ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ»

υπό

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΥ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Π. Θ., 2008

M.Sc., Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2010

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διδακτορικού Διπλώματος

Βόλος, Οκτώβριος 2013

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ»

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Α. ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ

Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος

Η παρούσα εργασία χρηματοδοτήθηκε από το EURATOM-Hellenic Republic Association.

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ»

Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Βόλος, Ελλάδα

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Βαλουγεώργης Δημήτριος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Βλάχος Νικόλαος Ομότ. Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τέταρτος Εξεταστής	Δρ. Γιαννακόπουλος Αντώνιος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Πέμπτος Εξεταστής	Δρ. Μποντόζογλου Βασίλειος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Έκτος Εξεταστής	Δρ. Τσαμόπουλος Ιωάννης Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
Έβδομος Εξεταστής	Δρ. Χιτζανίδης Κυριάκος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Γράφοντας αυτές τις γραμμές δεν έχω συνειδητοποιήσει ότι κλείνει ένα σημαντικό κεφάλαιο στη ζωή μου, μια διαδρομή στις οποίες υπήρξαν δυσκολίες, άγχη, πιέσεις, προκλήσεις μέχρι να έρθει εκείνη η στιγμή όπου η παρούσα ερευνητική προσπάθεια λαμβάνει σάρκα και οστά, ολοκληρώνεται. Αρωγός σε όλη αυτή την προσπάθεια στάθηκε ο Θεός αν και δεν άξιζα τη βοήθειά Του. Πολλές φορές θεώρησα ότι έφτανα τα όριά μου, ότι δεν είχα δύναμη να συνεχίσω το ερευνητικό έργο όμως στις δύσκολες στιγμές ένιωσα τη βοήθειά Του.

Η εργασία αυτή θα ήταν αδύνατο να υλοποιηθεί χωρίς την καθοδήγηση του επιβλέποντος Καθηγητή κ. Ν. Πελεκάση. Στάθηκε δίπλα μου ως ένας δεύτερος πατέρας και ήταν πάντα διαθέσιμος στο να δίνει απαντήσεις στα ερωτήματα που προέκυπταν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής. Όμως, το σημαντικότερο στοιχείο για το οποίο τον θαυμάζω είναι η αισιοδοξία του και η συνεχής ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχε σε όλα αυτά τα χρόνια καθώς και οι πολύτιμες γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσε.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στους σεβαστούς Καθηγητές της επταμελούς επιτροπής μου για τις πολύτιμες υποδείξεις - συμβουλές τους έτσι ώστε να καταστεί όσο το δυνατόν πιο άρτια η διατριβή.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τη σύντροφό μου για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν καθώς και την υπομονή που έδειξαν. Η βοήθειά τους στάθηκε πολύτιμη για μένα. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για όλες τις υπέροχες στιγμές που έχουμε περάσει σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Η παρούσα εργασία δεν θα υλοποιούνταν εάν δεν ήταν δυνατή η χρηματοδότηση από το EURATOM-Hellenic Republic Association. Κατά συνέπεια, είμαι ευγνώμων απέναντι στους φορείς του παραπάνω προγράμματος όπως επίσης και στους Καθηγητές που εισηγήθηκαν τη χρηματοδότηση αυτού του έργου. Ελπίζω να μην τους απογοήτευσα.

Κλείνοντας, έρχεται στο μυαλό μου η φράση του Αριστοτέλη: "*της παιδείας οι μεν ρίζες είναι πικρές, οι δε καρποί γλυκοί*". Εύχομαι σε όλα τα παιδιά που κατέβαλλαν κόπο για να φέρουν εις πέρας την ολοκλήρωση ενός δύσκολου εγχειρήματος όπως είναι η λήψη του διδακτορικού να αξιωθούμε να απολαύσουμε τους καρπούς.

"χωρὶς ἐμοῦ οὐ δύνασθε ποιεῖν οὐδέν" (Ιωάννης 15, 5)

"*Οποιοσδήποτε εμπλέκεται σοβαρά με την επιστήμη αποκτά την πεποίθηση ότι κάποια δύναμη είναι φανερή στους νόμους του σύμπαντος, ένα πνεύμα που είναι πολύ ανώτερο από τον άνθρωπο*." (A. Einstein, 24/01/1936)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται η ευστάθεια Rayleigh-Benard στρώματος υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής μεγάλης όψεως παρουσία ισχυρού και οριζόντιου μαγνητικού πεδίου. Τα πλευρικά τοιχώματα χαρακτηρίζονται από υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα. Εφαρμόζεται γραμμική ανάλυση ευστάθειας επιτρέποντας τριδιάστατες διαταραχές που αναπτύσσονται κατά μήκος της αξονικής κατεύθυνσης. Υιοθετείται η μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση του προβλήματος ευστάθειας ενώ λαμβάνεται υπόψη η ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων του αγωγού. Η μέθοδος Arnoldi παρέχει τις κυρίαρχες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του προβλήματος.

Προκειμένου να ευνοηθεί η παράλληλη υλοποίηση της αριθμητικής λύσης σε υψηλούς αριθμούς Hartmann, Ha, εφαρμόζεται domain decomposition ως προς την οριζόντια κατεύθυνση της διατομής του αγωγού. Καθώς ο Ha αυξάνεται ανακύπτει πραγματική ιδιοτιμή ως η κυρίαρχη ασταθής ιδιομορφή, υποδηλώνοντας την εμφάνιση θερμικής συναγωγής, της οποίας η κυρίαρχη συνιστώσα της στροβιλότητας στον πυρήνα του στρώματος είναι ευθυγραμμισμένη με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Το μήκος κύματός της κυρίαρχης ιδιομορφής είναι, ως προς τη διαμήκη κατεύθυνση του στρώματος, περίπου διπλάσιο του ύψους της και μειώνεται καθώς η ένταση του μαγνητικού πεδίου αυξάνεται. Η κρίσιμη τιμή του αριθμού Grashof, Gr ελήφθη για υψηλές τιμές Ha και περιγράφεται από συσχέτιση της μορφής $Gr \sim Ha^2$ εκφράζοντας το ισοζύγιο μεταξύ ανωστικών και δυνάμεων Lorentz.

Για καλώς ηλεκτρικά αγώγιμα πλευρικά τοιχώματα, η φύση της προκύπτουσας ροής καθορίζεται από τη συνδυασμένη αγωγιμότητα των τοιχωμάτων και στοιβάδων Hartmann, $c_H + Ha^{-1}$. Όταν λαμβάνονται υπόψη τοιχώματα Hartmann με ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα, $c_H \ll 1$, η κρίσιμη ιδιολύση χαρακτηρίζεται από καλώς σχηματιζόμενες στοιβάδες Hartmann και πλευρικές. Οι πλευρικές στοιβάδες χαρακτηρίζονται από γρήγορη κίνηση ρευστού στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ως απόρροια ηλεκτρομαγνητικής άντλησης στη εγγύς περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann. Αυξάνοντας την ηλεκτρική αγωγιμότητα των προαναφερθέντων τοιχωμάτων παρατηρήθηκε η καθυστέρηση εμφάνισης θερμικής συναγωγής, ενώ συνεχίζει να ισχύει η παραπάνω συσχέτιση $Gr \sim Ha^2$ κατά τις κρίσιμες συνθήκες. Επιπρόσθετα, για αμφότερες τις περιπτώσεις ηλεκτρικά αγώγιμων και σχεδόν μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann καθώς και για όλο το εύρος τιμών των

αριθμών Ha που εξετάστηκε, δεν παρατηρήθηκε τάση ανάπτυξης καλώς σχηματιζόμενης οιονεί διδιάστατης δομής ένεκα της κίνησης συναγωγής στον πυρήνα της ροής. Επιχειρείται σύνδεση ανάμεσα στα παραπάνω αριθμητικά ευρήματα και προγενέστερες πειραματικές μελέτες που υποδεικνύουν την εμφάνιση στάσιμων κυμάτων τα οποία ακολουθούνται από οδεύοντα κύματα καθώς ο αριθμός Gr υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή του. Ασυμπτωτική ανάλυση της κυρίαρχης ιδιομορφής κοντά στην κρίσιμη περιοχή επιβεβαιώνει τα παραπάνω αριθμητικά ευρήματα ενώ αναδεικνύει την εμφάνιση έντονης ανωστικής κίνησης τάξης O(Ha) με την αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Η κίνηση αυτή αναμένεται να παίξει σημαντικό ρόλο στην εμφάνιση δευτερογενών ασταθειών υδροδυναμικού χαρακτήρα.

Προκειμένου να ταυτοποιηθεί η φύση της προκύπτουσας χρονομεταβαλλόμενης αστάθειας κατά τη διάρκεια των πειραμάτων που διεξήχθησαν από τους Burr & Muller (2002) εξετάστηκε η τριδιάστατη ευστάθεια διδιάστατης στροβιλώδους ροής στρώματος υγρού μετάλλου σε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής. Οι δίνες παράγονται ως αποτέλεσμα ελεύθερης συναγωγής και εσωτερικής θέρμανσης σε κοιλότητα παρουσία μαγνητικού πεδίου. Χρησιμοποιούνται εξισώσεις χαμηλής τιμής μαγνητικού αριθμού Reynolds για την βασική ροή και τη μορφοποίηση του προβλήματος ευστάθειας. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένα στοιχεία για τη διακριτοποίηση του προβλήματος. Αποδοτικός υπολογισμός των κυρίαρχων ιδιοτιμών παρέχεται μέσω της μεθόδου Arnoldi, ενώ τα διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας κατασκευάζονται με χρήση τεχνικών παραμετρικής συνέχειας. Ο αριθμός των δινών που χαρακτηρίζουν τη βασική ροή μεταπίπτει από μία σε δύο, μόλις η εσωτερική πηγή θερμότητας υπερβεί μία κρίσιμη τιμή. Ο κυρίαρχος μηχανισμός αστάθειας αντιστοιχεί σε αστάθεια Goertler στην περίπτωση μοναδικής δίνης και η ελλειπτική αστάθεια χαρακτηρίζει ζεύγος δινών. Στην ελλειπτική αστάθεια, η αξονική στροβιλότητα είναι συμμετρική και χαρακτηρίζεται από δομές δύο λοβών ευθυγραμμισμένων με μία από τις δύο κύριες κατευθύνσεις παραμόρφωσης και η κυρίαρχη ιδιομορφή προσλαμβάνει τη μορφή οδεύοντος κύματος. Το μαγνητικό πεδίο αντιτίθεται στην ανωστική κίνηση, μεταβάλλει την κατεύθυνση της μέγιστης παραμόρφωσης με έμφαση σε ιξώδη στρώματα πλησίον των τοιχωμάτων εν αντιθέσει με το ζεύγος δινών στον πυρήνα και οδηγεί σε μικρότερες συχνότητες κατά τις κρίσιμες συνθήκες. Η παραπάνω διαμόρφωση ροής εκτιμάται ότι παίζει καθοριστικό ρόλο στην εμφάνιση οδευόντων κυμάτων στα πειράματα των Burr & Muller (2002) με μικρή αύξηση του αριθμού Gr πέραν της κρίσιμης τιμής.

Εν τέλει, για να καταστεί δυνατή η ενδελεχής περιγραφή της μη γραμμικής εξέλιξης των ασταθών ιδιομορφών στην περιοχή της χρονομεταβαλλόμενης συναγωγής εφαρμόστηκε μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας στη μορφή της ροής που μελετήθηκε από τους Burr & Muller (2002), εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία πεπερασμένων στοιχείων στη διατομή του αγωγού σε συνδυασμό με τη φασματική προσέγγιση για την αξονική κατεύθυνση της ροής. Η τελευταία καθορίζεται από την διαμόρφωση που προκύπτει μετά την αρχική θερμική αστάθεια. Υιοθετήθηκε semi-implicit αριθμητικό σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης, οι μη γραμμικοί όροι συναγωγής προσεγγίζονται ρητώς με χρήση της μεθόδου Adams-Bashforth δεύτερης τάξης και οι γραμμικοί όροι προσεγγίζονται αρρήτως χρησιμοποιώντας μέθοδο Crank-Nicolson δεύτερης τάξης έτσι ώστε η απόζευξη διαφορετικών φασματικών (spectral) modes να είναι δυνατή ενώ ευνοείται ο παράλληλος χειρισμός της διαδικασίας επίλυσης. Στόχος αυτής της μελέτης είναι η διερεύνηση της εμφάνισης κορεσμού στην πρωτογενή θερμική αστάθεια, η αναγνώριση του είδους της διακλάδωσης που την προκαλεί καθώς και η επίδραση στην μεταφορά θερμότητας δια μέσου του στρώματος υγρού μετάλλου.

ABSTRACT

Rayleigh-Bénard stability of a liquid metal layer of rectangular cross section is examined in the presence of a strong magnetic field that is aligned with the horizontal direction of the cross section. The latter is much longer than the vertical direction and the cross section assumes a large aspect ratio. The side walls are treated as highly conducting. Linear stability analysis is performed allowing for three dimensional instabilities that develop along the longitudinal direction. The finite element methodology is employed for the discretization of the stability analysis formulation while accounting for the electric conductivity of the box walls. The Arnoldi method provides the dominant eigenvalues and eigenvectors of the problem. In order to facilitate parallel implementation of the numerical solution at large Hartmann numbers, Ha, domain decomposition is employed along the horizontal direction of the cross section. As the Hartmann number increases a real eigenvalue emerges as the dominant unstable eigenmode, signifying the onset of thermal convection, whose major vorticity component in the core of the layer is aligned with the direction of the magnetic field. Its wavelength along the longitudinal direction of the layer is on the order of twice its height and decreases as Ha increases. The critical Grashof was obtained for large Ha and it was seen to scale like Ha^2 signifying the balance between buoyancy and Lorentz forces. For well conducting side walls, the nature of the emerging flow pattern is determined by the combined conductivity of Hartmann walls and Hartmann layers, c_H+Ha^{-1}. When poor conducting Hartmann walls are considered, $c_H \ll 1$, the critical eigensolution is characterized by well defined Hartmann and side layers. The side layers are characterized by fast fluid motion in the magnetic field direction as a result of the electromagnetic pumping in the vicinity of the Hartmann walls. Increasing the electric conductivity of the Hartmann walls was seen to delay the onset of thermal convection, while retaining the above scaling at criticality. Furthermore, for both conducting and insulating Hartmann walls and the entire range of Ha numbers that was examined, there was no tendency for a well defined quasi two dimensional structure to develop owing to the convective motion in the core. A connection is made between the above findings and previous experimental investigations indicating the onset of standing waves followed by travelling waves as Gr is further increased beyond its critical value. Asymptotic analysis of the dominant eigenmode performed at criticality confirms the above numerical findings while

designates the onset of highly convective motion O(Ha) as the magnetic field increases. This motion is expected to play central role for the onset of secondary instabilities of hydrodynamic nature.

Three dimensional stability of two dimensional vortical flow of a liquid metal in a cavity of square cross section is examined in order to identify the nature of the emerged time-dependent instability reported by Burr & Muller (2002). Vortices are produced as a result of free convection and internal heating in the cavity in the presence of a magnetic field. The low magnetic Reynolds equations are employed for the base flow and stability formulation. The finite element methodology is used for discretizing the problem. Efficient calculation of the dominant eigenvalues is afforded by the Arnoldi method while neutral stability diagrams are constructed using continuation techniques. The number of vortices exhibited by the base flow switches from one to two as the internal heating crosses a threshold value. The dominant instability mechanism is the Goertler instability for the case of a single vortex and the elliptical instability in the case of two vortices. In the elliptic instability axial vorticity is symmetric, is characterized by two lobed structures aligned with one of the two principal directions of strain and the dominant eigenmode assumes the form of a travelling wave. The magnetic field opposes buoyancy, alters the direction of maximal strain by accentuating wall shear layers in comparison with the vortex pair in the core, and leads to smaller frequencies at criticality. The above flow configuration is assessed to play important role for the onset of travelling wave modes as indicated by experiments of Burr & Muller (2002) with a slight increase of Gr beyond the threshold value.

Finally, nonlinear analysis is carried out of the flow arrangement that was examined by Burr & Muller (2002), seeking a description of the nonlinear evolution of unstable modes beyond criticality, coupling finite element methodology with a spectral approach for the periodic direction of flow. The latter is determined by the configuration that emerges after the onset of the initial thermal instability. A semi-implicit time integration scheme is employed, with the nonlinear convective terms treated explicitly using second order Adams-Bashforth method and linear terms treated in an implicit manner using second order accurate Crank-Nicolson so that decoupling of the different spectral modes is possible while favoring parallel treatment of the solution process. Objective of this study is the investigation for the onset of saturation that corresponds to the initial thermal instability, identifying the kind of branch that causes as well as the effect on the heat transfer through the liquid metal layer.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Λατινικοί χαρακτήρες

$^{1}_{1}H$ = πυρήνας του υδρογόνου

$^{2}_{1}H$ = πυρήνας του δευτερίου

$^{3}_{2}He$ = ελαφρύ ισότοπο 3/2 του ηλίου

$^{4}_{2}He$ = ισότοπο 4/2 του ηλίου που συναντάται συχνά στο περιβάλλον

B = ένταση μαγνητικού πεδίου

b = απόσταση ανάμεσα σε δύο δίνες ανακυκλοφορίας

C = λαμβάνει την τιμή της μονάδας στην περίπτωση των εξισώσεων κίνησης και ταυτίζεται με τον αριθμό 1/Pr στην περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας

C = διάνυσμα που περιέχει τις συνεισφορές των μη γραμμικών όρων στην προηγούμενη και στην προ-προηγούμενη χρονική στιγμή

c_H = ηλεκτρική αγωγιμότητα τοιχώματος Hartmann

c_p = ειδική θερμότητα ρευστού

c_S = ηλεκτρική αγωγιμότητα πλευρικού τοιχώματος

D = πίνακας που περιέχει τις συνεισφορές των γραμμικών όρων οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τις τιμές των μεταβλητών στην προηγούμενη χρονική στιγμή

DFT = διακριτός μετασχηματισμός Fourier

dΓ = διαφορικό μήκος τόξου ως προς τα σύνορα της διατομής της κοιλότητας

dS = διαφορικό μήκος τόξου ως προς τα σύνορα της διατομής του αγωγού

e = πεπερασμένο στοιχείο

E = αριθμός Ekman, $E=2\pi\nu k_0^2/(\omega/2)$

e_m^* = ορθομοναδιαίο διάνυσμα διάστασης 1 x m

f = residual του m-βήματος της παραγοντοποίησης Arnoldi

$\vec{f}$ = δύναμη Lorentz

FDM = μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

FEM = μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

FFT = ταχύς μετασχηματισμός Fourier

FVM = μέθοδος πεπερασμένων όγκων

$\vec{g}$ = διάνυσμα βαρύτητας

g_k = τιμές των άγνωστων μεταβλητών που αντιστοιχούν στον τρέχον Fourier mode

Gr = αριθμός Grashof, $Gr = \frac{g \quad \Delta T h^3}{¬^2}$

Gr_{Cr} = κρίσιμη τιμή του αριθμού Grashof

Gr_{Eff} = τροποποιημένος αριθμός Grashof, $Gr_{Eff}=GrSPr$

$Gr_{Eff,Cr}$ = κρίσιμη τιμή του τροποποιημένου αριθμού Grashof

h = κατακόρυφη διάσταση κοιλότητας

Ha = αριθμός Hartmann, $Ha = \sqrt{\frac{h^2 \pm B_0^2}{°¬}}$

j = ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

J = πίνακας Ιακωβιανής

J_i = τμήμα του πίνακα Ιακωβιανής που αντιστοιχεί στον i επεξεργαστή

J_x = παράγωγος Frechet του πίνακα Ιακωβιανής ως προς το ιδιοδιάνυσμα **x**

J_x = x συνιστώσα του ηλεκτρικού ρεύματος

J_y = y συνιστώσα του ηλεκτρικού ρεύματος

J_z = z συνιστώσα του ηλεκτρικού ρεύματος

J_{Hx} = διόρθωση της x συνιστώσας του ηλεκτρικού ρεύματος στη στοιβάδα Hartmann

J_{Hy} = διόρθωση της y συνιστώσας του ηλεκτρικού ρεύματος στη στοιβάδα Hartmann

J_{Sy} = διόρθωση του το κάθετου ηλεκτρικού ρεύματος στο πλευρικό στρώμα

k = κυματαριθμός

k = τρέχον Fourier mode

k_{Cr} = κρίσιμη τιμή του κυματαριθμού

L = οριζόντια διάσταση κοιλότητας

L = τμήμα του πίνακα Ιακωβιανής που πηγάζει από το γραμμικό κομμάτι του συστήματος εξισώσεων

ℓ = μέγεθος δίνης

$\vec{n}$ = κάθετο διάνυσμα

n = όταν τίθεται ως εκθέτης δηλώνει χρονική επανάληψη και ως δείκτης εκφράζει το τρέχον επίπεδο z του αγωγού

NP = διαθέσιμος αριθμός επεξεργαστών

P = τρέχον επεξεργαστής

p = αδιάστατη πίεση

p_0 = αδιάστατη πίεση πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

p_1 = αδιάστατη πίεση μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

p_0' = πίεση στη βασική ροή με διαστάσεις

p_{St}' = στατική πίεση με διαστάσεις

Pr = αριθμός Prandtl, Pr=ν/α

q = ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας

r_Ω = υπόλοιπο (residual) που προκύπτει από τη διαφορά υπολογιστικής και αναλυτικής λύσης στο υπολογιστικό πεδίο Ω

Ra = αριθμός Rayleigh, $Ra = Gr \cdot Pr$

Ra_{Cr} = κρίσιμη τιμή του αριθμού Rayleigh

Re_m = μαγνητικός αριθμός Reynolds, $Re_m = uL/\eta$

S = εσωτερικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας, $S = \frac{qL^2}{\Delta T \cdot c_p \rho}$

t = αδιάστατη χρονική κλίμακα

t΄ = χρονική κλίμακα με διαστάσεις

T_{Av} = μέση τιμή θερμοκρασίας

T_b = θερμοκρασία στο κάτω οριζόντιο τοίχωμα του αγωγού

t_{Co} = πάχος τοιχώματος αποτελούμενο από χαλκό

t_{St} = πάχος τοιχώματος αποτελούμενο από ανοξείδωτο χάλυβα

T_t = θερμοκρασία στο άνω οριζόντιο τοίχωμα του αγωγού

u = αδιάστατη x συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας

u΄ = x συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας με διαστάσεις

u = πεδίο ταχυτήτων

$\vec{u}_0$ = πεδίο ταχυτήτων στη βασική ροή

U_0 = χαρακτηριστική ταχύτητα

u_0 = αδιάστατη x συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

u_1 = αδιάστατη x συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

V = ορθογώνιος πίνακας

v = αδιάστατη y συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας

v′ = y συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας με διαστάσεις

v_0 = αδιάστατη y συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

v_1 = αδιάστατη y συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

$V^{(k)}$ = ορθοκανονική βάση υπόχωρου Krylov

V_m = διανύσματα Arnoldi

w = αδιάστατη z συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας

w′ = z συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας με διαστάσεις

w_0 = αδιάστατη z συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

w_1 = αδιάστατη z συνιστώσα διανύσματος ταχύτητας μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

w_i = συναρτήσεις βάρους

X = stretched κάθετη συντεταγμένη του τοιχώματος μέσα στη στοιβάδα Hartmann

x = αδιάστατη οριζόντια διεύθυνση

x′ = οριζόντια διεύθυνση με διαστάσεις

$\vec{x}$ = ιδιοδιάνυσμα

$x^{(0)}$ = αρχική πρόβλεψη για την εφαρμογή της μεθόδου GMRES

x_e = τοπική συντεταγμένη για εφαρμογή μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων

$\mathbf{x}_k$ = ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή κυματαριθμού

x_{0j} = βασική λύση

x_{1j} = ιδιοδιάνυσμα

y = αδιάστατη κατακόρυφη διεύθυνση

y΄ = κατακόρυφη διεύθυνση με διαστάσεις

z = αδιάστατη αξονική διεύθυνση

z΄ = αξονική διεύθυνση με διαστάσεις

Ελληνικά σύμβολα

α = θερμοδιαχυτότητα ρευστού

Α = λόγος όψης διατομής κοιλότητας

Β = πίνακας μάζας

β = συντελεστής θερμικής διαστολής ρευστού

β = εκκεντρότητα

β^+ = ποζιτρόνιο

γ = ακτινοβολία γάμμα

Γ = σύνορο υπολογιστικού πεδίου

Γ_{du} = σύνορο που περιέχει συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet

Γ_{nu} = σύνορο που περιέχει συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

δ = πάχος συνοριακού στρώματος

δ = συναρτήσεις Dirac-δέλτα

ΔT = διαφορά θερμοκρασίας

Δt = χρονική διαφορά

Δz = κάθετη απόσταση ανάμεσα στα διδιάστατα επίπεδα

ε = μικρή διαταραχή

ε = ένταση ποσοστού παραμόρφωσης

¦ = μαγνητική διαχυτότητα

H = άνω Hessenberg πίνακας τάξης n με θετικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου

H^h = χώρος που συντίθεται από πολυώνυμα πεπερασμένης τάξης

Θ = αδιάστατη θερμοκρασία

Θ’ = θερμοκρασία με διαστάσεις

Θ_0 = αδιάστατη θερμοκρασία πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

Θ_1 = αδιάστατη θερμοκρασία μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

K_m = ορθογώνια βάση του υπόχωρου Krylov

λ = μήκος κύματος ιδιομορφής

λ_{Cr} = κρίσιμη τιμή του μήκους κύματος ιδιομορφής

ν = κινηματικό ιξώδες

N = αριθμός των Fourier modes

N = τμήμα του πίνακα Ιακωβιανής που πηγάζει από το μη-γραμμικό κομμάτι του συστήματος εξισώσεων

N_j = συναρτήσεις βάσης

ν_e = νετρίνο ηλεκτρονίου

ξ = τοπική κλίμακα για εφαρμογή μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων

ρ = πυκνότητα ρευστού

σ' = ηλεκτρική αγωγιμότητα υγρού μετάλλου

σ = ιδιοτιμή

σ_i = ιδιοσυχνότητα

τ = ιδιοτιμή

τ = τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

φ = αδιάστατο ηλεκτρικό δυναμικό

φ' = ηλεκτρικό δυναμικό με διαστάσεις

$\hat{c}$ = τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού στα τοιχώματα Hartmann

Φs = τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού στο πλευρικό στρώμα

$\varphi 0$ = αδιάστατο ηλεκτρικό δυναμικό πριν την επιβολή περιοδικής διαταραχής

φ_1 = αδιάστατο ηλεκτρικό δυναμικό μετά την επιβολή περιοδικής διαταραχής

Φ_i = μονοδιάστατες τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

Φ_{ij} = διδιάστατες τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

Ψ_i = μονοδιάστατες γραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

Ψ_{ij} = διδιάστατες γραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

ω = ένταση δίνης

Ω = υπολογιστικό πεδίο

$\vec{\mu}$ = διάνυσμα στροβιλότητας

ω_r = πραγματικό μέρος μιγαδικού ρυθμού ανάπτυξης ιδιομορφής

ω_i = φανταστικό μέρος μιγαδικού ρυθμού ανάπτυξης ιδιομορφής

Ω_x = x συνιστώσα του διανύσματος στροβιλότητας

Ω_{yz} = κάθετη συνιστώσα του διανύσματος στροβιλότητας, t_{yz} ø $\sqrt{t_y^2 \text{ H } t_z^2}$

ω_{xy} = επίπεδη συνιστώσα του διανύσματος στροβιλότητας, $\mu_{xy} = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}$

ω_z = z συνιστώσα του διανύσματος στροβιλότητας

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Μαγνητοϋδροδυναμική και Ελεγχόμενη Θερμοπυρηνική Σύντηξη

Τα μαγνητικά πεδία επηρεάζουν πολλές φυσικές και τεχνολογικές ροές. Είθισται η χρήση τους στη βιομηχανία με σκοπό τη θέρμανση, άντληση και ανάδευση υγρών μετάλλων. Στη φύση υπάρχει το γεωμαγνητικό πεδίο το οποίο διατηρείται λόγω της κίνησης ρευστού στον πυρήνα της γης, το ηλιακό μαγνητικό πεδίο που παράγει τις ηλιακές κηλίδες και εκλάμψεις, το γαλαξιακό μαγνητικό πεδίο το οποίο πιστεύεται ότι επηρεάζει το σχηματισμό αστέρων από διαστρικά νέφη. Η μελέτη αυτών των ροών καλείται Μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ ή MHD). Ο εν λόγω κλάδος της Φυσικής συσχετίζει την αλληλεπίδραση ροής ρευστού και μαγνητικού πεδίου. Τα ρευστά που μελετώνται πρέπει να είναι ηλεκτρικά αγώγιμα και μη μαγνητικά, γεγονός που μας περιορίζει σε υγρά μέταλλα, θερμά ιονισμένα αέρια (πλάσμα) και ισχυρούς ηλεκτρολύτες.

Η κοινή αλληλεπίδραση μαγνητικού πεδίου **B** και πεδίου ταχυτήτων **u** προκύπτει εν μέρει ως απόρροια των νόμων Faraday και Ampere, και μερικώς εξαιτίας της δύναμης Lorentz. Είναι σημαντικό να τονίσουμε την ακριβή περιγραφή αυτής της αλληλεπίδρασης όχι με αυστηρή μαθηματική μορφή αλλά από φυσική σκοπιά. Είναι βολικό, αν και η προσέγγιση είναι χονδροειδής, να χωρίσουμε τη διαδικασία σε τρία μέρη-φαινόμενα.

(α) Η σχετική κίνηση του αγώγιμου ρευστού και του μαγνητικού πεδίου παράγει ηλεκτρικά ρεύματα τάξης $|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$. Εν γένει, το ηλεκτρικό ρεύμα θα προκύψει με ένταση $\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, όπου σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού.

(β) Σύμφωνα με το νόμο του Ampere, τα επαγόμενα ρεύματα οδηγούν στη δημιουργία δευτερογενούς, επαγόμενου μαγνητικού πεδίου. Αυτό προστίθεται στο αρχικό μαγνητικό πεδίο και η μεταβολή που επέρχεται είναι συνήθως τέτοια έτσι ώστε το ρευστό εμφανίζεται να ἀπαρασύρει' τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου μαζί του.

(γ) Το συνδυασμένο μαγνητικό πεδίο αλληλεπιδρά με το επαγόμενο ρεύμα έντασης **J,** γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση της δύναμης Lorentz (ανά μονάδα όγκου) **J**x**B** που επενεργεί στον αγωγό και εν γένει επιβραδύνει τη σχετική κίνηση του μαγνητικού πεδίου και του ρευστού.

Σημειώνεται ότι τα φαινόμενα (β, γ) έχουν παρόμοιες συνέπειες. Και στις δύο περιπτώσεις η σχετική κίνηση του ρευστού και πεδίου τείνει να μειωθεί. Τα ρευστά δύνανται να 'παρασύρουν' τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου (φαινόμενο (β)) και τα μαγνητικά πεδία μπορούν να ελκύουν τα αγώγιμα ρευστά (φαινόμενο (γ)).

Ιστορικά, η ΜΥΔ αποτέλεσε ένα ολοκληρωμένο πεδίο της Φυσικής στα τέλη της δεκαετίας του 1930. Πιθανώς, η αιτία είναι ότι υπήρχε μικρό κίνητρο για τους μηχανικούς του 19^{ου} αιώνα να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες που προσέφερε η ΜΥΔ. Συνεπώς, ενώ υπήρχαν λίγα μεμονωμένα πειράματα από τους φυσικούς της εποχής όπως ο Faraday (προσπάθησε να μετρήσει την τάση κατά μήκος του Τάμεση που επάγεται από την κίνησή του μέσω του γεωμαγνητικού πεδίου), η ανάπτυξη της ΜΥΔ ατόνησε έως τις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Οι συνθήκες άλλαξαν όταν οι αστροφυσικοί αντιλήφθηκαν ότι μαγνητικά πεδία και πλάσμα υπάρχουν καθ' όλη την έκταση του σύμπαντος. Αυτό κορυφώθηκε το 1942 με την ανακάλυψη του κύματος Alfven, ένα φαινόμενο που είναι ιδιόμορφο στη ΜΥΔ και σημαντικό στον τομέα της αστροφυσικής. Περίπου την ίδια χρονική περίοδο, οι γεωφυσικοί άρχισαν να υποψιάζονται ότι το γεωμαγνητικό πεδίο παράγεται από την κίνηση δυναμό εντός του στρώματος υγρού μετάλλου που υπήρχε στον πυρήνα, μια υπόθεση που διατυπώθηκε αρχικά από τον Larmor το 1919 στο πλαίσιο του ηλιακού μαγνητικού πεδίου.

Από την άλλη πλευρά, οι φυσικοί του πλάσματος απέκτησαν ενδιαφέρον στον τομέα της ΜΥΔ κατά τη δεκαετία του 1950 καθώς εντάθηκε η έρευνα για την ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη. Ενδιαφέρονταν συγκεκριμένα για την ευστάθεια ή την έλλειψη ευστάθειας του πλάσματος που περιορίζεται από το μαγνητικό πεδίο και όλα αυτά συνετέλεσαν έτσι ώστε να σημειωθεί πρόοδος στη θεωρία ευστάθειας.

Η ανάπτυξη της ΜΥΔ καθυστερούσε μέχρι τη δεκαετία του 1960. Ωστόσο, σημειώθηκε νωρίτερα πρωτοποριακή έρευνα από τον μηχανικό J. Hartmann, ο οποίος εφηύρε την ηλεκτρομαγνητική αντλία το 1918. Επιπρόσθετα, διεξήγαγε συστηματική πειραματική και θεωρητική μελέτη της ροής του υδραργύρου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυριστούμε ότι ο Hartmann θεωρείται ο πατέρας της ΜΥΔ ροής υγρών μετάλλων και πράγματι ο όρος 'Hartmann ροή' χρησιμοποιείται για τις ροές σε αγωγούς παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η ώθηση για αλλαγή επήλθε ως απόρροια τριών τεχνολογικών καινοτομιών : α) των αντιδραστήρων ταχείας τροφοδοσίας οι οποίοι χρησιμοποιούν υγρό νάτριο ως ψυκτικό μέσο που χρειάζεται να αντληθεί, β) της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης που απαιτεί το θερμό πλάσμα να περιορίζεται μακριά από τις επιφάνειες των τοιχωμάτων του αντιδραστήρα με χρήση μαγνητικών δυνάμεων και γ) της ΜΥΔ παραγωγής ισχύος, όπου ιονισμένο αέριο προωθείται μέσω μαγνητικού πεδίου, θεωρήθηκε ότι μπορούσε να συνεισφέρει στη βελτίωση σταθμών ισχύος. Η τελευταία καινοτομία αποδείχτηκε ότι ήταν μη εφικτή. Ωστόσο, αν και το ενδιαφέρον για ΜΥΔ παραγωγή ισχύος μειώθηκε, εντάθηκε η έρευνα που αφορούσε τη ΜΥΔ μεταλλουργία. Δύο δεκαετίες αργότερα, χρησιμοποιούνται ευρέως τα μαγνητικά πεδία σε μεταλλουργικές βιομηχανίες. Το σημείο κλειδί αποτελεί το γεγονός ότι η δύναμη Lorentz παρέχει ένα μη παρεμβατικό μέσο για τον έλεγχο της ροής των μετάλλων.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε σχετικά με την προαναφερθείσα ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη ότι αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη μελλοντική ενεργειακή λύση, χαρακτηριστικό της οποίας θα είναι τα μεγάλα ενεργειακά αποθέματα ενώ παράλληλα δεν θα υπάρχουν δυσμενείς συνέπειες στο περιβάλλον.

Πυρηνική σύντηξη (*συν + τήξη*) ονομάζεται η συνένωση ελαφρών πυρήνων με ταυτόχρονη απελευθέρωση ενέργειας. Η ενέργεια που απελευθερώνεται οφείλεται στο γεγονός ότι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο στα προϊόντα της σύντηξης είναι μικρότερη από το άθροισμα των ενεργειών σύνδεσης που χαρακτηρίζει κάθε αντιδρών συστατικό της σύντηξης. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, με τη δημιουργία των προϊόντων στη διαδικασία της σύντηξης υπάρχει ένα "περίσσευμα" ενέργειας, που οφείλεται στη διαφορά των ενεργειών σύνδεσης, και αυτή η οποία απελευθερώνεται στο περιβάλλον με μορφή κινητικής ενέργειας στα παραπροϊόντα (π.χ. σωματίδια β ή νετρίνα ηλεκτρονίου) και υπό μορφή ακτινοβολίας γ.

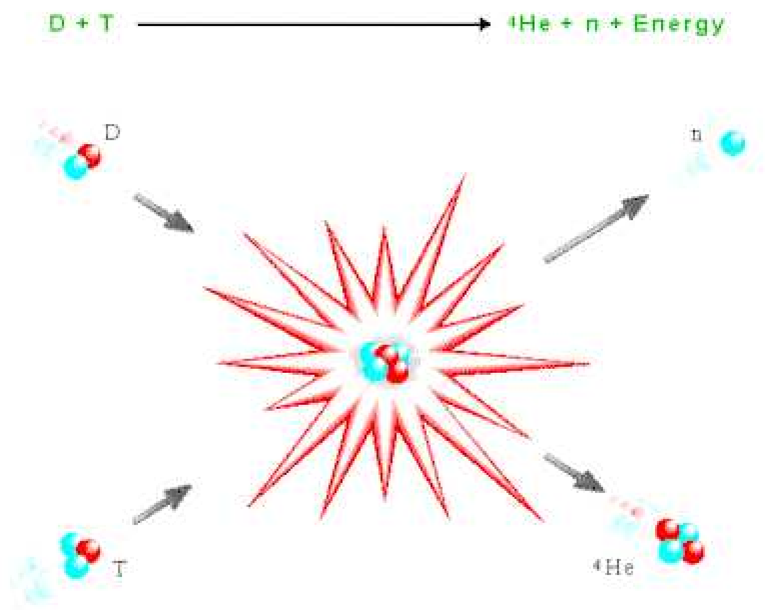
Πυρηνική σύντηξη μπορούν να δημιουργήσουν μόνον ελαφρά στοιχεία, όπως τα ισότοπα του υδρογόνου δευτέριο και τρίτιο. Με τη θέρμανση αερίου υδρογόνου σε υψηλές θερμοκρασίες προκαλούνται συγκρούσεις των πυρήνων των ατόμων του υδρογόνου με μεγάλη ενέργεια, οι οποίοι τελικά συνενώνονται δημιουργώντας σταδιακά πυρήνες ενός άλλου στοιχείου (μεταστοιχείωση), του ηλίου, εκλύοντας ταυτόχρονα θερμική και κινητική ενέργεια λόγω των νετρονίων.

Οι πυρηνικές αντιδράσεις που περιγράφουν την εξώθερμη σύντηξη υδρογόνου, αρχικά σε δευτέριο και τελικά σε ήλιο είναι οι ακόλουθες:

$${}^{1}_{1}H + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{2}_{1}H + \beta^{+} + \nu_e$$

$${}^{2}_{1}H + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{3}_{2}He + \gamma$$

$${}^{3}_{2}He + {}^{3}_{2}He \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{1}H$$



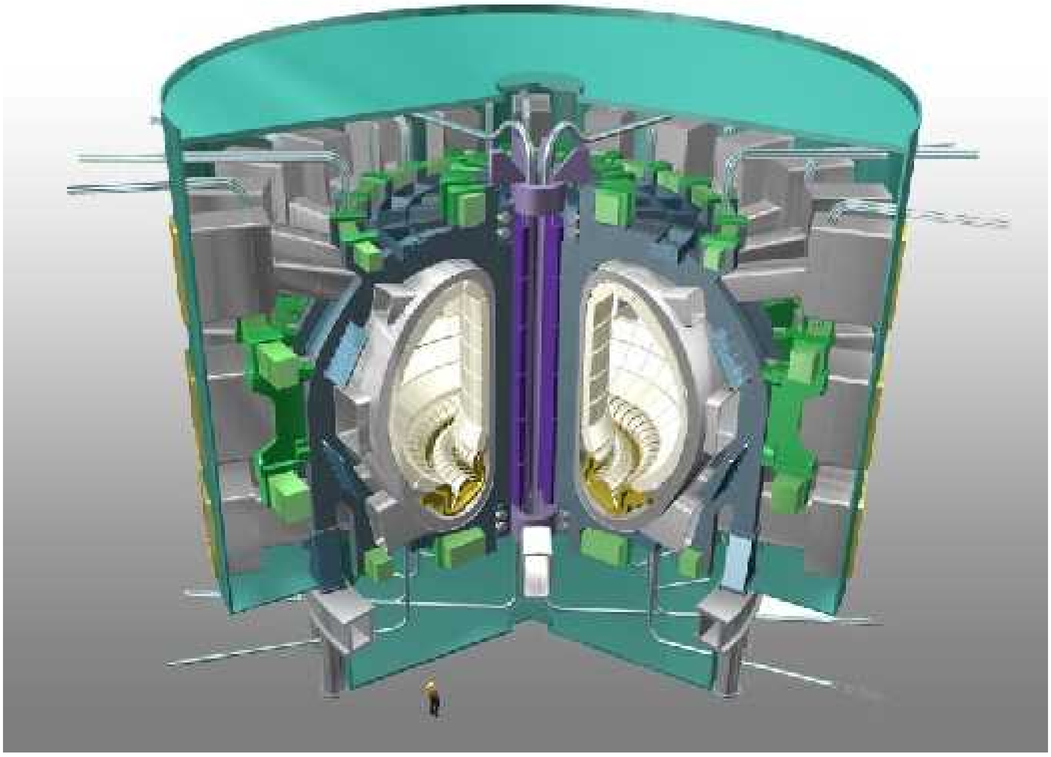
Σχήμα 1 : Αντίδραση του δευτέριου με τρίτιο

όπου:

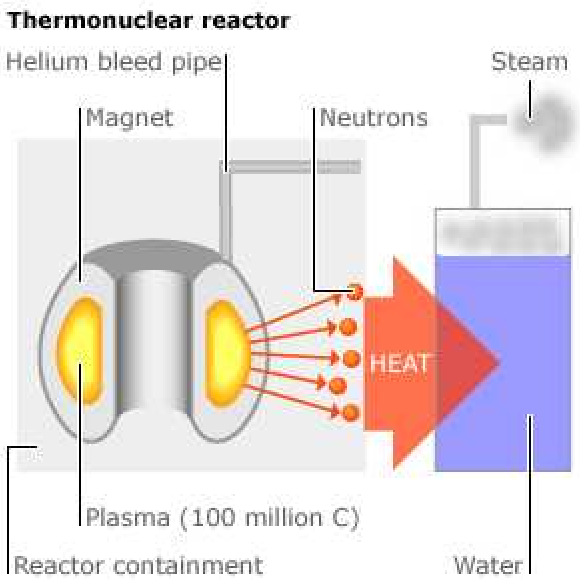
- ${}^{1}_{1}H$ ο πυρήνας του υδρογόνου,
- ${}^{2}_{1}H$ ή D ο πυρήνας του δευτερίου,
- ${}^{3}_{1}H$ ή T ο πυρήνας του τριτίου,
- ${}^{3}_{2}He$ το ελαφρύ ισότοπο 3/2 του ηλίου
- ${}^{4}_{2}He$ το ισότοπο 4/2 του ηλίου που συναντάται συχνά στο περιβάλλον,
- β^{+} είναι το ποζιτρόνιο,
- ν_e είναι το νετρίνο ηλεκτρονίου,
- γ είναι η ακτινοβολία γάμμα.

Τα τελικά προϊόντα των αντιδράσεων είναι ήλιο και νετρόνια μέσω των οποίων μεταφέρεται κυρίως η εκλυόμενη ενέργεια. Η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται, από τη σύντηξη ενός γραμμαρίου μίγματος 50% σε δευτέριο και τρίτιο αντίστοιχα, είναι 94000 kWh, δηλαδή ποσότητα ενέργειας που είναι πολλαπλάσια κατά 10,000,000 φορές από την ποσότητα ενέργειας που λαμβάνουμε από καύση ενός γραμμαρίου πετρελαίου. Αντιδράσεις σύντηξης λαμβάνουν χώρα συνέχεια στον ήλιο.

Εν συντομία, τονίζεται ότι θερμοπυρηνικός αντιδραστήρας ονομάζεται η διάταξη εκείνη εντός της οποίας παράγεται θερμική ενέργεια μέσω ελεγχόμενης πυρηνικής σύντηξης. Τα αντιδρώντα και προϊόντα της αντίδρασης είναι σε μορφή ιονισμένου αερίου που ονομάζεται πλάσμα. Οι ελεγχόμενοι θερμοπυρηνικοί αντιδραστήρες βρίσκονται ακόμη σε πειραματικό στάδιο. Το γνωστότερο είδος τέτοιου αντιδραστήρα είναι το λεγόμενο TOKAMAK όπου τοροειδές μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιείται για τη συγκράτηση του πλάσματος στο εσωτερικό του. Τέτοιοι αντιδραστήρες υπάρχουν αρκετοί διεθνώς. Στην Ευρώπη και συγκεκριμένα στο Cadarache της Γαλλίας από το 2008 κατασκευάζεται ο αντιδραστήρας ITER. Το έργο αυτό θεωρείται σημαντικό βήμα όσον αφορά τη δημιουργία πρωτότυπων αντιδραστήρων σύντηξης για ασφαλείς, φιλικούς προς το περιβάλλον και οικονομικά βιώσιμους σταθμούς ηλεκτροπαραγωγής.



Σχήμα 2: Σχηματικό διάγραμμα του αντιδραστήρα ITER.



Σχήμα 3: Συνοπτική αρχή λειτουργίας του θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα

Η λειτουργία ενός θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα στηρίζεται στο γεγονός ότι ισχυρό ηλεκτρικό ρεύμα, που διοχετεύεται, θερμαίνει το εντός του αντιδραστήρα αέριο υδρογόνο, ενώ ισχυρά μαγνητικά πεδία αποτρέπουν την πρόσκρουσή του στα τοιχώματα της σωληνοειδούς διάταξης. Τα εκλυόμενα νετρόνια διέρχονται μέσω του μανδύα που περιβάλλει τον αντιδραστήρα όπου θερμαίνουν ήλιο, λίθιο, ή όποιο άλλο ψυκτικό μέσο κυκλοφορεί στον μανδύα, το οποίο με την σειρά του θερμαίνει νερό για την παραγωγή ατμού. Με αυτό τον τρόπο έχουν μεν επιτευχθεί αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης αλλά όχι σε τέτοιο βαθμό που να μπορούν να προσφέρουν εκμεταλλεύσιμο ποσό ενέργειας σε σταθερή βάση. Το υγρό λίθιο που κυκλοφορεί στον μανδύα χρησιμοποιείται, εκτός των άλλων, για την αναπαραγωγή του τριτίου που αποτελεί ένα από τα αντιδρώντα της πυρηνικής σύντηξης.

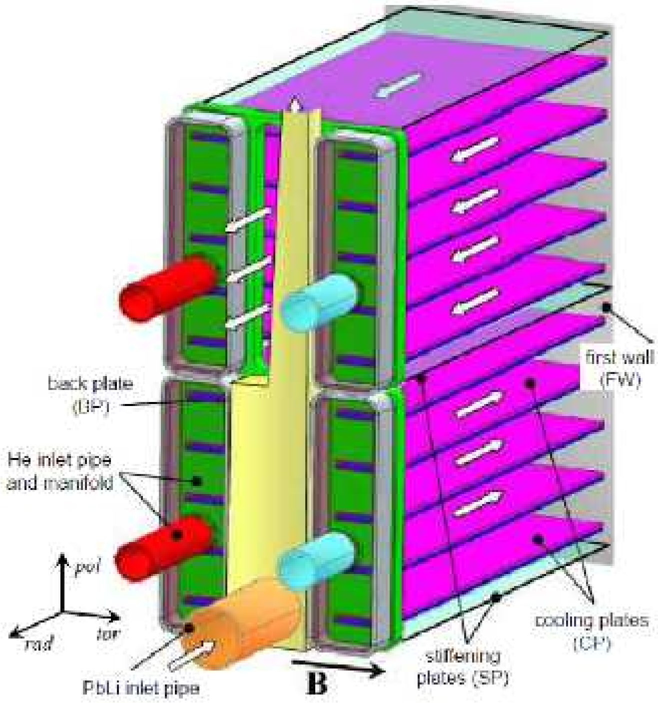
Όπως είναι φανερό, στον μανδύα του αντιδραστήρα λαμβάνουν χώρα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας, μάζας και ορμής υπό την παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Αποτελεί λοιπόν σημαντική ερευνητική προτεραιότητα να μελετηθούν κλασσικά προβλήματα ροής και υδροδυναμικής ευστάθειας υπό το πρίσμα των ΜΥΔ αλληλεπιδράσεων. Η κατανόηση τέτοιων προβλημάτων αναμένεται να συμβάλλει στο βέλτιστο σχεδιασμό ελεγχόμενων θερμοπυρηνικών αντιδραστήρων σύντηξης αλλά και γενικότερα στην περαιτέρω ανάπτυξη υπαρχουσών εφαρμογών της ΜΥΔ. Η αξιοποίηση των φαινομένων της ΜΥΔ ροής σε τεχνολογικές εφαρμογές δύναται να χωριστεί σε δύο κατηγορίες οι οποίες παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα.

ΜΥΔ σε τεχνικά συστήματα	ΜΥΔ για βελτιστοποίηση διαδικασιών
❖ Αντλίες ΜΥΔ βασισμένες στην αγωγιμότητα ❖ ΜΥΔ αναδευτήρες υγρών μετάλλων βασιζόμενοι σε μεταβλητό επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο ❖ Συγκόλληση με πλάσμα ❖ Συγκόλληση με δέσμες ηλεκτρονίων ❖ Επαγωγικοί φούρνοι ❖ ΜΥΔ γεννήτριες	❖ Έλεγχος μεταφοράς με ΜΥΔ σε – συσκευές ανάπτυξης κρυστάλλων – μανδύες αντιδραστήρων σύντηξης – γαλβανικά λουτρά – ηλεκτρομαγνητική επίπλευση – ομογενοποίηση με ΜΥΔ αναδευτήρα ❖ Τήξη με μετεωρισμό ❖ Κατεργασία επιφανειών

❖ Περιορισμός του πλάσματος σε αντιδραστήρες σύντηξης	

Πίνακας 1: Πεδία εφαρμογών της ΜΥΔ

Η χρήση υγρών μετάλλων για ανάκτηση τριτίου καθώς και για απαγωγή θερμότητας αποτελεί κεντρική παράμετρο στον σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας αντιδραστήρων σύντηξης. Ο μανδύας αποτελείται από αγωγούς όπου το στρώμα υγρού μετάλλου ρέει εντός των αγωγών και υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου παράγεται στον αντιδραστήρα πλάσματος. Στη διάταξη του μανδύα Dual Coolant Lead Lithium, DCLL, ένα υγρό μείγμα το οποίο σε μεγαλύτερο ποσοστό είναι λίθιο χρησιμοποιείται για την ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας, μαζί με την ξεχωριστή ψύξη του ηλίου που τροφοδοτεί το τρίτιο (Buhler & Norajitra 2003, Fidaros et al. 2008). Σε αυτή την περίπτωση η βεβιασμένη συναγωγή κυριαρχεί στη διατομή του αγωγού και υιοθετούνται εκθέματα SiC με σκοπό την ηλεκτρική μόνωση των πλευρικών τοιχωμάτων και κατ’ επέκταση τη μείωση των υψηλών ταχυτήτων ρευστού που παράγονται κοντά στα πλευρικά τοιχώματα όταν η ηλεκτρική αγωγιμότητά τους είναι πολύ υψηλή. Τέτοιες υψηλές ταχύτητες μεταφέρουν το μεγαλύτερο ποσοστό του υγρού μετάλλου εντός του αγωγού και παράγουν αστάθειες παρόμοιες με αυτές που παρατηρήθηκαν στην πειραματική μελέτη των Burr et al. (2008), που είχαν ως αποτέλεσμα την αυξημένη ανάμιξη και θέρμανση στα πλευρικά τοιχώματα.



Σχήμα 4 : Σχηματικό διάγραμμα του μανδύα στην περίπτωση της προτεινόμενης διάταξης μανδύα Helium Cooled Lead Lithium HCLL (Buhler & Mistrangelo, 2010)

Στη διάταξη του μανδύα HCLL (βλ. σχήμα 4), η θερμότητα μεταφέρεται μέσω του ηλίου που κυκλοφορεί στους σωλήνες εντός των αγωγών του μανδύα, ενώ το υγρό μέταλλο λίθιο χρησιμοποιείται για την παραγωγή του τριτίου σε ξεχωριστούς ορθογωνικούς αγωγούς. Το στρώμα υγρού μετάλλου αντλείται μέσω αυτών των αγωγών με πολύ μικρή ταχύτητα αλλά ταυτόχρονα, και πιο σημαντικά, η ροή λαμβάνει χώρα υπό μορφή ελεύθερης συναγωγής ως απόρροια υψηλής εσωτερικής θέρμανσης εξαιτίας των νετρονίων. Αποτελεί ενδιαφέρον να εξακριβωθεί ο βαθμός της μεταφοράς θερμότητας λόγω συναγωγής σε τέτοιους αγωγούς έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η πρόβλεψη του συνδυασμένου συντελεστή μεταφοράς θερμότητας μιας μονάδας του μανδύα η οποία απαρτίζεται από σωλήνες που μεταφέρουν ήλιο και αγωγούς όπου το στρώμα υγρού μετάλλου κυκλοφορεί. Τέτοιου είδους προβλέψεις είναι σημαντικές για τον καθορισμό του θερμικού φορτίου στα μεταλλικά τοιχώματα σωλήνων, κοιλοτήτων και κατ’ επέκταση στον υπολογισμό του κύκλου ζωής τους.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση μελέτης προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου μέσω βεβιασμένης και ελεύθερης συναγωγής παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Η ευστάθεια και η μετάβαση σε τύρβη κλειστών ροών έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ειδικά στο πλαίσιο ιξωδών ροών (Waleffe, 2003, Eckhardt et al., 2008) σε κανάλια και σωλήνες. Θα επισημανθεί η σημαντικότητα των μη γραμμικών φαινομένων, που συνδέονται με την εμφάνιση των συνεκτικών δομών (coherent structures) και θα δειχθεί ο ρόλος τους ως προς την μετάβαση σε τύρβη στην ενότητα των αποτελεσμάτων. Η εμφάνιση τέτοιου είδους δομών δεν έχει μελετηθεί σε ροές στρωμάτων υγρών μετάλλων παρουσία μαγνητικού πεδίου. Ωστόσο, είναι γνωστό από τη θεωρία ότι το μαγνητικό πεδίο τείνει να εξαλείψει συνιστώσες δινών οι οποίες είναι κάθετες ως προς τη διεύθυνσή του ενώ ευνοεί την ύπαρξη δινών παράλληλων με αυτό (Chandrasekhar, 1961, Sommeria & Moreau, 1982). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, αυξάνοντας την ένταση του μαγνητικού πεδίου, οι μεταβολές να περιορίζονται στη διεύθυνσή του και να εμφανίζονται οιονεί διδιάστατες δομές. Μία επακόλουθη επίδραση της αύξησης της έντασης του μαγνητικού πεδίου αποτελεί και η ανάπτυξη λεπτών στρωμάτων δινών κοντά στα τοιχώματα του καναλιού, τα οποία είναι ευθυγραμμισμένα ή κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα τοιχώματα που είναι κάθετα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου καλούνται τοιχώματα Hartmann (Hartmann walls) και καθορίζονται από το ισοζύγιο ανάμεσα σε ιξώδεις και Lorentz δυνάμεις ενώ τα τοιχώματα που βρίσκονται παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο ονομάζονται πλευρικά τοιχώματα (side walls) και προσδιορίζονται από την ισορροπία μεταξύ πίεσης και ιξωδών δυνάμεων (Buhler, 1996, 1998). Τέτοιου είδους δομές έχουν καταγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία με την πειραματική ΜΥΔ στα πλαίσια ροών ελεύθερης και βεβιασμένης συναγωγής (Potherat et al. 2000, 2005).

Συγκεκριμένα, όταν θεωρηθεί ροή στρώματος υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής υπό καθεστώς βεβιασμένης συναγωγής και υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου το οποίο είναι ευθυγραμμισμένο με τα κάθετα τοιχώματα ενώ ταυτόχρονα τόσο τα οριζόντια όσο και τα κάθετα τοιχώματα είναι ηλεκτρικά αγώγιμα, τότε σε αυτή την περίπτωση η γραμμική ανάλυση ευστάθειας της πλήρους αναπτυγμένης ροής σε υψηλούς αριθμούς Hartmann, Ha, υποδεικνύει την εξασθένηση διαταραχών των οποίων η στροβιλότητα είναι κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ενώ φαίνεται να ευνοούνται και να αναπτύσσονται διαταραχές παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (Ting et al., 1991). Έτσι, η εμφάνιση δινών μικρού μήκους κύματος που είναι παράλληλες στο μαγνητικό πεδίο και παραμένουν στην εγγύς περιοχή των πλευρικών τοιχωμάτων είχε προβλεφθεί από την ανάλυση ευστάθειας. Η απαρχή της αστάθειας οφείλεται στην ύπαρξη ρευστού με υψηλή ταχύτητα κοντά στα πλευρικά τοιχώματα στην φάση της πλήρους αναπτυγμένης ροής, ως απόρροια της ηλεκτρικής αγωγιμότητάς τους. Οι μεγάλες περιοδικές διακυμάνσεις εντός των πλευρικών στρωμάτων θεωρείται ότι συνεισφέρουν θετικά στη μετάδοση θερμότητας κάθετα στα πλευρικά τοιχώματα όπου ρέει το στρώμα υγρού μετάλλου, το οποίο χρησιμοποιείται κατ’ ουσία ως ψυκτικό υγρό, ιδιαίτερα στους αγωγούς που είναι τοποθετημένοι κοντά στο πρώτο τοίχωμα (first wall) του μανδύα που περιβάλλει τον αντιδραστήρα σύντηξης. Επακόλουθη πειραματική εργασία, όπου μελετήθηκαν τα χαρακτηριστικά παρόμοιας μορφής ροής σε ορθογωνικό αγωγό, κατέδειξε την ύπαρξη jets στα πλευρικά τοιχώματα μαζί με την εμφάνιση οιονεί διδιάστατων δομών (Burr et al., 2000). Η τυρβώδης κινητική ενέργεια εστιαζόταν στην ίδια περιοχή πλευρικού τοιχώματος όπου παρατηρήθηκε ισχυρή ανάμειξη και η τυρβώδης μεταφορά θερμότητας ενισχυόταν, ενώ ο πυρήνας της ροής παρέμενε περισσότερο ή λιγότερο στην στρωτή περιοχή. Κατά συνέπεια, η οιονεί διδιάστατη τυρβώδης δομή θεωρήθηκε ως μία ενδιάμεση κατάσταση στη διαδρομή για τριδιάστατη τύρβη μέσα σε αγωγό, καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται για συγκεκριμένους υψηλούς αριθμούς Ha, με τον τρόπο που είχε υποτεθεί από τους Sommeria & Moreau (1982).

Σε διαφορετικό πλαίσιο, η συναγωγή Rayleigh - Benard μελετήθηκε σε ορθογωνικό αγωγό (Burr & Muller 2002) το οποίο θερμαίνονταν από κάτω, υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Η μόνιμη συναγωγή θεωρήθηκε να σχετίζεται με τον Ha, καθώς η θερμορροή και κατ’ επέκταση ο αριθμός Grashof, Gr, αυξάνονταν. Για ένα ευρύ πεδίο τιμών Ha, $100<Ha<1000$, διαπιστώθηκε να ευνοείται η ύπαρξη των προκυπτουσών εστιών ανακυκλοφορίας στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου παρακολουθώντας το συντελεστή οριζόντιας ισοτροπίας που προκύπτει ως ο λόγος ανάμεσα στις μεταβολές των οριζόντιων θερμοκρασιακών κλίσεων. Καθώς ο Gr αυξάνονταν πάνω από την περιοχή της μόνιμης συναγωγής παρατηρήθηκε η ύπαρξη περιοχής χρονομεταβαλλόμενης ή μεταβατικής συναγωγής η οποία χαρακτηρίζει τη μορφή της ροής για υψηλούς Gr και ενδιάμεσες τιμές του Ha. Μάλιστα, διαπιστώθηκε η ύπαρξη ενός τοπικού μέγιστου στην περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας ως προς την κάθετη κατεύθυνση για τιμές παραμέτρων που αντιστοιχούν στη μεταβατική συναγωγή. Αυτό πιστώθηκε στην οιονεί διδιάστατη διάταξη των εστιών ανακυκλοφορίας στον αγωγό.

Στην περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο δεν είναι αρκετά ισχυρό έτσι ώστε να περιορίσει τις διακυμάνσεις της ταχύτητας και της θερμοκρασίας αλλά αρκετά ισχυρό προκειμένου να απαλείψει δίνες οι οποίες δεν είναι ευθυγραμμισμένες με αυτό, τότε η ένταση της διακύμανσης της κυρίαρχης εναπομείνασας δίνης αυξάνει το ποσό της θερμότητας με κατεύθυνση από τον πυθμένα του ορθογωνικού αγωγού προς το άνω οριζόντιο τοίχωμά του, γεγονός που δημιουργεί συνθήκες για τη βέλτιστη μεταφορά θερμότητας. Αυτό αποτελεί μία ενδιαφέρουσα δυναμική ιδιότητα της ροής παρουσία μαγνητικού πεδίου, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει σε εντατικοποίηση της μεταφοράς θερμότητας ή μάζας ελέγχοντας τον προσανατολισμό και την ένταση των παραγόμενων εστιών ανακυκλοφορίας. Το όριο για την εμφάνιση θερμικής συναγωγής είχε προκύψει στην προαναφερθείσα μελέτη υιοθετώντας την παραδοχή οιονεί διδιάστατης δομής για την προκύπτουσα μορφή της ροής. Σε πιο πρόσφατη μελέτη των Gelfgat & Molokov (2011) που αφορούσε την ευστάθεια δινών ανακυκλοφορίας όταν το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο της κυκλοφορίας του ρευστού είχε δειχθεί η εξάρτηση της ευστάθειας από το λόγο όψης του αγωγού και τις συνοριακές συνθήκες.

Σε αυτό το πλαίσιο, η τριδιάστατη ευστάθεια του στρώματος υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου και θερμοκρασιακής διαφοράς παράλληλα και με αντίθετη φορά ως προς την κατεύθυνση της βαρύτητας, είναι πολύ σημαντική στη δημιουργία μορφής της ροής στον αγωγό παρόμοια με αυτήν που αναμένεται να εμφανισθεί στους αγωγούς του μανδύα αντιδραστήρα σύντηξης μέσω των οποίων παράγεται το τρίτιο και μεταφέρεται η θερμότητα. Βασιζόμενοι σε υπολογισμούς των παραμέτρων που αφορούν τη κυκλοφορία υγρού μετάλλου σε αγωγούς που χρησιμοποιούνται στο μανδύα HCLL, οι αδιάστατοι αριθμοί Ha και Gr θα είναι της τάξης των $2x10^4$ και $5x10^9$, αντίστοιχα. Η μεγάλη τιμή του Gr είναι αποτέλεσμα του έντονου θερμικού φορτίου λόγω των νετρονίων που προβλέπεται να υπάρχει στους μεγάλους αντιδραστήρες σύντηξης όπως ο ITER (Buhler & Norajitra 2003, Fidaros et al. 2008, Buhler & Mistrangelo 2010, Kharitsa et al. 2004). Οι πρώτες προσπάθειες για την μοντελοποίηση των συνθηκών ροής στους αγωγούς του μανδύα όπου ρέει το στρώμα υγρού μετάλλου (Kharitsa et al. 2004, Burr & Muller 2002) υποθέτουν οιονεί διδιάστατη μορφή ροής με καλώς σχηματιζόμενες πλευρικές και Hartmann στοιβάδες. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται σε ασυμπτωτικούς υπολογισμούς που διεξήχθησαν σε κοιλότητες όπου επικρατούσε ΜΥΔ συναγωγή με άνωση (Buhler 1998) έχοντας σχηματιστεί πλευρικές και Hartmann στοιβάδες ενώ αμελείται η αδράνεια για όσο ισχύει $Gr \ll Ha^{5/2}$. Αντικαθιστώντας τους παραπάνω υπολογισμούς για αντιδραστήρες σύντηξης λαμβάνουμε $Gr/Ha^{5/2} \sim 0.5$. Λαμβάνοντας υπόψη την ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων, έχει προκύψει ότι παράγονται μόνιμες εστίες ανακυκλοφορίας παράλληλες με το μαγνητικό πεδίο οι οποίες οφείλονται στην θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στα δύο απέναντι τοιχώματα κατά τη διαμήκη κατεύθυνση. Κατά συνέπεια ενδιαφέρει η εξεύρεση ρεαλιστικής συσχέτισης ανωστικών και μαγνητικών δυνάμεων λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της συναγωγής σε τέτοιου είδους αγωγούς. Η πειραματική εργασία που πραγματοποιήθηκε από τους Burr & Muller αποτελεί προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση με τη διαφορά ότι αντί του ογκομετρικού θερμικού φορτίου εντός του αγωγού η θερμοκρασιακή κλίση, η οποία εισάγει τον αριθμό Gr, δημιουργείται μέσω σταθερής θερμορροής που εφαρμόζεται στο κάτω οριζόντιο τοίχωμα του αγωγού.

Όπως τονίστηκε παραπάνω η ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων αναμένεται να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στη δυναμική και τη μεταφορά θερμότητας της συγκεκριμένης μορφής της ροής. Στα πλαίσια της τριδιάστατης γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας η παρούσα μελέτη στοχεύει στην κατάδειξη του συγκεκριμένου θέματος ταυτοποιώντας τη δομή της κυρίαρχης ιδιολύσης σε αγωγό όπου επικρατεί η ελεύθερη συναγωγή καθώς επίσης και στην εξεύρεση ρεαλιστικής συσχέτισης της κρίσιμης τιμής του αριθμού Grashof, Gr_{Cr}, συναρτήσει του Ha και των ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων των τοιχωμάτων. Συγκεκριμένα, θα εξεταστεί η εγκυρότητα της υπόθεσης ότι οι προκύπτουσες δομές στην περίπτωση της μόνιμης συναγωγής προσλαμβάνουν διδιάστατη οιονεί δομή με καλώς σχηματιζόμενες πλευρικές και Hartmann στοιβάδες καθώς μεταβάλλεται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων Hartmann. Θεωρείται ότι η ροή λαμβάνει χώρα μόνο ως αποτέλεσμα ελεύθερης συναγωγής ενώ εικάζεται ότι ισχύει περιοδικότητα στην κατεύθυνση κάθετα στο επίπεδο που ορίζεται από το μαγνητικό πεδίο και την βαρυτική επιτάχυνση.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση μελέτης προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου ελεύθερης συναγωγής παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Η μελέτη της ευστάθειας ροών στις οποίες εμφανίζονται δίνες αποτελεί ένα κεφαλαιώδες θέμα στο πεδίο της υδροδυναμικής ευστάθειας καθώς ενέχει κεντρικό ρόλο όχι μόνο σε μία ευρεία ομάδα εφαρμογών όπως η αεροδυναμική και η γεωφυσική (Pierrehumbert 1986, Ortega 2003, Bristol et al. 2004) αλλά επίσης και στο ευρύτερο πλαίσιο της ευστάθειας ροής και μετάβασης (Pierrehumbert 1986, Landmann & Saffman 1987). Πράγματι, η εμφάνιση τριδιάστατων διαταραχών μικρού μήκους κύματος επί διδιάστατων συνεκτικών δομών, φαίνεται να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία μετάβασης των ιξωδών ροών (Landmann & Saffman 1987, Grossmann 2000). Οι δίνες δύνανται ενδεχομένως να εμφανιστούν μέσω μη γραμμικής επίδρασης και δεν χρειάζεται να αποτελούν μέρος της γραμμικής αστάθειας μιας παράλληλης βασικής ροής (Waleffe 1995, Grossmann 2000).

