Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένης Οικονομικής

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Διπλωματική εργασία:

Πρόβλεψη "άριστης ποσότητας παραγγελίας" και "μέγιστου αναμενόμενου κέρδους" στα υποδείγματα Newsboy, όταν η ζήτηση ακολουθεί υποδείγματα ARIMA (p,d,q).

Γεωργία Α. Ράδη

Επιβλέπων καθηγητής **: Επίκουρος καθηγητής Ηλίας Κεβόρκ**

Βόλος , Ιούνιος 2011

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης, έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων , ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας .

Βόλος , Ιούνιος 2011

Ράδη Γεωργία

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου , Επίκουρο καθηγητή κύριο Κεβόρκ Ηλία, για την βοήθεια που μου προσέφερε και την υπομονή και κατανόηση που επέδειξε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας καθώς και τους καθηγητές του τμήματος Οικονομικών Επιστημών και διδάκτορες του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών και ιδιαιτέρως τον Αναπληρωτή καθηγητή , κύριο Χάλκο Γεώργιο, για τις γνώσεις που μας παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου, καθώς και όλους όσους με στήριξαν όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη , πραγματεύεται την ύπαρξη αυτοσυσχετιζόμενης ζήτησης στο υπόδειγμα μιας περιόδου (Single Period Inventory model ή Newsboy Problem) και αξιολογεί τρεις μεθόδους εκτίμησης της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών. Χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte- Carlo, στην πρώτη μέθοδο η εκτίμηση γίνεται αγνοώντας την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης, στη δεύτερη θέτοντας την εκτίμηση ίση με την πρόβλεψη της ζήτησης για την επόμενη περίοδο και στην τρίτη , λαμβάνοντας υπόψη την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης. Η αξιολόγηση των τριών μεθόδων γίνεται με τον υπολογισμό δύο κριτηρίων, της μεροληψίας και της κάλυψης, σε δύο υποδείγματα χρονολογικών σειρών, το AR(1) και το MA(1). Το συμπέρασμα αυτής είναι πως και για τα δύο υποδείγματα η μεροληψία είναι μικρότερη όταν λαμβάνεται υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης. Πιο συγκεκριμένα, η μεροληψία μικραίνει καθώς το δείγμα αυξάνει και μεγαλώνει όταν αυξάνεται το επίπεδο εξυπηρέτησης, ενώ στο MA(1) είναι μικρότερη από ότι στο AR(1). Η κάλυψη για τις δύο πρώτες μεθόδους στο AR(1), είναι χαμηλή και απέχει πολύ από το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95% , ενώ στο MA(1) οι αποκλίσεις είναι μικρότερες και ιδιαίτερα στη δεύτερη μέθοδο υπολογίζεται στο 95%.

ABSTRACT

The present study deals with the issue of autocorrelated demand in the Single-Period inventory model or Newsboy Problem and evaluates three methods for estimating the optimal order quantity and the maximum expected profit. Using Monte-Carlo simulations, the first method of estimation is ignoring the autocorrelation of the demand, the second is setting the estimation equal to the demand forecast for the next period and the third, is taking into account the autocorrelation of demand. The evaluation of three methods is made by calculating the two criteria of bias and coverage, in two time series models, the AR (1) and MA (1). For both models, bias is lower when taking into account the autocorrelation of demand. More specifically, the bias shrinks as the sample increases and increases when the level of service is getting larger while in MA (1) is smaller than in AR (1). The coverage for the first two methods in AR (1), is low and far from the nominal 95% confidence level, while in MA(1) the differences are smaller and especially in the second method, is close to 95% .

Λέξεις κλειδιά: Newsboy problem, άριστη ποσότητα παραγγελίας, μέγιστα αναμενόμενα κέρδη, αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση, προσομοιώσεις Monte- Carlo.

Κωδικοί JEL: C13, C15, C44, D24, M11

Κεφάλαιο 1ο

Περιγραφή του υποδείγματος διαχείρισης αποθεμάτων μιας περιόδου ή Newsboy problem

Από τα μέσα της δεκαετίας του ’80 γίνονται φανερά τα οφέλη της πολιτικής των αποθεμάτων, του σχεδιασμού της παραγωγής και του προγραμματισμού σε κάθε επιχείρηση, καθώς αποτελούν συγκριτικό πλεονέκτημα για όσους τα εφαρμόζουν. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων, και πιο συγκεκριμένα με το υπόδειγμα μιας περιόδου (Single period) ή Newsboy Problem το οποίο είναι ένα από τα τρία βασικά υποδείγματα διαχείρισης αποθεμάτων. Τα υπόλοιπα δύο είναι τα ακόλουθα:

1. Το υπόδειγμα συνεχούς επιθεώρησης (Continuous review system). Στο υπόδειγμα αυτό, η ζήτηση από περίοδο σε περίοδο είναι τυχαία και η χρονική περίοδος δύο διαδοχικών παραγγελιών δεν παραμένει ίδια.
2. Το υπόδειγμα περιοδικής επιθεώρησης (Periodic review system). Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, η στάθμη του αποθέματος ελέγχεται ανα τακτά χρονικά διαστήματα και μετά από κάθε έλεγχο δίνεται η παραγγελία.

Το υπόδειγμα αποθεμάτων μιας περιόδου , χειρίζεται αποθεματικές πολιτικές προϊόντων , για τα οποία η ζήτηση διαρκεί έναν αποθεματικό κύκλο (μία περίοδο) (Kevork , 2010). Κατά τον Axsäter, στο συγκεκριμένο πρόβλημα η ζήτηση είναι στοχαστική και κατανέμεται κανονικά με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ.

Σύμφωνα με τον Lau (1980) και τους Lin and Kroll (1996), όταν η ζήτηση (D) στο Newsboy Problem είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε κατανέμεται με συνάρτηση πυκνότητας $g(\cdot)$ και σωρευτική συνάρτηση κατανομής $G(\cdot)$. Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι :

- c : κόστος αγοράς ή παραγωγής του προϊόντος (ανά μονάδα)
- p : τιμή πώλησης του προϊόντος (ανά μονάδα)
- s : κόστος έλλειψης ανά μονάδα αποθέματος (Shortage cost):
    a. Κόστος εκφραζόμενο ως τρέχουσα απώλεια από την πώληση η οποία δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί, λόγω έλλειψης αποθέματος.

b. Κόστος απώλειας της καλής πίστης του πελάτη, δηλαδή η παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών από τις πωλήσεις που δεν πρόκειται να γίνουν λόγω απώλειας των σημερινών πελατών οι οποίοι θα αναζητήσουν το προϊόν σε άλλες επιχειρήσεις.

- v : έσοδο ανά μονάδα προϊόντος που έμεινε απούλητη στο τέλος της περιόδου (salvage value)
- $p > c > v$: η γενική συνθήκη

Τέλος, το επίπεδο εξυπηρέτησης ορίζεται : $R = \dfrac{p-c+s}{p-v+s}$.

Σκοπός του προβλήματος Newsboy, είναι να προσδιοριστεί η άριστη ποσότητα παραγγελίας Q που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη , ενώ υπάρχουν κόστη (penalty costs) τα οποία σχετίζονται με την αποθεματοποίηση ποσότητας προϊόντος, μεγαλύτερης ή μικρότερης από την ζήτηση της εκάστοτε περιόδου, η οποία είναι άγνωστη (Silver et al.,1998) .

Η απόφαση για το μέγεθος της ποσότητας ενός προϊόντος που θα τοποθετεί ως απόθεμα στην αρχή μιας περιόδου πώλησης, είναι πολύ σημαντική καθώς αυτή η ποσότητα θα πρέπει να μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη και ταυτόχρονα να μην είναι ούτε μεγαλύτερη ούτε μικρότερη από την πραγματική ζήτηση. Σε περίπτωση που είναι μεγαλύτερη από την πραγματική ζήτηση , στο τέλος της περιόδου εφαρμόζεται μια χαμηλότερη τιμή (discount) για τις απούλητες ποσότητες. Από την άλλη πλευρά, όταν η ποσότητα παραγγελίας είναι μικρότερη από την πραγματική ζήτηση, υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση και συνεπώς προκύπτει ένα κόστος έλλειψης αποθέματος. Το κόστος έλλειψης αποθέματος είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών που θα χάνονταν αν υπήρχαν στο παρόν μη ικανοποιημένοι πελάτες (Lapin,1994). Στη συνέχεια της παρούσας ανάλυσης υποθέτουμε ότι το κόστος έλλειψης αποθέματος είναι μηδενικό.

Για τον προσδιορισμό του σημείου αναπαραγγελίας (πότε θα πραγματοποιηθεί η παραγγελία) καθώς και του μεγέθους της ποσότητας αυτής , πρέπει να ορισθεί το επίπεδο εξυπηρέτησης του πελάτη R ή η πιθανότητα η ζητούμενη ποσότητα να είναι μικρότερη ή ίση με την άριστη ποσότητα παραγγελίας. Κατά τους Schweitzer and Cachon (2000), όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερο του 0,5 ($R > 0{,}5$) τότε το προϊόν χαρακτηρίζεται ως υψηλού κέρδους , ενώ όταν $R < 0,5$ χαρακτηρίζεται προϊόν χαμηλού κέρδους. Προϊόντα υψηλού κέρδους ονομάζονται εκείνα για τα οποία ο πωλητής έχει υψηλό περιθώριο κέρδους και επιλέγει να παραγγείλει μεγαλύτερες ποσότητες αυτών. Χαμηλού κέρδους προϊόντα είναι εκείνα των οποίων το περιθώριο κέρδους είναι χαμηλό και η πιθανή έλλειψη τους δεν θα αποφέρει υψηλό κόστος στον πωλητή, γι' αυτό και οι ποσότητες που παραγγέλνει είναι μικρότερες.

Στην ανάλυση που ακολουθεί , γίνεται εφαρμογή της αποθεματικής πολιτικής μιας περιόδου (Newsboy problem), κάτω από την υπόθεση ότι η ζήτηση αυτοσυσχετίζεται και μάλιστα ο βαθμός αυτοσυσχέτισης είναι υψηλός. Όπως υποστηρίζουν οι Lau and Wang (1987) , μπορεί να υπάρξουν σημαντικά λάθη στα αποτελέσματα, όταν οι αποφάσεις για το απόθεμα λαμβάνονται χωρίς αξιόλογη σκέψη της αυτοσυσχέτισης της ζήτησης.

Προκειμένου να εξετάσουμε αν θα πρέπει να λαμβάνεται τελικά υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης, πραγματοποιούμε εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, με τρεις μεθόδους , έτσι ώστε να καταλήξουμε σε εκείνη που θα μας παρέχει τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα.

Η πρώτη μέθοδος μέσω της οποίας γίνεται η εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, είναι αυτή που περιγράφεται στον Kevork (2010) και υποθέτει ανεξαρτησία της ζήτησης. Μετά από μια σειρά αποδείξεων , οι οποίες παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο, προκύπτουν οι εκτιμητές για την άριστη ποσότητα και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη , όταν η ζήτηση ακολουθεί τα υποδείγματα χρονολογικών σειρών AR(1) και MA(1). Αυτή, αποτελεί την τρίτη μέθοδο εκτίμησης, ενώ στην δεύτερη μέθοδο η εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας γίνεται μέσω της πρόβλεψης για την επόμενη περίοδο. Έτσι, η πρόβλεψη για την ζήτηση του χρόνου $t+1$, για καθένα από τα δύο υποδείγματα, τίθεται ίση με την άριστη ποσότητα παραγγελίας και στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός των μέγιστων αναμενόμενων κερδών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, μετά από τη δημιουργία 1000 προσομοιωμένων σειρών, για δείγματα έξι διαφορετικών μεγεθών, μέγιστου μήκους 500 παρατηρήσεων , και τρία διαφορετικά επίπεδα εξυπηρέτησης ($R = 0,4$, $R = 0,8$ και $R = 0,95$) πραγματοποιείται εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών για κάθε μέθοδο. Στη συνέχεια, αξιολογούνται τα αποτελέσματα των τριών μεγεθών μέσω του υπολογισμού της μεροληψίας και της κάλυψης, έτσι ώστε να προκύψει η πιο αξιόπιστη μέθοδος.

Για την πραγματοποίηση της παραπάνω διαδικασίας έγινε χρήση του οικονομετρικού πακέτου Eviews καθώς και του υπολογιστικού προγράμματος Excel. Λεπτομέρειες για τον τρόπο εκτίμησης και υπολογισμού των διάφορων μεγεθών , μέσω των παραπάνω προγραμμάτων παρουσιάζονται στο Παράρτημα .

Πριν τη θεωρητική και εμπειρική προσέγγιση του σκοπού της εργασίας αυτής , κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση αρθρογραφίας σχετικά με το πρόβλημα Newsboy καθώς και των μελετών οι οποίες πραγματοποιήθηκαν για να εκτιμήσουν την άριστη ποσότητα παραγγελίας, το σημείο αναπαραγγελίας ή το στοκ ασφαλείας , λαμβάνοντας υπόψη την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης.

Κεφάλαιο 2

Σύντομη επισκόπηση του υποδείγματος Newsboy και της αυτοσυσχετιζόμενης ζήτησης

2.1 Το υπόδειγμα Newsboy

Σύμφωνα με τον Khouja (1999) σκοπός του Single Period Problem (Αποθεματική πολιτική μιας περιόδου) γνωστού και ως Newsboy Problem είναι να βρει την ποσότητα παραγγελίας ενός προϊόντος, που θα μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη. Το συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρείται σε ευπαθή ή εποχιακά προϊόντα για τα οποία ο προμηθευτής έχει την δυνατότητα να αυξήσει την τιμή για να μειώσει τη ζήτηση ή το αντίθετο (Lau and Lau 1988). Έτσι , αν στο τέλος της περιόδου πώλησης του προϊόντος υπάρχει απόθεμα, τότε γίνεται χρήσης μιας χαμηλότερης τιμής (discount) ώστε να πωληθεί. Αντίθετα, αν η ποσότητα παραγγελίας είναι μικρότερη από την πραγματική ζήτηση τότε χάνονται κάποια κέρδη.

Το ενδιαφέρον προς το συγκεκριμένο πρόβλημα αυξήθηκε τις τελευταίες δεκαετίες , καθώς πολλές έρευνες έγιναν γύρω από αυτό. Οι ερευνητές προκειμένου να δώσουν λύση στο Newsboy Problem χρησιμοποιούν είτε τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων κερδών, είτε την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κόστους της υπερεκτιμημένης ή υποτιμημένης ζήτησης (Khouja 1999).

Το 1980 ο Lau έκανε μια προσπάθεια να λύσει το πρόβλημα μέσω της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας και της μεγιστοποίησης της πιθανότητας να επιτευχτεί ο επιθυμητός στόχος κερδών. Εισήγαγε στην ανάλυση του τις έννοιες της τιμής πώλησης p , του κόστους c , της salvage value v (τιμή διατίμησης) και του shortage penalty cost s (κόστος έλλειψης αποθέματος) και έθεσε ως γενική συνθήκη $p>c>s$. Μεταβλητή του προβλήματος του θεωρείται η ποσότητα παραγγελίας Q και πως αυτή μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη σε δύο περιπτώσεις: όταν το κόστος έλλειψης είναι μηδενικό (s=0) και όταν δεν είναι μηδενικό.

Με τις περιπτώσεις του να είναι μηδενικό ή όχι το κόστος έλλειψης σε ένα υπόδειγμα Newsboy το οποίο όμως περιλαμβάνει και εκπτώσεις είτε σε όλη την ποσότητα είτε μεμονωμένα, ασχολήθηκαν σε μελέτη τους και οι Lin and Kroll το 1996. Ο περιορισμός στην ανάλυση τους για την μεγιστοποίηση των κερδών μέσω του προσδιορισμού της άριστης ποσότητα παραγγελίας, ήταν ότι η πιθανότητα επίτευξης του στόχου για τα επιθυμητά κέρδη δεν θα ήταν μικρότερη από ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου. Από τα μοντέλα που ανέπτυξαν προέκυψε ότι όταν s=0 επέρχεται λύση κλειστού τύπου για τον προσδιορισμό της άριστης ποσότητας παραγγελίας ενώ για s>0 επέρχεται μόνο αριθμητική λύση.

Το πώς το μέγεθος της έκπτωσης μπορεί να επηρεάσει την απόφαση για την ποσότητα παραγγελίας αλλά και την ελαχιστοποίηση του κόστους, στο Single Period Problem, απασχόλησε και τον Pantumsinchai σε μελέτη του το 1991.

Τον τρόπο που επηρεάζουν την μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους αλλά και της πιθανότητας επίτευξης του στόχου κερδών όταν υπάρχουν πολλαπλές εκπτώσεις στο υπόδειγμα Newsboy , εξέτασε ο Khouja το 1995. Αναφέρει πως οι πολλαπλές εκπτώσεις οδηγούν σε υψηλότερη ζήτηση με τιμές υψηλότερες από τη salvage (τιμή στην οποία πωλείται κάθε απούλητη μονάδα προϊόντος) του κλασσικού Newsboy υποδείγματος. Έτσι η ποσότητα παραγγελίας καθώς και τα κέρδη είναι μεγαλύτερα από ότι όταν υπάρχει εφαρμογή απλής εκπτωσιακής τιμής. Ο όρος πολλαπλές εκπτώσεις (multiple discounts) ορίζεται από τους Khouja and Mehrez (1996) ως οι τιμές που εφαρμόζει ο πωλητής πριν καταλήξει στην salvage value. Οι τιμές αυτές είναι χαμηλότερες από την τιμή πώλησης και σταδιακά μπορούν να μειώνονται ανάλογα με τη ζήτηση που αντιμετωπίζει τι προϊόν. Στο συγκεκριμένο άρθρο τους εξετάζουν την ύπαρξη πολλαπλών εκπτώσεων σε ένα υπόδειγμα μιας περιόδου όπου πωλούνται περισσότερα από ένα προϊόντα (multiple product) και αποδεικνύουν ότι τα αποτελέσματα σχετικά με τη βέλτιστη λύση μπορούν να είναι διαφορετικά όταν γίνεται χρήση πολλαπλών εκπτώσεων. Ο Casimir (2011) ορίζει ως multiple product την πώληση περισσότερων προϊόντων σε ένα συγκεκριμένο τμήμα πελατών και ερευνά τι συμβαίνει στο υπόδειγμα Newsboy όταν η πληροφόρηση είναι πλήρης και όταν δεν είναι.

