

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Τομέας Δομοστατικής Μηχανικής

ΕΞΥΠΝΕΣ ΥΦΑΣΜΑΤΙΝΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Διδακτορική διατριβή του

Κορδολέμη Αλέξη

Βόλος, Οκτώβριος 2013

στον θείο μου, τον Παναγιώτη Αλεξίου,
που έφυγε νωρίς

Κι αν είσαι στο σκαλί το πρώτο, πρέπει
νάσαι υπερήφανος κ' ευτυχισμένος.
Εδώ που έφθασες, λίγο δεν είναι·
τόσο που έκαμες, μεγάλη δόξα.
Κι αυτό ακόμη το σκαλί το πρώτο
πολύ από τον κοινό τον κόσμο απέχει.
Εις το σκαλί για να πατήσεις τούτο
πρέπει με το δικαίωμά σου νάσαι
πολίτης εις των ιδεών την πόλη.
Και δύσκολο στην πόλη εκείνην είναι
και σπάνιο να σε πολιτογραφήσουν.

Το πρώτο σκαλί(1899)
Κ. Π. Καβάφης

Ευχαριστίες

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνεται η διδακτορική μου διατριβή η οποία εκπονήθηκε σε μια περίοδο 3.5 ετών περίπου, από τον Γενάρη του 2010 έως τον Ιούλιο του 2013, στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας στο Βόλο.

Στο τέλος κάθε μακράς, διαρκούς και επίπονης δοκιμασίας σε ατομικό επίπεδο ανακύπτουν υποσυνείδητα ορισμένα ερωτήματα υπαρξιακού τύπου και νιώθεις την ανάγκη να κάνεις μια σούμα, έναν τελικό απολογισμό. Εκείνο που μπορώ να καταθέσω με απόλυτη βεβαιότητα και ειλικρίνεια είναι ότι η συγκεκριμένη περίοδος αποτέλεσε την πιο δημιουργική περίοδο της ζωής μου. Πέραν της όποιας τεχνικής κατάρτισης απέκτησα το σημαντικότερο που κατάφερα ήταν να γνωρίσω τον ίδιο μου τον εαυτό, να αναγνωρίσω τα προτερήματα και τα ελαττώματά μου και να συναντήσω τα όριά μου. Ουσιαστικά, η εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής αποτέλεσε μια προσωπική ενδοσκόπηση αφού με έφερε πρόσωπο με πρόσωπο με τις αδυναμίες μου. Αν θες να συνεχίσεις και να πας μπροστά πρέπει να τις αντιμετωπίσεις ολομέτωπα, ειδάλλως μένεις κάπου εκεί, στάσιμος, ή ακόμη χειρότερα, γυρνάς πίσω.

Η ολοκλήρωση της διατριβής, που αποτελούσε τον τελικό στόχο, προέκυψε από την επίτευξη επιμέρους στόχων τους οποίους κατακτούσα μέρα με τη μέρα όλη αυτή την περίοδο. Η ανάλυση του εκάστοτε προβλήματος, η αξιολόγηση της υπάρχουσας γνώσης σχετικά με αυτό και η σύνθεση νέας γνώσης αποτελούσαν τα κύρια χαρακτηριστικά του κάθε επιμέρους στόχου. Αυτή η προσπάθεια θα ήταν αδύνατο να τελεσφορήσει και να δώσει ένα ολοκληρωμένο αποτέλεσμα εάν δεν είχα την καθοδήγηση και την αμέριστη συμπαράσταση του επιβλέποντα αυτής της διατριβής Καθηγητή Π.Θ. Αντώνη Γιαννακόπουλου. Δεν θα ξεχάσω ποτέ τις ατελείωτες ώρες συζητήσεων και δημιουργικής συνεργασίας που είχα μαζί του. Υπήρξε πραγματικά ο μέντοράς μου και τον ευχαριστώ από καρδιάς που με δίδαξε τον τρόπο να σκέφτομαι και να μαθαίνω. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Αράβα Νικόλαο, Καθηγητή Π.Θ. του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών καθώς και τον κ. Χαιδεμενόπουλο Γρηγόρη, Καθηγητή Π.Θ. του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών για τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον πατέρα μου, Μιχάλη, την μητέρα μου, Μαρία και τον αδερφό μου, Κώστα, στους οποίους οφείλω τα πάντα.

Βόλος, Οκτώβριος 2013

Αλέξης Κορδολέμης

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε με χρηματοδότηση από το πρόγραμμα Ηράκλειτος II.



Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο 1.....	7
Γενικά περί υφασμάτων.....	7
1.1. Η δομή του πλεκτού υφάσματος.....	7
1.2. Τα είδη της πλέξης των νημάτων.....	9
1.3. Η μοντελοποίηση του υφάσματος.....	11
Κεφάλαιο 2.....	13
Μηχανισμοί τριβής και απώλειας ενέργειας των υφασμάτων.....	13
2.1. Εισαγωγή.....	13
2.2. Εφελκυσμός των νημάτων.....	13
2.3. Η αποπτύχωση των νημάτων.....	14
2.4. Η διάτμηση των νημάτων.....	20
Κεφάλαιο 3.....	29
Η μηχανική των επαφών στα υφάσματα.....	29
3.1. Εισαγωγή.....	29
3.2. Η επιφάνεια επαφής.....	30
3.3. Η θεωρία του Hertz.....	32
3.4. Η σχετική στροφή των νημάτων μέσα στο ύφασμα.....	34
3.5. Η σχετική ολίσθηση των νημάτων μέσα στο ύφασμα.....	41
Κεφάλαιο 4.....	44
Δοκοί με αρχική στροφή και αξονική δύναμη.....	44
4.1. Εισαγωγή.....	44
4.2. Κινηματική και γραμμική ανάλυση των παραμορφώσεων.....	45
4.3. Η ελαστική παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού με αρχική στροφή.....	49
4.4. Εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και συνακόλουθες συνοριακές συνθήκες.....	52
4.5. Συμπύκνωση των εξισώσεων και δημιουργία μονοδιάστατου μοντέλου ράβδου.....	55
4.6. Μονοδιάστατο στατικό ελαστικό μοντέλο με θεωρία βαθμίδας.....	58
4.7. Επίλυση του προβλήματος.....	60
4.8. Παραδείγματα.....	66
Κεφάλαιο 5.....	77
Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου.....	77
5.1. Εισαγωγή.....	77
5.2. Θεωρίες ανώτερης βαθμίδας.....	78
5.3. Θεωρίες ανώτερης τάξης.....	79

5.4. Η θεωρία των τάσεων ζεύγους	80
5.5. Διδιάστατη γραμμική ισότροπη ελαστικότητα μικρών παραμορφώσεων	94
5.6. Η κυψελωτή διατομή	117
Κεφάλαιο 6.....	127
Η μικροπολική θεωρία σε εύκαμπτους φορείς	127
6.1. Εισαγωγή	127
6.2. Η θεωρία των τάσεων διπόλου σε πολικές συντεταγμένες	127
Κεφάλαιο 7.....	149
Η ανάλυση της μικροδομής	149
7.1. Εισαγωγή	149
7.2. Πεπερασμένες ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις	150
7.2.1. Ομογενείς ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις	151
2.3.1. Οι τανυστές της παραμόρφωσης.....	152
7.4. Βασικές αρχές των υλικών σωμάτων.....	157
7.5. Κινήσεις στερεού σώματος	160
7.6. Η κινηματική των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων.....	163
7.7. Η θερμοδυναμική προσέγγιση.....	170
Κεφάλαιο 8.....	175
Μαγνητισμός.....	175
8.1. Εισαγωγή	175
8.2. Ο ηλεκτρισμός.....	175
8.3. Μεταλλικά γυαλιά (metallic glasses)	179
8.4. Μαγνητοδιαστολή (magnetostriction)	181
8.5. Επίδραση μηχανικών τάσεων στις μαγνητικές ιδιότητες του σώματος.....	183
8.6. Η μαγνήτιση του υλικού σώματος	186
8.7. Ευθύ και αντίστροφο φαινόμενο Wiedemann.....	195
8.8. Πειραματική διαδικασία	199
Παράρτημα Α. Επίπεδη ένταση	204

Κεφάλαιο 1

Γενικά περί υφασμάτων

1.1. Η δομή του πλεκτού υφάσματος

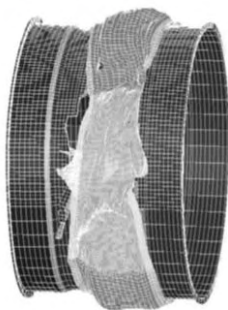
Τα υφασμάτινα υλικά χρησιμοποιούνται σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές. Η πιο κοινή χρήση των υφασμάτων είναι ο ρουχισμός, όμως οι εξαιρετικές μηχανικές τους ιδιότητες προσέλκυσαν το ενδιαφέρον των ερευνητών που ασχολούνται με τεχνολογικές και κατασκευαστικές εφαρμογές. Στην αυτοκινητοβιομηχανία χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι αερόσακοι και οι ζώνες ασφαλείας, Σχ. 1(a),(b). Στην στρατιωτική βιομηχανία τα αλεξιπτώτα, οι τέντες παραλλαγής και τα αλεξίσφαιρα γιλέκα αποτελούν πεδίο εκτεταμένης έρευνας από πολλούς ερευνητές ανά τον κόσμο, Σχ. 1(d). Στην αεροπορική επιστήμη ορισμένα πολύ σημαντικά εξαρτήματα, όπως τα προστατευτικά καλύμματα των κινητήρων, Σχ. 1(c), κατασκευάζονται από προηγμένα υφάσματα με κύρια χαρακτηριστικά τους το μικρό βάρος τους και την μεγάλη αντοχή τους σε εντός του επιπέδου καταπονήσεις.



(a)



(b)



(c)



(d)

Σχ 1.1 Χαρακτηριστικές εφαρμογές των υφασμάτινων υλικών (a) αερόσακοι (b) ζώνες ασφαλείας ((c) προστατευτικά καλύμματα μηχανών αεροσκαφών (d) αλεξίσφαιρα γιλέκα.

Το θεμελιώδες δομικό στοιχείο οποιουδήποτε υφάσματος είναι η ίνα (fiber). Η ίνα είναι ένα ευθύγραμμο σώμα, συνήθως κυκλικής διατομής, όπου ο λόγος του μήκους προς την διάμετρό του είναι αρκετά μεγάλος. Το μέγεθος της ίνας (fiber size) μπορεί να οριστεί μέσω της διαμέτρου της μετρούμενης σε μικρόμετρα (μm) ή μέσω της γραμμικής πυκνότητας που είναι το βάρος της ανά μονάδα μήκους. Οι συνήθεις μονάδες μέτρησης της γραμμικής πυκνότητας είναι το *denier*, που αναφέρεται στην μάζα σε γραμμάρια ανά 9000m ίνας και το *tex* που είναι η μάζα σε γραμμάρια ανά 1000m ίνας. Οι ίνες κατατάσσονται σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το υλικό από το οποίο κατασκευάζονται, τις φυσικές και τις τεχνητές. Οι φυσικές ίνες αποτελούν προϊόντα της γεωργίας, όπως είναι το βαμβάκι, ή της ίδιας της φύσης, όπως είναι το μετάξι και το μαλλί ή ιστοί των ζώων. Τα μήκη των φυσικών ινών κυμαίνονται μεταξύ 2–50cm. Οι φυσικές ίνες παρουσιάζουν μια μεγάλη ποικιλομορφία όσον αφορά το μέγεθος, το μήκος και το σχήμα τους. Οι τεχνητές ίνες αποτελούν προϊόν ειδικής επεξεργασίας και κατασκευάζονται από διαφόρων ειδών υλικά, όπως είναι το γυαλί, ο πολυεστέρας, ο άνθρακας, τα κεραμικά, κ.α. Τα μήκη των τεχνητών ινών δεν έχουν όρια και μπορούν να κατασκευαστούν κατά το δοκούν. Τυπικά μεγέθη και μήκη ινών αναφέρονται στον Πίνακα 1.1.

Υλικό της ίνας	Διάμετρος ίνας (μm)	Γραμμική πυκνότητα (denier) ($gr/9000m$)	Τυπικό μήκος (cm)
Βαμβάκι	12–20	1.50	0.32–6.50
Ζωικό μαλλί	14–45	4.0	5–15
μετάξι	12–30	1.0	≈ 30.000
πολυεστέρας	12–25	2.0	απεριόριστο

Πίνακας 1.1.. Τυπικές γεωμετρικές και φυσικές τιμές για διάφορα είδη ινών.

Από την συνένωση μιας ομάδας ινών προκύπτει το νήμα (yarn), που αποτελεί βασικό δομικό στοιχείο του υφάσματος. Η συνένωση των ινών, προκειμένου να δημιουργηθεί το νήμα, μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς και διάφορους τρόπους όπως είναι η απλή παράθεση με παράλληλους τους διαμήκεις άξονες (roving). Η πιο διαδεδομένη μέθοδος συνένωσης των ινών είναι η περιτύλιξή τους (spinning). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο ένας αρκετά μεγάλος αριθμός ινών τοποθετούνται κολλητά έχοντας τους άξονές τους παράλληλους και εν συνεχεία συστρέφονται ώστε η μία να εμπλακεί με την άλλη. Με αυτή την μικρή συστροφή αυξάνεται η συνοχή μεταξύ των ινών και το νήμα αποκτά μια πιο συνεκτική και πιο σταθερή δομή. Σε κάθε περίπτωση, η συνεκτικότητα και η αντοχή του νήματος μπορεί να αυξηθεί σημαντικά με την χρήση κολλητικής ουσίας μεταξύ των ινών.

Οι μηχανικές ιδιότητες του νήματος εξαρτώνται από τις μηχανικές ιδιότητες των ινών, από την τριβή μεταξύ των ινών λόγω της μεταξύ τους εμπλοκής και από τον αριθμό των ινών ανά μονάδα μήκους του νήματος. Η κυρίαρχη μηχανική ιδιότητα του νήματος είναι η εφελκυστική του αντοχή η οποία θεωρείται ότι δίνεται από το άθροισμα της εφελκυστικής αντοχής των επιμέρους ινών από τις οποίες αποτελείται. Τα είδη ινών που χρησιμοποιούνται στις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές ποικίλουν ανάλογα με τον σκοπό που επιθυμούμε να επιτελεί το

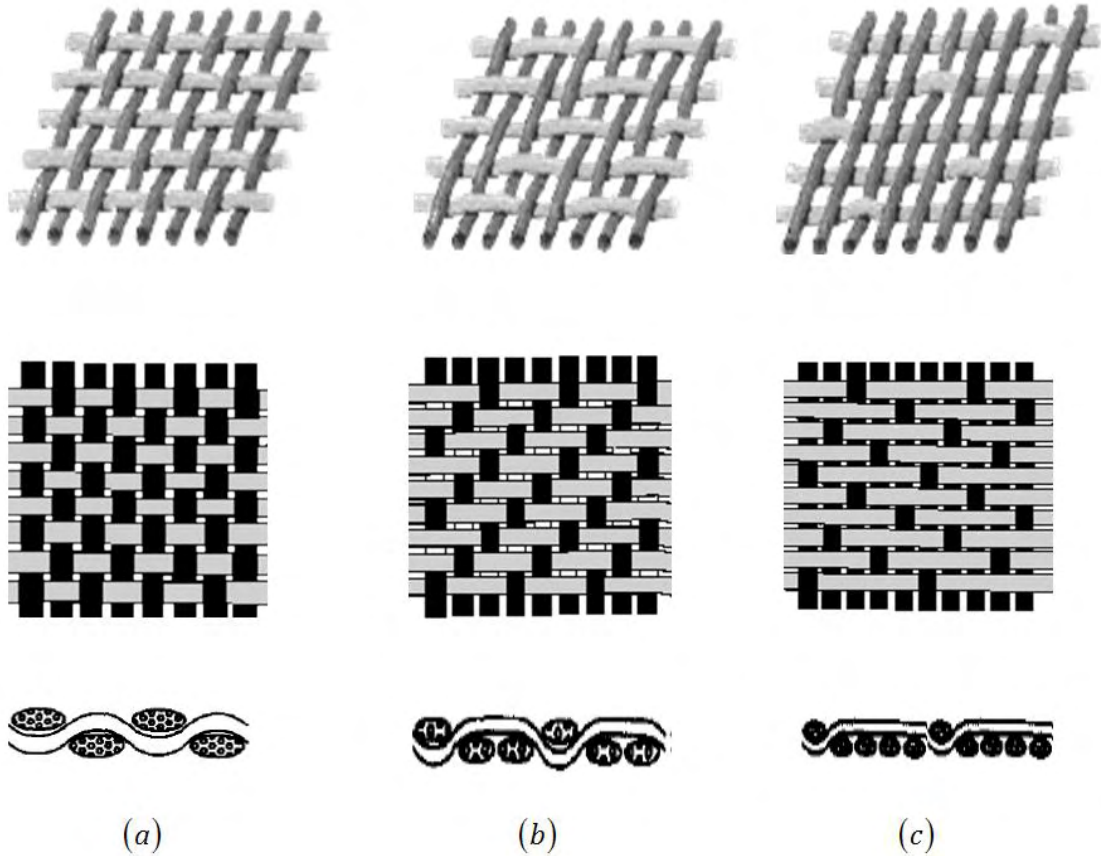
τελικό προϊόν. Οι ίνες από γυαλί (glass fibers) χρησιμοποιούνται κυρίως για αντίσταση σε φωτιά και έχουν ευρύτατη εφαρμογή στις τηλεπικοινωνίες με τις οπτικές ίνες από γυαλί. Οι ίνες από πολυεστέρα (polyester fibers) χρησιμοποιούνται ευρύτατα στον αθλητισμό καθώς τα αθλητικά προϊόντα από ίνες πολυεστέρα διότι έχουν την ιδιότητα να απορροφούν και να συγκρατούν την υγρασία του σώματος στα εξωτερικά στρώματα του υφάσματος μακριά από το σώμα του αθλητή. Οι ίνες από άνθρακα (carbon fibers) χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την αύξηση της αντοχής του υφάσματος. Ανάλογα με την μέθοδο κατεργασίας οι ίνες αυτού του είδους παρουσιάζουν διαφορές στην μηχανική αντοχή, στην ακαμψία, στην ηλεκτρική αγωγιμότητα, στην αντίσταση σε χημικές δράσεις, κ.α. Η κύρια μεταβλητή όλων των παραπάνω ιδιοτήτων είναι η περιεκτικότητα των ινών σε άνθρακα, συνήθως κυμαίνεται στο 92%. Οι ίνες από κεραμικά (ceramic fibers) παρουσιάζουν μια εξέχουσα ιδιότητα, που είναι η πολύ καλή αντοχή στις υψηλές θερμοκρασίες. Παρουσιάζουν μια σταθερότητα στη δομή τους όταν οι θερμοκρασία μεταβάλλεται, έχουν πολύ μικρό βάρος, μεγάλο συντελεστή θερμικής αποκοπής και μια αξιοσημείωτη μηχανική αντοχή. Οι ίνες από αραμίδιο (aramid fibers), όπως το Kevlar, λόγω της χημικής τους σύστασης παρουσιάζουν μια πολύ καλή αντοχή στην κρούση και για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην κατασκευή αλεξίσφαιρων γιλέκων.

1.2. Τα είδη της πλέξης των νημάτων

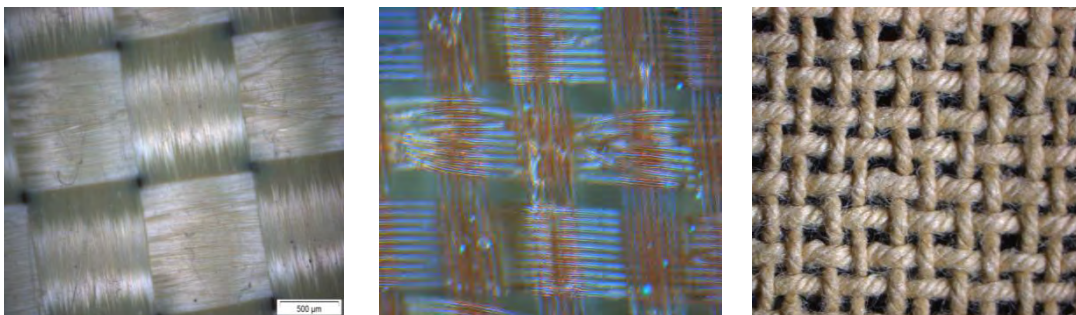
Η πλέξη των υφασμάτων κατασκευών χαρακτηρίζεται από τον τρόπο με τον οποίο το ένα νήμα τοποθετείται στο χώρο σε σχέση με το άλλο και αποτελεί ένα βασικό κατασκευαστικό κριτήριο σύμφωνα με το οποίο κατηγοριοποιούνται τα υφάσματα. Στην μια κατηγορία εντάσσονται τα αποκαλούμενα πλεκτά υφάσματα (woven fabrics) τα οποία προκύπτουν έπειτα από μια προεπιλεγμένη και διατεταγμένη πλέξη των νημάτων. Στην άλλη κατηγορία περιλαμβάνονται τα υφάσματα που προκύπτουν από νήματα που προσκολλούνται μεταξύ τους είτε με μηχανικό, είτε με χημικό, είτε με θερμικό τρόπο έχοντας μια τυχαία διάταξη, διαμορφώνοντας πολύ λεπτά φύλλα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα υφασμάτων της τελευταίας κατηγορίας αποτελούν οι πάνες για τα μωρά, τα γευυφάσματα, τα φίλτρα του καφέ, οι ιατρικές γάζες, οι χαρτοσακούλες για τις ηλεκτρικές σκούπες κλπ. Η παρούσα εργασία θα εστιάσει στην πρώτη κατηγορία των πλεκτών υφασμάτων κατασκευών όπου τα νήματα εμπλέκονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο και στοχευμένο τρόπο.

Η δομή των πλεκτών υφασμάτων χαρακτηρίζεται από δύο κύριες ομάδες νημάτων. Τα νήματα που διατρέχουν το ύφασμα κατά την έννοια του μήκους τα οποία θα λέγονται στημόνια (warp yarns) και τα νήματα που διατρέχουν το ύφασμα κατά την έννοια του πλάτους τα οποία θα λέγονται υφάδια (weft yarns). Ο τρόπος που εμπλέκονται μεταξύ τους τα στημόνια και τα υφάδια καθορίζει και το είδος της πλέξης του υφάσματος. Στη σημερινή εποχή με την ραγδαία εξέλιξη στον τομέα της κλωστοϋφαντουργίας τα μοτίβα της πλέξης των νημάτων είναι πάρα πολλά και μια προσπάθεια πλήρους αναφοράς θα ήταν μάλλον ατελέσφορη και επουσιώδης στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής. Η παρούσα εργασία πραγματεύεται υφάσματα που χαρακτηρίζονται από την πιο απλή μορφή πλέξης (plain weave) Σχ.1.2, και συγκεκριμένα με την μορφή που απεικονίζεται στο Σχ.1.2α, η οποία χαρακτηρίζεται από την διαδοχική σταυρωτή πλέξη των νημάτων στις δύο κύριες κατευθύνσεις του υφάσματος. Η επιλογή αυτή καλύπτει, από την μια πλευρά, ένα μεγάλο φάσμα πρακτικών εφαρμογών υφασμάτων υψη-

λής τεχνολογίας, Σχ.1.3, και από την άλλη, αποτελεί μια ικανή πλατφόρμα ανάδειξης όλων των βασικών μηχανισμών παραμόρφωσης που σχετίζονται με την μηχανική συμπεριφορά των υφασμάτων.



Σχ.1.2. Σχηματική απεικόνιση της εναλλασσόμενης σταυρωτής πλέξης (α) διαδοχική πλέξη (β) διαδοχική ανά δύο (γ) διαδοχική ανά τέσσερα.



Σχ 1.3. Σχηματική απεικόνιση των νημάτων στο εσωτερικό του υφάσματος (α) ίνες Kevlar (β) αλεξιπτώτο (γ) ίνες από βαμβάκι. (φωτογραφίες από το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο του εργαστηρίου Οπλισμένου Σκυροδέματος του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας)

1.3. Η μοντελοποίηση του υφάσματος

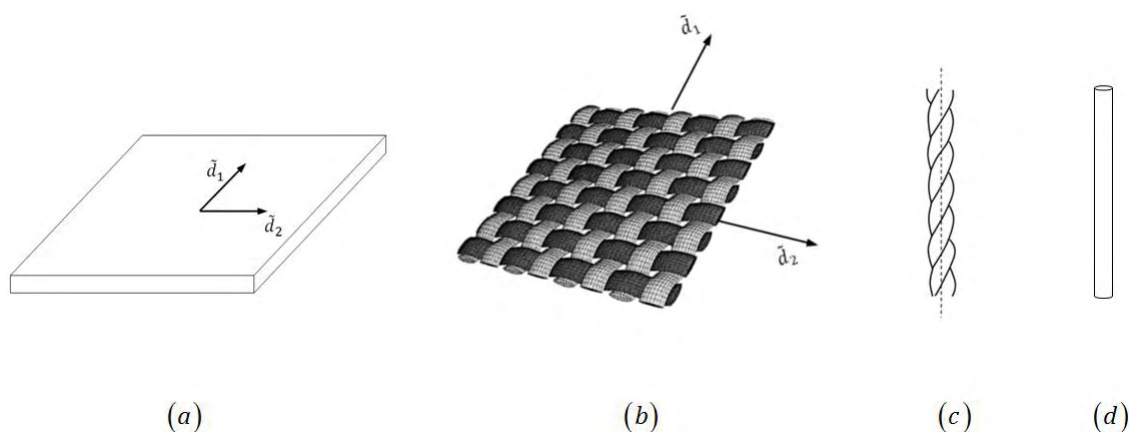
Οι εφαρμογές των τεχνολογικά προηγμένων υφασμάτων κατασκευών μπορούν να βελτιστοποιηθούν και να αξιοποιηθούν με πιο αποτελεσματικό τρόπο μέσα από την ανάπτυξη αποτελεσματικών και αξιόπιστων τεχνικών μοντελοποίησής τους. Εξάλλου, παράλληλα με τις προαναφερθείσες εφαρμογές οι συνεχώς αναπτυσσόμενες τεχνολογίες μικρής κλίμακας, όπως μικροεπεξεργαστές και μικροαισθητήρες, επιβάλλουν την ανάπτυξη ακόμη πιο εξελιγμένων μοντέλων ώστε αυτές οι τεχνολογίες να μπορούν να ενσωματωθούν με ολοκληρωμένο και λειτουργικό τρόπο στις υφασμάτινες κατασκευές. Η τεχνική της μοντελοποίησης προϋποθέτει την υιοθέτηση ενός μοντέλου το οποίο μπορεί να προβλέψει την απόκριση του υφάσματος σε διάφορες μηχανικές καταπονήσεις. Υπό αυτή την έννοια η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου είναι μια παράμετρος καθοριστικής σημασίας για την περαιτέρω διερεύνηση της κατασκευής.

Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί πολλά και διάφορα μοντέλα με στόχο να προσδιορίσουν με ένα αξιόπιστο και ακριβή τρόπο την μηχανική συμπεριφορά των υφασμάτων. Παρόλο που έχει σημειωθεί μια σημαντική πρόοδος προς αυτή την κατεύθυνση, εντούτοις, δεν έχει προταθεί ένα ευρέως αποδεκτό μοντέλο που να είναι σε θέση να συσχετίζει την μακροσκοπική συμπεριφορά του υφάσματος με την μηχανική συμπεριφορά των νημάτων στην μεσοκλίμακα και κατ'επέκταση με την μηχανική συμπεριφορά των ινών στην μικροκλίμακα. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ξεκάθαρα ότι η μοντελοποίηση των υφασμάτων κατασκευών είναι μια ιδιαίτερα περίπλοκη διαδικασία. Η ανακύπτουσα πολυπλοκότητα οφείλεται, από την μια πλευρά, στον τρόπο πλέξης των νημάτων και, από την άλλη, στους πολλαπλούς μηχανισμούς παραμόρφωσής τους.

Η μηχανική ανάλυση των υφασμάτων κατασκευών μπορεί να γίνει σε διάφορες κλίμακες. Εν γένει, υπάρχουν τρεις κύριες κλίμακες ανάλυσης, η μακροσκοπική, η μεσοσκοπική και η μικροσκοπική, Σχ.1.4. Ευδιάκριτα και σαφή όρια διαχωρισμού ανάμεσα στις κλίμακες δεν μπορούν να οριστούν εκ των προτέρων αλλά ορίζονται νοερά κατά περίπτωση. Υιοθετώντας μια πολύ γενική κατηγοριοποίηση θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι η μακροσκοπική κλίμακα αναφέρεται σε διαστάσεις της τάξης των $10^{-1} - 10^0 m$, όπου το ύφασμα αντιμετωπίζεται σαν ένα ανισότροπο συνεχές μέσο και κατά την ανάλυση λαμβάνονται υπόψη παράμετροι όπως η καμπυλότητα των νημάτων λόγω της πλέξης, το ποσοστό νημάτων ανά μονάδα όγκου του υφάσματος, κλπ. Η μεσοκλίμακα, προσεγγιστικά, αναφέρεται σε διαστάσεις της τάξης των $10^{-3} - 10^{-2} m$, και σε αυτό το επίπεδο η μηχανική συμπεριφορά του υφάσματος ερμηνεύεται εστιάζοντας στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των νημάτων τα οποία θεωρούνται συνεχή σώματα χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η εσωτερική δομή τους. Τέλος, η μικροσκοπική κλίμακα αναφέρεται σε διαστάσεις της τάξης των $5 - 20 \mu m$ όπου σε αυτό το επίπεδο η ανάλυση επικεντρώνεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ινών εντός του νήματος.

Η πιο απλή προσέγγιση για την μοντελοποίηση του υφάσματος είναι η ομογενοποίηση της μεσοδομής και η προσέγγιση του υφάσματος σαν ένα ανισότροπο συνεχές μέσο με δύο κύριες διευθύνσεις, τις διευθύνσεις των νημάτων, Σχ.1.4. Σε αυτή την περίπτωση ο αντιπροσωπευτικός όγκος ελέγχου πρέπει να είναι τέτοιος ώστε οι διαστάσεις του σε σχέση με την διάσταση του διάκενου μεταξύ των νημάτων (fabric spacing) να είναι αρκετά μεγαλύτερες. Ουσι-

αστικά, η ομογενοποίηση συνίσταται στην υιοθέτηση ενός αντιπροσωπευτικού όγκου ελέγχου της κατασκευής και χρήση του μέσου όρου για τις τιμές ορισμένων βασικών ιδιοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Σε κάθε υλικό σωματίδιο του ανισότροπου συνεχούς μέσου προσαρμόζεται μια διατεταγμένη διάδα διανυσμάτων \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 αρχικά ορθογώνιων μεταξύ τους, Σχ.1.4. Ο τρόπος με τον οποίο θα μεταβάλλονται αυτά τα διανύσματα θα καθορίζει τον προσανατολισμό και την παραμόρφωση του κάθε νήματος κάθε χρονική στιγμή. Αντικειμενικός στόχος της ανάλυσης είναι να προσδιοριστεί μια σχέση που να συνδέει τις τάσεις που εφαρμόζονται μακροσκοπικά στο ύφασμα με τα διανύσματα \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 , που περιγράφουν την θέση και την πα-



ραμόρφωση του κάθε νήματος στο εσωτερικό του.

Σχ 1.4. Οι διαφορετικές κλίμακες του υφάσματος (a) μακροκλίμακα, (b) μεσοκλίμακα, (c),(d) μικροκλίμακα.

Μια εναλλακτική προσέγγιση για την μηχανική ανάλυση του υφάσματος αποτελεί η διακριτοποίηση. Σε αυτή την περίπτωση κάθε νήμα του υφάσματος, ή σε ορισμένες περιπτώσεις και κάθε ίνα εντός του νήματος, μοντελοποιείται και επιλύεται ξεχωριστά. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται μια ακριβής επίλυση της κατασκευής προσφέροντας μια αξιόπιστη και ρεαλιστική εικόνα για τις διάφορες μορφές παραμόρφωσης του υφάσματος. Παρόλα αυτά η μέθοδος της διακριτοποίησης και των πεπερασμένων στοιχείων δεν μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση πραγματικών κατασκευών διότι το υπολογιστικό κόστος είναι σχεδόν απαγορευτικό. Συνεπώς, η διακριτοποίηση χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για να αποκτήσουμε μια εικόνα της παραμόρφωσης και για να υπολογιστούν κάποιες γεωμετρικές παράμετροι στην μικροδομή όπως είναι η επιφάνεια επαφής, η παραμορφωμένη διατομή των νημάτων μετά την παραμόρφωση κλπ. Τα ομογενοποιημένα συνεχή μοντέλα είναι υπολογιστικά πιο αποτελεσματικά από τα μοντέλα διακριτοποίησης, που λαμβάνουν κάθε νήμα χωριστά, αλλά το τίμημα σε αυτή την περίπτωση είναι ο επίπονος προσδιορισμός των σταθερών που προκύπτουν από την ομογενοποίηση.

Κεφάλαιο 2

Μηχανισμοί τριβής και απώλειας ενέργειας των υφασμάτων

2.1. Εισαγωγή

Τα υφασμάτινα υλικά χρησιμοποιούνται σε προηγμένες τεχνολογικές εφαρμογές εδώ και αρκετά χρόνια. Το έντονο ενδιαφέρον τόσο της ακαδημαϊκής κοινότητας όσο και της βιομηχανικής έρευνας αποσκοπεί στην βελτιστοποίηση της λειτουργικότητας και της αποδοτικότητάς τους. Απαραίτητη προϋπόθεση προς αυτή την κατεύθυνση είναι η πλήρης κατανόηση της μηχανικής τους συμπεριφοράς. Μέχρι πρότινος, ο σχεδιασμός των υφασμάτων υλικών στηριζόταν κυρίως σε εμπειρικούς κανόνες και το τελικό προϊόν αξιολογούνταν με την μέθοδο της δοκιμής - λάθους. Η μέθοδος της δοκιμής – λάθους πέραν του ότι απαιτούσε πολύ χρόνο εκτόξευε το κόστος παραγωγής σε υψηλά επίπεδα. Η ανάγκη να εξοικονομηθεί χρόνος αλλά και να μειωθεί το κόστος παραγωγής οδήγησε στην λεπτομερέστερη ανάλυση των υφασμάτων μέσα από ένα μηχανικό μοντέλο το οποίο θα αναπαριστά όσο το δυνατόν πιστότερα την πραγματική μηχανική συμπεριφορά τους. Ένα τέτοιο μοντέλο, που να χαίρει ευρείας αποδοχής από την ακαδημαϊκή και την βιομηχανική κοινότητα, δεν υπάρχει ακόμη και σήμερα.

Η μοντελοποίηση των υφασμάτων είναι μια περίπλοκη διαδικασία λόγω του ιδιάζοντος τρόπου παραμόρφωσής τους. Το κύριο χαρακτηριστικό τους, από μηχανικής άποψης, είναι η υψηλή αντοχή τους σε εφελκυσμό και η ικανότητά τους να προσαρμόζονται στο σχήμα τους σε περίπλοκες γεωμετρικές επιφάνειες. Η τελευταία ιδιότητά τους οφείλεται στο ότι μπορούν να παρουσιάζουν μεγάλες διατμητικές παραμορφώσεις εντός του επιπέδου τους. Εν γένει, οι βασικοί μηχανισμοί παραμόρφωσης των υφασμάτων υλικών εντός του επιπέδου τους είναι ο εφελκυσμός, η παραμόρφωση λόγω της αποπτύχωσής τους, η εντός του επιπέδου διάτμηση η οποία περιγράφεται κυρίως από την σχετική στρόφη των νημάτων αλλά και, σε μικρότερο βαθμό, από την σχετική ολίσθηση των νημάτων, και τέλος, η παραμόρφωση λόγω «κλειδώματος» των νημάτων μεταξύ τους. Στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου θα αναλυθούν αυτοί οι μηχανισμοί διεξοδικά.

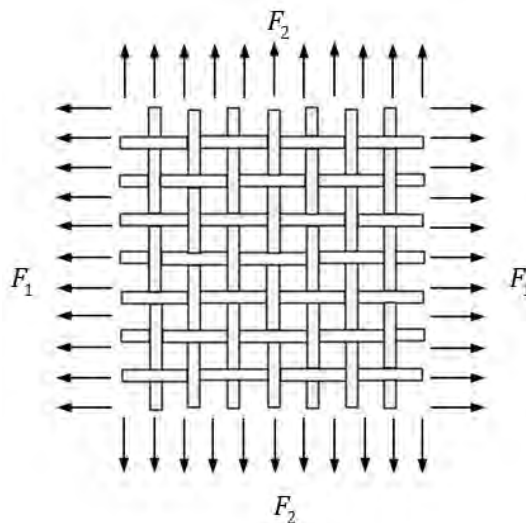
2.2. Εφελκυσμός των νημάτων

Θεωρούμε ένα δείγμα υφάσματος, τετραγωνικής μορφής, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται μια εφελκυστική δύναμη ανά μονάδα μήκους, Σχ.2.1. Η εφελκυστική δύναμη θα παραληφθεί αναλογικά από τα νήματα των οποίων ο διαμήκης άξονας είναι παράλληλος με την διεύθυνση του εφελκυσμού. Το κάθε νήμα μπορεί απλοποιητικά να θεωρηθεί σαν μια ευθύγραμμη δοκός αποτελούμενη από γραμμικό ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E_i . Ο

δείκτης i αναφέρεται στην διεύθυνση που ασκείται η εφελκυστική δύναμη και θα είναι $i=1$ για την οριζόντια διεύθυνση (διεύθυνση των στημονιών) και $i=2$ για την κατακόρυφη διεύθυνση (διεύθυνση των υφαδιών). Το κάθε νήμα πριν την επιβολή της εφελκυστικής δύναμης, έχει μήκος L_i^0 , $i=1,2$. Μετά την επιβολή της εφελκυστικής κατανεμημένης δύναμης, $F_i (N/m)$, το νήμα θα επιμηκυνθεί και θα αποκτήσει ένα νέο μήκος, L_i^1 . Συνεπώς, η εφελκυστική δύναμη F_i θα συνδέεται με την παραμόρφωση του νήματος μέσω της σχέσης

$$F_i = E_i (L_i^1 - L_i^0) \quad (2.1)$$

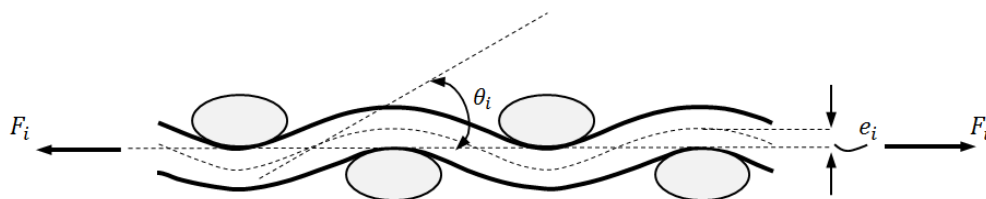
Ο δείκτης i στο μέτρο ελαστικότητας υποδηλώνει ότι το μέτρο ελαστικότητας των στημονιών και των υφαδιών ενδέχεται να διαφέρει εφόσον μπορεί να επιλεγεί διαφορετικό υλικό για τις δύο ξεχωριστές ομάδες των νημάτων. Εδώ αναδεικνύεται και ένα από τα πλεονεκτήματα των υφασμάτων καθώς δίνεται η δυνατότητα στον σχεδιαστή να ενισχύσει το υλικό του προς την επιθυμητή κατεύθυνση αυξάνοντας έτσι την λειτουργικότητα και μειώνοντας το κόστος παραγωγής, εφόσον εξοικονομεί το υλικό στην κατεύθυνση που δεν το χρειάζεται.



Σχ 2.1. Ο εφελκυσμός του υφάσματος.

2.3. Η αποπτύχωση των νημάτων

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάστηκε το νήμα του υφάσματος υπό την επίδραση εφελκυστικού φορτίου θεωρώντας ότι το νήμα είναι μια ευθύγραμμη δοκός. Στην πραγματικότητα όμως το νήμα δεν είναι ευθύγραμμη δοκός διότι κατά την διαδικασία της πλέξης του μέσα στο ύφασμα καμπυλώνεται. Στο Σχ.2.2, φαίνεται μια εγκάρσια τομή του υφάσματος. Είναι φανερό ότι το νήμα αποκλίνει από την ευθυγραμμία και λόγω της πλέξης παρουσιάζει μια πτύχωση, η οποία χαρακτηρίζεται από δύο γεωμετρικές παραμέτρους, την γωνία πτύχωσης β_i και την εκκεντρότητα e_i . Η γωνία της πτύχωσης εξαρτάται από τον τύπο της πλέξης και στην περίπτωση της απλής σταυρωτής πλέξης η τιμή της είναι περίπου 10° . Γενικά, όσο πιο σφιχτή είναι η πλέξη του υφάσματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η γωνία της πτύχωσης.



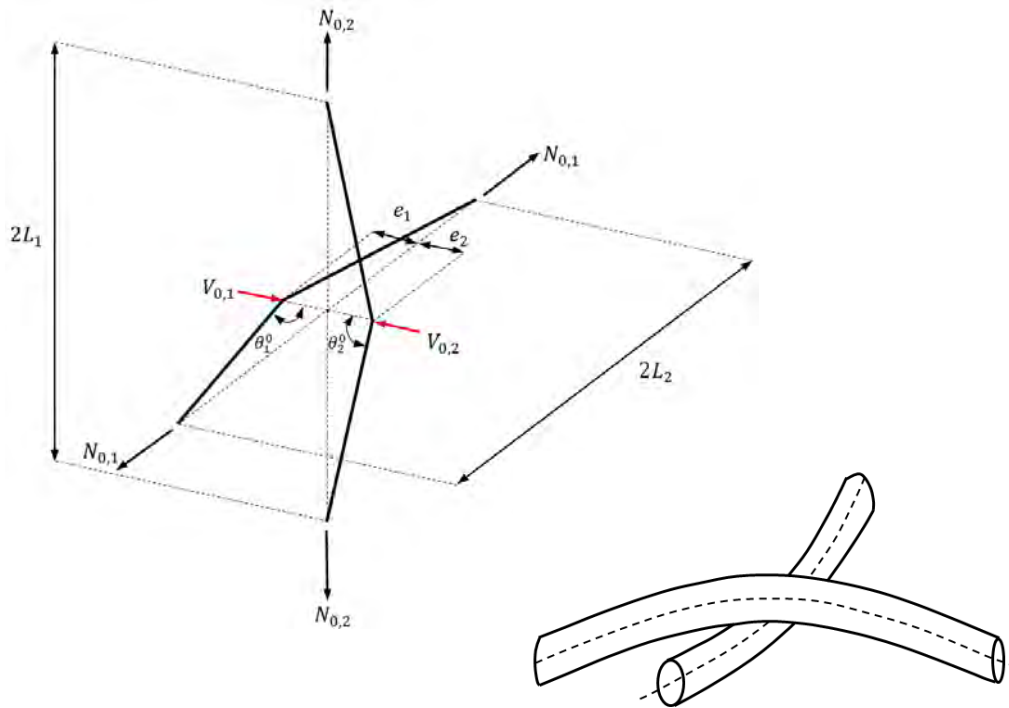
Σχ 2.2. Εγκάρσια τομή του υφάσματος όπου φαίνεται η πτύχωση e_i και η γωνία πτύχωσης θ_i .

Θεωρούμε ότι εφαρμόζεται μια εφελκυστική δύναμη στο μέσο επίπεδο του υφάσματος και με κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των στημονιών. Τα στημόνια υπό την επίδραση της εφελκυστικής δύναμης θα τείνουν να ευθυγραμμιστούν, να αποπτυχωθούν, έτσι ώστε να μηδενίσουν την πτύχωσή τους e_i . Ταυτόχρονα, τα νήματα της άλλης διεύθυνσης, τα υφάδια, προκειμένου να ικανοποιηθεί ο γεωμετρικός περιορισμός της πλέξης θα τείνουν να πτυχωθούν ακόμη περισσότερο. Αυτή η συγκρουσιακή λειτουργία των νημάτων έχει ως αποτέλεσμα το ύφασμα να επιμηκύνεται κατά την διεύθυνση εφαρμογής της εφελκυστικής δύναμης και να συρρικνώνεται κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Αυτού του είδους η παραμόρφωση του υφάσματος είναι μηχανικά ανάλογη με την παραμόρφωση ενός κλασικού στερεού σώματος η οποία περιγράφεται και ποσοτικοποιείται με τον λόγο του Poisson. Στην περίπτωση του διαξονικού εφελκυσμού τόσο τα στημόνια όσο και τα υφάδια θα τείνουν να αποπτυχωθούν με αποτέλεσμα οι ορθές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους κόμβους διασταύρωσής τους να λαμβάνουν μεγάλες τιμές. Εάν οι εφελκυστικές δυνάμεις ξεπεράσουν μια συγκεκριμένη τιμή, η οποία εξαρτάται από το υλικό, τότε τα νήματα αστοχούν στα σημεία τομής τους λόγω των ορθών τάσεων επαφής.

Για την περαιτέρω ανάλυση της παραμόρφωσης λόγω της αποπτύχωσης των νημάτων είναι απαραίτητο ένα γεωμετρικό μοντέλο το οποίο θα περιγράφει την δομή του υφάσματος στο επίπεδο του νήματος, δηλ. στην μεσοκλίμακα. Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλά γεωμετρικά μοντέλα με ποιο γνωστά του Pierce (1937) και του Kawabata (1973). Στην παρούσα ανάλυση θα υιοθετηθεί το γεωμετρικό μοντέλο του Kawabata το οποίο απεικονίζεται στο Σχ.2.3. Στο Σχ.2.3 απεικονίζονται τα στημόνια και τα υφάδια του υφάσματος υπό την επίδραση μιας εφελκυστικής δύναμης $N_{0,1}$ και $N_{0,2}$, αντίστοιχα. Αυτές είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στα νήματα κατά την διάρκεια της πλέξης τους μέσα στο ύφασμα και έχουν ως αποτέλεσμα την δημιουργία ορθών τάσεων επαφής $V_{0,1}$ και $V_{0,2}$ στους κόμβους διασταύρωσής τους. Οι «κλειδωμένες» δυνάμεις λόγω της πλέξης μπορούν να φανερωθούν όταν το νήμα κοπεί με ψαλιδισμό, μέσα από την συρρίκνωση του μήκους του. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει δεν θα ληφθούν υπόψη αυτού του είδους οι δυνάμεις υπό την έννοια ότι η κατάσταση αναφοράς θεωρείται η μορφή του υφάσματος μετά την πλέξη του¹. Στην αρχική κατάσταση αναφοράς οι πτυχώσεις των νημάτων θα είναι e_1, e_2 , οι γωνίες πτύχωσης θα είναι

¹ Στις περιπτώσεις χαλαρής πλέξης οι αρχικές δυνάμεις είναι τόσο μικρές που μπορούν να αγνοηθούν.

$\frac{\pi}{2} - \theta_1^0, \frac{\pi}{2} - \theta_2^0$ και η προβολή των μηκών στο μέσο επίπεδο του υφάσματος θα είναι $2L_1, 2L_2$, αντίστοιχα.



Σχ 2.3. Η γεωμετρία του υφάσματος στην μεσοκλίμακα (Kawabata, 1973).

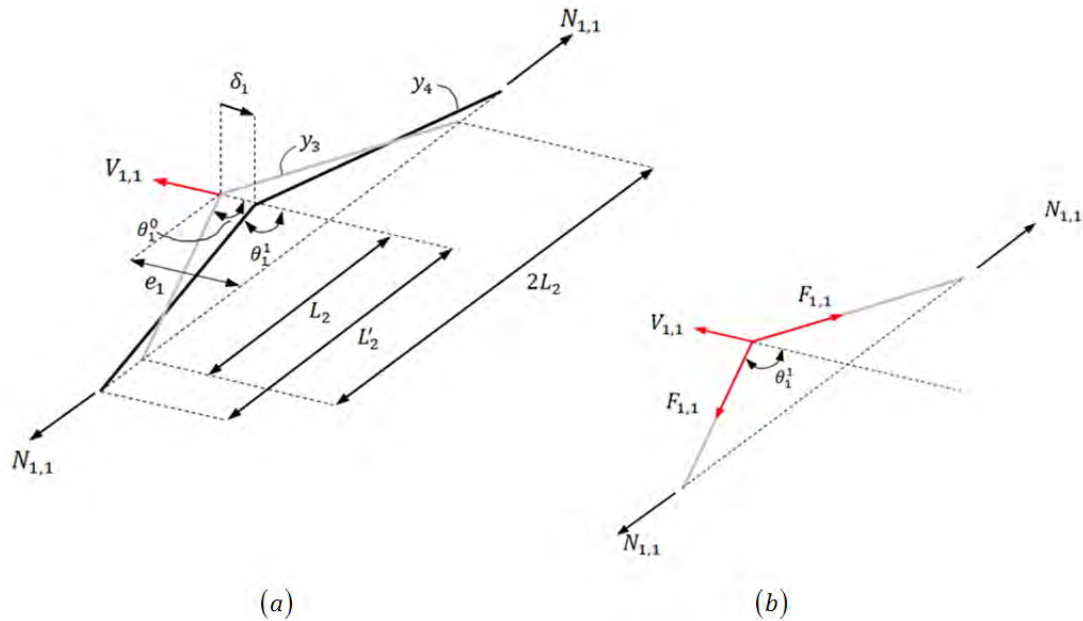
Επιπλέον, οι παραμορφώσεις των νημάτων θεωρούνται αρκετά μικρές και ελαστικές ώστε η γραμμική θεωρία των μικρών παραμορφώσεων να είναι σε πλήρη ισχύ.

Στο Σχ.2.4 (α), φαίνεται η γεωμετρική μορφή του στημονιού του υφάσματος στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση όπου το μήκος του είναι y_3 . Όταν στα άκρα του υφιδιού εφαρμοστεί μια εφελκυστική δύναμη $N_{1,1}$, το υφάδι θα επιμηκυνθεί αποκτώντας ένα νέο μήκος, L'_2 , η αρχική γωνία πτύχωσης θ_1^0 θα μειωθεί και θα γίνει θ_1^1 ενώ η αρχική πτύχωση e_1 θα μειωθεί κατά δ_1 . Στο Σχ.2.4 (β), φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος στο οποίο απεικονίζεται με ποιο τρόπο μεταβιβάζεται η εξωτερική εφελκυστική δύναμη $N_{1,1}$ στο στημόνι. Οι δυνάμεις $F_{1,1}$ είναι οι αξονικές δυνάμεις στο στημόνι ενώ η ορθή δύναμη $V_{1,1}$ περιγράφει την δύναμη που ασκείται στο σημείο τομής του στημονιού με το υφάδι. Το αρχικό μήκος του στημονιού y_3 θα δίνεται από την σχέση

$$y_3 = \sqrt{L_2^2 + e_1^2} \quad (2.2)$$

το οποίο μετά τον εφελκυσμό θα γίνει y_4 , δηλ.

$$y_4 = \sqrt{(e_1 - \delta_1)^2 + (L'_2)^2} \Rightarrow y_4 = \sqrt{(e_1 - \delta_1)^2 + L_2^2 (1 + \varepsilon_{22})^2} \quad (2.3)$$



Σχ 2.4. (α) Το νήμα του υφάσματος στην οριζόντια διεύθυνση (στημόνι) και (β) το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του στημονιού.

Η αξονική παραμόρφωση ε_{22} του υφαδιού λόγω της ασκούμενης εφελκυστικής δύναμης $N_{1,1}$ θα δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_{22} = \frac{L'_2 - L_2}{L_2} = \frac{L'_2}{L_2} - 1 \Rightarrow L'_2 = L_2 (1 + \varepsilon_{22}) \quad (2.4)$$

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του υφαδιού, Σχ.2.4(β), προκύπτει η σχέση μεταξύ της αξονικής δύναμης $F_{1,1}$ και της εφελκυστικής δύναμης $N_{1,1}$, η οποία θα είναι

$$N_{1,1} = F_{1,1} \sin \theta_1^1 \quad (2.5)$$

Ο κόμβος του υφάσματος οφείλει να βρίσκεται σε ισορροπία, γεγονός που υποδηλώνει ότι

$$V_{1,1} = 2F_{1,1} \cos \theta_1^1 \quad (2.6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.5),(2.6) προκύπτει η σχέση της ορθής δύναμης στον κόμβο σε συνάρτηση με την εφελκυστική δύναμη που εφαρμόζεται στα άκρα του υφαδιού, δηλ.

$$V_{1,1} = \frac{2N_{1,1}}{\tan \theta_1^1} \quad (2.7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την γωνία θ_1^1 ισχύει η σχέση

$$\tan\theta_1^1 = \frac{L_2'}{e_1 - \delta_1} = \frac{L_2(1 + \varepsilon_{22})}{e_1 - \delta_1} \quad (2.8)$$

η σχέση (2.7) γίνεται

$$V_{1,1} = \frac{2(e_1 - \delta_1)N_{1,1}}{L_2(1 + \varepsilon_{22})} \quad (2.9)$$

Η ίδια συλλογιστική διέπει και την ανάλυση του υφαιδίου. Στο Σχ.2.5 (α), απεικονίζεται μια λεπτομέρεια του υφαιδίου και στο Σχ.2.5 (β), φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Το αρχικό μήκος του υφαιδίου y_1 , θα δίνεται από την σχέση

$$y_1 = \sqrt{L_1^2 + e_2^2} \quad (2.10)$$

όπου L_1 είναι η προβολή του αρχικού μήκους στο μέσο επίπεδο του υφάσματος και e_1 η αρχική του πτύχωση. Μετά την εφαρμογή της εφελκυστικής δύναμης $N_{1,2}$ το μήκος του υφαιδίου θα είναι

$$y_2 = \sqrt{(e_2 - \delta_2)^2 + (L_1')^2} = \sqrt{(e_2 - \delta_2)^2 + L_1^2(1 + \varepsilon_{11})^2} \quad (2.11)$$

Η αξονική παραμόρφωση του υφαιδίου ε_{11} θα δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_{11} = \frac{L_1' - L_1}{L_1} = \frac{L_1'}{L_1} - 1 \Rightarrow L_1' = L_1(1 + \varepsilon_{11}) \quad (2.12)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο υφάδι θα πρέπει να βρίσκονται σε ισορροπία, δηλ.

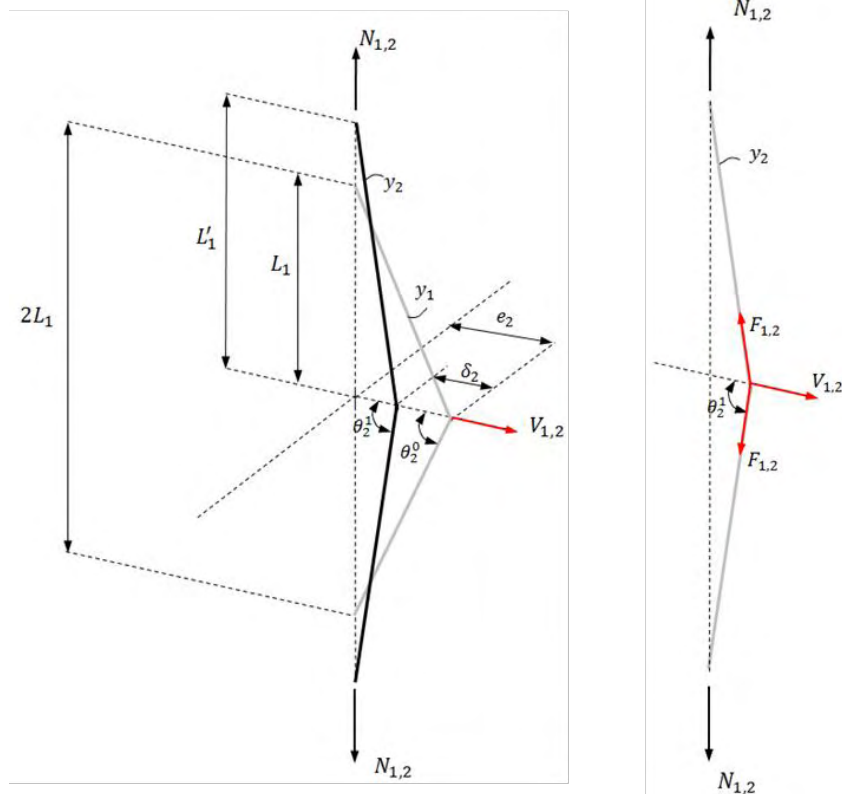
$$N_{1,2} = F_{1,2} \sin\theta_2^1 \quad (2.13)$$

Οι δυνάμεις $F_{1,2}$ είναι οι αξονικές δυνάμεις στα υφάδια ενώ η δύναμη $N_{1,2}$ ασκείται στα άκρα του υφάσματος. Επιπλέον, ο κόμβος του υφάσματος οφείλει να ισορροπεί και με την βοήθεια του διαγράμματος ελευθέρου σώματος προκύπτει η σχέση

$$V_{1,2} = 2F_{1,2} \cos\theta_2^1 \quad (2.14)$$

όπου θ_2^1 είναι η γωνία της πτύχωσης μετά την παραμόρφωση και $V_{1,2}$ είναι η ορθή δύναμη που ασκείται στο σημείο τομής του υφαιδίου με το στημόνι. Από τον συνδυασμό των σχέσεων (2.13),(2.14) θα είναι

$$V_{1,2} = 2 \frac{N_{1,2}}{\sin\theta_2^1} \cos\theta_2^1 \Rightarrow V_{1,2} = \frac{2N_{1,2}}{\tan\theta_2^1} \quad (2.15)$$



Σχ 2.5. (α) Το νήμα στην κατακόρυφη διεύθυνση (υφάδι) και (β) το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του υφαιδιού.

Δεδομένου ότι για την γωνία πτύχωσης θ_2^1 θα ισχύει η σχέση

$$\tan \theta_2^1 = \frac{L'_1}{e_2 - \delta_2} = \frac{L_1(1 + \varepsilon_{11})}{e_2 - \delta_2} \quad (2.16)$$

η σχέση (2.15) γίνεται

$$N_{1,2} = \frac{1}{2} V_{1,2} \tan \theta_2^1 = V_{1,2} \frac{L_1(1 + \varepsilon_{11})}{2(e_2 - \delta_2)} \Rightarrow V_{1,2} = \frac{2(e_2 - \delta_2) N_{1,2}}{L_1(1 + \varepsilon_{11})} \quad (2.17)$$

Οι ορθές δυνάμεις $V_{1,1}, V_{1,2}$ οφείλουν να είναι ίσες προκειμένου ο κόμβος να ισορροπεί, δηλ.

$$V_{1,1} = V_{1,2} = V \quad (2.18)$$

Τελικά, από τον συνδυασμό των σχέσεων (2.9),(2.17),(2.18) προκύπτει

$$\frac{(e_1 - \delta_1)}{(e_2 - \delta_2)} = \frac{L_2(1 + \varepsilon_{22})}{L_1(1 + \varepsilon_{11})} \frac{N_{1,2}}{N_{1,1}} \quad (2.19)$$

ή σε ισοδύναμη μορφή

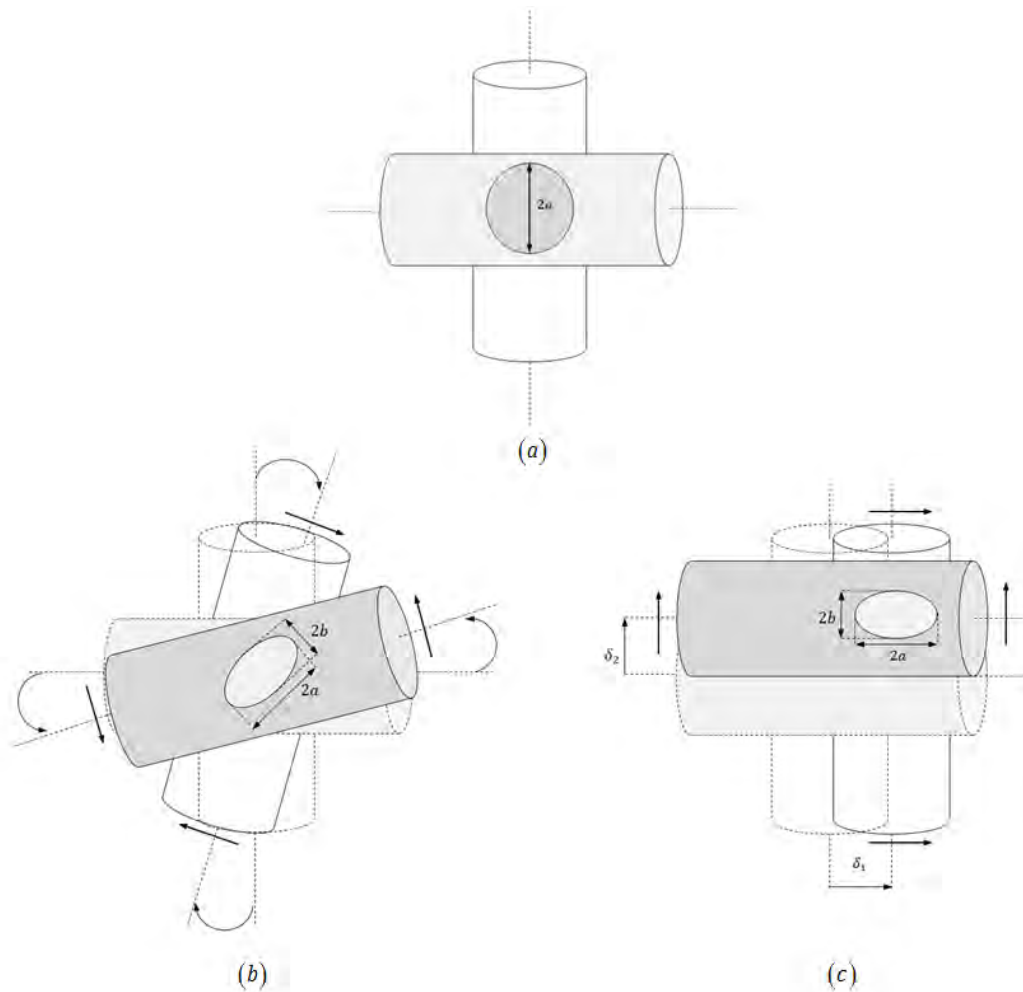
$$\delta_1 + \delta_2 = e_1 + e_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{L'_2}{N_{1,1}} + \frac{L'_1}{N_{1,2}} \right] V \quad (2.20)$$

2.4. Η διάτμηση των νημάτων

Τα υφασμάτινα υλικά έχουν την ικανότητα να μεταφέρουν εντός του επιπέδου τους διατμητικά φορτία και να παρουσιάζουν σχετικά μεγάλες παραμορφώσεις. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την αρχιτεκτονική τους δομή τους επιτρέπει να παίρνουν το σχήμα των επιφανειών πάνω στις οποίες τοποθετούνται. Εν γένει, τα υφάσματα εκδηλώνουν μεγάλες παραμορφώσεις ακόμη και υπό την επίδραση μικρών διατμητικών φορτίων.

Η διατμητική παραμόρφωση των υφασμάτων υλικών είναι κάπως διαφοροποιημένη από την κλασική διάτμηση ενός στερεού σώματος. Σε ένα συνεχές στερεό σώμα η διάτμηση περιγράφεται μέσω της έννοιας του μέτρου διάτμησης του υλικού το οποίο ουσιαστικά ορίζει την διατμητική τάση ανά μονάδα επιφάνειας. Στα υφάσματα η έννοια του μέτρου διάτμησης δεν είναι εύκολο να οριστεί με φυσικούς όρους διότι τα υφάσματα είναι κατασκευές πολύ μικρού πάχους το οποίο μάλιστα δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί επακριβώς. Αυτός είναι και ο λόγος όπου η αντίστοιχη διατμητική τάση εκφράζεται σαν δύναμη ανά μονάδα μήκους του υφάσματος. Στα υφασμάτινα υλικά η έννοια της διάτμησης συνδέεται κυρίως με το πλήθος των σημείων τομής των νημάτων και το συντελεστή τριβής μεταξύ τους. Άρα, ο τρόπος της πλέξης, που καθορίζει το πλήθος των σημείων τομής μεταξύ των νημάτων, και η ορθή δύναμη που ασκείται στα σημεία τομής, που καθορίζεται από το πόσο σφιχτή ή χαλαρή είναι η πλέξη, είναι δύο παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την διατμητική παραμόρφωση του υφάσματος. Διαφαίνεται μια σύζευξη μεταξύ της εφελκυστικής δύναμης που ασκείται στα άκρα του υφάσματος και της διατμητικής ακαμψίας του υφάσματος υπό την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη η εφελκυστική δύναμη τόσο μεγαλύτερη και η ορθή δύναμη επαφής στους κόμβους άρα μεγαλύτερη και η δύναμη της τριβής μεταξύ των νημάτων. Οι Harrison et.al. (2004) ποσοτικοποίησαν αυτού του είδους τη σύζευξη εισάγοντας ένα συντελεστή σύζευξης.

Η διατμητική παραμόρφωση των υφασμάτων υλικών περιγράφεται από δύο βασικούς μηχανισμούς παραμόρφωσης, την σχετική στροφή μεταξύ των νημάτων με κέντρο περιστροφής το σημείο τομής τους, Σχ.2.4, και την σχετική ολίσθηση των νημάτων, Σχ.2.6. Θεωρώντας ότι τα νήματα μπορούν να θεωρηθούν ελαστικές κυλινδρικές δοκοί οι δύο μηχανισμοί περιγράφονται από τα Σχ.2.6 (b), (c), αντίστοιχα. Στις δύο επόμενες παραγράφους θα αναλυθούν οι δύο αυτοί μηχανισμοί. Στην ανάλυση των μηχανισμών θα χρησιμοποιηθεί η έννοια του μοναδιαίου κελιού που δεν είναι τίποτα άλλο παρά η γεωμετρική απεικόνιση ενός στοιχειώδους τμήματος της μεσοδομής του υφάσματος η οποία επαναλαμβάνεται συνεχώς σε όλη του την έκταση. Ουσιαστικά, το μοναδιαίο κελί αποτελεί τον αντιπροσωπευτικό όγκο ελέγχου του υφάσματος και ότι ισχύει για αυτό τον όγκο μπορεί να γενικευτεί σε όλο το υλικό.

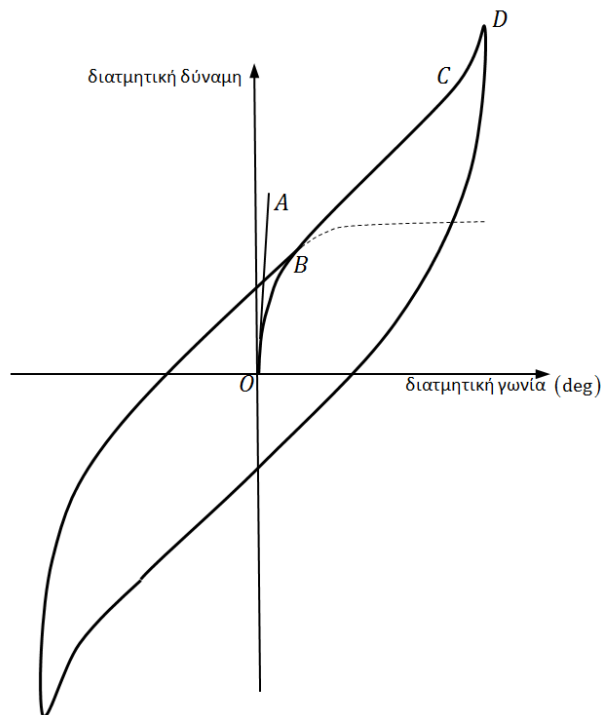


Σχ 2.6. (α) Αρχικά τα νήματα τέμνονται κάθετα μεταξύ τους (β) η σχετική στροφή των νημάτων (γ) σχετική ολίσθηση των νημάτων.

2.4.1. Η σχετική στροφή των νημάτων

Αρχικά, πριν την επιβολή οποιουδήποτε φορτίου οι διαμήκεις άξονες των νημάτων τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, Σχ.2.6(α) α., και βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους υπό την επίδραση της ορθής δύναμης επαφής. Η εφαρμογή της διατμητικής δύναμης στα άκρα του υφάσματος γίνεται σταδιακά ώστε η φόρτιση να θεωρείται στατική. Προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα βισκοελαστικότητας έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι ο ρυθμός επιβολής της διατμητικής παραμόρφωσης πρέπει να κινείται στο εύρος $1-10\text{mm}\cdot\text{m}^{-1}$ (Nguyen M., Herszberg I., Paton R., 1999). Ένα τυπικό διάγραμμα που περιγράφει την διάτμηση του υφάσματος λόγω της σχετικής στροφής των νημάτων φαίνεται στο Σχ.2.7. Στον κατακόρυφο άξονα καταγράφεται η διατμητική δύναμη στα άκρα του υφάσματος ενώ στον οριζόντιο άξονα η διατμητική παραμόρφωση. Όσο η διατμητική δύναμη παραμένει σε χαμηλά επίπεδα τέτοια όπου

δεν μπορεί να υπερνικήσει τις δυνάμεις επαφής μεταξύ των νημάτων, τα νήματα θα εξακολουθήσουν να παραμένουν «κολλημένα» μεταξύ τους. Εάν η διατμητική δύναμη παρέμενε συνεχώς σε τέτοια χαμηλά επίπεδα η διατμητική παραμόρφωση θα περιγράφονταν από την ευθεία γραμμή OA , Σχ.2.5.



Σχ 2.7. Τυπικό διάγραμμα διατμητικής δύναμης - διατμητικής παραμόρφωσης για το ύφασμα.

Η βαθμιαία αύξηση της διατμητικής δύναμης θα έχει ως αποτέλεσμα, κάποια στιγμή, οι δυνάμεις τριβής μεταξύ των νημάτων να υπερνικηθούν. Τότε τα νήματα θα αρχίσουν να συστρέφονται σχετικά το ένα ως προς το άλλο με πόλο περιστροφής το σημείο επαφής τους. Η αρχική τιμή του μέτρου διάτμησης αρχίζει να μειώνεται και το φαινόμενο περιγράφεται από την καμπύλη OB του Σχ.2.5. Θεωρητικά, η σχετική στρόφιξη των νημάτων θα αύξανε την τιμή της συνεχώς υπό την επίδραση της ίδιας διατμητικής δύναμης, όπως φαίνεται από τον κλάδο BF . Η πλέξη των νημάτων μέσα στο ύφασμα απαγορεύει να συμβεί κάτι τέτοιο διότι η παρουσία των παρακείμενων νημάτων επιβάλλει μια κάμψη η οποία περιγράφεται από τον γραμμικό κλάδο BC . Μια περαιτέρω αύξηση της διατμητικής δύναμης θα προκαλούσε συνωστισμό των νημάτων, το ένα νήμα αρχίζει να υπερκαλύπτει το άλλο, σε συγκεκριμένες περιοχές του υφάσματος. Αυτή η διαδικασία θα έχει ως αποτέλεσμα το ύφασμα να αρχίσει να πτυχώνεται, να παραμορφώνεται εκτός του επιπέδου του. Η πυκνότητα του υφάσματος μειώνεται, δεδομένου ότι τα διάκενα μεταξύ των νημάτων εξαλείφονται, με αποτέλεσμα το ύφασμα να αποκτήσει μια συμπαγή μορφή και η διατμητική του ακαμψία να λαμβάνει μια πολύ μεγάλη τιμή. Αυτό το στάδιο της διατμητικής παραμόρφωσης περιγράφεται από τον κλάδο CD .

Η διατμητική παραμόρφωση των υφασμάτων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην τελική μηχανική απόκρισή τους. Για αυτό το λόγο η διάτμηση των υφασμάτων αποτέλεσε αντικείμενο

εντατικής μελέτης και ανάλυσης από πολλούς ερευνητές ανά τον κόσμο. Στόχος της ερευνητικής προσπάθειας είναι να προσδιοριστούν και να ποσοτικοποιηθούν οι παράμετροι που επηρεάζουν το φαινόμενο. Ο τελικός προσανατολισμός των νημάτων μετά την παραμόρφωση, η μορφή των πτυχώσεων που θα εκδηλωθούν εκτός του επιπέδου του υφάσματος, η τελική κατανομή των νημάτων ανά μονάδα όγκου του υφάσματος, η πιθανή αστοχία των νημάτων καθώς και ο συντελεστής τριβής μεταξύ των νημάτων αποτελούν τις πιο χαρακτηριστικές παραμέτρους που επηρεάζουν το φαινόμενο της διάτμησης.

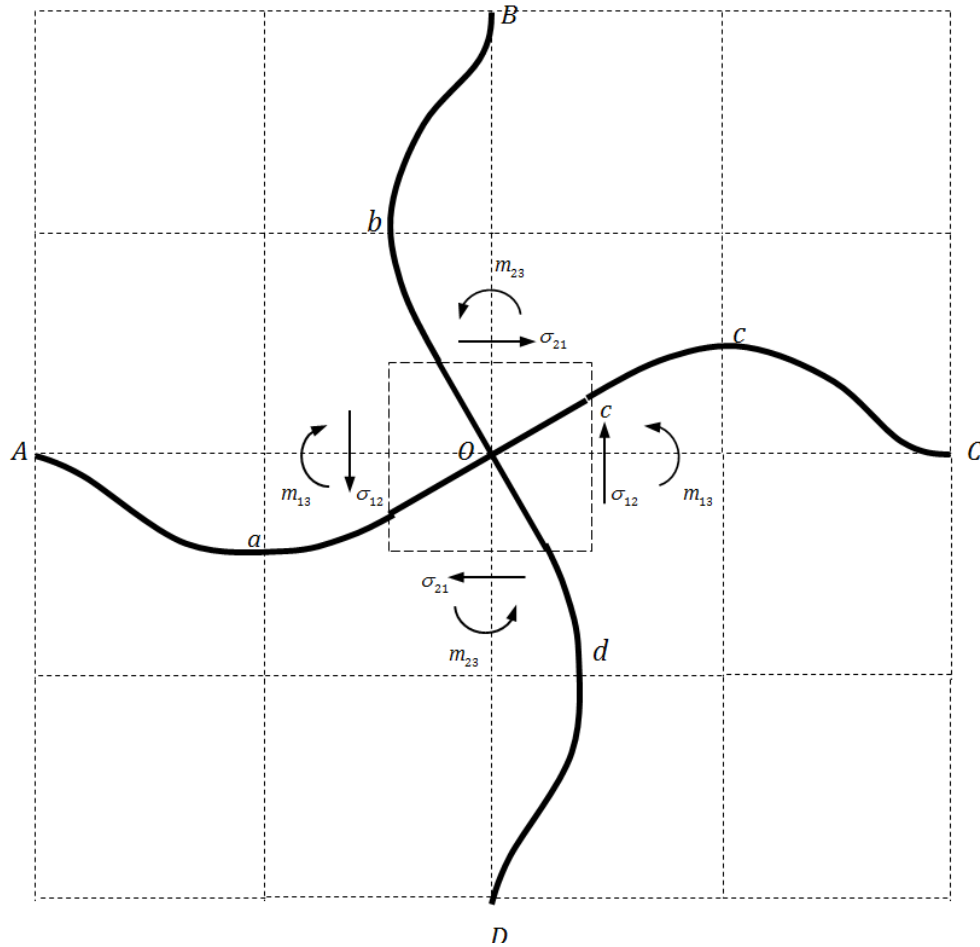
Οι Grosberg&Park (1966), Grosberg et. al (1968), Hearle &Grosberg (1969), Leaf (2001), Leaf (2002), Leaf (2004), συν τοις άλλοις ασχολήθηκαν διεξοδικά με το θέμα της διάτμησης των υφασμάτων. Η ανάλυσή τους στηρίχτηκε στις μηχανικές ιδιότητες των νημάτων και σε γεωμετρικές παραμέτρους της δομής του υφάσματος διατυπώνοντας κάποιες σχέσεις για το μέτρο διάτμησης, το μέτρο ελαστικότητας και την καμπτική δυσκαμψία του υλικού. Τα θεωρητικά μοντέλα που προτάθηκαν σε αυτές τις εργασίες απεδείχθη ότι συγκλίνουν ικανοποιητικά με τις πειραματικές μετρήσεις στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων. Ο Skelton(1976) ασχολήθηκε με ορισμένες οριακές περιπτώσεις της διάτμησης των υφασμάτων υλικών αξιολογώντας τις γεωμετρικές παραμέτρους της πλέξης. Στην ανάλυσή του θεώρησε ότι η ορθή δύναμη της επαφής κατανέμεται ομοιόμορφα στον κόμβο επαφής και διατύπωσε κάποιες προσεγγιστικές τιμές για το μέτρο διάτμησης των υφασμάτων. Οι Kawabata et.al. (1973a,b,c) αντιμετώπισαν το θέμα από μια άλλη οπτική γωνία προκειμένου να διατυπώσουν μια σχέση μεταξύ της διατμητικής δύναμης και της διατμητικής παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα, θεώρησαν ότι η διατμητική παραμόρφωση οφείλεται σε μια ροπή η οποία προκύπτει από το άθροισμα δύο όρων, ενός ελαστικού και ενός που οφείλεται στην τριβή μεταξύ των νημάτων. Οι δύο όροι αποτελούν γραμμικές συναρτήσεις της σχετικής γωνίας στροφής των νημάτων ενώ οι προκύπτουσες σταθερές υπολογίζονται πειραματικά.

Οι Page & Wang (2000) ασχολήθηκαν με υφάσματα από άνθρακα με απλή σταυρωτή πλέξη τα οποία υπόκεινται σε διαξονικό εφελκυσμό. Χρησιμοποιώντας μια απλή πειραματική διάταξη κατόρθωσαν να υπολογίσουν τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_f μεταξύ των νημάτων ($\mu_f \approx 0.213$). Παρατήρησαν επίσης ότι μια μέση τιμή της γωνίας πτύχωσης είναι 10° ενώ μια μέση τιμή της οριακής γωνίας «κλειδώματος» των νημάτων είναι 37° . Οι Zhu et.al. (2013) διεξήγαγαν ορισμένα πειράματα μονοαξονικού, διαξονικού εφελκυσμού και διάτμησης σε υφάσματα με σταυρωτή πλέξη και νήματα από Kevlar 49. Διαπίστωσαν ότι ο λόγος του Poisson αποτελεί συνάρτηση της παραμόρφωσης και της εφελκυστικής δύναμης κατά την διάρκεια της ύφανσης, το εύρος των τιμών του είναι 0.35–0.75. Οι Sinoimeri & Drean ανέλυσαν την διάτμηση των υφασμάτων με σταυρωτή πλέξη χρησιμοποιώντας κάποιες ενεργειακές μεθόδους, δίχως να λαμβάνουν υπόψη την αρχιτεκτονική δομή του υφάσματος.

2.4.2. Η σχετική ολίσθηση των νημάτων λόγω στροφής

Στην παρούσα εργασία η σχετική ολίσθηση θα ερμηνευτεί με την βοήθεια ενός μικρομηχανικού μοντέλου, Σχ.2.8. Τα νήματα αρχικά τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Με την επιβολή της διατμητικής δύναμης ο κόμβος O θα περιστραφεί κατά γωνία ω ενώ τα νήματα θα παραμορφωθούν όπως φαίνεται στο Σχ. 2.8. Υποθέτουμε ότι η γωνία στροφής είναι αρκετά μικρή,

δηλ. $|\omega| \ll 1$. Η τέμνουσα δύναμη του κάθε νήματος θα αντιστασσει στην δύναμη λόγω της τριβής μεταξύ των νημάτων. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των νημάτων είναι μ_f και η ορθή δύναμη λόγω της μεταξύ τους επαφής είναι V .



Σχ 2.8. Η γεωμετρική απεικόνιση της σχετικής στροφής των νημάτων μέσα στο ύφασμα, στην περίπτωση που έχει αρχίσει η ολίσθηση, δηλ. $V_{0a} = \mu_f V = V_{0b}$.

Οι τάσεις που συνδέονται με την στροφή ω της μικροδομής θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{12} = \frac{V_{0a}}{L_2}, \quad \sigma_{21} = \frac{V_{0b}}{L_1} \quad (2.21)$$

$$m_{13} = \frac{M_a}{L_1}, \quad m_{23} = \frac{M_b}{L_2} \quad (2.22)$$

Όταν η ολίσθηση μεταξύ των νημάτων δεν έχει αρχίσει ακόμη, που σημαίνει ότι η τέμνουσα δύναμη θα είναι μικρότερη από την δύναμη τριβής, προφανώς θα είναι $\delta_{0a} = 0$. Συνεπώς, για την γωνία ω σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$|V_{0a}| < \mu_f V \Rightarrow |\omega| < \frac{3L_1^2}{8E_1 I_1} \mu_f V \quad (2.23)$$

Για το παραμορφωμένο νήμα aO θα ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} M_O \\ M_a \\ V_{Oa} \end{bmatrix} = \frac{E_1 I_1}{2L_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{4}{L_1} \\ 2 & 4 & -\frac{4}{L_1} \\ -\frac{4}{L_1} & -\frac{4}{L_1} & \frac{16}{3L_1^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_O \\ \phi_a \\ \delta_O - \delta_a \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Από το Σχ.2.9 προκύπτει ότι $\phi_a = 0$, $\phi_O = \omega$, $\delta_a - \delta_O = \delta_{Oa}$, άρα από την σχέση (2.24) στην περίπτωση που έχει αρχίσει η ολίσθηση, θα είναι

$$V_{Oa} = \mu_f V = \frac{E_1 I_1}{2L_1} \left[-\frac{4}{L_1} \omega + \frac{16}{3L_1^2} \delta_{Oa} \right] \Rightarrow \delta_{Oa} = \frac{3}{4} L_1 \omega + \frac{3L_1^2 \mu_f V}{8E_1 I_1} \quad (2.25)$$

$$M_a = \frac{E_1 I_1}{2L_1} \left[4\omega - \frac{4}{L_1} \delta_{Oa} \right] \Rightarrow \delta_{Oa} = L_1 \omega - \frac{L_1^2 M_a}{2E_1 I_1} \quad (2.26)$$

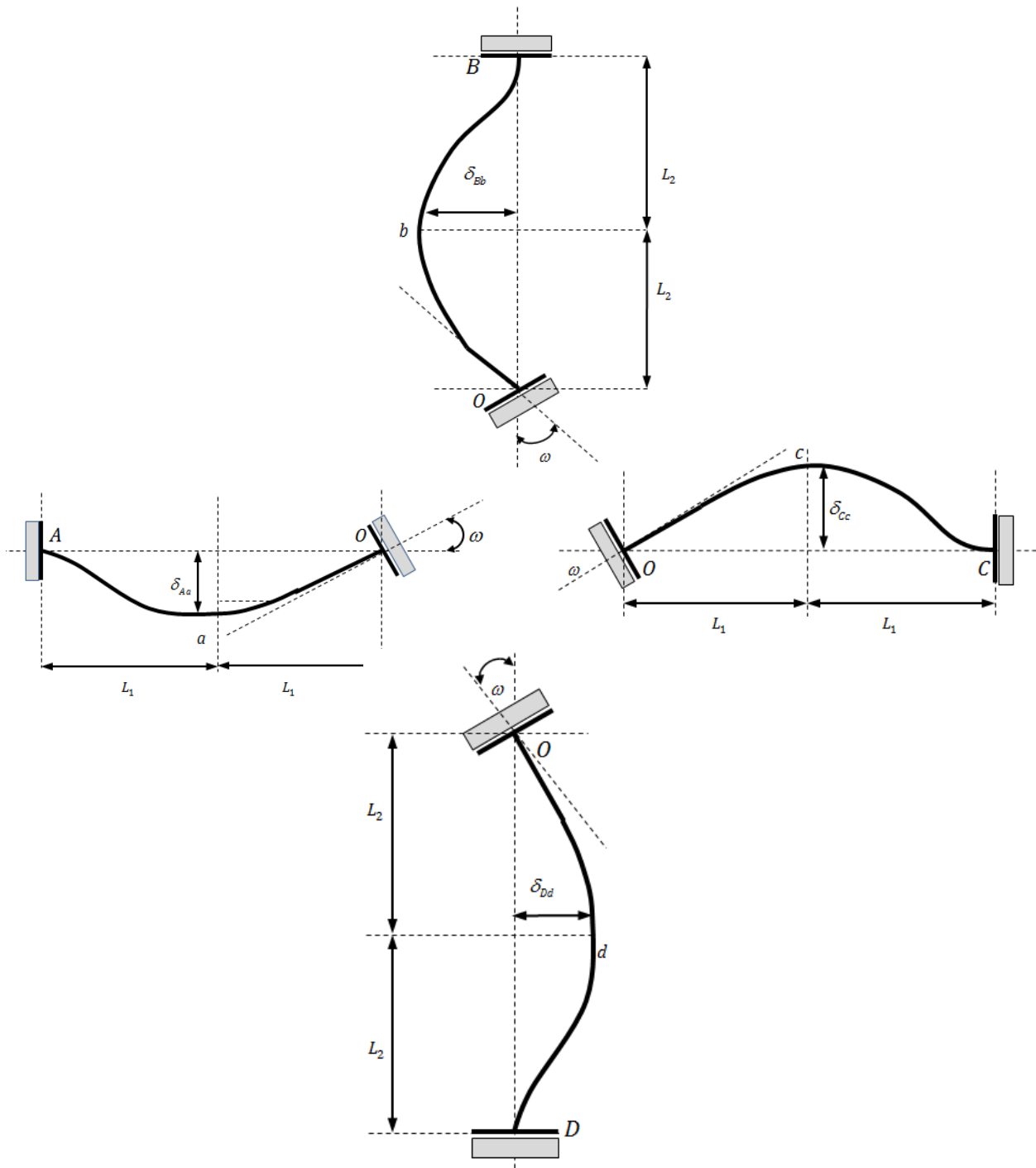
Με την βοήθεια του Σχ.2.9 προκύπτουν και οι αντίστοιχες σχέσεις για τα νήματα OB, OC, OD . Συγκεκριμένα, θα είναι

$$\begin{bmatrix} M_B \\ M_b \\ V_{Bb} \end{bmatrix} = \frac{E_2 I_2}{2L_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{4}{L_2} \\ 2 & 4 & -\frac{4}{L_2} \\ -\frac{4}{L_2} & -\frac{4}{L_2} & \frac{16}{3L_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_B \\ \phi_b \\ \delta_B - \delta_b \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi_B = 0$, $\phi_b = \omega$, $\delta_B - \delta_b = \omega L_2$, από την σχέση (2.27) προκύπτει

$$M_B = -\frac{E_2 I_2}{L_2} \omega, \quad M_b = \frac{4E_2 I_2}{3L_2} \omega, \quad V_{Bb} = -\frac{8}{3} \frac{E_2 I_2}{L_2^2} \omega \quad (2.28)$$

Από τις σχέσεις, (2.25), (2.26) προκύπτει ότι η εκδήλωση της σχετικής στροφής των νημάτων εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των νημάτων (L_1, I_1, L_2, I_2) , από τις ιδιότητες του υλικού (E_1, E_2) καθώς και από την ορθή δύναμη V και τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_f .