Ο Crow (1970) γενίκευσε τη θεωρία του Kelvin σχετικά με τις ιδιομορφές λυγισμού σε κυλινδρικό σωλήνα προκειμένου να υπολογίσει την αστάθεια μεγάλου μήκους κύματος η οποία παρατηρήθηκε σε ζεύγος δινών που σχηματίζονται στη ροή πίσω από αεροσκάφος. Με αυτόν τον τρόπο, αναγνώρισε το μηχανισμό που βασίζεται στην αστάθεια μετατόπισης η οποία αναπτύσσεται με συμμετρικό τρόπο στο επίπεδο που διαχωρίζει τις δύο δίνες στο μέσο της μεταξύ τους απόστασης, ως μία αστάθεια συντονισμού ανάμεσα στην υψηλή ιδιομορφή λυγισμού τύπου Kelvin και της κίνησης παραμόρφωσης που επιβάλλεται στη μία δίνη λόγω της περιστροφής της άλλης δίνης. Το μήκος κύματος της κυρίαρχης ιδιομορφής είναι της τάξης των οκτώ διατεταγμένων δινών. Εν συνεχεία, διαπίστωσε ότι η ελλειπτική δομή των ροϊκών γραμμών, η οποία δημιουργείται εξαιτίας της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην περιστροφή στερεού σώματος και στην εξωτερική παραμόρφωση, διαδραματίζει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη τριδιάστατων διαταραχών στα πλαίσια ανοιχτών (Pierrehumbert 1986) και κλειστών ροών (Gledzer & Ponomarev 1992). Επιπρόσθετα, τριδιάστατα μικρά μήκη κύματος δύνανται να παράγονται από τον ίδιο μηχανισμό (Tsai & Widnall 1976). Πιο πρόσφατα, παρατηρήθηκε πειραματικά ότι τέτοιου είδους μικρά κύματα εξελίσσονται εντός δύο κοντινών αντι-περιστρεφόμενων εστιών ανακυκλοφορίας (Leweke & Williamson 1998, Bristol et al. 2004) όπου το σχήμα της ιδιομορφής μένει ανεπηρέαστο από το πεπερασμένο μέγεθος της ελλειπτικής περιοχής και οι δύο δίνες παρουσιάζουν φάση ανάπτυξης της διαταραχής. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε μέσω της πειραματικής μεθόδου Particle Image Velocimetry (PIV) ότι το πεδίο διαταραχών, που παράγεται λόγω ελλειπτικής αστάθειας μικρού μήκους κύματος, τροποποιεί εσωτερικά κάθε μία από τις προκύπτουσες δίνες ενώ ταυτόχρονα καθιστά μη ενεργή την αρχική συνθήκη του πεδίου ροής (Leweke & Williamson 1998). Τελικά, οι δίνες που χαρακτηρίζονται από μεγάλα κύματα αλληλεπιδρούν με τα μικρά κύματα, τα οποία σχηματίζουν δευτερογενή ζεύγη δινών έως το σημείο σχηματισμού δακτυλίου. Επιπλέον, η επίδραση του χωρικού περιορισμού αναφορικά με την αλληλεπίδραση ζεύγους δινών έχει μελετηθεί (Gledzer & Ponomarev 1992) σε ελλειπτική κοιλότητα όπου είχε ανακύψει ότι υπάρχουν δύο είδη αστάθειας. Συγκεκριμένα, μία αστάθεια αντιστοιχούσε σε στάσιμο κύμα και η άλλη αστάθεια σε μορφή οδεύοντος κύματος. Επιπρόσθετα η μορφή του προκύπτοντος ιδιοδιανύσματος δεν μεταβάλλονταν σημαντικά από το βαθμό περιορισμού.

Υπό διαφορετικό πρίσμα, η ευστάθεια ζεύγους δινών έχει μελετηθεί ενδελεχώς σε μια προσπάθεια κατανόησης της ευστάθειας διδιάστατων συνεκτικών δομών και του ρόλου που διαδραματίζουν όσον αφορά τη μετάβαση σε τύρβη. Αρχικά, θεωρήθηκε ότι η εμφάνιση τριδιάστατης αστάθειας μικρού μήκους κύματος, προερχόμενη από τη βασική ροή που χαρακτηρίζεται από ελλειπτικές ροϊκές γραμμές (Pierrehumbert 1986) ως απόρροια της αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε σειρά διδιάστατων δινών, αποτελούσε κομμάτι της μετάδοσης ενέργειας που οδηγεί σε τύρβη στην οποία κυριαρχεί η αδράνεια, ενώ όλες οι δίνες παρέμεναν ασταθείς για μικρές τιμές του κυματαριθμού. Εν συνεχεία, είχε δειχθεί ότι το ιξώδες παρέχει μία πλειάδα ασταθών μηκών κύματος (Landman & Saffman 1987) ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή που αντιστοιχεί στον κρίσιμο αριθμό Ekman, ο οποίος προβλέπεται από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, και το μακροσκοπικό μέγεθος της νηματώδους δομής. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι ο αριθμός Ekman : $E=2\pi\nu k_0^2/(\omega/2)$ μετρά την ένταση της κίνησης της δίνης έναντι των ιξωδών επιδράσεων, όπου ω είναι η στροβιλότητα της δίνης, ν το κινηματικό ιξώδες και $\ell = 2® / k_0$ το μέγεθος της δίνης. Αργότερα, για την ελλειπτική αστάθεια προβλέφθηκε ο μη γραμμικός κορεσμός (Waleffe 1990), ο οποίος ελέγχεται από την έκταση της δίνης. Σε μελέτη που επακολούθησε (Waleffe 1995) αποδείχθηκε ότι διδιάστατες εστίες ροής, οι οποίες εμφανίζονται στις ιξώδεις ροές μέσω μιας μη γραμμικής διεργασίας, γίνονται ασταθείς εξαιτίας των διακυμάνσεων της βασικής ροής στη διατομή. Το γεγονός αυτό αποτελεί αστάθεια παρόμοιας φύσης με την αντίστοιχη που σχετίζονταν με τις ελλειπτικές ροϊκές γραμμές. Επειδή περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση διδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας αυτό έχει ως συνέπεια τη διατήρηση του διδιάστατου κύριου βασικού πεδίου ροής μέσω της μη γραμμικής αυτό-αλληλεπίδρασης του προκύπτοντος κυρίαρχου ασταθούς ιδιοδιανύσματος (Waleffe 1995) και αποτελεί θέμα κεντρικής σημασίας αναφορικά με τη διαδικασία της μετάβασης των ιξωδών ροών σε τύρβη (Grossmann 2000).

Επίσης, ο σχηματισμός διδιάστατων δινών θεωρείται ότι λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο της ΜΥΔ ευστάθειας ροών υγρού μετάλλου σε χαμηλούς μαγνητικούς αριθμούς Reynolds, $Re_m = uL / ¦$, (¦ : δηλώνει τη μαγνητική διαχυτότητα) όπου το μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά ισχυρό έτσι ώστε τείνει να εξαλείψει δίνες κάθετα στη διεύθυνσή του ενώ επιτρέπει την ύπαρξη μόνο αυτών των οποίων ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου (Sommeria & Moreau 1982). Έπειτα, αναλόγως της γεωμετρίας, η συμπεριφορά τέτοιου είδους δινών μπορεί να μελετηθεί μέσω των κλασσικών εξισώσεων Navier-Stokes χωρίς να υπολογιστούν οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Στην πραγματικότητα εικάζεται ότι τα χαρακτηριστικά της οιονεί διδιάστατης τύρβης δύνανται να μελετηθούν σε αυτού του είδους τη μορφή ροής. Ωστόσο, δεν υπάρχουν αρκετά πειραματικά στοιχεία που να αφορούν την εμφάνιση διδιάστατης τύρβης με αυτόν τον τρόπο.

Κατά την τελευταία δεκαετία, πειράματα ροών υγρού μετάλλου ελεύθερης και βεβιασμένης συναγωγής παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων (Burr et al. 2000, Burr & Muller 2002) δείχνουν την εμφάνιση σχεδόν διδιάστατων δινών ευθυγραμμισμένων με το μαγνητικό πεδίο. Συγκεκριμένα, όταν εξετάζεται βεβιασμένη συναγωγή σε αγωγούς με ηλεκτρικά αγώγιμα πλευρικά τοιχώματα τότε καταγράφεται η εμφάνιση ισχυρών jets ως προς τα πλευρικά τοιχώματα καθώς επίσης και η εμφάνιση διδιάστατων δινών περιορισμένων εντός των πλευρικών στοιβάδων που σχηματίζονται κοντά στα πλευρικά τοιχώματα (Burr et al. 2000). Τέτοιου είδους στοιβάδες σχηματίζονται κοντά σε σύνορα που είναι παράλληλα με ισχυρό μαγνητικό πεδίο και καθορίζονται από το ισοζύγιο ιξωδών και δυνάμεων πίεσης (Buhler 1998). Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας της μορφής της ροής εντός των πλευρικών στοιβάδων (Ting et al. 1991) προβλέπει την ύπαρξη δίνης της οποίας η κίνηση θα είναι παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο.

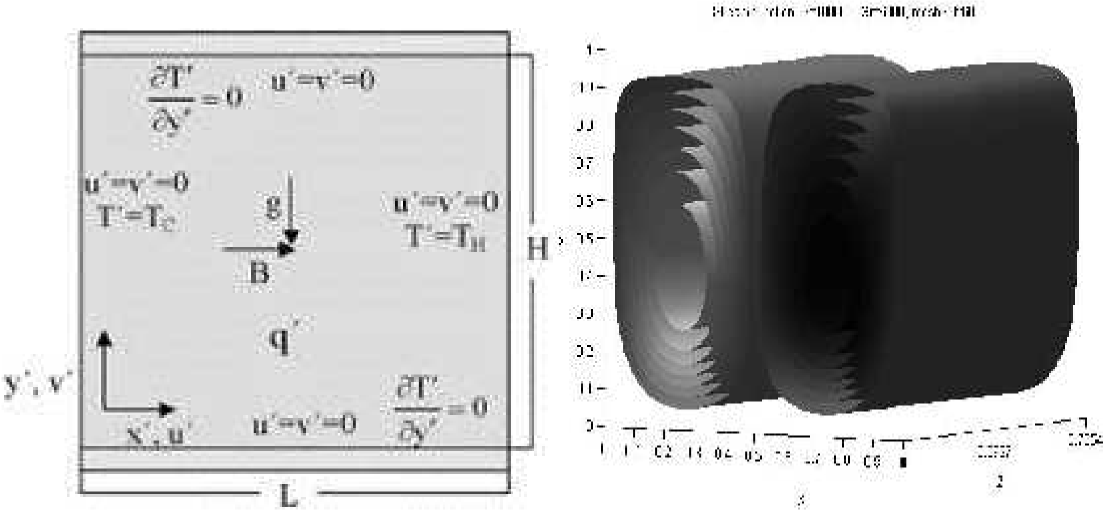
Όταν μελετήθηκε το πρόβλημα συναγωγής Rayleigh - Benard (Burr & Muller 2002) σε αγωγό που περιείχε το στρώμα υγρού μετάλλου, καταγράφηκε και σε αυτή την περίπτωση η ύπαρξη διδιάστατων δομών δινών που ήταν παράλληλες με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου όταν η έντασή του και κατ’ επέκταση ο αριθμός Ha αυξάνονταν. Το μαγνητικό πεδίο τέθηκε κάθετο ως προς τη βαρύτητα ενώ ο αγωγός θερμαίνονταν από κάτω. Συνεπώς, οι συνθήκες ροής σε ηρεμία δεσπόζουν στη μορφή της βασικής ροής με σταθερή, αρνητική θερμοκρασιακή κλίση τιθέμενης με αντίθετη φορά ως προς τη βαρύτητα. Καθώς αυξάνονταν ο αριθμός Ha, καταγράφηκε μία αυξανόμενη ανισοτροπία του προκύπτοντος πεδίου ροής κατά το οριζόντιο επίπεδο. Σε αυτό το πλαίσιο, η βασική στρωματοποίηση της θερμοκρασίας αρχικά έχει απώλεια της ευστάθειάς της σε μορφή ροής που χαρακτηρίζεται από μόνιμη συναγωγή ως προς το σχηματισμό διδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας. Ενώ αυξάνεται η θερμορροή από το κάτω οριζόντιο τοίχωμα του αγωγού, αναδύεται μία δευτερογενής αστάθεια η οποία είναι χρονομεταβαλλόμενη αλλά ταυτόχρονα ευνοεί την εμφάνιση διάταξης δινών παράλληλων με τις μαγνητικές γραμμές. Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας που εφαρμόστηκε στην εν λόγω μελέτη, ενσωματώνοντας την οιονεί διδιάστατη δομή του προκύπτοντος πεδίου ροής, επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα στην περίπτωση της μόνιμης συναγωγής που παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια των πειραμάτων αλλά όχι την περίπτωση της χρονομεταβαλλόμενης ή μεταβατικής συναγωγής που επακολουθεί κατά την οποία ο αριθμός Gr υπερβαίνει λίγο την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή του. Σε μία πιο πρόσφατη μελέτη σε παρόμοια μορφή ροής (Gelfgat & Molokov 2011) δεν διερευνήθηκε η εμφάνιση τριδιάστατων διαταραχών. Παρόλα αυτά και στις δύο περιπτώσεις (Burr et al. 2000, Burr & Muller

2002) η οιονεί διδιάστατη τύρβη, η οποία χαρακτηρίζεται από διδιάστατες δίνες, θεωρείται να αποτελεί πρόδρομη μορφή της ισοτροπικής τριδιάστατης τύρβης.

Οι παραπάνω διατάξεις ροής παίζουν κεντρικό ρόλο στο σχεδιασμό μανδυών για αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Για παράδειγμα, στον πειραματικό αντιδραστήρα σύντηξης ITER όπου η ροή στρώματος υγρού μετάλλου χρησιμοποιείται ως μέσο ανάκτησης της θερμότητας που παράγεται στον πυρήνα του αντιδραστήρα και αναγέννησης του τριτίου το οποίο συμμετέχει στην αντίδραση σύντηξης.

Η τριδιάστατη ανάλυση ευστάθειας που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία έχει ως στόχο την ταυτοποίηση της φύσης της προκύπτουσας μεταβατικής συναγωγής μελετώντας τη δυναμική ευστάθεια ενός ζεύγους αντιπεριστρεφόμενων δινών παρόμοιων με αυτές που παράγονται στην περίπτωση της μόνιμης συναγωγής στην προαναφερθείσα πειραματική μελέτη των Burr & Muller (2002). Τα θέματα αυτά είναι σημαντικά προκειμένου να κατανοηθεί η δυναμική της μετάβασης των ροών ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου και κατέχουν σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας υπό συνθήκες που προτείνουν οι εν λόγω ερευνητές.

Σε όλες τις περιπτώσεις οι διδιάστατες δίνες είναι κάθετες ως προς το μαγνητικό πεδίο. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η συγκεκριμένη μορφή ροής ενδεχομένως να πηγάζει ως αποτέλεσμα αστάθειας, παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου, ευθυγραμμισμένης με τη διαμήκη κατεύθυνση της κοιλότητας. Κατά συνέπεια, οι διδιάστατες δίνες είναι ευθυγραμμισμένες με το συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο και η ευστάθειά τους, επιβάλλοντας τριδιάστατες διαταραχές, δεν επηρεάζεται σημαντικά από αυτό. Συνεπώς οι εν λόγω δίνες μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα (Sommeria & Moreau 1982). Το μαγνητικό πεδίο το οποίο εφαρμόζεται στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε στη μελέτη μας ελέγχει την ένταση της ανακυκλοφορίας σε συνδυασμό με τον ογκομετρικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας. Δύνανται να ιδωθούν ως η τοροειδής και η αξονική συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου το οποίο υπάρχει στο μανδύα του αντιδραστήρα σύντηξης, ενώ το στρώμα υγρού λιθίου κυκλοφορεί εντός των αγωγών (Buhler & Mistrangelo 2010), βλ. σχήμα 4. Το ισχυρό τοροειδές πεδίο υπαγορεύει την κατεύθυνση της συστοιχίας των διδιάστατων δινών που προκύπτουν, ενώ το αξονικό και πολοειδές πεδίο είναι ασθενέστερα και διαμορφώνουν την έντασή τους και επηρεάζουν την εμφάνιση της μεταβατικής συναγωγής υπό τη μορφή τριδιάστατης αστάθειας. Οι τελευταίες δύο συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου απουσιάζουν στα πλαίσια των πειραμάτων που διεξήχθησαν από τους Burr & Muller (2002).



Σχήμα 5 : (a) Σχηματικό διάγραμμα των κυρίαρχων συνθηκών στη διατομή της κοιλότητας, (b) διάταξη των διδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας κατά τη διαμήκη κατεύθυνση της κοιλότητας (Gr=6000, S=10^5, Ha=20 και Pr=0.0321).

Η παρούσα εργασία αποτελεί επέκταση προηγούμενης μελέτης (Pelekasis 2006) που αφορούσε τη διδιάστατη ευστάθεια ροής υγρού μετάλλου ελεύθερης συναγωγής σε τετραγωνική κοιλότητα παρουσία μαγνητικού πεδίου και θερμοκρασιακής κλίσης, τα οποία είναι κάθετα στη βαρύτητα, (σχήμα 5a). Καθώς αυξάνεται ο εσωτερικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας είχε δειχθεί ότι κυριαρχεί σταθερή μορφή ροής αποτελούμενη από δύο αντιπεριστρεφόμενες δίνες, (σχήμα 5b). Αναλόγως της έντασης του μαγνητικού πεδίου, προέκυπτε ανάλογη τιμή του αριθμού Gr όπου το ζεύγος δινών γίνεται ασταθές εξαιτίας της διακλάδωσης Hopf χάρη στην οποία προκύπτει περιοδική μετατόπιση των δύο δινών. Η τριδιάστατη ευστάθεια της παραπάνω μορφής της ροής, που χαρακτηρίζεται από ελλειπτικές ροϊκές γραμμές ως απόρροια της εκτατικής κίνησης ανάμεσα στις δύο δίνες, εξετάζεται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Η θερμοκρασιακή διαφορά στα δύο κάθετα τοιχώματα λειτουργεί ως μέσο ελέγχου της ασυμμετρίας ανάμεσα στις δύο εστίες ανακυκλοφορίας.

1.4 Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

Η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics, CFD) αφορά στην αριθμητική προσομοίωση σε προβλήματα ροής ρευστών. Αρχικά οι δυνατότητές της ήταν περιορισμένες και αφορούσε την προσέγγιση απλών προβλημάτων. Ωστόσο, αναπτύχθηκε σε τέτοιο βαθμό έτσι ώστε πλέον να προσομοιώνει σύνθετα πειράματα και εφαρμογές. Οι δύο παράγοντες που συνετέλεσαν ουσιαστικά στην ταχεία ανάπτυξη του CFD είναι : η αύξηση της υπολογιστικής απόδοσης και κατ' επέκταση η μείωση των εξαρτημάτων που συνιστούν μια υπολογιστική μονάδα (hardware), καθώς επίσης και η αύξηση της αποτελεσματικότητας των αριθμητικών αλγορίθμων. Από μαθηματικής σκοπιάς, τα μοντέλα που περιγράφουν τη ροή ρευστού είναι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Συγκεκριμένα, για ροή μη μόνιμη, ισόθερμη και ασυμπίεστη που αφορά Νευτωνικό ρευστό οι διέπουσες εξισώσεις είναι : η εξίσωση διατήρησης της ορμής (Navier - Stokes) και η εξίσωση διατήρησης της μάζας (συνέχεια). Απουσία βαρυτικών δυνάμεων οι ασυμπίεστες εξισώσεις Navier - Stokes προσλαμβάνουν την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \neg \left(\nabla^2 \vec{u}\right) \tag{1.1}$$

και η εξίσωση της συνέχειας :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1.2}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, t είναι ο χρόνος, ¬ το κινηματικό ιξώδες, p η κινηματική πίεση (πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα του ρευστού) και ∇ ο τελεστής κλίσης.

Δυστυχώς, λόγω της μη γραμμικής πολυπλοκότητας των εξισώσεων και της εκάστοτε γεωμετρίας του πεδίου ροής είναι αδύνατον να εξαχθούν λύσεις αναλυτικές ή ισοδύναμες κλειστής μορφής για τις μεταβλητές που περιγράφουν τη ροή (ταχύτητα, πίεση κ.τ.λ.). Κατά συνέπεια, σκοπός του CFD είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων ικανών να παράγουν μια προσεγγιστική λύση στο μαθηματικό πρόβλημα.

Η αριθμητική λύση χαρακτηρίζεται από πεπερασμένο αριθμό αγνώστων, συνήθως τις μεταβλητές ροής υπολογισμένες στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι το υπολογιστικό πεδίο χωρίζεται σε μη-αλληλεπικαλυπτόμενα, πεπερασμένων διαστάσεων κελιά ή στοιχεία όπου οι μεταβλητές που περιγράφουν τη ροή υπολογίζονται στα χαρακτηριστικά σημεία κελιών ή στοιχείων.

Για κάθε άγνωστο εξάγεται μία αλγεβρική εξίσωση από τις διαφορικές εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες που καθορίζουν τη ροή. Ο τρόπος με τον οποίο δημιουργείται η ομάδα αυτών των εξισώσεων καλείται μέθοδος διακριτοποίησης. Έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι διακριτοποίησης εκ των οποίων οι πιο διαδεδομένες και ευρέως χρησιμοποιούμενες είναι η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method ή FDM), η μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume Method ή FVM) και η μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method ή FEM). Οι μέθοδοι αυτοί έχουν συζητηθεί διεξοδικά στη βιβλιογραφία (για παράδειγμα, βλέπε Fletcher et al. 1991, Hirsch 1988, Dick 1993). Μία λιγότερο γνωστή μέθοδος, εντούτοις σημαντικής αξίας, είναι η φασματική μέθοδος (spectral method, Gottlieb & Orszag 1977) .

1.5 Η μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM)

Η FEM έχει αναπτυχθεί με σκοπό την υπολογιστική επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Μελετώντας τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της εν λόγω μεθόδου γίνεται εύκολα αντιληπτός ο μαθηματικός χαρακτήρας της και κατ' επέκταση το στέρεο μαθηματικό της υπόβαθρο εν αντιθέσει με τη μέθοδο FVM η οποία βασίζεται σε μία πιο φυσική αίσθηση. Μάλιστα, όπως χαρακτηριστικά σημειώνεται από τους Gresho & Sani (2000) : *"τα πιο δύσκολα σημεία των μαθηματικών μπορούν να παρακαμφθούν από τους επαγγελματίες και ακόμη τους προγραμματιστές"*. Υπάρχουν κάποια εμφανή πλεονεκτήματα των FEM τα οποία μας οδήγησαν στην επιλογή της συγκεκριμένης μεθόδου στην παρούσα διατριβή, και τα οποία θα προσπαθήσουμε να υπογραμμίσουμε σε αυτή τη σύντομη εισαγωγή.

Το πρώτο χαρακτηριστικό της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι το υπολογιστικό πεδίο υποδιαιρείται σε κελιά, τα λεγόμενα στοιχεία, τα οποία σχηματίζουν το υπολογιστικό πλέγμα. Παρόλο που δεν υπάρχει περιορισμός ως προς τη γεωμετρική μορφή των στοιχείων, συνήθως επιλέγονται τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία για την επίλυση διδιάστατων προβλημάτων (τετράεδρα και εξάεδρα συνήθως απαντώνται σε τριδιάστατα προβλήματα). Το πρώτο και πιο σημαντικό πλεονέκτημα της εν λόγω μεθόδου είναι ότι το πλέγμα δύναται να είναι μη δομημένο (unstructured). Το χαρακτηριστικό αυτό το μοιράζεται τόσο η μέθοδος FVM όσο και πιο σύγχρονες παραλλαγές των FDM.

Τα στοιχεία αποτελούνται όχι μόνο από κόμβους και πλευρές αλλά εμπεριέχουν και συναρτήσεις βάσης (μία για κάθε κόμβο) που καθορίζουν τη διακύμανση της λύσης εντός του στοιχείου. Οι συγκεκριμένες συναρτήσεις συνήθως καλούνται παρεμβολής ή δοκιμαστικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό ορίζει το πεδίο συνάρτησης στο οποίο πρέπει να ανήκει η αριθμητική λύση της ΜΔΕ. Κατά συνέπεια καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων κατέχει η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης.

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιούνται οι διτετραγωνικές (biquadratic) συναρτήσεις βάσης Lagrange $\Phi_i(x,y)$ για την προσομοίωση της ταχύτητας, της θερμοκρασίας και του ηλεκτρικού δυναμικού, ενώ η πίεση του υγρού λιθίου προσεγγίζεται με διγραμμικές (bilinear) συναρτήσεις βάσης Lagrange $\Psi_i(x,y)$.

Το τελευταίο χαρακτηριστικό της εν λόγω μεθόδου που θα προσπαθήσουμε να συζητήσουμε είναι το γεγονός ότι η μέθοδος δεν προσπαθεί να βρει μία προσεγγιστική λύση στη ΜΔΕ αυτή καθαυτή, αλλά μία ολοκληρωτική μορφή της ΜΔΕ που λαμβάνεται από την ασθενή μορφή του προβλήματος (weighted residual formulation). Αυτό συνεπάγεται τον πολλαπλασιασμό της ΜΔΕ με προκαθορισμένες συναρτήσεις βάρους και ολοκλήρωση σε όλο το πεδίο ροής. Η μορφοποίηση Galerkin προκύπτει όταν οι συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται και ως συναρτήσεις βάρους. Σε διαφορετική περίπτωση υιοθετείται η μορφοποίηση Petrov - Galerkin. Η ασθενής μορφή του προβλήματος επιφέρει το δεύτερο σημαντικό πλεονέκτημα των FEM που δεν είναι άλλο από το φυσικό χειρισμό των συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann. Σε αυτό το σημείο υστερούν οι δύο προαναφερθείσες μέθοδοι FDM και FVM. Συνοπτικά, τα βήματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου είναι τα παρακάτω :

- Επιλογή κατάλληλων στοιχείων και συναρτήσεων βάσης ψ_i.
- Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης.
- Κατασκευή του πίνακα συνεκτικότητας ο οποίος προσδιορίζει για κάθε στοιχείο τους κόμβους του πλέγματος που συνεισφέρουν στην επίλυση στο συγκεκριμένο στοιχείο.
- Υπολογισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των κόμβων (π.χ. συντεταγμένες).
- Κατασκευή των διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων σε κάθε στοιχείο του πεδίου, προσεγγίζοντας την άγνωστη μεταβλητή, έστω u, με μια σχέση της μορφής $u=\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot {}_i$. Τελικά, προκύπτει σε κάθε στοιχείο e ένα σύστημα της μορφής $\left[K^{(e)}\right]\left\{u^{(e)}\right\}=\left\{F^{(e)}\right\}$.
- Σύνδεση των τοπικών διακριτοποιημένων εξισώσεων για τον ορισμό του συνολικού προβλήματος.
- Επιβολή των οριακών συνθηκών του προβλήματος.
- Επίλυση του συνολικού συστήματος εξισώσεων.

Για γενικές πληροφορίες σχετικά με τα FEM, από υπολογιστική σκοπιά, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τους Gresho & Sani (2000).

1.5.1 Τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

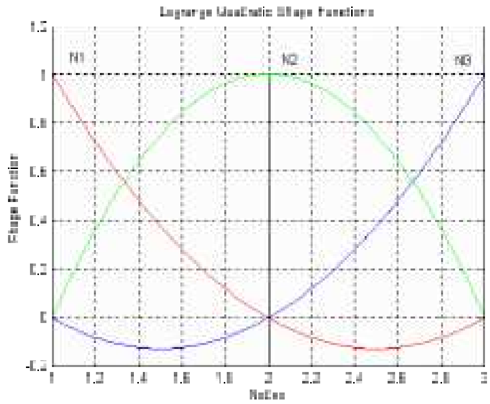
Για την επίλυση προβλημάτων σε μια διάσταση με συναρτήσεις quadratic Lagrange χρησιμοποιούνται 3 κόμβοι σε κάθε στοιχείο. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο e με συντεταγμένες μεταξύ x_e και x_{e+1} τότε οι συναρτήσεις quadratic Lagrange είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζονται στο Σχήμα 6 :

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$$

$$\psi_2 = (1+\xi)(1-\xi)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

όπου $\xi = \dfrac{2x-(x_e+x_{e+1})}{x_{e+1}-x_e}$ και είναι μετασχηματισμένη μεταβλητή η οποία λαμβάνει τιμές μεταξύ -1 και 1 σε κάθε στοιχείο.



Σχήμα 6 : Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης quadratic Lagrange σε μια διάσταση.

Οι συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange είναι συνεχείς χωρίς όμως να διαθέτουν συνεχείς παραγώγους. Όπως όλες οι συναρτήσεις της κατηγορίας Lagrange παρουσιάζουν τις εξής ιδιότητες σε ένα στοιχείο e :

$\psi_i^e(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ και $\sum_{i=1}^{3} \psi_i^e(\xi) = 1$Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής : $u = \sum_{i=1}^{3} u_i \psi_i$

όπου i οι τρεις κόμβοι σε κάθε στοιχείο, u_i είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και ψ_i οι συναρτήσεις βάσης.

Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση και κατά συνέπεια επιβιώνουν εννιά σε κάθε στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Psi_{ij}(x,y) = \phi_i(x)\phi_j(y), \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3$$

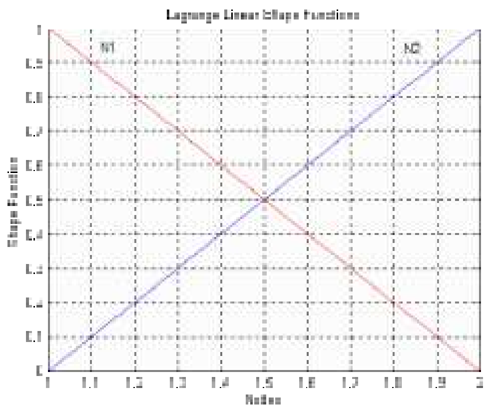
1.5.2 Γραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange

Για την επίλυση προβλημάτων σε μια διάσταση με συναρτήσεις linear Lagrange χρησιμοποιούνται 3 κόμβοι σε κάθε στοιχείο. Λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο εδάφιο, εντελώς ανάλογα θεωρούμε ένα στοιχείο e με συντεταγμένες μεταξύ x_e και x_{e+1} οπότε εν τοιαύτη περιπτώσει οι συναρτήσεις linear Lagrange είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

όπου $\xi = \frac{2x-(x_e+x_{e+1})}{x_{e+1}-x_e}$ αποτελεί τη μετασχηματισμένη μεταβλητή η οποία λαμβάνει τιμές μεταξύ -1 και 1 σε κάθε στοιχείο.



Σχήμα 7 : Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης linear Lagrange σε μια διάσταση.

Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής : $u = \sum_{i=1}^{2} u_i \phi_i$

όπου i οι δύο κόμβοι σε κάθε στοιχείο, u_i είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και ψ_i οι συναρτήσεις βάσης.

Αντίστοιχα, οι γραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση και κατά συνέπεια επιβιώνουν τέσσερις σε κάθε στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Psi_{ij}(x,y) = \cdot\ _{i}(x)\cdot\ _{j}(y), \quad i=1,2, \quad j=1,2$$

1.6 Φασματική Μέθοδος (Spectral Method)

Η φασματική μέθοδος προσεγγίζει την άγνωστη λύση με χρήση των σειρών Fourier ή σειρών πολυωνύμων Chebyshev. Η κύρια διαφορά της συγκεκριμένης μεθόδου με τις προαναφερθείσες είναι ότι οι προσεγγίσεις δεν αφορούν μόνο τους κόμβους αλλά ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο. Οι άγνωστοι που πηγάζουν από την κυρίαρχη εξίσωση προσεγγίζονται με σειρές. Έπειτα, το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων αναπτύσσεται μέσω της προσέγγισης ζυγισμένου υπολοίπου (weighted residual approach) όπως συζητήθηκε παραπάνω ή εναλλακτικά επιβάλλοντας την αριθμητική λύση να συμπίπτει με την αναλυτική σε έναν αριθμό κόμβων (προσέγγιση collocation).

Η εν λόγω μέθοδος εμφανίζει το πλεονέκτημα υψηλής ακρίβειας για σχετικά μικρό αριθμό κόμβων. Από την άλλη μεριά, στα μειονεκτήματα της συγκαταλέγονται το αυξημένο υπολογιστικό κόστος και η δυσκολία ως προς την επιβολή συνοριακών συνθηκών για σύνθετες υπολογιστικές γεωμετρίες. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Canuto et al. (1988) και Hussaini & Zang (1987).

1.7 Δομή της Διατριβής

Η δομή της παρούσας διατριβής συνοψίζεται ως εξής : στην ενότητα 2 παρουσιάζουμε τη μορφοποίηση των προβλημάτων ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε ορθογωνική διατομή αγωγού (όπου η θερμοκρασιακή κλίση είναι παράλληλη με τη βαρύτητα $\vec{\nabla}\Theta // \vec{g}$) και τετραγωνική διατομή κοιλότητας (όπου η θερμοκρασιακή κλίση είναι κάθετη με τη βαρύτητα $\vec{\nabla}\Theta \perp \vec{g}$) καθώς επίσης και τις γραμμικοποιημένες μορφές τους επιτρέποντας τριδιάστατες περιοδικές διαταραχές κατά τη διαμήκη κατεύθυνση. Στην ενότητα 3 παρουσιάζεται η αριθμητική επίλυση των παραπάνω προβλημάτων εφαρμόζοντας τη μέθοδο FEM. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διακριτοποίηση της εξίσωσης διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου και πιο συγκεκριμένα στις μεταβολές που λαμβάνει το ηλεκτρικό δυναμικό καθώς επίσης και στην ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών στα τέσσερα τοιχώματα του αγωγού υιοθετώντας την προσέγγιση λεπτού τοιχώματος. Εν συνεχεία, υλοποιείται παράλληλο υπολογιστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε για την επίλυση των προαναφερθέντων προβλημάτων ευστάθειας το οποίο επιτυγχάνει υψηλή απόδοση (scalability) χρησιμοποιώντας υπολογιστική αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης. Οι δοκιμές (benchmark cases) που έλαβαν χώρα προκειμένου να βεβαιωθούμε για την ορθότητα των αριθμητικών μας αποτελεσμάτων παρουσιάζονται στο εδάφιο 3.5 έτσι ώστε να αναπαράγουμε διαθέσιμα αποτελέσματα βιβλιογραφίας. Εν τέλει, στο εδάφιο 3.6, παρουσιάζουμε την αριθμητική επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου σε ορθογωνική διατομή αγωγού δίνοντας έμφαση στον τρόπο χειρισμού γραμμικών και μη γραμμικών όρων. Επιπρόσθετα, υλοποιούμε τον παραλληλισμό του συγκεκριμένου προβλήματος εφαρμόζοντας ταυτόχρονα domain και Fourier decomposition με προφανή οφέλη σε εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και κόστους χρησιμοποιώντας υπολογιστική αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης.

Στην ενότητα 4 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα προβλήματα ροής υγρού μετάλλου σε ορθογωνικό αγωγό και τετραγωνική κοιλότητα εφαρμόζοντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Στο μεν πρώτο πρόβλημα παραθέτουμε ασυμπτωτική ανάλυση με σκοπό να λάβουμε την κατάλληλη συσχέτιση που αφορά την αστάθεια καθώς επίσης και την τάξη μεγέθους των υπολογιζόμενων κύριων μεταβλητών της ροής. Ακολούθως, παρατίθενται τα ευρήματα της αριθμητικής μελέτης και πιο συγκεκριμένα η συσχέτιση ανάμεσα στην κρίσιμη τιμή του Gr_{Cr} συναρτήσει του αριθμού Ha όπως επίσης και η προκύπτουσα δομή του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος στο κρίσιμο επίπεδο. Δίνεται έμφαση στην επίδραση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των κάθετων (c_H) και οριζόντιων τοιχωμάτων (c_S) προκειμένου να ταυτοποιηθεί η διάταξη της προκύπτουσας ροής. Στο δε δεύτερο πρόβλημα τα αριθμητικά ευρήματα της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας εξηγούν τη φύση της δευτερογενούς χρονομεταβαλλόμενης αστάθειας που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια των πειραμάτων από τους Burr & Muller (2002). Τέλος, έγινε παραμετρική μελέτη μεταβάλλοντας την τετραγωνική διατομή της κοιλότητας από λόγο όψης A=1 σε A=2 και εξετάστηκε η επίδραση της εν λόγω παραμέτρου στη δυναμική του προβλήματος.

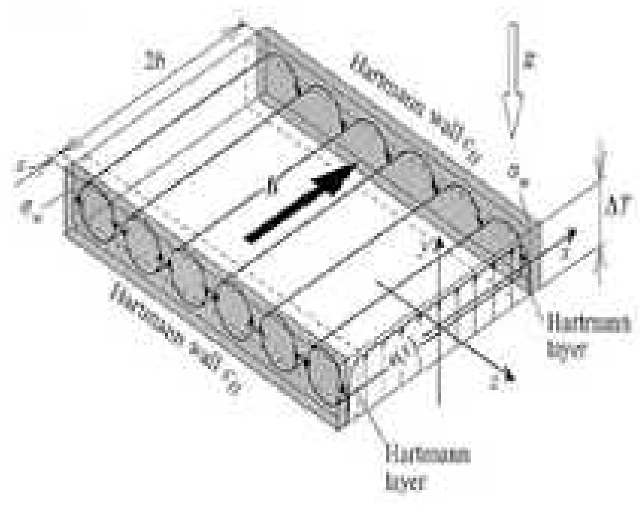
Στην ενότητα 5 υπογραμμίζονται τα χρήσιμα συμπεράσματα της ανάλυσης που προηγήθηκε αναφορικά με την εγκυρότητα της οιονεί διδιάστατης παραδοχής που αφορούσε την ευστάθεια ροών ελεύθερης συναγωγής σε αγωγούς/κοιλότητες καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα τιμών Ha, 100<Ha<2000. Επιπρόσθετα, οι συνέπειες τέτοιου είδους διατάξεων ροών λαμβάνονται υπόψη ως προς την εντατικοποίηση και ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας, στα πλαίσια των διαθέσιμων πειραματικών μελετών, "συνοδευόμενες" από τις εφαρμογές του δυναμικού με στόχο το βέλτιστο σχεδιασμό των μονάδων του μανδύα στους αντιδραστήρες σύντηξης. Τονίζεται η σημασία ανάλυσης ευστάθειας της αλληλεπίδρασης ζεύγους αντιπεριστρεφόμενων δινών σε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής και η σύνδεση των ευρημάτων της ανάλυσης με το πρόβλημα συναγωγής Rayleigh-Benard παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου.

Εν τέλει, γίνονται προτάσεις που αφορούν τη βελτιστοποίηση της παρούσας εργασίας. Η εφαρμογή της μη γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας που παρουσιάζεται στην ενότητα 3 αναμένεται να περιγράψει επακριβώς τις ιδιομορφές στην περιοχή χρονομεταβαλλόμενης συναγωγής και τον μηχανισμό μετάβασης σε τύρβη εξετάζοντας αν και κατά πόσο έχει ισχύ το μοντέλο της οιονεί διδιάστατης ροής που θεωρήθηκε από τους Burr & Muller (2002). Για τη βέλτιστη διακριτοποίηση του πλέγματος στη διατομή του αγωγού προτείνεται η χρήση προσαρμοζόμενης (adaptive) FEM υπολογίζοντας τοπικά το σφάλμα σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, (Ainsworth & Oden 1992, 1993, Demkowicz 2007).

ΙΙ. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Μορφοποίηση προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου συναγωγής Rayleigh - Benard παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Επιθυμούμε να μελετήσουμε την τριδιάστατη ευστάθεια στρώματος υγρού μετάλλου πάχους h που βρίσκεται σε ηρεμία σε αγωγό ορθογωνικής διατομής, σχήμα 8a. Το στρώμα υγρού μετάλλου υπόκειται σε ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο το οποίο είναι παράλληλο με την οριζόντια διεύθυνση της διατομής. Επιβάλλεται αρνητική θερμοκρασιακή κλίση, 2ΔT, ανάμεσα στα δύο οριζόντια τοιχώματα που διατηρούνται σε διαφορετικές αλλά σταθερές θερμοκρασίες : $\Delta T=(T_b-T_t)/2$. Η ανάλυση ευστάθειας αναμένεται να παρέχει κύματα που θα εμπλέκονται στη διάταξη στάσιμου κύματος, (βλ. σχήμα 8a), όπως έχει συζητηθεί από τους Burr & Muller (2002).



Σχήμα 8a : Σχηματικό διάγραμμα της ΜΥΔ ελεύθερης συναγωγής ροής στρώματος υγρού μετάλλου σε ορθογωνικό αγωγό.

Στο πλαίσιο αυτό, κυριαρχούν συνθήκες ροής σε ηρεμία στη βασική μορφή της ροής ενώ δημιουργείται γραμμικό θερμοκρασιακό προφίλ ανάμεσα στα δύο οριζόντια τοιχώματα ως απόρροια της θερμικής αγωγής :

$$\vec{u}_0 = 0, \qquad T_0 = (T_t - T_b)y'/h + T_b = -2\Delta T y'/h + T_b \tag{2.1α,β}$$

όπου y΄ μετρά την κατακόρυφη απόσταση από το κάτω οριζόντιο τοίχωμα. Υιοθετούμε την προσέγγιση Boussinesq για τις μεταβολές της πυκνότητας,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta\left(T - T_{Av}\right)\right], \quad T_{Av} = \left(T_b + T_t\right)/2, \tag{2.2}$$

η οποία ισχύει οποτεδήποτε οι θερμοκρασιακές διαφορές στο ρευστό ικανοποιούν τη συνθήκη $\beta\Delta T<<1$, όπου β ο συντελεστής θερμικής διαστολής του χρησιμοποιούμενου ρευστού. Η κατανομή της πίεσης στη στατική βασική μορφή της ροής περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\wp'_0 = p'_{St} + p'_0 = -\rho_0 g y' + p'_0 \text{ όπου } p'_0 = \left(\rho_0 g h\right)\beta\Delta T\left[\left(\frac{y'}{h}\right) - \left(\frac{y'}{h}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

Απουσία μαγνητικού πεδίου η εν λόγω μορφή της ροής υπόκειται στην περίπτωση αστάθειας Rayleigh - Benard, κατά την οποία έχουμε επαρκή υπερθέρμανση της κάτω πλάκας γεγονός που εκφράζεται μέσω του αριθμού Gr που μετρά τη σχετική ένταση της άνωσης και των ιξωδών δυνάμεων, $Gr = \frac{g \ \ \Delta T h^3}{\neg^2}$ όπου ν το κινηματικό ιξώδες του χρησιμοποιούμενου ρευστού. Συνεπώς, υπάρχει μία κρίσιμη τιμή του Gr, $Gr_{Cr} \approx 865$, πάνω από την οποία η στατική μορφή ροής γίνεται ασταθής και αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση των γνωστών εστιών ανακυκλοφορίας που αντιστοιχούν στην προαναφερθείσα αστάθεια. Για λεπτό στρώμα ρευστού η διάταξη των κελυφών ανακυκλοφορίας ανάμεσα στην κάτω και άνω πλάκα είναι ισοτροπική ως προς το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζοντας εξαγωνικές δομές ανακυκλοφορίας (Drazin & Reid 1981).

Είναι ενδιαφέρουσα η μελέτη της επίδρασης των δυνάμεων Lorentz στην αστάθεια που εμφανίζει το θερμαινόμενο στρώμα ενός υγρού μετάλλου ή εναλλακτικά ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού παρουσία μαγνητικού πεδίου αυξανόμενης έντασης. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης B που είναι παράλληλο με την κατεύθυνση, x, της διατομής του αγωγού, $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Οι αδιαστατοποιήσεις του μήκους στρώματος και οι φυσικές σταθερές του εν χρήσει ρευστού λαμβάνουν τέτοιες τιμές έτσι ώστε να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες που ελήφθησαν από τους Burr & Muller (2002) κατά τη διάρκεια της πειραματικής τους μελέτης. Τα τοιχώματα Hartmann αντιστοιχούν σε πλάκες ανοξείδωτου χάλυβα έχοντας ηλεκτρική αγωγιμότητα σ≈1.37x$10^6\Omega^{-1}m^{-1}$, χάλκινες πλάκες σχηματίζουν τα πλευρικά τοιχώματα με αντίστοιχη ηλεκτρική αγωγιμότητα σ≈5.7x$10^7\Omega^{-1}m^{-1}$ και ευτηκτικό κράμα καλίου νατρίου $Na^{22}K^{78}$ του οποίου η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι σ≈2. 47x$10^{-6}\Omega^{-1}m^{-1}$ συνιστούν το χώρο ανάμεσα στα οριζόντια και κατακόρυφα τοιχώματα του αγωγού. Συνεπώς, ο μαγνητικός αριθμός Reynolds που εκφράζεται από την σχέση, $Re_m\ Z\ \sigma\mu_0\mathbf{uh}$ όπου η ποσότητα $Ε\sigma\mu_0 F^{J1}$ αποτελεί τη μαγνητική διαχυτότητα του προαναφερθέντος κράματος και εν προκειμένω έχει μικρή τιμή, θεωρείται αμελητέος και κατ' επέκταση κινούμαστε στη περιοχή μικρών Re_m (Low Re_m model). Στην περίπτωση της ελεύθερης συναγωγής παράγεται ηλεκτρικό ρεύμα του οποίου η ένταση προκύπτει με χρήση του νόμου Ohm, $\vec{j}' = \sigma\left[-\vec{\nabla}\phi' + \vec{u}'\times\vec{B}\right]$ όπου φ αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό δυναμικό και $\vec{u}'$ αποτελεί το προκύπτον πεδίο ταχύτητας, οπότε η δύναμη Lorentz που ασκείται ανά μονάδα όγκου του υγρού μετάλλου είναι : $\vec{f} = \vec{j}'\times\vec{B}$. Εν τέλει, απουσία οιονδήποτε άλλων ηλεκτρικών πηγών ικανοποιείται η συνέχεια του ηλεκτρικού δυναμικού :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}' = 0 \rightarrow \nabla^2\phi' = \vec{\omega}'\cdot\vec{B}, \qquad \vec{\omega}' \equiv \vec{\nabla}\times\vec{u}' \tag{2.4}$$

Η διατήρηση του ηλεκτρικού ρεύματος συνδυάζεται με την εξίσωση συνέχειας, διατήρηση ορμής και ενέργειας έτσι ώστε να παρέχει την περιγραφή της ελεύθερης συναγωγής ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε ιξώδεις, ηλεκτρομαγνητικές και ανωστικές δυνάμεις. Εν συνεχεία, εισάγουμε τις χαρακτηριστικές κλίμακες για μήκος, χρόνο, ταχύτητα και πίεση βασιζόμενοι στο πάχος στρώματος και στις ανωστικές δυνάμεις :

$$\left(x, y, z\right) = \left(\frac{x'}{h}, \frac{y'}{h}, \frac{z'}{h}\right), \quad t = \frac{t'}{\sqrt{h/(g\beta\Delta T)}}, \quad p = \frac{p'}{\rho g\beta\Delta Th}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{u}'}{\sqrt{g\beta\Delta Th}} \tag{2.5α}$$

ενώ αδιαστατοποιούμε θερμοκρασία και ηλεκτρικό δυναμικό μέσω της επιβαλλόμενης θερμοκρασιακής κλίσης και της έντασης του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα :

$$\Theta = \frac{T - T_{Av}}{T_b - T_{Av}}, \quad \phi = \frac{\phi'}{Bh\sqrt{g\beta\Delta Th}} \tag{2.5β}$$

Η τριδιάστατη μορφοποίηση του προβλήματος σε αδιάστατη μορφή είναι η παρακάτω :

<u>Συνέχεια</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2.6)$$

<u>Διατήρηση Ορμής ως προς x, y, z άξονες</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\Theta-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(v+\frac{d\text{¤}}{dz}\right) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(w-\frac{\partial\text{¤}}{\partial y}\right) \qquad (2.9)$$

<u>Ενεργειακό Ισοζύγιο</u>

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}+u\frac{\partial\Theta}{\partial x}+v\frac{\partial\Theta}{\partial y}+w\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{1}{Gr^{1/2}\,\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right) \qquad (2.10)$$

<u>Συνέχεια ηλεκτρικού ρεύματος</u>

$$\frac{\partial^2\text{¤}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\text{¤}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\text{¤}}{\partial z^2}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (2.11)$$

Οι εξισώσεις (2.7-2.9) περιγράφουν τη διατήρηση της ορμής εντός του αγωγού ως προς τους άξονες x,y,z αντίστοιχα, και περιέχουν τον όρο της άνωσης στην κατακόρυφη διεύθυνση και τις δυνάμεις Lorentz στο κάθετο επίπεδο. Η εξίσωση (2.10) αποτελεί την εξίσωση διατήρησης ενέργειας, ενώ οι εξισώσεις (2.6, 2.11) περιγράφουν τη διατήρηση μάζας και ηλεκτρικού φορτίου.

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.6-2.11) είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που θα εμπεριέχουν τις άγνωστες συναρτήσεις. Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται μονωμένα τότε οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet. Στην περίπτωση όπου τα τοιχώματα είναι ηλεκτρικά αγώγιμα, (συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann), τότε το ρεύμα μπορεί να διαπεράσει την διεπιφάνεια μεταξύ του ρευστού και του τοιχώματος.

Επιβάλλονται συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης στα οριζόντια και κατακόρυφα τοιχώματα του αγωγού, η θερμοκρασία λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές στα οριζόντια τοιχώματα ενώ στα κάθετα τοιχώματα επιβάλλουμε θερμική μόνωση :

$$\vec{u}\left(x=0\right)=\vec{u}\left(x=A\right)=\vec{u}\left(y=0\right)=\vec{u}\left(y=1\right)=0, \qquad (2.12α)$$

$$\Theta\left(y=0\right)=1, \quad \Theta\left(y=1\right)=-1, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x}\left(x=0\right)=\frac{\partial\Theta}{\partial x}\left(x=A\right)=0 \qquad (2.12β)$$

Όσον αφορά την αγωγιμότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στα τοιχώματα του αγωγού κάνουμε χρήση της προσέγγισης λεπτού τοιχώματος (Walker 1981),

$$-\vec{j}\cdot\vec{n}=c_H\nabla_s^2¤ \rightarrow \frac{\partial ¤}{\partial x}(x=0,y,z)=-c_H\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 ¤}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial ¤}{\partial x}(x=A,y,z)=c_H\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 ¤}{\partial z^2}\right) \qquad (2.13α,β)$$

$$-\vec{j}\cdot\vec{n}=c_S\nabla_s^2¤ \rightarrow \frac{\partial ¤}{\partial y}(x,y=0,z)=-c_S\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 ¤}{\partial z^2}\right) \quad \frac{\partial ¤}{\partial y}(x,y=1,z)=c_S\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 ¤}{\partial z^2}\right) \qquad (2.13γ,δ)$$

όπου n υποδηλώνει την κάθετη διεύθυνση ως προς τα τοιχώματα με φορά προς τα έξω και ∇_s^2 αποτελεί το διδιάστατο τελεστή Laplace που ορίζεται σε κάθε ένα από τα τοιχώματα. Οι αδιάστατες παράμετροι c_S και c_H αποτελούν μέτρο της ευχέρειας στην μετάδοση του ηλεκτρικού ρεύματος στα τοιχώματα σε σχέση με το υγρό μέταλλο που σχηματίζει στρώμα. Οι δείκτες S και H υποδηλώνουν τοιχώματα πλευρικά και Hartmann και αντιστοιχούν στα τοιχώματα που είναι παράλληλα και κάθετα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, οι αδιάστατες ηλεκτρικές αγωγιμότητες περιγράφονται από τις σχέσεις : $c_H=\frac{c_{St}t_{St}}{ch}, \quad c_S=\frac{c_{Co}t_{Co}}{ch}$

όπου t_{St}, t_{Co} αποτελούν τα πάχη του ανοξείδωτου χάλυβα και του χαλκού που υπάρχουν στα τοιχώματα του αγωγού, αντίστοιχα, ενώ οι σταθερές c, c_{St}, c_{Co} αντιστοιχούν στην ηλεκτρική αγωγιμότητα του υγρού μετάλλου, ανοξείδωτου χάλυβα και χαλκού, αντίστοιχα.

Είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε τον τρόπο εξαγωγής της εξίσωσης 2.13. Το ηλεκτρικό φορτίο επάγεται από την κίνηση του υγρού μετάλλου στον αγωγό υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Στα τοιχώματα δεν υπάρχει κίνηση ρευστού και ως εκ τούτου η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace.

Κατόπιν ολοκλήρωσης κατά μήκος της τρίτης διάστασης των τοιχωμάτων, το πάχος των οποίων είναι μικρό σε σχέση με το μήκος και το ύψος, παίρνουμε την εξίσωση κατανομής του δυναμικού σε απλοποιημένη μορφή όπου περιγράφεται η κατανομή της μέσης τιμής του δυναμικού αναφορικά με το πάχος του τοιχώματος, η οποία και δεν διαφέρει από την τιμή επάνω στο σημείο επαφής του υγρού μετάλλου με το τοίχωμα λόγω του μικρού πάχους του τελευταίου. Επιπλέον, λαμβάνουμε υπόψη το γεγονός ότι δεν υπάρχει μεταφορά ρεύματος προς το ρευστό που περιβάλλει εσωτερικά τον αγωγό.

$$\nabla^2\varphi_{St} = 0 \Rightarrow \int_{-t_{St}}^{0}\left(\frac{\partial^2\varphi_{St}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{St}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_{St}}{\partial z^2}\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{St}}{\partial x}\right|_{x=-t_{St}}^{0} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-t_{St}}^{0}\varphi_{St}\,dx + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_{-t_{St}}^{0}\varphi_{St}\,dx = 0 \Rightarrow \qquad \left(\left.\frac{\partial\varphi_{St}}{\partial x}\right|_{x=-t_{St}} = 0\right)$$

$$t_{St}\left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}_{St}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}_{St}}{\partial z^2}\right) = -\left.\frac{\partial\varphi_{St}}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{c}{c_{St}}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x} \Rightarrow \quad (\text{αδιαστατοποιώντας})$$

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}'_{St}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}'_{St}}{\partial z'^2} = -\frac{ch}{t_{St}c_{St}}\left.\frac{\partial\varphi'_l}{\partial x'}\right|_{x=0} \Rightarrow \quad \left(\varphi'_{St}(x'=0,y,z) \approx \bar{\varphi}'_{St}(y,z) = \varphi'_l(x'=0,y,z)\right)$$

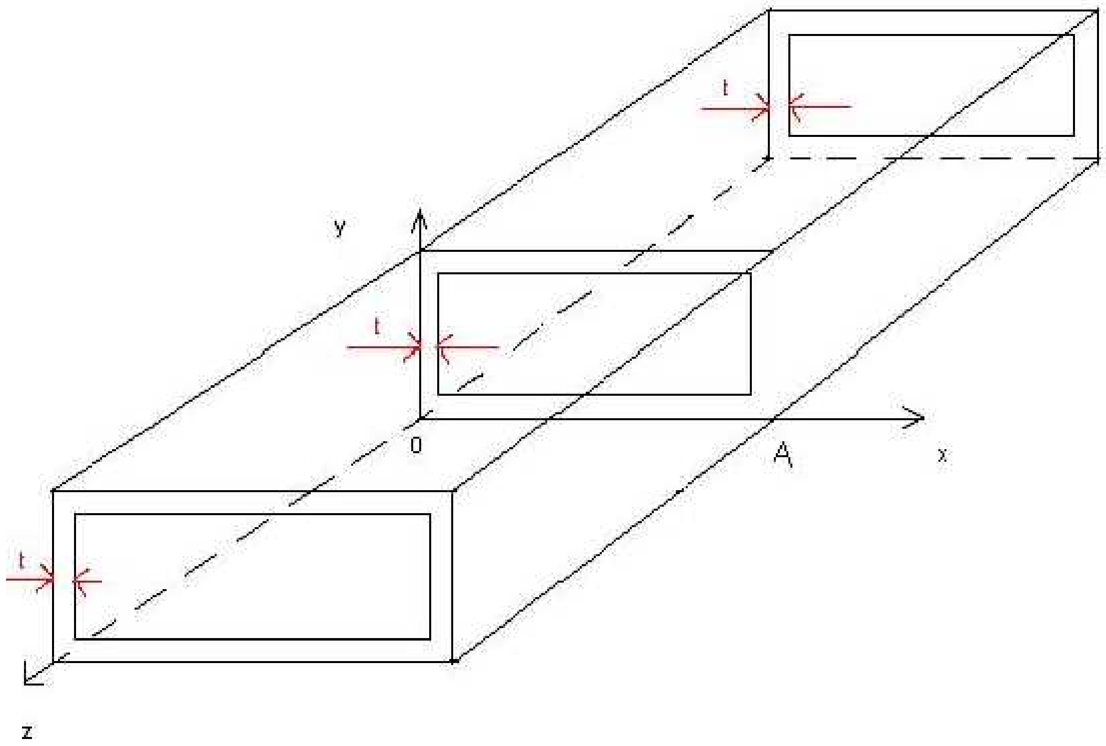
$$\left.\frac{\partial\varphi'_l}{\partial x'}\right|_{x=0} = -c_H\left.\left(\frac{\partial^2\varphi'_l}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi'_l}{\partial z'^2}\right)\right|_{x=0} \qquad (\alpha)$$

όπου φ_l, φ_{St} είναι το ηλεκτρικό δυναμικό του υγρού μετάλλου στην περιοχή της βασικής ροής και του τοιχώματος που αποτελείται από ανοξείδωτο χάλυβα, (βλ. σχήμα 8b). Οι τόνοι συμβολίζουν αδιάστατες μεταβλητές και οι παύλες πάνω από τις μεταβλητές εκφράζουν τις μέσες τιμές.

Στη διεπιφάνεια τοιχώματος - υγρού μετάλλου ισχύει $\varphi_l = \varphi_{St} = \varphi$, ως εκ τούτου η σχέση (α) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x=0,y,z) = -c_H\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς είναι δυνατό να αναπαραχθούν οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες που αφορούν το ηλεκτρικό δυναμικό (βλ. σχέση 2.13), όπου ανάλογα με το αν εφαρμόζεται συνοριακή συνθήκη στις οριζόντιες ή κατακόρυφες πλευρές του αγωγού θα εμφανίζεται στην εξίσωση η ηλεκτρική αγωγιμότητα c_S ή c_H, αντίστοιχα.



Σχήμα 8b : Τριδιάστατη διαμόρφωση του αγωγού για πολύ μικρό πάχος των οριζόντιων, xz, και κάθετων, yz, τοιχωμάτων.

Επιπρόσθετα, υποθέτουμε περιοδικότητα κατά μήκος της διαμήκους κατεύθυνσης του στρώματος :

$$\vec{u}(z)=\vec{u}(z+\ell),\quad \Theta(z)=\Theta(z+\ell),\quad p(z)=p(z+\ell),\quad \phi(z)=\phi(z+\ell) \qquad (2.14)$$

όπου ℓ αποτελεί την περίοδο ως προς τη z-κατεύθυνση και η οποία θα προκύψει με την εφαρμογή της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας που θα επακολουθήσει. Κατά συνέπεια, η γεωμετρία που έχουμε υπόψη δεν αντιστοιχεί σε κοιλότητα, υπό την αυστηρή έννοια του όρου, ούτε σε αγωγό. Στην πράξη πρόκειται για αγωγό όπου υγρό μέταλλο μεταφέρεται αξονικά πολύ αργά μέσω βεβιασμένης συναγωγής ενώ ταυτόχρονα ανακυκλοφορεί έντονα λόγω ελεύθερης συναγωγής. Στην παρούσα εργασία αμελούμε την βεβιασμένη συναγωγή και επικεντρώνουμε στη μελέτη της ελεύθερης συναγωγής. Έτσι, χάριν συντομίας, θα αναφερόμαστε στο πεδίο ροής ως στρώμα ή αγωγό με επιβαλλόμενη περιοδικότητα στη z κατεύθυνση.

Όταν ζητείται λύση συμμετρική ως προς τον y άξονα τότε το πεδίο τιμών που λαμβάνει ο οριζόντιος άξονας είναι από 0 έως A/2, οπότε σε αυτή την περίπτωση οι συνθήκες συμμετρίας επιβάλλονται στην κατακόρυφη πλευρά x=A/2 :

$$x = A/2: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad u = 0 \tag{2.15}$$

Οι ακόλουθες αδιάστατες ποσότητες καθορίζουν τη δυναμική της ροής που έχουμε υπόψη μας :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T h^3}{\nu^2}, \quad Ha = \sqrt{\frac{h^2 \sigma B_0^2}{\rho\nu}}, \quad \Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad A = \frac{L}{h}, \quad \sigma_H = \frac{\sigma_{St} t_{St}}{\sigma h}, \quad \sigma_S = \frac{\sigma_{Co} t_{Co}}{\sigma h} \tag{2.16}$$

όπου $\alpha = k/(\rho c_p)$ είναι η θερμοδιαχυτότητα του υγρού μετάλλου και Α ο λόγος όψης της διατομής του αγωγού. Εκτός από τη θεμελιώδη σημασία στη μελέτη του ρόλου της έντασης του μαγνητικού πεδίου και της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων στον καθορισμό της ευστάθειας του στρώματος, αποτελεί στόχο η κατά το δυνατό πλησιέστερη προσομοίωση στη μορφή ροής που μελετήθηκε πειραματικά από τους Burr & Muller (2002).

2.2 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας προβλήματος ροής στρώματος υγρού μετάλλου συναγωγής Rayleigh - Benard παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Επιθυμούμε να εξετάσουμε την ευστάθεια της στατικής μορφής της ροής που χαρακτηρίζεται από καθαρή θερμική αγωγιμότητα όπως περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.1-2.3) που σε αδιάστατη μορφή περιγράφονται ως ακολούθως :

$$\vec{u}_0 = 0, \quad \Theta_0 = -2y + 1, \quad p_0 = y - y^2, \quad \phi = 0 \tag{2.17}$$

Αναζητούμε τριδιάστατη μορφή της ροής η οποία ικανοποιεί τη μορφοποίηση που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.6-2.14) και συνιστά μικρή διαταραχή της στατικής ροής στην εξίσωση (2.17). Είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ευστάθεια της βασικής λύσης και την συνακόλουθη ανάπτυξη πλευρικών και Hartmann στοιβάδων. Συνεπώς, θεωρούμε ότι το πρόβλημα επιδέχεται λύση της μορφής :

$$\begin{Bmatrix} \vec{u} \\ p \\ \Theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{u}_0 \\ p_0 \\ \Theta_0 \\ \phi_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{u}_1(x,y) \\ p_1(x,y) \\ \Theta_1(x,y) \\ \phi_1(x,y) \end{Bmatrix} e^{\omega t} e^{ikz}, \quad \vec{u} \equiv (u, v, w) \tag{2.18}$$

όπου $\omega=\omega_r+i\omega_i$ αποτελεί το μιγαδικό ρυθμό ανάπτυξης και έχει ουσιαστικά τον κυρίαρχο ρόλο ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς αυξάνεται ο χρόνος t ενώ $k=2\pi/\ell$ αποτελεί τον κυματαριθμό της διαταραχής. Οι δείκτες 0, 1 αντιστοιχούν σε κατάσταση προ και μετά την επιβολή της διαταραχής, αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό επιθυμούμε να τονίσουμε ότι η λύση, που προκύπτει από την μόνιμη κατάσταση του προβλήματος, είναι ασυμπτωτικά ασταθής αν υπάρχει ιδιοτιμή τέτοια έτσι ώστε το πραγματικό της μέρος ω_r να είναι θετικό. Αν δεν υπάρχει τέτοια ιδιοτιμή τότε θεωρούμε ότι η λύση μόνιμης κατάστασης είναι ευσταθής στο εύρος των παραμέτρων που έχουμε μελετήσει.

Κατά την περίπτωση όπου το πραγματικό μέρος ω_r μιας ιδιοτιμής διέρχεται από το μηδέν, έχουμε ουδέτερη ευστάθεια και προκύπτει μια λύση διακλάδωσης. Όσον αφορά το φανταστικό μέρος ω_i μιας ιδιοτιμής, όταν αυτό είναι διάφορο του μηδενός, τότε προκύπτει διακλάδωση Hopf, η οποία οδηγεί σε περιοδική λύση.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τριδιάστατες διαταραχές στις εξισώσεις (2.6-2.11) που ορίζουν το πρόβλημα και αγνοώντας τους όρους τάξης $O(\varepsilon^2)$ ή μικρότερους όρους, λαμβάνουμε το παρακάτω πρόβλημα ευστάθειας.

$$\mu u_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_1 k^2\right) \tag{2.19}$$

$$\mu v_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - v_1 k^2\right) + \Theta_1 - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(v_1 + ik¤_1\right) \tag{2.20}$$

$$\mu w_1 = -ikP_1 + Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - w_1 k^2\right) - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(w_1 - \frac{\partial ¤_1}{\partial y}\right) \tag{2.21}$$

$$\mu\Theta_1 + v_1\frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = \mu\Theta_1 - 2v_1 = \frac{Gr^{-1/2}}{\Pr}\left(\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta_1}{\partial y^2} - \Theta_1 k^2\right) \tag{2.22}$$

$$\left(\frac{\partial^2 ¤_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ¤_1}{\partial y^2} - ¤_1 k^2\right) = \frac{\partial w_1}{\partial y} - ikv_1 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + ikw_1 = 0 \tag{2.24}$$

Η παραπάνω μορφοποίηση συνιστά πρόβλημα ιδιοτιμών του μιγαδικού ρυθμού ανάπτυξης ω συναρτήσει του κυματαριθμού k και των σχετικών αδιάστατων παραμέτρων που παρουσιάζονται στη σχέση (2.16), ενώ οι μεταβλητές $\vec{u}_1, \Theta_1, p_1, \phi_1$, συνιστούν το ιδιοδιάνυσμα που εμπεριέχει τις απαραίτητες πληροφορίες που αφορούν τη φύση της προκύπτουσας μορφής της ροής.

2.3 Μορφοποίηση ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου μέσω ελεύθερης συναγωγής παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Θεωρούμε την τριδιάστατη γραμμική ευστάθεια των εστιών ανακυκλοφορίας που παράγονται από συνδυασμό της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας, της έντασης του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασιακής κλίσης επιτρέποντας διαταραχές στη διαμήκη διεύθυνση της κοιλότητας που χαρακτηρίζεται από τετραγωνική διατομή, (βλ. σχήμα 5a). Έτσι, αναλόγως και της έντασης της εσωτερικής πηγής θερμότητας δημιουργείται μία ή και δύο δίνες. Οι τελευταίες δημιουργούνται όταν το μέγιστο της θερμοκρασίας μετακινηθεί προς το εσωτερικό του στρώματος και περιστρέφονται κατ’ αντιρροή. Η εν λόγω διαμόρφωση ροής χρησιμοποιείται σε μία πρώτη προσπάθεια μελέτης της δευτερογενούς αλληλεπίδρασης των δινών που σχηματίζονται σαν αποτέλεσμα της θερμικής αστάθειας στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία μαγνητικού πεδίου. Ως μία πρώτη προσέγγιση, αμελείται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων της κοιλότητας. Η προσέγγιση Boussinesq ισχύει όσον αφορά τις μεταβολές της πυκνότητας σε απόκριση των θερμοκρασιακών μεταβολών του εν χρήσει ρευστού το οποίο είναι υγρό μέταλλο. Επίσης, επιβάλλεται η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου από τη στιγμή που δεν υπάρχει παραγωγή ή κατανάλωση ηλεκτρικού φορτίου στον πυρήνα της κοιλότητας, ενώ ο μαγνητικός αριθμός Reynolds θεωρείται μικρός με σκοπό την υιοθέτηση της προσέγγισης εξισώσεων ΜΥΔ απουσία μαγνητικής επαγωγής (Low Re_m model). Στην παρούσα περίπτωση οι εξισώσεις που περιγράφουν την προσομοίωσή μας δίνονται από τις σχέσεις (2.6-2.11) με τη διαφορά ότι στη σχέση (2.10) θα πρέπει να προστεθεί ο όρος $S/Gr^{1/2}$, όπου S ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας. Επίσης, η αδιαστατοποίηση της θερμοκρασίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση $\Theta=(T-T_{Av})/(T_h-T_{Av})$, όπου $T_{Av}=(T_h+T_c)/2$.

Επιβάλλουμε θερμοκρασιακή διαφορά στα κατακόρυφα τοιχώματα της κοιλότητας T_h-T_c και θερμική μόνωση στα οριζόντια τοιχώματα. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε τις παρακάτω συνθήκες που αφορούν τη συνάρτηση της θερμοκρασίας, (βλ. σχέση 2.25).

