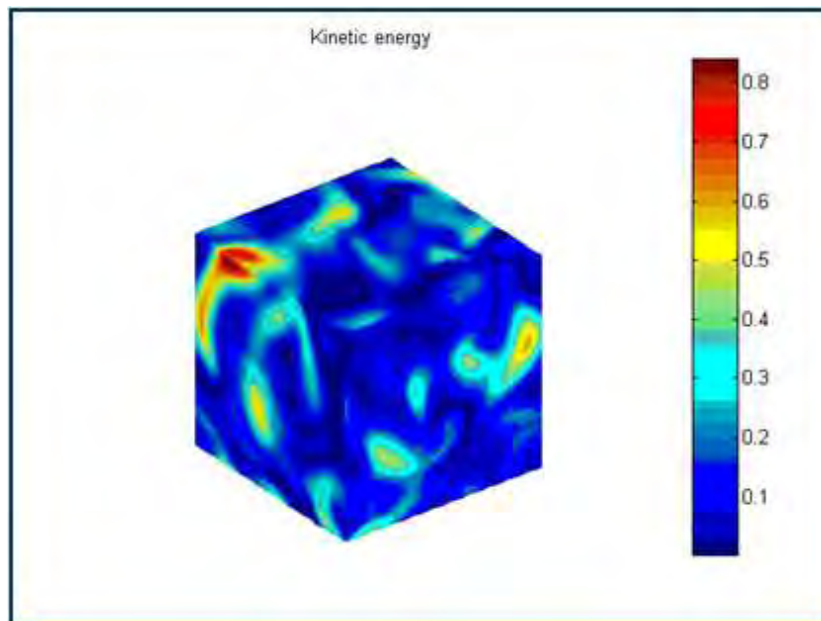


**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ”**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**



**ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΟΥ ΧΑΟΥΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ**

- 1. ΑΜΕΣΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΚΟΛΜΟΓΟΡΟΝ ΚΑΙ**
- 2. ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ**

**ΠΟΛΥΞΕΝΗ ΚΑΡΑΤΖΑ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΡΑΚΑΣΙΔΗΣ**

**ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ”**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΟΥ ΧΑΟΥΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ**

- 1. ΑΜΕΣΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΚΟΛΜΟΓΟΡΩΝ ΚΑΙ**
- 2. ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ**

**ΠΟΛΥΞΕΝΗ ΚΑΡΑΤΖΑ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΡΑΚΑΣΙΔΗΣ**

**ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

1. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	..1
1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	..1
1.2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	..2
1.2.1. Συνιστώσα τάσης	..2
1.2.2. Στοιχείο περιοδικότητας	..3
1.2.3. Μη ομαλή συνιστώσα	..3
1.3. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	..4
1.3.1. Ο χώρος των φάσεων	..5
1.3.2. Ο ελκυστής	..6
1.3.3. Το Εκκρεμές	..7
1.3.4. Το σύστημα Lorenz	..8
1.3.5. Χαοτική χρονοσειρά	10
2. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	12
2.1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ	12
2.1.1. Μέτρα κεντρικής τάσης	12
2.1.2. Μέτρα μεταβλητότητας	13
2.1.3. Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης	13
2.1.4. Φάσματα ισχύος – Μετασχηματισμοί Fourier	13
3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	16
3.1. ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	16
3.1.1. Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$	18
3.1.2. Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης $m$	20
3.1.3. Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων στο σύστημα Lorenz	22
3.2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	23
3.2.1. Διάσταση συσχέτισης	23
3.2.2. Εκθέτες Lyapunov	28
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β</b>	
4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΤΗΣ ΑΜΕΣΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ	
ΚΟΛΜΟΓΟΡΟΝ	33
4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	33
4.1.1. Η ροή Kolmogorov	33

4.1.2. Αριθμητική προσομοίωση	35
4.2. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	37
4.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	38
4.3.1. Έλεγχος στασιμότητας	39
4.3.2. Έλεγχος τάσης	40
4.3.3. Αφαίρεση τάσης	40
4.4. ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ	42
4.5. ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	49
4.5.1. Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$	49
4.5.2. Επιλογή διάστασης εμβύθισης $m$	52
4.5.3. Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων	53
4.6. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	59
4.6.1. Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης	59
4.6.2. Υποκατάστατα δεδομένα	66
4.6.3. Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov	70
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ</b>	
5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΤΥΡΒΩΔΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ	
5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	76
5.1.1. Τυρβώδης εκτοξευόμενη φλέβα	76
5.1.2. Μετρήσεις σε εκτοξευόμενες φλέβες	76
5.1.3. Μετρήσεις τύρβης	77
5.1.4. Πειραματική διάταξη – Σύντομη περιγραφή	77
5.1.5. Υπολογισμός έντασης της τύρβης	79
5.2. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	81
5.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	84
5.3.1. Έλεγχος στασιμότητας	84
5.3.2. Έλεγχος τάσης	85
5.3.3. Αφαίρεση τάσης	86
5.4. ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ	89
5.5. ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	100
5.5.1. Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$	.....100
5.5.2. Επιλογή διάστασης εμβύθισης $m$	.....102
5.5.3. Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων	.....104

5.6. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	.110
5.6.1. Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης	.....110
5.6.2. Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov	.....118
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	.....126
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	.....128

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη Μεταπτυχιακή Διατριβή, εκπονήθηκε στα πλαίσια απόκτησης του μεταπτυχιακού τίτλου Εφαρμοσμένης Μηχανικής και Προσομοίωσης Συστημάτων του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Η διατριβή αυτή εντάσσεται στο γενικότερο γνωστικό αντικείμενο της θεωρίας της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών και μέσω αυτών της μελέτης του αιτιοκρατικού χάους. Το έναυσμα για την επιλογή της συγκεκριμένης εργασίας ήταν το μάθημα "Θεωρία και Προσομοίωσης Συστημάτων" το οποίο προσέφερε και τις απαραίτητες γνώσεις για την ολοκλήρωση της.

Επιβλέπων της εργασίας ήταν ο κ. Θεόδωρος Καρακασίδης Επίκουρος Καθηγητής του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για τη ουσιαστική παρουσία, την αρωγή και συνεχή καθοδήγηση του στην όλη προσπάθεια για την ολοκλήρωση της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ιωάννη Σαρρή για τα στοιχεία που μας έδωσε καθώς και για τις ουσιαστικές παρεμβάσεις που έκανε και οι οποίες οδήγησαν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Ευχαριστώ και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Παναγιώτη Παπανικολάου για τα πειραματικά δεδομένα που μας διέθεσε και τις σημαντικές και χρήσιμες υποδείξεις που έκανε. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Α. Λιακόπουλο, Διευθυντή του Εργαστηρίου Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής για τις χρήσιμες και επικοινωνιακές παρατηρήσεις.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σύνθετη φύση των φυσικών φαινομένων είναι πάντα ένα αναπόφευκτο πρόβλημα στις προσπάθειες μας προς την κατανόηση και την περιγραφή των εξελίξεων του. Τις προηγούμενες δεκαετίες, θεωρίες για δυναμικά συστήματα και χάος έχουν επιφέρει σημαντική επιρροή στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται τα φυσικά φαινόμενα. Η έρευνα για τη θεωρία του χάους παρουσιάζει σημαντικό αριθμό ερευνητικών εργασιών με πολλαπλές εφαρμογές σε μια ευρεία ποικιλία των φυσικών φαινομένων όπως βροχοπτώσεις, ροή ποταμών, ταχύτητα ανέμων, μεταφορά ιζημάτων, θερμοκρασία, πίεση, κ.α. [Fraedrich, 1986, 1987, Hense, 1987, Sivakumar, 2004].

Η πολυπλοκότητα των φυσικών φαινομένων, μπορεί να είναι αποτέλεσμα απλών συστημάτων με μερικές αλληλοεξαρτώμενες μεταβλητές μη γραμμικά συσχετισμένες μεταξύ τους με ευαισθησία σε αρχικές συνθήκες. Τέτοιου είδους συστήματα είναι γνωστά με τον όρο αιτιοκρατικά χαοτικά συστήματα και η θεωρία που τα περιγράφει είναι γνωστή ως θεωρία του χάους [Kantz, Sprott, 2003]. Ένας ορισμός αρκετά μεγάλης αποδοχής για το χάος είναι η απεριοδική συμπεριφορά ενός οριοθετημένου (bounded) ντετερμινιστικού συστήματος το οποίο παρουσιάζει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

Ουσιαστικά μελετώντας τα φυσικά φαινόμενα, για τα οποία τα δυναμικά συστήματα που περιγράφουν δεν είναι πλήρως γνωστά και καταγράφοντας συνήθως μια ή περισσότερες παρατηρήσιμες ποσότητες προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μαθηματικά μοντέλα που θα μας οδηγήσουν σε εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος από το οποίο προέρχονται οι μετρούμενες τιμές. Οι τιμές αυτές όταν μετρώνται συναρτήσει του χρόνου μας δίνουν χρονοσειρές. Οι χρονοσειρές αυτές συχνά αποτελούν και τη μόνη πηγή πληροφορίας για τον χαρακτηρισμό της δυναμικής του παρατηρούμενου συστήματος και την πιθανή πρόβλεψη της μελλοντικής του συμπεριφοράς. Στην ουσία προσπαθούμε από τη μέτρηση μιας μόνο τιμής να ανακτήσουμε το σύνολο της πληροφορίας του συστήματος.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και η διερεύνηση της ύπαρξης ή μη αιτιοκρατικού χάους α) σε χρονοσειρά προσομοίωσης της ροής Kolmogorov και β) σε χρονοσειρά διακυμάνσεων θερμοκρασίας σε εκτοξευόμενη θερμαινόμενη φλέβα ρευστού. Η μελέτη βασίστηκε στις ιδιότητες των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και συγκεκριμένα στη διερεύνηση παρατηρούμενων δυναμικών διαδικασιών, που γίνεται με τη μέτρηση χρονικών σειρών.

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει την παρουσίαση των χρονοσειρών, την ανάλυση αυτών με την αφαίρεση της τάσης και τους ελέγχους στασιμότητας και

αφαίρεσης τάσης, το σχεδιασμό του φάσματος ισχύος και την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Στη μη-γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά παράγεται από ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα και ότι το αιτιοκρατικό μέρος της διαδικασίας είναι αυτό που κατά κύριο λόγο διαμορφώνει τη χρονοσειρά.

Η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων ή καταστάσεων είναι το πιο κρίσιμο βήμα στη μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών που προέρχονται από χαοτικά συστήματα, πριν από τον υπολογισμό των αναλλοίωτων και την κατασκευή των μοντέλων πρόβλεψης. Η κρισιμότητα της ανακατασκευής έγκειται στο ότι εάν δεν είναι “καλή” τότε ο υπολογισμός των αναλλοίωτων της χρονοσειράς καθώς και τα αποτελέσματα που απορρέουν από τον υπολογισμό αυτό ενδέχεται να είναι λανθασμένα και αναξιόπιστα. Η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων περιλαμβάνει την επιλογή της χρονικής υστέρησης  $\tau$  μέσω των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και αμοιβαίας πληροφορίας (mutual information) και την εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης  $m$  με τη μέθοδο των ψευδών γειτόνων (false nearest neighbor method).

Η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών περιλαμβάνει την εκτίμηση μη γραμμικών χαρακτηριστικών τα οποία δίνουν πληροφορίες για το υπό μελέτη σύστημα, όπως για τη διάσταση του ελκυστή και την πολυπλοκότητα του συστήματος και βοηθούν στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για τη χρονοσειρά, καθώς η διάσταση καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας που είναι απαραίτητοι για την περιγραφή του συστήματος.

Επιπλέον στην περίπτωση της προσομοίωσης της ροής Kolmogorov, χρησιμοποιήθηκε έλεγχος υποκατάστατων δεδομένων για μη γραμμικότητα, γνωστός ως surrogate data test for nonlinearity. Σύμφωνα με το τεστ αυτό υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά προέρχεται από ένα γραμμικό σύστημα το οποίο την παράγει και εφαρμόζοντας συγκεκριμένη μεθοδολογία προσπαθούμε να απορρίψουμε την αρχική υπόθεση.

Για την ανάλυση της χρονοσειράς χρησιμοποιήθηκαν, το πρόγραμμα Matlab, το πακέτο ανάλυσης χρονοσειρών Tisean [Hegger, et al 1999] και το πρόγραμμα γραφικών KGraph.

Η παρούσα διατριβή περιλαμβάνει τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται εν συντομία η θεωρία για τις χρονοσειρές και τα δυναμικά συστήματα καθώς και η μεθοδολογία για τη γραμμική και μη γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση των χρονοσειρών της προσομοίωσης της ροής Kolmogorov και της εκτοξευόμενης θερμαινόμενης φλέβας ρευστού αντίστοιχα.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Στην παρούσα εργασία δεν είναι δυνατόν να καλυφθούν όλα τα αντικείμενα της μη γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών όπως παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Ωστόσο θα γίνει μια προσπάθεια παρουσίασης των σημαντικότερων σημείων αυτής καθώς και της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε. Για περαιτέρω εμβάθυνση των ανωτέρω μεθόδων, ο ενδιαφερόμενος θα πρέπει να ανατρέξει στην υπάρχουσα βιβλιογραφία [Chatfield, 2004, Συριόπουλος και Λεοντίσης, 2000, Παπαϊωάννου, 1999, Kantz and Schreiber, 1997, Tsonis, 1992, Κουγιουμτζής, 2005].

#### 1. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

##### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χρονοσειρά είναι μια συλλογή από παρατηρήσεις που έγιναν διαδοχικά στο χρόνο. Ένα σύνολο παρατηρήσεων που λαμβάνονται παίρνοντας μετρήσεις μιας μεταβλητής, σε τακτά χρονικά διαστήματα. Ο στόχος της ανάλυσης είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από μια παρατηρούμενη ποσότητα σχετικά με τη δυναμική του συστήματος.

Οι χρονοσειρές προέρχονται κυρίως από συστήματα ντετερμινιστικά ή στοχαστικά. Το ντετερμινιστικό (αιτιοκρατικό) σύστημα ακολουθεί κάποιους κανόνες εξέλιξης που περιγράφονται συνήθως από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων διαφορών. Στο στοχαστικό σύστημα η εξέλιξη δεν υπακούει σε κάποιους κανόνες και η επόμενη κατάσταση δεν έχει σχέση με την προηγούμενη, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα.

Ένα ντετερμινιστικό σύστημα μπορεί να είναι είτε γραμμικό, τα εργαλεία για την ανάλυση του οποίου είναι αρκετά ανεπτυγμένα, είτε μη γραμμικό που είναι και πιο πολύπλοκο. Τα ντετερμινιστικά γραμμικά συστήματα δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε αντίθεση με τα μη γραμμικά. Τα μη γραμμικά ντετερμινιστικά συστήματα είναι πολύ πιο πολύπλοκα. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων είναι τα χαοτικά συστήματα τα οποία παρουσιάζουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

## 1.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Κάθε χρονοσειρά  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μπορεί να περιγραφεί από το απλό μοντέλο  $x_t = \mu_t + s_t + y_t$  όπου :

- $\mu_t$  είναι η συνιστώσα τάσης (trend component) και περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της χρονοσειράς
- $s_t$  είναι το στοιχείο της περιοδικότητας ή εποχικότητας (cyclical or seasonal component) και περιγράφει κανονικές διακυμάνσεις κάποιας περιόδου (που μπορεί να αντιστοιχούν σε ένα χρόνο, μια εποχή του χρόνου, μια εβδομάδα κλπ.).
- $y_t$  είναι η μη ομαλή συνιστώσα (irregular component) που απομένει όταν αφαιρεθούν από τη χρονοσειρά τα  $\mu_t$  και  $s_t$ . Η χρονοσειρά των  $y_t$  μπορεί να αποτελείται από πλήρως τυχαίες διακυμάνσεις και τότε λέγεται λευκός θόρυβος (white noise), ή να παρουσιάζει κάποια δομή, όπως στην περίπτωση χασοτικών συστημάτων.

Μια χρονοσειρά θεωρείται στάσιμη (stationary) όταν η κοινή κατανομή των  $x_t, x_{t+1}, \dots$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου  $t$  ή πιο απλά όταν οι στατιστικές ιδιότητες της χρονοσειράς δεν αλλάζουν με το χρόνο. Κυρίως μας ενδιαφέρει να μην αλλάζει η μέση τιμή και διασπορά, οπότε μιλάμε για ασθενή στασιμότητα (weak stationarity). Επομένως μια χρονοσειρά με τάση ή περιοδικότητα δεν είναι στάσιμη και η απαλοιφή τους αποσκοπεί πρακτικά να την κάνει στάσιμη.

Πριν εφαρμόσουμε τα εργαλεία της μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι στατιστικές ιδιότητες της χρονοσειράς (όπως οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης) δεν αλλάζουν με το χρόνο που σημαίνει ότι η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Στην περίπτωση που η χρονοσειρά ( $x_2, x_2, \dots, x_n$ ) δεν είναι στάσιμη λόγω τάσεων, μπορεί να γίνει στάσιμη αφαιρώντας την τάση.

Ένας απλός έλεγχος στασιμότητας γίνεται με τον υπολογισμό της μέσης τιμής και την τυπική απόκλιση χωρίζοντας τη χρονοσειρά σε δυο ίσα τμήματα και υπολογίζοντας τις ποσότητες αυτές για κάθε τμήμα.

### 1.2.1 Συνιστώσα τάσης

Η τάση είναι μια συνιστώσα ενός απλού μοντέλου χρονοσειράς που περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της.

Μια πραγματική χρονοσειρά είναι φυσικό να εμφανίζει κάποια τάση, π.χ. η χρονοσειρά μέτρησης της κυκλοφορίας σε μια οδική αρτηρία μπορεί να παρουσιάζει αυξητική τάση με το χρόνο. Μια τέτοια τάση μπορεί να περιγραφεί από κάποια απλή συνάρτηση του χρόνου  $f(t)$ , π.χ. ένα πολυώνυμο κάποιας τάξης. Έτσι αν π.χ. η

αύξηση της κυκλοφορίας είναι αναλογική ως προς το χρόνο, τότε προσαρμόζουμε στη χρονοσειρά πολυώνυμο πρώτης τάξης  $\mu_t = f(t) = a_0 + a_1t$ . Για μια πιο πολύπλοκη τάση θα χρειαστεί να προσαρμόσουμε πιο σύνθετη, π.χ. εκθετική συνάρτηση ή πολυώνυμο μεγάλης τάξης.

Σε πολλές εφαρμογές στην ανάλυση χρονοσειράς το ενδιαφέρον δεν είναι στην μακροπρόθεσμη τάση, που μπορεί να οφείλεται σε εξωγενείς παράγοντες αλλά σε αλλαγές που γίνονται σε μικρότερη χρονική κλίμακα. Σε τέτοιες περιπτώσεις θέλουμε να απαλείψουμε την τάση.

Οι μέθοδοι για την ταυτοποίηση της τάσης είναι : το γραμμικό φιλτράρισμα (smoothing, low-pass filtering), η μέθοδος των διαφορών (differencing) και η προσαρμογή (fitting) μιας συνάρτησης. Στην παρούσα εργασία θεωρήσαμε την ύπαρξη γραμμικής τάσης την οποία αφαιρέσαμε καθώς και τη χρήση της μεθόδου των πρώτων διαφορών.

Υπάρχουν και πιο σύνθετες μέθοδοι που μετατρέπουν μη στάσιμες χρονοσειρές σε στάσιμες, που μπορεί κάποιος να βρει σε βιβλία κλασσικής ανάλυσης χρονοσειρών [Brockwell and Davis 1991].

### 1.2.2 Στοιχείο περιοδικότητας

Μια χρονοσειρά μπορεί να παρουσιάζει κάποια περιοδικότητα, που είτε οφείλεται σε εξωγενείς παράγοντες που δε μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε σε βάθος και γι' αυτό θέλουμε να την απαλείψουμε, ή είναι σημαντική για τη μελέτη μας και θέλουμε να τη προσδιορίσουμε.

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την κυκλοφορία σε μια οδική αρτηρία που παρουσιάζει συστηματικές μεταβολές στις διάφορες ώρες της ημέρας. Αν θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβολή της κυκλοφορίας στις διάφορες περιόδους της ημέρας είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε αυτήν τη μεταβολή ως μια συνάρτηση του χρόνου για μια ημέρα. Αν θέλουμε να δούμε αν η κυκλοφορία έχει κάποια δυναμική, δηλαδή αν η κυκλοφορία σε κάποια ώρα της ημέρας εξαρτάται από την κυκλοφορία στις προηγούμενες ώρες, τότε για να μελετήσουμε τέτοιες σχέσεις, πρέπει να απαλείψουμε την περιοδικότητα, δηλαδή την κίνηση που αναλογεί λόγω της συγκεκριμένης ώρας της ημέρας. Και στις δύο περιπτώσεις πρέπει πρώτα να εκτιμήσουμε με κάποιο τρόπο την περιοδικότητα. Αυτό επιτυγχάνεται με αντικειμενικό τρόπο χρησιμοποιώντας την ανάλυση Fourier.

### 1.2.3 Μη ομαλή συνιστώσα

Η μη ομαλή συνιστώσα μπορεί να παρουσιάσει είτε στοχαστική συμπεριφορά, είτε όπως σε αρκετές περιπτώσεις χαστική συμπεριφορά.

### 1.3 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σύστημα είναι μια διάταξη αλληλεπιδρώντων μερών σε ένα ενιαίο σύνολο. Δυναμικό σύστημα (dynamical system) είναι ένα σύστημα που εξελίσσεται στο χρόνο. Κάθε σύστημα δίνει ως μετρήσιμες μια ή περισσότερες χρονοσειρές. Μπορεί γενικά να δώσει τουλάχιστον τόσες χρονοσειρές όσες είναι και οι μεταβλητές που το περιγράφουν. Οι χρονοσειρές σχηματίζονται από τη χρονική εξέλιξη των μεταβλητών του συστήματος ή είναι πολύπλοκες συναρτήσεις αυτών. Παρατηρώντας και αναλύοντας τις χρονοσειρές, μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για το σύστημα.

Σε ένα δυναμικό σύστημα δε γνωρίζουμε εν γένει πόσες είναι οι μεταβλητές που περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος ούτε και τους νόμους που περιγράφουν την εξέλιξη του, έχουμε πρόσβαση μόνο σε μερικές μετρήσιμες ποσότητες του συστήματος.

Θεωρούμε πως το υπό μελέτη σύστημα που παρατηρούμε μέσω μιας χρονοσειράς είναι αιτιοκρατικό κι όχι στοχαστικό. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι είναι ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα, διακριτό (discrete) ή συνεχές (continuous), τα οποία ορίζονται από κάποιες εξισώσεις διαφορών ή διαφορικές εξισώσεις αντίστοιχα. Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε πως ξεκινώντας από κάποια αρχική συνθήκη το σύστημα δίνεται (σε συνεχή ή διακριτό χρόνο) ως

$$s_t = f^t(s_0)$$

όπου :

- $s_t$  το διάνυσμα θέσης (κατάστασης) του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $s_t \in \mathbb{R}^d$  όπου  $d$  είναι η διάσταση του Ευκλείδειου χώρου καταστάσεων του συστήματος
- $s_0$  το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0 (αρχική συνθήκη)
- $f^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  η συνάρτηση του συστήματος που απεικονίζει το  $s_0$  στο  $s_t$
- $t$  συνεχής ή διακριτός χρόνος

Μια χρονοσειρά  $x_i$  όπου  $i=1,2,\dots,N$  μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από ένα δυναμικό σύστημα ως η προβολή  $x_i$  κάθε σημείου  $s_t$  της τροχιάς του συστήματος, δηλαδή

$$x_i = h(s_i)$$

όπου η συνάρτηση προβολής  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται και συνάρτηση παρατήρησης (observation function).

Γνωστά δυναμικά συστήματα είναι το εκκρεμές και το σύστημα Lorentz για τα οποία γίνεται αναφορά παρακάτω.

### 1.3.1 Ο χώρος των φάσεων

Ο χώρος των φάσεων είναι ο μαθηματικός χώρος του οποίου οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες μεταβλητές που χρειάζονται για να καθορίσουν την κατάσταση του δυναμικού συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Η μη γραμμικότητα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολύπλοκων δομών στο χώρο των φάσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο χώρος των φάσεων μπορεί να χαρακτηρίζεται από τη συνύπαρξη περιοχών χάους και περιοχών οργανωμένης συμπεριφοράς των μεταβλητών [βλέπε για παράδειγμα Συριόπουλος και Λεοντίσης, 2000].

Ο χώρος των φάσεων προσφέρει ένα τρόπο μετατροπής των αριθμών σε εικόνες παρουσιάζοντας τις ουσιαστικές πληροφορίες ενός κινούμενου συστήματος, μηχανικού ή ρευστού, δημιουργώντας έναν εύχρηστο «οδικό» χάρτη που απεικονίζει όλες του τις δυνατότητες. Στο χώρο των φάσεων, η πλήρης γνώση ενός δυναμικού συστήματος μια μοναδική στιγμή του χρόνου παριστάνεται με ένα σημείο. Αυτό το σημείο αναπαριστά το δυναμικό σύστημα, εκείνη τη στιγμή. Την επόμενη στιγμή όμως που το σύστημα θα έχει αλλάξει, έστω και πολύ λίγο, το σημείο κινείται.

Στο χώρο των φάσεων η κίνηση παρουσιάζει γενικά μια από τις ακόλουθες μορφές καθώς εξελίσσεται στο χρόνο.

(α) Σύγκλιση προς (ή απόκλιση από) απομονωμένα σημεία ισορροπίας του χώρου των φάσεων  $x$  όπου  $f(x)=0$  αναλόγως αν αποτελούν ευσταθείς ή ασταθείς κόμβους, όπου  $x$  είναι το διάνυσμα που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος.

(β) Ταλαντώσεις που είναι περιοδικές, αν οι τροχιές χαρακτηρίζονται από  $d$  συχνότητες  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  ρητώς εξαρτημένες μεταξύ τους, ή σχεδόν περιοδικές αν οι συχνότητες αυτές είναι ρητώς ανεξάρτητες.

(γ) Χαοτική συμπεριφορά, κατά την οποία η κίνηση είναι απεριοδική, πεπερασμένη και χαρακτηρίζεται από ένα συνεχές (ή γενικά μη διακριτό) φάσμα συχνοτήτων και ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Όπως στην περίπτωση (α) έτσι και στις (β) και (γ) ενδέχεται η τελική μορφή κίνησης στο χώρο των φάσεων να είναι ελκυστής (ή απώστης) της δυναμικής του συστήματος. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο εν λόγω ελκυστής λέγεται κανονικός ενώ στην (γ) λέγεται παράξενος (strange attractor / repeller).

Στην περίπτωση χαρακτηριστικών γραμμικής διαδικασίας, όπως για παράδειγμα μιας σεισμικής μέτρησης μακριά από το επίκεντρο, ο κατάλληλος χώρος για να εξετάσουμε τη χρονοσειρά είναι ο χώρος Fourier, που είναι πιο αποτελεσματικός για την απεικόνιση της πληροφορίας που εμπεριέχεται στη μέτρηση.

Στην περίπτωση χαοτικών χρονοσειρών υπάρχει ελάχιστη πιθανότητα να βρούμε απλοποίηση στο πρόβλημα μέσω του μετασχηματισμού Fourier. (Η ανάλυση

για το μετασχηματισμού Fourier γίνεται στα φάσματα ισχύος της γραμμικής ανάλυσης παρακάτω.)

### 1.3.2 Ο ελκυστής

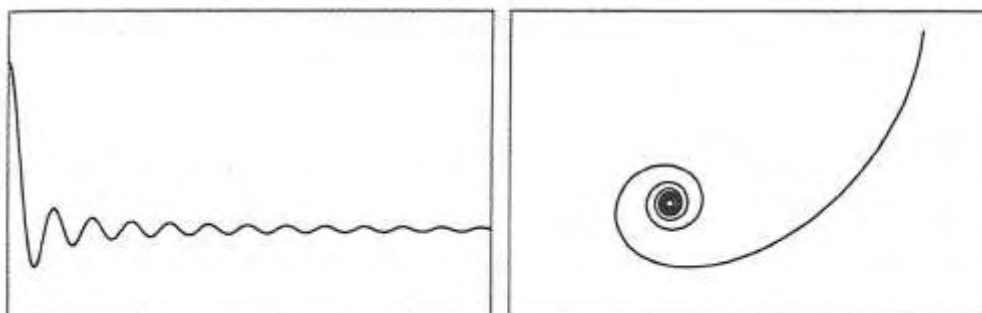
Μια σημαντική έννοια του χώρου των φάσεων είναι η έννοια του ελκυστή. Βραχυπρόθεσμα κάθε σημείο του χώρου των φάσεων μπορεί να παριστάνει μια πιθανή συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Μακροπρόθεσμα όμως οι μόνες δυνατές συμπεριφορές είναι οι ίδιοι οι ελκυστές.

Ο ελκυστής είναι ένα σύνολο σημείων στο χώρο των φάσεων, προς το οποίο τείνουν ασυμπτωτικά στο χρόνο οι τροχιές για ένα εύρος αρχικών συνθηκών. Ο ελκυστής φαίνεται στο σύστημα αφού σταθεροποιηθεί και αρχίσει να επαναλαμβάνει κάποια συμπεριφορά. Συνεπώς, οι αρχικές συνθήκες και η συμπεριφορά στις πρώτες επαναλήψεις δε συμπεριλαμβάνονται στον ελκυστή.

Λεκάνη έλξης ενός ελκυστή είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών που η εξέλιξή τους τις οδηγεί στον ελκυστή.

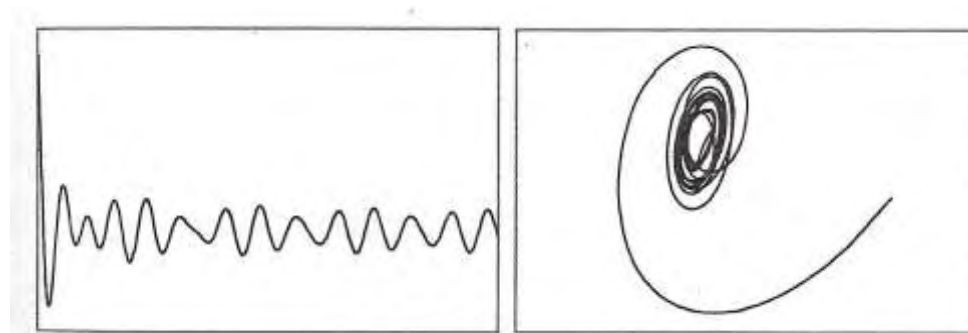
Ο ελκυστής μπορεί να είναι :

- Ελκυστής σημείου (point attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος.



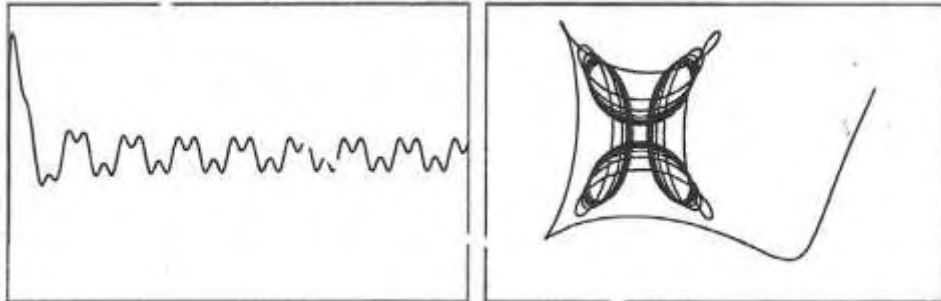
Σχήμα 1.1 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή σημείου (δεξιά).

- Ελκυστής οριακού κύκλου (limit cycle attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα κύκλο, για περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων.



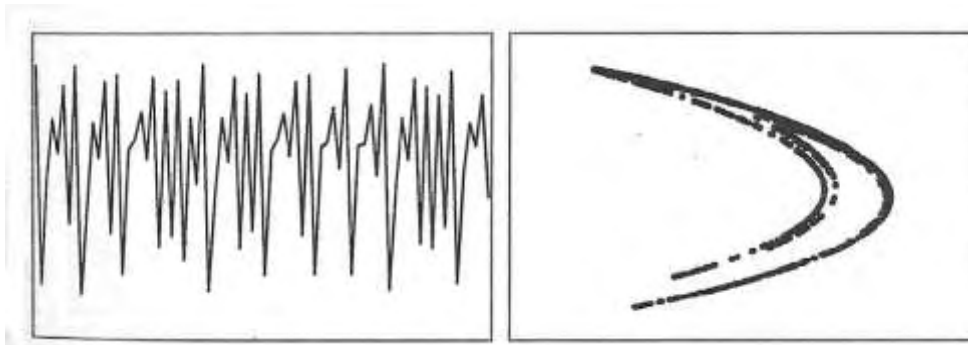
Σχήμα 1.2 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή οριακού κύκλου (δεξιά).

- Ελκυστής δυο περιόδων ή τορροειδής ελκυστής (toroidal attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα σχήμα που μοιάζει με δύο κύκλους ο ένας πάνω στον άλλο, για ψευδο-περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων.



Σχήμα 1.3 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή δυο περιόδων ή τορροειδή ελκυστή (δεξιά).

- Χαοτικός ή παράξενος ελκυστής (chaotic/strange attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα παράξενο αντικείμενο που δεν έχει συγκεκριμένο σχήμα



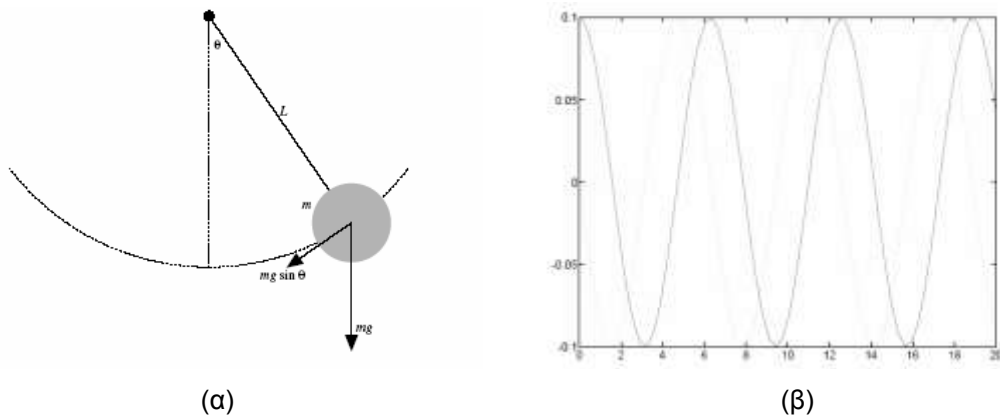
Σχήμα 1.4 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε χαοτικό ή παράξενο ελκυστή (δεξιά).

Παρακάτω παρουσιάζονται δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις δυναμικών συστημάτων, το εκκρεμές και το σύστημα Lorenz.

### 1.3.3 Το Εκκρεμές

Το εκκρεμές είναι ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega(t) \quad \text{και} \quad \dot{\omega}(t) = -g/L * \sin \theta(t)$$



Σχήμα 1.5 : Σχηματική απεικόνιση τους εκκρεμούς (α) και περιοδική συνάρτηση ταχύτητας (β)

Στο σχήμα 1.5 η ταχύτητα είναι μηδέν καθώς το εκκρεμές αρχίζει να ταλαντώνεται. Η θέση αντιστοιχεί σε έναν αρνητικό αριθμό που μετράει την απόσταση του εκκρεμούς από το κέντρο. Οι δυο αριθμοί προσδιορίζουν ένα σημείο του δισδιάστατο χώρο των φάσεων. Η ταχύτητα παίρνει τη μέγιστη τιμή καθώς η θέση του εκκρεμούς περνά από το μηδέν. Η ταχύτητα μειώνεται πάλι στο μηδέν και μετά γίνεται αρνητική για να παραστήσει την κίνηση του εκκρεμούς προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Το σημείο ακολουθεί μια τροχιά που εκφράζει τη συνεχή μακροσκοπική συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος. Αν η τροχιά είναι κυκλική σημαίνει ότι το σύστημα μεταβάλλεται περιοδικά. Στο χώρο των φάσεων πορείες κοντά στην τροχιά έλκονται απ' αυτή. Η τροχιά είναι ένας ελκυστής.

### 1.3.4 Το σύστημα Lorenz

Το σύστημα Lorenz είναι ένα από τα πιο γνωστά χαοτικά δυναμικά συστήματα. Ο μετεωρολόγος Edward Lorenz προσπαθώντας να ερμηνεύσει την πρόβλεψη του καιρού χρησιμοποίησε τρεις μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις Σ.Δ.Ε. [Lorenz, 1963].

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3$$

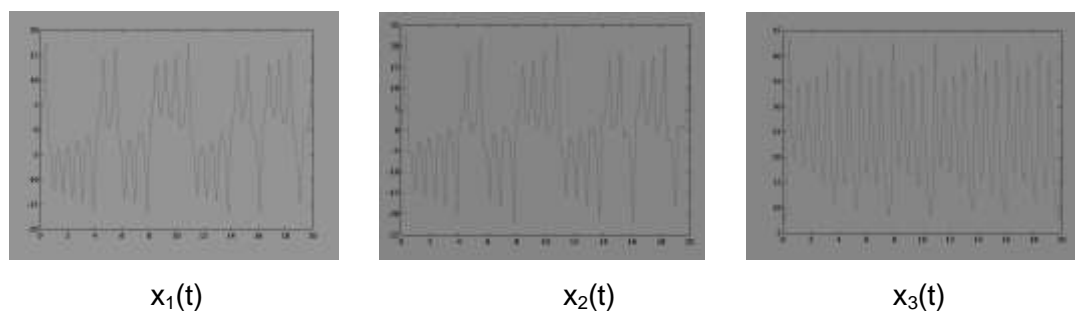


Το μοντέλο αυτό είναι ένα τρισδιάστατο αυτόνομο συνεχές δυναμικό σύστημα που παράγεται από μια δραστική περικοπή (απλοποίηση) μιας ανάπτυξης των εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων συναγωγής (convection) όπου :

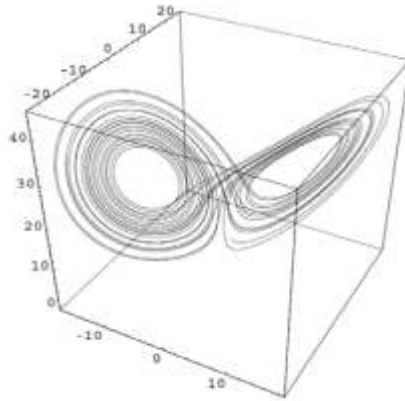
- $x_1$  είναι το πλάτος της πρώτης οριζόντιας αρμονικής της κατακόρυφης ταχύτητας του ρευστού
- $x_2$  το πλάτος της αντίστοιχης θερμοκρασιακής ταλάντωσης
- $x_3$  μια συνάρτηση θερμοκρασιακού πεδίου
- $\sigma$  είναι ο αριθμός του Prandtl
- $r$  είναι ο κανονικοποιημένος αριθμός του Rayleigh ( $r=R/R_e$  όπου  $R_e$  είναι ο κρίσιμος αριθμός Rayleigh) και
- $b$  είναι μια παράμετρος που σχετίζεται με οριζόντιο κυματοδιάγραμμα.

Όταν η μεταβλητή  $r$  παίρνει τιμές μικρότερες της μονάδος  $r < 1$ , όλες οι τροχιές του τείνουν σε ένα σταθερό σημείο  $(0,0,0)$  του διανυσματικού πεδίου που παριστάνει την κατάσταση της θερμικής επαγωγής. Όταν το  $r > 1$ , η κατάσταση  $(0,0,0)$  γίνεται γραμμικώς ασταθής και το διανυσματικό πεδίο έχει δυο συμμετρικά, γραμμικώς ευσταθή σταθερά σημεία. Αυξάνοντας την τιμή μέχρι  $r=r_0=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$  οι τροχιές καταλήγουν στο σημείο  $(x_{1\pm}, x_{2\pm}, x_{3\pm})$  αναλόγως της τιμής του  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ . Όταν  $r > r_0$  τα δυο σταθερά σημεία του διανυσματικού πεδίου γίνονται γραμμικώς ασταθή και απωθούν όλες σχεδόν τις τροχιές από κοντά τους. Καθώς το  $r$  αυξάνει πέρα από μια δεύτερη κρίσιμη τιμή  $r > r_0$  η χρονοασυμπτωματική κατάσταση που προκύπτει από όλες σχεδόν τις αρχικές συνθήκες εκτελεί μια απεριοδική κίνηση πάνω σε αυτό που ονομάζουμε χαοτικό ελκυστή.

Η εικόνα που ακολουθεί, είναι του χαοτικού ελκυστή του Lorenz για τις τιμές των παραμέτρων  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  και  $r=28$ , στις τρεις διαστάσεις  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . [Παπαϊωάννου, 1999].



Σχήμα 1.6 : Απεικόνιση των μεταβλητών  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  και  $x_3(t)$  της χρονοσειράς Lorenz για τις τιμές των παραμέτρων  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  και  $r=28$



Σχήμα 1.7 : Ο χώρος των φάσεων του συστήματος Lorenz

### 1.3.5 Χαοτική χρονοσειρά

Με τον όρο “χαοτική” χρονοσειρά εννοούμε μια σειρά δεδομένων τα οποία εμφανίζονται μη περιοδικά εμπεριέχουν όμως σαφείς ενδείξεις μιας ντετερμινιστικής (αιτιοκρατικής) δυναμικής μικρού αριθμού ( $d \leq 10$ ) μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να αντιδιαστείλουμε τον χαρακτηρισμό χαοτική από τον αντίστοιχο της στοχαστικής χρονοσειράς που υπονοεί την ύπαρξη πολύ μεγαλύτερου (θεωρητικά άπειρου) αριθμού μεταβλητών.

[βλέπε για περισσότερα Παπαϊωάννου, 1999].

Μια χαοτική χρονοσειρά συνήθως είναι :

- Πολύπλοκη, μη κανονική συμπεριφορά με απότομες και μεγάλες αλλαγές. Σε καμία περίπτωση δε φαίνεται καθαρά η ισορροπία και αν ακολουθείται κάποιος νόμος.
- Οι τιμές που φαίνονται τυχαίες δεν προκύπτουν από μια τυχαία διαδικασία, αλλά από μια προσδιοριστική εξίσωση.
- Η εξίσωση που προσδιορίζει τις τιμές της χρονοσειράς είναι απλή. Δεν είναι απαραίτητο η συμπεριφορά να είναι αποτέλεσμα περίπλοκης εξίσωσης.
- Η συμπεριφορά μπορεί να είναι αποτέλεσμα και λίγων μεταβλητών. Δεν είναι απαραίτητο να είναι πολλές οι μεταβλητές για να έχουμε περίπλοκη συμπεριφορά.

Η χρονοσειρά είναι χαοτική γιατί η παραμικρή μεταβολή στις αρχικές συνθήκες μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγάλη μεταβολή ή απόκλιση της.

Σε μια χαοτική χρονοσειρά δυο είναι οι πιθανοί στόχοι που μπορούμε να θέσουμε, η ανακατασκευή υποδείγματος και οι προβλέψεις

Ανακατασκευή υποδείγματος : αποσκοπεί στο να δώσει ένα υπόδειγμα που να περιγράφει όσο το δυνατόν πιο ικανοποιητικά τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε μεθόδους που αναλύονται παρακάτω.

Προβλέψεις : Θα δούμε την ύπαρξη ισχυρών εργαλείων βασισμένων σε έννοιες όπως η διάσταση εμβύθισης και η χρονική υστέρηση, τα οποία μας επιτρέπουν να πάρουμε καλύτερη ακρίβεια στις προβλέψεις από άλλα παραδοσιακά εργαλεία. [Συριόπουλος και Λεοντίσης, 2000].

## 2. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Η γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μελετά γραμμικά χαρακτηριστικά όπως η αυτοσυσχέτιση και το φάσμα ισχύος. Τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να αναπαράγει ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, τη διασπορά και την αυτοσυσχέτιση. Η γραμμική ανάλυση είναι ικανοποιητική για την περιγραφή μιας γραμμικής διαδικασίας αλλά δεν αποτελεί ικανοποιητική περιγραφή μιας μη γραμμικής. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ανάλυση σε μια πραγματική χρονοσειρά που μπορεί να έχει φαινομενικά στοχαστική συμπεριφορά ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας δεν μπορεί να περιγραφεί. Αυτό το μέρος η μη γραμμική ανάλυση προσπαθεί να διερευνήσει.

### 2.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ

Τα κύρια γραμμικά μέτρα είναι τα μέτρα στατιστικών δεδομένων που χωρίζονται στα μέτρα κεντρικής τάσης, στα μέτρα μεταβλητότητας, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το φάσμα ισχύος.

#### 2.1.1 Μέτρα κεντρικής τάσης

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι τιμές των παρατηρήσεων για μια μεταβλητή  $x$  που μελετάμε. Τα μέτρα κεντρικής τάσης είναι :

- Η δειγματική μέση τιμή (sample mean) ή ο μέσος όρος (average) που είναι το «κέντρο ισορροπίας» των δεδομένων, συμβολίζεται με  $\bar{x}$  και ορίζεται ως

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

- Η δειγματική διάμεσος (sample median)  $\tilde{x}$  η οποία, σε μια διατεταγμένη αύξουσα σειρά των  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ορίζεται ως η κεντρική τιμή

$$\tilde{x} = \frac{n+1}{2} \quad (2.2)$$

αν το  $n$ =περιττός, το  $\tilde{x}$  αντιστοιχεί στην τιμή  $\frac{n+1}{2}$  και

αν το  $n$  = άρτιος, το  $\tilde{x}$  αντιστοιχεί στο ημίαθροισμα των  $\frac{n}{2}$  και  $\frac{n}{2+1}$

[Κόλυβα και Μπόρα, 1998].

### 2.1.2 Μέτρα μεταβλητότητας

Από παρατηρήσεις που έγιναν διαπιστώθηκε ότι διαφορετικά δείγματα από τον ίδιο πληθυσμό μπορεί να έχουν το ίδιο μέτρο κεντρικής τάσης αλλά να κατανέμονται περισσότερο ή λιγότερο γύρω από το κέντρο. Τα κυριότερα μέτρα διασποράς των δεδομένων είναι :

- Η δειγματική διακύμανση ή δειγματική διασπορά  $s^2$  (sample variance) η οποία μετράει τη μεταβλητότητα των παρατηρήσεων γύρω από τη δειγματική μάζα, και ορίζεται ως

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2) \quad (2.3)$$

- Η δειγματική τυπική απόκλιση  $s$  (standard deviation) η οποία εκφράζει κατά πόσο η τιμή της μεταβλητής απέχει από τη μέση τιμή, και ορίζεται ως

$$s = \sqrt{s^2} \quad (2.4)$$

[Κόλυβα και Μπόρα, 1998].

### 2.1.3 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $r_x(\tau)$  (autocorrelation function) είναι το κύριο γραμμικό μέτρο που μετράει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών τιμών μιας χρονοσειράς [Brett and Tuller, 1991]. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του φάσματος ισχύος. Δίνει ανάλογες πληροφορίες με το φάσμα ισχύος, που αφορούν όμως το πεδίο του χρόνου και όχι το πεδίο των συχνοτήτων και ορίζεται ως

$$r_x(\tau) = \frac{\frac{1}{N-t} \sum_{i=1+\tau}^N (x_i - \bar{x})(x_{i-\tau} - \bar{x})}{s^2} \quad (2.5)$$

όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή,  $s^2$  η διασπορά,  $\tau$  η υστέρηση και  $N$  ο αριθμός των σημείων.

### 2.1.4 Φάσματα ισχύος (Power spectrum) – Μετασχηματισμοί Fourier

Μέρος της ανάλυσης των χρονοσειρών αποτελεί η εύρεση τυχόν ισχυρών συχνοτήτων και η κατασκευή του φάσματος ισχύος (power spectrum). Το στοιχείο της περιοδικότητας είναι έντονα συνδεδεμένο με το φάσμα ισχύος. Εάν η χρονοσειρά έχει

έντονη περιοδικότητα με περίοδο  $k$ , τότε το φάσμα ισχύος δείχνει έντονη ισχύ για συχνότητα  $1/k$ .

Στη χρονοσειρά υπάρχουν μικροί και μεγάλοι κύκλοι με μορφή ημιτόνου (ή συνημιτόνου). Σκοπός μας είναι να διακρίνουμε τους κύκλους που συμβάλουν σε μεγάλο ποσοστό στη διακύμανση της χρονοσειράς, και να αγνοήσουμε αυτούς που συμβάλουν με μικρό ποσοστό.

Η χρονοσειρά αναλύεται με βάση τη σειρά Fourier και η διακύμανση υπολογίζεται από το συνδυασμό των συντελεστών ημιτόνου και συνημιτόνου. Η χρησιμότητα της ανάλυσης είναι η εύρεση χαρακτηριστικών συχνοτήτων, η αφαίρεση περιοδικής ή εποχικής συνιστώσας και η πρόβλεψη. Η διάκριση μιας περιοδικής ή σχεδόν περιοδικής χρονοσειράς από μια χασοτική χρονοσειρά φαίνεται στο φάσμα ισχύος όταν στην πρώτη περίπτωση έχουμε χαρακτηριστικές κορυφές ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ένα ευρυζωνικό (broadband) φάσμα ισχύος.

Θεωρούμε μια χρονική σειρά μήκους  $N$  ως μια σειρά από κύκλους περιόδου  $2, 3, \dots, T$ . Η συχνότητα ορίζεται ως το αντίστροφο της περιόδου. Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι  $1/2, 1/3, \dots, 1/T$  ή σε γωνιακές συχνότητες (σε ακτίνες ανά μονάδα χρόνου)  $2\pi/2, 2\pi/3, \dots, 2\pi/T$ . Η θεμελιώδης συχνότητα ταλάντωσης, δηλαδή η συχνότητα της πρώτης αρμονικής ταλάντωσης, είναι  $f=1/T$  και αντίστοιχα η θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα είναι  $\omega=2\pi/T=2\pi f$ .

Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε μια χρονική σειρά διακριτού χρόνου ως μια περιοδική κυματομορφή (periodic waveform) περιόδου το πολύ  $T$  που δίνεται από τη σειρά Fourier

$$x_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M (\alpha_k \cos(2\pi kfn) + b_k \sin(2\pi kfn)) \quad (2.6)$$

όπου  $\alpha_0$  είναι η μέση τιμή,  $\alpha_k$  και  $b_k$  είναι τα πλάτη για κάθε συνημιτονοειδή και ημιτονοειδή ταλάντωση στις αρμονικές συχνότητες  $k\omega=2\pi kf$  αντίστοιχα και  $M$  μπορεί να τείνει στο άπειρο.

Όταν ο χρόνος είναι συνεχής ( $\Delta t \rightarrow 0$  και  $t$  συνεχής) η χρονική σειρά είναι μια συνεχής κυματομορφή με υψηλότερη περίοδο  $T$ . Καθώς η περίοδος  $T$  αυξάνει το διάστημα μεταξύ των ταλαντώσεων μικραίνει. Αφήνοντας την περίοδο να τείνει στο άπειρο, θεωρώντας δηλαδή ότι η περίοδος δεν είναι περιοδική, ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier για ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων  $f$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.7)$$

Όταν ο χρόνος δεν είναι συνεχής και έχουμε μια χρονική σειρά  $N$  στοιχείων, τότε ορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier με επίσης  $N$  στοιχεία και για

$-1/2 < f < 1/2$  ως

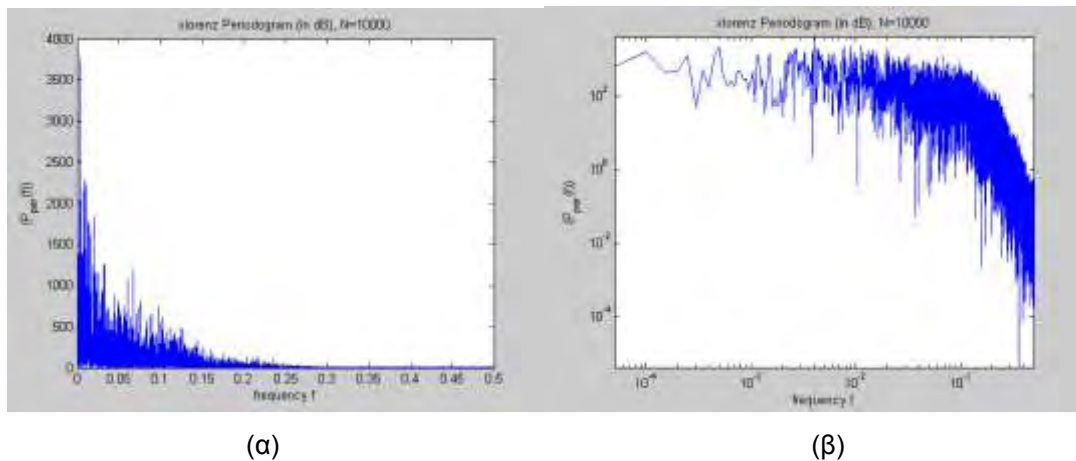
$$F_D(f) = \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi fn} \quad (2.8)$$

Τα στοιχεία του μετασχηματισμού Fourier  $F(f)$  ή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $F_D(f)$  είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το φάσμα ισχύος δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου των μιγαδικών αριθμών του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x_n e^{-i2\pi fn} \right|^2 \right] \quad \text{ή}$$

$$P_{per}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi fn} \right|^2 \quad (2.9)$$

Στο σχεδιασμό του φάσματος ισχύος υπολογίζονται συνήθως οι συχνότητες τόσο στη γραμμική μορφή της χρονοσειράς όσο και στη λογαριθμική μορφή όπου η ύπαρξη νόμων κλίμακας της μορφής  $P(f) = cf^\alpha$  [Mandelbrot, 2002, Bak et. al, 1992].



Σχήμα 2.1 : Φάσμα ισχύος του συστήματος Lorenz στη γραμμική μορφή (α) και στη λογαριθμική μορφή (β).

### 3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Στη μη-γραμμική ανάλυση των χρονοσειρών υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά παράγεται από ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα που ενδεχομένως περιέχει θόρυβο και ότι το αιτιοκρατικό μέρος της διαδικασίας είναι αυτό που κατά κύριο λόγο διαμορφώνει τη χρονοσειρά. Γι' αυτό θέλουμε να μελετήσουμε χαρακτηριστικά του αιτιοκρατικού δυναμικού συστήματος, να το περιγράψουμε με κατάλληλο μοντέλο και να πετύχουμε καλύτερες προβλέψεις.

Η γενική μεθοδολογία ασχολείται με τα εξής θέματα :

- Ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων.
- Εκτίμηση χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος (διάσταση ελκυστή, εκθέτες Lyapunov).
- Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης.

#### 3.1 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Για να διαπιστώσουμε ότι η χρονοσειρά προέρχεται από ντετερμινιστικό ή στοχαστικό σύστημα θα πρέπει να γίνει ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Δηλαδή η κατασκευή ενός χώρου φάσεων μόνο από τη χρονοσειρά με τα ίδια χαρακτηριστικά που έχει ο αυθεντικός χώρος φάσεων του συστήματος που την έδωσε. Με την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων μπορούμε να δούμε τη δομή της μονοδιάστατης χρονοσειράς παρατηρώντας τα διαγράμματα διασποράς σε υψηλότερες διαστάσεις.

Εάν το σύστημα είναι κατά βάση αιτιοκρατικό είναι λογικό να περιμένουμε ότι κάθε μέτρηση εξαρτάται από έναν αριθμό προηγούμενων μετρήσεων δηλαδή  $x_{n+1}=f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m})$  και για μικρά  $\Delta t$  αυτές οι τιμές εμπεριέχουν πληροφορία ισοδύναμη με αυτή κάποιων παραγώγων που θα μπορούσαν να περιγράψουν την εξέλιξη του συστήματος.

Δεν είναι απαραίτητο να ανακατασκευασθεί ο πλήρης χώρος των φάσεων από τη μετρούμενη ποσότητα καθώς στην πλειονότητα των περιστάσεων η διάσταση του ελκυστή είναι σημαντικά μικρότερη του χώρου των φάσεων.



Είναι συνήθως αρκετό να κατασκευάσουμε ένα χώρο όπου μπορεί να εμβυθισθεί το ανακατασκευασμένο διάνυσμα καταστάσεων.

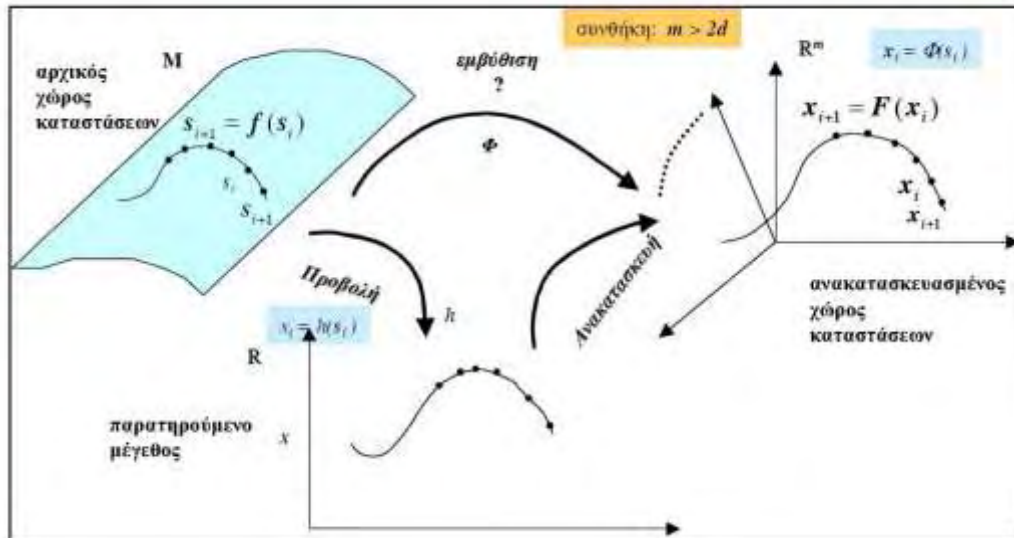
Ο νέος αυτός χώρος έχει τις εξής ιδιότητες :

- Κάθε σημείο του αντιστοιχεί μέσω της δυναμικής σε ένα μοναδικό επόμενο σημείο
- Υπάρχει ένας ομαλός και μη ιδιάζων μετασχηματισμός μεταξύ αυτού και του αρχικού χώρου.
- Επίσης θέλουμε αυτός ο χώρος να είναι καρτεσιανός (ορθογώνιος) παρά καμπυλωμένος.

Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται ανακατασκευή του χώρου των φάσεων και εισήχθη από τους Packard et al (1980) και Takens (1981).

Το θεώρημα του Takens επιτρέπει κάτω από κάποιες συνθήκες να κατασκευάσουμε ένα νέο χώρο καταστάσεων διάστασης  $m$  από τη γνώση της χρονοσειράς και μόνο. Σ' αυτόν το χώρο οι ανακατασκευασμένες τροχιές από τη χρονοσειρά αποτελούν τον ανακατασκευασμένο ελκυστή, ο οποίος διατηρεί τις τοπολογικές ιδιότητες του αρχικού ελκυστή και το ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα έχει τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα, δηλαδή επιτυγχάνεται εμβύθιση του αρχικού συστήματος στο ανακατασκευασμένο σύστημα.

Το θεώρημα του Takens έχει ως συνθήκη για την ανακατασκευή  $m \geq 2D+1$  όπου  $D$  είναι η μορφοκλασματική διάσταση του ελκυστή. Αν η διάσταση  $m$  δεν είναι ικανοποιητικά μεγάλη, τότε ο ανακατασκευασμένος ελκυστής δεν «απλώνεται» πλήρως αλλά παρουσιάζει αυτό-τομές και δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό ελκυστή.



Σχήμα 3.1 : Σχεδιάγραμμα ανακατασκευής του χώρου των καταστάσεων

Η ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων γίνεται με τη δημιουργία  $m$ -διάστατων διανυσμάτων καταστάσεων από τη χρονοσειρά ως εξής

$$X_i = [X_i, X_{i+\tau}, X_{i+2\tau}, \dots, X_{i+(m-1)\tau}]$$

Οι παράμετροι ανακατασκευής είναι :

- Η διάσταση εμβύθισης  $m$  που ορίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που γίνονται συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος.
- Η υστέρηση  $\tau$  που ορίζει με ποια χρονική διαφορά επιλέγονται οι  $m$  παρατηρήσεις. Η βέλτιστη επιλογή του  $\tau$  είναι η μικρότερη τιμή του για την οποία οι συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος καταστάσεων γίνονται ασυσχέτιστες.