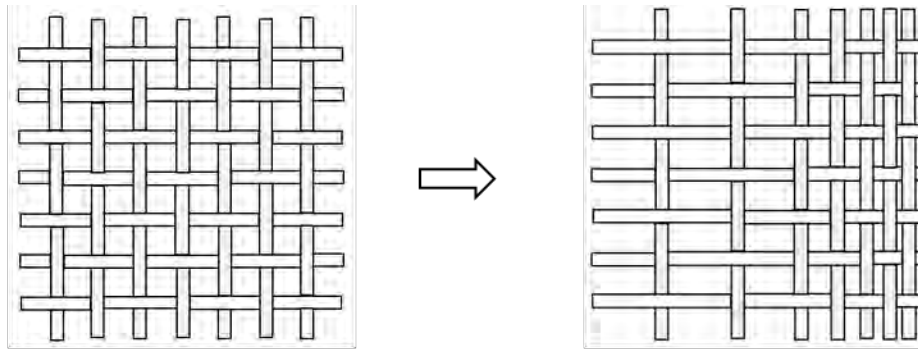


Σχ 2.9. Η παραμόρφωση των νημάτων κατά την σχετική στροφή τους.

2.4.3. Η σχετική ολίσθηση των νημάτων λόγω παράλληλης μετατόπισης

Η διάτμηση των υφασμάτων πέραν της σχετικής στροφής συνοδεύεται και από μια σχετική ολίσθηση των νημάτων. Μεταξύ των δύο μηχανισμών η σχετική στροφή είναι ο πιο κυρίαρχος

αλλά και η σχετική ολίσθηση παίζει σημαντικό ρόλο. Μια ποιοτική απεικόνιση της ολίσθησης των νημάτων φαίνεται στο Σχ.2.11.



Σχ 2.10. Απεικόνιση της σχετικής ολίσθησης των νημάτων.

Για την ανάλυση της σχετικής ολίσθησης θα θεωρηθεί ότι τα νήματα είναι δοκοί κυλινδρικής διατομής από γραμμικό ελαστικό υλικό. Η μόνη δύναμη που αντιστέκεται στην σχετική ολίσθηση των νημάτων είναι η δύναμη τριβής T_i , η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$T_i = \mu_f V_i \quad (2.29)$$

όπου μ_f είναι ο συντελεστής τριβής μεταξύ των νημάτων και V_i είναι η ορθή δύναμη λόγω επαφής στον κόμβο και θα δίνεται από την σχέση (2.20). Μια λεπτομέρεια της σχετικής ολίσθησης του υφαιδιού φαίνεται στο Σχ.2.11. Με την ίδια ακριβώς συλλογιστική θα ολισθήσουν και τα νήματα στην άλλη διεύθυνση. Στα δύο άκρα a, b του υφαιδιού ασκούνται οι καμπτικές ροπές M_a, M_b , αντίστοιχα, των οποίων οι τιμές είναι γνωστές. Η εφαρμογή αυτών των ροπών θα έχει ως αποτέλεσμα στον κόμβο O να εμφανίζεται μια τέμνουσα δύναμη V_o η οποία θα τείνει να αποσυνδέσει τον κόμβο από την αρχική του θέση καθώς και την εμφάνιση τεμνουσών δυνάμεων V_a, V_b , στα άκρα του νήματος. Όσο η τιμή της τέμνουσας δύναμης V_o είναι μικρή, τέτοια που να μην ξεπερνά την δύναμη τριβής μεταξύ των νημάτων ο κόμβος O θα παραμένει αμετακίνητος και η μετατόπιση του θα είναι μηδενική, δηλ

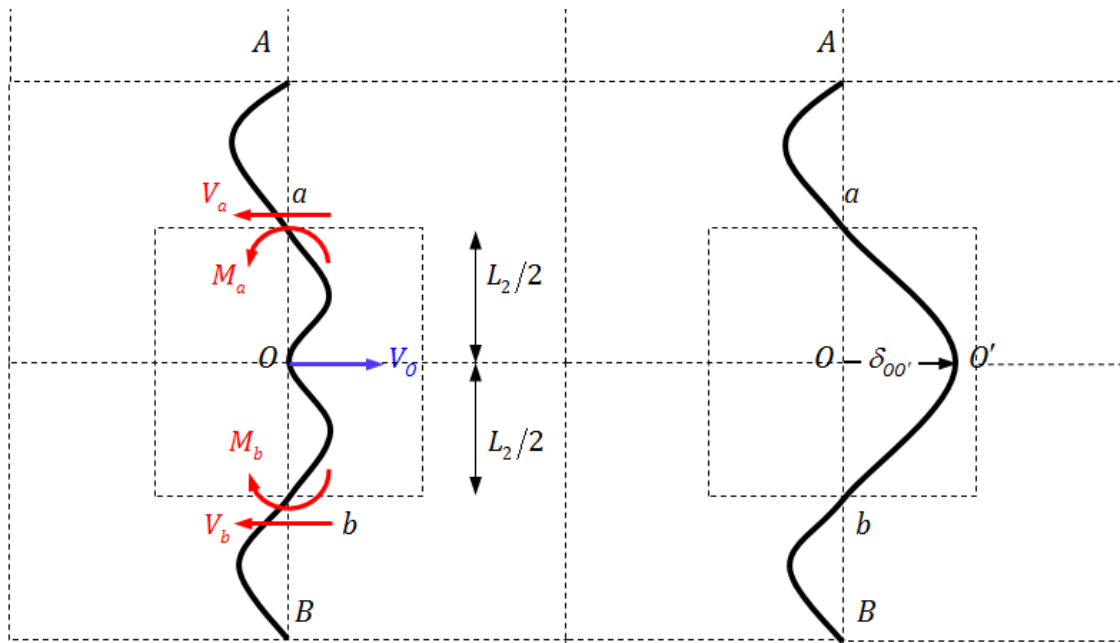
$$V_o < \mu_f V \rightarrow \delta_{oo'} = 0 \quad (2.30)$$

Υπό την σταδιακή αύξηση των ροπών M_a, M_b στα άκρα του υφαιδιού θα παρατηρείται και μια σταδιακή αύξηση στην τέμνουσα δύναμη V_o . Εάν η τιμή της τέμνουσας δύναμης λάβει μια κρίσιμη τιμή ώστε η δύναμη της τριβής μεταξύ των νημάτων υπερνικηθεί το νήμα θα αρχίσει να ολισθαίνει και ο κόμβος O θα μετατοπιστεί κατά $\delta_{oo'}$ προς την κατεύθυνση της τέμνουσας δύναμης V_o . Σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_o \\ V_{oa} \end{bmatrix} = \frac{2E_2 I_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{4}{L_2} \\ 2 & 4 & -\frac{4}{L_2} \\ -\frac{4}{L_2} & -\frac{4}{L_2} & \frac{16}{3L_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_o \\ \delta_{oo'}^{(oa)} \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_b \\ M_o \\ V_{ob} \end{bmatrix} = \frac{2E_2 I_2}{L_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{4}{L_2} \\ 2 & 4 & -\frac{4}{L_2} \\ -\frac{4}{L_2} & -\frac{4}{L_2} & \frac{16}{3L_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_b \\ \phi_o \\ \delta_{oo'}^{(ob)} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi_a = \phi_b = \omega$, $\phi_o = 0$ και $\delta_{oo'} = \delta_{oo'}^{(oa)} + \delta_{oo'}^{(ob)}$ προκύπτει

$$\delta_{oo'} = \delta_{oo'}^{(oa)} + \delta_{oo'}^{(ob)} = \frac{3}{4} L_2 \omega + \frac{3L_2^2 M_a}{32E_2 I_2} \quad (2.32)$$



Σχ 2.11. Η γεωμετρική απεικόνιση της σχετικής ολίσθησης των νημάτων μέσα στο ύφασμα.

Κεφάλαιο 3

Η μηχανική των επαφών στα υφάσματα

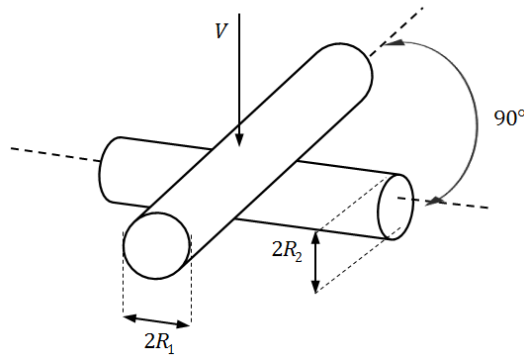
3.1. Εισαγωγή

Όταν δύο σώματα έρχονται σε επαφή αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια επαφής τους κάποιες σημαντικές τάσεις σε τοπικό επίπεδο. Η θεωρία της Μηχανικής των επαφών έχει σαν κύριο στόχο να μελετήσει και να αναλύσει την φύση αυτών των ιδιόμορφων τάσεων καθώς και τις επακόλουθες παραμορφώσεις που αυτές επιφέρουν. Το ζήτημα της επαφής των σωμάτων συναντάται σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές τις καθημερινότητας όπως τα φρένα των αυτοκινήτων, των ελαστικών του αυτοκινήτου με το οδόστρωμα, των τροχών του τρένου με τις ράγες κλπ. Επιπλέον, στα υφασμάτινα υλικά λόγω του τρόπου ύφανσης των νημάτων αναπτύσσονται στα σημεία τομής τους δυνάμεις λόγω της μεταξύ τους επαφής. Οι δυνάμεις επαφής είναι τοπικού χαρακτήρα αλλά είναι τέτοιας έντασης που επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό την ολική μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Δεδομένου επίσης ότι στην έκταση όλου του υφάσματος τα σημεία τομής των νημάτων είναι πολυπληθή διαφαίνεται ότι οι τάσεις επαφής διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη.

Η θεωρία της μηχανικής των επαφών αποτελεί ένα μέρος μιας γενικότερης θεωρίας, της Τριβολογίας (Tribology). Στην τριβολογία περιλαμβάνονται οι θεωρίες της επαφής και της τριβής μεταξύ των σωμάτων καθώς και η φθορά που προκαλείται στα σώματα. Η έννοια της τριβής είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την θεωρία της μηχανικής και οφείλεται κατά κύριο λόγο στις μικροατέλειες των επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Συνεπώς, όταν οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή είναι λείες, με μια κάπως ομαλή γεωμετρία και αποτελούνται και από το ίδιο υλικό² θεωρητικά η τριβή μπορεί να αγνοηθεί. Στην περίπτωση των υφασμάτων κατασκευών η τριβή μεταξύ των νημάτων αποτελεί μια πολύ σημαντική παράμετρο λόγω της ύφανσης των νημάτων μέσα στο ύφασμα. Κατά την ανάλυση των τάσεων επαφής στο ύφασμα δεν θα γίνει αναφορά στην φθορά των νημάτων λόγω της μεταξύ τους τριβής επειδή οι διατμητικές τάσεις θα είναι μικρές. Επιπρόσθετα, θα θεωρηθεί ότι τα νήματα δεν προσκολλούνται μεταξύ τους συνεπώς φαινόμενα προσκόλλησης (adhesion) δεν θα ληφθούν υπόψη.

Η γεωμετρία των σωμάτων που έρχονται σε επαφή αποτελεί καθοριστική παράμετρο αφού καθορίζει την γεωμετρία της επιφάνειας επαφής. Η επιφάνεια επαφής μπορεί να είναι κυκλική, ελλειπτική, τριγωνική, μια ευθεία γραμμή ή ακόμη και ένα σημείο ανάλογα με την μακροσκοπική γεωμετρία των σωμάτων και η έκτασή της είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις των σωμάτων. Αυτή είναι η περιοχή στην οποία θα επικεντρωθεί το ενδιαφέρον διότι οι αναπτυσσόμενες συγκεντρωμένες τάσεις μειώνονται με έντονο ρυθμό όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο της. Στην περίπτωση των υφασμάτων κατασκευών θεωρείται ότι οι ίνες έχουν κυκλική διατομή και μακροσκοπικά μπορούν να θεωρηθούν κύλινδροι αρκετά μεγάλου μήκους, Σχ.3.1.

² Έχουν τις ίδιες σταθερές.



Σχ 3.1. Η επαφή των νημάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν την επαφή μεταξύ δύο κυλίνδρων των οποίων οι διαμήκεις άξονες αρχικά τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Η ορθή δύναμη V αναπτύσσεται στο σημείο τομής τους.

3.2. Η επιφάνεια επαφής

Όταν δύο σώματα έρχονται σε επαφή αρχικά η επιφάνεια επαφής θα είναι ή ένα σημείο ή μια ευθεία γραμμή. Όταν επιβληθεί ακόμη και ένα πολύ μικρό φορτίο εξωτερικά, και τα δύο σώματα παραμορφώνονται στην γειτονιά του αρχικού σημείου επαφής με αποτέλεσμα η επιφάνεια επαφής να τροποποιείται. Στην περίπτωση του σημείου μπορεί να γίνει κύκλος ή έλλειψη ενώ στην περίπτωση της ευθείας να γίνει μια λωρίδα συγκεκριμένου πάχους. Σε όλες τις περιπτώσεις το εμβαδό της επιφάνειας επαφής είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις των σωμάτων. Το επιθυμητό σε κάθε περίπτωση είναι να προσδιοριστεί το σχήμα της επιφάνειας επαφής, ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με το εξωτερικό φορτίο καθώς και οι τάσεις και οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται τοπικά στην περιοχή.

Θεωρούμε ότι τα προφίλ επιφανειών των σωμάτων που έρχονται σε επαφή, στην γενική τους μορφή, θα περιγράφονται από τις σχέσεις

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_1} y_1^2 \quad (3.1)$$

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R'_2} x_2^2 + \frac{1}{2R''_2} y_2^2 \right) \quad (3.2)$$

όπου R'_1, R''_1, R'_2, R''_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες των δύο σωμάτων αντίστοιχα. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών πριν εφαρμοστεί οποιοδήποτε φορτίο θα δίνεται από την σχέση

$$h = z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'} x^2 + \frac{1}{2R''} y^2 \quad (3.3)$$

όπου R', R'' είναι οι σχετικές ακτίνες καμπυλότητας για τις δύο επιφάνειες και A, B είναι δύο θετικές σταθερές για τις οποίες θα ισχύουν οι σχέσεις

$$A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R''_1}+\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R''_2}\right] \quad (3.4)$$

$$B-A=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R'_1}-\frac{1}{R''_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R''_2}\right)^2+2\left(\frac{1}{R'_1}-\frac{1}{R''_1}\right)\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R''_2}\right)\cos 2\psi\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

όπου ψ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες των δύο κυλίνδρων. Στο αρχικό στάδιο τα νήματα θα τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, Σχ.3.1, και κατά συνέπεια σε αυτό το στάδιο θα είναι $\psi = \frac{\pi}{2}$. Επιπλέον εισάγεται και η έννοια της σχετικής ακτίνας καμπυλότητας R_e η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$R_e = \sqrt{R'R''} = \frac{1}{2\sqrt{A \cdot B}} \quad (3.6)$$

Είναι προφανές από την εξίσωση (3.3) ότι εν γένει οι αποστάσεις h μεταξύ των δύο απαράμορφωτων επιφανειών δημιουργούν μια έλλειψη με ημιάξονες a, b . Ο λόγος των ημιαξόνων θα δίνεται από την σχέση

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{R'}{R''}} \quad (3.7)$$

Από τις σχέσεις (3.4),(3.5),(3.7) είναι δυνατόν σε κάθε περίπτωση να εκτιμηθεί η επιφάνεια επαφής η οποία εξαρτάται από την γεωμετρία των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση επαφής δύο σφαιρών όπου $R'_1=R''_1=R_1$ και $R'_2=R''_2=R_2$, από τις σχέσεις (3.4),(3.5) θα είναι

$$A=B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad (3.8)$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την (3.7) θα δώσει $a=b$, που σημαίνει ότι η επιφάνεια επαφής μεταξύ δύο σφαιρών είναι κυκλική με ακτίνα a .

Στην περίπτωση της επαφής μιας σφαίρας ακτίνας R_1 με ημιάπειρο χώρο, θα είναι $R'_1=R''_1=R_1$ και $R'_2=R''_2=\infty$, αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (3.4),(3.5) θα είναι

$$A=B=\frac{1}{2R_1} \quad (3.9)$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την (3.7) θα δώσει $a=b$, που σημαίνει ότι η επιφάνεια επαφής μεταξύ μιας σφαίρας και του ημιάπειρου χώρου θα είναι κυκλική με ακτίνα a .

Στην περίπτωση δύο κυλίνδρων με ακτίνες R_1, R_2 , οι οποίοι τέμνονται κατά μήκος των αξόνων τους, θα είναι $R'_1=R_1, R''_1=\infty$, $R'_2=R_2, R''_2=\infty$ ενώ $\psi=0$. Από τις σχέσεις (3.4),(3.5) σε αυτή την περίπτωση προκύπτει

$$A=B=0 \quad (3.10)$$

Που σημαίνει ότι η επιφάνεια επαφής είναι μια λωρίδα πάχους $2a$. Εάν οι κύλινδροι τέμνονται κάθετα μεταξύ τους και η ακτίνα τους είναι η ίδια, δηλ. $R_1 = R_2 = R$, και $R'_1 = R, R''_1 = \infty$, $R'_2 = R, R''_2 = \infty$ και $\psi = \frac{\pi}{2}$, τότε από τις σχέσεις (3.4), (3.5) προκύπτει

$$A = B = \frac{1}{2}R \quad (3.11)$$

και σε αυτή την περίπτωση η ακτίνα είναι κυκλική.

3.3. Η θεωρία του Hertz

Ο Hertz (1882) ήταν ο πρώτος ο οποίος μελέτησε διεξοδικά την επαφή μεταξύ δύο ελαστικών σωμάτων. Η ανάλυσή του ήταν διεξοδική και αναλυτική αλλά θεωρούσε ότι μεταξύ των δύο επιφανειών δεν υπάρχει καθόλου τριβή (frictionless contact). Υπέθεσε αρχικά ότι η επιφάνεια επαφής θα είναι γενικά μια έλλειψη στηριζόμενος στις παρατηρήσεις των πειραμάτων του. Υπέθεσε επίσης ότι κάθε ένα από τα δύο σώματα θεωρείται ένας ημιάπειρος χώρος με επίπεδη επιφάνεια για να τονίσει ότι οι τάσεις και οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στην επιφάνεια επαφής εξετάζονται ανεξάρτητα από τις τάσεις και τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στις εξωτερικές επιφάνειες των σωμάτων. Ένας άλλος σημαντικός λόγος που έκανε αυτή την θεώρηση ήταν για να εκμεταλλευτεί την θεωρία της ελαστικότητας η οποία έχει εξετάσει λεπτομερώς προβλήματα με τον ημιάπειρο χώρο αλλά και τις συνοδευόμενες συνοριακές συνθήκες. Επίσης, θεώρησε ότι ασκούνται μόνο ορθές τάσεις στα σώματα και ότι όλες οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές, Σχ.3.1.

Πέραν του προσδιορισμού της γεωμετρίας της επιφάνειας επαφής πολύ μεγάλη σημασία έχει και ο προσδιορισμός των τάσεων και των παραμορφώσεων στα σημεία εντός της επιφάνειας επαφής. Στην περίπτωση που επιφάνεια επαφής είναι κυκλική και δεν υπάρχει καθόλου τριβή η κατανομή των τάσεων στην επιφάνεια θα δίνεται από την σχέση

$$p = p_0 \left\{ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο της επιφάνειας, a είναι η ακτίνα της κυκλικής επιφάνειας επαφής η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$a = \left(\frac{3VR}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.13)$$

όπου V είναι η ορθή τάση επαφής, p_0 είναι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$p_0 = \frac{3V}{2\pi a^2} \quad (3.14)$$

όπου E^* το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας το οποίο θα ορίζεται από την σχέση

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (3.15)$$

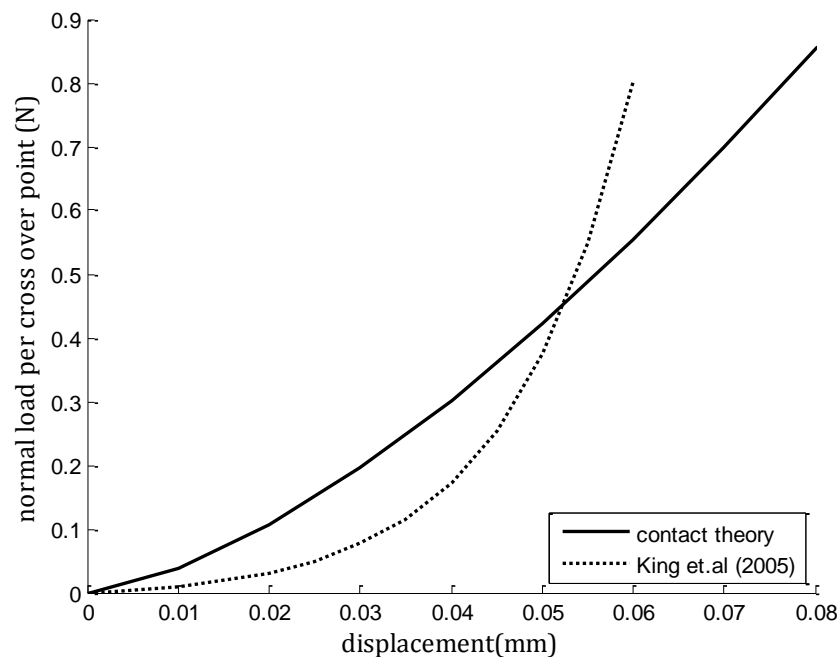
Στην τελευταία σχέση E_1, E_2 είναι τα μέτρα ελαστικότητας των δύο κυλίνδρων, ν_1, ν_2 οι λόγοι Poisson των δύο κυλίνδρων. Η μετατόπιση δ_i λόγω της ορθής τάσης που εφαρμόζεται θα δίνεται από την σχέση

$$\delta_i = \left(\frac{9V^2}{16RE^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.16)$$

Οι King et.al. (2005) στο πλαίσιο της ανάλυσης των υφασμάτων κατασκευών για το σχεδιασμό αντιβαλλιστικών γιλέκων, υπολόγισαν την εγκάρσια μετατόπιση των νημάτων στα σημεία επαφής χρησιμοποιώντας ένα καταστατικό νόμο που δίνεται από την σχέση

$$F_i = K_i (e^{a\delta_i} - 1) \quad (3.17)$$

όπου K_i, a είναι σταθερές του υλικού οι οποίες υπολογίζονται πειραματικά. Πραγματοποιώντας πειραματικές μετρήσεις σε υφασμάτινα δοκίμια από ίνες Kevlar S706 υπολόγισαν ότι οι τιμές των δύο σταθερών θα είναι $K_i = 9.0 \times 10^{-3} N$, και $a = 7.5 \times 10^4 m^{-1}$. Στην ανάλυσή τους δεν έλαβαν υπόψη ότι η κατακόρυφη μετατόπιση στους κόμβους του νήματος εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την εφαρμοζόμενη αξονική εφελκυστική δύναμη στα νήματα. Οι σχέσεις (3.16), (3.17) απεικονίζονται στο Σχ.3.2.



Σχ 3.2. Συγκριτικό διάγραμμα της μετατόπισης στα σημεία επαφής των νημάτων.

3.4. Η σχετική στροφή των νημάτων μέσα στο ύφασμα

Υπό την επίδραση των διατμητικών τάσεων τα νήματα θα στραφούν σχετικά το ένα ως προς το άλλο όπως φαίνεται και στο Σχ. Στην περίπτωση όπου η επιφάνεια επαφής είναι ελλειπτική η μέση τάση που ασκείται θα δίνεται από την σχέση

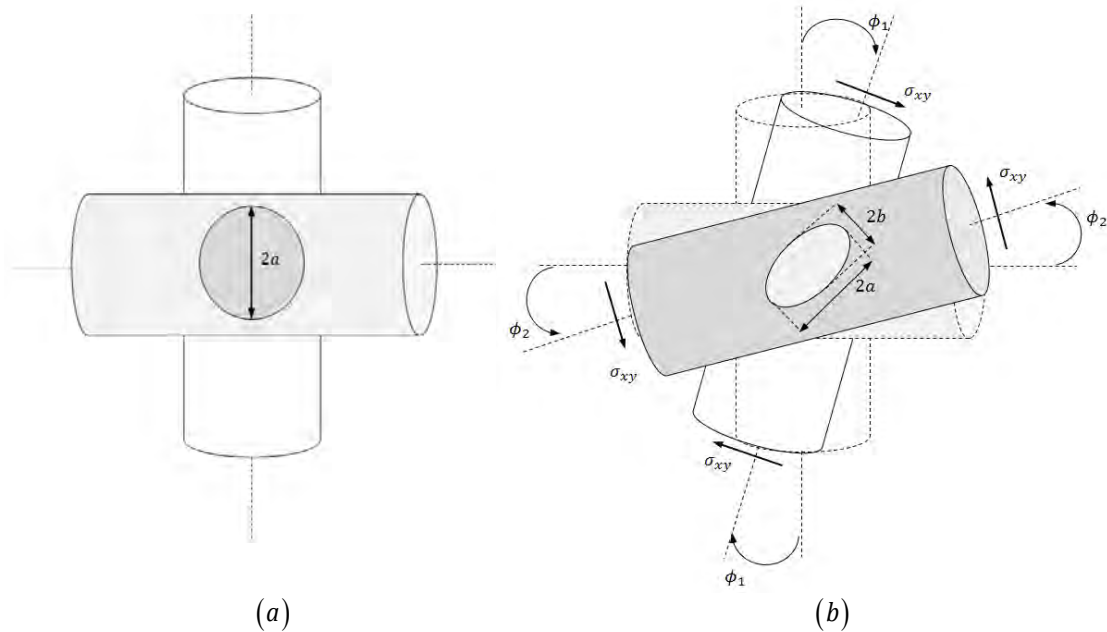
$$p_{average} = \frac{V}{\pi ab} \quad (3.18)$$

όπου a, b είναι οι ημιμάξονες της έλλειψης οι οποίοι θα ορίζονται από τις σχέσεις

$$a = m \left[\frac{3\pi p_{average} (k_1 + k_2)}{4(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad b = n \left[\frac{3\pi p_{average} (k_1 + k_2)}{4(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.19)$$

Οι παράμετροι k_1, k_2 θα δίνονται από τις σχέσεις

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (3.20)$$



Σχ 3.3. (α) Αρχικά τα νήματα τέμνονται κάθετα μεταξύ τους (β) υπό την επίδραση των διατμητικών τάσεων το ένα νήμα στρέφεται σε σχέση με το άλλο.

Όταν οι άξονες των δύο κυλίνδρων δεν τέμνονται κάθετα αλλά δημιουργούν μεταξύ τους μια γωνία $\psi = 90^\circ - \phi_1 - \phi_2$, θα είναι

$$\cos \psi = \frac{B - A}{A + B} \quad (3.21)$$

Οι τιμές των παραμέτρων A, B ορίζονται από τις σχέσεις

$$A + B = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right] \quad (3.22)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\psi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

Οι τιμές των μεταβλητών m, n που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.19) θα δίνονται από τον ακόλουθο Πίνακα 1, σε συνάρτηση με την γωνία ψ .

Στο αρχικό στάδιο της παραμόρφωσης, όπου οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές, η επαφή μεταξύ των νημάτων θεωρείται πλήρης και η επιφάνεια επαφής θα είναι κυκλική με ακτίνα

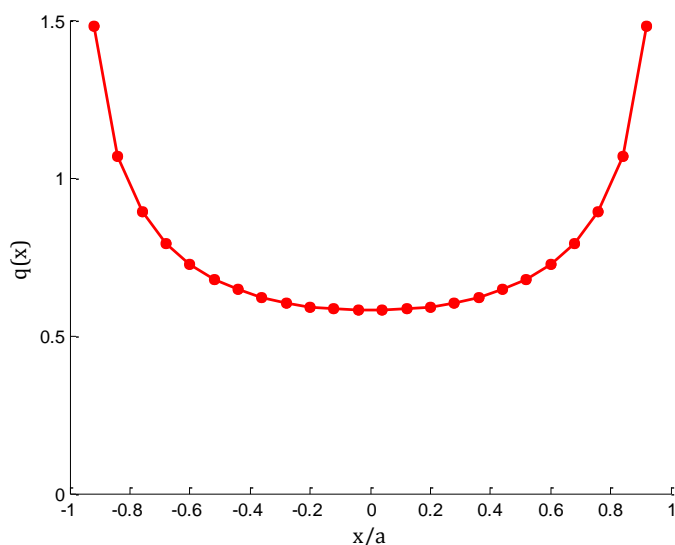
θ°	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
m	-	6,61	4,88	3,78	3,15	2,7	2,40	2,13	1,9	1,75	1,61	1,4	1,3	1,28	1,20	1,13	1,0	1,0
n	0	0,32	0,37	0,41	0,46	0,4	0,53	0,57	0,6	0,64	0,68	0,72	0,7	0,80	0,85	0,89	0,9	1,0
λ	-	0,85	1,04	1,22	1,40	1,4	1,55	1,64	1,7	1,77	1,83	1,8	1,9	1,94	1,97	1,99	1,9	2,0

Πίνακας 1. Οι μεταβλητές m, n σε συνάρτηση με την γωνία ψ των αξόνων των νημάτων.

a , Σχ.3.5(α). Εν συνεχεία, η σταδιακή επιβολή των διατμητικών τάσεων σ_{xy} θα έχει ως αποτέλεσμα στην διεπιφάνεια των νημάτων να αναπτύσσονται κατανεμημένες διατμητικές τάσεις $q(x)$, οι οποίες θα δίνονται από την σχέση

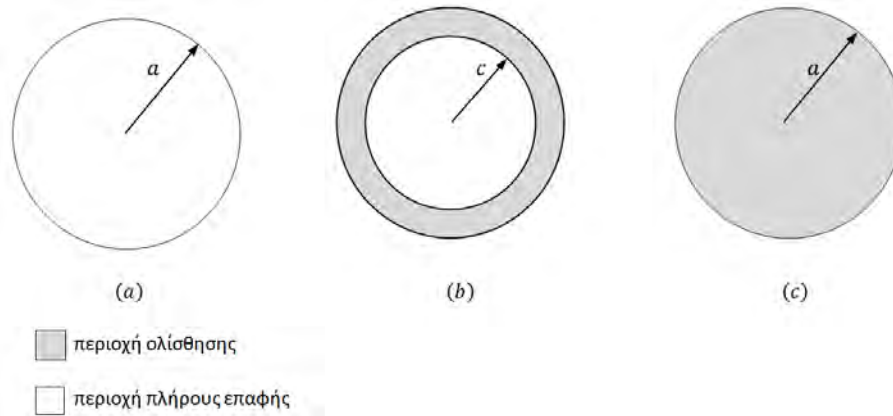
$$q(x) = \frac{\sigma_{xy}}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad (3.24)$$

όπου σ_{xy} είναι η δύναμη ανά μονάδα μήκους, a είναι η ακτίνα της κυκλικής επιφάνειας επαφής. Οι γραφική παράσταση των διατμητικών τάσεων δίνεται στο Σχ.3.4. Φαίνεται καθαρά ότι οι διατμητικές τάσεις στα περιφερειακά σημεία της διατομής, όπου $x = \pm a$, λαμβάνουν θεωρητικά άπειρη τιμή.



Σχ 3.4. Η μεταβολή των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια επαφής των νημάτων.

Δεδομένου όμως ότι το υλικό δεν μπορεί να παραλάβει άπειρη τάση προκύπτει ότι σε αυτή την περιοχή θα εκδηλωθεί μια σχετική ολίσθηση. Συνεπώς η αρχικά κυκλική διατομή της επιφάνειας επαφής θα αρχίσει να συρρικνώνεται προς το κέντρο και να δημιουργείται ταυτόχρονα και ένας κυκλικός δακτύλιος που θα περιγράφει την περιοχή ολίσθησης, Σχ.3.5(b). Όταν η διατμητική τάση ξεπεράσει τις δυνάμεις τριβής μεταξύ των νημάτων τότε θα εκδηλωθεί η ολική ολίσθηση μεταξύ των νημάτων, Σχ.3.5(c).



Σχ 3.5. Η επιφάνεια επαφής των νημάτων κατά την βαθμιαία αύξηση των διατμητικών τάσεων.

Η σταδιακή αύξηση των διατμητικών τάσεων θα οδηγήσει σε αντίστοιχη βαθμιαία αύξηση της στρεπτικής ροπής. Σε αυτή την περίπτωση οι μετατοπίσεις στην περιφέρεια της επιφάνειας επαφής αλλά και η διατμητικές τάσεις θα δίνονται από τις σχέσεις

$$u_\theta = \phi r, u_r = \sigma_{zz} = 0, r \leq c, z = 0 \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{z\theta} = q(r) &= \frac{3\mu_f V}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \\ \tau_{rz} = \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} c \leq r \leq a, z = 0 \quad (3.26)$$

Ο Lubkin(1951) υπολόγισε ότι οι διατμητικές τάσεις εντός της επιφάνειας επαφής που δεν περιστρέφεται (stick zone, $r \leq c$) θα δίνονται από την σχέση

$$\tau_{z\theta} = q(r) = \frac{3\mu_f V}{(\pi a)^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + k^2 D(k) F(k', \phi) - K(k) E(k', \phi) \right] \quad (3.27)$$

όπου

$$k = \sqrt{1 - (c/a)^2} = \sqrt{1 - k'^2}, \quad k' = \frac{c}{a}, \quad \phi = \sin^{-1} \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{k'^2 - (r/a)^2}{1 - (r/a)^2}} \quad (3.28)$$

Τα $F(k', \varphi), E(k', \varphi)$ είναι ελλειπτικά ολοκληρώματα $1^{\text{ου}}$ και $2^{\text{ου}}$ είδους αντίστοιχα με χαρακτηριστικό μέγεθος (module) το k' και μέτρο (amplitude) την γωνία φ . Το $D(k)$ είναι ένα πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα (complete elliptic integral) με χαρακτηριστικό μέγεθος (module) το k , και θα δίνεται από την σχέση

$$D(k) = \frac{K - E}{k^2} \quad (3.29)$$

Όπου K, E είναι πλήρη ολοκληρώματα $1^{\text{ου}}$ και $2^{\text{ου}}$ είδους, αντίστοιχα. Η σχέση μεταξύ της γωνίας β και της ακτίνας της «κολλημένης» περιοχής θα είναι

$$\beta = \frac{3\mu_f V}{4\pi G a^2} k^2 D(k) \quad (3.30)$$

ενώ η εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή M_z , από την ισορροπία, θα δίνεται από την σχέση

$$M_z = 2\pi \int_0^a q(r) r^2 dr \quad (3.31)$$

όπου $q(r)$ είναι η κατανομή των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια επαφής και θα δίνεται από την σχέση

$$q(r) = \frac{3\mu_f P}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad c \leq r \leq a \quad (3.32)$$

Από τις σχέσεις (3.31), (3.32) προκύπτει η τελική σχέση της στρεπτικής ροπής

$$M_z = \frac{\mu_f V a}{4\pi} \left\{ \frac{3\pi^2}{4} + k'^2 \left[6K(k) + (4k'^2 - 3)D \right] - 3kK(k) \sin^{-1} k' \right. \\ \left. + 3k^2 \left[K(k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{-1}(k' \sin a)}{(1 - k'^2 \sin^2 a)^{\frac{3}{2}}} da - D(k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{-1}(k' \sin a)}{(1 - k'^2 \sin^2 a)^{\frac{1}{2}}} da \right] \right\} \quad (3.33)$$

όπου $\sin a = r/c$. Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης δίνεται στο Σχ. 3.6. Η μέγιστη τιμή της στρεπτικής ροπής σημειώνεται όταν όλη η επιφάνεια επαφής «ξεκολλήσει» και μπορεί πλέον να στρέφεται χωρίς την τριβή. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι

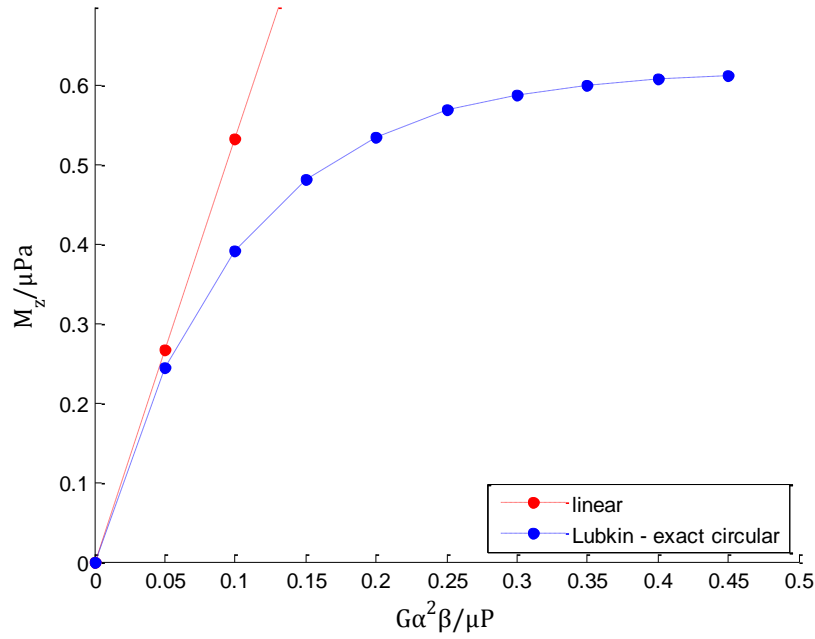
$$c = 0 \rightarrow k' = 0 \rightarrow k = 1 \quad (3.34)$$

και κατά συνέπεια

$$K(1) = \infty, E(1) = 1, D(1) = K(1) - E(1) = \infty \quad (3.35)$$

Και σε αυτή την περίπτωση από την σχέση (3.33) προκύπτει

$$M_z^{\max} = \frac{3\pi}{16} \mu_f P a \quad (3.36)$$



Σχ 3.6. Η στρεπτική ροπή σε συνάρτηση με την γωνία στροφής των νημάτων λόγω του ζεύγους των διατμητικών τάσεων (Lubkin,(1951)).

Ο Deresiewicz (1954) εισήγαγε κάποιες προσεγγιστικές σχέσεις μεταξύ της εξωτερικώς επιβεβλημένης στρεπτικής ροπής και της γωνίας στροφής φ , δηλ.

$$\frac{M_z}{\mu_f Va} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1 + 3 \left(\frac{c}{a} \right)^2}{4} \right] \quad (3.37)$$

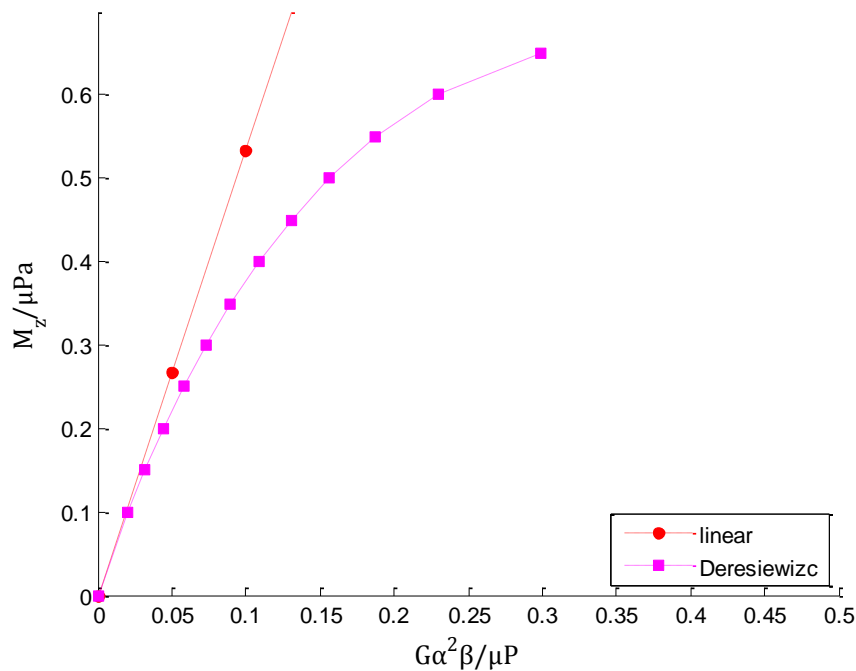
$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{M_z}{\mu_f Va} \right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (3.38)$$

$$\frac{Ga^2 \beta}{\mu_f V} = \frac{3}{128} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \left(11 - 3 \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (3.39)$$

Οι σχέσεις (3.37),(3.38),(3.39) ισχύουν για μικρές τιμές της στρεπτικής ροπής. Αντικαθιστώντας την σχέση (3.38) στην σχέση (3.39) προκύπτει η σχέση στρεπτικής ροπής – γωνίας στροφής

$$\frac{Ga^2 \beta}{\mu_f P} = \frac{1}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{M_z}{\mu_f Va} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[3 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{M_z}{\mu_f Va} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.40)$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας εξίσωσης φαίνεται στο Σχ.3.7.



Σχ 3.7. Η διατμητική γωνία σε συνάρτηση με την γωνία στροφής β . (Deresiewicz (1954))

Ο Cuttino(1997) πρότεινε ένα μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπόψη την επιφάνεια επαφής ως έλλειψη. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει το μοντέλο είναι

$$\frac{M_z}{\mu V \rho} = 0.62 \left[1 - e^{-10(aJ^{0.5}G/\mu V)} \right] \quad (3.41)$$

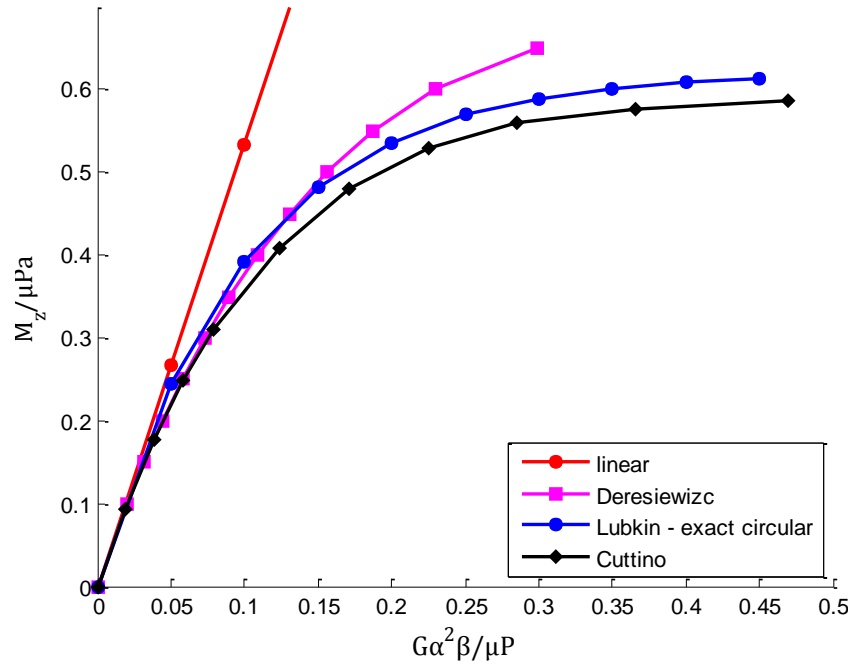
V το κατακόρυφο φορτίο, G το μέτρο διάτμησης, μ ο συντελεστής τριβής, J η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του νήματος η οποία ορίζεται από την σχέση

$$J = \frac{ab}{2}(a^2 + b^2) \quad (3.42)$$

όπου ρ είναι μια παράμετρος που ορίζει τον μέσο όρο των ημιαξόνων της έλλειψης, δηλ.

$$\rho = 0.5(a + b) \quad (3.43)$$

Το συγκριτικό διάγραμμα των τριών μοντέλων φαίνεται στο Σχ.3.8. Στο παρακάτω συγκριτικό διάγραμμα παρουσιάζεται και το γραμμικό μοντέλο το οποίο δίνεται από την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η κλίση της ευθείας θα είναι $m = 16/3$ και θα είναι ε-φαπτόμενη με την λύση που δίνεται από τον Deresiewicz και με την λύση που δίνεται από τον Cuttino (βλ. Παράρτημα Α).



Σχ 3.8. Συγκριτικό διάγραμμα όλων των μοντέλων.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι ο Cuttino θεωρώντας την επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων ελλειπτική, υπολόγισε την σχέση της στρεπτικής ροπής M_z με την γωνία στροφής β χρησιμοποιώντας την εκθετική σχέση (2.70). Σκεπτόμενοι αναλογικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι προσεγγιστικά μια τέτοια σχέση μπορεί να ισχύει και για την κυκλική επιφάνεια επαφής. Συνεπώς, θα έχουμε

$$Y = A[1 - e^{-BX}] \quad (3.44)$$

Στην τελευταία σχέση, όπου Y είναι ο κανονικοποιημένος όρος της ροπής, και όπου X είναι ο κανονικοποιημένος όρος της γωνίας στροφής. Τα A, B είναι σταθερές που θα υπολογιστούν από τις συνθήκες του προβλήματος. Η πρώτη συνθήκη απαιτεί η εξίσωση (3.44) να έχει παράγωγο στο μηδέν ίση με την κλίση των υπόλοιπων μοντέλων όπως φαίνεται στο γράφημα 3.8. Επίσης, για πολύ μεγάλες τιμές τις γωνίας στροφής, η ροπή οφείλει να τείνει στην μέγιστη δυνατή τιμή της, η οποία είναι $3\pi / 16$. Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω θα είναι

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=0} = \frac{16}{3} \Rightarrow A \cdot B e^{-BX} \Big|_{X=0} = \frac{16}{3} \Rightarrow A \cdot B = \frac{16}{3} \quad (3.45)$$

$$\max Y \Big|_{X \rightarrow \infty} = \frac{3\pi}{16} \Rightarrow A = \frac{3\pi}{16} \quad (3.46)$$

Από τις σχέσεις (3.45),(3.46) προκύπτει

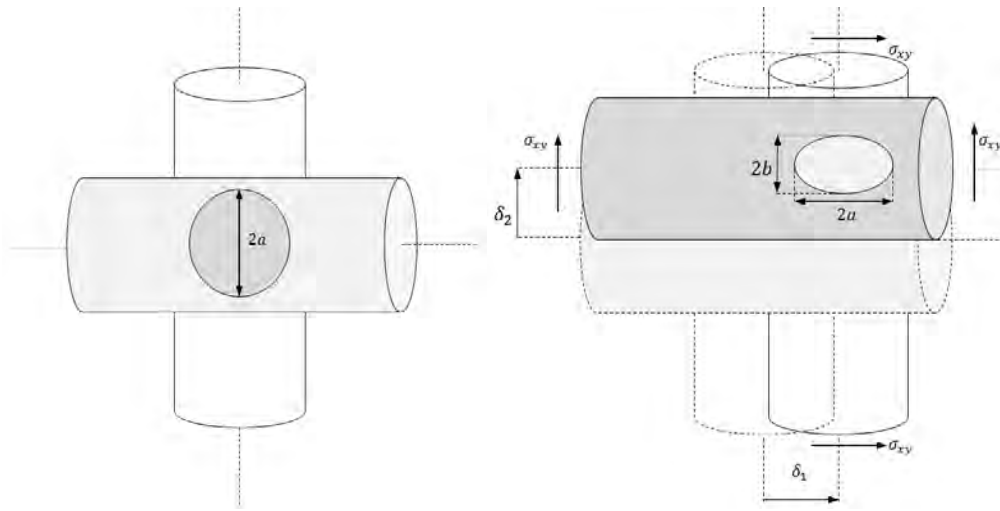
$$A = \frac{3\pi}{16}, \quad B = \frac{256}{9\pi} \quad (3.47)$$

Τελικά η σχέση (3.44) γίνεται

$$Y = \frac{3\pi}{16} \left[1 - e^{-\frac{256}{9\pi} X} \right] \Rightarrow Y = 0.589 \left[1 - e^{-9.054X} \right] \quad (3.48)$$

3.5. Η σχετική ολίσθηση των νημάτων μέσα στο ύφασμα

Η σχετική ολίσθηση των νημάτων αποτελεί μια χαρακτηριστική παραμόρφωση των νημάτων η οποία αν και είναι πολύ μικρότερης έντασης από την σχετική στροφή διαδραματίζει αρκετά σημαντικό ρόλο στην τελική μηχανική απόκριση της υφασμάτινης κατασκευής. Στο 3.9. περιγράφεται σχηματικά το φαινόμενο της σχετικής ολίσθησης των νημάτων.



Σχ 3.9. Η σχετική ολίσθηση των νημάτων εντός του υφάσματος.

Η επιφάνεια επαφής των νημάτων και η βαθμιαία εξέλιξή της περιγράφεται από το Σχ.3.5. Γενικά, για τις συνθήκες ολίσθησης ή μη μεταξύ δύο σωμάτων ισχύουν οι σχέσεις

$$|q(r)| \leq \mu_f |p(r)| \quad , \text{στατική τριβή} \quad (3.49)$$

$$|q(r)| > \mu_f |p(r)| \quad , \text{τριβή ολίσθησης} \quad (3.50)$$

Ο Mindlin(1949) έδειξε ότι η εφαπτομενική μετατόπιση δ_x ενός σημείου που βρίσκεται εντός της επιφάνειας επαφής θα δίνεται από την μη γραμμική σχέση

$$\delta_x = \frac{3\mu_f V}{16a} \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{xy}}{\mu_f V} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (3.51)$$

όπου ν_1, ν_2 είναι οι λόγοι του Poisson για τα νήματα στις δύο κατευθύνσεις, μ_f είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των νημάτων, T είναι οι διατμητικές τάσεις και V οι ορθές τάσεις στην περιοχή επαφής των νημάτων. Στην ειδική περίπτωση όπου τα νήματα των δύο κατευθύνσεων που έρχονται σε επαφή αποτελούνται από το ίδιο υλικό η σχέση εφαπτομενικού φορτίου – μετατόπισης απλοποιείται ακόμη περισσότερο και λαμβάνει την μορφή

$$\delta_x = \frac{3\mu_f V}{8a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{xy}}{\mu_f V} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (3.52)$$

Όταν η ακτίνα c της επιφάνειας επαφής εκμηδενιστεί τότε οι δύο επιφάνειες ολισθαίνουν πλήρως η μια ως προς την άλλη, Σχ. 3.5(c). Όταν αρχίσει η ολίσθηση μεταξύ των δύο επιφανειών η μετατόπιση λαμβάνει μια χαρακτηριστική τιμή δ_{sl} , η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$\delta_{x,sl} = \frac{\sigma_{xy}}{8a} \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right) \quad (3.53)$$

Στην περίπτωση όπου τα νήματα στις δύο κατευθύνσεις αποτελούνται από το ίδιο υλικό η τελευταία σχέση απλοποιείται και παίρνει την μορφή

$$\delta_{x,sl} = \frac{\sigma_{xy}}{4a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right) \quad (3.54)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (3.52),(3.54) φαίνονται στο Σχ.3.10. Στην ειδική περίπτωση όπου επιλεγεί υλικό με συντελεστή Poisson $\nu=0.5$ τότε η μετατόπιση παίρνει την τιμή

$$\delta_{sl} = \frac{27}{16} \frac{\mu_f V}{Ea} \quad (3.55)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.52) ως προς την εφαπτομενική φόρτιση σ_{xy} , θα είναι

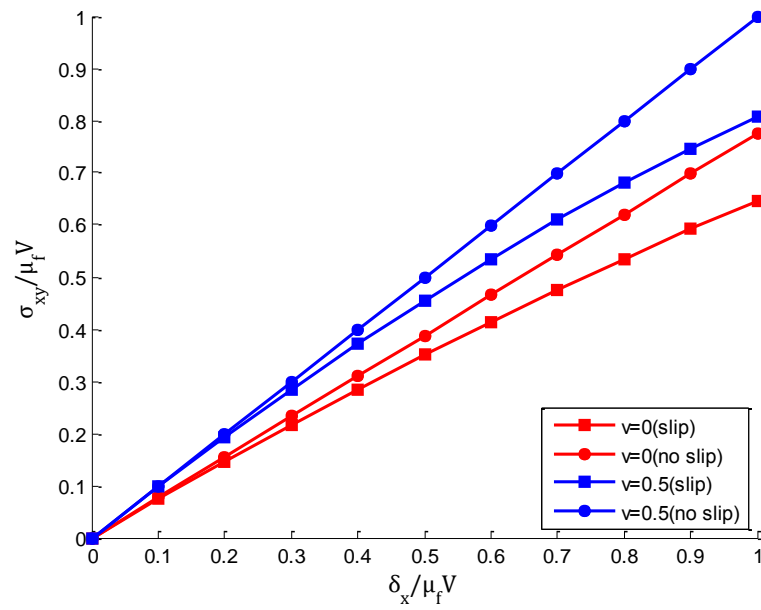
$$\frac{d\delta}{dT} = \frac{3\mu_f V}{8Ea} (2-\nu)(1+\nu) \left\{ -\frac{2}{3} \left[1 - \frac{\sigma_{xy}}{\mu_f V} \right]^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{\mu_f V} \right) \right\} \Rightarrow \frac{d\delta}{dT} = \frac{1}{4} (2-\nu)(1+\nu) \left[1 - \frac{\sigma_{xy}}{\mu_f V} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (3.56)$$

Εάν στην τελευταία θεωρηθεί η ειδική περίπτωση όπου $\nu=0.5$ και $\sigma_{xy} \rightarrow 0$ τότε προκύπτει ότι

$$\left. \frac{d\delta}{d\sigma_{xy}} \right|_{\sigma_{xy}=0} = \frac{9}{16Ea} \quad (3.57)$$

ή ισοδύναμα

$$\left. \frac{d\sigma_{xy}}{d\delta} \right|_{\sigma_{xy}=0} = \frac{16Ea}{9} \quad (3.58)$$



Σχ 3.10. Η εφαπτομενική μετατόπιση των νημάτων στην περίπτωση της ολίσθησης και στην περίπτωση της μη ολίσθησης.

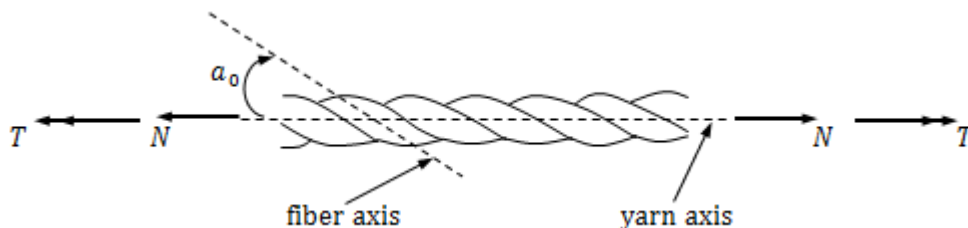
Κεφάλαιο 4

Δοκοί με αρχική στροφή και αξονική δύναμη

4.1. Εισαγωγή

Η μηχανική συμπεριφορά των υφασμάτων, λόγω της δομικής αρχιτεκτονικής τους, μπορεί να μελετηθεί σε διάφορες κλίμακες. Στην μακροσκοπική κλίμακα το ύφασμα θεωρείται σαν ένα ανισότροπο, ανομοιογενές και μη γραμμικό συνεχές μέσο. Ο καταστατικός νόμος συμπεριφοράς του μέσου περιγράφει την μηχανική απόκριση του υφάσματος. Στην μεσοκλίμακα, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των νημάτων καθορίζουν την τελική συμπεριφορά του υφάσματος. Στην μικροσκοπική κλίμακα οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ινών εντός του νήματος αποκτούν κυρίαρχο ρόλο και επηρεάζουν καθοριστικά την μακροσκοπική απόκριση της υφασμάτινης κατασκευής.

Το πρωτογενές δομικό στοιχείο του υφάσματος είναι η ίνα. Το νήμα, που αποτελεί το δευτερογενές δομικό στοιχείο, προέρχεται από μια ομάδα ινών οι οποίες τοποθετούνται η μια δίπλα στην άλλη έχοντας τους άξονές τους παράλληλους. Στα περισσότερα υφάσματα το νήμα δεν δομείται με απλή παράθεση των ινών αλλά με μια ταυτόχρονη συστροφή τους περί τον διαμήκη άξονά τους, Σχ.4.1. Χαρακτηριστικό γνώρισμα του νήματος αποτελεί η μεγάλη λυγηρότητά του η οποία καταδεικνύεται από την μικρή τιμή του λόγου της διατομής του A προς το μήκος του L , δηλ., $A/L \ll 1$. Η μηχανική συμπεριφορά τέτοιου είδους δομικών στοιχείων μπορούν να αναλυθεί με την γραμμική ελαστική θεωρία των δοκών. Επιπλέον, λόγω της δομής τους τα υφάσματα μπορούν να μεταφέρουν εντός του επιπέδου τους αξονικά φορτία, κυρίως εφελκυστικά, με πολύ αποτελεσματικό τρόπο. Συνεπώς, η μηχανική συμπεριφορά της ίνας εντός του νήματος είναι ισοδύναμη με μια συστρεμμένη πρισματική δοκό στην οποία ταυτόχρονα ασκείται και μια αξονική δύναμη, Σχ.4.1.



Σχ 4.1 Η δομή του νήματος στην μικροκλίμακα, όπου a_0 είναι η αρχική στροφή των ινών περί τον διαμήκη άξονά του, T είναι η στρεπτική ροπή και N είναι η αξονική δύναμη

Η μελέτη των πρισματικών δοκών με αρχική συστροφή και ταυτόχρονη αξονική καταπόνηση άρχισε να εντατικοποιείται την δεκαετία του '70. Το έναυσμα δόθηκε από τα προβλήματα

που εμφανίστηκαν εκείνη την περίοδο στις έλικες των ελικοπτέρων. Οι αναλύσεις κατέδειξαν ότι μεταξύ των δύο φορτίσεων, της στρέψης και της αξονικής δύναμης, υπάρχει κάποιου είδους σύζευξη η οποία επηρέαζε καθοριστικά την τελική απόκριση της δοκού. Αυτού του είδους η σύζευξη έδειξε ότι, ακόμη και στο πλαίσιο των μικρών παραμορφώσεων, η μηχανική συμπεριφορά της δοκού δεν μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από την απλή υπέρθεση των δύο εντατικών καταστάσεων.

Ο Biot (1939) ασχολήθηκε με το ζήτημα μιας ευθύγραμμης πρισματικής δοκού η οποία υπόκειται σε αξονικό εφελκυσμό και ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η στρεπτική ακαμψία της αυξάνεται. Ο Chen (1951) ασχολήθηκε με την ανάλυση ευθύγραμμων πρισματικών και λεπτότοιχων δοκών στις οποίες αρχικά επιβάλλεται μια αρχική στροφή περί τον διαμήκη άξονά τους και εν συνεχεία εφαρμόζεται μια αξονική εφελκυστική δύναμη. Μέσω πειραματικών διαδικασιών διαπίστωσε ότι η στρεπτική ακαμψία των δοκών με αρχική συστροφή είναι μεγαλύτερη από την στρεπτική ακαμψία των ίδιων δοκών χωρίς αρχική στροφή. Οι παρατηρήσεις του τον ώθησαν να συμπεράνει ότι η σχετική αύξηση της στρεπτικής ακαμψίας μιας δοκού εξαρτάται από το μέγεθος της αρχικής στροφής, το σχήμα της διατομής, το πάχος των τοιχωμάτων της διατομής και από το υλικό της δοκού. Επιπλέον, διατύπωσε μια θεωρία που αφορούσε κυρίως μεταλλικές δοκούς η οποία συμφωνούσε αρκετά καλά με τις πειραματικές του μετρήσεις. Η θεωρία του προέβλεπε ότι ακόμη και στην περίπτωση που η διατομή της δοκού ήταν κυκλική η στρεπτική της ακαμψία θα μπορούσε να αυξηθεί εφαρμόζοντας στη δοκό ταυτόχρονα μια αρχική στροφή και μια αξονική δύναμη. Αυτή η πρόβλεψη αποτελούσε και το βασικό μειονέκτημα της θεωρίας του διότι είναι γνωστό ότι η στρεπτική ακαμψία μιας δοκού με κυκλική διατομή δεν επηρεάζεται από την αρχική συστροφή. Ο Rosen ασχολήθηκε διεξοδικά με το ίδιο ζήτημα και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η αύξηση της στρεπτικής ακαμψίας της δοκού οφείλεται στην αλληλεπίδραση της αρχικής στροφής με την αξονική δύναμη μέσω της συνάρτησης στρέβλωσης της διατομής.

4.2. Κινηματική και γραμμική ανάλυση των παραμορφώσεων

Θεωρούμε μια πρισματική δοκό με τυχαία διατομή η οποία προσεγγιστικά και χωρίς να επηρεάζεται η γενικότητα της ανάλυσης προσομοιώνεται με ένα κύλινδρο στοιχειώδους μήκους dz , και ακτίνα διατομής r . Ορίζεται ένα τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ στο κέντρο μιας ακραίας διατομής έτσι ώστε ο διαμήκης άξονας της ίνας να συμπίπτει με τον άξονα Oz , Σχ.1.2. Πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου χαράσσεται ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$. Μετά την επιβολή της στρεπτικής ροπής T στις ακραίες διατομές του νήματος το αρχικό παραλληλόγραμμο μετασχηματίζεται σε ένα νέο παραλληλόγραμμο $A'B'C'D'$. Στη συνέχεια, σχεδιάζεται η βοηθητική ευθεία $C'C_1$ έτσι ώστε να είναι παράλληλη με τις πλευρές AB, CD του αρχικού παραλληλογράμμου. Η γωνία C_1OD' εκφράζει την σχετική στροφή μεταξύ των δύο ακραίων διατομών του νήματος. Η γωνία $C_1C'D'$ αναπαριστά την στρέβλωση την οποία έχει υποστεί το αρχικό παραλληλόγραμμο $ABCD$ και ισοδυναμεί με την διατμητική παραμόρφωση γ της δοκού. Από την γεωμετρία του Σχ. 1.2, θεωρώντας ότι οι παραμορφώσεις της δοκού είναι μικρές έτσι ώστε $\tan(C_1C'D') \cong C_1C'D'$, προκύπτει η σχέση

$$C_1C'D' = \gamma = \frac{C_1D'}{C'C_1} \quad (4.1)$$

Από την γεωμετρία του ίδιου σχήματος προκύπτει επίσης ότι

$$C_1 D' = r d\varphi \quad (4.2)$$

και

$$C' C_1 = dz \quad (4.3)$$

Ο συνδυασμός των τριών τελευταίων σχέσεων θα δώσει

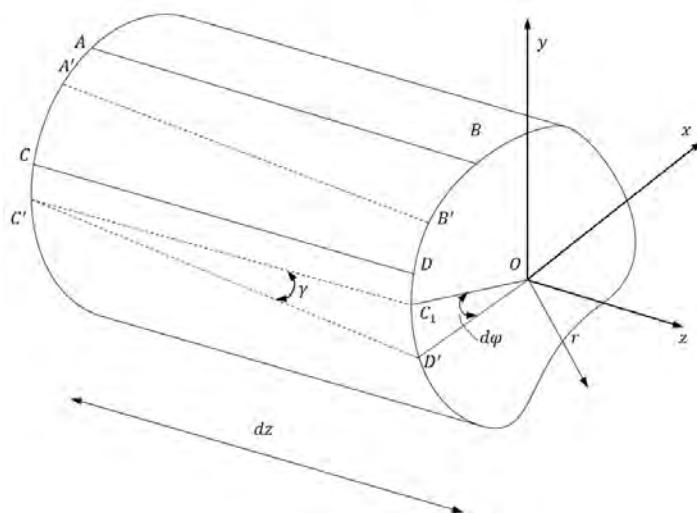
$$\gamma = r \frac{d\varphi(z)}{dz} = r\theta \quad (4.4)$$

όπου η ποσότητα

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \theta \quad (4.5)$$

εκφράζει την γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της δοκού και θα καλείται συστροφή. Η σχέση (4.4) δηλώνει ότι η διατμητική παραμόρφωση της διατομής της δοκού είναι ανάλογη με την απόσταση από το κέντρο της.

Η διατμητική παραμόρφωση επιβάλλει σε όλες τις επιμέρους διατομές της δοκού μια συστροφή περί τον διαμήκη άξονά του. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διατομή θα περιστρέφεται περί τον διαμήκη άξονα της δοκού σαν στερεός δίσκος. Πέραν όμως της συστροφής παρατηρείται και μια παραμόρφωση των διατομών εκτός του επιπέδου τους που δηλώνει ότι οι διατομές στρεβλώνονται. Η στρέβλωση είναι ίδια για όλες τις διατομές και περιγράφεται από μια συνάρτηση $\omega^*(x, y, z)$ η οποία θα καλείται συνάρτηση στρέβλωσης και σχετίζεται με το σχήμα της διατομής. Η μετατόπιση ενός σημείου της διατομής προκύπτει από την γεωμετρία του Σχ.4.2.



Σχ 4.2 Η γωνία στροφής της δοκού κατά την επιβολή της στρεπτικής ροπής στις ακραίες διατομές της.

Από την θεωρία των μικρών παραμορφώσεων προκύπτει ότι η συστρόφη της διατομής είναι αρκετά μικρή έτσι ώστε η μετατόπιση του σημείου M στο σημείο M' να μπορεί να θεωρηθεί ίση με το διάνυσμα $\vec{R}_d = \overline{MM'}$ το οποίο είναι κάθετο στην ακτίνα $OM = r$. Το μέτρο του διανύσματος \vec{R}_d θα δίνεται από την σχέση

$$|\vec{R}_d| = |\overline{MM'}| = r\varphi(z) = r\theta z \quad (4.6)$$

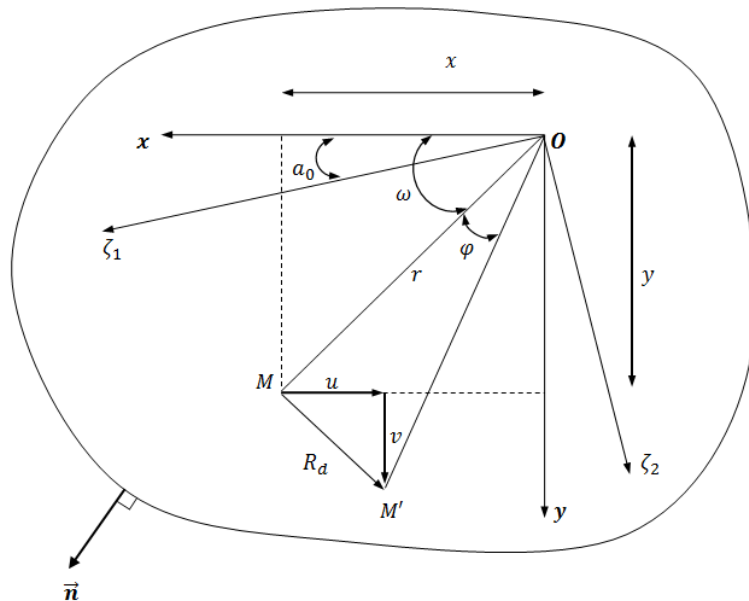
Το διάνυσμα της μετατόπισης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες u, v κατά τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Από την γεωμετρία του Σχ.4.3, για αυτές τις συνιστώσες θα ισχύουν οι γεωμετρικές σχέσεις

$$u = -|R| \sin \omega = -r\theta z \sin \omega \quad (4.7)$$

$$v = |R| \cos \omega = r\theta z \cos \omega \quad (4.8)$$

όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του σημείου M με τον άξονα Ox . Επιπλέον, από την γεωμετρία του Σχ.4.3., προκύπτει ότι

$$\sin \omega = \frac{y}{r}, \quad \cos \omega = \frac{x}{r} \quad (4.9)$$



Σχ 4.3. Η μετατόπιση ενός σημείου M της διατομής της ίνας και οι συνιστώσες κατά τους δύο άξονες.

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (4.7),(4.8),(4.9) προκύπτουν οι μετατοπίσεις του τυχαίου σημείου M , οι οποίες θα είναι

$$u = -\theta zy \quad (4.10)$$

$$v = \theta zx \quad (4.11)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την στρεπτική ροπή η συνιστώσα της μετατόπισης κατά μήκος της δοκού w , συνδέεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής ω^* και θα είναι³

$$w(z) = w_1(z) - \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \omega^*(x, y, z) \quad (4.12)$$

όπου $w_1(z)$ είναι μια επιπρόσθετη μετατόπιση λόγω της εφαρμογής του αξονικού εφελκυστικού φορτίου. Το πεδίο της μετατόπισης της διατομής περιγράφεται από τις σχέσεις (4.10), (4.11), (4.12). Στην δοκό με αρχική συστροφή a_0 και μήκος L , προσαρμόζεται ένα τοπικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $O\zeta_1\zeta_2$ το οποίο συνδέεται με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ ως εξής

$$\zeta_1 = x \cos(a_0 z) + y \sin(a_0 z) \quad (4.13)$$

$$\zeta_2 = -x \sin(a_0 z) + y \cos(a_0 z) \quad (4.14)$$

Στο πλαίσιο των μικρών παραμορφώσεων θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός $|a_0 L| \ll 1$. Από το πεδίο της μετατόπισης υπολογίζονται με εύκολο τρόπο οι ορθές και οι διατμητικές παραμορφώσεις της διατομής για τις οποίες θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* - \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \left(y + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \right) \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \left(x - \frac{\partial \omega^*}{\partial y} \right) \quad (4.20)$$

Η συνάρτηση στρέβλωσης ω^* μπορεί να υπολογιστεί από την λύση του κλασσικού προβλήματος της στρέψης κατά Saint Venant στο νέο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $O\zeta_1\zeta_2$ και θα είναι

$$\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \zeta_2^2} = 0 \quad (4.21)$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες θα δίνονται από την σχέση

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial n} = \zeta_2 n_{\zeta_1} - \zeta_1 n_{\zeta_2} \quad (4.22)$$

³ Οι βασικοί βαθμοί ελευθερίας είναι η μετατόπιση $w_1(z)$ και η στροφή $\varphi(z)$.

και για λόγους συμμετρίας θα είναι

$$\omega^*(\zeta_1=0, \zeta_2=0)=0 \quad (4.23)$$

όπου $\vec{n}=\{0, n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}\}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο της διατομής, Σχ.4.3.

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = a_0 \zeta_2, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = -a_0 \zeta_1 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial z} = \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = a_0 \zeta_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} - a_0 \zeta_1 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \quad (4.25)$$

$$\omega^*(x, y, z) = \omega^*(\zeta_1, \zeta_2) \quad (4.26)$$

$$dx dy = d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (4.27)$$

4.3. Η ελαστική παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού με αρχική στροφή

Το γεγονός ότι η διατομή της δοκού παραμορφώνεται έχει ως συνέπεια την αποθήκευση παραμορφωσιακής ενέργειας στη δοκό. Η ενέργεια παραμόρφωσης U , που αποθηκεύεται σε όλο τον όγκο της δοκού θα δίνεται από την σχέση

$$U = \int_0^L \left[\iint \frac{E}{2} \varepsilon_{zz}^2 dx dy \right] dz + \int_0^L \left[\iint 2G (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) dx dy \right] dz \quad (4.28)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία τις μη μηδενικές παραμορφώσεις όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (4.15) - (4.20) προκύπτει η συνολική παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού σε συνάρτηση με την αξονική παραμόρφωση w_1 και την γωνία στροφής της κάθε διατομής $\varphi(z)$. Συγκεκριμένα, για τον πρώτο όρο της σχέσης (4.28) που σχετίζεται με τις ορθές παραμορφώσεις σε συνδυασμό με την σχέση (4.17) θα είναι

$$\begin{aligned} \iint \frac{E}{2} \varepsilon_{zz}^2 dx dy &= \iint \frac{E}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* - \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right]^2 dx dy \\ &= \iint \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \right)^2 \right] dx dy \\ &+ \iint E \left[-\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.29)$$

Έπειτα από την σχετική άλγεβρα και την κατάλληλη ομαδοποίηση η τελευταία σχέση γίνεται

$$\iint \frac{E}{2} \varepsilon_{zz}^2 dx dy = \underbrace{\iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 dx dy}_{(A)} + \underbrace{\iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 dx dy}_{(B)} + \underbrace{\iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \right)^2 dx dy}_{(C)}$$

$$+ \underbrace{\iint E \left(-\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dx dy}_{(D)} + \underbrace{\iint E \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy}_{(E)} + \underbrace{\iint E \left(-\frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right) dx dy}_{(F)} \quad (4.30)$$

Εξετάζοντας κάθε μέλος της τελευταίας σχέσης ξεχωριστά και εκτελώντας τις παραγοντικές ολοκληρώσεις, θα είναι

$$(A) \rightarrow \iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 dx dy = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 \quad (4.31)$$

$$(B) \rightarrow \iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 dx dy = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 \iint \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 dx dy = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 a_0^2 K \quad (4.32)$$

όπου στην τελευταία σχέση υιοθετήθηκε ο συμβολισμός

$$\boxed{a_0^2 K = \iint \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 dx dy} \quad (4.33)$$

όπου a_0 είναι η αρχική στρόφη η οποία είναι σταθερή κατά μήκος της δοκού και K είναι μια σταθερά η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της δοκού. Η ποσότητα a_0 εκφράζει την αρχική συστρόφη ανά μονάδα μήκους της δοκού και εκτός του ότι πρέπει η τιμή της να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός των μικρών παραμορφώσεων, δηλ. $|a_0 L| \ll 1$, μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική ανάλογα με την φορά που επιβάλλεται στην δοκό. Στην παρούσα εργασία θετική τιμή της αρχικής συστρόφης θεωρείται η αντιωρολογιακή στρόφη.

Συνεχίζοντας την εξέταση των όρων της σχέσης (4.30) θα είναι

$$(C) \rightarrow \iint \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \right)^2 dx dy = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 \iint (\omega^*)^2 dx dy = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 J_\omega \quad (4.34)$$

όπου στην τελευταία σχέση εισήχθη ο συμβολισμός

$$\boxed{J_\omega = \iint (\omega^*)^2 dx dy = \ell^2 J} \quad (4.35)$$

όπου ℓ είναι ένα εσωτερικό μήκος το οποίο συνδέεται με την γεωμετρία της διατομής της δοκού και J είναι η στρεπτική σταθερά της δοκού η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$\boxed{J = \iint \left[\left(-y + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \right)^2 + \left(x + \frac{\partial \omega^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy} \quad (4.36)$$

Από τον τέταρτο όρο της σχέσης (4.30) θα είναι

$$(D) \rightarrow \iint E \left(-\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dx dy = -E \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \frac{\partial w_1}{\partial z} \underbrace{\iint \omega^* dx dy}_{=0} = 0 \quad (4.37)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η στροφή της διατομής γίνεται γύρω από το κέντρο βάρους της διατομής και ισχύει για διατομές με τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας. Ο πέμπτος όρος της σχέσης (4.30) θα δώσει

$$(E) \rightarrow \iint E \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \omega^* \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy = E \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \iint \omega^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy = E \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} a_0 R \quad (4.38)$$

όπου στην τελευταία σχέση υιοθετήθηκε ο συμβολισμός

$$a_0 R = \iint \omega^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial (\omega^*)^2}{\partial z} dx dy \quad (4.39)$$

όπου R είναι μια σταθερά που σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της δοκού. Από τον έκτο όρο της σχέσης (4.30) προκύπτει

$$(F) \rightarrow \iint E \left(-\frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right) dx dy = -E \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \iint \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy = -E \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} a_0 S \quad (4.40)$$

όπου στην τελευταία σχέση υιοθετήθηκε ο συμβολισμός

$$a_0 S = \iint \frac{\partial \omega^*}{\partial z} dx dy \quad (4.41)$$

όπου S είναι μια σταθερά η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της δοκού. Πρέπει να σημειωθεί ότι θα ισχύουν και οι σχέσεις

$$A > 0, K \geq 0, J_\omega \geq 0, S \leq 0, J_p \geq J > 0 \quad (4.42)$$

Τελικά, η σχέση (4.30) μέσω των σχέσεων (4.31) - (4.41) διαμορφώνεται ως εξής

$$\iint \frac{E}{2} \varepsilon_{zz}^2 dx dy = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 a_0^2 K + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 J_\omega + E \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} a_0 R - E \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} a_0 S \quad (4.43)$$

Από τον δεύτερο όρο της σχέσης (4.28) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.19) και (4.20) θα είναι

$$\begin{aligned} & \iint 2G \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \left(y + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \left(x - \frac{\partial \omega^*}{\partial y} \right) \right)^2 \right] dx dy \\ &= \frac{G}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 \iint \left[\left(y + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \right)^2 + \left(x - \frac{\partial \omega^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{GJ}{2} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Τελικά, η παραμορφωσιακή ενέργεια ανά μονάδα όγκου της δοκού προκύπτει από τον συνδυασμό των σχέσεων (4.42) και (4.43) θα είναι

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{a_0^2 K}{A} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 + \frac{J \ell^2}{A} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{2a_0 R}{A} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} - \frac{2a_0 S}{A} \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + \frac{GJ}{EA} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad (4.45)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας, G το μέτρο διάτμησης και A το εμβαδό της διατομής της δοκού.

4.4. Εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και συνακόλουθες συνοριακές συνθήκες

Η παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού λαμβάνοντας υπόψη τον λογισμό των μεταβολών μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\delta U = \frac{EA}{2} \left\{ \underbrace{\delta \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 dz \right]}_{(A1)} + \underbrace{\delta \left[\int_0^L \frac{a_0^2 K}{A} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right]}_{(B1)} + \underbrace{\delta \left[\int_0^L \frac{J \ell^2}{A} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 dz \right]}_{(C1)} + \underbrace{\delta \left[\int_0^L \frac{2a_0 R}{A} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} dz \right]}_{(D1)} + \underbrace{\delta \left[\int_0^L - \frac{2a_0 S}{A} \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} dz \right]}_{(E1)} + \underbrace{\delta \left[\int_0^L \frac{GJ}{EA} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right]}_{(F1)} \right\} \quad (4.46)$$

Εκτελώντας τις παραγοντικές ολοκληρώσεις στην τελευταία προκύπτουν οι επιμέρους σχέσεις

$$(A1) \rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 dz \right] = \int_0^L \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \delta w_1}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} \delta w_1 \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \delta w_1 dz \quad (4.47)$$

$$(B1) \rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L \frac{a_0^2 K}{A} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right] = \frac{a_0^2 K}{A} \int_0^L \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} dz = \frac{a_0^2 K}{A} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L - \frac{a_0^2 K}{A} \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta \varphi(z) dz \quad (4.48)$$

$$(C1) \rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L \frac{J \ell^2}{A} \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right)^2 dz \right] = \frac{J \ell^2}{A} \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right) dz = \frac{J \ell^2}{A} \left[\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L - \frac{J \ell^2}{A} \int_0^L \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} dz = \frac{J \ell^2}{A} \left[\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L - \frac{J \ell^2}{A} \left[\frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} \delta \varphi(z) \right]_0^L + \frac{J \ell^2}{A} \int_0^L \frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} \delta \varphi(z) dz \quad (4.49)$$

$$(D1) \rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L \frac{a_0 R}{A} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} dz \right] = \delta \left[\int_0^L \frac{a_0 R}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) dz \right]$$

$$= \frac{a_0 R}{A} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) dz = \frac{a_0 R}{A} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} (E1) &\rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L -\frac{2a_0 S}{A} \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} dz \right] = -\frac{a_0 S}{A} \int_0^L \left[\frac{\partial \delta w_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right] dz \\ &= -\frac{a_0 S}{A} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta w_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L + \frac{a_0 S}{A} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \delta \varphi(z) \right) dz \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} (F1) &\rightarrow \frac{\delta}{2} \left[\int_0^L \frac{GJ}{EA} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \right] = \frac{GJ}{EA} \int_0^L \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} dz = \frac{GJ}{EA} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L - \frac{GJ}{EA} \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta \varphi(z) dz \\ &\quad (4.52) \end{aligned}$$

Τελικά, η μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας του συστήματος μέσω των σχέσεων (4.46) -(4.52) γίνεται

$$\begin{aligned} \delta U &= EA \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} \delta w_1 \right]_0^L - EA \int_0^L \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \delta w_1 dz + a_0^2 EK \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L - a_0^2 EK \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta \varphi(z) dz \\ &+ \ell^2 EJ \left[\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L - \ell^2 EJ \left[\frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} \delta \varphi(z) \right]_0^L + \ell^2 EJ \int_0^L \frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} \delta \varphi(z) dz + a_0 ER \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L \\ &- a_0 ES \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta w_1 \right]_0^L - a_0 ES \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L + a_0 ES \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta w_1 dz + a_0 ES \int_0^L \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \delta \varphi(z) dz \\ &+ GJ \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \delta \varphi(z) \right]_0^L - GJ \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta \varphi(z) dz \end{aligned} \quad (4.53)$$

Η τελευταία έπεται από την κατάλληλη άλγεβρα γίνεται

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \left[\left(-EA \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + a_0 ES \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right) \delta w_1 \right] dz \\ &+ \int_0^L \left\{ \left((-a_0^2 EK - GJ) \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + \ell^2 EJ \frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} + a_0 ES \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) \delta \varphi(z) \right\} dz + \left[\left(EA \frac{\partial w_1}{\partial z} - a_0 ES \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) \delta w_1 \right]_0^L \\ &+ \left[\left(a_0^2 EK \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \ell^2 EJ \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} - a_0 ES \frac{\partial w_1}{\partial z} + GJ \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) \delta \varphi(z) \right]_0^L + \left[\left(\ell^2 EJ \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + a_0 ER \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) \delta \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.54)$$

Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια κατανομημένη αξονική δύναμη p_z , κατά μήκος της ίνας εν ίδει «μαζικής» δύναμης, Σχ.4.4α, τέτοια ώστε

$$p_z = -\frac{\partial N}{\partial z} \quad (4.55)$$

μια κατανομημένη στρεπτική ροπή m_z , κατά τον διαμήκη άξονα της ίνας εν ίδει «μαζικής» ροπής, Σχ. 4.4b, τέτοια ώστε

$$m_z = -\frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.56)$$

μια συγκεντρωμένη δύναμη N και μια συγκεντρωμένη ροπή T στην ακραία διατομή, τότε το έργο των εξωτερικών φορτίων δW , θα είναι

$$\delta W = \int_0^L (p_z \delta w_1 + M_z \delta \varphi(z)) dz + [N \delta w_1]_0^L + [T \delta \varphi(z)]_0^L + \left[-B \frac{\partial \delta \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L \quad (4.57)$$

όπου B είναι το ενεργειακά συζυγές μέγεθος της ποσότητας $\partial \delta \varphi(z) / \partial z$. Η ίνα βρίσκεται σε ισορροπία που σημαίνει ότι το δυναμικό των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων, $\delta V = \delta U - \delta W$, οφείλει να λαμβάνει μια στάσιμη τιμή. Συνεπώς, η πρώτη μεταβολή του οφείλει να είναι μηδέν, δηλ.

$$\begin{aligned} \delta V = \delta U - \delta W = 0 \Rightarrow & \int_0^L \left[-EA \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + a_0 ES \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} - p_z \right] \delta w_1 dz \\ & + \int_0^L \left\{ \left(-a_0^2 EK - GJ \right) \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + \ell^2 EJ \frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} + a_0 ES \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - M_z \right\} \delta \varphi(z) dz \\ & + \left[\left(EA \frac{\partial w_1}{\partial z} - a_0 ES \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - N \right) \delta w_1 \right]_0^L + \left[\left(a_0^2 EK \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \ell^2 EJ \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} - a_0 ES \frac{\partial w_1}{\partial z} + GJ \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - T \right) \delta \varphi(z) \right]_0^L \\ & + \left[\left(\ell^2 EJ \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + a_0 ER \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + B \right) \delta \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε τιμή των $\delta w_1, \delta \varphi(z)$. Επομένως από τα ολοκληρώματα της τελευταίας σχέσης προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας

$$-EA \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + a_0 ES \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} - p_z = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{2a_0 S}{A} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} - \frac{2p_z}{EA} = 0 \quad (4.59)$$

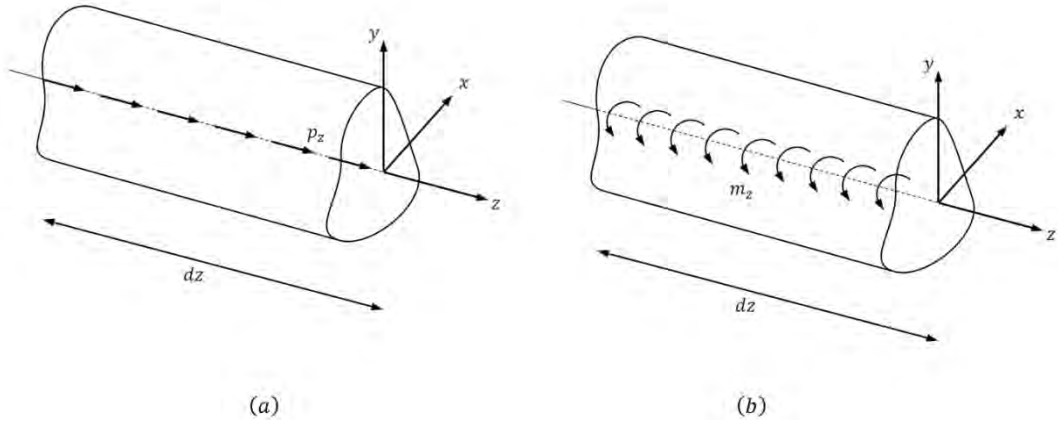
$$\left(-a_0^2 EK - GJ \right) \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + \ell^2 EJ \frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} + a_0 ES \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - m_z = 0 \quad (4.60)$$

και οι ενεργειακά συζυγείς συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ίνας ($z=0, z=L$)

$$\left[\left(EA \frac{\partial w_1}{\partial z} - a_0 ES \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - N \right) \delta w_1 \right]_0^L = 0 \quad (4.61)$$

$$\left[\left(a_0^2 EK \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \ell^2 EJ \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} - a_0 ES \frac{\partial w_1}{\partial z} + GJ \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - T \right) \delta \varphi(z) \right]_0^L = 0 \quad (4.62)$$

$$\left[\left(\ell^2 EJ \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + a_0 ER \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + B \right) \delta \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right]_0^L = 0 \quad (4.63)$$



Σχ 4.4. (α) Η κατανεμημένη δύναμη p_z και (β) η κατανεμημένη ροπή m_z κατά μήκος του άξονα της δοκού.