Σύμφωνα με την συνήθη υδροδυναμική συνθήκη, η ταχύτητα του ιξώδους ρευστού σε ένα στερεό τοίχωμα θα πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα $\mathbf{v}^{(w)}$, (Landau & Lifshitz (1987)) : $v\big|_{\Gamma} = v^{(w)}\big|_{\Gamma}$, όπου Γ δηλώνει το σύνορο ανάμεσα στο ρευστό και στο τοίχωμα και ο δείκτης w συμβολίζει το τοίχωμα.

Κατά συνέπεια, επιβάλλονται συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης όσον αφορά το πεδίο ταχυτήτων ως προς τα κάθετα και οριζόντια τοιχώματα της κοιλότητας, ενώ όλα τα τοιχώματα θεωρούνται ότι παρουσιάζουν ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα για λόγους απλούστευσης. Εν τέλει, υποθέτουμε περιοδικότητα ως προς τη διαμήκη κατεύθυνση της κοιλότητας. Οι συνοριακές συνθήκες του υπό μελέτη προβλήματος είναι οι ακόλουθες :

$$\Theta\left(x=0\right)=-1 \quad \Theta\left(x=1\right)=1, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial y}(y=0)=\frac{\partial\Theta}{\partial y}(y=1)=0, \quad \Theta\left(z\right)=\Theta\left(z+\ell\right) \qquad (2.25)$$

$$\vec{u}(x=0)=\vec{u}(x=1)=\vec{u}(y=0)=\vec{u}(y=1)=0, \quad \vec{u}\left(z\right)=\vec{u}\left(z+\ell\right) \qquad (2.26)$$

$$\frac{\partial ¤}{\partial x}(x=0)=\frac{\partial ¤}{\partial x}(x=1)=0, \quad \frac{\partial ¤}{\partial y}(y=0)=\frac{\partial ¤}{\partial y}(y=1)=0, \quad ¤\left(z\right)=¤\left(z+\ell\right) \qquad (2.27α)$$

$$¤\left(x=0{,}5, y=0.5, z\right)=0, \quad \text{για μοναδικότητα λύσης} \qquad (2.27β)$$

Οι παρακάτω αδιάστατοι παράμετροι καθορίζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος

$$Gr = \frac{g \ \Delta T L^3}{¬^2}, \quad Ha=\sqrt{\frac{L^2 ± B_0^2}{°¬}}, \quad S=\frac{qL^2}{\Delta T ° c_p ¬}, \quad \Pr=\frac{¬}{\sim}, \quad A=\frac{H}{L}=1 \qquad (2.28)$$

όπου οι αριθμοί Gr και Ha ελέγχουν τη σχετική βαρύτητα μεταξύ των ανωστικών και των ιξωδών δυνάμεων και μεταξύ της δύναμης Lorentz και των ιξωδών δυνάμεων, αντίστοιχα. Το γινόμενο SPr καθορίζει τη σχετική ένταση της θερμοκρασιακής κλίσης ως προς τα δύο κάθετα τοιχώματα της κοιλότητας και της βαθμίδας θερμοκρασίας εξαιτίας του ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας. Ο Pr δηλώνει τη σχετική διαχυτότητα της ορμής και της θερμικής αγωγιμότητας, ενώ ο λόγος όψης Α τίθεται ίσος με τη μονάδα διότι μελετούμε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής. Το γινόμενο GrSPr=Gr_{Eff} αποτελεί ένα τροποποιημένο αριθμό Gr που καθορίζεται από την αύξηση της θερμοκρασίας στην κοιλότητα ως απόρροια της εσωτερικής θέρμανσης. Όσον αφορά τις περιπτώσεις έντονης παραγωγής θερμότητας ο εν λόγω τροποποιημένος αριθμός αποτελεί μία πιο σχετική ποσότητα με τη δυναμική της κοιλότητας εν συγκρίσει με τον αρχικό αριθμό Gr. Το γεγονός αυτό προσδίδει ασυμμετρία στη βασική λύση επιβάλλοντας θερμοκρασιακή κλίση κατά μήκος των δύο κάθετων τοιχωμάτων της κοιλότητας. Εν τέλει, η παραμετρική μελέτη που παρουσιάζεται έχει ως στόχο να παρέχει βασική κατανόηση των συνθηκών ροής που επικρατούν σε αγωγούς ευρισκόμενους σε μονάδες του μανδύα που συναντώνται σε αντιδραστήρα σύντηξης όπου επικρατούν πολύ υψηλές τιμές ρυθμών παραγωγής θερμότητας. Ένα κράμα λιθίου (Pb-17Li) λαμβάνεται ως το ρευστό λειτουργίας το οποίο χαρακτηρίζεται από αριθμό Pr=0.0321. Λαμβάνοντας υπόψη τις θερμοφυσικές ιδιότητες του εν λόγω υγρού μετάλλου καθώς και τις αναμενόμενες διαστάσεις των κοιλοτήτων, συνάγεται ότι η τιμή $S=10^5$ είναι αντιπροσωπευτική για τον αδιάστατο ρυθμό παραγωγής θερμότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μαγνητικό πεδίο, το οποίο στην συγκεκριμένη μορφή ροής συμβολίζει την πολοειδή συνιστώσα, θεωρείται σχετικά ασθενές και κατ' επέκταση ο αριθμός Ha λαμβάνει μικρές τιμές. Η τοροειδής συνιστώσα είναι υπεύθυνη για την δημιουργία των πρωτογενών δινών οι οποίες είναι ευθυγραμμισμένες με αυτήν και ως εκ τούτου δεν επηρεάζονται σημαντικά από αυτήν.

2.4 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου μέσω ελεύθερης συναγωγής παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Η βασική λύση στο εν λόγω πρόβλημα προκύπτει από τη λύση μόνιμης κατάστασης για διδιάστατη ροή και προκύπτει αριθμητικά από τη λύση που λαμβάνουμε για Ha=0 μέσω απλής συνέχισης στον χώρο των παραμέτρων ο οποίος ορίζεται από τους αριθμούς Gr, Ha, Pr. Η μορφή και η ευστάθεια του εν λόγω κλάδου, ο οποίος αφορά διδιάστατη ροή λόγω ελεύθερης συναγωγής σε μόνιμη κατάσταση, σε διδιάστατες διαταραχές έχει ήδη εξεταστεί (Pelekasis 2006). Αυτό πραγματοποιήθηκε αγνοώντας μεταβολές στην αξονική διεύθυνση z στη μοντελοποίηση του προβλήματος. Έτσι βρέθηκε ότι δίνει διακλάδωση τύπου Hopf σε περιοδική λύση όταν ο αριθμός Gr υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο αυξάνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός Ha.

Επιθυμούμε να διερευνήσουμε το ενδεχόμενο ο ίδιος βασικός κλάδος να δίνει τριδιάστατη αστάθεια για τιμές του Gr μικρότερες αυτών που οδηγούν σε διδιάστατη χρονικά περιοδική λύση. Συνεπώς είναι επιθυμητή η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της τριδιάστατης κοιλότητας τετραγωνικής διατομής παρουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας.

Άρα σε επόμενο βήμα η τριδιάστατη ευστάθεια της βασικής ροής, (βλέπε και σχήμα 5b όπου απεικονίζεται με τριδιάστατη προοπτική η ροϊκή συνάρτηση της διδιάστατης μορφής ροής), εξετάζεται διαταράσσοντας τη βασική λύση της ροής $\left\{\vec{u}_0, \Theta_0, P_0, \text{¤}_0\right\}\left(x,y\right)$ με μικρή διαταραχή $\pounds\left\{\hat{\vec{u}}_1, \hat{\Theta}_1, \hat{P}_1, \hat{\text{¤}}_1\right\}\left(x,y,z;t\right)$; $\vec{u}=\left(u,v,w\right)$ ενώ στην περίπτωση του βασικού προβλήματος ισχύει ότι w_0=$φ_0$=0. Από τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε να ανακτήσουμε ταυτόχρονα τις κλίμακες μήκους και χρόνου ή εναλλακτικά το ρυθμό ανάπτυξης και τη συχνότητα των αναπτυσσόμενων ιδιομορφών, αναζητούμε διαταραχές της μορφής $\left\{\vec{u}_1\left(x,y\right), \Theta_1\left(x,y\right), P_1\left(x,y\right), \text{¤}_1\left(x,y\right)\right\}e^{\pm t+ikz}$. Αντικαθιστώντας την παραπάνω μορφή στις κυρίαρχες εξισώσεις λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις γραμμικής ευστάθειας :

$$\pm u_1+\frac{\partial(u_0u_1)}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_1}{\partial y}+v_1\frac{\partial u_0}{\partial y}=-\frac{\partial P_1}{\partial x}+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}-u_1k^2\right) \quad (2.29)$$

$$\pm v_1+\frac{\partial(v_0v_1)}{\partial y}+u_0\frac{\partial v_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial v_0}{\partial x}=-\frac{\partial P_1}{\partial y}+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_1}{\partial y^2}-v_1k^2\right)+\Theta_1-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(v_1+ik\text{¤}_1\right) \quad (2.30)$$

$$\pm w_1+u_0\frac{\partial w_1}{\partial x}+v_0\frac{\partial w_1}{\partial y}=-ikP_1+Gr^{-1/2}\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}-w_1k^2\right)-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(w_1-\frac{\partial\text{¤}_1}{\partial y}\right) \quad (2.31)$$

$$\pm\Theta_1+u_1\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}+u_0\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}+v_0\frac{\partial\Theta_1}{\partial y}+v_1\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}=\frac{Gr^{-1/2}}{\Pr}\left(\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial y^2}-\Theta_1k^2\right) \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2\text{¤}_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\text{¤}_1}{\partial y^2}-\text{¤}_1k^2\right)=\frac{\partial w_1}{\partial y}-ikv_1 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}+ikw_1=0 \quad (2.34)$$

μαζί με την ομογενή μορφή των συνοριακών συνθηκών (2.25-2.27).

III. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων κατά Galerkin

Στο παρόν εδάφιο θα δώσουμε μία παρουσίαση των βασικών συνιστωσών που αποτελούν τη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων κατά Galerkin, την οποία και εφαρμόζουμε στις εξισώσεις των προβλημάτων ευστάθειας.

3.1.1 Το πρόβλημα του συνεχούς

Θεωρούμε το μονοδιάστατο γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση :

$$L(u(x))=f(x)\ ,\ x\epsilon\Omega \qquad (3.1)$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

$$u=\overline{u} \text{ στο } \Gamma_{du}$$
$$a\,\frac{\partial u}{\partial x}=q \text{ στο } \Gamma_{nu} \qquad (3.2)$$

όπου Ω είναι το πεδίο στο οποίο η (3.1) ισχύει και Γ το σύνορο του Ω. Παρατηρήστε ότι το Γ διαιρείται σε δύο κομμάτια : το Γ_{du} που περιέχει τις συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ενώ το Γ_{nu} τις συνθήκες τύπου Neumann.

3.1.2 Μορφοποίηση ζυγισμένων υπολοίπων (weighted residual)

Το πρώτο βήμα, προκειμένου να λάβουμε λύση μέσω των FEM κατά Galerkin, είναι να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα του συνεχούς (3.1) στην ασθενή του μορφή. Αν και η μορφοποίηση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1, 3.2) είναι εν γένει μοναδική, δεν υπάρχει μοναδική ασθενής μορφή του ίδιου προβλήματος. Μολονότι δύνανται να υπάρχουν εναλλακτικές ασθενείς μορφές για το εν λόγω πρόβλημα, κατ' ουσία είναι ισοδύναμες για όσο η λύση του προβλήματος υπάρχει και είναι επαρκώς ομαλή. Οι Gresho & Sani (2000) χαρακτηριστικά σημειώνουν : "*Κάποιες ασθενείς μορφές... είναι πιο χρήσιμες από άλλες διότι (τουλάχιστον) λαμβάνουν υπόψη πιο αποδοτικά και πιο 'φυσικά' τις (συνοριακές συνθήκες).*"

Εν συνεχεία, ορίζεται πεπερασμένης διάστασης χώρος H^h στον οποίο θα ανήκει η προσεγγιστική λύση. Τότε αναζητείται προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα (3.1-3.2) της μορφής :

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j N_j(x) \tag{3.3}$$

όπου u_j είναι οι λεγόμενοι βαθμοί ελευθερίας, οι άγνωστοι του διακριτού προβλήματος. Οι συναρτήσεις βάσης N_j είναι πολυώνυμα πεπερασμένης τάξης που συνθέτουν το χώρο H^h. Η διάσταση του συγκεκριμένου χώρου είναι $H^h = \{N_j : j=1,2,...,n\}$ κατά συνέπεια η (3.3) δεν δύναται να ικανοποιεί εν γένει την (3.1) σε όλα τα σημεία του Ω. Ωστόσο, οι συναρτήσεις βάσης επιλέγονται έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο ή εναλλακτικά όσο το n αυξάνεται η προσέγγιση που λαμβάνεται από την (3.3) βελτιώνεται. Επειδή η u^h δεν μπορεί να ικανοποιεί την (3.1) ακριβώς, αν αντικαταστήσουμε την (3.3) στην (3.1) παραμένει ένα υπόλοιπο (residual) :

$$r_{\Omega} = L(u^h) - f \text{ στο } \Omega \tag{3.4}$$

Μια φυσική προσέγγιση για να φτάσουμε στην προσεγγιστική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι να διασφαλίσουμε ότι το υπόλοιπο με κάποιο τρόπο ελαχιστοποιείται. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Μια προσέγγιση θα ήταν να απαιτήσουμε το τετράγωνο του υπολοίπου να είναι ελάχιστο σε όλο το πεδίο του Ω, δηλαδή η ελαχιστοποίηση της κάτωθι ποσότητας :

$$\int_{\Omega} (r_{\Omega})^2 d\Omega \tag{3.5}$$

Η απαίτηση αυτή είναι γνωστή ως προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων. Μια άλλη συνήθης προσέγγιση των FEM είναι η μέθοδος των ζυγισμένων υπολοίπων. Σε αυτή τη μορφοποίηση το υπόλοιπο, που πολλαπλασιάζεται με κάποια συνάρτηση βάρους, ελαχιστοποιείται σε όλο το Ω, δηλαδή :

$$\int_{\Omega} w_i r_{\Omega} d\Omega \tag{3.6}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων βάρους $W = \{w_i : i=1,2,...,n\}$ πρέπει να σχηματίζουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο και να είναι ισάριθμες με τις συναρτήσεις βάσης N_j.

3.1.3 Μορφοποίηση κατά Galerkin

Η ανωτέρω μορφοποίηση αποτελεί μία από τις πολλές πιθανές επιλογές για τις συναρτήσεις βάρους. Μολονότι χρησιμοποιούμε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας τη συγκεκριμένη μορφοποίηση, θα αναφέρουμε εν συντομία άλλες δύο επιλογές για συναρτήσεις βάρους έτσι ώστε να επεξηγήσουμε τη γενικότητα των FEM και την εγγύτητά τους με τις FDM και FVM.

Στη μέθοδο collocation οι συναρτήσεις βάρους είναι Dirac-δέλτα σε n σημεία στο πεδίο :

$$w_i = \delta(x - x_i),\ \text{i=1,2,...,n} \quad (3.7)$$

Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει κατ' ουσία ότι το υπόλοιπο είναι ίσο με το μηδέν σε αριθμό σημείων στο πεδίο ενώ παρουσιάζει αρκετά κοινά με τη φιλοσοφία των FDM. Άλλη επιλογή συναρτήσεων βάρους, η επονομαζόμενη και ως υπόχωρος της μεθόδου collocation, είναι να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις βημάτων-ασυνέχειας (step-discontinuous) της μορφής :

$$w_i = \begin{cases} 1, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.8)$$

Η παραπάνω μορφοποίηση εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα του υπολοίπου είναι μηδέν σε n υποχώρους ή στοιχεία. Μάλιστα η FVM, η οποία χρησιμοποιεί ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης συνεχούς αντί της διαφορικής μορφής της, αποτελεί ειδική περίπτωση αυτής της μεθόδου.

Επειδή οι απαιτήσεις των συναρτήσεων βάρους είναι να σχηματίζουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο και να είναι ισάριθμες με τις συναρτήσεις βάσης, μία προφανής επιλογή είναι να χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις βάσης αυτές καθ' αυτές ως συναρτήσεις βάρους :

wi=Ni (3.10)

Η μορφοποίηση αυτή, η οποία είναι η συνηθέστερη στα FEM, καλείται μέθοδος Galerkin. Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα της απλότητας λόγω του γεγονότος ότι χρησιμοποιείται ένα σύνολο συναρτήσεων ενώ ο πίνακας ακαμψίας που παράγεται έχει μορφή ζώνης. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη στο διαφορικό τελεστή είναι επιτρεπτή η χρήση μικρότερης τάξης συναρτήσεων βάσης. Για παράδειγμα, δευτεροτάξιες εξισώσεις μπορούν να προσεγγιστούν με χρήση γραμμικών συναρτήσεων βάσης. Στα μειονεκτήματα περιλαμβάνονται η πιθανή ανάγκη για υπολογισμό περίπλοκων ολοκληρωμάτων και κάποια θέματα ευστάθειας σε ροές όπου κυριαρχεί η συναγωγή.

3.2 Αριθμητική επίλυση γραμμικού προβλήματος ευστάθειας συναγωγής Rayleigh - Benard στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του γραμμικοποιημένου προβλήματος (βλ. σχέσεις 2.19-2.24) υπολογίζονται διακριτοποιώντας τις ποσότητες στις οποίες έχουμε επιβάλλει περιοδική και απειροστή διαταραχή κατά τον άξονα z με χρήση της μεθόδου FEM. Οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange $\Phi_i(x,y)$ υιοθετούνται για την περιγραφή όλων των άγνωστων ποσοτήτων με εξαίρεση την πίεση για την οποία χρησιμοποιούνται οι διγραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange $\Psi_i(x,y)$ (Pelekasis 2006, Dimopoulos & Pelekasis 2012) :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \Theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \Theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \Phi_i(x,y), \quad P_1(x,y) = \sum_{i=1}^{M} p_i \Psi_i(x,y); \qquad (3.11)$$

Οι δείκτες N, M χαρακτηρίζουν το συνολικό αριθμό των αγνώστων που αφορούν τις διτετραγωνικές και τις διγραμμικές συναρτήσεις βάσης, αντίστοιχα. Ο δείκτης i δηλώνει τις αντίστοιχες τιμές στους κόμβους του διδιάστατου πλέγματος το οποίο εκτείνεται στη διατομή του αγωγού. Εν συνεχεία, με χρήση της τυπικής μεθοδολογίας των FEM τύπου Galerkin προκύπτει η ασθενής μορφοποίηση του προβλήματος :

<u>Συνέχεια</u>

$$\left[\iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dxdy\right] u_j + \left[\iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dxdy\right] v_j + \left[\iint ik \Psi_i \Phi_j dxdy\right] w_j = 0, i = 1, M \qquad (3.12)$$

<u>Διατήρηση Ορμής ως προς x, y, z άξονες</u>

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\mu\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]u_j = -\sum_{j=1}^{M}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\Psi_j dxdy\right]P_j$$
$$-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]u_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]u_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]u_j\right] \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\mu\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j = \sum_{j=1}^{M}\left[-\iint \Psi_j\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}dxdy\right]P_j$$
$$-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j\right] \quad (3.14)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[ik\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\text{¤}_j\right]$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\mu\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j = \sum_{j=1}^{M}\left[-ik\iint \Psi_j\Phi_i dxdy\right]P_j$$
$$-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]w_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]w_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j\right] \quad (3.15)$$
$$-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j-\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]\text{¤}_j\right]$$

<u>Ενεργειακό Ισοζύγιο</u>

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\mu\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j =$$
$$-(Gr^{-1/2}/\Pr)\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j\right] \quad (3.16)$$

<u>Διατήρηση Φορτίου</u>

$$-\int_0^1 c_H\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}dy\bigg|_{x=0}-\int_0^1 c_H\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}dy\bigg|_{x=A}-\int_0^A c_S\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}dx\bigg|_{y=1}-\int_0^A c_S\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}dx\bigg|_{y=0}+$$
$$\Phi_i\left(c_H\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x=0,y=1)-c_S\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=0,y=1)\right)-\Phi_i\left(c_H\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x=0,y=0)+c_S\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=0,y=0)\right)+$$
$$\Phi_i\left(-c_H\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x=A,y=0)+c_S\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=A,y=0)\right)+\Phi_i\left(c_H\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x=A,y=1)+c_S\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=A,y=1)\right)=$$

$$=\int \Phi_i \frac{\partial \text{¤}}{\partial n} dS = -(c_S \acute{\eta} \;\; c_H)\int \Phi_i k^2 \text{¤} dS + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dxdy\right] w_j - \sum_{j=1}^{N}\left[ik\iint \Phi_i \Phi_j dxdy\right] v_j +$$
$$\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i \Phi_j dxdy\right]\text{¤}_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dxdy\right]\text{¤}_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dxdy\right]\text{¤}_j, \quad i=1,M \tag{3.17}$$

Στην παραπάνω μορφοποίηση η τάξη της παραγώγισης έχει μειωθεί ολοκληρώνοντας τα κομμάτια που αφορούν τους ιξώδεις όρους στις εξισώσεις της ορμής ως προς τους άξονες x, y, z και τους όρους αγωγής στο ισοζύγιο ενέργειας και διατήρησης φορτίου. Όσον αφορά την εξίσωση (3.17), η οποία εμφανίζει μια ιδιαιτερότητα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες εξισώσεις που εμφανίζονται στην ασθενή μορφή του προβλήματος, δίδονται ακολούθως τεχνικές λεπτομέρειες σχετικά με την διαδικασία παραγωγής της ασθενούς μορφής της. Θα πρέπει να τονισθεί ότι το διαφορικό dS στην εν λόγω σχέση δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου κατά μήκος της περιμέτρου του αγωγού.

Κατά την περίπτωση αυτή απουσιάζουν ουσιαστικές συνθήκες, ενώ οι φυσικές συνθήκες της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=0,y,z) = -c_H\left(\frac{\partial^2 \text{¤}}{\partial y^2} - k^2 \text{¤}_1\right), \quad \frac{\partial \text{¤}}{\partial x}(x=A,y,z) = c_H\left(\frac{\partial^2 \text{¤}}{\partial y^2} - k^2 \text{¤}_1\right)$$
$$\frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x,y=0,z) = -c_S\left(\frac{\partial^2 \text{¤}}{\partial x^2} - k^2\right), \quad \frac{\partial \text{¤}}{\partial y}(x,y=1,z) = c_S\left(\frac{\partial^2 \text{¤}}{\partial x^2} - k^2 \text{¤}_1\right) \tag{3.18}$$

Στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες έχει ήδη ληφθεί υπόψη η μορφή της τριδιάστατης διαταραχής του ηλεκτρικού δυναμικού.

Η εξίσωση (2.23) που προκύπτει από την ανάλυση ευστάθειας της διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, ολοκληρώνεται στη διατομή του αγωγού, ενώ ταυτόχρονα πολλαπλασιάζεται κατά μέλη με τη δοκιμαστική συνάρτηση h(x,y). Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin και θέτουμε: $h(x,y) = \Phi_j(x,y)$, όπου Φ_j είναι οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσης Lagrange. Έτσι λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί την ασθενή μορφή της εξίσωσης της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\iint \Phi_i \nabla^2 ¤ \, dA = \iint k^2 ¤ \Phi_i dA + \iint \frac{\partial w}{\partial y} \Phi_i dA - \iint ikv \Phi_i dA \Rightarrow$$

$$\iint \nabla \cdot \left(\Phi_i \nabla ¤ \right) dA - \iint \nabla \Phi_i \cdot \nabla ¤ \, dA = \iint k^2 ¤ \Phi_i dA + \iint \frac{\partial w}{\partial y} \Phi_i dA - \iint ikv \Phi_i dA \Rightarrow$$

$$\int \Phi_i \frac{\partial ¤}{\partial n} dS = \iint \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} + k^2 ¤ \Phi_i + \frac{\partial w}{\partial y} \Phi_i - ikv \Phi_i \right] dA \Rightarrow$$

$$\int_0^A \Phi_i \frac{\partial ¤}{\partial x} dy\Big|_{x=1} - \int_0^A \Phi_i \frac{\partial ¤}{\partial x} dy\Big|_{x=0} + \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial ¤}{\partial y} dx\Big|_{y=A} - \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial ¤}{\partial y} dx\Big|_{y=0} =$$

$$\iint \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} + k^2 ¤ \, \Phi_i + \frac{\partial w}{\partial y} \Phi_i - ikv \Phi_i \right] dA \equiv I \Rightarrow$$

$$I + \int_0^A c_H \Phi_i k^2 ¤ \, dy\Big|_{x=1} + \int_0^A c_H \Phi_i k^2 ¤ \, dy\Big|_{x=0} + \int_0^1 c_S \Phi_i k^2 ¤ \, dx\Big|_{y=0} + \int_0^1 c_S \Phi_i k^2 ¤ \, dx\Big|_{y=A} =$$

$$+\Phi_i c_H \frac{\partial ¤}{\partial y}\Bigg|_{0,x=1}^{A,x=1} + \Phi_i c_H \frac{\partial ¤}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{A,x=0} + \Phi_i c_S \frac{\partial ¤}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{1,y=0} + \Phi_i c_S \frac{\partial ¤}{\partial x}\Bigg|_{0,y=A}^{1,y=A}$$

$$-\int_0^A c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} dy\Big|_{x=1} - \int_0^A c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} dy\Big|_{x=0}$$

$$-\int_0^1 c_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} dx\Big|_{y=A} - \int_0^1 c_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} dx\Big|_{y=0} \Rightarrow$$

$$I + \int_0^A c_H \left[\Phi_i k^2 ¤ + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} \right] dy\Big|_{x=1} + \int_0^A c_H \left[\Phi_i k^2 ¤ + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial ¤}{\partial y} \right] dy\Big|_{x=0} \tag{3.19}$$

$$+\int_0^1 c_S \left[\Phi_i k^2 ¤ + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} \right] dx\Big|_{y=A} + \int_0^1 c_S \left[\Phi_i k^2 ¤ + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial ¤}{\partial x} \right] dx\Big|_{y=0} =$$

$$+\Phi_i c_H \frac{\partial ¤}{\partial y}\Bigg|_{0,x=1}^{A,x=1} + \Phi_i c_H \frac{\partial ¤}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{A,x=0} + \Phi_i c_S \frac{\partial ¤}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{1,y=0} + \Phi_i c_S \frac{\partial ¤}{\partial x}\Bigg|_{0,y=A}^{1,y=A}$$

Η ασθενής μορφή των εξισώσεων ορμής και του ισοζυγίου ενέργειας δεν περιέχει συνοριακούς όρους από τη στιγμή που οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες καθορίζονται στα τοιχώματα του αγωγού ενώ ορίζεται μηδενική θερμορροή κατά μήκος των δύο τοιχωμάτων Hartmann. Όταν είναι επιθυμητός ο υπολογισμός των συμμετρικών ιδιοδιανυσμάτων ως προς το μέσο επίπεδο x=A/2 τότε οι παράγωγοι ως προς x που υπολογίζονται στο άκρο x=A/2 αμελούνται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.17) που επιβάλλει τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου.

Εξαιτίας της γραμμικής φύσης του προβλήματος ευστάθειας, εκτός από τον πίνακα μάζας (mass matrix) που πηγάζει από τη διαδικασία της διακριτοποίησης των μεταβατικών όρων, η διακριτοποίηση των υπολοίπων όρων αναπαράγει τον

Ιακωβιανό πίνακα που αποτελεί το αριστερό μέλος του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω η μορφή του προβλήματος αναδιατυπώνεται στην ακόλουθη μορφή :

$$\mu B_{ij} x_{1j} = J_{ij}(x_{0i}; k, Gr, Ha, A, c_s, c_H) x_{1j} \qquad (3.20)$$

όπου B, J δηλώνουν τον πίνακα μάζας και Ιακωβιανής, αντίστοιχα και x_{0j}, x_{1j} εκφράζουν τη βασική λύση και το ιδιοδιάνυσμα. Λόγω του γεγονότος ότι δεν υπάρχει κίνηση στη βασική ροή υποθέτουμε καθαρή αγωγή θερμότητας για την λύση μηδενικής τάξης. Ο Ιακωβιανός πίνακας δεν περιέχει συνεισφορές από αδρανειακούς όρους και κατ' ουσία αποτελεί συνάρτηση του μήκους κύματος της προκύπτουσας ιδιομορφής και των αδιάστατων παραμέτρων του προβλήματος. Η ιδιοτιμή ω δύναται να είναι πραγματική ή μιγαδική υποδηλώνοντας, όταν το πραγματικό της μέρος γίνει θετικό, την εμφάνιση μονοτονικά ή περιοδικά ασταθών κυμάτων τα οποία, κατά τον κορεσμό, θα εξελιχθούν σε στάσιμα ή οδεύοντα κύματα.

Οι ουσιαστικές συνθήκες ενσωματώνονται στο παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών εξαλείφοντας όλες τις καταχωρήσεις στις γραμμές του πίνακα Ιακωβιανής που αντιστοιχούν σε κόμβους στα σύνορα για τα οποία οι τιμές των άγνωστων συναρτήσεων είναι καθορισμένες. Εν συνεχεία, οι αντίστοιχοι διαγώνιοι όροι του συγκεκριμένου πίνακα τίθενται ίσοι με τη μονάδα ενώ μηδενίζονται οι εκτός διαγωνίου όροι.

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύεται με σκοπό τον υπολογισμό των ιδιοτιμών ω. Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν οι ιδιοτιμές των οποίων το πραγματικό μέρος τείνει να μηδενιστεί, οπότε εισάγουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό Cayley (Cliffe et al. 1993) :

$$\begin{gathered} J_{ij}x_j - \pm B_{ij}x_j = \mu B_{ij}x_j - \pm B_{ij}x_j \rightarrow \left(J_{ij} - \pm B_{ij}\right)x_j = \left(\mu - \pm\right)B_{ij}x_j \rightarrow \\ \frac{1}{\mu - \pm}x_i = \left(J_{ij} - \pm B_{ij}\right)^{-1}B_{ij}x_j, \quad ^2 = 1/\left(\mu - \pm\right) \end{gathered} \qquad (3.21)$$

Κατά συνέπεια, αντί του αρχικού προβλήματος που περιγράφεται από την εξίσωση (3.20) το μετασχηματισμένο πλέον πρόβλημα παρέχει τις μεγαλύτερες κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμές τ=1/(ω-σ) και επιλύεται μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, όπου η μιγαδική παράμετρος σ ευνοεί την επιλογή συγκεκριμένης περιοχής του φάσματος ιδιοτιμών που βρίσκεται στη γειτονική περιοχή της τιμής σ. Συγκεκριμένα, είναι δυνατή η ανίχνευση διακλαδώσεων Hopf που υποδεικνύουν την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, θέτοντας την τιμή της παραμέτρου σ ίση με σταθερή φανταστική τιμή όπου προγενέστερη ανάλυση (Pelekasis 2006) έχει δείξει την ύπαρξη διακλάδωσης.

3.2.1 Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών - Επαναληπτική μέθοδος Arnoldi

Είναι χρήσιμο για λόγους πληρότητας να αναφερθούμε εκτενώς στην προαναφερθείσα επαναληπτική μέθοδο. Η μέθοδος Arnoldi (Arnoldi 1951) προτάθηκε αρχικά ως τρόπος μετασχηματισμού ενός πίνακα σε μορφή Hessenberg, του οποίου η γενική μορφή είναι :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-3} & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-3} & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ωστόσο, ο Arnoldi είχε επισημάνει ότι η μεθοδολογία του θα μπορούσε να παρέχει καλή προσέγγιση σε κάποιες ιδιοτιμές εάν σταματούσε ο αλγόριθμος πριν την ολοκλήρωσή του. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε πλήρως σε μεταγενέστερες εργασίες κυρίως από τον Saad (Saad 1980) καθιστώντας την ως μια από τις πιο επιτυχείς μεθόδους για ιδιοπροβλήματα non-Hermitian. Έκτοτε, έχουν προταθεί αρκετές διασκευές της μεθόδου (Bai et al. 2000).

Ο βασικός αλγόριθμος Arnoldi μπορεί να περιγραφεί ως εξής. Δοθέντος ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξεως n, εάν έχουν πραγματοποιηθεί n βήματα της εν λόγω μεθόδου τότε επιτυγχάνεται ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός σε μορφή Hessenberg και ισχύει : AV = VH, όπου H είναι άνω Hessenberg πίνακας τάξης n με θετικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου και V είναι ορθογώνιος πίνακας. Οι πίνακες V και H ορίζονται μοναδικά από την πρώτη στήλη του V και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $v_1=Ve_1$ που ονομάζεται αρχικό διάνυσμα.

Στη γενική περίπτωση όπου η μέθοδος λειτουργεί επιτυχώς μετά από m βήματα ο αλγόριθμος παράγει έναν πίνακα V_m διάστασης n x m με ορθογώνιες στήλες και έναν άνω πίνακα Hessenberg H_m τάξεως m οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση: $AV_m-V_mH_m = fe_m^*$, όπου το διάνυσμα f διάστασης 1 x n είθισται να καλείται residual του m-βήματος της παραγοντοποίησης Arnoldi και η ποσότητα e_m^* αποτελεί ορθομοναδιαίο διάνυσμα διάστασης 1 x m.

Συνοπτικά ο αλγόριθμος της μεθόδου Arnoldi ακολουθεί το παρακάτω διάγραμμα ροής :

Είσοδος : Πίνακας A, αριθμός βημάτων m και αρχικό μοναδιαίο διάνυσμα v_1.

Έξοδος : (V_m, H_m, f, β) έτσι ώστε να ισχύει AV_m-V_mH_m = fe_m^*

Για j=1,2,...,m-1

w=AVj

Ορθογωνιοποίηση του w ως προς Vj (προκύπτουν $h_{1:j,j}$)

$h_{j+1,j} = \|w\|_2$

Αν $h_{j+1,j} = 0$, stop

$v_{j+1} = w / h_{j+1,j}$

Τέλος

$f = Av_m$

Ορθογωνιοποίηση του f ως προς V_m (προκύπτουν $h_{1:m,m}$)

$= \| f \|_2$

Αποδεικνύεται ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δημιουργεί μια ορθογώνια βάση του υπόχωρου Krylov $K_m(A,v_1)$. Τα υπολογιζόμενα διανύσματα βάσης συνιστούν τις στήλες του V_m και ονομάζονται διανύσματα Arnoldi. Στην περίπτωση που προκύψει w=0 μετά την ορθογωνιοποίηση, τότε ο αλγόριθμος παύει να λειτουργεί πριν ολοκληρωθούν m βήματα και σε αυτή την περίπτωση το residual της παραγοντοποίησης Arnoldi είναι μηδέν και επιπλέον ισχύει ότι $K_j(A,v_1)$, j<m αποτελεί αναλλοίωτο υπόχωρο του A. Στην πράξη όμως τέτοια περίπτωση είναι ασυνήθιστη λόγω της αριθμητικής ακρίβειας της μεθόδου.

Με αυτό τον τρόπο, οι ιδιοτιμές μικρού μέτρου, που προέρχονται από το αρχικό πρόβλημα, τροποποιούνται σε ιδιοτιμές μεγάλου μέτρου στο μετασχηματισμένο πρόβλημα. Στη βιβλιογραφία συναντώνται μετασχηματισμοί, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Cayley που αναφέρθηκε παραπάνω, ο οποίος στηρίζεται στην περίπτωση όπου το φανταστικό μέρος μιας ιδιοτιμής είναι διάφορο του μηδενός σε αστάθεια Hopf.

Σημειωτέον ότι οι ιδιοτιμές που διαθέτουν τα μεγαλύτερα μέτρα κινούνται σε υπόχωρο Krylov και μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από το αν είναι γνωστό το σύνολο των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι ένας μικρός αριθμός ιδιοτιμών υπολογίζεται με χρήση της μεθόδου Arnoldi. Ο συγκεκριμένος αριθμός αυξάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση των μεγαλύτερων ιδιοτιμών, οπότε και ο αλγόριθμος σταματά. Η χρήση της εν λόγω μεθόδου επιτρέπει (Pelekasis 2006, Dimopoulos & Pelekasis 2012) την μείωση του υπολογιστικού χρόνου που απαιτεί το μοντέλο καθώς και την ελαχιστοποίηση των απαιτήσεων σε υπολογιστική μνήμη.

3.3 Αριθμητική επίλυση γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής ελεύθερης συναγωγής στρώματος υγρού μετάλλου, παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Η ανάλυση που προηγήθηκε στο εδάφιο 3.2 συνεχίζει να ισχύει και στην παρούσα περίπτωση του προβλήματος ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής όπου εξετάζεται η αλληλεπίδραση δύο εστιών ανακυκλοφορίας. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε το παρακάτω πρόβλημα ευστάθειας:

Συνέχεια

$$\left[\iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dxdy\right]u_j + \left[\iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dxdy\right]v_j + \left[\iint ik\Psi_i\Phi_j dxdy\right]w_j = 0, i = 1, M \qquad (3.22)$$

Διατήρηση Ορμής ως προς x, y, z άξονες

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\pm\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]u_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial x}\Phi_j dxdy\right]u_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}u_0 dxdy\right]u_j +$$
$$\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}v_0 dxdy\right]u_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial y}\Phi_j dxdy\right]v_j = -\sum_{j=1}^{M}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\Psi_j dxdy\right]P_j \qquad (3.23)$$
$$-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]u_j + \sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]u_j + \sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]u_j\right]$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\left[\pm\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j\frac{\partial v_0}{\partial y}dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}v_0 dxdy\right]v_j+\\
&\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}u_0 dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j\frac{\partial v_0}{\partial x}dxdy\right]u_j=\sum_{j=1}^{M}\left[-\iint \Psi_j\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}dxdy\right]P_j\\
&-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j\right]\\
&+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j+\sum_{j=1}^{N}\left[ik\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\text{¤}_j\right]
\end{aligned}\qquad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\left[\pm\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}u_0 dxdy\right]w_j+\\
&\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}v_0 dxdy\right]w_j=\sum_{j=1}^{M}\left[-ik\iint \Psi_j\Phi_i dxdy\right]P_j\\
&-Gr^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]w_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]w_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j\right]\\
&-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]w_j-\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]\text{¤}_{1j}\right]
\end{aligned}\qquad (3.25)$$

Ενεργειακό Ισοζύγιο

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\left[\pm\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j\frac{\partial \Theta_0}{\partial x}dxdy\right]u_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}u_0 dxdy\right]\Theta_j+\\
&\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}v_0 dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\Phi_j\frac{\partial \Theta_0}{\partial y}dxdy\right]v_j=\\
&-\left(\frac{Gr^{-1/2}}{\Pr}\right)\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]\Theta_j+\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\Theta_j\right]
\end{aligned}\qquad (3.26)$$

Διατήρηση Φορτίου

$$\begin{aligned}
&\int \Phi_i\frac{\partial \text{¤}}{\partial n}dS=0=-(c_S ή\ c_H)\int \Phi_i k^2\text{¤}dS+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \Phi_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]w_j-\sum_{j=1}^{N}\left[ik\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]v_j+\\
&\sum_{j=1}^{N}\left[k^2\iint \Phi_i\Phi_j dxdy\right]\text{¤}_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}dxdy\right]\text{¤}_j+\sum_{j=1}^{N}\left[\iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}dxdy\right]\text{¤}_j,\quad i=1,M
\end{aligned}\qquad (3.27)$$

Στις εξισώσεις (3.22-3.27) απουσιάζουν επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\Gamma} \Phi_i \frac{\partial q}{\partial n} d\Gamma$ (όπου q={u,v,w,Θ,φ,p}, Γ δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου ως προς τα σύνορα της διατομής της κοιλότητας και ∂q/∂n η κάθετη παράγωγος που υπολογίζεται σε αυτά) λόγω των συνοριακών συνθηκών Dirichlet που ικανοποιούνται στα σύνορα της διατομής καθώς και των συνθηκών μόνωσης που επιβάλλονται στα ισοζύγια ενέργειας και ηλεκτρικών ρευμάτων. Προκύπτει γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών στο οποίο εφαρμόζεται μετασχηματισμός τύπου Cayley (Cliffe et al. 1993) και εν συνεχεία υιοθετείται η επαναληπτική μέθοδος Arnoldi προκειμένου να εντοπιστούν οι κρίσιμες ιδιοτιμές. Πιο συγκεκριμένα, καλούμαστε να επιλύσουμε :

$$Jx - sBx = \pm Bx - sBx \rightarrow \left(J - sB\right)x = \left(\pm - s\right)Bx \rightarrow$$
$$^2 x = \left(J - sB\right)^{-1} Bx, \quad ^2 \equiv \frac{1}{\pm - s} \tag{3.28}$$

Προφανώς η εξίσωση (3.28) είναι ανάλογη με τη σχέση (3.21). Όταν το s τεθεί ίσο με μία σταθερή φανταστική τιμή τότε το αντίστοιχο τμήμα του φάσματος των ιδιοτιμών θα καλυφθεί από τη μέθοδο Arnoldi. Η μεγαλύτερη κατανάλωση υπολογιστικού χρόνου στον παραπάνω υπολογισμό αντιστοιχεί στην αντιστροφή του J-sB, ο οποίος είναι ο μοναδικός πίνακας που χρειάζεται να κατασκευαστεί. Ωστόσο, θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτή τη διαμόρφωση ροής, όπου η θερμοκρασιακή βαθμίδα τίθεται κάθετα στη βαρύτητα, η βασική λύση προέρχεται από διδιάστατη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που διενεργήθηκε από τον Pelekasis (2006) όπου για υψηλή τιμή ρυθμού παραγωγής θερμότητας ($S=10^5$) η βασική λύση χαρακτηρίζεται από δύο εστίες ανακυκλοφορίας. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου που αναλύθηκε στο προηγούμενο εδάφιο καθώς η βασική λύση σε αυτή την περίπτωση χαρακτηρίζεται από την εξίσωση (2.1) κατά την οποία επικρατούν συνθήκες ροής σε ηρεμία ενώ το θερμοκρασιακό προφίλ είναι γραμμικό.

Επιπρόσθετα, έγινε χρήση της μεθόδου GMRES (General Minimal Residual), την οποία και θα περιγράψουμε αναλυτικά παρακάτω, υιοθετώντας τον τελεστή Stokes ως preconditioner έτσι ώστε να υλοποιηθεί παραμετρική συνέχεια στις πιο σημαντικές ιδιοτιμές στο πεδίο των παραμέτρων που καθορίζεται από τους αριθμούς Ha, Gr και τον κυματαριθμό k και εν συνεχεία να καταστεί δυνατή η κατασκευή των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας με αυξημένη υπολογιστική ακρίβεια και ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των απαιτήσεων CPU.

3.3.1 Μέθοδος GMRES

Για την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής Ax=b απαιτείται μια καλή αρχική πρόβλεψη. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη προσέγγιση για τον πίνακα A γίνεται προσπάθεια να βελτιωθεί η πρόβλεψη μειώνοντας το λάθος. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας A μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός προσεγγιστικού πίνακα K και ενός άλλου πίνακα Λ τότε σχηματικά η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως ακολούθως.

Στο βήμα i+1 βρίσκεται η νέα προσεγγιστική λύση x_{i+1} από το σύστημα :

$$Kx_{i+1} = Kx_i + b - \Lambda x_i - Kx_i \xrightarrow{r_i = b - Ax_i} Kx_{i+1} = Kx_i + r_i$$

Με την παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης, ιδιαιτέρως δε για θετικά ορισμένους πίνακες K (Elman et al. 2005). Όμως δεν υπάρχει εγγύηση για την σύγκλιση της μεθόδου για πίνακες γενικής μορφής.

Ερευνητές για πολλές δεκαετίες έκαναν προσπάθειες να αναπτύξουν καλύτερες και ταχύτερες επαναληπτικές μεθόδους. Μια από τις μεθόδους η οποία χρησιμοποιείται ευρέως και έχει ιδιαίτερη απήχηση στην επίλυση μεγάλων συστημάτων είναι η GMRES (General Minimal Residual). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε το 1986 από τους Saad και Schultz για την επίλυση μεγάλων, μη συμμετρικών και αραιών συστημάτων (Saad & Schultz 1986).

Η βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου τέθηκε στην δεκαετία του 50 από τους Lanczos και Arnoldi οι οποίοι είχαν την ιδέα της διατήρησης όλων των προσεγγιστικών λύσεων μέχρι ένα σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας. Εν συνεχεία, πρότειναν τον συνδυασμό των προσεγγίσεων ώστε να προκύψει μια καλύτερη λύση. Ο Lanczos παρατήρησε ότι η βασική επανάληψη οδηγεί σε προσεγγίσεις x_i οι οποίες βρίσκονται σε καλά κατασκευασμένους υποχώρους, $K_i[A,r^{(0)}]$, που ορίζονται από τα διανύσματα $r^{(0)}$, $Ar^{(0)}$, $A^2r^{(0)}$, ..., $A^{i-1}r^{(0)}$ όπου $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$ το υπόλοιπο της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων.

Ένας τέτοιος υπόχωρος ονομάζεται Krylov υπόχωρος τάξεως i. Έπειτα, ο Lanczos απέδειξε ότι για τον υπόχωρο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα μια ορθοκανονική βάση γεγονός που απλοποίησε σημαντικά τους υπολογισμούς.

Στη μέθοδο GMRES κατασκευάζεται στον Krylov υπόχωρο τάξεως k η προσέγγιση $x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A, r^{(0)})$. Ο υπόχωρος K_k περιγράφεται με τη βοήθεια μίας ορθοκανονικής βάσης $V^{(k)} = \left\{ v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(k)} \right\}$ με πρώτο στοιχείο το $v^{(1)} = r^{(0)} / \left\| r^{(0)} \right\|$. Για τον υπολογισμό της ορθοκανονικής βάσης V_k του Krylov υποχώρου $K_k \equiv span\left\{ v^{(1)}, Av^{(1)}, ..., A^{k-1}v^{(1)} \right\} = K_k[A, r^{(0)}]$ χρησιμοποιείται η μέθοδος του Arnoldi.

Η τελευταία αντί των ιδιοσυναρτήσεων του Α υπολογίζει αυτές του upper-Hessenberg πίνακα $H_k=[h_{ij}]$ για $1 \le i, j \le k,\ h_{ij} = 0$ για $j < i - 1$ για τον οποίο ισχύει ότι :

$$H_k = V_k^T A V_k$$

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k}[0, ..., v^{(k+1)}] \rightarrow AV_k = V_{k+1}\tilde{H}_k, \quad \tilde{H}_k = [h_{i,j}]_{1 \le i \le k+1, 1 \le j \le k}$$

Ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής. Με $v^{(1)} = r^{(0)} / \left\| r^{(0)} \right\|$ κατασκευάζεται μία αλληλουχία ορθοκανονικών διανυσμάτων έτσι ώστε το τελευταίο, $v^{(k+1)}$, να είναι ορθογώνιο στα διανύσματα πο συνιστούν τον Krylov χώρο K_k. Η διαδικασία παραγωγής $v^{(k)}$ βασίζεται στην διαφοροποιημένη μέθοδο Gram-Schmidt (Elman et al. 2005). Συνεπώς προκύπτει :

$$x^{(k)} = x^{(0)} + V_k y^{(k)} \rightarrow Ax^{(k)} - b = Ax^{(0)} - b + AV_k y^{(k)}$$

για κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα $y^{(k)}$. Αντικαθιστώντας τον ορισμό του H_k στην παραπάνω σχέση έχουμε :

$$r^{(k)} = r^{(0)} - V_{k+1}\tilde{H}_k y^{(k)} = V_{k+1}\left(\left\| r^{(0)} \right\| e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right), \quad e^{(1)} = \left(1, 0, ..., 0\right)^T$$

Λόγω της ορθοκανονικότητας των $v^{(k)}$ ισχύει ότι :

$$\left\| r^{(k)} \right\| \equiv \ _k = \left\| \ _0 e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right\|, \quad \left\| r^{(0)} \right\| \equiv \ _0$$

και τα $y^{(k)}$ επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η Ευκλείδεια νόρμα $\left\| r^{(k)} \right\| = \left\| b - Ax^{(k)} \right\|^2$. Αυτό συνιστά ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων το οποίο, με δεδομένη την μορφή του H_k λύνεται χωρίς ιδιαίτερες υπολογιστικές απαιτήσεις.

Επίσης, για την μείωση των απαιτήσεων σε μνήμη και του υπολογιστικού φόρτου κατά επανάληψη, λόγω υπέρμετρης αύξησης του μεγέθους του H_k, υπάρχει η δυνατότητα επανεκκίνησης του αλγορίθμου κάθε m βήματα, όπου m είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο αλγόριθμος της GMRES περιγράφεται συνοπτικά παρακάτω (Saad & Schultz 1986) :

- Επιλέγεται μια αρχική πρόβλεψη $x^{(0)}$ και υπολογίζονται οι παρακάτω σχέσεις $r^{(0)} = f - Ax^{(0)}$ και $v^{(1)} = \dfrac{r^{(0)}}{\left\| r^{(0)} \right\|}$.
- Υπολογισμός των $v^{(k)}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ορθοκανονικότητα. Επαναλαμβάνεται για j=1,2,...,m

  $h_{i,j} = \left(Av^{(j)}, v^{(i)} \right)$, για i=1,2,...,j

  $$\hat{v}^{(j+1)} = Av^{(j)} - \sum_{i=1}^{j} h_{i,j} v^{(i)}$$

  $$h_{j+1,j} = \left\| \hat{v}^{(j+1)} \right\|, \quad v^{(j+1)} = \frac{\hat{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

- Υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση $x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y^{(m)}$ όπου το $y^{(m)}$ ελαχιστοποιεί το μέτρο $\left\| \; e_1 - \tilde{H}_m y \right\|, \quad y \in R^m$.
- Η διαδικασία ξεκινάει πάλι και υπολογίζεται το $r^{(m)} = f - Ax^{(m)}$.

  Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, $_{k} < {}^{2}\;{}_{0}, \quad t \,\square\, 1$, σταματάμε.

  Αν δεν ικανοποιείται θέτουμε $x^{(0)} = x^{(m)}$, $v^{(1)} = \dfrac{r^{(m)}}{\left\| r^{(m)} \right\|}$ και επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα.

3.3.2 GMRES με preconditioner

Η GMRES είναι μια επαναληπτική μέθοδος και επομένως συμπεριφέρεται καλύτερα όταν ο πίνακας του συστήματος είναι καλά ορισμένος, δηλαδή δεν έχει μηδενικές τιμές στην κύρια διαγώνιο. Στην περίπτωση που δεν ισχύει κάτι τέτοιο πριν την εφαρμογή της εν λόγω μεθόδου ο πίνακας πρέπει να τροποποιηθεί με κάποιο κατάλληλο preconditioner.

Γενικά, το preconditioning είναι οποιαδήποτε διαδικασία με την οποία τροποποιείται ένα αρχικό γραμμικό σύστημα έτσι ώστε να είναι πιο εύκολο να επιλυθεί επαναληπτικά. Αυτό συνήθως ισοδυναμεί με την απαίτηση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου συστήματος να είναι κατανεμημένες σε ένα όσο το δυνατόν πιο στενό διάστημα γύρω από την μονάδα.

Για παράδειγμα, η τροποποίηση ενός συστήματος ώστε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι μονάδα αποτελεί μια εξεζητημένη περίπτωση preconditioning όπου εισάγεται ο βοηθητικός πίνακας M ως preconditioner ο οποίος ταυτίζεται με τον A. Τις περισσότερες φορές κατά την εφαρμογή του preconditioning σε ένα σύστημα της μορφής Ax=b εισάγεται ένας απλοποιημένος πίνακας M που διατηρεί όσο το δυνατόν πιο πολλά χαρακτηριστικά του A και τελικά το σύστημα παίρνει μία από τις δύο παρακάτω μορφές :

$$\left[M^{-1}A\right]x = M^{-1}b, \quad \left[AM^{-1}\right]\left[Mx\right] = b$$

που είναι γνωστές με το όνομα αριστερό ή δεξιό preconditioning.

Είθισται να προτιμάται το δεξιό preconditioning διότι δεν εξαρτάται η προς ελαχιστοποίηση νόρμα από τον πίνακα M. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται στη συνέχεια λειτουργεί με τους πίνακες M^{-1} και A (Elman et al. 2005). Υπολογίζεται η ορθοκανονική βάση, $V^{(k)} = \left\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(k)}\right\}$, του Krylov υποχώρου $K_k \equiv span\left\{r^{(0)}, AM^{-1}r^{(0)}, \left(AM^{-1}\right)^2 r^{(0)}, ..., \left(AM^{-1}\right)^{k-1} r^{(0)}\right\}$ και τελικά υπολογίζεται η k προσέγγιση με την χρήση της παρακάτω σχέσης :

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M^{-1}V_k y^{(k)}.$$

Με αυτόν τον τρόπο δεν απαιτείται η αποθήκευση του πίνακα AM^{-1} παρά μόνο η χρήση του αντίστροφου M^{-1}.

Ένας από τους πιο απλούς και πιο συνηθισμένους τρόπους να οριστεί ένας preconditioner είναι η εφαρμογή Incomplete LU παραγοντοποίησης στον αρχικό πίνακα A. Έτσι, υπολογίζεται άμεσα ο M^{-1} με την βοήθεια των L και U. Αν θεωρήσουμε έναν αραιό πίνακα A με στοιχεία a_{ij} με i,j=1,...,n τότε κατά την εφαρμογή του ILU υπολογίζεται ο κάτω τριγωνικός πίνακας L και ο άνω τριγωνικός πίνακας U ώστε το υπόλοιπο R=LU-A να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο, όπως λόγου χάρη η απουσία στοιχείων σε κάποιες συγκεκριμένες θέσεις.

Ο αλγόριθμος του ILU βασίζεται στην χρήση της απαλοιφής του Gauss ώστε να εξαλειφθούν κάποια στοιχεία σε προκαθορισμένες θέσεις εκτός της κυρίας διαγωνίου και μπορεί να περιγραφεί με τα παρακάτω βήματα (Saad 1996) :

1. For i=2,...,n Do:
2. For k=1,...,i-1 and if $(i,k) \notin P$ Do:
3. $a_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$
4. For j=k+1,...,n and for if $(i,k) \notin P$ Do:
5. $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$
6. End Do
7. End Do
8. End Do

όπου το P είναι μια καθορισμένη μηδενική μορφή που ορίζεται ως εξής :

$$P \subset \left\{ (i, j) \middle| i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε κάθε βήμα i του αλγορίθμου κατασκευάζεται η αντίστοιχη γραμμή των L και U και η i γραμμή του A μπορεί να ξαναγραφεί με βάση τις γραμμές αυτές. Οι προηγούμενες γραμμές των L και U 1,..., i-1 χρησιμοποιούνται αλλά δεν τροποποιούνται. Η διαδικασία αυτή δεν γίνεται πλήρως και η έκτασή της καθορίζεται από τη μορφή του υποσυνόλου P.

Η χρήση της Incomplete LU παραγοντοποίησης και της GMRES στο συγκεκριμένο πρόβλημα στηρίχτηκε σε υπορουτίνες που διατίθενται στην προσωπική ιστοσελίδα του Youcef Saad. Στις υπορουτίνες αυτές οι μεταβλητές που εισάγονται είναι ο αριθμός των μέγιστων επαναλήψεων και το μέγεθος του Krylov υποχώρου για την GMRES καθώς και η έκταση εφαρμογής του Incomplete LU παραγοντοποίησης.

Επίσης, για την χρήση των παραπάνω υπορουτίνων ο πίνακας του συστήματος προς επίλυση πρέπει να εισαχθεί σε συγκεκριμένη μορφή, την CSRF (Compressed Sparse Row Format). Σύμφωνα με τη μορφή αυτή αποθηκεύονται μόνο τα μη-μηδενικά στοιχεία του πίνακα και ο συνολικός πίνακας δεν κατασκευάζεται ποτέ. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια τριών διανυσμάτων από τα οποία το πρώτο περιέχει όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία, το δεύτερο δίνει τη στήλη στην οποία βρίσκεται κάθε μη-

μηδενικό στοιχείο και το τελευταίο καθορίζει τον αύξοντα αριθμό που έχει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε σειράς στη μη-μηδενική αρίθμηση.

3.3.3 Παρακολούθηση της εξέλιξης συγκεκριμένης ιδιομορφής στο χώρο των παραμέτρων – Χρήση της επαναληπτικής μεθόδου GMRES

Κατά την προσομοίωση του γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου σε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής και έχοντας επιβάλλει τριδιάστατες διαταραχές κατά την διαμήκη κατεύθυνση χρειάστηκε η χρήση πυκνών πλεγμάτων. Στόχος είναι να κατανοηθεί πλήρως ο μηχανισμός παραγωγής εστιών ανακυκλοφορίας και κατ' επέκταση η φύση των ασταθειών που παρουσιάζονται. Για το λόγο αυτό, κατασκευάζονται διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας τα οποία παρέχουν πληροφορίες που αφορούν την κυρίαρχη ιδιομορφή που καθορίζει τη δυναμική του συστήματος που εξετάζεται, ενώ αποκαλύπτουν την περιοχή αστάθειας στο πεδίο των παραμέτρων που καθορίζεται από τον κυματάριθμο k και τον αριθμό Gr για δεδομένο αριθμό Ha.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας κατά την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών αναζητούμε την κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένο αριθμό Ha. Η κρίσιμη αυτή τιμή αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του Gr για την οποία εμφανίζεται αστάθεια. Για την εύρεση του κρίσιμου Gr υπολογίζονται αρχικά οι κυρίαρχες ασταθείς ιδιοτιμές για διδιάστατες διαταραχές. Επιθυμούμε να γνωρίζουμε την εξέλιξη αυτών των ιδιομορφών καθώς αυξάνεται ο κυματαριθμός (μηδενικός κυματαριθμός αντιστοιχεί σε διδιάστατες διαταραχές και αντιστοιχεί στο πρόβλημα μόνιμης κατάστασης (Pelekasis 2006)). Αυτό συνεπάγεται τη μείωση του μήκους κύματος της διαταραχής. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε μια συγκεκριμένη ασταθή ιδιοτιμή σ και ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο GMRES.

Καλούμαστε να επιλύσουμε μη γραμμικό πρόβλημα για την άγνωστη ιδιοτιμή σ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x (Xin & Le Quere 2001) :

$$\left(J - \pm B\right)x = 0 \qquad (3.29)$$

για κάποια τιμή του κυματαριθμού k και των παραμέτρων του προβλήματος, π.χ. Gr, με βάση προηγούμενη επίλυση της ιδιοτιμής και ιδιομορφής για k_o ή Gr_o. Με τον τρόπο αυτό διεξάγουμε το λεγόμενο parametric continuation με στόχο να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη μιας ασταθούς ιδιοτιμής σ και του ιδιοδιανύσματος **x** που αντιστοιχεί σε αυτήν. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι καθίσταται δυνατή η κατασκευή των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας. Η ιδιοτιμή αντιμετωπίζεται ως ένας επιπλέον άγνωστος του προβλήματος (3.29). Για να υπάρχει ισοζύγιο μεταξύ αγνώστων και εξισώσεων εισάγεται επιπλέον η εξίσωση κανονικοποίησης του ιδιοδιανύσματος που επιβάλλεται σε μία από τις συνιστώσες του:

$$\mathrm{x_{rj}} + \mathrm{i x_{ij}} = 1 + 0\mathrm{i} \tag{3.30}$$

Το συζευγμένο πρόβλημα που σχηματίζουν οι (3.29) και (3.30) επιλύεται επαναληπτικά με την υιοθέτηση της μεθόδου Newton-Raphson (NR). Για κάθε επανάληψη k της NR επιλύεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{bmatrix} J_x - \sigma^k B & Bx^k \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \sigma^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(J_x - \sigma^k B\right) x^k \\ x_{rj}^k + i x_{ij}^k - 1 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

για την επίλυση του οποίου απαιτείται η αντιστροφή του μητρώου που εμφανίζεται στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης. J_x είναι η παράγωγος Frechet του πίνακα J ως προς το ιδιοδιάνυσμα x και θεωρούμε $\Delta\sigma^k = \sigma^{k+1} - \sigma^k$. Ο όρος $J_x - \sigma^k B$ είναι πίνακας διάστασης nxn και ο όρος Bx^k αποτελεί διάνυσμα διάστασης n, ενώ το ιδιοζεύγος (eigenpair) $\left\{\Delta x^k, \Delta\sigma\right\}$ είναι η μεταβολή που επιτρέπουμε στην ασταθή ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της προκειμένου να εξετάσουμε την εξέλιξή της. Ο πίνακας B δηλώνει τον πίνακα μάζας.

Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος GMRES είναι απαραίτητη η εύρεση και η χρήση ενός preconditioner, ειδικά όταν ο αντιστρεφόμενος πίνακας δεν είναι ερμιτιανός. Εν τέλει, καταλήξαμε στην επιλογή του τελεστή Stokes ο οποίος προκύπτει όταν απαλειφθούν οι αδρανειακοί όροι από τις εξισώσεις κίνησης. Πιο αναλυτικά, θεωρήσαμε μία χρονομεταβαλλόμενη εκδοχή του γραμμικοποιημένου προβλήματος όπως ορίζεται από τις εξισώσεις διατήρησης ορμής ως προς τους τρεις άξονες x,y,z αντίστοιχα και την αρχή διατήρησης της ενέργειας (2.7-2.10) :

$$B\dot{x} = Jx = \left(\frac{C}{Gr^{0.5}} L + N \right) x \qquad (3.32)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι μεταβλητές L και N αναπαριστούν το τμήμα του πίνακα Ιακωβιανής που πηγάζει από το γραμμικό και το μη-γραμμικό κομμάτι του συστήματος εξισώσεων, αντίστοιχα, ενώ η μεταβλητή C : i) λαμβάνει την τιμή της μονάδας στην περίπτωση των εξισώσεων κίνησης, και ii) ταυτίζεται με τον αριθμό 1/Pr στην περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας. Διακριτοποιώντας ως προς τον χρόνο και υλοποιώντας ένα semi-implicit αριθμητικό σχήμα παίρνουμε :

$$\frac{Bx^{n+1} - Bx^{n}}{\Delta t} = \frac{C}{Gr^{0.5}} Lx^{n+1} + Nx^{n} \Rightarrow$$

$$\left(B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right) x^{n+1} = \left(\Delta t N + B \right) x^{n} \Rightarrow$$

$$x^{n+1} = \left(B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left(\Delta t N + B \right) x^{n} \Rightarrow$$

$$x^{n+1} = \left(B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left(\Delta t N + B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L + \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right) x^{n} \Rightarrow$$

$$x^{n+1} = x^{n} + \left(B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left(\Delta t N + \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right) x^{n} \qquad (3.33)$$

$$\frac{x^{n+1} - x^{n}}{\Delta t} = \left(B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left(N + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) x^{n}$$

Παρατηρώντας την εξίσωση στην οποία καταλήξαμε συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (3.33) αποτελεί τον αντίστροφο του τελεστή Stokes από τον οποίο απουσιάζουν οι μη γραμμικοί όροι της συναγωγής και ο δεύτερος όρος αναπαριστά τον πίνακα Ιακωβιανής. Όταν μηδενιστεί το δεξιό μέλος της (3.33) έχουμε την επίλυση προβλήματος μόνιμης κατάστασης. Συνεπώς, η σχέση (3.31), με τη χρήση του τελεστή Stokes που θα λάβει το ρόλο του preconditioner για να εφαρμοστεί η μέθοδος GMRES (Saad 2003), εμφανίζει την παρακάτω μορφή :

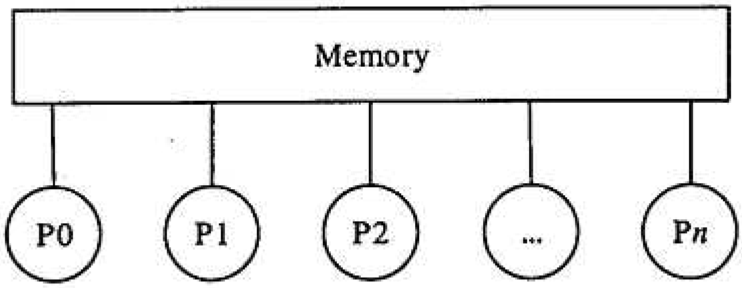
$$\begin{bmatrix} \left(B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x - \pm^{k} B & Bx^{k} \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ¢\, x^{k} \\ ¢\pm^{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(J_x - \pm^{k} B \right) x^{k} \\ x_{rj}^{k} + i x_{ij}^{k} - 1 \end{Bmatrix} \qquad (3.34)$$

όπου Δt είναι μια κατάλληλη ορισμένη παράμετρος που συνδέεται με την ένταση της ιδιοτιμής που ζητείται (Mamun & Tuckerman 1995).

Κατ’ επέκταση ο τελεστής Stokes μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως preconditioner του προβλήματος (3.31) κάθε φορά που απαιτείται η αντιστροφή πίνακα με την επαναληπτική μέθοδο GMRES. Η αρχική υπόθεση παρέχεται από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών που έχει διεξαχθεί προηγουμένως με την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi ή από την επίλυση της (3.31) για παρεμφερή τιμή παραμέτρου. Με την παραπάνω διαδικασία και σε συνδυασμό με τον απ’ ευθείας υπολογισμό ιδιοτιμών, κατασκευάζονται διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας για σημαντικό εύρος παραμέτρων.

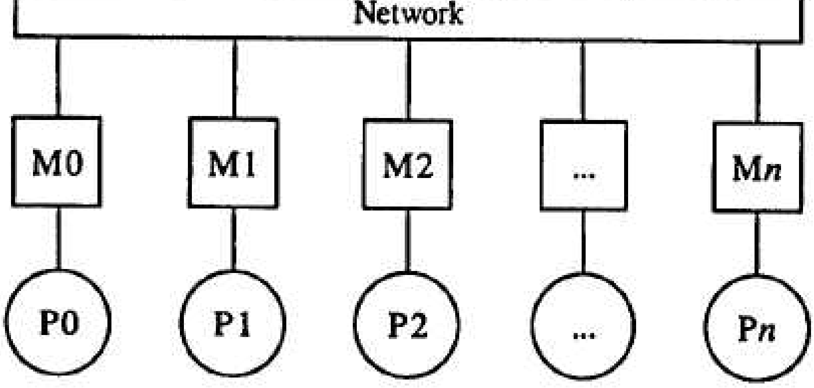
3.4 Υλοποίηση παραλληλισμού γραμμικού προβλήματος ευστάθειας συναγωγής Rayleigh - Benard στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Η υλοποίηση του παραλληλισμού καθίσταται δυνατή με χρήση τεχνικών του πρωτοκόλλου επικοινωνίας της MPI (Message Passing Interface) και της παράλληλης βιβλιοθήκης ScaLAPACK (Scalable Linear Algebra Package), (Blackford et al. 1997). Αρχικά, θα ήταν χρήσιμο να εξηγήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στον υπολογιστή μοιραζόμενης μνήμης (shared-memory computer) και στο σύστημα κατανεμημένης μνήμης (distributed-memory system) έτσι ώστε να καταστεί σαφής η βέλτιστη παράλληλη στρατηγική που θα πρέπει να επιλεχθεί. Στην πρώτη περίπτωση όλοι οι επεξεργαστές δύνανται να έχουν απευθείας πρόσβαση σε όλη τη διαθέσιμη μνήμη. Αν και υπάρχει αριθμός αρχιτεκτονικών που έχουν σχεδιαστεί για παραλληλισμό μοιραζόμενης μνήμης, στην περίπτωση του πρωτοκόλλου OpenMP (Multi-Processing) η οποία αποτελεί τη συνηθέστερη επιλογή σε αυτού του είδους την αρχικτεκτονική και μάλιστα υπό το πρίσμα του προγραμματιστή, οι λεπτομέρειες αυτές είναι ασήμαντες και το σύστημα μπορεί να γίνει επαρκώς αντιληπτό από την απλουστευμένη αρχιτεκτονική που απεικονίζεται στο κάτωθι σχήμα. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση προσπάθειας επίτευξης της βέλτιστης απόδοσης σε συγκεκριμένο υπολογιστή οπότε η λεπτομερής αρχιτεκτονική είναι σημαντική.



Σχήμα 9: Απλουστευμένο μοντέλο αρχιτεκτονικής μοιραζόμενης μνήμης, όπου κάθε ένας από τους n επεξεργαστές έχει απευθείας πρόσβαση στη μνήμη όλου του συστήματος.

