

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*Γραμμικοποιημένη καμπτική ιδιοταλάντωση
χαλύβδινων γεφυρών μεγάλων ανοιγμάτων
με μικτό σύστημα καλωδίων*

Φοιτήτρια

Μαριάκη Ευφροσύνη

Επιβλέπων

Δημ. Σοφιανόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής

Βόλος, Μάρτιος 2009



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 7303/1
Ημερ. Εισ.: 09-07-2009
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2009
ΜΑΡ

Σκοπός και Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας

Μέσω της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας προτείνεται μεθοδολογία για την γραμμικοποιημένη ανάλυση του προβλήματος της ελεύθερης (και κατ' επέκταση της εξαναγκασμένης) καμπτικής ταλάντωσης χαλύβδινων γεφυρών μεγάλων ανοιγμάτων, τα οποία φέρουν μικτό σύστημα καλωδίων, δηλαδή αποτελούν συνδυασμό καλωδιωτής και κρεμαστής, με ότι αυτό συνεπάγεται.

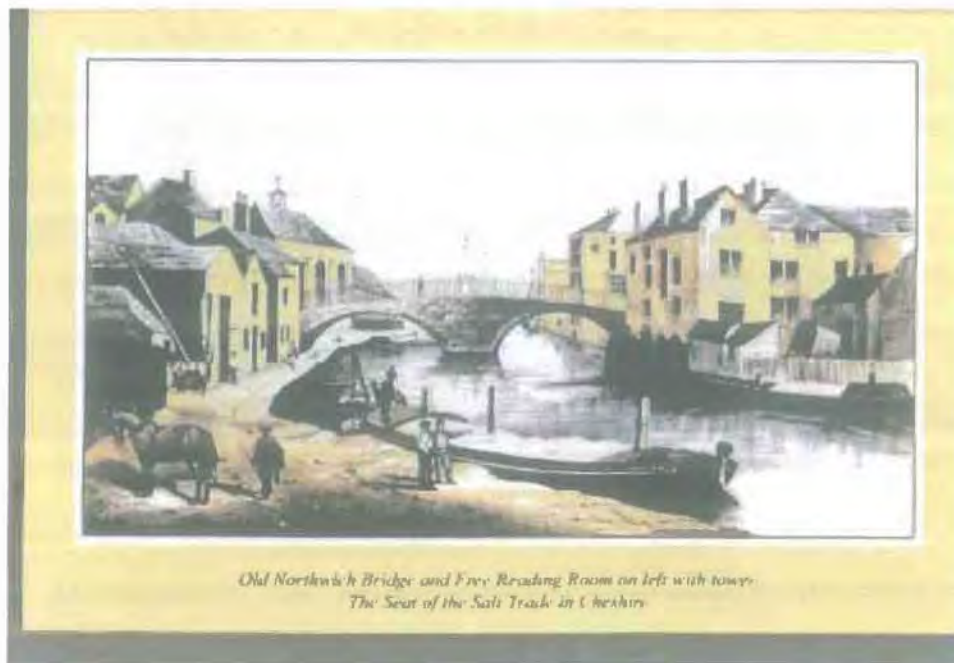
Μετά από γενική συνοπτική περιγραφική εισαγωγή περί γεφυρών του Κεφαλαίου 1 της παρούσας, στο 2^ο Κεφάλαιο αυτής δίδεται μια αναλυτική παρουσίαση της προτεινόμενης μεθόδου, η οποία βασίζεται στην καμπτική ιδιοταλάντωση συνεχών δοκών πολλών ανοιγμάτων, παρατίθενται οι βασικές μαθηματικές σχέσεις που την διέπουν και μέσω αριθμητικής εφαρμογής (με χρήση εμπορικού μαθηματικού λογισμικού) προκύπτουν ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα, των οποίων η ακρίβεια σε σχέση με την συνδυασμένη επιρροή των υπεισερχόμενων παραγόντων σχολιάζεται και εξάγονται συμπεράσματα, τα οποία μπορούν να οδηγήσουν σε μια πιο ακριβή σχετική εμπειριστατωμένη ανάλυση.

Η όλη εργασία συνοδεύεται από ενδεικτική Βιβλιογραφία και Παράρτημα, σχετικό με την εξαγωγή της εξίσωσης συχνότητας συνεχών δικών πολλών ανοιγμάτων.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Συνοπτικά περί Γεφυρών και των κυρίων
χαρακτηριστικών τους**

Η γέφυρα είναι μία τεχνική κατασκευή με την οποία επιτυγχάνεται ζεύξη δύο ή περισσότερων σημείων υπεράνω μεσολαβούντος εμποδίου (φυσικού ή τεχνικού). Οι γέφυρες συνήθως εξυπηρετούν συγκοινωνιακούς σκοπούς και εξασφαλίζουν τη συνέχεια μιας γραμμής επικοινωνίας, όπως μιας οδού (οδική γέφυρα), ενός σιδηροδρόμου, μιας ροής πεζών πάνω από ένα εμπόδιο.

Εκτός όμως απ' αυτούς, συχνά χρησιμοποιούνται και αλλού π.χ. για να περάσουν υδραγωγεία που μεταφέρουν νερό πάνω από ποταμούς, χαράδρες κλπ. Ανάλογες κατασκευές χρησιμοποιούνται επίσης για την εγκατάσταση μεγάλων πετρελαιοαγωγών, που μεταφέρουν τα πετρέλαια σε τεράστιες αποστάσεις από τον τόπο της εξόρυξης στον τόπο της κατεργασίας.



Old Northwich Bridge

Μεγάλη εφαρμογή βρίσκει επίσης η γεφυροποιία στην πολεοδομική για την αποσυμφόρηση της κυκλοφορίας. Έτσι, σε ορισμένα κεντρικά σημεία

των πόλεων, κατασκευάζονται γέφυρες στις οποίες κυκλοφορούν τα αυτοκίνητα, ενώ το κατάστρωμα του δρόμου μένει ελεύθερο για τους πεζούς.



Γέφυρα κινέζικης αρχιτεκτονικής

Από τα πανάρχαια χρόνια, η αποκατάσταση της συνέχειας μιας οδού πάνω από μια υδάτινη ροή αποτελούσε σημαντικό πρόβλημα. Έτσι, ο άνθρωπος αναγκάστηκε να το αντιμετωπίσει, δηλαδή να κατασκευάσει γέφυρες από τους προϊστορικούς ακόμα χρόνους. Επομένως, δεν είναι αφύσικο το γεγονός ότι οι κατασκευές γεφυρών συνδέθηκαν με θρύλους, θυσίες ή και ανθρωποθυσίες. Πολλές είναι και οι γέφυρες οι οποίες τραγουδήθηκαν ή έγιναν αντικείμενα παράδοσης.



Bosnia - Mostar – παλιά γέφυρα

Η ονομασία των γεφυρών συχνά συνδυάζεται με τοπωνυμία της θέσης της γέφυρας, με τον κατασκευαστή και κάποτε με τον πολιτικό ή στρατιωτικό ηγέτη που διέταξε την κατασκευή της ή με το εμπόδιο που γεφυρώνεται.



Το γεφύρι της Άρτας

Οι πρώτες τεχνητές γέφυρες κατασκευάστηκαν από τον άνθρωπο με δύο τρόπους:

α) με την τοποθέτηση μεγάλων, επίπεδων λίθων, πάνω από τις φυσικές ροές.

β) με μεγάλους κορμούς δέντρων, που γεφύρωναν μικρά ρεύματα. Σχετικά σύντομα θα έγινε αντιληπτό ότι η τοποθέτηση δύο ή και περισσότερων κορμών δεμένων μεταξύ τους με σχοινιά έδινε μια πολύ πιο αποτελεσματική κατασκευή. Και οι δύο τρόποι παρείχαν ιδιαίτερα περιορισμένες δυνατότητες.

Οι άνθρωποι που ζούσαν στους λιμναίους οικισμούς αντιλήφθηκαν πρώτοι τη δυνατότητα που προσέφεραν τα φυσικά σχοινιά. Η πλέξη αυτών των φυσικών σχοινιών οδήγησε στην κατασκευή των πρώτων κρεμαστών γεφυρών. Ο άνθρωπος της νεολιθικής εποχής πιστεύεται ότι το 4.000 π.Χ. ήταν ήδη ώριμος να μιμηθεί τα φυσικά τόξα. Έτσι, επεξεργάζεται μεγάλους λίθους και τους τοποθετεί σε μορφές τόξων.

Πολύ πιο πρόσφατα, από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, χρησιμοποιήθηκε στη γεφυροποιία και ο σίδηρος, αρχικά ως χυτοσίδηρος, αλλά πολύ πιο γρήγορα ως χάλυβας. Οι πολύ υψηλές αντοχές του χάλυβα

επέτρεψαν, ήδη από το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα, την κατασκευή γεφυρών πολύ μεγάλων ανοιγμάτων. Σημαντικότερη επίδραση στη γεφυροποιία άσκησε η ανάπτυξη του σιδηροδρόμου. Είναι βέβαιο ότι η ανάπτυξη της γεφυροποιίας και του σιδηροδρόμου αλληλοστηρίχθηκαν και συμβάδισαν χρονικά.

Περίπου στο τέλος του 19^{ου} αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} ένα νέο υλικό χρησιμοποιήθηκε, το οπλισμένο σκυρόδεμα. Το υλικό αυτό και η χρονικά παράλληλη εμφάνιση και ανάπτυξη του αυτοκινήτου έδωσαν νέα σημαντική ώθηση στην ανάπτυξη της γεφυροποιίας.



Παλιά γέφυρα στην Κόνιτσα

Τα κύρια μέρη κάθε γέφυρας είναι δύο: τα *βάθρα* και το *κατάστρωμα*. Η κατασκευή των βάθρων προϋποθέτει τη θεμελίωση, που συχνά είναι και το δυσκολότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι γεφυροποιοί, επειδή σε πολλές περιπτώσεις πρέπει να κατασκευαστούν τα θεμέλια στην αμμώδη κοίτη μεγάλων ποταμών με ορμητικά νερά ή στον πυθμένα της θάλασσας, γεγονός που εγκυμονεί ακόμα μεγαλύτερους κινδύνους αλλά και δημιουργεί υψηλότερες προκλήσεις στην επιστήμη του Μηχανικού.

Τα νεότερα τεχνικά μέσα δίνουν σήμερα στους τεχνικούς αρκετές δυνατότητες για σχετικά εύκολη κατασκευή, έτσι, ώστε αυτοί να δημιουργούν

έργα άξια θαυμασμού. Πολλές φορές όμως είναι άξιοι μεγαλύτερου ακόμη θαυμασμού οι γεφυροποιοί των αρχαίων και μέσων χρόνων, γιατί με τα ατελή τεχνικά μέσα που διέθεταν και με τα μικρής αντοχής υλικά που χρησιμοποιούσαν κατάφεραν να κατασκευάσουν γέφυρες που ακόμη και σήμερα η κατασκευή τους θεωρείται δύσκολη.

Διακρίνουμε τις γέφυρες, ανάλογα με το υλικό που χρησιμοποιείται για την κατασκευή τους, σε ξύλινες, πέτρινες, χαλύβδινες, από σκυρόδεμα ή και σύμμικτες. Οι ξύλινες είναι και οι αρχαιότερες. Άλλη διάκριση των γεφυρών είναι σε σταθερές και κινητές. Οι κινητές γέφυρες κατασκευάζονται συνήθως σε σημεία στα οποία το έδαφος δε βρίσκεται πολύ πάνω από την επιφάνεια του νερού, οπότε δεν υφίσταται εκ των πραγμάτων δυνατότητα αρκετής υψομετρικής διαφοράς μεταξύ της στάθμης των υδάτων και του κάτω μέρους της κατασκευής, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η διέλευση πλωτών κάτω από αυτή. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η γέφυρα εξ ανάγκης αποτελείται από δύο κινητά τμήματα. Όταν είναι "κλειστή", τα δύο αυτά τμήματα είναι ενωμένα συνήθως στη μέση του ποταμού, της διώρυγας κλπ. και μπορούν έτσι να περάσουν πεζοί, τροχοφόρα κλπ. Όταν πρόκειται να περάσει πλοίο, η γέφυρα "ανοίγει" και τα δύο αυτά κομμάτια διαχωρίζονται.

Η βασική κατάταξη των γεφυρών όμως σχετίζεται με το στατικό σύστημα και τη μορφή των κυρίων φορέων αλλά και τη διατομή του καταστρώματος. Ιδιαίτερα σε ότι αφορά τις χαλύβδινες γέφυρες (που αποτελούν το κατ' εξοχήν αντικείμενο της παρούσας εργασίας) αυτές διακρίνονται σε τοξωτές (arch bridges), κλειστής κιβωτοειδούς διατομής (box girder bridges), καλωδιωτές (cable-stayed bridges) και κρεμαστές (suspended bridges).

ΚΡΕΜΑΣΤΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

Οι κρεμαστές γέφυρες, οι οποίες υπό στοιχειώδη βεβαίως μορφή, χρησιμοποιούνται από αρχαιοτάτων χρόνων για την γεφύρωση μικρών ανοιγμάτων, μπορούν να θεωρηθούν ότι ανήκουν στην κατηγορία των αρχαιότερων στατικών μορφών της γεφυροποιίας. Η χρησιμοποίησή τους σταμάτησε προσωρινά το 1940, μετά την κατάρρευση της γέφυρας της

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

Tacoma. Έκτοτε, άρχισε θεωρητική και πειραματική έρευνα, που ανέδειξε τα αίτια της κατάρρευσης και προσέφερε γνώση που επέτρεψε την κατασκευή γεφυρών με ακόμη μεγαλύτερα ανοίγματα!



The Golden Gate Bridge (ΗΠΑ)

Οι κρεμαστές γέφυρες θεωρούνται ασυναγώνιστες οικονομικά για ανοίγματα μεγαλύτερα των 450 μέτρων, ενώ από τα 700 και άνω, αποτελούν την μοναδική λύση. Σήμερα, ανοίγματα 1.300 έως 1.500 μέτρων θεωρούνται συνήθη.



The Tsing Ma Bridge (ΚΙΝΑ)

Η κρεμαστή γέφυρα αποτελείται από τρία κυρίως μέρη: τους πυλώνες που στηρίζουν το βάρος της, ένα κατάστρωμα που τοποθετείται πάνω στους πυλώνες και τα καλώδια που σηκώνουν το βάρος του καταστρώματος και είναι στερεωμένα πάνω στους πυλώνες και σε δυο αντίβαρα εκατέρωθεν της γέφυρας. Η κρεμαστή γέφυρα είναι ένα είδος γέφυρας, όπου τα κύρια φέροντα στοιχεία είναι αναρτημένα από τα καλώδια ανάρτησης.

Στις πρωταρχικές απόπειρες κατασκευής κρεμαστών γεφυρών τα ανοίγματα τους ήταν πολύ μικρά, το σχήμα τους τοξοειδές ενώ παράλληλα τα άκρα τους στηρίζονταν σε δύο ψηλά σημεία (π.χ. στις όχθες ενός ποταμού) με αποτέλεσμα οι γέφυρες να είναι προσβάσιμες μόνο από τους πεζούς, γεγονός που τις καθιστούσε ακατάλληλες για τις σύγχρονες συγκοινωνιακές απαιτήσεις.



The Akashi Kaikyo Bridge (ΙΑΠΩΝΙΑ)



The Akashi Kaikyo Bridge (ΙΑΠΩΝΙΑ)

Η μεγάλη εξέλιξη στα υλικά και στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό οδήγησαν στην αξιοθαύμαστη ανάπτυξη των κρεμαστών γεφυρών, με μεγάλα ανοίγματα, ικανών να μεταφέρουν ικανοποιητικό αριθμό αυτοκινήτων καθώς και σιδηροδρόμους. Στην αρχή το κατάστρωμα είχε τοξοειδές σχήμα, με την πάροδο όμως του χρόνου καθιερώθηκε τα κύρια συρματοσχοινα να αναρτώνται ανάμεσα σε πυλώνες, και προστέθηκαν τα κατακόρυφα καλώδια τα οποία αναλαμβάνουν το βάρος του καταστρώματος, πάνω από το οποίο διέρχονται τα οχήματα. Αυτό το κατόρθωμα επέτρεψε το σχήμα του καταστρώματος να είναι επίπεδο ή ελαφρώς τοξοειδές.



The Humber Bridge (ΗΝΩΜΕΝΟ ΒΑΣΙΛΕΙΟ)

Τα καλώδια ανάρτησης πρέπει να πακτώνονται σε κάθε άκρο της γέφυρας, καθώς κάθε φορτίο που επιβάλλεται στη γέφυρα μεταφέρεται ως δύναμη στα κύρια καλώδια. Τα κύρια καλώδια επίσης, συνεχίζουν κάτω από τους πυλώνες που στηρίζουν το επίπεδο κατάστρωμα, και επιπλέον συνεχίζουν μέχρι να πακτωθούν στο έδαφος.



Bay Bridge-San Francisco (California)



Σκαρίφημα κρεμαστής γέφυρας τριών ανοιγμάτων

Η πιο γνωστή κρεμαστή γέφυρα αυτού του τύπου είναι η Γέφυρα της Χρυσής Πύλης στο Σαν Φραντσίσκο (Golden Gate Bridge, CA).

Ε. Μαριάκη
Διπλωματικὴ Ἐργασία



The Jiangyin Bridge (ΚΙΝΑ)

Οι αρχές στο Dubai είναι έτοιμες να κατασκευάσουν την μεγαλύτερη κρεμαστή – τοξωτή γέφυρα στον κόσμο με 1700m μήκος και 200m ύψος, η οποία θα είναι έτοιμη το 2012 και θα στοιχήσει μόλις 817 εκατομμύρια δολάρια...!!!



Τρισδιάστατο μοντέλο της μελλοντικής κρεμαστής – τοξωτής γέφυρας

ΚΑΛΩΔΙΩΤΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

Οι καλωδιωτές γέφυρες έγιναν γνωστές, σε πρωτόγονη σχετικά μορφή, από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα. Παρά ταύτα, το ενδιαφέρον γι'αυτές έγινε ιδιαίτερα μεγάλο τα τελευταία 50 χρόνια, κυρίως σαν μία εναλλακτική και φθηνότερη λύση (για μεσαία ανοίγματα 150 έως 600m), των κρεμαστών γεφυρών, αλλά και σαν μία ιδιαίτερα αποδεκτή αισθητικά φόρμα.



Pont de Normandie (Γαλλία)

Οι κυριότερες αιτίες, που συντέλεσαν στον επί τόσο χρόνο παραγκωνισμό των φορέων αυτών ήταν οι σημαντικές δυσκολίες στην στατική και δυναμική ανάλυση τους, οι διάφορες μη γραμμικότητες υλικών, αλλά και στατικών μορφών, ο απαιτούμενος ιδιαίτερος υπολογιστικός φόρτος, η έλλειψη υλικών υψηλής αντοχής, αλλά και η έλλειψη μέσων και τεχνικών ανεγέρσεως.

Από στατικής άποψης οι καλωδιωτές γέφυρες χαρακτηρίζονται και διαιρούνται σε τρεις κατηγορίες, αναλόγως του τρόπου αναρτήσεως των καλωδίων ως εξής:

1. ***Το ακτινικό σύστημα, του οποίου το κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι τα καλώδια συντρέχουν και αγκυρώνονται στο ίδιο σημείο του πυλώνα.***
2. ***Το παράλληλο σύστημα, όπου τα καλώδια είναι παράλληλα μεταξύ τους.***
3. ***Το σύστημα άρπας, όπου τα καλώδια δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, αλλά αγκυρώνονται σε ίσες αποστάσεις τόσο επί του πυλώνα, όσο και επί του καταστρώματος.***



The Tatara Bridge (Japan)

Τι σημαίνει καλωδιωτή γέφυρα: Δύο βάθρα και μια δοκός αποτελούν την απλούστερη μορφή γέφυρας. Με τα σημερινά δεδομένα, με αυτή τη μέθοδο μπορεί να επιτευχθεί μέγιστο ενιαίο άνοιγμα 250 μέτρων. Ανάλογα όμως με τις ανάγκες, προστίθενται βάθρα και δοκοί που σχηματίζουν μια συνεχή

οδογέφυρα χωρίς να υπάρχει περιορισμός ως προς το μήκος. Η μεγαλύτερη γέφυρα αυτού του τύπου βρίσκεται στη λίμνη Ponchartrain στις ΗΠΑ, με συνολικό μήκος 38 χλμ.

Μια άλλη παραδοσιακή τεχνική συνίσταται στην ανάρτηση της γέφυρας σε δύο καλώδια που είναι αγκυρωμένα στις δύο άκρες της. Το αποτέλεσμα είναι μια εύκαμπτη κατασκευή που συχνά χρησιμοποιείται σε φαράγγια μεγάλου βάθους, όπου είναι αδύνατη η ανέγερση βάθρων. Τον 19ο αιώνα διερευνήθηκε η δυνατότητα γεφύρωσης μεγαλύτερων ανοιγμάτων και επινοήθηκε η ανάρτηση των καλωδίων από τις κορυφές πυλώνων για τη δημιουργία κρεμαστών γεφυρών. Με την τεχνική αυτή επιτυγχάνεται το μεγαλύτερο εφικτό ενιαίο άνοιγμα. Τα πρωτεία σε αυτό το είδος κατέχει η γέφυρα Akashi Kaikyo στην Ιαπωνία, με ενιαίο άνοιγμα μήκους 1.991 μέτρων.



The Sutong Bridge (China)

Όταν όμως δεν είναι εφικτή η επαρκής αγκύρωση στα δύο άκρα ή ακόμα και για οικονομικούς λόγους, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνική της καλωδιωτής γέφυρας που αναπτύχθηκε στην Ευρώπη τη δεκαετία του '60. Το

κατάστρωμα αναρτάται από τους πυλώνες με καλώδια ανάρτησης κατά ισορροπημένο και αισθητικά άρτιο τρόπο.

Δεδομένου ότι η ισορροπία της κατασκευής βασίζεται σε κάθε πυλώνα χωριστά, οι καλωδιωτές γέφυρες μπορούν κάλλιστα να έχουν έναν, δύο ή περισσότερους πυλώνες, όπως η καλωδιωτή Γέφυρα Ρίου - Αντίρριου που διαθέτει τέσσερις πυλώνες.



Καλωδιωτή Γέφυρα Ρίου - Αντιρρίου

Η σύγκριση της Γέφυρας **Ρίου-Αντίρριου** με άλλες γνωστές γέφυρες σε όλο τον κόσμο καταδεικνύει το μέγεθος του έργου αυτού. Η γέφυρα Tatara στην Ιαπωνία και η γέφυρα της Νορμανδίας στη Γαλλία είναι καλωδιωτές γέφυρες με τα μεγαλύτερα ανοίγματα στον κόσμο (890 μέτρα και 856 μέτρα αντιστοίχως). Με βασικό άνοιγμα 560 μέτρων, η Γέφυρα Ρίου-Αντίρριου κατατάσσεται στην πρώτη δεκάδα των καλωδιωτών γεφυρών με το μεγαλύτερο άνοιγμα. Ωστόσο, οι 4 πυλώνες της (σε σύγκριση με τους 2 που χρησιμοποιούνται συνήθως) την καθιστούν τη καλωδιωτή γέφυρα με το μεγαλύτερο αναρτημένο κατάστρωμα (2.252 μέτρα) στον κόσμο. Αυτό το εντυπωσιακό μήκος καταστρώματος ξεπερνά ακόμα και το συνολικό

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

μήκος καταστρώματος της πασίγνωστης κρεμαστής γέφυρας Golden Gate
(1.966 μέτρα).



Third Nanjing Yangtze Bridge (China)

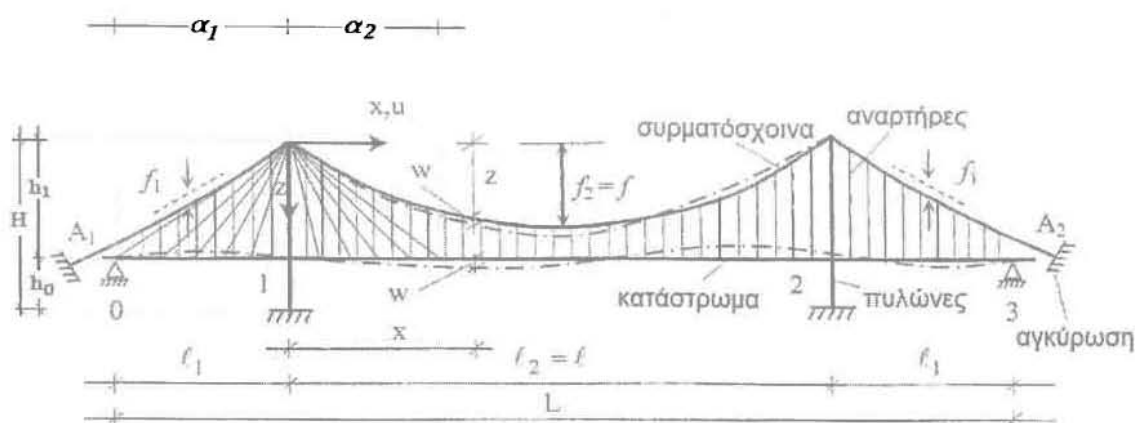
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Χαλύβδινη Γέφυρα Μεικτού Συστήματος Καλωδίων : **Γραμμικοποιημένη Δυναμική Ανάλυση**

2.1. Περιγραφή του προβλήματος

Η συνηθέστερη φόρτιση μιας γέφυρας κατά μήκος του ανοίγματος της είναι κατ' εξοχήν δυναμική, καθόσον πρόκειται για τα κινούμενα φορτία είτε αυτοκίνητα είτε σιδηρόδρομοι. Αν ο φορέας της γέφυρας δεν διαθέτει επιπρόσθετα χαρακτηριστικά (όπως καλώδια) κάλλιστα η δυναμική της απόκριση έναντι κινούμενων φορτίων μπορεί να προσομοιωθεί με αυτή μιας δοκού ενός ή περισσοτέρων ανοιγμάτων υπό σημειακά φορτία ή συρμούς κινούμενα με σταθερή ταχύτητα. Στη συνέχεια δε μπορεί να υπάρξουν και περισσότερο εξεζητημένες προσομοιώσεις τριών διαστάσεων τόσο για τη γέφυρα όσο και για τα οχήματα (μοντέλα οχημάτων πολλών βαθμών ελευθερίας με μάζες και απόσβεση), ενώ επίσης έχει κατά κόρον μελετηθεί και η επιρροή διαφόρων άλλων παραγόντων όπως αδρανειακές δυνάμεις, τραχύτητα καταστρώματος, αλληλεπίδραση οχήματος-καταστρώματος κλπ. Πλην όμως, χωρίς την «εισαγωγική» μελέτη της γραμμικοποιημένης ελεύθερης (και μετέπειτα) εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε δύο διαστάσεις καμιά από τις παραπάνω αναλύσεις δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί απ' ευθείας. Τούτο καθόσον για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς απαιτείται η γνώση των ιδιοσυχνοτήτων και των συναρτήσεων σχήματος, χωρίς την οποία είναι ανέφικτη η προσπάθεια περαιτέρω σε βάθος ανάλυσης.

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας εξειδικεύεται στον υπολογισμό των ως άνω χαρακτηριστικών για χαλύβδινες γέφυρες μεγάλων ανοιγμάτων με μικτό σύστημα καλωδίων, πρόβλημα το οποίο δεν έχει ακόμα διεξοδικά απασχολήσει τους μελετητές, αλλά και να καταδείξει τη μεθοδολογία εκείνη για την περαιτέρω ανάλυση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης υπό συρμό απείρου μήκους (που προσομοιάζει σιδηρόδρομο).

Θεωρούμε συνεπώς μια γέφυρα μικτού συστήματος καλωδίων, μορφή της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα 1, όπου είναι σημειωμένη η γεωμετρία και η σύμβαση προσήμων για την ανάλυση που θα ακολουθήσει.



Σχήμα 1

Η όλη ανάλυση βασίζεται στις ακόλουθες απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες έχουν καταξιωθεί από τη διεθνή σχετική βιβλιογραφία:

(α) Το σύστημα ανάρτησης δεν επηρεάζεται από την οριζόντια μετατόπιση της κορυφής των πυλώνων, λόγω του γεγονότος ότι τα καλώδια κινούνται κυλιόμενα σε ειδικές (πρακτικά χωρίς τριβή) στηρίξεις-σέλες.

(β) Θεωρούμε ότι τα καλώδια και οι αναρτήρες βρίσκονται σε αρκούντως πυκνή διάταξη, με συνέπεια η επιρροή τους να είναι δυνατόν να αντικατασταθεί από ένα κατάλληλα υπολογισμένο φορτίο.

(γ) Λόγω της προηγούμενης παραδοχής, και αμελώντας την επιμήκυνση των αναρτήρων, την οφειλόμενη σε ίδια βάρη φορτία λειτουργίας, μπορεί να υποθεθεί ότι οι παραμορφώσεις $w(x)$ του καταστρώματος ισούνται με αυτές των καλωδίων, σύμφωνα με το Σχήμα 1.

(δ) Το κατάστρωμα της γέφυρας κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του εδράζεται απλά επί των πυλώνων, χωρίς οποιαδήποτε άλλη σύνδεση με αυτούς. Άρα, το κατάστρωμα μπορεί να θεωρηθεί σαν μία συνεχής δοκός τριών ανοιγμάτων υπό την επιρροή των εφελκυστικών δράσεων των καλωδίων και των αναρτήρων.

(ε) Λόγω μόνο του ιδίου βάρους η (αρχική) παραμόρφωση τόσο του καταστρώματος όσο και των πυλώνων είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα τα καλώδια εντείνονται από τις αξονικές δυνάμεις P_{ig} , οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν μέσω θεμελιώδους στατικής ανάλυσης.

Για την περίπτωση της δυναμικής απόκρισης του όλου συστήματος θα ισχύει ότι:

$$P_i = P_{ig} + P_{id},$$

όπου P_{ig} σταθερό μέγεθος (σύμφωνα με την 1.5) προϊόν στατικής ως άνω ανάλυσης- ενώ οι $P_{id} = P_i F(t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενες δυνάμεις, που αποτελούν το δυναμικά εξαρτώμενο μέρος των P_i . Καθόσον δε ισχύει ότι $p < g$ (δηλαδή, ότι τα δυναμικά φορτία λόγω κινουμένων οχημάτων είναι αρκούντως μικρότερα των αντίστοιχων στατικών φορτίων λόγω κύρια ίδιου βάρους του συστήματος) θα ισχύει αντίστοιχα ότι $P_{id} < P_{ig}$. Κατά συνέπεια οι P_{id} μπορεί να είναι είτε θετικές είτε αρνητικές μέχρι την τιμή των P_{ig} , δηλ. $|P_{id}| \leq P_{ig}$.