4.5. Συμπύκνωση των εξισώσεων και δημιουργία μονοδιάστατου μοντέλου ράβδου

Από την σχέση (4.58), με την προϋπόθεση ότι $a_0 \neq 0$, διότι διαφορετικά θα είχαμε τις κλασσικές απαντήσεις, θα είναι

$$-EA \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + a_0 ES \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} - p_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = \frac{p_z}{Ea_0 S} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \quad (4.64)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία διαδοχικά δύο φορές ως προς z προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} = \frac{1}{a_0 ES} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi(z)}{\partial z^4} = \frac{1}{Ea_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} \quad (4.66)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (4.63), (4.65) στην σχέση (4.59) θα δώσει

$$\begin{aligned} & \left(-a_0^2 EK - GJ \right) \left(\frac{p_z}{Ea_0 S} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + \ell^2 EJ \left(\frac{1}{Ea_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} \right) + a_0 ES \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - m_z = 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{-a_0^2 EK - GJ}{Ea_0 S} \right) p_z + \frac{A(-a_0^2 EK - GJ)}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\ell^2 J}{a_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \frac{\ell^2 EJA}{a_0 S} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + a_0 ES \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - m_z = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\ell^2 EJA}{a_0 S} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \left[\frac{A(-a_0^2 EK - GJ)}{a_0 S} + a_0 ES \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\ell^2 J}{a_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \left(\frac{-a_0^2 EK - GJ}{Ea_0 S} \right) p_z - m_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\ell^2 E J A}{a_0 S} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - c^2 \frac{G J A}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\ell^2 J}{a_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} - \left(\frac{a_0^2 E K + G J}{E a_0 S} \right) p_z - m_z = 0 \\
&\Rightarrow \frac{J A}{a_0 S} \left(\ell^2 E \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - c^2 G \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\ell^2 J}{a_0 S} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} - \left(\frac{a_0^2 E K + G J}{E a_0 S} \right) p_z - m_z = 0 \\
&\Rightarrow \frac{J A}{a_0 S} \left(\frac{E}{G} \frac{\ell^2}{c^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\ell^2 J}{c^2 a_0 S G} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} - \left(\frac{a_0^2 E K + G J}{E a_0 S G c^2} \right) p_z - \frac{m_z}{G c^2} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{E}{G} \frac{\ell^2}{c^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{\ell^2 A}{c^2 G} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \left(\frac{a_0^2 E K + G J}{E J A G c^2} \right) p_z + \frac{a_0 S}{J A G c^2} m_z = 0 \\
&\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - g^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{\ell^2 A}{c^2 G} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} + \left(\frac{a_0^2 E K + G J}{E J A G c^2} \right) p_z + \frac{a_0 S}{J A G c^2} m_z \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήθηκαν οι εξής συμβολισμοί

$$c^2 = \frac{J_{\text{eff}}}{J} = 1 + a_0^2 \frac{E}{G J} \left(K - \frac{S^2}{A} \right), \quad c^2 > 1 \tag{4.68}$$

και

$$g^2 = \frac{E}{G} \frac{\ell^2}{c^2} \tag{4.69}$$

Από την σχέση (4.67) προκύπτει ότι η αδιάστατη ποσότητα c καταδεικνύει την αύξηση της στρεπτικής ροπής της ίνας λόγω της αρχικής συστροφής a_0 , καθώς σαν J_{eff} ορίζεται η σταθερά της συνολικής στρεπτικής ακαμψίας της ίνας με αρχική στρόφη. Συνεπώς, από την σχέση (4.68) προκύπτει ότι το g είναι ένα εσωτερικό μήκος της ίνας του υφάσματος το οποίο ορίζεται με γεωμετρικούς όρους, το c , αλλά και με όρους του υλικού (E, G) . Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό μήκος δεν είναι μια αφηρημένη έννοια η οποία επιβάλλεται στο πρόβλημα προκειμένου να εξηγήσει τον ενεργό ρόλο της μικροδομής σε θεωρητικό επίπεδο, αλλά αναδεικνύεται μέσα από το ίδιο το πρόβλημα αποκτώντας την φυσική του σημασία.

Από την σχέση (4.60), όπου η συζυγής συνοριακή κινηματική ποσότητα είναι η δw_1 , θα εί-

$$E A \frac{\partial w_1}{\partial z} - a_0 E S \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - N = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{1}{a_0 E S} N \tag{4.70}$$

Από την σχέση (4.61), όπου η συζυγής συνοριακή κινηματική ποσότητα είναι η $\delta \varphi(z)$, θα εί-

$$\begin{aligned}
&a_0^2 E K \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - \ell^2 E J \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} - a_0 E S \frac{\partial w_1}{\partial z} + G J \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} - T = 0 \\
&\Rightarrow (a_0^2 E K + G J) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = T + a_0 E S \frac{\partial w_1}{\partial z} + \ell^2 E J \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3} \\
&\Rightarrow \left(a_0^2 \frac{E}{G} \frac{K}{J} + 1 \right) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = \frac{T}{G J} + a_0 \frac{E}{G} \frac{S}{J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \ell^2 \frac{E}{G} \frac{\partial^3 \varphi(z)}{\partial z^3}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.64) στην τελευταία προκύπτει

$$\begin{aligned} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} &= \frac{T}{GJ} + a_0 \frac{E S}{G J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2}{a_0 G S} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\ell^2 E A}{a_0 G S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} &= \frac{\frac{T}{GJ} + a_0 \frac{E S}{G J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2}{a_0 G S} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\ell^2 E A}{a_0 G S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3}}{a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (4.69) και (4.71) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{T}{GJ} + a_0 \frac{E S}{G J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2}{a_0 G S} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\ell^2 E A}{a_0 G S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= \left(\frac{A}{a_0 S} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{1}{a_0 E S} N \right) \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow a_0 \frac{E S}{G J} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{A}{a_0 S} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2 E A}{a_0 G S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= -\frac{T}{GJ} - \frac{\ell^2}{a_0 G S} \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{N}{a_0 E S} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow \left[a_0 \frac{E S}{G J} - \frac{A}{a_0 S} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \right] \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2 E A}{a_0 G S} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= -\frac{T}{GJ} - \frac{\ell^2}{a_0 G S} \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{N}{a_0 E S} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{a_0 S}{c^2 A} \left[a_0 \frac{E S}{G J} - \frac{A}{a_0 S} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \right] \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2 E}{c^2 G} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= -\frac{a_0 S}{c^2 G A J} T - \frac{\ell^2}{c^2 A G} \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{N}{c^2 A E} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow \left[\frac{a_0^2 E S^2}{c^2 G A J} - \frac{1}{c^2} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \right] \frac{\partial w_1}{\partial z} + g^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= -\frac{a_0 S}{c^2 G A J} T - \frac{\ell^2}{c^2 A G} \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{N}{c^2 A E} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow \left[\frac{a_0^2 E S^2}{c^2 G A J} - \frac{1}{c^2} \left(c^2 + \frac{a_0^2 E S^2}{G A J} \right) \right] \frac{\partial w_1}{\partial z} + g^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= -\frac{a_0 S}{c^2 G A J} T - \frac{\ell^2}{c^2 A G} \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{N}{c^2 A E} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial z} - g^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} &= +\frac{a_0 S}{c^2 G A J} T + \frac{\ell^2}{c^2 A G} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{N}{c^2 A E} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \\ \Rightarrow A E \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} - g^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} \right] &= \frac{a_0 S E}{c^2 G J} T + g^2 \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{N}{c^2} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) \Rightarrow \boxed{A E \left[\frac{\partial w_1}{\partial z} - g^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} \right] = \mathcal{P}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

όπου

$$\boxed{\frac{a_0 S E}{c^2 G J} T + g^2 \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{N}{c^2} \left(a_0^2 \frac{E K}{G J} + 1 \right) = \mathcal{P}} \quad (4.74)$$

Στο νέο πρόβλημα, η κινηματική συζυγής ποσότητα ως προς την δυναμική συνοριακή συνθήκη (4.73) είναι η $\delta w_1 = 0$. Από την σχέση (4.62) σε συνδυασμό με την (4.63) και την (4.69) θα είναι

$$\begin{aligned} \ell^2 E J \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + a_0 E R \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + B &= 0 \Rightarrow \ell^2 E J \left(\frac{p_z}{E a_0 S} + \frac{A}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + a_0 E R \left(\frac{A}{a_0 S} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{1}{a_0 E S} N \right) + B = 0 \Rightarrow \\ \frac{\ell^2}{E a_0 S} p_z + \frac{\ell^2 A}{a_0 S} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{R A}{J S} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{R N}{E J S} + \frac{B}{E J} &= 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{a_0 R}{c^2 J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2 a_0 S}{c^2 E A} p_z - \frac{a_0 R}{c^2 E J A} N + \frac{a_0 S}{c^2 E J A} B = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{c^2} \frac{E}{G} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{a_0 R E}{c^2 G J} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\ell^2}{c^2} \frac{a_0 S}{G A} p_z - \frac{a_0 R}{c^2 G J A} N + \frac{a_0 S}{c^2 G J A} B = 0 \Rightarrow \boxed{A E \left[h \frac{\partial w_1}{\partial z} + g^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right] = \mathcal{R}} \quad (4.75)$$

όπου h είναι ένα νέο μήκος το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$h = \frac{a_0 R E}{c^2 J G} \quad (4.76)$$

και

$$-\frac{\ell^2}{c^2} \frac{a_0 S}{G A} p_z + \frac{a_0 R}{c^2 G J A} N - \frac{a_0 S}{c^2 G J A} B = \mathcal{R} \quad (4.77)$$

Για το νέο μήκος h θα πρέπει για λόγους της θερμοδυναμικής να ισχύει ο περιορισμός, $-g \leq h \leq g$. Οι ποσότητες \mathcal{P}, \mathcal{R} μπορούν να θεωρηθούν σαν γενικευμένες δυνάμεις οι οποίες μπορούν να υλοποιηθούν μέσω μιας συγκεντρωμένης/κατανεμημένης ροπής, μιας συγκεντρωμένης/κατανεμημένης αξονικής δύναμης, μιας τάσης διπόλου ή μέσω ενός συνδυασμού όλων των παραπάνω.

4.6. Μονοδιάστατο στατικό ελαστικό μοντέλο με θεωρία βαθμίδας

Οι Tseroura et.al. (2002) εξέτασαν την απόκριση μιας δοκού η οποία υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό χρησιμοποιώντας την θεωρία της βαθμίδας. Ακολουθώντας τον συλλογισμό αυτής της εργασίας, η ελαστική παραμορφωσιακή ενέργεια της μονοδιάστατης δοκού ορίζεται από την σχέση

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [\tau \cdot \varepsilon + \mu \cdot \nabla \varepsilon] dz \quad (4.78)$$

όπου ε είναι η αξονική παραμόρφωση, $\nabla \varepsilon$ είναι η βαθμίδα της παραμόρφωσης και τ, μ είναι οι τάσεις κατά Cauchy και οι τάσεις διπόλου, αντίστοιχα, οι οποίες θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\tau = E u' + \ell E u'' \quad (4.79)$$

$$\mu = \ell E u' + g^2 E u'' \quad (4.80)$$

Στις τελευταίες σχέσεις οι ποσότητες ℓ, g είναι μήκη τα οποία σχετίζονται με την επιφανειακή και την μαζική ελαστική παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού, E είναι το μέτρο ελαστικότητας και οι οξείες δηλώνουν παραγώγιση ως προς την μεταβλητή z . Για να ορίζεται θετικά η παραμορφωσιακή ενέργεια τα εσωτερικά μήκη οφείλουν να ικανοποιούν τον περιορισμό

$$0 \leq \ell^2 \leq g^2 \quad (4.81)$$

Επιπλέον, η μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας της δοκού θα δίνεται από την σχέση

$$\delta U = -\int_0^L AE(u'' - g^2 u^{IV}) \delta u dz + \left[AE(u' - g^2 u''') \delta u \right]_0^L + \left[AE(g^2 u'' + \ell u') \delta u' \right]_0^L \quad (4.82)$$

όπου A είναι το εμβαδό της διατομής της δοκού. Η μεταβολή του έργου που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται στην δοκό θα δίνεται από την σχέση

$$\delta W = \int_0^L q \delta u dz + \left[\mathcal{P} \delta u \right]_0^L + \left[\mathcal{R} \delta u' \right]_0^L \quad (4.83)$$

όπου q είναι μαζικές δυνάμεις, \mathcal{P} είναι συνοριακές δυνάμεις με την κλασική έννοια, και \mathcal{R} είναι οι τάσεις διπόλου. Η ισορροπία της ελαστικής δοκού επιβάλλει $\delta(U - W) = 0$ για κάθε δυνατή μετακίνηση. Από αυτή την συνθήκη και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.81), (4.82) προκύπτει η βασική εξίσωση που περιγράφει την απόκριση της δοκού, η οποία θα είναι

$$u''(z) - g^2 u^{IV} + \frac{1}{AE} q(z) = 0 \quad (4.84)$$

και συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού ($z=0, z=L$)

$$\left[\mathcal{P}(L) - AE[u'(L) - g^2 u'''(L)] \right] \delta u(L) - \left[\mathcal{P}(0) - AE[u'(0) - g^2 u'''(0)] \right] \delta u(0) = 0 \quad (4.85)$$

$$\left[\mathcal{R}(L) - AE[\ell u'(L) + g^2 u''(L)] \right] \delta u'(L) - \left[\mathcal{R}(0) - AE[\ell u'(0) + g^2 u''(0)] \right] \delta u'(0) = 0 \quad (4.86)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.84) και (4.67), (4.85) και (4.73), (4.86) και (4.75) προκύπτουν εμφανείς ομοιότητες οι οποίες δηλώνουν με ξεκάθαρο τρόπο την αναλογία ανάμεσα στην ελαστική θεωρία της βαθμίδας και της θεωρίας που υιοθετείται στην παρούσα εργασία. Το εσωτερικό μήκος h της παρούσας εργασίας αντιστοιχεί στο εσωτερικό μήκος ℓ στην εργασία της Tseroura et.al. Η πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης της δοκού οφείλει να είναι θετικά ορισμένη και για να συμβαίνει αυτό τα εσωτερικά μήκη οφείλουν να πληρούν τον περιορισμό της σχέσης (4.80), δηλ.

$$0 \leq h^2 \leq g^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{a_0^2 R^2}{J_\omega c^2 J} \frac{E}{G} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{a_0^2 R^2}{J_\omega J} \frac{E}{G} \leq 1 \quad (4.87)$$

Παρατηρώντας την σχέση (4.66) προκύπτει ότι οι μαζικές δυνάμεις μπορούν να εφαρμοστούν στη δοκό με διάφορους τρόπους και όχι αποκλειστικά μέσω μιας κατανεμημένης αξονικής δύναμης, όπως υποδεικνύει η σχέση (4.83). Διαφαίνεται ότι μια κατανεμημένη στρεπτική ροπή ή ο συνδυασμός στρεπτικής ροπής και αξονικής δύναμης αποτελούν εναλλακτικές μορφές εφαρμογής των μαζικών δυνάμεων. Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και για τις συνοριακές συνθήκες, όπως δίνονται από τις σχέσεις (4.72), (4.74), όπου στις ακραίες διατομές της δοκού μπορεί να ασκείται πέραν της αξονικής δύναμης, μια συγκεντρωμένη ροπή ή κάποιος συνδυασμός των δύο.

Επιπλέον, όσον αφορά τα εσωτερικά μήκη της δοκού παρατηρώντας τις σχέσεις (4.68), (4.75), διαφαίνεται ότι προκύπτουν σε συνάρτηση με τις σταθερές του υλικού E, G και τις γεωμετρικές παραμέτρους K, S, R, A, J της δοκού. Βέβαια, πρέπει να τονιστεί ότι οι παραπάνω ποσότητες

τες είναι παρατηρήσιμες και μετρήσιμες γεγονόσ που ενισχύει ακόμη περισσότερο την αναλογία της ελαστικής δοκού με βαθμίδα και της κλασσικής δοκού με αρχική στροφή και αξονικό εφελκυσμό.

4.7. Επίλυση του προβλήματος

Θέλοντας να απλοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρούμε ότι $p_z = m_z = 0$. Με αυτή την παραδοχή η βασική εξίσωση ισορροπίας του προβλήματος (4.66) απλοποιείται και γίνεται

$$g^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0 \quad (4.88)$$

Η τελευταία εξίσωση επιδέχεται σαν μια λύση μια συνάρτηση της μορφής

$$w_1(z) = c_1 e^{\frac{z}{g}} + c_2 e^{-\frac{z}{g}} + c_3 z + c_4 \quad (4.89)$$

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 είναι σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Θεωρώντας ότι η δοκός είναι πακτωμένη στο ένα της άκρο ($z=0$), είναι λογικό και ρεαλιστικό να θεωρηθεί ότι η μετατόπιση σε αυτό το σημείο θα είναι μηδενική, δηλ.

$$w_1|_{z=0} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_4 = 0 \quad (4.90)$$

Η εφαρμοζόμενη αξονική δύναμη στο άλλο άκρο της δοκού ($z=L$) προκαλεί μια συγκεκριμένη, τοπική παραμόρφωση σε αυτό το άκρο και όχι καθ'όλο το μήκος της δοκού, το οποίο σημαίνει ότι

$$\left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=L} = \varepsilon_1 \Rightarrow \frac{c_1}{g} e^{\frac{L}{g}} - \frac{c_2}{g} e^{-\frac{L}{g}} + c_3 = \varepsilon_1 \Rightarrow c_1 e^{\frac{L}{g}} - c_2 e^{-\frac{L}{g}} + g c_3 = g \varepsilon_1 \quad (4.91)$$

Θεωρώντας ότι στο ελεύθερο άκρο της δοκού ($z=L$), θα ισχύει η συνθήκη $\mathcal{P}(z=L) = \mathcal{P}_1$ θα είναι

$$AE \left. \frac{\partial w_1}{\partial z} \right|_{z=L} - AE g^2 \left. \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} \right|_{z=L} = \mathcal{P}_1 \Rightarrow \frac{c_1}{g} e^{\frac{L}{g}} - \frac{c_2}{g} e^{-\frac{L}{g}} + c_3 - \frac{c_1}{g} e^{\frac{L}{g}} + \frac{c_2}{g} e^{-\frac{L}{g}} = \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \Rightarrow c_3 = \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \quad (4.92)$$

Σημειώνεται ότι από την σχέση (4.73) συνάγεται το συμπέρασμα ότι εν γένει $\mathcal{P}_1 \neq N$. Επίσης, θεωρώντας ότι στο πακτωμένο άκρο της δοκού θα είναι $\mathcal{R}(z=0) = 0$ προκύπτει

$$AE \left[h \frac{\partial w_1}{\partial z} + g^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right] = 0 \Rightarrow h \left. \frac{\partial w_1}{\partial z} \right|_{z=0} + g^2 \left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)c_1 - (\lambda - 1)c_2 = \frac{-h\mathcal{P}_1}{AE} \quad (4.93)$$

όπου $\lambda = h/g$ είναι μια βοηθητική παράμετρος. Η τελευταία συνοριακή συνθήκη προκύπτει από την εξίσωση (4.76) δεδομένου ότι έχει θεωρηθεί $p_z = 0$ και λαμβάνοντας υπόψη το γε-

γονός ότι για διατομές με διπλή συμμετρία ισχύει $R=0$. Επιπλέον, στο πακτωμένο άκρο θα είναι $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$ το οποίο συνεπάγεται $B=0$.

Οι εξισώσεις (4.89) - (4.92) διαμορφώνουν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους και από την επίλυσή του προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης του προβλήματος. Συγκεκριμένα, θα είναι

$$c_1 = \frac{\left[\frac{-\lambda \mathcal{P}_1 L}{AE} + (1-\lambda) e^{L/g} \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right) \right]}{\frac{L}{g} [1 + \lambda + e^{2L/g} (1-\lambda)]} \quad (4.94)$$

$$c_2 = \frac{(\lambda+1) e^{L/g} \left(-\varepsilon_1 L + \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right) - e^{2L/g} \frac{\lambda \mathcal{P}_1 L}{AE}}{\frac{L}{g} [1 + \lambda + e^{2L/g} (1-\lambda)]} \quad (4.95)$$

$$c_3 = \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \quad (4.96)$$

$$c_4 = \frac{\lambda \left[\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} + \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \cosh\left(\frac{L}{g}\right) \right]}{\frac{g}{L} \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - \lambda \sinh\left(\frac{L}{g}\right) \right]} \quad (4.97)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις τελευταίες σχέσεις η εξίσωση (4.88) διαμορφώνεται ως εξής

$$w_1(z) = \left[\frac{\left[\frac{-\lambda \mathcal{P}_1 L}{AE} + (1-\lambda) \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right) \right]}{\frac{L}{g} [1 + \lambda + e^{2L/g} (1-\lambda)]} \right] e^{L/g} e^{\frac{z}{g}} + \left[\frac{(\lambda+1) e^{L/g} \left(-\varepsilon_1 L + \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right) - e^{2L/g} \frac{\lambda \mathcal{P}_1 L}{AE}}{\frac{L}{g} [1 + \lambda + e^{2L/g} (1-\lambda)]} \right] e^{-\frac{z}{g}} \\ + \frac{\mathcal{P}_1}{AE} z + \frac{\lambda \left[\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} + \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \cosh\left(\frac{L}{g}\right) \right]}{\frac{g}{L} \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - \lambda \sinh\left(\frac{L}{g}\right) \right]} \quad (4.98)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $h=0$ και $g=0$ η τελευταία γίνεται

$$w_1(z) = \frac{\mathcal{P}_1}{AE} z \quad (4.99)$$

που είναι η κλασσική λύση του προβλήματος. Στην περίπτωση όπου $h=0$ ($\lambda=0$) οι σταθερές ολοκλήρωσης γίνονται

$$c_1 = \frac{e^{L/g} \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right)}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})}, \quad c_2 = \frac{e^{L/g} \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right)}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})}, \quad c_3 = \frac{\mathcal{P}_1}{AE}, \quad c_4 = 0 \quad (4.100)$$

και το πεδίο της μετατόπισης καταλήγει να είναι

$$w_1(z) = \left[\frac{e^{L/g} \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right)}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})} \right] e^{\frac{z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} - \left[\frac{e^{L/g} \left(\varepsilon_1 L - \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \right)}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})} \right] e^{\frac{-z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} + \frac{\mathcal{P}_1 L}{AE} \frac{z}{L} \quad (4.101)$$

ή σε ισοδύναμη αδιάστατη μορφή

$$w^d = \frac{w_1(z)}{\frac{\mathcal{P}_1 L}{AE}} = \left[\frac{e^{L/g} S_1}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})} \right] e^{\frac{z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} - \left[\frac{e^{L/g} S_1}{\frac{L}{g} (1 + e^{2L/g})} \right] e^{\frac{-z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} + \frac{z}{L} \quad (4.102)$$

όπου

$$S_1 < \frac{AE}{\mathcal{P}_1} \varepsilon_1 - 1 = \frac{N}{\mathcal{P}_1} - 1 \quad (4.103)$$

είναι μια βοηθητική παράμετρος. Εάν η στρεπτική ροπή είναι μηδενική, δηλ. $T=0$, τότε θα είναι

$$\frac{\mathcal{P}_1}{N} = 1 + a_0^2 \frac{S^2}{c^2 AJ} \frac{E}{G} > 1 \quad (4.104)$$

από την οποία προκύπτει ότι $S_1 < 0$. Όμως, εάν η ροπή δεν είναι μηδενική, δηλ. $T \neq 0$, τότε η ποσότητα S_1 δεν είναι πάντοτε αρνητική. Εάν η αξονική δύναμη είναι μηδενική, δηλ. $N=0$ τότε θα είναι $\varepsilon_1=0$ γεγονός που συνεπάγεται $S_1=-1$. Η γραφική παράσταση της μετατόπισης w^d σε συνάρτηση με τον λόγο z/L , για διάφορες τιμές της παραμέτρου S_1 , στην περίπτωση όπου $h=0$, φαίνεται στα Σχ. 4.5. Από την σχέση (4.101) διαφαίνεται ότι στην περίπτωση όπου $S_1 < 0$ η δοκός εμφανίζει συμπεριφορά μικρότερης ακαμψίας, ενώ στην περίπτωση όπου $S_1 > 0$ η δοκός επιδεικνύει πιο άκαμπτη συμπεριφορά.

Όσον αφορά την κατανομή της παραμόρφωσης κατά μήκος της δοκού θα είναι

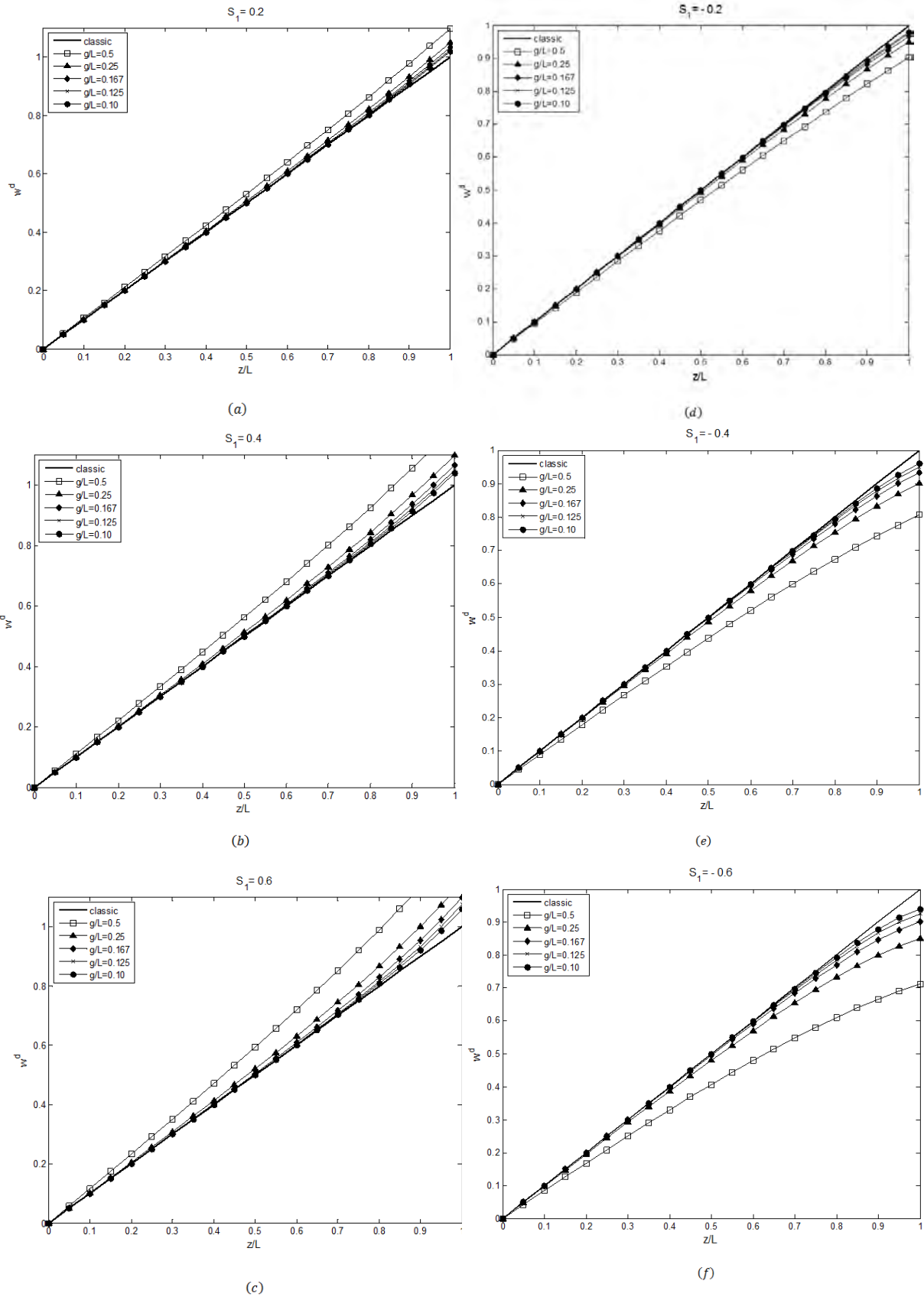
$$\varepsilon(z) = \frac{dw_1(z)}{dz} = \frac{e^{\frac{L}{g}} \left(\varepsilon_1 - \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \right)}{1 + e^{\frac{2L}{g}}} e^{\frac{z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} - \frac{e^{\frac{L}{g}} \left(\varepsilon_1 - \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \right)}{1 + e^{\frac{2L}{g}}} e^{\frac{-z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} + \frac{\mathcal{P}_1}{AE} \quad (4.105)$$

ή σε ισοδύναμη αδιάστατη μορφή

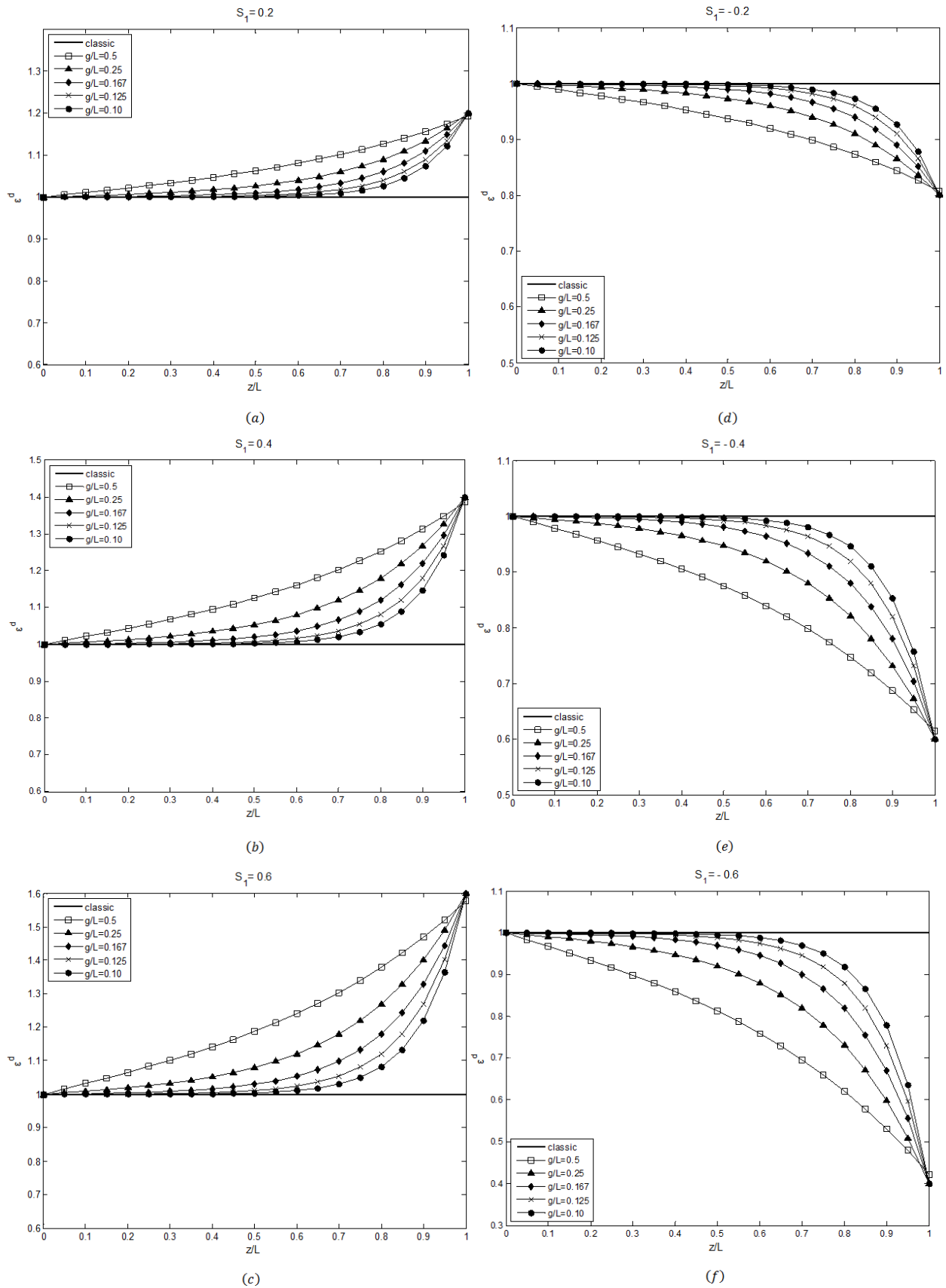
$$\varepsilon^d = \frac{\varepsilon(z)}{\frac{\mathcal{P}_1}{AE}} = \frac{e^{\frac{L}{g}} S_1}{1 + e^{\frac{2L}{g}}} e^{\frac{z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} - \frac{e^{\frac{L}{g}} S_1}{1 + e^{\frac{2L}{g}}} e^{\frac{-z}{L} \left(\frac{L}{g} \right)} + 1 \quad (4.106)$$

όπου η παράμετρος S_1 δίνεται από την σχέση (4.102). Η γραφική παράσταση του πεδίου της παραμόρφωσης σε συνάρτηση με τον λόγο z/L , για την περίπτωση όπου $h=0$, για διάφο-

ρες τιμές της παραμέτρου S_1 φαίνεται στα Σχ. 4.6. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο πακτωμένο άκρο της δοκού η παραμόρφωση θα είναι $\varepsilon(z=0)=\mathcal{P}_1/AE$ για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου S_1 , ενώ στο άλλο άκρο της δοκού θα είναι $\varepsilon(z=L)=\varepsilon_1$, όπως ακριβώς επιβάλλει η συνοριακή συνθήκη (4.90). Επιπλέον, από την σχέση (4.105) προκύπτει ότι εάν $S_1 > 0$ τότε η αξονική παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη ενώ εάν $S_1 < 0$ η αξονική παραμόρφωση είναι μικρότερη.



Σχ 4.5. Η μεταβολή του πεδίου της μετατόπισης κατά μήκος του άξονα της δοκού για διάφορες τιμές του λόγου z/L , ($h=0$).



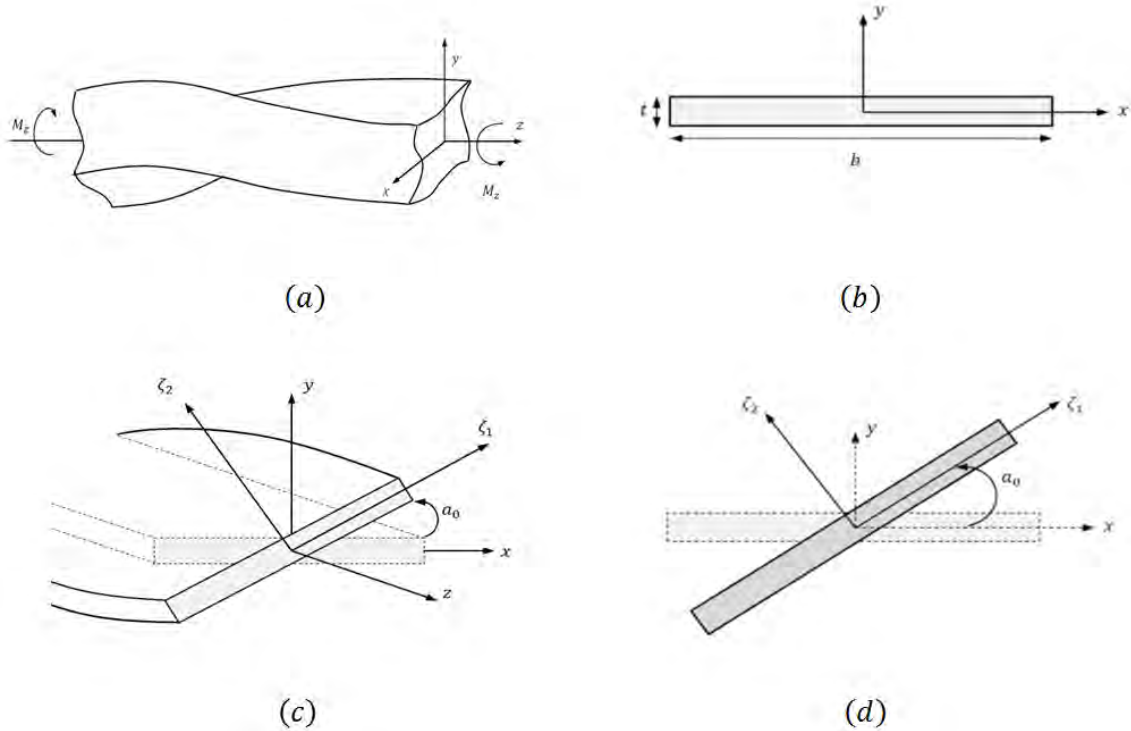
Σχ 4.6. Η μεταβολή του πεδίου της παραμόρφωσης κατά μήκος του άξονα της δοκού για διάφορες τιμές του λόγου z/L , $h=0$.

4.8. Παραδείγματα

4.8.1. Λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή

Για μια λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή πλάτους b και πάχους t , όπως αυτή του Σχ. 4.7, η συνάρτηση στρέβλωσης θα είναι

$$\omega^* = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \quad (4.107)$$



Σχ 4.7. Η λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή πλάτους b και πάχους t , $b \gg t$.

όπου ζ_1, ζ_2 είναι οι συντεταγμένες του τοπικού συστήματος αναφοράς $O\zeta_1\zeta_2z$ το οποίο προσαρμόζεται στο κέντρο της ακραίας διατομής της δοκού μετά την επιβολή της αρχικής στρόφης στη δοκό. Οι άξονες $O\zeta_1, O\zeta_2$ είναι οι κύριοι άξονες της διατομής, κάθετοι μεταξύ τους, και συστρέφονται περί τον διαμήκη άξονα Oz .

Η παράγωγος της συνάρτησης στρέβλωσης ω^* , κατά μήκος του διαμήκη άξονα της δοκού στο σύστημα $O\zeta_1\zeta_2z$ θα είναι

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial z} = \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = a_0 \zeta_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} - a_0 \zeta_1 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \Rightarrow \frac{\partial \omega^*}{\partial z} = a_0 \left(\zeta_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \right) = a_0 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \quad (4.108)$$

Η ποσότητα K η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της δοκού θα δίνεται από την σχέση (4.33) η οποία για την περίπτωση της λεπτής ορθογωνικής διατομής διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}
a_0^2 K &= \iint \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} (\zeta_2^4 + \zeta_1^4 - 2\zeta_1^2 \zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \\
&= a_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\zeta_1^4 \zeta_2 + \frac{1}{5} \zeta_2^5 - \frac{2}{3} \zeta_1^2 \zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=-\frac{t}{2}}^{\zeta_2=+\frac{t}{2}} d\zeta_1 = a_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(t \zeta_1^4 + \frac{t^5}{80} - \frac{t^3}{6} \zeta_1^2 \right) d\zeta_1 = a_0^2 \left[\frac{t}{5} \zeta_1^5 + \frac{t^5}{80} \zeta_1 - \frac{t^3}{18} \zeta_1^3 \right]_{\zeta_1=-\frac{b}{2}}^{\zeta_1=+\frac{b}{2}} \\
&= a_0^2 \left(\frac{bt^5}{160} + \frac{b^5 t}{80} - \frac{t^3 b^3}{72} \right) \Rightarrow K \cong \frac{b^5 t}{80} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

Κατά αντιστοιχία για την ποσότητα S η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης σύμφωνα με την σχέση (4.41) για την περίπτωση της λεπτής ορθογωνικής διατομής θα ισχύει

$$a_0 S = \iint \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0 \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0 \left(-\frac{b^3 t}{12} + \frac{bt^3}{12} \right) \Rightarrow S \cong -\frac{b^3 t}{12} \quad (4.110)$$

Η σταθερά της στρεπτικής ακαμψίας της ίνας J , όπως δίνεται από την σχέση (4.36) για την λεπτή ορθογωνική διατομή θα είναι

$$\begin{aligned}
J &= \iint \left[\left(\zeta_2 + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \right)^2 + \left(\zeta_1 - \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \right)^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} 4\zeta_2^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = 4 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{3} \zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=-\frac{t}{2}}^{\zeta_2=+\frac{t}{2}} d\zeta_1 = \frac{t^3}{3} [\zeta_1]_{\zeta_1=-\frac{b}{2}}^{\zeta_1=+\frac{b}{2}} \Rightarrow J = \frac{bt^3}{3} \quad (4.111)
\end{aligned}$$

Επίσης από την σχέση (4.39) θα είναι

$$\begin{aligned}
a_0 R &= \iint \omega^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} (\zeta_1 \zeta_2^3 - \zeta_1^3 \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= a_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{\zeta_1}{4} \zeta_2^4 - \frac{\zeta_1^3}{2} \zeta_2^2 \right]_{\zeta_2=-\frac{t}{2}}^{\zeta_2=+\frac{t}{2}} d\zeta_1 = a_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\left(\frac{t^4}{64} \zeta_1 - \frac{t^2}{8} \zeta_1^3 \right) - \left(\frac{t^4}{64} \zeta_1 - \frac{t^2}{8} \zeta_1^3 \right) \right] d\zeta_1 \Rightarrow R = 0 \quad (4.112)
\end{aligned}$$

Από την σχέση (4.35) θα είναι

$$J_\omega = \iint (\omega^*)^2 dx dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \zeta_1^2 \zeta_2^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{\zeta_1^2}{3} \zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=-\frac{t}{2}}^{\zeta_2=+\frac{t}{2}} d\zeta_1 = \frac{t^3}{12} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \zeta_1^2 d\zeta_1 \Rightarrow J_\omega = \frac{b^3 t^3}{144} \quad (4.113)$$

και επιπλέον θα είναι

$$J_\omega = \ell^2 J \Rightarrow \ell^2 = \frac{J_\omega}{J} = \frac{\frac{b^3 t^3}{144}}{\frac{bt^3}{3}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{b^2}{48} \quad (4.114)$$

Από την σχέση (4.68) προκύπτει

$$c^2 = \frac{J_{\text{eff}}}{J} = 1 + a_0^2 \frac{E}{GJ} \left(K - \frac{S^2}{A} \right) = 1 + a_0^2 \frac{E}{G} \frac{3}{bt^3} \left(\frac{b^5 t}{80} - \frac{b^5 t}{144} \right) \Rightarrow c^2 = 1 + a_0^2 \frac{E}{G} \frac{b^2}{60} \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad (4.115)$$

Από την σχέση (4.69) προκύπτει

$$g^2 = \frac{E}{G} \frac{\ell^2}{c^2} = \frac{b^2}{48 \left[1 + a_0^2 \frac{E}{G} \frac{b^2}{60} \left(\frac{b}{t} \right)^2 \right]} \frac{E}{G} \quad (4.116)$$

Για το μήκος h που ορίζεται από την σχέση (4.76) θα είναι

$$h = \frac{a_0 R E}{c^2 J G} = 0 \quad (4.117)$$

4.8.2. Ελλειπτική διατομή

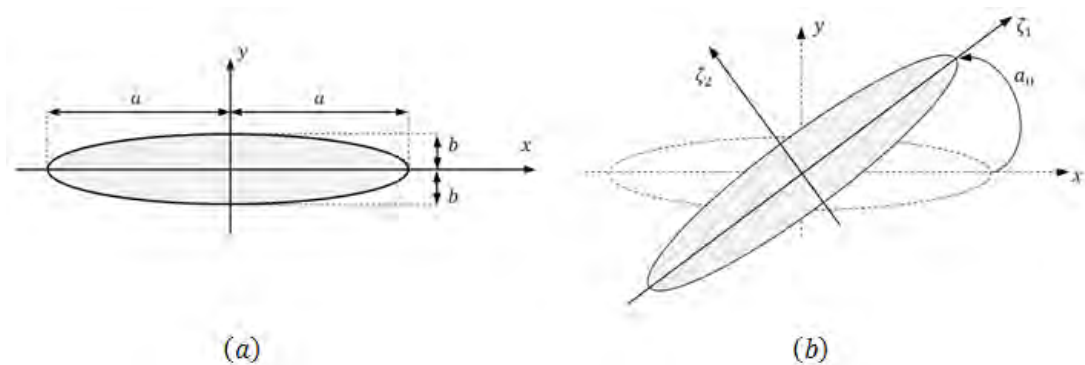
Για μια ελλειπτική διατομή με κύριους άξονες $2a, 2b$, Σχ. 4.8, η τασική συνάρτηση του Prandtl $F(\zeta_1, \zeta_2)$ θα δίνεται από την σχέση

$$F = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left(\frac{\zeta_1^2}{a^2} + \frac{\zeta_2^2}{b^2} - 1 \right) \quad (4.118)$$

η οποία οφείλει να ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας, που σημαίνει ότι θα πρέπει

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_2} = G\theta \left(-\frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} - \zeta_2 \right) \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} = -G\theta \left(-\frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} + \zeta_1 \right) \quad (4.120)$$



Σχ 4.8. Η ελλειπτική διατομή της δοκού (a) χωρίς αρχική στροφή (b) με αρχική στροφή

Από την επίλυση των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει ότι η συνάρτηση στρέβλωσης για την ελλειπτική διατομή της ίνας θα δίνεται από την σχέση

$$\omega^*(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \zeta_1 \zeta_2 \quad (4.121)$$

για την οποία θα είναι

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial z} = \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \quad (4.122)$$

Η ποσότητα K η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της ίνας θα δίνεται από την σχέση (4.33), η οποία για την περίπτωση της ελλειπτικής διατομής διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} a_0^2 K &= \iint \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \iint (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \cdot 2 \cdot \int_{-a}^a \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = 2a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^a \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} (\zeta_1^4 + \zeta_2^4 - 2\zeta_1^2 \zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= 2a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^a \left[\zeta_1^4 \zeta_2 + \frac{\zeta_2^5}{5} - 2\zeta_1^2 \frac{\zeta_2^3}{3} \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} d\zeta_1 \\ &= 2a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^a \left(\zeta_1^4 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \zeta_1^2} + \frac{b^5}{5a^5} (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^5 - \frac{2b^3}{3a^3} \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 \right) d\zeta_1 \\ &= 2a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \left[\underbrace{\frac{b}{a} \int_{-a}^a \zeta_1^4 \sqrt{a^2 - \zeta_1^2} d\zeta_1}_{K_1} + \underbrace{\frac{b^5}{5a^5} \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^5 d\zeta_1}_{K_2} - \underbrace{\frac{2b^3}{3a^3} \int_{-a}^a \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1}_{K_3} \right] \quad (4.123) \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των επιμέρους ολοκληρωμάτων I_1, I_2, I_3 της τελευταίας σχέσης θα δώσει

$$(K_1) \rightarrow \frac{b}{a} \int_{-a}^a \zeta_1^4 \sqrt{a^2 - \zeta_1^2} d\zeta_1 = \frac{\pi a^5 b}{16} \quad (4.124)$$

$$(K_2) \rightarrow \frac{b^5}{5a^5} \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^5 d\zeta_1 = \frac{\pi a b^5}{16} \quad (4.125)$$

$$(K_3) \rightarrow \frac{2b^3}{3a^3} \int_{-a}^a \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1 = \frac{\pi a^3 b^3}{24} \quad (4.126)$$

Τελικά, η σχέση (4.123) μέσω των σχέσεων (4.124) -(4.126) διαμορφώνεται ως εξής

$$a_0^2 K = 2a_0^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \left[\frac{\pi a^5 b}{16} + \frac{\pi a b^5}{16} - \frac{\pi a^3 b^3}{24} \right] \Rightarrow K = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\pi a b (3a^4 + 3b^4 - 2a^2 b^2)}{24} \quad (4.127)$$

Κατά αντιστοιχία για την ποσότητα S η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης σύμφωνα με την σχέση (4.41) για την περίπτωση ελλειπτικής διατομής θα ισχύει

$$\begin{aligned}
a_0 S &= \iint \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 = -a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \iint (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = -a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot 2 \cdot \int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= -2a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[\int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} \zeta_1^2 d\zeta_1 d\zeta_2 - \int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} \zeta_2^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \right] \\
&= -2a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[\int_{-a}^{+a} \left[\zeta_1^2 \zeta_2 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} d\zeta_1 - \frac{1}{3} \int_{-a}^{+a} \left[\zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} d\zeta_1 \right] \\
&= -2a_0 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[\underbrace{\int_{-a}^{+a} \zeta_1^2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \zeta_1^2} d\zeta_1}_{S_1} - \underbrace{\frac{b^3}{3a^3} \int_{-a}^{+a} \left(\sqrt{a^2 - \zeta_1^2} \right)^3 d\zeta_1}_{S_2} \right] \quad (4.128)
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των επιμέρους ολοκληρωμάτων S_1, S_2 της τελευταίας σχέσης θα δώσει

$$(S_1) \rightarrow \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \zeta_1^2 \sqrt{a^2 - \zeta_1^2} d\zeta_1 = \frac{\pi a^3 b}{8} \quad (4.129)$$

$$(S_2) \rightarrow \frac{b^3}{3a^3} \int_{-a}^{+a} \left(\sqrt{a^2 - \zeta_1^2} \right)^3 d\zeta_1 = \frac{\pi a b^3}{8} \quad (4.130)$$

Τελικά, η σχέση (4.128) μέσω των σχέσεων (4.129), (4.130) διαμορφώνεται ως εξής

$$S = -2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{\pi a^3 b}{8} - \frac{\pi a b^3}{8} \right) = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi a b}{4} \quad (4.131)$$

Η σταθερά της στρεπτικής ακαμψίας της ίνας J , όπως δίνεται από την σχέση (4.36) για την ελλειπτική διατομή θα είναι

$$\begin{aligned}
J &= \iint \left[\left(\zeta_2 + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \right)^2 + \left(\zeta_1 - \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \right)^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint \left(\zeta_2 + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint \left(\zeta_1 - \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left(\zeta_2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \zeta_2 \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint \left(\zeta_1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \zeta_1 \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \left(\frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \iint \zeta_2^2 d\zeta_1 d\zeta_2 + \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \iint \zeta_1^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \left(\frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\pi b^3 a}{4} + \left(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\pi b a^3}{4} = \frac{\pi a^3 b^5 + \pi a^5 b^3}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (4.132)
\end{aligned}$$

Επίσης από την σχέση (4.39) θα είναι

$$a_0 R = \iint \omega^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 = -2a_0 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \zeta_1 \zeta_2 d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$\begin{aligned}
&= -2a_0 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} (\zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2^3) d\zeta_1 d\zeta_2 = -2a_0 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \int_{-a}^{+a} \left[\zeta_1^3 \frac{\zeta_2^2}{2} - \zeta_1 \frac{\zeta_2^4}{4} \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} d\zeta_1 \\
&= -2a_0 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \left\{ \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{2a^2} \zeta_1^3 (a^2 - \zeta_1^2) d\zeta_1 - \int_{-a}^{+a} \frac{b^4}{4a^4} \zeta_1 (a^2 - \zeta_1^2)^2 d\zeta_1 \right\} \\
&= -2a_0 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \left\{ \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^{+a} \zeta_1^3 (a^2 - \zeta_1^2) d\zeta_1 - \frac{b^4}{4a^4} \int_{-a}^{+a} \zeta_1 (a^2 - \zeta_1^2)^2 d\zeta_1 \right\} \Rightarrow R = 0 \quad (4.133)
\end{aligned}$$

Από την σχέση (4.35) θα είναι

$$\begin{aligned}
J_\omega &= \iint (\omega^*)^2 dx dy = 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \int_{-a}^{+a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} \zeta_1^2 \zeta_2^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \int_{-a}^{+a} \left[\frac{\zeta_1^2}{3} \zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \zeta_1^2}} d\zeta_1 \\
&= 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \int_{-a}^{+a} \frac{b^3}{3a^3} \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1 = 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \frac{b^3}{3a^3} \int_{-a}^{+a} \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1 \\
&= 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \int_{-a}^{+a} \frac{b^3}{3a^3} \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1 = 2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \frac{b^3}{3a^3} \int_{-a}^{+a} \zeta_1^2 (\sqrt{a^2 - \zeta_1^2})^3 d\zeta_1 \Rightarrow J_\omega = \frac{\pi a^3 b^3 (a^2 - b^2)^2}{24 (a^2 + b^2)^2} \quad (4.134)
\end{aligned}$$

και επιπλέον θα είναι

$$J_\omega = \ell^2 J \Rightarrow \ell^2 = \frac{J_\omega}{J} \Rightarrow \ell^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{24(a^2 + b^2)} \quad (4.135)$$

Από την σχέση (4.68) προκύπτει

$$c^2 = \frac{J_{\text{eff}}}{J} = 1 + a_0^2 \frac{E}{GJ} \left(K - \frac{S^2}{A} \right) \Rightarrow c^2 = \frac{a_0^2}{4} \frac{E}{G} \left[\frac{\frac{a^8}{4} - \frac{a^6 b^2}{3} + \frac{a^4 b^4}{6} - \frac{a^2 b^6}{3} + \frac{b^8}{4}}{a^4 b^2 + a^2 b^4} \right] + 1 \quad (4.136)$$

Από την σχέση (4.69) προκύπτει

$$g^2 = \frac{E}{G} \frac{\ell^2}{c^2} \Rightarrow g^2 = \frac{2Ea^2 b^2 (a^2 - b^2)^2}{3a_0^2 Ea^8 - 4a_0^2 Ea^6 b^2 + 2a_0^2 Ea^4 b^4 + 48Ga^4 b^2 - 4a_0^2 Ea^2 b^6 + 48Ga^2 b^4 + 3a_0^2 Eb^8} \quad (4.137)$$

Για το μήκος h που ορίζεται από την σχέση (4.76) θα είναι

$$h = \frac{a_0 R E}{c^2 J G} = 0 \quad (4.138)$$

Από την ανάλυση της ελλειπτικής διατομής μπορεί να προκύψουν και τα αντίστοιχα μεγέθη για την κυκλική διατομή λαμβάνοντας την ειδική περίπτωση όπου $a = b$. Με αυτή την παραδοχή, από την σχέση (4.121) προκύπτει ότι η συνάρτηση στρέβλωσης για την κυκλική διατομή θα είναι μηδενική, αποτέλεσμα που συνάδει με την κλασσική θεωρία της στρέψης κατά

St. Venant η οποία προβλέπει ότι η κυκλική διατομή δεν στρεβλώνεται. Από τις σχέσεις (4.127),(4.131),(4.133),(4.134) προκύπτει ότι $K=S=R=J_{\omega}=0$, αντίστοιχα, γεγονός απόλυτα φυσιολογικό εφόσον αυτά τα μεγέθη είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής. Επιπλέον, από την σχέση (4.136) προκύπτει ότι για την κυκλική διατομή θα είναι, $(c=1)$, που επιβεβαιώνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα, ότι σε μια δοκό κυκλικής διατομής η επιβολή οποιασδήποτε αρχικής συστροφής a_0 δεν επιφέρει καμία μεταβολή στην στρεπτική ακαμψία της ίνας.

4.8.3. Ισόπλευρη τριγωνική διατομή

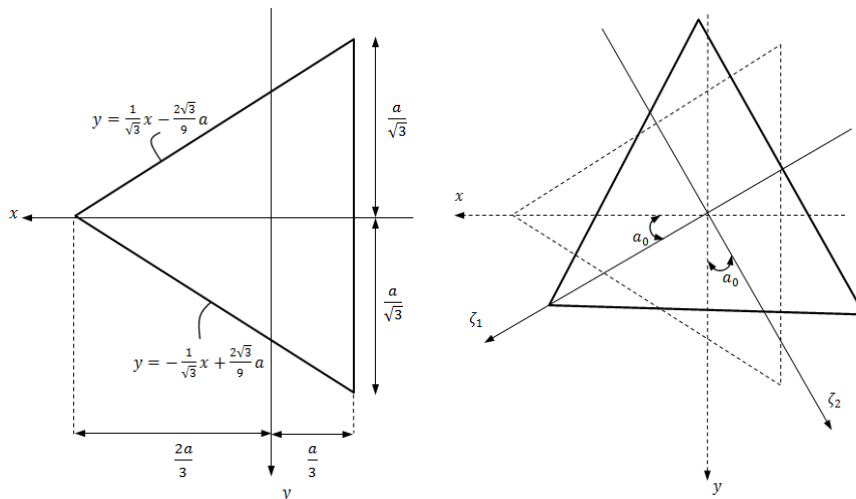
Για μια ισόπλευρη τριγωνική διατομή με πλευρές μήκους $2a/\sqrt{3}$, Σχ.4.9, η τασική συνάρτηση του Prandtl $F(\zeta_1, \zeta_2)$ θα δίνεται από την σχέση

$$F = -G\theta \left[\frac{1}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \frac{1}{2a}(\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) - \frac{2a^2}{27} \right] \quad (4.139)$$

η οποία για λόγους ισορροπίας οφείλει να υπακούει στις σχέσεις

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_2} = G\theta \left(-\frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} - \zeta_2 \right) \quad (4.140)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} = -G\theta \left(-\frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} + \zeta_1 \right) \quad (4.141)$$



Σχ 4.9. Η ισόπλευρη τριγωνική διατομή της δοκού (α) χωρίς αρχική στροφή και (β) με αρχική στροφή a_0 .

Από την επίλυση των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει η συνάρτηση στρέβλωσης για την τριγωνική διατομή της ίνας η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$\omega^* = -\frac{1}{2a}(\zeta_2^3 - 3\zeta_1^2\zeta_2) \quad (4.142)$$

Επιπλέον θα είναι

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} = \frac{3}{a}\zeta_1\zeta_2, \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} = -\frac{3}{2a}(\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \quad (4.143)$$

Για την συνάρτηση στρέβλωσης θα ισχύει επίσης

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial z} = \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} = \frac{3a_0}{2a}\zeta_1(\zeta_1^2 - 3\zeta_2^2) \quad (4.144)$$

Η ποσότητα K η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής της ίνας θα δίνεται από την σχέση (4.33), η οποία για την περίπτωση της ισόπλευρης τριγωνικής διατομής διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} a_0^2 K &= \iint \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial z} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{9a_0^2}{4a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} \zeta_1^2 (\zeta_1^2 - 3\zeta_2^2)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \frac{9a_0^2}{4a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} (\zeta_1^6 + 9\zeta_1^2\zeta_2^4 - 6\zeta_1^4\zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{9a_0^2}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^6\zeta_2 + \frac{9}{5}\zeta_1^2\zeta_2^5 - 2\zeta_1^4\zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} d\zeta_1 \\ &= \frac{9a_0^2}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^6 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a \right) + \frac{9}{5}\zeta_1^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a \right)^5 - 2\zeta_1^4 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a \right)^3 \right] d\zeta_1 \Rightarrow K = \frac{7\sqrt{3}}{2430}a^6 \end{aligned} \quad (4.145)$$

Κατά αντιστοιχία για την ποσότητα S η οποία σχετίζεται με την συνάρτηση στρέβλωσης σύμφωνα με την σχέση (4.41) για την περίπτωση της ισόπλευρης τριγωνικής διατομής θα ισχύει

$$\begin{aligned} a_0 S &= \iint \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{3a_0}{2a} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} \zeta_1 (\zeta_1^2 - 3\zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \frac{3a_0}{2a} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{3a_0}{a} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^3\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} d\zeta_1 \\ &= \frac{3a_0}{a} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a \right) - \zeta_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a \right)^3 \right] d\zeta_1 = \frac{3a_0}{a} \frac{2\sqrt{3}}{405}a^5 \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{3}}{135}a^4 \quad (4.146) \end{aligned}$$

Η σταθερά της στρεπτικής ακαμψίας της ίνας J , όπως δίνεται από την σχέση (4.36) για την ισόπλευρη τριγωνική διατομή θα είναι

$$\begin{aligned}
J &= \iint \left[\left(\zeta_2 + \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_1} \right)^2 + \left(\zeta_1 - \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta_2} \right)^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint \left[\zeta_2^2 \left(1 + \frac{3\zeta_1}{a} \right)^2 + \left(\zeta_1 + \frac{3(\zeta_2^2 - \zeta_1^2)}{2a} \right)^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left[\zeta_2^2 \left(1 + \frac{9}{a^2} \zeta_1^2 + \frac{6}{a} \zeta_1 \right) + \zeta_1^2 + \frac{9}{4a^2} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2 + \frac{3}{a} \zeta_1 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left[\zeta_2^2 + \frac{9}{a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{6}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 + \zeta_1^2 + \frac{9}{4a^2} (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2 + \frac{3}{a} \zeta_1 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left[\zeta_2^2 + \frac{9}{a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{6}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 + \zeta_1^2 + \frac{9}{4a^2} (\zeta_2^4 + \zeta_1^4 - 2\zeta_1^2 \zeta_2^2) + \frac{3}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 - \frac{3}{a} \zeta_1^3 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left[\zeta_2^2 + \frac{9}{a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{6}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 + \zeta_1^2 + \frac{9}{4a^2} \zeta_2^4 + \frac{9}{4a^2} \zeta_1^4 - \frac{9}{2a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{3}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 - \frac{3}{a} \zeta_1^3 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \iint \left[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \frac{3}{a} \zeta_1^3 + \frac{9}{4a^2} \zeta_2^4 + \frac{9}{4a^2} \zeta_1^4 + \frac{9}{2a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{9}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= 2 \cdot \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} \left[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \frac{3}{a} \zeta_1^3 + \frac{9}{4a^2} \zeta_2^4 + \frac{9}{4a^2} \zeta_1^4 + \frac{9}{2a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 + \frac{9}{a} \zeta_1 \zeta_2^2 \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= 2 \cdot \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^2 \zeta_2 + \frac{\zeta_2^3}{3} - \frac{3}{a} \zeta_1^3 \zeta_2 + \frac{9}{20a^2} \zeta_2^5 + \frac{9}{4a^2} \zeta_1^4 \zeta_2 + \frac{3}{2a^2} \zeta_1^2 \zeta_2^3 + \frac{3}{a} \zeta_1 \zeta_2^3 \right]_{\zeta_2=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} d\zeta_1 \\
&= 2 \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\zeta_1^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^3 - \frac{3}{a} \zeta_1^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{20a^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^5 + \frac{9}{4a^2} \zeta_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right) + \frac{3}{2a^2} \zeta_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{a} \zeta_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^3 \right] d\zeta_1 \Rightarrow J = \frac{1}{15\sqrt{3}} a^4 \tag{4.147}
\end{aligned}$$

Επίσης από την σχέση (4.39) θα είναι

$$\begin{aligned}
a_0 R &= \iint \omega^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z} d\zeta_1 d\zeta_2 \Rightarrow a_0 R = \frac{3a_0}{4a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} (\zeta_2^2 - 3\zeta_1^2) \zeta_2 \zeta_1 (\zeta_1^2 - 3\zeta_2^2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \frac{3a_0}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} (10\zeta_1^3 \zeta_2^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^5 - 3\zeta_1^5 \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{3a_0}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \left[\frac{10}{4} \zeta_1^3 \zeta_2^4 - \frac{1}{2} \zeta_1 \zeta_2^6 - \frac{3}{2} \zeta_1^5 \zeta_2^2 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a} d\zeta_1 \\
&= \frac{3a_0}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{+\frac{2a}{3}} \frac{10}{4} \zeta_1^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^4 - \frac{1}{2} \zeta_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^6 - \frac{3}{2} \zeta_1^5 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} a \right)^2 d\zeta_1 \Rightarrow R = -\frac{1}{7776} a^6 \tag{4.148}
\end{aligned}$$

Από την σχέση (4.35) θα είναι

$$\begin{aligned}
J_{\omega} &= \iint (\omega^*)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{1}{4a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}a}^{\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} (\zeta_2^3 - 3\zeta_1^2 \zeta_2)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= \frac{1}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} \int_0^{\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} (\zeta_2^6 + 9\zeta_1^4 \zeta_2^2 - 6\zeta_1^2 \zeta_2^4) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{1}{2a^2} \int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left[\frac{\zeta_2^7}{7} + 3\zeta_1^4 \zeta_2^3 - \frac{6}{5} \zeta_1^2 \zeta_2^5 \right]_{\zeta_2=0}^{\zeta_2=\frac{2a}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}a} d\zeta_1 \\
&\Rightarrow J_{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{17010} a^6
\end{aligned} \tag{4.149}$$

και επιπλέον θα είναι

$$J_{\omega} = \ell^2 J \Rightarrow \ell^2 = \frac{J_{\omega}}{J} \Rightarrow \ell^2 = \frac{1}{378} a^2 \tag{4.150}$$

Από την σχέση (4.68) προκύπτει

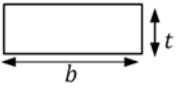
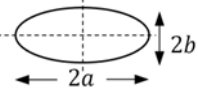
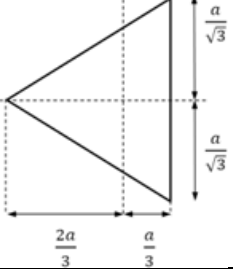
$$c^2 = \frac{J_{\text{eff}}}{J} = 1 + a_0^2 \frac{E}{GJ} \left(K - \frac{S^2}{A} \right) \Rightarrow c^2 = 1 + \frac{a_0^2 a^2 E}{10 G} \tag{4.151}$$

Από την σχέση (4.69) προκύπτει

$$g^2 = \frac{E \ell^2}{G c^2} = \frac{a^2}{378 \left(\frac{a_0^2 a^2 E}{10 G} + 1 \right)} \frac{E}{G} \tag{4.152}$$

Για το μήκος h που ορίζεται από την σχέση (4.76) θα είναι

$$h = \frac{a_0 R E}{c^2 J G} = \frac{E}{G} \frac{5\sqrt{3}(-a_0)a^2}{2592 \left[\frac{E a_0^2 a^2}{G 10} + 1 \right]} \tag{4.153}$$

Geomet- ric prop- erty	cross section type		
	thin wall	elliptic	triangular
			
$A[m^2]$	bt	πab	$a^2/\sqrt{3}$
$\omega^*[m^2]$	$-\zeta_1\zeta_2$	$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\zeta_1\zeta_2$	$\frac{1}{2a}(\zeta_2^3-3\zeta_1^2\zeta_2)$
$J[m^4]$	$bt^3/3$	$\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{15\sqrt{3}}a^4$
$K[m^6]$	$b^5t/80$	$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \frac{\pi ab(3a^4+3b^4-2a^2b^2)}{24}$	$\frac{7\sqrt{3}}{2430}a^6$
$-S[m^4]$	$b^3t/12$	$\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \frac{\pi ab}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{135}a^4$
$R[m^6]$	0	0	$-\frac{1}{7776}a^6$
$c^2[-]$	$1+\frac{a_0^2}{60}\frac{E}{G}\frac{b^4}{t^2}$	$\frac{a_0^2}{4}\frac{E}{G}\left[\frac{\frac{a^8}{4}-\frac{a^6b^2}{3}+\frac{a^4b^4}{6}-\frac{a^2b^6}{3}+\frac{b^8}{4}}{a^4b^2+a^2b^4}\right]+1$	$1+\frac{a_0^2a^2}{10}\frac{E}{G}$
$\ell^2[m^2]$	$\frac{b^2}{48}$	$\frac{(a^2-b^2)^2}{24(a^2+b^2)}$	$\frac{1}{378}a^2$
$h[m^2]$	0	0	$\frac{E}{G}\frac{5\sqrt{3}(-a_0)a^2}{2592\left[\frac{E}{G}\frac{a_0^2a^2}{10}+1\right]}$
$g^2=\frac{E}{G}\frac{\ell^2}{c^2}[m^2]$			

Κεφάλαιο 5

Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου

5.1. Εισαγωγή

Η κλασική θεωρία του συνεχούς μέσου στηρίζεται σε δύο βασικές παραδοχές. Η πρώτη παραδοχή είναι ότι θεωρεί την μάζα του σώματος κατανεμημένη με έναν ομοιόμορφο τρόπο σε όλο τον όγκο του σώματος. Το σώμα θεωρείται κατά κάποιο τρόπο ομοιογενές. Η δεύτερη παραδοχή στηρίζεται στο ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υλικών σωματιδίων στο εσωτερικό του σώματος περιγράφονται πλήρως με ένα διάνυσμα, τον ελκυστή των τάσεων. Ο ελκυστής των τάσεων είναι ένα διάνυσμα το οποίο ασκείται στο κέντρο της στοιχειώδους επιφάνειας του υλικού σημείου και έχει φορά προς τα έξω. Συνεπώς, όλες οι κινηματικές σχέσεις και οι εξισώσεις ισορροπίας της κλασικής θεωρίας προκύπτουν από αυτές τις δύο παραδοχές.

Οι πειραματικές διαδικασίες έδειξαν ότι η μηχανική απόκριση πολλών υλικών μπορεί να προβλεφθεί σε ικανοποιητικό βαθμό από την κλασική θεωρία. Υπάρχουν όμως ορισμένα υλικά των οποίων η μηχανική συμπεριφορά δεν μπορεί να προβλεφθεί από την κλασική θεωρία του συνεχούς μέσου. Σε αυτή την κατηγορία εμπίπτουν τα κοκκώδη υλικά, τα πολυμερή, τα πολυκρυσταλλικά καθώς και τα υφάσματα. Το γεγονός αυτό έθεσε υπό αμφισβήτηση την άποψη ότι η κλασική θεωρία μπορεί να προβλέψει την μηχανική συμπεριφορά όλων των υλικών σε όλες τις κλίμακες και ταυτόχρονα άνοιξε το δρόμο για την αναζήτηση μιας νέας θεωρητικής αντιμετώπισης. Σε ορισμένα υλικά, οι πειραματικές μετρήσεις παρουσίαζαν σημαντικές αποκλίσεις από τις θεωρητικές προβλέψεις. Κοινό χαρακτηριστικό των υλικών αυτών αποτελούσε η διακριτή μικροδομή, ο ρόλος της οποίας τροποποιούσε σημαντικά την τελική απόκριση του σώματος. Η μικροδομή αρχίζει να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όταν μια χαρακτηριστική της διάσταση, συνήθως ένα μήκος, γίνεται συγκρίσιμη με μια από τις διαστάσεις του σώματος. Σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται τα φαινόμενα κλίμακας (size effects) τα οποία η κλασική θεωρία δεν λαμβάνει υπόψη. Σε αυτή την περίπτωση το υλικό επιδεικνύει κάποιες σοβαρές ανομοιογένειες οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την ανάλυση. Η ύπαρξη της ανομοιογένειας σημαίνει ότι η τάση σε ένα σημείο του σώματος δεν εξαρτάται μόνο από την τοπική παραμόρφωση (local strain) αλλά και από την κατανομή της παραμόρφωσης γύρω από αυτό το σημείο. Με άλλα λόγια η κλασική τοπική θεωρία της ελαστικότητας δεν είναι αρκετή και η χρήση μη τοπικών θεωριών (nonlocal theories) είναι απαραίτητη. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα οι καταστατικές εξισώσεις να διατυπώνονται σε ολοκληρωτική μορφή.

Προκειμένου να διερευνηθεί σε θεωρητικό επίπεδο η μακροσκοπική μηχανική συμπεριφορά των υλικών με φαινόμενα κλίμακας είναι απαραίτητη η αναζήτηση μιας πιο γενικευμένης θεωρίας που θα καλύπτει επαρκώς την αδυναμία της κλασικής θεωρίας να περιγράψει τέτοιου είδους φαινόμενα. Προς αυτή την κατεύθυνση, διαμορφώθηκαν δύο μεγάλες θεωρητικές απόψεις. Η πρώτη άποψη, στηρίζεται στην υπόθεση ότι η μικροδομή του σώματος μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας μεγαλύτερης τάξης παράγωγο στην τροπή ενώ η δεύτερη, στηρίζεται

στην υπόθεση ότι τα φαινόμενα κλίμακας μπορούν να ερμηνευθούν με την εισαγωγή επιπρόσθετων βαθμών ελευθερίας στο συνεχές μέσο. Η πρώτη θεωρητική προσέγγιση περιλαμβάνει όλες τις θεωρίες ανώτερης βαθμίδας (higher order) ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει όλες τις θεωρίες ανώτερης τάξης (higher grade theories).

Η επίδραση της μικροδομής του υλικού θα μπορούσε να διερευνηθεί διεξοδικά και αποτελεσματικά με την ανάλυση του κάθε υλικού σωματιδίου ξεχωριστά. Με άλλα λόγια σώμα θα μπορούσε να διακριτοποιηθεί και ουσιαστικά να λυθεί η συνέχειά του. Μια τέτοια ανάλυση θα ήταν ρεαλιστική και ακριβής από φυσικής άποψης. Όμως, μια προσπάθεια ανάλυσης του σώματος λαμβάνοντας υπόψη την λεπτομερή διαδικασία μεταβίβασης των φορτίων μεταξύ των υλικών σωματιδίων θα ήταν παντελώς ατελέσφορη στην μοντελοποίηση και εξαιρετικά πολύπλοκη στην επίλυση.

5.2. Θεωρίες ανώτερης βαθμίδας

Η κλασική θεωρία του συνεχούς μέσου δέχεται ότι η μεταφορά των φορτίων στο εσωτερικό του σώματος γίνεται μέσω των απειροστών επιφανειών dS των υλικών σωματιδίων και περιγράφεται πλήρως από ένα διάνυσμα δύναμης το οποίο επενεργεί στο κέντρο βάρους της επιφάνειας του στοιχείου. Μια φυσική γενίκευση της κλασικής θεωρίας του συνεχούς ελαστικού μέσου μπορεί να προκύψει εάν θεωρηθεί ότι οι απειροστές επιφάνειες dS των σωματιδίων εκτός του διανύσματος της δύναμης μπορούν να μεταφέρουν και ένα πρόσθετο διάνυσμα, το διάνυσμα των ροπών, το οποίο θα επενεργεί στο κέντρο βάρους τους. Το διάνυσμα των ροπών έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργούνται στο εσωτερικό του σώματος, σε τοπικό επίπεδο, τάσεις διπόλου (couple stresses). Η ιδέα της ύπαρξης τάσεων διπόλου καλλιεργήθηκε από πολλούς επιστήμονες την περίοδο του 20^{ου} αιώνα. Το 1909 οι αδερφοί Cosserat ανέπτυξαν μια μη γραμμική θεωρία ελαστικότητας που αφορούσε δοκούς, επιφάνειες και σώματα και ήταν οι πρώτοι οι οποίοι διατύπωσαν μια γενικευμένη θεωρία τέτοιου είδους, έχοντας μια περίπλοκη δομή. Ήταν οι πρώτοι οι οποίοι εισήγαγαν μια σταθερή τριάδα διανυσμάτων σε κάθε υλικό σημείο του σώματος η οποία μπορούσε να στρέφεται ανεξάρτητα από την τοπική στροφή του σώματος λόγω της παραμόρφωσής του.

Η θεωρία των αδερφών Cosserat δεν έτυχε ιδιαίτερης εκτίμησης για πολλά χρόνια. Στις αρχές τις δεκαετίας του '60 το θέμα της θεωρίας της ελαστικότητας με διπολικές τάσεις άρχισε να επανέρχεται στο προσκήνιο και αρκετοί ερευνητές άρχισαν να ασχολούνται με θεωρίες τύπου Cosserat. Οι κυριότεροι ερευνητές που πραγματεύτηκαν το θέμα είναι οι Grioli (1960), Rajagopal (1960), Truesdell and Toupin (1960), Aero and Kuvshinskii (1961), Eringen (1962), Mindlin and Tiersten (1962) και ο Koiter (1964). Όλοι οι παραπάνω ασχολήθηκαν με μια ειδική περίπτωση της θεωρίας των Cosserat όπου οι σταθερή τριάδα δεν στρέφεται ανεξάρτητα αλλά ορίζεται με την συνηθισμένη έννοια όπως στην κλασική θεωρία της ελαστικότητας. Στην διεθνή βιβλιογραφία αυτή η θεωρία αναφέρεται με διάφορα ονόματα όπως, «Θεωρία Cosserat με περιορισμένες στροφές» [Cosserat theory with constrained rotation, Toupin (1964)], «Μη καθορισμένη θεωρία των τάσεων διπόλου» [Indeterminate couple stress theory, Eringen (1968)], «Θεωρία τάσεων διπόλου» [Couple stress theory, Koiter (1964)], «Ψευδοσυνεχές Cosserat» [Cosserat pseudo – continuum, Nowacki (1986)]. Αυτή η θεωρία υιοθετείται στην παρούσα εργασία για την ερμηνεία της μηχανικής συμπεριφοράς των υφασμάτων υλικών. Στην θεωρία των τάσεων διπόλου μόνο η παράγωγος της στροφής εισέρχεται στην συνάρτηση

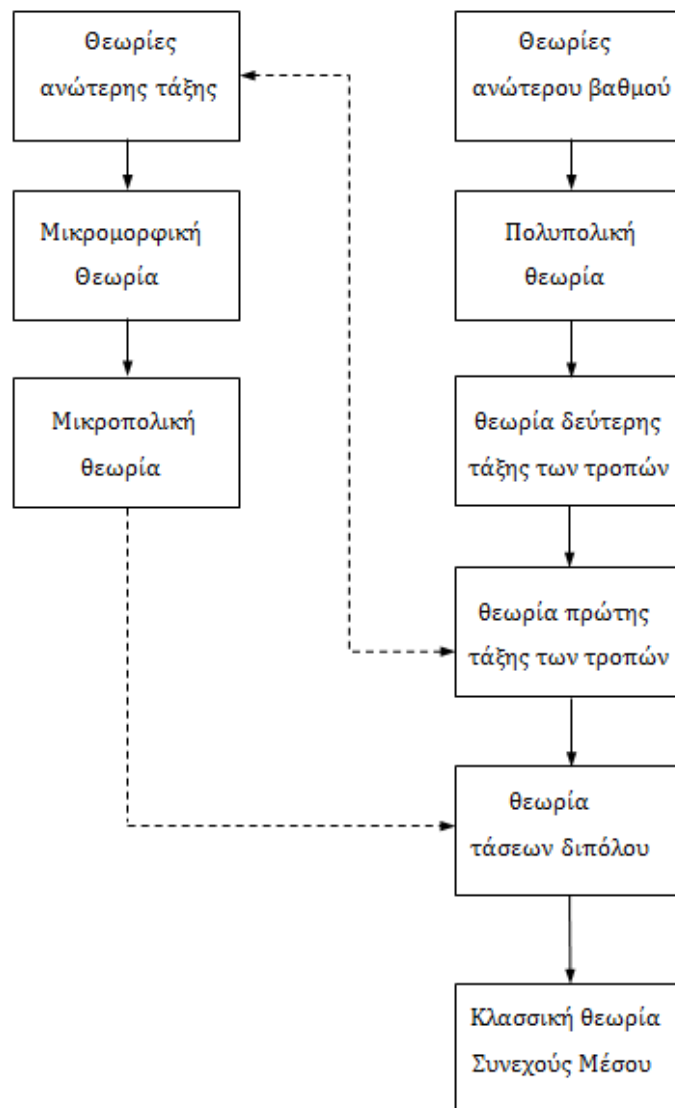
της πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας, γεγονός που σημαίνει ότι μόνο οι οκτώ από τις δεκαοχτώ συνιστώσες της παραγώγου της τροπής παίζουν σημαντικό ρόλο. Όταν όλες οι συνιστώσες της παραγώγου της τροπής εισέρχονται στην συνάρτηση της πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας του σώματος, η συνάρτηση γίνεται μη γραμμική (Tourin 1962,1964). Αυτή η θεωρία αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν *θεωρία της πρώτης παραγώγου* της τροπής (strain gradient theory). Ο Mindlin (1964) ασχολήθηκε με την θεωρία της πρώτης παραγώγου της τροπής θεωρώντας μια γραμμική συνάρτηση για την πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας. Οι Green & Rivlin (1964) ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη μιας γενικότερης θεωρίας η οποία περιελάμβανε όλες τις ανώτερες παραγώγους της τροπής, αυτή η θεωρία αναφέρεται στην διεθνή βιβλιογραφία σαν *πολυπολική θεωρία* (multipolar theory). Ο Mindlin (1965) ανέπτυξε μια θεωρία στην οποία λάμβανε υπόψη την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της τροπής η οποία στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται σαν *θεωρία της δεύτερης παραγώγου της τροπής* (second strain gradient theory). Αυτή η θεωρία αποτελεί μια ειδική περίπτωση της πολυπολικής θεωρίας του Rivlin.

5.3. Θεωρίες ανώτερης τάξης

Η επέκταση της κλασικής θεωρίας του Συνεχούς Μέσου έχει σαν κύριο στόχο να υπολογίσει, να λάβει υπόψη της, την επίδραση των παραμορφώσεων λόγω της μικροδομής του σώματος. Όπως φάνηκε στην προηγούμενη παράγραφο ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι η θεώρηση μεγαλύτερης τάξης παραγώγου στην τροπή. Ένας άλλος τρόπος για να ληφθεί υπόψη η επίδραση της μικροδομής είναι εισάγοντας περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στο συνεχές. Αυτή οι επιπρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας ορίζονται ώστε να είναι ανεξάρτητοι από τους συνηθισμένους βαθμούς ελευθερίας της παραμόρφωσης. Αυτού του είδους οι θεωρίες αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία σαν *θεωρίες ανώτερης τάξης* (higher order theories). Η μη γραμμική μικρομορφική θεωρία (*micromorphic theory*) η οποία εισήχθη από τους Eringen & Suhubi (1964) και η γραμμική μικροδομική θεωρία (*microstructure theory*) του Mindlin (1964) υποπίπτουν σε αυτή την κατηγορία. Η γραμμική έκδοση της μικρομορφικής θεωρίας συμπίπτει με την μικροδομική θεωρία του Mindlin. Στην μικρομορφική θεωρία ένα υλικό σημείο διαθέτει τρεις παραμορφώσιμες διευθύνσεις (three deformable directors) γεγονός που σημαίνει ότι στο υλικό σημείο εισάγονται εννέα βαθμοί ελευθερίας, ψ_{ij} , που είναι αδιάστατες ποσότητες και μοιάζουν να είναι κάτι σαν τροπές. Ουσιαστικά εισάγεται ένα μικροστοιχείο μέσα στο συνεχές το οποίο μπορεί να συστρέφεται και να μετατοπίζεται ανεξάρτητα από την τοπική παραμόρφωση του μακροστοιχείου. Μία ειδική περίπτωση της μικρομορφικής θεωρίας αποτελεί η θεωρία της μικροροπής (micropolar theory). Στην θεωρία της μικροροπής οι βαθμοί ελευθερίας του υλικού σημείου είναι τρεις, είναι στροφικοί ϕ_i και είναι επιπρόσθετοι βαθμοί εκείνων της κλασικής παραμόρφωσης του συνεχούς. Εάν οι διευθύνσεις (directors) είναι συζευγμένες με το υλικό σημείο του συνεχούς τότε οι περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας της μικροπολικής θεωρίας γίνονται ίσοι με τις κλασικές στροφές, $\phi_k = \varepsilon_{ijk} u_{j,i} / 2$, και η μικροπολική θεωρία ανάγεται στην θεωρία των τάσεων διπόλου.

Τα υφάσματα είναι υλικά τα οποία παρουσιάζουν πολλές ιδιορρυθμίες. Χαρακτηριστικούς γνώρισμα είναι η πλέξη τους η οποία αποτυπώνει με τον πιο ρεαλιστικό τρόπο την μικροδομή του υλικού. Η μακροσκοπική απόκριση του υφάσματος επηρεάζεται σε έντονο βαθμό

μό από την μικροδομή. Σε τοπικό επίπεδο τα υφάδια μετακινούνται, συστρέφονται και παραμορφώνονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Αυτό συμβαίνει διότι μια χαρακτηριστική διάσταση της μικροδομής, συνήθως ένα μήκος, της μικροδομής γίνεται συγκρίσιμη με μια διάσταση της μακροδομής (size effect)



Σχ 5.1. Οι θεωρίες ανώτερης τάξης και ανώτερου βαθμού καθώς και η μεταξύ τους διασυνδέσεις.

5.4. Η θεωρία των τάσεων ζεύγους

Η κλασσική θεωρία της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου στηρίζεται στην παραδοχή ότι η ύλη κατανέμεται κατά συνεχή τρόπο μέσα στο υλικό, χωρίς να υπάρχουν κενά ή ατέλειες μέσα στο υλικό. Υποθέτει δηλαδή ότι κάθε σημείο του φυσικού χώρου καταλαμβάνεται από ένα και μόνο υλικό σωματίδιο το οποίο ανήκει στο υλικό. Ειδικά για τα υφάσματα μια τέτοια παραδοχή είναι εμφανώς μη έγκυρη δεδομένου ότι λόγω της πλέξης υπάρχουν κάποια κενά μεταξύ των νημάτων. Η θεώρηση της συνέχειας αποτελεί την βάση για την ανάλυση της συμπε-

ριφοράς των υλικών μακροσκοπικά όπου η μικροδομή του υλικού δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη. Τα πειράματα έχουν δείξει ότι η μηχανική συμπεριφορά ορισμένων υλικών σε μικρές κλίμακες είναι διαφορετική από την μηχανική συμπεριφορά τους σε μακροκλίμακες. Οι πειραματικές διαδικασίες καταδεικνύουν ότι πρέπει να αναζητηθεί μια άλλη θεωρία η οποία να μπορεί να λαμβάνει υπόψη αυτή την διαφορετικότητα της μηχανικής συμπεριφοράς του υλικού κατά την μετάβαση από την μια κλίμακα στην άλλη. Η λύση της συνέχειας του υλικού, που φαινομενικά θα έλυνε το πρόβλημα, δεν ενδείκνυται διότι θα προέκυπτε ένα εξαιρετικά πολύπλοκο μοντέλο το οποίο θα ήταν δύσκολο να επιλυθεί.

Για αυτούς τους λόγους είναι αναγκαία η ανάπτυξη μιας θεωρίας συνεχούς μέσου η οποία θα λαμβάνει υπόψη της κάποιες παραμέτρους της μικροδομής και ταυτόχρονα θα έχει μια ευρύτητα στις κλίμακες που θα αναφέρεται, ώστε στην εκφυλιστική της μορφή να ανάγεται στην κλασσική θεωρία του συνεχούς μέσου. Η παραμόρφωση του υλικού είναι μια παράμετρος η οποία σχετίζεται με την γεωμετρία της κατασκευής και θα μπορούσε να αποτελέσει την πλατφόρμα για μια πιο πλήρη συνεχή θεωρία. Κάτι τέτοιο απαιτεί την εισαγωγή μιας νέας ποσότητας η οποία θα είναι ενεργειακά συζυγής με την παραμόρφωση, ή ακριβέστερα με το μέρος της παραμόρφωσης που σχετίζεται με την καμπυλότητα. Αυτή η πρόσθετη ποσότητα είναι η διπολική τάση (couple stress) η οποία θα έχει διαστάσεις δύναμης ανά μονάδα μήκους, και θα είναι ουσιαστικά μια ροπή ανά μονάδα επιφάνειας. Η τάση με την κλασσική της έννοια σχετίζεται με την ενεργειακά συζυγή της ποσότητα, την τροπή, μέσα από τον καταστατικό νόμο του υλικού. Κατά αντιστοιχία η μικροροπή σχετίζεται με την καμπυλότητα μέσα από μια πρόσθετη σχέση που θα εισαχθεί στον καταστατικό νόμο του υλικού.

Την ύπαρξη των διπολικών τάσεων ή ισοδύναμα της μικροροπής κατά την ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών την εισήγαγε πρώτος ο Voigt (1887) ενώ οι αδερφοί Cosserat (1909) ήταν οι πρώτοι οι οποίοι διατύπωσαν ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο λάμβανε υπόψη τις μικροροπές που αναπτύσσονται στην μικροδομή του υλικού. Στην πρωτότυπη θεωρία που ανέπτυξαν οι αδερφοί Cosserat οι κινηματικές ποσότητες ήταν η μετατόπιση και η μικροστροφή η οποία θεωρήθηκε να είναι ανεξάρτητη από την μακροσκοπική μηχανική στροφή. Η μακροσκοπική στροφή ως γνωστόν αφορά το αντισυμμετρικό μέρος της κλίσης της μετατόπισης και ορίζεται από την σχέση

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times u \quad (5.1)$$

Θεωρίες μικροροπών οι οποίες περιελάμβαναν αυτή την μακροστροφή σαν την πραγματική κινηματική ποσότητα του υλικού αναπτύχθηκαν πολύ αργότερα από διάφορους ερευνητές, Toupin (1962), Mindlin and Tiersten (1962), Koiter (1964). Σε όλες αυτές τις θεωρίες η καμπυλότητα η οποία οφείλεται στην παρουσία των ζευγών των τάσεων αναπαρίσταται με την βαθμίδα του διανύσματος της στροφής. Με αυτή την παραδοχή όλες αυτές οι θεωρίες κατέληγαν να διαμορφώνουν καταστατικές εξισώσεις για το υλικό οι οποίες εκτός του ότι ήταν εξαιρετικά πολύπλοκες είχαν και το μειονέκτημα της απροσδιοριστίας διότι στις καταστατικές εξισώσεις δεν εμφανιζόταν το σφαιρικό μέρος του τανυστή των μικροροπών με αποτέλεσμα το μέρος αυτό να παραμένει τελικά απροσδιόριστο. Λόγω αυτής της απροσδιοριστίας ο Eringen (1968) χαρακτήρισε όλες αυτές τις θεωρίες απροσδιόριστες (indeterminate couple stress theories). Για να απαλειφθεί αυτού του είδους η απροσδιοριστία κάποιες άλλες εναλλακτικές θεωρίες αναπτύχθηκαν.

