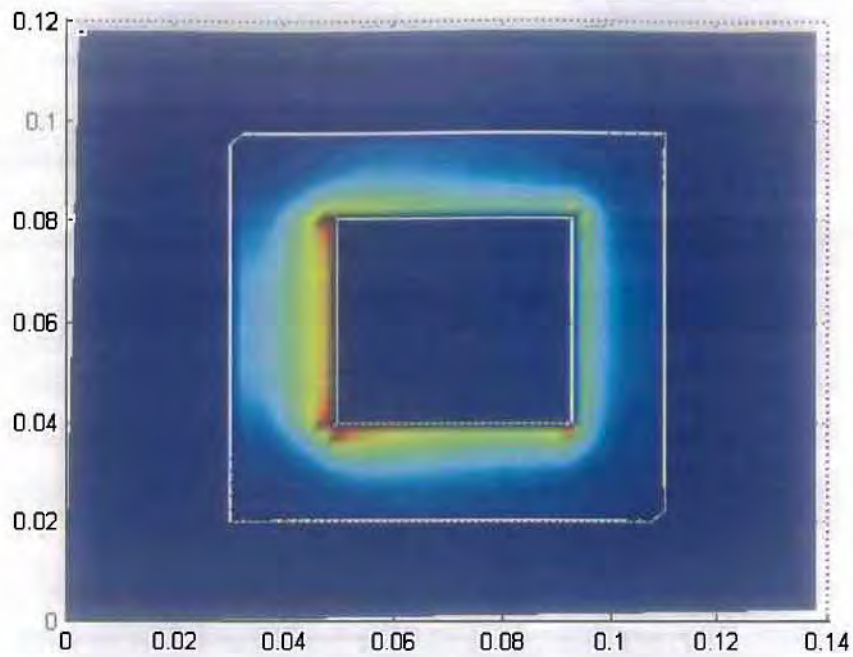




Εικ.5.4 Τα A και H για $f=500$ Hz .

• $f = 1000$ Hz





Εικ.5.5 Τα A και H για $f=1000$ Hz .

συχνότητα f (σε Hz)	ενέργεια μαγνητικού πεδίου W_m	ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου W_e
50	0.1446	48.3380
200	0.0023	773.3675
500	0.0145	4.8321
1000	0.0578	1.9308

Πίνακας 5.2 Οι τιμές της ενέργειας μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου, για τις τέσσερις συχνότητες.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου W_m , παρουσιάζουν ελάχιστο στην περιοχή συχνοτήτων γύρω από την τιμή $f = 200$ Hz, αντίθετα με αυτές του ηλεκτρικού πεδίου W_e που παρουσιάζουν έντονο μέγιστο.

5.2.2 Προσομοίωση της διάταξης σε διαφορετικές τιμές μαγνητικής διαπερατότητας μ – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και διαστάσεων της διάταξης.

αριθμός βημάτων		συχνότητα f (σε Hz)	σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r	βάθος διείσδυσης δ (σε m)	διακριτοποίηση	
αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	αριθμός χρονικών βημάτων N_t				χώρου (σε m) $\delta x = \delta y$	χρόνου (σε sec x 10^{-8}) δt
56 x 48	200	200	1	3.559	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	100	0.3556	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	500	0.159	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	2000	0.079	0.0025	5.5

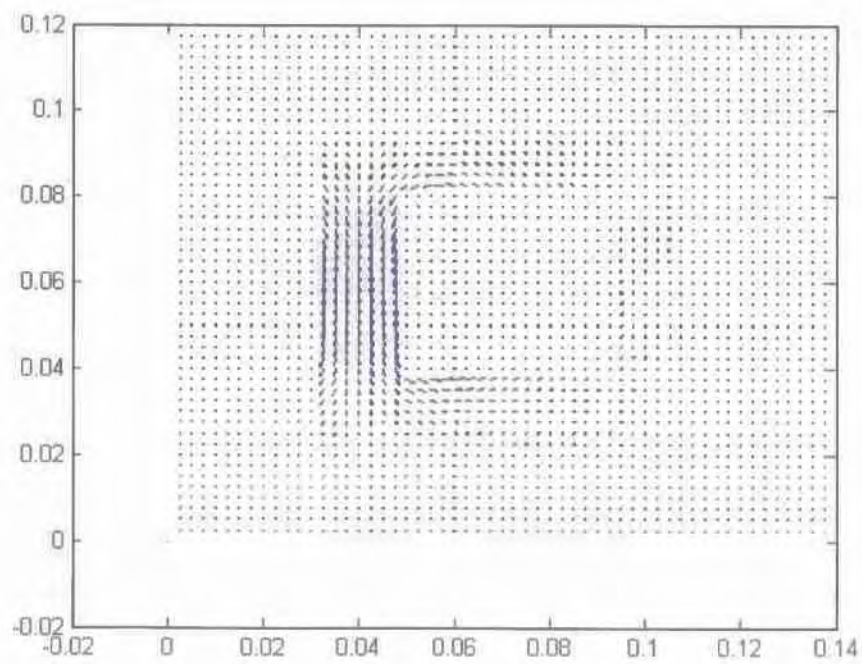
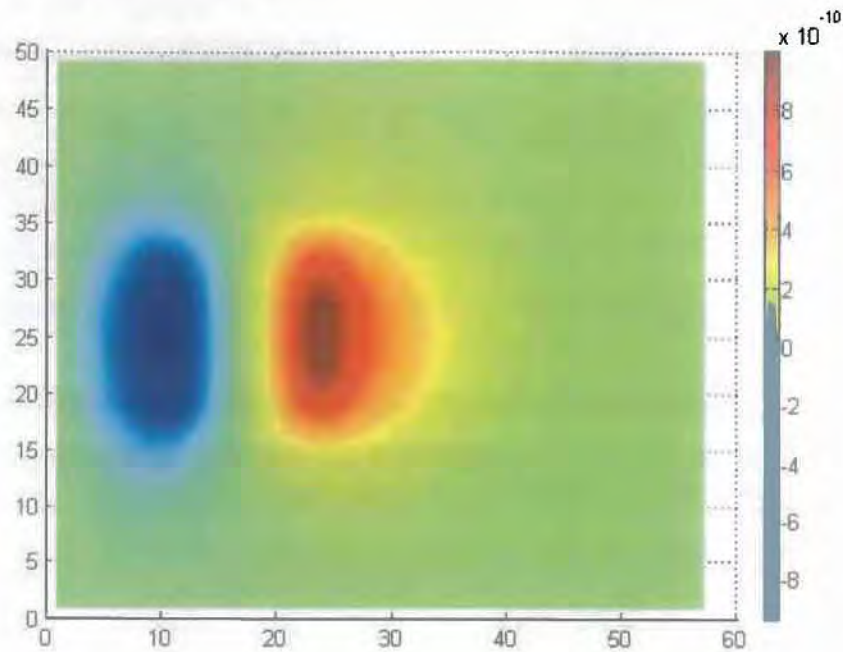
Πίνακας 5.3 Τα δεδομένα του προβλήματος για διαφορετικές τιμές μαγνητικής διαπερατότητας.

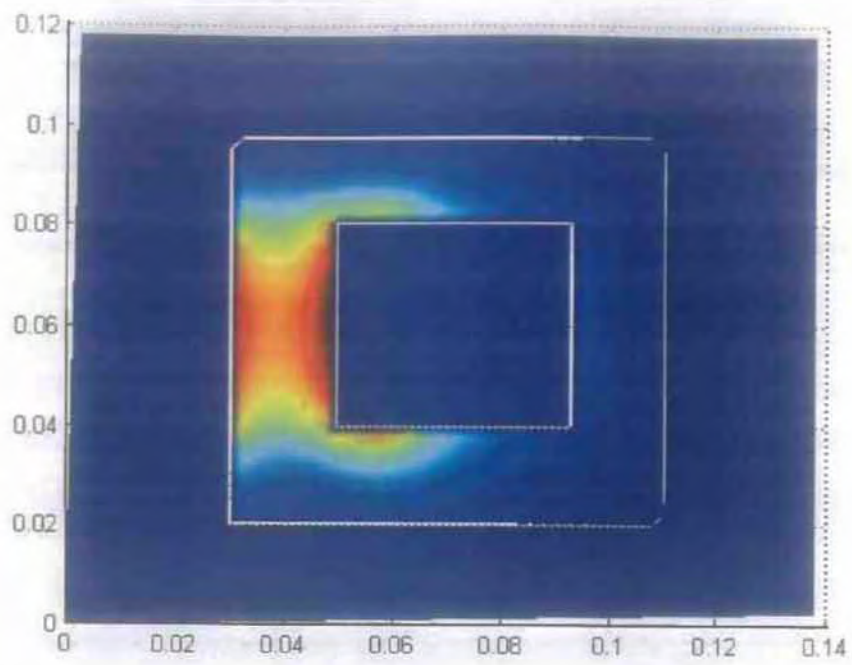
Παρατηρούμε ότι τηρούνται οι περιορισμοί του προβλήματος, όπως και στα δεδομένα του Πίνακα 5.1 .

- $\mu_r = 1$ (σημειώνουμε ότι η μ_r είναι αδιάστατη ποσότητα και η μ υπολογίζεται μέσω

της σχέσης $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$, όπου $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right]$, όπως αναφέραμε και

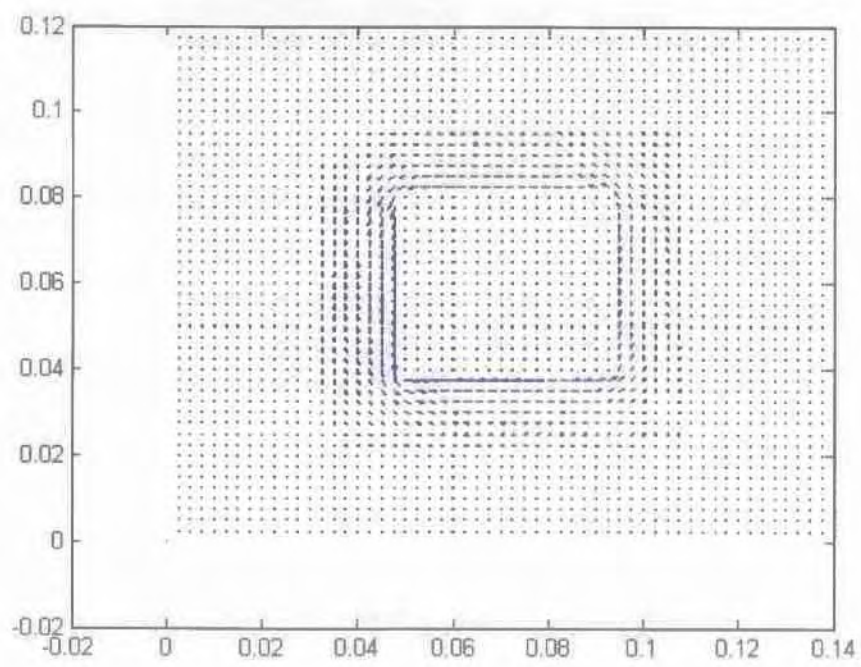
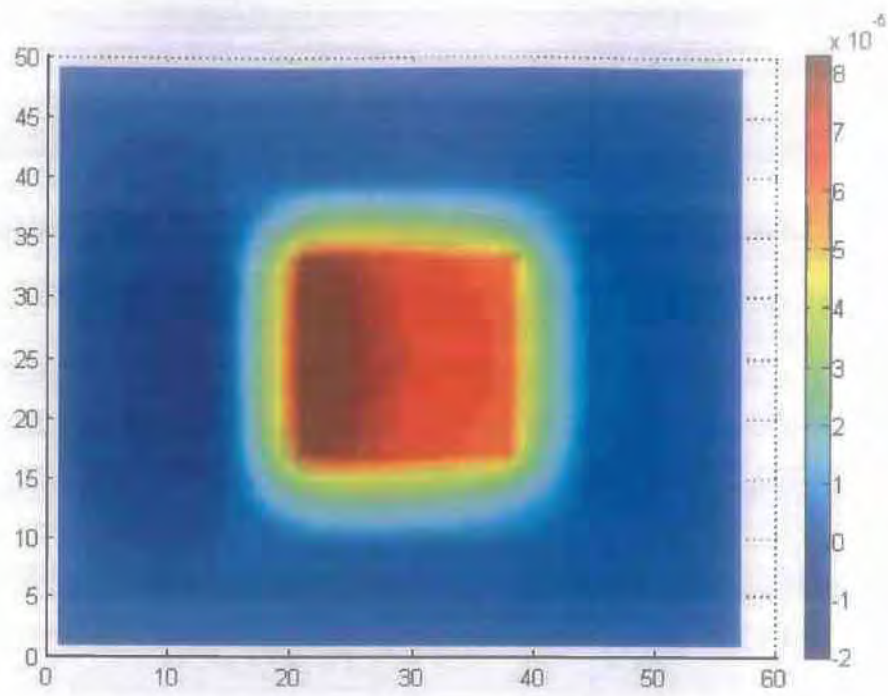
στην παράγραφο 4.1.2).