Τα συστήματα κατανεμημένης μνήμης αποτελούν την εναλλακτική επιλογή εν συγκρίσει με την προαναφερθείσα αρχιτεκτονική. Σε αυτή την περίπτωση κάθε επεξεργαστής έχει μόνο τη δυνατότητα να συνδέεται άμεσα με τη μνήμη που συνδέεται φυσικά με αυτόν, όπως διαφαίνεται στην απλουστευμένη αρχιτεκτονική του κάτωθι σχήματος. Για το λόγο ότι κάθε επεξεργαστής έχει τη δική του ανεξάρτητη μνήμη ο προγραμματιστής θα πρέπει να είναι σε θέση να διαχειριστεί τον τρόπο με τον οποίο τα δεδομένα του προγράμματος θα κατανεμηθούν. Προκειμένου να υπάρχει πρόσβαση σε δεδομένα που αποθηκεύονται στη μνήμη με την οποία συνδέεται άλλος επεξεργαστής, ο προγραμματιστής πρέπει να μεταφέρει μηνύματα ρητά μέσω του αλληλοσυνδεόμενου δικτύου. Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με χρήση εξειδικευμένων βιβλιοθηκών ή εναλλακτικά πρωτοκόλλων επικοινωνίας όπως η MPI (Pacheco 1996) και PVM (Parallel Virtual Machine), (Geist et al. 1994).



Σχήμα 10: Απλουστευμένο μοντέλο αρχιτεκτονικής κατανεμημένης μνήμης, όπου κάθε ένας από τους n επεξεργαστές έχει άμεση πρόσβαση μόνο στη δική του μνήμη

ενώ η πρόσβαση σε μνήμη που βρίσκεται σε έτερο επεξεργαστή απαιτεί μεταφορά πληροφοριών μέσω του αλληλοσυνδεομένου δικτύου.

Αμφότερες οι περιπτώσεις παράλληλων αρχιτεκτονικών εμφανίζουν πλεονεκτήματα η μία έναντι της άλλης. Όσον αφορά την πρώτη υπολογιστική αρχιτεκτονική που αναλύσαμε τα πλεονεκτήματα που εμφανίζει είναι :

Τμηματική παραλληλοποίηση (Incremental Parallelization) : Ο προγραμματιστής έχει τη δυνατότητα να παραλληλίσει εύκολα μικρά τμήματα ενός υπολογιστικού μοντέλου ενώ τα υπόλοιπα τμήματα παραμένουν ατροποποίητα. Το γεγονός αυτό ενέχει τη σημασία του όταν ένα ή περισσότερα μικρά τμήματα του μοντέλου καταναλώνουν μεγάλο ποσοστό του υπολογιστικού χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση η επιτάχυνση μιας σημαντικής εφαρμογής δύναται να επιτευχθεί με μικρό κόστος υπό το πρίσμα του χρόνου που απαιτείται για την κατασκευή του μοντέλου.

Ευκολία παραλληλισμού : Ο παραλληλισμός μοιραζόμενης μνήμης είναι εν γένει ευκολότερος να προγραμματιστεί διότι λιγότερες λεπτομέρειες απαιτούνται να διεκπεραιωθούν από τον προγραμματιστή.

Μικρό προγραμματιστικό κόστος : Πολύ μικρές αυξήσεις απαιτούνται σε όλη την έκταση του μοντέλου εν συγκρίσει με την αντίστοιχη εκδοχή του σειριακού μοντέλου. Τυπική αύξηση στην έκταση του μοντέλου είναι από 2% έως 25%, (Chandra et al. 2001). Ειδικά στην περίπτωση του OpenMP οι παράλληλοι κώδικες μπορούν να εκτελεστούν σε σειριακές μηχανές χωρίς να απαιτηθούν αλλαγές στη δομή του μοντέλου.

Από την άλλη πλευρά τα μειονεκτήματα εν συντομία είναι :

Scalability : Συνήθως μηχανές μοιραζόμενης μνήμης δεν αποδίδουν αποτελεσματικά σε μεγάλο αριθμό επεξεργαστών με τον τρόπο που αποδίδουν τα συστήματα κατανεμημένης μνήμης.

Εξειδικευμένος Compiler : Απαιτείται η εγκατάσταση εξειδικευμένου compiler και δυναμικών βιβλιοθηκών.

Κόστος : Μολονότι οι υπολογιστές μοιραζόμενης μνήμης έχουν γίνει πιο οικονομικοί ως προς το κόστος αγοράς εντούτοις παραμένουν πιο ακριβοί από ένα αντίστοιχο, υπό την έννοια αριθμού επεξεργαστών και χωρητικότητας μνήμης, σύστημα κατανεμημένης μνήμης.

Από την παραπάνω συζήτηση που αναπτύχθηκε γίνεται προφανές ότι τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας απαιτούν υπολογιστική αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης διότι με αυτόν τον τρόπο επετεύχθη υψηλό scalability με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση χρηματικών πόρων, γεγονός που επέτρεψε να εκμεταλλευτούμε πλήρως τη συστοιχία μηχανημάτων (cluster) που διαθέτει το εργαστήριο Ρευστομηχανικής & Στροβιλομηχανών καθώς και μελλοντικά τον υπολογιστικό χρόνο σε cluster του εξωτερικού, όπως το HELIOS.

3.4.1 Απόδοση παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου

Η απόδοση της διαδικασίας παραλληλισμού δύναται να διαπιστωθεί μέσω των παρακάτω αποτελεσμάτων που για λόγους ευκολίας παρατίθενται υπό μορφή πίνακα. Το βέλτιστο πλέγμα με το οποίο προσομοιώνεται η διατομή του ορθογωνικού αγωγού απαιτεί τάξη μεγέθους 10^4 πεπερασμένα στοιχεία. Το μοντέλο μας εκτελέστηκε σε 6 μηχανές Intel Pentium Quad – Cores όπου η μνήμη σε κάθε μηχανή είναι 8 Gb. Ο κάτωθι πίνακας περιέχει ενδεικτικά τις κρίσιμες τιμές του Gr_{Cr} για δεδομένο αριθμό Ha όπως προέκυψε στην περίπτωση συναγωγής Rayleigh-Benard παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου εκτελώντας το μοντέλο μας με μεταβλητό αριθμό επεξεργαστών όπου γίνεται εμφανής η αύξηση της απόδοσής (scalability) του αυξάνοντας τον διαθέσιμο αριθμό επεξεργαστών, υπό την έννοια του καταναλισκόμενου CPU χρόνου.

Mesh	Ha	Gr_{Cr}	processors	CPU in minutes
40x20	0	41400	1	25
40x20	0	41400	2	16
40x20	0	41400	4	9
60x30	0	42900	1	68
60x30	0	42900	2	36
60x30	0	42900	4	20
60x30	100	53000	1	68
60x30	100	53000	4	20
80x40	100	53000	1	109
80x40	100	53000	4	30
140x70	100	53000	1	1854
140x70	100	53000	16	450
110x55	800	460000	1	732
110x55	800	460000	16	187
140x70	800	460000	1	1854
140x70	800	460000	16	450

160x80	800	460000	1	3030
160x80	800	460000	20	697

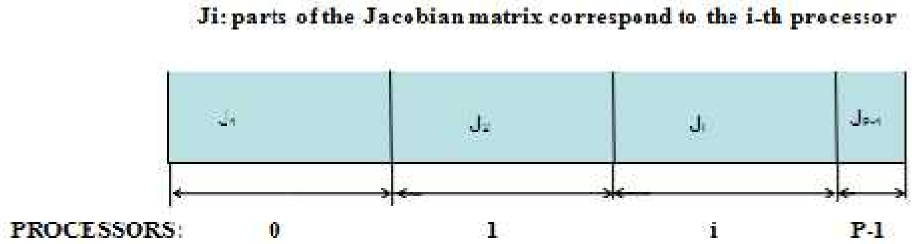
Πίνακας 2 : Σύγκλιση και δεδομένα CPU χρόνου στο κρίσιμο επίπεδο. Οι παράλληλοι υπολογισμοί εκτελέστηκαν στο cluster του εργαστηρίου Ρευστομηχανικής & Στροβιλομηχανών.

3.4.2 Ανάπτυξη παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου

Η αντιστροφή του πίνακα Ιακωβιανής στις εξισώσεις (3.21, 3.28) καταναλώνει το μεγαλύτερο μέρος στην υλοποίηση του μοντέλου ενώ η κατασκευή και αποθήκευση του συγκεκριμένου πίνακα καθορίζει το μεγαλύτερο ποσοστό σε υπολογιστική μνήμη που απαιτεί ο αλγόριθμος. Προκειμένου να βελτιστοποιηθούν οι υπολογισμοί γίνεται χρήση της ιδιότητας ότι οι πίνακες Ιακωβιανής και μάζας είναι πίνακες ζώνης (banded) σε συνδυασμό με το λόγο όψης της διατομής του αγωγού. Έτσι, η αποθήκευση του πίνακα J με τρόπο τμηματικό σε υπολογιστική αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης, όπου κάθε ξεχωριστό τμήμα μνήμης αποθηκεύει κομμάτι του εν λόγω πίνακα, αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο τμήμα του άξονα x. Με άλλα λόγια, υλοποιείται από κάθε επεξεργαστή domain decomposition ως προς τον άξονα x.

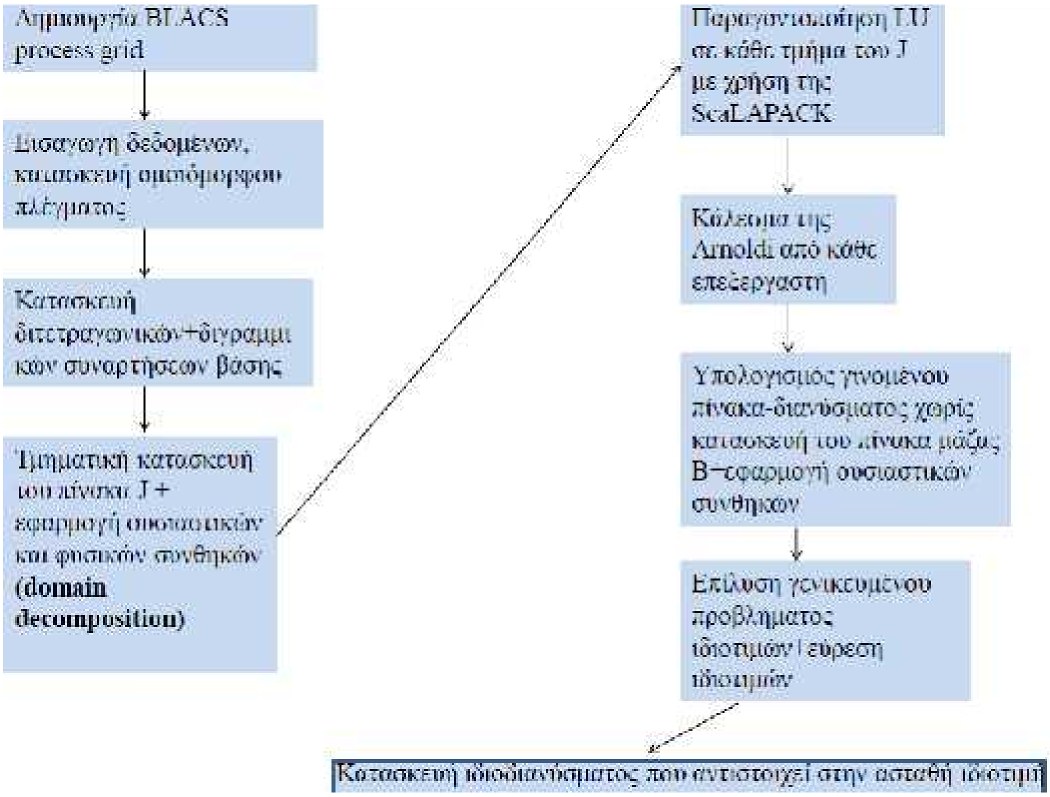
Αρχικά κατασκευάζεται το μονοδιάστατο BLACS (Basic Linear Algebra Communication Subprograms) πλέγμα επεξεργαστών (process grid). Το συγκεκριμένο πρωτόκολλο, υιοθετείται από την προαναφερθείσα παράλληλη βιβλιοθήκη ScaLAPACK, και βασίζεται στις παράλληλες υπορουτίνες που συνιστούν την MPI με τη διαφορά ότι οι αντίστοιχες υπορουτίνες της BLACS είναι πιο ευέλικτες υπό την έννοια ότι απαιτούν λιγότερα ορίσματα και ο κάθε επεξεργαστής ταυτοποιείται από δύο συντεταγμένες, τη γραμμή και τη στήλη στο δημιουργηθέν πλέγμα επεξεργαστών. Το γεγονός αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην υλοποίηση του παράλληλου μη γραμμικού υπολογιστικού μοντέλου που θα αναπτύξουμε σε επόμενο εδάφιο.

Το εν λόγω BLACS πλέγμα επεξεργαστών χρησιμοποιείται όταν το υπολογιστικό φορτίο κατανέμεται ομογενώς και συντελεί σε μία υψηλής απόδοσης υλοποίηση των αλγορίθμων divide-and-conquer της ScaLAPACK. Σε αυτήν την ομοταξία αλγορίθμων ανήκουν οι υπορουτίνες που υιοθετούνται για την αντιστροφή του πίνακα J, όπου λαμβάνεται υπόψη η χαρακτηριστική δομή του ότι πρόκειται για πίνακα ζώνης, και για την επίλυση του συστήματος που προκύπτει από το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, (εξίσωση 3.21). Σχετικά με το πακετάρισμα του πλέγματος ως προς τον οριζόντιο άξονα και αν υποθέσουμε ότι η αρίθμηση επεξεργαστών είναι από 0 έως P-1 τότε το υπολογιστικό πεδίο σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι επεξεργαστές από 0 έως P-2 λαμβάνουν ίσο αριθμό διτετραγωνικών στοιχείων ενώ ο τελευταίος επεξεργαστής P-1 απασχολεί μικρότερο αριθμό στοιχείων, (βλ. σχήμα 11). Σημειώνεται ότι απουσία οποιασδήποτε έντονης επίδρασης λόγω συναγωγής δεν υιοθετούμε σχήμα σταθεροποίησης στη ΜΥΔ μορφοποίηση του προβλήματος (Planas et al. 2011).



Σχήμα 11 : Σχηματικό διάγραμμα του πίνακα Ιακωβιανής J που χωρίζεται σε P τμήματα προκειμένου να διευκολυνθεί η παράλληλη λύση σε περιβάλλον κατανεμημένης μνήμης με P επεξεργαστές με χρήση της βιβλιοθήκης ScaLAPACK.

Τμήμα του καθολικού πίνακα J κατασκευάζεται από κάθε επεξεργαστή και μετά την επιβολή των συνοριακών συνθηκών κατανέμεται στους επεξεργαστές μέσω της ScaLAPACK. Εν συνεχεία, υπολογίζεται το γινόμενο πίνακα-διανύσματος χωρίς την κατασκευή του πίνακα μάζας B, γεγονός που επιφέρει περαιτέρω εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και κόστους, επιβάλλονται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και ακολούθως το γινόμενο Bx κατανέμεται, με τον ίδιο τρόπο που εφαρμόστηκε για τον πίνακα J, στους επεξεργαστές. Τέλος, με χρήση της μεθόδου Arnoldi υπολογίζονται οι μεγαλύτερες κατ’ απόλυτο τιμή ιδιοτιμές. Σε κάθε περίπτωση, αριθμός 150 ιδιοτιμών είναι ικανός για να λάβουμε μια αξιόπιστη εικόνα της δυναμικής του συστήματος που εξετάζουμε. Για λόγους ευκολίας και πληρότητας, παραθέτουμε το διάγραμμα ροής του παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου που αναπτύχθηκε.



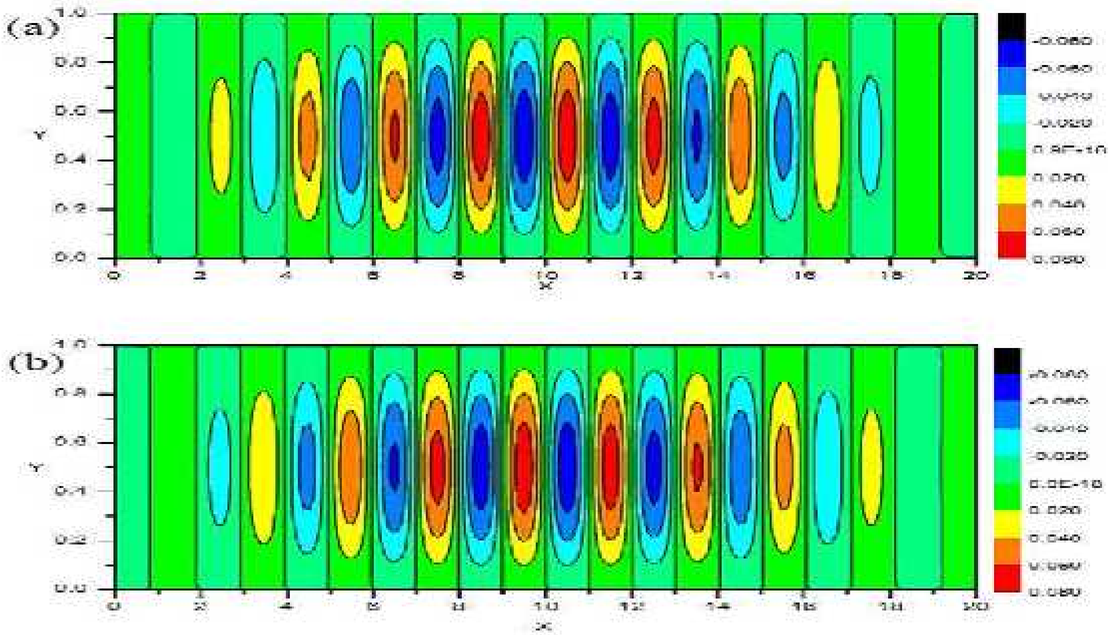
Σχήμα 12 : Διάγραμμα ροής που απεικονίζει τη βασική δομή του παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου.

3.5 Διεξαγωγή ελέγχων "benchmarks"

Προκειμένου να βεβαιωθούμε για την αξιοπιστία και την ορθότητα των υπολογιστικών παράλληλων μοντέλων που αναπτύξαμε είναι απαραίτητη η διεξαγωγή ελέγχου (benchmark test) προσαρμόζοντας κατάλληλα τα μοντέλα έτσι ώστε να επιλυθούν προβλήματα που απαντώνται στη βιβλιογραφία. Το γεγονός αυτό αποτελεί αποδεικτικό στοιχείο της ορθότητας των αριθμητικών αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

3.5.1 Benchmark παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου γραμμικού προβλήματος ευστάθειας συναγωγής Rayleigh - Benard στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

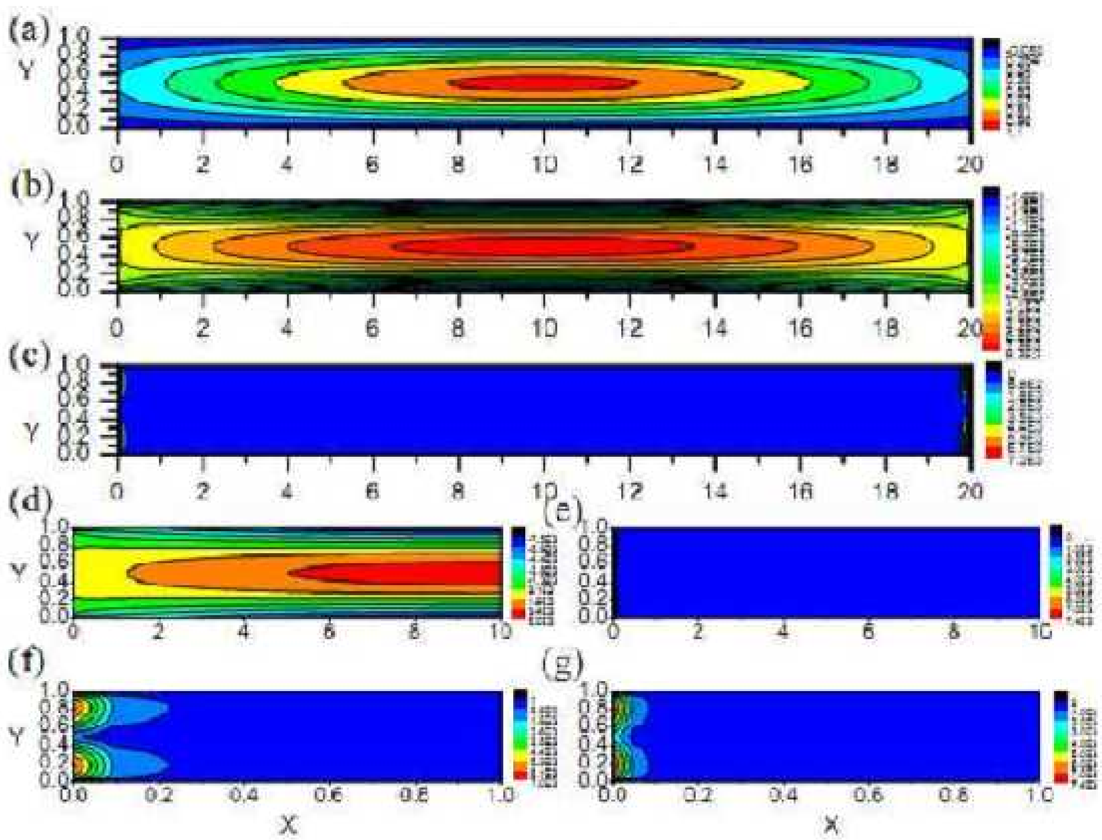
Για την εξακρίβωση της ορθότητας της αριθμητικής μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε παραπάνω έτσι ώστε να επιλυθεί η συγκεκριμένη μορφή ροής μελετήσαμε την ευστάθεια ενός στρώματος ρευστού ευρισκόμενου σε ηρεμία ανάμεσα σε δύο οριζόντιες πλάκες απουσία μαγνητικού πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε την ανάκτηση της κλασσικής αστάθειας Rayleigh-Benard κατά την οποία η κάτω πλάκα βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία εν συγκρίσει με την άνω πλάκα. Για το λόγο αυτό διεξήχθη ουδέτερη ανάλυση ευστάθειας θέτοντας Ha=0, γεγονός που υποδηλώνει την απουσία του μαγνητικού πεδίου και την υδροδυναμική φύση του benchmark προβλήματος, και υπολογίζοντας εν συνεχεία την κρίσιμη τιμή Gr_{Cr} για δεδομένο κυματαριθμό k. Ο αριθμός Pr τίθεται ίσος με 0.02 και αντιστοιχεί σε υγρό μέταλλο κράματος καλίου νατρίου ($Na^{22}K^{78}$), το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην πειραματική μελέτη των Burr & Muller (2002). Ο κυματαριθμός υποδηλώνει μεταβολές του ροϊκού πεδίου ως προς τη διαμήκη z κατεύθυνση του αγωγού. Στο πλαίσιο αυτό, προέκυψε για Ha=0 ότι η κρίσιμη τιμή $Gr_{Cr}\approx42900$, το κρίσιμο ιδιοδιάνυσμα προέκυψε για τιμή κυματαριθμού k=0 και χαρακτηρίζονταν από 10 κύματα κατά τον άξονα x που αντιστοιχούν σε αδιάστατο οριζόντιο μήκος κύματος των διδιάστατων κυμάτων τάξης μεγέθους $\lambda_{Cr}\approx A/10$. Από τη στιγμή που ο λόγος όψης της διατομής του αγωγού A=20 και αφορά τα πειράματα των προαναφερθέντων ερευνητών, τότε το αδιάστατο μήκος κύματος της προκύπτουσας ασταθούς ιδιομορφής είναι $\lambda_{Cr}\approx2h$. Τα σχήματα 13a,b αναπαριστούν τη δομή αυτή στο κρίσιμο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία όταν υιοθετούνται πλέγματα 60x30 και 80x40 διτετραγωνικών στοιχείων, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι η εύρεση της κρίσιμης τιμής Gr_{Cr} διεξάγεται με ακρίβεια τάξης 100.



Σχήμα 13 : Ιδιοδιάνυσμα της θερμοκρασίας όταν Ha=0 για μεταβλητό πλέγμα (a) 60x30 διτετραγωνικών στοιχείων και (b) 80x40 διτετραγωνικών στοιχείων, αντίστοιχα.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι, βασιζόμενοι στην αναλυτική λύση των Reid & Harris (1958), η οριακή ευστάθεια του προβλήματος Benard λαμβάνεται για κρίσιμη τιμή του αριθμού Rayleigh $\hat{Ra}_{Cr} = 1708$ και αντιστοιχεί σε μήκος κύματος τάξης 2.016h. Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμός Rayleigh $Ra = Gr \cdot Pr$. Στη συγκεκριμένη μελέτη των προαναφερθέντων ερευνητών οι αριθμοί $\hat{Ra}, \hat{Gr}$ ορίζονται μέσω της θερμοκρασιακής διαφοράς ανάμεσα στις άνω και κάτω οριζόντιες πλάκες, ενώ στην παρούσα μελέτη το ΔΤ ισούται με το μισό της θερμοκρασιακής διαφοράς ανάμεσα σε δύο όμοιες πλάκες. Κατά συνέπεια έχουμε ότι $\hat{Gr} = 2Gr$ και $\hat{Ra}_{Cr} = 2Ra_{Cr} = 2Gr_{Cr} \cdot Pr \approx 1708$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι το παράλληλο υπολογιστικό μοντέλο που αναπτύξαμε αναπαρήγαγε επιτυχώς τα αποτελέσματα του ανωτέρω κλασσικού υδροδυναμικού προβλήματος.

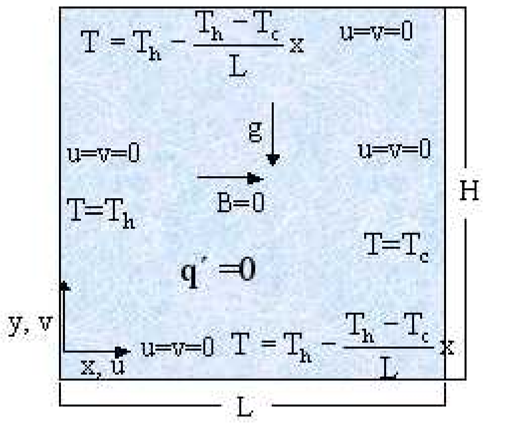
Καθώς ο αριθμός Ha αυξάνεται και η επίδραση της δύναμης Lorentz γίνεται πιο ευδιάκριτη, η κρίσιμη τιμή Gr_{Cr} επίσης αυξάνεται ενώ ο κρίσιμος κυματαριθμός μετατοπίζεται προς τριδιάστατα κύματα με $k_{Cr} \approx 3$ που αντιστοιχεί σε αδιάστατο μήκος κύματος $\lambda_{Cr} \approx 2$. Τα σχήματα 14a,b,c αναπαριστούν το ιδιοδιάνυσμα της θερμοκρασίας μαζί με τις συνιστώσες του ιδιοδιανύσματος της στροβιλότητας Ω_x και $\Omega_{yz} = \sqrt{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}$ στις κρίσιμες συνθήκες. Όταν ο αριθμός Ha=100 ενώ οι λόγοι ηλεκτρικής αγωγιμότητας ως προς τα τοιχώματα Hartmann και πλευρικά είναι c_H=0.00415 και c_S=4.5, αντίστοιχα, τότε από το υπολογιστικό μοντέλο γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας προκύπτει ότι Gr_{Cr}≈53000, k_{Cr}≈3. Στον παρόν υπολογισμό υιοθετήθηκε πλέγμα 110x55 στοιχείων ως προς τους x, y άξονες. Η δευτερεύουσα ροή χαρακτηρίζεται από μονοτονικά ασταθή εστία ανακυκλοφορίας της οποίας η στροβιλότητα είναι περίπου ευθυγραμμισμένη με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Όταν η εν λόγω ιδιομορφή περιέλθει σε κατάσταση κορεσμού αναμένεται να πάρει την μορφή σειράς στάσιμων κυμάτων αναπτυγμένων κατά μήκος του αγωγού, όπου γειτονικές δίνες θα έχουν αντίθετη φορά ανακυκλοφορίας. Το σχήμα 14a απεικονίζει χαρακτηριστικά αυτή τη συμπεριφορά στο ιδιοδιάνυσμα της θερμοκρασίας. Επιπρόσθετα, η x-συνιστώσα της στροβιλότητας κυριαρχεί έναντι των άλλων δύο συνιστωσών της στροβιλότητας, όπως παρουσιάζεται στα σχήματα 14b,c τα οποία απεικονίζουν τα Ω_x και Ω_{yz} στις κρίσιμες συνθήκες. Στην περιοχή που βρίσκεται κοντά στα δύο τοιχώματα Hartmann, όπου και σχηματίζονται οι στοιβάδες Hartmann με σημαντική μεταβολή της y συνιστώσας της ταχύτητας κατά τη x κατεύθυνση παρατηρείται σημαντική αύξηση και των παραπάνω δύο συνιστωσών της στροβιλότητας, i.e. της Ω_x και της Ω_{yz}.. Η εν λόγω δομή παραμένει καθώς το πλέγμα αραιώνεται με πλέγμα 60x30 ή πυκνώνεται με πλέγμα 140x70 διτετραγωνικών στοιχείων στους x, y άξονες, αντίστοιχα. Επιπλέον, θα πρέπει να τονιστεί ότι ειδικά καθώς το πλέγμα αυξάνεται και κατ' επέκταση αυξάνεται σημαντικά το μέγεθος του πίνακα Ιακωβιανής, οι προσομοιώσεις διεξάγονται με το υπολογιστικό μοντέλο να ενσωματώνει τις συνθήκες συμμετρίας που εναρμονίζονται με τη φύση του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος έτσι ώστε να αυξηθεί περαιτέρω η ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών. Τα σχήματα 14d,e παριστάνουν τις x και yz συνιστώσες του διανύσματος της στροβιλότητας που υπολογίζονται με αυτόν τον τρόπο. Τα αποτελέσματα αναπαράγουν με ακρίβεια τα αντίστοιχα που έχουν ληφθεί στην περίπτωση διακριτοποίησης της πλήρους διατομής του αγωγού, όπως φαίνεται στα σχήματα 14b,c. Ο σχηματισμός των στοιβάδων Hartmann εκδηλώνεται εξαιτίας της απότομης αλλαγής της x συνιστώσας της στροβιλότητας καθώς προσεγγίζονται τα τοιχώματα Hartmann (σχήματα 14b,d), αλλά επίσης και λόγω της ύπαρξης στενής λωρίδας υψηλής yz στροβιλότητας (σχήματα 14e,f). Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικές με τη φύση των στοιβάδων Hartmann και πλευρικών παρέχονται στην επόμενη ενότητα. Ο κύριος όγκος των αποτελεσμάτων που παρατίθενται στην ενότητα των αποτελεσμάτων λαμβάνεται με χρήση της συνθήκης συμμετρίας που περιγράφεται από την εξίσωση (2.15). Αποτελεί μια καλώς τεκμηριωμένη προσέγγιση από τη στιγμή που σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις η κυρίαρχη ιδιομορφή στις κρίσιμες συνθήκες, όπως λαμβάνεται από διακριτοποίηση της πλήρους διατομής, είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο x=A/2.



Σχήμα 14 : Ισοϋψείς που αντιστοιχούν σε (a) θερμοκρασία, (b) x συνιστώσα στροβιλότητας, (c) yz συνιστώσα στροβιλότητας για Ha=100 και πλέγμα 110x55 στοιχείων. Τα σχήματα (d,e) αναπαράγουν τα αποτελέσματα σχημάτων (b,c) χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συμμετρίας. Τα σχήματα (f,g) εστιάζουν στη yz στροβιλότητα που παριστάνεται στα σχήματα (c,e), αντίστοιχα, στη γειτονική περιοχή του τοιχώματος Hartmann.

3.5.2 Benchmark υπολογιστικού μοντέλου γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής ελεύθερης συναγωγής στρώματος υγρού μετάλλου, παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Η διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με αγώγιμα οριζόντια τοιχώματα έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές (Henkes & Le Quere 1996, Gelfgat & Tanasawa 1994). Επικεντρώσαμε το ενδιαφέρον μας σε μελέτη των Xin & Le Quere (2001) που αφορούσε την χρήση γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας σε διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με θερμικά αγώγιμα οριζόντια τοιχώματα, μέσα στην οποία η ροή ρευστού συντελείται λόγω ελεύθερης συναγωγής απουσία μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας, (σχήμα 15).

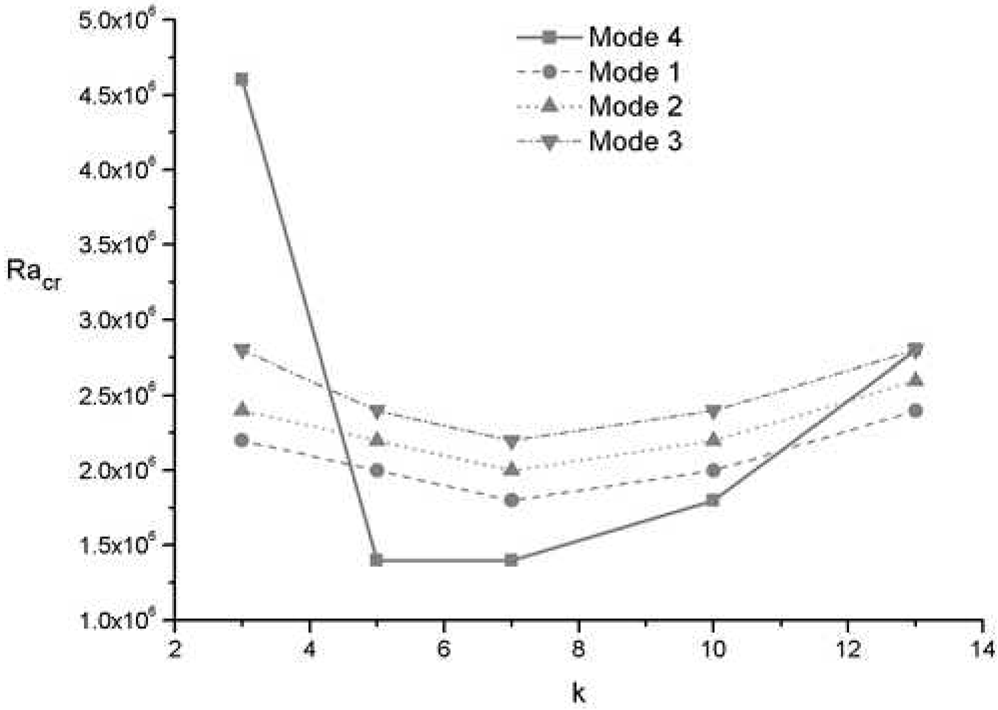


Σχήμα 15: Σχηματικό διάγραμμα της διατομής της κοιλότητας σε μελέτη των Xin & Le Quere (2001).

Οι παραπάνω ερευνητές προκειμένου να διαπιστώσουν την ύπαρξη επιπλέον Hopf διακλαδώσεων για τιμή μικρότερη του αριθμού Ra=1.64x10^6, ολοκλήρωσαν αριθμητικά τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier - Stokes σε μη μόνιμη κατάσταση για τιμή Ra=1.6x10^6 και δεδομένες τιμές του κυματαριθμού $k \in [0, 24]$ ξεκινώντας από μικρής έντασης τυχαίες διακυμάνσεις. Οι υπολογισμοί έδειξαν ότι οι διαταραχές αρχικά αποσβεννύονται υπό μορφή ταλάντωσης για το συγκεκριμένο αριθμό Rayleigh. Ωστόσο, όταν ολοκλήρωσαν για μεγάλο χρονικό διάστημα (περίπου 1000 αδιάστατες χρονικές μονάδες) διαπίστωσαν ιδιομορφή στάσιμου κύματος που ενισχυόταν αργά. Σε αυτή την περίπτωση, η επαναληπτική μέθοδος Arnoldi που χρησιμοποίησαν απέδωσε μόνο ένα ζεύγος ιδιοτιμών που ανήκε στη συγκεκριμένη ιδιομορφή (mode 4). Η τελευταία εμφανίζεται μόνο για τριδιάστατες διαταραχές και μάλιστα εμφανίζεται πριν από τις αντίστοιχες Hopf που κυριαρχούν για διδιάστατες (k=0) διαταραχές. Η ενδεικτική μορφή βασικής ροής όταν $Ra=1.64x10^6$ παρουσιάζει ροϊκές γραμμές που καμπυλώνονται στις τέσσερις γωνίες της διατομής της κοιλότητας.

Όταν ο κυματαριθμός k διαιρεθεί με την τιμή 2π τότε εκφράζει το μήκος κύματος, ℓ=2π/k, που αντιστοιχεί στην προκύπτουσα ιδιοτιμή κατά τη διαμήκη κατεύθυνση της κοιλότητας. Στην περίπτωση κατά την οποία ο κυματαριθμός μηδενιστεί αναμένουμε τα αποτελέσματα του τριδιάστατου προβλήματος να συμπέσουν με τα αντίστοιχα από την επίλυση του διδιάστατου προβλήματος. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός αυτό εφαρμόσαμε benchmark υπολογισμούς έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων από το τριδιάστατο πρόβλημα.

Προσαρμόσαμε κατάλληλα το υπολογιστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε έτσι ώστε να επιλύει το πρόβλημα των εν λόγω ερευνητών και αναπαρήγαμε τα αριθμητικά τους αποτελέσματα, ως εκ τούτου κατασκευάσαμε το διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας (σχήμα 16) που αντιστοιχεί στις τρεις κυρίαρχες ιδιομορφές Hopf όπως προέκυψε από τη διδιάστατη ανάλυση. Καθώς ο κυματαριθμός αυξάνεται παραμένουν ασταθείς και προσλαμβάνουν τη μορφή οδευόντων κυμάτων, (modes 1, 2, 3). Επιπλέον, στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται η ιδιομορφή στάσιμου κύματος, (mode 4), η οποία γίνεται κυρίαρχη ιδιομορφή για k≥4. Το παρακάτω διάγραμμα βρίσκεται σε συμφωνία με την προαναφερθείσα μελέτη.



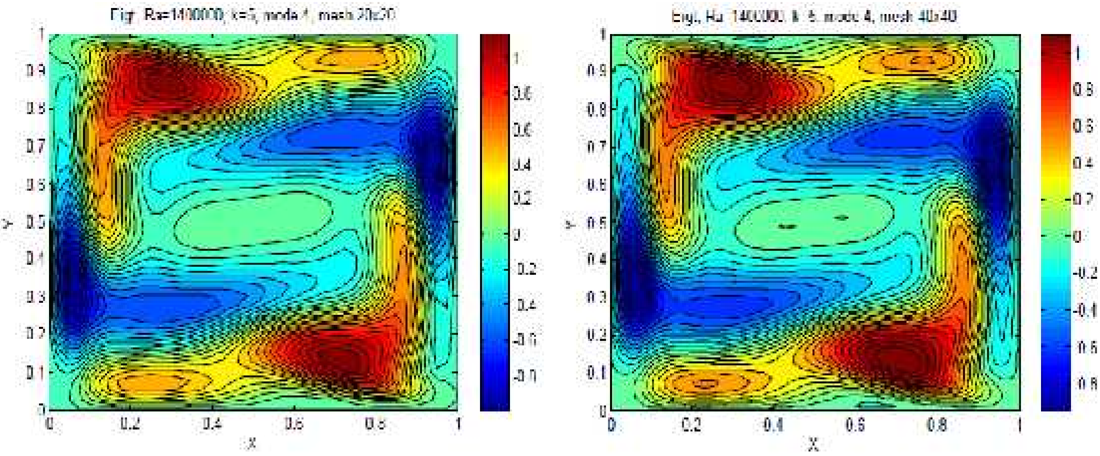
Σχήμα 16 : Διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας των τεσσάρων κυρίαρχων ασταθών ιδιομορφών του benchmark υπολογισμού.

Ο πίνακας 3 περιέχει τις συχνότητες που συνδέονται με τις τρεις ιδιομορφές Hopf όπως λαμβάνονται από τη μεθοδολογία των Xin & Le Quere (2001) και την αντίστοιχη δική μας όπου γίνεται εμφανής η ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Η τριδιάστατη δομή του ιδιοδιανύσματος της θερμοκρασίας που αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιομορφή στάσιμου κύματος (mode 4) χαρακτηρίζεται από vortical tubes που βρίσκονται στο επίπεδο της βασικής ροής και περιορίζονται κοντά στις τέσσερις γωνίες της διατομής με χρήση πλέγματος 20x20 και 40x40 διτετραγωνικών στοιχείων, (σχήμα 17a,b). Γίνεται εμφανής η συμφωνία μεταξύ αραιότερου και πυκνότερου πλέγματος. Επιπρόσθετα, δίδονται οι ισο-επιφάνειες (iso-surfaces) της θερμοκρασίας στην κοιλότητα όπως καθορίζεται από τις ασταθείς ιδιομορφές που αντιστοιχούν σε οδεύον κύμα με συχνότητα ω=1.39 (mode 1, σχήμα 18a) και σε στάσιμο κύμα (mode 4, σχήμα 18b). Οι ισο-επιφάνειες στο σχήμα 18a δείχνουν ότι η πιο σημαντική διαφορά λαμβάνει χώρα στα κάθετα συνοριακά στρώματα και στις γωνίες της διατομής της κοιλότητας όπου οι δομές είναι μικρότερες. Επιπλέον, οι διαταραχές αποσβεννύονται πριν φτάσουν στις γωνίες και ενισχύονται ελαφρώς εκ νέου. Αντίστοιχα, στο σχήμα 18b το οποίο αποτελεί την τριδιάστατη εκδοχή του σχήματος 17 παρατηρούμε την δημιουργία εστιών ανακυκλοφορίας στις γωνίες. Μάλιστα οι δομές που σχηματίζονται σε αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις αντίστοιχες δομές του σχήματος 18a και ως εκ τούτου η ανακυκλοφορία είναι πιο έντονη.

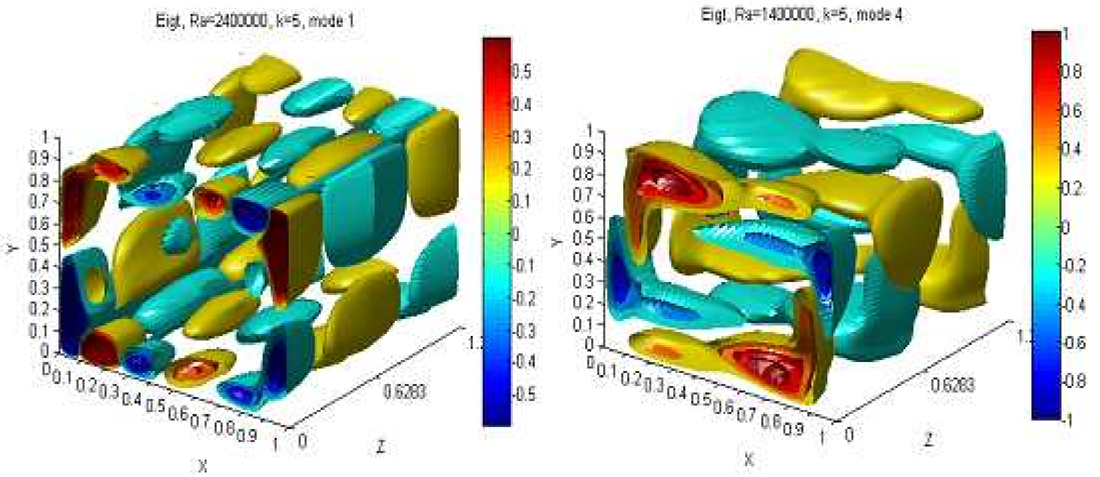
Όπως επισημάνθηκε από τους εν λόγω ερευνητές τα ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά της διαταρασσόμενης ροής, για παράδειγμα η αντισυμμετρία και ο σχετικά μεγάλος κυρίαρχος κυματαριθμός k_{Cr}≈7, επικυρώνονται από τη φύση της ως αστάθεια τύπου Goertler που συνδέεται με την καμπύλωση των ροϊκών γραμμών και την ένταση της διάτμησης κοντά στα στερεά τοιχώματα.

Μεθοδολογία	mode 1	mode 2	mode 3
Παρούσα εργασία, (20x20) διτετραγωνικά στοιχεία	1.38	1.16	1.61
Παρούσα εργασία, (40x40) διτετραγωνικά στοιχεία	1.39	1.16	1.61
Xin & Le Quere, 41x41 collocation σημεία	1.414 84	1.192 73	1.621 84

Πίνακας 3 : Ιδιοσυχνότητες των ιδιομορφών Hopf στις κρίσιμες συνθήκες (ελάχιστος ασταθής Ra) για τιμή του Pr=0.71.



Σχήμα 17 : Ιδιοδιάνυσμα θερμοκρασίας που αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιομορφή στάσιμου κύματος (mode 4) όπως προέκυψε στις κρίσιμες συνθήκες για Ra=1400000, Pr=0.71 και πλέγμα (a) 20x20 και (b) 40x40 διτετραγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 18: Κατανομή θερμοκρασίας στην κοιλότητα με βάση την ασταθή ιδιομορφή που αντιστοιχεί (a) στο mode 1, Ra=2400000, Pr=0.71 και (b) στο στάσιμο κύμα, Ra=1400000, Pr=0.71 και πλέγμα 40x40 διτετραγωνικών στοιχείων.

3.6 Μη γραμμική ανάλυση προβλήματος ευστάθειας συναγωγής Rayleigh - Benard στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Η ανάλυση ευστάθειας σε βασική κατάσταση, η οποία καθορίζεται από το γραμμικό προφίλ θερμοκρασιών, αδυνατεί να ερμηνεύσει την ύπαρξη ιδιομορφών οδευόντων κυμάτων. Κατά συνέπεια, τα πειραματικά ευρήματα των Burr & Muller

(2002) στην περιοχή της μεταβατικής συναγωγής δεν δύνανται να αποδοθούν σε θερμική αστάθεια, που ισχύει στην περιοχή της μόνιμης συναγωγής. Συνεπώς, το δυναμικό πέρασμα προς τις οιονεί διδιάστατες δομές και την τύρβη που καταγράφουν οι προαναφερθέντες ερευνητές δεν μπορούν να ανιχνευθούν μέσω της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας και απαιτείται περαιτέρω έρευνα έτσι ώστε να επιβεβαιωθεί η ρεαλιστική δυναμική της μετάβασης σε τύρβη σε ροές ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου.

Συγκεκριμένα, ο ρόλος των οιονεί διδιάστατων δομών απομένει να επαληθευτεί και ο ακριβής μηχανισμός, ο οποίος θα παράγει τέτοιου είδους μορφή ροής, χρειάζεται να γίνει πλήρως αντιληπτός και να περιγραφεί ενδελεχώς. Τα θέματα αυτά αποτελούν θεμελιώδη ζητήματα ως προς την κατανόηση της δυναμικής της μετάβασης των ροών ελεύθερης συναγωγής και κατέχουν κεντρικό ρόλο στη βελτιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας υπό τέτοιες συνθήκες όπως προτείνονται από τους παραπάνω ερευνητές.

Σε μια προσπάθεια αποσαφήνισης των παραπάνω θεμάτων θα διεξαχθεί μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας για τη μορφή ροής του σχήματος 8 με σκοπό την εξεύρεση ακριβούς περιγραφής της μη γραμμικής επίδρασης των ασταθών ιδιομορφών που αναδύονται στην περίπτωση της χρονομεταβαλλόμενης ή μεταβατικής συναγωγής. Η φύση της μεταβατικής συναγωγής θα ανακτηθεί και επιπλέον θα διασταυρωθεί με τα ευρήματα που προέκυψαν από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας δίνοντας έμφαση στο πεδίο της στροβιλότητας. Επιπρόσθετα, η λύση θα εξεταστεί έτσι ώστε να ταυτοποιηθούν συνεκτικές δομές (coherent structures) που δρουν στα άκρα μεταξύ της μη γραμμικότητας και της τύρβης. Θα εξεταστεί η πιθανότητα οι οιονεί διδιάστατες κατακόρυφες ροές να προσλάβουν αυτό το ρόλο λαμβάνοντας υπόψη τις επιπτώσεις στη μεταφορά θερμότητας του πεδίου ροής στον αγωγό (Burr & Muller 2002).

Για το σκοπό αυτό, μελετάται ροή ελεύθερης συναγωγής σε αγωγό ορθογωνικού σχήματος υποθέτοντας περιοδικότητα στη διαμήκη κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Το μέγεθος του αγωγού είναι παρόμοιο με το αντίστοιχο που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα των προαναφερθέντων ερευνητών έτσι ώστε η διαμήκης κατεύθυνση να έχει τη δυνατότητα να χωράει ένα ικανό αριθμό στάσιμων κυμάτων που αναδύονται εξαιτίας της αρχικής θερμικής αστάθειας. Τα FEM υιοθετούνται για τη διακριτοποίηση της διατομής του αγωγού συζευγμένα με τη χρήση spectral modes στον άξονα z (Gottlieb & Orszag 1977, Patera 1984) σε συνδυασμό με την ψευδοφασματική προσέγγιση για τον υπολογισμό τον μη γραμμικών όρων (Orszag & Kells 1980). Με την μέθοδο αυτή έχει επιλυθεί ευρεία γκάμα προβλημάτων όπως ροές μέσα σε αγωγούς (Orszag & Kells 1980) ροές με διεπιφάνεια (Dimas & Triantafyllou 1994) και ροές γύρω από στερεά σώματα (Snyder & Degrez 2002 & Vanden - Abeele et al. 2004). Στις προηγούμενες δύο μελέτες χρησιμοποιείται αμιγώς φασματική προσέγγιση για την επιμήκη και την εγκάρσια διεύθυνση της ροής ενώ εισάγεται κλασματική μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης με ρητό και άρρητο σχήμα για τους μη γραμμικούς και τους γραμμικούς όρους, αντίστοιχα. Στις δύο τελευταίες μελέτες χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ο συνδυασμός πεπερασμένων στοιχείων στην διατομή με φασματική μέθοδο στην διαμήκη κατεύθυνση. Στην παρούσα εργασία γίνεται επίσης συνδυασμός πεπερασμένων στοιχείων με φασματική μέθοδο για την χωρική διακριτοποίηση ενώ εφαρμόζεται αριθμητικό σχήμα semi-implicit χρονικής ολοκλήρωσης. Οι μη γραμμικοί όροι της συναγωγής αντιμετωπίζονται ρητώς μέσω της μεθόδου Adams-Bashforth δεύτερης τάξης, ενώ οι γραμμικοί όροι προσεγγίζονται με άρρητο τρόπο χρησιμοποιώντας αριθμητικό σχήμα Crank-Nicolson δεύτερης τάξης, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η απόζευξη διαφορετικών φασματικών ιδιομορφών ενώ ταυτόχρονα ευνοείται ο παράλληλος χειρισμός της διαδικασίας επίλυσης. Λόγω της μη ύπαρξης βεβιασμένης συναγωγής αποφεύγεται η χρήση τεχνικών ανάντη σταθεροποίησης (Streamwise Upwinding Petrov Galerkin).

Από τη στιγμή που το μεγαλύτερο μέρος του υπολογιστικού χρόνου που καταναλώνει ο αλγόριθμος αφορά τον υπολογισμό των διαφόρων Fourier modes και περιλαμβάνει την αντιστροφή πίνακα σε κάθε mode, υιοθετείται παράλληλη στρατηγική η οποία θα συνδυάζει : (α) domain decomposition που θα υλοποιείται από κάθε επεξεργαστή και θα αντιστοιχεί σε διαφορετικό τμήμα της διατομής του αγωγού και κατ' επέκταση διαφορετικά τμήματα του πίνακα ζώνης (Dimopoulos & Pelekasis 2012) για κάθε επίπεδο z και ταυτόχρονα (β) Fourier decomposition έτσι ώστε να επιλύονται ανεξάρτητα τόσα συστήματα της μορφής Ax=b όσοι και οι Fourier modes που θέτουμε. Τις δύο συγκεκριμένες παράλληλες στρατηγικές θα τις αναλύσουμε διεξοδικά παρακάτω.

Προκειμένου να βελτιστοποιήσουμε το υπολογιστικό μοντέλο υπό την έννοια ελαχιστοποίησης της χωρητικότητας που θα καταλαμβάνει σε μνήμη και απαιτήσεων σε CPU χρόνο, υιοθετούνται οι βιβλιοθήκες ScaLAPACK και FFTE (Fast Fourier Transform East). Χρησιμοποιούνται τα πρωτόκολλα επικοινωνίας MPI και BLACS έτσι ώστε να συντονιστεί η επικοινωνία ανάμεσα σε διαφορετικούς υπολογιστικούς κόμβους.

3.6.1 Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Fourier Transform - DFT) είναι ένας αλγόριθμος με ευρεία χρήση στις επιστήμες. Παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές, όπως η ανάλυση κυματομορφών, η επίλυση γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, ο υπολογισμός της συνέλιξης, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος και η επεξεργασία εικόνας. Ο DFT είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει n ομοιόμορφα δείγματα ενός κύκλου περιοδικού σήματος, σε ίσο αριθμό σημείων που αντιπροσωπεύουν το φάσμα συχνοτήτων του σήματος. Ωστόσο, ο αριθμός πράξεων που απαιτούνται για την υλοποίηση του είναι $O(n^2)$ και κατά συνέπεια κρίνεται ασύμφορος από άποψη υπολογιστικού κόστους.

Οι Cooley & Tukey (1965) δημιούργησαν έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός n-σημείων DFT του οποίου η υλοποίηση απαιτούσε $O(n\log_2 n)$ πράξεις. Ο αλγόριθμος τους αποτέλεσε μια σημαντικότατη εξέλιξη στο πεδίο των DFT αλγορίθμων και αναφέρεται ως ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform - FFT). Λόγω της ευρείας χρήσης του αλγορίθμου, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την υλοποίηση FFT αλγορίθμων σε παράλληλες αρχιτεκτονικές. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να επεξηγηθούν ορισμένες έννοιες της θεωρίας των FFT αλγορίθμων.

Έστω ότι έχουμε είσοδο X = < X[0], X[1], ..., X[n-1] > μεγέθους n. Ο DFT της X είναι μια ακολουθία Y = < Y[0], Y[1], ..., Y[n-1] > (X[i], Y[i] εν γένει μιγαδικοί αριθμοί), όπου

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{n-1} X[k]\mu^{ki},\ 0 \le i < n \qquad (3.35)$$

όπου $\mu = e^{2® \sqrt{-1}/n}$. Οι δυνάμεις του ω που χρησιμοποιούνται στον FFT καλούνται twiddle factors.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.35), ο υπολογισμός ενός Y[i] απαιτεί n μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Για το λόγο αυτό η πολυπλοκότητα του DFT αλγορίθμου για τον υπολογισμό του Y είναι $O(n^2)$. O FFT που θα περιγράψουμε στη συνέχεια έχει πολυπλοκότητα $O(n\log_2 n)$. Ας υποθέσουμε ότι το n είναι δύναμη του 2. Ο FFT στηρίζεται στο γεγονός ότι ένας n-point DFT μπορεί να χωριστεί σε δύο (n/2-point) DFTs, ως εξής :

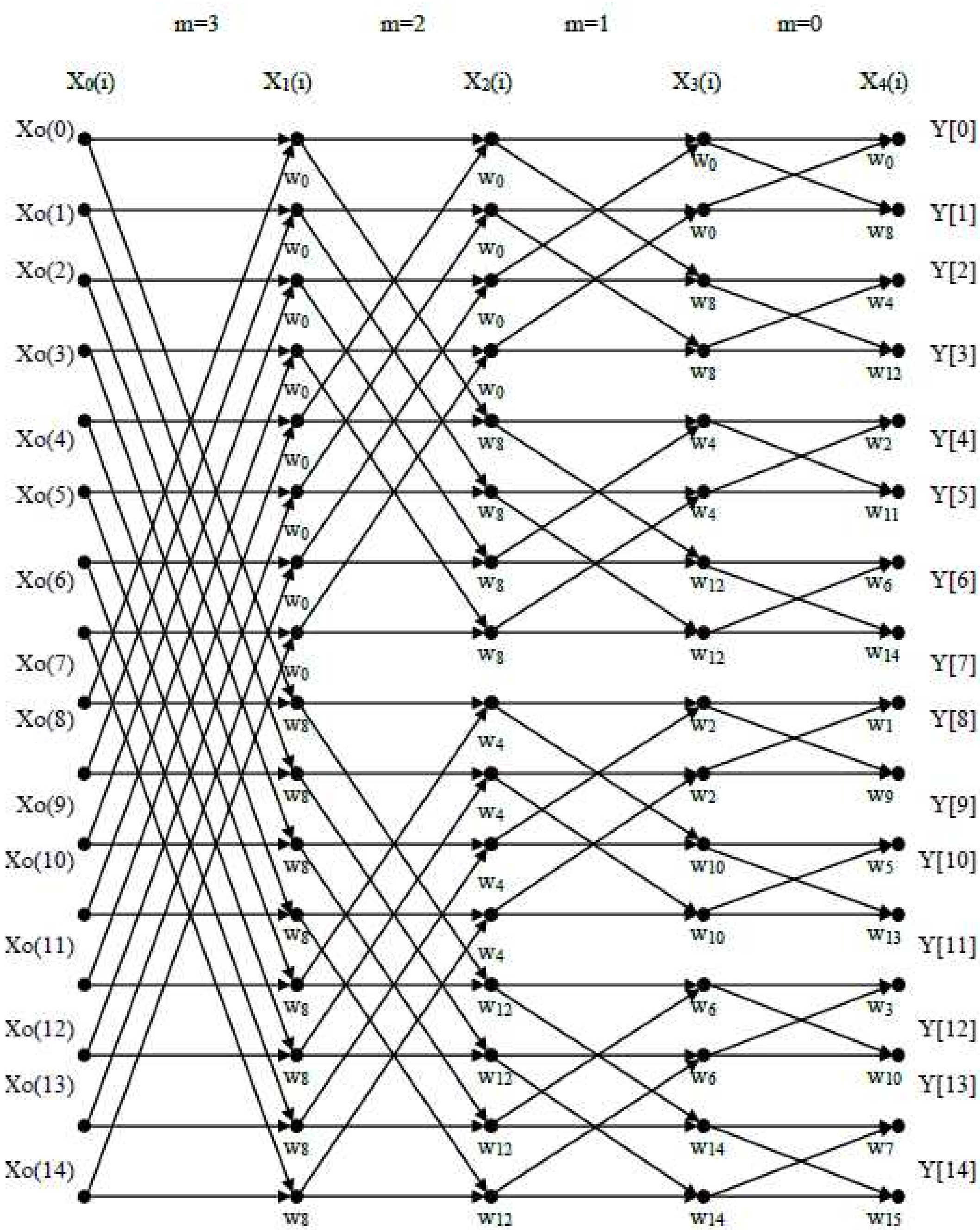
$$\begin{aligned} Y[i] &= \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k]\mu^{2ki} + \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1]\mu^{(2k+1)i} \\ &= \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k]e^{2(2® \sqrt{-1}/n)©i} + \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1]\mu^{i} e^{2(2® \sqrt{-1}/n)©i} \\ &= \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k]e^{2® \sqrt{-1}©i/(n/2)} + \mu^{i} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1]e^{2® \sqrt{-1}©i/(n/2)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Θέτοντας $´ = e^{2® \sqrt{-1}/(n/2)} = \mu^{2}$ γίνεται φανερό πως ο n-point DFT διαιρείται σε δύο (n/2-point) DFTs :

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k]´^{ki} + \mu^{i} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1]´^{ki} \quad (3.37)$$

Αν το n είναι δύναμη του δύο, κάθε ένας από τους παραπάνω DFT μπορεί να χωριστεί με τον ίδιο τρόπο σε δύο μικρότερους, με το ίδιο μέγεθος (μισό του DFT από τον οποίο προήλθαν).

Παρακάτω δίνουμε τον γράφο ροής δεδομένων, (σχήμα 19), στον οποίο παρουσιάζεται ο τρόπος σύμφωνα με τον οποίο συνδυάζονται τα στοιχεία εισόδου ενός FFT 16 σημείων. Κάθε κόμβος συμβολίζει ένα δεδομένο. Ένας πίνακας δεδομένων αποτελεί μία στήλη κόμβων. Κάθε κόμβος έχει δύο εισόδους, τις δύο ακμές όπου καταλήγουν σε αυτόν. Μία ακμή στον γράφο μεταφέρει το δεδομένο που βρίσκεται στο ένα άκρο της, πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα w^p , που βρίσκεται στο άλλο άκρο της, όπου στην παρούσα περίπτωση η μεταβλητή p λαμβάνει τιμές από 0 έως 15. Απουσία του παράγοντα w^p υποδηλώνει ότι $w^p = 1$. Οι δύο είσοδοι σε έναν κόμβο συνδυάζονται με την πράξη της πρόσθεσης. Έτσι για παράδειγμα για τον κόμβο $X_2(2)$ ισχύει : $X_2(2) = X_1(2) + X_1(6) * w_0$.



Σχήμα 19 : Γράφος σύμφωνα με τον οποίο συνδυάζονται τα στοιχεία της εισόδου για τον υπολογισμό ενός FFT 16 σημείων, όπου m δείκτης επανάληψης του εξωτερικού βρόχου, (Θεμελίδης 2004).

3.6.1.1 Αλγόριθμος transpose FFT για παράλληλες αρχιτεκτονικές

Οι δύο πιο βασικοί και αντιπροσωπευτικοί αλγόριθμοι που έχουν σχεδιαστεί για τον υπολογισμό του FFT σε παράλληλες αρχιτεκτονικές είναι οι εξής : αλγόριθμος binary exchange και ο αντίστοιχος transpose. Οι δύο αυτοί αλγόριθμοι διαφέρουν σημαντικά στο κυριότερο κομμάτι ενός παράλληλου αλγορίθμου, στην επικοινωνία μεταξύ των διεργασιών.

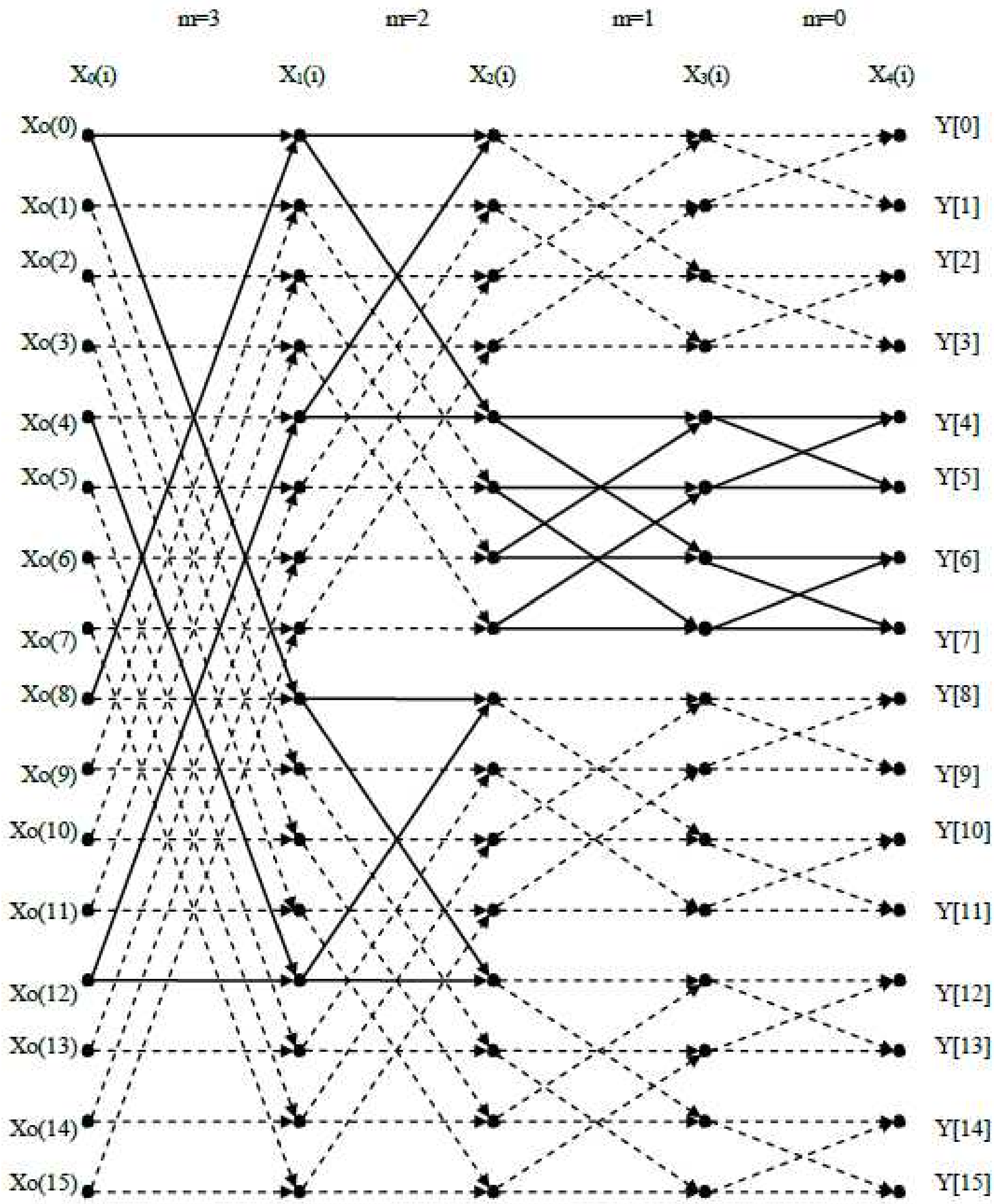
Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας ο αλγόριθμος FFT που υιοθετούμε μέσω της προαναφερθείσας βιβλιοθήκης FFTE (Takahashi 2000) στηρίζεται στην ιδιότητα ότι οι μετασχηματισμοί ανάμεσα στο φυσικό χώρο και στον αντίστοιχο συχνοτήτων είναι ισοδύναμοι με την παράλληλη μετάθεση πίνακα και επιτυγχάνονται με χρήση της εντολής ALLTOALL που αποτελεί συνάρτηση του πρωτοκόλλου MPI (Vanden-Abeele et al.). Κατά συνέπεια, εφαρμόζουμε στη πράξη τον αλγόριθμο transpose τον οποίο και θα αναλύσουμε.

Ο εν λόγω αλγόριθμος απαιτεί την εφαρμογή μίας διαδικασίας transpose πάνω σε ένα πίνακα. Ας υποθέσουμε ότι η $\sqrt{n}$ είναι δύναμη του δύο και ότι η είσοδος του αλγόριθμου, μεγέθους n, είναι διατεταγμένη σε έναν $\sqrt{n}x\sqrt{n}$ τετραγωνικό πίνακα. Αν τα δεδομένα μεγέθους n διαταχθούν σε ένα $\sqrt{n}x\sqrt{n}$ πίνακα τότε ένας FFT n σημείων είναι ισοδύναμος με ανεξάρτητους FFTs $\sqrt{n}$ σημείων στις γραμμές του πίνακα, ακολουθούμενοι από ανεξάρτητους FFTs $\sqrt{n}$ σημείων στις στήλες.

Αν γίνει μετασχηματισμός στον $\sqrt{n}x\sqrt{n}$ πίνακα μετά τον υπολογισμό των $\sqrt{n}$ σημείων κατά γραμμές ανεξάρτητων FFTs, το υπόλοιπο μέρος του αλγόριθμου αποτελεί υπολογισμό των $\sqrt{n}$ σημείων κατά γραμμές ανεξάρτητων FFTs του μετασχηματισμένου πίνακα. Ο αλγόριθμος transpose χρησιμοποιεί ακριβώς αυτή την ιδιότητα για τον παράλληλο υπολογισμό του FFT, κατανέμοντας κατά γραμμές τον $\sqrt{n}x\sqrt{n}$ πίνακα στις διεργασίες.

Εν γένει ο transpose FFT αλγόριθμος λειτουργεί σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα υπολογίζεται ένας FFT $\sqrt{n}$ σημείων για κάθε γραμμή. Στο δεύτερο βήμα ο πίνακας δεδομένων μετασχηματίζεται, δηλαδή οι γραμμές του πίνακα γίνονται στήλες και οι στήλες γραμμές. Το τρίτο και τελευταίο βήμα είναι όμοιο με το πρώτο και υπολογίζεται ένας FFT $\sqrt{n}$ σημείων για κάθε γραμμή του μετασχηματισμένου πλέον πίνακα. Τα βήματα 1 και 3 δεν περιλαμβάνουν επικοινωνία μεταξύ των διεργασιών διότι όλη η απαραίτητη επικοινωνία πραγματοποιείται στο βήμα 2, όπου λαμβάνει χώρα μια ALLTOALL επικοινωνία.