Οι εναλλακτικές θεωρίες που αναπτύχθηκαν στηρίζονται σε δύο κατευθύνσεις. Η μια κατεύθυνση στηρίζεται στην βασική ιδέα που διατυπώθηκε από τους αδερφούς Cosserat και υιοθετεί την άποψη ότι οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας που εισάγονται στο σύστημα μέσω των μικροστροφών ϕ_i , είναι ανεξάρτητοι από την μακροσκοπική στροφή ω_i , δηλ ισχύει

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \neq \phi_i \quad (5.2)$$

Το βασικό μειονέκτημα αυτής της θεώρησης είναι ο βαθμός της πολυπλοκότητάς της ακόμη και στην ανάλυση πολύ απλών κατασκευών. Η δεύτερη κύρια κατεύθυνση είναι οι λεγόμενες θεωρίες δεύτερης τάξης (second gradient theories). Αυτές οι θεωρίες αγνοούν την ιδέα της μικροστροφής και εισάγουν σαν κύριες μεταβλητές την βαθμίδα μιας κινηματικής ποσότητας όπως είναι η παραμόρφωση, η στροφή ή κάποιος συνδυασμός των δύο. Οι κινηματικές ποσότητες είναι αντιπροσωπευτικές της πραγματικής συμπεριφοράς του υλικού, υπό την έννοια ότι μπορούν να παρατηρηθούν κατά την φόρτιση του υλικού. Ο τανυστής των μικροροπών είναι αντισυμμετρικός και το αντισυμμετρικό μέρος της βαθμίδας του τανυστή των στροφών είναι ο τανυστής των καμπυλοτήτων.

5.4.1. Οι εξισώσεις ισορροπίας

Θεωρούμε ένα υλικό σώμα το οποίο καταλαμβάνει όγκο V και ορίζεται από μια κλειστή επιφάνεια S . Για μια θεωρία που λαμβάνει υπόψη την κλίμακα του υλικού, η αλληλεπίδραση δύο γειτονικών σωματιδίων που οριοθετούνται από μια στοιχειώδη επιφάνεια dS και ένα μοναδιαίο διάνυσμα n , στο εσωτερικό του σώματος, απεικονίζεται με μια δύναμη $t_i^{(n)} dS$ και μια μικροροπή $m_i^{(n)} dS$. Όπου $t_i^{(n)}$ είναι ο ελκυστής των τάσεων και $m_i^{(n)}$ είναι ο ελκυστής των τάσεων ζεύγους, Σχ.5.2. Για τους δύο τανυστές θα ισχύουν οι σχέσεις

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (5.3)$$

$$m_i^{(n)} = \mu_{ji} n_j \quad (5.4)$$

όπου σ_{ji} είναι ο τανυστής των τάσεων που όπως θα φανεί στα επόμενα παύει να είναι συμμετρικός, και μ_{ji} είναι ο τανυστής των τάσεων ζεύγους. Οι δύο τανυστές μπορούν να αναλυθούν στο συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος τους σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\sigma_{ji} = \sigma_{(ji)} + \sigma_{[ji]} \quad (5.5)$$

$$\mu_{ji} = \mu_{(ji)} + \mu_{[ji]} \quad (5.6)$$

Στις τελευταίες σχέσεις οι ποσότητες με τους δείκτες τους σε παρένθεση αναφέρονται στο συμμετρικό μέρος του τανυστή ενώ οι ποσότητες με τον δείκτη τους σε αγκύλη αναφέρονται στο αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή.

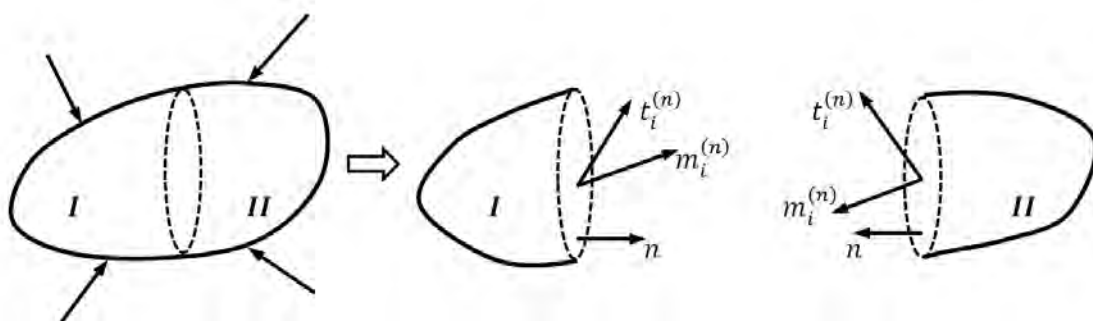
Θεωρούμε ένα τμήμα του υλικού το οποίο έχει όγκο V_a και εσωκλείεται από μια επιφάνεια S_a , π.χ. τμήμα **I** του Σχ.5.2. Υπό συνθήκες στατικής ισορροπίας θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_{S_a} t_i^{(n)} dS + \int_{V_a} F_i dV = 0 \quad (5.7)$$

$$\int_{S_a} [\varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)}] dS + \int_{V_a} [\varepsilon_{ijk} x_j F_k + C_i] dV = 0 \quad (5.8)$$

όπου $t_i^{(n)}$ είναι οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας, F_i είναι οι δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, $m_i^{(n)}$ είναι οι τάσεις ζεύγους ανά μονάδα επιφάνειας, C_i είναι οι τάσεις ζεύγους ανά μονάδα όγκου και ε_{ijk} είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi – Cività. Η σχέση (5.7) εκφράζει την ισορροπία των δυνάμεων ενώ η σχέση (5.8) την ισορροπία των τάσεων ζεύγους στο σώμα. Από την αντικατάσταση της σχέσης (5.3) στην σχέση (5.7) θα είναι

$$\int_{S_a} \sigma_{ji} n_j dS + \int_{V_a} F_i dV = 0 \quad (5.9)$$



Σχ 5.2. Ο τανυστής των τάσεων $t_i^{(n)}$ και ο τανυστής των διπολικών τάσεων $m_i^{(n)}$ που αναπτύσσονται σε μια ιδεατή τομή του υλικού σώματος.

Από το θεώρημα της απόκλισης είναι

$$\int_{S_a} \sigma_{ji} n_j dS = \int_{V_a} \sigma_{ji,j} dV \quad (5.10)$$

Συνεπώς από τις σχέσεις (5.9) και (5.10) προκύπτει η σχέση

$$\int_{V_a} (\sigma_{ji,j} + F_i) dV = 0 \quad (5.11)$$

δεδομένου ότι ο επιλεγμένος στοιχειώδης όγκος είναι τυχαίος η τελευταία σχέση οφείλει να ισχύει για κάθε τιμή του όγκου V_a , θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει η σχέση

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (5.12)$$

Η τελευταία σχέση είναι η γνωστή σχέση ισορροπίας, παρουσία μαζικών δυνάμεων, η οποία ισχύει και στην κλασσική θεωρία. Από την αντικατάσταση της σχέσης (5.4) στην σχέση (5.8), και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green – Gauss, προκύπτει

$$\int_{S_a} [\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ik} n_l + \mu_{ji} n_j] dS + \int_{V_a} [\varepsilon_{ijk} x_j F_k + C_i] dV = 0 \Rightarrow \int_{V_a} \left\{ [\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ik,l} + \varepsilon_{ijk} x_j F_k] + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + C_i \right\} dV = 0 \quad (5.13)$$

Η τελευταία σχέση οφείλει να ισχύει για κάθε στοιχειώδη όγκο dV του σώματος, συνεπώς θα πρέπει

$$\varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{ik,l} + F_k) + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + C_i = 0 \quad (5.14)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.12) και (5.14) οδηγεί στην σχέση

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + C_i = 0 \quad (5.15)$$

Η τελευταία σχέση καταδεικνύει ότι ο τανυστής των τάσεων δεν είναι πλέον συμμετρικός, δηλ. $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$, με αποτέλεσμα η αρχή του Cauchy (Cauchy 1st Postulate) να μην ισχύει πλέον. Θεωρώντας ότι ο τανυστής των τάσεων διπόλου είναι μηδενικός, $\mu_{ji} = 0$, και ότι οι τάσεις ζεύγους ανά μονάδα όγκου είναι αμελητέες, $C_i = 0$, τότε από την σχέση (5.15) προκύπτει η κλασσική περίπτωση όπου ο τανυστής των τάσεων ανακτά και πάλι την συμμετρία του. Στην κλασσική περίπτωση, όπου οι τάσεις ζεύγους είναι μηδενικές, οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος είναι έξι, όσες ακριβώς και οι ανεξάρτητες συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή των τάσεων, σ_{jk} . Η ισορροπία των δυνάμεων, όπως δίνεται από την σχέση (5.12), παρέχει τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις. Το έλλειμμα των τριών εξισώσεων καλύπτεται από τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις καταστατικές εξισώσεις του υλικού. Στην θεωρία των τάσεων ζεύγους, όπου η συμμετρία του τανυστή των τάσεων διαταράσσεται, οι άγνωστες παράμετροι του προβλήματος γίνονται δεκαοχτώ. Αυτές είναι οι εννέα, πλέον, συνιστώσες του τανυστή των τάσεων σ_{jk} και οι εννέα συνιστώσες του νεοεμφανιζόμενου τανυστή των τάσεων διπόλου, μ_{ji} . Οι σχέσεις (5.12) και (5.15) παρέχουν έξι εξισώσεις γεγονός που καταδεικνύει ένα έλλειμμα δώδεκα εξισώσεων οι οποίες πρέπει να αναζητηθούν στις καταστατικές εξισώσεις, στις συνοριακές συνθήκες, την αρχή των δυνατών έργων και σε τυχόν κινηματικές παραδοχές που μπορούν να γίνουν.

5.4.2. Η κινηματική ανάλυση του σώματος

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετηθεί η κινηματική συμπεριφορά του σώματος με την παραδοχή ότι οι παραμορφώσεις και οι στροφές είναι μικρές. Ορίζεται ένα ορθοκανονικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxyz$ και ένα διάνυσμα u_i το οποίο περιγράφει την μετατόπιση του σώματος. Επιπλέον, ορίζονται δύο γειτονικά σημεία P, Q εντός του σώματος τα οποία έχουν διανύσματα θέσης x_i και $x_i + dx$, αντίστοιχα, Σχ.5.3. Η σχετική μετατόπιση του σημείου Q ως προς το σημείο P θα δίνεται από την σχέση

$$du_i = u_{i,j} dx_j \quad (5.16)$$

όπου $u_{i,j}$ είναι η βαθμίδα του τανυστή της μετατόπισης στο σημείο P . Αυτός ο τανυστής μπορεί να αναλυθεί σε ένα συμμετρικό και ένα αντισυμμετρικό μέρος, ε_{ij} και ω_{ij} , αντίστοιχα, και θα είναι

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (5.17)$$

όπου

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.18)$$

$$\omega_{ij} = u_{[i,j]} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (5.19)$$

ε_{ij} είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων και ω_{ij} είναι ο τανυστής των στροφών. Όπως για κάθε αντισυμμετρικό τανυστή, έτσι και για τον τανυστή των στροφών ω_{ij} , υπάρχει πάντα ένα αντίστοιχο αξονικό διάνυσμα⁴, ω_i το οποίο θα δίνεται από την σχέση

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (5.20)$$

όπου ε_{ijk} είναι ο τελεστής Levi – Cività. Η τελευταία σχέση μπορεί να αντιστραφεί ώστε ο τανυστής των στροφών να εκφράζεται σε συνάρτηση με το διάνυσμα της στροφής, και θα είναι

$$\omega_{ji} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (5.21)$$

Για την μετάβαση από την σχέση (5.20) στη σχέση (5.21) χρησιμοποιήθηκε η αντισυμμετρία του τανυστή των στροφών, δηλ. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Η σχετική μετατόπιση du_i μπορεί να αναλυθεί σε δύο μέρη, ένα το οποίο οφείλεται στον τανυστή της παραμόρφωσης ε_{ij} και σε ένα το οποίο οφείλεται στον τανυστή της στροφής ω_{ij} , θα είναι δηλαδή

$$du_i = du_i^{(1)} + du_i^{(2)} \quad (5.22)$$

όπου

$$du_i^{(1)} = \varepsilon_{ij} dx_j \quad (5.23)$$

$$du_i^{(2)} = \omega_{ij} dx_j \quad (5.24)$$

Ο τανυστής των στροφών ω_{ji} εκφράζει την περιστροφή ενός στοιχειώδους τμήματος dx_i , και θεωρεί ότι το στοιχειώδες τμήμα δεν καμπυλώνεται και περιστρέφεται σαν απολύτως στερεό σώμα. Συνεπώς ο τανυστής των στροφών δεν συμμετέχει στην επιμήκυνση ή στην βράχυνση του στοιχειώδους τμήματος dx_i . Προκύπτει λοιπόν ότι ο συμμετρικός τανυστής των παρα-

⁴ dual vector.

μορφώσεων ε_{ij} είναι ο πιο κατάλληλος για την μέτρηση της παραμόρφωσης του σώματος και όχι η βαθμίδα του τανυστή της παραμόρφωσης $u_{i,j}$.

Στην θεωρία των τάσεων ζεύγους απαιτείται μια νέα ποσότητα η οποία θα μπορεί να περιγράψει ποσοτικά την τοπική καμπυλότητα του στοιχειώδους τμήματος dx_i . Είναι λογικό αυτή η νέα ποσότητα να συσχετίζεται με τον τανυστή των στροφών εφόσον η τοπική καμπυλότητα είναι λογικό να συσχετιστεί με μια τοπική στροφή. Η σχετική στροφή $d\omega_i$, μεταξύ δύο γειτονικών σημείων θα δίνεται από την σχέση

$$d\omega_i = \omega_{i,j} dx_j \quad (5.25)$$

όπου $\omega_{i,j}$ είναι η βαθμίδα του διανύσματος της περιστροφής σε ένα σημείο P .

Οι συνιστώσες $\omega_{1,1}, \omega_{2,2}, \omega_{3,3}$ αναπαριστούν τις γωνίες στροφής του στοιχειώδους τμήματος dx_i κατά μήκος των διευθύνσεων x_1, x_2, x_3 , αντίστοιχα. Με άλλα λόγια περιγράφουν την στρέψη του τμήματος dx_i στις τρεις διευθύνσεις. Οι συνιστώσες εκτός διαγωνίου αναπαριστούν τις καμπυλότητες του στοιχείου dx_i που βρίσκονται σε επίπεδα παράλληλα με τα επίπεδα του συστήματος συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, ο όρος $\omega_{3,1}$ εκφράζει την καμπυλότητα ενός στοιχείου dx_i που έχει την διεύθυνση του άξονα x_1 και βρίσκεται σε ένα επίπεδο που είναι παράλληλο με το επίπεδο $x_1 x_2$. Με την ίδια συλλογιστική, $\omega_{1,3}$ είναι η καμπυλότητα ενός στοιχείου dx_i το οποίο βρίσκεται στην διεύθυνση του άξονα x_3 και βρίσκεται σε επίπεδο που είναι παράλληλο με το επίπεδο $x_2 x_3$, Σχ.5.4. Είναι φανερό ότι ορισμένες συνιστώσες της βαθμίδας του διανύσματος της στροφής $\omega_{i,j}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μέτρηση της καμπυλότητας του στοιχειώδους τμήματος του σώματος.

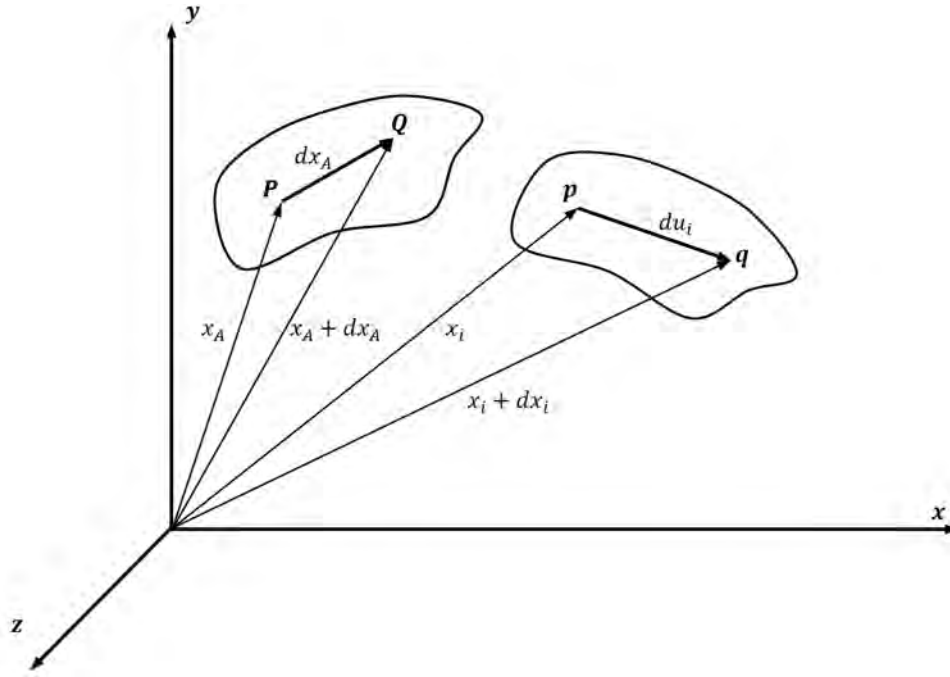
Οι όροι $\omega_{k,k}$ αναφέρονται στην στρέψη του στοιχείου dx_i γεγονός που καταδεικνύει ότι μόνο οι όροι $\omega_{i,j}$ θα συμμετέχουν στην καμπύλωσή του. Με απλά λόγια η καμπυλότητα θα περιγράφεται από έναν τανυστή ο οποίος θα εμπεριέχει μόνο το αντισυμμετρικό μέρος της βαθμίδας του διανύσματος της περιστροφής $\omega_{i,j}$. Αναλύοντας τον τανυστή $\omega_{i,j}$ στο συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του θα είναι

$$\omega_{i,j} = \chi_{ij} + \kappa_{ij} \quad (5.26)$$

όπου

$$\chi_{ij} = \omega_{(i,j)} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) \quad (5.27)$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (5.28)$$



Σχ 5.3. Η σχετική μετατόπιση δύο γειτονικών σημείων κατά την παραμόρφωση του σώματος

Ο τανυστής $\chi_{ij} = \omega_{(i,j)}$ αναφέρεται στο συμμετρικό μέρος του τανυστή των στροφών ενώ ο τανυστής $\kappa_{ij} = \omega_{[i,j]}$ αναφέρεται στο αντισυμμετρικό μέρος του. Από τις σχέσεις (5.25),(5.26) προκύπτει

$$d\omega_i = \chi_{ij} dx_j + \kappa_{ij} dx_j \quad (5.29)$$

Στην τοπική καμπυλότητα του στοιχείου dx_i θα συμμετέχουν εκείνοι οι όροι της στροφής οι οποίοι θα είναι κάθετοι σε αυτό. Πολλαπλασιάζοντας την (5.29) με dx_i και αθροίζοντας ως προς i , θα είναι

$$d\omega_i dx_i = \chi_{ij} dx_j dx_i + \kappa_{ij} dx_j dx_i \quad (5.30)$$

Από τους δύο όρους του δεξιού μέλους ο πρώτος αναφέρεται στο εσωτερικό γινόμενο δύο συμμετρικών τανυστών $\chi_{ij}, dx_j dx_i$ και δίνει μια τιμή. Ο δεύτερος όρος είναι μηδενικός όρος διότι το εσωτερικό γινόμενο ενός αντισυμμετρικού τανυστή, κ_{ij} , με έναν συμμετρικό τανυστή, $dx_j dx_i$, είναι πάντοτε μηδενικό γεγονός που αποδεικνύει την μεταξύ τους καθετότητα. Αποδεικνύεται ότι μόνο το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των στροφών κ_{ij} παίζει ρόλο στην τοπική καμπυλότητα του στοιχείου dx_i . το οποίο γράφεται

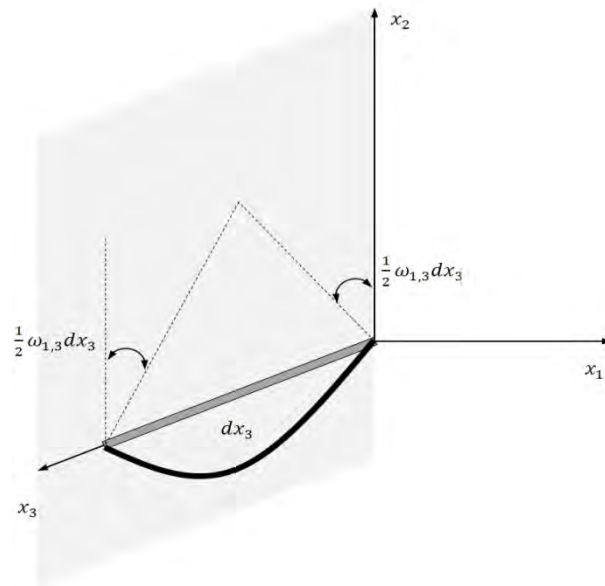
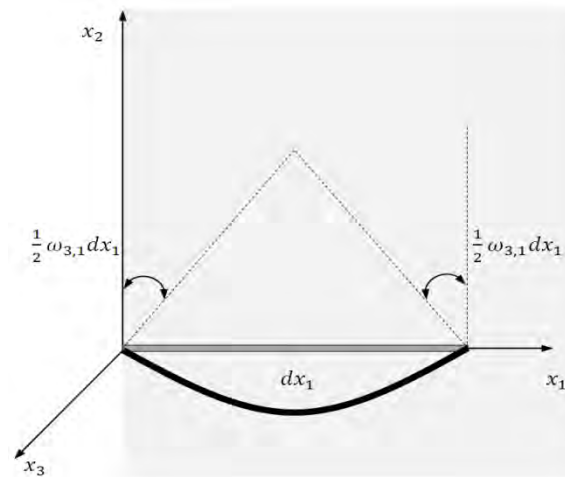
$$[\kappa_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ -\kappa_{12} & 0 & \kappa_{23} \\ -\kappa_{13} & -\kappa_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

όπου οι εκτός διαγωνίου όροι θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\kappa_{12} = -\kappa_{21} = \frac{1}{2}(\omega_{1,2} - \omega_{2,1}) \quad (5.32)$$

$$\kappa_{13} = -\kappa_{31} = \frac{1}{2}(\omega_{1,3} - \omega_{3,1}) \quad (5.33)$$

$$\kappa_{23} = -\kappa_{32} = \frac{1}{2}(\omega_{2,3} - \omega_{3,2}) \quad (5.34)$$



Σχ 5.4. Οι στροφές που συσχετίζονται με τις καμπυλότητες του στοιχειώδους τμήματος dx_i .

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι οι καμπυλότητες $\kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}$ είναι οι μέσες τιμές των καμπυλοτήτων των επιπέδων που είναι παράλληλα στα επίπεδα x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 , αντίστοιχα. Όπως στην περίπτωση του τανυστή των στροφών ορίστηκε το διάνυσμα της στροφής, (βλ. σχέσεις (5.20), (5.21)) κατά αντιστοιχία ορίζεται και το διάνυσμα της καμπυλότητας κ_i , με τη βοήθεια του τανυστή των καμπυλοτήτων κ_{ij} , μέσω της σχέσης

$$\kappa_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \kappa_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{j,k} \quad (5.35)$$

Λόγω του ότι ο τανυστής κ_{ij} είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή ισχύει $\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$, η παραπάνω σχέση μπορεί να αντιστραφεί και να δώσει τον τανυστή των καμπυλοτήτων σε συνάρτηση με το διάνυσμα της καμπυλότητας, δηλαδή

$$\kappa_{ji} = \varepsilon_{ijk} \kappa_k \quad (5.36)$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$\kappa_1 = -\kappa_{23}, \quad \kappa_2 = \kappa_{13}, \quad \kappa_3 = -\kappa_{12} \quad (5.37)$$

Από την σχέση (5.35) μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι το διάνυσμα της καμπυλότητας είναι η στροφή του διανύσματος της στροφής, το οποίο σε διανυσματική μορφή γράφεται

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla \times \omega \quad (5.38)$$

Όλα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα σχετικά με τον τανυστή των τροπών ε_{ij} και το διάνυσμα της καμπυλότητας κ_i , στηρίζονται στην υπόθεση ότι αυτές οι ποσότητες είναι απειροστές γεγονός που σημαίνει ότι οφείλουν να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|\varepsilon_{ij}| \ll 1 \quad (5.39)$$

$$|\kappa_i| \ll \frac{1}{\ell_s} \quad (5.40)$$

όπου ℓ_s είναι το χαρακτηριστικό μήκος του σώματος. Αυτές οι παραδοχές αποτελούν την βάση για την ανάπτυξη της γραμμικής μικροπολικής θεωρίας με μικρές παραμορφώσεις και μικρές καμπυλότητες.

5.4.3. Η αρχή των δυνατών έργων

Για ακόμη μια φορά θεωρούμε ένα συνεχές υλικό σώμα το οποίο καταλαμβάνει όγκο V και οριοθετείται από μια κλειστή επιφάνεια S . Οι εξισώσεις ισορροπίας του σώματος δίνονται από τις σχέσεις (5.12) και (5.15) της δεύτερης παραγράφου. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση

ισορροπίας (5.12) με μια δυνατή μετατόπιση δu_i και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο V του υλικού θα είναι

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + F_i) \delta u_i dV = 0 \quad (5.41)$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\sigma_{ji,j} \delta u_i = (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta u_{i,j} \quad (5.42)$$

Η αντικατάσταση της τελευταίας στην σχέση (5.41) θα δώσει

$$\int_V [(\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta u_{i,j} + F_i \delta u_i] dV = 0 \quad (5.43)$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης στην τελευταία θα δώσει

$$\int_S \sigma_{ji} n_j \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV + \int_V F_i \delta u_i dV = 0 \Rightarrow \int_S t_i^{(n)} \delta u_i dS + \int_V F_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV \quad (5.44)$$

Βάση της ίδιας συλλογιστικής και πολλαπλασιάζοντας την σχέση (5.15) με μια δυνατή στροφή $\delta \omega_i$, προκύπτει η σχέση

$$\int_V (\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + C_i) \delta \omega_i dV = 0 \quad (5.45)$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\mu_{ji,j} \delta \omega_i + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \delta \omega_i = (\mu_{ji} \delta \omega_i)_{,j} - \mu_{ji} \delta \omega_{i,j} - \sigma_{jk} \delta \omega_{jk} \quad (5.46)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.45),(5.46) θα δώσει

$$\int_V \mu_{ji} \delta \omega_{i,j} dV - \int_V \sigma_{ji} \delta \omega_{ij} dV = \int_S m_i^{(n)} \delta \omega_i dS + \int_V C_i \delta \omega_i dV \quad (5.47)$$

Από την πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (5.44) και (5.47) θα προκύψει

$$\int_V \mu_{ji} \delta \omega_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ji} (\delta u_{i,j} - \delta \omega_{ij}) dV = \int_S t_i^{(n)} \delta u_i dS + \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S m_i^{(n)} \delta \omega_i dS + \int_V C_i \delta \omega_i dV \quad (5.48)$$

Βάση της σχέσης (5.17) θα είναι

$$\delta \varepsilon_{ij} = \delta u_{i,j} - \delta \omega_{ij} \quad (5.49)$$

Οπότε η σχέση (5.48) τελικά διαμορφώνεται ως εξής

$$\int_V \mu_{ji} \delta \omega_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_S t_i^{(n)} \delta u_i dS + \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S m_i^{(n)} \delta \omega_i dS + \int_V C_i \delta \omega_i dV \quad (5.50)$$

Εφόσον ο τανυστής $\delta\epsilon_{ij}$ είναι συμμετρικός θα είναι

$$\sigma_{ji}\delta\epsilon_{ij} = \sigma_{(ij)}\delta\epsilon_{ij} \quad (5.51)$$

Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι μόνο το συμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων μπορεί να λάβει μέρος στην αρχή των δυνατών έργων. Παρατηρώντας την σχέση (5.50) διαπιστώνεται ότι στη μικροπολική θεωρία δεν υπεισέρχονται παράγωγοι της τροπής (strain gradients). Επιπλέον, διαπιστώνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σώματος μπορεί να είναι κινηματικές (u_i, ω_i) ή μηχανικές $(t_i^{(n)}, m_i^{(n)})$. Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις οι άγνωστοι φαίνεται να είναι έξι. Στην πραγματικότητα, οι συνοριακές συνθήκες είναι πέντε, διότι εάν υποθεθεί ότι είναι γνωστές οι μετατοπίσεις στην επιφάνεια τότε μόνο οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες της στροφής ω_i μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα, η κάθετη συνιστώσα της στροφής, $\omega^{(nn)}$, στην οποία οφείλεται η στρέψη της εξωτερικής επιφάνειας, θα δίνεται από την σχέση

$$\omega_i^{(n)} = \omega^{(nn)}n_i \quad (5.52)$$

$$\omega^{(nn)} = \omega_i n_i \quad (5.53)$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα $\omega_i^{(ns)}$ του διανύσματος της στροφής θα δίνεται από την σχέση

$$\omega_i^{(ns)} = \omega_i - \omega^{(nn)}n_i = \omega_i - \omega_k n_k n_i \quad (5.54)$$

Συνεπώς, οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος, όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, είναι πέντε. Είναι οι τρεις συνιστώσες της μετατόπισης u_i και οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες του διανύσματος της στροφής ω_i . Κατά αντιστοιχία ορίζονται και οι συνιστώσες του τανυστή των μικροροπών $m_i^{(n)}$ στην επιφάνεια του στοιχείου. Υποθέτοντας ότι $m^{(nn)}$ και $m^{(ns)}$ είναι η κάθετη και η εφαπτομενική συνιστώσα, αντίστοιχα, θα είναι

$$m^{(nn)} = m_k^{(n)}n_k = \mu_{ji}n_i n_j \quad (5.55)$$

$$m_i^{(ns)} = \left(m_i^{(n)} - m^{(nn)}n_i \right) \quad (5.56)$$

Η κάθετη συνιστώσα, $m^{(nn)}$, προκαλεί στρεπτικές ροπές στην επιφάνεια ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα, $m^{(ns)}$, προκαλεί καμπτικές ροπές στην εξωτερική επιφάνεια. Στην μικροπολική θεωρία έχουμε δεχτεί ότι οι πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας που εισάγονται οφείλονται στο ζεύγος των τάσεων που αναπτύσσεται στην διεπιφάνεια των υλικών σωματιδίων. Το ζεύγος αυτό δημιουργεί μόνο καμπτικές ροπές και όχι στρεπτικές συνεπώς για την κάθετη συνιστώσα του ελκυστή των μικροροπών στο σύνορο θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$m^{(nn)} = m_k^{(n)}n_k = \mu_{ji}n_i n_j = 0 \quad (5.57)$$

Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι συνοριακές συνθήκες της μικροπολικής θεωρίας εκφράζονται από τις σχέσεις (5.3) και (5.4), κάτι τέτοιο όμως θα ήταν λάθος διότι αυτές οι δύο εξισώσεις υποδηλώνουν έξι συνοριακές συνθήκες, τρεις από τον ελκυστή των τάσεων και τρεις από τον ελκυστή των μικροροπών. Οι πραγματικές γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι πέντε, τρεις από τις μετατοπίσεις και δύο από τις στροφές. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (5.19) και (5.20) το διάνυσμα των στροφών δεν είναι ανεξάρτητο από τις μετατοπίσεις στην επιφάνεια του σώματος, συνεπώς η κάθετη συνιστώσα της στροφής μπορεί να προσδιοριστεί μέσω των εφαπτομενικών συνιστωσών του διανύσματος της στροφής στην επιφάνεια του σώματος. Ο τανυστής των μικροροπών είναι αντισυμμετρικός, δηλ.

$$\mu_{ji} = -\mu_{ij} \quad (5.58)$$

Από τη στιγμή που ο τανυστής των μικροροπών είναι αντισυμμετρικός σε αναλογία με τον τανυστή των καμπυλοτήτων που αποτελεί την ενεργειακά συζυγή ποσότητά του θα είναι

$$[\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ -\mu_{12} & 0 & \mu_{23} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Συνάγεται λοιπόν το συμπέρασμα ότι ο τανυστής των μικροροπών μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα διάνυσμα στην διεπιφάνεια των υλικών σωματιδίων. Το διάνυσμα των μικροροπών συνδέεται με τον τανυστή των μικροροπών με την ακόλουθη σχέση

$$\mu_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{jk} \quad (5.60)$$

ή αντίστροφα

$$\mu_{ji} = \varepsilon_{ijk} \mu_k \quad (5.61)$$

Γενικά, για τον τανυστή των μικροροπών θα ισχύει η διανυσματική σχέση

$$m_i^{(n)} = (n \times \mu)_i \quad (5.62)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου οι μαζικές μικροπολικές τάσεις είναι μηδενικές, δηλ $C_i = 0$, τότε ο συνδυασμός των σχέσεων (5.15) και (5.61) θα δώσει

$$\varepsilon_{ijk} (\mu_{k,j} + \sigma_{jk}) = 0 \quad (5.63)$$

Δεδομένου ότι ο τανυστής της εναλλαγής είναι αντισυμμετρικός από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι ο τανυστής $(\mu_{k,j} + \sigma_{jk})$ οφείλει να είναι συμμετρικός που σημαίνει ότι το αντισυμμετρικό μέρος του είναι μηδέν, δηλ.

$$\sigma_{[ji]} = -\mu_{[i,j]} = -\frac{1}{2} (\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) \quad (5.64)$$

Η τελευταία σχέση παρέχει το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων σε συνάρτηση με το αποκλίνων μέρος του τανυστή των μικροροπών. Μέχρι στιγμής έχει δειχθεί ότι στην μι-

κροπολική θεωρία τα δύο μεγέθη που συμμετέχουν ενεργά είναι το συμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων, $\sigma_{(ji)}$, και το αποκλίνων μέρος (deviatoric part) του τανυστή των μικρο-ροπών, $\mu_{(ji)}$. Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες που ενεργούν στο πρόβλημα είναι εννέα. Η συνθήκη ισορροπίας (5.12) παρέχει τρεις εξισώσεις με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα έλλειμμα έξι εξισώσεων. Το έλλειμμα αυτό καλύπτεται μέσα από τον καταστατικό νόμο του υλικού.

5.4.4. Καταστατικές εξισώσεις

Ένα ελαστικό μέσο, το οποίο θεωρείται ότι υπόκειται σε μικρές παραμορφώσεις, αποθηκεύει στο εσωτερικό του μια ελαστική ενέργεια της οποίας η πυκνότητα θα δίνεται από μια συνάρτηση W . Η στοιχειώδης μεταβολή της πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας δW , για οποιαδήποτε τυχαία δυνατή παραμόρφωση γύρω από την θέση ισορροπίας, θα δίνεται από την σχέση

$$\delta W = \sigma_{(ji)} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ji} \delta \kappa_{ij} = \sigma_{(ji)} \delta \varepsilon_{ij} - 2\mu_i \delta \kappa_i = \sigma_{(ji)} \delta u_{i,j} - 2\mu_i \delta \kappa_i \quad (5.65)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το συμπέρασμα ότι η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας W είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση του τανυστή των τροπών ε_{ij} και του διανύσματος της μέσης καμπυλότητας κ_i , δηλ.

$$W = W(\varepsilon_{ij}, \kappa_i) \quad (5.66)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (5.66), προκύπτει ότι

$$\sigma_{(ji)} = \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \quad (5.67)$$

$$2\mu_i = -\frac{\partial W}{\partial \kappa_i} \quad (5.68)$$

Ισχύει όμως ότι

$$\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial u_{i,j}} \quad (5.69)$$

Όμως

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (5.70)$$

Από την τελευταία προκύπτει

$$\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial u_{i,j}} + \frac{\partial u_{l,k}}{\partial u_{i,j}} \right) = \frac{1}{2} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj}) \quad (5.71)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (5.69), (5.71) προκύπτει

$$\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta_{ki} \delta_{lj} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta_{li} \delta_{kj} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \quad (5.72)$$

Από τον συνδυασμό των (5.67),(5.72) προκύπτει

$$\sigma_{(ji)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \quad (5.73)$$

Εάν η ενέργεια επιλεγεί έτσι ώστε

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \quad (5.74)$$

Τότε θα είναι

$$\sigma_{(ji)} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \quad (5.75)$$

Από την σχέση (5.64) έχει βρεθεί

$$\mu_{[i,j]} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_i} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_j} \right)_{,i} \right] \quad (5.76)$$

Συνεπώς το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων θα δίνεται από την σχέση

$$\sigma_{[ij]} = -\mu_{[i,j]} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_i} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_j} \right)_{,i} \right] \quad (5.77)$$

Τελικά οι καταστατικές εξισώσεις θα είναι

$$\sigma_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_i} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_j} \right)_{,i} \right] \quad (5.78)$$

$$\mu_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \kappa_i} \quad (5.79)$$

5.5. Διδιάστατη γραμμική ισότροπη ελαστικότητα μικρών παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις ισορροπίας στην περίπτωση της διδιάστατης ελαστικότητας (απουσία μαζικών δυνάμεων) και των μικρών ελαστικών παραμορφώσεων θα είναι (βλ. Παράρτημα Α)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (5.82)$$

Από την εξίσωση (5.82) φαίνεται ξεκάθαρα ότι μόνο ο αποκλίνων τανυστής, μ_{ij} των διπολικών τάσεων συμμετέχει στην εξίσωση ισορροπίας. Το υδροστατικό κομμάτι $\frac{1}{3}\mu_{ii}$ του τανυστή των διπολικών τάσεων δεν εμφανίζεται στην εξίσωση και παραμένει απροσδιόριστο.

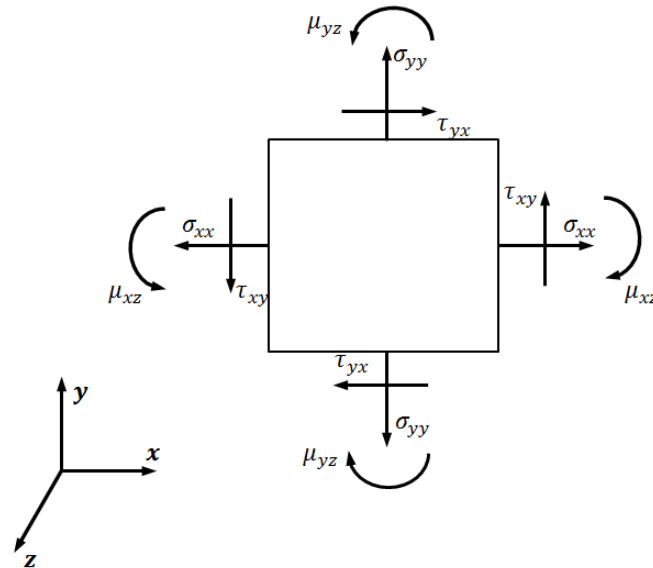
Από την θεωρία της ελαστικότητας και το γενικευμένο νόμο του Hooke για την περίπτωση της επίπεδης έντασης θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (5.83)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \quad (5.84)$$

Η σχέση τροπών και ορθών παραμορφώσεων θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.85)$$



Σχ 5.5. Ο τανυστής των τάσεων και ο τανυστής των τάσεων διπόλου στο εσωτερικό του σώματος

Η σχέση τροπών και διατμητικών παραμορφώσεων θα είναι

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\tau_s = \frac{(1+\nu)}{E}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.86)$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης το οποίο δίνεται από την σχέση

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.87)$$

Οι διατμητικές τάσεις τ_{xy}, τ_{yx} αναλύονται σε δύο μέρη, το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό. Όπως φαίνεται και στο Σχ.5.6, το συμμετρικό μέρος των διατμητικών τάσεων (τ_s) είναι υπεύθυνο για την διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} , ενώ στο αντισυμμετρικό μέρος (τ_A), οφείλεται η τοπική στροφή του σώματος ω_z .

$$\tau_s = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2}, \quad \tau_A = \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{2} \quad (5.88)$$

Η διασύνδεση του συμμετρικού μέρους των διατμητικών παραμορφώσεων, γ_{xy} , με τις μετατοπίσεις u, v γίνεται μέσω της σχέσης

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.89)$$

Το αντισυμμετρικό μέρος των διατμητικών τάσεων προκαλεί μια τοπική στροφή, ω_z η οποία θα είναι

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_{xz} = \omega_{yz} \quad (5.90)$$

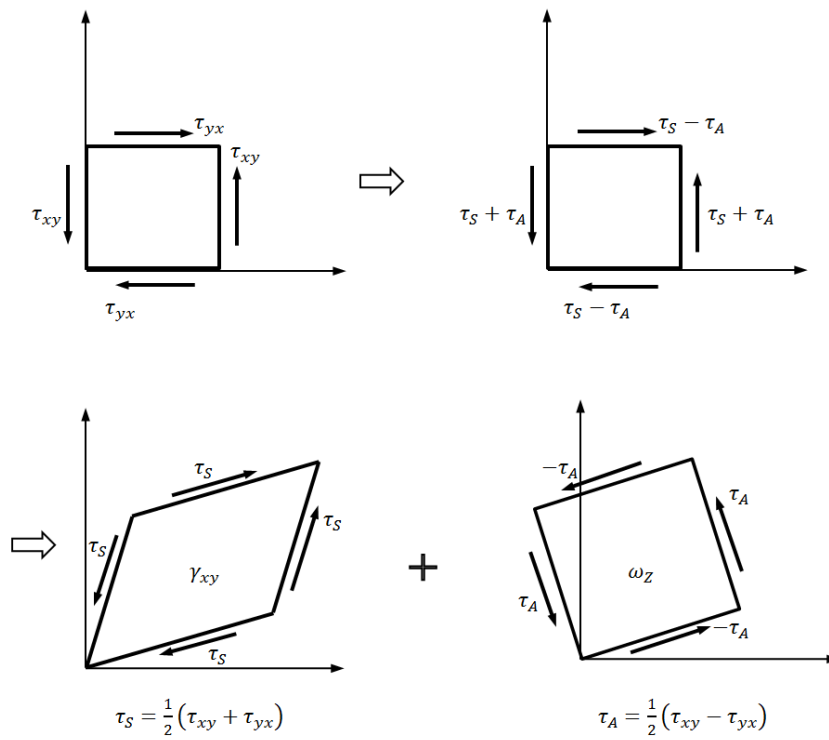
Αυτή η στροφή εξισορροπείται από το ζεύγος των διπολικών ροπών σύμφωνα με την σχέση (5.82). Οι διπολικές ροπές προκαλούν καμπυλότητες κ_{xz}, κ_{yz} οι οποίες συνδέονται με τις στροφές σύμφωνα με την σχέση

$$\kappa_{xz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad \kappa_{yz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (5.91)$$

Στην περίπτωση ισότροπου ομογενούς σώματος οι καμπυλότητες είναι ανάλογες με τις τάσεις διπλού, δηλ

$$\mu_{xz} = 4B\kappa_{xz} \Rightarrow \kappa_{xz} = \frac{1}{4B}\mu_{xz}, \quad \mu_{yz} = 4B\kappa_{yz} \Rightarrow \kappa_{yz} = \frac{1}{4B}\mu_{yz} \quad (5.92)$$

όπου B είναι το μέτρο καμπυλότητας ή κάμψης και ο συντελεστής 4 εισάγεται για διευκόλυνση. Η τάση διπλού έχει διαστάσεις ροπής ανα τετραγωνική επιφάνεια ή δύναμης ανα μήκος. Η καμπυλότητα αποτελεί συζυγές μέγεθος του μήκους, συνεπώς το B έχει διαστάσεις δύναμης.



Σχ 5.6. Η διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} και η στροφή ω_z του στερεού σώματος που προκαλούνται από το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό μέρος των διατμητικών τάσεων, αντίστοιχα. (Mindlin.1963)

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.86),(5.90) δίνει την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (5.93)$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις της (5.92) την μια ως προς y και την άλλη ως προς x , είναι

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{xz} &= \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_{xz}}{\partial y \partial x} \\ \kappa_{yz} &= \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega_{yz}}{\partial y \partial x} \end{aligned} \right\} \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} \quad (5.94)$$

Από τον συνδυασμό των (5.86),(5.90),(5.91) προκύπτει

$$\frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad (5.96)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι οι συνιστώσες των καμπυλοτήτων εξαρτώνται από την παράγωγο της τροπής με γραμμική σχέση. Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων με την (5.94) δίνει μια σχέση συμβιβαστού μεταξύ των καμπυλοτήτων και των τροπών

$$\kappa_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}, \quad \kappa_{yz} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad (5.97)$$

Οι σχέσεις που συνδέουν τις κλασσικές τάσεις και τις τάσεις διπόλου μπορεί να εξαχθούν από το συνδυασμό των σχέσεων (5.89), (5.90), (5.93), (5.94) και θα είναι (Παράρτημα Α)

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (5.98)$$

$$\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial x} \quad (5.99)$$

$$\mu_{xz} = \ell^2 \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - \frac{2\ell^2}{(1 + \nu)} \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad (5.100)$$

$$\mu_{yz} = \frac{2\ell^2}{(1 + \nu)} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] - \ell^2 \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (5.101)$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.102)$$

$$\ell^2 = \frac{2(1 + \nu)B}{E} = \frac{B}{G} \quad (5.103)$$

Η σχέση (5.98) αποτελεί την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων με την χρήση των τάσεων, στην βιβλιογραφία αναφέρονται σαν εξίσωση Beltrami – Mitchell. Από την τελευταία προκύπτει ότι το χαρακτηριστικό μήκος ℓ το οποίο αποτελεί μια σταθερά του υλικού, είναι ένα μήκος ίσο με την τετραγωνική ρίζα του λόγου των μέτρων ελαστικότητας λόγω κάμψης (καμπυλότητας) προς το μέτρο ελαστικότητας λόγω διάτμησης. Από τις σχέσεις (5.100), (5.101) προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παράγωγος της τάσης (stress gradient) τόσο μεγαλύτερη είναι και η διπολική ροπή. Επίσης, θέτοντας $\ell = 0$, είναι φανερό ότι το υλικό δεν επιδεικνύει καμία αντίσταση στην τοπική καμπυλότητα.

Η σχέση (5.80) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας τασικής συνάρτησης $\varphi_1(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (5.104)$$

Η σχέση (5.81) υποδηλώνει με την ίδια λογική ότι υπάρχει μια άλλη τασική συνάρτηση $\varphi_2(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (5.105)$$

Και από την (5.82) προκύπτει ότι υπάρχει μια τασική συνάρτηση $\psi(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\mu_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mu_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.106)$$

όπου ψ είναι μια νέα συνάρτηση των x, y . Η αντικατάσταση των (5.104), (5.105) και (5.106) στην σχέση (5.82) θα δώσει (βλ. Παράρτημα Α)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 \right) = 0 \quad (5.107)$$

Η τελευταία αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας συνάρτησης φ τέτοιας ώστε

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5.108)$$

Από τις τελευταίες δύο σχέσεις προκύπτουν οι ορθές και διατμητικές τάσεις καθώς και οι διπολικές ροπές σε συνάρτηση με τις δύο τασικές συναρτήσεις (φ, ψ)

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (5.109)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.110)$$

$$\mu_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mu_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.111)$$

Μέχρι εδώ αυτό που έχει επιτευχθεί είναι η επίλυση του προβλήματος, η εύρεση δηλαδή των ορθών και διατμητικών τάσεων καθώς και των διπολικών δυνάμεων, με την χρήση δύο τασικών συναρτήσεων φ, ψ . Το ερώτημα που εγείρεται σε αυτό το σημείο είναι εάν αυτές οι συναρτήσεις μπορεί να είναι εντελώς αυθαίρετες ή οφείλουν να υπακούουν σε κάποιους περιορισμούς. Η απάντηση είναι ότι αυτές οι συναρτήσεις οφείλουν να υπακούουν στις συνθήκες συμβιβαστού του προβλήματος όπως εκφράζονται με τις σχέσεις (5.98), (5.100), (5.101).

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (5.109), (5.110), (5.111) στις σχέσεις (5.100), (5.101) προκύπτουν οι σχέσεις στις οποίες οφείλουν να υπακούουν οι συνεχείς συναρτήσεις $\varphi(x, y)$ και $\psi(x, y)$ (βλ. Παράρτημα Α). Αυτές είναι

$$-\frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \nabla^4 \varphi = 0 \quad \stackrel{\ell \neq 0, \nu \neq -1}{\Rightarrow} \nabla^4 \varphi = 0 \quad (5.112)$$

$$\nabla^2 \psi - \ell^2 \nabla^4 \psi = 0 \quad (5.113)$$

Από την σχέση (5.112) φαίνεται ότι η τασική συνάρτηση φ ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση υπό προϋποθέσεις. Στην περίπτωση που η τιμή του εσωτερικού μήκους λάβει πολύ μικρές

τιμές ($\ell \rightarrow 0$), η τασική συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιεί την διαρμονική καθώς η τιμή $\ell=0$ ικανοποιεί την (5.113). Εάν ταυτόχρονα, με την πολύ μικρή τιμή του ℓ , ($\ell \rightarrow 0$), η τιμή του λόγου του Poisson γίνει -1 , η απροσδιοριστία στην σχέση (5.112) γίνεται $0/0$ και τότε η τασική συνάρτηση ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση. Γενικά όμως το συμπέρασμα ότι η τασική συνάρτηση ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση, ως και οφείλει, δεν συνάγεται από την σχέση (5.113). Αυτό δείχνει ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση η τάση δεν είναι και ο καλύτερος τρόπος για να εκφραστεί ο καταστατικός νόμος του υλικού. Για να επιστρέψει κανείς στην κλασσική θεωρία δεν είναι εύκολο μιας και η επίδραση τόσο του εσωτερικού μήκους όσο και του λόγου του Poisson είναι ισχυρή. Το πρόβλημα δείχνει ότι η τάση δεν αποτελεί κριτήριο για την αντοχή του υλικού, γεγονός που οδηγεί στην χρήση των παραμορφώσεων (και κατ'επέκταση των μετατοπίσεων) για τον χαρακτηρισμό της μηχανικής συμπεριφοράς του υλικού. Συνεπώς, οι εξισώσεις ισορροπίας (5.80), (5.81), (5.82) μπορούν να εκφραστούν και σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων, στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται και σαν εξισώσεις Navier – Stokes. Από αυτά που θα φανεί και στα επόμενα οι άγνωστοι του προβλήματος πλέον είναι τέσσερις, οι δύο συνιστώσες της μετατόπισης u, v και οι δύο συνιστώσες της διπολικής ροπής μ_{xz}, μ_{yz} . Οι εξισώσεις ισορροπίας σε συνάρτηση με τις μετατοπίσεις, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, θα έχουν ως εξής

$$\nabla^2 u - \ell^2 \nabla^4 u + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (5.114)$$

$$\nabla^2 v - \ell^2 \nabla^4 v + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (5.115)$$

Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης οι εξισώσεις ισορροπίας σε συνάρτηση με τις μετατοπίσεις διαμορφώνονται ως εξής

$$\nabla^2 u - \ell^2 \nabla^4 u + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(1-2\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (5.116)$$

$$\nabla^2 v - \ell^2 \nabla^4 v + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(1-2\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (5.117)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (5.114), (5.116) και (5.115), (5.117) προκύπτει ότι το πρόβλημα της επίπεδης έντασης γίνεται ισοδύναμο με το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης στην ειδική περίπτωση όπου

$$\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} = \frac{1}{(1-2\nu)} \Rightarrow 1-\nu-2\nu^2+\nu-1=0 \Rightarrow -2\nu^2=0 \Rightarrow \nu=0 \quad (5.118)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι από τις σχέσεις (5.114), (5.115), (5.116), (5.117) προκύπτει ότι στην περίπτωση όπου το εσωτερικό μήκος είναι αμελητέο, $\ell \rightarrow 0$, που σημαίνει ότι η μικροδομή δεν παίζει σπουδαίο ρόλο στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού, οι σχέσεις αυτές ανάγονται στις εξισώσεις Navier της κλασσικής θεωρίας, απουσία μαζικών δυνάμεων.

Κλασική θεωρία επίπεδη ένταση	$G\nabla^2 u + (\lambda^* + G)\frac{\partial e^*}{\partial x} = 0$	(5.119)
	$G\nabla^2 v + (\lambda^* + G)\frac{\partial e^*}{\partial y} = 0$	(5.120)
Κλασική θεωρία επίπεδη παραμόρφωση	$G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} = 0$	(5.121)
	$G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} = 0$	(5.122)

όπου

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.123)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad e^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \Rightarrow e^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e \quad (5.124)$$

5.5.1. Οι συνιστώσες της μετατόπισης είναι $u = u(x)$ και $v = v(x)$.

Σε αυτή την παράγραφο θα εξεταστεί η ειδική περίπτωση όπου και οι δύο μετατοπίσεις u, v θα μεταβάλλονται μονοδιάστατα κατά την έννοια της διεύθυνσης x . Συνεπώς θα ισχύει

$$u = u(x) \quad (5.125)$$

$$v = v(x) \quad (5.126)$$

Όλες οι παράγωγοι κατά την διεύθυνση y θα μηδενίζονται γεγονός που σημαίνει ότι

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0 \quad (5.127)$$

Για τις ορθές παραμορφώσεις θα ισχύει

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.128)$$

Για τις διατμητικές παραμορφώσεις θα ισχύει

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.129)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (5.80) - (5.82) εκφυλλίζονται μέσω της (5.127) στις παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (5.130)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (5.131)$$

$$\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (5.132)$$

Το αντισυμμετρικό μέρος των τάσεων, στο οποίο οφείλεται η διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} , θα είναι

$$\tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow \tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.133)$$

Από την πρόσθεση των σχέσεων (5.132), (5.133) προκύπτει

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} \Rightarrow \tau_{xy} = G \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} \quad (5.134)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς x , και λαμβάνοντας υπόψη και την (5.131), προκύπτει ότι

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} = 0 \quad (5.135)$$

Δεδομένου ότι

$$\mu_{xz} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Rightarrow \mu_{xz} = 4B \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} = 2B \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (5.136)$$

Η εξίσωση (5.135) παίρνει την μορφή

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \Rightarrow G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - G \ell^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \ell^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0} \quad (5.137)$$

Η ορθή τάση σ_{xx} , στην περίπτωση της επίπεδης έντασης θα ισούται με (βλ. Appendix B)

$$\sigma_{xx} = 2G \varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* \quad (5.138)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (5.130) και δεδομένου ότι $e^* = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ θα είναι

$$2G \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial e^*}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} [\lambda^* + 2G] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (5.139)$$

Στο τελευταίο βήμα εξαγωγής της (5.139) θεωρήθηκε ότι $\lambda^* + 2G \neq 0$, διότι είναι

$$\lambda^* + 2G = \frac{\nu E}{1-\nu^2} + \frac{E}{(1+\nu)} = \frac{\nu E + E - \nu E}{1-\nu^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \neq 0, \quad \text{εάν } \nu \neq -1 \quad (5.140)$$

Οι δύο εξισώσεις (5.137),(5.139) αποτελούν τις εξισώσεις που δίνουν λύση στο πρόβλημα. Συγκεκριμένα, από την (5.139) θα είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int 0 dx \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = c_1 \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int c_1 dx \Rightarrow \boxed{u = c_1 x + c_2} \quad (5.141)$$

Από την (5.137), κάνοντας αντικατάσταση μεταβλητής

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{bx}, \quad b \in \mathbb{R} \quad (5.142)$$

θα είναι

$$e^{bx} - \ell^2 b^2 e^{bx} = 0 \Rightarrow e^{bx} (1 - \ell^2 b^2) = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{\ell^2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\ell} \quad (5.143)$$

$$\bullet b = +\frac{1}{\ell}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{\ell}} \Rightarrow \int \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int e^{\frac{x}{\ell}} dx \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \ell e^{\frac{x}{\ell}} + c_3 \Rightarrow \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \ell \int e^{\frac{x}{\ell}} dx + c_3 x \Rightarrow \boxed{v = c_3 \ell^2 e^{\frac{x}{\ell}} + c_4 x + c_5} \quad (5.144)$$

$$\bullet b = -\frac{1}{\ell}$$

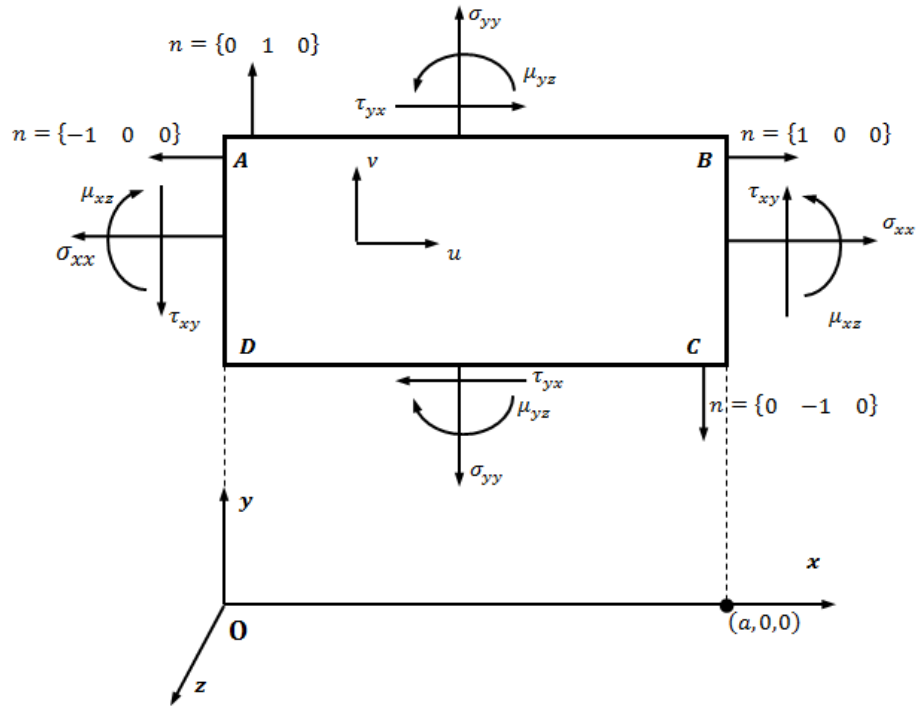
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-\frac{x}{\ell}} \Rightarrow \int \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int e^{-\frac{x}{\ell}} dx \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\ell e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 \Rightarrow \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = -\ell \int e^{-\frac{x}{\ell}} dx + c_6 x \Rightarrow \boxed{v = c_5 \ell^2 e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 x + c_7} \quad (5.145)$$

Από τις σχέσεις (5.144),(5.145) μπορεί να θεωρηθεί ότι σαν μια λύση της μετατόπισης v μπορεί να θεωρηθεί η συνάρτηση

$$v(x) = c_3 \ell^2 e^{\frac{x}{\ell}} + c_4 \ell^2 e^{-\frac{x}{\ell}} + c_5 x + c_6 \quad (5.146)$$

Η συνάρτηση της μετατόπισης η οποία αποτελεί λύση του προβλήματος δίνεται από την σχέση (5.141) σε συνδυασμό με την σχέση (5.146). Οι άγνωστες σταθερές προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Από την σχέση της κατακόρυφης μετατόπισης $v(x)$ όπως αυτή δίνεται από την σχέση (5.146) είναι φανερό ότι όταν το εσωτερικό μήκος της μικροδομής λαμβάνει μικρές τιμές, δηλ. $\ell \rightarrow 0$, η μετατόπιση συγκλίνει στην κλασική λύση $v(x) = c_5 x + c_6$. Για τους ελκυστές των τάσεων οι συνοριακές συνθήκες θα είναι

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \Rightarrow \begin{cases} T_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y \\ T_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{cases} \quad (5.147)$$



Σχ 5.7. Οι συνοριακές συνθήκες σε ένα στοιχειώδες παραλληλόγραμμο

Ενώ για τους ελκυστές των μικροπολικών τάσεων οι συνοριακές συνθήκες θα είναι

$$M_i = \mu_{ji} n_j \Rightarrow M_z = \mu_{xz} n_x + \mu_{yz} n_y + \mu_{zz} n_z \Rightarrow M_z = \mu_{xz} n_x + \mu_{yz} n_y \quad (5.148)$$

	n_x	n_y	t_x	t_y	M_z
AB	0	1	τ_{yx}	σ_{yy}	μ_{yz}
BC	1	0	σ_{xx}	τ_{xy}	μ_{xz}
CD	0	-1	$-\tau_{yx}$	$-\sigma_{yy}$	$-\mu_{yz}$
DA	-1	0	$-\sigma_{xx}$	$-\tau_{xy}$	$-\mu_{xz}$

Πλευρά DA ($x=0$)

$$\bullet \tau_{xy}|_{x=0} = 0$$

$$\begin{aligned} G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} - G \ell^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=0} &= 0 \Rightarrow G \left[c_3 \ell e^{\frac{x}{\ell}} - c_4 \ell e^{-\frac{x}{\ell}} + c_5 \right] \Big|_{x=0} \\ -G \ell^2 \left[\frac{c_3}{\ell} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_4}{\ell} e^{-\frac{x}{\ell}} \right] \Big|_{x=0} &\stackrel{G \neq 0}{=} 0 \Rightarrow c_3 \ell - c_4 \ell + c_5 - c_3 \ell + c_4 \ell = 0 \Rightarrow \boxed{c_5 = 0} \end{aligned} \quad (5.149)$$

$$\bullet M_x|_{x=0} = M_0$$

$$2B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = M_0 \Rightarrow 2G\ell^2 \left[c_3 e^{\frac{x}{\ell}} + c_4 e^{-\frac{x}{\ell}} \right] \Big|_{x=0} = M_0 \Rightarrow \boxed{c_3 + c_4 = \frac{M_0}{2G\ell^2}} \quad (5.150)$$

Πλευρά BC ($x=a$)

$$\bullet \tau_{xy}|_{x=a} = 0$$

$$\begin{aligned} G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=a} - G\ell^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=a} &= 0 \Rightarrow G \left[c_3 \ell e^{\frac{x}{\ell}} - c_4 \ell e^{-\frac{x}{\ell}} + c_5 \right] \Big|_{x=a} \\ -G\ell^2 \left[\frac{c_3}{\ell} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_4}{\ell} e^{-\frac{x}{\ell}} \right] \Big|_{x=a} &\stackrel{G \neq 0}{=} 0 \Rightarrow c_3 \ell e^{\frac{a}{\ell}} - c_4 \ell e^{-\frac{a}{\ell}} + c_5 - c_3 \ell e^{\frac{a}{\ell}} + c_4 \ell e^{-\frac{a}{\ell}} = 0 \Rightarrow \boxed{c_5 = 0} \end{aligned} \quad (5.151)$$

$$\bullet M_x|_{x=a} = -M_0$$

$$2B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = M_0 \Rightarrow 2G\ell^2 \left[c_3 e^{\frac{x}{\ell}} + c_4 e^{-\frac{x}{\ell}} \right] \Big|_{x=a} = M_0 \Rightarrow \boxed{c_3 e^{\frac{a}{\ell}} + c_4 e^{-\frac{a}{\ell}} = \frac{-M_0}{2G\ell^2}} \quad (5.152)$$

Συνεπώς τα εντατικά μεγέθη σε αυτή την περίπτωση θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E}{1-\nu^2} c_1 \quad (5.153)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (5.154)$$

$$\mu_{zx} = 4B \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Rightarrow \mu_{zx} = 2B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.155)$$

$$\mu_{zy} = 0 \quad (5.156)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} - 2B \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (5.157)$$

$$\tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial x} + 2B \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Rightarrow \tau_{yx} = 2B \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (5.158)$$

5.5.2. Η οριζόντια μετατόπιση είναι $u = u(x)$ και η κατακόρυφη είναι $v = v(x, y)$.

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθηματικές σχέσεις των μετατοπίσεων θα περιγράφονται από τις σχέσεις

$$u = u(x) \quad (5.159)$$

$$v = v(x) \quad (5.160)$$

Για τις ορθές παραμορφώσεις θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = f(x) \quad (5.161)$$

Για τις διατμητικές παραμορφώσεις θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{y}{2} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (5.162)$$

Οι ορθές τάσεις σ_{xx}, σ_{yy} θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \right) \quad (5.163)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda^* e^* = 2Gf(x) + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \right) \quad (5.164)$$

όπου

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad e^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.165)$$

Επιπλέον οι διπολικές τάσεις μ_{zx}, μ_{zy} θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_{zx} = 4B\kappa_{zx} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 2yB \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad (5.166)$$

$$\mu_{zy} = 4B\kappa_{zy} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 2B \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \Rightarrow \mu_{zy} = 2B \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (5.167)$$

Οι διατμητικές τάσεις τ_{xy}, τ_{yx} θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{xy} = Gy \frac{\partial f(x)}{\partial x} - By \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Rightarrow \tau_{xy} = y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} - B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] \quad (5.168)$$

$$\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{yx} = Gy \frac{\partial f(x)}{\partial x} + By \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Rightarrow \tau_{yx} = y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] \quad (5.169)$$

Μέσω των σχέσεων (5.163) - (5.167) οι εξισώσεις ισορροπίας όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (5.80) - (5.82), διαμορφώνονται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) + G \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0 \\ &\Rightarrow 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial f(x)}{\partial x} + G \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow (2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda^* + G) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0 \\
& \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{B}{2G + \lambda^*} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{B}{2G + \lambda^*} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \\
& \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} f(x) - \frac{B}{2G + \lambda^*} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + c_1 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \int f(x) dx - \frac{B}{2G + \lambda^*} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_1 x + c_2}
\end{aligned} \tag{5.170}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[2Gf(x) + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} - B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] \right] = 0 \\
& \Rightarrow Gy \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - By \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{B}{G} \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} = 0
\end{aligned} \tag{5.171}$$

Εάν υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{mx}$ είναι μια λύση της (5.171) τότε αυτή γίνεται

$$m^2 e^{mx} - \frac{B}{G} m^4 e^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx} m^2 \left(1 - \frac{B}{G} m^2 \right) = 0 \stackrel{x \neq \pm \infty}{\Rightarrow} m = 0, m = \pm \frac{1}{\ell} \tag{5.172}$$

• Εάν $m=0$ αυτό σημαίνει ότι $f(x) = e^0 = 1$ γεγονός που συνεπάγεται τα εξής

$$u = u(x), \quad v = y \tag{5.173}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = 1, \quad \gamma_{xy} = y \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0, \quad \omega_z = \frac{y}{2} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \tag{5.174}$$

$$\mu_{zx} = 2By \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0, \quad \mu_{zy} = 2B \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \tag{5.175}$$

$$\tau_{xy} = y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} - B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] = 0, \quad \tau_{yx} = y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] = 0 \tag{5.176}$$

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \right) \Rightarrow \sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \Rightarrow \sigma_{xx} = (2G + \lambda^*) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \tag{5.177}$$

$$\sigma_{yy} = 2Gf(x) + \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \right) \Rightarrow \sigma_{yy} = \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* + 2G \tag{5.178}$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας θα προκύψει η κλασική λύση

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Rightarrow (2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \stackrel{2G + \lambda^* \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2 \tag{5.179}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \stackrel{\lambda^* \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2 \tag{5.180}$$

• Εάν $m = \pm \frac{1}{\ell}$ τότε η γενική λύση της εξίσωσης (5.171) θα είναι της μορφής

$$f(x) = c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} + c_4 e^{\frac{x}{\ell}} \quad (5.181)$$

τότε η (5.170) γίνεται

$$\begin{aligned} u &= -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \int \left(c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} + c_4 e^{\frac{x}{\ell}} \right) dx - \frac{B}{2G + \lambda^*} \left(-\frac{c_3}{\ell} e^{\frac{-x}{\ell}} + \frac{c_4}{\ell} e^{\frac{x}{\ell}} \right) + c_1 x + c_2 \\ \Rightarrow u &= -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \left(\frac{e^{\frac{-x}{\ell}}}{-\frac{1}{\ell}} c_3 + \frac{e^{\frac{x}{\ell}}}{\frac{1}{\ell}} c_4 \right) - \frac{B}{(2G + \lambda^*) \ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) + c_1 x + c_2 \\ \Rightarrow u &= -\frac{(\lambda^* + G)}{2G + \lambda^*} \ell \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) - \frac{B}{(2G + \lambda^*) \ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) + c_1 x + c_2 \\ \Rightarrow u &= -\ell \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) + c_1 x + c_2 \end{aligned} \quad (5.182)$$

Επίσης θα είναι

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} - B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] \Rightarrow \tau_{xy} = y \left[\frac{G}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) - \frac{B}{\ell^3} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \right] \\ \Rightarrow \tau_{xy} &= y \left[\frac{G}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) - \frac{G}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \right] \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (5.183)$$

$$\tau_{yx} = y \left[G \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \right] \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{Gy}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) + \frac{By}{\ell^3} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{2Gy}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \quad (5.184)$$

$$\mu_{zx} = 2yB \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Rightarrow \mu_{zx} = \frac{2yB}{\ell^2} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} + c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \quad (5.185)$$

$$\mu_{zy} = 2B \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zy} = \frac{2B}{\ell} \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) \quad (5.186)$$

■ Συνοριακές συνθήκες

Θα είναι

$$u = -\ell \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} - c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} \right) + c_1 x + c_2, \quad v = y \left(c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} + c_4 e^{\frac{x}{\ell}} \right) \quad (5.187)$$

$$v|_{x=0} = 0 \Rightarrow y(c_3 + c_4) = 0, \quad \forall y \in R \quad (5.188)$$

Για να ισχύει η τελευταία για κάθε τιμή της μεταβλητής y υποχρεωτικά θα πρέπει να ισχύει

$$c_3 + c_4 = 0 \quad (5.189)$$

$$v|_{x=a} = 0 \Rightarrow \left[y \left(c_3 e^{\frac{-x}{\ell}} + c_4 e^{\frac{x}{\ell}} \right) \right]_{x=a} = 0 \Rightarrow y \left(c_3 e^{\frac{-a}{\ell}} + c_4 e^{\frac{a}{\ell}} \right) = 0 \quad (5.190)$$

Για να ισχύει η τελευταία $\forall y \in R$ θα πρέπει να ισχύει υποχρεωτικά

$$c_3 e^{\frac{-a}{\ell}} + c_4 e^{\frac{a}{\ell}} = 0 \Rightarrow c_3 = -c_4 e^{\frac{2a}{\ell}} \Rightarrow c_3 = c_4 = 0 \quad (5.191)$$

Δηλαδή προκύπτει ξανά η κλασική λύση.

5.5.3. Η οριζόντια μετατόπιση είναι $u = u(x)$ και $v = f(y)g(x)$

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθηματικές σχέσεις των μετατοπίσεων θα περιγράφονται από τις σχέσεις

$$u = u(x) \quad , \quad v = f(y)g(x) \quad (5.192)$$

Οι ορθές παραμορφώσεις θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} g(x) \quad (5.193)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 + f(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = f(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (5.194)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Rightarrow \omega_z = \frac{f(y)}{2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (5.195)$$

Οι ορθές τάσεις θα είναι

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} g(x) \right] \Rightarrow \sigma_{xx} = (2G + \lambda^*) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial f(y)}{\partial y} g(x) \quad (5.196)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{yy} = 2G \frac{\partial f(y)}{\partial y} f(x) + \lambda^* \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} g(x) \right] \Rightarrow \sigma_{yy} = (2G + \lambda^*) \frac{\partial f(y)}{\partial y} g(x) + \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.197)$$

Οι τάσεις διπόλου θα είναι

$$\mu_{zx} = 4B\kappa_{zx} \Rightarrow \mu_{zx} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zx} = 4B \frac{f(y)}{2} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \Rightarrow \mu_{zx} = 2Bf(y) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \quad (5.198)$$

$$\mu_{zy} = 4B\kappa_{zy} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \Rightarrow \mu_{zy} = 4B \frac{1}{2} \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zy} = 2B \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{g(x)}{\partial x} \quad (5.199)$$

Οι διατμητικές τάσεις θα είναι

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{xy} = Gf(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[2Bf(y) \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} + 2B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] \\ &\Rightarrow \tau_{xy} = Gf(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} - B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} - Bf(y) \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3}\end{aligned}\quad (5.200)$$

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{yx} = Gf(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[2Bf(y) \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} + 2B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] \\ &\Rightarrow \tau_{yx} = Gf(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} + Bf(y) \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3}\end{aligned}\quad (5.201)$$

Η αντικατάσταση στις εξισώσεις ισορροπίας θα δώσει

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \Rightarrow (2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} + G \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} + B \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} + B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \\ &= (2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda^* + G) \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} + B \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} + B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \frac{\partial g(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \Rightarrow (2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} g(x) + Gf(y) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - Bf(y) \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} - B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \left[(2G + \lambda^*) g(x) - B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \right] + f(y) \left[G \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \left[\frac{(2G + \lambda^*) g(x) - B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}}{G \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4}} \right] + f(y) = 0, \quad G \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} \neq 0\end{aligned}\quad (5.202)$$

Η ποσότητα εντός της αγκύλης οφείλει να είναι μια σταθερά, δηλ.

$$\frac{(2G + \lambda^*) g(x) - B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}}{G \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4}} = F_0(x) = \text{const}\quad (5.203)$$

Θεωρώντας ότι μια λύση της εξίσωσης (5.202) θα είναι της μορφής $f(y) = e^{a(x)y}$ τότε θα είναι

$$a^2(x) F_0(x) e^{a(x)y} + e^{a(x)y} = 0 \Rightarrow a^2(x) F_0(x) + 1 = 0 \Rightarrow a(x) = \pm \sqrt{\frac{-1}{F_0(x)}}\quad (5.204)$$

Συνεπώς, η λύση της εξίσωσης (5.202) θα είναι της μορφής

$$f(y) = c_1 e^{\sqrt{\frac{-1}{F_0(x)}} y} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{-1}{F_0(x)}} y} \quad (5.205)$$

Η σχέση (5.203) είναι μια διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης ως προς $g(x)$, και αν θεωρήσουμε ότι μια λύση της θα είναι της μορφής $g(x) = e^{b(y)x}$ τότε θα είναι

$$F_0(x) \ell^2 b^4(y) - (\ell^2 + F_0(x)) b^2(y) + \left(2 + \frac{\lambda^*}{G}\right) = 0 \quad (5.206)$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$b_{1,2}(y) = \pm \sqrt{\frac{\frac{F_0(x)}{\ell^2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{F_0(x)}{\ell^2}\right)^2 + 1 - \frac{F_0(x)}{\ell^2} \left(6 + 4 \frac{\lambda^*}{G}\right)}}{2F_0(x)}} \quad (5.207)$$

$$b_{3,4}(y) = \pm \sqrt{\frac{\frac{F_0(x)}{\ell^2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{F_0(x)}{\ell^2}\right)^2 + 1 - \frac{F_0(x)}{\ell^2} \left(6 + 4 \frac{\lambda^*}{G}\right)}}{2F_0(x)}} \quad (5.208)$$

Άρα η συνάρτηση $g(x)$ θα δίνεται από την σχέση

$$g(x) = c_3 e^{b_1(y)x} + c_4 e^{b_2(y)x} + c_5 e^{b_3(y)x} + c_6 e^{b_4(y)x} \quad (5.209)$$

5.5.4. Η οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης είναι $u = f(y)$ και η κατακόρυφη είναι μηδέν

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθηματικές σχέσεις που θα περιγράφουν το πεδίο των μετατοπίσεων θα είναι

$$u = f(y) \quad , \quad v = 0 \quad (5.210)$$

Οι ορθές παραμορφώσεις θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.211)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \quad (5.212)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Rightarrow \omega_z = \frac{-1}{2} \frac{\partial f(y)}{\partial y} \quad (5.213)$$

Οι ορθές τάσεις θα είναι

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{xx} = 0 \quad (5.214)$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{yy} = 0 \quad (5.215)$$

Οι τάσεις διπόλου θα είναι

$$\mu_{zx} = 4B\kappa_{zx} \Rightarrow \mu_{zx} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zx} = 0 \quad (5.216)$$

$$\mu_{zy} = 4B\kappa_{zy} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \Rightarrow \mu_{zx} = 4B \left(\frac{-1}{2} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \mu_{zy} = -2B \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \quad (5.217)$$

Οι διατμητικές τάσεις θα είναι

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{xy} = G \frac{\partial f(y)}{\partial y} - \frac{1}{2} \left[-2B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \right] \Rightarrow \tau_{xy} = G \frac{\partial f(y)}{\partial y} + B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \quad (5.218)$$

$$\tau_{yx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] \Rightarrow \tau_{yx} = G \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[-2B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \right] \Rightarrow \tau_{yx} = G \frac{\partial f(y)}{\partial y} - B \frac{\partial^3 f(y)}{\partial y^3} \quad (5.219)$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας θα είναι

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Rightarrow G \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} - B \frac{\partial^4 f(y)}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(y) = c_1 e^{\frac{y}{\ell}} + c_2 e^{-\frac{y}{\ell}} \quad (5.220)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \quad (5.221)$$

Συνεπώς το πεδίο των μετατοπίσεων θα δίνεται από τις σχέσεις

$$u = c_1 e^{\frac{y}{\ell}} + c_2 e^{-\frac{y}{\ell}}, \quad v = 0 \quad (5.222)$$

■ Συνοριακές συνθήκες

$$u|_{y=0} = 0 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (5.223)$$

$$u|_{y=a} = u_0 \Rightarrow c_1 e^{\frac{a}{\ell}} + c_2 e^{-\frac{a}{\ell}} = u_0 \Rightarrow c_1 e^{\frac{a}{\ell}} - c_1 e^{-\frac{a}{\ell}} = u_0 \Rightarrow c_1 = \frac{u_0}{e^{\frac{a}{\ell}} - e^{-\frac{a}{\ell}}} \quad (5.224)$$

$$c_1 = \frac{u_0}{e^{\frac{a}{\ell}} - e^{-\frac{a}{\ell}}}, \quad c_2 = \frac{-u_0}{e^{\frac{a}{\ell}} - e^{-\frac{a}{\ell}}} \quad (5.225)$$

Οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$u = \frac{u_0}{e^{\frac{a}{\ell}} - e^{-\frac{a}{\ell}}} \left(e^{\frac{y}{\ell}} - e^{-\frac{y}{\ell}} \right), \quad v = 0 \quad (5.226)$$

Μέχρι τώρα τα πεδία των παραμορφώσεων που χρησιμοποιήθηκαν αφορούσαν την περίπτωση του τεντώματος (stretching). Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, εκτός της καθαρής διάτμησης, αποδείχθηκε ότι η λύση του προβλήματος ανάγεται σε αυτή της κλασικής θεωρίας. Στα επόμενα θα εξεταστεί και η περίπτωση όπου το πεδίο των μετατοπίσεων θα περιγράφει την καμπτική φόρτιση του σώματος.

5.5.5. Η οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης είναι $u = yf(x)$ και η κατακόρυφη είναι $v = g(x)h(y)$

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθηματικές σχέσεις που θα περιγράφουν το πεδίο των μετατοπίσεων θα έχουν την μορφή

$$u = yf(x) \quad , \quad v = g(x)h(y) \quad (5.227)$$

Οι ορθές παραμορφώσεις θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = y \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \quad (5.228)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = f(x) + h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (5.229)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} - f(x) \right] \quad (5.230)$$

Οι ορθές τάσεις θα είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{xx} = 2Gy \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda^* \left[y \frac{\partial f(x)}{\partial x} + g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right] \\ &\Rightarrow \sigma_{xx} = (2G + \lambda^*) y \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda^* g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.231)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda^* e^* \Rightarrow \sigma_{yy} = 2Gg(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} + \lambda^* \left[y \frac{\partial f(x)}{\partial x} + g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \right] \\ &\Rightarrow \sigma_{yy} = (2G + \lambda^*) g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} + \lambda^* y \frac{\partial f(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.232)$$

Οι τάσεις διπόλου θα είναι

$$\mu_{zx} = 4B\kappa_{zx} \Rightarrow \mu_{zx} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zx} = 2B \left[h(y) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] \quad (5.233)$$

$$\mu_{zy} = 4B\kappa_{zy} = 4B \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \Rightarrow \mu_{zy} = 2B \frac{\partial h(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (5.234)$$

Οι διατμητικές τάσεις θα είναι

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] = G \left(f(x) + h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right) - B \left[\frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} h(y) - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] \quad (5.235)$$

$$\tau_{yx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} \right] = G \left(f(x) + h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right) + B \left[\frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} h(y) - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] \quad (5.236)$$

Αντικαθιστώντας όλες τις παραπάνω ποσότητες στις εξισώσεις ισορροπίας θα είναι

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Rightarrow (2G + \lambda^*) y \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + (G + \lambda^*) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} + B \left[\frac{\partial h(y)}{\partial y} \frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h(y)}{\partial y^3} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.237)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left[(2G + \lambda^*) g(x) - B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} G - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} \right] h(y) + (\lambda^* + G) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0 \quad (5.238)$$

Η εξίσωση (5.238) είναι της γενικής μορφής

$$A(x) \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} + B(x) h(y) + C(x) = 0 \quad (5.239)$$

όπου

$$A(x) = (2G + \lambda^*) g(x) - B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \quad (5.240)$$

$$B(x) = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} G - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} \quad (5.241)$$

$$C(x) = (\lambda^* + G) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \quad (5.242)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5.239) είναι της μορφής $(C(x) = 0)$, $h(y) = e^{ky}$ τότε με αντικατάσταση στην (5.239) θα είναι

$$A(x) k^2 e^{ky} + B(x) e^{ky} = 0 \Rightarrow e^{ky} [A(x) k^2 + B(x)] = 0 \Rightarrow A(x) k^2 + B(x) = 0 \Rightarrow k^2 = -\frac{B(x)}{A(x)} \quad (5.243)$$

Μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.239) είναι η

$$h(y) = -\frac{C(x)}{B(x)} \quad (5.244)$$

επειδή όμως οι παράμετροι C, B είναι μόνο συναρτήσεις του x , οφείλουν να είναι και ανάλογες, δηλ.

$$C(x) = mB(x) \quad , \quad m \in R \quad (5.245)$$

Από τις σχέσεις (5.244), (5.245) προκύπτει ότι

$$h(y) = -m \quad (5.246)$$

Για να ισχύει η σχέση (5.237), λαμβάνοντας υπόψη και την (5.239), θα πρέπει αναγκαστικά ο πολυωνυμικός όρος του y να μηδενίζεται διότι σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να εξισωθεί με τους υπόλοιπους όρους της σχέσης. Υποχρεωτικά θα πρέπει να ισχύει

$$(2G + \lambda^*) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = c_1 x + c_2 \quad (5.247)$$

Από την (5.242) μέσω της (5.247) θα είναι

$$C(x) = (\lambda^* + G) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + B \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Rightarrow C(x) = (\lambda^* + G) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow C(x) = (\lambda^* + G) c_1 \quad (5.248)$$

Η αντικατάσταση της τελευταίας στην σχέση (5.245) θα δώσει

$$B(x) = \frac{C(x)}{m} = \frac{(\lambda^* + G)}{m} = c_3 \quad (5.249)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (5.241), (5.249) θα δώσει

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} G - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} = c_3 \quad (5.250)$$

Η αντίστοιχη ομογενής της τελευταίας θα είναι

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} G - B \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} = 0 \quad (5.251)$$

Εάν $g(x) = e^{zx}$, τότε $g'(x) = ze^{zx}$, $g''(x) = z^2 e^{zx}$, $g'''(x) = z^3 e^{zx}$, $g''''(x) = z^4 e^{zx}$

$$z^2 e^{zx} - \frac{B}{G} z^4 e^{zx} = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{B}{G} z^4 = 0 \Rightarrow z^2 \left(1 - \frac{B}{G} z^2 \right) = 0 \Rightarrow z = 0, z = \pm \sqrt{\frac{G}{B}} \quad (5.252)$$

Είναι γνωστό όμως ότι

$$\ell^2 = \frac{B}{G} \Rightarrow \frac{1}{\ell^2} = \frac{G}{B} \Rightarrow \sqrt{\frac{G}{B}} = \pm \frac{1}{\ell} \quad (5.253)$$

Συνεπώς η γενική λύση της (5.251) θα είναι της μορφής

$$g^{hom}(x) = c_4 e^{\frac{x}{\ell}} + c_5 e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 x + c_7 \quad (5.254)$$

Απομένει να προσδιοριστεί και μια ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5.250). Η διαφορική μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$q(x) - \frac{B}{G} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = c_3 \quad (5.255)$$

όπου

$$q(x) = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \quad (5.256)$$

Από την (5.255) προκύπτει ότι

$$q(x) = 0 \quad (5.257)$$

Η οποία όταν αντικατασταθεί στην (5.256) θα δώσει

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow g^{sp}(x) = \frac{1}{2} c_6 x^2 + c_7 x + c_8 \quad (5.258)$$

Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης (5.250) προκύπτει από το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς (5.254), και της ειδικής λύσης (5.258)

$$g(x) = c_4 e^{\frac{x}{\ell}} + c_5 e^{-\frac{x}{\ell}} + \frac{1}{2} c_6 x^2 + c_7 x + c_8 \quad (5.259)$$

Από (5.246), (5.249) θα είναι

$$h(y) = -\frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \quad (5.260)$$

Ενώ από την σχέση (5.247) είναι γνωστό ότι

$$f(x) = c_1 x + c_2 \quad (5.261)$$

Το πεδίο των μετατοπίσεων καταλήγει να είναι

$$u = y(c_1 x + c_2) \quad , \quad v = -\frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(c_4 e^{\frac{x}{\ell}} + c_5 e^{-\frac{x}{\ell}} + \frac{1}{2} c_6 x^2 + c_7 x + c_8 \right) \quad (5.262)$$

Συνεπώς για όλα τα εντατικά μεγέθη θα είναι

$$\sigma_{xx} = (2G + \lambda^*) y \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda^* g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} \Rightarrow \sigma_{xx} = (2G + \lambda^*) c_1 y \quad (5.263)$$

$$\sigma_{yy} = (2G + \lambda^*) g(x) \frac{\partial h(y)}{\partial y} + \lambda^* y \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow \sigma_{yy} = c_1 \lambda^* y \quad (5.264)$$

$$\tau_{xy} = G \left(f(x) + h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right) - B \left[\frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} h(y) - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right]$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = G \left[c_1 x + c_2 - \frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(\frac{c_4}{\ell} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_5}{\ell} e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 x + c_7 \right) \right] + B \frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(\frac{c_4}{\ell^3} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_5}{\ell^3} e^{-\frac{x}{\ell}} \right) \quad (5.265)$$

$$\tau_{yx} = G \left(f(x) + h(y) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right) + B \left[\frac{\partial^3 g(x)}{\partial x^3} h(y) - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right]$$

$$\Rightarrow \tau_{yx} = G \left[c_1 x + c_2 - \frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(\frac{c_4}{\ell} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_5}{\ell} e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 x + c_7 \right) \right] - B \frac{c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(\frac{c_4}{\ell^3} e^{\frac{x}{\ell}} - \frac{c_5}{\ell^3} e^{-\frac{x}{\ell}} \right) \quad (5.266)$$

$$\mu_{zx} = 2B \left(h(y) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \Rightarrow \mu_{zx} = 2B \left[\frac{-c_1}{c_3} (G + \lambda^*) \left(\frac{c_4}{\ell^2} e^{\frac{x}{\ell}} + \frac{c_4}{\ell^2} e^{-\frac{x}{\ell}} + c_6 \right) - c_1 \right] \quad (5.267)$$

$$\mu_{zy} = 2B \frac{\partial h(y)}{\partial y} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Rightarrow \mu_{zy} = 0 \quad (5.268)$$

Συνοριακές συνθήκες

Οι ορθές τάσεις σ_{xx} για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής y θα είναι μηδενικές, δηλ

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \forall y \in R \quad (5.269)$$

αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο στην περίπτωση όπου $c_1 = 0$ άρα και $\sigma_{yy} = 0$. Επιπροσθέτως θα ισχύει

$$\tau_{xy} = G c_2 = \tau_{yx} \quad (5.270)$$

$$\mu_{zx} = 0, \quad \mu_{zy} = 0 \quad (5.271)$$

Συνεπώς το συγκεκριμένο πεδίο των μετατοπίσεων υποδεικνύει κλασσική διάτμηση.