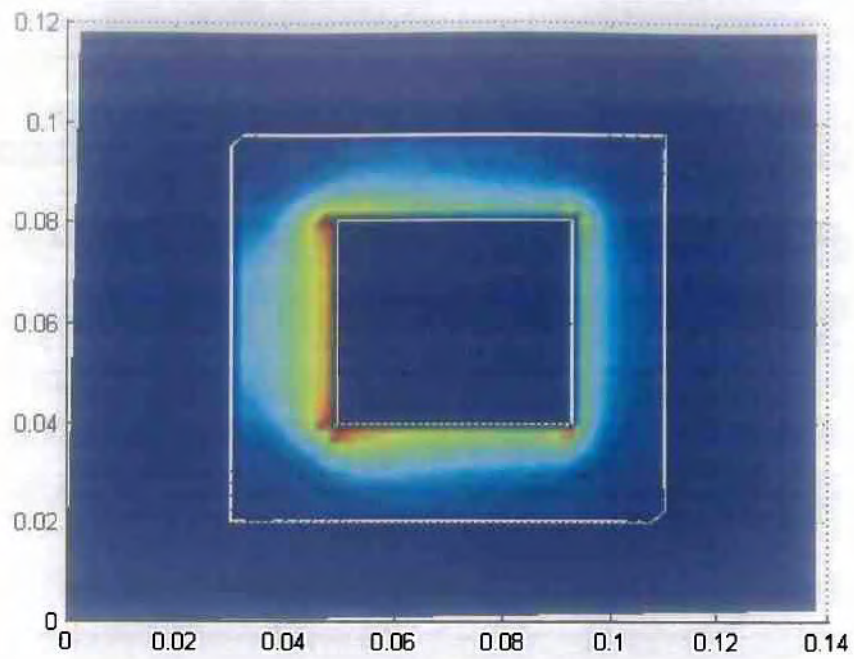




Εικ.5.6 Τα A και H για $\mu_r = 1$.

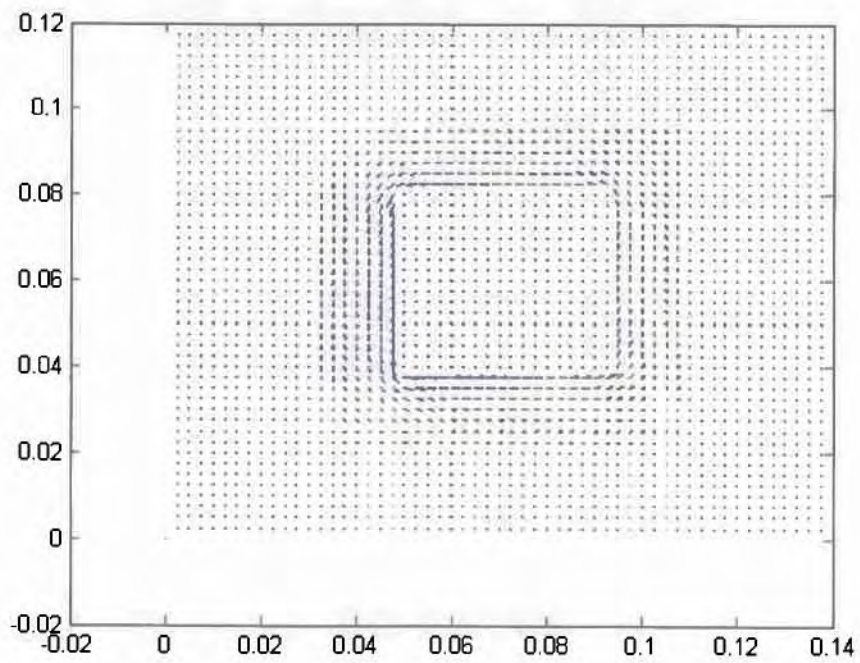
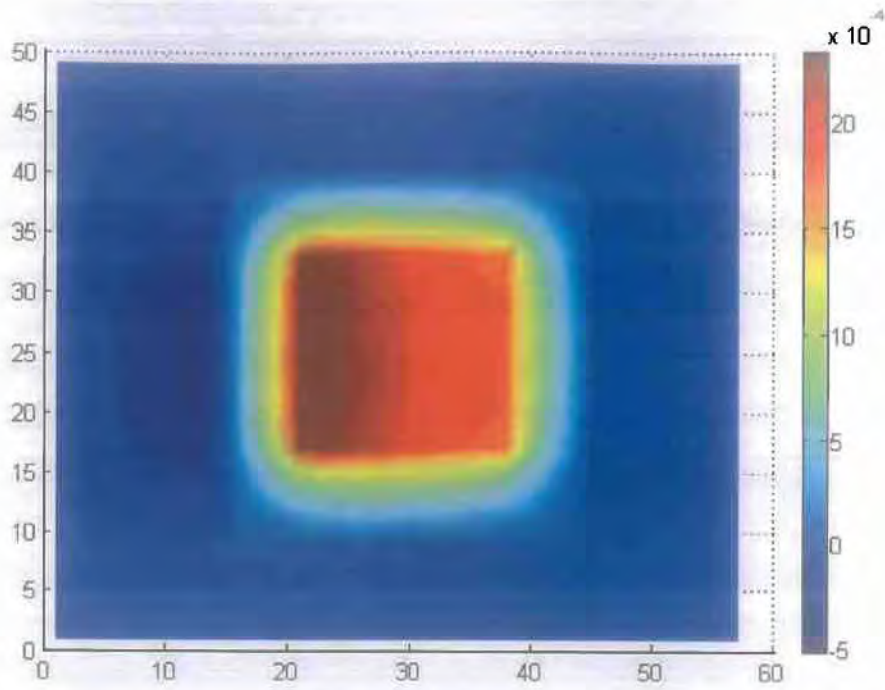
• $\mu_r = 100$

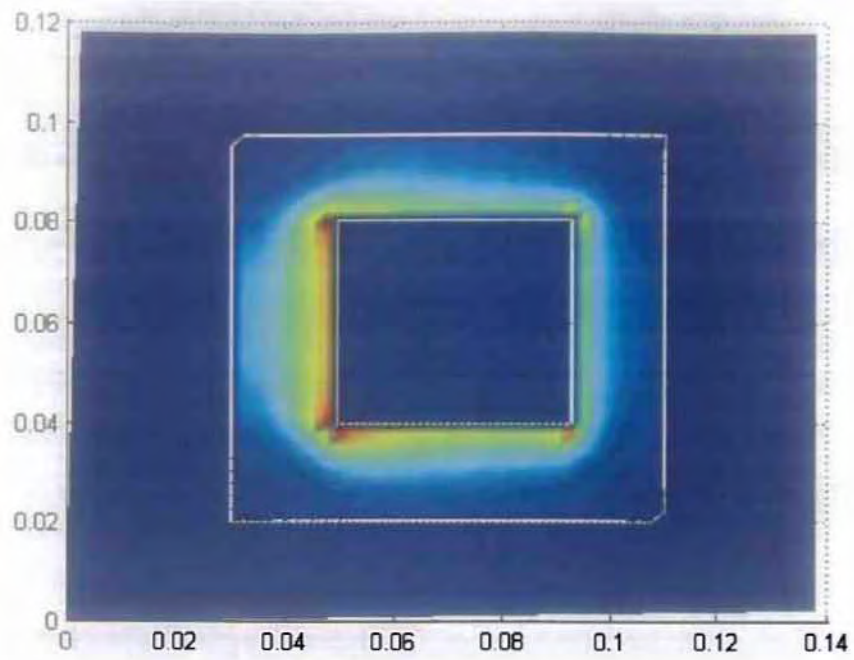




Εικ.5.7 Τα A και H για $\mu_r = 100$.

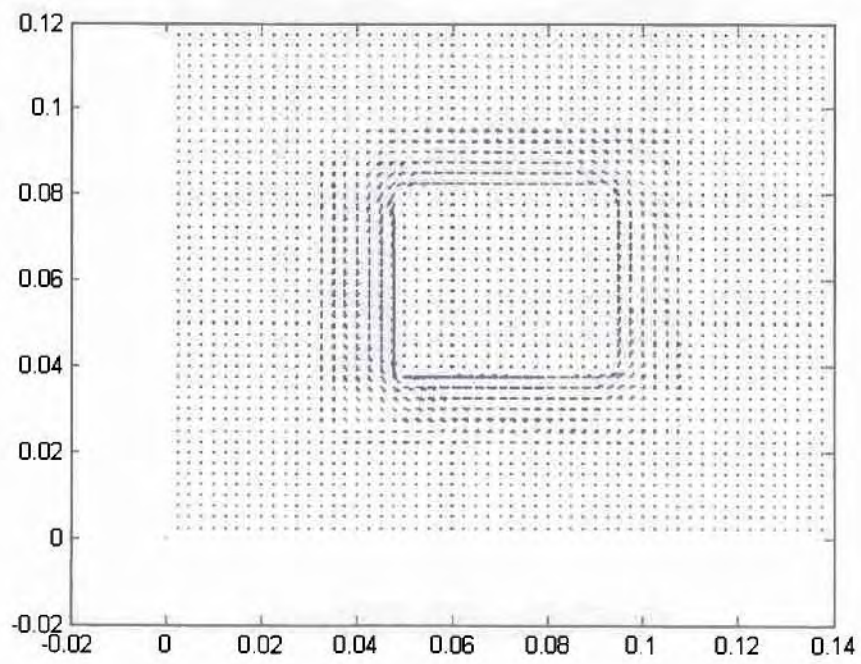
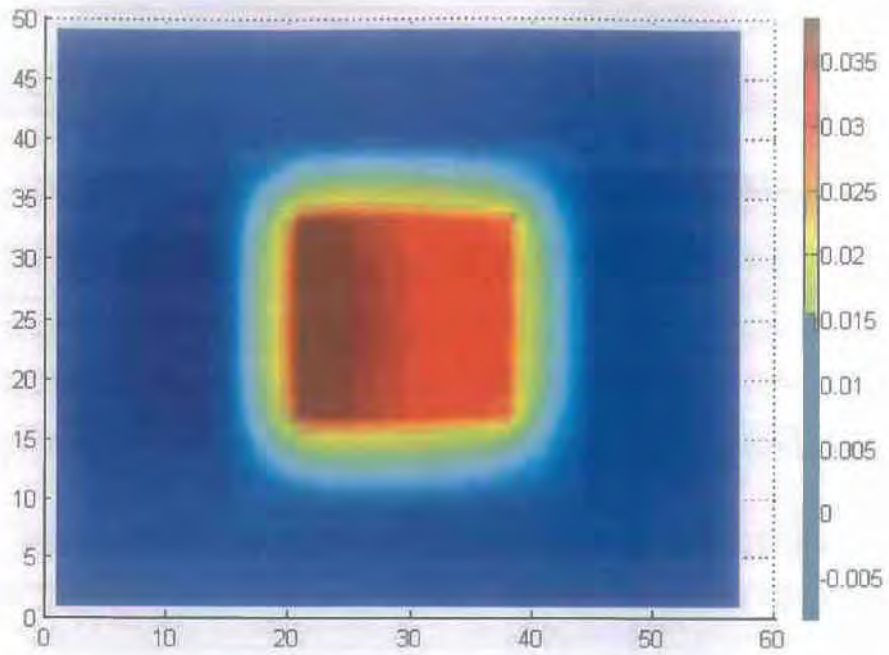
• $\mu_r = 500$