(στ) Όπως είναι γνωστό, η συμπεριφορά των καλωδίων υπό αξονικά φορτία είναι μη γραμμική, λόγω της δράσης του ίδιου βάρους τους. Εντός των πλαισίων της παρούσης δυναμικής ανάλυσης θεωρείται ότι η αρχική τάση σ_g των καλωδίων αντιστοιχεί στην αρχική παραμορφωσιακή κατάσταση λόγω του ίδιου βάρους g οπότε, δυνάμεθα να υιοθετήσουμε το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας αντί εκείνου που δίδεται από την σχέση του Dischinger:

$$\bar{E} = E / [1 + ((E * \gamma^2 * \ell_0^2) / (12 * \sigma_0^3))]]$$

(ζ) Αγνοείται η τραχύτητα του καταστρώματος, καθόσον η επιρροή της επί της δυναμικής απόκρισης (της ταλάντωσης) της γέφυρας είναι αμελητέα, καθόσον πρόκειται περί γεφυρών μεγάλων ανοιγμάτων (όπως οι καλωδιωτές και οι κρεμαστές).

(η) Η όλη ανάλυση που ακολουθεί είναι δισδιάστατη, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη η αξονική δύναμη των πυλώνων.

2.2. Μαθηματική Ανάλυση

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι υπό την δράση του ίδιου βάρους και των φορτίων λειτουργίας η παραμόρφωση του καταστρώματος χαρακτηρίζεται υπό την προσδιοριστέα συνάρτηση $w(x)$.

2.2.1. Φορτία καλωδίων και αναρτήρων

2.2.1α Το σύστημα των καλωδίων

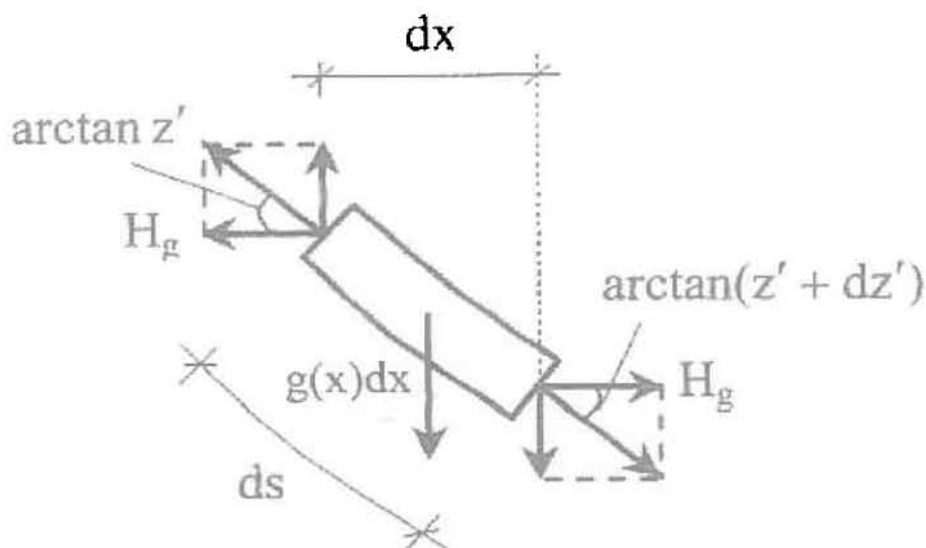
Λόγω της αρχικής παραμόρφωσης του καταστρώματος $w(x)$ τα καλώδια εντείνονται. Έχει αποδειχθεί^[1,2,3] ότι για πυκνή διάταξη καλωδίων, σε μία απόσταση dc αυτά μπορεί να αντικατασταθούν από ένα κατανεμημένο φορτίο $q_c(x)$, που για ένα ακτινικό σύστημα (όπως του σχήματος 1) δίνεται από την ακόλουθη έκφραση, (ανάλογες σχέσεις ισχύουν για ένα παράλληλο σύστημα ή ένα σύστημα τύπου άρπας^[4]):

$$q_c(x) = F_1(x) * w(x) - F_2(x) * \int_{a1}^{a2} F_3 * w(x) dx \quad (1)$$

όπου F_1, F_2, F_3 είναι γνωστές συναρτήσεις του x , που εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της γέφυρας και το υλικό της κατασκευής της.

2.2.1β Το σύστημα ανάρτησης

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες κομμάτι dx του κύριου καλωδίου ανάρτησης, το οποίο φορτίζεται από τις δυνάμεις που επενεργούν στο πυκνό δίκτυο παράλληλων αναρτήρων, σύμφωνα με το Σχήμα 2, οι δε φορτίσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν μέσω ενός κατανεμημένου φορτίου $p(x)$.



Σχήμα 2

Αν η μορφή του καλωδίου ανάρτησης είναι παραβολική (γεγονός που κατά τεκμήριο ισχύει), δηλαδή αν:

$$z(x) = \left(4f / \ell^2\right) * x * (\ell - x) \quad (2)$$

η ισορροπία των μεν οριζοντίων δυνάμεων (Σχήμα 1) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$S_H = \text{σταθερό} \quad (3)$$

ενώ αυτή των κατακόρυφων δυνάμεων δίδει:

$$p(x) * dx - S_H * z' + S_H * (z' + dz') = 0$$

που τελικά γράφεται ως:

$$p(x) = -S_H * z'' \quad (4)$$

Επιπρόσθετα, τα καλώδια ανάρτησης ναι μεν παραμορφώνονται, πλην όμως λόγω της αγκύρωσης τους στα σημεία A1 κ A2 (βλ. Σχ1) είναι ακλόνητα, οπότε η οριζόντια προβολή της εν λόγω

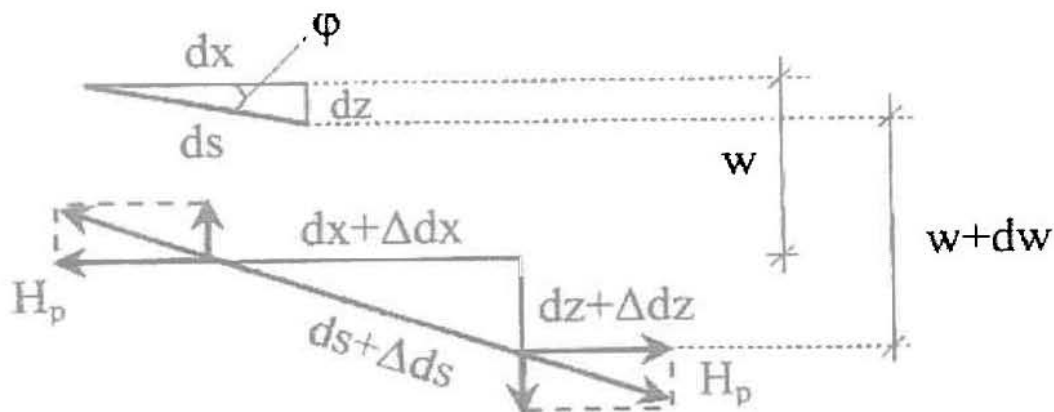
$$\text{παραμόρφωσης του ισούται με μηδέν, δηλ.: } \int_0^L \Delta dx = 0 \quad (5)$$

όπου L το συνολικό μήκος της γέφυρας.

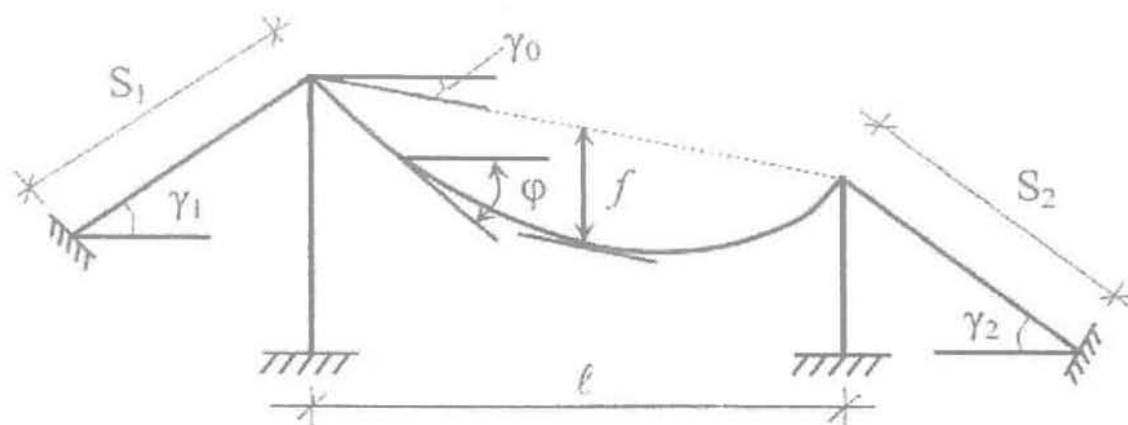
Αγνοώντας θερμοκρασιακές επιρροές, θα ισχύει ότι:

$$\Delta ds = s * ds / (E_c * F_c * \cos \phi) \quad (6)$$

όπου E_c , F_c το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του καλωδίου και η επιφάνεια της διατομής του αντίστοιχα, ενώ η γωνία ϕ δίδεται στα Σχήματα 3 και 4.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Ειδικότερα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$ds^2 = dx^2 + dz^2$$

$$(ds + \Delta ds)^2 = (dx + \Delta dx)^2 + (dz + \Delta dz)^2$$

οπότε τελικά:

$$\Delta dx = \Delta ds * ds / dx - \Delta dz * dz / dx \quad (7)$$

καθόσον δε $dx / ds = \cos \phi$, $\Delta dz = dw$ η (7) λαμβάνει την μορφή (λόγω και της (6)):

$$\Delta dx = [s_H / (E_c * F_c * \cos^3 \phi)] * dx - (dw / dx) * (dz / dx) * dx$$

οπότε η έκφραση που προκύπτει για την (σταθερή) οριζόντια δύναμη S_H έχει ως εξής:

$$S_H = (E_c * F_c / L_c) * z'' \int_0^{\ell} w(x) dx,$$

$$L_c = \int_0^L dx / \cos^3 \phi \quad (8)$$

Ο συντελεστής L_c , για το καλώδιο του Σχήματος 4, δίδεται από την σχέση:

$$L_c = \ell * \{1 + (8 * f^2 / \ell^2) + (3/2) * \tan^2 \gamma_0\} + (s_1 / \cos^2 \gamma_1) + (s_2 / \cos^2 \gamma_2) \quad (9)$$

Από την εξίσωση (4), εισάγοντας την 1^η εκ των εκφράσεων (8) υπολογίζεται το φορτίο του αναρτήρα:

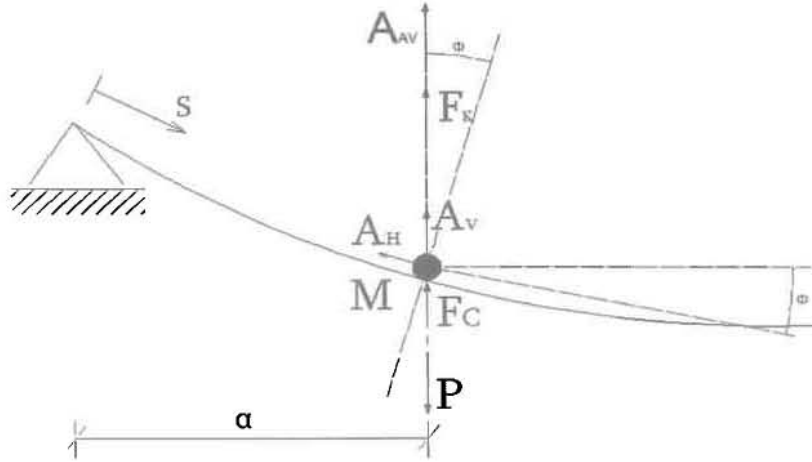
$$q_s = p(x) = (E_c * F_c / L_c) * z'' * \int_0^L w(x) dx \quad (10)$$

2.3. Εξισώσεις κίνησης

Αμελώντας τις αξονικές παραμορφώσεις η διαφορική εξίσωση που διέπει την εξαναγκασμένη καμπτική ταλάντωση μιας γέφυρας μικτού συστήματος καλωδίων δίδεται -με βάση και τις παραδοχές που προαναφέρθηκαν- από την ακόλουθη έκφραση:

$$E * I_y * w''''(x,t) + m * \ddot{w}(x,t) - J_b * \ddot{w}'(x,t) = p_1(x,t) + p_2(x,t) \quad (11)$$

όπου η μεν $p_1(x,t)$ περιέχει όλες τις δυνάμεις που οφείλονται στην κίνηση των μαζών-φορτίων (που απεικονίζονται στο Σχήμα 5), η δε $p_2(x,t)$ αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις που δρουν επί του καταστρώματος από τα καλώδια και τους αναρτήρες.



Σχήμα 5

2.3.1. Επιρροή της κίνησης του φορτίου-μάζας

Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο κατάστρωμα όταν τούτο διασχίζεται από ένα συγκεντρωμένο φορτίο-μάζα M , κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v είναι οι ακόλουθες:

α) το εξωτερικό φορτίο βαρύτητας:

$$P = M * g \quad (12\alpha)$$

β) η κατακόρυφη αδρανειακή δύναμη A_V , ίση με:

$$A_V = -M * \ddot{w}(\alpha, t) \quad (12\beta)$$

γ) η κεντρομόλος δύναμη, που δίδεται από την σχέση:

$$F_K = -(M * v^2) / R = -M * s^2 * (d^2 w / dx^2) = -M * s^2 * w''(\alpha, t) \quad (12\gamma)$$

δ) οι δυνάμεις Coriolis^[5,6] που γράφονται ως:

$$F_{cr} = -2 * M * \dot{s} * (\partial^2 w / \partial x \partial t) = -2 * M * \dot{s} * w'(\alpha, t) \quad (12\delta)$$

ε) η προβολή F_{AH} της οριζόντιας αδρανειακής δύναμης A_H στον κατακόρυφο άξονα:

$$F_{AH} = -M * \ddot{s} * w'(\alpha, t) \quad (12\epsilon)$$

στ) η ροπή που οφείλεται στην περιστροφική αδράνεια του κινούμενου φορτίου-μάζας:

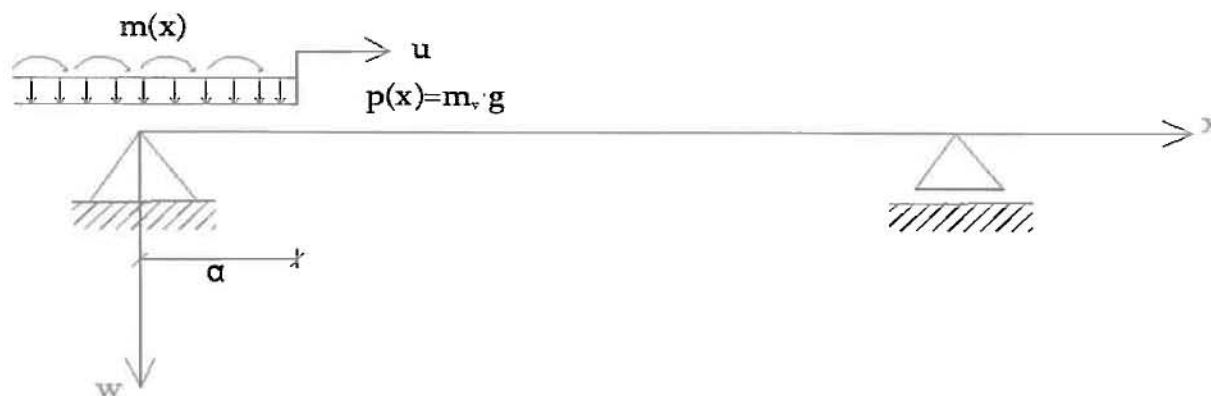
$$M_y = J_M * \ddot{w}'(\alpha, t) \quad (12\sigma\tau)$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, για το θεωρούμενο συγκεντρωμένο φορτίο-μάζα, (που ισχύει ότι $\dot{s} = V = \text{σταθερό}$), ο όρος $P1(x, t)$ της Δ.Ε. (11) θα έχει ως εξής:

$$p_1(x, t) = [M * g - M * (\ddot{w} + V^2 * w'' + 2 * V * \dot{w}')] * \delta(x - \alpha) + J_M * \ddot{w}' * \delta'(x - a) \quad (13)$$

όπου δ η συνάρτηση Dirac.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η υπό ανάλυση γέφυρα είναι μεγάλου ανοίγματος, που σημαίνει ότι ο λόγος d / ℓ_i της μέγιστης βάσης d τροχού ενός οχήματος που κινείται κατά μήκος του καταστρώματος (όπως π.χ. ενός σιδηροδρόμου) ως προς το άνοιγμα ℓ_i είναι πολύ μικρό ($1/50 \leq d / \ell_i \leq 1/200$), θεωρούμε μια μορφή φόρτισης, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6

Λόγω των ανωτέρω, μπορούμε να γράψουμε ότι^[7]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\lambda} P_i * \delta(x - \alpha_i) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((P_i / \Delta x) * \delta(x - x_i) * \Delta x) = \\ &= \int_0^{\alpha} P(x) * \delta(x - \alpha_i) * dx = p(\alpha_i) = m_v * g \end{aligned} \quad (14)$$

Καθώς επίσης και ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\lambda} m_i * \delta'(x - \alpha_i) &= -m'(\alpha_i) = \\ &= -[J_v(\alpha_i) * \dot{w}'(\alpha_i)]' = -J_v * \ddot{w}''(\alpha_i) \end{aligned} \quad (15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (14) και (15) στην (13) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= m_v * g - m_v * [\ddot{w} + V^2 * w'' + 2 * V * \dot{w}'] - J_v * \dot{w}' \quad \text{για } x \leq \alpha \quad \text{και} \\ p_1(x, t) &= 0 \quad \text{για } x > \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

2.3.2. Επιρροή καλωδίων και αναρτήρων

Για τον προσδιορισμό της εν λόγω επιρροής πρέπει να ληφθούν υπόψη οι ακόλουθοι δύο παράγοντες:

- (1) οι κατακόρυφες δυνάμεις των ως άνω καλωδίων και
- (2) η επιρροή των οριζόντιων συνιστωσών των δυνάμεων των καλωδίων.

πράγμα το οποίο μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση:

$$p_2(x, t) = q_c(x, t) + q_s(x, t) + q_{cH}(x, t) \quad (17)$$

Ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους της προηγούμενης σχέσης οφείλεται στην οριζόντια συνιστώσα της έντασης των καλωδίων και δίνεται από την έκφραση^[8]:

$$q_{cH}(x, t) = -[\int_x^l q_{Hi}(\lambda, t) d\lambda * w'(x)]' - [q_{Hi}(x) * e] \quad (18)$$

όπου e η εκκεντρότητα του σημείου εφαρμογής της οριζόντιας συνιστώσας, ενώ ισχύει επίσης ότι:

$$q_{Hi} = q_c * \tan \phi_i = q_c * (x_i / H) \quad (19)$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα του Leibnitz για την παραγωγή ολοκληρωμάτων, λαμβάνουμε από την (18):

$$q_{CH}(x,t) = q_H(x,t) * w'(x,t) - \int_x^{\ell} q_{Hi}(\lambda,t) * d\lambda * w''(x,t) - q_H'(x,t) * e \quad (20)$$

Σύμφωνα με όλα τα ανωτέρω, η τελική μορφή της Δ.Ε. εξαναγκασμένης καμπτικής ταλάντωσης (11) του συστήματος γέφυρας - καλωδίων προκύπτει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E * I_y * w''''(x,t) - J_b * \ddot{w}''(x,t) + m * \ddot{w}(x,t) = \\ m_v * g - m_v * [\ddot{w}(x,t) + V^2 * w''(x,t) + 2 * V * \dot{w}'(x,t)] - J_v * \ddot{w}''(x,t) - \\ - F_1(x) * w(x,t) + F_2(x) * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3(x) * w(x,t) * dx - (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L w(x,t) * dx \\ + q_H(x,t) * w'(x,t) - \int_x^l q_{Hi}(\lambda,t) * d\lambda * w''(x,t) - q_H'(x,t) * e \end{aligned}$$

με $q_H(x,t) = q_c(x,t) * \tan \phi_i = q_c(x,t) * (x_i / H)$ (21)

2.4. Ελεύθερη ταλάντωση της γέφυρας

Αν προς στιγμήν αγνοηθεί η επιρροή των οριζόντιων συνιστωσών των καλωδίων καθώς επίσης και της περιστροφικής αδράνειας του καταστρώματος, η Δ.Ε. (21) της ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης της γέφυρας λαμβάνει την ακόλουθη απλουστευμένη μορφή:

$$\begin{aligned} E * I_y * w''''(x,t) + m \ddot{w}(x,t) = \\ - F_1(x) * w(x,t) + F_2(x) * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3(x) * w(x,t) * dx - (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L w(x,t) * dx \end{aligned} \quad (22)$$

Αναζητώντας λύση χωριζόμενων μεταβλητών (στα πλαίσια γραμμικοποιημένης δυναμικής ανάλυσης) της μορφής:

$$w(x,t) = X(x) * T(t) \quad (23)$$

αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην (22) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
 E * I_y * X'''' * T + m * X * \ddot{T} &= \\
 &= [-F_1 * X + F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * X * dx - (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L X * dx] * T \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \{X'''' + (1/E * I_y) * [F_1 * X - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * X * dx + (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L X * dx]\} \\
 /[(m/E * I_y) * X] &= -[\ddot{T}/T] = \omega^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow X'''' + (1/E * I_y) * [F_1 * X - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * X * dx \\
 + (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L X * dx] - \lambda^4 * X &= 0 \tag{24\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\ddot{T}^2 + \omega^2 * T = 0 \tag{24\beta}$$

$$\text{όπου } \lambda^4 = m * \omega^2 / E * I_y \tag{24\gamma}$$

Σκοπεύοντας στην εφαρμογή της μεθόδου Galerkin, τίθεται:

$$X(x) = c_1 * \Psi_1(x) + c_2 * \Psi_2(x) + \dots + c_n * \Psi_n(x) \tag{25}$$

όπου c_i προσδιορίστοι (άγνωστοι) συντελεστές και $\Psi_i(x)$ τυχαία επιλεγόμενες συναρτήσεις του x , οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Ως τέτοιες συναρτήσεις επιλέγονται οι συναρτήσεις σχήματος του αντίστοιχου στατικού συστήματος δοκού-καταστρώματος (μιας συνεχούς δοκού ή ενός συνόλου τριών αμφιέριστων δοκών), το οποίο διαθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά με την γέφυρα χωρίς την ύπαρξη οποιανδήποτε καλωδίων.

Εισάγοντας την (25) στην (24α), πολλαπλασιάζοντας το προϊόν της αντικατάστασης διαδοχικά επί $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως L καταλήγουμε στο ακόλουθο ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς c_1, c_2, \dots, c_n .

$$c_1 * (A_{i1} - \lambda^4 * B_{i1}) + c_2 * (A_{i2} - \lambda^4 * B_{i2}) + \dots + c_n * (A_{in} - \lambda^4 * B_{in}) = 0 \tag{26}$$

όπου:

$$A_{ij} = \int_0^L \{ \Psi_j^{(4)} + (1/E \cdot I_y) \cdot [F_1 \cdot \Psi_j + F_2 \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_3 \cdot \Psi_j \cdot dx + (E_c \cdot F_c / L_c) \cdot z^2 \cdot \int_0^L \Psi_j \cdot dx] \} \cdot \Psi_i \cdot dx$$

$$\text{και } B_{ij} = \int_0^L \Psi_i \cdot \Psi_j \cdot dx \quad (27)$$

Για να διαθέτει το παραπάνω σύστημα μη τετριμμένη λύση, θα πρέπει η ορίζουσα του μητρώου συντελεστών να ισούται με μηδέν, δηλαδή:

$$\det[\Gamma_{ij}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \Gamma_{ij} = A_{ij} - \lambda^4 \cdot B_{ij} \quad (28)$$

Επιλύοντας την ως άνω ονομαζόμενη ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ υπολογίζονται οι τιμές του λ και μέσω της (24γ) το φάσμα των καμπτικών ιδιοσυχνοτήτων ω_i . Από τις πρώτες $n-1$ εξισώσεις του συστήματος (26) βρίσκουμε ότι:

$$(c_j / c_1) = \begin{vmatrix} \Gamma_{12} \dots & \Gamma_{1i} \dots & \Gamma_{1n} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{(n-1)2} \dots & \Gamma_{(n-1)i} \dots & \Gamma_{(n-1)n} \dots \end{vmatrix} / |\Gamma_{ij}|$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{και} \quad j = 2, \dots, n \quad (29)$$

οπότε,

$$X_n(x) = c_1 \cdot \sum_{j=2}^n (\Psi_1 + (c_j / c_1) \cdot \Psi_j) \quad (30)$$

όπου $X_n(x)$ οι συναρτήσεις σχήματος της γέφυρας με μικτό σύστημα καλωδίων.

2.5. Εξαναγκασμένη ταλάντωση της γέφυρας

Καθόσον η επιρροή της περιστροφικής αδράνειας του καταστρώματος είναι πολύ μικρή, αυτή αμελείται, οπότε αναζητούμε μια λύση μορφής σειράς της εξίσωσης (21) ως ακολούθως:

$$w(x, t) = \sum_n X_n(x) \cdot P_n(t) \quad (31)$$

όπου $P_n(t)$ άγνωστες-προσδιοριστέες χρονικές συναρτήσεις και $X_n(x)$ συναρτήσεις του x που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Ως τέτοιες επιλέγονται οι συναρτήσεις σχήματος της αντίστοιχης συνεχούς δοκού (η οποία διαθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά με την δοκό-κατάστρωμα χωρίς καλώδια).

Σύμφωνα με την μέθοδο Ritz-Galerkin, η χρονική συνάρτηση $P_n(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση^[8]

$$P_i(t) = \alpha_{i1} * \Phi_1(t) + \alpha_{i2} * \Phi_2(t) + \dots + \alpha_{i\mu} * \Phi_\mu(t) \quad (32)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

όπου α_{ij} άγνωστοι συντελεστές και $\Phi_j(t)$ τυχαίες χρονικές συναρτήσεις, με τα εξής χαρακτηριστικά:

(1) ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $w(x, 0) = \dot{w}(x, 0)$

(2) είναι περιοδικές ως προς τον χρόνο

Μια εξαιρετική επιλογή για τις χρονικές αυτές συναρτήσεις είναι τα εύρη ταλάντωσης που αντιστοιχούν στην δυναμική απόκριση της δοκού-καταστρώματος, υπό κινούμενο κατανεμημένο φορτίο P (σταθερού μεγέθους) χωρίς μάζα με σταθερή ταχύτητα που δίνεται από την σχέση^[4,7]:

$$\Phi_{K_n}(t) = [P / (m * \omega_n * \int_0^L X_n^2(x) * dx)] * \int_0^t \bar{X}_n(v\tau) * \sin \omega_n(t - \tau) * d\tau \quad \text{και}$$

$$\bar{X}_n(\alpha) = \int_0^\alpha X_n(x) * dx \quad (33)$$

Επιπρόσθετα δε, η δυνατή μετατόπιση κάθε σημείου επί της δοκού-καταστρώματος μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta w_i = \delta(x_i, p_i) \quad (34)$$

Ολοκληρώνοντας το έργο που παράγεται εντός ενός κύκλου ταλάντωσης λαμβάνουμε^[9]:

$$V = \sum_{i=1}^n \int_0^T \{ E * I_y * w'''' + m * \ddot{w} - m_v * [g - (\bar{w} + v^2 * w'' + 2 * v * \dot{w})] + J_v * \ddot{w} +$$

$$\begin{aligned}
 & +F_1 * w - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * w * dx + (E_c * F_c / L_c) * z''^2 * \int_0^L w * dx - q_c * w'(x/H) + \\
 & + \int_x^{\ell} q_{ci}(\lambda, t) * d\lambda * w''(x/H) + q_c'(e * x/H) * \delta * [X_i(x) * T_i(t)] * dt \quad (35)
 \end{aligned}$$

Δοθέντος ότι το (δυνατό) έργο των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων –ανά κύκλο– μηδενίζεται, ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\partial V / \partial \alpha_{ip} = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{και} \quad p=1,2,\dots,\mu \quad (36)$$

που σημαίνει ότι:

$$\int_0^T F * X_n * \Phi_n * dt = 0, \quad \text{για κάθε } n, m \quad (37)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 F. = & m * \sum_n X_n * \ddot{P}_n + m * \sum_n \omega_n^2 * X_n * P_n - \\
 & - m_v * [g - \sum_n X_n * \ddot{P}_n - v^2 * \sum_n X_n'' * P_n + 2 * v * \sum_n X_n' * \dot{P}_n] \\
 & + J_v * \sum_n X_n'' * \ddot{P}_n + F_1 * \sum_n X_n * P_n - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * \sum_n X_n * P_n * dx + \\
 & + (E_C * F_C / L_C) * z'' * \int_0^L \sum_n X_n * P_n * dx - \\
 & - [F_1 * \sum_n X_n * P_n - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * \sum_n X_n * P_n * dx] * \sum_n X_n' * P_n(x/H) \\
 & + \int_x^{\ell} [F_1(\lambda) * \sum_n X_n(\lambda) * P_n - F_2(\lambda) * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * \sum_n X_n * P_n * dx] * d\lambda * \\
 & * \sum_n X_n'' * P_n(x/H) + \\
 & + [F_1 * \sum_n X_n * P_n - F_2 * \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} F_3 * \sum_n X_n * P_n * dx]' * (e * x/H) \quad (38)
 \end{aligned}$$

Καθόσον, από την ανάλυση της ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης ισχύει ότι:

$$E * I_y * \sum_n X_n'''' * P_n - m * \sum_n \omega_n^2 * X_n * \ddot{T}_n = 0 \quad (39)$$

ολοκληρώνοντας από 0 έως L και λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες ορθογωνικότητας, οι εξισώσεις (37) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} & m * \Gamma_i * \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \ddot{\Phi}_k \right) * \Phi_{\sigma} * dt + m * N_i * \Gamma_i * \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) * \Phi_{\sigma} * dt + \\ & + m_u * \left\{ \int_0^T \sum_{\rho=1}^n \left[\left(\int_0^a X_i * X_{\rho} * dx \right) * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \ddot{\Phi}_k \right] * \Phi_{\sigma} * dt + \right. \\ & + m_u * u^2 * \left\{ \int_0^T \sum_{\rho=1}^n \left[\left(\int_0^a X_i * X_{\rho}'' * dx \right) * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right] * \Phi_{\sigma} * dt + \right. \\ & + 2 * m_u * u * \int_0^T \sum_{\rho=1}^n \left[\left(\int_0^a X_i * X_{\rho}' * dx \right) * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \dot{\Phi}_k \right] * \Phi_{\sigma} * dt + \\ & + J_u * \int_0^L \sum_{\rho=1}^n \left[\left(\int_0^a X_i * X_{\rho}'' * dx \right) * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \ddot{\Phi}_k \right] * \Phi_{\sigma} * dx dt - \\ & \int_0^L \int_0^L F_1 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_i * X_{\rho} * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right] * \Phi_{\sigma} * dx dt - \\ & - \int_0^L \int_0^L F_2 * \left(\int_{a1}^{a2} F_3 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right] * dx \right) * X_i * \Phi_{\sigma} * dx dt + \\ & + (E_c * F_c / L_c) * \int_0^L \int_0^L z'' * \left(\int_0^L \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right] * dx \right) * X_i * \Phi_{\sigma} * dx dt - \\ & - \int_0^L \int_0^L \left\{ F_1 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] - F_2 * \int_{a1}^{a2} \left[F_3 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] * dx \right] \right\} * \\ & * \left(\sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho}' * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] * \chi / H \right) * X_i * \Phi_{\sigma} * dx dt + \\ & + \int_0^L \int_0^L \left\{ \int_x^{\ell} F_1(\lambda) * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho}(\lambda) * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] - F_2(\lambda) * \int_{a1}^{a2} F_3(x) * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho}(x) * \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right] * dx \right\} * d\lambda * \\ & * \left(\sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho}'' * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] * \chi / H \right) * X_i * \Phi_{\sigma} * dx dt + \\ & + \int_0^L \int_0^L \left\{ F_1 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] - F_2 * \int_{a1}^{a2} \left[F_3 * \sum_{\rho=1}^n \left[X_{\rho} * \left(\sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik} * \Phi_k \right) \right] * dx \right] \right\}' * \\ & * (e * x / H) * X_i * \Phi_{\sigma} * dx dt = \int_0^T m_u * g * \left(\int_0^a X_i * dx \right) * \Phi_{\sigma} * dt \end{aligned} \quad (41)$$

όπου $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, \mu$

$$\Gamma_i = \int_0^L X_i^2(x) dx$$

και η $\Phi_k(t)$ δίνεται από την (34) και το α δίνεται σύμφωνα με το Σχήμα 6.