Στη γενική περίπτωση όπου έχουμε p διεργασίες ($1 \leq p < n$) ο πίνακας χωρίζεται σε μπλοκ με $\sqrt{n}/p$ γραμμές το καθένα, και κάθε ένα από αυτά τα μπλοκ ανατίθεται σε μια διεργασία. Στια βήματα 1 και 3 κάθε διεργασία υπολογίζει $\sqrt{n}/p$ FFTs $\sqrt{n}$ σημείων. Τέλος, για να κατανοήσουμε καλύτερα τη λογική του transpose FFT θα παραστήσουμε στο γράφο ροής δεδομένων τον τρόπο με τον οποίο ο αλγόριθμος ομαδοποιεί τα στοιχεία. Στο σχήμα 20 παριστάνεται με έντονες ακμές το πρώτο βήμα για την πρώτη γραμμή του διδιάστατου πίνακα και το δεύτερο βήμα για τη δεύτερη γραμμή του μετασχηματισμένου πίνακα. Είναι φανερό ότι στο πρώτο βήμα τα δεδομένα X[0], X[4], X[8], X[12] επικοινωνούν μόνο μεταξύ τους, χωρίς να αλληλεπιδρούν με τους υπόλοιπους κόμβους του γράφου. Το ίδιο ισχύει στο δεύτερο βήμα για τα δεδομένα X[4], X[5], X[6], X[7] του μετασχηματισμένου πίνακα. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για όλες τις γραμμές του πίνακα.



Σχήμα 20 : Γράφος όπου με έντονες ακμές δείχνουμε την πρώτη φάση για την πρώτη γραμμή του διδιάστατου πίνακα και την δεύτερη φάση για τη δεύτερη γραμμή του μετασχηματισμένου πίνακα, (Θεμελίδης 2004).

3.6.1.2 Συμμετρία Fourier

Η ανάγκη επίλυσης για τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier επιφέρει πρόσθετο υπολογιστικό κόστος και αρχικά φαίνεται να καθιστά απαγορευτική την προσφυγή σε υλοποίηση spectral decomposition. Ωστόσο, το κόστος αυτό αντισταθμίζεται με δύο τρόπους. Πρώτον, η υψηλότερη ακρίβεια του συγκεκριμένου decomposition επιτρέπει να υιοθετηθούν λιγότερες θέσεις-επίπεδα κατά τη διαμήκη κατεύθυνση του αγωγού εν συγκρίσει με την υιοθέτηση αριθμητικού σχήματος FEM ή FDM. Επιπλέον, επειδή είναι γνωστό ότι οι μεταβλητές στο φυσικό χώρο είναι αμιγώς πραγματικές μπορούν να ληφθούν υπόψη απλουστεύσεις οι οποίες θα έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση του μεγέθους του υπολογισμού που απαιτείται για την επίλυση του συστήματος. Έστω οι τιμές στο φυσικό χώρο g_k είναι αμιγώς πραγματικές τότε λόγω της συμμετρίας που ισχύει στο Fourier χώρο λαμβάνουμε :

$$\hat{g}(-f) = \left[\hat{g}(f)\right]^* \tag{3.38}$$

όπου ο αστερίσκος στο δεξί μέλος υποδηλώνει τη μιγαδική συζυγή τιμή. Κατά συνέπεια, το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει σε κάθε mode χρειάζεται να επιλυθεί για τους πρώτους N/2+1 συντελεστές Fourier, και οι υπόλοιποι modes δύνανται να υπολογιστούν από τη συνθήκη συμμετρίας (3.38). Επιπρόσθετα, για άρτιο αριθμό ιδιομορφών Fourier οι συντελεστές 0 και N/2 είναι αμιγώς πραγματικοί και κατ’ επέκταση οι φανταστικές συνιστώσες μπορούν να εξαλειφθούν από το σύστημα. Οι απλουστεύσεις αυτές συνοψίζονται στο κάτωθι σχήμα.

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & \rightarrow real \\
\left.\begin{array}{l} k = 1 \\ \vdots \\ k = N/2 - 1 \end{array}\right\} & \rightarrow real + imaginary \\
k = N/2 & \rightarrow real \\
\left.\begin{array}{l} k = N/2 + 1 \\ \vdots \\ k = N - 1 \end{array}\right\} & \rightarrow \hat{g}_k = [\hat{g}_{N-k}]^*
\end{array}$$

Σχήμα 21 : Απεικόνιση της ιδιότητας συμμετρίας των Fourier συντελεστών όταν οι τιμές στο φυσικό χώρο είναι αμιγώς πραγματικές.

3.6.2 Χειρισμός γραμμικών όρων

Είναι επιθυμητή η ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς τη διακριτοποίηση του χρόνου. Για την πίεση και τους όρους διάχυσης επιτυγχάνεται μέσω της εφαρμογής της μεθόδου Crank-Nicolson. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την παρακάτω απλή συνήθη διαφορική εξίσωση :

$$\frac{df}{dt} = a f \tag{3.39}$$

η εφαρμογή της εν λόγω μεθόδου θα αποδώσει την κάτωθι διακριτοποιημένη έκφραση :

$$\frac{f^{n+1} - f^{n}}{\Delta t} = a \frac{f^{n+1} + f^{n}}{2} \tag{3.40}$$

όπου ο δείκτης n+1 δηλώνει το νέο χρονικό βήμα και ο δείκτης n το τρέχον χρονικό βήμα. Γίνεται εμφανές από την σχέση (3.40) ότι η μέθοδος Crank-Nicolson βασίζεται σε κεντρικές διαφορές που αναπτύσσονται ως προς το χρονικό βήμα n+1/2 και συνεπώς έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης. Λόγω της άρρητης φύσης του σχήματος θεωρείται από μαθηματικής άποψης ευσταθές χωρίς περιορισμούς για όλες τις τιμές χρονικών βημάτων, γεγονός που σημαίνει ότι οι διαταραχές δεν ενισχύονται με την πάροδο του χρόνου. Εντούτοις, στην πράξη έχει βρεθεί ότι ταλαντώσεις δύνανται να εμφανιστούν για επαρκώς μεγάλες τιμές χρονικών βημάτων.

3.6.3 Χειρισμός μη γραμμικών όρων συναγωγής

Οι όροι συναγωγής χειρίζονται με χρήση της ρητής μεθόδου δεύτερης τάξης Adams-Bashforth. Θεωρώντας και πάλι το απλό παράδειγμα της εξίσωσης (3.39) η μέθοδος θα αποδώσει την παρακάτω διακριτοποιημένη έκφραση :

$$\frac{f^{n+1} - f^{n}}{\Delta t} = a \left(\frac{3}{2} f^{n} - \frac{1}{2} f^{n-1} \right) \tag{3.41}$$

Όπως συμβαίνει σε όλα τα ρητά αριθμητικά σχήματα η συγκεκριμένη μέθοδος επιβάλλει όριο ευστάθειας ως προς το μέγεθος του χρονικού βήματος. Μολονότι αυτό μπορεί να αποδειχτεί σοβαρός περιορισμός σε ορισμένες περιπτώσεις, ο ρητός χειρισμός των όρων συναγωγής είναι επιθυμητός στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας για τον παρακάτω κύριο λόγο.

Οι όροι συναγωγής είναι μη γραμμικοί. Κατά συνέπεια, αν τους μεταχειριστούμε ρητώς τότε το σύστημα είναι γραμμικό βήμα και δεν υπάρχει ανάγκη για πολλαπλές επαναλήψεις στη διάρκεια του χρονικού βήματος ενώ αποφεύγεται ο υπολογισμός ακριβών, από υπολογιστικής σκοπιάς, Ιακωβιανών πινάκων.

Το γεγονός ότι οι Fourier modes είναι εντελώς αποζευγμένοι σε κάθε χρονικό βήμα, καθώς η σύζευξη λαμβάνει μέρος κατά τον υπολογισμό των όρων συναγωγής, αποτελεί σημαντικό υπολογιστικό πλεονέκτημα διότι μετατρέπει το τριδιάστατο πρόβλημα σε σειρά ανεξάρτητων διδιάστατων προβλημάτων (Vanden-Abeele et al.).

Εν συνεχεία, η πιο απλή προσέγγιση που μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό των όρων συναγωγής είναι ο απευθείας υπολογισμός των διακριτών αθροισμάτων που εμφανίζονται στις παρακάτω εκφράσεις οι οποίες έχουν προκύψει από τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας (2.7-2.10) :

$$\left(\hat{h}_{xk}\right)_i^e = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) Exp\left[-\frac{2\text{®}\, kn}{N} I \right] d\Omega_e \tag{3.42}$$

$$\left(\hat{h}_{yk}\right)_i^e = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) Exp\left[-\frac{2\text{®}\, kn}{N} I \right] d\Omega_e \tag{3.43}$$

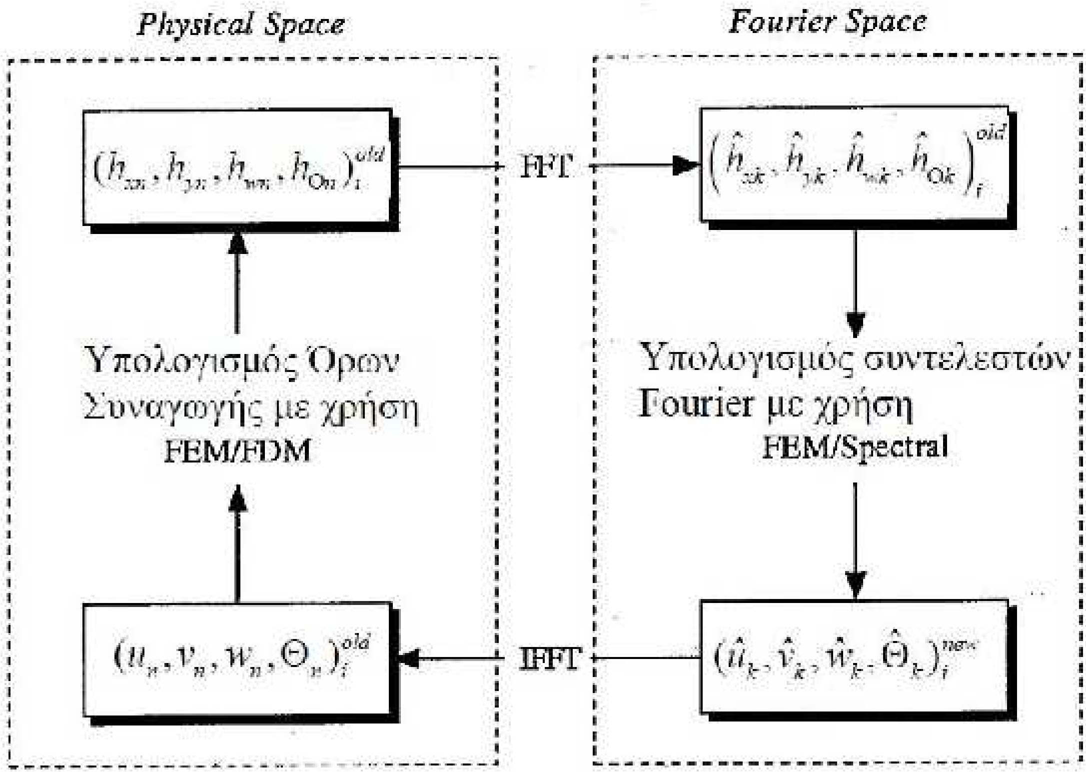
$$\left(\hat{h}_{zk}\right)_i^e = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial w_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial w_n}{\partial z} \right) Exp\left[-\frac{2\text{®}\, kn}{N} I \right] d\Omega_e \tag{3.44}$$

$$\left(\hat{h}_{\Theta k}\right)_i^e = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial z} \right) Exp\left[-\frac{2\text{®}\, kn}{N} I \right] d\Omega_e \tag{3.45}$$

Οι μεταβλητές με το σύμβολο ^ αντιστοιχούν στις μετασχηματισμένες μεταβλητές στο Fourier χώρο. Οι δείκτες k, e, n συμβολίζουν k-οστο Fourier mode, πεπερασμένο στοιχείο και επίπεδο z, αντίστοιχα. Η συνάρτηση $\Phi_i(x,y)$ αποτελεί τη διτετραγωνική συνάρτηση βάσης Lagrange ενώ οι σχέσεις (3.42-3.45) δηλώνουν τον k-οστο mode της spectral αναπαράστασης των όρων συναγωγής.

Ωστόσο, η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι υπολογιστικά ακριβή διότι η διακριτοποίηση τουλάχιστον O(N) γινομένων πρέπει να υπολογιστεί σε κάθε συνιστώσα Fourier όπου N ο αριθμός των διακριτών Fourier modes. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό $O(N^2)$ γινομένων για κάθε βαθμό ελευθερίας.

Εναλλακτικά, μια προσέγγιση ψευδο-spectral είχε εφαρμοστεί αρχικά από τον Orszag (1969, 1971) και τους Orszag & Kells (1980). Σε αυτή την περίπτωση η μορφή του ζυγισμένου υπολοίπου των όρων συναγωγής υπολογίζεται στο φυσικό χώρο και εν συνεχεία μετασχηματίζεται στο Fourier χώρο για χρήση στο επόμενο χρονικό βήμα. Λαμβάνοντας υπόψη το παρακάτω σχήμα, γνωρίζουμε τη λύση σε μορφή ιδιοδιανύσματος που έχει προκύψει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας οπότε οι ποσότητες $\left(u_n, v_n, w_n, \Theta_n\right)_i^{old}$ είναι δεδομένες στο φυσικό χώρο σε Ν ισαπέχοντα εγκάρσια σημεία. Εν συνεχεία, υπολογίζουμε τους όρους συναγωγής $\left(h_{xn}, h_{yn}, h_{wn}, h_{\Theta n}\right)_i^{old}$ χρησιμοποιώντας συνδυασμό FEM και FDM.



Σχήμα 22 : Απεικόνιση της ψευδο-spectral προσέγγισης που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των μη γραμμικών όρων.

Θα εξηγήσουμε πιο αναλυτικά τη διαδικασία υπολογισμού των όρων συναγωγής $\left(h_{xn}, h_{yn}, h_{wn}, h_{\Theta n}\right)_i$ στο φυσικό χώρο γνωρίζοντας τις τιμές που αντιστοιχούν για τις ταχύτητες u, v, w και θερμοκρασία Θ σε Ν ισαπέχοντα εγκάρσια επίπεδα. Αρχικά, οι όροι που πρέπει να υπολογιστούν είναι :

$$\left(h_{xn}\right)_i^e = \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) d\Omega_e \tag{3.46}$$

$$\left(h_{yn}\right)_i^e = \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) d\Omega_e \tag{3.47}$$

$$\left(h_{zn}\right)_i^e = \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial w_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial w_n}{\partial z} \right) d\Omega_e \tag{3.48}$$

$$\left(h_{\Theta n}\right)_i^e = \int_{\Omega_e} \Phi_i \left(u_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial \Theta_n}{\partial z} \right) d\Omega_e \quad (3.49)$$

Οι εγκάρσιες παράγωγοι $\left(\partial/\partial z\right)_n$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές :

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial z}\right) = \frac{f_{right} - f_{left}}{2\Delta z} \quad (3.50)$$

όπου Δz αποτελεί την απόσταση ανάμεσα στα διδιάστατα επίπεδα και ισούται με :

$$\Delta z = \frac{L}{N} \quad (3.51)$$

όπου L η εγκάρσια διάσταση του υπολογιστικού πεδίου και N ο αριθμός των Fourier modes. Οι εκφράσεις των f_{right} και f_{left} είναι :

$$f_{left} = f_{n-1},\ f_{right} = f_{n+1} \quad (3.52)$$

και ισχύουν σε όλα τα εγκάρσια επίπεδα πλην των επιπέδων n=0 και n=N-1. Σε αυτά τα επίπεδα λόγω της περιοδικότητας που έχουμε θεωρήσει λαμβάνουμε :

$$\text{Επίπεδο n=0} \rightarrow f_{left} = f_{N-1},\ f_{right} = f_1 \quad (3.53)$$

$$\text{Επίπεδο n=N-1} \rightarrow f_{left} = f_{N-2},\ f_{right} = f_0 \quad (3.54)$$

Μετά την εκτίμηση των όρων συναγωγής σε κάθε διδιάστατο επίπεδο οι αντίστοιχοι Fourier συντελεστές $\left(\hat{h}_{xk}, \hat{h}_{yk}, \hat{h}_{wk}, \hat{h}_{\Theta k}\right)_i^{old}$ υπολογίζονται με χρήση του FFT αλγορίθμου. Θεωρώντας ότι υπάρχουν 2^n εγκάρσια επίπεδα οι εν λόγω όροι υπολογίζονται τώρα με κόστος τεσσάρων FFTs και O(n) γινομένων που καταλήγει σε υπολογισμούς $O(N\log_2 N)$ γινομένων για κάθε βαθμό ελευθερίας.

3.6.4 Αριθμητική επίλυση

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω σχετικά εδάφια και τις κυρίαρχες εξισώσεις (2.6-2.11) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις που συνιστούν το συγκεκριμένο πρόβλημα . Όλοι οι άγνωστοι u, v, w, Θ, φ και p διατάσσονται σε κόμβο ο ένας μετά τον άλλο έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα μικρό διάνυσμα αποτελούμενο από 12 συνιστώσες διότι λαμβάνεται υπόψη το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των προαναφερθέντων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα για την υλοποίηση του μοντέλου, το σύστημα εξισώσεων γράφεται με όρους μεταβολής των παραμέτρων του πεδίου ροής κατά τη διάρκεια χρονικού βήματος :

$$\Delta \hat{q}_k = \hat{q}_k^{n+1} - \hat{q}_k^{n} \qquad (3.55)$$

όπου $\hat{q}_k = \left\{ \hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k, \hat{\Theta}_k, \hat{¤}_k, \hat{p}_k \right\}$.

Άρα, το σύστημα που καλούμαστε να επιλύσουμε στο Fourier χώρο λαμβάνει την παρακάτω μορφή :

$$A\Delta x = b \Rightarrow$$

$$A\left(\hat{q}_k^{n+1} - \hat{q}_k^{n}\right) = \left(D\hat{q}_k^{n} + \frac{3}{2}C^{n} - \frac{1}{2}C^{n-1} \right) \Rightarrow \qquad (3.56)$$

$$\left(\hat{q}_k^{n+1} - \hat{q}_k^{n}\right) = A^{-1}\left(D\hat{q}_k^{n} + \frac{3}{2}C^{n} - \frac{1}{2}C^{n-1} \right)$$

όπου D αποτελεί πίνακα που περιέχει τις συνεισφορές των γραμμικών όρων οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τις τιμές των μεταβλητών στην προηγούμενη χρονική στιγμή, C είναι το διάνυσμα που περιέχει τις συνεισφορές των μη γραμμικών όρων στην προηγούμενη και στην προ-προηγούμενη χρονική στιγμή.

Συνέχεια

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\Delta \hat{u}_{k,j} + \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\Delta \hat{v}_{k,j} + \left(\frac{2\pi k}{L} I\right)\Psi_i \Phi_j \Delta \hat{w}_{k,j} \right) d\Omega_e = \qquad (3.57)$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\hat{u}^{n}_{k,j} + \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\hat{v}^{n}_{k,j} + \left(\frac{2\pi k}{L} I\right)\Psi_i \Phi_j \hat{w}^{n}_{k,j} \right) d\Omega_e$$

Διατήρηση Ορμής ως προς x, y, z άξονες

$$\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e+\frac{Gr^{-1/2}}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\text{¢}\,\hat{u}_{k,j} \quad (3.58)$$

$$-\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\Psi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{p}_{k,j}=\frac{3}{2}\left(\hat{h}_{xk}\right)_i^n-\frac{1}{2}\left(\hat{h}_{xk}\right)_i^{n-1}$$

$$-\left[Gr^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\hat{u}^n_{k,j}$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\Psi_j d\Omega_e\right]\hat{p}^n_{k,j}$$

$$\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e+\frac{Gr^{-1/2}}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\text{¢}\,\hat{v}_{k,j}$$

$$-\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\Psi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{p}_{k,j}-\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\hat{\Theta}_{k,j}+\left[\frac{1}{2}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{v}_{k,j}$$

$$+\left[\frac{1}{2}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}=\frac{3}{2}\left(\hat{h}_{yk}\right)_i^n-\frac{1}{2}\left(\hat{h}_{yk}\right)_i^{n-1}$$

$$-\left[Gr^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\hat{v}^n_{k,j}$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\Psi_j d\Omega_e\right]\hat{p}^n_{k,j}+\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{\Theta}^n_{k,j} \quad (3.59)$$

$$-\left[\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{v}^n_{k,j}-\left[\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

$$\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e+\frac{Gr^{-1/2}}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\text{¢}\,\hat{w}_{k,j}$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Psi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{p}_{k,j}+\left[\frac{1}{2}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{w}_{k,j}+\left[\frac{1}{2}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}d\Omega_e\right]\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\hat{h}_{zk}\right)_i^n-\frac{1}{2}\left(\hat{h}_{zk}\right)_i^{n-1}$$

$$-\left[Gr^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\hat{w}^n_{k,j}$$

$$-\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Psi_j d\Omega_e\right]\hat{p}^n_{k,j} \quad (3.60)$$

$$-\left[\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{w}^n_{k,j}-\left[\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}d\Omega_e\right]\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

Ενεργειακό Ισοζύγιο

$$\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e+\frac{Gr^{-1/2}}{2\Pr}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2®k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]¢\hat{\Theta}_{k,j} \quad (3.61)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\hat{h}_{\Theta k}\right)_i^n-\frac{1}{2}\left(\hat{h}_{\Theta k}\right)_i^{n-1}$$

$$-\left[\frac{Gr^{-1/2}}{\Pr}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\left(\frac{2®k}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right)\right]\hat{\Theta}^n_{k,j}$$

όπου το σύμβολο ^ δηλώνει τις μετασχηματισμένες μεταβλητές στο Fourier χώρο. Οι δείκτες k, e, n συμβολίζουν k-οστο Fourier mode, το πεπερασμένο στοιχείο και την προηγούμενη χρονική στιγμή, αντίστοιχα. $\Phi_i(x,y)$, Ψi(x,y) αποτελούν τις διτετραγωνικές και διγραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange, αντίστοιχα. Οι όροι $\left(\hat{h}_{xk},\hat{h}_{yk},\hat{h}_{zk},\hat{h}_{\Theta k}\right)$ αποτελούν τους μη γραμμικούς όρους και περιγράφονται από τις εξισώσεις (3.42-3.45) ενώ η σταθερά L εκφράζει το εγκάρσιο μήκος του αγωγού.

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις διακριτοποιημένες εκφράσεις των εξισώσεων διατήρησης μάζας, ορμής κατά τους άξονες x, y, z και ενέργειας, αντίστοιχα. Όσον αφορά τη διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι φυσικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (2.13) μετασχηματισμένες στο χώρο των συχνοτήτων. Αρχικά, έχουμε :

$$\sum_e\left[\int_{\Omega_e}\Phi_i\nabla^2_{xy}\hat{¤}_k d\Omega_e\right]=\sum_e\left[\left(\frac{2®k}{L}\right)^2\int_{\Omega_e}\Phi_i\hat{¤}_k d\Omega_e+\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\hat{w}_k d\Omega_e-\int_{\Omega_e}\left(\frac{2®k}{L}I\right)\Phi_i\hat{v}_k d\Omega_e\right]\Rightarrow$$

$$\sum_e\left[\int_{\Omega_e}\nabla_{xy}\cdot\left(\Phi_i\nabla_{xy}\hat{¤}_k\right)d\Omega_e\right]-\sum_e\left[\int_{\Omega_e}\nabla_{xy}\Phi_i\cdot\nabla_{xy}\hat{¤}_k d\Omega_e\right]=$$

$$\sum_e\left[\left(\frac{2®k}{L}\right)^2\int_{\Omega_e}\Phi_i\hat{¤}_k d\Omega_e+\int_{\Omega_e}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\hat{w}_k d\Omega_e-\int_{\Omega_e}\left(\frac{2®k}{L}I\right)\Phi_i\hat{v}_k d\Omega_e\right]\Rightarrow$$

$$\sum_e \int_{dS} \Phi_i \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial n} dS = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y}\right) d\Omega_e \right] +$$

$$\sum_e \left[\left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \int_{\Omega_e} \Phi_i \hat{\text{¤}}_k d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \hat{w}_k d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \left(\frac{2\text{®} k}{L} I\right) \Phi_i \hat{v}_k d\Omega_e \right] \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} dy\Big|_{x=A} - \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} dy\Big|_{x=0} + \int_0^A \Phi_i \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} dx\Big|_{y=1} - \int_0^A \Phi_i \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} dx\Big|_{y=0} = I \Rightarrow$$

$$\left(\Phi_i c_H \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y}\Bigg|_{0,x=A}^{1,x=A} - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} dy\Big|_{x=A} \right) + \left(\Phi_i c_H \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{1,x=0} - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} dy\Big|_{x=0} \right)$$

$$+ \left(\Phi_i c_S \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x}\Bigg|_{0,y=1}^{A,y=1} - \int_0^A c_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} dx\Big|_{y=1} \right) + \left(\Phi_i c_S \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{A,y=0} - \int_0^A c_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} dx\Big|_{y=0} \right) =$$

$$I + \int_0^1 \Phi_i c_H \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k \, dy\Big|_{x=A} + \int_0^1 \Phi_i c_H \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k \, dy\Big|_{x=0}$$

$$+ \int_0^A \Phi_i c_S \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k \, dx\Big|_{y=1} + \int_0^A \Phi_i c_S \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k \, dx\Big|_{y=0} \Rightarrow$$

$$\Phi_i c_H \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y}\Bigg|_{0,x=A}^{1,x=A} + \Phi_i c_H \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{1,x=0} + \Phi_i c_S \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x}\Bigg|_{0,y=1}^{A,y=1} + \Phi_i c_S \frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{A,y=0} = \qquad (3.62)$$

$$I + \int_0^1 c_H \left[\Phi_i \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} \right] dy\Big|_{x=A} + \int_0^1 c_H \left[\Phi_i \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial y} \right] dy\Big|_{x=0}$$

$$+ \int_0^A c_S \left[\Phi_i \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} \right] dx\Big|_{y=1} + \int_0^A c_S \left[\Phi_i \left(\frac{2\text{®} k}{L}\right)^2 \hat{\text{¤}}_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \hat{\text{¤}}_k}{\partial x} \right] dx\Big|_{y=0}$$

Έχοντας υπόψη την παραπάνω σχέση (3.62) λαμβάνουμε τη διακριτοποιημένη έκφραση της εξίσωσης :

Διατήρηση Φορτίου

$$\left[-\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}+$$

$$\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{w}_{k,j}+\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\text{¢}\,\hat{v}_{k,j}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 c_H\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dy\Big|_{x=A}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 c_H\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dy\Big|_{x=0}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^A c_S\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dx\Big|_{y=1}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^A c_S\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dx\Big|_{y=0}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}-c_H\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\Bigg|_{0,x=A}^{1,x=A}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}$$

$$-c_H\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{1,x=0}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}-c_S\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\Bigg|_{0,y=1}^{A,y=1}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}-c_S\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{A,y=0}\text{¢}\hat{\text{¤}}_{k,j}=$$

$$\left[+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)d\Omega_e+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{\text{¤}}^n_{k,j}-$$

$$\left[\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}d\Omega_e\right]\hat{w}^n_{k,j}-\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}I\right)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_e}\Phi_i\Phi_j d\Omega_e\right]\hat{v}^n_{k,j}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 c_H\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dy\Big|_{x=A}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 c_H\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dy\Big|_{x=0}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_0^A c_S\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dx\Big|_{y=1}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_0^A c_S\left[\left(\frac{2\text{®}k}{L}\right)^2\Phi_i\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right]dx\Big|_{y=0}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

$$+c_H\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\Bigg|_{0,x=A}^{1,x=A}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}+c_H\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\Bigg|_{0,x=0}^{1,x=0}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}\qquad(3.63)$$

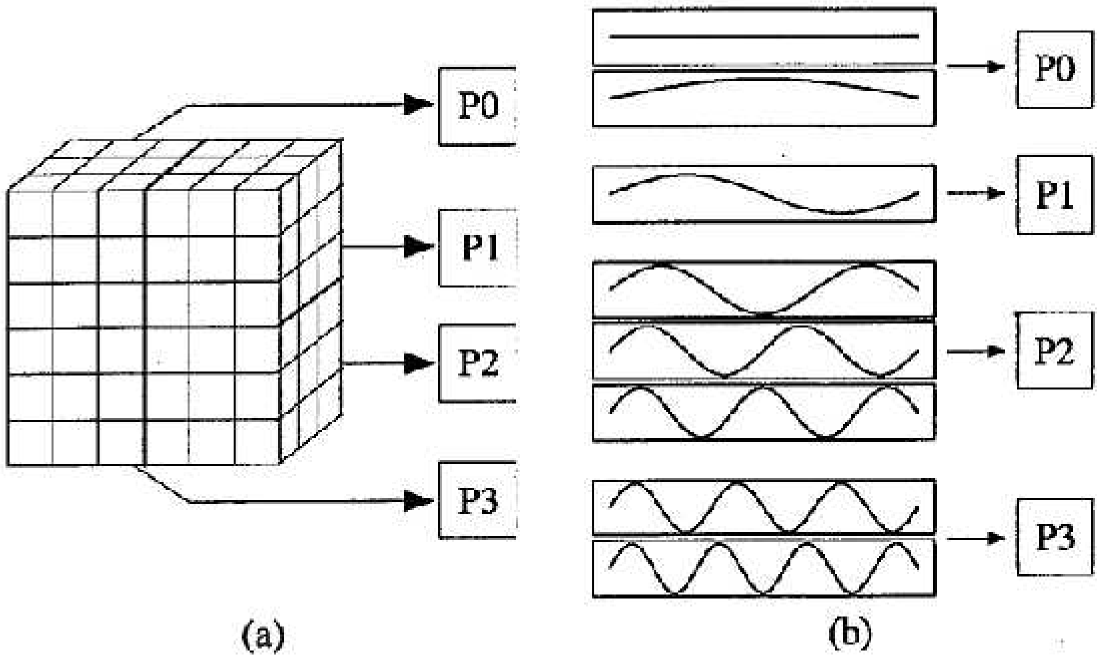
$$+c_S\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\Bigg|_{0,y=1}^{A,y=1}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}+c_S\Phi_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\Bigg|_{0,y=0}^{A,y=0}\hat{\text{¤}}^n_{k,j}$$

όπου c_H, c_S οι αδιάστατες ηλεκτρικές αγωγιμότητες στα τοιχώματα Hartmann και πλευρικά, αντίστοιχα. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι το σύστημα εξισώσεων (3.57-3.61, 3.63) γράφεται με όρους μεταβολής των παραμέτρων του πεδίου ροής στο αριστερό μέλος.

3.6.5 Υλοποίηση παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου

3.6.5.1 Παράλληλος υπολογισμός των συντελεστών Fourier

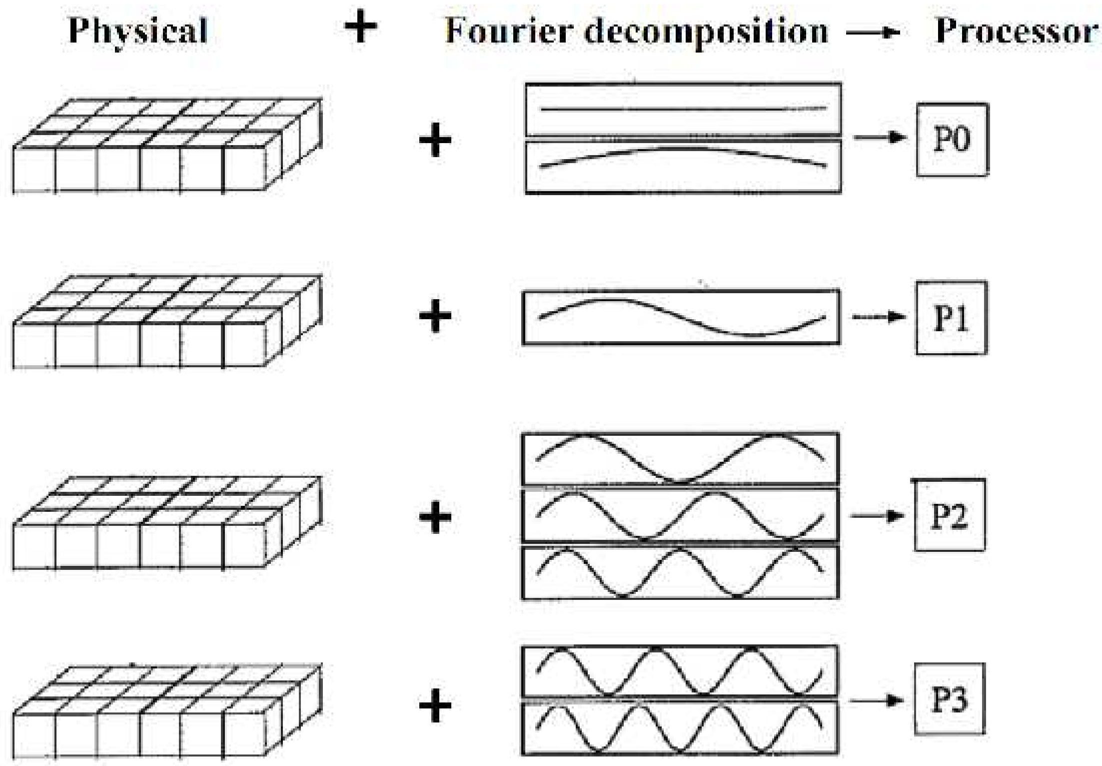
Η πλειοψηφία του υπολογιστικού χρόνου ξοδεύεται κατά τη σύσταση και επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν για κάθε Fourier mode και για κάθε χρονικό βήμα. Έτσι, ο παραλληλισμός του τμήματος αυτού του συνολικού αλγόριθμου αποτελεί το πιο σημαντικό ζήτημα. Η τυπική προσέγγιση που λαμβάνεται συνήθως για τον παραλληλισμό τέτοιου είδους υπολογιστικών μοντέλων αφορά (α) την αποκλειστική διαχείριση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων που προκύπτει για κάθε Fourier mode από ένα υπολογιστικό node και (β) τον διαχωρισμό (partitioning) του υπολογιστικού πλέγματος στο φυσικό χώρο που καταλαμβάνει η διατομή του υπό εξέταση αγωγού, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 23a. Συγκεκριμένα, το πλέγμα διαιρείται σε NP υποπεριοχές, όπου NP ο αριθμός των διαθέσιμων επεξεργαστών, και η εργασία που συνδέεται με κάθε υποπεριοχή (κατ’ ουσία πρόκειται για υποπίνακα του καθολικού πίνακα) ανατίθεται σε διαφορετικά threads. Ένα μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η διαδικασία διαχωρισμού δύναται να είναι πολύπλοκη και ακριβή, από υπολογιστικής σκοπιάς. Επιπρόσθετα, τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και ακρίβειας μπορούν να αλλάξουν ανάλογα με το διαχωρισμό. Τέλος, οι υποπίνακες είναι συζευγμένοι ο ένας στον άλλο διαμέσου των συνόρων των υποπεριοχών και κατά συνέπεια οι πληροφορίες πρέπει να μεταφερθούν μεταξύ των επεξεργαστών κατά την επίλυση του συστήματος.



Σχήμα 23 : Προσεγγίσεις διαχωρισμού (partitioning) για παραλληλισμό, (a) διαχωρισμός στο φυσικό χώρο, (b) διαχωρισμός στο χώρο Fourier.

Από την άλλη πλευρά, ο διαχωρισμός στο χώρο Fourier, σχήμα 23b, εμφανίζει τα εξής πλεονεκτήματα. Αρχικά, ο διαχωρισμός δεν είναι πολύπλοκος και ακριβός, από υπολογιστικής άποψης. Επιπλέον, επειδή οι Fourier modes είναι τελείως αποζευγμένοι σε κάθε χρονικό βήμα η ακρίβεια και η σύγκλιση της αριθμητικής λύσης δεν επηρεάζονται από τη διαδικασία παραλληλισμού. Επίσης λόγω της απόζευξης των modes δεν υπάρχει ανάγκη για επικοινωνία μεταξύ των επεξεργαστών που απασχολούνται σε συγκεκριμένο mode κατά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων.

Επειδή η διαδικασία της διακριτοποίησης στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας παράγει ένα ανεξάρτητο πίνακα για κάθε Fourier mode αντί ενός μοναδικού μεγάλου συζευγμένου συστήματος υιοθετείται μία πρωτότυπη προσέγγιση που συνδυάζει το διαχωρισμό στο φυσικό χώρο και στον αντίστοιχο Fourier, σχήμα 24. Πιο αναλυτικά, κάθε Fourier mode αντιμετωπίζεται ως διαφορετικό thread και κατ' επέκταση δύναται να υπολογιστεί σε διαφορετικό επεξεργαστή. Είναι σημαντικό να κατανοηθεί ότι αντί της χρήσης ενός επιλύτη παράλληλου τριδιάστατου προβλήματος λύνονται ταυτόχρονα διδιάστατα γραμμικά προβλήματα που αντιστοιχούν σε κάθε Fourier mode.



Σχήμα 24 : Συνδυασμός (partitioning) που περιλαμβάνει ταυτόχρονη υλοποίηση διαχωρισμού στο φυσικό χώρο και στο χώρο Fourier.

	Επεξεργαστής #1	Επεξεργαστής #2	Επεξεργαστής #3	Επεξεργαστής #4
Mode 0	0	1	2	3
Mode 1	4	5	6	7
Mode 2	8	9	10	11
Mode 3	12	13	14	15

Σχήμα 25 : Πλέγμα επεξεργαστών στην περίπτωση 16 διαθέσιμων επεξεργαστών και 4 Fourier modes.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 16 επεξεργαστές και επιθυμούμε να λύσουμε το παρόν πρόβλημα για 4 Fourier modes, οπότε ο κάθε mode θα απασχολεί 4 επεξεργαστές, (σχήμα 25), και συνήθως θα απασχολεί ένα υπολογιστικό node. Η καινοτομία της προσέγγισης έγκειται στο γεγονός ότι θα επιλυθούν ταυτόχρονα 4 συστήματα της μορφής Ax=b, ένα σε κάθε υπολογιστικό node, οπότε υλοποιείται Fourier decomposition και ταυτόχρονα εφαρμόζεται domain decomposition, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 24. Συγκεκριμένα, έχουμε συστοιχία επεξεργαστών όπου ο κάθε επεξεργαστής χαρακτηρίζεται από τη γραμμή και τη στήλη στις οποίες ανήκει στο παραπάνω πλέγμα επεξεργαστών. Για παράδειγμα, ο επεξεργαστής 10 ανήκει στην τρίτη γραμμή και στην τρίτη στήλη, και συνεπώς απασχολείται από το υπ' αριθμόν Fourier mode 2 και αποτελεί τον τρίτο επεξεργαστή από τους συνολικά τέσσερις που απασχολεί ο εν λόγω mode. Ο συγκεκριμένος επεξεργαστής θα επιλύσει το τμήμα του πίνακα ζώνης A καθώς και το αντίστοιχο του δεξιού μέλους b που του αναλογεί (Dimopoulos & Pelekasis 2012) έχοντας προηγουμένως επικοινωνήσει με τους επεξεργαστές 8, 9 και 11 οι οποίοι απασχολούνται από τον ίδιο mode, οπότε με αυτόν τον τρόπο συνεισφέρει στην επίλυση του συστήματος εξισώσεων Ax=b του Fourier mode 2.

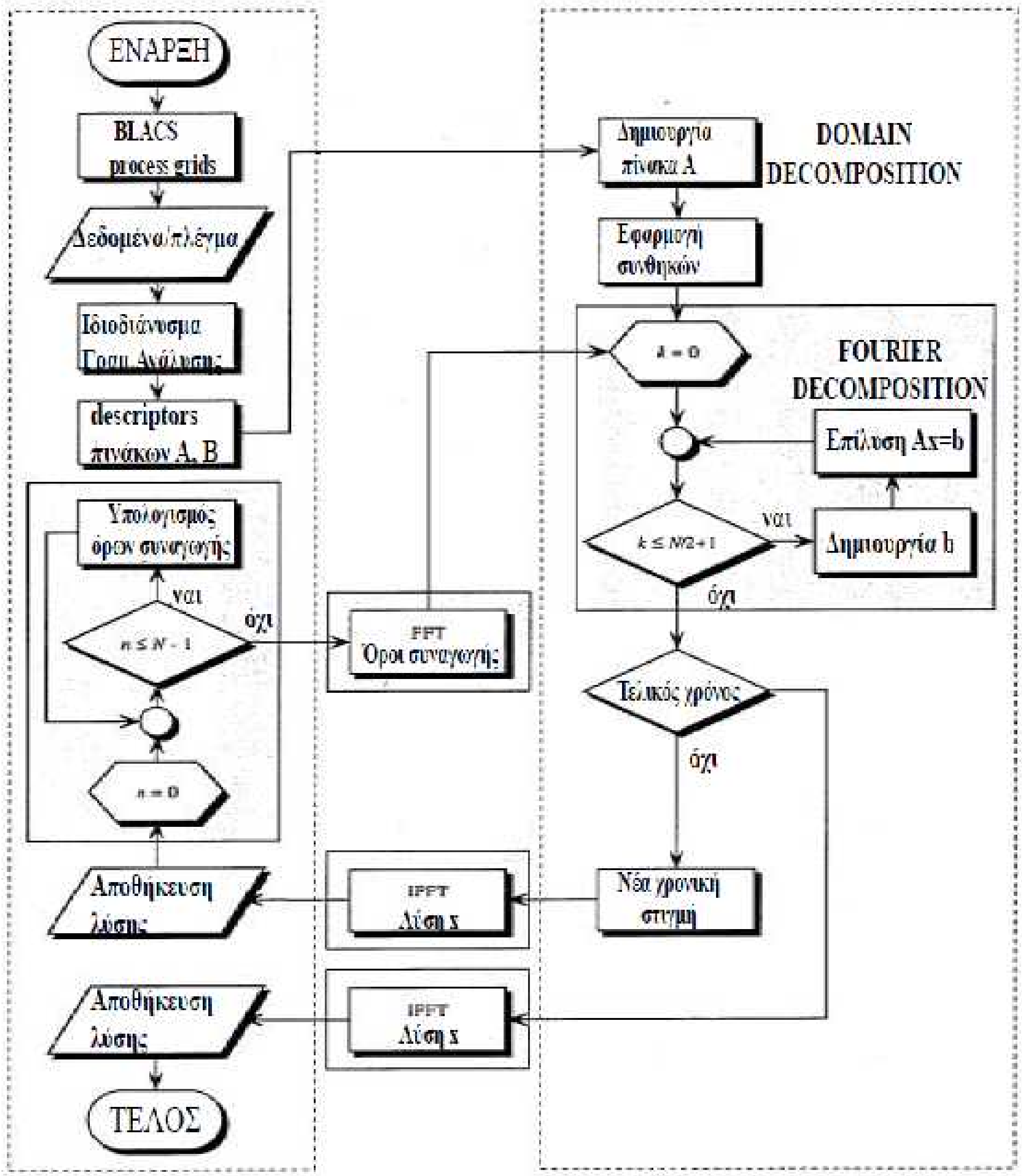
Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι σε αυτή την περίπτωση κάθε γραμμή η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένο mode αποτελεί ένα ανεξάρτητο πλέγμα επεξεργαστών (process grid) και κατ' επέκταση δημιουργούνται ισάριθμα τέτοιου είδους πλέγματα με τον επιθυμητό αριθμό modes. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι κάθε γραμμή χαρακτηρίζεται επίσης από μοναδικό communicator, μια σημαντική παράμετρο που απαιτεί το πλέγμα επεξεργαστών της BLACS έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η επικοινωνία επεξεργαστών που απασχολούνται από συγκεκριμένο Fourier mode. Η επίλυση αυτής της τεχνικής λεπτομέρειας αποτελεί μία επιπλέον καινοτομία της εργασίας. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η επίτευξη υψηλού scalability του υπολογιστικού μοντέλου με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των απαιτήσεων σε CPU.

Ωστόσο, η τεχνική του παραλληλισμού συνοδεύεται από μειονεκτήματα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, παρόλο που η γραμμική λύση του συστήματος ανήκει στο Fourier χώρο οι μη γραμμικοί όροι προσεγγίζονται με τη μέθοδο ψευδο-spectral γεγονός που σημαίνει ότι οι εν λόγω όροι υπολογίζονται στο φυσικό χώρο. Κατά συνέπεια, το πεδίο ροής πρέπει να μετασχηματιστεί αρχικά μέσω αλγορίθμου FFT. Αυτό απαιτεί στο τέλος κάθε χρονικού βήματος τη συλλογή όλων των πληροφοριών του πεδίου ροής από όλους τους Fourier modes με σκοπό τον υπολογισμό των μη γραμμικών όρων που απαιτούνται για το επόμενο χρονικό βήμα. Η μεταφορά τέτοιου μεγέθους δεδομένων ανάμεσα στους επεξεργαστές σε παράλληλη αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης είναι ακριβή. Ένα άλλο μειονέκτημα αποτελεί η ανισορροπία του φόρτου εργασίας που συμβαίνει διότι μία παράλληλη περιοχή δεν θα συμπληρωθεί μέχρι όλοι οι επεξεργαστές στον τρέχοντα node να τελειώσουν την εργασία τους. Με άλλα λόγια αν κάποιοι επεξεργαστές έχουν περισσότερη εργασία να εκτελέσουν εν συγκρίσει με άλλους τότε η απόδοση του υπολογιστικού μοντέλου επιβραδύνεται. Κατ' επέκταση, υπάρχουν μόνο N/2+1 γραμμικά συστήματα προς επίλυση, όπου N ο αριθμός των Fourier modes, και ανάλογα με το επίπεδο στο οποίο ένας συγκεκριμένος mode επιλύεται τότε ενδεχομένως να απαιτείται ευρύ χρονικό διάστημα για την επίλυση κάθε συστήματος.

Ο προτεινόμενος παραλληλισμός των μη γραμμικών όρων συναγωγής για το συγκεκριμένο τμήμα επίλυσης είναι παρόμοιος με τον αντίστοιχο που προτείνεται παραπάνω για την εκτίμηση των συντελεστών Fourier με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση οι υπολογισμοί βρίσκονται στο φυσικό χώρο. Ο διαχωρισμός του προβλήματος γίνεται θεωρώντας κάθε διδιάστατο επίπεδο ως ξεχωριστή εργασία. Αυτές οι εργασίες είναι συζευγμένες στις τιμές που ανήκουν σε δύο γειτονικά επίπεδα προκειμένου να υλοποιηθεί ο υπολογισμός των εγκάρσιων παραγώγων με χρήση FDM. Ωστόσο, η συγκεκριμένη σύζευξη έχει ρητό χαρακτήρα διότι ο υπολογισμός των μη γραμμικών όρων σε ένα επίπεδο εξαρτάται μόνο από προηγούμενες γνωστές τιμές σε γειτονικά επίπεδα και όχι στους εκτιμώμενους μη γραμμικούς όρους σε αυτά τα επίπεδα. Έτσι, κάθε επίπεδο μπορεί να επιλυθεί από οποιοδήποτε thread και σε οποιαδήποτε σειρά.

Τέλος είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο πίνακας D του δεξιού μέλους, βλέπε εξ. (3.56), δεν κατασκευάζεται ποτέ και υπολογίζεται μόνο το γινόμενο πίνακα-διανύσματος. Τονίζεται ότι η ιδέα αυτή είχε εφαρμοστεί και προηγουμένως στο προηγούμενο παράλληλο υπολογιστικό μοντέλο χρησιμοποιώντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας όπου ο πίνακας στο δεξιό μέλος του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών δεν κατασκευαζόταν ποτέ με προφανή οφέλη στην ελαχιστοποίηση υπολογιστικού χρόνου και κόστους (Dimopoulos & Pelekasis 2012). Στο σημείο αυτό παραθέτουμε το απαραίτητο διάγραμμα ροής :

ΦΥΣΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ FOURIER ΧΩΡΟΣ



Σχήμα 26 : Διάγραμμα ροής που απεικονίζει τη βασική δομή του παράλληλου υπολογιστικού μοντέλου μη γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής στρώματος υγρού μετάλλου.

IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

4.1 Αποτελέσματα και συζήτηση γραμμικού προβλήματος ευστάθειας συναγωγής Rayleigh - Benard στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία ισχυρού, οριζόντιου και ομογενούς μαγνητικού πεδίου

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια εκτεταμένη παραμετρική μελέτη με σκοπό την εξέταση των ουδέτερων χαρακτηριστικών της αστάθειας Rayleigh - Benard καθώς αυξάνεται η ένταση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ή εναλλακτικά καθώς λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές ο Ha. Είναι ενδιαφέρουσα η δομή του προκύπτοντος ιδιοδιανύσματος. Συγκεκριμένα, ζητείται η συσχέτιση του Gr_{Cr} με τον Ha σε συνδυασμό με τη συνδεόμενη κυρίαρχη δύναμη εξισορρόπησης που την παράγει και εξετάζεται η πιθανότητα ανάπτυξης των Hartmann και πλευρικών στοιβάδων σε αυτό το όριο. Οι γεωμετρικές και φυσικές σταθερές που χρησιμοποιούνται στις προσομοιώσεις λαμβάνονται από πειραματική μελέτη των Burr & Muller (2002). Ως εκ τούτου, ο λόγος όψης της διατομής του αγωγού λαμβάνεται A=20 με h=20mm και εισάγονται οι φυσικές ιδιότητες του κράματος καλίου νατρίου $Na^{22}K^{78}$ προκειμένου να καθοριστούν οι αδιάστατοι αριθμοί Gr, Ha και Pr. Ο Pr αποτελεί ιδιότητα του υλικού και τίθεται ίσος με 0.02, ενώ οι Gr και Ha εξαρτώνται από τις συνθήκες λειτουργίας όπως η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στα άνω και οριζόντια τοιχώματα και η ένταση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου. Ακολουθώντας την παραπάνω πειραματική μελέτη ο αριθμός Ha κυμαίνεται από 100 έως 1000 συνοδευόμενος από τον αντίστοιχο αριθμό Gr_{Cr} όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Ο τελευταίος αποτελεί παράμετρο που επιδέχεται σύγκρισης με τις πειραματικές παρατηρήσεις και τα διαθέσιμα αποτελέσματα ανάλυσης ευστάθειας. Τέλος, στην προαναφερθείσα πειραματική μελέτη οι λόγοι αγωγιμοτήτων των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών, βασιζόμενοι στις ηλεκτρικές αγωγιμότητες και στα πάχη του περιέχοντος τοιχώματος και μέσου λειτουργίας, είναι c_H=0.00415 και c_S=4.5. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η επίδραση της αγωγιμότητας του τοιχώματος στον καθορισμό της ευστάθειας μεταβάλλοντας παραμετρικά την ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών.

Τα περισσότερα δεδομένα ουδέτερης ευστάθειας που παρέχονται στις επόμενες σελίδες έχουν ληφθεί εφαρμόζοντας τη συνθήκη συμμετρίας στο μέσο επίπεδο της διατομής του αγωγού με πλέγμα 110x55 διτετραγωνικών στοιχείων κατά τους x, y άξονες. Η αριθμητική σύγκλιση επιβεβαιώθηκε με χρήση 160x80 διτετραγωνικών στοιχείων και 20 επεξεργαστών στο cluster του εργαστηρίου Ρευστομηχανικής & Στροβιλομηχανών. Τα ιδιοδιανύσματα που παρουσιάζονται στις επόμενες υποενότητες έχουν ληφθεί στις κρίσιμες συνθήκες, όταν δηλαδή ισχύει $Gr=Gr_{Cr}$, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση το πραγματικό μέρος μίας εκ των ιδιοτιμών διαπερνά τον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Στην παρούσα ανάλυση $\omega \approx 10^{-3}$ θεωρήθηκε ως οριακή τιμή που υποδηλώνει την κρίσιμη τιμή. Καθ' όλη τη διάρκεια της παραμετρικής μελέτης δεν εντοπίστηκαν μιγαδικές ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που να καθορίζουν την ευστάθεια της ροής στον αγωγό, γεγονός που δηλώνει μονοτονικά αναπτυσσόμενες διαταραχές. Ως εκ τούτου, συνάγεται ότι η προκύπτουσα ιδιολύση θα παράγει, κατά τον κορεσμό, μορφή ροής στάσιμου κύματος.

4.1.1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά με αύξηση του Ha

Πριν προχωρήσουμε με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής ανάλυσης ευστάθειας, θα ήταν χρήσιμο να εκτιμήσουμε την τάξη μεγέθους της προκύπτουσας ροής στις κρίσιμες συνθήκες και στο όριο Ha>>1. Αναμένουμε τα προβλεπόμενα στάσιμα κύματα να καθορίζουν την περιοχή της ουδέτερης ευστάθειας, βασιζόμενοι στις διαθέσιμες μετρήσεις των Burr & Muller (2002). Προκειμένου να μελετηθεί η μορφή της ροής σε κρίσιμες συνθήκες, ο ρυθμός ανάπτυξης ω τίθεται ίσος με το μηδέν και η ταχύτητα αδιαστατοποιείται εκ νέου προκειμένου να καταδείξει το ισοζύγιο ανάμεσα στην δύναμη Lorentz και την άνωση:

$$\vec{U} = \frac{\vec{u}\nu}{\rho g \beta \Delta T/(\sigma B_0^2)} \Rightarrow \vec{U} = \vec{u}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \qquad (4.1)$$

Οι υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος, των οποίων η αδιαστατοποίηση εμπλέκει τη χαρακτηριστική ταχύτητα, αδιαστατοποιούνται αναλόγως :

$$\Phi = \phi\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}}, \quad \vec{J} = \vec{j}\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \qquad (4.2)$$

όπου τα κεφαλαία γράμματα υποδηλώνουν τις αδιαστατοποιημένες εκ νέου μεταβλητές. Η θερμοκρασία και πίεση δεν επιδέχονται αδιαστατοποίηση από τη στιγμή που καθορίζονται από τη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στα δύο οριζόντια τοιχώματα. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (2.19-2.24) προκύπτει η μορφοποίηση του προβλήματος ευστάθειας στις κρίσιμες συνθήκες :

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Ha^2}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - U_1 k^2\right) \tag{4.3}$$

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Ha^2}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - V_1 k^2\right) + T_1 - \left(V_1 + ik\Phi_1\right) \tag{4.4}$$

$$0 = -ikP_1 + \frac{1}{Ha^2}\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} - W_1 k^2\right) - \left(W_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right) \tag{4.5}$$

$$V_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{Ha^2 Gr^{-1}}{\Pr}\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - T_1 k^2\right) \tag{4.6}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_1 = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \Phi_1 k^2\right) = \frac{\partial W_1}{\partial y} - ikV_1 = \Omega_{1x}, \qquad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U} \tag{4.7α,β}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + ikW_1 = 0 \tag{4.8}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δεν επηρεάζονται από την εκ νέου αδιαστατοποίηση και διατηρούν τη μορφή που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.12-2.15). Στην παρούσα υποενότητα ο δείκτης 1 εκφράζει το γραμμικοποιημένο μέρος των μεταβλητών και αμελείται για λόγους ευκολίας. Οι επιδράσεις συναγωγής επιβιώνουν στο ισοζύγιο ενέργειας σε αυτό το όριο και θα γίνει εμφανές ακολούθως ότι, για τέλεια αγώγιμα πλευρικά τοιχώματα, κατέχουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία κατανομής της στροβιλότητας στον πυρήνα του αγωγού. Οι αδρανειακοί όροι είναι $O(1/Ha^2)$ στο συγκεκριμένο όριο αλλά απουσιάζουν από το ισοζύγιο ορμής στην ανάλυση ευστάθειας λόγω της απουσίας οποιασδήποτε βασικής ροής. Με την παραπάνω αδιαστατοποίηση οι Lorentz και ανωστικές δυνάμεις εξισορροπούν η μία την άλλη στην εξίσωση που αντιστοιχεί στην y ορμή. Επιπρόσθετα, από τη στιγμή που η θερμική αστάθεια παράγει την κίνηση συναγωγής για οποιαδήποτε υπολογίσιμη θερμοκρασιακή διαφορά η οποία εμφανίζεται στον αγωγό, η θερμική διάχυση πρέπει να εξισορροπεί τη συναγωγή στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (4.6).

Συνεπώς, αναμένουμε ότι θα ισχύει $Gr_{Cr}Pr=Ra_{Cr}\sim Ha^2$ στις κρίσιμες συνθήκες, γεγονός που παρέχει τη σχετική συσχέτιση για την αστάθεια λόγω συναγωγής η οποία εμφανίζεται στη μορφή της ροής που μελετάται. Στο πλαίσιο αυτό η χαρακτηριστική ταχύτητα $U_0 \approx \rho g \alpha \Delta T/\left(\sigma B_0^2\right) = \left(Gr/Ha^2\right)\left(\nu/h\right)$ παραμένει στην ίδια τάξη μεγέθους για δεδομένα υγρό μέταλλο και πάχος στρώματος. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η παραπάνω συσχέτιση $Ra_{Cr}\sim Ha^2$ είχε επίσης ταυτοποιηθεί ως το κυρίαρχο ισοζύγιο κατά την περίπτωση συναγωγής καθοδηγούμενης από την άνωση σε κυλινδρικό κέλυφος με ηλεκτρικά αγώγιμα τοιχώματα παρουσία μαγνητικού πεδίου (Davoust et al. 1999).

Στο πλαίσιο αυτό καθώς ο Ha αυξάνεται αναπτύσσεται μια περιοχή στο κέντρο του αγωγού όπου η άνωση εξισορροπεί με τις δυνάμεις Lorentz και ιξώδη φαινόμενα δύνανται να παραλειφθούν. Ωστόσο, είναι σημαντικό να εξακριβώσουμε υπό ποίες συνθήκες η ροή θα προσλάβει οιονεί διδιάστατη δομή στον πυρήνα της ροής όπου το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι περισσότερο ή λιγότερο ευθυγραμμισμένο με το μαγνητικό πεδίο ως προς τον x-άξονα και οι y, z συνιστώσες της ταχύτητας παρουσιάζουν αμελητέα μεταβολή κατά τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Για το σκοπό αυτό και ταυτόχρονα υιοθετώντας παρόμοια προσέγγιση με αυτήν που είχε παρουσιαστεί από τον Buhler (1998), εισάγουμε το διάνυσμα της στροβιλότητας $\vec{\omega}$ υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο των εξισώσεων (4.3-4.5) :

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}P = \frac{1}{Ha^2}\nabla^2\vec{U} + T\vec{e}_y + \vec{J}\times\vec{e}_x\right] \Rightarrow \frac{1}{Ha^2}\nabla^2\vec{\omega} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{J} + ikT\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_z = 0 \qquad (4.9)$$

Σημειώνεται ότι ισχύει $\vec{\nabla}f \approx \vec{e}_x\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial f}{\partial y} + ikf\vec{e}_z$ στο πλαίσιο του γραμμικοποιημένου προβλήματος. Λαμβάνοντας το όριο καθώς $Ha\to\infty$ και επικαλούμενοι το νόμο του Ohm προκύπτει η μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ως προς τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = ikT \Rightarrow \int_{A/2}^{x}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}dr = ik\int_{x}^{A/2}Tdr \xrightarrow{\text{symmetry at } x=A/2} \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_x = ik\int_{x}^{A/2}Tdr \Rightarrow$$
$$\phi\big|_x = \phi\big|_0 + ik\int_0^x dp\int_p^{A/2}Tdr \qquad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.10) στην εξίσωση διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (4.7) προκύπτει η συνιστώσα της στροβιλότητας στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου :

$$\tau_x = \nabla_{\perp}^2 \hat{\chi} + ik \int_0^x d\pi \int_{\pi}^{A/2} \nabla^2 T dr = \nabla_{\perp}^2 \hat{\chi} + ik \int_0^x d\pi \int_{\pi}^{A/2} \left[-2V \right] dr, \tag{4.11}$$

$$\vec{\nabla}_{\perp} f \equiv \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z ikf, \quad \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k^2 f$$

όπου $\hat{\chi}$ εκφράζει την τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού στα τοιχώματα Hartmann.

Κατά συνέπεια, η παραγωγή της x συνιστώσας της στροβιλότητας στον πυρήνα διέπεται από την ανοδική κίνηση του ρευστού εξαιτίας της άνωσης και διαμορφώνεται από την κίνηση του ηλεκτρικού ρεύματος στις στοιβάδες Hartmann αναλόγως της ηλεκτρικής τους αγωγιμότητας. Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση της x ορμής, δεν υπάρχει πτώση πίεσης στον πυρήνα της ροής καθώς $Ha \rightarrow \infty$ και η x συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι πολύ μικρή σε πρώτη προσέγγιση. Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις συνέχειας και y, z ορμής, οι y, z συνιστώσες της ταχύτητας κυριαρχούν στο κέντρο του αγωγού και αντιστοιχούν σε πρότυπο ανακυκλοφορίας που είναι ευθυγραμμισμένο με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, ενώ οι άλλες δύο συνιστώσες της στροβιλότητας είναι λιγότερο σημαντικές. Η σχετική σημασία των δύο όρων στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.11) θα καθορίσει το βαθμό του διδιάστατου χαρακτήρα της x συνιστώσας της στροβιλότητας της ροής.

Η μορφή της ροής στις στοιβάδες Hartmann καθορίζεται από το ισοζύγιο μεταξύ μαγνητικών και ιξωδών δυνάμεων στην y ορμή, παράγοντας με αυτόν τον τρόπο στρώμα πάχους της τάξης Ha^{-1}. Συνεπώς, η συνέχεια διευκολύνεται με τις ταχύτητες V, W να παραμένουν O(Ha) ή O(1) ενώ η U είναι O(1) ή $O(Ha^{-1})$, αναλόγως της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann, προκειμένου να ικανοποιείται το ισοζύγιο μάζας στη στοιβάδα Hartmann. Επιπρόσθετα, η εξίσωση διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (4.7α) παρέχει την τάξη μεγέθους για τη x συνιστώσα του ηλεκτρικού ρεύματος στη στοιβάδα Hartmann, $J_{Hx}=O(1)$ ή $O(Ha^{-1})$ για ηλεκτρικά μονωμένα και αγώγιμα τοιχώματα, αντίστοιχα. Αυτό είναι απαραίτητο για την εξισορρόπηση της y συνιστώσας, J_{Hy}, η οποία παραμένει O(1) εντός της στοιβάδας Hartmann. Συγκεκριμένα, όταν τα τοιχώματα Hartmann χαρακτηρίζονται από χαμηλή αγωγιμότητα μόνο ένα μικρό ποσοστό του ηλεκτρικού ρεύματος δύναται να διέλθει μέσω αυτών, (βλ. συνοριακές συνθήκες (2.13α,β)). Γι' αυτό το λόγο, το ρεύμα προτιμά να στραφεί εντός της στοιβάδας Hartmann για να φτάσει τα πλευρικά τοιχώματα. Αντίθετα, όταν τα τοιχώματα Hartmann είναι καλοί αγωγοί παρατηρούνται κλειστές διαδρομές των ρευμάτων εντός της περιοχής του πυρήνα ενώ τα επαγόμενα ρεύματα παραμένουν ασθενή στη στοιβάδα Hartmann. Τα παραπάνω επιχειρήματα επιβεβαιώνονται εισάγοντας διορθώσεις για τις μεταβλητές εντός της στοιβάδας Hartmann και κατά την εκ νέου αδιαστατοποίηση της εξίσωσης διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου στη στοιβάδα Hartmann προκειμένου να λάβουμε το κυρίαρχο ισοζύγιο για τη συνολική x συνιστώσα της στροβιλότητας :

$$\frac{1}{Ha^{-2}}\frac{\partial^2\psi_H}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\Omega_{Hx}+\Omega_x \quad \xrightarrow{\psi_H\sim Ha^{-2}}$$

$$\frac{1}{Ha^{-2}}\frac{\partial^2\psi_H}{\partial X^2}=\Omega_{Hx}=O(1), \quad X\equiv\frac{x}{Ha^{-1}}$$

$$\Rightarrow J_{Hx}=-\frac{\partial\psi_H}{\partial x}=-Ha\frac{\partial\psi_H}{\partial X}=O(Ha^{-1}) \quad \text{και} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial J_{Hx}}{\partial x}=Ha\frac{\partial J_{Hx}}{\partial X}=-Ha^2\frac{\partial^2\psi_H}{\partial X^2}=-\Omega_{Hx}=O(1)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις τα Ω_{Hx} και J_{Hx} εκφράζουν τις διορθώσεις ιξώδους της x στροβιλότητας και της x συνιστώσας του ηλεκτρικού ρεύματος ενώ το X δηλώνει την stretched κάθετη συντεταγμένη του τοιχώματος μέσα στη στοιβάδα Hartmann, του οποίου η τάξη μεγέθους μεταβάλλεται αναλόγως της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann. Κατά συνέπεια, αντικαθιστώντας στην εξίσωση της στροβιλότητας (4.9) προκύπτει :

$$\frac{\partial^2\Omega_{Hx}}{\partial X^2}+\frac{\partial J_{Hx}}{\partial x}+\frac{\partial J_x}{\partial x}-ikT=0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Omega_{Hx}}{\partial X^2}+\frac{\partial J_{Hx}}{\partial x}=\frac{\partial^2\Omega_{Hx}}{\partial X^2}-\Omega_{Hx}=0 \tag{4.13}$$

Απαιτώντας την εξάλειψη των x στροβιλοτήτων, $\Omega_x+\Omega_{Hx}$, στο τοίχωμα Hartmann, δηλαδή X=0, και την εξαφάνιση του Ω_{Hx} καθώς $X\to\infty$ η διόρθωση ιξώδους της x συνιστώσας της στροβιλότητας και του ηλεκτρικού ρεύματος παίρνουν την μορφή :

$$\Omega_{Hx}=-\Omega_x(x=0)e^{-X}$$

$$Ha\frac{\partial J_{Hx}}{\partial X}=-\Omega_{Hx} \Rightarrow Ha\,J_{Hx}\big|_{X=0}=-\frac{\partial\Omega_{Hx}}{\partial X}\bigg|_{X=0} \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow J_{Hx}\big|_{X=0}=-\frac{\partial\psi_H}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-Ha^{-1}\,\Omega_x\big|_{x=0}$$

Εν τέλει το ηλεκτρικό δυναμικό μπορεί να υπολογιστεί στα τοιχώματα Hartmann λαμβάνοντας υπόψη τη συνοριακή συνθήκη λεπτού τοιχώματος που δίνεται από την εξίσωση (2.13α,β) :

$$\mathrm{J}c_{\mathrm{H}}\text{ď}^{2}_{\{}\hat{c}\ \mathrm{Z}\ \frac{\hat{o}c}{\hat{o}x}\bigg|_{xZ0}\ \mathrm{H}\ \frac{\hat{o}c_{\mathrm{H}}}{\hat{o}x}\bigg|_{xZ0}\ \text{ì}\ \frac{\hat{o}c}{\hat{o}x}\bigg|_{xZ0}\ \mathrm{Z}\ \mathrm{J}c_{\mathrm{H}}\text{ď}^{2}_{\{}\hat{c}\ \mathrm{J}\ \mathrm{Ha}^{\mathrm{J}1}\ t_{x}\big|_{xZ0}$$

$$\text{ì}\ \mathrm{J}\frac{\hat{o}c}{\hat{o}x}\bigg|_{xZ0}\ \mathrm{Z}\ \mathrm{E}c_{\mathrm{H}}\ \mathrm{H}\ \mathrm{Ha}^{\mathrm{J}1}\mathrm{F}\text{ď}^{2}_{\{}\hat{c} \qquad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.10), υπολογίζεται η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού στο τοίχωμα και μέσω αυτής η κατανομή της x συνιστώσας της στροβιλότητας μέσα στο στρώμα υγρού μετάλλου :

$$\mathrm{J}ik\int_{0}^{A/2}\mathrm{T}dr\ \mathrm{Z}\ \mathrm{E}c_{\mathrm{H}}\ \mathrm{H}\ \mathrm{Ha}^{\mathrm{J}1}\mathrm{F}\text{ď}^{2}_{\{}\hat{c}\quad \text{ì}\quad \text{ď}^{2}_{\{}\hat{c}\ \mathrm{Z}\ \frac{\mathrm{J}1}{c_{\mathrm{H}}\ \mathrm{H}\ \mathrm{Ha}^{\mathrm{J}1}}ik\int_{0}^{A/2}\mathrm{T}dr \qquad (4.16)$$

$$t_{x}\ \mathrm{Z}\ \frac{\mathrm{J}1}{c_{\mathrm{H}}\ \mathrm{H}\ \mathrm{Ha}^{\mathrm{J}1}}ik\int_{0}^{A/2}\mathrm{T}dr\ \mathrm{H}\ ik\int_{0}^{x}dp\int_{p}^{A/2}\mathrm{E}\mathrm{J}2\mathrm{V}\mathrm{F}dr \qquad (4.17)$$

Η σύζευξη της εξίσωσης (4.16) με τη σχέση (4.10) παρέχει το ηλεκτρικό δυναμικό στον αγωγό με την ύπαρξη μεγίστου στην περιοχή της στοιβάδας Hartmann για μονωμένα τοιχώματα, Φ~Ha, ή στην περιοχή του πυρήνα όταν τα τοιχώματα έχουν υψηλή αγωγιμότητα, Φ~O(1). Επιπλέον, η σύζευξη με τη λύση στην πλευρική στοιβάδα παρέχει το ηλεκτρικό δυναμικό στο τοίχωμα Hartmann υπό τη μορφή τετραγωνικού προφίλ που εξαλείφεται στα πλευρικά τοιχώματα. Η εξίσωση (4.17) απεικονίζει εμφανώς τη σημασία της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του τοιχώματος στον καθορισμό του φαινομένου Hartmann braking effect, σύμφωνα με το οποίο το μαγνητικό πεδίο ευνοεί την ύπαρξη δινών που είναι ευθυγραμμισμένες με αυτό, καθώς και του ρόλου που κατέχει όσον αφορά τη δημιουργία ροής εντός του αγωγού. Για το λόγο αυτό θα ήταν χρήσιμο να σημειωθεί ότι η κατακόρυφη και εγκάρσια συνιστώσες της ταχύτητας στον πυρήνα περιγράφονται από τις επόμενες σχέσεις :

$$\mathrm{V}\ \mathrm{Z}\ \mathrm{J}ik\,c\ \mathrm{H}\,\mathrm{T}\ \mathrm{J}\frac{\hat{o}P}{\hat{o}y},\quad w\ \mathrm{Z}\ \frac{\hat{o}c}{\hat{o}y}\ \mathrm{J}\ ikP, \qquad (4.18a,b)$$

Εν συνεχεία, λαμβάνοντας την απόκλιση των εξισώσεων y και z ορμής, βλ. σχέσεις (4.4,4.5), οι μεταβολές της πίεσης στο κατακόρυφο επίπεδο συνδέονται με τις θερμοκρασιακές κλίσεις στον αγωγό :

$$\text{ď}^{2}_{\{}P\ \mathrm{Z}\ \frac{\hat{o}\mathrm{T}}{\hat{o}y} \qquad (4.19)$$

Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης υιοθετήθηκε η συνέχεια της μάζας σε συνδυασμό με το γεγονός ότι καθώς ο Ha αυξάνεται οι μεταβολές της πίεσης κατά τη διαμήκη κατεύθυνση εξαλείφονται, βλ. εξίσωση (4.3), και ως εκ τούτου η διαμήκης συνιστώσα της ταχύτητας U τείνει επίσης να εξαλειφθεί εντός του πυρήνα. Έτσι, οι μεταβολές της πίεσης στον πυρήνα παραμένουν O(1) καθώς ο Ha αυξάνεται ενώ οι ταχύτητες V, W αδιαστατοποιούνται σύμφωνα με την κλίμακα $1/(c_H \, \mathrm{H} \, Ha^{J1})$. Στην πραγματικότητα, η αντιπαραβολή με τη ροή εντός της στοιβάδας Hartmann ανακτά την εν λόγω αδιαστατοποίηση. Σαφώς, η μεταβολή της στροβιλότητας μέσα στη στοιβάδα Hartmann θα είναι αρκετά πιο δύσκολο να ανιχνευθεί αριθμητικά όταν τα τοιχώματα Hartmann είναι μονωμένα, όπου σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα V πρέπει να μεταβάλλεται από O(Ha) έως μηδέν στο τοίχωμα εντός του στρώματος του οποίου το πάχος είναι Ha^{-1}. Από την άλλη πλευρά, όταν τα τοιχώματα Hartmann χαρακτηρίζονται από υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα η εγκάρσια ταχύτητα V είναι τάξης 1/ c_H, η στοιβάδα Hartmann ασθενούς στροβιλότητας σχηματίζεται στη γειτονική περιοχή τους και οι αριθμητικοί υπολογισμοί δύνανται να προχωρήσουν σε σχετικά υψηλές τιμές του Ha χωρίς απώλεια ακρίβειας. Παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν για την παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας στα πλευρικά τοιχώματα όταν χαρακτηρίζονται από υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα. Οι παραπάνω πτυχές της ροής επιβεβαιώνονται από αριθμητικά ευρήματα στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης.