Η πληροφορία που διοχετεύεται από τη χρονοσειρά στο κάθε ανακατασκευασμένο διάνυσμα καλύπτει το χρονικό παράθυρο (time window)  $(m-1)\tau$  το οποίο θα πρέπει να μην είναι ούτε πολύ μικρό γιατί σημαίνει ότι δε θα περιέχει αρκετή πληροφορία για την ανακατασκευή, αλλά ούτε και πολύ μεγάλο γιατί θα περιέχει περιττή πληροφορία που θα κάνει πιο περίπλοκη την ανακατασκευή.

### 3.1.1 Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$ (time delay)

Η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν η δειγματοληψία της χρονοσειράς έχει γίνει με μικρό  $\tau_s$ . Αν το  $\tau$  επιλεγεί πολύ μικρό τότε οι διαδοχικές τιμές είναι ισχυρά συσχετισμένες και στην ουσία δεν έχουμε στις συνιστώσες επιπλέον πληροφορία. Αν το  $\tau$  επιλεγεί πολύ μεγάλο οι τιμές γίνονται

ιδιαίτερα ασυσχέτιστες και χάνουμε πληροφορία για τη δυναμική του συστήματος (που περιγράφει την εξάρτηση της μιας τιμής από την προηγούμενη).

Ο εμπειρικός κανόνας που έχει επικρατήσει για την βέλτιστη επιλογή του  $\tau$  είναι η μικρότερη τιμή του  $\tau$  για την οποία οι συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος καταστάσεων  $x_i = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}]$  γίνονται ασυσχέτιστες.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της χρονικής υστέρησης  $\tau$  είναι :

- η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και
- η συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας (average mutual information).

1. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function), επιλέγεται ο χρόνος  $\tau$  για τον οποίο μηδενίζεται η αυτοσυσχέτιση για πρώτη φορά  $\tau_x(\tau)=0$ . Αν δε φθίνει γρήγορα προς το 0, επιλέγεται από τη σχέση  $\tau_x(\tau)=1/e$ .

Η επιλογή  $\tau$  υποδηλώνει απλά και μόνο την ύπαρξη γραμμικής ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών του διανύσματος καθυστέρησης. Είναι η μέση τιμή πάνω στα δεδομένα (ή πάνω στον ελκυστή) μιας ενδογενούς 'δυναμικής' στατιστικής του συστήματος. Όπου μηδενίζεται για πρώτη φορά η συνάρτηση, είναι η χρονική περίοδος που θα διαλέξουμε για να ανακατασκευάσουμε τον χώρο των φάσεων. Ο χρόνος που ζητάμε θα πρέπει να είναι ο καλύτερος και ο συντομότερος. Καλύτερος, όταν φέρνει τη συνάρτηση όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μηδέν, όταν δεν ισχύει τότε επιλέγουμε το χρόνο που αντιστοιχεί στο  $1/e=0,4$ .

2. Η συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας (mutual information)  $I(X, Y)$  μετράει την γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δυο μεταβλητών  $X$  και  $Y$  και ορίζεται ως

$$I(X, Y) = \sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \log \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (3.1)$$

όπου  $p_X(x)$  είναι η πιθανότητα του  $X=x$ ,  $P_{XY}(x,y)$  είναι η κοινή πιθανότητα  $X=x$  και  $Y=y$ . Το άθροισμα υπολογίζεται για όλες τις δυνατές τιμές των  $X$  και  $Y$ . Για χρονοσειρές, η αμοιβαία πληροφορία δίνεται ως  $I(\tau)$  και αφορά τις μεταβλητές  $x_i$  και  $x_{i-1}$ . Η συνάρτηση  $I(\tau)$  παίρνει πάντα θετικές τιμές. Η υστέρηση  $\tau$  που αντιστοιχεί στο πρώτο τοπικό ελάχιστο της  $I(\tau)$  προτείνεται ως η καταλληλότερη για την ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων.

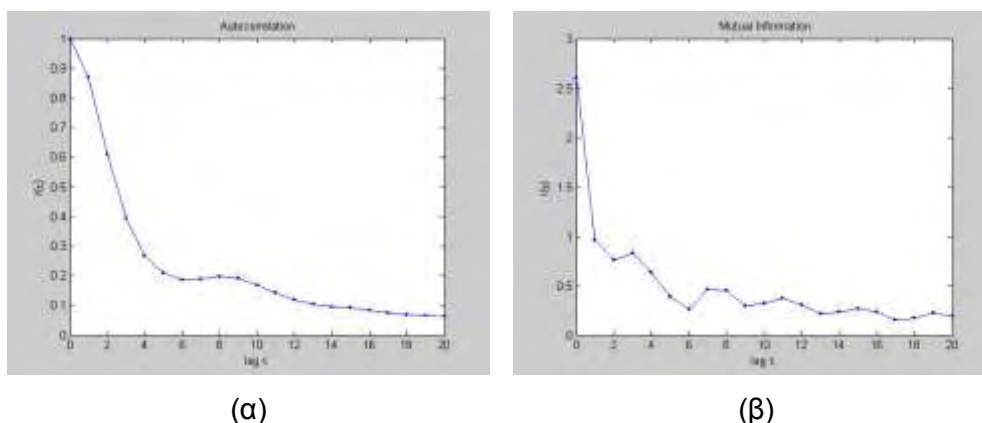
Η επιλογή του  $\tau$  πρέπει να γίνει έτσι ώστε, η μέση αμοιβαία πληροφορία που θα πάρουμε από τα δεδομένα πριν από το  $\tau$  και από τα δεδομένα μετά το  $\tau$  να είναι η

ελάχιστα δυνατή. Αυτό επιτυγχάνεται όταν τα δεδομένα είναι όσο το δυνατόν πιο απλωμένα.

### Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$ (time delay) στο σύστημα Lorenz

Στο σχήμα 3.2 δίνεται η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας σε χρονοσειρά του δυναμικού χαοτικού συστήματος Lorenz.

Από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=3$  σύμφωνα με το κριτήριο  $1/e$  στο 40% της αρχικής τιμής για  $t=0$ . Από τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας έχουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=2$  όπου είναι το πρώτο τοπικό ελάχιστο. Η επιλογή θα είναι  $\tau=2$  με βάση τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας γιατί μετράει τη γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δυο μεταβλητών και είναι και η μικρότερη τιμή.



Σχήμα 3.2 : Επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  από (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και (β) τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας

### **3.1.2 Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης $m$ (embedding dimension)**

Σύμφωνα με το θεώρημα του Takens [1981], ικανή συνθήκη για την αποφυγή αυτοτομών στην ανακατασκευή του ελκυστή είναι  $m \geq 2D+1$  όπου  $D$  η διάσταση του ελκυστή (άλλοι ερευνητές θέτουν  $m \geq D$ ). Αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία και θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν μικρότερη διάσταση εμβύθισης  $m$ . Αν γνωρίζαμε την τοπολογική διάσταση  $d$  της πολλαπλότητας ή του Ευκλείδειου χώρου που τον καλύπτει, για τη ζητούμενη βέλτιστη διάσταση εμβύθισης  $m$  θα ίσχυε

$$2D+1 \geq m \geq d$$

Επειδή όμως  $d$  και  $D$  είναι άγνωστα δεν υπάρχουν ενδείξεις για την επιλογή του  $m$ .

Σκοπός του θεωρήματος εμπύθισης είναι να εξασφαλισθεί η ύπαρξη ενός Ευκλείδειου χώρου αρκετά μεγάλης διάστασης  $d$  ώστε να εμπυθισθεί σ' αυτόν το σύνολο σημείων ενός ελκυστή χωρίς ταυτοσημία και χωρίς να αλλάξει η απόσταση μεταξύ των σημείων για διαστάσεις  $m > d$ .

Για μικρή διάσταση ο ελκυστής θα είναι “μπλεγμένος”, θα παρουσιάζει τομές με τον εαυτό του και δε θα είναι ισοδύναμος τοπολογικά με τον αρχικό ελκυστή. Αν η διάσταση είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη, οι υπολογισμοί θα είναι πιο πολύπλοκοι και χρονοβόροι.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να κατανοήσουμε το θεώρημα της εμπύθισης είναι να θεωρήσουμε ότι ο ελκυστής αποτελείται από τροχιές ενός συστήματος εξαιρετικά μεγάλης διάστασης, ακόμη και άπειρης. Ένας ελκυστής περιορισμένης διάστασης καταλαμβάνει ένα πολύ μικρό μέρος του όλου φασικού χώρου, και επομένως απαιτείται να βρεθεί ένας υποχώρος στον οποίο ο ελκυστής μπορεί αξιόπιστα να αναπαρασταθεί.

Δυο προβλήματα προκύπτουν όταν δουλεύουμε σε διαστάσεις μεγαλύτερες από αυτές που απαιτούνται για την ικανοποιητική εμπύθιση της χρονοσειράς.

- ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την εξαγωγή ιδιοτήτων που μας ενδιαφέρουν από τα δεδομένα αυξάνει εκθετικά με τη  $d$ , και
- υπό την παρουσία “θορύβου”, οι “επί πλέον” διαστάσεις δεν “εποικίζονται” από τη δυναμική (που ήδη συντελείται σε μια μικρότερη διάσταση) αλλά καταλαμβάνονται από το “μολυσμένο” μέρος του σήματος.

Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως για την εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης  $m$  είναι η μέθοδος των ψευδών γειτόνων (method of false nearest neighbors FNN) [Schreiber et al., 1998]. Οι άλλες δυο είναι η ανάλυση των χαρακτηριστικών τιμών και η ασφαλής εκτίμηση αναλλοίωτων μεγεθών. Εμείς θα αναλύσουμε τη μέθοδο των ψευδών γειτόνων την οποία θα εφαρμόσουμε και στη συγκεκριμένη εργασία.

Η μέθοδος των ψευδών γειτόνων αναφέρεται στο εξής ερώτημα: πότε θεωρούμε ότι έχουμε εξαλείψει τις ψευδείς τομές μιας τροχιάς με τον εαυτό της, που προκύπτουν από την προβολή του ελκυστή πάνω σε ένα χώρο χαμηλών διαστάσεων; Εξετάζοντας την ερώτηση αυτή διαδοχικά σε διαστάσεις  $d=1,2,3$ , κλπ, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια τιμή για την αναγκαία διάσταση εμπύθισης  $m$  έτσι ώστε να μην υπάρχουν πλέον ψευδείς γείτονες;

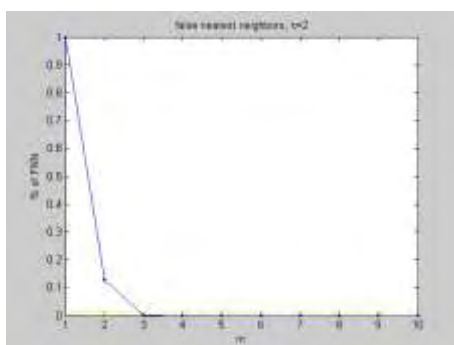
Η μέθοδος των ψευδών γειτόνων είναι πολύ ευαίσθητη στο θόρυβο και δίνει μεγάλες τιμές  $m$  για θορυβώδη δεδομένα. Μάλιστα η επίδραση αυτή του θορύβου είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερες τιμές της  $t$ . Αυτό αποτελεί μειονέκτημα της μεθόδου

γιατί σε πραγματικές εφαρμογές οδηγούμαστε στην επιλογή μεγαλύτερης  $m$  από αυτήν που πραγματικά χρειαζόμαστε.

### Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης $m$ στο σύστημα Lorenz

Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζεται η εύρεση της διάστασης εμβύθισης  $m$  εφαρμόζοντας τη μέθοδο FNN σε χρονοσειρά του δυναμικού χαοτικού συστήματος Lorenz.

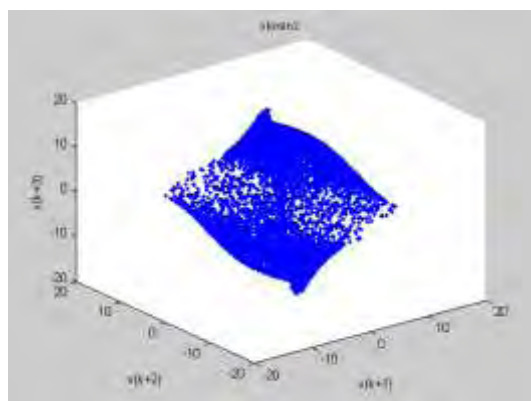
Από το σχήμα επιλέγουμε διάσταση εμβύθισης  $m=3$  γιατί το ποσοστό των ψευδών γειτόνων σύμφωνα με μέθοδο FNN πέφτει κάτω από 1%.



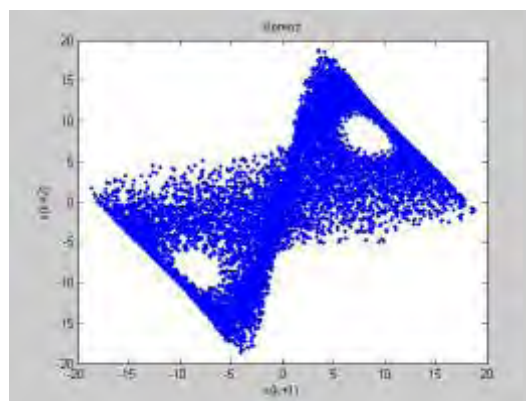
Σχήμα 3.3 : Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης  $m$  του συστήματος Lorenz με τη τη μέθοδο των ψευδών γειτόνων FNN

### **3.1.3 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων στο σύστημα Lorenz**

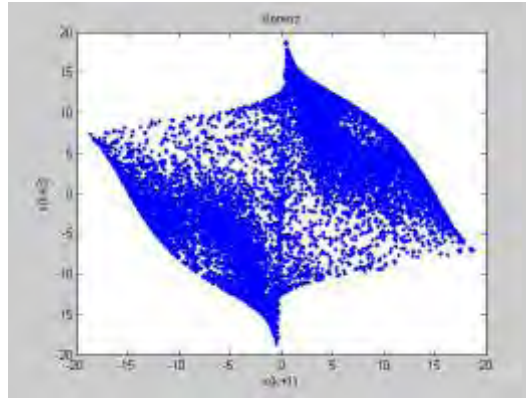
Με τα δεδομένα της επιλογής του χρόνου υστέρησης  $\tau=2$  και της διάστασης εμβύθισης  $m=3$  για το σύστημα Lorenz ανακατασκευάζουμε το χώρο των φάσεων και παρατηρούμε τα διαγράμματα διασποράς σε υψηλότερες διαστάσεις.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 3.4 : Σχεδιάγραμμα ανακατασκευής του χώρου των καταστάσεων του συστήματος Lorenz σε μια (α), δυο (β) και τρεις (γ) διαστάσεις

### 3.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (INVARIANT MEASURES)

Η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών περιλαμβάνει την εκτίμηση μη γραμμικών χαρακτηριστικών τα οποία δίνουν πληροφορίες για το υπό μελέτη σύστημα, όπως για τη διάσταση του ελκυστή και την πολυπλοκότητα του συστήματος και βοηθούν στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για τη χρονοσειρά, καθώς η διάσταση καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας στο μοντέλο.

Τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους ως αναλλοίωτα μέτρα του συστήματος (invariant measures). Ως σταθερά δηλαδή μεγέθη που δεν αλλοιώνονται από την εξέλιξη του συστήματος, καθώς και τη διαδικασία παρατήρησης του όταν αναφερόμαστε σε χρονοσειρές. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι η πυκνότητα των τροχιών, η μορφοκλασματική διάσταση, η εντροπία και οι εκθέτες Lyapunov. Εμείς θα αναφερθούμε σε δυο μεγέθη τη μορφοκλασματική διάσταση και τους εκθέτες Lyapunov [Kugiumtzis 1995].

#### 3.2.1 Διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)

Ένας ελκυστής χαρακτηρίζεται από την Ευκλείδεια διάσταση του Ευκλείδειου χώρου που περιέχει τον ελκυστή (π.χ. για τον ανακατασκευασμένο χώρο είναι η διάσταση εμβύθισης  $m$ ) και την τοπολογική διάσταση της πολλαπλότητας πάνω στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Για να χαρακτηρίσουμε όμως την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας εισάγουμε τη μορφοκλασματική διάσταση. Η διάσταση αυτή είναι συνεπής με τη συνήθη έννοια της διάστασης δηλαδή πεπερασμένα σύνολα σημείων έχουν διάσταση 0, γραμμές έχουν διάσταση 1 και επιφάνειες έχουν διάσταση 2. για

γεωμετρικά αντικείμενα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας όπως τυπικά είναι οι παράξενοι ελκυστές, η μορφοκλασματική διάσταση είναι μη ακέραιος αριθμός.

Η διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)  $\nu$ , που μελετήθηκε για πρώτη φορά διεξοδικά από τους Grassberger και Procaccia το 1983 [Grassberger, P., κ.α, 1983], είναι ένα από τα αναλλοίωτα μέτρα που εκφράζουν τη μορφοκλασματική διάσταση. Αν θεωρήσουμε έναν ελκυστή ως μη πεπερασμένο σύνολο σημείων  $x_i$  και ορίσουμε την πιθανότητα η απόσταση δυο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη από κάποια απόσταση  $r$  ως  $P(\|x_i - x_j\| < r)$ , όπου  $\|x\|$  είναι το μήκος του διανύσματος  $x$ . Αν  $\mu_i$  είναι ο αριθμός των σημείων που βρίσκονται μέσα σε σφαίρα με ακτίνα  $r$  και κέντρο  $x_i$ , τότε η μέση τιμή ως προς όλα τα  $x_i$ ,  $(\mu_i)_x$ , προσεγγίζει την παραπάνω πιθανότητα.

Σύμφωνα με το νόμο της κλιμάκωσης (scaling law) είναι  $(\mu_i)_x \sim r^\nu$ , όταν  $r \rightarrow 0$  δηλαδή η πιθανότητα η απόσταση δυο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη του  $r$  αλλάζει σύμφωνα με κάποια δύναμη της απόστασης  $r$  με σταθερό εκθέτη  $\nu$ . Αν ο ελκυστής έχει συνηθισμένη μορφή (πεπερασμένο σύνολο σημείων, γραμμή, επιφάνεια κτλ.) ο εκθέτης  $\nu$  είναι ακέραιος αριθμός, ενώ αν είναι παράξενος το  $\nu$  είναι μη ακέραιος και δηλώνει το βαθμό αυτό-ομοιότητας.

Η διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης  $\nu$  παριστάνεται γραφικά με τέσσερα σχήματα :

(α) Το πρώτο σχήμα δείχνει το ολοκλήρωμα συσχέτισης (correlation integral) και είναι  $\log C(r)$  vs  $\log r$  για ένα εύρος τιμών της  $m$ ,  $m=1,2,3,\dots,m_{\max}$ , όπου  $C(r)$  είναι το άθροισμα της συσχέτισης (correlation sum). Περιμένουμε το γράφημα  $\log C(r)$  vs  $\log r$  να σχηματίζει ευθεία γραμμή για κάποιο μεγάλο εύρος σχετικά μικρών τιμών του  $r$ , που το ονομάζουμε περιοχή κλιμάκωσης του  $r$  (scaling region).

(β) Το δεύτερο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων του  $r$  και  $m$  (local slope) και είναι  $d \log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$  για το ίδιο εύρος τιμών της  $m$ . Θα πρέπει για κάποιο μεγάλο εύρος σχετικά μικρών τιμών του  $r$ , όπως και στο (α), το γράφημα της παραγώγου  $d \log C(r) / d \log r$  να σταθεροποιείται σε μια οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής  $\nu$ . Για την εκτίμηση χαρακτηριστικής για το σύστημα διάσταση συσχέτισης  $\nu$  από μια χρονοσειρά θα πρέπει επιπλέον το ίδιο οριζόντιο επίπεδο της παραγώγου  $d \log C(r) / d \log r$  να παρατηρείται για διαφορετικές ανακατασκευές του ελκυστή.

(γ) Το τρίτο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων της διάστασης εμπύθισης (estimated correlation dimension) και είναι  $\nu(m)$  vs  $m$ , όπου  $\nu(m)$  είναι η εκτίμηση της κλίσης από τα γραφήματα του πρώτου σχήματος ή του οριζόντιου επιπέδου από τα



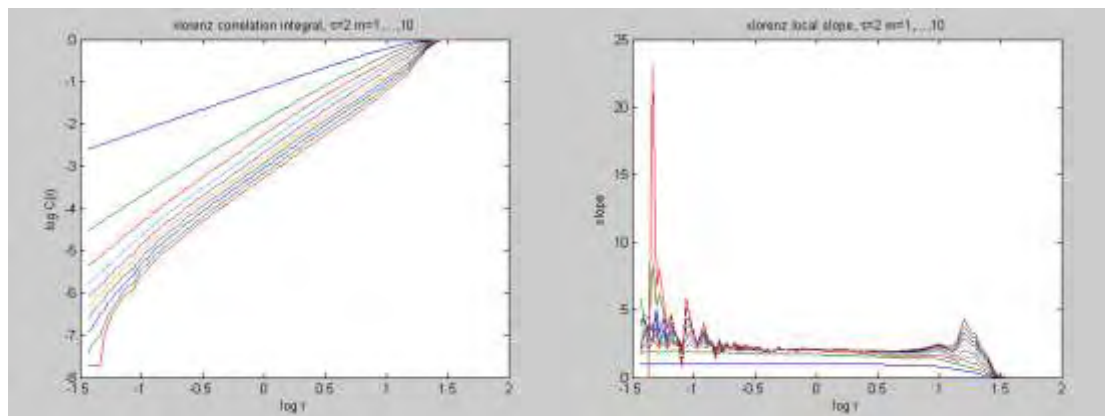
γραφήματα του δεύτερου σχήματος αντίστοιχα για κάθε  $m$ . Για τις ανακατασκευές συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της υστέρησης με σταθερή κάποια κατάλληλη τιμή του  $\tau$  και αυξανόμενη διάσταση εμβύθισης  $m$ . Φυσικά για μικρές τιμές του  $m$ , όπου η ανακατασκευή του ελκυστή δεν είναι ικανοποιητική, το οριζόντιο επίπεδο που δίνει την εκτίμηση του  $\nu(m)$  θα αυξάνει με την αύξηση του  $m$ . Για μεγαλύτερες τιμές του  $m$  όμως θα πρέπει το οριζόντιο επίπεδο να συγκλίνει στο ίδιο ύψος  $\nu = \nu(m)$ . Καθώς το  $m$  μεγαλώνει ακόμα περισσότερο η περιοχή κλιμάκωσης σταδιακά εξαφανίζεται και η εκτίμηση του  $\nu$  δεν είναι πια δυνατή.

(δ) Το τέταρτο σχήμα δείχνει τις περιοχές κλιμάκωσης (log distances for estimation) και είναι  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης γίνεται με τη βοήθεια του αλγόριθμου Grassberger & Procaccia [1983].

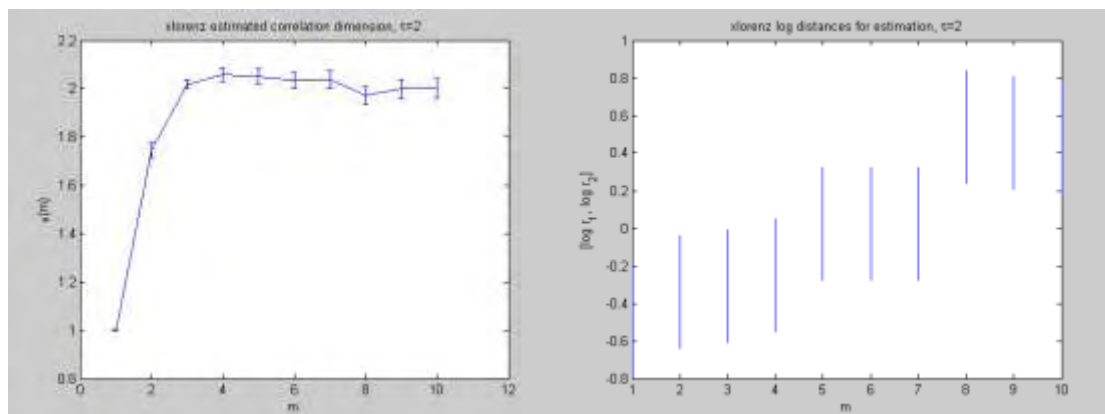
#### Εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης $\nu$ στο σύστημα Lorenz

Στα ακόλουθα σχήματα φαίνεται γραφικά η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης μιας χρονοσειράς 10.000 σημείων της  $x$  μεταβλητής του συστήματος Lorenz χρησιμοποιώντας ανακατασκευές του χώρου καταστάσεων με  $\tau=2$  και  $m=1,2,\dots,10$ .



(α)

(β)



(γ)

(δ)

Σχήμα 3.5 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης για το σύστημα Lorenz στη χαοτική περιοχή (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $v(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Στο σχήμα 3.5 (α) φαίνεται πως τα γραφήματα  $\log C(r)$  vs  $\log r$  για  $m=1,2,\dots,10$  είναι ευθείες γραμμές για μεγάλο εύρος τιμών της απόστασης  $r$ . Η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μικρά  $r$  ( $\log r < -0,5$ ), γιατί δεν υπάρχουν αρκετά σημεία σε σφαίρες με τόσο μικρές ακτίνες και η στατιστική είναι φτωχή, καθώς και για πολύ μεγάλα  $r$  ( $\log r > 1$ ), όπου η αυτό-ομοιότητα καταστρέφεται από τη γεωμετρία του ελκυστή.

Στο σχήμα 3.5 (β) από το οριζόντιο επίπεδο της κλίσης  $d \log C(r) / d \log r$  φαίνεται πως η περιοχή κλιμάκωσης είναι για  $-0,5 < \log r < 1$ , για μεγάλα  $m$ . Για μικρά  $m$  η περιοχή κλιμάκωσης επεκτείνεται σε ακόμα μικρότερα  $r$ . Η οριζόντια γραμμή για  $m=1$  αντιστοιχεί σε κλίση 1, ενώ για  $m=2$  πλησιάζει την κλίση 2 και αυτό δείχνει ότι για αυτές τις τιμές του  $m$  η ανακατασκευή δεν είναι ικανοποιητική. Για μεγαλύτερα  $m$  τα γραφήματα της κλίσης συγκλίνουν στην ίδια στάθμη που αντιστοιχεί σε κλίση  $v \approx 2$ .

Στο σχήμα 3.5 (γ) φαίνεται η σταθερή εκτίμηση του  $v$  για  $m \geq 3$ , όπου φαίνεται και το μικρό όριο σφάλματος  $\pm SD$  (όπου  $SD$  είναι η τυπική απόκλιση). Η πραγματική διάσταση συσχέτισης είναι 2,06.

Στο σχήμα 3.5 (δ) φαίνονται οι δυο περιοχές κλιμάκωσης

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες όπως είναι ο μικρός χρόνος δειγματοληψίας  $t_s$ , οι κατάλληλες επιλογές  $\tau$  και  $m$ , ο θόρυβος συστήματος ή παρατήρησης και το μήκος  $N$  της χρονοσειράς.

1. Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα με μικρό χρόνο δειγματοληψίας  $t_s$ , χρονικά κοντινά σημεία αλλοιώνουν τη στατιστική  $C(r)$  γιατί, ενώ είναι σε απόσταση μικρότερη του  $r$ , ανήκουν στην ίδια τροχιά και δε θα έπρεπε να μετρηθούν στο  $C(r)$ . Η μέτρηση τέτοιων ζευγαριών δίνει υποεκτίμηση του  $v$ .
2. Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$ , σε συνδυασμό και με τη διάσταση εμπύθισης  $m$  μπορεί να επηρεάσει την εκτίμηση του  $v$ , κυρίως όταν η περιοχή κλιμάκωσης του  $r$  είναι μικρή. Για πολύ μικρά  $\tau$  μπορεί η σύγκλιση του  $v(m)$  για διάφορα  $m$  να δίνει υποεκτίμηση της πραγματικής διάστασης συσχέτισης, ενώ για μεγάλα  $\tau$  μπορεί να μη συγκλίνουν οι εκτιμήσεις  $v(m)$ .
3. Ο θόρυβος του συστήματος ή παρατήρησης αλλοιώνει την κλιμάκωση για αποστάσεις  $r$  στο επίπεδο του εύρους του θορύβου. Σε τέτοιες μικρές

περιοχές η αυτό-ομοιότητα καταστρέφεται από το θόρυβο και η κατανομή των σημείων είναι όπως του θορύβου και δεν καθορίζεται από τη δυναμική του συστήματος. Γι' αυτό για μικρά  $r$  εμφανίζεται η κλίση να προσεγγίζει το  $m$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μικραίνει η περιοχή κλιμάκωσης του  $r$  που επιτρέπει τη σωστή εκτίμηση του  $v$  κι αν το εύρος του θορύβου είναι μεγάλο μπορεί η περιοχή κλιμάκωσης να σκεπάζεται πλήρως και να μην είναι δυνατή η εκτίμηση του  $v$ .

4. Το μήκος  $N$  της χρονοσειράς καθορίζει επίσης το μέγεθος της περιοχής κλιμάκωσης. Για μικρό  $N$  το διάστημα των τιμών του  $r$  που υποστηρίζει το νόμο κλιμάκωσης συρρικνώνεται από τα αριστερά (για μικρές τιμές του  $r$  η στατιστική των σημείων είναι φτωχή).

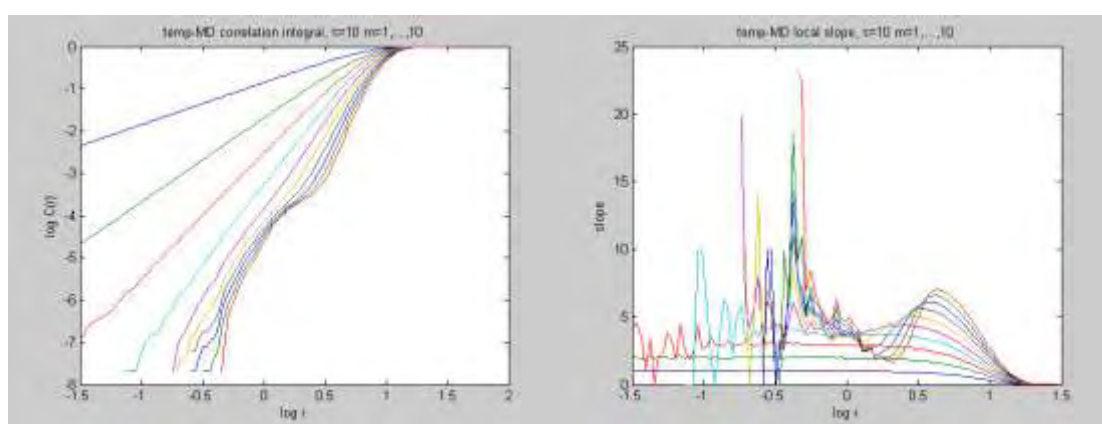
Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης σε πραγματικές χρονοσειρές παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και η επιλογή των παραμέτρων έχει μεγάλη σημασία. Λόγω ακριβώς της αδυναμίας ακριβούς εκτίμησης του  $v$  σε πραγματικά προβλήματα, είναι δύσκολο να χαρακτηρίζουμε το σύστημα ως χαοτικό από τον υπολογισμό μη ακεραίου  $v$ . Για παράδειγμα το αποτέλεσμα  $v=3,2 \pm 0,3$  δε μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη ύπαρξης χαοτικού ελκυστή, αφού για παράδειγμα δεν αποκλείει ότι το σύστημα που έδωσε τη χρονοσειρά είναι ένας ημι-περιοδικός (τόρος) διάστασης 3. Όμως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι με 4 βαθμούς ελευθερίας (δηλαδή μεταβλητές) θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αυτό το σύστημα.

Σε περίπτωση που η παρουσία θορύβου είναι ισχυρή θα δούμε το ολοκλήρωμα συσχέτισης να παρουσιάζει δυο καμπύλες. Μια καμπύλη για μικρά  $r$ , ίση με τη διάσταση εμβύθισης και μια δεύτερη, ίση με τη διάσταση συσχέτισης χωρίς θόρυβο. Η αναγνώριση των δυο κλίσεων είναι εξαιρετικά δύσκολη λόγω των περιορισμένων δεδομένων που διαθέτουμε. Παράλληλα, και στα μεγάλα  $r$  τα αποτελέσματα είναι το ίδιο αναξιόπιστα, πάλι λόγω των περιορισμένων δεδομένων. Όσο μεγαλώνει το  $r$  και τείνει να εξισωθεί με τη διάμετρο του ελκυστή, η κλίση του ολοκληρώματος συσχέτισης τείνει στο 0.

Το ολοκλήρωμα συσχέτισης παρουσιάζει δυο καμπύλες και στην περίπτωση των χρονικών συσχετίσεων. Γι' αυτό και στις δυο περιπτώσεις (θορύβου και χρονικών συσχετίσεων) χρησιμοποιείται η χρήση παραθύρου Theiler [Theiler,1990] για την παράλειψη χρονο-συσχετισμένων σημείων στον υπολογισμό του ολοκληρώματος συσχέτισης. Η διαδικασία παράλειψης των σημείων, καλείται συνήθως στη βιβλιογραφία και δοκιμή χρονικού διαχωρισμού (time separation test). Γενικά, κρίνεται απαραίτητη η χρήση παραθύρου Theiler γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης επειδή και οι

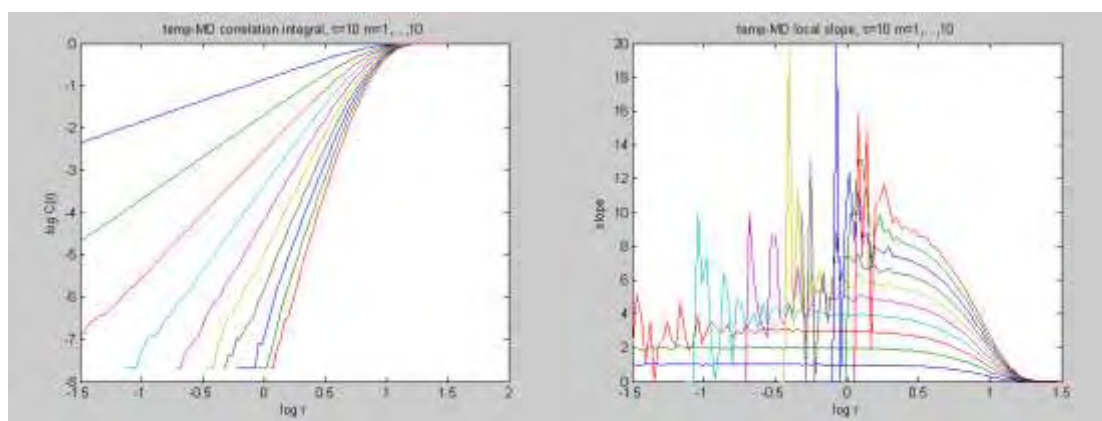
χρονικές συσχετίσεις και η παρουσία θορύβου οδηγούν σε χαμηλότερες εκτιμήσεις της διάστασης συσχέτισης.

Στο ακόλουθο σχήμα 3.6 παρουσιάζονται τα γραφήματα χρονοσειρών θερμοκρασίας χωρίς παράθυρο Theiler ( $\alpha$ ) και με χρήση παραθύρου Theiler ( $\beta$ ). Στο διάγραμμα 3.6( $\alpha$ .1) έχουμε δυο κλίσεις ενώ στο διάγραμμα 3.6( $\beta$ .1) έχουμε μια κλίση. Επίσης στο διάγραμμα 3.6( $\alpha$ .2) παρατηρούμε χαμηλότερη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης από ότι στο διάγραμμα 3.6( $\beta$ .2). Παρατηρούμε δηλαδή ότι χωρίς τη χρήση παραθύρου Theiler υπάρχει υποεκτίμηση της διάστασης συσχέτισης λόγω των χρονικών συσχετίσεων.



( $\alpha$ .1)

( $\alpha$ .2)



( $\beta$ .1)

( $\beta$ .2)

Σχήμα 3.6 : Υποεκτίμηση διάστασης συσχέτισης ( $\alpha$ ) χωρίς παράθυρο Theiler και ( $\beta$ ) με παράθυρο Theiler στα διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$  και διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ .

### 3.2.2 Εκθέτες Lyapunov

Η ιδιότητα των χαοτικών δυναμικών συστημάτων να έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες έχει ως αποτέλεσμα τροχιές που αρχικά είναι πολύ κοντά να αποκλίνουν γρήγορα και μάλιστα εκθετικά. Ο μέσος εκθέτης για τη διεύθυνση της μεγαλύτερης εκθετικής απόκλισης των τροχιών είναι ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov. Γενικά για ένα δυναμικό σύστημα που παράγει τροχιές σε κάποιο χώρο διάστασης  $m$ , υπάρχουν  $m$  εκθέτες Lyapunov, ένας για κάθε διεύθυνση. Το φάσμα τους είναι διακριτό και παρέχει μια ασφαλή ποιοτική και ποσοτική εκτίμηση των ιδιοτήτων τοπικής ευστάθειας των τροχιών σε κάθε περιοχή του χώρου των φάσεων.

Οι ιδιότητες τοπικής ευστάθειας καθορίζονται από την απόκριση που εμφανίζουν οι τροχιές ενός συστήματος σε μικρές διαταραχές, για συγκεκριμένες περιοχές του χώρου των φάσεων και συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα. Βέβαια μια τροχιά μπορεί να είναι ασταθής σε διαταραχές κατά μήκος κάποιων διευθύνσεων και ασταθής ως προς άλλες διευθύνσεις. Όμως όλες οι δυνατές διαταραχές μπορούν να εξετασθούν ταυτόχρονα, ακολουθώντας την εξέλιξη ενός συνόλου σημείων που αρχικά περιέχονται σε μια  $m$ -διάσταση σφαίρα, γύρω από τα σημεία της τροχιάς της οποίας εξετάζουμε την ευστάθεια. Σε κάθε μια από αυτές τις  $m$  διαστάσεις αντιστοιχεί και ένας εκθέτης Lyapunov.

Το πρόσημο για τους εκθέτες Lyapunov είναι ενδεικτικό χάους και η τιμή τους το πόσο χαοτικό είναι ένα σύστημα.

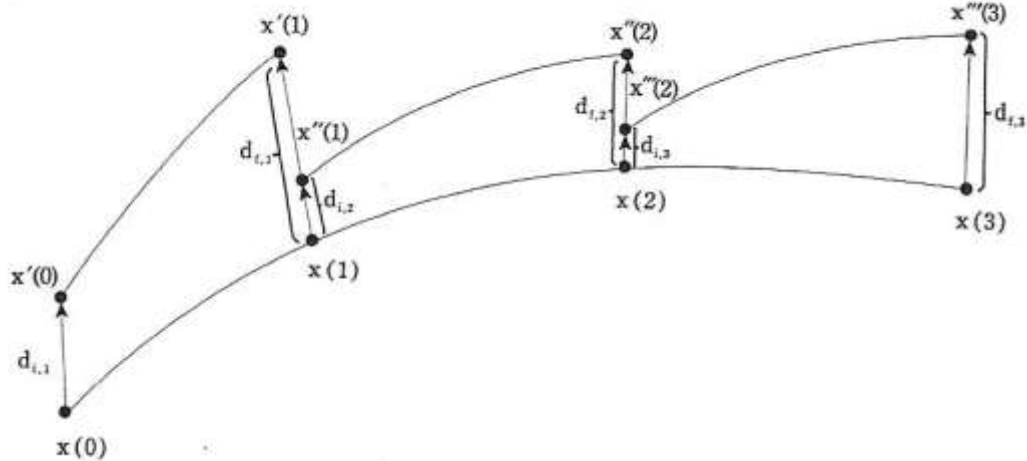
- Ένας αρνητικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό σύγκλισης τροχιών στη διεύθυνση που του αντιστοιχεί, δείχνει δηλαδή τη σύγκλιση των σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή σημείου. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και η τροχιά περιοδική.
- Ένας θετικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό απόκλισης των τροχιών στη διεύθυνση που του αντιστοιχεί, δείχνει δηλαδή την απόκλιση των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει χαοτικό ελκυστή. Η τροχιά είναι ασταθής και χαοτική και ο χώρος των φάσεων δε θα έχει τάξη.
- Ένας μηδενικός εκθέτης Lyapunov δείχνει την ανυπαρξία σύγκλισης ή απόκλισης των κοντινών σημείων του ελκυστή στην εξέλιξη του χρόνου και προσδιορίζει ελκυστή οριακού κύκλου. Η τροχιά είναι ένα αδιάφορο σημείο ισορροπίας. Για ροές, τουλάχιστον ένας εκθέτης Lyapunov είναι 0 και αντιστοιχεί στη διεύθυνση της κίνησης της τροχιάς.

Αν το αιτιοκρατικό δυναμικό σύστημα (απώλειας ενέργειας) δεν είναι χαοτικό τότε δεν έχει κανένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Για συστήματα απώλειας ενέργειας το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι αρνητικό.

Υπάρχουν μέθοδοι εκτίμησης όλου του φάσματος των εκθετών Lyapunov αλλά εδώ θα περιοριστούμε στην εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov  $\lambda_1$ . Ο  $\lambda_1$  συγκεντρώνει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να χαρακτηρίσουμε ένα αιτιοκρατικό σύστημα χαστικό ( $\lambda_1 > 0$ ), καθώς και να μετρήσουμε το βαθμό πολυπλοκότητας του από την τιμή  $\lambda_1$ .

Ας υποθέσουμε ότι δυο σημεία  $x(0)$ , και  $x'(0)$  που ανήκουν σε δυο διαφορετικές τροχιές βρίσκονται κοντά και σε απόσταση  $d_{i,1} = \|x(0) - x'(0)\|$ , όπως δίνεται γραφικά στο σχήμα 3.7.

Μετά από κάποιο χρόνο  $t$  η απόστασή τους γίνεται  $d_{i,t} = \|x(t) - x'(t)\|$ . Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov ορίζεται ως  $d_{i,t} \approx d_{i,1} e^{\lambda_1 t}$  για  $t \rightarrow \infty$  (3.1)



Σχήμα 3.7 : Σχεδιάγραμμα της απόκλισης κοντινών τροχιών

Αν το σύστημα είναι χαστικό και οι τροχιές αποκλίνουν, ο εκθέτης  $\lambda_1$  είναι θετικός και η τιμή του χαρακτηρίζει το πόσο χαστικό είναι το σύστημα. Βέβαια δυο τροχιές δε μπορεί συνέχεια να αποκλίνουν αφού ο ελκυστής περιορίζεται σε κάποια περιοχή του χώρου των καταστάσεων. Άρα η παραπάνω σχέση ισχύει για χρόνους  $t$ , όπου το  $d_{i,1}$  παραμένει μικρό. Για να είναι δυνατόν λοιπόν να μετρηθεί η απόκλιση θα πρέπει να ισχύει  $d_{i,1} \rightarrow 0$ .

Ο ορισμός της παραπάνω σχέσης έχει πρακτικές δυσκολίες και δεν επιτρέπει τον υπολογισμό του  $\lambda_1$  από πεπερασμένη χρονοσειρά αφού δε μπορεί να ισχύει  $d_{i,1} \rightarrow 0$  και  $t \rightarrow \infty$ . Στην εκτίμηση λοιπόν του  $\lambda_1$ , ξεκινάμε από ένα σημείο αναφοράς  $x(0)$  του ανακατασκευασμένου ελκυστή, βρίσκουμε το κοντινότερο σημείο  $x'(0)$  του ελκυστή σε απόσταση έστω  $d_{i,1}$  και υπολογίζουμε την απόστασή τους  $d_{i,t}$  των σημείων  $x(t)$  και  $x'(t)$ , δηλαδή την απόσταση των δυο τροχιών ύστερα από χρόνο  $t$ . Στη συνέχεια διαλέγουμε το πιο κοντινό σημείο στο σημείο αναφοράς  $x(0)$ . Ορίζουμε

έτσι μια νέα κοντινή τροχιά που περνάει από αυτό το σημείο κι επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τα σημεία αναφοράς να καλύψουν όλα τα σημεία. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov εκτιμάται ως

$$\lambda_1 = \frac{1}{Nt} \sum_{j=1}^n \log \frac{df_{,j}}{di_{,j}} \quad (3.2)$$

όπου  $d_{i,j}$  και  $d_{f,j}$  είναι η αρχική και η τελική απόσταση μετά από χρόνο  $t$  σε κάθε βήμα  $j$ .

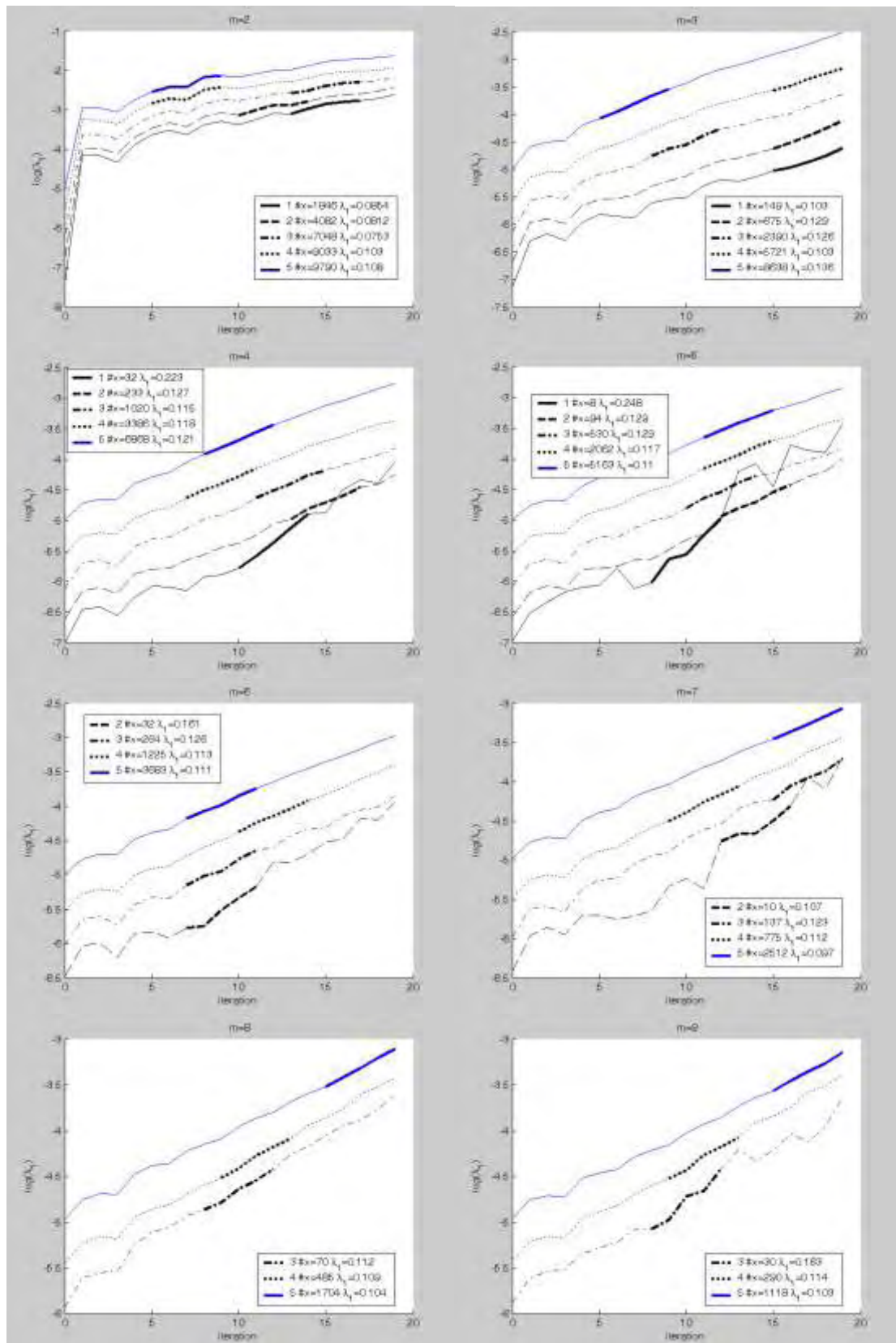
Την εκτίμηση του  $\lambda_1$  επηρεάζουν διάφοροι παράμετροι και προβλήματα. Για χρονοσειρές τα σημεία  $x_i$  (όπου  $i=0,1,2,\dots$ ) προέρχονται από την χρονοσειρά με την ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων. Εκτός από τις παραμέτρους  $\tau$  και  $m$  της ανακατασκευής θα πρέπει να ορισθούν κι άλλες παράμετροι του αλγόριθμου εκτίμησης του  $\lambda_1$ , όπως ο χρόνος  $t$ .

Όμοια με την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης, η εκτίμηση του  $\lambda_1$  επηρεάζεται από το θόρυβο και το μήκος της χρονοσειράς κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή περισσότερος θόρυβος ή μικρότερο μήκος δίνουν χειρότερες εκτιμήσεις του  $\lambda_1$ .

Ένα βασικό πρόβλημα με την εκτίμηση του  $\lambda_1$  με την παραπάνω μέθοδο είναι η προϋπόθεση ότι η απόκλιση είναι εκθετική, όπως συμβαίνει στα χαστικά συστήματα. Όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο σε κάποια χρονοσειρά δε ξέρουμε από πριν αν προέρχεται από χαστικό σύστημα. Η μέθοδος αυτή δίνει κάποια θετική τιμή του  $\lambda_1$  ακόμα και για λευκό θόρυβο, που θεωρητικά θα έπρεπε να έχει  $\lambda_1$  άπειρο, δε μπορεί δηλαδή να ξεχωρίσει ένα χαστικό από ένα στοχαστικό σύστημα. Γι' αυτό το λόγο υπάρχουν και τροποποιήσεις αυτής της μεθόδου [Rosenstein et al 1993, Kantz 1994].

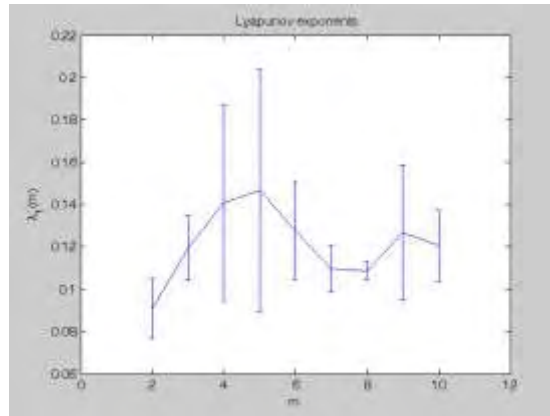
### Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov στο σύστημα Lorenz

Στα ακόλουθα σχήματα φαίνεται γραφικά η εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη, μιας χρονοσειρά 10.000 σημείων της  $x$  μεταβλητής του συστήματος Lorenz ( $\tau_s=0,1s$ ) χρησιμοποιώντας ανακατασκευές του χώρου καταστάσεων με  $\tau=2$  και  $m=1,2,\dots,10$ .



(a)





(β)

Σχήμα 3.8 : (α) Οκτώ σχήματα, ένα για κάθε διάσταση εμφύθισης και (β) γραφική παράσταση με τον εκτιμώμενο εκθέτη και το αντίστοιχο σφάλμα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β

### 4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΑΜΕΣΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΚΟΛΜΟΓΟΡΟΝ

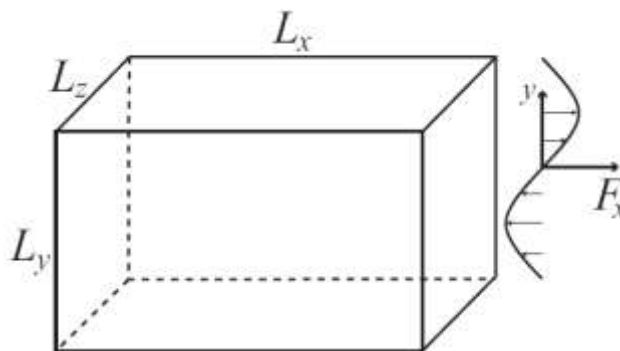
#### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνει την εφαρμογή των μεθόδων μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, σε χρονοσειρές άμεσης προσομοίωσης (Direct Simulation) της ροής Kolmogorov. Η ροή Kolmogorov είναι μια βασική ροή ομογενούς τύρβης κατά την οποία το ρευστό κινείται υπό την επίδραση των περιοδικών δυνάμεων που δρουν σε όλο τον όγκο του. Οι χρονοσειρές που δόθηκαν (από τον Δρ. Σαρρή) αφορούν μια σειρά στατιστικών στοιχείων μέσων τιμών στον όγκο του ρευστού και όχι σημειακών ποσοτήτων. Τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής, βασικές λεπτομέρειες της προσομοίωσης και ο ορισμός των ποσοτήτων που βρίσκονται στην χρονοσειρά ακολουθούν.

##### 4.1.1 Η ροή Kolmogorov

Η ροή Kolmogorov δημιουργείται από μια στατική (μόνιμη) δύναμη που μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στο χώρο. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1, υποθέτουμε ότι η δύναμη είναι κατά μήκος του άξονα  $x$  και μεταβάλλεται κατά τον άξονα  $y$ :

$$F_x = A \sin(k_y y), \quad F_y = F_z = 0 \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.1 : Υπολογιστικό πεδίο της ροής Kolmogorov

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, η ροή Kolmogorov είναι κατά βάση θεωρητική αφού η δημιουργία μιας τέτοιας ροής στη φύση ή το εργαστήριο είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Εξαίρεση αποτελούν μερικά πειράματα μαγνητοϋδροδυναμικής όπου η κατάλληλη εφαρμογή ηλεκτρομαγνητικών πεδίων δημιουργεί την επιθυμητή δύναμη στο ρευστό. Γενικά, η ροή Kolmogorov έχει χρησιμοποιηθεί επειδή επιτρέπει εκτός από υπολογιστική και αρκετά καλή αναλυτική αντιμετώπιση.

Το πεδίο ταχυτήτων  $u_i$  υποθέτουμε ότι περιγράφεται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις Navier – Stokes:

$$\partial_i u_i + \partial_j (u_i u_j) = -\partial_i p + \nu \nabla^2 u_i + F_i, \quad (4.2)$$

όπου, η πίεση (προς την πυκνότητα)  $p$  υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας  $\partial_i u_i = 0$  (1).

Ο αριθμός Reynolds που χρησιμοποιήθηκε στην προσομοίωση αντιστοιχεί στη περιοχή της πλήρως αναπτυγμένης τύρβης. Η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε με ένα φασματικό κώδικα και η ροή επιλύεται σε ένα περιοδικό κουτί διαστάσεων  $L_x \times L_y \times L_z$ .

Συνήθως στην ρευστομηχανική ορίζουμε τους αδιάστατους αριθμούς που καθορίζουν την ροή μας με βάση κάποιο χαρακτηριστικό μήκος του πεδίου μας, όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση το κουτί μας είναι περιοδικό και δεν υπάρχει εξ αρχής κάποιο χαρακτηριστικό μήκος. Στην ομογενή τύρβη, το υπολογιστικό πεδίο επιλέγεται έτσι ώστε να τα στατιστικά της ροής να είναι ανεξάρτητα του κουτιού της προσομοίωσης.

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής Kolmogorov ορίζονται με βάση το μήκος της ημιτονοειδούς δύναμης:  $l_* = k_f^{-1}$ . Στην στρωτή περιοχή, η δύναμη δημιουργεί μια διαστρωματοποιημένη ροή στην διεύθυνση  $x$  ταχύτητας  $u_x = A / (\nu k_f^2) \sin(k_f y)$  και η χαρακτηριστική ταχύτητα της στρωτής ροής είναι  $U = A / (\nu k_f^2)$ . Όμως, στην τυρβώδη η χαρακτηριστική ταχύτητα δεν πρέπει να εξαρτάται από το ιξώδες και πρέπει να εξαρτάται μόνο από τον συντελεστή ενίσχυσης της δύναμης  $A$  και το  $k_f$ . Από τη διαστατική ανάλυση έχουμε ότι  $l_* = l_*/U_* = (A k_f)^{-1/2}$ . Ο αριθμός Reynolds όταν βασίζεται στα  $l_*$  και  $U_*$  δίνεται από τη σχέση:

$$Re_* = A^{1/2} / k_f^{3/2} \nu \quad (4.3)$$

Για την προσομοίωση της χρονοσειράς χρησιμοποιήθηκαν τα εξής μεγέθη:  $A=1$  και  $k_f=1$ , άρα  $l_*=2\pi$  και  $l_*=U_*=r_*=1$ . Το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιήθηκε με ίδιο πλέγμα  $\Delta_x = L_x/n_x$ ,  $\Delta_y = L_y/n_y$ ,  $\Delta_z = L_z/n_z$  που σε κάθε διεύθυνση αντιστοιχεί στα 32 σημεία.

#### 4.1.2 Αριθμητική προσομοίωση με την μέθοδο Direct Numerical Simulation

Η αριθμητική προσομοίωση πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο Direct Numerical Simulation. Ο φασματικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε διορθώνει πλήρως τα λάθη που δημιουργούνται από τις μη-γραμμικές συσχετίσεις και για την χρονική ολοκλήρωση των μη-γραμμικών όρων και της δύναμης χρησιμοποιεί μια οικονομική μέθοδο Runge – Kutta τρίτης τάξης. Οι όροι διάχυσης ολοκληρώνονται με βάση αναλυτικούς συντελεστές. Το σταθερό χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε εξασφαλίζει ότι το κριτήριο  $C > \Delta/u_{\max}/\delta t$  ικανοποιείται για  $C = 0.5$ , όπου η απόσταση μεταξύ των γραμμών του πλέγματος δίνεται από τη σχέση  $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  και  $u_{\max}$  είναι η μέγιστη ταχύτητα.

Το κινηματικό ιξώδες επιλέχθηκε έτσι ώστε το γινόμενο του μεγαλύτερου κυματαριθμού της προσομοίωσης  $K$  επί το μήκος σκέδασης της κινητικής ενέργειας της τύρβης  $\eta = (v^3/\varepsilon)^{1/4}$  να είναι περίπου τάξης 1.5 .

	$n_x/r_x$	$n_y/r_y$	$n_z/r_z$	$vT^*/l_*^2$
Σετ A	32	32	32	0,042

Πίνακας 4.1 : Χαρακτηριστικά μεγέθη της προσομοίωσης

Ο αριθμός Reynolds με βάση την τυρβώδη ενέργεια και το μέσο μήκος των δινών της ροής ορίζεται ως  $R_\lambda = u' \lambda/v$ , όπου

$$u' = \sqrt{2E'/3} \quad (4.4)$$

$$\lambda = \sqrt{(15\nu u'^2)/\varepsilon} \quad (4.5)$$

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $E'$  υπολογίζεται σε κάθε χρονική στιγμή από το στιγμιαίο πεδίο ταχυτήτων και στην ουσία περιγράφει την διαφορά της ολικής κινητικής ενέργειας από αυτή που μεταφέρεται από την μέση ροή  $U_i$  εξαιτίας της δύναμης.