5.6. Η κυψελωτή διατομή

Παρατηρώντας μακροσκοπικά μια κυψελωτή διατομή με ορθογωνικό πλέγμα και μια υφασμάτινη κατασκευή με την απλή σταυρωτή πλέξη διαπιστώνει κανείς μεγάλες ομοιότητες, Σχ.5.8. Οι κυψελοειδείς διατομές έχουν ευρύτατη εφαρμογή σε πολλές τεχνολογικές κατασκευές ειδικά σε θέματα απορρόφησης ενέργειας κατά την κρούση, την θερμική στεγανοποίηση, κ.α. Όπως φαίνεται και από το σχήμα οι κυψελοειδείς διατομή με ορθογωνικό πλέγμα αποτελείται από επαναλαμβανόμενα τετράγωνα σε όλη της την έκταση. Η κάθε πλευρά του μοναδιαίου κελιού αποτελείται από ευθύγραμμες λεπτές δοκούς οι οποίες τέμνονται στις άκρες τους. Τα σημεία τομής των ελαστικών δοκών θα καλούνται εφεξής κόμβοι του υφάσματος. Στην κλασσική περίπτωση των κυψελωτών διατομών θεωρείται ότι ο κόμβος είναι άκαμπος υπό την έννοια ότι οι ελαστικές δοκοί που συντρέχουν σε αυτόν δεν θα ολισθαίνουν και δεν συστρέφονται η μια ως προς την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι οι ελαστικές δοκοί κατά την παραμόρφωση της διατομής θα συνεχίσουν να τέμνονται στο ίδιο ακριβώς σημείο που τέμνονταν και πριν την παραμόρφωση. Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζεται μηχανικά κολλώντας τις δοκούς μεταξύ τους, π.χ. με την χρήση ειδικής κόλλας. Στα υφάσματα αυτού του είδους η

συγκόλληση των δοκών στα σημεία τομής τους επιτυγχάνεται μέσα από συγκεκριμένες μηχανικές διεργασίες όπως είναι το σιδέρωμα υπό πίεση, η χρήση διαφόρων πρόσθετων χημικών ουσιών, π.χ. λουλάκι ή Meritto. Η εξασφάλιση της συνεχούς επαφής των νημάτων πρέπει να εκφράζεται και με μια μαθηματική σχέση, με άλλα λόγια με ένα κριτήριο «αστοχίας» του κόμβου.

Στην περιοχή του κόμβου όπου τα νήματα θεωρούνται κολλημένα μεταξύ τους αναπτύσσονται κάποιες τάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν αυτή τη συνεχή επαφή. Οι τάσεις αυτές σε τοπικό επίπεδο, παρουσιάζουν μια απροσδιοριστία (singularity), και θεωρητικά γίνονται άπειρες. Αυτό σημαίνει ότι τοπικά στην περιοχή μπορεί να οριστεί ένας συντελεστής έντασης των τάσεων (Stress Intensity Factor, SIF) ο οποίος ουσιαστικά εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο οι τάσεις μεταβάλλονται ως την θεωρητικά άπειρη τιμή τους. Συνεπώς, αυτός ο συντελεστής μπορεί να αποτελέσει το κριτήριο για την αστοχία της ακαμψίας του κόμβου.

Τα νήματα αρχικά τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Τα διατμητικά φορτία που εφαρμόζονται εξωτερικά οδηγούν, από την μια, στην σχετική στροφή μεταξύ των νημάτων ώστε η μεταξύ τους γωνία να πάψει να είναι ορθή, και από την άλλη, στην σχετική ολίσθηση μεταξύ των νημάτων ώστε το αρχικό σημείο επαφής των νημάτων να αλλάξει, Σχ.5.8. Και στις δύο περιπτώσεις τα διατμητικά φορτία προσπαθούν να λύσουν την ακαμψία του κόμβου ενώ ο κόμβος αντιστέκεται σε αυτή τη δράση μέσω των τάσεων επαφής μεταξύ των νημάτων. Είναι φανερό ότι απαιτείται η διατύπωση ενός κριτηρίου που θα περιγράφει την κατάσταση στην οποία θα βρίσκεται ο κόμβος σε κάθε περίπτωση. Είναι γνωστό από την θεωρία της μηχανικής των επαφών ότι οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο νημάτων τα οποία τέμνονται κάθετα και δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ τους θα δίνονται από την σχέση

$$\sigma_{xy} = \frac{Q}{\pi a \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (5.272)$$

όπου a είναι η ακτίνα της κυκλικής επιφάνειας επαφής των νημάτων και Q είναι η δύναμη από το αντισυμμετρικό μέρος των εξωτερικά επιβαλλόμενων διατμητικών τάσεων. Οι ασκούμενες διατμητικές τάσεις πέραν της ολίσθησης θα προσπαθήσουν να στρέψουν τα νήματα μεταξύ τους. Ο Mindlin (1949) έδειξε ότι στην περίπτωση όπου σε δυο σώματα, τα οποία δεν ολισθαίνουν το ένα σε σχέση με το άλλο, ασκείται μια στρεπτική ροπή M_z , οι διατμητικές τάσεις θα δίνονται από την σχέση

$$\sigma_{xy} = \frac{3M_z}{4\pi a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (5.273)$$

Η απροσδιοριστία των τάσεων που εμφανίζεται μεταξύ των νημάτων παρουσιάζει μια αναλογία όσον αφορά την κατανομή των τάσεων, με το πρόβλημα της δυσκοειδούς ρωγμής σε μια ημιάπειρη πλάκα η οποία υπόκειται σε εφαπτομενική φόρτιση (Mode II) και σε μια στρεπτική καταπόνηση (Mode III) (crack analogue), (Giannakopoulos et.al. 1998). Παραμόρφωση τύπου I δεν εμφανίζεται διότι μεταξύ των νημάτων δεν υπάρχουν γωνίες όπου θα μπορούσε να αναπτυχθεί μια απροσδιοριστία στις τάσεις και επιπλέον μεταξύ των νημάτων θεωρείται ότι δεν υπάρχει καμία συγκόλληση που να προλαμβάνει την απομάκρυνσή τους κατά την κατακόρυφη έννοια (adhesion). Η ρωγμή θεωρείται εξωτερική γύρω από κύκλο ακτίνας a , όση και η ακτίνα της κυκλικής επιφάνειας επαφής.

Λόγω των διατμητικών τάσεων της σχέσης (5.272) θα εμφανίζεται ένας συντελεστής έντασης των τάσεων, K_{II} . Παίρνοντας το όριο αυτής της σχέσης θα είναι

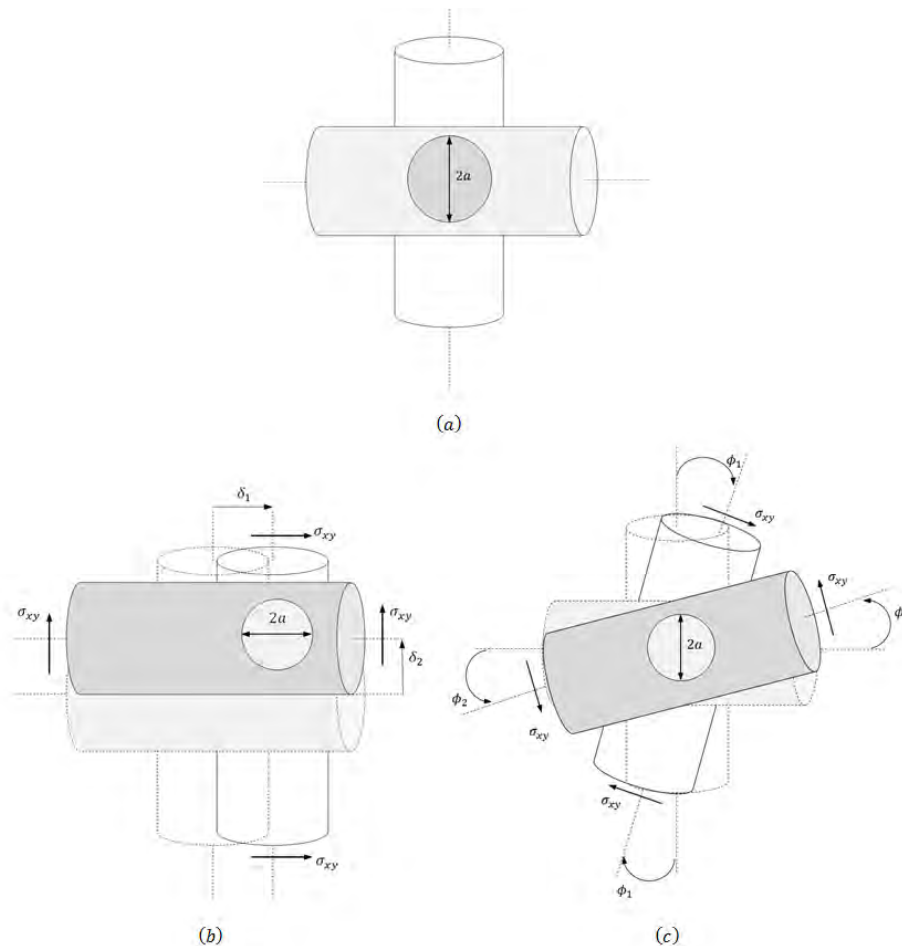
$$\lim_{x \rightarrow -a} \sigma_{xy} = \frac{Q}{\pi a \sqrt{2a(a+x)}} \quad (5.274)$$

Είναι γνωστό από την μηχανική των θραύσεων ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων δίνεται από την σχέση

$$\lim_{x \rightarrow -a} \sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(a+x)}} \quad (5.275)$$

Από την σύγκριση των τελευταίων σχέσεων προκύπτει

$$\frac{Q}{\pi a \sqrt{2a(a+x)}} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(a+x)}} \Rightarrow K_{II} = \frac{Q}{a\sqrt{\pi a}} \quad (5.276)$$



Σχ 5.8. (α) Αρχικά τα νήματα τέμνονται κάθετα μεταξύ τους και η επιφάνεια επαφής τους είναι κυκλική με ακτίνα a . (β) τα νήματα ολισθαίνουν το ένα ως προς το άλλο και στις δύο κατευθύνσεις δ_1, δ_2 (Mode II) (γ) τα νήματα στρέφονται το ένα σε σχέση με το άλλο κατά γωνία $\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1 - \phi_2\right)$ (Mode III).

Λόγω των διατμητικών τάσεων της σχέσης (5.273) θα εμφανίζεται ένας συντελεστής έντασης των τάσεων, K_{III} . Παίρνοντας το όριο αυτής της σχέσης θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow -a} \sigma_{xy} = \frac{3M_z}{4\pi a^2 \sqrt{2a(a+x)}} \quad (5.277)$$

Είναι γνωστό από την μηχανική των θραύσεων ότι ο συντελεστής έντασης των τάσεων για την περίπτωση της παραμόρφωσης τύπου III (Mode III) θα δίνεται από την σχέση

$$\lim_{x \rightarrow -a} \sigma_{xy} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi(a+x)}} \quad (5.278)$$

Από την σύγκριση των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει ότι

$$\frac{3M_z}{4\pi a^2 \sqrt{2a(a+x)}} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi(a+x)}} \Rightarrow K_{III} = \frac{3M_z}{4a^2 \sqrt{\pi a}} \quad (5.279)$$

Ο κόμβος υπόκειται σε μια μεικτού τύπου καταπόνηση, Mode II & Mode III, με αποτέλεσμα η ενέργεια που απελευθερώνεται \mathcal{G} (energy release rate) κατά την παραμόρφωση να δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{G} = \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E} \quad (5.280)$$

όπου ν ο λόγος του Poisson, E το μέτρο ελαστικότητας του νήματος και E' το τροποποιημένο μέτρο ελαστικότητας για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης το οποίο συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας E μέσω της σχέσης

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (5.281)$$

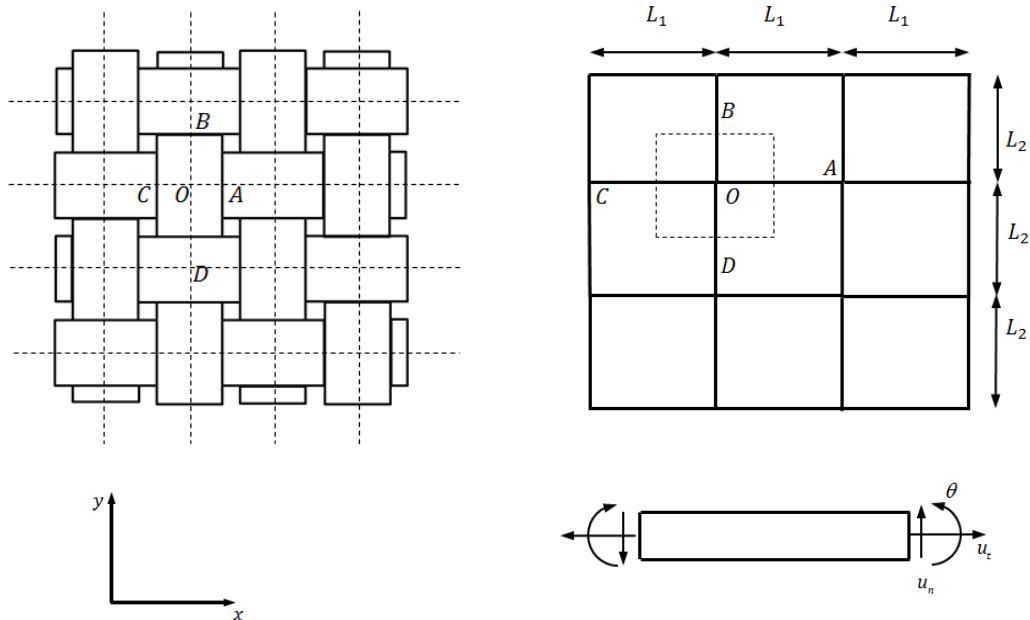
Από τον συνδυασμό των σχέσεων (5.276), (5.279), (5.280), (5.281) προκύπτει

$$\mathcal{G} = \frac{Q^2(1-\nu^2)}{E\pi a^3} + \frac{9(1+\nu)M_z^2}{16E\pi a^5} \quad (5.282)$$

Η επαφή παραμένει σαν πλήρης σύνδεσμος αν $\mathcal{G} < \mathcal{G}_0$, όπου \mathcal{G}_0 είναι η κρίσιμη ενέργεια απελευθέρωσης της συγκολλητικής ουσίας μεταξύ των νημάτων.

Με την ίδια ακριβώς συλλογιστική η μικροδομή του υφάσματος μοντελοποιείται σαν ένα ορθογωνικό πλέγμα το οποίο αποτελείται από ελαστικές δοκούς κυκλικής διατομής. Θεωρείται ένα μοναδιαίο κελί αναφοράς το οποίο αποτελεί και τον αντιπροσωπευτικό όγκο ελέγχου του υφάσματος. Όπως φαίνεται και από το Σχ.5.9 στο κεντρικό σημείο του κελιού συντρέχουν τέσσερις δοκοί. Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι σε αυτού του είδους την μοντελοποίηση δεν αντικατοπτρίζονται όλοι οι μηχανισμοί παραμόρφωσης των υφασμάτων. Οι κυριότερες μορφές παραμόρφωσης που περιγράφονται από αυτό το μοντέλο είναι η κάμψη, θεωρώντας ότι τα νήματα επιδεικνύουν μια καμπτική ακαμψία (όπως π.χ. νήματα από Kevlar), και η αξο-

νική παραμόρφωση. Και τα δύο είδη παραμόρφωσης λαμβάνουν χώρα εντός του επιπέδου του υφάσματος γεγονός που καταδεικνύει ότι το ύφασμα αντιμετωπίζεται μακροσκοπικά σαν μια ελαστική μεμβράνη. Επιπλέον όλες αυτές οι παραμορφώσεις θεωρούνται πολύ μικρές και πλήρως ελαστικές. Αρχικά, η διάτμηση των δοκών δεν λαμβάνεται υπόψη στην ανάλυση λόγω του μικρού πάχους τους και θεωρούνται δοκοί τύπου Euler - Bernoulli.



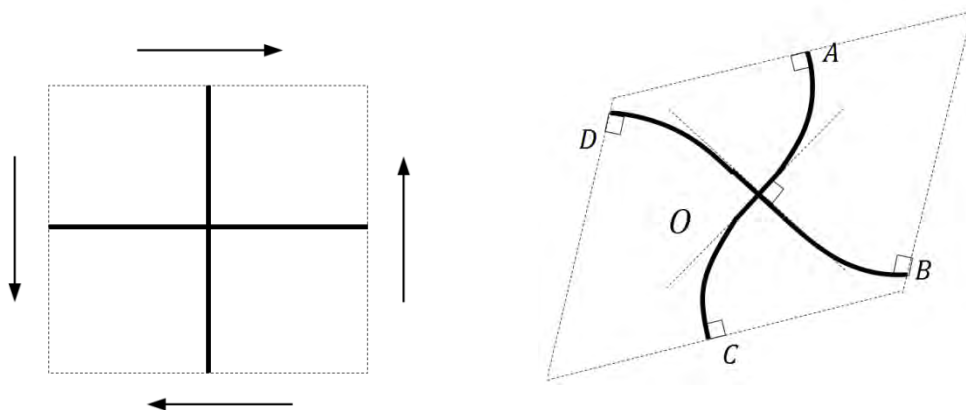
Σχ 5.9. Η μικροδομή της υφασμάτινης κατασκευής η οποία μοντελοποιείται με μια κυψελωτή διατομή.

Θεωρώντας ότι η καμπτική και η εφελκυστική ακαμψία είναι C, D , αντίστοιχα τότε θα είναι

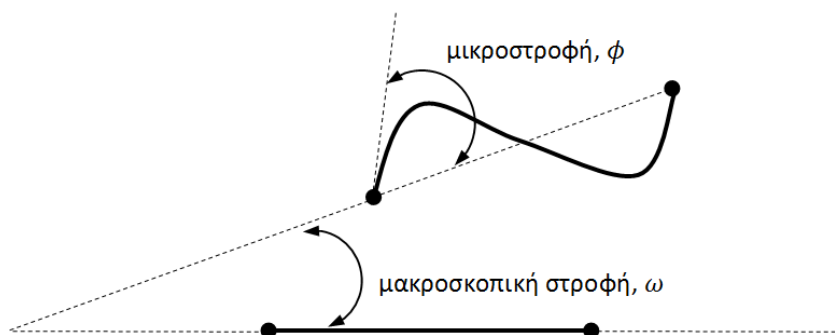
$$C = EA = E\pi R^2 \quad (5.283)$$

$$D = EI = \frac{1}{2}E\pi R^4 \quad (5.284)$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του υφαιδιού, A το εμβαδό της κυκλικής του διατομής και R η ακτίνα της κυκλικής διατομής. Αντίστοιχα μεγέθη μπορούν να βρεθούν και για νήματα με διαφορετικό τύπο διατομής.

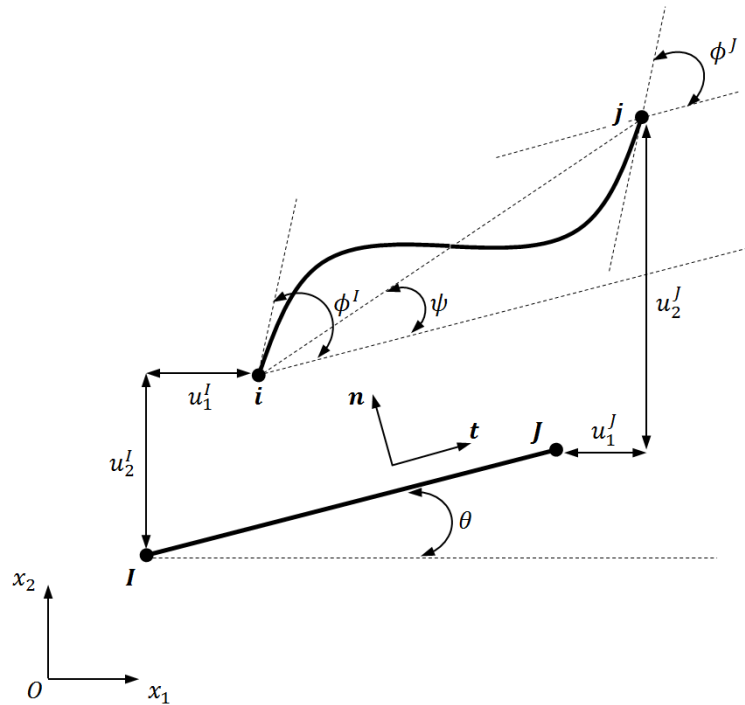


Σχ 5.10. Τα νήματα (α) πριν την παραμόρφωση τέμνονται κάθετα μεταξύ τους (β) μετά την παραμόρφωση καμπυλώνονται αλλά διατηρούν την μεταξύ τους ορθή γωνία.



Σχ 5.11. Το κάθε στέλεχος του μοναδιαίου κελιού υφίσταται δύο ειδών στροφές, μια μακροσκοπική ω και μια μικροσκοπική ϕ .

Η συνολική στροφή που υφίσταται ο κόμβος αποτελείται από την μακροσκοπική στροφή ω που σχετίζεται με την στροφή του τοιχώματος του μοναδιαίου κελιού και από την μικροσκοπική στροφή ϕ που σχετίζεται με την τοπική στροφή του κόμβου. Εάν χρησιμοποιείται η θεωρία των τάσεων διπόλου ή περιορισμένη θεωρία Cosserat, και κατά συνέπεια η μικροστροφή δεν είναι ανεξάρτητη ποσότητα αλλά είναι το αντισυμμετρικό μέρος της βαθμίδας της παραμόρφωσης όπως δίνεται από την σχέση (5.20). Στην μικροπολική θεωρία η μικροστροφή θα ήταν μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή ϕ και θα αντιστοιχούσε σε επιπλέον βαθμό ελευθερίας. (η θεωρία των τάσεων διπόλου είναι θεωρία ανώτερης βαθμίδας και όχι ανώτερης τάξης που είναι η μικροπολική θεωρία.)



Σχ 5.12. Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη γεωμετρία του υφαδίου του υφάσματος..

Στην διδιάστατη θεωρία των διπολικών τάσεων κάθε υλικό σημείο του σώματος φέρει τρεις βαθμούς ελευθερίας, δύο μεταφορικούς, τις μετατοπίσεις u_1, u_2 , και μια στροφή ϕ . Το γενικευμένο διάνυσμα των παραμορφώσεων σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ στο επίπεδο (x_1, x_2) θα δίνεται από την σχέση

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,1} - \phi \\ u_{1,2} + \phi \\ \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \end{Bmatrix} \quad (5.285)$$

Στην θεωρία των τάσεων διπόλου $\phi_{,1} = \omega_{3,1}$ και $\phi_{,2} = \omega_{3,2}$. Αυτό σημαίνει ότι η στροφή ϕ δεν είναι μια ανεξάρτητη στροφή, όπως θεωρεί η μικροπολική θεωρία, αλλά μια στροφή που σχετίζεται με το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των στροφών ω , όπως θεωρεί η θεωρία των τάσεων διπόλου και θα ισχύει ότι $\phi = \omega_3$. Το γενικευμένο διάνυσμα των τάσεων που αντιστοιχεί σε αυτές τις παραμορφώσεις θα είναι

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \mu_{13} \quad \mu_{23}\}^T \quad (5.286)$$

Η πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης W θα είναι μια συνάρτηση των τροπών, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$ και των καμπυλοτήτων κ_{13}, κ_{23}

$$W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_{13}, \kappa_{23}) \quad (5.287)$$

Η ισοδύναμα μια συνάρτηση των βαθμίδων της μετατόπισης $u_{1,1}, u_{2,2}, u_{2,1}, u_{1,2}$ της στροφής ϕ και των βαθμίδων της στροφής $\phi_{,1}, \phi_{,2}$

$$W = W(u_{1,1}, u_{2,2}, u_{2,1}, u_{1,2}, \phi, \phi_{,1}, \phi_{,2}) \quad (5.288)$$

Οι τάσεις και οι διπολικές τάσεις προκύπτουν από την πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\sigma_{11} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{\partial W}{\partial u_{1,1}}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{\partial W}{\partial u_{2,2}} \quad (5.289)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{\partial W}{\partial (u_{2,1} - \phi)}, \quad \sigma_{21} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{21}} = \frac{\partial W}{\partial (u_{1,2} + \phi)} \quad (5.290)$$

$$\mu_{13} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{13}} = \frac{\partial W}{\partial \phi_{,1}}, \quad \mu_{23} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{23}} = \frac{\partial W}{\partial \phi_{,2}} \quad (5.291)$$

Το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί στην συνέχεια έχει να κάνει με την πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας του υφάσματος καθώς όπως φαίνεται από τα παραπάνω από αυτήν μπορούν να προκύψουν όλες οι επιθυμητές τάσεις. Από το γενικευμένο συνεχές θα πρέπει να εξαχθεί μια προσεγγιστική συνάρτηση που να δίνει την πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας του υφάσματος.

Έστω ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα IJ αναπαριστά το υφάδι το οποίο αποτελεί την μια πλευρά του μοναδιαίου όγκου αναφοράς. Οι κόμβοι I, J του φαδιού φέρουν τρεις βαθμούς ελευθερίας, δύο μετατοπίσεις και μια στροφή. Αρχικά, το υφάδι θεωρείται ότι είναι επικλινές ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων Ox_1x_2 κατά γωνία θ , Σχ.12. Μετά την παραμόρφωση οι κόμβοι του υφιδιού είναι i, j διότι ο κάθε κόμβος έχει υποστεί μια μετατόπιση $\mathbf{u}^I, \mathbf{u}^J$ και μια στροφή ϕ^I, ϕ^J , αντίστοιχα. Επιπλέον, ορίζεται ένα ορθογώνιο ζεύγος μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{n}, \mathbf{t} κάθετα και εφαπτομενικά στην διεύθυνση του ευθύγραμμου απαρμόρφωτου υφιδιού, αντίστοιχα. Οι μετατοπίσεις και η μικροστροφή των κόμβων της κάθε δοκού μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά σε συνάρτηση με τις κινηματικές μεταβλητές της αρχής O μέσω του αναπτύγματος Taylor. Η αρχή O δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με κάποιον από τους κόμβους της δοκού, Σχ.12. Συνεπώς για τις μετατοπίσεις θα είναι

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{u} + L_{OI} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OI}} + \frac{L_{OI}^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OI}^2} + \dots \quad (5.292)$$

$$\phi^I = \phi + L_{OI} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OI}} + \frac{L_{OI}^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OI}^2} + \dots \quad (5.293)$$

$$\mathbf{u}^J = \mathbf{u} + L_{OJ} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OJ}} + \frac{L_{OJ}^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OJ}^2} + \dots \quad (5.294)$$

$$\phi^J = \phi + L_{OJ} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OJ}} + \frac{L_{OJ}^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OJ}^2} + \dots \quad (5.295)$$

όπου L_{OI}, L_{OJ} είναι οι αποστάσεις των κόμβων I, J από την αρχή των αξόνων O και $\partial/\partial t_{OI}, \partial/\partial t_{OJ}$ είναι οι παράγωγοι κατά OI, OJ , αντίστοιχα, Σχ.12. Η ορθή, u_n και η εφαπτομενική, u_t συνιστώσα της μετατόπισης σε κάθε κόμβο θα είναι

$$u_n^I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^I, \quad u_t^I = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^I \quad (5.296)$$

$$u_n^J = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^J, \quad u_t^J = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^J \quad (5.297)$$

Η ελαστική ενέργεια του πλέγματος των υφαδιών θα δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους υφαδιών που το αποτελούν. Για το ένα υφάδι η ελαστική ενέργεια θα δίνεται από την σχέση

$$W^{IJ} = \frac{1}{2} \frac{D}{L^3} \begin{bmatrix} u_n^I & \phi^I & u_n^J & \phi^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^I \\ \phi^I \\ u_n^J \\ \phi^J \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{C}{L} \begin{bmatrix} u_t^I & u_t^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^I \\ u_t^J \end{bmatrix} \quad (5.298)$$

Στο δεξί μέρος της τελευταίας σχέσης ο πρώτος όρος αναφέρεται στην κάμψη του πλέγματος ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στον εφελκυσμό. Σύμφωνα με το Σχ.13 η ελαστική ενέργεια του μοναδιαίου όγκου αναφοράς w_{nzy} θα ισούται με το ημίάθροισμα των ενεργειών των υφαδιών OA, OB, OC, OD , διηρημένο με το εμβαδό της επιφάνειας του όγκου αναφοράς.

$$w = \frac{1}{2A_c} (W^{OA} + W^{OB} + W^{OC} + W^{OD}) \quad (5.299)$$

όπου $W^{OA}, W^{OB}, W^{OC}, W^{OD}$ είναι οι ελαστικές ενέργειες των υφαδιών OA, OB, OC, OD , αντίστοιχα, και A_c είναι η επιφάνεια του μοναδιαίου όγκου αναφοράς, δηλ.

$$A_c = L_1 L_2 \quad (5.300)$$

Λαμβάνεται το ημίάθροισμα διότι το κάθε υφάδι συμβάλλει στην ελαστική ενέργεια του κατά το μισό μήκος του.

Εάν συμβολίσουμε με \mathbf{u} την μετατόπιση και με ϕ την μικροστροφή του κόμβου O τότε οι μετατοπίσεις και οι μικροστροφές των γειτονικών κόμβων A, B, C, D μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\mathbf{u}^A \approx \mathbf{u} + L_{OA} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OA}} + \frac{1}{2} L_{OA}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OA}^2}, \quad \phi^A \approx \phi + L_{OA} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OA}} + \frac{1}{2} L_{OA}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OA}^2} \quad (5.301)$$

$$\mathbf{u}^B \approx \mathbf{u} + L_{OB} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OB}} + \frac{1}{2} L_{OB}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OB}^2}, \quad \phi^B \approx \phi + L_{OB} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OB}} + \frac{1}{2} L_{OB}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OB}^2} \quad (5.302)$$

$$\mathbf{u}^C \approx \mathbf{u} + L_{OC} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OC}} + \frac{1}{2} L_{OC}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OC}^2}, \quad \phi^C \approx \phi + L_{OC} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OC}} + \frac{1}{2} L_{OC}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OC}^2} \quad (5.303)$$

$$\mathbf{u}^D \approx \mathbf{u} + L_{OD} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{OD}} + \frac{1}{2} L_{OD}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_{OD}^2}, \quad \phi^D \approx \phi + L_{OD} \frac{\partial \phi}{\partial t_{OD}} + \frac{1}{2} L_{OD}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_{OD}^2} \quad (5.304)$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (5.292)-(5.295),(5.296),(5.297),(5.298),(5.301)-(5.304) στην σχέση (5.299) προκύπτει τελικά μετά από αρκετή άλγεβρα (βλ. Παράρτημα Α)

$$w = \frac{1}{2L_1L_2} \left[E'_1L_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + E'_2L_2^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 12k_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \phi \right)^2 + 12k_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \phi \right)^2 + 4k_1L_1^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + 4k_2L_2^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (5.305)$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις σχέσεις (5.289),(5.291) θα δώσει

$$\sigma_{11} = \frac{E'_1L_1}{L_2} \varepsilon_{11} = \frac{E'_1L_1}{L_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (5.306)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E'_2L_2}{L_1} \varepsilon_{22} = \frac{E'_2L_2}{L_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (5.307)$$

$$\sigma_{12} = \frac{12k_1}{L_1L_2} \varepsilon_{12} = \frac{12k_1}{L_1L_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \phi \right) \quad (5.308)$$

$$\sigma_{21} = \frac{12k_2}{L_1L_2} \varepsilon_{21} = \frac{12k_2}{L_1L_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \phi \right) \quad (5.309)$$

$$\mu_{13} = \frac{4k_1L_1}{L_2} \kappa_{13} = \frac{4k_1L_1}{L_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (5.310)$$

$$\mu_{23} = \frac{4k_2L_2}{L_1} \kappa_{23} = \frac{4k_2L_2}{L_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (5.311)$$

$$\text{όπου } E'_i = \frac{E_i A_i}{L_i} = \frac{C_i}{L_i} \text{ και } k_i = \frac{D_i}{L_i}.$$

Κεφάλαιο 6

Η μικροπολική θεωρία σε εύκαμπτους φορείς

6.1. Εισαγωγή

Στην περίπτωση των μη ομογενών υλικών η απόκριση σε εξωτερικές φορτίσεις εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις παραμέτρους της μικροδομής. Μια από αυτές τις παραμέτρους είναι το εσωτερικό μήκος που ουσιαστικά προσδίδει στο υλικό επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας λόγω της μικροδομής του. Αυτού του είδους την μηχανική συμπεριφορά επιδεικνύουν κυρίως τα σύνθετα υλικά, τα υφάσματα και γενικώς όλων των ειδών τα γεωυλικά.

Η κεντρική ιδέα για την ανάλυση αυτών των κατασκευών στην παρούσα εργασία έγκειται στην μοντελοποίηση της μικροδομής τους από ένα δίκτυο ελαστικών στοιχείων. Ουσιαστικά, κατά την ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς υλικών τα οποία επιδεικνύουν επιδράσεις της μικροδομής τους ακολουθείται η τακτική της ομογενοποίησης. Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό υλικό, το οποίο εν γένει είναι ανομοιογενές, αντικαθίσταται από ένα ομογενές υλικό το οποίο φέρει επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας στην μικροδομή του. Από τις πιο σημαντικές τακτικές ομογενοποίησης του υλικού είναι η μικροπολική θεωρία (Cosserat theory) και οι θεωρίες 2^{ης} τάξης. Σκοπός της περαιτέρω ανάλυσης είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο μεταφέρονται οι τάσεις που εφαρμόζονται μακροσκοπικά στην μικροδομή του υλικού. Η μηχανική συμπεριφορά του υλικού χαρακτηρίζεται από τις μικροδυνάμεις και τις μικροροπές που αναπτύσσονται μεταξύ των ελαστικών στοιχείων της μικροδομής. Αυτό το δίκτυο των ελαστικών στοιχείων αναπαριστά την μικροδομή του υλικού και εισάγει στο μοντέλο μικροδομικές διαστάσεις, όπως το μέγεθος της πλευράς του καννάβου των στοιχείων αυτών. Τα ελαστικά στοιχεία της μικροδομής φέρουν εσωτερικές καμπτικές ροπές και δυνάμεις οι οποίες συνδέονται με τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας, όπως οι μικροστροφές των σημείων διασύνδεσης των στοιχείων (στην περίπτωσή μας, των κλειστών υφασμάτων). Αυτές οι εσωτερικές συστροφές είναι ανεξάρτητες από τις μακροσκοπικές παραμορφώσεις της κατασκευής.

6.2. Η θεωρία των τάσεων διπόλου σε πολικές συντεταγμένες

Βάση της θεώρησης της μικροδομής το ελαστικό μέσο που περιλαμβάνει ανεξάρτητες στροφές στο εσωτερικό του (οι οποίες συνδέονται με κάποιου είδους μικροροπές στα σημεία διασύνδεσης) είναι πιο κατάλληλο για να περιγράψει την μηχανική συμπεριφορά μη ομογενών υλικών όπως οι υφασμάτινες κατασκευές. Μια τέτοιου είδους προσέγγιση είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία με διάφορα ονόματα όπως, μικροπολική θεωρία, θεωρία Cosserat, ασύμμετρη ελαστικότητα, μικρομορφική θεωρία, κλπ. Η μικροπολική θεωρία περιλαμβάνει έναν εσωτερικό βαθμό ελευθερίας που είναι η μικροστροφή η οποία επιτρέπει την παρουσία μαζικών και επιφανειακών ζευγών τάσεων, δηλ. μικροροπές. Υπό αυτή την προσέγγιση οι κινηματική σχέση των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων θα είναι

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk} \phi_k \quad (6.1)$$

όπου ε_{ijk} είναι το σύμβολο της εναλλαγής, u_i είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων και ϕ_i είναι το διάνυσμα των μικροστροφών. Αξίζει να σημειωθεί ότι η καινούρια κινηματική μεταβλητή ϕ_i είναι ανεξάρτητη από το πεδίο των μετατοπίσεων γεγονός που σημαίνει ότι εν γένει είναι διαφορετική από διάνυσμα των μακροσκοπικών στροφών, δηλαδή

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \neq \phi_i \quad (6.2)$$

Στην περίπτωση που αυτός ο περιορισμός θα πάψει να ισχύει και θα υιοθετηθεί η άποψη ότι η μικροστροφή σχετίζεται με την μακροσκοπική στροφή η ανάλυση ανταποκρίνεται σε ένα πιο απλό καταστατικό μοντέλο (restricted couple stress theory). Τα ζεύγη των μικροροπών που δημιουργούνται στη μάζα και την επιφάνεια του υλικού διαφοροποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας από αυτές της κλασσικής θεωρίας και διαμορφώνονται ως εξής

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (6.3)$$

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + C_i = 0 \quad (6.4)$$

όπου σ_{ji} είναι ο τανυστής των τάσεων, F_i είναι οι μαζικές δυνάμεις, m_{ji} είναι ο τανυστής των επιφανειακών μικροροπών (surface couple stress tensor), C_i είναι ο τανυστής των μαζικών μικροροπών (body couple per unit volume). Αξίζει κανείς να παρατηρήσει ότι η προσθήκη των μικροροπών, τόσο των επιφανειακών όσο και των μαζικών, διαταράσσει την συμμετρία του τανυστή των τάσεων σ_{ji} , με αποτέλεσμα να ισχύει $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ij}$. Οι καταστατικές εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \quad (6.5)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{k,k} \delta_{ij} + \beta \phi_{i,j} + \gamma \phi_{j,i} \quad (6.6)$$

όπου $\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ είναι ελαστικές σταθερές. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση όπου $\kappa = \alpha = \beta = \gamma = 0$ οι σχέσεις (6.5), (6.6) ανάγονται στις κλασσικές καταστατικές εξισώσεις της ελαστικότητας. Η απαίτηση του θετικού ορισμού της συνάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας του συστήματος επιβάλλει για τις ελαστικές σταθερές τους εξής περιορισμούς

$$\kappa \geq 0, \quad \kappa + 2\mu \geq 0, \quad \kappa + 2\mu + 3\lambda \geq 0 \quad (6.7)$$

$$\gamma \geq 0, \quad -\gamma \leq \beta \leq \gamma, \quad 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 \quad (6.8)$$

Στην περίπτωση ενός επίπεδου σώματος οι συνθήκες ισορροπίας εκφρασμένες σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) για ένα ελαστικά γραμμικό υλικό θα είναι

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r}}{r} + F_{\theta} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial m_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{m_{rz}}{r} + \tau_{r\theta} - \tau_{\theta r} + C_z = 0 \quad (6.11)$$

όπου F_r, F_{θ} είναι οι μαζικές δυνάμεις κατά την ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση αντίστοιχα, ενώ C_z είναι οι μικροπολικές τάσεις ανά μονάδα όγκου του σώματος. Οι σχέσεις μεταξύ των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων διαμορφώνονται ως εξής

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \phi_z \quad (6.14)$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_{\theta} \right) + \phi_z \quad (6.15)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες για ένα γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό θα είναι

$$\sigma_{rr} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + (2\mu + \kappa)\varepsilon_{rr} \quad (6.16)$$

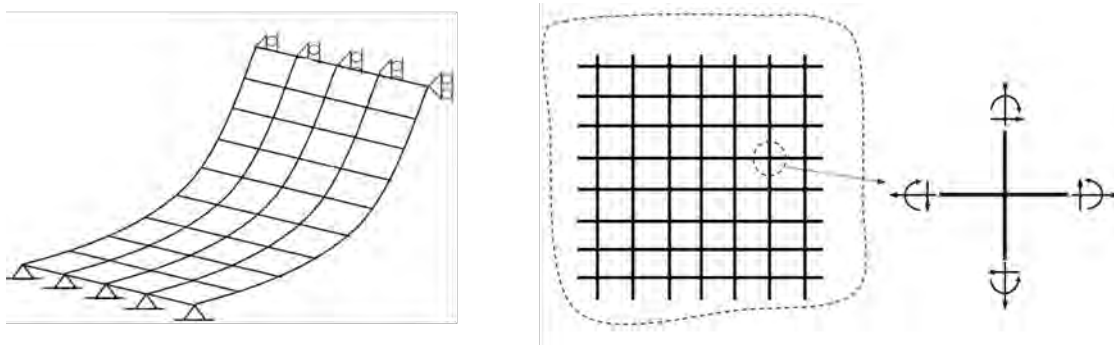
$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + (2\mu + \kappa)\varepsilon_{\theta\theta} \quad (6.17)$$

$$\tau_{r\theta} = (\mu + \kappa)\varepsilon_{r\theta} + \mu\varepsilon_{\theta r} \quad (6.18)$$

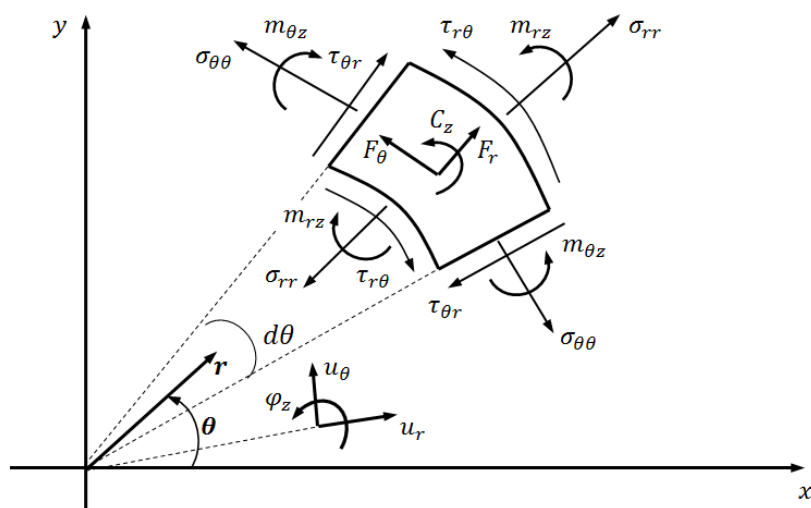
$$\tau_{\theta r} = (\mu + \kappa)\varepsilon_{\theta r} + \mu\varepsilon_{r\theta} \quad (6.19)$$

$$m_{rz} = \gamma \frac{\partial \phi_z}{\partial r}, \quad m_{\theta z} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta} \quad (6.20)$$

Έχει αναφερθεί ότι στα προβλήματα όπου το υλικό επιδεικνύει μηχανική συμπεριφορά συναρτώμενη από τη μικροδομή του είναι πιο αποτελεσματικό να υιοθετείται μια γενικευμένη θεωρία συνεχούς μέσου, όπως είναι η μικροπολική θεωρία που αναλύεται στο παρόν κεφάλαιο. Σε περιπτώσεις όπου η γενικευμένη θεωρία στηρίζεται στην προσθήκη ενός επιπρόσθετου βαθμού ελευθερίας, όπως η μικροστροφή, είναι πρόσφορο η μικροδομή του υλικού να μοντελοποιείται σαν ένα ορθογωνικό τετραγωνικό πλέγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Θεωρείται ότι το τετραγωνικό πλέγμα αποτελείται από εύκαμπτες δοκούς (καλώδια) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε κόμβους όπου επιτρέπεται μια επιπρόσθετη μικροσκοπική στροφή.



Σχ. 6.1. (α) Η μικροδομή του υλικού μοντελοποιείται από ένα ορθογωνικό πλέγμα ελαστικών δοκών. (β) οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας στα σημεία τομής των δοκών. Θεωρείται ότι οι κόμβοι διαστάυρωσης των ελαστικών δοκών είναι τέλεια πακτωμένοι.

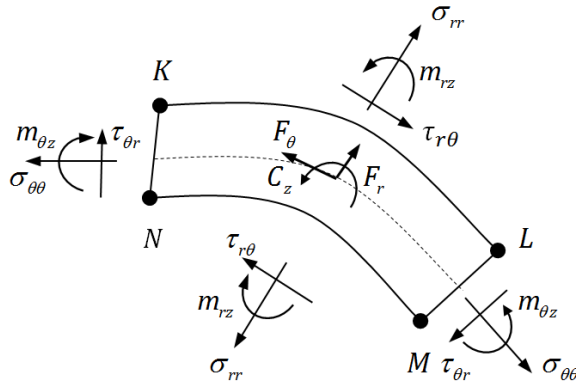


Σχ. 6.2. Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε στοιχειώδες τμήμα του επίπεδου σώματος σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

Μια λεπτομέρεια των εντατικών μεγεθών που αναπτύσσονται σε ένα στοιχειώδες τμήμα του επίπεδου σώματος και του καλωδίου φαίνεται στα Σχ. 6.2, 6.3. Ένα σημαντικό γεωμετρικό χαρακτηριστικό των καλωδίων είναι ότι το πάχος τους είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα καμπυλότητάς τους στην παραμορφωμένη τους κατάσταση. Στην κλασική θεωρία των καλωδίων είναι γνωστό ότι οι κυρίαρχες τάσεις που αναπτύσσονται είναι κατά την διεύθυνση θ , αυτό σημαίνει ότι οι μόνες μη μηδενικές ορθές τάσεις είναι οι $\sigma_{\theta\theta}$. Επιπροσθέτως, το καλώδιο θεωρείται ότι μπορεί να παραλάβει μόνο εφελκυστικές δυνάμεις γεγονός που υποδεικνύει ότι οι τάσεις κατά τον άξονά του οφείλουν να είναι πάντα θετικές⁵, δηλαδή

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta) \geq 0 \quad (6.21)$$

⁵ Στην περίπτωση θλιπτικών τάσεων αναγόμεστε στην περίπτωση των κελυφών.



Σχ. 6.3. Τα εντατικά μεγέθη σε ένα στοιχειώδες τμήμα του καλωδιωτού φορέα

Ως γνωστόν από την κλασσική θεωρία των καλωδίων οι εφελκυστικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}$ είναι ανεξάρτητες της ακτινικής θέσης και επιπροσθέτως για τις υπόλοιπες τάσεις, τις διατμητικές και τις ορθές, θα ισχύει (κατά προσέγγιση)

$$\tau_{r\theta}(\theta) = \tau_{\theta r}(\theta) = 0 \quad (6.22)$$

$$\sigma_{rr}(\theta) = 0 \quad (6.23)$$

$$m_{rz}(\theta) = m_{\theta z}(\theta) = 0 \quad (6.24)$$

Ουσιαστικά, οι (6.22),(6.23),(6.24) περιγράφουν συνοριακές συνθήκες μη φόρτισης στην παράπλευρη επιφάνεια του καλωδίου.

Η αντικατάσταση των τελευταίων σχέσεων στις εξισώσεις ισορροπίας (6.9),(6.10) και (6.11) θα δώσει

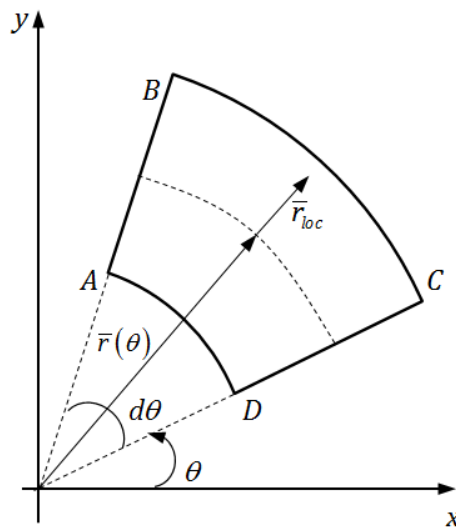
$$\sigma_{\theta\theta} = rF_r \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} F_r + r \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + r F_\theta = 0 \quad (6.26)$$

Οι τελευταίες σχέσεις αναφέρονται στις τάσεις που αναπτύσσονται στο καλωδιωτό φορέα χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η μικροδομή του υλικού. Στην κλασσική θεώρηση του καλωδιωτού φορέα το διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου ορίζεται από την ακτίνα r και από την γωνία θ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο καλωδιωτός φορέας είναι ισοστατικός και η γεωμετρία του φορέα είναι ζητούμενη, $r(\theta)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση. Η γεωμετρία του φορέα μας επιτρέπει κάθε στιγμή να προσδιορίζουμε την θέση οποιουδήποτε σημείου του φορέα γνωρίζοντας τις δύο μεταβλητές r, θ ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Με άλλα λόγια η καμπυλότητα του ισοστατικού φορέα είναι σταθερή καθ'όλο το πάχος του (αλλάζει όμως για διαφορετικό θ). Στην περίπτωση που στον φορέα, λόγω της μικροδομής του, υπάρχουν οι μικροπολικές ροπές $m_{\theta z}, m_{rz}$, οι οποίες είναι ουσιαστικά τοπικές καμπυλότητες, η γεωμετρία του δεν μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα θέσης το οποίο θα είναι ανεξάρτητο από την γωνία θ , Σχ.6.4. Αξίζει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο ότι παρόλο που από τις σχέσεις (6.22) - (6.24) διαφαίνεται ότι οι μικροπολικές τάσεις είναι μηδενικές δεν

είναι σωστό να ισχυριστεί κανείς ότι ανάγεται στην κλασική θεωρία διότι όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω προκύπτουν διατμητικές μη μηδενικές τάσεις $\bar{\tau}_{\theta r}$ οι οποίες δεν προβλέπονται από την κλασική θεωρία. Οι μαζικές δυνάμεις τόσο κατά την εφαπτομενική όσο και κατά την ακτινική διεύθυνση (F_r, F_θ) καθώς επίσης και οι μαζικές ροπές (C_z) θεωρούνται γνωστά μεγέθη. Όλα τα εντατικά μεγέθη που εμφανίζονται στην διατομή του καλωδιωτού φορέα αναφέρονται σε μέσες τιμές και για την περίπτωση καλωδίου με σταθερό πάχος t , θα δίνονται με βάση την σχέση

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} (\dots) dr \quad (6.27)$$



Σχ. 6.4. Το τοπικό σύστημα πολικών συντεταγμένων του καλωδιωτού φορέα.

Συνεπώς, για το διάνυσμα θέσης θα ισχύει η σχέση

$$r = \bar{r}(\theta) + r_{loc} \quad (6.28)$$

Το διάνυσμα r_{loc} θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με το $\bar{r}(\theta)$ και θα ισχύει

$$r \approx \bar{r}(\theta), \quad |r_{loc}| \leq \frac{t}{2}, \quad \bar{r}(\theta) \gg t \quad (6.29)$$

Στην περίπτωση της θεωρίας των τάσεων ζεύγους οι σχέσεις (6.22) - (6.24) διαμορφώνονται ως εξής

$$\bar{\tau}_{r\theta}(\theta) = 0, \quad \bar{\tau}_{\theta r}(\theta) \neq 0 \quad (6.30)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}(\theta) = 0 \quad (6.31)$$

$$\bar{m}_{rz}(\theta) = 0, \quad \bar{m}_{\theta z}(\theta) \neq 0 \quad (6.32)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας (6.9) - (6.11) μετατρέπονται μέσω των (6.30),(6.31),(6.32) στις

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\bar{r}} + \bar{F}_r = 0 \quad (6.33)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\bar{\tau}_{\theta r}}{\bar{r}} + \bar{F}_\theta = 0 \quad , \quad \bar{r} \neq 0 \quad (6.34)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} - \bar{\tau}_{\theta r} + \bar{C}_z = 0 \quad (6.35)$$

Τα μεγέθη στις παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται σε μέσες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι η ακτινική ορθή τάση σ_{rr} δεν είναι αναγκαστικά μηδέν κατά μήκος της ακτίνας αλλά ότι είναι αντισυμμετρική ως προς το τοπικό διάνυσμα r_{loc} . Στα άκρα της διατομής η τιμή της είναι μηδενική. Οι μαζικές δυνάμεις $\bar{F}_r, \bar{F}_\theta$ και οι μαζικές ροπές \bar{C}_z είναι συντηρητικές δυνάμεις (προκύπτουν από δυναμικό) και επομένως είναι συναρτήσεις της γωνίας θ , που σημαίνει

$$\overline{r \cdot F_r} = \bar{r} \cdot \bar{F}_r \quad (6.36)$$

$$\overline{r \cdot F_\theta} = \bar{r} \cdot \bar{F}_\theta \quad (6.37)$$

$$\overline{r \cdot C_z} = \bar{r} \cdot \bar{C}_z \quad (6.38)$$

Για ένα ευθύγραμμο καλώδιο θα είναι $\bar{r}(\theta) \rightarrow \infty$. Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση $\bar{r} \cdot \theta = s$ Η τελευταία σχέση μπορεί να επιλυθεί ως προς τις διατμητικές τάσεις $\bar{\tau}_{\theta r}$, δηλαδή

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \bar{C}_z \quad (6.39)$$

Η παράγωγος της διατμητικής τάσης $\bar{\tau}_{\theta r}$ ως προς την γωνία θ θα είναι

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{\theta r}}{\partial \theta} = -\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial \theta} \quad (6.40)$$

Η αντικατάσταση της σχέσης (6.40) στην σχέση (6.33) θα δώσει

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = -\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial \theta} + \bar{r} \bar{F}_r \quad (6.41)$$

Η παράγωγος της ορθής ακτινικής τάσης $\sigma_{\theta\theta}$ ως προς την γωνία θ θα είναι

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \frac{2}{\bar{r}^3} \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right]^2 \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \theta^2} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^3 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \bar{C}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} \quad (6.42)$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (6.39),(6.42), στην σχέση (6.34) προκύπτει

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^3 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^3} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \left\{ \frac{2}{\bar{r}^3} \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\bar{r}} \right\} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{C}_z}{\partial \theta^2} - \bar{C}_z + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r} \bar{F}_\theta = 0 \quad (6.43)$$

Η τελευταία σχέση καταδεικνύει ότι το πρόβλημα δεν είναι πλέον ισοστατικό όπως συμβαίνει με την κλασική περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι για την επίλυσή του είναι απαραίτητες και οι συνθήκες συμβιβαστού. Από τον συνδυασμό των σχέσεων (6.31) και (6.16) προκύπτει

$$\bar{\sigma}_{rr} = 0 \Rightarrow \lambda(\bar{\varepsilon}_{rr} + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}) + (2\mu + \kappa)\bar{\varepsilon}_{rr} = 0 \quad (6.44)$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (6.12) και (6.13) θα δώσει

$$(2\mu + \kappa + \lambda)\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\lambda}{\bar{r}}\left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r\right) = 0 \quad (6.45)$$

Από τις σχέσεις (6.30) και (6.18) προκύπτει

$$\bar{\tau}_{r\theta} = 0 \Rightarrow (\mu + \kappa)\bar{\varepsilon}_{r\theta} + \mu\bar{\varepsilon}_{\theta r} = 0 \quad (6.46)$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (6.14) και (6.15) θα δώσει

$$(\mu + \kappa)\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\mu}{\bar{r}}\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta\right) - \kappa\bar{\phi}_z = 0 \quad (6.47)$$

Από την σχέση (6.20) των καταστατικών εξισώσεων σε συνδυασμό με την σχέση (6.32) θα εί-
ναι

$$\bar{m}_{rz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial \bar{r}} = 0, \quad \gamma \neq 0 \quad (6.48)$$

$$\bar{m}_{\theta z} = \gamma \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial \theta} \quad (6.49)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\bar{m}_{\theta z} = 0$ ($\gamma = 0$ ή $\bar{\phi}_z = 0$) η αντικατάσταση της σχέσης (6.49) στις εξισώσεις (6.35) και (6.41) θα δώσει, αντίστοιχα

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \bar{C}_z \quad (6.50)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \bar{r}\bar{F}_r + \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial \theta} \quad (6.51)$$

Η αντικατάσταση της τελευταίας στην βασική διαφορική εξίσωση του προβλήματος (6.43) θα δώσει

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z}{\partial \theta^2} - \bar{C}_z + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r} \bar{F}_\theta = 0 \quad (6.52)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση επιδέχεται διττή ερμηνεία, διότι από την μια πλευρά μπορεί να θεωρηθεί μια διαφορική εξίσωση 1^{ου} βαθμού ως προς τον μέσο όρο της καμπυλότητας $\bar{r}(\theta)$, ενώ από την άλλη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διαφορική εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς τις μαζικές ροπές \bar{C}_z . Εάν στην τελευταία ληφθεί $\bar{C}_z = 0$, προκύπτει η κλασική λύση του προβλήματος του καλωδίου όπως δίνεται από την σχέση (6.26). Στην πιο γενική περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε την καμπυλότητα (δηλ. το $\bar{r}(\theta)$ θα είναι γνωστή ποσότητα) και

δεδομένου ότι οι μαζικές ροπές και δυνάμεις, $\bar{C}_z, \bar{F}_r, \bar{F}_\theta$ είναι γνωστές μπορούμε να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση (6.43) ως προς την κατανομή $\bar{m}_{\theta z}$. Στη συνέχεια, από την σχέση (6.49) μπορεί να υπολογιστεί η κατανομή της γωνίας $\bar{\phi}_z(\theta)$. Για να είναι αποδεκτές οι παραπάνω τιμές θα πρέπει σαφώς να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r} \bar{F}_\theta = 0 \quad (6.53)$$

Η τελευταία αποτελεί μια διαφορική 1^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού ως προς \bar{r} . Η επίλυσή της θα δώσει

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r} \bar{F}_\theta = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r} \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{F}_\theta \right) = 0 \xrightarrow{\bar{F}_r \neq 0} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = - \frac{\bar{r} \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{F}_\theta \right)}{\bar{F}_r} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\bar{r}} = - \frac{\left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{F}_\theta \right)}{\bar{F}_r} d\theta \Rightarrow \ln \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} \right) = - \int \frac{\left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{F}_\theta \right)}{\bar{F}_r} d\theta + c_1 \end{aligned} \quad (6.54)$$

Εάν στο καλώδιο ασκείται μόνο το ίδιο βάρος του g , τότε θα είναι

$$\bar{F}_r = -g \sin^2 \theta, \quad \bar{F}_\theta = -g \sin \theta \cos \theta \quad (6.55)$$

Από την εξίσωση (6.53) θα είναι

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\bar{r}_{hom}^{cable}}{\bar{r}_0} \right) &= - \int \frac{(-2g \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \cos \theta)}{-g \sin^2 \theta} d\theta + c_1 \Rightarrow \ln \left(\frac{\bar{r}_{hom}^{cable}}{\bar{r}_0} \right) = - \int \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta + c_1 \\ &\Rightarrow \ln \left(\frac{\bar{r}_{hom}^{cable}}{\bar{r}_0} \right) = -3 \ln(\sin \theta) + c_1 \Rightarrow \frac{\bar{r}_{hom}^{cable}}{\bar{r}_0} = \sin^{-3} \theta + e^{c_1} \Rightarrow \bar{r}_{hom}^{cable} = \frac{\bar{r}_0}{\sin^3 \theta} + c_1' \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ισχύει όμως ότι για $\theta = 0 \rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0$, οπότε από την τελευταία προκύπτει $c_1' = 0$. Άρα η εξίσωση της καμπυλότητας για τον καλωδιωτό φορέα θα είναι

$$\bar{r}_{hom}^{cable} = \frac{\bar{r}_0}{\sin^3 \theta} \quad (6.57)$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί και η περίπτωση της τοξοειδούς κατασκευής. Η κατανομή των μαζικών δυνάμεων σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\bar{F}_r = -g \sin \theta, \quad \bar{F}_\theta = -g \cos \theta \quad (6.58)$$

Η εξίσωση (6.54) διαμορφώνεται σε αυτή την περίπτωση ως εξής

$$\ln \left(\frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0} \right) = - \int \frac{\left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{F}_\theta \right)}{\bar{F}_r} d\theta + c_2 \Rightarrow \ln \left(\frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0} \right) = - \int \frac{-g \cos \theta - g \cos \theta}{-g \sin \theta} d\theta + c_2 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0}\right) = -\int \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta + c_1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0}\right) = -2\ln(\sin\theta) + c_2 \Rightarrow \frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0} = \sin^{-2}\theta + e^{c_2} \Rightarrow \frac{\bar{r}_{hom}^{arc}}{\bar{r}_0} = \sin^{-2}\theta + c'_2 \quad (6.59)$$

Ισχύει όμως ότι για $\theta = 0 \rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0$, οπότε από την τελευταία προκύπτει $c'_2 = 0$. Συνεπώς η εξίσωση της καμπυλότητας για την τοξοειδή κατασκευή θα είναι

$$\bar{r}_{hom}^{arc} = \frac{\bar{r}_0}{\sin^2\theta} \quad (6.60)$$

Για την πλήρη επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2.48) πρέπει να υποθέσουμε μια κατανομή των μαζικών ροπών μέσα στο υλικό. Μια απλή κατανομή, και εύκολα υλοποιήσιμη είναι η

$$\bar{C}_z = g\ell \quad (6.61)$$

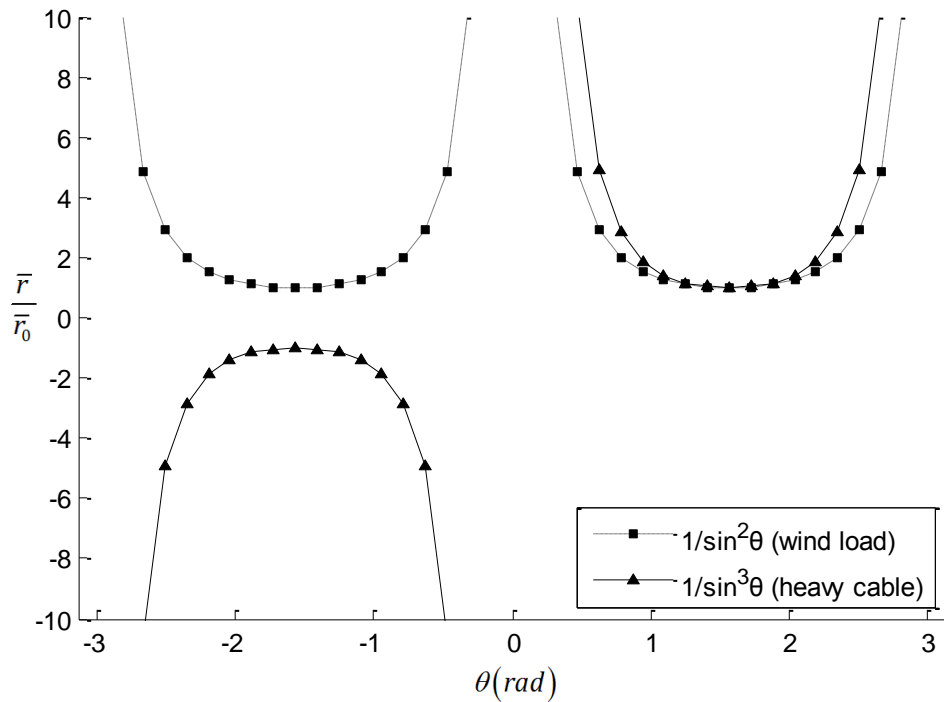
Η σταθερά g έχει διαστάσεις $[N/m^3]$ και είναι κατά κάποιο τρόπο μια μαζική δύναμη, η σταθερά ℓ έχει διαστάσεις μήκους $[m]$ και αναφέρεται σε μια εσωτερική διάσταση του συνδυασμένου υλικού του υφάσματος και της ευφυΐας εντός αυτού⁶. Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2.48) απαιτεί και μια ειδική λύση. Επιλέγουμε την ειδική λύση να έχει παρόμοια μορφή με την λύση της ομογενούς με την διαφορά ότι το \bar{r}_0 δεν είναι πλέον μια σταθερά αλλά μια συνάρτηση της γωνίας θ .

$$\bar{r}_{sp}^{cable} = \frac{\bar{r}_0(\theta)}{\sin^3\theta} \quad (6.62)$$

Η αντικατάσταση των (6.60), (6.62) στην (6.53) για την κατανομή (6.58) θα δώσει

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{r}_{sp}^{cable}}{\partial \theta} \bar{F}_r + \bar{r}_{sp}^{cable} \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r}_{sp}^{cable} \bar{F}_\theta = \bar{C}_z \\ & \Rightarrow -\frac{\partial \bar{r}_0(\theta)}{\partial \theta} \frac{g \sin^2\theta}{\sin^3\theta} + \frac{3\bar{r}_0(\theta) \cos\theta g \sin^2\theta}{\sin^4\theta} - \frac{2\bar{r}_0(\theta) g \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{\bar{r}_0(\theta) g \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta} = g\ell \\ & \Rightarrow -\frac{\partial \bar{r}_0(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{\sin\theta} + \frac{3\bar{r}_0(\theta) \cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{3\bar{r}_0(\theta) \cos\theta}{\sin^2\theta} = g\ell \Rightarrow -\frac{\partial \bar{r}_0(\theta)}{\partial \theta} \frac{1}{\sin\theta} = \ell \Rightarrow \frac{\partial \bar{r}_0(\theta)}{\partial \theta} = -\ell \sin\theta \Rightarrow \bar{r}_0(\theta) = \ell \cos\theta + c_3 \end{aligned} \quad (6.63)$$

⁶ Το εσωτερικό μήκος που αναφέρεται εδώ διαφοροποιείται από την έννοια του εσωτερικού μήκους κατά Mindlin όπου το εσωτερικό μήκος αναφέρεται σαν εγγενής ιδιότητα του υλικού. Εδώ το εσωτερικό μήκος επιβάλλεται στην κατασκευή μέσω της μαζικής ροπής \bar{C}_z και ανάλογα με την τιμή της ροπής αυτής μεταβάλλεται και η τιμή του εσωτερικού μήκους.



Σχ. 6.5. Η καμπυλότητα του καλωδίου σε κανονικοποιημένη μορφή για τους δύο τύπους φόρτισης.

Θεωρώντας ότι επιπλέον της κατανομής (6.58) υπάρχει και μια κατανομή των μαζικών ροπών \bar{C}_z , της μορφής

$$\bar{C}_z = g\ell \quad (6.64)$$

όπου στην τελευταία ℓ είναι ένα εσωτερικό μήκος, μια ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (6.52) θα είναι της μορφής

$$\bar{r}_{sp}^{cable} = \frac{\bar{r}_1(\theta)}{\sin^3\theta} \quad (6.65)$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων (6.64),(6.65) στην διαφορική εξίσωση (6.52) προκύπτει

$$\bar{r}_1(\theta) = \ell \cos\theta + c_3 \quad (6.66)$$

Μια λογική συνοριακή συνθήκη θα μπορούσε να είναι

$$\bar{r}_1(\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (6.67)$$

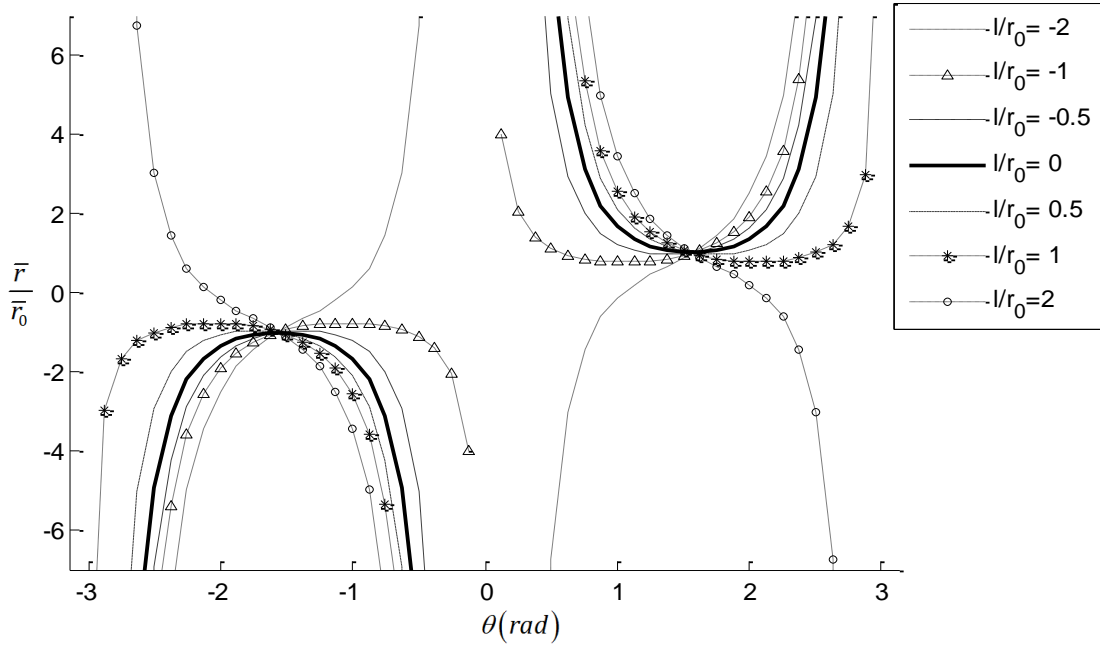
Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ακτίνα καμπυλότητας του καλωδίου θα δίνεται από την σχέση

$$\bar{r}^{cable} = \bar{r}_{hom}^{cable} + \bar{r}_{sp}^{cable} = \frac{\bar{r}_0 + \ell \cos\theta}{\sin^3\theta} \quad (6.68)$$

Συνεπώς, οι διατμητικές και ορθές τάσεις σύμφωνα βάση της (6.68) θα δίνονται από τις σχέσεις

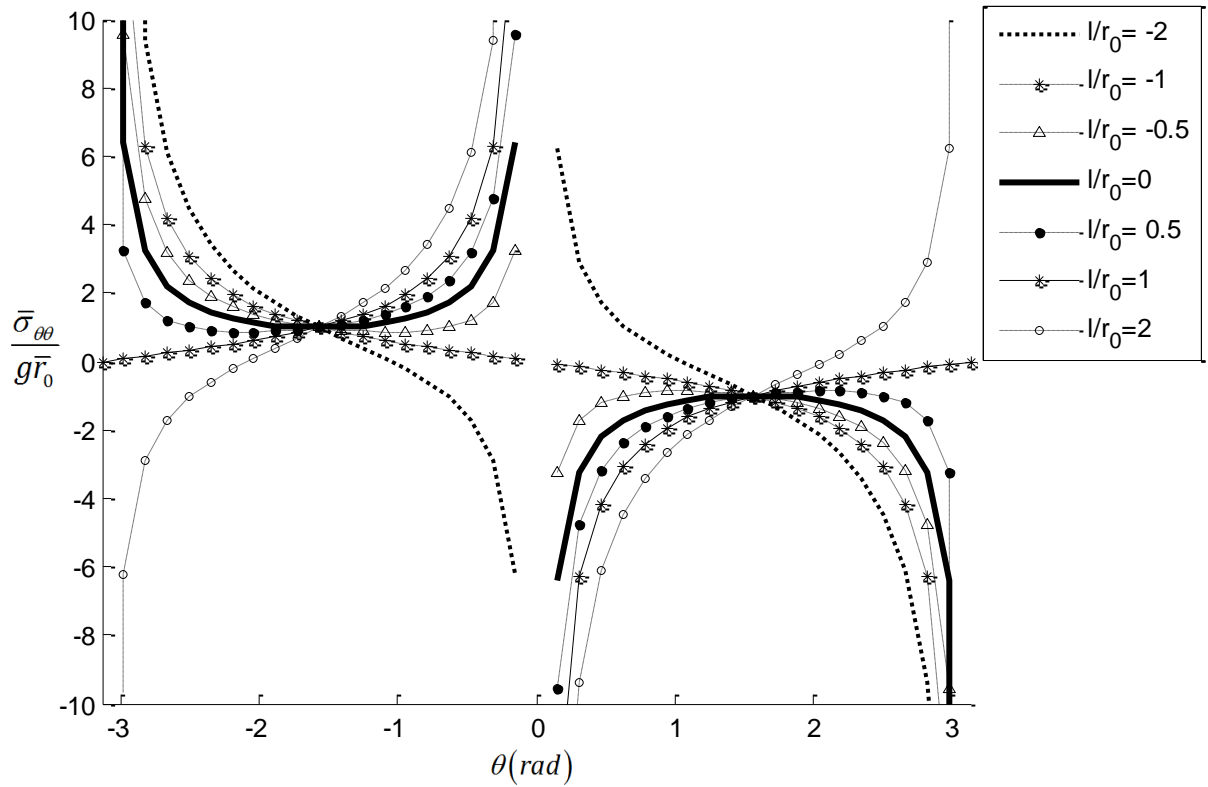
$$\bar{m}_{\theta z} = 0, \quad \bar{\phi}_z = \text{const}, \quad \bar{\tau}_{\theta r} = g\ell, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{-g\bar{r}_0 - g\ell \cos\theta}{\sin\theta} \quad (6.69)$$

Η ακτίνα καμπυλότητας σε κανονικοποιημένη μορφή, $(\bar{r}^{cable}/\bar{r}_0)$, σαν συνάρτηση της γωνίας θ και του εσωτερικού μήκους ℓ/r_0 απεικονίζεται στο Σχ. 6.6. Στο Σχ.6.6 φαίνονται ξεκάθαρα τα σημεία απροσδιοριστίας για τις τιμές $\theta=0, \pm\pi$, όπως και στην κλασσική περίπτωση. Είναι επίσης εμφανές ότι για την περίπτωση $\ell=0$ ανακτάται η κλασσική λύση του προβλήματος.



Σχ. 6.6. Η καμπυλότητα του καλωδιωτού φορέα σε κανονικοποιημένη μορφή για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ . $(\bar{C}_z = g\ell)$

Η ορθή τάση σε κανονικοποιημένη μορφή, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}/(g\bar{r}_0)$, ως συνάρτηση της γωνίας θ απεικονίζεται στο Σχ.6.7, όπου φαίνεται καθαρά ότι εφόσον $\bar{\sigma}_{\theta\theta} \geq 0$ η ποσότητα $g\bar{r}_0$ δύναται να είναι είτε θετική είτε αρνητική.



Σχ. 6.7. Η κανονικοποιημένη ορθή τάση $\frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{g\bar{r}_0}$ σε συνάρτηση με την γωνία θ για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους $\frac{\ell}{\bar{r}_0}$ στην περίπτωση του καλωδιωτού φορέα. ($\bar{C}_z = g\ell$)

Στην περίπτωση όπου στην κατασκευή ασκείται φορτίο ανέμου η ομογενής εξίσωση θα δίνεται από τις σχέσεις (6.60), (6.61) και μια ειδική λύση της θα είναι της μορφής

$$\bar{r}_{sp}^{arc} = \frac{\bar{r}_2(\theta)}{\sin^2 \theta} \quad (6.70)$$

Από την εξίσωση (6.52) θα είναι

$$\bar{r}_2(\theta) = \ell \cos \theta + c_4 \quad (6.71)$$

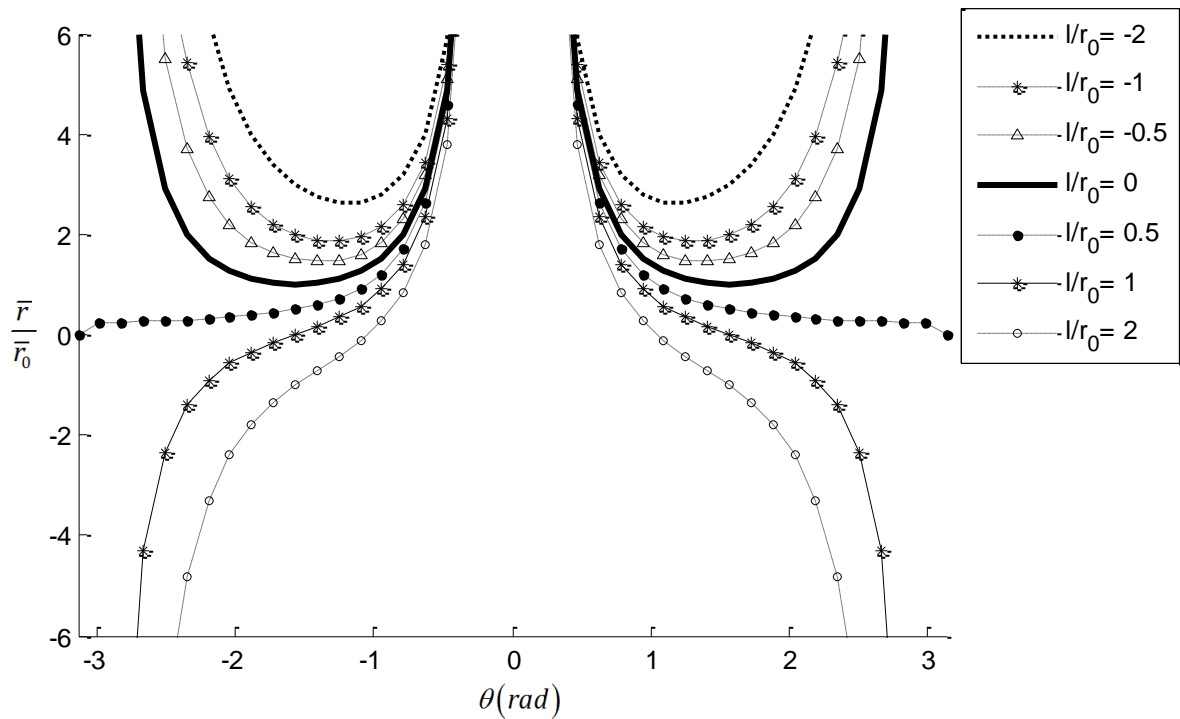
Ενώ η συνοριακή συνθήκη μπορεί να είναι της μορφής

$$\bar{r}_2(\theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (6.72)$$

Η ακτίνα καμπυλότητας σε αυτή την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής

$$\bar{r}^{arc} = \bar{r}_{hom}^{arc} + \bar{r}_{sp}^{arc} = \frac{\bar{r}_0 + \ell(\cos \theta - 1)}{\sin^2 \theta} \quad (6.73)$$

Και σε κανονικοποιημένη μορφή απεικονίζεται στο Σχ.6.8. σε συνάρτηση με την γωνία θ για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους $\frac{\ell}{\bar{r}_0}$.

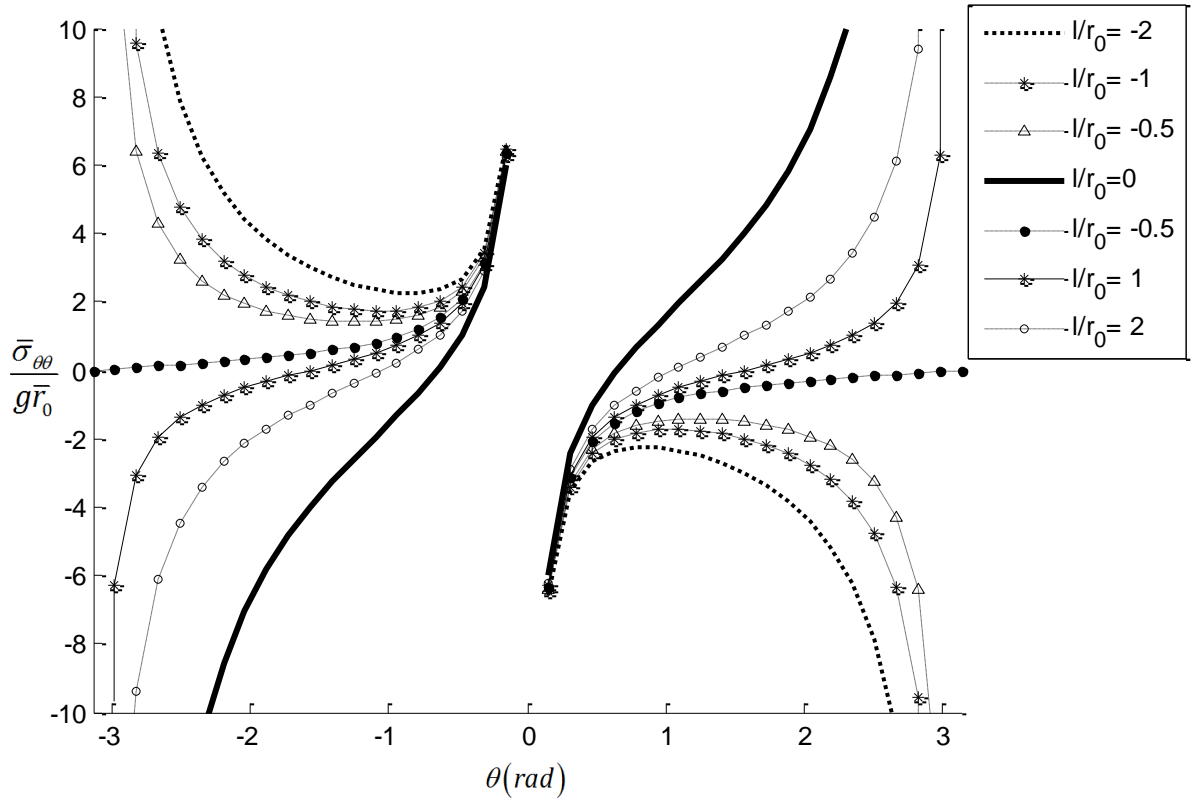


Σχ. 6.8. Η ακτίνα καμπυλότητας σε κανονικοποιημένη μορφή σε συνάρτηση με την γωνία θ για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ ($\bar{C}_z = g\ell$).

Οι διατμητικές και ορθές τάσεις σύμφωνα με την σχέση (6.73) θα διαμορφώνονται ως εξής

$$\bar{m}_{\theta z} = 0, \quad \bar{\phi}_z = \text{const}, \quad \bar{\tau}_{\theta r} = g\ell, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{-g\bar{r}_0 - g\ell(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} \quad (6.74)$$

Οι ορθές τάσεις απεικονίζονται στο Σχ.6.9 σε συνάρτηση με την γωνία θ για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους $\frac{\ell}{\bar{r}_0}$.



Σχ. 6.9. Η κανονικοποιημένη ορθή τάση σαν συνάρτηση $\frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{g\bar{r}_0}$ του θ για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους $\frac{\ell}{\bar{r}_0}$, ($\bar{C}_z = g\ell$).