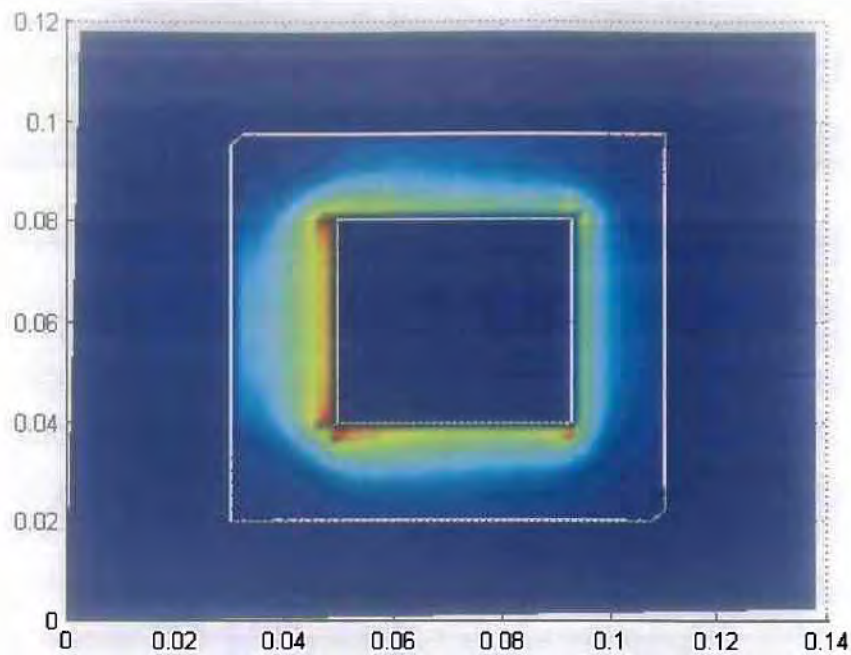




Εικ.5.8 Τα A και H για $\mu_r = 500$.

• $\mu_r = 2000$





Εικ.5.9 Τα A και H για $\mu_r = 2000$.

σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r	ενέργεια μαγνητικού πεδίου W_m	ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου W_e
1	0.1293	0.2559
100	0.2447	156.7234
500	0.0402	5.5236
2000	2.7077	9.4231

Πίνακας 5.4 Η ενέργεια μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου για τις τέσσερις διαφορετικές τιμές της μ_r .

Για τις τιμές των ενεργειών παρατηρούμε ότι :

- η W_m παρουσιάζει μικρή διακύμανση τιμών, που όμως αυξάνεται για μεγαλύτερες τιμές της μαγνητικής διαπερατότητας μ .
- W_e παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση τιμών, με ένα μεγάλο μέγιστο για $\mu_r = 100$.

5.2.3 Μεταβολή των ορίων του αέρα γύρω από τον μετασχηματιστή (air) – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ .

Μεταβάλλοντας τα όρια του αέρα γύρω από τον μετασχηματιστή, μεταβάλλονται ταυτόχρονα οι διαστάσεις της διάταξης. Στους πίνακες 5.5 και 5.7, σημειώνονται οι διαστάσεις αυτές (Lx, Ly), μαζί με τις τιμές για την απόσταση του μετασχηματιστή από τα όρια της διάταξης (air), και τις τιμές για το πάχος του πυρήνα του μετασχηματιστή (ραχος).

Ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος διακριτοποίησης (Nx, Ny) που φαίνεται στους παρακάτω πίνακες, προκύπτει σ' αυτή την περίπτωση, απαιτώντας οι διαστάσεις των κελιών να παίρνουν μία συγκεκριμένη τιμή : $\delta x = \delta y = 0.0025$. Έτσι, για κάθε ζεύγος τιμών (Lx, Ly) θα είναι $Nx = \frac{Lx}{\delta x}$ και $Ny = \frac{Ly}{\delta y}$.

Ίσως να παρατηρηθούν μικρές προσαρμογές του αριθμού των κόμβων από τις ακριβείς τιμές που υπολογίζονται από τους παραπάνω τύπους. Αυτό γίνεται για να γίνονται αποδεκτές οι τιμές από τον κώδικα, χωρίς να χρειαστεί να αλλάξουμε την κυρίως δομή του.

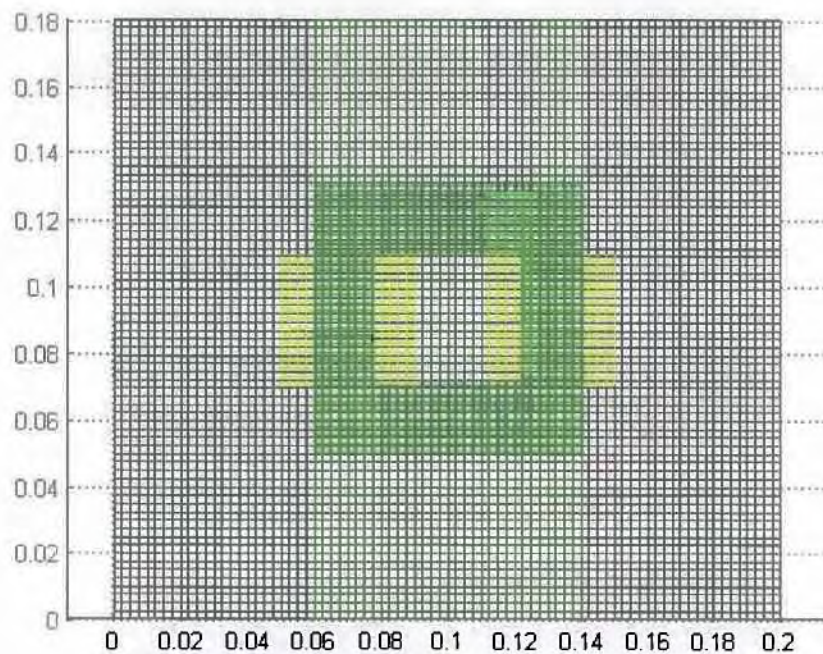
Όλες οι προσομοιώσεις που ακολουθούν, γίνονται για σταθερή τιμή συχνότητας διέγερσης $f = 200 \text{ Hz}$, και σταθερή τιμή σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας $\mu_r = 200$.

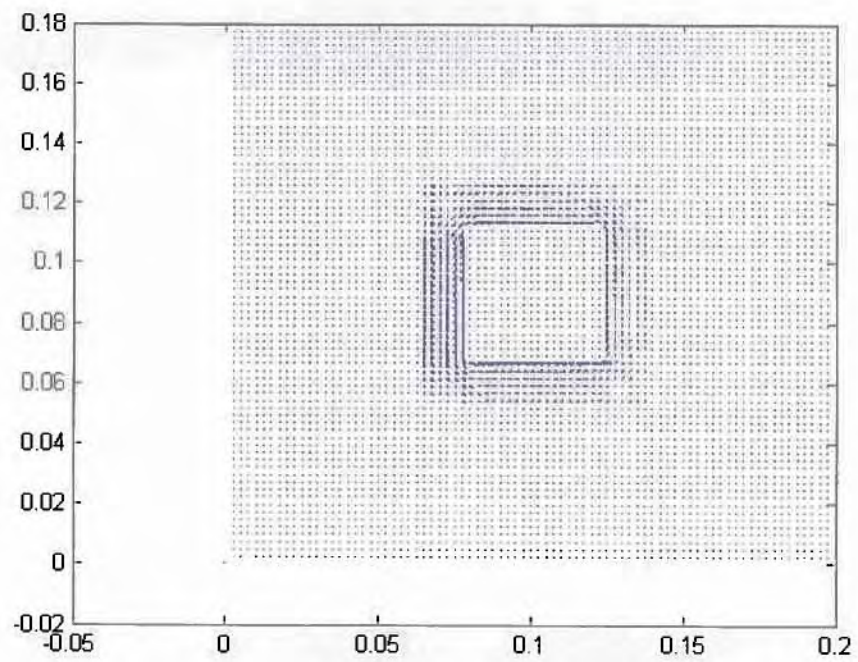
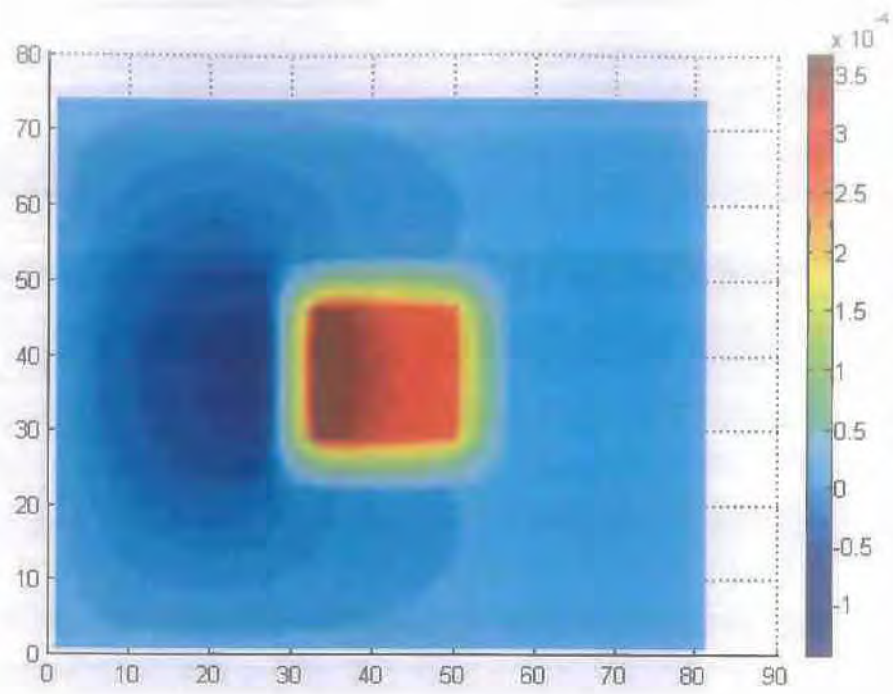
αριθμός βημάτων		διαστάσεις διάταξης (Lx, Ly)	air	$ρaxos$	βάθος διείσδυσης δ (σε m)	διακριτοποίηση	
αριθμός κελιών $Nx \times Ny$	αριθμός χρονικών βημάτων Nt					χώρου (σε m) $\delta x = \delta y$	χρόνου (σε sec $\times 10^{-8}$) δt
80 x 73	200	0.20 x 0.18	0.05	0.02	0.252	0.0025	5.5
120 x 112	200	0.30 x 0.28	0.1	0.02	0.252	0.0025	5.5
200 x 192	200	0.5 x 0.48	0.2	0.02	0.252	0.0025	5.5
440 x 432	200	1.1 x 1.08	0.5	0.02	0.252	0.0025	5.5

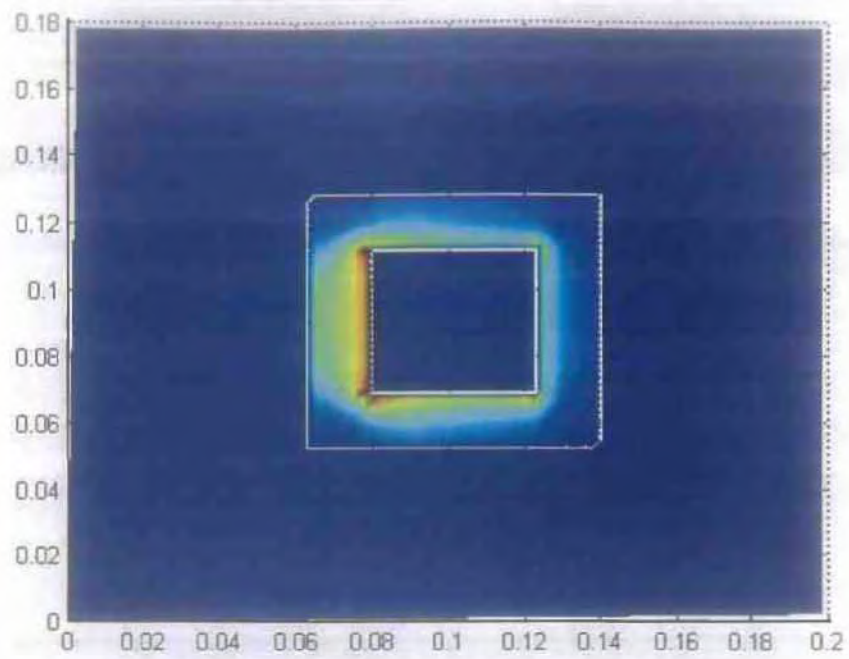
Πίνακας 5.5 Τα δεδομένα του προβλήματος για την μεταβολή των ορίων του αέρα, με σταθερές τιμές

f και μ_r .