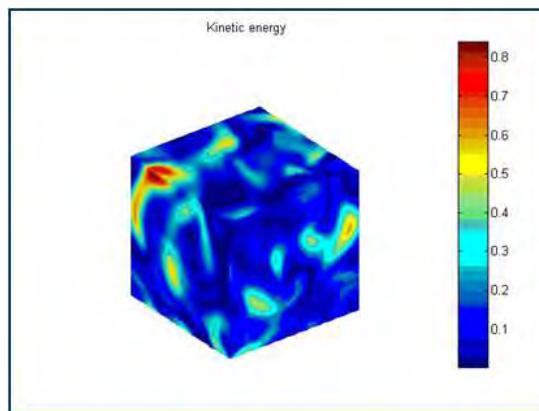
Η σκέδαση της κινητικής ενέργειας  $\varepsilon$  υπολογίζεται είτε από το συνολικό ή από το τυρβώδες πεδίο ταχυτήτων. Οι μέσες τιμές των διαφόρων ποσοτήτων για την προσομοίωση της χρονοσειράς δίνονται από τον πίνακα που ακολουθεί:

	$r_x$	$r_y$	$r_z$	$R_\lambda$	$\varepsilon T^*/u_*^2$	$E'/u_*^2$	$Kn$
A01	1	1	1	69,3	1,34	2,60	1,44

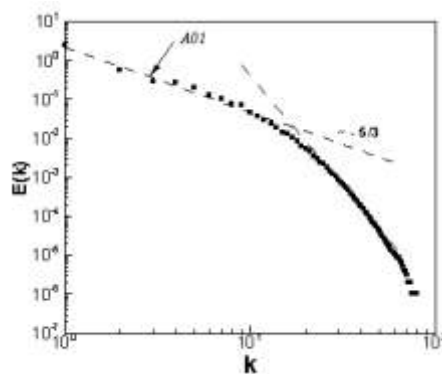
Πίνακας 4.2 : Χαρακτηριστικά της προσομοίωσης

Οι οκτώ (8) χρονοσειρές που δόθηκαν, παρήχθησαν από τον Dr Ιωάννη Σαρρή και αφορούν τις παρακάτω ποσότητες :

1. Συνολική κινητική ενέργεια  $e = u_i^2/2$  όπως κατανέμετε στο ρευστό Βλ. Σχ. 4.2. (x<sub>1</sub>)
2. Σκέδαση της κινητικής ενέργειας,  $\epsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij}$ , όπου ο τανυστής  $S_{ij} = 1/2[\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i]$  (x<sub>2</sub>)
3. Περιέλιξη της ροής (helicity),  $H = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV$ , όπου η περιστροφή ορίζεται ως  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  (x<sub>3</sub>)
4. Η εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή, εξ αιτίας κυρίως της εξωτερικής δύναμης,  $\epsilon^K = \partial e/\partial t$  (x<sub>4</sub>)
5. Η εισαγωγή περιέλιξης στη ροή, εξ αιτίας κυρίως της εξωτερικής δύναμης,  $\epsilon^H = \partial H/\partial t$  (x<sub>5</sub>)
6. Το χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής  $L_{11} = \frac{3\pi}{4e} \int_0^\infty \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa$ , όπου  $E(\kappa)$  είναι η κινητική ενέργεια του  $\kappa$  φασματικού κυματαριθμού. Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται μια τυπική μεταβολή της ποσότητας  $E(\kappa)$ . (x<sub>6</sub>)
7. Ο αριθμός Reynolds με βάση την τυρβώδη ενέργεια και το μέσο μήκος των δινών της ροής  $R_\lambda$  (x<sub>7</sub>)
8. Το γινόμενο  $K\eta$ , όπου  $K$  είναι το μήκος σκέδασης της κινητικής ενέργειας και  $\eta$  είναι το μήκος Kolmogorov. (x<sub>8</sub>)



Σχήμα 4.2 : Στιγμιότυπο της ροής (κινητική ενέργεια)

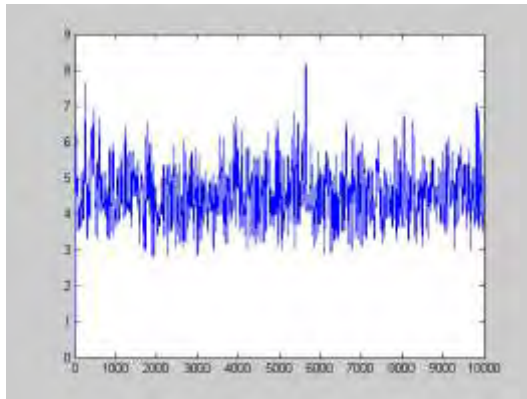


Σχήμα 4.3 : Μεταβολή της κινητικής ενέργειας στους κυματαριθμούς

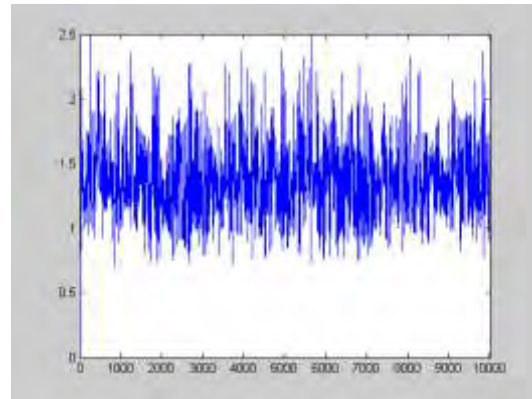
## 4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Η παρουσίαση των χρονοσειρών περιλαμβάνει το σχεδιασμό των παραπάνω ποσοτήτων εκτός του χρόνου φυσικά στον οποίο έγιναν οι μετρήσεις. Το πλήθος δε των μετρήσεων είναι 10.000 σημεία για κάθε χρονοσειρά.

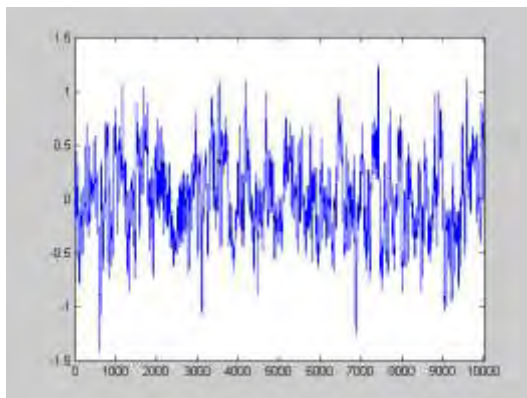
$x_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



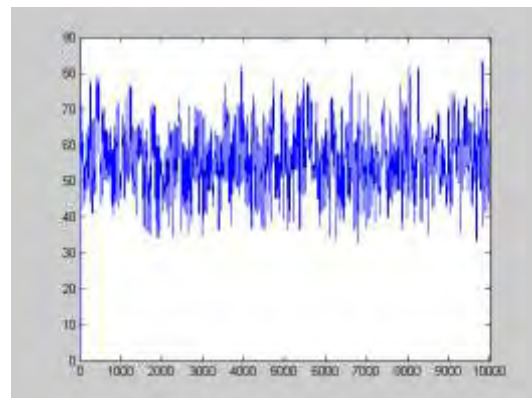
$x_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας)



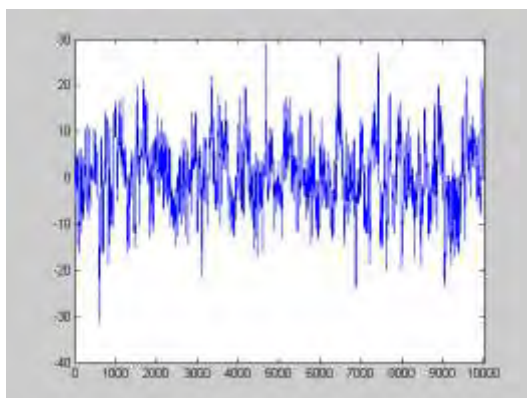
$x_3$  (Περιέλιξη της ροής)



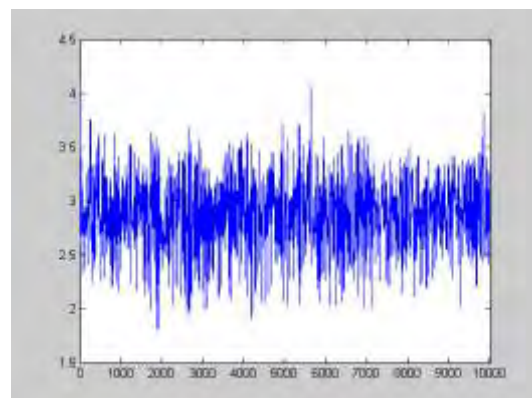
$x_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή)

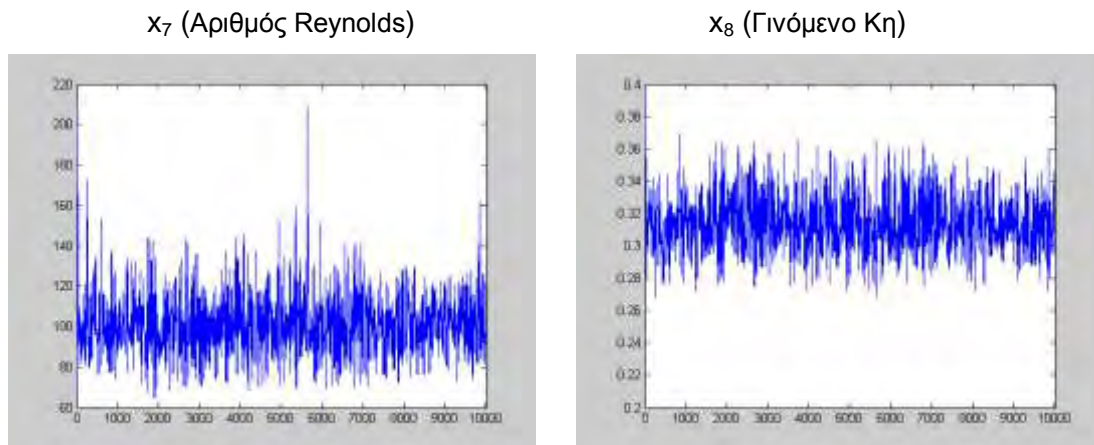


$x_5$  (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή)



$x_6$  (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής)





Σχήμα 4.4 : Απεικόνιση χρονοσειρών ροής Kolmogorov

Σημείωση :

Όπου στην παρούσα εργασία αναφέρεται ο όρος ‘αρχική χρονοσειρά’ εννοείται το πλήθος των παραπάνω ποσοτήτων όπως προέκυψαν από την αρχική καταγραφή του οργάνου χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε επεξεργασία.

### 4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Τα δυναμικά συστήματα από τα οποία προέρχονται οι παραπάνω χρονοσειρές μας είναι άγνωστα. Επιπλέον δε γνωρίζουμε αν είναι στάσιμες και έχουν περιοδικότητα.

Σε μια πρώτη ανάλυση της αρχικής χρονοσειράς έγιναν :

1. Ο σχεδιασμός της χρονοσειράς ( $w$ ) μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης (fitting).
2. Ο σχεδιασμός της χρονοσειράς ( $q$ ) μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών (differentencing).
3. Ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων με τάση όλων των παραπάνω χρονοσειρών συμπεριλαμβανομένου και της αρχικής γιατί η τάση είναι μια συνιστώσα ενός απλού μοντέλου χρονοσειράς που περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της.

Ακολουθεί πίνακας στον οποίο φαίνονται όλες οι χρονοσειρές στις οποίες έγινε η ανάλυση.

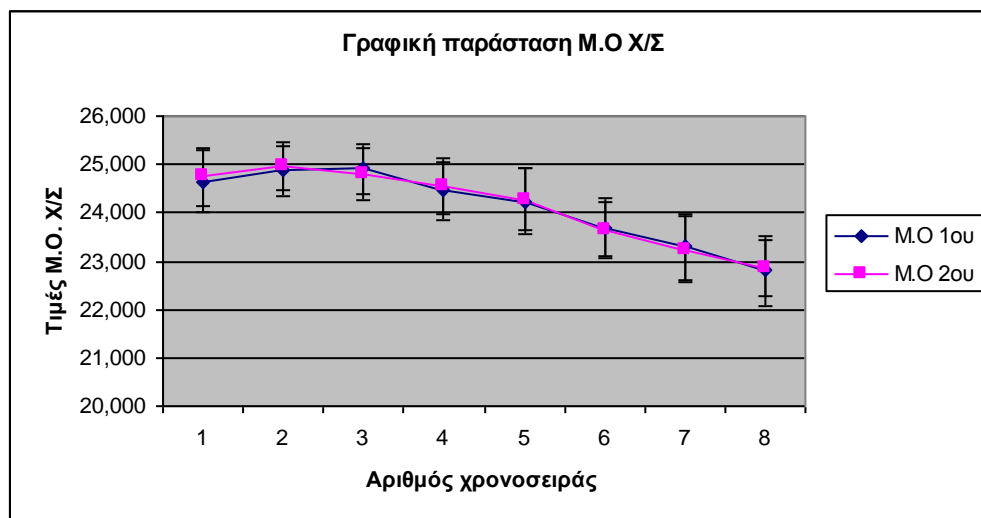
a/a	Αρχική χρονοσειρά	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της τάσης (fit(x))	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της τάσης (diff(x))
	(α)	(γ)	(δ)
1	$x_1$	$w_1$	$q_1$
2	$x_2$	$w_2$	$q_2$
3	$x_3$	$w_3$	$q_3$
4	$x_4$	$w_4$	$q_4$
5	$x_5$	$w_5$	$q_5$
6	$x_6$	$w_6$	$q_6$
7	$x_7$	$w_7$	$q_7$
8	$x_8$	$w_8$	$q_8$

Πίνακας 4.3 : Χαρακτηριστικά χρονοσειρών

#### 4.3.1 Έλεγχος στασιμότητας

Η στασιμότητα είναι μια ιδιότητα της διαδικασίας της στατιστικής ανάλυσης που προκύπτει όταν ο μηχανισμός που παράγει τα δεδομένα αλλάζει στο χρόνο. Ο έλεγχος γίνεται με τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης για τα δύο ίσα μήκους τμήματα της χρονοσειράς.

Ακολουθεί η γραφική παράσταση του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης των δύο τμημάτων των χρονοσειρών.



Σχήμα 4.5 : Διάγραμμα Μέσου Όρου & Τυπικής Απόκλισης χρονοσειρών ροής Kolmogorov



Στο διάγραμμα φαίνονται οι καμπύλες του μέσου όρου μαζί με τις διακυμάνσεις αυτών. Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες σε αρκετές θέσεις σχεδόν συμπίπτουν και στις υπόλοιπες είναι πολύ κοντά που σημαίνει ότι οι χρονοσειρές είναι ασθενώς στάσιμες.

#### 4.3.2 Έλεγχος τάσης

Σχεδιάστηκαν τα διαγράμματα τάσης, της αρχικής χρονοσειράς (x), της χρονοσειράς (w) μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης τα οποία έχουν την ίδια συμπεριφορά, καθώς και της χρονοσειράς (q) μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των διαφορών.

Ακολουθεί πίνακας με τον υπολογισμό των συντελεστών της εξίσωσης  $y=ax+b$  για τον έλεγχο της τάσης των χρονοσειρών x, w και q. Στον πίνακα παρατηρούμε ότι οι κλίσεις είναι μικρές.

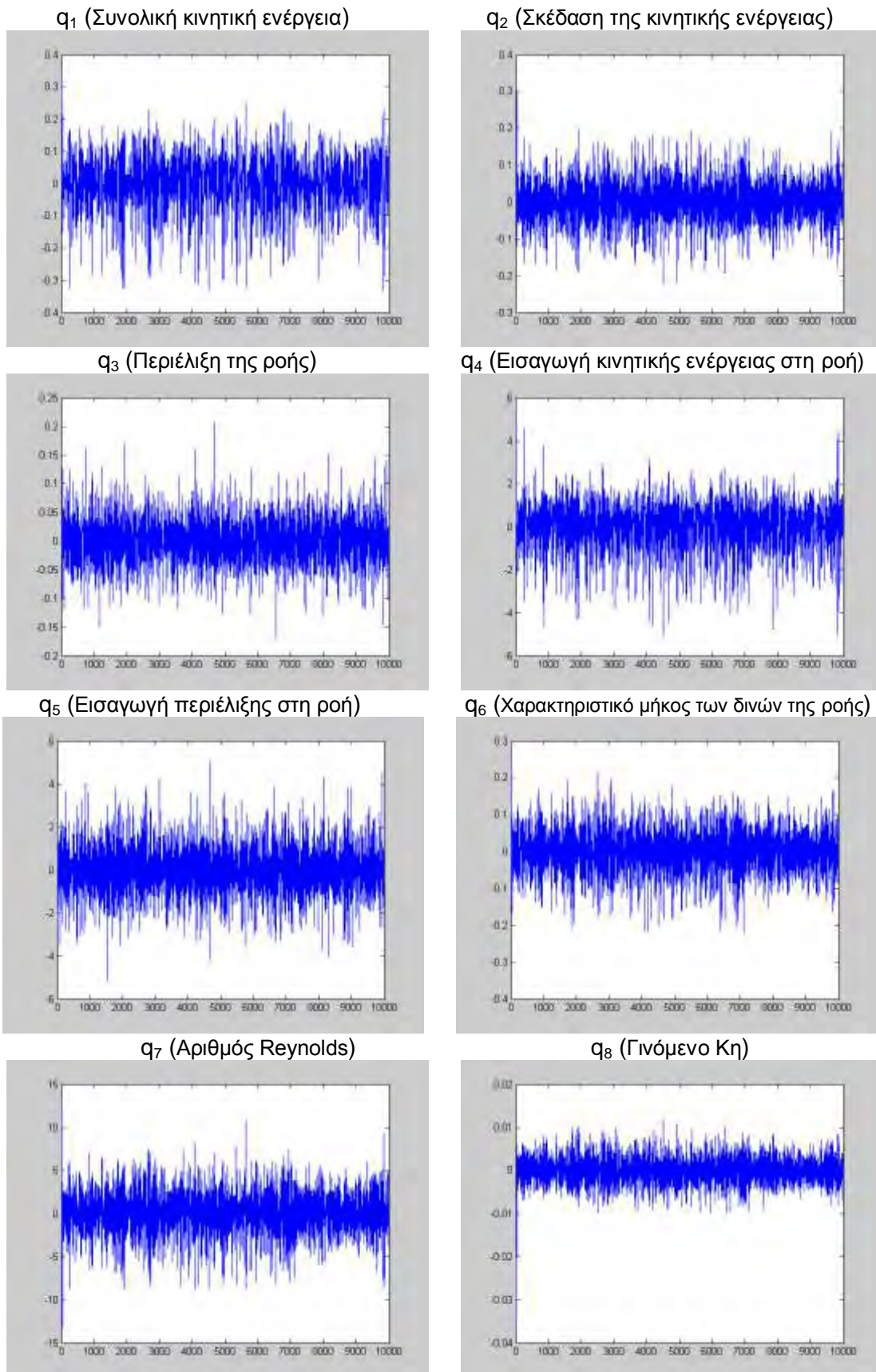
α/α	Συντελεστές εξίσωσης της μορφής $y=ax+b$ για τον έλεγχο της τάσης							
	a		b		a		b	
Χρονοσειρά	x		w		q			
1	8E-06	4,5096	8E-06	1E-05	3E-07	-0,0017		
2	4E-06	1,3449	4E-06	3E-05	7E-08	-0,0005		
3	-6E-06	0,0495	-6E-06	4E-07	4E-09	-3E-05		
4	1E-04	55,404	1E-04	2E-02	3E-06	-0,0214		
5	-1E-04	0,9028	-1E-04	5E-04	-1E-07	0,0003		
6	2E-06	2,8787	2E-06	-3E-05	1E-08	-0,0001		
7	-6E-05	101,87	-6E-05	5E-03	3E-06	-0,0166		
8	-6E-07	0,318	-6E-07	-1E-05	-4E-08	0,0003		

Πίνακας 4.4 : Συντελεστές χρονοσειρών

#### 4.3.3 Αφαίρεση τάσης

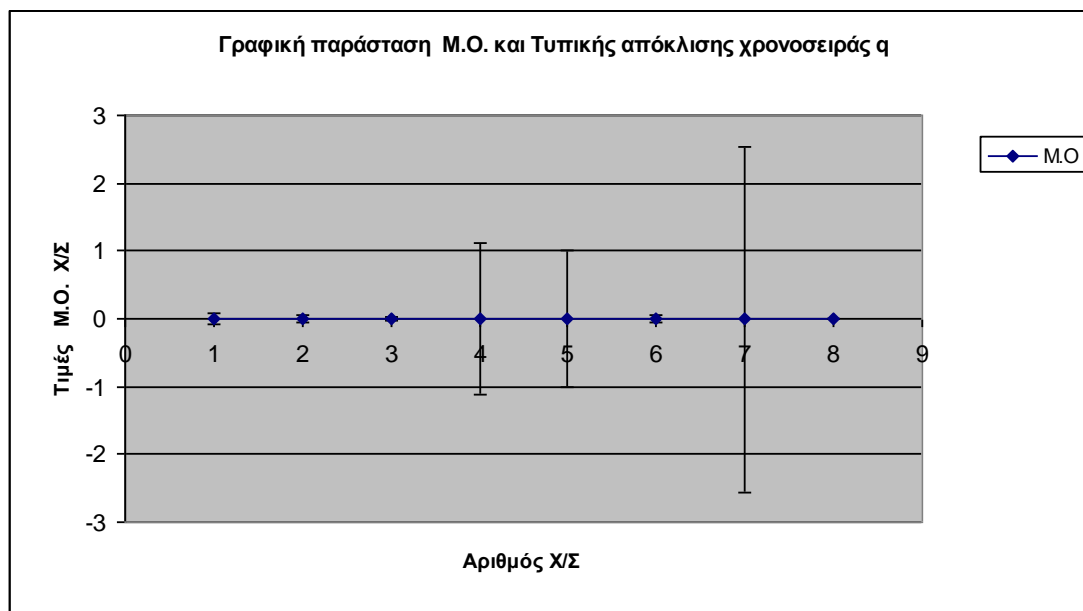
Από το σχεδιασμό των χρονοσειρών x (αρχικής), w (μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης) και q (μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών), προέκυψε ότι οι χρονοσειρές x και w έχουν την ίδια συμπεριφορά ενώ στη χρονοσειρά q η συμπεριφορά είναι διαφορετική.

Ακολουθεί η παρουσίαση των χρονοσειρών q



Σχήμα 4.6 : Απεικόνιση χρονοσειρών  $q$  ροής Kolmogorov

Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η τιμή του μέσου όρου των παραπάνω χρονοσειρών καθώς και η τυπική απόκλιση αυτών. Παρατηρούμε ότι οι χρονοσειρές εισαγωγής κινητικής ενέργειας ( $w_4$ ), εισαγωγής της περιέλιξης στη ροή ( $w_5$ ) και ο αριθμός Reynolds ( $w_7$ ) παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες διακυμάνσεις.



Σχήμα 4.7 : Διάγραμμα Μέσου Όρου & Τυπικής Απόκλισης χρονοσειρών q ροής Kolmogorov

Στη συνέχεια η ανάλυση των χρονοσειρών θα αναφέρεται μόνο στις δυο χρονοσειρές, την  $w$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης και την  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών. Η αρχική χρονοσειρά  $x$  έχει πρακτικά την ίδια συμπεριφορά με την  $w$ . Εάν κάπου υπάρχει διαφορά θα αναφερθεί.

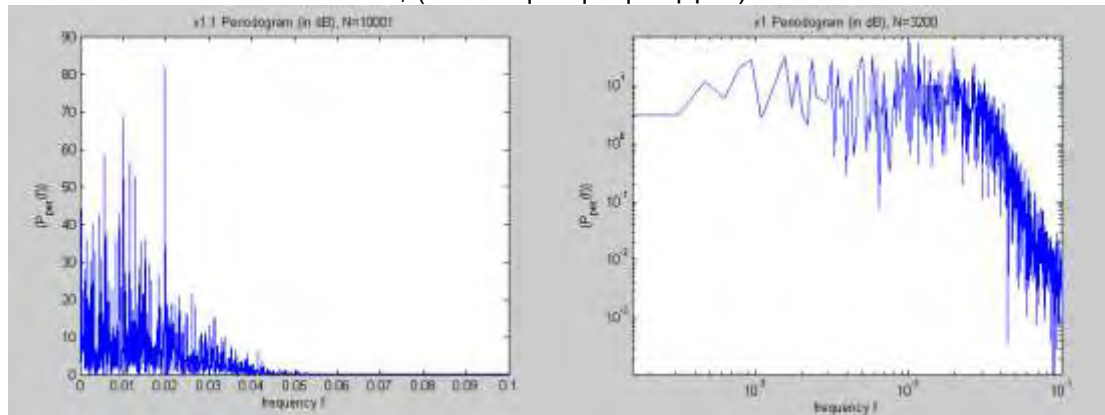
#### 4.4 ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

Στο σχεδιασμό του φάσματος ισχύος υπολογίζονται οι συχνότητες τόσο στην κανονική όσο και στη λογαριθμική μορφή ώστε να διερευνηθεί η ύπαρξη τομών κλίμακας της μορφής  $P(f)=cf^\alpha$  με  $\alpha$  θετικό ή αρνητικό. Αξίζει ν' αναφερθεί ότι η ύπαρξη τομών κλίμακας σε φάσματα ισχύος έχει συνδεθεί με χαοτική συμπεριφορά (Mandelbrot, 2002 ) και με την ύπαρξη πολυπλοκότητας (Bak et. al, 1992).

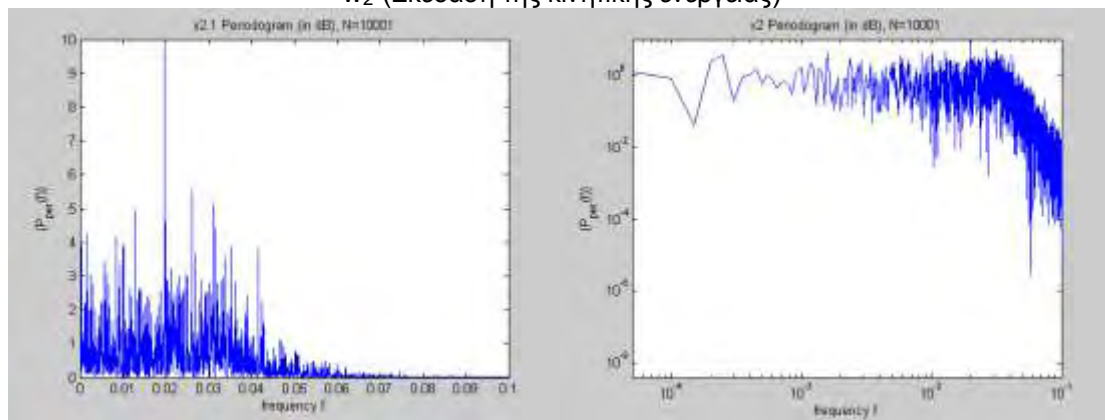
Παρακάτω παρατίθενται τα φάσματα των χρονοσειρών  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης και  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές και στις δυο μορφές.

## Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

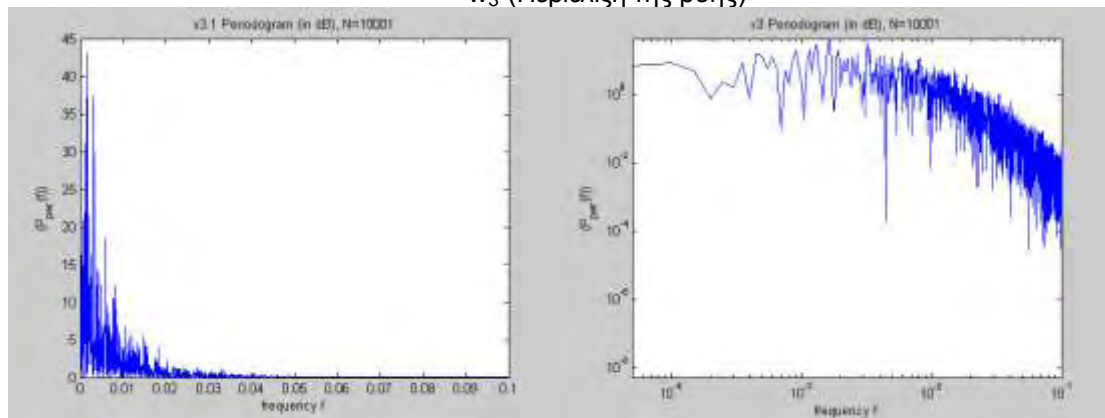
$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



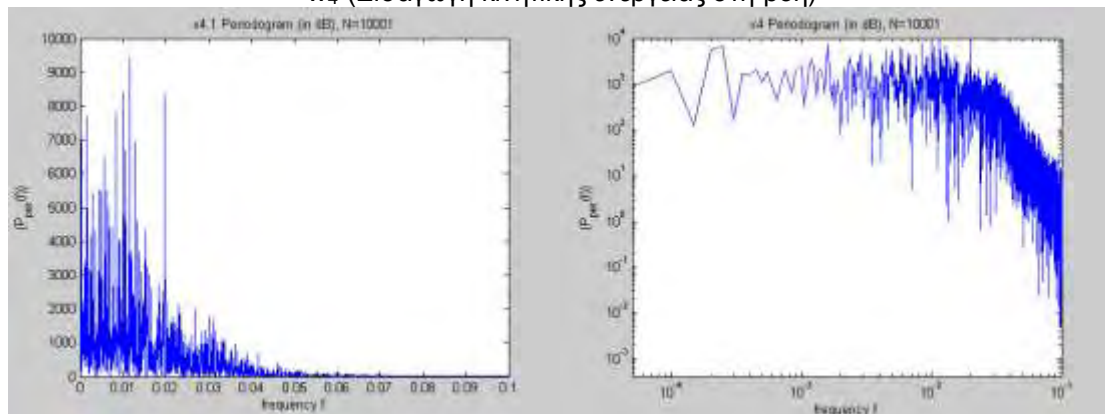
$w_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας)



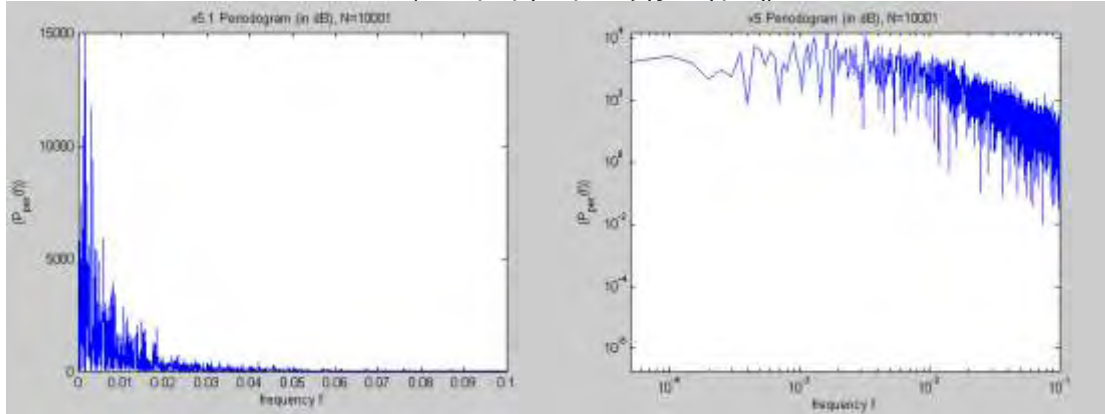
$w_3$  (Περιέλιξη της ροής)



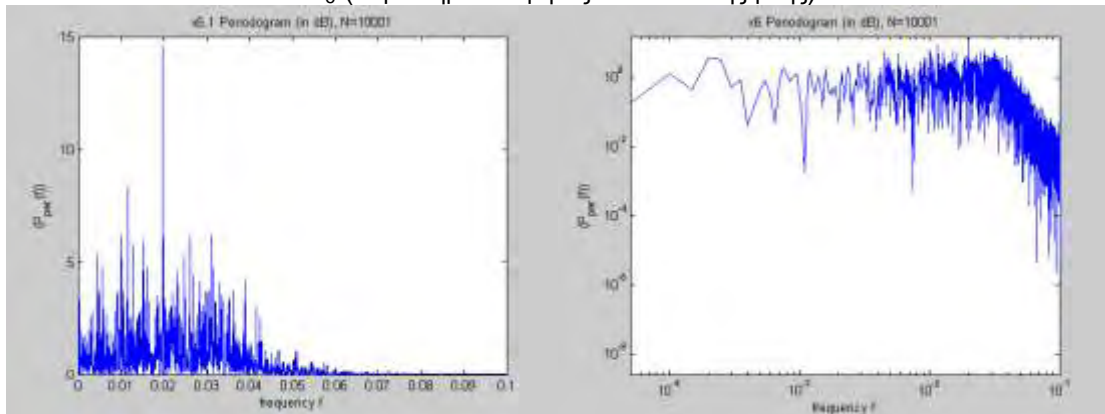
$w_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή)



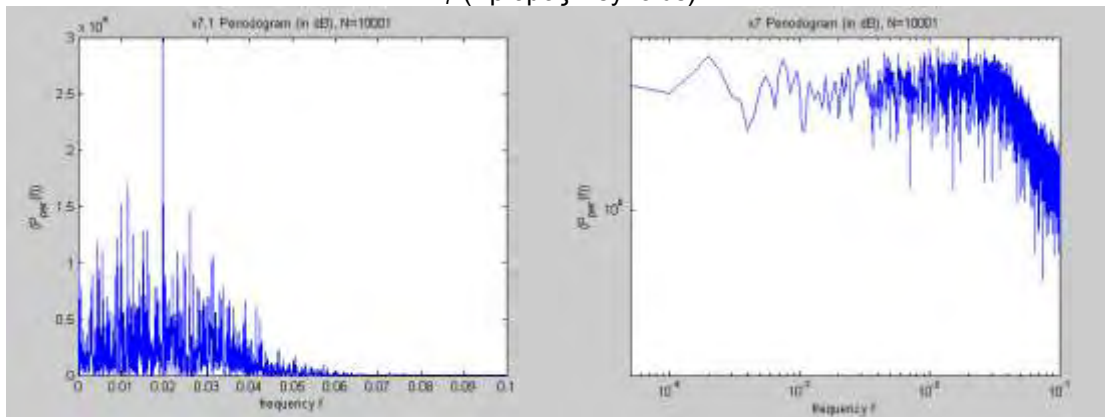
$w_5$  (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή)



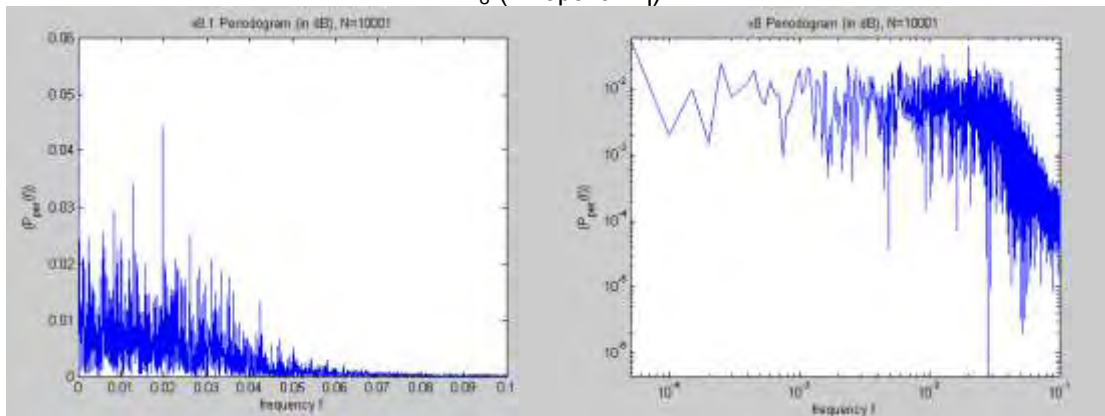
$w_6$  (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής)



$w_7$  (Αριθμός Reynolds)



$w_8$  (Γινόμενο Κη)

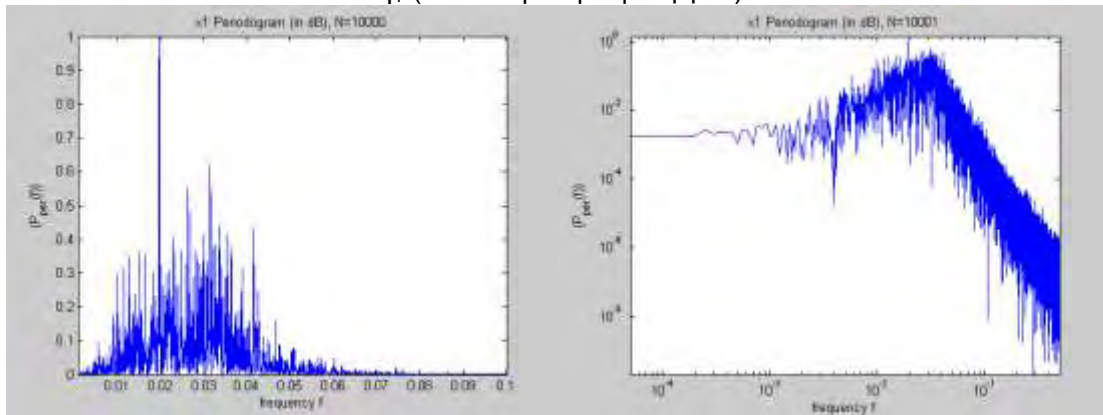


Σχήμα 4.8 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών  $w$  ροής Kolmogorov

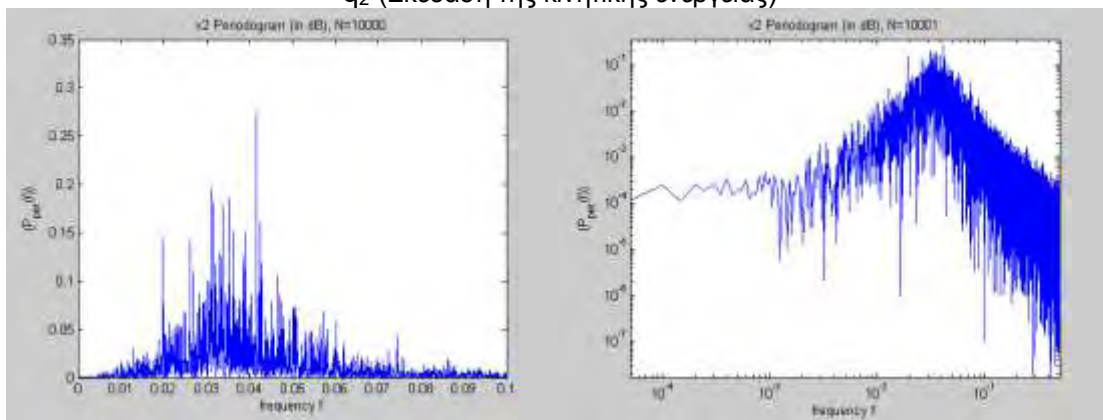


## Χρονοσειρά $q$ μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

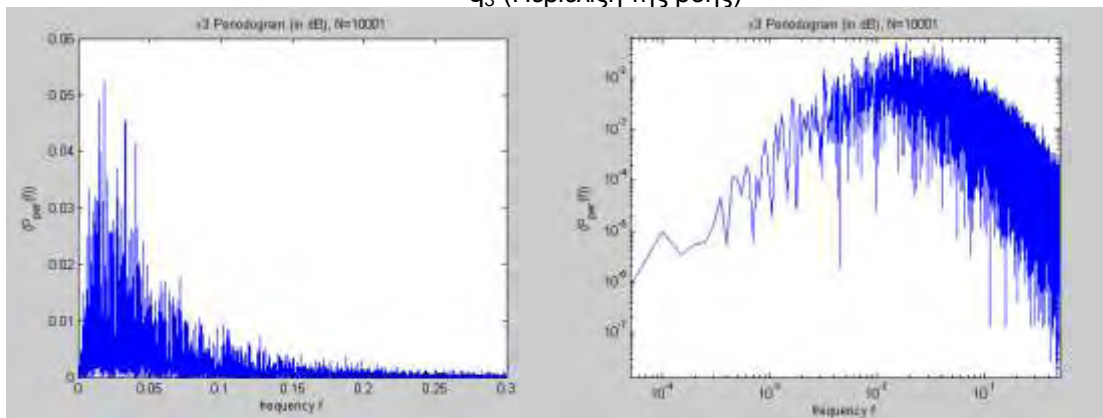
$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



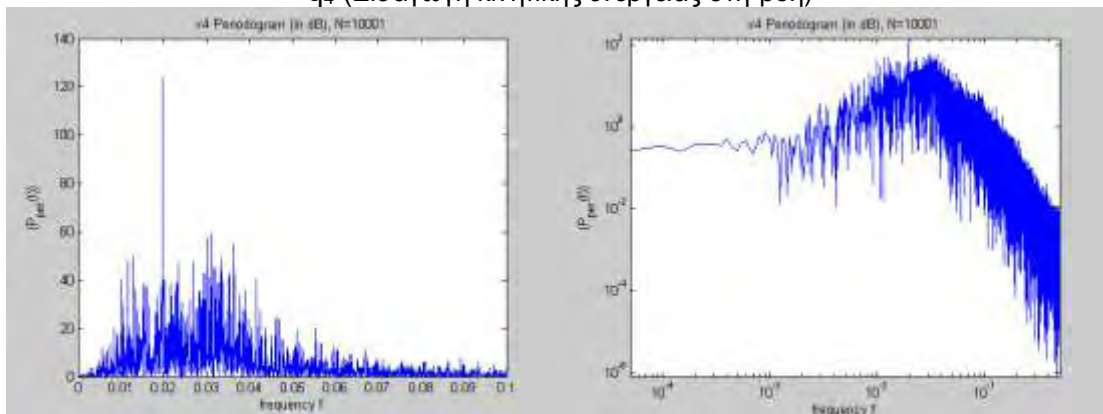
$q_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας)



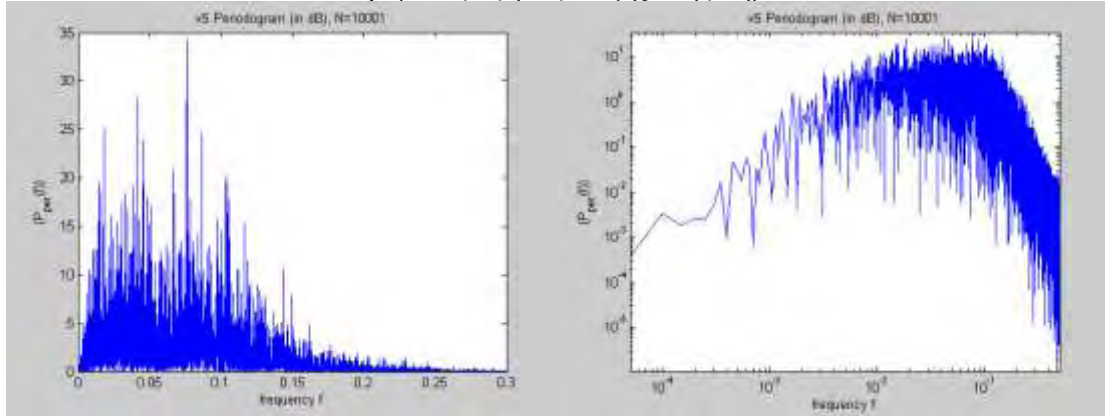
$q_3$  (Περιέλιξη της ροής)



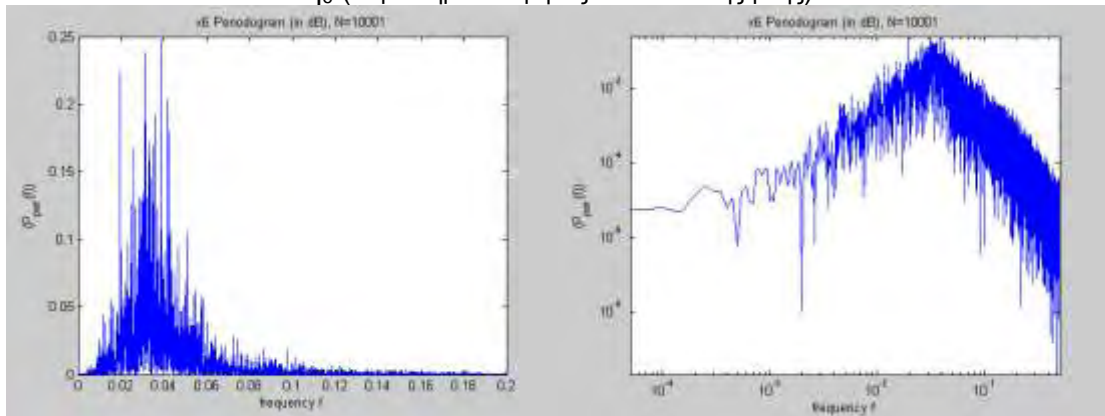
$q_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή)



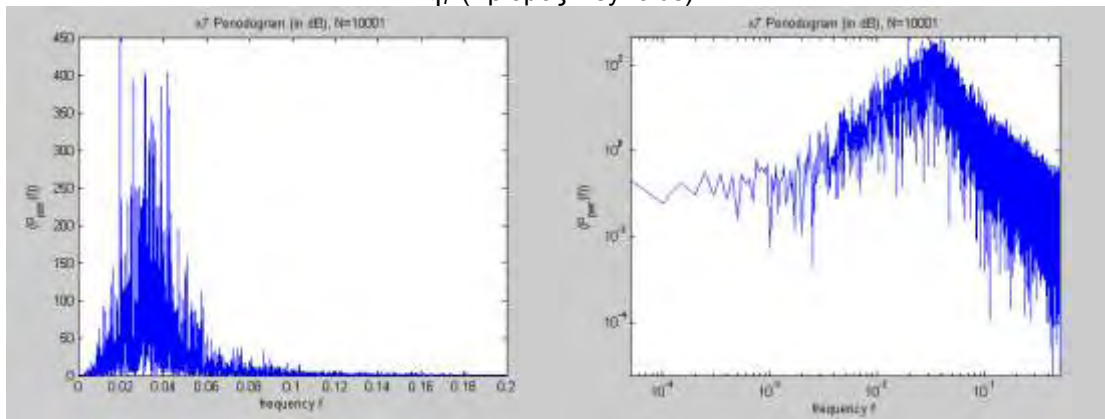
q<sub>5</sub> (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή)



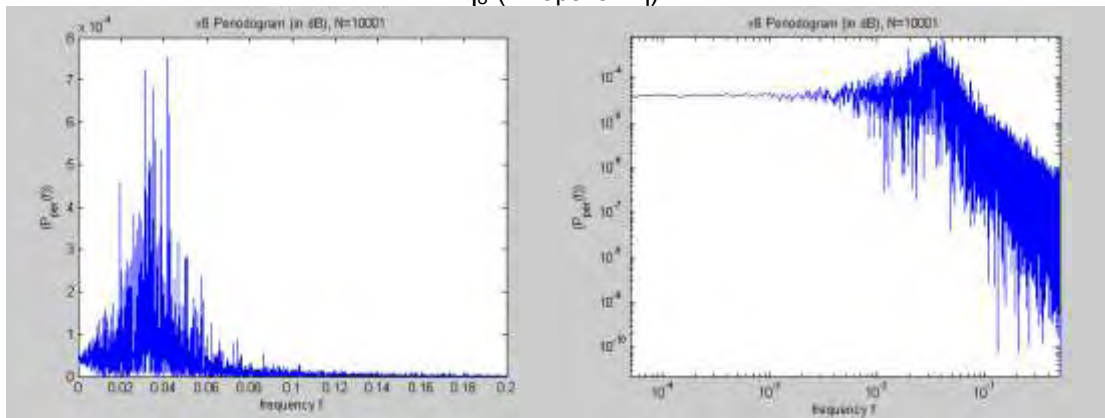
q<sub>6</sub> (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής)



q<sub>7</sub> (Αριθμός Reynolds)



q<sub>8</sub> (Γινόμενο Κη)



Σχήμα 4.9 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών q ροής Kολμογορον

Στα διαγράμματα των χρονοσειρών  $w$  φαίνονται κάποιες συχνότητες ενώ στα διαγράμματα των χρονοσειρών  $q$  διαπιστώνεται η ύπαρξη δύο κλίσεων. Σ' αυτά τα διαγράμματα η πρώτη κλίση είναι ανοδική και εμφανίζεται στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων ενώ η δεύτερη κλίση είναι καθοδική και εμφανίζεται στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων. Φαίνεται ότι υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές από ότι στις υψηλές συχνότητες. Η διαφορά στη συμπεριφορά οφείλεται στο ότι η μέθοδος των διαφορών λειτουργεί ως υψηλοπερατό φίλτρο και ο μετασχηματισμός Fourier των πρώτων διαφορών είναι ο μετασχηματισμός των πρώτων παραγώγων, οπότε ισχύει  $f(df/dt) = \omega F(t)$ .

Έχουμε παρουσία μεγάλου εύρους συχνοτήτων από χαμηλές (μεγάλοι χρόνοι) ως υψηλές (μικροί χρόνοι). Κατά τη μετακίνηση από τις χαμηλές σε υψηλές παρατηρείται μείωση του εύρους των υψηλών συχνοτήτων. Αυτό σημαίνει μείωση της συμμετοχής του φαινομένου με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους γεγονός που μάλλον σημαίνει μείωση της συμμετοχής των δινών μικρού μεγέθους.

Με βάση τα διαγράμματα αυτά έγινε προσπάθεια προσαρμογής νόμων κλίμακας σε διάφορες περιοχές συχνοτήτων. Γενικά ανιχνεύθηκαν τρεις περιοχές χαμηλών, μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων. Για τις δύο χρονοσειρές  $w$  και  $q$ , έγινε προσαρμογή της καμπύλης  $P(f) = cf^a$  και υπολογίσθηκαν οι εκθέτες (σε μονάδες  $f_{max}$ ) για τις διάφορες περιοχές συχνοτήτων χαμηλές (0 έως 0,02), μεσαίες (έως 0,04) και υψηλές (έως 0,06) για τη χρονοσειρά  $w$  και χαμηλές (0 έως 0,03), και μεσαίες (έως 0,1) για τη χρονοσειρά  $q$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν σε φαινόμενα με μεγάλους, μεσαίους και μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους.

Στα σχήματα 4.10 και 4.11 ακολουθεί η γραφική παράσταση των εκθετών.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης



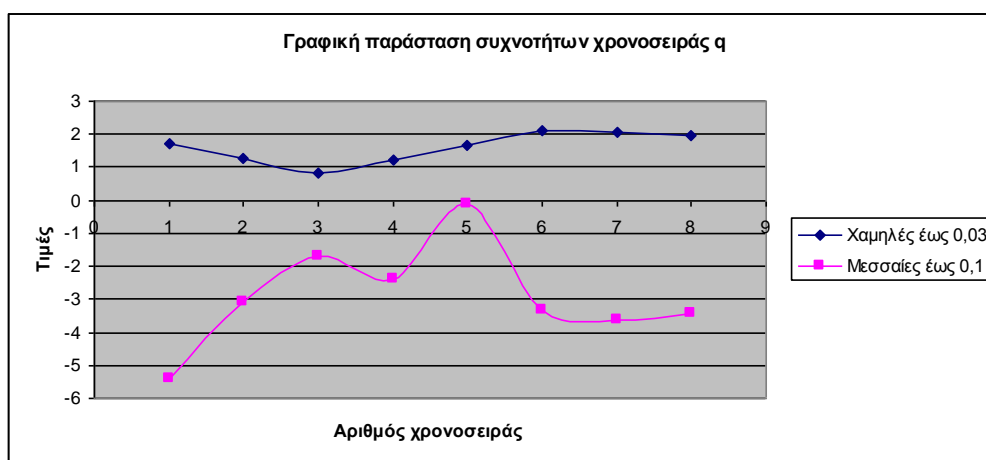
Σχήμα 4.10 : Διάγραμμα εκθετών χρονοσειρών  $w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια),  $w_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας),  $w_3$  (Περιέλιξη της ροής),  $w_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή),  $w_5$  (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή),  $w_6$  (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής),  $w_7$  (Αριθμός Reynolds),  $w_8$  (Γινόμενο  $K\eta$ ) ροής Kolmogorov.



Παρατηρείται ότι :

- Στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων οι τιμές κυμαίνονται γύρω στο μηδέν, στις μεσαίες γύρω στο 1,5 με αρνητική κλίση, εκτός των  $w_6$  και  $w_7$  που είναι περίπου στο μηδέν, ενώ στις υψηλές οι τιμές κυμαίνονται από 2,5 έως 7,5 περίπου με αρνητική κλίση.
- Στη χρονοσειρά  $w_6$  παρατηρούνται δυο κλίσεις. Μια μηδενική που αντιστοιχεί στις περιοχές των χαμηλών και μεσαίων συχνοτήτων και μια μεγάλη αρνητική που είναι στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων .

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές



Σχήμα 4.11 : Διάγραμμα εκθετών χρονοσειρών  $q_1$ (Συνολική κινητική ενέργεια),  $q_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας),  $q_3$  (Περιέλιξη της ροής),  $q_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή),  $q_5$  (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή),  $q_6$  (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής),  $q_7$  (Αριθμός Reynolds),  $q_8$  (Γινόμενο  $K\eta$ ) ροής Kolmogorov.

Στη χρονοσειρά  $q$  η ανάλυση έδειξε ότι οι τιμές μεσαίων συχνοτήτων ενώ οι τιμές και υψηλών συχνοτήτων είναι περίπου ίδιες. Αυτό σημαίνει ότι η συμπεριφορά στις δυο περιοχές συχνοτήτων είναι μάλλον παρόμοια. Διαφορετική είναι η συμπεριφορά της  $q_5$  στην οποία έχουμε τρεις κλίσεις. Στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων η τιμή κυμαίνεται στο -4,9 περίπου.

Η ύπαρξη εκθέτη με τιμή θετική ή αρνητική (διάφορη του μηδενός), σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες δε συνεισφέρουν με ισοδύναμο τρόπο στο φαινόμενο. Θετικός εκθέτης σημαίνει μεγαλύτερη συνεισφορά στις υψηλές συχνότητες, ενώ αρνητικός εκθέτης σημαίνει αντίστοιχα μικρότερη συνεισφορά.

Στις χρονοσειρές  $q$  παρατηρούμε διαφορετική συμπεριφορά αριστερά και δεξιά μιας χαρακτηριστικής συχνότητας. Η συχνότητα αυτή σχετίζεται μάλλον με τη μεγαλύτερη δίνη που μπορεί να χωρέσει στο κουτί της προσομοίωσης και την ταχύτητά της. Αριστερά και δεξιά οι συχνότητες αντιστοιχούν σε δίνες μικρότερου

μεγέθους με χαρακτηριστικούς χρόνους (ταχύτητες) που είναι μικρότεροι αριστερά (μικρές συχνότητες) και μεγαλύτεροι δεξιά (μεγάλες συχνότητες). Η αρνητική κλίση στις μεγάλες συχνότητες δείχνει ότι οι δίνες που αντιστοιχούν σ' αυτές γρήγορα καταστρέφονται.

#### **4.5 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ**

Η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι ιδιαίτερα σημαντική στη μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών. Η βασική ιδέα της ανακατασκευής έγκειται στο ότι η χρονοσειρά περιέχει πληροφορία, γύρω από τις μη-παρατηρούμενες μεταβλητές, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει την κατάσταση του συστήματος στην παρούσα χρονική στιγμή. Οι παράμετροι που απαιτούνται για την ανακατασκευή είναι η χρονική υστέρηση και η διάσταση εμβύθισης.

##### **4.5.1 Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$**

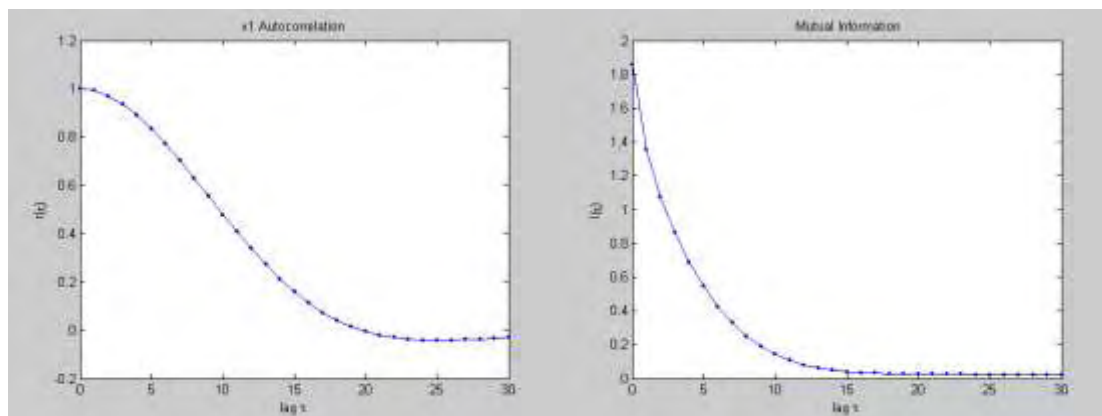
Στις χρονοσειρές,  $w$  μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης και  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές, υπολογίζονται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και η συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας (average mutual information).

Από τα διαγράμματα προκύπτει η τιμή του χαρακτηριστικού χρόνου  $\tau$  για μηδενισμό του  $r(\tau)$  της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Αν δε φθίνει γρήγορα προς το μηδέν, επιλέγεται ο χρόνος για τον οποίο πεφτει στο  $1/e$ , που είναι περίπου στο 40% της αρχικής τιμής για  $t=0$ . Στη συνέχεια υπολογίζεται ο χρόνος  $\tau$  πρώτο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας, εκεί δηλαδή που η συσχέτιση γίνεται για πρώτη φορά η μικρότερη δυνατή. Τέλος επιλέγεται ο χρόνος  $\tau$  για τον οποίο οι τιμές γίνονται ασυσχέτιστες.

Ακολουθούν ενδεικτικά δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  καθώς και η γραφική παράσταση για όλα τα  $\tau$  των χρονοσειρών.

### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



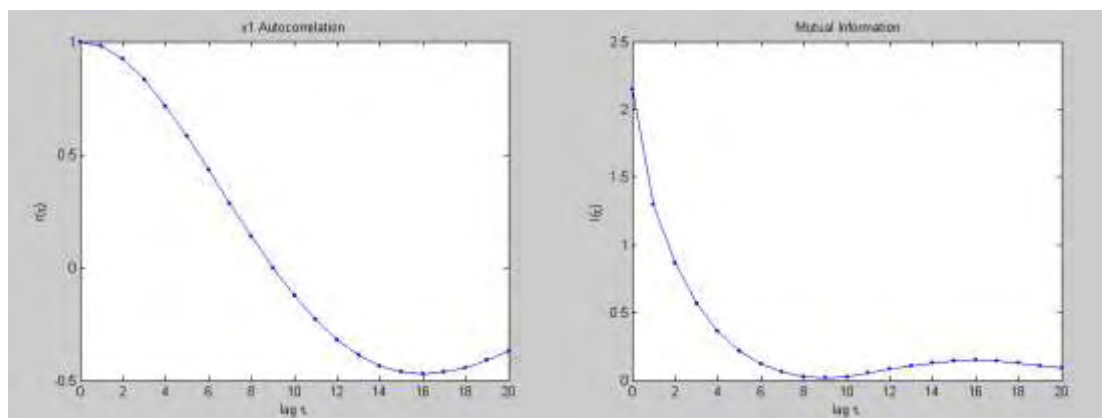
(α)

(β)

Σχήμα 4.12 : Εκτίμηση του χρόνου υστέρησης  $\tau=20$  και  $\tau=15$  από (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και (β) τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας αντίστοιχα για τη χρονοσειρά  $w$  της ροής Κολμογορον

### Χρονοσειρά $q$ μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)

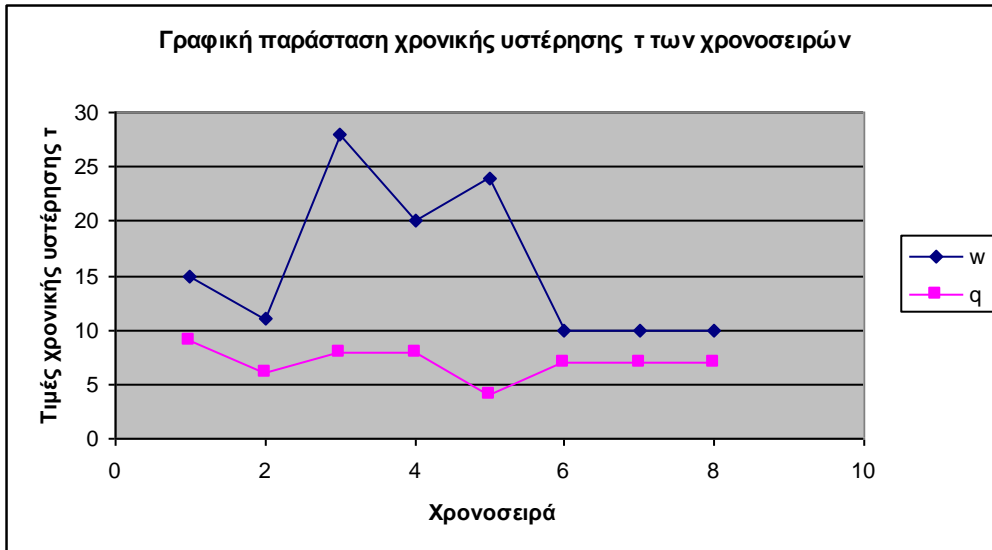


(α)

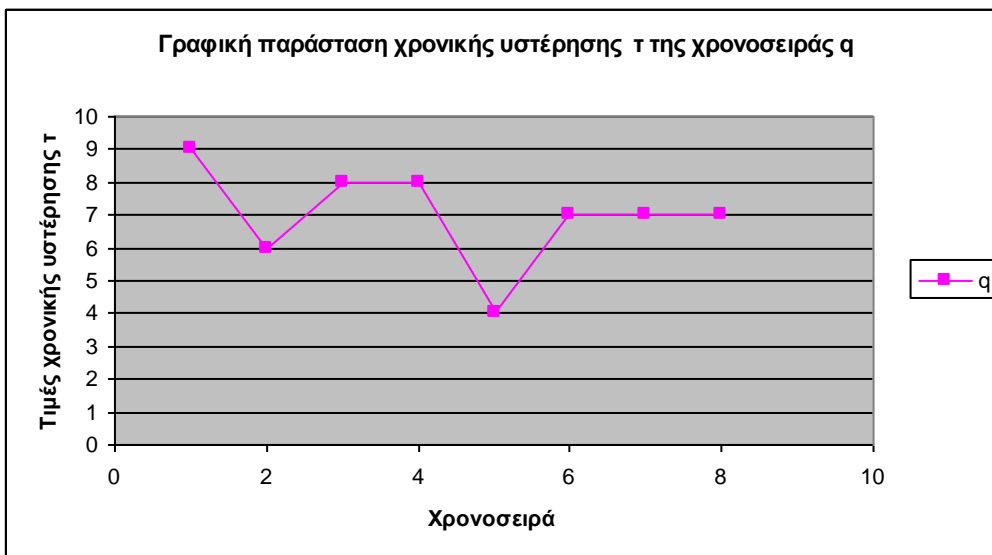
(β)

Σχήμα 4.13 : Εκτίμηση του χρόνου υστέρησης  $\tau=9$  και από τις δυο συνάρτησεις, (α) αυτοσυσχέτισης και (β) αμοιβαίας πληροφορίας για τη χρονοσειρά  $q$  της ροής Κολμογορον

Επιλέγουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=15$  και  $\tau=9$  για τις  $w_1$  και  $q_1$  αντίστοιχα, όπου παρατηρούμε πρώτο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας.