Οι Kabak and Weinberg (1972) στην αναλυσή τους σχετικά με το Newsboy Problem, αναφέρουν πως το συγκεκριμένο υπόδειγμα δεν δέχεται μείωση στα αναμενόμενα κέρδη από τον καθορισμό των τιμών για σταθερές και αναλογικές κυρώσεις, όταν υπάρχουν ελλείψεις και επίσης ότι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος που πρέπει να πληρωθεί ώστε να εξασφαλιστεί η προσφορά, καθορίζεται έτσι ώστε να μην υπάρχει μείωση κερδών. Η βασική υπόθεση τους ήταν πως ο εφοδιασμός του τομέα είναι τυχαία μεταβλητή.

Οι Atkinson (1979) και Anvari(1987) δίνοντας μια διαφορετική προέκταση στο newsboy problem προσπάθησαν ο πρώτος να εξετάσει τα αποτελέσματα διαφορετικών κινήτρων σε μία κατάσταση όπου ο ιδιοκτήτης και ο manager έχουν διαφορετικούς στόχους και εκτιμήσεις για την αγορά, ενώ ο δεύτερος κάνοντας χρήση των μοντέλων αξιολόγησης της αγοράς θέλησε να αναλύσει στοχαστικά προβλήματα αποθεμάτων. Απέδειξε πως όταν ο σχετικός κίνδυνος της επένδυσης αποθέματος λαμβάνεται υπόψη, τα αποτελέσματα είναι πολύ διαφορετικά.

Ο Haji et al. το 2007 ασχολήθηκαν με τον προσδιορισμό της άριστης ποσότητας παραγγελίας που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη στο Single Period Inventory Model κάτω από την υπόθεση ότι όλη η ποσότητα προσφέρεται με έκπτωση. Συγκεκριμένα υπέθεσαν ότι ο προμηθευτής προσφέρει εκπτωσιακή ποσότητα και ότι το αρχικό απόθεμα είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή συνάρτηση κατανομής. Η υπόθεσή τους αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση κατά την οποία η απόφαση σχετικά με την ποσότητα παραγγελίας λαμβάνεται πολύ πριν την έναρξη της περιόδου πώλησης και το διαθέσιμο απόθεμα μπορεί να φθίνει στοχαστικά λόγω υποβάθμισης , εξάτμισης κλπ.

Ο Nahmias το 1994 επικεντρώθηκε στο να εκτιμήσει τις παραμέτρους της κατανομής της ζήτησης στα συστήματα αποθεμάτων με χαμένες πωλήσεις (lost sales). Από την στιγμή που υπάρχουν χαμένες πωλήσεις , η ζήτηση είναι δύσκολο να παρατηρηθεί καθώς μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τις πωλήσεις .Έτσι ο Nahmias υποθέτει πως η ζήτηση αποτελεί ακολουθία κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, η οποία θα μπορούσε να είναι μια υπολειμματική διαδικασία ζήτησης απαλλαγμένη από εποχικότητα και μη στασιμότητα. Εξετάζει 3 εκτιμητές για τον μέσο και την τυπική απόκλιση : τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας MLE, τον καλύτερο γραμμικό αμερόληπτο εκτιμητή BLUE και έναν τρίτο που παρουσιάζει στην συγκεκριμένη έρευνα. Οι εκτιμητές αυτοί συγκρίνονται ανάμεσα σε μικρά και μεγάλα δείγματα και σε μια ποικιλία παραμετρικών εφαρμογών. Έπειτα από την εφαρμογή προσομοιώσεων κατέληξε στο ότι οι MLE εκτιμητές έδωσαν τα πιο συνετά αποτελέσματα με μικρές διαφορές από τους άλλους. Στην συγκεκριμένη μελέτη τονίζεται επίσης πόσο σημαντικός είναι ο έλεγχος αποθέματος για την αποτυχία ή επιτυχία μιας επιχείρησης διότι πολλά προϊόντα χαρακτηρίζονται από ολικές ή μερικές χαμένες πωλήσεις. Έτσι για να είναι αποτελεσματικός ο έλεγχος αποθέματος, πρέπει η εκτίμηση του κόστους και η παρακολούθηση του αποθέματος να είναι συντονισμένες.

Με τις διαφορές ανάμεσα στις πωλήσεις και τη ζήτηση ασχολήθηκε ο Conrad (1976) ο οποίος τόνισε ότι η ποσότητα που πωλείται δεν είναι ίση με την ζήτηση κάτι που είναι αντίθετο με ότι υποθέτει το υπόδειγμα Newsboy. Τονίζει ακόμα ότι όταν ένα κατάστημα μένει χωρίς στοκ τότε η ζήτηση φαίνεται υπερβάλλουσα και ίση με το στοκ και ότι δεν μπορεί να υπάρξει υποκατάσταση ούτε της μάρκας , ούτε του προϊόντος.

O Hill (1997) κάνει χρήση της προσέγγισης του Bayes για να εκτιμήσει παραμέτρους του single period inventory model και εξετάζοντας 3 διαφορετικές κατανομές ζήτησης : την εκθετική (Exponential), την Poisson και τη διωνυμική (Binomial) κατέληξε στο ότι η μεθοδολογία του Bayes δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα. Οι Agrawal και Smith το 1996 μελέτησαν 3 διαφορετικές περιπτώσεις κατανομής της ζήτησης, την κανονική, την Poisson και την αρνητική διωνυμική, για να προσδιορίσουν το μέγεθος του στοκ ασφαλείας, καταλήγοντας στο ότι η αρνητική διωνυμική παρέχει καλύτερα αποτελέσματα απο τις άλλες δυο. Ταυτόχρονα ανέπτυξαν μια μέθοδο εκτίμησης παραμέτρων στην περίπτωση των μη παρατηρημένων χαμένων πωλήσεων . Τελικά, παρατήρησαν ότι όσο αυξάνει το επίπεδο του στοκ , τα σφάλματα μειώνονται, καθώς υπάρχει περισσότερη διαθέσιμη πληροφόρηση για τη ζήτηση και ότι σε χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης της τάξης 70-80% τα επίπεδα του στοκ φαίνεται να μη διαφέρουν μεταξύ των τριών κατανομών.

O Bell (2000), ανέπτυξε έναν νέο τρόπο πρόβλεψης της ζήτησης στο Newsboy Problem, όταν υπάρχει υψηλή έλλειψη αποθέματος, καθώς μια προγενέστερη διαδικσία που είχε αναπτυχθεί , αποτύγχανε όταν η έλλειψη του αποθέματος ήταν μεγαλύτερη από 50%.

Τέλος, οι Yang et al. (2011) εξέτασαν την τιμολόγηση και την ποσότητα παραγγελίας που μεγιστοποιούν την πιθανότητα να επιτευχθεί ο στόχος των κερδών και των εσόδων στο υπόδειγμα newsvendor. Κατέληξαν στο ότι η πιθανότητα να επιτευχθούν οι στόχοι εξαρτάται από τα μεγέθη του περιθωρίου κέρδους και του δείκτη μεταξύ του στόχου κερδών και των εσόδων. Έτσι όταν το προϊόν έχει υψηλή ελαστικότητα ζήτησης η καλύτερη στρατηγική είναι να τιμολογείται χαμηλότερα και να αποθεματοποιούνται υψηλότερες ποσότητες αυτού. Την μέθοδο της μεγιστοποίησης των κερδών με σταθερή όμως τιμή , εφαρμόζουν στην μελέτη τους και οι Lau and Lau (1988) , οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η ζήτηση είναι συνάρτηση της τιμής γι' αυτό και επηρεάζεται από τις μεταβολές της.

2.2 Ο ρόλος της αυτοσυσχετιζόμενης ζήτησης στην δημιουργία εκτιμήσεων

Οι Fotopoulos and Wang και Rao το 1988 στην ανάλυση τους υποστηρίζουν ότι ο καθορισμός του άριστου σημείου αναπαραγγελίας και του στοκ ασφαλείας είναι πολύ σημαντικές αποφάσεις και οι λαμβάνοντες τις αποφάσεις αυτές θα πρέπει να εξετάζουν πολύ καλά την αυτοσυσχέτιση της καθημερινής ζήτησης για να προσδιορίσουν αυτά τα δύο μεγέθη. Έτσι κάνουν μια προσπάθεια να προσδιορίσουν το στοκ ασφαλείας όταν η ζήτηση αυτοσυσχετίζεται ενώ οι χρόνοι παράδοσης της παραγγελίας ακολουθούν τυχαία κατανομή, στην περίπτωση όπου η ζήτηση ακολουθεί το AR(1) υπόδειγμα ή το MA(1). Στην πρώτη περίπτωση η ζήτηση συσχετίζεται περισσότερο με την ζήτηση των πιο πρόσφατων ημερών , ενώ στη δεύτερη επηρεάζεται μόνο από το σφάλμα της προηγούμενης ημέρας. Με άλλα λόγια η ημερήσια ζήτηση με την ημερήσια ζήτηση με μια υστέρηση, συσχετίζονται .

Η προηγούμενη έρευνα επιβεβαιώνει τους ισχυρισμούς του Ray (1982) ,ο οποίος θέλοντας να προσδιορίσει το σημείο αναπαραγγελίας όταν η ζήτηση συσχετίζεται ακολουθώντας ARIMA μοντέλο, απέδειξε ότι η θετική συσχέτιση αυξάνει τη διακύμανση της αναμενόμενης ζήτησης και το σημείο αναπαραγγελίας, ενώ η αρνητική οδηγεί σε μείωση τους. Έτσι προκειμένου να μην υπάρχει υπερβολικό απόθεμα ή έλλειψη αποθέματος και συνεπώς ανικανοποίητη ζήτηση , θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός και το είδος της συσχέτισης στο μοντέλο της ζήτησης πριν την αναπαραγγελία. Σε προγενέστερη έρευνα του το 1980 εξετάζοντας το μέγεθος του στοκ σε αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση πρώτου βαθμού , απέδειξε πως όταν υπάρχει αρνητική συσχέτιση οδηγούμαστε σε υπερεκτίμηση του στοκ , ενώ σε περίπτωση αρνητικής συσχέτισης η υποτίμηση του μεγέθους του στοκ φαίνεται να είναι πολύ σημαντική.

Οι Lau και Wang το 1987 προχωρούν σε μία προσπάθεια πρόβλεψης του χρόνου παράδοσης όταν η ζήτηση αυτοσυσχετίζεται και δεν είναι κανονική. Καταλήγουν στο ότι μπορούν να υπάρξουν σημαντικά λάθη στα αποτελέσματα όταν οι αποφάσεις που αφορούν στο απόθεμα λαμβάνονται χωρίς αξιόλογη σκέψη της αυτοσυσχέτισης ή της αυθαίρετης κατανομής της ζήτησης. Η ανάλυση τους πραγματοποιείται κάνοντας χρήση των μοντέλων Box- Jenkins , όπου για το AR(1) γίνεται χρήση ενός προτύπου ζήτησης με πολλές παρατηρήσεις (long memory) , ενώ στο MA(1) για λίγες (short memory).

Μια από τις πιο πρόσφατες έρευνες είναι αυτή των Marmostein και Zinn το 1993 οι οποίοι ερευνούν πως η αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση επηρεάζει τον προσδιορισμό του στοκ ασφαλείας. Πηγαίνοντας ένα βήμα πιο πέρα από την μελέτη των Fotopoulos Wang και Rao (1988) στην οποία η μέση τιμή και διακύμανση της καθημερινής ζήτησης αλλάζουν οπότε άλλαζε και η τιμή της παραμέτρου αυτοσυσχέτισης οι Marmostein και Zinn κρατούν σταθερά το μέσο και την διακύμανση για όλες τις συνθήκες. Επιβεβαιώνουν πως η επίδραση της αυτοσυσχετιζόμενης ζήτησης στο στοκ ασφαλείας είναι σημαντική ακόμα και όταν η δύναμη της αυτοσυσχέτισης είναι χαμηλή. Έτσι καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η συσχέτιση της καθημερινής ζήτησης δεν επηρεάζει άμεσα την διακύμανση της, ασκεί όμως επίδραση στην απόφαση για τον προσδιορισμό του στοκ ασφαλείας με άμεση επιρροή στη διακύμανση του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας.

Ο Urban το 2000 μελέτησε πως η σειριακά σχετιζόμενη ζήτηση επηρεάζει τον προσδιορισμό του κατάλληλου σημείου αναπαραγγελίας. Συγκεκριμένα εξέτασε την επίδραση ενός AR(1) και ενός MA(1) υποδείγματος συγκρίνοντας τρεις μεθόδους υπολογισμού του σημείου αναπαραγγελίας και κατέληξε στο ότι η παραδοσιακή μέθοδος υπερεκτιμά το στοκ ασφαλείας δεδομένης της θετικής συσχέτισης ενώ αναφέρει πως η συσχέτιση της ζήτησης μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα υπερβολικό απόθεμα και ελλείψεις για υψηλού βαθμού αυτοσυσχέτιση.

Το 1999 ο Graves θέλοντας να αναπτύξει τη θεωρία αποθεμάτων με πιο ρεαλιστικά παραδείγματα, καθώς λαμβάνει υπόψη το ότι η ζήτηση στη βιομηχανία είναι αβέβαιη και δύσκολο να προβλεφθεί , εξέτασε το ενδεχόμενο η ζήτηση να είναι μη στάσιμη και να συμπεριφέρεται σαν τυχαίος περίπατος. Μάλιστα, υποστηρίζει ότι ο εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος όρος παρέχει την βέλτιστη πρόβλεψη για το μέγεθος του στοκ ασφαλείας της επόμενης περιόδου. Τέλος παρατηρεί ότι όταν η ζήτηση δεν είναι στάσιμη το στοκ ασφαλείας είναι μεγαλύτερο από ότι όταν είναι στάσιμη.

Κεφάλαιο 3

Το υπόδειγμα Newsboy με αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, πραγματοποιείται εξαγωγή της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, στο υπόδειγμα Newsboy, όταν η ζήτηση ακολουθεί αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού AR(1) ή υπόδειγμα κινητών μέσων όρων πρώτου βαθμού MA(1).

3.2 Το αυτοπαλίνδρομο σχήμα AR(1)

Ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού AR(1) , έχει τη μορφή:

$$D_t = \delta + \phi D_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \qquad (3.2.1)$$

όπου D_t η ζήτηση για την χρονική περίοδο και ε_t ο διαταρακτικός όρος, ο οποίος κατανέμεται κανονικά, με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση σ^2.

Για $t = 1,2,3,..$ η (3.2.1) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$D_t = \frac{\delta(1-\phi^t)}{1-\phi} + \phi^t D_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} \quad , \qquad (3.2.2)$$

όπου D_0 η ζήτηση τη χρονική στιγμή 0.

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στη (3.2.2) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathrm{E}(D_t) = \mathrm{E}\left\{\frac{\delta(1-\phi^t)}{1-\phi}\right\} + \mathrm{E}(\phi^t D_0) + \mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right) \quad . \qquad (3.2.3)$$

Εφόσον όμως $\delta \frac{(1-\phi^t)}{1-\phi}$ και $\phi^t D_0$ είναι σταθερές και η αναμενόμενη τιμή μιας σταθεράς ισούται με την ίδια τη σταθερά, και καθώς η αναμενόμενη τιμή του ε_{t-j} ισούται με το μηδέν , δηλαδή $\mathrm{E}(\varepsilon_{t-j})=0$, η 3.2.3 γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{E}(D_t) = \delta \frac{(1-\phi^t)}{1-\phi} + \phi^t D_0 \quad . \tag{3.2.4}$$

Θεωρώντας ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει σε κάποιο χρονικό σημείο στο πολύ απομακρυσμένο παρελθόν , δηλαδή το t τείνει στο άπειρο και υποθέτοντας ότι το ϕ παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1 ή εναλλακτικά $|\phi| < 1$, τότε $\phi^t \to 0$.

Έτσι από την (3.2.4) προκύπτει ότι $\mu = \mathrm{E}(D_t) = \frac{\delta}{1-\phi}$, όπου μ ο μέσος της σειράς (Δημέλη, 2002).

Κάτω από την υπόθεση ότι $|\phi| < 1$, που αποτελεί τη μοναδική συνθήκη για να είναι το AR(1) στάσιμο και δεδομένου ότι το $t \to \infty$ η 3.2.2 γίνεται (Hamilton 1994):

$$D_t = \frac{\delta}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \quad \text{ή} \quad D_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \tag{3.2.5}$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Wold (Χρήστου, 2004) αποδεικνύεται ότι $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} = \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}$.

Επομένως τώρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$D_t = \mu + V_t \quad , \tag{3.2.6}$$

με $V_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$, όπου μ ο στάσιμος μέσος και $V_t \sim N(0, \gamma_0)$ όπου γ_0 η στάσιμη διακύμανση η οποία ισούται με $\gamma_0 = Var\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right) = \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}$ (Δημέλη , 2002)

3.3 Το υπόδειγμα κινητών μέσων όρων MA(1)

Ένα υπόδειγμα κινητών μέσων όρων έχει τη μορφή:

$$D_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad . \tag{3.3.1}$$

Λαμβάνοντας αναμενόμενες τιμές στην (3.3.1) και εφόσον $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$, προκύπτει ότι ο στάσιμος μέσος της σειράς είναι :

$$E(D_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \mu \ , \qquad (3.3.2)$$

Ενώ η διακύμανση θα είναι (Δημέλη , 2002):

$$\gamma_0 = \mathrm{E}\left[(D_t - \mu)^2\right] = \mathrm{E}\left[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2\right] = \mathrm{E}\left[\varepsilon_t^2 + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right] = \sigma^2\left(1 + \theta^2\right) \ , \qquad (3.3.3)$$

αφού $Var(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ και $Var(\varepsilon_{t-1}) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma^2$

3.4 Εξαγωγή άριστης ποσότητας παραγγελίας και μέγιστων αναμενόμενων κερδών

3.4.1 Άριστη ποσότητα παραγγελίας και μέγιστα αναμενόμενα κέρδη όταν η ζήτηση ακολουθεί το AR(1).