• $air = 0.05$

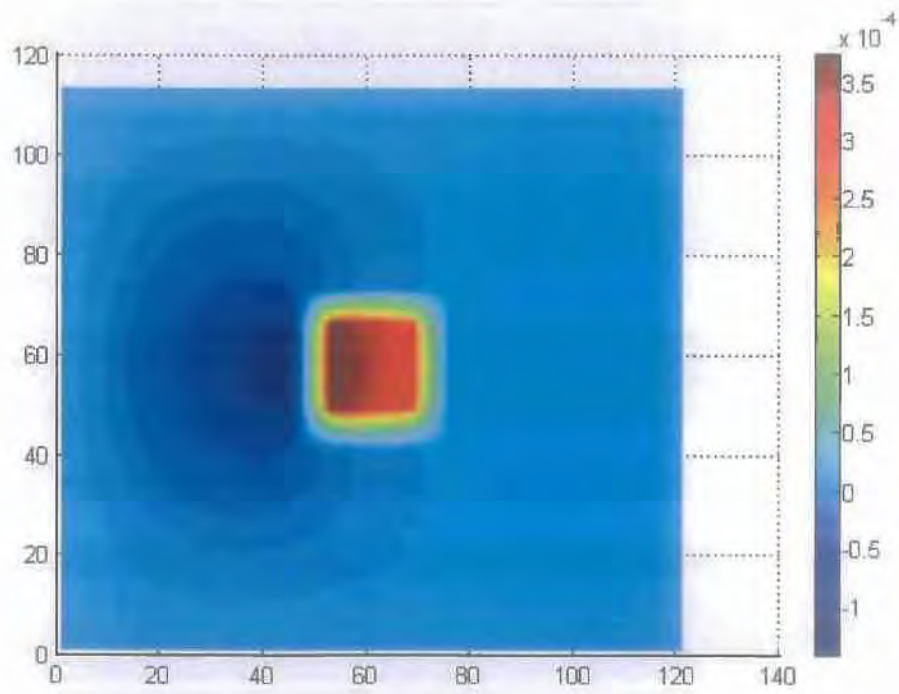
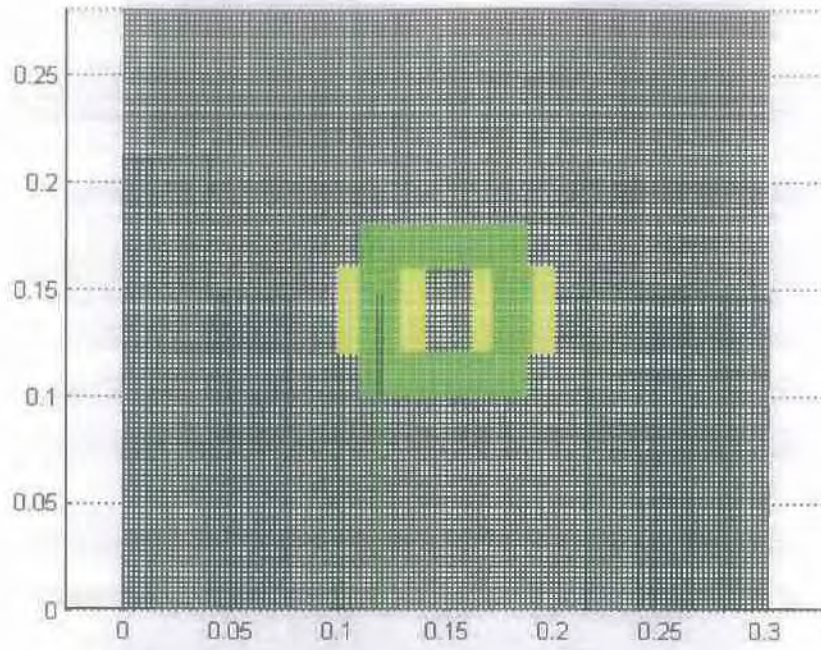


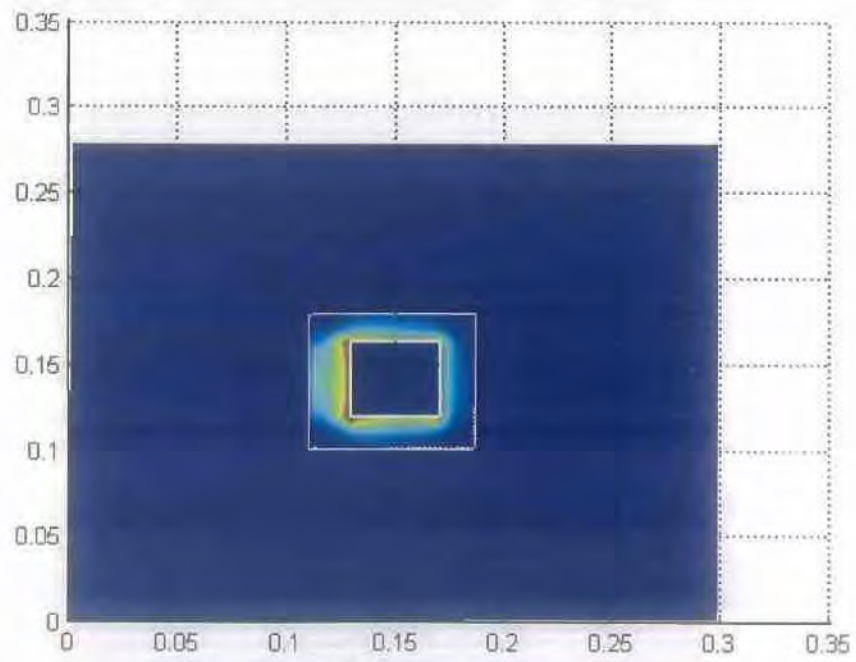
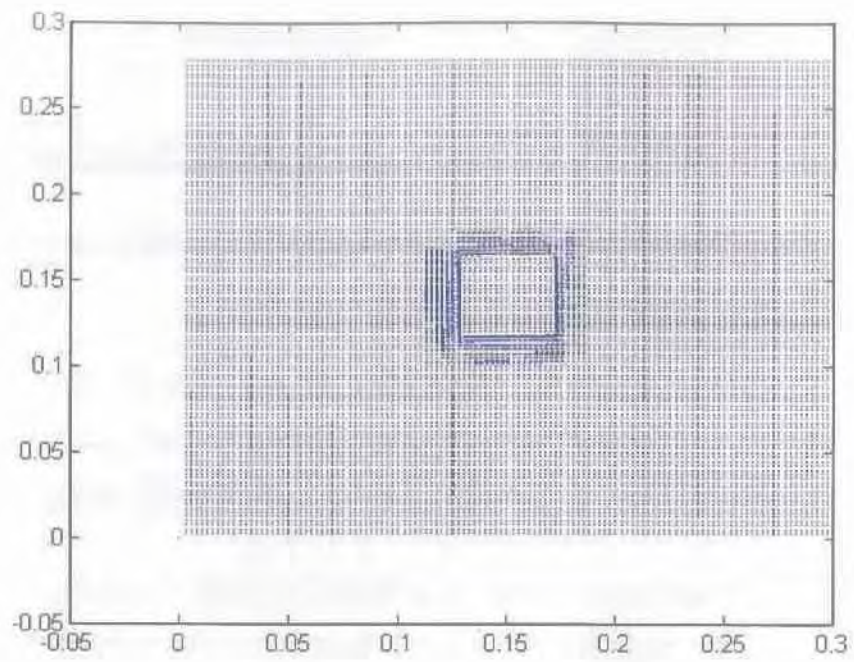




Εικ. 5.10 Η εικόνα της διάταξης, μαζί με το γράφημα του διανυσματικού δυναμικού A και τα γραφήματα για την ένταση μαγνητικού πεδίου H για $air = 0.1$.

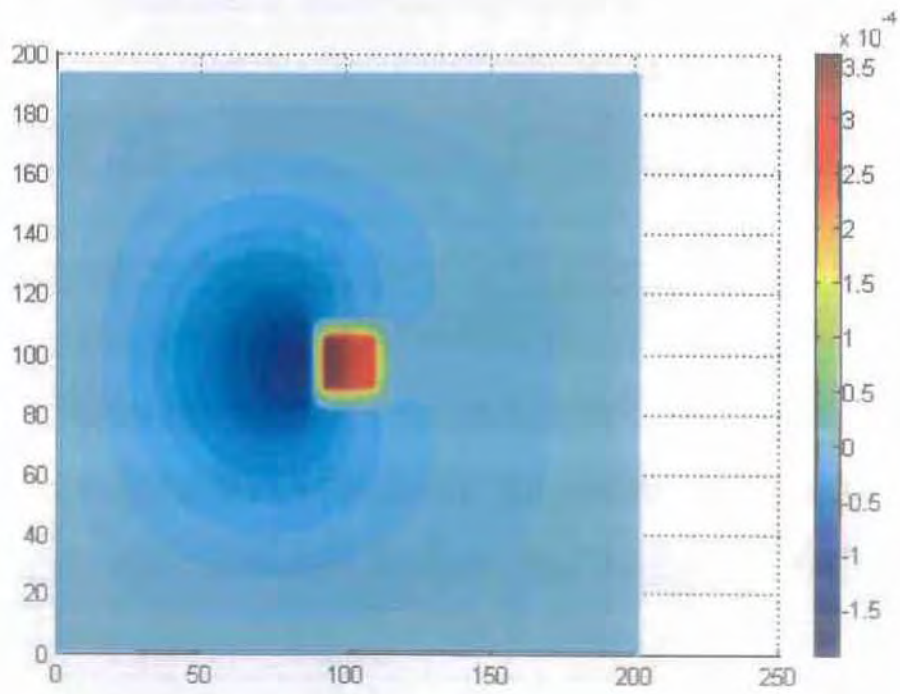
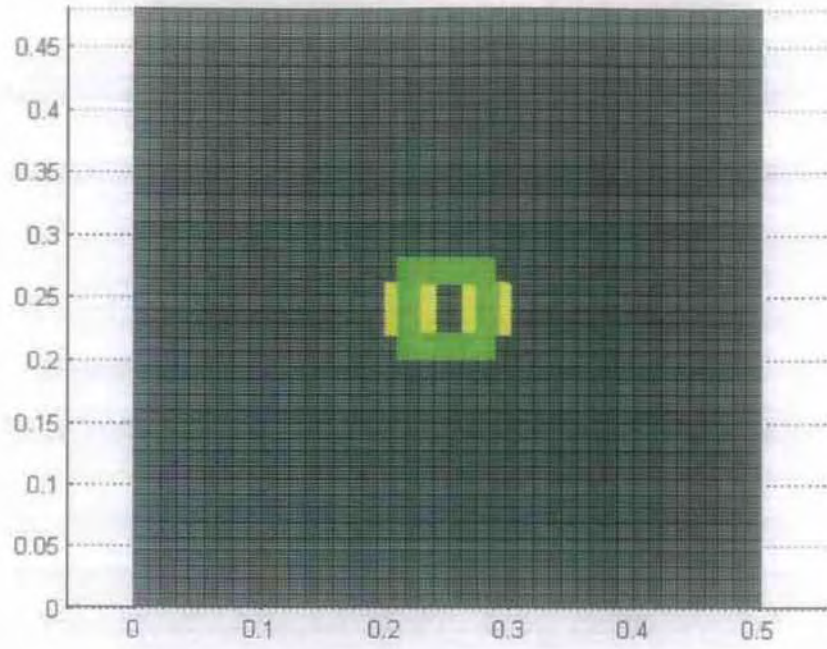
• $air = 0.1$

