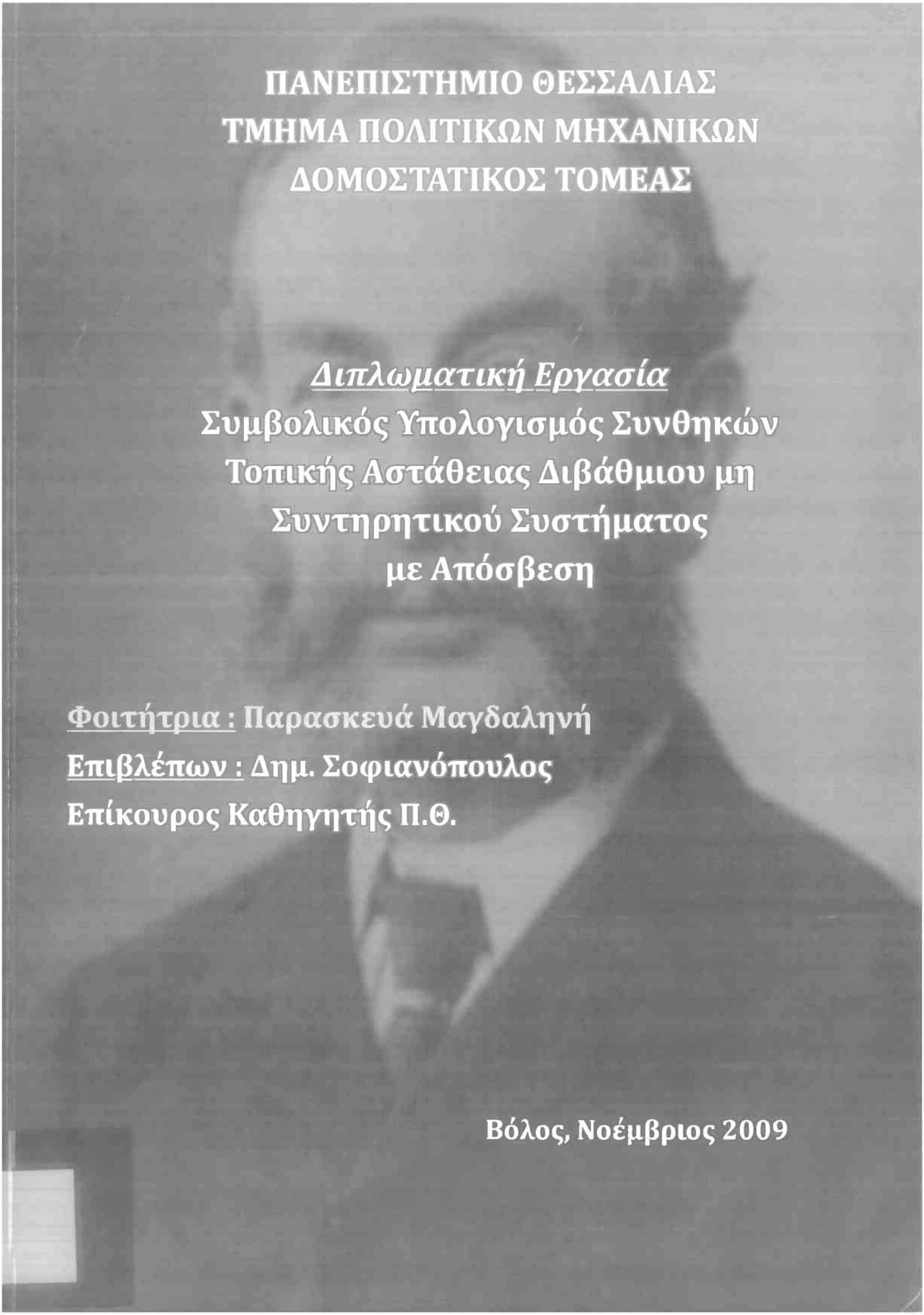


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Διπλωματική Εργασία

Συμβολικός Υπολογισμός Συνθηκών Τοπικής Αστάθειας Διβάθμιου μη Συντηρητικού Συστήματος με Απόσβεση

Φοιτήτρια : Παρασκευά Μαγδαληνή

Επιβλέπων : Δημ. Σοφιανόπουλος

Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

Βόλος, Νοέμβριος 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 **Εισαγωγή –Γενική Μαθηματική Θεώρηση**

1.1 Γενικά 1

1.2 Βασικές Εξισώσεις 3

1.3 Κριτήρια για Ασυμπτωτική Ευστάθεια 4

Κεφάλαιο 2 **Μαθηματική Ανάλυση**

2.1 Εξισώσεις Κίνησης και Χαρακτηριστικό πολυώνυμο 7

2.2 Συμβολικός Υπολογισμός Συνθηκών Ασυμπτ.Αστάθειας 10

2.2.1 $\alpha_2=0$ Γενική περίπτωση 10

2.2.2 Ειδικές περιπτώσεις για $\alpha_2=0$ 12

2.2.3 $\alpha_3=0$ 37

Κεφάλαιο 3 **Αριθμητικά Αποτελέσματα, Σχολιασμός και Συμπεράσματα**

3.1 Γενικές συνθήκες μηδενισμού του α_2 52

3.2 Μηδενισμός του α_2 για θετικά ορισμένο μητρώο απόσβεσης 64

3.3 Μηδενισμός του α_2 για αόριστο μητρώο απόσβεσης (=0) 65

3.4 Γενικές συνθήκες μηδενισμού του α_3 69

3.5 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα 75

Βιβλιογραφία 81

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία πραγματεύεται το συμβολικό υπολογισμό συνθηκών τοπικής αστάθειας ενός διβάθμιου μη συντηρητικού συστήματος με γραμμικά ελατήρια και απόσβεση, και πιο συγκεκριμένα του προσομοιώματος του Ziegler υπό μερικά εφαπτομενική δύναμη κορυφής.

Δίδεται έμφαση στις περιπτώσεις εκείνες συνδυασμού των παραμέτρων που υπεισέρχονται (μάζας, δυσκαμψίας ελατηρίων, απόσβεσης, παραμέτρου μη συντηρητικότητας και φορτίου) για τις οποίες παραβιάζονται τα κριτήρια ασυμπτωτικής ευστάθειας των Liénard – Chipart για τιμές του φορτίου μικρότερες του πρώτου φορτίου λυγισμού.

Οι ευρεθείσες συνθήκες δεν σχετίζονται με οποιοδήποτε είδος στατικής ή δυναμικής διακλάδωσης σημείων ισορροπίας, παρά μόνο με ασταθή υπερβολικά σημεία ισορροπίας του τετριμμένου δρόμου (κατακόρυφου συστήματος).

Μέσω πληθώρας αναλύσεων της δυναμικής του συστήματος με χρήση εξιδεικευμένου ελεύθερου λογισμικού καταδείχθηκε η τοπική αστάθεια του ως άνω δρόμου, σχετιζόμενη είτε με αποκλίνουσα κίνηση (συνεχώς αυξανομένου εύρους) είτε με περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες.

Τέλος, δόθηκαν και ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή – Γενική Μαθηματική Θεώρηση

1.1 Γενικά

Η σπουδαιότητα της απόσβεσης στην τοπική ασυμπτωτική δυναμική ευστάθεια μη συντηρητικών συστημάτων έχει ήδη αναγνωριστεί από αρκετά νωρίς, αρχικά από τον Ziegler (1952), έπειτα από τους Nemat-Nasser και Hermann (1966) και τέλος από τον Crandall (1970). Ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί σε μη συντηρητικά διακεκριμένα συστήματα υπό την επίδραση εφαπτομενικής φόρτισης (αυτόνομα συστήματα), τα οποία μπορούν να χάσουν την ευστάθειά τους είτε μέσω πτερυγισμού (ταλαντώσεων συνεχών αυξανομένων εύρους – δυναμική αστάθεια) είτε μέσω αστάθειας τύπου απόκλισης (στατικής). Αυτό εξαρτάται από την περιοχή μεταβολής της παραμέτρου μη συντηρητικότητας του φορτίου.

Η τοπική δυναμική ευστάθεια τέτοιων αυτόνομων μη συντηρητικών συστημάτων με απόσβεση διέπεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση μορφής μητρώου διανύσματος:

$$\boldsymbol{M}\ddot{q} + \boldsymbol{C}\dot{q} + \boldsymbol{V}q = 0 \qquad (1.1)$$

όπου η τελεία σημαίνει παράγωγο ως προς το χρόνο t και το $q(t)$είναι ένα διάνυσμα *κατάστασης* με συντεταγμένες $q_i(t)(i = 1, \ldots\ldots, \eta)$.

Τα $\boldsymbol{M}$και $\boldsymbol{C}$είναι πραγματικά *συμμετρικά* μητρώα η×η, ενώ το $\boldsymbol{V}$ είναι μη συμμετρικό μητρώο, όταν η παράμετρος μη συντηρητικής φόρτισης η είναι διάφορη του μηδενός (εφόσον για η=*1* αντιστοιχεί σε συντηρητική φόρτιση). Ειδικότερα, το μητρώο $\boldsymbol{M}$ σχετίζεται με την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος, είναι συνδυασμός των συγκεντρωμένων μαζών m_i (i=1, 2,……,η) και είναι πάντοτε θετικά ορισμένο, το μητρώο $\boldsymbol{C}$ αποτελούμενο από στοιχεία των συντελεστών απόσβεσης c_{ij} (i, j =1, 2,…, η) μπορεί να είναι θετικά ορισμένο, θετικά ημι-ορισμένο όπως στη περίπτωση της απόσβεσης λόγω διάβρωσης [Zajac (1964, 1965)] ή αόριστο [Sygulski (1996), Laneville κ.α (1996)] το $\boldsymbol{V}$ είναι ένα γενικευμένο μητρώο δυσκαμψίας με συντελεστές k_{ij} (i, j=1, 2,…η), του οποίου τα στοιχεία είναι γραμμική συνάρτηση του η και μιας αιφνίδιας επιβαλλόμενης εξωτερικής φόρτισης λ σταθερού μεγέθους με *καθορισμένη* διεύθυνση (εφαπτόμενη φόρτιση ορισμένη από το η) και άπειρη διάρκεια, δηλαδή $V_{ij} = V_{ij}(\lambda;\, k_{ij};\, \eta)$. Προφανώς, λόγω αυτού του τύπου φόρτισης ένα σύστημα κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις είναι αυτόνομο. Η στατική αστάθεια (τύπου απόκλισης) ή τα φορτία που προκαλούν λυγισμό $\lambda_i^c(\mathrm{i}=1,\ldots\ldots,\mathrm{\eta})$ λαμβάνονται μέσω του μηδενισμού της ορίζουσας του ασύμμετρου $(\mathrm{\eta}\neq 1)$ μητρώου δυσκαμψίας $\mathrm{V}(\lambda;\mathrm{k_{ij}},\mathrm{\eta})$,

$$|V(\lambda,k_{ij},\eta)|=0 \quad (1.2)$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση καταλήγει σε μια $\eta^{\tau o \upsilon}$ βαθμού αλγεβρική εξίσωση ως προς το λ για δεδομένες τιμές των k_{ij} και του η. Θεωρώντας διακριτές κρίσιμες καταστάσεις, το μητρώο δυσκαμψίας $V(\lambda;k_{ij},\eta)$ είναι: θετικό για $\lambda<\lambda_1^c$, μηδενικό για $\lambda=\lambda_1^c$ και αρνητικό για $\lambda>\lambda_1^c$.

Το σύνορο μεταξύ του πτερυγισμού και αστάθειας λόγω απόκλισης βρίσκεται λύνοντας ως προς λ και η το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων.

$$V=\frac{\vartheta V}{\vartheta \lambda}=0 \quad (1.3)$$

για δοσμένες τιμές των συντελεστών δυσκαμψίας $k_{ij}(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,\ldots\ldots,\mathrm{\eta})$

Ο Α.Ν. Κουνάδης και συνεργάτες του σε δύο πρόσφατες δημοσιεύσεις (2006, 2008) κατέδειξε τις συνθήκες υπό τις οποίες ένα αυτόνομο σύστημα με απόσβεση κάτω από αιφνίδια επιβαλλόμενη φόρτιση σταθερού μεγέθους και διεύθυνσης (συντηρητική φόρτιση), με άπειρη διάρκεια, μπορεί να παρουσιάσει δυναμικές διακλαδικές μορφές αστάθειας πριν την απόκλιση (στατική αστάθεια), δηλαδή για $\lambda<\lambda_1^c$ όταν περιλαμβάνεται απειροελάχιστη απόσβεση. Αυτές οι μορφές δυναμικής διακλάδωσης λαμβάνουν χώρα είτε μέσω *εκφυλισμένων διακλαδώσεων Hopf* (περιοδικές κινήσεις γύρω από κέντρα) ή *κανονική διακλάδωση Hopf* (περιοδικοί έλικες ή πτερυγισμός). Τα απρόσμενα αυτά αποτελέσματα (που συνεπάγονται αποτυχία του κινηματικού κριτηρίου του Ziegler και άλλα φαινόμενα ανωμαλιών) μπορεί να εμφανιστούν για ένα συγκεκριμένο συνδυασμό τιμών της κατανομής της μάζας (κυρίως) και της δυσκαμψίας ενός συστήματος, σε συνδυασμό με θετικά ημι-ορισμένα ή αόριστα μητρώα απόσβεσης.

Το *ερώτημα* που *ανακύπτει* είναι αν υπάρχουν συνδυασμοί των τιμών των παραπάνω αναφερόμενων παραμέτρων, δηλαδή της μάζας και της κατανομής δυσκαμψίας, οι οποίες σε συνδυασμό με θετικά ορισμένα μητρώα απόσβεσης μπορούν να οδηγήσουν σε στατικά ή δυναμικά διακλαδούμενα ασταθή μοντέλα, όταν το σύστημα είναι μη συντηρητικό εξαιτίας μιας εφαρμοζόμενης μερικά εφαπτομενικής θλιπτικής δύναμης, που χαρακτηρίζεται από μια παράμετρο μη συντηρητικότητας η. Μόνο οι περιπτώσεις της αστάθειας λόγω της απόκλισης για κατάλληλες τιμές του η λαμβάνονται υπόψη. Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί κυρίως στην απειροελάχιστη απόσβεση, η οποία μπορεί να έχει σημαντική επίδραση σε ένα σύστημα με αστάθεια λόγω απόκλισης. Ένα τέτοιο *τοπικό,* δυναμικό και ασταθές σύστημα θα διερευνηθεί μέσω του συνόλου των κριτηρίων *ασυμπτωτικής ευστάθειας* Liénard- Chipart [Gantmacher (1959)] τα οποία είναι πιο εύχρηστα από τα ευρέως γνωστά κριτήρια ευστάθειας του Routh-Hurwitz. Η **τοπική** ασυμπτωτική ευστάθεια αυτών των συστημάτων θα εξεταστεί για τιμές του φορτίου διάφορες του μηδενός αλλά μικρότερες του λ_1^c, καθόσον αν το φορτίο ισούται με μηδέν, η μη συντηρητικότητα αναιρείται εξ ορισμού.

1.2 Βασικές Εξισώσεις

Η λύση της εξίσωσης (1.1) μπορεί να αναζητηθεί υπό τη μορφή:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}e^{\rho t} \tag{1.4}$$

όπου ρ είναι γενικά ένας μιγαδικός αριθμός (ιδιοτιμή) και $\boldsymbol{r}$ ένα μιγαδικό διάνυσμα ανεξάρτητο από το χρόνο t.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.1) και (1.4) λαμβάνουμε:

$$(\rho^2\boldsymbol{M} + \rho\boldsymbol{C} + \boldsymbol{V})\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.5}$$

Για δεδομένα μητρώα $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{V}$ οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σχετίζονται με τις Ιακωβιανές ιδιοτιμές $\rho=\rho(\lambda)$, που προκύπτουν μέσω του μηδενισμού της ορίζουσας:

$$|\rho^2\boldsymbol{M} + \rho\boldsymbol{C} + \boldsymbol{V}| = 0 \tag{1.6}$$

το ανάπτυγμα της οποίας δίνει την χαρακτηριστική εξίσωση για ένα n-βαθμού ελευθερίας σύστημα.

$$\rho^{2n} + a_1\rho^{2n-1} + \cdots. + a_{2n-1}\rho + \alpha_{2n} = 0 \tag{1.7}$$

όπου οι πραγματικοί συντελεστές α_i με i=1, 2,...,2n προκύπτουν από τον τύπο του Bôcher [Pipes και Harvill (1970)]. Οι ιδιοτιμές (ρίζες) της εξίσωσης (1.7) ρ_j (j=1, 2,...,2n) είναι γενικά ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών της μορφής $\rho_j = \nu_j \pm \mu_j i$ (όπου ν_j και μ_j πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$) με αντίστοιχα συζυγή μιγαδικά ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{r}_j$ και $\bar{\boldsymbol{r}}_j$ (j=1, 2,...,n). Εφόσον $\rho_j = \rho_j(\lambda)$ ισχύει και $\nu_j = \nu_j(\lambda)$, $\mu_j = \mu_j(\lambda)$, $\boldsymbol{r}_j = \mathbf{r}_j(\lambda)$ και $\bar{r}j = \bar{\boldsymbol{r}}_j(\lambda)$. Έτσι, οι λύσεις της εξίσωσης (1.1) είναι της μορφής

$$\mathrm{A}e^{\nu_j t}\cos\mu_j t\,,\ \mathrm{B}e^{\nu_j t}\sin\mu_j t\,, \qquad (1.8)$$

όπου A και B είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Εάν όλες οι ιδιοτιμές της εξίσωσης (1.7) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, όταν δηλαδή $\nu_j < 0$ για κάθε *j*, τότε οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι φραγμένες και τείνουν προς το μηδέν όταν $t \to \infty$. Σε αυτή τη περίπτωση το αλγεβρικό πολυώνυμο (1.7) ονομάζεται πολυώνυμο του Hurwitz (εφόσον όλες οι ρίζες του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος) και η αρχή των αξόνων – αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος ($\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$)είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

1.3 Κριτήρια για ασυμπτωτική ευστάθεια

Έστω η γενική περίπτωση ενός πολυωνύμου ως προς *z* με πραγματικούς συντελεστές $a_i(i = 0, 1, \ldots\ldots \eta)$:

$$f(z) = a_0 z^{\eta} + a_1 z^{\eta-1} + \cdots a_{\eta-1}z + a_{\eta} = 0\,, \quad a_0 > 0 \qquad (1.9)$$

Για το οποίο θα αναζητήσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες έτσι ώστε όλες οι ρίζες του να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Ως z_k (k=1, 2, ...,m) ορίζονται οι πραγματικές ρίζες και ως $r_j \pm is_j$, (j=1, 2, ...$\frac{(n-m)}{2}$, $i = \sqrt{-1}$) οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης (1.9). Μπορούμε να εξασφαλίσουμε αυτές να βρίσκονται αριστερά του φανταστικού άξονα, δηλαδή:

$$z_k < 0, r_j < 0, (\mathrm{k}=1, 2, \ldots.\ \mathrm{m}; \mathrm{j}=1, 2, \ldots\tfrac{(n-m)}{2}) \qquad (1.10)$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$f(z) = a_0 \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)\prod_{j=1}^{n-m}\left(z^2 - 2rz + r^2{}_j + s^2{}_j\right) \qquad (1.11)$$

Καθόσον λόγω της ανισότητας (1.10) κάθε όρος του τελευταίου μέρους της εξίσωσης (1.11) έχει θετικούς συντελεστές, συμπεραίνουμε ότι και όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης (1.9) είναι επίσης θετικοί. Εντούτοις, αυτό (δηλ. $a_i > 0$ για κάθε i με $a_0 > 0$) είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη ώστε όλες οι ρίζες της εξίσωσης (1.9) να βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο $(Re(z) < 0)$.

Σύμφωνα με το κριτήριο των Routh-Hurwitz για ασυμπτωτική ευστάθεια, δηλαδή για να έχουν όλες οι ρίζες της εξίσωσης (1.9) αρνητικό πραγματικό μέρος, αναγκαίες και ικανές συνθήκες είναι:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \tag{1.12}$$

όπου,

$$\Delta_1 = \alpha_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_\iota \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

με $a_\kappa = 0$ για κ>n.

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι, όταν ισχύουν οι ανωτέρω αναγκαίες συνθήκες $a_\iota > 0$ (για κάθε i), τότε οι ανισότητες (1.12) **δεν** είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, για n=4 με το κριτήριο των Routh-Hurwitz μειώνεται στη μοναδική ανισότητα $\Delta_1 > 0$, για n=5 μειώνεται σε $\Delta_2 > 0$ και $\Delta_4 > 0$, ενώ για n=6 σε $\Delta_3 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Αυτή η περίπτωση απασχόλησε τους Liénard και Chipart [Gantmacher (1970)], οι οποίοι διατύπωσαν το ακόλουθο κομψό κριτήριο για ασυμπτωτική ευστάθεια:

Κριτήριο ευστάθειας των Liénard - Chipart

Για να διαθέτει ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n = 0$, $a_0 > 0$ όλες τις ρίζες του με αρνητικό πραγματικό μέρος θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ***αναγκαίες*** και ***ικανές*** συνθήκες:

Είτε,

$$a_n > 0,\ a_{n-2} > 0, \dots\dots, \text{με} \begin{cases} \text{ή } \Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0, \dots, \\ \text{ή } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \end{cases} \tag{1.14α}$$

είτε,

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \ldots, \text{ με } \begin{cases} \text{ή } \Delta_1 > 0, \ \Delta_3 > 0, \ldots, \\ \text{ή } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \ldots, \end{cases} \tag{1.14β}$$

Το παραπάνω κριτήριο ανακαλύφθηκε εκ νέου από τον Fuller (1968).