Η μεταβολή της x συνιστώσας της στροβιλότητας ως προς τις μαγνητικές γραμμές, με τον τρόπο που ορίστηκε από την εξίσωση (4.17), έχει σημασία ως προς την εγκυρότητα παραδοχής της οιονεί διδιάστατης μορφής της ροής εντός του αγωγού. Όταν τα τοιχώματα Hartmann έχουν έντονη ηλεκτρική αγωγιμότητα αμφότεροι οι όροι στο δεξιό μέλος της σχέσης (4.17) είναι O(1) καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα όγκου της θερμικά επαγόμενης κατακόρυφης κίνησης στον αγωγό είναι εξίσου σημαντικό με την κλίση του ηλεκτρικού δυναμικού πάνω στα τοιχώματα Hartmann και η x στροβιλότητα μεταβάλλεται σημαντικά κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου. Στην εγγύς περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann, η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα c_H καθορίζει τα τοπικά ηλεκτρικά ρεύματα που οδηγούν σε εγκάρσια ταχύτητα η οποία είναι αρκετά μικρότερη από την τιμή της στον πυρήνα όπου κυριαρχεί το ολοκλήρωμα όγκου. Όταν θεωρηθούν σχεδόν μονωμένα τοιχώματα Hartmann, $c_H \approx 0$, σχηματίζονται ισχυρές κλίσεις ηλεκτρικού δυναμικού εντός των στοιβάδων Hartmann με τη συνδυασμένη αγωγιμότητα να καθορίζεται από την τιμή Ha^{-1}. Ως εκ τούτου, η x στροβιλότητα είναι O(Ha) στην εγγύς περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann αλλά σε αυτή την περίπτωση η εγκάρσια ταχύτητα V είναι επίσης O(Ha) καθ' όλο το στρώμα του υγρού μετάλλου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα όγκου στη σχέση (4.17) να είναι εξίσου σημαντικό με το φαινόμενο Hartmann braking effect μέσα στις στοιβάδες Hartmann και η x στροβιλότητα παρουσιάζει σημαντική μεταβολή ως προς τις μαγνητικές γραμμές. Η θερμότητα, η οποία μεταφέρεται μέσω συναγωγής στον πυρήνα, καθορίζει τη συνιστώσα της στροβιλότητας στη x κατεύθυνση και η ροή στον αγωγό είναι κατ' ουσία τριδιάστατη. Άρα, η οιονεί διδιάστατη παραδοχή δεν είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση εμφάνισης θερμικής συναγωγής παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου, όπου σε αυτή την περίπτωση ισχύει $Ra \sim Ha^2$. Οι υπολογιστικές προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στις ακόλουθες υποενότητες πιστοποιούν αυτή τη συμπεριφορά αλλά επίσης αναδεικνύουν τον κεντρικό ρόλο που κατέχουν οι διαφορές στις τιμές των ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών, στη δομή της προκύπτουσας μορφής της ροής καθώς επίσης και στην εμφάνιση υψηλής ταχύτητας jets στις πλευρικές στοιβάδες του αγωγού.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι στην περίπτωση μονωμένων τοιχωμάτων αναπτύσσονται πιο έντονα ηλεκτρικά ρεύματα, J_x, $J_{Hx} \sim O(1)$, εντός του πυρήνα της ροής (βλ. σχέση 4.15) και στις στοιβάδες Hartmann (βλ. σχέση 4.14) καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Στο ίδιο πλαίσιο των σχεδόν μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann τα ηλεκτρικά ρεύματα παραμένουν O(Ha) ως προς τις y, z κατευθύνσεις προκειμένου να ικανοποιήσουν τη συνέχεια των ηλεκτρικών ρευμάτων στις στοιβάδες Hartmann. Αυτά τα ρεύματα συνδέονται με μεγάλες κλίσεις ηλεκτρικού δυναμικού που οδηγούν σε εγκάρσιες και αξονικές ταχύτητες O(Ha). Όπως θα γίνει εμφανές από τα αριθμητικά αποτελέσματα, η κίνηση αυτή συμπληρώνεται από ισχυρές ταχύτητες που αναπτύσσονται στα πλευρικά τοιχώματα και συγκεκριμένα στις γωνίες του αγωγού έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η συνέχεια της μάζας. Το παραπάνω μοντέλο συνιστά την επίδραση ΜΥΔ άντλησης. Εν τέλει, τα ηλεκτρικά ρεύματα στις στοιβάδες Hartmann είναι της ίδιας τάξης μεγέθους κατά τους άξονες x, y, z όπως στον πυρήνα της ροής ως εκ τούτου τα ηλεκτρικά ρεύματα πρέπει να κινηθούν εντός των στοιβάδων Hartmann πριν να στρίψουν έτσι ώστε να φτάσουν τα πλευρικά τοιχώματα. Αντίθετα, όταν θεωρηθούν τοιχώματα Hartmann, $c_H >> Ha^{-1}$, οι y και z συνιστώσες του ηλεκτρικού ρεύματος είναι O(1) στον πυρήνα του αγωγού εκτός από την εγγύς περιοχή των στοιβάδων Hartmann όπου είναι πολύ μικρές $O(1/c_H)$. Η x συνιστώσα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι O(1) στον πυρήνα, (βλ. σχέση (4.10)), και παραμένει πολύ μικρή, $O(Ha^{-1})$, εντός των στοιβάδων

Hartmann προκειμένου να εξισορροπήσουν τα ηλεκτρικά ρεύματα στην εγκάρσια και αξονική κατεύθυνση. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση οι διαδρομές των ηλεκτρικών ρευμάτων παραμένουν O(1) και κοντά στην περιοχή του πυρήνα, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πλευρικά τοιχώματα χαρακτηρίζονται από υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα σε όλες τις περιπτώσεις του παρόντος προβλήματος.

Η μελέτη της ροής ολοκληρώνεται από την ανάλυση της περιοχής κοντά στα πλευρικά τοιχώματα του αγωγού. Σε αυτή την περίπτωση, η σύζευξη της γραμμικοποιημένης εξίσωσης της x στροβιλότητας (4.9) με την εξίσωση διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (4.7β) στο όριο καθώς $Ha \to \infty$ παρέχει το κάτωθι κυρίαρχο ισοζύγιο στη γειτονική περιοχή των δύο πλευρικών τοιχωμάτων :

$$\frac{1}{Ha^2 \delta^4} \frac{\partial^4 \Phi_S}{\partial Y^4} + \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x^2} = 0 \quad Y \equiv \frac{y}{\delta} \tag{4.18}$$

μαζί με τη συσχέτιση, $\delta = Ha^{-1/2}$, του γρήγορα μεταβαλλόμενου τμήματος του ηλεκτρικού δυναμικού, Φ_S, εντός του κάτω πλευρικού στρώματος. Κατά συνέπεια, ισχύει U=O(Ha) έτσι ώστε η εξίσωση της συνέχειας να ικανοποιείται κοντά στην γωνιακή περιοχή καθώς το ρευστό ανέρχεται στις στοιβάδες Hartmann. Άρα, η x συνιστώσα της ταχύτητας προσλαμβάνει μεγάλες τιμές σε αυτή την περιοχή όπου υπάρχει ροή καθοδηγούμενη από την πίεση και ισχύει $\partial P / \partial x = O\left(Ha^{-1/2}\right)$ από την εξίσωση (4.3) της x ορμής, ενώ ο αγωγός επενεργεί ως μια ΜΥΔ αντλία που παράγει ρυθμό ροής Uδ τάξης $O(Ha^{1/2})$, μαζί με τις πλευρικές στοιβάδες στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Το συγκεκριμένο πρότυπο ροής αναπτύσσεται παράλληλα με την κυκλική κίνηση στον πυρήνα και έχει την πιθανότητα να αλληλεπιδράσει με αυτό, όπου σε αυτήν την περίπτωση συνιστά ενεργή πλευρική στοιβάδα. Η ανάλυση ΜΥΔ ροής με ελεύθερη συναγωγή σε κοιλότητες (Buhler 1998) ανέμενε σχηματισμό jets υψηλής ταχύτητας ακόμη και όταν τα τοιχώματα Hartmann και πλευρικά είναι τέλεια αγώγιμα. Ωστόσο, όπως θα δειχθεί στις επόμενες σχετικές σελίδες και στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας λαμβάνουμε σχηματισμό πλευρικού στρώματος που συνοδεύεται με σημαντική κίνηση στο πλευρικό τοίχωμα μόνο όταν τα τοιχώματα Hartmann χαρακτηρίζονται από ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με προγενέστερες μελέτες ροών προκαλούμενων από πτώση πίεσης μέσα σε αγωγούς (Walker 1981). Ενδεχομένως αυτό να αποτελεί απόρροια της διαφορετικής διάταξης του αγωγού ο οποίος εκτείνεται κυρίως στην κατακόρυφη διεύθυνση του υπό μελέτη προβλήματος που διενεργήθηκε από τον Buhler (1998). Οι Molokov & Buhler (2003) στην ασυμπτωτική τους μελέτη σε παρόμοια γεωμετρία παρατήρησαν την απουσία jets στα πλευρικά τοιχώματα όταν Ha>>1 για τέλεια αγώγιμα τοιχώματα και μία αντισυμμετρική θερμοκρασιακή κατανομή κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου με αμελητέα μεταβολή στην οριζόντια κατεύθυνση κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Στην παρούσα εργασία ανακτήθηκε η εν λόγω συμπεριφορά για τέλεια αγώγιμα τοιχώματα, για συμμετρική θερμοκρασιακή κατανομή στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, εντούτοις ο οιονεί διδιάστατος χαρακτήρας της προκύπτουσας ροής δεν υφίσταται.

Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πλευρικά τοιχώματα χαρακτηρίζονται από έντονη ηλεκτρική αγωγιμότητα, $c_S \gg 1 \gg Ha^{-1/2}$, το κάθετο ηλεκτρικό ρεύμα ως προς τα πλευρικά τοιχώματα, J_y, καθορίζεται κυρίως από την τιμή στον πυρήνα με μια πολύ μικρή διόρθωση λόγω της ύπαρξης πλευρικού στρώματος, $J_{Sy} = W_S - \frac{\partial \phi_S}{\partial y} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial \phi_S}{\partial Y} = Ha^{-1/2} W_S$. Η εν λόγω σχέση χρησιμοποιείται ως συνοριακή συνθήκη για τη διόρθωση του ηλεκτρικού δυναμικού στις πλευρικές στοιβάδες. Εν συνεχεία, τα ηλεκτρικά ρεύματα στον πυρήνα του αγωγού προσεγγίζουν τα πλευρικά τοιχώματα σχεδόν αναλλοίωτα και μέσω αυτών διέρχονται στα τοιχώματα Hartmann. Ωστόσο, όταν τα τελευταία χαρακτηρίζονται από χαμηλή αγωγιμότητα το ηλεκτρικό ρεύμα πρέπει να διέλθει μέσω των στοιβάδων Hartmann και το γεγονός αυτό απαιτεί την εισαγωγή γωνιακού στρώματος (corner layer) ως μέσο εξισορρόπησης των ηλεκτρικών ρευμάτων καθώς επίσης και των ροών μάζας. Αυτή η πτυχή της ροής είναι απούσα για τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμα τοιχώματα, όπου εν τοιαύτη περιπτώσει δεν υπάρχει σημαντική ηλεκτρική δραστηριότητα που να λαμβάνει χώρα στις στοιβάδες Hartmann και πλευρικές ενώ οι διαδρομές των ηλεκτρικών ρευμάτων βρίσκονται εντός της περιοχής του πυρήνα. Έτσι αποσβεννύεται η προκύπτουσα κυκλική κίνηση, εν αντιθέσει με την περίπτωση μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann και αυτό έχει ως συνέπεια την αύξηση του ορίου ευστάθειας για δεδομένη τιμή Ha. Ο υπολογισμός της y συνιστώσας της ταχύτητας στον πυρήνα μέσω της εξίσωσης (4.18), σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.19) και (4.16) έτσι ώστε να ληφθεί η πτώση πίεσης και το ηλεκτρικό δυναμικό στα τοιχώματα Hartmann, παρουσιάζει αυτή τη συμπεριφορά καθώς η ηλεκτρική αγωγιμότητα c_H αυξάνεται.

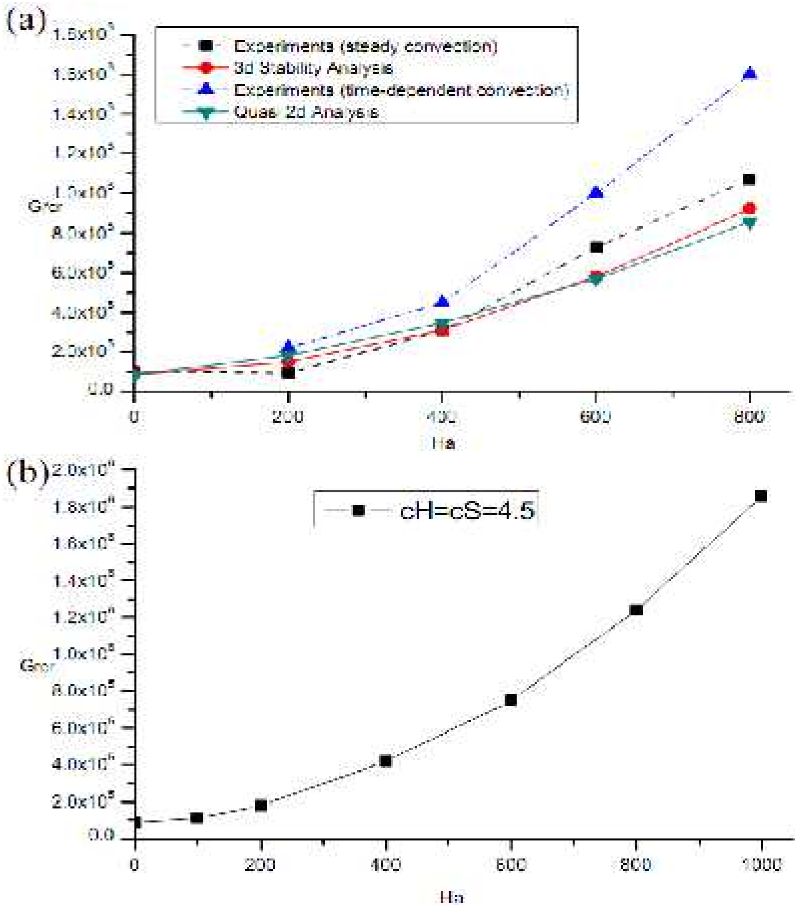
4.1.2 Αριθμητική μελέτη ουδέτερης ευστάθειας με αύξηση του Ha

Διεξήχθη μια εκτεταμένη αριθμητική μελέτη της ουδέτερης ευστάθειας του αγωγού, υπό την έννοια κρίσιμης τιμής αριθμού Grashof με αυξανόμενο αριθμό Hartmann για δεδομένους λόγους αγωγιμότητας ανάμεσα στις στοιβάδες Hartmann και πλευρικές ενώ κράμα καλίου νατρίου χρησιμοποιείται ως το λειτουργούν ρευστό χαρακτηριζόμενο από αριθμό Pr=0.02. Όπως γίνεται εμφανές στα σχήματα 27a,b όπου απεικονίζεται η καμπύλη ουδέτερης ευστάθειας για σχεδόν μονωμένα, c_H=0.00415, και ηλεκτρικά αγώγιμα, c_H=4.5, τοιχώματα Hartmann, αντίστοιχα, η κρίσιμη τιμή του Gr συσχετίζεται με τον αριθμό Ha όπως περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση $Gr\sim Ha^2$ με αυξανόμενο Ha, γεγονός που υποδηλώνει το ισοζύγιο μεταξύ ανωστικών και Lorentz δυνάμεων που είναι απαραίτητο για την εμφάνιση των στάσιμων κυμάτων. Δεν εντοπίστηκαν μιγαδικές ιδιοτιμές στις κρίσιμες συνθήκες ή πιο κάτω από αυτές είτε χρησιμοποιώντας την πλήρη μορφοποίηση του προβλήματος ευστάθειας είτε ενσωματώνοντας τη συνθήκη συμμετρίας ως προς το μέσο επίπεδο x=A/2. Ως εκ τούτου, όλα τα σχετικά ιδιοδιανύσματα του παρόντος προβλήματος που παρατίθενται, έχουν ληφθεί θεωρώντας συμμετρία.

Όπως γίνεται εμφανές από το σχήμα 27a, όπου χρησιμοποιούνται λόγοι ηλεκτρικής αγωγιμότητας σχετικοί με τη μελέτη των Burr & Muller (2002), τα πειραματικά αποτελέσματα που προκύπτουν στις κρίσιμες συνθήκες υπακούουν επίσης στην παραπάνω συσχέτιση την οποία καταλήξαμε. Η οιονεί διδιάστατη ανάλυση που παρουσιάζεται στη μελέτη των προαναφερθέντων ερευνητών παρέχει επίσης καλές προβλέψεις της κρίσιμης τιμής του Gr καθώς αυξάνεται ο Ha. Πράγματι, η συγκεκριμένη δομή ($Gr\sim Ha^2$) εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και στην περίπτωση όπου τα τοιχώματα Hartmann εμφανίζουν ίση ηλεκτρική αγωγιμότητα με τα πλευρικά τοιχώματα, $c_H=c_S$=4.5, όπως φαίνεται στο σχήμα 27b. Ωστόσο, οι διαφορές στις τιμές των ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων ανάμεσα σε τοιχώματα Hartmann και πλευρικά φέρει τη σημασία της στη φύση του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος και συγκεκριμένα στο χαρακτήρα της δομής της ροής με συναγωγή η οποία προκύπτει στις κρίσιμες συνθήκες. Όπως επισημάνθηκε από την ασυμπτωτική ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα και θα πιστοποιηθεί από αριθμητικούς υπολογισμούς των κυρίαρχων ιδιοδιανυσμάτων που επίκειται να περιγραφούν ακολούθως, η συνδυασμένη ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων και στοιβάδων Hartmann, $c_H + Ha^{-1}$, ελέγχει την ένταση κίνησης της δίνης εντός των στοιβάδων Hartmann. Επιπλέον, εξαιτίας της έντασης της ανωστικής κίνησης στον πυρήνα κατά τις κρίσιμες συνθήκες, αναπτύσσονται σημαντικές διακυμάνσεις της x στροβιλότητας ως προς την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου καθιστώντας με αυτόν τον τρόπο τη ροή τριδιάστατη. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των σχημάτων 29a και b, και λαμβάνοντας υπόψη ότι στο σχήμα 27a δίνεται ο $\widehat{Gr}_{Cr}\ Z\ 2Gr_{Cr}$ ώστε να ταιριάζει με τον ορισμό του Gr που δίνουν οι Burr & Muller (2002), προκύπτει ότι ο Gr_{Cr} αυξάνεται όταν χρησιμοποιούνται αγώγιμα τοιχώματα Hartmann σαν αποτέλεσμα της σταθεροποίησης της ροής. Ακολουθεί ενδελεχής περιγραφή των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν στις κρίσιμες συνθήκες.

Στηριζόμενοι στην ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, από τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε για την ουδέτερη ευστάθεια του αγωγού καθώς αυξάνεται ο Ha, τα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν στις κρίσιμες συνθήκες αδιαστατοποιούνται εκ νέου μέσω της $U_0\ Z\ °\ gaT/[\pm B_0^2]$. Κατά συνέπεια, τα προκύπτοντα αριθμητικώς αδιάστατα ιδιοδιανύσματα των $\vec{u}, ¤, \vec{j}$ αδιαστατοποιούνται εκ νέου όπως αποδεικνύεται από την εξίσωση (4.2) :

$$\vec{U}\ Z\ Ha\,\vec{u}, \quad c\ Z\ Ha\,¤, \quad \vec{J}\ Z\ Ha\,\vec{j} \qquad (4.19)$$



Σχήμα 27 : Διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας για (a) σχεδόν μονωμένα τοιχώματα Hartmann και (b) ηλεκτρικά αγώγιμα τοιχώματα Hartmann. (Οι τιμές του Gr_{Cr} έχουν πολλαπλασιασθεί ώστε να ταιριάζουν με τον ορισμό του $\widehat{Gr} = 2Gr$ των Burr & Muller, 2002).

όπου έχει εισαχθεί η συσχέτιση που ισχύει στις κρίσιμες συνθήκες Gr_{Cr}~Ha^2. Επιπλέον, προκειμένου να κανονικοποιηθούν τα ιδιοδιανύσματα και να μελετηθεί η ένταση και η ασυμπτωτική συμπεριφορά της κίνησης λόγω συναγωγής καθώς ο Ha αυξάνεται, όλα τα ιδιοδιανύσματα υπακούουν στη σχέση T(x=A/2,y=0.5)=1.

Εξετάστηκε η φύση του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος στις κρίσιμες συνθήκες και προέκυψε ότι για ένα ευρύ φάσμα τιμών του αριθμού Hartmann, 0<Ha≤1000, ο κρίσιμος κυματαριθμός είναι k_{Cr}≈3 που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος το οποίο είναι της τάξης του διπλάσιου πάχους του αγωγού, δηλαδή $\lambda_{Cr}=2\pi/k_{Cr}\approx2\rightarrow\lambda'_{Cr}\approx2h$. Η εν λόγω τιμή του κυματαριθμού είναι της ίδιας τάξης με την αντίστοιχη τιμή απουσία δυνάμεων Lorentz με τη διαφορά ότι τώρα οι προκύπτουσες δίνες ανακυκλοφορίας

είναι κυρίως ευθυγραμμισμένες με το μαγνητικό πεδίο και Ω_x αποτελεί την κυρίαρχη συνιστώσα της στροβιλότητας στον πυρήνα για τις περιπτώσεις μονωμένων και ηλεκτρικά αγώγιμων τοιχωμάτων Hartmann.

Ο κάτωθι πίνακας παρέχει τιμές που περιγράφουν την εξέλιξη του κυρίαρχου κυματαριθμού με αυξανόμενο αριθμό Ha για αυτές τις δύο περιπτώσεις και γίνεται εμφανές ότι το μήκος κύματος τείνει να μειωθεί με αυξανόμενης έντασης μαγνητικό πεδίο. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα των Burr & Muller (2002) όπου παρατηρήθηκε το μήκος κύματος της κίνησης λόγω συναγωγής να παρουσιάζει μέγιστη τιμή καθώς ο Ha αυξάνεται, στηριζόμενοι στην παραδοχή του οιονεί διδιάστατου χαρακτήρα της ροής. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ εναρμονίζονται με τη δομή της ροής όπου παράγονται δίνες οι οποίες είναι ευθυγραμμισμένες με τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου και σταδιακά γίνονται λεπτότερες με την αύξηση του Ha. Παρόμοιο συμπέρασμα είχε εξαχθεί βασιζόμενο σε ενεργειακή ανάλυση ευστάθειας (Davidson 2001), υπό την έννοια συσχέτισης της κρίσιμης τιμής Gr_{Cr} και του μήκους κύματος εξαρτώμενων από τον αριθμό Ha, για αυστηρά διδιάστατη συναγωγή Rayleigh-Bénard παρουσία μαγνητικού πεδίου, αγνοώντας τις επιδράσεις των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών.

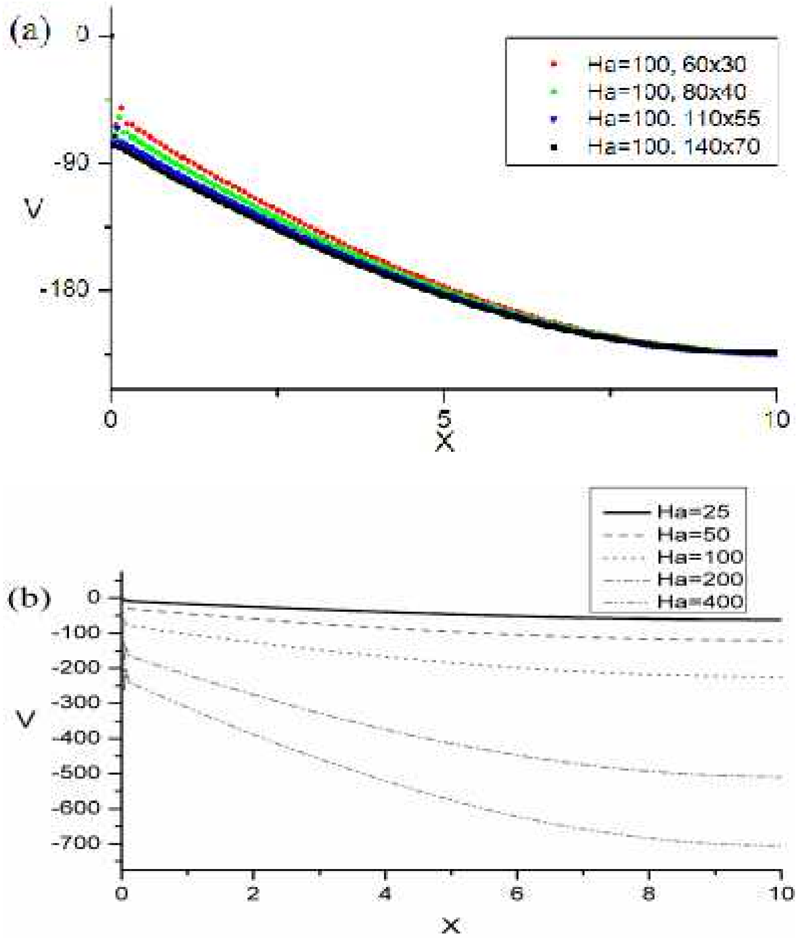
ΜΟΝΩΜΕΝΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ HARTMANN			ΑΓΩΓΙΜΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ HARTMANN		
Ha	Gr_{Cr}	k_{Cr}	Ha	Gr_{Cr}	k_{Cr}
0	42 900	0	0	42 900	0
100	53 000	2.7	100	56 000	3.0
200	75 000	3.1	200	90 000	3.4
400	155 000	3.3	400	210 000	4.0
600	290 000	3.4	600	375 000	5.0

800	460 000	4.0	800	620 000	5.0
1 000	680 000	4.3	1 000	930 000	5.0
			2 000	3 240 000	6.0

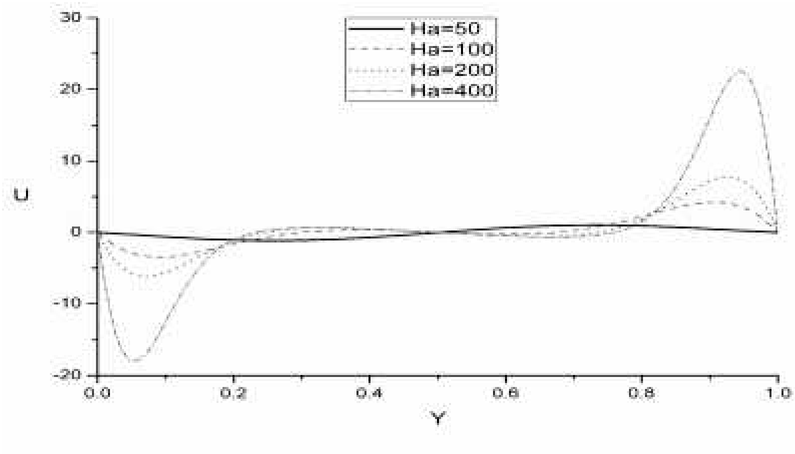
Πίνακας 4 : Μήκος κύματος στις κρίσιμες συνθήκες με αυξανόμενο Ha για (a) μονωμένα τοιχώματα Hartmann και (b) αγώγιμα τοιχώματα Hartmann.

Εν συνεχεία, προχωρούμε στην αναλυτική περιγραφή της κυρίαρχης ιδιολύσης που αφορά τα σχεδόν μονωμένα τοιχώματα Hartmann. Τα σχήματα 28a,b παρουσιάζουν τη μεταβολή της εγκάρσιας y συνιστώσας της ταχύτητας στη διεύθυνση των γραμμών του μαγνητικού πεδίου, όπως έχει ληφθεί στις κρίσιμες συνθήκες με σταδιακή πύκνωση πλέγματος για την περίπτωση Ha=100, (σχήμα 28a), και μεταβάλλοντας τον αριθμό Ha για δεδομένο πλέγμα, (σχήμα 28b). Γίνεται εμφανές ότι υπάρχει σταδιακός σχηματισμός της στοιβάδας Hartmann όταν Ha≥25. Καθώς ο Ha αυξάνεται, Ha>100, γίνεται προοδευτικά πιο δύσκολο να εντοπιστούν οι λεπτομέρειες της εγκάρσιας ταχύτητας κοντά στα τοιχώματα Hartmann λόγω του στρώματος στροβιλότητας που σχηματίζεται σε αυτή την περιοχή. Παρ' όλα αυτά, η O(Ha) συμπεριφορά της εγκάρσιας συνιστώσας της ταχύτητας καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου ανιχνεύεται με ακρίβεια.

Στην πραγματικότητα, καθίσταται εμφανές ότι το φαινόμενο Hartmann braking effect καθορίζεται από μεταβολές στο επίπεδο κάθετα στο μαγνητικό πεδίο καθώς επίσης και από ολοκληρωτικές ιδιότητες της θερμοκρασίας και του πεδίου ταχύτητας ως προς τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου σε όλο το στρώμα του υγρού μετάλλου, (βλ. επίσης εξίσωση (4.17)). Οπωσδήποτε, καθώς ο Ha υπερβαίνει την τιμή 400 το στρώμα δίνης κοντά στα τοιχώματα Hartmann γίνεται ιδιαίτερα δύσκολο να ανιχνευθεί από την διακριτοποίηση μέσω FEM που υιοθετήσαμε, (σχήμα 28b). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνεται το σφάλμα στην ανίχνευση του φαινομένου Hartmann braking effect και η διαφορά ανάμεσα στον αριθμητικό υπολογισμό της ουδέτερης ευστάθειας γίνεται προφανής, (σχήμα 27a). Ωστόσο, κυριαρχεί η επίδραση του ολοκληρώματος όγκου και η συσχέτιση $Gr \sim Ha^2$ ανακτάται για πιο ευρύ φάσμα Ha τιμών. Την ίδια στιγμή ο σταδιακός σχηματισμός των πλευρικών στοιβάδων εντοπίζεται από την αριθμητική λύση όπως γίνεται εμφανές από το εγκάρσιο προφίλ της x συνιστώσας της ταχύτητας με μεταβλητή τιμή του Ha, (σχήμα 29). Ανακτάται η κλίμακα $Ha^{-1/2}$ του πάχους πλευρικού στρώματος μαζί με την κλίμακα O(Ha) της κατακόρυφης, V, μέσα στις στοιβάδες Hartmann και της διαμήκους συνιστώσας της ταχύτητας, U, στις γωνιακές περιοχές. Η τελευταία συνιστώσα φαίνεται επίσης να εξαλείφεται στον πυρήνα του αγωγού, όπως αναμενόταν στηριζόμενοι στην ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα.



Σχήμα 28 : Διαμήκες προφίλ της εγκάρσιας y συνιστώσας της ταχύτητας για (a) μεταβλητό πλέγμα και (b) αυξανόμενο Ha. Οι υπολογισμοί γίνονται για y=0.5.

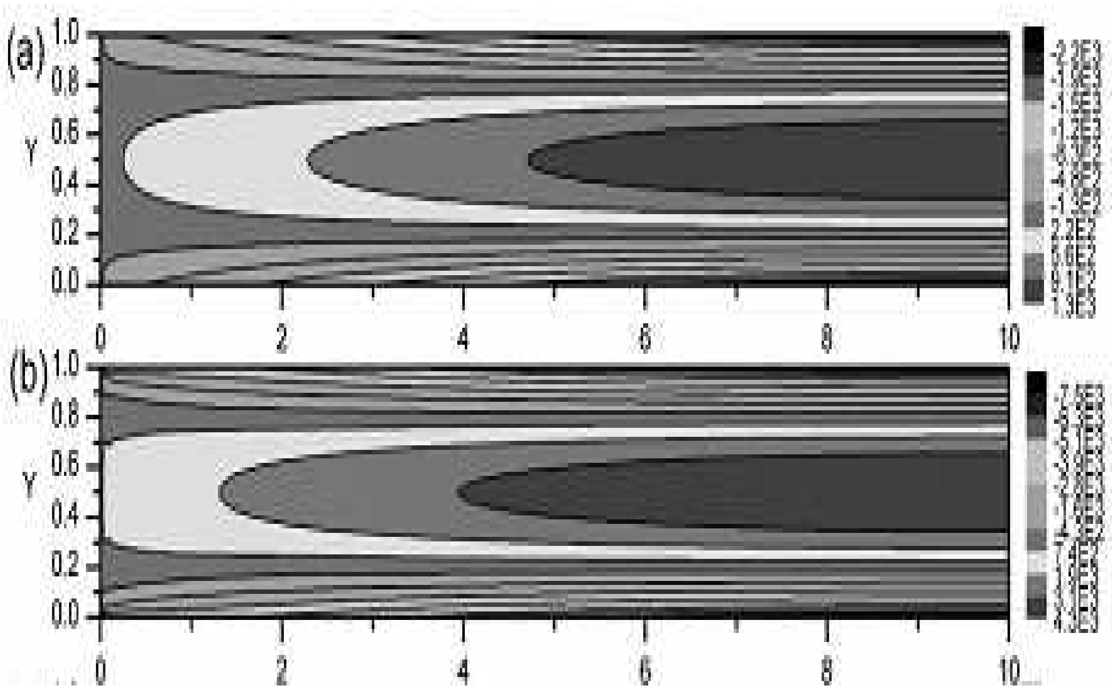


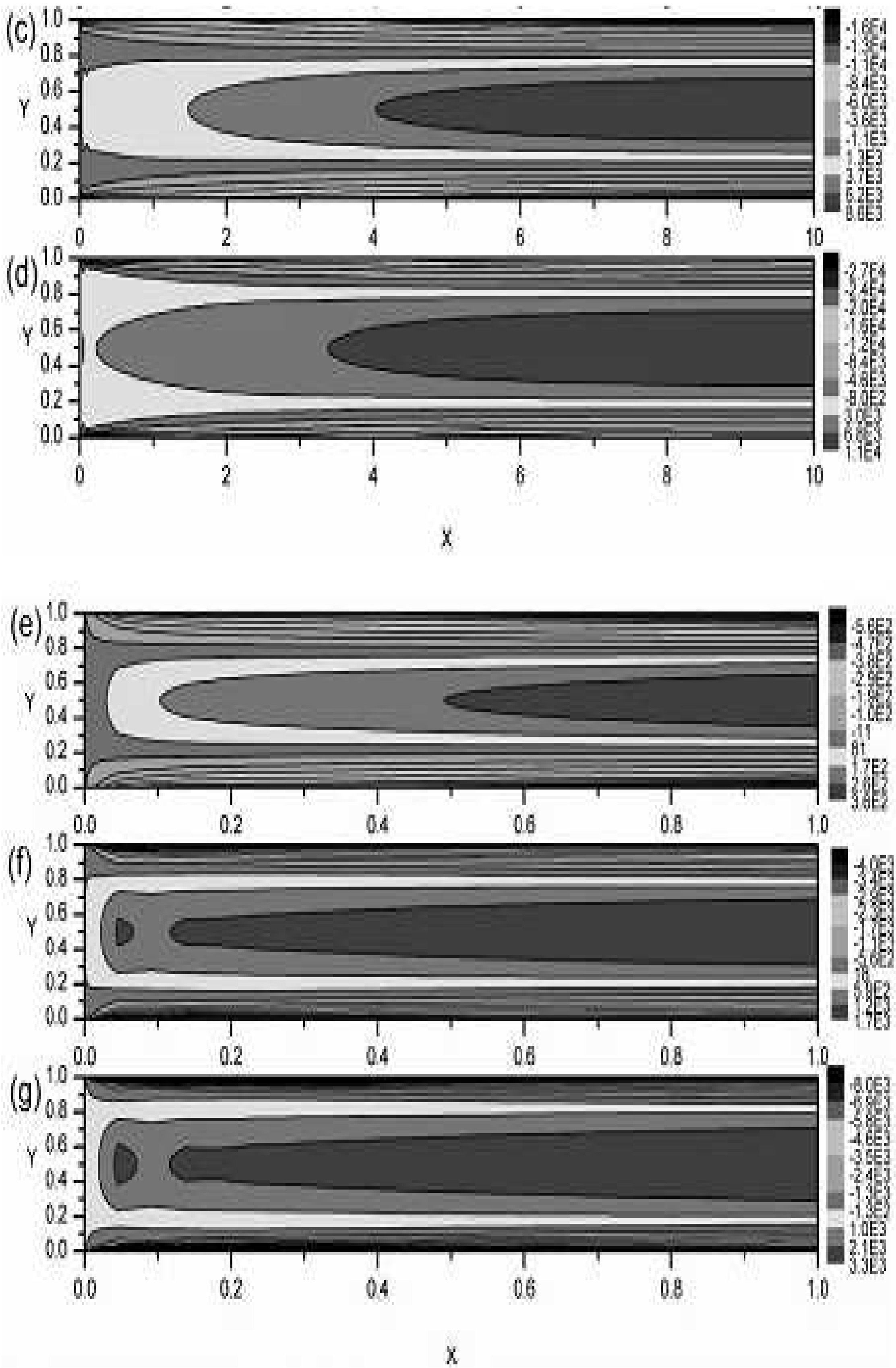
Σχήμα 29 : Εγκάρσιο προφίλ της διαμήκους x συνιστώσας της ταχύτητας για αυξανόμενο Ha. Οι υπολογισμοί γίνονται για x =0.95.

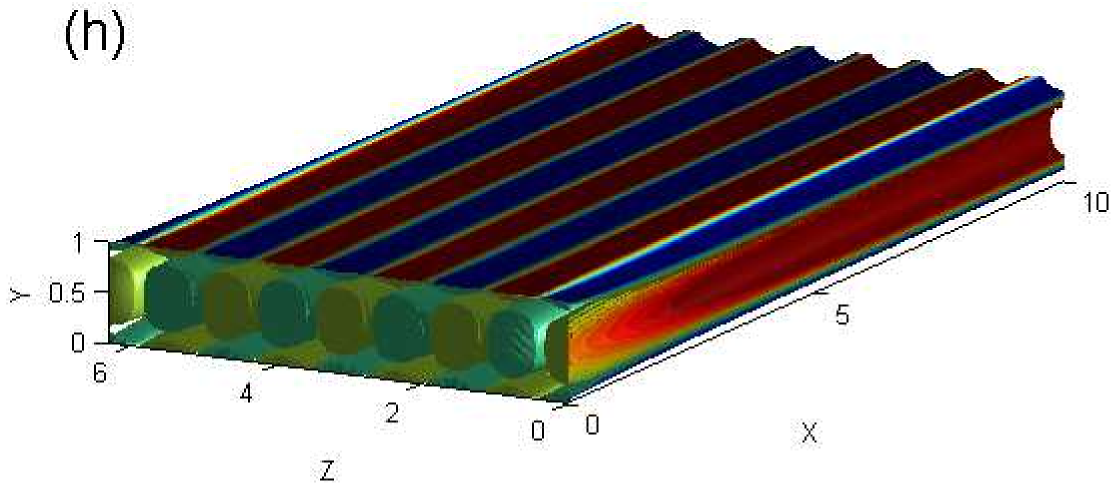
Προκειμένου να απεικονίσουμε καλύτερα τη μορφή της ροής στις κρίσιμες συνθήκες κατασκευάζονται διαγράμματα ισοϋψών, όπως φαίνεται στο σχήμα 30 που απεικονίζεται η x συνιστώσα της στροβιλότητας στη διατομή του αγωγού καθώς ο Ha αυξάνεται. Στο σχήμα 30a,b,c,d δίδεται έμφαση στην περιοχή του πυρήνα της ροής όπου επιβεβαιώνεται η συμπεριφορά O(Ha) της x συνιστώσας της στροβιλότητας έως περίπου την τιμή Ha=400. Πλησίον των άνω και κάτω πλευρικών τοιχωμάτων και κοντά στον άξονα συμμετρίας, x=10, υπάρχουν περιοχές αντίθετης κυκλοφορίας, ως προς την κύρια εστία ανακυκλοφορίας, καθώς οι y και z συνιστώσες της ταχύτητας εξαλείφονται στα πλευρικά τοιχώματα. Δεν εμφανίζονται οι λεπτομέρειες της στοιβάδας Hartmann διότι η x στροβιλότητα είναι πολύ μεγαλύτερη στον πυρήνα και παρουσιάζει σημαντική μεταβολή σε αυτή την περιοχή, γεγονός που αποκλίνει έντονα από οιονεί διδιάστατη δομή.

Ο σχηματισμός της στοιβάδας Hartmann παριστάνεται στα σχήματα 30e,f,g κοντά στην αριστερή πλευρά του αγωγού όπου η στροβιλότητα πρέπει να μηδενιστεί στα τοιχώματα Hartmann. Γίνεται εμφανές ότι επιδεινώνεται η αριθμητική ακρίβεια εντός της περιοχής της στοιβάδας Hartmann αλλά το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει τα κύρια χαρακτηριστικά του ιδιοδιανύσματος, όπως θα φανεί στις επόμενες σχετικές σελίδες. Το σχήμα 30h παρέχει μια τριδιάστατη αναπαράσταση της x στροβιλότητας όταν Ha=400, απεικονίζοντας την κύρια κίνηση της δίνης που παράγεται από τις ανωστικές δυνάμεις καθώς ο Gr προσεγγίζει την κρίσιμη τιμή. Σε αυτή την περίπτωση το μήκος κύματος του προκύπτοντος στάσιμου κύματος είναι

ℓ Z 2® / k_{Cr} ù1.6 και σε μία περίοδο του συγκεκριμένου κύματος προσλαμβάνει τη μορφή δύο αντι-περιστρεφόμενων δινών που είναι ευθυγραμμισμένες με το μαγνητικό πεδίο. Θερμά και ψυχρά τμήματα του ρευστού βρίσκονται στις απέναντι άκρες κάθε δίνης προκαλώντας ανοδική και καθοδική κίνηση του ρευστού, αντίστοιχα. Επιπλέον, το σχήμα 30h απεικονίζει μια συστοιχία τεσσάρων τέτοιων ζευγών δινών που αναδύονται όταν επιτυγχάνεται αρκετά μεγάλη θερμοκρασιακή κλίση για δεδομένο μαγνητικό πεδίο και υγρό μέταλλο.




(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
Y
X

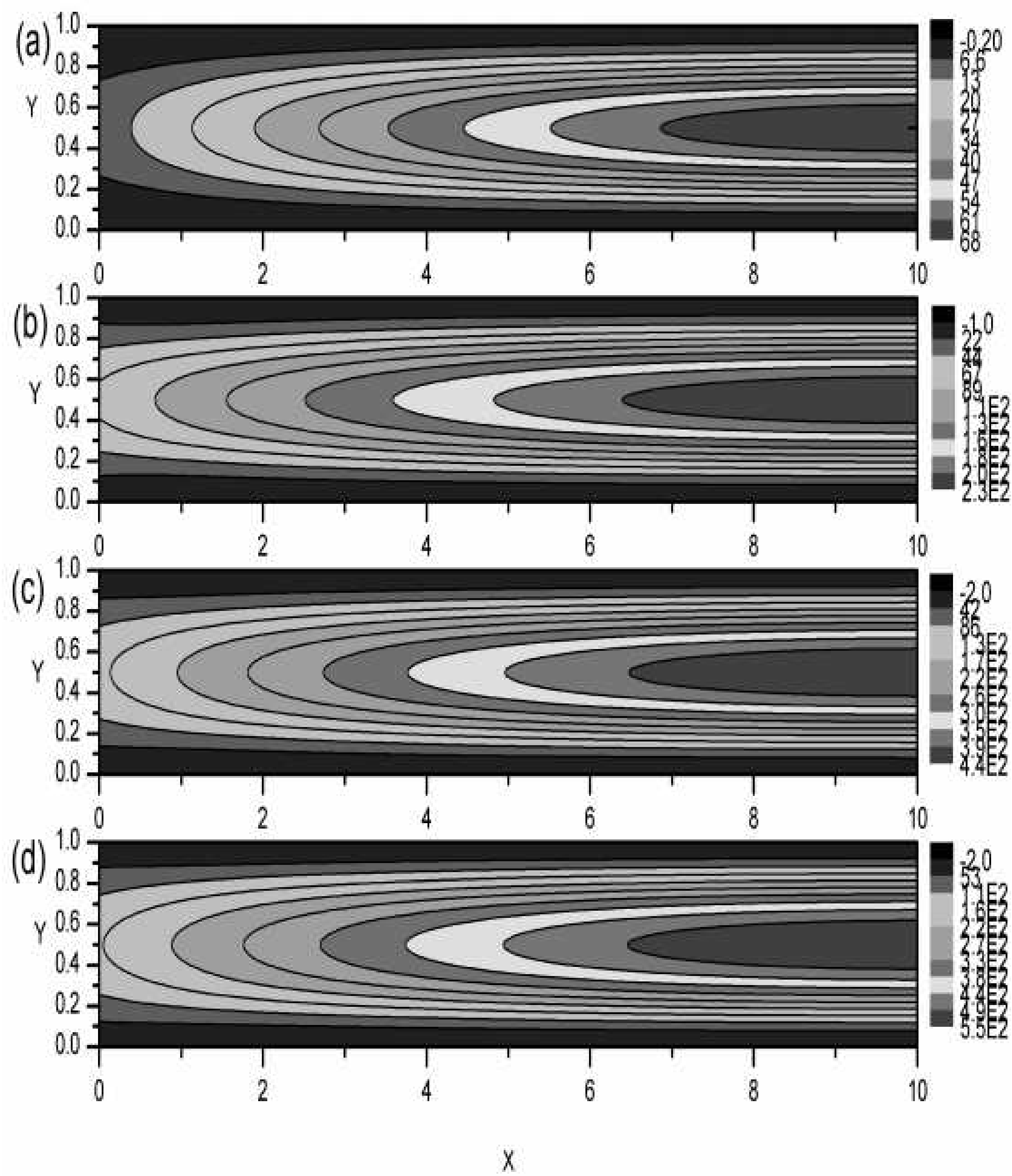


Σχήμα 30 : Ισοϋψείς της x στροβιλότητας καθώς ο Ha αυξάνεται, (a) Ha=25, (b) Ha=100, (c) Ha=200, (d) Ha=400. Ισοϋψείς της x στροβιλότητας που εστιάζουν εντός των στοιβάδων δινών κοντά στο τοίχωμα Hartmann, (e) Ha=25, (f) Ha=100, (g) Ha=200 και (h) ισοεπιφάνεια της x στροβιλότητας για Ha=400.

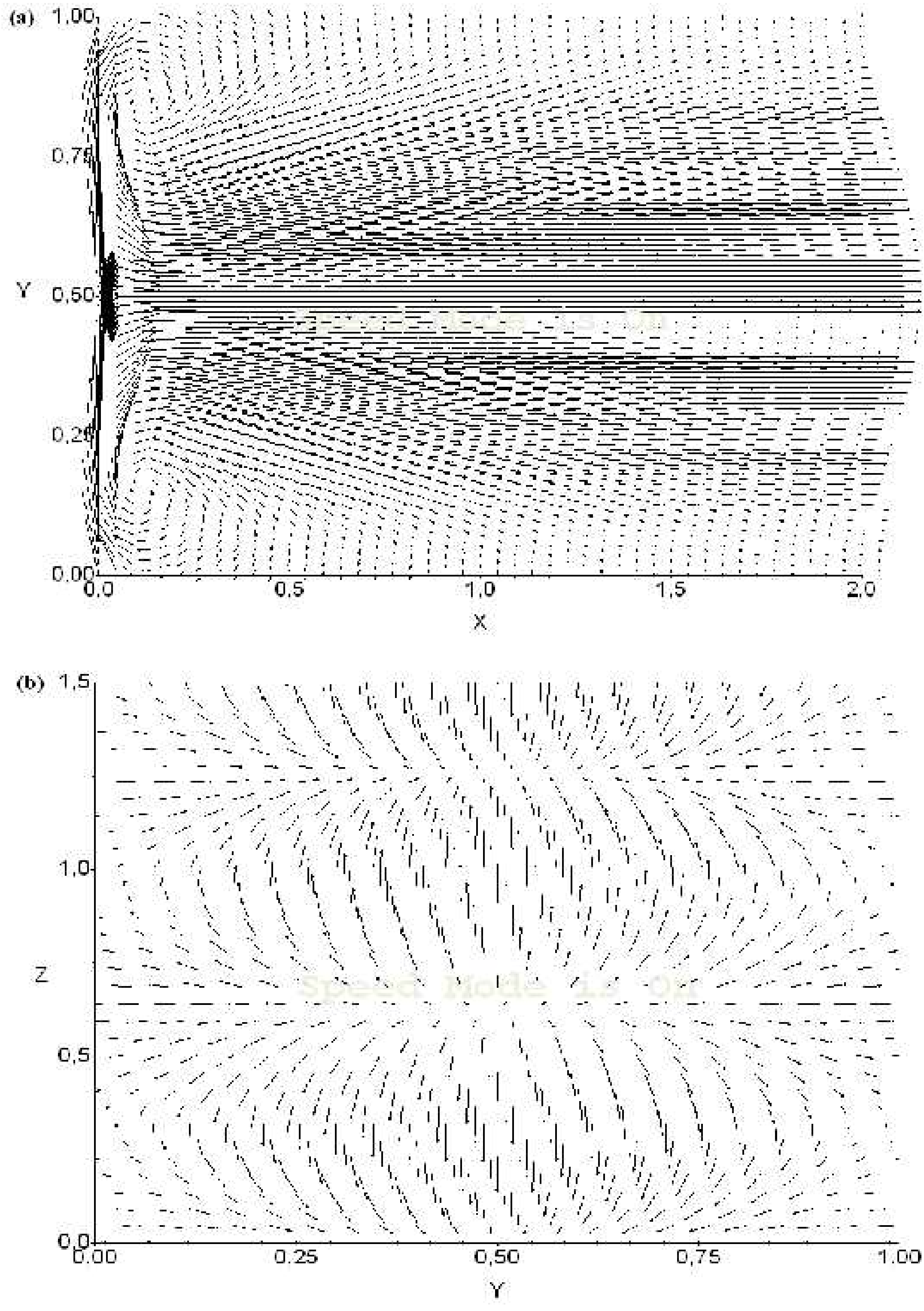
Η παραπάνω μορφή ροής ήταν αναμενόμενη, λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, εξαιτίας της ασθενούς ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann. Επίσης, αντανακλάται στην εξέλιξη του ηλεκτρικού δυναμικού προϊόντος του Ha. Τα σχήματα 31a,b,c,d παρουσιάζουν αμελητέα μεταβολή κοντά στα δύο πλευρικά τοιχώματα, όπως αναμενόταν εξαιτίας του μεγάλου λόγου ηλεκτρικής αγωγιμότητας, ενώ ποικίλλουν στην περιοχή που καταλαμβάνεται από τις στοιβάδες Hartmann υποδηλώνοντας την τάση των ηλεκτρικών ρευμάτων να εισχωρήσουν σε αυτή την περιοχή. Το τελευταίο καθιστά έκδηλη την επίδραση της ασθενούς ηλεκτρικής αγωγιμότητας στα τοιχώματα Hartmann, όπου δημιουργείται τετραγωνική μεταβολή καθώς ο Ha αυξάνεται γεγονός που είναι σε συμφωνία με την εξίσωση (4.16). Η εν λόγω σχέση απεικονίζει επίσης την ανάπτυξη O(Ha) του ηλεκτρικού δυναμικού στον πυρήνα και στην περιοχή της στοιβάδας Hartmann σε αντιδιαστολή με την αμελητέα τιμή που προσλαμβάνει κοντά στα έντονα ηλεκτρικά αγώγιμα πλευρικά τοιχώματα. Με αυτόν τον τρόπο, αναπτύσσονται O(Ha) ισχυρά ηλεκτρικά ρεύματα, J_y και J_z, στο κατακόρυφο επίπεδο ενώ το ρεύμα J_x παραμένει O(1), (βλ. επίσης εξίσωση (4.10)). Η δραστηριότητα που σημειώνεται στη στοιβάδα Hartmann παράγει σημαντικές δυνάμεις Lorentz,

$\vec{J} \times \vec{B} = J_z \vec{e}_z \times \vec{e}_y$, και είναι υπεύθυνη για τη διατήρηση υψηλής εγκάρσιας ταχύτητας, V, στην εγγύς περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann με τρόπο ο οποίος δύναται να ταυτοποιηθεί ως ηλεκτρομαγνητική άντληση (Davidson 2001). Στο ίδιο πλαίσιο, τα σχήματα 32a,b απεικονίζουν την κίνηση του ηλεκτρικού ρεύματος στη διατομή του αγωγού (xy επίπεδο για z=0) και στο τοίχωμα Hartmann (yz επίπεδο για x=0). Το σχήμα 32a δείχνει την ομοιομορφία του ηλεκτρικού ρεύματος στην περιοχή του πυρήνα καθώς επίσης και την πορεία του ρεύματος κατά μήκος και κάθετα στις στοιβάδες Hartmann κοντά στις δύο γωνιακές περιοχές όταν Ha=25, όπου σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται για πρώτη φορά ο σχηματισμός στοιβάδας Hartmann, (βλ. επίσης σχήμα 28b). Όπως επισημάνθηκε στην ασυμπτωτική ανάλυση, μολονότι η διόρθωση του ηλεκτρικού δυναμικού μέσα στη στοιβάδα Hartmann είναι πολύ μικρή, $\Phi_H = O(Ha^{-1})$, η διόρθωση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι της ίδιας τάξης όπως στον πυρήνα, $J_{Hx} = \partial\phi_H/\partial x = Ha\,\partial\phi_H/\partial X = O(1)$, και παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου εντός των στοιβάδων Hartmann, $\partial J_x/\partial x = O(Ha)$, οπότε με αυτόν τον τρόπο εξισορροπούνται μεταβολές ως προς την y κατεύθυνση, $\partial J_y/\partial y = O(Ha)$.

Κατά συνέπεια, δύναται να λεχθεί ότι τα ηλεκτρικά ρεύματα πρέπει να διέλθουν μέσω των στοιβάδων Hartmann πριν κλείσουν, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 32a, και οι λεπτομέρειες της ροής σε αυτές τις περιοχές είναι απαραίτητες για την αναπαράσταση της κίνησης του ηλεκτρικού ρεύματος στο xy επίπεδο. Το σχήμα 32b εμφανίζει στιγμιότυπο βρόχου ηλεκτρικού ρεύματος στο τοίχωμα Hartmann εκφράζοντας τις κλειστές διαδρομές των ρευμάτων μακριά από τα πλευρικά τοιχώματα υψηλής αγωγιμότητας, στον πυρήνα της ροής και στο κέντρο των εστιών ανακυκλοφορίας. Απεικονίζεται η περίπτωση για Ha=800 κατά την οποία ο κρίσιμος κυματαριθμός είναι $k_{cr}=4$ και το αντίστοιχο μήκος κύματος $\ell = 2\pi/k \approx 1.6$. Λαμβάνοντας υπόψη την ασυμπτωτική ανάλυση που προηγήθηκε, τα ρεύματα J_y και J_z δεν παρουσιάζουν σημαντική διόρθωση στη γειτονική περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών και αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι μπορούν να προσδιορισθούν σχετικά με ακρίβεια καθ' όλη την περιοχή της ροής χωρίς την πλήρη γνώση των λεπτομερειών της μορφής ροής μέσα στις στοιβάδες Hartmann και πλευρικές.



Σχήμα 31 : Ισοϋψείς του ηλεκτρικού δυναμικού καθώς ο Ha αυξάνεται για αδιάστατες ηλεκτρικές αγωγιμότητες c_H=0.00415, c_S=4.5, (a) Ha=25, (b) Ha=100, (c) Ha=200 και (d) Ha=400.

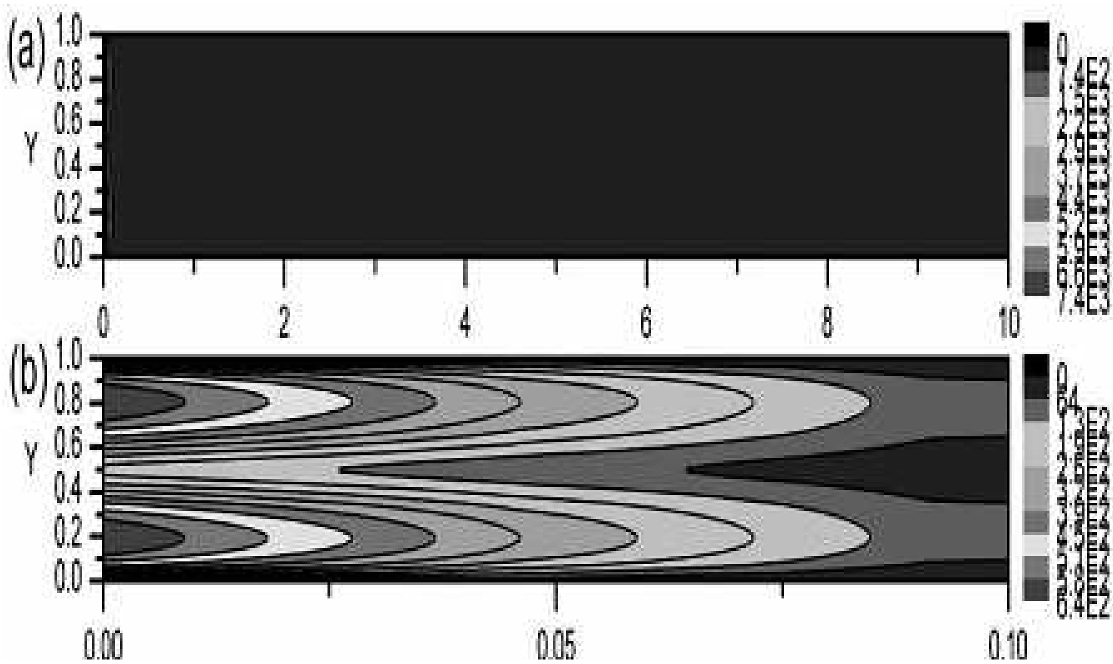


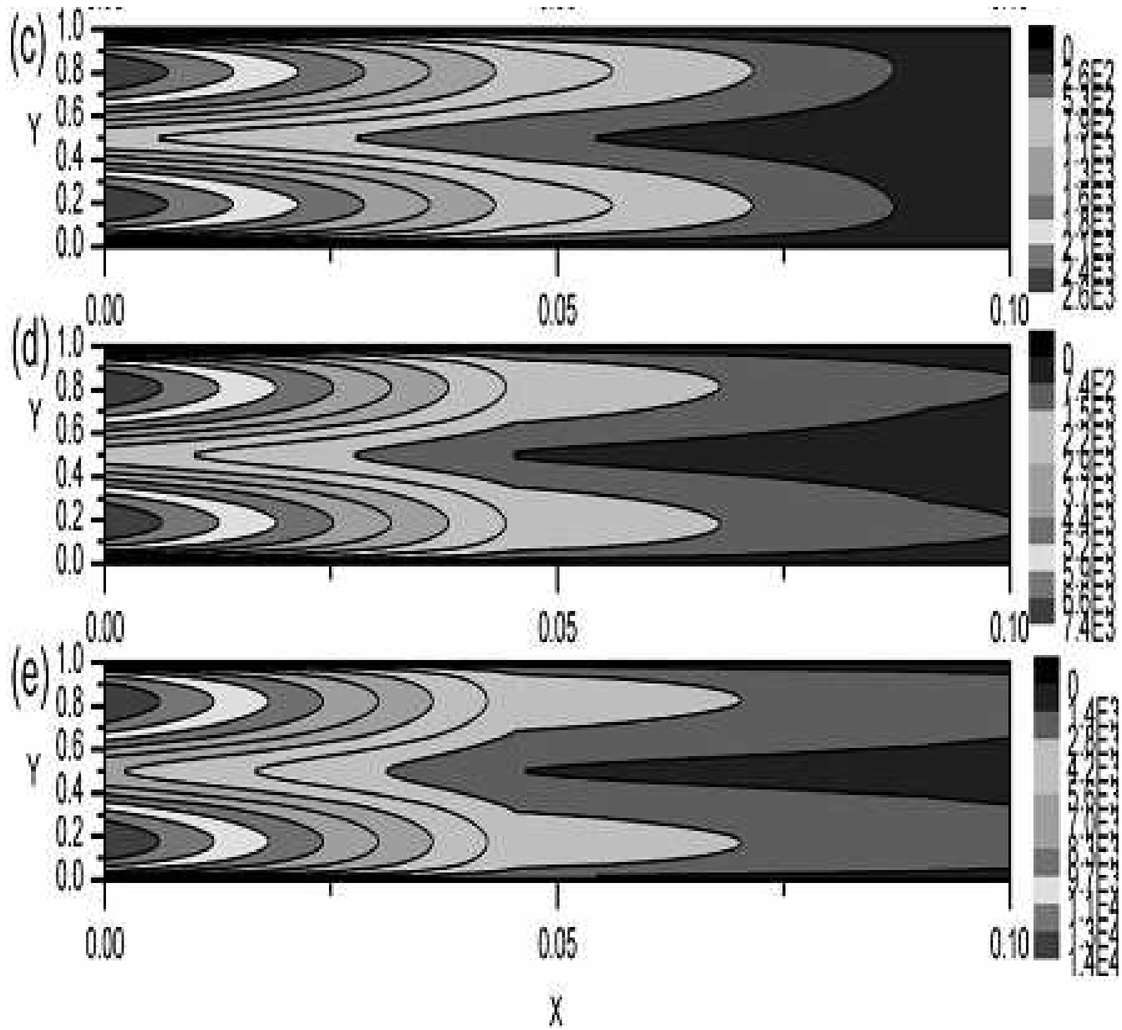
Σχήμα 32 : Διδιάστατα διανυσματικά πεδία ηλεκτρικών ρευμάτων για (a) ρεύματα (J_x,J_y) στο xy επίπεδο για z=0 (Ha=25) και (b) ρεύματα (J_y,J_z) στο αριστερό τοίχωμα Hartmann για x=0 (Ha=800).

Προκειμένου να απεικονιστεί πρωτίστως η δομή της ροής στις στοιβάδες Hartmann καθώς επίσης και στα αντίστοιχα πλευρικά τοιχώματα εξετάζεται η συνιστώσα της στροβιλότητας στο επίπεδο κάθετα στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου, $\Omega_{yz} = \sqrt{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}$, στις κρίσιμες συνθήκες και για αυξανόμενης έντασης μαγνητικό πεδίο. Συγκεκριμένα, το σχήμα 33a περιέχει ισοϋψείς του Ω_{yz} σε όλη τη διατομή του αγωγού για την περίπτωση Ha=100. Η περιοχή που αντιστοιχεί στη στοιβάδα Hartmann καθορίζει τις ισοϋψείς εξαιτίας της μεγάλης διαμήκους μεταβολής της εγκάρσιας ταχύτητας, $\partial V_H/\partial x = O(Ha^2)$, καθώς προσεγγίζεται το τοίχωμα Hartmann. Τα σχήματα 33b,c,d,e εστιάζουν στις περιοχές των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών που εκτείνονται από τις γωνίες στις συνδέσεις ανάμεσα στα τοιχώματα Hartmann και τα πλευρικά προς την περιοχή του πυρήνα της ροής. Η περιοχή στο διάστημα που καταλαμβάνεται από τις στοιβάδες Hartmann οριοθετείται εμφανώς από τη στιγμή που παρουσιάζει διαφορετικό ρυθμό ανάπτυξης από την περιοχή στον πυρήνα όπου ισχύει $\Omega_{yz} \sim O(Ha)$. Οι στοιβάδες Hartmann κυριαρχούν και παρατηρείται ανάπτυξη $O(Ha^2)$ της κάθετης yz στροβιλότητας από τους αριθμητικούς υπολογισμούς του πιο ασταθούς ιδιοδιανύσματος, ιδιαίτερα στο πεδίο τιμών $25 \le Ha \le 200$. Τα σχήματα 33b,c,d,e παρουσιάζουν επίσης σταδιακή επέκταση της περιοχής του πλευρικού στρώματος, καθώς ο Ha αυξάνεται, η οποία καταλαμβάνει περισσότερο χώρο κατά μήκος των πλευρικών τοιχωμάτων και εντός του αγωγού.