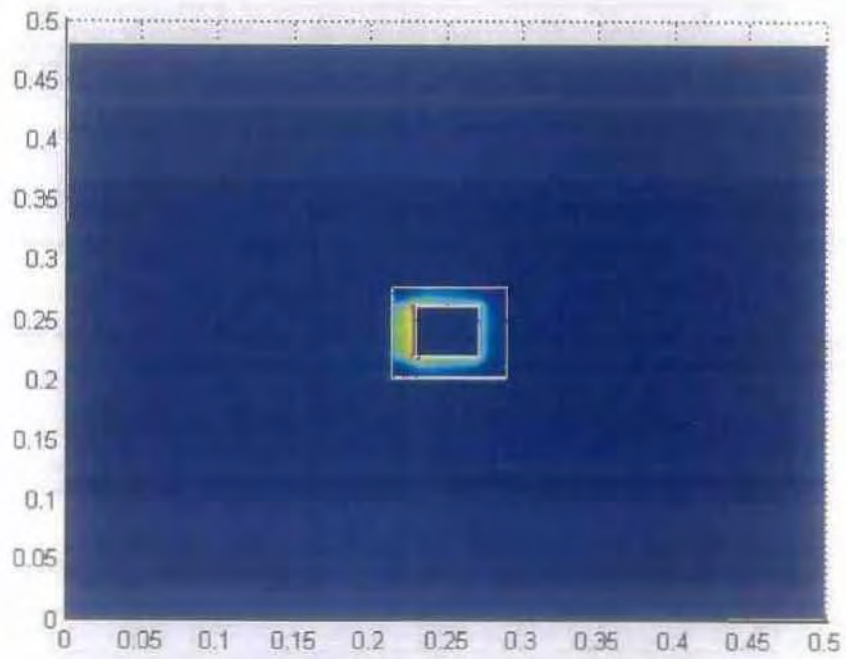
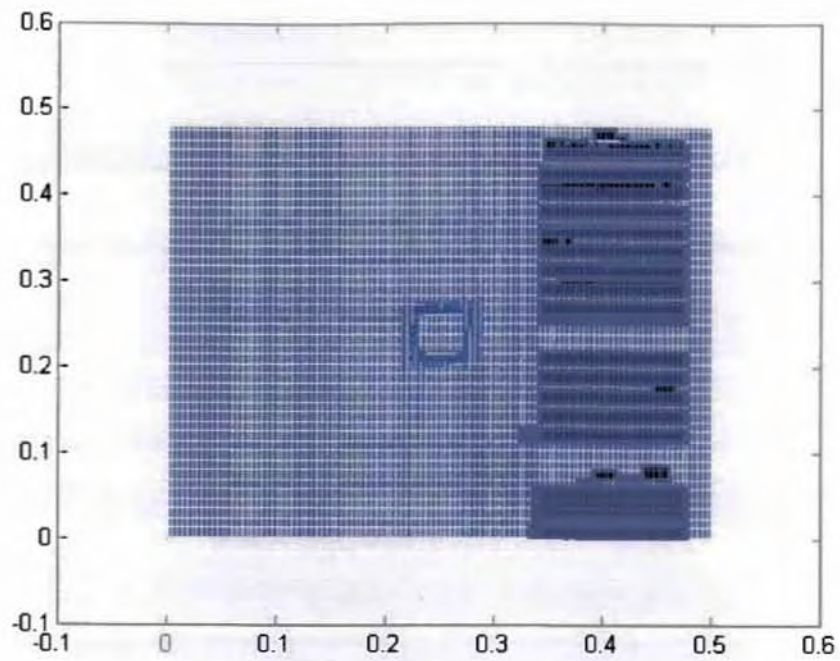




Εικ.5.11 Τα A και H για $air = 0.1$.

• $air = 0.2$





Εικ.5.12 Τα A και H για $air = 0.2$.

αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	διαστάσεις διάταξης (L_x, L_y)	<i>air</i>	ενέργεια μαγνητικού πεδίου W_m	ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου W_e
80 x 73	0.20 x 0.18	0.05	0.0028	675.4284
120 x 112	0.30 x 0.28	0.1	0.0029	823.6113
200 x 192	0.5 x 0.48	0.2	0.0031	741.6931
440 x 432	1.1 x 1.08	0.5	-	-

Πίνακας 5.6 Η ενέργεια μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου για τις αλλαγές των ορίων του αέρα.

Για τις τιμές των ορίων αέρα (*air*) που εξετάσαμε, οι τιμές της W_m αυξάνονται ομαλά, ενώ οι τιμές της W_e παρουσιάζουν μέγιστο για $air = 0.1$.

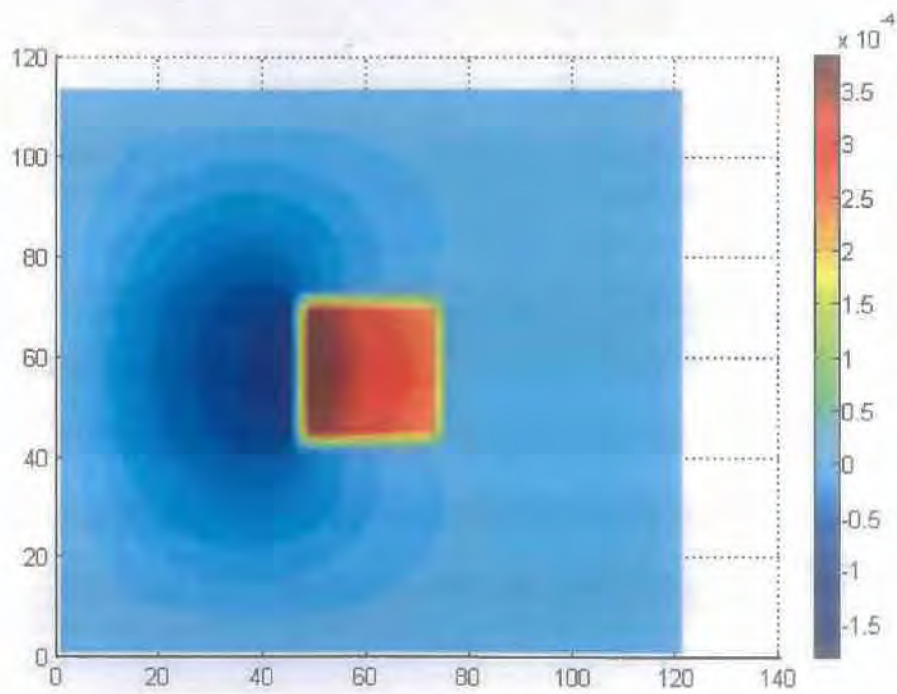
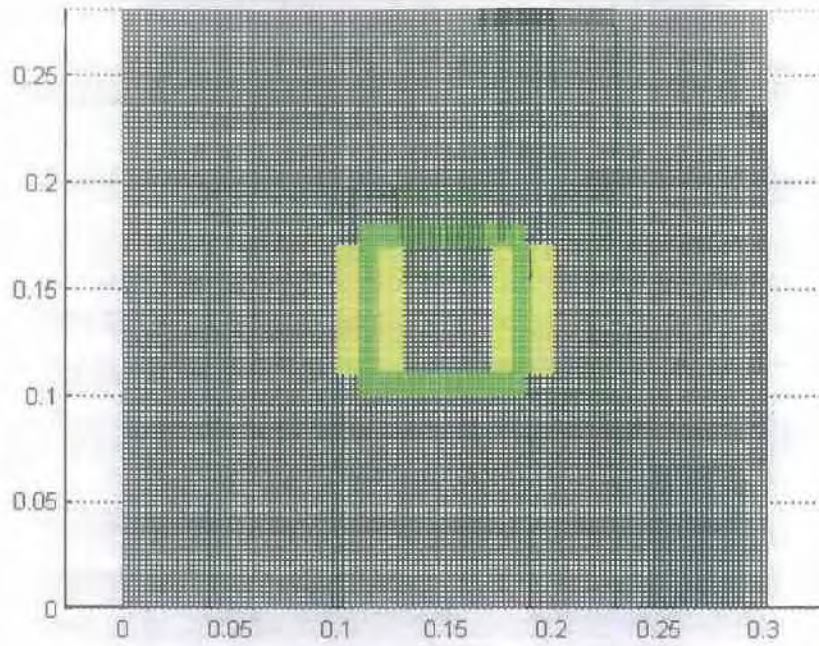
5.2.4 Μεταβολή του μεγέθους του πυρήνα του μετασχηματιστή (*pacos*) – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ .

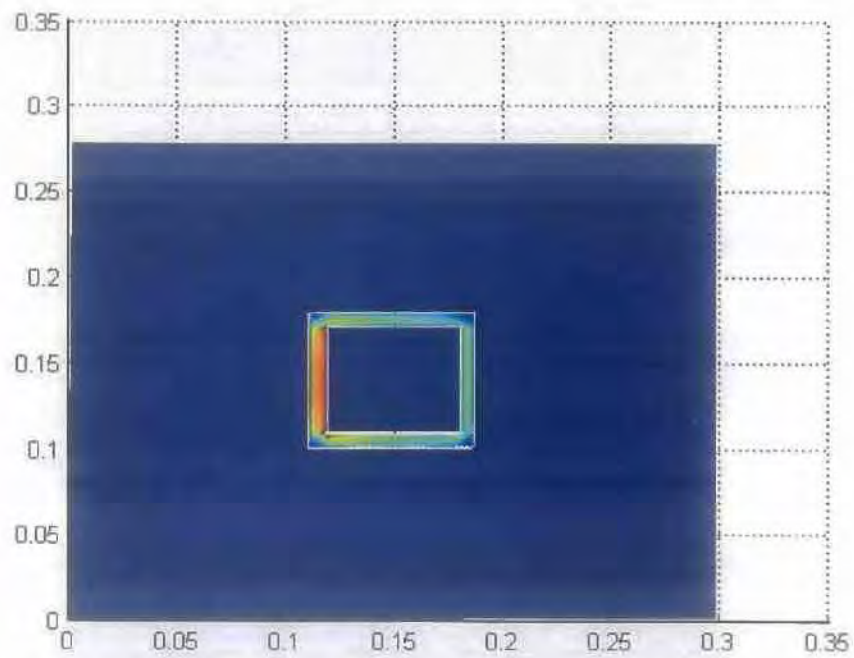
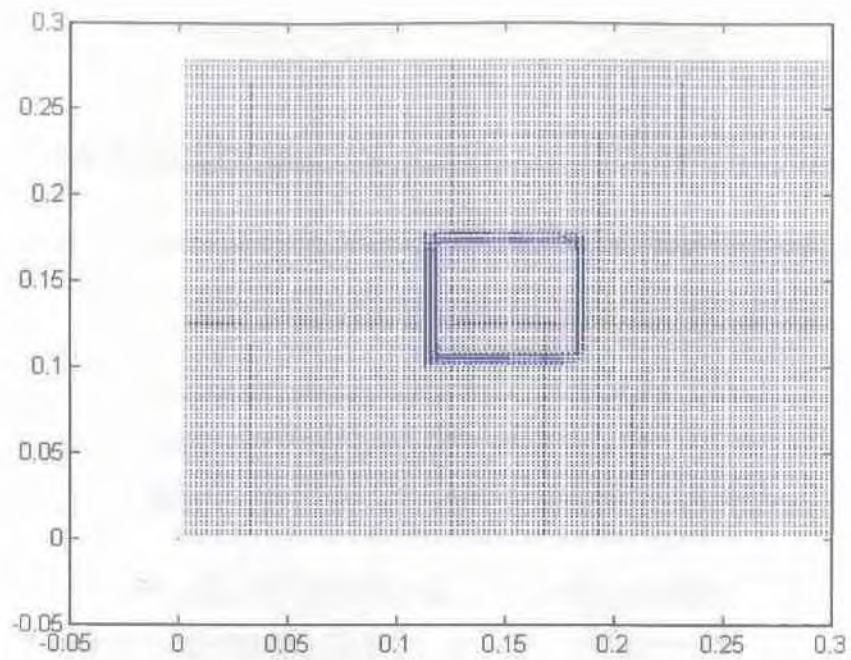
Μεταβάλλουμε, τώρα, το πάχος του πυρήνα του μετασχηματιστή (*pacos*), κρατώντας σταθερή την τιμή του ορίου του αέρα ($air = 0.1$). Όλες οι τιμές φαίνονται στον πίνακα 5.7.