Στη παρούσα εργασία η προσοχή μας επικεντρώνεται σε ένα *μη συντηρητικό* με 2 βαθμούς ελευθερίας με απόσβεση σύστημα (εξαιτίας μιας συγκεντρωμένης μερικά εφαπτομενικής θλιπτικής φόρτισης στο ελεύθερο άκρο του), του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

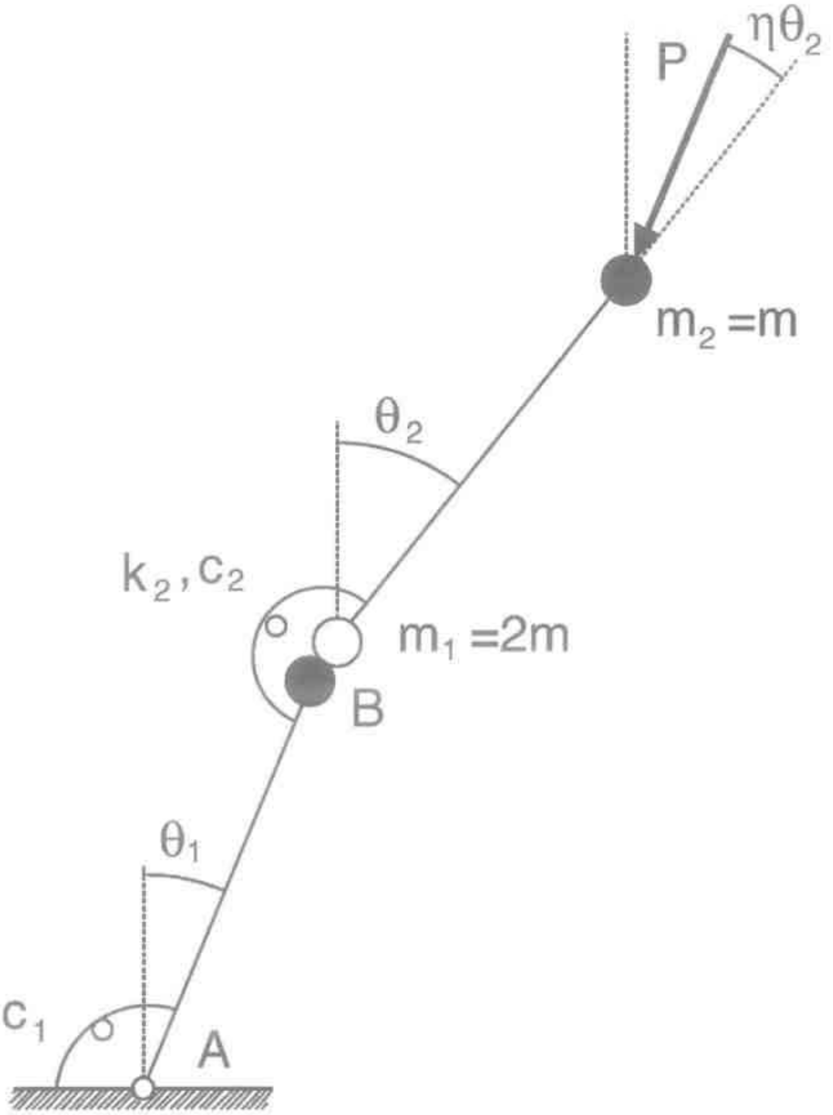
$$\rho^4 + a_1\rho^3 + a_2\rho^2 + a_3\rho + a_4 = 0, \ (a_0 > 0) \tag{1.15}$$

Σύμφωνα με το τελευταίο κριτήριο, όλες οι ρίζες της ως άνω έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος εάν $a_4 > 0$, $a_2 > 0$, $\Delta_1 = a_1 > 0$ και $\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_3) - {a_1}^2a_4 > 0$. Προφανώς, από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι και $a_3 > 0$. Για τον λόγο αυτό, το ότι τα a_1 και a_3 είναι θετικά επιβεβαιώνεται από τις ανωτέρω συνθήκες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Μαθηματική Ανάλυση

2.1 Εξισώσεις Κίνησης και Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Θεωρούμε το διβάθμιο σύστημα ελατηρίων με απόσβεση μορφής ανεστραμμένου διπλού εκκρεμούς (ή αλλιώς προβόλου), το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1, υπό μερικά εφαπτομενική αιφνίδια επιβαλλόμενη θλιπτική φόρτιση στη κορυφή του.



Σχήμα 2.1: Διβάθμιο μη συντηρητικό σύστημα υπό μερικά εφαπτομενική δύναμη

Σε ότι ακολουθεί θα εξετάσουμε εκτενώς την επιρροή της παραβίασης ενός ή περισσοτέρων από τα κριτήρια των Liénard και Chipart στην ασυμπτωτική ευστάθεια του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας αυτού, πριν το χαμηλότερο φορτίο απόκλισης. Τέτοια αυτόνομα συστήματα με απόσβεση με θετικά ορισμένα μητρώα απόσβεσης και ειδικότερα με απειροελάχιστη απόσβεση έχουν διερευνηθεί κατάλληλα. Εάν μια τουλάχιστον από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.15) έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε η αντίστοιχη λύση (εξίσωση 1.8) θα περιέχει μια εκθετικά αυξανόμενη συνάρτηση με το χρόνο και τότε το σύστημα θα καταστεί δυναμικά ασυμπτωτικά ασταθές.

Οι μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης για το διβάθμιο μη συντηρητικό ταλαντωτή του σχήματος 2.1 έχουν ως εξής :

$$(1+m)\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\cos(\theta_1+\theta_2) - \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+c_{11}\dot{\theta}_1 + c_{12}\dot{\theta}_2 + V_1 = 0 \quad (2.1α)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + c_{22}\dot{\theta}_2 + c_{12}\dot{\theta}_1 + V_2 = 0 \quad (2.1β)$$

όπου,

$$V_1 = (1+k)\theta_1 - \theta_2 - \lambda\sin[\theta_1 + (\eta-1)\theta_2] \quad (2.2α)$$

$$V_2 = \theta_2 - \theta_1\lambda\sin\eta\,\theta_2 \quad (2.2β)$$

και

η: παράμετρος μη συντηρητικότητας του φορτίου,

$$m = {}^{m_1}/_{m_2}, \quad k = {}^{k_1}/_{k_2}, \quad \lambda = {}^{Pl}/_{k_2}$$

Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων (2.1) μέσω του μετασχηματισμού $\Theta = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = e^{\rho t}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} = e^{\rho t}\boldsymbol{\varphi}$

δίνει:

$$(\rho^2\boldsymbol{M} + \rho\boldsymbol{C} + \boldsymbol{V})\boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (2.3)$$

όπου,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{12} & m_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+m & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad (2.4α)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix} \quad (2.4β)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12}\\ V_{12} & V_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1-\lambda & -1-\lambda(\eta-1)\\ -1 & 1-\lambda\eta\end{bmatrix} \quad (2.4γ)$$

Η εξίσωση στατικού λυγισμού (απόκλισης), $detV = 0$ οδηγεί σε:

$$\eta\lambda^2 - \eta(k+2)\lambda + k = 0 \tag{2.5}$$

της οποίας η ρίζα με την μικρότερη αλγεβρική τιμή δίνει το πρώτο φορτίο λυγισμού λ_1^c ίσο με :

$$\lambda_1^c = 0.5\left[k + 2 - \sqrt{(k+2)^2 - 4\frac{k}{\eta}}\right], (\eta \neq 0) \tag{2.6}$$

Για πραγματικές ρίζες του η, η διακρίνουσα $\mathfrak{D}$ της εξίσωσης (2.5) πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, οπότε θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$n \geq {}^{4k}\!/_{(k+2)^2} \tag{2.7}$$

Με χρήση συμβολικών μαθηματικών (Mathematica) οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται ίσοι με:

$$a_1 = \frac{1}{m}[(1+m)c_{22} + c_{11} - 2c_{12}] = \frac{1}{m}(c_{11} - 2c_{12} + c_{22} + c_{22}m) \tag{2.8α}$$

$$a_2 = \frac{1}{m}[(1+m)(1-\lambda\eta) + 3 + k - \lambda + \lambda(\eta - 1) + |c|] =$$

$$\frac{1}{m}[4 - c_{12}^2 + c_{11}c_{22} + k + m - (2 + m\eta)\lambda] \tag{2.8β}$$

$$a_3 = \frac{1}{m}[c_{11}(1-\lambda\eta) + c_{22}(1 + k - \lambda) + [2 + \lambda(\eta - 1)]c_{12}] =$$

$$\frac{1}{m}[c_{11} + c_{12} + c_{22} + c_{22}k - (c_{12} + c_{22} + c_{11}\eta - c_{12}\eta)\lambda] \tag{2.8γ}$$

$$a_4 = \frac{1}{m}[\eta\lambda^2 - \eta(k+2)\lambda + k] =$$

$$\frac{1}{m}[k - k\eta\lambda + \eta(-2+\lambda)] = \frac{1}{m}detV \tag{2.8δ}$$

όπου $|c| = detC = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$

Η περιοχή ύπαρξης γειτονικών ισορροπιών (περιοχή αστάθειας τύπου απόκλισης) σχετίζεται με στατικές διακλαδώσεις, με δύο ξεχωριστά κρίσιμα φορτία, που λαμβάνονται από τη σχέση $a_4 = 0$ ή την εξίσωση (2.5). Το σύνορο μεταξύ των περιοχών ύπαρξης και μη ύπαρξης γειτονικών ισορροπιών ορίζεται από:

$$a_4 = \frac{da_4}{d\lambda} = 0 \tag{2.9}$$

το οποίο λόγω της σχέσης (2.8δ) δίνει

$$\eta_0 = \frac{4k}{(k+2)^2},\ \lambda_0 = \frac{k+2}{2} \tag{2.10}$$

Πρόκειται περί ενός διπλού (σύνθετου) κρίσιμου σημείου, που σχετίζεται με διπλή ρίζα της εξίσωσης (2.5) ως προς λ.

2.2 Συμβολικός Υπολογισμός Συνθηκών Ασυμπτ. Αστάθειας

Ενδιαφερόμαστε για όλες τις συνθήκες εκτός αυτής που σχετίζεται με την Δ_3 (που μπορεί κάλλιστα να αποτελέσει πεδίο για περαιτέρω έρευνα) και αναζητούμε συνδυασμό παραμέτρων, ώστε να παραβιάζονται οι συνθήκες $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ για την περιοχή $k>0$, $m>0$, $\lambda<\lambda_1^c$, $\lambda>0$ και $\eta \geq \eta_0$.

2.2.1 $\alpha_2 = 0$ - Γενική περίπτωση

Χρησιμοποιώντας την εντολή Reduce από το πρόγραμμα του Mathematica για τις παρακάτω συνθήκες

$$\alpha_2 = 0, c_{11} > 0, c_{22} \neq 0, k > 0, m > 0, \lambda < \lambda_1^c, \eta \geq \eta_0 \tag{2.11}$$

βρίσκουμε:

$$\Big(\Big(0 < k \leq 2 \wedge 0 < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda} \wedge$$

$$\Bigg(\Bigg(c_{12} < -\sqrt{k-2\lambda+4} \wedge \Bigg(\Bigg(0 < m < \frac{-c_{12}^2 + k - 2\lambda + 4}{\eta\lambda - 1} \wedge c_{22} > 0\Bigg) \vee$$

$$\Big(m > \frac{-c_{12}^2 + k - 2\lambda + 4}{\eta\lambda - 1} \wedge c_{22} < 0\Big)\Big)\Big) \vee \Big(-\sqrt{k-2\lambda+4} < c_{12} < \sqrt{k-2\lambda+4} \wedge m > 0 \wedge$$

$$c_{22} < 0\Big)\Big(c_{12} > \sqrt{k-2\lambda+4} \wedge$$

$$\Big(\Big(0 < m < \frac{-c_{12}^2 + k - 2\lambda + 4}{\eta\lambda - 1} \wedge c_{22} > 0\Big) \vee \Big(m > \frac{-c_{12}^2 + k - 2\lambda + 4}{\eta\lambda - 1} \wedge c_{22} < 0\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \vee$$

$$(k>2\wedge((0<\lambda<2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$\left(\left(0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0\right)\vee\left(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0\right)\right))\vee$$

$$\left(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}\leq\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}<0\right)\vee\left(c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge\right.$$

$$((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)\vee(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)))))\vee$$

$$(2<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge((\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)\vee(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)))\vee$$

$$(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}\leq\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}<0)\vee(c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)\vee(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)))))\vee$$

$$(\eta=\frac{1}{\lambda}\wedge((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)\vee(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}<\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$m>0\wedge c_{22}<0)\vee(c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)))\vee(\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge$$

$$((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)\vee(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}<\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)\vee(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)))\vee$$

$$(c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)))))\vee(\lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge$$

$$((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)\vee(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}<\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge$$

$$((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)\vee(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)))\vee$$

$$c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)))\vee\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge((c_{12}<-\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0)\vee$$
$$(-\sqrt{k-2\lambda+4}<c_{12}<\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge((0<m<\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}<0)\vee$$
$$(m>\frac{-c_{12}^2+k-2\lambda+4}{\eta\lambda-1}\wedge c_{22}>0)))\vee(c_{12}>\sqrt{k-2\lambda+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0))))))$$
$$\wedge c_{11}=-\frac{-c_{12}^2+k-m\eta\lambda+m-2\lambda+4}{c_{22}}$$

(2.12)

2.2.2 ειδικές περιπτώσεις για $\alpha_2=0$

Στην συνέχεια γίνεται διαχωρισμός ως προς την τιμή της ορίζουσας του μητρώου απόσβεσης c_c, ως εξής:

2.2.2.1 $c_c>0$

Στη περίπτωση αυτή αναζητούμε

$$\alpha_2=0, c_{11}>0, c_c>0, c_{22}\neq 0, k>0, m>0, \lambda<\lambda_{c1}, \lambda>0, \eta\geq n_0 \quad (2.13)$$

και λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$k>2\wedge\Big((2<\lambda\leq\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge m>\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge c_{22}>0\wedge$$
$$\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee(\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$
$$((\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}<m\leq\frac{-k^3+2k^2\lambda-8k^2+8k\lambda-20k+8\lambda-16}{k^2-4k\lambda+4k+4}\wedge$$
$$c_{22}>0\wedge\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$
$$m>\frac{-k^3+2k^2\lambda-8k^2+8k\lambda-20k+8\lambda-16}{k^2-4k\lambda+4k+4}\wedge c_{22}>0\wedge$$
$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}))))\wedge c_{11}=-\frac{-c_{12}^2+k-m\eta\lambda+m-2\lambda+4}{c_{22}}$$

(2.14)

2.2.2.2 $c_c=0$

Εδώ αναζητούμε

$$\alpha_2 = 0, c_{11} > 0, c_c = 0, c_{22} \neq 0, k > 0, m > 0, \lambda < \lambda_{c1}, \lambda > 0, \eta \geq n_0 \tag{2.15}$$

με αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
&\lambda > 2 \wedge \frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{2\lambda-2}{\lambda^2} \wedge \\
&2\sqrt{-\frac{2\eta-1}{\eta^2(\eta\lambda-1)^2}} - \frac{2(\eta\lambda-\eta-1)}{\eta(\eta\lambda-1)} \leq m < \frac{-\eta\lambda^2+2\eta\lambda+2\lambda-4}{\eta^2\lambda^2-2\eta\lambda+1} \wedge \\
&c_{22} > 0 \wedge (c_{12} < 0 \vee c_{12} > 0) \wedge k = m\eta\lambda - m + 2\lambda - 4 \wedge \\
&c_{11} = -\frac{c_{12}^2 + k - m\eta\lambda + m - 2\lambda + 4}{c_{22}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2.2.3 $c_c<0$

Στην υποπερίπτωση αυτή θα πρέπει να ισχύουν

$$\alpha_2 = 0, c_{11} > 0, c_c < 0, c_{22} \neq 0, k > 0, m > 0, \lambda < \lambda_{c1}, \lambda > 0, \eta \geq n_0 \tag{2.17}$$

με τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$((0 < k < 2(\sqrt{2}-1) \wedge 0 < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge m > 0$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}) \vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} <$$

$$c_{12} < -\sqrt{\frac{k^2 3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} \wedge$$

$$\left(\left(\ c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}\ \right)\vee\right.$$

$$\left(\ c_{22} > 0 \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}\ \right)))\vee$$

$$\left(\ -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \leq c_{12} \leq\right.$$

$$\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}\ )\vee$$

$$\left(\ \sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <\right.$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$\left(\left(\ c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}\ \right)\vee\right.$$

$$\left(\ c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}\ \right)))\vee$$

$$\left(\ c_{12} = \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge\right.$$

$$\left(\ c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}\ \right)\vee$$

$$\left(\ c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge\right.$$

$$\left(\ c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}\ \right)))\vee$$

$$\left(\ k = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) \wedge 0 < \lambda < \frac{1}{2}\left(2\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\right) m > 0 \wedge \left(\left(\ c_{12} <\right.\right.\right.$$

$$-\frac{\sqrt{-8\left(\sqrt{2}-1\right)m\lambda + 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 m + 8\left(\sqrt{2}-1\right)m + 4m - 8\left(\sqrt{2}-1\right)^2\lambda - 16\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda - 8\lambda + 8\left(\sqrt{2}-1\right)^3 + 32\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 40\left(\sqrt{2}-1\right) + 16}}{\sqrt{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 8\left(\sqrt{2}-1\right) + 4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{-\lambda^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda+2\lambda}) \vee (\; c_{12} =$$

$$-\frac{\sqrt{-8\left(\sqrt{2}-1\right)m\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 m+8\left(\sqrt{2}-1\right)m+4m-8\left(\sqrt{2}-1\right)^2\lambda-16\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+8\left(\sqrt{2}-1\right)^3+32\left(\sqrt{2}-1\right)^2+40\left(\sqrt{2}-1\right)+16}}{\sqrt{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{-\lambda^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda+2\lambda}) \vee ($$

$$-\frac{\sqrt{-8\left(\sqrt{2}-1\right)m\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 m+8\left(\sqrt{2}-1\right)m+4m-8\left(\sqrt{2}-1\right)^2\lambda-16\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+8\left(\sqrt{2}-1\right)^3+32\left(\sqrt{2}-1\right)^2+40\left(\sqrt{2}-1\right)+16}}{\sqrt{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4}}$$

$$< c_{12} < -\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}} \wedge$$

$$((\; c_{22} < 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(\; c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+4}{m\lambda} < \eta < \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{-\lambda^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda+2\lambda}))) \vee$$

$$(\; c_{12} = -\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}} \wedge$$

$$c_{22} < 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+4}{m\lambda}) \vee$$

$$-\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{-\lambda^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda+2\lambda}) \vee$$

$$(\; c_{12} = \sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2+12(\sqrt{2}-1)+8}{-\lambda+2(\sqrt{2}-1)+2}} < c_{12} <$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$((c_{22}<0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} \le \eta < \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2(\sqrt{2}-1)+4}{m\lambda})\vee$$

$$c_{22}>0 \wedge \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2(\sqrt{2}-1)+4}{m\lambda} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})))\vee(c_{12}=$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22}<0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})\vee(c_{12}>$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22}>0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} \le \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})))\vee$$

$$(2(\sqrt{2}-1)<k<2 \wedge 0<\lambda<\frac{k+2}{2} \wedge m>0 \wedge$$

$$((c_{12}<-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22}>0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12}=-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22}>0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} < c_{12} <$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} \le c_{12} \le \sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}$$

$$c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$c_{12} = \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$(k > 2 \wedge ((0 < \lambda < 2 \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \le \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} < c_{12} <$$

$$-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \le c_{12} \le \sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}}$$

$$\wedge c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee$$

$$c_{12} = \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee$$

$$(2 < \frac{\lambda k^2 + 4k + 4}{4k} \wedge ((0 < m < \frac{k^2 - 3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}) \vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} <$$

$$c_{12} < -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}))) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \leq c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}) \vee (\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}) \vee (c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}))) \vee$$

$$(c_{12} = \sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee(m = \frac{k \;\; -3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} \wedge$$

$$(c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\wedge$$

$$(c_{12} = \sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} < c_{12} < 0$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \le \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee(c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee(c_{12} = 0 \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \le \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\wedge$$

$$(0 < c_{12} < \sqrt{\frac{k^3 + k^2m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \le \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee(c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee$$

$$(c_{12} = \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee(m > \frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} < c_{12} < 0$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee(c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})))\vee(c_{12} = 0 \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee(0 < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee(c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})))$$

$$c_{12}=\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\;)$$

$$(\;c_{12}>\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\;)))))\vee\left(\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge\right.$$

$$((\;0<m<\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$((\;c_{12}<-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\;)\vee$$

$$(\;c_{12}<-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\;)\vee$$

$$-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<c_{12}<$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge$$

$$((\;c_{22}<0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\;)\vee(\;c_{22}>0\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\;)))\vee$$

$$(\;-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\leq c_{12}\leq$$

$$\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}<0\wedge$$

$$c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \le \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} < c_{12} <$$

$$-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee(c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$c_{12} = \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$(m = \frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} < c_{12} < 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee (c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}))) \vee (c_{12} = 0 \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}) \vee$$

$$(0 < c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee (c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}))) \vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}) \vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}))) \vee$$

$$(\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2} < \frac{-k^3+2k^2\lambda-8k^2+8k\lambda-20k+8\lambda-16}{k^2-4k\lambda+4k+4} \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(c_{12} = -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} < c_{12} < 0$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee (c_{22} > 0 \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}))) \vee c_{12} = 0 \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(0 < c_{12} < \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee (c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}) \vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}))))))) \vee$$

$$c_{11} = -\frac{-c_{12}^2+k+m\eta\lambda+m-2\lambda+4}{c_{22}} \qquad (2.18)$$

Λόγω της πολύ μεγάλης λύσης που προέκυψε, κρίνεται σκόπιμο ο διαχωρισμός των αποτελεσμάτων σε σχέση με το πρόσημο της παραμέτρου c_{22} δηλαδή, αν αυτή είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη του μηδενός.