(α)



(β)

Σχήμα 4.14 : Στα διαγράμματα (α) και (β) φαίνεται η επιλογή χρόνου υστέρησης τ των χρονοσειρών w και q της ροής Κοίμογοτον (1.Συνολική κινητική ενέργεια, 2. Σκέδαση της κινητικής ενέργειας, 3. Περιέλιξη της ροής, 4. Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή, 5. Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή, 5. Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής, 7. Αριθμός Reynolds, 8. Γινόμενο Κη).

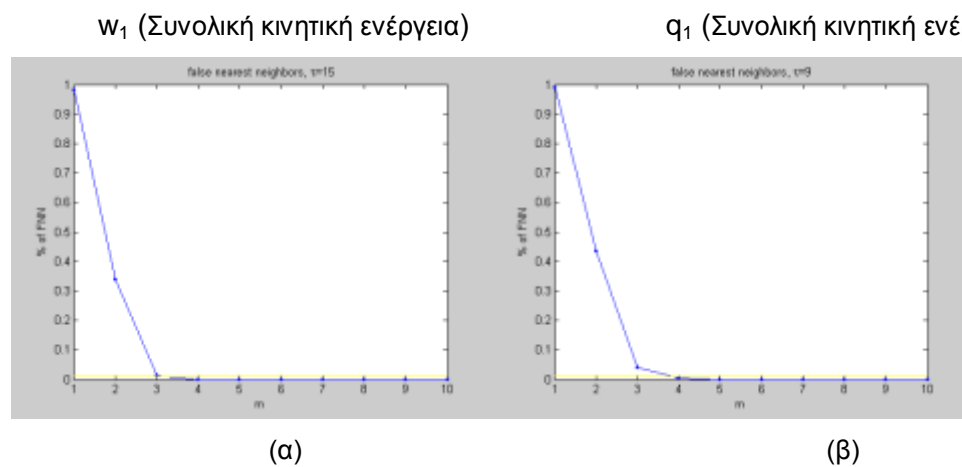
Παρατηρείται ότι οι σειρές της χρονοσειράς w έχουν υψηλή συσχέτιση σε αντίθεση με τις σειρές της χρονοσειράς q που έχουν χαμηλή συσχέτιση η τιμή των οποίων είναι μικρότερη. Αυτό οφείλεται μάλλον στο ότι οι πρώτες διαφορές αφαιρούν την επίδραση χαμηλών συχνοτήτων που αυξάνουν τις συσχετίσεις.

#### 4.5.2 Επιλογή διάστασης εμφύθισης $m$

Η δεύτερη παράμετρος που είναι απαραίτητη για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι η διάσταση εμφύθισης (embedding dimension)  $m$ .

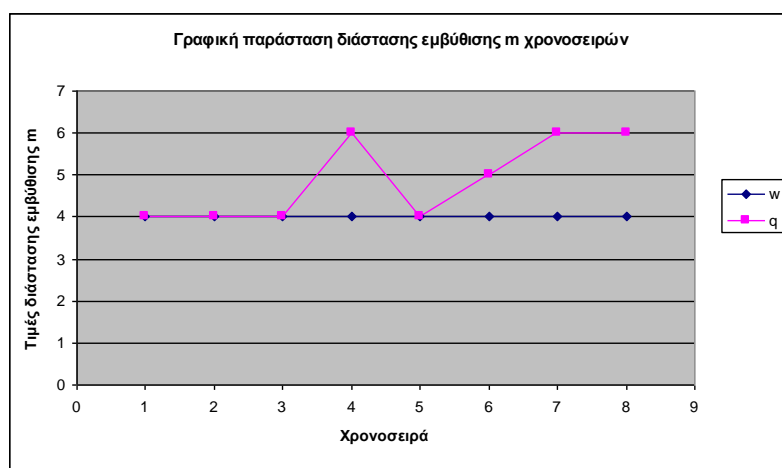
Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της διάστασης εμφύθισης  $m$  είναι η μέθοδος των ψευδών γειτόνων (method of false nearest neighbors FNN). Ως διάσταση εμφύθισης επιλέγεται εκείνη που για πρώτη φορά το ποσοστό των ψευδών γειτόνων θα πέσει κάτω από ένα μικρό ποσοστό (συνήθως 1%) και θα σταθεροποιηθεί εκεί για τις επόμενες διαστάσεις εμφύθισης.

Ακολουθούν ενδεικτικά δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  καθώς και η γραφική παράσταση για όλα τα  $m$  των χρονοσειρών.



Σχήμα 4.15 : Εκτίμηση της διάστασης εμφύθισης  $m$  με τη μέθοδο FNN για τις χρονοσειρές  $w_1$  και  $q_1$  της ροής Koltmogorov

Επιλέγουμε και στις δυο χρονοσειρές  $m=4$  γιατί το ποσοστό των ψευδών γειτόνων σύμφωνα με τη μέθοδο FNN πέφτει κάτω από 1%.



Σχήμα 4.16 : Εκτίμηση της διάστασης εμφύθισης  $m$  με τη μέθοδο FNN για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  της ροής Koltmogorov

Παρατηρείται ότι :

- Όλες οι σειρές της χρονοσειράς  $w$  έχουν την ίδια τιμή διάστασης εμβύθισης και
- Οι τέσσερις στις οκτώ χρονοσειρές έχουν την ίδια τιμή διάστασης εμβύθισης και στις δυο χρονοσειρές.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Takens  $m \geq 2D+1$ , για τη σχέση διάστασης εμβύθισης  $m$  και διάσταση συσχέτισης  $D$ , για τις τιμές της διάστασης εμβύθισης που κυμαίνονται από 4 έως 6 θα πρέπει οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $D$  να κυμαίνονται από 1 έως 3. Με το πιο “χαλαρό” κριτήριο των Souer et al (1991) όπου  $m \geq D$  θα πρέπει οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $D$  να κυμαίνονται από 4 έως 6.

Με βάση τους παραπάνω πίνακες  $\tau$  και  $m$  των χρονοσειρών έγινε η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων για τις δυο χρονοσειρές  $w$  και  $q$ .

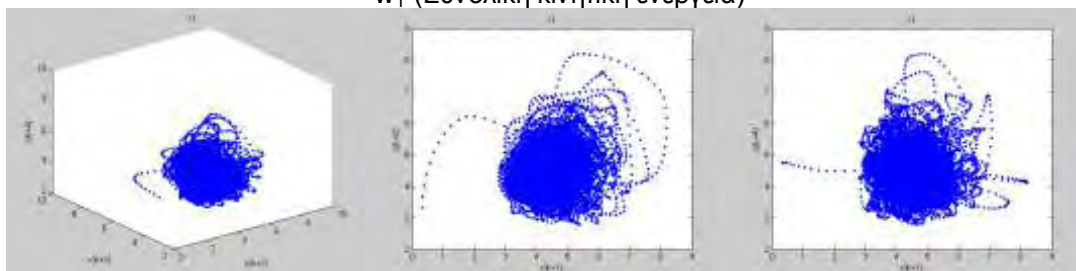
#### 4.5.3 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων

Ο ανακατασκευασμένος χώρος αποτελεί ένα ομαλό μετασχηματισμό του αντίστοιχου αρχικού χώρου. Με την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων βλέπουμε τη δομή της μονοδιάστατης χρονοσειράς παρατηρώντας τα διαγράμματα διασποράς σε υψηλότερες διαστάσεις. Σχηματίζονται έτσι διαγράμματα διασποράς σε δύο ή τρεις διαστάσεις για να μπορούμε να τα απεικονίσουμε.

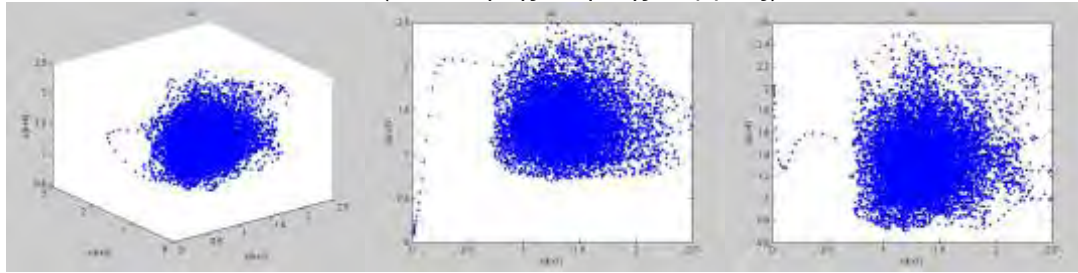
Για να εξασφαλίζεται η συνέχεια και το μονοσήμαντο της απεικόνισης της ανακατασκευής το θεώρημα του Takens θέτει ως συνθήκη  $m \geq 2D+1$  όπου  $D$  η διάσταση του ελκυστή. Άλλοι ερευνητές θέτουν  $m \geq D$ . Στην περίπτωση μας, επειδή από το  $m$  του πίνακα δεν προκύπτει η παραπάνω σχέση γι’ αυτό και η ανακατασκευή έγινε δυο φορές. Την πρώτη φορά για τη διάσταση εμβύθισης  $m$  του πίνακα και τη δεύτερη φορά για διάσταση εμβύθισης  $2m \geq D$ . Από τα διαγράμματα που ακολουθούν διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές και επομένως η εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης  $m$  είναι αρκετά καλή.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

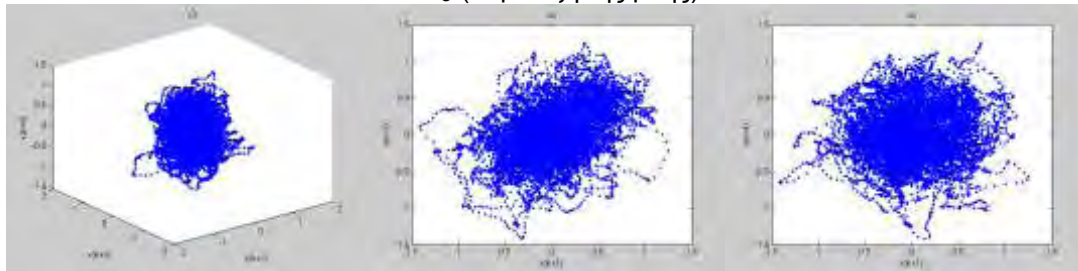
$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



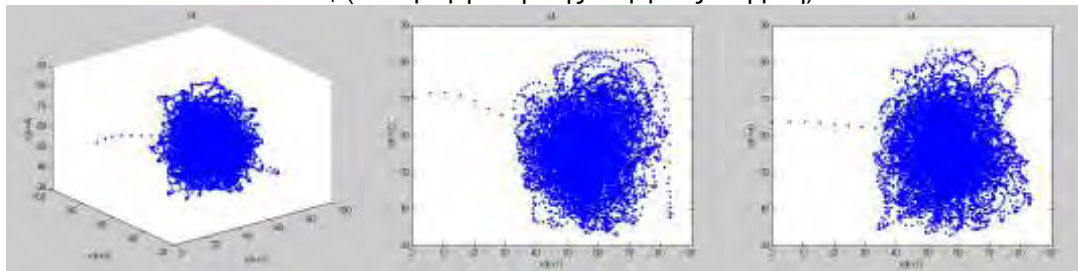
$w_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας)



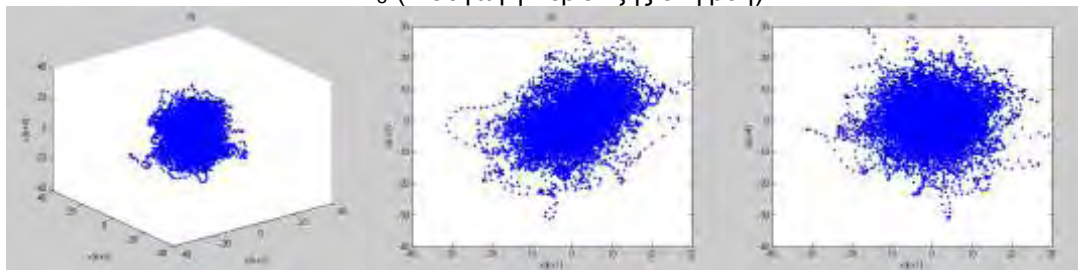
$w_3$  (Περιέλιξη της ροής)



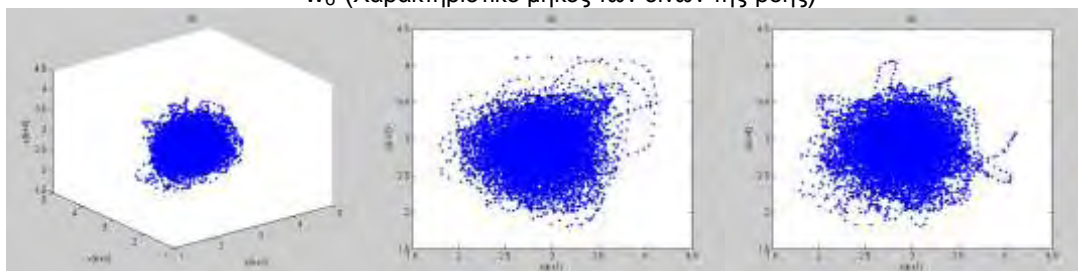
$w_4$  (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή)



$w_5$  (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή)

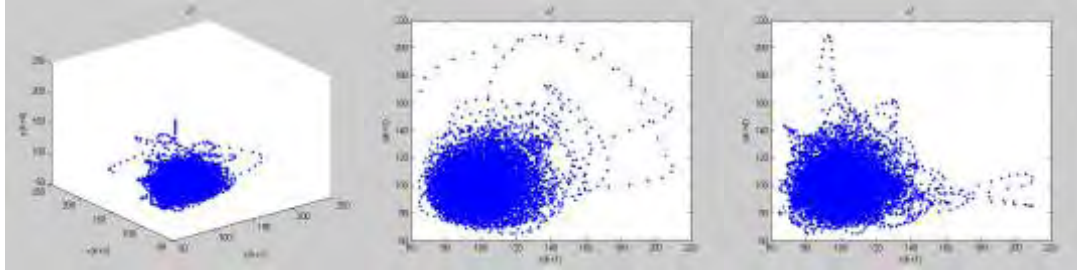


$w_6$  (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής)

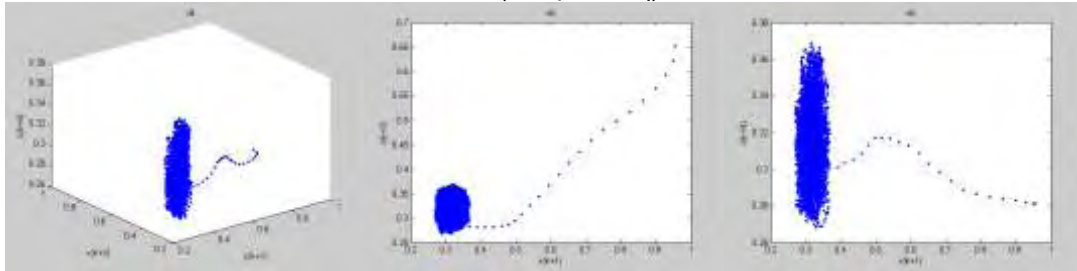




$w_7$  (Αριθμός Reynolds)



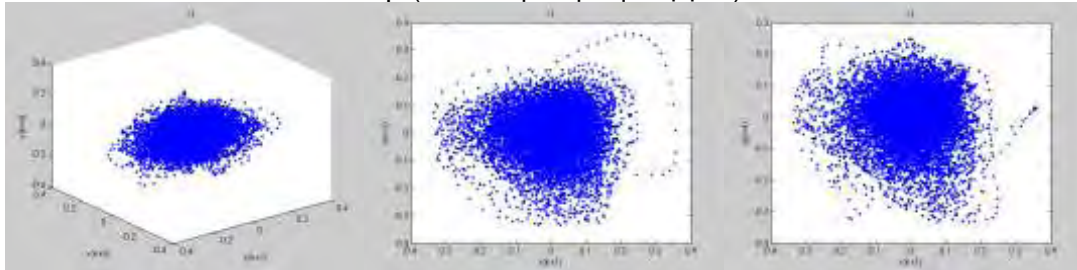
$w_8$  (Γινόμενο  $K\eta$ )



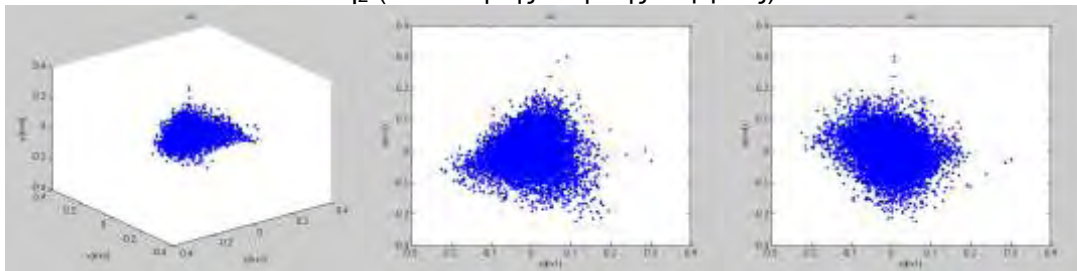
Σχήμα 4.17 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $w$  ροής Kolmogorov

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

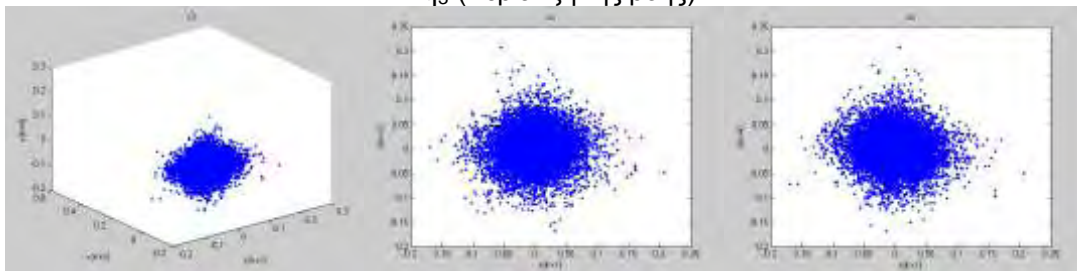
$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



$q_2$  (Σκέδαση της κινητικής ενέργειας)

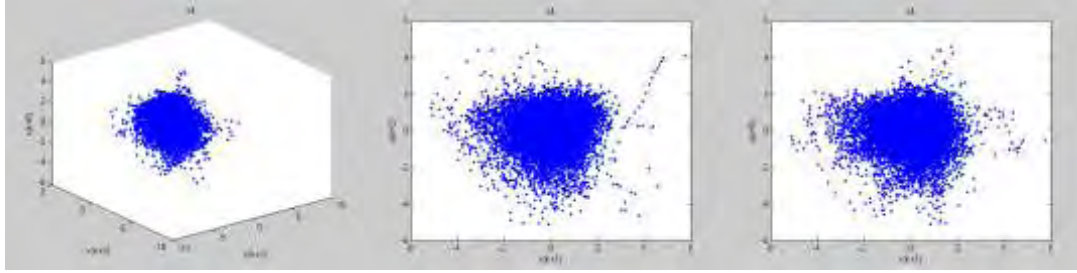


$q_3$  (Περιέλιξη της ροής)

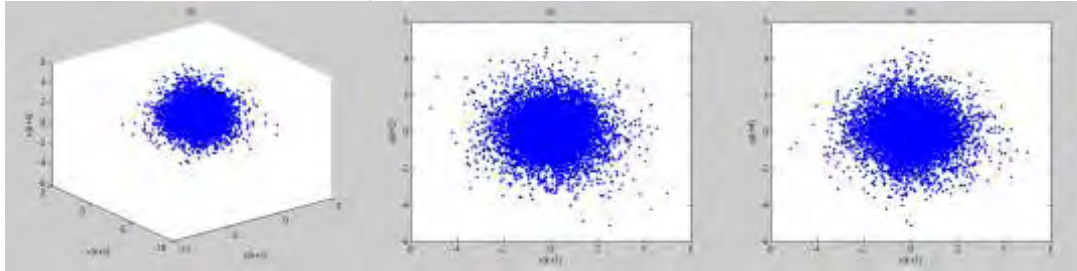




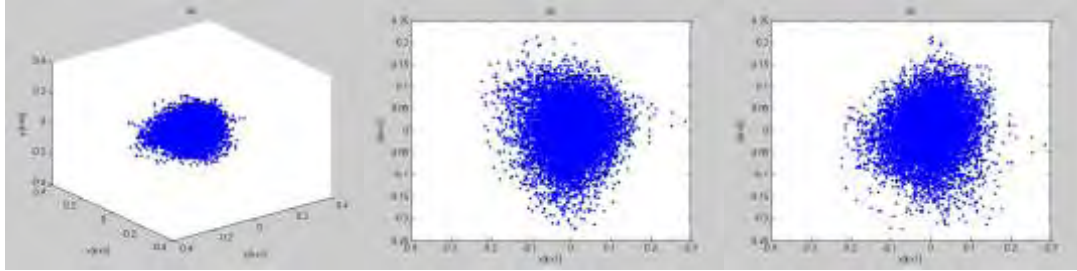
q<sub>4</sub> (Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή)



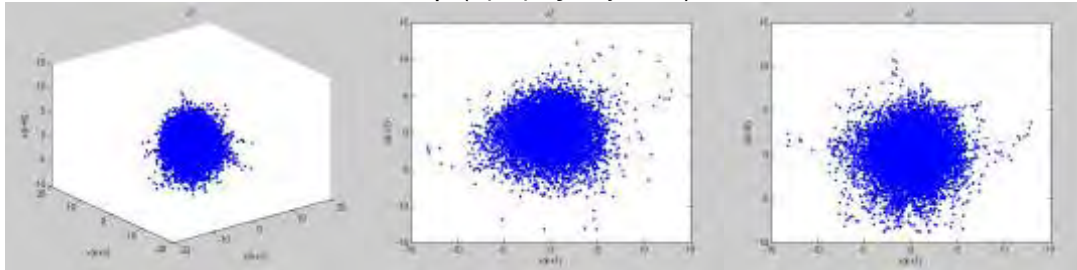
q<sub>5</sub> (Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή)



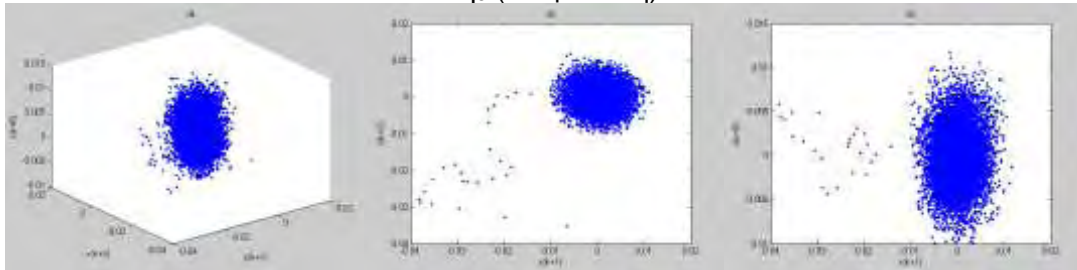
q<sub>6</sub> (Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής)



q<sub>7</sub> (Αριθμός Reynolds)



q<sub>8</sub> (Γινόμενο Κη)



Σχήμα 4.18 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών q ροής Kolmogorov

Στα διαγράμματα των δυο χρονοσειρών παρατηρούμε ότι :

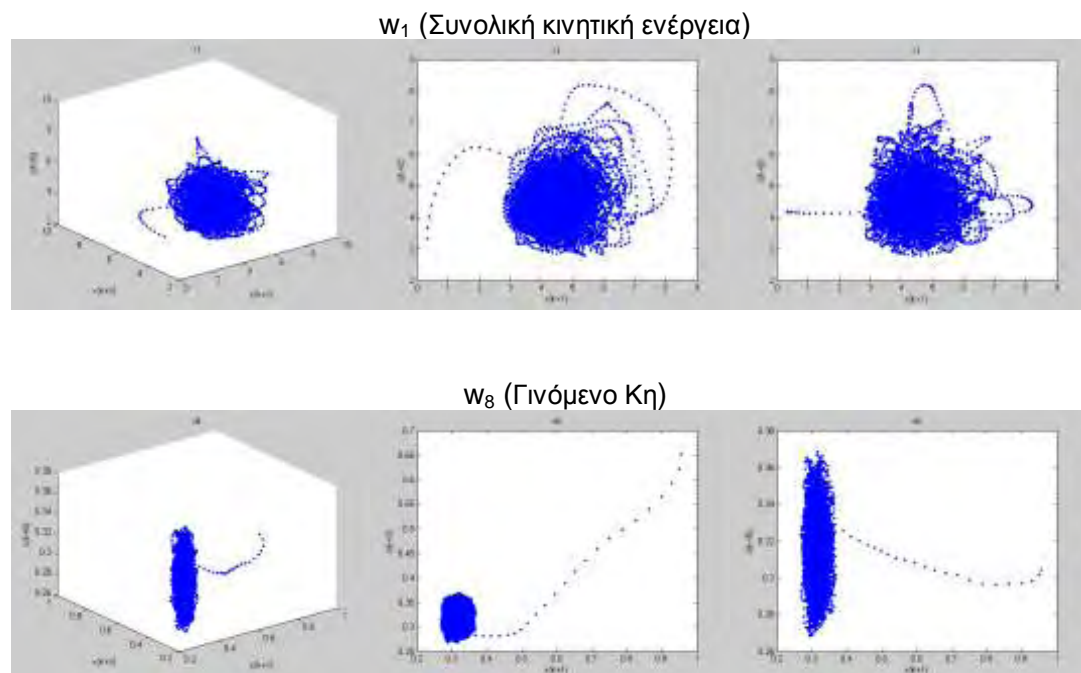
- Και στις δυο χρονοσειρές w και q παρατηρείται η ύπαρξη δομών οι οποίες μας δίνουν την ένδειξη μιας δυναμικής του συστήματος.

- Τα σχήματα της χρονοσειράς  $q$  έχουν αντίστοιχα χαρακτηριστικά με αυτά της χρονοσειράς  $w$ .
- Στην χρονοσειρά  $w$  τα σχήματα της 2-διάστατης απεικόνισης αναπτύσσονται άλλα στο κέντρο ( $w_1, w_3, w_5, w_6$ ), άλλα στο δεξιό τμήμα ( $w_2, w_4$ ) και άλλα στην αριστερή κάτω γωνία ( $w_7, w_8$ ). Η δομή δε της  $w_8$  είναι τελείως διαφορετική από των άλλων χρονοσειρών και μάλιστα ενώ στη μια 2-διάστατη απεικόνιση έχει σχήμα σφαίρας στην άλλη έχει σχήμα έλλειψης.
- Στη χρονοσειρά  $q$  όλα τα σχήματα αναπτύσσονται στο κέντρο εκτός της  $q_8$  όπου τα σχήματα αναπτύσσονται στη δεξιά άνω γωνία το ένα σε μορφή σφαίρας και στο δεξιό τμήμα το άλλο σε μορφή πεπλατυσμένης σφαίρας.

Ακολούθησε ο σχεδιασμός των παραπάνω χρονοσειρών και για διάσταση εμβύθισης 2m όπου δεν υπήρξε αξιόλογη διαφορά των διαγραμμάτων. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι καλή.

Ενδεικτικά παραθέτουμε και κάποια διαγράμματα των παραπάνω χρονοσειρών ( $w_1, w_8, q_1$  και  $q_8$ ) για διάσταση εμβύθισης 2m όπου φαίνεται ότι δεν υπάρχει αξιόλογη διαφορά.

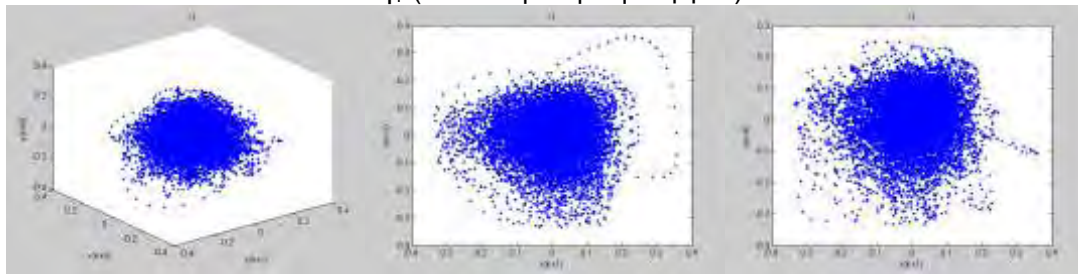
#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης



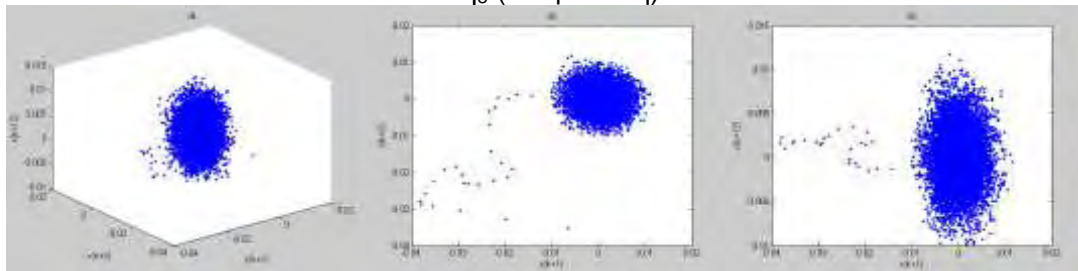
Σχήμα 4.19 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $w$  ροής Kolmogorov για διάσταση εμβύθισης 2m

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



$q_8$  (Γινόμενο  $K\eta$ )



Σχήμα 4.20 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $q$  ροής Kolmogorov για διάσταση εμβύθισης  $2m$

Στην περίπτωση της ανακατασκευής του χώρου των φάσεων με διάσταση  $2m$  δεν παρατηρούνται αξιοσημείωτες διαφορές στις παραπάνω χρονοσειρές. Τα σχήματα είναι σχεδόν τα ίδια με αυτά που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση των τιμών της διάστασης εμβύθισης  $m$  είναι αρκετά καλή.

## 4.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η ανάλυση των χρονοσειρών περιλαμβάνει την εκτίμηση μη γραμμικών χαρακτηριστικών (όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο) που είναι η διάσταση συσχέτισης  $D$  και ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov τα οποία δίνουν πληροφορίες για το σύστημα που μελετάμε.

### 4.6.1 Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης

Η διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)  $\nu$  είναι ένα από τα αναλλοίωτα μέτρα που εκφράζουν τη μορφοκλασματική διάσταση. Είναι αυτή που χρησιμοποιείται για να μας δείξει τη διάσταση του συστήματος και το πλέον διαδεδομένο μέτρο εκτίμησης του ελκυστή.

Με την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης (correlation dimension) εκτελείται και συμπληρωματικός έλεγχος για την αποφυγή των χρονικών συσχετίσεων με τη χρήση παραθύρου Theiler.

Η διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης  $\nu$  παριστάνεται γραφικά από τέσσερα σχήματα.

(α) Το πρώτο σχήμα δείχνει το ολοκλήρωμα συσχέτισης (correlation integral) και είναι  $\log C(r)$  vs  $\log r$  για ένα εύρος τιμών της  $m$ ,  $m=1,2,3,\dots,m_{\max}$ .

(β) Το δεύτερο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων του  $r$  και  $m$  (local slope) και είναι  $d \log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$  για το ίδιο εύρος τιμών της  $m$ .

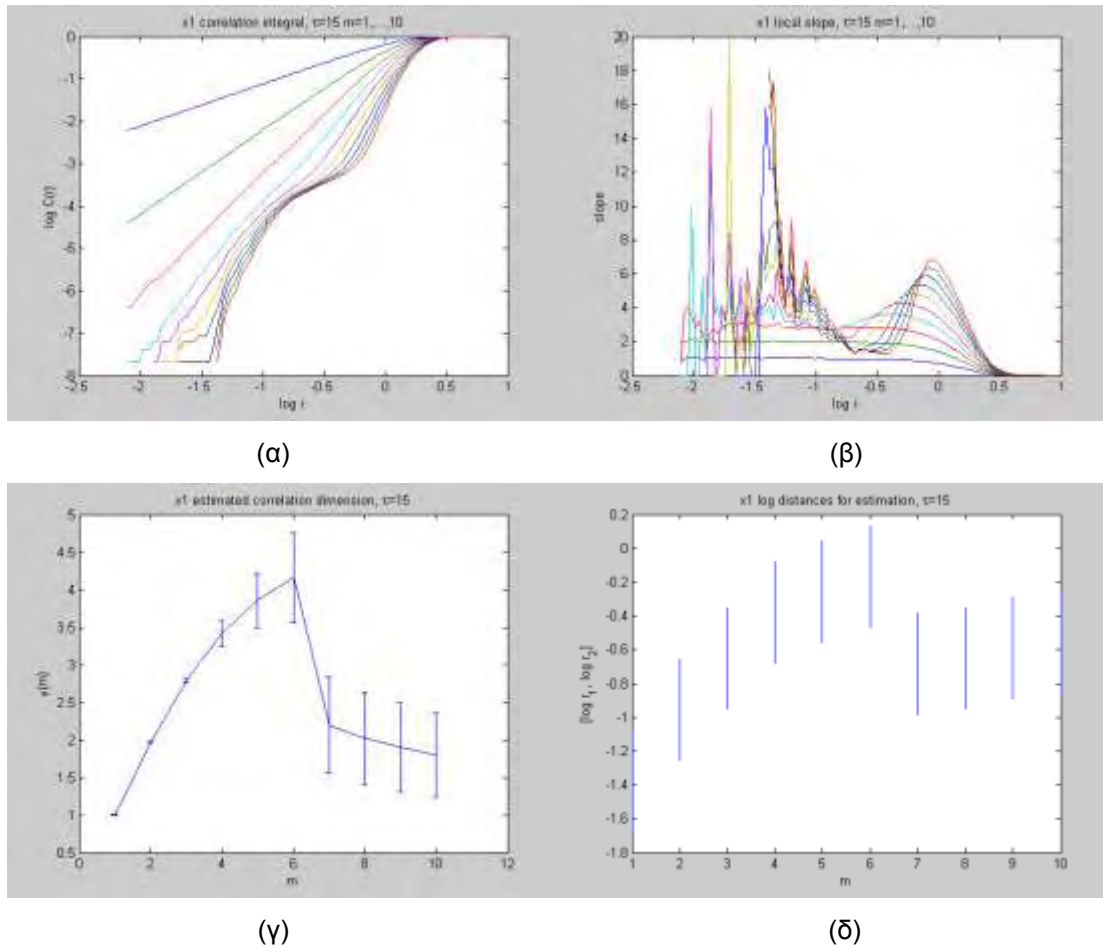
(γ) Το τρίτο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων της διάστασης εμπύθισης (estimated correlation dimension) και είναι  $\nu(m)$  vs  $m$ , όπου  $\nu(m)$  είναι η εκτίμηση της κλίσης από τα γραφήματα του πρώτου σχήματος ή του οριζόντιου επιπέδου από τα γραφήματα του δεύτερου σχήματος αντίστοιχα για κάθε  $m$ .

(δ) Το τέταρτο σχήμα δείχνει τις περιοχές κλιμάκωσης (log distances for estimation) και είναι  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Ακολουθούν ενδεικτικά τα δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  καθώς και πίνακας για όλες τις χρονοσειρές. Ο σχεδιασμός της διάστασης συσχέτισης έγινε για  $m_{\max}=10$ .

## Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)

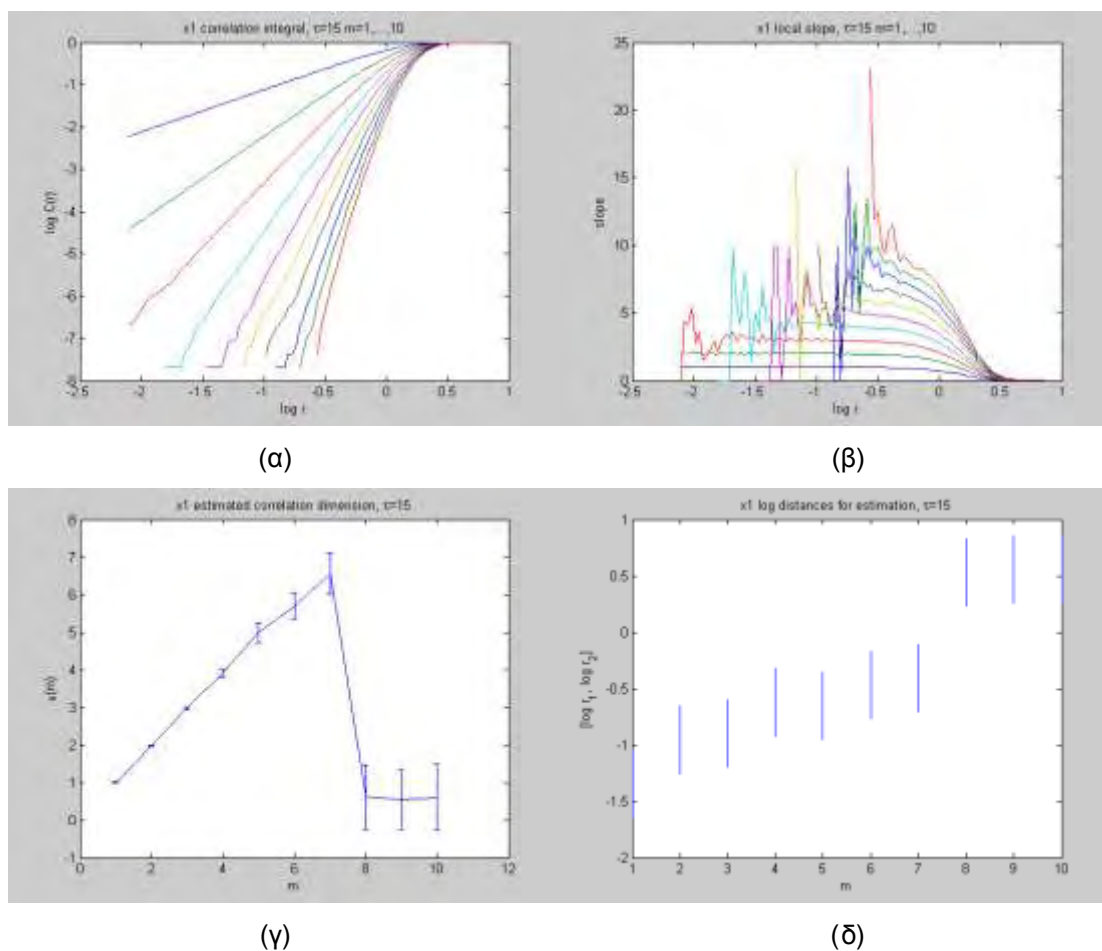


Σχήμα 4.21 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Οι κλίσεις, που παρατηρούνται στο διάγραμμα (α) του σχήματος 4.21, μπορεί να αντιστοιχούν είτε σε χρονικές συσχετίσεις είτε σε παρουσία θορύβου. Με τη χρήση του παραθύρου Theiler παίρνουμε τα αποτελέσματα του σχήματος 4.22 όπου παρατηρείται πλέον μια κλίση.

## Χρήση παραθύρου Theiler για την αποφυγή χρονικών συσχετίσεων

$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



Σχήμα 4.22 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης με τη χρήση παραθύρου Theiler

(α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $v(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

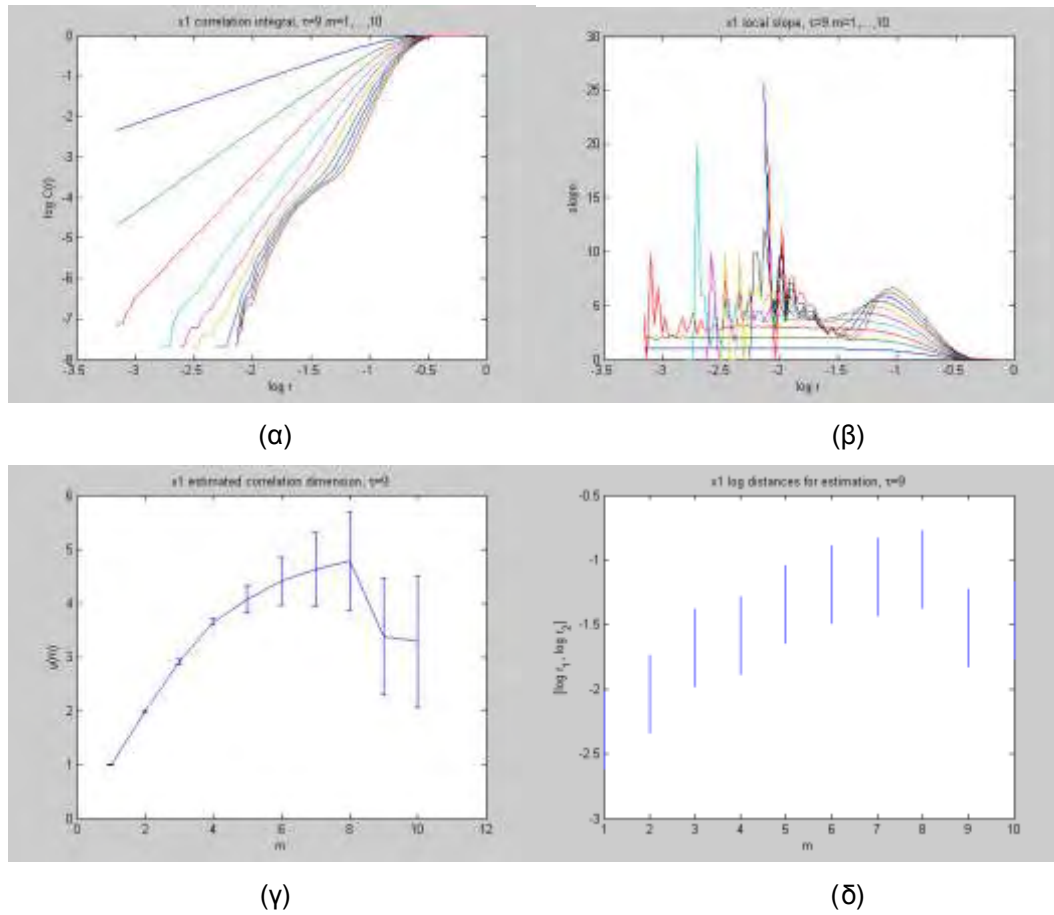
Παρατηρούμε ότι :

- Στο διάγραμμα (α), στο σχήμα 4.21 έχουμε δυο κλίσεις, ενώ στο ίδιο διάγραμμα στο σχήμα 4.22 έχουμε μια κλίση η ύπαρξη της οποίας οφείλεται σε χρονικές συσχετίσεις.
- Στο διάγραμμα (β), η περιοχή κλιμάκωσης δεν είναι η ίδια και κυμαίνεται  $-1,2 < \log r < -0,7$  (σχήμα 4.21) και  $-0,8 < \log r < -0,4$  (σχήμα 4.22).
- Στο διάγραμμα (γ) και στα δυο σχήματα, φαίνεται ότι η χρονοσειρά  $w_1$  δε συγκλίνει και το σύστημα είναι μάλλον στοχαστικό ή υψηλοδιάστατο.
- Στο διάγραμμα (δ) και στα δυο σχήματα έχουμε μία περιοχή κλιμάκωσης.



Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

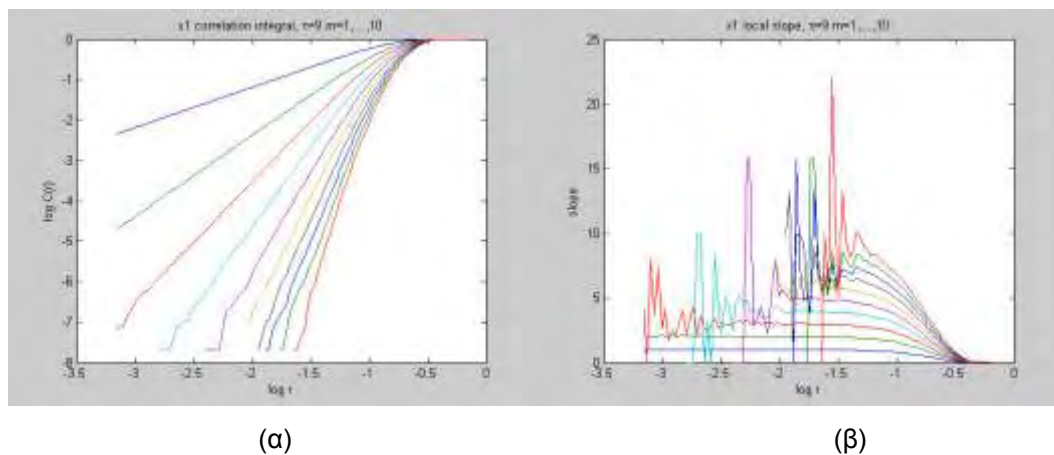
$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)

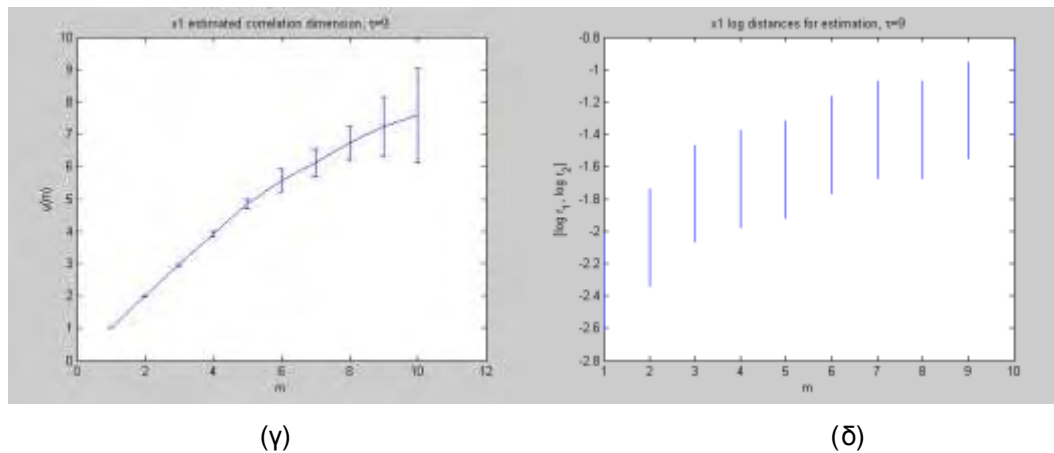


Σχήμα 4.23 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $|\log r_1, \log r_2|$  vs  $m$ .

Χρήση παραθύρου Theiler για την αποφυγή χρονικών συσχετίσεων

$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)





Σχήμα 4.24 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης με τη χρήση παραθύρου Theiler  
 (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Παρατηρούμε ότι :

- Στο διάγραμμα (α), και στα δυο σχήματα 4.23 και 4.24 έχουμε αλλαγή του αριθμού των κλίσεων από δύο σε μία η οποία οφείλεται σε χρονικές συσχετίσεις όπως προαναφέρθηκε.
- Στο διάγραμμα (β), η περιοχή κλιμάκωσης δεν είναι η ίδια και κυμαίνεται  $-2,0 < \log r < -1,5$  (σχήμα 4.23) και  $-1,7 < \log r < -1,2$  (σχήμα 4.24).
- Στο διάγραμμα (γ) και στα δυο σχήματα, φαίνεται ότι η χρονοσειρά  $q_1$  πιθανόν να συγκλίνει και το σύστημα είναι πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό.
- Στο διάγραμμα (δ) και στα δυο σχήματα έχουμε μία περιοχή κλιμάκωσης.

Γενικά, κρίνεται απαραίτητη η χρήση παραθύρου Theiler γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης επειδή οι χρονικές συσχετίσεις οδηγούν σε χαμηλότερες εκτιμήσεις της διάστασης συσχέτισης.

Από τα διαγράμματα (γ) όπου έχουμε τις κλίσεις συναρτήσεως της διάστασης εμφύθισης παίρνουμε τις τιμές και τις διακυμάνσεις της διάστασης συσχέτισης όπως αναφέρονται παρακάτω. Επιπλέον διαπιστώνουμε ότι σε όλες τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  τα συστήματα είναι μάλλον υψηλοδιάστατα χαοτικά γιατί  $m > \nu(m)$  εκτός της  $q_3$  που φαίνεται να είναι στοχαστικό ή υψηλοδιάστατο γιατί  $m = \nu(m)$ .

Στα διαγράμματα (δ) των περιοχών κλιμάκωσης, διαπιστώνουμε ότι στην χρονοσειρά  $w$  μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης έχουμε δύο περιοχές κλιμάκωσης, ενώ στις ίδιες χρονοσειρές με τη χρήση παραθύρου Theiler έχουμε μια περιοχή κλιμάκωσης. Στην χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές έχουμε μια περιοχή κλιμάκωσης και στις δύο περιπτώσεις.



Στη χρήση παραθύρου Theiler έχουμε λιγότερα σημεία, χειρότερη στατιστική και πιο θορυβώδες σύστημα από ότι στην περίπτωση χωρίς “Theiler window”.

Πίνακας εκτίμησης διάστασης συσχέτισης χρονοσειράς  $w$  μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης, με τη χρήση του παραθύρου Theiler.

Χρονοσειρά	Κλίσεις	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	Περιοχές κλιμάκωσης	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
$w_1$	1	6,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$w_2$	1	7,0	1,5	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$w_3$	1	8,0	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$w_4$	1	7,0	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$w_5$	1	8,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$w_6$	1	8,0	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$w_7$	1	7,0	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$w_8$	1	7,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό

Πίνακας 4.5 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών  $w$

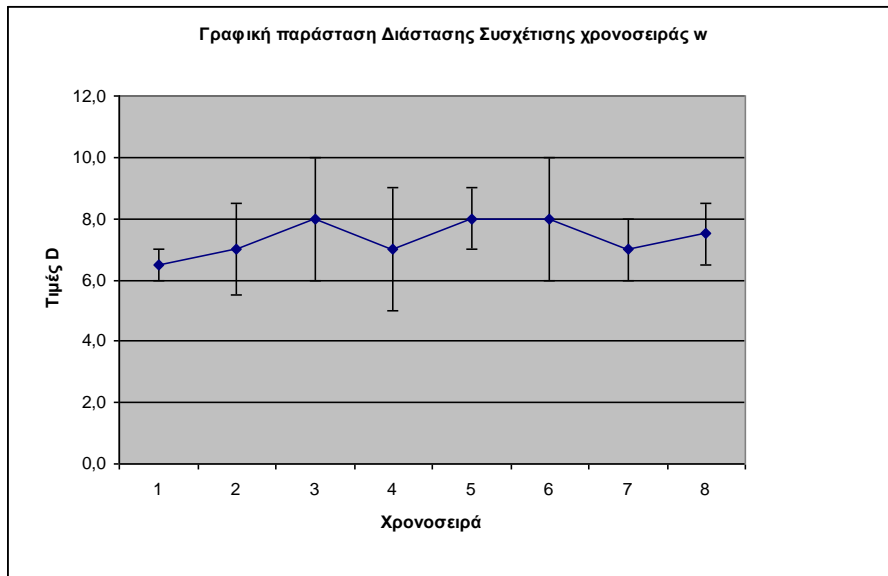
Πίνακας εκτίμησης διάστασης συσχέτισης χρονοσειράς  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές, με τη χρήση του παραθύρου Theiler.

Χρονοσειρά	Κλίσεις	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	Περιοχές κλιμάκωσης	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
$q_1$	1	8,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$q_2$	1	6,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$q_3$	1	7,0	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$q_4$	1	7,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$q_5$	1	5,5	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$q_6$	1	6,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
$q_7$	1	6,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
$q_8$	1	7,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό

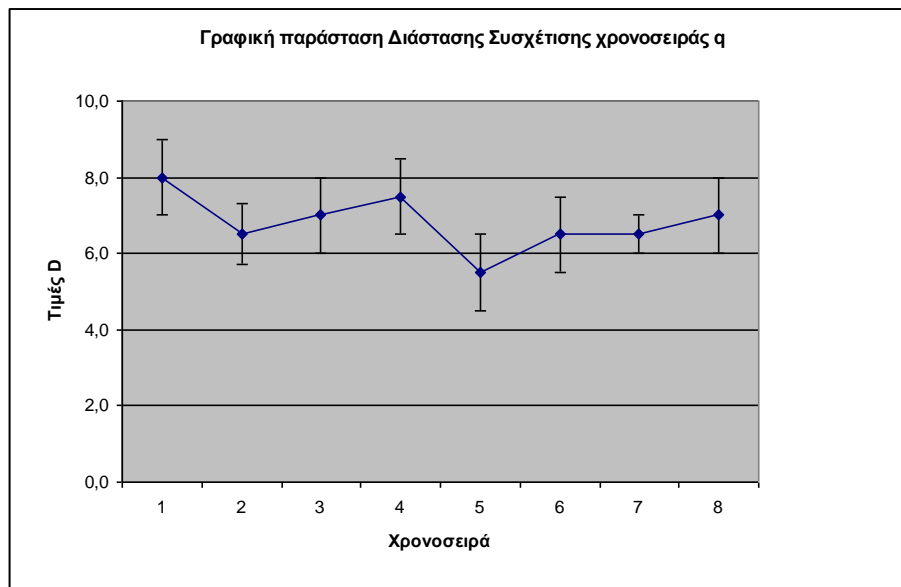
Πίνακας 4.6 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών  $q$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $\sigma'$  αυτές που παρουσιάζουν πιθανότητα σύγκλισης κυμαίνεται από  $6,5 \pm 1,0$  έως  $8,0 \pm 2,0$ , τιμές πολύ μεγαλύτερες από αυτές που θα έπρεπε να έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα Takens. Πιθανόν η συγκεκριμένη μεθοδολογία υπολογισμού της διάστασης εμβύθισης  $m$  να μην είναι πάντα πολύ αξιόπιστη.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις της διάστασης συσχέτισης και των σφαλμάτων των παραπάνω πινάκων στο σχήμα 4.25.



(α)



(β)

Σχήμα 4.25 : Διάγραμμα διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών  $w$  (α) και  $\alpha$  (β) (1. Συνολική κινητική ενέργεια, 2. Σκέδαση της κινητικής ενέργειας, 3. Περιέλιξη της ροής, 4. Εισαγωγή κινητικής ενέργειας στη ροή, 5. Εισαγωγή περιέλιξης στη ροή, 6. Χαρακτηριστικό μήκος των δινών της ροής, 7. Αριθμός Reynolds, 8. Γινόμενο  $K\eta$  ροής Kolmogorov)

Ο σχεδιασμός της διάστασης συσχέτισης έγινε και για  $m_{\max}=15$  από τον οποίο προέκυψαν σχεδόν τα ίδια διαγράμματα. Αξιοσημείωτες διαφορές δεν υπήρξαν. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης είναι αρκετά καλή.

#### 4.6.2 Υποκατάστατα δεδομένα (surrogate data)

Η λογική των υποκατάστατων δεδομένων βασίζεται στον έλεγχο της αξιοπιστίας της εκτίμησης μιας μη γραμμικής ιδιότητας όπως η διάσταση συσχέτισης. Υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά προέρχεται από ένα γραμμικό σύστημα το οποίο την παράγει και εφαρμόζοντας συγκεκριμένη μεθοδολογία προσπαθούμε να απορρίψουμε την αρχική υπόθεση. [Kugiumtzis, 2004], [Miksovsky, 2006].

Τα υποκατάστατα δεδομένα είναι χρονοσειρές οι οποίες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τη χρονοσειρά που έχουμε. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι ο μέσος όρος, η τυπική απόκλιση, η κατανομή συχνοτήτων και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

Σε υψηλοδιάστατα συστήματα που έχουν κάποια δυναμική, δηλαδή υπάρχει εξάρτηση των δεδομένων μεταξύ τους, αν διαταράξω τη χρονική αλληλουχία αλλά όχι τη σειρά των στατιστικών δεδομένων τα αποτελέσματα που θα πάρω θα πρέπει να διαφέρουν. Στην περίπτωση αυτή το γραμμικό φάσμα έχει τις ίδιες συχνότητες.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση διαταράξαμε τα δεδομένα των χρονοσειρών  $w_2$  και  $q_2$  στις οποίες έχουμε αφαιρέσει την τάση. Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης  $\nu$  έγινε και στις δυο περιπτώσεις με χρήση παραθύρου Theiler και για αριθμό σημείων 10.000 και 9.720.

Οι μη γραμμικότητες ανιχνεύονται με τον έλεγχο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας (average mutual information). Η εκτίμηση του χρόνου υστέρησης  $\tau$  για την  $q_2$  είναι 9 (ίδιος σε όλες) και στις δυο περιπτώσεις, ενώ για την  $w_2$  είναι 10,58 με σφάλμα 0,50 και 10,41 με σφάλμα 0,50 για τις περιπτώσεις των 10.000 και 9.720 σημείων αντίστοιχα. Η χρήση των 9.720 σημείων έγινε προκειμένου ν' αποφευχθούν φαινόμενα λόγω διαφορών στις τιμές.

Το αποτέλεσμα ελέγχεται σύμφωνα με τη σχέση  $|T_{\text{αρχ.}} - \bar{\tau}| / \sigma_{\tau} > 1,96$ . Στην περίπτωση της  $q_2$  επειδή η τιμή είναι σταθερή (9) και δεν έχουμε διακύμανση ο λόγος του κλάσματος τείνει στο μηδέν και φαίνεται ότι οι χρονοσειρές διαφέρουν σημαντικά. Στην περίπτωση της  $w_2$  είναι  $0,84 < 1,96$  και  $1,18 < 1,96$  για τα 10.000 και 9.720 σημεία αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές δεν μας βεβαιώνουν ότι οι χρονοσειρές διαφέρουν σημαντικά λόγω και των μεγάλων σφαλμάτων.

Ακολουθούν οι πίνακες των δυο χρονοσειρών  $w_2$  και  $q_2$  με τις διαστάσεις συσχέτισης και τις διακυμάνσεις αυτών.