αριθμός βημάτων		διαστάσεις διάταξης (L_x, L_y)	<i>air</i>	<i>pacos</i>	βάθος δείσδυσης δ (σε m)	διακριτοποίηση	
αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	αριθμός χρονικών βημάτων N_t					χώρου (σε m) $\delta x = \delta y$	χρόνου (σε sec x 10^{-8}) δt
120 x 112	200	0.30 x 0.28	0.1	0.01	0.252	0.0025	5.5
120 x 112	200	0.30 x 0.28	0.1	0.015	0.252	0.0025	5.5
120 x 115	200	0.30 x 0.28	0.1	0.03	0.252	0.0025	5.5
120 x 114	200	0.30 x 0.28	0.1	0.035	0.252	0.0025	5.5

Πίνακας 5.7 Τα δεδομένα του προβλήματος για μεταβολή του μεγέθους του πυρήνα του μετασχηματιστή.

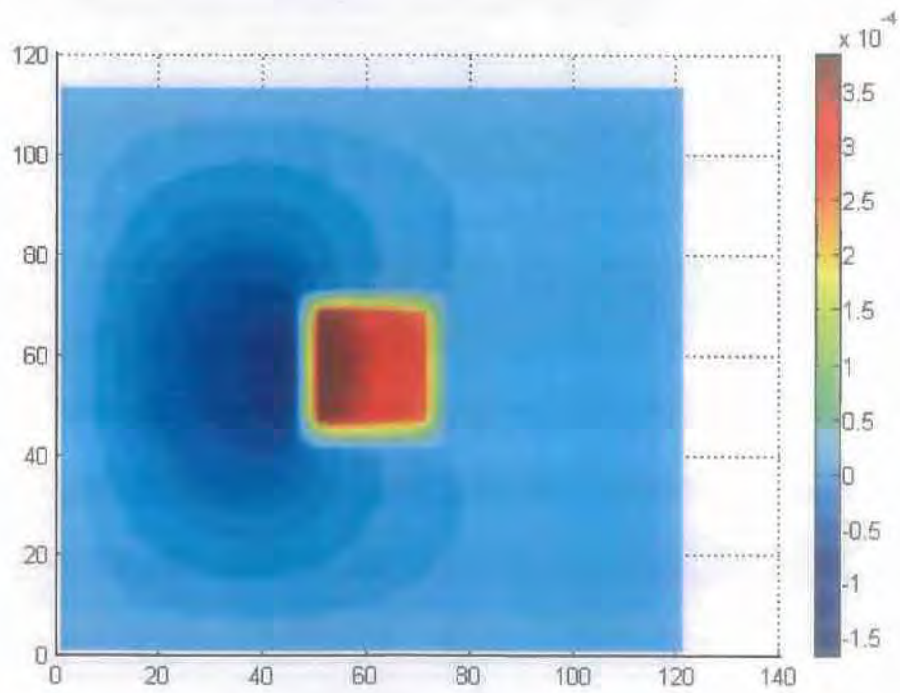
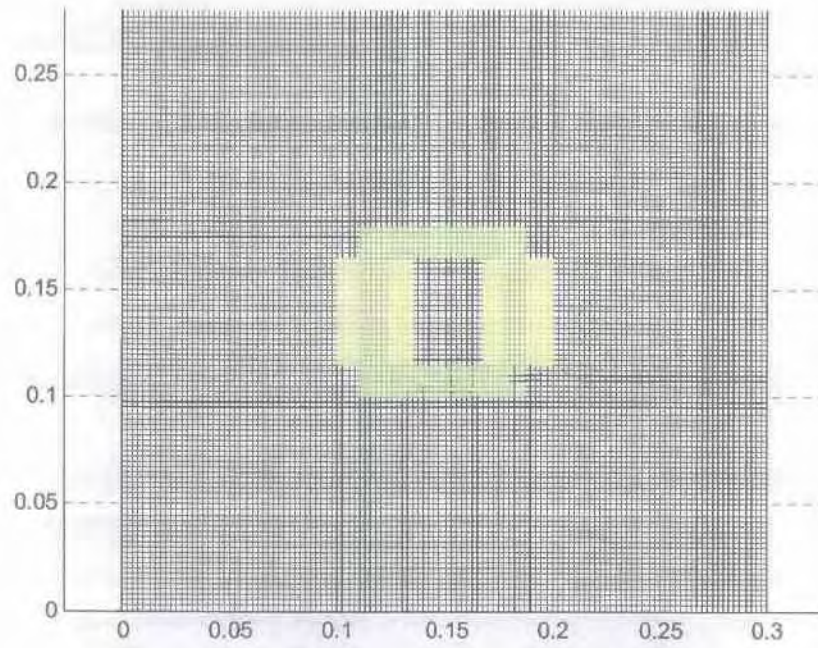
* $paxos = 0.01$

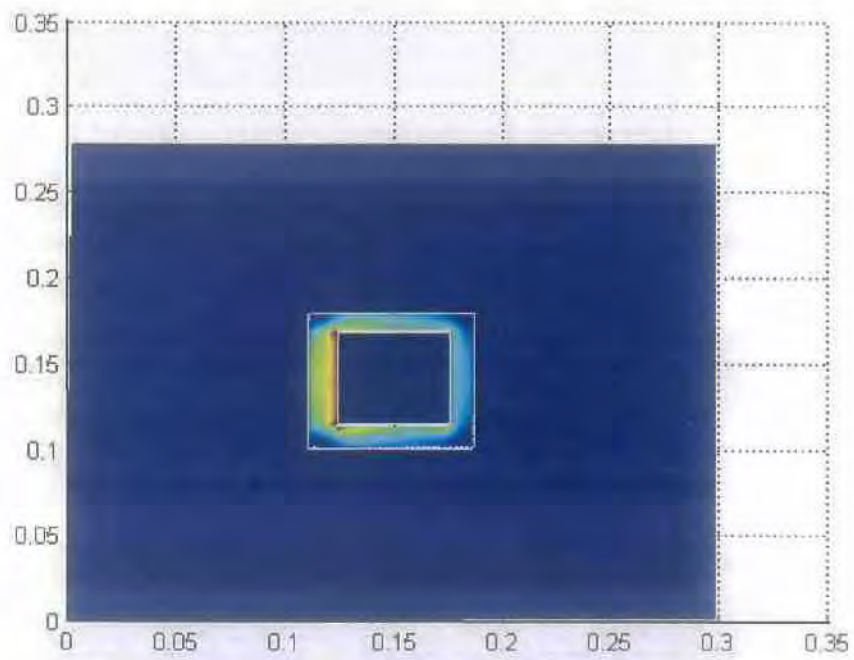
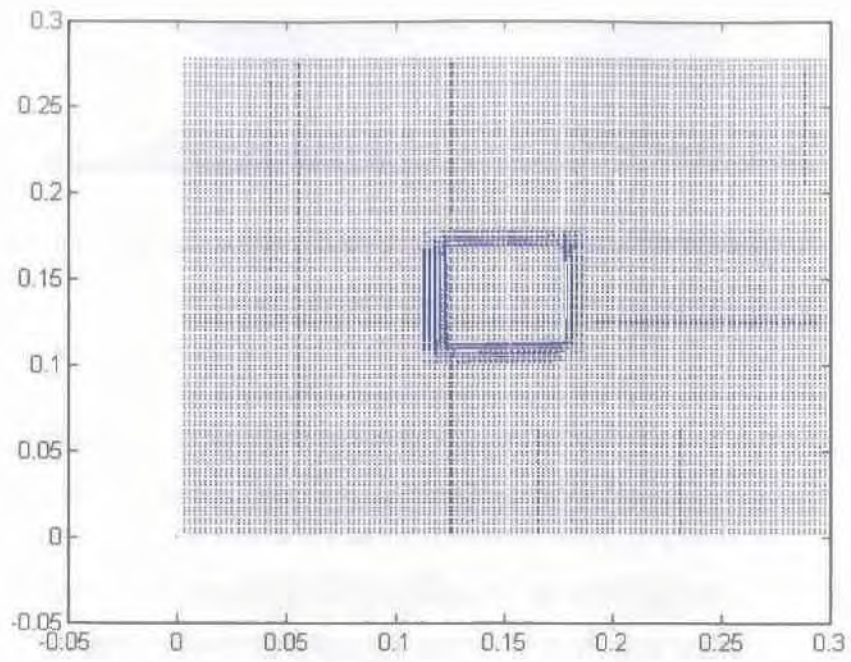




Εικ.5.13 Τα A και H για $\rho_{\text{max}} = 0.01$.

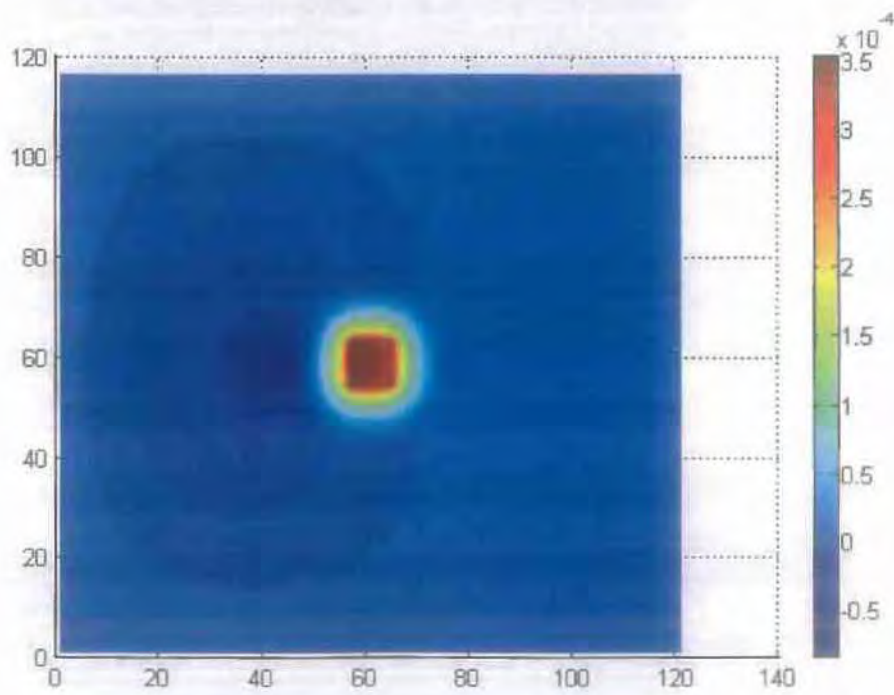
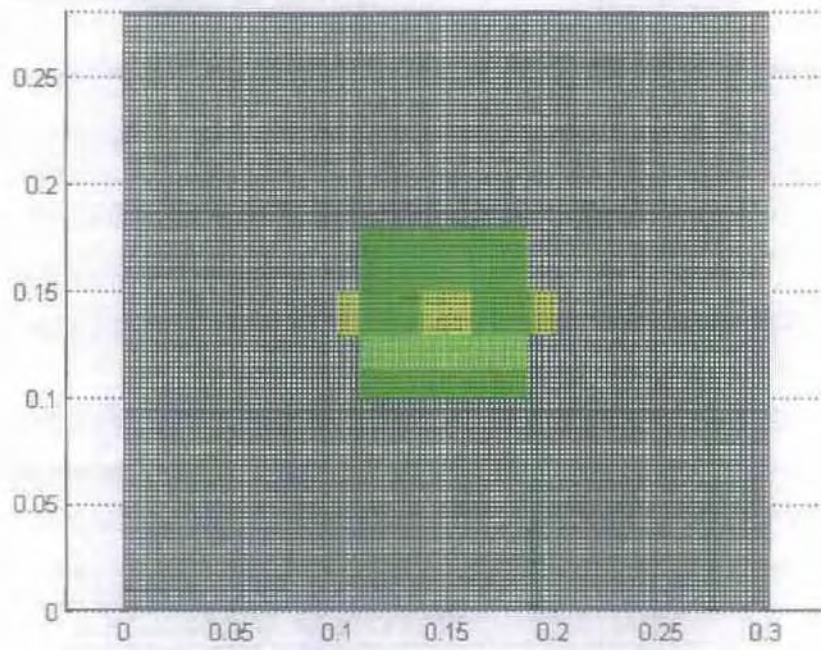
• $paxos = 0.015$

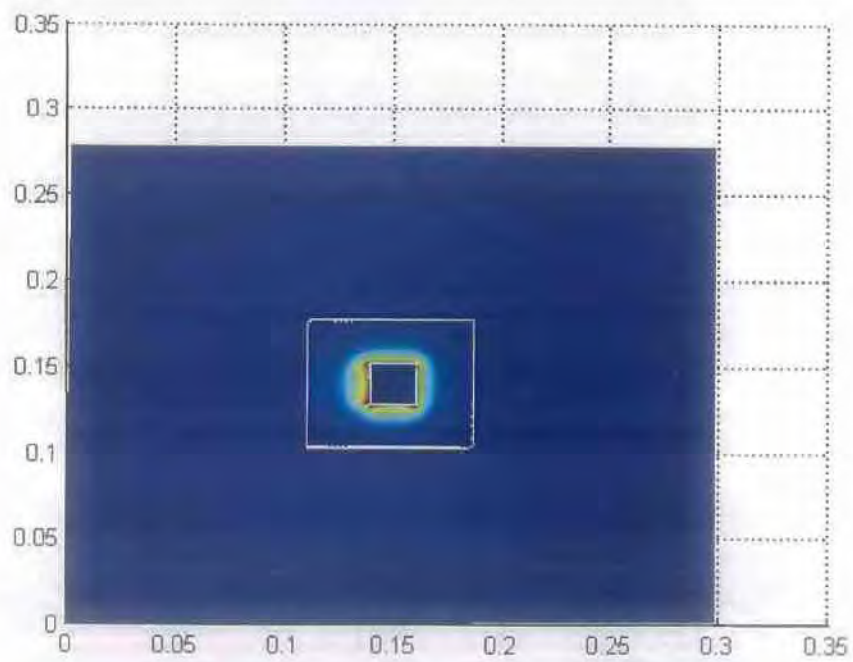
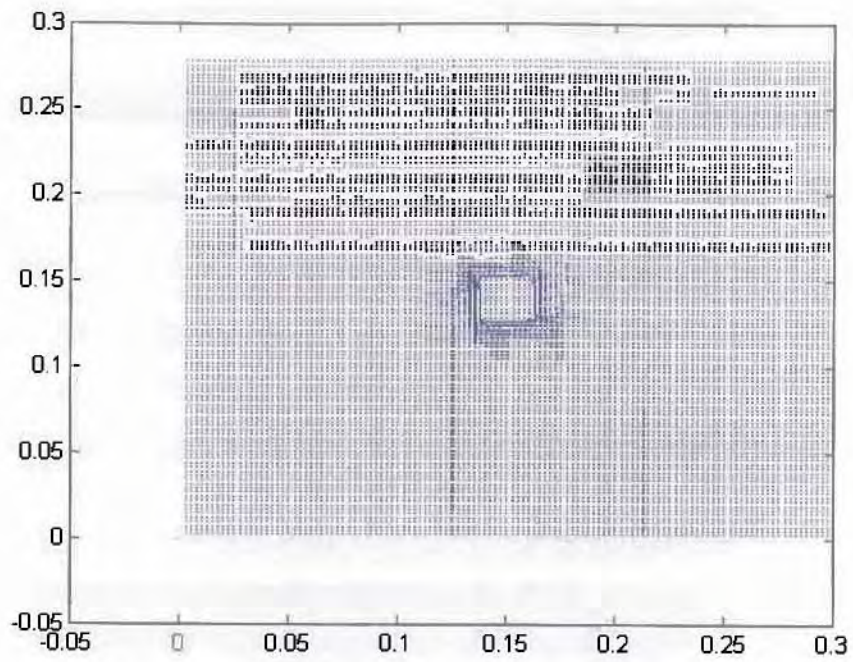




Εικ.5.14 Τα A και H για $\rho_{axos} = 0.015$.

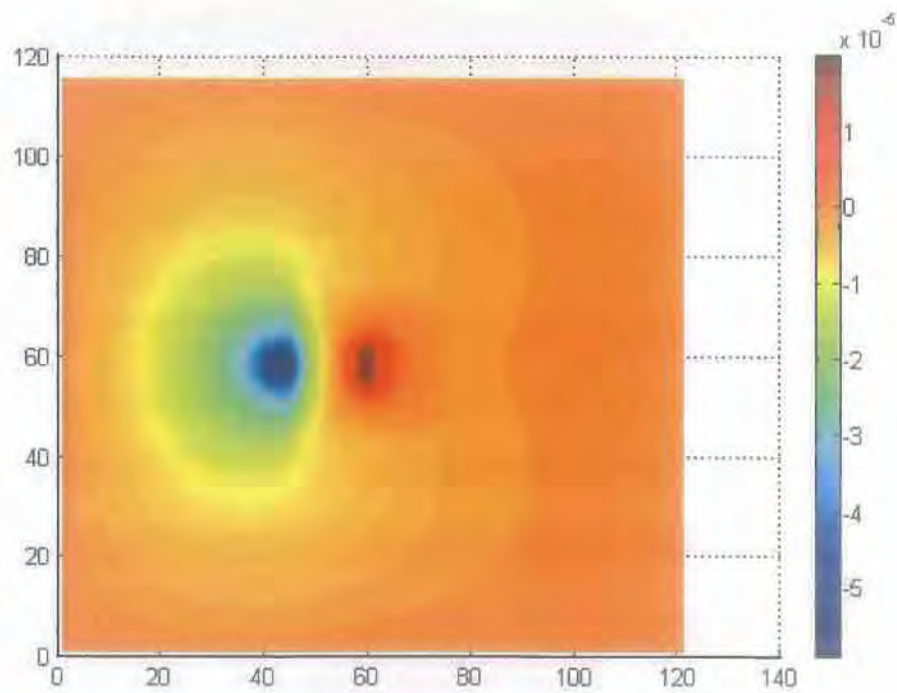
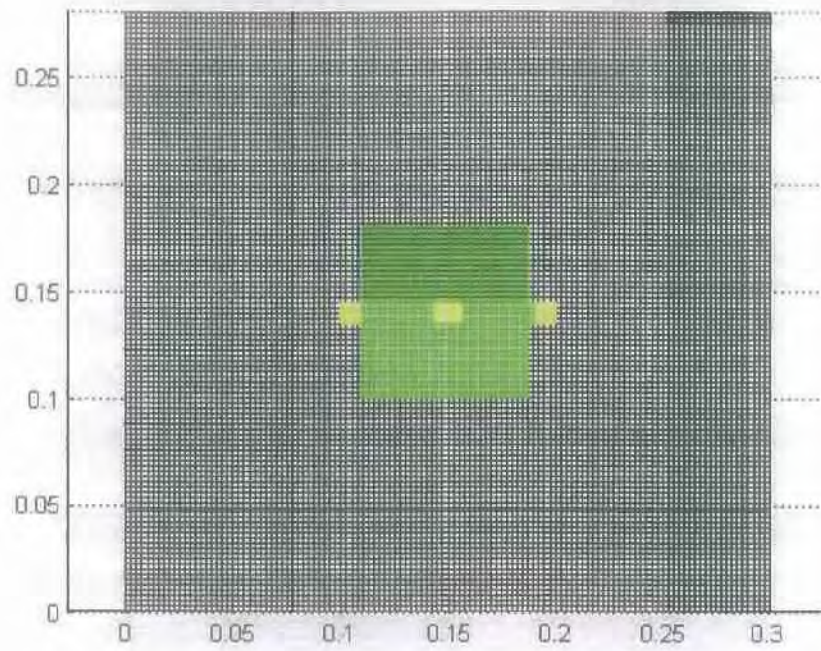
* $paxos = 0.03$

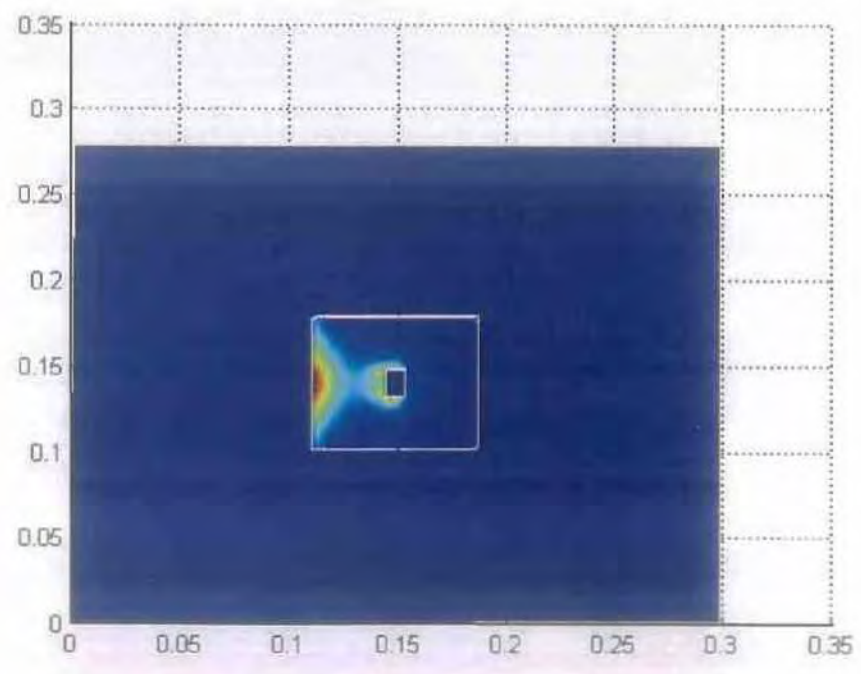
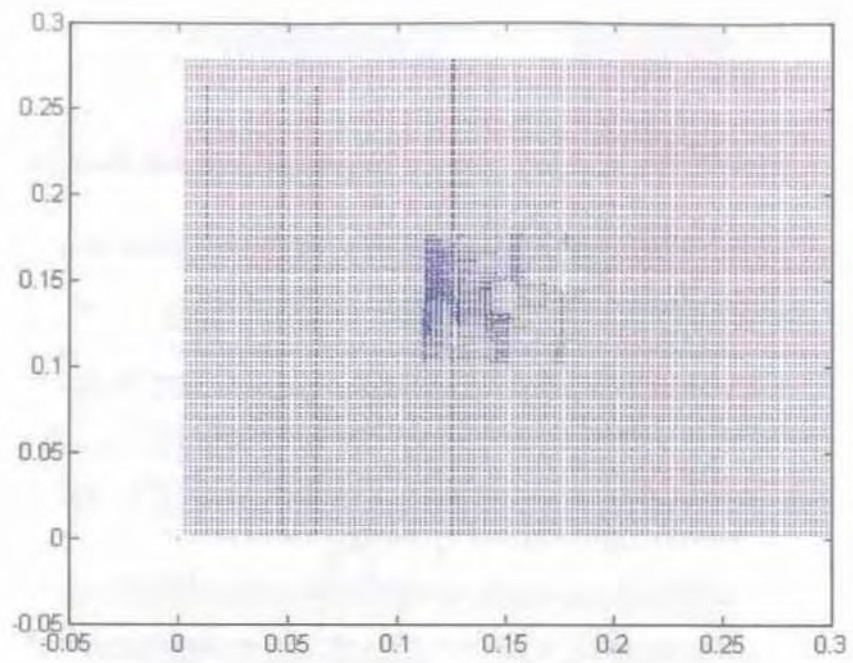




Εικ.5.15 Τα A και H για $\rho_{\text{axos}} = 0.03$.

• $paxos = 0.035$





Εικ.5.16 Τα A και H για $ρ_{αχος} = 0.035$.

αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	διαστάσεις διάταξης (L_x, L_y)	<i>air</i>	<i>raxos</i>	ενέργεια μαγνητικού πεδίου W_m	ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου W_e
120 x 112	0.30 x 0.28	0.1	0.01	0.0064	532.4550
120 x 112	0.30 x 0.28	0.1	0.015	0.0044	732.4062
120 x 115	0.30 x 0.28	0.1	0.03	0.0014	553.1583
120 x 114	0.30 x 0.28	0.1	0.035	0.1138	3.0176

Πίνακας 5.8 Η ενέργεια μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου για τα διάφορα πάχη ηλεκτρομαγνήτη.

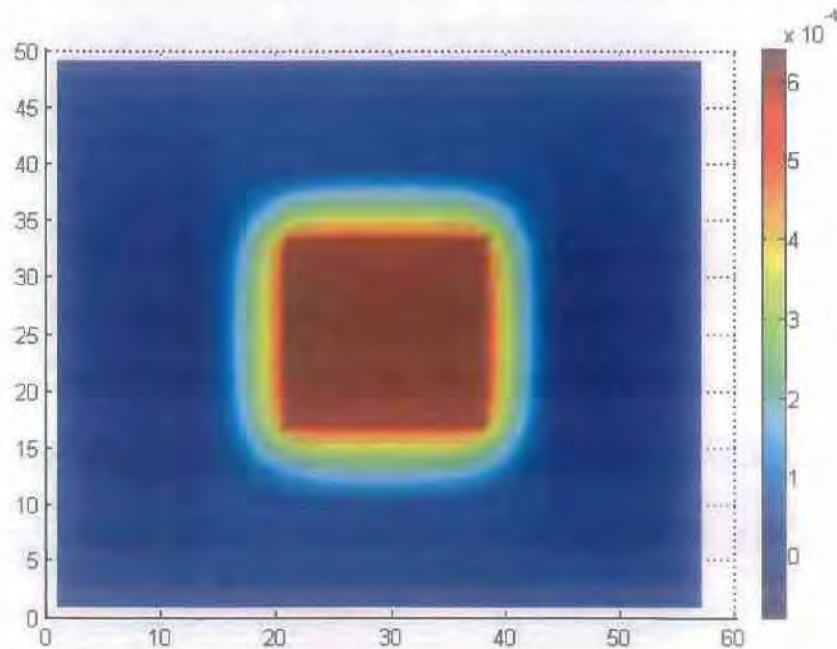
Παρατηρούμε ότι η W_m παρουσιάζει ελάχιστο για $raxos = 0.03$, ενώ η W_e παρουσιάζει μέγιστο για $raxos = 0.015$ και μεγάλη διακύμανση τιμών σε όλη την σειρά αποτελεσμάτων.

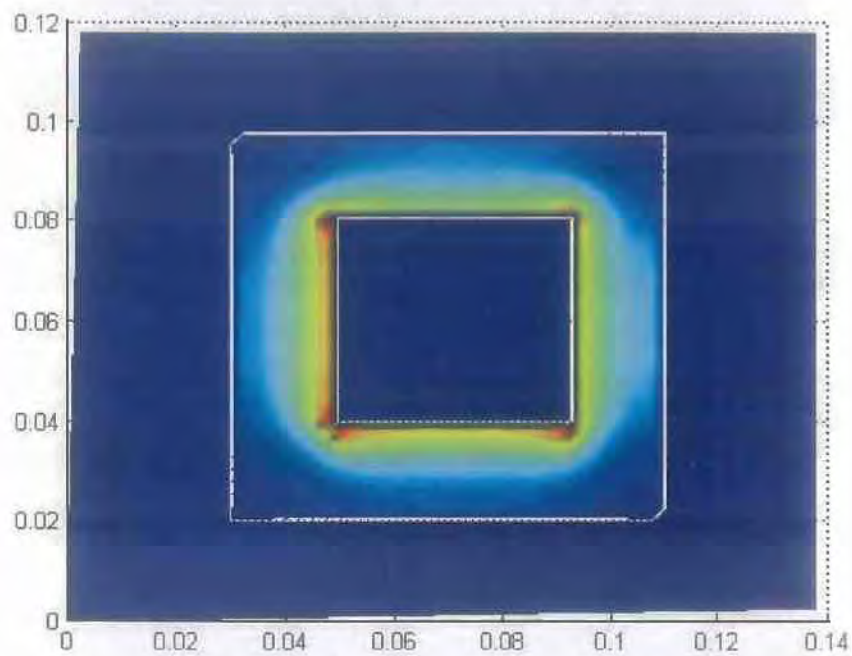
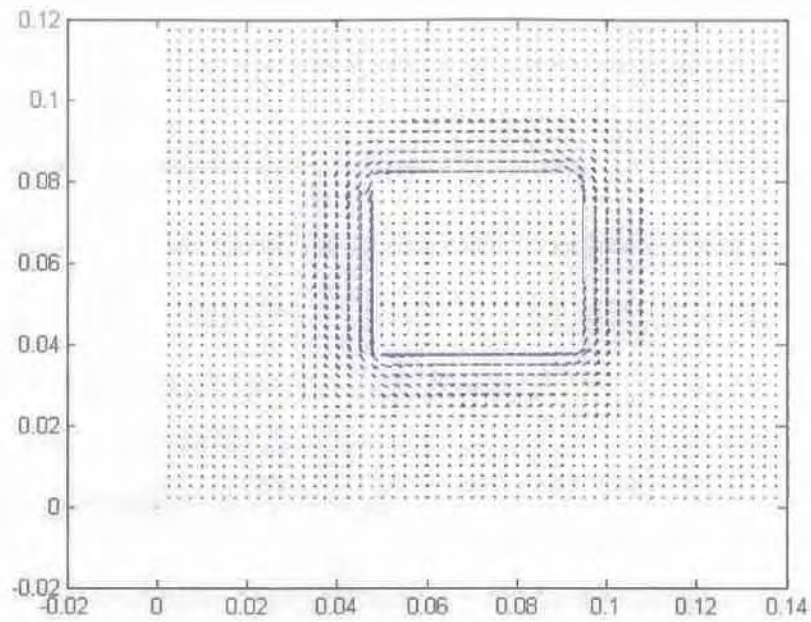
5.2.5 Προσομοίωση της διάταξης όταν το δεύτερο πηνίο λειτουργεί με ρεύμα – σταθερές τιμές συχνότητας διέγερσης f και μαγνητικής διαπερατότητας μ .

Σε αυτήν την περίπτωση, δοκιμάζουμε τον κώδικα για την αρχική πυκνότητα πλέγματος (56 x 48) και $f = 200$ Hz, $\mu_r = 200$, με την διαφορά ότι και το δεύτερο πηνίο λειτουργεί με ρεύμα ίδιας πυκνότητας με το πρώτο. Στον Πίνακα 5.9 παρουσιάζουμε τα δεδομένα.

αριθμός βημάτων		συχνότητα f (σε Hz)	σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r	βάθος διείσδυσης δ (σε m)	διακριτοποίηση	
αριθμός κελιών $N_x \times N_y$	αριθμός χρονικών βημάτων N_t				χώρου (σε m) $\delta x - \delta y$	χρόνου (σε sec x 10^{-8}) δt
56 x 48	200	200	200	0.252	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	200	0.252	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	200	0.252	0.0025	5.5
56 x 48	200	200	200	0.252	0.0025	5.5

Πίνακας 5.9 Τα δεδομένα του προβλήματος όταν το δεύτερο πηνίο λειτουργεί με ρεύμα.





Εικ.5.17 Τα γραφήματα για το διανυσματικό δυναμικό A και την ένταση μαγνητικού πεδίου H , όταν το δεύτερο πηνίο λειτουργεί με ρεύμα. Παρατηρούμε την συμμετρία των γραφημάτων, με την δεξιά πλευρά του μετασχηματιστή να παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά με την αριστερή.

Η ενέργεια μαγνητικού πεδίου είναι $W_m = 0.0089 \text{ [J]}$.

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου $W_e = 3.0376 \text{ [J]}$.

Συμπεράσματα

Από την παρουσίαση, στα πρώτα κεφάλαια, των τεχνικών χαρακτηριστικών - ακρίβεια και ευστάθεια - για την Dufort-Frankel και την σύγκριση με άλλες καθιερωμένες μεθόδους αριθμητικής επίλυσης - Euler, Crank-Nicolson - κατά την εφαρμογή στην εξίσωση

$$\nabla^2 A - \kappa\rho \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

σε περιπτώσεις που συμμετέχει σε προβλήματα υβριδικού τύπου, εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

- Ως μέθοδος FDM χρησιμοποιείται απευθείας στο πεδίο του χρόνου, χωρίς μετάβαση στο πεδίο της συχνότητας, ώστε δεν χρειάζονται πρόσθετοι μαθηματικοί υπολογισμοί για τον έλεγχο της θεωρητικής ορθότητας των αποτελεσμάτων, που θα περιέπλεκαν την επίλυση προβλήματος.
- Συγκριτικά με την επίσης απευθείας μέθοδο Euler, έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ αντί ακρίβειας πρώτης τάξης $O(\Delta x^2, \Delta t)$ της Euler, δηλαδή είναι ελαστικότερη στην εκλογή μικρότερου χρονικού βήματος.
- Συγκριτικά με τις συγγενείς μεθόδους leapfrog και συμβατική FDTD, πλεονεκτεί σε υπολογιστικό χρόνο έναντι της leapfrog και ως προς τα κριτήρια ακρίβειας-ευστάθειας έναντι της συμβατικής FDTD, όπως περιγράφεται στην παράγραφο που συμπληρώνεται στις σελίδες 22-23.
- Εμφανίζεται ιδιαιτερότητα σχετικά με την επιλογή χρονικού βήματος δt από την διαπίστωση ότι μόνο το κριτήριο ευστάθειας $|\beta| < 1$ δεν επαληθεύει πάντα την ανάλυση von Neumann. Το λ και το δt συνδέονται με τη σχέση

$$\beta_x = \frac{\delta t}{\kappa\rho (\delta x)^2} = \lambda_y = \lambda$$

Το χρονικό βήμα δt (σελ.23) πρέπει να εκλεγεί ώστε να εξασφαλίζει ευστάθεια από την ανάλυση von Neumann συμπληρωματικά με το κριτήριο $|\beta| < 1$.

Οι λεπτομέρειες από την εφαρμογή της μεθόδου στα προβλήματα των Κεφαλαίων 4 και 5, εμφανίζονται συνοπτικά στους πίνακες και στις παραγράφους συμπεράσματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- Μ. Ν. Βραχάτης, “Αριθμητική Ανάλυση”, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα 2002.
- Θ. Ι. Κοσμάνης, “Ηλεκτροτεχνία” - Εκπαιδευτικές Σημειώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας, Βόλος 2005.
- S. J. Charman, “Ηλεκτρικές Μηχανές AC-DC”, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2003.
- H. D. Young, “Πανεπιστημιακή Φυσική” – Τόμος Β', Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1994.
- Θ. Σαμαράς, Ι.Ν. Σάχαλος, “Εισαγωγή στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό”, Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 2004.
- Θ. Δ. Τσιμπούκης, “Εισαγωγή στη βασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου”, University Studio Press, Θεσσαλονίκη, 1991.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

- Theodoros I. Kosmanis, Traianos V. Yioultsis, Theodoros D. Tsiboukis, “*Time Domain Analysis of Power Transformers by a Quasi-Static FD-FE Technique*”, Aristotle University of Thessaloniki, Department of Computer & Electrical and Computer Engineering, June 2006.

- M. Peardon, "*Numerical Methods, Course 464A*", Πανεπιστημιακές Διαλέξεις, University of Dublin, School of Mathematics, November 2006.
- R.Schuhmann and T.Weiland, "*Stability and conservation properties of transient field simulation using FIT*", Advances in Radio Science 1, 2003.
- D. Hanselman, B. Littlefield, "*Mastering MATLAB 5: a comprehensive tutorial and reference*", New Jersey, Prentice-Hall, 1998.
- B. Neta, "*Numerical Solution of Partial Differential Equations, MA 3243 Lecture Notes*", Department of Mathematics, p.180-192 and p.202-204, Monterey-California 2003.
- Ming-Chih Lai, Chung-Yin Huang, Te-Sheng Lin, "*A simple Dufort-Frankel type scheme for the Gross-Pitaevskii equation of Bose-Einstein condensates on different geometries*", Taiwan.
- L. Caretto, "*Numerical Analysis of Partial Differential Equations*", California State University, College of Engineering and Computer Science, Mechanical Engineering Department, Engineering Analysis Notes (2005) **and** Computational Fluid Dynamics Solutions (2002), California.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000104084