2.6. Αριθμητική εφαρμογή

Θεωρούμε μια γέφυρα τριών ανοιγμάτων με ένα μικτό σύστημα καλωδίων, από ομογενές και ισότροπο υλικό (χάλυβα) με μέτρο ελαστικότητας $E=2.1 \times 10^6 \text{ dN/cm}^2$ και μέτρο διατμήσεως $G= 0.8 \times 10^6 \text{ dN/cm}^2$, η οποία διαθέτει και τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

Κατάστρωμα: $\ell_1 = \ell_3 = 200\text{m}$, $\ell_2=1000\text{m}$, $F=0.8\text{m}^2$, $J_y=10\text{m}^4$, $m=640 \text{ kg/m}$, $g=6400\text{dN/m}$

Πυλώνας: $H=160\text{m}$, $h_0=60\text{m}$, $h_1=100\text{m}$, $J_p= J_y, 2 J_y, 3 J_y$

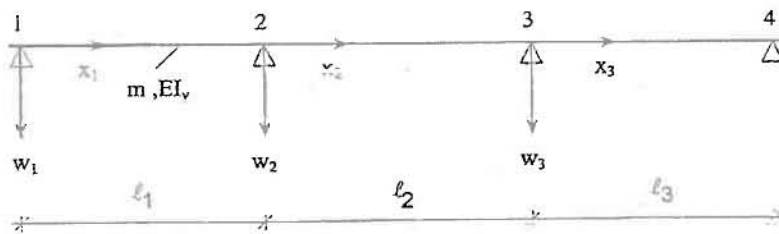
Καλώδια: $\gamma_0=0$, $F_c=0.10, 0.40\text{m}^2$, (αμφότερα τα καλώδια), $f=10\text{m}$, $\sigma_a=12000 \text{ dN/cm}^2$

Απόσταση αναρτήρων: σύνολο 1 με $\alpha_1=0$, $\alpha_2=300$ και σύνολο 2 με $\alpha_1=100$, $\alpha_2=200\text{m}$.

για τον προσδιορισμό της διατομής των αναρτημένων καλωδίων θα λάβουμε:
 $p=6400 \text{ dN/cm}^2$.

Συναρτήσεις σχήματος γέφυρας τριών ανοιγμάτων χωρίς την ύπαρξη οποιονδήποτε καλωδίων

Θεωρούμε μια συνεχή δοκό τριών ανοιγμάτων με σταθερή κατά μήκος διατομή. Κάθε άνοιγμα αναφέρεται στο αντίστοιχο τοπικό σύστημα αξόνων. Οι εξισώσεις ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης της δοκού είναι οι ακόλουθες:



$$E * I * w_1''''(x_1, t) + m * \ddot{w}_1(x_1, t) = 0 \quad (42\alpha)$$

$$E * I * w_2''''(x_2, t) + m * \ddot{w}_2(x_2, t) = 0 \quad (42\beta)$$

$$E * I * w_3''''(x_3, t) + m * \ddot{w}_3(x_3, t) = 0 \quad (42\gamma)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$w_1(0,t) = 0 \quad (43\alpha)$$

$$w_2(0,t) = 0 \quad (43\beta)$$

$$w_3(0,t) = 0 \quad (43\gamma)$$

$$w_1(\ell_1,t) = 0 \quad (43\delta)$$

$$w_2(\ell,t) = 0 \quad (43\epsilon)$$

$$w_3(\ell_1,t) = 0 \quad (43\sigma\tau)$$

$$-E * I * w_1''(0,t) = 0 \quad (43\zeta)$$

$$-E * I * w_3''(\ell_1,t) = 0 \quad (43\eta)$$

$$-w_1'(\ell_1,t) = -w_2'(0,t) \quad (43\theta)$$

$$-w_2'(\ell,t) = -w_3'(0,t) \quad (43\iota)$$

$$-E * I * w_1''(\ell_1,t) = -E * I * w_2''(0,t) \quad (43\kappa)$$

$$-E * I * w_2''(\ell,t) = -E * I * w_3''(0,t) \quad (43\lambda)$$

Οι αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων (42.α,β,γ) θα έχουν την μορφή:

$$w_{1n}(x_1,t) = X_{1n}(x_1) * e^{j*\omega_n*t} \quad (44\alpha)$$

$$w_{2n}(x_2,t) = X_{2n}(x_2) * e^{j*\omega_n*t} \quad (44\beta)$$

$$w_{3n}(x_3,t) = X_{3n}(x_3) * e^{j*\omega_n*t} \quad (44\gamma)$$

όπου ω_n είναι η κυκλική συχνότητα της κίνησης της γέφυρας και X_{in} είναι οι συναρτήσεις σχήματος με $i=1,2,3$.

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (43α,β,γ) στις αντίστοιχες εξισώσεις (42α,β,γ) προκύπτει:

$$X_{1n}'''' - \lambda^4 * X_{1n} = 0 \quad (45\alpha)$$

$$X_{2n}'''' - \lambda^4 * X_{2n} = 0 \quad (45\beta)$$

$$X_{3n}'''' - \lambda^4 * X_{3n} = 0 \quad (45\gamma)$$

$$\text{όπου } \lambda^4 = \frac{m\omega_n^2}{EI}$$

με γενική λύση:

$$\begin{aligned}
 X_{1n}(x_i) &= A_{1n} * \sin \lambda * x_i + B_{1n} * \cos \lambda * x_i + C_{1n} * \sinh \lambda * x_i + D_{1n} * \cosh \lambda * x_i \\
 X_{1n}'(x_i) &= \lambda * A_{1n} * \cos \lambda * x_i - \lambda * B_{1n} * \sin \lambda * x_i + \\
 &\lambda * C_{1n} * \cosh \lambda * x_i + \lambda * D_{1n} * \sinh \lambda * x_i \\
 X_{1n}''(x_i) &= -\lambda^2 * A_{1n} * \sin \lambda * x_i - \lambda^2 * B_{1n} * \cos \lambda * x_i + \lambda^2 * C_{1n} * \sinh \lambda * x_i + \\
 &\lambda^2 * D_{1n} * \cosh \lambda * x_i
 \end{aligned} \tag{46\alpha-\gamma}$$

Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$X_{1n}(0) = 0 \tag{47\alpha}$$

$$X_{2n}(0) = 0 \tag{47\beta}$$

$$X_{3n}(0) = 0 \tag{47\gamma}$$

$$X_{1n}(\ell_1) = 0 \tag{47\delta}$$

$$X_{2n}(\ell) = 0 \tag{47\epsilon}$$

$$X_{3n}(\ell_1) = 0 \tag{47\sigma\tau}$$

$$X_{1n}''(0) = 0 \tag{47\zeta}$$

$$X_{3n}''(\ell_1) = 0 \tag{47\eta}$$

$$X_{1n}'(\ell_1) = X_{2n}'(0) \tag{47\theta}$$

$$X_{2n}'(\ell) = X_{3n}'(0) \tag{47\iota}$$

$$X_{1n}''(\ell_1) = X_{2n}''(0) \tag{47\kappa}$$

$$X_{2n}''(\ell) = X_{3n}''(0) \tag{47\lambda}$$

οπότε κάθε άνοιγμα θα έχει λύση της μορφής:

$$X_{1n}(x_1) = A_{1n} * \sin \lambda * x_1 + B_{1n} * \cos \lambda * x_1 + C_{1n} * \sinh \lambda * x_1 + D_{1n} * \cosh \lambda * x_1 \tag{48\alpha}$$

$$X_{2n}(x_2) = A_{2n} * \sin \lambda * x_2 + B_{2n} * \cos \lambda * x_2 + C_{2n} * \sinh \lambda * x_2 + D_{2n} * \cosh \lambda * x_2 \tag{48\beta}$$

$$X_{3n}(x_3) = A_{3n} * \sin \lambda * x_3 + B_{3n} * \cos \lambda * x_3 + C_{3n} * \sinh \lambda * x_3 + D_{3n} * \cosh \lambda * x_3 \tag{48\gamma}$$

Εισάγοντας τις λύσεις (45\alpha,\beta,\gamma) στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες λαμβάνομεν τις ακόλουθες συναρτήσεις σχήματος:

$$X_{1n}(x_1) = (\sin \lambda * x_1) / (\sin \lambda * \ell_1) - (\sinh \lambda * x_1) / (\sinh \lambda * \ell_1) \tag{49\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 X_{2n}(x_2) &= \{ \{ [\sinh(\lambda * \ell) * (-\cot \lambda * \ell_1 + \coth \lambda * \ell_1)] - \cos(\lambda * \ell) + \cosh(\lambda * \ell) \} / \\
 &(\sin \lambda * \ell - \sinh \lambda * \ell) \} * \sin \lambda * x_2
 \end{aligned}$$

$$+\{ \{ [\sin(\lambda * \ell) * (\cot \lambda * \ell_1 - \coth \lambda * \ell_1)] + \cos(\lambda * \ell) - \cosh(\lambda * \ell) \} / (\sin \lambda * \ell - \sinh \lambda * \ell) \} * \sinh \lambda * x_2 + \cos \lambda * x_2 - \cosh \lambda * x_2 \quad (49\beta)$$

$$\begin{aligned} X_{3n}(x_3) = & -\cot(\lambda * \ell_1) * [(\sin(\lambda * \ell) * \sinh(\lambda * \ell)) * \\ & * \{ [(\coth(\lambda * \ell_1) - \cot(\lambda * \ell_1)) - (1/2) * (\cos(\lambda * \ell) + \cosh(\lambda * \ell))] / \\ & (\sin \lambda * \ell - \sinh \lambda * \ell) \} + \\ & + (1/2) * (\cos \lambda * \ell + \cosh \lambda * \ell)] * \sin(\lambda * x_3) + \\ & + \coth(\lambda * \ell_1) * [(\sin(\lambda * \ell) * \sinh(\lambda * \ell)) * \\ & * \{ [(\coth(\lambda * \ell_1) - \cot(\lambda * \ell_1)) - (1/2) * (\cos(\lambda * \ell) + \cosh(\lambda * \ell))] / \\ & (\sin \lambda * \ell - \sinh \lambda * \ell) \} + \\ & + (1/2) * (\cos \lambda * \ell + \cosh \lambda * \ell)] * \sinh(\lambda * x_3) + \\ & [(\sin(\lambda * \ell) * \sinh(\lambda * \ell)) * \\ & * \{ [(\coth(\lambda * \ell_1) - \cot(\lambda * \ell_1)) - (1/2) * (\cos(\lambda * \ell) + \cosh(\lambda * \ell))] / \\ & (\sin \lambda * \ell - \sinh \lambda * \ell) \} + \\ & + (1/2) * (\cos \lambda * \ell + \cosh \lambda * \ell)] * (\cos(\lambda * x_3) - \cosh(\lambda * x_3)) \quad (49\gamma) \end{aligned}$$

Για την ύπαρξη μη τετριμμένης λύσης θα πρέπει το μητρώο των συντελεστών να έχει μηδενική ορίζουσα που οδηγεί στην εξίσωση συχνότητας.

Για τις τιμές των παραμέτρων που επιλέγηκαν επιλύεται μαθηματικά η εξίσωση συχνότητας και υπολογίζονται οι έξι πρώτες ιδιοσυχνότητες, οι οποίες περιέχονται στον Πίνακα 1, και από αυτές χαράσσονται οι τέσσερις πρώτες συναρτήσεις σχήματος ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης της δοκού, που απεικονίζονται στα Σχήματα 7-10, που ακολουθούν.

Κανονική μορφή i	$\lambda_{1i} (= \lambda_{2i}) \text{ (m}^{-4} \text{)}$	$\omega_i \text{ (sec}^{-1} \text{)}$
1	0.007214082	2.981135
2	0.0107608	5.9316
3	0.013088676	9.81132103
4	0.0173034	17.1507
5	0.018325	19.2356
6	0.020228	23.4382

Πίνακας 1

Μητρώο συντελεστών ($\lambda_1 = \lambda_2$)

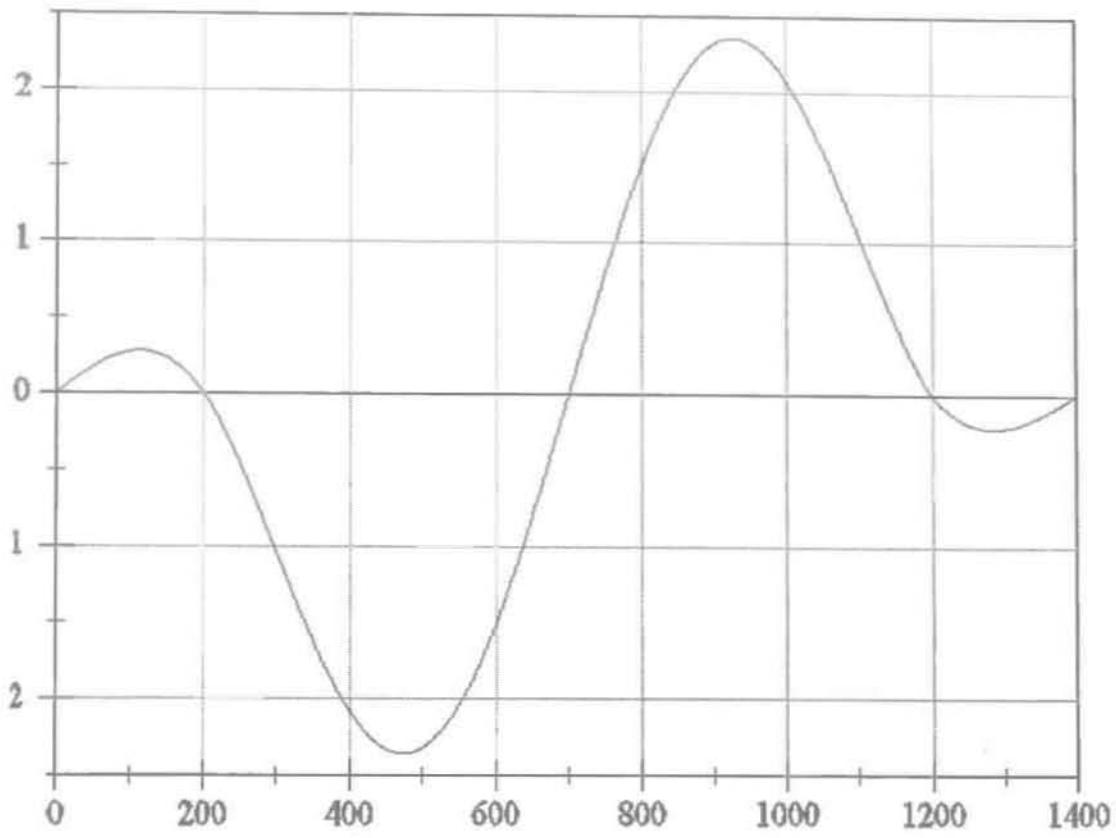
Out[22]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{Sin}[L1 \lambda 1] & 0 & \text{Sinh}[L1 \lambda 1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda 1^2 \text{Sin}[L1 \lambda 1] & 0 & \lambda 1^2 \text{Sinh}[L1 \lambda 1] & 0 & 0 & 2 \lambda 2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda 1^2 \text{Sin}[L1 \lambda 1] & -\lambda 1^2 (\text{Cos}[L1 \lambda 1] + \text{Cosh}[L1 \lambda 1]) & \lambda 1^2 \text{Sinh}[L1 \lambda 1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Sin}[L1 \lambda 1] & \text{Cos}[L1 \lambda 1] - \text{Cosh}[L1 \lambda 1] & \text{Sinh}[L1 \lambda 1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda 2^2 \text{Sin}[L2 \lambda 2] & -\lambda 2^2 (\text{Cos}[L2 \lambda 2] + \text{Cosh}[L2 \lambda 2]) & \lambda 2^2 \text{Sinh}[L2 \lambda 2] & 0 & 0 & 2 \lambda 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda 2 \text{Cos}[L2 \lambda 2] & -\lambda 2 (\text{Sin}[L2 \lambda 2] + \text{Sinh}[L2 \lambda 2]) & \lambda 2 \text{Cosh}[L2 \lambda 2] & 0 & -\lambda 1 & 0 & -\lambda 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Sin}[L2 \lambda 2] & \text{Cos}[L2 \lambda 2] - \text{Cosh}[L2 \lambda 2] & \text{Sinh}[L2 \lambda 2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda 1 \text{Cos}[L1 \lambda 1] & 0 & \lambda 1 \text{Cosh}[L1 \lambda 1] & 0 & -\lambda 2 & 0 & -\lambda 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

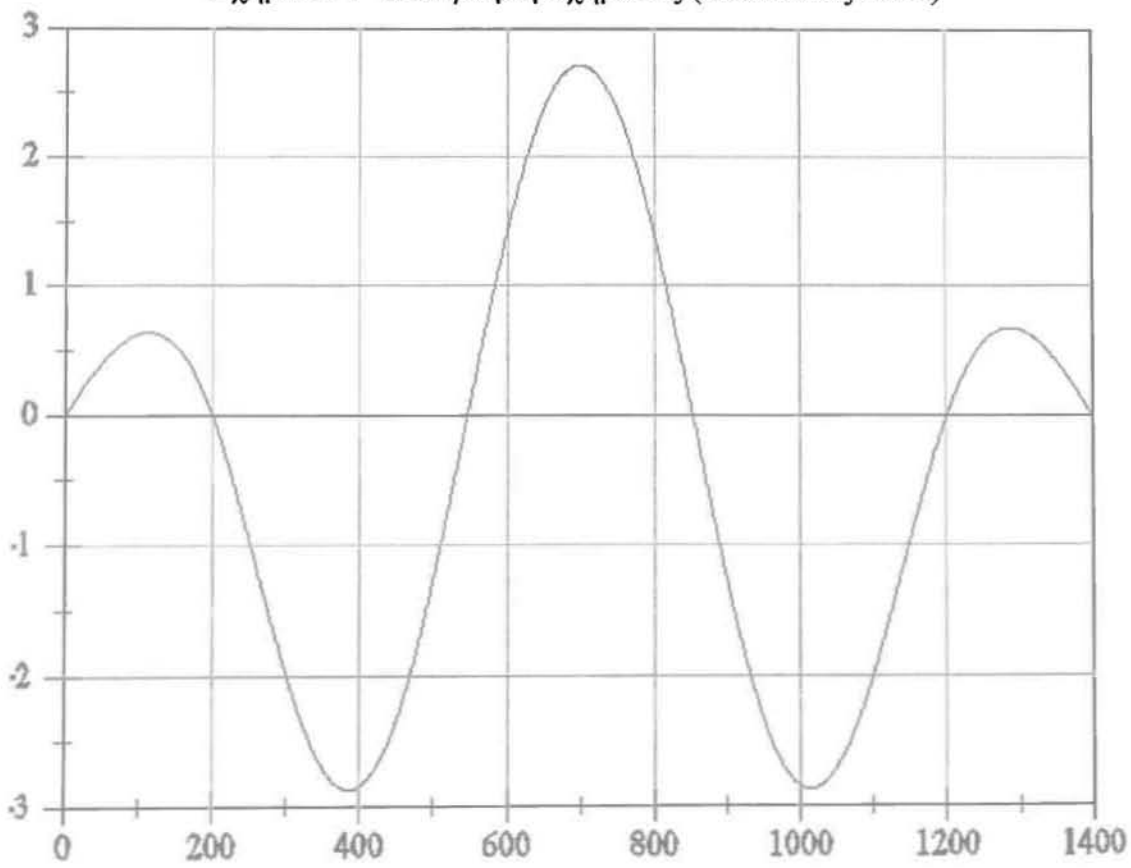
Εξίσωση συχνότητας

Out[23]=

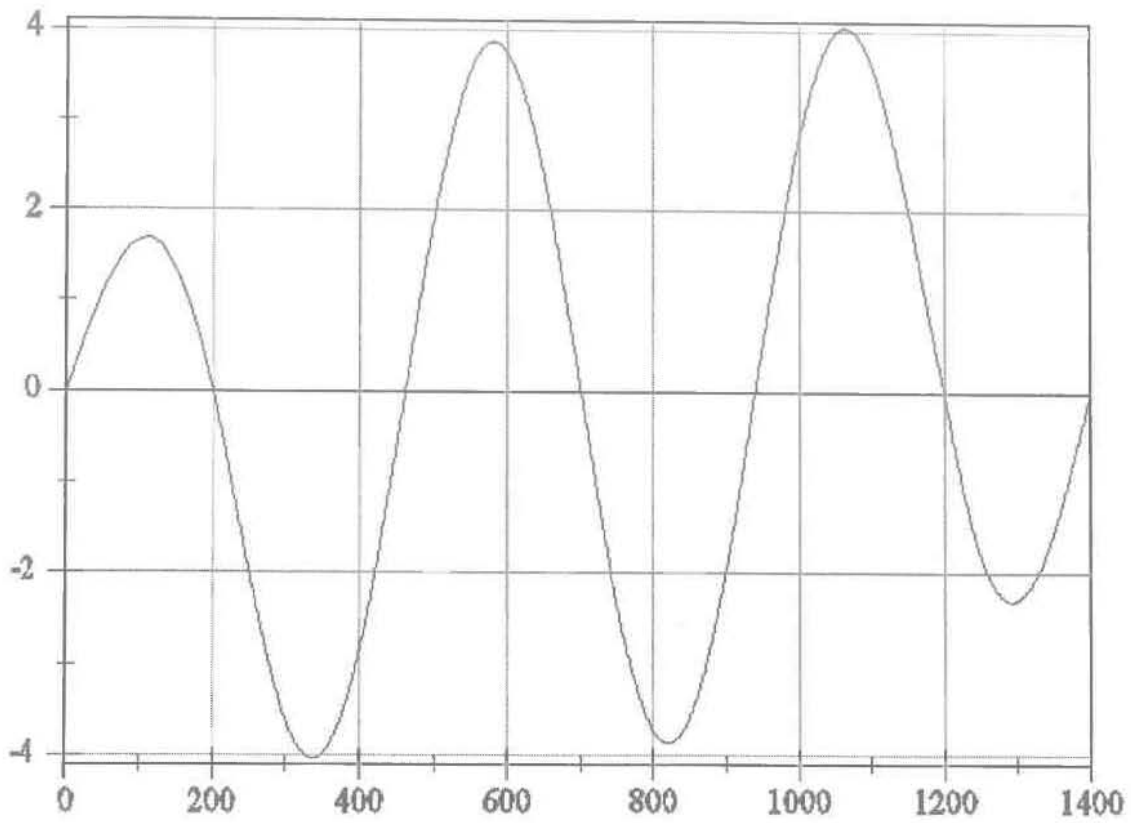
$$\begin{aligned} & -8 \lambda 1^4 \lambda 2^2 \left(\lambda 2 \left(-2 \lambda 1 \text{Cosh}[L2 \lambda 2] \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 \text{Sin}[L2 \lambda 2] \text{Sinh}[2 L1 \lambda 1] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (-2 \lambda 2 \text{Cosh}[L1 \lambda 1]^2 \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 \text{Sin}[L2 \lambda 2] + (2 \lambda 1 \text{Cos}[L2 \lambda 2] \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 + \lambda 2 \text{Sin}[2 L1 \lambda 1] \text{Sin}[L2 \lambda 2]) \text{Sinh}[2 L1 \lambda 1]) \text{Sinh}[L2 \lambda 2] \right) + \right. \\ & \quad \left. 2 \text{Sinh}[L1 \lambda 1]^2 (-\lambda 1^2 \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 + \lambda 1 \text{Cosh}[L2 \lambda 2] (\lambda 1 (2 \text{Cos}[L2 \lambda 2] - \text{Cosh}[L2 \lambda 2]) \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 + \lambda 2 \text{Sin}[2 L1 \lambda 1] \text{Sin}[L2 \lambda 2]) - \right. \\ & \quad \left. \left. \lambda 2 (\lambda 1 \text{Cos}[L2 \lambda 2] \text{Sin}[2 L1 \lambda 1] + \lambda 2 \text{Cos}[L1 \lambda 1]^2 \text{Sin}[L2 \lambda 2]) \text{Sinh}[L2 \lambda 2] + \lambda 1^2 \text{Sin}[L1 \lambda 1]^2 \text{Sinh}[L2 \lambda 2]^2 \right) \right) \end{aligned}$$



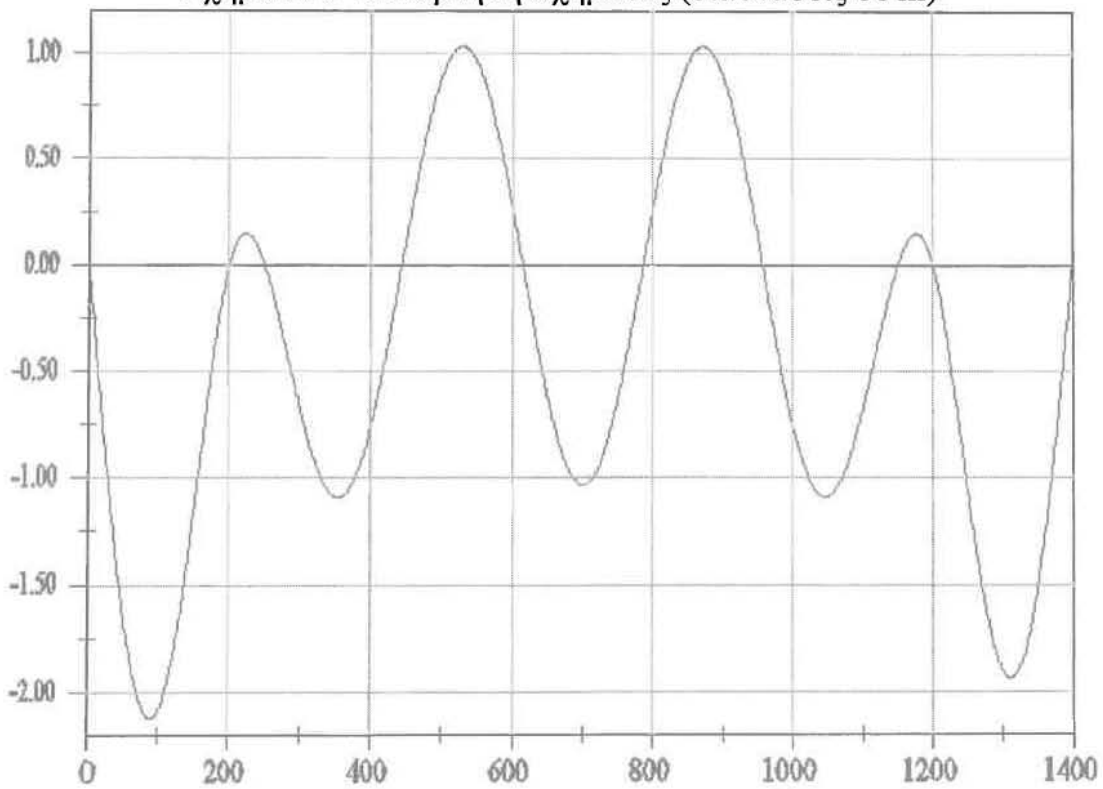
Σχήμα 7. 1^η συνάρτηση σχήματος (διαστάσεις σε m)



Σχήμα 8. 2^η συνάρτηση σχήματος (διαστάσεις σε m)



Σχήμα 9. 3^η συνάρτηση σχήματος (διαστάσεις σε m)



Σχήμα 10. 4^η συνάρτηση σχήματος (διαστάσεις σε m)