Η μορφή της ροής στις πλευρικές στοιβάδες είναι τέτοια ώστε το ρευστό ωθείται να καταλάβει τον εναπομείναντα χώρο από το ρευστό που προκύπτει κοντά στο κάτω πλευρικό τοίχωμα ενώ το ρευστό εξωθείται από την περιοχή που καταλαμβάνεται από το αναδυόμενο ρευστό κοντά στο άνω τοίχωμα. Έτσι, η ποσότητα $\frac{\partial V_H}{\partial y}$ από τη στοιβάδα Hartmann και η ροή στον πυρήνα εξισορροπεί την ποσότητα $\frac{\partial U}{\partial x}$ από την πλευρική στοιβάδα που παράγει τη z συνιστώσα της στροβιλότητας και κλίση πίεσης $\partial P/\partial x = O(1)$ που διευκολύνει τη ροή κατά μήκος των πλευρικών τοιχωμάτων στη x κατεύθυνση. Από τη στιγμή που ισχύει $\partial P/\partial x \ll 1$ στον πυρήνα, αν και η πτώση πίεσης είναι ελάχιστη κατά μήκος της y κατεύθυνσης στην πλευρική στοιβάδα, το παραπάνω πρότυπο ροής καθορίζεται άνω και κάτω από την κύρια δίνη ανακυκλοφορίας που χαρακτηρίζει τη ροή στον πυρήνα. Κατ' ουσία διαχέει την κάθετη συνιστώσα της στροβιλότητας, Ω_{yz}, στο μαγνητικό πεδίο μακριά από τα τοιχώματα Hartmann όπου παράγεται προς το εσωτερικό του αγωγού διαμέσου των γωνιών και των πλευρικών στοιβάδων. Με τον τρόπο αυτό, ο αγωγός συμπεριφέρεται παρόμοια με ΜΥΔ αντλία που μετασχηματίζει το ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο δημιουργείται ως απόρροια της άνωσης παρουσία συναγωγής στις περιοχές του πυρήνα και της στοιβάδας Hartmann, σε κίνηση ρευστού.

Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι, ενώ συνυπάρχει με την κύρια δομή ανακυκλοφορίας στον πυρήνα, καθώς η ροή αναπτύσσεται στην περιοχή του πλευρικού στρώματος με αυξανόμενη τιμή του Ha (βλ. σχήματα 33b,c,d,e) αυτό εντείνεται και τείνει να καταλάβει όλη την περιοχή του πλευρικού στρώματος. Αυτή η πτυχή της ροής σε αγωγό, που συμπεριλαμβάνει την επίδραση της ηλεκτρομαγνητικής άντλησης έχει επίσης αναγνωριστεί από τον Buhler (1998) και χρειάζεται να μελετηθεί περαιτέρω σε μελλοντική εργασία στα πλαίσια χρήσης μη γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Ο σχηματισμός ενεργών πλευρικών στοιβάδων επισημάνθηκε επίσης στη μελέτη ΜΥΔ ροής με ελεύθερη συναγωγή εντός κυλινδρικού σωλήνα από τους Davoust et al. (1999) όταν υπάρχει διαφορά στις ηλεκτρικές αγωγιμότητες ή στη μορφή της διατομής στον αγωγό.





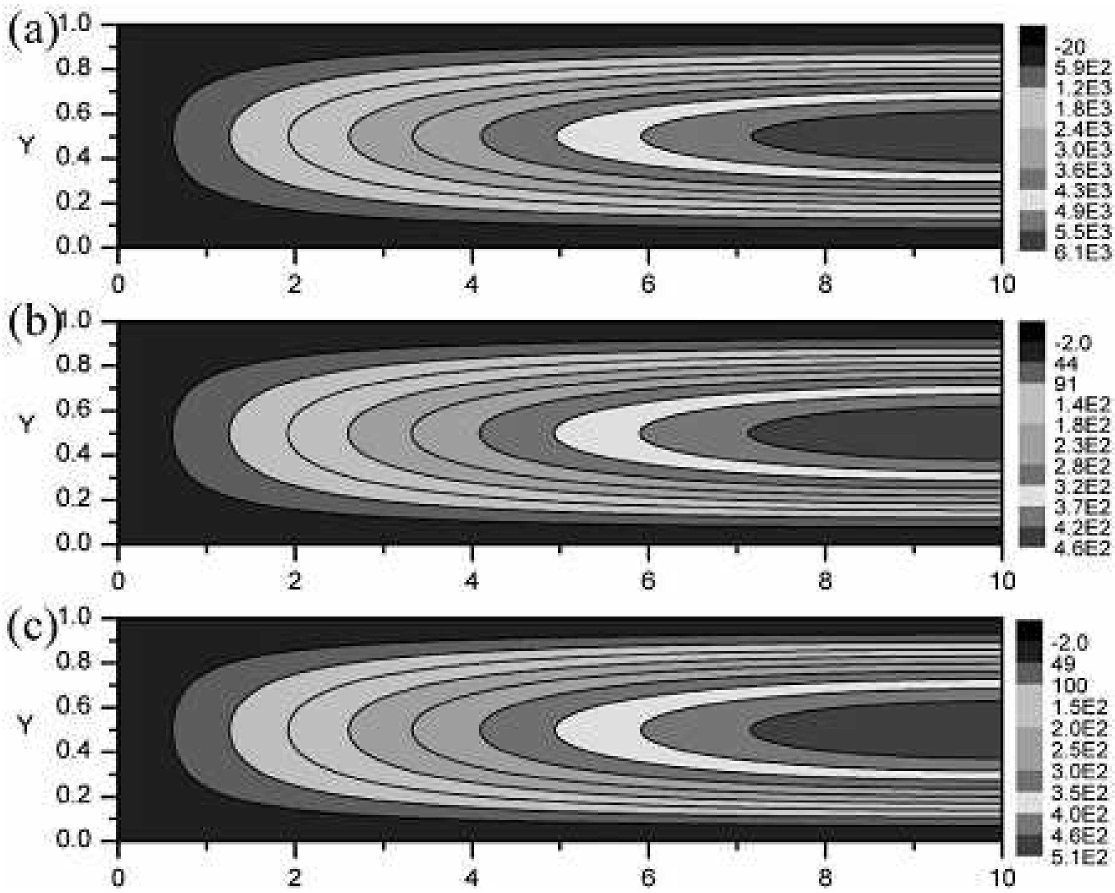
Σχήμα 33 : Ισοϋψείς της Ω_{yz} στροβιλότητας (a) σε όλο το xy επίπεδο για Ha=100, και εστιάζοντας στην περιοχή του πλευρικού τοιχώματος για (b) Ha=25, (c) Ha=50, (d) Ha=100 και (e) Ha=200.

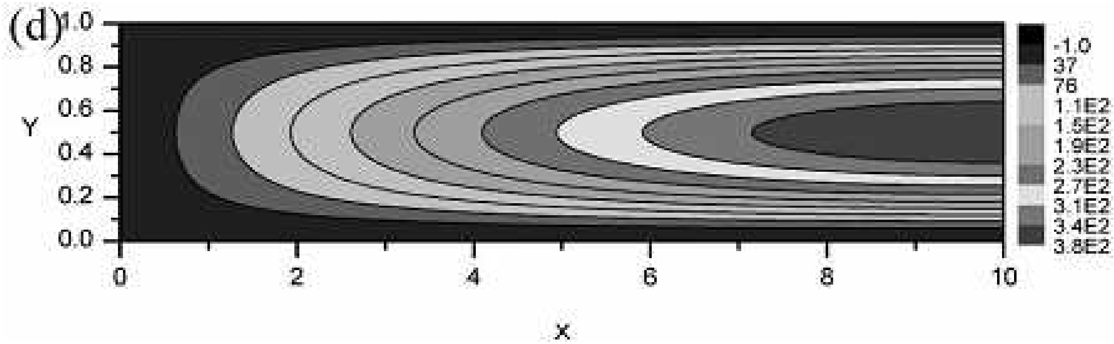
Όταν μελετώνται ηλεκτρικά αγώγιμα τοιχώματα Hartmann και συγκεκριμένα όταν ισχύει $c_S=c_H$, η συσχέτιση μεταξύ άνωσης και μαγνητικών δυνάμεων στις κρίσιμες συνθήκες υπακούει και πάλι στη μορφή Gr_{Cr}~Ha^2 αλλά σε αυτή την περίπτωση η μορφή της ροής διαφέρει, υπό την έννοια ότι η δομή της στοιβάδας Hartmann και της πλευρικής που φυσιολογικά αναμένονταν για υψηλές τιμές του Ha δεν ανακτάται και ελήφθησαν αριθμητικά αποτελέσματα χωρίς συγκεκριμένη δυσκολία ακόμη και για ιδιαίτερα υψηλή τιμή του Ha=2000. Λόγω της έντονης ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann, η x στροβιλότητα και η εγκάρσια ταχύτητα V παραμένουν αμφότερες O(1) στις περιοχές του πυρήνα και της στοιβάδας Hartmann, (βλ. εξισώσεις (4.17) και (4.18a)). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μη δύναται να παρατηρηθεί καμία οιονεί διδιάστατη δομή της ροής, η οποία παρουσιάζει τριδιάστατες μεταβολές. Επιπρόσθετα, τα ηλεκτρικά ρεύματα είναι αμελητέα στην εγγύς περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών και οι διαδρομές των ρευμάτων κλείνουν εντός της περιοχής του πυρήνα. Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με την ασυμπτωτική ανάλυση που εφαρμόστηκε, υποδηλώνοντας τη σημαντική μείωση της y-συνιστώσας της ταχύτητας στη γειτονική περιοχή των έντονα ηλεκτρικά αγώγιμων τοιχωμάτων Hartmann.

Καθίσταται σαφές ότι η συγκεκριμένη μορφή ροής είναι διαφορετική από την αντίστοιχη ροή της περίπτωσης των σχεδόν ηλεκτρικά μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann. Αυτό αποτελεί κομβικό σημείο όσον αφορά την αξιολόγηση των δυνατοτήτων της μεταφοράς θερμότητας του αγωγού παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων.

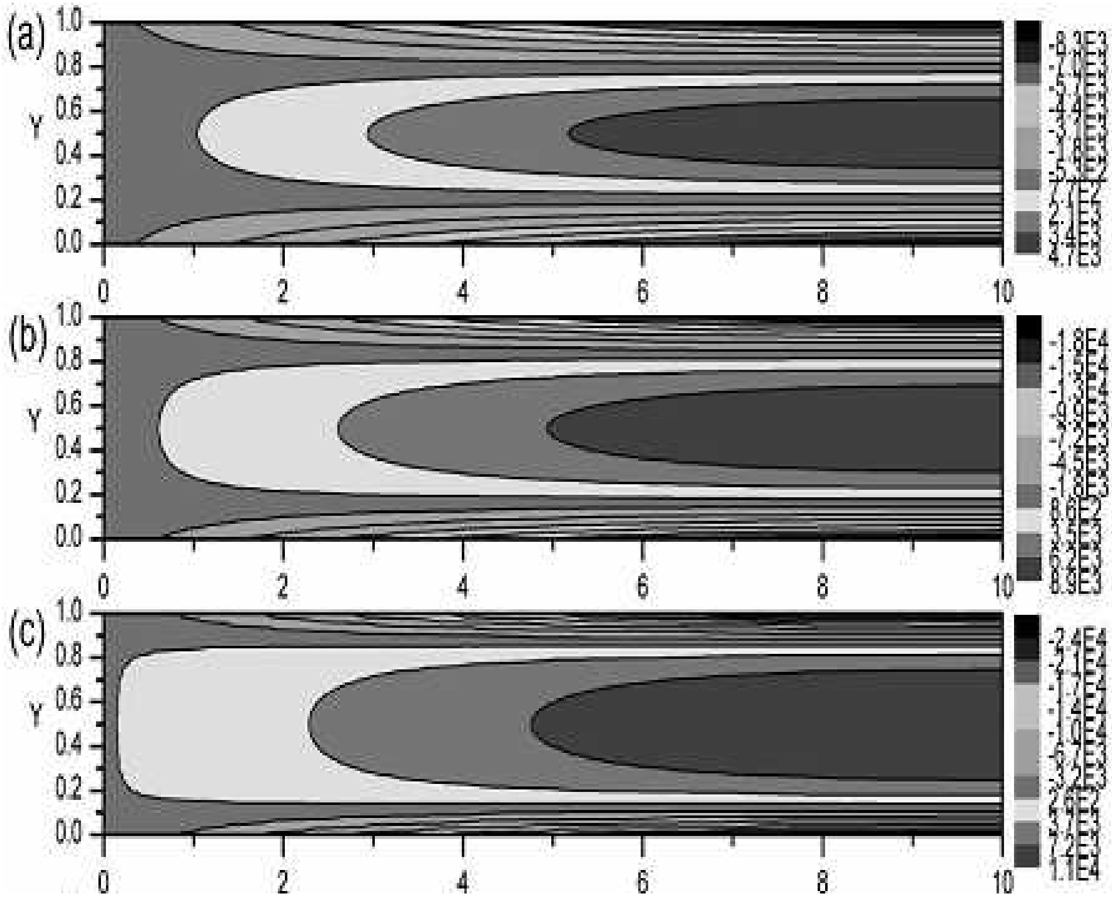
Τα σχήματα 34a,b,c,d παρουσιάζουν ισοϋψείς του ηλεκτρικού δυναμικού για αυξανόμενες τιμές του Ha στα οποία απεικονίζεται αμελητέα μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού στη γειτονική περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών. Παρατίθενται επίσης ισοϋψείς της x στροβιλότητας στα σχήματα 35a,b,c,d όπου η στροβιλότητα Ω_x παραμένει O(1) χωρίς καμία υπόνοια σχηματισμού στοιβάδας Hartmann ή πλευρικής για το εύρος τιμών των αριθμών Ha που μελετώνται. Η κυκλική κίνηση στον πυρήνα απεικονίζεται στα σχήματα 35a,b,c,d αφήνοντας τις περιοχές δινών που εφάπτονται στα πλευρικά τοιχώματα με μαύρο χρώμα, από τη στιγμή που λαμβάνονται αρνητικές τιμές στροβιλότητας στις εν λόγω περιοχές όπως ήταν αναμενόμενο. Η τριδιάστατη δομή της x συνιστώσας της στροβιλότητας παρατίθεται στο σχήμα 35e εμφανίζοντας παρόμοια μορφή ροής όπως στο σχήμα 30h, με τη διαφορά ότι στην προκειμένη περίπτωση η ένταση των περιοχών ανακυκλοφορίας είναι σημαντικά μικρότερη.

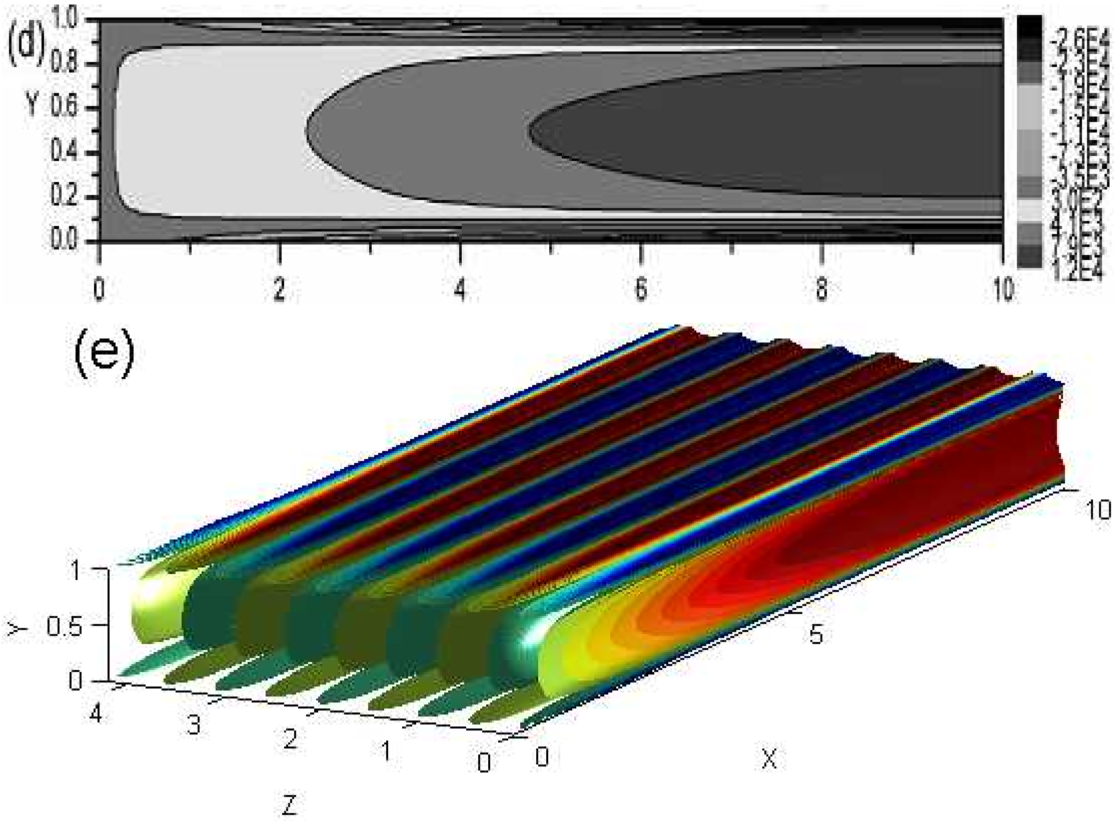
Ενδελεχής εξέταση των σχημάτων 33, 34 αποκαλύπτει την τάση για τη x στροβιλότητα να αποσβένει καθώς η μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού μειώνεται κοντά στα τοιχώματα Hartmann. Η Ω_{yz} στροβιλότητα υποσκελίζεται πλήρως από τη x στροβιλότητα καθ' όλη την έκταση της διατομής του αγωγού. Στην πραγματικότητα, καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου η Ω_{yz} στροβιλότητα δεν παρουσιάζει εξάρτηση από τον αριθμό Ha όπως χαρακτηριστικά παρουσιάζεται στα σχήματα 36a,b,c,d και ιδιαίτερα κοντά στο τοίχωμα Hartmann όπου η δημιουργία στοιβάδας Hartmann O(Ha^{-1}) θα παρήγαγε μεγάλη στροβιλότητα. Δεν υπάρχει τάση σχηματισμού στοιβάδων Hartmann και πλευρικών στις κατανομές των x, y συνιστωσών της ταχύτητας με τον τρόπο που περιγράφηκε στην περίπτωση των σχεδόν ηλεκτρικά μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann. Ωστόσο θα πρέπει να επισημανθεί ότι ακόμη και όταν δημιουργούνται στοιβάδες Hartmann και πλευρικές στο πλαίσιο έντονα ηλεκτρικά αγώγιμων τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών τα στρώματα δινών δεν θα είναι στον ίδιο βαθμό ισχυρά όπως κατά την περίπτωση των τοιχωμάτων Hartmann που χαρακτηρίζονται από ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα, διότι στην πρώτη περίπτωση η προκύπτουσα θερμικά επαγόμενη κίνηση παραμένει O(1) στις κρίσιμες συνθήκες. Αυτό ενδεχομένως να εμφανιστεί σε αρκετά υψηλότερες τιμές του Ha από τις τιμές που μελετώνται στο παρόν πρόβλημα και κατά συνέπεια απαιτείται περαιτέρω αριθμητική εξέταση έτσι ώστε να ανιχνευθεί.



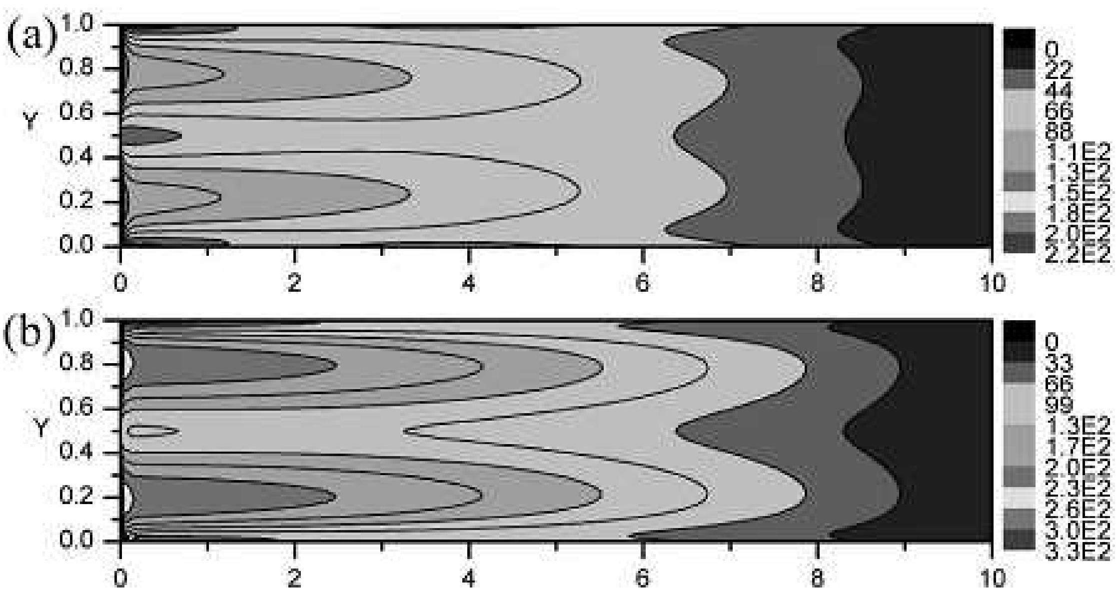


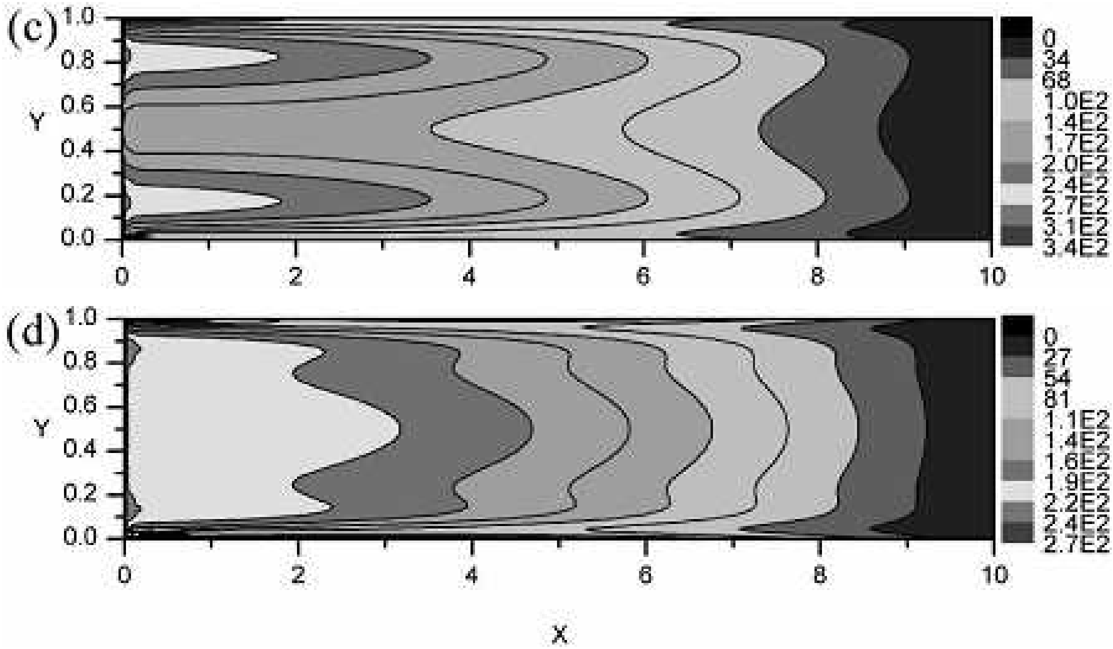
Σχήμα 34 : Ισοϋψείς του ηλεκτρικού δυναμικού για ηλεκτρικές αγωγιμότητες c_H=c_S=4.5 καθώς ο Ha αυξάνεται, (a) Ha=100, (b) Ha=400, (c) Ha=800 και (d) Ha=2000.





Σχήμα 35 : Ισοϋψείς της Ω_x στροβιλότητας για ηλεκτρικές αγωγιμότητες $c_H=c_S=4.5$ καθώς ο Ha αυξάνεται, (a) Ha=100, (b) Ha=400, (c) Ha=800 και (d) Ha=2000. (e) Ισοεπιφάνεια της x στροβιλότητας όταν Ha=2000.





Σχήμα 36 : Ισοϋψείς της Ω_{yz} στροβιλότητας στο επίπεδο xy για ηλεκτρικές αγωγιμότητες c_H=c_S=4.5 καθώς ο Ha αυξάνεται, (a) Ha=100, (b) Ha=400, (c) Ha=800 και (d) Ha=2000.

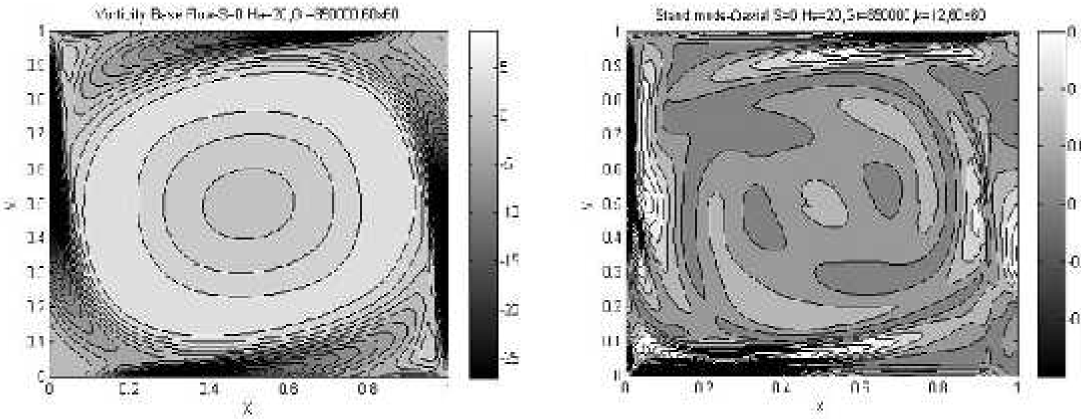
4.2 Αποτελέσματα και συζήτηση γραμμικού προβλήματος ευστάθειας ροής ελεύθερης συναγωγής στρώματος υγρού μετάλλου παρουσία οριζόντιου, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας

Μελετάται η ευστάθεια ροής με ελεύθερη συναγωγή σε κοιλότητα με βασική ροή της μορφής που φαίνεται στο σχήμα 5b. Γίνεται εμφανές ότι αποτελείται από ζεύγος αντιπεριστρεφόμενων δινών ανακυκλοφορίας που παράγονται ως απόρροια της συνδυασμένης δράσης ανωστικών και δυνάμεων Lorentz. Οι κρίσιμες παράμετροι είναι ο αριθμός Gr, ο οποίος ενσωματώνει την επίδραση της άνωσης που βασίζεται στη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα, η αδιάστατη παραγωγή θερμότητας S, η οποία συγκρίνει θερμοκρασιακές κλίσεις που προκαλούνται από τον εσωτερικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας προς τη θερμοκρασιακή κλίση μεταξύ των δύο κατακόρυφων πλακών, και εν τέλει ο αριθμός Ha ο οποίος αντιπροσωπεύει την ένταση της δύναμης Lorentz που επιβάλλεται στο στρώμα υγρού μετάλλου. Ιδιαίτερα όταν η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη στο κέντρο της κοιλότητας και κατά την περίπτωση μεγάλης παραγωγής θερμότητας, υπάρχει μία ανοδική κίνηση του στρώματος υγρού μετάλλου σε αυτή την περιοχή η οποία παράγει μία καθοδική δύναμη Lorentz εξαιτίας της δράσης του μαγνητικού πεδίου :

$$\vec{j} \times \vec{B} = \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) \times \vec{B} = -v\vec{e}_y \tag{4.20}$$

Κατά συνέπεια, το μαγνητικό πεδίο εξασθενεί την επίδραση της άνωσης και μειώνει την ισχύ των παραγόμενων δινών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για τα αποτελέσματα που πρόκειται να παρουσιαστούν στις επόμενες σελίδες έχουν υιοθετηθεί πλέγματα 40x40 και 60x60 διτετραγωνικών στοιχείων προκειμένου να επιτευχθεί η σύγκλιση των ιδιοτιμών. Ένα κράμα στο οποίο κυριαρχεί το λίθιο (Pb-17Li) έχει ληφθεί ως το ρευστό λειτουργίας για τις αριθμητικές προσομοιώσεις το οποίο χαρακτηρίζεται από αριθμό Pr=0.0321.

Απουσία εσωτερικών πηγών θερμότητας η θερμοκρασιακή κλίση των κατακόρυφων τοιχωμάτων παράγει μία δίνη. Οι ροϊκές γραμμές προσλαμβάνουν δομή η οποία είναι σχεδόν κυκλική. Η τριδιάστατη ανάλυση ευστάθειας αυτής της βασικής ροής υποδεικνύει την ύπαρξη στάσιμου κύματος το οποίο αποτελεί την κυρίαρχη ιδιομορφή χαρακτηριζόμενη από δομές δινών που βρίσκονται περιορισμένες κοντά στις τέσσερις γωνίες της διατομής της κοιλότητας, για κρίσιμο κυματαριθμό k=10, Ha=0 και Gr=50000. Στην πραγματικότητα, η τριδιάστατη ροή παράγει επίπεδη στροβιλότητα $\vec{\mu} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}$, $\mu_{xy} = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}$ η οποία κατευθύνεται κατά μήκος των x, y αξόνων κοντά στις γωνίες της διατομής στο μισό σχεδόν μήκος της κοιλότητας. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά αφορούν την αστάθεια Goertler που αναδύεται ως απόρροια των καμπυλωμένων ροϊκών γραμμών της βασικής ροής με τρόπο παρόμοιο στο πρόβλημα ροής που εξετάστηκε κατά τη διάρκεια των "benchmark" υπολογισμών, (Xin & Le Quere 2001). Καθώς αυξάνεται ο αριθμός Hartmann η μορφή της βασικής ροής γίνεται πιο ελλειπτική λόγω της σχετικά πιο έντονης δράσης των δυνάμεων Lorentz στον πυρήνα της ροής, (σχήμα 37a). Στο παρόν πρόβλημα δεν μελετώνται πολύ υψηλές τιμές του αριθμού Ha και ως εκ τούτου δεν έχουν δημιουργηθεί πλήρως οι στοιβάδες Hartmann. Για σχετικά μικρό ρυθμό ογκομετρικής παραγωγής θερμότητας, S, η κυρίαρχη αστάθεια είναι τύπου Goertler και με αύξηση του αριθμού Hartmann ο κρίσιμος αριθμός Gr για την εμφάνισή της αυξάνεται, αντανακλώντας το γεγονός ότι η απαρχή για την εμφάνιση της προαναφερθείσας αστάθειας αφορά την επίτευξη δεδομένης έντασης ανακυκλοφορίας η οποία είναι απαραίτητη για την εκτροπή των ροϊκών γραμμών κατά την τρίτη κατεύθυνση. Η κυρίαρχη ιδιολύση χαρακτηρίζεται από την παραγωγή επίπεδης στροβιλότητας στις γωνίες του xy επιπέδου, (σχήμα 37b), ενώ η δεύτερη ασταθής ιδιολύση χαρακτηρίζεται από δύο λοβούς στην αξονική στροβιλότητα, $\mu_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, γεγονός που αποτελεί χαρακτηριστικό της εμφάνισης ελλειπτικής αστάθειας στην αξονική κατεύθυνση, (Leweke & Williamson 1998). Η εν λόγω ελλειπτική αστάθεια παραμένει λιγότερο σημαντική σε σχέση με την αστάθεια τύπου Goertler, η οποία παράγει επίπεδη στροβιλότητα, για χαμηλούς ογκομετρικούς ρυθμούς παραγωγής θερμότητας αλλά τείνει να την υποκαταστήσει ως κυρίαρχη αστάθεια καθώς εντείνεται ο ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας.



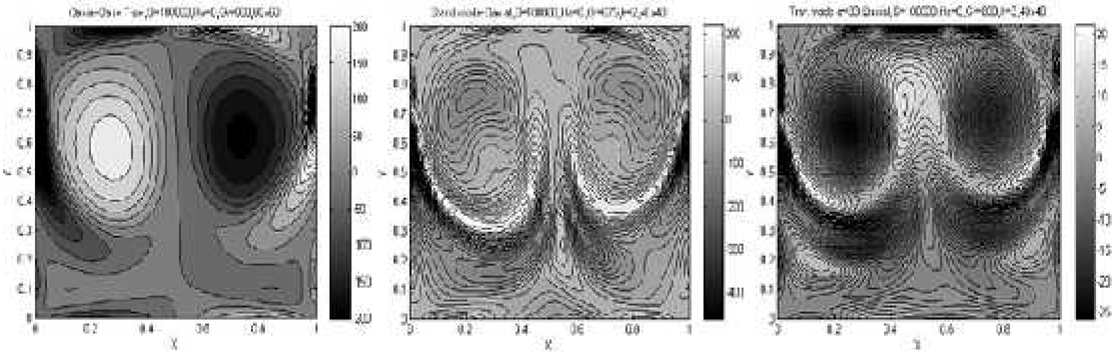
Σχήμα 37 : (a) Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας της βασικής ροής και (b) επίπεδη στροβιλότητα του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος για $Gr=Gr_{Cr}=850000$, S=0 και Ha=20.

Η παραμετρική μελέτη που ακολουθεί έχει ως στόχο τη βασική κατανόηση των συνθηκών ροής σε αγωγούς που βρίσκονται στη μονάδα του μανδύα του αντιδραστήρα ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης, σχήμα 4, όπου αναμένονται πολύ υψηλοί ρυθμοί παραγωγής θερμότητας ως απόρροια των συγκρούσεων νετρονίων από τον πυρήνα του αντιδραστήρα. Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του υγρού μετάλλου (Pb-17Li) και τις αναμενόμενες διαστάσεις των κοιλοτήτων, $S=10^5$ αποτελεί μία ενδεικτική τιμή. Όταν εγκαθίσταται η μόνιμη κατάσταση του ζεύγους αντιπεριστρεφόμενων δινών ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας παύει να διαδραματίζει οποιοδήποτε ρόλο στη δυναμική του προβλήματος. Το γινόμενο GrSPr παράγει έναν ενεργό αριθμό Gr, Gr_{Eff}, ο οποίος συνεπικουρούμενος από τον αριθμό Ha καθορίζει την ένταση των δύο κύριων δινών στη βασική ροή. Επιπρόσθετα, καθώς ο Ha αυξάνεται η ροή με φορά προς τα κάτω κατά μήκος των δύο κατακόρυφων τοιχωμάτων βαθμιαία γίνεται η κύρια πηγή στροβιλότητας, παράγοντας ισχυρά στρώματα δινών, όπου η y συνιστώσα της ταχύτητας στις άκρες των δινών πρέπει να μηδενιστεί στα τοιχώματα εντός μίας στενής περιοχής, ενώ η στροβιλότητα στον πυρήνα αυξάνεται.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραπάνω περιοχών στροβιλότητας καθορίζει τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας στην κοιλότητα. Καθώς η παραπάνω μορφή ροής δημιουργείται στο επίπεδο βασικής ροής, η αστάθεια Goertler που προκύπτει ως ο κυρίαρχος μηχανισμός αστάθειας κατά την περίπτωση που είχε μελετηθεί μία δίνη, τώρα υποσκελίζεται από ελλειπτική αστάθεια η οποία είχε συζητηθεί στην Εισαγωγή. Η αλληλεπίδραση στο ζεύγος αντιπεριστρεφόμενων δινών προσδίδει μία ελλειπτική μορφή στις ροϊκές γραμμές των δύο δινών. Η επίδραση αυτή επιτείνεται από την παρουσία συνοριακών στρωμάτων κατά μήκος των τεσσάρων τοιχωμάτων στις κρίσιμες συνθήκες, ιδιαίτερα καθώς αυξάνεται ο αριθμός Ha, από τη στιγμή που μεταβάλλει την εκκεντρότητα, β = ε/(ω/2), δηλαδή το λόγο μεταξύ του μέτρου διάτμησης ε και της μισής στροβιλότητας ω/2 σε κάθε κέντρο δίνης, και αναδιατάσσει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού παραμόρφωσης. Στην πραγματικότητα, η ένταση της δίνης και η εκκεντρότητα κάθε μίας από τις σχηματιζόμενες δίνες στη βασική ροή κατέχουν κεντρικό ρόλο στην εμφάνιση ελλειπτικής ευστάθειας (Landman & Saffman 1987). Όταν υπολογίζεται η αξονική στροβιλότητα της βασικής ροής, $\mu = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$, η τιμή η οποία ανακτάται στο κέντρο κάθε δίνης καθορίζει την έντασή της ή ισοδύναμα τον αριθμό Ekman, ενώ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης, $^{2} = \left(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i\right)/2$, που επίσης υπολογίζεται στο κέντρο της δίνης, περιγράφει την ένταση του ρυθμού παραμόρφωσης και θα ισούται με την προαναφερθείσα παράμετρο ε, ενώ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα δίνει την κατεύθυνση της κύριας δίνης (Le Dizes & Verga 2002). Η παρακολούθηση των συγκεκριμένων δύο ποσοτήτων χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα υποενότητα ως μέσο ταυτοποίησης των ασταθειών που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του ζεύγους δινών.

Έτσι, καθώς αυξάνεται ο ρυθμός παραγωγής εσωτερικής θερμότητας S και για την κατάλληλη ένταση δίνης και ρυθμό παραμόρφωσης, η ροή καθίσταται ασταθής με τρόπο ο οποίος είναι θεμελιωδώς διαφορετικός από την αστάθεια Goertler. Η διαταρασσόμενη ροή επηρεάζει τη δομή της δίνης στον πυρήνα της κοιλότητας αντί στις γωνιακές περιοχές. Αυτό απεικονίζεται στα σχήματα 38b,c όπου η στροβιλότητα των δύο κυρίαρχων ιδιομορφών παρατίθενται μαζί με την αντίστοιχη της βασικής ροής (σχήμα 38a) στην κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr που αντιστοιχεί στην εμφάνισή τους. Αυτή η δομή των κυρίαρχων ασταθών ιδιομορφών δημιουργείται όταν το ζεύγος δινών καθιερωθεί ως η προτιμώμενη μορφή ροής στη βασική ροή για S≥1500. Σύμφωνα με τα προηγούμενα ευρήματα που αφορούν την ανάπτυξη ασταθειών σε ροές που περιορίζονται με ελλειπτικές ροϊκές γραμμές (Gledzer & Ponomarev 1992), οι κυρίαρχες διαταραχές συνίστανται από δύο ιδιομορφές που αναπτύσσονται (α) μονοτονικά (δηλαδή με τρόπο που αναμένεται να οδηγήσει σε στάσιμο κύμα στην φάση κορεσμού) και (β) μέσω χρονικών ταλαντώσεων (που οδηγούν τελικά σε οδεύον κύμα στην φάση κορεσμού). Και στις δύο περιπτώσεις η στροβιλότητα της διαταραχής είναι συμμετρική, σε αντίθεση με την βασική ροή που χαρακτηρίζεται από δίνες που περιστρέφονται αντίροπα.

Πιο αναλυτικά, η ιδιομορφή στάσιμου κύματος παρουσιάζει την τυπική δομή δίνης χαρακτηριζόμενη από δύο λοβούς στην περιοχή όπου εξαρχής καταλαμβάνονταν από κάθε μία δίνη της βασικής ροής (Leweke & Williamson 1998), ενώ το μήκος κύματος της διαταραχής στις κρίσιμες συνθήκες είναι k≈2, το οποίο σε διαστατή μορφή δίνει λ≈πH≈2πb, όπου b αποτελεί την απόσταση ανάμεσα στις δύο δίνες και H είναι το μισό της πλευράς της κοιλότητας. Το συγκεκριμένο είδος δομής έχει παρατηρηθεί σε πειράματα ευστάθειας ζεύγους δινών τοποθετημένων σε μικρή απόσταση μεταξύ τους (Leweke & Williamson 1998), όπου ο προσανατολισμός των δινών δύο λοβών στην κατεύθυνση της μέγιστης παραμόρφωσης έχει επιβεβαιωθεί, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με την παρούσα μελέτη (σχήματα 38a,b). Το ενδιαφέρον είναι ότι η ανάλυση ευστάθειας μεγάλου μήκους κύματος (Landman & Saffman 1987, Waleffe 1995) προβλέπει το συγκεκριμένο μήκος κύματος για την αστάθεια Crow υπό γωνία 45^o. Λόγω του χωρικού περιορισμού του ζεύγους δινών στην παρούσα μελέτη η ιδιομορφή μεγάλου κύματος δεν αποτελεί μία απλή κάμψη της αρχικής διδιάστατης διάταξης δινών όπως στην πρωταρχική αστάθεια Crow. Μάλλον παραμορφώνει τη στροβιλότητα στον πυρήνα μέσω των δινών δύο λοβών, όπως φαίνεται στο σχήμα 38b. Η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος επίσης χαρακτηρίζεται από δομές δύο λοβών στη θέση του αρχικού ζεύγους δινών οι οποίες, ωστόσο, κατευθύνονται προς τη δεύτερη κύρια κατεύθυνση της παραμόρφωσης, κάθετα στη διεύθυνση της μέγιστης παραμόρφωσης όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 38c, καθώς επηρεάζονται από συνοριακά στρώματα που αναπτύσσονται κοντά στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα της κοιλότητας.

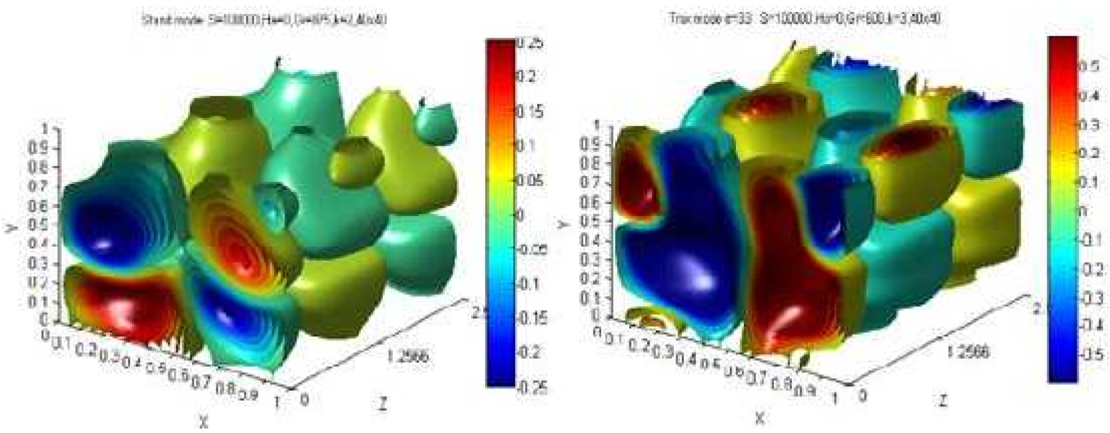


Σχήμα 38 : Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας για Ha=0 και $S=10^5$ (a) βασικής ροής, (b) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος και (c) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος.

Η τελευταία αποτελεί διαταραχή μικρότερου μεγέθους της οποίας το αξονικό μήκος κύματος τείνει να αυξηθεί καθώς αυξάνεται το μέγεθος του πρωταρχικού ζεύγους δινών με αυξανόμενο ρυθμό παραγωγής θερμότητας, εν αντιθέσει με την ιδιομορφή στάσιμου κύματος της οποίας το μήκος κύματος παραμένει το ίδιο καθώς η παράμετρος S αυξάνεται. Η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος ορίζει ελικοειδή κίνηση στη διαταρασσόμενη ροή, της οποίας το μήκος κύματος μεταβάλλεται από το μέγεθος της κοιλότητας και συγκεκριμένα από, $k_{Cr}\approx7$ όταν S=25000, σε δύο φορές το μέγεθος της κοιλότητας οπότε προκύπτει $k_{Cr}\approx3$ όταν $S=10^5$. Συνήθως η κρίσιμη τιμή Gr_{Cr} μειώνεται καθώς αυξάνεται το S αφού η παράμετρος S και ο αριθμός Gr καθορίζουν την ένταση της δίνης ή ισοδύναμα ο αριθμός Ekman χαρακτηρίζει την έντασή της ενώ ο Gr επηρεάζει την εκκεντρότητα. Η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος κυριαρχεί όταν $S\geq25000$ με $Gr_{Cr}\approx2000$ ενώ η αντίστοιχη κρίσιμη τιμή του ενεργού $Gr_{Eff,Cr}\approx GrSPr=1600$.

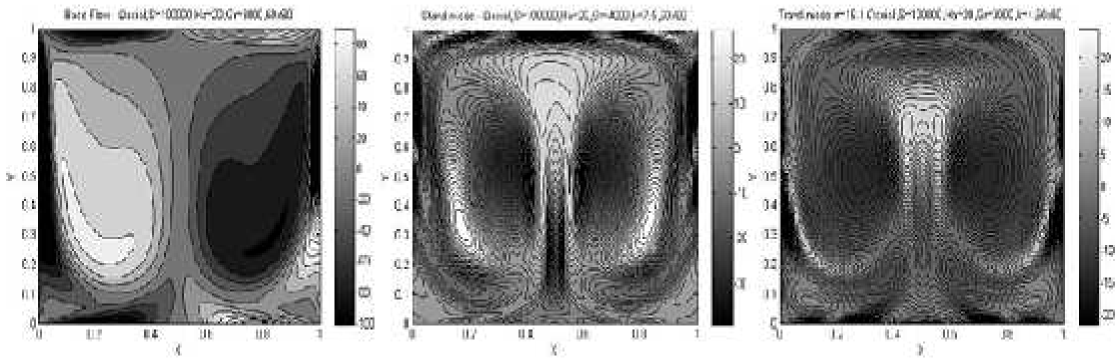
Στο σχήμα 39 παριστάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην θερμοκρασία για τις περιπτώσεις στάσιμου και οδεύοντος κύματος υπολογισμένες στις ίδιες κρίσιμες συνθήκες του σχήματος 38. Παρατηρείται μία σχεδόν αντισυμμετρική διαμόρφωση στην περίπτωση του κυρίαρχου οδεύοντος κύματος ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση, (σχήμα 39b), και μία σχεδόν διπλή αντισυμμετρική δομή για το στάσιμο κύμα ως προς τους άξονες x, y, (σχήμα 39a). Η αύξηση/μείωση της θερμοκρασίας στην ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην διαταραγμένη ροή είναι αποτέλεσμα της μείωσης/αύξησης της στροβιλότητας στις αντίστοιχες περιοχές.

Η απουσία μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα οι δομές των εστιών ανακυκλοφορίας που παρατηρούνται να μην είναι απόλυτα συμμετρικές ή αντισυμμετρικές. Η παρατήρηση αυτή παύει να υφίσταται όταν επιτρέψουμε την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου, όπως θα γίνει εμφανές στα παρακάτω σχήματα. Επιπλέον, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δύο κυρίαρχες δομές δινών του σχήματος 39b συναντώνται στη γειτονία της γραμμής που διαχωρίζει τις δύο εστίες, οι οποίες παρατηρούνται στη διαμόρφωση της βασικής ροής του σχήματος 5b.



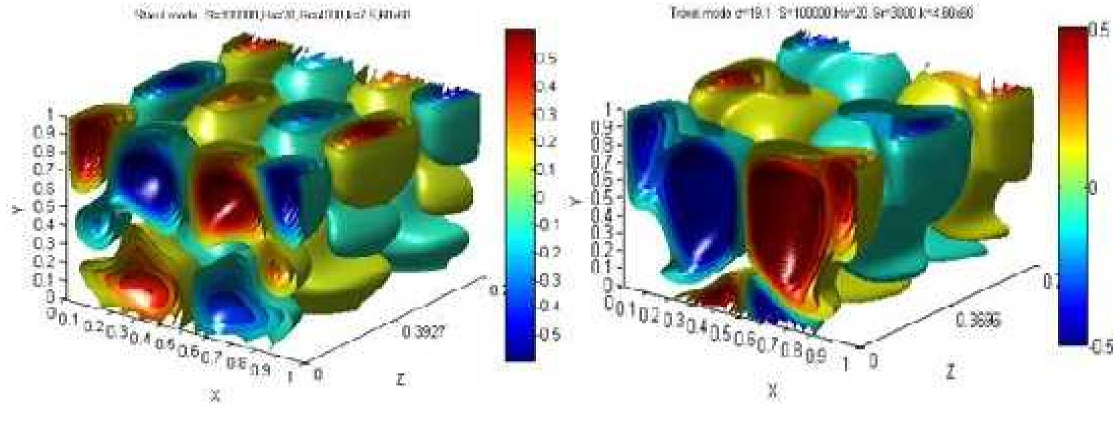
Σχήμα 39 : Ισο-επιφάνειες θερμοκρασίας για Ha=0 και $S=10^5$ (a) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος και (b) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος.

Καθώς ο Ha αυξάνεται για δεδομένη τιμή του S, η στροβιλότητα στον πυρήνα της βασικής ροής εξασθενεί ενώ τα στρώματα δινών κοντά στα σύνορα εντείνονται (σχήμα 40a), διότι η επίδραση της δύναμης Lorentz είναι πιο έντονη στον πυρήνα της ροής εν συγκρίσει με τις κοντινές περιοχές στα τοιχώματα. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διάταξη δινών στη διαταρασσόμενη ροή και για τα δύο κυρίαρχα ιδιοδιανύσματα να είναι προς τις γωνίες της κάτω πλευράς της κοιλότητας και αυτό ενισχύεται υπολογίζοντας τις τοπικές εκκεντρότητες και τους κύριους ρυθμούς παραμόρφωσης του ζεύγους δινών στη βασική ροή. Η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος παραμένει η κυρίαρχη ιδιομορφή σε σύγκριση με αυτή του στάσιμου κύματος. Όμως και οι δύο, μάλιστα πιο ευδιάκριτα το στάσιμο κύμα, χαρακτηρίζονται από μικρότερα μήκη κύματος. Αυτό αποτελεί επίδραση της δυνατότερης διάτμησης η οποία παράγεται στα στρώματα δινών κοντά στα δύο τοιχώματα και ωθεί το φάσμα προς μεγαλύτερους κυματαριθμούς, όπως είχε προβλεφθεί από προγενέστερες μελέτες ευστάθειας (Landman & Saffman 1987).



Σχήμα 40 : Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας για Ha=20 και S=10^5 (a) βασικής ροής, (b) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος και (c) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος.

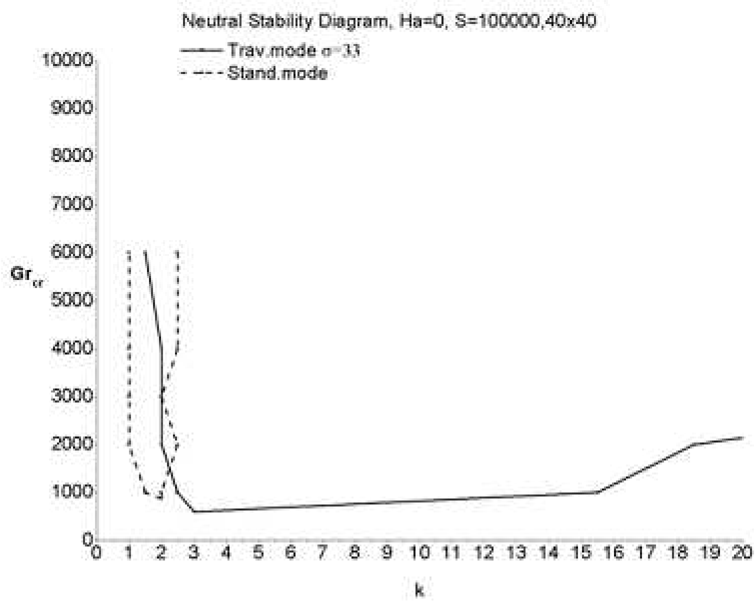
Στη συνέχεια, στο σχήμα 41 απεικονίζονται οι ιδιοσυναρτήσεις που προσεγγίζουν το ιδιοδιάνυσμα της θερμοκρασίας για τις περιπτώσεις στάσιμου και οδεύοντος κύματος υπολογισμένες στις ίδιες κρίσιμες συνθήκες του σχήματος 40. Παρατηρείται μία συμμετρική διαμόρφωση στην περίπτωση οδεύοντος κύματος ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος (σχήμα 41b) και μία σχεδόν διπλή αντισυμμετρική δομή για το στάσιμο κύμα ως προς τους άξονες x, y του προβλήματος, (σχήμα 41a). Γίνεται εμφανές ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός Ha σχηματίζεται μια πιο ομοιόμορφη θερμοκρασιακή κατανομή στην διατομή της κοιλότητας.

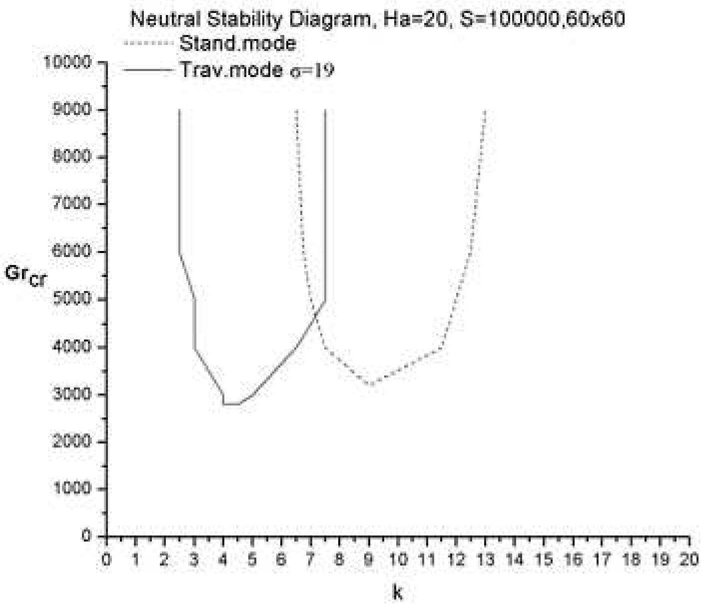


Σχήμα 41 : Ισο-επιφάνειες θερμοκρασίας για Ha=20 και S=10^5 (a) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος και (b) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος.

Τα διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας που αφορούν τις δύο πιο ασταθείς ιδιομορφές για τιμές Ha=0 και 20 παρατίθενται στα σχήματα 42a,b, υποδηλώνοντας την προαναφερθείσα τάση. Και στις δύο περιπτώσεις υιοθετήθηκε πλέγμα 60x60 διτετραγωνικών στοιχείων. Γίνεται εμφανές ότι στο σχήμα 42a το κυρίαρχο μήκος κύματος αντιστοιχεί σε ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα σ=33 και στο σχήμα 42b το κυρίαρχο μήκος κύματος είναι οδεύον κύμα συχνότητας σ=19. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιομορφές που παρατηρήθηκαν στην παρούσα εργασία δεν συσχετίζονται με τις κυρίαρχες ιδιομορφές οι οποίες καθορίζουν τη διδιάστατη ανάλυση της κοιλότητας και εμφανίζονται ως απόρροια υδροδυναμικής αστάθειας εξαιτίας της ύπαρξης καμπύλων ροϊκών γραμμών στη διαμόρφωση της βασικής ροής (Drazin & Reid 1981), όπως φαίνεται και στο σχήμα 5b.

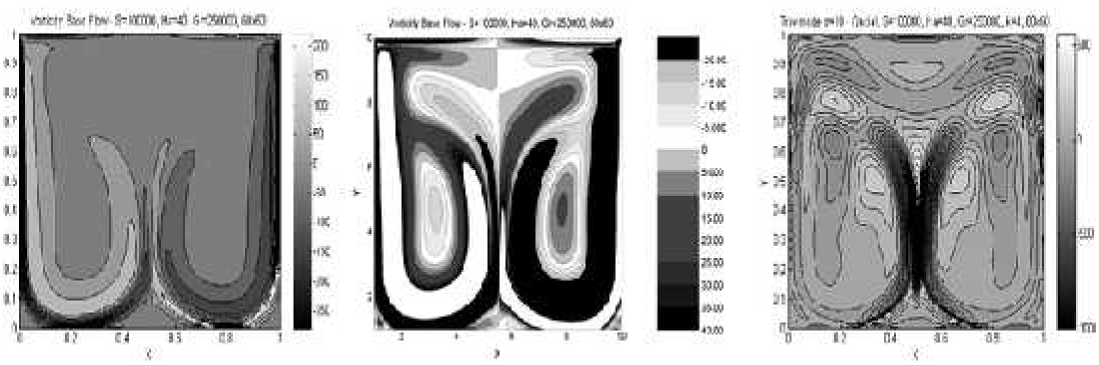
Καθώς ο Ha λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές, Ha≥40, η ιξώδης ροή κοντά στα δύο κατακόρυφα σύνορα γίνεται πιο σαφής και αρχίζει να αναπτύσσεται αστάθεια ιξώδους στρώματος σε αυτές τις δύο περιοχές που χαρακτηρίζεται από ακόμη μικρότερα μήκη κύματος. Τα σχήματα 43a,b απεικονίζουν την επίδραση αυτή για την αξονική στροβιλότητα της βασικής και διαταρασσόμενης ροής, αντίστοιχα, για Ha=40.





Σχήμα 42 : Διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας για (a) Ha=0 (άνω) και (b) Ha=20 (κάτω).

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι, κατά την εισαγωγή του αριθμού Ekman και της εκκεντρότητας β που αφορούν το ζεύγος δινών στη βασική ροή κατά τις κρίσιμες συνθήκες, τα όρια της ευστάθειας που δίνονται από τους Landman & Saffman (1987) επιβεβαιώνονται στην παρούσα παραμετρική μελέτη. Συγκεκριμένα, θέτοντας το μέγεθος της δίνης ℓ ίσο με H/2, ο προαναφερθείς αριθμός δύναται να υπολογιστεί στο κέντρο της δίνης $\mathrm{E} = 64®^3 / \mu / Gr^{1/2}$. Εν συνεχεία, το ακόλουθο ζεύγος τιμών (Ε, β), όπως έχει υπολογιστεί στις κρίσιμες συνθήκες, βρίσκεται στην ασταθή περιοχή του διαγράμματος ουδέτερης ευστάθειας το οποίο είχε κατασκευαστεί από τους Landman & Saffman (1987) για το εύρος τιμών $5000 < S \leq 10^5$ με Ha=0 και $0 \leq Ha < 40$ με S=10^5.



Σχήμα 43 : Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας για Ha=40 και S=10^5 (a, b) βασικής ροής και (c) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος. Το σχήμα (b) εστιάζει στην περιοχή του ζεύγους δινών. Οι περιοχές με μαύρο και λευκό χρώμα δηλώνουν τιμές κάτω και πάνω του καθορισμένου εύρους τιμών, αντίστοιχα.

Οι οριακές περιπτώσεις (S=5000, Ha=0) και (S=10^5, Ha=40) καθορίζονται από ιδιοδιανύσματα τα οποία δεν "συμμορφώνονται" με το πρότυπο ελλειπτικής αστάθειας, (βλ. σχήμα 45), διότι η ένταση του ζεύγους δινών είναι αρκετά ασθενής. Στην πρώτη περίπτωση αυτό αποτελεί απόρροια μικρού ρυθμού παραγωγής θερμότητας και κατ’ επέκταση μικρής τιμής θερμοκρασιακού μεγίστου, ενώ στην τελευταία περίπτωση το μαγνητικό πεδίο εξασθενεί την ένταση του ζεύγους δινών στον πυρήνα και παράγει ισχυρά ιξώδη στρώματα κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα της κοιλότητας. Για το μεγαλύτερο μέρος του εύρους τιμών $5000 < S \leq 10^5$ το μήκος κύματος της ιδιομορφής οδεύοντος κύματος είναι $ª / H = 2® / k \rightarrow k = 7ª \approx H = 2H / 2 = 2\ell$, όπου ℓ εκφράζει το μέγεθος της δίνης. Το εν λόγω εύρημα έρχεται σε συμφωνία με την πρόβλεψη κυματαριθμού που αντιστοιχεί σε ελλειπτική αστάθεια, όπως είχε προκύψει από τους Landman & Saffman (1987), για δίνες με μέτριες εκκεντρότητες, δηλαδή 0<β<0.8. Η τιμή του β υπολογίστηκε να είναι τάξης 0.5 στην παρούσα παραμετρική μελέτη. Στην παρούσα εργασία τα ισχυρά ιξώδη στρώματα που προκύπτουν όταν S=10^5, ιδιαίτερα καθώς ο Ha αυξάνεται, τροποποιούν τον κρίσιμο κυματαριθμό. Εν τέλει, σε όλες τις περιπτώσεις όπου η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος κυριαρχεί, η ιδιοσυχνότητά της σ_i ισούται περίπου με το μισό της συχνότητας $\Omega = \sqrt{(\mu/2)^2 - £^2}$ σύμφωνα με την οποία κάθε δίνη συμπεριφέρεται ελλειπτικά βασιζόμενοι στην ανάλυση αλληλεπίδρασης ζεύγους δινών σε ανοιχτή ροή, όπως παρουσιάστηκε από τους προαναφερθέντες ερευνητές. Κατά συνέπεια, μπορεί να θεωρηθεί ότι η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος αναδύεται ως απόρροια υποαρμονικής αλληλεπίδρασης τύπου συντονισμού στο ζεύγος δινών.

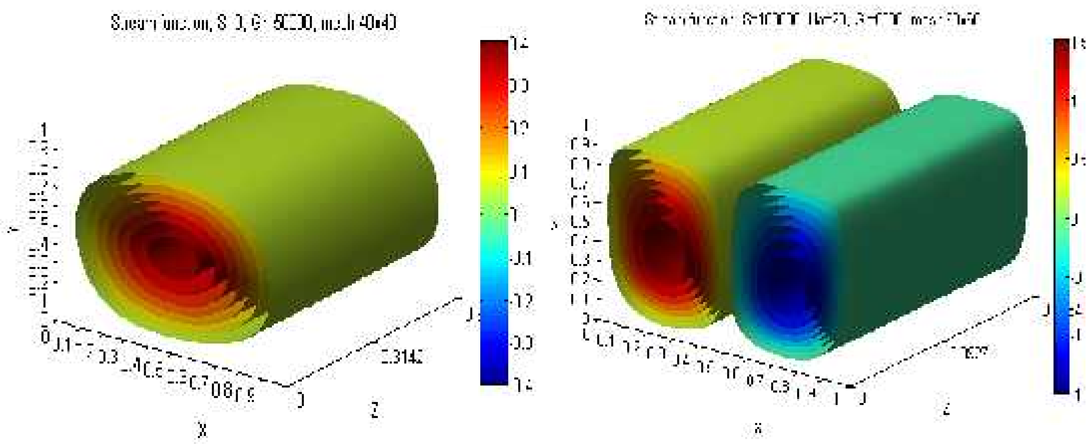
4.2.1 Επίδραση του ρυθμού παραγωγής θερμότητας S όταν Ha=20

Προκειμένου να ταυτοποιήσουμε τον τύπο των ασταθειών που παρατηρήσαμε στα προηγούμενα αποτελέσματα διεξήγαμε μια παραμετρική ανάλυση μεταβάλλοντας το ρυθμό παραγωγής θερμότητας S, ο οποίος προσομοιώνει τις συγκρούσεις των νετρονίων που εισέρχονται εντός του υγρού λιθίου με τους πυρήνες του λιθίου.

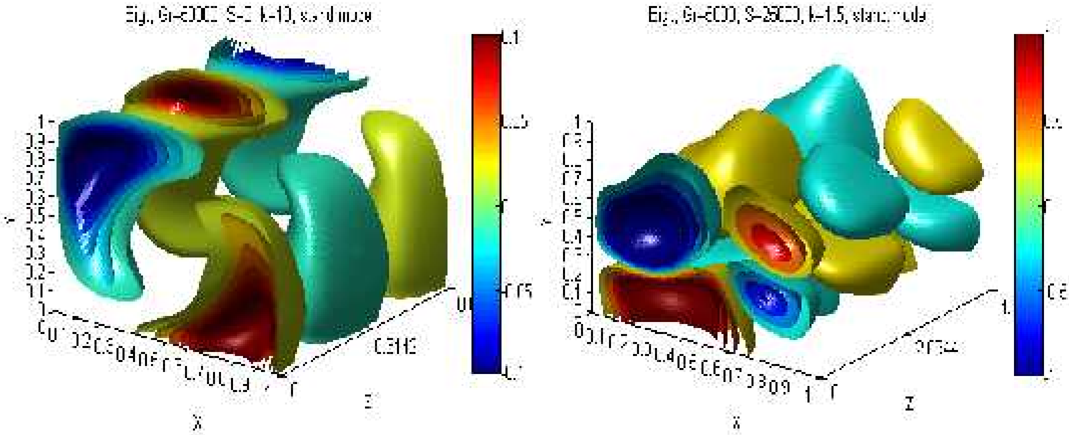
Καθώς ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας αυξάνεται, το θερμοκρασιακό πεδίο στην κοιλότητα παρουσιάζει μέγιστο στην περιοχή του πυρήνα και αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όταν ξεπεραστεί μία οριακή τιμή ρυθμού, εμφανίζεται μια δεύτερη δίνη ανακυκλοφορίας η οποία είναι προσανατολισμένη κατά μήκος του δεξιού, θερμότερου κατακόρυφου τοιχώματος. Η περίπτωση αλληλεπίδρασης του ζεύγους δινών ελέγχεται από το ρυθμό παραγωγής θερμότητας και τον αριθμό Pr. Για την περίπτωση που εξετάζεται εδώ, ο αριθμός Pr=0.0321 ενώ S≈1500 αποτελεί την οριακή τιμή για την εμφάνιση δεύτερης δίνης στη βασική ροή. Αυτό αντιστοιχεί στην εμφάνιση ευδιάκριτου θερμοκρασιακού μεγίστου στο κέντρο της κοιλότητας που κινεί τις δύο δίνες και η κρίσιμη τιμή του δεν επηρεάζεται από τους αριθμούς Ha ή Gr. Για μικρότερες τιμές του S από την οριακή τιμή 1500 κυριαρχεί η αστάθεια Goertler που χαρακτηρίζεται από την παραγωγή επίπεδης στροβιλότητας, κοντά κυρίως στις τέσσερις γωνίες της κοιλότητας, υπό μορφή στάσιμου κύματος με μήκος κύματος να είναι της τάξης του μεγέθους της κοιλότητας. Όταν S≥1500 η αλληλεπίδραση του ζεύγους δινών εισάγει την ελλειπτική αστάθεια υπό τη μορφή στάσιμου και οδεύοντος κύματος. Μειώνοντας τον όρο S, από 10^5 σε 0, (σχήμα 44), η διαμόρφωση της βασικής ροής μετασχηματίζεται από δομή με δύο εστίες ανακυκλοφορίας σε αντίστοιχη δομή μίας εστίας.

Οι παραπάνω επισημάνσεις γίνονται εμφανείς καθώς αντανακλώνται στην δομή της κυρίαρχης ιδιομορφής και αντιστοιχούν στις προαναφερθείσες δύο περιπτώσεις. Για τιμή S=0 λαμβάνουμε μία αστάθεια τύπου Goertler κοντά στις γωνίες της διατομής, (σχήμα 45a), και στην περίπτωση όπου ο όρος S λάβει υψηλές τιμές και συγχρόνως έχουμε το σχηματισμό δύο εστιών στη βασική ροή παρατηρούμε ότι η ιδιομορφή στάσιμου κύματος είναι σχεδόν αντισυμμετρική ως προς τους άξονες x, y του προβλήματος (σχήμα 45b). Όταν ο όρος S υπερβεί την τιμή 25000 τότε η ιδιομορφή στάσιμου κύματος, (σχήμα 46a), υποσκελίζεται από την ιδιομορφή οδεύοντος κύματος, (σχήμα 46b), η οποία καθίσταται κυρίαρχη σε αυτή την περίπτωση. Σταδιακά αυξάνοντας τον όρο S η ένταση των εστιών ανακυκλοφορίας αυξάνεται αλλά την ίδια στιγμή παρουσιάζει ανάλογη συμπεριφορά η ένταση των στρωμάτων δινών κοντά στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα της κοιλότητας. Οι δύο κυρίαρχες ιδιομορφές χαρακτηρίζονται κυρίως από αξονική παρά από επίπεδη στροβιλότητα.