Έχοντας δώσει στην εξίσωση ενός αυτοπαλίνδρομου σχήματος πρώτου βαθμού την μορφή 3.2.6 , ακολουθώντας τον Kevork (2010) μπορούμε να εκτιμήσουμε την άριστη ποσότητα παραγγελίας και το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος, όταν η ζήτηση ακολουθεί το AR(1) .

Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση κερδών στο υπόδειγμα Newsboy, η οποία σύμφωνα με τον Khouja (1999) διακρίνεται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη ποσότητα παραγγελίας και στη ζητούμενη ποσότητα. Έτσι αν η ποσότητα παραγγελίας Q είναι μεγαλύτερη από τη ζητούμενη ποσότητα D_t σε μία χρονική στιγμή t τότε η συνάρτηση κερδών παίρνει τη μορφή :

$$\pi = (p - c)Q - (p - v)(Q - D_t) \ , \qquad (3.4.1α)$$

ενώ αν η ποσότητα παραγγελίας Q είναι μικρότερη από τη ζητούμενη ποσότητα D_t στην χρονική στιγμή t τότε η συνάρτηση κερδών έχει τη μορφή:

$$\pi = (p - c)Q - s(D_t - Q) \ . \qquad (3.4.1β)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε με p την τιμή πώλησης ανά μονάδα, με c το κόστος παραγωγής ανά μονάδα, με v το έσοδο ανά μονάδα προϊόντος που έμεινε απούλητη στο τέλος της περιόδου (salvage value) και με s το κόστος έλλειψης ανά μονάδα αποθέματος (shortage penalty cost per unit) , το οποίο αποτελεί το κόστος απώλειας της καλής πίστης του πελάτη, δηλαδή την παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών από τις πωλήσεις που δεν πρόκειται να γίνουν λόγω απώλειας των σημερινών πελατών .Το s στην παρούσα ανάλυση θεωρείται μηδενικό.

Η εξαγωγή της άριστης ποσότητας παραγγελίας και του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους διενεργείται στα υποδείγματα Newsboy με τον ίδιο τρόπο , είτε η ζήτηση κατανέμεται κανονικά είτε ακολουθεί το αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού.

Ορίζοντας την εξίσωση αναμενόμενων κερδών ως :

$$\pi = \begin{cases} (p-c)Q-(p-v)(Q-D_t) \\ (p-c)Q+s(Q-D_t) \end{cases} , \text{ όταν } \begin{matrix} Q-D_t>0 \\ Q-D_t<0 \end{matrix}$$

και λαμβάνοντας αναμενόμενες τιμές σε αμφότερα τα μέλη προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\pi) &= (p-c)Q-(p-v)[Q-\mu-\mathrm{E}(\varepsilon_t/\varepsilon_t<Q-\mu)]\Pr(V_t<Q-\mu) \\ &+ s\mathrm{E}[Q-\mu-\mathrm{E}(\varepsilon_t/\varepsilon_t\geq Q-\mu)]\Pr(V_t\geq Q-\mu) \end{aligned} \quad . \qquad (3.4.2)$$

Στην παραπάνω εξίσωση έχει γίνει αντικατάσταση της εξίσωσης της ζήτησης η οποία κατανέμεται κανονικά και είναι της μορφής $D_t=\mu+\varepsilon_t$. Προκειμένου να εισάγουμε στην ανάλυση μας το δεδομένο ότι η ζήτηση ακολουθεί ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού , αντικαθιστούμε στην (3.4.2) την εξίσωση της ζήτησης (3.2.6) η οποία έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση της κανονικά κατανεμόμενης ζήτησης. Έτσι όταν η ζήτηση είναι AR(1) η (3.4.2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\pi) &= (p-c)Q-(p-v)[Q-\mu-\mathrm{E}(V_t/V_t<Q-\mu)]\Pr(V_t<Q-\mu) \\ &+ s\mathrm{E}[Q-\mu-\mathrm{E}(V_t/V_t\geq Q-\mu)]\Pr(V_t\geq Q-\mu) \end{aligned} \quad , \qquad (3.4.3)$$

όπου $\mu=\dfrac{\delta}{1-\phi}$ ο στάσιμος μέσος και $V_t \sim N(0,\gamma_0)$ με $\gamma_0=Var\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\varepsilon_{t-j}\right)=\sigma^2\dfrac{1}{1-\phi^2}$.

Αφού εκφράσαμε την εξίσωση αναμενόμενων κερδών όταν η ζήτηση ακολουθεί αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (3.4.3) την εξίσωση $D_t=\mu+V_t$ και να διακρίνουμε για την περίπτωση που η ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερη από την ζητούμενη ποσότητα, τα εξής:

$$\mathrm{E}\left[(Q-D_t)/Q-D_t \geq 0\right] = \mathrm{E}\left[(Q-\mu\ -V_t)/Q-\mu\ -V_t \geq 0\right] =$$
$$\mathrm{E}\left[Q-\mu\ -V_t / V_t \leq Q-\mu\ \right] = Q-\mu\ -\mathrm{E}\left[V_t / V_t \leq Q-\mu\ \right]$$

Όμως

$$\mathrm{E}\left[V_t / V_t \leq Q-\mu\ \right] = \mathrm{E}\left[\sqrt{\gamma_0}\,\frac{V_t}{\sqrt{\gamma_0}} / \frac{V_t}{\sqrt{\gamma_0}} \leq \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}\right] =$$
$$\sqrt{\gamma_0}\,\mathrm{E}\left[Z / Z \leq \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}\right]$$

Επομένως

$$\mathrm{E}\left[Q-\mu\ -V_t / V_t \leq Q-\mu\ \right] = Q-\mu\ -\sqrt{\gamma_0}\,\mathrm{E}\left[Z / Z \leq \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}\right] \qquad (3.4.4α)$$

Για την περίπτωση που η ποσότητα παραγγελίας είναι μικρότερη από τη ζητούμενη έχουμε αντίστοιχα:

$$\mathrm{E}\left[(Q-D_t)/Q-D_t < 0\right] = \mathrm{E}\left[(Q-\mu\ -V_t)/Q-\mu\ -V_t < 0\right] =$$
$$\mathrm{E}\left[Q-\mu\ -V_t / Q-\mu\ < V_t\right] = Q-\mu\ -\mathrm{E}\left(V_t / V_t > Q-\mu\ \right).$$

Όμως

$$\mathrm{E}\left(V_t / V_t > Q-\mu\ \right) = \mathrm{E}\left(\sqrt{\gamma_0}\,\frac{V_t}{\sqrt{\gamma_0}} / \frac{V_t}{\sqrt{\gamma_0}} > \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}\right) =$$
$$\sqrt{\gamma_0}\,\mathrm{E}(Z/Z) > \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

Επομένως

$$\mathrm{E}\left[Q-\mu\ -V_t / Q-\mu\ < V_t\right] = Q-\mu\ -\sqrt{\gamma_0}\,\mathrm{E}\left(Z / Z > \frac{Q-\mu}{\sqrt{\gamma_0}}\right) \qquad (3.4.4β)$$

Συμβολίζοντας με φ_z και Φ_z τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής υπολογιζόμενες στο σημείο $z = (Q-\mu\ )/\sqrt{\gamma_0}$, για την εξίσωση (3.4.4α) , γνωρίζουμε από τον Maddala (1983) ότι $\mathrm{E}(Z/Z \leq z) = -\frac{\phi_z}{\Phi_z}$ καθώς και ότι η πιθανότητα η ποσότητα παραγγελίας να είναι μεγαλύτερη από τη ζητούμενη υπολογίζεται ως:

$$\Pr(Q - D_t \geq 0) = \Pr(Q - \mu_i - V_t \geq 0) = \Pr(V_t \leq Q - \mu_i) = \Pr\left(\frac{V_t}{\sqrt{\gamma_0}} \leq \frac{Q - \mu_i}{\sqrt{\gamma_0}}\right) =$$

$$\Pr(Z \leq z) = \Phi_z .$$

Για την εξίσωση (3.4.4β) , επίσης από τον Maddala παίρνουμε ότι $E(Z / Z > z) = \frac{\phi_z}{(1 - \Phi_z)}$,

ενώ η πιθανότητα η ποσότητα παραγγελίας να είναι μικρότερη από την ζητούμενη ποσότητα, και συνεπώς να υπάρχει ένα μέρος της ζήτησης που να μένει ανικανοποίητο, θα είναι $\Pr(Q - D_t < 0) = 1 - \Phi_z$.

Αν προχωρήσουμε σε αντικατάσταση των παραπάνω δεδομένων στην εξίσωση (3.4.3), καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση, η οποία αποτελεί τη νέα εξίσωση αναμενόμενων κερδών :

$$E(\pi) = (p - c)Q - (p - v)\left[Q - \mu + \sqrt{\gamma_0}\,\frac{\varphi_z}{\Phi_z}\right]\Phi_z - s\left[Q - \mu - \sqrt{\gamma_0}\,\frac{\varphi_z}{\Phi_z}\right](1 - \Phi_z)$$

ή

$$E(\pi) = (p - c)Q + s(Q - \mu) - (p - v + s)\left[(Q - \mu)\Phi_z + \sqrt{\gamma_0}\varphi_z\right] \qquad (3.4.5)$$

Παραγωγίζοντας την (3.4.5) ως προς Q λαμβάνουμε:

$$\frac{dE(\pi)}{dQ} = (p - c + s) - (p - v + s)\Phi_z = 0$$

και : $\frac{d^2E(\pi)}{dQ^2} = -\frac{(p - c + s)}{\sqrt{\gamma_0}}\varphi_z < 0$

Εφόσον η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική προκύπτει ότι το αναμενόμενο κέρδος που θα υπολογιστεί θα είναι μέγιστο.

Για την εξαγωγή των παραπάνω παραγώγων , και με την βοήθεια του αλυσωτού κανόνα, χρειάστηκε να υπολογιστούν οι παράγωγοι των Φ_z και ϕ_z ως προς Q. Για το Φ_z η παράγωγος είναι :

$$\frac{d}{dQ}\Phi_z = \frac{d}{dQ}\Phi_z \frac{dZ}{dQ} = \Phi_z \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} \quad ,$$

ενώ για το ϕ_z θα είναι :

$$\frac{d}{dQ}\varphi_z = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Q-\mu_{AR}}{\sqrt{\gamma_0}}\right)^2\right]\right\} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\left(\frac{Q-\mu_{AR}}{\sqrt{\gamma_0}}\right)\varphi_z$$

Ξέρουμε ότι η συνθήκη για την εύρεση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και τον υπολογισμό του μέγιστου κέρδους είναι η:

$$\Phi_z = \Pr\left(Z \le \frac{Q-\mu}{\sigma}\right) = \frac{p-c+s}{p-v+s} = R \qquad (3.4.6)$$

Το R ονομάζεται επίπεδο εξυπηρέτησης του πελάτη και αποτελεί την πιθανότητα η ζητούμενη ποσότητα να είναι μικρότερη από την ποσότητα παραγγελίας. Αντίστοιχα , $1-R$ είναι η πιθανότητα έλλειψης αποθέματος , λόγω υπερβάλλουσας ζήτησης.

Έχοντας ορίσει στην εξίσωση (3.4.6) το επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών R, και γνωρίζοντας ότι η άριστη ποσότητα παραγγελίας υπολογίζεται ως $Q^* = \mu \;+ z_R\sqrt{\gamma_0}$, επιστρέφουμε στην εξίσωση (3.4.5) και κάνουμε αντικατάσταση των παραπάνω μεγεθών, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*(\pi) &= (p-c)\left[\mu \;+ z_R\sqrt{\gamma_0}\right] + s\left(\mu \;+ z_R\sqrt{\gamma_0} - \mu\;\right) - \\ &-(p-v+s)\left[\left(\mu \;+ z_R\sqrt{\gamma_0} - \mu\;\right)\Phi_z\right] + \sqrt{\gamma_0}\varphi_z\end{aligned}$$

ή

$$\mathrm{E}^*(\pi) = (p-c)\mu \;+ (p-c+s)\left[z_R\sqrt{\gamma_0}\right] - \frac{p-c+s}{R}\left[z_R\sqrt{\gamma_0}\Phi_z + \sqrt{\gamma_0}\varphi_z\right] \qquad (3.4.7)$$

Η εξίσωση (3.4.7) παρουσιάζει το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος. Προκειμένου να απλουστευτεί , μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα Φ_z και ϕ_z ως εξής:

$$\Phi_z = \Phi_{\frac{Q^*-\mu_{AR}}{\gamma_0}} = \Pr\left(\mathrm{Z} \le \frac{Q^*-\mu_{AR}}{\sqrt{\gamma_0}}\right) = \Pr\left(\mathrm{Z} \le z_R\right) = R \qquad (3.4.8\alpha)$$

και

$$\varphi_{\frac{Q^*-\mu_{AR}}{\gamma_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*-\mu_{AR}}{\sqrt{\gamma_0}}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z_R^2\right) = \phi_{z_R} \qquad (3.4.8\beta)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση 3.4.7 και αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.4.8α και 3.4.8β η εξίσωση αναμενόμενων κερδών παίρνει την τελική της μορφή ,

$$\mathrm{E}^*(\pi) = (p-c)\mu \ + (p-c+s)z_R\sqrt{\gamma_0} - \frac{p-c+s}{R}z_R\sqrt{\gamma_0}R - \frac{p-c+s}{R}\sqrt{\gamma_0}\varphi_{z_R}$$

ή

$$\mathrm{E}^*(\pi) = (p-c)\mu \ - \frac{p-c+s}{R}\sqrt{\gamma_0}\varphi_{z_R} \qquad (3.4.9)$$

Η 3.4.9 αποτελεί την εξίσωση μέγιστων αναμενόμενων κερδών στα υποδείγματα Newsboy, όταν η ζήτηση ακολουθεί αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού, AR(1).

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει ότι ο εκτιμητής της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την επόμενη περίοδο θα είναι:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} \quad + z_R\sqrt{\hat{\gamma}_0} \qquad (3.4.10)$$

Ενώ από την (3.4.9), ο εκτιμητής μέγιστων αναμενόμενων κερδών θα είναι:

$$\hat{\mathrm{E}}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} \ - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\sqrt{\hat{\gamma}_0} \qquad (3.4.11)$$

Όπου $\varphi_{\hat{z}_R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{\hat{Q}^*_{T+1}-\hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{0_T}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{\hat{\mu} \ + z_R\sqrt{\hat{\gamma}_{0_T}} - \hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\gamma}_{0_T}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(z_R) = \varphi_{z_R}$

3.4.2 Άριστη ποσότητα παραγγελίας και μέγιστα αναμενόμενα κέρδη όταν η ζήτηση ακολουθεί το MA(1)

Όταν η ζήτηση ακολουθεί το MA(1), η εξίσωσή της θα παίρνει την μορφή:

$$D_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j + \theta\varepsilon_{j-1} \quad . \tag{3.4.12}$$

Θέτοντας τον όρο $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j + \theta\varepsilon_{j-1} = V_t$ όπου $V_t \sim N(0, \gamma_0)$ και $\gamma_0 = \sigma^2(1+\theta^2)$,

Ο εκτιμητής της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την επόμενη περίοδο θα είναι και σ' αυτή την περίπτωση :

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} \quad + z_R \sqrt{\hat{\gamma}_0} \tag{3.4.13}$$

ενώ ο εκτιμητής των μέγιστων αναμενόμενων κερδών θα είναι:

$$\hat{\mathrm{E}}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} \quad - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\sqrt{\hat{\gamma}_0} \tag{3.4.14}$$

Οι εκτιμητές για τη άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη , έχουν την ίδια μορφή και στο AR(1) υπόδειγμα και στο MA(1) με τη διαφορά ότι ο εκτιμητής γ_0 στο AR(1) είναι $\gamma_0 = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}$, ενώ στο MA(1) είναι $\gamma_0 = \sigma^2(1+\theta^2)$. Ο μέσος μ είναι ίδιος και για τα δύο υποδείγματα και ισούται με $\mu = 300$.

3.5 Εκτίμηση συντελεστών με τη μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, έγινε η υπόθεση ότι οι συντελεστές μ, ϕ και γ_0 είναι γνωστοί, ενώ στην πραγματικότητα οι τιμές τους είναι άγνωστες. Η πρώτη μέθοδος με τη βοήθεια της οποίας θα επιχειρήσουμε την εκτίμηση των παραπάνω συντελεστών είναι η μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood, ML). Στη συγκεκριμένη μέθοδο διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

α. Όταν το D_1 είναι σταθερή μεταβλητή η εκτίμηση γίνεται με τη μέθοδο Conditional Maximum Likelihood (Υπό συνθήκη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας).

β. Όταν το D_1 θεωρείται τυχαία μεταβλητή η εκτίμηση γίνεται με τη μέθοδο Exact Maximum Likelihood (Ακριβής συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας).

Στην αναλυσή που ακολουθεί θα υιοθετηθεί η πρώτη (Hamilton 1994):

3.5.1 Μέθοδος Conditional Maximum Likelihood για AR(1) (Υπό συνθήκη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας)

Όπως είχαμε ορίσει στην αρχή του κεφαλαίου, η εξίσωση της ζήτησης όταν αυτή ακολουθεί αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού είναι η (3.2.1) $D_t = \delta + \phi D_{t-1} + \varepsilon_t$.

Δεδομένου ότι στο χρόνο $t = 1$ η τιμή της ζήτησης D_1 είναι σταθερή , στο χρόνο $t = 2$ η ζήτηση θα κατανέμεται κανονικά με μέσο $\delta + \phi D_1$ και διακύμανση σ^2 δηλαδή $D_2 \sim N\left(\delta + \varphi D_1, \sigma^2\right)$. Για την ίδια χρονική στιγμή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης θα είναι:

$$f\left(D_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{\left(D_2 - \delta - \varphi D_1\right)^2}{2\sigma^2} \tag{3.5.1.1}$$

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή t και δεδομένου ότι γνωρίζουμε την ζήτηση της προηγούμενης περιόδου D_{t-1} , η ζήτηση θα κατανέμεται κανονικά με μέσο $\delta + \phi D_{t-1}$ και διακύμανση σ^2 δηλαδή $D_t \sim N\left(\delta + \phi D_{t-1}, \sigma^2\right)$. Ταυτόχρονα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα είναι :

$$f\left(D_T\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{\left(D_t - \delta - \varphi D_{t-1}\right)^2}{2\sigma^2} \tag{3.5.1.2}$$

Αθροίζοντας τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης από τη χρονική στιγμή $t = 2$ εώς τη χρονική στιγμή $t = T$ και παίρνοντας τον λογάριθμο αυτού του αθροίσματος, καταλήγουμε στη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας η οποία έχει τη μορφή:

$$\ln L = -\frac{T-1}{2} \ln 2\pi - \frac{T-1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^{T} \left(D_t - \delta - \varphi D_{t-1}\right)^2 \tag{3.5.1.3}$$

Η εκτίμηση των δ και ϕ προκύπτει από την μεγιστοποίηση της εξίσωσης 3.5.1.3 ως προς δ και ως προς ϕ: $\frac{\vartheta \ln L}{\vartheta \delta} = 0$ και $\frac{\vartheta \ln L}{\vartheta \phi} = 0$ ή από την ελαχιστοποίηση του όρου $\sum_{t=2}^{T} (D_t - \delta - \varphi D_{t-1})^2$

Αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις των δ, ϕ και σ^2 στις εξισώσεις (3.4.10) και (3.4.11) προκύπτει η εξίσωση της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την επόμενη περίοδο:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \frac{\hat{\delta}}{1-\hat{\phi}} + z_R \frac{\hat{\sigma}^2}{1-\hat{\phi}^2} \tag{3.5.1.4}$$

και η εξίσωση του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους:

$$\hat{\mathrm{E}}(\pi)^* = (p-c)\frac{\hat{\delta}}{1-\hat{\phi}} - (p-c+s)\frac{\hat{\sigma}^2}{1-\hat{\phi}^2}\frac{\phi_{Z_R}}{R} \tag{3.5.1.5}$$

με $\hat{\mu} = \frac{\hat{\delta}}{1-\hat{\phi}}$ και $\hat{\gamma}_0 = \frac{\hat{\sigma}^2}{1-\hat{\phi}^2}$

Η εκτίμηση των $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\phi}$ και $\hat{\sigma}$ πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του Eviews και η διαδικασία εκτίμησης παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

3.5.2 Μέθοδος Conditional Maximum Likelihood για MA(1)(Υπό συνθήκη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας)

Στην ενότητα 3.3 ορίσαμε την εξίσωση της ζήτησης όταν αυτή ακολουθεί το υπόδειγμα κινητών μέσων όρων ως: $D_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$.

Λαμβάνοντας ως υπόθεση ότι το σφάλμα στην χρονική περίοδο $t = 0$ είναι μηδέν ($\varepsilon_0 = 0$), τη χρονική στιγμή $t = 1$ η ζήτηση κατανέμεται κανονικά με μέσο μ και διακύμανση σ^2, δηλαδή $D_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης τη δεδομένη στιγμή θα είναι:

$$f(D_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2}(D_1 - \mu)^2 \tag{3.5.2.1}$$

Την χρονική στιγμή $t = 2$ το σφάλμα της προηγούμενης περιόδου είναι πλέον γνωστό. Έτσι η ζήτηση τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα κατανέμεται κανονικά με μέσο $\mu + \theta\varepsilon_1$ και διακύμανση σ^2, δηλαδή $D_2 \sim N(\mu + \theta\varepsilon_1, \sigma^2)$. Την ίδια χρονική στιγμή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης θα είναι:

$$f(D_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2}(D_2 - \mu - \theta\varepsilon_1)^2 \tag{3.5.2.2}$$

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι για κάθε t και δεδομένου ότι το σφάλμα της προηγούμενης περιόδου είναι γνωστό, η ζήτηση θα κατανέμεται κανονικά με μέσο $\mu + \theta\varepsilon_{t-1}$ και διακύμανση σ^2, δηλαδή $D_t \sim N(\mu + \theta\varepsilon_{t-1}, \sigma^2)$, ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι :

$$f(D_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2}(D_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2 \tag{3.5.2.3}$$

Αθροίζοντας τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης από τη χρονική στιγμή $t = 2$ εως τη χρονική στιγμή $t = T$ και παίρνοντας τη λογαριθμική συνάρτηση αυτού του αθροίσματος καταλήγουμε στη συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας η οποία έχει τη μορφή:

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(D_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2 \tag{3.5.2.4}$$

Η εκτίμηση των μ και θ προκύπτει από τη μεγιστοποίηση της (3.5.2.4) ως προς μ και ως προς θ: $\frac{\vartheta \ln L}{\vartheta\mu} = 0$ και $\frac{\vartheta \ln L}{\vartheta\theta} = 0$ ή από την ελαχιστοποίηση του όρου:

$$\sum_{t=2}^{T}(D_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2$$

Αφού εκτιμήσαμε τους συντελεστές μ, θ και σ^2, αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (3.4.10) και (3.4.11) τις εκτιμημένες τιμές και προκύπτουν οι εξισώσεις της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την επόμενη περίοδο:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} + z_R[\hat{\sigma}^2 + (1 + \hat{\theta}^2)] \tag{3.5.1.4}$$

και του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους:

$$\hat{E}(\pi)^* = (p-c)\hat{\mu} - (p-c+s)[\hat{\sigma}^2 + (1+\hat{\theta}^2)] \frac{\phi_{Z_R}}{R} \tag{3.5.1.5}$$

με $\hat{\mu} = \mu$ και $\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}^2(1+\hat{\theta}^2)$

Η εκτίμηση των $\hat{\mu}$, $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\theta}$ και $\hat{\sigma}$ πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του Eviews και η διαδικασία εκτίμησης παρουσιάζεται στο Παράρτημα .

3.6 Εναλλακτική μέθοδος

Όταν η ζήτηση ακολουθεί ένα υπόδειγμα ARIMA(p,d,q) , μπορούμε να προβλέψουμε τη ζήτηση για την επόμενη περίοδο T+1 και να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο διάστημα πρόβλεψης. Επομένως , αντί τη χρήση των τύπων (3.4.10) και (3.4.13) θα μπορούσαμε να θέσουμε την ποσότητα παραγγελίας ίση με την πρόβλεψη. Η εναλλακτική αυτή μεθοδολογία περιγράφεται παρακάτω.

3.6.1 Προβλέψεις σε αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα πρώτου βαθμού AR(1)

Αν θεωρήσουμε ότι σε ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού AR(1) η εξίσωση της ζήτησης παίρνει τη μορφή:

$$D_t = \delta + \varphi D_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \tag{3.6.1}$$

τότε η πρόβλεψη της ζήτησης για την επόμενη περίοδο θα γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Για το χρόνο $t = T+1$ η (3.6.1) γίνεται:

$$D_{T+1} = \delta + \varphi D_T + \varepsilon_{T+1} \quad . \tag{3.6.2}$$

Λαμβάνοντας αναμενόμενες τιμές και δεδομένου ότι όλες οι παρατηρήσεις μέχρι τον χρόνο T θεωρούνται σταθερές ποσότητες , για την εξίσωση (3.6.2) έχουμε:

$$\hat{D}_{T+1} = E(D_{T+1} / D_T, D_{T-1}, ..., D_1)$$

ή

$$\hat{D}_{T+1} = \mathrm{E}\left(\delta + \varphi D_T + \varepsilon_{T+1} / D_T, D_{T-1}, ..., D_1\right) =$$

$$\mathrm{E}(\delta) + \varphi \mathrm{E}\left(D_T / D_{T,} D_{T-1}, ... D_1\right) + \mathrm{E}\left(\varepsilon_{T+1}\right) = \delta + \varphi D_T \, .$$

Συνεπώς η εκτίμηση της πρόβλεψης της ζήτησης για την επόμενη περίοδο θα είναι

$$\hat{D}_{T+1} = \delta + \varphi D_T \tag{3.6.3}$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογιστεί το σφάλμα πρόβλεψης $\hat{\varepsilon}_{T+1}$, το οποίο ισούται με τη διαφορά της τιμής της ζήτησης που υποθέσαμε ή που αναμέναμε ότι θα πάρουμε, από την εκτιμημένη:

$$\hat{\varepsilon}_{T+1} = D_{T+1} - \hat{D}_{T+1}$$

ή

$$\hat{\varepsilon}_{T+1} = \delta + \varphi D_T + \varepsilon_{T+1} - \delta - \varphi D_T = \varepsilon_{T+1}$$

Για να υπολογιστεί στη συνέχεια το διάστημα πρόβλεψης απαιτείται η γνώση της διακύμανσης του σφάλματος η οποία ισούται με $Var\left(\hat{\varepsilon}_{T+1}\right) = Var\left(\varepsilon_{T+1}\right) = \sigma^2$

Τελικά το διάστημα πρόβλεψης της ζήτησης σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95% θα είναι : $\hat{D}_{T+1} \pm 2\sqrt{Var\left(\hat{\varepsilon}_{T+1}\right)}$ ή $\hat{D}_{T+1} \pm 2\sigma$

Έχοντας πραγματοποιήσει την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο, θεωρούμε ότι αυτή αποτελεί και την εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας. Συνεπώς :

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{D}_{T+1} = \hat{\delta} + \hat{\varphi} D_T \tag{3.6.4}$$

και αντίστοιχα η εκτίμηση για το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος θα είναι

$$\hat{\mathrm{E}}^*(\pi) = (p-c)\hat{Q}^*_{T+1} + s\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right) - (p - v + s)\left[\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right)\Phi_z + \sqrt{\hat{\gamma}_0}\,\varphi_z\right] \tag{3.6.5}$$

3.6.2 Προβλέψεις σε υποδείγματα κινητών μέσων όρων MA(1)

Θεωρώντας ότι η εξίσωση της ζήτησης σε ένα υπόδειγμα MA(1) παίρνει τη μορφή:

$$D_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \tag{3.6.6}$$

τότε η πρόβλεψη της ζήτησης για την επόμενη περίοδο θα γίνεται ως ακολούθως:

Για τον χρόνο $t = T + 1$ η (3.6.6) γίνεται:

$$D_{T+1} = \mu + \varepsilon_{T+1} + \theta\varepsilon_T \quad (3.6.7)$$

Λαμβάνοντας αναμενόμενες τιμές και έχοντας υπόψη ότι ο μέσος μ και ο διαταρακτικός όρος της περιόδου $t = T$ είναι γνωστά και επομένως θεωρούνται σταθερές, η (3.6.7) γίνεται:

$$\hat{D}_{T+1} = E\left(D_{T+1} / D_T, D_{T-1}, ..., D_1\right) \quad \text{ή}$$

$$\hat{D}_{T+1} = E\left(\mu + \varepsilon_{T+1} + \theta\varepsilon_T / D_T, D_{T-1}, ...D_1\right) =$$

$$E(\mu) + E(\varepsilon_{T+1}) + \theta\varepsilon_T = \mu + \theta\varepsilon_T$$

Επομένως η εκτίμηση της πρόβλεψης της ζήτησης για την επόμενη περίοδο θα είναι:

$$\hat{D}_{T+1} = \mu + \theta\varepsilon_T \quad (3.6.8)$$

Το σφάλμα και σ' αυτή την περίπτωση υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{\varepsilon}_{T+1} = D_{T+1} - \hat{D}_{T+1}$$

ή

$$\hat{\varepsilon}_{T+1} = \mu + \varepsilon_{T+1} + \theta\varepsilon_T - \mu - \theta\varepsilon_T = \varepsilon_{T+1}$$

Ενώ η διακύμανση του σφάλματος θα ισούται με: $Var(\hat{\varepsilon}_{T+1}) = Var(\varepsilon_{T+1}) = \sigma^2$

Τελικά το διάστημα πρόβλεψης της ζήτησης σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95% θα είναι : $\hat{D}_{T+1} \pm 2\sqrt{Var(\hat{\varepsilon}_{T+1})}$ ή $\hat{D}_{T+1} \pm 2\sigma$

Θεωρώντας ότι η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο αποτελεί και την εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{D}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\theta}\varepsilon_T \quad , \quad (3.6.8)$$

ενώ η εκτίμηση για τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη της επόμενης περιόδου είναι:

$$\hat{\mathrm{E}}^*(\pi) = (p - c)\hat{Q}^*_{T+1} + s\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right) - (p - v + s)\left[\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right)\Phi_z + \sqrt{\hat{\gamma}_0}\varphi_z\right] \quad (3.6.9)$$

Κεφάλαιο 4

Αξιολόγηση μεθόδων εκτιμήσεων της άριστης ποσότητας παραγγελίας και του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους στο AR(1) και στο MA(1).

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί γίνεται εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους , όταν η ζήτηση ακολουθεί τα υποδείγματα χρονολογικών σειρών AR(1) και MA(1), εφαρμόζοντας τις τρεις ακόλουθες μεθόδους:

a. Στην πρώτη μέθοδο υποθέτουμε ανεξαρτησία της ζήτησης, και προχωρούμε στην εκτίμηση της ποσότητας παραγγελίας και του κέρδους.
b. Στη δεύτερη μέθοδο, γίνεται η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο, σε κάθε υπόδειγμα, και στη συνέχεια η πρόβλεψη αυτή, τίθεται ίση με την ποσότητα παραγγελίας.
c. Στην τρίτη μέθοδο, λαμβάνοντας υπόψη την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης και χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.10) και (3.11) για το AR(1) και τους τύπους (3.13) και (3.14) για το MA(1) που αποδείχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, γίνεται εκτίμηση της ποσότητα παραγγελίας και του κέρδους.

Η αξιολόγηση των τριών μεθόδων , γίνεται βάσει του μεγέθους της μεροληψίας και της κάλυψης. Ως κάλυψη (coverage) ορίζουμε την εκτίμηση της πιθανότητας, το διάστημα εμπιστοσύνης της εκάστοτε μεθόδου να περιέχει την πραγματική άριστη ποσότητα παραγγελίας ή τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη (Kevork 2010).

4.2 Προσδιορισμός πραγματικών μεγεθών

Αρχικά, προκειμένου να γίνει σύγκριση των πραγματικών μεγεθών με τα εκτιμημένα, έτσι ώστε να προσδιοριστούν η μεροληψία και η κάλυψη θα πρέπει να υπολογιστούν η πραγματική άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα πραγματικά μέγιστα αναμενόμενα κέρδη.

Για το πληθυσμιακό υπόδειγμα AR(1)

$$D_t = 60 + 0{,}8 D_{t-1} + \varepsilon_t \ , \qquad (4.1)$$

όπου $\varepsilon_t \sim N(0{,}1296)$,

δημιουργήθηκαν 1000 προσομοιωμένες σειρές με τη μέθοδο Monte- Carlo , μέγιστου μήκους 500 παρατηρήσεων. Για να διασφαλιστεί η στασιμότητα κάθε σειράς , η πρώτη παρατήρηση δημιουργήθηκε από την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = \dfrac{\delta}{1-\phi} = \dfrac{60}{1-0{,}8} = 300$

και διακύμανση $\gamma_0 = \dfrac{\sigma^2}{1-\varphi^2} = \dfrac{1296}{1-0{,}8^2} = 3600$.

Η γεννήτρια τυχαίων αριθμών είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στον Kevork (2010). Περισσότερες λεπτομέρειες για ελέγχους εγκυρότητας αυτής βρίσκονται στον Kevork (1990).

Αντίστοιχα, για το πληθυσμιακό υπόδειγμα MA(1)

$$D_t = 300 + \varepsilon_t + 0{,}85\varepsilon_{t-1} \ , \qquad (4.2)$$

όπου $\varepsilon_t \sim N(0{,}2089{,}98)$,

δημιουργήθηκαν 1000 προσομοιωμένες σειρές μέγιστου μήκους 500 παρατηρήσεων με μέσο $\mu = 300$ και διακύμανση $\gamma_0 = \sigma^2(1+\theta^2) = 2089{,}98^2(1+0{,}85^2) = 3600$.

Οι παράμετροι του MA(1) ορίσθηκαν έτσι ώστε ο συντελεστής μεταβλητότητας CV να είναι ο ίδιος και για τα δύο υποδείγματα και επομένως $CV = \dfrac{\sqrt{\gamma_0}}{\mu} = \dfrac{\sqrt{3600}}{300} = 0{,}2.$

Από τη στιγμή που ο συντελεστής μεταβλητότητας παίρνει την τιμή 0,2 , σύμφωνα με τον Kevork (2010) εξασφαλίζεται η μη αρνητικότητα της ζήτησης αν και ο Lau (1997) υποστηρίζει πως ο συντελεστής μεταβλητότητας μπορεί να παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 2 αλλά μικρότερες του 3. Στην ανάλυση του Kevork (2010) αποδεικνύεται πως όταν το CV παίρνει τιμές κοντά στο 0,25 ή το 0,30 αρχίζουν να εμφανίζονται αρνητικές τιμές στη ζήτηση. Ενώ όταν $CV = 0{,}2$ υπάρχει μια πολύ μικρή πιθανότητα της τάξεως του 0,00003% να εμφανιστεί αρνητική τιμή στη ζήτηση.

Στην παρούσα ανάλυση θα δούμε πως διαμορφώνεται η άριστη ποσότητα παραγγελίας κάτω από τρία διαφορετικά μεγέθη επιπέδου εξυπηρέτησης , όταν ο βαθμός αυτοσυσχέτισης είναι υψηλός, δηλαδή ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι: $\varphi = 0{,}8$ για το AR(1) και $\theta = 0{,}85$ για το MA(1). Έτσι διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τα διαφορετικά επίπεδα εξυπηρέτησης:

- Όταν R=0,4 τότε $\Phi_z = 0{,}4$ $z_R = -0{,}25335$ $\varphi_{z_R} = 0{,}386343$

  $p = 200$, $c = 190$ και $v = 175$

- Όταν R=0,8 τότε $\Phi_z = 0{,}8$ $z_R = 0{,}841621$ $\varphi_{z_R} = 0{,}279962$

  $p = 200$, $c = 160$ και $v = 150$

- Όταν R=0,95 τότε $\Phi_z = 0{,}95$ $z_R = 1.644854$ $\varphi_{z_R} = 0{,}103136$

  $p = 200$, $c = 110$ και $v = 105{,}26$

Σύμφωνα με τους Schweitzer and Cachon (2000) όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης R είναι μεγαλύτερο του 0,5 , το προϊόν χαρακτηρίζεται ως υψηλού κέρδους ενώ όταν είναι μικρότερο του 0,5 χαρακτηρίζεται ως προϊόν χαμηλού κέρδους.

Τέλος, στην ανάλυση μας υποθέτουμε ότι το κόστος έλλειψης αποθέματος είναι μηδενικό, $s = 0$, δηλαδή δεν υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση στο παρόν και απώλεια της καλής πίστης του πελάτη στο μέλλον (loss of goodwill). Αυτό διασφαλίζεται θεωρώντας ότι ο πωλητής , όταν υπάρχει ανικανοποίητη ζήτηση, βρίσκει το προϊόν από άλλες πηγές ενώ το p (τιμή) και το c (κόστος) παραμένουν ίδια.

Η χρήση των εξισώσεων (3.4.10) και (3.4.11) μας οδηγεί στις πραγματικές ποσότητες των Q^* και $E(\pi)^*$ που φαίνονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1: Οι πραγματικές τιμές της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών.

R	**Q***	**E(π)***
0,4	284,799	2.420,486
0,8	350,497	11.160,12
0,95	398,691	26.413,75

Όπως παρατηρούμε στα αποτελέσματα του πίνακα 1, όσο αυξάνει το επίπεδο εξυπηρέτησης, αυξάνει το μέγεθος της άριστης ποσότητας παραγγελίας καθώς και το μέγεθος των μέγιστων αναμενόμενων κερδών. Αυτό είναι συνεπές με την αρχή προϊόντων υψηλού και χαμηλού κέρδους που αναλύθηκε προηγουμένως.

Στη συνέχεια της ανάλυσης μας, γίνεται εκτίμηση των παραπάνω μεγεθών , με την εφαρμογή τριών διαφορετικών μεθόδων που αναλύθηκαν παραπάνω, προκειμένου να καταλήξουμε στην καταλληλότερη για την εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών. Η εκτίμηση του δειγματικού μέσου , της πληθυσμιακής διακύμανσης καθώς και των παραμέτρων $\hat{\mu}$, $\hat{\varphi}$,$\hat{\theta}$ και $\hat{\sigma}$ των 1000 σειρών για έξι διαφορετικά δείγματα έγινε με την βοήθεια του οικονομετρικού πακέτου E-views (Παράρτημα).

4.3 Εκτίμηση άριστης ποσότητας παραγγελίας και μέγιστου αναμενόμενου κέρδους για το AR(1).

Στη πρώτη μέθοδο η εκτίμηση των μεγεθών πραγματοποιείται υποθέτοντας ανεξαρτησία των δεδομένων, ακολουθώντας την ανάλυση Kevork (2010).

Έτσι ο εκτιμητής της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την περίοδο $T+1$ είναι:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} + z_R \hat{\sigma}$$

και ο εκτιμητής των μέγιστων αναμενόμενων κερδών για την περίοδο $T+1$ είναι:

$$\hat{E}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\hat{\sigma}$$

Στη δεύτερη μέθοδο λαμβάνουμε πλέον υπόψη την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης , ότι ακολουθεί δηλαδή το υπόδειγμα AR(1), και η εκτίμηση των αναμενόμενων μεγεθών $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}^*(\pi)$ για την επόμενη περίοδο γίνεται με τους εκτιμητές όπως αυτοί φαίνονται στην ενότητα 3.6.1 του 3^{ου} κεφαλαίου. Έτσι η πρόβλεψη για την περίοδο $T+1$ αποτελεί και την άριστη ποσότητα παραγγελίας.

Οι εκτιμητές που χρησιμοποιούνται εδώ για το AR(1) είναι οι εξής:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{D}_{T+1} = \hat{\delta} + \hat{\varphi} D_T$$

και

$$\hat{\mathrm{E}}^*(\pi) = (p-c)\hat{Q}^*_{T+1} + s\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right) - (p-v+s)\left[\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right)\Phi_z + \sqrt{\hat{\gamma}_0}\varphi_z\right]$$

Στην τελευταία μέθοδο γίνεται εφαρμογή των όσων αποδείχθηκαν στο 3° κεφάλαιο. Η εκτίμηση των μεγεθών άριστης ποσότητας παραγγελίας και αναμενόμενων κερδών πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τους εκτιμητές που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για το AR(1) υπόδειγμα, λαμβάνοντας υπόψη τον υψηλό βαθμό αυτοσυσχέτισης ($\varphi = 0{,}8$) της ζήτησης . Οι εκτιμητές αυτοί είναι οι εξής:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} \quad + z_R\sqrt{\hat{\gamma}_0}$$

και

$$\hat{\mathrm{E}}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} \; - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\sqrt{\hat{\gamma}_0}$$

Όπως παρατηρούμε στα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα, όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι μικρότερο του 0,5 ($R = 0{,}4$), σε όλα τα μεγέθη δείγματος και στις τρείς μεθόδους , οι εκτιμημένες τιμές της άριστης ποσότητας είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές τιμές (βλ. πίνακα 1). Καθώς όμως το R αυξάνει και παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0,5 ($R = 0{,}8$ και $R = 0{,}95$) , οι εκτιμημένες ποσότητες είναι σαφώς μικρότερες από τις πραγματικές (πίνακας 1).

Πίνακας 2: Οι εκτιμήσεις των $E(\hat{Q}^*_{T+1})$, των τριών μεθόδων για το AR(1).

n	$E(\hat{Q}^*_{T+1})$								
	R=0,4			**R=0,8**			**R=0,95**		
	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
15	290,364	301,268	289,458	336,739	301,268	339,558	370,757	301,268	376,31
25	288,384	298,427	286,666	340,47	298,427	341,723	378,679	298,427	382,111
50	286,919	301,597	286,798	345,136	301,597	346,383	387,841	301,597	390,093
100	285,603	300,593	285,452	347,66	300,593	348,21	393,183	300,593	394,247
250	285,144	301,954	285,111	349,339	301,954	349,578	396,43	301,954	396,869
500	285,044	299,829	285,019	350,036	299,829	350,137	397,711	299,829	397,906

Όσον αφορά τις εκτιμήσεις για τα αναμενόμενα κέρδη , όπως αυτές φαίνονται στον πίνακα 3, παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από το μέγεθος του R, και στις δύο μεθόδους, οι εκτιμημένες ποσότητες είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές (πίνακας 1) και όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνει, οι εκτιμήσεις τείνουν προς τις πραγματικές ποσότητες.

Πίνακας 3: Οι εκτιμήσεις των $\hat{E}(\pi)^*_{T+1}$, των τριών μεθόδων για το AR(1).

n	$\hat{E}(\pi)^*_{T+1}$								
	R=0,4			**R=0,8**			**R=0,95**		
	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
15	2495,65	2943,689	2568,57	11284,7	11918,39	11401,5	26538,7	26943,03	26647,4
25	2464,96	2943,08	2508,4	11225,9	11917,51	11272,3	26463	26942,43	26455,1
50	2446,21	2942,47	2480,25	11203,6	11916,62	11261,6	26459,3	26941,79	26520,9
100	2431,37	2942,23	2446,14	11175,9	11916,27	11196,6	26424,6	26941,55	26437,5
250	2424,98	2942,11	2431,62	11167,0	11916,09	11176,95	26419,3	26941,43	26427,2
500	2423,2	2942,08	2426,45	11165,0	11916,06	11170,9	26419,4	26941,41	26426,6

4.4 Εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών στο MA(1).

Καθώς η πρώτη μέθοδος , υποθέτει την ανεξαρτησία της ζήτησης, οι εκτιμητές θα είναι και εδώ αυτοί που προκύπτουν από τον Kevork (2010):

Ο εκτιμητής της άριστης ποσότητας παραγγελίας για την περίοδο $T+1$ είναι:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} + z_R \hat{\sigma}$$

και ο εκτιμητής των μέγιστων αναμενόμενων κερδών για την περίοδο $T+1$ είναι:

$$\hat{E}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\hat{\sigma}$$

Στη δεύτερη μέθοδο εφόσον υφίσταται η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης , ότι ακολουθεί δηλαδή το υπόδειγμα MA(1), η εκτίμηση των αναμενόμενων μεγεθών $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}(\pi)^*$ για την επόμενη περίοδο γίνεται με τους εκτιμητές όπως αυτοί φαίνονται στην ενότητα 3.6.2 του 3^{ου}

κεφαλαίου. Έτσι η πρόβλεψη για την περίοδο $T+1$ αποτελεί και την άριστη ποσότητα παραγγελίας:

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{D}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\theta}\varepsilon_T$$

και

$$\hat{E}^*(\pi) = (p-c)\hat{Q}^*_{T+1} + s\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right) - (p-v+s)\left[\left(\hat{Q}^*_{T+1} - \mu\right)\Phi_Z + \sqrt{\hat{\gamma}_0}\varphi_Z\right]$$

Η εκτίμηση των μεγεθών άριστης ποσότητας παραγγελίας και αναμενόμενων κερδών για την τρίτη μέθοδο πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τους εκτιμητές που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για το MA(1) υπόδειγμα, λαμβάνοντας υπόψη τον υψηλό βαθμό αυτοσυσχέτισης ($\theta = 0{,}85$) της ζήτησης . Έτσι, όταν η ζήτηση ακολουθεί το MA(1) υπόδειγμα οι εκτιμητές της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών είναι :

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu} \quad + z_R\sqrt{\hat{\gamma}_0}$$

και

$$\hat{E}(\pi)^*_{T+1} = (p-c)\hat{\mu} \; - (p-c+s)\frac{\varphi_{z_R}}{R}\sqrt{\hat{\gamma}_0} \quad \text{με} \quad \gamma_0 = \sigma^2\left(1+\theta^2\right)$$

Πίνακας 4: Οι εκτιμήσεις των $E(\hat{Q}^*_{T+1})$, των τριών μεθόδων για το MA(1).

n	$E(\hat{Q}^*_{T+1})$								
	R=0,4			**R=0,8**			**R=0,95**		
	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
15	287,2219	303,425	286,0037	345,092	303,425	349,9294	387,544	303,425	396,8231
25	286,005	301,091	285,036	346,722	301,091	349,411	391,262	301,091	396,6346
50	285,654	300,233	284,5891	348,713	300,233	349,8867	394,971	300,233	397,7869
100	285,0836	298,501	284,6999	349,5456	298,501	350,3532	396,8328	298,501	398,5143
250	295,624	300,312	284,7972	314,589	300,312	350,5071	328,501	300,312	398,7097
500	284,897	299,398	284,827	350,33	299,398	350,5365	398,329	299,398	398,7387

Όπως και στην περίπτωση του AR(1) υποδείγματος, έτσι και στο MA(1), παρατηρώντας τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων στον πίνακα 4, βλέπουμε ότι όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι μικρότερο του 0,5 οι εκτιμώμενες ποσότητες είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές, και μόνο στην τρίτη μέθοδο σε μεγάλου μεγέθους δείγματα τείνουν να εξισωθούν. Αντίθετα , όταν το $R > 0{,}5$, οι εκτιμημένες ποσότητες είναι πιο χαμηλές από τις πραγματικές και ειδικότερα στην τρίτη μέθοδο , καθώς το δείγμα μεγεθύνεται, οι εκτιμήσεις τείνουν προς τις πραγματικές τιμές.

Οι ποσότητες στα αποτελέσματα του πίνακα 5, συγκριτικά με αυτές του πίνακα 1, είναι σαφώς μεγαλύτερες . Παρόλα αυτά, σε κάθε μέθοδο και για κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης, καθώς το δείγμα αυξάνει, οι εκτιμημένες ποσότητες τείνουν να γίνουν ίσες με τις πραγματικές.

Πίνακας 5: Οι εκτιμήσεις των $\hat{E}(\pi)^{*}_{T+1}$, των τριών μεθόδων για το MA(1).

	$\hat{E}(\pi)^{*}_{T+1}$								
n	**R=0,4**			**R=0,8**			**R=0,95**		
	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
15	2495,65	2941,93	2444,067	11284,65	11915,84	11214,6	26538,65	26941,25	26501,1
25	2464,96	2938,21	2431,46	11225,93	11910,45	11174,2	26463,02	26937,49	26419,3
50	2446,21	2935,64	2420,99	11203,61	11906,72	11153,1	26459,26	26934,88	26390,1
100	2431,37	2934,94	2419,79	11175,85	11905,71	11156,3	26424,64	26934,19	26404,3
250	2832,83	2934,75	2420,39	11758,04	11905,44	11160,0	26831,87	26933,99	26413,7
500	2423,19	2934,73	2420,69	11164,97	11905,40	11161,2	26419,41	26933,97	26416,4

Γενικά, από τα αποτελέσματα των παραπάνω πινάκων, διακρίνουμε ότι η τρίτη μέθοδος, στην οποία λαμβάνεται υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης παρέχει εκτιμημένες ποσότητες οι οποίες τείνουν να έχουν πολύ μικρές αποκλίσεις από τις πραγματικές, ιδιαίτερα σε μεγάλα δείγματα. Για τις άλλες δύο μεθόδους τα αποτελέσματα είναι είτε υπερτιμημένα , είτε υποτιμημένα σε σχέση με τα πραγματικά. Επομένως η τρίτη μέθοδος φαίνεται να είναι και η πιο αξιόπιστη. Η αποτελεσματικότητα και αξιοπιστία των τριών μεθόδων θα εξεταστεί με τη βοήθεια της μεροληψίας και της κάλυψης.

4.5 Προσδιορισμός μεγέθους μεροληψίας για το AR(1)

Η μεροληψία (Bias) υπολογίζεται όταν από τις εκτιμημένες αναμενόμενες τιμές για την άριστη ποσότητα παραγγελίας αφαιρεθεί η πραγματική ποσότητα παραγγελίας.

Ξεκινώντας από την πρώτη μέθοδο στην οποία υποθέσαμε ανεξαρτησία της ζήτησης , παρατηρούμε πως για $R = 0{,}4$, καθώς το δείγμα αυξάνει, η μεροληψία μειώνεται σε σημαντικό βαθμό. Παρ' όλα αυτά όμως το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι πολύ χαμηλό και αντιπροσωπεύει όπως προαναφέρθηκε προϊόν χαμηλού κέρδους. Καθώς το R αυξάνει σε 0,8 η μεροληψία γίνεται αρνητική, το οποίο συνεπάγεται ότι οι εκτιμημένες αναμενόμενες τιμές της άριστης ποσότητας παραγγελίας, είναι υποτιμημένες σε σχέση με την πραγματική. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρούμε και όταν $R = 0{,}95$. Και στις δύο περιπτώσεις όμως , η μεροληψία αν και αρνητική μειώνεται αρκετά όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνει (πίνακας 6).

Πίνακας 6: Μεροληψία της άριστης ποσότητας παραγγελίας για τις τρείς μεθόδους στο AR(1)

	n	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
R=0,4	**15**	5,565108513	16,46908307	4,658682652
	25	3,584979295	13,62746621	1,866830407
	50	2,120153566	16,7973013	1,998692624
	100	0,803879371	15,79390907	0,652675383
	250	0,345115497	17,15436851	0,312381173
	500	0,245315108	15,02996665	0,219710393
R=0,8	**15**	-13,7585791	-49,22900311	-10,9393539
	25	-10,0268676	-52,07061998	-8,77460002
	50	-5,36153435	-48,90078489	-4,1143492
	100	-2,83718268	-49,90417712	-2,2875611
	250	-1,15808055	-48,54371768	-0,9188906
	500	-0,46159429	-50,66811954	-0,36001123
R=0,95	**15**	-27,9337943	-97,42298311	-22,381536
	25	-20,0120663	-100,2646	-16,5807867
	50	-10,849852	-97,09476489	-8,59866606
	100	-5,50814483	-98,09815712	-4,44441728
	250	-2,26077522	-96,73769768	-1,82210915
	500	-0,98015953	-98,86209954	-0,78527504

Στη συνέχεια περνώντας στη μέθοδο εκτίμησης μέσω των προβλέψεων , για $R = 0{,}4$ η μεροληψία λαμβάνει αρκετά μεγάλες τιμές, οι οποίες όμως δεν διαφοροποιούνται καθώς το δείγμα μεγαλώνει. Επομένως, οι αναμενόμενες τιμές που προέκυψαν από την δεύτερη μέθοδο, για το συγκεκριμένο επίπεδο εξυπηρέτησης, φαίνονται υπερτιμημένες σε σχέση με τις πραγματικές. Όταν το R παίρνει τις τιμές 0,8 και 0,95 η μεροληψία και σε αυτή τη μέθοδο γίνεται αρνητική (υποτιμημένες αναμενόμενες τιμές) και λαμβάνει πλέον πολύ μεγαλύτερες τιμές.

Σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους, η μεροληψία στην τρίτη μέθοδο είναι μικρότερη και επιβεβαιώνει όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως σχετικά με το ποια μέθοδος παρέχει τα καλύτερα αποτελέσματα σε επίπεδο εκτιμήσεων. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει η μεροληψία μικραίνει και παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν, αν και είναι αρνητικές για $R > 0{,}5$. Επομένως για αυτή τη μέθοδο περιορίζεται η υπερεκτίμηση ή υποτίμηση των αναμενόμενων τιμών σε σχέση με τις πραγματικές.