Οι ανωτέρω τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και οι σχετικές συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων ποσοτήτων και μορφών της γέφυρας με το μικτό σύστημα καλωδίων, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που εκτέθηκε προηγούμενα. Τούτο πραγματοποιείται με χρήση εμπορικού μαθηματικού λογισμικού (*Mathematica*), όπως άλλωστε και με την περίπτωση της συνεχούς δοκού. Σε ότι ακολουθεί εμφανίζονται αντίγραφα των Notebooks που συντάχθηκαν προς τούτο, με τη μεγαλύτερη δυνατή ευκρίνεια.

```

ClearAll[CC, M, L1, L2, L3, λ1, λ2, λ, ω1, ω2, ω3, ω4, ω5, ω6, ω, eb, ib, m]
Text[Style["Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων Συνεχούς Δοκού τριών ανοιγμάτων", Italic, 24]]
Text[Style["λ4 =  $\frac{m\omega^2}{EI}$ ", Italic, 24]]

m = 640;
λ1 = λ2;
λ2 = λ;
L1 = 200;
L2 = 1000;
L3 = 200;
eb = 2.1 * 10^10;
ib = 10;
    
```

$$M = \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \sin[\lambda_1 + L_1] & 0 & \sinh[\lambda_1 + L_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\lambda_1^2 * \sin[\lambda_1 + L_1] & 0 & \lambda_1^2 * \sinh[\lambda_1 + L_1] & 0 & 0 & 2 * \lambda_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1^2 * \sin[\lambda_1 + L_1] & -\lambda_1^2 * (\cos[\lambda_1 + L_1] + \cosh[\lambda_1 + L_1]) & \lambda_1^2 * \sinh[\lambda_1 + L_1] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin[\lambda_1 + L_1] & (\cos[\lambda_1 + L_1] - \cosh[\lambda_1 + L_1]) & \sinh[\lambda_1 + L_1] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2^2 * \sin[\lambda_2 + L_2] & -\lambda_2^2 * (\cos[\lambda_2 + L_2] + \cosh[\lambda_2 + L_2]) & \lambda_2^2 * \sinh[\lambda_2 + L_2] & 0 & 0 & 2 * \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 * \cos[\lambda_2 + L_2] & -\lambda_2 * (\sin[\lambda_2 + L_2] + \sinh[\lambda_2 + L_2]) & \lambda_2 * \cosh[\lambda_2 + L_2] & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin[\lambda_2 + L_2] & (\cos[\lambda_2 + L_2] - \cosh[\lambda_2 + L_2]) & \sinh[\lambda_2 + L_2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_1 * \cos[\lambda_1 + L_1] & 0 & \lambda_1 * \cosh[\lambda_1 + L_1] & 0 & -\lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

```
CC = Det[M];  
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.007}]  
ω1 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.01}]  
ω2 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.013}]  
ω3 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.017}]  
ω4 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.0183}]  
ω5 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
λ /. FindRoot[CC, {λ, 0.021}]  
ω6 =  $\sqrt{\xi^4 * eb * ib * 10 / m}$   
ω = {ω1, ω2, ω3, ω4, ω5, ω6};  
Print["Μητρώο των έξι πρώτων ιδιοσυχνοτήτων της απλής συνεχούς δοκού"]
```

$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\};$

MatrixForm[ω]

Out[981]= Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων Συνεχούς Δοκού τριών ανοιγμάτων

Out[982]= $\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$

Out[994]= 0.00721408

Out[995]= 2.98114

Out[996]= 0.0101761

Out[997]= 5.93172

Out[998]= 0.0130887

Out[999]= 9.81321

Out[1000]= 0.018325

Out[1001]= 19.2356

Out[1002]= 0.020228

Out[1003]= 23.4382

Out[1004]= 0.0258929

Out[1005]= 38.4043

2.98114
5.93172
9.81321
19.2356
23.4382
38.4043

```
ClearAll[l1, l2, l3, q, x1, x2, x3, eb, ib, ep, ip, ec, sg, h, h1, h2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, i, j, m, p1, p2,  
p3, sa, sg, p, Nmodes, f, fc, γ1, γ2, γ0, tany1, tany2]  
ep = 2.1*10^10;  
ip = 2*ib;  
ec = 2.1*10^10;  
h = 160;  
h1 = 100;  
h2 = 60;  
a1 = 0;  
a2 = 200;  
a3 = 0;  
a4 = 333;  
a5 = 666;  
a6 = 1000;  
a7 = 0;  
a8 = 200;  
l1 = 200;  
l2 = 1000;  
l3 = 200;  
tany1 = 100 / 200;  
tany2 = 100 / 200;  
γ0 = 0;  
γ1 = ArcTan[tany1];  
γ2 = ArcTan[tany2];  
eb = 2.1*10^10;  
ib = 10;  
f = 90;  
fc = 0.80;  
q = 6400;  
m = 640;  
p1 = 0;  
p2 = 0;  
p3 = 0;  
sa = 40 000 000;  
sg = sa*q / (q + q);  
p = N[P1];  
Nmodes = 6;
```

■ Προσδιορισμός Συναρτήσεων Σχήματος

```
ClearAll[φ1, φ2, φ3, φ1d4, φ2d4, φ3d4];
li = (m * ω^2 / (eb * ib))^0.25;
ddi = (Sin[li * l2] - Sinh[li * l2]) / (Sin[li * l2] * Sinh[li * l2] * (Coth[li * l2] + Coth[li * l3] - Cot[li * l2] - Cot[li * l3]));

φ1[x1_] = -(1 / Sin[li * l1]) * Sin[li * x1] - (1 / Sinh[li * l1]) * Sinh[li * x1]

φ2[x2_] =
  -((-Cot[li * l2] + (ddi / Sin[li * l2])) * Sin[li * x2] + Cos[li * x2] + (Coth[li * l2] - (ddi / Sinh[li * l2])) * Sinh[li * x2] - Cosh[li * x2])
φ3[x3_] = -(-ddi * Cot[li * l3] * Sin[li * x3] + ddi * Cos[li * x3] + ddi * Coth[li * l3] * Sinh[li * x3] - ddi * Cosh[li * x3])

φ1d4[x_] = D[φ1[x], {x, 4}];
φ2d4[x_] = D[φ2[x], {x, 4}];
φ3d4[x_] = D[φ3[x], {x, 4}];

(*J=0;
While[J<Nmodes, J=J+1;
  Show[{Plot[φ1[x1][[J]], {x1, 0, l1}], Plot[φ2[x1-l1][[J]], {x1, l1, l1+l2}], Plot[φ3[x1-l1-l2][[J]], {x1, l1+l2, l1+l2+l3}]}]*)
```

■ Προσδιορισμός Πίνακα A

```
ClearAll[ivl1, ivr2, ivl2, ivr3, flxl1, flxr2, flxl2, flxr3, kk1, kk2r, kk2l, kk3, kk11, kk22r, kk22l, kk33, aij, aij1,  
  aij2, aij3, aij4, aij5, aij6, aij7, cs1l, cs2r, cs2l, cs3r, a1xl, a2xr, a2xl, a3xr, amat, a, zd2, lc];
```

$$zd2 = -2 \left(\frac{4 * f}{12} \right);$$

$$lc = 12 * \left(1 + \frac{8 * f^2}{12^2} + \frac{3}{2} * (\text{Tan}[\gamma_0])^2 \right) + \frac{\sqrt{(11^2 + h1^2)}}{(\text{Cos}[\gamma_1])^2} + \frac{\sqrt{(13^2 + h1^2)}}{(\text{Cos}[\gamma_2])^2};$$

$$cs1l = h1 / \left(\sqrt{(h1^2 + (11 - x1)^2)} \right);$$

$$cs2r = h1 / \left(\sqrt{(h1^2 + (x2)^2)} \right);$$

$$cs2l = h1 / \left(\sqrt{(h1^2 + (12 - x2)^2)} \right);$$

$$cs3r = h1 / \left(\sqrt{(h1^2 + (x3)^2)} \right);$$

$$a1xl = q / (sg * cs1l);$$

$$a2xr = q / (sg * cs2r);$$

$$a2xl = q / (sg * cs2l);$$

$$a3xr = q / (sg * cs3r);$$

$$a = h^3 / (6 * \epsilon_p * i_p) * (2 - 3 * (h_2 / h)^2 + (h_2 / h)^3)$$

$$ivl1 = a * ec * \int_{a1}^{a2} (a1x1 * (11 - x1)^2) / ((h1)^2 + (11 - x1)^2)^{3/2} dx1;$$

$$ivr2 = a * ec * \int_{a3}^{a4} (a2xr * (x2)^2) / ((h1)^2 + (x2)^2)^{3/2} dx2;$$

$$ivl2 = a * ec * \int_{a5}^{a6} (a2x1 * (12 - x2)^2) / ((h1)^2 + (12 - x2)^2)^{3/2} dx2;$$

$$ivr3 = a * ec * \int_{a7}^{a8} (a3xr * (x3)^2) / ((h1)^2 + (x3)^2)^{3/2} dx3;$$

$$f1x11 = (ec * h1^2 * a1x1 * (11 - x1)) / ((h1)^2 + (11 - x1)^2)^{3/2};$$

$$f1xr2 = (ec * h1^2 * a2xr * (x2)) / ((h1)^2 + (x2)^2)^{3/2};$$

$$f1x12 = (ec * h1^2 * a2x1 * (12 - x2)) / ((h1)^2 + (12 - x2)^2)^{3/2};$$

$$f1xr3 = (ec * h1^2 * a3xr * (x3)) / ((h1)^2 + (x3)^2)^{3/2};$$


```
amat = {};  
J = 0;  
While[J < Nmodes, J = J + 1;  
  
    ALDC = {}  
    K = 0;  
    While[K < Nmodes, K = K + 1;  
        kk1 = NIntegrate[(f1x11 *  $\phi$ 1[x1][[K]]), {x1, a1, a2}];  
        kk2r = NIntegrate[(f1xr2 *  $\phi$ 2[x2][[K]]), {x2, a3, a4}];  
        kk21 = NIntegrate[(f1x12 *  $\phi$ 2[x2][[K]]), {x2, a5, a6}];  
        kk3 = NIntegrate[(f1xr3 *  $\phi$ 3[x3][[K]]), {x3, a7, a8}];  
        kk11 = NIntegrate[( $\phi$ 1[x1][[K]]), {x1, a1, a2}];  
        kk22r = NIntegrate[( $\phi$ 2[x2][[K]]), {x2, a3, a4}];  
        kk221 = NIntegrate[( $\phi$ 2[x2][[K]]), {x2, a5, a6}];  
        kk33 = NIntegrate[( $\phi$ 3[x3][[K]]), {x3, a7, a8}];
```

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

```
aij1 = NIntegrate[( $\phi_{1d4}[x1][[K]] * \phi_1[x1][[J]]$ ), {x1, 0, 11}, AccuracyGoal -> 10];
```

```
aij2 = 1 / (eb * ib) * NIntegrate[(f1x11 / (11 - x1)) *  $\phi_1[x1][[K]] * \phi_1[x1][[J]]$ , {x1, a1, a2}, AccuracyGoal -> 10] +  
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((f1x11 * a) / h1^2) * ((kk2r - kk1) / (1 + iv11 + ivr2)) *  $\phi_1[x1][[J]]$ , {x1, a1, a2}, AccuracyGoal -> 10] +  
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((ec * fc * zd2^2) / lc) * (kk11) *  $\phi_1[x1][[J]]$ , {x1, a1, a2}, AccuracyGoal -> 10];
```

```
aij3 = NIntegrate[( $\phi_{2d4}[x2][[K]] * \phi_2[x2][[J]]$ ), {x2, 0, 12}, AccuracyGoal -> 10];
```

```
aij4 = 1 / (eb * ib) * NIntegrate[(f1xr2 / (x2)) *  $\phi_2[x2][[K]] * \phi_2[x2][[J]]$ , {x2, a3, a4}, AccuracyGoal -> 10] +  
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((f1xr2 * a) / h1^2) * ((kk1 - kk2r) / (1 + iv11 + ivr2)) *  $\phi_2[x2][[J]]$ , {x2, a3, a4}, AccuracyGoal -> 10] +  
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((ec * fc * zd2^2) / lc) * (kk22r) *  $\phi_2[x2][[J]]$ , {x2, a3, a4}, AccuracyGoal -> 10];
```

```

aij5 = 1 / (eb * ib) * NIntegrate[(f1xl2 / (l2 - x2)) * #2[x2][[K]] * #2[x2][[J]], {x2, a5, a6}, AccuracyGoal -> 10] +
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((f1xl2 * a) / h1^2) * ((kk3 - kk21) / (1 + ivl2 + ivr3)) * #2[x2][[J]], {x2, a5, a6}, AccuracyGoal -> 10] +
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((ec * fc * zd2^2) / lc) * (kk221) * #2[x2][[J]], {x2, a5, a6}, AccuracyGoal -> 10];

aij6 = NIntegrate[(#3d4[x3][[K]] * #3[x3][[J]]), {x3, 0, l3}, AccuracyGoal -> 10];

aij7 = 1 / (eb * ib) * NIntegrate[(f1xr3 / (x3)) * #3[x3][[K]] * #3[x3][[J]], {x3, a7, a8}, AccuracyGoal -> 10] +
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((f1xr3 * a) / h1^2) * ((kk21 - kk3) / (1 + ivl2 + ivr3)) * #3[x3][[J]], {x3, a7, a8}, AccuracyGoal -> 10] +
1 / (eb * ib) * NIntegrate[((ec * fc * zd2^2) / lc) * (kk33) * #3[x3][[J]], {x3, a7, a8}, AccuracyGoal -> 10];

(*Print[aij1," ",aij2," ",aij3," ",aij4," ",aij5," ",aij6," ",aij7]*)
ALOC = Append[ALOC, aij1 + aij2 + aij3 + aij4 + aij5 + aij6 + aij7];
];
amat = Append[amat, ALOC]
]
amat // MatrixForm

```

Out[1613]= 2.65079 × 10⁻⁶

Out[1625]//MatrixForm=

19.3672	0.90305	1.69339	9.09952	-0.0403324	0.0060793
0.90305	3.54621	1.41597	1.54609	0.000567451	0.00233293
1.69339	1.41597	0.659135	1.22393	-0.01167	-0.00189321
9.09952	1.54609	1.22393	4.64094	-0.0203093	0.00275537
-0.0403324	0.000567451	-0.01167	-0.0203093	1.7797	0.626535
0.00607929	0.00233293	-0.00189325	0.00275513	0.626536	0.222796

■ Προσδιορισμός Πίνακα B

```
ClearAll[bmat, bmat1, bmat2, bmat3];  
bmat = {};  
J = 0;  
While[J < Nnodes, J = J + 1;  
  BLOC = {};  
  K = 0;  
  While[K < Nnodes, K = K + 1;  
  
    bmat1 = NIntegrate[( $\Phi_1[x_1][[K]] * \Phi_1[x_1][[J]]$ ), {x1, 0, 11}, AccuracyGoal -> 10];  
    bmat2 = NIntegrate[( $\Phi_2[x_2][[K]] * \Phi_2[x_2][[J]]$ ), {x2, 0, 12}, AccuracyGoal -> 5];  
    bmat3 = NIntegrate[( $\Phi_3[x_3][[K]] * \Phi_3[x_3][[J]]$ ), {x3, 0, 13}, AccuracyGoal -> 5];  
    BLOC = Append[BLOC, bmat1 + bmat2 + bmat3];  
  ];  
  bmat = Append[bmat, BLOC]  
]  
bmat // MatrixForm
```

```
{ 3950.83      -1.77256 × 10-7  9.04994 × 10-7  -0.00183238  -0.000138865  -0.096228  
 -1.77256 × 10-7  1336.06      -9.30145 × 10-7  -0.0000938682  -4.77428 × 10-7  0.0000111559  
 9.04994 × 10-7  -9.30145 × 10-7  2471.74      -0.00200849  -0.000175304  -0.169911  
 -0.00183238  -0.0000938682  -0.00200849  8264.15      0.00227121  -0.360195  
 -0.000138865  -4.77428 × 10-7  -0.000175304  0.00227121  3883.71      0.239563  
 -0.096228  0.0000111559  -0.169911  -0.360195  0.239563  1335.97
```

■ Προσδιορισμός Συντελεστών λi

```
ClearAll[cmat, decmat, λ, lam, omega];  
cmat = amat - λ * bmat;  
cmat // MatrixForm  
decmat = Det[cmat]  
lam = λ /. Solve[decmat == 0, λ]  
omega = (eb * ib * lam / m) ^ (1 / 2)
```

```
Out[1634]=  $1.50692 \times 10^{-6} - 8.00811 \lambda + 1.21649 \times 10^7 \lambda^2 - 5.44502 \times 10^{12} \lambda^3 + 1.16246 \times 10^{16} \lambda^4 - 5.04031 \times 10^{18} \lambda^5 + 5.59444 \times 10^{20} \lambda^6$ 
```

```
Out[1635]= {3.26327 × 10-7, 7.0272 × 10-7, 1.21265 × 10-6, 0.000623734, 0.00276304, 0.00562048}
```

```
Out[1636]= {10.3478, 15.1849, 19.9475, 452.397, 952.168, 1358.02}
```

■ Προσδιορισμός Συντελεστών c_i

```
ClearAll[solc1, c11, c21, c31, c41, c51, c61, or1, or1Loc, dor1, or12, or12Loc, dor12, or13, or13Loc, dor13, or14,  
  or14Loc, dor14, or15, or15Loc, dor15, or16, or16Loc, dor16];  
or1 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or1Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or1Loc = Append[or1Loc, 0]]; or1 = Append[or1, or1Loc]]  
  
or1[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[1]] * bmat[[1, 2]];  
or1[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[1]] * bmat[[1, 3]];  
or1[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[1]] * bmat[[1, 4]];  
or1[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[1]] * bmat[[1, 5]];  
or1[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[1]] * bmat[[1, 6]];  
  
or1[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[1]] * bmat[[2, 2]];  
or1[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[1]] * bmat[[2, 3]];  
or1[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[1]] * bmat[[2, 4]];  
or1[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[1]] * bmat[[2, 5]];  
or1[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[1]] * bmat[[2, 6]];
```

```
or1[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[1]] * bmat[[3, 2]];
or1[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[1]] * bmat[[3, 3]];
or1[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[1]] * bmat[[3, 4]];
or1[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[1]] * bmat[[3, 5]];
or1[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[1]] * bmat[[3, 6]];

or1[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[1]] * bmat[[4, 2]];
or1[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[1]] * bmat[[4, 3]];
or1[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[1]] * bmat[[4, 4]];
or1[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[1]] * bmat[[4, 5]];
or1[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[1]] * bmat[[4, 6]];

or1[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[1]] * bmat[[5, 2]];
or1[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[1]] * bmat[[5, 3]];
or1[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[1]] * bmat[[5, 4]];
or1[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[1]] * bmat[[5, 5]];
or1[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[1]] * bmat[[5, 6]];

dor1 = Det[or1];
```



```
or12 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or12Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or12Loc = Append[or12Loc, 0]]; or12 = Append[or12, or12Loc]  
  
or12[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[1]] * bmat[[1, 1]];  
or12[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[1]] * bmat[[1, 3]];  
or12[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[1]] * bmat[[1, 4]];  
or12[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[1]] * bmat[[1, 5]];  
or12[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[1]] * bmat[[1, 6]];
```

```
or12[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[1]] * bmat[[2, 1]];  
or12[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[1]] * bmat[[2, 3]];  
or12[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[1]] * bmat[[2, 4]];  
or12[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[1]] * bmat[[2, 5]];  
or12[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[1]] * bmat[[2, 6]];  
  
or12[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[1]] * bmat[[3, 1]];  
or12[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[1]] * bmat[[3, 3]];  
or12[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[1]] * bmat[[3, 4]];  
or12[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[1]] * bmat[[3, 5]];  
or12[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[1]] * bmat[[3, 6]];
```

```
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or13Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or13Loc = Append[or13Loc, 0]]; or13 = Append[or13, or13Loc]]
```

```
or13[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[1]] * bmat[[1, 2]];  
or13[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[1]] * bmat[[1, 1]];  
or13[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[1]] * bmat[[1, 4]];  
or13[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[1]] * bmat[[1, 5]];  
or13[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[1]] * bmat[[1, 6]];
```

```
or13[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[1]] * bmat[[2, 2]];  
or13[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[1]] * bmat[[2, 1]];  
or13[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[1]] * bmat[[2, 4]];  
or13[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[1]] * bmat[[2, 5]];  
or13[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[1]] * bmat[[2, 6]];
```

```
or13[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[1]] * bmat[[3, 2]];  
or13[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[1]] * bmat[[3, 1]];  
or13[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[1]] * bmat[[3, 4]];  
or13[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[1]] * bmat[[3, 5]];  
or13[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[1]] * bmat[[3, 6]];
```

```
or13[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[1]] * bmat[[4, 2]];
or13[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[1]] * bmat[[4, 1]];
or13[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[1]] * bmat[[4, 4]];
or13[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[1]] * bmat[[4, 5]];
or13[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[1]] * bmat[[4, 6]];

or13[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[1]] * bmat[[5, 2]];
or13[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[1]] * bmat[[5, 1]];
or13[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[1]] * bmat[[5, 4]];
or13[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[1]] * bmat[[5, 5]];
or13[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[1]] * bmat[[5, 6]];
dor13 = Det[or13];

c31 = -dor13 / dor1;

or14 = {};
```

```
J = 0;
While[J < 5, J = J + 1;
  or14Loc = {};
  K = 0;
  While[K < 5, K = K + 1; or14Loc = Append[or14Loc, 0]]; or14 = Append[or14, or14Loc]]
```

```
or14[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[1]] * bmat[[1, 2]];
or14[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[1]] * bmat[[1, 3]];
or14[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[1]] * bmat[[1, 1]];
or14[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[1]] * bmat[[1, 5]];
or14[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[1]] * bmat[[1, 6]];

or14[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[1]] * bmat[[2, 2]];
or14[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[1]] * bmat[[2, 3]];
or14[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[1]] * bmat[[2, 1]];
or14[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[1]] * bmat[[2, 5]];
or14[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[1]] * bmat[[2, 6]];

or14[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[1]] * bmat[[3, 2]];
or14[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[1]] * bmat[[3, 3]];
or14[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[1]] * bmat[[3, 1]];
or14[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[1]] * bmat[[3, 5]];
or14[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[1]] * bmat[[3, 6]];
```

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

```
or14[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[1]] * bmat[[4, 2]];
or14[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[1]] * bmat[[4, 3]];
or14[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[1]] * bmat[[4, 1]];
or14[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[1]] * bmat[[4, 5]];
or14[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[1]] * bmat[[4, 6]];

or14[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[1]] * bmat[[5, 2]];
or14[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[1]] * bmat[[5, 3]];
or14[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[1]] * bmat[[5, 1]];
or14[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[1]] * bmat[[5, 5]];
or14[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[1]] * bmat[[5, 6]];
dor14 = Det[or14];

c41 = -dor14 / dor1;
```

```
or15 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or15Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or15Loc = Append[or15Loc, 0]]; or15 = Append[or15, or15Loc]]  
  
or15[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[1]] * bmat[[1, 2]];  
or15[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[1]] * bmat[[1, 3]];  
or15[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[1]] * bmat[[1, 4]];  
or15[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[1]] * bmat[[1, 1]];  
or15[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[1]] * bmat[[1, 6]];  
  
or15[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[1]] * bmat[[2, 2]];  
or15[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[1]] * bmat[[2, 3]];  
or15[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[1]] * bmat[[2, 4]];  
or15[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[1]] * bmat[[2, 1]];  
or15[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[1]] * bmat[[2, 6]];  
  
or15[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[1]] * bmat[[3, 2]];  
or15[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[1]] * bmat[[3, 3]];  
or15[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[1]] * bmat[[3, 4]];  
or15[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[1]] * bmat[[3, 1]];  
or15[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[1]] * bmat[[3, 6]];
```



```
or15[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[1]] * bmat[[4, 2]];
or15[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[1]] * bmat[[4, 3]];
or15[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[1]] * bmat[[4, 4]];
or15[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[1]] * bmat[[4, 1]];
or15[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[1]] * bmat[[4, 6]];

or15[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[1]] * bmat[[5, 2]];
or15[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[1]] * bmat[[5, 3]];
or15[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[1]] * bmat[[5, 4]];
or15[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[1]] * bmat[[5, 1]];
or15[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[1]] * bmat[[5, 6]];
dor15 = Det[or15];

c51 = -dor15/dor1;
```

```
or16 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or16Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or16Loc = Append[or16Loc, 0]]; or16 = Append[or16, or16Loc]]  
  
or16[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[1]] * bmat[[1, 2]];  
or16[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[1]] * bmat[[1, 3]];  
or16[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[1]] * bmat[[1, 4]];  
or16[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[1]] * bmat[[1, 5]];  
or16[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[1]] * bmat[[1, 1]];  
  
or16[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[1]] * bmat[[2, 2]];  
or16[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[1]] * bmat[[2, 3]];  
or16[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[1]] * bmat[[2, 4]];  
or16[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[1]] * bmat[[2, 5]];  
or16[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[1]] * bmat[[2, 1]];
```

```
J = 0;  
solc1 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc1 = Append[solc1, 0]]  
solc1 = {1, c21, c31, c41, c51, c61}
```

```
Out[1820]= {1, 7.75441, -21.1989, 1.04701, -0.067455, -0.112095}
```

```
ClearAll[solc2, c12, c22, c32, c42, c52, c62, or2, or2Loc, dor2, or22, or22Loc, dor22, or23, or23Loc, dor23, or24,  
  or24Loc, dor24, or25, or25Loc, dor25, or26, or26Loc, dor26];  
or2 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or2Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or2Loc = Append[or2Loc, 0]]; or2 = Append[or2, or2Loc]]  
  
or2[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[2]] * bmat[[1, 2]];  
or2[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[2]] * bmat[[1, 3]];  
or2[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[2]] * bmat[[1, 4]];  
or2[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[2]] * bmat[[1, 5]];  
or2[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[2]] * bmat[[1, 6]];  
  
or2[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[2]] * bmat[[2, 2]];  
or2[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[2]] * bmat[[2, 3]];  
or2[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[2]] * bmat[[2, 4]];  
or2[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[2]] * bmat[[2, 5]];  
or2[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[2]] * bmat[[2, 6]];
```

```
or2[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[2]] * bmat[[3, 2]];
or2[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[2]] * bmat[[3, 3]];
or2[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[2]] * bmat[[3, 4]];
or2[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[2]] * bmat[[3, 5]];
or2[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[2]] * bmat[[3, 6]];

or2[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[2]] * bmat[[4, 2]];
or2[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[2]] * bmat[[4, 3]];
or2[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[2]] * bmat[[4, 4]];
or2[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[2]] * bmat[[4, 5]];
or2[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[2]] * bmat[[4, 6]];

or2[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[2]] * bmat[[5, 2]];
or2[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[2]] * bmat[[5, 3]];
or2[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[2]] * bmat[[5, 4]];
or2[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[2]] * bmat[[5, 5]];
or2[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[2]] * bmat[[5, 6]];

dor2 = Det[or2];
```

```
or22 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or22Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or22Loc = Append[or22Loc, 0]]; or22 = Append[or22, or22Loc]  
  
or22[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[2]] * bmat[[1, 1]];  
or22[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[2]] * bmat[[1, 3]];  
or22[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[2]] * bmat[[1, 4]];  
or22[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[2]] * bmat[[1, 5]];  
or22[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[2]] * bmat[[1, 6]];  
  
or22[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[2]] * bmat[[2, 1]];  
or22[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[2]] * bmat[[2, 3]];  
or22[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[2]] * bmat[[2, 4]];  
or22[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[2]] * bmat[[2, 5]];  
or22[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[2]] * bmat[[2, 6]];
```

```
or22[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[2]] * bmat[[3, 1]];
or22[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[2]] * bmat[[3, 3]];
or22[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[2]] * bmat[[3, 4]];
or22[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[2]] * bmat[[3, 5]];
or22[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[2]] * bmat[[3, 6]];

or22[[4, 1]] = amat[[4, 1]] - lam[[2]] * bmat[[4, 1]];
or22[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[2]] * bmat[[4, 3]];
or22[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[2]] * bmat[[4, 4]];
or22[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[2]] * bmat[[4, 5]];
or22[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[2]] * bmat[[4, 6]];

or22[[5, 1]] = amat[[5, 1]] - lam[[2]] * bmat[[5, 1]];
or22[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[2]] * bmat[[5, 3]];
or22[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[2]] * bmat[[5, 4]];
or22[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[2]] * bmat[[5, 5]];
or22[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[2]] * bmat[[5, 6]];

dor22 = Det[or22];

c22 = -dor22 / dor2;
```

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

```
or23 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or23Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or23Loc = Append[or23Loc, 0]]; or23 = Append[or23, or23Loc]]  
  
or23[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[2]] * bmat[[1, 2]];  
or23[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[2]] * bmat[[1, 1]];  
or23[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[2]] * bmat[[1, 4]];  
or23[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[2]] * bmat[[1, 5]];  
or23[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[2]] * bmat[[1, 6]];  
  
or23[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[2]] * bmat[[2, 2]];  
or23[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[2]] * bmat[[2, 1]];  
or23[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[2]] * bmat[[2, 4]];  
or23[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[2]] * bmat[[2, 5]];  
or23[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[2]] * bmat[[2, 6]];
```



```
or23[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[2]] * bmat[[3, 2]];
or23[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[2]] * bmat[[3, 1]];
or23[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[2]] * bmat[[3, 4]];
or23[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[2]] * bmat[[3, 5]];
or23[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[2]] * bmat[[3, 6]];

or23[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[2]] * bmat[[4, 2]];
or23[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[2]] * bmat[[4, 1]];
or23[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[2]] * bmat[[4, 4]];
or23[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[2]] * bmat[[4, 5]];
or23[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[2]] * bmat[[4, 6]];

or23[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[2]] * bmat[[5, 2]];
or23[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[2]] * bmat[[5, 1]];
or23[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[2]] * bmat[[5, 4]];
or23[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[2]] * bmat[[5, 5]];
or23[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[2]] * bmat[[5, 6]];
dor23 = Det[or23];

c32 = -dor23/dor2;
```