2.2.2.3.α $c_{12}<0$ και $c_{22}>0$

Με τη βοήθεια της εντολής Reduce οδηγούμαστε στην παρακάτω λύση

$$((0 < k < 2(\sqrt{2}-1) \wedge 0 < \lambda \frac{k+2}{2} \wedge m > 0$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\ )\vee$$

$$(\ -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \leq c_{12} <$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\ )\vee$$

$$(\ \sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} < c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\ )\vee$$

$$(\ c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\ )))\vee$$

$$((\ k = 2(\sqrt{2}-1) \wedge 0 < \lambda < \frac{1}{2}(2(\sqrt{2}-1)+2) \wedge m > 0((\ c_{12} <$$

$$-\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} \leq \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda}\ )\vee(c_{12} =$$

$$-\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda}\ )\vee$$

$$(-\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$< c_{12} < -\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2+12(\sqrt{2}-1)+8}{-\lambda+2(\sqrt{2}-1)+2}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2(\sqrt{2}-1)+4}{m\lambda} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})\vee$$

$$\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2+12(\sqrt{2}-1)+8}{-\lambda+2(\sqrt{2}-1)+2}} < c_{12} <$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2(\sqrt{2}-1)+4}{m\lambda} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})\vee c_{12} =$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} < \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})\vee c_{12} >$$

$$\frac{\sqrt{-8(\sqrt{2}-1)m\lambda+4(\sqrt{2}-1)^2m+8(\sqrt{2}-1)m+4m-8(\sqrt{2}-1)^2\lambda-16(\sqrt{2}-1)\lambda-8\lambda+8(\sqrt{2}-1)^3+32(\sqrt{2}-1)^2+40(\sqrt{2}-1)+16}}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{8(\sqrt{2}-1)}{4(\sqrt{2}-1)^2+8(\sqrt{2}-1)+4} \le \eta < \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-\lambda^2+2(\sqrt{2}-1)\lambda+2\lambda})))\vee$$

$$(2(\sqrt{2}-1) < k < 2 \wedge 0 < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \le$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}<c_{12}<$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12}>\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee(k>2\wedge((0<\lambda\leq 2\wedge$$

$$((c_{12}<-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\leq c_{12}<$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}>0\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}<c_{12}\leq$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge c_{22}>0\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$c_{12}>\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee(\ 2 < \lambda \leq \frac{k^2+4k+4}{4k} \wedge$$

$$((\ 0 < m < \frac{k^2 - 3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} \wedge$$

$$((\ c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\wedge$$

$$(\ -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \leq c_{12} <$$

$$-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(\ \sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(\ c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\wedge(\ m = \frac{k^2 - 3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} \wedge$$

$$((\ c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\wedge$$

$$(\ -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2+4k+4}} \leq c_{12} < 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee(\ 0<c_{12}\leq$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge c_{22}>0\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(\ c_{12}>\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\wedge$$

$$(\ m=\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$((\ c_{12}<-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\wedge$$

$$(\ -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<c_{12}<0\wedge$$

$$\wedge c_{22}>0\wedge\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})\vee 0<c_{12}<$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge c_{22}>0\wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}<\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})$$

$$(\ c_{12}>\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}>0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda}))))\wedge(\ \frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$

$$(\ 0<m<\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \leq c_{12} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k+m-2\lambda+4}{m\lambda})$$

$$(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}} < c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge c_{22} > 0 \wedge$$

$$\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})))\vee$$

$$(m = \frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2} \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} < c_{12} < 0$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda})\vee$$

$$(0 < c_{12} \leq \sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}} \wedge$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda})))\vee$$

$$(\frac{k^2 - 3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} < m < \frac{-k^3 + 2k^2\lambda - 8k\lambda - 20k + 8\lambda - 16}{k^2 - 4k\lambda + 4k + 4} \wedge$$

$$((c_{12} < -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge$$

$$c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \leq c_{12} < 0$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee$$

$$(0 < c_{12} \leq \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} < \eta < \frac{k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})\vee$$

$$(c_{12} > \sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}}$$

$$\wedge c_{22} > 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda})))))))\wedge$$

$$c_{11} = -\frac{-c_{12}^2 + k - m\eta\lambda + m - 2\lambda + 4}{c_{22}} \qquad (2.19)$$

2.2.2.3.β $c_{12}<0$ και $c_{22}<0$

Με τη βοήθεια του προγράμματος οδηγούμαστε στην παρακάτω λύση

$$((0 < k < 2(\sqrt{2} - 1) \wedge 0 < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge m > 0 \wedge$$

$$\left(\left(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<c_{12}<\right.\right.$$

$$-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}<0\wedge$$

$$\left.\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\right)\vee$$

$$\left(-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\leq c_{12}<\right.$$

$$\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}<0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<$$

$$\left.\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\right)\vee\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}<c_{12}<$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge c_{22}<0\wedge$$

$$\left.\left.\left.\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\right)\right)\right)\vee$$

$$\left(k=2\left(\sqrt{2}-1\right)\wedge 0<\lambda<\frac{1}{2}\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)+2\right)\wedge m>0\wedge\right.$$

$$-\frac{\sqrt{\begin{array}{l}-8\left(\sqrt{2}-1\right)m\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2m+8\left(\sqrt{2}-1\right)m+4m-8\left(\sqrt{2}-1\right)^2\lambda-16\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda\\-8\lambda+8\left(\sqrt{2}-1\right)^3+32\left(\sqrt{2}-1\right)^2+40\left(\sqrt{2}-1\right)+16\end{array}}}{\sqrt{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4}}<c_{12}\leq$$

$$\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}}\wedge c_{22}<0\wedge$$

$$\left.\frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+8\left(\sqrt{2}-1\right)+4}\leq\eta<\frac{-c_{12}^2+m-2\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+4}{m\lambda}\right)\vee$$

$$-\sqrt{\frac{-m\lambda+2m+2\lambda^2-6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda-8\lambda+4\left(\sqrt{2}-1\right)^2+12\left(\sqrt{2}-1\right)+8}{-\lambda+2\left(\sqrt{2}-1\right)+2}}<$$

$$c_{12} < \sqrt{\frac{-m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda - 8\lambda + 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 12\left(\sqrt{2}-1\right) + 8}{-\lambda + 2\left(\sqrt{2}-1\right) + 2}} \wedge$$

$$c_{22} < 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 8\left(\sqrt{2}-1\right) + 4} \leq \eta < \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{-\lambda^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda + 2\lambda} \;)\vee$$

$$(\; \sqrt{\frac{-m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 6\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda - 8\lambda + 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 12\left(\sqrt{2}-1\right) + 8}{-\lambda + 2\left(\sqrt{2}-1\right) + 2}} < c_{12} <$$

$$\frac{\sqrt{\begin{array}{l}-8\left(\sqrt{2}-1\right)m\lambda + 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 m + 8\left(\sqrt{2}-1\right)m + 4m - 8\left(\sqrt{2}-1\right)^2\lambda - 16\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda \\ -8\lambda + 8\left(\sqrt{2}-1\right)^3 + 32\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 40\left(\sqrt{2}-1\right) + 16\end{array}}}{\sqrt{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 8\left(\sqrt{2}-1\right) + 4}} \wedge$$

$$c_{22} < 0 \wedge \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 8\left(\sqrt{2}-1\right) + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + m - 2\lambda + 2\left(\sqrt{2}-1\right) + 4}{m\lambda} \;)))\vee$$

$$(\; 2\left(\sqrt{2}-1\right) < k \leq 2 \wedge 0 < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((\; -\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} <$$

$$c_{12} < -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} \;)\vee$$

$$(\; -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \leq c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta <$$

$$\frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda} \;)\vee \sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda} \;)))\vee$$

$$(k > 2 \wedge ((0 < \lambda < 2 \wedge m > 0 \wedge$$

$$((-\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} <$$

$$c_{12} < -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \leq c_{12} \leq$$

$$\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge \frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta <$$

$$\frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}) \wedge (\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}))) \vee$$

$$(2 < \lambda \leq \frac{k^2 + 4k + 4}{4k} \wedge ((0 < m < \frac{k^2 - 3k\lambda + 6k + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{\lambda - 2} \wedge$$

$$((-\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} <$$

$$c_{12} < -\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} < \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}) \vee$$

$$(-\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda}) \vee$$

$$(\sqrt{\frac{k^2 - 3k\lambda + 6\lambda - m\lambda + 2m + 2\lambda^2 - 8\lambda + 8}{k - \lambda + 2}} < c_{12} <$$

$$\sqrt{\frac{k^3 + k^2 m - 2k^2\lambda + 8k^2 - 4km\lambda + 4km - 8k\lambda + 20k + 4m - 8\lambda + 16}{k^2 + 4k + 4}} \wedge c_{22} < 0 \wedge$$

$$\frac{4k}{k^2 + 4k + 4} \leq \eta < \frac{-c_{12}^2 + k + m - 2\lambda + 4}{m\lambda}))) \vee$$

$$m=\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$\Big(\Big(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<c_{12}<0$$

$$\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\Big)\vee\Big(c_{12}=0\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\Big)\vee$$

$$\Big(0<c_{12}<\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}<0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\Big)\Big)\Big)\vee$$

$$\Big(m>\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge$$

$$\Big(\Big(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<c_{12}<$$

$$\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge$$

$$c_{22}<0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\Big)\Big)\Big)\vee$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge\left(\left(0<m<\frac{k^2-3k\lambda+6k+2\lambda^2-8\lambda+8}{\lambda-2}\wedge\right.\right.\right.\\
&\left(\left(-\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}<\right.\right.\\
&c_{12}<-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}<0\wedge\\
&\left.\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\right)\vee\\
&\left(-\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\le c_{12}\le\right.\\
&\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}\wedge c_{22}<0\wedge\\
&\left.\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\right)\vee\\
&\left(\sqrt{\frac{k^2-3k\lambda+6\lambda-m\lambda+2m+2\lambda^2-8\lambda+8}{k-\lambda+2}}<c_{12}<\right.\\
&\sqrt{\frac{k^3+k^2m-2k^2\lambda+8k^2-4km\lambda+4km-8k\lambda+20k+4m-8\lambda+16}{k^2+4k+4}}\wedge\\
&\left.\left.\left.c_{22}<0\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{-c_{12}^2+k+m-2\lambda+4}{m\lambda}\right)\right)\right)\vee
\end{aligned}
$$

(2.20)

Παρόλο που υπήρξε ο παραπάνω διαχωρισμός οι λύσεις που προέκυψαν είναι εκ νέου μεγάλης έκτασης. Για το λόγο αυτό δεν κρίνεται απαραίτητο η εξ' ολοκλήρου επεξεργασία τους, πλην όμως θα παρατεθούν κάποια ενδεικτικά σχετικά παραδείγματα.

2.2.3. $\alpha_3=0$

Κατ' αρχήν μέσω συμβολικών υπολογισμών διαπιστώνεται άμεσα ότι η συνθήκη αυτή δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί για θετικά ορισμένο μητρώο απόσβεσης, και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την εντολή Reduce από το πρόγραμμα του Mathematica για τις παρακάτω συνθήκες

$$\alpha_3=0, c_{11}>0, c_{22}\neq 0, k>0, m>0, \lambda<\lambda_1^c, \eta\geq\eta_0 \qquad (2.21)$$

προκύπτει η ακόλουθη λύση:

$$\Big(\Big(\Big(\ 2<k<2\big(2+\sqrt{3}\big)\wedge 2<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{11}>0\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{11}>0\ \Big)\Big)\Big)\vee k=2\big(2+\sqrt{3}\big)\wedge\Big(\ 2<\lambda<3\wedge\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{11}>0\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{11}>0\ \Big)\Big)\Big)\vee\Big(\ 3<\lambda\le\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{11}>0\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{11}>0\ \Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\wedge\eta=\frac{1}{\lambda}\wedge c_{12}=\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee\Big(\Big(\Big(\ 0<k\le 2\wedge$$

$$0<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge$$

$$c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\vee$$

$$\Big(\ 2<k<Root\big[\lozenge1^3-\lozenge1^2-4\lozenge1-4,1\big]\wedge\Big(\Big(\ 0<\lambda<2\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\vee\Big(\ 2<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$\Big(\Big(\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\vee\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\vee\Big(\ \lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\vee\Big(\ \frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big(\ k=Root\big[\lozenge1^3-\lozenge1^2-4\lozenge1-4,1\big]\wedge\Big(\Big(\ 0<\lambda<2\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\vee$$

$$\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ \Big)\Big)\Big)\vee\Big(\ \lambda=2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{1}{2}\wedge m>0\wedge$$

$$\Big(\Big(\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-c_{22}k}{2\eta}\ \Big)\vee\Big(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-c_{22}k}{2\eta}\ \Big)\Big)\Big)\vee$$

$$(2<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$((\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))$$

$$\vee(\lambda-\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee(\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))$$

$$(Root[\Diamond1^3-\Diamond1^2-4\Diamond1-4,1]<k<2(1+\sqrt{2})\wedge((0<\lambda<2\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})$$

$$\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee(2<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$((\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})$$

$$\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))\vee(\lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$((\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k1}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee(\frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})$$

$$\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))\vee$$

$$\left(k = 2\left(1+\sqrt{2}\right) \wedge \left(\left(0 < \lambda < 2 \wedge \right.\right.\right.$$

$$\frac{8\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4} \leq \eta < \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\lambda^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)\lambda+2\lambda} \wedge m > 0 \wedge$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)\right.$$

$$\vee \left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)))\vee$$

$$\left(\lambda = 2 \wedge \frac{8\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4} < \eta < \frac{1}{2} \wedge m > 0 \wedge \right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22}}{2\eta} \right)\vee\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22}}{2\eta} \right)))\vee$$

$$\left(2 < \lambda < \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4}{8\left(1+\sqrt{2}\right)} \wedge \left(\left(\frac{8\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4} < \eta < \frac{1}{\lambda} \wedge \right.\right.\right.$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)\vee\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)))\vee$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\lambda^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)\lambda+2\lambda} \wedge m > 0 \wedge \right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)\right.$$

$$\vee \left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)))))\vee \left(\lambda - \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4}{8\left(1+\sqrt{2}\right)} \right.$$

$$\wedge \frac{8\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4} < \eta < \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{-\lambda^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)\lambda+2\lambda} \wedge$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)\right.$$

$$\vee \left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda - 2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22} - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2} \right)))\vee$$

$$\left(\frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4}{8\left(1+\sqrt{2}\right)} < \lambda < \frac{1}{2}\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)+2\right) \right.$$

$$\frac{8\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)^2+8\left(1+\sqrt{2}\right)+4}<\eta<\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\lambda^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)\lambda+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )$$

$$\vee(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2\left(1+\sqrt{2}\right)c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ 2\left(1+\sqrt{2}<k<2\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\wedge$$

$$0<\lambda\leq 2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))(\ \lambda=\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge$$

$$((\ \eta=\frac{4k}{k^2+4k+4}\wedge m>0\wedge c_{22}>0\ )\vee$$

$$(\ \frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee$$

$$(\ \frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}<\lambda<\frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}\wedge((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee$$

$$(\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge c_{22}>0\ )\vee(\ \frac{\lambda-2}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee$$

$$(\frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))\vee(k=2(2+\sqrt{3})\wedge((0<\lambda<2\wedge$$

$$\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}\leq\eta<\frac{2(2+\sqrt{3})}{-\lambda^2+2(2+\sqrt{3})\lambda+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})$$

$$\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee$$

$$(\lambda=2\wedge\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}\leq\eta<\frac{1}{2}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-2(2+\sqrt{3})c_{22}}{2\eta\lambda})\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-2(2+\sqrt{3})c_{22}}{2\eta\lambda})))$$

$$\vee(2<\lambda<\frac{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}{8(2+\sqrt{3})}\wedge$$

$$((\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}\leq\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-l+2})))\vee$$

$$(\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{2(2+\sqrt{3})}{-\lambda^2+2(2+\sqrt{3})\lambda+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))))\vee(\lambda=\frac{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}{8(2+\sqrt{3})}$$

$$\wedge\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}\leq\eta<\frac{2(2+\sqrt{3})}{-\lambda^2+2(2+\sqrt{3})\lambda+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2})))\vee$$

$$\Big(\frac{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4}{8(2+\sqrt{3})} < \lambda < \frac{1}{2}\left(2(2+\sqrt{3})+4\right)-\frac{1}{2}\sqrt{4(2+\sqrt{3})^2-8(2+\sqrt{3})}$$

$$\wedge\Big(\Big(\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4} \le \eta < \frac{\lambda-2}{\lambda} \wedge m>0 \wedge$$

$$\Big(\Big(c_{22}<0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\vee$$

$$\Big(c_{22}>0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\Big)\Big)\vee\Big(\eta=\frac{\lambda-2}{\lambda} \wedge m>0 \wedge c_{22}>0 \Big)\vee$$

$$\frac{\lambda-2}{\lambda} < \eta < \frac{2(2+\sqrt{3})}{-\lambda^2+2(2+\sqrt{3})\lambda+2\lambda} \wedge m>0 \wedge$$

$$\Big(\Big(c_{22}<0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\vee$$

$$\Big(c_{22}>0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\vee$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(2(2+\sqrt{3})+4\right)-\frac{1}{2}\sqrt{4(2+\sqrt{3})^2-8(2+\sqrt{3})}$$

$$\wedge\Big(\Big(\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4} \le \eta < \frac{\lambda-2}{\lambda} \wedge m>0 \wedge$$

$$\Big(\Big(c_{22}<0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\vee$$

$$\Big(c_{22}>0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\Big)\Big)\vee$$

$$\Big(\frac{1}{2}\left(2(2+\sqrt{3})+4\right)-\frac{1}{2}\sqrt{4(2+\sqrt{3})^2-8(2+\sqrt{3})} < \lambda < \frac{1}{2}\left(2(2+\sqrt{3})+2\right)$$

$$\wedge\Big(\Big(\frac{8(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})^2+8(2+\sqrt{3})+4} \le \eta < \frac{2(2+\sqrt{3})}{-\lambda^2+2(2+\sqrt{3})\lambda+2\lambda} \wedge m>0 \wedge$$

$$\Big(\Big(c_{22}<0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\vee$$

$$\Big(c_{22}>0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}\lambda-2(2+\sqrt{3})c_{22}-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\vee$$

$$\left(2\left(2+\sqrt{3}\right)<k<Root\left[3\Diamond 1^4-24\Diamond 1^3-8\Diamond 1^2+32\Diamond 1-16,2\right]\wedge\right.$$

$$((\ 0<\lambda<2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee 2<\lambda<\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge$$

$$((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda<\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge((\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge$$

$$m>0\wedge c_{22}<0\ )\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}<\lambda<3\wedge$$

$$((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge c_{22}<0\ )\vee$$

$$(\ \frac{\lambda-2}{\lambda}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee$$

$$(\lambda = 3 \wedge ((\frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{1}{3} \wedge m > 0 \wedge ((c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{2c_{22} - c_{22}k}{3\eta - 1})$$

$$((c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{2c_{22} - c_{22}k}{3\eta - 1}))) \vee (\frac{1}{3} < \eta < \frac{k}{3k-3} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{2c_{22} - c_{22}k}{3\eta - 1}) \vee (c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{2c_{22} - c_{22}k}{3\eta - 1})))) \vee$$

$$(3 < \lambda < \frac{k^2+4k+4}{4k} \wedge ((\frac{4k}{k^2+4k+4} \le \eta < \frac{1}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))) \vee (\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))) \vee (\eta = \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge c_{22} > 0) \vee$$

$$(\frac{\lambda - 2}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))))) \vee (\lambda = \frac{k^2+4k+4}{4k} \wedge$$

$$((\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge ((c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))) \vee (\eta = \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge c_{22} > 0) \vee$$

$$(\frac{\lambda - 2}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda} \wedge m > 0 \wedge ((c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))))) \vee$$

$$(\frac{k^2+4k+4}{4k} < \lambda < \frac{k+4}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4k} \wedge ((\frac{4k}{k^2+4k+4} \le \eta < \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge$$

$$((c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))) \vee (\eta = \frac{\lambda - 2}{\lambda} \wedge m > 0 \wedge c_{22} > 0) \vee$$

$$(\frac{\lambda - 2}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda - \lambda^2 + 2\lambda} \wedge m > 0 \wedge ((c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}) \vee$$

$$(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k) + c_{22}\lambda - c_{22}}{\eta\lambda - \lambda + 2}))))) \vee$$

$$\lambda=\frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\wedge$$

$$\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee$$

$$k=Root[30\#1^4-240\#1^3-80\#1^2+320\#1-16,2]\wedge$$

$$((\ 0<\lambda<2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \lambda=2\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{2}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-c_{22}k}{2\eta}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}-c_{22}k}{2\eta}\ )))\vee$$

$$(\ 2<\lambda<\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda=\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}\wedge$$

$$((\ \eta=\frac{4k}{k^2+4k+4}\wedge m>0\wedge c_{22}<0\ )\vee(\ \frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))$$

$$\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \frac{2k^2+8k+8}{k^2+4}<\lambda<3\wedge$$

$$((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0c_{22}<0\ )\vee$$

$$((\ \frac{\lambda-2}{\lambda}<\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda=3\wedge\frac{4k}{k^2+4k+4}<\eta<\frac{1}{3}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )))\vee$$

$$(\ \frac{1}{3}<\eta<\frac{k}{3k-3}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )\vee$$

$$(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )))))\vee(\ 3<\lambda<\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))$$

$$(\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0c_{22}>0\ )\vee(\ \frac{\lambda-2}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge$$

$$((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\wedge$$

$$((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\leq\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee$$

$$(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee$$

$$\left(\frac{k^2+4k+4}{4k} < \lambda < \frac{k+2}{2} \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))))\vee$$

$$\left(k > Root[3\#1^4 - 24\#1^3 - 8\#1^2 + 32\#1 - 16,2] \wedge \right.$$

$$\left(\left(0 < \lambda < 2 \wedge \frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.\right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.$$

$$\left(\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))\vee\right.$$

$$\left(2 < \lambda < \frac{2k^2+8k+8}{k^2+4} \wedge \left(\left(\frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{1}{\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.\right.\right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))\vee\left(\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))))\vee \lambda = \frac{2k^2+8k+8}{k^2+4} \wedge$$

$$\left(\left(\eta = \frac{\lambda-2}{\lambda} \wedge m>0 \wedge c_{22}<0 \right)\vee\left(\frac{\lambda-2}{\lambda} < \eta < \frac{1}{\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.\right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))\vee\right.$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda} \wedge m>0 \wedge \left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))))\vee\left(\frac{2k^2+8k+8}{k^2+4} < \lambda < 3 \wedge \right.$$

$$\left(\left(\frac{4k}{k^2+4k+4} < \eta < \frac{\lambda-2}{\lambda} \wedge m>0 \wedge \right.\right.$$

$$\left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} < \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))\right.$$

$$\vee\left(\frac{1}{\lambda} < \eta < \frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda} \wedge m>0 \wedge \left(\left(c_{22} < 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)\vee\right.\right.$$

$$\left(c_{22} > 0 \wedge c_{12} > \frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2} \right)))))\vee$$

$$
\begin{aligned}
&(\ \lambda=3\wedge((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{1}{3}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )))\vee\\
&(\ \frac{1}{3}<\eta<\frac{k}{3k-3}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )\vee\\
&(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{2c_{22}-c_{22}k}{3\eta-1}\ )))))\vee(\ 3<\lambda<\frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}\ \wedge\\
&((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\ \wedge\\
&((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee\\
&(\ \eta=\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\wedge c_{22}>0\ )\vee(\ \frac{\lambda-2}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\ \wedge\\
&((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(\ c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee\ \lambda=\frac{k+4}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}\ \wedge\\
&((\ \frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{1}{\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(c_{22}>0\wedge c_{12}>\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{\lambda-2}{\lambda}\wedge m>0\ \wedge\\
&((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee(c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\\
&\vee(\ \frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))))\vee(\ \lambda=\frac{k^2+4k+4}{4k}\ \wedge\\
&\frac{1}{\lambda}<\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )))\vee(\ \frac{k^2+4k+4}{4k}<\lambda<\frac{k+2}{2}\ \wedge\\
&\frac{4k}{k^2+4k+4}\le\eta<\frac{k}{k\lambda-\lambda^2+2\lambda}\wedge m>0\wedge((\ c_{22}<0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ )\vee\\
&(\ c_{22}>0\wedge c_{12}<\frac{c_{22}(-k)+c_{22}\lambda-c_{22}}{\eta\lambda-\lambda+2}\ ))))))\wedge\\
&c_{11}=\frac{c_{12}\eta\lambda-c_{12}\lambda+2c_{12}+c_{22}k-c_{22}\lambda+c_{22}}{\eta\lambda-1}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

2.2.3.α. α_2=0 και c_{12}≠0

Όμοια αναζητούμε να ισχύει

$$\alpha_2 = 0, c_{11} > 0, c_c = 0, c_{12} \neq 0, k > 0, m > 0, \lambda < \lambda_{c1}, \lambda > 0, \eta > n_0 \tag{2.23}$$

και λαμβάνουμε

$$\Big(\Big(c_{12} < 0 \wedge \Big(0 < c_{11} < -c_{12} \wedge 0 < \eta < -\frac{2c_{11}c_{12}}{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{12} + c_{12}^2} \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} <$$

$$\lambda \leq \frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0\Big) \vee$$

$$\Big(c_{11} = -c_{12} \wedge 0 < \eta < -\frac{2c_{11}c_{12}}{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{12} + c_{12}^2} \wedge$$

$$0 < \lambda < \frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0\Big) \vee$$

$$\Big(-c_{12} < c_{11} < \sqrt{2}\sqrt{c_{11}^2} - c_{12} \wedge \Big(\Big(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_{11}^2} < \eta \leq -\frac{2c_{11}c_{12}}{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{12} + c_{12}^2} \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} <$$

$$\lambda \leq \frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0\Big) \vee$$

$$\Big(-\frac{2c_{11}c_{12}}{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{12} + c_{12}^2} < \eta < \frac{1}{2} \wedge \Big(\Big(\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda <$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0\Big) \vee$$

$$\Big(\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} + 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} < \lambda <$$

