



ΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Μέθοδοι Εκτίμησης Μέγιστης Πιθανοφάνειας σε
Υποδείγματα $ARMA(p, q)$: Μια Εμπειρική Διερεύνηση

Διπλωματική Εργασία

Μπουρλιάκας Θ. Θανάσης

Επιβλέπων:

Επίκουρος Καθηγητής Κεβόρκ Σ. Ηλίας

Βόλος, 2011

© 2011 Μπουρλιάκας Θ. Θανάσης

Το παρόν κείμενο στοιχειοθετήθηκε σε $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ μέσω του συστήματος $\text{MiK}_{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$ και η επεξεργασία του κειμένου έγινε στο πρόγραμμα $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ Maker. Βασικά πακέτα που χρησιμοποιήθηκαν είναι το `babel` για την ελληνική γλώσσα, το `amsmath` για τη στοιχειοθεσία των μαθηματικών και το `natbib` για τη μορφοποίηση της βιβλιογραφίας. Η διαχείριση της βιβλιογραφίας έγινε μέσω του λογισμικού `JabRef`. Τα διαγράμματα και σχήματα εξήχθησαν με τη βοήθεια του λογισμικού `GLE` και του `Inkscape`.

Υπεύθυνη δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Μπουρλιάκας Θανάσης

Βόλος, Ιούνιος 2011

Ευχαριστίες

Πολύτιμη σε κάθε βήμα της εργασίας υπήρξε η βοήθεια του επιβλέποντος καθηγητή μου κ. Ηλία Κεβόρκ, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά καταρχήν για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, τις υποδείξεις και συμβουλές και τη φιλική του στάση καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Επίσης ευχαριστώ όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τα ερεθίσματα που παρείχαν και τις γνώσεις που μετέδωσαν.

Εν κατακλείδι, θα ήθελα ξεχωριστά να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή παρότρυνση και στήριξη, που επέτρεψε την επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών, αλλά και τους φίλους και συναδέλφους του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Στην οικογένειά μου

Μέθοδοι Εκτίμησης Μέγιστης Πιθανοφάνειας σε Υποδείγματα ARMA(p, q): Μια Εμπειρική Διερεύνηση

Περίληψη

Οι ιδιότητες, καθώς και η σχετική προβλεπτική ικανότητα τριών εκτιμητών συναφών με τη Μέγιστη Πιθανοφάνεια για την εκτίμηση των παραμέτρων σε MA(1) και ARMA(1, 1) διαδικασίες αξιολογούνται μέσω προσομοίωσης, για διάφορα μεγέθη δειγμάτων. Οι μέθοδοι που συζητούνται είναι η υπό συνθήκη μέγιστη πιθανοφάνεια, η μέθοδος Backcasting και η ακριβής μέγιστη πιθανοφάνεια. Η υλοποίηση της τελευταίας γίνεται μέσω της τεχνικής του φίλτρου Kalman. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης, η επίδοση των μεθόδων εξαρτάται από τα μεγέθη των πραγματικών παραμέτρων, ειδικά του θ , της παραμέτρου κινητού μέσου. Στο μεγαλύτερο μέρος του πεδίου αντιστρεψιμότητας, ο υπό συνθήκη εκτιμητής παρέχει προσεγγίσεις που είναι επαρκείς, ενώ περισσότερο ακριβείς μέθοδοι πρέπει να χρησιμοποιηθούν αν η παράμετρος βρίσκεται κοντά στο όριο της αντιστρεψιμότητας, λαμβάνοντας όμως υπόψη ότι ο εκτιμητής της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να είναι αναξιόπιστος. Αναφορικά με τις προβλέψεις, δεν υπάρχουν ιδιαίτερες διαφορές για τις τρεις μεθόδους, αν και τα διαστήματα εμπιστοσύνης που παράγονται με τους εκτιμητές της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας είναι οριακά πιο ακριβή.

Abstract

The properties, as well as the relative predictive ability of three widely used estimators akin to Maximum Likelihood estimation of the parameters in MA(1) and ARMA(1, 1) processes are examined by simulation, for samples of various length. The methods discussed are Conditional Maximum Likelihood, the method of Backcasting and Exact Maximum Likelihood. The latter is implemented through the application of Kalman filtering techniques. According to the study's results each method's performance is rather dependent on the magnitude of the true parameters of the models, especially θ , the moving average parameter. For most of the invertibility region the conditional estimator provides an approximation that is adequate enough, but more exact methods have to be employed if the parameter lies near the boundary for both models, bearing however in mind that the exact estimator is frequently unreliable in such a case. Regarding out-of-sample forecasting, there is little to choose between the three estimators, although the confidence intervals produced by the exact method are marginally more accurate.

Λέξεις Κλειδιά: ARMA(1, 1), MA(1), Conditional / Exact Maximum Likelihood, Backcasting, State – Space αναπαράσταση, Kalman filter, Monte Carlo.

Κωδικοί JEL: C13, C15, C22

Πίνακες και Σχήματα	xi
1 Εισαγωγή	1
2 Βιβλιογραφική Επισκόπηση	7
3 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας	13
3.1 Το πρόβλημα της εκτίμησης	13
3.2 Υπό συνθήκη εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας	14
3.3 Η μέθοδος Backcasting	16
3.4 Ακριβής εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας	17
4 Εκτίμηση Ακριβούς Μέγιστης Πιθανοφάνειας με το Kalman filter	23
4.1 Η State – Space Μορφή Υποδειγμάτων ARMA	24
4.2 Kalman filter	29
4.2.1 Φίλτρο	29
4.2.2 Προβλέψεις	31
4.3 Η Συνάρτηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας	32
5 Αξιολόγηση Μεθόδων Εκτίμησης μέσω Προσομοιώσεων Monte Carlo	35
5.1 Μεθοδολογία Έρευνας	35
5.1.1 Προσομοίωση	35
5.1.2 Όψεις της διαδικασίας	36
5.2 Αποτελέσματα για το σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού MA(1)	38
5.2.1 Εκτιμητική	38
5.2.2 Προβλέψεις	44
5.3 Αποτελέσματα για το μικτό αυτοπαλίνδρομο σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού ARMA(1, 1)	47
5.3.1 Εκτιμητική	47
5.3.2 Προβλέψεις	48
6 Μελέτη Περίπτωσης	57
6.1 Εκτιμητική	57
6.2 Προβλέψεις	59

7	Συμπεράσματα	63
7.1	Σύνοψη	63
7.2	Προεκτάσεις και μελλοντική έρευνα	64
	Βιβλιογραφικές Αναφορές	65
	Παράρτημα	
A	Παραθέματα της Μελέτης Περίπτωσης	69
B	Προγράμματα EViews	77

Πίνακες

5.1	Εκτιμηθείσα μεροληψία (Bias) και μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1)	39
5.2	Εκτιμηθέν επίπεδο εμπιστοσύνης των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1)	41
5.3	Δειγματοληπτικές κατανομές των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1) όταν η πραγματική παράμετρος θ είναι κοντά στη μονάδα	43
5.4	Μέση κάλυψη των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ με βάση το υπόδειγμα MA(1)	45
5.5	Μέσο halflength $\hat{\lambda}$ των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1)	46
5.6	Εκτιμηθείσα μεροληψία (Bias) και μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα ARMA(1, 1)	49
5.7	Εκτιμηθέν επίπεδο εμπιστοσύνης των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα ARMA(1, 1)	51
5.8	Μέση κάλυψη των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ με βάση το υπόδειγμα ARMA(1, 1)	53
5.9	Μέσο halflength $\hat{\lambda}$ των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα ARMA(1, 1)	54
6.1	Οι χρονολογικές σειρές της μελέτης	57
6.2	Εκτιμητές των παραμέτρων και τυπικά σφάλματα	59
6.3	Προβλέψεις με το υπόδειγμα ARMA(1, 1)	60
6.4	Προβλέψεις με το υπόδειγμα ARIMA(0, 1, 1)	61
A.1	ADF έλεγχος μοναδιαίας ρίζας	71
A.2	Προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τα επίπεδα της Σειράς A	74
A.3	Διαγνωστικοί έλεγχοι των καταλοίπων για τα επίπεδα της Σειράς A	74
A.4	Προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τη Σειρά B	75

A.5 Διαγνωστικοί έλεγχοι των καταλοίπων για τις πρώτες διαφορές της Σειράς B	75
--	----

Σχήματα

4.1 Τα στάδια υλοποίησης του Kalman filter	32
5.1 Γραφικές παραστάσεις της μεροληψίας των τριών εκτιμητών ως προς θ για διάφορα T	38
5.2 Γραφικές παραστάσεις του MSE των τριών εκτιμητών ως προς θ για διάφορα T	38
5.3 Pile-up effect της EML σε μικρά δείγματα	42
A.1 Σειρά A: Χημικές συγκεντρώσεις — Μετρήσεις ανά 2 ώρες, $T = 197$. . .	69
A.2 Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της Σειράς A	69
A.3 Σειρά B: Άνεργες νεαρές γυναίκες 16 έως 19 ετών στις ΗΠΑ — Μηνιαία δεδομένα (Ιαν 1961 – Αυγ 2002), $T = 500$	70
A.4 Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της Σειράς B	70

Η επανειλημμένη, κατά τακτά χρονικά διαστήματα, μέτρηση ή παρατήρηση κάποιας συνιστώσας ενός συστήματος αποτελεί τα δεδομένα μιας χρονολογικής σειράς. Φυσιολογικό λοιπόν είναι να αναρωτηθεί κανείς τι πληροφορίες, και με τι ακρίβεια, μπορούν να αντληθούν από την ανάλυση των δεδομένων αυτών για το ίδιο το σύστημα και πώς θα χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του στο μέλλον. Αν ως σύστημα θεωρήσουμε τη διαχρονική εξέλιξη μιας μακροοικονομικής μεταβλητής όπως η ανεργία ή μιας μικροοικονομικής μεταβλητής όπως η ζήτηση για το προϊόν μιας επιχείρησης ή την εμφάνιση και εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου, ο βασικότερος σκοπός της ανάλυσης χρονολογικών σειρών είναι η αξιοποίηση των πληροφοριών τόσο του παρόντος όσο και του παρελθόντος ώστε να προβλεφθεί εντός εύλογης ακρίβειας η μελλοντική εξέλιξη του μεγέθους που μελετάται.

Μια δημοφιλής φιλοσοφία ανάλυσης και υποδειγματοποίησης δεδομένων χρονολογικών σειρών που τυγχάνει ευρύτατης αποδοχής και απαντάται σε πάρα πολλές εφαρμογές είναι αυτή των Box & Jenkins και τα στοχαστικά υποδείγματα $ARMA(p, q)$. Βασικό επιχείρημα ως προς την υιοθεσία αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι για την περιγραφή του μεγέθους που μελετάται απαιτούνται μόνον δεδομένα του ίδιου του μεγέθους, και όχι και άλλων εξωγενών μεταβλητών, το οποίο βάσει της αρχής της φειδούς θα πρέπει να περιγράφεται επαρκώς από έναν ελάχιστο αριθμό αρχικά άγνωστων παραμέτρων. Για να γίνει εφικτή η διενέργεια προβλέψεων πρέπει αυτές να προσδιοριστούν ή καλύτερα να εκτιμηθούν βάσει της διαθέσιμης πληροφορίας από τα δεδομένα.

Έτσι λοιπόν, το ενδιαφέρον αυτής της εργασίας στρέφεται γύρω από την εκτίμηση των υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών $ARMA(p, q)$. Ο προβληματισμός της έγκειται στην προσπάθεια της καταγραφής και αξιολόγησης των ιδιοτήτων που φέρουν ορισμένοι, ευρέως διαδεδομένοι και χρησιμοποιούμενοι τόσο στην ερευνητική διαδικασία όσο και στην επιχειρησιακή πρακτική, εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας σε πεπερασμένα δείγματα με απώτερο σκοπό την σχετικά ακριβέστερη βραχυχρόνια προβλεπτική ικανότητα.

Η μελέτη θα επικεντρωθεί σε τρεις μεθόδους εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας και τις ιδιαιτερότητές τους: (α) τη μέθοδο της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας

(conditional maximum likelihood), (β) τη μέθοδο Backcasting και (γ) τη μέθοδο της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας (exact maximum likelihood).

Στάσιμα στοχαστικά υποδείγματα ARMA(p, q)

Προς το παρόν δεν θα επιμείνουμε πέραν της απλής αναφοράς ορισμένων εννοιών σχετικά με τα υποδείγματα που θα μελετήσουμε. Για περαιτέρω διασαφήνιση αυτών των εννοιών και πιο αυστηρούς ορισμούς, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί εγχειρίδια που πραγματεύονται το θέμα όπως αυτά των Box *et al.* (1994), Brockwell & Davis (1991, 1996), Hamilton (1994b) και Harvey (1993).

Ας υποθέσουμε ότι μια χρονολογική σειρά Y_t αποτελεί μια πεπερασμένη πραγματοποίηση T παρατηρήσεων της ασθενώς ή ως προς τη συνδιακύμανση στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας (weakly or covariance stationary process), $\{Y_t\}$, για την οποία ισχύουν:

$$(α) E(Y_t) = \mu \quad (β) \text{Var}(Y_t) = \gamma_0 \quad (γ) \text{Cov}(Y_t, Y_{t+s}) = \text{Cov}(Y_{t+m}, Y_{t+m+s}) = \gamma_s.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η $\{Y_t\}$ μπορεί να λάβει την κατά Wold αναπαράσταση

$$y_t = Y_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1.1)$$

όπου οι συντελεστές ψ_j είναι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\psi_0 = 1$ και $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ είναι μια διαδικασία λευκού θορύβου με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση σ^2 .

Ορισμός 1.1 Μια στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}$ καλείται *αυτοπαλίνδρομη διαδικασία κινητού μέσου βαθμού (p, q)* (auto-regressive moving average of order (p, q)), ARMA(p, q), όταν

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.2α)$$

όπου τα δ , ϕ_i και θ_j είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $\phi_i = 0$, όταν $i > p$ και $\theta_j = 0$, όταν $j > q$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ μια διαδικασία λευκού θορύβου με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση σ^2 .

Σε αποκλίσεις από τους μέσους η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1.2β)$$

όπου $y_t = Y_t - \mu$ και $\mu = \delta / (\phi_1 - \dots - \phi_p)$, ο μέσος της διαδικασίας. Κάθε ARMA(p, q) μπορεί, με τη χρήση του τελεστή υστέρησης B , να γραφεί στη σύντομη μορφή

$$\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

όπου

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

και

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$$

είναι τα p και q βαθμού αντίστοιχα *χαρακτηριστικά πολυώνυμα* του υποδείγματος. Αν υποτεθεί ότι $\phi(B) \equiv 1$ τότε η διαδικασία καλείται **αυτοπαλίνδρομη βαθμού p** (autoregressive of order p), AR(p), ενώ αν $\theta(B) \equiv 1$, η διαδικασία καλείται **διαδικασία κινητού μέσου βαθμού q** (moving average of order q), MA(q).

Ένα ARMA(p, q) είναι *στάσιμο*, έχει δηλαδή σταθερό μέσο και σταθερή διακύμανση αν και μόνον αν οι ρίζες του πολυωνύμου $\phi(x) = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $|x_i| > 1 \forall i = 1, \dots, p$ ¹. Όμοια, αν και μόνον αν οι ρίζες της εξίσωσης $\theta(x) = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $|x_i| > 1 \forall i = 1, \dots, q$, εξασφαλίζεται ότι είναι και αντιστρέψιμο. Επιβολή της στασιμότητας εξασφαλίζει την ύπαρξη της αναπαράστασης (1.1) αλλά και την ευστάθεια του συστήματος που μελετάται, ενώ η επιβολή της αντιστρεψιμότητας² εγγυάται ότι το ARMA(p, q) μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σε όρους αποκλειστικά της y_t (ως AR(∞)) και στα αμιγώς MA(q) ότι θα υπάρχει μοναδικό MA(q) για δεδομένη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Μια τελευταία υπόθεση που επιβάλλεται είναι τα $\phi(B)$ και $\theta(B)$ να μην έχουν κοινές ρίζες ώστε να αποφευχθεί ο πλεονασμός των παραμέτρων (parameter redundancy).

Εκτίμηση υποδειγμάτων ARMA(p, q)

Ας εξετάσουμε με περισσότερη προσοχή τη σχέση (1.2α). Θεωρώντας ένα δείγμα παρατηρήσεων από αυτή τη διαδικασία ως $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$, είναι σαφές ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 1$ δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε οποιαδήποτε πληροφορία για (α) τις τιμές των Y_t για $t = 0, -1, -2, \dots, 1 - p$ και (β) τις τιμές των ε_t για $t = 0, -1, -2, \dots, 1 - q$. Το ίδιο ισχύει στις χρονικές περιόδους έως και $t = p$. Ο τρόπος αντιμετώπισης αυτής της έλλειψης πληροφόρησης υπαγορεύει και την επιλογή μεθόδου για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων $(\varphi, \vartheta) = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ του υποδείγματος.

Η μέθοδος της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας Ένα σκεπτικό που προκύπτει κατά φυσιολογικό τρόπο από την παραπάνω συζήτηση είναι να δούμε ότι η κατανομή των σφαλμάτων είναι της μορφής $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, οπότε τα q σφάλματα πριν από $t = p + 1$ δηλ. τα $\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+1-q}$ μπορούν να τεθούν *ίσα με την αναμενόμενη τιμή τους, το μηδέν*. Αν επιπλέον οι πρώτες p παρατηρήσεις θεωρηθούν *σταθερές ποσότητες και ίσες με την πραγματοποιημένη τιμή τους*, τότε διαθέτουμε όλη την απαραίτητη

¹Σε πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του 1, οι ρίζες x_i μπορεί να είναι και μιγαδικές, οπότε σε αυτή την περίπτωση η νόρμα $|x_i|$ αντιστοιχεί στο *μέτρο* της x_i .

²Για μια εκτενή συζήτηση αναφορικά με την αντιστρεψιμότητα και τη σημασία της βλέπε Hamilton (1994b, §3.7)

πληροφόρηση για να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους. Ο όρος “υπό συνθήκη” αναφέρεται ακριβώς σε αυτή την παραδοχή.

Η μέθοδος Backcasting Αυτή η μέθοδος είναι συναφής με την προηγούμενη αλλά διαφέρει ως προς την υπόθεση των μηδενικών σφαλμάτων πριν από το παρατηρημένο δείγμα. Συνεπώς χρησιμοποιείται μια *τεχνική προσέγγισης των παραπάνω σφαλμάτων* και λαμβάνει υπόψη τις τιμές τους κατά την εκτίμηση των παραμέτρων.

Η μέθοδος της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας Οι προαναφερθείσες μέθοδοι είναι προσεγγιστικές υπό την έννοια ότι εξαρτώνται από τις υποθέσεις που θα γίνουν για τις κατανομές των παρατηρήσεων αλλά και σφαλμάτων. Έχοντας υποθέσει κανονικότητα των κατανομών αυτών, και λαμβάνοντας υπόψη τη φύση των παρατηρήσεων ως *τυχαίες μεταβλητές* αλλά και την *τυχαία συμπεριφορά των σφαλμάτων*, η αξιοποίησή τους κατά την εκτίμηση των παραμέτρων παρέχει ακριβείς εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων.

Συνεπώς θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε σε τι βαθμό τέτοιες προσεγγίσεις είναι επαρκείς όταν το διαθέσιμο δείγμα αποτελείται από πεπερασμένες παρατηρήσεις. Θεωρώντας δυο περιπτώσεις υποδειγμάτων $ARMA(p, q)$, το σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού $MA(1)$ και το μικτό αυτοπαλίνδρομο σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού, $ARMA(1, 1)$, διερευνάται εμπειρικά αυτό το ζήτημα μέσω της Monte Carlo προσομοίωσης, αλλά και με τη μελέτη περιπτώσεων πραγματικών χρονολογικών σειρών.

Επιλέγοντας για κάθε υπόδειγμα θεωρητικές παραμέτρους εντός του πεδίου αντιστρεψιμότητας αλλά και στασιμότητας και δείγματα διαφορετικού μήκους (από 25 έως και 500 παρατηρήσεις), σε επίπεδο εκτίμησης θα αξιολογηθεί κατά βάσει η ποιότητα της εκάστοτε δειγματοληπτικής κατανομής των εκτιμητών βάσει στατιστικών μέτρων, δηλαδή σε όρους μεροληψίας (Bias) και μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) ενώ έμφαση θα δοθεί στη στατιστική σημαντικότητα των εκτιμητών, ώστε να δημιουργηθεί μια εικόνα του επιπέδου εμπιστοσύνης της κάθε μεθόδου, αλλά και στην επίδοση των εκτιμητών κάθε υποδείγματος όσον αφορά την πρόβλεψη για χρονικές περιόδους εκτός δείγματος τόσο σε όρους κάλυψης (coverage) των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης όσο και ακρίβειας αυτών σε σχέση με τα θεωρητικά.

Η διάρθρωση της εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο κεφάλαιο 2 καταγράφονται τα ευρήματα και συμπεράσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας πάνω στο θέμα. Τα κεφάλαια 3 και 4 αποτελούν και το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας, όπου παρουσιάζονται με όσο το δυνατόν πιο συμπαγή και περιεκτικό τρόπο οι τρεις μέθοδοι εκτίμησης καθώς και η διαφορετική μεθοδολογία που υιοθετήθηκε για την υλοποίηση της μεθόδου της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας μέσω του μετασχηματισμού ενός $ARMA(p, q)$ στην “state – space” αναπαράστασή του ώστε εν συνεχεία να είναι δυνατή η εκτίμηση με την εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας του φίλτρου Kalman. Το εμπειρικό τμήμα της εργασίας αποτελείται από τα κεφάλαια 5, που περιλαμβάνει τα εκτενή αποτελέσματα και το σχολιασμό της Monte Carlo προσομοίωσης, και 6, που

περιλαμβάνει ορισμένες μελέτες περίπτωσης. Εν κατακλείδι το τελευταίο κεφάλαιο συνοψίζει τα συμπεράσματα της εργασίας και συζητά πιθανές μελλοντικές προεκτάσεις ή προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Κάθε εγχειρίδιο ανάλυσης χρονολογικών σειρών αναφέρει ότι οι διάφορες μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων ενός ARMA υποδείγματος είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες. Κάτι τέτοιο στην ιδανική περίπτωση όπου υπάρχουν άπειρες διαθέσιμες παρατηρήσεις ισχύει σαφώς, δεν είναι όμως και τόσο κοινός τόπος σε πεπερασμένα δείγματα, ιδιαίτερα όταν οι διαθέσιμες παρατηρήσεις είναι λίγες.

Στη διεθνή βιβλιογραφία το ζήτημα αυτό έχει μελετηθεί επισταμένα, προβαίνοντας τόσο σε συγκριτικές μελέτες για την αξιολόγηση της σχετικής επίδοσης διάφορων μεθόδων εκτίμησης, όσο και την εξερεύνηση των ιδιοτήτων για μεμονωμένους εκτιμητές ή τύπους εκτιμητών. Εφόσον το βασικό ενδιαφέρον της παρούσας μελέτης επικεντρώνεται στους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας και τις προσεγγίσεις τους, ιδιαίτερα σε υποδείγματα κινητού μέσου πρώτου βαθμού και μικτά πρώτου βαθμού, η κύρια έμφαση της παρουσίασης των υπαρχόντων εμπειρικά διαπιστωμένων στοιχείων θα δοθεί εκεί.

Για το σχήμα κινητού μέσου, MA(1), η πρώτη εκτενής μελέτη με βάση την προσομοίωση Monte Carlo οφείλεται στον Nelson (1974), ο οποίος διερευνά και τα τρία στάδια της υποδειματοποίησης, δηλ. την ταυτοποίηση, την εκτίμηση αλλά και την πρόβλεψη με MA(1) σχήματα. Ιδιαίτερα για το στάδιο της εκτίμησης συγκρίνει την επίδοση διάφορων εκτιμητών, μεταξύ των οποίων αυτούς της μεθόδου της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας και της μεθόδου Backcasting, ενώ δεν περιλαμβάνει τη μέθοδο της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας. Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέγει είναι οι $0, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 0.9$ και δείγματα 30 (500 σειρές) και 100 παρατηρήσεων (200 σειρές). Ο εκτιμητής της υπό συνθήκη μεθόδου καθώς και αυτός της Backcasting μεθόδου δείχνουν γενικά αποτελεσματικότεροι, με τον πρώτο να παρουσιάζει μικρή μεροληψία για $0, \pm 0.2, \pm 0.5$ αλλά να υποεκτιμά σημαντικά την πραγματική παράμετρο στις τιμές ± 0.9 , και τον δεύτερο να μεροληπτεί λιγότερο ακριβώς σε αυτές τις τιμές, υπερεκτιμώντας όμως την πραγματική παράμετρο. Το συμπέρασμα είναι αντίστοιχο και για τα δυο μεγέθη δειγμάτων που μελετήθηκαν.

Ο Nelson επίσης, κατασκευάζοντας t -ratios, αποφαίνεται ότι σε δείγματα 30 παρατηρήσεων συχνότερα από το αναμενόμενο η υπόθεση της στατιστικής ισότητας της εκτιμηθείσας τιμής και της πραγματικής απορρίπτεται και για τις δυο μεθόδους αλλά αυτό συμβαίνει σπανιότερα στην περίπτωση της υπό συνθήκη μεθόδου. Πιο συγκεκρι-

μένα η εφαρμογή του ελέγχου σε ονομαστικό επίπεδο 5% οδηγεί σε πραγματικό επίπεδο της τάξης του 10% για τις περισσότερες τιμές του θ , εύρημα που ο Nelson αποδίδει στη μεγάλη διασπορά της δειγματοληπτικής κατανομής των t -ratios που μελετά. Σε 100 παρατηρήσεις οι διαφορές αμβλύνονται πλην της περίπτωσης όπου $\theta = 0.9$, καθώς εκεί η απόρριψη συνεχίζει να συμβαίνει συχνότερα με τον εκτιμητή της Backcasting μεθόδου.

Κατά τη διενέργεια προβλέψεων επιχειρεί να προσδιορίσει τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης εξ' ολοκλήρου μέσω προσομοίωσης. Έτσι, προσεγγίζει αυτή τη διακύμανση μέσω του δειγματικού μέσου τετραγωνικού σφάλματος των διαφορών της πραγματικής παρατήρησης μείον την πρόβλεψή της, και καταλήγει ότι οι διαφορές είναι ελάχιστες και στις περισσότερες περιπτώσεις οριακές μεταξύ των εκτιμητών.

Σημαντική επέκταση στην παραπάνω μελέτη αποτελεί η εργασία των Dent & Min (1978), οι οποίοι εξετάζουν έξι τύπους υποδειγμάτων, $AR(p)$, $p = 1, 2, 3$, $MA(q)$, $q = 1, 2$ και το μικτό $ARMA(1, 1)$. Οι εκτιμητές που λαμβάνουν υπόψη τους είναι αρκετοί, περιλαμβανομένων αυτών της υπό συνθήκη και της Backcasting μεθόδου αλλά και τον εκτιμητή της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας, σε δείγματα 100 παρατηρήσεων.

Στην περίπτωση του $MA(1)$, και χρησιμοποιώντας 13 τιμές για το θ στο διάστημα $[-0.95, 0.95]$ επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό τα ευρήματα του Nelson (1974) όσον αφορά την εκτίμηση, πλην όμως ο αριθμός των προσομοιωμένων σειρών που εκτιμούν ανά παράμετρο είναι σχετικά μικρός (μόλις 100). Παρόλα αυτά καταλήγουν πως στο μεγαλύτερο μέρος του πεδίου τιμών του θ ο υπό συνθήκη εκτιμητής είναι προτιμητέος τόσο σε όρους μεροληψίας όσο και σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Στις τιμές ± 0.95 οι ερευνητές εκτιμούν ότι η μέθοδος Backcasting και η ακριβής μέγιστη πιθανοφάνεια είναι καλύτερες, με τη δεύτερη να υπερέχει ελαφρώς, ενώ παρουσιάζουν ενδείξεις ότι και οι δυο αυτοί εκτιμητές έχουν την τάση να λαμβάνουν συχνά τιμές πολύ κοντά στο όριο της αντιστρεψιμότητας, ειδικά όταν η τιμή της πραγματικής παραμέτρου είναι υψηλή.

Για το μικτό $ARMA(1, 1)$ ελέγχουν 11 ζεύγη τιμών (ϕ, θ) , και βρίσκουν ελάχιστες διαφορές κατά την εκτίμηση του ϕ , με προτιμητέα ίσως την μέθοδο της υπό συνθήκη πιθανοφάνειας σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος, ενώ κατά την εκτίμηση της παραμέτρου θ τόσο η ακριβής όσο και η υπό συνθήκη μέθοδος δείχνουν καλύτερες. Σε οριακές περιπτώσεις, τα αποτελέσματά τους είναι ανάλογα και εδώ του $MA(1)$, χωρίς όμως κάποιο ξεκάθαρο μοτίβο να είναι εμφανές.

Σαφέστερη εικόνα σχετικά με την εκτίμηση του $ARMA(1, 1)$ σχηματίζεται από τους Ansley & Newbold (1980), οι οποίοι συνιστούν τη χρήση του εκτιμητή της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας και για τις δυο παραμέτρους, καθώς οι εκτιμητές της υπό συνθήκη μεθόδου αποδεικνύονται υπερβολικά μεροληπτικοί προς το μηδέν και με πολύ υψηλό μέσο τετραγωνικό σφάλμα, τόσο για υψηλές τιμές του θ , όσο και όταν οι ρίζες των πολυωνύμων $\phi(B)$ και $\theta(B)$ βρίσκονται κοντά μεταξύ τους. Πολύ σημαντικό συμπέρασμα της προαναφερθείσας εργασίας είναι ότι οι εκτιμητές της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας, όταν το υπόδειγμα εμπεριέχει όρους κινητού μέσου, συχνά αποδεικνύονται

αναξιόπιστοι, ειδικά σε υψηλές τιμές των πραγματικών παραμέτρων. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης των εκτιμητών είναι τότε ευρύτερα από το αναμενόμενο, ενώ όταν συνυπάρχουν με αυτοπαλίνδρομο τμήμα όπως στο σχήμα ARMA(1, 1), και οι ρίζες των $\phi(B)$ και $\theta(B)$ είναι πολύ κοντά, τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι πολύ μικρά.

Στην ίδια μελέτη, αξιολογείται και η επίδοση των τριών εκτιμητών κατά τη διενέργεια προβλέψεων. Για το υπόδειγμα MA(1) σε όρους διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης για μια περίοδο μπροστά, η μέθοδος Backcasting είναι καλύτερη μόνο στο όριο της αντιστρεψιμότητας ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις η επίδοση της υπό συνθήκη και της ακριβούς μεθόδου είναι παρόμοια, με χειρότερη την επίδοση της Backcasting μεθόδου, όπως και στην περίπτωση του ARMA(1, 1).

Έναν διαφορετικό τρόπο σύγκρισης των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας και των δυο προσεγγίσεων τους στο σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού ακολουθεί η Osborn (1982). Στην εργασία της δεν καταφεύγει σε προσομοιώσεις Monte Carlo αλλά μελετά την αναμενόμενη συμπεριφορά των αντικειμενικών συναρτήσεων των τριών εκτιμητών ως συναρτήσεις (α) του μεγέθους του δείγματος, T , (β) της πραγματικής τιμής του θ και (γ) κάθε πιθανή τιμή $\hat{\theta}$ στο διάστημα $[-0.99, 0.99]$ που θα μπορούσε να αποτελεί ολικό ακρότατο των αντικειμενικών αυτών συναρτήσεων. Συνεπώς, συμβολίζοντας με $S^*(\hat{\theta})$ και $S(\hat{\theta})$ τα (προς ελαχιστοποίηση) αθροίσματα τετραγώνων των σφαλμάτων της υπό συνθήκη μεθόδου και της μεθόδου Backcasting αντίστοιχα ενώ με $L(\hat{\theta})$ την προς μεγιστοποίηση συνάρτηση ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας, η Osborn συμπεραίνει ότι η $S^*(\hat{\theta})$ αποτελεί καλύτερη προσέγγιση στην $L(\hat{\theta})$ κατά το μεγαλύτερο μέρος του πεδίου τιμών του πραγματικού θ , απ' ότι η $S(\hat{\theta})$, ενώ μόνο για $|\theta| \geq 0.8$ περίπου και μετά η $S(\hat{\theta})$ είναι προτιμότερη. Όταν το πραγματικό θ πλησιάζει το ± 1 , οι συναρτήσεις διαφέρουν σε σημαντικό βαθμό. Η κλίση της $S^*(\hat{\theta})$ γίνεται πιο απότομη και αύξουσα ενώ η $S(\hat{\theta})$ αρχίζει να φθίνει. Επίσης η $S^*(\hat{\theta})$ ακόμα και για $|\theta| = 1$ έχει πάντοτε ελάχιστη τιμή για $\hat{\theta} \in (-1, 1)$ και το $\hat{\theta}$ βρίσκεται πάντα μεταξύ του μηδενός και του θ , ενώ αντίθετα η $S(\hat{\theta})$ για μικρά T και θ κοντά στη μονάδα δεν λαμβάνει ελάχιστο για $\hat{\theta} \in [-0.99, 0.99]$ και όταν λαμβάνει τότε το $\hat{\theta}$ θα βρίσκεται μεταξύ του πραγματικού θ και του ορίου της αντιστρεψιμότητας. Αυτή η συμπεριφορά βρίσκεται σε συμφωνία με αντίστοιχη, μικρότερου όμως μεγέθους, μελέτης των Hillmer & Tiao (1979) και επιβεβαιώνει θεωρητικά και τα ευρήματα των προσομοιώσεων άλλων μελετών που προαναφέραμε, δηλαδή την τάση υποεκτίμησης της πραγματικής παραμέτρου κατά την εκτίμηση με την υπό συνθήκη μέθοδο πιθανοφάνειας, καθώς και την τάση υπερεκτίμησης της με τη μέθοδο Backcasting. Ορισμένα προβλήματα που απορρέουν από τη μορφή της $L(\hat{\theta})$ λόγω σταθερών σημείων στα $\theta = \pm 1$ θα αναλυθούν εκτενέστερα παρακάτω.

Προβλήματα κατά την εκτίμηση όρων κινητού μέσου

Οι Ansley & Newbold (1980) σε κάποιο σημείο της μελέτης τους αναλύουν τη δειγματοληπτική κατανομή του εκτιμητή της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας του θ στο σχήμα

MA(1). Για υψηλές τιμές της πραγματικής παραμέτρου, οι προσομοιώσεις τους δείχνουν σημαντικές συγκεντρώσεις πολύ κοντά στην τιμή ± 1 για δείγματα 50 και 100 παρατηρήσεων. Πιο συγκεκριμένα από τις 10000 προσομοιωμένες σειρές μήκους $T = 50$ και με $\theta = 0.9$ βρήκαν ότι οι 3278 εξ' αυτών είχαν εκτιμητή ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας στο διάστημα $(0.99, 1)$, δηλ ένα ποσοστό 32.8% τιμών στο όριο της αντιστρεψιμότητας. Το φαινόμενο αυτό είναι έντονο στις 50 παρατηρήσεις και εμφανές ακόμα και για $\theta = 0.6$. Πέραν αυτού του αποτελέσματος που καλούν "pile-up effect", οι κατανομές δείχνουν μονότροπες και συμμετρικές γύρω περίπου από την πραγματική τιμή του θ , αλλά οι ερευνητές ισχυρίζονται πως παρά ταύτα θα ήταν δυνατόν να αποδειχθεί ότι η θεωρητική πιθανότητα τιμών ίσων με 1 είναι μηδέν στην πραγματικότητα.

Προς διάψευση του παραπάνω ισχυρισμού, οι Cryer & Ledolter (1981) διαπιστώνουν ότι το ολικό μέγιστο της ακριβούς συνάρτησης συχνά λαμβάνεται στο $\theta = \pm 1$ ακόμα και για μεσαίου μεγέθους δείγματα, ενώ αποτελέσματα παρόμοια με αυτά των Ansley & Newbold για την ιδιάζουσα αυτή συμπεριφορά παρουσιάζονται από τους Cooper & Thompson (1977), Davidson (1981) αλλά και τον Harvey (1993, §3.5). Μάλιστα ο Davidson (1981), γενικεύοντας μια παλιότερη, αδημοσίευτη μελέτη της Kang, εξηγεί πως το pile-up effect προέρχεται από τη μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας, η οποία στις τιμές $\theta = \pm 1$ παρουσιάζει σημεία καμπής, και καθώς αυτά είναι πιθανά ακρότατα της συνάρτησης (εφόσον η πρώτη παράγωγος ως προς θ μηδενίζεται σε αυτά τα σημεία), η κατανομή του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας θα πρέπει να είναι ασυνεχής για $\theta = \pm 1$. Επιλέον, οι Cryer & Ledolter δείχνουν ότι η κατανομή αυτή αποτελείται από δυο τμήματα: ένα συνεχές στο διάστημα $(-1, 1)$ και διακριτές μάζες πιθανότητας στις τιμές -1 και 1 , τις οποίες και υπολογίζουν επακριβώς (αναλυτικά για $T = 2$ και αριθμητικά για $T = 10, 25, 50$ και 100).

Σε συμφωνία με τους Cryer & Ledolter βρίσκονται οι εργασίες των Sargan & Bhargava (1983) και Pesaran (1983). Οι αναλυτικοί υπολογισμοί των Sargan & Bhargava δείχνουν αφ' ενός ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας σε ένα MA(1) σχήμα με $|\theta| = 1$ είναι μεν συνεπής αλλά συγκλίνει με ρυθμό T (όπου T το μέγεθος του δείγματος), και αφ' ετέρου ότι το ανώτατο όριο της πιθανότητας εμφάνισης μη αντιστρέψιμου εκτιμητή σε αυτή την περίπτωση είναι ίση με 0.6575, ενώ ανάλογα είναι τα αποτελέσματά τους για τις περιπτώσεις MA(1) σφαλμάτων σε υποδείγματα παλινδρόμησης. Οι Anderson & Takemura (1986) ισχυρίζονται ότι δεδομένου ενός αντιστρέψιμου MA(1), η πιθανότητα τοπικού μεγίστου της συνάρτησης πιθανοφάνειας στο 1 ή -1 τείνει προς το μηδέν με ρυθμό τουλάχιστον ίσο με T^{-n} , $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, θεμελιώνουν ένα αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο (που αριθμεί όχι λιγότερες από 100 σχέσεις) εντός του οποίου αποδεικνύουν, τόσο στο MA(1) όσο και σε μεγαλύτερου βαθμού σχήματα κινητού μέσου αλλά και μικτά, ότι το pile-up effect οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για μια σειρά με πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πεδίο τιμών μιας διαδικασίας κινητού μέσου (όταν υποθέτουμε άπειρες

παρατηρήσεις). Αυτό μεταφράζεται σε μια θετική πιθανότητα με την οποία λαμβάνονται εκτιμητές που δεν διαφέρουν από τα όρια του πεδίου αντιστρεψιμότητας και καθιστούν την εκτιμηθείσα διαδικασία μη αντιστρέψιμη.

Το pile-up effect, κατά συνέπεια, αποτελεί επιχείρημα που αποδυναμώνει σημαντικά τη στατιστική συμπερασματολογία υπό την έννοια ότι αν η πραγματική διαδικασία που παρήγαγε τα δεδομένα έχει παραμέτρους εντός του πεδίου αντιστρεψιμότητας, αλλά στο πεπερασμένο δείγμα που μελετάται εκτιμηθεί μη αντιστρέψιμο υπόδειγμα τότε οι όποιοι στατιστικοί έλεγχοι πιθανόν να μην είναι έγκυροι. Πρώτον διότι δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωση ενός τοπικού μεγίστου της συνάρτησης πιθανοφάνειας οπότε η επανεκκίνηση της διαδικασίας με διαφορετικές αρχικές τιμές να είναι απαραίτητη για την εύρεση του ολικού μεγίστου. Δεύτερον η εγκυρότητα παραδοσιακών ελέγχων στατιστικής σημαντικότητας ή περιορισμών των παραμέτρων τύπου Wald τίθεται υπό αμφισβήτηση καθώς υποθέτοντας κανονικότητα των εκτιμητών ασυμπτωτικά, ενώ στην πραγματικότητα οι κατανομές τους διαφέρουν, οι περιοχές απόρριψης είναι δυνατόν να βρίσκονται πολύ μακριά από τις πραγματικές. Επίσης έλεγχοι μοναδιαίων ριζών στο πολυώνυμο των τμημάτων κινητού μέσου είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν, ενώ είναι απαραίτητοι σε μια πληθώρα περιπτώσεων, όπως για παράδειγμα (Plosser & Schwert, 1977) για να αποφανθεί ο ερευνητής για το αν έχει υπερεκτιμηθεί ή όχι η τάξη ολοκλήρωσης $I(d)$ της σειράς (overdifferencing)¹.

Έτσι κρίνεται αναγκαίος ο προσδιορισμός των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας όταν το θ πλησιάζει το ± 1 . Προς αυτή την κατεύθυνση οι Tanaka & Satchell (1989) και ο Shephard (1993) παρέχουν προσεγγίσεις της ασυμπτωτικής κατανομής, ενώ οι Davis & Dunsmuir (1996) αποδεικνύουν ότι τόσο ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_{MLE}$ όσο και οι $\hat{\theta}_{LM}$, δηλαδή οι τιμές του θ , όπως αναφέρουν, για τις οποίες η συνάρτηση πιθανοφάνειας λαμβάνει τοπικό μέγιστο πολύ κοντά στη μονάδα, εμφανίζουν διακριτές κατανομές που συγκλίνουν στο $\theta = 1$. Παράλληλα αναπτύσσονται και έλεγχοι μοναδιαίων ριζών όπως ο έλεγχος πολλαπλασιασστή Lagrange που παρουσιάζεται στον Tanaka (1990) και βασίζεται στην πρώτη παράγωγο της συνάρτησης πιθανοφάνειας, αλλά και η στατιστική των Davis *et al.* (1995) (βλ. επίσης και τη συζήτηση στους Brockwell & Davis, 1996, §6.3.2), η εγκυρότητα της οποίας μελετήθηκε πρόσφατα από τους Halkos & Kevork (2007a). Οι τελευταίοι προτείνουν νέες κριτικές τιμές για τη διεξαγωγή του ελέγχου αυτού.

Εν γνώση του pile-up effect και των προβλημάτων που δημιουργεί, ο Vougas (2008) ακολουθεί μια διαφορετική προσέγγιση ως προς την εκτίμηση του θ στο MA(1). Η

¹Η συνηθέστερη περίπτωση εμφάνισης MA(1) με μοναδιαία ρίζα είναι η διαφοράση του σχήματος λευκού θορύβου. Έστω ότι $y_t = \mu + \varepsilon_t$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ είναι μια διαδικασία λευκού θορύβου. Λαμβάνοντας διαφορές έχουμε $\Delta y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ που είναι ένα MA(1) σχήμα με $\theta = -1$. Σε μια τέτοια περίπτωση έλεγχος της στασιμότητας των επιπέδων της y_t αντιστοιχεί ουσιαστικά σε έναν έλεγχο για την αντιστρεψιμότητα της Δy_t . Ανάλογη σχέση διέπει, όπως αναλυτικότερα εξηγούν οι Halkos & Kevork (2007b), το σχήμα του τυχαίου περιπάτου και το σχήμα ARIMA(0, 2, 1).

μέθοδός του είναι ακριβής υπό την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη της την τυχαία συμπεριφορά του σφάλματος ε_0 , αλλά δεν υπόκειται, όπως ισχυρίζεται ο ερευνητής, στο pile-up effect. Αυτό κατορθώνεται μέσω του μετασχηματισμού του MA(1) σε ένα ARMA(1, 2) υπό περιορισμό, της μορφής $y_t - \theta y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta^2 \varepsilon_{t-2}$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Η αντίστοιχη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας έτσι, δεν θα έχει μηδενικές πρώτες παραγώγους στο ± 1 . Τα αποτελέσματα προσομοιώσεων που παρουσιάζει δείχνουν ότι ο νέος αυτός εκτιμητής είναι αποτελεσματικότερος των εκτιμητών της υπό συνθήκη αλλά και της ακριβούς μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος, ενώ παραθέτει και έναν τρόπο για έλεγχο μοναδιαίας ρίζας βάσει απλού t -statistic (όπως και οι Plosser & Schwert, 1977), καθώς και το θεωρητικό υπόβαθρο για τη γενίκευση της μεθόδου σε υψηλότερου βαθμού MA(q) σχήματα.

Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στο παρόν και στο επόμενο κεφάλαιο θα επιχειρηθεί η παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου της εκτίμησης των υποδειγμάτων $ARMA(p, q)$. Στις ενότητες που ακολουθούν έμφαση δίνεται στην περιγραφή τριών ιδιαίτερα διαδεδομένων μεθόδων που είναι συνυφασμένες με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας. Εξετάζονται δυο προσεγγιστικές μέθοδοι, η μέθοδος της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος backcasting των Box & Jenkins καθώς και η μέθοδος της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας. Η βασική αναφορά της ανάλυσής μας θα πρέπει να αναζητηθεί στην παρουσίαση του Hamilton (1994b, §5).

3.1 Το πρόβλημα της εκτίμησης

Ας υποθέσουμε, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του κεφαλαίου 1, ότι μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία $\{y_t\}$ παράγεται από ένα μικτό αυτοπαλίνδρομο σχήμα κινητού μέσου βαθμού (p, q) . Σε αποκλίσεις από τους μέσους, θα είναι:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (3.1)$$

Δεδομένων T παρατηρήσεων από την παραπάνω διαδικασία, που συμβολίζουμε ως διάνυσμα, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$, το πρόβλημα της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας έγκειται στην εύρεση εκτιμητών των άγνωστων παραμέτρων $(\varphi, \vartheta) = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ της (3.1). Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του συνόλου των T παρατηρήσεων θα είναι:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-T/2} |\mathbf{\Omega}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}\right), \quad (3.2)$$

και σε λογαριθμική μορφή:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{\Omega}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}, \quad (3.3)$$

όπου σ^2 η διακύμανση των διαταρακτικών όρων και $\sigma^2 \mathbf{\Omega}$ είναι η $T \times T$ μήτρα διακύμανσης - συνδιακύμανσης του \mathbf{y} .

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων (φ, ϑ) και της διακύμανσης σ^2 προκύπτουν από τη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης (3.2) ή, αντίστοιχα, της (3.3). Η διεθνής βιβλιογραφία βρίθει μεθόδων επίλυσης του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης τόσο προσεγγιστικά όσο και επακριβώς, με το κύριο ενδιαφέρον να

επικεντρώνεται σε δύο όρους των σχέσεων (3.2) και (3.3): τον υπολογισμό της ορίζουσας $|\mathbf{\Omega}|$ και της αντίστροφης $\mathbf{\Omega}^{-1}$ που περιλαμβάνεται στην τετραγωνική μορφή $\mathbf{y}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$. Ανάλογα με τις υποθέσεις και παραδοχές που μπορούμε, ή είμαστε διατεθειμένοι, να κάνουμε σε σχέση με τις κατανομές των παρατηρήσεων (άρα και τη μορφή της μήτρας $\mathbf{\Omega}$) αλλά και τη συνολική επίδραση του όρου $|\mathbf{\Omega}|$ στο μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας ασυμπτωτικά ($T \rightarrow \infty$) οι υπολογισμοί είναι δυνατό να απλοποιηθούν κατά πολύ, αλλά οδηγούμαστε σε προσεγγιστικές λύσεις. Για τον υπολογισμό της ακριβούς συνάρτησης πιθανοφάνειας υπάρχουν επίσης διαθέσιμες μέθοδοι ώστε να διευκολύνεται η αντιστροφή της $T \times T$ μήτρας διακύμανσης - συνδιακύμανσης και ο υπολογισμός της ορίζουσας. Τα βασικότερα σημεία αυτών των μεθόδων θα επιχειρήσουμε να τονίσουμε παρακάτω.

3.2 Υπό συνθήκη εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Η μέθοδος της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας αποσκοπεί στο σχηματισμό της απλούστερης μορφής της συνάρτησης πιθανοφάνειας βάσει υποθέσεων σχετικά με τις κατανομές (α) των πρώτων p παρατηρήσεων καθώς και (β) την επίδραση των σφαλμάτων πριν από το παρατηρημένο δείγμα, δηλαδή τα $\varepsilon_{1-p}, \dots, \varepsilon_0$, για τα οποία εκ πρώτης όψεως δεν υπάρχει διαθέσιμη πληροφορία.

Η συνήθης τακτική υπαγορεύει αφ' ενός οι πρώτες p παρατηρήσεις να θεωρηθούν ως σταθερές και ίσες με την πραγματοποιημένη τιμή τους, και αφ' ετέρου τα σφάλματα να τεθούν ίσα με τις αναμενόμενες τιμές τους, δηλαδή το μηδέν. Εφόσον γίνει αυτό, ο προσδιορισμός των υπόλοιπων κατανομών μπορεί πολύ εύκολα να πραγματοποιηθεί.

Υποδείγματα AR(p) Υποθέτουμε ότι οι T παρατηρήσεις παράγονται από το σχήμα

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\ \text{ή } \varepsilon_t &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Αν οι πρώτες p παρατηρήσεις τεθούν ίσες με την πραγματική τιμή τους, έχουν προσδιοριστεί οι αρχικές συνθήκες ώστε οι υπόλοιπες $T - p$ ποσότητες ε_t να μπορούν να υπολογιστούν διαδοχικά από την αναδρομική σχέση (3.4) στις χρονικές περιόδους $t \geq p + 1$. Σημειωτέον πως υπολογιζόμενα σε αυτή τη μορφή τα ε_t επιδέχονται ερμηνείας ως *καταλοίπων* ή *σφαλμάτων εκτίμησης*. Δεδομένου ότι βρισκόμαστε στη χρονική περίοδο t , το δεύτερο σκέλος της διαφοράς αντιστοιχεί στην υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $E(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) = y_{t|t-1} = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p}$, οπότε η (3.4) γίνεται $\varepsilon_t = y_t - y_{t|t-1}$. Υποθέτοντας ότι $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$p(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right), \quad t \geq p + 1,$$

ενώ το γινόμενο τους αντιστοιχεί στη συνάρτηση πιθανοφάνειας ως

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{y} | \phi, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{T-p} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2\right),$$

ή σε λογαριθμική μορφή

$$\ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\varphi, \sigma^2) = -\frac{T-p}{2} \ln 2\pi - \frac{T-p}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2.$$

Ο όρος $S^*(\varphi) = \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2$ μας είναι γνωστός αφού αποτελεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων και είναι ο μόνος όρος της συνάρτησης πιθανοφάνειας που περιλαμβάνει τις παραμέτρους, συνεπώς το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας ανάγεται σε ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, όπου οι εκτιμητές που προκύπτουν ελαχιστοποιούν την $S^*(\varphi)$.

Υποδείγματα MA(q) Ανάλογες υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε και όταν η $\{y_t\}$ ακολουθεί ένα σχήμα MA(q) της μορφής

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Θέτοντας τα σφάλματα $\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0$ ίσα με μηδέν, η αντίστοιχη σχέση της (3.4) τώρα γίνεται

$$\varepsilon_t = y_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.5)$$

με αρχική συνθήκη $\varepsilon_{1-q} = \dots = \varepsilon_0 = 0$. Συνεπώς, όπως και πριν, σε κάθε $t = 1, \dots, T$ από την (3.5) προσδιορίζουμε τα ε_t και τις κατανομές τους ώστε τελικά να σχηματίσουμε την υπό συνθήκη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$\ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2.$$

Και πάλι οι εκτιμητές προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων, ενώ ο Hamilton (1994b) αναφέρει ότι η παραπάνω σχέση έχει νόημα αν και μόνον αν όλοι οι εκτιμητές βρίσκονται εντός του πεδίου αντιστρεψιμότητας δηλ. οι ρίζες x_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\theta(x) = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $|x_i| > 1 \forall i = 1, \dots, q$. Μάλιστα εξηγεί (§ 5.4) ότι σε αντίθετη περίπτωση, η επίδραση των εν λόγω σφαλμάτων δεν φθίνει προς το μηδέν αλλά σωρεύεται διαχρονικά.

Υποδείγματα ARMA(p, q) Επιστρέφοντας στη γενικευμένη μορφή ενός μικτού σχήματος της σχέσης (3.1), και συνδυάζοντας τα προηγούμενα, τα σφάλματα ε_t υπολογίζονται μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (3.6)$$

Οι αρχικές συνθήκες που απαιτούνται αφορούν τόσο τις αρχικές παρατηρήσεις όσο και τα αρχικά σφάλματα. Επ' αυτού οι Box *et al.* (1994) προτείνουν να θεωρηθούν οι πρώτες p παρατηρήσεις ίσες με την πραγματική τιμή τους και $\varepsilon_p = \dots = \varepsilon_{p+1-q} = 0$, ως αρχικές τιμές, οπότε η σχέση (3.6) προφανώς ισχύει για $t \geq p+1$. Συνεπώς καταλήγουμε, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως, σε μια συνάρτηση της μορφής

$$\ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T-p}{2} \ln 2\pi - \frac{T-p}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2.$$

Αν οι εκτιμητές των παραμέτρων κινητού μέσου είναι αντιστρέψιμοι, η σχέση αυτή και πάλι αποτελεί ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, στοχεύοντας στην ελαχιστοποίηση της $S^*(\varphi, \vartheta) = \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2$.

Το ουσιαστικό πλεονέκτημα της προσεγγιστικής μεθόδου που μόλις περιγράφηκε είναι η απλότητά της και η ευκολία των υπολογισμών που απαιτούνται για τη μεγιστοποίησή της. Αγνοώντας, βάσει λογικών συλλογισμών, τις αρχικές κατανομές των παρατηρήσεων και σφαλμάτων, είδαμε ότι η τετραγωνική μορφή της σχέσης (3.3) λαμβάνει την απλή μορφή μιας συνάρτησης αθροίσματος τετραγώνων¹ εφόσον η μήτρα $\mathbf{\Omega}_{T \times T}$ θεωρείται ότι κατ' αυτόν τον τρόπο προσεγγίζεται ικανοποιητικά, τουλάχιστον για το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος των παρατηρήσεων.

3.3 Η μέθοδος Backcasting

Όταν στο υπό μελέτη υπόδειγμα, υπεισέρχονται όροι κινητού μέσου, όπως σε ένα MA(q) ή ARMA(p, q) σχήμα, είδαμε ότι τη χρονική περίοδο $t = 1$ δεν υπάρχει διαθέσιμη πληροφόρηση για τα σφάλματα πριν από το παρατηρημένο δείγμα. Για να ληφθεί υπόψη η επίδρασή τους κατά την εκτίμηση, είναι αναγκαία η εύρεση τρόπου υπολογισμού ή προσέγγισής τους. Οι Box & Jenkins (βλ. Box *et al.*, 1994, §7.1.4–5), προτείνουν μια μεθοδολογία προς αυτή την κατεύθυνση.

Σύμφωνα με τους συγγραφείς, η ορίζουσα της σχέσης (3.3) είναι σημαντική μόνο για μικρά δείγματα, ενώ για μεγάλα T μπορεί να αγνοηθεί καθώς τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας κυριαρχείται από την τετραγωνική μορφή $\mathbf{y}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$. Σημειώνουν πως εφόσον υπολογιστούν τα σφάλματα πριν από $t = 1$, αυτή προσεγγίζεται επαρκώς από το ακριβές (exact ή unconditional) άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων, $S(\varphi, \vartheta)$.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία έχει ως εξής: Υποθέτοντας ένα υπόδειγμα MA(q), $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$, για κάποιες αρχικές τιμές $\hat{\mu}$ και $\hat{\theta}_i, i = 1, \dots, q$, εκτιμώνται οι διαφορές $\hat{v}_t = Y_t - \hat{\mu}$, για $t = 1, \dots, T$. Ο προσδιορισμός των αρχικών καταλοίπων απαιτεί μια αντίστροφη επαναληπτική διαδικασία (εξ ου και ο όρος backcasting). Για την εκκίνησή της, οι q τιμές των καταλοίπων $\tilde{\varepsilon}_{T+i}, i = 1, \dots, q$, μετά το παρατηρημένο δείγμα τίθενται μηδέν. Έτσι στις χρονικές περιόδους $t = T, \dots, 1, 0, \dots, (1 - q)$ εκτιμώνται τα

$$\tilde{\varepsilon}_t = \hat{v}_t - \hat{\theta}_1\tilde{\varepsilon}_{t+1} - \dots - \hat{\theta}_q\tilde{\varepsilon}_{t+q}.$$

Οι τελευταίες q τιμές από την παραπάνω αναδρομική σχέση, δηλ. τα $\{\tilde{\varepsilon}_0, \dots, \tilde{\varepsilon}_{1-q}\}$, αποτελούν τους εκτιμητές των σφαλμάτων $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}\}$ και χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό του αθροίσματος τετραγώνων $S(\varphi, \vartheta)$. Οι εκτιμητές των παραμέτρων που προκύπτουν, ελαχιστοποιούν το εν λόγω άθροισμα και σε αρκούντως μεγάλα δείγματα παρέχουν μια ικανοποιητική προσέγγιση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας. Μια

¹Χρησιμοποιώντας διανύσματα, θέτουμε $\mathbf{\varepsilon} = (\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_T)'$, όπου $\mathbf{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Συνεπώς το άθροισμα τετραγώνων γράφεται ως το εσωτερικό γινόμενο $S^*(\varphi, \vartheta) = \mathbf{\varepsilon}'\mathbf{\varepsilon}$.

αυστηρότερη θεμελίωση της διαδικασίας καθώς και η γενική περίπτωση μπορεί να βρεθεί στους Box *et al.* (1994).

3.4 Ακριβής εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Στην ενότητα της υπό συνθήκη εκτίμησης είδαμε ότι για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι απαραίτητο να γράψουμε το παρόν σφάλμα ως γραμμικό συνδυασμό προηγούμενων παρατηρήσεων και σφαλμάτων. Η διαδικασία αυτή είναι απλώς μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης μεθοδολογίας που ονομάζεται *ανάλυση σφάλματος πρόβλεψης ή εκτίμησης* (prediction error decomposition), η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι το γινόμενο των ατομικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της κάθε παρατήρησης, δηλ.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{y}) &= p(y_T|y_{T-1}, \dots, y_1)p(y_{T-1}|y_{T-2}, \dots, y_1) \cdots p(y_2|y_1)p(y_1) \\ &= p(y_1) \prod_{t>1} p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1),\end{aligned}$$

και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση θα είναι:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}) = \ln p(y_1) + \sum_{t>1} \ln p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1).$$

Συμβολίζουμε με $y_{t|t-1}$ την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $E(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1)$. Η $y_{t|t-1}$ αποτελεί τη μέση τιμή της δεσμευμένης κατανομής της διαδικασίας $\{y_t\}$, η οποία περιλαμβάνει το σύνολο της πληροφόρησης έως και την παρατήρηση y_{t-1} και συνεπώς (Hamilton, 1994b, Harvey, 1993) θεωρείται άριστος εκτιμητής της y_t , υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης. Ως σφάλμα εκτίμησης ορίζουμε τη διαφορά

$$v_t = y_t - y_{t|t-1}.$$

Η διακύμανσή του θα είναι ίση με την υπό συνθήκη διακύμανση της y_t , δηλ.

$$\text{Var}(v_t) = \text{Var}(y_{t|t-1}).$$

Όσον αφορά τα σφάλματα εκτίμησης, ο Hamilton (1994b) αναφέρει ότι η ακολουθία των $v_t = y_t - E(y_t|y_{t-1}, \dots, y_{t-n})$ συγκλίνει σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE convergence) στην ακολουθία των διαταρακτικών όρων ε_t καθώς $n \rightarrow \infty$. Όταν οι παρατηρήσεις υποθέτουμε ότι προκύπτουν από την κανονική κατανομή, η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να εκφραστεί σε όρους των σφαλμάτων εκτίμησης. Θεωρώντας ότι $\text{Var}(v_t) = \sigma^2 f_t$, $t = 1, \dots, T$ με σ^2 σταθερό και την ποσότητα f_t να εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας γράφεται στη μορφή:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}. \quad (3.7)$$

Η ουσιαστική διαφορά της σχέσης (3.7) από την αντίστοιχη της υπό συνθήκη συνάρτησης είναι ότι εκεί θεωρούμε $f_t = 1$ και $v_t = \varepsilon_t, \forall t$.

Ένας βολικός τρόπος για τη συνέχεια της ανάλυσής μας είναι να θεωρήσουμε ότι οι T διαδοχικές πραγματοποιήσεις της $\{y_t\}$ είναι στοιχεία ενός διάνυσματος $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$ μήκους T . Τότε το \mathbf{y} έχει πολυμεταβλητή κανονική κατανομή της μορφής $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \boldsymbol{\Omega})$. Για το σχήμα ARMA(p, q) της (3.1), εφόσον είναι σε αποκλίσεις από τους μέσους, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ και $\sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$ είναι η συμμετρική, θετικά ορισμένη² μήτρα διακύμανσης - συνδιακύμανσης με στοιχεία $\omega_{ij} = \gamma_s, s = |i - j|$, δηλαδή τις αυτοσυνδιακυμάνσεις (autocovariances) κατά την s χρονική υστέρηση. Συμβολικά:

$$\sigma^2 \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_T \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_T & \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Σχηματίζοντας τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας, η οποία εμπεριέχει όλες τις πληροφορίες από το διαθέσιμο δείγμα, οδηγούμαστε στη σχέση (3.3):

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{y} | \varphi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Omega}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y}.$$

Ο υπολογισμός της παράστασης αυτής είναι εν γένει πολύπλοκος, αφού απαιτείται ο υπολογισμός και η αντιστροφή της $T \times T$ μήτρας $\boldsymbol{\Omega}$ καθώς και της ορίζουσάς της. Μια αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό της $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ είναι η ανάλυση Cholesky ή τροποποιήσεις της³. Στόχος της μεθόδου είναι η εύρεση μοναδικών \mathbf{L} και \mathbf{D} που παραγοντοποιούν την $\boldsymbol{\Omega}$ ώστε:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}', \quad (3.9)$$

όπου \mathbf{L} είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα με μονάδες κατά μήκος της κύριας διαγωνίου και \mathbf{D} μια διαγώνια μήτρα με στοιχεία $d_{ij} = f_t, i = j = t$ και μηδενικά αλλού. Λόγω της μορφής της \mathbf{L} θα είναι $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}'| = 1$, οπότε:

$$|\boldsymbol{\Omega}| = |\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}'| = |\mathbf{L}| |\mathbf{D}| |\mathbf{L}'| = |\mathbf{D}|$$

και επιπλέον, αφού \mathbf{D} διαγώνια,

$$|\mathbf{D}| = \prod_{t=1}^T f_t.$$

Αν $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_T)'$ το $T \times 1$ διάνυσμα σφαλμάτων εκτίμησης, αυτό θα υπολογίζεται από τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{v}.$$

²Μια $n \times n$ συμμετρική μήτρα \mathbf{M} είναι θετικά ορισμένη αν $\mathbf{z}' \mathbf{M} \mathbf{z} > 0$, για κάθε μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

³Μια αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου αυτής υπάρχει στον Hamilton (1994b, §4.4 και 4.5).

Συνεπώς χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, η (3.3) γίνεται

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{LDL}'| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{v}'\mathbf{L}'\mathbf{L}'^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{v} \\ &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{D}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{v}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v} \\ &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t},\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (3.7), έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι αφού η \mathbf{D} είναι διαγώνια, η αντίστροφη της, \mathbf{D}^{-1} , έχει αντίστροφα στοιχεία, δηλαδή $d_{ij}^{(-1)} = 1/f_t$, στην κύρια διαγώνιο και μηδενικά αλλού.

Υποδείγματα AR(p) Στα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, η ακριβής μέγιστη πιθανοφάνεια αντιμετωπίζει τις p πρώτες παρατηρήσεις $\mathbf{y}_p = (y_1, \dots, y_p)'$ ως τυχαίες μεταβλητές με μήτρα διακύμανσης - συνδιακύμανσης $\sigma^2\mathbf{\Omega}_p$ και όχι ως σταθερές ποσότητες, όπως κατά την υπό συνθήκη εκτίμηση. Βάσει αυτών προσδιορίζονται και οι υπόλοιπες δεσμευμένες κατανομές των παρατηρήσεων για $t \geq p+1$, εφόσον απαιτούνται οι p πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Συνεπώς, λόγω του prediction error decomposition, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι το άθροισμα του λογαρίθμου της από κοινού πυκνότητας των p πρώτων παρατηρήσεων $\ln p(\mathbf{y}_p)$ συν την (υπό συνθήκη) συνάρτηση πιθανοφάνειας των υπόλοιπων $T-p$ παρατηρήσεων. Σε ολοκληρωμένη μορφή:

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \sigma^2) &= \ln p(\mathbf{y}_p) + \ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\varphi, \sigma^2) \\ &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{\Omega}_p| - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y}'_p \mathbf{\Omega}_p^{-1} \mathbf{y}_p + S^*(\varphi))\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των $|\mathbf{\Omega}_p|$ και $\mathbf{y}'_p \mathbf{\Omega}_p^{-1} \mathbf{y}_p$ γίνεται με άμεσο τρόπο με τη μέθοδο των Galbraith & Galbraith, όπως αυτή περιγράφεται στον Hamilton (1994b, §5.3).

Υποδείγματα MA(q) Στα υποδείγματα κινητού μέσου η παραγοντοποίηση $\mathbf{\Omega} = \mathbf{LDL}'$ είναι απαραίτητη για ολόκληρη την $\mathbf{\Omega}$, υλοποιείται όμως σχετικά απλά δεδομένης της μορφής των αυτοσυνδιακυμάνσεων, οι οποίες μηδενίζονται μετά την q χρονική υστέρηση, εφόσον για ένα MA(q) ισχύει

$$\gamma_s = \begin{cases} \sigma^2(\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-s}), & s = 0, \dots, q \\ 0, & s > q, \end{cases}$$

και $\theta_0 = 1$. Κατά συνέπεια, η $\mathbf{\Omega}$ είναι $(2q+1)$ -διαγώνια μήτρα και οι \mathbf{L} και \mathbf{D} υπολογίζονται εύκολα (Hamilton, 1994b, σελ.130–131), ώστε να σχηματιστεί η prediction error decomposition μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Υποδείγματα ARMA(p, q) Στη γενική περίπτωση, είναι σχεδόν ανέφικτο να αποκτηθούν κλειστές αναλυτικές λύσεις για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, λόγω της ιδιαίτερα πολύπλοκης μορφής της $\sigma^2\mathbf{\Omega}$ (για το ARMA(1, 1) βλέπε μεταξύ άλλων Tiao & Ali (1971) ή Box *et al.* (1994)), και κατά συνέπεια ο προσδιορισμός των v_t και f_t σε κάθε χρονική στιγμή επιτυγχάνεται σε διαδοχικά βήματα (μια αποτελεσματική προσέγ-

γηση είναι αυτή του Ansley, 1979), ενώ η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται αριθμητικά. Μια εναλλακτική μεθοδολογία προσδιορισμού των v_t και f_t ως παρελκόμενο της χρήσης του Kalman filter παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 3.1 Υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανοφάνειας του MA(1)

Θεωρούμε το σχήμα $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Αν σε κάθε χρονική στιγμή t ήμασταν σε θέση να γνωρίζουμε το σφάλμα ε_{t-1} , τότε ολόκληρη η ακολουθία $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T\}$ θα μπορούσε να κατασκευαστεί διαδοχικά από τις παρατηρήσεις $\{y_1, \dots, y_T\}$, μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$\varepsilon_t = y_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Αν θέσουμε ως αρχική συνθήκη $\varepsilon_0 = 0$, αυτό είναι εφικτό, και δεδομένου ότι η δεσμευμένη κατανομή της παρατήρησης y_t έχει τότε μέση τιμή $\theta\varepsilon_{t-1}$ και διακύμανση σ^2 , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάθε παρατήρησης θα είναι

$$p(y_t|\varepsilon_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

και αντίστοιχα η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για ολόκληρο το δείγμα, δεδομένου ότι $\varepsilon_0 = 0$, είναι:

$$\ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (y_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2,$$

όπου το άθροισμα τετραγώνων είναι το $S^*(\vartheta) = \sum_{t=1}^T (y_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2$. ■

Παράδειγμα 3.2 Υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανοφάνειας του ARMA(1, 1)

Αντίστοιχα, εξετάζουμε το μικτό σχήμα $y_t = \phi y_t + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Αν η y_1 θεωρηθεί σταθερά, τότε η αναδρομική σχέση υπολογισμού των σφαλμάτων γίνεται:

$$\varepsilon_t = y_t - \phi y_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Επιβάλλοντας ως αρχική συνθήκη ότι $\varepsilon_1 = 0$, η σχέση αυτή έχει νόημα για $t = 2, \dots, T$, και η δεσμευμένη κατανομή της y_t θα έχει μέση τιμή $\phi y_t + \theta\varepsilon_{t-1}$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάθε παρατήρησης θα είναι τώρα

$$p(y_t|y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \phi y_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

και η υπό συνθήκη συνάρτηση πιθανοφάνειας η

$$\ln \mathcal{L}^*(\mathbf{y}|\phi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T-1}{2} \ln 2\pi - \frac{T-1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \phi y_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.3 Ακριβής συνάρτηση πιθανοφάνειας του MA(1)

Το σχήμα $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ έχει $\gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma^2$, $\gamma_1 = \theta\sigma^2$ και $\gamma_s = 0$, $\forall s \geq 2$. Συνεπώς η μήτρα $\mathbf{\Omega}$ θα είναι της μορφής:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 + \theta^2, & i = j \\ \theta, & j = i \pm 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & \theta & 0 & \dots & 0 \\ \theta & 1 + \theta^2 & \theta & \dots & 0 \\ 0 & \theta & 1 + \theta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \theta^2 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με τον Hamilton (1994b), η παραγοντοποίηση $\mathbf{\Omega} = \mathbf{LDL}'$ είναι τέτοια ώστε (α) η διαγώνια \mathbf{D} να έχει στοιχεία

$$d_{ij} = f_t = \frac{\theta^{2t} + \theta^{2(t-1)} + \dots + \theta^2 + 1}{\theta^{2(t-1)} + \dots + \theta^2 + 1}, \quad i = j = t, \quad \text{και μηδέν αλλού,}$$

(σχέση [4.5.19], σελ. 96) ενώ (β) η \mathbf{L} είναι δισδιαγώνια της μορφής:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \theta \frac{\theta^{2(t-2)} + \dots + \theta^2 + 1}{\theta^{2(t-1)} + \dots + \theta^2 + 1} = \frac{\theta}{f_{t-1}}, & j = i - 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(σχέση [4.5.18], σελ. 95). Η ποσότητα του αριθμητή στην f_t δεν είναι παρά το άθροισμα των $t + 1$ όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο θ^2 ενώ αντίστοιχα στον παρονομαστή έχουμε το άθροισμα των t όρων αυτής, άρα:

$$f_t = \frac{\sum_{i=0}^t \theta^{2i}}{\sum_{i=0}^{t-1} \theta^{2i}} = \begin{cases} \frac{1 - \theta^{2(t+1)}}{1 - \theta^{2t}}, & |\theta| \neq 1, \\ \frac{t+1}{t}, & |\theta| = 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Το prediction error decomposition προκύπτει από τη λύση του συστήματος T εξισώσεων $\mathbf{v} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}$, με πρώτη εξίσωση $v_1 = y_1$ και t -οστή την

$$v_t = y_t - \frac{\theta}{f_{t-1}}v_{t-1}, \quad (3.11)$$

που στους χρόνους $t = 1, \dots, T$ αποτελεί και την αναδρομική σχέση υπολογισμού των T σφαλμάτων εκτίμησης. Αξίζει παρακάτω να επισημάνουμε τα εξής:

- Τόσο κατά την υπό συνθήκη όσο και στην ακριβή εκτίμηση, το πρώτο σφάλμα εκτίμησης είναι ίσο με y_1 . Η θεμελιώδης διαφορά των δυο μεθόδων βρίσκεται στο ότι αν αγνοηθεί η τυχαία κατανομή του ε_0 και θεωρηθεί ότι $\varepsilon_0 = 0$ άρα και $f_t = 1$, θα είναι $\text{Var}(y_1) = \text{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$, ενώ αν ληφθεί υπόψη, $\text{Var}(y_1) = \gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma^2$.

- Όταν $|\theta| < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f_t = 1$ και $\text{Var}(v_t) \rightarrow \sigma^2$, οπότε η διακύμανση των σφαλμάτων εκτίμησης θα συγκλίνει σε αυτή των ε_t , ενώ ο συντελεστής θ/f_{t-1} της (3.11) θα συγκλίνει στο θ , και ο εκτιμητής θα είναι άριστος.
- Όταν $|\theta| > 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f_t = \theta^2$ και $\text{Var}(v_t) \rightarrow \theta^2\sigma^2$, και ο συντελεστής θ/f_{t-1} θα συγκλίνει στο $1/\theta$. Παρόλα αυτά, τα v_t θα είναι ίδια με αυτά που θα προέκυπταν στην προηγούμενη περίπτωση, άρα και το μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Συνεπώς, καθώς τα MA(1) σχήματα έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για θ αλλά και για $1/\theta$, και ομοίως για σ^2 και $\theta^2\sigma^2$, αντικαθιστώντας το θ με $\tilde{\theta} = 1/\theta$, και το σ^2 με $\tilde{\sigma}^2 = \theta^2\sigma^2$, ο εκτιμητής θα ήταν και πάλι άριστος.⁴
- Στην ακραία περίπτωση που $|\theta| = 1$, η ποσότητα $f_t = (t + 1)/t$ τείνει και πάλι προς τη μονάδα αλλά με αργό ρυθμό καθώς $t \rightarrow \infty$, ενώ και η διακύμανση των v_t θα συγκλίνει στο σ^2 , ώστε μέσω του prediction error decomposition ένας εκτιμητής ακριβώς ίσος με 1 ή -1 , να θεωρείται άριστος σε όρους ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος. ■

⁴Ως γενική παρατήρηση αναφέρεται επίσης ότι οι εκτιμητές που μεγιστοποιούν τη συνάρτηση πιθανοφάνειας της μορφής (3.7), θα είναι ίδιοι για οποιαδήποτε σταθερά $k \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\tilde{\sigma}^2 = k\sigma^2$.

Εκτίμηση Ακριβούς Μέγιστης Πιθανοφάνειας με το Kalman filter

Το παρόν κεφάλαιο φιλοδοξεί να κάνει μια εισαγωγή στη μεθοδολογία των State – Space¹ υποδειγμάτων και την χρήση τους στο πρόβλημα της εκτίμησης υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας. Η μεθοδολογία αυτή παρέχει ένα ευέλικτο πλαίσιο και εργαλεία, με τα οποία επιλύονται προβλήματα στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου και έχει τις ρίζες της στη Μηχανική.

Όλα τα γραμμικά και πολλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι δυνατόν να εξεταστούν στα πλαίσια αυτής της μεθοδολογίας, περιλαμβανομένων υποδειγμάτων με χρονικά μεταβαλλόμενους συντελεστές (time varying coefficients models), ARMA και ARIMA υποδείγματα καθώς και μοντέλα με μη παρατηρήσιμους όρους (unobserved components models). Η μεθοδολογία αυτή, στην οικονομική επιστήμη βρίσκει αναρίθμητες εφαρμογές, και ιδιαίτερα στην ανάλυση χρονολογικών σειρών επιτρέπει τη διάσπαση μιας σειράς στις επιμέρους συνιστώσες της τάσης, εποχικότητας, κυκλικότητας και τυχαιότητας (τα λεγόμενα *διαρθρωτικά υποδείγματα* ή structural models)² ενώ στα υποδείγματα ARMA και ARIMA διευκολύνει την εκτίμηση με τη μέθοδο της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας.

Προς αυτή την κατεύθυνση, ο πρώτος που χρονικά φαίνεται να έδειξε ενδιαφέρον για την αναπαράσταση των μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών ARMA ως state – space υποδείγματα είναι ο Akaike (1974a, 1975). Οι Gardner *et al.* (1980), Pearlman (1980) αλλά και ο Melard (1984) ανέπτυξαν αλγορίθμους που χρησιμοποιούν τη state – space μορφή των ARMA υποδειγμάτων, και μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας που ονομάζεται Kalman filter παρέχουν εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων. Οι Harvey & Phillips (1979) και Kohn & Ansley (1985) γενικεύουν τη χρήση του Kalman filter και σε υποδείγματα παλινδρόμησης με κατάλοιπα ARMA. Επιπλέον η εκτίμηση υποδειγμάτων ARMA για σειρές με ελλειπείς παρατηρήσεις είναι επίσης δυνατό να υλοποιηθεί με τη

¹ Αν και ο όρος “state – space” θα μπορούσε να αποδοθεί ως “χώρος καταστάσεων” στα ελληνικά, θα προτιμηθεί η χρήση του αγγλικού όρου

² Μια κατατοπιστική εισαγωγή σε αυτά τα υποδείγματα με έμφαση σε εφαρμογές αποτελεί το βιβλίο των Commandeur & Koopman (2007), ενώ μια σαφώς λεπτομερέστερη ανάλυση μπορεί να βρεθεί στους Durbin & Koopman (2001), Harvey (1989) και στη διάσημη μελέτη περίπτωσης των Harvey & Durbin (1986).

μεθοδολογία αυτή (βλ. μεταξύ άλλων Jones (1980), Kohn & Ansley (1986)). Τέλος ο Lütkepohl (2005) παρουσιάζει ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο εφαρμογής της State – Space μεθοδολογίας κατά την εκτίμηση συστημάτων εξισώσεων VARMA. Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφεται η γενική ιδέα της State – Space αναπαράστασης, καθώς και η χρήση του Kalman filter στην εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

4.1 Η State – Space Μορφή Υποδειγμάτων ARMA

Κατά τα γνωστά το μονομεταβλητό μικτό σχήμα ARMA(p, q) για μια (στάσιμη) χρονολογική σειρά Y_t συμβολίζεται ως

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ή σε αποκλίσεις από τους μέσους

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

με $y_t = Y_t - \mu$, όπου $\mu = \delta / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ ο στάσιμος μέσος της σειράς, και ισχύει ότι $\phi_i = 0$, όταν $i > p$ και $\theta_j = 0$, όταν $j > q$. Οι διαταρακτικοί όροι ε_t είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, κανονικά κατανεμόμενες τυχαίες μεταβλητές με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2 (λευκός θόρυβος).

Τέτοιου είδους στοχαστικά υποδείγματα χρονολογικών σειρών, είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν αλγεβρικά ως state – space υποδείγματα συσχετίζοντας τις T παρατηρήσεις της σειράς y_t με ένα διάνυσμα α_t διάστασης $m \times 1$, το διάνυσμα κατάστασης (state vector), σύμφωνα με το παρακάτω γενικό σύστημα εξισώσεων:

$$y_t = \mathbf{Z}\alpha_t, \quad (4.1\alpha)$$

$$\alpha_t = \mathbf{T}\alpha_{t-1} + \mathbf{R}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (4.1\beta)$$

για $t = 1, \dots, T$. Η εξίσωση (4.1α) καλείται *εξίσωση μέτρησης* (measurement equation) ενώ η (4.1β) *εξίσωση μετάβασης* (transition equation) ή *εξίσωση κατάστασης* (state equation). Ο συντελεστής \mathbf{Z} είναι διάνυσμα διάστασης $1 \times m$, ο \mathbf{T} είναι μήτρα διαστάσεων $m \times m$ και ο \mathbf{R} ένα $m \times 1$ διάνυσμα. Οι συντελεστές αυτοί αναφέρονται και ως *μήτρες του συστήματος* (system matrices), τα στοιχεία των οποίων είναι ανεξάρτητα του χρόνου (time invariant) εφόσον οι παρατηρήσεις y_t είναι μια στάσιμη στη συνδιακύμανση χρονολογική σειρά, και – επειδή το α_t είναι, εν γένει, μη παρατηρήσιμο – καλούνται *υπερπαράμετροι*.

Η αρχική υπόθεση ότι τα σφάλματα ε_t παράγονται από μια διαδικασία λευκού θορύβου πρέπει να ευσταθεί και εδώ, ενώ επιπλέον ορίζεται το αρχικό $m \times 1$ διάνυσμα κατάστασης α_0 με μέσο $\hat{\alpha}_0$ και μήτρα διακύμανσης - συνδιακύμανσης \mathbf{P}_0 έτσι ώστε $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\alpha}_0, \mathbf{P}_0)$, το οποίο θεωρείται ανεξάρτητο των σφαλμάτων $\varepsilon_t, \forall t = 1, \dots, T$.

Παρόλο που υπάρχουν πιο γενικές διατυπώσεις των δυναμικών γραμμικών ή state – space υποδειγμάτων, η παραπάνω εκδοχή των εξισώσεων μέτρησης και μετάβασής τους αρκεί για τους σκοπούς της συγκεκριμένης εργασίας. Η γενικευμένη (και πιθανόν

πολυμεταβλητή) περίπτωση παρουσιάζεται αναλυτικά στους Harvey (1989, 1993, §4) και Hamilton (1994a,b, §13) στους οποίους βασίζεται και η παρούσα ανάλυση.

Παρακολουθώντας περαιτέρω τον Harvey (1993, §4.4), αν τεθεί $m = \max(p, q + 1)$, η γενική μορφή ενός ARMA(p, q) υποδείγματος μπορεί να γραφεί ως

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_m y_{t-m} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_{m-1} \varepsilon_{t-m+1} \quad (4.2)$$

Ορίζοντας τους \mathbf{Z} , \mathbf{T} και \mathbf{R} κατάλληλα ώστε

$$\mathbf{Z} = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|cccc} \phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \phi_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{m-2} \\ \theta_{m-1} \end{pmatrix},$$

τότε το γραμμικό δυναμικό σύστημα (4.1) λαμβάνει την παρακάτω μορφή, που αποτελεί μια state – space αναπαράσταση του μονομεταβλητού υποδείγματος ARMA(p, q):

$$y_t = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \boldsymbol{\alpha}_t \quad (4.3\alpha)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \phi_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{m-2} \\ \theta_{m-1} \end{pmatrix} \varepsilon_t \quad (4.3\beta)$$

Από την εξίσωση μέτρησης (4.3α) απουσιάζει ο διαταρακτικός όρος, ενώ η απλή μορφή του παραπάνω συστήματος επιτρέπει άμεσα την εξαγωγή το αρχικού υποδείγματος (4.2) ως το πρώτο στοιχείο του $\boldsymbol{\alpha}_t$. Αυτό μπορεί πολύ εύκολα να γίνει λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα της εξίσωσης μετάβασης (4.3β) προς τα πίσω. Σε περίπτωση απουσίας κάποιου αυτοπαλίνδρομου τμήματος ή τμήματος κινητού μέσου, τίθεται απλώς το 0 στη θέση του ϕ_i ή θ_j αντίστοιχα.

Τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω προφανώς επεκτείνονται και στην περίπτωση ενός ολοκληρωμένου σχήματος ARIMA(p, d, q). Αν θεωρήσουμε την σε διαφορές μορφή, $w_t = \sum_{i=1}^p \phi_i w_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$, $w_t = \Delta^d y_t$, ισχύει ακριβώς η $\max(p, q + 1)$ αναπαράσταση της σχέσης (4.2) θέτοντας όπου y_t το w_t . Μια εναλλακτική και πιο “φυσιολογική” —ως προς τη διενέργεια προβλέψεων— προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε την ανοιχτή μορφή του υποδείγματος λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε ARIMA(p, d, q) αντιστοιχεί σε ένα μη στάσιμο ARMA($p + d, q$). Τότε μπορούμε (βλ. παράδειγμα 4.5) να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση όπου $m = \max(p + d, q + 1)$ ως προς y_t .

Παραδείγματα Υποθέτοντας ότι $\alpha_t = (\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{m,t})'$ είναι το $m \times 1$ διάνυσμα κατάστασης, είναι πλέον εύκολο να αναπαρασταθούν ορισμένα υποδείγματα όπως παρακάτω:

Παράδειγμα 4.1 *State – Space αναπαράσταση του υποδείγματος AR(2)*

$$y_t = (1 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_{1,t} = \phi_1 \alpha_{1,t-1} + \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \phi_2 \alpha_{1,t-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,t} = \phi_1 \alpha_{1,t-1} + \phi_2 \alpha_{1,t-2} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \phi_2 \alpha_{1,t-1} \end{cases}$$

άρα:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix}, \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$\mathbf{Z} = (1 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.2 *State – Space αναπαράσταση του υποδείγματος MA(1)*

$$y_t = (1 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_{1,t} = \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \theta \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,t} = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \theta \varepsilon_t \end{cases}$$

άρα:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

$$\mathbf{Z} = (1 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.3 *State – Space αναπαράσταση του υποδείγματος MA(2)*

$$y_t = (1 \ 0 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_{1,t} = \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \alpha_{3,t-1} + \theta_1 \varepsilon_t \\ \alpha_{3,t} = \theta_2 \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,t} = \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_t \\ \alpha_{3,t} = \theta_2 \varepsilon_t \end{cases}$$

άρα:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \theta_1 \varepsilon_t \\ \theta_2 \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2},$$

$$\mathbf{Z} = (1 \ 0 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.4 State – Space αναπαράσταση του υποδείγματος ARMA(1, 1)

$$y_t = (1 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_{1,t} = \phi \alpha_{1,t-1} + \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \theta \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,t} = \phi \alpha_{1,t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \theta \varepsilon_t \end{cases}$$

άρα:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

$$\mathbf{Z} = (1 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 4.5 State – Space αναπαράσταση του υποδείγματος ARIMA(1, 1, 1)

(α) Η σε διαφορές μορφή του υποδείγματος είναι η

$$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

και συνεπώς έχουμε την παρακάτω State – Space αναπαράσταση ως προς Δy_t :

$$\Delta y_t = (1 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

με

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \Delta y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = (1 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}.$$

(β) Θεωρώντας την ανοιχτή μορφή του υποδείγματος, δηλαδή

$$y_t = \xi_1 y_{t-1} + \xi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

με $\xi_1 = 1 + \phi$ και $\xi_2 = -\phi$, προκύπτει ένα ARMA(2, 1) και η αντίστοιχη State – Space αναπαράσταση ως προς y_t θα είναι:

$$y_t = (1 \ 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_{1,t} = \xi_1 \alpha_{1,t-1} + \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \xi_2 \alpha_{1,t-1} + \theta \varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,t} = \xi_1 \alpha_{1,t-1} + \xi_2 \alpha_{1,t-2} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \alpha_{2,t} = \xi_2 \alpha_{1,t-1} + \theta \varepsilon_t \end{cases}$$

άρα:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \xi_2 y_{t-1} + \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = (1 \ 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Άλλες αναπαραστάσεις Η state – space αναπαράσταση των εξισώσεων (4.3), που αποδίδεται στον Harvey, για ένα σχήμα ARMA(p, q) δεν είναι μοναδική, καθώς έχουν προταθεί και υιοθετηθεί στη βιβλιογραφία και άλλες. Η πρώτη αναπαράσταση που προτάθηκε από τον Akaike (1974a, 1975), είναι ίδιας διάστασης $m = \max(p, q + 1)$ και μορφής, αλλά αξιοποιεί τους συντελεστές ψ_i της κατά Wold παράστασης του υποδείγματος. Το διάνυσμα \mathbf{Z} είναι και πάλι $\mathbf{Z} = (1, 0, \dots, 0)$, ενώ η μήτρα \mathbf{T} και το \mathbf{R} γίνονται:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \phi_m & \phi_{m-1} & \phi_{m-2} & \cdots & \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{m-2} \\ \psi_{m-1} \end{pmatrix},$$

Η παραπάνω αναπαράσταση υιοθετείται και από τους Box *et al.* (1994). Ο Hamilton (1994a,b), από την άλλη, θεωρεί και αυτός ότι $m = \max(p, q + 1)$ και ίδιο σύστημα εξισώσεων όπου όμως $\mathbf{Z} = (1, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $\mathbf{T}_* = \mathbf{T}'$, η ανάστροφη της μήτρας της σχέσης (4.3), και $\mathbf{R} = (1, 0, \dots, 0)'$. Μια κάπως διαφορετική αναπαράσταση διάστασης $m = \max(p, q)$, οφείλεται στον Pearlman (1980). Γράφει την εξίσωση μέτρησης ως $y_t = \mathbf{Z} \alpha_t + \varepsilon_t$ και την εξίσωση μετάβασης ως $\alpha_{t+1} = \mathbf{T} \alpha_t + \mathbf{R} \varepsilon_t$ και θεωρεί ότι $\mathbf{R} = (\phi_1 + \theta_1, \dots, \phi_m + \theta_m)'$, ενώ οι \mathbf{Z} και \mathbf{T} παραμένουν όπως και στον Harvey. Σε κάθε περίπτωση, όποια αναπαράσταση και αν επιλεγεί, εφόσον εκφράζει την ίδια στοχαστική διαδικασία, θα δίνει και τα ίδια αποτελέσματα.

4.2 Kalman filter

Εφόσον βρεθεί η state – space αναπαράσταση του προς εκτίμηση υποδείγματος, οι άγνωστες παράμετροί του μπορούν να υπολογιστούν μέσω του Kalman filter. Το φίλτρο Kalman, που αναπτύχθηκε αρχικά από τους Kalman (1960) και Kalman & Bucy (1961), είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος που επιτρέπει αναδρομικά τον υπολογισμό του διανύσματος κατάστασης α_t , δεδομένων των παρατηρήσεων y_1, \dots, y_T . Υποθέτοντας κανονικές κατανομές, ο εκτιμητής της κατάστασης που παράγεται από το φίλτρο Kalman θα είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\hat{\alpha}_{t|s} = E(\alpha_t | y_s, \dots, y_1), s < t$. Το Kalman filter επίσης παρέχει και την $m \times m$ μήτρα της υπό συνθήκη διακύμανσης - συνδιακύμανσης, $\mathbf{P}_{t|s} = \text{Var}(\alpha_t | y_s, \dots, y_1), s < t$, που εξυπηρετεί ως μέτρο του σφάλματος εκτίμησης ή αβεβαιότητας της πρόβλεψης. Η $\mathbf{P}_{t|s}$ ονομάζεται επίσης και *μήτρα μέσου τετραγωνικού σφάλματος* (mean square error matrix, MSE) του $\hat{\alpha}_{t|s}$. Όταν $s = t$ θα συμβολίζεται $\hat{\alpha}_{t|t} = \hat{\alpha}_t$ και αντίστοιχα $\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_t$, όπου $\hat{\alpha}_t$ νοείται ως ο καλύτερος εκτιμητής του διανύσματος κατάστασης α_t , ο οποίος περιέχει όλες τις πληροφορίες έως και την παρατήρηση y_t . Δηλαδή ο εκτιμητής $\hat{\alpha}_t$ θα ελαχιστοποιεί τη μήτρα \mathbf{P}_t για κάθε α_t .

Στο χρόνο $t < T$ η διαδικασία που ακολουθείται ονομάζεται *φίλτρο* (filtering). Ο σκοπός του φίλτρου είναι η ανανέωση ή ενημέρωση της διαθέσιμης πληροφόρησης σχετικά με το διάνυσμα κατάστασης καθώς η νέα παρατήρηση y_t γίνεται διαθέσιμη. Το Kalman filter υλοποιείται σε τρία στάδια: αυτό της *αρχικοποίησης*, όπου τίθενται οι αρχικές συνθήκες για το διάνυσμα κατάστασης και τη διακύμανσή του, το ενδιάμεσο στάδιο της *a priori εκτίμησης*, όπου γίνεται μια εκ των προτέρων εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης βάσει προηγούμενων μόνο παρατηρήσεων και το τελικό στάδιο της *a posteriori εκτίμησης*, όπου επεξεργάζεται η παρούσα παρατήρηση και διορθώνεται ή ενημερώνεται εκ των υστέρων ο εκτιμητής που προέκυψε από το προηγούμενο στάδιο.

Προφανώς όταν $t > T$ ο εκτιμητής $\hat{\alpha}_{t|T} = E(\alpha_t | y_T, \dots, y_1)$ θα είναι απλώς η *πρόβλεψη* (forecast) για το α_t βάσει των πληροφοριών έως και το χρόνο T (σχήμα 4.1).

4.2.1 Φίλτρο

Αφού στα στάσιμα μονομεταβλητά υποδείγματα η διακύμανση των σφαλμάτων είναι σταθερή και ίση με σ^2 , τόσο οι Gardner *et al.* (1980) όσο και ο Harvey (1989, 1993) προτείνουν η διακύμανση του διανύσματος κατάστασης να τεθεί *ανάλογη* του σ^2 , κατά συνέπεια ορίζεται:

$$\text{Var}(\alpha_t | y_s, \dots, y_1) = E\left(\left(\alpha_{t|s} - \hat{\alpha}_{t|s}\right)\left(\alpha_{t|s} - \hat{\alpha}_{t|s}\right)'\right) = \sigma^2 \mathbf{P}_{t|s} \quad (4.4)$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση θα λάβουμε

$$\sigma^2 \mathbf{P}_{t|s} = \sigma^2 \mathbf{T} \mathbf{P}_{t-1|s} \mathbf{T}' + \sigma^2 \mathbf{R} \mathbf{R}' \Rightarrow \mathbf{P}_{t|s} = \mathbf{T} \mathbf{P}_{t-1|s} \mathbf{T}' + \mathbf{R} \mathbf{R}', \quad (4.5)$$

που καθιστά σαφές ότι το φίλτρο Kalman μπορεί να υλοποιηθεί ανεξάρτητα του σ^2 .

Αρχικοποίηση Οι αρχικές συνθήκες που τίθενται είναι απλώς η χωρίς περιορισμό μέση τιμή του διανύσματος κατάστασης καθώς και η χωρίς περιορισμό διακύμανσή του. Λαμβάνοντας αναμενόμενης τιμές στη σχέση (4.1β):

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_{1|0} = \mathbf{0}, \quad (4.6)$$

ενώ για την αρχική διακύμανση αρκεί να υπολογίσουμε τη σχέση³:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{1|0} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{E}(\alpha_t \alpha_t'). \quad (4.7)$$

Από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η state – space μορφή για τα υποδείγματα που θα μελετήσουμε, είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι το πρώτο στοιχείο της μήτρας \mathbf{P}_0 θα είναι ίσο με γ_0/σ^2 όπου το γ_0 αντιπροσωπεύει και την χωρίς περιορισμό διακύμανση της σειράς y_t όταν αυτή ακολουθεί ένα στάσιμο ARMA(p, q) σχήμα.

A priori εκτίμηση Στο χρόνο $t = 2, 3, \dots$ και μέχρι $t - 1$, όταν θα έχουν υπολογιστεί τα $\hat{\alpha}_{t-1}$ και \mathbf{P}_{t-1} , γίνεται πρόβλεψη του εκτιμητή $\hat{\alpha}_t$ ως η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή του βάσει των πληροφοριών έως και τη χρονική στιγμή $t - 1$, δηλαδή

$$\hat{\alpha}_{t|t-1} = \mathbf{T}\hat{\alpha}_{t-1}, \quad (4.8\alpha)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{T}' + \mathbf{R}\mathbf{R}' \quad (4.8\beta)$$

Οι εξισώσεις της (4.8) είναι οι εξισώσεις πρόβλεψης (prediction equations) ή *a priori* εκτίμησης και προκύπτουν βάσει των (4.1β) και (4.5). Έμμεσα μπορεί να υπολογιστεί και ο εκτιμητής της y_t ως η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\hat{y}_{t|t-1} = \mathbf{E}(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1)$. Από τη σχέση (4.1α) μετά από αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\hat{y}_{t|t-1} = \mathbf{Z}\hat{\alpha}_{t|t-1}. \quad (4.9)$$

Με δεδομένο τον εκτιμητή $\hat{y}_{t|t-1}$ σε κάθε χρόνο υπολογίζεται και το σφάλμα πρόβλεψης v_t ως

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - \hat{y}_{t|t-1} \\ &= \mathbf{Z}\alpha_{t|t-1} - \mathbf{Z}\hat{\alpha}_{t|t-1} = \mathbf{Z}(\alpha_{t|t-1} - \hat{\alpha}_{t|t-1}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

Τα σφάλματα v_t καλούνται και *καινοτομίες* πεπερασμένου δείγματος (finite sample innovations) εφόσον εμπεριέχουν νέα πληροφόρηση βάσει της εξίσωσης μέτρησης που δεν ήταν διαθέσιμη μέσω των προηγούμενων παρατηρήσεων. Προφανώς απαιτείται $\mathbf{E}(v_t) = 0$, ενώ η διακύμανση των καινοτομιών θα πρέπει να ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \text{Var}(v_t) &= \mathbf{E}\left((y_t - \hat{y}_{t|t-1})^2\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{Z}(\alpha_{t|t-1} - \hat{\alpha}_{t|t-1})(\alpha_{t|t-1} - \hat{\alpha}_{t|t-1})' \mathbf{Z}'\right) \\ &= \mathbf{Z} \mathbf{E}\left((\alpha_{t|t-1} - \hat{\alpha}_{t|t-1})(\alpha_{t|t-1} - \hat{\alpha}_{t|t-1})'\right) \mathbf{Z}' = \sigma^2 \mathbf{Z}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}'. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Αν επιπλέον τεθεί $f_t = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}'$, και χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα $\text{Var}(\hat{y}_{t|t-1}) = \text{Var}(v_t)$, η σχέση (4.11) γίνεται

$$\text{Var}(\hat{y}_{t|t-1}) = \text{Var}(v_t) = \sigma^2 f_t, \quad (4.12)$$

³Για έναν πιο αυστηρό ορισμό και γενικεύσεις πάνω στην αρχικοποίηση βλ. Harvey (1989, σελ. 121) καθώς και Gardner *et al.* (1980) ή Hamilton (1994a,b).

με το f_t να είναι βαθμωτή ποσότητα που “επιλέγει” το πρώτο στοιχείο της $\mathbf{P}_{t|t-1}$ κάθε φορά. Συνοψίζοντας, οι καινοτομίες v_t είναι τυχαίες μεταβλητές που κατανομούνται κανονικά με μέσο 0 και διακύμανση $\sigma^2 f_t$ ή συμβολικά $v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 f_t)$ και κατ’ επέκταση η δεσμευμένη κατανομή της y_t θα είναι της μορφής $y_t \sim \mathcal{N}(\hat{y}_{t|t-1}, \sigma^2 f_t)$.

A posteriori εκτίμηση Στο τελικό στάδιο του φίλτρου η εξέλιξη του εκτιμητή $\hat{\alpha}_t$ και της μήτρας διακύμανσης - συνδιακύμανσης \mathbf{P}_t έχει ως εξής: μόλις μια νέα παρατήρηση γίνει διαθέσιμη, ο εκτιμητής του διάνυσματος κατάστασης ενημερώνεται εκ των υστέρων μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}' \frac{v_t}{f_t} \quad (4.13\alpha)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}' \mathbf{Z} \mathbf{P}_{t|t-1} \frac{1}{f_t}. \quad (4.13\beta)$$

Οι (4.13) καλούνται *εξισώσεις ενημέρωσης* (updating equations) και μαζί με τις εξισώσεις πρόβλεψης (4.8) αποτελούν το φίλτρο Kalman. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επεξεργαστούν όλες οι διαθέσιμες παρατηρήσεις δηλ. για $t = 1, 2, \dots, T$, όπου και τερματίζει. Μαζί με τον εκτιμητή του α_t , έχουν υπολογιστεί και T καινοτομίες v_t και οι αντίστοιχες διακυμάνσεις τους. Αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχηματιστεί η ακριβής συνάρτηση πιθανοφάνειας και να μεγιστοποιηθεί ως προς τις άγνωστες παραμέτρους $(\varphi, \vartheta) = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ και σ^2 .

4.2.2 Προβλέψεις

Αφού έχει αξιοποιηθεί το σύνολο της διαθέσιμης πληροφόρησης από το δείγμα των T παρατηρήσεων, το διάνυσμα κατάστασης έχει προσδιοριστεί επαρκώς ώστε μέσω των παραπάνω αποτελεσμάτων να μπορούν να κατασκευαστούν προβλέψεις (forecasts) για την τιμή που θα λάβει το α_t και κατ’ επέκταση η y_t , ℓ περιόδους μπροστά, δηλαδή στους χρόνους $T + 1, T + 2, \dots, T + \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας όλες τις παραμέτρους του υποδείγματος γνωστές, η πρόβλεψη στο χρόνο $t = T + \ell$ θα είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\hat{\alpha}_{T+\ell|T} = E(\alpha_{T+\ell} | y_T, \dots, y_1)$, και συνεπώς κάνοντας χρήση των εξισώσεων της *a priori* εκτίμησης (4.8) ισχύει ότι:

$$\hat{\alpha}_{T+\ell|T} = \mathbf{T} \hat{\alpha}_{T+\ell-1}, \quad (4.14\alpha)$$

$$\mathbf{P}_{T+\ell|T} = \mathbf{T} \mathbf{P}_{T+\ell-1} \mathbf{T}' + \mathbf{R} \mathbf{R}' \quad (4.14\beta)$$

Αφού η μήτρα $\mathbf{P}_{T+\ell|T}$ είναι εξ’ ορισμού μήτρα MSE, η ποσότητα $\hat{\alpha}_{T+\ell|T}$ θα είναι MSE πρόβλεψη για το διάνυσμα της κατάστασης.

Αντίστοιχα η πρόβλεψη για την $y_{T+\ell}$ θα είναι η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\hat{y}_{T+\ell|T} = E(y_{T+\ell} | y_T, \dots, y_1)$, δηλαδή:

$$\hat{y}_{T+\ell|T} = \mathbf{Z} \hat{\alpha}_{T+\ell|T}, \quad (4.15\alpha)$$

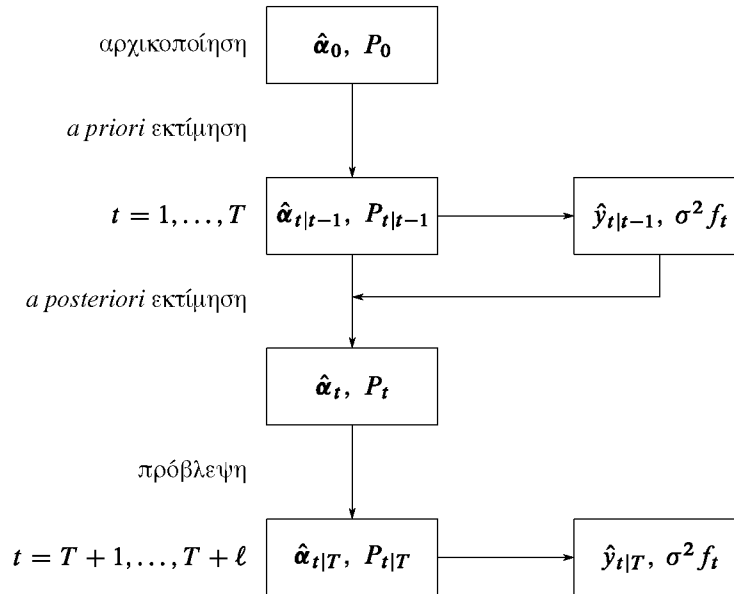
με διακύμανση ίση με αυτή του σφάλματος πρόβλεψης, $v_{T+\ell}$:

$$\sigma^2 f_{T+\ell} = \sigma^2 \mathbf{Z} \mathbf{P}_{T+\ell|T} \mathbf{Z}' \quad (4.15\beta)$$

Ουσιαστικά το πρώτο στοιχείο του $\hat{\alpha}_{T+\ell|T}$ θα είναι η πρόβλεψη $\hat{y}_{T+\ell|T}$ ενώ η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης θα είναι το πρώτο στοιχείο της μήτρας $\mathbf{P}_{T+\ell|T}$ πολλαπλασιασμένο με σ^2 . Μπορεί να δειχθεί (Box *et al.*, 1994) ότι στα ARMA(p, q) σχήματα ισχύει η σχέση $\sigma^2 f_{T+\ell} = \sigma^2(1 + \sum_{j=1}^{\ell-1} \psi_j^2)$.

Εφόσον οι κατανομές υποθέσαμε ότι είναι κανονικές οι σχέσεις (4.14β) και (4.15β) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων.

Σχήμα 4.1. Η ροή των σταδίων υλοποίησης του Kalman filter



4.3 Η Συνάρτηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στην τελευταία ετούτη ενότητα επιχειρείται ο συσχετισμός της εφαρμογής του Kalman filter στην εκτιμητική διαδικασία με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας. Είδαμε ότι η state – space μεθοδολογία οδηγεί μέσω του Kalman filter σε εκτιμητές που φέρουν το ελάχιστο MSE (minimum mean square error prediction) και ουσιαστικά αποσκοπεί στον προσδιορισμό των δεσμευμένων ή υπό συνθήκη κατανομών τόσο του διανύσματος κατάστασης α_t όσο και της ακολουθίας των παρατηρήσεων y_t . Ειδικά για την τελευταία είδαμε ότι έχει υπό συνθήκη μέση τιμή την $\hat{y}_{t|t-1}$ και υπό συνθήκη διακύμανση $\sigma^2 f_t$. Συμβολίζοντας με $p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1)$ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της t παρατήρησης, αυτή θα έχει τη μορφή:

$$p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 f_t}} \exp\left(-\frac{v_t^2}{2\sigma^2 f_t}\right), \quad t = 1, \dots, T$$

όπου $v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$. Συνεπώς η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι απλώς το γινόμενο των παραπάνω ποσοτήτων. Αν θεωρηθεί ότι $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ είναι το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος και αφού η από κοινού συνάρτηση πυ-

κνότητας πιθανότητας υπολογίζεται βάσει αυτού, η ακριβής συνάρτηση πιθανοφάνειας του \mathbf{y} παραγοντοποιείται ως

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = \prod_{t=1}^T p(y_t|y_{t-1}, \dots, y_1) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 f_t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}\right) \quad (4.16)$$

Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι μετά από πράξεις

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{y}|\varphi, \vartheta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}, \quad (4.17)$$

η οποία αντίστοιχα μεγιστοποιείται ως προς τις παραμέτρους (φ, ϑ) ενώ ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της διακύμανσης σ^2 είναι

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}.$$

Σημειώνεται ότι η σχέση (4.17) είναι η prediction error decomposition μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας, ίδια με τη σχέση (3.7) του προηγούμενου κεφαλαίου.

Ο Harvey (1989) αναφέρει πως, αν και μόνον αν η κατανομή του α_0 είναι πλήρως προσδιορισμένη και ο μέσος $\hat{\alpha}_0$ καθώς και η διακύμανση \mathbf{P}_0 είναι εκ των προτέρων γνωστά, τότε μέσω του Kalman filter σχηματίζεται πράγματι η ακριβής συνάρτηση πιθανοφάνειας του \mathbf{y} . Στην περίπτωση ενός μονομεταβλητού στάσιμου υποδείγματος ARMA(p, q) κάτι τέτοιο ισχύει εφόσον οι αρχικές συνθήκες για το Kalman filter είναι πάντοτε οι χωρίς περιορισμό μέσος και διακύμανση του (βλ. §3.3.4 του ίδιου συγγραφέα για περισσότερα). Εν γνώσει αυτού του γεγονότος, η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας από την πλευρά που παρουσιάστηκε εδώ (ο “εύκολος” τρόπος) και από την πλευρά που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο (ο “δύσκολος” τρόπος) είναι πλήρως αντίστοιχες, όπως θα διαπιστωθεί και από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.6 Εφαρμογή του Kalman filter στο υπόδειγμα MA(1)

Θεωρούμε την αναπαράσταση του παραδείγματος 4.2 όπου είδαμε ότι $\alpha_t = (y_t \ \theta \varepsilon_t)'$. Στο χρόνο $t = 1$ η *a priori* εκτίμηση αντιστοιχεί στην *αρχικοποίηση* που έχει ως εξής:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_{1|0} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{1|0} = \begin{pmatrix} \theta^2 + 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία σχέση για τη μήτρα \mathbf{P}_0 προκύπτει από τον αναλυτικό υπολογισμό της $(1/\sigma^2)E(\alpha_t \alpha_t')$. Συνεπώς, το πρώτο σφάλμα πρόβλεψης v_1 και το f_1 είναι

$$v_1 = y_1 - \mathbf{Z}\hat{\alpha}_{1|0} = y_1 \quad \text{και} \quad f_1 = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}' = \theta^2 + 1.$$

Γράφοντας την $\mathbf{P}_{1|0} = \begin{pmatrix} f_1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}$ και εφαρμόζοντας τις *a posteriori* εξισώσεις:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta \frac{v_1}{f_1} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta^4}{\theta^2+1} \end{pmatrix}$$

Στο επόμενο βήμα ($t = 2$), οι *a priori* εκτιμήσεις θα είναι:

$$\hat{\alpha}_{2|1} = \begin{pmatrix} \theta \frac{v_1}{f_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_{2|1} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^4 + \theta^2 + 1}{\theta^2 + 1} & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix},$$

που σημαίνει ότι

$$v_2 = y_2 - \theta \frac{v_1}{f_1} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{\theta^4 + \theta^2 + 1}{\theta^2 + 1}.$$

Η εκ νέου ενημέρωση των εκτιμητών θα δώσει:

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta \frac{v_2}{f_2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta^6}{\theta^4 + \theta^2 + 1} \end{pmatrix}$$

Για $t = 3$, οι *a priori* εκτιμητές θα έχουν τη μορφή

$$\hat{\alpha}_{3|2} = \begin{pmatrix} \theta \frac{v_2}{f_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_{3|2} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^6 + \theta^4 + \theta^2 + 1}{\theta^4 + \theta^2 + 1} & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$v_3 = y_3 - \theta \frac{v_2}{f_2} \quad \text{και} \quad f_3 = \frac{\theta^6 + \theta^4 + \theta^2 + 1}{\theta^4 + \theta^2 + 1}.$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για κάθε t έως και T φαίνεται ότι το Kalman filter ουσιαστικά υπολογίζει το σφάλμα πρόβλεψης από τον αναδρομικό τύπο

$$v_t = y_t - \frac{\theta}{f_{t-1}} v_{t-1}, \quad (4.18)$$

με $v_0 = 0$ και τα f_t από τη σχέση

$$f_t = \frac{\theta^{2t} + \theta^{2(t-1)} + \dots + \theta^2 + 1}{\theta^{2(t-1)} + \dots + \theta^2 + 1}. \quad (4.19\alpha)$$

Όπως και στο παράδειγμα 3.3:

$$f_t = \begin{cases} \frac{1 - \theta^{2(t+1)}}{1 - \theta^{2t}}, & |\theta| \neq 1, \\ \frac{t+1}{t}, & |\theta| = 1. \end{cases} \quad (4.19\beta)$$

Οι (4.18) και (4.19) είναι ακριβώς οι σχέσεις που βρίσκουμε μέσω της τροποποιημένης ανάλυσης Cholesky αλλά με μικρότερο υπολογιστικό κόστος, καθώς οι διαστάσεις των προς αντιστροφή μητρών έχουν μειωθεί σε 2 αντί για T , και αυτό χρεώνεται ως προτέρημα της μεθόδου σε σχέση με τη μέθοδο που δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η αντικατάσταση των παραπάνω στην (4.17) επιτρέπει τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας αριθμητικά, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μη γραμμικές επαναληπτικές μεθόδους, όπως ο αλγόριθμος του Marquardt. Ανάλογα οι Box *et al.* (1994, §7.5) συζητούν την αντιστοιχία των δυο μεθόδων για το υπόδειγμα ARMA(1, 1). ■

Αξιολόγηση Μεθόδων Εκτίμησης μέσω Προσομοιώσεων Monte Carlo

5.1 Μεθοδολογία Έρευνας

5.1.1 Προσομοίωση

Η αξιολόγηση των μεθόδων εκτίμησης που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, καθώς και η εμπειρική διερεύνηση των ιδιοτήτων που φέρουν οι εκτιμητές της κάθε μιας σε πεπερασμένα δείγματα απαιτεί τη χρήση Monte Carlo προσομοιώσεων. Η γενική ιδέα αυτής της διαδικασίας βασίζεται στην παραγωγή τυχαίων μεν, τεχνητών δε, δεδομένων βάσει των θεωρητικών συναρτήσεων πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών του υπό μελέτη συστήματος. Συνεπώς απαιτείται πρώτον η εξασφάλιση στατιστικά τυχαίων αριθμών και δεύτερον η δημιουργία των συστημάτων με τις θεωρητικές ιδιότητες που θέλουμε να μελετήσουμε. Χρησιμοποιώντας ένα αρκούντως μεγάλο πλήθος επαναλήψεων (replications) κατά την τυχαία δειγματοληψία και μελετώντας τη συμπεριφορά των προσομοιωμένων συστημάτων είναι δυνατόν να λάβουμε μια εμπεριστατωμένη εικόνα για την αντίστοιχη συμπεριφορά τους στην πραγματικότητα.

Για την παραγωγή των στατιστικά τυχαίων αριθμών χρησιμοποιήθηκε η πολλαπλασιαστική αναλογική γεννήτρια $X_{i+1} = \alpha X_i \bmod m$, όπου οι αριθμοί α και m επιλέγονται ώστε $2 \leq \alpha \leq m - 1$. Ο m πρέπει να είναι μεγάλος πρώτος αριθμός και η αρχική τιμή (initial seed) X_0 διάφορη του μηδενός. Αφού η παραπάνω γεννήτρια δεν μπορεί εκ κατασκευής να παράγει το μηδέν, έχει μέγιστη περίοδο $m - 1$. Το τελευταίο βήμα είναι η “κανονικοποίηση” των X_i οι οποίοι διαιρούνται με την περίοδο της γεννήτριας ώστε ο αριθμός $U_i = X_i / (m - 1)$ που προκύπτει να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$. Έτσι παράγονται τυχαίοι αριθμοί από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(0, 1)$ οι οποίοι εν συνεχεία αντιστοιχίζονται στην τυποποιημένη κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ μέσω του αλγορίθμου των Box & Muller. Για περισσότερα βλέπε Box & Muller (1958) αλλά και Law & Kelton (1982, §7.3.6) ή Forsythe *et al.* (1977, §10), ενώ λεπτομέρειες σχετικά με την υιοθετηθείσα γεννήτρια τυχαίων αριθμών καθώς και την εγκυρότητά της παρέχονται στον Kevork (2010, §3.2).

Με την παραπάνω διαδικασία δημιουργήθηκαν ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών $z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ οι οποίες χρησιμεύουν στην κατασκευή των διαταρακτικών όρων ε_t . Δεδομένου ότι αυτοί κατανομούνται κανονικά με μέσο μηδέν, η αντιστοιχία είναι $\varepsilon_t = z_t \sigma$ για δεδομένη διακύμανση σ^2 (Law & Kelton, 1982). Κατόπιν προσομοιώθηκαν 4000 σειρές από το υπόδειγμα MA(1) ανά θ μέσω της σχέσης $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ και 4000 σειρές ARMA(1, 1) ανά ζεύγος (ϕ, θ) μέσω της σχέσης $Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας σε κάθε περίπτωση θεωρήθηκε ότι $\delta = \mu = 0$ (αφού ο σταθερός όρος δεν επηρεάζει την κατανομή των εκτιμητών) και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Τηρώντας τις συνθήκες αντιστρεψιμότητας ($|\theta| < 1$) και στασιμότητας ($|\phi| < 1$), οι τιμές των παραμέτρων περιορίστηκαν στο διάστημα $(-1, 1)$. Επιπλέον η πρώτη παρατήρηση κάθε σειράς κατασκευάστηκε με γνώμονα το γεγονός ότι προκύπτει τυχαία από την κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \gamma_0)$ ¹.

5.1.2 Όψεις της διαδικασίας

Οι “οικογένειες” των 4000 σειρών που προκύπτουν με βάση το MA(1) για κάθε πραγματική παράμετρο θ και οι αντίστοιχες βάσει του ARMA(1, 1) για κάθε ζεύγος πραγματικών παραμέτρων (ϕ, θ) εκτιμώνται και με τις τρεις μεθόδους δηλαδή (α) τη μέθοδο υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας (CML εφεξής), (β) τη μέθοδο backcasting (CML_B εφεξής) και (γ) τη μέθοδο ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας (EML εφεξής)² σε διάφορα μεγέθη δειγμάτων. Θεωρήθηκαν δείγματα $T = 25, 50, 100, 250, 500$ παρατηρήσεων ώστε να μελετηθεί καλύτερα η συμπεριφορά των εκτιμητών της κάθε μεθόδου, τόσο σε μικρά και μεσαία δείγματα ($T = 25$ ως 100) όσο και σε μεγάλα ($T \geq 250$).

Σε επίπεδο εκτίμησης αξιολογήθηκε κατά βάσει η ποιότητα της εκάστοτε δειγματοληπτικής κατανομής των εκτιμητών βάσει των συνήθων μέτρων και σταθμών δηλαδή σε όρους μεροληψίας (Bias) και μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) ενώ έμφαση δόθηκε στη στατιστική σημαντικότητα των εκτιμητών, ώστε να δημιουργηθεί μια εικόνα του επιπέδου εμπιστοσύνης της κάθε μεθόδου, αλλά και στην επίδοση των εκτιμητών κάθε υποδείγματος όσον αφορά την πρόβλεψη για χρονικές περιόδους εκτός δείγματος τόσο σε όρους κάλυψης (coverage) των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης όσο και ακρίβειας αυτών σε σχέση με τα θεωρητικά.

Επεξηγώντας, μετά το πέρας κάθε εκτιμητικής διαδικασίας για κάθε οικογένεια σειρών υπολογίζεται ο μέσος όρος των εκτιμητών που προέκυψαν από την κάθε μέθοδο για

¹Στο υπόδειγμα MA(1) η διακύμανση της πρώτης παρατήρησης είναι $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta^2)$, ενώ στο υπόδειγμα ARMA(1, 1) είναι αντίστοιχα $\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1+2\phi\theta+\theta^2}{1-\phi^2}$ και ο στάσιμος μέσος $\mu = \frac{\delta}{1-\phi}$.

²Υπενθυμίζεται εδώ ότι κατά την εκτίμηση ενός ARMA(p, q) με τη CML μέθοδο, οι πρώτες p παρατηρήσεις θεωρούνται σταθερές ποσότητες ενώ τα q σφάλματα πριν από $t = p + 1$ δηλ. τα $\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+1-q}$ τίθενται ίσα με την αναμενόμενη τιμή τους, το μηδέν. Η CML_B χρησιμοποιεί μια τεχνική προσέγγισης των παραπάνω σφαλμάτων και λαμβάνει υπόψη τις τιμές τους κατά την εκτίμηση των παραμέτρων, ενώ η EML μέθοδος αξιοποιεί το σύνολο της διαθέσιμης πληροφορίας αφού οι πρώτες παρατηρήσεις θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές.

κάθε διαφορετικό δείγμα καθώς και η μεροληψία, δηλαδή η διαφορά της πραγματικής τιμής της παραμέτρου από το μέσο όρο. Έτσι αν $E(\hat{\theta})$ η μέση τιμή των 4000 εκτιμητών κάθε μεθόδου, η μεροληψία θα είναι $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται ως $MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + b(\hat{\theta})^2$. Για τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας, υπολογίζεται ως το ποσοστό των στατιστικά σημαντικών όρων στα συνήθη επίπεδα εμπιστοσύνης της κάθε μεθόδου στο σύνολο των 4000 προσομοιώσεων. Όσον αφορά τις προβλέψεις ως κάλυψη ή καλύτερα μέση κάλυψη των διαστημάτων εμπιστοσύνης νοείται το ποσοστό των περιπτώσεων στις οποίες το εκτιμηθέν διάστημα εμπιστοσύνης της πρόβλεψης περιέχει την πραγματική παρατήρηση (άρα η πρόβλεψη ήταν επιτυχής). Ένα πρώτο μέτρο ακρίβειας της προβλεπτικής ικανότητας είναι το κατά πόσον αυτό το ποσοστό διαφέρει από το αντίστοιχο ονομαστικό (στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στο 95% επίπεδο εμπιστοσύνης). Επιπλέον, ως ένα επιπρόσθετο μέτρο ακρίβειας θεωρούμε το ήμισυ του μέσου εύρους (average halflength) ή ακτίνας (radius) του διαστήματος εμπιστοσύνης σε σχέση το αντίστοιχο ονομαστικό.

Αν και λεπτομέρειες για τη διαδικασία θα δίνονται παρακάτω στο κείμενο όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο, θεωρείται σκόπιμο να παρατεθούν ορισμένες πληροφορίες που αφορούν την υλοποίηση συνολικά. Όλες οι εκτιμήσεις έγιναν στο πρόγραμμα EViews και για τη βελτιστοποίηση των αντικειμενικών συναρτήσεων πιθανοφάνειας αριθμητικά χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος του Marquardt. Η επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης θεωρήθηκε ότι συγκλίνει εάν η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση είναι μικρότερη της τάξης του 10^{-5} (ο αριθμός αυτός ονομάζεται και tolerance) και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων τέθηκε να είναι 2000 κατά τις εκτιμήσεις των MA(1) υποδειγμάτων, ενώ κατά τις εκτιμήσεις των ARMA(1, 1) εφόσον τα ποσοστά μη σύγκλισης ήταν μεγάλα χρειάστηκε να τεθεί ίσος με 5000. Η εφαρμογή των μεθόδων CML και CML_B έγινε μέσω μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, ενώ η εφαρμογή της EML εφόσον τόσο η προσέγγιση της τριγωνοποίησης όσο και η state – space μεθοδολογία δίνουν ίδια αποτελέσματα³ έγινε μέσω του Kalman filter (βλ. §4). Η σύγκλιση της EML διαπιστώθηκε ότι είναι ευαίσθητη στις αρχικές τιμές των παραμέτρων καθώς αφ' ενός με τη χρήση κατάλληλων αρχικών τιμών διευκολύνεται κατά πολύ και ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων είναι μικρός και αφ' ετέρου διότι διαφορετικές αρχικές τιμές είναι πιθανό να οδηγήσουν σε τοπικό παρά σε ολικό μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι ως αρχικές τιμές δόθηκαν εκείνες που προέκυψαν από τη μέθοδο CML, αφού κρίθηκαν οι πιο κατάλληλες, ενώ σε περιπτώσεις μη σύγκλισης η διαδικασία επανεκκινήθηκε, αυτή τη φορά με αρχικές τιμές τις πραγματικές. Στις ακόλουθες ενότητες αναλύονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το κάθε υπόδειγμα ξεχωριστά.

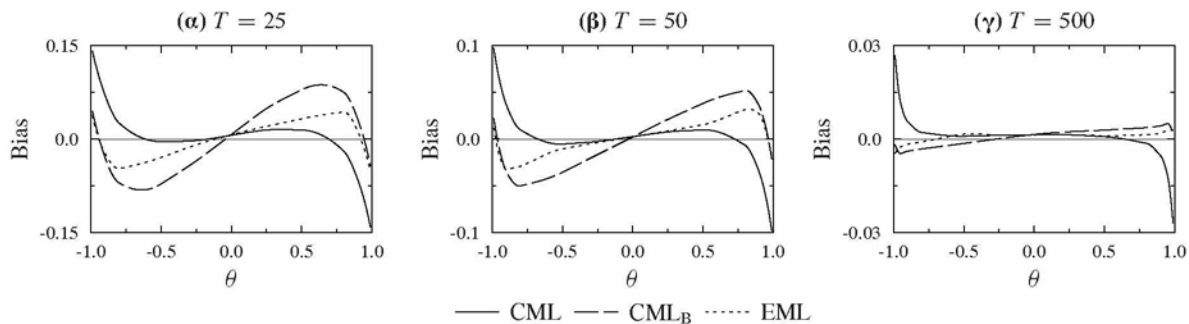
³ Αυτό επαληθεύτηκε και στην πράξη στην περίπτωση του MA(1) μέσω της ρουτίνας που χρησιμοποιήσαν οι Halkos & Kevork (2007a,b) στο EViews και τα αποτελέσματα τόσο του μεγίστου της αντικειμενικής συνάρτησης (η τιμή του log-likelihood δηλαδή) όσο και των εκτιμητών δεν διέφεραν ακόμα και μετά από 6 ή 7 δεκαδικά ψηφία. Ίδια αποτελέσματα λάβαμε και από πιλοτικές εκτιμήσεις με το λογισμικό ITSM των Brockwell & Davis (1996) το οποίο χρησιμοποιεί έναν αλγόριθμο παραπλήσιο της τριγωνοποίησης.

5.2 Αποτελέσματα για το σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού MA(1)

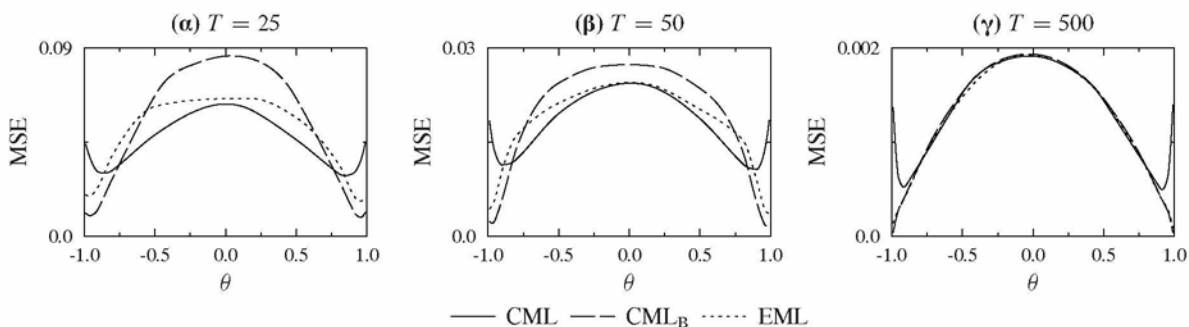
5.2.1 Εκτιμητική

Συνολικά 12 τιμές δόθηκαν στην παράμετρο θ συμμετρικά ως προς το μηδέν δηλαδή $\theta \in \{\pm 0.99, \pm 0.95, \pm 0.90, \pm 0.80, \pm 0.50, \pm 0.20\}$ για όλα τα μεγέθη δειγμάτων που προαναφέραμε. Τα σχήματα 5.1 και 5.2 περιλαμβάνουν γραφικές παραστάσεις της μεροληψίας και του MSE των προσομοιώσεων ως προς θ , ως ένα βολικό μέσο για να δοθεί μια συνοπτική εικόνα των συνολικών αποτελεσμάτων. Περισσότερες πληροφορίες για συνδυασμούς μεγέθους δείγματος T , πραγματικής παραμέτρου θ και μεθόδου εκτίμησης, παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

Σχήμα 5.1. Γραφικές παραστάσεις της μεροληψίας των τριών εκτιμητών ως προς θ για διάφορα T



Σχήμα 5.2. Γραφικές παραστάσεις του MSE των τριών εκτιμητών ως προς θ για διάφορα T



Η μελέτη διαφορετικών μεγεθών δειγμάτων δείχνει, καθώς αναμενόταν, μια εξομάλυνση τόσο στη μεροληψία όσο και στο MSE αφού και τα δυο βαίνουν μειούμενα όσο αυξάνει το T , οπότε παρατηρείται μια τάση σύγκλισης προς τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των αντίστοιχων μεθόδων, χωρίς όμως να διαφοροποιείται η επίδοση μεταξύ των εκτιμητών —απλώς γίνεται περισσότερο δυσδιάκριτη. Εκ των αποτελεσμάτων είναι φανερό πως δεν τίθεται θέμα ομοιόμορφης κατάταξης των τριών μεθόδων καθώς αυτή δείχνει να εξαρτάται από την πραγματική τιμή του θ . Έτσι σε μικρές και μεσαίες τιμές (0.20 έως 0.80) οι εκτιμητές της CML είναι προτιμότεροι τόσο σε όρους μεροληψίας όσο

Πίνακας 5.1. Εκτιμηθείσα μεροληψία (*Bias*) και μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*MSE*) των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα *MA*(1) — βάσει 4000 προσομοιωμένων σειρών ανά θ και διάφορα *T*

θ	<i>T</i>	CML		CML _B		EML	
		Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
-0.99	25	0.14147	0.04413	0.04509	*0.01114	*0.03788	0.01994
	50	0.09742	0.01841	0.02264	*0.00238	*0.01234	0.00442
	100	0.06671	0.00813	0.00908	*0.00040	* - 0.00025	0.00092
	250	0.04032	0.00299	*0.00063	*0.00007	-0.00450	0.00024
	500	0.02679	0.00137	* - 0.00178	*0.00004	-0.00456	0.00014
-0.95	25	0.10592	0.03593	0.00822	*0.01009	*0.00432	0.01963
	50	0.06415	0.01332	* - 0.00943	*0.00263	-0.01695	0.00605
	100	0.03836	0.00513	* - 0.01627	*0.00123	-0.01981	0.00270
	250	0.01974	0.00157	-0.00977	*0.00063	* - 0.00772	0.00089
	500	0.01166	0.00061	-0.00460	*0.00029	* - 0.00248	0.00030
-0.90	25	0.07074	0.03077	-0.02874	*0.01343	* - 0.02282	0.02403
	50	0.03673	0.01139	-0.03450	*0.00593	* - 0.03133	0.01054
	100	*0.01870	0.00422	-0.02677	*0.00331	-0.01994	0.00434
	250	0.00972	0.00127	-0.00959	0.00110	* - 0.00463	*0.00104
	500	0.00561	0.00054	-0.00385	0.00045	* - 0.00159	*0.00044
-0.80	25	*0.02599	0.03166	-0.06997	*0.02778	-0.04704	0.03896
	50	*0.01003	*0.01226	-0.04983	0.01393	-0.02892	0.01603
	100	*0.00336	*0.00472	-0.02653	0.00585	-0.01377	0.00550
	250	0.00303	0.00160	-0.00761	0.00163	* - 0.00288	*0.00157
	500	0.00214	0.00078	-0.00312	0.00078	* - 0.00085	*0.00077
-0.50	25	* - 0.00386	*0.04853	-0.07160	0.06732	-0.02916	0.06206
	50	* - 0.00524	*0.01955	-0.03523	0.02441	-0.01036	0.02122
	100	* - 0.00335	*0.00813	-0.01616	0.00892	-0.00522	0.00854
	250	*0.00042	*0.00304	-0.00429	0.00313	0.00102	0.00311
	500	*0.00095	0.00152	-0.00136	0.00153	0.00159	*0.00148
-0.20	25	* - 0.00089	*0.06024	-0.02662	0.08285	-0.00541	0.06517
	50	* - 0.00146	*0.02352	-0.01265	0.02708	-0.00241	0.02387
	100	* - 0.00127	*0.01057	-0.00595	0.01115	-0.00155	0.01062
	250	0.00110	*0.00380	* - 0.00066	0.00387	0.00100	0.00381
	500	0.00129	*0.00187	*0.00044	0.00189	0.00125	0.00187
0.20	25	*0.01354	*0.05974	0.04132	0.08448	0.01806	0.06578
	50	*0.00693	*0.02350	0.01741	0.02700	0.00749	0.02382
	100	*0.00302	*0.01087	0.00747	0.01144	0.00317	0.01091
	250	*0.00232	*0.00372	0.00400	0.00380	0.00236	0.00372
	500	*0.00143	*0.00183	0.00225	0.00185	0.00145	0.00183
0.50	25	*0.01468	*0.04621	0.07898	0.06594	0.03258	0.05676
	50	*0.00984	*0.01875	0.03816	0.02356	0.01549	0.02022
	100	*0.00482	*0.00828	0.01648	0.00902	0.00673	0.00844
	250	*0.00184	*0.00294	0.00612	0.00302	0.00251	0.00295
	500	*0.00080	*0.00144	0.00290	0.00146	0.00113	0.00145
0.80	25	* - 0.01914	0.03004	0.07510	*0.02710	0.04338	0.03461
	50	* - 0.00653	*0.01162	0.05184	0.01369	0.03154	0.01547
	100	* - 0.00422	*0.00482	0.02453	0.00581	0.01144	0.00540
	250	* - 0.00207	*0.00153	0.00836	0.00162	0.00362	0.00154
	500	* - 0.00132	0.00074	0.00369	0.00074	0.00144	*0.00073

↔

Πίνακας 5.1. (συνέχεια)

θ	T	CML		CML _B		EML	
		Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
0.90	25	-0.06505	0.02999	0.03163	*0.01282	*0.01244	0.02025
	50	-0.03502	0.01068	0.03543	*0.00552	*0.02688	0.00904
	100	-0.02018	0.00427	0.02482	*0.00330	*0.01693	0.00424
	250	-0.00932	0.00121	0.01021	0.00108	*0.00524	*0.00104
	500	-0.00529	0.00051	0.00426	0.00043	*0.00192	*0.00042
0.95	25	-0.10131	0.03512	* -0.00419	*0.00917	-0.01821	0.01684
	50	-0.06322	0.01301	0.01084	*0.00221	*0.00750	0.00476
	100	-0.03892	0.00525	0.01523	*0.00122	*0.01336	0.00221
	250	-0.01962	0.00157	0.01049	*0.00064	*0.00846	0.00091
	500	-0.01164	0.00061	0.00499	*0.00028	*0.00283	0.00030
0.99	25	-0.14072	0.04525	* -0.04275	*0.01167	-0.05005	0.01931
	50	-0.09796	0.01849	-0.02124	*0.00196	* -0.01803	0.00374
	100	-0.06821	0.00855	-0.00931	*0.00043	* -0.00565	0.00088
	250	-0.04071	0.00307	* -0.00045	*0.00006	0.00185	0.00017
	500	-0.02698	0.00140	*0.00205	*0.00004	0.00300	0.00009

Σημείωση: Ο αστερίσκος στις στήλες 3, 5 και 7 αντιστοιχεί στη μικρότερη απόλυτη μεροληψία (μικρότερη απόσταση σε σχέση με το μηδέν), ενώ στις στήλες 4, 6 και 8 στο μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

και σε όρους MSE ενώ καθώς η πραγματική παράμετρος τείνει προς τη μονάδα και για $|\theta| > 0.80$, η EML αποδίδει σαφώς καλύτερα αφού παρουσιάζει τη μικρότερη μεροληψία μεταξύ των τριών μεθόδων και δείχνει εν γένει αποτελεσματικότερη βάση του MSE. Η CML_B από την άλλη είναι η μέθοδος που αποδίδει χειρότερα όσον αφορά τη μεροληψία ενώ μόνο σε πολύ ακραίες τιμές (0.95 και 0.99) διατηρεί —αν και οριακά— το ελάχιστο MSE, γεγονός που οφείλεται οπωσδήποτε στη σχετικά μεγαλύτερη μεροληψία έναντι της EML μεθόδου.

Η μελέτη της στατιστικής σημαντικότητας των εκτιμητών φανερώνει ένα πολύ ενδιαφέρον εύρημα. Εξαιρώντας τα χαμηλά ποσοστά στατιστικά σημαντικών όρων όταν $\theta = 0.20$ σε μικρά και μεσαία δείγματα, κάτι που εξηγείται ακριβώς λόγω της χαμηλής τιμής του θ και του μεγέθους του δείγματος, μεγάλο πρόβλημα εμφανίζεται στους εκτιμητές της EML. Για $\theta > 0.80$ και ιδιαίτερα κοντά στη μονάδα, δηλαδή στο τμήμα του πεδίου τιμών των παραμέτρων όπου δείχνει αποτελεσματικότερη, τα ποσοστά των στατιστικά σημαντικών όρων είναι εξαιρετικά χαμηλά αφού μετά βίας ξεπερνούν το 60% ή 70% σε μικρά και μεσαία δείγματα ενώ πολύ κοντά στο όριο της αντιστρεψιμότητας ($\theta = 0.99$) ακόμα και σε δείγματα 500 παρατηρήσεων το εκτιμηθέν επίπεδο εμπιστοσύνης παρέμεινε κάτω από 70%. Αυτή η διαφοροποίηση σε σχέση με τα όποια συνήθη θεωρητικά επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας είναι σαφής ένδειξη ύπαρξης του δημοφιλούς στη σχετική βιβλιογραφία pile-up effect (βλ. σχήμα 5.3).

Όπως εκτενέστερα αναφέραμε στο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής επισκόπησης, αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στην ιδιαιτερότητα της μορφής της συνάρτησης πιθανοφάνειας του MA(1), για την οποία τα $\theta = \pm 1$ αποτελούν πιθανά ακρότατά της, ώστε η διαδικασία μεγιστοποίησης με θετική πιθανότητα και αυξανόμενη όσο το θ πλησιάζει προς τη μονάδα

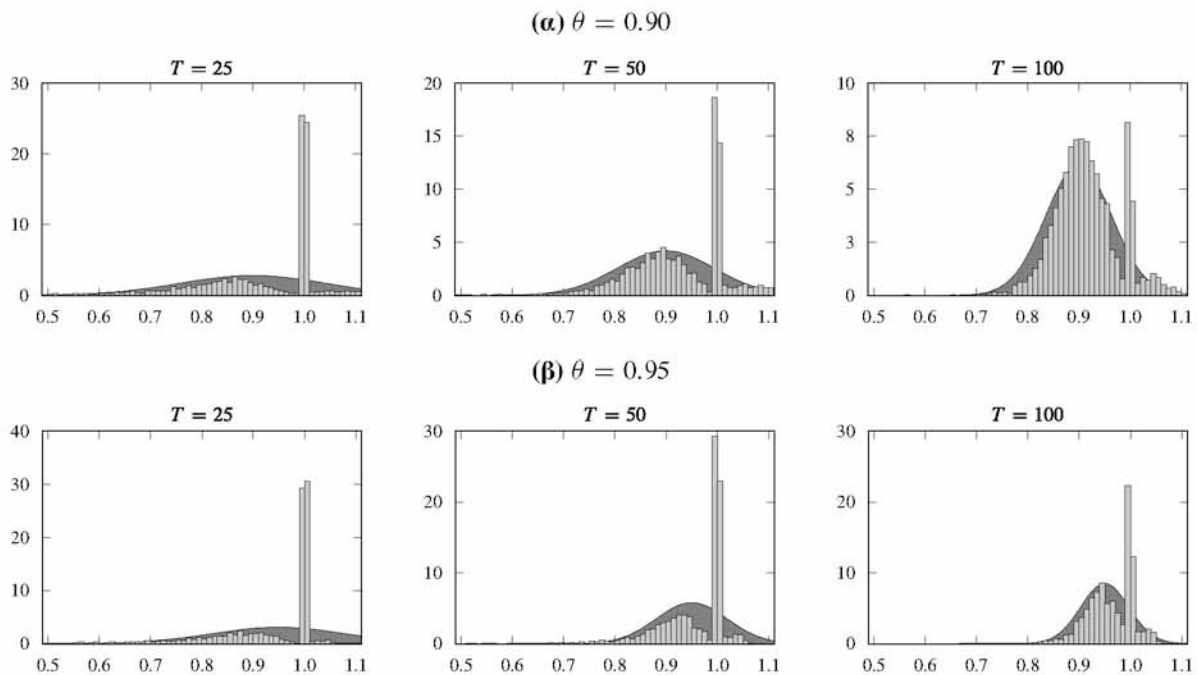
Πίνακας 5.2. Εκτιμηθέν επίπεδο εμπιστοσύνης^α των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1) — βάσει 4000 προσομοιωμένων σειρών ανά θ και διάφορα T

θ	T	CML			CML _B			EML		
		1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.2	25	0.107	0.210	0.295	0.167	0.274	0.357	0.093	0.175	0.256
	50	0.153	0.311	0.419	0.181	0.343	0.449	0.142	0.293	0.391
	100	0.300	0.528	0.641	0.322	0.545	0.656	0.287	0.505	0.624
	250	0.750	0.900	0.948	0.758	0.905	0.949	0.720	0.882	0.940
	500	0.979	0.995	0.997	0.980	0.995	0.997	0.975	0.993	0.996
0.5	25	0.515	0.741	0.820	0.630	0.806	0.871	0.414	0.619	0.711
	50	0.875	0.959	0.976	0.901	0.967	0.981	0.835	0.937	0.963
	100	0.996	1.000	1.000	0.996	1.000	1.000	0.993	0.999	1.000
	250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.8	25	0.947	0.977	0.985	0.977	0.989	0.991	0.635	0.674	0.685
	50	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.877	0.879	0.879
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.983	0.983	0.983
	250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9	25	0.969	0.987	0.991	0.990	0.995	0.996	0.453	0.477	0.484
	50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.670	0.671	0.672
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.879	0.880	0.880
	250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.993	0.993
	500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.95	25	0.973	0.988	0.991	0.993	0.995	0.996	0.357	0.378	0.385
	50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.478	0.481	0.483
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.671	0.671	0.672
	250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.923	0.923	0.923
	500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.992	0.992
0.99	25	0.971	0.988	0.991	0.992	0.995	0.995	0.319	0.339	0.349
	50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.354	0.357	0.359
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.381	0.382	0.382
	250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.479	0.479	0.480
	500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.663	0.663	0.665

^αΕκφρασμένο ως το ποσοστό των στατιστικά σημαντικών όρων στα συνήθη επίπεδα εμπιστοσύνης της κάθε μεθόδου στο σύνολο των 4000 προσομοιώσεων. Τα ποσοστά για αρνητικά θ είναι ακριβώς αντίστοιχα και παραλείπονται.

να δίνει εκτιμητές ακριβώς ίσους με 1 ή -1 . Συνεπώς, εφόσον λαμβάνεται εκτιμητής που καθιστά το υπόδειγμα μη αντιστρέψιμο, τα υπολογιζόμενα τυπικά σφάλματα καθώς και τα t -ratios δεν είναι καθόλου αξιόπιστα. Πράγματι, στη συντριπτική πλειοψηφία των πειραμάτων μας, εκεί όπου ο EML εκτιμητής του θ ακόμα και για $\theta = 0.50$, έλαβε υψηλό p -value (άρα ήταν στατιστικά ασήμαντος), ήταν εντός εύλογης αριθμητικής ακρίβειας ίσος με 1 ή -1 και με πολύ μεγάλο τυπικό σφάλμα.

Μια κάπως καλύτερη εικόνα σχηματίζεται από τον πίνακα 5.3 όπου καταγράφεται η κατηγοριοποίηση σε κλάσεις της δειγματοληπτικής κατανομής των τριών εκτιμητών για ορισμένες ακραίες περιπτώσεις της παραμέτρου θ σε όλα τα μεγέθη δειγμάτων που εξετάστηκαν. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μέθοδος CML όντως παρουσιάζει μια έκδηλη τάση να υποεκτιμά την πραγματική παράμετρο ιδιαίτερα σε δείγματα 25 έως 100 παρατηρήσεων, καθώς ένα μεγάλο σχετικά ποσοστό (πάνω από 50%) των εκτιμητών

Σχήμα 5.3. Pile-up effect της EML σε μικρά δείγματα

της απέχουν περισσότερο από 0.05 μονάδες από την πραγματική τιμή, εξ ου και η μεγάλη μεροληψία που βρέθηκε. Αντίθετα η CML_B δείχνει να υπερεκτιμά (με σαφώς μικρότερη απόκλιση όμως) την πραγματική παράμετρο. Όσον αφορά τη μέθοδο EML, και συναρτήσει όσων ειπώθηκαν παραπάνω, παρατηρείται μια μεγάλη συγκέντρωση στο διάστημα (0.99, 1.01) που αρχικά ξεπερνά το 50% ενώ όσο αυξάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων το ποσοστό υποχωρεί και η κατανομή των εκτιμητών της φαίνεται πιο ομοιόμορφη, αν και μακριά από το να θεωρηθεί κανονική ακόμα και σε μεγάλα δείγματα. Το υψηλό αυτό ποσοστό συγκέντρωσης επιβεβαιώνει το pile-up effect πάντα εντός εύλογης αριθμητικής ακρίβειας και συμφωνεί με αντίστοιχα ποσοστά που έχουν βρεθεί ή υπολογιστεί θεωρητικά στη βιβλιογραφία. Οι Ansley & Newbold (1980) βρήκαν ποσοστά από 32.8% ($\theta = 0.90$) έως 64.1% ($\theta = 0.99$) σε δείγματα 50 παρατηρήσεων και σαφώς χαμηλότερα σε δείγματα 100 παρατηρήσεων, ενώ οι Cryer & Ledolter (1981) και Sargan & Bhargava (1983) εκτιμούν αυτό το ποσοστό κοντά στο 50% για $\theta = -0.90$ και δείγματα 25 παρατηρήσεων.

Επίσης βρέθηκαν, εμφανή αλλά όχι ανησυχητικά, ποσοστά εκτιμητών πάνω από τη μονάδα και για τις τρεις μεθόδους. Ενώ για τις δυο προσεγγιστικές μεθόδους αυτό το αποτέλεσμα δεν επιδέχεται ερμηνείας στην πράξη, αλλά οφείλεται μόνο στο γεγονός ότι δεν περιορίστηκαν οι τιμές των εκτιμητών εφόσον το EViews δεν διαθέτει τέτοια δυνατότητα, για τη μέθοδο της ακριβούς πιθανοφάνειας είναι αναμενόμενο αφού η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας λαμβάνει την ίδια μέγιστη τιμή τόσο για θ όσο και για $1/\theta$, εφόσον και για τις δυο αυτές τιμές ένα υπόδειγμα MA(1) έχει ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Εύλογα λοιπόν μπορούμε σε μια τέτοια περίπτωση (αν λάβουμε δηλαδή

Πίνακας 5.3. Δειγματοληπτικές κατανομές των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα MA(1) όταν η πραγματική παράμετρος θ είναι κοντά στη μονάδα — 4000 προσομοιωμένες σειρές και διάφορα T

	CML					CML _B					EML				
	$T = 25$	$T = 50$	$T = 100$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 25$	$T = 50$	$T = 100$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 25$	$T = 50$	$T = 100$	$T = 250$	$T = 500$
$\theta = 0.90$															
Κλάσεις:															
< 0.85	52%	41%	29%	11%	3%	12%	11%	8%	2%	—	26%	20%	12%	3%	1%
[0.85, 0.95)	26%	39%	59%	86%	97%	40%	31%	55%	88%	98%	17%	34%	61%	90%	98%
[0.95, 0.99)	7%	10%	8%	3%	—	28%	45%	30%	9%	2%	2%	5%	9%	6%	1%
[0.99, 1.01)	3%	4%	2%	—	—	12%	10%	6%	1%	—	50%	33%	13%	1%	—
≥ 1.01	12%	6%	2%	—	—	8%	3%	1%	—	—	5%	8%	5%	—	—
Μέση Τιμή:	0.8349	0.8650	0.8798	0.8907	0.8947	0.9316	0.9354	0.9248	0.9102	0.9043	0.9124	0.9269	0.9169	0.9052	0.9019
$\theta = 0.95$															
Κλάσεις:															
< 0.95	62%	52%	38%	17%	5%	10%	8%	4%	1%	—	27%	18%	8%	1%	—
[0.95, 0.99)	22%	35%	53%	80%	94%	68%	75%	81%	88%	97%	10%	25%	50%	84%	98%
[0.99, 1.01)	4%	5%	6%	3%	1%	14%	12%	13%	11%	3%	60%	52%	35%	10%	2%
≥ 1.01	12%	8%	3%	—	—	8%	5%	2%	—	—	3%	5%	7%	5%	—
Μέση Τιμή:	0.8487	0.8868	0.9111	0.9304	0.9384	0.9458	0.9608	0.9652	0.9605	0.9550	0.9318	0.9575	0.9634	0.9585	0.9528
$\theta = 0.99$															
Κλάσεις:															
< 0.95	75%	72%	63%	44%	27%	47%	12%	4%	—	—	30%	23%	11%	1%	—
[0.95, 0.99)	9%	15%	25%	44%	60%	32%	68%	74%	48%	24%	3%	10%	24%	34%	38%
[0.99, 1.01)	4%	5%	8%	11%	13%	14%	15%	20%	51%	76%	64%	65%	65%	65%	62%
≥ 1.01	12%	8%	4%	1%	—	7%	5%	2%	1%	—	3%	2%	—	—	—
Μέση Τιμή:	0.8493	0.8920	0.9218	0.9493	0.9630	0.9473	0.9688	0.9807	0.9895	0.9921	0.9400	0.9720	0.9844	0.9918	0.9930

$\hat{\theta} > 1$) —αν και εφόσον ο εκτιμητής είναι στατιστικά σημαντικός— να θεωρήσουμε τον αντίστροφο του, που θα βρίσκεται οπωσδήποτε εντός του πεδίου αντιστρεψιμότητας.

5.2.2 Προβλέψεις

Το δεύτερο σκέλος της ανάλυσης αφορά την επίδοση όπως είπαμε της κάθε μεθόδου ως προς την πρόβλεψη τιμών των υπό μελέτη σειρών σε περιόδους εκτός του παρατηρημένου δείγματος. Αναφέραμε επίσης ότι μας ενδιαφέρει κυρίως η απόδοση και η ακρίβεια των ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης (ΔΕ) στην πράξη.

Υπενθυμίζεται λοιπόν ότι για ένα ARMA(p, q) υπόδειγμα, αν με $\hat{y}_{T+\ell|T} = E(y_{T+\ell}|y_T, \dots, y_1)$ συμβολίσουμε την άριστη πρόβλεψη για τη χρονική στιγμή $T + \ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$ είναι ο ορίζοντας της πρόβλεψης), η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης $v_{T+\ell}$ θα είναι $\text{Var}(v_{T+\ell}) = (1 + \sum_{j=1}^{\ell-1} \psi_j^2)\sigma^2$, και τα άκρα του αντίστοιχου διαστήματος εμπιστοσύνης $\hat{y}_{T+\ell|T} \pm \lambda_\ell$. Η ποσότητα $\lambda_\ell = z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(v_{T+\ell})}$ καλείται halflength του ΔΕ ενώ τα ψ_j είναι οι συντελεστές της κατά Wold αναπαράστασης του υποδείγματος και υπολογίζονται (βλ. Box *et al.*, 1994) αναδρομικά μέσω της σχέσης $\psi_j = \theta_j + \sum_{i=1}^p \phi_i \psi_{j-i}$, $j \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς στο υπόδειγμα MA(1) οι προβλέψεις θα είναι

$$\hat{y}_{T+1|T} = \theta \varepsilon_T, \quad \hat{y}_{T+\ell|T} = 0, \quad \ell \geq 2 \quad (5.1)$$

και αφού $\psi_1 = \theta$ και $\psi_j = 0$, $j \geq 2$, οι αντίστοιχες διακυμάνσεις είναι

$$\text{Var}(v_{T+1}) = \sigma^2, \quad \text{Var}(v_{T+\ell}) = (1 + \theta^2)\sigma^2, \quad \ell \geq 2 \quad (5.2)$$

και $\lambda_1 = 2\sigma$, $\lambda_\ell = 2\sigma\sqrt{1 + \theta^2}$, $\ell \geq 2$ τα αντίστοιχα θεωρητικά halflength σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Για κάθε θ και μέθοδο προβλέφθηκαν έως 5 περίοδοι μπροστά, για διαφορετικά T και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες 5.4 και 5.5. Από τον πίνακα 5.4 παρατηρούμε πως όσον αφορά την κάλυψη των 95% ΔΕ και οι τρεις μέθοδοι αποδίδουν εξίσου καλά με ποσοστά που κυμαίνονται μεταξύ του 93% έως 96%. Στον πίνακα 5.5 παρουσιάζεται το μέσο halflength των ΔΕ. Τα ΔΕ των προβλέψεων και με τις τρεις μεθόδους δείχνουν να είναι εξαιρετικά ακριβή αφού το εκτιμηθέν μέσο $\hat{\lambda}$ έλαβε τιμές πολύ κοντά στις θεωρητικές για όλες τις τιμές παραμέτρου θ και μεγέθους δείγματος T . Αν και οι όποιες διαφορές είναι μόνον οριακές, ένα εμφανές μοτίβο, ειδικά στα μικρότερα δείγματα, είναι ότι σύμφωνα με αυτό το κριτήριο τα ΔΕ της CML είναι λιγότερο ακριβή σε σχέση με αυτά της CML_B που με τη σειρά τους είναι λιγότερο ακριβή από τα ΔΕ της EML. Η EML όμως υπερτερεί των άλλων μεθόδων αφού σε κάθε περίπτωση έχει τα μικρότερα $\hat{\lambda}$.

Συνοψίζοντας τα έως τώρα αποτελέσματα για την εκτίμηση υποδειγμάτων κινητού μέσου πρώτου βαθμού, τονίζουμε καταρχήν ότι επιβεβαιώνεται η πλήρης αντιστοιχία των διαφορετικών προσεγγίσεων ως προς τη μέθοδο ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας τόσο στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, όσο και σε σύγκριση με αποτελέσματα άλλων

Πίνακας 5.4. Μέση κάλυψη των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ με βάση το υπόδειγμα MA(1)

θ	T	CML			CML _B			EML		
		$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 5$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 5$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 5$
0.2	25	0.942	0.949	0.940	0.937	0.950	0.941	0.935	0.945	0.934
	50	0.952	0.956	0.949	0.951	0.957	0.949	0.951	0.955	0.947
	100	0.954	0.955	0.951	0.954	0.955	0.951	0.952	0.952	0.949
	250	0.952	0.945	0.947	0.953	0.945	0.947	0.952	0.944	0.947
	500	0.952	0.964	0.957	0.952	0.964	0.957	0.952	0.964	0.957
0.5	25	0.945	0.949	0.942	0.938	0.951	0.943	0.936	0.944	0.934
	50	0.949	0.951	0.950	0.946	0.952	0.951	0.946	0.949	0.947
	100	0.951	0.948	0.951	0.951	0.949	0.951	0.951	0.947	0.949
	250	0.953	0.948	0.942	0.953	0.948	0.942	0.953	0.947	0.942
	500	0.955	0.959	0.957	0.955	0.959	0.957	0.955	0.959	0.957
0.8	25	0.951	0.952	0.944	0.936	0.951	0.944	0.936	0.943	0.938
	50	0.954	0.951	0.949	0.946	0.953	0.950	0.946	0.948	0.947
	100	0.953	0.949	0.947	0.951	0.949	0.948	0.951	0.948	0.947
	250	0.953	0.949	0.944	0.951	0.949	0.944	0.951	0.949	0.943
	500	0.955	0.960	0.959	0.955	0.960	0.959	0.954	0.960	0.959
0.9	25	0.952	0.949	0.943	0.940	0.947	0.941	0.940	0.942	0.937
	50	0.957	0.951	0.951	0.949	0.951	0.949	0.946	0.948	0.945
	100	0.955	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.949	0.949	0.947
	250	0.954	0.950	0.949	0.952	0.951	0.949	0.952	0.950	0.948
	500	0.956	0.959	0.960	0.955	0.960	0.960	0.955	0.959	0.960
0.95	25	0.953	0.948	0.943	0.944	0.946	0.940	0.939	0.941	0.937
	50	0.958	0.951	0.949	0.950	0.949	0.949	0.947	0.945	0.945
	100	0.958	0.952	0.951	0.954	0.952	0.951	0.950	0.950	0.949
	250	0.956	0.950	0.950	0.952	0.951	0.950	0.953	0.951	0.949
	500	0.957	0.960	0.960	0.955	0.960	0.960	0.955	0.960	0.960
0.99	25	0.954	0.947	0.940	0.947	0.944	0.937	0.938	0.940	0.932
	50	0.959	0.953	0.946	0.951	0.951	0.943	0.949	0.949	0.942
	100	0.961	0.959	0.953	0.958	0.958	0.952	0.955	0.957	0.951
	250	0.957	0.951	0.954	0.953	0.950	0.953	0.953	0.949	0.953
	500	0.954	0.962	0.965	0.954	0.963	0.965	0.953	0.962	0.964

ερευνητών που ακολούθησαν διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού της. Μάλιστα η αντιστοιχία της κλασσικής προσέγγισης (τριγωνοποίηση Cholesky) και της εφαρμογής του Kalman filter δεν ισχύει μόνο ως προς τα αποτελέσματα, αλλά επεκτείνεται και στα προβλήματα και τις ιδιαιτερότητες που έχουν καταγραφεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Κατά τα άλλα είδαμε ότι σε πεπερασμένα δείγματα, και με θεωρητική παράμετρο μακριά από τα όρια του πεδίου αντιστρεψιμότητας, η ευρύτητα διαδεδομένη μέθοδος CML αποδίδει καλύτερα σε σύγκριση με τις άλλες δυο και άρα δεν φαίνεται να αιτιολογείται η αναγκαιότητα του υπολογισμού των πριν του παρατηρημένου δείγματος σφαλμάτων. Το τοπίο αλλάζει όταν το θ λαμβάνει υψηλές τιμές, αφού σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαία η χρήση ακριβέστερων μεθόδων καθώς η επίδραση των εν λόγω σφαλμάτων φαίνεται σημαντική στην εκτιμητική διαδικασία. Η προσεγγιστική CML_B λειτουργεί μεν καλά, αλλά μεροληπτεί περισσότερο έναντι της ακριβούς, ενώ η EML είναι επισφαλής α-

Πίνακας 5.5. Μέσο halflength $\hat{\lambda}$ των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα $MA(1)$

θ	T	$\ell = 1$			$\ell \geq 2$		
		CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML
0.2	25	1.988 (0.288)	1.974 (0.291)	1.941 (0.284)	2.082 (0.307)	2.095 (0.315)	2.037 (0.300)
	50	1.997 (0.205)	1.994 (0.205)	1.976 (0.203)	2.061 (0.218)	2.064 (0.220)	2.039 (0.216)
	100	2.000 (0.146)	1.999 (0.146)	1.989 (0.145)	2.051 (0.155)	2.052 (0.155)	2.040 (0.154)
	250	2.001 (0.091)	2.000 (0.091)	1.997 (0.091)	2.045 (0.097)	2.045 (0.097)	2.041 (0.097)
	500	2.001 (0.062)	2.001 (0.062)	1.999 (0.062)	2.043 (0.067)	2.043 (0.067)	2.041 (0.067)
0.5	25	1.997 (0.289)	1.958 (0.287)	1.932 (0.286)	2.277 (0.365)	2.296 (0.373)	2.219 (0.352)
	50	2.000 (0.203)	1.985 (0.202)	1.972 (0.200)	2.258 (0.257)	2.268 (0.261)	2.231 (0.254)
	100	2.002 (0.142)	1.996 (0.141)	1.989 (0.141)	2.249 (0.179)	2.252 (0.180)	2.235 (0.178)
	250	2.001 (0.090)	1.998 (0.089)	1.995 (0.089)	2.241 (0.113)	2.242 (0.114)	2.235 (0.113)
	500	2.001 (0.061)	1.999 (0.061)	1.998 (0.061)	2.238 (0.078)	2.239 (0.078)	2.236 (0.078)
0.8	25	2.036 (0.304)	1.938 (0.281)	1.913 (0.279)	2.594 (0.406)	2.584 (0.395)	2.513 (0.387)
	50	2.021 (0.210)	1.969 (0.202)	1.956 (0.204)	2.585 (0.286)	2.590 (0.283)	2.548 (0.278)
	100	2.014 (0.145)	1.989 (0.142)	1.986 (0.142)	2.576 (0.199)	2.580 (0.200)	2.559 (0.198)
	250	2.006 (0.090)	1.997 (0.089)	1.995 (0.089)	2.567 (0.126)	2.568 (0.126)	2.560 (0.125)
	500	2.003 (0.062)	1.998 (0.061)	1.998 (0.061)	2.564 (0.086)	2.564 (0.086)	2.561 (0.086)
0.9	25	2.078 (0.317)	1.956 (0.283)	1.933 (0.277)	2.714 (0.418)	2.678 (0.399)	2.624 (0.395)
	50	2.048 (0.219)	1.970 (0.201)	1.953 (0.201)	2.709 (0.291)	2.699 (0.284)	2.664 (0.281)
	100	2.030 (0.149)	1.986 (0.142)	1.978 (0.143)	2.704 (0.203)	2.706 (0.202)	2.685 (0.200)
	250	2.014 (0.092)	1.995 (0.089)	1.994 (0.089)	2.697 (0.128)	2.698 (0.128)	2.690 (0.127)
	500	2.007 (0.062)	1.998 (0.061)	1.998 (0.061)	2.694 (0.087)	2.694 (0.087)	2.690 (0.087)
0.95	25	2.113 (0.324)	1.982 (0.286)	1.958 (0.279)	2.778 (0.425)	2.732 (0.403)	2.683 (0.402)
	50	2.073 (0.225)	1.982 (0.201)	1.967 (0.199)	2.771 (0.295)	2.750 (0.285)	2.724 (0.284)
	100	2.047 (0.154)	1.988 (0.141)	1.978 (0.141)	2.769 (0.204)	2.763 (0.200)	2.747 (0.199)
	250	2.024 (0.095)	1.994 (0.089)	1.990 (0.090)	2.764 (0.128)	2.765 (0.127)	2.757 (0.127)
	500	2.014 (0.064)	1.998 (0.061)	1.997 (0.061)	2.762 (0.088)	2.762 (0.087)	2.758 (0.087)
0.99	25	2.156 (0.332)	2.017 (0.293)	1.989 (0.284)	2.835 (0.434)	2.782 (0.413)	2.738 (0.412)
	50	2.111 (0.232)	2.011 (0.207)	1.993 (0.204)	2.830 (0.302)	2.800 (0.291)	2.780 (0.292)
	100	2.076 (0.162)	2.004 (0.146)	1.994 (0.145)	2.823 (0.212)	2.807 (0.207)	2.799 (0.206)
	250	2.045 (0.100)	2.000 (0.091)	1.995 (0.091)	2.819 (0.132)	2.813 (0.129)	2.810 (0.129)
	500	2.030 (0.067)	1.999 (0.062)	1.997 (0.062)	2.818 (0.089)	2.816 (0.088)	2.814 (0.088)

Σημείωση: Δειγματικές τυπικές αποκλίσεις σε (.)

φού συχνότερα από το αναμενόμενο δίνει αναξιόπιστους εκτιμητές σε όρους στατιστικής σημαντικότητας.

Όσον αφορά τη διενέργεια προβλέψεων απ' ότι φάνηκε, ελάχιστα διαφοροποιούνται μεταξύ τους οι προβλέψεις της κάθε μεθόδου ενώ και οι τρεις δίνουν ιδιαίτερα ικανοποιητικές καλύψεις των ΔΕ της πρόβλεψης αλλά και εξαιρετικά ακριβή ΔΕ.

5.3 Αποτελέσματα για το μικτό αυτοπαλίνδρομο σχήμα κινητού μέσου πρώτου βαθμού ARMA(1, 1)

5.3.1 Εκτιμητική

Οι τιμές που επιλέχθηκαν για τα ζεύγη (ϕ, θ) των παραμέτρων είναι οι 9 συνδυασμοί όταν $\phi \in \{0.2, 0.5, 0.9\}$ και $\theta \in \{0.2, 0.5, 0.9\}$ (Halkos & Kevork, 2006, περίπτωση 1: $0 < \phi < 1$ και $\theta > -\phi$, όπου οι αυτοσυσχετίσεις είναι θετικές και φθίνουν γεωμετρικά). Στον πίνακα 5.6 παρουσιάζονται τα συνήθη στατιστικά, η μεροληψία και το MSE για τους συνδυασμούς παραμέτρων, δειγμάτων και μεθόδων. Ενώ και πάλι ένα γενικό μοτίβο δεν είναι ξεκάθαρο, μπορεί να παρατηρηθεί ότι σε μικρό βαθμό αυτοσυσχέτισης, όταν $\phi = 0.2$ και καθώς το θ αυξάνει, η EML δείχνει λιγότερο μεροληπτική στην εκτίμηση του ϕ και η CML, παρουσιάζει μικρότερη μεροληψία στην εκτίμηση του θ μέχρι και $\theta = 0.5$. Συνολικά η σύγκριση σε όρους MSE είναι οριακή, για το ϕ ενώ για $\theta = 0.9$ η EML αποδεικνύεται σαφώς προτιμότερη με βάση αυτό το κριτήριο. Η προσεγγιστική CML_B φαίνεται να μην έχει ουσιαστικό πλεονέκτημα, αφού είναι σε κάθε περίπτωση χειρότερη από μια εκ των δυο άλλων μεθόδων.

Όταν η αυτοσυσχέτιση είναι εντονότερη, δηλ. για $\phi = 0.5$, και για $\theta = 0.2$ και 0.5 η CML προσεγγίζει ακριβέστερα και το ϕ και το θ , ενώ για υψηλή τιμή του θ καλύτερη σε όρους μεροληψίας και MSE φαίνεται η EML μέθοδος.

Όταν $\phi = 0.9$, η CML μεροληπτεί (αν και οριακά για $T > 25$) λιγότερο στις εκτιμήσεις του αυτοπαλίνδρομου τμήματος ανεξάρτητα από τις τιμές του θ έναντι της EML, με την τελευταία όμως να δείχνει πιο αποτελεσματική σε όρους MSE και για τις δυο παραμέτρους. Και πάλι, όσον αφορά το θ , οι εκτιμητές της CML είναι λιγότερο μεροληπτικοί για μικρά θ , ενώ υποεκτιμούν την παράμετρο στο $\theta = 0.9$.

Στον πίνακα 5.7 φαίνεται το επίπεδο εμπιστοσύνης των τριών εκτιμητών. Η συμπεριφορά και των τριών μεθόδων ως προς το ϕ είναι παρόμοια αλλά και αναμενόμενη. Δηλαδή τα ποσοστά στατιστικά σημαντικών όρων αυξάνονται καθώς αυξάνεται ο βαθμός της αυτοσυσχέτισης, αλλά και οι παρατηρήσεις του διαθέσιμου δείγματος. Ειδικά δε όταν το ϕ είναι μικρό, σε μεγάλα δείγματα είναι εμφανής μια βελτίωση των επιπέδων εμπιστοσύνης καθώς αυξάνεται το θ . Για τις προσεγγιστικές μεθόδους όσον αφορά τους στατιστικά σημαντικούς εκτιμητές για το θ , δεν παρουσιάζεται πρόβλημα. Στους εκτιμητές όμως της EML μεθόδου, ειδικά όταν $\theta = 0.9$, βρίσκουμε διαταραχές στη στατιστική σημαντικότητα και χαμηλά επίπεδα εμπιστοσύνης, αντίστοιχα με αυτά που βρήκαμε στο υπόδειγμα MA(1). Εδώ η εξήγηση είναι επίσης η ίδια καθώς ξανά η συντριπτική πλειοψηφία στατιστικά μη σημαντικών όρων βρέθηκαν κοντά στη μονάδα και με πολύ μεγάλο τυπικό σφάλμα άρα χαμηλό t -statistic και πολύ υψηλό p -value. Ανάλογης μορφής είναι και η δειγματοληπτική κατανομή του θ όπως στο σχήμα 5.3 με ποσοστά πάνω από 30% κοντά στη μονάδα για μικρά και μεσαία δείγματα, οπότε και στην περίπτωση του υποδείγματος ARMA(1, 1) επιβεβαιώνεται η ύπαρξη του pile-up effect του EML εκτιμητή

για το θ καθώς υπάρχει έκδηλη τάση προς το όριο της αντιστρεψιμότητας. Κατά την εκτίμηση του ϕ δεν βρέθηκαν ανάλογες ενδείξεις καθώς πάντοτε οι εκτιμητές ήταν εντός των επιτρεπτών ορίων για την εξασφάλιση της στασιμότητας.

5.3.2 Προβλέψεις

Οι προβλέψεις για ένα υπόδειγμα ARMA(1, 1) ℓ περιόδους μπροστά υπολογίζονται βάσει των σχέσεων:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \phi y_T + \theta \varepsilon_T, \quad \hat{y}_{T+\ell|T} = \phi \hat{y}_{T+\ell-1|T}, \quad \ell \geq 2 \quad (5.3)$$

και οι συντελεστές της κατά Wold αναπαράστασης ψ_j για το ARMA(1, 1) είναι οι $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \phi + \theta$ και $\psi_j = \phi^{j-1} \psi_1 = \phi^{j-1} (\phi + \theta)$, $j \geq 2$. Έτσι οι αντίστοιχες διακυμάνσεις θα είναι

$$\text{Var}(v_{T+1}) = \sigma^2, \quad \text{Var}(v_{T+\ell}) = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=1}^{\ell-1} \phi^{2(j-1)} \right), \quad \ell \geq 2 \quad (5.4)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι αν $|\phi| < 1$, δηλ. το ARMA(1, 1) είναι στάσιμο τότε αυτή συγκλίνει στην $\sigma^2(1 + (\phi + \theta)^2/(1 - \phi^2)) = \gamma_0$ καθώς $\ell \rightarrow \infty$, ενώ αν $|\phi| \geq 1$ αποκλίνει. Τα λ_ℓ των 95% ΔΕ της πρόβλεψης θα είναι αντίστοιχα

$$\lambda_1 = 2\sigma, \quad \lambda_\ell = 2\sigma \sqrt{1 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=1}^{\ell-1} \phi^{2(j-1)}}, \quad \ell \geq 2.$$

Προβλέποντας έως και $\ell = 10$ περιόδους μπροστά, εκτιμήθηκε η κάλυψη των ΔΕ (πίνακας 5.8) και τα αναμενόμενα halflength (πίνακας 5.9). Συνολικά όπως και στην περίπτωση του MA(1) οι καλύψεις είναι ικανοποιητικές και για τις τρεις μεθόδους, ενώ ιδιαίτερα σε μικρά δείγματα είναι φανερό πως όταν δεν επιδρά το θ στην πρόβλεψη, δηλ. για $\ell > 1$, και όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου ϕ , η κάλυψη τείνει να είναι χαμηλότερη. Από την εξέταση των μέσων ακτινών φαίνεται επίσης ότι και στο ARMA(1, 1) τα ΔΕ είναι ακριβέστατα, ενώ η σύγκριση σε απόλυτα μεγέθη δείχνει την ίδια συμπεριφορά των ΔΕ όπως στο υπόδειγμα MA(1). Και πάλι τα ΔΕ της CML είναι οριακά λιγότερο ακριβή και λόγω των τιμών των $\hat{\lambda}$ αλλά λόγω των τυπικών αποκλίσεων τους, ιδιαίτερα σε μικρά δείγματα, ενώ τα ΔΕ που παράγει η EML δείχνουν να είναι ακριβέστερα από των άλλων μεθόδων σε κάθε περίπτωση.

Σε συνδυασμό λοιπόν με όσα ειπώθηκαν, το ποια μέθοδος θα επιλεγεί δείχνει να εξαρτάται από το μέγεθος της παραμέτρου θ . Υιοθετώντας την CML, τα αποτελέσματα που θα λάβουμε θα είναι ικανοποιητικά για τιμές του θ μακριά από τη μονάδα, ενώ αν υπάρχει η υποψία ότι το θ είναι υψηλό, τότε πιθανόν η πληροφορία που θα συνεισέφερε η χρήση της EML να προσέθετε περισσότερη ακρίβεια ειδικά σε μικρά δείγματα. Βεβαίως, η χρήση πιο ακριβούς μεθόδου, συνεπάγεται και πάλι σχετικά μεγάλη πιθανότητα αναξιόπιστων συντελεστών, ενώ ως προς τις προβλέψεις, όποια μέθοδος και αν υιοθετηθεί, τα αποτελέσματα δεν θα διαφέρουν ιδιαίτερα.

Πίνακας 5.6. Εκτιμηθείσα μεροληψία (*Bias*) και μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*MSE*) των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα *ARMA*(1, 1) — βάσει 4000 προσομοιωμένων σειρών ανά ζεύγος (ϕ, θ) και διάφορα T

ϕ	θ	T	Bias $\hat{\phi}$			MSE $\hat{\phi}$			Bias $\hat{\theta}$			MSE $\hat{\theta}$		
			CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML
0.2	0.2	25	*0.02183	-0.03485	-0.03074	*0.19592	0.22232	0.19957	*0.00102	0.04994	0.05431	0.45978	0.42273	*0.26177
		50	*0.00043	-0.04078	-0.03783	*0.12609	0.16155	0.13841	*0.00119	0.03899	0.04465	0.17088	0.20886	*0.15528
		100	*-0.00236	-0.02866	-0.02075	*0.07140	0.09124	0.07609	*0.00124	0.02605	0.02017	*0.08036	0.10194	0.08097
		250	*0.00214	-0.00856	-0.00577	*0.02702	0.03058	0.02792	*-0.00064	0.01039	0.00724	*0.02801	0.03146	0.02806
		500	0.00350	-0.00175	*0.00005	*0.01329	0.01410	0.01353	-0.00216	0.00339	*0.00118	*0.01331	0.01404	0.01341
0.2	0.5	25	0.06039	-0.00999	*0.00346	0.10694	0.11692	*0.09608	*-0.00318	0.06312	0.02714	0.25968	0.22883	*0.12746
		50	0.01862	-0.02674	*-0.01350	*0.05362	0.06340	0.05445	*-0.00674	0.04571	0.02371	0.06664	0.07981	*0.05768
		100	0.00994	-0.01463	*-0.00605	*0.02490	0.02738	0.02563	*-0.00582	0.02278	0.00814	0.02428	0.02633	*0.02362
		250	0.00623	-0.00310	*0.00004	*0.00959	0.00989	0.00969	-0.00284	0.00794	*0.00227	0.00782	0.00793	*0.00772
		500	0.00502	*0.00031	0.00184	*0.00496	0.00501	0.00497	-0.00278	0.00261	*-0.00020	0.00394	0.00395	*0.00391
0.2	0.9	25	0.09854	0.03681	*0.02974	0.08022	0.05957	*0.04760	-0.02597	0.02729	*-0.00917	0.17592	0.10129	*0.03936
		50	0.05328	*0.00416	0.00583	0.03197	0.02562	*0.02228	-0.02458	0.04545	*0.01747	0.02853	0.01466	*0.01080
		100	0.02740	-0.00646	*-0.00213	0.01344	0.01152	*0.01092	-0.01989	0.02989	*0.01395	0.00711	0.00445	*0.00396
		250	0.01409	-0.00220	*-0.00033	0.00481	0.00451	*0.00434	-0.01136	0.01144	*0.00531	0.00172	0.00133	*0.00114
		500	0.00845	*0.00015	0.00093	0.00242	0.00231	*0.00220	-0.00637	0.00453	*0.00189	0.00071	0.00054	*0.00050
0.5	0.2	25	*-0.04507	-0.08791	-0.06194	*0.09606	0.12458	0.09610	*0.05324	0.10101	0.06377	0.23150	0.25137	*0.14899
		50	*-0.03060	-0.05262	-0.04187	*0.04780	0.06160	0.05055	*0.02623	0.05304	0.03806	*0.06748	0.08800	0.06749
		100	*-0.01686	-0.02520	-0.02156	*0.02127	0.02371	0.02196	*0.01325	0.02459	0.01731	*0.02835	0.03198	0.02868
		250	*-0.00426	-0.00728	-0.00612	*0.00759	0.00793	0.00773	*0.00425	0.00856	0.00581	*0.00978	0.01024	0.00982
		500	*-0.00068	-0.00209	-0.00160	*0.00377	0.00384	0.00380	*0.00112	0.00317	0.00188	*0.00475	0.00484	0.00476
0.5	0.5	25	*-0.01105	-0.05409	-0.04011	0.05774	0.06552	*0.05392	*0.04611	0.10888	0.04976	0.13978	0.14000	*0.08214
		50	*-0.01225	-0.03945	-0.02788	*0.02580	0.03222	0.02694	*0.01430	0.05959	0.02765	0.03505	0.04424	*0.03421
		100	*-0.00677	-0.01805	-0.01469	*0.01241	0.01344	0.01285	*0.00457	0.02343	0.01103	*0.01433	0.01570	*0.01440
		250	*-0.00085	-0.00502	-0.00399	*0.00468	0.00481	0.00475	*0.00142	0.00835	0.00385	0.00480	0.00490	*0.00478
		500	0.00084	-0.00123	*-0.00075	*0.00239	0.00242	0.00240	*-0.00011	0.00331	0.00111	0.00239	0.00240	*0.00238

↪

Πίνακας 5.6. (συνέχεια)

ϕ	θ	T	Bias $\hat{\phi}$			MSE $\hat{\phi}$			Bias $\hat{\theta}$			MSE $\hat{\theta}$		
			CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML
0.5	0.9	25	0.02447	* -0.01447	-0.01700	0.04980	0.04151	*0.03247	*0.00424	0.06398	0.00877	0.12143	0.05979	*0.02342
		50	0.01598	-0.01529	* -0.01408	0.02035	0.01882	*0.01610	* -0.01800	0.04874	0.02093	0.02217	0.01056	*0.00822
		100	*0.00761	-0.01308	-0.01083	0.00943	0.00906	*0.00821	-0.01722	0.03029	*0.01446	0.00611	0.00422	*0.00368
		250	0.00557	-0.00477	* -0.00350	0.00334	0.00348	*0.00316	-0.00994	0.01176	*0.00559	0.00149	0.00125	*0.00104
		500	0.00395	-0.00080	* -0.00074	0.00168	0.00164	*0.00160	-0.00553	0.00461	*0.00210	0.00064	0.00050	*0.00046
0.9	0.2	25	* -0.05838	-0.06911	-0.06187	0.02652	0.03147	*0.02416	*0.04033	0.07494	0.05154	0.10323	0.12987	*0.07921
		50	* -0.03338	-0.03650	-0.03466	0.00816	0.00884	*0.00795	*0.02041	0.03461	0.02386	0.02840	0.03390	*0.02812
		100	* -0.01871	-0.01975	-0.01927	0.00319	0.00329	*0.00313	*0.01073	0.01618	0.01154	*0.01277	0.01365	0.01285
		250	* -0.00709	-0.00743	-0.00743	0.00106	0.00107	*0.00106	*0.00504	0.00703	0.00527	*0.00441	0.00452	0.00442
		500	* -0.00336	-0.00352	-0.00354	0.00049	0.00049	*0.00049	*0.00257	0.00353	0.00268	0.00213	0.00215	*0.00213
0.9	0.5	25	* -0.04840	-0.06206	-0.05498	0.02065	0.02399	*0.01758	*0.05042	0.10929	0.05156	0.09451	0.09699	*0.05998
		50	* -0.03056	-0.03579	-0.03333	0.00715	0.00791	*0.00696	*0.01933	0.05116	0.02640	*0.02260	0.02800	0.02288
		100	* -0.01718	-0.01918	-0.01866	0.00284	0.00300	*0.00283	*0.00824	0.02131	0.01111	*0.00951	0.01036	0.00965
		250	* -0.00641	-0.00708	-0.00711	*0.00096	0.00098	0.00097	*0.00359	0.00837	0.00458	0.00323	0.00330	*0.00322
		500	* -0.00300	-0.00332	-0.00336	*0.00045	0.00045	0.00045	*0.00163	0.00397	0.00212	0.00157	0.00159	*0.00157
0.9	0.9	25	* -0.03833	-0.05610	-0.04721	0.02191	0.02157	*0.01338	0.06262	0.08408	*0.01265	0.13042	0.05439	*0.01846
		50	* -0.02271	-0.03356	-0.02999	0.00755	0.00795	*0.00600	* -0.00507	0.05319	0.02285	0.02182	0.01122	*0.00727
		100	* -0.01492	-0.02083	-0.01765	0.00318	0.00336	*0.00254	* -0.01249	0.03203	0.01513	0.00597	0.00451	*0.00361
		250	* -0.00532	-0.00801	-0.00689	0.00103	0.00113	*0.00089	-0.00763	0.01298	*0.00602	0.00144	0.00133	*0.00100
		500	* -0.00231	-0.00375	-0.00325	0.00047	0.00052	*0.00042	-0.00433	0.00588	*0.00239	0.00062	0.00057	*0.00043

Σημείωση: Ο αστερίσκος αντιστοιχεί στη μικρότερη απόλυτη μεροληψία (μικρότερη απόσταση σε σχέση με το μηδέν), και στο μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 5.7. Εκτιμηθέν επίπεδο εμπιστοσύνης^α των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα ARMA(1, 1) — 4000 προσομοιωμένες σειρές ανά ζεύγος (ϕ , θ) και διάφορα T

ϕ	θ	T	$\hat{\phi}$									$\hat{\theta}$								
			CML			CML _B			EML			CML			CML _B			EML		
			1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.2	0.2	25	0.191	0.260	0.314	0.224	0.307	0.372	0.096	0.164	0.214	0.224	0.297	0.347	0.379	0.435	0.482	0.089	0.156	0.197
		50	0.145	0.222	0.288	0.196	0.281	0.340	0.122	0.195	0.249	0.178	0.249	0.307	0.260	0.340	0.403	0.152	0.215	0.272
		100	0.116	0.207	0.284	0.140	0.229	0.298	0.109	0.176	0.250	0.143	0.225	0.291	0.196	0.289	0.365	0.140	0.223	0.292
		250	0.149	0.294	0.403	0.147	0.288	0.393	0.134	0.272	0.374	0.146	0.283	0.376	0.172	0.316	0.408	0.143	0.281	0.368
		500	0.258	0.450	0.569	0.254	0.436	0.551	0.250	0.436	0.555	0.229	0.429	0.536	0.253	0.449	0.555	0.230	0.429	0.531
0.2	0.5	25	0.143	0.249	0.314	0.115	0.220	0.282	0.072	0.136	0.188	0.339	0.471	0.556	0.505	0.611	0.674	0.206	0.327	0.414
		50	0.112	0.224	0.318	0.106	0.206	0.297	0.085	0.173	0.246	0.486	0.666	0.747	0.589	0.738	0.805	0.479	0.639	0.720
		100	0.141	0.306	0.419	0.113	0.266	0.373	0.110	0.259	0.365	0.762	0.882	0.920	0.811	0.905	0.938	0.763	0.882	0.925
		250	0.338	0.578	0.680	0.306	0.538	0.651	0.318	0.543	0.659	0.994	1.000	1.000	0.996	1.000	1.000	0.992	1.000	1.000
		500	0.638	0.828	0.894	0.613	0.811	0.882	0.628	0.819	0.888	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	0.9	25	0.198	0.353	0.458	0.121	0.245	0.334	0.069	0.150	0.220	0.849	0.914	0.936	0.946	0.962	0.967	0.376	0.424	0.438
		50	0.236	0.417	0.527	0.146	0.315	0.420	0.113	0.244	0.347	0.991	0.995	0.995	0.996	0.998	0.999	0.638	0.643	0.644
		100	0.356	0.572	0.689	0.256	0.457	0.587	0.235	0.435	0.564	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.863	0.864	0.864
		250	0.728	0.886	0.935	0.650	0.846	0.902	0.646	0.843	0.904	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.991	0.991
		500	0.965	0.992	0.995	0.951	0.988	0.994	0.946	0.989	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.2	25	0.304	0.462	0.564	0.286	0.440	0.535	0.250	0.366	0.454	0.164	0.242	0.295	0.293	0.361	0.418	0.101	0.162	0.220
		50	0.472	0.648	0.732	0.456	0.626	0.706	0.428	0.586	0.676	0.133	0.234	0.312	0.195	0.298	0.381	0.128	0.224	0.290
		100	0.745	0.874	0.921	0.727	0.863	0.906	0.716	0.851	0.907	0.159	0.307	0.399	0.186	0.337	0.431	0.159	0.296	0.381
		250	0.987	0.997	0.998	0.986	0.996	0.998	0.986	0.996	0.999	0.322	0.551	0.664	0.343	0.568	0.675	0.299	0.513	0.641
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.616	0.824	0.888	0.625	0.831	0.892	0.588	0.804	0.878
0.5	0.5	25	0.394	0.596	0.692	0.340	0.527	0.633	0.304	0.475	0.576	0.389	0.561	0.665	0.543	0.677	0.753	0.277	0.436	0.530
		50	0.656	0.824	0.883	0.600	0.780	0.851	0.589	0.758	0.834	0.665	0.819	0.884	0.738	0.863	0.915	0.634	0.795	0.856
		100	0.923	0.974	0.985	0.907	0.967	0.982	0.905	0.962	0.981	0.926	0.975	0.988	0.942	0.979	0.989	0.917	0.972	0.986
		250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

↪

Πίνακας 5.7. (συνέχεια)

ϕ	θ	T	$\hat{\phi}$									$\hat{\theta}$								
			CML			CML _B			EML			CML			CML _B			EML		
			1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.5	0.9	25	0.571	0.760	0.835	0.501	0.708	0.795	0.423	0.619	0.726	0.907	0.956	0.970	0.973	0.985	0.989	0.400	0.437	0.447
		50	0.860	0.941	0.967	0.831	0.928	0.958	0.791	0.909	0.945	0.997	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.650	0.651	0.652
		100	0.988	0.997	0.999	0.984	0.995	0.999	0.981	0.995	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.865	0.865	0.865
		250	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.992	0.992
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9	0.2	25	0.949	0.972	0.982	0.936	0.966	0.977	0.933	0.961	0.974	0.120	0.213	0.293	0.202	0.293	0.370	0.089	0.168	0.230
		50	0.999	1.000	1.000	0.998	1.000	1.000	0.998	1.000	1.000	0.145	0.287	0.399	0.178	0.325	0.435	0.136	0.279	0.365
		100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.265	0.495	0.618	0.286	0.516	0.633	0.250	0.473	0.589
		250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.675	0.864	0.923	0.683	0.868	0.924	0.631	0.843	0.913
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.959	0.989	0.995	0.960	0.989	0.995	0.945	0.988	0.994
0.9	0.5	25	0.974	0.988	0.994	0.962	0.981	0.989	0.962	0.981	0.987	0.468	0.680	0.782	0.600	0.758	0.834	0.359	0.554	0.663
		50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.824	0.933	0.967	0.865	0.952	0.975	0.795	0.913	0.950
		100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.998	0.999	0.992	0.998	0.999	0.989	0.997	0.999
		250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9	0.9	25	0.986	0.994	0.997	0.984	0.994	0.996	0.980	0.992	0.995	0.952	0.981	0.987	0.986	0.994	0.995	0.419	0.450	0.461
		50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.658	0.659	0.660
		100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.868	0.868	0.868
		250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.991	0.991
		500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

^aΕκφρασμένο ως το ποσοστό των στατιστικά σημαντικών όρων στα συνήθη επίπεδα εμπιστοσύνης της κάθε μεθόδου στο σύνολο των 4000 προσομοιώσεων.

Πίνακας 5.8. Μέση κάλυψη των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ με βάση το υπόδειγμα $ARMA(1, 1)$

ϕ	θ	T	CML			CML _B			EML		
			$\ell = 1$	$\ell = 5$	$\ell = 10$	$\ell = 1$	$\ell = 5$	$\ell = 10$	$\ell = 1$	$\ell = 5$	$\ell = 10$
0.2	0.2	25	0.914	0.939	0.952	0.916	0.943	0.948	0.923	0.937	0.946
		50	0.946	0.956	0.960	0.945	0.955	0.959	0.947	0.953	0.957
		100	0.949	0.944	0.952	0.949	0.944	0.951	0.947	0.942	0.950
		250	0.948	0.950	0.945	0.948	0.949	0.945	0.946	0.947	0.945
		500	0.961	0.951	0.956	0.961	0.951	0.956	0.960	0.951	0.956
0.2	0.5	25	0.917	0.943	0.953	0.916	0.938	0.949	0.921	0.930	0.947
		50	0.949	0.955	0.961	0.944	0.953	0.960	0.945	0.950	0.954
		100	0.949	0.942	0.951	0.949	0.941	0.951	0.947	0.940	0.948
		250	0.947	0.950	0.944	0.948	0.950	0.944	0.946	0.949	0.943
		500	0.962	0.952	0.958	0.961	0.952	0.958	0.961	0.950	0.957
0.2	0.9	25	0.916	0.944	0.955	0.923	0.938	0.947	0.925	0.929	0.939
		50	0.953	0.958	0.964	0.945	0.951	0.961	0.943	0.947	0.956
		100	0.951	0.949	0.957	0.947	0.947	0.952	0.945	0.946	0.952
		250	0.948	0.951	0.945	0.946	0.951	0.943	0.945	0.950	0.942
		500	0.962	0.954	0.962	0.961	0.954	0.961	0.961	0.953	0.961
0.5	0.2	25	0.924	0.935	0.946	0.919	0.928	0.942	0.920	0.922	0.941
		50	0.948	0.953	0.959	0.946	0.952	0.959	0.945	0.948	0.954
		100	0.952	0.941	0.950	0.951	0.940	0.950	0.948	0.939	0.948
		250	0.946	0.950	0.943	0.947	0.950	0.943	0.944	0.949	0.942
		500	0.960	0.950	0.958	0.960	0.950	0.958	0.960	0.950	0.958
0.5	0.5	25	0.926	0.935	0.945	0.923	0.932	0.943	0.918	0.922	0.940
		50	0.949	0.947	0.960	0.947	0.948	0.959	0.945	0.943	0.953
		100	0.951	0.946	0.955	0.951	0.945	0.954	0.948	0.939	0.950
		250	0.946	0.949	0.943	0.945	0.949	0.943	0.944	0.949	0.942
		500	0.962	0.953	0.957	0.962	0.953	0.956	0.962	0.952	0.956
0.5	0.9	25	0.918	0.934	0.948	0.921	0.927	0.940	0.926	0.914	0.933
		50	0.950	0.952	0.957	0.947	0.946	0.953	0.942	0.941	0.948
		100	0.952	0.949	0.960	0.948	0.945	0.956	0.946	0.940	0.952
		250	0.947	0.949	0.943	0.945	0.948	0.940	0.944	0.948	0.938
		500	0.963	0.951	0.959	0.961	0.951	0.959	0.961	0.950	0.958
0.9	0.2	25	0.925	0.879	0.884	0.916	0.879	0.878	0.919	0.879	0.880
		50	0.949	0.928	0.920	0.947	0.928	0.919	0.944	0.924	0.916
		100	0.953	0.941	0.934	0.953	0.941	0.934	0.952	0.939	0.930
		250	0.946	0.953	0.940	0.946	0.954	0.941	0.945	0.951	0.939
		500	0.961	0.949	0.953	0.961	0.949	0.953	0.961	0.948	0.952
0.9	0.5	25	0.922	0.886	0.891	0.915	0.883	0.885	0.918	0.881	0.883
		50	0.952	0.926	0.923	0.947	0.927	0.921	0.945	0.920	0.918
		100	0.952	0.944	0.932	0.952	0.945	0.933	0.952	0.941	0.930
		250	0.947	0.953	0.943	0.947	0.953	0.943	0.945	0.949	0.939
		500	0.960	0.949	0.952	0.960	0.949	0.952	0.960	0.949	0.951
0.9	0.9	25	0.909	0.888	0.891	0.920	0.876	0.874	0.926	0.888	0.881
		50	0.948	0.929	0.923	0.942	0.923	0.914	0.943	0.921	0.919
		100	0.954	0.946	0.932	0.952	0.942	0.929	0.950	0.941	0.929
		250	0.947	0.951	0.943	0.946	0.948	0.942	0.947	0.948	0.939
		500	0.961	0.953	0.951	0.963	0.953	0.950	0.962	0.953	0.949

Πίνακας 5.9. Μέσο halflength $\hat{\lambda}$ των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων με προέλευση T και ορίζοντα ℓ των τριών εκτιμητών για το υπόδειγμα ARMA(1, 1)

ϕ	θ	T	$\ell = 1$			$\ell = 5$			$\ell = 10$		
			CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML
0.2	0.2	25	1.917 (0.361)	1.925 (0.324)	1.891 (0.284)	2.239 (0.404)	2.200 (0.386)	2.131 (0.349)	2.300 (0.523)	2.223 (0.426)	2.138 (0.351)
		50	1.986 (0.218)	1.981 (0.212)	1.950 (0.204)	2.194 (0.263)	2.185 (0.264)	2.150 (0.249)	2.198 (0.262)	2.188 (0.263)	2.152 (0.249)
		100	1.999 (0.147)	1.996 (0.147)	1.977 (0.144)	2.180 (0.181)	2.177 (0.181)	2.156 (0.177)	2.181 (0.181)	2.178 (0.181)	2.157 (0.177)
		250	2.001 (0.091)	2.000 (0.091)	1.992 (0.091)	2.171 (0.113)	2.170 (0.113)	2.161 (0.112)	2.171 (0.113)	2.170 (0.113)	2.161 (0.112)
		500	2.001 (0.062)	2.001 (0.062)	1.997 (0.062)	2.167 (0.078)	2.167 (0.078)	2.162 (0.078)	2.167 (0.078)	2.167 (0.078)	2.162 (0.078)
0.2	0.5	25	1.949 (0.354)	1.931 (0.319)	1.883 (0.283)	2.585 (0.548)	2.531 (0.494)	2.423 (0.434)	2.612 (0.637)	2.544 (0.518)	2.430 (0.437)
		50	1.998 (0.214)	1.982 (0.212)	1.947 (0.203)	2.517 (0.333)	2.500 (0.328)	2.444 (0.311)	2.519 (0.333)	2.501 (0.328)	2.445 (0.312)
		100	2.002 (0.147)	1.995 (0.147)	1.977 (0.145)	2.489 (0.228)	2.481 (0.227)	2.452 (0.222)	2.489 (0.228)	2.481 (0.227)	2.452 (0.222)
		250	2.002 (0.092)	1.999 (0.091)	1.992 (0.091)	2.474 (0.142)	2.471 (0.142)	2.459 (0.141)	2.474 (0.142)	2.471 (0.142)	2.459 (0.141)
		500	2.002 (0.062)	2.000 (0.062)	1.997 (0.062)	2.468 (0.099)	2.466 (0.099)	2.460 (0.099)	2.468 (0.099)	2.466 (0.099)	2.460 (0.099)
0.2	0.9	25	2.007 (0.401)	1.939 (0.327)	1.894 (0.279)	3.290 (0.837)	3.116 (0.671)	2.959 (0.551)	3.339 (1.227)	3.131 (0.753)	2.963 (0.556)
		50	2.028 (0.243)	1.961 (0.217)	1.939 (0.203)	3.165 (0.480)	3.067 (0.438)	2.986 (0.397)	3.167 (0.487)	3.068 (0.441)	2.987 (0.398)
		100	2.026 (0.157)	1.984 (0.149)	1.970 (0.146)	3.090 (0.312)	3.034 (0.295)	2.997 (0.284)	3.090 (0.312)	3.034 (0.295)	2.997 (0.284)
		250	2.015 (0.094)	1.996 (0.092)	1.991 (0.091)	3.047 (0.187)	3.022 (0.182)	3.007 (0.180)	3.047 (0.187)	3.022 (0.182)	3.007 (0.180)
		500	2.009 (0.064)	1.999 (0.063)	1.996 (0.062)	3.031 (0.129)	3.017 (0.128)	3.010 (0.127)	3.031 (0.129)	3.017 (0.128)	3.010 (0.127)
0.5	0.2	25	1.960 (0.332)	1.948 (0.315)	1.892 (0.285)	2.632 (0.560)	2.599 (0.557)	2.497 (0.490)	2.675 (0.610)	2.635 (0.610)	2.523 (0.506)
		50	1.996 (0.210)	1.990 (0.210)	1.951 (0.203)	2.600 (0.375)	2.593 (0.376)	2.536 (0.355)	2.615 (0.384)	2.607 (0.384)	2.549 (0.363)
		100	2.000 (0.147)	1.998 (0.147)	1.978 (0.144)	2.585 (0.261)	2.583 (0.261)	2.552 (0.255)	2.592 (0.265)	2.590 (0.265)	2.560 (0.259)
		250	2.001 (0.091)	2.000 (0.091)	1.992 (0.091)	2.580 (0.164)	2.580 (0.164)	2.568 (0.163)	2.584 (0.166)	2.584 (0.166)	2.572 (0.165)
		500	2.001 (0.062)	2.001 (0.062)	1.997 (0.062)	2.578 (0.116)	2.578 (0.116)	2.571 (0.115)	2.581 (0.117)	2.581 (0.117)	2.574 (0.116)
0.5	0.5	25	1.974 (0.337)	1.941 (0.316)	1.883 (0.284)	3.183 (0.749)	3.121 (0.701)	2.954 (0.610)	3.244 (0.923)	3.161 (0.774)	2.985 (0.637)
		50	2.001 (0.212)	1.984 (0.211)	1.948 (0.203)	3.109 (0.478)	3.089 (0.474)	3.004 (0.448)	3.127 (0.494)	3.104 (0.487)	3.019 (0.461)
		100	2.003 (0.147)	1.996 (0.147)	1.976 (0.145)	3.078 (0.333)	3.069 (0.332)	3.026 (0.324)	3.088 (0.340)	3.078 (0.338)	3.035 (0.330)
		250	2.002 (0.092)	2.000 (0.091)	1.992 (0.091)	3.068 (0.209)	3.065 (0.209)	3.048 (0.207)	3.074 (0.213)	3.070 (0.212)	3.053 (0.211)
		500	2.002 (0.063)	2.001 (0.062)	1.997 (0.062)	3.064 (0.148)	3.062 (0.148)	3.053 (0.147)	3.068 (0.150)	3.066 (0.150)	3.058 (0.149)

↪

Πίνακας 5.9. (συνέχεια)

ϕ	θ	T	$\ell = 1$			$\ell = 5$			$\ell = 10$		
			CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML	CML	CML _B	EML
0.5	0.9	25	2.021 (0.397)	1.933 (0.325)	1.891 (0.278)	4.098 (1.102)	3.887 (0.946)	3.665 (0.771)	4.246 (1.859)	3.960 (1.294)	3.700 (0.811)
		50	2.033 (0.243)	1.963 (0.215)	1.937 (0.203)	3.967 (0.683)	3.844 (0.642)	3.732 (0.569)	4.005 (0.763)	3.868 (0.691)	3.750 (0.587)
		100	2.028 (0.157)	1.984 (0.149)	1.970 (0.146)	3.887 (0.459)	3.816 (0.433)	3.762 (0.412)	3.903 (0.481)	3.828 (0.446)	3.773 (0.421)
		250	2.015 (0.094)	1.997 (0.093)	1.990 (0.091)	3.842 (0.275)	3.812 (0.270)	3.791 (0.264)	3.851 (0.281)	3.820 (0.275)	3.798 (0.269)
		500	2.009 (0.064)	1.999 (0.063)	1.996 (0.062)	3.826 (0.193)	3.809 (0.189)	3.798 (0.188)	3.833 (0.196)	3.815 (0.192)	3.805 (0.191)
0.9	0.2	25	1.981 (0.315)	1.967 (0.309)	1.904 (0.287)	4.098 (1.084)	4.101 (1.120)	3.913 (0.909)	4.845 (1.843)	4.811 (1.853)	4.528 (1.262)
		50	1.998 (0.210)	1.994 (0.210)	1.956 (0.203)	4.166 (0.730)	4.178 (0.741)	4.074 (0.678)	4.860 (1.100)	4.863 (1.108)	4.731 (0.996)
		100	2.000 (0.147)	1.999 (0.146)	1.979 (0.145)	4.217 (0.507)	4.223 (0.511)	4.169 (0.489)	4.921 (0.784)	4.923 (0.787)	4.858 (0.747)
		250	2.001 (0.092)	2.000 (0.091)	1.992 (0.091)	4.274 (0.320)	4.277 (0.321)	4.254 (0.315)	5.016 (0.514)	5.017 (0.515)	4.989 (0.505)
		500	2.001 (0.062)	2.001 (0.062)	1.997 (0.062)	4.291 (0.222)	4.292 (0.222)	4.281 (0.220)	5.044 (0.365)	5.045 (0.365)	5.031 (0.360)
0.9	0.5	25	1.983 (0.332)	1.947 (0.316)	1.896 (0.288)	5.055 (1.300)	5.040 (1.277)	4.762 (1.056)	6.118 (2.362)	6.006 (2.058)	5.585 (1.534)
		50	2.003 (0.211)	1.987 (0.210)	1.954 (0.204)	5.099 (0.863)	5.109 (0.867)	4.962 (0.794)	6.032 (1.363)	6.017 (1.363)	5.832 (1.222)
		100	2.003 (0.147)	1.996 (0.146)	1.979 (0.145)	5.147 (0.596)	5.153 (0.598)	5.079 (0.572)	6.087 (0.967)	6.082 (0.969)	5.990 (0.919)
		250	2.002 (0.092)	2.000 (0.091)	1.992 (0.091)	5.212 (0.378)	5.215 (0.379)	5.183 (0.372)	6.196 (0.636)	6.194 (0.637)	6.155 (0.624)
		500	2.002 (0.062)	2.001 (0.062)	1.997 (0.062)	5.231 (0.261)	5.232 (0.262)	5.216 (0.259)	6.228 (0.450)	6.227 (0.451)	6.207 (0.445)
0.9	0.9	25	1.988 (0.418)	1.927 (0.332)	1.906 (0.282)	6.399 (1.692)	6.161 (1.552)	5.910 (1.226)	8.098 (3.596)	7.534 (3.023)	7.014 (1.873)
		50	2.028 (0.246)	1.962 (0.219)	1.944 (0.204)	6.441 (1.099)	6.311 (1.055)	6.174 (0.930)	7.827 (2.000)	7.543 (1.823)	7.334 (1.506)
		100	2.028 (0.158)	1.987 (0.155)	1.972 (0.146)	6.464 (0.754)	6.412 (0.736)	6.337 (0.674)	7.759 (1.330)	7.633 (1.283)	7.544 (1.141)
		250	2.017 (0.097)	2.000 (0.104)	1.991 (0.091)	6.528 (0.476)	6.511 (0.464)	6.471 (0.443)	7.847 (0.869)	7.797 (0.809)	7.753 (0.779)
		500	2.010 (0.066)	2.004 (0.081)	1.997 (0.062)	6.546 (0.347)	6.541 (0.347)	6.512 (0.306)	7.876 (0.691)	7.852 (0.599)	7.818 (0.556)

Σημείωση: Δειγματικές τυπικές αποκλίσεις σε (.)

Η περαιτέρω διερεύνηση του ζητήματος μας οδηγεί σε μια μελέτη περίπτωσης πραγματικών δεδομένων. Για να ελέγξουμε τι μπορεί να συμβεί στην πράξη κατά την εκτίμηση αλλά και πρόβλεψη σύμφωνα με τις διάφορες μεθόδους που συζητήθηκαν, θεωρούμε δυο χρονολογικές σειρές από την υπάρχουσα βιβλιογραφία ως ενδεικτικές των περιπτώσεων υποδειγμάτων που μελετήθηκαν. Η σειρά A, μήκους 197 παρατηρήσεων, βρέθηκε στους Box *et al.* (1994, σελ. 541) και αφορά καταγραφές μετρήσεων των συγκεντρώσεων μιας χημικής ουσίας, ενώ η σειρά B, μήκους 500 παρατηρήσεων βρέθηκε στον Wei (2006, σελ. 569–570) και αφορά μηνιαία δεδομένα ανεργίας στις ΗΠΑ. Σύμφωνα με τους συγγραφείς (Box *et al.*, 1994) η σειρά A ταυτοποιείται ως ARMA(1, 1) ενώ ο Wei (2006) ταυτοποιεί τη σειρά B ως ARIMA(0, 1, 1). Αν και στο παρόν τμήμα του κεφαλαίου δεν θα επικεντρωθούμε τόσο στην ταυτοποίηση των σειρών όσο στα αποτελέσματα της εκτιμητικής διαδικασίας, αναφέρουμε εδώ πως η διαδικασία τόσο στη φάση της ταυτοποίησης όσο και στη φάση της προκαταρκτικής εκτίμησης και των διαγνωστικών ελέγχων επιβεβαιώνει τις ταυτοποιήσεις των ανωτέρω αναφορών. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες στο παράρτημα A.

Πίνακας 6.1. Οι χρονολογικές σειρές της μελέτης

Σειρά	Περιγραφή	T	Υπόδειγμα
A	Χημικές συγκεντρώσεις — Μετρήσεις ανά 2 ώρες	197	ARMA(1, 1)
B	Άνεργες νεαρές γυναίκες 16 έως 19 ετών στις ΗΠΑ — Μηνιαία δεδομένα (Ιαν 1961 – Αυγ 2002)	500	ARIMA(0, 1, 1)

6.1 Εκτιμητική

Η μεθοδολογία της εκτιμητικής που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο εφαρμόστηκε και εδώ, οπότε οι παράμετροι των υποδειγμάτων εκτιμήθηκαν και με τις τρεις μεθόδους, CML, CML_B και EML. Θεωρώντας ότι η εκτιμηθείσα διαδικασία, όταν έχει αξιοποιηθεί το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος για την κάθε σειρά, είναι εκείνη που παρήγαγε τα δεδομένα ώστε να θεσμοθετηθεί ένα οριζόντιο θεωρητικό μέτρο σύγκρισης, εκτιμήσεις έγιναν και σε μικρότερα τμήματα του αρχικού δείγματος. Έτσι

θεωρήθηκαν για την πρώτη σειρά δείγματα των 50 και 100 πρώτων παρατηρήσεων ενώ για τη δεύτερη σειρά δείγματα των 50, 100 και 250 παρατηρήσεων. Δεν μελετήθηκαν δείγματα μικρότερα από 50 παρατηρήσεις διότι εμφανίστηκαν προβλήματα ταυτοποίησης. Έχοντας ταυτοποιήσει τη σειρά A ως ARMA(1, 1), αυτή θα περιγράφεται επαρκώς από τη διαδικασία

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (6.1)$$

ενώ η σειρά B που ταυτοποιήθηκε ως ARIMA(0, 1, 1), θα περιγράφεται από την

$$\Delta Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (6.2)$$

ή ισοδύναμα σε ανοικτή μορφή $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$.

Η εξίσωση (6.1) εκτιμήθηκε στη μορφή $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ με $y_t = Y_t - \mu$ και $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$ ο δειγματικός μέσος της σειράς για τα διάφορα T οπότε ο σταθερός όρος υπολογίζεται εκ των υστέρων ως $\delta = (1 - \phi)\mu$. Για την υλοποίηση της EML μέσω του Kalman filter χρησιμοποιήθηκαν οι αναπαραστάσεις

$$y_t = (1 \quad 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t,$$

με $\alpha_t = (y_t \quad \theta \varepsilon_t)'$ για την εκτίμηση της (6.1) και

$$\Delta Y_t = (1 \quad 0) \alpha_t$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_t,$$

με $\alpha_t = (\Delta Y_t \quad \theta \varepsilon_t)'$ για την (6.2) (βλ. και παραδείγματα 4.2 και 4.4).

Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων συγκεντρώνονται στον πίνακα 6.2 και για τα δυο υποδείγματα και τους συνδυασμούς μεθόδου εκτίμησης και πλήθους παρατηρήσεων. Για την περίπτωση του ARMA(1, 1) παρατηρούμε καταρχάς ότι οι εκτιμητές των παραμέτρων κάθε δεδομένης μεθόδου διαφέρουν ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος που εξετάζεται, με εμφανείς διαφορές στην εκτίμηση του θ που για τις πρώτες 50 και 100 παρατηρήσεις λαμβάνει τιμή περίπου στο -0.7 ενώ στο σύνολο των 197 παρατηρήσεων, βρίσκεται κοντά στο -0.6 . Αντίστοιχες διαφορές υπάρχουν και στο ϕ αλλά συνολικά αυτό πιθανόν να οφείλεται απλώς στο διαθέσιμο δείγμα και τη θέση των παρατηρήσεων σε αυτό. Για δεδομένο αριθμό παρατηρήσεων, μικρές είναι οι διαφορές των τριών μεθόδων ως προς και τις δύο παραμέτρους, ειδικά όταν $T = 197$. Εξαιρέση αποτελούν οι 50 παρατηρήσεις όπου οι εκτιμητές για το ϕ και το θ διαφέρουν μεταξύ των μεθόδων κατά περίπου 0.05 μονάδες χονδρικά στο ϕ και λιγότερο στο θ . Σε γενικές γραμμές πάντως τα αποτελέσματα των CML και EML είναι αντίστοιχα ενώ η CML_B είναι η μέθοδος που ελαφρώς υπερεκτιμά το θ κατ' απόλυτο τιμή. Επίσης οι μέθοδοι CML_B και EML παρέχουν ελάχιστα μικρότερες εκτιμήσεις της διακύμανσης των καταλοίπων, απ' ότι η CML. Δεδομένου πάντως του μεγέθους των παραμέτρων δηλαδή με ϕ κοντά στο 0.9 και

Πίνακας 6.2. Εκτιμητές των παραμέτρων^α και τυπικά σφάλματα^β

Σειρά	T	CML			CML _B			EML		
		ϕ	θ	σ	ϕ	θ	σ	ϕ	θ	σ
A	50	0.905 (0.090)	-0.739 (0.168)	0.338	0.861 (0.077)	-0.764 (0.134)	0.319	0.936 (0.072)	-0.711 (0.168)	0.334
	100	0.942 (0.048)	-0.678 (0.105)	0.338	0.937 (0.047)	-0.683 (0.103)	0.333	0.942 (0.045)	-0.681 (0.109)	0.332
	197	0.905 (0.046)	-0.565 (0.088)	0.315	0.915 (0.042)	-0.602 (0.082)	0.313	0.908 (0.045)	-0.575 (0.084)	0.313
B	50		-0.610 (0.118)	35.038		-0.610 (0.118)	35.036		-0.595 (0.148)	34.682
	100		-0.602 (0.081)	32.004		-0.602 (0.081)	32.003		-0.591 (0.082)	31.843
	250		-0.589 (0.052)	35.342		-0.589 (0.052)	35.342		-0.587 (0.043)	35.271
	500		-0.602 (0.036)	36.433		-0.602 (0.036)	36.433		-0.601 (0.033)	36.397

^αΌλοι οι εκτιμητές είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο 1%

^βΤα τυπικά σφάλματα δίνονται σε (.)

θ κοντά στο -0.6 ήταν αναμενόμενη η μη διαφοροποίηση των εκτιμητών μεταξύ τους σε σημαντικό βαθμό, κάτι που ισχυροποιείται και καθώς αυξάνεται το διαθέσιμο δείγμα.

Αναφορικά με το ARIMA(0, 1, 1) τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα. Και οι τρεις μέθοδοι δίνουν εκτιμήσεις για την παράμετρο θ πολύ κοντά μεταξύ τους σε όλα τα τμήματα τους δείγματος που εξετάστηκαν, πλην όμως οι εκτιμητές της διακύμανσης των καταλοίπων κατά την εκτίμηση με την EML είναι πάντοτε μικρότεροι από τους εκτιμητές των άλλων μεθόδων. Σε γενικές γραμμές αυτό οφείλεται στη διαφορετική στάθμισή τους αφού οι εκτιμητές των CML και CML_B ως εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων διορθώνονται ως προς τους βαθμούς ελευθερίας ενώ ο εκτιμητής της διακύμανσης στην EML όχι. Δεδομένου ότι σύμφωνα με το διαθέσιμο δείγμα η τιμή του θ βρίσκεται σχετικά μακριά από το όριο της αντιστρεψιμότητας, και πάλι η μη διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων είναι αναμενόμενη, οπότε η πληροφορία που αγνοείται λόγω της επιλογής προσεγγιστικής μεθόδου δεν αφαιρεί τίποτε σημαντικό από την ακρίβεια των εκτιμητών.

6.2 Προβλέψεις

Και για τους δυο τύπους υποδειγμάτων έγιναν προβλέψεις και κατασκευάστηκαν τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης. Για την περίπτωση του ARMA(1, 1) χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (5.3) με προσθήκη του σταθερού όρου για την πρόβλεψη και (5.4) για τον υπολογισμό της διακύμανσης (βλ. σελ. 48). Για το ARIMA(0, 1, 1) που σε ανοιχτή μορφή αντιστοιχεί σε ένα ARMA(1, 1) με $\phi = 1$ χωρίς σταθερό όρο, χρησιμοποιήθηκαν επίσης αυτές οι σχέσεις. Για $\phi = 1$ η πρόβλεψη σε κάθε ℓ θα είναι η ίδια και θα ισούται

Πίνακας 6.3. Προβλέψεις με το υπόδειγμα ARMA(1, 1)

(α) Προβλέψεις με τις εκτιμηθείσες παραμέτρους της διαδικασίας βάσει μικρότερων δειγμάτων

T	ℓ	Y_T	CML		CML _B		EML	
			$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$
50	1	17.6	17.238	0.676	17.244	0.637	17.230	0.668
	2	16.9	17.239	0.685	17.244	0.640	17.231	0.684
	5	16.8	17.240	0.703	17.244	0.645	17.233	0.721
	10	16.6	17.242	0.717	17.244	0.648	17.236	0.756
100	1	16.5	16.897	0.675	16.899	0.666	16.896	0.663
	2	17.2	16.906	0.698	16.909	0.687	16.906	0.685
	5	17.0	16.932	0.750	16.937	0.734	16.932	0.735
	10	16.5	16.966	0.801	16.972	0.778	16.965	0.784

(β) Προβλέψεις με τις παραμέτρους της διαδικασίας βάσει ολόκληρου του δείγματος

T	ℓ	Y_T	CML		CML _B		EML	
			$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$
50	1	17.6	17.173	0.630	17.176	0.626	17.173	0.626
	2	16.9	17.162	0.666	17.166	0.656	17.163	0.660
	5	16.8	17.136	0.732	17.142	0.716	17.138	0.724
	10	16.6	17.107	0.780	17.113	0.762	17.109	0.772
100	1	16.5	16.919	0.630	16.916	0.626	16.918	0.626
	2	17.2	16.933	0.666	16.928	0.656	16.932	0.660
	5	17.0	16.967	0.732	16.960	0.716	16.965	0.724
	10	16.5	17.004	0.780	16.996	0.762	17.002	0.772

με την πρόβλεψη της πρώτης περιόδου, ενώ οι διακυμάνσεις σε κάθε δεδομένη περίοδο πρόβλεψης, ℓ , θα είναι τότε ίσες με $\sigma^2(1 + (\ell - 1)(1 + \theta)^2)$ και θα αποκλίνουν καθώς $\ell \rightarrow \infty$.

Αρχικά η πρόβλεψη έγινε χρησιμοποιώντας τους εκτιμητές των παραμέτρων για $T = 50$ και $T = 100$ και βάσει αυτών προβλέφθηκαν έως 10 περίοδοι μπροστά για κάθε ορίζοντα στο ARMA(1, 1). Στο ARIMA(0, 1, 1) αντίστοιχα η πρόβλεψη έγινε βάσει των εκτιμητών για $T = 50, 100$ και 250 και προβλέφθηκαν 5 περίοδοι μπροστά, για κάθε μέθοδο (πίνακες 6.3, τμήμα (α) και 6.4, τμήμα (α) αντίστοιχα). Σε δεύτερη φάση έγινε πρόβλεψη στους ίδιους ορίζοντες και περιόδους χρησιμοποιώντας όμως τους εκτιμητές που προέκυψαν από το συνολικό δείγμα των 197 παρατηρήσεων για τη σειρά A και 500 παρατηρήσεων για τη σειρά B (τμήματα (β) των πινάκων 6.3 και 6.4). Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι πως η σχετική επίδοση της κάθε μεθόδου αντανακλά τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων τόσο αναφορικά με το μέγεθος των παραμέτρων όσο και με το μέγεθος του εκτιμητή της διακύμανσης όταν η πρόβλεψη έγινε με τους εκτιμητές των μικρότερων τμημάτων του δείγματος. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης των διάφορων μεθόδων παρόλα αυτά είναι ιδιαίτερα ακριβή και περιέχουν πάντοτε την πραγματική τιμή της σειράς. Στο υπόδειγμα ARIMA(0, 1, 1) τα halflength των διαστημάτων εμπιστοσύνης υπολογιζόμενα βάσει των εκτιμητών της EML είναι μικρότερα από αυτά των άλλων δυο μεθόδων για τις

Πίνακας 6.4. Προβλέψεις με το υπόδειγμα ARIMA(0, 1, 1)

(α) Προβλέψεις με τις εκτιμηθείσες παραμέτρους της διαδικασίας βάσει μικρότερων δειγμάτων

T	ℓ	Y _T	CML		CML _B		EML	
			$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$
50	1	432	430.276	70.076	430.260	70.072	431.169	69.365
	2	436	430.276	75.223	430.260	75.212	431.169	74.833
	5	360	430.276	88.893	430.260	88.865	431.169	89.252
100	1	422	394.861	64.008	394.858	64.006	394.984	63.686
	2	422	394.861	68.895	394.858	68.887	394.984	68.800
	5	429	394.861	81.823	394.858	81.801	394.984	82.257
250	1	865	819.436	70.684	819.433	70.684	819.629	70.542
	2	798	819.436	76.418	819.433	76.416	819.629	76.320
	5	811	819.436	91.489	819.433	91.484	819.629	91.491

(β) Προβλέψεις με τις παραμέτρους της διαδικασίας βάσει ολόκληρου του δείγματος

T	ℓ	Y _T	CML		CML _B		EML	
			$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$	$\hat{Y}_{T+\ell T}$	$\pm\lambda_\ell$
50	1	432	430.776	72.866	430.775	72.866	430.838	72.794
	2	436	430.776	78.434	430.775	78.434	430.838	78.384
	5	360	430.776	93.162	430.775	93.160	430.838	93.162
100	1	422	394.863	72.867	394.863	72.866	394.874	72.794
	2	422	394.863	78.435	394.863	78.434	394.874	78.384
	5	429	394.863	93.163	394.863	93.160	394.874	93.162
250	1	865	818.267	72.867	818.265	72.866	818.362	72.794
	2	798	818.267	78.435	818.265	78.434	818.362	78.384
	5	811	818.267	93.163	818.265	93.160	818.362	93.162

δυο πρώτες περιόδους πρόβλεψης. Όταν η πρόβλεψη έγινε με βάσει τους οιωνοί θεωρητικούς εκτιμητές ώστε η όποια διαφοροποίηση σε σχέση με τις τιμές των παραμέτρων μεταξύ των μεθόδων να είναι η ελάχιστη δυνατή, οι διαφορές εξομαλύνονται πλήρως.

Βάσει λοιπόν αυτών των ευρημάτων του κεφαλαίου αν καλούμασταν δεδομένου του υποδείγματος που έχει ταυτοποιηθεί να επιλέξουμε μέθοδο εκτίμησης των παραμέτρων, τότε κρίνουμε πως σύμφωνα με τα μεγέθη των παραμέτρων και πάλι δεν αιτιολογείται σε ουσιαστικό βαθμό η χρήση ακριβέστερης μεθόδου εκτίμησης. Και αυτό εφόσον τα αποτελέσματα της CML βρίσκονται πολύ κοντά στις εκτιμήσεις των CML_B και EML και οι όποιες επιπτώσεις κατά τη διενέργεια προβλέψεων δεν είναι εμφανείς και στα δυο υποδείγματα που μελετήθηκαν, σε απόλυτη συμφωνία με όσα συζητήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο της Monte Carlo προσομοίωσης.

7.1 Σύνοψη

Το κύριο ενδιαφέρον της παρούσας μελέτης ήταν η προσπάθεια αξιολόγησης τριών μεθόδων εκτίμησης συναφών με τη μέγιστη πιθανοφάνεια για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων σε μονομεταβλητά στοχαστικά υποδείγματα $ARMA(p, q)$, με απώτερο σκοπό την σχετικά ακριβέστερη βραχυχρόνια προβλεπτική ικανότητα. Συγκεκριμένα μελετήθηκε η συμπεριφορά δυο προσεγγιστικών μεθόδων εκτίμησης, της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας και της μεθόδου Backcasting καθώς και η συμπεριφορά των εκτιμητών της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας, σε υποδείγματα $MA(1)$ και $ARMA(1, 1)$. Αν και οι τρεις μέθοδοι ασυμπτωτικά παρέχουν ισοδύναμους εκτιμητές, σε πεπερασμένα δείγματα η συμπεριφορά της δειγματοληπτικής τους κατανομής μπορεί να διαφέρει ουσιαστικά. Συνεπώς μελετήθηκαν δείγματα αντιπροσωπευτικά των μεγεθών χρονολογικών σειρών που μπορεί να απαντηθούν στην πράξη από μικρού και μεσαίου μήκους (25 έως 100 παρατηρήσεις) έως μεγάλου μήκους (250 ή 500 παρατηρήσεων) σειρές.

Η μελέτη διαφορετικών μεγεθών δειγμάτων φανερώνει μια τάση σύγκλισης προς τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των αντίστοιχων μεθόδων καθώς αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων, χωρίς όμως να διαφοροποιείται η επίδοση μεταξύ των εκτιμητών. Σε επίπεδο εκτίμησης βρέθηκε πως δεν τίθεται θέμα ομοιόμορφης κατάταξης των τριών μεθόδων καθώς αυτή δείχνει να εξαρτάται από την πραγματική τιμή των παραμέτρων, ειδικά της παραμέτρου θ του όρου κινητού μέσου και στα δυο υποδείγματα. Όταν η θεωρητική τιμή του θ βρίσκεται μακριά από τα όρια του πεδίου αντιστρεψιμότητας, η μέθοδος της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας αποδίδει καλύτερα σε σύγκριση με τις άλλες δυο και άρα δεν φαίνεται να αιτιολογείται η αναγκαιότητα του υπολογισμού των πριν του παρατηρημένου δείγματος σφαλμάτων. Το τοπίο αλλάζει όταν το θ λαμβάνει υψηλές τιμές, αφού σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαία η χρήση ακριβέστερων μεθόδων καθώς η επίδραση των εν λόγω σφαλμάτων φαίνεται σημαντική στην εκτιμητική διαδικασία. Η προσεγγιστική μέθοδος Backcasting λειτουργεί ικανοποιητικά, αλλά παρουσιάζει μια τάση υπερεκτίμησης των παραμέτρων, ενώ η μέθοδος της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας ανεξάρτητα από τον τρόπο υλοποίησής της, όταν υπάρχει όρος κινητού μέσου,

είναι επισφαλής αφού συχνότερα από το αναμενόμενο δίνει αναξιόπιστους εκτιμητές σε όρους στατιστικής σημαντικότητας και με τιμή στο όριο της αντιστρεψιμότητας. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αξιοπιστία της στατιστικής συμπερασματολογίας είναι αμφισβητήσιμη.

Όσον αφορά τη διενέργεια προβλέψεων, ελάχιστα διαφοροποιούνται μεταξύ τους οι προβλέψεις της κάθε μεθόδου ενώ και οι τρεις δίνουν ιδιαίτερα ικανοποιητικές καλύψεις των διαστημάτων εμπιστοσύνης της πρόβλεψης καθώς και ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης, ακόμα και για σχετικά μεγάλους ορίζοντες πρόβλεψης. Οι όποιες διαφορές βρέθηκαν οριακές και στους δυο τύπους υποδειγμάτων που εξετάστηκαν, αν και τα παραγόμενα βάσει των εκτιμητών της ακριβούς μέγιστης πιθανοφάνειας διαστήματα εμπιστοσύνης βρέθηκε ότι έχουν μικρότερο πλάτος σε σχέση με αυτά των προσεγγιστικών μεθόδων.

Κατά συνέπεια η επιλογή μεθόδου εκτίμησης θα πρέπει να γίνει από τον ερευνητή λαμβάνοντας υπόψη τα μεγέθη των παραμέτρων του εκτιμηθέντος υποδείγματος καθώς και το μέγεθος του δείγματος. Αν υπάρχουν ενδείξεις ότι οι εκτιμητές των παραμέτρων αντιστοιχούν σε θεωρητικές τιμές κοντά στα όρια της αντιστρεψιμότητας, τότε η χρήση ακριβέστερης μεθόδου εκτίμησης ίσως να συνεισέφερε στην ελαχιστοποίηση της αβεβαιότητας, αν και στις περισσότερες περιπτώσεις οι επιπτώσεις στις προβλέψεις δεν θα ήταν ουσιαστικές.

7.2 Προεκτάσεις και μελλοντική έρευνα

Μια σημαντική κατεύθυνση για μελλοντική έρευνα ως προς τα μονομεταβλητά υποδείγματα θα μπορούσε να αποτελέσει η αξιολόγηση εκτιμητών πιθανοφάνειας που είναι περισσότερο συνεπείς στα όρια της αντιστρεψιμότητας όπως ο εκτιμητής του Vougas (2008), καθώς και η σε περισσότερο βάθος μελέτη υψηλότερου βαθμού διαδικασιών κινητού μέσου αλλά και μικτών.

Μια ακόμα κατεύθυνση που θα μπορούσε να δοθεί ως προς την αξιολόγηση της σχετικής προβλεπτικής ικανότητας είναι η υιοθεσία της μεθοδολογίας των διαρθρωτικών υποδειγμάτων που επιτρέπει την ανάλυση των συνιστωσών της χρονολογικής σειράς, και σύγκριση με τις προβλέψεις των $ARMA(p, q)$ υποδειγμάτων.

Σημαντική επέκταση της παρούσας μελέτης κρίνεται ότι θα ήταν επίσης η εφαρμογή και σύγκριση ανάλογων μεθόδων σε πολυμεταβλητά στοχαστικά υποδείγματα ή υποδείγματα συστημάτων εξισώσεων VARMA.

- AKAIKE, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, in *Second International Symposium on Information Theory*, ed. by B. N. Petrov and F. Csaki, Akadémiai Kiadó, pp. 267–281.
- (1974a). Markovian Representation of Stochastic Processes and its Application to the Analysis of Autoregressive Moving Average Processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **26**, pp. 363–387.
- (1974b). A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**(6), pp. 716–723.
- (1975). Markovian Representation of Stochastic Processes by Canonical Variables, *SIAM Journal on Control*, **13**(1), pp. 162–173.
- ANDERSON, B. D. O. AND J. B. MOORE (1979). *Optimal Filtering*, New Jersey: Prentice Hall.
- ANDERSON, T. W. AND A. TAKEMURA (1986). Why Do Noninvertible Estimated Moving Averages Occur? *Journal of Time Series Analysis*, **7**(4), pp. 235–254.
- ANSLEY, C. F. (1979). An Algorithm for the Exact Likelihood of a Mixed Autoregressive-Moving Average Process, *Biometrika*, **66**(1), pp. 59–65.
- ANSLEY, C. F. AND P. NEWBOLD (1980). Finite Sample Properties of Estimators for Autoregressive Moving Average Models, *Journal of Econometrics*, **13**(2), pp. 159–183.
- BOX, G. E. P., G. M. JENKINS, AND G. C. REINSEL (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, New Jersey: Prentice Hall International, 3rd ed.
- BOX, G. E. P. AND M. E. MULLER (1958). A Note on the Generation of Random Normal Deviates, *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**(2), pp. 610–611.
- BROCKWELL, P. J. AND R. A. DAVIS (1991). *Time Series: Theory and Methods*, New York: Springer, 2nd ed.
- (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*, New York: Springer.
- COMMANDEUR, J. J. F. AND S. J. KOOPMAN (2007). *An Introduction to State Space Time Series Analysis*, no. 1 in Oxford Practical Econometrics Series, Oxford: Oxford University Press.
- COOPER, D. M. AND R. THOMPSON (1977). A Note on the Estimation of the Parameters of the Autoregressive-Moving Average Process, *Biometrika*, **64**(3), pp. 625–628.
- CRYER, J. D. AND J. LEDOLTER (1981). Small-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in the First-Order Moving Average Model, *Biometrika*, **68**(3), pp. 691–694.
- DAVIDSON, J. (1981). Problems with the Estimation of Moving Average Processes, *Journal of Econometrics*, **16**(3), pp. 295–310.
- DAVIS, R. A., M. CHEN, AND W. T. M. DUNSMUIR (1995). Inference for MA(1) Processes With a Root on or Near the Unit Circle, *Probability and Mathematical Statistics*, **15**, pp. 227–242.
- DAVIS, R. A. AND W. T. M. DUNSMUIR (1996). Maximum Likelihood Estimation for MA(1) Processes with a Root on or near the Unit Circle, *Econometric Theory*, **12**(1), pp. 1–29.
- DE JONG, P. AND J. PENZER (2004). The ARMA Model in State Space Form, *Statistics & Probability Letters*, **70**(1), pp. 119–125.
- DENT, W. AND A.-S. MIN (1978). A Monte Carlo Study of Autoregressive Integrated Moving Average Processes, *Journal of Econometrics*, **7**(1), pp. 23–55.
- DICKEY, D. A. AND W. A. FULLER (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**(366), pp. 427–431.

- (1981). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Econometrica*, **49**(4), pp. 1057–1072.
- DIEBOLD, F. X. (1986a). The Exact Initial Covariance Matrix of the State Vector of a General MA(q) Process, *Economics Letters*, **22**(1), pp. 27–31.
- (1986b). Exact Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Models via the Kalman Filter, *Economics Letters*, **22**(2–3), pp. 197–201.
- DURBIN, J. AND S. J. KOOPMAN (2001). *Time Series Analysis by State Space Methods*, no. 24 in Oxford Statistical Science Series, Oxford: Oxford University Press.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, **50**(4), pp. 987–1007.
- FORSYTHE, G. E., M. A. MALCOLM, AND C. B. MOLER (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation, New Jersey: Prentice Hall.
- FULLER, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley Series in Probability and Statistics, New York: Wiley, 2nd ed.
- GARDNER, G., A. C. HARVEY, AND G. D. A. PHILLIPS (1980). Algorithm AS 154: An Algorithm for Exact Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive–Moving Average Models by Means of Kalman Filtering, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, **29**(3), pp. 311–322.
- HALKOS, G. E. AND I. S. KEVORK (2006). Estimating Population Means in Covariance Stationary Processes, in *Consolidation of the Statistical Systems of EU Candidate Countries – International Conference Proceedings*, Volos, Greece: University of Thessaly, 28th – 29th September 2006, pp. 179–190.
- (2007a). Critical Values for Testing a Unit Root in Finite Samples from the MA(1), *Applied Economics Letters*, **14**(3), pp. 191–195.
- (2007b). Testing for a Unit Root under the Alternative Hypothesis of ARIMA(0, 2, 1), *Applied Economics*, **39**(21), pp. 2753–2767.
- HAMILTON, J. D. (1994a). State Space Models, in *Handbook of Econometrics*, ed. by R. F. Engle and D. L. McFadden, Amsterdam: Elsevier Science B.V., vol. 4, § 50, pp. 3039–3080.
- (1994b). *Time Series Analysis*, Princeton: Princeton University Press.
- HANNAN, E. J. AND B. G. QUINN (1979). The Determination of the Order of an Autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **41**(2), pp. 190–195.
- HARVEY, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge: Cambridge University Press.
- (1993). *Time Series Models*, Hemel Hempstead: Harvester Wheatsheaf, 2nd ed.
- HARVEY, A. C. AND J. DURBIN (1986). The Effects of Seat Belt Legislation on British Road Casualties: A Case Study in Structural Time Series Modelling, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, **149**(3), pp. 187–227.
- HARVEY, A. C. AND G. D. A. PHILLIPS (1979). Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with Autoregressive–Moving Average Disturbances, *Biometrika*, **66**(1), pp. 49–58.
- HILLMER, S. C. AND G. C. TIAO (1979). Likelihood Function of Stationary Multiple Autoregressive Moving Average Models, *Journal of the American Statistical Association*, **74**(367), pp. 652–660.
- JARQUE, C. AND A. BERA (1987). A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, **55**(2), pp. 163–172.
- JONES, R. H. (1980). Maximum Likelihood Fitting of ARMA Models to Time Series with Missing Observations, *Technometrics*, **22**(3), pp. 389–395.
- JUDGE, G. G., W. E. GRIFFITHS, R. C. HILL, H. LÜTKEPOHL, AND T.-C. LEE (1985). *The Theory and Practice of Econometrics*, Wiley Series in Probability and Mathematics, New York: Wiley, 2nd ed.
- KALMAN, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering. Series D*, **82**, pp. 35–45.
- KALMAN, R. E. AND R. S. BUCY (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering. Series D*, **83**, pp. 95–108.

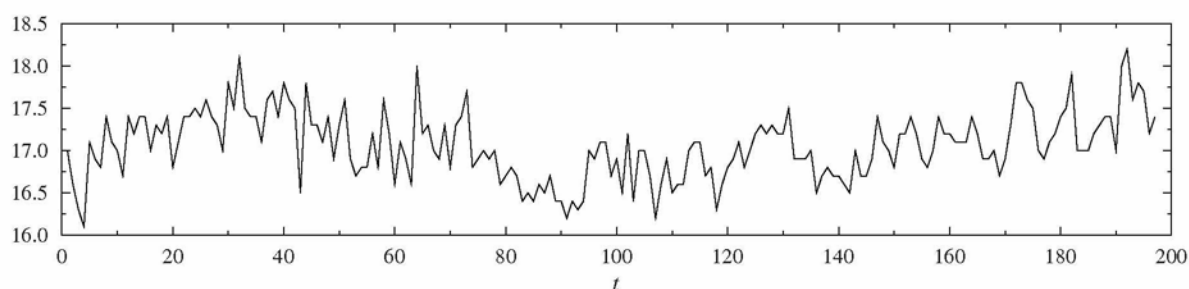
- KEVORK, I. S. (2010). Estimating the Optimal Order Quantity and the Maximum Expected Profit for Single-Period Inventory Decisions, *Omega*, **38**(3–4), pp. 218–227.
- KOHN, R. AND C. F. ANSLEY (1985). Efficient Estimation and Prediction in Time Series Regression Models, *Biometrika*, **72**(3), pp. 694–697.
- (1986). Estimation, Prediction, and Interpolation for ARIMA Models with Missing Data, *Journal of the American Statistical Association*, **81**(395), pp. 751–761.
- KOOPMAN, S. J., N. SHEPHARD, AND J. A. DOORNIK (1999). Statistical Algorithms for Models in State Space Using SsfPack 2.2, *Econometrics Journal*, **2**(1), pp. 113–166.
- LAW, A. M. AND W. D. KELTON (1982). *Simulation Modelling and Analysis*, New York: McGraw-Hill.
- LJUNG, G. M. AND G. E. P. BOX (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika*, **65**(2), pp. 297–303.
- LÜTKEPOHL, H. (2004). Univariate Time Series Analysis, in *Applied Time Series Econometrics*, ed. by H. Lütkepohl and M. Kräzig, Cambridge: Cambridge University Press, Themes in Modern Econometrics, pp. 8–85.
- (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin: Springer.
- MACKINNON, J. G. (1996). Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests, *Journal of Applied Econometrics*, **11**(6), pp. 601–618.
- MAKRIDAKIS, S. G., S. C. WHEELWRIGHT, AND R. J. HYNDMAN (1998). *Forecasting: Methods and Applications*, New York: Wiley, 3rd ed.
- MELARD, G. (1984). Algorithm AS 197: A fast Algorithm for the Exact Likelihood of Autoregressive-Moving Average Models, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, **33**(1), pp. 104–114.
- NELSON, C. R. (1974). The First-Order Moving Average Process: Identification, Estimation and Prediction, *Journal of Econometrics*, **2**(2), pp. 121–141.
- NEWBOLD, P. (1974). The Exact Likelihood Function for a Mixed Autoregressive-Moving Average Process, *Biometrika*, **61**(3), pp. 423–426.
- OSBORN, D. R. (1982). On the Criteria Functions used for the Estimation of Moving Average Processes, *Journal of the American Statistical Association*, **77**(378), pp. 388–392.
- PEARLMAN, J. G. (1980). An Algorithm for the Exact Likelihood of a High-Order Autoregressive- Moving Average Process, *Biometrika*, **67**(1), pp. 232–233.
- PESARAN, M. H. (1983). A Note on the Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors with Roots on the Unit Circle, *Australian Journal of Statistics*, **25**(3), pp. 442–448.
- PLOSSER, C. I. AND G. W. SCHWERT (1977). Estimation of a Non-Invertible Moving Average Process: The Case of Overdifferencing, *Journal of Econometrics*, **6**(2), pp. 199–224.
- QMS (2007). *EViews 6 User's Guide II*, Quantitative Micro Software, LLC, Irvine CA, USA, www.eviews.com.
- SAID, S. E. AND D. A. DICKEY (1984). Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order, *Biometrika*, **71**(3), pp. 599–607.
- SARGAN, J. D. AND A. BHARGAVA (1983). Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors when the Root lies on the Unit Circle, *Econometrica*, **51**(3), pp. 799–820.
- SCHWARZ, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model, *Annals of Statistics*, **6**(2), pp. 461–464.
- SHEPHARD, N. (1993). Distribution of the ML Estimator of an MA(1) and a Local Level Model, *Econometric Theory*, **9**(3), pp. 377–401.
- TANAKA, K. (1990). Testing for a Moving Average Unit Root, *Econometric Theory*, **6**(4), pp. 433–444.
- TANAKA, K. AND S. SATCHELL (1989). Asymptotic Properties of the Maximum-Likelihood and Nonlinear Least-Squares Estimators for Noninvertible Moving Average Models, *Econometric Theory*, **5**(3), pp. 333–353.
- TIAO, G. C. AND M. M. ALI (1971). Analysis of Correlated Random Effects: Linear Model with Two Random Components, *Biometrika*, **58**(1), pp. 37–51.
- VOUGAS, D. V. (2008). New Exact Estimation and Inference for a Gaussian MA(1) Process, *Economics Letters*, **99**(1), pp. 172–176.
- WEI, W. S. (2006). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Boston: Pearson Addison Wesley, 2nd ed.

Παραθέματα της Μελέτης Περίπτωσης

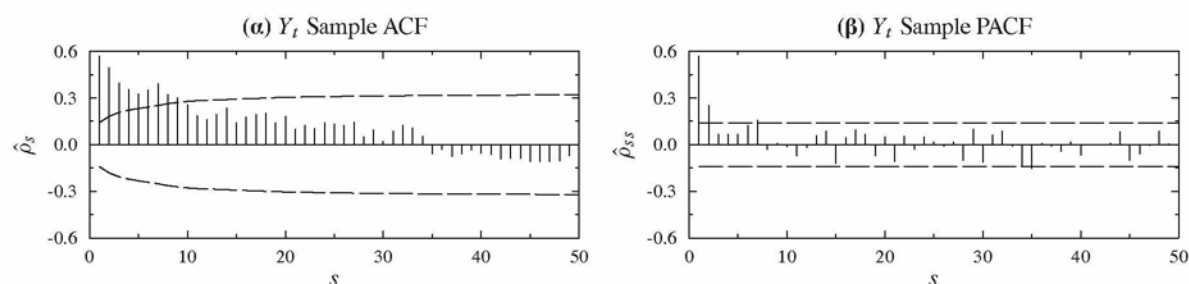
A.1 Στασιμότητα

Στο σχήμα A.1 υπάρχει η γραφική παράσταση της σειράς A σε επίπεδα, ενώ στο σχήμα A.2 τα κορρελογράμματα των δειγματικών συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης αντίστοιχα. Η γραφικές παραστάσεις της σειράς B σε επίπεδα και πρώτες διαφορές είναι στο σχήμα A.3 και τα κορρελογράμματα τους στο σχήμα A.4. Εφόσον σύμφωνα με το σχήμα A.1 δεν διαφαίνεται κάποια επιμένουσα ανοδική ή καθοδική τάση της σειράς A κρίνεται ότι είναι πιθανότατα στάσιμη σε επίπεδα γύρω από τον μη μηδενικό μέσο της. Αντίθετα η γραφική παράσταση των επιπέδων της σειράς B (σχήμα A.3 (α)) δείχνει οπωσδήποτε μη στασιμότητα στον μέσο υποδηλώνοντας ότι η λήψη διαφορών είναι απαραίτητη. Η μη στασιμότητα της σειράς επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (σχήμα A.4 (α)) φθίνει με πάρα πολύ αργό ρυθμό ενώ οι αυτοσυσχετίσεις είναι σημαντικές ακόμα και μετά από 30 χρονικές υστερήσεις. Η γραφική παράσταση των πρώτων διαφορών όμως (σχήμα A.3

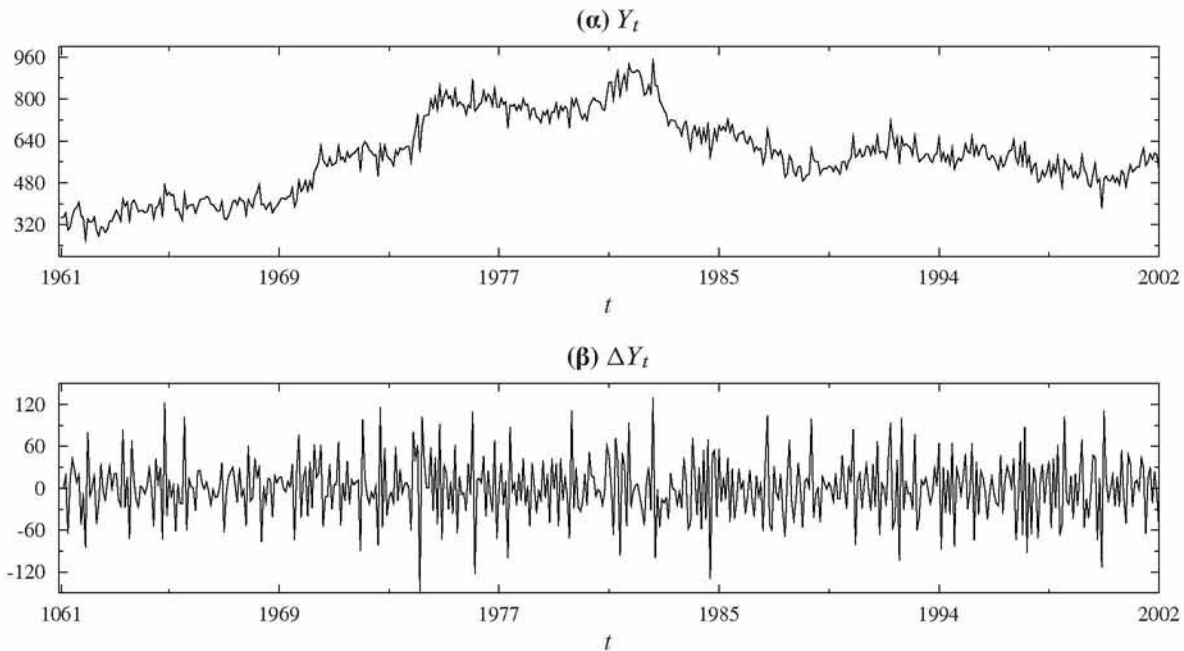
Σχήμα A.1. Σειρά A: Χημικές συγκεντρώσεις — Μετρήσεις ανά 2 ώρες, $T = 197$



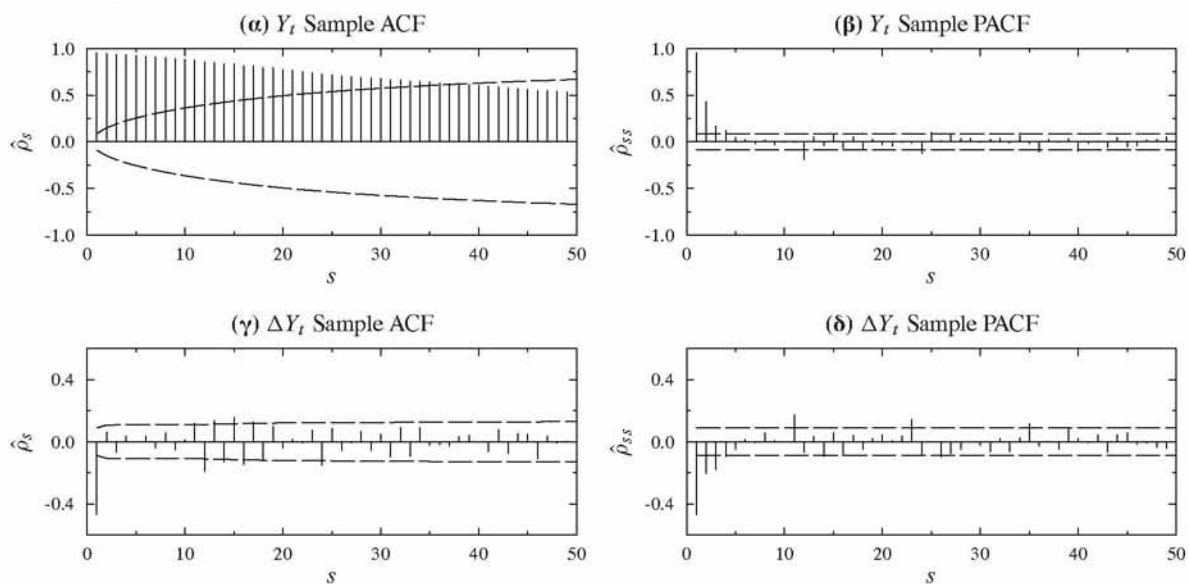
Σχήμα A.2. Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της Σειράς A



Σχήμα Α.3. Σειρά Β: Άνεργες νεαρές γυναίκες 16 έως 19 ετών στις ΗΠΑ —
Μηνιαία δεδομένα (Ιαν 1961 – Αυγ 2002), $T = 500$



Σχήμα Α.4. Δειγματικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της Σειράς Β



(β)), μαρτυρά οπωσδήποτε στασιμότητα σε πρώτες διαφορές με πιθανότητα μηδενικό μέσο, ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνει ταχύτατα προς το μηδέν (σχήμα Α.4 (γ)). Επίσης δεν φαίνεται να υπάρχει αστάθεια στη διακύμανση σε καμία από τις δυο σερές, οπότε κάποιος μετασχηματισμός των δεδομένων δεν κρίνεται απαραίτητος. Περαιτέρω διερεύνηση της στασιμότητας και επιβεβαίωση της τάξης διαφορίσης, απαιτεί έλεγχο μοναδιαίας ρίζας.

Έλεγχος Augmented Dickey-Fuller (ADF) Ένας ιδιαίτερα διαδεδομένος έλεγχος όσον αφορά τη στασιμότητα μιας χρονολογικής σειράς είναι ο έλεγχος των Dickey & Fuller (1979). Επειδή ο αρχικός έλεγχος που προτάθηκε είναι έγκυρος μόνον αν η σειρά

Πίνακας Α.1. ADF έλεγχος μοναδιαίας ρίζας

Σειρά		ADF <i>t</i> -statistics		τ Critical Values		
		Y_t	ΔY_t	1%	5%	10%
A	$\beta_0 = \beta_1 = 0$	0.627 (0.851)	-9.946 (0.000)	-2.578	-1.943	-1.616
	$\beta_0 \neq 0, \beta_1 = 0$	-4.959 (0.000)	-9.951 (0.000)	-3.466	-2.877	-2.575
	$\beta_0 \neq 0, \beta_1 \neq 0$	-4.948 (0.000)	-9.927 (0.000)	-4.008	-3.434	-3.141
B	$\beta_0 = \beta_1 = 0$	0.116 (0.719)	-19.339 (0.000)	-2.570	-1.941	-1.616
	$\beta_0 \neq 0, \beta_1 \neq 0$	-1.612 (0.787)	-19.386 (0.000)	-3.977	-3.419	-3.132
	$\beta_0 \neq 0, \beta_1 = 0$	-1.922 (0.322)	-19.335 (0.000)	-3.444	-2.867	-2.570

Σημείωση: *p*-values του MacKinnon (1996) σε (.)

είναι AR(1), εδώ χρησιμοποιήθηκε η επαυξημένη του μορφή, Augmented Dickey-Fuller (ADF), βλ. Dickey & Fuller (1981), Said & Dickey (1984), όπου γίνεται παραμετρική διόρθωση ώστε να ληφθεί υπόψη η συσχέτιση μεγαλύτερου βαθμού με την πρόσθεση *p* όρων πρώτων διαφορών της εξαρτημένης μεταβλητής. Υπό την υπόθεση ότι η χρονολογική σειρά y_t ακολουθεί μια AR(*p*) διαδικασία, εκτιμάται η παρακάτω σχέση ως προς τις πρώτες διαφορές της

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{A.1}$$

όπου $\rho = \phi_1 + \dots + \phi_p - 1$, τα β_0 και β_1 είναι σταθερές, και το β_1 αντιπροσωπεύει τη γραμμική τάση (αν αυτή υπάρχει). Εφόσον η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του AR(*p*) προϋποθέτει ότι $\sum_{i=1}^p \phi_i = 1 \Leftrightarrow \rho = 0$, η υπόθεση που ελέγχεται είναι η $H_0: \rho < 0$, μέσω της στατιστικής

$$t = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\rho})}} \tag{A.2}$$

Ο έλεγχος ADF παρέχει κριτικές τιμές της ασυμπτωτικής κατανομής τ της παραπάνω στατιστικής για τα συνήθη επίπεδα εμπιστοσύνης και η H_0 απορρίπτεται όταν $t < \tau$. Η αποδοχή της H_0 ισοδυναμεί με ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο άρα με μη στασιμότητα και έτσι λαμβάνονται διαφορές της σειράς —τίθεται δηλαδή $y_t = \Delta^d Y_t$ στην (A.1). Ο έλεγχος επαναλαμβάνεται έως ότου οι *d* (συνήθως είναι $d \leq 2$) τάξης διαφορές της σειράς να προκύψουν στάσιμες (δηλ. να ισχύει $\rho < 0$).

Ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα που αφορά την κατανομή της στατιστικής *t* είναι η ανεξαρτησία της από τον αριθμό των υστερήσεων που περιλαμβάνονται στην εξίσωση A.1 και επιπλέον οι Said & Dickey έχουν αποδείξει ότι ο έλεγχος είναι έγκυρος ασυμπτωτικά ακόμα και παρουσία όρων κινητού μέσου.

Τα αποτελέσματα του ADF ελέγχου και για τις δυο σειρές σε επίπεδα και πρώτες διαφορές συνοψίζονται στον πίνακα Α.1. Κατά τη διεξαγωγή του ελέγχου λήφθηκαν υπόψη όλοι οι συνδυασμοί των προσδιοριστικών συντελεστών β_0 και β_1 . Για τη σειρά Α συγκρίνοντας τις τιμές που έλαβαν οι *t* στατιστικές με τις κριτικές τιμές ή κρίνοντας

εκ των p -values φαίνεται καταρχάς ότι είναι οπωσδήποτε στάσιμη σε πρώτες διαφορές, αλλά και τα επίπεδά της θα μπορούσαν να θεωρηθούν στάσιμα με την προσθήκη τουλάχιστον σταθερού όρου (λόγω των πολύ αρνητικών t -statistics και των μηδενικών p -values όταν $\beta_0 \neq 0$). Αναφορικά με τη σειρά Β επιβεβαιώνεται η μη στασιμότητα των επιπέδων και στα τρία επίπεδα εμπιστοσύνης και η στασιμότητα των πρώτων διαφορών με πιθανότητα μηδενικό μέσο άρα η σειρά Β είναι πρώτης τάξης ολοκληρωμένη, $I(1)$.

A.2 Ταυτοποίηση

A.2.1 Διαγραμματικά

Η γραφική μελέτη των κορρελογραμμάτων του σχήματος A.2 σε μια προσπάθεια να εντοπιστούν υποψήφια υποδείγματα για τη σειρά Α δείχνει ένα AR(2) ή κάποιο μικτό υπόδειγμα ως κατάλληλο για τα επίπεδα της σειράς εφόσον η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνει κατά συνεχή τρόπο, και η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης έχει δυο στατιστικά σημαντικούς συντελεστές, ενώ για τις πρώτες διαφορές της σειράς Β, ο μοναδικός στατιστικά σημαντικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης του σχήματος A.4 (γ) υποδεικνύει ένα πιθανό MA(1).

A.2.2 Προκαταρκτική εκτίμηση και διαγνωστικοί έλεγχοι των καταλοίπων

Αφ' ενός, η ικανή συνθήκη για την επιλογή καταλληλότερου υποδείγματος έναντι άλλου είναι η συνέπεια προς την αρχή της φειδούς, δηλαδή την υπόθεση ότι τα δεδομένα περιγράφονται επαρκώς από το υπόδειγμα με τις ελάχιστες δυνατές παραμέτρους. Για να γίνει λοιπόν η επιλογή, σε συνδυασμό με τη στατιστική σημαντικότητα των εκτιμητών, αναζητούμε την *σχετικά* μικρότερη τιμή των κριτηρίων πληροφοριών ή επιλογής τάξης AIC (Akaike, 1973, 1974b), SIC (Schwarz, 1978) και HQ (Hannan & Quinn, 1979). Αυτά υπολογίζονται βάσει των παρακάτω παραστάσεων, όπου n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων που λήφθηκαν υπόψη κατά την εκτίμηση, m ο αριθμός των εκτιμημένων παραμέτρων, και για δεδομένο log-likelihood, $\ln \mathcal{L}$, λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή τους.

$$AIC = -2 \frac{\ln \mathcal{L}}{n} + 2 \frac{m}{n}, \quad SC = -2 \frac{\ln \mathcal{L}}{n} + m \frac{\ln n}{n}, \quad HQ = -2 \frac{\ln \mathcal{L}}{n} + 2m \frac{\ln(\ln n)}{n}.$$

Αφ' ετέρου, η αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το υπόδειγμα που θα επιλεγεί είναι η “λευκότητα” των καταλοίπων του. Οι διαταρακτικοί όροι ε_t θα πρέπει να είναι πράγματι κανονικά και ανεξάρτητα κατανεμόμενες τυχαίες μεταβλητές με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση (λευκός θόρυβος). Το παραπάνω εξασφαλίζεται μέσω μιας σειράς ελέγχων που αφορούν την αυτοσυσχέτιση, την ετεροσκεδαστικότητα μέσω του ARCH effect, αλλά και την κανονικότητα.

Αυτοσυσχέτιση Για τη συνολική τυχαιότητα της κατανομής των καταλοίπων χρησιμοποιείται η στατιστική $Q_{LB}(k)$ των Ljung & Box (1978), μέσω της οποίας διαπιστώνεται κατά πόσο οι πρώτοι k συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι από κοινού ίσοι με το

μηδέν. Δηλαδή η αρχική υπόθεση που ελέγχεται είναι η $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$. Η στατιστική ελέγχου, $Q_{LB}(k)$, δίνεται από τη σχέση

$$Q_{LB}(k) = T(T+2) \sum_{s=1}^k \frac{\hat{\rho}_s^2}{T-s}, \quad (A.3)$$

και ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $k-p-q$ βαθμούς ελευθερίας. Μη απόρριψη της H_0 εξασφαλίζει την ανεξαρτησία των καταλοίπων. Ο ίδιος έλεγχος εφαρμόζεται και στα τετραγωνικά κατάλοιπα για εντοπισμό πιθανής αστάθειας της διακύμανσης και άρα ετεροσκεδαστικότητας.

Ετεροσκεδαστικότητα λόγω ARCH effect Ελέγχοντας για ARCH effect εξασφαλίζουμε τη σταθερότητα της διακύμανσης των σφαλμάτων. Το ARCH αποτελεί πρόβλημα ετεροσκεδαστικότητας σε χρονολογικές σειρές όπου τα σφάλματα υποθέτουμε ότι είναι της μορφής $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και η ακολουθία σ_t τέτοια ώστε

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_k \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (A.4)$$

όπου $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0, i \geq 1$. Ο Engle (1982) πρότεινε τον εξής έλεγχο πολλαπλασιαστή Lagrange όσον αφορά το ARCH effect: Αν υποθεθεί ότι η ακολουθία ε_t^2 περιγράφεται από μια $AR(p)$ διαδικασία, εκτιμάται η βοηθητική σχέση

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2, \quad (A.5)$$

για τα τετράγωνα των καταλοίπων σε k υστερήσεις. Η υπόθεση H_0 που ελέγχεται είναι αν όλοι οι όροι $\hat{\alpha}_i$ της σχέσης (A.5) είναι στατιστικά ασήμαντοι ($\hat{\alpha}_i = 0$ για κάθε $i \geq 1$). Η τιμή της στατιστικής ελέγχου της H_0 είναι η TR^2 , όπου T ο αριθμός των παρατηρήσεων και R^2 ο συντελεστής προσδιορισμού της παλινδρόμησης (A.5). Η κριτική τιμή της TR^2 προκύπτει από την κατανομή χ^2 με k βαθμούς ελευθερίας. Η αποδοχή της H_0 υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει ARCH effect και κατ' επέκταση, ότι η διακύμανση των σφαλμάτων είναι σταθερή.

Κανονικότητα Ένας συνήθης έλεγχος για την κανονικότητα μιας μεταβλητής είναι αυτός που πρότειναν οι Jarque & Bera (1987):

$$JB = T \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right), \quad (A.6)$$

όπου T ο αριθμός των παρατηρήσεων, S είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας (skewness coefficient) και K ο συντελεστής κύρτωσης (kurtosis coefficient). Η στατιστική JB ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή χ^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας και ελέγχεται η υπόθεση $H_0: S = 0, K = 3$. Επειδή τα μεγέθη αυτά είναι χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής, αποδοχή της παραπάνω υπόθεσης ισοδυναμεί με κανονικότητα.

Στους πίνακες A.2 και A.4 παρατίθενται τα αποτελέσματα των προκαταρκτικών εκτιμήσεων διάφορων υποψήφιων υποδειγμάτων μαζί με τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών και τα κριτήρια επιλογής τάξης. Όλες οι εκτιμήσεις έγιναν με τη μέθοδο

της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας και για τη σειρά A σε επίπεδα ο δειγματικός μέσος αφαιρέθηκε πριν από την εκτίμηση ενώ στις πρώτες διαφορές της σειράς B δεν βρέθηκε σε κανένα υπόδειγμα στατιστικά σημαντικός σταθερός όρος. Στους πίνακες A.3 και A.5 βρίσκεται η ανάλυση των καταλοίπων και των καταλοίπων στο τετράγωνο για εκείνα τα υποδείγματα που είχαν όλες τις παραμέτρους στατιστικά σημαντικές.

Για τα επίπεδα της σειράς A όλα τα κριτήρια και η ανάλυση καταλοίπων δείχνουν ότι το υπόδειγμα με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα είναι το ARMA(1, 1) ενώ για τις πρώτες διαφορές της σειράς B όλο τα κριτήρια επιλέγουν το MA(1) ως προτιμότερο και σε συνδυασμό με την ανάλυση των καταλοίπων το υιοθετούμε.

Πίνακας A.2. Προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τα επίπεδα της Σειράς A

(p, q)	AR		MA			Criteria		
	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	θ_2	θ_3	AIC	SIC	HQ
(0, 1)			0.39*			0.77152	0.78819	0.77827
(0, 2)			0.43*	0.29*		0.66652	0.69985	0.68002
(0, 3)			0.42*	0.36*	0.22*	0.62577	0.67576	0.64601
(1, 0)	0.57*					0.61661	0.63333	0.62338
(1, 1)	0.90*		-0.56*			0.53912	0.57257	0.55266
(1, 2)	0.94*		-0.58*	-0.09		0.54180	0.59198	0.56211
(1, 3)	0.96*		-0.59*	-0.04	-0.10	0.54193	0.60883	0.56902
(2, 0)	0.43*	0.25*				0.55658	0.59015	0.57018
(2, 1)	1.06*	-0.12	-0.69*			0.52726	0.57761	0.54765
(2, 2)	1.13*	-0.19	-0.76***	0.05		0.53706	0.60420	0.56424
(2, 3)	1.04**	-0.10	-0.68	0.04	-0.07	0.54356	0.62748	0.57754

Σημείωση: Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας υποδηλώνεται με αστερίσκο ώστε * = 1%, ** = 5%, *** = 10%

Πίνακας A.3. Διαγνωστικοί έλεγχοι των καταλοίπων για τα επίπεδα της Σειράς A

(p, q)	$\hat{\varepsilon}_t$					
	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)
$Q_{LB}(5)$	70.625 (0.000)	27.593 (0.000)	13.622 (0.018)	11.498 (0.042)	4.958 (0.421)	1.477 (0.916)
$Q_{LB}(10)$	121.519 (0.000)	60.763 (0.000)	34.387 (0.000)	26.576 (0.003)	12.175 (0.274)	12.808 (0.235)
$Q_{LB}(20)$	161.848 (0.000)	88.100 (0.000)	57.244 (0.000)	46.727 (0.001)	24.831 (0.208)	28.120 (0.107)
JB	4.546 (0.103)	8.544 (0.014)	6.222 (0.045)	14.171 (0.001)	6.733 (0.035)	9.652 (0.008)
(p, q)	$\hat{\varepsilon}_t^2$					
	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)
$Q_{LB}(5)$	503.919 (0.000)	40.786 (0.000)	70.000 (0.000)	9.510 (0.023)	6.848 (0.033)	4.815 (0.090)
$Q_{LB}(10)$	883.775 (0.000)	115.849 (0.000)	88.645 (0.000)	13.968 (0.083)	9.906 (0.194)	7.443 (0.384)
$Q_{LB}(20)$	1250.131 (0.000)	142.718 (0.000)	90.157 (0.000)	21.129 (0.273)	20.288 (0.260)	12.693 (0.756)
ARCH(1)	128.274 (0.000)	0.113 (0.737)	97.556 (0.000)	8.306 (0.004)	1.583 (0.208)	1.816 (0.178)

Σημείωση: p-values σε (.)

Πίνακας Α.4. Προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τη Σειρά Β

(p, q)	AR			MA		Criteria		
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ_1	θ_2	AIC	SIC	HQ
(0, 1)				-0.60*		10.03085	10.03929	10.03416
(0, 2)				-0.63*	0.04	10.03317	10.05005	10.03979
(1, 0)	-0.47*					10.11305	10.12150	10.11636
(1, 1)	-0.07			-0.56*		10.03515	10.05206	10.04179
(1, 2)	-0.70***			0.07	-0.38	10.03736	10.06272	10.04731
(2, 0)	-0.57*	-0.21*				10.07477	10.09171	10.08142
(2, 1)	-0.05	0.02		-0.58*		10.04220	10.06760	10.05217
(2, 2)	-0.72	0.00		0.09	-0.39	10.04291	10.07678	10.05620
(3, 0)	-0.61*	-0.31*	-0.18*			10.04373	10.06918	10.05372
(3, 1)	-0.24	-0.11	-0.11***	-0.38**		10.03783	10.07176	10.05115
(3, 2)	-0.05	-0.14	-0.15**	-0.58	0.15	10.04114	10.08354	10.05778

Σημείωση: Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας υποδηλώνεται με αστερίσκο ώστε * = 1%, ** = 5%, *** = 10%

Πίνακας Α.5. Διαγνωστικοί έλεγχοι των καταλοίπων για τις πρώτες διαφορές της Σειράς Β

(p, q)	$\hat{\varepsilon}_t$			
	(0, 1)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)
$Q_{LB}(5)$	3.332 (0.649)	34.165 (0.000)	21.369 (0.001)	6.029 (0.303)
$Q_{LB}(10)$	8.816 (0.550)	38.142 (0.000)	24.796 (0.006)	10.805 (0.373)
$Q_{LB}(20)$	42.312 (0.003)	62.268 (0.000)	58.026 (0.000)	36.530 (0.013)
JB	5.997 (0.050)	3.528 (0.171)	5.471 (0.065)	7.925 (0.019)
(p, q)	$\hat{\varepsilon}_t^2$			
	(0, 1)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)
$Q_{LB}(5)$	2.136 (0.545)	16.342 (0.001)	2.976 (0.226)	2.935 (0.087)
$Q_{LB}(10)$	3.400 (0.907)	21.954 (0.005)	6.929 (0.436)	5.322 (0.503)
$Q_{LB}(20)$	24.575 (0.137)	39.549 (0.002)	26.343 (0.068)	22.315 (0.133)
ARCH(1)	1.237 (0.266)	1.617 (0.204)	1.506 (0.220)	0.354 (0.552)

Σημείωση: p -values σε (.)

B.1 Παραδείγματα εκτίμησης με το Kalman filter στο EViews

Το EViews διαθέτει τη δυνατότητα εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας με το Kalman filter μέσω του object `sspace`. Για την αναπαράσταση και εκτίμηση ενός υποδείγματος MA(1) όπως στο παράδειγμα 4.2 (στην κατά Harvey μορφή) κάνουμε τα παρακάτω βήματα: Έστω ότι έχουμε δημιουργήσει ένα `workfile` και έχουμε αποθηκεύσει τα δεδομένα της σειράς με όνομα `y1`. Δημιουργούμε ένα αρχείο `.prg` από το menu `File/New/Program`. Εκεί γράφουμε τα εξής

```
coef(1) theta
coef(1) s2

genr y=y1-@mean(y1)

sspace kf
kf.append @signal y = sv1
kf.append @state sv1 = sv2(-1) + e
kf.append @state sv2 = theta(1)*e
kf.append @ename e
kf.append @evar var(e) = s2(1)

equation cml.ls(z,deriv=AA) y MA(1)
theta(1)=cml.c(1)
s2(1)=cml.@se^2

kf.ml(showopts,m=2000,c=1e-5)
```

και πατάμε `run`. Οι πρώτες δυο εντολές ορίζουν τους συντελεστές `theta` και `s2`, που θα χρησιμοποιηθούν στην `state - space` αναπαράσταση και εκτίμηση. Το `theta(1)` αντιστοιχεί στο θ και το `s2(1)` είναι η σταθερά στην οποία αντιστοιχίζεται το σ^2 . Η εντολή `genr y=y1-@mean(y1)` παράγει τη σειρά `y` αφού αφαιρέσει από την `y1` τον δειγματικό της μέσο. Το `sspace kf` δημιουργεί το object `sspace` με όνομα `kf` και ό,τι ακολουθεί τις εντολές `kf.append` αφορά τον ορισμό της αναπαράστασης, την οποία θα περιγράψουμε λεπτομερώς αργότερα. Η γραμμή `equation cml.ls...` εκτιμά το MA(1) μέσω της CML και κατόπιν γίνεται ανάθεση των αποτελεσμάτων αυτών ως αρχικές τιμές για την εκτίμηση μέσω του Kalman filter στις εντολές `theta(1)=cml.c(1)` για το θ και `s2(1)=cml.@se^2` για το σ^2 ενώ τέλος η γραμμή `kf.ml...` εκτιμά το Kalman filter.

Όταν ανοίξουμε το kf θα δούμε τα αποτελέσματα της εκτίμησης και αν πατήσουμε το κουμπί Spec θα δούμε πως έχει οριστεί η αναπαράσταση. Τα περιεχόμενα θα είναι τα παρακάτω:

```
@signal y = sv1
@state sv1 = sv2(-1) + e
@state sv2 = theta(1)*e
@ename e
@evar var(e) = s2(1)
```

Επεξηγώντας, ό,τι ακολουθεί μετά την έκφραση @signal αντιστοιχεί στον ορισμό της εξίσωσης μέτρησης, ενώ ό,τι ακολουθεί την έκφραση @state αντιστοιχεί στην εξίσωση κατάστασης, και τέλος στις δυο τελευταίες γραμμές του κώδικα γίνεται ανάθεση του διαταρακτικού όρου στη μεταβλητή e (γράφοντας απλώς @ename και μετά το όνομα που δίνουμε στο σφάλμα, εδώ e) και κατόπιν ο ορισμός της διακύμανσης ως @evar var(e) = s2(1). Σημειώνεται ότι η παραπάνω αναπαράσταση αντιστοιχεί επακριβώς στο παράδειγμα 4.2 όπου η εξίσωση κατάστασης είναι η $y_t = \alpha_{1,t}$ και οι εξισώσεις μέτρησης οι $\alpha_{1,t} = \alpha_{2,t-1} + \varepsilon_t$ και $\alpha_{2,t} = \theta\varepsilon_t$.

Έχοντας εκτιμήσει ένα MA(1) με την παραπάνω διαδικασία, ένα τυπικό output θα είναι αυτό του παρακάτω πίνακα (αναφέρεται στην εκτίμηση ενός MA(1) με $\theta = 0.9$ και διακύμανση σφαλμάτων $\sigma^2 = 1$):

```
=====
Space: KF
Method: Maximum likelihood (Marquardt)
Sample: 1 500
Included observations: 500
Estimation settings: tol= 1.0e-05, derivs=accurate numeric
Initial Values: S2(1)=1.03725, THETA(1)=0.85559
Convergence achieved after 6 iterations
=====
                Coefficient Std. Error  z-Statistic  Prob.
=====
                S2(1)         1.008323   0.066890   15.07427   0.0000
                THETA(1)      0.875749   0.024154   36.25639   0.0000
=====
                Final State  Root MSE  z-Statistic  Prob.
=====
                SV1         -0.773492  1.004153  -0.770293   0.4411
                SV2          0.000000  0.879386  0.000000   1.0000
=====
Log likelihood      -712.2695   Akaike                2.857078
Parameters          2          Schwarz               2.873937
Diffuse priors      0          Hannan-Quinn         2.863693
=====
```

Οι πρώτες γραμμές παρέχουν πληροφορίες για το δείγμα, τις ρυθμίσεις της εκτίμησης, τις αρχικές τιμές και τη σύγκλιση. Το δεύτερο τμήμα με το γνώριμο τρόπο περιέχει τα αριθμητικά αποτελέσματα της εκτίμησης μαζί με τα στατιστικά τους, ενώ το τελευταίο τμήμα δίνει πληροφορίες για την πρώτη πρόβλεψη $\alpha_{T+1|T}$ και τη διακύμανσή της ως την τετραγωνική ρίζα των διαγώνιων στοιχείων της μήτρας $\mathbf{P}_{T+1|T}$. Οπότε στο συγκεκριμένο πίνακα το Final State για το SV1 είναι στην ουσία η πρόβλεψη $\hat{y}_{T+1|T}$ και το Root MSE η τιμή της ποσότητας $\sigma\sqrt{f_{T+1}}$. Για περισσότερα βλέπε EViews 6 User's Guide II, §35.

Με τη βοήθεια και των υπόλοιπων παραδειγμάτων 4.1 έως 4.5 μπορούμε να κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις για διάφορα υποδείγματα με τον τρόπο που δείξαμε παραπάνω. Για καλύτερη εποπτεία ο αναγνώστης συμβουλεύεται να χρησιμοποιήσει τις κατάλληλες διαστάσεις στον ορισμό των συντελεστών. Για παράδειγμα σε ένα AR(2) ο ορισμός των συντελεστών θα ήταν ο `coef(2) phi` ώστε μετά να ανατεθεί το ϕ_1 στο `phi(1)` και το ϕ_2 στο `phi(2)`. Ένα περεταίρω παράδειγμα για την αναπαράσταση και εκτίμηση ενός ARMA(1, 1) θα ήταν

```
coef(1) phi
coef(1) theta
coef(1) s2

genr y=y1-@mean(y1)

sspace kf
kf.append @signal y = sv1
kf.append @state sv1 = phi(1)*sv1(-1) + sv2(-1) + e
kf.append @state sv2 = theta(1)*e
kf.append @ename e
kf.append @evar var(e) = s2(1)

equation cml.ls(z,deriv=AA) y AR(1) MA(1)
phi(1)=cml.c(1)
theta(1)=cml.c(2)
s2(1)=cml.@se^2

kf.ml(showopts,m=2000,c=1e-5)
```

B.2 Ένα παράδειγμα προσομοίωσης

Στο συνοδευτικό CD, στο φάκελο EViews, ο αναγνώστης μπορεί να βρει και δυο αρχεία που χρησιμεύουν για την υλοποίηση Monte Carlo προσομοίωσης, ανάλογη της μεθοδολογίας που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία. Το πρώτο αρχείο που θα χρειαστεί είναι το `MA1_sim.prg` που κάνει ακριβώς αυτό που υπονοεί το όνομά του. Ανάλογα με τις παραμέτρους που θα ορίσουμε (α) παράγει τυχαίους αριθμούς από την κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ (β) κατασκευάζει βάσει αυτών τις ακολουθίες $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (γ) δημιουργεί σειρές από το υπόδειγμα MA(1). Το αρχείο ως έχει, δημιουργεί 1000 MA(1) σειρές μήκους 500 παρατηρήσεων με $\mu = 0$, $\theta = 0.8$ και $\sigma^2 = 1$ τις οποίες αποθηκεύει ως `y1...y1000` σε ένα `workfile` με όνομα `MA1_0_0.8_1`. Αν αλλάξουμε τις παραμέτρους θα αλλάξει και το όνομα του `workfile`. Το δεύτερο αρχείο, `MA1_est.prg`, αν το τρέξουμε θα εκτιμήσει αυτές τις σειρές και με τις τρεις μεθόδους και θα μας επιστρέψει έναν πίνακα με τα αποτελέσματα για τις μέσες τιμές, τη μεροληψία και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, ενώ θα δημιουργήσει και πίνακες, των οποίων οι στήλες αντιστοιχούν στα διάφορα μεγέθη δείγματος και οι γραμμές σε κάθε δεδομένη σειρά, που θα περιέχουν τα $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma}$ και τα p -values των εκτιμήσεων ξεχωριστά για την κάθε μέθοδο. Και στα δύο αρχεία περιλαμβάνονται επεξηγηματικά σχόλια.