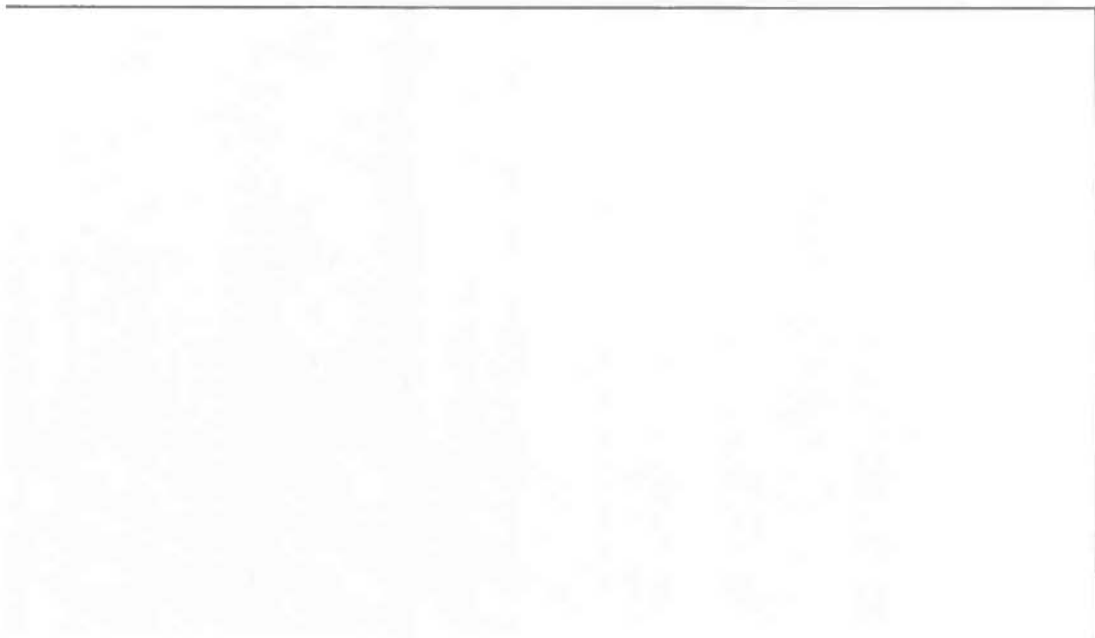


```
or24 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or24Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or24Loc = Append[or24Loc, 0]]; or24 = Append[or24, or24Loc]]  
  
or24[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[2]] * bmat[[1, 2]];  
or24[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[2]] * bmat[[1, 3]];  
or24[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[2]] * bmat[[1, 1]];  
or24[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[2]] * bmat[[1, 5]];  
or24[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[2]] * bmat[[1, 6]];  
  
or24[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[2]] * bmat[[2, 2]];  
or24[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[2]] * bmat[[2, 3]];  
or24[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[2]] * bmat[[2, 1]];  
or24[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[2]] * bmat[[2, 5]];  
or24[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[2]] * bmat[[2, 6]];  
  
or24[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[2]] * bmat[[3, 2]];  
or24[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[2]] * bmat[[3, 3]];  
or24[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[2]] * bmat[[3, 1]];  
or24[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[2]] * bmat[[3, 5]];  
or24[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[2]] * bmat[[3, 6]];
```

```
or24[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[2]] * bmat[[4, 2]];
or24[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[2]] * bmat[[4, 3]];
or24[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[2]] * bmat[[4, 1]];
or24[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[2]] * bmat[[4, 5]];
or24[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[2]] * bmat[[4, 6]];

or24[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[2]] * bmat[[5, 2]];
or24[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[2]] * bmat[[5, 3]];
or24[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[2]] * bmat[[5, 1]];
or24[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[2]] * bmat[[5, 5]];
or24[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[2]] * bmat[[5, 6]];
dor24 = Det[or24];

c42 = -dor24 / dor2;
```



```
or25 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or25Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or25Loc = Append[or25Loc, 0]]; or25 = Append[or25, or25Loc]  
  
or25[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[2]] * bmat[[1, 2]];  
or25[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[2]] * bmat[[1, 3]];  
or25[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[2]] * bmat[[1, 4]];  
or25[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[2]] * bmat[[1, 1]];  
or25[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[2]] * bmat[[1, 6]];  
  
or25[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[2]] * bmat[[2, 2]];  
or25[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[2]] * bmat[[2, 3]];  
or25[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[2]] * bmat[[2, 4]];  
or25[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[2]] * bmat[[2, 1]];  
or25[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[2]] * bmat[[2, 6]];
```



```
or25[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[2]] * bmat[[3, 2]];
or25[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[2]] * bmat[[3, 3]];
or25[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[2]] * bmat[[3, 4]];
or25[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[2]] * bmat[[3, 1]];
or25[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[2]] * bmat[[3, 6]];

or25[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[2]] * bmat[[4, 2]];
or25[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[2]] * bmat[[4, 3]];
or25[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[2]] * bmat[[4, 4]];
or25[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[2]] * bmat[[4, 1]];
or25[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[2]] * bmat[[4, 6]];

or25[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[2]] * bmat[[5, 2]];
or25[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[2]] * bmat[[5, 3]];
or25[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[2]] * bmat[[5, 4]];
or25[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[2]] * bmat[[5, 1]];
or25[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[2]] * bmat[[5, 6]];
dor25 = Det[or25];

c52 = -dor25 / dor2;
```

```
or26 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or26Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or26Loc = Append[or26Loc, 0]]; or26 = Append[or26, or26Loc]  
  
or26[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[2]] * bmat[[1, 2]];  
or26[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[2]] * bmat[[1, 3]];  
or26[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[2]] * bmat[[1, 4]];  
or26[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[2]] * bmat[[1, 5]];  
or26[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[2]] * bmat[[1, 1]];  
  
or26[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[2]] * bmat[[2, 2]];  
or26[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[2]] * bmat[[2, 3]];  
or26[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[2]] * bmat[[2, 4]];  
or26[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[2]] * bmat[[2, 5]];  
or26[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[2]] * bmat[[2, 1]];
```



```
or26[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[2]] * bmat[[3, 2]];
or26[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[2]] * bmat[[3, 3]];
or26[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[2]] * bmat[[3, 4]];
or26[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[2]] * bmat[[3, 5]];
or26[[3, 5]] = amat[[3, 1]] - lam[[2]] * bmat[[3, 1]];

or26[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[2]] * bmat[[4, 2]];
or26[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[2]] * bmat[[4, 3]];
or26[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[2]] * bmat[[4, 4]];
or26[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[2]] * bmat[[4, 5]];
or26[[4, 5]] = amat[[4, 1]] - lam[[2]] * bmat[[4, 1]];

or26[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[2]] * bmat[[5, 2]];
or26[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[2]] * bmat[[5, 3]];
or26[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[2]] * bmat[[5, 4]];
or26[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[2]] * bmat[[5, 5]];
or26[[5, 5]] = amat[[5, 1]] - lam[[2]] * bmat[[5, 1]];
dor26 = Det[or26];

c62 = -dor26 / dor2;
```

```
J = 0;  
solc2 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc2 = Append[solc2, 0]]  
solc2 = {1, c22, c32, c42, c52, c62}  
  
{1, 0.749029, -0.135981, -2.1771, -0.00072185, -0.00736154}
```

```
ClearAll[solc3, c13, c23, c33, c43, c53, c63, or3, or3Loc, dor3, or32, or32Loc, dor32, or33, or33Loc, dor33, or34,  
  or34Loc, dor34, or35, or35Loc, dor35, or36, or36Loc, dor36];  
or3 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or3Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or3Loc = Append[or3Loc, 0]]; or3 = Append[or3, or3Loc]]  
  
or3[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[3]] * bmat[[1, 2]];  
or3[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[3]] * bmat[[1, 3]];  
or3[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[3]] * bmat[[1, 4]];  
or3[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[3]] * bmat[[1, 5]];  
or3[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[3]] * bmat[[1, 6]];  
  
or3[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[3]] * bmat[[2, 2]];  
or3[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[3]] * bmat[[2, 3]];  
or3[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[3]] * bmat[[2, 4]];  
or3[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[3]] * bmat[[2, 5]];  
or3[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[3]] * bmat[[2, 6]];  
  
or3[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[3]] * bmat[[3, 2]];  
or3[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[3]] * bmat[[3, 3]];  
or3[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[3]] * bmat[[3, 4]];  
or3[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[3]] * bmat[[3, 5]];  
or3[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[3]] * bmat[[3, 6]];  
  
or3[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[3]] * bmat[[4, 2]];  
or3[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[3]] * bmat[[4, 3]];  
or3[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[3]] * bmat[[4, 4]];  
or3[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[3]] * bmat[[4, 5]];  
or3[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[3]] * bmat[[4, 6]];  
  
or3[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[3]] * bmat[[5, 2]];  
or3[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[3]] * bmat[[5, 3]];  
or3[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[3]] * bmat[[5, 4]];  
or3[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[3]] * bmat[[5, 5]];  
or3[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[3]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor3 = Det[or3];
```

```
or32 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or32Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or32Loc = Append[or32Loc, 0]]; or32 = Append[or32, or32Loc]]  
  
or32[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[3]] * bmat[[1, 1]];  
or32[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[3]] * bmat[[1, 3]];  
or32[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[3]] * bmat[[1, 4]];  
or32[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[3]] * bmat[[1, 5]];  
or32[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[3]] * bmat[[1, 6]];  
  
or32[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[3]] * bmat[[2, 1]];  
or32[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[3]] * bmat[[2, 3]];  
or32[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[3]] * bmat[[2, 4]];  
or32[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[3]] * bmat[[2, 5]];  
or32[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[3]] * bmat[[2, 6]];  
  
or32[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[3]] * bmat[[3, 1]];  
or32[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[3]] * bmat[[3, 3]];  
or32[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[3]] * bmat[[3, 4]];  
or32[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[3]] * bmat[[3, 5]];  
or32[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[3]] * bmat[[3, 6]];  
  
or32[[4, 1]] = amat[[4, 1]] - lam[[3]] * bmat[[4, 1]];  
or32[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[3]] * bmat[[4, 3]];  
or32[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[3]] * bmat[[4, 4]];  
or32[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[3]] * bmat[[4, 5]];  
or32[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[3]] * bmat[[4, 6]];  
  
or32[[5, 1]] = amat[[5, 1]] - lam[[3]] * bmat[[5, 1]];  
or32[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[3]] * bmat[[5, 3]];  
or32[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[3]] * bmat[[5, 4]];  
or32[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[3]] * bmat[[5, 5]];  
or32[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[3]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor32 = Det[or32];
```

```
c23 = -dor32 / dor3;  
  
or33 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or33Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or33Loc = Append[or33Loc, 0]]; or33 = Append[or33, or33Loc]  
  
or33[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[3]] * bmat[[1, 2]];  
or33[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[3]] * bmat[[1, 1]];  
or33[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[3]] * bmat[[1, 4]];  
or33[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[3]] * bmat[[1, 5]];  
or33[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[3]] * bmat[[1, 6]];  
  
or33[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[3]] * bmat[[2, 2]];  
or33[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[3]] * bmat[[2, 1]];  
or33[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[3]] * bmat[[2, 4]];  
or33[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[3]] * bmat[[2, 5]];  
or33[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[3]] * bmat[[2, 6]];  
  
or33[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[3]] * bmat[[3, 2]];  
or33[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[3]] * bmat[[3, 1]];  
or33[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[3]] * bmat[[3, 4]];  
or33[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[3]] * bmat[[3, 5]];  
or33[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[3]] * bmat[[3, 6]];  
  
or33[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[3]] * bmat[[4, 2]];  
or33[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[3]] * bmat[[4, 1]];  
or33[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[3]] * bmat[[4, 4]];  
or33[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[3]] * bmat[[4, 5]];  
or33[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[3]] * bmat[[4, 6]];  
  
or33[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[3]] * bmat[[5, 2]];  
or33[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[3]] * bmat[[5, 1]];  
or33[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[3]] * bmat[[5, 4]];  
or33[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[3]] * bmat[[5, 5]];  
or33[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[3]] * bmat[[5, 6]];  
dor33 = Det[or33];  
  
c33 = -dor33 / dor3;
```

```
or34 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or34Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or34Loc = Append[or34Loc, 0]]; or34 = Append[or34, or34Loc]]  
  
or34[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[3]] * bmat[[1, 2]];  
or34[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[3]] * bmat[[1, 3]];  
or34[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[3]] * bmat[[1, 1]];  
or34[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[3]] * bmat[[1, 5]];  
or34[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[3]] * bmat[[1, 6]];  
  
or34[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[3]] * bmat[[2, 2]];  
or34[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[3]] * bmat[[2, 3]];  
or34[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[3]] * bmat[[2, 1]];  
or34[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[3]] * bmat[[2, 5]];  
or34[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[3]] * bmat[[2, 6]];  
  
or34[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[3]] * bmat[[3, 2]];  
or34[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[3]] * bmat[[3, 3]];  
or34[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[3]] * bmat[[3, 1]];  
or34[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[3]] * bmat[[3, 5]];  
or34[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[3]] * bmat[[3, 6]];  
  
or34[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[3]] * bmat[[4, 2]];  
or34[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[3]] * bmat[[4, 3]];  
or34[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[3]] * bmat[[4, 1]];  
or34[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[3]] * bmat[[4, 5]];  
or34[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[3]] * bmat[[4, 6]];  
  
or34[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[3]] * bmat[[5, 2]];  
or34[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[3]] * bmat[[5, 3]];  
or34[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[3]] * bmat[[5, 1]];  
or34[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[3]] * bmat[[5, 5]];  
or34[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[3]] * bmat[[5, 6]];  
dor34 = Det[or34];  
  
c43 = -dor34 / dor3;
```

```
or35 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or35Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or35Loc = Append[or35Loc, 0]]; or35 = Append[or35, or35Loc]  
  
or35[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[3]] * bmat[[1, 2]];  
or35[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[3]] * bmat[[1, 3]];  
or35[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[3]] * bmat[[1, 4]];  
or35[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[3]] * bmat[[1, 1]];  
or35[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[3]] * bmat[[1, 6]];  
  
or35[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[3]] * bmat[[2, 2]];  
or35[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[3]] * bmat[[2, 3]];  
or35[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[3]] * bmat[[2, 4]];  
or35[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[3]] * bmat[[2, 1]];  
or35[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[3]] * bmat[[2, 6]];  
  
or35[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[3]] * bmat[[3, 2]];  
or35[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[3]] * bmat[[3, 3]];  
or35[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[3]] * bmat[[3, 4]];  
or35[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[3]] * bmat[[3, 1]];  
or35[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[3]] * bmat[[3, 6]];  
  
or35[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[3]] * bmat[[4, 2]];  
or35[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[3]] * bmat[[4, 3]];  
or35[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[3]] * bmat[[4, 4]];  
or35[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[3]] * bmat[[4, 1]];  
or35[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[3]] * bmat[[4, 6]];  
  
or35[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[3]] * bmat[[5, 2]];  
or35[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[3]] * bmat[[5, 3]];  
or35[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[3]] * bmat[[5, 4]];  
or35[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[3]] * bmat[[5, 1]];  
or35[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[3]] * bmat[[5, 6]];  
dor35 = Det[or35];  
  
c53 = -dor35 / dor3;
```

```
or36 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or36Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or36Loc = Append[or36Loc, 0]]; or36 = Append[or36, or36Loc]]  
  
or36[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[3]] * bmat[[1, 2]];  
or36[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[3]] * bmat[[1, 3]];  
or36[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[3]] * bmat[[1, 4]];  
or36[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[3]] * bmat[[1, 5]];  
or36[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[3]] * bmat[[1, 1]];  
  
or36[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[3]] * bmat[[2, 2]];  
or36[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[3]] * bmat[[2, 3]];  
or36[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[3]] * bmat[[2, 4]];  
or36[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[3]] * bmat[[2, 5]];  
or36[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[3]] * bmat[[2, 1]];  
  
or36[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[3]] * bmat[[3, 2]];  
or36[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[3]] * bmat[[3, 3]];  
or36[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[3]] * bmat[[3, 4]];  
or36[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[3]] * bmat[[3, 5]];  
or36[[3, 5]] = amat[[3, 1]] - lam[[3]] * bmat[[3, 1]];  
  
or36[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[3]] * bmat[[4, 2]];  
or36[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[3]] * bmat[[4, 3]];  
or36[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[3]] * bmat[[4, 4]];  
or36[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[3]] * bmat[[4, 5]];  
or36[[4, 5]] = amat[[4, 1]] - lam[[3]] * bmat[[4, 1]];  
  
or36[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[3]] * bmat[[5, 2]];  
or36[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[3]] * bmat[[5, 3]];  
or36[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[3]] * bmat[[5, 4]];  
or36[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[3]] * bmat[[5, 5]];  
or36[[5, 5]] = amat[[5, 1]] - lam[[3]] * bmat[[5, 1]];  
dor36 = Det[or36];  
  
c63 = -dor36 / dor3;
```



```
J = 0;  
solc3 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc3 = Append[solc3, 0]]  
solc3 = {1, c23, c33, c43, c53, c63}  
  
{1, -0.34899, 1.54068, 0.720205, 490.144, -1388.47}
```



```
ClearAll[solc4, ci4, c24, c34, c44, c54, c64, or4, or4Loc, dor4, or42, or42Loc, dor42, or43, or43Loc, dor43, or44,
  or44Loc, dor44, or45, or45Loc, dor45, or46, or46Loc, dor46];
or4 = {};
J = 0;
While[J < 5, J = J + 1;
  or4Loc = {};
  K = 0;
  While[K < 5, K = K + 1; or4Loc = Append[or4Loc, 0]; or4 = Append[or4, or4Loc]]

or4[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[4]] * bmat[[1, 2]];
or4[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[4]] * bmat[[1, 3]];
or4[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[4]] * bmat[[1, 4]];
or4[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[4]] * bmat[[1, 5]];
or4[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[4]] * bmat[[1, 6]];

or4[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[4]] * bmat[[2, 2]];
or4[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[4]] * bmat[[2, 3]];
or4[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[4]] * bmat[[2, 4]];
or4[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[4]] * bmat[[2, 5]];
or4[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[4]] * bmat[[2, 6]];

or4[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[4]] * bmat[[3, 2]];
or4[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[4]] * bmat[[3, 3]];
or4[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[4]] * bmat[[3, 4]];
or4[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[4]] * bmat[[3, 5]];
or4[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[4]] * bmat[[3, 6]];

or4[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[4]] * bmat[[4, 2]];
or4[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[4]] * bmat[[4, 3]];
or4[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[4]] * bmat[[4, 4]];
or4[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[4]] * bmat[[4, 5]];
or4[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[4]] * bmat[[4, 6]];

or4[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[4]] * bmat[[5, 2]];
or4[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[4]] * bmat[[5, 3]];
or4[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[4]] * bmat[[5, 4]];
or4[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[4]] * bmat[[5, 5]];
or4[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[4]] * bmat[[5, 6]];

dor4 = Det[or4];
```

```
or42 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or42Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or42Loc = Append[or42Loc, 0]]; or42 = Append[or42, or42Loc]]  
  
or42[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[4]] * bmat[[1, 1]];  
or42[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[4]] * bmat[[1, 3]];  
or42[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[4]] * bmat[[1, 4]];  
or42[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[4]] * bmat[[1, 5]];  
or42[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[4]] * bmat[[1, 6]];  
  
or42[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[4]] * bmat[[2, 1]];  
or42[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[4]] * bmat[[2, 3]];  
or42[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[4]] * bmat[[2, 4]];  
or42[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[4]] * bmat[[2, 5]];  
or42[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[4]] * bmat[[2, 6]];  
  
or42[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[4]] * bmat[[3, 1]];  
or42[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[4]] * bmat[[3, 3]];  
or42[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[4]] * bmat[[3, 4]];  
or42[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[4]] * bmat[[3, 5]];  
or42[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[4]] * bmat[[3, 6]];  
  
or42[[4, 1]] = amat[[4, 1]] - lam[[4]] * bmat[[4, 1]];  
or42[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[4]] * bmat[[4, 3]];  
or42[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[4]] * bmat[[4, 4]];  
or42[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[4]] * bmat[[4, 5]];  
or42[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[4]] * bmat[[4, 6]];  
  
or42[[5, 1]] = amat[[5, 1]] - lam[[4]] * bmat[[5, 1]];  
or42[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[4]] * bmat[[5, 3]];  
or42[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[4]] * bmat[[5, 4]];  
or42[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[4]] * bmat[[5, 5]];  
or42[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[4]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor42 = Det[or42];  
  
c24 = -dor42 / dor4;
```

```
or43 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or43Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or43Loc = Append[or43Loc, 0]]; or43 = Append[or43, or43Loc]  
  
or43[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[4]] * bmat[[1, 2]];  
or43[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[4]] * bmat[[1, 1]];  
or43[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[4]] * bmat[[1, 4]];  
or43[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[4]] * bmat[[1, 5]];  
or43[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[4]] * bmat[[1, 6]];  
  
or43[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[4]] * bmat[[2, 2]];  
or43[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[4]] * bmat[[2, 1]];  
or43[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[4]] * bmat[[2, 4]];  
or43[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[4]] * bmat[[2, 5]];  
or43[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[4]] * bmat[[2, 6]];  
  
or43[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[4]] * bmat[[3, 2]];  
or43[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[4]] * bmat[[3, 1]];  
or43[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[4]] * bmat[[3, 4]];  
or43[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[4]] * bmat[[3, 5]];  
or43[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[4]] * bmat[[3, 6]];  
  
or43[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[4]] * bmat[[4, 2]];  
or43[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[4]] * bmat[[4, 1]];  
or43[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[4]] * bmat[[4, 4]];  
or43[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[4]] * bmat[[4, 5]];  
or43[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[4]] * bmat[[4, 6]];  
  
or43[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[4]] * bmat[[5, 2]];  
or43[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[4]] * bmat[[5, 1]];  
or43[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[4]] * bmat[[5, 4]];  
or43[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[4]] * bmat[[5, 5]];  
or43[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[4]] * bmat[[5, 6]];  
dor43 = Det[or43];  
  
c34 = -dor43 / dor4;
```

```
or44 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or44Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or44Loc = Append[or44Loc, 0]]; or44 = Append[or44, or44Loc]]  
  
or44[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[4]] * bmat[[1, 2]];  
or44[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[4]] * bmat[[1, 3]];  
or44[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[4]] * bmat[[1, 1]];  
or44[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[4]] * bmat[[1, 5]];  
or44[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[4]] * bmat[[1, 6]];  
  
or44[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[4]] * bmat[[2, 2]];  
or44[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[4]] * bmat[[2, 3]];  
or44[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[4]] * bmat[[2, 1]];  
or44[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[4]] * bmat[[2, 5]];  
or44[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[4]] * bmat[[2, 6]];  
  
or44[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[4]] * bmat[[3, 2]];  
or44[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[4]] * bmat[[3, 3]];  
or44[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[4]] * bmat[[3, 1]];  
or44[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[4]] * bmat[[3, 5]];  
or44[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[4]] * bmat[[3, 6]];  
  
or44[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[4]] * bmat[[4, 2]];  
or44[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[4]] * bmat[[4, 3]];  
or44[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[4]] * bmat[[4, 1]];  
or44[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[4]] * bmat[[4, 5]];  
or44[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[4]] * bmat[[4, 6]];  
  
or44[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[4]] * bmat[[5, 2]];  
or44[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[4]] * bmat[[5, 3]];  
or44[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[4]] * bmat[[5, 1]];  
or44[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[4]] * bmat[[5, 5]];  
or44[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[4]] * bmat[[5, 6]];  
dor44 = Det[or44];  
  
c44 = dor44 / dor4;
```

```
or45 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or45Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or45Loc = Append[or45Loc, 0]]; or45 = Append[or45, or45Loc]  
  
or45[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[4]] * bmat[[1, 2]];  
or45[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[4]] * bmat[[1, 3]];  
or45[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[4]] * bmat[[1, 4]];  
or45[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[4]] * bmat[[1, 1]];  
or45[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[4]] * bmat[[1, 6]];  
  
or45[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[4]] * bmat[[2, 2]];  
or45[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[4]] * bmat[[2, 3]];  
or45[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[4]] * bmat[[2, 4]];  
or45[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[4]] * bmat[[2, 1]];  
or45[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[4]] * bmat[[2, 6]];  
  
or45[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[4]] * bmat[[3, 2]];  
or45[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[4]] * bmat[[3, 3]];  
or45[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[4]] * bmat[[3, 4]];  
or45[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[4]] * bmat[[3, 1]];  
or45[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[4]] * bmat[[3, 6]];  
  
or45[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[4]] * bmat[[4, 2]];  
or45[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[4]] * bmat[[4, 3]];  
or45[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[4]] * bmat[[4, 4]];  
or45[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[4]] * bmat[[4, 1]];  
or45[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[4]] * bmat[[4, 6]];  
  
or45[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[4]] * bmat[[5, 2]];  
or45[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[4]] * bmat[[5, 3]];  
or45[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[4]] * bmat[[5, 4]];  
or45[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[4]] * bmat[[5, 1]];  
or45[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[4]] * bmat[[5, 6]];  
dor45 = Det[or45];  
  
c54 = -dor45 / dor4;
```

```
or46 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or46Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1: or46Loc = Append[or46Loc, 0]]; or46 = Append[or46, or46Loc]]  
  
or46[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[4]] * bmat[[1, 2]];  
or46[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[4]] * bmat[[1, 3]];  
or46[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[4]] * bmat[[1, 4]];  
or46[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[4]] * bmat[[1, 5]];  
or46[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[4]] * bmat[[1, 1]];  
  
or46[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[4]] * bmat[[2, 2]];  
or46[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[4]] * bmat[[2, 3]];  
or46[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[4]] * bmat[[2, 4]];  
or46[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[4]] * bmat[[2, 5]];  
or46[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[4]] * bmat[[2, 1]];  
  
or46[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[4]] * bmat[[3, 2]];  
or46[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[4]] * bmat[[3, 3]];  
or46[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[4]] * bmat[[3, 4]];  
or46[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[4]] * bmat[[3, 5]];  
or46[[3, 5]] = amat[[3, 1]] - lam[[4]] * bmat[[3, 1]];  
  
or46[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[4]] * bmat[[4, 2]];  
or46[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[4]] * bmat[[4, 3]];  
or46[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[4]] * bmat[[4, 4]];  
or46[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[4]] * bmat[[4, 5]];  
or46[[4, 5]] = amat[[4, 1]] - lam[[4]] * bmat[[4, 1]];  
  
or46[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[4]] * bmat[[5, 2]];  
or46[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[4]] * bmat[[5, 3]];  
or46[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[4]] * bmat[[5, 4]];  
or46[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[4]] * bmat[[5, 5]];  
or46[[5, 5]] = amat[[5, 1]] - lam[[4]] * bmat[[5, 1]];  
dor46 = Det[or46];  
  
c64 = -dor46 / dor4;
```



```
J = 0;  
solc4 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc4 = Append[solc4, 0]]  
solc4 = {1, c24, c34, c44, c54, c64}  
  
{1, 0.692902, -2.82884, -0.0489186, 387.376, 397.483}
```

```
ClearAll[solc5, c15, c25, c35, c45, c55, c65, or3, or3Loc, dor3, or32, or32Loc, dor32, or33, or33Loc, dor33, or34,  
  or34Loc, dor34, or35, or35Loc, dor35, or36, or36Loc, dor36];  
or3 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or3Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or3Loc = Append[or3Loc, 0]]; or3 = Append[or3, or3Loc]]  
  
or3[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[5]] * bmat[[1, 2]];  
or3[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[5]] * bmat[[1, 3]];  
or3[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[5]] * bmat[[1, 4]];  
or3[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[5]] * bmat[[1, 5]];  
or3[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[5]] * bmat[[1, 6]];  
  
or3[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[5]] * bmat[[2, 2]];  
or3[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[5]] * bmat[[2, 3]];  
or3[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[5]] * bmat[[2, 4]];  
or3[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[5]] * bmat[[2, 5]];  
or3[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[5]] * bmat[[2, 6]];  
  
or3[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[5]] * bmat[[3, 2]];  
or3[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[5]] * bmat[[3, 3]];  
or3[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[5]] * bmat[[3, 4]];  
or3[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[5]] * bmat[[3, 5]];  
or3[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[5]] * bmat[[3, 6]];  
  
or3[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[5]] * bmat[[4, 2]];  
or3[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[5]] * bmat[[4, 3]];  
or3[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[5]] * bmat[[4, 4]];  
or3[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[5]] * bmat[[4, 5]];  
or3[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[5]] * bmat[[4, 6]];  
  
or3[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[5]] * bmat[[5, 2]];  
or3[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[5]] * bmat[[5, 3]];  
or3[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[5]] * bmat[[5, 4]];  
or3[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[5]] * bmat[[5, 5]];  
or3[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[5]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor3 = Det[or3];
```

```
or32 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or32Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or32Loc = Append[or32Loc, 0]]; or32 = Append[or32, or32Loc]  
  
or32[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[5]] * bmat[[1, 1]];  
or32[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[5]] * bmat[[1, 3]];  
or32[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[5]] * bmat[[1, 4]];  
or32[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[5]] * bmat[[1, 5]];  
or32[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[5]] * bmat[[1, 6]];  
  
or32[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[5]] * bmat[[2, 1]];  
or32[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[5]] * bmat[[2, 3]];  
or32[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[5]] * bmat[[2, 4]];  
or32[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[5]] * bmat[[2, 5]];  
or32[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[5]] * bmat[[2, 6]];  
  
or32[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[5]] * bmat[[3, 1]];  
or32[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[5]] * bmat[[3, 3]];  
or32[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[5]] * bmat[[3, 4]];  
or32[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[5]] * bmat[[3, 5]];  
or32[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[5]] * bmat[[3, 6]];  
  
or32[[4, 1]] = amat[[4, 1]] - lam[[5]] * bmat[[4, 1]];  
or32[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[5]] * bmat[[4, 3]];  
or32[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[5]] * bmat[[4, 4]];  
or32[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[5]] * bmat[[4, 5]];  
or32[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[5]] * bmat[[4, 6]];  
  
or32[[5, 1]] = amat[[5, 1]] - lam[[5]] * bmat[[5, 1]];  
or32[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[5]] * bmat[[5, 3]];  
or32[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[5]] * bmat[[5, 4]];  
or32[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[5]] * bmat[[5, 5]];  
or32[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[5]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor32 = Det[or32];  
  
c25 = -dor32 / dor3;
```

```
or33 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or33Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or33Loc = Append[or33Loc, 0]]; or33 = Append[or33, or33Loc]  
  
or33[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[5]] * bmat[[1, 2]];  
or33[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[5]] * bmat[[1, 1]];  
or33[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[5]] * bmat[[1, 4]];  
or33[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[5]] * bmat[[1, 5]];  
or33[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[5]] * bmat[[1, 6]];  
  
or33[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[5]] * bmat[[2, 2]];  
or33[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[5]] * bmat[[2, 1]];  
or33[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[5]] * bmat[[2, 4]];  
or33[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[5]] * bmat[[2, 5]];  
or33[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[5]] * bmat[[2, 6]];  
  
or33[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[5]] * bmat[[3, 2]];  
or33[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[5]] * bmat[[3, 1]];  
or33[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[5]] * bmat[[3, 4]];  
or33[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[5]] * bmat[[3, 5]];  
or33[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[5]] * bmat[[3, 6]];  
  
or33[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[5]] * bmat[[4, 2]];  
or33[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[5]] * bmat[[4, 1]];  
or33[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[5]] * bmat[[4, 4]];  
or33[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[5]] * bmat[[4, 5]];  
or33[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[5]] * bmat[[4, 6]];  
  
or33[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[5]] * bmat[[5, 2]];  
or33[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[5]] * bmat[[5, 1]];  
or33[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[5]] * bmat[[5, 4]];  
or33[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[5]] * bmat[[5, 5]];  
or33[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[5]] * bmat[[5, 6]];  
dor33 = Det[or33];  
  
c35 = -dor33 / dor3;
```

```
or34 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or34Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or34Loc = Append[or34Loc, 0]]; or34 = Append[or34, or34Loc]  
  
or34[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[5]] * bmat[[1, 2]];  
or34[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[5]] * bmat[[1, 3]];  
or34[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[5]] * bmat[[1, 1]];  
or34[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[5]] * bmat[[1, 5]];  
or34[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[5]] * bmat[[1, 6]];  
  
or34[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[5]] * bmat[[2, 2]];  
or34[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[5]] * bmat[[2, 3]];  
or34[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[5]] * bmat[[2, 1]];  
or34[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[5]] * bmat[[2, 5]];  
or34[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[5]] * bmat[[2, 6]];  
  
or34[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[5]] * bmat[[3, 2]];  
or34[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[5]] * bmat[[3, 3]];  
or34[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[5]] * bmat[[3, 1]];  
or34[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[5]] * bmat[[3, 5]];  
or34[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[5]] * bmat[[3, 6]];  
  
or34[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[5]] * bmat[[4, 2]];  
or34[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[5]] * bmat[[4, 3]];  
or34[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[5]] * bmat[[4, 1]];  
or34[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[5]] * bmat[[4, 5]];  
or34[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[5]] * bmat[[4, 6]];  
  
or34[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[5]] * bmat[[5, 2]];  
or34[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[5]] * bmat[[5, 3]];  
or34[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[5]] * bmat[[5, 1]];  
or34[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[5]] * bmat[[5, 5]];  
or34[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[5]] * bmat[[5, 6]];  
dor34 = Det[or34];  
  
c45 = -dor34 / dor3;
```

```
or35 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or35Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or35Loc = Append[or35Loc, 0]]; or35 = Append[or35, or35Loc]]  
  
or35[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[5]] * bmat[[1, 2]];  
or35[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[5]] * bmat[[1, 3]];  
or35[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[5]] * bmat[[1, 4]];  
or35[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[5]] * bmat[[1, 1]];  
or35[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[5]] * bmat[[1, 6]];  
  
or35[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[5]] * bmat[[2, 2]];  
or35[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[5]] * bmat[[2, 3]];  
or35[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[5]] * bmat[[2, 4]];  
or35[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[5]] * bmat[[2, 1]];  
or35[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[5]] * bmat[[2, 6]];  
  
or35[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[5]] * bmat[[3, 2]];  
or35[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[5]] * bmat[[3, 3]];  
or35[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[5]] * bmat[[3, 4]];  
or35[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[5]] * bmat[[3, 1]];  
or35[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[5]] * bmat[[3, 6]];  
  
or35[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[5]] * bmat[[4, 2]];  
or35[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[5]] * bmat[[4, 3]];  
or35[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[5]] * bmat[[4, 4]];  
or35[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[5]] * bmat[[4, 1]];  
or35[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[5]] * bmat[[4, 6]];  
  
or35[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[5]] * bmat[[5, 2]];  
or35[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[5]] * bmat[[5, 3]];  
or35[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[5]] * bmat[[5, 4]];  
or35[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[5]] * bmat[[5, 1]];  
or35[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[5]] * bmat[[5, 6]];  
dor35 = Det[or35];  
  
c55 = -dor35 / dor3;
```

```
or36 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or36Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or36Loc = Append[or36Loc, 0]]; or36 = Append[or36, or36Loc]  
  
or36[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[5]] * bmat[[1, 2]];  
or36[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[5]] * bmat[[1, 3]];  
or36[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[5]] * bmat[[1, 4]];  
or36[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[5]] * bmat[[1, 5]];  
or36[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[5]] * bmat[[1, 1]];  
  
or36[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[5]] * bmat[[2, 2]];  
or36[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[5]] * bmat[[2, 3]];  
or36[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[5]] * bmat[[2, 4]];  
or36[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[5]] * bmat[[2, 5]];  
or36[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[5]] * bmat[[2, 1]];  
  
or36[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[5]] * bmat[[3, 2]];  
or36[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[5]] * bmat[[3, 3]];  
or36[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[5]] * bmat[[3, 4]];  
or36[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[5]] * bmat[[3, 5]];  
or36[[3, 5]] = amat[[3, 1]] - lam[[5]] * bmat[[3, 1]];  
  
or36[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[5]] * bmat[[4, 2]];  
or36[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[5]] * bmat[[4, 3]];  
or36[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[5]] * bmat[[4, 4]];  
or36[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[5]] * bmat[[4, 5]];  
or36[[4, 5]] = amat[[4, 1]] - lam[[5]] * bmat[[4, 1]];  
  
or36[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[5]] * bmat[[5, 2]];  
or36[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[5]] * bmat[[5, 3]];  
or36[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[5]] * bmat[[5, 4]];  
or36[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[5]] * bmat[[5, 5]];  
or36[[5, 5]] = amat[[5, 1]] - lam[[5]] * bmat[[5, 1]];  
dor36 = Det[or36];  
  
c65 = -dor36 / dor3;
```

```
J = 0;  
solc5 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc5 = Append[solc5, 0]]  
solc5 = {1, c25, c35, c45, c55, c65}  
  
{1, -6.16148, -1.1596, -0.101461, -0.00333263, -0.00254985}
```


Blank header line



```
ClearAll[solc6, c16, c26, c36, c46, c56, c66, or3, or3Loc, dor3, or32, or32Loc, dor32, or33, or33Loc, dor33, or34,  
  or34Loc, dor34, or35, or35Loc, dor35, or36, or36Loc, dor36];  
or3 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or3Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or3Loc = Append[or3Loc, 0]]; or3 = Append[or3, or3Loc]]  
  
or3[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[6]] * bmat[[1, 2]];  
or3[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[6]] * bmat[[1, 3]];  
or3[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[6]] * bmat[[1, 4]];  
or3[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[6]] * bmat[[1, 5]];  
or3[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[6]] * bmat[[1, 6]];  
  
or3[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[6]] * bmat[[2, 2]];  
or3[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[6]] * bmat[[2, 3]];  
or3[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[6]] * bmat[[2, 4]];  
or3[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[6]] * bmat[[2, 5]];  
or3[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[6]] * bmat[[2, 6]];  
  
or3[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[6]] * bmat[[3, 2]];  
or3[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[6]] * bmat[[3, 3]];  
or3[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[6]] * bmat[[3, 4]];  
or3[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[6]] * bmat[[3, 5]];  
or3[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[6]] * bmat[[3, 6]];  
  
or3[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[6]] * bmat[[4, 2]];  
or3[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[6]] * bmat[[4, 3]];  
or3[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[6]] * bmat[[4, 4]];  
or3[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[6]] * bmat[[4, 5]];  
or3[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[6]] * bmat[[4, 6]];  
  
or3[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[6]] * bmat[[5, 2]];  
or3[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[6]] * bmat[[5, 3]];  
or3[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[6]] * bmat[[5, 4]];  
or3[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[6]] * bmat[[5, 5]];  
or3[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[6]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor3 = Det[or3];
```

```
or32 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or32Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or32Loc = Append[or32Loc, 0]]; or32 = Append[or32, or32Loc]  
  
or32[[1, 1]] = amat[[1, 1]] - lam[[6]] * bmat[[1, 1]];  
or32[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[6]] * bmat[[1, 3]];.  
or32[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[6]] * bmat[[1, 4]];  
or32[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[6]] * bmat[[1, 5]];  
or32[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[6]] * bmat[[1, 6]];  
  
or32[[2, 1]] = amat[[2, 1]] - lam[[6]] * bmat[[2, 1]];  
or32[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[6]] * bmat[[2, 3]];  
or32[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[6]] * bmat[[2, 4]];  
or32[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[6]] * bmat[[2, 5]];  
or32[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[6]] * bmat[[2, 6]];  
  
or32[[3, 1]] = amat[[3, 1]] - lam[[6]] * bmat[[3, 1]];  
or32[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[6]] * bmat[[3, 3]];  
or32[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[6]] * bmat[[3, 4]];  
or32[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[6]] * bmat[[3, 5]];  
or32[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[6]] * bmat[[3, 6]];  
  
or32[[4, 1]] = amat[[4, 1]] - lam[[6]] * bmat[[4, 1]];  
or32[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[6]] * bmat[[4, 3]];  
or32[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[6]] * bmat[[4, 4]];  
or32[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[6]] * bmat[[4, 5]];  
or32[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[6]] * bmat[[4, 6]];  
  
or32[[5, 1]] = amat[[5, 1]] - lam[[6]] * bmat[[5, 1]];  
or32[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[6]] * bmat[[5, 3]];  
or32[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[6]] * bmat[[5, 4]];  
or32[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[6]] * bmat[[5, 5]];  
or32[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[6]] * bmat[[5, 6]];  
  
dor32 = Det[or32];  
  
c26 = -dor32 / dor3;
```

```
or33 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or33Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or33Loc = Append[or33Loc, 0]; or33 = Append[or33, or33Loc]]  
  
or33[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[6]] * bmat[[1, 2]];  
or33[[1, 2]] = amat[[1, 1]] - lam[[6]] * bmat[[1, 1]];  
or33[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[6]] * bmat[[1, 4]];  
or33[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[6]] * bmat[[1, 5]];  
or33[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[6]] * bmat[[1, 6]];  
  
or33[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[6]] * bmat[[2, 2]];  
or33[[2, 2]] = amat[[2, 1]] - lam[[6]] * bmat[[2, 1]];  
or33[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[6]] * bmat[[2, 4]];  
or33[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[6]] * bmat[[2, 5]];  
or33[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[6]] * bmat[[2, 6]];  
  
or33[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[6]] * bmat[[3, 2]];  
or33[[3, 2]] = amat[[3, 1]] - lam[[6]] * bmat[[3, 1]];  
or33[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[6]] * bmat[[3, 4]];  
or33[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[6]] * bmat[[3, 5]];  
or33[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[6]] * bmat[[3, 6]];  
  
or33[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[6]] * bmat[[4, 2]];  
or33[[4, 2]] = amat[[4, 1]] - lam[[6]] * bmat[[4, 1]];  
or33[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[6]] * bmat[[4, 4]];  
or33[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[6]] * bmat[[4, 5]];  
or33[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[6]] * bmat[[4, 6]];  
  
or33[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[6]] * bmat[[5, 2]];  
or33[[5, 2]] = amat[[5, 1]] - lam[[6]] * bmat[[5, 1]];  
or33[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[6]] * bmat[[5, 4]];  
or33[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[6]] * bmat[[5, 5]];  
or33[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[6]] * bmat[[5, 6]];  
dor33 = Det[or33];  
  
c36 = -dor33 / dor3;
```

```
or34 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or34Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or34Loc = Append[or34Loc, 0]]; or34 = Append[or34, or34Loc]  
  
or34[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[6]] * bmat[[1, 2]];  
or34[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[6]] * bmat[[1, 3]];  
or34[[1, 3]] = amat[[1, 1]] - lam[[6]] * bmat[[1, 1]];  
or34[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[6]] * bmat[[1, 5]];  
or34[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[6]] * bmat[[1, 6]];  
  
or34[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[6]] * bmat[[2, 2]];  
or34[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[6]] * bmat[[2, 3]];  
or34[[2, 3]] = amat[[2, 1]] - lam[[6]] * bmat[[2, 1]];  
or34[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[6]] * bmat[[2, 5]];  
or34[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[6]] * bmat[[2, 6]];  
  
or34[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[6]] * bmat[[3, 2]];  
or34[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[6]] * bmat[[3, 3]];  
or34[[3, 3]] = amat[[3, 1]] - lam[[6]] * bmat[[3, 1]];  
or34[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[6]] * bmat[[3, 5]];  
or34[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[6]] * bmat[[3, 6]];  
  
or34[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[6]] * bmat[[4, 2]];  
or34[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[6]] * bmat[[4, 3]];  
or34[[4, 3]] = amat[[4, 1]] - lam[[6]] * bmat[[4, 1]];  
or34[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[6]] * bmat[[4, 5]];  
or34[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[6]] * bmat[[4, 6]];  
  
or34[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[6]] * bmat[[5, 2]];  
or34[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[6]] * bmat[[5, 3]];  
or34[[5, 3]] = amat[[5, 1]] - lam[[6]] * bmat[[5, 1]];  
or34[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[6]] * bmat[[5, 5]];  
or34[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[6]] * bmat[[5, 6]];  
dor34 = Det[or34];  
  
c46 = -dor34 / dor3;
```

```
or35 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or35Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or35Loc = Append[or35Loc, 0]]; or35 = Append[or35, or35Loc]  
  
or35[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[6]] * bmat[[1, 2]];  
or35[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[6]] * bmat[[1, 3]];  
or35[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[6]] * bmat[[1, 4]];  
or35[[1, 4]] = amat[[1, 1]] - lam[[6]] * bmat[[1, 1]];  
or35[[1, 5]] = amat[[1, 6]] - lam[[6]] * bmat[[1, 6]];  
  
or35[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[6]] * bmat[[2, 2]];  
or35[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[6]] * bmat[[2, 3]];  
or35[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[6]] * bmat[[2, 4]];  
or35[[2, 4]] = amat[[2, 1]] - lam[[6]] * bmat[[2, 1]];  
or35[[2, 5]] = amat[[2, 6]] - lam[[6]] * bmat[[2, 6]];  
  
or35[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[6]] * bmat[[3, 2]];  
or35[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[6]] * bmat[[3, 3]];  
or35[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[6]] * bmat[[3, 4]];  
or35[[3, 4]] = amat[[3, 1]] - lam[[6]] * bmat[[3, 1]];  
or35[[3, 5]] = amat[[3, 6]] - lam[[6]] * bmat[[3, 6]];  
  
or35[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[6]] * bmat[[4, 2]];  
or35[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[6]] * bmat[[4, 3]];  
or35[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[6]] * bmat[[4, 4]];  
or35[[4, 4]] = amat[[4, 1]] - lam[[6]] * bmat[[4, 1]];  
or35[[4, 5]] = amat[[4, 6]] - lam[[6]] * bmat[[4, 6]];  
  
or35[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[6]] * bmat[[5, 2]];  
or35[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[6]] * bmat[[5, 3]];  
or35[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[6]] * bmat[[5, 4]];  
or35[[5, 4]] = amat[[5, 1]] - lam[[6]] * bmat[[5, 1]];  
or35[[5, 5]] = amat[[5, 6]] - lam[[6]] * bmat[[5, 6]];  
dor35 = Det[or35];  
  
c56 = -dor35 / dor3;
```

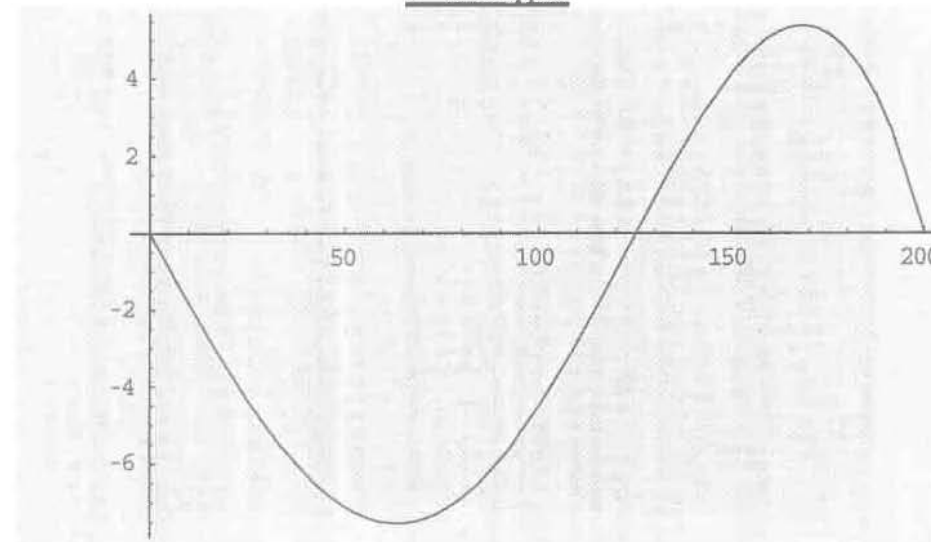
```
or36 = {};  
J = 0;  
While[J < 5, J = J + 1;  
  or36Loc = {};  
  K = 0;  
  While[K < 5, K = K + 1; or36Loc = Append[or36Loc, 0]]; or36 = Append[or36, or36Loc]]  
  
or36[[1, 1]] = amat[[1, 2]] - lam[[6]] * bmat[[1, 2]];  
or36[[1, 2]] = amat[[1, 3]] - lam[[6]] * bmat[[1, 3]];  
or36[[1, 3]] = amat[[1, 4]] - lam[[6]] * bmat[[1, 4]];  
or36[[1, 4]] = amat[[1, 5]] - lam[[6]] * bmat[[1, 5]];  
or36[[1, 5]] = amat[[1, 1]] - lam[[6]] * bmat[[1, 1]];  
  
or36[[2, 1]] = amat[[2, 2]] - lam[[6]] * bmat[[2, 2]];  
or36[[2, 2]] = amat[[2, 3]] - lam[[6]] * bmat[[2, 3]];  
or36[[2, 3]] = amat[[2, 4]] - lam[[6]] * bmat[[2, 4]];  
or36[[2, 4]] = amat[[2, 5]] - lam[[6]] * bmat[[2, 5]];  
or36[[2, 5]] = amat[[2, 1]] - lam[[6]] * bmat[[2, 1]];  
  
or36[[3, 1]] = amat[[3, 2]] - lam[[6]] * bmat[[3, 2]];  
or36[[3, 2]] = amat[[3, 3]] - lam[[6]] * bmat[[3, 3]];  
or36[[3, 3]] = amat[[3, 4]] - lam[[6]] * bmat[[3, 4]];  
or36[[3, 4]] = amat[[3, 5]] - lam[[6]] * bmat[[3, 5]];  
or36[[3, 5]] = amat[[3, 1]] - lam[[6]] * bmat[[3, 1]];  
  
or36[[4, 1]] = amat[[4, 2]] - lam[[6]] * bmat[[4, 2]];  
or36[[4, 2]] = amat[[4, 3]] - lam[[6]] * bmat[[4, 3]];  
or36[[4, 3]] = amat[[4, 4]] - lam[[6]] * bmat[[4, 4]];  
or36[[4, 4]] = amat[[4, 5]] - lam[[6]] * bmat[[4, 5]];  
or36[[4, 5]] = amat[[4, 1]] - lam[[6]] * bmat[[4, 1]];  
  
or36[[5, 1]] = amat[[5, 2]] - lam[[6]] * bmat[[5, 2]];  
or36[[5, 2]] = amat[[5, 3]] - lam[[6]] * bmat[[5, 3]];  
or36[[5, 3]] = amat[[5, 4]] - lam[[6]] * bmat[[5, 4]];  
or36[[5, 4]] = amat[[5, 5]] - lam[[6]] * bmat[[5, 5]];  
or36[[5, 5]] = amat[[5, 1]] - lam[[6]] * bmat[[5, 1]];  
dor36 = Det[or36];  
  
c66 = -dor36 / dor3;
```

```
J = 0;  
solc6 = {};  
While[J < Nmodes, J = J + 1; solc6 = Append[solc6, 0]]  
solc6 = {1, c26, c36, c46, c56, c66}  
  
{1, 0.389025, 0.191573, 0.237649, -0.00232298, 0.000965073}
```

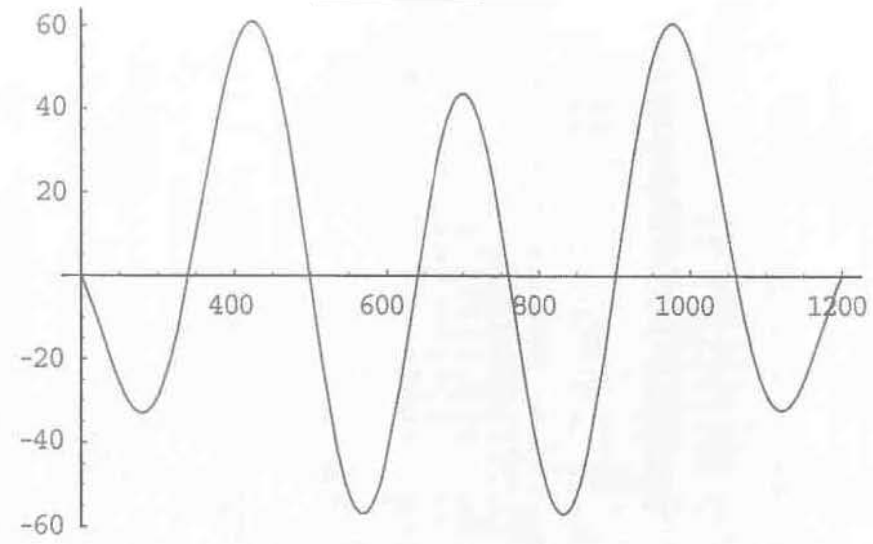

1^η Συνάρτηση Σχήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg11, xg21, xg31];  
xg11[x_] =  $\sum_{j=2}^{\text{Nodes}}$  ( $\phi 1[x][[1]] + \text{solc1}[[j]] * \phi 1[x][[j]]$ );  
xg21[x_] =  $\sum_{j=2}^{\text{Nodes}}$  ( $\phi 2[x][[1]] + \text{solc1}[[j]] * \phi 2[x][[j]]$ );  
xg31[x_] =  $\sum_{j=2}^{\text{Nodes}}$  ( $\phi 3[x][[1]] + \text{solc1}[[j]] * \phi 3[x][[j]]$ );  
Show[Plot[xg11[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg21[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}],  
Plot[xg31[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}, PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"]]
```

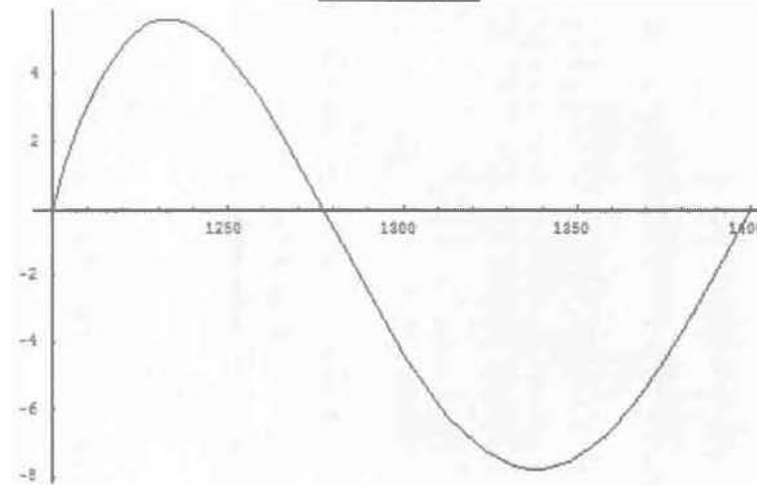
1^ο άνοιγμα



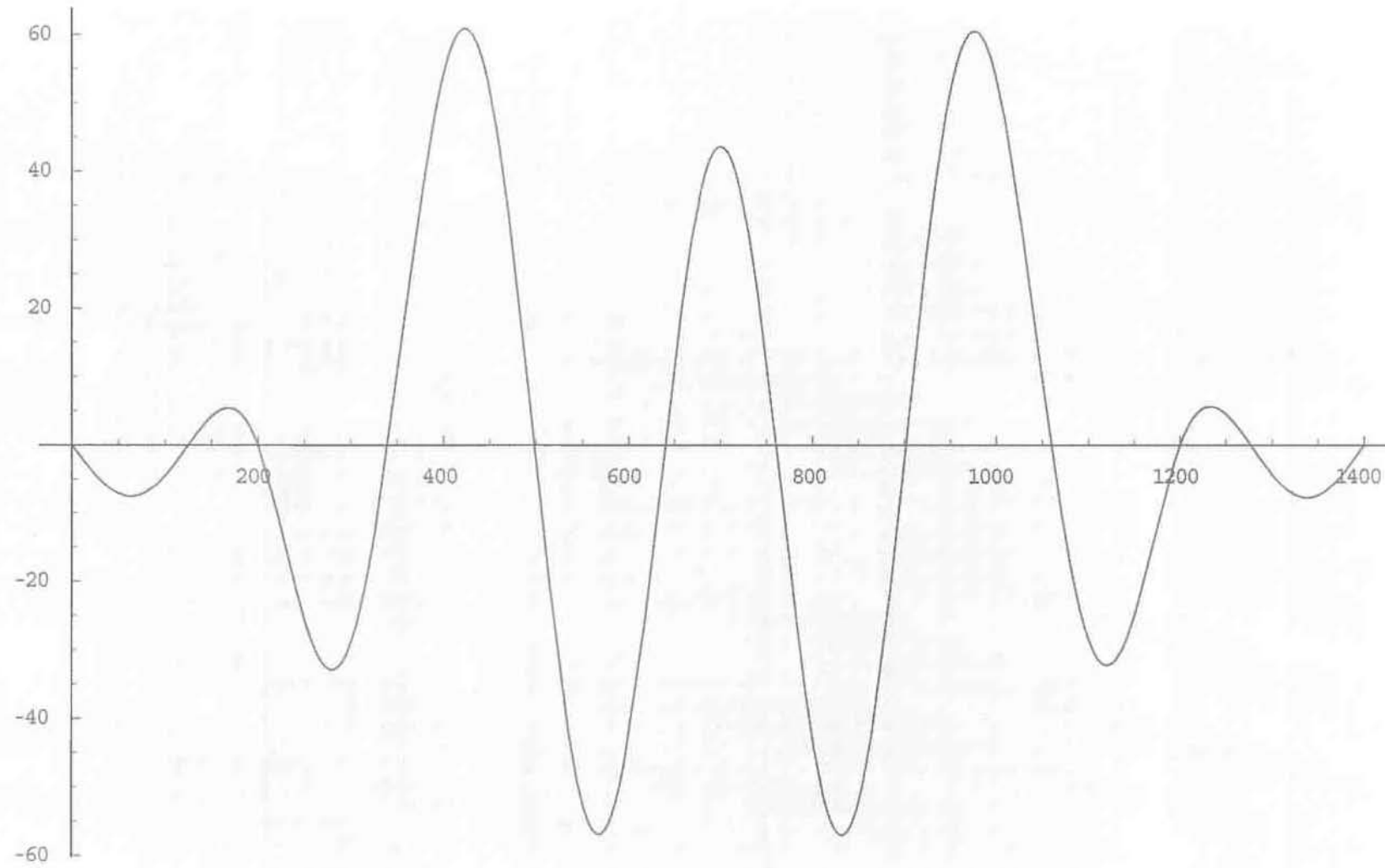
2^ο άνοιγμα



3^ο άνοιγμα



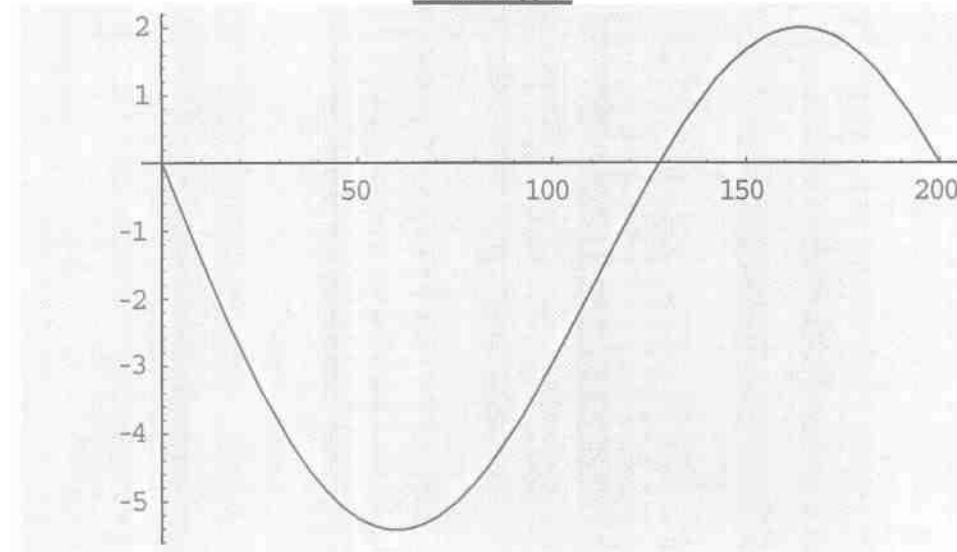
Παραμόρφωση της γέφυρας για την 1^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



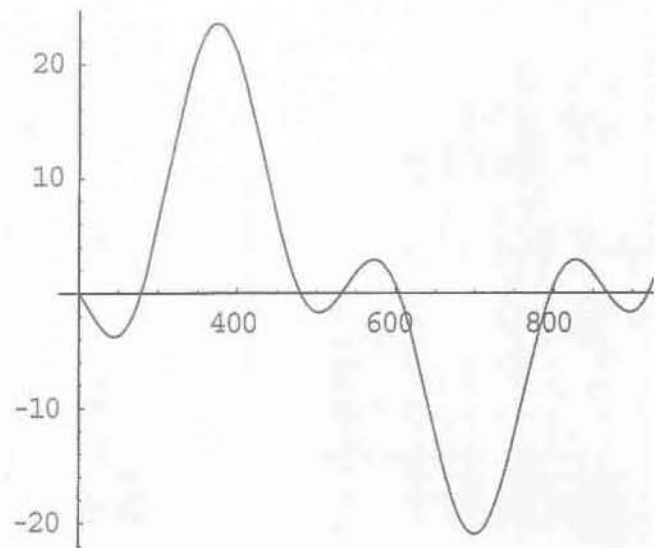
2^η Συνάρτηση Σχήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg12, xg22, xg32];  
xg12[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi1[x][[1]] + solc2[[j]] * \phi1[x][[j]]);$   
xg22[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi2[x][[1]] + solc2[[j]] * \phi2[x][[j]]);$   
xg32[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi3[x][[1]] + solc2[[j]] * \phi3[x][[j]]);$   
Show[{Plot[xg12[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg22[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}]},  
Plot[xg32[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}], PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"]]
```

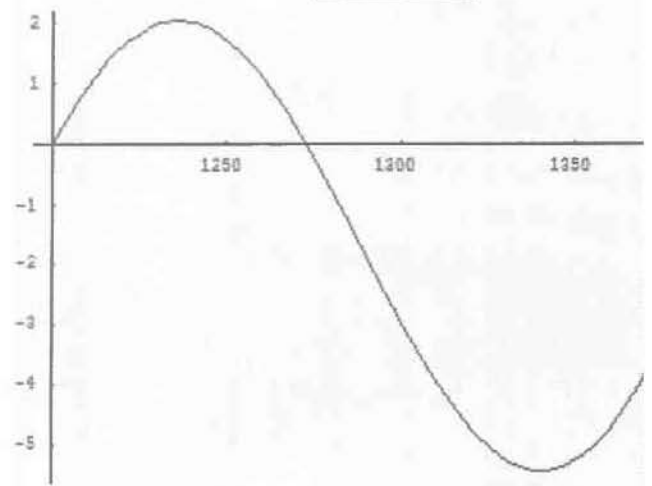
1^ο άνοιγμα

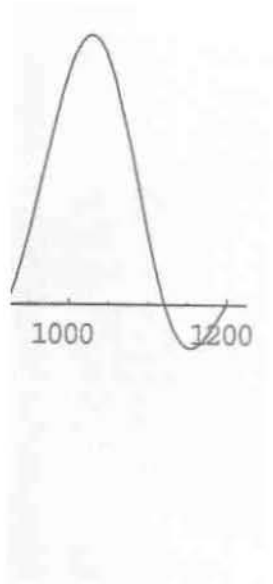


2^ο άνοιγμα

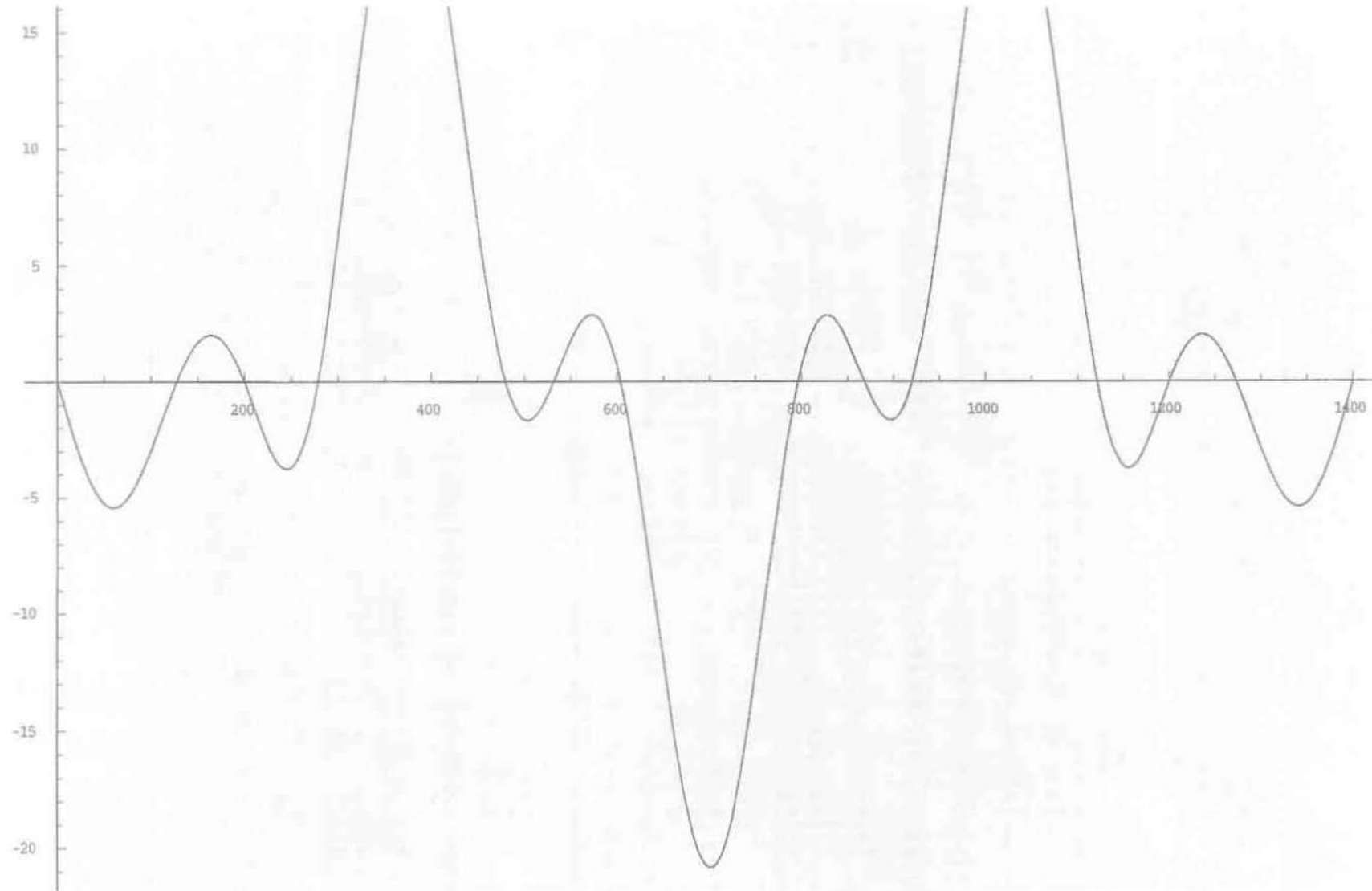


3^ο άνοιγμα





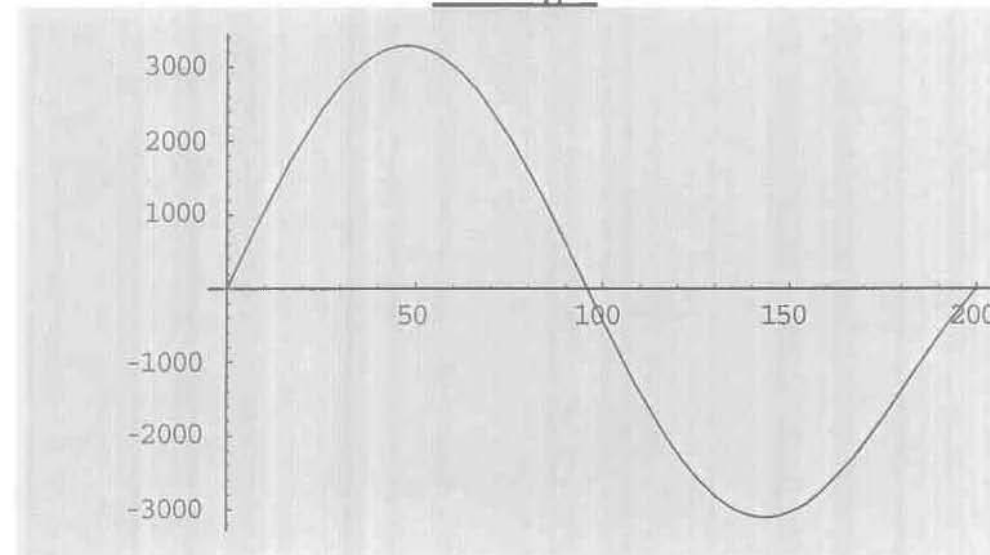
Παραμόρφωση της γέφυρας για την 2^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



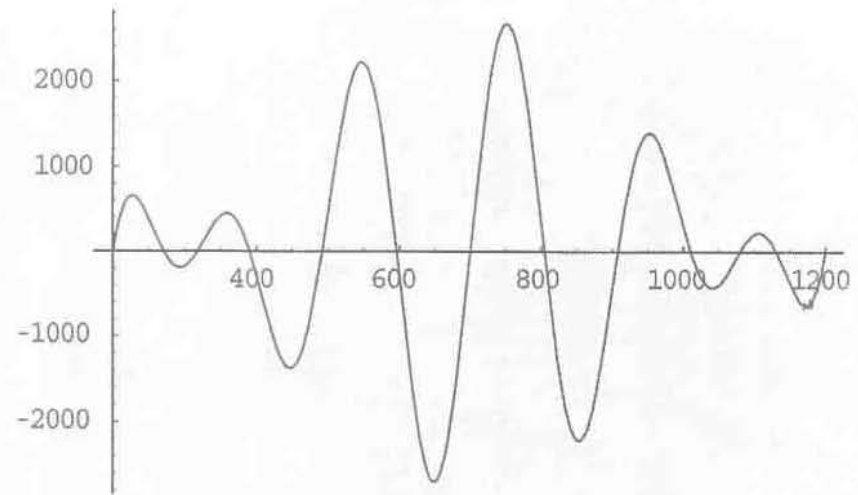
3^η Συνάρτηση Σχήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg13, xg23, xg33];  
xg13[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi1[x][[1]] + solc3[[J]] * \phi1[x][[J]]);$   
xg23[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi2[x][[1]] + solc3[[J]] * \phi2[x][[J]]);$   
xg33[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi3[x][[1]] + solc3[[J]] * \phi3[x][[J]]);$   
Show[{Plot[xg13[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg23[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}]},  
Plot[xg33[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}, PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΚΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"]]
```

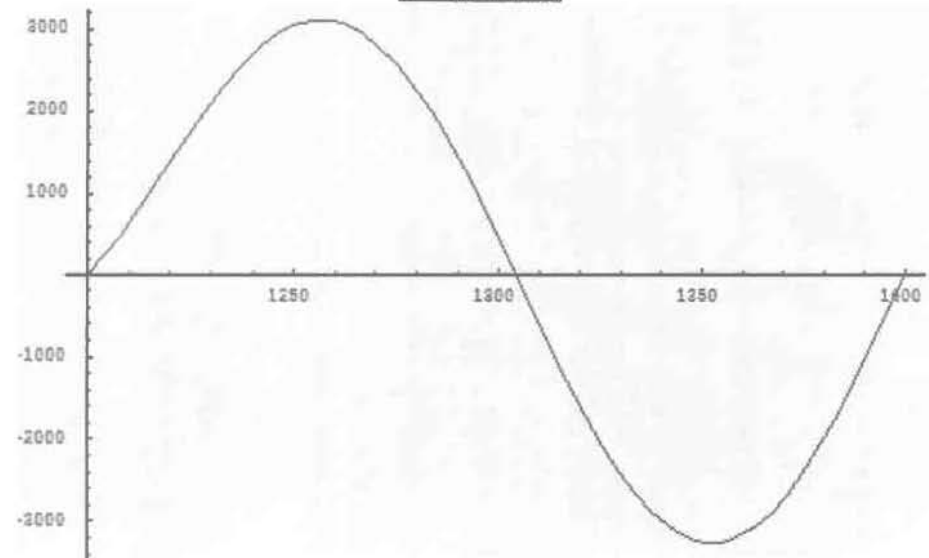
1^ο άνοιγμα



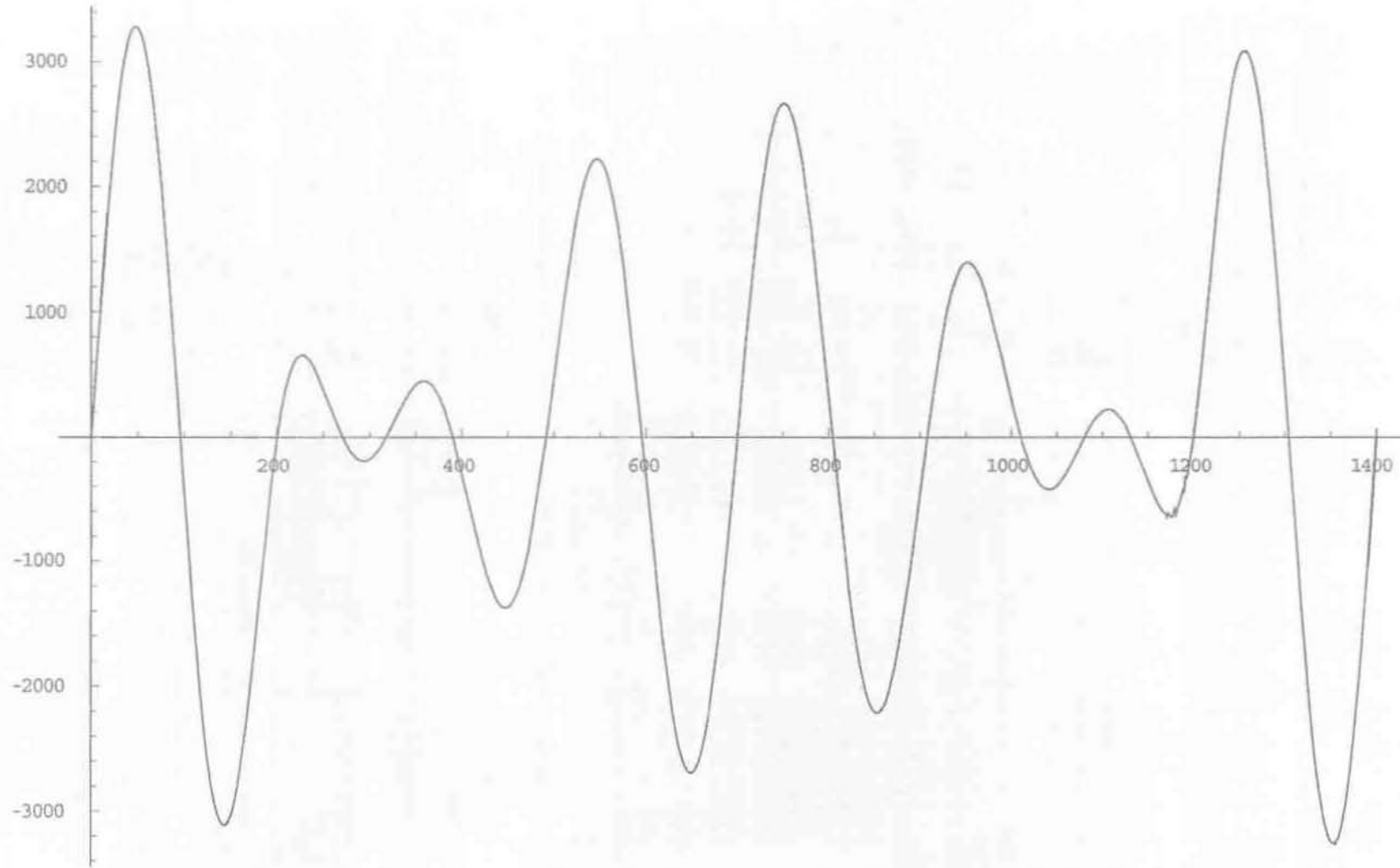
2^ο άνοιγμα



3^ο άνοιγμα



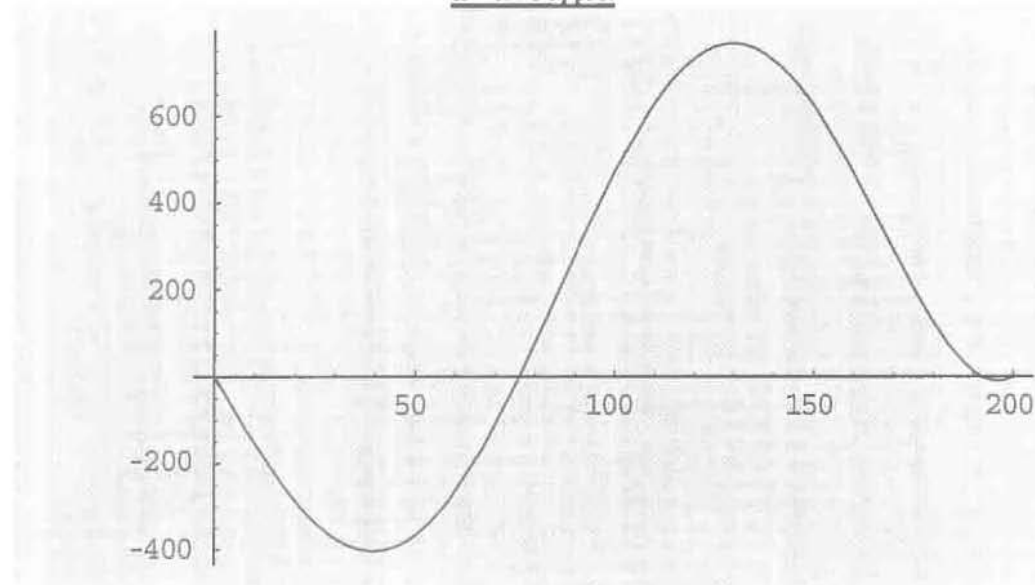
Παραμόρφωση της γέφυρας για την 3^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



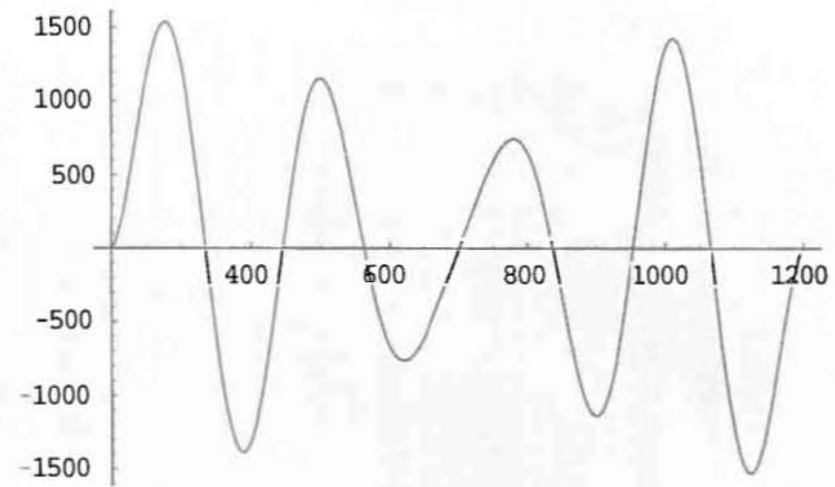
4^η Συνάρτηση Σχήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg14, xg24, xg34];  
xg14[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi1[x][[1]] + solc4[[j]] * \phi1[x][[j]])$   
xg24[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi2[x][[1]] + solc4[[j]] * \phi2[x][[j]])$ ;  
xg34[x_] =  $\sum_{j=2}^{Nnodes} (\phi3[x][[1]] + solc4[[j]] * \phi3[x][[j]])$ ;  
Show[{Plot[xg14[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg24[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}]},  
Plot[xg34[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}, PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"]]
```

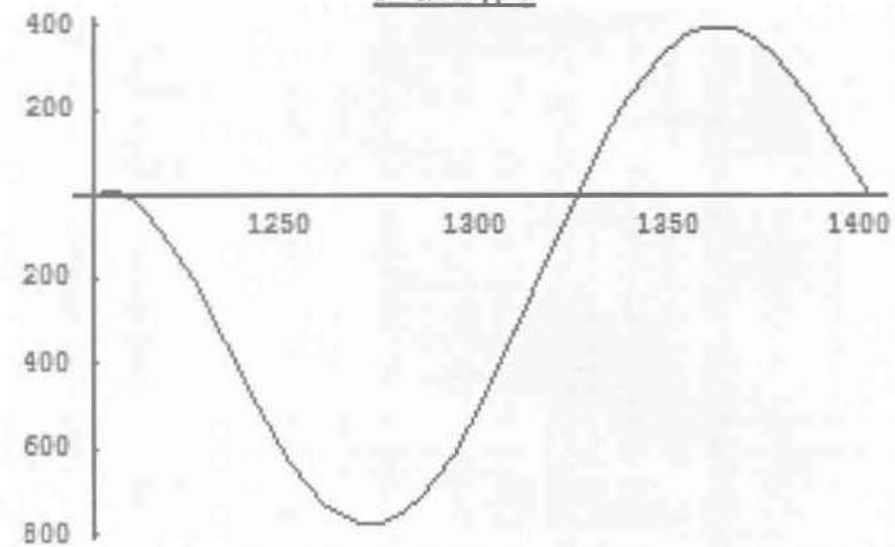
1^ο άνοιγμα



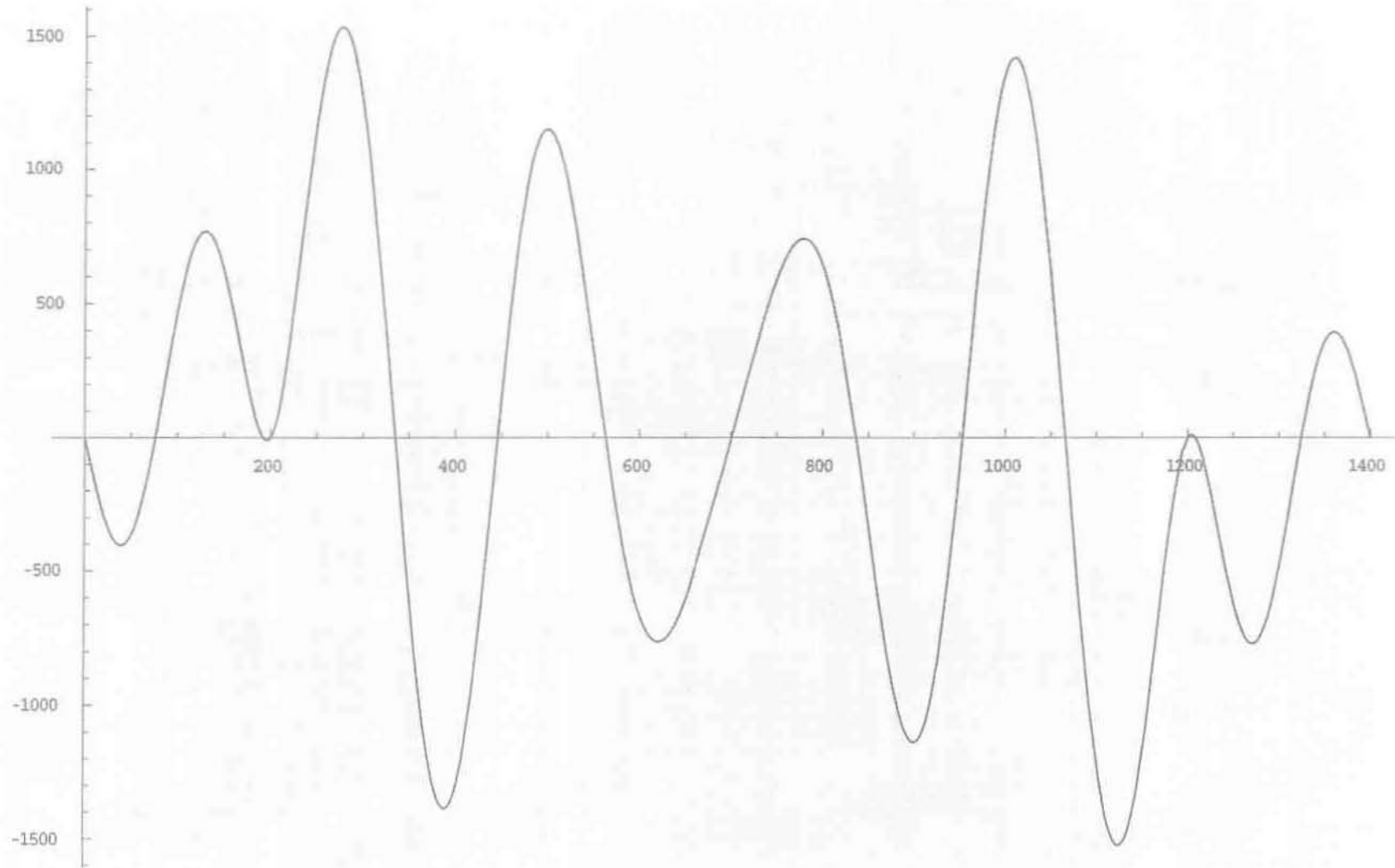
2^ο άνοιγμα



3^ο άνοιγμα



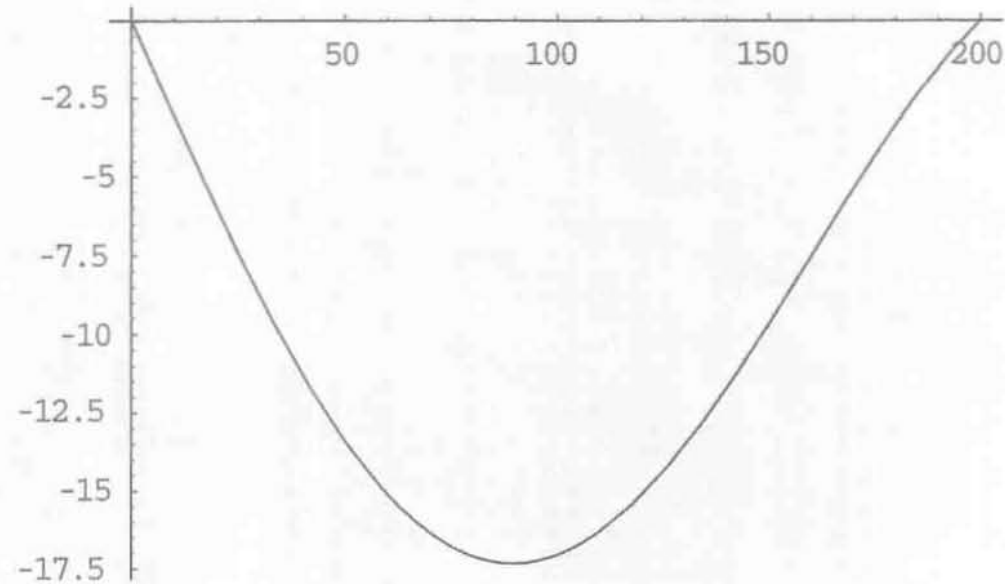
Παραμόρφωση της γέφυρας για την 4^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



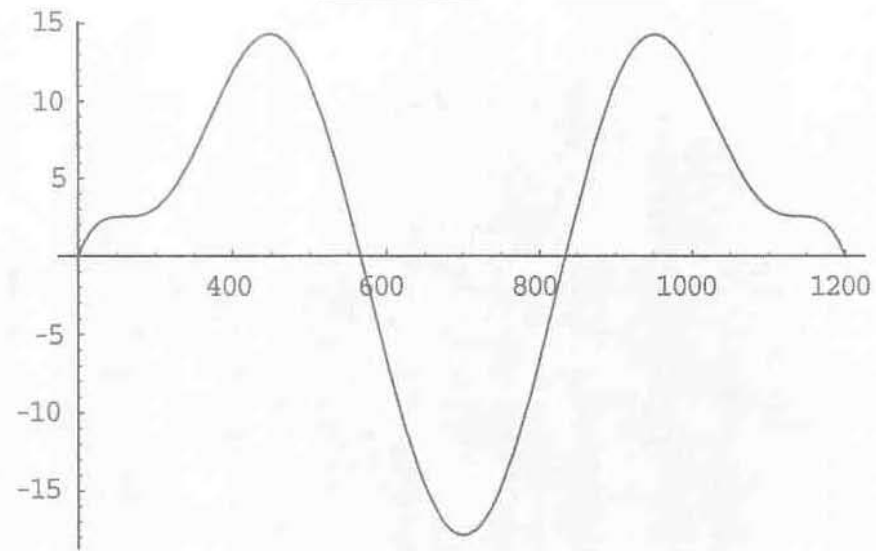
5^η Συνάρτηση Σήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg15, xg25, xg35];  
xg15[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi1[x][[1]] + solc5[[J]] * \phi1[x][[J]]);$   
xg25[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi2[x][[1]] + solc5[[J]] * \phi2[x][[J]]);$   
xg35[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi3[x][[1]] + solc5[[J]] * \phi3[x][[J]]);$   
Show[{Plot[xg15[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg25[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}],  
Plot[xg35[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}], PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"]]
```

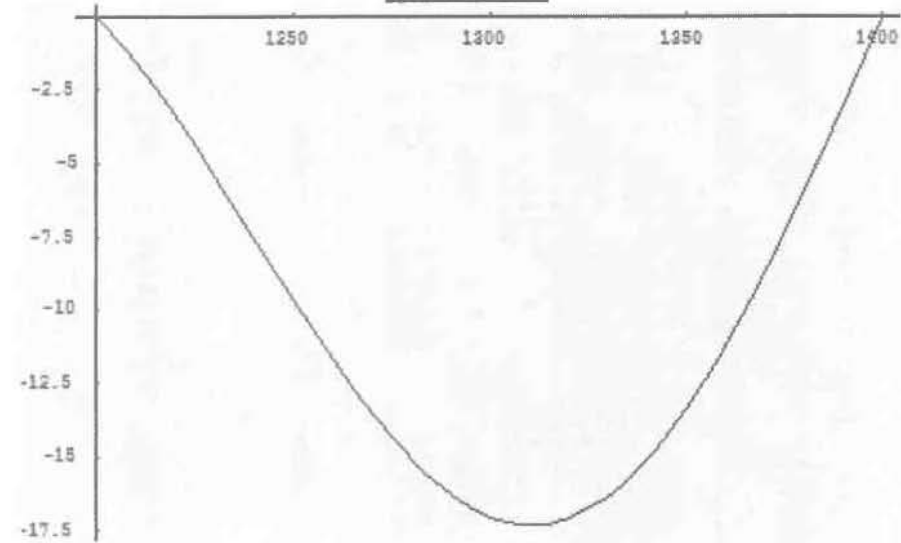
1^ο άνοιγμα



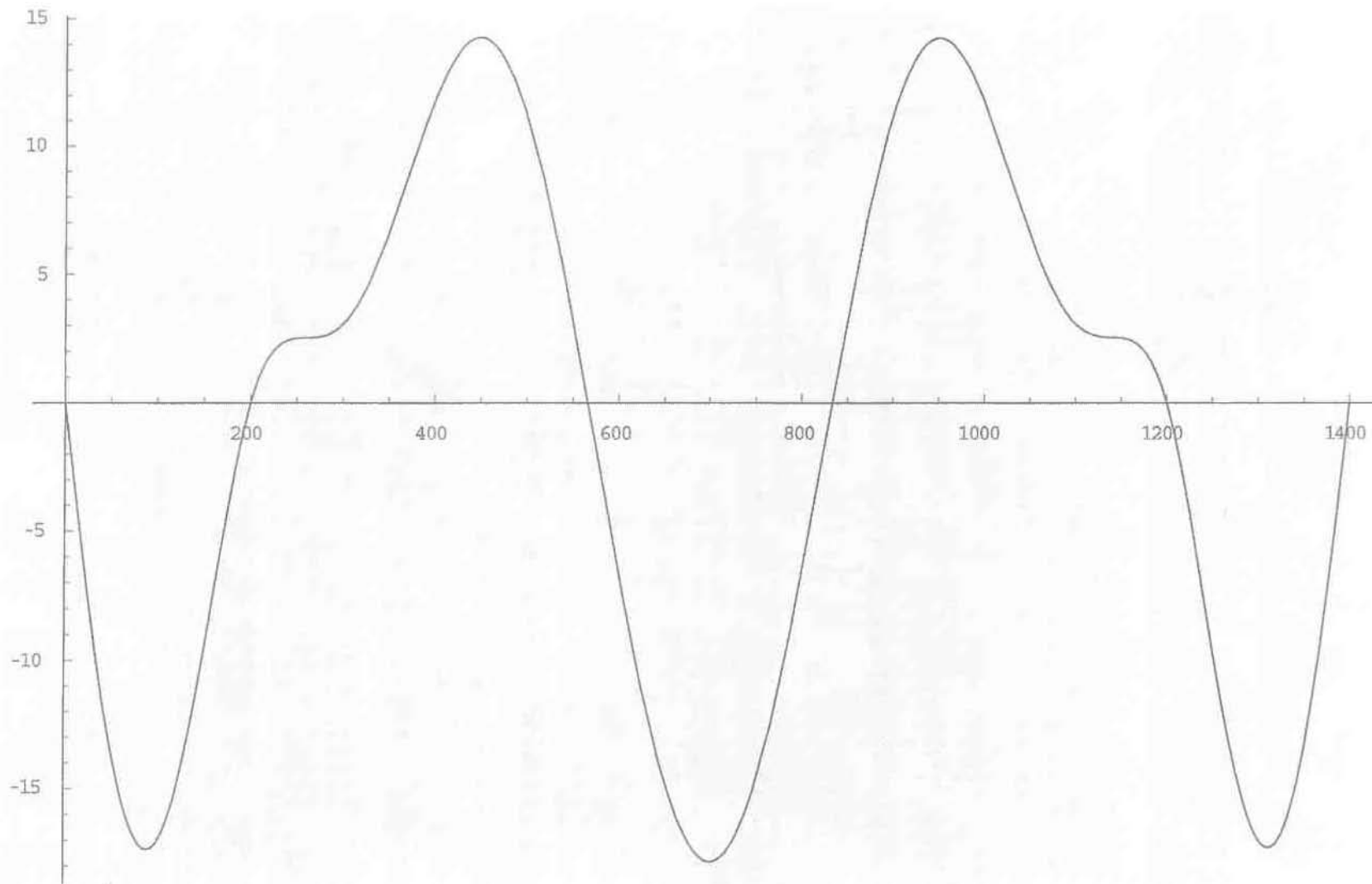
2^ο άνοιγμα



3^ο άνοιγμα



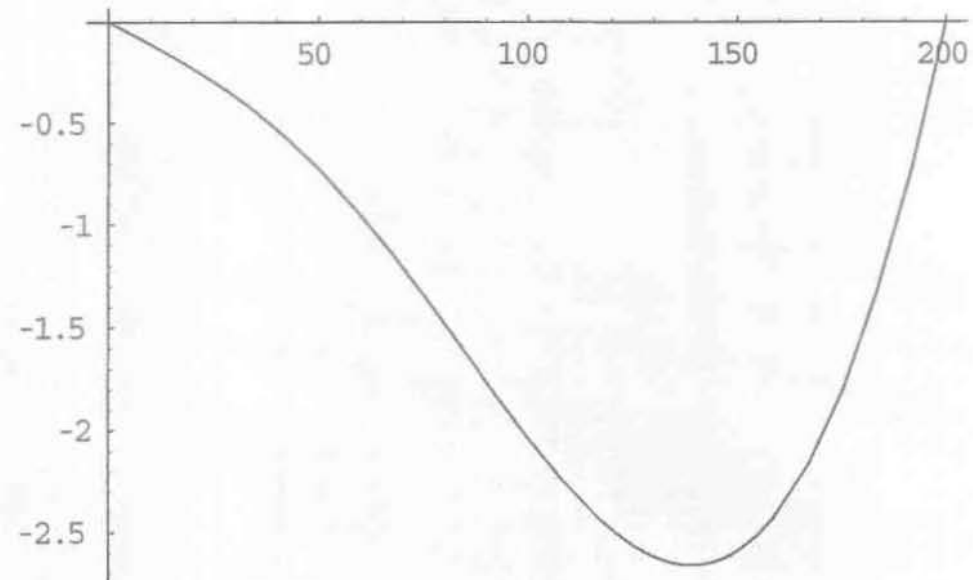
Παραμόρφωση της γέφυρας για την 5^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



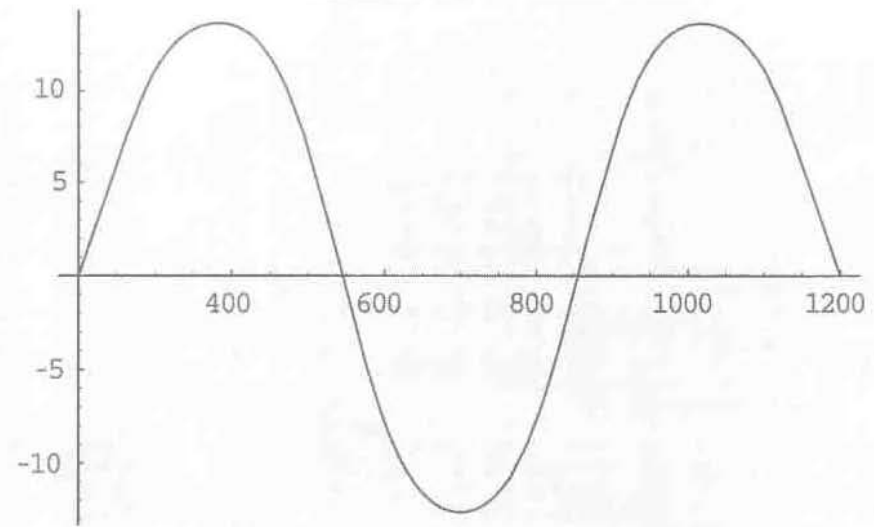
6^η Συνάρτηση Σήματος (για κάθε άνοιγμα και συνολικά)

```
ClearAll[xg16, xg26, xg36];  
xg16[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi1[x][[1]] + solc6[[J]] * \phi1[x][[J]]);$   
xg26[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi2[x][[1]] + solc6[[J]] * \phi2[x][[J]]);$   
xg36[x_] =  $\sum_{J=2}^{Nnodes} (\phi3[x][[1]] + solc6[[J]] * \phi3[x][[J]]);$   
Show[{Plot[xg16[x1], {x1, 0, 11}], Plot[xg26[x1 - 11], {x1, 11, 11 + 12}],  
Plot[xg36[x1 - 11 - 12], {x1, 11 + 12, 11 + 12 + 13}], PlotLabel -> "ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΧΗΜΑΤΟΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ"}]
```

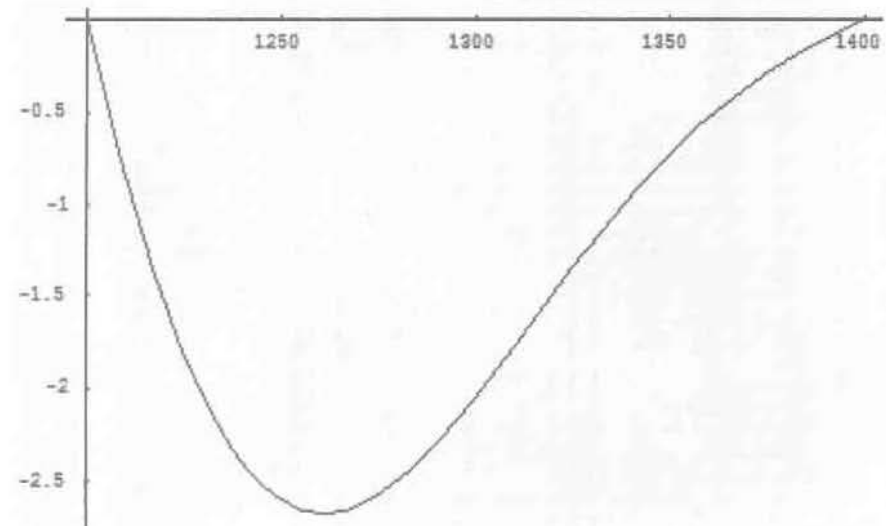
1^ο άνοιγμα



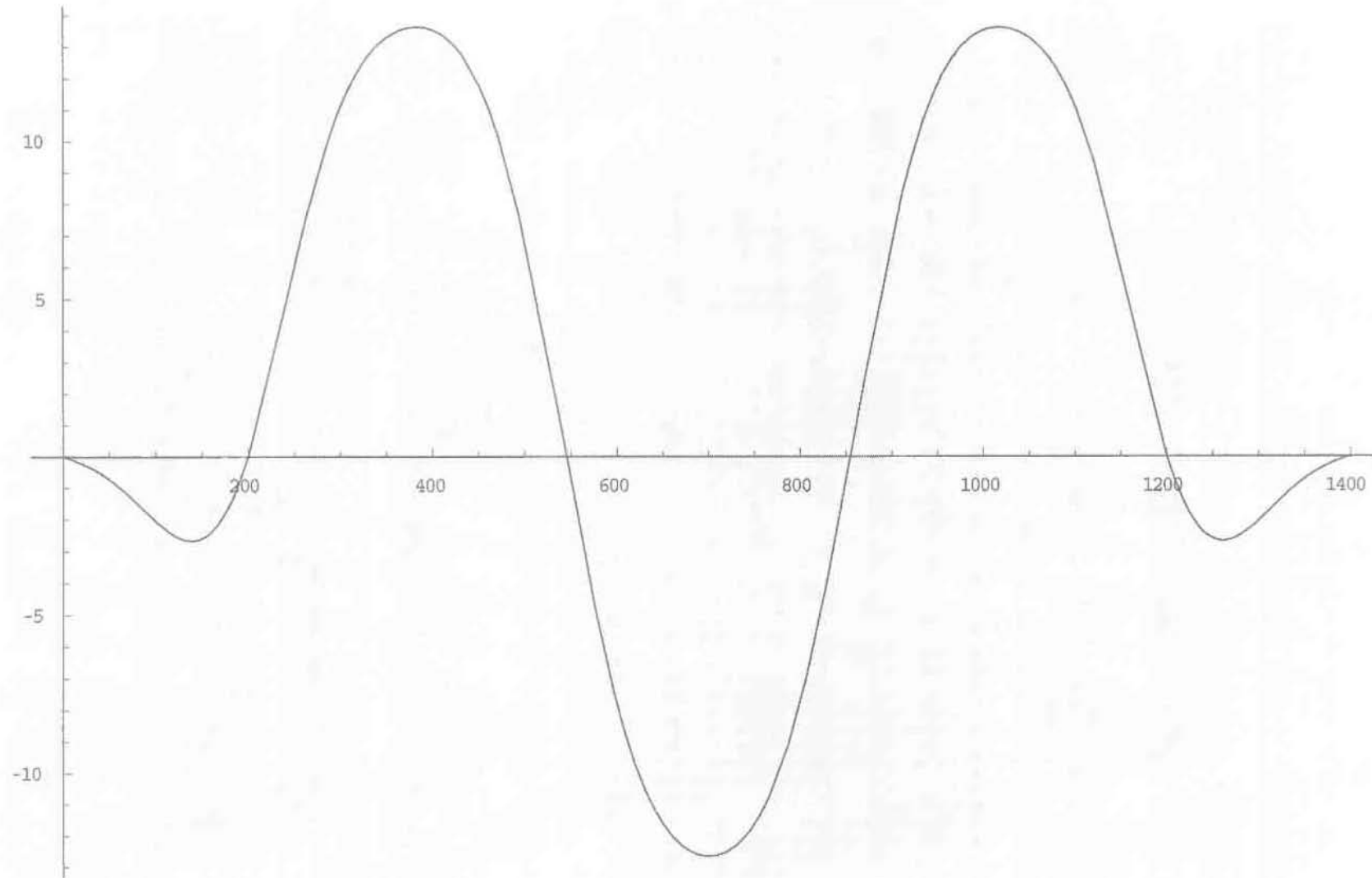
2^ο άνοιγμα



3^ο άνοιγμα



Παραμόρφωση της γέφυρας για την 6^η κανονική μορφή ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης



2.7. Σχολιασμός – συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Από το περιεχόμενο του notebook αλλά και το μέγεθος του διαπιστώνεται άμεσα η εξαιρετική υπολογιστική δυσκολία με την οποία σχετίζεται το (γραμμικοποιημένο) πρόβλημα.

Σε ότι δε αφορά τα παραχθέντα αποτελέσματα, και ιδιαίτερα τις συναρτήσεις σχήματος της γέφυρας με μικτό σύστημα καλωδίων μπορεί κανείς άμεσα να παρατηρήσει ότι πιθανώς η 1^η και σίγουρα η 3^η και η 4^η μορφή δεν είναι φυσικά αποδεκτές, καθόσον σχετίζονται με πολύ μεγάλα δυναμικά βέλη. Τούτο πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές των αντίστοιχων ιδιοσυχνοτήτων βρίσκονται πολύ κοντά σε σημεία ασυνέχειας (ασύμπτωτους) της εξίσωσης συχνότητας, με αποτέλεσμα να προκύπτουν αφύσικα μεγάλες ποσότητες από τις σχετικές αριθμητικές ολοκληρώσεις, ενώ πιθανότατα να υφίστανται ιδιοσυχνότητες πολύ κοντά μεταξύ τους και να μην κατέστη δυνατή η «σύλληψη» τους από την αριθμητική εφαρμογή. Πλην όμως, όλες οι συναρτήσεις σχήματος θεωρούνται αποδεκτές σε ότι αφορά τη συμβατότητα των παραμορφώσεων και την τήρηση των συνοριακών συνθηκών. Κάτι τέτοιο πάντως ΔΕΝ ισχύει για τις τέσσερις τουλάχιστον πρώτες συναρτήσεις σχήματος της συνεχούς δοκού, όπου εύκολα διαπιστώνει κανείς τόσο αποδεκτά δυναμικά βέλη κάμψης όσο και συμβατότητα με τις συνοριακές συνθήκες, οπότε δεν μπορεί κανείς να ισχυρισθεί *μη ορθή επιλογή τους* ως αρχικές προσεγγίσεις των αντίστοιχων μορφών της καλωδιωτής γέφυρας. Πάντως, το γεγονός και μόνο ότι το όλο πρόβλημα επιλύθηκε *διαστατό*, δηλαδή χωρίς χρήση αδιαστάτων παραγόντων (έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η εξάρτηση από μονάδες και διαστάσεις) εγκυμονεί αφ' εαυτού αρκετούς υπολογιστικούς κινδύνους (αδυναμία σύγκλισης), οπότε *σαν 1^η πρόταση μελλοντικής έρευνας συνιστάται πρώτα η αδιαστατοποίηση και κατόπιν η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.*

Πάντως, αν συγκρίνει κανείς τις αποδεκτές συναρτήσεις σχήματος του σύνθετου προβλήματος με τις αντίστοιχες του απλού (δηλ. με

καλώδια ή χωρίς), φαίνεται άμεσα η μεγάλη διαφορά που προκύπτει καθώς και η καταλυτική επιρροή του συστήματος των καλωδίων.

Πέραν των ανωτέρω, κάνοντας χρήση όλων των συνδυασμών των δεδομένων της αρχής της §2.6, υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες $\omega_n, n=1-6$ της γέφυρας παρουσία των καλωδίων, οι τιμές των οποίων περιέχονται στον Πίνακα 2, από τα περιεχόμενα του οποίου μπορεί να εξαχθούν κάποια προκαταρκτικά συμπεράσματα σχετικά με την επιρροή της αλλαγής ορισμένων παραγόντων της καλωδιωτής γέφυρας στις ιδιοσυχνότητες της. Πάντως μια σχετική επιφύλαξη συνεχίζει να υφίσταται, με βάση τα προηγουμένως εκτεθέντα. Σίγουρα πάντως και εδώ, η επιρροή της παρουσίας των καλωδίων καταδεικνύεται και καταγράφεται έντονα, αν συγκρίνει κανείς τα περιεχόμενα των Πινάκων 1 και 2.

F _c	0.10						0.40					
	1		2		3		1		2		3	
J _p /J _y	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Σύνολο	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
ω_1	0.6756	0.4553	0.6877	0.4788	0.6982	0.4955	0.7284	0.4726	0.7371	0.4928	0.7448	0.5074
ω_2	1.4271	1.1257	1.4580	1.1819	1.4858	1.2249	1.5508	1.1646	1.5770	1.2158	1.6007	1.2553
ω_3	2.4045	2.0716	2.4355	2.1455	2.4643	2.2062	2.5272	2.1213	2.5569	2.1923	2.5844	2.2507
ω_4	3.6986	3.2869	3.7172	3.3541	3.7349	3.4127	3.7532	3.3275	3.7725	3.3948	3.7907	3.4534
ω_5	5.3099	4.7821	5.3199	4.8243	5.3295	4.8622	5.3288	4.8020	5.3391	4.8448	5.3488	4.8833
ω_6	6.4967	6.0450	6.5020	6.0557	6.5072	6.0653	6.5251	6.0517	6.5304	6.0625	6.5355	6.0723

Πίνακας 2

Τέλος, και σε συνδυασμό με την 1^η πρόταση, συνέχεια στη σχετική έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει η επίλυση του προβλήματος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης της καλωδιωτής γέφυρας είτε υπό συρμό είτε υπό σημειακό κινούμενο φορτίο, σε συνδυασμό με εισαγωγή εξευγενισμένων υπορουτινών ελέγχου λαθών στην αρχική προσέγγιση που παρουσιάστηκε εδώ, με σκοπό την αποφυγή αριθμητικών λαθών εξ' αρχής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G.T. Michaltsos, T.G. Konstantakopoulos, “A simplified dynamic analysis for cable-stayed bridges”, in Proceedings of the 5th Symposium of Applied Mechanics, Nis, 2000.
2. G.T. Michaltsos, J.C. Ermopoulos, T.G. Konstantakopoulos “Preliminary design of cable-stayed bridges for vertical static loads”, Structural Engineering and Mechanics Vol.16 (1-15), 2003.
3. M.S. Troitsky, “Cable-Stayed Bridges”, Granada Publ. Limited, London, 1977.
4. D. Bruno, A. Grimaldi, “Non linear behaviour of long-span cable-stayed bridges”, *Mechanica* **20**(4), 1985, 303-313.
5. G.T. Michaltsos, “The influence of centripetal and coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration* **247**(2), 2001, 261-277.
6. G.T. Michaltsos, A.N. Kounadis, “The effects of centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving loads”, *Journal of Vibration and Control* **7**(3), 2001, 315-326.
7. G.T. Michaltsos “Parameters affecting the dynamic response of light (steel) bridges”, *Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics*, Vol.2, No 10, 2000, 1203-1218.
8. G.T. Michaltsos “A simplified model for the dynamic analysis of cable-stayed bridges”, *Facta Universitatis*, Vol.3 (11), 2001, 185-204.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Α»

Εξίσωση συχνότητας συνεχών δοκών πολλών ανοιγμάτων

Θεωρούμε τη περίπτωση μιας συνεχούς δοκού με n ανοίγματα, η οποία εδράζεται απλά τόσο στα άκρα της όσο και στις $n-1$ ενδιάμεσες στηρίξεις της. Αν $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ είναι τα μήκη των συνεχόμενων ανοιγμάτων, η καμπτική δυσκαμψία της δοκού λαμβάνεται σταθερή σε όλο το μήκος της, δηλαδή όλα τα ανοίγματα έχουν το ίδιο (σταθερό) EI . Αν η αρχή των συντεταγμένων για κάθε άνοιγμα θεωρηθεί στο αριστερό άκρο ενός εκάστου, και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι εκεί το βέλος ισούται με μηδέν, η συνάρτηση σχήματος του r ανοίγματος μπορεί να γραφεί υπό την ακόλουθη μορφή:

$$X_r = \alpha_r (\cos kx - \cosh kx) + c_r \sin kx + d_r \sinh kx \quad (\text{A1})$$

όπου α_r, c_r, d_r αυθαίρετες σταθερές.

Οι παράγωγοι της ανωτέρω έκφρασης έχουν κατά συνέπεια ως εξής:

$$X_r' = -\alpha_r k (\sin kx + \sinh kx) + c_r k \cos kx + d_r k \cosh kx \quad (\text{A2})$$

$$X_r'' = -\alpha_r k^2 (\cos kx + \cosh kx) - c_r k^2 \sin kx + d_r k^2 \sinh kx \quad (\text{A3})$$

Αντικαθιστώντας $x = 0$ στις (A2) και (A3) προκύπτει ότι

$$\left(X_r' \right)_{x=0} = k(c_r + d_r) \quad , \quad \left(X_r'' \right)_{x=0} = -2k^2 \alpha_r \quad (\text{A4})$$

Προφανώς η ποσότητα $c_r + d_r$ είναι ανάλογη με τη κλίση της καμπύλης παραμόρφωσης, ενώ η α_r είναι ανάλογη της ροπής κάμψης στη στήριξη r .

Επιπρόσθετα, λόγω απλών στηρίξεων στα άκρα ισχύει ότι $\alpha_1 = \alpha_{n+1} = 0$.

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις συνοριακές συνθήκες στο δεξί άκρο του r ανοίγματος έχουμε:

$$(X_r)_{x=\ell_r} = 0 \quad , \quad (X_r')_{x=\ell_r} = (X_{r+1}')_{x=0} \quad , \quad (X_r'')_{x=\ell_r} = (X_{r+1}'')_{x=0} \quad (A5)$$

Οι συνθήκες (A5) βάσει των (A1), (A2) και (A3) δίδουν:

$$\alpha_r (\cos kl_r - \cosh kl_r) + c_r \sin kl_r + d_r \sinh kl_r = 0 \quad (A6)$$

$$-\alpha_r (\sin kl_r + \sinh kl_r) + c_r \cos kl_r + d_r \cosh kl_r = c_{r+1} + d_{r+1} \quad (A7)$$

$$\alpha_r (\cos kl_r + \cosh kl_r) + c_r \sin kl_r - d_r \sinh kl_r = 2\alpha_{r+1} \quad (A8)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις (A6) και (A8) προκύπτει ότι

$$\alpha_r \cos kl_r + c_r \sin kl_r = \alpha_r \quad , \quad \cosh kl_r - d_r \sinh kl_r = \alpha_{r+1} \quad (A9)$$

εκ των οποίων, με τη προϋπόθεση ότι $\sin kl_r \neq 0$, λαμβάνουμε

$$c_r = \frac{\alpha_{r+1} - \alpha_r \cos kl_r}{\sin kl_r} \quad , \quad d_r = \frac{-\alpha_{r+1} + \alpha_r \cosh kl_r}{\sinh kl_r} \quad (A10)$$

και

$$c_r + d_r = \alpha_r (\coth kl_r - \cot kl_r) - \alpha_{r+1} (\cosh kl_r - \cos kl_r) \quad (A11)$$

Εισάγοντας τις ακόλουθες απλουστευμένες εκφράσεις

$$\left. \begin{aligned} \coth kl_r - \cot kl_r &= \varphi_r \\ \cosh kl_r - \cos kl_r &= \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (A12)$$

η (A11) παίρνει τη μορφή

$$c_r + d_r = \alpha_r \varphi_r - \alpha_{r+1} \psi_r \quad (A13)$$

Κατ' αναλογία, για το $r+1$ άνοιγμα θα ισχύει ότι:

$$c_{r+1} + d_{r+1} = \alpha_{r+1}\varphi_{r+1} - \alpha_{r+2}\psi_{r+1} \quad (\text{A14})$$

Μετά από αντικατάσταση των (A10) και (A14) στην εξίσωση (A6) λαμβάνουμε

$$\alpha_r\psi_r - \alpha_{r+1}(\varphi_r + \varphi_{r+1}) + \alpha_{r+2}\psi_{r+1} = 0 \quad (\text{A15})$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για κάθε ενδιάμεση στήριξη, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα $n-1$ εξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} -\alpha_2(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha_3\psi_2 = 0 \\ \alpha_2\psi_2 - \alpha_3(\varphi_2 + \varphi_3) + \alpha_4\psi_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1}\psi_{n-1} - \alpha_n(\varphi_{n-1} + \varphi_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A16})$$

Για την ύπαρξη μη τετριμμένης λύσης, η ορίζουσα των συντελεστών πρέπει να ισούται με μηδέν, απ' όπου προκύπτει η **εξίσωση συχνότητας** της ελεύθερης καμπτικής ταλάντωσης της συνεχούς δοκού.

Για παράδειγμα, για μια συνεχή δοκό δύο ανοιγμάτων, μια μοναδική εξίσωση παραμένει από το σύστημα των (A16), και η **εξίσωση συχνότητας** θα είναι

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = -\varphi_2 \quad (\text{A17})$$

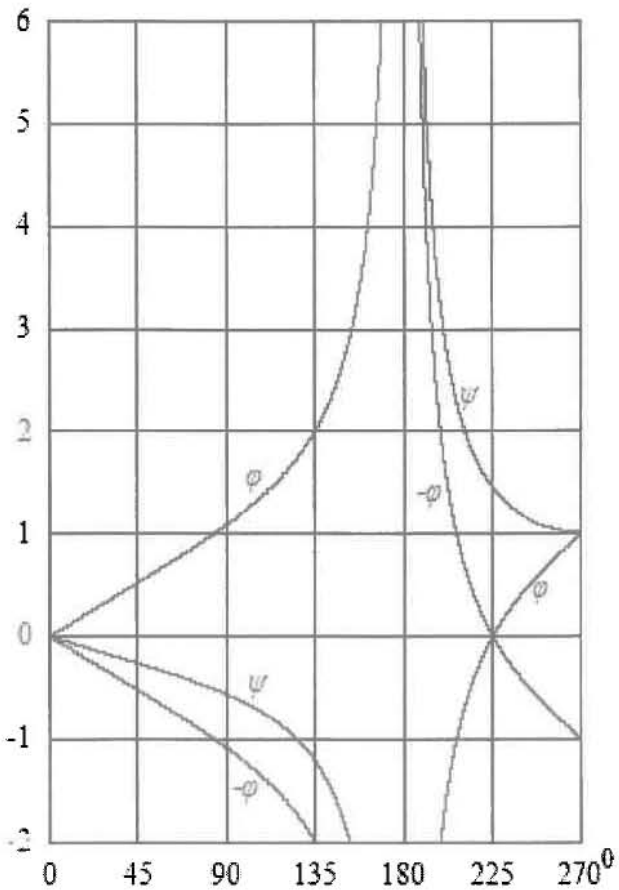
και οι ιδιοσυχνότητες θα υπολογισθούν από τη συνθήκη

$$\varphi(kl_1) = -\varphi(kl_2) \quad (\text{A18})$$

Για την επίλυση της ανωτέρω υπερβατικής εξίσωσης χαράσσεται το διάγραμμα των συναρτήσεων φ και $-\varphi$, που παρατίθεται στη συνέχεια. Στο εν λόγω διάγραμμα οι φ και $-\varphi$ δίδονται ως συναρτήσεις της ποσότητας kl σε μοίρες. Το όλο πρόβλημα καταλήγει στην εύρεση μιας γραμμής παράλληλης με τον οριζόντιο άξονα που τέμνει τα γραφήματα των φ και $-\varphi$ σε τέτοια σημεία,

που τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα έχουν λόγο μήκους ίσο με το λόγο των μηκών των ανοιγμάτων της δοκού. Παραδείγματος χάριν, αν θεωρηθεί ότι $\ell_1 : \ell_2 = 6 : 4.5$ η μικρότερη ρίζα ισούται με $kl_1 = 3.416$, ενώ η αμέσως μεγαλύτερη ίση με 4.787, ενώ η τρίτη βρίσκεται ίση με 6.690. Κατά συνέπεια ο λόγος των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων είναι ίσος με 1:1.96:3.82.

Στην ειδική περίπτωση που τα μήκη των ανοιγμάτων τείνουν να γίνουν ίσα μεταξύ τους, τότε η μικρότερη ρίζα τείνει στη τιμή $kl_1 = kl_2 = \pi$. Τότε η θεμελιώδης (πρώτη) κανονική μορφή ιδιοταλάντωσης κάθε ανοίγματος θα είναι ίδια με



αυτή της αντίστοιχης αμφιέρειστης δοκού. Ένας άλλος τύπος ταλάντωσης αποκτάται αν υποτεθεί ότι η εφαπτομένη της κανονικής μορφής της δοκού στην ενδιάμεση στήριξη είναι οριζόντια, οπότε κάθε άνοιγμα θα ταλαντώνεται σαν δοκός με το ένα άκρο απλά εδραζόμενο και το άλλο πακτωμένο.

Τέλος, αν πρόκειται περί συνεχούς δοκού τριών ανοιγμάτων, το σύστημα των εξισώσεων (A16) γίνεται

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_2(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha_3\psi_2 &= 0 \\ \alpha_2\psi_2 - \alpha_3(\varphi_2 + \varphi_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A19)$$

οπότε η σχετική εξίσωση συχνότητας είναι η:

Ε. Μαριάκη
Διπλωματική Εργασία

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3) - \psi_2^2 = 0$$

(A20)