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0\Big)\Big)\Big) \vee$$

$$\Big(\frac{1}{2} < \eta < 1 \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0\Big) \vee \Big(\eta > 1 \wedge$$

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} \wedge m > 0\Big)\Big)\Big) \vee \Big(c_{11} = \sqrt{2}\sqrt{c_{11}^2} - c_{12} \wedge$$

$$\Big(\Big(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_{11}^2} < \eta < \frac{1}{2} \wedge \Big(\Big(\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda \leq$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0\Big) \vee$$

$$\Big(\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} + 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \leq \lambda <$$

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0\Big)\Big)\Big) \vee \Big(\frac{1}{2} < \eta < 1 \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge$$

$$m > 0\Big) \vee \Big(\eta > 1 \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} \wedge m > 0\Big)\Big)\Big) \vee$$

$$(c_{11} > \sqrt{2}\sqrt{c_{11}^2} - c_{12} \wedge ((\frac{2c_{11}c_{12}}{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{12} + c_{12}^2} < \eta < \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_{11}^2} \wedge$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} + 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \leq \lambda <$$

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0 \;) \vee \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_{11}^2} < \eta < \frac{1}{2} \wedge ((\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda \leq$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} - 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \wedge m > 0)$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} + 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \leq \lambda <$$

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0))) \vee (\frac{1}{2} \leq \eta < 1 \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} \wedge m > 0) \vee$$

$$(\eta > 1 \wedge \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta + c_{12}(-\eta) + c_{12}} < \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} \wedge m > 0))))) \vee (c_{12} > 0 \wedge c_{11} > c_{12} \wedge$$

$$0 < \eta < \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{2c_{11}^2} \wedge$$

$$\frac{c_{11}^2\eta + 2c_{11}c_{12}\eta - c_{12}^2\eta + 2c_{12}^2}{\eta\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)} + 2\sqrt{-\frac{2c_{12}^4\eta - c_{12}^4}{\eta^2\left(c_{11}^2\eta - c_{11}c_{12}\eta + c_{11}c_{12} + c_{12}^2\right)^2}} \leq \lambda < \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11}\eta} \wedge$$

$$m > 0)) \wedge k = -\frac{c_{11}^2(-\eta)\lambda + c_{11}^2 + c_{11}c_{12}\eta\lambda - c_{11}c_{12}\lambda + 2c_{11}c_{12} - c_{12}^2\lambda + c_{12}^2}{c_{12}^2}$$

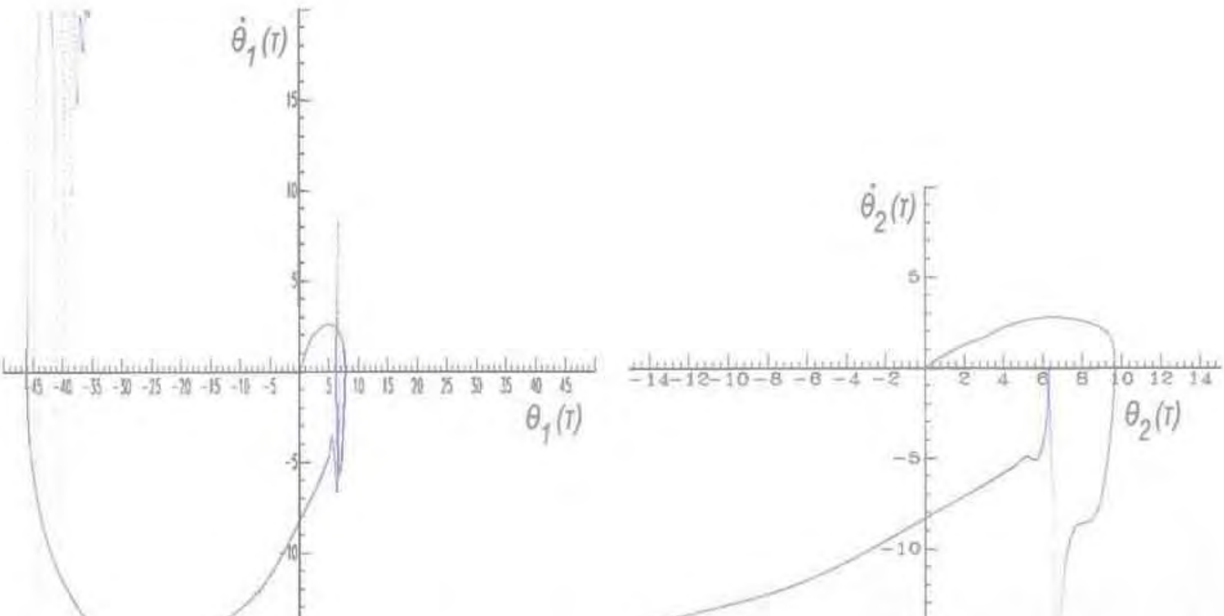
(2.23)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Αριθμητικά Αποτελέσματα, Σχολιασμός και Συμπεράσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για όλες τις περιπτώσεις παραβίασης των συνθηκών, υπό μορφήν πορτραίτων επιπέδου φάσεως $\left[\left(\theta_i(\tau), \dot{\theta}_i(\tau)\right)\right], i = 1{,}2$ τα οποία προέκυψαν από αριθμητική επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης μέσω του Freeware λογισμικού Dynamics Solver. Όπου στα διαγράμματα εμφανίζονται διαφορετικά χρώματα στις τελικές δυναμικές αποκρίσεις, αυτά σχετίζονται με διαφορετικά σύνολα αρχικών συνθηκών για τον εξεταζόμενο συνδυασμό παραμέτρων.

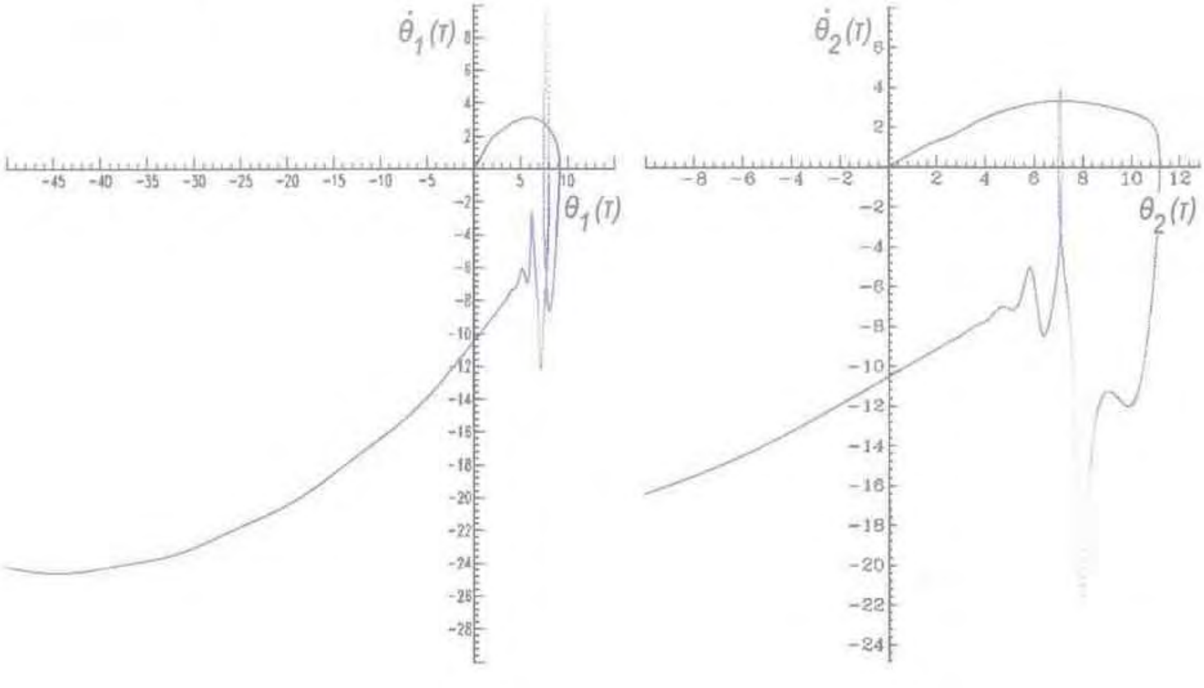
3.1. Γενικές συνθήκες μηδενισμού του a_2

1. c_{22}=0.01, c_{12}=-1.49, c_{11}=0.408, k=1.6, λ=1.7, η=0.494, m=0.1



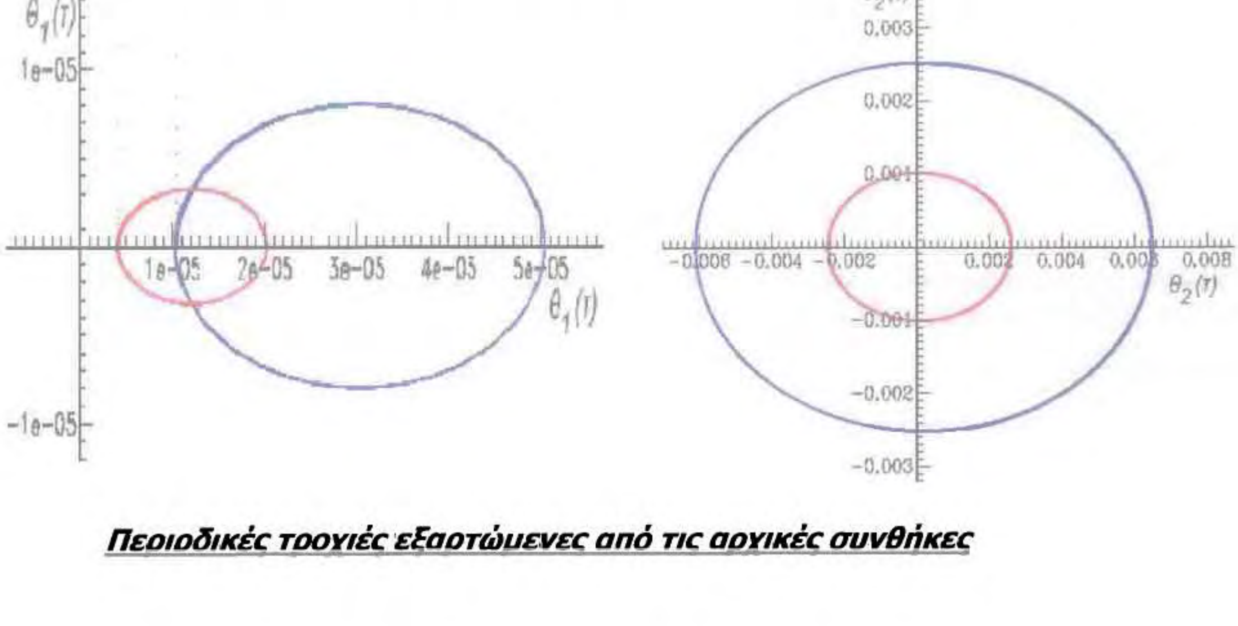
Διαφεύγουσα κίνηση

2. c_{22}=-0.01, c_{12}=-1.49, c_{11}=0.0726, k=1.6, λ=1.7, η=0.494, m=0.13



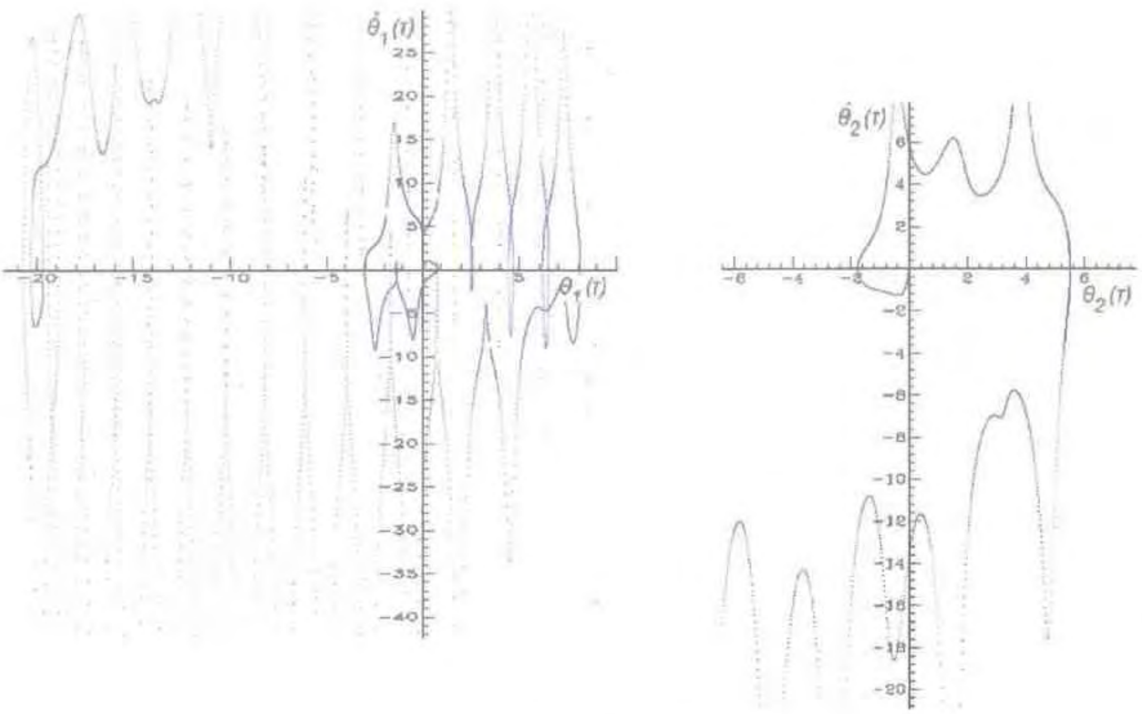
<u>Διαφεύγουσα κίνηση</u>

3. c_{22}=-0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=236.01, k=1.6, λ=1.7, η=0.494, m=1



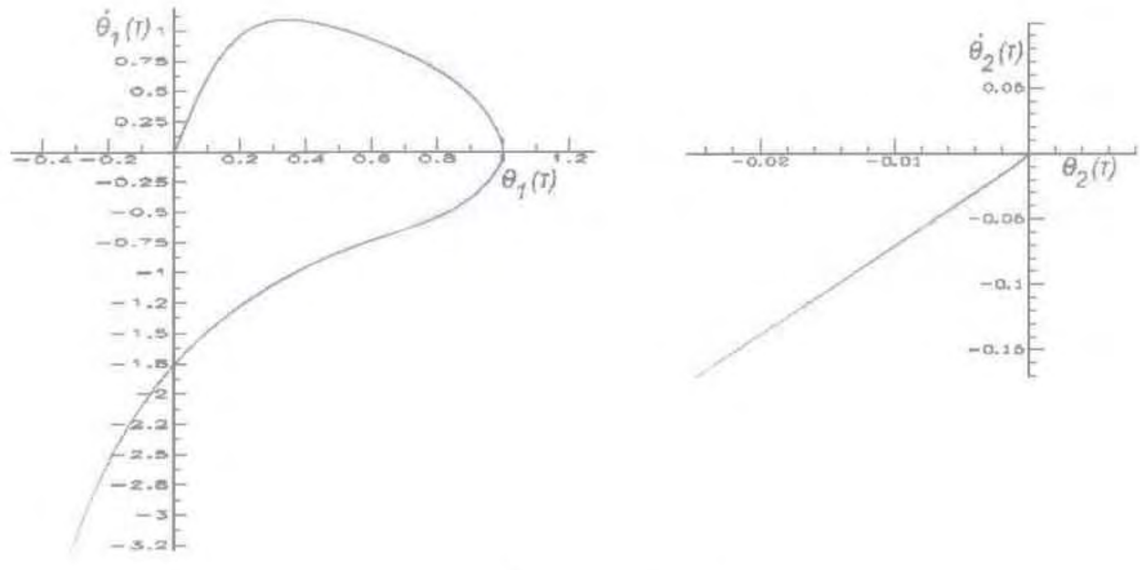
<u>Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες</u>

4. $c_{22}=0.01$, $c_{12}=1.5$, $c_{11}=1.2788$, $k=1.6$, $\lambda=1.7$, $\eta=0.494$, $m=0.21$



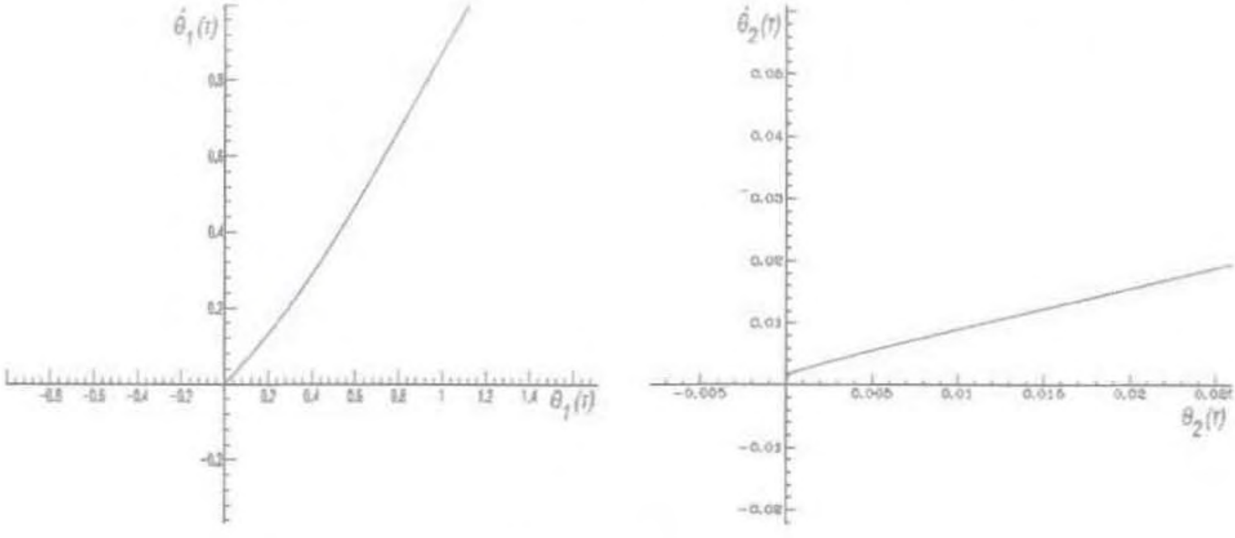
Διαφεύγουσα κίνηση

5. $c_{22}=-0.01$, $c_{12}=1.5$, $c_{11}=0.607$, $k=1.6$, $\lambda=1.7$, $\eta=0.494$, $m=0.35$



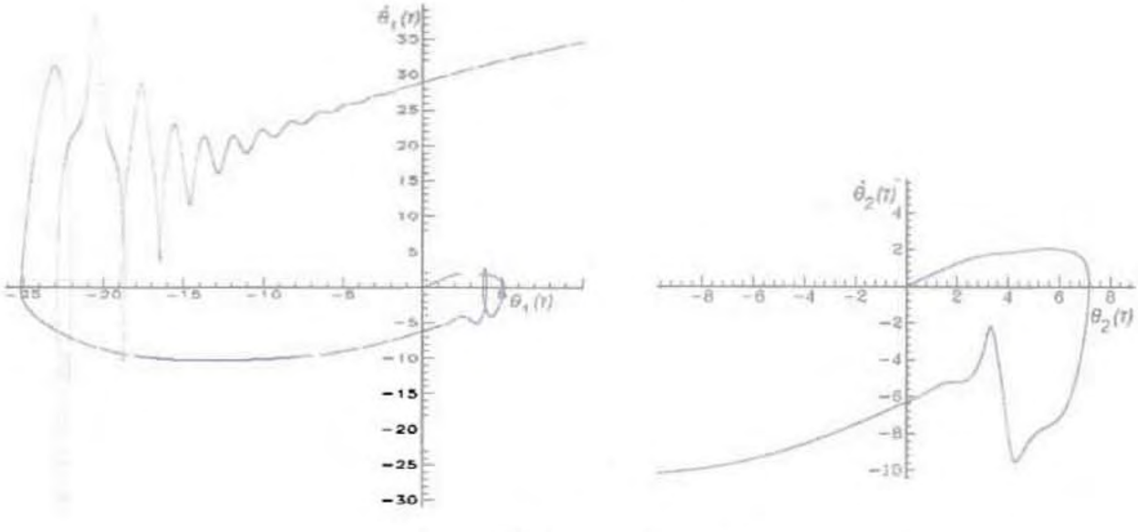
Διαφεύγουσα κίνηση

6. c_{22}=0.01, c_{12}=-1.95, c_{11}=0.854, k=2.3, λ=1.3, η=0.52, m=0.29



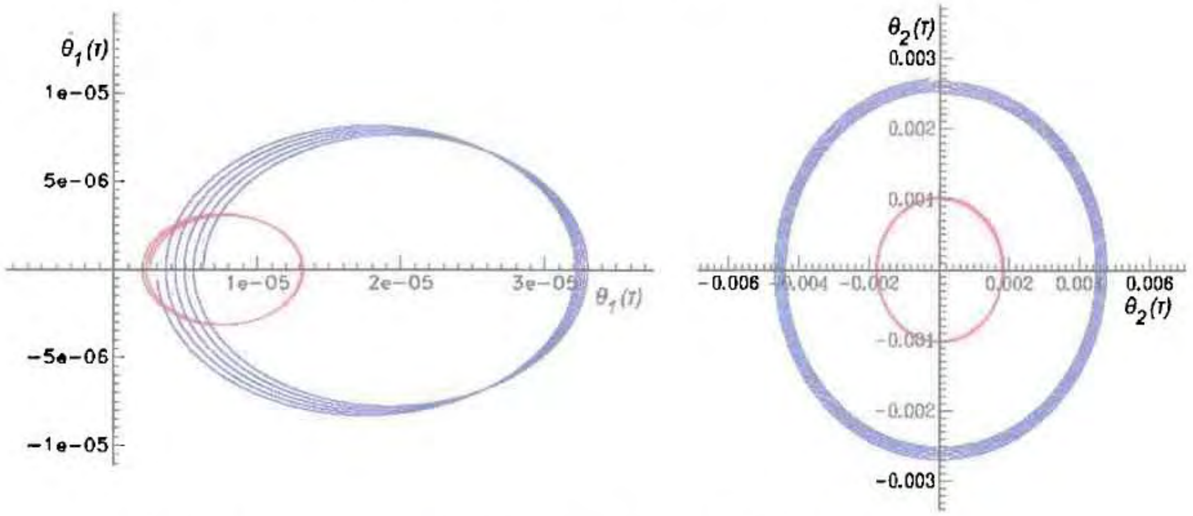
Διαφεύγουσα κίνηση

7. c_{22}=-0.01, c_{12}=-1.95, c_{11}=1.09, k=2.3, λ=1.3, η=0.52, m=0.35



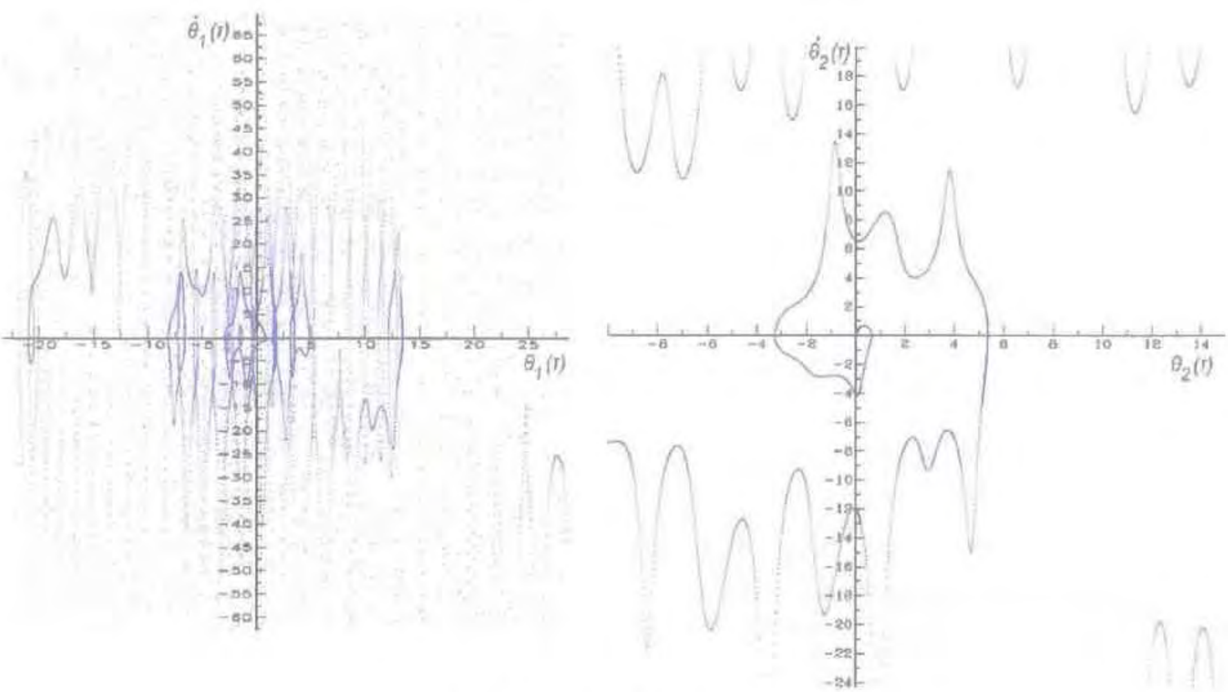
Διαφεύγουσα κίνηση

8. c_{22}=-0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=402.39, k=2.3, λ=1.3, η=0.52, m=1



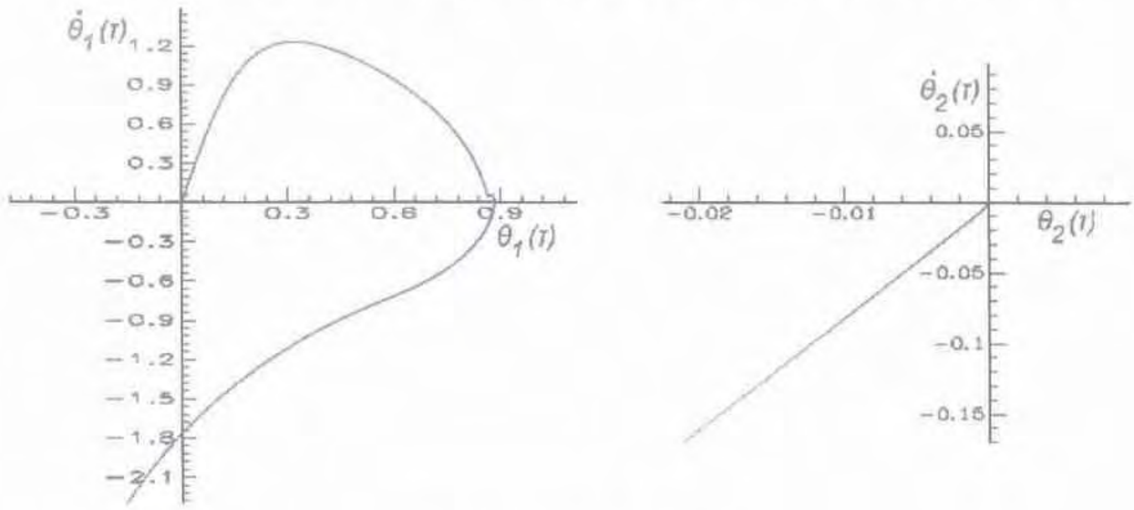
Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

9. c_{22}=0.01, c_{12}=1.95, c_{11}=2.798, k=2.3, λ=1.3, η=0.52, m=0.23



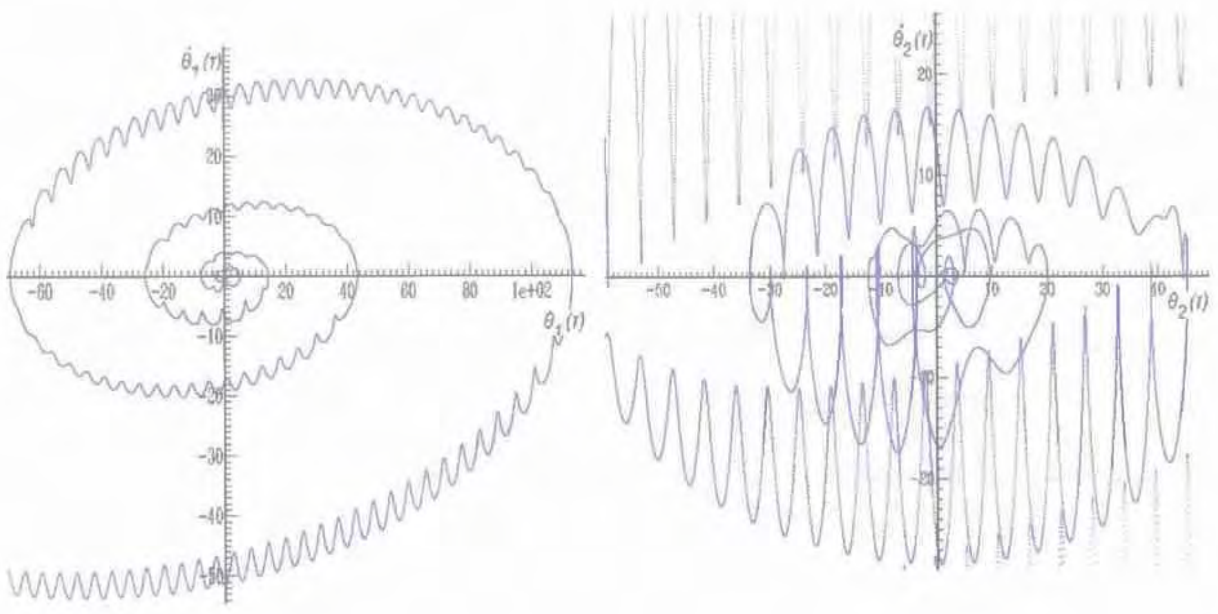
Διαφεύγουσα κίνηση

10. $_{22}$=-0.01, c_{12}=1.09, c_{11}=2.798, k=2.3, λ=1.3, η=0.52, m=0.35



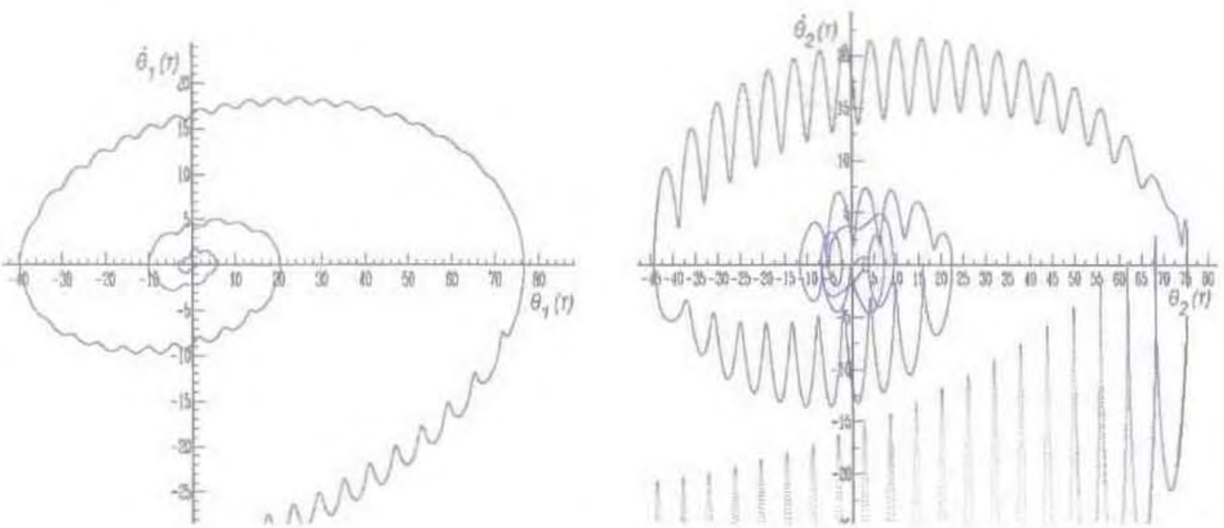
Διαφεύγουσα κίνηση

11. c_{22}=0.01, c_{12}=-1.53, c_{11}=0.931, k=2.3, λ=2.003, η=0.498, m=15



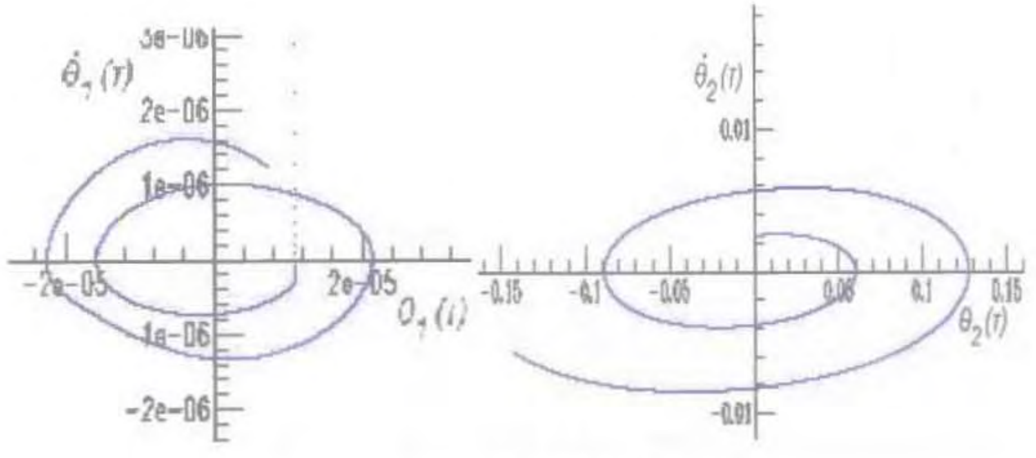
Διαφεύγουσα κίνηση

12. c_{22}=-0.01, c_{12}=-1.53, c_{11}=0.0714, k=2.3, λ=2.003, η=0.498, m=19

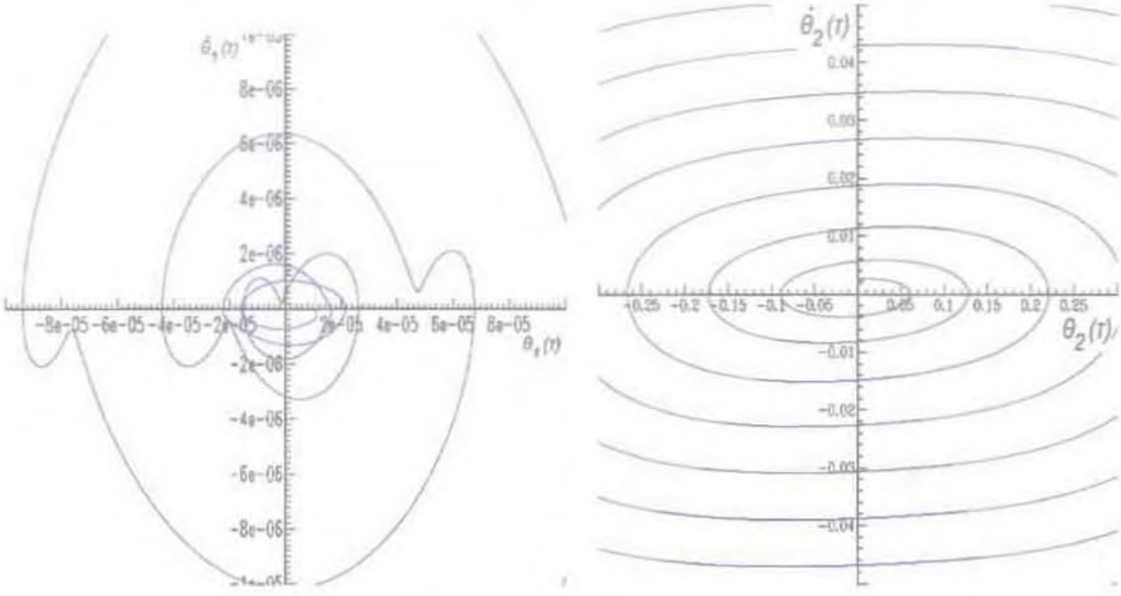


Διαφεύγουσα κίνηση

13. c_{22}=-0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=229.641, k=2.3, λ=2.003, η=0.498, m=1

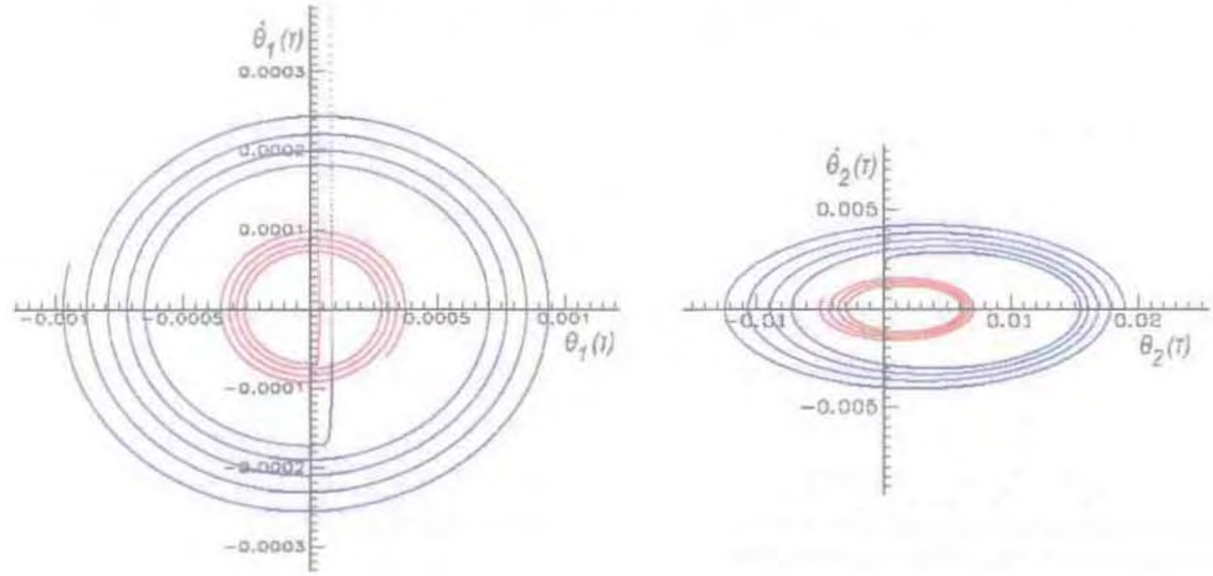


Αρχική εικόνα



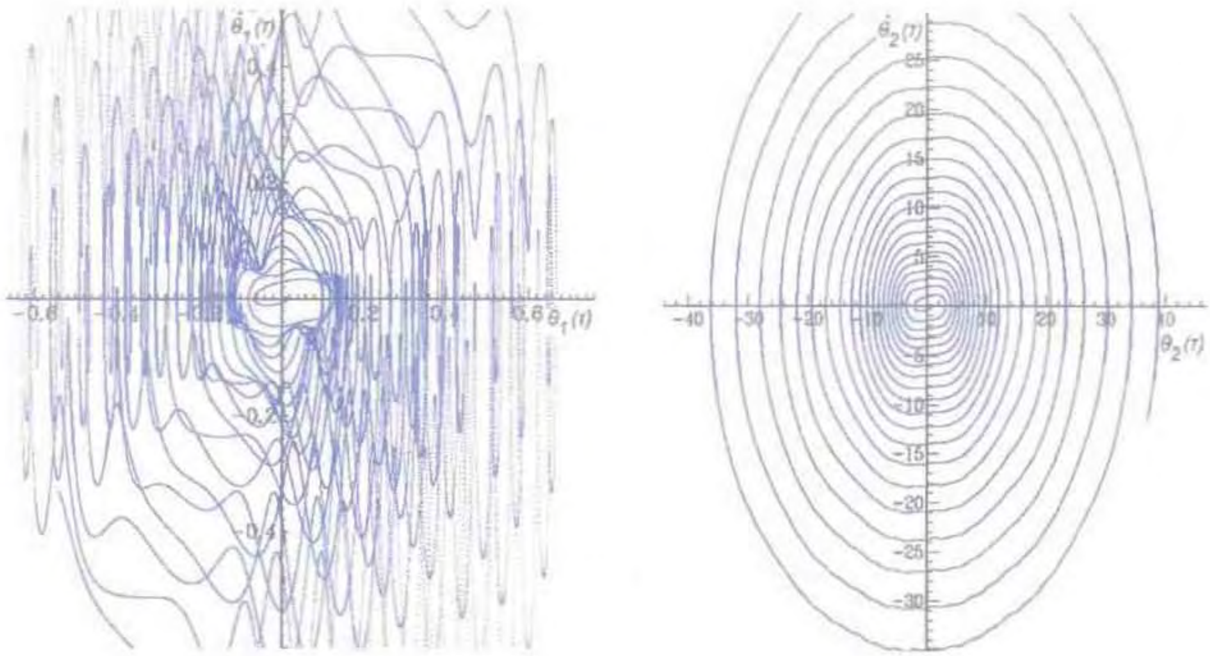
Διαφεύγουσα κίνηση

14. c_{22}=0.01, c_{12}=1.6, c_{11}=26.3494, k=2.3, λ=2.003, η=0.498, m=1



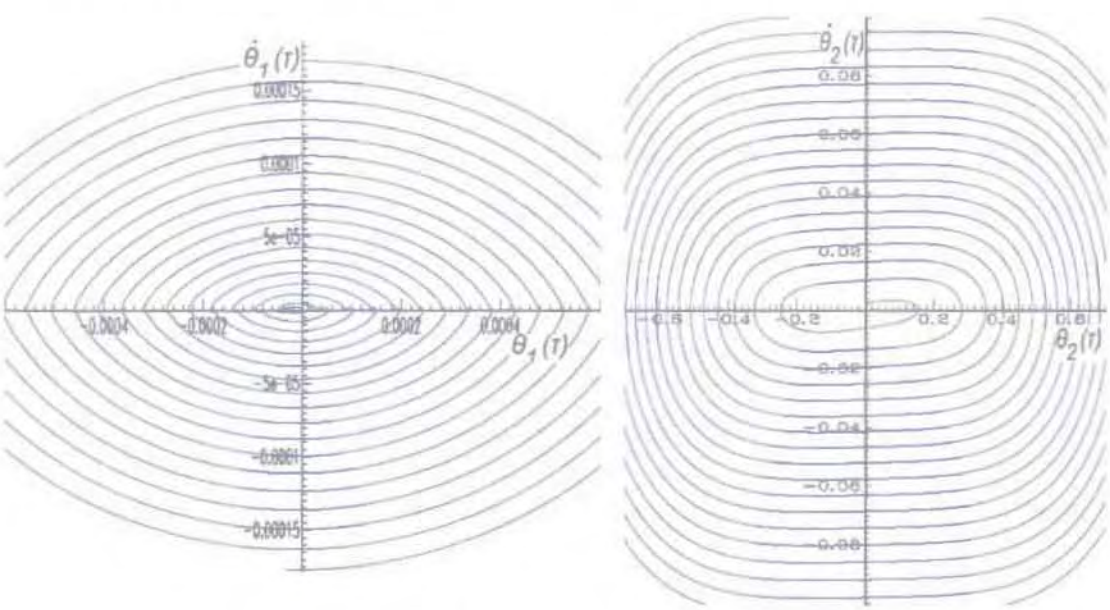
Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

15. c_{22}=-0.01, c_{12}=1.6, c_{11}=0.2142, k=2.3, λ=2.003, η=0.498, m=107



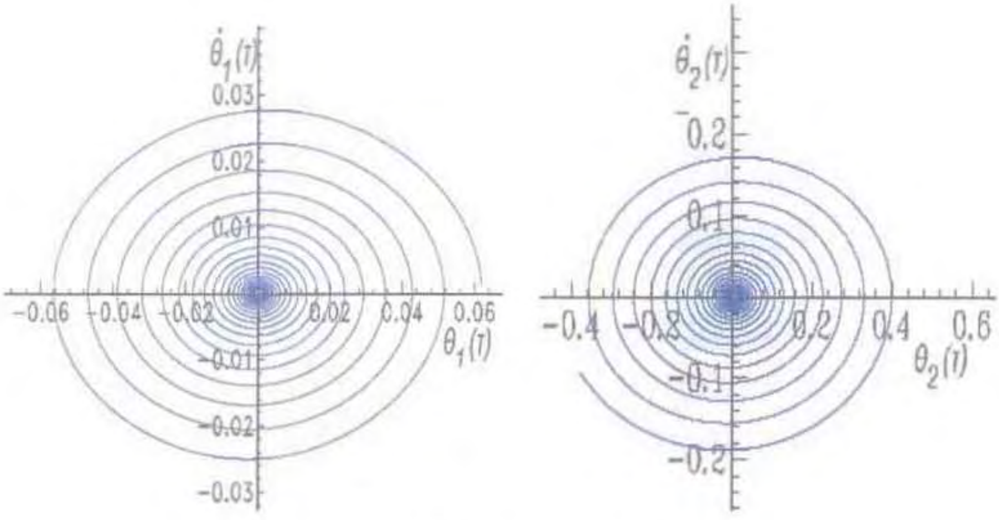
Διαφεύγουσα κίνηση

16. c_{22}=0.01, c_{12}=-1.55, c_{11}=10.8498, k=2.3, λ=2.003, η=0.49925, m=1



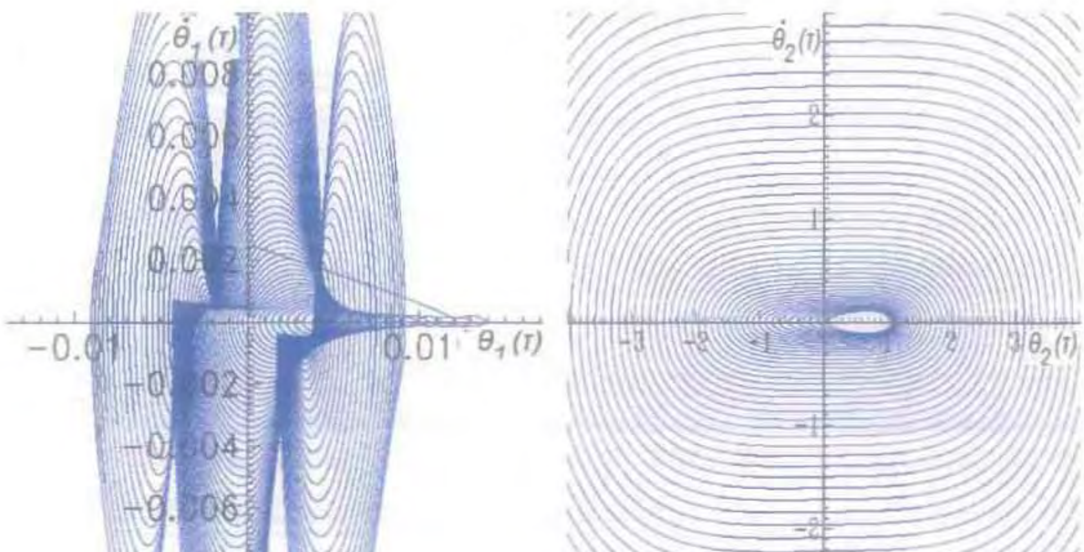
Διαφεύγουσα κίνηση

17. c_{22}=0.01, c_{12}=1.55, c_{11}=10.8498, k=2.3, λ=2.003, η=0.49925, m=1



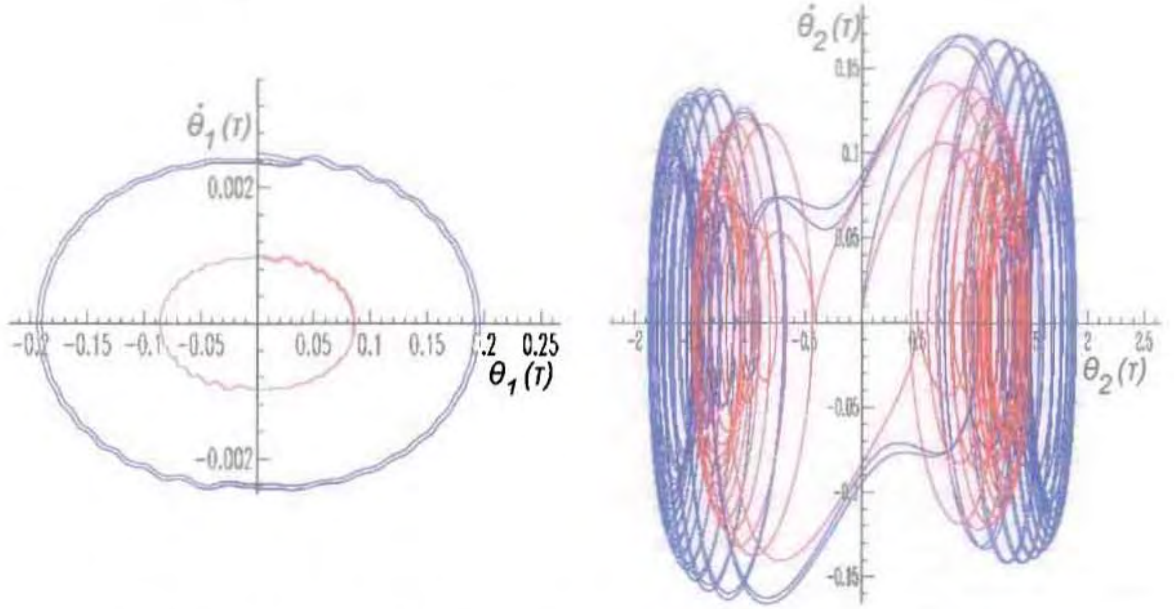
<u>*Διαφεύγουσα κίνηση*</u>

18. c_{22}=-0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=179.54, k=2.3, λ=2.003, η=0.4995, m=1000



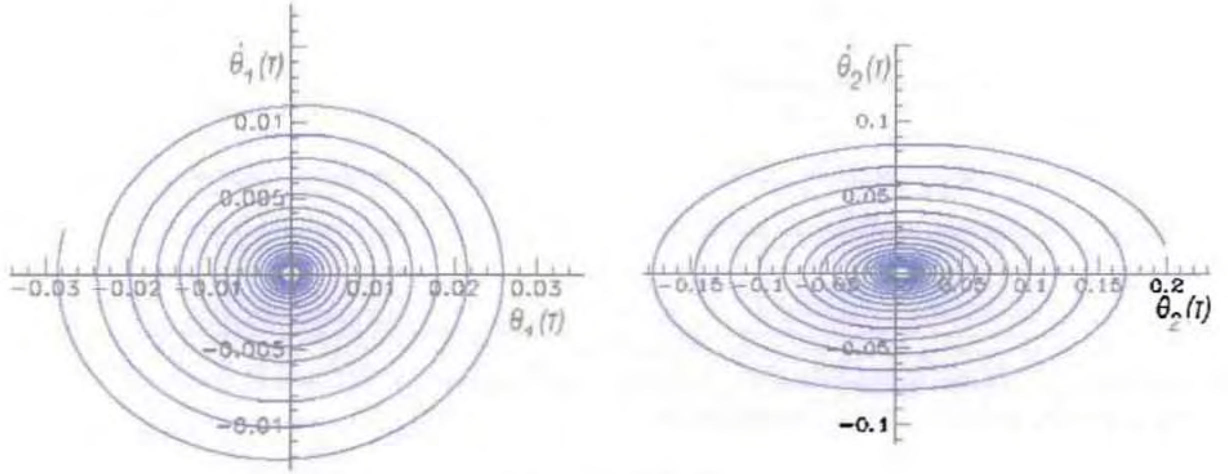
<u>***Διαφεύγουσα κίνηση***</u>

19. c_{22}=0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=0.4285, k=2.3, λ=2.003, η=0.4995, m=4610



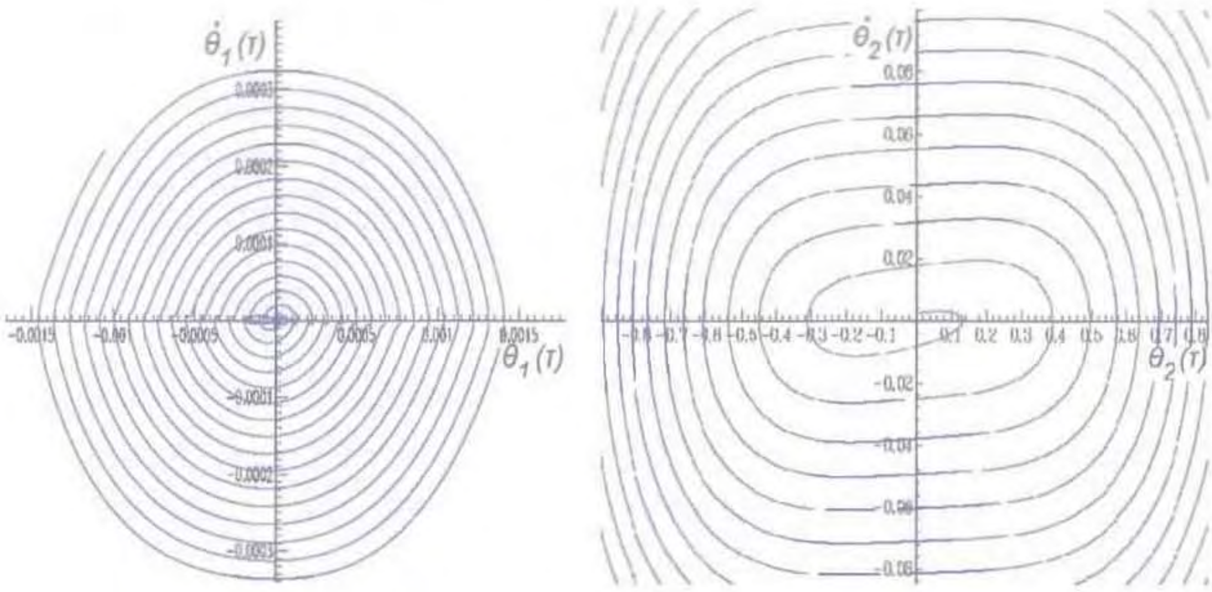
<u>Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες</u>

20. c_{22}=0.01, c_{12}=1.55, c_{11}=10.8999, k=2.3, λ=2.003, η=0.4995, m=1



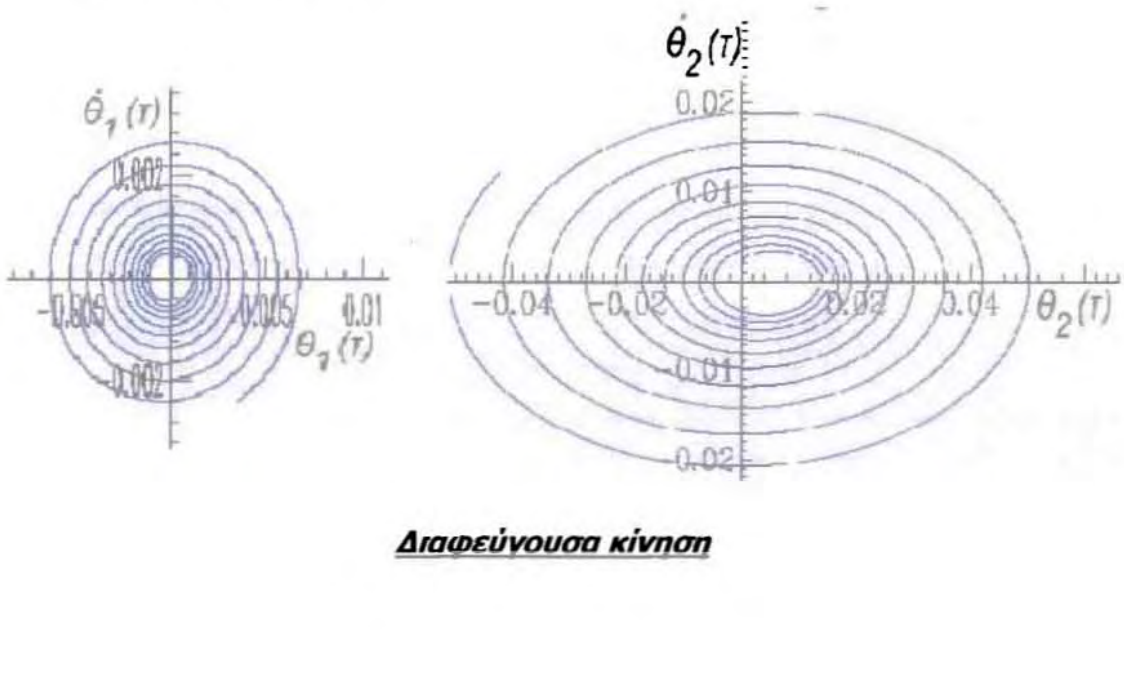
<u>Διαφεύγουσα κίνηση</u>

21. c_{22}=-0.01, c_{12}=0.01, c_{11}=228.034, k=2.3, λ=2.00978, η=0.497567, m=1



Διαφεύγουσα κίνηση

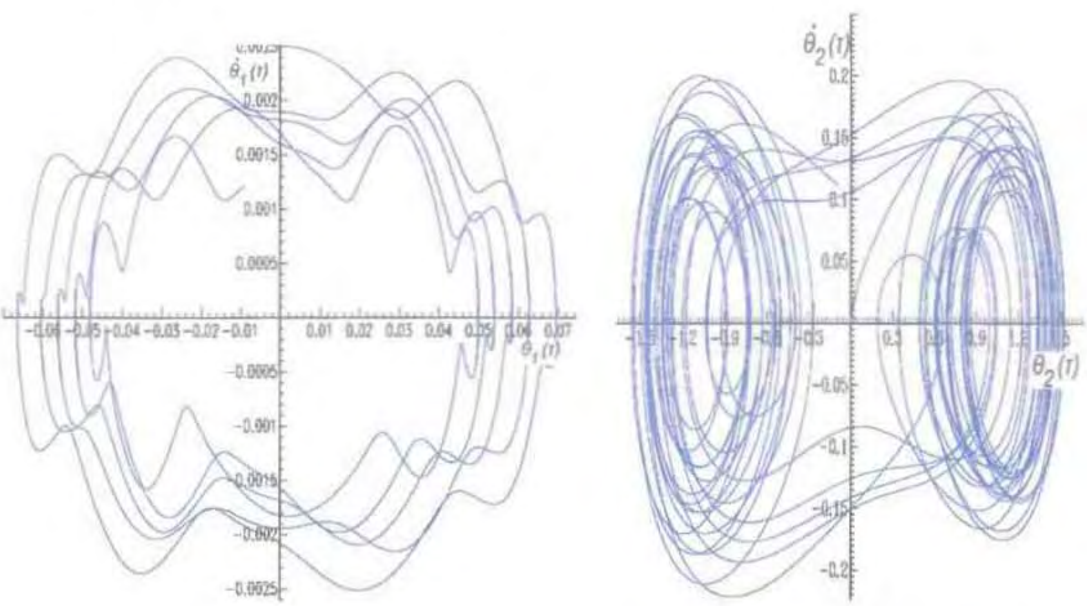
22. c_{22}=0.01, c_{12}=1.55, c_{11}=12.206, k=2.3, λ=2.00978, η=0.497567, m=1



Διαφεύγουσα κίνηση

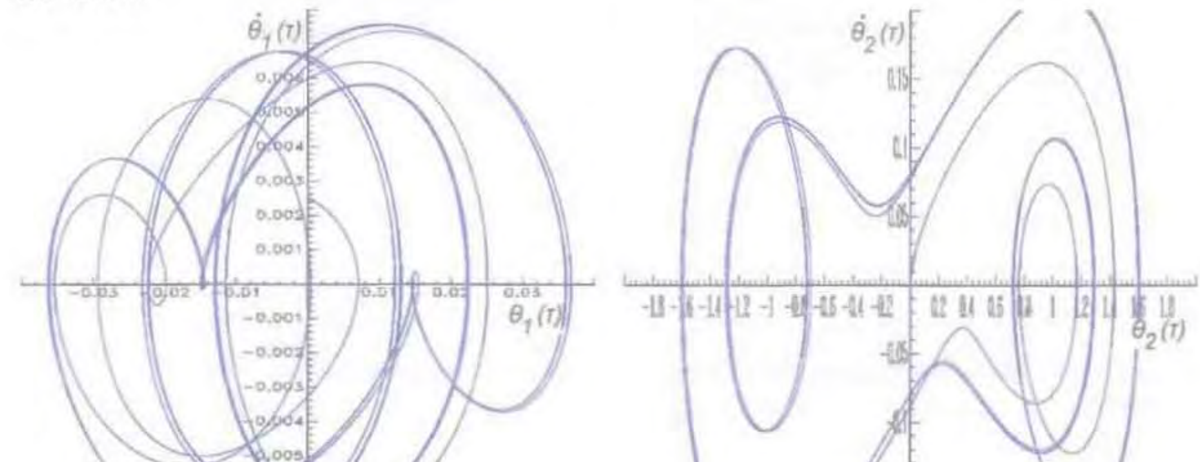
3.2. Μηδενισμός του a_2 για θετικά ορισμένο μητρώο απόσβεσης

1. c_{22}=0.01, c_{12}=0.005, c_{11}=0.3156, k=2.5, λ=2.01, η=0.4982, m=620



Διαφεύγουσα κίνηση

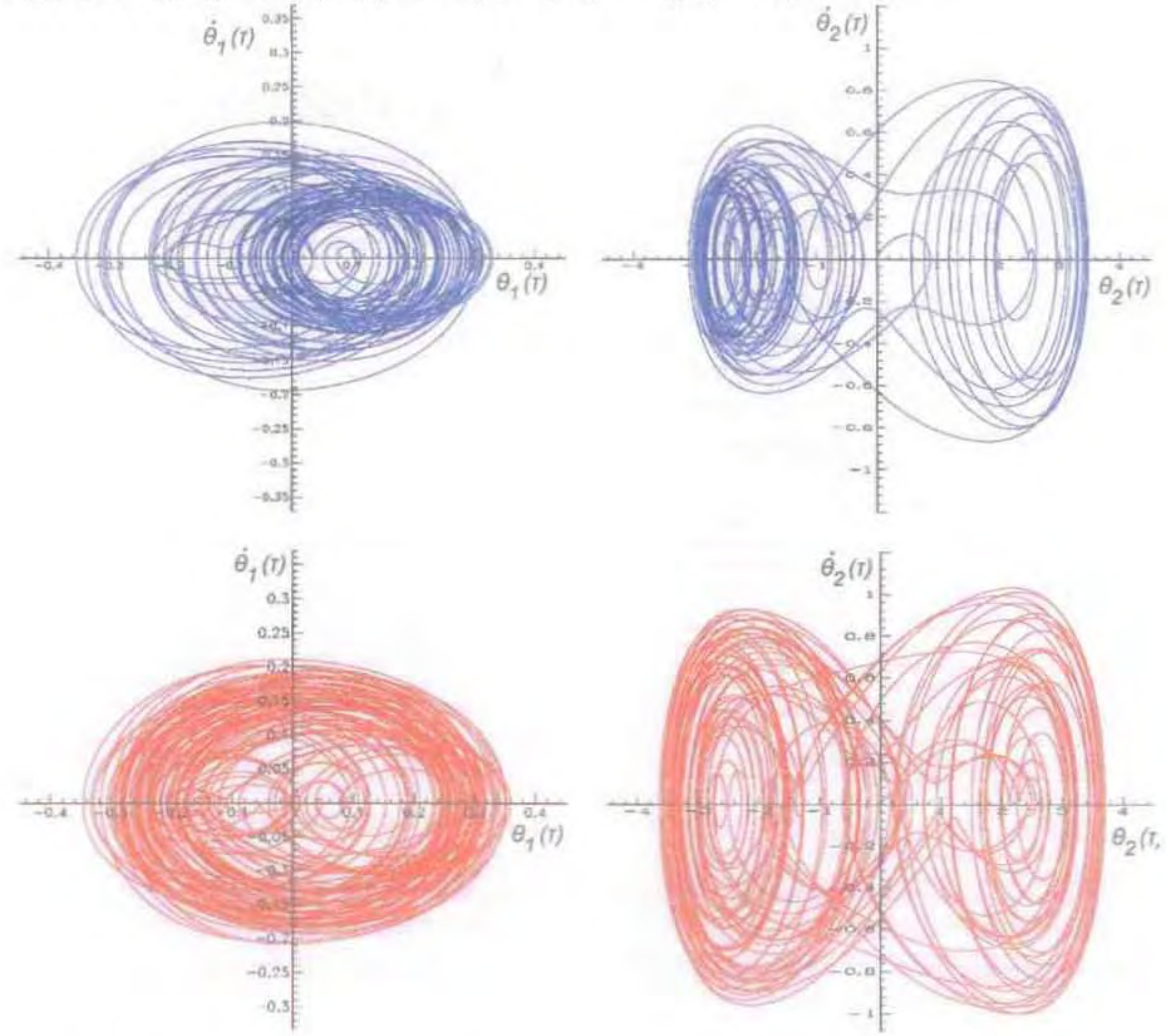
2. c_{22}=0.01, c_{12}=0.005, c_{11}=3.63338, k=2.5, λ=2.15, η=0.49475, m=35.1



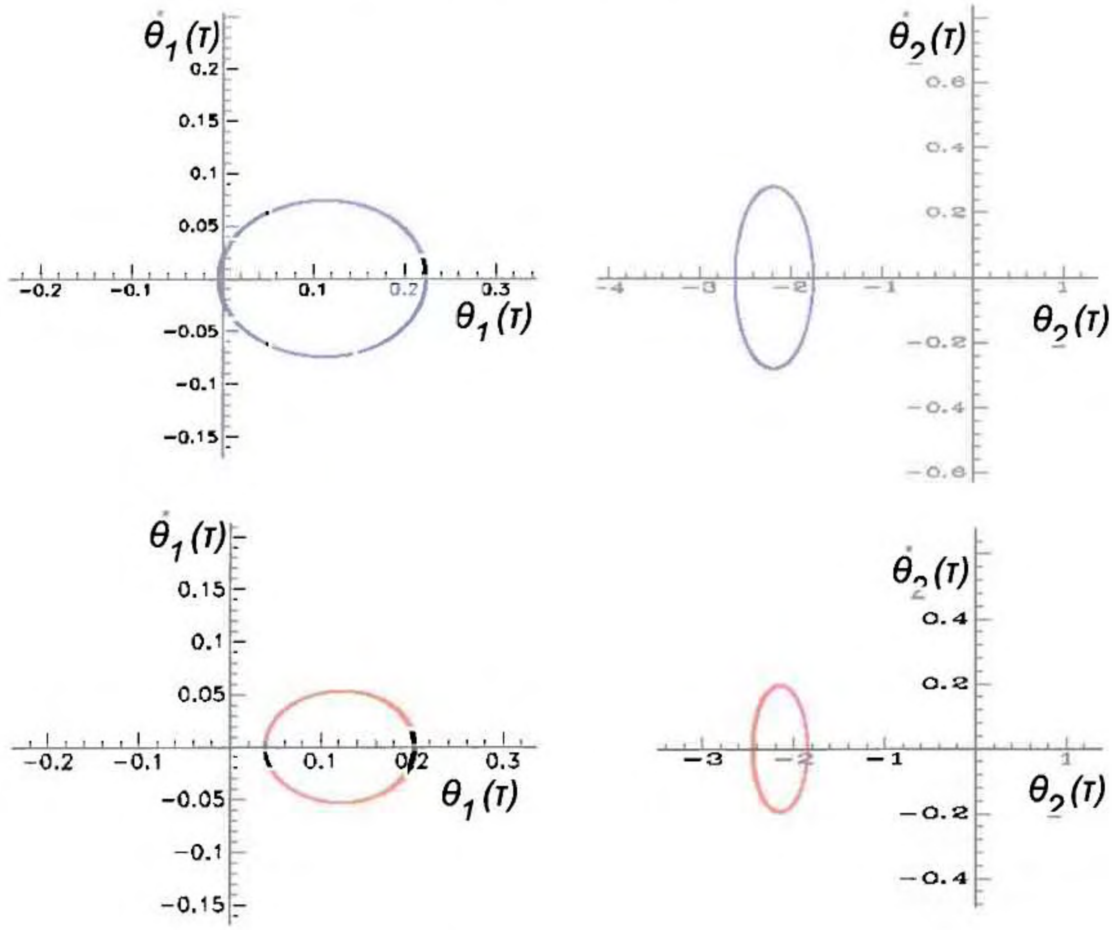
Μεγάλου εύρους προσωρινές κινήσεις (large amplitude transient motions)

3.3. Μηδενισμός του a_2 για αόριστο υπτοώο απόσβεσης (=0)