Χρονοσειρά w μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

α/α	Χρονοσειρά w2=10000			Χρονοσειρά w2=9720		
	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1	7,0	1,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	7,5	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
2	8,0	1,5	"	8,0	1,5	"
3	8,0	1,0	"	7,5	1,5	"
4	8,0	1,0	"	8,0	1,0	"
5	9,0	1,0	"	8,5	1,5	"
6	8,5	1,0	"	7,5	2,0	"
7	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
8	8,0	1,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	7,5	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
9	8,0	1,0	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	7,5	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
10	7,5	1,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	8,0	1,5	"
11	7,0	1,0	"	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
12	8,0	1,5	"	7,5	1,5	"
13	8,0	1,5	"	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
14	8,0	1,5	"	8,5	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
15	8,0	1,0	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
16	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	8,0	1,5	"
17	8,0	1,0	"	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
18	7,5	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	8,0	1,5	"
19	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	8,0	2,0	"
20	7,5	1,5	"	9,0	1,0	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
21	8,0	1,5	"	8,0	2,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
22	8,0	1,0	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	8,0	1,5	"
23	8,5	1,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
24	8,0	1,0	"	8,0	1,5	"
25	8,0	1,0	"	7,5	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
26	8,5	1,5	"	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο

27	8,0	1,5	"	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
28	8,0	1,5	"	8,0	2,0	"
29	8,0	1,5	"	8,0	1,5	"
M.O	8,0	1,2		7,9	1,5	
T.A	0,4	0,3		0,3	0,2	

Πίνακας 4.7 : Πίνακας διάστασης συσχέτισης της  $w_2$

Οι τιμές κυμαίνονται :

- για  $w_2=10000$  σημεία από 7,6 έως 8,4 με σφάλμα 0,9 έως 1,5 και
- για  $w_2=9720$  σημεία από 7,6 έως 8,2 με σφάλμα 1,3 έως 1,7

Οι τελικές τιμές της διάστασης συσχέτισης  $v$  κυμαίνονται :

- για  $w_2=10000$  σημεία από 6,1 έως 9,7 και
- για  $w_2=9720$  σημεία από 5,9 έως 9,9

Η αρχική τιμή της διάστασης συσχέτισης  $v$  για  $w_2$  είναι 7,0 με σφάλμα 1,5 δηλαδή η τιμή κυμαίνεται από 5,5 έως 8,5.

Το αποτέλεσμα ελέγχεται σύμφωνα με τη σχέση  $|v_{αρχ} - \bar{v}| / \sigma_v > 1,96$  που στην περίπτωση μας είναι  $2,5 > 1,96$ . Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί στατιστικά σημαντικό με βεβαιότητα εμπιστοσύνης 95%. Δεδομένων όμως των μεγάλων σφαλμάτων στον υπολογισμό του  $v$  πρέπει να έχουμε κάποιες επιφυλάξεις.

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

α/α	Χρονοσειρά $q_2=10000$			Χρονοσειρά $q_2=9720$		
	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	7,5	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
2	8,0	1,5	"	7,5	1,5	"
3	7,5	1,5	"	7,0	2,0	"
4	7,5	1,5	"	8,0	1,5	"
5	7,5	1,5	"	8,0	1,5	"
6	8,0	1,5	"	7,5	1,5	"
7	7,5	1,0	"	7,5	1,5	"
8	7,5	1,5	"	7,5	2,0	"
9	8,0	1,5	"	8,0	1,5	"
10	8,0	1,0	"	7,5	1,5	"

11	7,5	1,5	"	8,0	1,5	"
12	7,5	1,5	"	8,5	1,5	"
13	8,0	1,0	"	8,0	1,5	"
14	7,5	1,0	"	7,5	1,5	"
15	7,5	1,5	"	7,5	1,5	"
16	8,0	1,5	"	8,0	1,5	"
17	7,5	1,5	"	7,5	1,5	"
18	8,0	1,5	"	7,5	1,5	"
19	8,0	1,5	"	8,0	2,0	"
20	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο	8,5	1,5	"
21	7,5	1,0	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό	8,0	1,5	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
22	7,0	1,5	"	8,0	1,5	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
23	7,5	1,5	"	8,0	1,5	"
24	8,0	1,0	"	7,5	1,5	"
25	7,5	1,0	"	7,5	1,5	"
26	7,5	1,5	"	8,0	1,5	"
27	8,5	1,5	"	8,0	1,0	"
28	8,0	1,5	"	8,0	1,0	"
29	8,0	1,0	"	7,5	1,5	"
30	8,0	1,5	"	8,0	1,5	"
M.O	7,8	1,4		7,8	1,5	
T.A	0,3	0,2		0,3	0,2	

Πίνακας 4. : Πίνακας διάστασης συσχέτισης της  $q_2$

Οι τιμές κυμαίνονται :

- για  $q_2=10000$  σημεία από 7,5 έως 8,1 με σφάλμα 1,2 έως 1,6 και
- για  $q_2=9720$  σημεία από 7,5 έως 8,1 με σφάλμα 1,3 έως 1,7

Οι τελικές τιμές της διάστασης συσχέτισης  $v$  κυμαίνονται :

- για  $q_2=10000$  σημεία από 5,9 έως 9,7 και
- για  $q_2=9720$  σημεία από 5,8 έως 9,8

Η αρχική τιμή της διάστασης συσχέτισης  $v$  για  $q_2$  είναι 6,5 με σφάλμα 0,8 δηλαδή η τιμή κυμαίνεται από 5,7 έως 7,3.

Το αποτέλεσμα είναι  $4,33 > 1,96$  και μπορεί να θεωρηθεί στατιστικά σημαντικό με βεβαιότητα εμπιστοσύνης 95% γιατί τα σφάλματα είναι μεγάλα.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των δυο χρονοσειρών  $w_2$  και  $q_2$  των υποκατάστατων δεδομένων συγκριτικά με αυτές των αρχικών δεν είναι στατιστικά σημαντικές που σημαίνει ότι δεν υπάρχει δυναμική στο σύστημα.

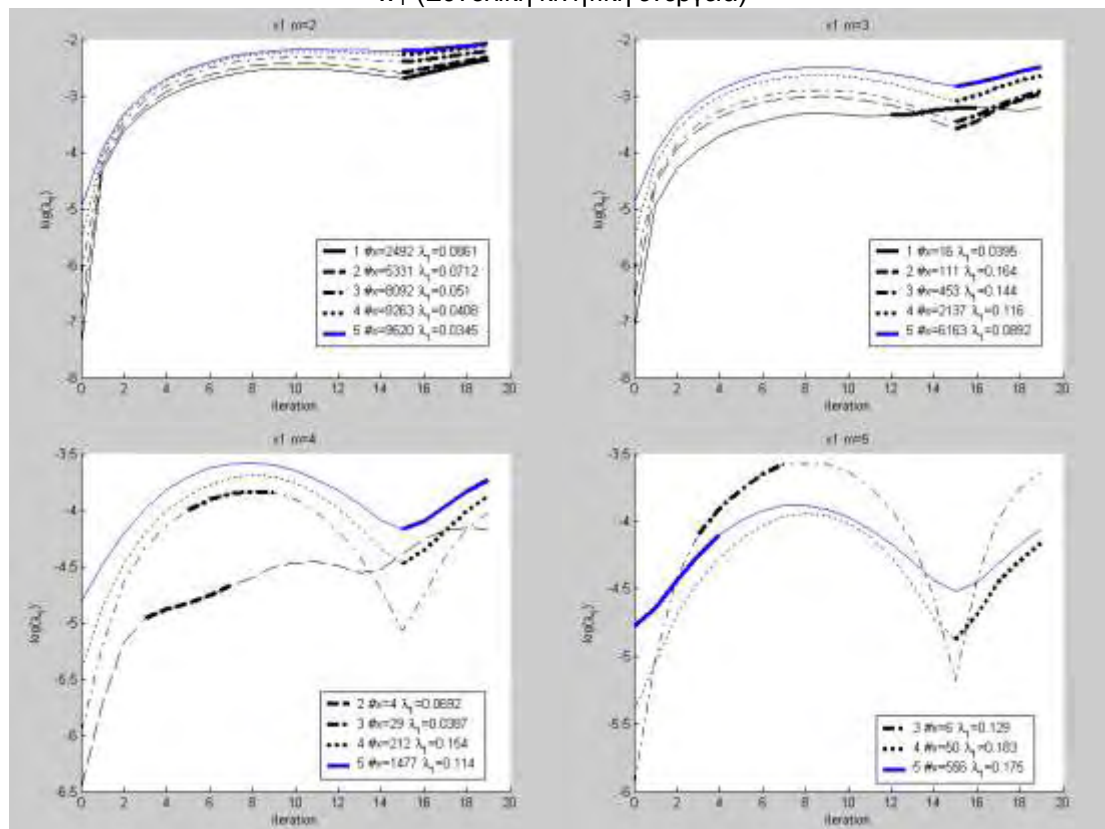
#### 4.6.3 Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov

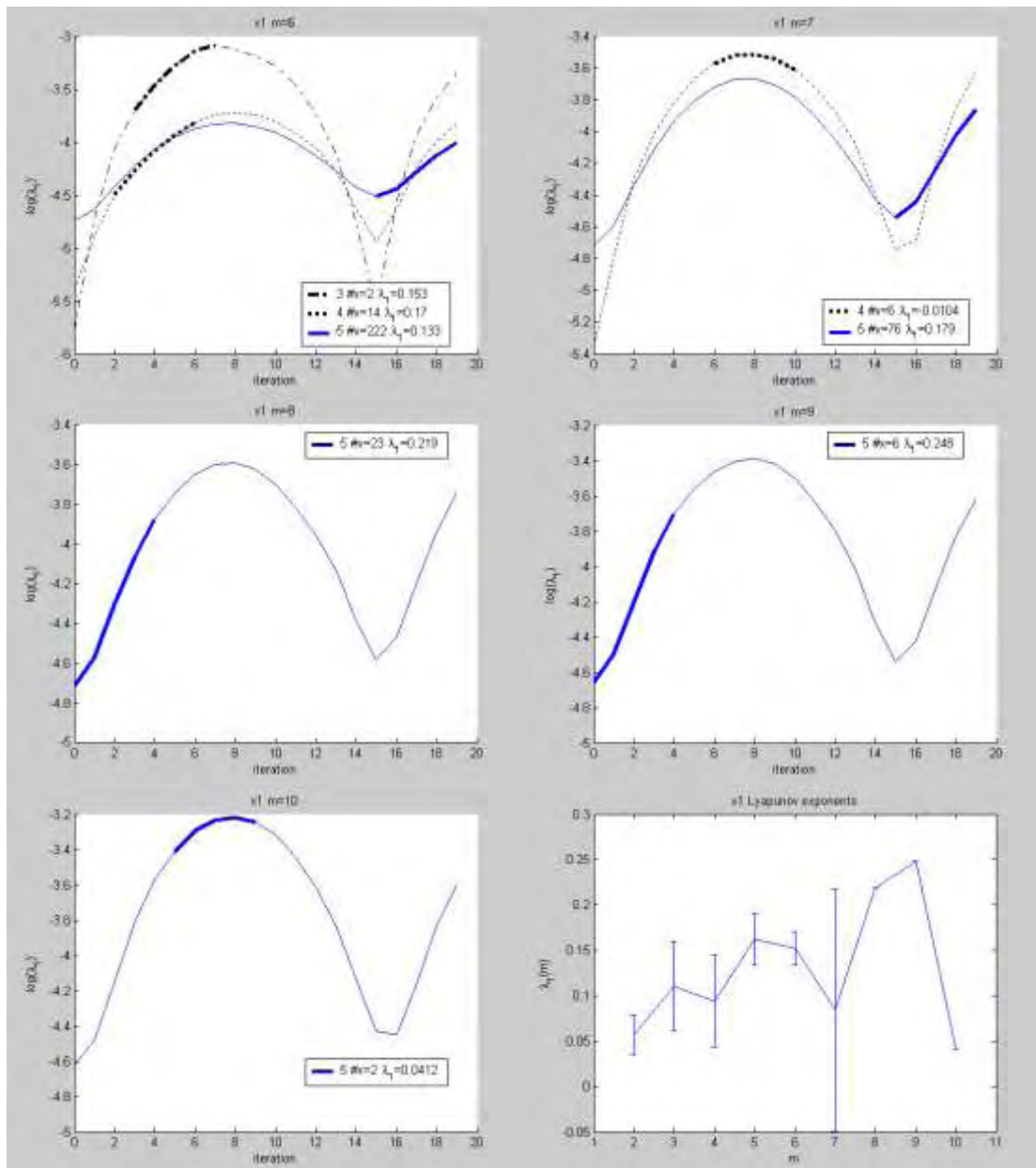
Η ιδιότητα των χαοτικών δυναμικών συστημάτων να έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες έχει ως αποτέλεσμα τροχιές που αρχικά είναι πολύ κοντά να αποκλίνουν γρήγορα και μάλιστα εκθετικά. Ο μέσος εκθέτης για τη διεύθυνση της μεγαλύτερης εκθετικής απόκλισης των τροχιών είναι ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov.

Παραθέτουμε ενδεικτικά δυο σειρές διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  και ακολουθούν για όλες τις χρονοσειρές μόνο τα διαγράμματα για την εκτίμηση του εκθέτη.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

$w_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)

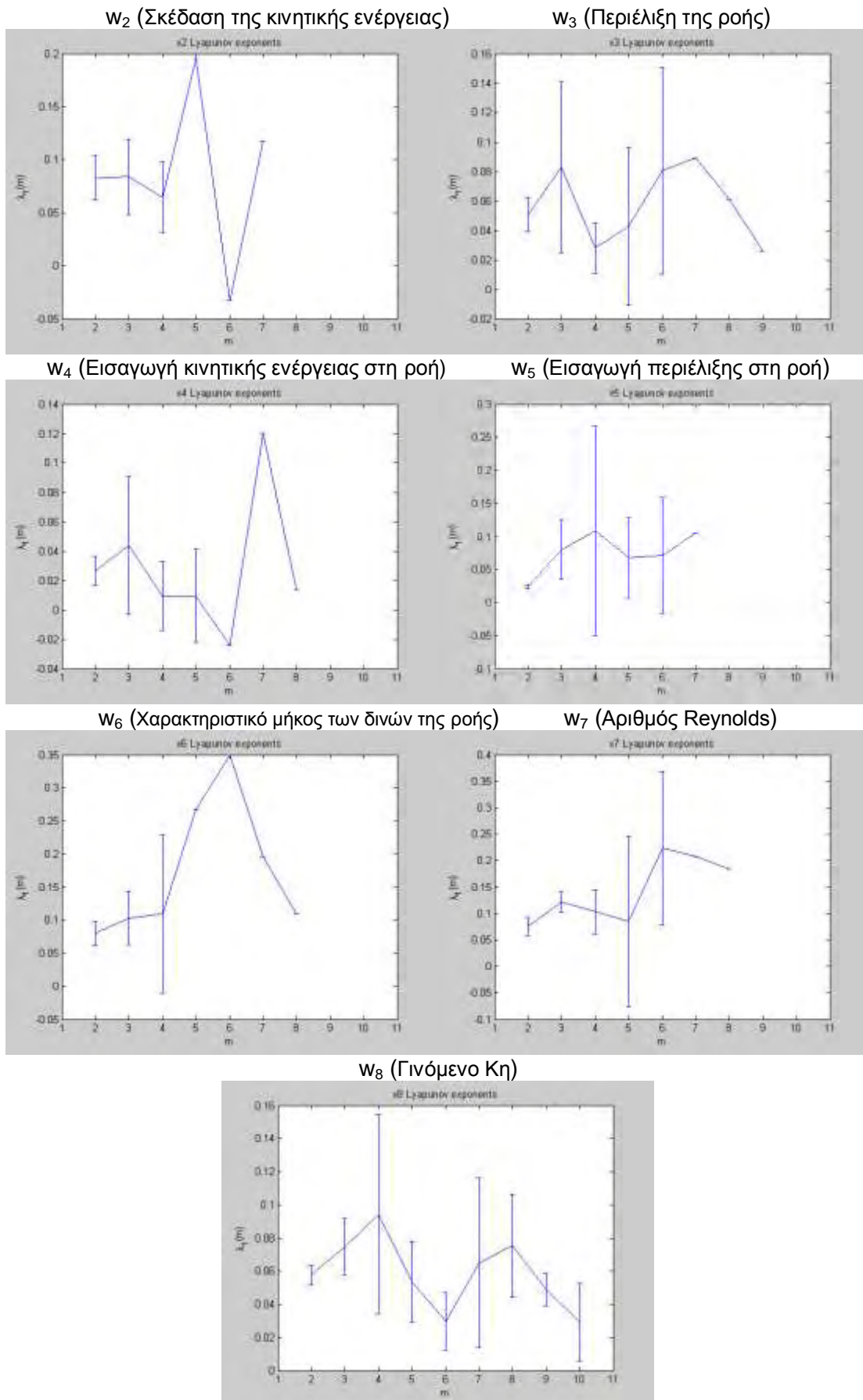




Σχήμα 4.26 : Παρουσίαση όλων των διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov της χρονοσειράς  $w_1$  ροής Koltmogorov

Για τις υπόλοιπες χρονοσειρές  $w$  παραθέτουμε μόνο τα διαγράμματα των εκθετών.

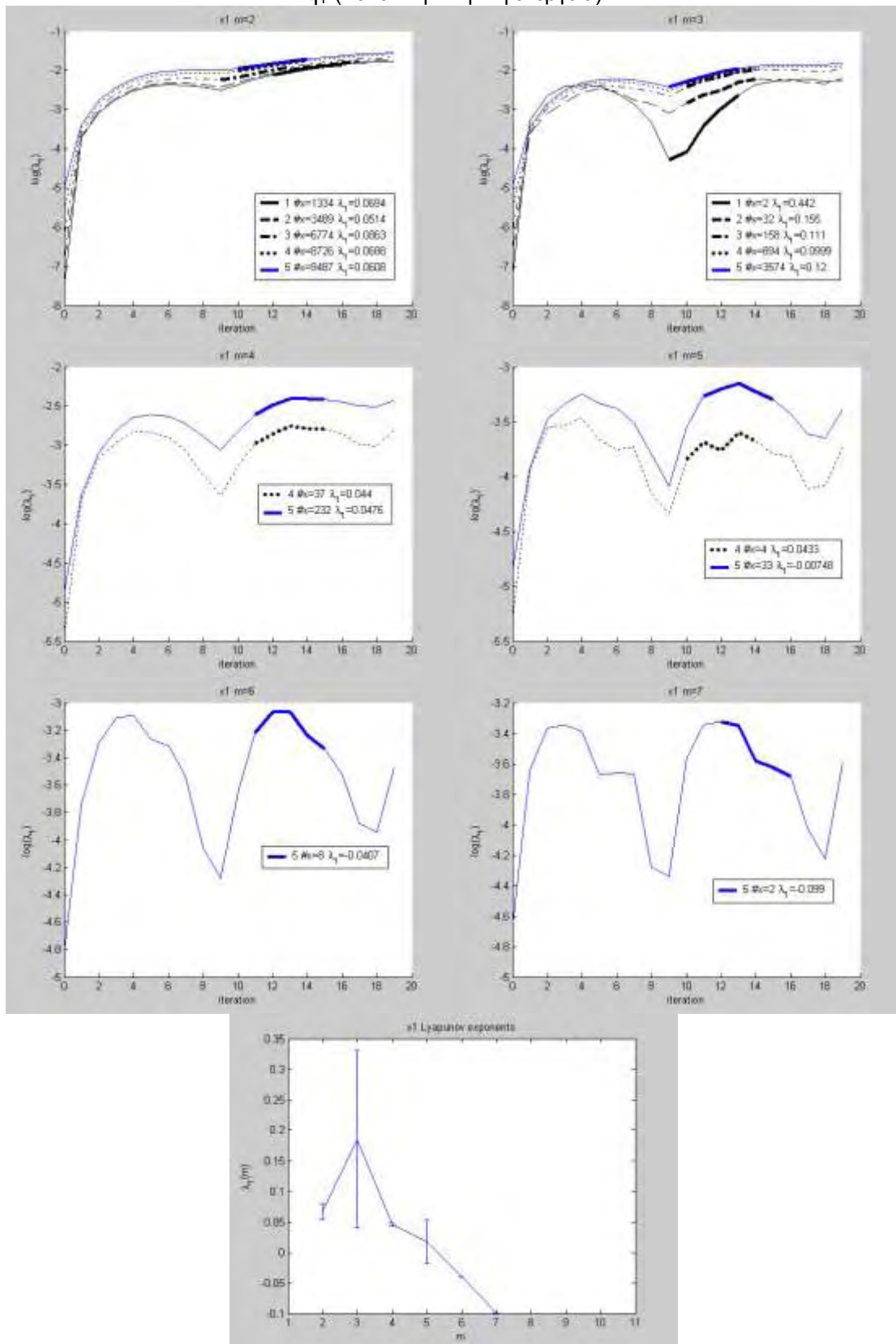




Σχήμα 4.27 : Εκτίμηση εκθέτη Lyapunov χρονοσειρών  $w_2$  έως  $w_8$  ροής Kolmogorov

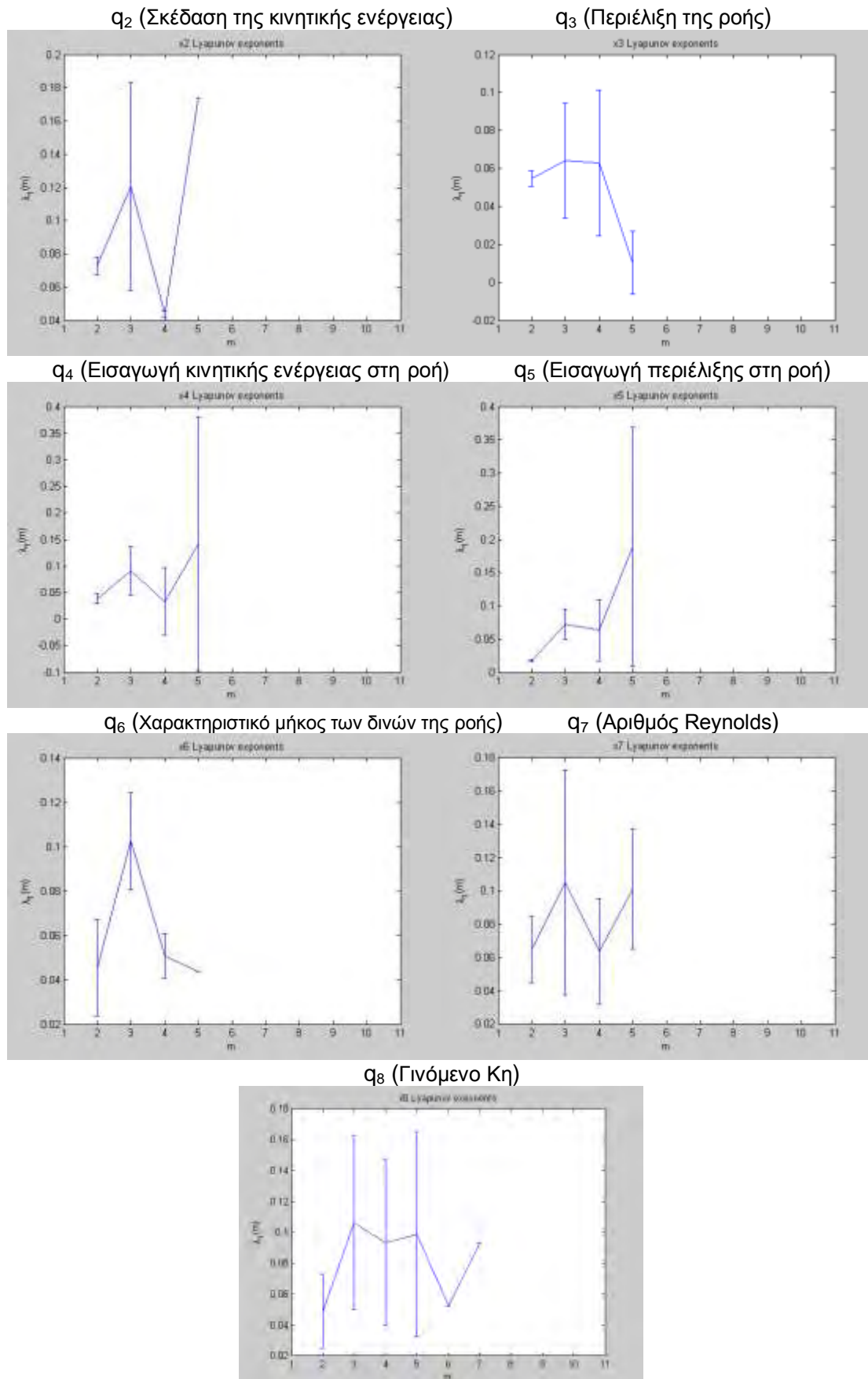
Χρονοσειρά  $q_1$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

$q_1$  (Συνολική κινητική ενέργεια)



Σχήμα 4.28 : Παρουσίαση όλων των διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov της χρονοσειράς  $q_1$  ροής Kolmogorov

Για τις υπόλοιπες χρονοσειρές  $q$  παραθέτουμε μόνο τα διαγράμματα των εκθετών.



Σχήμα 4.29 : Εκτίμηση εκθέτη Lyapunov χρονοσειρών  $q_2$  έως  $q_8$  ροής Kolmogorov

Παρατηρούμε ότι και στις δυο χρονοσειρές  $w$  και  $q$  :

- Όλοι οι εκθέτες είναι θετικοί που σημαίνει ότι οι τροχιές είναι ασταθείς και κοντινά σημεία θα αποκλίνουν. Το δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό και ο εκθέτης περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο χάνεται η προβλεψιμότητα.
- Οι τιμές των σφαλμάτων είναι μεγάλες, σε μερικές χρονοσειρές πλησιάζουν την τιμή του εκθέτη και σε κάποιες είναι και μεγαλύτερες.

### Συμπέρασμα

Τα αποτελέσματα ενισχύουν την εκτίμηση της χαοτικής συμπεριφοράς με παρουσία υψηλοδιάστατου χάους με διάσταση μεταξύ 5 έως 10. Οι χρονοσειρές φάσματος ισχύος φαίνεται ν' αντανakλούν τις συμπεριφορές στις διαφορετικές χρονικές κλίμακες, όπου φαίνεται ότι η συμμετοχή του φαινομένου με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους μειώνεται.

Επίσης φαίνεται ότι υπάρχει μια περιοχή μετάβασης με διαφορετική συμμετοχή των χαμηλών συχνοτήτων. Η χαρακτηριστική συχνότητα στην οποία παρατηρείται η μετάβαση σχετίζεται μάλλον με το μέγεθος της μεγαλύτερης δίνης η οποία μπορεί να "χωρέσει" στο κουτί προσομοίωσης. Οι χαρακτηριστικοί χρόνοι φαίνεται ν' ακολουθούν νόμους κλίμακας που παρατηρούνται σε χαοτικά και πολύπλοκα φαινόμενα.

Η ύπαρξη θετικών μέγιστων εκθετών Lyapunov ενισχύει την υπόθεση χαοτικής συμπεριφοράς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ

### 5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΤΥΡΒΩΔΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ

#### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

##### 5.1.1 Τυρβώδης εκτοξευόμενη φλέβα

Εκτοξευόμενη φλέβα ή δέσμη (jet) είναι μια φλέβα ρευστού που διαχέεται σε ομοειδές ρευστό με την ίδια ή διαφορετική πυκνότητα. Τυρβώδης, σημαίνει ότι στο πεδίο ροής υπάρχει χρονική διακύμανση της ταχύτητας και συγκέντρωσης κάποιας ουσίας που μεταφέρει η εκτοξευόμενη φλέβα. Τα χαρακτηριστικά και η ρευστοδυναμική συμπεριφορά των εκτοξευόμενων φλεβών εξαρτώνται από παράγοντες όπως είναι οι παράμετροι (χαρακτηριστικά) της φλέβας, οι παράμετροι του περιβάλλοντος ρευστού και οι γεωμετρικές παράμετροι.

Τα αρχικά χαρακτηριστικά της φλέβας αποτελούν η αρχική κατανομή της ταχύτητας και ένταση τύρβης, η ογκομετρική παροχή και ορμή της φλέβας, καθώς και η συγκέντρωση μεταφερόμενης ουσίας ή η θερμοκρασία της, προκειμένου περί θερμαινόμενης φλέβας. Στις περιβαλλοντικές παραμέτρους περιλαμβάνονται η πυκνομετρική διαφορά ανάμεσα στο ρευστό της φλέβας και του αποδέκτη, η θερμική ή πυκνομετρική στρωμάτωση και η κίνηση στον αποδέκτη κτλ. Οι γεωμετρικές παράμετροι σχετίζονται με τη μορφή του ακροφυσίου (π.χ. κυκλικές ή ορθογωνικές), τον προσανατολισμό (οριζόντιες, κατακόρυφες ή υπό γωνία), την αλληλεπίδραση με άλλες φλέβες, καθώς και την επίδραση των ορίων και του μεγέθους του αποδέκτη στη φλέβα.

Οι εκτοξευόμενες φλέβες μπορεί να είναι φυσικές (π.χ. υποθαλάσσιες φλέβες ή seavents, ηφαίστεια), ή τεχνητές όπως π.χ. καμινάδες, πυρκαγιές μικρής ή μεγάλης κλίμακας, υποθαλάσσιοι διαχυτήρες διάθεσης αποβλήτων από μονάδες βιολογικής επεξεργασίας, εξάτμιση ή fuel injection αυτοκινήτων (διφασική φλέβα ή spray), κλπ

##### 5.1.2 Μετρήσεις σε εκτοξευόμενες φλέβες.

Οι εκτοξευόμενες φλέβες αποτελούν μία περίπτωση των διατμητικών ροών (shear flows). Σαν διατμητική ορίζεται η ροή που αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες στρώσεις με διαφορετική ομοιόμορφη ταχύτητα. Η ροή είναι εν γένει τυρβώδης και η ανάλυση και μετρήσεις γίνονται όπως σε κάθε πεδίο τυρβώδους ροής. Μετρήσεις σε ανωστικές φλέβες αφορούν στον προσδιορισμό της τροχιάς τους

και τις ιδιότητες της τύρβης. Συνήθως οι μετρήσεις τύρβης γίνονται με βάση ένα ή περισσότερα σταθερά σημεία στη γεωμετρία της φλέβας, θεωρώντας δηλαδή τις συντεταγμένες του σημείου μέτρησης ως ανεξάρτητες μεταβλητές (μέθοδος Euler, Daily & Harleman 1966) και εξετάζοντας τη μεταβολή της παραμέτρου στην εκάστοτε θέση μέτρησης.

Οι μετρήσεις αυτές στοχεύουν στον καθορισμό της τροχιάς κίνησης μιας εκτοξευόμενης φλέβας και συγκεκριμένα στον προσδιορισμό του άξονα της φλέβας, καθώς και του πλάτους της. Ο καθορισμός της τροχιάς της φλέβας γίνεται συνήθως με φωτογράφιση υπό μόνιμες συνθήκες και στη συνέχεια με οπτική ανάλυση των φωτογραφιών για τον προσδιορισμό του 'μέσου' άξονα της φλέβας.

### **5.1.3 Μετρήσεις τύρβης**

Η ένταση της τύρβης προκύπτει από στατιστική ανάλυση δείγματος τιμών μιας παραμέτρου της ροής της φλέβας, που μετράται σε συγκεκριμένα σημεία. Η παράμετρος αυτή μπορεί να είναι η ταχύτητα ή θερμοκρασία του ρευστού, ή η συγκέντρωση μεταφερόμενης ουσίας, κλπ στα εν λόγω σημεία. Στην περίπτωση δε θερμαινόμενης φλέβας, η τύρβη μπορεί να προσδιοριστεί από μετρήσεις της θερμοκρασίας σε κατάλληλες θέσεις του πεδίου ροής. Από την επεξεργασία των μετρήσεων, προκύπτουν στατιστικά μεγέθη που περιγράφουν τις ιδιότητες της τύρβης. Όταν δε οι μετρήσεις αυτές γίνουν σε όλο το εύρος μιας διατομής της φλέβας, τότε μπορούν να αποδώσουν την κατανομή των μέσων ιδιοτήτων της φλέβας.

### **5.1.4 Πειραματική διάταξη – Σύντομη περιγραφή**

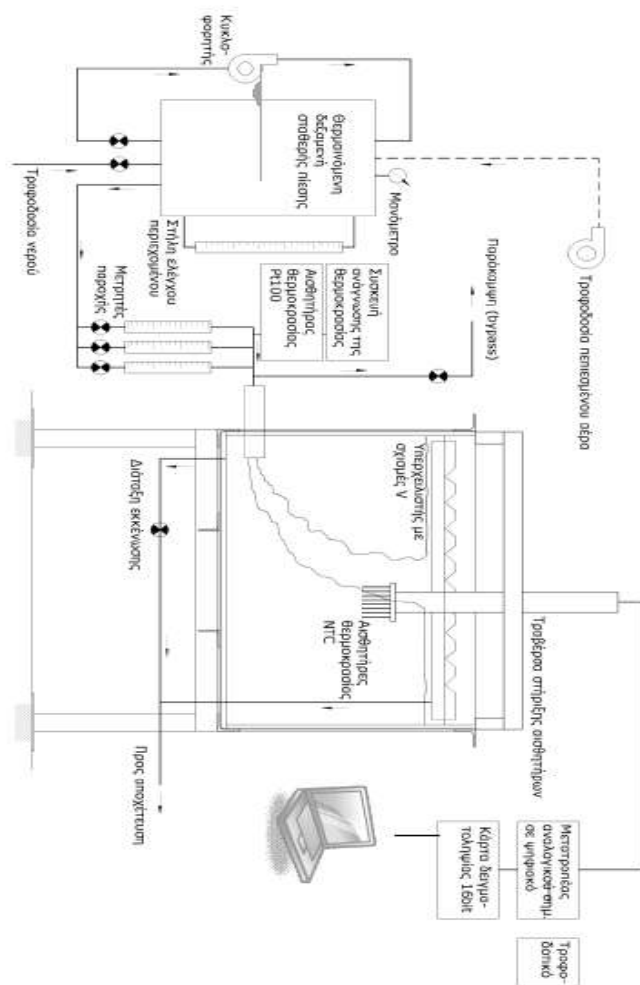
Οι μετρήσεις έγιναν στο Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής και μας παραχωρήθηκαν από τον Αναπληρωτή Καθηγητή Π. Παπανικολάου.

Η διάταξη για την πραγματοποίηση των πειραμάτων (σχήμα 5.1) αποτελείται από μια δεξαμενή κατάλληλων διαστάσεων, που πλαισιώνεται από βοηθητικές διατάξεις παροχής διαλύματος (θερμού ή στην ίδια θερμοκρασία) και καθαρού νερού, συστήματα μέτρησης και συστήματα αποχέτευσης. Πιο συγκεκριμένα, η διάταξη περιλαμβάνει: Ορθογωνική δεξαμενή διαστάσεων 1.00mX0.80m και βάθους 0.70m κατασκευασμένη από σκελετό ανοξείδωτου χάλυβα, με τοιχώματα από γυαλί (3 πλευρές) και plexiglas (μια πλευρά και πυθμένας). Βάση από χαλύβδινο σκελετό για την τοποθέτηση της δεξαμενής σε κατάλληλο ύψος. Περιμετρικός υπερχειλιστής με σχισμές V (V-notch weir). Τραβέρσα με κίνηση και στις τρεις διαστάσεις, για τη μετακίνηση των αισθητήρων μέτρησης θερμοκρασίας. Κύκλωμα με τρεις

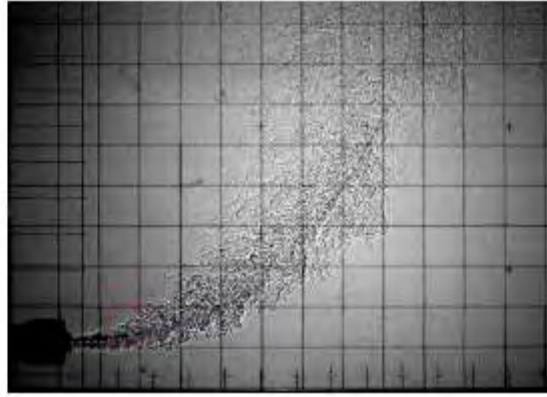
εναλλακτικούς μετρητές παροχής (0.05~0.60 lt/min, 0.2~2 lt/min, 1 ~ 10 lt/min). Δεξαμενή τροφοδοσίας διαλύματος χωρητικότητας περίπου 60 lt, κατασκευασμένη από χάλυβα, ικανή να δεχθεί διάλυμα υπό πίεση.

Τα ακροφύσια κατασκευάστηκαν από κατάλληλο πλαστικό (PVC), ικανό να δεχθεί μηχανουργική επεξεργασία, ώστε να προσλάβουν το κατάλληλο σχήμα. Στην περίμετρο των ακροφυσίων διαμορφώνεται σπείρωμα για την τοποθέτησή του στο τέλος του ειδικού στελέχους, ενώ τα χείλη τους στρογγυλεύονται κατάλληλα. Για τις ανάγκες της παρούσης σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν τα ακόλουθα ακροφύσια: κυκλικής διατομής, διαμέτρων 0.5cm, 1.0cm, 1.5cm και 2.0cm., ελλειπτικής διατομής διαστάσεων αξόνων 2.0cmx1.0cm, 3.0cmx1.0cm και 1.2cmx0.6cm) και ορθογωνικής διατομής (2.0cmx1.0cm, 3.0cmx1.0cm και 1.2cmx0.6cm).

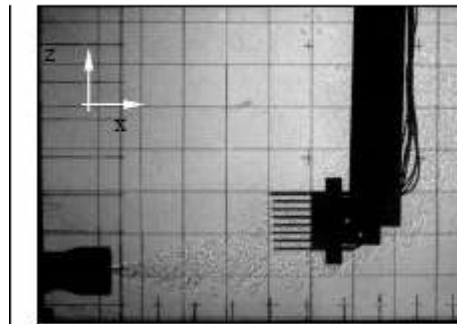
Η πειραματική διάταξη, η οριζόντια θερμαινόμενη φλέβα καθώς και η διάταξη των αισθητήρων στους οποίους έγιναν οι μετρήσεις, φαίνονται αντίστοιχα στα παρακάτω σχήματα 5.1, 5.2 και 5.3.



Σχήμα 5.1 : Σχηματική απεικόνιση πειραματικής διάταξης θερμής φλέβας.



Σχήμα 5.2 : Εικόνα της οριζόντιας θερμαινόμενης φλέβας.



Σχήμα 5.3 : Διάταξης των αισθητήρων της φλέβας.

### 5.1.5 Υπολογισμός έντασης της τύρβης

Για κάθε χρονοσειρά μετρήσεων μπορεί να υπολογιστεί ο μέσος όρος των τιμών των διαφορών της θερμοκρασίας της φλέβας με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, καθώς και η διασπορά του δείγματος:

$$T = \frac{\sum_{n=1}^N T_n}{N} \quad \text{και} \quad T^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - \bar{T})^2}{N-1} \quad (5.1)$$

Στον παραπάνω ορισμό της διασποράς χρησιμοποιείται η αμερόληπτη έκφραση της εκτιμήτριας που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς της παρούσας, αν και λόγω του μεγάλου μεγέθους του δείγματος, η τιμή της πρακτικά ταυτίζεται με αυτή της μεροληπτικής διασποράς.

Η θέση του άξονα της φλέβας συμπίπτει κατά προσέγγιση με εκείνη τη θέση μέτρησης όπου ο μέσος όρος των διαφορών παρουσιάζει την υψηλότερη τιμή ( $T_c$ ). Θεωρώντας κανονική (Gauss) την κατανομή της θερμοκρασίας, μπορούμε να



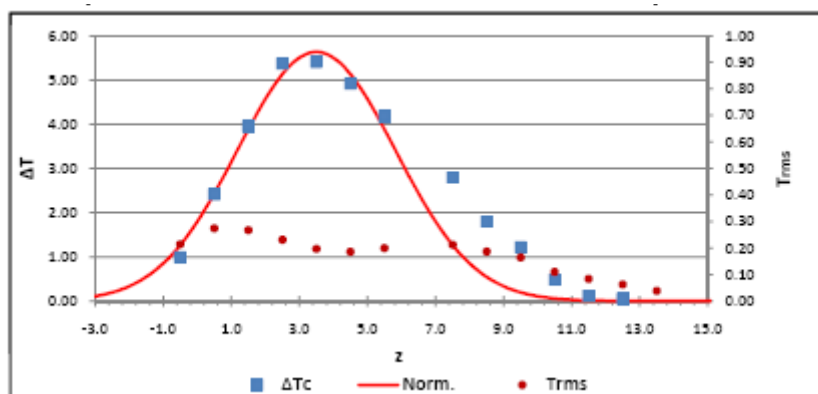
υπολογίσουμε το πλάτος  $1/e$  του προφίλ της φλέβας, και να υπολογίσουμε από αυτό τις αδιάστατες τιμές θερμοκρασίας  $T/T_c$  σε συνάρτηση με την αδιαστατοποιημένη απόσταση από τον άξονα της φλέβας  $r/be$ . Αντίστοιχα, αδιαστατοποιώντας τις τιμές της τυπικής απόκλισης του σήματος με την τιμή  $T_c$  λαμβάνουμε τις τιμές της απόκλισης του σήματος  $T' 2 / T_c$  σε συνάρτηση με την αδιάστατη απόσταση από τον άξονα  $r/be$ . [Michas, Papanikolaou 2009]

Για το συγκεκριμένο πείραμα τα στοιχεία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Experiment:		ΘΕΡΜ52					
Date	15.10.2007	Q	28,67	$g'$	14,0	b	3,27
Nozzle shape	Ell.	A	0,565	$l_0$	0,752	$T_{ch}$	5,633
Nozzle orientation	Horiz.	W	50,70	$l_M$	11,744	k	0,093
$D_M$ ή $D$	1,20	$T_a$	22,3	$R_0$	0,064	$x_c$	25,000
$D_m$	0,60	$T_j$	59,8	$T_c$	0,050	$z_c$	3,499
Thermistor orient.	Vert.						

Πίνακας 5.1 : Χαρακτηριστικά της θερμαινόμενης φλέβας

Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνονται οι διακυμάνσεις της θερμοκρασίας.



Σχήμα 5.4 : Διάγραμμα διακυμάνσεων θερμοκρασίας

Οι δέκα τέσσερις χρονοσειρές που δόθηκαν αφορούν αντίστοιχες θέσεις μέτρησης του παραπάνω πειράματος. Το πλήθος δε των μετρήσεων είναι 3.200 σημεία για κάθε χρονοσειρά με ρυθμό δειγματοληψίας 80Hz.

Επειδή ο αριθμός των χρονοσειρών είναι αρκετά μεγάλος, παρατίθεται πίνακας στον οποίο φαίνεται η θέση μέτρησης και αντίστοιχα η ονομασία των χρονοσειρών για τους υπολογισμούς που έγιναν.

α/α	Θέση μέτρησης	Χρονοσειρά	Αρχική χρονοσειρά	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές
			(α)	(β)	(γ)
1	-0,5	xm0p5	x <sub>1</sub>	w <sub>1</sub>	q <sub>1</sub>
2	0,5	x0p5	x <sub>2</sub>	w <sub>2</sub>	q <sub>2</sub>
3	1,5	x1p5	x <sub>3</sub>	w <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>
4	2,5	x2p5	x <sub>4</sub>	w <sub>4</sub>	q <sub>4</sub>
5	3,5	x3p5	x <sub>5</sub>	w <sub>5</sub>	q <sub>5</sub>
6	4,5	x4p5	x <sub>6</sub>	w <sub>6</sub>	q <sub>6</sub>
7	5,5	x5p5	x <sub>7</sub>	w <sub>7</sub>	q <sub>7</sub>
8	7,5	x7p5	x <sub>8</sub>	w <sub>8</sub>	q <sub>8</sub>
9	8,5	x8p5	x <sub>9</sub>	w <sub>9</sub>	q <sub>9</sub>
10	9,5	x9p5	x <sub>10</sub>	w <sub>10</sub>	q <sub>10</sub>
11	10,5	x10p5	x <sub>11</sub>	w <sub>11</sub>	q <sub>11</sub>
12	11,5	x11p5	x <sub>12</sub>	w <sub>12</sub>	q <sub>12</sub>
13	12,5	x12p5	x <sub>13</sub>	w <sub>13</sub>	q <sub>13</sub>
14	13,5	x13p5	x <sub>14</sub>	w <sub>14</sub>	q <sub>14</sub>

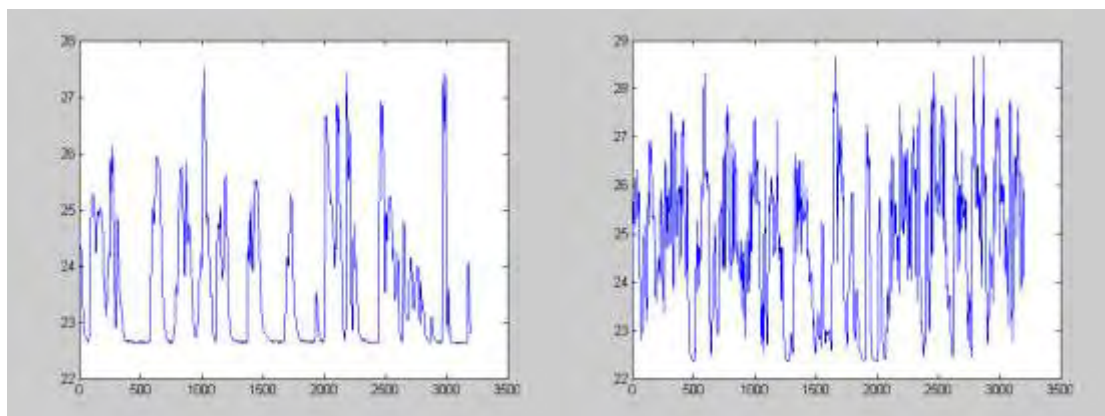
Πίνακας 5.2 : Χαρακτηριστικά χρονοσειρών

## 5.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

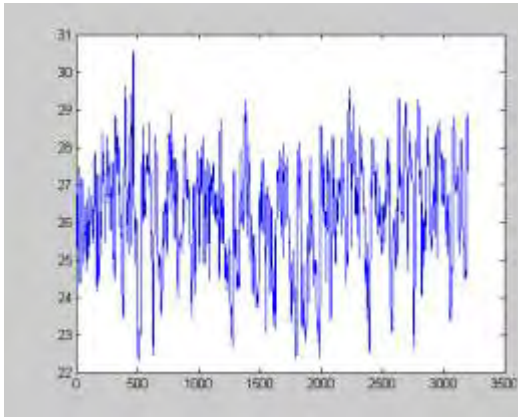
Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι χρονοσειρές όπως έχουν μετρηθεί.

$x_1(x=-0,5)$

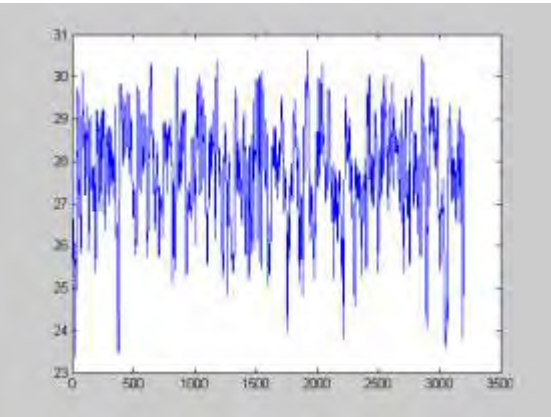
$x_2(x=0,5)$



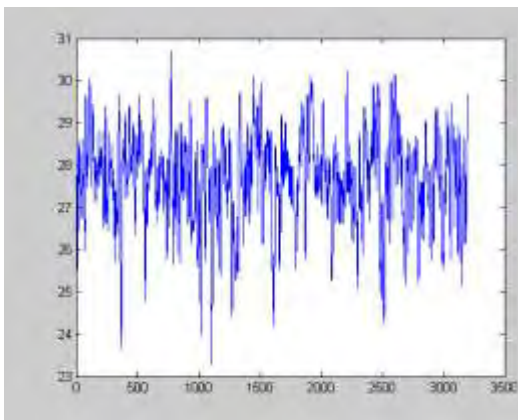
$x_3(x=1,5)$



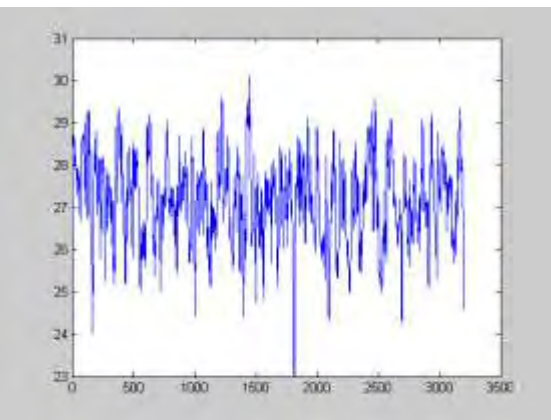
$x_4(x=2,5)$



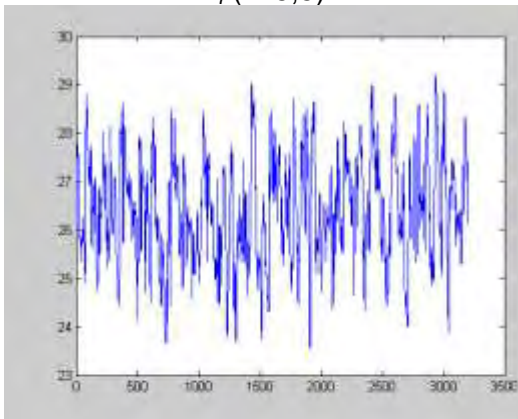
$x_5(x=3,5)$



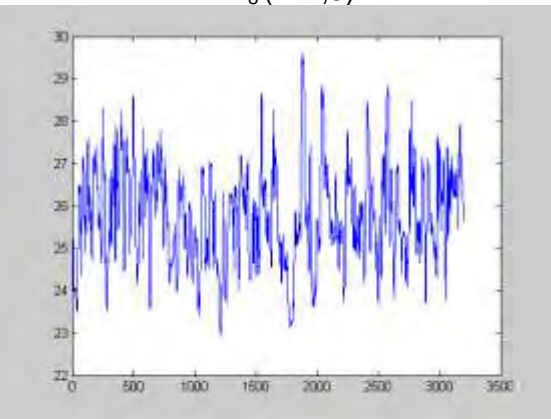
$x_6(x=4,5)$



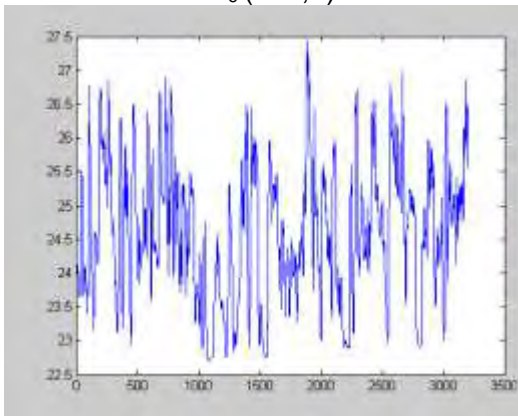
$x_7(x=5,5)$



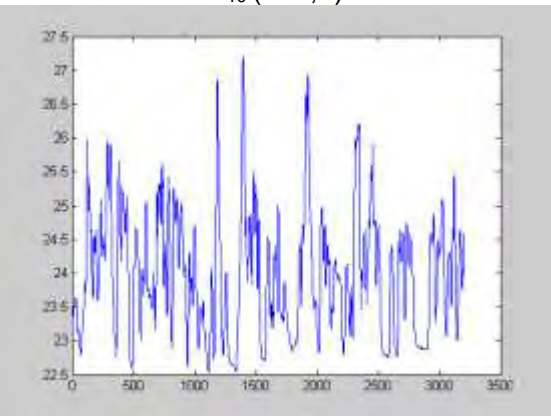
$x_8(x=7,5)$

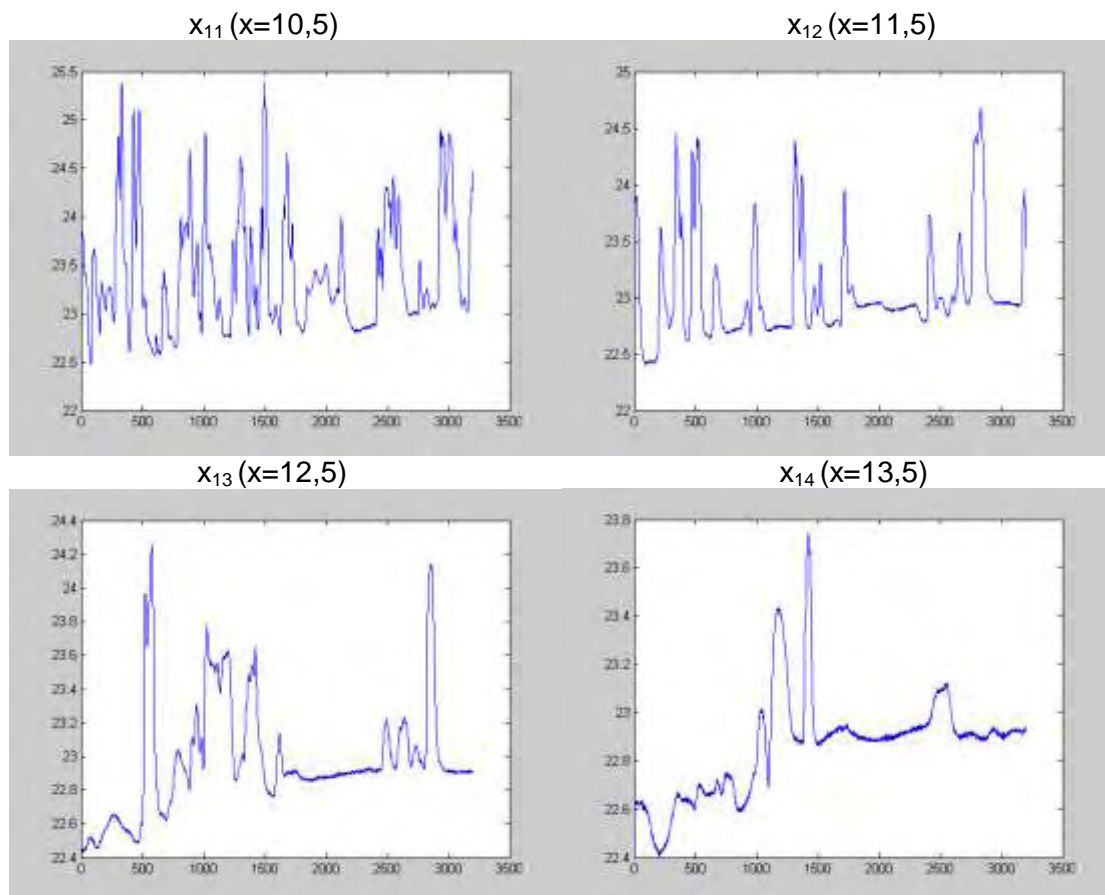


$x_9(x=8,5)$



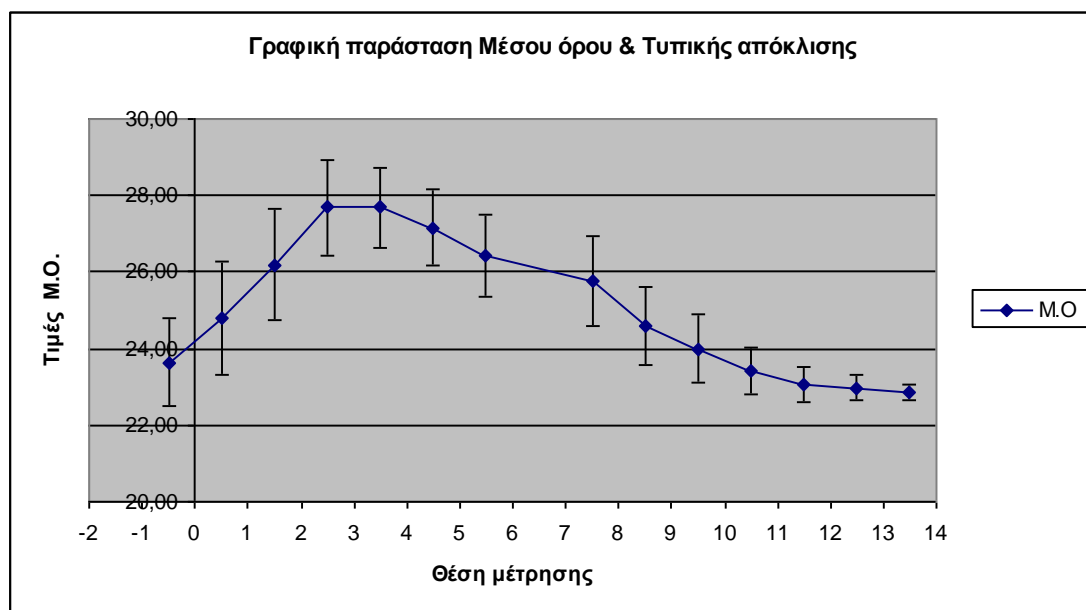
$x_{10}(x=9,5)$





Σχήμα 5.5 : Απεικόνιση χρονοσειρών

Ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση των παραπάνω χρονοσειρών φαίνονται στην γραφική παράσταση που ακολουθεί.



Σχήμα 5.6 : Διάγραμμα Μέσου Όρου & Τυπικής Απόκλισης

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε μια αρκετά ασύμμετρη συμπεριφορά. Στις θέσεις  $x=-0,5$ ,  $x=10,5$ ,  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$  τα διαγράμματα είναι διαφορετικά. Σε αυτά η διαφορετικότητα πρέπει να οφείλεται στις μετρήσεις οι οποίες έχουν γίνει σε ακραία σημεία, στην περιοχή εκτός της φλέβας με αποτέλεσμα να έχουμε κυρίως διακυμάνσεις της θερμοκρασίας στα όρια ευαισθησίας του αισθητήρα. Η μέγιστη τιμή παρατηρείται στις θέσεις  $x=2,5$  και  $x=3,5$  όπου αναμένεται να είναι η περιοχή του άξονα.

### 5.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

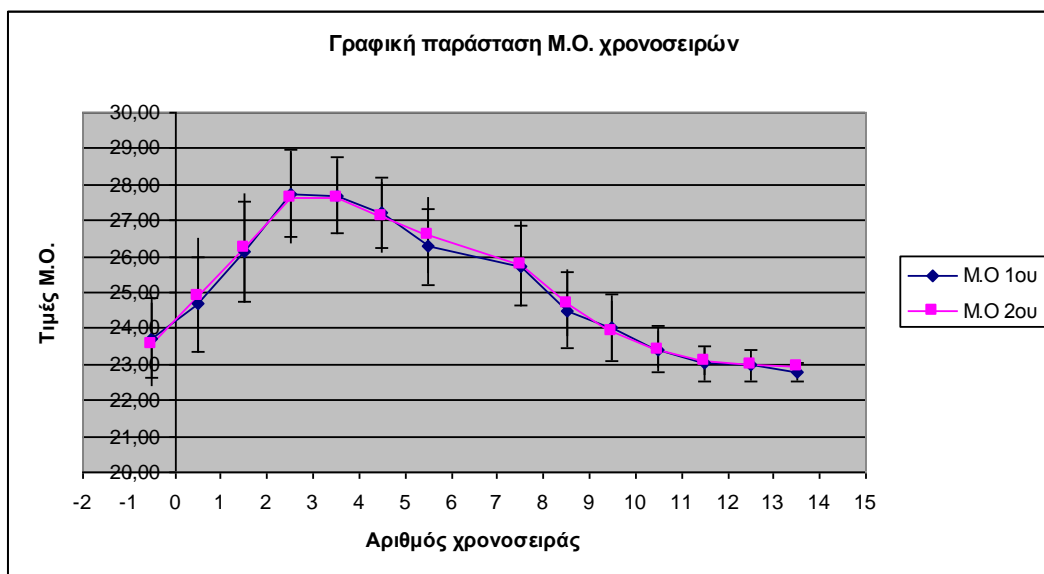
Ακολουθήθηκε ο ίδιος τρόπος ανάλυσης των χρονοσειρών του δευτέρου κεφαλαίου. Έγιναν δηλαδή οι παρακάτω αναλύσεις :

1. Ο σχεδιασμός της χρονοσειράς ( $w$ ) μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης (fitting).  
Για τις χρονοσειρές στα σημεία  $x=-0,5$ ,  $x=10,5$ ,  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$  η υπόθεση αυτή είναι περιορισμένης αξίας.
2. Ο σχεδιασμός της χρονοσειράς ( $q$ ) μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών (differencing).
3. Ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων με τάση όλων των παραπάνω χρονοσειρών συμπεριλαμβανομένου και της αρχικής γιατί η τάση είναι μια συνιστώσα ενός απλού μοντέλου χρονοσειράς που περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της.

#### 5.3.1 Έλεγχος στασιμότητας

Έγινε έλεγχος ασθενούς στασιμότητας με υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης χωρίζοντας τη χρονοσειρά σε δυο ίσα τμήματα.

Ακολουθεί η γραφική παράσταση του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης των δύο τμημάτων των χρονοσειρών.



Σχήμα 5.7 : Διάγραμμα Μέσου Όρου & Τυπικής Απόκλισης

Στο διάγραμμα φαίνονται οι καμπύλες του μέσου όρου μαζί με τις διακυμάνσεις αυτών. Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες σε αρκετές θέσεις σχεδόν συμπίπτουν και στις υπόλοιπες είναι πολύ κοντά που σημαίνει ότι οι χρονοσειρές είναι ασθενώς στάσιμες.

### 5.3.2 Έλεγχος τάσης

Σχεδιάστηκαν τα διαγράμματα τάσης της αρχικής χρονοσειράς  $x$ , της χρονοσειράς  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης τα οποία έχουν την ίδια συμπεριφορά, καθώς και της χρονοσειράς  $(\alpha)$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών.

Τα διαγράμματα των τάσεων των χρονοσειρών μας δείχνουν ότι σε όλες σχεδόν υπάρχει κάποια κλίση, σε άλλες θετική και σε άλλες αρνητική, η οποία όμως είναι μικρή ειδικά στην περίπτωση των χρονοσειρών από πρώτες διαφορές.

Ακολουθεί πίνακας με τον υπολογισμό των συντελεστών της εξίσωσης  $y=ax+b$  για τον έλεγχο της τάσης των χρονοσειρών  $x$ ,  $w$  και  $\alpha$ .

Συντελεστές εξίσωσης της μορφής $y=ax+b$ για τον έλεγχο της τάσης						
Θέση μέτρησης	a	b	a	b	a	b
	x		w		q	
-0,5	-1E-04	23,854	-1E-04	0,0021	-6E-08	0,0007
0,5	1E-04	24,583	1E-04	-0,0026	5E-07	-0,0006
1,5	1E-04	26,014	1E-04	-0,0021	-3E-07	-0,0002
2,5	-8E-05	27,804	-8E-05	0,0026	-7E-07	0,0008
3,5	-4E-05	27,747	-4E-05	0,0011	-1E-06	0,002
4,5	-8E-05	27,289	-8E-05	0,0023	2E-06	-0,0024
5,5	1E-04	26,253	1E-04	-0,0022	5E-07	-0,0008
7,5	4E-05	25,701	4E-05	-0,0013	8E-07	-0,0017
8,5	6E-05	24,102	6E-05	-0,0018	-4E-07	0,0003
9,5	-7E-05	24,513	-7E-05	0,0019	2E-07	-0,0008
10,5	5E-05	23,333	5E-05	-0,001	-8E-07	0,001
11,5	6E-05	22,953	6E-05	-0,001	-7E-07	0,0012
12,5	9E-05	22,835	9E-05	0,0016	3E-07	-0,0007
13,5	1E-04	22,664	1E-04	-0,0025	9E-08	-0,0002

Πίνακας 5.3 : Συντελεστές προσαρμογής γραμμικής τάσης για τις χρονοσειρές

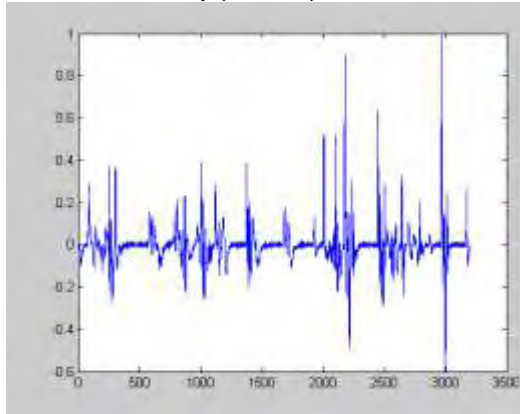
### 5.3.3 Αφαίρεση τάσης

Από το σχεδιασμό των χρονοσειρών  $x$  (αρχικής),  $w$  (μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης και  $q$  (μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών, προέκυψε ότι οι χρονοσειρές  $x$  και  $w$  έχουν πρακτικά ίδια συμπεριφορά ενώ η συμπεριφορά της χρονοσειράς  $q$  παρουσιάζει κάποιες διαφορές.

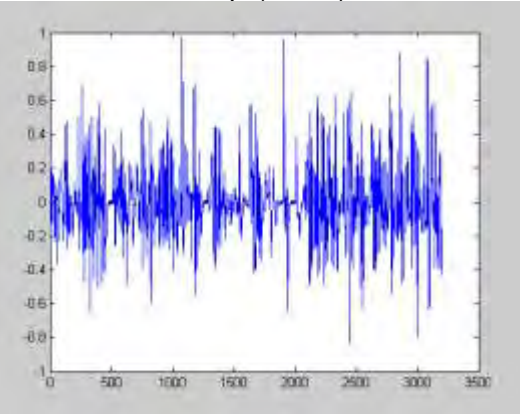
Ακολουθεί η παρουσίαση των χρονοσειρών  $q$  στο σχήμα 5.8



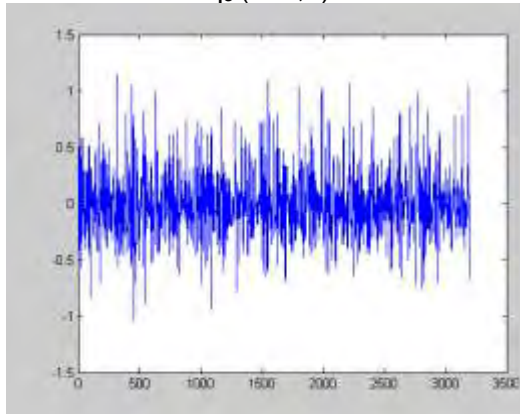
$q_1(x=0,5)$



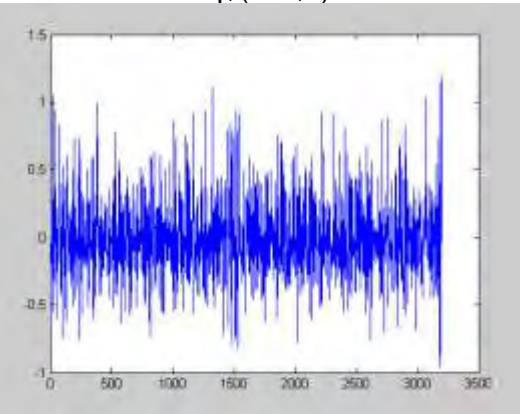
$q_2(x=0,5)$



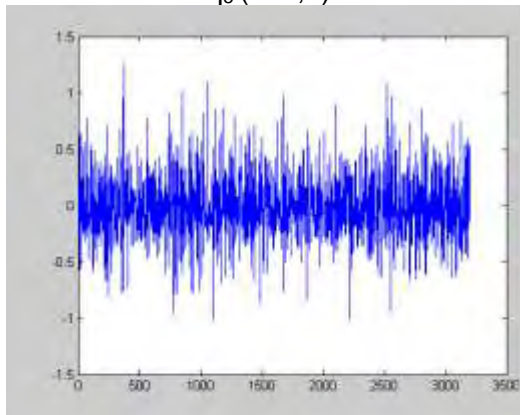
$q_3(x=1,5)$



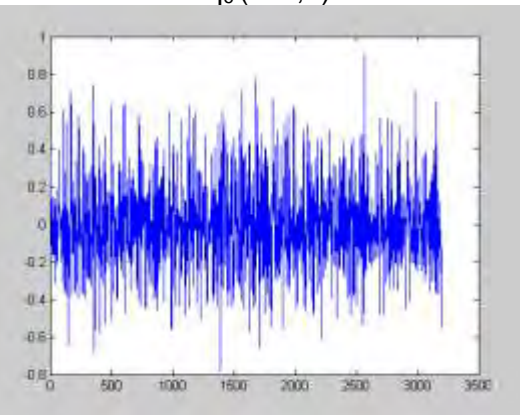
$q_4(x=2,5)$



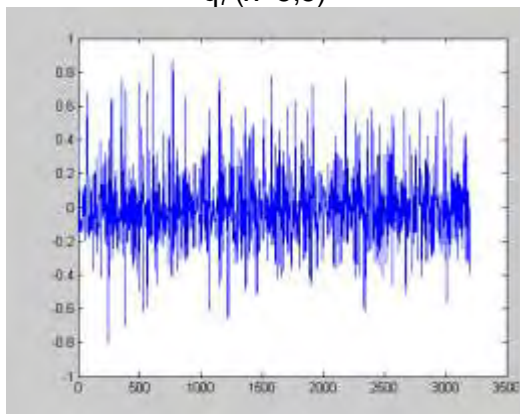
$q_5(x=3,5)$



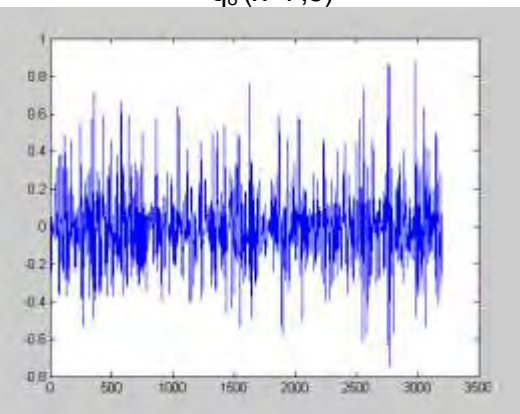
$q_6(x=4,5)$



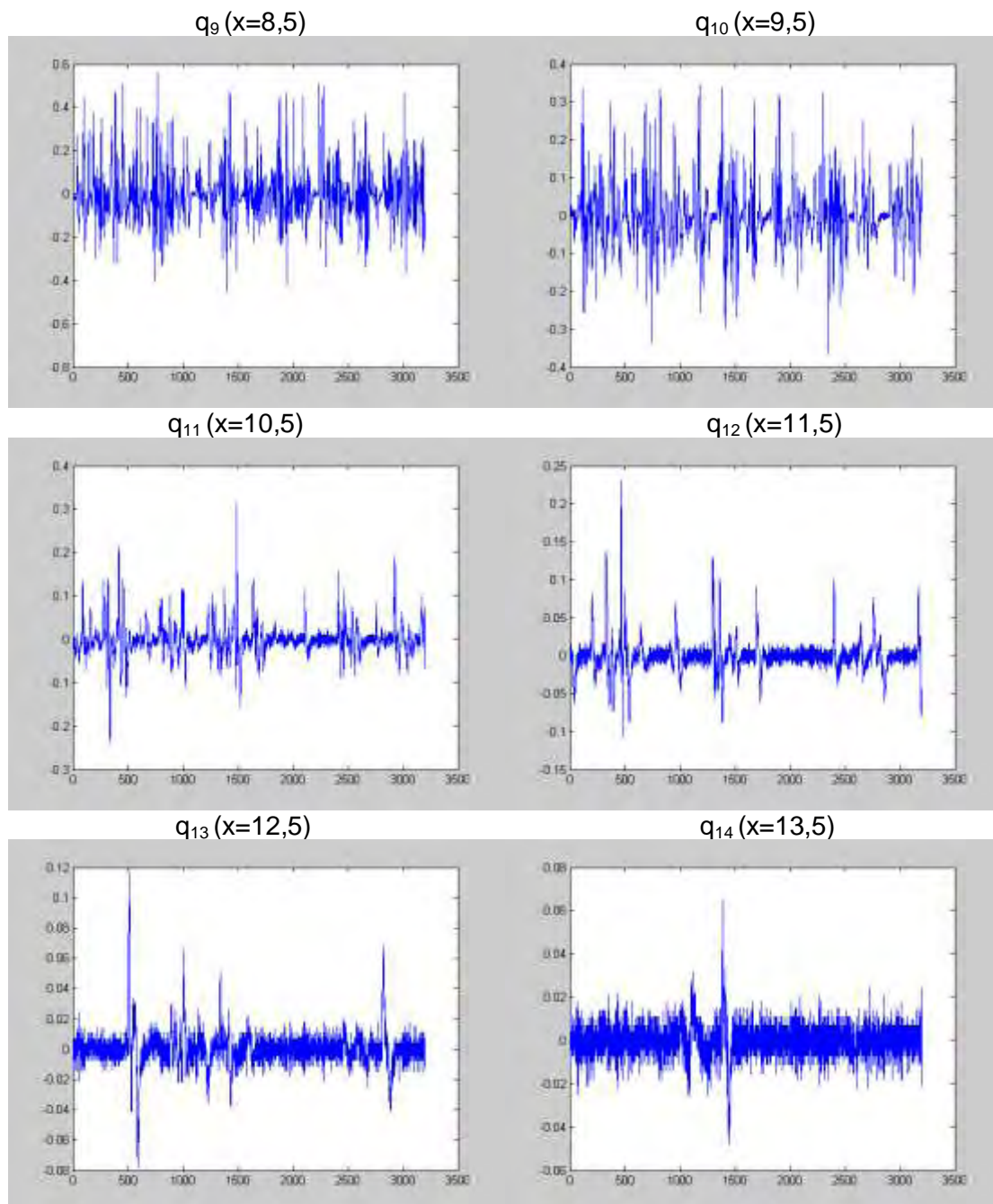
$q_7(x=5,5)$



$q_8(x=7,5)$



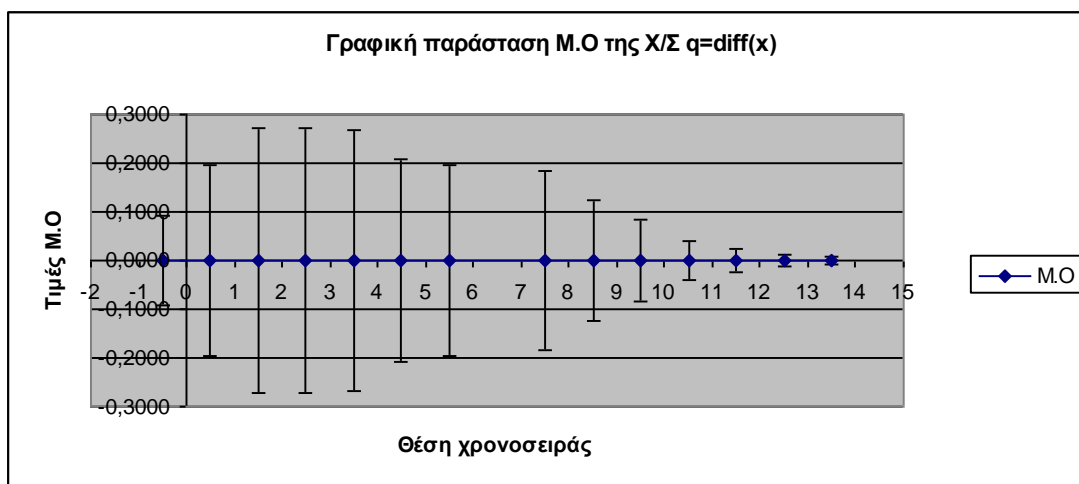




Σχήμα 5.8 : Απεικόνιση χρονοσειρών  $q$

Στις θέσεις  $x=-0,5$ ,  $x=10,5$ ,  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$  τα διαγράμματα είναι διαφορετικά όπως και στην χρονοσειρά  $w$  και αυτό πρέπει να οφείλεται όπως προαναφέρθηκε στις μετρήσεις οι οποίες έχουν γίνει σε σημεία στην περιοχή εκτός της φλέβας.

Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η τιμή του μέσου όρου των παραπάνω χρονοσειρών καθώς και οι διακυμάνσεις αυτών.



Σχήμα 5.9 : Διάγραμμα Μέσου Όρου & Τυπικής Απόκλισης χρονοσειρών  $q$

Παρατηρούμε ότι στις θέσεις  $x=1,5$  έως  $x=3,5$  έχουμε τις μεγαλύτερες διακυμάνσεις, ενώ στις θέσεις  $x=10,5$  έως  $x=13,5$  καθώς και στη θέση  $x=-0,5$  έχουμε τις μικρότερες διακυμάνσεις εκατέρωθεν των πολύ μεγάλων διακυμάνσεων. Περιμένουμε ότι αυτό συνδέεται με κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά της φλέβας. Επίσης παρατηρούμε ότι έχουμε αρκετά ασύμμετρη συμπεριφορά.

Στη συνέχεια η ανάλυση των χρονοσειρών θα αναφέρεται μόνο στις δυο χρονοσειρές, την  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης και την  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών. Η αρχική χρονοσειρά  $x$  έχει πρακτικά την ίδια συμπεριφορά με την  $w$ . Εάν κάπου υπάρχει διαφορά θα αναφερθεί.

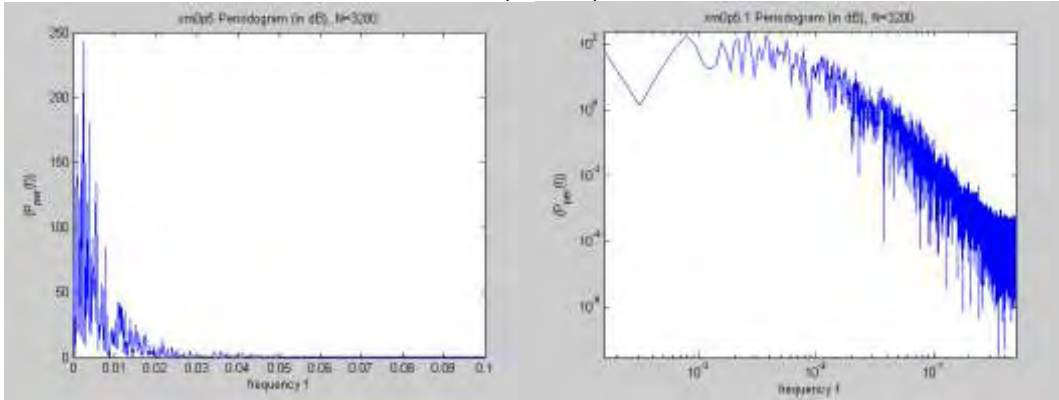
#### 5.4 ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

Στο σχεδιασμό του φάσματος ισχύος υπολογίζονται οι συχνότητες στην κανονική μορφή της χρονοσειράς καθώς και στη λογαριθμική μορφή ώστε να διερευνηθεί η ύπαρξη τομών κλίμακας της μορφής  $P(f)=cf^{\alpha}$  με  $\alpha$  θετικό ή αρνητικό. Αξίζει ν' αναφερθεί ότι η ύπαρξη τομών κλίμακας σε φάσματα ισχύος έχει συνδεθεί με χαοτική συμπεριφορά (Mandelbrot, 2002) και με την ύπαρξη πολυπλοκότητας (Bak et. al, 1992).

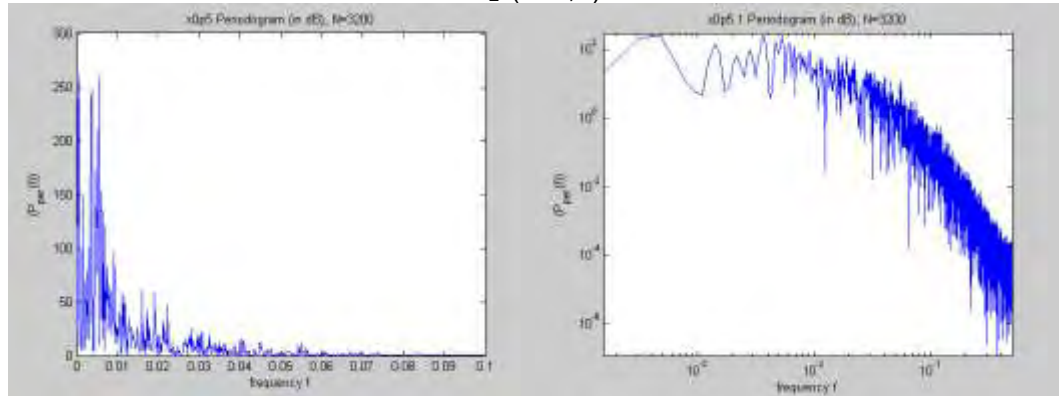
Παρακάτω παρατίθενται τα φάσματα των χρονοσειρών  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης και  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές και στις δυο μορφές.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

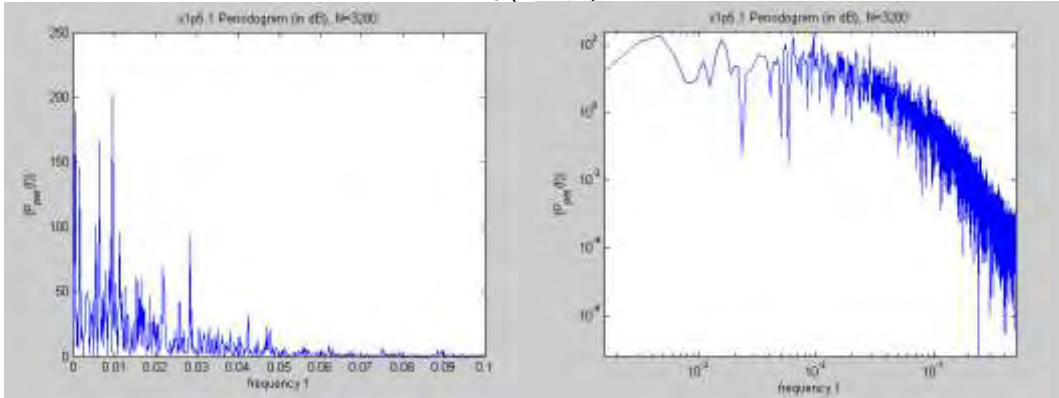
$w_1(x=0,5)$



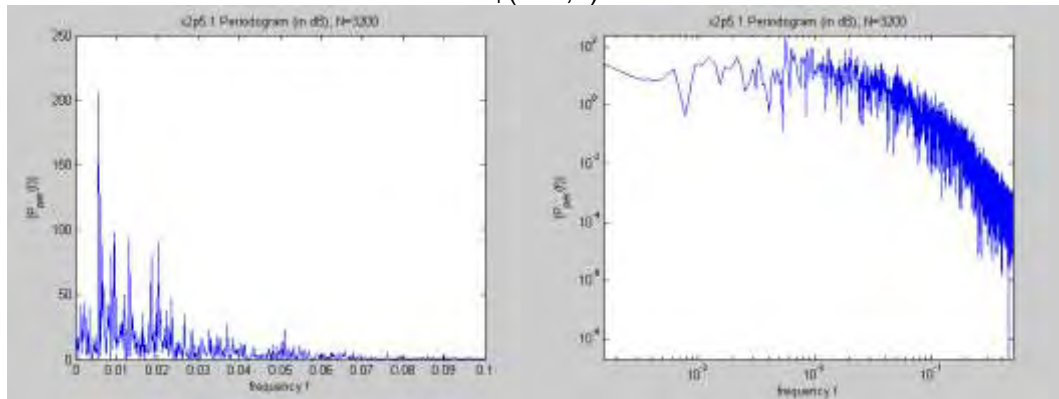
$w_2(x=0,5)$



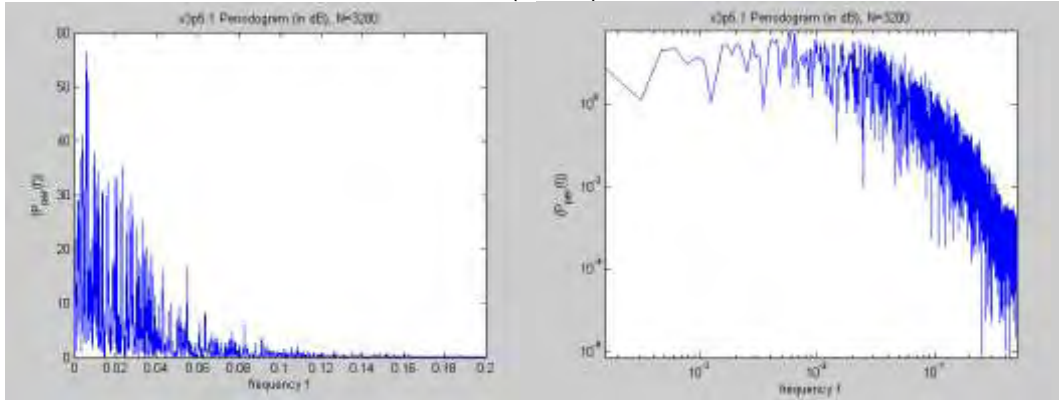
$w_3(x=1,5)$



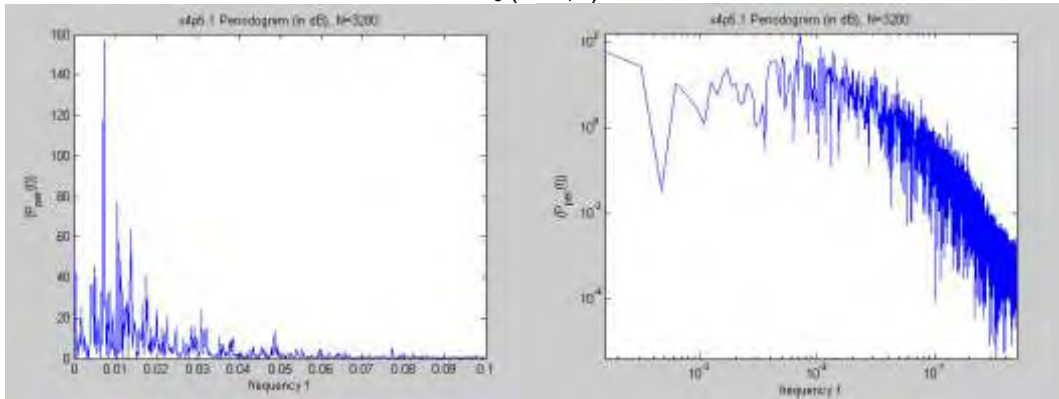
$w_4(x=2,5)$



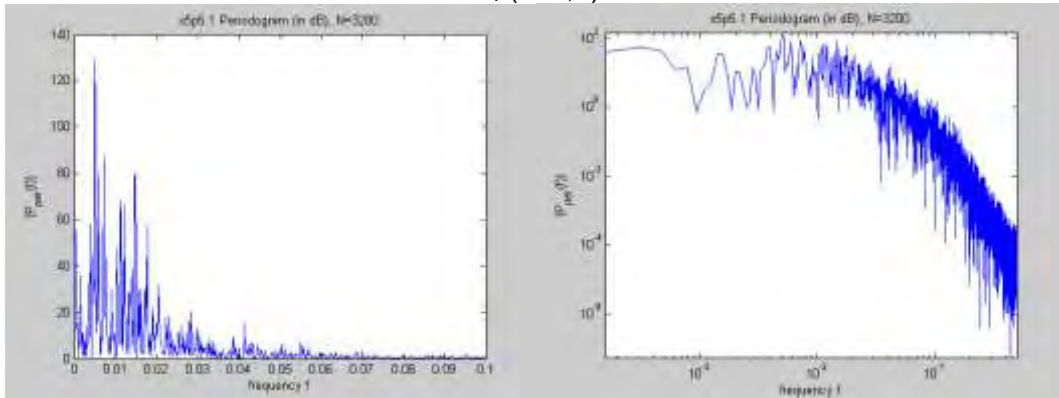
$w_5(x=3,5)$



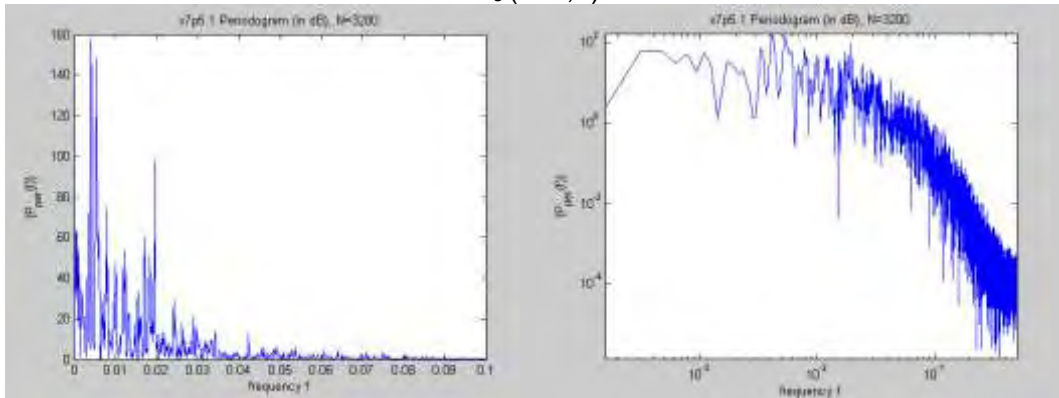
$w_6(x=4,5)$



$w_7(x=5,5)$

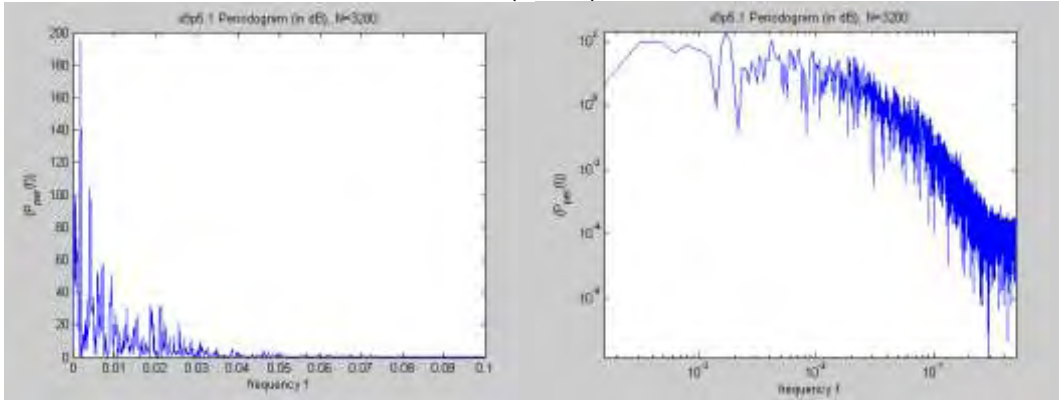


$w_8(x=7,5)$

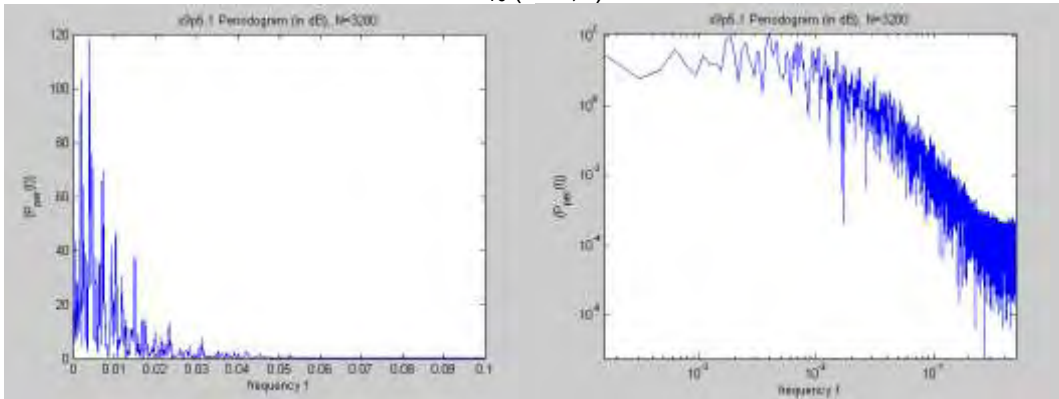




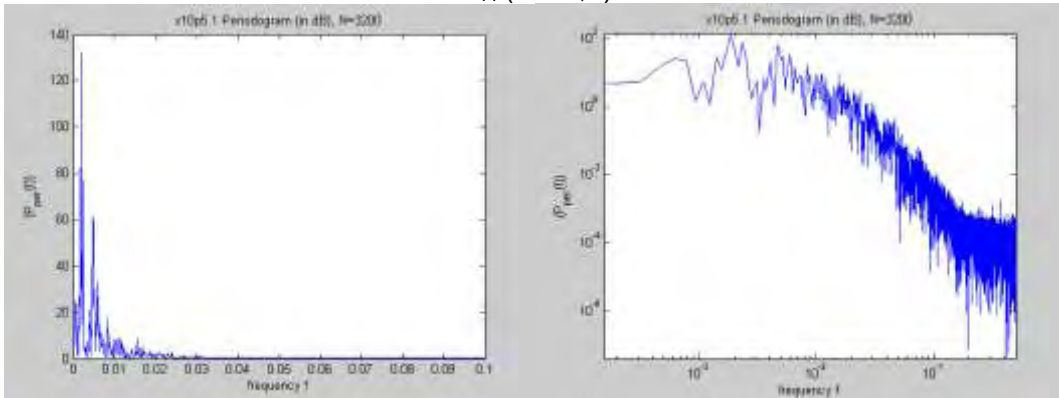
$w_9(x=8,5)$



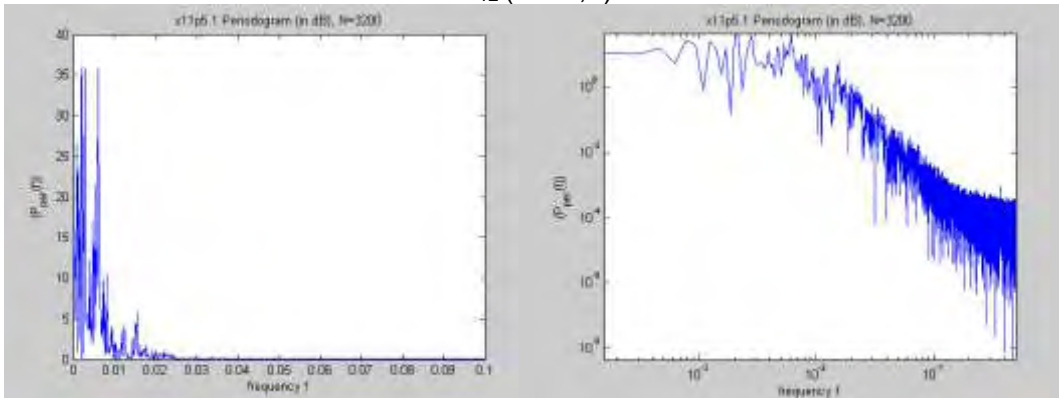
$w_{10}(x=9,5)$



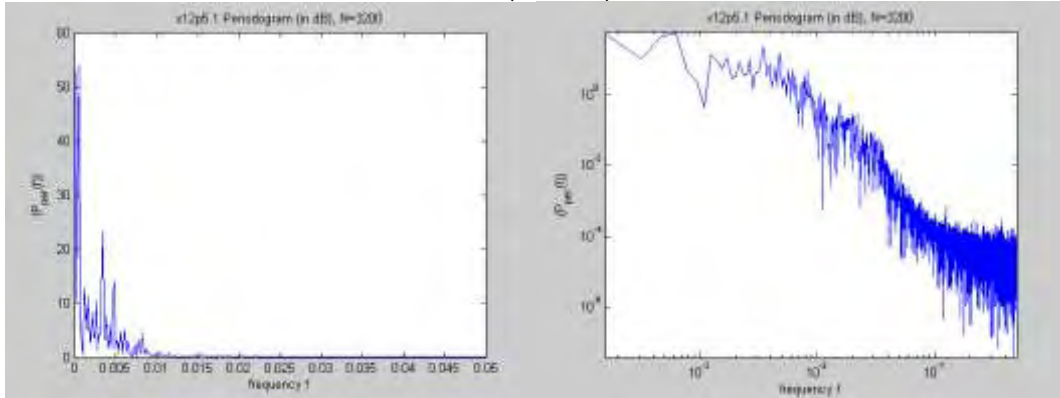
$w_{11}(x=10,5)$



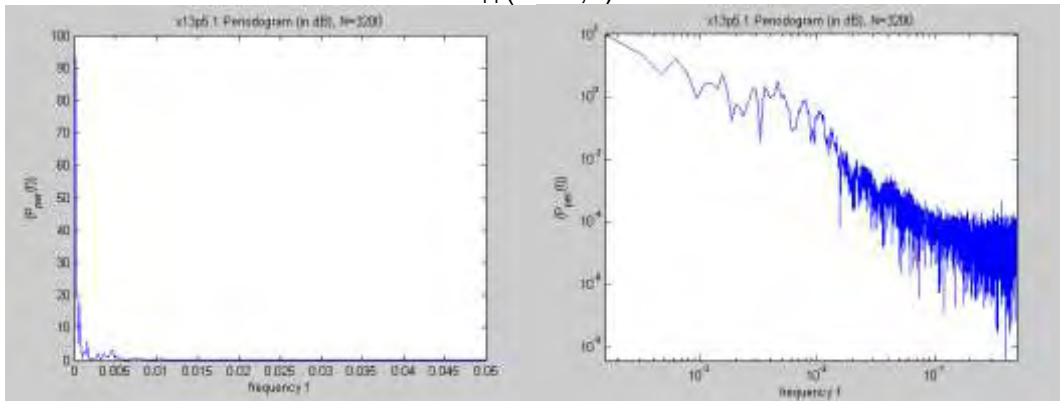
$w_{12}(x=11,5)$



$w_{13}(\chi=12,5)$



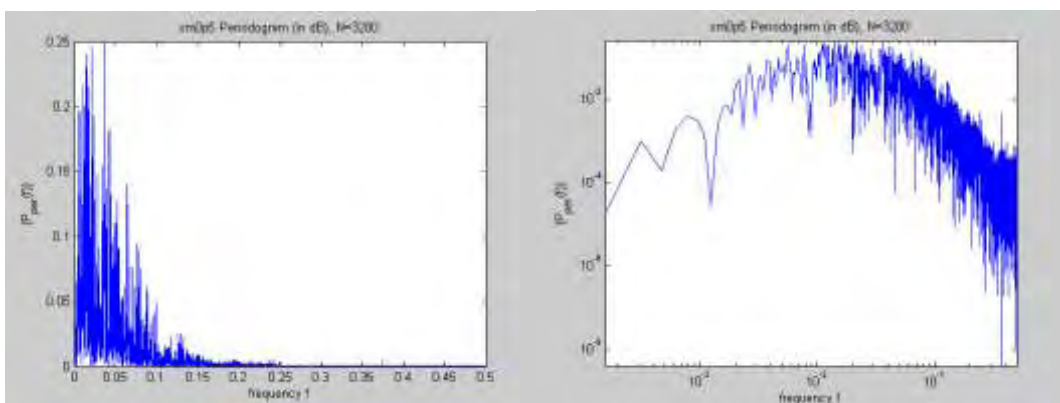
$w_{14}(\chi=13,5)$



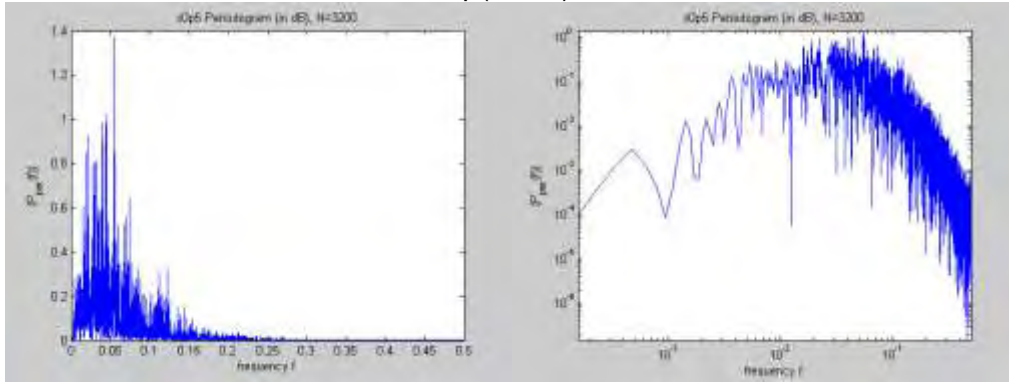
Σχήμα 5.10 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών  $w$

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

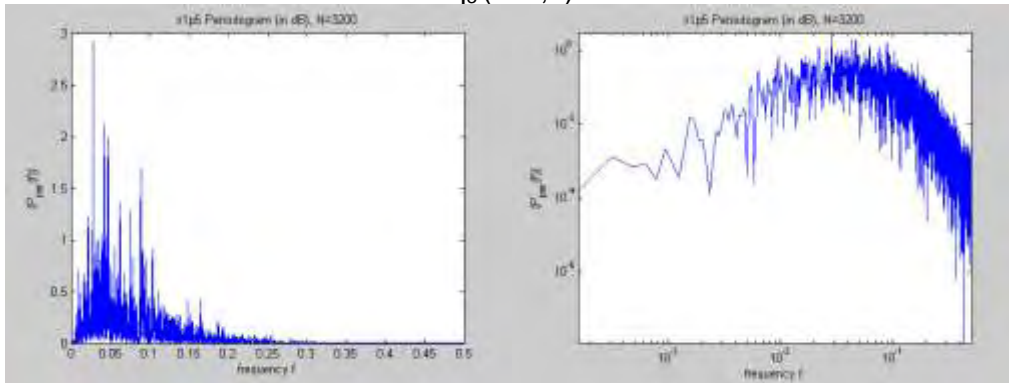
$q_1(\chi=-0,5)$



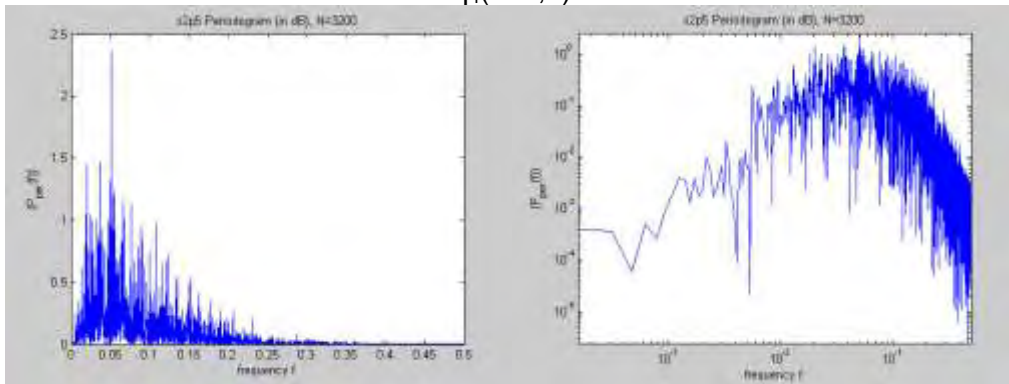
$q_2(x=0,5)$



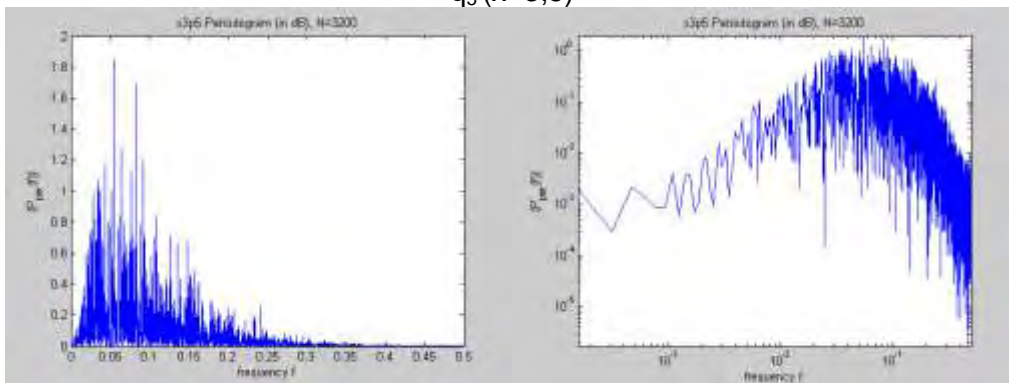
$q_3(x=1,5)$



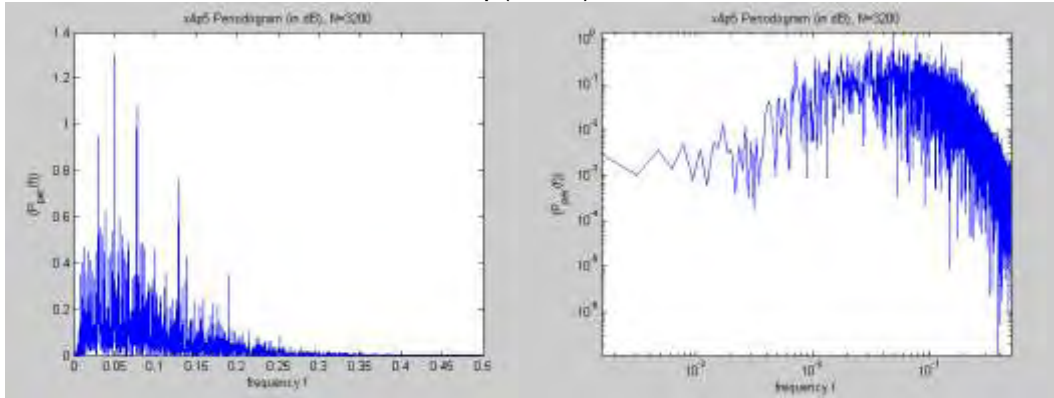
$q_4(x=2,5)$



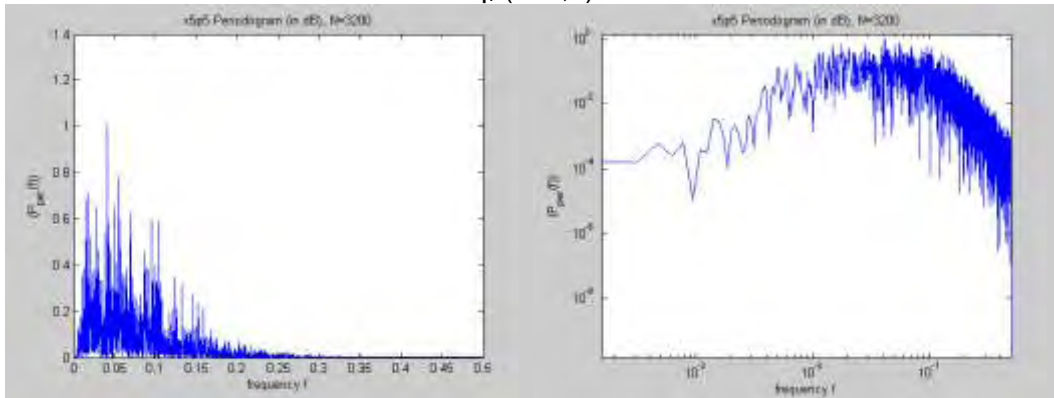
$q_5(x=3,5)$



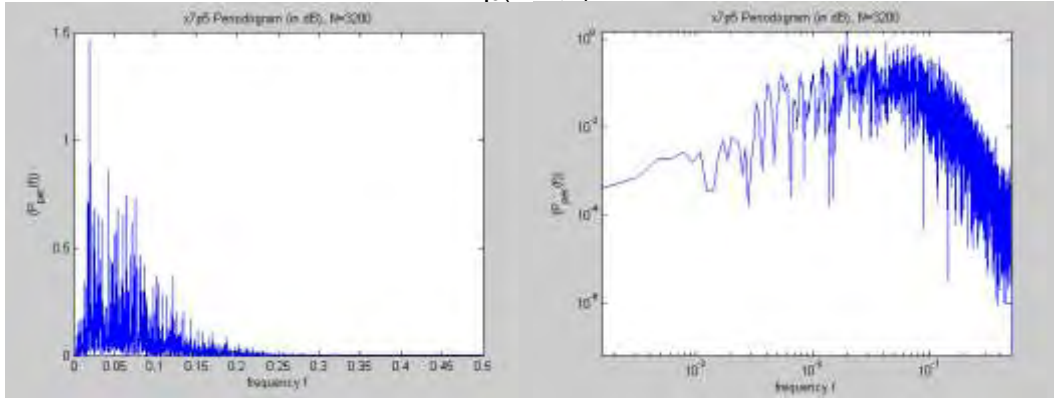
$q_6(x=4,5)$



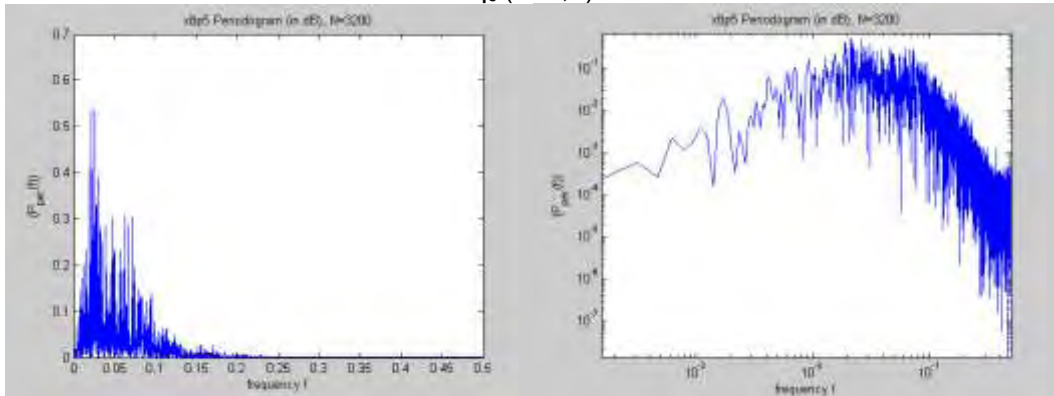
$q_7(x=5,5)$



$q_8(x=7,5)$

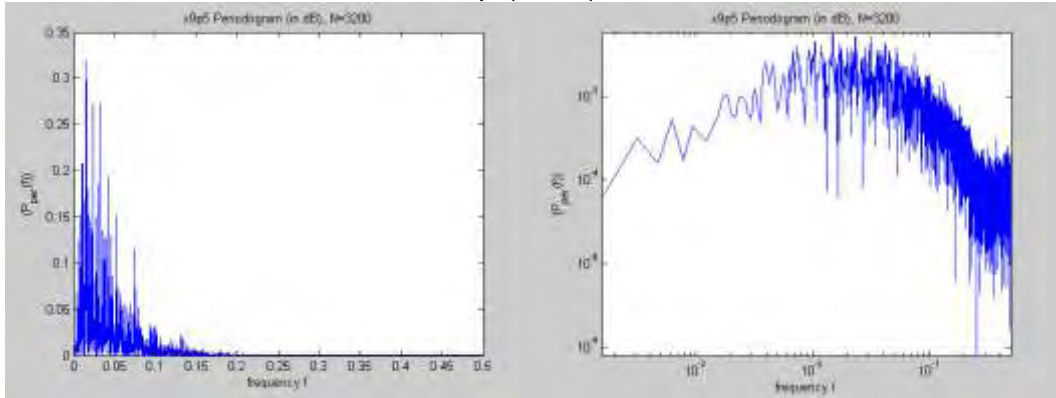


$q_9(x=8,5)$

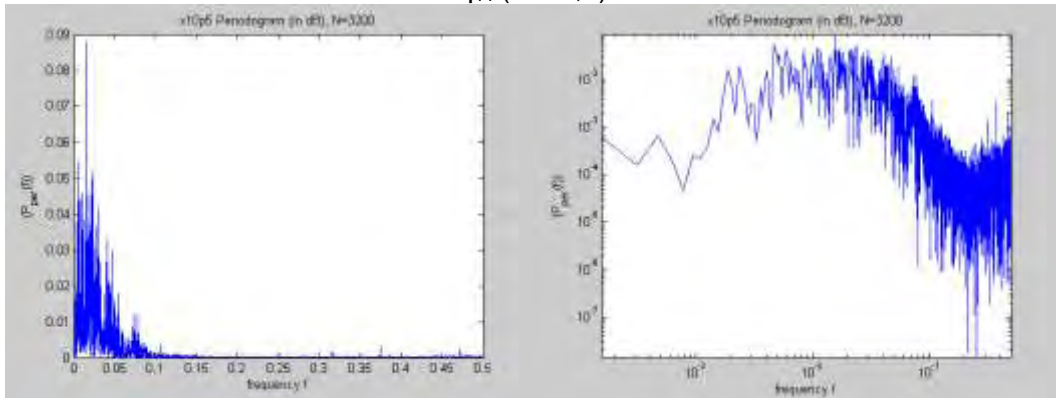




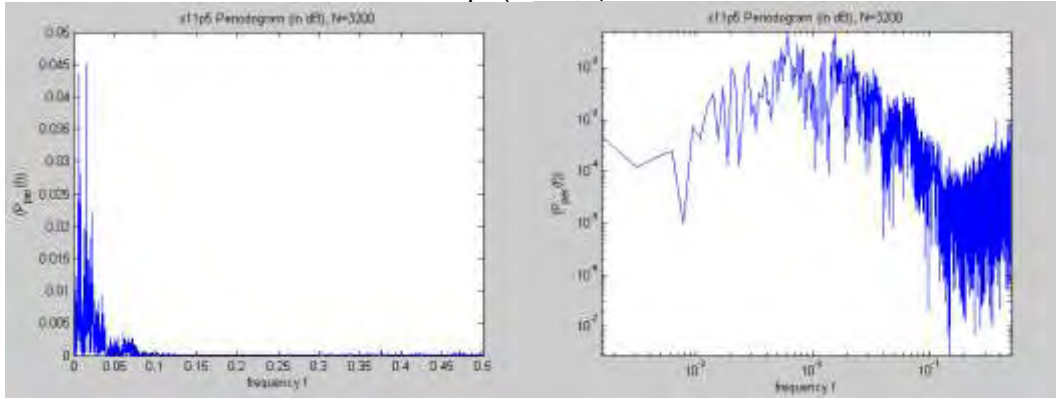
$q_{10}(x=9,5)$



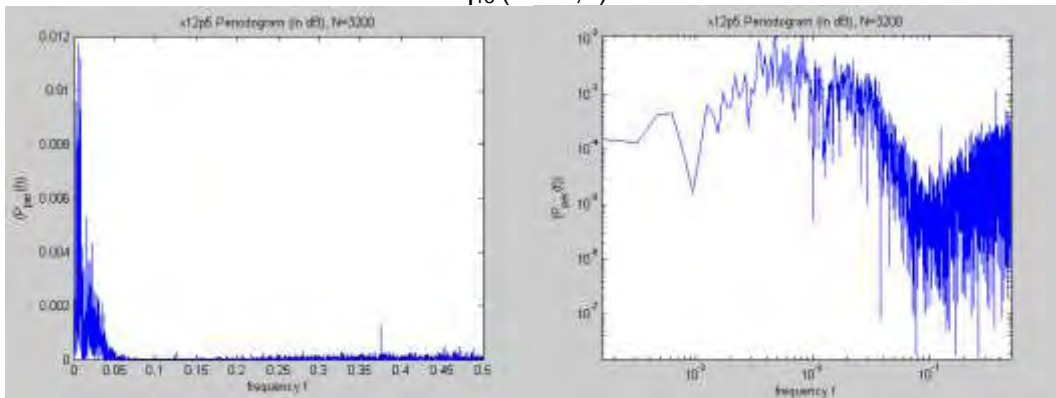
$q_{11}(x=10,5)$



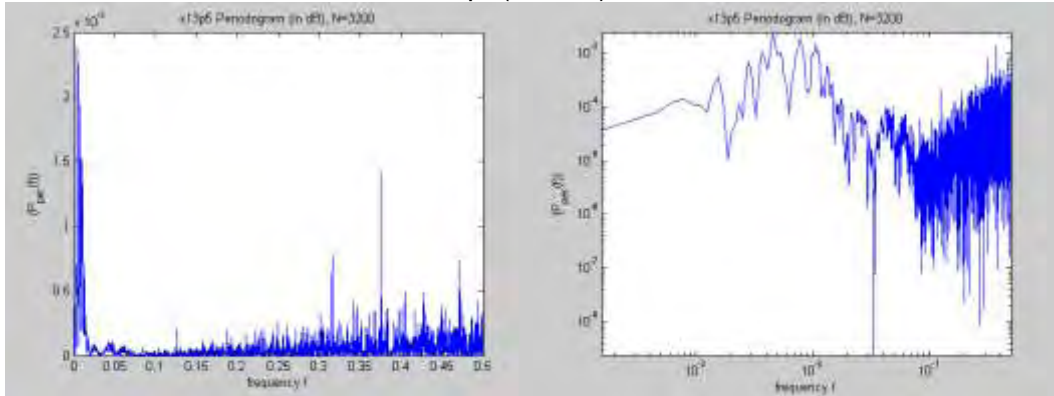
$q_{12}(x=11,5)$



$q_{13}(x=12,5)$



$q_{14} (x=13,5)$



Σχήμα 5.11 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών  $q$

Με μια προσεκτική ματιά στα γραμμικά διαγράμματα παρατηρούμε ότι καθώς μετακινούμαστε από το σημείο  $x=-0,5$  έχουμε αύξηση των υψηλών συχνοτήτων (φαινομένων με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους) και ξανά περιορισμό αυτών των συχνοτήτων από το σημείο  $x=8,5$  και ιδιαίτερα μετά το σημείο  $x=10,5$  όπου επικρατούν κυρίως χαμηλές συχνότητες. (στο  $x=13,5$  στη χρονοσειρά  $q$  οι υψηλές συχνότητες δεν έχουν νόημα από φυσική άποψη).

Αυτό μπορεί να συσχετισθεί με το γεγονός ότι στα άκρα της φλέβας αναμένεται να επικρατούν πολύ μεγάλες δομές (με μεγάλους χαρακτηριστικούς χρόνους), οι οποίες ταξιδεύουν αργά και επηρεάζουν σε μεγάλους χρόνους (μικρές συχνότητες) τη θερμοκρασία.

Κοιτώντας τα λογαριθμικά διαγράμματα παρατηρούμε την ύπαρξη περισσότερων της μιας κλίσεων (φαίνεται να υπάρχουν τρεις κλίσεις στις χρονοσειρές με αφαίρεση γραμμικής τάσης και δυο στις χρονοσειρές με αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές). Η διαφορά στη χρονοσειρά πρώτων διαφορών οφείλεται μάλλον στο γεγονός ότι οι πρώτες διαφορές λειτουργούν και ως υψηλοπερατό φίλτρο και επίσης γνωρίζουμε ότι  $M\Phi(g')=\omega M\Phi(g)$ . Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε αντίστοιχη μεταβολή της μορφής των φασμάτων όπως και στην περίπτωση των γραμμικών, όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο.

Στα λογαριθμικά διαγράμματα των χρονοσειρών  $w$  φαίνονται κάποιες συχνότητες ενώ στα διαγράμματα των χρονοσειρών  $q$  διαπιστώνεται η ύπαρξη δύο κλίσεων. Σ' αυτά τα διαγράμματα η πρώτη κλίση είναι ανοδική και εμφανίζεται στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων ενώ η δεύτερη κλίση είναι καθοδική και εμφανίζεται στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων. Φαίνεται ότι υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές από ότι στις υψηλές συχνότητες.

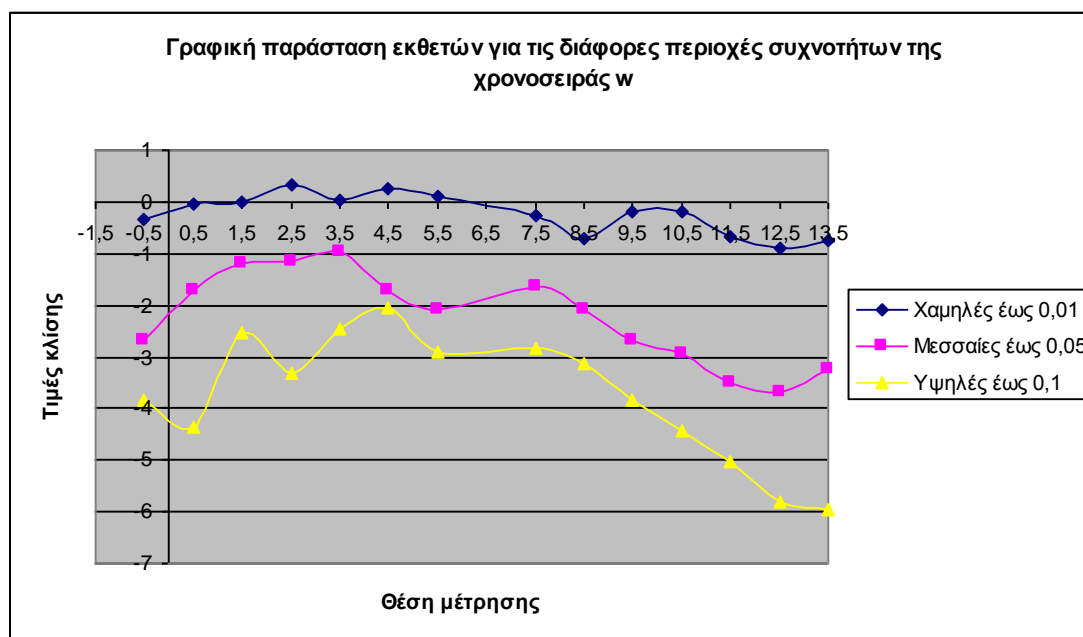
Έχουμε παρουσία μεγάλου εύρους συχνοτήτων από χαμηλές (μεγάλοι χρόνοι) ως υψηλές (μικροί χρόνοι) γεγονός που δείχνει την ύπαρξη μηχανισμών σε πολλές

χρονικές κλίμακες με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών χρόνων. Είναι άλλωστε και αναμενόμενο κοντά στον άξονα της φλέβας όπου περιμένουμε να έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Κατά τη μετακίνηση q9 (x=8,5), q10 (x=9,5) και q11 (x=10,5) παρατηρείται μείωση του εύρους των υψηλών συχνοτήτων. Αυτό σημαίνει μείωση της συμμετοχής του φαινομένου με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους και πιθανόν παρουσία μικρού μεγέθους δινών. Στις χρονοσειρές q12 (x=11,5), q13 (x=12,5) και q14 (x=13,5) παρατηρούμε μετατόπιση προς χαμηλές συχνότητες (μεγάλοι χρόνοι). Πιθανόν η συμπεριφορά αυτή να σχετίζεται με το γεγονός ότι βρισκόμαστε στα όρια της φλέβας όπου παρατηρούνται μεγάλες δομές που “ταξιδεύουν” αργά.

Με βάση τα λογαριθμικά διαγράμματα αυτά έγινε προσπάθεια προσαρμογής νόμων κλίμακας σε διάφορες περιοχές συχνοτήτων. Γενικά ανιχνεύθηκαν τρεις περιοχές χαμηλών, μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων. Για τις δυο χρονοσειρές w και q, έγινε προσαρμογή καμπύλης της μορφής  $P(f)=cf^a$  και υπολογίσθηκαν οι εκθέτες (σε μονάδες fmax) για τις διάφορες περιοχές συχνοτήτων χαμηλές (0 έως 0,01), μεσαίες (0,01 έως 0,05) και υψηλές (0,05 έως 0,1) για τη χρονοσειρά w και χαμηλές (0 έως 0,01), μεσαίες (0,01 έως 0,1) και υψηλές (0,01 έως 0,2) για τη χρονοσειρά q . Αξίζει να αναφερθεί ότι οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν σε φαινόμενα με μεγάλους, μεσαίους και μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους.

Στα σχήματα 5.12 και 5.13 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των εκθετών συναρτήσει της θέσης.

Χρονοσειρά w μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης



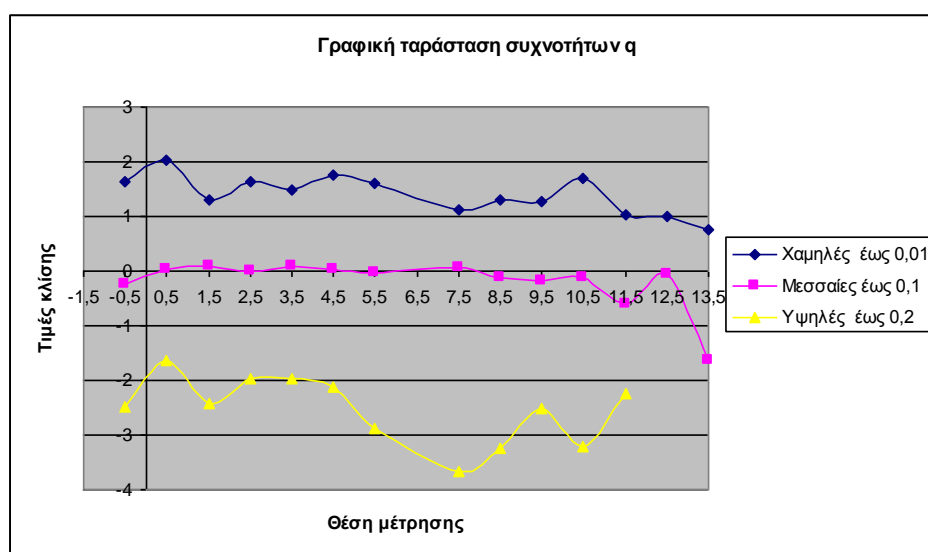
Σχήμα 5.12 : Διάγραμμα εκθετών χρονοσειρών w

Στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων (μεγάλων χρόνων) έχουμε χαμηλή κλίση στο μεγαλύτερο εύρος με κάποια διαφορά στα σημεία  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$ .

Στην περιοχή μεσαίων συχνοτήτων έχουμε συμπεριφορά μεταβαλλόμενη. Καθ' ύψος της φλέβας υπάρχει μια περιοχή με εκθέτη κοντά στο  $-1$  (ο εκθέτης  $-1$  παρουσιάζεται σε αρκετά φαινόμενα self-organized criticality (Bak, 1992)), στο σημείο  $x=4,5$  έχουμε εκθέτη  $-1,7$  που είναι κοντά στην τιμή  $-5/3$  του Kolmogorov και στη συνέχεια έχουμε μείωση καθώς μετακινούμαστε σε υψηλότερα σημεία. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η περιοχή των μεσαίων συχνοτήτων είναι αρκετά στενή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η συμπεριφορά των υψηλών συχνοτήτων. Οι εκθέτες μειώνονται σημαντικά καθώς πηγαίνουμε από το σημείο  $x=7,5$  και σε πιο υψηλά σημεία και δείχνει ότι η συνεισφορά των φαινομένων με μικρό χαρακτηριστικό χρόνο είναι μειούμενη. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς προς τα άκρα της φλέβας η συνεισφορά των μικρών δομών είναι μικρότερη απ' ό,τι στο κέντρο.

#### Χρονοσειρά $q$ μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές



Σχήμα 5.13 : Διάγραμμα εκθετών χρονοσειρών  $q$

Η συμπεριφορά της  $q$  μας δείχνει ότι μάλλον υπάρχει κάποια χαρακτηριστική συχνότητα (δηλαδή κάποιος χαρακτηριστικός χρόνος)  $f_c$ , όπου για συχνότητα  $f < f_c$  έχουμε αύξηση της παρουσίας συναρτήσεων της συχνότητας και για  $f_c < f$  έχουμε μείωση της συνεισφοράς καθώς αυξάνει η  $f$ .

Στην περίπτωση αυτή οι μεσαίες συχνότητες οδηγούν σε κλίση περίπου μηδέν, γεγονός που ενισχύει την ιδέα της μεταβατικής συμπεριφοράς και της ύπαρξης χαρακτηριστικού χρόνου. Ο χρόνος αυτός θα σχετίζεται με κάποιο χαρακτηριστικό χρόνο της ροής.

## 5.5 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

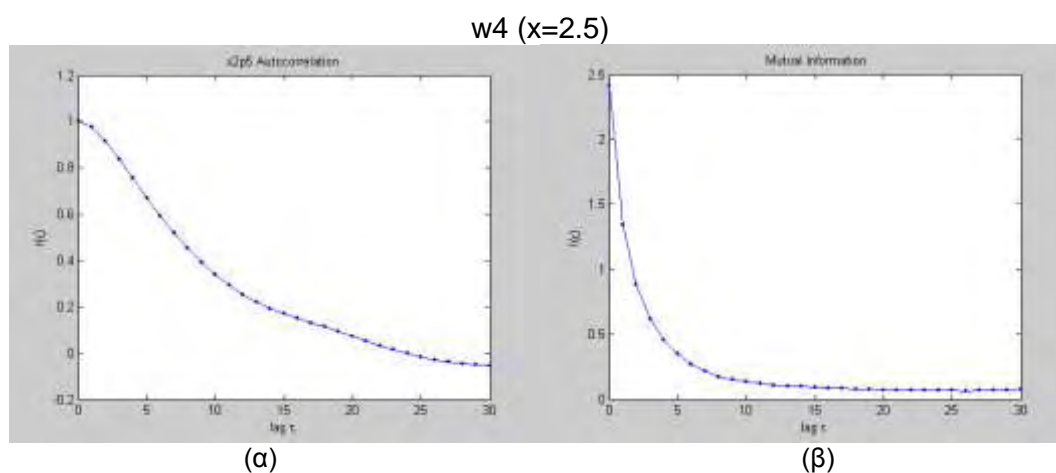
Για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων θα γίνει η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  και της διάστασης εμβύθισης  $m$ .

### 5.5.1 Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$

Επιλέγεται ο χρόνος  $\tau$  για τον οποίο οι τιμές γίνονται ασυσχέτιστες από τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας (average mutual information) στην αρχική χρονοσειρά  $x$  και στη χρονοσειρά  $q$ .

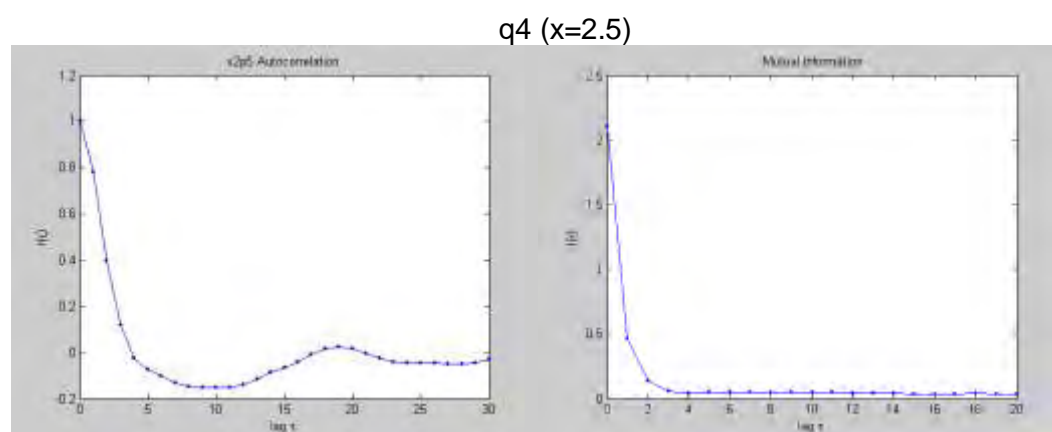
Ακολουθούν ενδεικτικά δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  καθώς και η γραφική παράσταση για όλα τα  $\tau$  των χρονοσειρών.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης



Σχήμα 5.14 : Εκτίμηση του χρόνου υστέρησης  $\tau=24$  και  $\tau=20$  από (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και (β) τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας αντίστοιχα για τη χρονοσειρά  $w$

#### Χρονοσειρά $q$ μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές



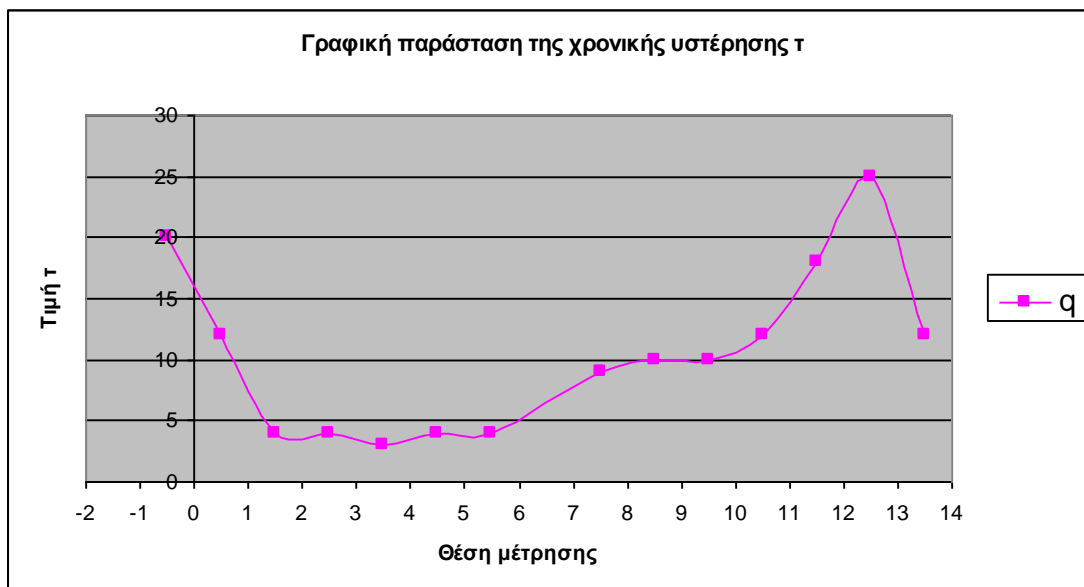
Σχήμα 5.15 : Εκτίμηση του χρόνου υστέρησης  $\tau=17$  και  $\tau=4$  από (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και (β) τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας αντίστοιχα για τη χρονοσειρά  $q$

Επιλέγουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=20$  και  $\tau=4$  για τις  $w_4$  και  $q_4$  αντίστοιχα, όπου παρατηρούμε πρώτο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα των χρονικών υστερήσεων συναρτήσει της θέσης μέτρησης.



(α)



(β)

Σχήμα 5.16 : Στα διαγράμματα (α) και (β) φαίνεται η επιλογή χρόνου υστέρησης  $\tau$  των χρονοσειρών  $w$  και  $q$ .

Παρατηρείται ότι οι σειρές της χρονοσειράς  $w$  έχουν υψηλή συσχέτιση σε αντίθεση με τις σειρές της χρονοσειράς  $q$  που έχουν χαμηλή συσχέτιση η τιμή των οποίων είναι μικρότερη γιατί η ύπαρξη τάσης στις αρχικές χρονοσειρές αυξάνει τους χαρακτηριστικούς χρόνους.

Επιπλέον παρατηρείται ότι οι τιμές των ακραίων χρονοσειρών είναι πολύ υψηλές. Στις θέσεις  $x=-0,5$ ,  $x=0,5$ ,  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$  οι τιμές της χρονικής υστέρησης παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά γιατί η εξέλιξη του φαινομένου είναι αργή και σε μεγαλύτερο χρόνο. Στα σημεία αυτά οι δίνες είναι μεγάλες και κινούνται αργά.

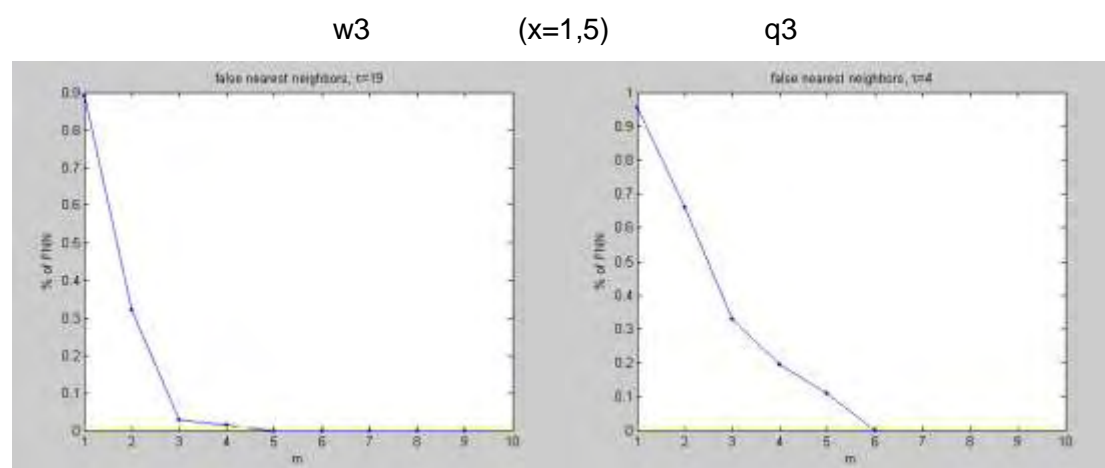
Μέσα στη φλέβα όπου οι δίνες είναι μικρές και μεγάλες το φαινόμενο εξελίσσεται πιο γρήγορα και οι τιμές της χρονικής υστέρησης είναι χαμηλότερες.

Η χαμηλότερη τιμή και στις δύο χρονοσειρές παρατηρείται στη θέση  $x=3,5$  όπου, όπως προαναφέρθηκε, πρέπει να βρίσκεται ο άξονας της φλέβας. Το σημείο αυτό έχει βρεθεί και με άλλα κριτήρια ότι αντιστοιχεί στον άξονα της φλέβας [Μίχας, 2008]. Επίσης με το κριτήριο αυτό έχει εντοπισθεί και ο άξονας της φλέβας σε άλλη περίπτωση (μέτρηση σε οριζόντιο επίπεδο) [Karakasidis et al, 2009].

### 5.5.2 Επιλογή διάστασης εμβύθισης $m$

Η δεύτερη παράμετρος που είναι απαραίτητη για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι η διάσταση εμβύθισης  $m$ .

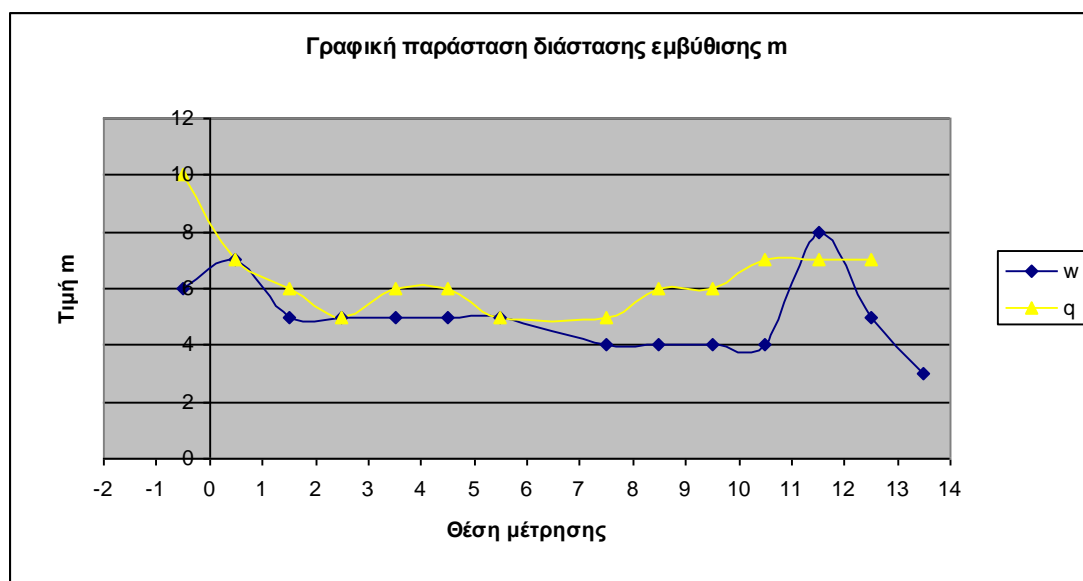
Ακολουθούν ενδεικτικά δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  στη θέση  $x=1,5$  καθώς και η γραφική παράσταση για όλα τα  $m$  των χρονοσειρών.



Σχήμα 5.17 : Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης  $m$  με τη μέθοδο FNN για τις χρονοσειρές  $w_3$  και  $q_3$ .



Επιλέγουμε  $m=5$  και  $m=6$  αντίστοιχα για τις δυο χρονοσειρές, γιατί το ποσοστό των ψευδών γειτόνων σύμφωνα με τη μέθοδο FNN πέφτει κάτω από 1%.



Σχήμα 5.18 : Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης  $m$  με τη μέθοδο FNN για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$

Παρατηρείται και στη διάσταση εμβύθισης, ότι μέσα στη φλέβα οι τιμές είναι χαμηλότερες, ενώ στα άκρα οι τιμές είναι υψηλότερες. Επιπλέον στις θέσεις  $x=0,5$ ,  $x=2,5$  και  $x=5,5$  οι τιμές είναι ίδιες.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Takens  $m \geq 2D+1$ , για τη σχέση διάστασης εμβύθισης  $m$  και διάσταση συσχέτισης  $D$ , για τις τιμές της διάστασης εμβύθισης που κυμαίνονται από 5 έως 6 θα πρέπει οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $D$  να κυμαίνονται από 2 έως 3. Με το πιο “χαλαρό” κριτήριο των Souer et al (1991) όπου  $m \geq D$  θα πρέπει οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $D$  να κυμαίνονται από 5 έως 6.

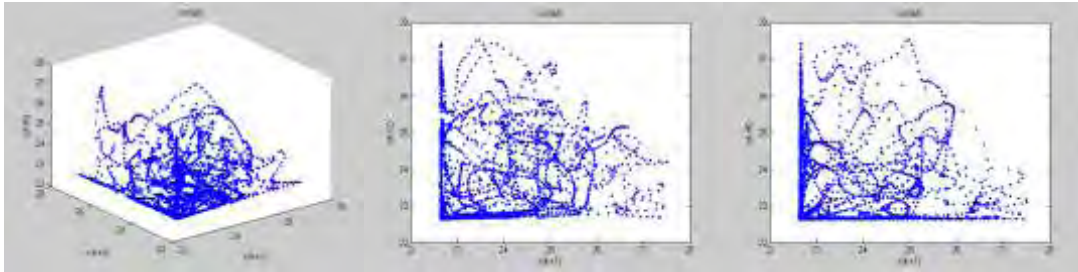
Με βάση τους παραπάνω πίνακες  $\tau$  και  $m$  των χρονοσειρών έγινε η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων για τις δυο χρονοσειρές  $w$  και  $q$ .



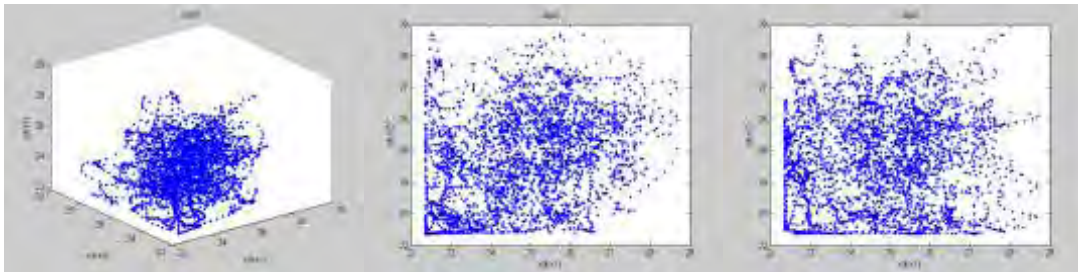
### 5.5.3 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων

Χρονοσειρά  $w$  μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

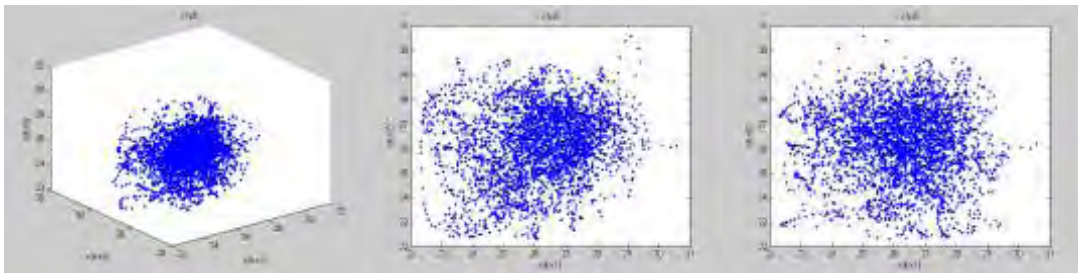
$w_1(x=-0,5)$



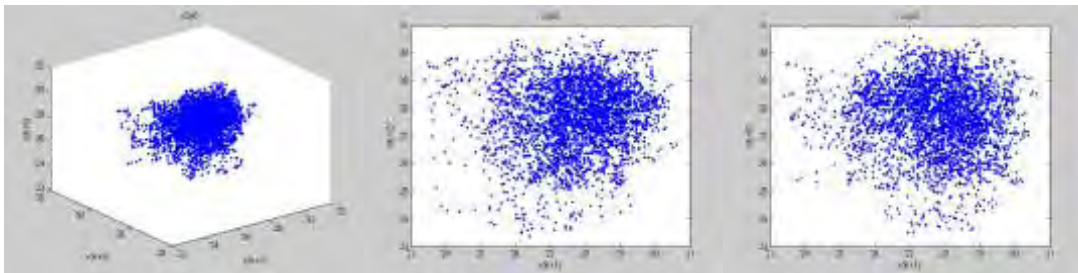
$w_2(x=0,5)$



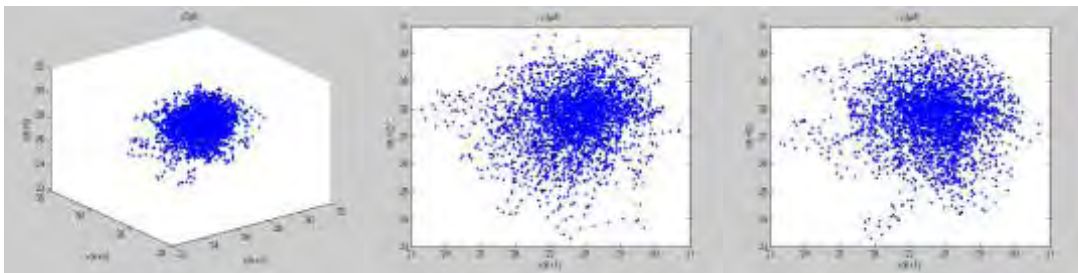
$w_3(x=1,5)$



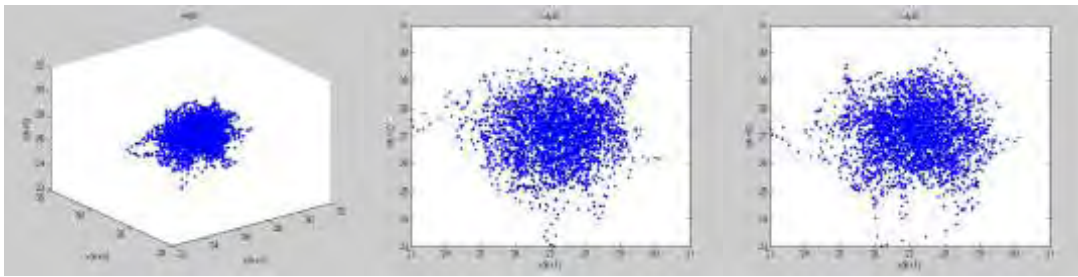
$w_4(x=2,5)$



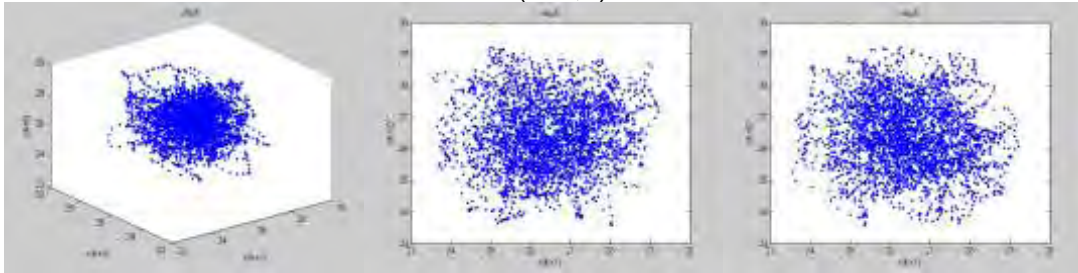
$w_5(x=3,5)$



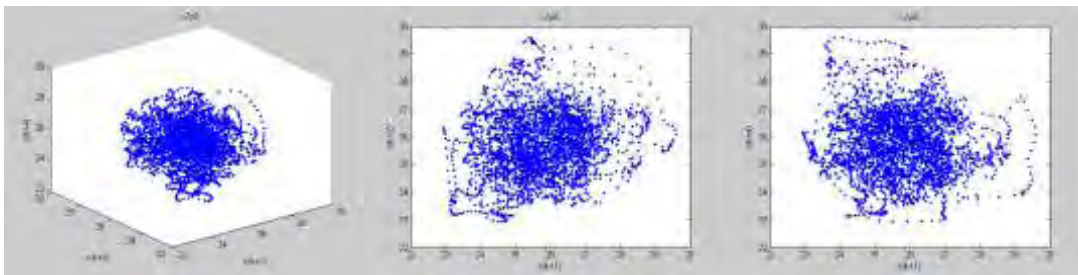
$w_6(x=4,5)$



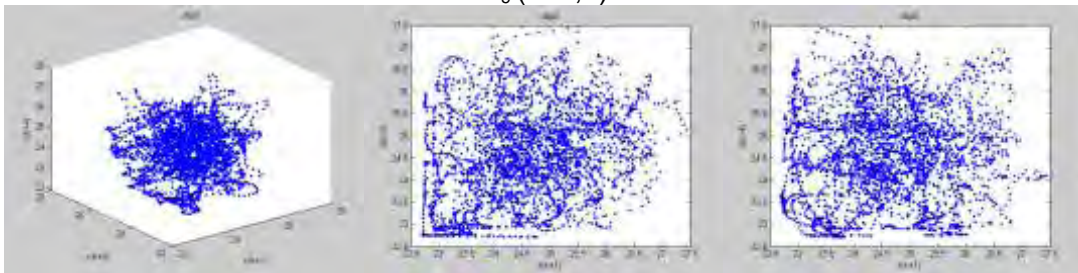
$w_7(x=5,5)$



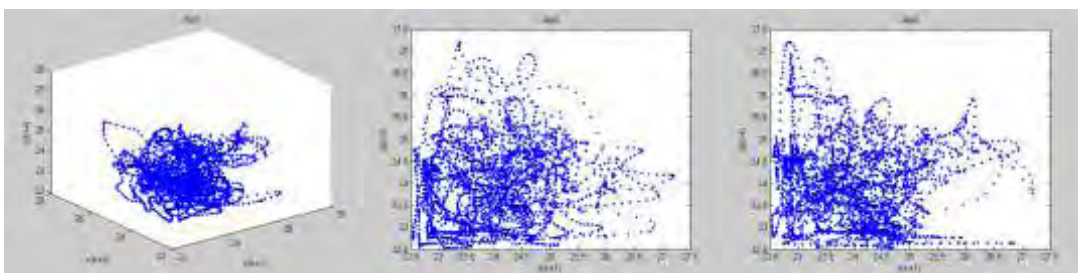
$w_8(x=7,5)$



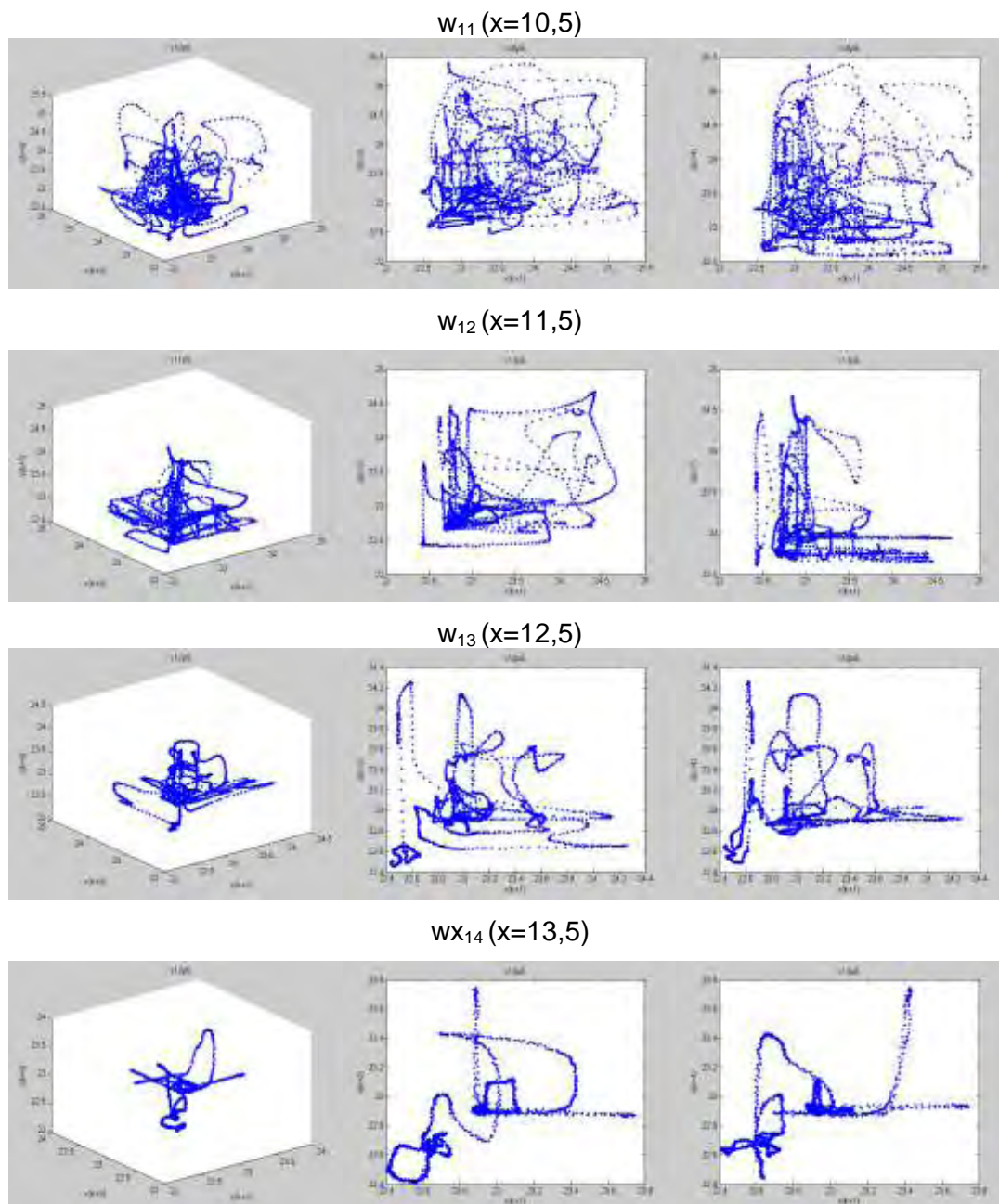
$w_9(x=8,5)$



$w_{10}(x=9,5)$







Σχήμα 5.19 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $w$

Τα παραπάνω διαγράμματα μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

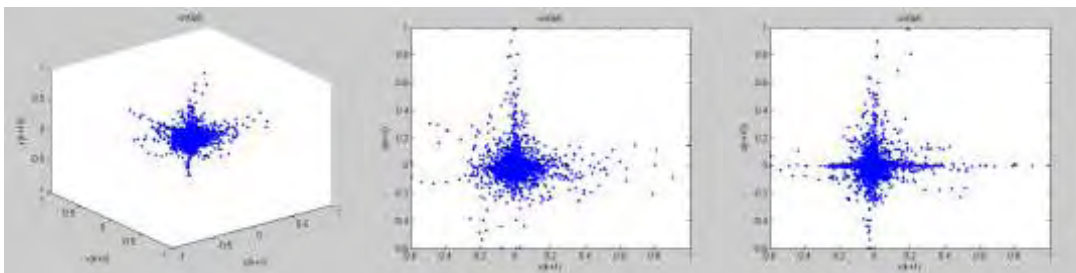
- Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στα άκρα της φλέβας που είναι οι  $x=-0,5$ ,  $x=0,5$ ,  $x=10,5$ ,  $x=11,5$ ,  $x=12,5$  και  $x=13,5$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει την κάτω αριστερή γωνία του διαγράμματος. Η δομή μας δίνει γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα φαίνεται να είναι χαμηλοδιάστατο. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά της εκτίμησης της διάστασης συσχέτισης ενώ δε συμφωνούν με αυτά της διάστασης εμβύθισης.
- Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στη μέση της φλέβας που είναι οι  $x=2,5$ ,  $x=3,5$ ,  $x=4,5$  και  $x=5,5$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει

όλο τον διαθέσιμο χώρο στο χώρο των φάσεων. Η διασπορά είναι μεγάλη και η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λίγο παραμορφωμένη. Το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.

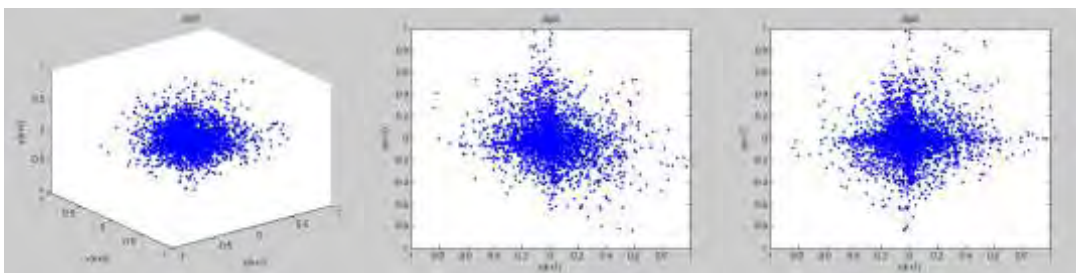
- Στη τρίτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές  $x=1,5$ ,  $x=7,5$ ,  $x=8,5$  και  $x=9,5$  σε μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα στο ένα άκρο από χαμηλοδιάστατο γίνεται υψηλοδιάστατο και στο άλλο άκρο συμβαίνει το αντίθετο δηλαδή από υψηλοδιάστατο φαίνεται να γίνεται και πάλι χαμηλοδιάστατο.

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

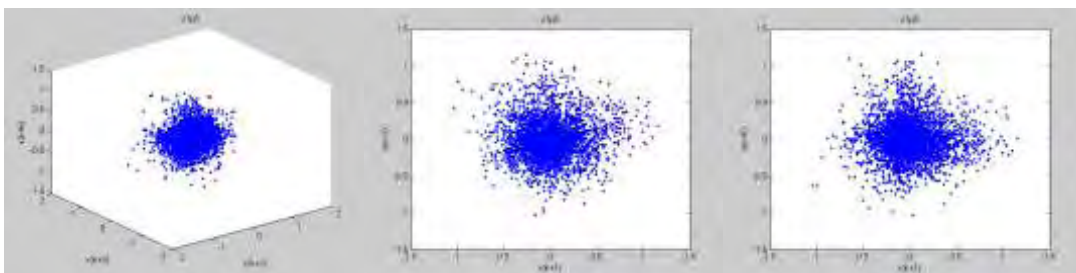
$q_1(x=0,5)$



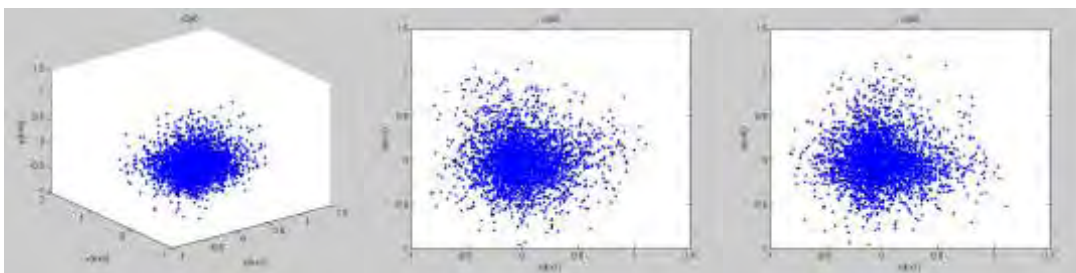
$q_2(x=0,5)$



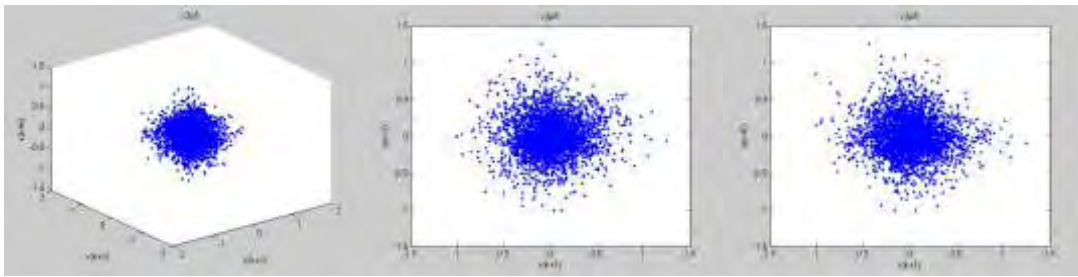
$q_3(x=1,5)$



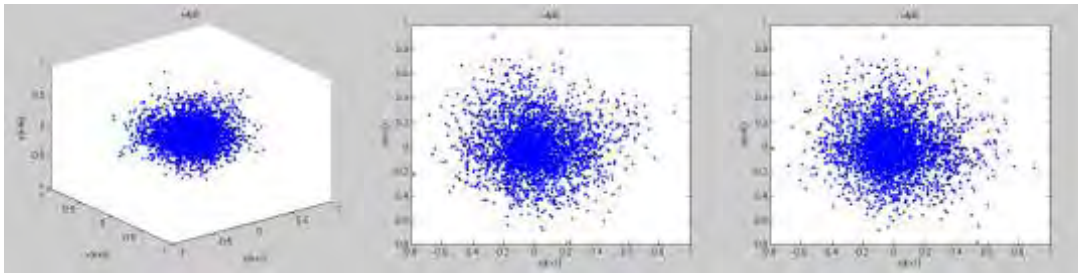
$q_4(x=2,5)$



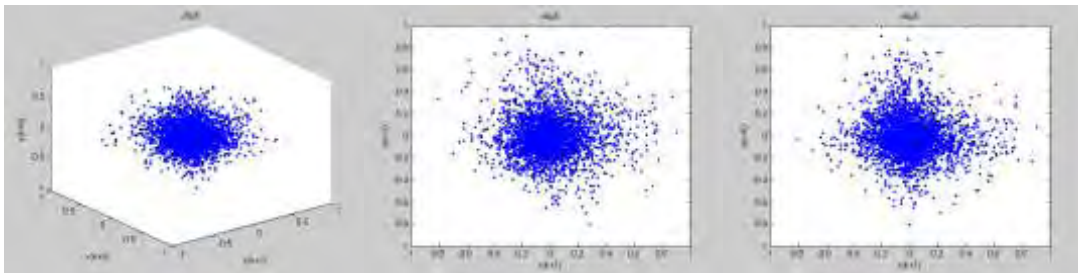
$q_5(x=3,5)$



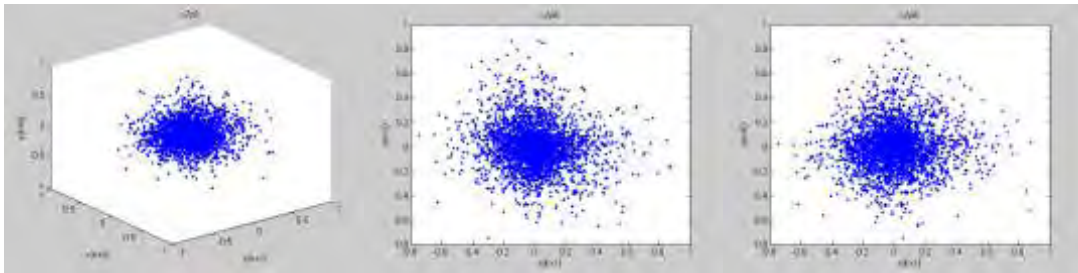
$q_6(x=4,5)$



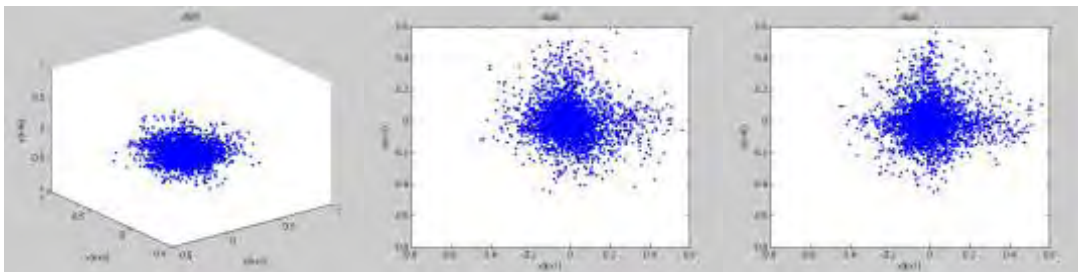
$q_7(x=5,5)$



$q_8(x=7,5)$

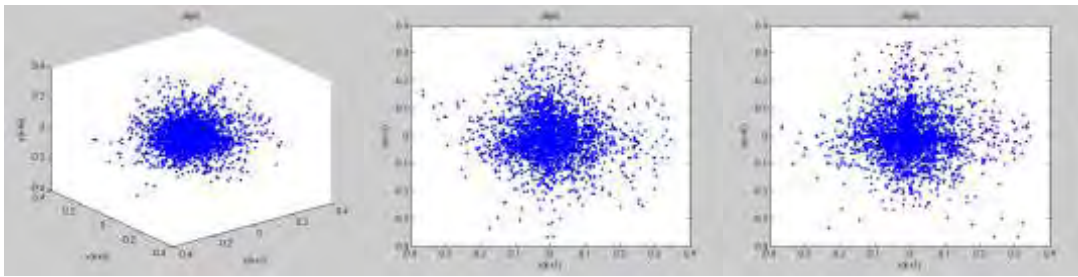


$q_9(x=8,5)$

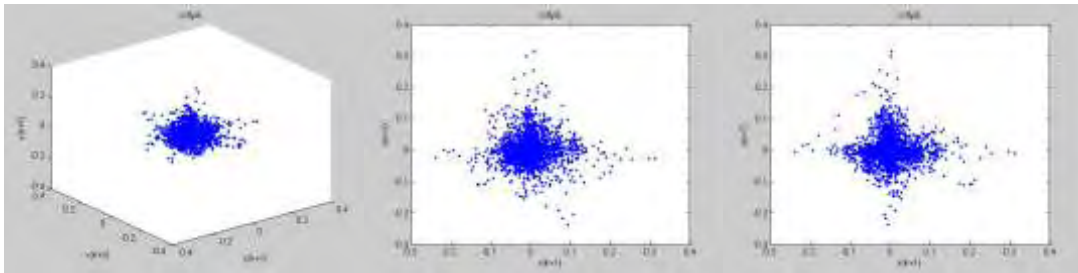




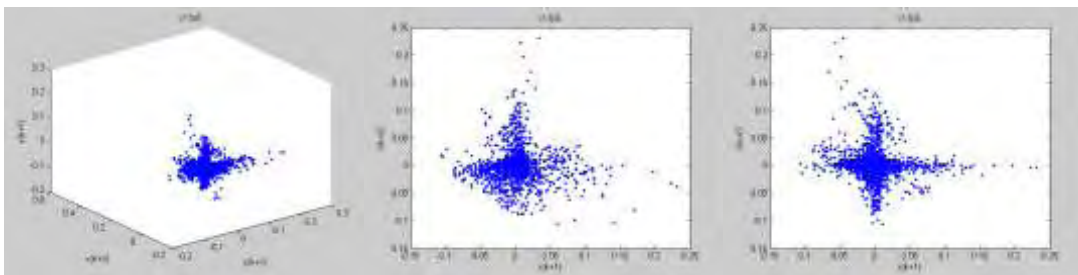
$q_{10} (x=9,5)$



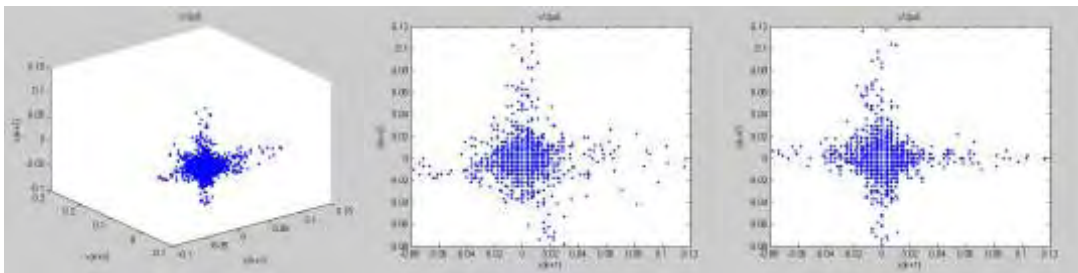
$q_{11} (x=10,5)$



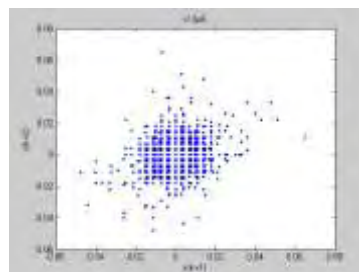
$q_{12} (x=11,5)$



$q_{13} (x=12,5)$



$q_{14} (x=13,5)$



Σχήμα 5.20 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $q$

Και τα διαγράμματα της χρονοσειράς  $q$  μπορούν να χωριστούν όπως και της χρονοσειράς  $w$  σε τρεις κατηγορίες. Παρατηρούμε και εδώ τις ίδιες περιπτώσεις αλλά η διασπορά είναι μικρότερη και η δομή είναι πιο συμπαγής.

- Στην πρώτη περίπτωση στα άκρα της φλέβας η δομή τείνει να πάρει το σχήμα του σταυρού σε γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα είναι χαμηλοδιάστατο. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ισχυρές χρονικές συσχετίσεις γεγονός που είναι αναμενόμενο.
- Στη δεύτερη περίπτωση στη μέση της φλέβας η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λιγότερο παραμορφωμένη και το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.
- Ενώ στη τρίτη περίπτωση έχουμε και πάλι μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα μεταβαίνει από τη χαμηλή διάσταση στην υψηλή και το αντίθετο.

Ακολούθησε ο σχεδιασμός των παραπάνω χρονοσειρών και για διάσταση εμπύθισης 2m όπου δεν υπήρξε αξιόλογη διαφορά των διαγραμμάτων. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων είναι καλή.

## **5.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ**

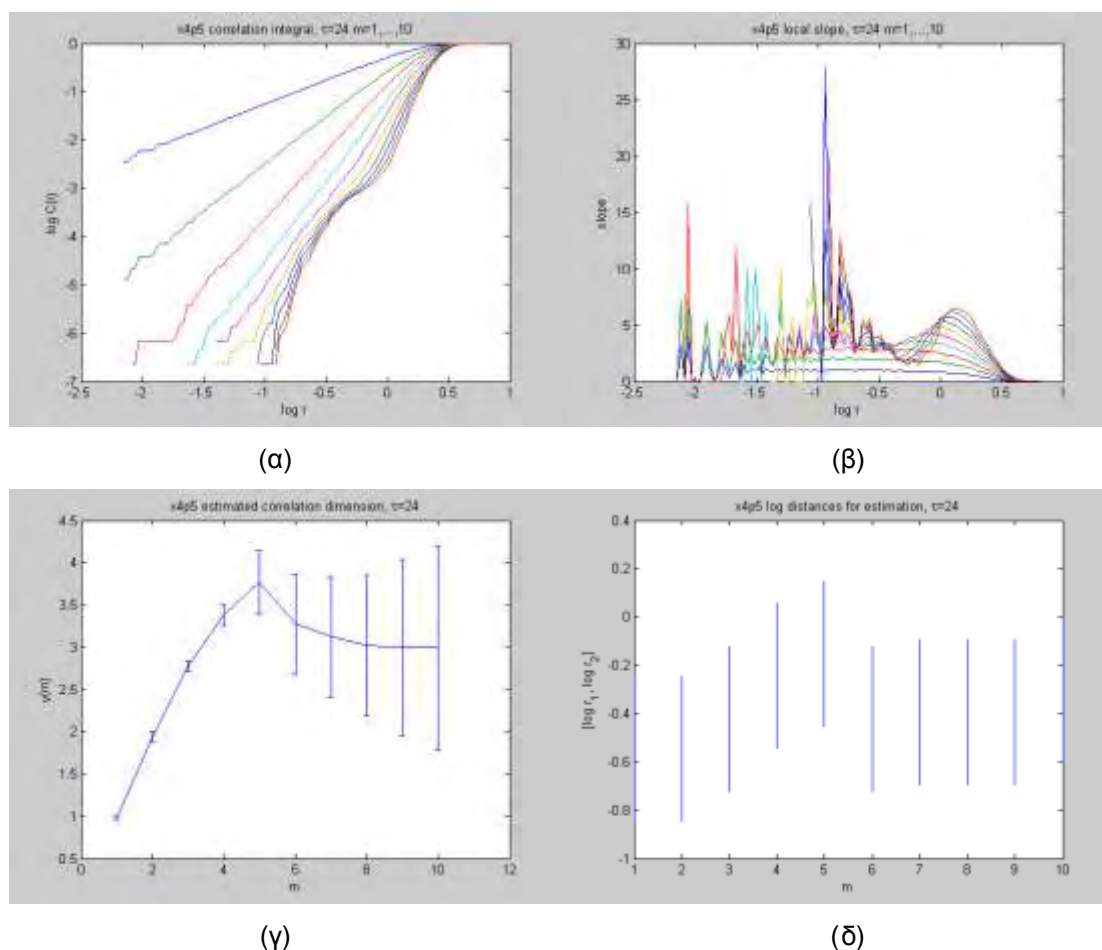
Η ανάλυση των χρονοσειρών περιλαμβάνει την εκτίμηση μη γραμμικών χαρακτηριστικών (όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο) που είναι η διάσταση συσχέτισης  $D$  και ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov τα οποία δίνουν πληροφορίες για το σύστημα που μελετάμε.

### **5.6.1 Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης**

Ακολουθούν ενδεικτικά τα δυο διαγράμματα για τις χρονοσειρές  $w$  και  $q$  καθώς και πίνακας για όλες τις χρονοσειρές. Ο σχεδιασμός της διάστασης συσχέτισης έγινε για  $m_{max}=10$ .

## Χρονοσειρά w μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

$$w_6 (x=4,5)$$



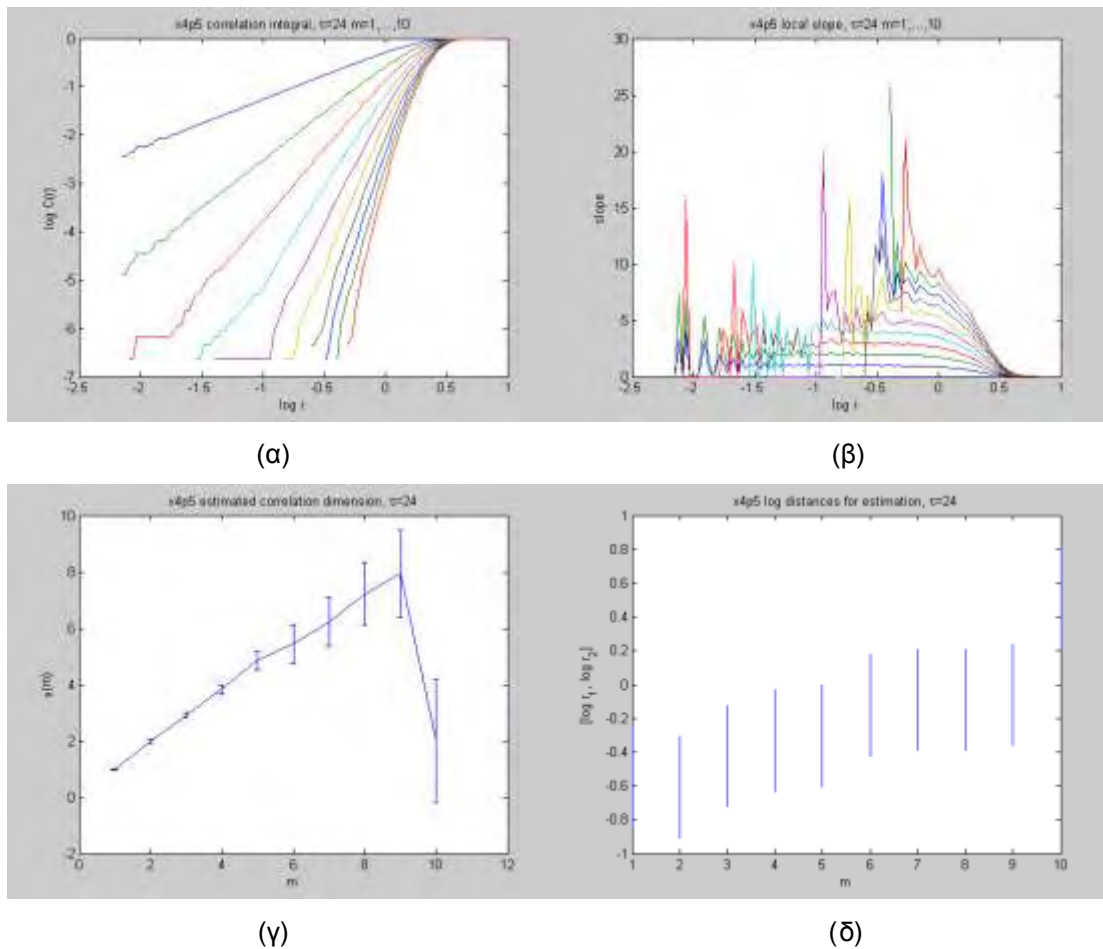
Σχήμα 5.21 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Οι κλίσεις, που παρατηρούνται στο διάγραμμα (α) του σχήματος 5.21, μπορεί να αντιστοιχούν είτε σε χρονικές συσχετίσεις είτε σε παρουσία θορύβου. Με τη χρήση του παραθύρου Theiler παίρνουμε τα αποτελέσματα του σχήματος 5.22 όπου παρατηρείται πλέον μια κλίση

Χρήση παραθύρου Theiler για την αποφυγή χρονικών συσχετίσεων



$$w_6(x=4,5)$$



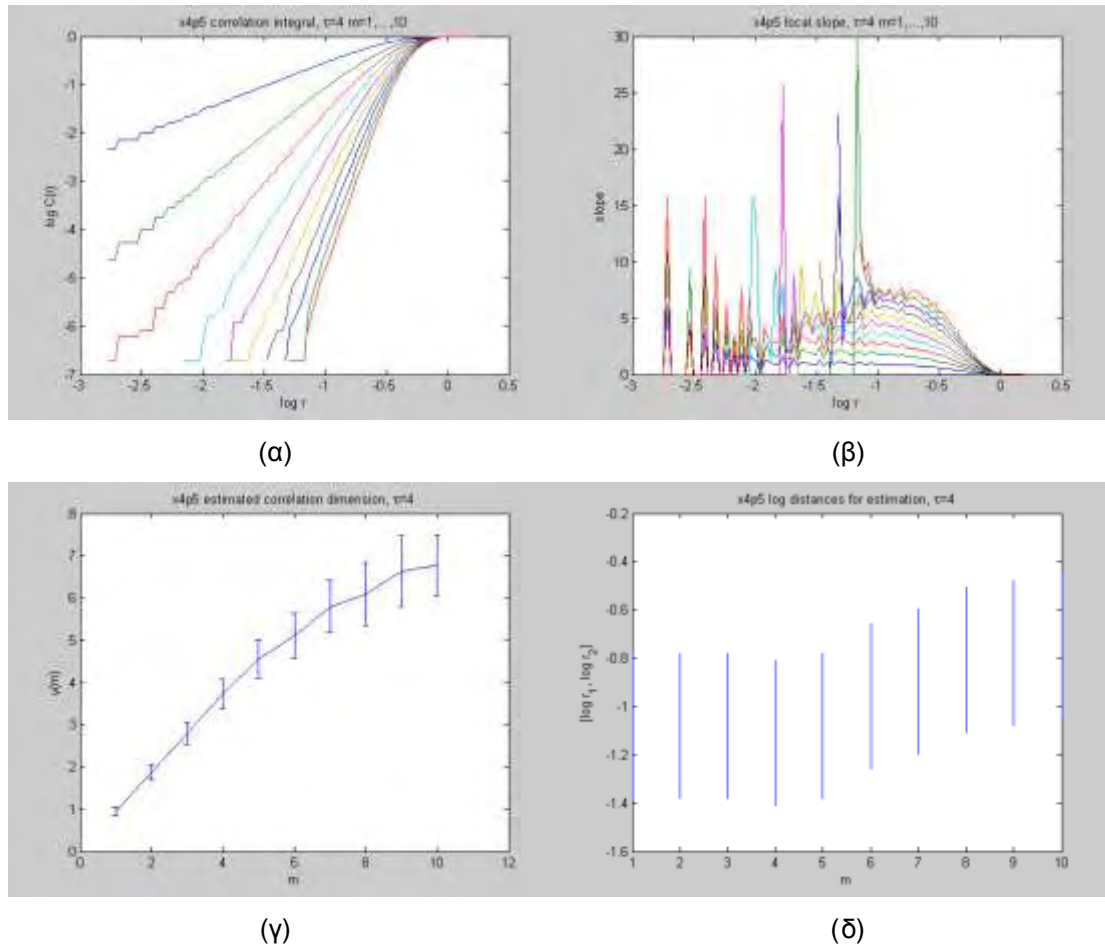
Σχήμα 5.22 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης με τη χρήση παραθύρου Theiler  
 (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Παρατηρούμε ότι :

- Στο διάγραμμα (α), στο σχήμα 5.21 έχουμε δυο κλίσεις, ενώ στο ίδιο διάγραμμα στο σχήμα 5.22 έχουμε μια κλίση η ύπαρξη της οποίας οφείλεται σε χρονικές συσχετίσεις.
- Στο διάγραμμα (β), η περιοχή κλιμάκωσης δεν είναι η ίδια και κυμαίνεται  $-1,2 < \log r < -0,7$  (σχήμα 5.21) και  $-0,8 < \log r < -0,4$  (σχήμα 5.22).
- Στο διάγραμμα (γ) και στο σχήμα 5.21, φαίνεται ότι η χρονοσειρά  $w_6$  δε συγκλίνει και το σύστημα είναι μάλλον στοχαστικό ή υψηλοδιάστατο, ενώ σχήμα 5.22, φαίνεται ότι η χρονοσειρά  $w_6$  πιθανόν να συγκλίνει και το σύστημα είναι πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό.
- Στο διάγραμμα (δ) και στα δυο σχήματα έχουμε μία περιοχή κλιμάκωσης.

Χρονοσειρά  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

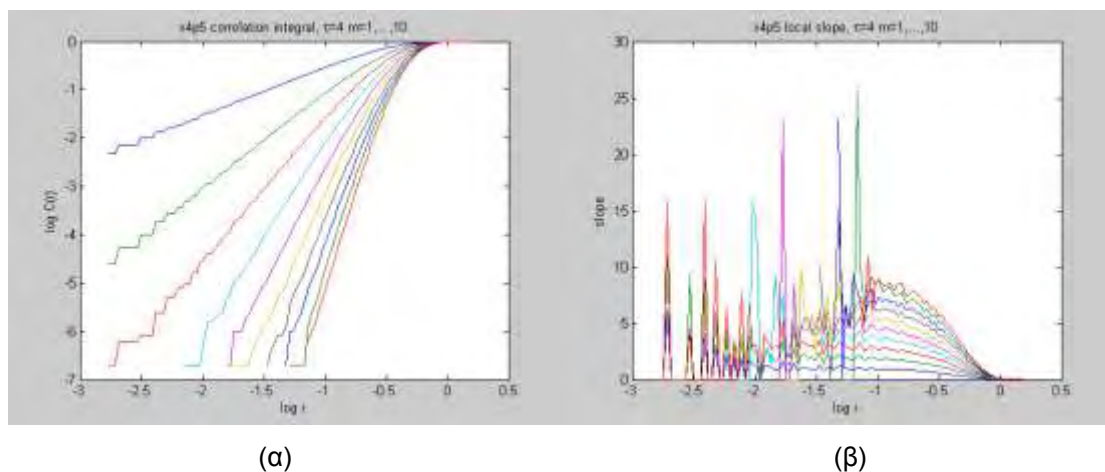
$q_6(x=4,5)$

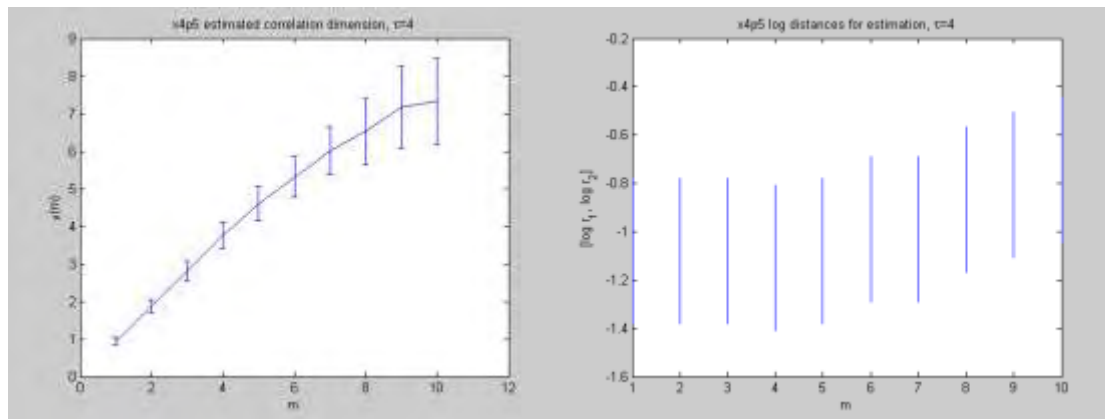


Σχήμα 5.23 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Χρήση παραθύρου Theiler για την αποφυγή χρονικών συσχετίσεων

$q_6(x=4,5)$





(γ)

(δ)

Σχήμα 5.24 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης με τη χρήση παραθύρου Theiler  
 (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $\log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Παρατηρούμε ότι :

- Στο διάγραμμα (α), και στα δυο σχήματα 5.23 και 5.24 έχουμε μια κλίση
- Στο διάγραμμα (β), η περιοχή κλιμάκωσης είναι η ίδια και κυμαίνεται  $-1,5 < \log r < -1,0$  και στις δυο περιπτώσεις.
- Στο διάγραμμα (γ) και στα δυο σχήματα, φαίνεται ότι η χρονοσειρά  $q_1$  πιθανόν να συγκλίνει και το σύστημα είναι πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό.
- Στο διάγραμμα (δ) και στα δυο σχήματα έχουμε μία περιοχή κλιμάκωσης.

Γενικά, κρίνεται απαραίτητη η χρήση παραθύρου Theiler γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης επειδή οι χρονικές συσχετίσεις οδηγούν σε χαμηλότερες εκτιμήσεις της διάστασης συσχέτισης.

Από τα διαγράμματα (γ) όπου έχουμε τις κλίσεις συναρτήσεως της διάστασης εμπύθισης παίρνουμε τις τιμές της διάστασης συσχέτισης καθώς και τις διακυμάνσεις αυτών όπως αναφέρονται παρακάτω.

Στα διαγράμματα (δ) των περιοχών κλιμάκωσης, διαπιστώνουμε ότι στην χρονοσειρά  $w$  έχουμε δύο περιοχές κλιμάκωσης, ενώ στις ίδιες χρονοσειρές με τη χρήση παραθύρου Theiler έχουμε μια περιοχή κλιμάκωσης. Στην χρονοσειρά  $q$  έχουμε μια περιοχή κλιμάκωσης και στις δύο περιπτώσεις.

Στη περίπτωση χρήσης παραθύρου Theiler έχουμε λιγότερα διαθέσιμα σημεία για την ανακατασκευή και συνεπώς “χειρότερη” στατιστική από ότι στην περίπτωση χωρίς παράθυρο Theiler.

Στους πίνακες που ακολουθούν η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης έχει γίνει, για μεν την χρονοσειρά  $w$  με τη χρήση παραθύρου Theiler για την αποφυγή χρονικών συσχετίσεων προκειμένου να έχουμε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, για δε τη χρονοσειρά  $q$  χωρίς τη χρήση Theiler window (δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή η χρήση παραθύρου Theiler δεν έδινε δυο κλίσεις και τα αποτελέσματα δεν ήταν συγκρίσιμα).

Πίνακας εκτίμησης διάστασης συσχέτισης της χρονοσειράς  $w$  μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης με χρήση παραθύρου Theiler

α/α	Θέση μέτρησης	Κλίσεις	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	Περιοχές κλιμάκωσης	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1	-0,5	1	5,5	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
2	0,5	1	7,5	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
3	1,5	1	6,5	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
4	2,5	1	7,5	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
5	3,5	1	6,5	1,5	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
6	4,5	1	8,0	1,5	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
7	5,5	1	7,5	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
8	7,5	1	7,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
9	8,5	1	8,0	2,5	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
10	9,5	1	7,0	2,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαοτικό
11	10,5	1	3,5	2,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
12	11,5	1	2,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
13	12,5	1	2,5	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
14	13,5	1	1,2	1,0	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο

Πίνακας 5.4 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών  $w$

Πίνακας εκτίμησης διάστασης συσχέτισης χρονοσειράς  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

α/α	Θέση μέτρησης	Κλίσεις	Διάσταση συσχέτισης	Σφάλμα	Περιοχές κλιμάκωσης	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1	-0,5	1	2,0	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
2	0,5	1	5,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
3	1,5	1	6,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
4	2,5	1	6,5	1,5	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
5	3,5	1	7,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
6	4,5	1	6,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
7	5,5	1	6,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
8	7,5	1	5,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
9	8,5	1	5,0	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
10	9,5	1	3,5	1,0	1	Πιθανότητα σύγκλισης - Πολύπλοκο υψηλοδιάστατο χαστικό
11	10,5	1	0,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
12	11,5	1	0,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
13	12,5	1	0,5	0,5	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο
14	13,5	1	0,7	1,3	1	Δεν συγκλίνει - Στοχαστικό ή Υψηλοδιάστατο

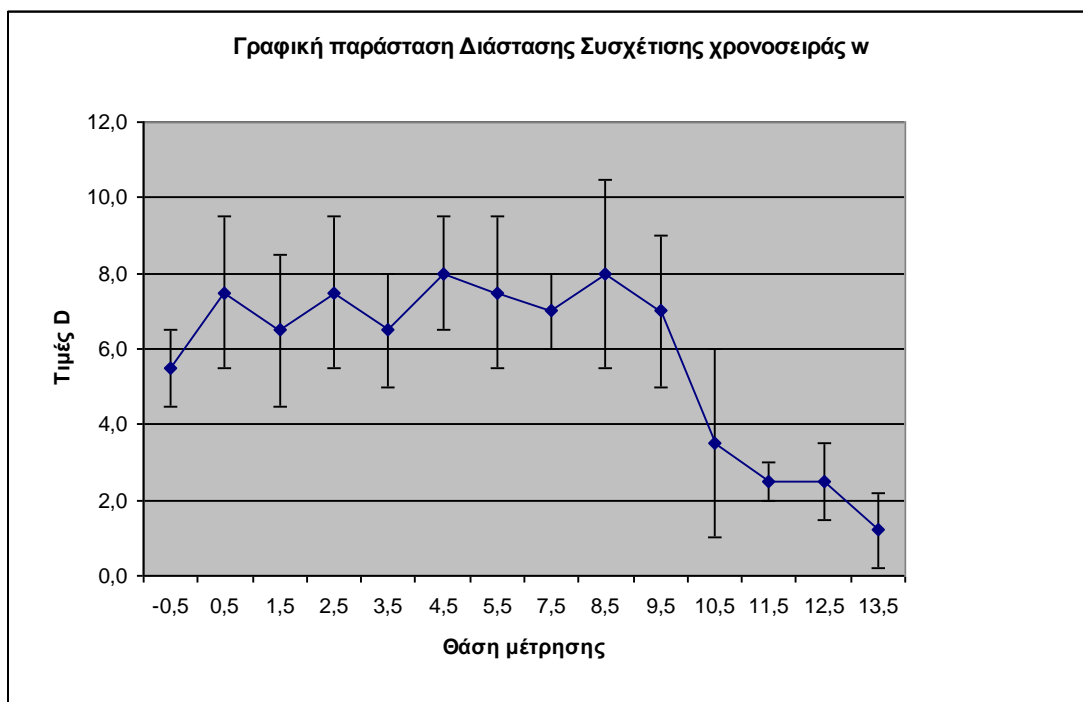
Πίνακας 5.5 : Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών  $q$

Παρατηρούμε ότι :

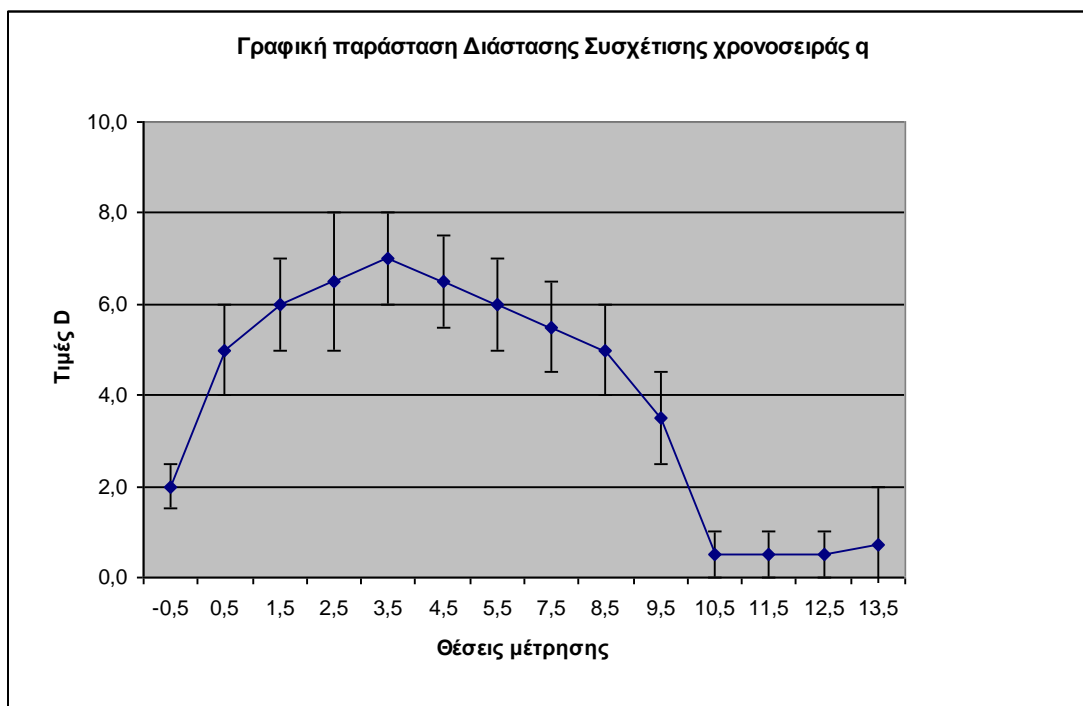
- Όλες οι χρονοσειρές  $w$  (με χρήση παραθύρου Theiler) και  $q$  (χωρίς χρήση παραθύρου Theiler) έχουν μια κλίση και μια περιοχή κλιμάκωσης.
- Οι χρονοσειρές παρουσιάζουν πιθανότητα σύγκλισης με μεγάλο σφάλμα εκτός της πρώτης και των τεσσάρων τελευταίων.
- Οι τιμές της διάστασης συσχέτισης  $\sigma'$  αυτές που παρουσιάζουν πιθανότητα σύγκλισης κυμαίνεται από  $5,0 \pm 1,0$  έως  $8,0 \pm 2,5$ , τιμές πολύ μεγαλύτερες από αυτές που θα έπρεπε να έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα Takens . Πιθανόν η συγκεκριμένη μεθοδολογία υπολογισμού της διάστασης εμβύθισης  $m$  να μην είναι πάντα πολύ αξιόπιστη.

Αντίθετα με τη διάσταση συσχέτισης στην ανακατασκευή διαπιστώνεται ότι το  $2m$  είναι μια καλή εκτίμηση για να “ζωγραφίσουμε” το χώρο των φάσεων.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις της διάστασης συσχέτισης και των σφαλμάτων των παραπάνω πινάκων



(α)



(β)

Σχήμα 5.25 : Διάγραμμα διάστασης συσχέτισης (α) χρονοσειρών  $w$  και (β) χρονοσειρών  $q$

Στο πρώτο (α) διάγραμμα της χρονοσειράς  $w$  παρατηρείται μια ασύμμετρη συμπεριφορά της διάστασης συσχέτισης λόγω του γεγονότος ότι η φλέβα είναι ασύμμετρη.

Στο δεύτερο ( $\beta$ ) διάγραμμα της χρονοσειράς  $q$ , αν έχουμε ελκυστή και η εκτίμηση είναι σωστή φαίνεται ότι η μέγιστη τιμή της διάστασης συσχέτισης είναι στη θέση  $x=-3,5$  όπου προηγουμένως αναφέρθηκε ότι πρέπει να βρίσκεται ο άξονας της φλέβας. Εάν το σημείο αυτό είναι το κέντρο της φλέβας όπου έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη έχουμε αυξημένη πολυπλοκότητα και αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται περισσότερες μεταβλητές για να περιγραφεί.

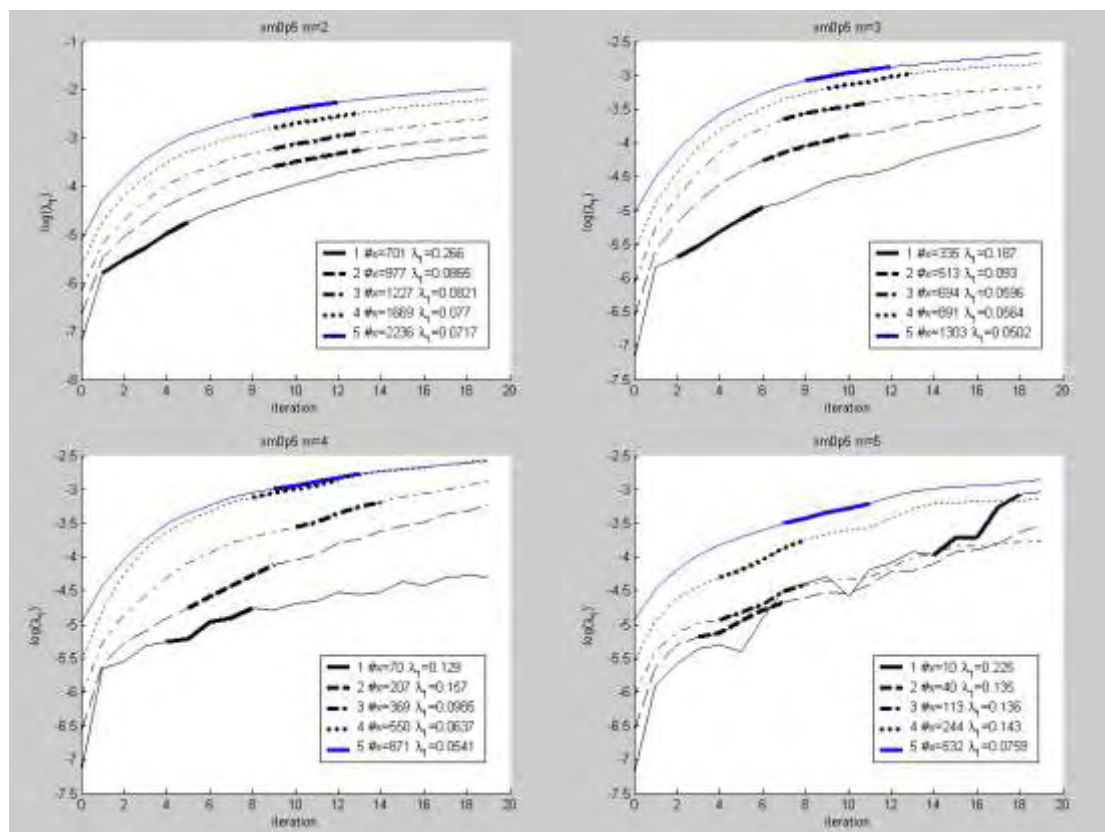
Το γεγονός ότι και στα δυο διαγράμματα, στα άκρα έχουμε τις μικρότερες τιμές της διάστασης συσχέτισης, σημαίνει ότι έχουμε μειωμένη πολυπλοκότητα και είναι τα σημεία που βρίσκονται εκτός φλέβας γεγονός που είναι αναμενόμενο.

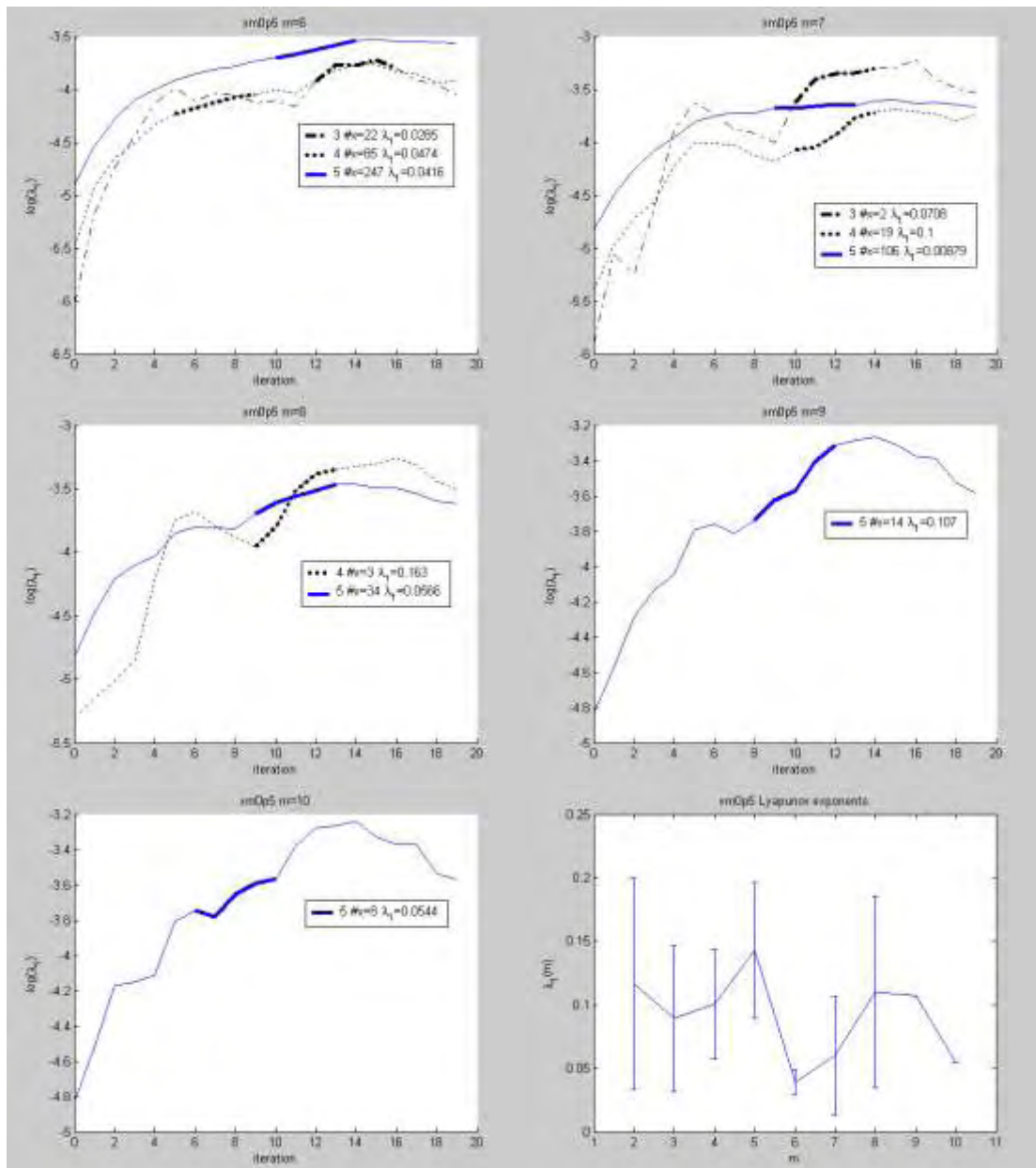
### 5.6.2 Εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov

Παραθέτουμε ενδεικτικά δυο σειρές διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov για τις χρονοσειρές  $x$  και  $q$  και ακολουθούν για όλες τις χρονοσειρές μόνο τα διαγράμματα για την εκτίμηση του εκθέτη.

#### Χρονοσειρά $w$ μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

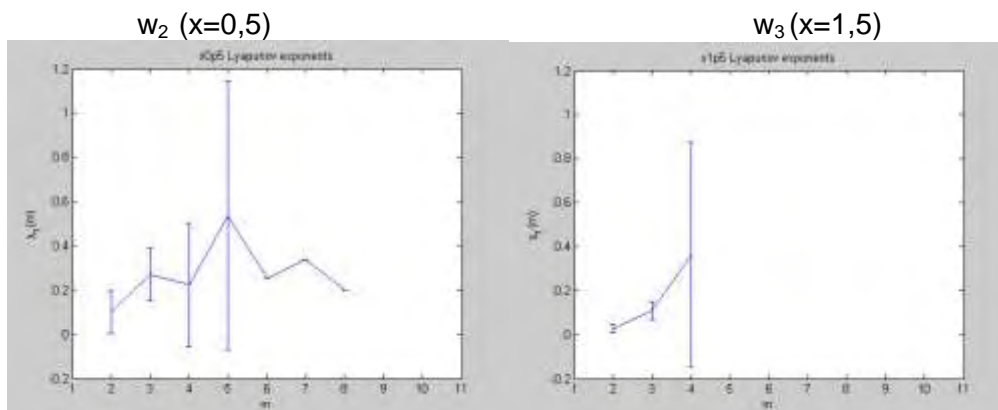
$$w_1(x=-0,5)$$



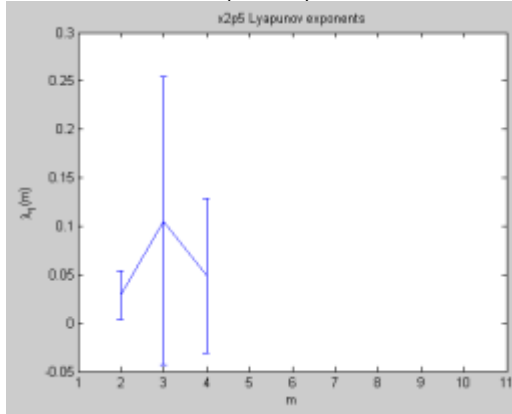
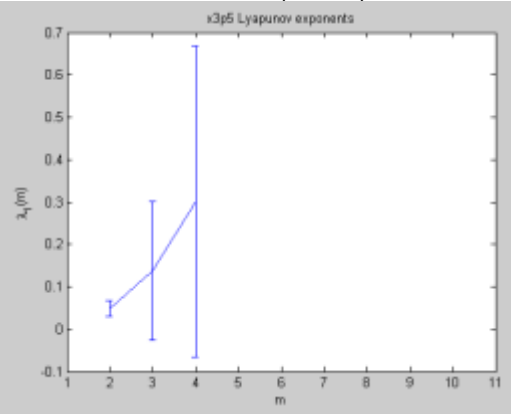
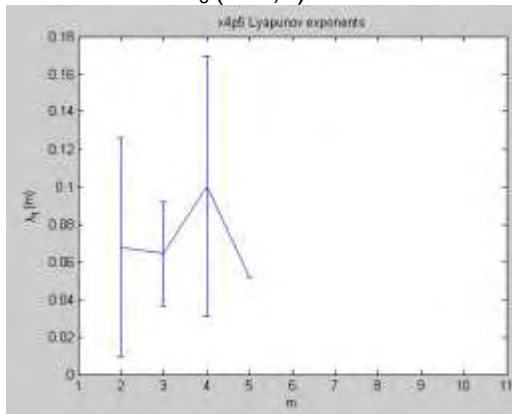
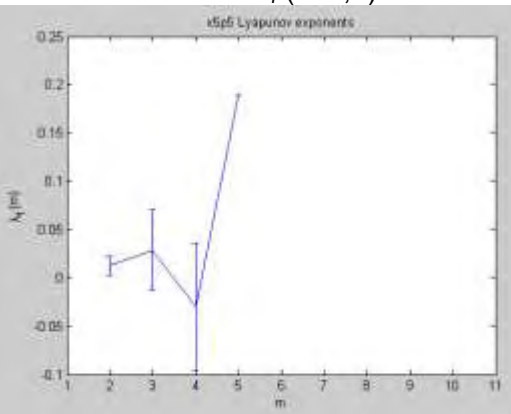
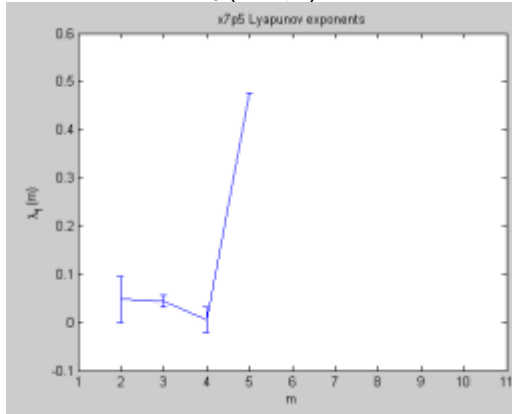
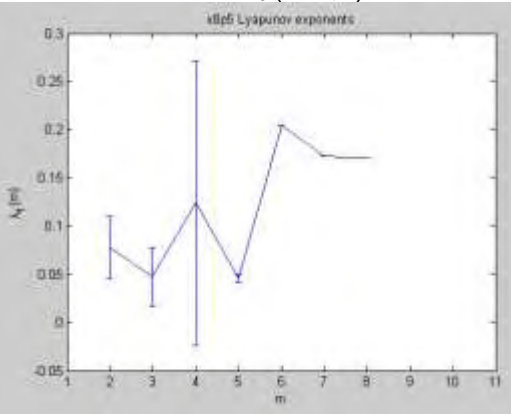
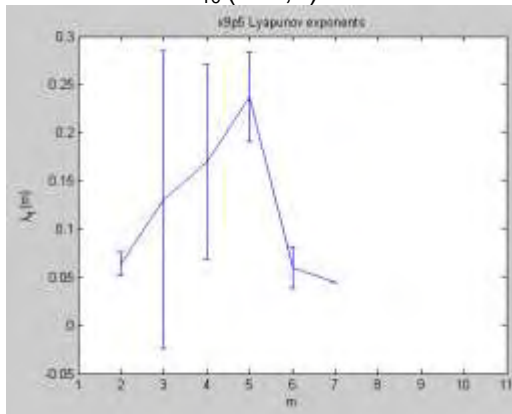
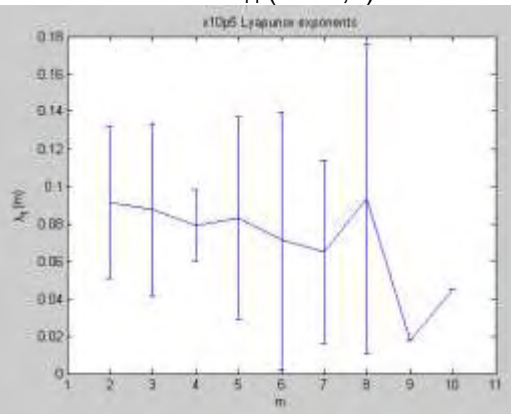


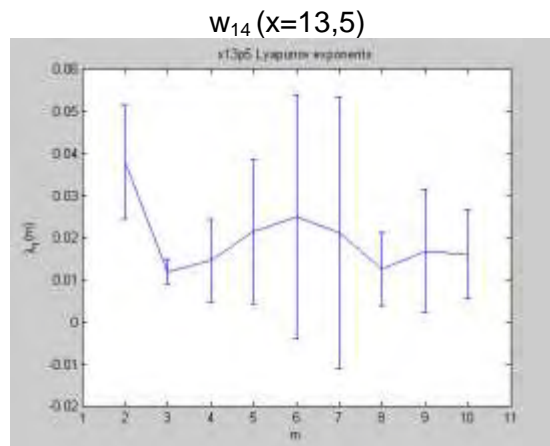
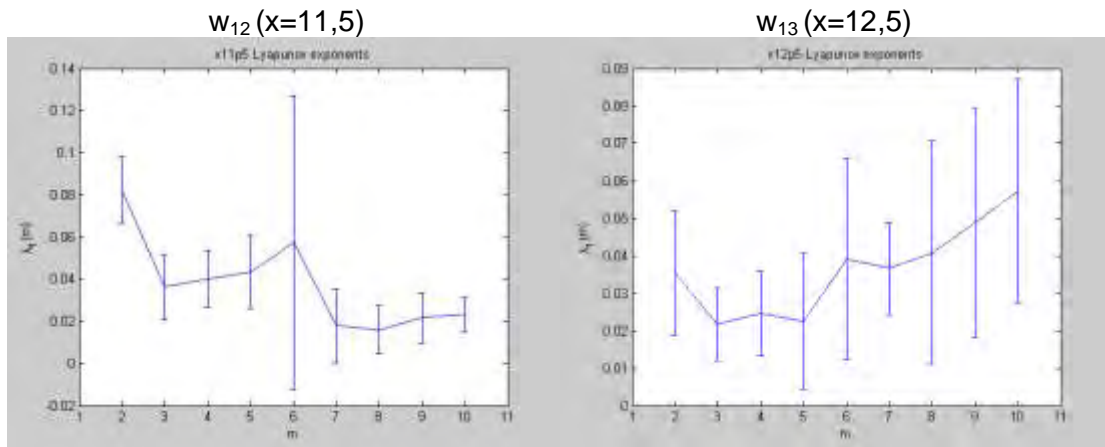
Σχήμα 5.26 : Παρουσίαση όλων των διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov της χρονοσειράς  $w_1$

Για τις υπόλοιπες χρονοσειρές  $w$  παραθέτουμε μόνο τα διαγράμματα των εκθετών.





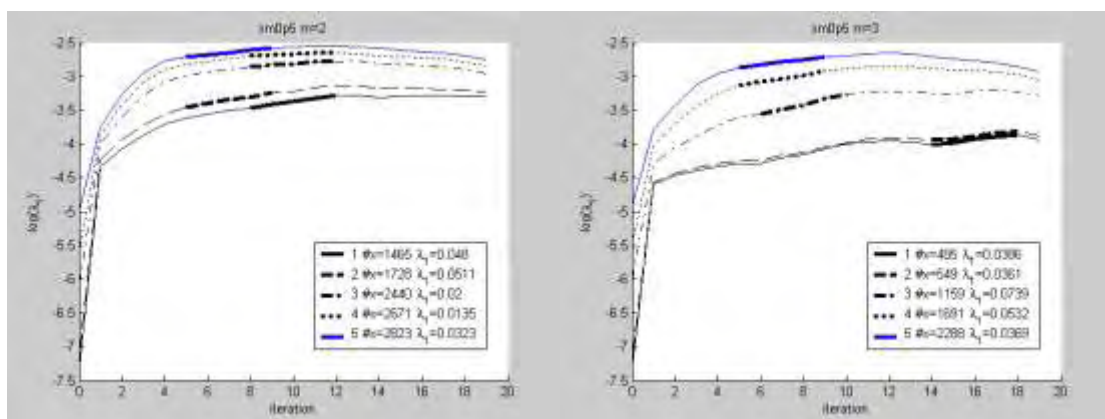
$w_4(x=2,5)$  $w_5(x=3,5)$  $w_6(x=4,5)$  $w_7(x=5,5)$  $w_8(x=7,5)$  $w_9(x=8,5)$  $w_{10}(x=9,5)$  $w_{11}(x=10,5)$ 

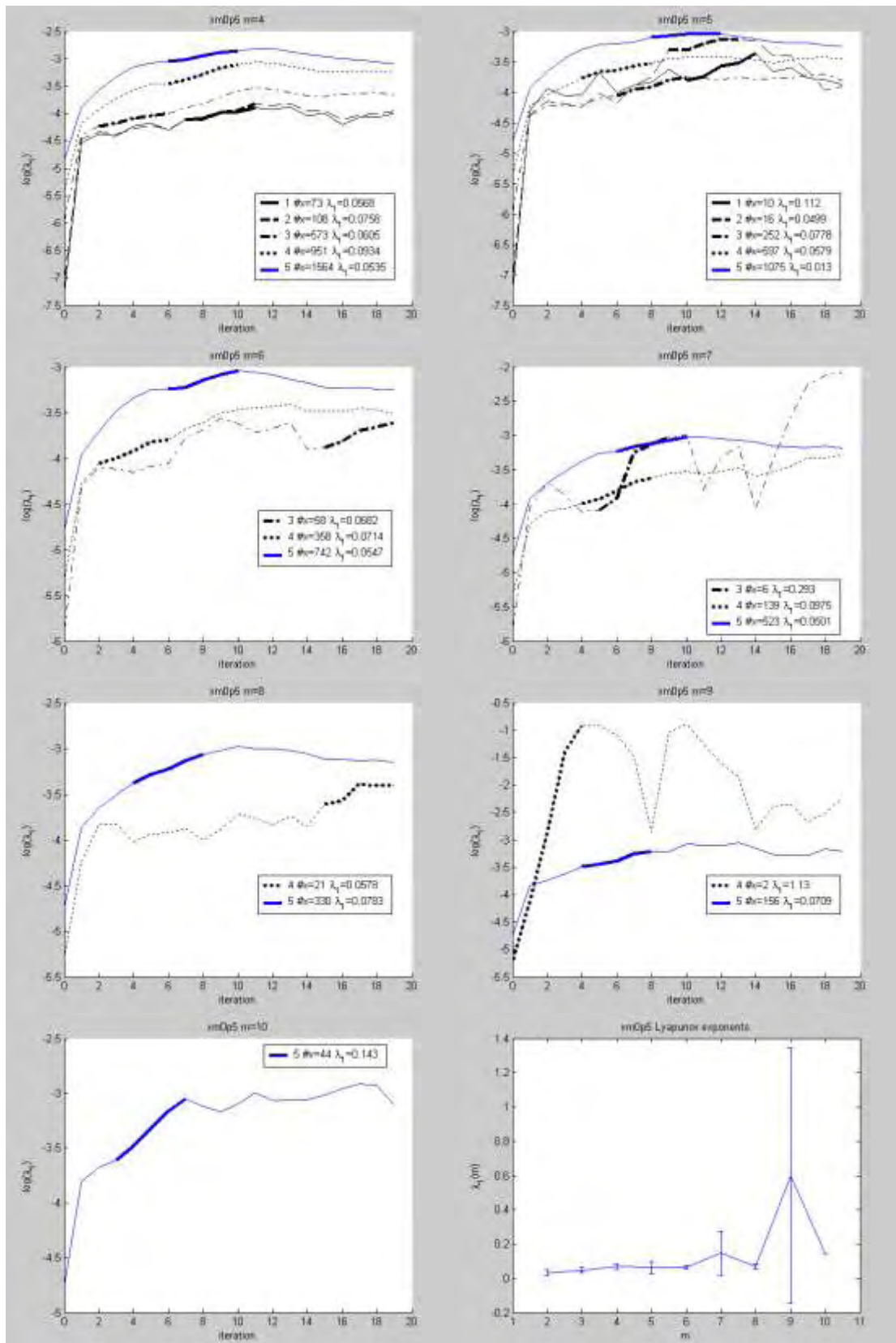


Σχήμα 5.27 : Εκτίμηση εκθέτη Lyapunov χρονοσειρών  $w_2$  έως  $w_8$

Χρονοσειρά q μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

$q_1(x=-0,5)$

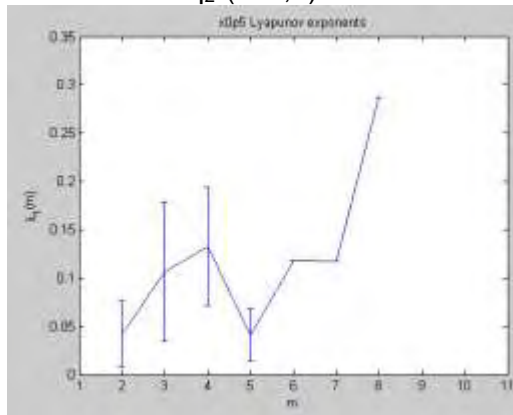




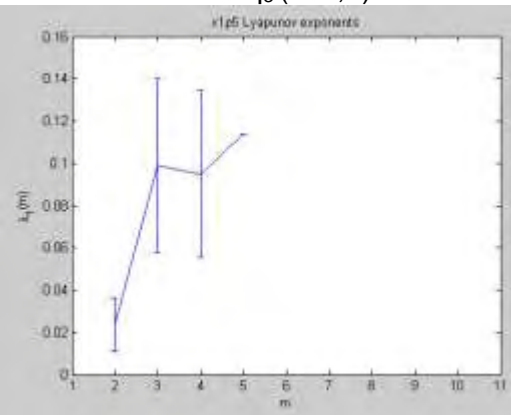
Σχήμα 5.28 : Παρουσίαση όλων των διαγραμμάτων για την εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov της χρονοσειράς  $x_1$

Για τις υπόλοιπες χρονοσειρές  $q$  παραθέτουμε μόνο τα διαγράμματα των εκθετών.

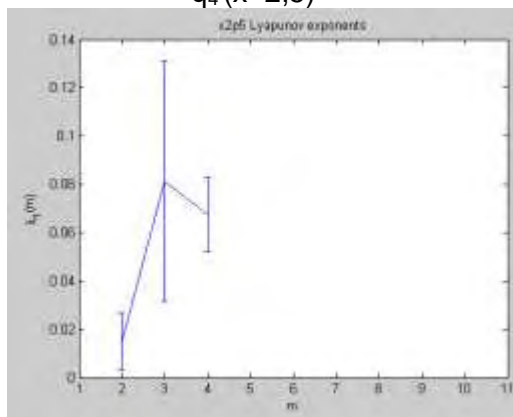
$q_2 (x=0,5)$



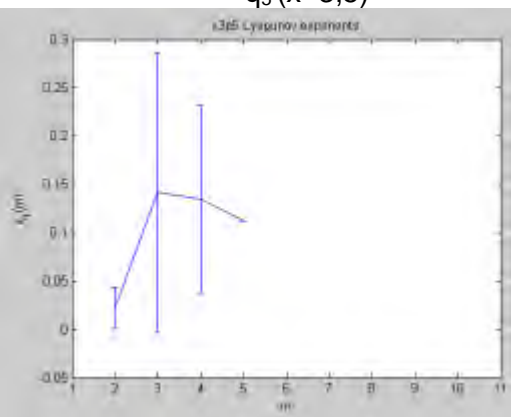
$q_3 (x=1,5)$



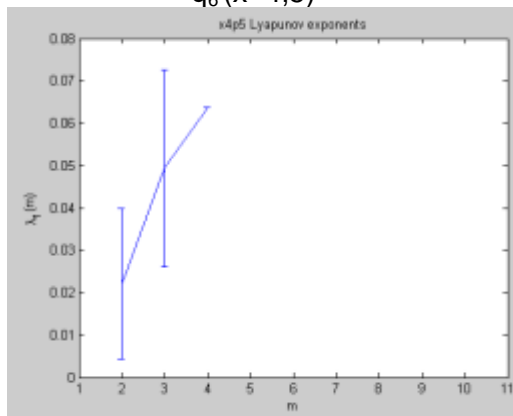
$q_4 (x=2,5)$



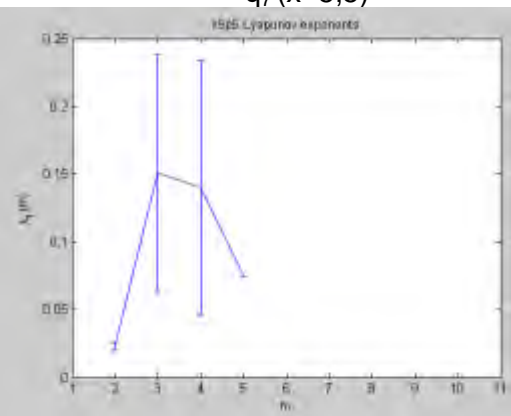
$q_5 (x=3,5)$



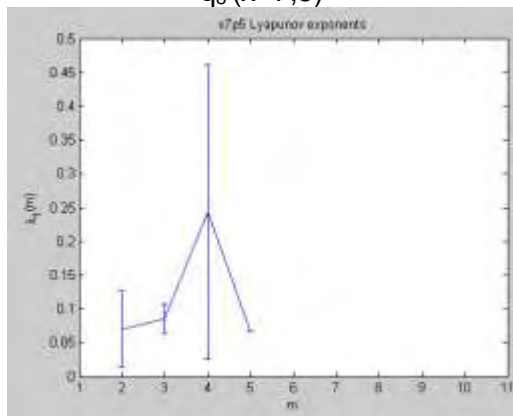
$q_6 (x=4,5)$



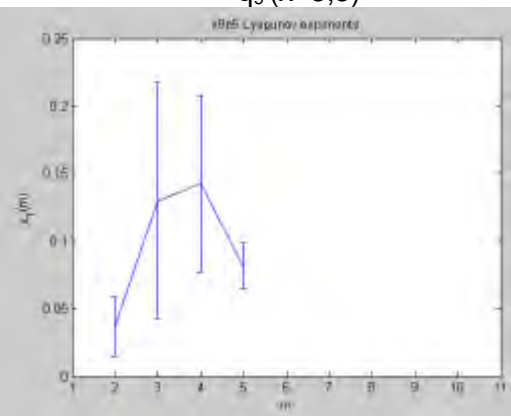
$q_7 (x=5,5)$

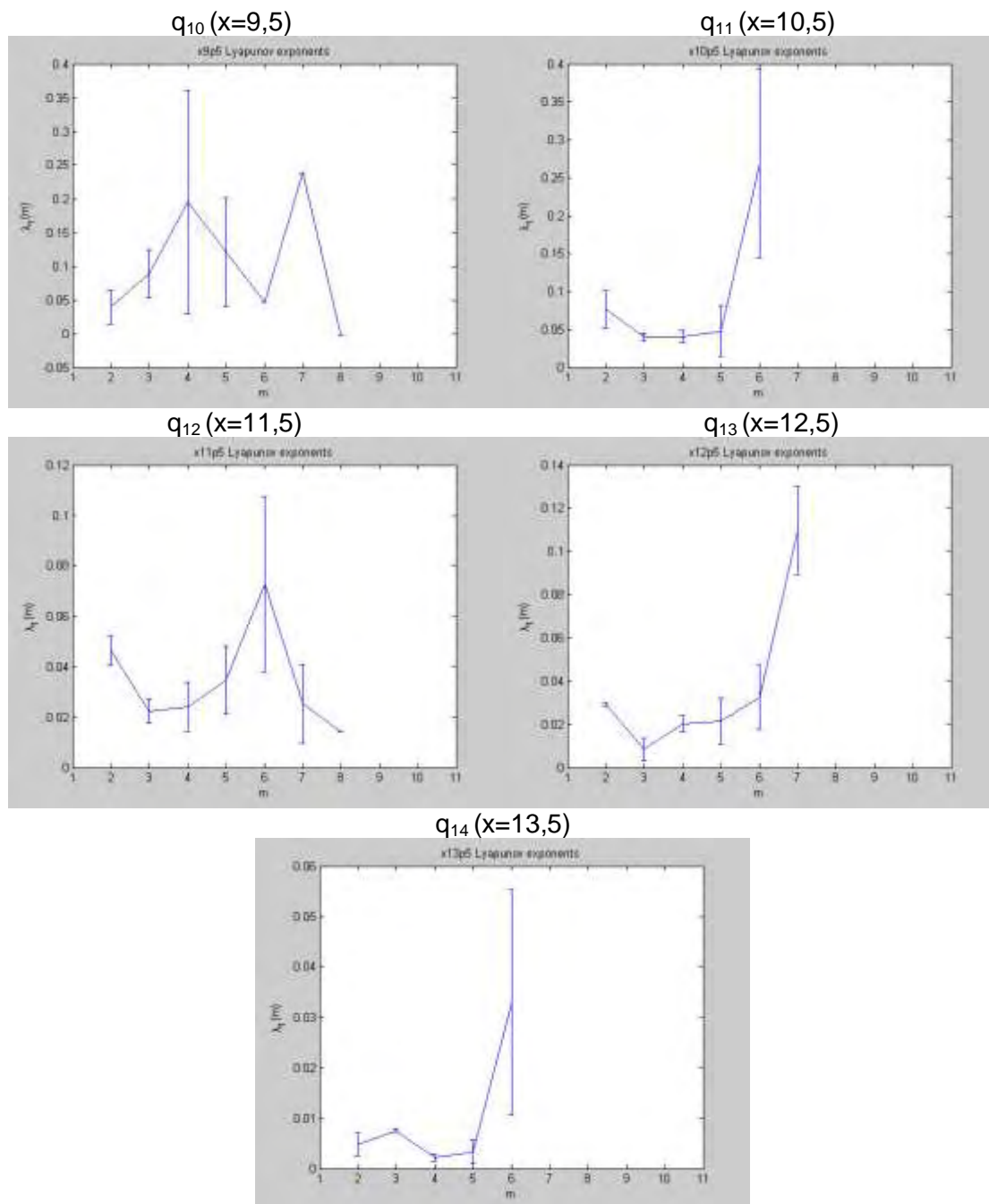


$q_8 (x=7,5)$



$q_9 (x=8,5)$





Σχήμα 5.29 : Εκτίμηση εκθέτη Lyapunov χρονοσειρών  $q_2$  έως  $q_8$

Παρατηρούμε ότι και στις δυο χρονοσειρές  $w$  και  $q$  :

- Οι μέγιστοι εκθέτες για όλες τις χρονοσειρές είναι θετικοί που σημαίνει ότι οι τροχιές είναι ασταθείς και κοντινά σημεία θα αποκλίνουν. Το δυναμικό σύστημα είναι μάλλον χαοτικό και ο εκθέτης περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο χάνεται η προβλεψιμότητα.
- Οι τιμές των σφαλμάτων είναι μεγάλες, σε μερικές χρονοσειρές πλησιάζουν την τιμή του εκθέτη και σε κάποιες είναι και μεγαλύτερες. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι το πλήθος των σημείων που έχουμε στη διάθεση μας

είναι πολύ μικρό και ο υπολογισμός έγινε για να εξαχθούν ποιοτικά συμπεράσματα.

- Να σημειωθεί ότι η ύπαρξη θετικών εκθετών Lyapunov αποτελεί ένδειξη χαοτικού συστήματος. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα παρά την περιορισμένη αξιοπιστία για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, ενισχύει την άποψη μας για την ύπαρξη μάλλον χαοτικής και γενικότερα πολύπλοκης συμπεριφοράς, η οποία εξαρτάται από τη θέση των σημείων μέτρησης (η οποία στην πραγματικότητα είναι συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα της φλέβας).

### **Συμπέρασμα**

Η ανάλυση των χρονοσειρών θερμοκρασίας από μετρήσεις σε θερμαινόμενη ελλειπτική εκτοξευόμενη φλέβα με γραμμικές και μη γραμμικές μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα καθώς μας επιτρέπει

- τον εντοπισμό του άξονα της φλέβας
- τις περιοχές μεταβάσεων που λαμβάνουν χώρα εκατέρωθεν του άξονα της φλέβας
- την εκτίμηση χαρακτηριστικών χρόνων μετάβασης

Συνεπώς είναι πολλά υποσχόμενη σε ανάλυση των αποτελεσμάτων για εντοπισμό μεταβάσεων και εκτιμήσεις χαρακτηριστικών χρόνων γιατί μπορεί να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με άλλες μεθόδους για την πληρέστερη κατανόηση πειραματικών αποτελεσμάτων.

Είναι ενδιαφέρον ότι η χρήση πρώτων διαφορών οδηγεί σε πιο ξεκάθαρο εντοπισμό του σημείου στο οποίο έχουμε σύμφωνα με τις εκτιμήσεις μας τον άξονα της φλέβας.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν με τη βοήθεια της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, αφ' ενός δεδομένα που προέρχονται από προσομοίωση της ροής Κοιμογορον και αφ' ετέρου πειραματικά δεδομένα εκτοξευόμενης θερμαινόμενης φλέβας.

Στην περίπτωση της ανάλυσης των χρονοσειρών της άμεσης προσομοίωσης της ροής Κοιμογορον ο αριθμός των δεδομένων 10.000 σημεία ήταν, θα μπορούσαμε να πούμε, ικανός να μας οδηγήσει σε κάποια συμπεράσματα για τα δυναμικά συστήματα που παράγουν τις σειρές.

Στα φάσματα ισχύος ανιχνεύθηκαν τρεις περιοχές χαμηλών, μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων και από τους εκθέτες που υπολογίσθηκαν διαπιστώθηκε διαφορετική συμπεριφορά των χρονοσειρών. Η ύπαρξη του θετικού εκθέτη σημαίνει μεγαλύτερη συνεισφορά στις υψηλές συχνότητες, ενώ του αρνητικού εκθέτη σημαίνει αντίστοιχα μικρότερη συνεισφορά. Επιπλέον παρατηρούμε διαφορετική συμπεριφορά αριστερά και δεξιά μιας χαρακτηριστικής συχνότητας. Η συχνότητα αυτή σχετίζεται μάλλον με τη μεγαλύτερη δίνη που μπορεί να χωρέσει στο κουτί της προσομοίωσης και την ταχύτητά της. Αριστερά και δεξιά οι συχνότητες αντιστοιχούν σε δίνες μικρότερου μεγέθους με χαρακτηριστικούς χρόνους (ταχύτητες) που είναι μικρότεροι αριστερά (μικρές συχνότητες) και μεγαλύτεροι δεξιά (μεγάλες συχνότητες). Η αρνητική κλίση στις μεγάλες συχνότητες δείχνει ότι οι δίνες που αντιστοιχούν σ' αυτές γρήγορα καταστρέφονται.

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης μας δείχνει ότι οι τιμές είναι μεγαλύτερες από αυτές που θα έπρεπε να έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα Takens αλλά και το πιο "χαλαρό" κριτήριο των Souer et al και αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα της πιθανής ύπαρξης υψηλοδιάστατου ελκυστή. Το σύστημα δηλαδή για να περιγραφεί θα χρειασθεί αρκετές εξισώσεις (βαθμοί ελευθερίας).

Ως ένα επιπλέον κριτήριο μη γραμμικότητας, η χρονοσειρά ελέγχθηκε με τη μέθοδο των υποκατάστατων δεδομένων, τα αποτελέσματα των οποίων έρχονται να καταδείξουν την πολυπλοκότητα του συστήματος.

Η εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό και ο εκθέτης περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο χάνεται η προβλεψιμότητα.

Στην περίπτωση της ανάλυσης των χρονοσειρών θερμοκρασίας σε θερμαινόμενη φλέβα, τα πειραματικά δεδομένα αν και λίγα, 3.200 σημεία λόγω της περιορισμένης χρονικά διάρκειας του πειράματος κατάφεραν να μας οδηγήσουν σε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα.



Κατ' αρχήν υπάρχει σε όλα τα διαγράμματα μια ασύμμετρη συμπεριφορά των χρονοσειρών που σχετίζεται με τη διαφορετική συμπεριφορά αυτών στο κέντρο της φλέβας από αυτή στα άκρα.

Στα φάσματα ισχύος υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές από ότι στις υψηλές συχνότητες. Έχουμε παρουσία μεγάλου εύρους συχνοτήτων από χαμηλές (μεγάλοι χρόνοι) ως υψηλές (μικροί χρόνοι) γεγονός που δείχνει την ύπαρξη μηχανισμών σε πολλές χρονικές κλίμακες με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών χρόνων. Είναι άλλωστε και αναμενόμενο κοντά στον άξονα της φλέβας όπου περιμένουμε να έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Στα άκρα της φλέβας παρατηρούμε μετατόπιση προς χαμηλές συχνότητες (μεγάλοι χρόνοι), όπου παρατηρούνται μεγάλες δομές που “ταξιδεύουν” αργά. Ανιχνεύθηκαν και εδώ τρεις περιοχές χαμηλών, μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων όπου η διαφορετική συμπεριφορά μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνεισφορά του φαινομένου δεν είναι ίδια παντού. Ειδικά στις υψηλές συχνότητες (άκρα φλέβας) η συνεισφορά των φαινομένων με μικρό χαρακτηριστικό χρόνο είναι μειούμενη. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς προς τα άκρα της φλέβας η συνεισφορά των μικρών δομών είναι μικρότερη απ' ότι στο κέντρο.

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης, όπως και στην περίπτωση της ροής Kolmogorov, μας οδηγεί στο συμπέρασμα της πιθανής ύπαρξης υψηλοδιάστατου ελκυστή, που χρειάζεται αρκετές εξισώσεις για να περιγραφεί. Επιπλέον στο κέντρο της φλέβας όπου έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη έχουμε αυξημένη πολυπλοκότητα, σε αντίθεση με τα άκρα όπου έχουμε μικρότερες τιμές της διάστασης συσχέτισης και συνεπώς μειωμένη πολυπλοκότητα.

Η εκτίμηση του εκθέτη Lyapunov μας οδηγεί στο συμπέρασμα της ύπαρξης μάλλον χαοτικής και γενικότερα πολύπλοκης συμπεριφοράς, η οποία εξαρτάται από τη θέση των σημείων μέτρησης, η οποία στην πραγματικότητα είναι συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα της φλέβας.

Γενικά, η ανάλυση των χρονοσειρών θερμοκρασίας από μετρήσεις σε θερμαινόμενη ελλειπτική εκτοξευόμενη φλέβα με γραμμικές και μη γραμμικές μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα καθώς μας επιτρέπει τον εντοπισμό του άξονα της φλέβας, τις περιοχές μεταδόσεων που λαμβάνουν χώρα εκατέρωθεν του άξονα της φλέβας και οδηγεί στην εκτίμηση χαρακτηριστικών χρόνων μετάδοσης. Η ανάλυση αυτή μπορεί να λειτουργήσει συμπληρωματικά με άλλες μεθόδους για την πληρέστερη κατανόηση πειραματικών αποτελεσμάτων.

Θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί η παρούσα ανάλυση σε πιο πολύπλοκες μεταβάσεις όπως σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις ροών.



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- Borue V. and S.A. Orszag, (1996) Numerical study of three-dimensional Kolmogorov flow at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 306, 293-323.
- Chatfield Chris, (2004) *The analysis of Time Series: An introduction*, 6th edition, Chapman & Hall/CRC.
- Grassberger P. Procaccia I. (1983) Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, Vol. 9, pp.189-208.
- Hegger R., H. Kantz, and T. Schreiber, (1999) Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *CHAOS* 9, 413.
- Islsker H., (2006) Σημειώσεις μαθήματος, ΑΠΘ.
- J.V. Shebalin and S.L. Woodruff, (1997) Kolmogorov flow in three dimensions, *Phys. Fluids*. 9, 164-170.
- Julien Clinton Sprott, (2003) *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press.
- Kantz H and Schreiber T, (2003) *Nonlinear Time Series Analysis*, 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge.
- Kantz H., (1994) A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Physics Letters A*, Vol 185, pp 77.
- Karakasidis T.E., A. Liakopoulos, A. Fragkou, P. Papanicolaou, ((2009) "Recurrence Quantification Analysis of Temperature Fluctuations in a Horizontal Round Heated Jet", *International Journal of Bifurcation and Chaos* 19, 2487).
- Lorenz E.N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130-41.
- Michas Spyros N., Panos N. Papanicolaou, (2009) Horizontal round heated jets into calm uniform ambient, *Desalination* 248 803–815.
- Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld , (1988) Self-organized criticality, *Phys. Rev. A* 38, 364–374.
- Rosenstein M.T., Collins J.J. and De Luca C.J., (1993) "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets", *Physica D*, Vol 65, pp 117.
- Sarris, I. E., H. Jeanmart, D. Carati and G. S. Winckelmans, 'Box-size dependency and breaking of translational invariance in the velocity statistics computed from three-dimensional turbulent Kolmogorov flows', *Physics of Fluids*, vol. 19, 095101, 2007.
- Sauer, T., J., A. Yorke, M. Casdagli (1991), *Embedology*. *Journal of Statistical Physics* 65(3/4). 579-616

- Schreiber T and Schmit A. (2001) Surrogate time series.
- Schreiber T, Kantz H, Hegger R. (1998) Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package.
- Takens F. (1981) Detecting strange attractors in turbulence, Dynamical Systems and Turbulence, Warwinc 1980, Lecture Notes in Mathematics 898, editors: Rand D. A. and Young L.-S., Springer, Berlin, pp. 361-381.
- Theiler J. (1990) Estimating fractal dimension, Optical Society of America A, Vol 7, pp. 1055-1073.
- Tsonis A.A. (1992) Chaos: from theory to applications, Plenum, New York.
- Κόλυβα Φ. και Μπόρα Ε. (1998) Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές, ΖΗΤΗ.
- Κουγιουμτζής Δ., (2005) Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών, Πρακτικά 18ου Θερινού Σχολείου και Πανελληνίου Συνεδρίου στη Μη-γραμμική επιστήμη και Πολυπλοκότητα.
- Κουγιουμτζής Δημήτρης, (2006) Σημειώσεις «Μη γραμμική Ανάλυση Χρονοσειρών», ΑΠΘ.
- Μιμίκου Μ., (1994 Κεφάλαιο 4, Ανάλυση Υδρολογικών Σειρών, Στο *Τεχνολογία Υδατικών Πόρων*, β' έκδοση, Παπασωτηρίου).
- Μίχα Σπυρίδων, Διδακτορική διατριβή, (Ιούλιος 2008) «ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ, ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΗ ΑΚΙΝΗΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ», Επιβλέπων: Παναγιώτης Παπανικολάου.
- Παπαϊωάννου Γ., (1999) Χαοτικές Χρονοσειρές, Θεωρία και Πράξη, , Leader Books,.
- Συριόπουλος Κ. και Λεοντίσης Α., (2000) Χάος, Ανάλυση και πρόβλεψη χρονοσειρών, Εκδόσεις Ανικούλα, Θεσσαλονίκη.