Πίνακας 7: Μεροληψία του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους για τις τρείς μεθόδους στο AR(1)

	n	**1η Μέθοδος**	**2η Μέθοδος**	**3η Μέθοδος**
R=0,4	**15**	181,392673	523,20288	148,084156
	25	124,423738	522,59763	87,9125511
	50	69,88579	521,98253	59,7645404
	100	31,7316279	521,73884	25,6586377
	250	13,2326347	521,6194	11,1353081
	500	7,05309658	521,59366	5,96890478
R=0,8	**15**	290,798845	758,2747	241,386027
	25	191,436233	757,3975	112,220312
	50	111,209488	756,50605	101,514336
	100	45,0047111	756,15287	36,4769685
	250	19,1094929	755,97976	16,8343458
	500	12,3073319	755,94247	10,8282254
R=0,95	**15**	270,901333	529,27404	233,660002
	25	160,662544	528,67026	41,3794756
	50	101,779198	528,03849	107,137241
	100	29,0192707	527,79497	23,7537133
	250	13,1718522	527,67005	13,464798
	500	13,6658983	527,65039	12,8782115

Στον πίνακα 7, φαίνεται η μεροληψία των μέγιστων αναμενόμενων κερδών για τις τρεις μεθόδους που εξετάζουμε, στο AR(1) υπόδειγμα. Όπως διακρίνουμε, το μέγεθος της μεροληψίας για την πρώτη και τη τρίτη μέθοδο, είναι μικρότερο σε σχέση με της δεύτερης μεθόδου και καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει , σε αυτές τις δυο μεθόδους , η μεροληψία μικραίνει. Μάλιστα, στη δεύτερη μέθοδο , οι διαφοροποιήσεις στο μέγεθος της μεροληψίας καθώς το δείγμα μεγαλώνει δεν είναι σημαντικές και έτσι τη διατηρούν σε υψηλά επίπεδα. Επομένως , παρατηρούμε ότι και για τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη η πιο αποτελεσματική μέθοδος εκτίμησης είναι η τρίτη.

4.6 Προσδιορισμός μεγέθους μεροληψίας για το MA(1)

Όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα, σχετικά με την πρώτη μέθοδο, η μεροληψία για χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης ($R = 0{,}4$), είναι μικρή, ιδιαίτερα καθώς αυξάνει το δείγμα. Οι θετικές τιμές της , όπως προαναφέρθηκε, φανερώνουν υπερτιμημένες αναμενόμενες τιμές σε αντίθεση με αυτές για $R = 0{,}8$, οι οποίες είναι αρνητικές και δείχνουν υποτιμημένες αναμενόμενες τιμές της άριστης ποσότητας παραγγελίας. Η ίδια εικόνα παρουσιάζεται και για $R = 0{,}95$, όπου και πάλι η μεροληψία συρρικνώνεται όσο το δείγμα μεγεθύνεται και οι τιμές της είναι και εδώ αρνητικές.

Παρ’ ότι όμως υπάρχουν αρνητικές τιμές μεροληψίας στη πρώτη μέθοδο , το μέγεθος της είναι μικρό, ειδικά σε σχέση με τη δεύτερη μέθοδο , όπου κυρίως για υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης ($R = 0{,}95$) το μέγεθος της μεροληψίας εκτός του ότι στα περισσότερα δείγματα είναι αρνητικό, λαμβάνει και μεγάλες τιμές. Βέβαια, όσο το R μικραίνει , μικραίνει και το μέγεθος της μεροληψίας και λαμβάνει όλο και περισσότερες θετικές τιμές . Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι η μικρότερη θετική τιμή της μεροληψίας παρατηρείται για $R = 0{,}4$ και n=100 και ισούται με 14,46. Δηλαδή, οι εκτιμημένες τιμές της άριστης ποσότητας παραγγελίας, σ’ αυτή την περίπτωση , έχουν υπερτιμηθεί κατά 14,46 μονάδες.

Στην τρίτη μέθοδο όπου λαμβάνεται πλέον υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης, παρατηρούμε γενικά ότι οι τιμές της μεροληψίας είναι χαμηλές και για κάθε R όσο το δείγμα αυξάνει , αυτές μειώνονται . Ακόμη , βλέπουμε ότι κυρίως σε μικρά μεγέθη δείγματος και υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης παρατηρούνται αρνητικές τιμές, ενώ για n=500 το μέγεθος της μεροληψίας είναι πολύ μικρό και θετικό σε κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης.

Πίνακας 8: Μεροληψία της άριστης ποσότητας παραγγελίας για τις τρεις μεθόδους στο MA(1)

	n	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
R=0,4	15	2,422700672	16,1521771	1,204702154
	25	1,205990224	-15,66432726	0,23650079
	50	0,854599934	16,37659686	-0,209919994
	100	0,284378175	14,46536915	-0,099106688
	250	0,127029102	16,46168296	-0,001780552
	500	0,097985592	15,57448799	0,027998552
R=0,8	15	-5,404855058	-49,54590909	-0,567831447
	25	-3,774962919	50,03375893	-1,086293383
	50	-1,784510599	-49,32148932	-0,610510551
	100	-0,951664345	-51,23271704	-0,144025954
	250	-0,368916396	-49,23640323	0,0098859
	500	-0,167653237	-50,1235982	0,039236864
R=0,95	15	-11,14690452	-97,73988909	-1,868101026
	25	-7,428824661	98,22773893	-2,056649614
	50	-3,720474405	-97,51546932	-0,904369982
	100	-1,858384073	-99,42669704	-0,17697718
	250	-0,732725536	-97,43038323	0,018444007
	500	-0,362517056	-98,3175782	0,047480902

Στον επόμενο πίνακα (πίνακας 9), παρατηρείται μείωση της μεροληψίας των μέγιστων αναμενόμενων κερδών σε κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης και στις τρεις μεθόδους , καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει. Σε αντίθεση με την πρώτη και την τρίτη μέθοδο ,όπου η μεροληψία λαμβάνει χαμηλές τιμές, στη δεύτερη μέθοδο οι τιμές της είναι θετικές και υψηλές με αποτέλεσμα να υπάρχει υπερτίμηση των αναμενόμενων μεγεθών για τα κέρδη. Στην τρίτη μέθοδο, όταν το $R < 0{,}5$, για δείγματα μεγέθους 50 ή περισσότερων παρατηρήσεων , η μεροληψία παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν, ενώ και για υψηλότερα επίπεδα εξυπηρέτησης σε μεγάλα δείγματα η μεροληψία παρουσιάζει πολύ χαμηλές τιμές.

Πίνακας 9: Μεροληψία του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους, για τις τρείς μεθόδους στο MA(1)

	n	1η Μέθοδος	2η Μέθοδος	3η Μέθοδος
R=0,4	**15**	75,16143378	521,4447101	23,58055745
	25	44,47157089	517,7267011	10,97204883
	50	25,71901295	515,1490372	0,506978931
	100	10,88686094	514,4554612	-0,69927317
	250	4,497468768	514,2679574	-0,094220175
	500	2,708400129	514,2404041	0,206356815
R=0,8	**15**	124,5328302	755,7265885	54,43727197
	25	65,81770481	750,3381012	14,12210863
	50	43,49758385	746,6023088	-6,989134932
	100	15,73719852	745,5971135	-3,811749604
	250	6,831386833	745,3253653	-0,118392428
	500	4,856879762	745,2854325	1,074282629
R=0,95	**15**	124,8940519	527,4963339	87,33239065
	25	49,26408918	523,7364795	5,546399661
	50	45,50768404	521,126653	-23,65677102
	100	10,88471071	520,4307316	-9,450901284
	250	5,530699639	520,2350547	-0,018149709
	500	5,657511171	520,209842	2,656874584

Τελικά και για τα δύο υποδείγματα AR(1) και MA(1),παρατηρούμε ότι η μεροληψία μικραίνει καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει ,ενώ μεγαλώνει όταν αυξάνεται το επίπεδο εξυπηρέτησης. Ακόμη, η μεροληψία στο MA(1) υπόδειγμα είναι γενικά μικρότερη από ότι στο AR(1). Τέλος, συμπεραίνουμε ότι η καταλληλότερη μέθοδος εκτίμησης της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, είναι η τρίτη η οποία περιλαμβάνει την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης. Έτσι, επιβεβαιώνονται τα όσα υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές σε σχέση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν λαμβάνεται υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης, ότι δηλαδή μπορεί να υπάρχουν σημαντικά λάθη αν αγνοηθεί η ύπαρξη της. Η αξιολόγηση των παραπάνω διαστημάτων εμπιστοσύνης, θα γίνει με τη βοήθεια της κάλυψης.

4.7 Κάλυψη (coverage)

Με τον όρο κάλυψη (coverage) εννοούμε την εκτίμηση της πιθανότητας το διάστημα εμπιστοσύνης της εκάστοτε μεθόδου να περιέχει την πραγματική άριστη ποσότητα παραγγελίας ή τα αναμενόμενα κέρδη .

Στην συγκεκριμένη ενότητα αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δούμε κατά πόσο οι πραγματικές ποσότητες του πίνακα 1 εμπεριέχονται στα διαστήματα εμπιστοσύνης της πρώτης μεθόδου (ανεξαρτησία δεδομένων), τα οποία κατασκευάστηκαν με πιθανότητα 95% .

Ξεκινώντας από τη πρώτη μέθοδο στην οποία έχει γίνει υπόθεση ανεξαρτησίας των δεδομένων, παραθέτουμε τον πίνακα 10 ο οποίος παρουσιάζει την κάλυψη για την άριστη ποσότητα παραγγελίας και το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος για επίπεδα εξυπηρέτησης $R = 0,4$, $R = 0,8$ και $R = 0,95$, για δείγματα μεγέθους n =15, 25, 50, 100, 250, 500 παρατηρήσεων, βάσει των εκτιμηθέντων μεγεθών του υποδείγματος AR(1) και αντίστοιχα τον πίνακα 11 για το MA(1).

Πίνακας 10: Κάλυψη για Q* και Ε(π)* κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας της ζήτησης για το υπόδειγμα AR(1).

	Q*			**Ε(π)***		
				δ=0		
	R=0,4	**R=0,8**	**R=0,95**	**R=0,4**	**R=0,8**	**R=0,95**
n						
15	0,388	0,413	0,444	0,411	0,393	0,383
25	0,406	0,443	0,485	0,454	0,412	0,421
50	0,46	0,465	0,5	0,493	0,464	0,457
100	0,478	0,502	0,516	0,517	0,478	0,483
250	0,473	0,499	0,545	0,498	0,47	0,474
500	0,504	0,481	0,518	0,549	0,508	0,486

Τα αποτελέσματα για την κάλυψη στην πρώτη μέθοδο δείχνουν πως όσο αυξάνει το επίπεδο εξυπηρέτησης , αυξάνει και η πιθανότητα να βρίσκεται εντός των διαστημάτων εμπιστοσύνης η πραγματική ποσότητα παραγγελίας (πίνακας 1). Έτσι για ένα δείγμα 500 παρατηρήσεων και $R = 0,95$ η πιθανότητα το διάστημα εμπιστοσύνης να περιέχει την αντίστοιχη πραγματική τιμή, αγγίζει το 52%. Ταυτόχρονα παρατηρούμε πως σε πολύ μικρά δείγματα των 15 παρατηρήσεων , με επίπεδο εξυπηρέτησης κάτω από 0,5 (προϊόντα χαμηλού κέρδους) η κάλυψη δεν πλησιάζει ούτε το 50% αντίθετα μετά βίας φτάνει το 39%, και έτσι δεν επέρχεται σύγκλιση για τη συγκεκριμένη μέθοδο στο AR(1). Για παράδειγμα η πιθανότητα η ποσότητα παραγγελίας να βρίσκεται εντός των διαστημάτων εμπιστοσύνης γίνεται 50% όταν το $R = 0{,}4$ μετά από ανάλυση 500 παρατηρήσεων. Για $R = 0{,}8$ η ίδια πιθανότητα επιτυγχάνεται μετά από συγκέντρωση και ανάλυση 100 παρατηρήσεων , ενώ για $R = 0{,}95$ χρειάζονται μόλις 50 παρατηρήσεις. Για τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη όπου έχουμε υποθέσει ότι το κόστος έλλειψης αποθέματος είναι μηδενικό, παρατηρούμε το αντίθετο από ότι συνέβαινε στην άριστη ποσότητα παραγγελίας . Καθώς το R αυξάνει ενώ το μέγεθος του δείγματος παραμένει σταθερό , το μέγεθος της κάλυψης μικραίνει ενώ καθώς το R διατηρείται σταθερό και αυξάνει το μέγεθος του δείγματος η κάλυψη μεγαλώνει. Πιο συγκεκριμένα η ελάχιστη τιμή της κάλυψης (coverage=0,383) παρατηρείται όταν $R = 0{,}95$ και n=15 ενώ η μεγαλύτερη (coverage=0,549) όταν $R = 0{,}4$ και n=500.

Σε όλες τις περιπτώσεις όμως της κάλυψης στο AR(1) για την άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη, η απόκλιση από το 95%, είναι σημαντική. Η απόκλιση αυτή , φαίνεται να μειώνεται στο MA(1) υπόδειγμα και τα αυτό παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 11: Κάλυψη για Q* και E(π)* κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας της ζήτησης για το υπόδειγμα MA(1).

	Q*			**E(π)***		
				δ=0		
	R=0,4	**R=0,8**	**R=0,95**	**R=0,4**	**R=0,8**	**R=0,95**
n						
15	0,741	0,772	0,767	0,769	0,754	0,738
25	0,771	0,784	0,802	0,798	0,777	0,767
50	0,821	0,813	0,819	0,824	0,819	0,822
100	0,829	0,834	0,846	0,831	0,836	0,824
250	0,821	0,838	0,862	0,849	0,819	0,814
500	0,847	0,816	0,831	0,892	0,852	0,84

Στον προηγούμενο πίνακα (πίνακας 11) , όσον αφορά την ποσότητα παραγγελίας, εύκολα διακρίνεται το γεγονός ότι σε μεγάλου μεγέθους δείγματα η κάλυψη λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από το 80% για κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης. Ενώ και για τα μικρότερα δείγματα, η πιθανότητα να βρίσκεται η πραγματική ποσότητα παραγγελίας εντός των ορίων των διαστημάτων εμπιστοσύνης κυμαίνεται πάνω από το 75%, αλλά η απόκλιση από το 95% διάστημα εμπιστοσύνης εξακολουθεί να είναι μεγάλη. Ταυτόχρονα, η μέγιστη τιμή της κάλυψης είναι το 0,862 και προκύπτει για n=250 και $R = 0{,}95$.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 11, η κάλυψη για τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη, σε μεγάλα δείγματα, λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 0,80. Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι για προϊόντα χαμηλού κέρδους ($R = 0{,}4$), σε δείγματα 500 παρατηρήσεων , η πιθανότητα να βρίσκεται η πραγματική ποσότητα αναμενόμενων κερδών εντός των διαστημάτων εμπιστοσύνης αγγίζει το 90 αλλά πάλι απέχει από το 95%. Επομένως η σύγκλιση δεν επέρχεται ούτε στην περίπτωση του MA(1).

Το μεγάλο μειονέκτημα της πρώτης μεθόδου είναι ότι η πιθανότητα 55% (περίπτωση AR(1)) του να βρίσκεται η πραγματική ποσότητα παραγγελίας στο πραγματικό διάστημα εμπιστοσύνης είναι πολύ μικρή αν λάβουμε υπόψη ότι το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης (nominal confidence level) είναι το 95%. Στην περίπτωση του MA(1) η κάλυψη λαμβάνει υψηλότερες τιμές σε σχέση με το AR(1) και οι αποκλίσεις από το 95% είναι μικρότερες. Σε ανάλογα αποτελέσματα κατέληξαν στην ανάλυση τους οι Halkos and Kevork (2003) για το διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου αριθμητικού σε αυτοσυασχετιζόμενες σειρές. Εξετάζοντας το πραγματικό (ACL, Actual Confidence Level) και το ονομαστικό διάστημα εμπιστοσύνης (NCL,Nominal Confidence Level) για τον πληθυσμιακό μέσο , σε διαφορετικά μεγέθη δείγματος και δομές αυτοσυσχέτισης, κατέληξαν ότι ACL<NCL. Ταυτόχρονα παρατήρησαν πως σε ένα υπόδειγμα κινητών μέσων όρων πρώτου βαθμού MA(1) με θετική αυτοσυσχέτιση, η διαφορά αυτή μεταξύ των διαστημάτων εμπιστοσύνης είναι μικρότερη από ότι σε ένα AR(1).

Στην συνέχεια της ανάλυσης γίνεται προσδιορισμός δύο μέτρων που αναφέρονται στην ακρίβεια και τη σταθερότητα των διαστημάτων εμπιστοσύνης που σχηματίστηκαν με πιθανότητα 95%. Το πρώτο μέτρο είναι το RAHL(relative average half length) το οποίο μετράει την σχετικό μέσο όρο των half lengths ενός διαστήματος εμπιστοσύνης και το δεύτερο είναι το RSDHL (relative standard deviation of half lengths) το οποίο μετράει τη σχετική τυπική απόκλιση τους (Kevork, 2010).

Το ότι η πρώτη μέθοδος είναι προβληματική, φαίνεται και από τα μέτρα RAHL και RSDHL , των οποίων οι τιμές είναι πολύ χαμηλές , κάτι που από άποψη ακρίβειας είναι επιθυμητό, αλλά ταυτόχρονα αποτελεί πλασματική εικόνα της κάλυψης, η οποία βάσει των τιμών των δύο μέτρων θα περιμέναμε να είναι υψηλή ενώ στην πραγματικότητα, όπως αποδείχτηκε, είναι χαμηλή.

Στον πίνακα 12, για την άριστη ποσότητα παραγγελίας, βλέπουμε ότι το RAHL αυξάνεται ενώ το RSDHL μειώνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Ταυτόχρονα συγκρίνοντας την ακρίβεια και την σταθερότητα σε επίπεδο εξυπηρέτησης 0,4 και 0,95 , παρατηρούμε ότι είναι μεγαλύτερες όταν $R = 0{,}4$. Αντίθετα, στην περίπτωση των μέγιστων αναμενόμενων κερδών τα δύο κριτήρια είναι μεγαλύτερα σε υψηλού κέρδους προϊόντα και μικρότερα σε χαμηλού.