Για την περίπτωση όπου ο καλωδιωτός φορέας έχει σταθερή καμπυλότητα, δηλ. ($r \equiv r_0$) οι διάφορες ποσότητες παίρνουν την μορφή

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \bar{C}_z \quad (6.75)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial \theta} + \bar{r}_0 \bar{F}_r \quad (6.76)$$

$$\frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial^3 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^3} - \frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{C}_z}{\partial \theta^2} - \bar{C}_z + \bar{r}_0 \frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \theta} + \bar{r}_0 \bar{F}_\theta = 0 \quad (6.77)$$

Λαμβάνοντας την ειδική περίπτωση όπου $\bar{C}_z = 0$ και $\bar{F}_r = \bar{F}_\theta = 0$ από την σχέση (6.77) θα είναι

$$\frac{\partial^3 \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta^3} - \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \quad (6.78)$$

της οποίας η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$\bar{m}_{\theta z}(\theta) = A_0 + A_1 e^\theta + A_2 e^{-\theta} \quad (6.79)$$

όπου A_0, A_1, A_2 είναι σταθερές οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Στο ένα άκρο του καλωδίου όπου $\theta=0$ θα είναι

$$\bar{m}_{\theta z}(0) = \bar{m}_{\theta z}^0 \quad (6.80)$$

ή

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(0) = \frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial^2 \bar{m}_{\theta z}(0)}{\partial \theta^2} = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^0 \quad (6.81)$$

και

$$\bar{\tau}_{\theta r}(0) = \frac{1}{\bar{r}_0} \frac{\partial \bar{m}_{\theta z}(0)}{\partial \theta} = \bar{\tau}_{\theta r}^0 \quad (6.82)$$

Για $\theta = \theta_f$ μπορούμε να επιλέξουμε μια από τις ακόλουθες συνθήκες

$$\bar{m}_{\theta z}(\theta_f) = \bar{m}_{\theta z}^f \quad (6.83)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_f) = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f \quad (6.84)$$

$$\bar{\tau}_{\theta r}(\theta_f) = \bar{\tau}_{\theta r}^f \quad (6.85)$$

Από τις σχέσεις (6.79) και (6.80) θα είναι

$$A_0 + A_1 + A_2 = \bar{m}_{\theta z}^0 \quad (6.86)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (6.79) και (6.81) προκύπτει

$$A_1 + A_2 = \bar{r}_0 \bar{\sigma}_{\theta\theta}^0 \quad (6.87)$$

Ενώ από τις σχέσεις (6.79) και (6.82) θα είναι

$$A_1 - A_2 = \bar{r}_0 \bar{\tau}_{\theta r}^0 \quad (6.88)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (6.86), (6.87), (6.88) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιλέγοντας $\bar{m}_{\theta z}(\theta_f) = 0$ η σχέση (6.79) θα δώσει

$$A_0 + A_1 e^{\theta_f} + A_2 e^{-\theta_f} = 0 \quad (6.89)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (6.86), (6.88) και (6.89) διαμορφώνει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, τις σταθερές A_0, A_1, A_2 , δηλ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & e^{\theta_f} & e^{-\theta_f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{\theta z}^0 \\ \bar{r}_0 \bar{\tau}_{\theta r}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προκύπτουν οι τιμές των σταθερών, δηλ

$$A_0 = \frac{\bar{m}_{\theta z}^0 (e^{2\theta_f} + 1)}{(e^{\theta_f} - 1)^2} + \frac{\bar{r}_0 \bar{\tau}_{\theta r}^0 (e^{\theta_f} + 1)}{(e^{\theta_f} - 1)} \quad (6.91)$$

$$A_1 = -\frac{\bar{m}_{\theta z}^0}{e^{-\theta_f} + e^{\theta_f} - 2} - \frac{\bar{r}_0 \bar{\tau}_{\theta r}^0}{e^{\theta_f} - 1} \quad (6.92)$$

$$A_2 = -\frac{\bar{m}_{\theta z}^0}{e^{-\theta_f} + e^{\theta_f} - 2} - \frac{\bar{r}_0 \bar{\tau}_{\theta r}^0 e^{\theta_f}}{e^{\theta_f} - 1} \quad (6.93)$$

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την περίπτωση όπου η καμπυλότητα θα δίνεται από εμάς και θα εισπράττουμε μια μαζική ροπή C_z . Υπάρχει και το αντίστροφο πρόβλημα όπου θα δίνεται η μαζική ροπή στο σύστημα και αυτό θα αποδίδει μια συγκεκριμένη καμπυλότητα. Η βασική εξίσωση που απεικονίζει και τα δύο προβλήματα είναι η διαφορική εξίσωση (6.52), την οποία μέχρι τώρα την αντιμετωπίζαμε σαν μια διαφορική 1^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού ως προς την καμπυλότητα, \bar{r} . Η ίδια εξίσωση μπορεί να αντιμετωπιστεί και σαν μια διαφορική 2^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού ως προς την μαζική ροπή C_z . Η αντίστοιχη ομογενής θα είναι

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z}{\partial \theta^2} - \bar{C}_z = 0 \quad (6.94)$$

Θεωρώντας ότι η λύση της τελευταίας θα είναι της μορφής

$$\bar{C}_z = e^{m\theta} \quad (6.95)$$

με αντικατάσταση στην εξίσωση (6.94) θα είναι

$$m^2 e^{m\theta} - e^{m\theta} = 0 \Rightarrow e^{m\theta} (m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \quad (6.96)$$

Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης (6.94) θα είναι

$$\bar{C}_z^{hom} = c_5 e^{\theta} + c_6 e^{-\theta} \quad (6.97)$$

Για πρακτικούς λόγους είναι πιο πρόσφορο αντί της γωνίας θ να χρησιμοποιηθεί μια επικαμπύλια μεταβλητή s η οποία θα περιγράφει την τοπολογία της κατασκευής με ένα πιο εύχρηστο και άμεσο τρόπο. Από την γεωμετρία του φορέα και για σταθερή ακτίνα καμπυλότητας $\bar{r} = \bar{r}_0$, θα είναι

$$s = \theta \bar{r}_0 \Rightarrow \theta = \frac{s}{\bar{r}_0} \quad (6.98)$$

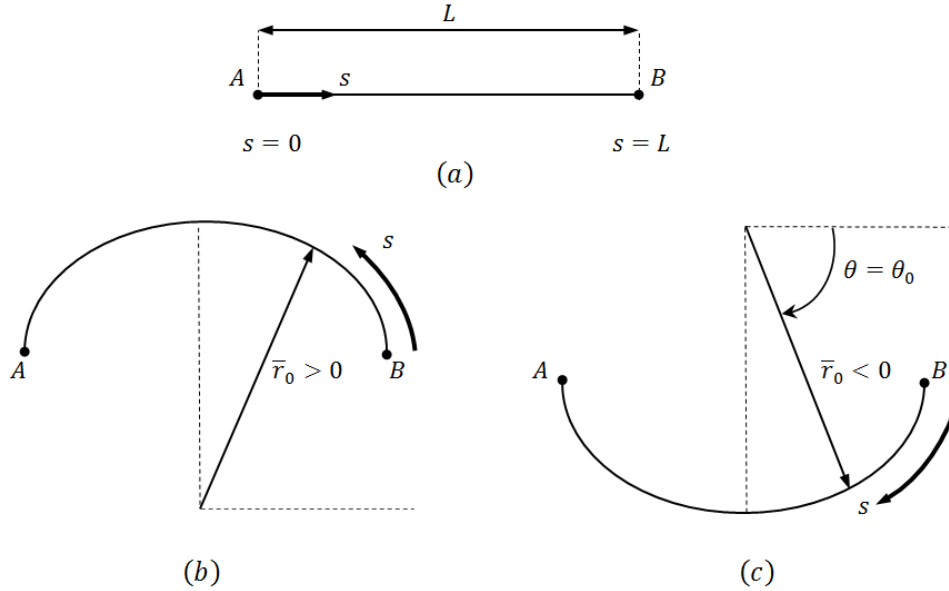
Μέσω της (6.98) η εξίσωση (6.97) γίνεται

$$\bar{C}_z^{hom} = c_5 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_6 e^{-\frac{s}{\bar{r}_0}} \quad (6.99)$$

Για την εξίσωση (2.48) μπορούμε να θεωρήσουμε τέσσερις βασικές περιπτώσεις για την κατανομή των μαζικών δυνάμεων, όπου θα είναι

1. $\bar{r} = \bar{r}_0$ and $\bar{F}_r = \bar{F}_\theta = 0$ (απουσία μαζικών δυνάμεων)

2. $\bar{r} = \bar{r}_0$ and $\bar{F}_r = 0$, $\bar{F}_\theta = \bar{F}_{\theta 0} \neq 0$ (φορτίο τύπου «τριβής»)
3. $\bar{r} = \bar{r}_0$ and $\bar{F}_r = \bar{F}_{r_0} \neq 0$, $\bar{F}_\theta = 0$ (φορτίο τύπου «ανέμου»)
4. $\bar{r} = \bar{r}_0$ and $\bar{F}_r = \bar{F}_{r_0}$, $\bar{F}_\theta = \mu \bar{F}_{r_0}$ (συνδυασμός φορτίου «τριβής» και ανέμου»)



Σχ. 6.10. (α) Ο απαραμόρφωτος φορέας, παραμορφωμένος φορέας (β) με θετική καμπυλότητα, (γ) με αρνητική καμπυλότητα.

$$\bullet \bar{r} = \bar{r}_0, \bar{F}_r = \bar{F}_\theta = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαφορική εξίσωση (6.52) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z(s)}{\partial s^2} - \bar{C}_z(s) = 0 \quad (6.100)$$

με λύση την σχέση (2.84). Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει επίσης

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \bar{C}_z \Rightarrow \bar{\tau}_{\theta r} = c_5 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_6 e^{-\frac{s}{\bar{r}_0}} \quad (6.101)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial s} \Rightarrow \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{\bar{r}_0} \left(c_5 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} - c_6 e^{-\frac{s}{\bar{r}_0}} \right) \quad (6.102)$$

$$\bar{m}_{\theta z} = 0 \quad (6.103)$$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις επιλέχτηκε η καμπυλότητα να έχει μια σταθερή και γνωστή τιμή διότι στην πράξη εφαρμόζουμε μια προκαθορισμένη καμπυλότητα. Σε ένα πρόβλημα ρομποτικής εκείνο που γνωρίζουμε είναι η καμπυλότητα αφού αυτή εφαρμόζουμε εμείς, π.χ. σε ένα υφασμάτινο μοχλοβραχίονα με τον οποίο θέλουμε να επέμβουμε σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια είναι η καμπυλότητα που επιθυ-

μούμε να εφαρμόσουμε. Επιπρόσθετα, η παραμόρφωση και η φόρτιση θα είναι γνωστά μεγέθη απλά εδώ θεωρούμε κάποιες συγκεκριμένες κατανομές φόρτισης για την επίλυση του προβλήματος. Αυτές οι κατανομές μπορεί να έχουν οποιαδήποτε άλλη μορφή. Όσον αφορά τις σταθερές που εμφανίζονται κατά την επίλυση του προβλήματος αυτές υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες της κατασκευής. Το πλέον βασικό ζήτημα είναι ότι γνωρίζουμε την τιμή της μαζικής ροπής \bar{C}_z σε κάθε σημείο της κατασκευής. Την μαζική ροπή την ελέγχουμε για παράδειγμα μέσα από την ένταση του ρεύματος που διέρχεται μέσα από τις ίνες που διατρέχουν την κατασκευή. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε τιμή της γωνίας θ ή καλύτερα για κάθε τιμή της επικαμπύλιας μεταβλητής s , η τιμή της μαζικής ροπής είναι γνωστή. Αξίζει να επισημανθεί ότι η μαζική ροπή στο συγκεκριμένο πρόβλημα εφαρμόζεται μέσω της καμπυλότητας \bar{r} με ένα αμφίδρομο τρόπο καθώς η καμπυλότητα μπορεί να είναι είτε θετική, $\bar{r} > 0$, είτε αρνητική, $\bar{r} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι ανάλογα με την πολικότητα που εφαρμόζουμε, δηλ. την φορά του ρεύματος, μπορούμε να λάβουμε μια συγκεκριμένη καμπυλότητα. Θα μπορούσε η μαζική ροπή να εφαρμόζεται μέσω ενός χημικού δυναμικού όπου η αντίστροφη διαδικασία δεν θα ήταν εφικτή.

$$\bullet \bar{r} = \bar{r}_0, \bar{F}_r = 0, \bar{F}_\theta = \bar{F}_{\theta 0} \neq 0$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαφορική εξίσωση (6.52) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z(s)}{\partial s^2} - \bar{C}_z(s) + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} = 0 \quad (6.104)$$

Η τελευταία μπορεί να διαμορφωθεί και ως εξής

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z(s)}{\partial s^2} - \bar{C}_z(s) = -\bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} \quad (6.105)$$

Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς έχουν βρεθεί στα προηγούμενα και δίνονται από την σχέση (6.97), δηλ.

$$y_1 = \bar{C}_z^{(1)} = e^{\frac{s}{\bar{r}_0}}, y_2 = \bar{C}_z^{(2)} = e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \quad (6.106)$$

Ορίζουμε το γινόμενο⁷

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \left(\frac{-1}{\bar{r}_0} \right) - e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \frac{1}{\bar{r}_0} = -\frac{1}{\bar{r}_0} \left[e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \right] \quad (6.107)$$

Η ειδική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.104) θα δίνεται από την σχέση

$$\bar{C}_z^{sp} = -e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \int \frac{e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} (-\bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0})}{-\frac{1}{\bar{r}_0} \left[e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \right]} \frac{1}{\bar{r}_0} ds + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \int \frac{e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} (-\bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0})}{-\frac{1}{\bar{r}_0} \left[e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \right]} \frac{1}{\bar{r}_0} ds \Rightarrow \bar{C}_z^{sp} = -\bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \int \frac{1}{e^{\frac{2s}{\bar{r}_0}} + 1} ds + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \int \frac{1}{1 + e^{\frac{-2s}{\bar{r}_0}}} ds$$

⁷ Αυτό το γινόμενο αναφέρεται και σαν ορίζουσα του Wronski.

$$\Rightarrow \bar{C}_z^{sp} = -\bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \left[s - \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right] + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \left[s + \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{-2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right] \quad (6.108)$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (6.104) θα είναι

$$\begin{aligned} \bar{C}_z &= c_7 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_8 e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} - \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \left[s - \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right] + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \left[s + \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{-2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right] \\ \Rightarrow \bar{C}_z &= e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \left[c_7 - \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} \left(s - \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \left[c_8 + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta 0} \left(s + \frac{\bar{r}_0 \ln \left(e^{\frac{-2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.109)$$

Η τελευταία μπορεί να γραφεί και σε πιο απλοποιημένη μορφή ως εξής

$$\bar{C}_z = e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} \left[c_7 - K \left(\frac{s}{\bar{r}_0} - \frac{\ln \left(e^{\frac{2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] + e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \left[c_8 + K \left(\frac{s}{\bar{r}_0} + \frac{\ln \left(e^{\frac{-2s}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] \quad (6.110)$$

$$K = \bar{r}_0^2 \bar{F}_{\theta 0} = \text{const} \quad (6.111)$$

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \bar{C}_z \Rightarrow \bar{\tau}_{\theta r} = c_7 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_8 e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \quad (6.112)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta \theta} = \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial s} \Rightarrow \bar{\sigma}_{\theta \theta} = \frac{1}{\bar{r}_0} \left(c_7 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} - c_8 e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \right) \quad (6.113)$$

$$\bar{m}_{\theta z} = 0 \quad (6.114)$$

Συνοριακές συνθήκες

$$\bar{C}_z(s=0) = \bar{C}_{z0} \Rightarrow \bar{C}_{z0} = \left[c_7 - K \left(-\frac{\ln 2}{2} \right) \right] + \left[c_8 + K \frac{\ln 2}{2} \right] \Rightarrow c_7 + c_8 = \bar{C}_{z0} + K \ln 2 \quad (6.115)$$

$$\bar{C}_z(s=L) = \bar{C}_{zL} \Rightarrow e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} \left[c_7 - K \left(\frac{L}{\bar{r}_0} - \frac{\ln \left(e^{\frac{2L}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] + e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} \left[c_8 + K \left(\frac{L}{\bar{r}_0} + \frac{\ln \left(e^{\frac{-2L}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \right) \right] = \bar{C}_{zL} \quad (6.116)$$

Οι δύο τελευταίες αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και από την επίλυσή του προκύπτει

$$c_8 = \frac{\bar{C}_{zL} - e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} (\bar{C}_{z0} + K \ln 2) + e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} K Q_1 - e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} K Q_2}{e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} - e^{\frac{L}{\bar{r}_0}}} \quad (6.117)$$

$$c_7 = \bar{C}_{z0} + K \ln 2 - \frac{\bar{C}_{zL} - e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} (\bar{C}_{z0} + K \ln 2) + e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} K Q_1 - e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} K Q_2}{e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} - e^{\frac{L}{\bar{r}_0}}} \quad (6.118)$$

$$Q_1 = \frac{L}{\bar{r}_0} - \frac{\ln \left(e^{\frac{2L}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \quad (6.119)$$

$$Q_2 = \frac{L}{\bar{r}_0} + \frac{\ln \left(e^{\frac{-2L}{\bar{r}_0}} + 1 \right)}{2} \quad (6.120)$$

Μια εναλλακτική συνοριακή συνθήκη, στην θέση της (6.116) θα μπορούσε να ήταν η εξής

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(s=L) = 0 \Rightarrow c_7 e^{\frac{L}{\bar{r}_0}} - c_8 e^{\frac{-L}{\bar{r}_0}} = 0 \Rightarrow \frac{c_7}{c_8} = e^{\frac{-2L}{\bar{r}_0}} \quad (6.121)$$

Σε αυτή την περίπτωση η τελευταία σε συνδυασμό με την (6.115) θα δώσει

$$c_7 = \frac{\bar{C}_{z0} + K \ln 2}{1 + e^{\frac{2L}{\bar{r}_0}}}, \quad c_8 = e^{\frac{2L}{\bar{r}_0}} \left(\frac{\bar{C}_{z0} + K \ln 2}{1 + e^{\frac{2L}{\bar{r}_0}}} \right) \quad (6.122)$$

$$\bullet \bar{r} = \bar{r}_0, \bar{F}_{r0} = \bar{F}_r \neq 0, \bar{F}_\theta = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαφορική εξίσωση (6.52) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z(s)}{\partial s^2} - \bar{C}_z(s) = 0 \quad (6.123)$$

Η τελευταία έχει λύση την εξίσωση που δίνεται από την σχέση (2.84), δηλ.

$$\bar{C}_z(s) = c_9 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_{10} e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \quad (6.124)$$

Επιπρόσθετα θα ισχύουν τα εξής

$$\bar{\tau}_{\theta r} = \bar{C}_z \Rightarrow \bar{\tau}_{\theta r} = c_9 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} + c_{10} e^{\frac{-s}{\bar{r}_0}} \quad (6.125)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\partial \bar{C}_z}{\partial s} \Rightarrow \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{\bar{r}_0} \left(c_9 e^{\frac{s}{\bar{r}_0}} - c_{10} e^{-\frac{s}{\bar{r}_0}} \right) \quad (6.126)$$

$$\bar{m}_{\theta z} = 0 \quad (6.127)$$

$$\bullet \bar{r} = \bar{r}_0, \bar{F}_r = \bar{F}_{r0}, \bar{F}_\theta = \bar{F}_{\theta0}, \bar{F}_{\theta0} = \mu \bar{F}_{r0}$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαφορική εξίσωση (6.52) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_z(s)}{\partial \theta^2} - \bar{C}_z(s) + \bar{r}_0 \bar{F}_{\theta0} = 0 \quad (6.128)$$

Η τελευταία είναι ίδια με την (6.104) και η λύση της δίνεται από την σχέση (6.106).

Κεφάλαιο 7

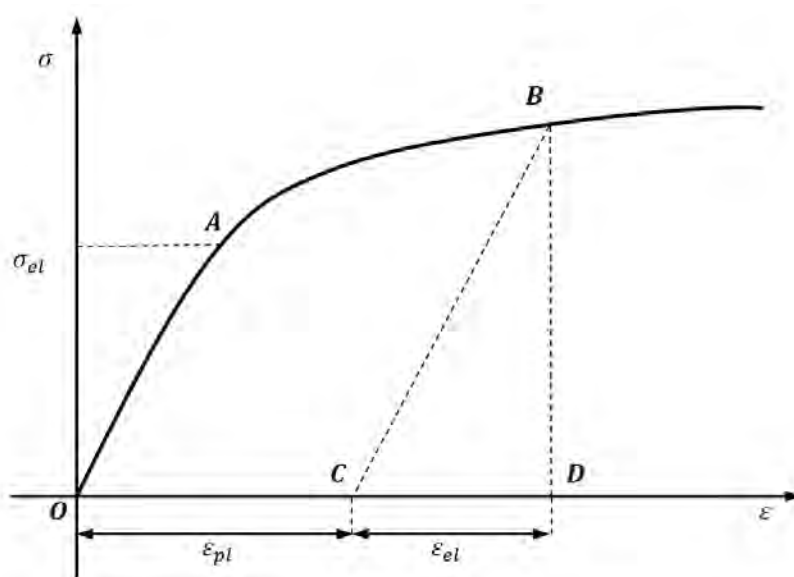
Η ανάλυση της μικροδομής

7.1. Εισαγωγή

Ένας σύγχρονος μηχανικός καλείται να δώσει τεκμηριωμένες και ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ζητήματα που σχετίζονται με τον σχεδιασμό και την ανάλυση κατασκευών που επιτελούν ένα συγκεκριμένο σκοπό. Οι κατασκευές, ακολουθώντας τους ρυθμούς της εποχής, γίνονται ολοένα και πιο περίπλοκες και εξειδικευμένες προκειμένου να ανταποκριθούν στις σύγχρονες ανάγκες. Αυτή η εξέλιξη επιβάλλει στον μηχανικό να δίνει απαντήσεις πλήρως τεκμηριωμένες και αξιολογημένες.

Η ορθολογική μελέτη μιας οποιασδήποτε κατασκευής προϋποθέτει την υιοθέτηση μιας συγκεκριμένης θεωρίας η οποία να αντικατοπτρίζει όσο το δυνατόν πειστικότερα την πραγματική μηχανική συμπεριφορά της. Η οποιαδήποτε θεωρία οφείλει να υπακούει σε ορισμένους βασικούς αξιωματικούς κανόνες οι οποίοι αναφέρονται κυρίως στους νόμους της Φυσικής. Στην Μηχανική των σωμάτων υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες θεωριών. Η πρώτη είναι γνωστή σαν θεωρία της Ελαστικότητας η οποία έχει τεκμηριωθεί και επαληθευτεί σε πολύ ικανοποιητικό επίπεδο από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα περίπου. Είναι γνωστό πως όταν εφαρμόζεται ένα φορτίο σε ένα σώμα το σώμα αυτό εκδηλώνει μια παραμόρφωση. Η βασική αρχή της θεωρίας της Ελαστικότητας είναι ότι η απομάκρυνση του φορτίου από το σώμα, αποφορτίζοντάς το, το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση, την κατάσταση πριν την επιβολή του φορτίου. Η Ελαστικότητα δέχεται με απλά λόγια την αντιστρεψιμότητα της όλης διαδικασίας φόρτισης – αποφόρτισης αρκεί το φορτίο να μην υπερβεί μια συγκεκριμένη τιμή, το ελαστικό όριο του σώματος. Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στην θεωρία της Πλαστικότητας η οποία άρχισε να μελετάται στις αρχές της δεκαετίας του '50 και έως σήμερα έχει φτάσει σε ένα πολύ ικανοποιητικό επίπεδο τεκμηρίωσης. Η θεωρία της Πλαστικότητας εξετάζει την μηχανική συμπεριφορά του σώματος στην περίπτωση που η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου ξεπεράσει το ελαστικό όριο. Σε αυτή την περίπτωση, η αποφόρτιση του σώματος οδηγεί σε μόνιμη παραμόρφωση του σώματος και η όλη διαδικασία χαρακτηρίζεται μη αντιστρέψιμη. Είναι σαφές, και από το Σχ.7.1, ότι στην περίπτωση που το φορτίο δεν υπερβαίνει την τιμή σ_{el} η υιοθέτηση αμιγώς της ελαστικής θεωρίας απαντά στα ζητήματα της μηχανικής συμπεριφοράς το σώματος.

Όταν η πλαστική παραμόρφωση του σώματος είναι αρκετά μεγαλύτερη από την ελαστική, $\varepsilon_{pl} \gg \varepsilon_{el}$, οι απαντήσεις δίνονται μέσα από την υιοθέτηση μιας αμιγούς πλαστικής θεωρίας. Κρίσιμα και ουσιώδη ερωτήματα ανακύπτουν στην περίπτωση όπου οι δύο παραμορφώσεις, ε_{el} και ε_{pl} , είναι συγκρίσιμες σε μέγεθος. Τίθεται ευθέως, λοιπόν, το ερώτημα ποια είναι η κατάλληλη θεωρία που ερμηνεύει ακριβέστερα την συμπεριφορά του σώματος σε αυτή την περίπτωση. Αυτό είναι το ερώτημα το οποίο αναδεικνύει μια καινούρια θεωρία, την θεωρία της ελαστοπλαστικότητας, η οποία οριοθετείται κάπου ενδιάμεσα στις δύο βασικές θεωρίες της ελαστικότητας και της πλαστικότητας.



Σχ. 7.1. Το διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων για μέταλλο υπό μονοαξονικό εφελκυσμό.

Η ελαστοπλαστική θεωρία καλείται να δώσει απαντήσεις στην περίπτωση των σωμάτων που εκδηλώνουν μεγάλες παραμορφώσεις, τόσο ελαστικές όσο και πλαστικές, κατά την διάρκεια της εξωτερικής φόρτισης. Σε αυτή την κατηγορία εμπίπτουν και οι υφασμάτινες κατασκευές μιας και εκ κατασκευής τους παρουσιάζουν μεγάλη παραμορφωσιμότητα ακόμη και με την επιβολή μικρών φορτίων, κυρίως διατμητικών. Βέβαια, θα πρέπει να αποσαφηνιστεί σε αυτό το σημείο ότι η ελαστοπλαστική θεωρία θα εφαρμοστεί στα υφασμάτινα υλικά με την έννοια των μεγάλων διατμητικών παραμορφώσεων και όχι με την έννοια της πλαστικοποίησης της διατομής του υλικού λόγω διαρροής.

7.2. Πεπερασμένες ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις

Η μοντελοποίηση και ο υπολογισμός των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή διότι παρουσιάζονται κάποιες ιδιαιτερότητες σε σχέση με τις γραμμικές παραμορφώσεις. Η ιδιαιτερότητα πηγάζει από το γεγονός ότι κατά την ανάλυση των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων είναι απαραίτητη η γνώση τουλάχιστον δύο καταστάσεων του σώματος κατά την διάρκεια της παραμόρφωσής του, της αρχικής – απαράμορφωτης και της τρέχουσας - παραμορφωμένης. Είναι απαραίτητη με άλλα λόγια η ιστορία της παραμόρφωσης (deformation history). Στην περίπτωση των ρευστών η γνώση της παρούσας κατάστασης του σώματος είναι επαρκής ενώ στα στερεά σώματα, για μικρές παραμορφώσεις, οι διαφορές ανάμεσα στην αρχική και την τελική κατάσταση του σώματος είναι τόσο μικρές ώστε οι δύο καταστάσεις να θεωρούνται σχεδόν ταυτόσημες. Οι διαφορές της αρχικής και τελικής κατάστασης του σώματος από μαθηματικής απόψεως εκφράζονται μέσα από κάποιους όρους δεύτερης ή και ανώτερης τάξης οι οποίοι σχετίζονται με τις μετατοπίσεις και εν γένει είναι μη γραμμικοί. Συνεπώς, η ανάλυση των ρευστών ή των στερεών σωμάτων με τις θεωρίες των μικρών ή των μεγάλων παραμορφώσεων εξαρτάται από το εάν αυτοί οι όροι ανώτερης τάξης

λαμβάνονται υπόψη ή όχι. Είναι γνωστές οι σχέσεις των παραμορφώσεων (E_{ij}) σε συνάρτηση με τις μετατοπίσεις (u_i) του σώματος σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (X_i)

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right\} \quad (7.1)$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right\} \quad (7.2)$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right\} \quad (7.3)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right] \quad (7.4)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right] \quad (7.5)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right] \quad (7.6)$$

Στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας και των μικρών παραμορφώσεων τα γινόμενα και τα τετράγωνα των μετατοπίσεων θεωρούνται μικρές ποσότητες και δεν λαμβάνονται υπόψη. Στην ελαστοπλαστική θεωρία όλοι οι όροι των μετατοπίσεων συμμετέχουν ενεργά στην ανάλυση και εκφράζουν την γεωμετρική μη γραμμικότητα του υλικού.

Η τάση ορίζεται από την δύναμη που ασκείται στην πραγματική επιφάνεια του υλικού. Σαν πραγματική επιφάνεια θεωρείται η επιφάνεια του σώματος σε κάθε στάδιο της παραμόρφωσής του. Επειδή η αρχική και η τελική κατάσταση του σώματος θεωρούνται σχεδόν ίδιες τόσο η δύναμη όσο και η επιφάνεια εφαρμογής της δεν αλλάζουν και έτσι ο ορισμός της τάσης είναι μια σχετικά εύκολη υπόθεση. Πρακτικά, η τάση ορίζεται από τον λόγο της δύναμης ως προς την αρχική απαραμόρφωτη επιφάνεια του σώματος. Στην περίπτωση των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων ο ορισμός της τάσης παύει να είναι μια τετριμμένη υπόθεση διότι η επιφάνεια του σώματος δεν είναι σταθερή κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης και μεταβάλλεται συνεχώς. Εξάλλου, πέραν της επιφάνειας του σώματος ούτε και η δύναμη παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης γεγονός που σημαίνει ότι για την ανάλυση τέτοιων παραμορφώσεων είναι αναγκαία η χρήση μη γραμμικών μαθηματικών σχέσεων. Από τα παραπάνω αναδεικνύεται η ανάγκη να βρεθεί ένας τρόπος να οριστεί η τάση, καθώς και άλλες κινηματικές ή κινητικές ποσότητες, με έναν ακριβή και αξιόπιστο τρόπο ώστε η ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των σωμάτων, στην περίπτωση των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων, να είναι ακριβής.

7.2.1. Ομογενείς ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις

Οι ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων διαχωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τις ομογενείς και τις μη ομογενείς. Από φυσικής απόψεως αυτός ο διαχωρισμός έγκει-

ται στο τρόπο με τον οποίο η παραμόρφωση κατανέμεται στο σώμα. Αν η παραμόρφωση είναι ακριβώς η ίδια για όλα τα σημεία του σώματος τότε η παραμόρφωση θα θεωρείται ομογενής. Σε αυτή την περίπτωση όλα τα υλικά σημεία του σώματος θα θεωρείται ότι υπόκεινται την ίδια μετατόπιση, την ίδια επιμήκυνση και την ίδια στρόφη. Από μαθηματικής απόψεως ο διαχωρισμός έχει να κάνει με το γεγονός ότι στην περίπτωση της ομογενούς παραμόρφωσης η βαθμίδα του τανυστή της παραμόρφωσης \mathbf{F} , είναι ανεξάρτητη των υλικών συντεταγμένων \mathbf{X} . Όταν ο τανυστής \mathbf{F} εξαρτάται από τις συντεταγμένες του υλικού σημείου η παραμόρφωση θεωρείται μη ομογενής ή ανομοιογενής. Ο διαχωρισμός μπορεί να γίνει με ισοδύναμο τρόπο υιοθετώντας την έννοια της παραμορφωσιακής ενέργειας του σώματος όπου στην ομογενή περίπτωση η ενέργεια εξαρτάται μόνο από τον τανυστή \mathbf{F} , ενώ στην ανομοιογενή εξαρτάται από την θέση του υλικού σημείου. Στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρείται ότι οι όλες οι παραμορφώσεις είναι ομογενείς.

2.3. Μεγέθη μέτρησης των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων

2.3.1. Οι τανυστές της παραμόρφωσης

Μέχρι τώρα έχει γίνει μια συγκριτική αναφορά στις μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις σε ποιοτικό επίπεδο. Στην ανάλυση των σωμάτων κάτι τέτοιο δεν είναι αρκετό και για αυτό απαιτείται μια ποσοτικοποίηση των πραγμάτων. Συνεπώς κρίνεται αναγκαία η εισαγωγή κάποιων μεγεθών που θα μετρούν με αξιόπιστο και ακριβή τρόπο τα διάφορα μεγέθη που είναι απαραίτητα για την μηχανική ανάλυση του σώματος. Σε αυτή την παράγραφο θα εκτεθούν συνοπτικά τα μεγέθη μέτρησης των παραμορφώσεων.

Η βαθμίδα του τανυστή της παραμόρφωσης \mathbf{F} , αποτελεί την βασική ποσότητα που χρησιμοποιείται για την μέτρηση της *τοπικής παραμόρφωσης* και της *τοπικής στρόφης* μέσω της γεωμετρίας του σώματος. Ουσιαστικά, απεικονίζει με γραμμικό τρόπο μια μικρή περιοχή του απαραμόρφωτου σώματος σε μια μικρή περιοχή του παραμορφωμένου σώματος. Στην ειδική περίπτωση όπου η παραμόρφωση του σώματος δεν περιλαμβάνει καθόλου στρόφη τότε προφανώς θα ισχύει ότι $\mathbf{F} = \mathbf{I}$. Εάν η κίνηση περιλαμβάνει μόνο στρόφη στερεού σώματος τότε $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, όπου \mathbf{R} είναι ένας ορθογωνικός τανυστής ο οποίος θα ικανοποιεί την σχέση $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Η μαθηματική σχέση που περιγράφει την γραμμική απεικόνιση ενός ευθύγραμμου τμήματος $d\mathbf{X}$, στην αρχική κατάσταση, σε ένα ευθύγραμμο τμήμα $d\mathbf{x}$, στην τελική κατάσταση, θα είναι

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (7.8)$$

Θεωρούμε δύο σημεία A και B , στην αρχική κατάσταση, τα οποία έχουν μια απόσταση μεταξύ τους dS . Η θέση του σημείου B ως προς το σημείο A θα δίνεται από ένα διάνυσμα θέσης $d\mathbf{X}$ το οποίο θα δίνεται από την σχέση

$$d\mathbf{X} = dX_A \mathbf{I}_A, \quad A = 1, 2, 3 \quad (7.9)$$

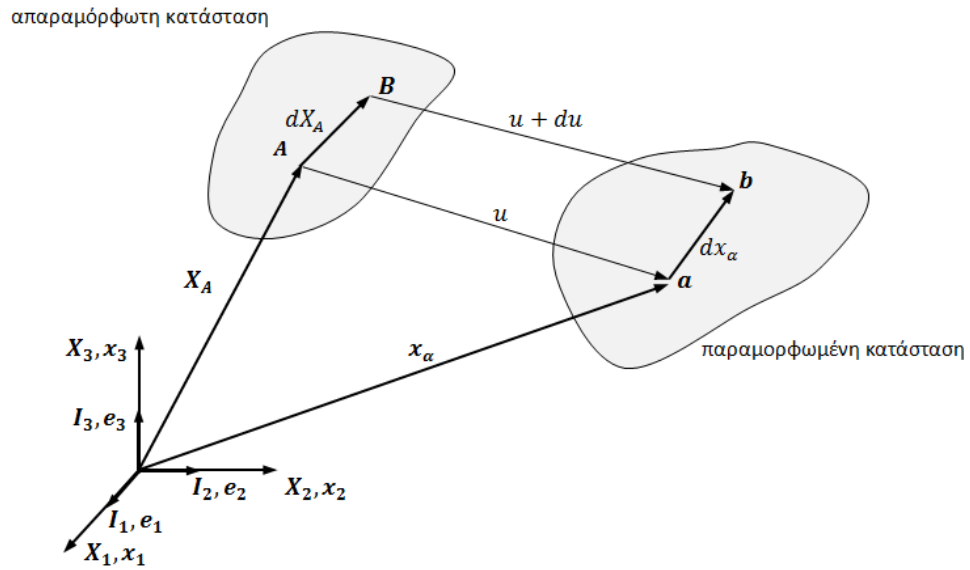
Το μέτρο της απόστασης των δύο σημείων θα δίνεται από την σχέση

$$(dS)^2 = dX_A dX_A \quad (7.10)$$

Υιοθετώντας την ίδια λογική για τα σημεία a και b , στην τελική κατάσταση, των οποίων η απόσταση είναι ds , προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις

$$d\mathbf{x} = dx_a \mathbf{e}_a, \quad a = 1, 2, 3 \quad (7.11)$$

$$(ds)^2 = dx_a dx_a \quad (7.12)$$



Σχ. 7.2. Το διάνυσμα $d\mathbf{X}_A$, ανάμεσα στα σημεία A και B στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση μετατρέπεται στο διάνυσμα $d\mathbf{x}_i$ μεταξύ των σημείων a και b στην τρέχουσα παραμορφωμένη κατάσταση αναφοράς (καρτεσιανό σύστημα αναφοράς).

Κατά την ανάλυση της παραμόρφωσης είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε την αλλαγή της σχετικής απόστασης μεταξύ των σημείων του σώματος. Η διαφορά του μήκους θα υπολογίζεται από τον όρο $(ds)^2 - (dS)^2$ ο οποίος μέσω των σχέσεων (7.10) και, θα είναι

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A} dX_A \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_B} dX_B \right) - \delta_{AB} dX_A dX_B = (C_{AB} - \delta_{AB}) dX_A dX_B \quad (7.13)$$

Στην τελευταία σχέση εισήχθη ο συμμετρικός τανυστής C_{AB} ο οποίος καλείται δεξιός τανυστής παραμόρφωσης κατά Cauchy-Green⁸, για τον οποίο θα ισχύει

$$\mathbf{C}_{AB} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_i}{\partial X_B} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (7.14)$$

⁸ Right Cauchy - Green deformation tensor.

Από τον συνδυασμό των σχέσεων, (7.13), (7.14) προκύπτει ένας νέος συμμετρικός τανυστής \mathbf{E} , ο τανυστής παραμόρφωσης κατά Green-Lagrange⁹ ο οποίος θα ορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (7.15)$$

Οι δύο συμμετρικοί τανυστές \mathbf{C}, \mathbf{E} υπολογίζουν τις παραμορφώσεις του σώματος σε σχέση με τις υλικές του συντεταγμένες \mathbf{X} , και σε αυτή την περίπτωση η περιγραφή της παραμόρφωσης λέγεται υλική ή περιγραφή κατά Lagrange. Η αναλυτική περιγραφή του τανυστή \mathbf{E} γίνεται από τις σχέσεις (7.1) - (7.6).

Η παραμόρφωση του σώματος μπορεί να εκφραστεί και με όρους χωρικών συντεταγμένων \mathbf{x} , ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική. Σε αυτή την περίπτωση η παραμόρφωση θα αναφέρεται στην παρούσα κατάσταση του σώματος. Από τις σχέσεις (7.10), (7.11), (7.12) θα είναι

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j - \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_i} dx_i \right) \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_j} dx_j \right) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = (\delta_{ij} - b_{ij}) dx_i dx_j \quad (7.16)$$

Στην τελευταία σχέση εισήχθη ο συμμετρικός τανυστής \mathbf{b}_{ij} ο οποίος καλείται αριστερός τανυστής της παραμόρφωσης κατά Cauchy - Green¹⁰ και θα ισχύει

$$b_{ij} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \Rightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{F}^{-1})^T (\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \quad (7.17)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων, (7.16), (7.17) προκύπτει ένας νέος συμμετρικός τανυστής της παραμόρφωσης \mathbf{e} , ο τανυστής παραμόρφωσης κατά Euler - Almansi ο οποίος θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}) \quad (7.18)$$

Η περιγραφή της παραμόρφωσης μέσω των συμμετρικών τανυστών \mathbf{b}, \mathbf{e} καλείται χωρική περιγραφή ή περιγραφή κατά Euler. Στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων οι δύο τανυστές συμπίπτουν και ο διαχωρισμός της ανάλυσης σε υλικές και χωρικές συντεταγμένες δεν έχει πλέον κανένα νόημα.

7.3.2. Η αλλαγή της επιφάνειας

Είναι γνωστό ότι τα σημεία, οι καμπύλες και τα διανύσματα του σώματος στην αρχική κατάσταση απεικονίζονται στα αντίστοιχα σημεία, καμπύλες και διανύσματα στην τελική κατάσταση μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης. Αυτή η γραμμική απεικόνιση ισοδυναμεί μαθηματικά με ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Από την σχέση (7.7), πιστοποιείται αυτός ο μετασχηματισμός μέσω του γραμμικού τελεστή \mathbf{F} . Η παραπάνω συλλογιστική δεν ισχύει για την γραμμ-

⁹ Green - Lagrange strain tensor

¹⁰ Left Cauchy - Green deformation tensor, στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται και σαν τανυστής Finger.

μική απεικόνιση μιας επιφάνειας. Ένα μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{N} κάθετο σε μια αρχικά απαραμόρφωτη επιφάνεια dS δεν απεικονίζεται μόνο μέσω του γραμμικού τελεστή \mathbf{F} στο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} της αντίστοιχης παραμορφωμένης επιφάνειας ds .

Η διαφορά του όγκου του σώματος μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης θα δίνεται από την σχέση

$$dv = J(\mathbf{X}, t) dV \quad (7.19)$$

όπου dv είναι ο στοιχειώδης όγκος του σώματος στην τελική κατάσταση και dV είναι ο στοιχειώδης όγκος του σώματος στην τελική κατάσταση. Η Ιακωβιανή ορίζουσα $J(\mathbf{X}, t)$ εκφράζει την αλλαγή του όγκου του σώματος και ισούται με την ορίζουσα του τανυστή της βαθμίδας της παραμόρφωσης \mathbf{F} , και οφείλει να είναι πάντα θετική, δηλ

$$J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0 \quad (7.20)$$

Θεωρώντας ένα γραμμικό υλικό στοιχείο $d\mathbf{X}$ στην απαραμόρφωτη κατάσταση τότε αυτό θα απεικονίζεται στην τελική κατάσταση στο υλικό στοιχείο $d\mathbf{x}$ μέσω της σχέσης (7.7). Ο όγκος του σώματος στην τρέχουσα κατάσταση dv θα δίνεται από την σχέση

$$dv = ds \cdot d\mathbf{x} = ds \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} \quad (7.21)$$

Ο όγκος του σώματος στην αρχική κατάσταση dV θα δίνεται από την σχέση

$$dV = dS \cdot d\mathbf{X} = dS \mathbf{N} \cdot d\mathbf{X} \quad (7.22)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (7.19), (7.20), (7.21), (7.22) προκύπτει η σχέση

$$ds \cdot d\mathbf{x} = J dS \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow ds \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = J dS \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F}^T ds \cdot d\mathbf{X} - J dS \cdot d\mathbf{X} = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^T ds - J dS) \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (7.23)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για οποιοδήποτε γραμμικό υλικό στοιχείο του σώματος οπότε αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{F}^T ds - J dS = 0 \Rightarrow ds = J \mathbf{F}^{-T} dS \quad (7.24)$$

Η τελευταία σχέση υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο μια επιφάνεια στην απαραμόρφωτη κατάσταση απεικονίζεται στην αντίστοιχη επιφάνεια της παραμορφωμένης κατάστασης. Γνωστή στην διεθνή βιβλιογραφία σαν σχέση του Nanson (Nanson's formula).

7.3.3. Μεγέθη μέτρησης των τάσεων

Η κίνηση και η παραμόρφωση ενεργοποιούν το σώμα υπό την έννοια ότι στο εσωτερικό του αναπτύσσονται κάποιες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υλικών σημείων. Μια από τις συνέπειες αυτών των αλληλεπιδράσεων είναι και η τάση, η οποία αποτελεί μια φυσική ποσότητα και ορίζεται σαν δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας. Η τάση είναι υπεύθυνη για την όποια παραμόρφωση του σώματος και αποτελεί θεμελιώδη ποσότητα για την ανάλυση της μηχανικής

συμπεριφοράς των σωμάτων. Σε προηγούμενη παράγραφο έγινε μια εκτενής αναφορά στους εναλλακτικούς τανυστές της παραμόρφωσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Δεδομένης της ενεργειακής συζυγίας στην οποία οφείλουν να υπακούουν τα μεγέθη στην Μηχανική, γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι θα υπάρχουν και οι αντίστοιχες εναλλακτικές για τον ορισμό της τάσης. Είναι γνωστό ότι ο ρυθμός παραγωγής έργου, \dot{w} , κατά την παραμόρφωση του σώματος δίνεται από την σχέση

$$\dot{w} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \Rightarrow \dot{w} = \tau_{ij} D_{ij} \quad (7.25)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι η τάση κατά Kirchhoff η οποία θα δίνεται από την σχέση $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οι τάσεις κατά Cauchy και J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα. Η ενεργειακή συζυγία υποδεικνύει ότι για οποιονδήποτε τανυστή παραμόρφωσης, έστω \mathbf{A} , υπάρχει ένας συμμετρικός τανυστής \mathbf{T} ο οποίος θα αποτελεί κάτι σαν τάση και θα αποτελεί την αντίστοιχη ενεργειακά συζυγή ποσότητά του. Θα ισχύει μια ενεργειακή σχέση

$$\mathbf{T} : \dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad (7.26)$$

Στην περίπτωση που επιλεγεί ο τανυστής παραμόρφωσης \mathbf{E} τότε σαν ενεργειακά συζυγής ποσότητα επιλέγεται ο 2^{ος} Piola – Kirchhoff, \mathbf{S} , ο οποίος σχολιάζεται παρακάτω.

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε ένα παραμορφώσιμο συνεχές στερεό σώμα \mathcal{B} το οποίο καταλαμβάνει μια περιοχή Ω του φυσικού χώρου με συνοριακή επιφάνεια $\partial\Omega$. Θεωρείται ότι κάποιες δυνάμεις δρουν σε ένα τμήμα ή σε όλη την έκταση της συνοριακής επιφάνειας, οι οποίες καλούνται εξωτερικές δυνάμεις, και κάποιες δυνάμεις δρουν σε μια εσωτερική φανταστική επιφάνεια εντός του σώματος με κάποια τυχαία κατανομή, οι οποίες καλούνται εσωτερικές δυνάμεις. Σύμφωνα με το Σχήμα 2 για κάθε επιφανειακό στοιχείο του σώματος θα ισχύει

$$d\mathbf{f} = t d\mathbf{s} = \mathbf{T} d\mathbf{S} \quad (7.27)$$

Με το σύμβολο \mathbf{f} συμβολίζεται η δύναμη, όπου \mathbf{t} είναι ο ελκυστής των τάσεων κατά Cauchy και δηλώνει την δύναμη ανά μονάδα τρέχουσας επιφάνειας, όπου \mathbf{T} είναι ο 1^{ος} ελκυστής των τάσεων κατά Piola – Kirchhoff και δηλώνει την δύναμη ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας και έχει την ίδια διεύθυνση με τον ελκυστή \mathbf{t} . Για τους δύο ελκυστές ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \Rightarrow t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (7.28)$$

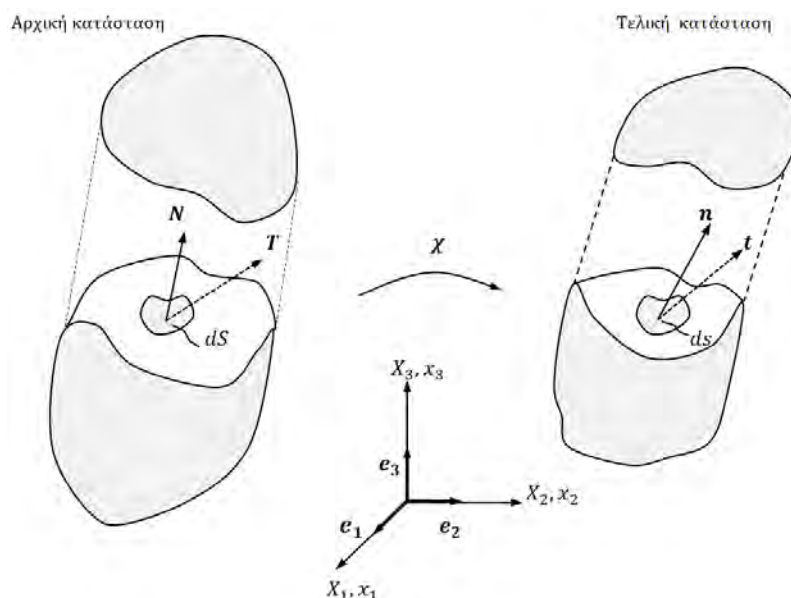
$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N} \Rightarrow T_i = P_{iA} N_A \quad (7.29)$$

Όπου $\boldsymbol{\sigma}$ ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy που εκφράζει τις πραγματικές τάσεις στο σώμα και αναφέρεται στις χωρικές συντεταγμένες του σώματος και όπου \mathbf{P} ο 1^{ος} τανυστής Piola – Kirchhoff ο οποίος αναφέρεται στις υλικές συντεταγμένες του σώματος. Οι δύο τανυστές συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (7.30)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο 1^{ος} τανυστής Piola – Kirchhoff εν γένει δεν είναι συμμετρικός τανυστής.

Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν προταθεί και χρησιμοποιούνται πολλοί τανυστές τάσεων, ο καθένας με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Στην παρούσα ανάλυση το ενδιαφέρον θα εστιαστεί σε συγκεκριμένους τανυστές που θα χρησιμεύσουν στην μελέτη των μη γραμμικών αποκρίσεων των σωμάτων.



Σχ. 7.3. Οι ελκυστές των τάσεων οι οποίοι δρουν σε απειροστές επιφάνειες στην αρχική και τελική κατάσταση του σώματος.

Ο τανυστής των τάσεων κατά Kirchhoff τ , διαφέρει από τον τανυστή κατά Cauchy ως προς την μεταβολή του όγκου του σώματος, δηλ.

$$\tau = J\sigma \quad (7.31)$$

Επιπλέον εισάγεται ο 2^{ος} τανυστής κατά Piola – Kirchhoff S , ο οποίος θα ορίζεται ως εξής

$$S = JF^{-1}\sigma F^{-T} \quad (7.32)$$

Όπως θα διαφανεί στα επόμενα αυτός ο τανυστής χρησιμοποιείται κατά κόρον στην διατύπωση των καταστατικών εξισώσεων του σώματος διότι είναι πολύ εύχρηστος υπολογιστικά. Περαιτέρω αξίζει να σημειωθεί ότι ο 2^{ος} Piola - Kirchhoff είναι ο ενεργειακά συζυγής τανυστής της τάσης με τον τανυστή παραμόρφωσης κατά Lagrange, E .

7.4. Βασικές αρχές των υλικών σωμάτων

Τα υφάσματα είναι κατά βάση κατασκευές με πολύ μικρό πάχος συγκρινόμενο με τις άλλες διαστάσεις τους με αποτέλεσμα να παραλαμβάνουν και να μεταφέρουν φορτία κυρίως εντός του επιπέδου τους. Η δομή αυτών των κατασκευών είναι τέτοια ώστε μικρής έντασης καταπονήσεις να προκαλούν μεγάλες πεπερασμένες παραμορφώσεις. Από την κλασική θεωρία της Ελαστικότητας είναι γνωστό ότι ο νόμος του Hooke, είτε στην θεμελιώδη είτε στην γενικευμένη του μορφή, είναι σε θέση να εκφράσει την μηχανική συμπεριφορά του υλικού, τον

καταστατικό του νόμο δηλαδή, στην περίπτωση που το υλικό υπόκειται σε μικρές γραμμικές παραμορφώσεις. Είναι φανερό ότι ο νόμος του Hooke αδυνατεί να ερμηνεύσει την μηχανική συμπεριφορά των υφασμάτων κατασκευών σε μεγάλες παραμορφώσεις. Συνεπώς, η προσφυγή σε μια πιο αξιόπιστη θεωρία είναι μονόδρομος για αυτά τα υλικά.

Ο κύριος στόχος κατά την μελέτη των υλικών είναι η διατύπωση κατάλληλων μαθηματικών σχέσεων που να ερμηνεύουν την απόκριση τους υπό την επίδραση εξωτερικών δράσεων. Η μηχανική συμπεριφορά όλων των υλικών οφείλει να διέπεται από τρεις βασικές αρχές, την αρχή της αντικειμενικότητας (objectivity), την αρχή της αιτιοκρατίας (determinism) και την αρχή της τοπικής δράσης (local action). Στην μηχανική θεωρείται ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα συνδέονται με την κίνηση του σώματος αιτιοκρατικά. Αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται σε ένα σημείο του σώματος σε κάποια χρονική στιγμή προσδιορίζονται από την κίνηση του σώματος στο παρελθόν ή το παρόν, αλλά όχι από το μέλλον. Επιπρόσθετα, θεωρείται ότι οι τάσεις σε ένα σημείο του σώματος εξαρτώνται από την κίνηση των γειτονικών του σημείων και μόνο. Η συνθήκη της αντικειμενικότητας εξασφαλίζει ότι μια μαθηματική σχέση ισχύει για οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς και για οποιαδήποτε στροφή ή μεταφορά του συστήματος αναφοράς αυτή η σχέση παραμένει αναλλοίωτη. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός παρατηρητή στην διαμόρφωση του προβλήματος οι αλλαγές του οποίου θα προσφέρουν την μαθηματική θεμελίωση για τον αναλλοίωτο χαρακτήρα των καταστατικών σχέσεων.

Η περιγραφή μιας οποιασδήποτε φυσικής διαδικασίας συνδέεται άμεσα με την επιλογή ενός παρατηρητή ο οποίος δηλώνεται συνήθως με O . Ένας τυχαία επιλεγμένος παρατηρητής στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο και χρόνο είναι εφοδιασμένος να μετράει δύο πράγματα

- τις σχετικές θέσεις σημείων στο χώρο (σε μια βαθμονομημένη κλίμακα)
- τις χρονικές στιγμές (με ένα μετρητή χρόνου, π.χ. ένα ρολόι)

Ένα γεγονός καταγράφεται από ένα παρατηρητή με όρους θέσης στο χώρο και στο χρόνο. Θεωρούμε δύο γεγονότα τα οποία επισυμβαίνουν στον Ευκλείδειο χώρο και περιγράφονται από τα ζεύγη (\mathbf{x}_0, t_0) και (\mathbf{x}, t) . Υποθέτουμε ότι το γεγονός (\mathbf{x}_0, t_0) είναι ακίνητο καθώς το γεγονός (\mathbf{x}, t) εξελίσσεται. Ένας παρατηρητής καταγράφει ότι η απόσταση που χωρίζει τα δύο γεγονότα είναι $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ και η χρονική διαφορά μεταξύ των δύο γεγονότων είναι $t - t_0$. Στην συνέχεια τα δύο σημεία, κρατώντας σταθερή την μεταξύ τους απόσταση και την χρονική τους διαφορά, απεικονίζονται σε δύο νέα σημεία του χώρου και χρόνου (\mathbf{x}^+, t^+) και (\mathbf{x}_0^+, t_0^+) , αντίστοιχα. Οι νέες θέσεις των γεγονότων προκύπτουν εφαρμόζοντας μια στροφή στις αρχικές τους θέσεις (στροφή του παρατηρητή). Αυτή η στροφή περιγράφεται από την μαθηματική σχέση

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}_0^+ = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (7.33)$$

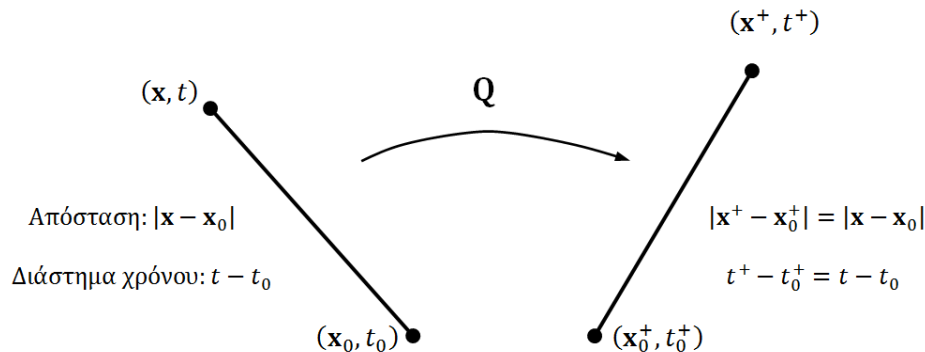
Από την παραπάνω σχέση και με τους συμβολισμούς

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0^+ - \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}_0 \quad (7.34)$$

$$t^+ - t = a \quad (7.35)$$

Προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \quad (7.36)$$



Σχ. 7.4. Η απεικόνιση δύο σημείων τα οποία διατηρούν την μεταξύ τους απόσταση σε συγκεκριμένο διανυσματικό χρονικό διάστημα.

Από την σχέση (7.36) προκύπτει ότι υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ των σημείων (\mathbf{x}, t) και (\mathbf{x}^+, t^+) , αυτή η αντιστοίχιση ονομάζεται *Ευκλείδειος μετασχηματισμός*. Φαίνεται καθαρά από την σχέση (7.36) ότι η διαφορά μεταξύ των δύο παρατηρητών, πέραν της σχετικής στροφής, έγκειται και σε ένα διάνυσμα μετατόπισης το οποίο συχνά αναφέρεται σαν μετατόπιση στερεού σώματος και δηλώνεται με $\mathbf{c}(t)$.

Μια βασική παραδοχή των νόμων της Φυσικής υποδεικνύει ότι οι μακροσκοπικές ιδιότητες των υλικών δεν πρέπει να επηρεάζονται από την επιλογή του εξωτερικού παρατηρητή. Εκείνο που επιδιώκεται κάθε φορά είναι να διασφαλιστεί ότι η τάση που αναπτύσσεται σε ένα σώμα οφείλει να είναι *αναλλοίωτη* (invariant) σχετικά με ένα παρατηρητή ο οποίος μπορεί κάθε φορά να αλλάζει οπτική σκοπιά. Αναμένουμε από μια αλλαγή του παρατηρητή ότι οι αποστάσεις και η χρονική διαφορά μεταξύ δύο σημείων δεν αλλάζουν. Με απλά λόγια απαιτούμε από έναν άλλο παρατηρητή O^+ να παρατηρήσει την ίδια σχετική απόσταση μεταξύ των σημείων και την ίδια χρονική διαφορά μεταξύ των δύο ή και περισσότερων γεγονότων που επισυμβαίνουν. Η σχέση (7.36) δηλώνει την αλλαγή του παρατηρητή O στον παρατηρητή O^+ . Το γεγονός στην θέση \mathbf{x} και στον χρόνο t που καταγράφεται από τον παρατηρητή O είναι το ίδιο γεγονός με αυτό που καταγράφει ένας παρατηρητής O^+ στην θέση \mathbf{x}^+ και στον χρόνο t^+ . Η ίδια σχέση περιγράφει το ίδιο γεγονός το οποίο καταγράφεται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές οι οποίοι όμως κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλον.

Διευκρινίζεται ότι μια αλλαγή του παρατηρητή επηρεάζει τα ίδια τα σημεία και όχι τις συντεταγμένες τους. Σε αντίθεση, η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων αλλάζει τις συντεταγμένες των σημείων. Ένα διάνυσμα \mathbf{u} το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{Q}(t)\mathbf{u} \quad (7.37)$$

θα ονομάζεται αντικειμενικό ή ισοδύναμα αναλλοίωτο. Ένας τανυστής $2^{\text{ης}}$ τάξης, \mathbf{A} , ο οποίος μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \quad (\det \mathbf{Q} = 1, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}) \quad (7.38)$$

συμφωνούμε ότι πληροί την συνθήκη της αντικειμενικότητας.

7.5. Κινήσεις στερεού σώματος

Η αλλαγή του παρατηρητή μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με μια συγκεκριμένη κίνηση στερεού σώματος που επιβάλλεται στην κατασκευή σε μια οποιαδήποτε ενδιάμεση κατάσταση της παραμόρφωσης. Η περιγραφή μιας κίνησης από δύο ανεξάρτητους παρατηρητές είναι ισοδύναμη με την περιγραφή δύο διαφορετικών κινήσεων που καταγράφονται από έναν παρατηρητή. Αυτή η ισοδυναμία έχει άμεσο αντίκτυπο στην μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των σωμάτων.

Θεωρούμε ένα συνεχές σώμα το οποίο εκτελεί μια κίνηση η οποία περιγράφεται από την σχέση

$$\mathbf{x}^+ = \chi^+(\mathbf{X}, t) \quad (7.39)$$

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι το ίδιο σώμα εκτελεί μια άλλη κίνηση η οποία διαφέρει από την προηγούμενη κατά μια κίνηση στερεού σώματος που έχει επιβληθεί στο συνεχές μέσο κατά την διάρκεια της παραμόρφωσής του. Αυτή η κίνηση θα περιγράφεται από μια σχέση της μορφής

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (7.40)$$

Οι σχέσεις (7.39), (7.40) εκφράζουν δύο κινήσεις οι οποίες καταγράφονται από τον ίδιο παρατηρητή. Η κίνηση του στερεού σώματος μετακινεί την περιοχή του χώρου Ω , που καταλαμβάνει το συνεχές μέσο στο χρόνο t , σε μια περιοχή Ω^+ που καταλαμβάνει το ίδιο μέσο στο χρόνο t^+ . Η θέση (\mathbf{x}, t) που καταλαμβάνει το συνεχές στο χρόνο t συνδέεται με την νέα θέση του συνεχούς (\mathbf{x}^+, t^+) μέσω της σχέσης (7.38). Η παράμετρος $\mathbf{c}(t)$ αντιπροσωπεύει την μετατόπιση του στερεού σώματος (rigid body translation) που σημαίνει ότι κάθε σημείο του συνεχούς μέσου μετατοπίζεται κατά την ίδια απόσταση και στην ίδια κατεύθυνση στο ίδιο χρονικό διάστημα. Ο όρος $\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}$ αντιπροσωπεύει την στροφή του στερεού σώματος η οποία περιγράφεται μαθηματικά από τον ορθογωνικό τανυστή \mathbf{Q} . Στην ειδική περίπτωση όπου το σώμα δεν μετατοπίζεται αλλά μόνο στρέφεται η σχέση (7.38) απλοποιείται και παίρνει την μορφή

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \quad (7.41)$$

Συμπερασματικά, η κίνηση στερεού σώματος αποτελείται από δύο συνιστώσες οι οποίες αναφέρονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα όπως περιγράφεται από την σχέση (7.38). Η μία αφορά την σταθερή μετατόπιση του σώματος ενώ η δεύτερη αφορά την σταθερή στροφή του.

Αξίζει να θεωρηθεί ο τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζονται οι διάφορες κινηματικές ποσότητες, που περιγράφουν την κίνηση του σώματος, κατά την επιβολή μιας κίνησης στερεού σώματος. Η ποσότητα που είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κινηματική του συνεχούς είναι η βαθμίδα της παραμόρφωσης (deformation gradient) \mathbf{F} . Εάν θεωρήσουμε την βαθμίδα της παραμόρφωσης ενός σημείου $\mathbf{x} \in \Omega$, και του αντίστοιχου σημείου $\mathbf{x}^+ \in \Omega^+$ τότε εξ'ορισμού θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad , \quad \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t^+) = \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{X}} \quad (7.42)$$

Από την παραγωγή της σχέσης (7.38) ως προς την μεταβλητή \mathbf{X} προκύπτει

$$\frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t^+) = \frac{\partial c(t)}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \Rightarrow \mathbf{F}^+ = \mathbf{QF} \quad (7.43)$$

Από την σχέση (7.43) φαίνεται ότι ο τανυστής \mathbf{F} δεν είναι αντικειμενικός διότι δεν υπακούει στην συνθήκη αντικειμενικότητας ενός τανυστή όπως επιβάλλεται από την σχέση (7.38). Παρόλα αυτά οφείλουμε να αναλογιστούμε ότι ο τανυστής \mathbf{F} είναι τανυστής δύο σημείων, το ένα αναφέρεται σε υλικές συντεταγμένες ενώ το άλλο αναφέρεται σε χωρικές συντεταγμένες. Οι υλικές συντεταγμένες είναι από την φύση τους ανεξάρτητες από τον παρατηρητή γεγονός που αναγκάζει τον τανυστή της βαθμίδας της παραμόρφωσης να μετασχηματίζεται σαν ένα διάνυσμα και όχι σαν τανυστής. Αυτό σημαίνει ότι ο τανυστής \mathbf{F} αν και μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση (7.43) είναι αντικειμενικός τανυστής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διατύπωση του καταστατικού νόμου του υλικού.

Η ιακωβιανή συνάρτηση J , η οποία εκφράζει την αλλαγή του όγκου κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης, είναι μια αντικειμενική ποσότητα διότι μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$J^+ = \det(\mathbf{F}^+) = \det(\mathbf{QF}) = \det \mathbf{Q} \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F} = J \quad (7.44)$$

Η αντικειμενικότητα της ιακωβιανής συνάρτησης δηλώνει ότι ο παρατηρητής καταγράφει τον ίδιο όγκο κατά την εκτέλεση των δύο κινήσεων χ και χ^+ του συνεχούς μέσου ή ισοδύναμα ο όγκος του συνεχούς μέσου δεν αλλάζει κατά την επιβολή μιας κίνησης στερεού σώματος.

Η τάση που αναπτύσσεται αρχικά στο σώμα είναι διαφορετική σε σχέση με την τάση που αναπτύσσεται στο ίδιο σώμα μετά την παραμόρφωση. Εάν οι δύο τάσεις, στην αρχική και στην τελική κατάσταση, συμβολιστούν με $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\sigma}^+$ αντίστοιχα, τότε για τους αντίστοιχους ελκυστές \mathbf{t} και \mathbf{t}^+ θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (7.45)$$

$$\mathbf{t}^+ = \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n}^+ \quad (7.46)$$

Οι διανυσματικές ποσότητες \mathbf{t}^+ και \mathbf{n}^+ είναι εξ'ορισμού αντικειμενικές ποσότητες και θα μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση (7.38), δηλαδή θα είναι

$$\mathbf{t}^+ = \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n}^+ \Rightarrow \mathbf{Q} \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{Q} \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} \quad (7.47)$$

Η σύγκριση των σχέσεων (7.45) και (7.47) οδηγεί στην σχέση

$$\sigma = Q^T \sigma^+ Q \Rightarrow \sigma^+ = Q \sigma Q^T \quad (7.48)$$

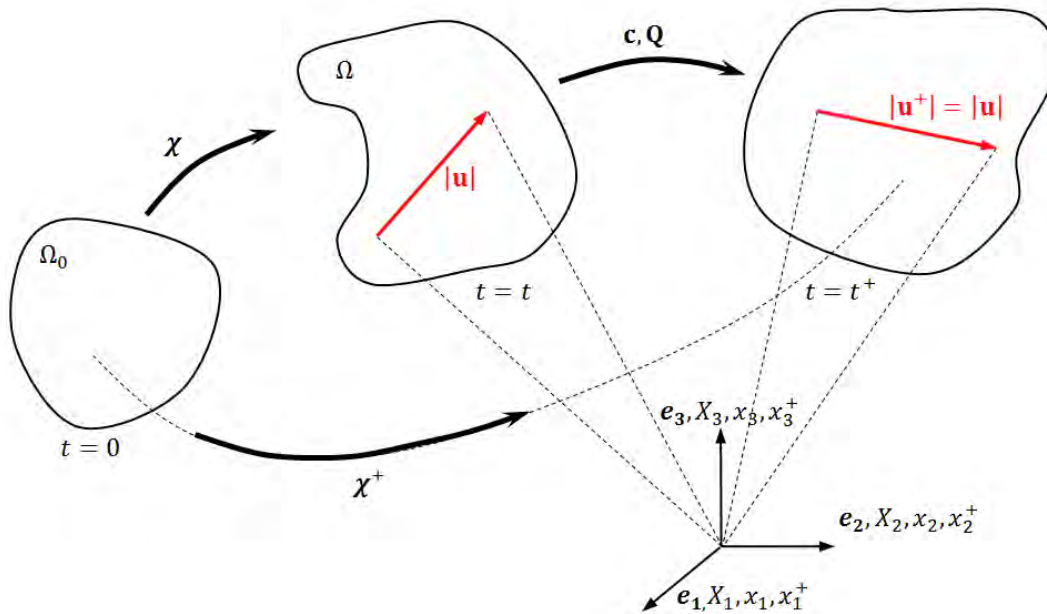
η οποία αποδεικνύει ότι η τάση κατά Cauchy είναι μια αντικειμενική ποσότητα και ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται.

Η βαθμίδα της χωρικής ταχύτητας L ορίζεται σε συνάρτηση με την βαθμίδα της παραμόρφωσης F , για την κίνηση χ του σώματος, σύμφωνα με την σχέση

$$L = \dot{F} F^{-1} \quad (7.49)$$

Κατά αντιστοιχία, η βαθμίδα της χωρικής ταχύτητας για την κίνηση χ^+ θα ορίζεται από την σχέση

$$L^+ = \dot{F}^+ (F^+)^{-1} \quad (7.50)$$



Σχ.7.5. Δύο κινήσεις χ και χ^+ του συνεχούς μέσου που καταγράφονται από έναν παρατηρητή και δι-αφέρουν ως προς την κίνηση του στερεού σώματος που επιβάλλεται μέσω των c, Q . Το διάνυσμα u μετατρέπεται στο διάνυσμα u^+ μέσω της σχέσης, $u^+ = Qu$.

Παραγωγίζοντας την σχέση (7.43) ως προς τον χρόνο θα είναι

$$\dot{F}^+ = \dot{Q}F + Q\dot{F} \quad (7.51)$$

Από την σχέση (7.43) προκύπτει ακόμη

$$(F^+)^{-1} = F^{-1}Q^T \quad (7.52)$$

Από τον συνδυασμό των τριών τελευταίων σχέσεων προκύπτει

$$\mathbf{L}^+ = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T \quad (7.53)$$

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός της βαθμίδας της χωρικής ταχύτητας δεν συμβαδίζει με τον μετασχηματισμό της σχέσης (7.38), καθώς εμφανίζεται ο επιπρόσθετος όρος $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$. Συνεπώς ο τανυστής της βαθμίδας της ταχύτητας δεν είναι αντικειμενική ποσότητα και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην διατύπωση καταστατικού νόμου για το υλικό.

Η επιβολή μιας κίνησης στερεού σώματος στο ελαστικό συνεχές μέσο συνεπάγεται κάποιους περιορισμούς στην απόκρισή του. Στα επόμενα θα θεωρείται δεδομένο ότι το υλικό είναι ισόθερμο διότι η θερμοκρασία θα θεωρείται σταθερή κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης.

7.6. Η κινηματική των ελαστοπλαστικών παραμορφώσεων

Η Μηχανική του συνεχούς μέσου περιγράφει μια θεωρία που στηρίζεται στην μακροσκοπική μελέτη του σώματος. Η βασική παραδοχή αυτής της θεωρίας έγκειται στο ότι θεωρεί ότι το σώμα παρουσιάζει μια συνεχή κατανομή της μάζας του στο χώρο που αυτό καταλαμβάνει. Το σώμα θεωρείται ότι αποτελείται από υλικά σωματίδια τα οποία σε αντίθεση με την κλασική θεωρία της Μηχανικής δεν διαθέτουν μάζα αλλά πυκνότητα. Με αυτή τη λογική θεωρούμε ένα συνεχές μέσο, \mathcal{B}_0 το οποίο είναι αρχικά απαραμόρφωτο. Αυτή η κατάσταση του συνεχούς εφεξής θα καλείται κατάσταση αναφοράς (reference configuration). Το συνεχές τοποθετείται εντός του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου ο οποίος ορίζεται από ένα τρισσορθόγωνιο σύστημα συντεταγμένων, Σχ.5., και είναι εφοδιασμένος και με έναν μετρητή χρόνου ώστε να προσδιορίζει την θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή.

Η βαθμίδα της παραμόρφωσης, \mathbf{F} είναι η πιο σημαντική παράμετρος η οποία χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κίνηση του σώματος. Είναι ένας τανυστής ο οποίος εκφράζει τοπικά την παραμόρφωση ενός ευθύγραμμου τμήματος το οποίο είναι ενσωματωμένο εντός του υλικού σωματιδίου του σώματος. Η θέση ενός υλικού σωματιδίου την χρονική στιγμή $t=0$ θα δίνεται από ένα διάνυσμα θέσης \mathbf{X} . Το διάνυσμα θέσης του ίδιου υλικού σωματιδίου μετά την έλευση χρόνου t θα είναι \mathbf{x} . Τότε μια εξίσωση της μορφής $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ θα περιγράφει την κίνηση του κάθε υλικού σωματιδίου και συνεπώς ολόκληρου του συνεχούς μέσου. Με το σύμβολο \mathcal{B} θα δηλώνεται η νέα παραμορφωμένη κατάσταση του σώματος. Η βαθμίδα

της παραμόρφωσης \mathbf{F} θα δίνεται από την σχέση $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$. Στην θεωρία των ελαστοπλα-

στικών παραμορφώσεων η βαθμίδα του τανυστή της παραμόρφωσης εξακολουθεί να διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στην περιγραφή της κίνησης του σώματος αλλά με μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή. Ο Lee (1969) πρότεινε μια πιο εύχρηστη και ρεαλιστική αναπαράσταση αυτού του τανυστή. Η πολλαπλασιαστική διάσπασή του, στο ελαστικό και πλαστικό μέρος, περιγράφει ακριβέστερα τον μηχανισμό παραμόρφωσης του σώματος.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (7.54)$$

όπου \mathbf{F}^e είναι το ελαστικό μέρος το οποίο εμπλέκεται με την κινηματική του σώματος στην ελαστική περιοχή και \mathbf{F}^p το πλαστικό μέρος το οποίο εμπλέκεται με την κινηματική του σώματος στην πλαστική περιοχή. Η φυσική σημασία αυτής της διάσπασης είναι ότι η γειτονία

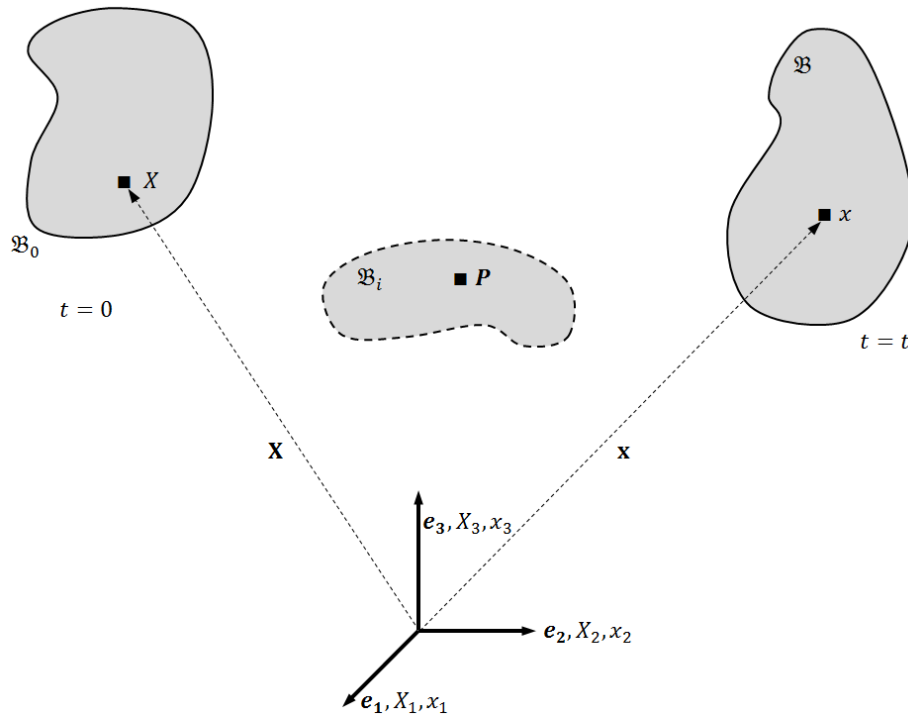
ενός υλικού σημείου απεικονίζεται από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση \mathcal{B}_0 στην ενδιάμεση αφόρτιστη κατάσταση \mathcal{B}_i με την επενέργεια του πλαστικού μέρους \mathbf{F}^P και στην συνέχεια απεικονίζεται στην τελική κατάσταση \mathcal{B} με την επενέργεια του ελαστικού μέρους \mathbf{F}^e . Η ενδιάμεση κατάσταση \mathcal{B}_i ονομάζεται και αφόρτιστη διότι το σώμα καταλήγει σε αυτή όταν αφαιρεθεί το ελαστικό κομμάτι \mathbf{F}^e . Με την διάσπαση της σχέσης (7.54) επιτυγχάνεται μια ξεκάθαρη αποσύνδεση των δύο κύριων μηχανισμών παραμόρφωσης του σώματος, του ελαστικού και του πλαστικού, με αποτέλεσμα η διατύπωση των καταστατικών νόμων του υλικού να διευκολύνεται.

Η βαθμίδα της ταχύτητας παραμόρφωσης (velocity gradient) \mathbf{L} του κάθε υλικού σωματιδίου θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (7.55)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)]_s = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = [\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)]_a = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (7.56)$$

όπου \mathbf{v} είναι το πεδίο των ταχυτήτων, \mathbf{D} είναι ο танυστής της μεταβολής της παραμόρφωσης (deformation rate tensor), \mathbf{W} είναι ο танυστής των στροφών (spin tensor). Οι δείκτες s, a αναφέρονται στο συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος, αντίστοιχα, της κάθε ποσότητας.



Σχ. 7.6. Η κίνηση του σώματος κατά τα διαδοχικά στάδια της παραμόρφωσής του.

Ο танυστής \mathbf{D} αποτελεί το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας παραμόρφωσης \mathbf{L} ενώ ο танυστής \mathbf{W} αποτελεί το αντισυμμετρικό της μέρος. Αξίζει να σημειωθεί το πολύ γνω-

στό συμπέρασμα από την Μηχανική του Συνεχούς Μέσου ότι ο τανυστής των στροφών \mathbf{W} ορίζει, στην τρέχουσα κατάσταση, την στροφή ενός γραμμικού στοιχείου το οποίο είναι ευθυγραμμισμένο με τους κύριους άξονες του τανυστή \mathbf{D} . Ακολουθώντας την σχέση (7.55) οι τα-νυστές $\mathbf{L}, \mathbf{D}, \mathbf{W}$ μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^P + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^P \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{-1} = \\ &= \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}\end{aligned}\quad (7.57)$$

$$\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1})_s \quad (7.58)$$

$$\mathbf{W} = (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1})_a \quad (7.59)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί κατά την διάρκεια της παραμόρφωσής του το σώμα διέρχεται από τρεις διακριτές καταστάσεις, την αρχική, όπου είναι εντελώς απαραμόρφωτο, την ενδιάμεση, στην οποία καταλήγει με την επίδραση της πλαστικής παραμόρφωσης, και την τελική, που προκύπτει με την προσθήκη της ελαστικής παραμόρφωσης. Από τις τρεις αυτές καταστάσεις η αρχική και η τελική είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Η ενδιάμεση κατάσταση δεν είναι πλήρως καθορισμένη. Η πολλαπλότητα των πιθανών ενδιάμεσων καταστάσεων έχει να κάνει κατά κύριο λόγο με τον προσανατολισμό τους ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς. Ο Mandel(1971) ήταν από τους πρώτους ερευνητές ο οποίος ασχολήθηκε διεξοδικά με το θέμα. Η πρότασή του περιλαμβάνει την έννοια των κατευθυντικών διανυσμάτων (director vectors) τα οποία ενσωματώνονται στην μικροδομή του συνεχούς μέσου. Με αυτό τον τρόπο ο προσανατολισμός της ενδιάμεσης κατάστασης θα ορίζεται πλήρως ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς. Είναι φανερό ότι ο προσανατολισμός παίζει σπουδαίο ρόλο διότι υποδηλώνει τις συμμετρίες του σώματος και τον τρόπο που αυτές εξελίσσονται κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης. Σαν άμεση συνέπεια προκύπτει και ο προσδιορισμός της εξέλιξης της ανισοτροπίας. Όπως έχει αποδειχθεί εν τέλει η επιλογή της ενδιάμεσης κατάστασης δεν παίζει κανένα ρόλο στην τελική απόκριση του σώματος, αλλά οποιαδήποτε και αν είναι η επιλογή της θα πρέπει να οριστεί γεωμετρικά διότι ως προς αυτή την κατάσταση θα εκφραστούν οι ρυθμοί μεταβολής των διαφόρων μεγεθών. Τα κατευθυντικά διανύσματα είναι κατεξοχήν εφαρμοστέα στην μηχανική των υφασμάτων υλικών.

Η σημασία της ενδιάμεσης κατάστασης διαφαίνεται από το Σχ.7.7, όπου απεικονίζεται τόσο η παραμόρφωση του συνεχούς μέσου, Σχ.7.7a, όσο και της μικροδομής του, Σχ.7.7b. Στο Σχ.7.7a φαίνεται η αρχική κατάσταση αναφοράς \mathcal{B}_0 , η τελική κατάσταση αναφοράς \mathcal{B} και τρεις πιθανές ενδιάμεσες καταστάσεις $\mathcal{B}_i^1, \mathcal{B}_i^2, \mathcal{B}_i^3$. Στις τρεις αυτές καταστάσεις απεικονίζονται τα κατευθυντικά διανύσματα, τα οποία απεικονίζουν τον ρυθμό στροφής της μικροδομής. Όπως φαίνεται ξεκάθαρα σε κάθε περίπτωση αυτά τα διανύσματα είναι διαφορετικά, αφού υποβάλλονται σε διαφορετικές στροφές κατά περίπτωση. Η ενδιάμεση κατάσταση \mathcal{B}_i^2 αναφέρεται στην πιο γενική περίπτωση καθώς ο προσανατολισμός είναι εντελώς τυχαίος. Το ελαστικό μέρος της βαθμίδας της παραμόρφωσης \mathbf{F}^e περιλαμβάνει τόσο στροφή όσο και τέντωμα του σώματος.

Στην ενδιάμεση κατάσταση \mathcal{B}_i^1 θεωρείται ότι το ελαστικό μέρος της βαθμίδας παραμόρφωσης είναι συμμετρικό, δηλ. $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}$, όπου $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$. Αυτό σημαίνει ότι κατά την ελαστική πα-

ραμόρφωση σημειώνεται μόνο τέντωμα στο σώμα και καθόλου στροφή. Τέλος, η κατάσταση B_i^3 αναφέρεται στο ισοκλινές μέσο στο οποίο τα κατευθυντικά διανύσματα ορίζεται έτσι ώστε να έχουν σταθερό προσανατολισμό ως προς ένα σύστημα αναφοράς. Συνήθως η επιλέγονται έτσι ώστε να συμπίπτουν με τον προσανατολισμό των διανυσμάτων στην αρχική κατάσταση αναφοράς, κάτι που φαίνεται και στο Σχ.7.7b. Σε αυτή την περίπτωση το ελαστικό μέρος της βαθμίδας παραμόρφωσης F^e περιλαμβάνει και στροφή και τέντωμα του υλικού. Από όλες τις παραπάνω ενδιάμεσες καταστάσεις στην παρούσα εργασία υιοθετείται η B_i^2 που αποτελεί και την πιο γενική περίπτωση, και εφεξής θα συμβολίζεται απλά σαν B_i .

Συμβολίζουμε με $d_0^{(a)}, \bar{d}^{(a)}, d^{(a)}$ τα κατευθυντικά συνημίτονα της μικροδομής τα οποία αναφέρονται στην αρχική, την ενδιάμεση και την τελική, αντίστοιχα. Ο εκθέτης στην παρένθεση δηλώνει τις διάφορες διευθύνσεις που θα έχουν αυτά τα διανύσματα, $a=1,2,3,\dots,n$ (σε απλά υφασμάτινα υλικά $a=1,2$). Περιγράφοντας την συνολική κινηματική της μικροδομής, μπορεί να θεωρηθεί η ακόλουθη σχέση

$$d^{(a)} = K^{(a)} d_0^{(a)} \quad (7.60)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι κάθε κατευθυντικό διάνυσμα στην αρχική κατάσταση, $d_0^{(a)}$, απεικονίζεται στην τρέχουσα κατάσταση $d^{(a)}$ μέσω της επενέργειας του τελεστή $K^{(a)}$. Αυτός ο τελεστής έχει ρόλο παρόμοιο με αυτό του F , με την διαφορά ότι αναφέρεται στην μικροδομή. Ο τελεστής $K^{(a)}$, ο οποίος περιγράφει συνολικά την κίνηση της μικροδομής από την αρχική στην τελική κατάσταση, μπορεί να διασπαστεί ακολουθώντας την αναλογική διάσπαση του F . Συνεπώς θα είναι

$$K^{(a)} = \beta^{(a)} a^{(a)} \quad (7.61)$$

Ο τανυστής $\beta^{(a)}$ αναφέρεται στην ελαστική παραμόρφωση της μικροδομής και θα ισχύει η σχέση

$$d^{(a)} = \beta^{(a)} \bar{d}^{(a)} \quad (7.62)$$

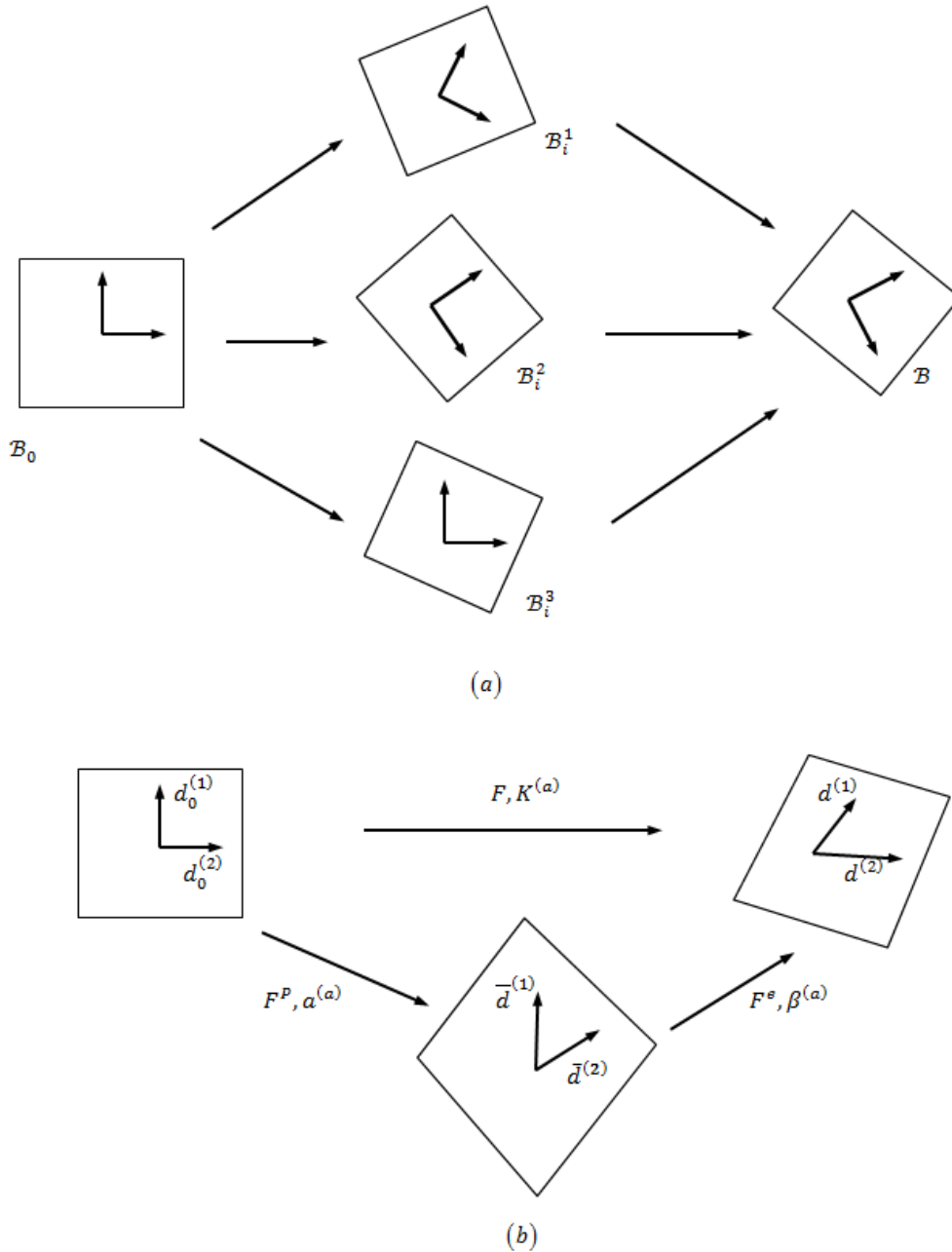
Ενώ ο τανυστής $a^{(a)}$ αναφέρεται στην πλαστική παραμόρφωση της μικροδομής και θα ισχύει η σχέση

$$\bar{d}^{(a)} = a^{(a)} d_0^{(a)} \quad (7.63)$$

Κατά αντιστοιχία με την βαθμίδα της ταχύτητας παραμόρφωσης του συνεχούς μέσου, σχέση (7.57), μπορεί να οριστεί και η βαθμίδα της ταχύτητας παραμόρφωσης και για την μικροδομή από την σχέση (7.61). Συνεπώς θα είναι

$$\dot{K}^{(a)} K^{(a)-1} = \dot{\beta}^{(a)} \beta^{(a)-1} + \beta^{(a)} \dot{a}^{(a)} a^{(a)-1} \beta^{(a)-1} \quad (7.64)$$

Από μια σύνοψη όλων των παραπάνω προκύπτει ότι οι δύο διακριτοί κινηματικοί μηχανισμοί, του συνεχούς μέσου και της μικροδομής, περιγράφονται από τις σχέσεις (7.57) και (7.64), αντίστοιχα.



Σχ. 7.7. Σχηματικό διάγραμμα της κινηματικής (α) του συνεχούς μέσου και (β) της μικροδομής.

Δεδομένου ότι και οι δύο λαμβάνουν μέρος στην παραμόρφωση του ίδιου σώματος οφείλουν κατά κάποιο τρόπο να συνδέονται μεταξύ τους. Μια λογική διασύνδεση επέρχεται θεωρώντας ότι το ελαστικό μέρος της βαθμίδας παραμόρφωσης του συνεχούς μέσου είναι ίδιο με τον τανυστή που εκφράζει την ελαστική παραμόρφωση της μικροδομής. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει η σχέση

$$\mathbf{F}^e = \boldsymbol{\beta}^{(a)} \quad (7.65)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί μια καταστατική θεώρηση η οποία δεν ισχύει γενικά και πάντα, απλά αποτελεί μια λογική φυσική ερμηνεία της παραμόρφωσης και για αυτό χρησιμοποιείται στην περίπτωση των απλών υφασμάτων κατασκευών.