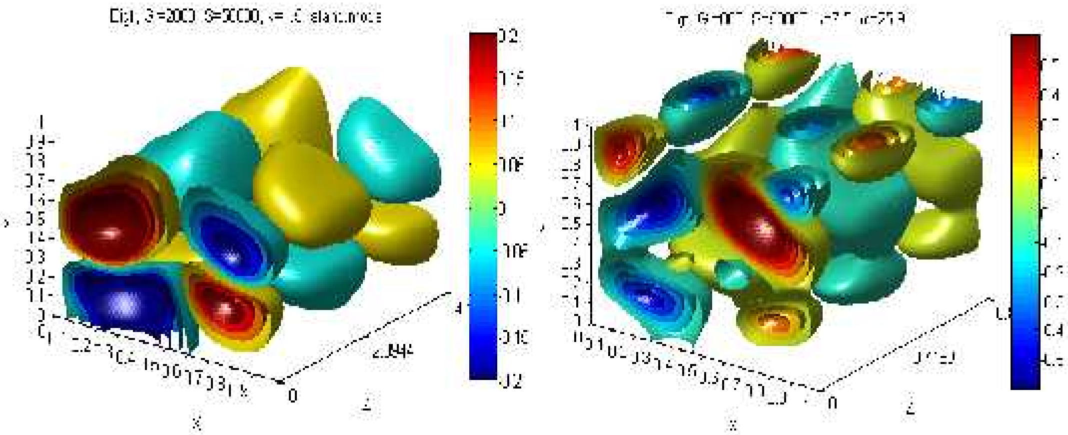
Οι περιοχές που καταλαμβάνονται από τις δύο αντιπεριστρεφόμενες δίνες στη βασική ροή εμφανίζουν τη δομή δύο λοβών η οποία αποτελεί χαρακτηριστικό της ελλειπτικής αστάθειας, όπου η εν λόγω δομή είναι ευθυγραμμισμένη με κάθε μία από τις δύο κύριες κατευθύνσεις παραμόρφωσης, (σχήματα 47, 48). Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, αντιπαραβολή της αξονικής στροβιλότητας στην βασική και διαταραγμένη ροή δίνει ελλικοειδή κίνηση για την τροχιά των δύο δινών στον χώρο. Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στην υπόθεση ότι η περιοχή της μεταβατικής ή χρονομεταβαλλόμενης συναγωγής που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια των πειραμάτων από τους Burr & Muller (2002), (σχήμα 27a), είναι υδροδυναμικής φύσης εξαιτίας της αλληλεπίδρασης γειτονικών εστιών ανακυκλοφορίας. Η υπόθεση αυτή θα πρέπει να επαληθευτεί με βάση μη γραμμικές δυναμικές προσομοιώσεις διότι, σε περίπτωση που ισχύει για ρεαλιστική σχέση μεταξύ των Ha και Gr, η εμφάνιση μεταβατικής συναγωγής θα πρέπει να ληφθεί υπόψη για το βέλτιστο σχεδιασμό των μονάδων που συνιστούν το μανδύα του αντιδραστήρα ITER.



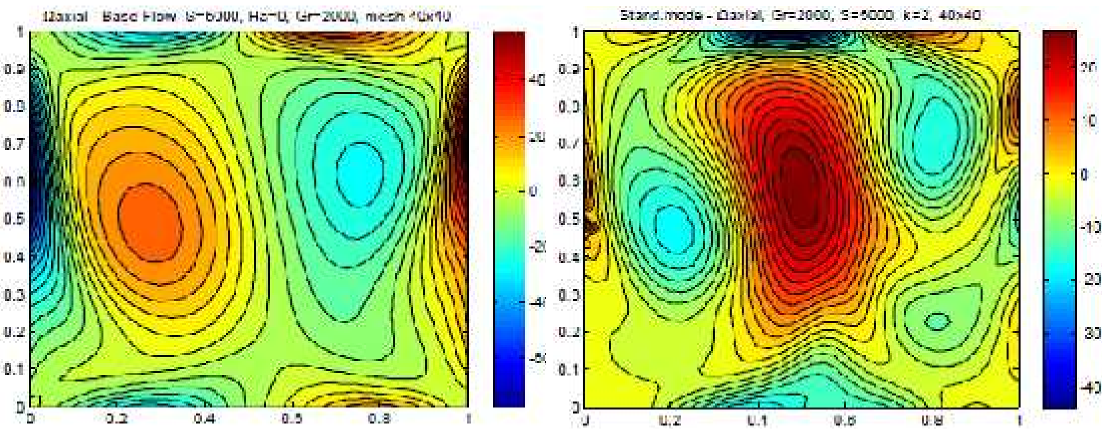
Σχήμα 44 : Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής για Ha=20, (a) S=0 και (b) $S=10^5$.



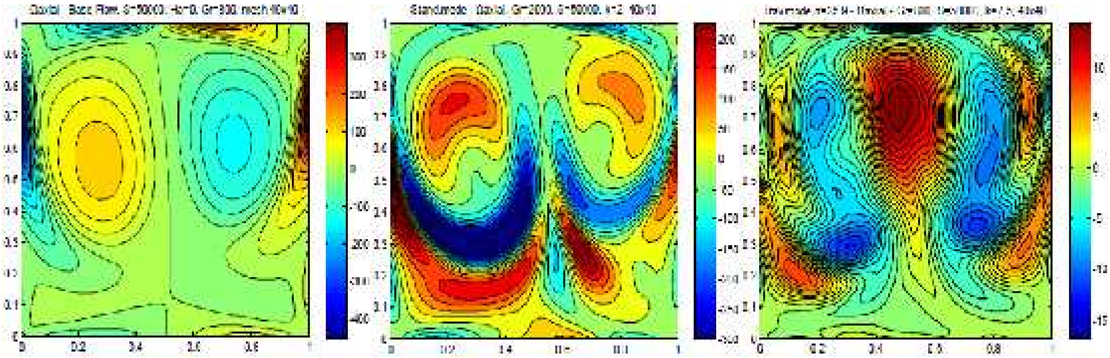
Σχήμα 45 : Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή στάσιμου κύματος με Ha=20, (a) S=0 και (b) S=25000.



Σχήμα 46 : Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για Ha=20, S=50000 και ιδιομορφές (a) στάσιμου κύματος και (b) οδεύοντος κύματος.



Σχήμα 47 : Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας για Ha=20 και S=5000 (a) βασικής ροής και (b) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος.



Σχήμα 48 : Ισοϋψείς αξονικής στροβιλότητας για Ha=20 και S=50000 (a) βασικής ροής, (b) κυρίαρχης διαταραχής στάσιμου κύματος και (c) κυρίαρχης διαταραχής οδεύοντος κύματος.

Τέλος, αξίζει να σχολιαστεί περαιτέρω η αστάθεια τύπου Goertler σύμφωνα με την οποία χαρακτηρίσαμε τα σχήματα 37b και 45a. Η συγκεκριμένη αστάθεια ταξινομείται στις κεντρόφυγες αστάθειες. O Goertler (1940) έδειξε ότι η αστάθεια αυτή μπορεί να παρατηρηθεί σε συνοριακά στρώματα κατά μήκος ενός κοίλου τοιχώματος. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε μεταγενέστερα από τους Meksyn (1950), Hammerlin (1955) και Witting (1958).

Η θεωρία που ανέπτυξε ο Goertler στηρίζεται σε τρεις προσεγγίσεις. Πρώτον, προχώρησε στην παραδοχή ότι το πάχος του συνοριακού στρώματος δ είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της καμπυλότητας του τοιχώματος R_0. Δεύτερον, υπέθεσε ότι η βασική ροή είναι σχεδόν παράλληλη ως προς το τοίχωμα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι αμελούνται οι κεντρόφυγες επιδράσεις στην περιγραφή της βασικής ροής. Τρίτον, θεώρησε μία τοπική ανάλυση ευστάθειας κατά την οποία υπέθεσε ότι η βασική ροή είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x και αγνόησε την y-συνιστώσα της βασικής ροής.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μπορεί να θεωρηθεί ότι οι γωνίες που σχηματίζονται στην κοιλότητα χαρακτηρίζονται από καμπυλότητα και έτσι η κυρίαρχη ιδιομορφή στάσιμου κύματος, όταν παράγει στροβιλότητα κυρίως στο επίπεδο της βασικής ροής όπως στην περίπτωση για S=0, ταξινομείται ως αστάθεια τύπου Goertler.

4.2.2 Επίδραση του λόγου όψεως για Ha=20 και S=10^5

Οι μεταβολές του λόγου όψεως A που ισούται με το πηλίκο του ύψους της διατομής προς το μήκος της μπορεί να επιφέρει μεγάλες και σύνθετες επιδράσεις στην κλίση της πίεσης, στις κατανομές των ταχυτήτων και στη μεταφορά θερμότητας. Δύναται να σημειωθούν κάποιες γενικές παρατηρήσεις που αφορούν το σχεδιασμό αγωγών στους οποίους κυκλοφορεί στρώμα υγρού μετάλλου (Ying & Tillack 1991).

Υπό συνθήκες σταθερής ταχύτητας η μέση θερμοκρασία του πλευρικού τοιχώματος είναι εν γένει χαμηλότερη και η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας είναι μεγαλύτερη σε επιμηκυμένους αγωγούς εν συγκρίσει με τετραγωνικά κανάλια. Όμως, όταν ο σχεδιασμός αγωγών περιορίζεται από την μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας τότε είναι αμφίβολο το πλεονέκτημα χρήσης επιμηκυμένων αγωγών.

Ωστόσο, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη μια μεγάλη μείωση στην βαθμίδα της πίεσης που παρατηρείται σε αγωγούς που χαρακτηρίζονται από υψηλή τιμή του λόγου όψεως. Η μείωση της κλίσης της πίεσης μπορεί να αντισταθμίσει την επίδραση της μέγιστης θερμοκρασίας που αναπτύσσεται εντός του αγωγού. Απόρροια αυτού του γεγονότος είναι η αύξηση της ταχύτητας ως εκ τούτου η θερμοκρασία στο κέντρο του αγωγού και στο τοίχωμα μειώνεται.

Από μελέτη των Ying & Tillack (1991) προέκυψε ότι η βαθμίδα της πίεσης είναι 7 φορές μικρότερη από την αντίστοιχη που αναπτύσσεται σε τετραγωνικό αγωγό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό προκειμένου να δημιουργηθούν οι συνθήκες που θα διατηρήσουν σε επιθυμητά επίπεδα τις τάσεις λόγω πίεσης, οι οποίες εξαρτώνται σε κάθε περίπτωση από τις σχεδιαστικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα έχουν προταθεί σχεδιασμοί που θα χρησιμοποιούν ράβδους ακαμψίας προκειμένου να επιλυθεί μερικώς το πρόβλημα των τάσεων λόγω πίεσης σε επιμηκυμένους αγωγούς (Proceedings of the USSR/US Exchange II.5 1989).

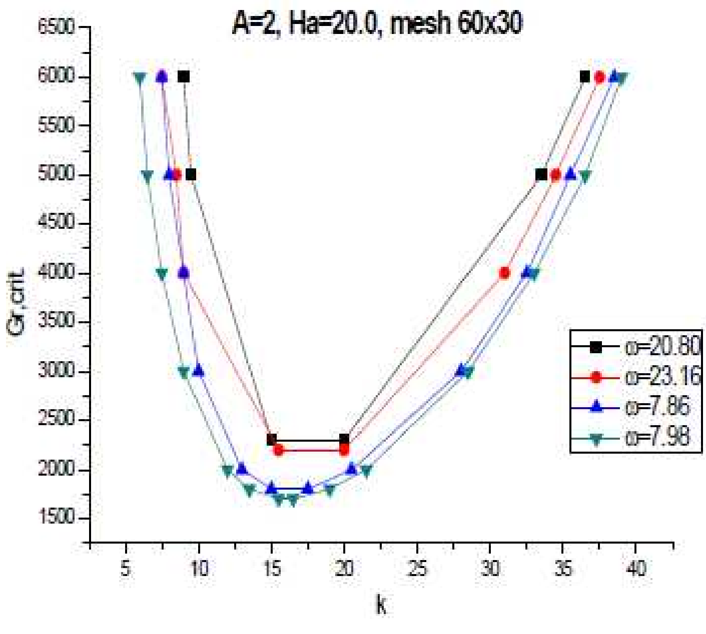
Εν γένει τα πλεονεκτήματα των επιμηκυμένων αγωγών δεν είναι καθολικά και εξαρτώνται από τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού που περιλαμβάνει τη θεώρηση των κατανομών θερμοκρασίας, της βαθμίδας πίεσης, των τάσεων λόγω πίεσης, θερμικών τάσεων και περιορισμών που αφορούν τις συνθήκες σχεδιασμού.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση επιτρέποντας στο λόγο όψεως A της διατομής της κοιλότητας να λαμβάνει τιμές διάφορες της μονάδας με απώτερο σκοπό να ταυτοποιήσουμε τη σημασία των εστιών ανακυκλοφορίας που προκύπτουν κατά τη μελέτη της δυναμικής του προβλήματος.

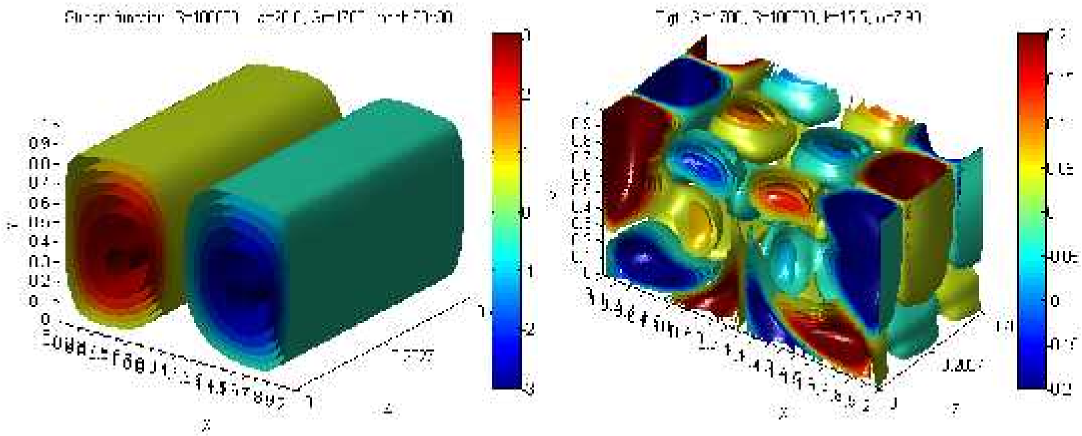
Το παρακάτω διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας παριστά την παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Gr ως προς τον κυματαριθμό k για λόγο όψεως A=2. Παρατηρούμε ότι οι τριδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες διδιάστατες διότι καθώς ο κυματαριθμός k αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του Gr μειώνεται. Στην ανάλυση που εφαρμόσαμε και για Gr<7000 παρατηρήθηκε η ύπαρξη οδευόντων κυμάτων ενώ απουσίαζε η ιδιομορφή στάσιμου κύματος, κατά συνέπεια οι ιδιομορφές οδευόντων κυμάτων είναι πιο ασταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες στάσιμου κύματος.

Στο σχήμα 49 παρατίθεται το διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας για την περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μεσαίας εντάσεως (Ha=20), ενώ ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας είναι $S=10^5$. Υιοθετήσαμε πλέγμα 60x30 διτετραγωνικών στοιχείων ως προς την x, y διεύθυνση του προβλήματος.

Στο σχήμα 50a επισυνάπτουμε το διάγραμμα ροϊκής συνάρτησης της βασικής ροής. Παρατηρείται ο σχηματισμός δύο εστιών ανακυκλοφορίας στην κεντρική περιοχή της διατομής κοιλότητας. Συγχρόνως, στο σχήμα 50b απεικονίζεται η ιδιοσυνάρτηση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία υπολογισμένη στις κρίσιμες συνθήκες για την περίπτωση του κυρίαρχου οδεύοντος κύματος. Γίνεται εμφανής μία αντισυμμετρική διαμόρφωση ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος.



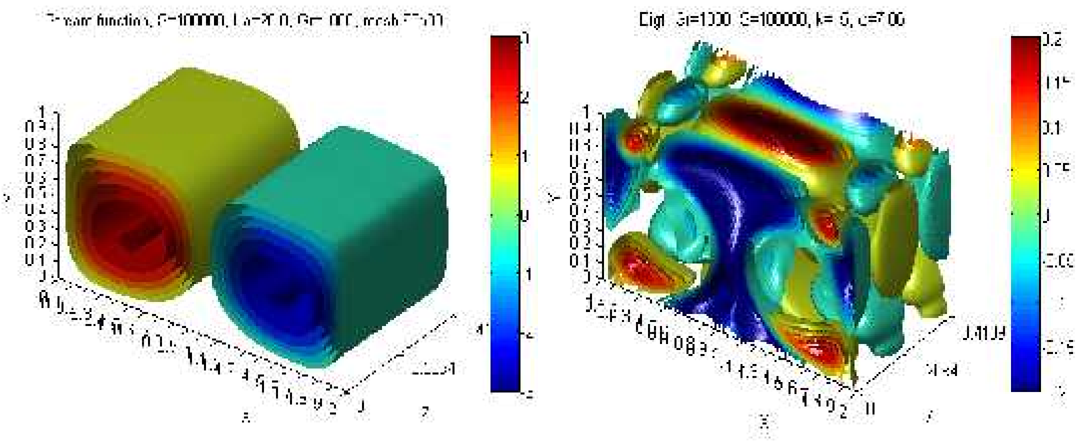
Σχήμα 49 : Διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας για A=2, Ha=20.0, $S=10^5$.



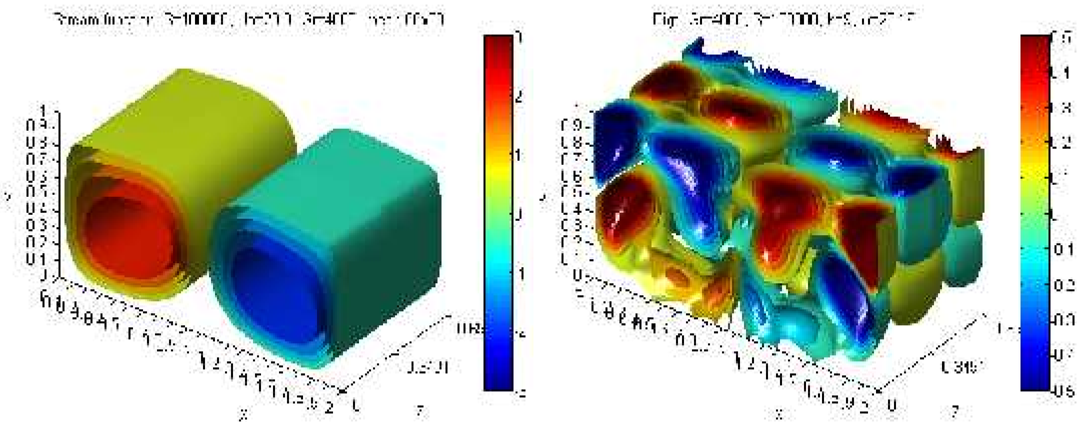
Σχήμα 50: (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για κυρίαρχη ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με Ha=20.0 και $S=10^5$.

Εργαζόμενοι ανάλογα όπως στην προηγούμενη περίπτωση, στα σχήματα 51-53 παραθέτουμε διαγράμματα ροϊκής συνάρτησης της βασικής ροής και ιδιοσυνάρτησης της θερμοκρασίας που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες τρεις ιδιομορφές οδευόντων κυμάτων. Σε κάθε περίπτωση η δομή της βασικής ροής χαρακτηρίζεται από δύο εστίες ανακυκλοφορίας στην κεντρική περιοχή της διατομής της κοιλότητας. Στα σχήματα 51b, 53b παρατηρείται μία συμμετρική διαμόρφωση ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος, ενώ το σχήμα 52b παρουσιάζει μία αντισυμμετρική διαμόρφωση ως προς την ίδια κατεύθυνση.

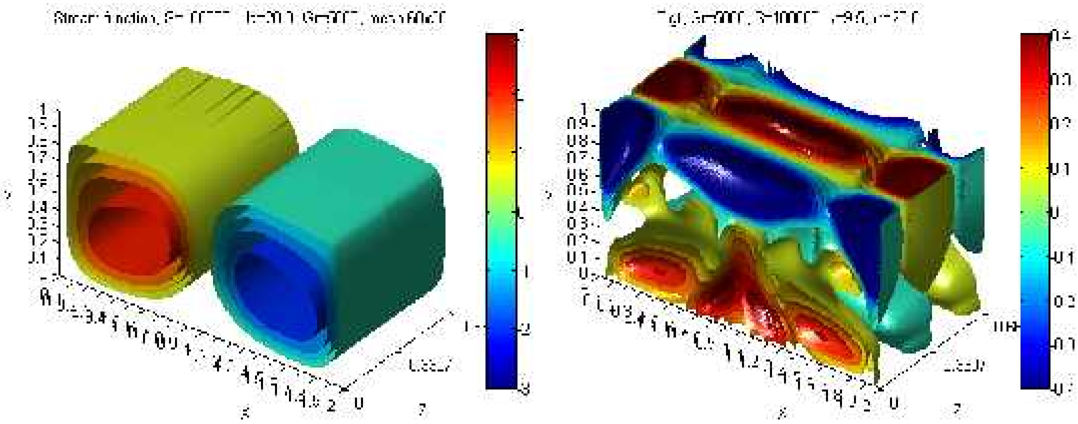
Επιπλέον, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η νοητή, κατακόρυφη και διαχωριστική γραμμή που καθορίζει την ύπαρξη συμμετρικής, (βλ. σχήματα 51b, 53b) ή αντισυμμετρικής διαμόρφωσης (βλ. σχήματα 50b, 52b) ταυτίζεται με τη γραμμή που διαχωρίζει τις δύο εστίες ανακυκλοφορίας, οι οποίες παρατηρούνται στη δομή της βασικής ροής των σχημάτων 50a, 51a, 52a και 53a.



Σχήμα 51 : (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για κρίσιμη ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα σ=7.86, Ha=20.0 και S=10^5.



Σχήμα 52 : (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για κρίσιμη ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα σ=23.16, Ha=20.0 και S=10^5.



Σχήμα 53 : (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για κρίσιμη ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα σ=20.8, Ha=20.0 και S=10^5.

V. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Διεξήχθη μία εκτεταμένη παραμετρική μελέτη που αφορούσε την ευστάθεια του προβλήματος συναγωγής Rayleigh-Benard σε ορθογωνική διατομή αγωγού, παρουσία μαγνητικού πεδίου ισχυρής έντασης, χρησιμοποιώντας τη FEM και την επαναληπτική μέθοδο Arnoldi για την εύρεση των κυρίαρχων ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων. Ο παραλληλισμός της κατασκευής του πίνακα Ιακωβιανής και εν συνεχεία η αντιστροφή του πίνακα υλοποιήθηκαν σε υπολογιστική αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης. Από τη στιγμή που η κυρίαρχη ιδιολύση είναι συμμετρική εκ φύσεως, οι περισσότεροι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν από το υπολογιστικό μοντέλο που ενσωματώνει τη συνθήκη συμμετρίας στο μέσο του αγωγού, x=A/2, προκειμένου να επιτευχθεί περαιτέρω ελαχιστοποίηση υπολογιστικής μνήμης και κόστους. Οι υπολογισμοί των ιδιοτιμών στην πλήρη γεωμετρία του αγωγού επιβεβαιώνουν τη συγκεκριμένη προσέγγιση. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε ασυμπτωτική ανάλυση στο όριο καθώς $Ha \to \infty$ έτσι ώστε να συνεπικουρήσει στην ερμηνεία των αριθμητικών αποτελεσμάτων και να παρέχει μία καλύτερη εικόνα της προκύπτουσας μορφής της ροής στις κρίσιμες συνθήκες. Δόθηκε έμφαση στη συσχέτιση των αριθμών Gr και Ha στις κρίσιμες συνθήκες και στην επίδραση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας που χαρακτηρίζει τα τοιχώματα του αγωγού λαμβάνοντας υπόψη διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα των Burr & Muller (2002) που αφορούν την εμφάνιση της κίνησης του ρευστού λόγω συναγωγής και την μετάβαση σε τύρβη όταν το μαγνητικό πεδίο έχει υψηλή ένταση και τα τοιχώματα Hartmann είναι λιγότερο ηλεκτρικά αγώγιμα από τα πλευρικά τοιχώματα.

Στο πλαίσιο αυτό, προσδιορίστηκε η συσχέτιση των Gr και Ha η οποία υπακούει σε τετραγωνική σχέση της μορφής : $Gr \sim Ha^2$, αντανακλώντας το ισοζύγιο μεταξύ ανωστικών και Lorentz δυνάμεων. Η εν λόγω συσχέτιση βρίσκεται σε συμφωνία με τις μετρήσεις των Burr & Muller (2002) και εναρμονίζεται με προγενέστερες μελέτες (Davoust et al. 1999) οι οποίες εξετάζουν τη θερμικά επαγόμενη συναγωγή παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Η εμφάνιση θερμικής συναγωγής χαρακτηρίζεται πάντα από πραγματική ασταθή ιδιοτιμή που αναμένεται να εξελιχθεί σε ιδιομορφή στάσιμου κύματος μέχρι να σταθεροποιηθεί. Δεν ανιχνεύθηκαν μιγαδικές ιδιοτιμές καθ' όλη την έκταση της παραμετρικής μελέτης. Η μορφή της ροής χαρακτηρίζεται κυρίως από κυκλική κίνηση που καταλαμβάνει τον πυρήνα ως απόρροια των αναπτυσσόμενων θερμικών κλίσεων. Ο προσανατολισμός της κύριας δίνης καθορίζεται από την κατεύθυνση των γραμμών του μαγνητικού πεδίου και η συγκεκριμένη τάση γίνεται όλο και πιο προφανής καθώς ο αριθμός Ha αυξάνεται. Επιπρόσθετα, το μήκος κύματος της κίνησης λόγω συναγωγής ισούται αρχικά με το διπλάσιο πάχος του αγωγού, αλλά ενώ αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου αυτό μειώνεται.

Έχει θεωρηθεί ότι τα πλευρικά τοιχώματα είναι σημαντικά πιο ηλεκτρικά αγώγιμα από το ρευστό, (c_S=4.5), ενώ εξετάστηκαν οι περιπτώσεις τοιχωμάτων Hartmann με ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα, (c_H=0.00415), και έντονη αγωγιμότητα, (c_H=4.5). Η συνδυασμένη αγωγιμότητα τοιχώματος και στοιβάδας Hartmann, c_H+Ha^{-1}, αποτελεί παράμετρο κλειδί για τη μορφή ροής της ασταθούς ιδιομορφής. Καθορίζει την κατανομή της x στροβιλότητας στον αγωγό και μέσω αυτού καθορίζει την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά μήκος των τοιχωμάτων Hartmann και εν τέλει την έκταση του φαινομένου Hartmann braking effect.

Στην πραγματικότητα, όταν τα τοιχώματα Hartmann έχουν έντονη ηλεκτρική αγωγιμότητα η μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ελαχιστοποιείται ταυτόχρονα στα τοιχώματα Hartmann και πλευρικά, η εγκάρσια ταχύτητα παραμένει O(1) προϊόντος του Ha και η ροή σταθεροποιείται χωρίς, ωστόσο, να επηρεάζεται η συσχέτιση της κρίσιμης τιμής Gr_{Cr} που παραμένει της τάξης Ha^2. Η ανάπτυξη των στοιβάδων Hartmann και πλευρικών καθυστερεί και οι αριθμητικοί υπολογισμοί δύνανται να προσομοιώσουν υψηλότερες τιμές Ha, (βλ. σχήματα 36d, 37d, 38d). Στην παρούσα εργασία δεν ανιχνεύθηκε η ύπαρξη στοιβάδων Hartmann μέχρι τιμές του Ha της τάξης του 2000. Για τα δύο είδη τοιχωμάτων Hartmann, η μορφή ροής στον πυρήνα που αντιστοιχεί στο κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα έγινε εμφανές ότι απέχει από την οιονεί διδιάστατη δομή, εξαιτίας της σημαντικότητας των ολοκληρωτικών ιδιοτήτων της μεταφοράς θερμότητας λόγω συναγωγής σε όλο τον αγωγό.

Στην περίπτωση κατά την οποία τα τοιχώματα Hartmann είναι σχεδόν ηλεκτρικά μονωμένα, (c_H=0.00415), ανιχνεύονται καλώς σχηματιζόμενες στοιβάδες Hartmann και πλευρικές οι οποίες εφάπτονται στα Hartmann και πλευρικά τοιχώματα του αγωγού, αντίστοιχα. Οι τάξεις $O(Ha^{-1})$ και $O(Ha^{-1/2})$ για τα πάχη των στοιβάδων Hartmann και πλευρικών, αντίστοιχα, προκύπτουν ασυμπτωτικά και ανακτώνται από τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η ροή εντός του αγωγού προσλαμβάνει τη μορφή περιοδικής συστοιχίας δινών οι οποίες επιμηκύνονται στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, όμως η x-συνιστώσα της στροβιλότητας παρουσιάζει μεταβολή στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, ενώ την ίδια στιγμή γίνονται λεπτότερες καθώς ο αριθμός Ha αυξάνεται. Το ηλεκτρικό ρεύμα που παράγεται από την κίνηση στον πυρήνα πρέπει να εισέλθει στις στοιβάδες Hartmann όπου εμφανίζονται μεγάλες εγκάρσιες ταχύτητες και ηλεκτρικά ρεύματα ως απόρροια της ασθενούς ηλεκτρικής αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann.

Επιπρόσθετα, εν αντιθέσει με την περίπτωση τοιχωμάτων Hartmann που χαρακτηρίζονται από έντονη ηλεκτρική αγωγιμότητα, δημιουργείται στις κρίσιμες συνθήκες έντονη κίνηση λόγω συναγωγής, V~O(Ha) , κατά την εγκάρσια διεύθυνση . Δημιουργούνται ισχυρά στρώματα δινών κοντά στα τοιχώματα Hartmann όπου η στροβιλότητα πρέπει σταδιακά να τείνει στο μηδέν στο τοίχωμα. Η διάταξη αυτή πρέπει να ταιριάζει με την περιοχή του πλευρικού στρώματος όπου υπάρχουν αμελητέα ηλεκτρικά ρεύματα εξαιτίας της έντονης ηλεκτρικής αγωγιμότητας των πλευρικών τοιχωμάτων. Συνεπώς εμφανίζονται γωνιακά στρώματα, της τάξης του πάχους στοιβάδας Hartmann (Walker 1981), προκειμένου να διευκολύνουν την παραπάνω διαδικασία. Το σχήμα 34a παρουσιάζει τα ηλεκτρικά ρεύματα στο xy επίπεδο για z=0 και καθιστά εμφανή την παραπάνω δραστηριότητα στις δύο γωνίες όταν Ha=25, όπου σε αυτή την περίπτωση οι δομές των στοιβάδων Hartmann και πλευρικών αρχίζουν να εγκαθιδρύονται. Εντούτοις, αυτό δεν καθίσταται εύκολο να ανιχνευθεί από τα αριθμητικά αποτελέσματα, ιδιαίτερα καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου και συγκεκριμένα για Ha≥400.

Η έντονη εγκάρσια κίνηση, $\partial V / \partial y$, στη γειτονική περιοχή των τοιχωμάτων Hartmann παράγει ισχυρές διαμήκεις ταχύτητες, $\partial U / \partial x$, εντός των πλευρικών στοιβάδων προκειμένου να ικανοποιηθεί το ισοζύγιο μάζας σε αυτή την περιοχή. Η ανωτέρω αλληλουχία γεγονότων και συγκεκριμένα η παραγωγή στροβιλότητας στον πυρήνα η οποία οδηγεί σε υψηλές εγκάρσιες ταχύτητες και ηλεκτρικά ρεύματα στις στοιβάδες Hartmann ακολουθούμενη από ισχυρές x-συνιστώσες της ταχύτητας στα πλευρικά στρώματα, συνιστά "δευτερογενή" κίνηση που είναι ανάλογη με τη δράση ηλεκτρομαγνητικής αντλίας που ωθεί το ρευστό ως αποτέλεσμα της επενέργειας των δυνάμεων Lorentz στις στοιβάδες Hartmann. Το πρότυπο αυτό είχε επίσης διαπιστωθεί και αποδοθεί στην παραγωγή πλευρικών jets για τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμα πλευρικά τοιχώματα, (Buhler 1998), όπου παρόμοια ασυμπτωτική ανάλυση είχε διεξαχθεί προκειμένου να επιβεβαιώσει την επίδραση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του τοιχώματος σε ορθογωνικό αγωγό όπου το διάνυσμα της βαρύτητας είναι ευθυγραμμισμένο με τη μεγάλη διάστασή της. Ωστόσο, στην εν λόγω ανάλυση, είχε επισημανθεί η πιθανότητα ανάπτυξης πλευρικών jets όταν οι στοιβάδες Hartmann και πλευρικές είναι καλώς ηλεκτρικά αγώγιμες, το οποίο δεν ισχύει στην περίπτωση της παρούσας μορφής της ροής. Είναι επίσης σημαντικό να σημειωθεί ότι χρειάζεται να μελετηθεί περαιτέρω αυτή η κίνηση του πλευρικού στρώματος, στο πλαίσιο γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης, διότι ενδεχομένως αλληλεπιδρά έντονα με την κυρίως ροή στον πυρήνα του αγωγού και κατ’ επέκταση εισάγει αστάθειες υδροδυναμικής φύσης.

Η παραπάνω δομή της ροής, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν μεγάλες διαφορές στις ηλεκτρικές αγωγιμότητες των τοιχωμάτων Hartmann και πλευρικών, είναι αρκετά χρήσιμη ως προς την ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων των προαναφερθέντων ερευνητών, υπό τους όρους της συσχέτισης στις κρίσιμες συνθήκες καθώς επίσης και της κατανόησης δευτερογενούς χρονομεταβαλλόμενης αστάθειας η οποία είχε ανιχνευθεί κατά τη διάρκεια των σχετικών πειραμάτων. Ιδιαίτερα εφόσον δεν ανιχνεύθηκαν μιγαδικές ιδιοτιμές στο παρόν πρόβλημα, η εμφάνιση χρονομεταβαλλόμενης κίνησης δύναται να θεωρηθεί ως μία δευτερογενής αστάθεια της μορφής της ροής η οποία παράγεται από τη θερμική αστάθεια που εξετάστηκε. Στο πλαίσιο αυτό, θα πρέπει να τονιστεί ότι οι αδρανειακοί όροι στο εκ νέου αδιαστατοποιημένο ισοζύγιο ορμής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.3-4.5) στις κρίσιμες συνθήκες, όπου ισχύει η συσχέτιση $Gr \sim Ha^2$, είναι $O(1/Ha^2)$. Στην παρούσα μελέτη αμελούνται από τη μορφοποίηση οι συγκεκριμένοι όροι εφόσον δεν υπάρχει κίνηση στη βασική ροή, $\vec{u}_0 \, Z \, 0$. Ωστόσο, μόλις εμφανιστεί η θερμική αστάθεια, ιδιαίτερα όταν θεωρηθούν τοιχώματα Hartmann με ασθενή ηλεκτρική αγωγιμότητα, εμφανίζονται έντονες επιδράσεις συναγωγής καθορίζοντας την ένταση της ανακυκλοφορίας στον πυρήνα του αγωγού με την εγκάρσια V και την αξονική W συνιστώσες ταχύτητας να είναι O(Ha). Κατά συνέπεια, αμέσως μετά τις κρίσιμες συνθήκες η y-ορμή περιέχει αδρανειακούς όρους της μορφής $\left(1/Ha^2\right) V \partial V / \partial y$ που γίνονται O(1). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι αδρανειακές επιδράσεις να είναι ενδεχομένως εξίσου σημαντικές με την άνωση που αποτελεί την ωθούσα δύναμη της θερμικής αστάθειας και θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τη μελέτη δευτερογενών ασταθειών και μετάβαση σε τύρβη.

Για το σκοπό αυτό, μελετήθηκε από τους Dimopoulos & Pelekasis (2012) η ευστάθεια αλληλεπιδρώντων δινών, παρουσία στρωμάτων δινών που εφάπτονται στα τοιχώματα, και είχε διαπιστωθεί ότι οι δίνες είχαν σημειώσει γρήγορα απώλεια της ευστάθειάς τους μέσω χρονομεταβαλλόμενης υδροδυναμικής διαδικασίας. Ο συνδεόμενος μηχανισμός είχε κυρίως αποδοθεί σε ελλειπτική αστάθεια (Tsai & Windnall 1976, Fukumoto & Hirota 2008) ως αποτέλεσμα έντασης και εκκεντρότητας των αλληλεπιδρώντων δινών ή, καθώς ο Ha αυξάνεται και η ένταση των στρωμάτων δινών στα τοιχώματα αυξάνεται, σε αστάθεια ιξώδους στρώματος.

Πιο αναλυτικά, η τριδιάστατη ευστάθεια ροής με ελεύθερη συναγωγή σε τετραγωνική κοιλότητα, παρουσία μαγνητικού πεδίου και ισχυρού ρυθμού παραγωγής εσωτερικής θερμότητας αποτελεί συνδυασμό θερμικής και υδροδυναμικής επίδρασης και μάλιστα οι θερμικές επιδράσεις προκαλούν την εμφάνιση ζεύγους δινών το οποίο αποσταθεροποιείται περαιτέρω μέσω ελλειπτικής αστάθειας. Η μορφή της ασταθούς ροής χαρακτηρίζεται από δύο λοβούς που κατευθύνονται προς τη διεύθυνση της μέγιστης παραμόρφωσης όπως είχε προβλεφθεί από προγενέστερες μελέτες ευστάθειας. Το μαγνητικό πεδίο σταθεροποιεί τη στροβιλότητα στον πυρήνα της ροής ενώ ταυτόχρονα αλλάζει τη διεύθυνση της μέγιστης παραμόρφωσης προς τα στρώματα δινών που αναπτύσσονται κοντά στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα. Επιπλέον, επιβραδύνει προοδευτικά τις προκύπτουσες τριδιάστατες δομές και εν συνεχεία τις οδηγεί σε μικρότερες ιδιοσυχνότητες κατά τις κρίσιμες συνθήκες, όπως είχε παρατηρηθεί σε πειράματα που είχαν διεξαχθεί (Fauve et al. 1981), με το μαγνητικό πεδίο να προσανατολίζεται εγκάρσια ως προς τις διδιάστατες εστίες ανακυκλοφορίας υδραργύρου. Στην εν λόγω μελέτη είχε δειχθεί ότι η διαμήκης διάταξη του μαγνητικού πεδίου μετριάζει προοδευτικά την τριδιάστατη συναγωγή μέχρι η διδιαστατότητα να επικρατήσει.

Η σημασία των αντιπεριστρεφόμενων διαμηκών δινών που κατευθύνονται ως προς την οριζόντια διεύθυνση κατά την περίπτωση εμφάνισης τριδιάστατης συναγωγής, είχε επίσης αναδειχθεί σε προηγούμενη αριθμητική μελέτη της μετάβασης των ροών με ελεύθερη συναγωγή σε κοιλότητες, (Henkes & Le Quere 1996). Μάλιστα στη συγκεκριμένη μελέτη η κρίσιμη τιμή του Gr κατά την οποία εμφανίζονται τριδιάστατες αστάθειες για αδιαβατικά άνω τοιχώματα είχε βρεθεί να κυμαίνεται από 10^7 έως 10^8 και οπωσδήποτε κάτω από την οριακή τιμή για την περίπτωση εμφάνισης διδιάστατων ασταθειών. Στη μελέτη των Dimopoulos & Pelekasis (2012) και για την περίπτωση Ha=0 προέκυψε ότι η ενεργή κρίσιμη τιμή του Gr είναι $Gr_{Eff,Cr}$= $PrSGr_{Cr}$= 0.0321 x 10^5 x 600≈ 2 x 10^6, που είναι επίσης μικρότερη τιμή από την αντίστοιχη οριακή για διδιάστατες διαταρχές.

Η εμφάνιση χρονομεταβαλλόμενης συναγωγής ως αποτέλεσμα δυναμικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε δύο αντιπεριστρεφόμενες δίνες ενδεχομένως να αποτελεί τη γενεσιουργό αιτία για την ταχεία αποσταθεροποίηση της μόνιμης διδιάστατης συναγωγής που είχε παρατηρηθεί από τους Burr & Muller (2002) για ελαφρά αύξηση της κρίσιμης τιμής του Gr. Σε αυτήν την περίπτωση η ροή αποκτά τριδιάστατη δομή, και συνεπώς η οιονεί διδιάστατη δομή του πεδίου ροής που είχε υποτεθεί από τους εν λόγω ερευνητές χρειάζεται να επανεξεταστεί καθώς επίσης και ο ρόλος της ως προς τη μετάβαση σε τύρβη όταν ισχυρά μαγνητικά πεδία είναι παρόντα. Επιπρόσθετα, η εμφάνιση μεταβατικής συναγωγής αποτελεί παράγοντα που θα πρέπει να μελετηθεί πιο συστηματικά στο πλαίσιο σχεδιασμού των μονάδων του μανδύα για αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης και πιο συγκεκριμένα τον ITER.

Στο πλαίσιο αυτό, πρέπει να επισημανθεί ο ρόλος της επίδρασης συναγωγής, που αναδείχθηκε στα πλαίσια μελέτης του προβλήματος Rayleigh-Benard παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου όταν υπάρχουν ανωστικές και Lorentz δυνάμεις, όσον αφορά τον καθορισμό δυνατοτήτων μεταφοράς θερμότητας σε κοιλότητες. Οι λεπτομέρειες της προκύπτουσας μορφής της ροής έχουν κεντρική σημασία στην αξιολόγηση της μεταφοράς θερμότητας κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων εντός οριζοντίων κοιλοτήτων. Για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιούνται σχεδόν μονωμένα τοιχώματα Hartmann η δίνη στον πυρήνα είναι ισχυρότερη, Ω_x=O(Ha), κατά τις κρίσιμες συνθήκες και λαμβάνουν χώρα έντονες επιδράσεις συναγωγής μεταφέροντας θερμότητα προς τα πλευρικά τοιχώματα. Στην τελευταία περίπτωση, τα πλευρικά τοιχώματα είναι υπεύθυνα για τη μεγάλη θερμοκρασιακή αύξηση η οποία για παράδειγμα, όταν επιθυμείται ο σχεδιασμός του μανδύα αντιδραστήρα σύντηξης, ενδεχομένως να προκαλέσει υπερθέρμανση στο τοίχωμα. Αυτό, αναλόγως του υλικού του τοιχώματος, αποτελεί ένα εξαιρετικά ανεπιθύμητο φαινόμενο και εν μέρει εξηγεί το λόγο για τον οποίο τα υλικά με έντονη ηλεκτρική αγωγιμότητα λαμβάνονται υπόψη σε εφαρμογές ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Επιπρόσθετα, η συσχέτιση Gr και Ha στις κρίσιμες συνθήκες κατά την περίπτωση θερμικής συναγωγής είναι σημαντικός παράγοντας όσον αφορά το σχεδιασμό των μονάδων του μανδύα του αντιδραστήρα. Λόγω των υψηλών τιμών που λαμβάνει ο Ha σε εφαρμογές που σχετίζονται με την ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη, οι διαδικασίες σχεδιασμού τείνουν να υποτιμούν την επίδραση της συναγωγής. Ωστόσο, στο πλαίσιο αυτό ο Gr χαρακτηρίζεται από υψηλές τιμές ως απόρροια υψηλού θερμικού φορτίου που προέρχεται από τα νετρόνια του πυρήνα του αντιδραστήρα, (Kharitsa et al. 2004), και λαμβάνοντας υπόψη τη συσχέτιση $Gr \sim Ha^2$ συμπεραίνεται ότι θα πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη οι επιδράσεις συναγωγής και ενδεχομένως αδράνειας. Ας σημειωθεί ότι ενδεικτικές τιμές των αριθμών Ha και Gr, ο τελευταίος υπολογίζεται με βάση το θερμικό φορτίο από την ροή νετρονίων, είναι τέτοιες ώστε $Gr \sim Ha^{5/2}$ (Kharitsa et al. 2004). Με βάση την παρούσα μελέτη για αυτήν την σχέση μεταξύ Ha και Gr αναμένεται να υπάρχει θερμική αστάθεια και, αναλόγως των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των τοιχωμάτων, δευτερογενής υδροδυναμική με την μορφή οδευόντων κυμάτων.

Επί του παρόντος, υπάρχει προσπάθεια σύζευξης των FEM στην διατομή του στρώματος υγρού μετάλλου με Fourier spectral modes κατά την διαμήκη κατεύθυνση προκειμένου να κατανοηθεί πλήρως η μη γραμμική δυναμική της μορφής ροής που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία μέσω της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Η υλοποίηση της μη γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας που υιοθετήσαμε αναμένεται να έχει άμεσο αντίκτυπο στην προαναφερθείσα ερευνητική προσπάθεια. Απομένει η διεξαγωγή benchmark υπολογισμών προκειμένου να ελεγχθεί το παράλληλο υπολογιστικό μοντέλο που έχουμε αναπτύξει ώστε εν συνεχεία να μελετηθεί ενδελεχώς η μη γραμμική ανάπτυξη των ιδιομορφών που εμφανίζονται στην περιοχή της χρονομεταβαλλόμενης συναγωγής, όπως διαπιστώθηκε στα πειράματα των Burr & Muller (2002).

Η παρούσα εργασία δύναται να βελτιωθεί περαιτέρω χρησιμοποιώντας τεχνικές hp-refinement που αφορούν τα FEM προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η διακριτοποίηση του πλέγματος στη διατομή του αγωγού υπολογίζοντας τοπικά το σφάλμα σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, (Ainsworth & Oden 1992, 1993, Demkowicz 2007), χρησιμοποιώντας ανώτερης τάξης FEM. Το πλέγμα ακολούθως προσαρμόζεται σε περιοχές του πεδίου όπου η εκτίμηση σφάλματος χαρακτηρίζεται από τιμές οι οποίες υπερβαίνουν μία σταθερή προκαθορισμένη οριακή τιμή ως προς την αριθμητική λύση, (Pelekasis & Dimopoulos, Annex 15, 2012, Episkopou 2013). Η υλοποίηση του παραπάνω μονοδιάστατου προβλήματος με τεχνικές hp-refinement έχει άμεσο αντίκτυπο ως προς τη διδιάστατη διακριτοποίηση πλέγματος στη διατομή του αγωγού ενώ για τον υπολογισμό των μεταβολών στην τρίτη κατεύθυνση χρησιμοποιούνται spectral modes. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά την ανίχνευση στοιβάδων Hartmann και πλευρικών που αναπτύσσονται στη γειτονική περιοχή των τοιχωμάτων του αγωγού σε μη ιδανικές ΜΥΔ ροές (Buhler 1998) ή κρίσιμων στρωμάτων κατά τη μελέτη πλάσματος (Czarny & Huysmans 2008). Ιδιαίτερα σε περιπτώσεις καμπύλων συνόρων όπου ασυμπτωτικές λύσεις είναι δύσκολο να αναπτυχθούν η εν λόγω προσέγγιση αποτελεί βιώσιμη εναλλακτική λύση για να ληφθούν αξιόπιστες αριθμητικές προβλέψεις ροών που χαρακτηρίζονται από υψηλό αριθμό Hartmann.

Βιβλιογραφία

1. Ainsworth M. and Oden J. T., "A procedure for a posteriori error estimation for h-p finite element methods", Comp. Meth. Appl. Mech. & Engin. **101**, 73 (1992).

2. Ainsworth M. and Oden J. T., "A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods", Numer. Math. **65**, 23 (1993).

3. Arnoldi W.E., "The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem", Quart. Appl. Math. **9**, 17, (1951).

4. Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A. and Van der Vorst H., "Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA., (2000).

5. Blackford L. S., Choi J., Cleary A., D'Azevedo E., Demmel J., Dhlllon I., Dongarra J., Hammarling S., Henry G., Petitet A., Stanley K., Walker D. and Whaley R. C. "ScaLAPACK users guide", SIAM Philadelphia, (1997).

6. Bristol R. L., Ortega J. M., Marcus P.S. and Savas O., "On cooperative instabilities of parallel vortex pairs", J. Fluid Mech. **517**, 331, (2004).

7. Buhler L., "Instabilities in quasi-two dimensional magnetohydrodynamic flows", J. Fluid Mech. **326**, 125, (1996).

8. Buhler L., "Laminar buoyant magnetohydrodynamic flow in vertical rectangular ducts", Phys. Fluids **10**, 223, (1998).

9. Buhler L. and Norajitra B., "Magnetohydrodynamic flow in the dual coolant blanket", Technical Report KfK **6802**, Kernforschungszentrum Karlsruhe, (2003).

10. Buhler L. and Mistrangelo C., “MHD Mock-Up Experiments for Studying Pressure Distribution in a Helium-Cooled Liquid-Metal Blanket”, IEEE Tran. Pl. Sci. **38**, 254, (2010).

11. Burr U., Barleon L., Muller U. and Tsinober A., “Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong side wall jets”, J. Fluid Mech. **406**, 247, (2000).

12. Burr U. and Muller U., “Rayleigh Bénard convection in liquid metallayers under the influence of a horizontal magnetic field”, J. Fluid Mech. **453**, 345, (2002).

13. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A. and Zang, T. A., “Spectral Methods in Fluid Dynamics”, Springer - Verlag, Berlin, (1988).

14. Chandra R., Dagum L., Kohr D., Maydan D., McDonald J. and Menon, R., “Parallel Programming in OpenMP”, Morgan Kaufmann, San Francisco, (2001).

15. Chandrasekhar S., “Hydrodynamic and hydromagnetic stability”, Oxford Clarendon Press, OxfordUK, (1961).

16. Cliffe K. A., Garratt T. J. and Spence A., “Eigenvalues of the discretized Navier-Stokes equation with application to the detection of Hopf bifurcations”, Adv. Comput. Mathematics **1**, 337, (1993).

17. Cooley J. W. and Tukey, J. W., “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, Math. of Computation **19**, 297, (1965).

18. Crow SC., “Stability theory for a pair of trailing vortices”, AIAA J. **8**, 2172, (1970).

19. Czarny O. and Huysmans G., “Bezier surfaces and finite elements for MHD simulations”, Journal of Computational Physics **227**, 7423, (2008).

20. Davidson, P. A., “An introduction to Magnetohydrodynamics”, Cambridge University Press, Cambridge UK, (2001).

21. Davoust L., Cowley M. D., Moreau R. and Bolcato R., “Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field: Part 2. Experimental investigation”, J. Fluid Mech. **400**, 59, (1999).

22. Degrez G. and Snyder D. O., “LES investigation of coherent structrures in boundary layers and wakes. Volume III: Development of a parallel unstructured grid LES code”, von Karman Inst. for Fluid Dynamics, (2002).

23. Demkowicz L., “Computing with hp-Adaptive finite elements. Vol 1: One and two-dimensional elliptic and Maxwell problems”, Chapman & Hall/CRC, (2007).

24. Dick E., “Introduction to finite element techniques in CFD. In VKI Lecture Series: Introduction to Computational Fluid Dynamics”, von Karman Institute, Belgium, (1993).

25. Dick E., “Introduction to finite volume techniques in CFD. In VKI Lecture Series: Introduction to Computational Fluid Dynamics”, von Karman Institute, Belgium, (1993).

26. Dimas A. A. and Triantafyllou G. S., “Nonlinear interaction of shear flow with a free surface”, J. of Fluid Mech. **260**, 211, (1994).

27. Dimopoulos D. and Pelekasis N., “Three dimensional stability of free convection vortices in the presence of a magnetic field”, Fluid Dyn. Res. **44**, 031405, (2012).

28. Dimopoulos D. and Pelekasis N., "3D Stability analysis of Rayleigh - Benard convection of a liquid metal layer in the presence of a magnetic field - Effect of wall electric conductivity", under review, (2013).

29. Drazin P. G. and Reid W.H., "Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press, (1981).

30. Eckhardt B., Faisst H., Schmiegel A. and Schneider T. M., "Dynamical systems and the transition to turbulence in linearly stable shear flows", Phil. Trans. R. Soc. A **366**, 1297, (2008).

31. Elman H., Silvester D. and Wathen A., "Finite Elements and Fast Iterative Solvers", Oxford Science Publications, Oxford, (2005).

32. Episkopou P., "Finite Element Methodology with Adaptive Mesh Refinement for ODEs with Boundary Layers", Dipl. Thesis, Univ. of Thessaly, (2013).

33. Hammerlin G., "Ueber das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilitaet laminarer Grenzschichten an konkaven Waenden", J. Rat. Mech. Anal. **4**, 279, (1955).

34. Henkes R. and Le Quere P., "Three-dimensional transition of natural-convection flows", J. Fluid Mechanics **319**, 281, (1996).

35. Hirsch C., "Numerical Computation of Internal and External Flows", volume 1, Wiley, New York, (1988).

36. Hussaini M. Y. and Zang T. A., "Spectral methods in fluid dynamics", Annual Review of Fluid Mechanics **19**, 339, (1987).

37. Fauve S., Laroche C. and Libchaber A., “Effect of a horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury”, J. Physique-Lettres **42**, L455-L457, (1981).

38. Fidaros D. K., Sarris I. E., Kakarantzas S. C. and Vlachos N. S., “Estimation of the MHD effects on the flow of Pb-17Li under magnetic fields produced by the demo machine in the proposed ENEA design for the DCLL blanket”, Final Report prepared for ENEA. Under contract number FPN FUS STG Nr. 23110, (2008).

39. Fletcher C. A. J., Glowinski R., and Holt M., “Computational Techniques for Fluid Dynamics: Fundamental and General Techniques”, volume 1, Springer, New York, (1991).

40. Fukumoto Y. and Hirota M., “Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it”, Phys. Scr. T. **132**, 014041, (2008).

41. Geist A., Beguielin A., Dongarra J., Jiang W., Mancheck R. and Sunderam V., “PVM: Parallel Virtual Machine: A User's Guide and Tutorial for Networked Parallel Computing”, MIT Press, Cambridge, (1994).

42. Gelfgat A. Y. and Tanasawa I., “Numerical Analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method”, Num. Heat Transfer **25**, 627, (1994).

43. Gelfgat A. Y. and Molokov S., “Quasi two dimensional convection in a three dimensional laterally heated box in a strong magnetic field normal to main circulation”, Phys. Fluids **23**, 034101, (2011).

44. Gledzer EB, Ponomarev VM., “Instability of bounded flows with elliptical streamlines”, J. Fluid Mech. **240**, 1, (1992).

45. Goertler H., “Ueber eine dreidimensionale Instabilitaet laminarer Grenzschichten an konkaven Waenden”, Nachr. Ges. Wiss. Goetingen **2**, 1, (1940).

46. Gresho P. M. and Sani R. L., “Incompressible Flow and the Finite Element Method: Advenction - Diffusion and Isothermal Laminar Flow”, Wiley, New York, (2000).

47. Grossmann S., “The onset of shear-flow turbulence”, Rev. Mod. Phys. **72**, 603, (2000).

48. Kakarantzas S. C., Grecos A. P., Vlachos N. S., Sarris I. E, Knaepen B. and Carati D., “Direct numerical simulation of a heat removal configuration for fusion blankets”, Energy Conversion and Management **48**, 2775, (2007).

49. Kakarantzas S. C., Sarris I. E, Grecos A. P. and Vlachos N. S., “Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature”, Int. J. of Heat and Mass Transfer **52**, 250, (2009).

50. Kakarantzas S. C., Sarris I. E. and Vlachos N. S., “Natural convection of liquid metal in a vertical annulus with lateral and volumetric heating in the presence of a horizontal magnetic field”, Int. J. of Heat and Mass Transfer **54**, 3347, (2011).

51. Kharitsa A., Molokov A., Aleksandrova A. and Buhler L. “Buoyant convection in the HCLL blanket in a strong, uniform magnetic field”, Technical Report KfK**6959**, Kernforschungszentrum Karlsruhe, (2004).

52. Landau L. D. and Lifshitz E. M., “Fluid mechanics”, Butterworth-Heinemann, second edition, (1987).

53. Landman M. J., Saffman P. G., “The three dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid”, Phys. Fluids **30**, 2339, (1987).

54. Le Dizes S. and Verga A., “Viscous interactions of two co-rotating vortices before merging”, J. Fluid Mech. **467**, 389, (2002).

55. Leweke T, Williamson C. H. K., “Cooperative elliptic instability of a vortex pair”, J. Fluid Mech. **360**, 85, (1998).

56. Mamun C. K. and Tuckerman L. S., “Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow”, Physics of Fluids **7**, 80, (1995).

57. Meksyn D., “Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces”, Proc. Roy. Soc. **203**, 253, (1950).

58. Molokov S. and Buhler L., “Three dimensional buoyant convection in a rectangular box with thin conducting walls in a strong horizontal magnetic field”, FZKA **6817**, (2003).

59. Orszag S. A., “Numerical methods for the simulation of turbulence”, Physics of Fluids **12**, 250, (1969).

60. Orszag S. A., “Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I. Galerkin (spectral) representations”, St. in Appl. Math. **50**, 293, (1971).

61. Orszag S. A., “On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components”, J. of the Atmospheric Sciences **28**, 1074, (1971).

62. Orszag S. A. and Kells L. C., “Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow”, J. of Fluid Mech. **96**, 159, (1980).

63. Ortega J. M., Bristol R. L. and Savas E. O., “Experimental study of the instability of unequal strength counter-rotating vortex pairs”, J. Fluid Mech. **474**, 35, (2003).

64. Pacheco P., “Parallel Programming with MPI”, Morgan Kaufmann, San Francisco, (1996).

65. Patera A. T., “A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion”, J. of Comp. Physics **54**, 468, (1984).

66. Pelekasis N., “Linear Stability Analysis and dynamic simulations of free convection in a differentially heated cavity in the presence of a horizontal magnetic field and a uniform heat source”, Phys. Fluids **18**, 034101, (2006).

67. Pelekasis N. and Dimopoulos D., “Finite Element Methodology with Adaptive Mesh Refinement for ODEs with Boundary Layers”, Annex 15, Association Euratom - Hellenic Republic, (2012).

68. Pierrehumbert R. T., “Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid”, Phys. Rev. Lett. **57**, 2157, (1986).

69. Planas R., Badia S. and Codina R., “Approximation of the inductionless MHD problem using a stabilized finite element method”, J. Comp. Phys. **230**, 2977, (2011).

70. Pothérat A., Sommeria J. and Moreau R., “An effective two-dimensional model for MHD flows with transverse magnetic field”, J. Fluid Mech. **424**, 75, (2000).

71. Pothérat A., Sommeria J. and Moreau R., “Numerical simulations of an effective two-dimensional model for flows with a transverse magnetic field”, J. Fluid Mech. **534**, 115, (2005).

72. Proceedings of the USSR/US Exchange II.5, “Workshop on Comparison of Liquid Metal Blanket Approaches and Experiments”, Nov. (1989).

73. Reddy J. N., “An introduction to the finite element method”, New York: McGraw-Hill, (1993).

74. Reid W. H. and Harris D. L., “Some further results on the Bénard problem”, Physics of Fluids **1**, 102, (1958).

75. Saad Y., “Variations of Arnoldi’s Method for Computing Eigenelements of Large Unsymmetric Matrices”, Linear Algebra Appl. **34**, 269, (1980).

76. Saad Y. and Schultz M. H., “GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems”, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **7**, 856, (1986).

77. Saad Y., “Iterative Methods for Sparse Linear Systems”, PWS, (1996).

78. Saad Y., “Iterative methods for sparse linear systems”, 2nd Ed. SIAM Philadelphia PA, USA, (2003).

79. Sarris I. E., Lekakis I. and Vlachos N. S., “Natural convection in a 2D enclosure with sinusoidal upper wall temperature”, Num. Heat Transfer Part: A **42**, 513, (2002).

80. Sarris I. E., Lekakis I. and Vlachos N. S., “Natural convection in rectangulare tanks heated locally from below”, Int. J. Heat Mass Transfer **47**, 3549, (2004).

81. Sarris I. E., Kakarantzas S. C., Grecos A. P. and Vlachos N. S., “MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity”, Int. J. Heat Mass Transfer **48**, 34, (2005).

82. Sarris, I. E., Zikos G. K., Grecos A. P. and Vlachos N. S., “On the limits of validity of the low magnetic Reynolds number approximation in MHD natural-convection heat transfer”, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology **50**, 157, (2006).

83. Sarris I. E., Kassinos S., Knaepen B. and Carati D., “Large-eddy simulations of the turbulent Hartmann flow close to the transitional regime”, Center for Turbulent Research Proceedings of the Summer Program, 387, (2006).

84. Sarris I. E., Detandt Y., Toniolo C., Vire A., Kinet M., Carati D., Degrez G. and Knaepen B., “Direct numerical simulations of the turbulent Hartmann flow in cylindrical ducts”, Adv. in Turb. XI **117**, 748, (2007).

85. Sarris I. E., Grigoriadis D. G. E. and Vlachos N. S., “Laminar free convection in a square enclosure driven by the Lorentz force”, Numerical Heat Transfer, Part A **58**, 923, (2010).

86. Sarris I. E., Iatridis A. I., Dritselis C. D. and Vlachos N. S., “Magnetic field effect on the cooling of a low-Pr fluid in a vertical cylinder”, Phys. of Fluids **22**, 017101, (2010).

87. Snyder D. O. and Degrez G., “Large eddy simulation with complex 2d geometries using a parallel finite-element/spectral algorithm”, Int. J. Numer. Meth. Fluids **41**, 1119, (2002).

88. Sommeria J. and Moreau R. “Why, how and when MHD turbulence becomes two-dimensional”, J. Fluid Mech. **118**, 507, (1982).

89. Takahashi D., “A Fast Fourier Transform Package”, Univ. of Tsukuba, (2000).

90. Ting A. L., Walker J. S., Reed C. B. and Picologlou B. F., “Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows”, Int. J. Eng. Sci. **29**, 939, (1991).

91. Tsai C. and Widnall S. E., “The stability of short-waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field”, J. Fluid Mech. **73**, 721, (1976).

92. Vanden-Abeele D., Degrez G. and Snyder D. O., “Parallel turbulent flow computations using a hybrid spectral/finite-element method on Beowulf clusters”, ULB, Internal Report, (2004).

93. Waleffe F., “Homotopy and exact coherent structures in plane shear flows”, Phys. Fluids **15**, 1517, (2003).

94. Waleffe F., “Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity”, Phys. Fluids **7**, 3060, (1995).

95. Waleffe F., “On the three-dimensional instability of strained vortices”, Phys. Fluids **2**, 76, (1990).

96. Walker J. S., “Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls-Part I”, J. de Mecanique **20**, 79, (1981).

97. Witting H., “Ueber den Einfluss der Stromlinienkruemmung auf die Stabilitaet laminarer Stroemungen”, Arch. Rat. Mech. Anal. **2**, 243, (1958).

98. Xin S. and Le Quere P., “Linear stability analysis of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls”, Phys.Fluids **13**, 2529, (2001).

99. Ying A. Y. and Tillack M. S., “MHD heat transfer in elongated rectangular ducts for liquid metal blankets”, Fusion Tech. **19**, 990, (1991).

100. Δημόπουλος Δ., “Παραμετρική μελέτη ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με φυσική συναγωγή παρουσία μαγνητικού πεδίου”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Παν. Θεσσαλίας, (2010).

101. Θεμελίδης Ι., “Υλοποίηση και αξιολόγηση FFT αλγορίθμων για παράλληλες αρχιτεκτονικές κατανεμημένης μοιραζόμενης μνήμης”, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, (2004).

102. Κακαράντζας Σ., “Μαγνητοϋδροδυναμική συναγωγή με εσωτερικές πηγές θερμότητας σε κυλινδρικούς αγωγούς”, Διδακτορική Διατριβή, Παν. Θεσσαλίας, (2007).

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ονοματεπώνυμο :	Δημήτριος Δημόπουλος
Ημερομηνία γεννήσεως :	04/08/1985
Διεύθυνση εργασίας :	Λεωφόρος Αθηνών, Πεδίον Άρεως, 38834, Βόλος, Ελλάδα
Τηλέφωνο :	(+30)24210-74317, (+30)6938451116
E- mail :	dimopoulos@uth.gr
Οικογενειακή κατάσταση :	Άγαμος

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

2008- 2013:	Διδακτορικό, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, Ελλάδα.
2008-2010:	Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, Ελλάδα.
2003-2008:	Δίπλωμα Μηχανολόγου Μηχανικού, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, Ελλάδα.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ / ΔΙΑΤΡΙΒΕΣ

- Διδακτορική Διατριβή : "Θεωρητική και υπολογιστική μελέτη τριδιάστατης ευστάθειας ροής με ελεύθερη συναγωγή παρουσία μαγνητικού πεδίου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής".
  Επιβλέπων: Καθ. Ν. Πελεκάσης

  Χρηματοδότηση: Association Euratom-Hellenic Republic
- Μεταπτυχιακή Εργασία : "Παραμετρική μελέτη ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με φυσική συναγωγή παρουσία μαγνητικού πεδίου".
  Επιβλέπων: Καθ. Ν. Πελεκάσης

  Χρηματοδότηση: Association Euratom-Hellenic Republic
- Διπλωματική Εργασία : "Μαγνητοϋδροδυναμική ευστάθεια σε τρισδιάστατες διαταραχές, ροής με ελεύθερη συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής".
  Επιβλέπων: Καθ. Ν. Πελεκάσης

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

- Βοηθός Διδασκαλίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας 2008-σήμερα
- Πρακτική Άσκηση στα ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΠΕΤΡΕΛΑΙΑ Θεσ/νίκης 07/2006-08/2006

ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

- Αγγλικά (Πολύ Καλά)

ΒΡΑΒΕΙΑ

- Χρηματικό Βραβείο από το Παγκόσμιο Συμπόσιο : Bifurcations and Instabilities in fluid dynamics (2011)
- Χρηματικό Βραβείο από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για άριστη ακαδημαϊκή επίδοση (2004, 2005, 2007)
- Χρηματικό Βραβείο από το Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας για άριστη ακαδημαϊκή επίδοση (2004, 2010)

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "3D Stability analysis of Rayleigh - Benard convection of a liquid metal layer in the presence of a magnetic field - Effect of wall electric conductivity", submitted to Fluid Dyn. Res.
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Three dimensional stability of free convection vortices in the presence of a magnetic field", Fluid Dyn. Res., **44**, 031405, (2012).

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΔΙΕΘΝΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΣΥΝΕΔΡΙΩΝ

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 23rd International Congress of Theoretical & Applied Mechanics, Beijing, China (2012).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 4th

International Symposium Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, Barcelona, Spain (2011).

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 2nd Workshop on Numerical Simulations of MHD flows, Karlsruhe, Germany (2010).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 8th Euromech Fluid Mechanics Conference, Bad Reichenhall, Germany (2010).
- N. Pelekasis and D. Dimopoulos, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 3rd International Symposium Bifurcations and Instabilities in fluid dynamics, Nottingham, England (2009).
- N. Pelekasis and D. Dimopoulos, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 7th Euromech Fluid Mechanics Conference, Manchester, England (2008).

<u>ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΣΥΝΕΔΡΙΩΝ</u>

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 8th National Conference ROI, Volos, Greece (2012).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 10th School on Fusion Physics and Technology, Volos, Greece (2011).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, "Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 9th School on Fusion Physics and Technology, Volos, Greece (2010).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis,, "Magnetic field effects on 3D stability of natural convection flows in differentially heated cavities", 7th National Conference ROI, Thessaloniki, Greece (2010).

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Magnetic field effects on three dimensional stability of natural convection flows in differentially heated cavities”, 8th School on Fusion Physics and Technology, Volos, Greece (2009).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Free Convection in liquid metal layers under the influence of a strong magnetic field”, 6th National Conference ROI, Kozani, Greece (2008).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Free Convection in liquid metal layers under the influence of a strong magnetic field”, 7th School on Fusion Physics and Technology, Volos, Greece (2008).

ΑΛΛΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Stability analysis of MHD flows”, ANNEX, Team UTH, Association Euratom-Hellenic Republic, Volos, Greece (2012).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Stability analysis of MHD flows”, ANNEX, Team UTH, Association Euratom-Hellenic Republic, Volos, Greece (2011).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Stability analysis of MHD flows”, ANNEX, Team UTH, Association Euratom-Hellenic Republic, Volos, Greece (2010).
- D. Dimopoulos and N. A. Pelekasis, “Stability analysis of MHD flows”, ANNEX, Team UTH, Association Euratom-Hellenic Republic, Volos, Greece (2009).
- D. Dimopoulos and N. Pelekasis, “Stability analysis of MHD flows”, ANNEX, Team UTH, Association Euratom-Hellenic Republic, Volos, Greece (2008).