Πίνακας 12: Ακρίβεια και σταθερότητα των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για Q* και E(π)* για το AR(1).

		Q*		**E(π)***	
		RAHL	**RSDHL**	**RAHL**	**RSDHL**
	n				
R=0,4	**15**	0,076455	0,02242	0,10723	0,031445
	25	0,066516	0,016864	0,09329	0,023652
	50	0,05257	0,010276	0,07373	0,014412
	100	0,039625	0,00592	0,055574	0,008303
	250	0,025924	0,002412	0,036359	0,003383
	500	0,018559	0,001263	0,026029	0,001772
R=0,8	**15**	0,07116	0,020868	0,079138	0,023207
	25	0,06191	0,015696	0,06885	0,017456
	50	0,048929	0,009564	0,054414	0,010636
	100	0,03688	0,00551	0,041015	0,006128
	250	0,024129	0,002245	0,026834	0,002497
	500	0,017273	0,001176	0,01921	0,001308
R=0,95	**15**	0,082459	0,024181	0,073245	0,021479
	25	0,07174	0,018188	0,063723	0,016156
	50	0,056698	0,011083	0,050362	0,009844
	100	0,042736	0,006385	0,037961	0,005672
	250	0,02796	0,002602	0,024836	0,002311
	500	0,020016	0,001363	0,017779	0,00121

Τα αποτελέσματα των δύο μέτρων, είναι παραπλανητικά και στην περίπτωση του MA(1) υποδείγματος (πίνακας 13), καθώς ενώ η κάλυψη δεν αγγίζει το 95%, οι αποκλίσεις από την πραγματική άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα πραγματικά αναμενόμενα κέρδη , είναι πολύ μικρές. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του πίνακα 13 με αυτά του πίνακα 12 (υπόδειγμα AR(1)) , παρατηρούμε ότι το RAHL είναι μεγαλύτερο καθώς και η κάλυψη στο MA(1) είναι μεγαλύτερη. Καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει, τα δύο μέτρα μειώνονται και στην περίπτωση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και στην περίπτωση των μέγιστων αναμενόμενων κερδών. Ταυτόχρονα, η ακρίβεια και η σταθερότητα για την άριστη ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερες όταν $R = 0{,}4$, ενώ για τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη όταν $R = 0{,}95$.

Πίνακας 13: Ακρίβεια και σταθερότητα των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για Q* και E(π)* για το MA(1).

		Q*		**E(π)***	
		RAHL	**RSDHL**	**RAHL**	**RSDHL**
	n				
R=0,4	**15**	0,095408	0,021676	0,133812	0,030401
	25	0,077538	0,013383	0,108749	0,01877
	50	0,056943	0,007003	0,079863	0,009821
	100	0,04116	0,003637	0,057728	0,005101
	250	0,026331	0,001402	0,03693	0,001966
	500	0,018685	0,000712	0,026205	0,000998
R=0,8	**15**	0,088801	0,020175	0,098756	0,022437
	25	0,072168	0,012456	0,080259	0,013853
	50	0,052999	0,006518	0,05894	0,007248
	100	0,03831	0,003385	0,042604	0,003765
	250	0,024507	0,001305	0,027255	0,001451
	500	0,017391	0,000662	0,01934	0,000737
R=0,95	**15**	0,102901	0,023378	0,091402	0,020766
	25	0,083627	0,014434	0,074282	0,012821
	50	0,061414	0,007553	0,054551	0,006709
	100	0,044393	0,003923	0,039432	0,003484
	250	0,028399	0,001512	0,025225	0,001343
	500	0,020152	0,000767	0,0179	0,000682

Στη συνέχεια , υπολογίζεται η κάλυψη για τη δεύτερη μέθοδο, δηλαδή της εκτίμησης μέσω των προβλέψεων για την περίπτωση που το πραγματικό υπόδειγμα είναι AR(1) και για την περίπτωση που είναι MA(1). Στον πίνακα 14 που ακολουθεί φαίνεται η πιθανότητα να ανήκουν οι πραγματικές ποσότητες (τρείς διαφορετικές, μία για κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης), στα διαστήματα εμπιστοσύνης που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.6 και αφορούν την εναλλακτική μέθοδο προβλέψεων.

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε στα αποτελέσματα του πίνακα 14, όσο αυξάνει το επίπεδο εξυπηρέτησης , οι τιμές της κάλυψης φθίνουν. Έτσι για $R = 0{,}4$, γίνεται φανερό πως η πιθανότητα η πραγματική τιμή ($Q^* = 284{,}799$) να βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά υψηλή , κυρίως σε μεγάλου μεγέθους δείγματα και φθάνει το 87%. Εξετάζοντας την κάλυψη για $R = 0{,}8$ παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της επέρχεται σε δείγμα μεγέθους 250 παρατηρήσεων και ισούται με 68%. Το ίδιο φαινόμενο επικρατεί και στην περίπτωση όπου $R = 0{,}95$, με την πιθανότητα η πραγματική τιμή ($Q^* = 398{,}691$) να βρίσκεται εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης να είναι μόλις 30%. Τελικά , για υψηλό βαθμό αυτοσυσχέτισης ($\varphi = 0{,}8$), όσο χαμηλότερο τίθεται το επίπεδο εξυπηρέτησης τόσο μεγαλύτερη φαίνεται να είναι η κάλυψη. Αντίθετα, όταν το R αυξάνεται η κάλυψη μικραίνει και παίρνει πολύ χαμηλές τιμές.

Πίνακας 14: Κάλυψη (coverage) για την δεύτερη μέθοδο , στο υπόδειγμα AR(1) .

	Q*		
n	**R=0,4**	**R=0,8**	**R=0,95**
15	0,805	0,632	0,254
25	0,826	0,605	0,273
50	0,837	0,671	0,294
100	0,850	0,672	0,293
250	0,830	0,677	0,296
500	0,870	0,649	0,264

Στον πίνακα 15 που ακολουθεί, φαίνεται η κάλυψη για τη μέθοδο των προβλέψεων στο MA(1) υπόδειγμα. Όπως και στην περίπτωση του AR(1) υποδείγματος, έτσι και εδώ, στα προϊόντα χαμηλού κέρδους $R = 0{,}4$ η κάλυψη φαίνεται να είναι πολύ υψηλή για κάθε μέγεθος δείγματος και να κυμαίνεται μεταξύ 94% και 98%. Αντίθετα. όσο το επίπεδο εξυπηρέτησης αυξάνει, η πιθανότητα να βρίσκεται η πραγματική ποσότητα παραγγελίας εντός των διαστημάτων εμπιστοσύνης, μικραίνει και τελικά για $R = 0,95$ δεν ξεπερνά το 45% ενώ η υψηλότερη τιμής για $R = 0,95$ είναι μόλις 0,443. Για ένα επίπεδο εξυπηρέτησης της τάξης του 0,8 η κάλυψη φαίνεται να παίρνει τιμές μεταξύ 0,75 και 0,8, αρκετά μικρότερες από το 95%.

Πίνακας 15: Κάλυψη (coverage) για την δεύτερη μέθοδο , των προβλέψεων στο υπόδειγμα MA(1) .

	Q*		
n	**R=0,4**	**R=0,8**	**R=0,95**
15	0,942	0,740	0,250
25	0,963	0,826	0,323
50	0,974	0,860	0,403
100	0,978	0,856	0,397
250	0,968	0,857	0,443
500	0,973	0,867	0,433

Από τα αποτελέσματα της κάλυψης για τη δεύτερη μέθοδο, προέκυψε ότι το μέγεθός της στην περίπτωση του AR(1) είναι πολύ μικρό συγκριτικά με το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης, 95%. Στην περίπτωση του MA(1), σε χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης, παρατηρείται αρκετά μεγάλη κάλυψη , η οποία αγγίζει και για μεγάλα δείγματα ξεπερνά το 95% ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα μέτρα ακρίβειας και σταθερότητας των διαστημάτων εμπιστοσύνης, για την μέθοδο των προβλέψεων στο υπόδειγμα AR(1).

Πίνακας 16: Ακρίβεια και σταθερότητα των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για Q* στο υπόδειγμα AR(1) για τη μέθοδο των προβλέψεων.

		Q* RAHL	Q* RSDHL
	n		
R=0,4	**15**	0,241246	0,049193
	25	0,245343	0,037795
	50	0,24984	0,025975
	100	0,251605	0,01825
	250	0,252432	0,010978
	500	0,252596	0,007749
R=0,8	**15**	0,196027	0,039972
	25	0,199355	0,030711
	50	0,203009	0,021106
	100	0,204443	0,01483
	250	0,205115	0,00892
	500	0,205249	0,006296
R=0,95	**15**	0,172331	0,03514
	25	0,175257	0,026998
	50	0,178469	0,018555
	100	0,17973	0,013037
	250	0,180321	0,007842
	500	0,180439	0,005535

Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των δυο μέτρων για την προηγούμενη μέθοδο (πίνακας 12) όπου καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξανόταν το RAHL φαινόταν να φθίνει, στη μέθοδο των προβλέψεων (πίνακας 16) παρατηρούμε ότι το μέτρο RAHL αυξάνει και το RSDHL μειώνεται. Ακόμα, η ακρίβεια και η σταθερότητα είναι μεγαλύτερες σε χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης και μεγαλώνουν καθώς το R αυξάνει.

Όπως και στο AR(1) υπόδειγμα, έτσι και στο MA(1) (πίνακας 17) παρατηρείται αύξηση του RAHL και μείωση του RSDHL σε διαδοχικές αυξήσεις του δείγματος. Παρ' όλα αυτά όμως το RAHL είναι μεγαλύτερο στο MA(1) , εφόσον και στην δεύτερη μέθοδο η κάλυψη είναι μεγαλύτερη στο συγκεκριμένο υπόδειγμα. Η ακρίβεια και η σταθερότητα είναι και εδώ μεγαλύτερες σε επίπεδο εξυπηρέτησης $R = 0{,}95$ συγκριτικά με το $R = 0{,}4$, όπως και στο AR(1).

Πίνακας 17: Ακρίβεια και σταθερότητα των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για Q* στο υπόδειγμα MA(1) για τη μέθοδο των προβλέψεων.

		Q*	
		RAHL	**RSDHL**
	n		
R=0,4	**15**	0,261274	0,086638
	25	0,290567	0,059558
	50	0,312927	0,036112
	100	0,319047	0,023327
	250	0,32061	0,013953
	500	0,320804	0,009828
R=0,8	**15**	0,2123	0,070398
	25	0,236102	0,048394
	50	0,254271	0,029343
	100	0,259244	0,018955
	250	0,260514	0,011338
	500	0,260672	0,007986
R=0,95	**15**	0,186637	0,061888
	25	0,207562	0,042544
	50	0,223535	0,025796
	100	0,227907	0,016663
	250	0,229023	0,009967
	500	0,229162	0,00702

Σχετικά με την κάλυψη της δεύτερης μεθόδου , προέκυψε από την παραπάνω αναλυση ότι στην περίπτωση του AR(1) είναι χαμηλή , κάτι που επιβεβαιώνεται και από τα μέτρα σταθερότητας και ακρίβειας ,τα οποία λαμβάνουν υψηλές τιμές , ενώ στην περίπτωση του MA(1) όπου για χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης η κάλυψη είναι υψηλή και φτάνει το 95%, οι τιμές των μέτρων RAHL και RSDHL φαίνεται να μη συνάδουν με το γεγονός αυτό και να είναι επίσης υψηλές ιδιαίτερα σε χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης.

Κεφάλαιο 5

5.1 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση που προηγήθηκε αποδείχτηκε πως στο υπόδειγμα Newsboy, θα πρέπει να εξετάζεται η ύπαρξη της αυτοσυσχέτισης της ζήτησης και να λαμβάνεται υπόψη. Μέσω τριών διαφορετικών μεθόδων, εκτιμήθηκαν η άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη σε δύο υποδείγματα χρονολογικών σειρών , το AR(1) και το MA(1) και αξιολογήθηκαν μέσω της μεροληψίας και της κάλυψης.

Και για τα δύο υποδείγματα AR(1) και MA(1), όπως αποδείχτηκε, η μεροληψία μικραίνει καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει , ενώ μεγαλώνει όταν αυξάνεται το επίπεδο εξυπηρέτησης. Ακόμη, στο MA(1) υπόδειγμα είναι γενικά μικρότερη από ότι στο AR(1). Η καταλληλότερη μέθοδος εκτίμησης της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, είναι η τρίτη η οποία περιλαμβάνει την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τα όσα υποστηρίζουν και οι Lau and Wang (1987) , οι οποίοι αναφέρουν ότι μπορεί να υπάρξουν σημαντικά λάθη στα αποτελέσματα, όταν οι αποφάσεις για το απόθεμα λαμβάνονται χωρίς αξιόλογη σκέψη της αυτοσυσχέτισης της ζήτησης.

Υπολογίζοντας την κάλυψη της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών στην πρώτη μέθοδο, για τρία επίπεδα εξυπηρέτησης και έξι μεγέθη δείγματος, και για τα δύο υποδείγματα , προέκυψε ότι αυτή αυξάνεται καθώς αυξάνει και το δείγμα αλλά και το R , ενώ στη περίπτωση των μέγιστων αναμενόμενων κερδών, αυξάνεται μόνο όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος. Σε κάθε περίπτωση όμως απέχει σημαντικά από το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha = 95\%$, αν και στο MA(1) οι αποκλίσεις είναι μικρότερες. Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα του υπολογισμού των μέτρων ακρίβειας και σταθερότητας RAHL και RSDHL αντίστοιχα, φαίνονται παραπλανητικά καθώς οι τιμές τους είναι χαμηλές και δημιουργούν πλασματική εικόνα για την κάλυψη.

Η κάλυψη της άριστης ποσότητας παραγγελίας για τη δεύτερη μέθοδο, όπου η εκτίμηση τίθεται ίση με την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο, εξετάζοντας και τα δύο υποδείγματα, αυξάνεται σε αυξήσεις του δείγματος αλλά μειώνεται καθώς το επίπεδο εξυπηρέτησης μεγαλώνει. Το μέγεθός της στην περίπτωση του AR(1) είναι μικρό και απέχει πολύ από το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης, ενώ στην περίπτωση του MA(1) οι τιμές που λαμβάνει φθάνουν το 95% κυρίως σε προϊόντα χαμηλού κέρδους $(R = 0{,}4)$. Τα μέτρα ακρίβειας και σταθερότητας παρουσιάζουν και σε αυτή τη μέθοδο υψηλές τιμές και ιδιαίτερα σε χαμηλά επίπεδα εξυπηρέτησης στο υπόδειγμα MA(1). Η κάλυψη των αναμενόμενων κερδών δεν είναι διαθέσιμη.

Η κάλυψη για την τρίτη μέθοδο , όπου λαμβάνεται υπόψη η αυτοσυσχέτιση της ζήτησης , με υψηλό βαθμό συσχέτισης ($\phi = 0{,}8$ και $\theta = 0{,}85$) , δεν υπολογίστηκε, καθώς δεν είναι διαθέσιμα τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης.

5.2 Μελλοντικές προεκτάσεις

Μια πιθανή μελλοντική προέκταση θα μπορούσε να είναι η εφαρμογή όσων προηγήθηκαν, όταν το κόστος έλλειψης αποθέματος δεν είναι μηδενικό, κάτι που εξ' αρχής υποθέσαμε στην παρούσα μελέτη. Ακόμη, θα μπορούσε να εφαρμοστεί η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε, σε πιο πολύπλοκα μοντέλα χρονολογικών σειρών ή ακόμα να εφαρμοστεί ένας διαφορετικός βαθμός αυτοσυσχέτισης στα υποδείγματα που αναπτύχθηκαν παραπάνω.

Σημαντικές προεκτάσεις αποτελούν η διερεύνηση της δεύτερης μεθόδου για υψηλού κέρδους προϊόντα, καθώς και η παραγωγή έγκυρων διαστημάτων εμπιστοσύνης για την άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη, για αυτοσυσχετιζόμενες σειρές.

Παράρτημα

Στο τμήμα που ακολουθεί, γίνεται περιγραφή της δημιουργίας προσομοιώσεων καθώς και της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για να εκτιμηθούν η άριστη ποσότητα παραγγελίας και τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη στις τρεις μεθόδους που παρουσιάστηκαν.

Δημιουργία προσομοιώσεων

Οι προσομοιωμένες σειρές AR(1) και MA(1), οι οποίες δημιουργήθηκαν με την μέθοδο Monte-Carlo, χρησιμεύουν στο να γίνει εκτίμηση της άριστης ποσότητας παραγγελίας και των μέγιστων αναμενόμενων κερδών υπό την προϋπόθεση ότι η ζήτηση αυτοσυσχετίζεται και ακολουθεί ένα από τα δύο υποδείγματα χρονολογικών σειρών.

Αρχικά, παρήχθησαν 1000 σειρές μέγιστου μήκους 500 παρατηρήσεων από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, $Z \sim N(0,1)$. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν 1000 αυτοπαλίνδρομες σειρές AR(1) με $\phi = 0{,}8$ και μέσο $\mu = 300$ και αντίστοιχα 1000 σειρές κινητού μέσου MA(1) με $\theta = 0{,}85$ και $\mu = 300$. Οι παράμετροι ορίστηκαν έτσι ώστε ο συντελεστής μεταβλητότητας να είναι ίδιος και για τα δύο υποδείγματα ($CV = 0{,}2$). Για τη διασφάλιση της στασιμότητας κάθε σειράς, η πρώτη παρατήρηση της αυτοπαλίνδρομης σειράς επιλέχθηκε τυχαία από την κανονική κατανομή

$$N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right),$$

ενώ η πρώτη παρατήρηση της σειράς κινητού μέσου από την τυχαία κατανομή $N\left(0, \sigma^2(1+\theta^2)\right)$.

Η μορφή της γεννήτριας αριθμών , καθώς και ο βαθμός εγκυρότητας και αξιοπιστίας των σειρών προσομοίωσης που δημιουργήθηκαν, περιγράφεται από τον Kevork (2009).