1. c_{22}=0.005, c_{12}=0.01, c_{11}=0.02, k=5.4, λ=3, η=0.4, m=17

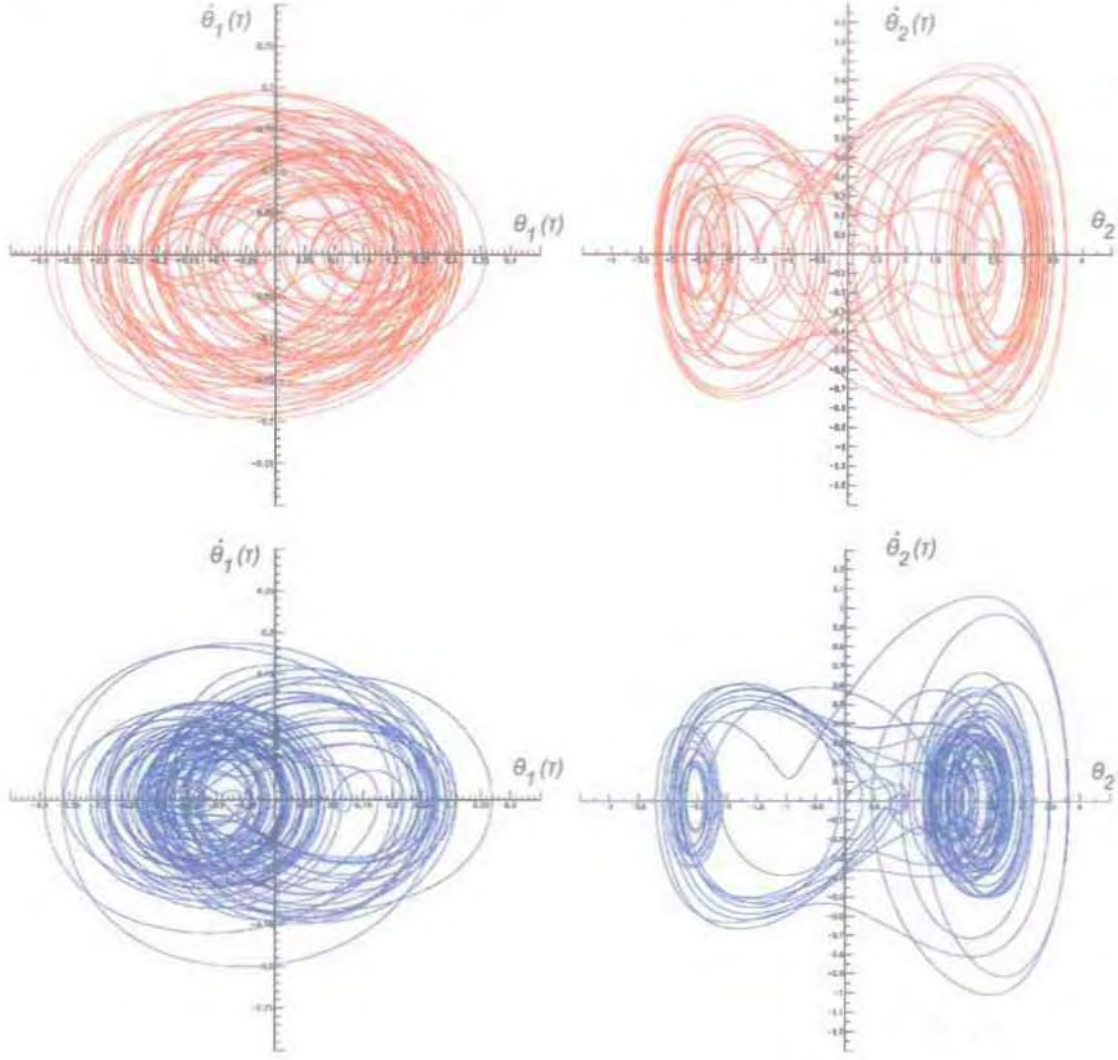


Αρχική δυναμική απόκριση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες

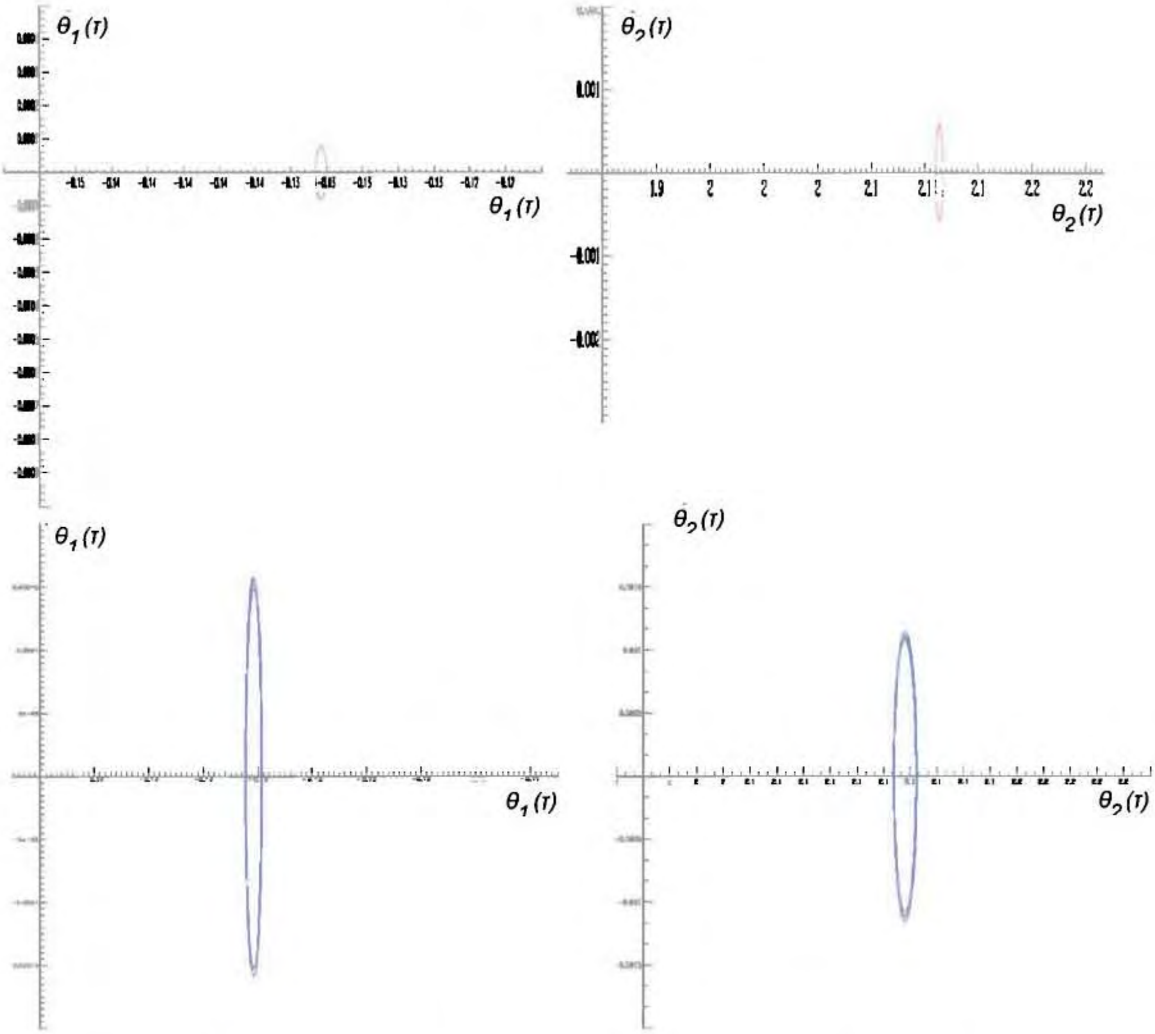


Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

2. c_{22}=0.005, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.02, k=5.4, λ=3, η=0.4, m=17



Αρχική δυναμική απόκριση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες

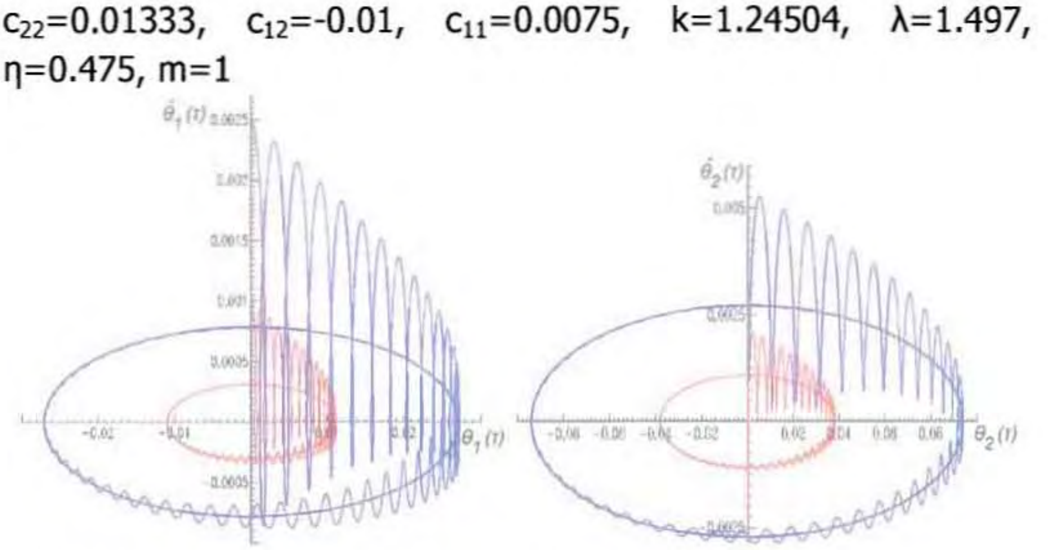


Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

Υφίστανται επίσης και συνθήκες όπου για αρνητικά ορισμένο μητρώο απόσβεσης το σύστημα καθίσταται δυναμικά ασταθές, που για λόγους οικονομίας της ύλης δεν παρατίθενται στη συνέχεια.

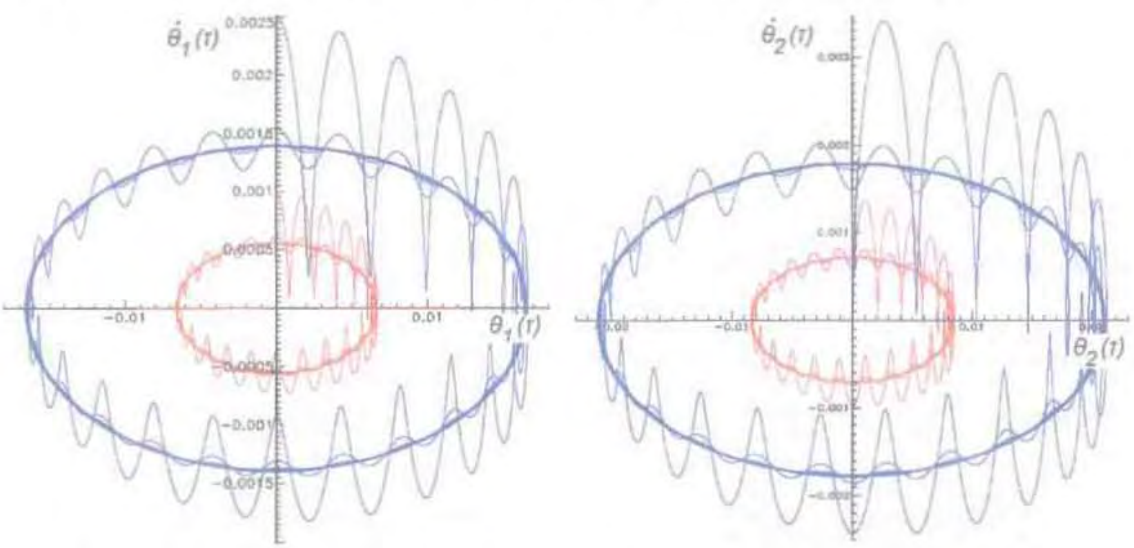
3.4. Γενικές συνθήκες μηδενισμού του a_3

1. c_{22}=0.01333, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.0075, k=1.24504, λ=1.497, η=0.475, m=1



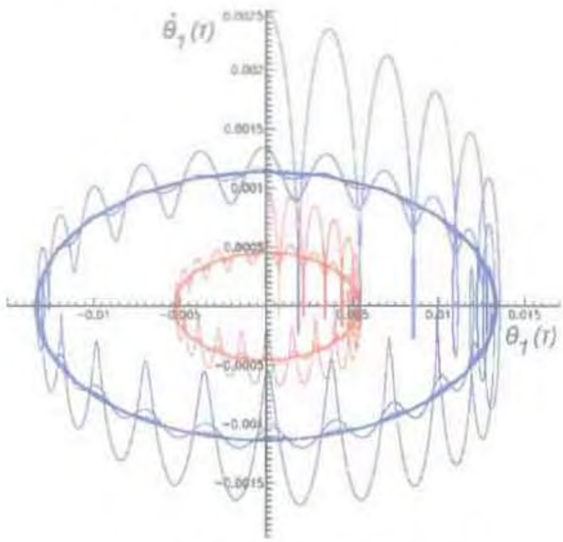
Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

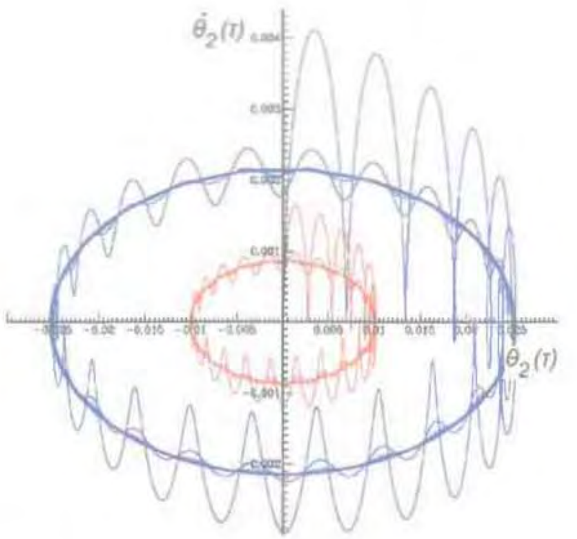
2. c_{22}=0.01, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.01, k=0.407, λ=0.55, η=0.37, m=1



Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

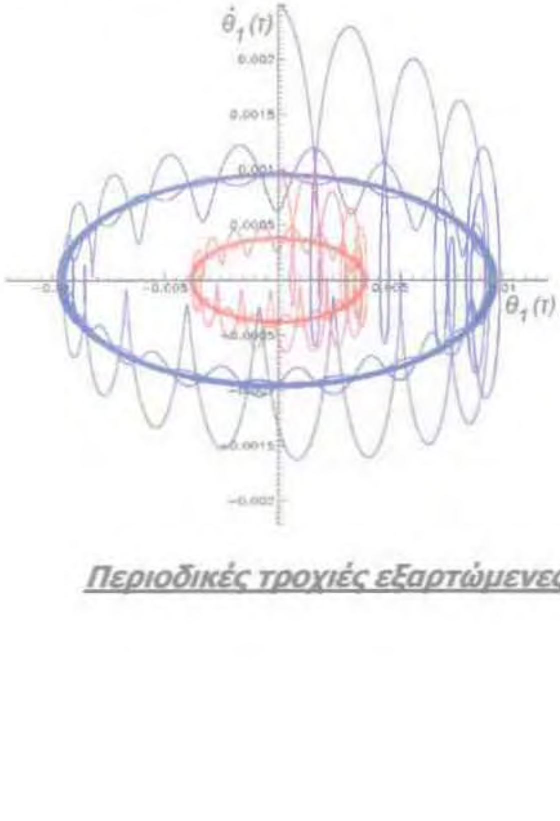
3. c_{22}=0.0057, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.0175, k=0.9273, λ=0.97, η=0.475, m=1

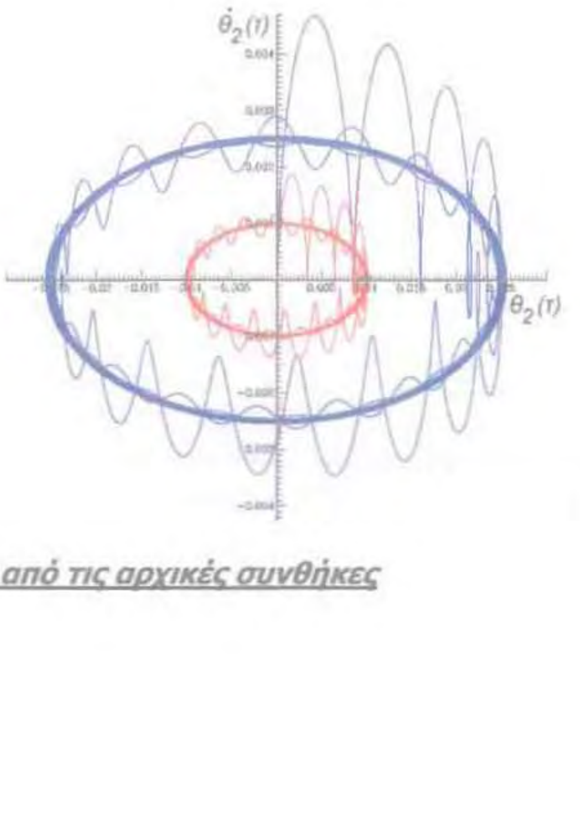




Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

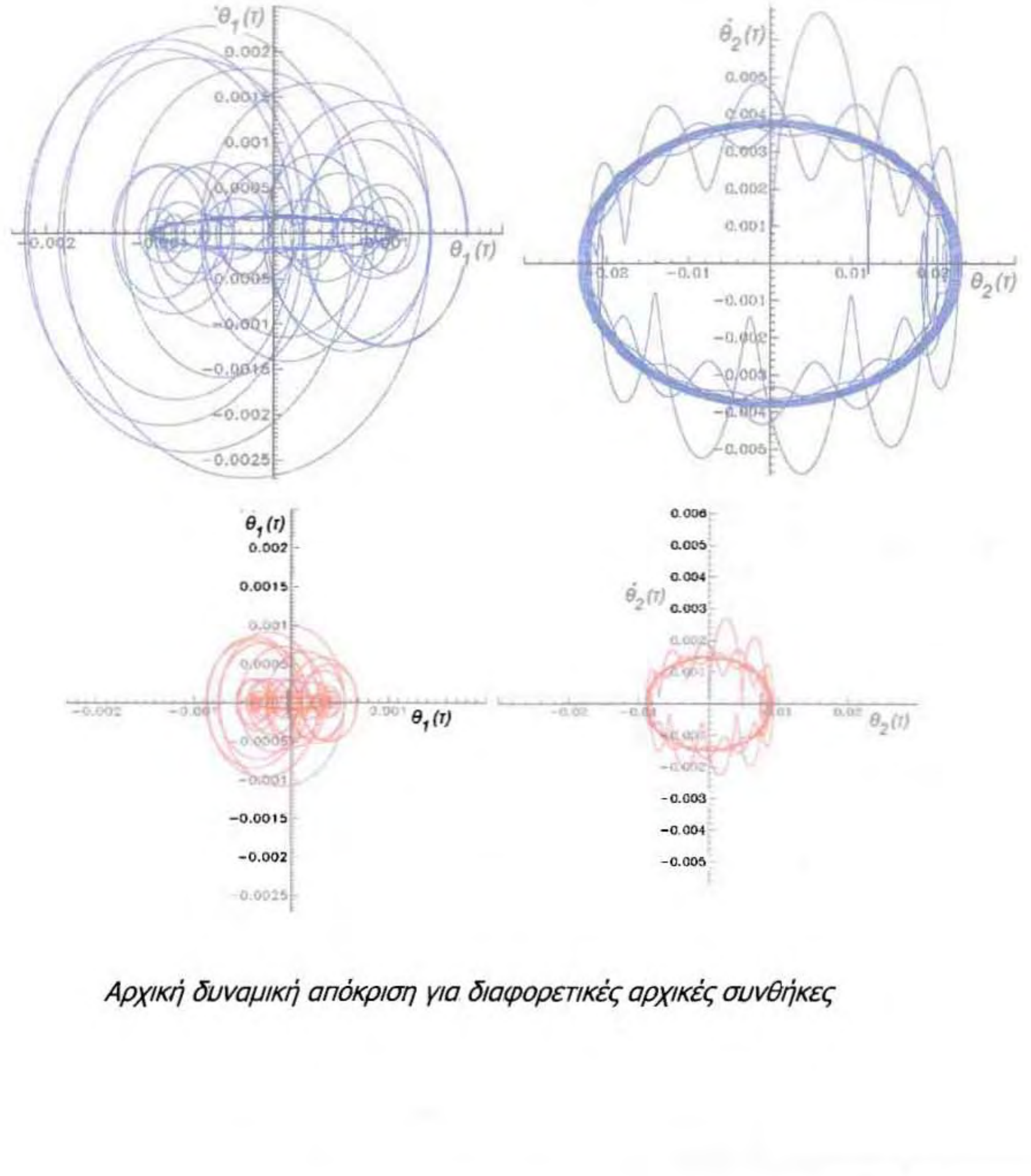
4. c_{22}=0.0041425, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.02414, k=1.18895, λ=1.275, η=0.475, m=1



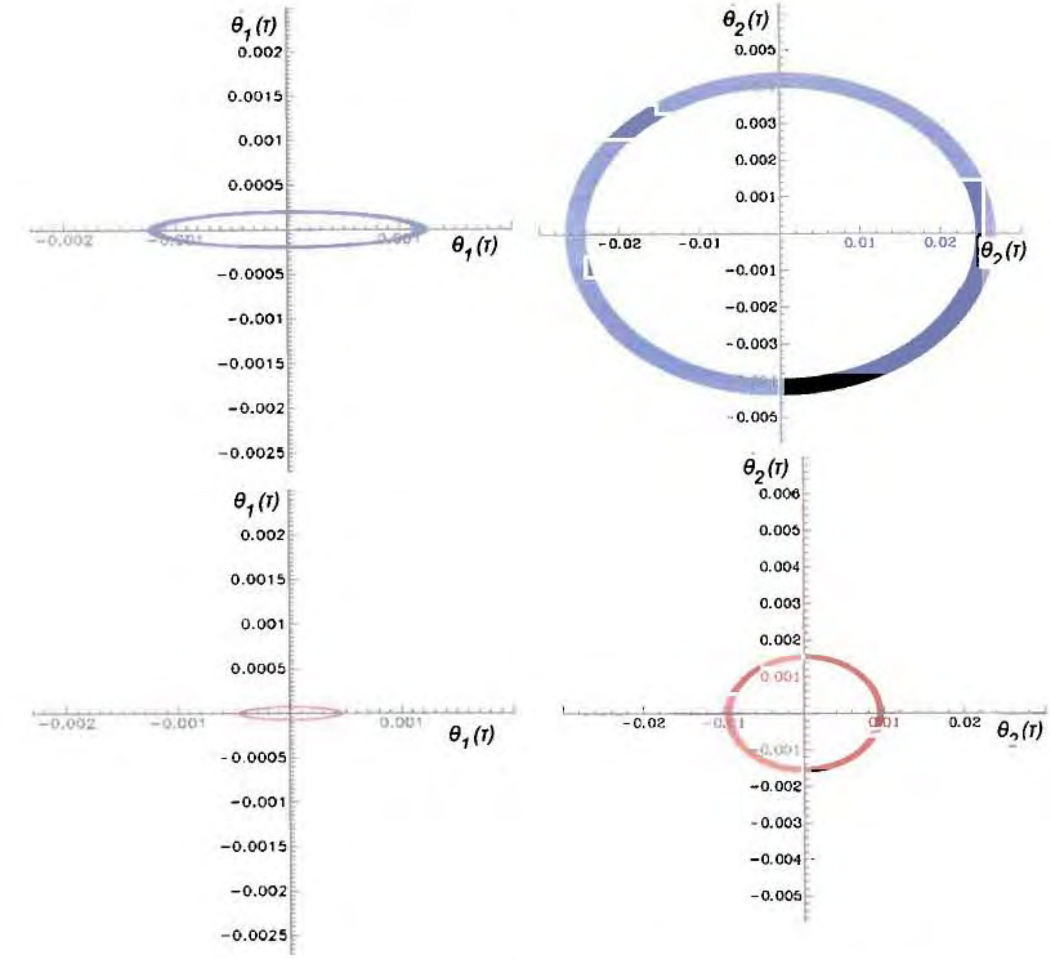


Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

5. c_{22}=0.0041425, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.02414, k=3.37703, λ=2.15, η=0.475, m=1

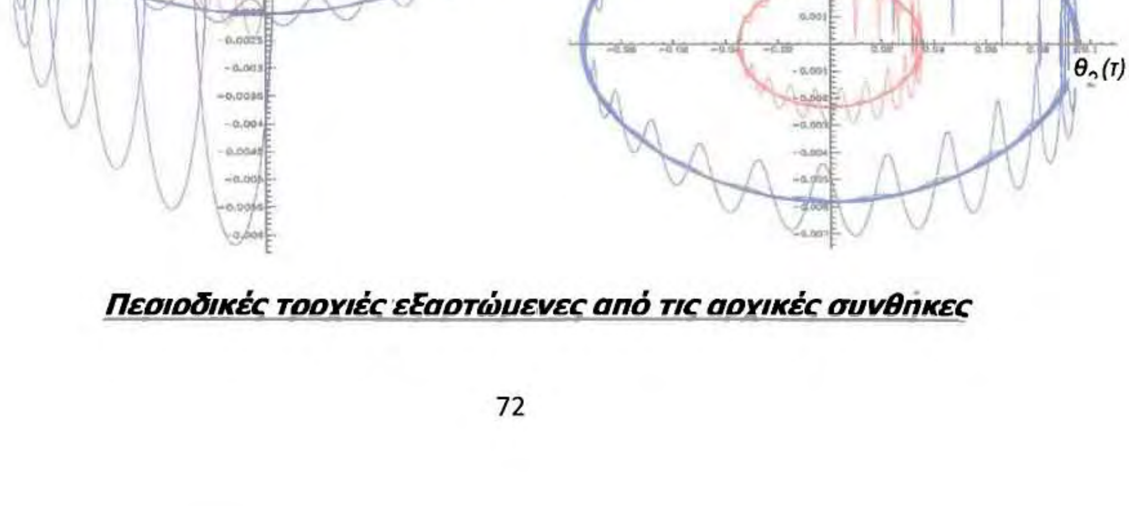


Αρχική δυναμική απόκριση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες



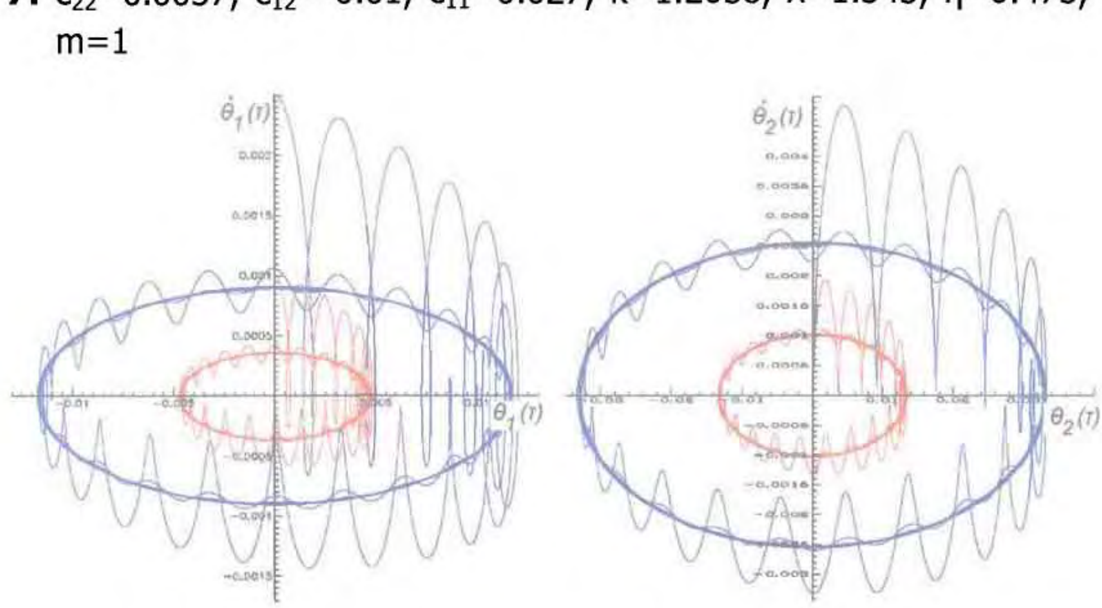
<u>Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες</u>

6. c_{22}=0.0037, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.027, k=4.966, λ=3.279, η=0.41, m=1



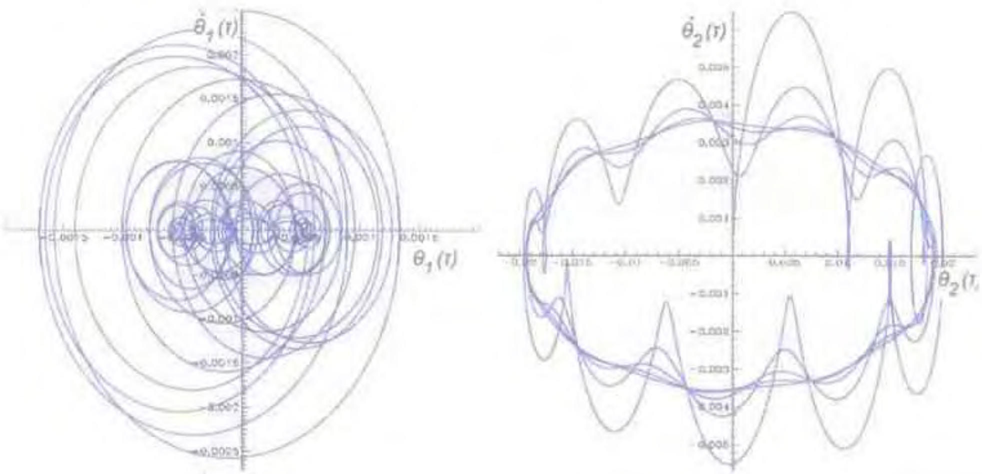
<u>Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες</u>

7. c_{22}=0.0037, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.027, k=1.2058, λ=1.345, η=0.475, m=1

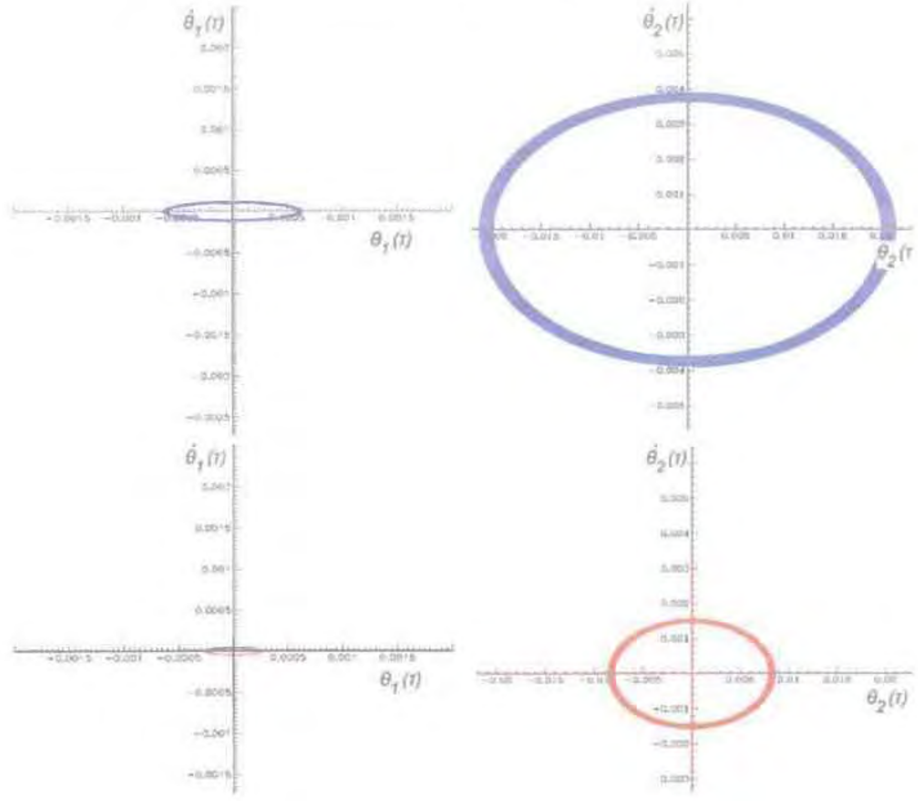


Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

8. c_{22}=0.0037, c_{12}=-0.01, c_{11}=0.027, k=3.505, λ=2.1, η=0.475, m=1

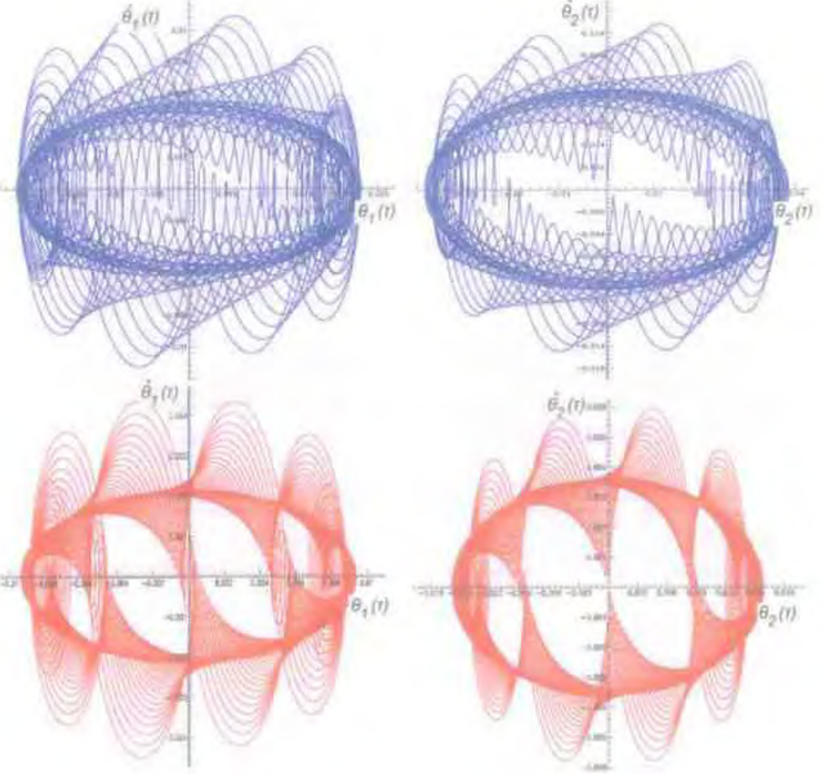


Αρχική δυναμική απόκριση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες



Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

9. c_{22}=0.0058, c_{12}=0.01, c_{11}=0.017, k=18.811, λ=8.975, η=0.175, m=1



Περιοδικές τροχιές εξαρτώμενες από τις αρχικές συνθήκες

3.5. Σχολιασμός Αποτελεσμάτων - Συμπεράσματα

Για όλες τις εξετασθείσες περιπτώσεις, η καθολική δυναμική απόκριση του συστήματος (προϊόν απευθείας αριθμητικής επίλυσης των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης) σχετίζεται είτε με αποκλίνουσα κίνηση (συνεχώς αυξανόμενου εύρους) είτε με περιοδικές τροχιές, το εύρος των οποίων εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Σε αμφότερα τα είδη των αποκρίσεων βρέθηκε ότι τουλάχιστον μια ιδιοτιμή του αντίστοιχου Ιακωβιανού μητρώου (δηλαδή του σημείου ισορροπίας του τετριμμένου δρόμου $\theta_1 = \theta_2 = 0$, που αντιστοιχεί στην επιλεγείσα τιμή του φορτίου) είχε θετικό πραγματικό μέρος. Αυτό άμεσα σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά ασυμπτωτικά ασταθές και μάλιστα πριν το πρώτο φορτίο λυγισμού τύπου απόκλισης, παραμένοντας όμως υπερβολικό (όλα τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του διάφορα του μηδενός), δηλαδή με σχετιζόμενο με τοπική διακλάδωση.

Ενδεικτικά παρατίθενται στη συνέχεια οι λίστες του Mathematica Notebook, που αντιστοιχούν σε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραβίασης των συνθηκών Liénard – Chipart, στις οποίες έχουν υπολογιστεί τόσο οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, όσο και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές.

```
ClearAll[m, λ, η, k, n0, a, V, c, z, s, c11, c12, c22, α1, α2, α3, α4, cc, Δ3, U]
c22 = 0.01;
c12 = 0.005;
c11 = 3.63338;
k = 2.5;
λ = 2.15;
η = 0.49475;
m = 35.1;
a = {{m + 1, 1}, {1, 1}};
V = {{k - λ + 1, -((η - 1)*λ) - 1}, {-1, 1 - η*λ}};
c = {{c11, c12}, {c12, c22}};
Print["Ορίζουσα Μητρώου Απόσβεσης"]
cc = Det[c]
s = a*ρ^2 + c*ρ + V;
U = Det[s];
Solve[U == 0, ρ]
Print["λc1="]
λc1 = (1/2)*(-Sqrt[(k + 2)^2 - (4*k)/η] + k + 2)
Print["n0="]
n0 = (4*k)/(k + 2)^2
Print["α1="]
α1 = FullSimplify[(c11 - 2*c12 + c22*m + c22)/m]
Print["α2="]
α2 = FullSimplify[(c11*c22 - c12^2 + k - λ*(m*η + 2) + m + 4)/m]
Print["α3="]
α3 = FullSimplify[(-(λ*(c11*η + c12*(-η) + c12 + c22)) + c11 + 2*c12 + c22*k +
c22)/m]
Print["α4="]
α4 = FullSimplify[Collect[(k*(-η)*λ + k + η*(λ - 2)*λ)/m, λ]]
```

Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ σης
0.0363088
{{ρ→-0.13289-0.15038 ™},{ρ→-
.13289+0.15038™},{ρ→0.00129149},{ρ→0.150973}}
λc1= 2.15283
n0= 0.493827
α1= 0.113515
α2= 1.4245×10^{-9}
α3= -0.00608043
α4= 7.85256×10^{-6}

```
ClearAll[m, λ, η, k, n0, a, V, c, z, s, c11, c12, c22, α1, α2, α3, α4, cc, Δ3, U]
c22 = 0.005;
c12 = 0.01;
c11 = 0.02;
k = 5.4;
λ = 3;
η = 0.4;
m = 17;
a = {{m + 1, 1}, {1, 1}};
V = {{k + 1 - λ, -1 - λ*(η - 1)}, {-1, 1 - η*λ}};
c = {{c11, c12}, {c12, c22}};
Print["Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ σης"]
cc = Det[c]
s = ρ^2*a + ρ*c + V;
U = Det[s];
Solve[U == 0, ρ]
Print["λc1="]
λc1 = (1/2)*(k + 2 - Sqrt[(k + 2)^2 - 4*(k/η)])
Print["n0="]
n0 = (4*k)/(k + 2)^2
Print["α1="]
α1 = FullSimplify[(c11 - 2*c12 + c22 + c22*m)/m]
Print["α2="]
α2 = FullSimplify[(4 - c12^2 + c11*c22 + k + m - (2 + m*η)*λ)/m]
Print["α3="]
α3 = FullSimplify[(c11 + 2*c12 + c22 + c22*k - (c12 + c22 + c11*η - c12*η)*λ)/m]
Print["α4="]
α4 = FullSimplify[Collect[(k - k*η*λ + η*(-2 + λ)*λ)/m, λ]]

Ορίζουσα*Μητρώου*Απόσβ σης
0.
{{ρ->-0.2062893844990259-0.20231041621854973 ™},{ρ->-
0.2062893844990259+0.20231041621854973
™},{ρ->0.20364232567549648-
0.2075620™},{ρ->0.20364232567549648+0.2075620 ™}}
λc1= 3.264110105645931
n0= 0.3944485025566107
α1= 0.005294117647058824
α2= -2.08983×10^-16
α3= 0.0008823529411764709
α4= 0.007058823529411771
```

```
ClearAll[m, λ, η, k, n0, a, V, c, z, s, c11, c12, c22, α1, α2, α3, α4, cc, Δ3, U]
c12 = -0.01;
c11 = 0.01;
m = 1;
λ = 0.55;
η = 0.37;
k = 0.407;
c22 = 0.01;
a = {{m + 1, 1}, {1, 1}};
V = {{k + 1 - λ, -1 - λ*(η - 1)}, {-1, 1 - η*λ}};
c = {{c11, c12}, {c12, c22}};
Print["Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ σης"]
cc = Det[c]
s = ρ^2*a + ρ*c + V;
U = Det[s];
Solve[U == 0, ρ]
Print["λc1="]
λc1 = (1/2)*(k + 2 - Sqrt[(k + 2)^2 - 4*(k/η)])
Print["n0="]
n0 = (4*k)/(k + 2)^2
Print["α1="]
α1 = FullSimplify[(c11 - 2*c12 + c22 + c22*m)/m]
Print["α2="]
α2 = FullSimplify[(4 - c12^2 + c11*c22 + k + m - (2 + m*η)*λ)/m]
Print["α3="]
α3 = FullSimplify[(c11 + 2*c12 + c22 + c22*k - (c12 + c22 + c11*η - c12*η)*λ)/m]
Print["α4="]
α4 = FullSimplify[Collect[(k - k*η*λ + η*(-2 + λ)*λ)/m, λ]]
```

Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ σης
0.
{{ρ→-0.0250434-2.0238 ™},{ρ→-0.0250434+2.0238 ™},{ρ→0.00004343 - 0.0842847™},{ρ→0.00004343 +0.0842847 ™}}
λc1=0.613235
n0=0.280997
α1=0.05
α2=4.1035
α3=-8.67362×10^{-19}
α4=0.0291005

```
ClearAll[m, λ, η, k, n0, a, V, c, z, s, c11, c12, c22, α1, α2, α3, α4, cc, Δ3, U]
c12 = -0.01;
c11 = 0.0175;
m = 1;
λ = 2.437;
η = 0.475;
k = 3.18058;
c22 = 0.0057;
a = {{m + 1, 1}, {1, 1}};
V = {{k + 1 - λ, -1 - λ*(η - 1)}, {-1, 1 - η*λ}};
c = {{c11, c12}, {c12, c22}};
Print["Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ  σης"]
cc = Det[c]
s = ρ^2*a + ρ*c + V;
U = Det[s];
Solve[U == 0, ρ]
Print["λc1="]
λc1 = (1/2)*(k + 2 - Sqrt[(k + 2)^2 - 4*(k/η)])
Print["n0="]
n0 = (4*k)/(k + 2)^2
Print["α1="]
α1 = FullSimplify[(c11 - 2*c12 + c22 + c22*m)/m]
Print["α2="]
α2 = FullSimplify[(4 - c12^2 + c11*c22 + k + m - (2 + m*η)*λ)/m]
Print["α3="]
α3 = FullSimplify[(c11 + 2*c12 + c22 + c22*k - (c12 + c22 + c11*η - c12*η)*λ)/m]
Print["α4="]
α4 = FullSimplify[Collect[(k - k*η*λ + η*(-2 + λ)*λ)/m, λ]]
Ορίζουσα Μητρώου Απόσβ  σης
-2.5×10^-7
{{ρ→-0.0244807-1.465 ™},{ρ→-0.0244807+1.465 ™},{ρ→0.00003 -0.0466919™},
{ρ→0.00003 +0.0466919 ™}}
λc1=2.47348
n0=0.474034
α1=0.0489
α2=2.149
α3=0
α4=0.00468038
```

Λόγω των τεράστιων μαθηματικών συνθηκών που προκύπτουν, δεν κατέστη δυνατόν να εξαντληθούν μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων όλοι οι συνδυασμοί των παραμέτρων, πλην όμως από όσες εξετάστηκαν προέκυψαν αναμενόμενες δυναμικές αποκρίσεις για μια μεγάλη γκάμα τιμών κατανομής της μάζας και της δυσκαμψίας του συστήματος.
Η συνθήκη μηδενισμού της Δ3 κατ' αρχήν εξετάστηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας χωρίς να παραχθούν συμβολικά συνθήκες λόγω περιορισμένης υπολογιστικής ισχύος των διατιθέμενων υπολογιστών.
Τέλος, φαίνεται πολύ δόκιμη η χρήση του προγράμματος Dynamics Solver, καθόσον παρέχει αξιόπιστο κώδικα και ταχέα αποτελέσματα χωρίς ιδιαίτερο κόπο από το χρήστη.
Ως πρόταση για μελλοντική έρευνα θεωρείται ο προσδιορισμός συνθηκών τοπικής αστάθειας για συντηρητικό φορτίο (συμπεριλαμβανομένης και της γενικής περίπτωσης μηδενισμού του) για το αντίστοιχο μοντέλο τριών βαθμών ελευθερίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- H. Ziegler, "Die Stabilitätskriterien der Eiastomechanik," *Ingenieur Archiv*, vol. 20, no. 1, pp. 49–56, 1952.
- F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, NY, USA, 1959.
- E. E. Zajac, "The Kelvin-Tait-Chetaev theorem and extensions," *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 11, no. 2, pp. 46–49, 1964.
- E. E. Zajac, "Comments on "stability of damped mechanical systems and a further extension"," *AIAA Journal*, vol. 3, no. 9, pp. 1749–1750, 1965.
- S. Nemat-Nasser, G. Herrmann, "Some general considerations concerning the destabilizing effect in nonconservative systems", *ZAMP*, vol. 17, pp. 305–313, 1966.
- T. Fuller, "Conditions for amatrix to have only characteristic roots with negative real parts," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 23, no. 1, pp. 71–98, 1968.
- S.H. Crandall, The role of damping in vibration theory, *J. Sound Vib.*, vol. 11, no.1, pp. 3–18, 1970.
- F. R. Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir, Moscow, Russia, 1970.
- L. A. Pipes and L. R. Harvill, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, International Student Edition, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, Japan, 3rd edition, 1970.
- Laneville and A. Mazouzi, "Wind-induced ovalling oscillations of cylindrical shells: critical onset velocity and mode prediction," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 10, no. 7, pp. 691–704, 1996.

- R. Sygulski, "Dynamic stability of pneumatic structures in wind: theory and experiment," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 10, no. 8, pp. 945–963, 1996.
- N. Kounadis, "Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 42, no. 1, pp. 24–35, 2007.
- D. S. Sophianopoulos, G. T. Michaltsos, A. N. Kounadis, "The effect of infinitesimal damping in the dynamic instability mechanism of conservative systems," *Mathematical Problems in Engjneering,* vol. 2008, article ID 471080.