Το σπουδαίο με την ιδέα κατευθυντικών διανυσμάτων έχει να κάνει με το ότι εισάγει για πρώτη φορά τον διαχωρισμό της κινηματικής του συνεχούς μέσου από την κινηματική της μικροδομής. Η κινηματική του συνεχούς μέσου έχει να κάνει με την μακροσκοπική κίνησή του όπως περιγράφεται από την σχέση (7.54) και αναλύεται με τα μεγέθη που δίνονται από τις σχέσεις (7.55) -(7.59). Η κινηματική της μικροδομής σχετίζεται με την κίνηση των επ'αυτής προσαρμοσμένων κατευθυντικών διανυσμάτων. Μέσα από την διαφοροποίηση των δύο κινηματικών καταστάσεων αναδεικνύεται μια νέα κινηματική ποσότητα, η πλαστική στροφή (plastic spin). Εάν συμβολίσουμε τον ρυθμό της στροφής της μικροδομής με ω και τον ρυθμό της στροφής του συνεχούς μέσου με \mathbf{W} τότε η πλαστική στροφή \mathbf{W}^P θα ορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{W}^P = \mathbf{W} - \omega \quad (7.66)$$

Όπως έχει αναφερθεί και πιο πάνω μια ολοκληρωμένη θεωρία των μεγάλων παραμορφώσεων απαιτεί την διατύπωση καταστατικών εξισώσεων τόσο για την πλαστική παραμόρφωση όσο και για τις στροφές. Οι ρυθμοί μεταβολής όλων των ποσοτήτων που εμπλέκονται στις καταστατικές εξισώσεις θα έχουν σαν σημείο αναφοράς την μικροδομή η οποία στρέφεται με ρυθμό ω . Σε αυτό το πλαίσιο, είναι απαραίτητος ο ορισμός του ρυθμού συστροφής με την μικροδομή, και θα είναι

$$\bar{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \omega \mathbf{T} + \mathbf{T} \omega \quad (7.67)$$

στην περίπτωση ενός τανυστή δεύτερης τάξης \mathbf{T} , και

$$\bar{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{n}} - \omega \mathbf{n} \quad (7.68)$$

στην περίπτωση ενός διανύσματος \mathbf{n} . Συνεπώς, για το πλαστικό μέρος της βαθμίδας των ταχυτήτων του συνεχούς μέσου θα είναι

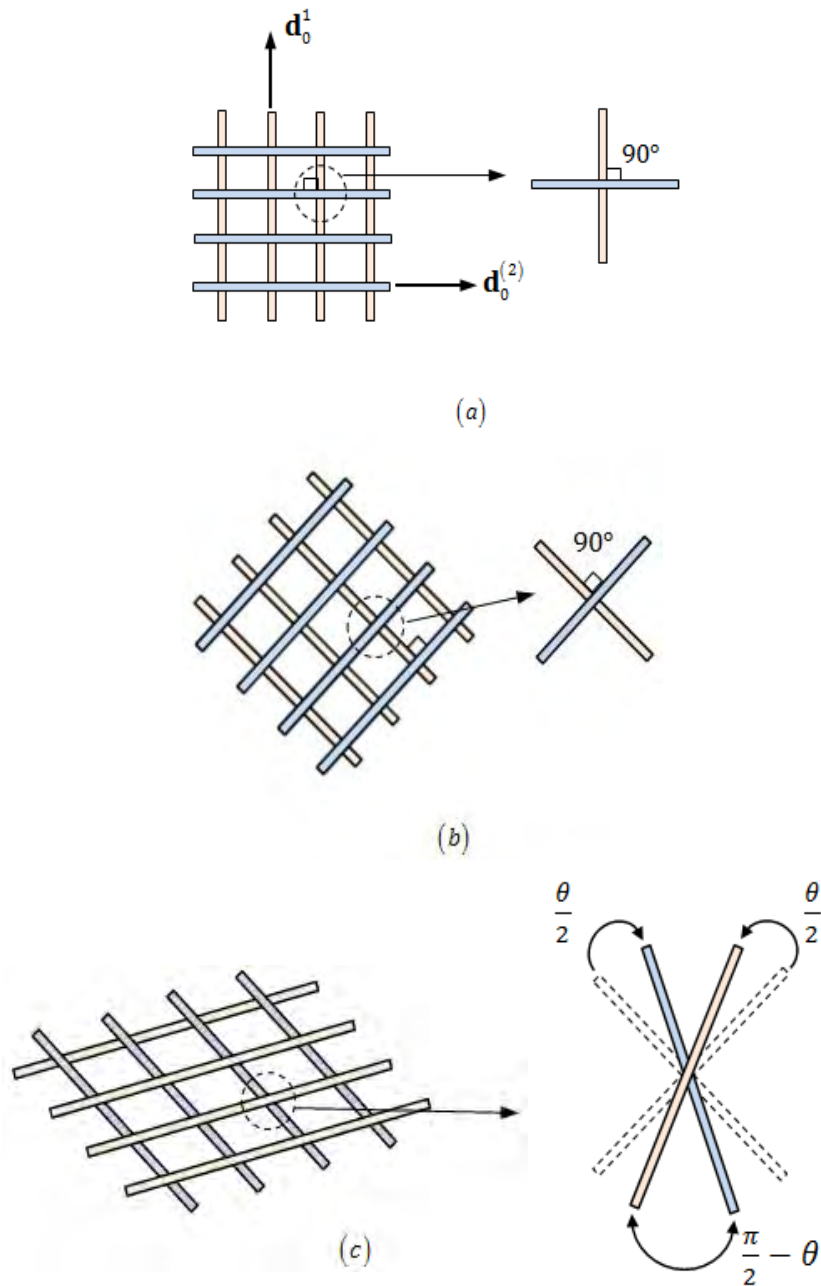
$$\bar{\mathbf{F}}^P = \dot{\mathbf{F}}^P - \omega \mathbf{F}^P \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} = \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} + \omega} \quad (7.69)$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτός ο τανυστής είναι τανυστής δύο σημείων εκ των οποίων το ένα αναφέρεται στις υλικές συντεταγμένες με αποτέλεσμα να μην συμμετέχει στον ρυθμό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο τανυστής \mathbf{F}^P να συστρέφεται σαν διάνυσμα, συνεπώς σύμφωνα με την σχέση (7.68). Κατά αναλογία, για το πλαστικό μέρος της βαθμίδας των ταχυτήτων της μικροδομής θα είναι

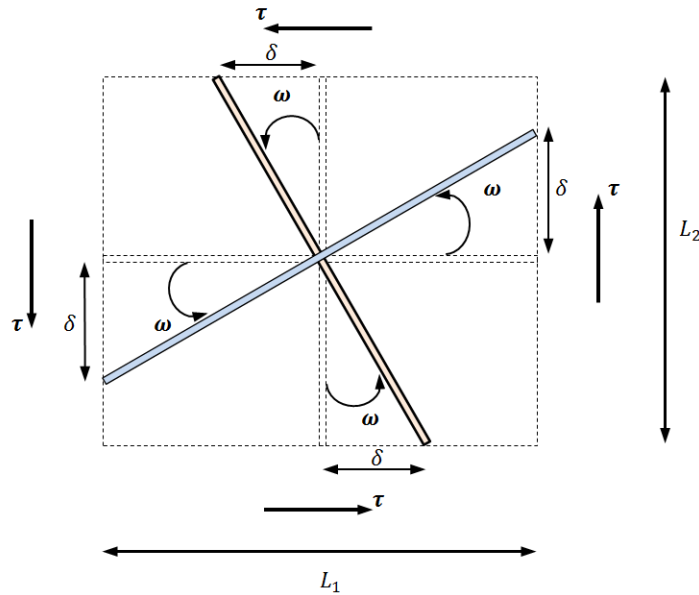
$$\bar{\mathbf{a}}^{(a)} = \dot{\mathbf{a}}^{(a)} - \omega \mathbf{a}^{(a)} \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} = \dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} + \omega} \quad (7.70)$$

Κατά την παραμόρφωση ενός σώματος η βαθμίδα της παραμόρφωσης \mathbf{F} είναι γνωστή σε κάθε βήμα της ανάλυσης. Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα από τα οποία διατυπώνεται η καταστατική εξίσωση για το πλαστικό μέρος της παραμόρφωσης \mathbf{D}^P , από το οποίο προσδιορίζεται το πλαστικό μέρος της βαθμίδας \mathbf{F}^P . Εν συνεχεία, μέσω της σχέσης (7.54) προσδιορίζεται το ελαστικό της μέρος \mathbf{F}^e και σε συνδυασμό με την σχέση (7.66) υπολογίζεται η στροφή του συνεχούς \mathbf{W} . Συνεπώς, εκείνο που απομένει, για να ολοκληρωθεί το μοντέλο είναι μια καταστατική εξίσωση για την πλαστική παραμόρφωση της μικροδομής, δηλ. για την ποσότητα $\dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1}$, αλλά και μια καταστατική εξίσωση για την στρο-

φή της μικροδομής ω . Στο Σχ.8 φαίνεται ακόμη πιο καθαρά ο αντιπροσωπευτικός όγκος ελέγχου σε σχέση με την αρχική κατάσταση του συνεχούς μέσου και με την επιβολή των διατμητικών τάσεων.



Σχ. 7.8. (a) Το συνεχές μέσο στην αρχική αφόρτιστη κατάσταση, (b) η στροφή του συνεχούς μέσου λόγω της επιβαλλόμενης διατμητικής τάσης όπου η γωνία μεταξύ των ινών είναι ορθή (\mathbf{W}) (c) η γωνία μεταξύ των ινών είναι $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (\mathbf{D}^p).



Σχ. 7.9. Η στροφή της μικροδομής των ινών ω λόγω των διατμητικών τάσεων.

Η στροφή της μικροδομής κατά ω , έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μια σχετική ολίσθηση δ , μεταξύ των γειτονικών ινών, η οποία συνδέεται με την τριβή που αναπτύσσεται στην διεπιφάνεια των ινών, Σχ.9. Αν αγνοήσουμε την ελαστική παραμόρφωση των ινών, η στροφή ω είναι «πλαστικού» τύπου. Η δύναμη της τριβής T_c είναι η δύναμη η οποία αντιστέκεται στην στροφή της μικροδομής. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ινών είναι μ_c και η κάθετη δύναμη στην διεπιφάνεια των ινών είναι N_c τότε θα ισχύει η σχέση

$$T_c = \mu_c N_c \quad (7.71)$$

Για την διατμητική τάση τ θα ισχύει

$$\tau = \frac{T_c}{A} = \frac{\mu_c N_c}{A} = \tau_0 \quad (7.72)$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση όπου $|\tau| < \tau_0 \rightarrow \omega = \mathbf{0}$.

7.7. Η θερμοδυναμική προσέγγιση

Το καταστατικό μοντέλο θα αναφέρεται στην ενδιάμεση κατάσταση \mathcal{B}_i και για αυτό το λόγο είναι απαραίτητο οι πραγματικές τάσεις κατά Cauchy σ , οι οποίες αναφέρονται στην τελική παραμορφωμένη κατάσταση του σώματος, να αναχθούν στην ενδιάμεση κατάσταση παραμόρφωσης. Αυτή την απεικόνιση των τάσεων την πραγματοποιεί ο 2^{ος} τανυστής Piola – Kirchhoff όπως δίνεται από την σχέση (7.32). Μια ανάλογη απεικόνιση πρέπει να ισχύει και

για τα κατευθυντικά συνημίτονα της μικροδομής. Ορίζεται μια μεταβλητή $\mathbf{m}^{(a)}$, η οποία έχει χαρακτήρα τανυστή, και ορίζεται από το δυαδικό γινόμενο των κατευθυντικών διανυσμάτων $\mathbf{d}^{(a)}$ στην παραμορφωμένη κατάσταση

$$\mathbf{m}^{(a)} = \mathbf{d}^{(a)} \otimes \mathbf{d}^{(a)} \Rightarrow m_{ij}^{(a)} = d_i^{(a)} d_j^{(a)} \quad (7.73)$$

Ο τανυστής $\mathbf{m}^{(a)}$ απεικονίζεται σε μια νέα μεταβλητή τανυστικού χαρακτήρα, $\mathbf{M}^{(a)}$ στην ενδιάμεση κατάσταση \mathcal{B}_i , με την συμμετοχή του ελαστικού μέρους της βαθμίδας παραμόρφωσης \mathbf{F}^e , μέσω της σχέσης

$$\mathbf{M}^{(a)} = \bar{\mathbf{d}}^{(a)} \otimes \bar{\mathbf{d}}^{(a)} = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{m}^{(a)} \mathbf{F}^{e-T} \quad (7.74)$$

Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής για το σώμα μπορεί να εκφραστεί από την ανισότητα της διάχυσης¹¹, δηλ

$$\gamma = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad (7.75)$$

όπου \mathbf{S} είναι ο 2^{ος} Piola – Kirchhoff τανυστής της τάσης ο οποίος ορίζεται από την σχέση (7.32) και όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι ο τανυστής Kirchhoff ο οποίος σχετίζεται με τον τανυστή των τάσεων κατά Cauchy μέσω της σχέσης (7.31).

Στην σχέση (7.75) σαν \mathcal{C} συμβολίζεται ο τανυστής της ελαστικής παραμόρφωσης κατά Cauchy – Green ο οποίος θα δίνεται από την σχέση (7.14). Με τον όρο ρ_0 συμβολίζεται η πυκνότητα του σώματος στην αρχική κατάσταση αναφοράς ενώ με ψ συμβολίζεται η ελεύθερη ενέργεια ανά μονάδα μάζας κατά Helmholtz. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η κατευθυντικότητα του υλικού είναι χρήσιμο η ελεύθερη ενέργεια να θεωρηθεί σαν άθροισμα δύο όρων, ο ένας σχετίζεται με την ελαστική παραμόρφωση και ο άλλος αφορά την στροφή της μικροδομής $\boldsymbol{\omega}$ η οποία σχετίζεται με τα κατευθυντικά διανύσματα. Η στροφή της μικροδομής αναλύεται στο ελαστικό $\boldsymbol{\omega}^e$ και στο πλαστικό μέρος $\boldsymbol{\omega}^p$. Συνεπώς θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\psi = \psi^e(\mathcal{C}^e, \mathbf{M}^{(a)}, \boldsymbol{\omega}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\omega}^p) \quad (7.76)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^p \quad (7.77)$$

Το ελαστικό μέρος του καταστατικού νόμου του υλικού θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{S}^e = 2\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathcal{C}^e} \quad (7.78)$$

και το πλαστικό μέρος του από την σχέση

$$\mathbf{K} = \rho_0 \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\omega}^p} \quad (7.79)$$

Για την ελεύθερη ενέργεια ψ θα ισχύει

¹¹ Η έννοια της διάχυσης αποκτά κάποιο νόημα για την μηχανική συμπεριφορά του υλικού μόνο στην περίπτωση που επισυμβαίνει η αποφόρτιση στο υλικό. Δεν έχει να κάνει μόνο με την θερμότητα που απελευθερώνεται κατά την καταπόνηση του σώματος.

$$\psi = \psi^e + \psi^p \Rightarrow \dot{\psi} = \dot{\psi}^e + \dot{\psi}^p \quad (7.80)$$

$$\dot{\psi}^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} : \dot{\mathbf{C}}^e + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} : \dot{\mathbf{M}}^{(a)} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\omega}^e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^e \quad (7.81)$$

$$\dot{\psi}^p = \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\omega}^p} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^p \quad (7.82)$$

η αντικατάσταση της σχέσης (7.80) στην (7.75) σε συνδυασμό με τις (7.81),(7.82) θα δώσει

$$\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{e-T} - \mathbf{S}^e) : \dot{\mathbf{C}}^e + \frac{1}{2} \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{e-T} : (\mathbf{I}^p \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^e \mathbf{I}^p) - \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\omega}^e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^e - \sum_{a=1}^n \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} : \dot{\mathbf{M}}^{(a)} - \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\omega}}^p \geq 0 \quad (7.83)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι ο τανυστής Kirchhoff ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \mathbf{F}^e \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} \mathbf{F}^{eT} \quad (7.84)$$

και \mathbf{I}^p είναι μια βοηθητική μεταβλητή η οποία ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{I}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} + \boldsymbol{\omega} \quad (7.85)$$

Από την παραγωγή της σχέσης (7.74) θα είναι

$$\dot{\mathbf{M}}^{(a)} = \dot{\bar{\mathbf{d}}}^{(a)} \otimes \bar{\mathbf{d}}^{(a)} + \bar{\mathbf{d}}^{(a)} \otimes \dot{\bar{\mathbf{d}}}^{(a)} \quad (7.86)$$

Ισχύει όμως και η σχέση

$$\dot{\bar{\mathbf{d}}}^{(a)} = \dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} \bar{\mathbf{d}}^{(a)} \Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{d}}}^{(a)} = (\bar{\bar{\mathbf{a}}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} + \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{d}}^{(a)} \quad (7.87)$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων θα δώσει

$$\dot{\mathbf{M}}^{(a)} = (\bar{\bar{\mathbf{a}}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} + \boldsymbol{\omega}) \mathbf{M}^{(a)} + \mathbf{M}^{(a)} (\bar{\bar{\mathbf{a}}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1} + \boldsymbol{\omega})^T \quad (7.88)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (7.84),(7.85) ,(7.88) στην (7.83) θα δώσει

$$\gamma = \boldsymbol{\Sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}) - \sum_{a=1}^n 2\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} \mathbf{M}^{(a)} : (\dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1}) - \rho_0 \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\omega}^p} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^p - \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\omega}^e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^e + \rho_0 \left(2\mathbf{C}^e \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} - \sum_{a=1}^n \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} \mathbf{M}^{(a)} \right) : \dot{\boldsymbol{\omega}}^p \geq 0 \quad (7.89)$$

Στην τελευταία σχέση εισήχθη και ο τανυστής $\boldsymbol{\Sigma}$ ο οποίος καλείται τανυστής Mandel και θα δίνεται από την σχέση

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\rho_0 \mathbf{C}^e \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}^e} \quad (7.90)$$

Όμως η πλαστική στροφή της μικροδομής $\boldsymbol{\omega}^p$ δεν μπορεί να συμμετέχει στην εξίσωση της πλαστικής διάχυσης γεγονός που σημαίνει ότι ο τελευταίος όρος της σχέσης (7.89) οφείλει να είναι μηδενικός. Συνεπώς, η εξίσωση της διάχυσης καταλήγει στην

$$\gamma = \boldsymbol{\Sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1}) - \sum_{a=1}^n 2\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} \mathbf{M}^{(a)} : (\dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1}) - \rho_0 \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\omega}^p} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^p - \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\omega}^e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^e \geq 0 \quad (7.91)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη, γ_1, γ_2 ώστε να ισχύει

$$\gamma_1 = \boldsymbol{\Sigma} : (\dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1}) - K \dot{\omega}^p \geq 0 \quad (7.92)$$

$$\gamma_2 = -\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\omega}^e} : \dot{\boldsymbol{\omega}}^e - \sum_{a=1}^n 2\rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{M}^{(a)}} \mathbf{M}^{(a)} : (\dot{\mathbf{a}}^{(a)} \mathbf{a}^{(a)-1}) \geq 0 \quad (7.93)$$

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να γίνει μια ιδιαίτερη μνεία στο ελαστικό μέρος της θεωρίας Cosserat το οποίο αφορά μεγάλες παραμορφώσεις και μεγάλες στροφές. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του υφάσματος, P , στην τρέχουσα κατάσταση παραμόρφωσης θα δίνεται από την σχέση

$$P = \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_k \right) + \mu_{ij} \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial x_i} \quad (7.94)$$

Για την τρέχουσα κατάσταση παραμόρφωσης του σώματος, από την αρχή διατήρησης της ορμής θα είναι

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + F_i = 0 \quad (7.95)$$

ενώ από την αρχή διατήρησης της στροφορμής θα είναι

$$\frac{\partial \mu_{ki}}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + C_i = 0 \quad (7.96)$$

Η βαθμίδα της παραμόρφωσης θα δίνεται από την σχέση (7.8) και η διάσπασή της στο ελαστικό και πλαστικό μέρος θα δίνεται από την σχέση (7.54). Η πολική διάσπαση του ελαστικού μέρους της βαθμίδας της παραμόρφωσης θα δίνεται από την σχέση

$$F_{ij}^e = \bar{R}_{im}^e \bar{U}_{mj}^e \quad (7.97)$$

όπου $\bar{R}_{im}, \bar{U}_{mj}$ δεν είναι πλέον ο κλασσικός των τανυστών των στροφών και ο κλασσικός τανυστής των επιμηκύνσεων. Ο ορθογωνικός τανυστής των στροφών \bar{R}_{im} μπορεί να διασπαστεί σε ελαστικό και πλαστικό μέρος σύμφωνα με την σχέση

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^e \bar{\mathbf{R}}^p \quad (7.98)$$

Ο τανυστής των στροφών $\bar{\mathbf{R}}$ συνδέεται με τον τανυστή των στροφών $\boldsymbol{\omega}$ μέσω της σχέσης Euler-Rodrigues

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{1} \cos \bar{\theta} + \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{d}} (1 - \cos \bar{\theta}) - \varepsilon_{ijk} \bar{\mathbf{d}} \sin \bar{\theta} \quad (7.99)$$

Το πεδίο των γωνιακών ταχυτήτων $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ θα δίνεται από την σχέση

$$\dot{\omega}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{\bar{R}}_{jm}^e \bar{R}_{mk}^T \quad (7.100)$$

Ενώ το πεδίο των ταχυτήτων \mathbf{v} θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \quad (7.101)$$

Ο τανυστής των καμπυλοτήτων \bar{K}_{ijk} θα δίνεται από την σχέση

$$\bar{K}_{ijk} = \left(\bar{R}_{im}^e \right)^T \frac{\partial \bar{R}_{mj}^e}{\partial X_k} \quad (7.102)$$

Η μεταβολή της ενέργειας του σώματος στην αρχική κατάσταση αναφοράς μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$JP = \bar{\Sigma}^T : \dot{\bar{\mathbf{U}}} + \bar{\mathbf{M}}^T : \dot{\bar{\mathbf{K}}} \quad (7.103)$$

όπου $\bar{\Sigma}, \bar{\mathbf{M}}$ είναι οι τάσεις και οι τάσεις διπόλου κατά Lagrange και θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\bar{\Sigma} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \bar{\mathbf{M}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \bar{\mathbf{R}} \quad (7.104)$$

Οι τάσεις κατά Lagrange συνδέονται με το ελαστικό μέρος της ελεύθερης ενέργειας κατά Helmholtz μέσω των σχέσεων

$$\bar{\Sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \quad , \quad \bar{\mathbf{M}} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \bar{\mathbf{K}}} \quad (7.105)$$

όπου ψ^e θα είναι

$$\begin{aligned} \psi^e = & \psi^e \left(\bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2, (\bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1) \cdot \bar{\mathbf{U}}^T, (\bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2) \cdot \bar{\mathbf{U}}^T, (\bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1) \cdot \bar{\mathbf{K}}^T, (\bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2) \cdot \bar{\mathbf{K}}^T, \right. \\ & \left. \mathbf{K} : (\bar{\mathbf{U}} \cdot (\bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1 \otimes \bar{\mathbf{d}}_1) \cdot \bar{\mathbf{U}}), \mathbf{K} : (\bar{\mathbf{U}} \cdot (\bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2 \otimes \bar{\mathbf{d}}_2) \cdot \bar{\mathbf{U}}) \right) \end{aligned} \quad (7.106)$$

Κεφάλαιο 8

Μαγνητισμός

8.1. Εισαγωγή

Η ιστορία του μαγνητισμού έχει τις ρίζες του σε ένα περίφημο οξείδιο του σιδήρου, το μαγνητίτη Fe_3O_4 , το πρώτο μαγνητικό υλικό με το οποίο ήρθε σε επαφή ο άνθρωπος. Η ιδιότητα αυτού του υλικού να έλκει το κομμάτια σιδήρου είναι γνωστή εδώ και 2500 χρόνια περίπου. Στους αρχαίους χρόνους μεγάλες ποσότητες αυτού του υλικού υπήρχαν στην περιοχή της Μαγνησίας και για αυτό το λόγο έλαβε και αυτό το όνομα. Ήταν γνωστό στους αρχαίους έλληνες ότι όταν ένα κομμάτι σιδήρου έρθει σε επαφή ή ακριβέστερα τριφτεί με ένα κομμάτι μαγνητίτη ο σίδηρος μαγνητίζεται. Η βασική ιδιότητα του μαγνητίτη να προσανατολίζεται στο βορρά ήταν η πρώτη ιδιότητα που εκμεταλλεύτηκε ο άνθρωπος για προσωπική του χρήση διότι τον βοηθούσε σε μεγάλο βαθμό στον προσανατολισμό του.

Η πρώτη επιστημονική μελέτη πάνω στον μαγνητισμό έγινε από τον Άγγλο William Gilbert ο οποίος έγραψε το περίφημο βιβλίο του *On the Magnet* το 1600. Ο Gilbert ήταν ο πρώτος που πειραματίστηκε με σιδηρομαγνητικά υλικά και αποτύπωσε με ξεκάθαρο τρόπο την εικόνα του μαγνητικού πεδίου της γης. Για τα επόμενα 150 χρόνια δεν έγινε κάποια ιδιαίτερη ανακάλυψη πάνω στον μαγνητισμό παρά μόνο κάποιες βελτιώσεις στον τρόπο που κατασκευάζονταν οι μαγνήτες από σίδηρο. Ήταν στις αρχές του 19^{ου} αιώνα όταν κατασκευάστηκε ο πρώτος ηλεκτρομαγνήτης από τον Oersted αποδεικνύοντας ότι ένα μαγνητικό πεδίο μπορεί να δημιουργηθεί από το ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από ένα ρευματοφόρο αγωγό.

8.2. Ο ηλεκτρισμός

Ο ηλεκτρισμός και ο μαγνητισμός είναι αλληλένδετες έννοιες και δεν θα μπορούσε κανείς να εντυφίσει στην έννοια του μαγνητισμού δίχως προηγουμένως να έχει αναφερθεί σε στοιχειώδεις έννοιες του ηλεκτρισμού. Η θεμελιώδης ποσότητα του ηλεκτρισμού είναι το ηλεκτρικό φορτίο. Αν και δεν μπορεί να διατυπωθεί επακριβώς τι είναι το ηλεκτρικό φορτίο, εκείνο που μπορεί να ειπωθεί ξεκάθαρα είναι πως το ηλεκτρικό φορτίο αποτελεί ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των σωματιδίων από τα οποία οικοδομείται η ύλη. Το ηλεκτρικό φορτίο δύναται να μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο αλλά δεν δύναται να δημιουργείται ή να καταστρέφεται. Η τελευταία πρόταση αποτελεί μια θεμελιώδη αρχή του ηλεκτρισμού, την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.

Θεωρούμε δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 τα οποία απέχουν μεταξύ τους μια απόσταση r . Παρατηρείται ότι μεταξύ των φορτίων ασκείται μια ηλεκτρική δύναμη F της οποίας το μέτρο θα δίνεται από την σχέση

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (8.1)$$

όπου k είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από το σύστημα μονάδων. Η σχέση (8.1) επιβεβαιώθηκε για πρώτη φορά από τον Coulomb και είναι γνωστή στην διεθνή βιβλιογραφία σαν νόμος Coulomb. Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) η τιμή της σταθεράς k είναι

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \quad (8.2)$$

όπου ϵ_0 είναι μια σταθερά της οποίας η τιμή θα είναι

$$\epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (8.3)$$

Αξίζει να διευκρινιστεί ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου τα ηλεκτρικά φορτία βρίσκονται στο κενό. Όταν μεταξύ των φορτίων παρεμβάλλεται κάποιο υλικό η δύναμη μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων τροποποιείται διότι επάγονται στο υλικό επιπρόσθετα ηλεκτρικά φορτία.

Το βασικό ερώτημα που ανέκυψε κατά την μελέτη της αλληλεπίδρασης των ηλεκτρικών φορτίων σχετιζονταν με τον τρόπο που μεταφέρεται η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ τους. Η απάντηση στο βασικό αυτό ερώτημα δόθηκε με την εισαγωγή ενός νέου διανυσματικού μεγέθους, του ηλεκτρικού πεδίου E . Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα μέγεθος το οποίο βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με το πεδίο βαρύτητας το οποίο χρησιμοποιείται για να ερμηνευθεί η μεταφορά των βαρυτικών δυνάμεων μεταξύ των σημειακών μαζών. Υπό αυτή την έννοια, όταν ένα σημειακό φορτίο τοποθετείται σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου «τροποποιεί» κατά κάποιο τρόπο τον περιβάλλοντα χώρο του σημείου δημιουργώντας ένα ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο αποτελεί ιδιότητα του χώρου και η ύπαρξή του μπορεί να διαπιστωθεί με την εισαγωγή ενός δοκιμαστικού φορτίου q_2 σε αυτό το χώρο¹². Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διανυσματική ποσότητα και ορίζεται από την σχέση

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \rightarrow \infty} \frac{\vec{F}}{q_2} \quad (8.4)$$

όπου q_2 το δοκιμαστικό φορτίο, και F η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο. Από τον συνδυασμό των σχέσεων (8.1), (8.2), (8.3), (8.4) προκύπτει μια απλοποιημένη αλγεβρική σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \quad (8.5)$$

Εξ'ορισμού, η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται έτσι ώστε να ξεκινά από ένα θετικό φορτίο και να καταλήγει πάντα σε ένα αρνητικό φορτίο.

Θεωρούμε ένα ζεύγος ίσων και αντίθετων στοιχειωδών ηλεκτρικών φορτίων τα οποία βρίσκονται σε απόσταση ℓ μεταξύ τους, Σχ.8.1. Μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων θα ασκείται μια ηλεκτρική ελκτική δύναμη της οποίας το μέτρο θα δίνεται από την σχέση (8.1). Η συγκεκριμένη διάταξη καλείται ηλεκτρικό δίπολο. Το ηλεκτρικό δίπολο τοποθετείται σε χώρο όπου δρα

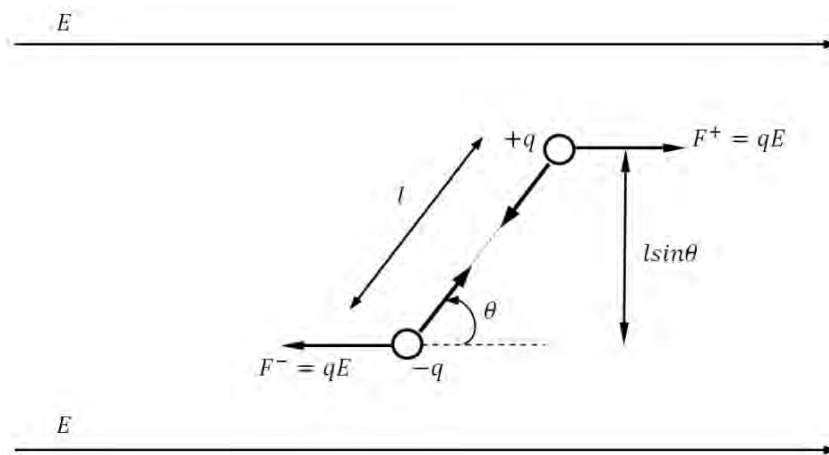
¹² Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο υπάρχει πάντα αλλά η ύπαρξή του πιστοποιείται μέσω της εισαγωγής ενός δοκιμαστικού φορτίου. Μάλιστα, το δοκιμαστικό φορτίο q_2 πρέπει να έχει πολύ μικρή τιμή σε σχέση με το φορτίο q_1 που δημιουργεί το πεδίο, ειδάλως το πεδίο παρουσιάζει ανακατανομές.

ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E . Η παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου έχει σαν αποτέλεσμα να ασκείται σε κάθε στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο μια ηλεκτρική δύναμη δημιουργώντας ένα ζεύγος δυνάμεων. Η συνισταμένη δύναμη στο ηλεκτρικό δίπολο είναι μηδενική αλλά ο μοχλοβραχίονας $\ell \sin\theta$ επιβάλλει μια μηχανική στρεπτική ροπή τ η οποία τείνει να ευθυγραμμίσει τον άξονα του ηλεκτρικού διπόλου με την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Το μέτρο της μηχανικής στρεπτικής ροπής θα δίνεται από την σχέση

$$\tau = qE\ell \sin\theta \quad (8.6)$$

Η ροπή του ηλεκτρικού διπόλου μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$\tau = pE \sin\theta \quad (8.7)$$



Σχ. 8.1. Η ροπή στο ηλεκτρικό δίπολο.

όπου το μέγεθος p καλείται ηλεκτρική διπολική ροπή έχει διαστάσεις φορτίου επί μήκος ($C \cdot m$) και θα ορίζεται από την σχέση

$$p = q \cdot \ell \quad (8.8)$$

Μια πολύ σημαντική έννοια του ηλεκτρισμού είναι η ηλεκτρική ροή Φ_E δια μέσου μιας επιφάνειας A η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο E , Σχ.2. Η ηλεκτρική ροή ορίζεται από το γινόμενο

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos\theta \quad (8.9)$$

Όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι σταθερή ή η επιφάνεια A έχει μια πολύπλοκη μορφή τότε η ηλεκτρική ροή υπολογίζεται από την ολοκληρωτική μορφή της σχέσης (8.9), δηλ.

$$\Phi_E = \int EA \cos\theta = \int E_{\perp} A = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (8.10)$$

Η έννοια της ηλεκτρικής ροής βρίσκεται σε πλήρη αναλογία με την έννοια της παροχής των ρευστών. Είναι γνωστό ότι η παροχή Q ενός ρευστού διαμέσου μιας επιφάνειας ορίζεται από

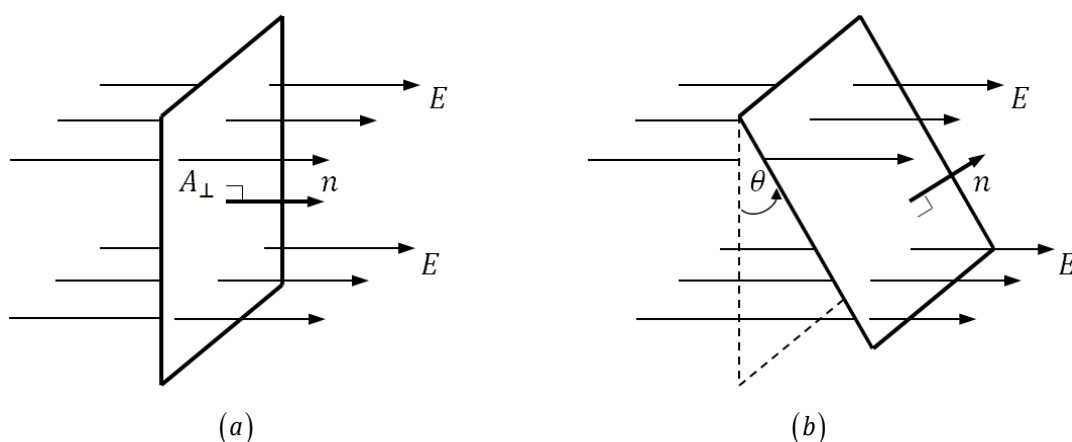
τον όγκο του ρευστού, dV που διέρχεται μέσα από μια επιφάνεια εμβαδού, dA με ταχύτητα v σε χρόνο dt , δηλ.

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (8.11)$$

όπου $d\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot dA$.

Ο Gauss διατύπωσε ένα νόμο με τον οποίο εκφράζει την σχέση μεταξύ ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού πεδίου με ένα εναλλακτικό τρόπο σε σχέση με τον νόμο του Coulomb, χρησιμοποιώντας την έννοια της ηλεκτρικής ροής. Ο νόμος του Gauss δηλώνει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, δηλαδή μια επιφάνεια που ορίζει ένα συγκεκριμένο όγκο, είναι ανάλογη προς το ολικό φορτίο που περικλείει αυτή η επιφάνεια. Από την σχέση (8.5) είναι προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου ενώ από την σχέση (8.9) μπορεί να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή δια μέσου μιας σφαιρικής επιφάνειας που περικλείει αυτό το σημειακό φορτίο, θα είναι δηλαδή

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) \Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (8.12)$$



Σχ. 8.2. Η ηλεκτρική ροή όταν η επιφάνεια (a) είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο (b) όταν είναι κεκλιμένη στο μαγνητικό πεδίο.

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της σφαίρας, δηλ. την επιλογή της φανταστικής επιφάνειας που επιλέχθηκε, και εξαρτάται μόνο από το φορτίο που περικλείεται από αυτή την επιφάνεια. Η μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ροής στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι $(N \cdot m^2 / C)$. Στην περίπτωση που η επιφάνεια επιλεγεί να είναι εντελώς ακανόνιστη τότε ο νόμος του Gauss εξακολουθεί να ισχύει και θα είναι

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (8.13)$$

Είναι σαφές ότι ο νόμος του Gauss αν και ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια και για οποιαδήποτε κατανομή φορτίων αποκτά πρακτικό ενδιαφέρον μόνο στην περίπτωση όπου η

κλειστή επιφάνεια επιλεγεί κατάλληλα. Σε διαφορετική περίπτωση ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (8.13) γίνεται εξαιρετικά επίπονος. Κάθε φορά η κλειστή επιφάνεια είναι καλό να επιλέγεται με το κριτήριο της συμμετρίας ώστε τα ολοκληρώματα να απλοποιούνται.

8.3. Μεταλλικά γυαλιά (metallic glasses)

Την δεκαετία του '60 παρατηρήθηκε ότι ορισμένα κράματα υγρής μορφής όταν ψύχονται με πολύ υψηλούς ρυθμούς στερεοποιούνται σαν μη κρυσταλλικά υλικά. Αυτά τα κράματα έγιναν ευρύτερα γνωστά σαν άμορφα κράματα ή μεταλλικά γυαλιά λόγω της άμορφης, υαλώδους δομής τους. Η παραγωγή των μεταλλικών γυαλιών πραγματοποιείται κυρίως με την έκχυση τηγμένου υλικού πάνω σε ένα αγωγίμο στερεό περιστρεφόμενο δίσκο. Ο δίσκος είναι φτιαγμένος συνήθως από χαλκό και περιστρέφεται με συγκεκριμένη ταχύτητα έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ο επιθυμητός ρυθμός ψύξης. Ο ρυθμός ψύξης πρέπει να είναι τέτοιος ούτως ώστε να μην επιτρέπεται στα άτομα του υλικού να προλάβουν να δημιουργήσουν κρυστάλλους στο εσωτερικό του. Μια τυπική τιμή του ρυθμού ψύξης του τήγματος του υλικού είναι 10^6 Ksec^{-1} . Για να είναι επιτυχής η διαδικασία της ταχύρυθμης ψύξης θα πρέπει το πάχος του τελικού προϊόντος να είναι πολύ μικρό έτσι ώστε η θερμότητα να μπορεί να διαχυθεί από το εσωτερικό του υλικού πιο εύκολα. Αυτός είναι ένας πολύ σημαντικός λόγος για τον οποίο τα μεταλλικά γυαλιά κατασκευάζονται υπό την μορφή ευθύγραμμων καλωδίων πολύ μικρής διαμέτρου (wires) ή υπό την μορφή ορθογωνικών πλακών πολύ μικρού πάχους (ribbons), της τάξης μερικών μm .

Την δεκαετία του '90 έπειτα από αρκετά χρόνια ενδελεχούς έρευνας οι επιστήμονες κατόρθωσαν να παράγουν μεταλλικό γυαλί με χαμηλούς ρυθμούς ψύξης της τάξης του 1 Ksec^{-1} . Με αυτό τον τρόπο είναι σήμερα εφικτή η παραγωγή μεταλλικού γυαλιού με διαστάσεις εκατοστών του μέτρου. Πρωτοπόρος σε αυτή την έρευνα υπήρξε ο Ιάπωνας Akihisa Inoue του Πανεπιστημίου Tohoku της Ιαπωνίας. Ο Inoue παρατήρησε ότι με την εισαγωγή μεγάλων ατόμων στα κράματα μειώνεται δραματικά ο ρυθμός δημιουργίας κρυσταλλικής δομής. Ο Ιάπωνας ερευνητής υποστηρίζει ότι η κατάλληλη εισαγωγή μεγάλων ατόμων είναι ικανή να μετατρέψει οποιοδήποτε κράμα σε μεταλλικό γυαλί αρκεί να είναι κατάλληλη η αναλογία και ο συνδυασμός μικρών και μεγάλων ατόμων.

Οι εφαρμογές των μεταλλικών γυαλιών είναι ευρύτερα διαδεδομένες και οφείλονται σε δύο λόγους κυρίως. Από την μια είναι οι ελκυστικές φυσικές ιδιότητές τους λόγω του μετάλλου και από την άλλη είναι η οικονομία στο κόστος και η ευκολία στην κατασκευή τους λόγω της τελικής υαλώδους φάσεως που αποκτούν. Ένα κομμάτι συνηθισμένου γυαλιού είναι ουσιαστικά ένα πυριτικό άλας υγρής μορφής το οποίο όταν ψύχεται σε θερμοκρασία δωματίου δεν κρυσταλλοποιείται. Υπάρχουν και άλλα υλικά, ιδίως εκείνα που τα μόριά τους πολυμερίζονται, τα οποία κατά την ψύξη τους σε θερμοκρασία δωματίου δεν κρυσταλλοποιούνται. Στα μέταλλα, μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '60, κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατόν να επιτευχθεί. Εκείνη την περίοδο ανακαλύφθηκε κάτι πολύ σημαντικό. Ορισμένα μεταλλικά κράματα μπορούν να βαφούν (quenching) χωρίς να κρυσταλλοποιούνται και να διαμορφώνουν μεταλλική υαλώδη στερεή μορφή η οποία επιδείκνυε ασυνήθιστες και σε πολλές περιπτώσεις εξέχουσες

φυσικές ιδιότητες. Λόγω των ισχυρών μεταλλικών δεσμών, που δημιουργούνται μεταξύ των ατόμων τους, τα υλικά αυτά επιδεικνύουν μια ελατότητα (ductility) και μια εξαιρετική ηλεκτρική αγωγιμότητα σε αντίθεση με τα συνήθη γυαλιά.

Ένα από τα χαρακτηριστικά των μεταλλικών γυαλιών που τους προσδίδει έντονο τεχνολογικό ενδιαφέρον, πέραν της μηχανική τους συμπεριφοράς η οποία περιλαμβάνει κυρίως την ακαμψία, την αντοχή και την ολκιμότητά τους, είναι οι μαγνητικές τους ιδιότητες. Η απουσία των δομικών ατελειών, της μαγνητοκρυσταλλικής ανισοτροπίας, η υψηλή διαπερατότητα (high permeability) και η μικρή δύναμη απομαγνήτισης τους (low coercive force) κατατάσσουν τα μεταλλικά ως τα πλέον κατάλληλα μαγνητικά υλικά για συγκεκριμένες τεχνολογικές εφαρμογές, όπως είναι τα μαγνητικά αποθηκευτικά μέσα (usb). Επιπροσθέτως, η ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητά τους (electrical and thermal conductivity) είναι πολύ χαμηλότερη από τα αυτοτελή μέταλλα.

Τα μεταλλικά γυαλιά παρουσιάζουν και κάποιες παράδοξες ιδιότητες. Έτσι, ενώ αποτελούνται από συνονθυλεύματα ατόμων με τυχαία κατανομή στο εσωτερικό του υλικού εμφανίζουν πυκνότητες οι οποίες διαφέρουν ελάχιστα από κρυσταλλικά υλικά που έχουν την ίδια σύνθεση. Επίσης, ενώ είναι ελαστικά πιο άκαμπτα από τα κλασικά γυαλιά όχι μόνο δεν είναι ψαθυρά αλλά παρουσιάζουν και μια αξιοσημείωτη ικανότητα στο να παραλαμβάνουν πλαστικές παραμορφώσεις. Το πιο παράδοξο χαρακτηριστικό τους έγκειται στις μαγνητικές τους ιδιότητες. Αν και είναι υλικά που έχουν σαν βάση τους το μέταλλο και θα ανέμενε κανείς να παρουσιάζουν συμπεριφορά σκληρού μαγνητικού υλικού, εντούτοις τα μεταλλικά γυαλιά κατατάσσονται στους μαλακούς μαγνήτες. Διατηρούν την άμορφη, υαλώδη μορφή τους χωρίς να κρυσταλλοποιούνται. Η κρυσταλλοποίησή τους επισυμβαίνει όταν αναθερμανθούν σε θερμοκρασίες περίπου στο μισό της θερμοκρασίας τήξης τους ($\approx 250-450^{\circ}\text{C}$). Η μικροδομή τους είναι τέτοια που μας επιτρέπει να τα θεωρούμε σαν ισότροπα υλικά. Στην πραγματικότητα, επειδή κατά την διάρκεια της απότομης ψύξης, η θερμότητα δεν απομακρύνεται από το υλικό ισοτροπικά ενδέχεται η τελική μορφή του υλικού να επηρεάσει κάποιες από τις φυσικές του ιδιότητες και κυρίως την μαγνητική ανισοτροπία του. Οι επιρροές αυτές όμως είναι πολύ μικρές ώστε να θεωρούνται αμελητέες. Το μέτρο διάτμησης (shear stiffness) των μεταλλικών γυαλιών είναι σαφώς πολύ μικρότερο από το μέτρο διάτμησης του αντίστοιχου πολυκρυσταλλικού κράματος. Εν αντιθέσει, το μέτρο ελαστικότητας είναι μεν μικρότερο αλλά παρουσιάζει πολύ μικρές διαφορές σε σχέση με ένα πολυκρυσταλλικό υλικό. Από πειραματικές μετρήσεις αλλά και από εμπειρικές παρατηρήσεις έχει διαπιστωθεί ότι ένα κράμα μπορεί να θεωρηθεί μεταλλικό γυαλί όταν περιέχει σε ατομική αναλογία περίπου 80% μεταβατικό μέταλλο (transition metal), όπως *Fe, Co, Ni*, και 20% κάποιο μεταλλοειδές (metalloid), όπως *B, C, Si, P*. Αυτές οι αναλογίες είναι τυπικές και το γεγονός ότι αυτές μπορούν να αλλάζουν ανάλογα με τις επιθυμητές ιδιότητες του τελικού προϊόντος παρέχουν μια πολύ μεγάλη ποικιλία μεταλλικών γυαλιών. Τα κύρια χαρακτηριστικά των μεταλλικών γυαλιών είναι οι υψηλές τιμές των ελαστικών σταθερών (G, E), οι υψηλές τιμές διαπερατότητας, οι υψηλές τιμές μαγνητικών ροπών καθώς και η ικανότητά τους να παρουσιάζουν μια πολύ καλή συμπεριφορά κατά της διάβρωσης.

Electromagnetic properties		
property	units	value
saturation induction	Tesla	1.61
max permeability	-	300.000
magnetostriction coefficient	-	30×10^{-6}
electrical resistivity	$\mu\Omega \cdot cm$	135
Curie temperature	$^{\circ}C$	370
Physical properties		
property	units	value
length	cm	5
width	cm	0.5
thickness	mm	0.025
density	gr/cm^3	7.32
tensile strength	MPa	1000–1700
elastic modulus	GPa	100–110
thermal expansion	$10^{-6}/^{\circ}C$	5.9
crystallization temperature	$^{\circ}C$	480

Πίνακας 2. Γενικές ιδιότητες του μεταλλικού κράματος Metglas®2605SC.

Η κορεσμένη μαγνητική πολικότητα των μεταλλικών γυαλιών είναι πολύ μικρότερη από αυτή των κρυσταλλικών μετάλλων γεγονός που αποδίδεται στην άμορφη – υαλώδη μικροδομή τους. Μαγνητικά πεδία της τάξης του $1.7T$ έχουν παρατηρηθεί σε μεταλλικά γυαλιά πλούσια σε Fe . Η θερμοκρασία όπου τα μεταλλικά γυαλιά, με βάση τον σίδηρο (Fe) ή το κοβάλτιο (Co), απομαγνητίζονται (θερμοκρασία Curie) κυμαίνεται περίπου στους $T_c \cong 700K$. Ο συντελεστής μαγνητοσυστολής, λ_s είναι $-10 \times 10^{-6} \leq \lambda_s \leq 30 \times 10^{-6}$. Το ότι διαθέτουν άμορφη μικροδομή έχει σαν αποτέλεσμα να μην επιδεικνύουν ουσιώδη μαγνητοκρυσταλλική ανισοτροπία ($\approx 10^2 - 10^4 \text{ erg/cm}^3$), γεγονός που δικαιολογεί το λόγο όπου τα υλικά αυτά κατατάσσονται στους μαλακούς μαγνήτες. Τα μεταλλικά γυαλιά έχουν ηλεκτρική αντίσταση μεγαλύτερη από τα κρυσταλλικά κράματα της ίδιας σύνθεσης περίπου κατά ένα συντελεστή 2 ή 3, και θερμικό συντελεστή χαμηλότερο, μερικές φορές και αρνητικό.

8.4. Μαγνητοδιαστολή (magnetostriction)

Όταν ένα σώμα εκτίθεται σε ένα μαγνητικό πεδίο οι διαστάσεις του αλλάζουν. Αυτό το φαινόμενο καλείται μαγνητοδιαστολή. Ο Joule το 1842 παρατήρησε πρώτος το φαινόμενο και έδειξε πειραματικά πως όταν μια λεπτή ράβδος από σίδηρο μαγνητιστεί από ένα ασθενές μαγνητικό πεδίο αλλάζει το μήκος της. Αυτό οφείλεται στην αλλαγή της εσωτερικής ενέργειας του σώματος και στην διαταραχή των συμμετριών του. Το υλικό υπόκειται ουσιαστικά σε μια επιμήκυνση, μια παραμόρφωση, λόγω του μαγνητικού πεδίου η οποία εφεξής θα συμβολίζεται με λ ώστε να διακρίνεται από την παραμόρφωση λόγω των μηχανικών φορτίσεων. Η παραμόρφωση θα δίνεται από την σχέση

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l} \quad (8.14)$$

Όσο περισσότερο μαγνητίζεται ένα υλικό τόσο μεγαλύτερη είναι και η μαγνητοδιαστολή του. Κάθε υλικό όμως έχει και ένα συγκεκριμένο μέγιστο όριο μαγνήτισης το οποίο ονομάζεται μαγνήτιση κορεσμού (magnetic saturation). Σε αυτό το όριο το υλικό επιδεικνύει και την μέγιστη παραμόρφωσή του η οποία θα καλείται μαγνητοδιαστολή κορεσμού και θα συμβολίζεται με λ_s . Αξίζει να σημειωθεί ότι η μαγνητοδιαστολή πέραν της έντασης του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται σε έντονο βαθμό από την θερμοκρασία και την εφαρμοζόμενη μηχανική τάση.

Η ευθύγραμμη παραμόρφωση που παρατηρήθηκε από τον Joule δεν είναι η μοναδική παραμόρφωση που μπορεί να υποστεί ένα υλικό. Έχει παρατηρηθεί ότι όταν ένα αγωγίμο σώμα εισέλθει σε ένα μαγνητικό πεδίο μπορεί να στραφεί ή και να καμφθεί. Η περίπτωση της στροφής τυγχάνει ιδιαίτερης μνείας σε επόμενη παράγραφο και είναι γνωστή σαν φαινόμενο Wiedemann.

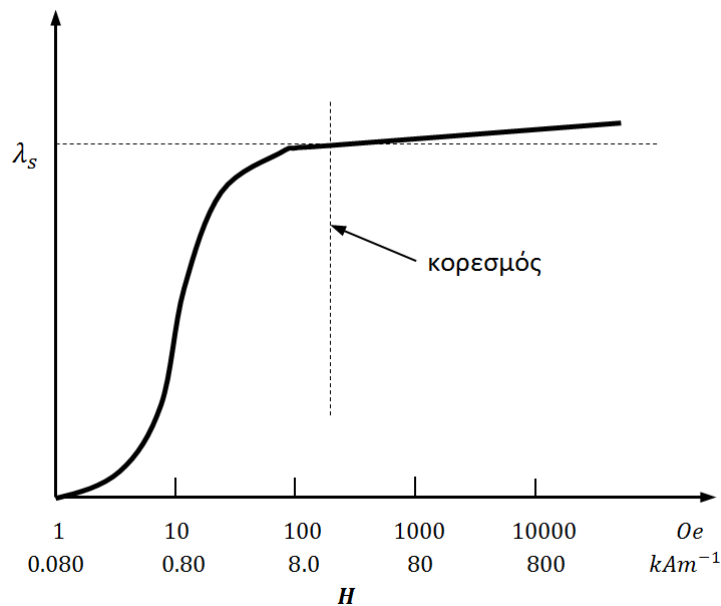
Η μαγνητοδιαστολή είναι ένα φαινόμενο το οποίο παρατηρείται σε όλα τα υλικά. Ορισμένα ισχυρά μαγνητικά υλικά, όπως αυτά με βάση τους το σίδηρο ή το νικέλιο, επιδεικνύουν μεγαλύτερη διαστολή σε σχέση με τα ασθενώς μαγνητικά υλικά. Παρόλα αυτά πρέπει να σημειωθεί ότι η μαγνητοδιαστολή είναι μια σχετικά μικρή ποσότητα, μεσοσταθμικά η τιμή της είναι της τάξης του 10^{-5} . Συγκρίνοντας την μαγνητοδιαστολή με την παραμόρφωση λόγω μηχανικής τάσης διαπιστώνεται ότι είναι μια μικρή ποσότητα που θα μπορούσε ενδεχομένως να αμεληθεί. Μια μεταλλική ράβδος από σίδηρο με μέτρο ελαστικότητας $E = 200GPa$ με συντελεστή μαγνητοδιαστολής $\lambda_s = 10^{-5}$ θα αντιστοιχούσε σε μια τάση $\sigma = 200 \times 10^{-5} = 2MPa = 0.2kgf/mm^2$ που είναι μια σχετικά μικρή τάση. Παρόλο που το φαινόμενο από μόνο του δεν και τόσο σπουδαίο, η σπουδαιότητά του ανακύπτει από τις παρατηρήσεις ότι σε αρκετά μαγνητικά υλικά έστω και μια μικρή τάση τέτοιου μεγέθους μπορεί να προκαλέσει σημαντικές διαφοροποιήσεις στην διαπερατότητά τους καθώς και στο σχήμα του βρόγχου υστέρησής τους.

Η τιμή της ευθύγραμμης μαγνητοδιαστολής κορεσμού, λ_s , μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή και μηδέν σε ορισμένα κράματα σε θερμοκρασία κοντά στο μηδέν. Η τιμή της παραμόρφωσης εξαρτάται από το βαθμό μαγνήτισης του υλικού και κατά συνέπεια από την ένταση του πεδίου που εφαρμόζεται. Η εξάρτηση μαγνητοδιαστολής και έντασης του μαγνητικού πεδίου αποτυπώνεται στο Σχ.3.

Όταν από πρακτικής άποψης έχει επέλθει η μαγνήτιση κορεσμού στο δοκίμιο μια περαιτέρω αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα επιφέρει μια πολύ μικρή, αμελητέα, αύξηση στην μαγνητοδιαστολή. Αυτό φαίνεται στο Σχ.3, από τον κλάδο της καμπύλης που ανυψώνεται ελαφρώς μετά το σημείο κορεσμού. Αυτή η μικρή μεταβολή της παραμόρφωσης ονομάζεται εξαναγκασμένη μαγνητοδιαστολή (forced magnetostriction) και είναι κάτι αντίστοιχο με την κράτυνση ενός δοκιμίου κατά την μηχανική του καταπόνηση.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι η πέραν της παραμόρφωσης λόγω μαγνητοδιαστολής υπάρχει και μια πρόσθετη παραμόρφωση η οποία εξαρτάται από το σχήμα το δοκιμίου (form effect). Ένα μαγνητισμένο σώμα έχει την τάση να ελαχιστοποιεί την μαγνητοστατική του ενέργεια. Ένα δοκίμιο το οποίο έχει μαγνητιστεί μέχρι κορεσμού M_s σε μια διεύθυνση όπου ο συντελεστής απομαγνήτισης λόγω σχήματος είναι N_d θα διαθέτει μαγνητοστατική

ενέργεια $E_{ms} = \frac{1}{2} N_d M_s^2$. Το δοκίμιο θα επιδιώξει να επιμηκυνθεί κατά την διεύθυνση της μαγνήτισης προκειμένου να μειώσει αυτή την ενέργεια καθώς το επιμηκυνόμενο δοκίμιο θα έχει μικρότερη ενέργεια. Συνεπώς η παραμόρφωση που παρατηρείται σε ένα μαγνητικό υλικό αποτελείται από το άθροισμα των δύο παραμορφώσεων, λόγω μαγνητοδιαστολής και λόγω σχήματος. Βέβαια, η παραμόρφωση λόγω σχήματος είναι αρκετά μικρότερη της μαγνητοδιαστολής και η επιρροή της σχεδόν εξανεμίζεται στην περίπτωση που επιλεγεί γεωμετρία δοκιμίου με μικρό συντελεστή N_d , όπως πολύ λεπτές ορθογωνικές πλάκες.



Σχ. 8.3. Τυπική μεταβολή της μαγνητοδιαστολής λ σε συνάρτηση με το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο H .

8.5. Επίδραση μηχανικών τάσεων στις μαγνητικές ιδιότητες του σώματος

Η εφαρμογή μηχανικής τάσης μπορεί να τροποποιήσει την εσωτερική δομή του μαγνητικού υλικού και να εισάγει μια νέα πηγή ανισοτροπίας στο υλικό. Αυτή η μαγνητική ανισοτροπία είναι επιπρόσθετη σε τυχόν προϋπάρχουσες ανισοτροπίες από άλλους λόγους, όπως κρυσταλλική δομή κλπ., και μπορεί να επηρεάσει σημαντικά κάποιες μαγνητικές ιδιότητες του υλικού όπως είναι η μαγνητική διαπερατότητα και η παραμένουσα μαγνήτιση (remanence). Ενδεικτικά, στο Σχ.4. φαίνεται η επιρροή της εφαρμοζόμενης μηχανικής τάσης, εφελκυστική και θλιπτική, στην μαγνητική συμπεριφορά ενός δοκιμίου από πολυκρυσταλλικό νικέλιο (68 permalloy). Το νικέλιο δεν είναι η μοναδική περίπτωση υλικού που επιδεικνύει αυτή την συμπεριφορά. Έχει παρατηρηθεί ότι για μια μεγάλη γκάμα υλικών η διαπερατότητα δύναται να αλλάξει ακόμη και 100 φορές όταν ασκηθεί μια τάση της τάξεως των 70MPa. Διευκρινίζεται ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι ελαστική και σε καμία περίπτωση δεν εμφανίζονται πλαστικές παραμορφώσεις.

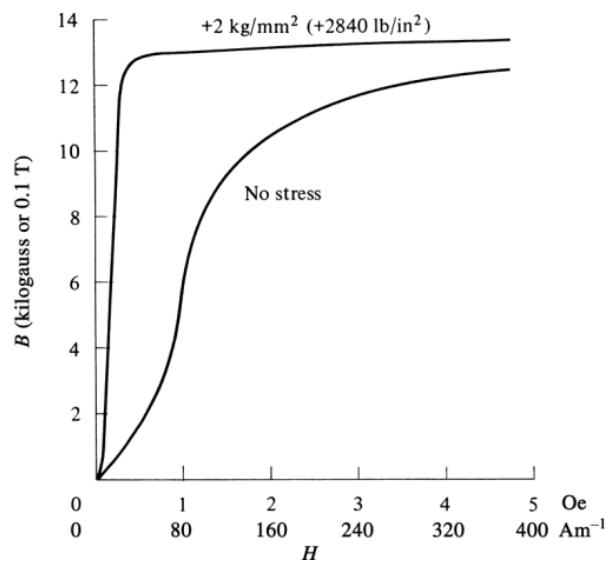
Η μαγνητική συμπεριφορά ενός δοκιμίου υπό μηχανική τάση είναι μια αρκετά περίπλοκη διαδικασία. Για ένα κράμα νικελίου (68permalloy, 68% Ni & 32% Fe) το οποίο έχει θετική μαγνητοδιαστολή μια εφελκυστική τάση της τάξης των 20MPa (2kgf/mm^2) θα αυξήσει σημαντικά την διαπερατότητα, Σχ.4. Η μαγνητοδιαστολή του πολυκρυσταλλικού σιδήρου είναι θετική σε χαμηλά πεδία, μετά μηδενίζεται και μετέπειτα γίνεται αρνητική σε υψηλότερα πεδία, Σχ.5. Από τα Σχ.4-5, διαφαίνεται ότι υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ της μαγνητοδιαστολής και της μαγνητικής συμπεριφοράς του υλικού στο οποίο ασκείται κάποια μηχανική τάση. Για το λόγο αυτό η επίδραση της μηχανικής τάσης στην μαγνήτιση του υλικού ονομάζεται μαγνητομηχανικό φαινόμενο (magnetomechanical effect). Όταν μια ευθύγραμμη μαγνητική ράβδος είναι ελεύθερη τόσο από μαγνητικό πεδίο όσο και από μηχανική τάση διαθέτει μαγνητικές ροπές ισότροπα κατανομημένες στη μάζα της, Σχ. 6a. Όταν δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο και ασκηθεί στην ράβδο μια εφελκυστική ή θλιπτική τάση και η μαγνητοδιαστολή είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα, η ράβδος θα παραμείνει αμαγνήτιστη καθώς οι μαγνητικές ροπές προς την μια κατεύθυνση είναι ίσες με τις ροπές στην άλλη κατεύθυνση, Σχ.6b. Η επιβολή μαγνητικού πεδίου θα ενισχύσει την μαγνήτιση προς την κατεύθυνση του πεδίου, Σχ. 6c. Στην περίπτωση που η μαγνητοδιαστολή και η εφαρμοζόμενη τάση είναι ετερόσημες ποσότητες οι μαγνητικές ροπές θα αντιμετωπίζουν δυο ανταγωνιστικές δράσεις. Από την μια η μηχανική τάση θα τείνει να τις ευθυγραμμίσει κατά την δική της διεύθυνση από την άλλη το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο κατά την δική του, αντίθετη διεύθυνση. Οι δύο αυτές ανταγωνιστικές δράσεις έχουν σαν αποτέλεσμα οι μαγνητικές ροπές να προσανατολίζονται σε μια διεύθυνση περίπου κάθετη στον άξονα της δοκού. Γενικά, όταν ένα υλικό με θετικό συντελεστή μαγνητοδιαστολής μαγνητιστεί θα αυξήσει το μήκος του. Η εφαρμογή μιας εφελκυστικής τάσης στο δοκίμιο, η οποία θα έχει την τάση να το επιμηκύνει, θα αυξήσει την μαγνήτισή του και μια θλιπτική τάση θα την μειώσει.

Η κατεύθυνση της μαγνήτισης ελέγχεται τόσο από την μαγνητική ανισοτροπία (ανισοτροπία λόγω της κρυσταλλικής δομής) όσο και από την εφαρμοζόμενη τάση. Στην περίπτωση των άμορφων γυαλιών η κατεύθυνση της μαγνήτισης εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από την εφαρμοζόμενη τάση δεδομένου ότι η κρυσταλλική ανισοτροπία απουσιάζει. Η μαγνητοελαστική ενέργεια, δηλ. η ενέργεια που αποθηκεύεται στο σώμα λόγω της εφαρμοζόμενης τάσης αλλά και της μαγνητοδιαστολής του υλικού, θα δίνεται από την σχέση¹³

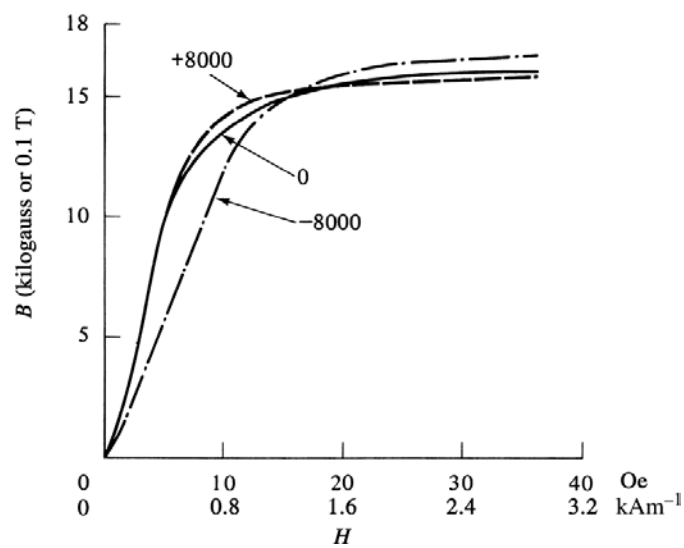
$$E_{me} = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \sin^2 \theta \quad (8.15)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της τάσης με την διεύθυνση της μαγνήτισης.

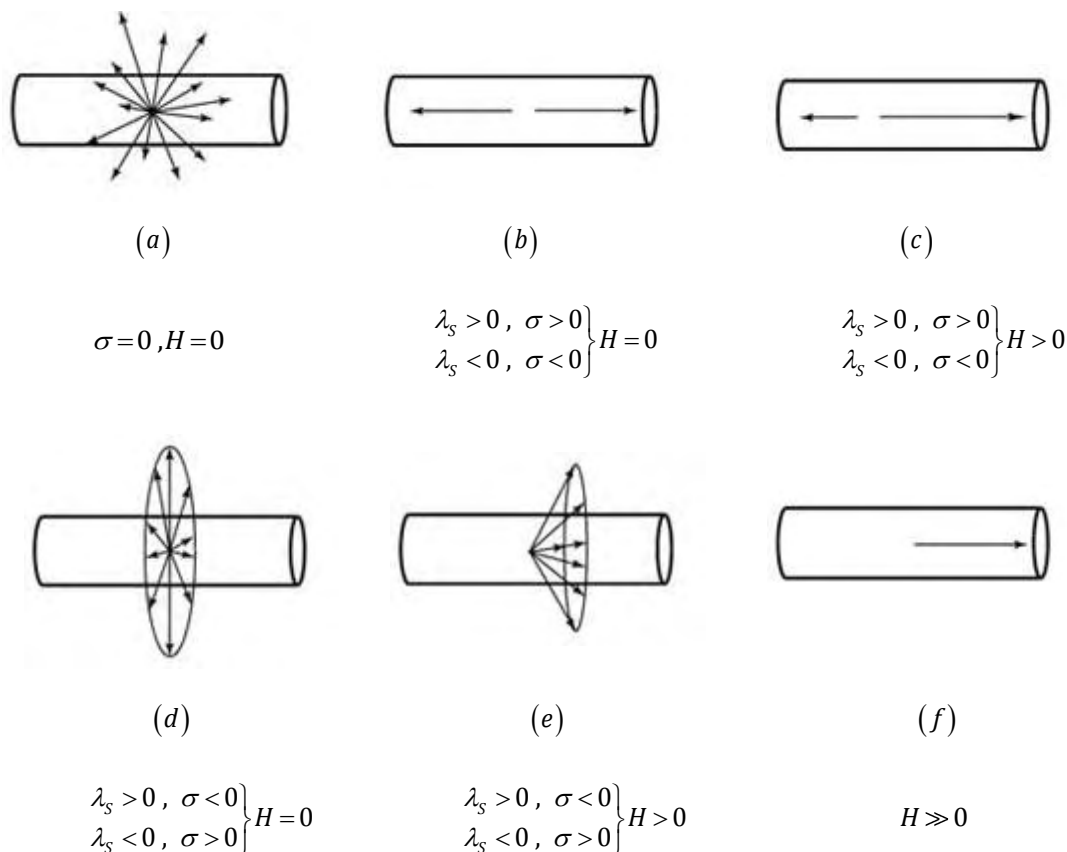
¹³ υπό την προϋπόθεση ότι η μαγνητοδιαστολή του υλικού είναι ισότροπη.



Σχ. 8.4. Η επίδραση της εφελκυστικής τάσης στην καμπύλη μαγνήτισης του κράματος νικελίου (68 permalloy).



Σχ. 8.5. Η επίδραση της εφελκυστικής τάσης ($+8000 \text{ lb} \cdot \text{in}^2 \approx +55 \text{ MPa}$) και της θλιπτικής τάσης ($-8000 \text{ lb} \cdot \text{in}^2 \approx -55 \text{ MPa}$) στην καμπύλη μαγνήτισης του σιδήρου.



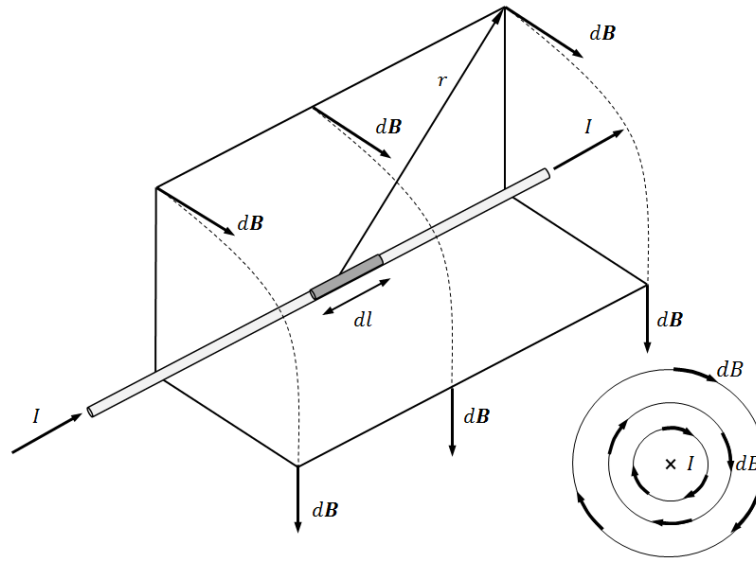
Σχ. 8.6. Συμπεριφορά φερρομαγνητικού υλικού υπό την δράση μονοαξονικής φόρτισης.

8.6. Η μαγνήτιση του υλικού σώματος

Είναι γνωστό ότι όταν ένα υλικό σωματίδιο κινείται με ταχύτητα v και φέρει σημειακό φορτίο q δημιουργεί γύρω του ένα μαγνητικό πεδίο B του οποίου το μέτρο θα δίνεται από την σχέση

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvs \sin \theta}{r^2} \quad (8.16)$$

όπου μ_0 : είναι η σταθερά μαγνητικής διαπερατότητας του κενού, θ : είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης της ταχύτητας και το διάνυσμα θέσης r . Το ηλεκτρικό ρεύμα ισοδυναμεί με την κίνηση θετικών ηλεκτρικών φορτίων. Εκείνο που ζητάμε είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από έναν αγωγό ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Για ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο q με ταχύτητα v οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κύκλοι οι οποίοι έχουν το κέντρο τους πάνω στον άξονα της ταχύτητας και τα επίπεδά τους είναι κάθετα στον άξονα της ταχύτητας. Η διεύθυνση των γραμμών αυτών για θετικό φορτίο βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, Σχ.7.



Σχ. 8.7. Το μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού με στοιχειώδες μήκος $d\ell$.

Εάν υποθέσουμε ότι ο αγωγός είναι κυκλικής διατομής το εμβαδό της διατομής του θα είναι A και ο όγκος του, δεδομένου του μήκους του $d\ell$, θα είναι $V_{\alpha\gamma} = Ad\ell$. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν n φορτία q ανά μονάδα όγκου το συνολικό φορτίο dQ στον όγκο του αγωγού θα είναι

$$dQ = nqAd\ell \quad (8.17)$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την εξίσωση (8.15) θα δώσει

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQv \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqAd\ell v \sin\theta}{r^2} \quad (8.18)$$

Είναι γνωστό όμως ότι η ποσότητα $nqvA$ είναι το ρεύμα που διέρχεται από τον αγωγό μήκους $d\ell$, συνεπώς η τελευταία σχέση γίνεται

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \sin\theta}{r^2} \quad (8.19)$$

ή σε διανυσματική μορφή (Νόμος Biot – Savart)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.20)$$

Το ολικό μαγνητικό πεδίο του ρευματοφόρου αγωγού προκύπτει από την ολοκλήρωση της σχέσης (8.19) και θα είναι

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.21)$$

Στην περίπτωση όπου γύρω από τον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I υπάρχει κάποιο υλικό, και όχι το κενό στο οποίο αναφέρεται η σχέση (8.19), τότε θα υπάρχει και ένα πρόσθετο μαγνητικό πεδίο το οποίο θα οφείλεται στην μαγνήτιση του υλικού!. Ειδικά στην περίπτωση όπου το υλικό είναι από σίδηρο ή σιδηρομαγνητικό η συνεισφορά του πρόσθετου μαγνητικού πεδίου είναι σημαντική. Όλα αυτά θα φανούν καλύτερα στα παρακάτω. Ακολουθώντας θα γίνει ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρου αγωγού με πεπερασμένο μήκος $2a$. Ο υπολογισμός θα αναφέρεται σε σημείο της μεσοκαθέτου του αγωγού και σε απόσταση x από αυτόν, Σχ.8.8. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από τον ρευματοφόρο αγωγό στο σημείο P θα δίνεται από την σχέση

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (8.22)$$

Το μαγνητικό πεδίο ενός κυκλικού βρόγχου, Σχ.8.9, θα δίνεται από την σχέση

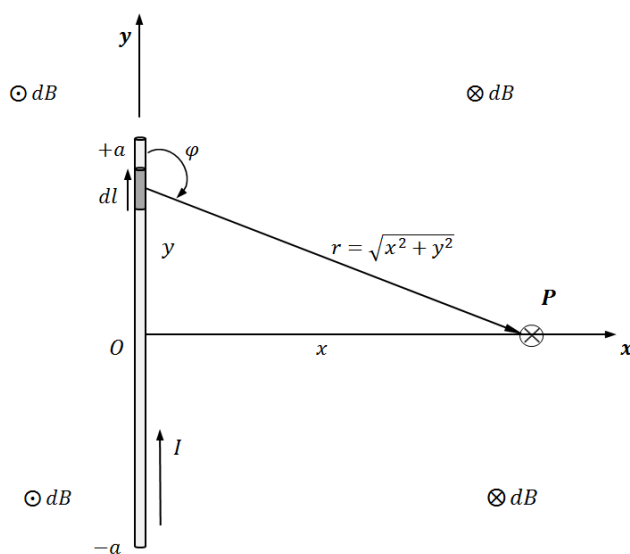
$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8.23)$$

Εάν υπήρχαν N διατεταγμένοι κυκλικοί βρόγχοι στη σειρά της ίδιας ακτίνας το μαγνητικό πεδίο θα δίνονταν από την σχέση

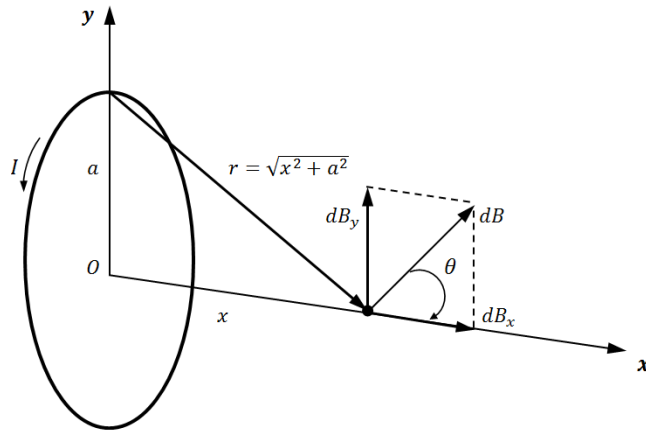
$$B_x = \frac{N\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8.24)$$

Στο κέντρο των N κυκλικών βρόγχων ($x=0$) το μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$B_x = \frac{N\mu_0 I}{2a} \quad (8.25)$$

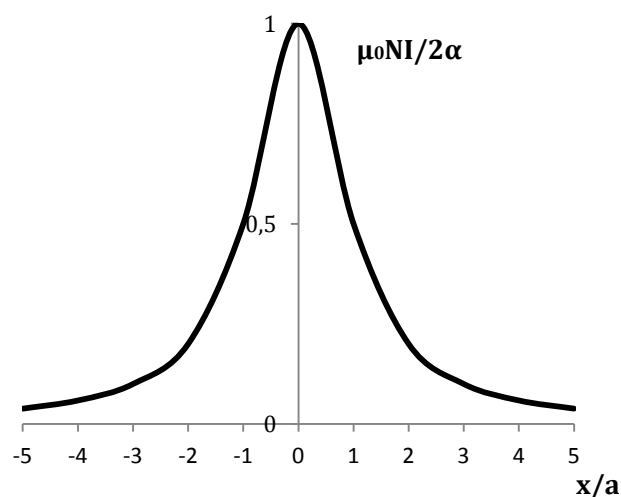


Σχ. 8.8. Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού μήκους $2a$ στο σημείο P .

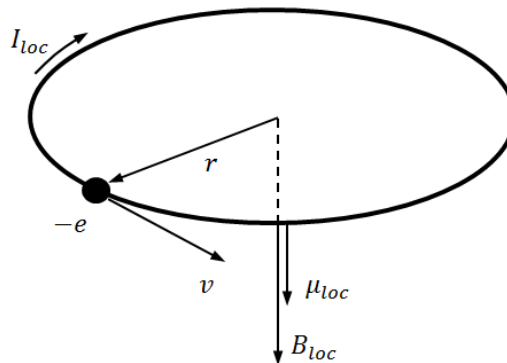


Σχ. 8.9. Το μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόγχου σε σημείο που κείται επί ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του και βρίσκεται σε απόσταση x από αυτό.

Στο Σχ.8.10., απεικονίζεται η μεταβολή της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός πηνίου (N κυκλικοί βρόγχοι) και σε απόσταση x στο εξωτερικό του πηνίου. Διαφαίνεται από το διάγραμμα ότι η τιμή του μαγνητικού πεδίου στα άκρα του πηνίου είναι περίπου η μισή από την τιμή του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του. Μέχρι τώρα όλα τα προαναφερθέντα εντάσσονται στην ειδική περίπτωση που οι ρευματοφόροι αγωγοί περιβάλλονται από το κενό. Στην πραγματικότητα όμως οι ρευματοφόροι αγωγοί περιβάλλονται από κάποιο υλικό. Στην περίπτωση αυτή το μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται είναι διαφορετικό από αυτό του κενού. Τα άτομα από τα οποία αποτελείται η ύλη περιέχουν κινούμενα ηλεκτρόνια τα οποία δημιουργούν μικροσκοπικούς βρόγχους τοπικών ρευμάτων I_{loc} , οι οποίοι δημιουργούν με τη σειρά τους το δικό τους τοπικό μαγνητικό πεδίο, B_{loc} .



Σχ. 8.10 Η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου και η απομείωσή του με την απόσταση x από το κέντρο του (a : η ακτίνα του πηνίου).



Σχ. 8.11. Σε ατομικό επίπεδο ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα v δημιουργεί μαγνητική ροπή μ .

Οι μαγνητικές ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν οφείλονται αποκλειστικά στην κίνηση των ηλεκτρονίων εντός των ατόμων της ύλης. Αυτή η κίνηση των ηλεκτρονίων έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργούνται μαγνητικές ροπές εντός του ατόμου. Η κίνηση των ηλεκτρονίων ισοδυναμεί με ηλεκτρικό ρεύμα με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια μαγνητική ροπή κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του ηλεκτρονίου. Βέβαια, υπάρχει και η κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον άξονά του (spin) το οποίο συνεισφέρει στην μαγνήτιση κατά πολύ μικρότερο ποσοστό έτσι ώστε να μπορεί να αγνοηθεί χωρίς σημαντικό λάθος. Η ολική μαγνητική ροπή του ατόμου προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα όλων των επιμέρους μαγνητικών ροπών των ηλεκτρονίων και υπό αυτή την έννοια δυο πιθανότητες υπάρχουν: α) οι μαγνητικές ροπές των ηλεκτρονίων είναι προσανατολισμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αυτοαναιρούνται με αποτέλεσμα η συνολική μαγνητική ροπή του ατόμου να είναι μηδενική. Τα υλικά που επιδεικνύουν μια τέτοια συμπεριφορά ονομάζονται διαμαγνητικά, β) η αυτοαναιρέση των μαγνητικών ροπών των ηλεκτρονίων είναι μερική (και όχι ολική) με αποτέλεσμα το άτομο να διαθέτει μια μαγνητική ροπή. Τα υλικά που διαθέτουν τέτοια άτομα ονομάζονται παραμαγνητικά ή σιδηρομαγνητικά ανάλογα με το μέγεθος της μαγνητικής ροπής. Όταν σε ένα παραμαγνητικό υλικό ασκηθεί εξωτερικό μαγνητικό πεδίο οι εσωτερικές μαγνητικές ροπές προσανατολίζονται με το εξωτερικό φορτίο και το υλικό μαγνητίζεται. Στα σιδηρομαγνητικά υλικά οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατομικών μαγνητικών ροπών είναι τόσο ισχυρές ώστε μπορούν να ευθυγραμμίζονται μεταξύ τους σε τοπικές ενότητες που ονομάζονται μαγνητικές περιοχές χωρίς να είναι απαραίτητη η παρουσία ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Όταν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο οι μαγνητίσεις των περιοχών έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Όταν εφαρμόζεται εξωτερικό πεδίο οι περιοχές αυτές τείνουν να προσανατολιστούν παράλληλα με αυτό. Κατά την διαδικασία επιβολής εξωτερικού πεδίου τα όρια των μαγνητικών περιοχών μετακινούνται, περιοχές που η μαγνήτισή τους τυχαίνει να είναι παράλληλη με το εξωτερικό πεδίο μεγάλωνουν ενώ οι υπόλοιπες συρρικνώνονται. Οι ροπές που αναπτύσσονται σε αυτά τα υλικά είναι κατά πολύ ισχυρότερες από αυτές των παραμαγνητικών υλικών. Η σχετική διαπερατότητα είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μονάδας ($\mu_r = 1000 - 100.000$). Ο σίδηρος, το κοβάλτιο και το νικέλιο είναι τα πιο αντιπροσωπευτικά υλικά αυτής της κατηγορίας. Καθώς αυξάνει το

εξωτερικό πεδίο τα σιδηρομαγνητικά υλικά φτάνουν σε ένα σημείο που όλες σχεδόν οι μαγνητικές ροπές έχουν ευθυγραμμιστεί με αυτό. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται μαγνήτιση κόρου και σημαίνει ότι οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου δεν θα επιφέρει καμία αλλαγή στην μαγνήτιση του υλικού ή στο πρόσθετο πεδίο που αυτή δημιουργεί. Σχ.8.12.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαμαγνητικά υλικά όχι μόνο δεν διαθέτουν άτομα με μηδενική μαγνητική ροπή αλλά έχουν την ιδιότητα να αντιδρούν σε ένα εξωτερικά επιβεβλημένο μαγνητικό πεδίο που προσπαθεί να τα μαγνητίσει δημιουργώντας ένα πεδίο αντίθετης κατεύθυνσης. Η μαγνητική διαπερατότητα αυτών των υλικών είναι μικρότερη από την διαπερατότητα του κενού μ_0 . Η επιδεκτικότητά (*susceptibility*) τους είναι πάντοτε αρνητική ($\chi_m < 0$) και η σχετική τους διαπερατότητα είναι ελαφρώς μικρότερη από την μονάδα ($\mu_r = 0.99990 - 0.99999$).

Σε πολλά υλικά τα τοπικά αυτά ρεύματα είναι προσανατολισμένα κατά τυχαίο τρόπο με αποτέλεσμα η συνισταμένη όλων των τοπικών μαγνητικών πεδίων να είναι μηδενική. Υπάρχουν όμως κάποια υλικά στα οποία εάν επιβληθεί ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, από ένα εξωτερικό ρεύμα που θα διαρρέει το υλικό, οι μικροσκοπικοί βρόγχοι τοπικού ρεύματος προσανατολίζονται κατά τέτοιο τρόπο ως προς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ώστε το τοπικό τους μαγνητικό πεδίο να προστίθεται στο εξωτερικό πεδίο. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο σε ένα υλικό τότε λέμε ότι το υλικό *μαγνητίστηκε*.

Στο Σχ.8.11 περιγράφεται ένα ηλεκτρόνιο σαν ένα κινούμενο σωματίδιο το οποίο φέρει ηλεκτρικό φορτίο $-e$, μάζα m ¹⁴ και διαγράφει μια κυκλική τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα v . Το κινούμενο αυτό σωματίδιο περιγράφει ακριβώς την δημιουργία του μικροσκοπικού βρόγχου του τοπικού ρεύματος I_{loc} . Από τη στιγμή που αυτός ο βρόγχος εμβαδού $A = \pi r^2$ διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έχει σαν επακόλουθο την ανάπτυξη μαγνητικής διπολικής ροπής $\mu = IA$. Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ένα ηλεκτρόνιο στη μονάδα του χρόνου είναι $v / 2\pi r$. Συνεπώς το ολικό φορτίο που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς στη μονάδα του χρόνου θα είναι το γινόμενο του αριθμού των περιστροφών επί το φορτίο του ηλεκτρονίου.

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \quad (8.26)$$

Η αναπτυσσόμενη μαγνητική διπολική ροπή τότε θα είναι

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \Rightarrow \mu = \frac{evr}{2} \quad (8.27)$$

Όταν ένα υλικό εισέλθει μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο έντασης B τότε λόγω της διπολικής μαγνητικής ροπής μ και του πεδίου θα αναπτυχθεί στο υλικό μια ροπή τ η οποία θα τείνει να ευθυγραμμίσει τις μαγνητικές ροπές με τις γραμμές του πεδίου. Το μέτρο αυτής της ροπής θα είναι

$$\tau = \mu \times B \quad (8.28)$$

¹⁴ Το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ και η μάζα του είναι $m = 9.11 \times 10^{-31}kg$.

Όταν επιτευχθεί αυτή η ευθυγράμμιση της μαγνητικής διπολικής ροπής και του πεδίου ο προσανατολισμός των μικροσκοπικών βρόγχων είναι τέτοιος που το δημιουργούμενο από αυτούς πεδίο, B_{loc} προστίθεται στο εξωτερικά εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο. Αυτό το πρόσθετο μαγνητικό πεδίο προκύπτει ότι είναι ανάλογο της μαγνητικής ροπής μ ανά μονάδα όγκου του υλικού V . Την διανυσματική αυτή ποσότητα την ονομάζουμε μαγνήτιση του υλικού και την συμβολίζουμε με M . Δηλαδή θα είναι

$$M = \frac{\mu}{V} \quad (8.29)$$

Η μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου είναι μια ποσότητα που περιγράφει το βαθμό που ένα υλικό είναι μαγνητισμένο. Συνήθως αυτό το μέγεθος αποκαλείται και ένταση μαγνήτισης ή πιο απλά μαγνήτιση και συμβολίζεται με M . Το επιπλέον μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την μαγνήτιση του υλικού (*magnetic field*) (H) αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με

$$H = \mu_0 M \quad (8.30)$$

Η τιμή της σταθεράς μ_0 (permeability of vacuum) θα είναι σταθερή και ίση με $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$. Συνεπώς όταν ένας αγωγός περιβάλλεται πλήρως από ένα υλικό που μπορεί να μαγνητιστεί η συνολική μαγνητική επαγωγή B (magnetic induction) που αναπτύσσεται μέσα στο υλικό θα είναι

$$B = B_0 + \mu_0 M \quad (8.31)$$

Όπως μια τάση που εφαρμόζεται σε ένα σώμα το παραμορφώνει έτσι και η παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου H αλλάζει τις μαγνητικές ιδιότητες του χώρου που ασκείται και θα λέμε ότι το μαγνητικό πεδίο δημιούργησε μια μαγνητική επαγωγή, B . Στο κενό αυτή η μαγνητική επαγωγή θα δίνεται από την σχέση (8.31). B_0 είναι η μαγνητική επαγωγή στο κενό που οφείλεται στην κατανομή των εξωτερικών ρευμάτων και θα είναι

$$B_0 = \mu_0 H \quad (8.32)$$

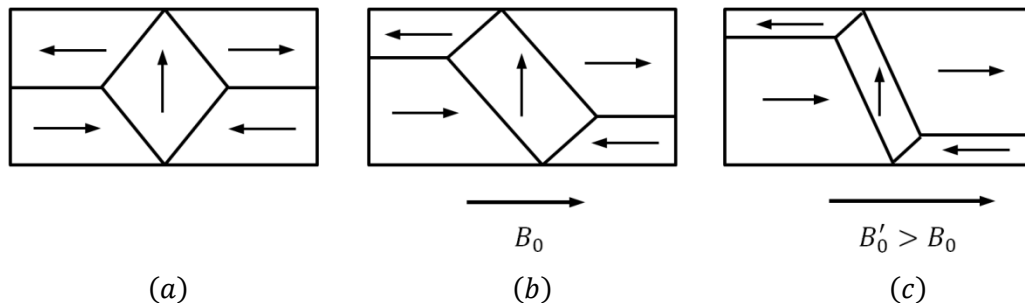
Τα υλικά που συμπεριφέρονται με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω ονομάζονται *παραμαγνητικά*. Το αποτέλεσμα είναι ότι το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο ενός τέτοιου υλικού είναι αυξημένο κατά τον παράγοντα K_m , σε σύγκριση με το πεδίο που θα υπήρχε αν ο αγωγός βρισκόταν στο κενό. Η σταθερά K_m ονομάζεται *σχετική διαπερατότητα* του υλικού και η τιμή της διαφέρει από υλικό σε υλικό. Το εύρος τιμών αυτής της σταθεράς είναι $1.00001 - 1.003$. Όλες οι εξισώσεις που έχουν διατυπωθεί έως τώρα και αφορούν το κενό ισχύουν και στην περίπτωση όπου ο αγωγός περιβάλλεται από παραμαγνητικό υλικό αρκεί να αντικατασταθεί η σταθερά μ_0 να αντικατασταθεί με το γινόμενο $K_m \mu_0$. Το γινόμενο αυτό συνήθως συμβολίζεται με μ και ονομάζεται μαγνητική διαπερατότητα του υλικού

$$\mu = K_m \mu_0 \quad (8.33)$$

Το ποσό κατά το οποίο η σχετική διαπερατότητα του υλικού υπερβαίνει την μονάδα ονομάζεται μαγνητική επιδεκτικότητα και συμβολίζεται με χ_m .

$$\chi_m = K_m - 1 \quad (8.34)$$

Σε κάποια υλικά η ολική μαγνητική ροπή κάθε ατόμου που προκαλείται από τους ατομικούς βρόγχους ρεύματος είναι μηδέν εφόσον δεν ασκείται κανένα εξωτερικό πεδίο. Ακόμη και αυτά τα υλικά όμως εμφανίζουν μαγνητικές ιδιότητες διότι ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να τροποποιήσει την κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα στα άτομα. Στην περίπτωση αυτή το πρόσθετο πεδίο αυτών των βρόγχων ρεύματος έχει κατεύθυνση πάντοτε *αντίθετη* από εκείνη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Το επαγόμενο ρεύμα δηλαδή τείνει να εξουδετερώσει το εξωτερικά επιβεβλημένο πεδίο. Τα υλικά που παρουσιάζουν τέτοια συμπεριφορά ονομάζονται *διαμαγνητικά* (diamagnetic materials). Η επιδεκτικότητά (susceptibility) τους είναι πάντοτε αρνητική ($\chi_m < 0$) και η σχετική τους διαπερατότητα είναι ελαφρώς μικρότερη από την μονάδα ($K_m = 0.99990 - 0.99999$).