Πραγματικές ποσότητες παραγγελίας και πραγματικά μέγιστα αναμενόμενα κέρδη.

Εξ' αρχής ορίστηκαν οι παράμετροι βάσει των οποίων σχηματίστηκε το AR(1) υπόδειγμα για το οποίο ισχύει:

$$D_t = 60 + 0{,}8D_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ με } \varepsilon_t \sim N\left(0{,}1296\right),$$

όπου $\mu = \dfrac{\delta}{1-\phi} = \dfrac{60}{1-0,8} = 300$ και $\gamma_0 = 3600$.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίστηκε ως: $CV = 0,2$, ενώ για κάθε επίπεδο εξυπηρέτησης οι τιμές των p, c, v και s ορίστηκαν όπως φαίνονται στο κεφάλαιο 4.

Προκειμένου το υπόδειγμα MA(1) που θα σχηματιστεί να έχει ίδιο συντελεστή μεταβλητότητας ,ίδιο μέσο και ίδια διακύμανση με το AR(1) , πήρε την μορφή:

$D_t = 300 + \varepsilon_t + 0,85\varepsilon_{t-1}$, με $\varepsilon_t \sim N(0,2089,98)$.

Οι πραγματικές τιμές των Q^* και $E(\pi)^*$, για κάθε R υπολογίστηκαν ως ακολούθως:

$$Q^* = \mu + z_R\sqrt{\gamma_0} \qquad (\Pi.1)$$

και

$$E(\pi)^*(p-c)\mu - (p-c+s)\frac{\phi_{z_R}}{R}\sqrt{\gamma_0} \qquad (\Pi.2)$$

Το z_R υπολογίστηκε μέσω του Excel, από την εντολή NORMINV(R;0;1) και το ϕ_{z_R} με την εντολή NORMDIST(z_R ;0;1;FALSE).

Εκτίμηση για το AR(1)

Αφού δημιουργήθηκαν οι 1000 προσομοιωμένες σειρές για κάθε υπόδειγμα , δημιουργήθηκε και ένα πρόγραμμα για το οικονομετρικό πακέτο Eviews, το οποίο «έτρεχε» ταυτόχρονα όλες τις σειρές και μας παρείχε τις μέσες εκτιμημένες τιμές των παραμέτρων $\hat{\delta}, \hat{\phi}$ και $\hat{\sigma}$ κάθε σειράς , καθώς και τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}_L$ και $\hat{\sigma}_L$, για κάθε μέγεθος δείγματος.

Ενδεικτικά, οι εντολές του προγράμματος για τη λήψη των εκτιμήσεων είναι οι εξής:

```
vector (1000) est_d
vector (1000) est_f
vector (1000) est_s
vector (1000) clmean_ml
vector (1000) clvarp_ml
!count=1
```

```
genr x = ser01
ls x c x(-1)
scalar cl1 = @mean(x)
scalar cl2 = @varp(x)
scalar k1 = @coefs(1)
scalar k2 = @coefs(2)
scalar k3 = @se
clmean_ml(!count) = cl1
clvarp_ml(!count) = cl2
est_d(!count)=k1
est_f(!count)=k2
est_s(!count)=k3
!count = !count+1
```

Οι παραπάνω εκτιμήσεις θα μας χρησιμεύσουν στο να υπολογίσουμε αργότερα τη μεροληψία και την κάλυψη κάθε μεθόδου.

Αρχικά, για την πρώτη μέθοδο, η οποία στηρίχθηκε στην μελέτη του Kevork (2010), δημιουργήθηκε ένα αρχείο Excel στο οποίο πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση των $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}(\pi)^*$ για τρία διαφορετικά επίπεδα εξυπηρέτησης $(R=0{,}4, R=0{,}8, R=0{,}95)$ και για έξι μεγέθη δείγματος ($n=15{,}25{,}50{,}100{,}250{,}500$). Ακόμη έγινε υπολογισμός των half lengths και στη συνέχεια των διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Οι εκτιμητές της συγκεκριμένης μεθόδου είναι :

$$\hat{Q}^*_{T+1} = \hat{\mu}_T + z_R \hat{\sigma}_T \tag{Π.3}$$

και

$$\hat{E}(\pi)^* = (p-c)\hat{\mu}_T - (p-c+s)\frac{\phi_{z_R}}{R}\hat{\sigma}_T . \tag{Π.4}$$

Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι :

$$\hat{Q}^*_{T+1} \pm z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T}}\sqrt{1+\frac{z_R^2}{2}} \tag{Π.5}$$

Και

$$\hat{E}(\pi)^{*}_{T+1} \pm z_{a/2}\,\frac{\sigma(p-c)}{\sqrt{T}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\left((1+\delta)\frac{\phi_{z_R}}{R}\right)^{2}}\quad . \qquad (\Pi.6)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις για τις άριστες ποσότητες παραγγελίας , των μέγιστων αναμενόμενων κερδών καθώς και ο υπολογισμός των διαστημάτων εμπιστοσύνης, της μεροληψίας και της κάλυψης. Στη γραμμή **α** φαίνονται οι μέσοι όροι κάθε παραμέτρου οι οποίοι υπολογίζονται με τη χρήση της εντολής average, ενώ στη γραμμή **β** για τα Q και Ε(π) υπολογίζεται η μεροληψία, εφόσον αφαιρείται από τον μέσο όρο της γραμμής **α** η πραγματική ποσότητα που προσδιορίστηκε για $R = 0{,}95$. Στη γραμμή **α** της στήλης coverage παρουσιάζεται η μέση τιμή της κάλυψης , η οποία για κάθε σειρά υπολογίζεται με την εντολή IF(AND(low limit $< Q^{*}$;upper limit $> Q^{*}$);1;0). Τέλος, στην γραμμή **α** της στήλης HL, υπολογίζεται το μέτρο RAHL στο οποίο υπολογίζεται ο μέσος όρος των HL διαιρεμένος με την πραγματική ποσότητα παραγγελίας για $R = 0{,}95$ (AVERAGE(H2:H1001)/ Q^{*}) , ενώ στη γραμμή **β** το RSDHL με τη βοήθεια της εντολής STDEV(H2:H1001)/ Q^{*}.

Ενδεικτικά, το αρχείο του Excel της πρώτης μεθόδου για τις 1000 σειρές των 500 παρατηρήσεων για $R = 0{,}95$ είναι το ακόλουθο:

Α/Α σειράς	**Μέσος**	**Τυπική απόκλιση**	**Q***	**HL**	**Low-limit**	**Upper-limit**	**coverage**	**E(π)***	**HL**	**low limit**	**high limit**	**coverage**
1	265,4932	42,66499	335,6709	18,13981	317,5311	353,8107	0	23477,52	1067,483	22410,04	24545	0
2	323,0283	59,644075	421,1341	25,35878	395,7753	446,4929	1	28489,78	1492,302	26997,48	29982,08	0
3	306,591	53,301939	394,2649	22,6623	371,6026	416,9272	1	27072,39	1333,621	25738,77	28406,01	1
4	302,1362	56,688154	395,3799	24,10201	371,2779	419,4819	1	26638,37	1418,345	25220,03	28056,72	1
5	296,0897	50,040359	378,3988	21,27558	357,1232	399,6744	1	26159,14	1252,016	24907,13	27411,16	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
997	300,613	69,82827	415,4703	29,68877	385,7815	445,159	1	26372,89	1747,112	24625,78	28120,01	1
998	318,9119	48,048433	397,9445	20,42867	377,5159	418,3732	1	28232,6	1202,178	27030,42	29434,78	0
999	298,5018	57,166791	392,5328	24,30551	368,2273	416,8383	1	26306,6	1430,32	24876,28	27736,92	1
1000	285,5151	52,933446	372,5828	22,50563	350,0772	395,0885	0	25179,16	1324,401	23854,75	26503,56	1
α			394,9707	0,061414			0,819	26459,26	0,054551			0,822
β			-3,72047	0,007553				45,50768	0,006709			

Η εκτίμηση των δύο μεγεθών για την δεύτερη μέθοδο, πραγματοποιήθηκε μέσω της πρόβλεψης για την επόμενη περίοδο, σε κάθε σειρά. Η πρόβλεψη για ένα AR(1) σχήμα προκύπτει από το υπόδειγμα:

$\hat{D}_{T+1} = \hat{\delta} + \hat{\phi} D_T$.

Οι τιμές των $\hat{\delta}$ και $\hat{\phi}$ είναι αυτές που μας παρείχε το Eviews. Η τελευταία παρατήρηση D_T κάθε σειράς είναι αυτή που δημιουργήθηκε από την γεννήτρια τυχαίων αριθμών για όλα τα μεγέθη δείγματος. Οι τύποι και τα διαστήματα εμπιστοσύνης της μεθόδου αυτής φαίνονται στο κεφάλαιο 3 στην ενότητα 6. Η κάλυψη και η μεροληψία, υπολογίστηκαν με τον ίδιο τρόπο.

Η εκτίμηση των $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}(\pi)^*$ για την τρίτη μέθοδο, έγινε με τη βοήθεια των τύπων που αποδείχθηκαν στο 3^o κεφάλαιο και αφορούν την αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση. Στη συγκεκριμένη μέθοδο δεν γίνεται υπολογισμός της κάλυψης, καθώς δεν είναι διαθέσιμα τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Οι εκτιμητές που χρησιμοποιήθηκαν , είναι οι ML που μας παρείχε το Eviews. Τέλος , για να αποφευχθούν αρνητικές τιμές στους μέσους όρους, αφαιρέθηκαν από την τις εκτιμημένες τιμές των $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}(\pi)^*$ όσες ήταν αρνητικές και παρατηρήθηκε πως όσο πιο μικρό ήταν το δείγμα τόσο περισσότερες ήταν και οι αρνητικές τιμές που εμφανίστηκαν στην εκτίμηση.

Εκτίμηση για το MA(1)

Για το MA(1) υπόδειγμα, δημιουργήθηκαν και πάλι 1000 προσομοιωμένες τιμές μεγίστου μήκους 500 παρατηρήσεων καθώς επίσης και ένα πρόγραμμα στο Eviews το οποίο εκτός από τους μέσους όρους των $\hat{\mu}$,$\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$ και τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}_L$ και $\hat{\sigma}_L$, είχε την εντολή να μας δίνει και τα κατάλοιπα κάθε σειράς. Οι εντολές του προγράμματος στο MA(1) είναι οι ακόλουθες:

```
vector (1000) est_d
vector (1000) est_f
vector (1000) est_s
vector (1000) clmean_ml
vector (1000) clvarp_ml
!count=1

genr x = ser01
```

```
ls(z) x c ma(1)
scalar cl1 = @mean(x)
scalar cl2 = @varp(x)
scalar k1 = @coefs(1)
scalar k2 = @coefs(2)
scalar k3 = @se
clmean_ml(!count) = cl1
clvarp_ml(!count) = cl2
est_d(!count)=k1
est_f(!count)=k2
est_s(!count)=k3
!count = !count+1
genr res1 = resid
```

Η διαδικασία εκτίμησης για την πρώτη μέθοδο στο ΜΑ(1), είναι ίδια με αυτή του AR(1) υποδείγματος, καθώς οι τύποι δεν λαμβάνουν υπόψη τους την αυτοσυσχέτιση της ζήτησης, επομένως ούτε και το είδος της συσχέτισης. Το μόνο που αλλάζει για το συγκεκριμένο υπόδειγμα σ’ αυτή τη μέθοδο , είναι οι μέσοι όροι των $\hat{\mu}$,$\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$ που προκύπτουν από το Eviews για κάθε δείγμα.

Στη δεύτερη μέθοδο, όπως προαναφέρθηκε, η εκτίμηση του Q^* ταυτίζεται με την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο, η οποία προκύπτει ως εξής:

$$\hat{D}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\theta}\varepsilon_T ,$$

όπου τα κατάλοιπα της τελευταίας περιόδου, κάθε σειράς, κάθε δείγματος συγκεντρώθηκαν σε group μέσω του Eviews και χρησιμοποιήθηκαν για τις προβλέψεις.

Η εκτίμηση των $\hat{Q}^*$ και $\hat{E}(\pi)^*$ για την τρίτη μέθοδο, έγινε με τη βοήθεια των τύπων που αποδείχθηκαν στο 3^o κεφάλαιο και αφορούν την αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση. Οι εκτιμητές που χρησιμοποιήθηκαν , είναι οι ML που μας παρείχε το Eviews. Και στην περίπτωση του ΜΑ(1) δεν υπολογίζεται η κάλυψη.

Βιβλιογραφία

Agrawal, N. and Smith, S.A. (1996) “Estimating negative binomial demand for retail inventory with unobservable lost sales” *Naval Research Logistics* **43**, 839-861

Anvari, M. (1987) “Optimality Criteria and Risk in Inventory Models: The Case of the Newsboy Problem” *The Journal of the Operational Research Society* **38**, 7, 625-632

Atkinson, A. (1979) “Incentives, uncertainty, and risk in the Newsboy problem” *Decision Sciences* **10,** 341-357

Axsäter, S. (2006) “Optimality Criteria and Risk in Inventory models: The case of the Newsboy Problem”, New York, USA

Bell, P.C. (2000) “Forecasting Demand Variation When There Are Stockouts” *The Journal of the Operational Research Society* **51**, 3, 358-363

Casimir, R. (2002) “The value of information in the multi-item newsboy problem” *Omega* **30** 45–50

Conrad, S.A (1976) “Sales Data and the Estimation of Demand” *Operational Research Quarterly* **27**, 1, 123-127

Fotopoulos, S., Wang, M-C and Rao, S.S. (1988) “Safety stock determination with correlated demands and arbitrary lead times” *European Journal of Operational Research* **35**,172-181

Graves, S.C. (1999) “A single-item inventory model for a nonstationary demand process” *Manufacturing & Service Operations Management* **1**, 1, 50-61

Haji, M., Haji, R. and Darabi,H. (2007) “Price Discount and Stochastic Initial Inventory in the Newsboy Problem” *Journal of Industrial and Systems Engineering* **1**, 2, 130-138

Halkos, G.E. and Kevork, I.S. (2003) “Confidence intervals in stationary autocorrelated time series” *Archives of Economic History* **15**, 2, 31-51

Hamilton, J.D. (1994) “Times Series analysis” *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey

Hill, R.M. (1997) “Applying Bayesian methodology with a uniform prior to the single period inventory model” *European Journal of Operational Research* **98**, 555-562

Kabak, I. W. and Weinberg, C. B. (1972) “The Generalized Newsboy Problem, Contract Negotiations and Secondary Vendors” *IIE Transactions* **4: 2**, 154 — 156

Κεβόρκ, Η.Σ. (2009) “Αξιολόγηση εναλλακτικών εκτιμητριών της άριστης ποσότητας παραγγελίας σε συστήματα συνεχούς επιθεώρησης του αποθέματος”

Kevork, I.S. (2010) “Estimating the optimal order quantity and the maximum expected profit for single period inventory decision” *Omega* **38**, 218-227

Khouja, M. (1995) “The newsboy problem under progressive multiple discounts” *European Journal of Operational Research* **84**, 458-466

Khouja, M. (1999) “The single-period (new-vendor) problem literature review and suggestions for future research” *Omega* **27**, 537-553

Khouja, M. Mehrez, A. (1996) “A multi-product constrained newsboy problem with progressive multiple discounts” *Computers and Engineering* **30**, 95-101

Lapin, L.L (1994) “Quantitative methods for business decision with cases” 6th ed., Duxbury Press, An International Thomson Publishing Company

Lau, H-S. (1980) “The Newsboy Problem under Alternative Optimization Objectives” The *Journal of the Operational Research Society* **31**, 6, 525-535

Lau, A.H-L. and Lau, H-S.(1988) “The Newsboy Problem With Price-Dependent Demand Distribution” *IIE Transactions* **20: 2**, 168 — 175

Lau, H-S. and Wang,M-S (1987) “Estimating the lead-time demand distribution when the daily demand is non-normal and autocorrelated” *European Journal of Operational Research* **29** , 60-69

Lin,C-S. and Kroll, D.E. (1996) “The single-item newsboy problem with dual performance measures and quantity discounts” *European Journal of Operational Research* **100** , 562-565

Marmostein, H., Zinn, W. (1995) “A conditional effect of autocorrelated demand on safety stock determination” *European Journal of Operational Research* **68,** 139-142

Nahmias, S. (1994) “Demand estimation in lost sales inventory systems” *Naval Research Logistics* **41**, 739-757

Pantumsinchai, P. and Knowles, T.W. (1991) “Standard Container Size Discounts and the Single-Period Inventory Problem” *Decision Sciences* **22**, 612-619

Ray, W.D. (1980) “The Significance of Correlated Demands and Variable Lead Times for Stock Control Policies” *The Journal of the Operational Research Society* **31**, 2, 187-190

Ray, W.D. (1980) “ARIMA Forecasting Models in Inventory Control” *The Journal of the Operational Research Society* **33**, 6, 567- 574

Schweitzer, M.E. , Cachon, D.P. (2000) “Decision Bias in the Newsvendor Problem with a Known Demand Distribution: Experimental Evidence” *Management Science* **46**, 3, 404-420

Silver, E.A., Pyke, D.F. and Peterson, R. (1998) “Inventory Management and Production Planning and Scheduling” John Wiley and Sons

Tersine, R.J. (1994) “Principles of Inventory and Materials Management” 4th ed., Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey

Urban, T.L. (2000) “Reorder Level Determination with Serially-Correlated Demand” *The Journal of the Operational Research Society* **51**, 6, 762- 768

Yang, S., Shi, C.V. and Zhao, H. (2011) “Optimal ordering and pricing decisions for a target oriented newsvendor” *Omega* **39,** 110–115

Δημέλη, Σ. (2002) “Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης χρονολογικών σειρών” Εκδόσεις Κριτική.
Χάλκος, Γ.Ε (2006) “Οικονομετρία, Θεωρία και Πράξη” Εκδόσεις Β. Γκιούρδας, Αθήνα

Χρήστου, Γ.Κ (2004) “Εισαγωγή στην οικονομετρία” Τόμος Β