

**ΠΜΣ Εφαρμοσμένης Οικονομικής  
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**

**Διπλωματική Εργασία**

**ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ-ΖΗΤΗΣΗΣ ΣΕ  
ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ – ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ  
ΔΩΣΕΙ ΧΑΟΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ;**

**Αμαλία Γεωργίου Γκάνα**

**Επιβλέπων Καθηγητής: Λέκτορας Λουκάς Ζαχείλας**

**Βόλος 2011**

## **Υπεύθυνη Δήλωση Πρωτοτυπίας Διπλωματικής Εργασίας**

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Βόλος, Ιανουάριος 2011

Στους γονείς μου,  
και στον επιβλέποντα καθηγητή μου  
κ. Λουκά Ζαχείλα.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	5
Abstract .....	7
Κεφάλαιο 1 .....	8
1. Εισαγωγή.....	8
Κεφάλαιο 2 .....	13
2. Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Συνεχή Χρόνο .....	13
2.1 Ευστάθεια Ισορροπίας Προσφοράς και Ζήτησης.....	13
2.2 Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Συνεχή Χρόνο .....	16
2.2.1 Εφαρμογή στο Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης .....	17
2.3 Ευστάθεια Ανταγωνιστικής Ισορροπίας.....	21
2.3.1 Εφαρμογή στην Ανταγωνιστική Ισορροπία .....	24
2.4 Γενική Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Υποκατάστατα Αγαθά ....	29
2.5 Γενική Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Συμπληρωματικά Αγαθά	35
2.6 Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Υποκατάστατα Αγαθά με Μη Γραμμικότητα .....	40
2.6.1 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς την Τιμή του.....	41
2.6.1.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	41
2.6.1.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	44
2.6.2 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς την Τιμή του Άλλου Αγαθού .....	46
2.6.2.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	46
2.6.2.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	48
2.6.3 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς τις Τιμές και των Δύο Αγαθών .....	50
2.6.3.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	50
2.6.3.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	52
2.6.3.3 3η Περίπτωση μη γραμμικότητας .....	54
2.6.4 Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας με Τρία Αγαθά.....	57
2.6.4.1 Το Αγαθό 3 Δεν Σχετίζεται με τα Άλλα Δύο Αγαθά .....	58
2.6.4.2 Το Αγαθό 3 Σχετίζεται με το Αγαθό 1 .....	60
2.6.4.3 Το Αγαθό 3 Σχετίζεται και με τα Δύο Αγαθά .....	63
Κεφάλαιο 3 .....	66
3. Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Διακριτό Χρόνο.....	66
3.1 Γραμμική Εξίσωση Πρώτης Τάξης .....	66
3.1.1 Το Θεώρημα Ιστού Αράχνης.....	66
3.1.1.1 Εφαρμογή στο μοντέλο ιστού αράχνης.....	68
3.1.2 Το Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Ανώτατη Τιμή.....	74
3.1.3 Το Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Εναλλακτική Υπόθεση για την Αναμενόμενη Τιμή.....	77
3.1.3.1 Εφαρμογή στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με εναλλακτική υπόθεση για την αναμενόμενη τιμή .....	79
3.2 Γραμμική Εξίσωση Δεύτερης Τάξης.....	82
3.2.1 Το Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με μια Άλλη Υπόθεση για τον Προσδιορισμό της Αναμενόμενης Τιμής .....	82
3.3 Γραμμικό Σύστημα Δύο Διακριτών Εξισώσεων.....	87



3.3.1	Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Δύο Αλληλένδετες Αγορές .....	87
3.3.1.1	Εφαρμογή στο γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο αλληλένδετες αγορές...	89
3.4	Μη Γραμμική Εξίσωση Διαφορών .....	92
3.4.1	Το Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Μη Γραμμικότητα .....	92
3.4.2	Μη Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Εναλλακτική Υπόθεση για την Αναμενόμενη Τιμή.....	101
3.5	Μη Γραμμικό Σύστημα Διακριτών Εξισώσεων .....	107
3.5.1	Μη Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Δύο Αλληλένδετες Αγορές.....	107
<b>Κεφάλαιο 4</b>	.....	<b>116</b>
<b>4.</b>	<b>Συμπεράσματα .....</b>	<b>116</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	.....	<b>118</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή και διακριτό χρόνο και αν αυτή οδηγεί σε χαοτικές συμπεριφορές. Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορα μοντέλα προσφοράς και ζήτησης που έχουν χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη τιμών σε διάφορες περιπτώσεις όπως, αγορές με ένα αγαθό, με δύο ή περισσότερα αγαθά, με μη γραμμικότητα, κλπ. Για κάθε περίπτωση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης αυτό που θα μας απασχολήσει είναι η δυναμική ανάλυση της ευστάθειας της ισορροπίας του συστήματος. Ποιες είναι δηλαδή οι συνθήκες για τις οποίες η ισορροπία του συστήματος είναι ευσταθής καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα χαρακτηριστικά της ισορροπίας αλλάζουν όταν οι τιμές κάποιων παραμέτρων του συστήματος μεταβάλλονται. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για τη δυναμική ανάλυση των μοντέλων είναι: το Maxima, το Dynamic Solver, το e&f Chaos, καθώς και το Graph. Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μία εισαγωγή στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης. Παρουσιάζονται κάποια γενικά θέματα σχετικά με το: πότε χρησιμοποιείται το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, τι είναι η προσφορά και τι η ζήτηση, ποιοι είναι οι παράγοντες που τις προσδιορίζουν, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο η προσφορά και η ζήτηση μαζί προσδιορίζουν την ισορροπία σε μία αγορά. Στο Κεφάλαιο 2 ξεκινάει η μελέτη του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή χρόνο. Η δυναμική ανάλυση ξεκινά με το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης για μία αγορά με ένα αγαθό. Στη συνέχεια βλέπουμε πως το μοντέλο εφαρμόζεται για την περίπτωση μιας αγοράς με δύο αγαθά, όπου και διακρίνονται δύο περιπτώσεις αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο τα δύο αγαθά σχετίζονται μεταξύ τους. Προσπαθώντας να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την πραγματική συμπεριφορά των τιμών των δύο αγαθών κάνουμε το μοντέλο μη γραμμικό. Στο σημείο αυτό ακολουθεί μία δυναμική ανάλυση της ευστάθειας της ισορροπίας του συστήματος για επτά διαφορετικές μορφές μη γραμμικότητας. Η παρουσίαση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή χρόνο ολοκληρώνεται με την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε μία αγορά με τρία αγαθά. Για την ανάλυση του μοντέλου με τρία αγαθά διακρίνονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο τα αγαθά συσχετίζονται μεταξύ τους. Στο Κεφάλαιο 3 ακολουθεί η μελέτη του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο. Η ανάλυση του μοντέλου σε διακριτό χρόνο ξεκινά με το απλό γραμμικό μοντέλο ιστού αράχνης για την πιο απλή υπόθεση σχετικά με την τιμή που ο παραγωγός αναμένει την τρέχουσα χρονική περίοδο. Έπειτα, βασιζόμενοι στο απλό μοντέλο βλέπουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που στην αγορά επιβάλλεται ανώτατο όριο τιμών. Στη συνέχεια, βλέπουμε πώς οι συνθήκες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας αλλάζουν για

πιο σύνθετες περιπτώσεις αναφορικά με τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμή. Έπειτα, βλέπουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε δύο αγορές οι οποίες αλληλοσυνδέονται μεταξύ τους. Η παρουσίαση ολοκληρώνεται με την ανάλυση του μοντέλου σε διακριτό χρόνο με μη γραμμικότητα όπου μελετάμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Η εργασία κλείνει με κάποια γενικά συμπεράσματα αναφορικά με την ανάλυση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης που έγινε σε συνεχή και σε διακριτό χρόνο.

## ABSTRACT

The purpose of this work is the study of the model of supply and demand in continuous and discrete time and if this leads to chaotic behaviour. The following are various models of supply and demand which are used for predicting in various situations as, market with: one commodity, two or more commodities, non-linearity, etc. For each case of the model, what should concern us is the stability of equilibrium of the system. In other words, what are the conditions for which the equilibrium of the system is stable and how the characteristics of equilibrium change when the values of some parameters of the system changed. The software used for dynamic analysis of the model is: Maxima, Dynamic Solver.xla, e&f Chaos, and Graph. In Chapter 1 we have an introduction to the model of supply and demand. Presented some general issues about: when we use the model of supply and demand, what is supply and demand, what are the factors that determine them, and how supply and demand together determine the equilibrium on a market. In Chapter 2 begins the study of the model of supply and demand in continuous time. Dynamic analysis starts with the simple model of supply and demand in a market with a commodity. Then we see how the model is applied in the case of a market with two commodities, where distinguished two cases regarding how the two commodities are related. Trying to get as much as possible the actual behavior of prices of both commodities, we turn the model in nonlinear. At this point follows a dynamic analysis of the stability of equilibrium of the system for seven different types of non-linearity. The presentation of the model of supply and demand in continuous time completed with the case that we are facing a market with three commodities. For the dynamic analysis of the model with three commodities distinguished three different cases of how commodities relate to each other. In Chapter 3 follows the model of supply and demand in discrete time. The analysis model in discrete time begins with the simple linear cobweb model for the simplest case of price that the producer is waiting for the current period. Then, based on the simple model we see what happens if a market price ceiling imposed. Then we see how the stability conditions of the equilibrium change in more complex cases with regard to the determination of the expected value. Then we see what happens if we have two markets which are interrelated with each other. The study closes with an analysis of the model in discrete time with non-linearity which studying three different cases. Finally the presentation closes with some general conclusions regarding the analysis of supply and demand model was under continuous and discrete time.

# Κεφάλαιο 1

## 1. Εισαγωγή

Το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης είναι ένα οικονομικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της τιμής και της ποσότητας των αγαθών που πωλούνται σε ανταγωνιστικές<sup>1</sup> αγορές. Μία αγορά αποτελείται από ένα πλήθος παραγωγών/προμηθευτών και καταναλωτών για ένα αγαθό ή μία υπηρεσία. Οι καταναλωτές είναι αυτοί που καθορίζουν τη ζήτηση για το αγαθό ενώ οι παραγωγοί είναι αυτοί που καθορίζουν την προσφορά του.

Η λογική με την οποία οι καταναλωτές δημιουργούν τη ζήτηση στην αγορά είναι η εξής: οι καταναλωτές παρατηρούν την τιμή του προϊόντος στην αγορά και έτσι, με στόχο πάντα τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς τους και με περιορισμό το χρηματικό τους εισόδημα, αν η τιμή είναι υψηλή αγοράζουν μικρή ποσότητα προϊόντος ενώ αν η τιμή είναι χαμηλή αγοράζουν μεγαλύτερη ποσότητα. Με τον τρόπο αυτόν ο κάθε καταναλωτής δημιουργεί την δική του συνάρτηση ζήτησης. Από την άλλη, η λογική με την οποία οι παραγωγοί ή προμηθευτές δημιουργούν την προσφορά στην αγορά είναι αντίστροφη: οι προμηθευτές παρατηρούν την τιμή του προϊόντος στην αγορά και, με στόχο τη μεγιστοποίηση των κερδών τους, αν η τιμή είναι υψηλή προσφέρουν μεγαλύτερη ποσότητα, ενώ αν η τιμή είναι χαμηλή προσφέρουν μικρότερη ποσότητα προϊόντος. Έτσι αντίστοιχα, ο κάθε παραγωγός δημιουργεί την ατομική του καμπύλη προσφοράς. (Παπαχρήστος, 2007)

Έτσι, η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού είναι η ποσότητα που είναι διατεθημένοι οι καταναλωτές να αγοράσουν σε μία συγκεκριμένη τιμή. Ενώ, αντίστοιχα η προσφερόμενη ποσότητα είναι η ποσότητα του αγαθού που οι παραγωγοί είναι διατεθημένοι να προσφέρουν σε κάθε τιμή του.

Οι παράγοντες που προσδιορίζουν τη ζήτηση ενός αγαθού είναι οι εξής: η τιμή του αγαθού, το χρηματικό εισόδημα των καταναλωτών, οι προτιμήσεις και οι προσδοκίες των καταναλωτών, οι τιμές των συσχετιζόμενων με αυτό αγαθών (συμπληρωματικά<sup>2</sup> και

---

<sup>1</sup> Το βασικό χαρακτηριστικό μίας ανταγωνιστικής αγοράς είναι ο μεγάλος αριθμός παραγωγών και καταναλωτών που υπάρχουν. Αυτό σημαίνει ότι ο καθένας ξεχωριστά μπορεί να ασκεί ελάχιστη μόνο επίδραση στην τιμή της αγοράς με αποτέλεσμα να μην μπορεί να την επηρεάσει.

<sup>2</sup> Δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά όταν μία αύξηση στην τιμή του ενός οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας του άλλου (*ceteris paribus*). Είναι η περίπτωση δύο αγαθών όπου, για την κατανάλωση του ενός απαιτείται ταυτόχρονα και η κατανάλωση του άλλου.

υποκατάστατα<sup>3</sup> αγαθά) και ο αριθμός των καταναλωτών (Δρανδάκης et al., 1994 & 2003). Ενώ, οι προσδιοριστικοί παράγοντες της προσφοράς είναι: η τιμή του αγαθού, οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών, το επίπεδο της τεχνολογίας, οι προσδοκίες των παραγωγών, οι τιμές των σχετικών αγαθών (συμπληρωματικών, υποκατάστατων) και ο αριθμός των προμηθευτών. Έτσι, η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς για ένα αγαθό δίνονται από:

$$\begin{cases} q^d = q^d(p, \text{εισόδημα, προτιμήσεις, προσδοκίες, τιμή σχετικών αγαθών, πληθυσμός}) \\ q^s = q^s(p, \text{τιμές εισροών, τεχνολογία, προσδοκίες, τιμή σχετικών αγαθών, πληθυσμός}) \end{cases}$$

Όπου,  $p$ : η τιμή του αγαθού.

Η καμπύλη ζήτησης ενός αγαθού δείχνει τη σχέση ανάμεσα στη ζητούμενη ποσότητα και στην τιμή του, με τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης σταθερούς (*ceteris paribus*), (Δρανδάκης et al., 1994 & 2003). Και αντίστοιχα, η καμπύλη προσφοράς<sup>4</sup> δείχνει τη σχέση μεταξύ προσφερόμενης ποσότητας και τιμής για ένα αγαθό, με σταθερούς όλους τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της προσφοράς. Έτσι, με σταθερές όλες τις άλλες μεταβλητές εκτός από την τιμή, η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς γίνεται:

$$\begin{cases} q^d = q^d(p) \\ q^s = q^s(p) \end{cases}$$

Η τιμή μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση της ζήτησης  $p_d = q^d(q^d)$ . Στη μορφή αυτή η συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης και χρησιμοποιείται περισσότερο σε περιπτώσεις μαθηματικής ανάλυσης (Shone, 2002).

Σύμφωνα όμως με το νόμο της ζήτησης, η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού μεταβάλλεται αντίστροφα από τη μεταβολή της τιμής του. Αντιθέτως, με βάση το νόμο προσφοράς η σχέση ανάμεσα στη μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας και στη μεταβολή της τιμής ενός αγαθού είναι θετική. Έτσι, με σταθερούς τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης και της προσφοράς, μία αύξηση στην τιμή του αγαθού οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας και σε αύξηση της προσφερόμενης ποσότητας αυτού. Οπότε, σύμφωνα με τον νόμο προσφοράς και ζήτησης, η κλίση της καμπύλης ζήτησης είναι

<sup>3</sup> Δύο αγαθά είναι υποκατάστατα όταν το ένα αγαθό καταναλώνεται ως εναλλακτική επιλογή του άλλου αγαθού. Δηλαδή ο αγοραστής είναι διατεθειμένος να καταναλώσει είτε το ένα αγαθό είτε το άλλο για να καλύψει μία ανάγκη του. Στην περίπτωση δύο υποκατάστατων αγαθών, μία αύξηση στην τιμή του ενός οδηγεί σε αύξηση στη ζητούμενη ποσότητα του άλλου (*ceteris paribus*).

<sup>4</sup> Σε συνθήκες τέλει ανταγωνισμού η προσφορά ενός αγαθού προσδιορίζεται από το οριακό κόστος.

αρνητική και η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι θετική (Δρανδάκης et al., 1994 & 2003). Έτσι στην απλή περίπτωση που η ζητούμενη ποσότητα και η προσφερόμενη ποσότητα είναι γραμμικές ως προς την τιμή, η συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ενός αγαθού δίνονται από:

$$\begin{cases} q^d = a + bp, & b < 0 \\ q^s = c + dp, & d > 0 \end{cases}$$

Όπου,  $a$ : η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού όταν η τιμή είναι μηδέν

$c$ : η προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού όταν η τιμή του είναι μηδέν

$b$ : η κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $d$ : η κλίση της καμπύλης προσφοράς

Ο νόμος της ζήτησης ισχύει για όλα τα κανονικά<sup>5</sup> αγαθά καθώς και για τα περισσότερα κατώτερα<sup>6</sup> αγαθά. Η μοναδική εξαίρεση στην οποία ο νόμος της ζήτησης δεν ισχύει είναι η περίπτωση ορισμένων κατώτερων αγαθών που υπόκεινται στο Παράδοξο του Giffen<sup>7</sup> καθώς και η περίπτωση ορισμένων ανώτερων αγαθών πολυτελείας που ονομάζονται αγαθά Veblen<sup>8</sup>. Έτσι, για τη σπάνια περίπτωση αυτών των κατώτερων αγαθών Giffen και των αγαθών Veblen, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με την τιμή του αγαθού και η καμπύλη ζήτησης έχει θετική κλίση. (Δρανδάκης et al., 1994)

Η συνολική τώρα ποσότητα που ζητείται και προσφέρεται για κάθε τιμή ενός αγαθού σε μία αγορά, αποτελεί την αγοραία ζήτηση και την αγοραία προσφορά αντίστοιχα. Η αγοραία

---

<sup>5</sup> Ένα αγαθό είναι κανονικό όταν η ζητούμενη ποσότητά του μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με το πραγματικό εισόδημα. Για παράδειγμα μία μείωση της τιμής αυξάνει το πραγματικό εισόδημα και από τη στιγμή που το αγαθό είναι κανονικό αυξάνεται και η ζητούμενη ποσότητα. Έτσι, για ένα κανονικό αγαθό, η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται πάντα αντίστροφα από την τιμή του.

<sup>6</sup> Ένα αγαθό είναι κατώτερο όταν η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται αντίστροφα από το πραγματικό εισόδημα. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, η μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας από τη μεταβολή της τιμής (αποτέλεσμα υποκατάστασης) υπερνικά τη μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας από τη μεταβολή του εισοδήματος (εισοδηματικό αποτέλεσμα) με αποτέλεσμα και για τα περισσότερα κατώτερα αγαθά η συνολική μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα να είναι αντίστροφη σε σχέση με τη μεταβολή της τιμής του.

<sup>7</sup> Η περίπτωση ενός κατώτερου αγαθού για το οποίο η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με την τιμή του αναφέρεται ως Παράδοξο του Giffen. Στην περίπτωση των κατώτερων Giffen αγαθών το αποτέλεσμα υποκατάστασης είναι μικρότερο από το αποτέλεσμα εισοδήματος, με αποτέλεσμα μία μείωση για παράδειγμα της τιμής να οδηγεί σε μείωση της ζητούμενης ποσότητας του αγαθού. Αυτό συμβαίνει διότι τα άτομα τότε έχουν το κίνητρο να στραφούν στην κατανάλωση καλύτερων ποιοτικά αγαθών.

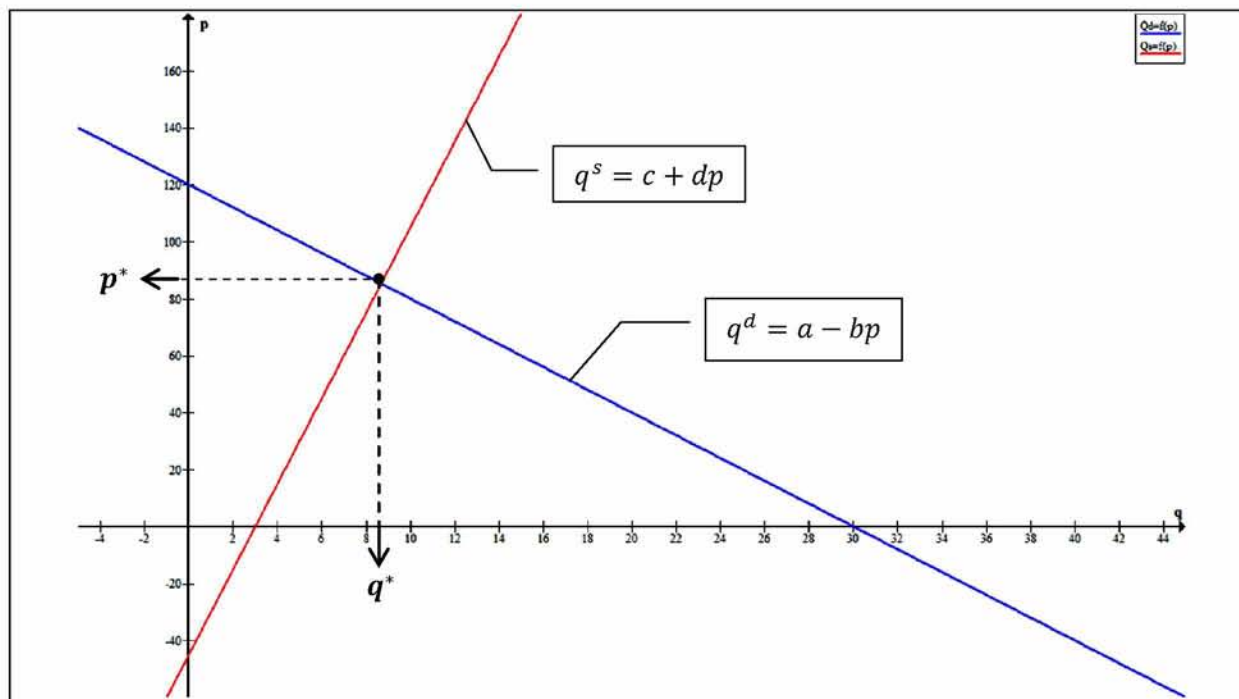
<sup>8</sup> Τα αγαθά Veblen είναι η δεύτερη εξαίρεση στον νόμο ζήτησης. Πρόκειται για αγαθά πολυτελείας τα οποία συχνά καταναλώνονται από άτομα υψηλού κοινωνικο – οικονομικού επιπέδου. Μία μείωση της τιμής των αγαθών αυτών μειώνει τη ζητούμενη ποσότητα τους διότι παύουν να θεωρούνται ως αποκλειστικά προϊόντα ανώτερου κοινωνικο – οικονομικού status.

ζήτηση για κάθε τιμή ενός αγαθού είναι το άθροισμα των ζητούμενων ποσοτήτων από όλους τους καταναλωτές σε κάθε τιμή. Ενώ αντίστοιχα, η αγοραία προσφορά είναι η συνολική ποσότητα που προσφέρεται από όλους τους παραγωγούς μίας αγοράς για κάθε τιμή ενός αγαθού. Διαγραμματικά η αγοραία καμπύλη ζήτησης και προσφοράς προκύπτουν από την οριζόντια άθροιση των ατομικών καμπυλών ζήτησης και προσφοράς του κάθε καταναλωτή και παραγωγού αντίστοιχα. Τέλος, αναφορικά με την κλίση της αγοραίας ζήτησης, αν και η ζήτηση ορισμένων καταναλωτών για μερικά αγαθά μπορεί να υπόκειται στο Παράδοξο του Giffen, ωστόσο η κανονική ζήτηση των άλλων καταναλωτών συνήθως υπερνικά το αποτέλεσμα Giffen με αποτέλεσμα η αγοραία καμπύλη ζήτησης να έχει συνήθως αρνητική κλίση. (Δρανδάκης et al., 1994 & 2003)

Οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς μέσα από έναν μηχανισμό προσαρμογής, προσδιορίζουν την τιμή και την ποσότητα ενός αγαθού σε μία αγορά. Συγκεκριμένα, όταν για μία τιμή ενός αγαθού η ποσότητα που ζητούν οι καταναλωτές είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα που μπορούν οι παραγωγοί να προσφέρουν  $q^s < q^d$  τότε έχουμε υπερβάλλουσα ζήτηση, και η έλλειψη που δημιουργείται έχει ως αποτέλεσμα οι καταναλωτές να είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν περισσότερο με αποτέλεσμα η τιμή του αγαθού να αυξάνεται. Αντιθέτως, όταν σε κάποια τιμή η προσφερόμενη ποσότητα από τους παραγωγούς είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα που ζητούν οι καταναλωτές  $q^s > q^d$  τότε έχουμε πλεόνασμα προσφοράς και η τιμή του αγαθού μειώνεται. Έτσι, μέσω του μηχανισμού προσαρμογής οι αντίρροπες αυτές τάσεις της τιμής οδηγούν την αγορά σε μία κατάσταση ισορροπίας όπου δεν υπάρχει κίνητρο για αλλαγή. Σε αυτήν την κατάσταση ισορροπίας, η υπερβάλλουσα ζήτηση και προσφορά είναι μηδέν και οι παραγωγοί προσφέρουν τόση ποσότητα προϊόντος όση οι καταναλωτές ζητούν. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με το νόμο προσφοράς και ζήτησης, η τιμή ενός αγαθού προσαρμόζεται πάντα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η ζητούμενη ποσότητα να ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα  $q^s = q^d$ . (Varian, 2006)

Το σημείο ισορροπίας σε μία αγορά αναφέρεται στην ποσότητα και στην τιμή ισορροπίας ενός αγαθού. Έτσι η τιμή ισορροπίας  $p^*$  και η ποσότητα ισορροπίας  $q^* = q_s^* = q_d^*$  ενός αγαθού είναι εκείνη η τιμή και η ποσότητα για την οποία η προσφορά ισούται με τη ζήτηση. Διαγραμματικά, η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας σε μία αγορά προσδιορίζεται από το σημείο τομής των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης όπως απεικονίζεται παρακάτω:





Ανάλογα με τις μεταβολές που συμβαίνουν στους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης και της προσφοράς μπορεί να έχουμε είτε μετακίνηση κατά μήκος των καμπυλών ζήτησης και προσφοράς, είτε μετατόπιση των καμπυλών σε νέα θέση, (Microeconomics Lab Review Material, 2009). Συγκεκριμένα, μεταβολές στην τιμή ενός αγαθού οδηγούν σε μετακινήσεις κατά μήκος της καμπύλης ζήτησης ή προσφοράς με όλους τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες σταθερούς. Αντιθέτως, μεταβολές στους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της προσφοράς ή της ζήτησης, με σταθερή την τιμή του αγαθού, οδηγούν σε μετατοπίσεις της καμπύλης προσφοράς ή ζήτησης είτε δεξιά είτε αριστερά με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας στην αγορά να αλλάζει.

## Κεφάλαιο 2

### 2. Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Συνεχή Χρόνο

#### 2.1 Ευστάθεια Ισορροπίας Προσφοράς και Ζήτησης

Ένα σημαντικό ζήτημα είναι η ευστάθεια της ισορροπίας προσφοράς και ζήτησης. Η ανταγωνιστική ισορροπία στην ανάλυση μερικής ισορροπίας για το μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης επιτυγχάνεται στο σημείο ισότητας προσφοράς και ζήτησης. Σημαντικό όμως είναι να δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που η αγορά βρεθεί εκτός ισορροπίας. Αν δηλαδή το σύστημα θα επιστρέψει ή όχι σε κατάσταση ισορροπίας. Η ευστάθεια της ισορροπίας διακρίνεται σε στατική και σε δυναμική. Εμείς θα ασχοληθούμε με τη δυναμική ευστάθεια, που σε αντίθεση με τη στατική ευστάθεια, εξετάζει τη συμπεριφορά του συστήματος στο χρόνο μέχρι το σημείο ισορροπίας.

Μια σημαντική υπόθεση για τη συμπεριφορά των μεταβλητών όταν βρίσκονται σε κατάσταση εκτός ισορροπίας είναι η υπόθεση Walras (Gandolfo, 1997). Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης συμβολίζεται με  $D(p)$  και η συνάρτηση προσφοράς με  $S(p)$ , όπου  $p$  είναι η τιμή. Τότε η υπερβάλλουσα ζήτηση δίνεται από  $E(p) = D(p) - S(p)$ . Έτσι, η υπόθεση Walras για τη δυναμική ανάλυση ισορροπίας διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)], \quad k > 0 \quad (1)$$

Δηλαδή, η τιμή αυξάνεται αν η υπερβάλλουσα ζήτηση  $D(p) - S(p)$  είναι θετική,  $dp/dt > 0$ , ενώ η τιμή μειώνεται αν η υπερβάλλουσα ζήτηση είναι αρνητική,  $dp/dt < 0$ .

Η εξίσωση (1) είναι μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης η λύση της οποίας προσδιορίζει την τροχιά της τιμής προς το σημείο ισορροπίας. Για τη λύση της (1) θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μορφή των συναρτήσεων ζήτησης  $D(p)$  και προσφοράς  $S(p)$ . Έστω λοιπόν για λόγους απλούστευσης οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς είναι γραμμικές και δίνονται από:

$$\begin{cases} D(p): q^d = a + bp \\ S(p): q^s = c + dp \end{cases}$$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{dp}{dt} = k[(a + bp) - (c + dp)] = k[(a - c) + (b - d)p]$$

Το σημείο ισορροπίας (equilibrium point) του συστήματος βρίσκεται θέτοντας  $dp/dt = 0$ .  
Οπότε δίνεται από:

$$p^* = \frac{a - c}{d - b}$$

Οπότε θα είναι:  $k(a - c) = -k(b - d)p^*$

Έτσι προκύπτει η γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση 1ης τάξης για το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= k(b - d)(p - p^*) \Rightarrow \\ \frac{dp}{dt} - k(b - d)p &= -k(b - d)p^* \Rightarrow \\ \frac{dp}{dt} - k(b - d)p &= k(a - c) \end{aligned} \quad (2)$$

Η γενική λύση μιας γραμμικής μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης προκύπτει από το άθροισμα της λύσης του ομογενούς μέρους της διαφορικής εξίσωσης  $p_h$  και μιας ειδικής λύσης  $\bar{p}$  της μη ομογενούς εξίσωσης,  $p(t) = p_h + \bar{p}$  (Gandolfo, 1997). Η διαφορική εξίσωση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης είναι της μορφής  $\dot{y} + ay = b$ , όπου το ομογενές μέρος είναι μία σταθερά  $g(t) = b$ . Τότε λοιπόν, η ειδική λύση δίνεται από  $\bar{y} = b/a$ . Η γενική λύση του ομογενούς μέρους  $\dot{y} + ay = 0$  δίνεται από  $y_h = Ae^{-at}$ . Οπότε η γενική λύση μιας γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης δίνεται από  $y(t) = \bar{y} + y_h = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$ .

Οπότε η γενική λύση της (2) είναι:

$$p(t) = [p(0) - p^*]e^{k(b-d)t} + p^* \quad (3)$$

Όπου,  $p_c = [p(0) - p^*]e^{k(b-d)t}$  είναι η λύση του ομογενούς μέρους της (2),  $\bar{p} = p^* = (a - c)/(d - b)$  είναι η τιμή ισορροπίας όπως προσδιορίζεται από την ειδική λύση και  $p(0)$  είναι η αρχική τιμή.

Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές αν η  $p(t)$  τείνει στο  $p^*$  καθώς το  $t$  αυξάνεται. Αυτό συνεπάγεται ότι η ομογενής λύση  $p_c = [p(0) - p^*]e^{k(b-d)t}$  θα πρέπει να συγκλίνει στο μηδέν, που για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει  $k(b - d) < 0$ . Και επειδή  $k > 0$ , η συνθήκη δυναμικής ευστάθειας για το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης είναι:

$$b - d < 0 \tag{4}$$

Τότε λοιπόν, για οποιαδήποτε απόκλιση μεταξύ αρχικής τιμής και τιμής ισορροπίας  $[p(0) - p^*]$ , η τιμή  $p(t)$  θα συγκλίνει μονοτονικά προς την τιμή ισορροπίας.

## 2.2 Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Συνεχή Χρόνο

Το πιο απλό παράδειγμα με το οποίο μπορούμε να δούμε τη δυναμική διαδικασία διόρθωσης της τιμής (dynamic price-adjustment process) είναι η περίπτωση όπου έχουμε μόνο μία αγορά, με γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης που έχουν τις συνηθισμένες τους κλίσεις (Shone, 2002). Δηλαδή με την καμπύλη ζήτησης να έχει αρνητική κλίση και την καμπύλη προσφοράς να έχει θετική κλίση. Το γεγονός ότι η καμπύλη ζήτησης έχει αρνητική κλίση σημαίνει ότι το προϊόν υπακούει στον Νόμο της Ζήτησης σύμφωνα με τον οποίο, η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος  $q^d$  μεταβάλλεται αντίστροφα από τη μεταβολή της τιμής του  $p$  με όλους τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες σταθερούς (*ceteris paribus*). Ενώ η θετική κλίση της καμπύλης προσφοράς προκύπτει από το γεγονός ότι σύμφωνα με το Νόμο της Προσφοράς μία αύξηση στην τιμή του προϊόντος οδηγεί σε αύξηση της προσφερόμενης ποσότητας του  $q^s$ , *ceteris paribus*.

Έτσι λοιπόν το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή χρόνο είναι:

$$\begin{cases} q^d = a - bp \\ q^s = c + dp \\ \frac{dp}{dt} = k(q^d - q^s) \end{cases}$$

Με  $b > 0$ ,  $d > 0$ ,  $k > 0$  για τους λόγους που αναφέρονται παραπάνω και  $q^s$ ,  $q^d$ ,  $p$  συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις προσφοράς και ζήτησης στην  $\frac{dp}{dt} = k(q^d - q^s)$  προκύπτει, όπως είχαμε δει παραπάνω στη δυναμική ανάλυση της ευστάθειας της ισορροπίας, η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση 1ης τάξης:

$$\frac{dp}{dt} = k(b + d)p = k(a - c)$$

Το equilibrium point του συστήματος όπως προσδιορίζεται από την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\bar{p} = p^* = \frac{a - c}{b + d}$$

Και για να είναι το σημείο ισορροπίας θετικό  $p^* > 0$ , επειδή οι τιμές των προϊόντων είναι θετικές ποσότητες, θα πρέπει  $a > c$ .

Η γενική λύση προκύπτει όπως είδαμε παραπάνω και δίνεται από:

$$p(t) = \frac{a-c}{b+d} + \left[ p_0 - \left( \frac{a-c}{b+d} \right) \right] e^{-k(b+d)t}$$

Που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $p(0) = p_0$ . Από τη γενική λύση λοιπόν της διαφορικής εξίσωσης, και αφού  $k > 0$  σύμφωνα με την υπόθεση Walras, καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο ο όρος  $\left[ p_0 - \left( \frac{a-c}{b+d} \right) \right] e^{-k(b+d)t}$  τείνει στο μηδέν, με αποτέλεσμα η τιμή του προϊόντος  $p(t)$  να συγκλίνει μονοτονικά προς την τιμή ισορροπίας  $p^*$ . Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι, από τη στιγμή που  $b < 0$  και  $d > 0$ , η συνθήκη δυναμικής ευστάθειας για το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης  $b - d < 0$  ικανοποιείται και το σημείο ισορροπίας  $p^*$  είναι ευσταθές για την απλή αυτή περίπτωση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης.

### 2.2.1 Εφαρμογή στο Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους (Shone, 2002):  $a = 24, b = -5, c = -4, d = 2, k = 2$  που ικανοποιούν τις συνθήκες  $a \geq c$  έτσι ώστε να έχω θετικό σημείο ισορροπίας,  $k > 0$  ώστε να ικανοποιείται η υπόθεση Walras,  $b < 0$  για να ισχύει ο Νόμος της Ζήτησης και  $d > 0$  για να ισχύει ο Νόμος της Προσφοράς, το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης γίνεται:

$$\begin{cases} q^d = 24 - 5p \\ q^s = -4 + 2p \\ \frac{dp}{dt} = 2(q^d - q^s) \end{cases}$$

Με γραμμική μη ομογενή διαφορική εξίσωση 1ης τάξης την:

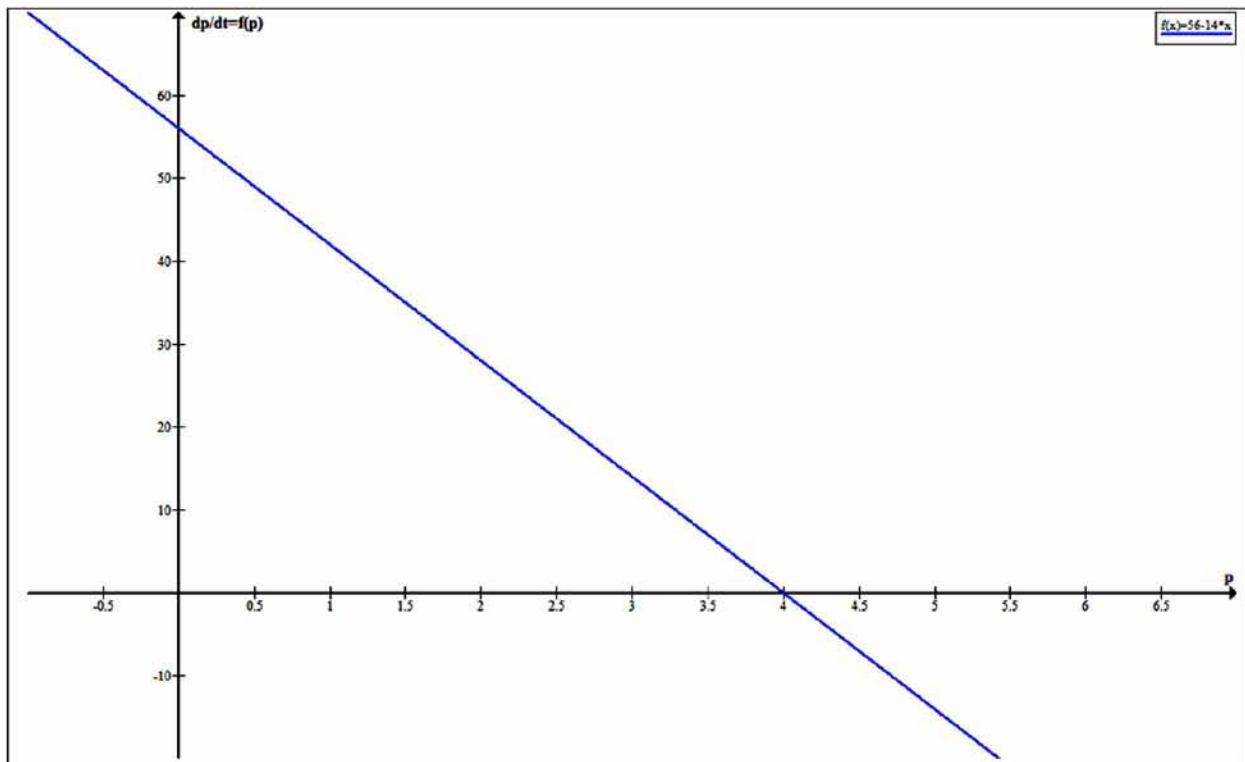
$$\frac{dp}{dt} = 56 - 14p$$

Όπου για  $dp/dt = 0$  το μοναδικό equilibrium point είναι:

$$p^* = 4$$

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης θα προβούμε πρώτα σε μία ποιοτική ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης αναλύοντας τις ιδιότητες της λύσης δίχως τον ποσοτικό προσδιορισμό της. Η τεχνική που χρησιμοποιείται για την ποιοτική ανάλυση μιας γραμμικής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι το διάγραμμα φάσης (Blanchard et al., 2006), το οποίο είναι η γραφική παράσταση της  $dp/dt = f(p)$ .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του παραδείγματος, το διάγραμμα φάσης της  $dp/dt = f(p) = 56 - 14p$  απεικονίζεται παρακάτω:



Στο σημείο εκείνο στο οποίο η  $f(p)$  τέμνει τον άξονα των  $p$  ισχύει  $dp/dt = 0$  και αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας  $p^* = 4$ . Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα φάσης στο σημείο ισορροπίας έχει αρνητική κλίση,  $f'(p^*) = -14 < 0$ . Συνεπώς το σημείο ισορροπίας  $p^* = 4$  είναι ευσταθές. Και από τη στιγμή που για τα σημεία που βρίσκονται πάνω από τον άξονα των  $p$  ισχύει  $dp/dt > 0$  ενώ για τα σημεία κάτω από τον άξονα των  $p$  ισχύει  $dp/dt < 0$ , το σημείο ισορροπίας είναι και ολικά ευσταθές.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, που προκύπτει με τη μέθοδο λύσης των γραμμικών μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης όπως αναφέρεται παραπάνω, είναι:

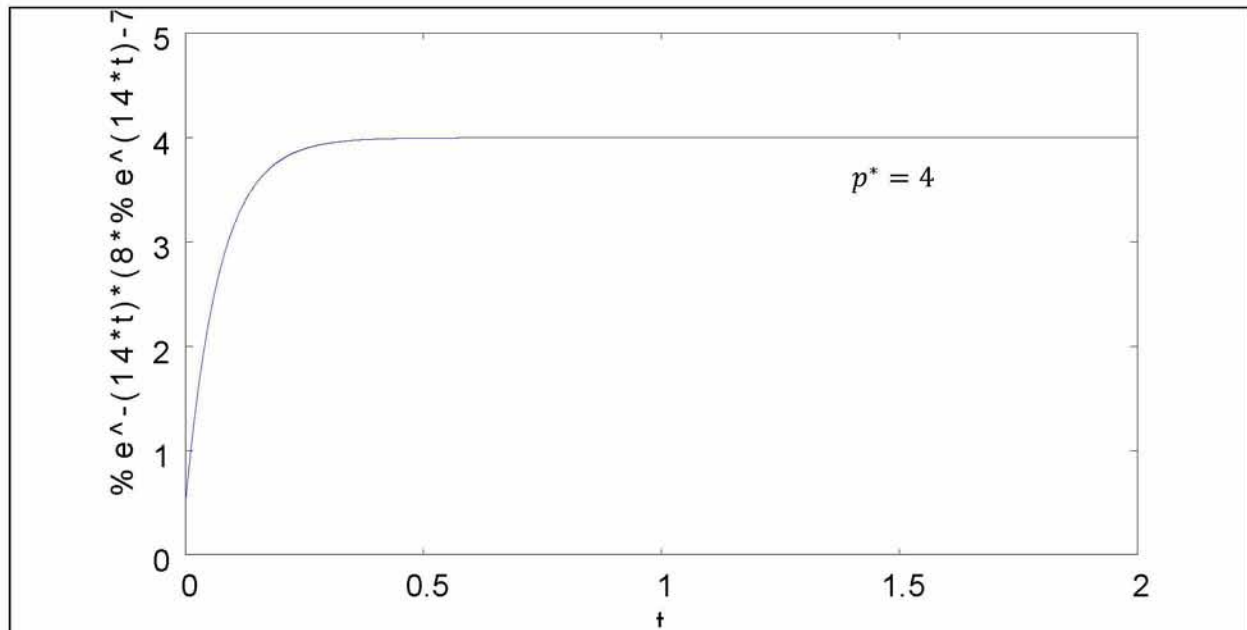
$$p(t) = e^{-14t}(4e^{14t} + c)$$

Όπου,  $c$  η σταθερά ολοκλήρωσης.

Και για αρχική συνθήκη έστω  $p(0) = 0.5$  η ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$p(t) = \frac{e^{-14t}(8e^{14t} - 7)}{2}$$

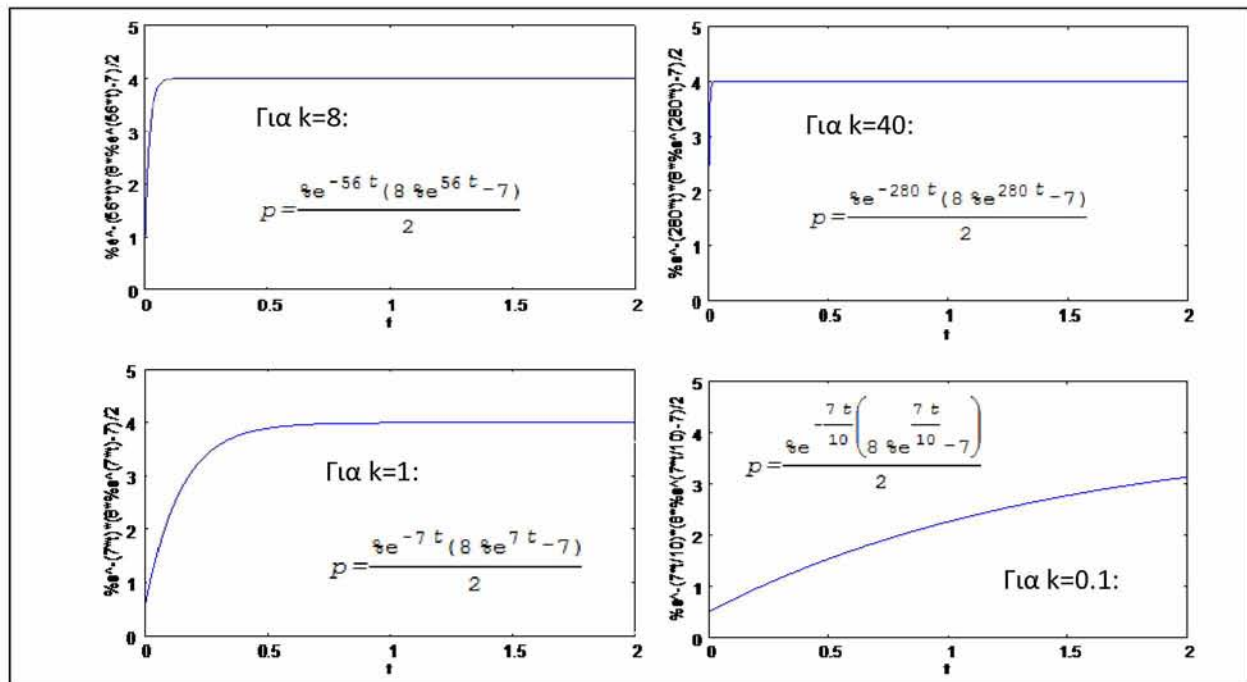
Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση  $p(t) = f(t)$  μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διαδρομή που ακολουθεί η λύση στο χρόνο:



Βλέπουμε λοιπόν ότι, από τη στιγμή που το  $-k(b - d) = 14 > 0$  η λύση της διαφορικής εξίσωσης συγκλίνει μονοτονικά στο σημείο ισορροπίας που προσδιορίζεται από την ειδική λύση  $\bar{p} = p^* = (a - c)/(d - b) = 4$  καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο. Η σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας γίνεται με γρήγορο ρυθμό λόγω του εκθετικού όρου στη συνάρτηση της λύσης.

Τέλος, για θετικές πάντα τιμές του  $k$ , αυξάνουμε και μειώνουμε την τιμή του για να δούμε πως αυτό επηρεάζει τη συμπεριφορά της λύσης. Το σημείο ισορροπίας, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, παραμένει πάντα  $p^* = 4$  για  $\forall k$  διότι η τιμή του εξαρτάται μόνο από την τιμή των παραμέτρων  $a, b, c, d$ . Δοκιμάζοντας λοιπόν για μεγαλύτερες τιμές του  $k$ : 8, 20, 40, ... και για μικρότερες τιμές του  $k$ : 1, 0.5, 0.1, ... και βρίσκοντας σε κάθε περίπτωση την ορισμένη λύση για αρχική τιμή  $p(0) = 0.5$  κατασκευάσαμε τα αντίστοιχα διαγράμματα  $p(t) = f(t)$ . Η χρονική διαδρομή για κάθε τιμή του  $k$  απεικονίζεται στα παρακάτω διαγράμματα:





Παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο αυξάνεται η τιμή του  $k$  τόσο πιο γρήγορα η λύση  $p(t)$  συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας, ενώ αντιθέτως όσο μειώνεται η τιμή του  $k$  η λύση συγκλίνει πιο αργά στο  $p^*$ . Δηλαδή, μία αλλαγή στην τιμή του  $k$  δεν αλλάζει ούτε την τιμή ούτε τη συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας, παρά μόνο την ταχύτητα με την οποία η λύση συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού, η τιμή ισορροπίας δεν εξαρτάται από το  $k$  και η κλίση της διαφορικής εξίσωσης στο σημείο ισορροπίας που έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του  $p^*$  είναι πάντα αρνητική για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων,  $f'(p^*) = k(b - d) < 0$ , αφού για αυτό το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης είναι  $b < 0$ ,  $d > 0$  και  $k > 0$ .

### 2.3 Ευστάθεια Ανταγωνιστικής Ισορροπίας

Έστω ότι τώρα πλέον αντιμετωπίζουμε μία ανταγωνιστική αγορά με περισσότερα από ένα προϊόντα. Για να κάνουμε την ανάλυση πιο απλή, θα υποθέσουμε ότι στην αγορά υπάρχουν 2 προϊόντα  $x_1, x_2$  με αντίστοιχες τιμές  $p_1, p_2$ . Τότε λοιπόν, η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για κάθε αγαθό θα δίνεται από  $E_i = D_i - S_i$  για  $\forall i = 1, 2$  όπου  $D_i$  και  $S_i$  οι αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς. Η υπερβάλλουσα ζήτηση για κάθε προϊόν είναι συνάρτηση των τιμών και των δύο αγαθών  $E_i = E_i(p_1, p_2)$  για  $\forall i = 1, 2$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η υπόθεση του Walras που για την περίπτωση της ανταγωνιστικής ισορροπίας σημαίνει ότι  $\sum_{i=1}^2 p_i E_i = 0$ . Δηλαδή:

$$p_1 E_1 + p_2 E_2 = 0$$

Έτσι, υποθέτοντας ότι: α) έχουμε συνεχείς συναρτήσεις υπερβάλλουσας ζήτησης, β) η υπόθεση του Walras ικανοποιείται, γ) και ικανοποιούνται και κάποιες υποθέσεις αναφορικά με τη δομή των προτιμήσεων και της τεχνολογίας, τότε θα υπάρχει ένα διάνυσμα τιμών  $p^* = (p_1^*, p_2^*)$  που είναι το διάνυσμα τιμών της ανταγωνιστικής ισορροπίας (Ξεπαπαδέας, 2009). Οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της ανταγωνιστικής ισορροπίας αν όλα τα αγαθά είναι επιθυμητά (δηλαδή η υπερβάλλουσα ζήτηση είναι θετική όταν η τιμή είναι μηδέν) και  $(p_1^*, p_2^*)$  είναι μία ανταγωνιστική ισορροπία τότε θα ισχύει:

$$E_1(p_1^*, p_2^*) = 0 \text{ και } E_2(p_1^*, p_2^*) = 0$$

Δηλαδή, σε κατάσταση ισορροπίας η υπερβάλλουσα ζήτηση και για τα δύο αγαθά θα είναι μηδέν.

Αυτό όμως που είναι ιδιαίτερα σημαντικό είναι η ευστάθεια της ανταγωνιστικής ισορροπίας. Αν υπάρχουν δηλαδή δυνάμεις που να οδηγούν το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Σύμφωνα λοιπόν με τον Walras, η προσαρμογή των τιμών στις τιμές ισορροπίας είναι μία διαδικασία που προκύπτει από τις μεταβολές της υπερβάλλουσας ζήτησης για διαφορετικές τιμές. Πρόκειται για μία διαδικασία αναζήτησης (tatonnement) σύμφωνα με την οποία, οι παραγωγοί και οι καταναλωτές αντιδρώντας στις αλλαγές των τιμών κινούνται κατά μήκος των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης μέχρι να φτάσουν στο σημείο ισορροπίας (Ξεπαπαδέας, 2009). Οπότε σύμφωνα με τον νόμο προσφοράς και ζήτησης έχουμε:

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i E_i, \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2$$

Δηλαδή, η τιμή αυξάνεται όταν έχουμε υπερβάλλουσα ζήτηση και μειώνεται όταν έχουμε υπερβάλλουσα προσφορά. Το  $k_i$  εκφράζει το πόσο γρήγορα οι τιμές προσαρμόζονται στις τιμές ισορροπίας.

Η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας είναι σημαντική διότι, μόνο τότε η διαδικασία του *tatonnement* οδηγεί το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Η ανταγωνιστική ισορροπία απαιτεί  $dp_1/dt = 0$  και  $dp_2/dt = 0$  (Shone, 2002). Για τη μελέτη λοιπόν της ευστάθειας της ανταγωνιστικής ισορροπίας θα προβούμε σε ανάλυση τροχιάς. Πρόκειται για μία ποιοτική ανάλυση που χρησιμοποιείται για αυτόνομα συστήματα δύο διαφορικών εξισώσεων για τις οποίες συνήθως υπάρχουν μόνο ποιοτικές πληροφορίες.

Για την ανάλυση τροχιάς λοιπόν, χρησιμοποιείται το επίπεδο φάσης  $(p_1, p_2)$  στο οποίο προσδιορίζονται οι δύο γραμμές ισορροπίας  $dp_1/dt = 0$  και  $dp_2/dt = 0$  που ονομάζονται ισοκλινείς καμπύλες (Blanchard et al., 2006).

Η τομή των ισοκλινών καμπυλών προσδιορίζει το σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*)$ .

Η κλίση των ισοκλινών καμπυλών προσδιορίζεται από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (Shone, 2002).

Έτσι, για  $dp_1/dt = 0$  παραγωγίζοντας την  $E_1$  ως προς  $p_1$  και  $p_2$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E_{11}dp_1 + E_{12}dp_2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dp_2}{dp_1} &= \frac{-E_{11}}{E_{12}} \end{aligned} \quad (5)$$

Ενώ, για  $dp_2/dt = 0$  παραγωγίζοντας την  $E_2$  ως προς  $p_1$  και  $p_2$  έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{21}dp_1 + E_{22}dp_2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dp_2}{dp_1} &= \frac{-E_{21}}{E_{22}} \end{aligned} \quad (6)$$

Έτσι, οι εξισώσεις (5) και (6) δίνουν τις κλίσεις για τις ισοκλινείς καμπύλες στο διάγραμμα φάσης, οι οποίες εξαρτώνται από τα πρόσημα των  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ . Κάνοντας την υπόθεση ότι τα αγαθά 1 και 2 είναι ολικά υποκατάστατα μεταξύ τους, μία αύξηση στην τιμή του ενός αγαθού οδηγεί σε αύξηση της υπερβάλλουσας ζήτησης για το άλλο αγαθό. Οπότε θα έχουμε:

$$E_{11} < 0 \text{ και } E_{12} > 0 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{-E_{11}}{E_{12}} > 0$$

$$E_{22} < 0 \text{ και } E_{21} > 0 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{-E_{21}}{E_{22}} > 0$$

Δηλαδή, στην περίπτωση δύο ολικά υποκατάστατων αγαθών οι κλίσεις και των δύο ισοκλινών καμπυλών είναι θετικές.

Οπότε έχουμε:

$$p_1 E_{11} + p_2 E_{12} < 0 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{p_2}{p_1} < \frac{-E_{11}}{E_{12}}$$

$$p_1 E_{21} + p_2 E_{22} < 0 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{p_2}{p_1} > \frac{-E_{21}}{E_{22}}$$

Έτσι θα είναι:

$$\frac{-E_{21}}{E_{22}} < \frac{p_2}{p_1} < \frac{-E_{11}}{E_{12}}$$

Δηλαδή, η κλίση της ισοκλινούς καμπύλης  $dp_1/dt = 0$  θα είναι μεγαλύτερη από την κλίση της  $dp_2/dt = 0$ .

Η τομή των ισοκλινών καμπυλών χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια I, II, III, IV κινούμενοι δεξιόστροφα. Ο τρόπος με τον οποίο οι λύσεις συμπεριφέρονται στο κάθε τεταρτημόριο προσδιορίζει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Για να δούμε την πορεία που ακολουθούν οι λύσεις σε κάθε μία από τις τέσσερις περιοχές που οι δύο ισοκλινείς χωρίζουν το διάγραμμα φάσης, θα πρέπει να δούμε πως κινούνται οι τιμές των δύο αγαθών στο κάθε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια (Shone, 2002).

Παίρνοντας πρώτα την  $dp_1/dt = 0$ , θα δούμε πως η τιμή του αγαθού 1 μεταβάλλεται δεξιά και αριστερά της ισοκλινούς καμπύλης, με σταθερή την τιμή του αγαθού 2. Οπότε παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση για το αγαθό 1 ως προς την τιμή του έχουμε:

$$\frac{dp_1}{dp_1} = k_1 E_{11} < 0, \quad \text{αφού } E_{11} < 0$$

Έτσι δεξιά της  $dp_1/dt = 0$  όπου  $dp_1 > 0$  έχουμε  $dp_1 < 0 \xrightarrow{\text{yields}} dp_1/dt < 0$  και η τιμή του αγαθού 1 μειώνεται. Ενώ, αριστερά της  $dp_1/dt = 0$  όπου  $dp_1 < 0$  έχουμε  $dp_1 > 0 \xrightarrow{\text{yields}} dp_1/dt > 0$  και η τιμή του αγαθού 1 αυξάνεται.

Ομοίως, για την  $dp_2/dt = 0$  παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση για το αγαθό 2 ως προς την τιμή του αγαθού 1 έχουμε:

$$\frac{dp_2}{dp_1} = k_2 E_{21} > 0, \quad \text{αφού } E_{21} > 0$$

Έτσι δεξιά της  $dp_2/dt = 0$  όπου  $dp_1 > 0$  έχουμε  $dp_1 > 0 \xrightarrow{\text{yields}} dp_2/dt > 0$  και η τιμή του αγαθού 2 αυξάνεται. Ενώ, αριστερά της  $dp_2/dt = 0$  όπου  $dp_1 < 0$  έχουμε  $dp_2 < 0 \xrightarrow{\text{yields}} dp_2/dt < 0$  και η τιμή του αγαθού 2 μειώνεται.

Οπότε, μία λύση της οποίας η αρχική τιμή  $(p_1^0, p_2^0)$  βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο I θα συγκλίνει στο  $(p_1^*, p_2^*)$  είτε κατευθείαν είτε αφού πρώτα εισέλθει στα τεταρτημόρια II και IV. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση όπου η λύση ξεκινά από το τεταρτημόριο III. Στην περίπτωση τώρα που οι αρχικές τιμές βρίσκονται στα τεταρτημόρια II ή IV τότε η τροχιά της λύσης θα παραμένει στο τεταρτημόριο από το οποίο ξεκίνησε συγκλίνοντας πάντα στο σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*)$ .

Οπότε παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση που τα δύο αγαθά είναι ολικά υποκατάστατα μεταξύ τους, το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*)$  είναι ευσταθές.

### 2.3.1 Εφαρμογή στην Ανταγωνιστική Ισορροπία

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας για τις παραμέτρους του συστήματος με δύο αγαθά τις τιμές (Shone, 2002):  $E_{10} = 3, E_{11} = -6, E_{12} = 3, E_{20} = 16, E_{21} = 4, E_{22} = -8$  με  $k_1 = 2$  και  $k_2 = 3$ , όπου  $E_{12} > 0$  και  $E_{21} > 0$  αφού τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα μεταξύ τους, οι συναρτήσεις υπερβάλλουσας ζήτησης είναι:

$$E_1 = 3 - 6p_1 + 3p_2$$

$$E_2 = 16 + 4p_1 - 8p_2$$

Οπότε, το δυναμικό σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 2E_1 = 2(3 - 6p_1 + 3p_2) \Rightarrow \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= 3E_2 = 3(16 + 4p_1 - 8p_2) \Rightarrow \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Που είναι ένα σύστημα δύο αυτόνομων γραμμικών μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

Με συμβολισμό μητρών, το μη ομογενές σύστημα των εξισώσεων (7) γράφεται ως:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{g}$$

Όπου,  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 E_{11} & k_1 E_{12} \\ k_2 E_{21} & k_2 E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 12 & -24 \end{pmatrix}$  είναι η (2 x 2) μήτρα σταθερών συντελεστών,  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ , και  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} k_1 E_{10} \\ k_2 E_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 48 \end{pmatrix}$  ένα (2 x 1) διάνυσμα σταθερών συντελεστών.

Το σημείο ισορροπίας (equilibrium point) του συστήματος που δίνεται από  $\dot{\mathbf{p}} = 0$ , δηλαδή για  $dp_1/dt = 0$  και  $dp_2/dt = 0$ , είναι:

$$\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*) = (2, 3)$$

Πριν τον προσδιορισμό της λύσης του συστήματος θα αναλύσουμε πρώτα τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. Η ανάλυση των χαρακτηριστικών ευστάθειας των σημείων ισορροπίας είναι ίδια τόσο για τα ομογενή όσο και για τα μη ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων και γίνεται χρησιμοποιώντας την Ορίζουσα και το Ίχνος της μήτρας  $\mathbf{A}$  (Blanchard et al., 2006). Η μόνη διαφορά είναι ότι στα ομογενή συστήματα το σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των αξόνων ενώ για τα μη ομογενή είναι κάποιο άλλο σημείο  $(p_1^*, p_2^*)$ . Η Ορίζουσα και το Ίχνος της μήτρας  $\mathbf{A}$  είναι αντίστοιχα:

$$\det(\mathbf{A}) = (k_1 E_{11})(k_2 E_{22}) - (k_2 E_{21})(k_1 E_{12}) = 216 > 0$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = k_1 E_{11} + k_2 E_{22} = -36 < 0$$

Έτσι, η Χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = \lambda^2 + 36\lambda + 216 = 0$$

Και η Διακρίνουσα της Χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$\Delta = [\text{tr}(\mathbf{A})]^2 - 4\det(\mathbf{A}) = 432 > 0$$

Συνεπώς, αφού  $\Delta > 0$ ,  $\det(\mathbf{A}) > 0$  και  $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$  το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (real sink), και συγκεκριμένα είναι ευσταθής δεσμός (Vialar, 2009).

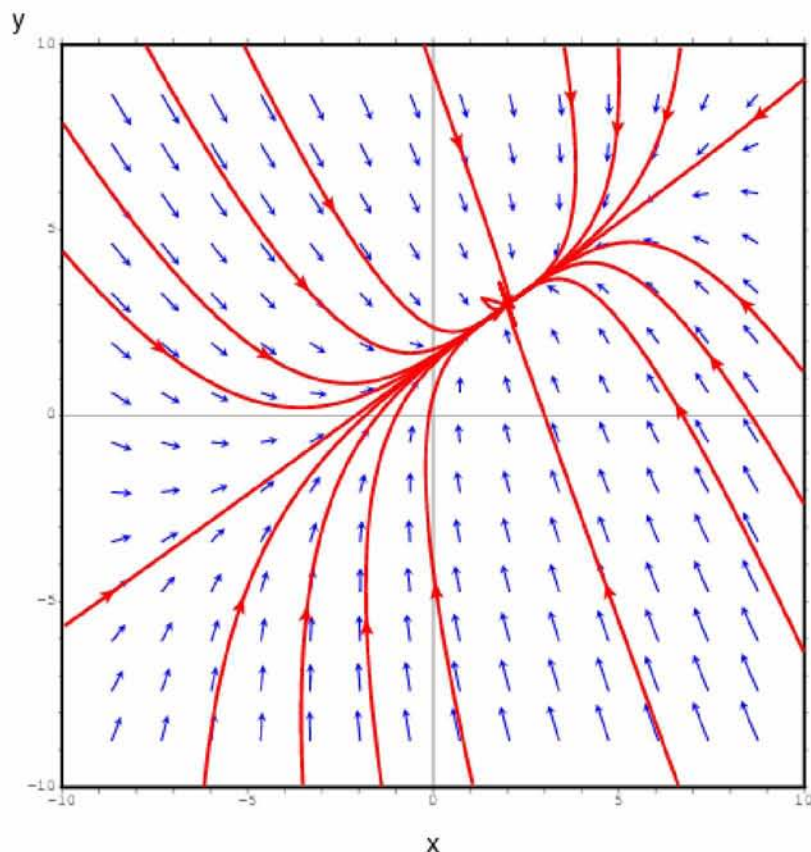
Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε και τις ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές ρίζες) του συστήματος που δίνονται από  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\{\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{[\text{tr}(\mathbf{A})]^2 - 4\det(\mathbf{A})}\}$  και είναι:

$$\lambda_1 \cong -28.392 < 0 \text{ και } \lambda_2 \cong -7.608 < 0$$

Έχουμε δύο αρνητικές πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές και άρα θα έχουμε δύο ευσταθείς ευθείες (stable straight-lines solutions). Επιπλέον,  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  και άρα η ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι η ισχυρότερη (stronger eigenvalue) ενώ η  $\lambda_2$  είναι η ασθενέστερη (weaker eigenvalue). (Devaney, 2004)

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι  $(1, -2.732)$  και το ιδιοδιάνυσμα για την  $\lambda_2$  ιδιοτιμή είναι  $(1, 0.732)$ . Οπότε, η ευσταθής ευθεία που αντιστοιχεί στην ισχυρότερη ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι η  $y = -x/2.732$ , ενώ η αντίστοιχη για την ασθενέστερη ιδιοτιμή είναι η  $y = -x/0.732$  (Devaney, 2004).

Για να δούμε διαγραμματικά τον τρόπο με τον οποίο οι τροχιές των λύσεων συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας (αφού έχουμε real sink) μπορούμε να κατασκευάσουμε το φασικό πορτραίτο του συστήματος. Το φασικό πορτραίτο προκύπτει αν στο επίπεδο φάσης διατρέξουμε όλα τα σημεία του επιπέδου  $(p_1, p_2)$  με αποτέλεσμα να προκύψει ένα σύνολο από διανύσματα που είναι εφαπτόμενα στην τροχιά της κάθε λύσης του συστήματος, το μέτρο και η κατεύθυνση των οποίων εκφράζει την ταχύτητα και την κατεύθυνση των μεταβλητών ως προς το χρόνο (Ξεπαπαδέας, 2009). Το φασικό πορτραίτο για το συγκεκριμένο σύστημα απεικονίζεται παρακάτω όπου  $x$  η τιμή  $P_1$  και  $y$  η τιμή  $P_2$ :



Παρατηρούμε λοιπόν ότι, όταν οι αρχικές τιμές βρίσκονται πάνω στις δύο ευσταθείς ευθείες τότε οι λύσεις συγκλίνουν κατευθείαν στο σημείο ισορροπίας (2,3). Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας εφαπτόμενες στην ευσταθή ευθεία που αντιστοιχεί στην ασθενέστερη ιδιοτιμή. Για το λόγο αυτό λοιπόν η ιδιοτιμή  $\lambda_2$  ονομάζεται ασθενέστερη. Επειδή οι λύσεις κατά μήκος της αντίστοιχης ευσταθής ευθείας συγκλίνουν πιο γρήγορα στο σημείο ισορροπίας. Οπότε, όπως ήταν αναμενόμενο από τη στιγμή που βρήκαμε δύο αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές, το σημείο ισορροπίας (2,3) θα είναι ευσταθές (sink) και έτσι οι λύσεις θα συγκλίνουν σε αυτό καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη λύση του συστήματος. Είδαμε ότι το σύστημα είναι μη ομογενές και έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 \cong -28.392$  και  $\lambda_2 \cong -7.608$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $V_{\lambda_1} = (1, -2.732)$  και  $V_{\lambda_2} = (1, 0.732)$ . Όπως είδαμε και στην περίπτωση με μία διαφορική εξίσωση έτσι και εδώ, η γενική λύση της μη ομογενούς συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων  $(p_1(t), p_2(t))$  προκύπτει από το άθροισμα της γενικής λύσης του ομογενούς μέρους της διαφορικής εξίσωσης και της ειδικής λύσης  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ .

Επειδή το ομογενές μέρος αποτελείται από σταθερούς όρους  $g = b = \begin{pmatrix} 6 \\ 48 \end{pmatrix}$  η ειδική λύση δίνεται από  $\bar{p} = -A^{-1}b$ . Ενώ η γενική λύση του ομογενούς μέρους της διαφορικής εξίσωσης από τη στιγμή που το σύστημα έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές θα δίνεται από  $[p_1(t) = A_1 V_{\lambda_1}^1 e^{\lambda_1 t} + A_2 V_{\lambda_2}^1 e^{\lambda_2 t}, p_2(t) = A_1 V_{\lambda_1}^2 e^{\lambda_1 t} + A_2 V_{\lambda_2}^2 e^{\lambda_2 t}]$ . Οπότε η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι:

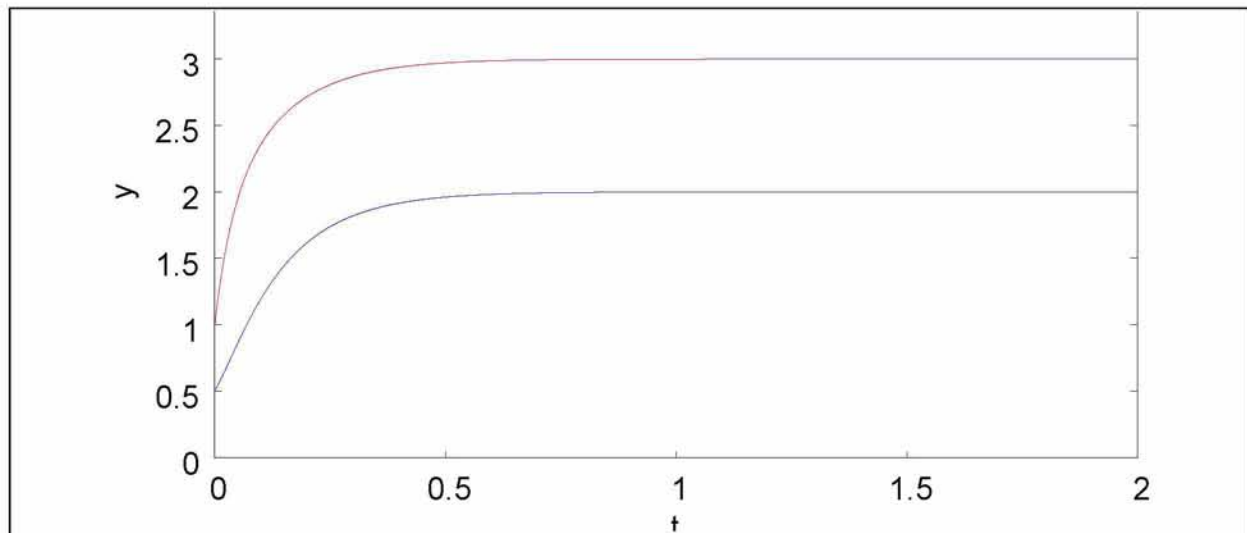
$$\begin{cases} p_1(t) = e^{-18t} \left\{ \frac{[2(6p_2^0 + 24p_1^0 - 66) - 36(p_1^0 - 2)] \sinh(2 \cdot 3^{3/2}t)}{4 \cdot 3^{3/2}} + (p_1^0 - 2) \cosh(2 \cdot 3^{3/2}t) \right\} + 2 \\ p_2(t) = e^{-18t} \left\{ \frac{[2(12p_2^0 + 12p_1^0 - 60) - 36(p_2^0 - 3)] \sinh(2 \cdot 3^{3/2}t)}{4 \cdot 3^{3/2}} + (p_2^0 - 3) \cosh(2 \cdot 3^{3/2}t) \right\} + 3 \end{cases}$$

Και για αρχικές τιμές  $(p_1^0, p_2^0) = (0.5, 1)$  η ορισμένη λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{cases} p_1(t) = e^{-18t} \left[ -\frac{7 \sin(2 \cdot 3^{3/2}t)}{2\sqrt{3}} - \frac{3 \cos(2 \cdot 3^{3/2}t)}{2} \right] + 2 \\ p_2(t) = e^{-18t} \left[ -\frac{\sin(2 \cdot 3^{3/2}t)}{\sqrt{3}} - 2 \cos(2 \cdot 3^{3/2}t) \right] + 3 \end{cases}$$

Η χρονική διαδρομή της ορισμένης λύσης απεικονίζεται παρακάτω:





Έτσι από το γράφημα της ορισμένης λύσης παρατηρούμε ξανά ότι, η λύση  $(p_1(t), p_2(t))$  για αρχική συνθήκη  $(0.5, 1)$  συγκλίνει μονοτονικά στο σημείο ισορροπίας  $(2, 3)$  καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο. Φυσικά, εφόσον τα  $k_1$  και  $k_2$  εκφράζουν την ταχύτητα με την οποία οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας, μεγαλύτερες/μικρότερες τιμές αυτών αυξάνουν/μειώνουν την ταχύτητα με την οποία οι  $(p_1(t), p_2(t))$  συγκλίνουν στο  $(p_1^*, p_2^*)$ , όπως είχαμε δει και στην περίπτωση με μία διαφορική εξίσωση.

Συνεπώς, όπως δείξαμε και παραπάνω στη γενική ανάλυση του συστήματος με δύο προϊόντα, όταν τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα μεταξύ τους τότε οι τιμές και των δύο προϊόντων  $(p_1(t), p_2(t))$  θα συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*)$  για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες  $(p_1^0, p_2^0)$  και έτσι το σημείο ισορροπίας θα είναι πάντα ευσταθές (sink).

## 2.4 Γενική Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Υποκατάστατα Αγαθά

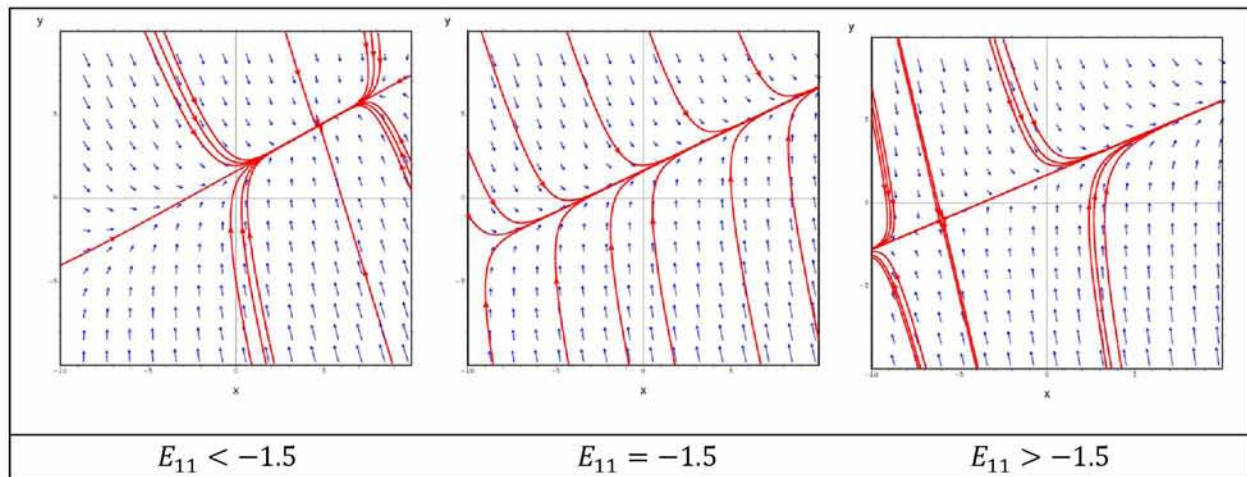
Παρατηρούμε όμως ότι, η συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας όπως είδαμε προσδιορίζεται από την  $\det(A)$  και  $\text{tr}(A)$ . Δηλαδή από τις τιμές των παραμέτρων  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ . Παρακάτω λοιπόν, ακολουθεί μία γενική δυναμική ανάλυση, για το σύστημα στο τελευταίο παράδειγμα με δύο αγαθά, που δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας καθώς μεταβάλλονται οι τιμές αυτών των παραμέτρων. Είναι σημαντικό να το δούμε αυτό διότι, οι αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων αλλάζουν τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος και συνεπώς και τις λύσεις του, με αποτέλεσμα να μπορεί να οδηγήσουν σε σημαντικές μεταβολές ως προς τη συμπεριφορά αυτών (Devaney, 2004) και στην εμφάνιση διακλαδώσεων (bifurcations).

Θα αφήσουμε σταθερές τις τιμές των  $E_{10}$  και  $E_{20}$  διότι το μόνο που επηρεάζουν είναι την τιμή του σημείου ισορροπίας και όχι τη συμπεριφορά του. Σταθερές θα αφήσουμε και τις τιμές των  $k_1$  και  $k_2$  καθώς σχετίζονται μόνο με την ταχύτητα με την οποία οι λύσεις συγκλίνουν ή αποκλίνουν στο σημείο ισορροπίας. Για να κάνουμε δυνατή την ανάλυση, κάθε φορά που θα αλλάζουμε την τιμή μιας παραμέτρου θα διατηρούμε τις τιμές των άλλων σταθερές. Θα προβούμε μόνο σε ποιοτική ανάλυση, χρησιμοποιώντας τα φασικά πορτραίτα και τα πρόσημα των  $\det(A)$  και  $\text{tr}(A)$  για κάθε περίπτωση, διότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πως αλλάζει η συμπεριφορά και όχι η συνάρτηση της λύσης του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Οπότε, αρχικά αλλάζω την τιμή του  $E_{11}$  διατηρώντας τις τιμές των άλλων σταθερές με βάση το σύστημα από το προηγούμενο παράδειγμα για δύο υποκατάστατα αγαθά:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 6 + 2E_{11}p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{aligned}, \quad \text{για } E_{11} < 0$$

Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στην  $E_{11}$  στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ως προς τη συμπεριφορά των λύσεων που απεικονίζονται και στα παρακάτω φασικά πορτραίτα. Το επίπεδο  $p_1p_2$  στο κάθε φασικό πορτραίτο χωρίζεται στα τέσσερα τεταρτημόρια 1ο, 2ο, 3ο και 4ο όπως κινούμαστε δεξιόστροφα. Έτσι έχουμε:

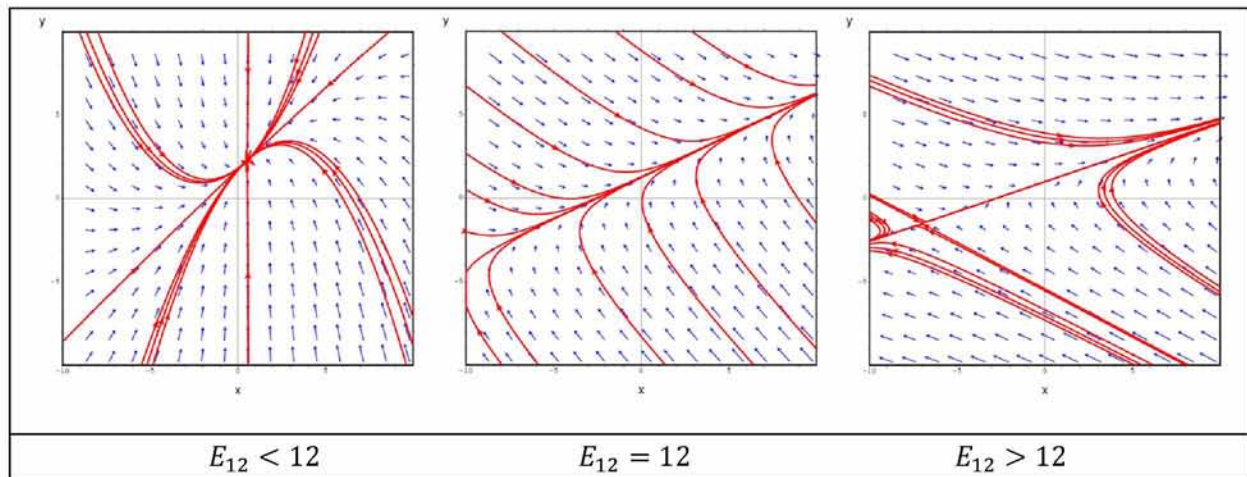


- Για  $E_{11} < -1.5$ : Εμφανίζεται ένα ευσταθές (sink) σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο του επιπέδου  $(x,y)$  το οποίο μετακινείται προς την αρχή των αξόνων καθώς  $E_{11} \rightarrow -\infty$  αλλά παραμένει πάντα στο ίδιο τεταρτημόριο και ευσταθές. Οι λύσεις συγκλίνουν πάντα στο σημείο ισορροπίας εφαπτόμενες στην ευσταθή ευθεία που αντιστοιχεί στην ασθενέστερη ιδιοτιμή. Καθώς η τιμή του συντελεστή αυξάνεται το σημείο ισορροπίας απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων. Για  $E_{11} = -6$  το σημείο ισορροπίας είναι το  $(2,3)$  του παραπάνω παραδείγματος.
- Για  $E_{11} = -1.5$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και έτσι όλες οι λύσεις κινούνται προς τα δεξιά τείνοντας στο άπειρο πλέον καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .
- Για  $E_{11} > -1.5$ : Εμφανίζεται ένα νέο σαγματικό (saddle) σημείο ισορροπίας στο 3ο τεταρτημόριο, το οποίο πλησιάζει προς την αρχή των αξόνων καθώς το  $E_{11}$  αυξάνεται και παραμένει πάντα σάγμα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία θετική και μία αρνητική πραγματική ιδιοτιμή και  $\det(A) < 0$ . Έτσι έχουμε μία ευσταθή και μία ασταθή ευθεία πάνω στις οποίες οι λύσεις συγκλίνουν και αποκλίνουν αντίστοιχα από το σημείο ισορροπίας. Όλες οι άλλες λύσεις αποκλίνουν από αυτό τείνοντας στο άπειρο εφαπτομενικά στην ασταθή ευθεία.

Έπειτα για διάφορες τιμές του  $E_{12}$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 6 - 12p_1 + 2E_{12}p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{aligned}, \quad \text{για } E_{12} > 0$$

Οπότε έχουμε:



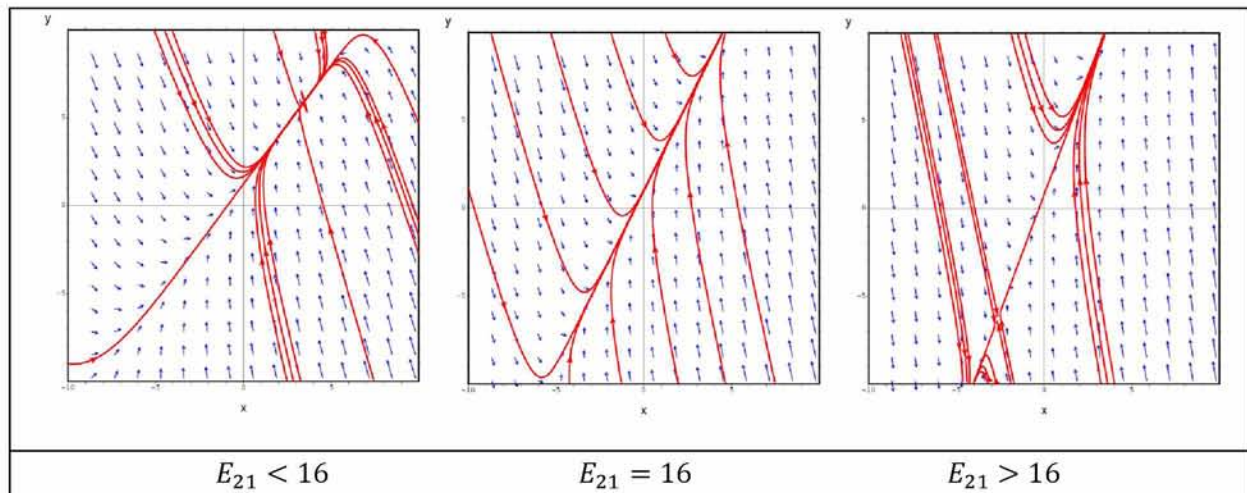
- Για  $E_{12} < 12$ : Όπως και πριν, εμφανίζεται πάνω και δεξιά στο 1ο τεταρτημόριο ένα ευσταθές (sink) σημείο ισορροπίας που καθώς το  $E_{12} \rightarrow 0$  μετακινείται προς την αρχή των αξόνων, αλλά παραμένει πάντα στο ίδιο τεταρτημόριο και πάντα ευσταθές. Καθώς η τιμή του συντελεστή αυξάνεται το σημείο ισορροπίας πάλι απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.
- Για  $E_{12} = 12$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και έτσι όλες οι λύσεις όπως και πριν κινούνται προς τα δεξιά τείνοντας στο άπειρο πλέον καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .
- Για  $E_{12} > 12$ : Εμφανίζεται όπως και πριν ένα νέο σαγματικό (saddle) σημείο ισορροπίας κάτω και αριστερά στο 3ο τεταρτημόριο, το οποίο πάλι μετακινείται προς την αρχή των αξόνων καθώς η τιμή του  $E_{12}$  αυξάνεται, αλλά δεν περνάει ποτέ στο 1ο τεταρτημόριο. Καθώς τώρα το  $E_{12} \rightarrow +\infty$  το σημείο ισορροπίας παραμένει πάντα σάγμα με  $p_1^* \rightarrow -4$  και  $p_2^* \rightarrow 0$ .

Μεταβολές στην τιμή του  $E_{21}$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και του  $E_{22}$  στο  $(-\infty, 0)$  οδηγούν σε παρόμοια αποτελέσματα με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις. Το σύστημα για διάφορες τιμές του  $E_{21}$  και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 6 - 12p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= 48 + 3E_{21}p_1 - 24p_2 \end{aligned}, \quad \text{για } E_{21} > 0$$

Η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:



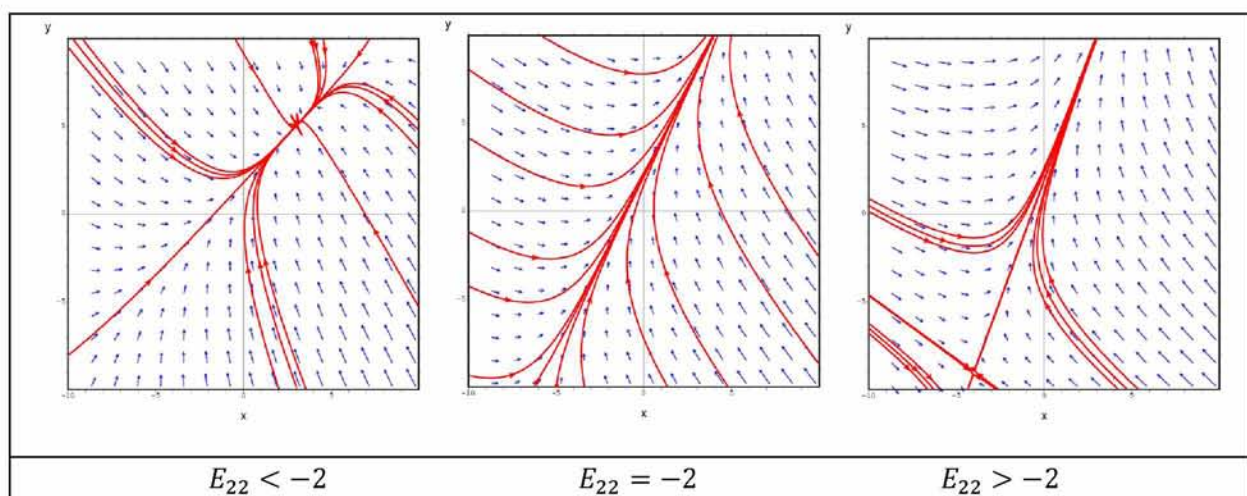


- Για  $E_{21} < 16$ : Έχουμε πάλι το ευσταθές σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο το οποίο καθώς αυξάνεται η τιμή του  $E_{21}$  και πλησιάζει στην τιμή 16 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.
- Για  $E_{21} = 16$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται.
- Για  $E_{21} > 16$ : Εμφανίζεται πάλι ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 3ο τεταρτημόριο που συμπεριφέρεται όπως και στις άλλες περιπτώσεις καθώς η τιμή του  $E_{12}$  αυξάνεται.

Και τέλος για διάφορες τιμές του  $E_{22}$  το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 6 - 12p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= 48 + 12p_1 + 3E_{22}p_2 \end{aligned}, \quad \text{για } E_{22} < 0$$

Για το οποίο έχουμε:



- Για  $E_{22} < -2$ : Έχουμε το ευσταθές σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο το οποίο καθώς η τιμή του  $E_{22} \rightarrow -\infty$  παραμένει ευσταθές με  $p_1^* \rightarrow 0.5$  και  $p_2^* \rightarrow 0$ .
- Για  $E_{22} = -2$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται.
- Για  $E_{22} > -2$ : Έχουμε το σαγματικό σημείο ισορροπίας που εμφανίζεται στο 3ο τεταρτημόριο το οποίο καθώς το  $E_{22} \rightarrow 0$  παραμένει σάγμα με  $p_1^* \rightarrow -4$  και  $p_2^* \rightarrow -9$ .

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση που μεταβάλλουμε την τιμή του συντελεστή με σταθερές τις τιμές των άλλων, για το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο υποκατάστατα αγαθά, αρχικά πάντα έχουμε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο το οποίο απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων καθώς αυξάνουμε την τιμή του συντελεστή. Για τις τιμές των συντελεστών  $E_{11} = -1.5, E_{12} = 12, E_{21} = 16$  και  $E_{22} = -2$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται, ενώ για τιμές μεγαλύτερες από αυτές ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας εμφανίζεται στο 3ο τεταρτημόριο το οποίο παραμένει πάντα εκεί και μετακινείται προς την αρχή των αξόνων καθώς οι τιμές των συντελεστών αυξάνονται συνεχώς.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν οι τιμές των συντελεστών είναι  $E_{11} = -1.5, E_{12} = 12, E_{21} = 16$  και  $E_{22} = -2$  τότε η παραμικρή μεταβολή στις τιμές αυτών έχει ως αποτέλεσμα μία ριζική μεταβολή στη συμπεριφορά των λύσεων, αφού για μικρότερες τιμές αυτών οι λύσεις συγκλίνουν πάντα σε ένα σημείο ισορροπίας ενώ για μεγαλύτερες τιμές αυτών οι λύσεις (εκτός από αυτές που βρίσκονται πάνω στην ευσταθή ευθεία) αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης με δύο υποκατάστατα αγαθά υπάρχουν κάποιες τιμές των συντελεστών για τις οποίες μπορούμε να έχουμε σαγματικό σημείο ισορροπίας με αποτέλεσμα οι τιμές των δύο αγαθών να μην μπορούν σχεδόν ποτέ να συγκλίνουν σε τιμές ισορροπίας.

Φυσικά όμως, επειδή οι τιμές είναι θετικές ποσότητες, αυτή η περίπτωση με το σαγματικό σημείο ισορροπίας δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική από οικονομική σκοπιά αφού το σάγμα είναι πάντα αρνητικό ( $p_1^* < 0, p_2^* < 0$ ). Για το λόγο αυτό άλλωστε στην παραπάνω ανάλυση του συστήματος το συμπέρασμα είναι ότι όταν τα δύο αγαθά είναι μεταξύ τους υποκατάστατα το σημείο ισορροπίας είναι πάντα ευσταθές. Επειδή αναφέρεται σε εκείνες τις τιμές των συντελεστών που δίνουν πάντα θετικές τιμές ισορροπίας που κατά συνέπεια είναι πάντα ευσταθείς. Ωστόσο, αυτή η συμπεριφορά του συστήματος από μαθηματική σκοπιά παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι μας δίνει μία γενική εικόνα για τη συμπεριφορά των

λύσεων του συστήματος που δεν μπορούμε να έχουμε με τον περιορισμό των θετικών σημείων ισορροπίας που επιβάλλει η οικονομική θεωρία.

## 2.5 Γενική Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Συμπληρωματικά Αγαθά

Διαφορετικές όμως υποθέσεις αναφορικά με το πρόσημο των  $E_{12}$  και  $E_{21}$  μπορούν να αλλάξουν τη συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας. Έτσι θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της ανταγωνιστικής ισορροπίας όταν  $E_{12} < 0$  και  $E_{21} < 0$ . Όπου όμως, αυτή είναι η περίπτωση που τα δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους. Παρακάτω λοιπόν ακολουθεί μία ποιοτική δυναμική ανάλυση του συστήματος με δύο αγαθά όταν αυτά είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους. Το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι αυτό που είχαμε και στην εφαρμογή για την περίπτωση που τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα μεταξύ τους, έτσι ώστε να δούμε πως αλλάζει η συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας όταν τα δύο αγαθά είναι πλέον συμπληρωματικά.

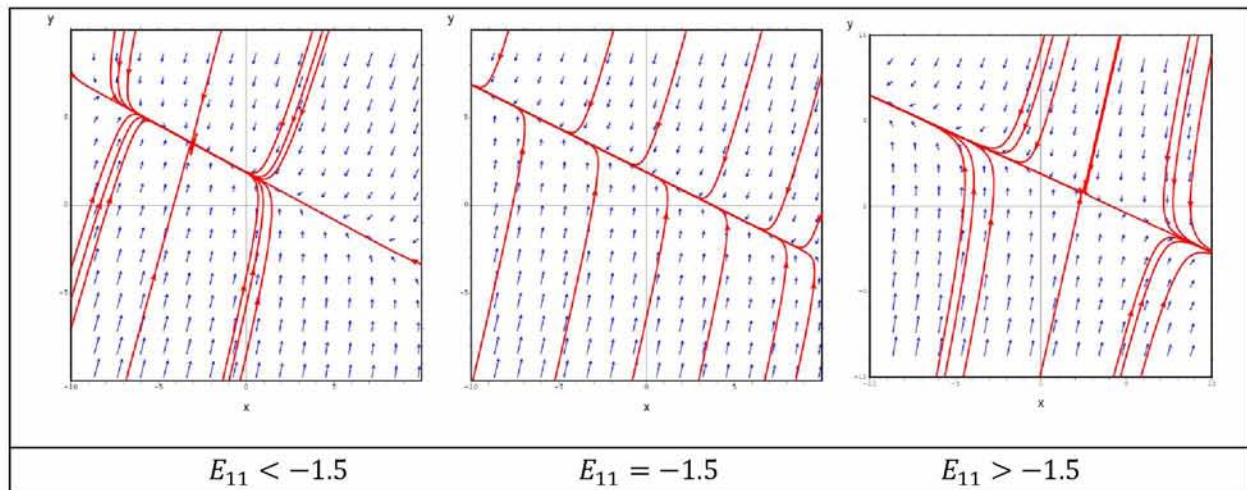
Χρησιμοποιούμε λοιπόν το αρχικό σύστημα του παραδείγματος και αλλάζουμε τα πρόσημα των  $E_{12}$  και  $E_{21}$  από θετικά σε αρνητικά. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με δύο υποκατάστατα αγαθά έτσι και εδώ, θα μεταβάλλουμε κάθε φορά τιμή από τους συντελεστές  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  διατηρώντας τις τιμές των άλλων σταθερές για να δούμε πως εξελίσσεται το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας στην κάθε περίπτωση. Σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα από την περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά.

Δίνοντας διάφορες τιμές στον συντελεστή  $E_{11}$  στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  και διατηρώντας τις τιμές των άλλων σταθερές για την περίπτωση που τα δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους, το σύστημα του τελευταίου παραδείγματος γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 + E_{11}p_1 - 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 - 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{με } E_{11} < 0 \text{ και } E_{12} < 0, E_{21} < 0$$

Διακρίνονται πάλι τρεις περιπτώσεις ως προς τη συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας που απεικονίζονται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα του συστήματος:



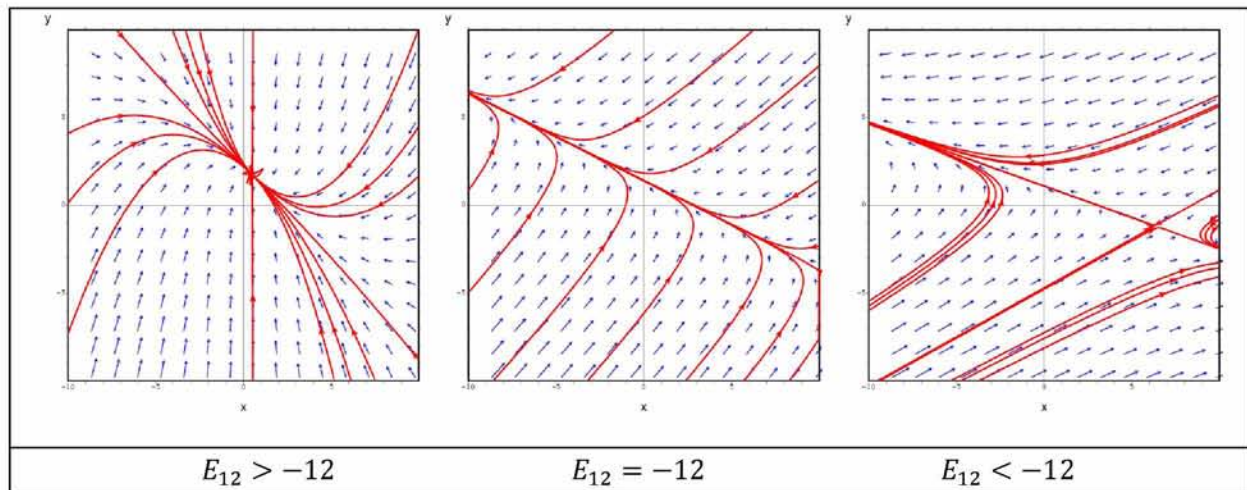


- Για  $E_{11} < -1.5$ : Εμφανίζεται όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά, ένα ευσταθές (sink) σημείο ισορροπίας. Αυτή τη φορά όμως, πάνω και αριστερά στο 4ο τεταρτημόριο. Το σημείο ισορροπίας όπως και πριν μετακινείται προς την αρχή των αξόνων καθώς το  $E_{11}$  μειώνεται και καθώς το  $E_{11} \rightarrow -\infty$  το σημείο ισορροπίας παραμένει ευσταθές στο ίδιο τεταρτημόριο με  $p_1^* \rightarrow 0^-$  και  $p_2^* \rightarrow 2$ . Καθώς η τιμή του συντελεστή αυξάνεται το σημείο ισορροπίας απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.
- Για  $E_{11} = -1.5$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και έτσι όλες οι λύσεις κινούνται προς τα αριστερά τείνοντας στο άπειρο καθώς το  $t \rightarrow \infty$  αφού πλέον δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας στο σύστημα.
- Για  $E_{11} > -1.5$ : Ένα σαγματικό (saddle) πάλι σημείο ισορροπίας εμφανίζεται αυτή τη φορά κάτω και δεξιά στο 2ο τεταρτημόριο, το οποίο μετακινείται πάνω και αριστερά καθώς η τιμή του  $E_{11}$  αυξάνεται. Για  $E_{11} > -0.8$  περίπου το σαγματικό σημείο ισορροπίας περνάει στο 1ο τεταρτημόριο, ενώ καθώς  $E_{11} \rightarrow 0$  παραμένει πάντα σάγμα στο 1ο τεταρτημόριο με  $p_1^* \rightarrow 2$  και  $p_2^* \rightarrow 1$ .

Δοκιμάζοντας τώρα διάφορες τιμές στο συντελεστή  $E_{12}$  με σταθερές τις τιμές των άλλων έχουμε το:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 2E_{12}p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 - 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{με } E_{12} < 0$$

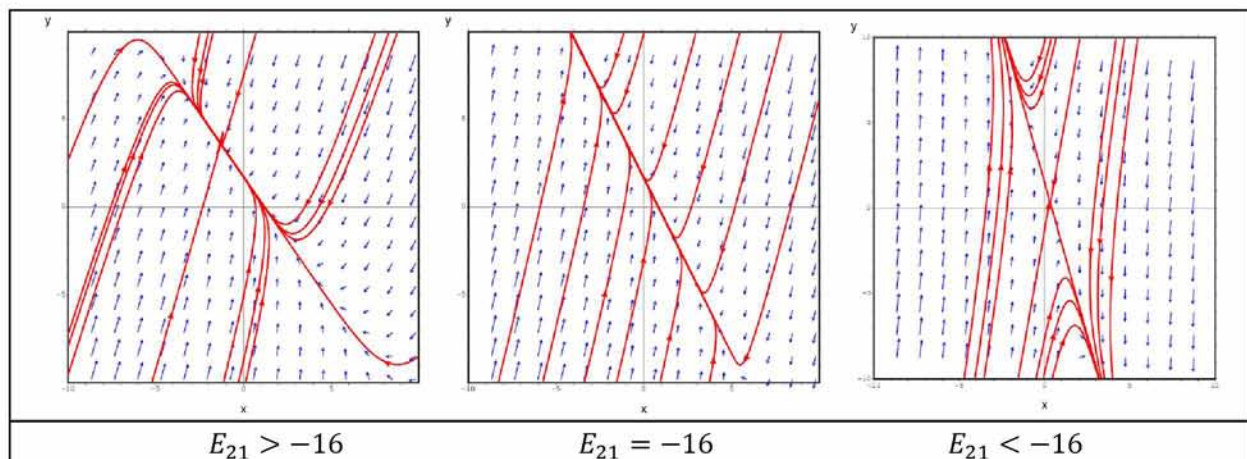
Για το οποίο προκύπτουν τα παρακάτω :



- Για  $E_{12} > -12$ : Όπως ήταν αναμενόμενο, εμφανίζεται ένα ευσταθές (sink) σημείο ισορροπίας πάνω και αριστερά στο 4ο τεταρτημόριο το οποίο συμπεριφέρεται όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά. Αυτή τη φορά όμως, για  $E_{12} > -2$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας περνάει στο 1ο τεταρτημόριο το οποίο παραμένει εκεί καθώς το  $E_{12} \rightarrow 0$  με  $p_1^* \rightarrow 0.5$  και  $p_2^* \rightarrow 1.75$ . Καθώς η τιμή του συντελεστή μειώνεται το σημείο ισορροπίας απομακρύνεται στο 4ο τεταρτημόριο πάνω και αριστερά.
- Για  $E_{12} = -12$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται.
- Για  $E_{12} < -12$ : Ένα νέο σαγματικό (saddle) σημείο ισορροπίας εμφανίζεται αυτή τη φορά κάτω και δεξιά στο 2ο τεταρτημόριο, το οποίο συμπεριφέρεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά.

Για διάφορες αρνητικές τιμές του  $E_{21}$  ομοίως έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 - 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 3E_{21}p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{με } E_{21} < 0$$



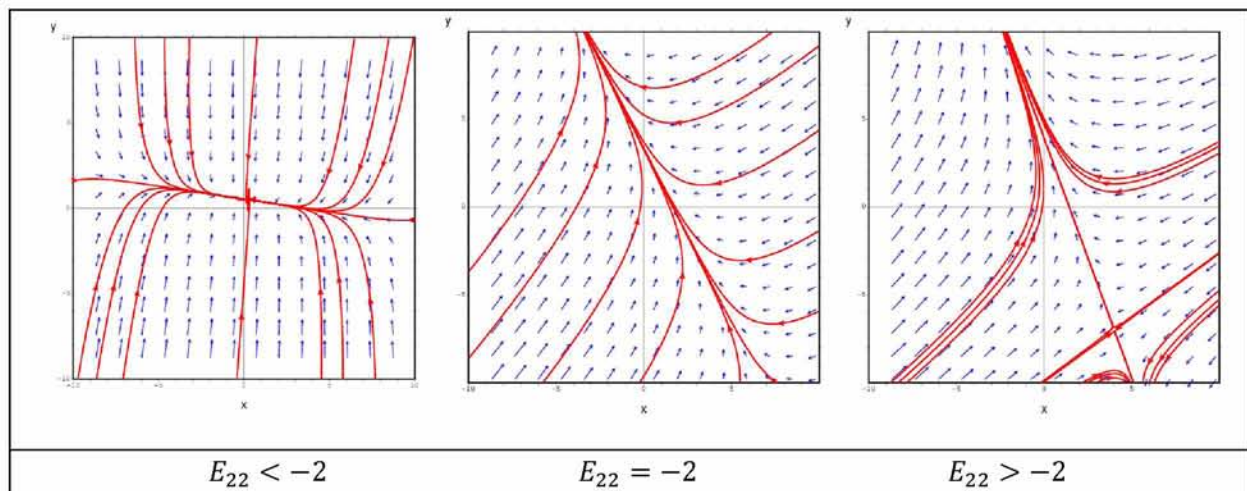


- Για  $E_{21} > -16$ : Έχουμε πάλι, ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας να εμφανίζεται πάνω και αριστερά στο 4ο τεταρτημόριο το οποίο συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά.
- Για  $E_{21} = -16$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται.
- Για  $E_{21} < -16$ : Εμφανίζεται πάλι ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας κάτω και δεξιά στο 2ο τεταρτημόριο. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση των υποκατάστατων αγαθών, αυτή τη φορά το saddle περνάει στο 1ο τεταρτημόριο όταν το  $E_{21} < -32$ . Και καθώς  $E_{21} \rightarrow -\infty$  το σημείο ισορροπίας παραμένει saddle με  $p_1^* \rightarrow 0$  και  $p_2^* \rightarrow 1$ .

Τέλος, για διάφορες τιμές του  $E_{22}$  έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 - 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 - 12p_1 + 3E_{22}p_2 \end{cases}, \quad \text{με } E_{22} < 0$$

Και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι:



- Για  $E_{22} < -2$ : Έχουμε πάλι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας στο 4ο τεταρτημόριο το οποίο συμπεριφέρεται όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά, μόνο που εδώ, το σημείο ισορροπίας περνάει στο 1ο τεταρτημόριο όταν  $E_{22} < -15$ , με αποτέλεσμα, καθώς η τιμή του  $E_{22} \rightarrow -\infty$  τα σημεία ισορροπίας να τείνουν όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά στις τιμές  $p_1^* \rightarrow 0.5$  και  $p_2^* \rightarrow 0$ .
- Για  $E_{22} = -2$ : Το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται.
- Για  $E_{22} > -2$ : Έχουμε το σαγματικό σημείο ισορροπίας που εμφανίζεται στο 2ο τεταρτημόριο το οποίο όπως και στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά παραμένει

σε αυτό το τεταρτημόριο και συμπεριφέρεται με το ίδιο τρόπο. Καθώς το  $E_{22} \rightarrow 0$  το  $p_1^* \rightarrow 4$  και  $p_2^* \rightarrow -7$ .

Από τα παραπάνω αποτελέσματα λοιπόν προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- 1) Όπως και για υποκατάστατα αγαθά έτσι και για συμπληρωματικά, αρχικά εμφανίζεται πάντα ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο στην πορεία εξαφανίζεται ενώ έπειτα εμφανίζεται πάντα ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας.
- 2) Σε αντίθεση με τα υποκατάστατα αγαθά, όταν τα αγαθά είναι συμπληρωματικά το ευσταθές σημείο ισορροπίας αρχικά εμφανίζεται στο 4ο τεταρτημόριο ενώ το σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 2ο τεταρτημόριο.
- 3) Στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά το ευσταθές σημείο ισορροπίας παίρνει πάντα θετικές τιμές, σε αντίθεση με την περίπτωση των συμπληρωματικών αγαθών όπου το ευσταθές σημείο ισορροπίας περνάει στο 1ο τεταρτημόριο μόνο για ορισμένες τιμές των  $E_{12}$  και  $E_{22}$ .
- 4) Και τέλος, στην περίπτωση με υποκατάστατα αγαθά το σαγματικό σημείο ισορροπίας δεν παίρνει ποτέ θετικές τιμές, σε αντίθεση με τα συμπληρωματικά αγαθά όπου το σαγματικό σημείο ισορροπίας περνάει στο 1ο τεταρτημόριο για κάποιες τιμές των  $E_{11}$  και  $E_{21}$ .

Συνεπώς, όταν τα αγαθά είναι υποκατάστατα μεταξύ τους, τότε για θετικές τιμές ισορροπίας το σημείο ισορροπίας είναι πάντα ευσταθές (sink) και οι τιμές των δύο αγαθών συγκλίνουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας. Αντιθέτως, όταν τα δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους τότε για θετικές πάντα τιμές ισορροπίας, το σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι είτε ευσταθές (sink) είτε σαγματικό (saddle), με αποτέλεσμα οι τιμές των δύο αγαθών για κάποιες τιμές των συντελεστών να συγκλίνουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας ενώ για κάποιες άλλες τιμές των συντελεστών να μη συγκλίνουν σχεδόν ποτέ σε κατάσταση ισορροπίας. Αυτό είναι ένα σημαντικό συμπέρασμα που δείχνει ότι όταν τα δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους ( $E_{12} < 0$  και  $E_{21} < 0$ ) τότε οι τιμές των δύο αγαθών δεν φτάνουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας, όπως συμβαίνει στην περίπτωση όπου τα αγαθά είναι υποκατάστατα μεταξύ τους ( $E_{12} > 0$  και  $E_{21} > 0$ ).

## 2.6 Δυναμική Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας για Δύο Υποκατάστατα Αγαθά με Μη Γραμμικότητα

Όλη η ανάλυση όμως που προηγήθηκε βασίστηκε στην υπόθεση (για λόγους απλούστευσης της ανάλυσης) ότι οι συναρτήσεις υπερβάλλουσας ζήτησης είναι γραμμικές ως προς τις τιμές των δύο αγαθών. Επειδή όμως στην πραγματικότητα τα περισσότερα συστήματα παρουσιάζουν μη γραμμικότητες, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η δυναμική ανάλυση στις περιπτώσεις μη γραμμικών συναρτήσεων υπερβάλλουσας ζήτησης, καθώς μία τέτοια περίπτωση θα ήταν ίσως περισσότερο ρεαλιστική (Blanchard, 2006).

Για τη μελέτη των μη γραμμικών συστημάτων ένα σημαντικό εργαλείο είναι η τεχνική της γραμμικοποίησης (linearization). Η τεχνική της γραμμικοποίησης μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε πως συμπεριφέρονται οι λύσεις κοντά στα σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος. Η τεχνική της γραμμικοποίησης εφαρμόζεται ως εξής (Devaney, 2004): Από το μη γραμμικό σύστημα αφαιρούμε τους μη γραμμικούς όρους και παίρνουμε το γραμμικοποιημένο (linearized) σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Βλέπουμε πως συμπεριφέρονται οι λύσεις στο γραμμικοποιημένο σύστημα, για το οποίο πλέον η εύρεση αναλυτικής λύσης είναι εφικτή. Αν η συμπεριφορά των λύσεων στο γραμμικοποιημένο σύστημα μοιάζει με τη συμπεριφορά των λύσεων στο μη γραμμικό σύστημα τότε η τεχνική της γραμμικοποίησης είναι εφικτή. Όταν λοιπόν η τεχνική της γραμμικοποίησης είναι εφικτή, τότε η συμπεριφορά των λύσεων κοντά στα σημεία ισορροπίας είναι παρόμοια με τη συμπεριφορά των λύσεων μακριά από τα σημεία ισορροπίας.

Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις η τεχνική της γραμμικοποίησης είναι αδύνατη διότι η προσθήκη μη γραμμικών όρων αλλάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των λύσεων μακριά από τα σημεία ισορροπίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν η γραμμικοποίηση μας δίνει πληροφορίες μόνο για την τοπική συμπεριφορά των λύσεων κοντά στα σημεία ισορροπίας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το θεώρημα της γραμμικοποίησης η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος μοιάζει με εκείνη του γραμμικοποιημένου όταν το σημείο ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι υπερβολικό (hyperbolic). Όταν δηλαδή το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει ιδιοτιμές με μη μηδενικά πραγματικά μέρη.

Παρακάτω λοιπόν ακολουθεί μία ποιοτική δυναμική ανάλυση της ανταγωνιστικής ισορροπίας με δύο υποκατάστατα αγαθά με μη γραμμικές όμως συναρτήσεις υπερβάλλουσας ζήτησης. Θα χρησιμοποιηθούν όσο το δυνατόν πιο απλές μορφές μη γραμμικότητας προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση. Θα χρησιμοποιηθεί το σύστημα από το αρχικό παράδειγμα για την

περίπτωση με δύο υποκατάστατα αγαθά, έτσι ώστε να δούμε πως αλλάζει η συμπεριφορά του αρχικού σημείου ισορροπίας με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου.

### 2.6.1 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς την Τιμή του

#### 2.6.1.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Έστω λοιπόν ότι η υπερβάλλουσα ζήτηση του αγαθού 1 είναι μη γραμμική ως προς την τιμή του. Η πιο απλή μορφή μη γραμμικότητας που μπορούμε να έχουμε στο σημείο αυτό είναι η προσθήκη του όρου  $mp_1^2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του αγαθού 1. Το αρχικό σύστημα για δύο υποκατάστατα αγαθά με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου γίνεται:

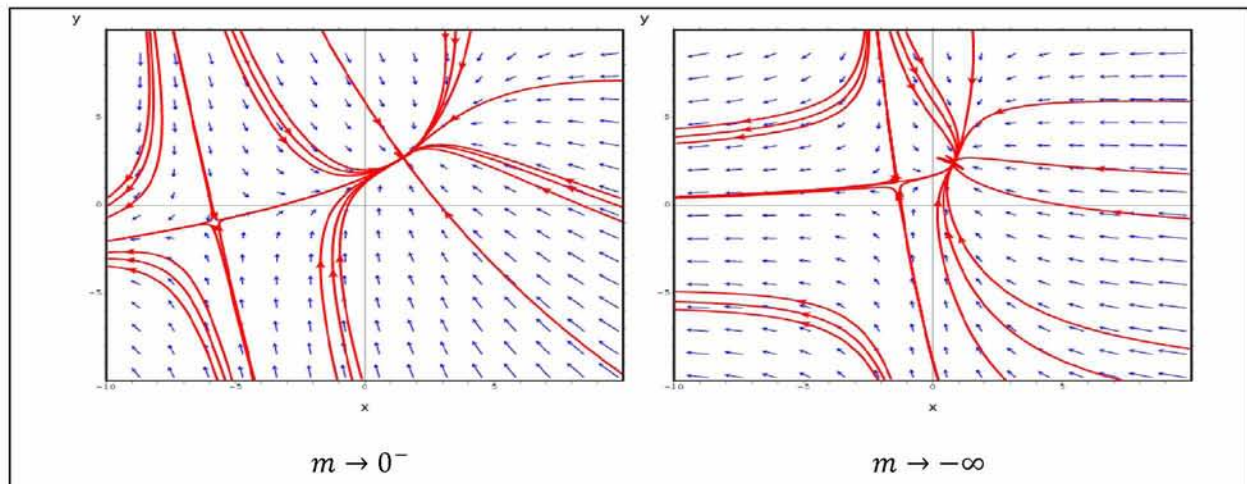
$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_1^2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική της γραμμικοποίησης αφαιρούμε τον μη γραμμικό όρο  $mp_1^2$ . Το γραμμικοποιημένο σύστημα που προκύπτει είναι το αρχικό γραμμικό σύστημα του παραδείγματος που αναλύθηκε παραπάνω και άρα έχει δύο διαφορετικές αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Έτσι, το σημείο ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος (2,3) είναι ευσταθές (sink) και όλες οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτό. Επιπλέον, το σημείο ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι υπερβολικό. Οπότε, η συμπεριφορά των λύσεων κοντά στο σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος θα μοιάζει με τη συμπεριφορά των λύσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Επιστρέφοντας τώρα στο μη γραμμικό σύστημα θα προσπαθήσουμε να δούμε πως αλλάζει η συμπεριφορά των λύσεων του γραμμικού συστήματος με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου για θετικές και αρνητικές τιμές του συντελεστή  $m$ . Για να μπορέσουμε να δούμε τη συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος μακριά από το σημείο ισορροπίας θα προβούμε σε ποιοτική ανάλυση κατασκευάζοντας σε κάθε περίπτωση τα αντίστοιχα φασικά πορτραίτα.

Έτσι, η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος μακριά από το αρχικό ευσταθές σημείο ισορροπίας, για αρνητικές τιμές του  $m$  απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:

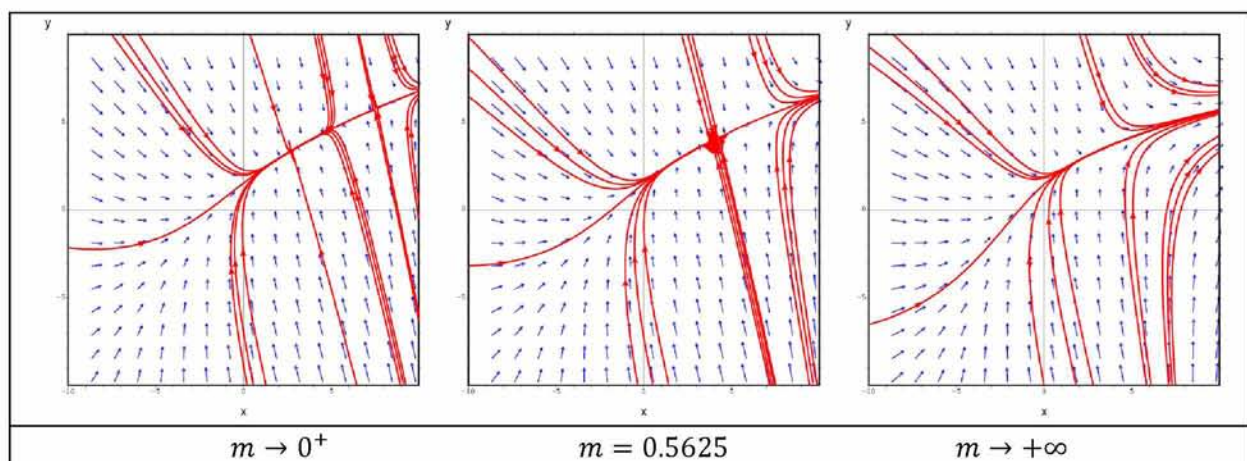




- Για αρνητικές τιμές του  $m$  κοντά στο μηδέν, εκτός από το αρχικό ευσταθές (sink) σημείο ισορροπίας  $(2,3)$  εμφανίζεται και ένα σαγματικό (saddle) σημείο ισορροπίας στο 3ο τεταρτημόριο.
- Καθώς τώρα η τιμή του  $m$  μειώνεται συνεχώς το σαγματικό σημείο ισορροπίας κάποια στιγμή περνάει στο 4ο τεταρτημόριο. Για  $m \rightarrow -\infty$  τα δύο σημεία ισορροπίας στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο πλησιάζουν ασυμπτωτικά μεταξύ τους με  $(p_1^* \rightarrow 0^+, p_2^* \rightarrow 2)$  για το ευσταθές και  $(p_1^* \rightarrow 0^-, p_2^* \rightarrow 2)$  για το σαγματικό σημείο ισορροπίας.

Οπότε για αρνητικές τιμές του  $m$  στο σύστημα έχουμε δύο σημεία ισορροπίας, ένα ευσταθές και ένα σαγματικό. Αυτό σημαίνει ότι, κοντά στο αρχικό ευσταθές σημείο ισορροπίας οι λύσεις θα συγκλίνουν σε αυτό. Οι τροχιές όμως των λύσεων με αρχικές συνθήκες που βρίσκονται κοντά στο σαγματικό σημείο (εκτός από τις λύσεις που βρίσκονται πάνω στην ευσταθή ευθεία) θα αποκλίνουν από αυτό είτε τείνοντας στο άπειρο είτε συγκλίνοντας στο ευσταθές σημείο.

Για θετικές τιμές του  $m$  διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος:



- Για μικρές θετικές τιμές του  $m$  κοντά στο μηδέν, ένα σαγματικό πάλι σημείο ισορροπίας εμφανίζεται αυτή τη φορά στο 1ο τεταρτημόριο πάνω και δεξιά από το ευσταθές. Εδώ οι λύσεις συμπεριφέρονται όπως και στην περίπτωση με αρνητικό  $m$ .
- Καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται τα δύο σημεία ισορροπίας πλησιάζουν μεταξύ τους αφού το ευσταθές απομακρύνεται και το σαγματικό πλησιάζει προς την αρχή των αξόνων. Για  $m = 0.5625$  τα δύο σημεία ισορροπίας ενώνονται σε ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (4, 4)$  και έτσι οι λύσεις (εκτός αυτών που βρίσκονται πάνω στην ευσταθή ευθεία) κινούνται προς τα δεξιά. Οι λύσεις αριστερά του σημείου ισορροπίας συγκλίνουν σε αυτό, ενώ οι λύσεις δεξιά του σημείου ισορροπίας αποκλίνουν από αυτό τείνοντας στο άπειρο.
- Για  $m > 0.5625$  το μοναδικό μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται. Έτσι για τιμές του  $m$  μεγαλύτερες από  $0.5625$  το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας και έτσι οι λύσεις κινούνται προς τα δεξιά πηγαίνοντας στο άπειρο.

Για θετικές τιμές του  $m$  λοιπόν παρατηρούμε ότι:

- a) Για  $m < 0.5625$ : το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας (sink & saddle)
- b) Για  $m = 0.5625$ : το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας (nonhyperbolic)
- c) Για  $m > 0.5625$ : το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας

Δηλαδή, ενώ για  $m < 0.5625$  έχουμε δύο σημεία ισορροπίας, έναν ευσταθή δεσμό και ένα σάγμα, ξαφνικά για  $m > 0.5625$  δεν έχουμε κανένα σημείο ισορροπίας. Η απότομη αυτή ποιοτική αλλαγή που παρατηρείται στις τροχιές του συστήματος ως αποτέλεσμα μεταβολής της παραμέτρου  $m$ , αντιστοιχεί σε μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού (saddle – node bifurcation), (Devaney, 2004), που συμβαίνει καθώς η παράμετρος  $m$  διέρχεται από την τιμή  $0.5625$ .

Συνεπώς, με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1^2$  στο αρχικό σύστημα με δύο υποκατάστατα αγαθά, οι τιμές των δύο αγαθών δεν θα φτάνουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας. Για  $m < 0.5625$  αν οι αρχικές τιμές των δύο αγαθών βρίσκονται κοντά στο ευσταθές σημείο ισορροπίας του αρχικού συστήματος τότε θα συγκλίνουν σε αυτό. Αν όμως βρίσκονται κοντά στο σαγματικό σημείο, τότε θα αποκλίνουν από αυτό (εκτός από τη σπάνια περίπτωση που συγκλίνουν σε αυτό) είτε συγκλίνοντας στο ευσταθές σημείο είτε τείνοντας στο άπειρο. Στην περίπτωση όμως που  $m > 0.5625$  οι τιμές των δύο αγαθών θα τείνουν πάντα στο άπειρο καθώς στο σύστημα δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας.



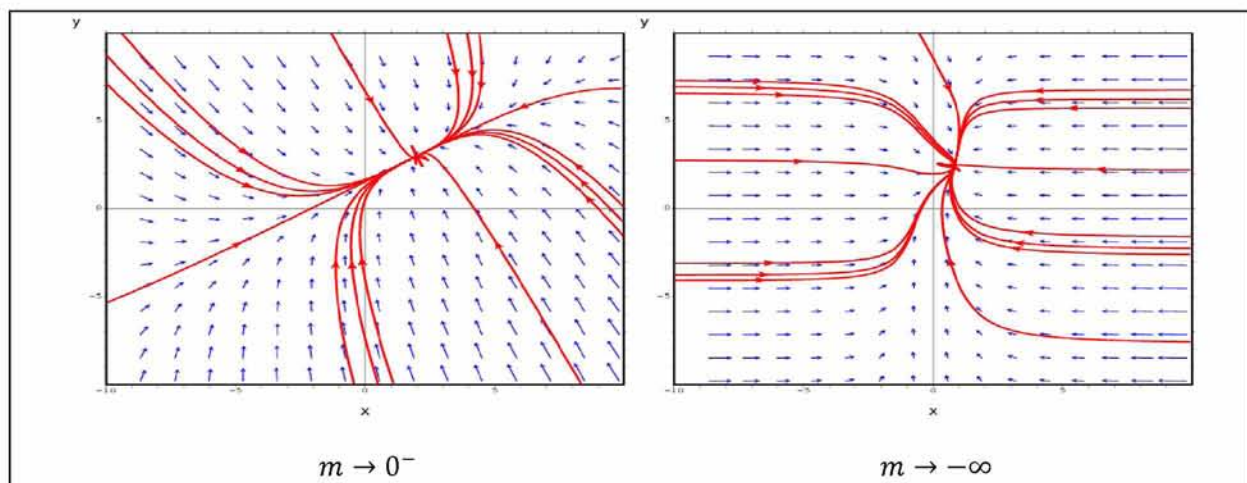
Τέλος, επειδή οι τιμές είναι θετικές ποσότητες η μόνη περίπτωση που έχει νόημα για αυτήν τη μορφή μη γραμμικότητας είναι όταν  $m > 0$ . Συνεπώς, για θετικές τιμές ισορροπίας όταν η υπερβάλλουσα ζήτηση του αγαθού 1 είναι μη γραμμική ως προς την τιμή του με τη μορφή  $mp_1^2$  τότε η συμπεριφορά των λύσεων είναι τελείως διαφορετική από την περίπτωση του γραμμικού συστήματος και οι τιμές των δύο αγαθών μπορεί είτε να συγκλίνουν σε τιμές ισορροπίας, είτε να αποκλίνουν, ή ακόμα μπορεί και να μην έχουμε καθόλου σημεία ισορροπίας στο σύστημα.

### 2.6.1.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Θα είχε όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο σημείο αυτό να δούμε τι συμβαίνει και στην περίπτωση όπου η δύναμη του μη γραμμικού όρου είναι μεγαλύτερη. Η πιο απλή μορφή μη γραμμικότητας για την περίπτωση αυτή είναι η προσθήκη του όρου  $mp_1^3$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του αγαθού 1. Έτσι όπως και πριν, θα αναλύσουμε ποιοτικά το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα για διάφορες τιμές του  $m$ :

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_1^3 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

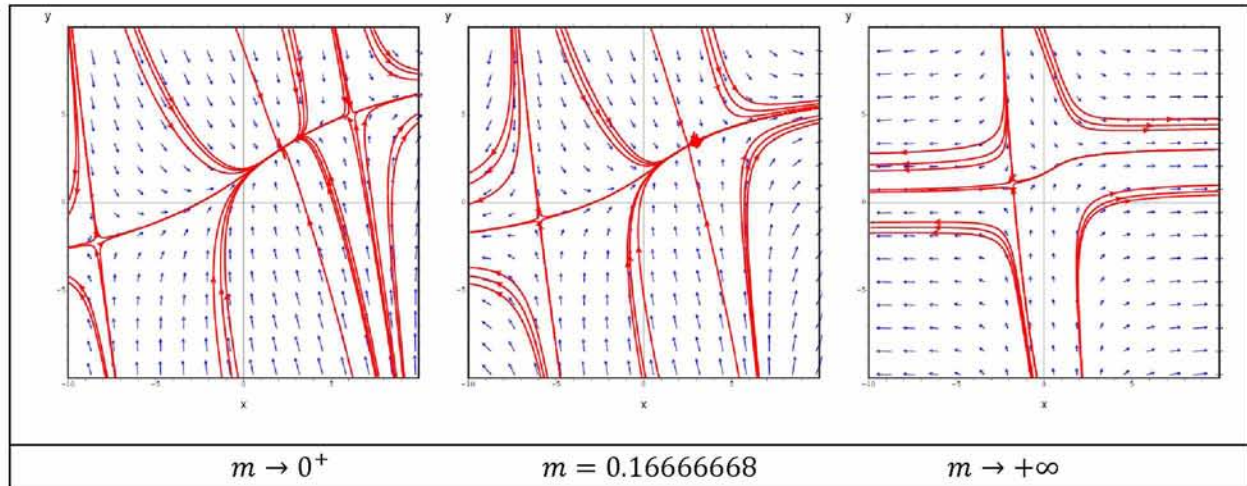
Για  $m < 0$  η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:



Δηλαδή για αρνητικές τιμές του  $m$  έχουμε πάντα μόνο ένα σημείο ισορροπίας, τον ευσταθή δεσμό του αρχικού γραμμικού συστήματος, και όλες οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτό. Καθώς το

$m \rightarrow -\infty$  το ευσταθές σημείο παραμένει στο 1ο τεταρτημόριο και οι τιμές ισορροπίας των δύο αγαθών μειώνονται με ( $p_1^* \rightarrow 0^+$ ,  $p_2^* \rightarrow 2$ ).

Για  $m > 0$  όμως η συμπεριφορά των λύσεων εμφανίζεται αρκετά διαφορετική:



- Για πολύ μικρές θετικές τιμές του  $m$ , εκτός από το αρχικό ευσταθές σημείο ισορροπίας (2,3) του γραμμικού συστήματος εμφανίζονται ταυτόχρονα και δύο νέα σαγματικά σημεία ισορροπίας, το ένα στο πρώτο τεταρτημόριο πάνω και δεξιά από τον ευσταθή δεσμό και το άλλο στο τρίτο τεταρτημόριο. Καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται, οι τιμές  $p_1^*, p_2^*$  των σαγματικών σημείων μειώνονται ενώ του ευσταθή δεσμού αυξάνονται. Έτσι τα δύο σημεία ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο πλησιάζουν μεταξύ τους.
- Για  $m = 0.16666668$  ο ευσταθής δεσμός και το σάγμα στο 1ο τεταρτημόριο ενώνονται μεταξύ τους σε ένα νέο μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (3, 3.5)$  ενώ το άλλο σημείο ισορροπίας στο 3ο τεταρτημόριο εξακολουθεί να είναι σάγμα.
- Μόλις το  $m$  ξεπεράσει την τιμή 0.16666668 το μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο εξαφανίζεται και πλέον στο σύστημα υπάρχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας, το σάγμα στο 3ο τεταρτημόριο, το οποίο καθώς το  $m \rightarrow +\infty$  περνάει κάποια στιγμή στο 4ο τεταρτημόριο και παραμένει σάγμα με  $p_1^* \rightarrow 0^-$  και  $p_2^* \rightarrow 2$ .

Συνεπώς παρατηρούμε ότι, για  $m > 0$  σε αντίθεση με την προηγούμενη μορφή μη γραμμικότητας όλες οι λύσεις συγκλίνουν στον ευσταθή δεσμό που είχαμε και στο γραμμικό σύστημα. Για  $m < 0$  όταν η παράμετρος  $m$  διέρχεται από την τιμή 0.16666668 τότε όπως και πριν κάνει την εμφάνισή της μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του  $m$  σε αντίθεση με πριν το σύστημα εξακολουθεί να έχει ένα σαγματικό σημείο



ισορροπίας και έτσι όλες οι άλλες λύσεις, εκτός από αυτές με αρχικές συνθήκες πάνω στην ευσταθή ευθεία, αποκλίνουν από το σαγματικό σημείο ισορροπίας τείνοντας στο άπειρο.

Βέβαια, όπως και πριν αν και για  $m > 0$  η συμπεριφορά των λύσεων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, η μόνη περίπτωση στην οποία το σύστημα έχει θετικά σημεία ισορροπίας είναι για  $m < 0$ . Συνεπώς, για θετικές τιμές ισορροπίας όταν η υπερβάλλουσα ζήτηση του αγαθού 1 είναι μη γραμμική ως προς την τιμή του με τη μορφή  $mp_1^3$  τότε η συμπεριφορά των λύσεων είναι ίδια όπως και στην περίπτωση του γραμμικού συστήματος και οι τιμές των δύο υποκατάστατων αγαθών συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας.

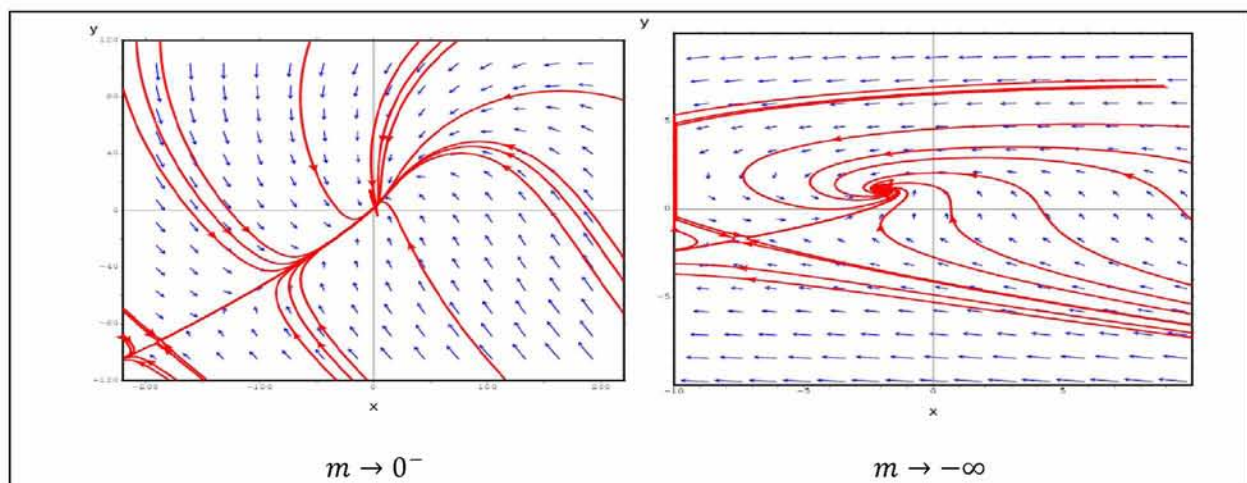
## 2.6.2 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς την Τιμή του Άλλου Αγαθού

### 2.6.2.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Μία άλλη περίπτωση μη γραμμικότητας είναι, η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για το αγαθό 1 να είναι μη γραμμική ως προς την τιμή του αγαθού 2. Θα ξεκινήσουμε πάλι την ποιοτική ανάλυση του συστήματος με την πιο απλή μη γραμμική μορφή  $mp_2^2$ . Στην περίπτωση αυτή το σύστημα του αρχικού παραδείγματος με δύο υποκατάστατα αγαθά γίνεται:

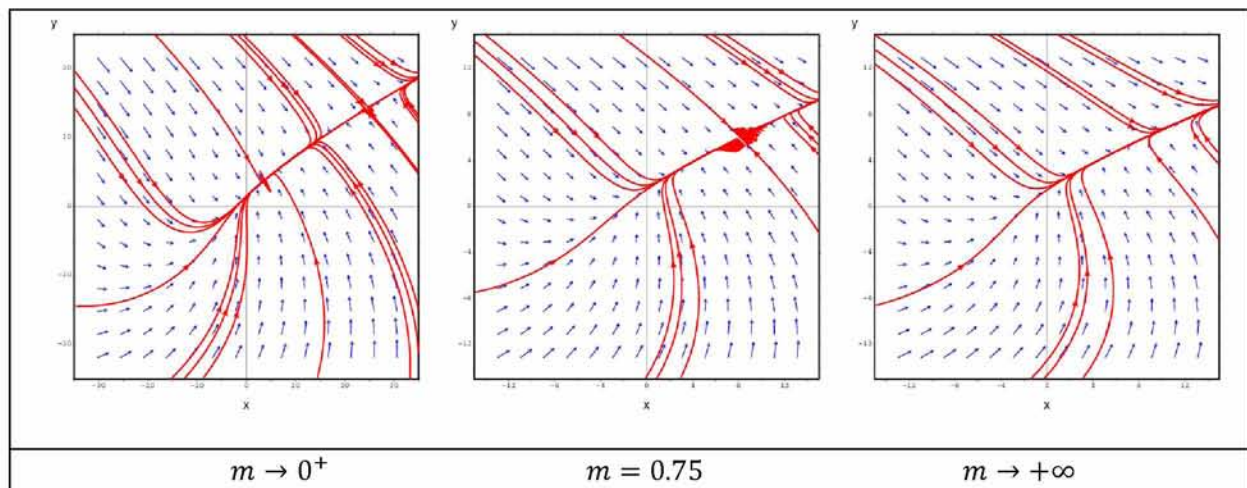
$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_2^2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

Για αρνητικές τιμές του συντελεστή  $m$  η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:



Για αρνητικές τιμές λοιπόν του  $m$  κοντά στο μηδέν παρατηρούμε ότι όπως και στις άλλες περιπτώσεις εμφανίζεται στο σύστημα και ένα δεύτερο σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 3ο τεταρτημόριο του οποίου οι τιμές  $p_1^*, p_2^*$  αυξάνονται καθώς η τιμή του  $m$  μειώνεται. Επιπλέον, καθώς η τιμή του  $m$  μειώνεται συνεχώς το αρχικό ευσταθές σημείο ισορροπίας περνάει από το 1ο στο 4ο τεταρτημόριο και από ευσταθής δεσμός μετατρέπεται σταδιακά σε ευσταθής σπείρα (spiral sink). Για  $m \rightarrow -\infty$  η ευσταθής σπείρα παραμένει στο 4ο τεταρτημόριο με  $(p_1^* \rightarrow -4, p_2^* \rightarrow 0^+)$  και το σάγμα παραμένει στο 3ο τεταρτημόριο με  $(p_1^* \rightarrow -4, p_2^* \rightarrow -1)$ .

Για θετικές τιμές του  $m$  η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος συνοψίζεται στα παρακάτω φασικά πορträίτα:



- Για θετικές τιμές του  $m$  εμφανίζεται, όπως και στην περίπτωση μη γραμμικότητας  $mr_1^2$ , και ένα δεύτερο σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο πάνω και δεξιά από το ευσταθές σημείο. Όσο η τιμή του  $m$  αυξάνεται τα δύο σημεία ισορροπίας πλησιάζουν μεταξύ τους.
- Καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $m = 0.75$  τα δύο σημεία ισορροπίας (sink & saddle) ενώνονται μεταξύ τους σε ένα νέο μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (8,6)$ .
- Για τιμές του συντελεστή του μη γραμμικού όρου μεγαλύτερες από 0.75 το μη υπερβολικό σημείο εξαφανίζεται και στο σύστημα πλέον δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας.

Οπότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μη γραμμικότητας με τη μορφή  $mr_1^2$  έτσι και εδώ, όταν το  $m$  διέρχεται από την τιμή 0.75 τότε μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού



εμφανίζεται με αποτέλεσμα να έχουμε μία απότομη μεταβολή στη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος.

Ουσιαστικά η μορφή αυτή μη γραμμικότητας  $mp_2^2$  είναι η ίδια περίπτωση με την μορφή  $mp_1^2$ . Όπως και εκεί λοιπόν, θετικά σημεία ισορροπίας έχουμε μόνο για  $m > 0$  και έτσι όταν η συνάρτηση υπερβάλουσας ζήτησης του αγαθού 1 είναι μη γραμμική ως προς την τιμή του αγαθού 2 τότε για  $m > 0$  οι λύσεις του συστήματος μπορούν να συγκλίνουν ή να αποκλίνουν από σημεία ισορροπίας ή να τείνουν απλά στο άπειρο στην περίπτωση που το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας.

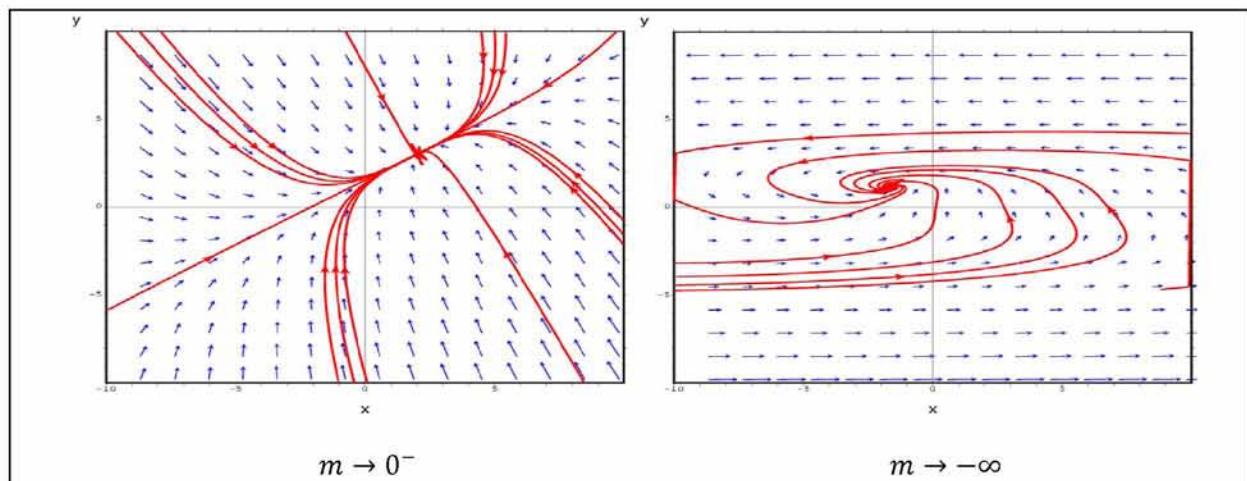
#### 2.6.2.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Αν τώρα στον μη γραμμικό όρο η τιμή του αγαθού 2 είναι υψωμένη σε μεγαλύτερη δύναμη, τότε η πιο απλή μορφή μη γραμμικότητας για την περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_2^3 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

Ελέγχουμε πάλι τις τροχιές του συστήματος για διάφορες τιμές του  $m$ .

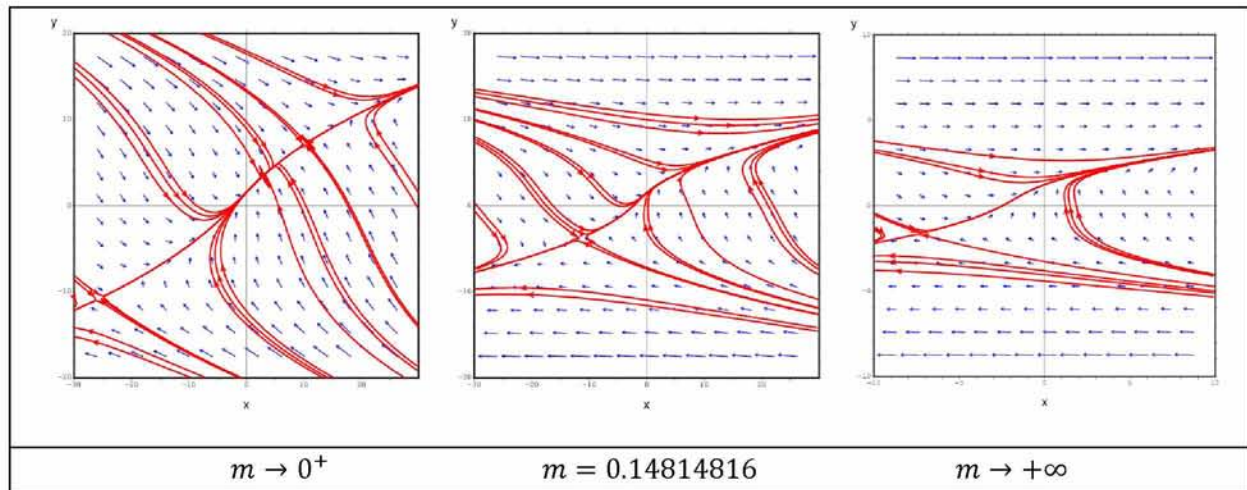
Για αρνητικές τιμές του  $m$  η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:



Όπως και στην περίπτωση μη γραμμικότητας  $mp_1^3$ , για κάθε αρνητική τιμή του συντελεστή του μη γραμμικού όρου το σύστημα έχει πάντα μόνο ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας. Για αρνητικές τιμές του  $m$  κοντά στο μηδέν το σημείο ισορροπίας έχει θετικές τιμές  $p_1^* > 0, p_2^* >$

0 και είναι ευσταθής κόμβος. Καθώς όμως η τιμή του  $m$  μειώνεται, το σημείο ισορροπίας περνάει στο 4ο τεταρτημόριο με αποτέλεσμα το  $p_1^* < 0$ . Επιπλέον, για μικρότερες τιμές του  $m$  (για  $m \cong -2$ ) το σημείο ισορροπίας μετατρέπεται σε ευσταθή σπείρα (spiral sink) και οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτό κυκλικά. Τέλος, για πολύ μικρές τιμές του  $m$ , ( $m \rightarrow -\infty$ ), το σημείο ισορροπίας παραμένει ευσταθής σπείρα με  $p_1^* \rightarrow -4$  και  $p_2^* \rightarrow 0$ .

Ενώ για θετικές τιμές του  $m$  έχουμε:



Όπως και με την περίπτωση μη γραμμικότητας  $mr_1^3$  έτσι και εδώ, για πολύ μικρές θετικές τιμές του  $m$  εμφανίζονται ταυτόχρονα δύο σαγματικά σημεία ισορροπίας ( $p_1^* > 0, p_2^* > 0$ ) και ( $p_1^* < 0, p_2^* < 0$ ) στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο αντίστοιχα. Και τα δύο σημεία μετακινούνται προς την αρχή των αξόνων καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται με αποτέλεσμα το ευσταθές και το σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο να πλησιάζουν μεταξύ τους. Όταν  $m = 0.14814816$  τότε ο ευσταθής δεσμός και το σάγμα ενώνονται σε ένα νέο μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (5, 4.5)$  και έτσι έχουμε διακλάδωση σάγματος – δεσμού. Για  $m > 0.14814816$  το θετικό μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και το σαγματικό σημείο στο 3ο τεταρτημόριο είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος. Για πολύ μεγάλες τιμές του  $m$  το σύστημα εξακολουθεί να έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας, το σάγμα στο 3ο τεταρτημόριο, για το οποίο  $p_1^* \rightarrow -4$  και  $p_2^* \rightarrow 0^-$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όπως και στην περίπτωση  $mr_1^3$  έτσι και για  $mr_2^3$ , οι λύσεις συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο. Η διαφορά εδώ είναι ότι, θετικό σημείο ισορροπίας έχουμε μόνο για  $-2 < m < 0$ . Συνεπώς, η προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mr_2^3$  στο γραμμικό σύστημα για δύο υποκατάστατα αγαθά, για εκείνες τις τιμές του  $m$  που δίνουν θετικό σημείο ισορροπίας, δεν επιφέρει καμία ποιοτική αλλαγή στις τροχιές του συστήματος με αποτέλεσμα οι τιμές των δύο αγαθών να συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας.



### 2.6.3 Η Υπερβάλλουσα Ζήτηση για το Αγαθό 1 Μη Γραμμική ως προς τις Τιμές και των Δύο Αγαθών

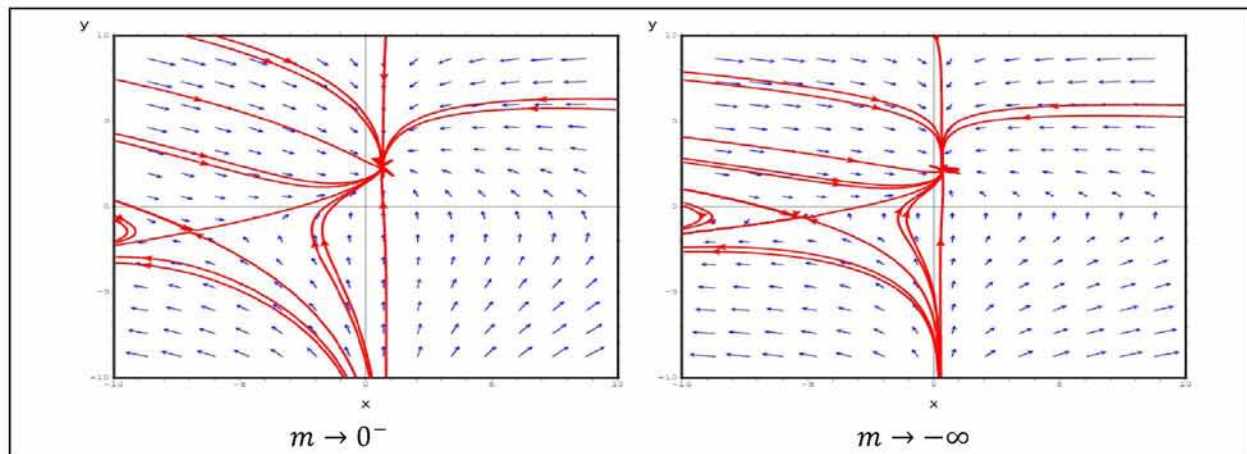
Μία άλλη περίπτωση μη γραμμικότητας είναι, η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης να είναι μη γραμμική ως προς τις τιμές και των δύο αγαθών. Θα αναλύσουμε ποιοτικά τις εξής τρεις απλές μορφές μη γραμμικότητας για την περίπτωση αυτή: a)  $mp_1p_2$ , b)  $mp_1^2p_2$  και c)  $mp_1p_2^2$ .

#### 2.6.3.1 1η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Για την πρώτη περίπτωση το σύστημα του αρχικού παραδείγματος για δύο υποκατάστατα αγαθά, με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1p_2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης για το αγαθό 1, γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_1p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

Για αρνητικές τιμές του συντελεστή του μη γραμμικού όρου οι τροχιές του μη γραμμικού συστήματος απεικονίζονται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:

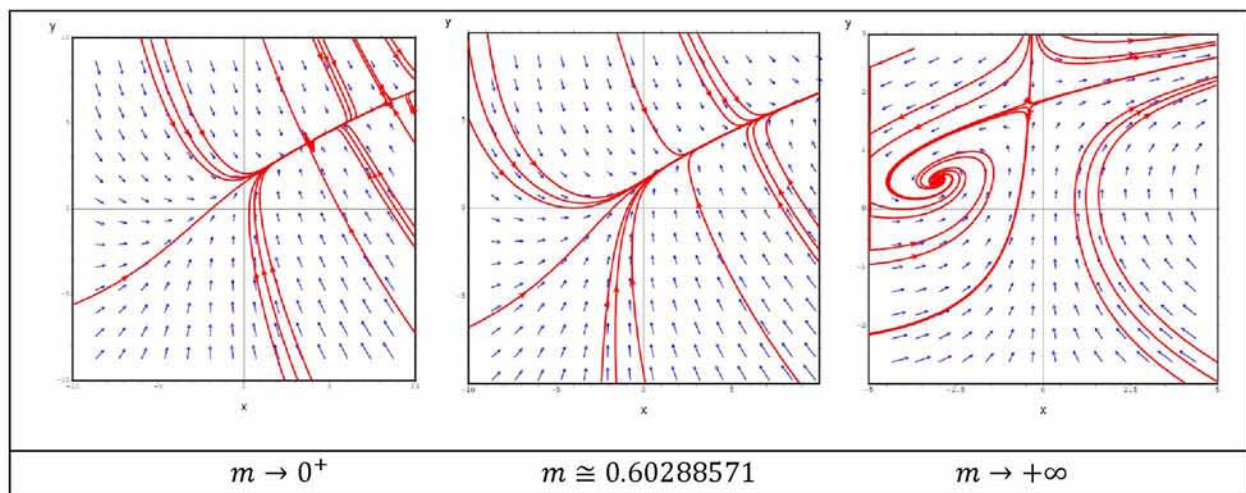


Για αρνητικές τιμές του  $m$  έχουμε πάντα, εκτός από τον αρχικό ευσταθή δεσμό του γραμμικού συστήματος, και ένα αρνητικό σαγματικό σημείο ισορροπίας. Το σάγμα εμφανίζεται αρχικά, για τιμές αρνητικές  $m$  κοντά στο μηδέν, στο 3ο τεταρτημόριο με πολύ μικρές αρνητικές τιμές  $p_1^*$  και  $p_2^*$ . Καθώς η τιμή του  $m$  μειώνεται, οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  του σάγματος και του ευσταθή δεσμού αυξάνονται και μειώνονται αντίστοιχα. Για πολύ μικρές αρνητικές τιμές του  $m$  τα δύο σημεία ισορροπίας παραμένουν στα αρχικά τους τεταρτημόρια,

με  $(p_1^* \rightarrow 0^+, p_2^* \rightarrow 2)$  για τον θετικό ευσταθή δεσμό και  $(p_1^* \rightarrow -4, p_2^* \rightarrow 0^-)$  για το αρνητικό σάγμα.

Οπότε για αρνητικές τιμές του  $m$ , οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στο ευσταθές σημείο ισορροπίας θα συγκλίνουν σε αυτό, ενώ οι λύσεις με αρχικές τιμές κοντά στο σαγματικό σημείο ισορροπίας (εκτός από αυτές που βρίσκονται κατά μήκος της ευσταθούς ευθείας) θα αποκλίνουν από αυτό είτε συγκλίνοντας στο ευσταθές σημείο είτε τείνοντας στο άπειρο.

Ενώ, για θετικές τιμές του  $m$  έχουμε:



Για μικρές θετικές τιμές του  $m$  κοντά στο μηδέν, ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας εμφανίζεται πάνω και δεξιά στο 1ο τεταρτημόριο, του οποίου οι τιμές  $p_1^*$  και  $p_2^*$  μειώνονται καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται με αποτέλεσμα να πλησιάζει στο άλλο ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος. Κάπου στην τιμή  $m \cong 0.60288570 \dots$  τα δύο σημεία ισορροπίας πλησιάζουν ασυμπτωτικά μεταξύ τους, ενώ για μεγαλύτερη τιμή του  $m$  εξαφανίζονται και το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας. Συνεχίζοντας έτσι να αυξάνουμε την τιμή του συντελεστή, κάπου στην τιμή  $m \cong 8.397114544903929278909090 \dots$  δύο νέα σημεία ισορροπίας εμφανίζονται στο 4ο τεταρτημόριο πολύ κοντά το ένα με το άλλο, ένα σάγμα (saddle):  $(p_1^*, p_2^*) = (-1.463, 1.268)$  και μία ευσταθής σπείρα (spiral saddle):  $(p_1^*, p_2^*) = (-1.464, 1.267)$ , τα οποία απομακρύνονται μεταξύ τους καθώς αυξάνουμε περισσότερο την τιμή του συντελεστή. Για πολύ μεγάλες τιμές του  $m$  τα δύο σημεία ισορροπίας εξακολουθούν να βρίσκονται στο 4ο τεταρτημόριο, με  $(p_1^* \rightarrow -4, p_2^* \rightarrow 0^+)$  για την ευσταθή σπείρα και με  $(p_1^* \rightarrow 0^-, p_2^* \rightarrow 2)$  για το σάγμα.



Έτσι για θετικές τιμές του  $m$ , για  $m < 0.60288571$  οι λύσεις θα συμπεριφέρονται όπως και για αρνητικές τιμές του  $m$ . Για  $0.60288571 < m < 8.39711455$  οι λύσεις θα τείνουν στο άπειρο καθώς το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας. Ενώ, για  $m > 8.39711454$  η συμπεριφορά των λύσεων θα είναι ίδια όπως και για  $m < 0.60288571$ , μόνο που εδώ οι λύσεις θα συγκλίνουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας με μορφή σπείρας.

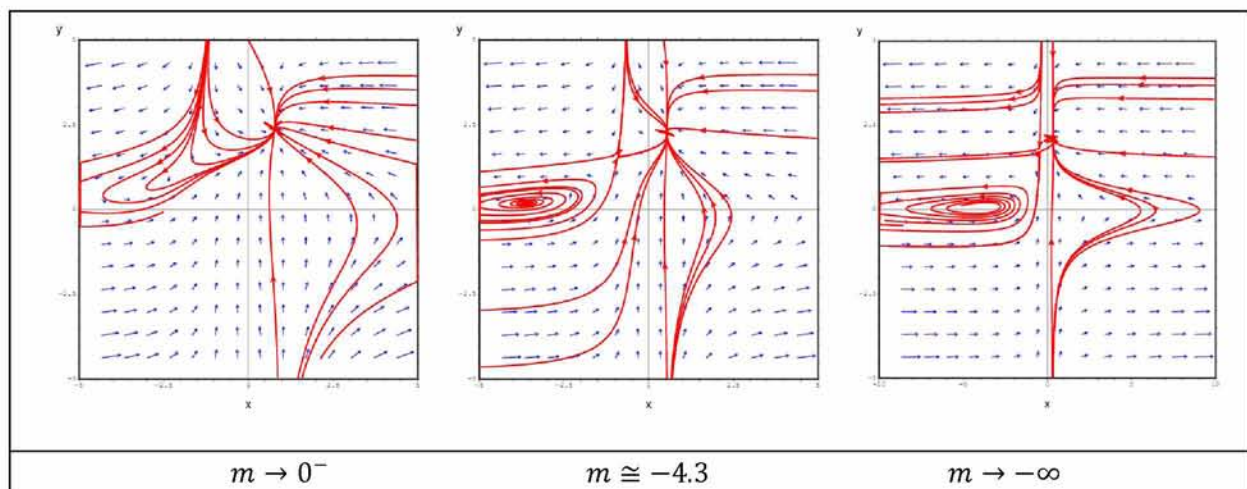
Όμως, επειδή το μη γραμμικό σύστημα έχει θετικά σημεία ισορροπίας μόνο για  $m < 0.60288571$ , η προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1p_2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του αγαθού 1 για δύο υποκατάστατα αγαθά με  $m < 0.60288571$  αλλάζει τις τροχιές του συστήματος με τον ίδιο τρόπο όπως και στις μορφές μη γραμμικότητας  $mp_1^2$  και  $mp_2^2$  που είδαμε παραπάνω.

### 2.6.3.2 2η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Για την δεύτερη περίπτωση το σύστημα με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1^2p_2$  γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_1^2p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

Για αρνητικές τιμές του  $m$  οι τροχιές του συστήματος για δύο υποκατάστατα αγαθά, με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1^2p_2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του αγαθού 1, απεικονίζονται παρακάτω:

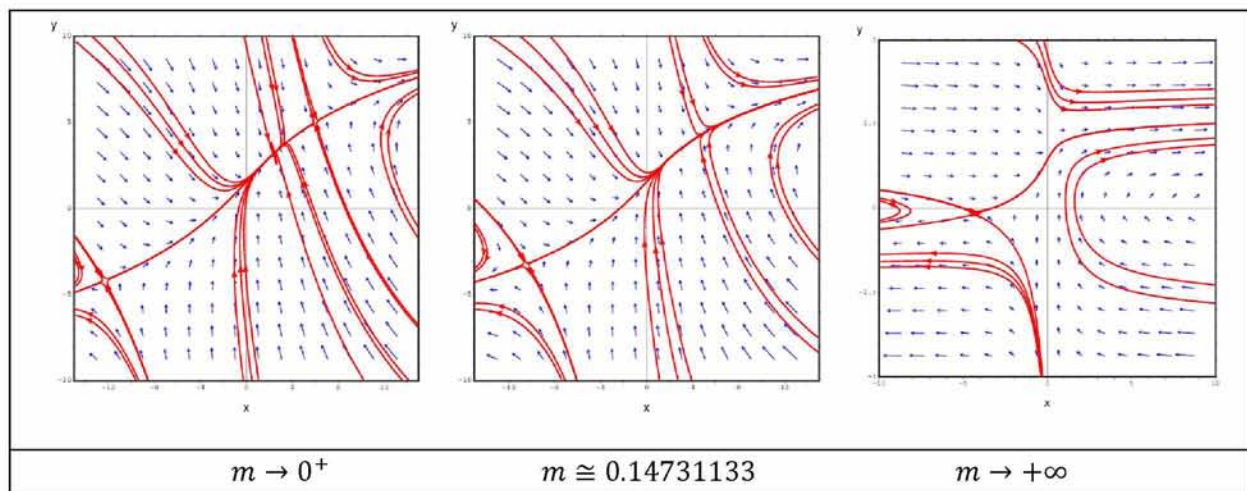


Για αρνητικό  $m$  κοντά στο μηδέν, όλες οι λύσεις συγκλίνουν στον ευσταθή δεσμό που είχαμε και στο γραμμικό σύστημα. Καθώς το  $m$  αρχίζει να μειώνεται και διέρχεται από την τιμή

$-4.3$  περίπου, δύο ακόμη σημεία ισορροπίας αρχίζουν να σχηματίζονται στο 4ο τεταρτημόριο, ένα σάγμα (saddle) στο σημείο  $(p_1^*, p_2^*) = (-2.318, 0.840)$  και μία ευσταθής σπείρα (spiral sink) στο σημείο  $(p_1^*, p_2^*) = (-2.426, 0.786)$  τα οποία καθώς η τιμή του  $m$  μειώνεται συνεχώς απομακρύνονται μεταξύ τους. Τελικά, για πολύ μικρές τιμές του  $m$  το σύστημα έχει τρία σημεία ισορροπίας, την ευσταθή σπείρα με  $(p_1^* \rightarrow -4, p_2^* \rightarrow 0^+)$ , το σάγμα με  $(p_1^* \rightarrow 0^-, p_2^* \rightarrow 1)$  και τον ευσταθή δεσμό με  $(p_1^* \rightarrow 2, p_2^* \rightarrow 0^+)$ .

Οπότε, για  $-4.3 < m < 0$  όλες οι λύσεις συγκλίνουν στον ευσταθή δεσμό του συστήματος. Για  $m \geq -4.3$  όμως, οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στα δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας συγκλίνουν σε αυτά, ενώ οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στο σαγματικό σημείο ισορροπίας (εκτός από τις λύσεις που βρίσκονται πάνω στην ευσταθή ευθεία) αποκλίνουν από αυτό συγκλίνοντας είτε στον ευσταθή δεσμό είτε στην ευσταθή σπείρα. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση για  $m < 0$  οι λύσεις του μη γραμμικού συστήματος θα συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας.

Για θετικές τιμές του  $m$  έχουμε:



Για θετικές τιμές του  $m$  κοντά στο μηδέν, εκτός από το ευσταθές σημείο ισορροπίας του γραμμικού συστήματος έχουμε και ακόμη δύο σαγματικά σημεία ισορροπίας στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο τα οποία πλησιάζουν προς το ευσταθές σημείο καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται. Όταν το  $m$  διέρχεται περίπου από την τιμή  $0.14731132733845605\dots$  ο ευσταθής δεσμός και το σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο, αφού πλησιάσουν αρκετά μεταξύ τους, εξαφανίζονται. Έτσι για μεγαλύτερες τιμές του  $m$  το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το σάγμα στο 3ο τεταρτημόριο, το οποίο για πολύ μεγάλες τιμές του  $m$  σταθεροποιείται στο σημείο  $(p_1^*, p_2^*) \approx (-4, 0^-)$ .



Οπότε, για  $0 < m < 0.14731133$  οι λύσεις που βρίσκονται κοντά στον ευσταθή δεσμό συγκλίνουν σε αυτόν, ενώ οι λύσεις που βρίσκονται κοντά στα σαγματικά σημεία (εκτός από την σπάνια περίπτωση που συγκλίνουν σε αυτά) αποκλίνουν από αυτά είτε τείνοντας στο άπειρο είτε συγκλίνοντας στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Για  $m \geq 0.14731133$  όμως, όλες οι λύσεις σχεδόν αποκλίνουν από το σαγματικό σημείο ισορροπίας τείνοντας στο άπειρο.

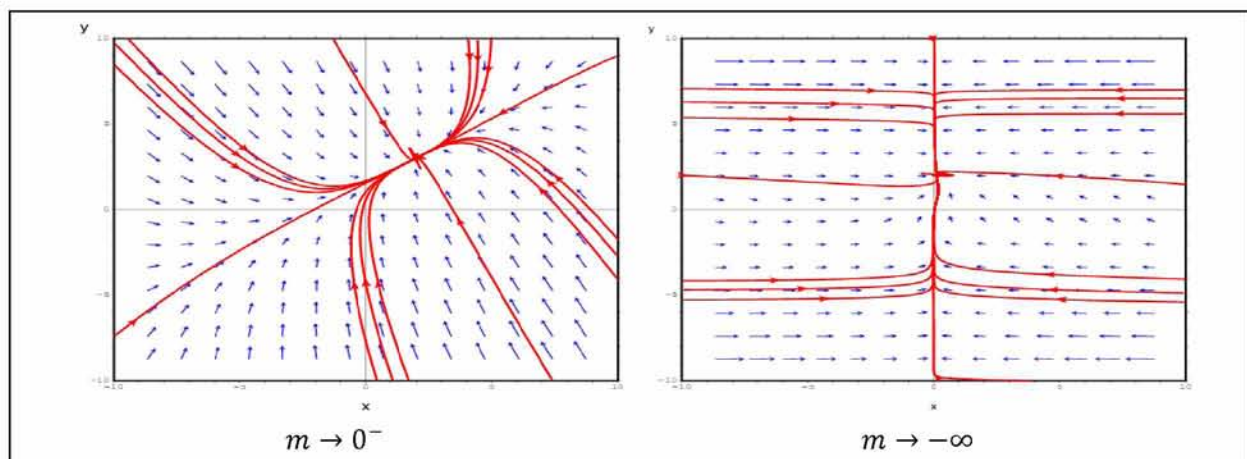
Παρατηρούμε όμως ότι για αυτή τη μορφή μη γραμμικότητας το σύστημα έχει θετικά σημεία ισορροπίας μόνο για  $-4.3 < m < 0$ . Οπότε σύμφωνα με το τελευταίο, η προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1^2p_2$  στο σύστημα με δύο υποκατάστατα αγαθά δεν επιφέρει καμία αλλαγή στις τροχιές του συστήματος και έτσι οι τιμές των δύο αγαθών θα συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας.

### 2.6.3.3 3η Περίπτωση μη γραμμικότητας

Τέλος, η τελευταία μορφή μη γραμμικότητας του συστήματος με δύο υποκατάστατα αγαθά για αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2mp_1p_2^2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \end{cases}, \quad \text{όπου } m \leq 0$$

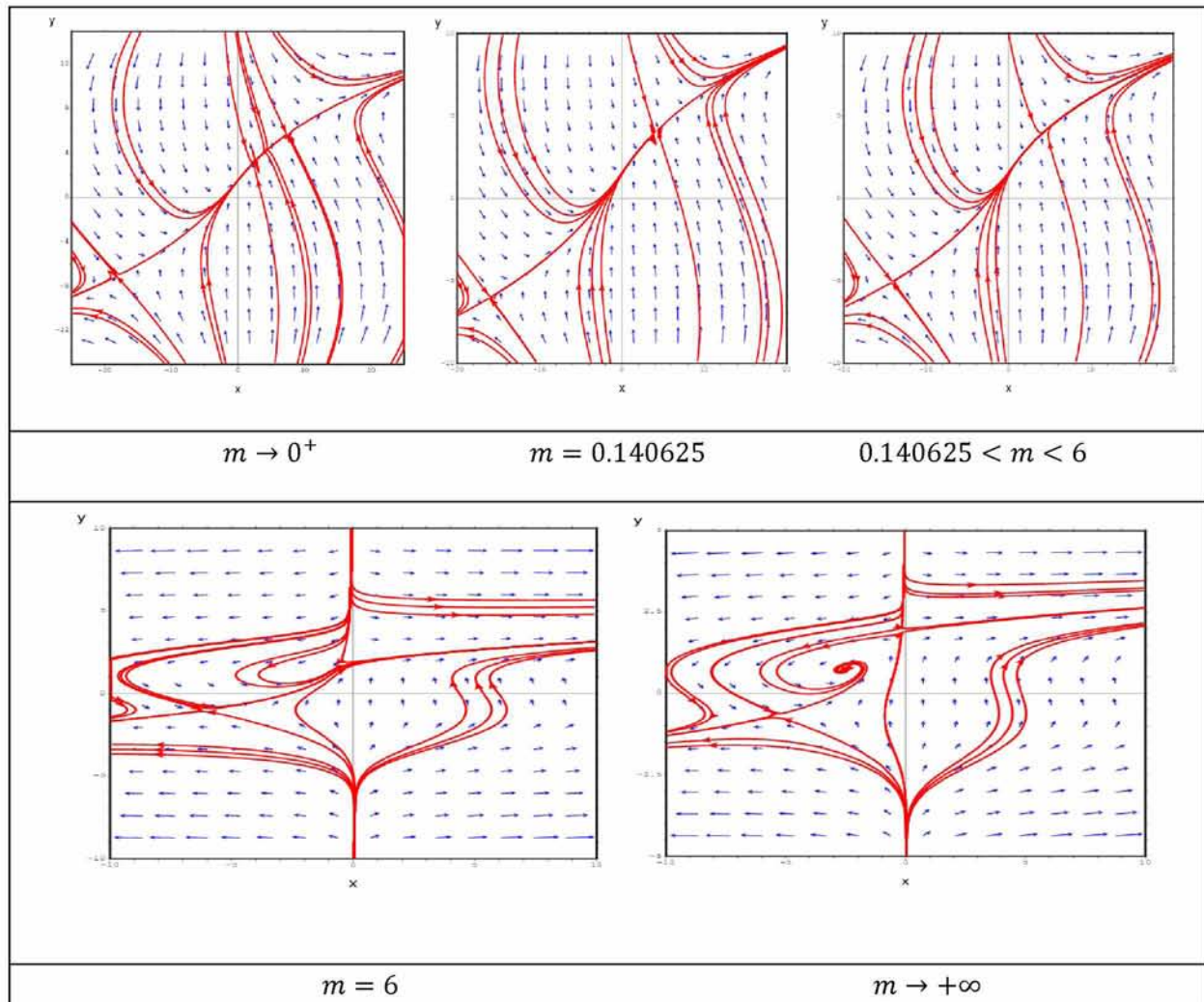
Για αρνητικές τιμές του  $m$ , όπως και στις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε:



Για αρνητικές τιμές του  $m$  το μη γραμμικό σύστημα εξακολουθεί να έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας τον ευσταθή δεσμό που είχε και πριν την προσθήκη του μη γραμμικού όρου. Έτσι η προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mp_1p_2^2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του

αγαθού 1 δεν αλλάζει ποιοτικά τις τροχιές του συστήματος με αποτέλεσμα όλες οι λύσεις να συγκλίνουν πάντα στο ευσταθές σημείο ισορροπίας που είχαμε και στο γραμμικό σύστημα.

Για θετικές τιμές του  $m$  οι τροχιές του μη γραμμικού συστήματος απεικονίζονται παρακάτω:



Για πολύ μικρές θετικές τιμές του  $m$ , εκτός από τον ευσταθή δεσμό που είχαμε και στο γραμμικό σύστημα, εμφανίζονται επιπλέον και δύο σαγματικά σημεία ισορροπίας στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο τα οποία πλησιάζουν μεταξύ τους καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ο ευσταθής δεσμός και το σαγματικό σημείο ισορροπίας στο 1ο τεταρτημόριο να πλησιάζουν συνεχώς, μέχρι την τιμή  $m = 0.140625$  όπου ενώνονται σε ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (4, 4)$ . Μόλις το  $m$  ξεπεράσει την τιμή αυτή τότε το μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας το σάγμα στο 3ο τεταρτημόριο. Έτσι για  $m = 0.140625$  μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού (saddle – node bifurcation) πραγματοποιείται στο σύστημα. Όλα αυτά όμως ισχύουν για  $0 < m < 6$ , καθώς για  $m = 6$  ένα νέο μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας,

$(p_1^*, p_2^*) = (-1, 1.5)$ , εμφανίζεται στο 4ο τεταρτημόριο, το οποίο μόλις το  $m$  ξεπεράσει την τιμή 6 χωρίζεται σε δύο νέα σημεία ισορροπίας, ένα σάγμα (saddle) και μία ευσταθή σπείρα (spiral sink). Έτσι για  $m = 6$  πραγματοποιείται ακόμη μία διακλάδωση, αφού η παραμικρή μεταβολή στην τιμή του  $m$  όταν  $m = 6$  έχει ως αποτέλεσμα μία ριζική μεταβολή στη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος. Για  $m > 6$  καθώς η τιμή του  $m$  αυξάνεται, τα δύο νέα σημεία ισορροπίας απομακρύνονται μεταξύ τους. Έτσι, για πολύ μεγάλες τιμές του  $m$  το σύστημα έχει τρία σημεία ισορροπίας τα οποία σταθεροποιούνται στις τιμές:  $(p_1^*, p_2^*) = (-4, 0^-)$  για το σάγμα στο 3ο τεταρτημόριο,  $(p_1^*, p_2^*) = (0^-, 2)$  για το σάγμα στο 4ο τεταρτημόριο και  $(p_1^*, p_2^*) = (-4, 0^+)$  για την ευσταθή σπείρα.

Συνεπώς για θετικές τιμές του  $m$ , τόσο για  $0 < m < 6$  όσο και για  $m > 6$ , οι λύσεις του συστήματος συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση μη γραμμικότητας  $mr_1^2 p_2$  για  $m > 0$ , μόνο που για  $m > 6$  οι λύσεις από τα σαγματικά σημεία ισορροπίας συγκλίνουν στο ευσταθές σημείο με μορφή σπείρας.

Παρατηρούμε όμως ότι για αυτή τη μορφή μη γραμμικότητας το σύστημα έχει θετικό σημείο ισορροπίας μόνο για  $m < 0$ . Οπότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $mr_1 p_2^2$  για  $m < 0$  στο γραμμικό σύστημα δεν αλλάζει τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος. Οπότε, όπως και στο γραμμικό σύστημα, οι τιμές των δύο αγαθών θα συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας.

Συνεπώς, από τις μη γραμμικές μορφές του συστήματος με δύο υποκατάστατα αγαθά που αναλύθηκαν παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- 1) Η προσθήκη των μη γραμμικών όρων  $mr_1^3, mr_2^3, mr_1^2 p_2$  και  $mr_1 p_2^2$  στη συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης του αγαθού 1, για εκείνες τις τιμές του  $m$  σε κάθε περίπτωση που δίνουν μόνο θετικά σημεία ισορροπίας, δεν αλλάζει τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος και έτσι οι τιμές των δύο υποκατάστατων αγαθών όπως και στο γραμμικό σύστημα συγκλίνουν πάντα σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας. Φυσικά, ο τρόπος με τον οποίο οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας σε κάθε περίπτωση μπορεί να μην είναι ακριβώς ο ίδιος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση  $mr_1^2 p_2$  για  $-4.3 < m < 0$  καθώς μειώνουμε την τιμή του  $m$  ο τρόπος με τον οποίο οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας διαφέρει από αυτόν του γραμμικού συστήματος λόγω των δύο νέων σημείων ισορροπίας που αρχίζουν να σχηματίζονται στο 4ο τεταρτημόριο.

- 2) Αντιθέτως, οι μη γραμμικοί όροι  $mr_1^2$ ,  $mr_2^2$  και  $mr_1r_2$  αλλάζουν τη συμπεριφορά των λύσεων καθώς σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας, έναν ευσταθή δεσμό και ένα σάγμα. Επιπλέον σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, και για εκείνες τις τιμές του  $m$  που δίνουν μόνο θετικά σημεία ισορροπίας, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $m$  εμφανίζεται πάντα μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού που αλλάζει σημαντικά τις τροχιές του συστήματος με αποτέλεσμα το σύστημα να μην έχει κανένα σημείο ισορροπίας και οι λύσεις να τείνουν πάντα στο άπειρο.

Τέλος, το γενικότερο συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων είναι ότι, όταν τόσο απλές μορφές μη γραμμικότητας αλλάζουν τόσο σημαντικά τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος, εύκολα μπορούμε να αναλογιστούμε τι αποτελέσματα μπορούν να δώσουν πιο σύνθετες μορφές μη γραμμικότητας.

#### 2.6.4 Ανάλυση Ανταγωνιστικής Ισορροπίας με Τρία Αγαθά

Στην ανάλυση που προηγήθηκε είδαμε πως μεταβάλλονται τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των σημείων ισορροπίας του συστήματος με δύο αγαθά, όταν αλλάζουν οι τιμές και τα πρόσημα των συντελεστών των δύο διαφορικών εξισώσεων καθώς και για διάφορες μορφές μη γραμμικότητας. Οι αγορές όμως που αντιμετωπίζουμε στην πραγματικότητα αποτελούνται από περισσότερα από δύο αγαθά. Με στόχο λοιπόν να κάνουμε την ανάλυσή μας πιο ρεαλιστική, αλλά παράλληλα όσο το δυνατόν πιο απλή, θα μελετήσουμε την περίπτωση μιας αγοράς με τρία αγαθά.

Αντίστοιχα λοιπόν με την περίπτωση δύο αγαθών, έστω ότι αντιμετωπίζουμε μία αγορά με τρία αγαθά  $x_1, x_2, x_3$  των οποίων οι τιμές είναι  $p_1, p_2, p_3$  αντίστοιχα. Η υπερβάλλουσα ζήτηση του κάθε αγαθού δίνεται από  $E_i = E_i(p_1, p_2, p_3)$  για  $\forall i = 1, 2, 3$  και η διαφορική εξίσωση της τιμής του κάθε αγαθού από  $\frac{dp_i}{dt} = k_i E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Η δυναμική ανάλυση της ευστάθειας της ανταγωνιστικής ισορροπίας που είδαμε παραπάνω ισχύει για αγορές με δύο ή περισσότερα αγαθά, οπότε εφαρμόζεται αντίστοιχα και εδώ.

Στόχος είναι να δούμε πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας του συστήματος για δύο αγαθά, με την προσθήκη ενός τρίτου αγαθού στην αγορά. Για να το δούμε αυτό θα εισάγουμε στο σύστημα από το αρχικό παράδειγμα για δύο υποκατάστατα αγαθά και μία Τρίτη διαφορική εξίσωση για την τιμή του τρίτου αγαθού που εισάγεται στην αγορά. Ένα βασικό ερώτημα που δημιουργείται στο σημείο αυτό είναι η σχέση του τρίτου

αγαθού με τα άλλα δύο υποκατάστατα αγαθά. Για το λόγο αυτό λοιπόν θα διακρίνουμε την ανάλυση του συστήματος των τριών διαφορικών εξισώσεων στις εξής βασικές περιπτώσεις: α) όταν το αγαθό 3 δεν σχετίζεται με τα άλλα δύο αγαθά, β) όταν το αγαθό 3 σχετίζεται μόνο με το αγαθό 1, και γ) όταν το αγαθό 3 σχετίζεται και με τα δύο άλλα αγαθά. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις θα υποθέσουμε ότι το τρίτο αγαθό είναι έστω συμπληρωματικό με τα άλλα δύο.

#### 2.6.4.1 Το Αγαθό 3 Δεν Σχετίζεται με τα Άλλα Δύο Αγαθά

Στην περίπτωση λοιπόν που στην αγορά έχουμε δύο αγαθά υποκατάστατα μεταξύ τους και ένα τρίτο αγαθό ασυσχέτιστο με αυτά, τότε το σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2, & k_3 > 0 \text{ και } E_{33} < 0 \\ \frac{dp_3}{dt} = k_3(E_{30} + E_{33}p_3) \end{cases}$$

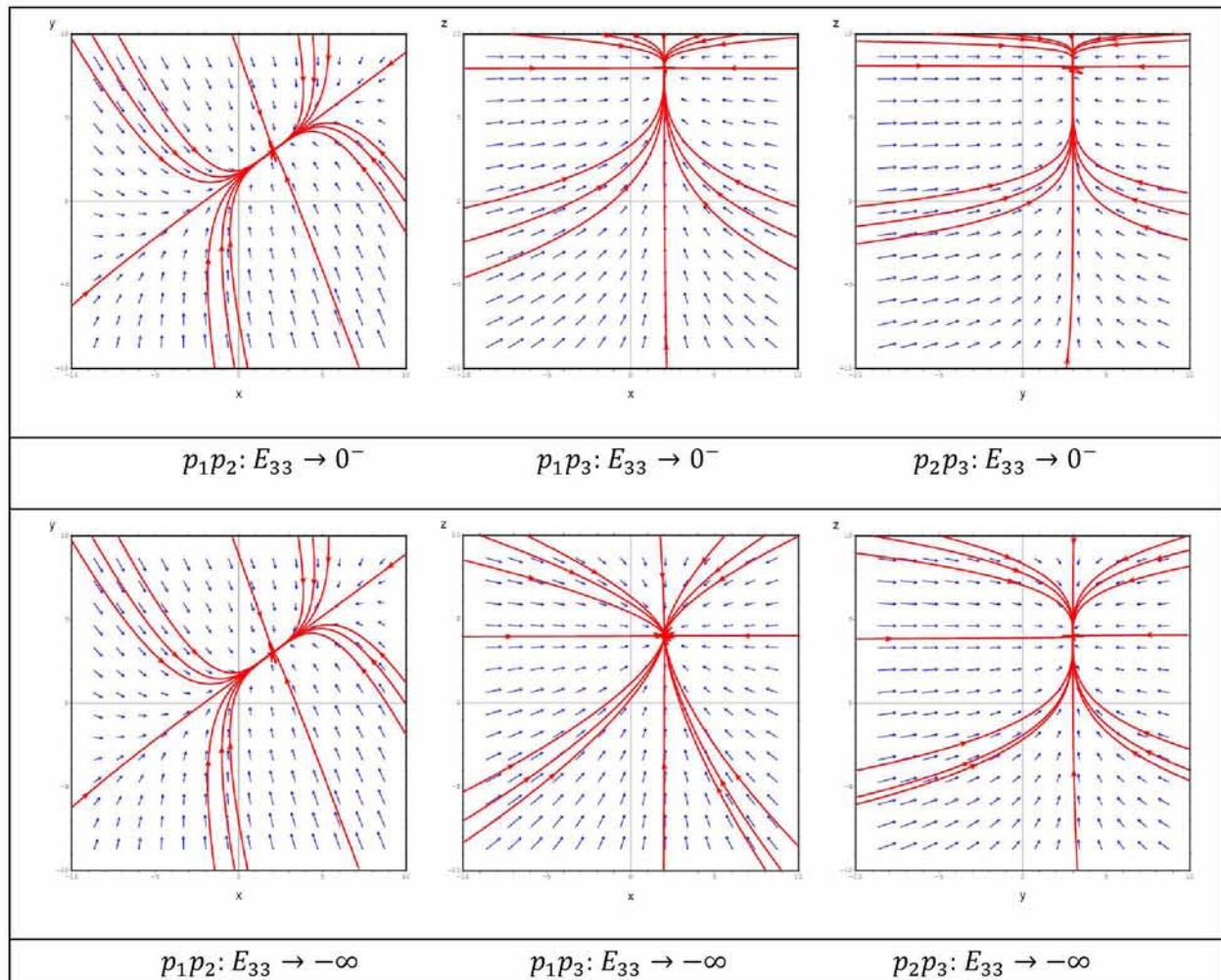
Η παράμετρος  $k_3$ , όπως οι  $k_1 = 2$  και  $k_2 = 3$ , εκφράζει την ταχύτητα με την οποία η τιμή του αγαθού 3 συγκλίνει ή αποκλίνει από την τιμή ισορροπίας  $p_3^*$ . Δηλαδή, η τιμή της δεν επηρεάζει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Οπότε, υποθέτουμε έστω ότι  $k_3 = 4$ . Το ίδιο συμβαίνει και με τον σταθερό όρο  $E_{30}$  που όμως δεν επηρεάζει τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας. Έτσι λοιπόν, υποθέτουμε επιπλέον ότι  $E_{30} = 8$ . Η τιμή όμως του συντελεστή  $E_{33}$  επηρεάζει τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας. Έτσι λοιπόν, θα προβούμε σε ποιοτική ανάλυση του παραπάνω συστήματος για διάφορες αρνητικές τιμές του  $E_{33}$ . Το παραπάνω σύστημα για  $k_3 = 4$  και  $E_{30} = 8$  γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2, & E_{33} < 0 \\ \frac{dp_3}{dt} = 32 + 4E_{33}p_3 \end{cases}$$

Για αρνητικές τιμές του  $E_{33}$  η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα. Λόγω της τρισδιάστατης φύσης του συστήματος, για κάθε περίπτωση της τιμής του  $E_{33}$ , παίρνουμε και τις τρεις προβολές του φασικού πορτραίτου



$p_1 p_2$ ,  $p_1 p_3$  και  $p_2 p_3$  για να δούμε πως οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας και από τις τρεις διαστάσεις:



Για κάθε αρνητική τιμή του  $E_{33}$  οι τιμές ισορροπίας των  $p_1$  και  $p_2$  εξακολουθούν πάντα να είναι οι  $p_1^* = 2$  και  $p_2^* = 3$  όπως και στο αρχικό σύστημα με τα δύο μόνο αγαθά. Για το λόγο αυτό, στις προβολές  $p_1 p_2$  τα φασικά πορτραίτα είναι ίδια για κάθε τιμή του  $E_{33}$  και οι λύσεις  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$  συγκλίνουν πάντα με τον ίδιο τρόπο στα σημεία ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*) = (2, 3)$ . Έτσι, οι αλλαγές στην τιμή του  $E_{33}$  επηρεάζουν μόνο το σημείο ισορροπίας του  $p_3$ . Για αρνητικές τιμές του  $E_{33}$  κοντά στο μηδέν η τιμή του σημείου ισορροπίας  $p_3^*$  είναι πολύ μεγάλη. Δηλαδή, για  $E_{33} \rightarrow 0^-$  το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι  $(p_1^* = 2, p_2^* = 3, p_3^* \rightarrow +\infty)$ . Καθώς όμως η τιμή του  $E_{33}$  μειώνεται συνεχώς η τιμή του  $p_3^*$  τείνει στο μηδέν, με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας να πλησιάζει προς την αρχή των αξόνων όπως βλέπουμε στις προβολές  $p_1 p_3$  και  $p_2 p_3$ . Δηλαδή, για  $E_{33} \rightarrow -\infty$  το σημείο ισορροπίας είναι  $(p_1^* = 2, p_2^* = 3, p_3^* \rightarrow 0^+)$ . Για κάθε αρνητική τιμή του  $E_{33}$  το σύστημα έχει πάντα τρεις αρνητικές πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές και το σημείο ισορροπίας είναι πάντα



ευσταθές (higher dimensional sink), με αποτέλεσμα οι λύσεις να συγκλίνουν πάντα στο σημείο ισορροπίας εφαιτομενικά στην ευσταθή ευθεία που αντιστοιχεί στην ασθενέστερη ιδιοτιμή.

Δηλαδή βλέπουμε ότι καθώς η τιμή του  $E_{33}$  μειώνεται το σημείο ισορροπίας πλησιάζει προς την αρχή των αξόνων κατά μήκος του άξονα της τιμής του αγαθού 3. Ενώ επιπλέον παρατηρούμε ότι η προσθήκη ενός τρίτου αγαθού, ανεξάρτητο με τα άλλα δύο, στην αγορά δεν αλλάζει τις τιμές ισορροπίας των δύο άλλων αγαθών ούτε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

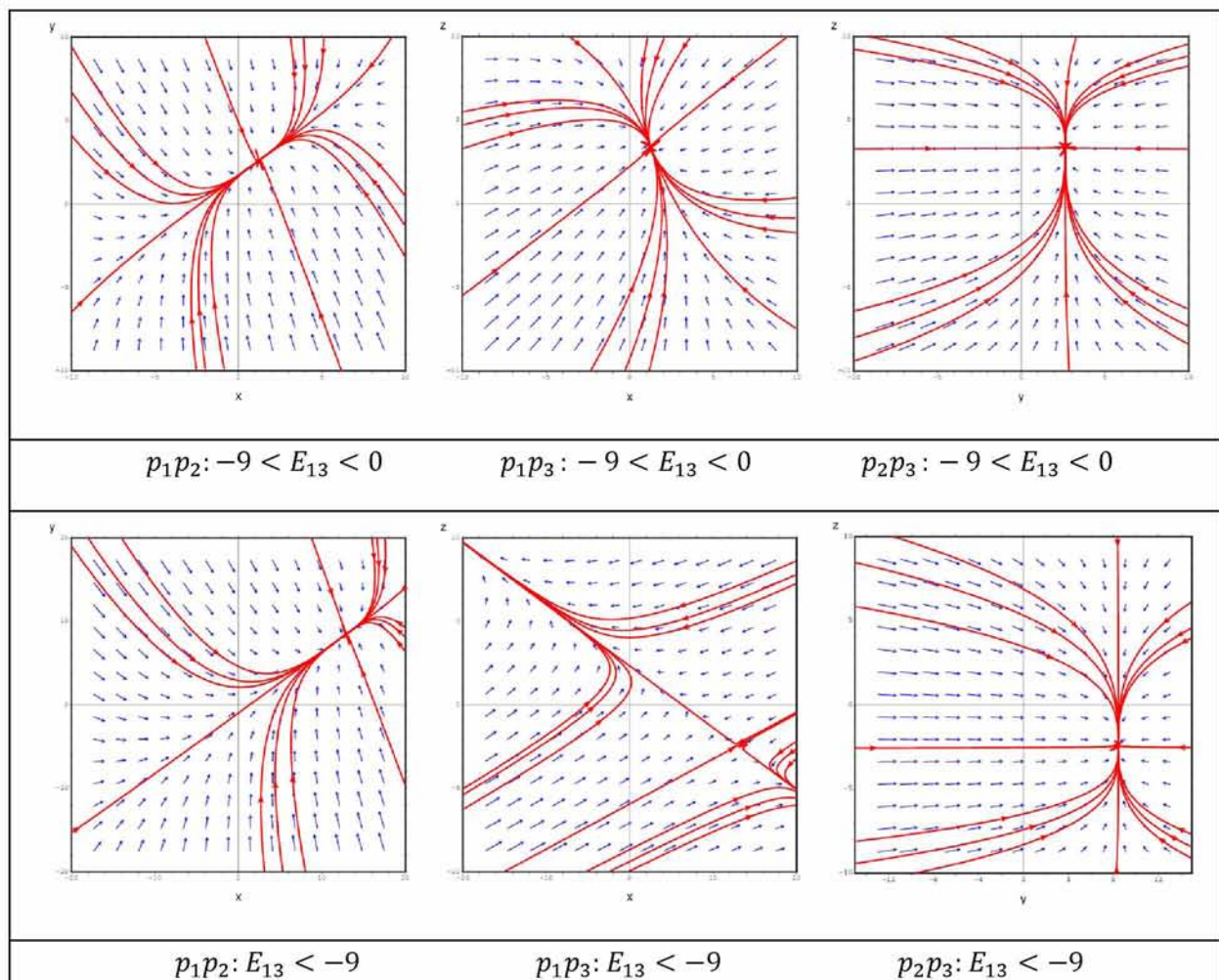
#### 2.6.4.2 Το Αγαθό 3 Σχετίζεται με το Αγαθό 1

Έστω τώρα ότι το αγαθό 3 είναι συμπληρωματικό με το αγαθό 1. Τότε εισάγονται στο σύστημα δύο νέες μεταβλητές, οι  $E_{13}$  και  $E_{31}$ . Στην περίπτωση αυτή στόχος μας είναι να δούμε πως αυτή η σχέση των δύο αγαθών επηρεάζει τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας. Δηλαδή, θα δούμε πως αλλάζει η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος για διάφορες τιμές των  $E_{13}$  και  $E_{31}$ , όπου  $E_{13} < 0$  και  $E_{31} < 0$  αφού τα αγαθά 1 και 3 είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους. Για να το δούμε αυτό θα πρέπει πρώτα να δώσουμε μία τιμή για τον συντελεστή  $E_{33}$ . Για να κάνουμε την ανάλυση όσο το δυνατόν πιο απλή, η τιμή του συντελεστή θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρή (έτσι ώστε η  $p_3^*$  να μην είναι πολύ μεγάλη). Έστω λοιπόν ότι  $E_{33} = -2$  (αποφεύγουμε την υπόθεση ο συντελεστής να είναι μονάδα διότι τότε, για να προχωρήσουμε στην επόμενη περίπτωση όπου το αγαθό 3 θα είναι συμπληρωματικό και με τα δύο αγαθά, θα πρέπει να υποθέσουμε δεκαδικές τιμές για τους συντελεστές  $E_{13}$  και  $E_{31}$  έτσι ώστε οι τιμές ισορροπίας  $p_1^*$  και  $p_2^*$  για την περίπτωση αυτή να μην είναι μακριά από τις τιμές ισορροπίας του αρχικού συστήματος με δύο αγαθά (2,3), κάτι που όμως θα έκανε την ανάλυση πιο δύσκολη). Για  $E_{33} = -2$  η προηγούμενη περίπτωση, με το τρίτο αγαθό ασυσχέτιστο με τα άλλα δύο, δίνει ευσταθές σημείο ισορροπίας  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (2,3,4)$ . Οπότε, όταν τα αγαθά 1 και 3 είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους και για  $E_{33} = -2$  το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 + 2E_{13}p_3 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 \\ \frac{dp_3}{dt} = 32 + 4E_{31}p_1 - 8p_3 \end{cases}, \quad E_{13} < 0 \text{ και } E_{31} < 0$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο συντελεστές που μπορούν να μεταβάλλουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας, η ανάλυση θα γίνει σε δύο στάδια όπου κάθε φορά θα αλλάζουμε την τιμή του ενός συντελεστή διατηρώντας την τιμή του άλλου σταθερή. Για να απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την ανάλυση, η τιμή του συντελεστή που θα διατηρούμε κάθε φορά σταθερή θα ισούται με τη μονάδα.

Έτσι, για διάφορες αρνητικές τιμές του  $E_{13}$  με την τιμή του άλλου συντελεστή σταθερή και ίση με  $E_{31} = -1$ , η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος για αυτήν την περίπτωση τριών αγαθών απεικονίζεται στα παρακάτω φασικά πορτραίτα:



Για τιμές του  $E_{13}$  κοντά στο μηδέν το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (2, 3, 3)$  το οποίο είναι ευσταθές (higher dimensional sink), όπως και στην προηγούμενη περίπτωση όπου το τρίτο αγαθό είναι ασυσχέτιστο με τα άλλα δύο. Καθώς η τιμή του  $E_{13}$  μειώνεται συνεχώς, οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  μειώνονται ενώ η τιμή του  $p_3^*$  αυξάνεται. Για  $-9 < E_{13} < -2$  είναι  $p_1^* < 0$ , ενώ για  $-9 < E_{13} < -4$  είναι πλέον και  $p_2^* < 0$ . Συνεχίζοντας να μειώνουμε την τιμή του  $E_{13}$ , καθώς πλησιάζουμε στο  $-9$ , το σημείο

ισορροπίας απομακρύνεται συνεχώς από την αρχή των αξόνων. Όταν ο συντελεστής  $E_{13}$  διέρχεται από την τιμή  $-9$  τότε το σημείο ισορροπίας απειρίζεται και το σύστημα έχει δύο αρνητικές και μία μηδενική ιδιοτιμή. Μηδενική όμως ιδιοτιμή σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό και οι λύσεις είτε συγκλίνουν σε αυτό είτε τείνουν στο άπειρο (Devaney, 2004). Τελικά, για κάποια τιμή του  $E_{13}$  πολύ κοντά στο  $-9$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας κάποια στιγμή εξαφανίζεται. Για  $E_{13} < -9$  εμφανίζεται ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας (higher dimensional saddle): ( $p_1^* > 0, p_2^* > 0, p_3^* < 0$ ) και το σύστημα έχει μία θετική και δύο αρνητικές πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές. Καθώς η τιμή του  $E_{13}$  συνεχίζει να μειώνεται, οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  μειώνονται ενώ η τιμή του  $p_3^*$  αυξάνεται. Για πολύ μικρές τιμές του  $E_{13}$  το σαγματικό σημείο ισορροπίας πλησιάζει στην αρχή των αξόνων με ( $p_1^* \rightarrow 8, p_2^* \rightarrow 6, p_3^* \rightarrow 0^-$ ).

Έτσι, για  $E_{31} = -1$ :

- a) Όταν  $-9 < E_{13} < 0$ , τότε το σύστημα έχει τρεις ευσταθείς ευθείες (stable lines) και οι λύσεις συγκλίνουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας εφαπτομενικά στην ευσταθή ευθεία (stable straight – line solution) που αντιστοιχεί στην ασθενέστερη ιδιοτιμή, όπως βλέπουμε και από τις τρεις προβολές του φασικού πορτραίτου για την περίπτωση αυτή.
- b) Όταν  $E_{13} \approx -9$ , τότε το ευσταθές σημείο ισορροπίας, που κάποια στιγμή γίνεται μη υπερβολικό, εξαφανίζεται και έτσι το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας και όλες οι λύσεις τείνουν στο άπειρο.
- c) Όταν  $E_{13} < -9$ , τότε το σύστημα έχει δύο ευσταθείς ευθείες (stable lines) και μία ασταθή (unstable line) και όλες οι λύσεις (εκτός από αυτές που βρίσκονται πάνω στις ευσταθείς ευθείες) ενώ αρχικά θα συγκλίνουν προς το σημείο ισορροπίας, στη συνέχεια θα αποκλίνουν από αυτό τείνοντας στο άπειρο εφαπτομενικά στην ασταθή ευθεία (unstable straight – line). Όπως βλέπουμε και από τις τρεις προβολές του φασικού πορτραίτου για την περίπτωση αυτή, η ασταθής ευθεία απεικονίζεται στην προβολή  $p_1 p_3$  κατά μήκος της οποίας οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας.

Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και στην περίπτωση που αλλάζουμε την τιμή του  $E_{31}$  με σταθερή την τιμή  $E_{13} = -1$ . Δηλαδή, για  $-9 < E_{31} < 0$  το σύστημα έχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο απομακρύνεται συνεχώς όλο και περισσότερο από την αρχή των αξόνων καθώς η τιμή του  $E_{31}$  μειώνεται. Όταν  $E_{31} \approx -9$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας

κάποια στιγμή γίνεται μη υπερβολικό και τελικά εξαφανίζεται. Ενώ για  $E_{31} < -9$  εμφανίζεται στο σύστημα ένα νέο σαγματικό σημείο ισορροπίας, με  $(p_1^* \rightarrow 0^-, p_2^* \rightarrow 2, p_3^* \rightarrow 9)$  για πολύ μικρές τιμές του  $E_{31}$ .

#### 2.6.4.3 Το Αγαθό 3 Σχετίζεται και με τα Δύο Αγαθά

Η τελευταία περίπτωση είναι να δούμε τι συμβαίνει όταν το αγαθό 3 είναι συμπληρωματικό και με το αγαθό 2. Αυτό συνεπάγεται την προσθήκη δύο ακόμη νέων μεταβλητών στο σύστημα της προηγούμενης περίπτωσης, των  $E_{23}$  και  $E_{32}$ . Έτσι, αυτή τη φορά στόχος μας είναι να δούμε πως οι μεταβολές στις τιμές των συντελεστών  $E_{23}$  και  $E_{32}$  αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας.

Πριν προχωρήσουμε σε αυτό, θα πρέπει πρώτα να δώσουμε κάποιες τιμές για τους συντελεστές  $E_{13}$  και  $E_{31}$ . Έστω λοιπόν ότι  $E_{13} = E_{31} = -1$ . Ο λόγος που δίνουμε αυτές τις τιμές είναι επειδή, στην προηγούμενη περίπτωση είδαμε τι συμβαίνει όταν αλλάζουμε την τιμή του  $E_{13}$  με  $E_{31} = -1$  και αντίστροφα. Έτσι, για διαφορετική τιμή του συντελεστή που κρατάμε κάθε φορά σταθερό θα έπρεπε να προβούμε πάλι σε ανάλυση για να βρούμε την τιμή του άλλου συντελεστή για την οποία το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και εμφανίζεται ένα σαγματικό. Υποθέτουμε ότι και οι δύο τιμές των συντελεστών είναι μονάδα, διότι στην περίπτωση αυτή το σημείο ισορροπίας του συστήματος της προηγούμενης περίπτωσης είναι ευσταθές και οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  είναι κοντά στις τιμές του σημείου ισορροπίας του αρχικού υποδείγματος για δύο υποκατάστατα αγαθά  $(p_1^*, p_2^*) = (2, 3)$ .

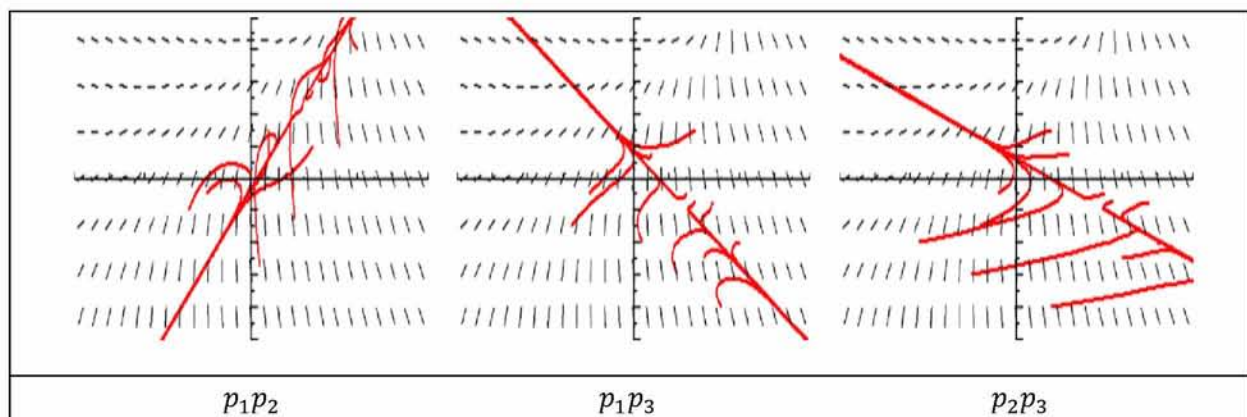
Έτσι λοιπόν για  $E_{13} = E_{31} = -1$  το σημείο ισορροπίας του συστήματος, όταν το αγαθό 3 είναι συμπληρωματικό μόνο με το αγαθό 1, είναι ευσταθές και είναι το  $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (1.25, 2.625, 3.375)$ . Τότε λοιπόν, σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση, όταν  $E_{31} = -1$  και  $E_{13} < -9$  ή όταν  $E_{13} = -1$  και  $E_{31} < -9$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας εξαφανίζεται και κάνει την εμφάνισή του ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας. Οπότε, για  $E_{13} = E_{31} = -1$  όταν το αγαθό 3 είναι συμπληρωματικό και με το αγαθό 2, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = 6 - 12p_1 + 6p_2 - 2p_3 \\ \frac{dp_2}{dt} = 48 + 12p_1 - 24p_2 + 3E_{23}p_3, & E_{23} < 0 \text{ και } E_{32} < 0 \\ \frac{dp_3}{dt} = 32 - 4p_1 + 4E_{32}p_2 - 8p_3 \end{cases}$$



Όπως και πριν, για να κάνουμε την ανάλυση όσο το δυνατόν πιο απλή, θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: α) με  $E_{23} = -1$  για διάφορες τιμές του  $E_{32}$ , και β) με  $E_{32} = -1$  για διάφορες τιμές του  $E_{23}$ .

Έτσι, για διάφορες τιμές του  $E_{32}$  με  $E_{23} = -1$  όπως και στην προηγούμενη περίπτωση παρατηρούμε τα εξής:



- Για τιμές του  $E_{32}$  πολύ κοντά στο μηδέν, το σύστημα έχει τρεις αρνητικές πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές και έτσι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (higher dimensional sink) με  $(p_1^* \rightarrow 0.9, p_2^* \rightarrow 2, p_3^* \rightarrow 3.54)$ . Καθώς η τιμή του  $E_{32}$  μειώνεται, οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  αυξάνονται ενώ η τιμή του  $p_3^*$  μειώνεται. Για  $E_{32} < -2$  το  $p_3^* < 0$ . Έτσι, καθώς μειώνουμε συνεχώς την τιμή του  $E_{32}$  το ευσταθές σημείο ισορροπίας απειρίζεται και γίνεται μη υπερβολικό, μέχρι που για  $E_{32} \approx -6.1$  εξαφανίζεται (όπως και πριν) και το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας. Για  $E_{32} < -6.1$  το σύστημα έχει πλέον μία θετική και δύο αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές και το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό (higher dimensional saddle) με  $(p_1^*, p_2^* < 0 \text{ και } p_3^* > 0)$ . Καθώς η τιμή του  $E_{32}$  συνεχίζει να μειώνεται οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  αυξάνονται ενώ η τιμή του  $p_3^*$  μειώνεται με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας να πλησιάζει συνεχώς προς την αρχή των αξόνων. Για πολύ μεγάλες τιμές του  $E_{32}$  το σημείο ισορροπίας παραμένει σαγματικό με  $(p_1^* \rightarrow -1.3, p_2^* \rightarrow 0^-, p_3^* \rightarrow 10.8)$ .

Αντίστοιχα, αλλάζοντας την τιμή του  $E_{23}$  με σταθερή την τιμή του  $E_{32} = -1$  έχουμε:

- Για τιμές του  $E_{23}$  πολύ κοντά στο μηδέν, το σημείο ισορροπίας εξακολουθεί να είναι ευσταθές όπως και στην προηγούμενη περίπτωση (όπου το αγαθό 3 είναι συμπληρωματικό μόνο με το αγαθό 1) με  $(p_1^* \rightarrow 1.6, p_2^* \rightarrow 2.8, p_3^* \rightarrow 1.8)$ . Καθώς η

τιμή του  $E_{23}$  μειώνεται, τα  $p_1^*$  και  $p_2^*$  μειώνονται συνεχώς ενώ η τιμή του  $p_3^*$  αυξάνεται. Για  $E_{23} < -3$  τα  $p_1^*, p_2^* < 0$ . Το ευσταθές σημείο ισορροπίας έτσι απομακρύνεται συνεχώς από την αρχή των αξόνων, γίνεται μη υπερβολικό, και τελικά για  $E_{23} \approx -6.666667$  εξαφανίζεται και το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας. Για  $E_{23} < -6.666667$  ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας εμφανίζεται στο σύστημα μακριά από την αρχή των αξόνων με ( $p_1^*, p_2^* > 0$  και  $p_3^* < 0$ ). Καθώς η τιμή του  $E_{23}$  συνεχίζει να μειώνεται οι τιμές των  $p_1^*$  και  $p_2^*$  μειώνονται ενώ η τιμή του  $p_3^*$  αυξάνεται με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας να πλησιάζει στην αρχή των αξόνων. Για πολύ μεγάλες τιμές του  $E_{23}$  το σημείο ισορροπίας εξακολουθεί να είναι σαγματικό με ( $p_1^* \rightarrow 3, p_2^* \rightarrow 5, p_3^* \rightarrow 0^-$ ).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, όταν το τρίτο αγαθό είναι συμπληρωματικό με το ένα από τα δύο ή και με τα δύο άλλα υποκατάστατα αγαθά, τότε για τιμές των συντελεστών  $E_{13}, E_{31}, E_{23}, E_{32}$  πολύ κοντά στο μηδέν το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι πάντα ευσταθές. Καθώς όμως οι τιμές των συντελεστών μειώνονται το σημείο ισορροπίας αρχίζει να απομακρύνεται συνεχώς από την αρχή των αξόνων και γίνεται μη υπερβολικό, μέχρι εκείνο το σημείο όπου για κάποιες τιμές των  $E_{13}, E_{31}, E_{23}, E_{32}$  το μη υπερβολικό σημείο εξαφανίζεται και το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας. Από εκείνο το σημείο και έπειτα, μικρότερες τιμές των  $E_{13}, E_{31}, E_{23}, E_{32}$  δίνουν πάντα ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας το οποίο πλησιάζει στην αρχή των αξόνων καθώς οι τιμές των συντελεστών μειώνονται συνεχώς.

Παρατηρούμε όμως ότι το σαγματικό σημείο ισορροπίας, και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις του συστήματος με τρία αγαθά, είναι πάντα αρνητικό. Επειδή λοιπόν οι τιμές των αγαθών είναι θετικές ποσότητες, η προσθήκη ενός τρίτου αγαθού στο αρχικό σύστημα με δύο υποκατάστατα αγαθά, για εκείνες τις τιμές των συντελεστών που δίνουν μόνο θετικό σημείο ισορροπίας, δεν αλλάζει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Έτσι το σημείο ισορροπίας για μία αγορά με τρία αγαθά είναι πάντα ευσταθές και οι τιμές και των τριών αγαθών συγκλίνουν πάντα σε τιμές ισορροπίας όπως και στην περίπτωση του συστήματος για δύο υποκατάστατα αγαθά που δείξαμε παραπάνω. Αυτό τουλάχιστον ισχύει για την περίπτωση τριών αγαθών όπου το ένα αγαθό είναι είτε συμπληρωματικό με τα άλλα δύο, είτε συμπληρωματικό με το ένα από τα άλλα δύο, είτε ανεξάρτητο από τα άλλα δύο αγαθά.

## Κεφάλαιο 3

### 3. Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης σε Διακριτό Χρόνο

#### 3.1 Γραμμική Εξίσωση Πρώτης Τάξης

##### 3.1.1 Το Θεώρημα Ιστού Αράχνης

Στην ανάλυση που προηγήθηκε ο χρόνος ήταν μία συνεχής μεταβλητή. Στο σημείο αυτό θα δούμε τι συμβαίνει όταν ο χρόνος είναι διακριτή μεταβλητή. Το πιο απλό θεώρημα που χρησιμοποιείται συνήθως για τη δυναμική ανάλυση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο είναι το θεώρημα ιστού αράχνης (cobweb theorem). Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα αυτό, όπως παρουσιάστηκε από τον Ezekiel (1938), η ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται από την τιμή της τρέχουσας περιόδου  $p_t$ , ενώ η προσφερόμενη ποσότητα  $q_t^s$  εξαρτάται από την αναμενόμενη τιμή για τη χρονική στιγμή  $t$ . Αυτό συμβαίνει διότι, προκειμένου για παράδειγμα ένας παραγωγός να αποφασίσει την ποσότητα του προϊόντος που θα παράγει, θα πρέπει αρχικά να αποφασίσει που θα προσφέρει. Επειδή λοιπόν η απόφαση για την προσφερόμενη ποσότητα τη στιγμή  $t$  γίνεται πολύ πιο νωρίς, για το λόγο αυτό η απόφαση αυτή βασίζεται στην τιμή που ο παραγωγός αναμένει να λάβει τη χρονική στιγμή  $t$ . Έτσι, υποθέτοντας για λόγους απλότητας γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, το μοντέλο σύμφωνα με το θεώρημα ιστού αράχνης γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = a + bp_t \\ q_t^s = c + dp_t^e \end{cases}, \quad b < 0 \text{ και } d > 0 \quad (8)$$

Για να είναι όμως εφικτή η επίλυση του μοντέλου θα πρέπει να γίνει και μία επιπλέον υπόθεση για την αναμενόμενη τιμή  $p_t^e$ . Η πιο απλή υπόθεση που μπορεί να γίνει είναι ότι, ο παραγωγός αναμένει η τιμή τη χρονική περίοδο  $t$  να είναι ίση με την τιμή της προηγούμενης χρονικής περιόδου  $t - 1$ . Δηλαδή  $p_t^e = p_{t-1}$ . Στην περίπτωση αυτή λοιπόν το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο στην πιο απλή του μορφή (Gandolfo, 1997) δίνεται από:

$$\begin{cases} q_t^d = a + bp_t \\ q_t^s = c + dp_{t-1} \\ q_t^d = q_t^s \end{cases}, \quad b < 0 \text{ και } d > 0$$

Όπου  $q_t^d = q_t^s$  είναι η συνθήκη ισορροπίας σύμφωνα με την οποία, σε κάθε χρονική στιγμή η ζητούμενη ποσότητα ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα. Από τη συνθήκη ισορροπίας λοιπόν χρησιμοποιώντας της συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, προκύπτει η γραμμική μη

ομογενής εξίσωση διαφορών 1ης τάξης για το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow a + bp_t = c + dp_{t-1} \Rightarrow$$

$$p_t = \left(\frac{c-a}{b}\right) + \left(\frac{d}{b}\right)p_{t-1}$$

Η λύση μιας μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών 1ης τάξης  $y_t$ , αντίστοιχα με τις μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις που είδαμε παραπάνω, προκύπτει από το άθροισμα της γενικής λύσης του ομογενούς μέρους της εξίσωσης διαφορών  $p_h$  και της ειδικής λύσης  $\bar{p}$  (Ξεπαπαδέας, 2009). Το ομογενές μέρος είναι  $p_t - (d/b)p_{t-1} = 0$  και αφού πρόκειται για εξίσωση διαφορών 1ης τάξης η γενική λύση του ομογενούς μέρους δίνεται από  $p_h = A(d/b)^t$ . Το μη ομογενές μέρος είναι μία σταθερά  $g(t) = (c-a)/b$  και έτσι η ειδική λύση είναι  $\bar{p} = \frac{g(t)}{1-(d/b)} = (c-a)/(b-d)$ . Έτσι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης δίνεται από:

$$p_t = p_h + \bar{p} = A\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}$$

Επιπλέον, η ειδική λύση ερμηνεύεται ως το σημείο ισορροπίας (fixed point) του συστήματος. Οπότε από την εξίσωση διαφορών και για  $p_t = p_{t-1} = \dots = p^*$ , αφού για να βρίσκεται το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας θα πρέπει η τιμή να είναι σταθερή για όλες τις χρονικές περιόδους, το μοναδικό (αφού έχουμε γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης) σταθερό σημείο (fixed point) για το απλό γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης είναι:

$$p^* = \bar{p} = \frac{c-a}{b-d}, \quad b < 0$$

Όπου θα πρέπει επιπλέον να ισχύει  $a \geq c$  έτσι ώστε το σημείο ισορροπίας να έχει νόημα οικονομικά,  $p^* \geq 0$ , αφού οι τιμή ενός αγαθού είναι μη αρνητική.

Τέλος, για κάποια αρχική τιμή  $p_0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η σταθερά  $A$  προσδιορίζεται ως  $A = p_0 - p^*$  και έτσι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι:

$$p_t = \left(p_0 - \frac{c-a}{b-d}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}, \quad b < 0$$

Η δυναμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας και συνεπώς η συμπεριφορά της τιμής στο χρόνο προσδιορίζεται από τη λύση του ομογενούς μέρους της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι, η ευστάθεια του σταθερού σημείου εξαρτάται από τον όρο  $d/b$ . Υποθέτοντας ότι οι καμπύλες



προσφοράς και ζήτησης έχουν τις συνηθισμένες τους κλίσεις,  $b < 0$  και  $d > 0$ , ο όρος  $d/b$  θα είναι πάντα αρνητικός και έτσι οι λύσεις θα κινούνται γύρω από το σημείο ισορροπίας με μορφή ταλαντώσεων. Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις αναφορικά με την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας (Gandolfo, 1997):

- a) Αν  $-1 < d/b < 0$  ή  $d < |b|$ : οι λύσεις θα συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας με μορφή φθίνουσων ταλαντώσεων. Το σταθερό σημείο στην περίπτωση αυτή είναι ελκυστικό (sink or attracting fixed point).
- b) Αν  $d/b = -1$  ή  $d = |b|$ : οι λύσεις θα ακολουθούν κύκλο δύο περιόδων (two-period cycle) γύρω από το σημείο ισορροπίας με ταλαντώσεις σταθερού εύρους και το σημείο ισορροπίας στην περίπτωση αυτή θα είναι ουδέτερο (neutral or indifferent fixed point).
- c) Αν  $d/b < -1$  ή  $d > |b|$ : οι λύσεις θα αποκλίνουν από το σταθερό σημείο με μορφή αύξουσων ταλαντώσεων και το σημείο ισορροπίας τότε είναι απωθητικό (repelling fixed point).

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ευστάθεια της τιμής ισορροπίας  $p^*$ , για το απλό γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο σύμφωνα με το θεώρημα ιστού αράχνης, εξαρτάται από την κλίση των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης. Και πιο συγκεκριμένα, η τιμή ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθής όταν η κλίση της καμπύλης ζήτησης είναι μεγαλύτερη από την κλίση της καμπύλης προσφοράς (για την περίπτωση τουλάχιστον που οι δύο καμπύλες έχουν τις συνηθισμένες τους κλίσεις).

### 3.1.1.1 Εφαρμογή στο μοντέλο ιστού αράχνης

Έστω τώρα ότι δίνονται οι εξής τιμές για τις παραμέτρους του μοντέλου ιστού αράχνης  $a = 20, b = -4, c = 2$  και  $d = 2.5$  (Shone, 2002). Τότε το μοντέλο γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = 20 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + 2.5p_{t-1} \end{cases}$$

Με γραμμική μη ομογενή εξίσωση διαφορών 1ης τάξης:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow 20 - 4p_t = 2 + 2.5p_{t-1} \Rightarrow$$

$$p_t = 4.5 - 0.625p_{t-1}$$

Το σταθερό σημείο του συστήματος είναι:

$$p^* = \bar{p} = \frac{c-a}{b-d} = \frac{2-20}{-4-2.5} = \frac{36}{13} \cong 2.769$$

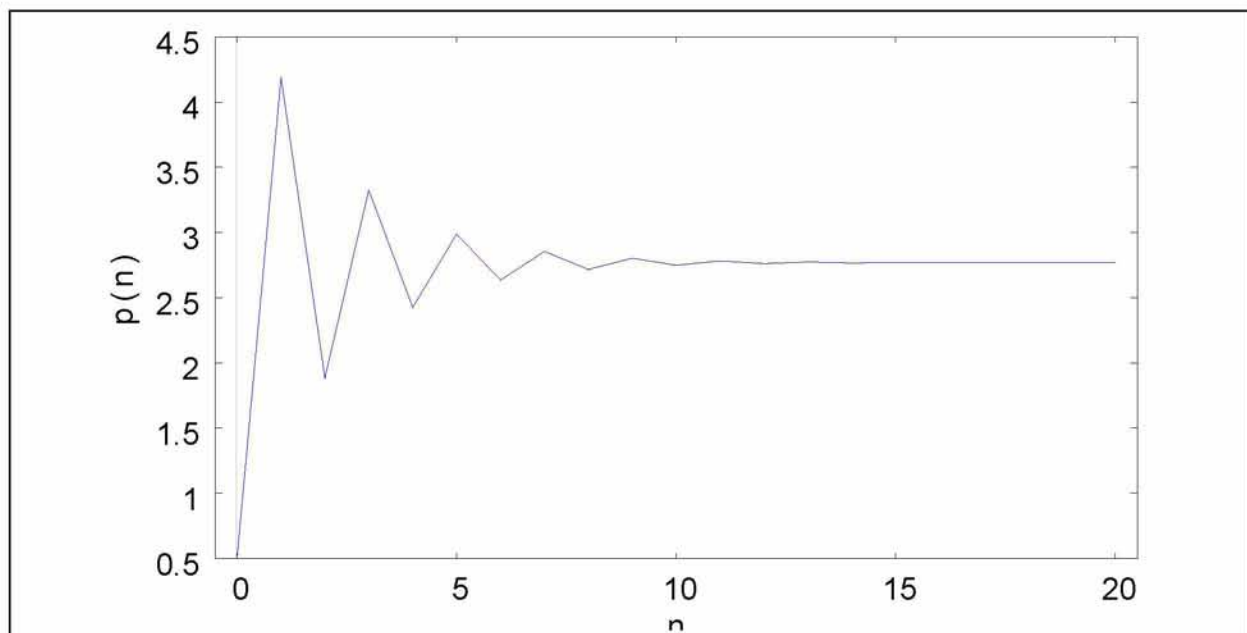
Έτσι, για αρχική τιμή έστω  $p_0 = 0.5$ , η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$p_t = (p_0 - p^*) \left(\frac{d}{b}\right)^t + p^* = \left(0.5 - \frac{36}{13}\right) \left(\frac{2.5}{-4}\right)^t + \frac{36}{13} \Rightarrow$$

$$p_t = 2.269(-0.625)^t + 2.769$$

Και από τη λύση του ομογενούς μέρους της εξίσωσης διαφοράς  $p_h = A(d/b)^t = 2.269(-0.625)^t$  παρατηρούμε ότι ο όρος  $d/b = -0.625$  βρίσκεται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας,  $-1 < d/b < 0$ . Οπότε σύμφωνα με τις τρεις περιπτώσεις που διακρίθηκαν παραπάνω αναφορικά με τη δυναμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, το σταθερό σημείο του συστήματος  $p^* \cong 2.769$  είναι ελκυστής (attracting fixed point) και η  $p_h = 2.269(-0.625)^t$  θα τείνει στο μηδέν καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

Αυτό μπορούμε να το δούμε κατασκευάζοντας και το διάγραμμα της λύσης στο χρόνο,  $p_t = f(t)$ , το οποίο απεικονίζεται παρακάτω:



Επαληθεύεται λοιπόν ότι όταν η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι μικρότερη από την κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $d = 2.5 < |b| = 4$ , τότε η τροχιά της ορισμένης λύσης για  $p_0 = 0.5$  συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας  $p^* \cong 2.769$  με μορφή φθίνουσων ταλαντώσεων καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο.

Για να δούμε όμως πώς αλλάζει η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για διαφορετικές κλίσεις της καμπύλης προσφοράς, θα αρχίσουμε να αλλάζουμε την τιμή του συντελεστή  $d$  με σταθερές τις τιμές των άλλων μεταβλητών  $a, b, c$ . Έτσι θα προβούμε σε δυναμική ανάλυση του μοντέλου:

$$\begin{cases} q_t^d = 20 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + dp_{t-1} \end{cases}, \quad \text{για } d > 0$$

Δοκιμάζοντας λοιπόν διάφορες τιμές για τον συντελεστή  $d$  παρατηρούμε ότι πράγματι, όπως είδαμε και παραπάνω στη γενική ανάλυση ευστάθειας του μοντέλου, διακρίνονται ακόμα δύο περιπτώσεις αναφορικά με την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

Η μία περίπτωση είναι για  $d > |b|$ . Έστω λοιπόν ότι  $d = 6 > |b| = 4$ . Τότε το μοντέλο γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = 20 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + 6p_{t-1} \end{cases}$$

Με εξίσωση διαφορών:

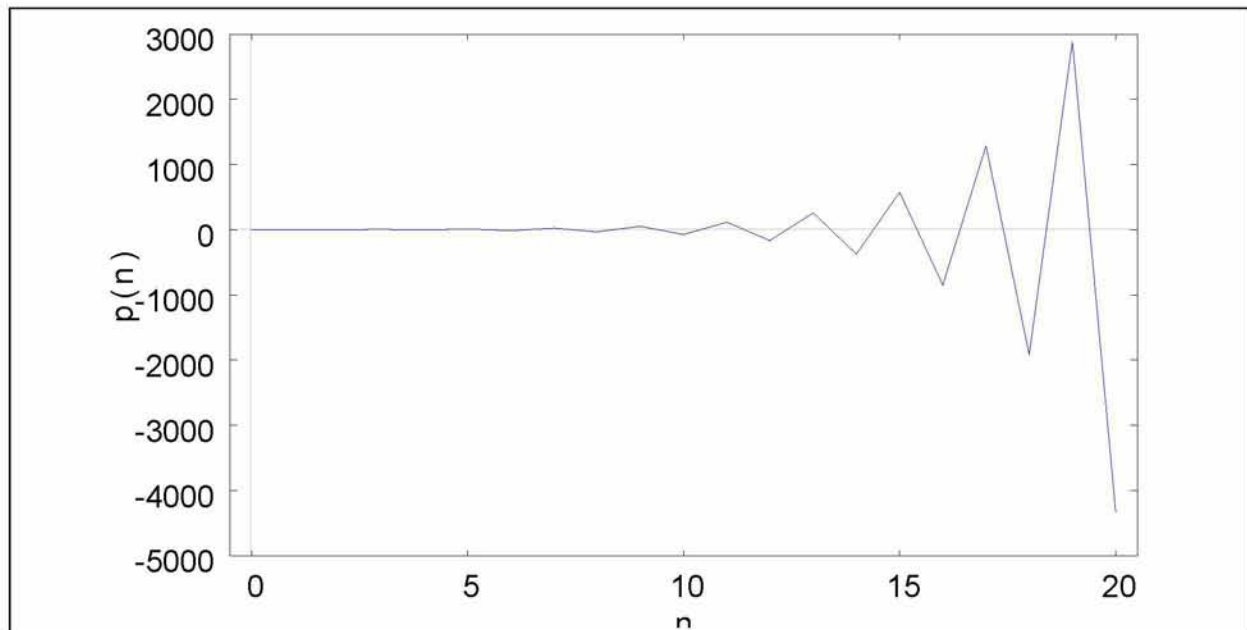
$$p_t = 4.5 - 1.5p_{t-1}$$

Και με σημείο ισορροπίας αυτή τη φορά  $p^* = 1.8$ . Το σημείο ισορροπίας αλλάζει αφού εξαρτάται και από την τιμή του  $d$ .

Η ορισμένη λύση, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και παραπάνω, για  $p_0 = 0.5$  είναι:

$$p_t = -1.3(-1.5)^t + 1.8$$

Και η τροχιά της στο χρόνο απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



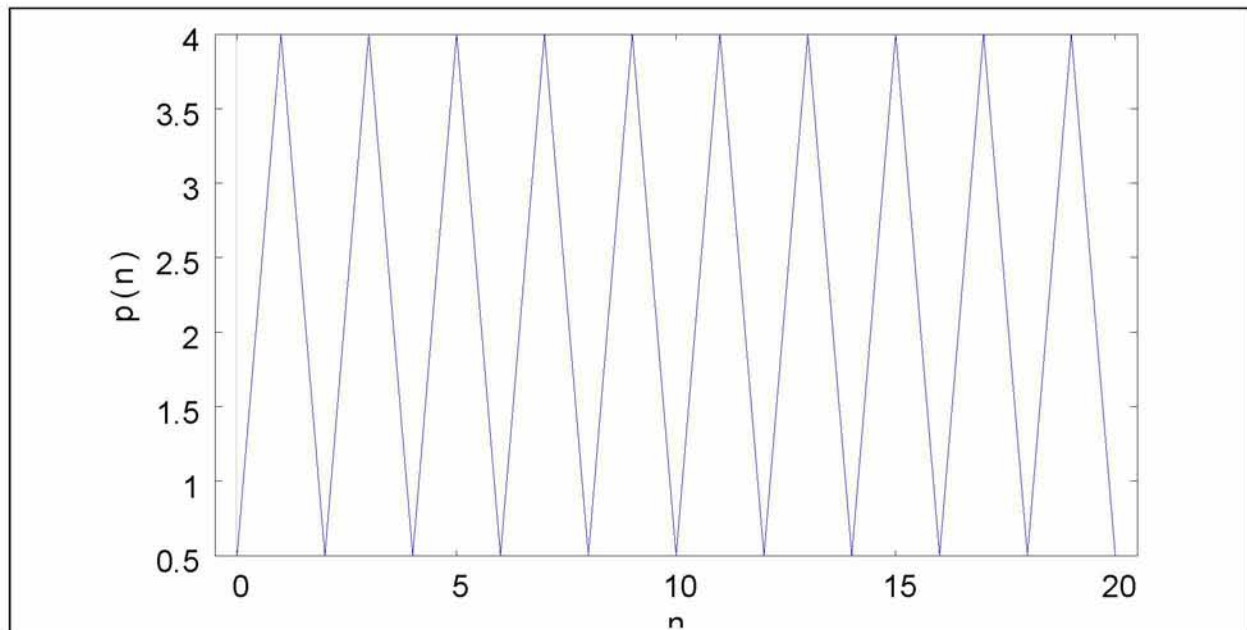
Έτσι όπως ήταν αναμενόμενο όταν η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι μεγαλύτερη από την κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $d/b = -1.5 < -1$  ή  $d = 6 > |b| = 4$ , η τροχιά της λύσης αποκλίνει από το σημείο ισορροπίας με μορφή αύξουσων ταλαντώσεων και το σημείο ισορροπίας  $p^* = 1.8$  είναι απωθητικό (repelling fixed point).

Η τελευταία περίπτωση είναι για  $d = |b|$ , όπου για  $d = |b| = 4$  το μοντέλο γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = 20 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + 4p_{t-1} \end{cases}$$

Η εξίσωση διαφορών 1ης τάξης αυτή τη φορά είναι η  $p_t = 4.5 - p_{t-1}$  και το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το  $p^* = 2.25$ .

Η ορισμένη λύση, όπως και πριν, για  $p_0 = 0.5$  είναι  $p_t = -1.75(-1)^t + 2.25$  και τροχιά της στο χρόνο απεικονίζεται παρακάτω:

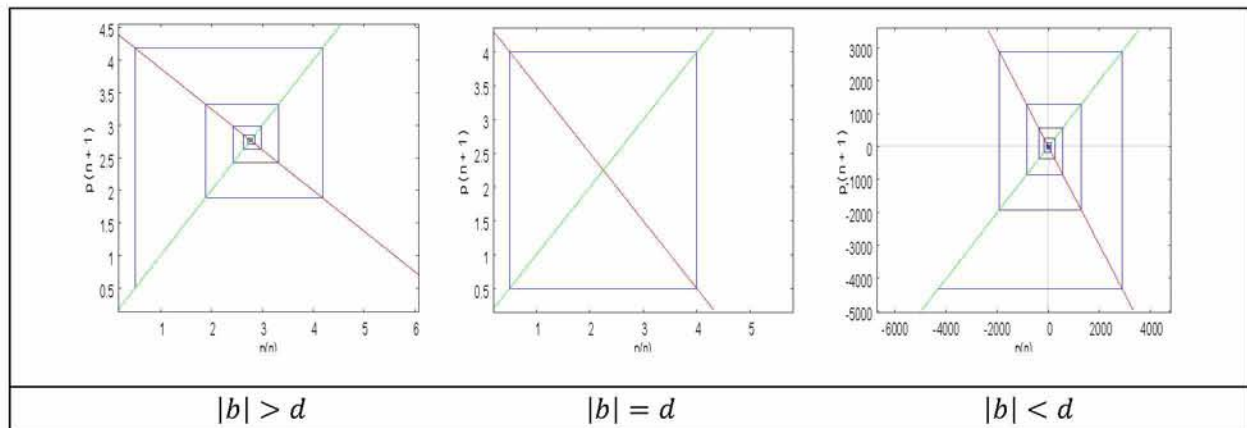


Οπότε όπως περιμέναμε όταν η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι ίδια με την κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $d/b = -1$  ή  $d = 4 = |b|$ , τότε η τροχιά της λύσης ακολουθεί κύκλο δύο περιόδων (two-period cycle)  $p_0 = 0.5$  και  $p_1 = 4$  και το σημείο ισορροπίας  $p^* = 2.25$  είναι ουδέτερο (neutral fixed point).

Σε περίπτωση τώρα που δεν γνωρίζουμε την αναλυτική λύσης της εξίσωσης, η μελέτη δυναμικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας μπορεί να γίνει μέσω ποιοτικής ανάλυσης του συστήματος κατασκευάζοντας το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης διαφοράς κάθε φορά, όπως είδαμε και στην ποιοτική ανάλυση των διαφορικών εξισώσεων. Το διάγραμμα φάσης για ένα διακριτό σύστημα προκύπτει κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της εξίσωσης διαφοράς και αναλύεται χρησιμοποιώντας τη γραμμή των  $45^\circ$ . Το σημείο τομής του διαγράμματος φάσης με τη γραμμή των  $45^\circ$  προσδιορίζει το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας σε σχέση με την κλίση της γραμμής των  $45^\circ$ , που είναι μονάδα, προσδιορίζει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. (Blanchard et al., 2006)

Έτσι για την περίπτωση του μοντέλου ιστού αράχνης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφοράς  $p_t = f(p_{t-1})$  που έχουμε κάθε φορά, η γραφική παράσταση της  $f(p_{t-1})$  αποτελεί το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση διαφοράς που έχουμε σε κάθε μία από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις. Τα διαγράμματα φάσης για τις τρεις περιπτώσεις ευστάθειας του σημείου ισορροπίας απεικονίζονται παρακάτω:





Το σημείο τομής του διαγράμματος φάσης με τη γραμμή των  $45^\circ$  προσδιορίζει σε κάθε περίπτωση το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Από τα διαγράμματα φάσης λοιπόν και με τη βοήθεια της γραμμής των  $45^\circ$  παρατηρούμε ότι:

- Για  $|b| > d$ : Ξεκινώντας από τον οριζόντιο άξονα με την αρχική τιμή  $p_0 = 0.5$ , η τιμή  $p_1$  προσδιορίζεται από την  $f(p_{t-1}) = 4.5 - 0.625p_{t-1}$  στον κατακόρυφο άξονα και μεταφέρεται με τη γραμμή των  $45^\circ$  στον οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η τιμή  $p_2$  από την  $f(p_{t-1})$  και μεταφέρεται στον οριζόντιο άξονα με τη γραμμή των  $45^\circ$ . Αυτή η διαδικασία, γραμμή  $45^\circ$  - διάγραμμα φάσης, ακολουθείται συνεχώς ανάλογα με τον αριθμό επαναλήψεων (iterations) που έχουμε ορίσει. Στην περίπτωση μας λοιπόν, χρησιμοποιώντας 20 επαναλήψεις η τροχιά της λύσης για  $p_0 = 0.5$  συγκλίνει τελικά στο σταθερό σημείο  $p^* \cong 2.769$ . Επιπλέον, η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι μικρότερη από την κλίση της γραμμής των  $45^\circ$ ,  $|f'(2.769)| = 0.625 < 1$ , και έτσι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Παρατηρούμε ότι η τροχιά συγκλίνει στο σταθερό σημείο περνώντας συνεχώς από τη μία μεριά του σημείου ισορροπίας στην άλλη σε κάθε επανάληψη. Αυτό συμβαίνει επειδή η κλίση του διαγράμματος φάσης είναι αρνητική και χάρη σε αυτό η γραφική απεικόνιση της επαναληπτικής διαδικασίας (graphical iteration) ονομάζεται διάγραμμα ιστού αράχνης (cobweb diagram). Και για το λόγο αυτό στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας με μορφή ιστού αράχνης (Devaney, 2004).
- Για  $|b| = d$ : Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για  $T = 20$  επαναλήψεις η λύση όπως είδαμε ακολουθεί κύκλο δύο περιόδων γύρω από το σταθερό σημείο  $p^* = 2.25$  με ταλαντώσεις σταθερού εύρους. Η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι ίδια με την κλίση της γραμμής των  $45^\circ$ ,  $|f'(2.25)| = 1$ , και το

σημείο ισορροπίας δεν είναι ούτε ελκυστικό ούτε απωθητικό. Έτσι στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σταθερό σημείο είναι ουδέτερο.

- Για  $|b| < d$ : Τέλος, στην περίπτωση όπου η κλίση του διαγράμματος φάσης είναι μεγαλύτερη από την κλίση της γραμμής των  $45^\circ$ ,  $|f'(1.8)| = 1.5 > 1$ , η τροχιά της λύσης αποκλίνει από το σταθερό σημείο  $p^* = 1.8$  με μορφή ιστού αράχνης και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν οι κλίσεις των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης είναι ίδιες τότε η παραμικρή μεταβολή στην κλίση της καμπύλης προσφοράς αλλάζει ριζικά τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας και συνεπώς τη συμπεριφορά των λύσεων, αφού για  $|b| > d$  το σύστημα είναι ευσταθές ενώ για  $|b| < d$  είναι ασταθές.

Τέλος, σημαντικό θα ήταν να δούμε αν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας αλλάζουν από μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης. Μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης σημαίνει μεταβολή της τιμής του συντελεστή  $a$ . Δοκιμάζοντας λοιπόν διάφορες τιμές στο συντελεστή  $a$ , για  $a \geq 0$ , και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών, τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας καθώς και η συμπεριφορά των λύσεων δεν αλλάζουν. Το μόνο που παρατηρείται είναι αυτό που σημειώθηκε και παραπάνω, ότι για  $a \geq c$  το  $p^* \geq 0$  ενώ για  $a < c$  το  $p^* < 0$  και συνεπώς η ανάλυση του απλού μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο έχει νόημα μόνο για  $a \geq c$ .

Οπότε, το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση για το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο, είναι ότι σε περίπτωση διαταραχής, όταν δηλαδή βρισκόμαστε σε κατάσταση εκτός ισορροπίας  $p_0 \neq p^*$ , η τιμή και η ποσότητα δεν επιστρέφουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας αφού σύμφωνα με το θεώρημα ιστού αράχνης αυτό εξαρτάται από το λόγο των κλίσεων των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης.

### *3.1.2 Το Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Ανώτατη Τιμή*

Είδαμε ότι όταν η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι μεγαλύτερη από την κλίση της καμπύλης ζήτησης τότε το σημείο ισορροπίας του συστήματος, για την πιο απλή μορφή του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης, είναι ασταθές. Στο σημείο αυτό λοιπόν, θα είχε αρκετό ενδιαφέρον να δούμε αν και κατά πόσο ένα ανώτατο όριο τιμών διορθώνει την αστάθεια του συστήματος (Shone, 2002). Χρησιμοποιώντας λοιπόν το απλό μοντέλο προσφοράς και



ζήτησης που αναλύθηκε παραπάνω για  $|b| < d$ , θα προβούμε σε δυναμική ανάλυση του συστήματος για την περίπτωση που έχουμε ανώτατη τιμή.

Έστω λοιπόν ότι οι τιμές των συντελεστών είναι  $a = 42, b = -4, c = 2$  και  $d = 6$  (Shone, 2002). Τότε το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = 42 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + 6p_{t-1} \end{cases}$$

Έτσι η γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών 1ης όταν δεν έχουμε ανώτατο όριο τιμών είναι:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow p_t = 10 - 1.5p_{t-1}$$

Για  $p_t = p_{t-1} = p^*$  το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το  $p^* = 4$ .

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφοράς  $f(p_{t-1})$  και ακολουθώντας την επαναληπτική διαδικασία (iteration) που περιγράψαμε παραπάνω για κάποια αρχική τιμή  $p_0$  μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την τροχιά της λύσης του συστήματος (Ξεπαπαδέας, 2009). Έτσι λοιπόν, για αρχική τιμή έστω  $p_0 = 3.5$  οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας είναι:

$$p_0 = 3.5$$

$$p_1 = 10 - 1.5p_0 = 4.75$$

$$p_2 = 10 - 1.5p_1 = 2.875$$

$$p_3 = 10 - 1.5p_2 = 5.6875$$

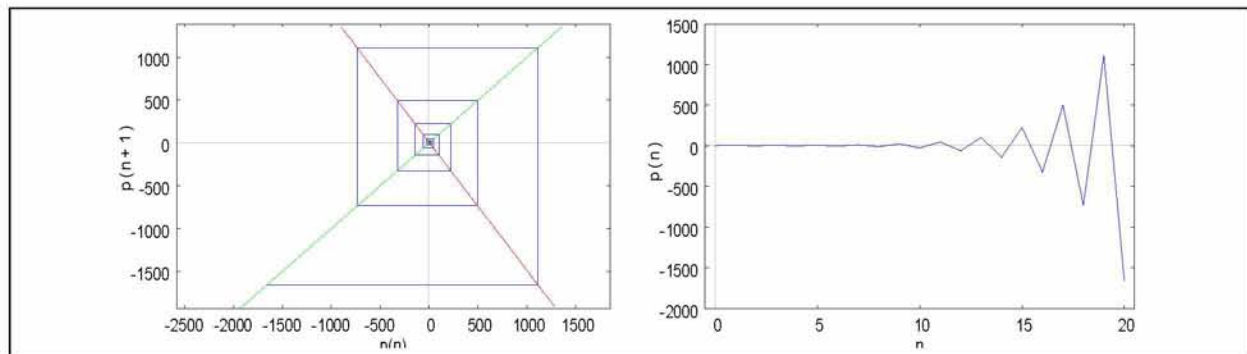
$$p_4 = 10 - 1.5p_3 = 1.46875$$

$$p_5 = 10 - 1.5p_4 = 7.796875$$

⋮

κ. ο. κ.

Παρακάτω λοιπόν απεικονίζεται το διάγραμμα φάσης καθώς επίσης και το διάγραμμα της  $p_t$  στο χρόνο, για αρχική τιμή  $p_0 = 3.5$  και για  $T = 20$  επαναλήψεις.

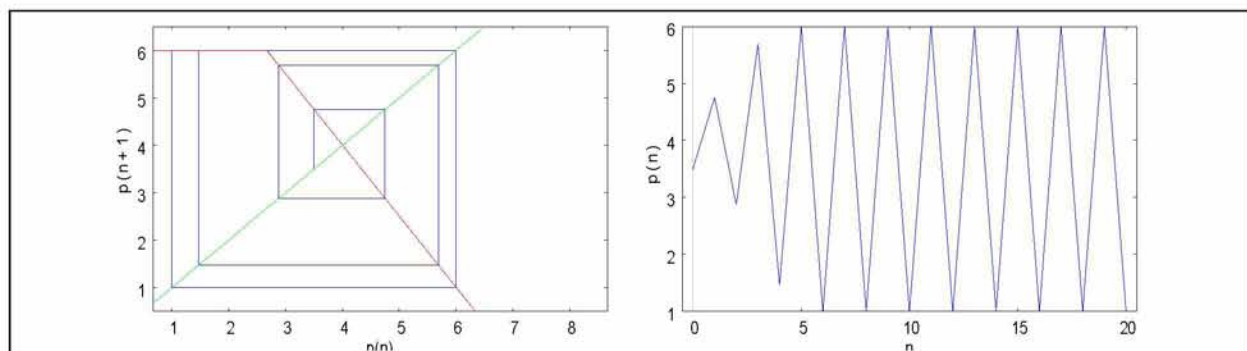


Η κλίση της  $f(p_{t-1}) = 10 - 1.5p_{t-1}$  στο σημείο ισορροπίας είναι  $f'(4) = -1.5 < -1$  και έτσι, όπως βλέπουμε τόσο από το διάγραμμα φάσης όσο και από το διάγραμμα της λύσης στο χρόνο, οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας με μορφή ιστού αράχνης τείνοντας στο άπειρο και το  $p^* = 4$  είναι απωθητικό (repelling fixed point).

Έστω τώρα επιβάλλεται ανώτατο όριο τιμών  $p_c = 6$  και έτσι η τιμή σε κάθε χρονική περίοδο  $t$  δεν μπορεί να υπερβαίνει αυτό το όριο (Shone, 2002). Παρατηρώντας τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας παραπάνω βλέπουμε ότι ο όρος  $p_5 = 7.796875 > 6$ . Οπότε η τιμή από τη χρονική περίοδο  $t = 5$  και μετά θα πρέπει να ισούται με  $p_5 = p_6 = \dots = p_T = 6$ . Παρατηρώντας λοιπόν τους αρχικούς όρους της ακολουθίας έστω ότι έχουμε το εξής: ο επόμενος όρος της ακολουθίας  $p_t$  θα ισούται με  $p_c = 6$  όταν ο προηγούμενος όρος της ακολουθίας θα είναι μικρότερος από την τιμή  $p_{t-1} = 8/3 \cong 2.667$ . Έτσι η εξίσωση διαφοράς πλέον θα είναι:

$$p(t) = \begin{cases} 6 & p_{t-1} < 8/3 \\ 10 - 1.5p_{t-1} & p_{t-1} \geq 8/3 \end{cases}$$

Κατασκευάζοντας λοιπόν ξανά το διάγραμμα φάσης και το διάγραμμα της  $p_t$  στο χρόνο, η τροχιά της λύσης για την περίπτωση που έχουμε ανώτατο όριο τιμών απεικονίζεται παρακάτω:



Και από τα δύο διαγράμματα παρατηρούμε λοιπόν ότι, όσο η  $p_{t-1} > 8/3$  η λύση αποκλίνει από το σημείο ισορροπίας  $p^* = 4$  όπως συνέβαινε και πριν την επιβολή ανώτατης τιμής. Μόλις όμως η  $p_{t-1} < 8/3$  τότε η λύση ακολουθεί πλέον κύκλο δύο περιόδων (2-period cycle)  $p_1 = 1$  και  $p_c = 6$  γύρω από το σημείο ισορροπίας. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί εδώ είναι ότι, αν και η επιβολή ενός ανώτατου ορίου τιμών δεν αλλάζει τα χαρακτηριστικά του  $p^* = 4$  το οποίο παραμένει απωθητικό, αλλάζει ωστόσο τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι λύσεις αντί να αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας τείνοντας στο άπειρο, αποκλίνουν από αυτό συγκλίνοντας πλέον σε μία κυκλική τροχιά δύο περιόδων γύρω από αυτό.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, όταν το σύστημα που αντιμετωπίζουμε είναι ασταθές τότε η επιβολή μιας ανώτατης τιμής, αν και δεν διορθώνει το πρόβλημα της αστάθειας της τιμής ισορροπίας, περιορίζει ωστόσο τις συνέπειες που αυτή προκαλεί στη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος. Περιορίζει δηλαδή την απόκλιση της τιμής δημιουργώντας ουσιαστικά έναν ευσταθή κύκλο δύο περιόδων στον οποίο τελικά θα συγκλίνουν όλες οι λύσεις για κάθε αρχική τιμή.

Η περαιτέρω ανάλυση για τις άλλες δύο περιπτώσεις αναφορικά με την κλίση της καμπύλης προσφοράς,  $|b| = d$  και  $|b| > d$ , δεν έχει νόημα. Αυτό διότι η επιβολή μιας ανώτατης τιμής δεν έχει καμία επίδραση στη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος αφού οι λύσεις είτε ακολουθούν κυκλική τροχιά δύο περιόδων είτε συγκλίνουν στην τιμή ισορροπίας αντίστοιχα.

### 3.1.3 Το Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Εναλλακτική Υπόθεση για την Αναμενόμενη Τιμή

Μία εναλλακτική υπόθεση που μπορεί να γίνει αναφορικά με τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμής  $p_t^e$  είναι: η αναμενόμενη τιμή για τη χρονική στιγμή  $t$  να είναι μία διόρθωση του σφάλματος πρόβλεψης για την τιμή της προηγούμενης περιόδου (Nerlove, 1958). Δηλαδή η τιμή που αναμένει ο παραγωγός τη χρονική στιγμή  $t$  να προσδιορίζεται με βάση τη σχέση (Gandolfo, 1997):

$$p_t^e = p_{t-1}^e - \lambda(p_{t-1}^e - p_{t-1}) \quad (9)$$

Οπότε το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης από τη σχέση (8) γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = a - bp_t \\ q_t^s = c + d[p_{t-1}^e - \lambda(p_{t-1}^e - p_{t-1})] \end{cases}, \quad b > 0 \text{ και } d > 0 \quad (10)$$

Το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης που εξετάσαμε παραπάνω είναι μία ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου για  $\lambda = 1$ . Από τη σχέση (9) έχουμε:

$$p_t^e = (1 - \lambda)p_{t-1}^e + \lambda p_{t-1} \quad (11)$$

Ενώ από τη σχέση (8) παίρνουμε:

$$p_t^e = \frac{q_t^s - c}{d} \xrightarrow{q_t^s = q_t^d} p_t^e = \frac{q_t^d - c}{d} = \frac{a - bp_t - c}{d} \Rightarrow$$

$$p_{t-1}^e = \frac{a - c}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1} \quad (12)$$

Οπότε από σχέσεις (10) και (12) χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ισορροπίας  $q_t^d = q_t^s$  προκύπτει η εξίσωση διαφορών 1ης τάξης για αυτή τη γενική περίπτωση του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow a - bp_t = c + d(1 - \lambda) \left( \frac{a - c}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1} \right) + d\lambda p_{t-1} \Rightarrow$$

$$p_t = \lambda \left( \frac{a - c}{b} \right) + \left( 1 - \lambda - \frac{\lambda d}{b} \right) p_{t-1}$$

Και για  $p_t = p_{t-1} = p^*$  το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το ίδιο όπως και στο απλό μοντέλο:

$$p^* = \frac{a - c}{b + d}, \quad b > 0$$

Ενώ η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας δίνεται από:

$$f'(p^*) = 1 - \lambda - \frac{\lambda d}{b}$$

Δηλαδή η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας εκτός από τον όρο  $d/b$  εξαρτάται και από την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Συγκεκριμένα για να είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος ελκυστής με μορφή ιστού αράχνης θα πρέπει  $-1 < f'(p^*) < 0$ . Δηλαδή:

$$-1 < 1 - \lambda - \frac{\lambda d}{b} < 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 < -\frac{\lambda d}{b} < \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \lambda}{\lambda} < \frac{d}{b} < \frac{2 - \lambda}{\lambda}$$

Για αυτήν την περίπτωση λοιπόν του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης, η τιμή θα συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας με μορφή φθίνουσων ταλαντώσεων όταν ο λόγος των κλίσεων των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης βρίσκεται εντός του διαστήματος  $(1/\lambda - 1, 2/\lambda - 1)$ .

### 3.1.3.1 Εφαρμογή στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με εναλλακτική υπόθεση για την αναμενόμενη τιμή

Για να δούμε πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας για διάφορες τιμές τις παραμέτρου  $\lambda$  σε σχέση με το λόγο  $d/b$  θα προβούμε σε ποιοτική δυναμική ανάλυση του μοντέλου. Για τους συντελεστές  $a, b, c, d$  θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές από την προηγούμενη εφαρμογή για το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, για την περίπτωση έστω όπου  $|b| < d$ . Το μοντέλο τότε για  $a = 20, |b| = 4, c = 2, d = 6$  από σχέση (5) γίνεται:

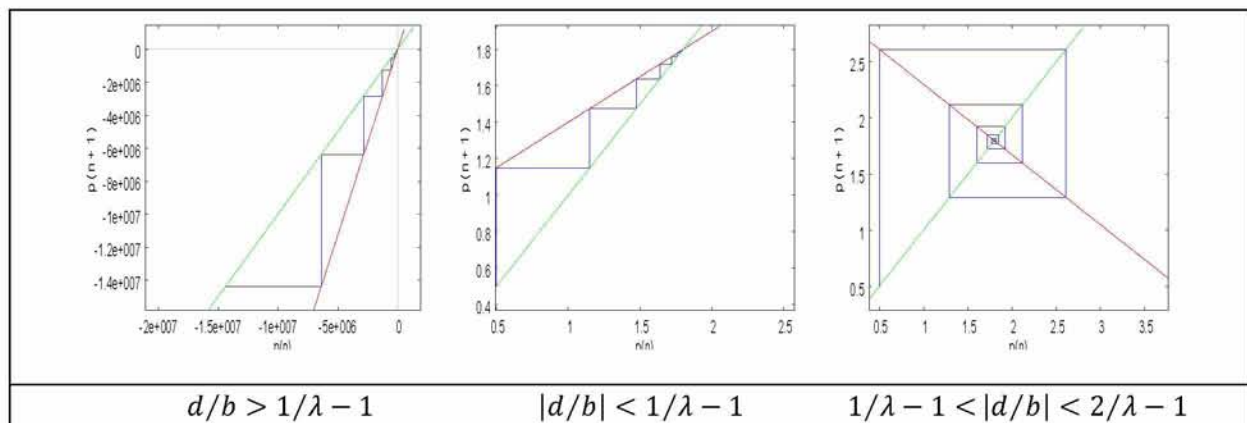
$$\begin{cases} q_t^d = 20 - 4p_t \\ q_t^s = 2 + 6[p_{t-1}^e - \lambda(p_{t-1}^e - p_{t-1})] \end{cases}, \quad \lambda \geq 0$$

Η γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών 1ης τάξης είναι:

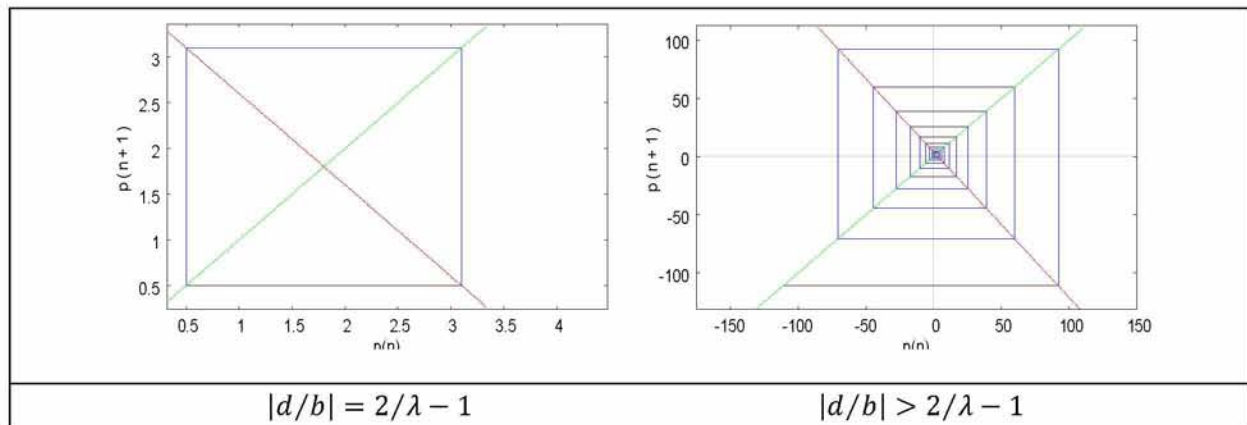
$$p_t = 4.5\lambda + (1 - 2.5\lambda)p_{t-1}$$

Το σταθερό σημείο του συστήματος είναι ανεξάρτητο από την τιμή του  $\lambda$ . Έτσι το μοναδικό σημείο ισορροπίας για  $b < d$  είναι πάντα το  $p^* = a - c/b + d = 1.8$ .

Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στο  $\lambda$  διακρίνονται πέντε περιπτώσεις αναφορικά με την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διαφοράς για κάθε περίπτωση κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης τα οποία απεικονίζονται παρακάτω:







- Για  $\lambda < 0$  ή  $d/b > 1/\lambda - 1$ : Η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι θετική και μεγαλύτερη από την κλίση της γραμμής  $45^\circ$ ,  $f'(1.8) > 1$ . Έτσι, οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας μονοτονικά ή με μορφή σκάλας και το  $p^* = 1.8$  είναι ασταθές. Οι λύσεις αποκλίνουν όλο και πιο γρήγορα από την τιμή ισορροπίας καθώς το  $\lambda \rightarrow -\infty$ .
- Για  $0 < \lambda < 0.4$  ή  $|d/b| < 1/\lambda - 1$ : Η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι  $0 < f'(1.8) < 1$  και έτσι το  $p^* = 1.8$  είναι ευσταθές και οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτό μονοτονικά.
- Για  $0.4 < \lambda < 0.8$  ή  $1/\lambda - 1 < |d/b| < 2/\lambda - 1$ : Είναι  $-1 < f'(1.8) < 0$  και έτσι οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας με μορφή ιστού αράχνης και το  $p^* = 1.8$  είναι ευσταθές. Καθώς το  $\lambda \rightarrow 0.8$  οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας όλο και πιο αργά.
- Για  $\lambda = 0.8$  ή  $|d/b| = 2/\lambda - 1$ : Η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητική και ισούται με την κλίση της γραμμής των  $45^\circ$ ,  $f'(1.8) = -1$ , και έτσι οι λύσεις ακολουθούν κύκλο δύο περιόδων γύρω από το σημείο ισορροπίας και το  $p^* = 1.8$  είναι ουδέτερο.
- Για  $\lambda > 0.8$  ή  $|d/b| > 2/\lambda - 1$ : Είναι  $f'(1.8) < -1$ , οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας με μορφή ιστού αράχνης και το  $p^* = 1.8$  είναι ασταθές. Καθώς το  $\lambda \rightarrow +\infty$  οι λύσεις αποκλίνουν συνεχώς πιο γρήγορα από το σταθερό σημείο.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, για  $d/b > 1/\lambda - 1$  και  $|d/b| > 2/\lambda - 1$  το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Για  $|d/b| < 2/\lambda - 1$  το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, ενώ για  $|d/b| = 2/\lambda - 1$  είναι ουδέτερο. Ή σε όρους της παραμέτρου  $\lambda$ , καθώς το  $\lambda$  διέρχεται από εκείνη την τιμή για την οποία  $|d/b| = 2/\lambda - 1$  εμφανίζεται ένας κύκλος δύο περιόδων και το σημείο ισορροπίας αλλάζει από από ελκυστής σε απωθητής. Την ίδια συμπεριφορά είδαμε και στο

απλό μοντέλο που εξετάσαμε παραπάνω αφού εκείνο, είναι μία ειδική περίπτωση αυτού του πιο γενικευμένου μοντέλου για  $\lambda=1$ .

Επιπλέον, όπως και στο απλό μοντέλο ιστού αράχνης έτσι και εδώ, μεταβολές στην τιμή του συντελεστή  $\alpha$  δεν αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας και έτσι η ευστάθεια της ισορροπίας του συστήματος δεν επηρεάζεται από μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης.

Τέλος, οι παραπάνω περιπτώσεις που διακρίνονται σχετικά με την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας ισχύουν και για διαφορετικές κλίσεις της καμπύλης προσφοράς  $|b| > d$  και  $|b| = d$ , όπως είδαμε και στο απλό μοντέλο, για άλλες όμως τιμές του συντελεστή  $\lambda$  κάθε φορά. Συγκεκριμένα για  $|b| = 4 = d$  το σημείο ισορροπίας  $p^* = 2.25$  αλλάζει από ελκυστικό σε απωθητικό όταν η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $\lambda = 1$ , ενώ για  $|b| = 4 > d = 2.5$  η αλλαγή στα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας  $p^* \cong 2.769$  γίνεται στην τιμή  $\lambda \approx 1.231$ .

## 3.2 Γραμμική Εξίσωση Δεύτερης Τάξης

### 3.2.1 Το Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με μια Άλλη Υπόθεση για τον Προσδιορισμό της Αναμενόμενης Τιμής

Μία άλλη προσέγγιση αναφορικά με τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμής, που σε αντίθεση με αυτήν που παρουσιάσαμε παραπάνω δίνει εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης, είναι: η αναμενόμενη τιμή τη χρονική περίοδο  $t$ ,  $p_t$ , να προσδιορίζεται από την τιμή και των δύο προηγούμενων περιόδων,  $p_{t-1}$ ,  $p_{t-2}$  (Goodwin, 1947). Δηλαδή:

$$p_t^e = p_{t-1} + \eta(p_{t-1} - p_{t-2})$$

Όπου,  $\eta$  είναι ο συντελεστής των προσδοκιών για την τιμή. Αν  $\eta > 0$  τότε η τιμή τη χρονική περίοδο  $t$  αναμένεται να κινηθεί προς την ίδια κατεύθυνση σε σχέση την κίνηση των τιμών του παρελθόντος. Αντιθέτως, για  $\eta < 0$  αναμένεται να κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση. Ενώ, για  $\eta = 0$  τότε  $p_t^e = p_{t-1}$  που είναι η ειδική περίπτωση του απλού μοντέλου προσφοράς και ζήτησης που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = a - bp_t \\ q_t^s = c + d[p_{t-1} + \eta(p_{t-1} - p_{t-2})] \end{cases}, \quad b, d > 0$$

Και από συνθήκη ισορροπίας  $q_t^d = q_t^s$  προκύπτει η γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών 2ης τάξης:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow a - bp_t = c + d[p_{t-1} + \eta(p_{t-1} - p_{t-2})] \Rightarrow$$
$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}(1+\eta)p_{t-1} + \eta\frac{d}{b}p_{t-2}$$

Για  $p_t = p_{t-1} = p_{t-2} = p^*$  το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος όπως και πριν δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου  $\eta$  και δίνεται από:

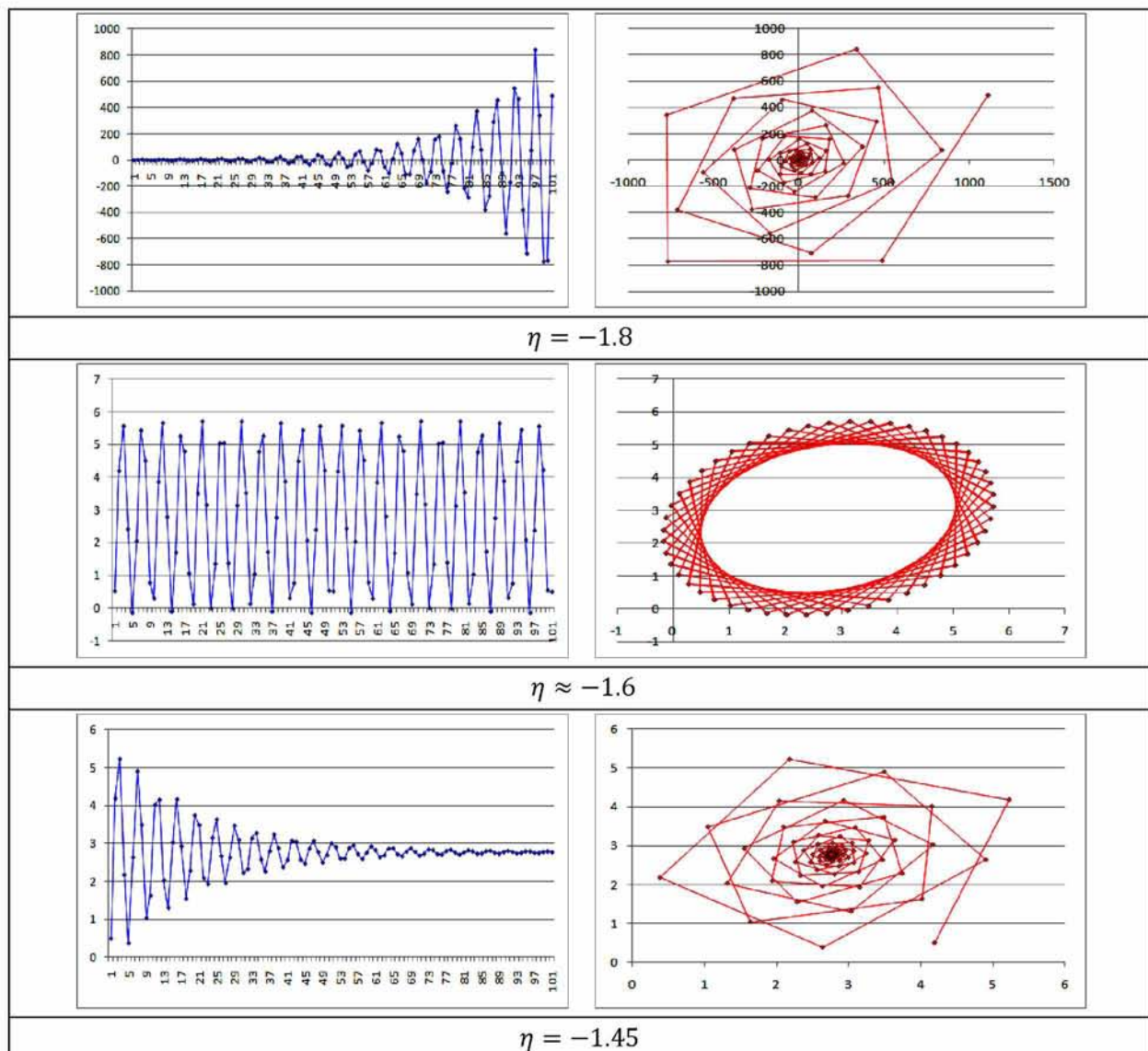
$$p^* = \frac{a-c}{b+d}, \quad b > 0$$

Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο με την παράμετρο  $\lambda$ , έτσι και εδώ στόχος μας αρχικά είναι να δούμε πως αλλάζει η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος καθώς μεταβάλλεται

η τιμή της παραμέτρου  $\eta$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας τις ίδιες<sup>9</sup> τιμές για τους συντελεστές που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο μοντέλο,  $a = 20, b = 4, c = 2$  και  $d = 2.5$ , η εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\eta$  γίνεται:

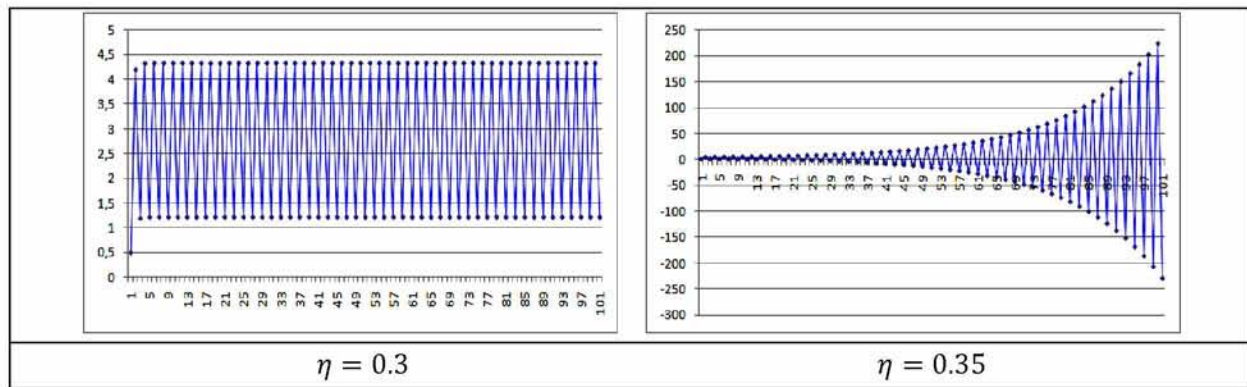
$$p_t = 4.5 - 0.625(\eta + 1)p_{t-1} + 0.625\eta p_{t-2}, \quad \eta \geq 0$$

Δίνοντας λοιπόν διάφορες τιμές στην παράμετρο  $\eta$  και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών διακρίνονται, όπως βλέπουμε στα παρακάτω διαγράμματα  $p_t = f(t)$  και  $p_t = f(p_{t-1})$  για αρχική τιμή έστω  $p_0 = 0.5$ , οι εξής περιπτώσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος:



<sup>9</sup> Χρησιμοποιούμε τις ίδιες τιμές για τους συντελεστές που είχαμε και στο προηγούμενο μοντέλο έτσι ώστε να δούμε τι αλλάζει στην περίπτωση που η  $p_t^e$  προσδιορίζεται με βάση τις τιμές και των προηγούμενων περιόδων.





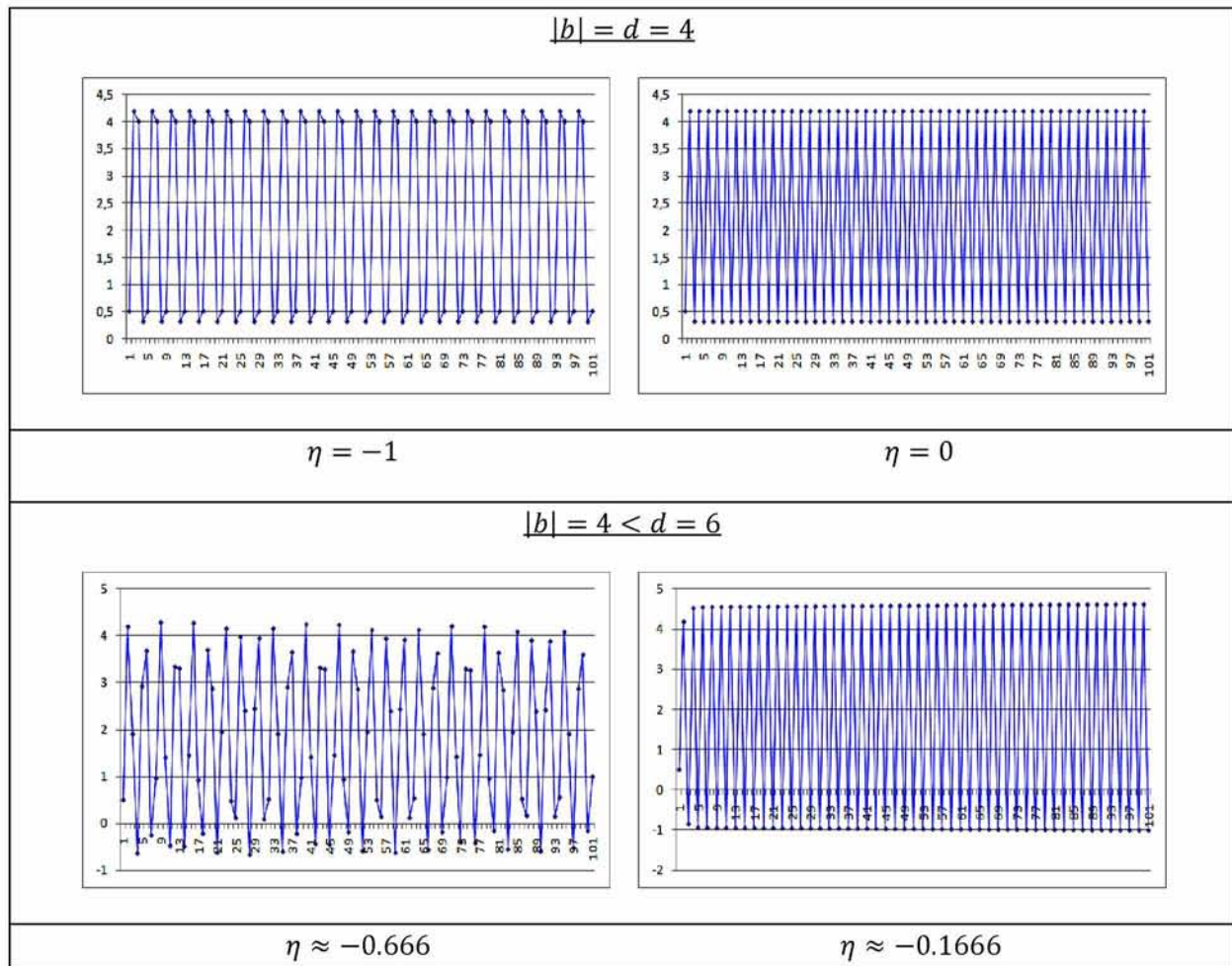
Για  $|b| = 4 > d = 2.5$  το σημείο ισορροπίας του συστήματος για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\eta$  είναι, όπως είχαμε βρει και στο απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, το  $p^* = 36/13 \simeq 2.769$ .

- Για  $\eta < -1.6$ : Οι λύσεις για κάθε αρχική συνθήκη αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας τείνοντας στο άπειρο και το  $p^* \simeq 2.769$  είναι απωθητικό (repelling fixed point).
- Για  $\eta \approx -1.6$ : Οι λύσεις για την τιμή αυτή του  $\eta$  δεν τείνουν πλέον στο άπειρο αλλά ούτε συγκλίνουν σε κάποιο ελκυστικό περιοδικό κύκλο. Ωστόσο, για κάθε αρχική συνθήκη οι τροχιές παραμένουν κοντά η μία στην άλλη με αποτέλεσμα να καλύπτουν την επιφάνεια ενός δακτυλίου. Οι λύσεις του συστήματος δηλαδή για αυτήν την περίπτωση συγκλίνουν σε έναν ημιπεριοδικό κύκλο (quasi – period cycle) πενήντα περίπου περιόδων καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο.
- Για  $-1.6 < \eta < 0.3$ : Οι τροχιές για κάθε αρχική συνθήκη συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο και το  $p^* \simeq 2.769$  είναι πλέον ελκυστικό (attracting fixed point).
- Για  $\eta \simeq 0.3$ : Οι λύσεις για αυτήν την τιμή της παραμέτρου  $\eta$  δεν συγκλίνουν στο σταθερό σημείο ισορροπίας αλλά για κάθε αρχική συνθήκη συγκλίνουν σε ελκυστικό κύκλο δύο περιόδων (2 – period cycle) γύρω από αυτό.
- Για  $\eta > 0.3$ : Καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο οι λύσεις εδώ αποκλίνουν από το σταθερό σημείο πηγαίνοντας στο άπειρο και το  $p^* \simeq 2.769$  γίνεται ξανά απωθητικό (repelling fixed point).

Από τα παραπάνω λοιπόν παρατηρούμε ότι, καθώς η τιμή της παραμέτρου αυξάνεται και διέρχεται από τις τιμές  $\eta \simeq -1.6$  και  $\eta \simeq 0.3$ , το σημείο ισορροπίας  $p^* \simeq 2.769$  γίνεται από απωθητικό ελκυστικό και από ελκυστικό απωθητικό ενώ στο μεταξύ ένας ημιπεριοδικός κύκλος και ένας κύκλος δύο περιόδων εμφανίζονται αντίστοιχα.



Αυτή η συμπεριφορά των λύσεων ισχύει γενικά για την περίπτωση  $|b| > d$ . Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στο συντελεστή  $d$  βλέπουμε ότι η συμπεριφορά αυτή επαναλαμβάνεται και για τις άλλες δύο περιπτώσεις  $|b| = d$  και  $|b| < d$ . Έτσι, παρακάτω απεικονίζονται τα διαγράμματα  $p_t = f(t)$  για εκείνες τις τιμές του  $\eta$  για τις οποίες αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας, για τις άλλες δύο περιπτώσεις που παρουσιάσαμε και παραπάνω στο απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης,  $|b| = d = 4$  και  $|b| = 4 < d = 6$ :



Έτσι για  $|b| = d = 4$  παρατηρούμε ότι καθώς η παράμετρος διέρχεται από τις τιμές  $\eta = -1$  και  $\eta = 0$  το σημείο ισορροπίας  $p^* = 2.25$  αλλάζει από απωθητικό σε ελκυστικό και αντίστροφα ενώ στο μεταξύ εμφανίζεται ένας κύκλος τεσσάρων περιόδων (και όχι ημιπεριοδικός κύκλος που έχουμε για  $|b| > d$ ) και ένας κύκλος δύο περιόδων αντίστοιχα. Και για  $|b| = 4 < d = 6$  το σημείο ισορροπίας  $p^* = 1.8$  από απωθητικό γίνεται ελκυστικό και ένας ημιπεριοδικός κύκλος εμφανίζεται καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $\eta \approx -0.666$ . Ενώ στη συνέχεια, από ελκυστικό γίνεται απωθητικό και ένας κύκλος δύο περιόδων εμφανίζεται καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $\eta \approx -0.1666$ .

Παρατηρούμε δηλαδή ότι, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο με την εναλλακτική υπόθεση για τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμής έτσι και σε αυτό, η συμπεριφορά των λύσεων καθώς αλλάζει η τιμή του  $\eta$  επαναλαμβάνεται για κάθε κλίση της καμπύλης προσφοράς. Επιπλέον, και για αυτό το μοντέλο, μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης δεν επηρεάζουν τις τροχιές του συστήματος. Τέλος, η μόνη διαφορά είναι ότι σε αυτό το μοντέλο οι τροχιές του συστήματος εκτός από κύκλο δύο περιόδων μπορεί να ακολουθούν και κύκλο τεσσάρων περιόδων ή και ημιπεριοδικό κύκλο.

### 3.3 Γραμμικό Σύστημα Δύο Διακριτών Εξισώσεων

#### 3.3.1 Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Δύο Αλληλένδετες Αγορές

Η ανάλυση των μοντέλων προσφοράς και ζήτησης που προηγήθηκε βασίστηκε στην απλή περίπτωση μιας αγοράς. Σημαντικό όμως είναι να δούμε τι συμβαίνει και στην πιο σύνθετη περίπτωση περισσότερων αγορών. Εδώ λοιπόν θα δούμε πως το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο εφαρμόζεται στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε δύο αγορές. Και πιο ειδικά στην περίπτωση που οι αγορές μεταξύ τους είναι αλληλένδετες. Μία περίπτωση δύο αγορών που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είναι οι αγορές ζώου – τροφής (animal – feed interaction), (Shone, 2002). Έτσι, για κάθε περίπτωση δύο αλληλένδετων αγορών ζώου – τροφής, το μοντέλο<sup>10</sup> προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο στην πιο απλή του μορφή δίνεται από:

$$\text{Αγορά Τροφής Ζώου:} \quad \begin{cases} d_t^f = a_1 - b_1 p_t^f & b_1 > 0 \\ s_t^f = c_1 + d_1 p_{t-1}^f & d_1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Αγορά Ζώου:} \quad \begin{cases} d_t^h = a_2 - b_2 p_t^h & b_2 > 0 \\ s_t^h = c_2 + d_2 p_{t-1}^h + e p_{t-1}^f & d_2 > 0 \text{ και } e < 0 \end{cases}$$

Όπου,  $d_t^f, s_t^f$ : ζήτηση και προσφορά για τροφή

$d_t^h, s_t^h$ : ζήτηση και προσφορά για ζώο

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται και για τις δύο αγορές είναι το απλό γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης που είδαμε παραπάνω και έτσι η αναμενόμενη τιμή τη χρονική περίοδο  $t$  προσδιορίζεται με βάση την τιμή της προηγούμενης χρονικής περιόδου,  $p_t^e = p_{t-1}^f$  και  $p_t^{he} = p_{t-1}^h$ . Επίσης, ενώ η  $s_t^f$  προσδιορίζεται μόνο με βάση την  $p_{t-1}^f$ , η  $s_t^h$  από την άλλη εξαρτάται τόσο από την  $p_{t-1}^h$  όσο και από την  $p_{t-1}^f$ . Αυτό διότι, η προσφορά του ζώου εκτός από την τιμή του εξαρτάται και από την τιμή της τροφής του. Και για το λόγο αυτό λοιπόν, ο συντελεστής  $e$  παίρνει μόνο αρνητικές τιμές, αφού μία αύξηση στην τιμή της τροφής, κάνει την τροφή του ζώου πιο ακριβή και έτσι η προσφορά του ζώου μειώνεται.

Από συνθήκη ισορροπίας και για τις δύο αγορές προκύπτουν οι γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις διαφορών 1ης τάξης:

$$d_t^f = s_t^f \Rightarrow a_1 - b_1 p_t^f = c_1 + d_1 p_{t-1}^f \Rightarrow$$

<sup>10</sup> Χρησιμοποιούμε το μοντέλο αλληλεπίδρασης ζώου – τροφής που παρουσιάστηκε από τους Ezekiel (1938) και Waugh (1964) για αγορά ζώου: χοίρος και αγορά τροφής ζώου: καλαμπόκι.

$$\Rightarrow p_t^c = \frac{a_1 - c_1}{b_1} - \frac{d_1}{b_1} p_{t-1}^c$$

Και:

$$d_t^h = s_t^h \Rightarrow a_2 - b_2 p_t^h = c_2 + d_2 p_{t-1}^h + e p_{t-1}^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_t^h = \frac{a_2 - c_2}{b_2} - \frac{d_2}{b_2} p_{t-1}^h - \frac{e}{b_2} p_{t-1}^c$$

Έτσι, το δυναμικό σύστημα δύο εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης που αντιμετωπίζουμε είναι:

$$\begin{cases} p_t^c = \frac{a_1 - c_1}{b_1} - \frac{d_1}{b_1} p_{t-1}^c \\ p_t^h = \frac{a_2 - c_2}{b_2} - \frac{d_2}{b_2} p_{t-1}^h - \frac{e}{b_2} p_{t-1}^c \end{cases}$$

Και για  $p_t^c = p_{t-1}^c = p_c^*$  και  $p_t^h = p_{t-1}^h = p_h^*$  το σημείο ισορροπίας του διακριτού συστήματος δίνεται από:

$$(p_c^*, p_h^*) = \left( \frac{a_1 - c_1}{b_1 + d_1}, \frac{a_2 - c_2}{b_2 + d_2} - \frac{e}{b_2 + d_2} \left( \frac{a_1 - c_1}{b_1 + d_1} \right) \right)$$

Η δυναμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, όπως είδαμε και παραπάνω στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, προσδιορίζεται από το ομογενές μέρος των εξισώσεων διαφορών του συστήματος (Ξεπαπαδέας, 2009). Έτσι, παίρνοντας αποκλίσεις από τα σημεία ισορροπίας το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{d_1}{b_1} x_{t-1} \\ y_t = -\frac{d_2}{b_2} y_{t-1} - \frac{e}{b_2} x_{t-1} \end{cases}$$

Και με συμβολισμό μητρών έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d_1}{b_1} & 0 \\ -\frac{e}{b_2} & -\frac{d_2}{b_2} \end{pmatrix}$$

Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ενός συστήματος εξαρτάται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $|A - \lambda I| = 0$ . Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{d_1}{b_1} & 0 \\ -\frac{e}{b_2} & -\frac{d_2}{b_2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{d_1}{b_1} - \lambda & 0 \\ -\frac{e}{b_2} & -\frac{d_2}{b_2} - \lambda \end{pmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = \left( -\frac{d_1}{b_1} - \lambda \right) \left( -\frac{d_2}{b_2} - \lambda \right) = 0$$

Και οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:  $r = -d_1/b_1$  και  $s = -d_2/b_2$ .

Για συστήματα με πραγματικές διαφορετικές ιδιοτιμές, η ισορροπία είναι ευσταθής όταν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου (Shone, 2002). Έτσι τα  $p_c^*$  και  $p_h^*$  θα είναι ευσταθή αν:

$$|r| = \left| -\frac{d_1}{b_1} \right| < 1 \text{ και } |s| = \left| -\frac{d_2}{b_2} \right| < 1$$

Όπου,  $|-d_1/b_1| < 1$  είναι η συνθήκη ευστάθειας για την αγορά τροφής. Ενώ  $|-d_2/b_2| < 1$  είναι η συνθήκη ευστάθειας για την αγορά ζώου, δεδομένου όμως ότι η τιμή της τροφής είναι σταθερή. Έτσι, για  $|b_1| > d_1$  και  $|b_2| > d_2$  οι λύσεις και για τις δύο αγορές  $p_t^c, p_t^h$  θα συγκλίνουν για κάθε αρχική τιμή  $p_0^c, p_0^h$  σε τιμές ισορροπίας  $p_c^*, p_h^*$  αντίστοιχα. Όπως είδαμε λοιπόν και παραπάνω στο απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης για μία αγορά, έτσι και εδώ η ευστάθεια της τιμής ισορροπίας σε κάθε αγορά εξαρτάται από το λόγο των κλίσεων των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης.

### 3.3.1.1 Εφαρμογή στο γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο αλληλένδετες αγορές

Χρησιμοποιώντας για τιμές των συντελεστών (Shone, 2002) τις:  $a_1 = 24, b_1 = 5, c_1 = -4, d_1 = 2$  και  $a_2 = 20, b_2 = 5, c_2 = 2.5, d_2 = 2.5, e = -2$  το σύστημα των δύο διακριτών εξισώσεων για το απλό γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο αγορές τροφής – ζώου που παρουσιάσαμε παραπάνω γίνεται:

$$\begin{cases} p_t^c = 5.6 - 0.4p_{t-1}^c \\ p_t^h = 3.5 - 0.5p_{t-1}^h + 0.4p_{t-1}^c \end{cases}$$

Και το σταθερό σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι:



$$(p_c^*, p_h^*) = (4, 3.4)$$

Για τη μελέτη ευστάθειας του σημείου ισορροπίας σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύστημα με μορφή μήτρας γράφεται:

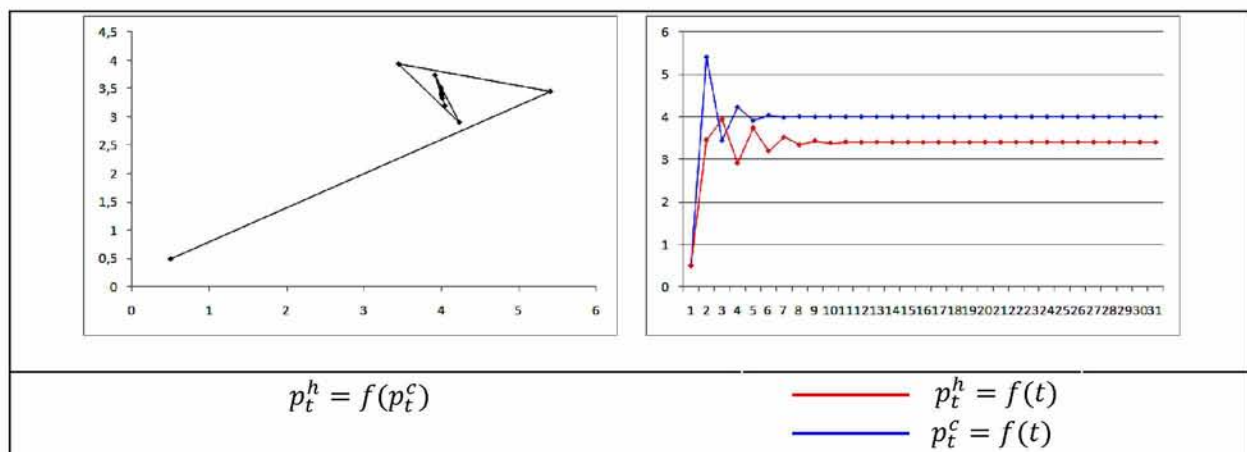
$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 \\ 0.4 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - \lambda I| = (-0.4 - \lambda)(-0.5 - \lambda) = 0$$

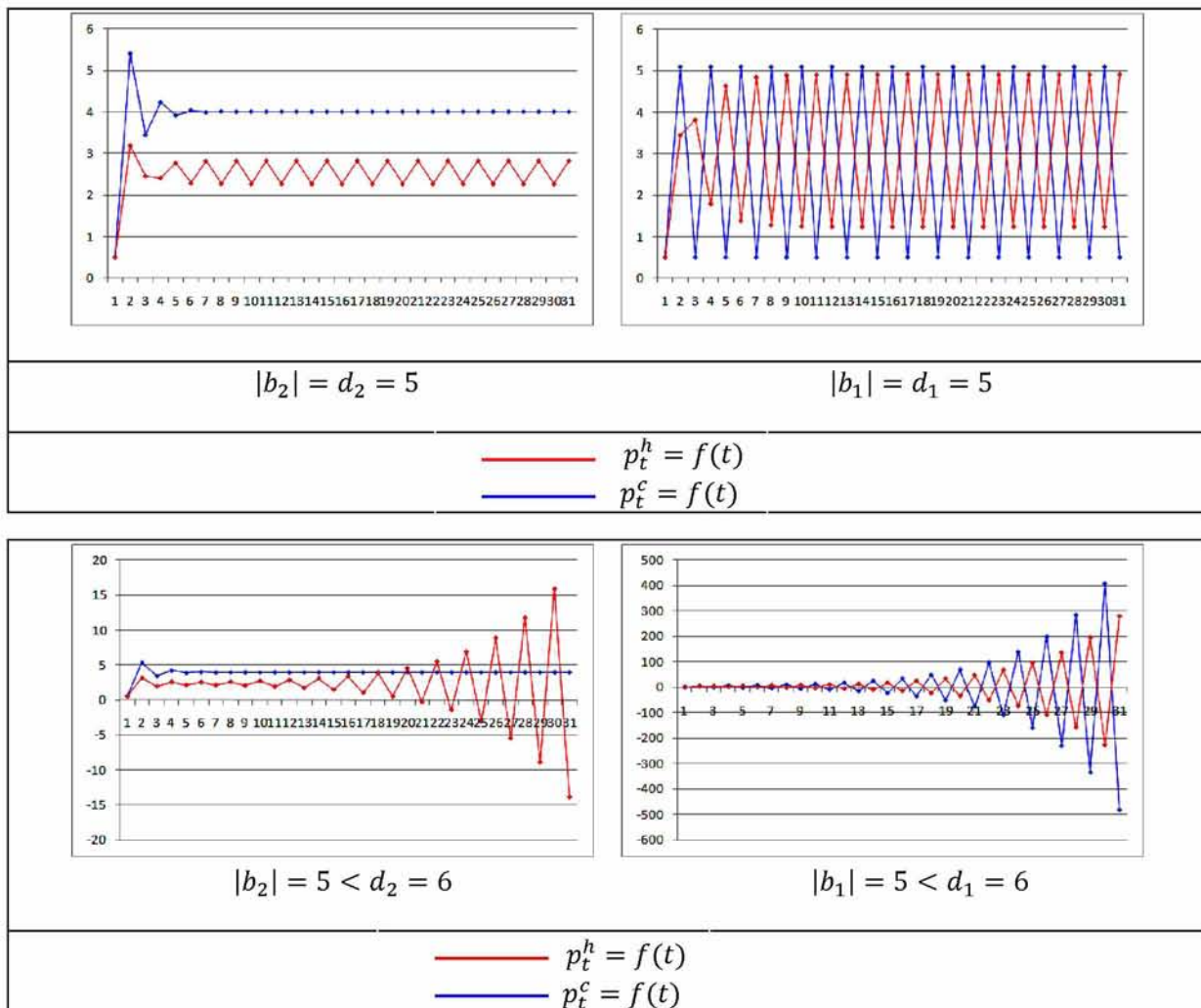
Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:  $r = -0.4$  και  $s = -0.5$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου,  $|r| = 0.4 < 1$  και  $|s| = 0.5 < 1$ . Οπότε τα σημεία ισορροπίας και για τις δύο αγορές,  $p_c^* = 4$  και  $p_h^* = 3.4$  είναι ευσταθή.

Κατασκευάζοντας και τα διαγράμματα  $p_t^h = f(p_t^c)$ ,  $p_t^h = f(t)$  και  $p_t^c = f(t)$  μπορούμε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος στο χρόνο. Τα διαγράμματα απεικονίζονται παρακάτω για αρχικές τιμές έστω  $p_0^h = p_0^c = 0.5$  και για τους  $T = 30$  πρώτους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας:



Από τα διαγράμματα βλέπουμε ότι καθώς το  $t \rightarrow \infty$ :  $p_t^h \rightarrow p_h^* = 3.4$  και  $p_t^c \rightarrow p_c^* = 4$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, όταν η κλίση της καμπύλης προσφοράς και για τις δύο αγορές είναι μικρότερη από την κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $|b_1| = 5 > d_1 = 2$  και  $|b_2| = 5 > d_2 = 2.5$ , τότε όλες οι λύσεις για κάθε αρχική συνθήκη συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας και τα  $p_c^* = 4$  και  $p_h^* = 3.4$  είναι ελκυστικά (attracting fixed points).

Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας όμως εξαρτάται από τις κλίσεις των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης και στις δύο αγορές. Με στόχο λοιπόν να δούμε πως η συμπεριφορά των λύσεων αλλάζει για διαφορετικές κλίσεις της καμπύλης προσφοράς, όπως είδαμε και στο απλό μοντέλο για μία αγορά, δίνουμε διάφορες τιμές στους συντελεστές  $d_1$  και  $d_2$  ξεχωριστά κάθε φορά με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών. Οι περιπτώσεις που διακρίνονται αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων και στις δύο αγορές απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα  $p_t^h = f(t)$  και  $p_t^c = f(t)$  για αρχικές τιμές  $p_0^h = p_0^c = 0.5$  όπως και πριν και για  $T = 30$  χρονικές περιόδους:



Για  $|b_2| = 5 > d_2 = 2.5$  δίνοντας διάφορες τιμές στο συντελεστή  $d_1$  και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών παρατηρούμε ότι:

- Για  $|b_1| = d_1$ : Οι τιμές και στις δύο αγορές  $p_t^h$  και  $p_t^c$  για κάθε αρχική συνθήκη δεν συγκλίνουν πλέον σε τιμές ισορροπίας αλλά ακολουθούν κύκλους δύο περιόδων (2 – period cycle) γύρω από αυτές.

- Για  $|b_1| < d_1$ : Οι λύσεις και στις δύο αγορές αποκλίνουν με ταλαντώσεις αυξανόμενου εύρους τείνοντας στο άπειρο και τα σημεία ισορροπίας και στις δύο αγορές  $p_c^*$  και  $p_h^*$  είναι πλέον απωθητικά (repelling fixed points).

Για  $|b_1| = 5 < d_1 = 2$  δίνουμε διάφορες τιμές στο συντελεστή  $d_2$  και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για  $|b_2| = d_2$ : Οι λύσεις για την αγορά της τροφής  $p_t^c$  εξακολουθούν να συγκλίνουν σε τιμή ισορροπίας  $p_c^*$ , ενώ οι λύσεις στην αγορά του ζώου  $p_t^h$  ακολουθούν πλέον κύκλο δύο περιόδων (2 – period cycle) γύρω από το σημείο ισορροπίας  $p_h^*$ .
- Για  $|b_2| < d_2$ : Οι λύσεις στην αγορά του ζώου  $p_t^h$  αποκλίνουν στο άπειρο ενώ οι λύσεις στην αγορά της τροφής  $p_t^c$  συνεχίζουν να συγκλίνουν σε τιμή ισορροπίας. Έτσι το σημείο ισορροπίας για την αγορά τροφής  $p_c^*$  εξακολουθεί να είναι ελκυστικό (attracting fixed point) ενώ το σημείο ισορροπίας για την αγορά ζώου  $p_h^*$  γίνεται πλέον απωθητικό (repelling fixed point).

Πρατηρούμε λοιπόν ότι, μεταβολές στην κλίση της καμπύλης προσφοράς του ζώου  $d_2$  αλλάζουν μόνο τα χαρακτηριστικά της τιμής ισορροπίας του ζώου  $p_h^*$ . Αντιθέτως, μεταβολές στην κλίση της καμπύλης προσφοράς της τροφής  $d_1$  αλλάζουν τη συμπεριφορά των λύσεων και για τις δύο αγορές. Έτσι η ευστάθεια του  $p_c^*$  εξαρτάται μόνο από τον λόγο  $|d_1/b_1|$ , ενώ αντιθέτως η ευστάθεια του  $p_h^*$  εξαρτάται τόσο από τον λόγο  $|d_2/b_2|$  όσο και από τον λόγο  $|d_1/b_1|$ . Αυτό διότι η τιμή του ζώου είναι αυτή που επηρεάζεται από την τιμή της τροφής του ζώου και όχι το αντίστροφο.

Τέλος, όπως και στο απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης για μία αγορά έτσι και σε αυτό το γραμμικό μοντέλο, μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης σε κάθε αγορά δεν αλλάζουν τα χαρακτηριστικά των σημείων ισορροπίας  $p_h^*$  και  $p_c^*$  και έτσι η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

### 3.4 Μη Γραμμική Εξίσωση Διαφορών

#### 3.4.1 Το Απλό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Μη Γραμμικότητα

Η ανάλυση που προηγήθηκε για το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης στην πιο απλή του μορφή βασίστηκε σε γραμμικές συναρτήσεις. Θα είχε όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον να δούμε αν και πως η συμπεριφορά των λύσεων αλλάζει στη πιο σύνθετη περίπτωση μη γραμμικών

συναρτήσεων. Έστω λοιπόν ότι αντιμετωπίζουμε μία μη γραμμική συνάρτηση προσφοράς ως προς την τιμή με την πιο απλή μορφή μη γραμμικότητας  $p_{t-1}^2$  (Shone, 2002). Τότε το απλό μη γραμμικό πλέον μοντέλο προσφοράς και ζήτησης είναι:

$$\begin{cases} q_t^d = a + bp_t \\ q_t^s = c + dp_{t-1}^2 \end{cases}, \quad b < 0 \text{ και } d > 0$$

Και η μη γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών 1ης τάξης δίνεται από:

$$q_t^d = q_t^s \Rightarrow p_t = \frac{c-a}{b} - \frac{d}{b} p_{t-1}^2$$

Για  $p_t = p_{t-1} = p^*$  το διακριτό σύστημα πλέον έχει δύο σταθερά σημεία  $p_1^*, p_2^*$ .

Χρησιμοποιώντας, για την ανάλυση του μη γραμμικού συστήματος, τις τιμές των συντελεστών  $a = 4, b = -3, c = 0$  και  $d = 1$  (Shone, 2002) το μοντέλο γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = 42 - 3p_t \\ q_t^s = p_{t-1}^2 \end{cases}$$

Και η μη γραμμική εξίσωση διαφορών είναι:

$$p_t = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} p_{t-1}^2$$

Τα σταθερά σημεία του συστήματος για  $p_t = p_{t-1} = p^*$  είναι:

$$p_1^* = 1 \text{ και } p_2^* = -4$$

Έτσι, με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου  $p_{t-1}^2$  και για αυτές τις τιμές των συντελεστών, εκτός από το θετικό σημείο ισορροπίας  $p_1^*$  που είχαμε και στο γραμμικό σύστημα, εμφανίζεται και ένα αρνητικό σημείο  $p_2^*$ .

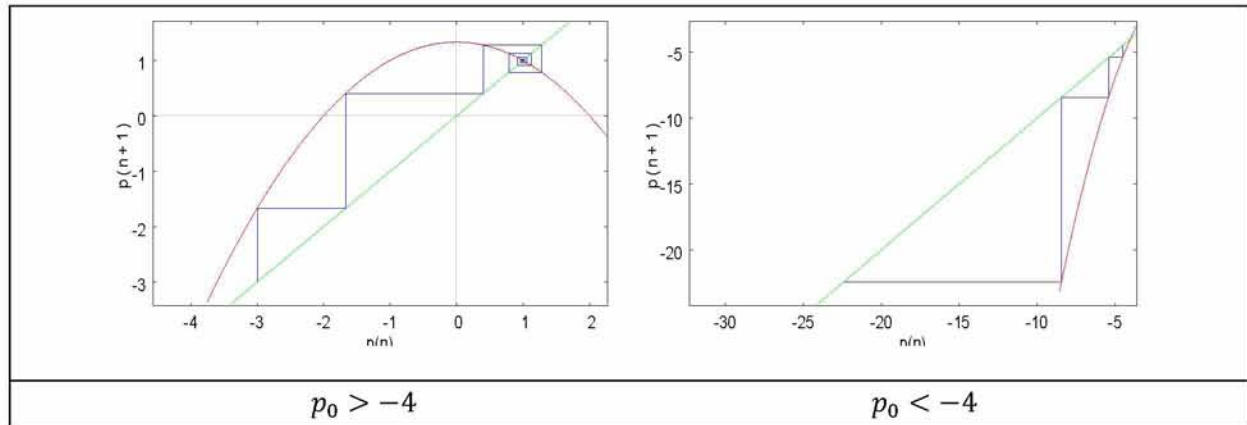
Όπως είδαμε η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας προσδιορίζει την ευστάθεια του σημείου. Βρίσκοντας λοιπόν την πρώτη παράγωγο της εξίσωσης διαφοράς στα σημεία ισορροπίας έχουμε:

$$f'(1) = -2/3 \cong -0.667 \text{ και } f'(-4) = 8/3 \cong 2.667$$

Παρατηρούμε ότι  $-1 < f'(1) < 0$  και  $f'(-4) > 1$ . Συνεπώς για αυτές τις τιμές των συντελεστών το  $p_1^* = 1$  είναι ευσταθές ενώ το  $p_2^* = -4$  είναι ασταθές. Έτσι, σε αντίθεση με

το γραμμικό μοντέλο που είδαμε για  $|b| > d$ , η τιμή δεν θα συγκλίνει για κάθε αρχική συνθήκη  $p_0$  σε τιμή ισορροπίας.

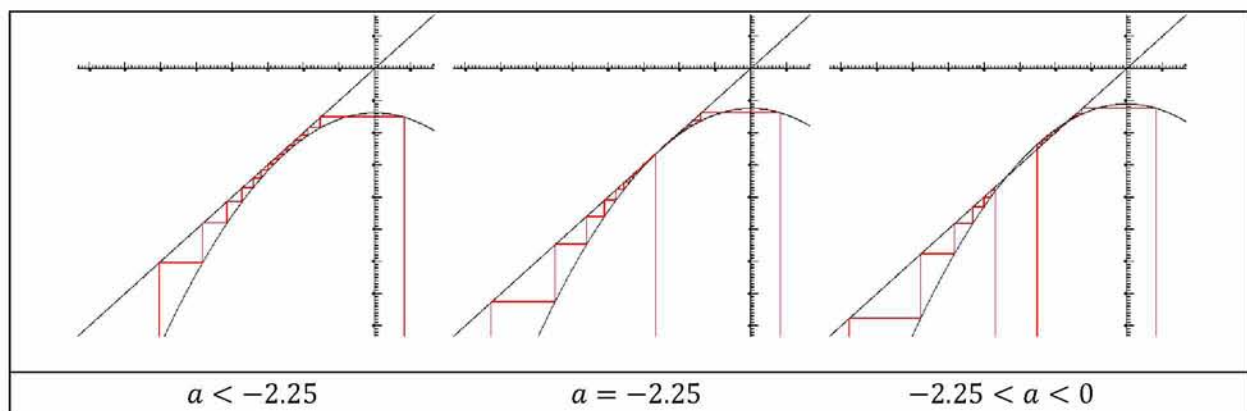
Συγκεκριμένα, η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού αυτού συστήματος για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων απεικονίζεται στα παρακάτω διαγράμματα φάσης:



Για αρχική τιμή  $p_0 > -4$  οι λύσεις θα συγκλίνουν στο θετικό σημείο ισορροπίας  $p_1^* = 1$  με μορφή ιστού αράχνης ενώ για  $p_0 < -4$  θα αποκλίνουν από το αρνητικό σημείο ισορροπίας  $p_2^* = -4$  με μορφή σκάλας.

Επειδή όμως το σύστημα που εξετάζουμε είναι μη γραμμικό θα είχε ενδιαφέρον να δούμε αν μία μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης αλλάζει τις τροχιές του συστήματος. Δίνοντας έτσι διάφορες τιμές στον συντελεστή  $a$  και με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος:

Για αρνητικές τιμές του  $a$  και χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα φάσης παρατηρούμε τα εξής:



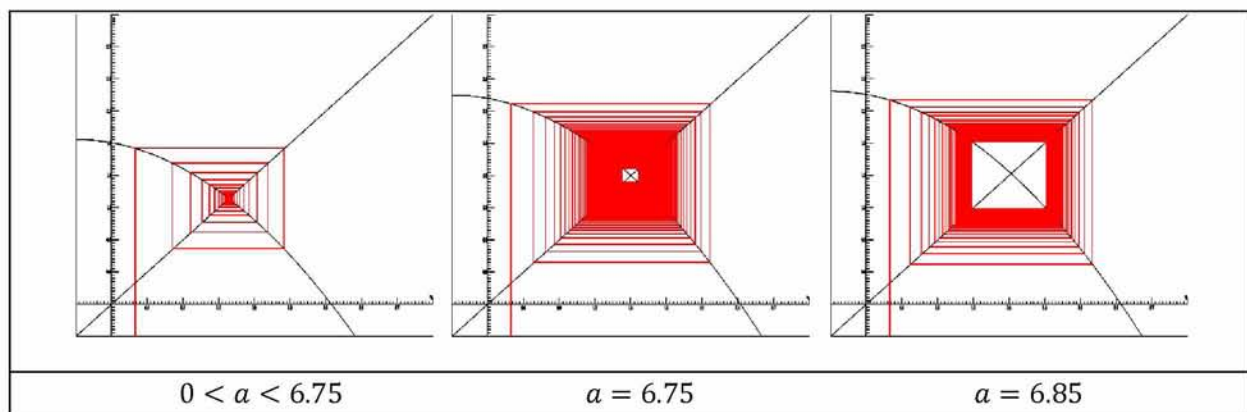
Για  $a < -2.25$  το σύστημα δεν έχει πραγματικά σημεία ισορροπίας και όλες οι λύσεις τείνουν στο άπειρο. Για  $a = -2.25$  εμφανίζεται ένα ουδέτερο σημείο ισορροπίας  $p^* = -1.5$



στο οποίο η κλίση του διαγράμματος φάσης είναι  $f'(-1.5) = 1$  και έτσι οι λύσεις με αρχική συνθήκη  $p_0 > -1.5$  συγκλίνουν σε αυτό, ενώ οι λύσεις για  $p_0 < -1.5$  αποκλίνουν από αυτό τείνοντας στο άπειρο. Για  $-2.25 < a < 0$  το ουδέτερο σημείο ισορροπίας χωρίζεται σε δύο νέα σημεία ισορροπίας, ένα ευσταθές και ένα ασταθές, και έτσι οι λύσεις με αρχικές τιμές κοντά στο ευσταθές σημείο συγκλίνουν σε αυτό με μορφή σκάλας, αφού  $0 < f'(p_1^*) < 1$ , ενώ οι λύσεις με αρχική συνθήκη κοντά στο ασταθές σημείο αποκλίνουν από αυτό με μορφή σκάλας, αφού  $f'(p_2^*) > 1$ . Τα δύο σημεία ισορροπίας απομακρύνονται μεταξύ τους καθώς η τιμή του  $a$  αυξάνεται συνεχώς.

Έτσι λοιπόν για  $a < 0$  καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $a = -2.25$  η καμπύλη του διαγράμματος φάσης εφάπτεται στη γραμμή των  $45^\circ$ ,  $f_{a=-2.25}'(-1.5) = 1$ , και ένα ουδέτερο (neutral) σημείο ισορροπίας εμφανίζεται το οποίο αμέσως μετά χωρίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία ισορροπίας, ένα ελκυστικό (attracting) και ένα απωθητικό (repelling) με αποτέλεσμα η συμπεριφορά των λύσεων να αλλάζει ριζικά. Για  $a = -2.25$  λοιπόν εμφανίζεται στο σύστημα μία διακλάδωση. Και συγκεκριμένα πρόκειται για μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού (saddle – node bifurcation or tangent bifurcation) αφού αλλάζει ο αριθμός των σημείων ισορροπίας του συστήματος (Devaney, 2004).

Συνεχίζοντας να αυξάνουμε την τιμή του  $a$  η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος απεικονίζεται στα παρακάτω διαγράμματα φάσης για αρχική τιμή έστω  $p_0 = 0.5$  για το διάστημα τιμών  $0 < a < 11.2$ :

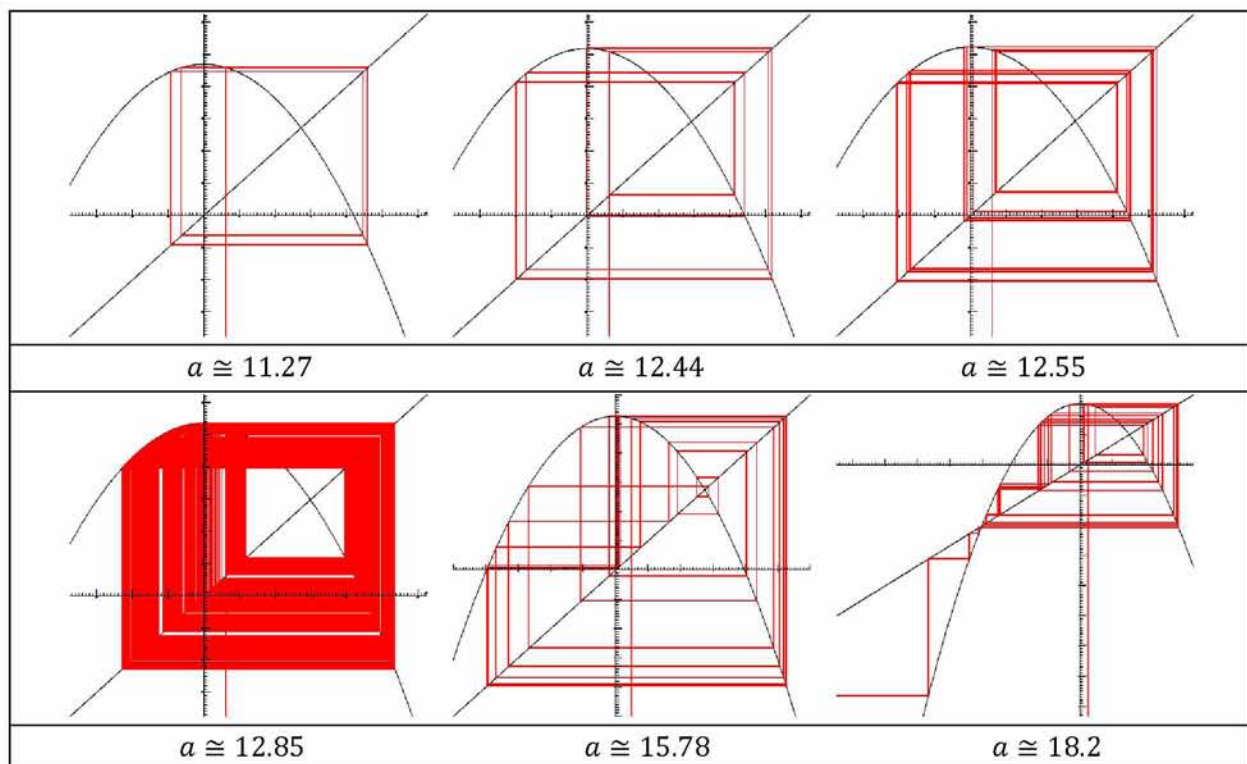


Από τα διαγράμματα φάσης λοιπόν παρατηρούμε ότι για  $0 < a < 6.75$  το σύστημα εξακολουθεί να έχει όπως και πριν δύο σημεία ισορροπίας με το ευσταθές όμως σημείο να είναι πλέον θετικό και με τις λύσεις να συγκλίνουν σε αυτό με μορφή ιστού αράχνης, αφού πλέον είναι  $-1 < f'(p_1^*) < 0$ . Για  $a = 6.75$  η κλίση του διαγράμματος φάσης στο θετικό σημείο ισορροπίας  $p_1^* = 1.5$  γίνεται  $f'(1.5) = -1$  και έτσι το θετικό σημείο ισορροπίας για

αυτήν την τιμή του  $a$  είναι μη υπερβολικό. Μόλις η παράμετρος ξεπεράσει αυτήν την τιμή,  $a > 6.75$ , η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι  $f'(p_1^*) < -1$  και το θετικό σημείο ισορροπίας γίνεται πλέον απωθητικό. Έτσι για  $a > 6.75$  οι λύσεις αποκλίνουν από το θετικό σημείο ισορροπίας με μορφή ιστού αράχνης. Αυτό όμως που παρατηρούμε από το διάγραμμα φάσης μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας (graphical iteration) είναι ότι για  $6.75 < a < 11.2$  οι λύσεις αποκλίνουν από το θετικό σημείο ισορροπίας συγκλίνοντας όμως σε έναν κύκλο δύο περιόδων γύρω από αυτό.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι καθώς η παράμετρος  $a$  διέρχεται από την τιμή  $a = 6.75$  το θετικό σημείο ισορροπίας  $p_1^*$  από ελκυστικό (attracting) γίνεται απωθητικό (repelling) και ταυτόχρονα δημιουργείται ένας (ευσταθής) κύκλος δύο περιόδων (2-period cycle) γύρω από αυτό. Για ακόμη μία φορά λοιπόν καθώς η τιμή του  $a$  διέρχεται από αυτήν την τιμή, η τροχιά των λύσεων του συστήματος αλλάζει σημαντικά και έτσι μία ακόμη διακλάδωση κάνει την εμφάνισή της στο σύστημα. Η διακλάδωση που έχουμε στην περίπτωση αυτή είναι μία διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period doubling bifurcation) από τη στιγμή το  $p_1^*$  αλλάζει από ελκυστής σε απωθητής και η κλίση του διαγράμματος φάσης στο σημείο ισορροπίας είναι  $f_{a=6.75}'(p_1^*) = -1$  (Devaney, 2004).

Τέλος, συνεχίζοντας να αυξάνουμε την τιμή της παραμέτρου, η συμπεριφορά των λύσεων για το διάστημα  $11.2 < a < 18.5$  απεικονίζεται παρακάτω:



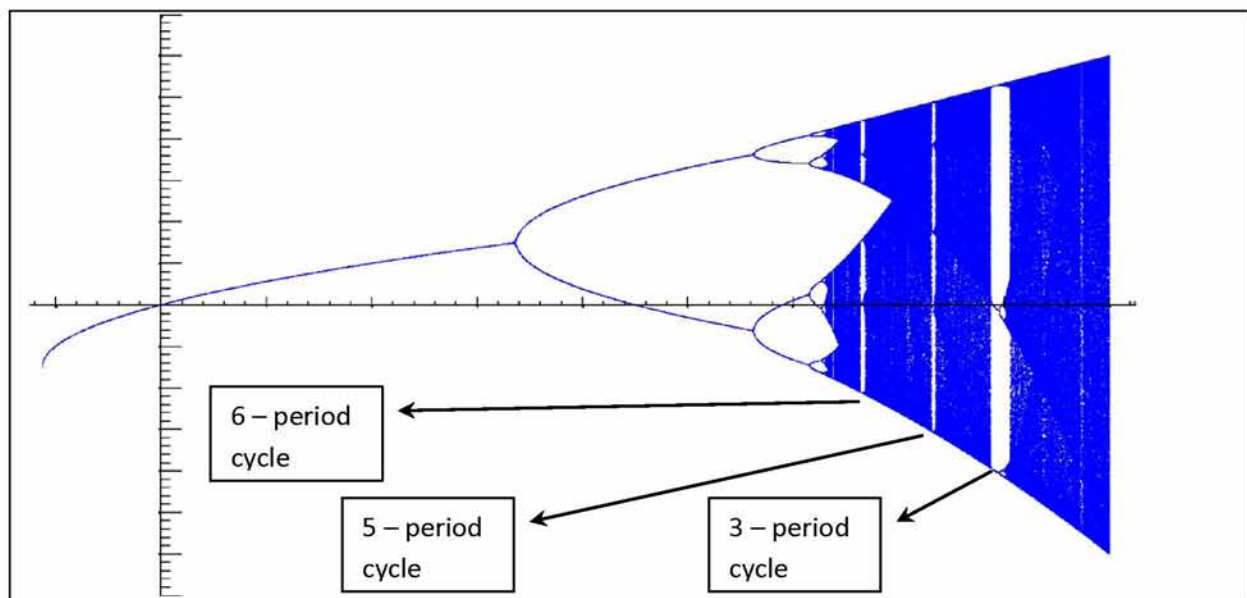
Μετά λοιπόν από τον κύκλο δύο περιόδων που ακολουθεί η λύση για  $6.75 < a < 11.2$  παρατηρούμε τα εξής:

- Για  $11.2 < a < 12.3$ : Ο κύκλος δύο περιόδων από ελκυστικός γίνεται απωθητικός και ταυτόχρονα συνοδεύεται από τη δημιουργία ενός νέου κύκλου που έχει τη διπλάσια περίοδο, ενός ελκυστικού κύκλου τεσσάρων περιόδων. Καθώς λοιπόν η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $a \cong 11.25$  εμφανίζεται στο σύστημα μία δεύτερη διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period doubling bifurcation) και οι λύσεις αποκλίνουν από το θετικό ασταθές σημείο ισορροπίας συγκλίνοντας πλέον σε έναν ελκυστικό κύκλο τεσσάρων περιόδων (4-period cycle).
- Για  $12.3 < a < 12.5$ : Ο ελκυστικός κύκλος τεσσάρων περιόδων γίνεται απωθητικός και ταυτόχρονα δημιουργείται ένας νέος ελκυστικός κύκλος διπλάσιας περιόδου. Έτσι, μία τρίτη διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου συμβαίνει για  $a \cong 12.35$  περίπου και οι λύσεις πλέον ακολουθούν κύκλο οκτώ περιόδων (8-period cycle).
- Για  $12.5 < a < 12.6$ : Με τον ίδιο τρόπο, ο ελκυστικός κύκλος οκτώ περιόδων γίνεται απωθητικός και ένας νέος ελκυστικός κύκλος δεκαέξι περιόδων (16-period cycle) δημιουργείται. Έτσι, για  $a \cong 12.55$  μία τέταρτη διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period doubling bifurcation) εμφανίζεται.
- Για  $12.6 < a < 15.7$ : Μέσα λοιπόν από διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου που συμβαίνουν (16-period cycle, 32-period cycle, 64-period cycle,...) οδηγούμαστε τελικά σε μία κατάσταση όπου δεν μπορούμε να εξηγήσουμε τι ακριβώς συμβαίνει στις τροχιές του συστήματος. Οι τροχιές δηλαδή είναι μη περιοδικές. Για αυτές λοιπόν τις τιμές του  $a$  για τις οποίες δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος λέμε ότι έχουμε χάος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «διπλασιασμοί περιόδου οδηγούν σε χάος» (period – doubling route to chaos), (Blanchard et al., 2006). Η πορεία δηλαδή που ακολουθεί η λύση γύρω από το θετικό ασταθές σημείο ισορροπίας δεν διακρίνεται και για το λόγο αυτό λέμε ότι η τροχιά της λύσης είναι χαοτική.
- Για  $15.7 < a < 16.1$ : Η συμπεριφορά των λύσεων παύει προς το παρόν να είναι χαοτική και για  $a \cong 15.78$  οι τροχιές ακολουθούν κύκλο τριών περιόδων (3-period cycle). Στη συνέχεια για  $a \cong 15.96$  έχουμε διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου, ο ελκυστικός κύκλος τριών περιόδων γίνεται απωθητικός και ένας νέος ελκυστικός κύκλος 6 περιόδων (6-period cycle) δημιουργείται.



- Για  $16.1 < a < 18$ : Οι διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου που συμβαίνουν για ακόμη μία φορά (6-period cycle, 12-period cycle,...) οδηγούν το σύστημα σε χάος.
- Για  $a > 18$ : Η λύσεις από το σημείο αυτό και έπειτα αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας τείνοντας στο άπειρο. Το σύστημα εξακολουθεί πάντα να έχει τα δύο αυτά απωθητικά σημεία ισορροπίας (ένα θετικό και ένα αρνητικό) τα οποία απομακρύνονται μεταξύ τους καθώς η τιμή του  $a$  αυξάνεται συνεχώς.

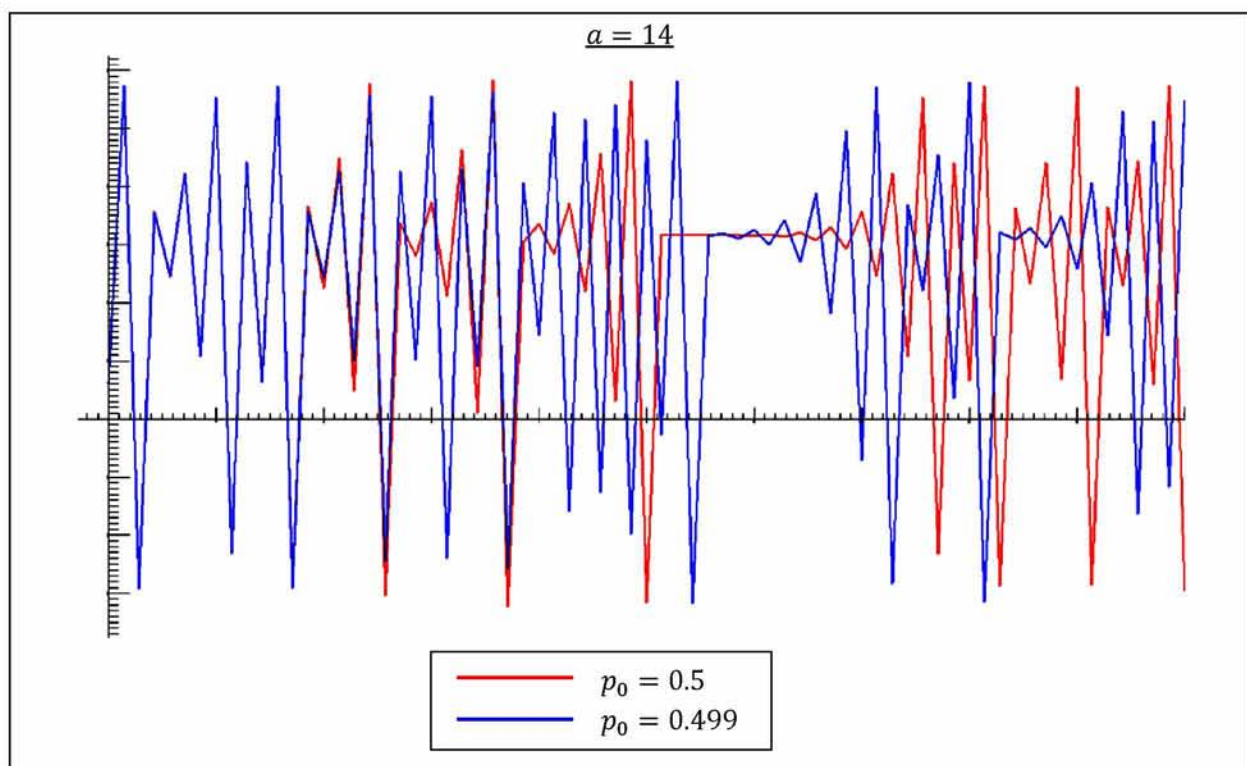
Η συμπεριφορά αυτή των λύσεων του συστήματος καθώς αλλάζει η τιμή του συντελεστή  $a$  απεικονίζεται καλύτερα και πιο συνοπτικά σε ένα διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation diagram). Ένα διάγραμμα διακλάδωσης δείχνει πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας  $p^*$  καθώς αλλάζει η τιμή του συντελεστή  $a$  (Blanchard et al., 2006). Παρακάτω λοιπόν απεικονίζεται το διάγραμμα διακλάδωσης για το διάστημα τιμών του συντελεστή  $-2.25 \leq a \leq 18$  και για αρχική τιμή  $p_0 = 0.5$ :



Όπως περιγράψαμε και παραπάνω λοιπόν έτσι και από το διάγραμμα διακλάδωσης παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή του συντελεστή αυξάνεται στο διάστημα  $-2.25 \leq a \leq 18$ : η τροχιά της λύσης ενώ αρχικά συγκλίνει στο θετικό ευσταθές σημείο ισορροπίας, στη συνέχεια ακολουθεί κύκλο 2 – περιόδων, 4 – περιόδων, 8 – περιόδων, ... κ.ο.κ., μέχρι που τελικά μέσα από διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου η τροχιά της λύσης γίνεται χαοτική. Επιπλέον, παρατηρώντας προσεκτικά στο διάγραμμα την περιοχή με χάος, ενδιάμεσα μπορούμε να δούμε εκείνες τις περιοχές για εκείνες τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η τροχιά ακολουθεί περιοδικούς κύκλους. Αυτό που βλέπουμε δηλαδή είναι ότι, μεταξύ των

περιοχών με χάος η λύση μπορεί να ακολουθεί κύκλο 6 – περιόδων, 5 – περιόδων και 3 – περιόδων όπως βλέπουμε στο διάγραμμα καθώς αυξάνεται η τιμή του  $a$ . Τέλος, για  $a < -2.25$  και  $a > 18$  οι λύσεις αποκλίνουν πηγαίνοντας στο άπειρο.

Το γεγονός ότι μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης οδηγούν στην εμφάνιση χάους συνεπάγεται ότι στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες. Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες σημαίνει ότι, μία πολύ μικρή αλλαγή στην αρχική τιμή  $p_0$  μπορεί να αλλάξει ριζικά την τροχιά της λύσης του συστήματος (Shone, 2002). Κατασκευάζοντας λοιπόν το διάγραμμα της λύσης στο χρόνο για δύο διαφορετικές αρχικές τιμές που απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους, έστω  $p_0 = 0.5$  και  $p_0 = 0.499$ , και για μία την τιμή της παραμέτρου για την οποία εμφανίζεται χάος στο σύστημα, έστω  $a = 14$ , μπορούμε να παρατηρήσουμε την ευαισθησία του μη γραμμικού συστήματος που εξετάζουμε στις αρχικές συνθήκες. Το διάγραμμα απεικονίζεται παρακάτω:



Στο διάγραμμα βλέπουμε τη χρονική διαδρομή της λύσης για  $p_0 = 0.5$  και  $p_0 = 0.499$  για  $T = 70$  χρονικές περιόδους. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι για τις πρώτες 15 περίπου χρονικές περιόδους οι δύο τροχιές ταυτίζονται μεταξύ τους, ενώ από εκεί και έπειτα αρχίζουν να αποκλίνουν η μία από την άλλη όλο και περισσότερο. Βλέπουμε λοιπόν ότι αν και η διαφορά στις αρχικές συνθήκες είναι πολύ μικρή, ωστόσο από ένα σημείο και μετά οι δύο λύσεις ακολουθούν ριζικά διαφορετικές τροχιές. Παρατηρούμε δηλαδή ότι, όταν το σύστημα



εμφανίζει χάος τότε είναι ευαίσθητο στις αρχικές του συνθήκες. Το γιατί τώρα αυτό είναι σημαντικό έχει να κάνει με το γεγονός ότι, δύο λύσεις στην περίπτωση αυτή ακολουθούν ακριβώς ίδιες τροχιές μόνο όταν οι αρχικές συνθήκες είναι ακριβώς ίδιες. Οι αρχικές συνθήκες όμως, στις οποίες ωστόσο βασίζονται οι προβλέψεις, δεν μπορούν να προσδιοριστούν ποτέ με απόλυτη ακρίβεια στην πραγματικότητα. Έτσι, οι μακροπρόθεσμες τουλάχιστον προβλέψεις είναι ανέφικτες. Αυτό συνεπάγεται ότι, οι προβλέψεις για τη συμπεριφορά της τιμής μπορεί να είναι εφικτές μόνο για περιορισμένες χρονικές περιόδους, ενώ για μεγάλα χρονικά διαστήματα είναι αδύνατες (Blanchard et al., 2006).

Η ανάλυση του μη γραμμικού μοντέλου που προηγήθηκε έγινε για την περίπτωση που η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι μικρότερη από την κλίση της καμπύλης ζήτησης,  $|b| > d$ . Η παραπάνω όμως συμπεριφορά των λύσεων καθώς αυξάνεται η τιμή του  $a$  επαναλαμβάνεται για κάθε κλίση της καμπύλης προσφοράς. Έτσι και για τις άλλες δύο περιπτώσεις  $|b| < d$  και  $|b| = d$  η συμπεριφορά της τιμής είναι η ίδια.

Επιπλέον, στο σημείο αυτό λόγω των διαδοχικών διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου που παρατηρούνται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $a$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε και την παγκόσμια σταθερά του Faigenbaum. Σύμφωνα με τη σταθερά αυτή λοιπόν, όταν σε ένα σύστημα καθώς αυξάνεται η τιμή μιας παραμέτρου  $a$  εμφανίζονται διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου της τάξης  $2^k$  περιοδικών κύκλων, τότε ο λόγος  $d_k = (a_k - a_{k-1}) / (a_{k+1} - a_k)$  θα τείνει στην τιμή  $\delta = 4.669202$  καθώς το  $k \rightarrow \infty$ . Θα υπολογίσουμε λοιπόν τον λόγο  $d_k$  χρησιμοποιώντας εκείνες τις τιμές του  $a$  για τις οποίες συμβαίνουν οι έξι πρώτες διακλαδώσεις (Shone, 2002). Από την ανάλυση που προηγήθηκε έχουμε λοιπόν ότι: για  $k = 1$  έχουμε την 1η διακλάδωση που συμβαίνει για την τιμή της παραμέτρου  $a_1 = 6.707$ , για  $k = 2$  έχουμε την 2η διακλάδωση που συμβαίνει για  $a_2 = 11.231$ , για  $k = 3$  έχουμε την 3η διακλάδωση που συμβαίνει για  $a_3 = 12.307$ , για  $k = 4$  είναι την 4η διακλάδωση που συμβαίνει για  $a_4 = 12.545$ , για  $k = 5$  έχουμε την 5η διακλάδωση που εμφανίζεται για  $a_5 = 12.596$  και για  $k = 6$  έχουμε την 6η διακλάδωση που συμβαίνει για  $a_6 = 12.607$ . Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές υπολογίζουμε τον λόγο  $d_k$  ο οποίος απεικονίζεται στο παρακάτω πίνακα για κάθε περίπτωση:

Πίνακας: Υπολογισμός του $d_k$ για $k = 2, 3, 4, 5$					
$k$	1	2	3	4	5
$d_k$		4.2045	4.521	4.6667	4.636

Όπως βλέπουμε λοιπόν από τον πίνακα, καθώς το  $k$  αυξάνεται, ο λόγος  $d_k$  πλησιάζει στην τιμή  $\delta = 4.669202$ . Όπως ήταν αναμενόμενο λοιπόν για αυτό το μη γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, καθώς οι διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου διαδέχονται η μία την άλλη, ο λόγος  $d_k$  τείνει στην παγκόσμια σταθερά του Faigenbaum.

Συνεπώς, από την ανάλυση του παραπάνω μη γραμμικού μοντέλου προσφοράς και ζήτησης, σε αντίθεση με το γραμμικό μοντέλο, παρατηρούμε ότι μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης μπορούν όχι μόνο να αλλάξουν τη συμπεριφορά της τιμής αλλά και να την κάνουν χαοτική. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι όταν μία τόσο απλή μη γραμμική μορφή οδηγεί στην εμφάνιση χάους, μπορούμε να αναλογιστούμε τι αποτελέσματα μπορεί να δώσουν πιο σύνθετες μορφές μη γραμμικότητας που ενδεχομένως επικρατούν στην πραγματικότητα.

### 3.4.2 Μη Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Εναλλακτική Υπόθεση για την Αναμενόμενη Τιμή

Μία άλλη περίπτωση μη γραμμικότητας που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με την εναλλακτική υπόθεση για τον προσδιορισμό της αναμενόμενης τιμής όταν η προσφορά είναι συνάρτηση τόξου εφαπτομένης ως προς την τιμή,  $\arctan$  (Shone, 2002). Η συνάρτηση  $\arctan$  δίνει στην καμπύλη προσφοράς σχήμα S και για το λόγο αυτό είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου η προσφορά για υψηλές και χαμηλές τιμές αυξάνεται αργά<sup>11</sup>. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν το μη γραμμικό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης γίνεται:

$$\begin{cases} q_t^d = a - bp_t \\ q_t^s = \arctan(\mu p_t^e) \end{cases}, \quad b > 0$$

Όπου, σύμφωνα με την εναλλακτική υπόθεση για την αναμενόμενη τιμή που είδαμε παραπάνω η  $p_t^e$  προσδιορίζεται με βάση τη σχέση  $p_t^e = (1 - \lambda)p_{t-1}^e + \lambda p_{t-1}$ . Ενώ αντίστοιχα, η αναμενόμενη τιμή για την επόμενη χρονική περίοδο  $t + 1$  δίνεται από  $p_{t+1}^e = (1 - \lambda)p_t^e + \lambda p_t$ . Η παράμετρος  $\mu$  καθορίζει την κλίση της καμπύλης προσφοράς και έτσι όσο αυξάνεται η τιμή του  $\mu$  τόσο αυξάνεται η κλίση της καμπύλης  $q_s^t$ .

Από συνθήκη ισορροπίας προκύπτει η μη γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών 1ης τάξης:

<sup>11</sup> Σε χαμηλές τιμές η προσφορά μπορεί να αυξάνεται αργά λόγω του κόστους έναρξης και του πάγιου κόστους στην παραγωγή, ενώ σε υψηλές τιμές λόγω των περιορισμών παραγωγικής ικανότητας.

$$q_t^d = q_s^t \Rightarrow a - bp_t = \arctan(\mu p_t^e) \xrightarrow{p_{t+1}^e = (1-\lambda)p_t^e + \lambda p_t}$$

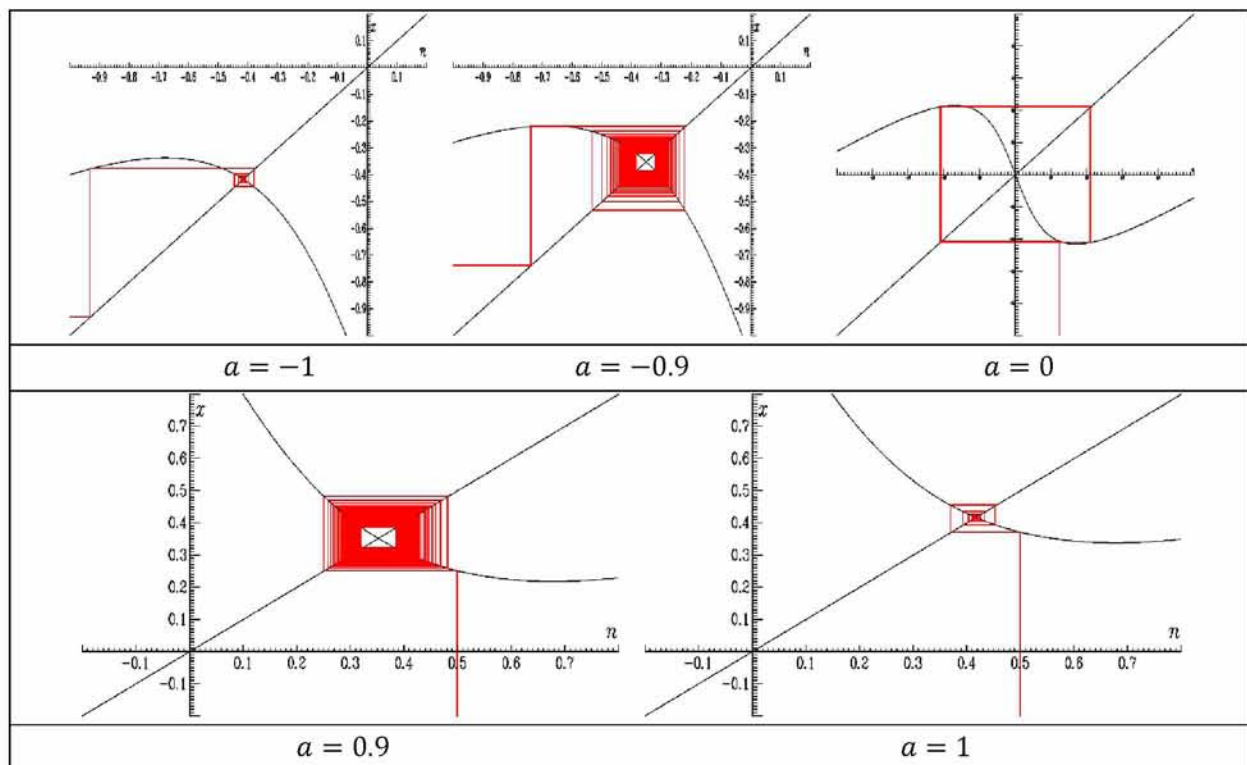
$$p_{t+1}^e = (1-\lambda)p_t^e + \lambda \frac{a}{b} - \lambda \frac{\arctan(\mu p_t^e)}{b}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση διαφορών είναι μία περιοδική εξίσωση για τις αναμενόμενες τιμές. Έτσι για  $p_{t+1}^e = p_t^e = p^*$  δίνει την αναμενόμενη τιμή ισορροπίας  $p^*$ .

Στόχος μας και σε αυτό το μη γραμμικό μοντέλο είναι να δούμε αν τα χαρακτηριστικά του σημείου ισορροπίας αλλάζουν όταν η καμπύλη ζήτησης μετατοπίζεται. Δηλαδή, τι συμβαίνει όταν η τιμή του συντελεστή  $a$  μεταβάλλεται. Για να το δούμε αυτό, με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών  $\lambda, b$  και  $\mu$ , θα δοκιμάσουμε διάφορες τιμές για τη σταθερά  $a$ . Έστω λοιπόν ότι οι τιμές των άλλων συντελεστών είναι  $\lambda = 0.3, b = 0.25$  και  $\mu = 3$  (Shone, 2002). Τότε η μη γραμμική εξίσωση διαφορών για διάφορες τιμές του  $a$  γίνεται:

$$p_{t+1}^e = 0.7p_t^e + \frac{0.3a}{0.25} - \frac{0.3 \arctan(3p_t^e)}{0.25}$$

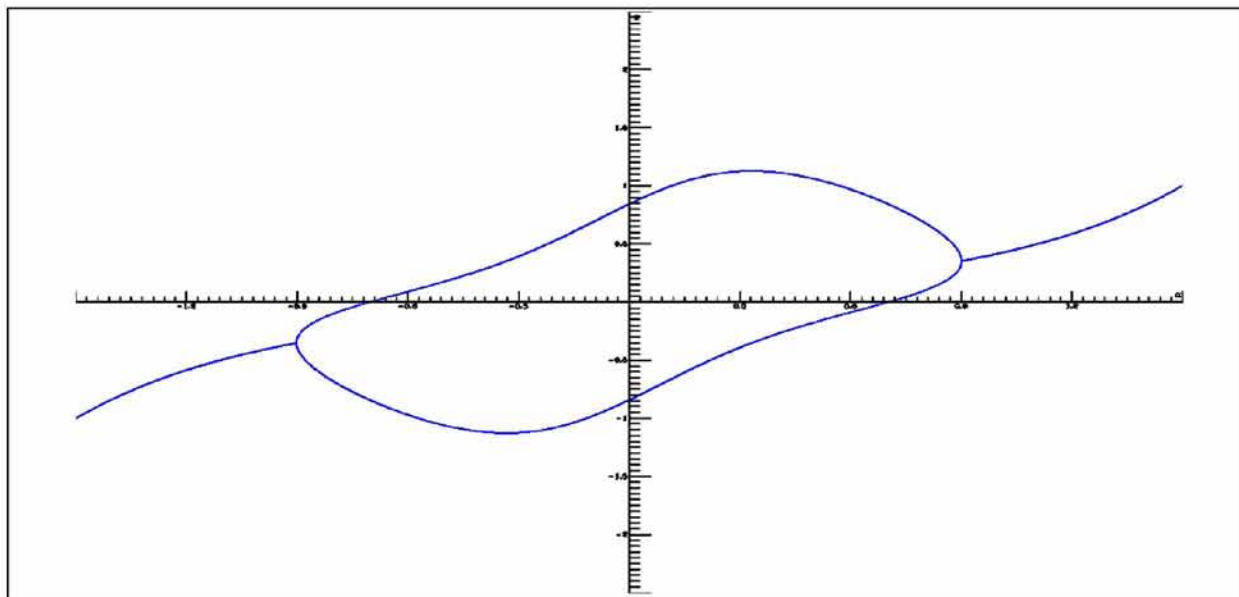
Δίνοντας, όπως και πριν, διάφορες θετικές και αρνητικές τιμές στο συντελεστή  $a$  διακρίνονται δύο βασικές περιπτώσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος οι οποίες απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα φάσης για αρχική τιμή έστω  $p_0 = 0.5$ :



- Για  $a < -0.9$ : Οι λύσεις συγκλίνουν πάντα σε αρνητικό ευσταθές σημείο ισορροπίας (attracting fixed point), αρχικά με μορφή σκάλας και στη συνέχεια με μορφή ιστού αράχνης καθώς η τιμή του  $a$  αυξάνεται.
- Για  $a = -0.9$ : Το αρνητικό σημείο ισορροπίας γίνεται μη υπερβολικό και ένας ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων (2 – period cycle) αρχίζει να εμφανίζεται στο σύστημα.
- Για  $-0.9 < a < 0.9$ : Οι λύσεις ακολουθούν συνεχώς κύκλο δύο περιόδων γύρω από το ασταθές πλέον σημείο ισορροπίας.
- Για  $a = 0.9$ : Το θετικό πλέον σημείο ισορροπίας γίνεται πάλι μη υπερβολικό και οι λύσεις παύουν να ακολουθούν κύκλο δύο περιόδων.
- Για  $a > 0.9$ : Το θετικό σημείο ισορροπίας γίνεται ξανά ελκυστικό και οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτό, αρχικά με μορφή ιστού αράχνης και έπειτα με μορφή σκάλας καθώς αυξάνεται η τιμή του  $a$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι καθώς η παράμετρος  $a$  διέρχεται από την τιμή  $a = -0.9$  το ελκυστικό σημείο ισορροπίας γίνεται απωθητικό και ένας ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων εμφανίζεται στο σύστημα. Ενώ, καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $a = 0.9$  το απωθητικό σημείο ισορροπίας γίνεται ξανά ελκυστικό και ο κύκλος δύο περιόδων εξαφανίζεται. Συνεπώς, για  $a = -0.9$  μία διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period – doubling bifurcation) εμφανίζεται στο σύστημα, ενώ για  $a = 0.9$  έχουμε διακλάδωση μείωσης περιόδου κατά το ήμισυ (period – halving bifurcation).

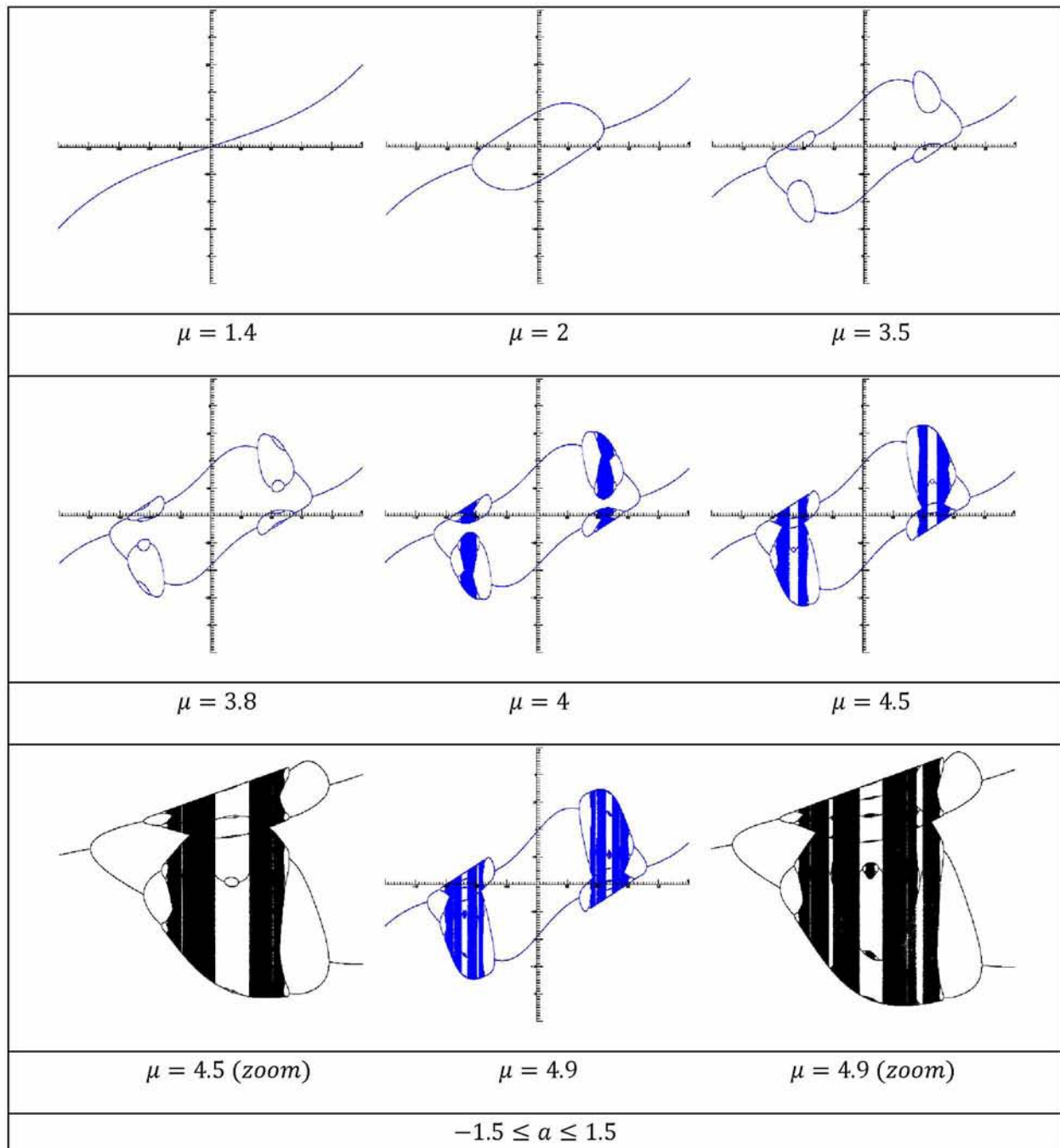
Κατασκευάζουμε επιπλέον και το διάγραμμα διακλάδωσης για το διάστημα τιμών της παραμέτρου  $-1.5 \leq a \leq 1.5$  και για αρχική τιμή  $p_0 = 0.5$ :



Από το διάγραμμα διακλάδωσης, όπως είδαμε και από τα διαγράμματα φάσης, παρατηρούμε ότι μεταξύ των τιμών του  $a$  για τις οποίες οι λύσεις συγκλίνουν σε ευσταθές σημείο ισορροπίας εμφανίζεται περιοδικός κύκλος δύο περιόδων. Έτσι, για  $a < -0.9$  και  $a > 0.9$  η τιμή συγκλίνει σε τιμή ισορροπίας, ενώ για  $-0.9 < a < 0.9$  η τιμή συγκλίνει σε ελκυστικό κύκλο δύο περιόδων με αποτέλεσμα να ταλαντώνεται συνεχώς μεταξύ δύο τιμών  $p_1$  και  $p_2$ . Το διάγραμμα διακλάδωσης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό της συνάρτησης  $\arctan$  χάρη στην οποία το σημείο καμπής της καμπύλης προσφοράς τοποθετείται στην αρχή των αξόνων (Shone, 2002).

Για να δούμε όμως αν αυτή η συμπεριφορά των λύσεων επαναλαμβάνεται για διαφορετικές κλίσεις της καμπύλης προσφοράς, δίνουμε διάφορες τιμές στον συντελεστή  $\mu$  για το διάστημα τιμών  $-1.5 \leq a \leq 1.5$ . Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ότι καθώς η κλίση της καμπύλης προσφοράς αυξάνεται, μετατοπίσεις τις καμπύλης ζήτησης οδηγούν σε διαφορετική συμπεριφορά των λύσεων κάθε φορά. Έτσι, κατασκευάζοντας το παραπάνω διάγραμμα διακλάδωσης για διαφορετικές τιμές του  $\mu$  διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος καθώς αλλάζει η τιμή του  $a$ :





- Για  $0 \leq \mu \leq 1.4$ : Μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης δεν επηρεάζουν την τροχιάς του συστήματος και οι λύσεις συγκλίνουν πάντα σε ευσταθές σημείο ισορροπίας.
- Για  $1.5 \leq \mu \leq 3.1$ : Όπως είδαμε και παραπάνω, όταν το  $\mu$  διέρχεται από την τιμή  $\mu = 1.5$  ένας ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων (2 – period cycle) εμφανίζεται στο σύστημα για  $a \cong -0.9$ .
- Για  $3.2 \leq \mu \leq 3.7$ : Για  $\mu = 3.2$ , όταν η παράμετρος  $a$  διέρχεται από τις τιμές  $a \cong -0.65$  και  $a \cong 0.55$  ο ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων γίνεται απωθητικός και δύο ελκυστικοί κύκλοι τεσσάρων περιόδων (4 – period cycle) εμφανίζονται αντίστοιχα για αυτές τις τιμές του  $a$ .

- Για  $\mu = 3.8$ : Μεταξύ των κύκλων τεσσάρων περιόδων εμφανίζονται ελκυστικοί κύκλοι οκτώ περιόδων (8 – period cycle).
- Για  $3.9 \leq \mu \leq 4.4$ : Οι διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου που συμβαίνουν μεταξύ των κύκλων οκτώ περιόδων (8 – period cycle, 16 – period cycle, 32 – period cycle, ...) οδηγούν στην εμφάνιση χάους (period – doubling route to chaos).
- Για  $4.5 \leq \mu \leq 4.8$ : Ανάμεσα από τις περιοχές με χάος εμφανίζονται κύκλοι πέντε περιόδων (5 – period cycle) μεταξύ των οποίων με διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου έχουμε κύκλους δέκα περιόδων (10 – period cycle).
- Για  $\mu = 4.9$ : Μέσω διαδοχικών διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου που συμβαίνουν μεταξύ του κύκλου δέκα περιόδων (10 – period cycle, 20 – period cycle, ...) οδηγούμαστε πάλι σε χάος.
- Για  $\mu > 4.9$ : Η συμπεριφορά αυτή, διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου που οδηγούν σε χάος, εξακολουθεί να επαναλαμβάνεται καθώς η τιμή του  $\mu$  αυξάνεται συνεχώς.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που η προσφορά είναι  $\arctan$  συνάρτηση ως προς την τιμή, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση μη γραμμικότητας που αναλύσαμε, οι μεταβολές που συμβαίνουν στη συμπεριφορά της τιμής από μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης εξαρτώνται από την κλίση της καμπύλης προσφοράς. Έτσι, για κάθε κλίση της καμπύλης προσφοράς μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης οδηγούν σε διαφορετική συμπεριφορά της τιμής κάθε φορά. Όμως όπως και πριν, καθώς αυξάνεται η κλίση της καμπύλης προσφοράς, οι μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης, μέσω των διαδοχικών διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου που συμβαίνουν, οδηγούν σε χαοτική συμπεριφορά της τιμής. Έτσι και για αυτήν την περίπτωση μη γραμμικότητας, το σύστημα εμφανίζει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες με αποτέλεσμα οι προβλέψεις να είναι εφικτές για περιορισμένες μόνο χρονικές περιόδους.

### 3.5 Μη Γραμμικό Σύστημα Διακριτών Εξισώσεων

#### 3.5.1 Μη Γραμμικό Μοντέλο Προσφοράς και Ζήτησης με Δύο Αλληλένδετες

##### Αγορές

Τα παραπάνω μη γραμμικά μοντέλα αναφέρονται στην περίπτωση μίας μόνο αγοράς. Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυση των μη γραμμικών μοντέλων προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο θα δούμε τι συμβαίνει και στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε περισσότερες αγορές. Για να κάνουμε την ανάλυσή μας όσο το δυνατόν πιο απλή, θα χρησιμοποιήσουμε το απλό μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο αλληλένδετες αγορές που παρουσιάσαμε παραπάνω για την περίπτωση έστω που η συνάρτηση προσφοράς της τροφής είναι μη γραμμική ως προς την τιμή.

Έστω λοιπόν ότι για την αγορά της τροφής αντιμετωπίζουμε την απλή μη γραμμική συνάρτηση προσφοράς:  $s_t^c = c_1 + d_1(p_{t-1}^c)^2$ . Τότε το μη γραμμικό πλέον σύστημα των δύο μη ομογενών εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης δίνεται από:

$$\begin{cases} p_t^c = \frac{a_1 - c_1}{b_1} - \frac{d_1}{b_1}(p_{t-1}^c)^2 \\ p_t^h = \frac{a_2 - c_2}{b_2} - \frac{d_2}{b_2}p_{t-1}^h - \frac{e}{b_2}p_{t-1}^c \end{cases}$$

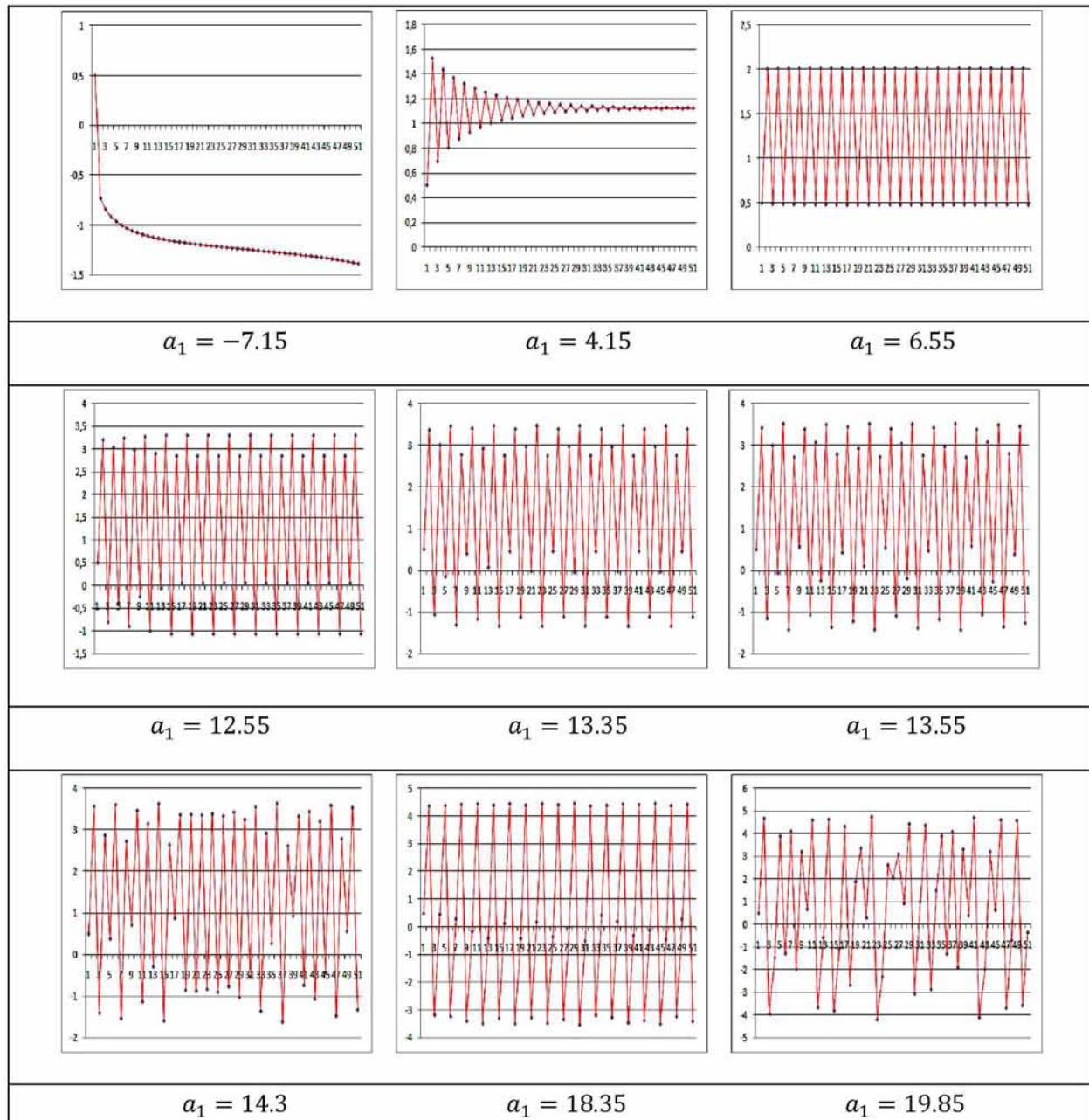
Η μη γραμμικότητα εμφανίζεται στην αγορά της τροφής. Έτσι, όπως και στο απλό μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά που είδαμε παραπάνω, στόχος μας και εδώ είναι να δούμε αν μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης της τροφής αλλάζουν τη συμπεριφορά της τιμής για την τροφή και κατά συνέπεια και τη συμπεριφορά της τιμής για το ζώο. Για να το δούμε αυτό θα δώσουμε διάφορες τιμές στο συντελεστή  $a_1$  με σταθερές τις τιμές των άλλων συντελεστών. Για τους άλλους συντελεστές θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές από την εφαρμογή για το γραμμικό μοντέλο με δύο αλληλένδετες αγορές που είδαμε παραπάνω.

Έτσι, για  $b_1 = 5, c_1 = -4, d_1 = 2$  και  $a_2 = 20, b_2 = 5, c_2 = 2.5, d_2 = 2.5, e = -2$ , το μη γραμμικό διακριτό σύστημα για διάφορες τιμές του συντελεστή  $a_1$  γίνεται:

$$\begin{cases} p_t^c = \frac{a_1 + 4}{5} - 0.4(p_{t-1}^c)^2 \\ p_t^h = 3.5 - 0.5p_{t-1}^h + 0.4p_{t-1}^c \end{cases}, \quad a_1 \geq 0$$

Δίνοντας διάφορες θετικές και αρνητικές τιμές στο  $a_1$  διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις σχετικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού διακριτού συστήματος που

απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα  $p_t^c = f(t)$  για  $T = 50$  χρονικές περιόδους και  $p_0^c = p_0^h = 0.5$ :



- Για  $a_1 < -7.125$ : Το σύστημα δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας και οι λύσεις για κάθε αρχική συνθήκη αποκλίνουν τείνοντας στο άπειρο. Έτσι καθώς το  $t \rightarrow \infty$ :  $p_t^c \rightarrow -\infty$  και  $p_t^h \rightarrow -\infty$ .
- Για  $a_1 \simeq -7.125$ : Ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας  $p_c^* = -1.25$  εμφανίζεται στο σύστημα. Η κλίση της εξίσωσης διαφορών στο σημείο ισορροπίας είναι  $f'(-1.25) = 1$ . Οι λύσεις για  $p_0^c > -1.25$  συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας, ενώ για  $p_0^c < -1.25$  αποκλίνουν από αυτό τείνοντας στο άπειρο.

- Για  $a_1 > -7.125$ : Το μη υπερβολικό σημείο χωρίζεται σε δύο νέα αρνητικά σημεία ισορροπίας  $p_{c_1}^*, p_{c_2}^*$ , ένα ελκυστικό (attracting fixed point) και ένα απωθητικό (repelling fixed point). Καθώς η τιμή της παραμέτρου αυξάνεται τα δύο σημεία απομακρύνονται μεταξύ τους συνεχώς και το ελκυστικό σημείο ισορροπίας γίνεται θετικό.
- Για  $a_1 > 5.35$ : Το θετικό ελκυστικό σημείο ισορροπίας γίνεται απωθητικό και ένας ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων (2 – period cycle) εμφανίζεται στο σύστημα.
- Για  $a_1 > 11.65$ : Ο ελκυστικός κύκλος δύο περιόδων γίνεται απωθητικός και οι λύσεις πλέον συγκλίνουν σε ελκυστικό κύκλο τεσσάρων περιόδων (4 – period cycle).
- Για  $a_1 > 13.15$ : Ο ελκυστικός κύκλος τεσσάρων περιόδων γίνεται απωθητικός και οι λύσεις πλέον ακολουθούν κύκλο οκτώ περιόδων (8 – period cycle) γύρω από το θετικό σημείο ισορροπίας.
- Για  $a_1 > 13.45$ : Ο ελκυστικός κύκλος οκτώ περιόδων γίνεται απωθητικός και οι λύσεις ακολουθούν κύκλο δεκαέξι περιόδων (16 – period cycle), ο οποίος στη συνέχεια γίνεται και αυτός απωθητικός και οι λύσεις ακολουθούν κύκλο τριανταδύο περιόδων (32 – period cycle), ... κ.ο.κ.
- Για  $a_1 > 13.55$ : Η διαδικασία αυτή διπλασιασμού περιόδου ακολουθείται συνεχώς μέχρι που τελικά το σύστημα οδηγείται σε χάος (period doubling route to chaos).
- Για  $a_1 > 17.95$ : Η συμπεριφορά των λύσεων παύει προς το παρόν να είναι χαοτική και οι λύσεις συγκλίνουν σε ελκυστικό κύκλο τριών περιόδων (3 – period cycle).
- Για  $a_1 > 18.15$ : Ο ελκυστικός κύκλος τριών περιόδων γίνεται απωθητικός και ένας κύκλος έξι περιόδων (6 – period cycle) εμφανίζεται στο σύστημα. Στη συνέχεια, ο κύκλος έξι περιόδων δίνει τη θέση του σε έναν ελκυστικό κύκλο δώδεκα περιόδων (12 – period cycle), ..., κ.ο.κ.
- Για  $a_1 > 18.25$ : Όπως και πριν, οι διαδοχικοί διπλασιασμοί περιόδου οδηγούν το σύστημα σε χάος.
- Για  $a_1 > 21$ : Οι λύσεις αποκλίνουν από το σύστημα τείνοντας στο άπειρο.

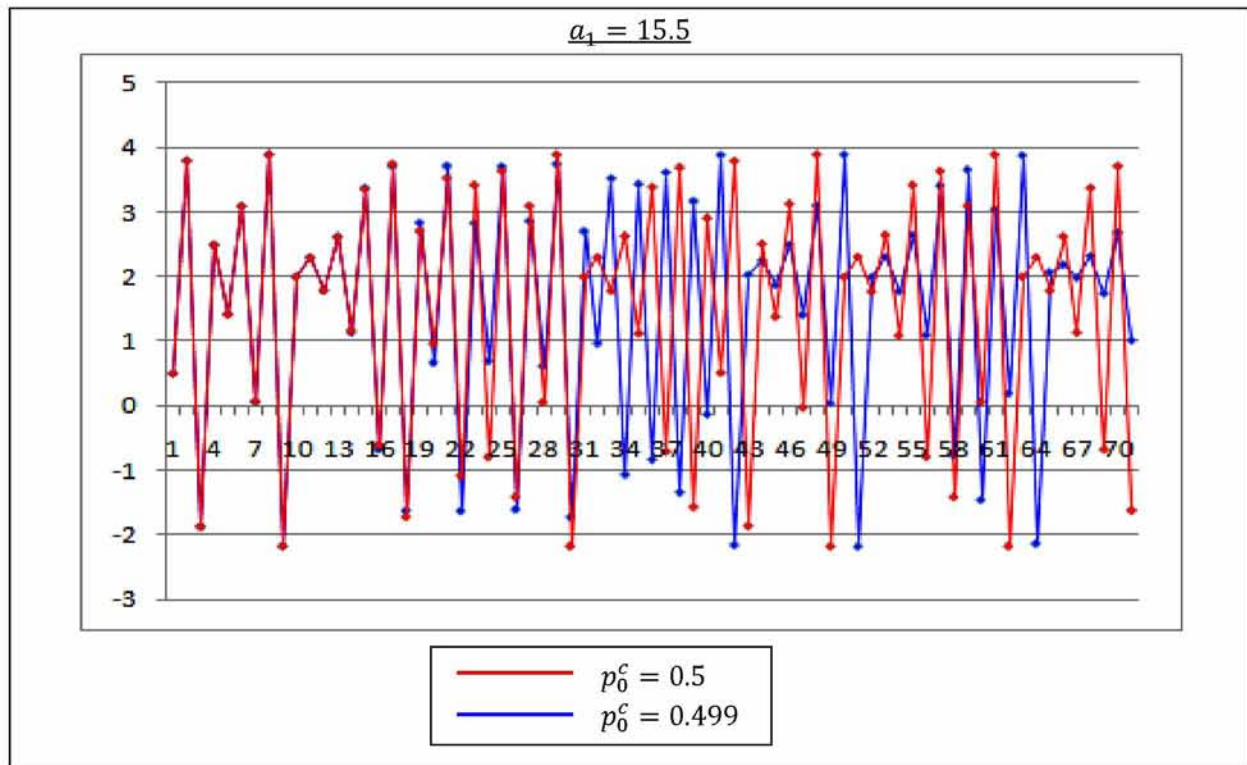
Παρατηρούμε λοιπόν ότι, όπως και στο απλό μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά που είδαμε παραπάνω, έτσι και εδώ καθώς η παράμετρος διέρχεται αρχικά από την τιμή  $a_1 \simeq -7.125$  ο αριθμός των σημείων ισορροπίας αλλάζει (από κανένα σημείο ισορροπίας εμφανίζονται δύο νέα σημεία – ένα ελκυστικό και ένα απωθητικό) και μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού (saddle – node bifurcation or tangent bifurcation) εμφανίζεται στο σύστημα. Ενώ στη συνέχεια, καθώς η παράμετρος διέρχεται από την τιμή  $a_1 \simeq 5.35$  το ελκυστικό σημείο



ισορροπίας γίνεται απωθητικό, οι λύσεις ακολουθούν κύκλο δύο περιόδων γύρω από αυτό και έτσι μία διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period doubling bifurcation) εμφανίζεται στο σύστημα. Καθώς όμως η τιμή της παραμέτρου αυξάνεται συνεχώς και διέρχεται από τις τιμές  $a_1 \approx 11.65, a_1 \approx 13.15, a_1 \approx 13.45, \dots$  οι διαδοχικές διακλαδώσεις που συμβαίνουν κατά τις οποίες η περιοδικότητα των τροχιών διπλασιάζεται κάθε φορά οδηγούν το σύστημα σε χάος (period – doubling route to chaos). Τέλος, για  $a_1 \approx 17.95$  οι λύσεις ακολουθούν κύκλο τριών περιόδων και μέσα από μία νέα σειρά διαδοχικών διπλασιασμών διπλασιασμού περιόδου που ακολουθούν οδηγούν ξανά στην εμφάνιση χάους.

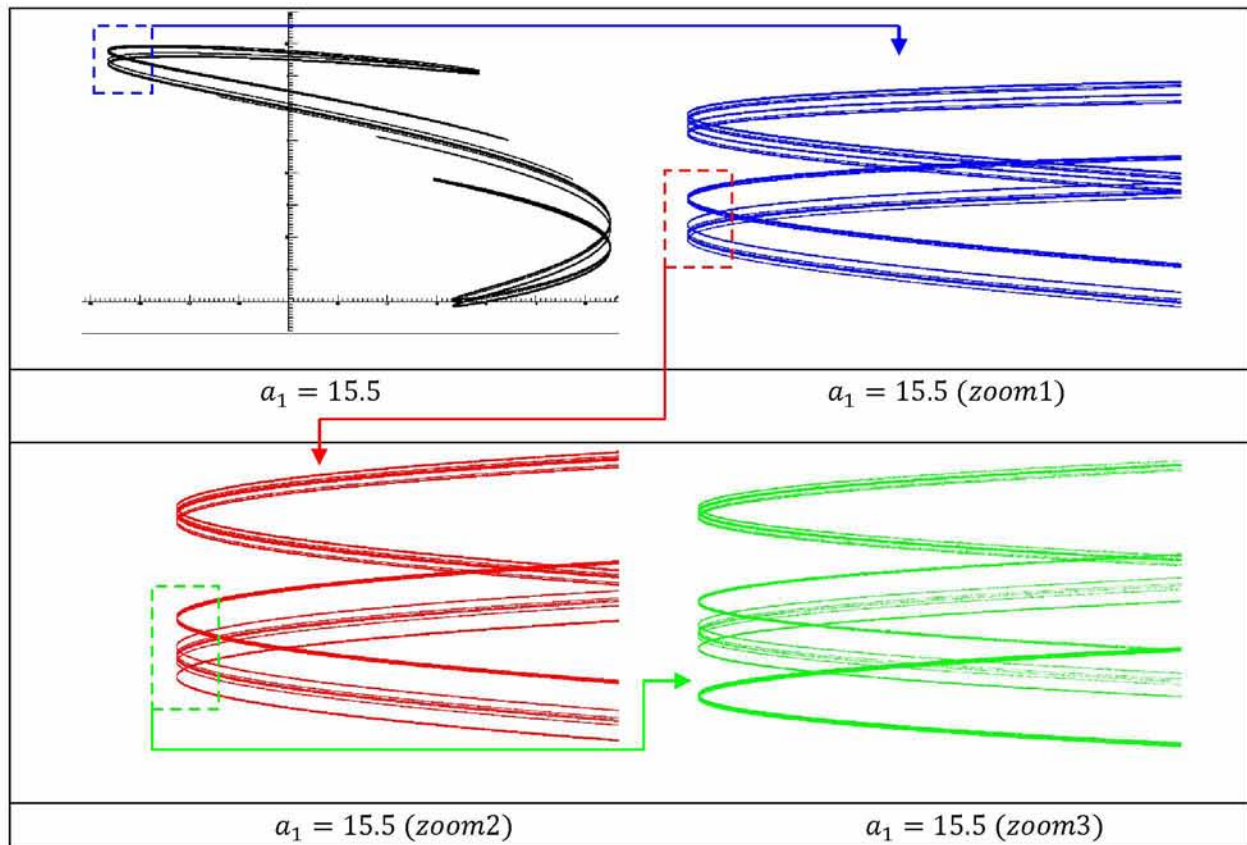
Η παραπάνω συμπεριφορά των λύσεων καθώς αλλάζει η τιμή της παραμέτρου  $a_1$  επαναλαμβάνεται, όπως και στο απλό μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά, για κάθε κλίση της καμπύλης προσφοράς  $d_1$ . Ενώ, η ίδια συμπεριφορά των λύσεων καθώς αλλάζει η τιμή της παραμέτρου και για τις ίδιες τιμές του  $a_1$  επαναλαμβάνεται και για την αγορά του ζώου, αφού η συμπεριφορά της τιμής του ζώου επηρεάζεται από τη συμπεριφορά της τιμής της τροφής του. Έτσι παρατηρούμε ότι, έστω και για αυτήν την απλή μη γραμμική μορφή, μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης της τροφής οδηγούν σε χαοτική συμπεριφορά της τιμής της τροφής και συνεπώς και σε χαοτική συμπεριφορά στην τιμή του ζώου. Οπότε, η ύπαρξη μη γραμμικότητας στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης για δύο αλληλένδετες αγορές οδηγεί στην εμφάνιση χάους, με αποτέλεσμα η συμπεριφορά των τιμών και στις δύο αγορές να είναι απρόβλεπτη λόγω της ευαισθησίας του συστήματος στις αρχικές συνθήκες.

Κατασκευάζοντας όπως και στο απλό μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά το διάγραμμα  $p_t^x = f(t)$  για διαφορετικές αρχικές τιμές που απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους μπορούμε να διαπιστώσουμε την ευαισθησία του μη γραμμικού διακριτού συστήματος στις αρχικές συνθήκες. Το διάγραμμα απεικονίζεται παρακάτω για  $T = 70$  χρονικές περιόδους, για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες έστω  $p_0^x = 0.5$  και  $p_0^x = 0.499$  και για τιμή της παραμέτρου έστω  $a_1 = 15.5$  για την οποία στο σύστημα εμφανίζεται χάος:



Από το διάγραμμα λοιπόν βλέπουμε ότι οι δύο γειτονικές τροχιές ταυτίζονται μόνο για τις πρώτες  $T = 20$  χρονικές περιόδους ενώ από εκεί και έπειτα αποκλίνουν συνεχώς εκθετικά μεταξύ τους. Δηλαδή, αν και οι αρχικές τιμές  $p_0^c = 0.5$  και  $p_0^c = 0.499$  διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους, η ύπαρξη χάους για  $a_1 = 15.5$  έχει ως αποτέλεσμα την ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές του συνθήκες. Έτσι, όπως και στο μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά, και εδώ η αδυναμία προσδιορισμού των αρχικών συνθηκών με απόλυτη ακρίβεια έχει σαν αποτέλεσμα την αδυναμία της προβλεψιμότητας του συστήματος για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Μέχρι το σημείο αυτό διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης με δύο αλληλένδετες αγορές για αυτή τη μορφή μη γραμμικότητας οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα που είδαμε και παραπάνω στο μη γραμμικό μοντέλο για μία αγορά. Κατασκευάζοντας όμως το διάγραμμα  $p_t^c = f(p_t^h)$  για τιμή της παραμέτρου έστω  $a_1 = 15.5$  για την οποία έχουμε χάος παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Από τη στιγμή που για  $a_1 = 15.5$  έχουμε χάος στο σύστημα αυτό που θα περιμέναμε είναι οι διαδοχικές επαναλήψεις στο διάγραμμα  $p_t^c = f(p_t^h)$  να καλύπτουν όλη την επιφάνεια του χάρτη. Αντιθέτως όμως, αυτό που παρατηρούμε είναι ότι για κάθε αρχική συνθήκη,  $p_0^c, p_0^h$ , όλες οι λύσεις του συστήματος συγκλίνουν σε αυτήν την παράξενη τροχιά που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Έτσι λοιπόν παρατηρούμε ότι, αν και οι λύσεις του συστήματος για αρχικές συνθήκες που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ακολουθούν τελείως διαφορετικές τροχιές, ωστόσο όλες οι λύσεις για κάθε αρχική συνθήκη συγκλίνουν στην παραπάνω παράξενη τροχιά. Έτσι, για κάθε αρχική συνθήκη οι λύσεις του συστήματος συγκλίνουν με διαφορετικό τρόπο η κάθε μία σε αυτήν την παράξενη τροχιά (Shone, 2002).

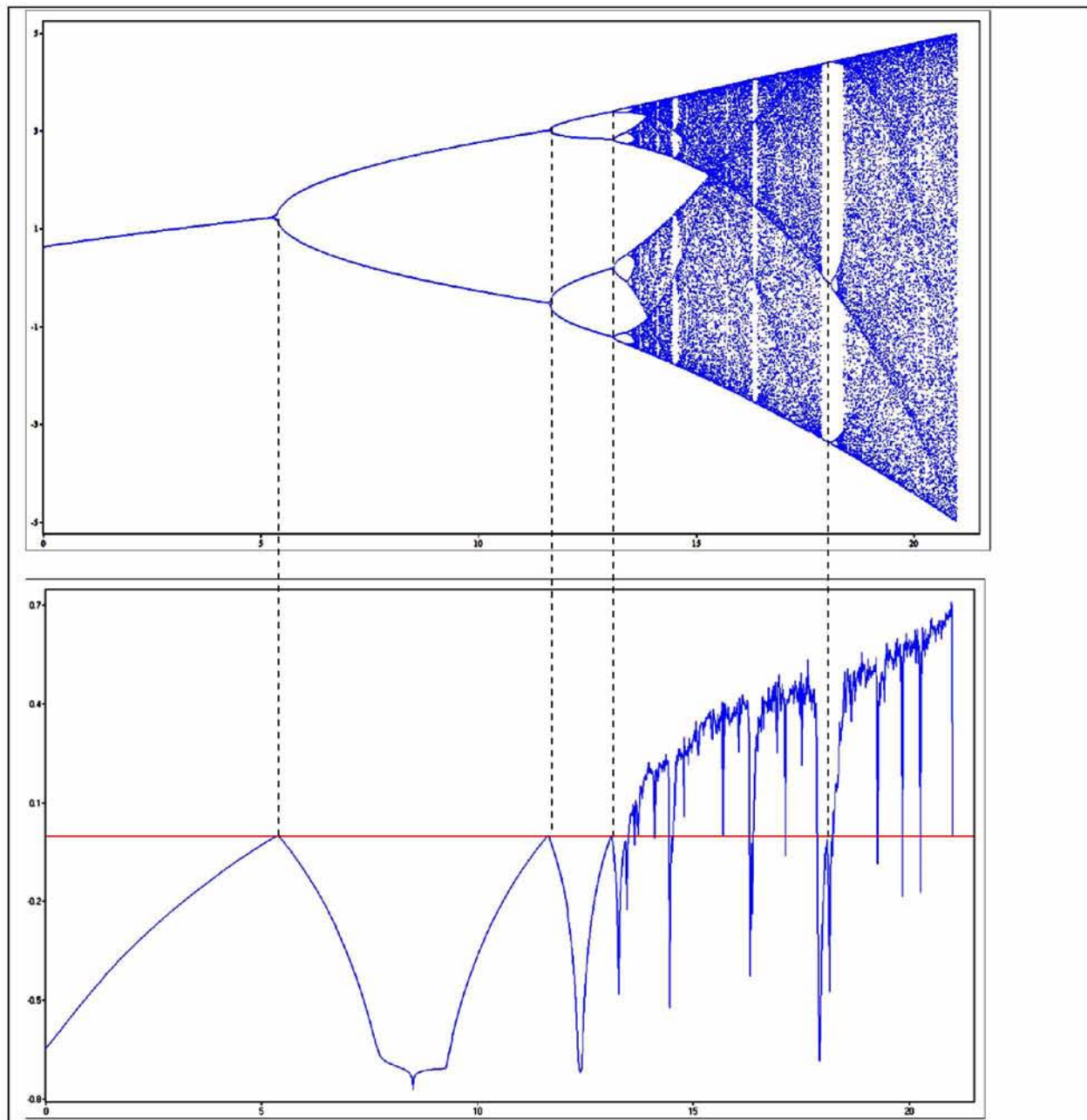
Μεγεθυνόντας όμως διάφορα τμήματα αυτής της παράξενης τροχιάς συνεχώς όλο και περισσότερο διαπιστώνουμε ότι, το αρχικό γεωμετρικό σχήμα επαναλαμβάνεται συνεχώς για κάθε επίπεδο μεγέθυνσης. Το χαρακτηριστικό αυτό του γεωμετρικού σχήματος, ότι δηλαδή το αρχικό γεωμετρικό σχήμα επαναλαμβάνεται συνεχώς για κάθε βαθμό μεγέθυνσης, ονομάζεται αυτό – ομοιότητα και τα γεωμετρικά σχήματα με αυτό το χαρακτηριστικό ονομάζονται φράκταλ (fractal), (Van Der Weele, 2007). Λόγω λοιπόν της φράκταλ δομής αυτής της παράξενης τροχιάς στην οποία συγκλίνουν όλες οι λύσεις του συστήματος, η τροχιά αυτή ονομάζεται παράξενος ελκυστής (strange attractor). Ενώ το γεγονός ότι οι λύσεις

για κάθε αρχική συνθήκη συγκλίνουν με διαφορετικό τρόπο σε αυτόν τον παράξενο ελκυστή σημαίνει ότι, ο ελκυστής είναι ευαίσθητος στις αρχικές συνθήκες και για το λόγο αυτό είναι και χαοτικός (chaotic attractor), (Shone, 2002).

Είδαμε λοιπόν ότι, δύο τροχιές με αρχικές συνθήκες που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους μπορούν να παραμένουν κοντά η μία στην άλλη μόνο για μικρό χρονικό διάστημα, ενώ από ένα σημείο και μετά αποκλίνουν εκθετικά μεταξύ τους. Ένας δείκτης μέτρησης αυτής της απόκλισης των τροχιών είναι οι εκθέτες Lyapunov (Van Der Weele, 2007). Το πρόσημο των εκθετών δείχνει αν δύο τροχιές με κοντινές αρχικές συνθήκες συγκλίνουν ή αποκλίνουν εκθετικά μεταξύ τους. Θετικοί εκθέτες Lyapunov δείχνουν ότι δύο τροχιές κοντά η μία στην άλλη αποκλίνουν εκθετικά μεταξύ τους. Αρνητικοί εκθέτες από την άλλη δείχνουν ότι οι δύο τροχιές συγκλίνουν μεταξύ τους (Shone, 2002). Η ύπαρξη ενός και μόνο θετικού εκθέτη Lyapunov συνεπάγεται ότι το σύστημα είναι χαοτικό (ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες). Τέλος, όσο μεγαλύτερος είναι ένας εκθέτης Lyapunov τόσο μειώνεται η δυνατότητα πρόβλεψης του συστήματος.

Παρακάτω λοιπόν απεικονίζεται το διάγραμμα του εκθέτη Lyapunov,  $\lambda = f(a_1)$ , μαζί με το διάγραμμα διακλάδωσης για διάφορες τιμές της παραμέτρου στο διάστημα  $0 \leq a_1 \leq 21$ :





Από τα παραπάνω διαγράμματα λοιπόν παρατηρούμε ότι:

- Για εκείνες τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος δεν είναι χαοτική, ο εκθέτης Lyapunov είναι αρνητικός  $\lambda(a_1) < 0$  και οι τροχιές συγκλίνουν πάντα μεταξύ τους. Η προβλέψεις του συστήματος για αυτές τις τιμές της παραμέτρου είναι εφικτές για άπειρο χρονικό διάστημα.
- Για τιμές του  $a_1$  για τις οποίες η συμπεριφορά των λύσεων είναι χαοτική, ο εκθέτης Lyapunov είναι θετικός  $\lambda(a_1) > 0$  και δύο τροχιές κοντά η μία στην άλλη αποκλίνουν εκθετικά μεταξύ τους. Για αυτές τις τιμές της παραμέτρου η προβλεψιμότητα του συστήματος γίνεται αδύνατη μετά από μικρό χρονικό διάστημα.



- Ενώ, εκείνες οι τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες εμφανίζονται διακλαδώσεις στο σύστημα, αντιστοιχούν σε μηδενικό εκθέτη Lyapunov  $\lambda(a_1) = 0$ .

Από το διάγραμμα επίσης παρατηρούμε ότι, η μέγιστη τιμή που παίρνει ο εκθέτης Lyapunov είναι  $\lambda \simeq 0.72$  για  $a_1 \simeq 21$ . Αυτό σημαίνει ότι, για αυτήν την τιμή της παραμέτρου,  $a_1 \simeq 21$ , έχουμε τη μικρότερη δυνατότητα προβλεψιμότητας για το σύστημα.

Από την ανάλυση λοιπόν των παραπάνω μη γραμμικών μοντέλων προσφοράς και ζήτησης παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η εισαγωγή μη γραμμικότητας οδηγεί στην εμφάνιση χάους. Δηλαδή, ενώ το σύστημα που εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση είναι ντετερμινιστικό – περιγράφεται δηλαδή από συγκεκριμένες εξισώσεις διαφορών όπου χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες οι προβλέψεις για τις επόμενες τιμές είναι δυνατές για άπειρο χρονικό διάστημα – ωστόσο η ύπαρξη χάους που συνεπάγεται ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές συνθήκες και η αδυναμία προσδιορισμού των αρχικών συνθηκών με απόλυτη ακρίβεια (λόγω των σφαλμάτων που γίνονται κατά τη διαδικασία μέτρησης) έχει ως αποτέλεσμα η προβλεψιμότητα για μεγάλα χρονικά διαστήματα να είναι αδύνατη. Και αυτό συμβαίνει διότι το αρχικό σφάλμα, που δημιουργείται από τη μικρή διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στην μετρήσιμη και στην πραγματική αρχική τιμή, μεγεθύνεται συνεχώς λόγω της ύπαρξης του χάους που κάνει τις τροχιές να αποκλίνουν εκθετικά μεταξύ τους με αποτέλεσμα η προβλεψιμότητα του συστήματος μετά από κάποιο μικρό χρονικό διάστημα να γίνεται αδύνατη.

## Κεφάλαιο 4

### 4. Συμπεράσματα

Αναφορικά με τη μελέτη του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή χρόνο προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν στην αγορά έχουμε μόνο ένα αγαθό ή δύο αγαθά υποκατάστατα μεταξύ τους τότε, για γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, οι τιμή του κάθε αγαθού συγκλίνει πάντα σε μοναδική τιμή ισορροπίας.
- Όταν η αγορά που αντιμετωπίζουμε αποτελείται από δύο αγαθά συμπληρωματικά μεταξύ τους ή τρία αγαθά (δύο υποκατάστατα και ένα τρίτο συμπληρωματικό ως προς το ένα ή και τα δύο άλλα αγαθά) τότε, για γραμμικές συναρτήσεις και για κάποιες τιμές των παραμέτρων, το σύστημα μπορεί να εμφανίσει και σαγματικό σημείο ισορροπίας. Σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή του κάθε αγαθού άλλες φορές μπορεί να συγκλίνει σε τιμή ισορροπίας και άλλες φορές μπορεί να αποκλίνει από αυτή τείνοντας στο άπειρο.
- Τέλος είδαμε ότι, για διάφορες απλές μορφές μη γραμμικότητας, η ευστάθεια του συστήματος για δύο υποκατάστατα αγαθά διαταράσσεται. Συγκεκριμένα παρατηρήσαμε ότι, πειράζοντας τον συντελεστή του μη γραμμικού όρου σε κάθε περίπτωση εμφανίζεται πάντα μία διακλάδωση σάγματος – δεσμού. Έτσι, για μία αγορά με δύο αγαθά υποκατάστατα μεταξύ τους, όταν υπάρχει μη γραμμικότητα τότε το σύστημα μπορεί να έχει είτε τρεις τιμές ισορροπίας (saddle – sink – saddle ή sink – saddle – sink), είτε δύο τιμές ισορροπίας (sink – saddle), είτε μία μόνο τιμή ισορροπίας (sink ή saddle), ή ακόμα και καμία τιμή ισορροπίας. Έτσι, η εισαγωγή μη γραμμικότητας στο σύστημα για μία αγορά με δύο υποκατάστατα αγαθά έχει ως αποτέλεσμα οι τιμές των δύο αγαθών να μην συγκλίνουν πάντα σε κατάσταση ισορροπίας σε αντίθεση με το γραμμικό μοντέλο.

Ενώ από τη μελέτη προσφοράς και ζήτησης σε διακριτό χρόνο τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

- Τόσο για την απλή περίπτωση μιας αγοράς με ένα αγαθό (όπου η αναμενόμενη τιμή προσδιορίζεται με βάση την τιμή της προηγούμενης μόνο χρονικής περιόδου) όσο και για την περίπτωση δύο αλληλένδετων αγορών τροφής - ζώου, για γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης, είδαμε ότι η τιμή του αγαθού μπορεί είτε να

συγκλίνει σε τιμή ισορροπίας, είτε να αποκλίνει από αυτήν τείνοντας στο άπειρο, είτε να ακολουθεί κύκλο δύο περιόδων γύρω από αυτή, ανάλογα με το λόγο των κλίσεων των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης.

- Για την απλή γραμμική περίπτωση μιας αγαράς με ένα αγαθό είδαμε επιπλέον ότι, η επιβολή ενός ανώτατου ορίου τιμών στην αγορά σχηματίζει έναν κύκλο δύο περιόδων γύρω από την τιμή ισορροπίας με αποτέλεσμα να περιορίζεται αναγκαστικά η απόκλιση της τιμής και έτσι με τον τρόπο αυτό να διορθώνεται το πρόβλημα της αστάθειας του συστήματος.
- Για την πιο σύνθετη περίπτωση όπου η αναμενόμενη τιμή προσδιορίζεται με βάση την τιμή και των δύο προηγούμενων περιόδων είδαμε ότι, εκτός από κύκλο δύο περιόδων, η τιμή του αγαθού μπορεί να ακολουθεί και κύκλο τεσσάρων περιόδων γύρω από την τιμή ισορροπίας ή ακόμα και ημιπεριοδικό κύκλο.
- Στην περίπτωση τώρα που για μία αγορά με ένα αγαθό η συνάρτηση προσφοράς είναι μη γραμμική ως προς την τιμή είδαμε ότι, μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της τιμής ισορροπίας και μέσω διαδοχικών διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου μπορεί να οδηγήσουν στην εμφάνιση χάους, με αποτέλεσμα η πρόβλεψη τις τιμής για μεγάλα χρονικά διαστήματα να είναι αδύνατη.
- Τέλος, η μη γραμμικότητα στη συνάρτηση προσφοράς της τροφής, για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε δύο αλληλένδετες αγορές ζώου – τροφής, οδηγεί και αυτή μέσα από διαδοχικούς διπλασιασμούς περιόδου σε χαοτική συμπεριφορά της τιμής και για τις δύο αγορές (από μετατοπίσεις της καμπύλης ζήτησης της τροφής του ζώου). Το ενδιαφέρον όμως που παρατηρήσαμε εδώ είναι η ύπαρξη μιας κρυμμένης δομής στο χάος – μιας φράκταλ δομής. Ενώ δηλαδή η συμπεριφορά της τιμής είναι χαοτική, καταλήγει ωστόσο να συγκλίνει πάντα σε ένα παράξενο γεωμετρικό σχήμα – έναν παράξενο ελκυστή.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω μελέτη του μοντέλου προσφοράς και ζήτησης σε συνεχή και διακριτό χρόνο συμπεραίνουμε ότι, μη γραμμικές μορφές του μοντέλου μπορεί να οδηγήσουν σε χαοτική συμπεριφορά της τιμής. Και αυτό είναι σημαντικό διότι στην περίπτωση τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης τα οποία συχνά χρησιμοποιούνται για εμπειρικές μελέτες μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

## Βιβλιογραφία

- Blanchard P. and Devaney L.R. and Hall R.G. (2006). *Differential Equations*, Thomson Brooks/Cole.
- Devaney L.R. and Hirsch W.M. and Smale S. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, Elsevier, USA.
- Ezekiel M. (1938). The Cobweb Theorem, *The Quarterly Journal of Economics*, **52**, 255-280.
- Gandolfo G. (1997). *Economic Dynamics*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Goodwin M.R. (1947). Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets Having Production Lags, *Econometrica*, **15**, 181-204.
- Kaldor N. (1934). A Classifactory Note on the Determinateness of Equilibrium, *The Review of Economic Studies*, **1**, 122-136.
- Medio A. (1992). *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.
- Metzler A.L. (1945). Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions, *Econometrica*, **13**, 277-292.
- Negishi T. (1962). The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article, *Econometrica*, **30**, 635-669.
- Nerlove M. (1958). Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena, *The Quarterly Journal of Economics*, **72**, 227-240.
- Shone R. (2002). *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.
- Vialar T. (2009). *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics: Advances in Economics and Finance, Mathematics and Statistics*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Zill G.D. (2009). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Business 302, Microeconomics Lab Review Material. (2009). Understand how various factors shift supply or demand and understand the consequences for equilibrium price and quantity. College of Business and Economics, California State University Northridge.

<http://www.csun.edu/bus302/Lab/ReviewMaterial/micro3.pdf>

- Wikipedia, Supply and Demand Model, The Free Encyclopedia.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Supply\\_and\\_demand](http://en.wikipedia.org/wiki/Supply_and_demand)
- Wikipedia, Fractal, The Free Encyclopedia.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>
- Varian R.H. (2006). *Μικροοικονομική: Μια Σύγχρονη Προσέγγιση*, Τόμος Α', Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.
- Δρανδάκης Ε. και Μπαλτάς Ν. και Μπήτρος Γ. (1994). *Μικροοικονομική Θεωρία*, Τόμος Α', Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.
- Δρανδάκης Ε. και Μπαλτάς Ν. και Μπήτρος Γ. (2003). *Μικροοικονομική Θεωρία*, Τόμος Β', Εκδόσεις Αθαν. Σταμούλη, Αθήνα.
- Ξεπαπαδέας Π.Α. (2009). *Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά: Θεωρία και Εφαρμογές*, Gutenberg, Αθήνα.
- Van Der Weele P.J. (2007). Χάος και Φράκταλ. Πανεπιστήμιο Πατρών. Τμήμα Μαθηματικών.  
<http://www.math.upatras.gr/~weele/files/ChaosAndFractalsFyllo%20%282007-08%29.pdf>
- Άρθρο. (Οκτώβριος 2007). Το Χάος. Η Φυσική στο Δίκτυο.  
<http://www.physics4u.gr/articles/2007/chaos.html>
- Παπαχρήστος Σ. (2007). Οικονομικά Μαθηματικά. Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.  
[http://www.agricman.uoi.gr/spoudes/eksamhna/Mathimata/Oikonomika\\_Mathimatika/07-4-5%20Stability%20Thoery%20Exercises.pdf](http://www.agricman.uoi.gr/spoudes/eksamhna/Mathimata/Oikonomika_Mathimatika/07-4-5%20Stability%20Thoery%20Exercises.pdf)