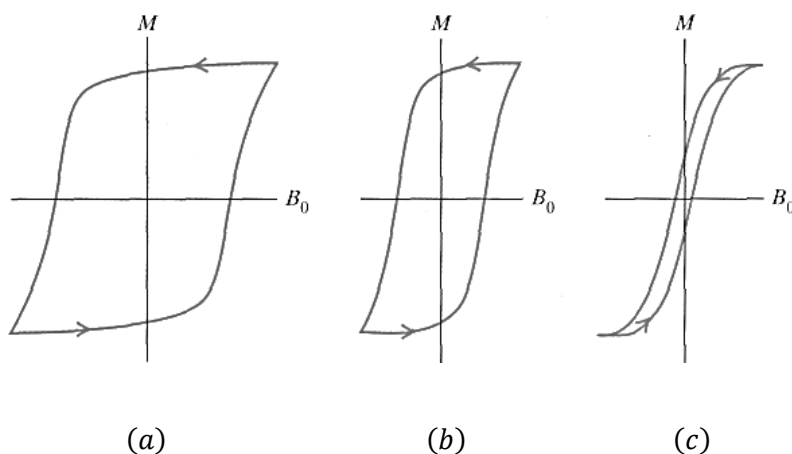


Σχ. 8.12. Η απεικόνιση των μαγνητικών περιοχών στο εσωτερικό του σώματος. Η κατεύθυνση της μαγνήτισης (a) χωρίς πεδίο (b) υπό την επίδραση ασθενούς φορτίου (c) υπό την επίδραση ισχυρού πεδίου.

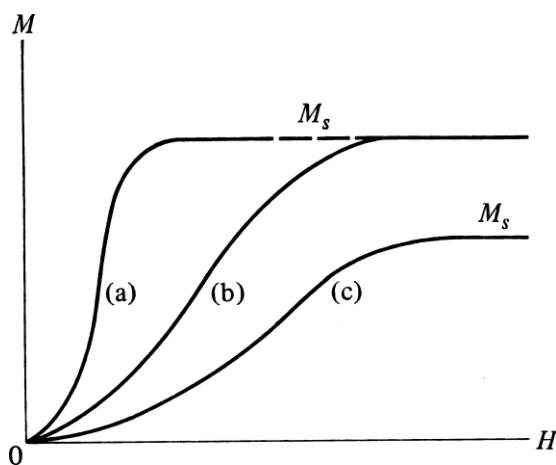
Υπάρχει και μια τρίτη κατηγορία υλικών τα οποία ονομάζονται *σιδηρομαγνητικά* (ferromagnetic materials). Σε αυτά τα υλικά οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατομικών μαγνητικών ροπών είναι τόσο ισχυρές ώστε μπορούν να ευθυγραμμίζονται μεταξύ τους σε τοπικές ενότητες που ονομάζονται μαγνητικές περιοχές χωρίς να είναι απαραίτητη η παρουσία ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Όταν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο οι μαγνήτισεις των περιοχών έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Όταν εφαρμόζεται εξωτερικό πεδίο οι περιοχές αυτές τείνουν να προσανατολιστούν παράλληλα με αυτό. Κατά την διαδικασία επιβολής εξωτερικού πεδίου τα όρια των μαγνητικών περιοχών μετακινούνται, περιοχές που η μαγνήτισή τους τυχαίνει να είναι παράλληλη με το εξωτερικό πεδίο μεγαλώνουν ενώ οι υπόλοιπες συρρικνώνονται. Οι ροπές που αναπτύσσονται σε αυτά τα υλικά είναι κατά πολύ ισχυρότερες από αυτές των παραμαγνητικών υλικών. Η σχετική διαπερατότητα είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μονάδας ($K_m = 1000 - 100.000$). Ο σίδηρος, το κοβάλτιο και το νικέλιο είναι τα πιο αντιπροσωπευτικά υλικά αυτής της κατηγορίας. Καθώς αυξάνει το εξωτερικό πεδίο τα σιδηρομαγνητικά υλικά φτάνουν σε ένα σημείο που όλες σχεδόν οι μαγνητικές ροπές έχουν ευθυγραμμιστεί με αυτό. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται μαγνήτιση κόρου και σημαίνει ότι οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου δεν θα επιφέρει καμία αλλαγή στην μαγνήτιση

του υλικού ή στο πρόσθετο πεδίο που αυτή δημιουργεί. Καθώς προσεγγίζεται ο κόρος η μαγνήτιση παύει να είναι ανάλογη του εξωτερικού πεδίου B_0 .

Σε πολλά σιδηρομαγνητικά υλικά η σχέση ανάμεσα στην μαγνήτιση και το εξωτερικό πεδίο είναι διαφορετική όταν αυξάνει το πεδίο από εκείνη όταν μειώνεται το πεδίο.



Σχ. 8.13. Βρόγχοι υστέρησης. Στις περιπτώσεις (a) και (b) το υλικό παραμένει ισχυρά μαγνητισμένο όταν μηδενίζεται το πεδίο B_0 . Στην περίπτωση (c) το υλικό παρουσιάζει μηδενική υστέρηση.



Σχ. 8.14. Καμπύλες μαγνήτισης διαφόρων υλικών.

Εάν ένα μικρής έντασης πεδίο είναι ικανό να προκαλέσει μαγνητικό κορεσμό (magnetic saturation) στο υλικό τότε το υλικό αυτό χαρακτηρίζεται μαγνητικά μαλακό (soft magnetic material). Το Σχ.8.14 δείχνει τις καμπύλες μαγνήτισης τριών διαφορετικών υλικών. Είναι εμφανές ότι το υλικό c) απαιτεί πεδίο υψηλότερης έντασης για να μαγνητιστεί περίπου στο μισό του υλικού α). Τα υλικά τύπου c) ονομάζονται μαγνητικά σκληρά (magnetically hard).

Ένα μαγνητικό πεδίο μπορεί να δημιουργηθεί είτε από εξωτερικά ηλεκτρικά ρεύματα είτε από μαγνητικούς πόλους. Εξάλλου η μαγνήτιση ενός υλικού είναι μια διαδικασία άμεσα συνδεδεμένη με την δομή και την γεωμετρία του υλικού. Αυτό σημαίνει ότι η μαγνήτιση κορεσμού είναι μια γνωστή τιμή για κάθε υλικό εκείνο που αλλάζει όμως είναι ο τρόπος με τον οποίο κάθε φορά επιτυγχάνεται αυτή η μαγνήτιση, με άλλα λόγια πια θα είναι η μορφή της καμπύλης μαγνήτισης του υλικού. Ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν έντονα την καμπύλη μαγνήτισης ενός υλικού είναι η μαγνητική ανισοτροπία. Αυτό δείχνει ότι οι μαγνητικές ιδιότητες του υλικού εξαρτώνται από την κατεύθυνση που μετρούνται.

8.7. Ευθύ και αντίστροφο φαινόμενο Wiedemann

Το ευθύ φαινόμενο Wiedemann έγκειται στην στρέψη μιας λεπτής ορθογωνικής μαγνητικής πλάκας με πολύ μικρό πάχος η οποία τοποθετείται εντός ελικοειδούς μαγνητικού πεδίου (helical magnetic field). Το ελικοειδές δημιουργείται από την σύνθεση δύο επιμέρους πεδίων. Ένα ευθύγραμμο πεδίο κατά την διεύθυνση του άξονα του δοκιμίου και ένα κυκλικό το οποίο κείται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα του δοκιμίου. Το δοκίμιο αποτελείται από αγωγίμο υλικό Metglas®2605SC έτσι ώστε να επιτρέπεται η διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από την μάζα του. Η διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από το δοκίμιο έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία του κυκλικού μαγνητικού πεδίου. Το παράλληλο με τον άξονα του δοκιμίου πεδίο δημιουργείται από ένα σωληνοειδές πηνίο από χαλκό το οποίο περιελίσσεται γύρω από το δοκίμιο έτσι ώστε ο άξονας του πηνίου να είναι παράλληλος με τον άξονα του δοκιμίου. Όταν από το πηνίο διέλθει ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργείται, όπως έχει προαναφερθεί, ένα μαγνητικό πεδίο παράλληλο με τον άξονά του. Η στροφή της αγωγίμης πλάκας του δοκιμίου σημειώνεται περί τον διαμήκη άξονά της. Αυτή η μαγνητικά επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή παρατηρήθηκε αρχικά από τον Wiedemann το 1858 και για το λόγο αυτό το φαινόμενο φέρει το όνομά του.

Θεωρούμε μια λεπτή ορθογωνική πλάκα πάχους $2a$ και πλάτους $2b$, Σχ.8.14. Η επιβολή στρεπτικής ροπής στα άκρα αυτού του δοκιμίου έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται παραμορφώσεις τόσο κατά την αξονική όσο και κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Το δοκίμιο θα στρέφεται περί τον διαμήκη άξονα του και η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους ξ θα δίνεται από την σχέση

$$\xi = \frac{x}{\ell} \quad (8.35)$$

όπου x είναι η απόσταση κατά την εγκάρσια διεύθυνση και ℓ το συνολικό μήκος του δοκιμίου. Εκτός της εγκάρσια παραμόρφωσης στο δοκίμιο θα αναπτύσσεται και μια διαμήκης παραμόρφωση ε_{zz} η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\xi^2}{2} \left(y^2 - \frac{4b^2}{12} \right) \quad (8.36)$$

Αυτή η διαμήκης παραμόρφωση δεν μπορεί να αγνοηθεί όταν η τιμή της μαγνητοδιαστολής είναι αρκετά μεγάλη όπως στην περίπτωση μας.

Στο δοκίμιο επιδρούν δύο μαγνητικά πεδία, ένα ευθύγραμμο κατά την έννοια του μήκους H_z , και ένα εγκάρσιο H_y . Η υπέρθεση αυτών των δύο πεδίων έχει σαν αποτέλεσμα το τελικό πεδίο να είναι ελικοειδές. Η τιμή του εγκάρσιου πεδίου θα δίνεται από την σχέση

$$H_y(x) = \frac{I}{4ab}x \quad (8.37)$$

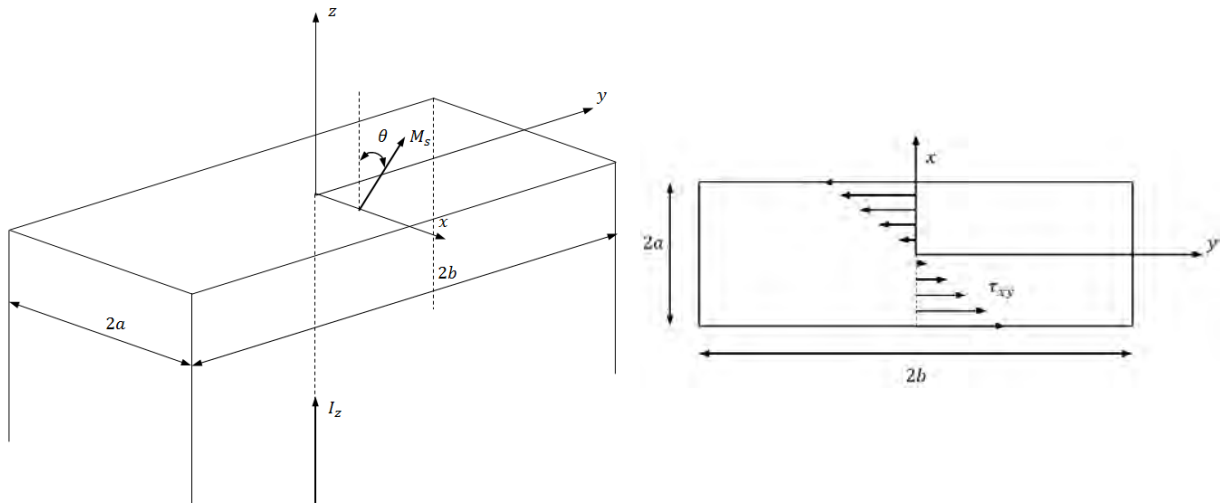
Η ένταση του ρεύματος που διέρχεται μέσα από το ορθογωνικό δοκίμιο οφείλει να είναι μικρής έντασης διότι όσο αυξάνει η απαιτούμενη ένταση του ρεύματος τόσο αυξάνει και η θερμοκρασία με αποτέλεσμα να επηρεάζεται ο συντελεστής μαγνητοδιαστολής του υλικού. Συνεπώς η σχέση (8.37) αναφέρεται σε υλικά με θετικό συντελεστή μαγνητοδιαστολής και αρκετά μεγάλης τιμής (της τάξης του 10^{-5}) για ρεύματα μικρής έντασης (Nunez de Villavicencio et.al, 1986).

Από την θεωρία της στρέψης είναι επίσης γνωστό το διάνυσμα της μετατόπισης της διατομής του οποίου οι συνιστώσες θα δίνονται από τις σχέσεις

$$u_x = -\xi yz \quad (8.38)$$

$$u_y = \xi xz \quad (8.39)$$

$$u_z = \xi \psi(x, y) \quad (8.40)$$



Σχ. 8.15. Λεπτή ορθογωνικής διατομής πλάκα η οποία διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

ψ : είναι η συνάρτηση στρέβλωσης της διατομής (wrapping function). Με την βοήθεια των μετατοπίσεων προκύπτουν και οι σχέσεις των παραμορφώσεων των οποίων οι συμμετρικές και αντισυμμετρικές συνιστώσες θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (8.41)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\xi \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (8.42)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\xi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad (8.43)$$

$$\omega_{xy} = -\xi z \quad (8.44)$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\xi \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (8.45)$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2}\xi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) \quad (8.46)$$

Οι διατμητικές τάσεις τ_{zy} εφαρμόζονται στην διατομή όπως φαίνεται στο Σχ.15, και θα μεταβάλλονται γραμμικά κατά το πάχος της διατομής σύμφωνα με την σχέση

$$\tau_{zy} = 2G\theta x \quad (8.47)$$

όπου G : το μέτρο διάτμησης του υλικού της ορθογωνικής πλάκας. Η διεύθυνση της μαγνήτισης του υλικού M_s αναμένεται να είναι κατά την διεύθυνση y , διότι η μαγνήτιση σχετίζεται με το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο H . Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω του ρεύματος I_z που διαρρέει την πλάκα κατά τον άξονά της θα είναι κυκλικής μορφής περί τον άξονα z και παρουσιάζει μια πολύπλοκη κατανομή πάνω στην διατομή. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες H_x, H_y κατά τους άξονες Ox και Oy , αντίστοιχα. Επειδή όμως ο συντελεστής απομαγνήτισης κατά την διεύθυνση x είναι πολύ μεγάλος και ταυτόχρονα ο εύκολος άξονας μαγνήτισης του υλικού είναι ο άξονας y η συνιστώσα H_x του πεδίου μπορεί να αγνοηθεί και στις περισσότερες περιπτώσεις να λαμβάνεται υπόψη μόνο η συνιστώσα H_y . Μια γενική εξίσωση που περιγράφει αυτή τη συνιστώσα του πεδίου είναι¹⁵

$$H_y(x) = \frac{I_z}{4ab} x \quad (8.48)$$

Η τιμή του πεδίου όπως δίνεται από την παραπάνω σχέση δεν ισχύει στην περιοχή των γωνιών της διατομής μιας και εκεί παρατηρείται μια μείωση περίπου 50% της τιμής. Αυτή η συνιστώσα του πεδίου λόγω του ότι προέρχεται από κυκλικό πεδίο εφεξής θα αναφέρεται σαν H_ϕ . Πέραν του κυκλικού μαγνητικού πεδίου στην λεπτή πλάκα εφαρμόζεται και ένα πρόσθετο μαγνητικό πεδίο κατά τον άξονά του H_z , το οποίο οφείλεται στο πηνίο το οποίο έχει τυλιχθεί γύρω κάθετα στον διαμήκη άξονα του. Η ένταση αυτού του πεδίου θα δίνεται από την σχέση

$$H_z = \frac{NI_c}{2r} \quad (8.49)$$

όπου I_c : είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, N : είναι ο αριθμός των σπειρών του πηνίου, r : είναι η ακτίνα της διατομής του πηνίου

¹⁵ A new simple measurement of the magnetostriction constant in metallic glass ribbons, A. Hernando.

Η παρουσία του διαμήκους μαγνητικού πεδίου H_z και του κυκλικού μαγνητικού πεδίου H_ϕ έχει σαν συνέπεια την δημιουργία ενός ελικοειδούς μαγνητικού πεδίου στην διατομή με αποτέλεσμα η διεύθυνση της μαγνήτισης M_s να μην είναι πλέον επί του άξονα των y αλλά να δημιουργεί μια γωνία με το επίπεδο της διατομής. Εν γένει μπορεί να θεωρηθεί ότι το διαμήκες μαγνητικό πεδίο λόγω του πηνίου H_z είναι αρκετά μεγαλύτερο από το κυκλικό μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Μια γενική σχέση μεταξύ των πεδίων είναι $H_y \approx 0.30H_z$.

Όταν το υλικό της λεπτής ορθογωνικής πλάκας παρουσιάζει μαγνητοδιαστολική συμπεριφορά παρουσιάζονται κάποιες αλλαγές στις μηχανικές ιδιότητές του. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια σύζευξη (coupling) ανάμεσα στην ελαστική και μαγνητική συμπεριφορά του υλικού. Αυτού του είδους η σύζευξη επηρεάζει τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην διατομή και οι σχέσεις που τις ορίζουν είναι

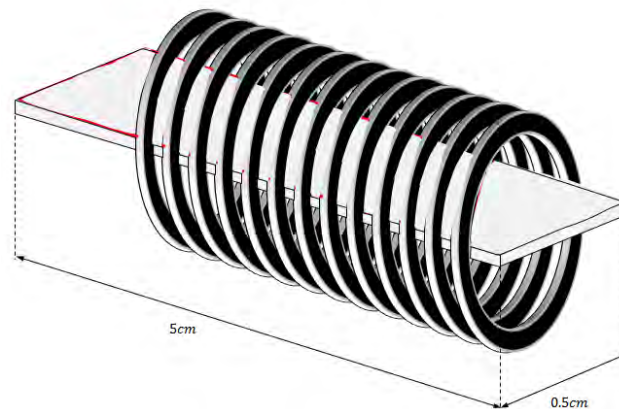
$$\tau_{zx} = G^H \gamma_{zx} - h_{15} H_x \quad (8.50)$$

$$\tau_{zy} = G^H \gamma_{zy} - h_{15} H_y \quad (8.51)$$

ενώ για τις συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής θα είναι

$$B_x = \mu_a^\gamma H_x + h_{15} \gamma_{zx} \quad (8.52)$$

$$B_y = \mu_a^\gamma H_y + h_{15} \gamma_{zy} \quad (8.53)$$



Σχ. 8.16. Τυπική διάταξη του αγωγίμου πηνίου το οποίο περιελίσσεται γύρω από λεπτή ορθογωνική πλάκα Metglas 2605SC.

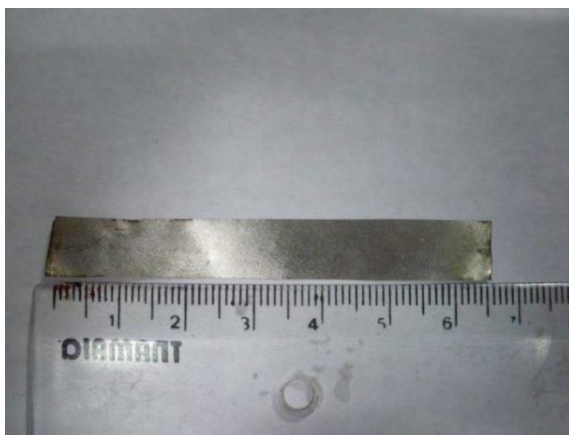
όπου G^H : είναι το μέτρο διάτμησης για συγκεκριμένη τιμή μαγνητικού πεδίου

h_{15} : είναι μια μαγνητοελαστική παράμετρος εξαρτώμενη από το υλικό

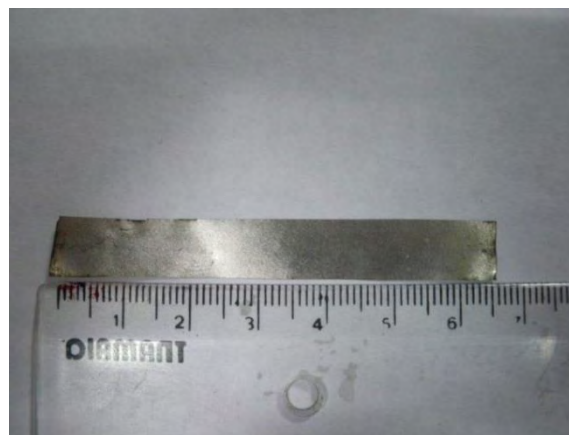
μ_a^γ : είναι η σχετική διαπερατότητα του υλικού υπό σταθερή παραμόρφωση

8.8. Πειραματική διαδικασία

Η πειραματική διαδικασία που πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Μικρομηχανικής του Δομοστατικού τομέα του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Πραγματοποιήθηκε σε συνθήκες δωματίου, δηλ. $T=20^{\circ}C$. Χρησιμοποιήθηκε υλικό από μεταλλικό γυαλί τύπου Metglas®2605SC (Fe81%/B13.5%/Si3.5%/C2%) με φυσικές και μαγνητικές ιδιότητες που δίνονται στον Πίνακα 1. Η προμήθεια του υλικού έγινε σε μορφή ρολού μήκους $2m$, πλάτους $50mm$ και πάχους $0.025mm$ κατόπιν παραγγελίας από την Goodfellow Cambridge Limited, England, Εικ. 1.. Για τις ανάγκες του πειράματος από το αρχικό ρολό αποκόπηκαν οι λεπτές λωρίδες του μεταλλικού γυαλιού με μηχανικό τρόπο (με ψαλίδι) σε διαστάσεις $0.5cm \times 6.5cm \times 0.0025cm$, Εικ. 1.



(a)



(b)

Εικόνα 1. Η λεπτή ορθογωνική λωρίδα μεταλλικού γυαλιού Metglas®2605SC ($0.5cm \times 6.5cm \times 0.0025cm$).



(a)



(b)



(c)

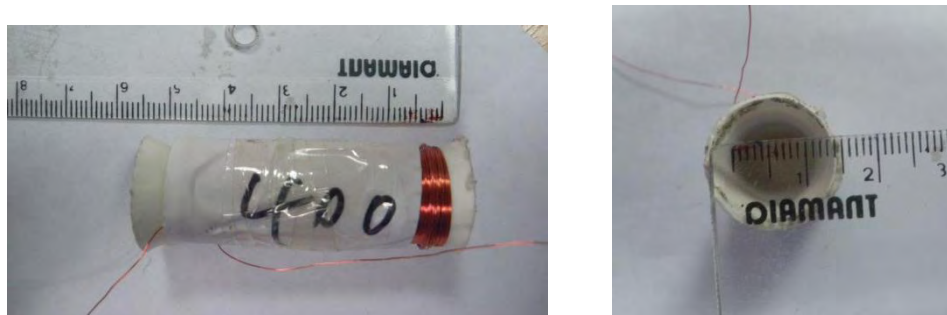
Εικόνα 2. (a) Η πηγή τροφοδοσίας ηλεκτρικού ρεύματος μέσω μπαταριών 4.5V (b) τα καλώδια μικρού πάχους που χρησιμοποιήθηκαν για την συνδεσμολογία (c) τα ειδικά κλιπσάκια μέσω των οποίων έγινε η σύνδεση της μπαταρίας και των αγώγιμων καλωδίων.

Η όλη κατεργασία του υλικού έγινε με χρήση πλαστικών γαντιών προκειμένου να αποφευχθούν ίχνη υγρασίας (π.χ. ιδρώτας) που θα επηρέαζαν την αγωγιμότητα του υλικού. Στη συνέχεια τα άκρα της μεταλλικής λωρίδας συνδέθηκαν με πηγή ηλεκτρικής ενέργειας, μπαταρίες των 4.5V (Philips LongLife Zinc carbon 3R12), μέσω ειδικά μονωμένων αγώγιμων καλωδίων από χαλκό με την χρήση ειδικών χάλκινων ακροφυσίων, Εικ. 3*a,b,c* και Εικ. 4*a,b*.



Εικόνα 3. (a),(b) Τα μονωμένα αγώγιμα καλώδια από χαλκό τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την σύνδεση με την πηγή τροφοδοσίας.

Το ευθύγραμμο μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του δοκιμίου δημιουργήθηκε από πηνίο κυκλικής διατομής, Εικ.5. Το πηνίο αποτελείται από τετρακόσιους κυκλικούς βρόγχους με διάμετρο 1cm. Οι κυκλικοί βρόγχοι οι οποίοι αποτελούνται από χάλκινο αγώγιμο σύρμα 0.5mm υλοποιήθηκαν με την περιτύλιξή τους γύρω από κυλινδρική μήτρα εσωτερικής διαμέτρου 1cm και μήκους 5.5mm. Το υλικό της κυλινδρικής μήτρας επελέγει να είναι πλαστικό προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα βραχυκυκλώματος. Κατά την υλοποίηση του πηνίου δημιουργήθηκαν στα δύο άκρα του δύο προεκτάσεις χάλκινου σύρματος προκειμένου να διευκολυνθεί η σύνδεσή του με την πηγή τροφοδοσίας.



Εικόνα 4. Το πηνίο που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα του δοκιμίου.

Η τροφοδοσία του πηνίου με ηλεκτρικό ρεύμα έγινε μέσω μπαταρίας τάσεως 4.5V , Eveready Heavy Duty. Τα ακροφύσια του πηνίου συνδέθηκαν με τους πόλους της μπαταρίας με απλή περιτύλιξη και στη συνέχεια περιτυλίχθηκαν με μονωτική ταινία έτσι ώστε να διασφαλίζεται η λειτουργία του κυκλώματος, Εικ.6.

Ακολούθως, το δοκίμιο του μεταλλικού γυαλιού τοποθετήθηκε στο εσωτερικό του πηνίου έτσι ώστε οι διαμήκεις άξονες του πηνίου και του δοκιμίου να είναι παράλληλοι, Εικ.7. Το πηνίο είναι συνδεδεμένο με την πηγή τροφοδοσίας γεγονός που σημαίνει ότι το δοκίμιο έχει αρχίσει να μαγνητίζεται. Η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου σε αυτό το στάδιο πιστοποιείται από την ελκτική δύναμη που παρατηρείται στο δοκίμιο κατά την είσοδό του στο εσωτερικό του πηνίου.

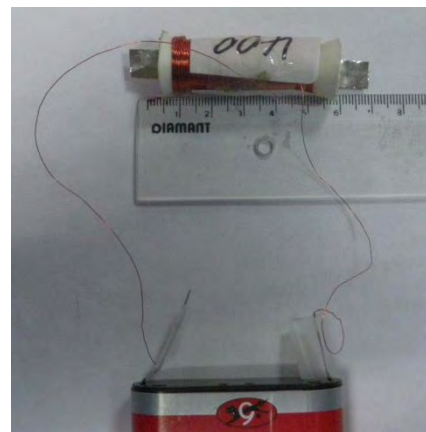


(a)



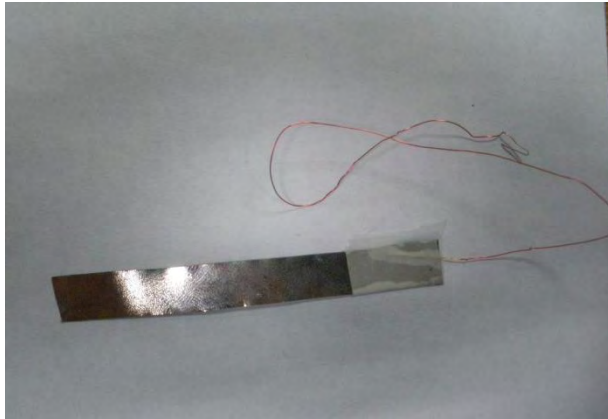
(b)

Εικόνα 5. (a) Η σύνδεση του ηλεκτρομαγνητικού πηνίου με την πηγή τροφοδοσίας και (b) η σύνδεση του πηνίου με τους πόλους της μπαταρίας με απλή περιτύλιξη και εν συνεχεία η περιτύλιξη με μονωτική ταινία.

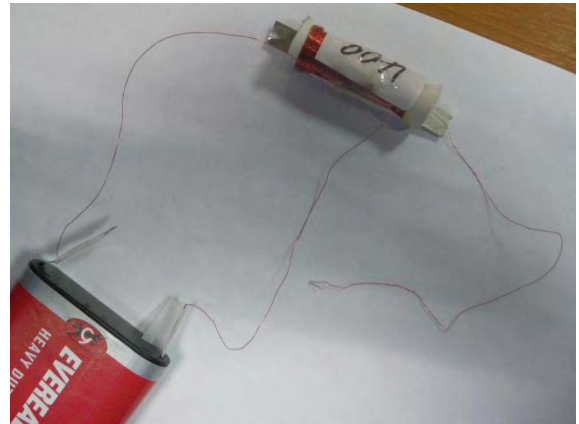


Εικόνα 6. (a) Η τοποθέτηση του δοκιμίου του μεταλλικού γυαλιού στο εσωτερικό του πηνίου έτσι ώστε οι διαμήκεις άξονες του πηνίου και του δοκιμίου να είναι παράλληλοι και (b) το πηνίο είναι συνδεδεμένο με την πηγή τροφοδοσίας γεγονός που συνεπάγεται την μαγνήτιση του δοκιμίου κατά τον διαμήκη άξονά του.

Στο ένα άκρο του δοκιμίου του μεταλλικού γυαλιού προσκολλήθηκε ένα χάλκινο αγώγιμο σύρμα διαμέτρου $0.5mm$ με την χρήση μονωτικής ταινίας, Εικ. 8. Το άλλο άκρο του δοκιμίου είναι ελεύθερο και το κύκλωμα κλείνει κάθε φορά με απλή επαγωγή με το χάλκινο σύρμα που έχει συνδεθεί στον άλλο πόλο της μπαταρίας, ώστε να αποφευχθεί η πτώση τάσης στην μπαταρία, Εικ. 9.

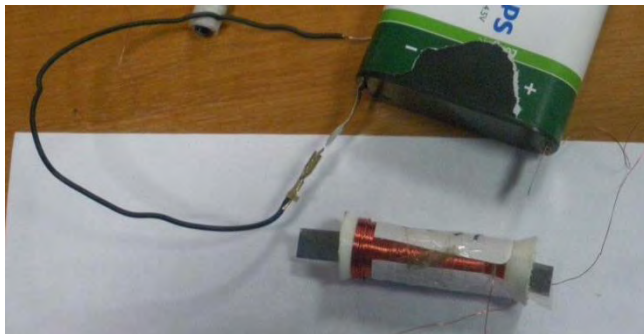


(a)

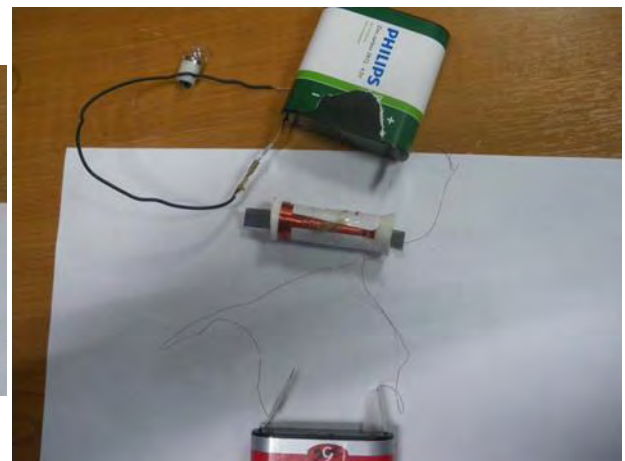


(b)

Εικόνα 7. Η σύνδεση χάλκινου σύρματος στο άκρο του δοκιμίου του μεταλλικού γυαλιού με χρήση μονωτικής ταινίας (β) η σύνδεση του δοκιμίου με την πηγή τροφοδοσίας.



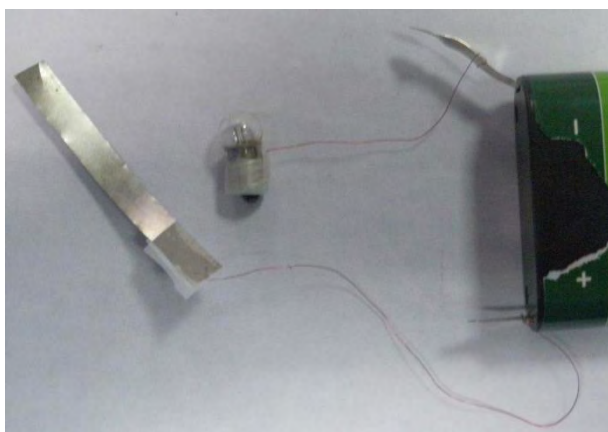
(a)



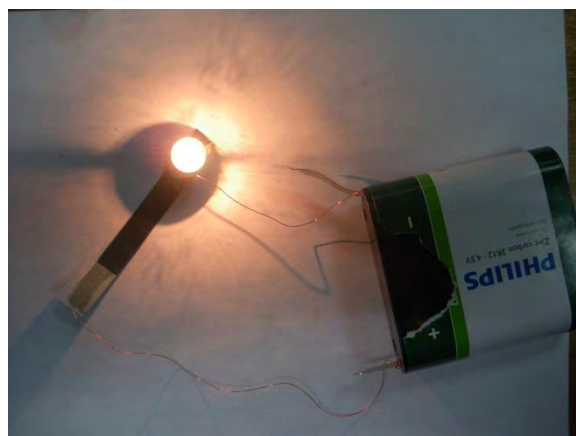
(b)

Εικόνα 8. (a) Το ένα άκρο του δοκιμίου είναι ελεύθερο και κάθε φορά το κύκλωμα θα κλείνει με την απλή επαγωγή ενός χάλκινου μονωμένου καλωδίου (μαύρο καλώδιο) του οποίου το ένα άκρο είναι ήδη συνδεδεμένο στην πηγή τροφοδοσίας (b) η όλη διάταξη της συνδεσμολογίας.

Για να πιστοποιηθεί η διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από το δοκίμιο χρησιμοποιήθηκε ένας μικρός λαμπτήρας. Στο άκρο του λαμπτήρα προσαρτήθηκε ένα μονωμένο χάλκινο σύρμα με την χρήση μονωτικής ταινίας, Εικ.10(α). Η απλή επαγωγή της βάσης του λαμπτήρα στο δοκίμιο του μεταλλικού γυαλιού επιβεβαίωσε την ύπαρξη ηλεκτρικού ρεύματος αφού ο λαμπτήρας φώτισε, Εικ.10(β).



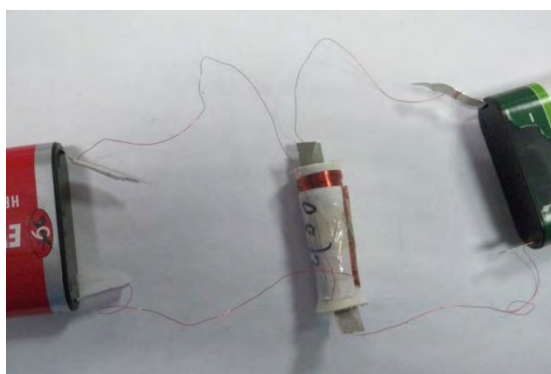
(a)



(b)

Εικόνα 9. (a) Η σύνδεση του λαμπτήρα με την πηγή τροφοδοσίας και (b) η επιβεβαίωση της διέλευσης ηλεκτρικού ρεύματος μέσω του μεταλλικού δοκιμίου.

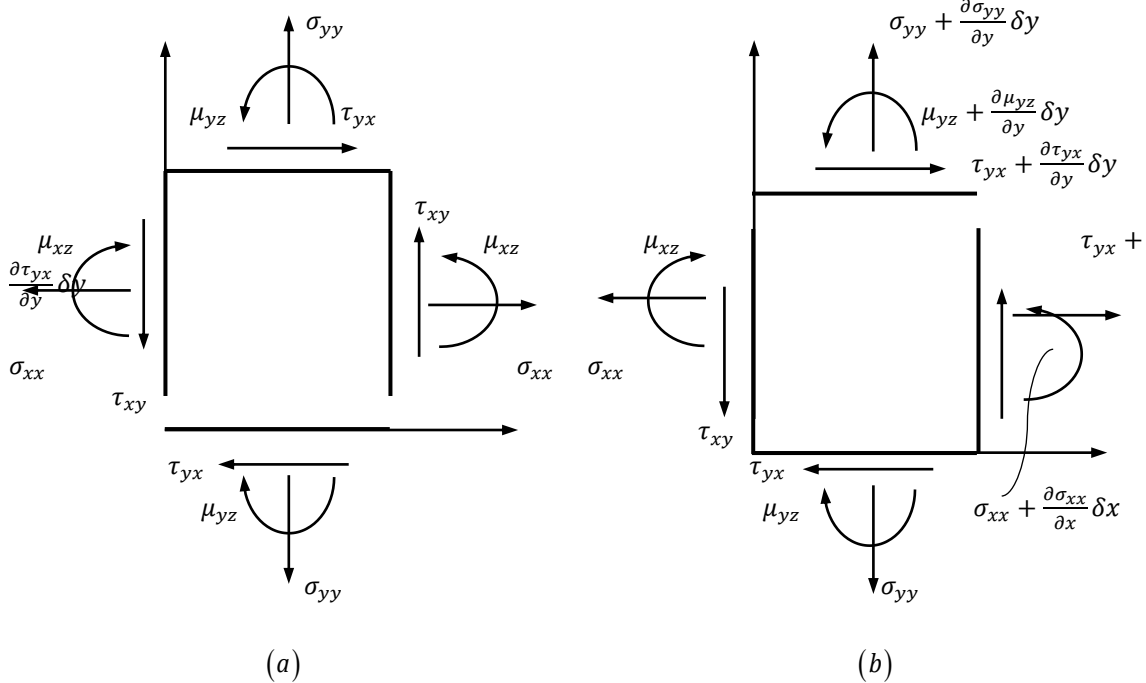
Από όλα τα παραπάνω είναι ξεκάθαρη η ύπαρξη δύο κυκλωμάτων ηλεκτρικού ρεύματος. Το ένα προέρχεται από την συνδεσμολογία του μεταλλικού δοκιμίου και το δεύτερο από την συνδεσμολογία του ηλεκτρομαγνητικού πηνίου. Το πρώτο κύκλωμα παρέχει το ακτινικό μαγνητικό πεδίο στο κάθετο επίπεδο του διαμήκη άξονα του δοκιμίου ενώ το δεύτερο κύκλωμα παρέχει το ευθύγραμμο μαγνητικό πεδίο παράλληλο με τον διαμήκη άξονα του δοκιμίου. Για την ολοκλήρωση της πειραματικής διαδικασίας και τα δύο κυκλώματα κλείνουν ταυτόχρονα. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρήθηκε μια μικρή συστροφή του μεταλλικού δοκιμίου περί τον διαμήκη άξονά του όπως ακριβώς προέβλεπε και η θεωρητική προσέγγιση.



Εικόνα 10. Τα δύο μαγνητικά πεδία, το ευθύγραμμο από την συνδεσμολογία του πηνίου και το ακτινικό από την συνδεσμολογία του μεταλλικού δοκιμίου, προκαλούν την συστροφή του μεταλλικού δοκιμίου περί τον διαμήκη άξονά του όπως προέβλεπε και η θεωρητική προσέγγιση.

Παράρτημα Α. Επίπεδη ένταση

Α1. Εξισώσεις ισορροπίας για την θεωρία Cosserat



Σχ. 8.17. Συνιστώσες των τάσεων κατά Cauchy και των διπολικών τάσεων (α) σε σταθερό ομογενές εντατικό πεδίο (β) σε μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο. Οι μαζικές δυνάμεις και οι μαζικές ροπές είναι μηδενικές.

Στο Σχ.1, οι συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ (τάσεις κατά Cauchy) και το ζεύγος ανά μονάδα επιφάνειας μ_{xz}, μ_{yz} (τάσεις διπόλου) απεικονίζονται με την θετική τους έννοια και δρουν πάνω σε μια τετραγωνική επιφάνεια μοναδιαίου πάχους. Στην περίπτωση όπου οι τάσεις δεν μεταβάλλονται από την μια πλευρά του σώματος στην άλλη η ισορροπία των ροπών επιβάλλει ότι:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} dx \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dx dy + \tau_{xy} dx dy - \sigma_{xx} dy \frac{dy}{2} - \sigma_{yy} dx \frac{dx}{2} + \sigma_{xx} dy \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \quad (A.1)$$

Στο Σχ.1(b), οι τάσεις και τα ζεύγη τους μεταβάλλονται από την μια πλευρά του σώματος έως την άλλη, απουσία μαζικών δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή η ισορροπία των δυνάμεων κατά τις δύο διευθύνσεις x, y δίνει

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_{xx} dy + \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] dy + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] dx - \tau_{yx} dx = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma_{xx} dy + \sigma_{xx} dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy + \tau_{yx} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy - \tau_{yx} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0} \quad (A.2)$$

$$+ \downarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} dy - \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right] dy + \sigma_y dx - \left[\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right] dx = 0$$

$$\tau_{xy} dy - \tau_{xy} dy - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy + \sigma_{yy} dx - \sigma_{yy} dx - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0} \quad (A.3)$$

Από την ισορροπία των ροπών προκύπτει (το σημείο A βρίσκεται στην κάτω αριστερή γωνία του στοιχειώδους τμήματος και η θετική φορά των ροπών λαμβάνεται η αντιωρολογιακή):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \Rightarrow & \sigma_{xx} dy \frac{dy}{2} - \mu_{xz} dy - \sigma_{yy} dx \frac{dx}{2} - \mu_{yz} dx + \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right] dy dx + \mu_{xz} dy \\ & + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} dx dy - \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] dy \frac{dy}{2} - \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] dx dy + \left[\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right] dx \frac{dx}{2} \\ & + \left[\mu_{yz} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} dy \right] dx = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} \frac{dy^2}{2} - \mu_{xz} dy - \sigma_{yy} \frac{dx^2}{2} - \mu_{yz} dx + \tau_{xy} dy dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx^2 dy \\ & - \sigma_{xx} \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \frac{dy^2}{2} + \mu_{xz} dy + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} dx dy - \tau_{yx} dx dy - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy^2 + \sigma_{yy} \frac{dx^2}{2} \\ & + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \frac{dx^2}{2} + \mu_{yz} dx + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} dx dy = 0 \Rightarrow \tau_{xy} dx dy - \tau_{yx} dx dy + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} dx dy = 0 \\ & \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0} \quad (A.4) \end{aligned}$$

Σημείωση:

Στα παραπάνω υιοθετήθηκε ο εξής συμβολισμός:

$$dx dx = (dx)^2 = dx^2 \quad (A.5)$$

$$dy dy = (dy)^2 = dy^2 \quad (A.6)$$

A2. Εξίσωση συμβιβαστού

Εισαγωγικά οφείλουμε να τονίσουμε ότι οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων είναι ομαλές και συνεχείς συναρτήσεις, γεγονός που μας επιτρέπει να τις παραγωγίζουμε όσες φορές είναι επιθυμητό. Οι διατμητικές παραμορφώσεις δίνονται από την σχέση

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \quad (A.7)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση δύο φορές, την μια ως προς x και την άλλη ως προς y , θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}} \quad (A.8)$$

Οι ορθές παραμορφώσεις κατά τις διευθύνσεις x, y είναι αντίστοιχα

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A.9})$$

Η παραγωγή της πρώτης σχέσης δύο φορές ως προς y και η παραγωγή της δεύτερης σχέσης δύο φορές ως προς x δίνει αντίστοιχα

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}} \quad (\text{A.11})$$

Από τις τρεις εσώκλειστες σχέσεις προκύπτει η εξίσωση συμβιβαστού

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}} \quad (\text{A.12})$$

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε παραπάνω είναι καθόλα σωστή αλλά η συνθήκη συμβιβαστού με αυτό τον τρόπο μπορεί να προκύπτει με διαδοχικές παραγωγίσεις οποιασδήποτε τάξης. Θα ήταν δυνατόν να διατυπωθεί μια συνθήκη συμβιβαστού n -οστής τάξης χωρίς να έχει και κάποιο πρακτικό αποτέλεσμα. Η πιο ορθή μέθοδος είναι η μέθοδος ολοκληρώσεως των μετατοπίσεων. Συνεπώς θα είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \int \varepsilon_{xx} dx + f(y) \quad (\text{A.13})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \varepsilon_{yy} dy + g(x) \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int \varepsilon_{xx} dx + f(y) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int \varepsilon_{yy} dy + g(x) \right]$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \int \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} dx + \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \int \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} dy + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \int \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} dy + \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (\text{A.15})$$

Με την μέθοδο της ολοκλήρωσης οι παραγωγίσεις των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xy} , είναι στοχευμένα δύο προκειμένου να απαλλαγούμε από τους ανεπιθύμητους όρους $f(y), g(x), \frac{\partial f(y)}{\partial y}, \frac{\partial g(x)}{\partial x}$.

A3. Οι συνιστώσες της καμπυλότητας ως προς τις διευθύνσεις x, y

Παραγωγίζοντας την εξίσωση του spin ως προς x θα είναι:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{A.16})$$

Η παραγωγή της ορθής παραμόρφωσης ε_{xx} ως προς την διεύθυνση y δίνει:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.17})$$

Η παραγωγή της διατμητικής παραμόρφωσης γ_{xy} ως προς την διεύθυνση x δίνει

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \quad (\text{A.18})$$

Ο συνδυασμός των παραπάνω εσώκλειστων σχέσεων δίνει την καμπυλότητα κατά x

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \kappa_{xz}} \quad (\text{A.19})$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση του spin ως προς y θα είναι

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.20})$$

Η παραγωγή της ορθής παραμόρφωσης ε_{yy} ως προς την διεύθυνση x δίνει

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.21})$$

Η παραγωγή της διατμητικής παραμόρφωσης γ_{xy} ως προς την διεύθυνση y δίνει

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \quad (\text{A.22})$$

Ο συνδυασμός των τριών τελευταίων σχέσεων, (A.20), (A.21), (A.22) δίνει

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \kappa_{yz} \quad (\text{A.23})$$

A4. Εξισώσεις συμβιβαστού σε συνάρτηση με τις τάσεις και τις διπολικές ροπές

Αν η σχέση της καμπυλότητας και της ροπής του διπόλου είναι γραμμική και ισότροπη, θα δίνεται από την εξίσωση

$$\kappa_{xz} = \frac{1}{4B} \mu_{xz} \quad , \quad \kappa_{yz} = \frac{1}{4B} \mu_{yz} \quad (\text{A.24})$$

Η παραγωγή των παραπάνω σχέσεων ως προς x και y αντίστοιχα θα δώσει (σε ομογενές σώμα):

$$\frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{4B} \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} = \frac{1}{4B} \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial x} \quad (\text{A.25})$$

και από τις σχέσεις (A.19),(A.23),(A.12) προκύπτει

$$\boxed{\frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x}} \quad (\text{A.26})$$

άρα $\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial x}$. Η ορθή παραμόρφωση ε_{xx} , στην περίπτωση της επίπεδης έντασης (plane stress) θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

Η ορθή παραμόρφωση ε_{yy} θα είναι

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

Η διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} , μετά από δύο παραγωγίσεις, μια ως προς x και μια ως προς y θα δώσει (plane stress)

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{A.29})$$

Η αντικατάσταση των τριών τελευταίων σχέσεων, (A.26),(A.27),(A.28) στην εξίσωση συμβιβαστού όπως αυτή εκφράζεται από την σχέση (A.12) δίνει την τύπου Beltrami-Mitchell εξίσωση συμβιβαστού:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right) = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ & \Rightarrow \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \left[\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right] = (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ & \boxed{\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 [\sigma_{yy} + \sigma_{xx}] = (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right)} \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

Στην παράγραφο Α3 αποδείχθη ότι η συνιστώσα της καμπυλότητας κατά x , $\kappa_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}$ είναι

$$\kappa_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \quad (\text{A.31})$$

Η παράγωγος της διατμητικής παραμόρφωσης γ_{xy} , ως προς x θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \quad (\text{A.32})$$

Η συνιστώσα της ορθής παραμόρφωσης κατά x , εάν παραγωγισθεί ως προς y θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right)} \quad (\text{A.33})$$

Η αντικατάσταση των δύο τελευταίων εσώκλειστων σχέσεων στην εξίσωση της καμπυλότητας (Α.19) δίνει

$$\kappa_{xz} = \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.34})$$

Ισχύει όμως ότι: $\mu_{xz} = 4B\kappa_{xz}$ συνεπώς θα είναι

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{4B(1+\nu)}{2E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) - \frac{4B}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \Rightarrow \mu_x = \frac{2B(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) - \frac{4B}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_x = I^2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) - \frac{2I^2}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Με την ίδια λογική προκύπτει και η άλλη συνιστώσα της διπολικής ροπής, κατά y . Ισχύει από (Α.23), ότι

$$\kappa_{yz} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad (\text{A.36})$$

Η παράγωγος της ορθής συνιστώσας ε_{yy} , ως προς x θα είναι

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \quad (\text{A.37})$$

Η παράγωγος της διατμητικής παραμόρφωσης ως προς y , θα είναι

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.38})$$

Η αντικατάσταση των δύο τελευταίων στην σχέση της καμπυλότητας κ_{yz} δίνει

$$\kappa_{yz} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) - \frac{1(1+\nu)}{2E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.39})$$

Ισχύει όμως ότι $\mu_{yz} = 4B\kappa_{yz}$, συνεπώς η συνιστώσα των διπολικών ροπών γίνεται

$$\mu_{yz} = \frac{4B}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) - \frac{2B(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \Rightarrow \mu_{yz} = \frac{2\ell^2}{1+\nu} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) - \ell^2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.40})$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχουν γίνει οι παρακάτω αντικαταστάσεις

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \ell^2 = \frac{2(1+\nu)B}{E} = \frac{B}{G} \quad (\text{A.41})$$

A5. Οι ορθές, διατμητικές τάσεις και οι διπολικές τάσεις σε σχέση με τις τασικές συναρτήσεις φ, ψ .

Οι συνιστώσες της ορθής και διατμητικής τάσης κατά x δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (\text{A.42})$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{A.43})$$

Η παραγωγή της τελευταίας μια ως προς y και μια ως προς x θα δώσει

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.45})$$

Οι συνιστώσες της ορθής και διατμητικής τάσης κατά y δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (\text{A.46})$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{A.47})$$

Η παραγωγή της τελευταίας μια ως προς y και μια ως προς x θα δώσει

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}} \quad (\text{A.49})$$

Α6. Η συνθήκη που οφείλουν να πληρούν οι τασικές συναρτήσεις $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$.

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yx} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) =$$

$$= \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \quad (\text{A.50})$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (\text{A.51})$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\mu_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \ell^2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.52})$$

Η οποία από τις δύο τελευταίες γίνεται

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \ell^2 \underbrace{\left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right] - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right]}_{(A)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} - 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} - \nu \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \ell^2 \underbrace{\left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} - 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3}}_{(B)}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\end{aligned}\quad (A.53)$$

$$\tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) = \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} - 2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}\quad (A.54)$$

Ισχύει όμως η σχέση

$$\mu_{yz} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{2\ell^2}{1+\nu}\left(\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial x} - \nu\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\right) - \ell^2\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)\quad (A.55)$$

η οποία με την αντικατάσταση των δύο τελευταίων γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{2\ell^2}{1+\nu}\underbrace{\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right)}_{(c)} - \ell^2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} - 2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = \underbrace{\frac{2\ell^2}{1+\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^3\partial y} - \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} + 2\ell^2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}}_{(d)}\end{aligned}$$

Από την αφαίρεση των σχέσεων (B)–(D) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}0 &= \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^3\partial y} - \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} - 2\ell^2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} + \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + 2\ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} - \\ &\quad - \frac{2\ell^2}{1+\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^3\partial y} + \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} - \ell^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial y^3} - 2\ell^2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} \Rightarrow -\frac{2\ell^2}{1+\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - \\ &\quad - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\left(-2\ell^2 + \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu} + \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu} - 2\ell^2\right) = 0 \Rightarrow -\frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right] - \\ &\quad - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}[1+\nu-\nu-\nu+1+\nu] = 0 \Rightarrow -\frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} + \frac{2\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right] = 0 \Rightarrow \\ &\quad -\frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\nabla^4\varphi = 0 \xrightarrow[\nu \neq -1]{\ell \neq 0} \boxed{\nabla^4\varphi = 0}\end{aligned}\quad (A.56)$$

Η παραγωγή της σχέσης (A) ως προς x θα δώσει:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \ell^2\left[\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} - 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y}\right] - \underbrace{\frac{2\ell^2}{(1+\nu)}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3} - \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} - \nu\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y} - \nu\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}\right]}_{(E)}$$

Η παραγωγή της σχέσης (C) ως προς y θα δώσει

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2\ell^2}{1+\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 2\ell^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3}}_{(F)}$$

Η πρόσθεση των σχέσεων (A),(C) δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\ell^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} - \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + \frac{2\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+ \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\ell^2}{1+\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{2\nu\ell^2}{1+\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + 2\ell^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} \\ &+ \ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \Rightarrow \nabla^2 \psi = \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \left[\frac{2\ell^2}{(1+\nu)} + \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} \right] + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} \left[-2\ell^2 + \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} \right. \\ &\left. + \frac{2\ell^2}{1+\nu} \right] + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} \left[\frac{-2\ell^2}{1+\nu} - \frac{2\nu\ell^2}{(1+\nu)} + 2\ell^2 \right] \Rightarrow \nabla^2 \psi = \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right] + 2\ell^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &\Rightarrow \nabla^2 \psi - \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \psi - \ell^2 \nabla^4 \psi = 0} \end{aligned} \quad (A.57)$$

A7. Οι εξισώσεις ισορροπίας σε συνάρτηση με τις μετατοπίσεις

Οι εξισώσεις ισορροπίας (απουσία μαζικών δυνάμεων) σε σχέση με τις τάσεις θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (A.58)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (A.59)$$

$$\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (A.60)$$

Για το αντισυμμετρικό κομμάτι των διατμητικών τάσεων στο οποίο οφείλεται η διατμητική παραμόρφωση $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, είναι

$$\tau_{xy} + \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (A.61)$$

Από την πρόσθεση κατά μέλη των (A.60),(A.61) προκύπτει

$$2\tau_{xy} + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} \right] \quad (A.62)$$

Η παραγωγή της διατμητικής τάσης τ_{xy} , όπως αυτή δίνεται από την σχέση (A.62), ως προς x , θα δώσει

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} \right] \quad (\text{A.63})$$

Από την αφαίρεση κατά μέλη των (A.60),(A.61) προκύπτει

$$-2\tau_{yx} + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} = \frac{-E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} \right] \quad (\text{A.64})$$

Η παραγωγή της διατμητικής τάσης τ_{yx} , όπως αυτή δίνεται από την σχέση (A.64), ως προς y , θα δώσει

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial y^2} \right] \quad (\text{A.65})$$

Από την κλασική θεωρία για την ειδική περίπτωση της επίπεδης έντασης ($\sigma_{zz}=0$) για τις ορθές παραμορφώσεις $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$, θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad (\text{A.66})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \quad (\text{A.67})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] \quad (\text{A.68})$$

Από την πρόσθεση των (A.66),(A.67),(A.68) προκύπτει

$$\begin{aligned} e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \\ \Rightarrow e &= \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{yy} \Rightarrow \boxed{e = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Από την πρόσθεση των (A.67),(A.68) προκύπτει επίσης ότι

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} + E\varepsilon_{yy} &= \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} + \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \Rightarrow E(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = (1-\nu) \sigma_{xx} + (1-\nu) \sigma_{yy} \\ \Rightarrow (1-\nu) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= E(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \Rightarrow \boxed{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{E}{(1-\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})} \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Από τις (A.69),(A.70) προκύπτει ότι

$$e = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \frac{E}{(1-\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (\text{A.71})$$

Για $\nu=0.5$ θα είναι $e=0$ (ασυμπίεστη κατάσταση). Εάν οριστεί η ποσότητα e^* , όπου ουσιαστικά αναπαριστά την αλλαγή της επιφάνειας του επιπέδου και είναι η ποσότητα που ενδε-

χομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πειραματικές μετρήσεις εφόσον είναι παρατηρήσιμη, θα είναι

$$e^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (\text{A.72})$$

τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} e^* \Rightarrow \boxed{e^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} e} \quad (\text{A.73})$$

Από τις σχέσεις (A.66),(A.69) θα είναι $\left(\nu \neq \frac{1}{2}, -1 \right)$

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} &\Rightarrow \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + \nu\sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + \nu \left[\frac{Ee}{1-2\nu} - \sigma_{xx} \right] \Rightarrow \\ \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} + \frac{\nu Ee}{1-2\nu} - \nu\sigma_{xx} \Rightarrow (1+\nu)\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + \frac{\nu Ee}{(1-2\nu)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{xx} &= \frac{E\varepsilon_{xx}}{(1+\nu)} + \frac{\nu Ee}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda e} \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

όπου

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Εάν $\nu=0.5$, τότε $\lambda \rightarrow \infty$, αλλά $\lambda e \rightarrow \sigma_0$ ή ισοδύναμα $\lambda^* e^* \rightarrow \sigma_0$. Η σχέση (A.74) μέσω της (A.73) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\sigma_{xx} = \frac{E\varepsilon_{xx}}{(1+\nu)} + \frac{\nu E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)(1-\nu)} e^* \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{E\varepsilon_{xx}}{(1+\nu)} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} e^* \Rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda^* e^*} \quad (\text{A.75})$$

όπου

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad , \quad e^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} e$$

Από (A.1),(A.7),(A.12) θα είναι

$$2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial e^*}{\partial x} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\text{A.76})$$

Όμως ισχύει

$$e^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \Rightarrow e^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial e^*}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Άρα η (A.76) γίνεται

$$2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^* \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial y^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow G\nabla^2 u + (\lambda^* + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\text{A.77})$$

Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mu_{xz} = 4B\kappa_{xz} \Rightarrow \mu_{xz} = 4B \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x} \Rightarrow \mu_{xz} = 4B \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \Rightarrow \mu_{xz} = 2B \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} = 2B \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x \partial y} = 2B \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

και

$$\begin{aligned} \mu_{yz} = 4B\kappa_{yz} \Rightarrow \mu_{yz} = 4B \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y} \Rightarrow \mu_{yz} = 4B \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \Rightarrow \mu_{yz} = 2B \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} = 2B \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial y^2} = 2B \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Η σχέση (A.77) μέσω των (A.78),(A.79) γίνεται

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + (\lambda^* + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + B \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) = 0 \\ \Rightarrow \boxed{G\nabla^2 u + (\lambda^* + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + Gl^2 \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} \right) = 0} \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \ell^2 \underbrace{\left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)}_{\nabla^4 u} = 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 u + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \ell^2 \nabla^4 u + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 u + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \ell^2 \nabla^4 u + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 u - \ell^2 \nabla^4 u + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})] = 0 \\ \Rightarrow \boxed{\nabla^2 u - \ell^2 \nabla^4 u + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Από τις σχέσεις (A.67),(A.69) θα είναι

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} \Rightarrow \sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} + \nu\sigma_{xx} \Rightarrow \sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} + \nu \left[\frac{Ee}{1-2\nu} - \sigma_{yy} \right] \\ \Rightarrow (1+\nu)\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} + \frac{\nu Ee}{1-2\nu} \Rightarrow \sigma_{yy} = \frac{E\varepsilon_{yy}}{(1+\nu)} + \frac{\nu Ee}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda e} \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

όπου

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{A.83})$$

Η σχέση (A.78) μέσω της (A.73) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yy} + \frac{\nu E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)(1-\nu)} e^* \Rightarrow \sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} e^* \Rightarrow \boxed{\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda^* e^*} \quad (\text{A.84})$$

όπου

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad , \quad e^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} e \quad (\text{A.85})$$

Από τις σχέσεις (A.2),(A.4),(A.18) θα είναι

$$2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^* \frac{\partial e}{\partial y} + G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (\text{A.86})$$

Ισχύει όμως ότι

$$e^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \Rightarrow e^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial e^*}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (\text{A.87})$$

Με βάση την τελευταία η σχέση (A.86) γίνεται

$$\begin{aligned} G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\lambda^* + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow G \nabla^2 v + (\lambda^* + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Ισχύει όμως ότι

$$\begin{aligned} \mu_{xz} = 4B\kappa_{xz} \Rightarrow \mu_{xz} = 4B \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x} \Rightarrow \mu_{xz} = 4B \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \Rightarrow \mu_{xz} = 2B \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial x} = 2B \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} = 2B \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

και

$$\begin{aligned} \mu_{yz} = 4B\kappa_{yz} \Rightarrow \mu_{yz} = 4B \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial y} \Rightarrow \mu_{yz} = 4B \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \Rightarrow \mu_{yz} = 2B \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial y} = 2B \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} = 2B \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Άρα η σχέση (A.88) μέσω των (A.89),(A.90) γίνεται

$$\begin{aligned}
& G\nabla^2 v + (\lambda^* + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mu_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_{yz}}{\partial x \partial y} \right] = 0 \\
& \Rightarrow G\nabla^2 v + (\lambda^* + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - B \left[-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0 \\
& \boxed{G\nabla^2 v + (\lambda^* + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Gl^2 \left[-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0} \quad (A.91)
\end{aligned}$$

Η τελευταία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{E}{2(1+\nu)} \ell^2 \left(-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \\
& \Rightarrow \nabla^2 v + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \ell^2 \nabla^4 v + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \\
& \Rightarrow \nabla^2 v - \ell^2 \nabla^4 v + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \ell^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0 \\
& \boxed{\nabla^2 v - \ell^2 \nabla^4 v + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + l^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0} \quad (A.92)
\end{aligned}$$

Αναφορές

- [1] Adden S., Pfleiderer K., Solodov I., Horst P., Busse G., (2008), Characterization of stiffness degradation caused by fatigue damage in textile composites using circumferential plate acoustic waves, *Composite Science and Technology*, vol. 68, pp. 1616 – 1623.
- [2] Andreev A.V. and Mushnikov N.V., 2001, *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, ISBN: 0-08-0431526, pp. 5041 – 5050.
- [3] Andreu A., Gil L., Roca P., 2006, A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures, *Computers and Structures*, vol. 84, pp. 1882 – 1890.
- [4] Arai K.I. and Tsuya N., 1978, Magnetomechanical coupling and variable delay characteristics by means of giant ΔE effect in iron – rich amorphous ribbon, *Journal of Applied Physics*, vol. 49, pp. 1718 – 1720.
- [5] Aravas N., 1994, Finite strain anisotropic plasticity and the plastic spin, *Modeling and simulation in materials science and engineering*, vol. 2, pp. 483 – 504.
- [6] Askar A., Cakmak A.S., 1968, A structural model of a micropolar continuum, *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 6, pp. 583 – 589.
- [7] Barandiaran J.M., Hernando A. and Ascasibar E., 1979, Influence of torsion on the magnetic properties of an amorphous ribbon, *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 12, pp. 1943 – 1950.
- [8] Barber E.J.W., 1992, *Prehistoric textiles, The development of cloth in the Neolithic and Bronze ages with special reference to the Aegean*, Princeton University Press.
- [9] Bardet J.P., Vardoulakis I., 2001, The asymmetry of stress in granular media, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 353 – 367.
- [10] Batra S.K., Tayebi A., and Backer S., 1972, The normal force between twisted filament, Part II: Experimental Verification, *Journal of Textile Institute*, vol. 63, pp. 363 – 373.
- [11] Bazant Z.P., Christensen M., 1972, Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 8, pp. 327 – 346.
- [12] Benecke S., Jan H. van Vuuren., 2005, Modeling torsion in an elastic cable in space, *Applied Mathematical Modeling*, vol. 29, pp. 117 – 136.
- [13] Berhan L. and Sastry A.M., 2003, On modeling bonds in fused, porous networks: 3D simulations of fibrous – particulate joints, *Journal of Composite Materials*, vol. 37, pp. 715 – 740.
- [14] Bertram A., 2008, *Elasticity and plasticity of large deformations An Introduction*, 2nd edition, Springer – Verlag, Berlin.
- [15] Boisse P., Buet K., Gasser A., Launay J., 2001, Meso/mechanical behavior of textile reinforcements for thin composites, *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp. 395 – 401.
- [16] Cao J., Akkerman R., Boisse P., Chen J., Cheng H.S., de Graaf E.F., Gorczya J.L., Harrison P., et.al. 2008, Characterization of mechanical behavior of woven fabrics: Experimental methods and benchmark results, *Composites Part A*, vol. 39, pp. 1037 – 1053.
- [17] Carlson D.E., 1966, Stress functions for plane problems with couple stresses, *ZAMP*, vol. 17, pp. 789 – 792.

- [18] Casolo S., 2006, Macroscopic modeling of structured materials: Relationship between orthotropic Cosserat continuum and rigid elements, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 475 – 496.
- [19] Cecchi G.C., Drigo A. and Ronconi F., 1977, Circular magnetization of nickel and ferrite twisted tubular polycrystalline samples in axial magnetic fields, *Journal of Applied Physics*, vol. 48, pp. 369 – 372.
- [20] Cerda E., Ravi-Chandar K., Mahadevan L., 2002, Wrinkling of an elastic sheet under tension, *Nature*, vol. 419, pp. 579 - 580.
- [21] Chen C., 1951, The effect of initial twist on the torsional rigidity of thin prismatic bars and tubular members, *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, June 11-16, pp. 265-269.
- [22] Chen J.Y., Huang Y., and Ortiz M., 1998, Fracture analysis of cellular materials: A strain gradient model, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, pp. 789 – 828.
- [23] Chiriac H., Barariu F., Pop Gh., 1994, On the magnetic properties of amorphous FeSiB and FeSiBC wires, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 133, pp. 325 – 328.
- [24] Cosserat E., Cosserat F., 1909, *Theory des corps deformables*, Herman et fils, Paris.
- [25] Costa J.L., Makino Y. and Rao K.V., 1990, *IEEE Transactions of Magnetism*, vol. 26, No. 5, pp. 1792 – 1794.
- [26] Cullity B.D., Graham C.D., 1972, *Introduction to magnetic materials*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [27] Cuttino J.F., Dow T.A., 1997, Contact between elastic bodies with an elliptic contact interface in torsion, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, pp. 144 – 148.
- [28] Dafalias Y.F., 1984, The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic deformations, *Mechanics of Materials*, vol. 3, pp. 223 – 233.
- [29] Dafalias Y.F., 1985, The plastic spin, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp. 865 – 871.
- [30] Dafalias Y.F., 1998, Plastic spin: Necessity or redundancy?, *International Journal of Plasticity*, vol. 14, pp. 909 – 931.
- [31] Davis L.A., Yeow Y.T. and Anderson P.M., 1982, Bulk stiffnesses of metallic glasses, *Journal of Applied Physics*, vol. 53, pp. 4834 – 4837.
- [32] Dean D.L., Ugarte C.P., 1968, Field solutions for two dimensional frameworks, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 10, pp. 315 – 339.
- [33] Deresiewicz H., 1954, Contact of elastic spheres under an oscillating torsion couple, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 21, pp. 52 – 56.
- [34] Diepolder W., Mannl V., Lippmann H., 1991, The Cosserat continuum, a model for grain rotation in metals?, *International Journal of Plasticity*, vol. 7, pp. 313 – 328.
- [35] Drosdzio S., Wessel K., 1973, A method for ultrasensitive magnetostriction measurement, *IEEE Transactions of Magnetism*, vol. Mag – 9, No. 1, pp. 56 – 59.
- [36] du Tremolet de Lacheisserie E., 1993, *Magnetostriction Theory and Applications of Magnetoelasticity*, Boca Raton: CRC Press.
- [37] Edward Dintwa, Michael Van Zeebroeck, Engelbert Tijskens, Herman Ramon, 2005, Torsion of viscoelastic spheres in contact, *Granular Matter*, vol. 7, pp. 169 – 179.
- [38] Ekreem N.B., Olabi A.G., Prescott T., Rafferty A., Hashmi M.S.J., 2007, An overview of magnetostriction its use and methods to measure these properties, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 191, pp. 96 – 101.

- [39] Eringen A.C., 1968, Theory of micropolar elasticity, Fracture, an advanced treatise, Ed. Liebowitz L., Academic Press, New York.
- [40] Fabrikant V.I., 1989, Complete solutions to some mixed boundary value problems in Elasticity, Advances in Applied Mechanics, vol. 27, pp. 153 – 223.
- [41] Fischer – Cripps A.C., 2000, Introduction to Contact Mechanics, Springer – Verlag, New York.
- [42] Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., and Hutchinson J.W., Strain gradient plasticity: Theory and experiment, Acta Metallurgica et Materialia, vol. 42, pp. 475 – 487.
- [43] Forest S., Sab K., 1998, Cosserat overall modeling of heterogeneous materials, Mechanics Research Communications, vol. 25, No.4, pp. 449 – 454.
- [44] Froio F., Tomassetti G., Vardoulakis I., 2006, Mechanics of granular materials: The discrete and the continuum descriptions juxtaposed, International Journal of Solids and Structures, vol. 43, pp. 7684 – 7720.
- [45] Giannakopoulos A.E., Lindley T.C., and Suresh S., 1998, Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics: Theoretical connections and a life prediction methodology for fretting fatigue, Acta Materialia, vol. 46, pp. 2955 – 2968.
- [46] Gianola U.F., 1955, Application of the Wiedemann effect to the magnetostrictive coupling of crossed coils, vol. 26, pp. 1152 – 1157.
- [47] Gilman J.J., 1975, Metallic glasses, Physics Today, vol. 26, pp. 46 – 53.
- [48] Giriya Vallabhan C.V., 2008, Two – dimensional nonlinear analysis of long cables, Journal of Engineering Mechanics, vol. 134, pp. 694 – 697.
- [49] Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2008, An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple stress theory, vol. 45, pp. 5521 – 5539.
- [50] Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., Sifnaiou M.D., 2011, Couple stress effects for the problem of a crack under concentrated shear loading, Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 17, pp. 433 – 459.
- [51] Granath J.A., 1960, Instrumentation applications of Inverse – Wiedemann effect, Journal of Applied Physics, vol. 31, pp. 178 – 180.
- [52] Hahn H.T., 1974, A finite deformation theory of plasticity, International Journal of Solids and Structures, vol. 10, pp. 111 – 121.
- [53] Hard af Seferstad P., Toll S. and Larsson R., 2009, A micropolar theory for the finite elasticity of open-cell cellular solids, Proceedings of the Royal Society A, vol.465, pp. 843 – 865.
- [54] Harrison P., Clifford M.J., Long A.C., 2004, Shear characterization of viscous woven textile composites: a comparison between picture frame and bias extension experiments, Composites Science and Technology, vol. 64, pp. 1453 – 1465.
- [55] Harrysson M., Ristinmaa M., 2007, Description of evolving anisotropy at large strains, Mechanics of Materials, vol. 39, pp. 267 – 282.
- [56] Head D.A., Levine A.J. and MacKintosh F.C., 2003, Distinct regimes of elastic response and deformation modes of cross – linked cytoskeletal and semi flexible polymer networks, Physical Review E, vol. 68, 061907.
- [57] Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S., 1969, Structural Mechanics of fibers, Yarns, and Fabrics, Wiley – Interscience, New York.
- [58] Hernando A. and Barandiaran J., 1975, The initial Matteucci effect, Journal of Physics D: Applied Physics, vol. 8, pp. 833 – 840.
- [59] Hernando A., 1979, Magnetization process in twisted uniaxial polycrystals, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 12, pp. 96 – 101.

- [60] Hernando A., Barandiaran J.M., 1980, Micromagnetics of twisted amorphous ribbons, *Physical Review B*, vol. 22, pp. 2445 – 2449.
- [61] Hernando A., Crespo P., Marin P. and Gonzalez A., 2001, *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, ISBN: 0-08-0431526, pp. 4780 - 4787.
- [62] Hernando A., Madurga V., Gonzalez J.M. and Cebollada F., 1983, Helical anisotropy induced by annealing in Metglas 2826, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 31 – 34, pp. 1553 – 1554.
- [63] Holzapfel G.A., 2000, *Nonlinear solid mechanics*, Wiley, New York.
- [64] Holzapfel G.A., Gasser T.C. and Ogden R.W., 2000, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Journal of Elasticity*, vol. 61, pp. 1 – 48.
- [65] Hu J. and Zhang Y., 1997, The KES shear test for fabrics, *Textile Research Journal*, vol. 67(9), pp. 654-664.
- [66] Irvine H.M., Sinclair G.B., 1976, The suspended elastic cable under the action of concentrated vertical loads, *International Journal Solids and Structures*, vol. 12, pp. 309 – 317.
- [67] Jaunzemis W., 1967, *Continuum Mechanics*, McMillan, New York.
- [68] Johnson K.L., 1985, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York.
- [69] Kanno Y. and Ohsaki M., 2005, Minimum principle of complementary energy for non-linear elastic cable networks with geometrical nonlinearities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 126, No.3, pp. 617 – 641.
- [70] Kawabata S., Niwa M., Kawai H., 1973*a*, The finite deformation theory of plain weave fabrics. Part I: The biaxial deformation theory, *Journal of Textile Institute*, vol. 64(1), pp. 21 – 46.
- [71] Kawabata S., Niwa M., Kawai H., 1973*b*, The finite deformation theory of plain weave fabrics. Part II: The uniaxial deformation theory, *Journal of Textile Institute*, vol. 64(2), pp. 47 – 61.
- [72] Kawabata S., Niwa M., Kawai H., 1973*c*, The finite deformation theory of plain weave fabrics. Part III: The shear deformation theory, *Journal of Textile Institute*, vol. 64(2), pp. 62 – 85.
- [73] Kern R. and Gonser U., 1980, Stress effect on the magnetoresistance of amorphous ferromagnets, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 21 pp. 182 – 186.
- [74] Kikuchi Y., 1968, Magnetostrictive materials and applications, *IEEE Transactions of Magnetism*, vol. Mag – 4, No. 2, pp. 107 – 117.
- [75] Koiter W.T., 1964, Couple stresses in the theory of elasticity. I-II, *Proceedings Royal Netherlands Academy of Sciences*, B67, pp. 17 – 44.
- [76] Kouzoudis D., Mouzakis D.E., 2006, A 2826 MB Metglas ribbon as a strain sensor for remote and dynamic mechanical measurements, *Sensors and Actuators A*, vol. 127, pp. 355 – 359.
- [77] Kratochvil J., 1973, On a finite strain theory of elastic – inelastic materials, *Acta Mechanica*, vol. 16, pp. 127 – 142.
- [78] Kumar R.S., McDowell D.L., 2004, Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7399 – 7422.
- [79] Lacarbonara W. and Pacitti A., 2008, Nonlinear modeling of cables with flexural stiffness, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2008, Article ID: 370767, 21 pages.

- [80] Lachner D., Lippmann H., Toth L.S., 1994, On Cosserat plasticity and plastic spin for isotropic materials, *Archives of Mechanics*, vol. 46, pp. 531 – 539.
- [81] Lanir Y., 1983, Constitutive equations for fibrous connective tissues, *Journal of Biomechanics*, vol. 16, pp. 1 – 12.
- [82] Leaf G.A.V., 2001, Analytical plain weave fabric mechanics and the estimation of initial shear modulus, *Journal of Textile Institute*, vol. 92, pp. 70-79.
- [83] Leaf G.A.V., 2002, Analytical woven fabric mechanics, *International Journal of Clothing Science and Technology*, vol. 14, pp. 223-229.
- [84] Leaf G.A.V., 2004, The mechanics of plain woven fabrics, *International Journal of Clothing Science and Technology*, vol. 16, pp. 97 – 107.
- [85] Liniers M., Madurga V., Vasquez M. and Hernando A., 1985, Magnetostrictive torsional strain in transverse field annealed Metglas 2605, *Physical Review B*, vol. 31, pp. 4425 – 4432.
- [86] Lippmann H., 1995, Cosserat plasticity and plastic spin, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 11, pp. 753 – 762.
- [87] Livingston J.D., Morris W.G. and Jagielinski T., 1984, Effects of applied currents on domain structures and permeability in amorphous metal ribbons, *Journal of Applied Physics*, vol. 55, pp. 1790 – 1792.
- [88] Loret B., 1983, On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials, *Mechanics of Materials*, vol. 2, pp. 287 – 304.
- [89] Lubkin J.L., 1951, The torsion of elastic spheres in contact, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, No.1, pp. 183 – 187.
- [90] Madurga V., Vasquez M., Barandiaran J.M., Nielsen O.V. and Hernando A., 1984, On the second order elastic effects in amorphous ribbons under torsion, *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 17, pp. 127 – 132.
- [91] Malyugin D.V., 1991, On the theory of Wiedemann effects, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 97, pp. 193 – 197.
- [92] Mandel J., 1971, *Plasticite Classique et Viscoplasticite'*, Courses and Lectures, No 97, International Center for Mechanical Sciences, Udine (Berlin: Springer).
- [93] Mandel J., 1973, Equations constitutives et directeurs dans les milieu plastiques et viscoplastiques, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, pp. 725 – 740.
- [94] Martin Ostoja – Starzewski., Jasiuk Iwona., 1995, Stress invariance in planar Cosserat elasticity, *Proceedings of Royal Society of London A*, 451, pp. 453 – 470.
- [95] Mei Zhang, et al., 2004, Multifunctional Carbon Nanotube yarns by downsizing an ancient technology, *Science*, vol. 306, pp. 1358 – 1361.
- [96] Mindlin R.D., 1949, Compliance of elastic bodies in contact, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 71, pp. 259 – 268.
- [97] Mindlin R.D., 1963, Influence of couple stresses on stress concentrations, *Experimental Mechanics*, vol. 3, pp. 1-7.
- [98] Mindlin R.D., 1965, Stress functions for a Cosserat continuum, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 1, pp. 265 – 271.
- [99] Muki R., Sternberg E., 1965, The influence of couple stresses on singular stress concentrations in elastic solids, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol. 16, pp. 611 – 618.
- [100] Nayfeh A.H and Kress G.R., 1997, Nonlinear constitutive model for plain weave composites, *Composites Part B – Engineering*, vol. 28, pp. 627 – 634.

- [101] Nguyen M., Herszberg I., Paton R., 1999, The shear properties of woven carbon fabric, *Composite Structures*, vol. 47, pp. 767-779.
- [102] Nielsen O.V., 1981, Magnetic anisotropy determined by differential magnetization measurements in twisted amorphous ribbons, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 24 pp. 81 – 87.
- [103] Nunez de Villavicencio C., Vasquez M., Madurga V. and Hernando A., 1986, A new simple measurement of the magnetostriction constant in metallic glass ribbons, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 59 pp. 333 – 345.
- [104] O’Handley R.C., 1978, Magnetostriction of transition metal metalloid glasses: Temperature dependence, *Physical Review B*, vol. 18, pp. 930 – 938.
- [105] O’Shea M.J., 2007, Elasticity and mechanical advantage in cables and ropes, *European Journal of Physics*, vol. 28, pp. 715 – 727.
- [106] Pan N., Carnaby G., 1989, Theory of the shear deformation of fibrous assemblies, *Textile Research Institute*, vol. 59(5), pp. 285-292.
- [107] Panofsky W.K.H. and Phillips M., 1956, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd edition, Reading, MA: Addison Wesley.
- [108] Paria G., 1965, Effect of Cosserats’ couple stresses on the stress distribution in a semi-infinite medium with varying modulus of elasticity, *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 6, pp. 157-171.
- [109] Pasquale M., Infortuna A., Martino L., Sasso C., Beatrice C., Lim S.H., 2000, Magnetic properties of TbFe thin films under applied stress, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 215 – 216, pp. 769 - 771.
- [110] Peirce F.T., 1937, The geometry of cloth structure, *Journal of Textile Institute*, vol. 28(3), T45 – T96.
- [111] Polk D.E., Giessen B.C. and Gardner F.S., 1976, State of the art and prospects for magnetic, electronic and mechanical applications of amorphous metals, *Materials Science and Engineering*, vol. 23, pp. 309 – 316.
- [112] Provatidis G. C., Kallivretaki E.A., and Vassiliadis S.G., 2009, Fabric drape simulation using FEM, 2nd South – East European Conference on Computational Mechanics, Rhodes, Greece.
- [113] Provatidis G. C., Vassiliadis S.G., 2004, Structural characterization of textile fabrics using surface roughness data, *International Journal of Clothing Science and Technology*, vol. 16, No. 5, pp. 445 – 457.
- [114] Provatidis G. C., Vassiliadis S.G., Anastasiadou E.A., Contact mechanics in two dimensional finite element modeling of fabrics, *International Journal of Clothing Science and Technology*, vol. 17, pp. 29 – 40.
- [115] Reissner E., Sagoci H.F., 1944, Forced torsional oscillations of an elastic half space. I., *Journal of Applied Mechanics*, vol. 15, pp. 652 – 654.
- [116] Rosen A., Friedman P., Nonlinear equations of equilibrium for elastic helicopter or wind turbine blades undergoing moderate deformations, University of California, L.A., School of Engineering and Applied Science, Report UCLA-ENG-7718 (revised ed.), June 1977.
- [117] Savage H.T. and Adler C., 1986, Magnetoelastic bifurcation in an amorphous ribbon, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 58, pp. 320 – 324.
- [118] Schijve J., 1966, Note on couple stresses, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 14, pp. 113 – 120.

- [119] Sechovsky V., 2001, *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, ISBN: 0-08-0431526, pp. 5018 - 5032.
- [120] Sinclair G.B., Hodder S.B., 1980, Exact solutions for elastic cable systems, *International Journal Solids and Structures*, vol. 17, pp. 845 – 854.
- [121] Sinoimeri A, Drean J.Y., 1996, A study of the mechanical behavior of the plain weave structure by using energy methods: fabric shear, *Journal of Textile Institute*, vol. 87(1), pp. 120-129.
- [122] Sipeky A., Ivanyi A., 2006, Magnetic hysteresis under applied stress, *Physica B*, vol. 372, pp. 177 – 180.
- [123] Skelton J., 1976, Fundamentals of fabric shear, *Textile Research Journal*, pp. 862-869.
- [124] Smith C.H., 1982, Magnetic shielding to multi giga – watt magnetic switches. Ten years of amorphous magnetic applications, *IEEE Transactions of Magnetics*, vol. Mag – 18, No. 6, pp. 1376 – 1381.
- [125] Smith I.R. and Overshott K.J., The Wiedemann effect: a theoretical and experimental comparison, *Journal of Applied Physics*, vol. 16, pp. 1247 – 1250.
- [126] Sneddon I.N., 1947, Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci, *Journal of Applied Physics*, vol. 18, pp. 130 – 132.
- [127] Steinmann P., 1994, A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, pp. 1063 – 1084.
- [128] Sternberg E., Muki R., 1967, The effect of couple stresses on the stress concentration around a crack, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 3, pp. 69 – 95.
- [129] Sun C.T., Yang T.Y., 1975, A couple stress theory for gridwork reinforced media, *Journal of Elasticity*, vol. 5, pp. 45 – 58.
- [130] Tan P., Tong L., and Steven G.P., 1997, Modeling for predicting the mechanical properties of textile composites – A review, *Composites Part A*, vol. 28, pp. 903 – 922.
- [131] Timoshenko S.P., Goodier J.N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw – Hill, New York.
- [132] Torres C., Munoz J.M., Hernandez – Gomez P., de Francisco C., 2010, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 322, pp. 1544 – 1547.
- [133] Toupin R.A., 1962, Elastic materials with couple stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, pp. 385 – 413.
- [134] Tsepres K.I., Labeas G.N., 2009, Mesomechanical analysis of non – crimp fabric composite structural parts, *Composite Structures*, vol. 87, pp. 358 – 369.
- [135] Vasquez M., Gonzalez G., Blanco L.M., Barandiaran J.M., Rivero G. and Hernando A., 1991, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 96, pp. 321 – 328.
- [136] Vassiliadis S.G., Kallivretaki E.A, Provatidis G. C., 2006, Mechanical simulation of the plain weft knitted fabrics, *International Journal of Clothing Science and Technology*, vol. 19, No. 2, pp. 109 – 130.
- [137] Wang C.W., Berhan L., Sastry A.M., 2000, Structure, Mechanics and failure of stochastic fibrous networks: Part I – Microscale considerations, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 122, pp. 450 – 459.
- [138] Wang C.W., Sastry A.M., 2000, Structure, Mechanics and failure of stochastic fibrous networks: Part II – Network simulations and application, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 122, pp. 460 – 468.

- [139] Wang J., Page J.R., Paton R., 1998, Experimental investigation of the draping properties of reinforced fabrics, *Composites of Science Technology*, vol. 58, pp. 269 - 280.
- [140] Wang X.L., Stronge W.J., 1999, Micropolar theory for two dimensional stresses in elastic honeycomb, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 455, pp. 2091 – 2116.
- [141] Warlimont H. and Boll R., 1982, Applications of amorphous soft magnetic materials, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 26, pp. 97 – 105.
- [142] Warlimont H., 1980, Metallic glasses, *Physics in Technology*, vol. 11, pp. 28 – 32.
- [143] Yamamoto M., 1958, Theory of the Wiedemann effect, Report of the Research Institute for Iron, Steel and other Metals, Tohoku University.
- [144] Yamasaki T., Yamamoto S. and Hirao M., 1996, Effect of applied stresses on magnetostriction of low carbon steel, *Independent Nondestructive Testing and Evaluation (NDT&E International)*, vol. 29, pp. 263 – 268.
- [145] Zavarise G., Wriggers P., 2000, Contact with friction between beams in 3-D space, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, pp. 977 – 1006.
- [146] Βαρδουλάκης Ι., Γιαννακόπουλος Α., 2001, *Τεχνική Μηχανική Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα