

**ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΑΞΟΝΙΚΑ ΘΛΙΒΟΜΕΝΩΝ
ΧΑΛΥΒΔΙΝΩΝ ΔΟΚΩΝ
ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ**

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΟΥ ΥΠΟΒΛΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΠΤΑΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
ΣΕ ΜΕΡΙΚΗ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ

Κωνσταντίνος Σ. Παπαχρήστου

2013

Βεβαιώνω ότι έχω διαβάσει αυτή τη διατριβή και ότι κατά τη γνώμη μου είναι απολύτως επαρκής, σε πεδίο εφαρμογής, ποιότητα και προαγωγή της επιστήμης, ως διατριβή για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος.

Δημήτριος Σ. Σοφιανόπουλος,
Επίκουρος Καθηγητής
Πανεπιστήμιου Θεσσαλίας,
Επιβλέπων και 1^ο μέλος της Τριμελούς
Συμβουλευτικής Επιτροπής

Βεβαιώνω ότι έχω διαβάσει αυτή τη διατριβή και ότι κατά τη γνώμη μου είναι απολύτως επαρκής, σε πεδίο εφαρμογής, ποιότητα και προαγωγή της επιστήμης, ως διατριβή για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος.

Αντώνιος Ν. Κουνάδης,
Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ – Ακαδημαϊκός,
2^ο μέλος της Τριμελούς
Συμβουλευτικής Επιτροπής

Βεβαιώνω ότι έχω διαβάσει αυτή τη διατριβή και ότι κατά τη γνώμη μου είναι απολύτως επαρκής, σε πεδίο εφαρμογής, ποιότητα και προαγωγή της επιστήμης, ως διατριβή για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος.

Φίλιππος Κ. Περδικάρης,
Καθηγητής
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας,
3^ο μέλος της Τριμελούς
Συμβουλευτικής Επιτροπής

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτρη Σοφιανόπουλο, για την επιστημονική καθοδήγηση και την αμέριστη ηθική στήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας Διατριβής. Τούτο ισχύει επίσης και για τα υπόλοιπα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής Ακαδημαϊκό Καθηγητή κ. Αντώνιο Κουνάδη και Καθηγητή Φίλιππο Περδικάρη.

Αφιερώνω την παρούσα εργασία στην οικογένεια μου για την υπομονή και την στήριξη της αδιακρίτως.

Είθε η μνήμη του Άλκη να αποτελέσει παράδειγμα για μας τους υπόλοιπους.

*He who fights the monsters,
might take care,
lest he thereby become a monster,
and if you gaze for long into an abyss,
the abyss gazes also into you*
Nietzsche, Beyond Good and Evil

*The old ones were, the old ones are,
and the old ones shall be,
who is able to make war with them?*
Harun Al Rashid, Great Baghdad Caliph
6th Century A.D., on behalf of Mohammed the Prophet
Koran and New Testimony

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	
1.1 Κίνητρο	1
1.2 Αντικείμενο και Στόχοι	1
1.3 Δομή και Περίγραμμα	2
2. Ιστορική Αναδρομή και Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	
2.1 Προσομοιώματα (Μοντέλα) Ελαστικής Θεμελίωσης	5
2.1.1 Γενικά Στοιχεία και το Μοντέλο Winkler	5
2.1.2 Μηχανικά Προσομοιώματα	7
2.1.2.1 Μηχανικά Προσομοιώματα δύο (2) παραμέτρων	7
Το μοντέλο των Filonenko - Borodich (F-B)	7
Το μοντέλο του Hetényi	8
Το μοντέλο του Pasternak	8
Το μοντέλο του Wieghardt	9
Μοντέλο αναλογίας δοκού – στύλου	9
2.1.2.2 Μηχανικά Προσομοιώματα τριών (3) παραμέτρων	10
2.1.3 Προσομοιώματα Συνεχούς Μέσου («Συνεχή»)	11
Μοντέλο Vlasov	11
Μοντέλο Reissner	11
2.2 Δοκοί – Στύλοι επί Ελαστικού Εδάφους	12
2.2.1 Αξονικά θλιβόμενες δοκοί επί γραμμικά ελαστικού εδάφους (Winkler)	12
2.2.2 Αξονικά θλιβόμενες δοκοί μη γραμμικά ελαστικής Θεμελίωσης	16
2.2.3 Αξονικά θλιβόμενες δοκοί επί θεμελίωσης τύπου Pasternak, Wieghardt και Reissner	22
2.3 Λυγισμός χαλύβδινων τροχιών σιδηροδρόμων	25
3. Δοκοί – Στύλοι επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler: Συζευγμένες καταστάσεις αστάθειας και προσομοίωση αλληλεπίδρασης θεμελιωδών μορφών λυγισμού	
3.1 Εισαγωγή	34
3.2 Δοκός – στύλος επί θεμελίωσης τύπου Winkler: Ειδικές λύσεις συζευγμένης αστάθειας	34
3.2.1 Γενική περιγραφή	34
3.2.2 Γραμμική ανάλυση καθολικού λυγισμού	35

3.2.3	Μη γραμμική έκφραση της ενέργειας – Αρμονική ανάλυση	38
3.2.4	Προκαταρκτικά Αποτελέσματα	41
3.3	Προσομοίωση αλληλεπίδρασης θεμελιωδών μορφών	42
3.3.1	Γενικά στοιχεία	42
3.3.2	Περιγραφή του προτεινόμενου διβάθμιου μοντέλου	43
3.3.3	Εξισώσεις ισορροπίας	44
3.3.4	Ανάλυση λυγισμού για συμμετρική παραμόρφωση	46
3.3.5	Ανάλυση λυγισμού για αντισυμμετρική παραμόρφωση	48
3.3.6	Πιθανή ύπαρξη δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας	50
3.3.7	Σύζευξη μορφών	52
3.3.8	Συσχετισμός με την απόκριση της πραγματικής κατασκευής	53
3.4	Συμπεράσματα	58
3.4.1	Αρμονική ανάλυση συνεχούς συστήματος	58
3.4.2	Προσομοίωμα δύο βαθμών ελευθερίας	58
4.	Εντός επιπέδου ευστάθεια ομοιόμορφων χαλύβδινων δοκών – στύλων με αμετακίνητες στηρίξεις επί ελαστικού εδάφους τύπου Pasternak	
4.1	Εισαγωγή	60
4.2	Περιγραφή προβλήματος και βασικές μαθηματικές εξισώσεις	60
4.2.1	Εξισώσεις λυγισμού	60
4.2.2	Μέθοδος Επίλυσης	62
4.2.3	Αμφιέριστη δοκός – στύλος	62
4.2.4	Αμφίπακτη δοκός – στύλος	64
4.3	Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός	64
4.3.1	Γενικές θεωρήσεις	64
4.3.2	Αμφιέριστη δοκός – στύλος	66
4.3.3	Αμφίπακτη δοκός – στύλος	71
4.4	Συμπεράσματα	72
5.	Καθολική ευστάθεια ομοιόμορφων χαλύβδινων δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους με μικτή τετραγωνική – κυβική μη γραμμικότητα	
5.1	Εξίσωση λυγισμού	73
5.2	Διαδικασία επίλυσης	75
5.2.1	Αμφιέριστη δοκός – στύλος	76
5.2.2	Αμφίπακτη δοκός – στύλος	76
5.3	Φορτία λυγισμού και πιθανή σύζευξη μορφών	79
5.3.1	Αμφιέριστη δοκός – στύλος	79

5.3.2	Αμφίπακτη δοκός – στύλος	83
5.4	Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός	85
5.4.1	Επιλογή παραμέτρων	85
5.4.2	Γραφικές παραστάσεις προ- και μεταλυσισμικής συμπεριφοράς και επί μέρους συμπεράσματα – σχολιασμός	90
5.5	Συμπεράσματα	160
6.	Λυγισμός δοκών επί ελαστικού εδάφους θεωρώντας ασυνεχή (ασύνδετη) επαφή	
6.1	Εισαγωγικά	162
6.2	Παρουσίαση του προβλήματος και μαθηματική διατύπωση	166
6.3	Προτεινόμενη τεχνική επίλυσης	169
6.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	171
6.4.1	Αμφιέριστη δοκός –στύλος	171
6.4.2	Αμφίπακτη δοκός –στύλος	175
6.5	Συμπεράσματα	178
7.	Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	
7.1	Συνολικά Συμπεράσματα	180
7.1.1	Κεφάλαιο 3 ^ο : Αρμονική ανάλυση συνεχούς συστήματος	180
7.1.2	Κεφάλαιο 3 ^ο : Προσομοίωμα δύο βαθμών ελευθερίας	180
7.1.3	Κεφάλαιο 4 ^ο	181
7.1.4	Κεφάλαιο 5 ^ο	182
7.1.5	Κεφάλαιο 6 ^ο	183
7.2	Περιορισμοί και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	184
	Βιβλιογραφία	186
	Παράρτημα Α	194
	Παράρτημα Β	198

Κατάλογος Σχημάτων

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα 2.1.	Σχηματική παράσταση του μοντέλου δοκού εδραζόμενης επί ελαστικής θεμελίωσης Winkler μέσω ευθυγράμμων ελατηρίων	6
Σχήμα 2.2.	Παραμορφώσεις ελαστικής θεμελίωσης υπό ομοιόμορφη πίεση: <i>a</i> – Μοντέλο Winkler, <i>b</i> – πραγματικό εδαφικό στρώμα	6
Σχήμα 2.3.	Σχηματική αναπαράσταση του μηχανικού μοντέλου δύο παραμέτρων των F-B	8
Σχήμα 2.4.	Δοκός επί θεμελίωσης τύπου Pasternak	8
Σχήμα 2.5.	Μοντέλο θεμελίωσης Kerr	10
Σχήμα 2.6.	Αξονικά θλιβόμενη ράβδος επί ελαστικού γραμμικού / μη γραμμικού εδάφους (Hunt et al. 1993)	14
Σχήμα 2.7.	Λύσεις της Δ.Ε. (2.23): (a) περιοδική, (b) διαμορφωμένη (c) μονής εντοπισμένης καμπύλωσης και (d) πολλαπλών εντοπισμένων καμπυλώσεων (Whiting 1997)	16
Σχήμα 2.8.	Ατελής ράβδος επί ελαστικού εδάφους (Wadee 2000)	17
Σχήμα 2.9.	Δοκός – στύλος επί ελαστικής θεμελίωσης (Coman 2010)	18
Σχήμα 2.10.	Ατελής δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης με μικτή τετραγωνική – κυβική μη γραμμικότητα (Elishakoff 1985)	19
Σχήμα 2.11.	Δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης τύπου Wiegardt (a), και διάγραμμα ελευθέρου σώματος (b) (Rutta και Elishakoff 2006)	24
Σχήμα 2.12.	Ελαστική δοκός επί εδάφους τύπου Reissner (Challamel et al. 2010)	25
Σχήμα 2.13.	Τυπική διαμόρφωση υποβάθρου σιδηροδρομικής γραμμής και ονοματολογία	26
Σχήμα 2.14.	Υλικά επιδομής (φωτογραφία)	27
Σχήμα 2.15.	Χημική σύνθεση τυπικών χαλύβων σιδηροτροχιών	27
Σχήμα 2.16.	Παλαιά και νέα ονομασία διατομών σιδηροτροχιών	28
Σχήμα 2.17.	Τυπική καμπύλη απόκρισης σιδηροτροχιάς σε θερμοκρασιακές μεταβολές (Lim et al. 2003)	29
Σχήμα 2.18.	Κατανομή αξονικών θλιπτικών δυνάμεων πριν και μετά το λυγισμό (σημειωτέον ότι σε πραγματικές τροχιές η διάσταση <i>a</i> είναι πολλές φορές μεγαλύτερη της διάστασης 2l)	31
Σχήμα 2.19.	Οι τέσσερις μορφές πλευρικού λυγισμού που μελετήθηκαν (Kerr 1978)	32

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα 3.1.	Απλά στηριζόμενη δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης τύπου Winkler	35
Σχήμα 3.2.	Καμπύλες των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Οι τελείες δίνουν τα κρίσιμα σημεία για λύσεις που περιέχουν 1 και 2, 2 και 3, όπως και 3 και 4 ημικύματα	37
Σχήμα 3.3.	Δρόμοι ισορροπίας για $m = 3$, $n = 4$. Με συμπαγείς γραμμές απεικονίζονται οι ευσταθείς και με διακεκομμένες οι ασταθείς δρόμοι	41
Σχήμα 3.4.	Λύσεις σε διαφορετικές περιοχές του Σχήματος 3.3: (α) $1^{ος}$ ευσταθής δρόμος ισορροπίας, (β) C_m , (γ) ασταθής δρόμος ισορροπίας μεταξύ C_m και C_n , (δ) C_n , (ε), (στ) $2^{ος}$ ευσταθής δρόμος ισορροπίας	42
Σχήμα 3.5.	Απαραμόρφωτη γεωμετρία του προτεινόμενου διβάθμιου μοντέλου με ελατήρια κυβικής μη γραμμικότητας	44
Σχήμα 3.6.	Παραμορφωμένη γεωμετρία του προτεινόμενου μοντέλου λόγω του θλιπτικού φορτίου P	44
Σχήμα 3.7.	Δρόμοι ισορροπίας της θεμελιώδους συμμετρικής παραμόρφωσης του μοντέλου για διάφορες τιμές της παραμέτρου ζ κυβικής μη γραμμικότητας	48
Σχήμα 3.8.	Δρόμοι ισορροπίας της θεμελιώδους αντισυμμετρικής παραμόρφωσης του μοντέλου για διάφορες τιμές της παραμέτρου ζ κυβικής μη γραμμικότητας	50
Σχήμα 3.9.	Προβολές των δρόμων ισορροπίας του συστήματος στο επίπεδο διαμόρφωσης για δύο χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου αντιστάσεως ζ	51
Σχήμα 3.10.	Διαγράμματα των θεμελιωδών δρόμων ισορροπίας στο επίπεδο που εμφανίζονται για $\zeta = -5$	52
Σχήμα 3.11.	Τρισδιάστατη αναπαράσταση όλων των δρόμων ισορροπίας του συστήματος για $\zeta = -5$	53
Σχήμα 3.12.	Καμπύλη (ζ , $\lambda_{κρίσ}$) και αντίστοιχη πολυωνμική προσαρμογή 7 ^{ου} βαθμού	56
Σχήμα 3.13.	Καμπύλη (ζ , k) και αντίστοιχη πολυωνμική προσαρμογή 7ου βαθμού	56
Σχήμα 3.14.	Καμπύλη (ζ , γ) και αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής μορφής φθίνουσας εκθετικής $y = y_0 + A_1 e^{-x/t_1} + A_2 e^{-x/t_2}$	57
Σχήμα 3.15.	Καμπύλη ($\lambda_{κρίσ}$, k) και αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής της μορφής $y = \frac{1}{a+bx}$ (τα χαρακτηριστικά της δίδονται στο Σχήμα B.1.2 του Παραρτήματος Β)	57
Σχήμα 3.16.	Καμπύλη ($\lambda_{κρίσ}$, γ) και αντίστοιχη πολυωνμική προσαρμογή 7ου βαθμού (τα χαρακτηριστικά της δίδονται στο Σχήμα B.1.3 του Παραρτήματος Β)	58

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα 4.1.	Μεταλλική δοκός – στύλος επί θεμελίωσης τύπου Pasternak	61
Σχήμα 4.2.	Καμπύλες κρίσιμων φορτίων λυγισμού για την αμφιέριστη δοκό - στύλο	63
Σχήμα 4.3.	Τυπικές διαστάσεις διατομής σιδηροτροχιάς	65
Σχήμα 4.4.	Καμπύλες καμπτικής παραμόρφωσης για τη σύζευξη μορφών της περίπτωσης ST1+BT1	67
Σχήμα 4.5.	Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT1	68
Σχήμα 4.6.	Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST1+BT2	69
Σχήμα 4.7.	Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT2	69
Σχήμα 4.8.	Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT3	69
Σχήμα 4.9.	Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST3+BT3	70
Σχήμα 4.10.	Ιδιομορφές λυγισμού για την αμφίπακτη δοκό	71
Σχήμα 5.1.	Ομοιόμορφη μεταλλική δοκός – στύλος επί μιας ελαστικής μη γραμμικής θεμελίωσης τριών παραμέτρων	73
Σχήμα 5.2.	Γραφική παράσταση των λύσεων για $n = 1$, αμφιέριστη δοκός	80
Σχήμα 5.3.	Λεπτομέρεια του Σχήματος 5.2	81
Σχήμα 5.4.	Γραφική παράσταση των λύσεων για $n=2$, αμφιέριστη δοκός	81
Σχήμα 5.5.	Γραφική παράσταση των λύσεων για $n=3$, αμφιέριστη δοκός	82
Σχήμα 5.6.	Γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $n=1$, αμφίπακτη δοκός	84
Σχήμα 5.7.	Γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $n=2$, αμφίπακτη δοκός	84
Σχήμα 5.8.	Γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $n=3$, αμφίπακτη δοκός	85
Σχήμα 5.9.	Διατομή σιδηροτροχιάς UIC 60	86
Σχήμα 5.10.	Σχόλιο για τις γραφικές παραστάσεις $[x, w(x)]$ πριν και μετά τις κρίσιμες καταστάσεις	90
Σχήμα 5.11.	Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_1^1	94
Σχήμα 5.12.	Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_2^1	98
Σχήμα 5.13.	Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^1	103

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα 5.14.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_1^2	108
Σχήμα 5.15.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_2^2	112
Σχήμα 5.16.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^2	116
Σχήμα 5.17	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_1^3	120
Σχήμα 5.18.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_2^3	124
Σχήμα 5.19.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^3	129
Σχήμα 5.20.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^1	133
Σχήμα 5.21.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^2	138
Σχήμα 5.22.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^2	142
Σχήμα 5.23.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^2	146
Σχήμα 5.24.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^3	150
Σχήμα 5.25.	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^3	154
Σχήμα 5.26	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^3	158
Σχήμα 6.1.	Δομικά στοιχεία με περιορισμούς μονόπλευρης επαφής και αντίστοιχοι τύποι παραμόρφωσης (Silveira et al. 2008)	163
Σχήμα 6.2.	Οι πέντε βασικοί τύποι παραμόρφωσης (Chen και Wu 2011)	164
Σχήμα 6.3.	Σχηματική παράσταση αμφιέριστης δοκού επί μη γραμμικά βισκοελαστικής θεμελίωσης μονόπλευρης επαφής (Bhattiprolu et al. 2011)	165
Σχήμα 6.4.	Πιθανές παραμορφωμένες καταστάσεις μιας λυγισμένης δοκού θεωρώντας ασύνδετη (ασυνεχή) επαφή με το εδαφικό υπόστρωμα	167

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα 6.5.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT1, αμφιέριστη δοκός	173
Σχήμα 6.6.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT1, αμφιέριστη δοκός	173
Σχήμα 6.7.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT2, αμφιέριστη δοκός	173
Σχήμα 6.8.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT2, αμφιέριστη δοκός	174
Σχήμα 6.9.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT3, αμφιέριστη δοκός	174
Σχήμα 6.10.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST3 + BT3, αμφιέριστη δοκός	174
Σχήμα 6.11.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT1, αμφίπακτη δοκός	176
Σχήμα 6.12.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT1, αμφίπακτη δοκός	176
Σχήμα 6.13	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT2, αμφίπακτη δοκός	176
Σχήμα 6.14	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT2, αμφίπακτη δοκός	177
Σχήμα 6.15.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT3, αμφίπακτη δοκός	177
Σχήμα 6.16.	Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST3 + BT3, αμφίπακτη δοκός	177
Σχήμα B.1.1.	Κώδικας <i>Mathematica</i> για την γραφική παράσταση των προβολών των δρόμων ισορροπίας του Σχήματος 3.9	198
Σχήμα B.1.2.	Χαρακτηριστικά της καμπύλης προσαρμογής του Σχήματος 3.15 (<i>Origin Pro</i>)	199
Σχήμα B.1.3.	Χαρακτηριστικά της καμπύλης προσαρμογής του Σχήματος 3.16 (<i>Origin Pro</i>)	200
Σχήμα B.2.1.	Κώδικας <i>Mathematica</i> για την εξασφάλιση πλήρους επαφής μεταξύ δοκού – στύλου και θεμελίωσης	201
Σχήμα B.2.2.	Κώδικας <i>Mathematica</i> που δίνει τις απαραίτητες συνθήκες για πλήρη επαφή μεταξύ δοκού και θεμελίωσης	201
Σχήμα B.2.3.	Συμβολικοί υπολογισμοί για την αλληλεπίδραση μορφών της αμφιέριστης δοκού	202

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Σχήμα B.3.1.	Αποτελέσματα για την αμφιέριστη δοκό θεωρώντας δύο περιοχές (μία σε επαφή και μία χωρίς επαφή)	203
Σχήμα B.3.2.	Απόδειξη για την αμφιέριστη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές	205
Σχήμα B.3.3.	Αποτελέσματα για την αμφίπακτη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές	206
Σχήμα B.3.4.	Απόδειξη για την αμφίπακτη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές	206
Σχήμα B.3.5.	Αποτελέσματα για την αμφιέριστη δοκό, θεωρώντας τρεις περιοχές	207
Σχήμα B.3.6.	Απόδειξη για την αμφιέριστη δοκό, θεωρώντας τρεις περιοχές	209

Κατάλογος Πινάκων

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
Πίνακας 3.1.	Συμβατές τιμές των παραμέτρων k , γ του αριθμητικού παραδείγματος	55
Πίνακας 4.1.	Οι τρεις τύποι εδαφών με τις μηχανικές ιδιότητες τους	65
Πίνακας 4.2.	Ιδιότητες και διαστάσεις των υπό εξέταση μεταλλικών δοκών - στύλων	65
Πίνακας 4.3.	Γεωμετρικές ιδιότητες των σιδηροτροχιών BT1, BT2 του Πίνακα 4.2 (σε ίντσες)	65
Πίνακας 4.4.	Αδιάστατες παράμετροι θεμελίωσης για τις περιπτώσεις δοκών – στύλων που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό των αριθμητικών αποτελεσμάτων	66
Πίνακα 5.1.	Τιμές των παραμέτρων μη γραμμικής θεμελίωσης για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στις αριθμητικές εφαρμογές	85
Πίνακας 5.2.	Γεωμετρικά στοιχεία της διατομής σιδηροτροχιάς UIC 60	87
Πίνακας 5.3.	Σημεία σύζευξης μορφών: Συσχετισμός παραμέτρων εδάφους και δοκού, γεωμετρικών παραμέτρων και συντελεστών φόρτισης	88
Πίνακας 5.4α.	Ομάδες των περιπτώσεων NFP που εξετάστηκαν για την επιρροή του γ_1	91
Πίνακας 5.4β.	Ομάδες των περιπτώσεων NFP που εξετάστηκαν για την επιρροή του γ_2	91
Πίνακας 5.5.	Κρίσιμο σημείο $H_1^1 : \lambda_1 = \lambda_2, n = 1$	95
Πίνακας 5.6.	Κρίσιμο σημείο $H_2^1 : \lambda_2 = \lambda_3, n = 1$	99
Πίνακας 5.7.	Κρίσιμο σημείο $H_3^1 : \lambda_3 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 1$	104
Πίνακας 5.8.	Κρίσιμο σημείο $H_1^2 : \lambda_1 = \lambda_4, c_1 = 1, n = 2$	109
Πίνακας 5.9.	Κρίσιμο σημείο $H_2^2 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 1, n = 2$	113
Πίνακας 5.10.	Κρίσιμο σημείο $H_3^2 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 2$	117
Πίνακας 5.11.	Κρίσιμο σημείο $H_1^3 : \lambda_1 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 3$	121
Πίνακας 5.12.	Κρίσιμο σημείο $H_2^3 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 3$	125
Πίνακας 5.13.	Κρίσιμο σημείο $H_3^3 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 3, n = 3$	130
Πίνακας 5.14.	Κρίσιμο σημείο $F_2^1 : \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 1$	134
Πίνακας 5.15.	Κρίσιμο σημείο $F_1^2 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 2$	139

<i>A/A</i>	<i>Περιεχόμενο</i>	<i>σελίδα</i>
<i>Πίνακας 5.16.</i>	<i>Κρίσιμο σημείο $F_2^2 : \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_{cr3}^{αμφ} = \lambda_{cr4}^{αμφ}, n = 2$</i>	<i>143</i>
<i>Πίνακας 5.17.</i>	<i>Κρίσιμο σημείο $F_3^2 : \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 2$</i>	<i>147</i>
<i>Πίνακας 5.18.</i>	<i>Κρίσιμο σημείο $F_1^3 : \lambda_1 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 3$</i>	<i>151</i>
<i>Πίνακας 5.19.</i>	<i>Κρίσιμο σημείο $F_2^3 : \lambda_1 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 3$</i>	<i>155</i>
<i>Πίνακας 5.20.</i>	<i>Κρίσιμο σημείο $F_3^3 : \lambda_2 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}, n = 3$</i>	<i>159</i>
<i>Πίνακας 6.1.</i>	<i>Αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για την αμφιέρειστη δοκό</i>	<i>172</i>
<i>Πίνακας 6.2.</i>	<i>Αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για την αμφίπακτη δοκό</i>	<i>175</i>

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο

Παρόλο που οι λόγοι που εκπόνησα την παρούσα Διατριβή είναι μάλλον σύνθετοι και πολλαπλοί, θα σταθώ μόνο στην έμπνευση και την ενθάρρυνση που είχα – πέραν του Επιβλέποντα μου – από κάποιον που έφυγε νωρίς και αναπάντεχα από κοντά μας. Τον Άλκη τον Σμπαρούνη, που με μύησε κυριολεκτικά στο επιστημονικό πεδίο που πραγματεύομαι εδώ, μου έδειξε το δρόμο να προσθέσω και εγώ το λιθαράκι μου σε αυτό και πιο πολύ από όλα να μη φοβάμαι να επέμβω σε χώρους που κάποιοι άλλοι έχουν καταξιωθεί και το όνομα τους έχει καταγραφεί. Μακάρι να ακολουθήσω τα βήματα του στον τρόπο που έβλεπε τη ζωή, την καθημερινότητα αλλά και τα μελλοντικά οράματα, και μακάρι ακόμα σαν Μηχανικός να του μοιάσω σε μεθοδικότητα, θετική σκέψη, σοβαρότητα στόχων, ακεραιότητα χαρακτήρα, συνέπεια και οραματισμούς. Εύχομαι να μην χαθούν τόσο γρήγορα και άλλοι τέτοιοι σημαντικοί άνθρωποι του χώρου μας, πριν τουλάχιστον προλάβουν να κάνουν έστω και κομμάτι από τα όνειρα τους πραγματικότητα.

Άλκη, η Διατριβή αυτή σκοπεύει να γίνει ένα κομμάτι από τη θύμησή σου.

1.2 Αντικείμενο και Στόχοι

Σκοπός της παρούσας Διατριβής είναι η προαγωγή της επιστημονικής γνώσης και η περαιτέρω εμβάθυνση στο επιστημονικό πεδίο του λυγισμού δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους και ειδικότερα στα σημεία εκείνα στα οποία είτε υφίσταται σαφής έλλειψη μελετών είτε οι σχετικές υφιστάμενες μελέτες είναι προσανατολισμένες και χωρίς σύνδεση με πραγματικές κατασκευές. Τούτο ισχύει κατά κόρον για τις συζευγμένες καταστάσεις λυγισμού αξονικά θλιβόμενων δοκών – στύλων επί εδάφους τύπου Winkler και την προσομοίωση αυτών, το λυγισμό δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους τύπου Pasternak εν γένει, τον καθολικό λυγισμό δοκών – στύλων επί μη γραμμικά ελαστικού εδάφους με μικτή τετραγωνική και κυβική μη γραμμικότητα και πέρα όλων των ανωτέρω για τη συμπεριφορά σε λυγισμό των ως άνω κατασκευών επί εδαφικού υποστρώματος χωρίς συνεχή επαφή μεταξύ αυτού και της δοκού. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το παρόν Πόνημα πραγματεύεται όλες τις παραπάνω επιστημονικές περιοχές στο μέτρο του δυνατού, με

τους περιορισμούς και τις προτάσεις για περαιτέρω έρευνα να αναφέρονται διεξοδικά στο τελευταίο Κεφάλαιο αυτού.

1.3 Δομή και Περίγραμμα

Η παρούσα Διατριβή απαρτίζεται επτά Κεφάλαια, Βιβλιογραφία και δύο Παραρτήματα (Α και Β). Πιο συγκεκριμένα, πέραν του περιεχομένου του παρόντος τα υπόλοιπα Κεφάλαια πραγματεύονται συνοπτικά τα ακόλουθα:

Το **Κεφάλαιο 2**, που αποτελεί ιστορική αναδρομή και βιβλιογραφική ανασκόπηση, περιέχει τα πλέον χαρακτηριστικά στοιχεία, σε σχέση με το αντικείμενο της Διατριβής, που έχουν αναφερθεί στη διεθνή βιβλιογραφία μέχρι στιγμής. Αναλυτικότερα, περιγράφονται κατ' αρχήν τα σπουδαιότερα προσομοιώματα (μοντέλα) ελαστικής θεμελίωσης (Winkler, Μηχανικά δύο και τριών παραμέτρων και Συνεχή) και στη συνέχεια τα σημαντικότερα ευρήματα που σχετίζονται με τον λυγισμό δοκών – στύλων που εδράζονται επί των προσομοιωμάτων αυτών, με έμφαση σε αυτά των Winkler (και των μη γραμμικών επεκτάσεων του), Pasternak, Wieghardt και Reissner. Με βάση τα περιεχόμενα των ανωτέρω τεκμηριώνεται στα επόμενα Κεφάλαια η συνεισφορά του παρόντος Πονήματος στο τρέχον επιστημονικό πεδίο. Τέλος, παρατίθεται και συνοπτική αναφορά στον λυγισμό χαλύβδινων σιδηροτροχιών (χωρίς το συγκεκριμένο πρόβλημα να περιλαμβάνεται στο κύριο αντικείμενο της Διδακτορικής Διατριβής), καθόσον πολλά αριθμητικά αποτελέσματα της παρούσας έχουν ληφθεί με βάση τα χαρακτηριστικά τέτοιων δοκών.

Στο **Κεφάλαιο 3** εξετάζονται διεξοδικά με βάση αρμονική ανάλυση συζευγμένες καταστάσεις αστάθειας (αλληλεπίδρασης μορφών) δοκών – στύλων χωρίς ατέλειες επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, με χρήση μη γραμμικής σχέσης μεταξύ ροπής – καμπυλότητας. Η όλη ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υφίσταται πιθανότητα αλληλεπίδρασης μέχρι και έξι διακριτών κυματομορφών και δίδονται ενδεικτικά αποτελέσματα με χρήση εξειδικευμένου λογισμικού επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Επιπρόσθετα δε, προσομοιάζεται η αλληλεπίδραση θεμελιωδών μορφών λυγισμού των ως άνω δοκών μέσω ενός μη γραμμικού μηχανικού μοντέλου ελατηρίων κυβικής μη γραμμικότητας δύο βαθμών ελευθερίας, το οποίο σχετίζεται με συμμετρικά ασταθή/ευσταθή σημεία διακλάδωσης εκ του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας. Μετά από πλήρως μη γραμμική ενεργειακή προσέγγιση, μελετώνται διεξοδικά οι κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι του ισορροπίας του συστήματος, τα κρίσιμα σημεία αυτών και η ευστάθειά τους και εξάγονται οι συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει αλληλεπίδραση μορφών που μπορεί να

οδηγήσει σε άλματα αυτών (*mode jumping*) γεγονός που συμβαίνει και για το συνεχές σύστημα της δοκού επί του ελαστικού εδάφους Winkler. Τα σπουδαιότερα χαρακτηριστικά του προσομοιώματος συνδέονται με αυτά του συνεχούς μέσου και παράγονται προσεγγιστικά πλην όμως πολύ ακριβή νομογραφήματα, τα οποία μπορούν άμεσα να χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό.

Σε ότι αφορά το περιεχόμενο του **Κεφαλαίου 4**, τούτο σχετίζεται με τη γραμμικοποιημένη ανάλυση ευστάθειας αξονικά θλιβόμενων δοκών – στύλων με αμετακίνητες στηρίξεις, εδραζόμενων επί ελαστικού εδάφους τύπου Pasternak (δύο παραμέτρων) και εξετάζεται η περίπτωση σύζευξης μορφών λυγισμού σε κατακόρυφο επίπεδο, τόσο για αμφιαρθρωτή όσο και για αμφίπακτη δοκό και υπολογίζονται οι προς τούτο συνθήκες. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν για διάφορους τύπους εδαφών σε συνδυασμό με χαλύβδινες δοκούς σιδηροτροχιών, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα φαινόμενα που εξετάζονται δεν είναι δυνατόν να εμφανιστούν αν το αίτιο εμφάνισης αξονικής δύναμης είναι η θερμοκρασιακή μεταβολή, οπότε και μπορούν να αγνοηθούν.

Ως άμεση συνέχεια των προβλημάτων που απασχόλησαν το Κεφάλαιο 3, αντιμετωπίζεται στο **Κεφάλαιο 5** το πρόβλημα καθολικής ευστάθειας δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους με μικτή τετραγωνική – κυβική μη γραμμικότητα. Υποθέτοντας εκ νέου μη γραμμική έκφραση ροπής – καμπυλότητας, και αφού υπολογιστεί η σχέση που πρέπει να διέπει τις παραμέτρους τετραγωνικής και κυβικής μη γραμμικότητας της θεμελίωσης, έτσι ώστε να υπάρχει συμβατότητα και συνεχής επαφή μεταξύ εδάφους και δοκού, η έντονα μη γραμμική εξίσωση ισορροπίας επιλύεται προσεγγιστικά τόσο για αμφιαρθρωτή όσο και για αμφίπακτη δοκό (χωρίς αρχικές ατέλειες). Υπολογίζονται όλα τα πιθανά κρίσιμα φορτία καθώς και οι συνθήκες πιθανής αλληλεπίδρασης μεταξύ μορφών λυγισμού, που προκύπτουν εξαρτώμενα μόνο από τη γραμμική συνιστώσα της θεμελίωσης, τα δε αριθμητικά αποτελέσματα εστιάζονται στο φαινόμενο αυτό και συγκεκριμένα για φορτία λίγο πριν και λίγο μετά το αντίστοιχο κρίσιμο. Για το σκοπό αυτό υιοθετούνται τρεις χαρακτηριστικοί τύποι εδαφικών υποστρωμάτων και διατομή σιδηροτροχιάς τύπου UIC 60 Rail και στη συνέχεια συσχετίζεται το μήκος της δοκού με την αδιάστατη παράμετρο των εδαφικών υποστρωμάτων που επελέγησαν, ώστε ο κάθε συνδυασμός δοκού – εδάφους να αντιστοιχεί σε κρίσιμη κατάσταση αλληλεπίδρασης είτε απλή είτε σύνθετη κατά περίπτωση. Επιλέγονται κατόπιν ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων τετραγωνικής και κυβικής μη γραμμικότητας (που να ικανοποιούν

την ευρεθείσα σχέση συμβατότητας και συνεχούς επαφής) και παράγεται γραφικά η παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού για φορτία πλησίον του κρισίμου. Από την ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων προκύπτουν τα συμπεράσματα, τα οποία αφορούν την επιρροή της μεταβολής των ως άνω παραμέτρων στην απόκριση της δοκού. Προέκυψε ότι η επιρροή αυτή είναι κυρίως ποιοτική και σχετίζεται συνήθως με αντιστροφή του προσήμου του βέλους πριν και μετά τον λυγισμό, με απώλεια συμμετρίας της παραμόρφωσης και με εμφάνιση ή εξαφάνιση μιας ή περισσότερων κυματομορφών.

Τέλος, το **Κεφάλαιο 6**, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα Κεφάλαια 3 – 5 εξετάζεται ο λυγισμός δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους θεωρώντας ασύνδετη (μη συνεχή) επαφή μεταξύ εδαφικού στρώματος και κατασκευής, που κατ' ουσίαν αντιπροσωπεύει την πραγματική απόκριση. Δοθέντος ότι ελάχιστες σχετικές δημοσιεύσεις έχουν αναφερθεί, ακόμα και στην περίπτωση θερμικού λυγισμού συγκολλητών σιδηροτροχιών σε κατακόρυφο επίπεδο, το περιεχόμενο του Κεφαλαίου αυτού τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά αποτελεί επιπρόσθετη επιστημονική συνεισφορά που δεν απαντάται μέχρι στιγμής στη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, μέσω επαγωγικής διαδικασίας, συμβολικών υπολογισμών και εφαρμογής της μεθόδου Galerkin προσεγγίζεται το πρόβλημα τόσο για αμφιαρθρωτές όσο και για αμφίπακτες δοκούς. Αποδεικνύεται ότι από τις πιθανές συμβατές μεταλυγισμικές αποκρίσεις μόνο η περίπτωση δύο ζωνών της δοκού (μιας σε επαφή με το υπόστρωμα και μιας σε μη επαφή) είναι ενεργειακά δυνατές και υπολογίζονται τα άνω φράγματα των κρισίμων φορτίων, τα μήκη των ζωνών αυτών καθώς και η μορφή της μεταλυγισμικής παραμόρφωσης της κατασκευής. Από τα ληφθέντα αποτελέσματα καταδεικνύεται η πολύ μεγάλη διαφορά σε απόκριση αλλά και σε μεγέθη κρισίμων φορτίων μεταξύ της θεώρησης πλήρους επαφής (που έχει υιοθετηθεί σε όλες σχεδόν τις σχετικές δημοσιεύσεις) και της μερικής επαφής.

Η Διατριβή περιέχει επίσης και ένα **7^ο Κεφάλαιο** που αφορά συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα και συνοδεύεται από τη μέχρι στιγμής **Διεθνή Βιβλιογραφία** καθώς και από δύο **Παραρτήματα (Α και Β)** το περιεχόμενο των οποίων συνεπικουρεί το πλήρως κείμενο της υπόλοιπης ύλης βιβλιογραφικά και από πλευράς λογισμικού αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 2

Ιστορική Αναδρομή και Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1 Προσομοιώματα (Μοντέλα) Ελαστικής Θεμελίωσης

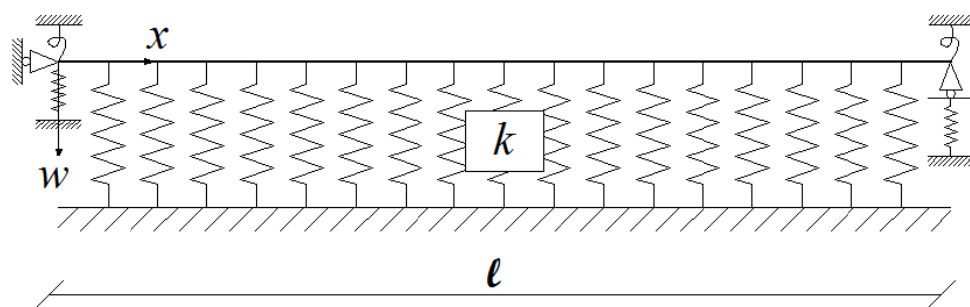
2.1.1 Γενικά Στοιχεία και το Μοντέλο Winkler

Το πρόβλημα δοκών, πλακών, κελυφών και άλλων δομικών στοιχείων εδραζόμενων πάνω σε παραμορφώσιμο έδαφος συναντάται πολύ συχνά σε πραγματικές εφαρμογές (δομοστατικές, γεωτεχνικές, οδοποιίας, σιδηροδρομικές κλπ), και προκειμένου να επιλυθεί απαιτείται η προσομοίωση (α) της μηχανικής συμπεριφοράς της κατασκευής – δομικού στοιχείου, (β) η μηχανική συμπεριφορά του εδάφους θεωρούμενου ως ελαστικού υποστρώματος και (γ) η μορφή της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης (Avramidis και Morfidis 2006). Εστιάζοντας το ενδιαφέρον στα χαρακτηριστικά εκείνα, τα οποία αναπαριστούν τη μηχανική συμπεριφορά του υποστρώματος και της αλληλεπίδρασης του με την υπερκείμενη κατασκευή, η σχετική προσομοίωσή τους συνήθως πραγματοποιείται ενταύθα συμπεριλαμβάνοντας την αντίδραση της θεμελίωσης στην διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού, της πλάκας ή του κελύφους (Kerr 1964). Δοθέντος ότι η θεμελίωση αποτελεί ένα πολύ σύνθετο μέσο, στην παρούσα μελέτη δίδεται έμφαση στην απόκριση της στην επιφάνεια επαφής και όχι στις τάσεις ή τις παραμορφώσεις εντός του υλικού της θεμελίωσης. Συνεπώς το πρόβλημα καταλήγει στην αναζήτηση μιας σχετικά απλής μαθηματικής έκφρασης, η οποία να μπορεί να περιγράψει την απόκριση της θεμελίωσης στην επιφάνεια επαφής με ικανοποιητική ακρίβεια.

Η παλαιότερη, πλέον γνωστή και παράλληλα απλούστερη προσομοίωση μιας συνεχούς ελαστικής θεμελίωσης οφείλεται στον Winkler, ο οποίος υπέθεσε ότι το υπόστρωμα αποτελείται από πυκνά διατεταγμένα ανεξάρτητα μεταξύ τους γραμμικά κατακόρυφα ελατήρια (Winkler 1867). Στο μοντέλο αυτό, που αρχικά αναπτύχθηκε για την ανάλυση σιδηροτροχιών (Teodoru 2009, Teodoru και Musat 2010), τα ελατήρια προβάλλουν αντίσταση συναρτώμενη με την καμπτική μετατόπιση της διεπιφάνειας κατασκευής – εδάφους, οπότε σε τυχόν σημείο (x,y) η σχέση μεταξύ πίεσης $p(x,y)$ και μετατόπισης $w(x,y)$ είναι

$$p(x,y) = k w(x,y) \quad (2.1)$$

όπου k είναι το μέτρο της θεμελίωσης, γνωστό και ως συντελεστής αντίδρασης της θεμελίωσης, που στην πραγματικότητα αναπαριστά την αντίσταση των ελατηρίων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1. Σχηματική παράσταση του μοντέλου δοκού εδραζόμενης επί ελαστικής θεμελίωσης Winkler μέσω ευθυγράμμων ελατηρίων

Λόγω της απλότητας του, αυτό το μονοπαραμετρικό μοντέλο μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί σε διάφορα προβλήματα (Hetényi 1946, Kameswara Rao 2011) και να προφέρει ικανοποιητικές λύσεις σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Παρά ταύτα, δεν λαμβάνει υπόψη τη συνέχεια ή τη συνοχή του εδάφους καθόσον υποθέτει ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών ελατηρίων, και κατά συνέπεια παραβλέπει την επίδραση της θεμελίωσης πέραν των στηρίξεων της κατασκευής, με αποτέλεσμα την μη ρεαλιστική ασυνέχεια μετατοπίσεων μεταξύ του φορτιζόμενου και μη φορτιζόμενου μέρους της επιφάνειας θεμελίωσης. Τούτο μπορεί να γίνει αντιληπτό στο Σχήμα 2.2, όπου απεικονίζονται οι παραμορφώσεις της επιφάνειας θεμελίωσης τόσο για το μοντέλο του Winkler όσο και η πραγματική απόκριση των περισσότερων εδαφικών υλικών.



Σχήμα 2.2. Παραμορφώσεις ελαστικής θεμελίωσης υπό ομοιόμορφη πίεση: *a* – Μοντέλο Winkler, *b* – πραγματικό εδαφικό στρώμα

Αν προστεθούν ισχυροί (τετραγωνικοί) ή ασθενείς (κυβικοί) μη γραμμικοί όροι στην έκφραση (2.1) παράγεται ένα μοντέλο μη γραμμικά ελαστικής θεμελίωσης με βάση την υπόθεση του Winkler που διέπεται από την παρακάτω τροποποιημένη έκφραση

$$p(x, y) = kw + c_1 w^2 + c_2 w^3 \quad (2.2)$$

όπου c_1 και c_2 θετικοί ή αρνητικοί συντελεστές, μέσω των οποίων εισάγεται με αυτόν τον τρόπο μια «σκληρή» ή «μαλακή» θεμελίωση. Η συνδυασμένη επιρροή τους στην καθολική συμπεριφορά δοκών – στύλων αναλύεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5.

Η εγγενής αδυναμία του μοντέλου Winkler, όπως αυτό περιγράφεται ανωτέρω, καθώς και το γεγονός ότι δεν μπορούν όλοι οι τύποι εδάφους να προσομοιωθούν με ισότροπο συνεχές μέσο (Kerr 1964, Wang et al. 2005) οδήγησαν τους ερευνητές στην αναζήτηση ακριβέστερων μοντέλων θεμελίωσης. Προς τούτο, είναι δυνατόν να υιοθετηθεί το μοντέλο συνεχούς μέσου και κατόπιν να εισαχθούν απλοποιητικές παραδοχές (σε σχέση με τις τάσεις/παραμορφώσεις) είτε να εφαρμοστεί καταρχήν το μοντέλο του Winkler, με παράλληλη παραδοχή κάποιας μορφής αλληλεπίδρασης μεταξύ των ελατηρίων προκειμένου να επιτευχθεί καλύτερη προσέγγιση (Kerr 1964). Μοντέλα που έχουν υιοθετήσει τη δεύτερη συλλογιστική απαντώνται στη βιβλιογραφία ως Μηχανικά Προσομοιώματα, ενώ όσα έχουν υιοθετήσει την πρώτη καλούνται Μοντέλα Συνεχούς Μέσου. Τα πιο διαδεδομένα μοντέλα, και των δύο τύπων, θα αναλυθούν διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους. Μια τρίτη προσέγγιση για την ανάπτυξη μοντέλων ελαστικής θεμελίωσης (Kerr 1984), που βασίζεται στη λύση σε σειρές, δε θα αναλυθεί περαιτέρω.

2.1.2 Μηχανικά Προσομοιώματα

Σε αυτού του τύπου μοντέλων, η θεμελίωση προσομοιώνεται ιδεατά ως ένα σύνολο μηχανικών στοιχείων σε διάφορες διατάξεις. Μία ή και περισσότερες παράμετροι, σε σύγκριση με το μοντέλο του Winkler, μπορεί να θεωρηθούν απαραίτητες για την προσομοίωση, ωστόσο όλα αυτά τα μοντέλα μειονεκτούν στο ότι δεν συνδέονται με μεθόδους για τον υπολογισμό των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται (Worku 2012), αν και τούτο είναι δυνατό να επιτευχθεί για κάποιες εφαρμογές (Avramidis και Morfidis 2006).

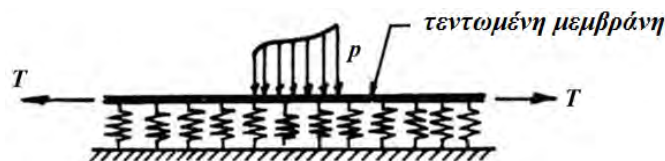
2.1.2.1 Μηχανικά Προσομοιώματα δύο (2) παραμέτρων

Το μοντέλο των Filonenko-Borodich (F-B)

Στο εν λόγω μοντέλο, που προτάθηκε αρχικά το 1945 (Kerr 1964, Wang et al. 2005) οι άνω απολήξεις των ελατηρίων του μοντέλου Winkler είναι συνδεδεμένες σε μια τεντωμένη ελαστική μεμβράνη που υποβάλλεται σε ένα συνεχές εφελκυστικό πεδίο T , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Η αντίστοιχη σχέση φορτίου μετατόπισης είναι η ακόλουθη:

$$p(x, y) = kw(x, y) - T\nabla^2 w(x, y) \quad (2.3)$$

όπου ∇^2 είναι ο διαφορικός τελεστής Laplace σε ορθογωνικές Καρτεσιανές συντεταγμένες.



Σχήμα 2.3. Σχηματική αναπαράσταση του μηχανικού μοντέλου δύο παραμέτρων των F-B

Η εξίσωση (2.3) υποδηλώνει ότι η αλληλεπίδραση των στοιχείων ελατηρίων χαρακτηρίζεται από την ένταση του εφελκυστικού πεδίου T της μεμβράνης.

Το μοντέλο του Hetényi

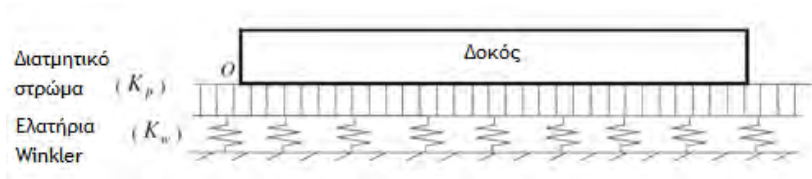
Η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανεξάρτητων ελατηρίων επιτυγχάνεται σε αυτό το μοντέλο με την ενσωμάτωση μιας ελαστικής δοκού (σε προβλήματα δύο διαστάσεων) ή ένα ελαστικό δίσκο (σε προβλήματα τριών διαστάσεων) στο υλικό του μοντέλου Winkler κατά τρόπο όμοιο με αυτόν που δίδεται στο Σχήμα 2.3 (Hetényi 1946), με την υπόθεση ότι είτε η δοκός είτε ο δίσκος παραμορφώνονται μόνο καμπτικά. Η σχέση μεταξύ του φορτίου (πίεσης) p και της παραμόρφωσης w για την περίπτωση των τριών διαστάσεων είναι:

$$p(x, y) = kw(x, y) - D\nabla^4 w(x, y) \quad (2.4)$$

όπου D η καμπτική αντίσταση του δίσκου.

Το μοντέλο του Pasternak

Αυτό το μοντέλο (Pasternak 1954) λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο της τριβής μεταξύ του εδάφους και της κατασκευής με την εισαγωγή ενός διατμητικού στρώματος, (Sophianopoulos και Papachristou 2012, Narashima Murthy 1973, El-Mously 2003). Αυτή η διατμητική αλληλεπίδραση επιτυγχάνεται με άλλα λόγια συνδέοντας τις απολήξεις των ελατηρίων σε μια ασυμπίεστη κατακόρυφα δοκό ή δίσκο, που παραμορφώνεται μόνο διατμητικά. Για το πρόβλημα των δύο διαστάσεων το αντίστοιχο μοντέλο δίδεται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4. Δοκός επί θεμελίωσης τύπου Pasternak

Γενικώς, η σχέση φορτίου – μετατόπισης για το συγκεκριμένο μοντέλο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p = K_w w - K_p \nabla^2 w \quad (2.5)$$

Ο δεύτερος όρος στα δεξιά της ως άνω σχέσης αντιπροσωπεύει τη διατμητική αλληλεπίδραση των κατακόρυφων στοιχείων. Σημειωτέον ότι η σχέση (2.3) είναι όμοια με την (2.5) εάν το T αντικατασταθεί με το K_p (το οποίο απαντάται στη βιβλιογραφία και ως G).

Το μοντέλο του Wieghardt

Έχοντας ως έναυσμα κάποια πειραματικά δεδομένα, ο Wieghardt (1922), αντί του μοντέλου Winkler της εξίσωσης (2.1), θεώρησε ότι για μια δοκό μήκους ℓ , η πίεση $p(x)$ και η μετατόπιση $w(x)$ σχετίζονται μεταξύ τους (Ylinen και Mikkola 1967, Smith 1969, Rice 1972, Anderson 1976, Rutta και Elishakoff 2006), σύμφωνα με τη σχέση:

$$w(x) = \int_0^\ell K(|x - \xi|) p(\xi) d\xi \quad (2.6)$$

όπου η συνάρτηση πυρήνα K έχει εκθετική μορφή

$$K(x) = \alpha e^{-b|x|} \quad (2.7)$$

με συντελεστές α και b εξαρτώμενους από τις ιδιότητες της ελαστικής θεμελίωσης. Η έκφραση που προκύπτει είναι

$$p(x) = \frac{bw(x)}{2a} - \frac{1}{2ab} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.8)$$

Έχει δειχθεί (Kerr 1964) ότι ο πυρήνας για τη θεμελίωση τύπου Pasternak είναι για συνθήκες επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης ίδιος με τον εκθετικό πυρήνα του Wieghardt.

Μοντέλο αναλογίας δοκού - στύλου

Το κλασσικό πρόβλημα δοκών επί ελαστικού εδάφους επιλύθηκε επίσης με βάση ένα νέο μοντέλο εδαφικού προσομοιώματος (Horvath 1983a, b), του οποίου η τελική μορφή της διαφορικής εξίσωσης που διέπει τη συνδυασμένη συμπεριφορά δοκού – θεμελίωσης έχει ως εξής:

$$E_b I_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - C_{p2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + C_{p1} w(x) = q(x) \quad (2.9)$$

Εδώ $E_b I_b$ είναι η καμπτική αντίσταση της δοκού (θεωρούμενη σταθερή), $w(x)$ είναι η υποχώρηση της δοκού, $q(x)$ το επιβαλλόμενο φορτίο και C_{p1} , C_{p2} σταθερές. Για ένα ομογενές και ισότροπο στρώμα πάνω από μια δύσκαμπτη βάση, αν H είναι το βάθος

του πρακτικά ασυμπίεστου στρώματος (Dutta και Roy 2002), οι τιμές των ανωτέρω σταθερών μπορούν να επιλεγούν ίσες με:

$$C_{p1} = \frac{E}{H}, C_{p2} = \frac{GH}{2} \quad (2.10)$$

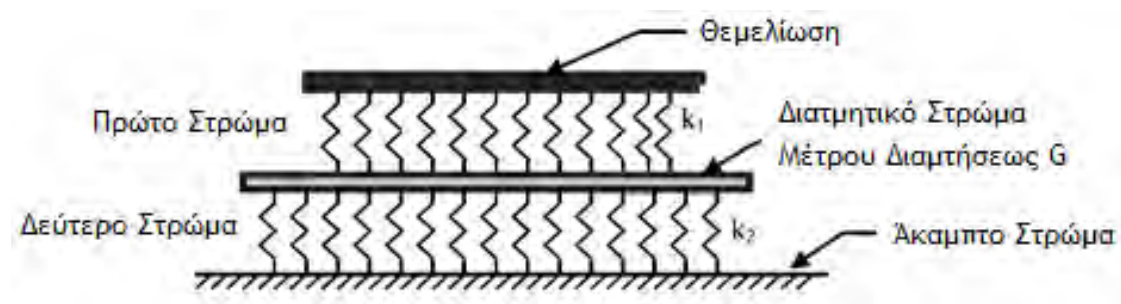
όπου E το μέτρο ελαστικότητας και G το μέτρο διάτμησης του εδάφους.

Η σχέση (2.9) ισοδυναμεί με την Δ.Ε. που διέπει μια δοκό – στύλο υπό σταθερό αξονικό εφελκυσμό μεγέθους C_{p2} , και η οποία εδράζεται επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler με ελατήρια αντίστασης C_{p1} . Παρόλο που αυτό το μοντέλο είναι μια σημαντική βελτίωση του μοντέλου Winkler, και όμοιο με το μοντέλο B-T, η θεμελίωση δεν προσομοιάζεται ορθά λόγω της χρήσης μιας φανταστικής διατμητικής δύναμης.

2.1.2.2 Μηχανικά Προσομοιώματα τριών (3)

παραμέτρων

Το σπουδαιότερο από αυτού του τύπου τα μοντέλα προτάθηκε από τον Kerr (1965). Στο συγκεκριμένο εδαφικό προσομοίωμα, εισάγεται ένα διατμητικό στρώμα στο μοντέλο Winkler και οι σταθερές των ελατηρίων πάνω και κάτω από το στρώμα αυτό θεωρούνται διάφορες μεταξύ τους (Dutta και Roy 2002). Το μοντέλο αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5. Μοντέλο θεμελίωσης Kerr

Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση εκφράζεται ως:

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)p = \frac{G}{k_1} \nabla^2 p + k_2 p - G \nabla^2 w \quad (2.11)$$

όπου k_1 είναι η σταθερά των ελατηρίων του 1^{ου} στρώματος, k_2 η σταθερά των ελατηρίων του 2^{ου} στρώματος και w η υποχώρηση του 1^{ου} στρώματος. Το μοντέλο αυτό φαίνεται καλύτερο από όλα τα υφιστάμενα προσομοιώματα δύο παραμέτρων (συμπεριλαμβανόμενων και αυτών που ανήκουν στον 2^ο τύπο που περιγράφεται εν συντομία παρακάτω), αλλά σε ό,τι αφορά την απόκριση δοκών επί ελαστικού εδάφους, η παρουσία περισσότερων του ενός καμπτικών στρωμάτων δεν επηρεάζει τη γενική έκφραση της διαφορικής εξίσωσης.

2.1.3 Προσομοιώματα Συνεχούς Μέσου («Συνεχή»)

Από τον συγκεκριμένο τύπο μοντέλων τα περισσότερα χρησιμοποιούμενα (μαζί με τις βελτιώσεις και τις επεκτάσεις τους) είναι αυτά των Vlasov και Reissner.

Μοντέλο Vlasov

Ο Vlasov το 1960 υιοθέτησε την απλοποιημένη θεώρηση συνεχούς μέσου παρουσιάζοντας ένα μοντέλο θεμελίωσης δύο παραμέτρων (Jones και Xenophontos 1977, Razaqpur και Shah 1991, Teodoru 2009). Αυτό λαμβάνει υπόψη του την αμεληθείσα διατμητική επιρροή στο έδαφος θεμελίωσης. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να βρει στο επονομαζόμενο τροποποιημένο μοντέλο Vlasov (Vallabhan και Das 1988, 1991a,b). Η σχέση φορτίου – μετατόπισης για το προσομοίωμα αυτό δίδεται από την εξίσωση:

$$p(x) = kw - k_1 \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.12)$$

όπου k η αντίσταση των γραμμικών ελατηρίων Winkler, ενώ το k_1 ισούται με:

$$k_1 = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \frac{B}{\mu} \quad (2.13)$$

Στην έκφραση αυτή E_f , είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και ν_f , ο λόγος του Poisson για τη θεμελίωση, B είναι το πλάτος της δοκού και μ μια σταθερά που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η κατακόρυφη υποχώρηση μειώνεται με το βάθος (Razaqpur και Shah 1991). Μετά από επαναπροσδιορισμό των σταθερών η εξίσωση (2.12) γίνεται ίδια με την (2.5), που ισχύει για το μηχανικό μοντέλο δύο παραμέτρων.

Μοντέλο Reissner

Μια πρωτοποριακή απευθείας εφαρμογή της απλοποιημένης θεώρησης του συνεχούς μέσου προτάθηκε από τον Reissner (1958, 1967), ο οποίος παρήγαγε το Reissner Simplified Continuum (RSC). Η αναλυτική λύση του προκύπτοντος προσομοιώματος ελαστικής θεμελίωσης δίδεται από τη σχέση

$$q(x,y) - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 q(x,y) = c_1 w(x,y) - c_2 \nabla^2 w(x,y) \quad (2.14)$$

όπου $q(x,y)$ το κατανεμημένο φορτίο που επιβάλλεται στην επιφάνεια της θεμελίωσης και $w(x,y)$ η υποχώρηση λόγω κάμψης αυτής. Εάν δε E_s , G_s και H είναι το μέτρο ελαστικότητας, μέτρο διάτμησης και το βάθος θεμελίωσης αντίστοιχα, οι παράμετροι c_1 και c_2 μπορεί να ληφθούν ίσες με:

$$c_1 = \frac{E_s}{H}, c_2 = \frac{HG_s}{3} \quad (2.15)$$

Σε αυτήν επίσης την περίπτωση, για σταθερή ή γραμμικά μεταβαλλόμενη πίεση p (Kerr 1964) μετά από επαναπροσδιορισμό των σταθερών $c_1=K_w$ και $c_2=K_p$, η εξίσωση (2.15) ταυτίζεται με την εξίσωση (2.5). Το μοντέλο Reissner, γνωστό επίσης και ως μη τοπικό (Challamel et al. 2010), απαιτεί την χρήση συνοριακών συνθηκών με όρους υψηλότερης τάξης.

2.2. Δοκοί – Στύλοι επί Ελαστικού Εδάφους

Παρόλο το γεγονός ότι υφίσταται πολύ μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων με γενικό θέμα δοκούς επί ελαστικού εδάφους, μόνο ένα σχετικά περιορισμένο μέρος αυτών σχετίζεται με δοκούς – στύλους και την ευστάθεια τους. Οι μελέτες αυτές ασχολούνται με τον λυγισμό και τη μεταλυγισμική απόκριση θλιβόμενων δοκών εδραζόμενων κυρίως σε γραμμικά ελαστική θεμελίωση (τύπου Winkler) ή σε μη γραμμικές επεκτάσεις αυτού του τύπου και δευτερευόντως σε θεμελίωση τύπου Pasternak, Wiegardt ή Reissner. Σε ό,τι ακολουθεί παρατίθεται συνοπτική ανασκόπηση των πλέον σημαντικών ευρημάτων των εν λόγω εργασιών.

2.2.1. Αξονικά θλιβόμενες δοκοί επί γραμμικά ελαστικού εδάφους (Winkler)

Η διαφορική εξίσωση που διέπει τον ελαστικό λυγισμό μιας δοκού επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, που χαρακτηρίζεται από αντίσταση k^* , θεωρώντας απλή έκφραση της καμπυλότητας, είναι η

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = 0 \quad (2.16)$$

η οποία για δοκό με σταθερή ροπή αδρανείας γράφεται

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{k}{EI} w = 0 \quad (2.17)$$

Οι συνοριακές συνθήκες, που σχετίζονται με την Δ.Ε. (2.17), για τους πιο κοινούς τύπους ελαστικών στηρίξεων έχουν ως εξής:

$$\text{Άρθρωση: } w = 0 \text{ και } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{Πάκτωση: } w = 0 \text{ και } \frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.19)$$

*καλούμενη επίσης «παράμετρος δυσκαμψίας ελαστικού περιορισμού - stiffness parameter of the elastic restraint» (Coşkun, S.F.: Advances in Computational Stability Analysis, In Tech, Rijeka, Croatia, 2012)

$$\text{Ελεύθερο άκρο: } \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ και } \frac{d^3 w}{dx^3} + P \frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{Κυλιόμενη πάκτωση: } \frac{dw}{dx} = 0 \text{ και } \frac{d^3 w}{dx^3} + P \frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.21)$$

Η λύση του γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών ως άνω μπορεί να βρεθεί σε πολλά εγχειρίδια επί της Ευστάθειας των Κατασκευών (όπως π.χ. σε αυτά των Simitzes και Hodges 2006, Galambos και Surovek 2008). Αν δε εισαχθεί και αρχική ατέλεια στη δοκό, υπό τη μορφή μιας συνάρτησης $\bar{w}(x)$, τότε η διαφορική εξίσωση λυγισμού γίνεται (Κουνάδης 1997):

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 (w + \bar{w})}{dx^2} + kw = 0 \quad (2.22)$$

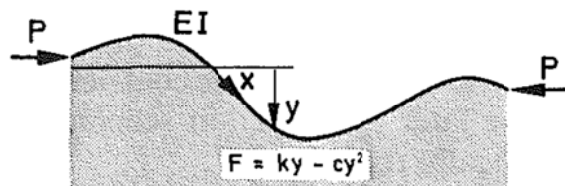
Πάντως, αν χρησιμοποιηθούν ακριβέστερες εκφράσεις της καμπυλότητας, η διαφορική εξίσωση που θα προκύψει καθίσταται έντονα μη γραμμική (Κουνάδης 2004).

Σύμφωνα με τα ανωτέρω εκτεθέντα, οι δημοσιεύσεις που αφορούν αξονικά θλιβόμενες δοκούς επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler δέον όπως διαιρεθούν σε δύο μέρη. Το πρώτο εξ αυτών, που βασίζεται στην απλούστερη δυνατή έκφραση της καμπυλότητας (και κατ' επέκταση οδηγεί στη Δ.Ε. (2.16)) είναι πολύ περιορισμένο σε έκταση. Σε χρονολογική σειρά μπορεί κανείς να αναφερθεί στις εργασίες των Eisenberg et al. (1986) καθώς και των Yankelevsky και Eisenberg (1986). Οι συγγραφείς αυτοί παρουσίασαν ακριβή μητρώα δυσκαμψίας για τον υπολογισμό των κρίσιμων φορτίων λυγισμού και των ιδιομορφών δοκών μερικώς ή πλήρως εδραζόμενων επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, με ή χωρίς την παρουσία εγκάρσιου κατανεμημένου φορτίου. Επίσης, έχουν αναφερθεί και αποτελέσματα βασισμένα σε ανάλυση ευαισθησίας 1^{ης} τάξης λεπτότοιχων δοκών διατομής I επί ελαστικού εδάφους και υπό στρεπτικά φορτία (Budkowska and Szymczak 1992).

Το 2^ο μέρος των δημοσιεύσεων αφορά αποτελέσματα που ελήφθησαν με βάση διαφόρους τύπους μη γραμμικών αναλύσεων του υπόψη προβλήματος, η πλειοψηφία των οποίων χρησιμοποιεί ακριβέστερες (μη γραμμικές) εκφράσεις της καμπυλότητας. Σε μια παλαιότερη εργασία (Panayotounakos 1989) πραγματοποιήθηκε μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας μιας λεπτής μεγάλου μήκους πρισματικής δοκού υπό συγκεντρωμένα φορτία και καμπτικές ροπές στα άκρα της

και επετεύχθη η εύρεση λύσης κλειστού τύπου. Τούτο έλαβε χώρα μέσω μιας αυστηρής μαθηματικής διαδικασίας, που αφορούσε την επίλυση της έντονα μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που διέπει την παραμόρφωση της κατασκευής με βάση τη θεωρία *Elastica* (Κουνάδης 2004).

Μια πολύ ενδιαφέρουσα εργασία οφείλεται στους Hunt et al. (1993), στην οποία προβλέφθηκαν εντοπισμένες (*localized*) λύσεις του κλασσικού προβλήματος μιας μη γραμμικής ράβδου (*elastica*) επί γραμμικά ελαστικού εδάφους μέσω ανάλυσης σειρών Fourier διπλής κλίμακας (*double-scale*), οι οποίες επαληθεύθηκαν μέσω της αριθμητικής μεθόδου διατήρησης όγκου (*volume preserving*) Runge – Kutta. Στη ιδιαίτερα διεξοδική εισαγωγή τους, οι συγγραφείς αφού τόνισαν ότι η ελαστική δοκός επί ελαστικού εδάφους έχει παίξει πρωτεύοντα ρόλο για την κατανόηση της διαδικασίας του φαινομένου του λυγισμού, ανέφεραν εκτός άλλων ότι το γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών οδηγεί σε μια αρμονική μορφή λυγισμού, και πως η μεταλυγισμική θεωρία και ανάλυση μπορούν να δώσουν πληροφορίες για την διακύμανση των αρμονικών αυτών. Πρόσθεσαν δε ότι: (α) για να καταστεί επιτυχής η διερεύνηση της μεταλυγισμικής απόκρισης θα πρέπει να προστεθούν μη γραμμικοί όροι στην διέπουσα διαφορική εξίσωση και (β) για σκληρής μορφής θεμελίωση ή για δοκό μεγάλου μήκους, καταστάσεις για τις οποίες ο λυγισμός λαμβάνει χώραν μέσω συμμετρικού ασταθούς διακλαδικού σημείου, ενώ είναι γενικά αποδεκτό ότι η περιοδική λύση (που εμφανίζεται μέσω αυτού του κρίσιμου σημείου) είναι μοναδική, ωστόσο μπορεί επίσης να εμφανιστούν και μορφές εντοπισμένου λυγισμού. Θεωρώντας ένα τυπικό τμήμα μιας απειρομήκους αξονικά θλιβόμενης ράβδου, που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6, και υιοθετώντας προσέγγιση ανάλογη με δυναμικό χώρο φάσης (*dynamical phase-space analogy*) εξήχθη το συμπέρασμα ότι συνυπάρχουν περιοδικές, περιοδικά διαμορφωμένες και εντοπισμένες λύσεις του όλου προβλήματος.



Σχήμα 2.6. Αξονικά θλιβόμενη ράβδος επί ελαστικού γραμμικού / μη γραμμικού εδάφους
(Hunt et al. 1993)

Βάσει τριών μαθηματικών μοντέλων, μελετήθηκαν μέσω της μεθόδου των διαταραχών οι μορφές λυγισμού και η μεταλυγισμική συμπεριφορά μιας

ιδεατής δοκού επί ελαστικού εδάφους (Astapov and Kornev 1994). Κάθε μοντέλο σχετιζόταν με διαφορετική έκδοση της κλασσικής μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Τα ευρήματα της εργασίας αυτής κατέδειξαν ότι το σπουδαιότερο ήταν το ότι για δεδομένες τιμές της αντίστασης της θεμελίωσης μπορεί να προκύψουν διαφορετικές πιθανές μορφές λυγισμού, δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις συνδέονται με πολλαπλές ιδιοτιμές.

Έχει επίσης μελετηθεί (Wu 1995) και η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στην απόκριση λυγισμού μιας αρχικά ευθύγραμμης μη εκτατής δοκού εδραζόμενης επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler. Τα σχετικά αποτελέσματα, που αφορούσαν διακριτές (distinct) αλλά και σύνθετες (compound) διακλαδώσεις, έδειξαν ότι υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταλυγισμικής συμπεριφοράς, ανάλογα με το αν ληφθεί υπόψη η ως άνω επιρροή. Πλην όμως, τα ευρήματα αυτά ισχύουν μόνο για μικρού μήκους δοκούς κατασκευασμένες από στρώματα σύνθετων ή άλλων προχωρημένων υλικών. Επιπρόσθετα, οι Lee και Waas (1996) επανεξέτασαν το πρόβλημα της αρχικής μεταλυγισμικής απόκρισης μιας δοκού πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού εδάφους μέσω ανάλυσης διπλών διαταραχών. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι η απόκριση αυτή μπορεί να σχετίζεται με περιοδικές, διαμορφωμένες (modulated) αλλά και εντοπισμένες μορφές λυγισμού.

Τέλος, σχετικά πρόσφατα (Kounadis et al. 2006), μελετήθηκε διεξοδικά η μεταλυγισμική απόκριση μη ατελών αλλά και γεωμετρικά ατελών δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler. Ειδικότερα, παρουσιάστηκε μια απλή και ταυτόχρονα ιδιαίτερα αποτελεσματική αρχική μεταλυγισμική ανάλυση, η οποία οδήγησε στην επίλυση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης καμπτικής παραμόρφωσης της δοκού – στη γειτονιά της κρίσιμης περιοχής – μέσω μιας αναλυτικής προσεγγιστικής τεχνικής, με αξιόπιστα και άμεσα λαμβανόμενα αποτελέσματα. Η έρευνα αυτή κατέληξε επίσης στο συμπέρασμα ότι η χρήση γραμμικής έκφρασης για την καμπυλότητα αδυνατεί να παράξει μεταλυγισμικές ισορροπίες (πέραν του κρίσιμου σημείου λυγισμού) ακόμα και στη περίπτωση μη γραμμικά ελαστικής θεμελίωσης. Επιπρόσθετα δε, βρέθηκε ότι η δοκός επιδεικνύει μεταλυγισμική αντοχή, καθόσον η κρίσιμη κατάσταση σχετίζεται με συμμετρικό ευσταθές διακλαδικό σημείο όταν απουσιάζουν οι αρχικές ατέλειες, ενώ η ατελής δοκός (με αξονοσυμμετρικές ατέλειες ιδιομορφικού Σχήματος) παρουσίασε μονοτονικά αύξοντες (ευσταθείς) δρόμους ισορροπίας. Τελικά παρουσιάστηκε

προσομοίωση της απόκρισης λυγισμού της δοκού επί ελαστικού εδάφους μέσω ενός ισοδύναμου μοντέλου ενός βαθμού ελευθερίας, στηριζόμενου επί ενός μη γραμμικού «σκληρού» ελατηρίου. Τούτο κατέστη εφικτό με επιτυχή συσχετισμό των προεξαρχόντων χαρακτηριστικών του μηχανισμού λυγισμού της δοκού με αυτούς του προταθέντος προσομοιώματος, του οποίου η απόκριση μπορεί να ερευνηθεί πολύ ευκολότερα. Τόσο η ανάλυση της πραγματικής κατασκευής, όσο και αυτή του προταθέντος μονοβάθμιου μοντέλου είχαν ως αντικείμενο τον κύριο σχηματισμό ισορροπίας και όχι καταστάσεις σχετιζόμενες με πιθανή σύζευξη μορφών λυγισμού.

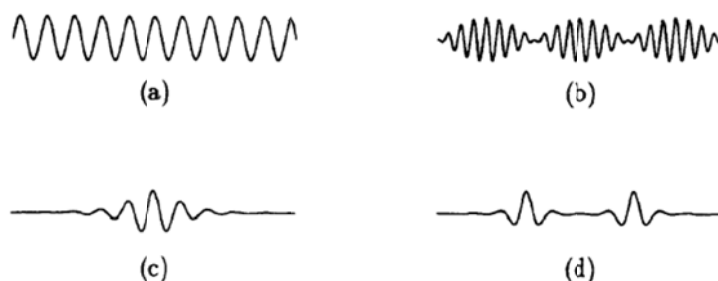
2.2.2. Αξονικά θλιβόμενες δοκοί επί μη γραμμικά ελαστικής θεμελίωσης

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, έχει αφιερωθεί μεγάλος αριθμός εργασιών στην ευστάθεια δοκών εδραζόμενων επί μη γραμμικά ελαστικού εδάφους, η αντίδραση του οποίου έχει τη μορφή της εξίσωσης (2.2). Η ανασκόπηση εδώ θα επικεντρωθεί σε μελέτες σχετιζόμενες με εντοπισμένες μορφές λυγισμού, που δημοσιεύτηκαν την τελευταία 20ετία, παρόλο που το θέμα έχει απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα τουλάχιστον από το 1973.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$EIw'''' + Pw'' + kw - cw^3 = 0 \quad (2.23)$$

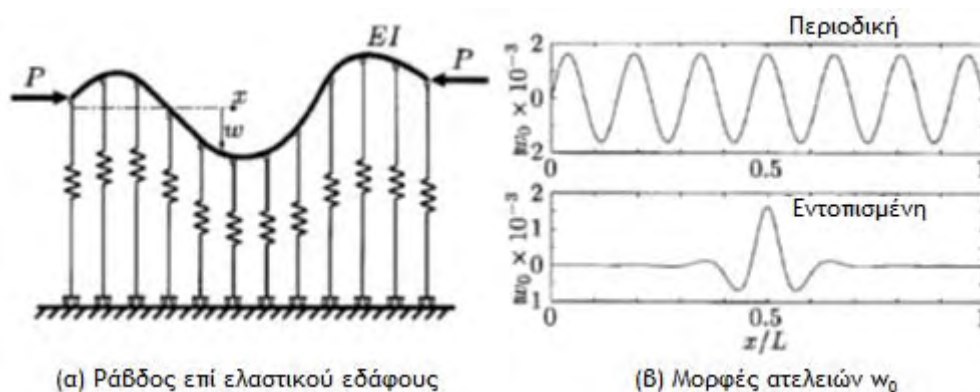
που περιγράφει την απόκριση σε λυγισμό μιας ομοιόμορφης αξονικά θλιβόμενης δοκού, εδραζόμενης επί μη γραμμικά ελαστικού «μαλακού» εδάφους, μπορεί να εμφανίσει διάφορες λύσεις (όπως περιγράφεται σε προηγούμενες εργασίες), που απεικονίζονται στο Σχήμα 2.7, το πρόβλημα του εντοπισμένου λυγισμού της άνω αναφερόμενης κατασκευής αντιμετωπίστηκε με ανάλυση διαταραχών διπλής κλίμακας (Whiting 1997).



Σχήμα 2.7. Λύσεις της Δ.Ε. (2.23): (a) περιοδική, (b) διαμορφωμένη (modulated) (c) μονής εντοπισμένης καμπύλωσης και (d) πολλαπλών εντοπισμένων καμπυλώσεων (Whiting 1997)

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προτεινόμενη προσεγγιστική μέθοδο, αποδείχθηκε ότι είναι σε συμφωνία με αντίστοιχα αριθμητικά τοιαύτα.

Ακολουθώντας τις βασικές αρχές της προηγούμενης μελέτης, ο Wade (2000) και οι Wade et al. (2000) μελέτησαν το φαινόμενο του εντοπισμένου λυγισμού μιας ράβδου επί μη γραμμικής ελαστικής θεμελίωσης με τετραγωνική (1^ο μοντέλο) και κυβική μη γραμμικότητα (2^ο μοντέλο) αντίστοιχα, συνδυασμένες με διάφορες μορφές ατελειών σύμφωνα με το Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8. Ατελής ράβδος επί ελαστικού εδάφους (Wadee 2000)

Για το 1^ο μοντέλο αναγνωρίστηκε ότι η χειρότερη περίπτωση ατέλειας σχετίζεται με μετάβαση από την περιοδική στην εντοπισμένη. Η μετάβαση αυτή δε φάνηκε να είναι συνδεδεμένη με δευτερεύουσα διακλάδωση του αντίστοιχου μοντέλου χωρίς ατέλειες, κατά την οποία ο λυγισμός από περιοδικής μορφής καθίσταται εντοπισμένης μορφής. Για το 2^ο μοντέλο βρέθηκε ότι η χειρότερη περίπτωση ατέλειας είναι η εντοπισμένη στο μέσο του ανοίγματος της ράβδου.

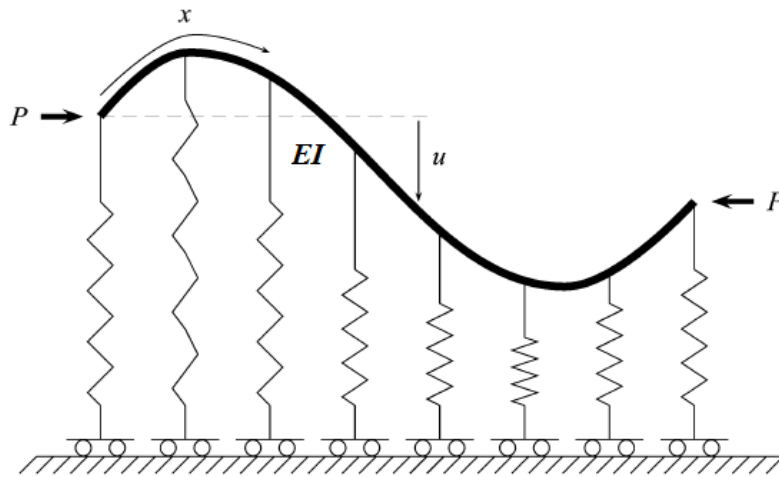
Η διαφορική εξίσωση λυγισμού επιλύθηκε μέσω μιας τροποποιημένης διαδικασίας, που δεν απαιτεί η θεωρούμενη λύση να είναι γραμμική επαλληλία μορφών. Η εφαρμογή της διαδικασίας αυτής αποδείχτηκε ιδιαίτερα επιτυχής, συγκρινόμενη με αριθμητικές λύσεις, κύρια για την αναγνώριση και εύρεση φαινομένων εντοπισμένου λυγισμού, δηλαδή κύριων λύσεων των οποίων η περιβάλλουσα του εύρους έχει μία μόνο αιχμή (single peak).

Ο εντοπισμένος λυγισμός μιας απείρου μήκους ράβδου επί μιας θεμελίωσης μικτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας μελετήθηκε από τους Chen και Baker (2003) μέσω της μεθόδου Rayleigh – Ritz. Οι συγγραφείς έδωσαν έμφαση στο γεγονός ότι «αφού ο λυγισμός μπορεί να λάβει χώρα σε οπουδήποτε σημείο κατά μήκος της δοκού, η μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος

θα πρέπει να οδηγεί σε πολλαπλές λύσεις» καθώς και στο ότι «μεταξύ των πολλαπλών μεταλυσιμικών καταστάσεων ισορροπίας, η πραγματική μορφή λυγισμού διέπεται από την αρχή της ελάχιστης ενέργειας». Σύμφωνα με αυτά, οι μελετητές παρουσίασαν μια ανάλυση διαταραχών διπλής (σε συνδυασμό με τις μεθόδους Rayleigh – Ritz και Galerkin) για την επίλυση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης, κάνοντας χρήση προσεγγιστικών συναρτήσεων μορφής ορθογωνικών πολυωνύμων Hermite και ελαχιστοποιώντας το συναρτησιακό συνολικής δυναμικής ενέργειας. Τα αποτελέσματα της προταθείσας μεθοδολογίας βρέθηκαν σε εξαιρετική συμφωνία με αριθμητικές λύσεις μέσω του λογισμικού AUTO (Doedel 2011) αλλά και με αποτελέσματα άλλων παρόμοιων εργασιών.

Λίαν προσφάτως (Coman 2010) επανεξετάστηκε το πρόβλημα του λυγισμού μιας ελαστικής δοκού – στύλου εδραζόμενης επί μη ομογενούς θεμελίωσης τύπου Winkler, με βάση ασυμπτωτική ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων. Θεωρώντας μια ελαστική δοκό μήκους $2L$, που θλίβεται στα άκρα της με δύναμη P σύμφωνα με το Σχήμα 2.9, και υποθέτοντας ότι η κατασκευή βρίσκεται σε πλήρη επαφή με ελαστική θεμελίωση, ο Coman έδωσε τον ακόλουθο τύπο αντίδρασης:

$$F = k_1(x)u - k_2u^3, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$



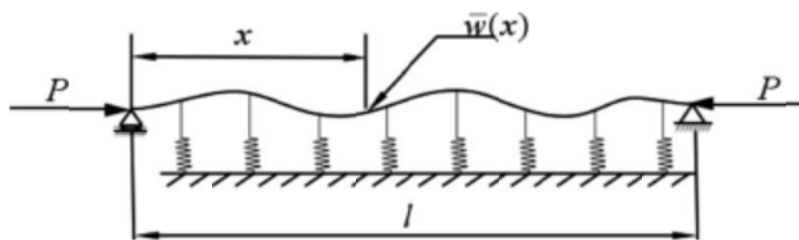
Σχήμα 2.9. Δοκός – στύλος επί ελαστικής θεμελίωσης (Coman 2010)

Με βάση ασυμπτωτική ανάλυση, το πρόβλημα των διακλαδώσεων αντιμετωπίστηκε με επιτυχία και βρέθηκε η επιρροή τόσο των μη γραμμικοτήτων όσο και των ανομοιογενειών της θεμελίωσης, με έμφαση στον εντοπισμένο ελαστικό λυγισμό. Η προταθείσα ανάλυση συμπερασματικά μπορεί να εφαρμοστεί για την μελέτη ευστάθειας πλακών και κελυφών με μη ομογενείς προλυγισμικές παραμορφώσεις.

Γενικότερου ενδιαφέροντος σε ό,τι αφορά την ευστάθεια των δοκών επί ελαστικού εδάφους υπήρξε η εργασία του Elishakoff (1985), ο οποίος μελέτησε την ευστάθεια στοχαστικά ατελών δοκών πεπερασμένου μήκους επί ελαστικής θεμελίωσης μικτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας. Η μορφή της ατέλειας υποτέθηκε ως μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία συνάρτηση της μετατόπισης (με δοθείσα μάζα και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης) και το πρόβλημα λύθηκε με χρήση της μεθόδου Monte – Carlo. Μετά την ανάλυση του γραμμικού προβλήματος, η όλη μελέτη επικεντρώθηκε στο μη γραμμικό πρόβλημα, που σχετιζόταν με θεμελίωση μικτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.10, αν \bar{w} είναι η συνάρτηση ατελειών, η διαφορική εξίσωση για την επιπρόσθετη καμπτική παραμόρφωση $w(x)$ λόγω του αξονικού φορτίου P , είναι της μορφής:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 (w + \bar{w})}{dx^2} + k_1 w - k_2 w^2 - k_3 w^3 = 0 \quad (2.25)$$

$$k_1, k_2, k_3 > 0$$



Σχήμα 2.10. Ατελής δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης με μικτή τετραγωνική – κυβική μη γραμμικότητα (Elishakoff 1985)

Η προταθείσα μέθοδος, η οποία μπορεί να επεκταθεί και για κελυφωτές κατασκευές, εξαρτάται κατά πολύ από την επεξεργασία μεγάλου όγκου πειραματικών πληροφοριών σχετικά με τις ατέλειες. Αν αυτό γίνει με επιτυχία, τότε μπορούν να πραγματοποιηθούν υπολογισμοί αξιοπιστίας με βάση αναλυτικές μεθόδους. Η όλη διαδικασία πάντως ευρίσκεται εκτός των σκοπών της παρούσας Διατριβής.

Το πρόβλημα ευαισθησίας σε αβέβαιες ατέλειες, που διέπεται από την εξίσωση (2.5) εξετάστηκε εκ νέου πρόσφατα μέσω μιας μη προσδιορισμικής και δύο προσδιορισμικών μεθόδων (Wang et al. 2009). Έγινε χρήση θεωρητικών μοντέλων δύο κατηγοριών, ανάλυσης διαστημάτων και κυρτής προσομοίωσης. Υπολογίζοντας το φορτίο λυγισμού ως συνάρτηση των υπεισερχόμενων παραμέτρων και ειδικά εκείνων που περιγράφουν την διακύμανση της μορφής πιθανών ατελειών,

οι Wang et al βρήκαν ότι ο σχεδιασμός που βασίζεται σε προσδιορισμικές μεθόδους είναι αποδεκτός για μεγάλες τιμές της αρχικής ατέλειας, ενώ για μικρές είναι συντηρητικός.

Σε μια νωρίτερη εργασία (Sheinman and Adan 1991), μελετήθηκε επίσης η ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες μιας θλιβόμενης δοκού επί μη γραμμικής θεμελίωσης μκτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας. Η αντίδραση της θεμελίωσης ανά μονάδα μήκους της δοκού περιγράφηκε από τη σχέση

$$R(w) = k_1 w + \text{sign}(w) k_2 w^2 + k_3 w^3 \quad (2.26)$$

$$k_1 > 0, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\text{sign}(w)$ συνδέθηκε με τον τετραγωνικό όρο για να προσδώσει συνέπεια με τους υπόλοιπους όρους, σε ό,τι αφορά το πρόσημο της αντίδρασης, οπότε εξαλείφονται μη φυσικά αποδεκτές λύσεις. Με εφαρμογή μη γραμμικής ανάλυσης διατμητικών παραμορφώσεων ανώτερης τάξης, μελετήθηκαν δύο τύποι μη γραμμικής θεμελίωσης. Πιο συγκεκριμένα, μια θεμελίωση που παρουσιάζει μη γραμμική σκληρού τύπου συμπεριφορά (stiffening) και μία που παρουσιάζει μη γραμμική μαλακού τύπου (softening) αυξανόμενης της εγκάρσιας παραμόρφωσης. Οι συγγραφείς συμπεραίνουν ότι: (α) η επιρροή του σχήματος και του εύρους των ατελειών στη μη γραμμική συμπεριφορά της δοκού είναι σημαντική, καθώς και ότι μεγαλύτερη ευαισθησία σε ατέλειες παρουσιάζει αυτή με θεμελίωση «μαλακού» τύπου, (β) ότι η κανονική μορφή λυγισμού της δοκού επί μη γραμμικής θεμελίωσης παρουσιάζει αλλαγές κατά τη φόρτιση, με το μήκος της κυματομορφής να μειώνεται για την «σκληρού» τύπου θεμελίωση και να αυξάνεται για την «μαλακού» τύπου», (γ) για μεγάλα εύρη ατελειών η μετάβαση από τη μια μορφή στην άλλη είναι ομαλή, ενώ για μικρά εύρη αυτή γίνεται ακαριαία, (δ) θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στην ανάλυση η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης, όταν η αντίσταση της θεμελίωσης είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής της δοκού, και όταν αυτό συμβαίνει, η ακαριαία μετάβαση από την μια μορφή στην άλλη γίνεται γενικά για φορτία μικρότερα από τα αντίστοιχα φορτία της περίπτωσης που η διατμητική παραμόρφωση αγνοείται και (ε) η δοκός επί θεμελίωσης «σκληρού» τύπου παρουσιάζει σημαντική μεταλυγισμική αντοχή.

Η τελευταία (μάλλον εξεζητημένη) δημοσίευση (με αντικείμενο τον εντοπισμένο λυγισμό θλιβόμενων ελαστικών ράβδων επί μη

γραμμικά ελαστικής θεμελίωσης), της παρούσας ανασκόπησης είναι η αυτή των Wade et al. (2002). Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε για θεμελίωση μικτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας, η οποία σύμφωνα με τους συγγραφείς αρχικά αποσταθεροποιεί και κατόπιν επανασταθεροποιεί την κατασκευή. Η αντίδραση του εδάφους της θεωρηθείσας θεμελίωσης ήταν της μορφής

$$F(w) = kw - c_1 w^2 + c_2 w^3$$

$$k, c_1, c_2 \geq 0$$
(2.27)

Μετά από αδιαστατοποίηση και υποθέτοντας γραμμικές σχέσεις για κάμψη και σύμπτυξη των άκρων (end – shortening), η διαφορική εξίσωση ισορροπίας είναι η ακόλουθη:

$$w'''' + Pw'' + w - w^2 + c_2 w^3 = 0$$
(2.28)

Η ανωτέρω εξίσωση επιλύθηκε όχι μόνο μέσω διαδικασίας διαταραχών διπλής κλίμακας αλλά και με μια μέθοδο ανάλογη με την καλούμενη «πέραν όλων των όρων» υπερασυμπτωτική, που έχει αναπτυχθεί για την μελέτη των μονήρων («μοναχικών» - solitary) κυμάτων της Μηχανικής των Ρευστών. Παρατηρήθηκαν λύσεις διπλής τοπικής καμπύλωσης και οφιοειδής συμπεριφορά (snaking), πλην όμως και αυτή η εργασία βρίσκεται εκτός των σκοπών της Διατριβής.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, θα παρουσιαστεί σύντομη ανασκόπηση μερικών αποτελεσμάτων, τα οποία αφορούν άλλα ενδιαφέροντα φαινόμενα όπως οιονεί περιοδικό ή και δευτερεύοντα λυγισμό καθώς και άλματα μορφών. Πρόκειται κύρια για θεωρητικές εργασίες της Βρετανικής Σχολής του G. W. Hunt και των συνεργατών του (Hunt and Everall 1999, Everall and Hunt 1999, 2000) που συμπληρώθηκαν από τους Zhang και Murphy (2005).

Στην 1^η των ως άνω εργασιών μελετήθηκε ως μη γραμμικό δυναμικό σύστημα ο λυγισμός και η μεταλυγισμική απόκριση μιας κλασσικής απλά στηριζόμενης ελαστικής δοκού επί ελαστικού εδάφους «σκληρής» μορφής, με τη σχετική διαφορική να είναι

$$EIw'''' + Pw'' + kw + cw^3 = 0$$
(2.29)

Αποκαλύφθηκαν φαινόμενα αλμάτων μορφών και «κλειδώματος» μορφών (mode jumping – mode locking), σχετιζόμενα με δρόμους ισορροπίας συνδεδεμένους στο χώρο, με βάση θεμελιωδώς αρμονική ανάλυση, παρόμοια με αυτή του Κεφαλαίου 3 της παρούσας. Τα φαινόμενα αυτά επαληθεύθηκαν από αριθμητικές λύσεις με χρήση του λογισμικού AUTO (Doedel et al. 2011).

Οι επόμενες δύο εργασίες (Everall και Hunt 1999, 2000) ανέφεραν παρόμοια αποτελέσματα με έμφαση στην επιρροή των συνοριακών συνθηκών στον περιοδικό και οιονεί περιοδικό λυγισμό, ενώ βρέθηκαν και φαινόμενα δευτερευουσών καταστάσεων λυγισμού καθολικής μορφής.

Εν κατακλείδι, οι Zhang και Murphy (2005) μελέτησαν την απώλεια ευστάθειας μέσω υπερκρίσιμης διακλάδωσης τύπου τρίαυνας (pitchfork) και έδειξαν ότι το σύστημα μπορεί να επιδείξει δευτερεύουσες μεταλυγισμικές διακλαδώσεις. Αυτές οδηγούν σε αποσταθεροποίηση του κύριου δρόμου ισορροπίας και σε άλμα σε υψηλότερης τάξης μορφή λυγισμού. Με βάση ανάλυση τριών μορφών, πέραν των αναμενόμενων κύριων και δευτερευόντων συμβάντων λυγισμού, δείχτηκε ότι οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες οδηγούν σε διακλαδώσεις διάσπασης της συμμετρίας. Πάντως, όλες οι παραπάνω εργασίες είναι άκρως θεωρητικές, χωρίς εφαρμογές σε πραγματικές καταστάσεις, γεγονός που ισχύει και για την πλειονότητα των εργασιών που ανασκοπήθηκαν μέχρι στιγμής, με χαρακτηριστική εξαίρεση την εργασία των Kounadis et al (2006).

2.2.3 Αξονικά θλιβόμενες δοκοί επί θεμελίωσης τύπου Pasternak, Wieghardt και Reissner

Με εξαίρεση την εργασία των Sophianopoulos και Papachristou (2012), η οποία αποτελεί αντικείμενο του Κεφαλαίου 4 της παρούσας, μόνο ένας πολύ μικρός αριθμός εργασιών είναι διαθέσιμος στη βιβλιογραφία, που να σχετίζεται με δοκούς – στύλους επί θεμελίωσης τύπου Pasternak.

Σε μια σύντομη σημείωση (Naidu και Rao 1985), εφαρμόστηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τη μελέτη της ευστάθειας ομοιόμορφων δοκών με διάφορες συνοριακές συνθήκες επί θεμελίωσης τύπου Pasternak και καταδείχτηκε μέσω αριθμητικών αποτελεσμάτων η σημαντικότητα του εν λόγω προσομοιώματος θεμελίωσης.

Σε συνέχεια πρωτοπόρου εργασίας του El Naschie (1974), μελετήθηκε η μεταλυγισμική απόκριση μιας αξονικά θλιβόμενης δοκού επί γραμμικά ελαστικού εδάφους με βάση ακριβή γεωμετρική ανάλυση (Challamel 2011). Υιοθετήθηκε το μοντέλο βαθμωτής ελαστικότητας του Pasternak για τη θεμελίωση και το πρόβλημα βρέθηκε να διέπεται από την ακόλουθη γενική διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης:

$$EI\theta^{(4)} + EI\theta''^2 \tan \theta + 3EI\theta'\theta''' \tan \theta + EI\theta'^2\theta''(1+3\tan^2 \theta) - k\alpha^2(\theta'' \cos \theta + \theta'^2 \sin \theta) + F \frac{\theta'' + 3\theta'^2 \tan \theta}{\cos \theta} + k \sin \theta \cos^2 \theta = 0 \quad (2.30)$$

$$\theta = \arcsin w'$$

όπου F η θλίβουσα δύναμη, w η λόγω κάμψεως υποχώρηση της δοκού, k και α οι παράμετροι του εδαφικού στρώματος του μοντέλου, οι οποίες σχετίζονται με κάμψη και διάτμηση αντίστοιχα. Η ανωτέρω εξίσωση επιλύθηκε αριθμητικά και η μεταλυγισμική συμπεριφορά αναλύθηκε μέσω ασυμπτωτικής μεθόδου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο καταστατικός νόμος βαθμωτής ελαστικότητας επηρεάζει σημαντικά την μεταλυγισμική απόκριση.

Το μοντέλο ελαστικού εδάφους του Wiegard χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Smith (1969) για τον υπολογισμό του φορτίου λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου εδραζόμενης σε αυτό. Λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των διατμητικών τάσεων στην καμπυλότητα της δοκού, αν EI είναι η καμπτική αντίσταση, G και A το μέτρο διάτμησης και το εμβαδόν της διατομής της δοκού αντίστοιχα, ενώ κ είναι μια αδιάστατη ποσότητα εξαρτώμενη από το σχήμα της διατομής και το λόγο του Poisson, ο Smith κατέληξε στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση που διέπει την εγκάρσια μετατόπιση $v(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 v}{dx^4} + \Lambda \frac{d^2 v}{dx^2} + \mu^2 v &= 0, \quad \Lambda = \frac{P - \frac{1}{2ab} - \frac{\kappa b EI}{2aGA}}{EI \left(1 + \frac{\kappa}{2abGA} - \frac{\kappa P}{GA} \right)} \\ \mu^2 &= \frac{\frac{b}{2a}}{EI \left(1 + \frac{\kappa}{2abGA} - \frac{\kappa P}{GA} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Παρόλο που η εξίσωση αυτή είναι αρκετά όμοια με εκείνη που περιγράφει τη δοκό επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, ο συγγραφέας κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υφίστανται σημαντικές διαφορές μεταξύ των θεωριών Winkler και Wiegardt. Κάθε γραμμικοποιημένη μορφή σύμφωνα με την 1^η εκ των θεωριών αυτών παράγει κρίσιμα φορτία μεγαλύτερα της αμέσως προηγούμενης μορφής, ενώ σύμφωνα με τη 2^η θεωρία είναι πιθανό τα κρίσιμα φορτία μιας μορφής να είναι μικρότερα από μιας μορφής χαμηλότερης τάξης και αντίστροφα. Με έναυσμα την εργασία του Smith και θεωρώντας αμφότερες τις θεωρίες δοκών των Euler – Bernoulli και Timoshenko, Rutta και Elishakoff (2006) μελέτησαν το λυγισμό

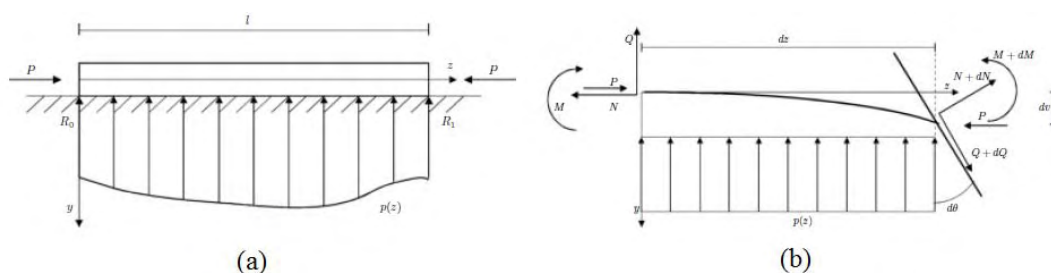
δοκών επί εδάφους τύπου Wiegardt. Εξήχθησαν διάφορες εκδοχές της διέπουσας διαφορικής εξίσωσης, σύμφωνα και με το Σχήμα 2.11. Ορίζοντας τις αδιάστατες ποσότητες:

$$\eta = \frac{v}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad \alpha = \frac{kGA l^2}{EI}, \quad \beta = \frac{b l^4}{2aEI}, \quad \delta = \frac{l^2}{2abEI}, \quad \sigma = \frac{Pl^2}{EI} \quad (2.32)$$

και

$$\kappa = \frac{(\sigma - \delta)(\sigma + \alpha) - \beta}{(\alpha + \delta)}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta(\sigma + \alpha)}{(\alpha + \delta)} \quad (2.33)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις η αδιάστατη σταθερά k είναι ο διατμητικός παράγων διόρθωσης σχήματος (shear correction shape factor), ενώ οι συντελεστές a , b εξαρτώνται από τις ιδιότητες της ελαστικής θεμελίωσης. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής a λαμβάνει υπόψη την παραμορφωσιμότητα της θεμελίωσης ανά μονάδα μήκους (το αντίστροφο της αντίστασης της θεμελίωσης), ενώ ο b αναπαριστά το αντίστροφο ενός χαρακτηριστικού μήκους επενέργειας της θεμελίωσης¹.



Σχήμα 2.11. Δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης τύπου Wiegardt (a), και διάγραμμα ελευθέρου σώματος (b) (Rutta και Elishakoff 2006)

Στη γενική των περιπτώσεων, η αδιαστατοποιημένη εγκάρσια μετατόπιση διέπεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\eta'''' + \kappa \eta'' + \lambda^2 \eta = 0 \quad (2.34)$$

Συνεπώς, αν πρόκειται περί πλήρως εύκαμπτης δοκού Euler – Bernoulli, θέτοντας $\alpha \rightarrow \infty$ η εξίσωση (2.34) γίνεται:

$$\eta'''' + (\sigma - \delta) \eta'' + \beta \eta = 0 \quad (2.35)$$

Η ομοιότητα της ανωτέρω εξίσωσης με αυτή που ισχύει για θεμελίωση τύπου Pasternak (Sophianopoulos και Papachristou 2012) είναι άμεσα αντιληπτή.

Επιπρόσθετα δε, αν οι σταθερές a και b είναι αυθαίρετα μεγάλες, ενώ ο λόγος τους b/a πλησιάζει μια σταθερή τιμή ίση με $2c$, η θεμελίωση

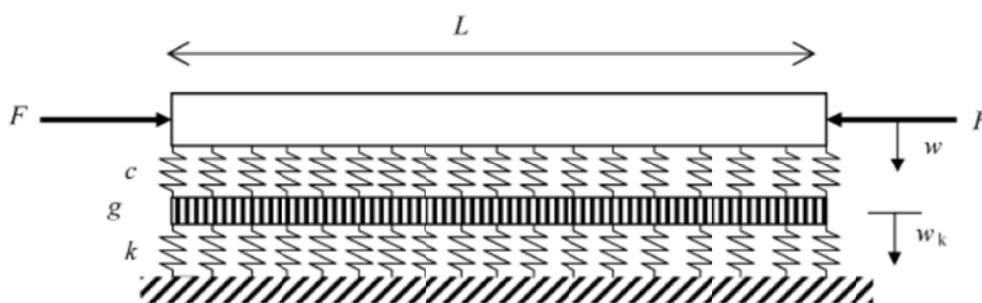
¹ Διαστάσεις: συντελεστού $a \rightarrow [L/F]$, συντελεστού $b \rightarrow [1/L]$

καταλήγει σε τύπου Winkler με αντίσταση c . Ορίζοντας ως $\bar{\beta}$ το αδιάστατο ομόλογο της c , η εξίσωση (2.35) για δοκό Timoshenko λαμβάνει τη μορφή:

$$\eta'''' + \frac{\sigma(\sigma + \alpha) - \bar{\beta}}{\alpha} \eta'' + \frac{\bar{\beta}(\sigma + \alpha)}{\alpha} \eta = 0 \quad (2.36)$$

Μετά την επίλυση της εξίσωσης (2.34) για δοκό με απλές στηρίξεις ελήφθησαν γραμμικοποιημένες λύσεις και τονίστηκε ότι η όλη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί στη μελέτη του ρεαλιστικού προβλήματος σωλήνων μεταφοράς ρευστών.

Η μοναδική συνεισφορά στην μελέτη του λυγισμού δοκών σε μη – τοπικής μορφής θεμελίωση και ειδικότερα σε μοντέλο Reissner οφείλεται στους Challamel et al. (2010), που κατέληξαν σε μια διαφορική εξίσωση 6^{ης} τάξης. Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.12, το μοντέλο τριών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε αποτελείτο από δύο στρώματα γραμμικών ελαστικών ελατηρίων αντίστασης c και k αντίστοιχα, μεταξύ των οποίων παρεμβалλόταν ένα μοναδιαίου πάχους διατμητικό στρώμα δυσκαμψίας g .



Σχήμα 2.12. Ελαστική δοκός επί εδάφους τύπου Reissner (Challamel et al. 2010)

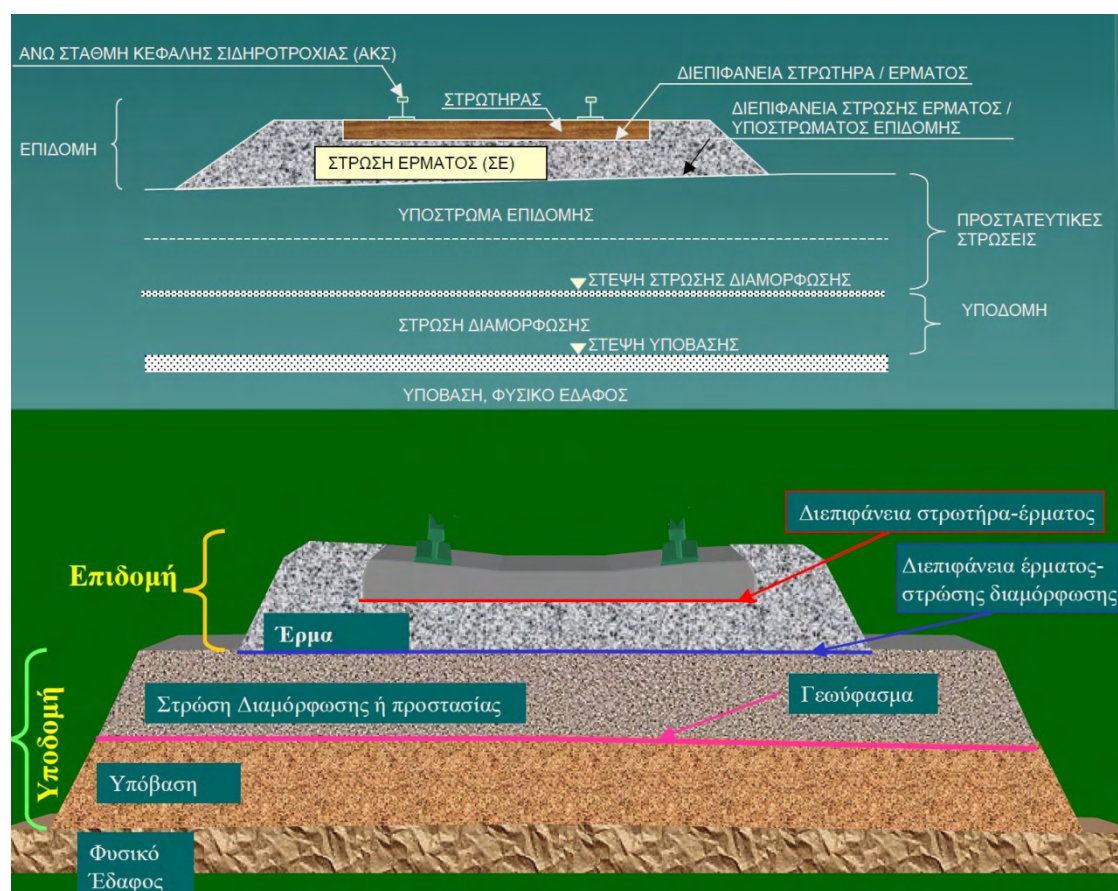
Επιλύοντας την διαφορική εξίσωση σε συνδυασμό με τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες για αμφιαρθρωτή δοκό ελήφθησαν λύσεις του προβλήματος λυγισμού τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά. Αυτές φάνηκε να μην είναι τόσο ευαίσθητες σε συνοριακές συνθήκες ανώτερης τάξης, ενώ δόθηκε και έμφαση σε επιρροές κλίμακας του μη – τοπικού αυτού προβλήματος.

2.3 Λυγισμός σιδηροτροχιών

Μια πραγματική κατασκευή, η οποία κατ' εξοχήν εδράζεται συνεχώς επί του εδάφους και η συμπεριφορά της έχει προσομοιωθεί ως δοκός επί ελαστικού υποστρώματος, είναι το σύστημα των (χαλύβδινων) τροχιών σιδηροδρόμων. Επειδή δε στα Κεφάλαια που ακολουθούν, τα ευρήματα των θεωρητικών αναλύσεων προκύπτουν μέσω αριθμητικών εφαρμογών με χρήση δοκών – στύλων διατομής

σιδηροτροχιών, κρίνεται σκόπιμη μια περιληπτική – συνοπτική αναφορά επί της μέχρι σήμερα βιβλιογραφίας², με θέμα τον λυγισμό των τροχιών αυτών.

Επί του προκειμένου, η σιδηροδρομική γραμμή μαζί με τα στοιχεία έδρασης αποτελεί την επιδομή, η οποία στηρίζεται στην υπόβαση, ενώ μπορεί να παρεμβάλλονται και στρώσεις διαμόρφωσης ή / και προστασίας. Τυπικές λεπτομέρειες απεικονίζονται στο Σχήμα 2.13, όπου φαίνεται και η ονοματολογία των επί μέρους συστατικών της γραμμής, ενώ στη φωτογραφία του Σχήματος 2.14, φαίνονται τα υλικά επιδομής.



Σχήμα 2.13. Τυπική διαμόρφωση υποβάθρου σιδηροδρομικής γραμμής και ονοματολογία

Οι στρωτήρες μπορεί να είναι ξύλινοι, μεταλλικοί (κλασσικοί και Υ), από οπλισμένο σκυρόδεμα (διμερείς, ολόσωμοι πλατιάς βάσης ή πλασιόμορφοι) και από προεντεταμένο σκυρόδεμα. Η κλίση (στρώση) του έρματος αποτελείται από θραυστό διαβαθμισμένο (25/65 mm) φυσικό πέτρωμα κατάλληλης

² Μεγάλο μέρος των σχετικών δημοσιεύσεων, είτε είναι μη προσβάσιμο ηλεκτρονικά είτε απαιτεί αγορά των σχετικών αρχείων, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η όλη ανασκόπηση. Πέραν τούτο, το όλο αντικείμενο ανήκει ως επί το πλείστον και στο Επιστημονικό Πεδίο της Σιδηροδρομικής, εκτός των σκοπών της παρούσας.

σκληρότητας, ενώ τα μέσα σύνδεσης είναι είτε άμεσα (ελικωτά, ήλοι) είτε μορφής εσχάρας (πλάκες έδρασης). Από τα ποικίλα μέσα σύνδεσης μπορεί κανείς να αναφέρει τους συνδέσμους Pandrol, Skl, KSA και K, WS8, Nabla, RN, DSF 18, ενώ τελευταία έχουν αναπτυχθεί και σύνδεσμοι με υλικά για τη μείωση του θορύβου (όπως της Rothe Erde, της Clouth κ.α.).



Σχήμα 2.14. Υλικά επιδομής (φωτογραφία)

Οι χαλύβδινες σιδηροτροχιές παράγονται με τη μέθοδο εμφύσησης οξυγόνου σε ειδικό δοχείο τήξεως (μεταλλάκτη) και η χημική σύνθεση, για τρεις τυπικές ποιότητες χαλύβων σιδηροτροχιών δίνονται στο Σχήμα 2.15. Περαιτέρω λεπτομέρειες που αφορούν αντοχές και άλλα χαρακτηριστικά των χαλύβων αυτών δίδονται στο Κεφάλαιο 5 της παρούσας.

Τύπος χάλυβα	Αντοχή σε Εφελκυσμό {N/mm ² }	Χημική σύνθεση				
		%C	%Si	%Mn	%P	%S
A	900	0,60-0,75	0,15-0,50	0,8-0,13	0,05	0,05
B	900	0,50-0,65	0,15-0,50	1,3-1,7	0,05	0,05
C**	900	0,45-0,60	0,07-0,30	1,7-2,1	0,03	0,03

Σχήμα 2.15. Χημική σύνθεση τυπικών χαλύβων σιδηροτροχιών

Κατά καιρούς, και πριν την ισχύ του Ευρωπαϊκού Προτύπου EN 13674-1 (2011), η ονοματολογία των διατομών των σιδηροτροχιών ήταν ποικίλη. Μετά την προδιαγραφή των σιδηροτροχιών τύπου *Vignole*, υπάρχει πλέον μια ευρέως αποδεκτή ονομασία, η αντιστοίχιση της οποίας με παλαιότερες φαίνεται υπό μορφή Πίνακα στο Σχήμα 2.16 (UIC = International Union of Railways, www.uic.org).

Σιδηροτροχιές τύπου Vignol (ονομασίες)	
νέα	πρώην
30 E 1	S 30
33 E 1	S 33
49 E 1	S 49
50 E 4	UIC 50
54 E 1	UIC 54
60 E 1	UIC 60

Σχήμα 2.16. Παλαιά και νέα ονομασία διατομών σιδηροτροχιών

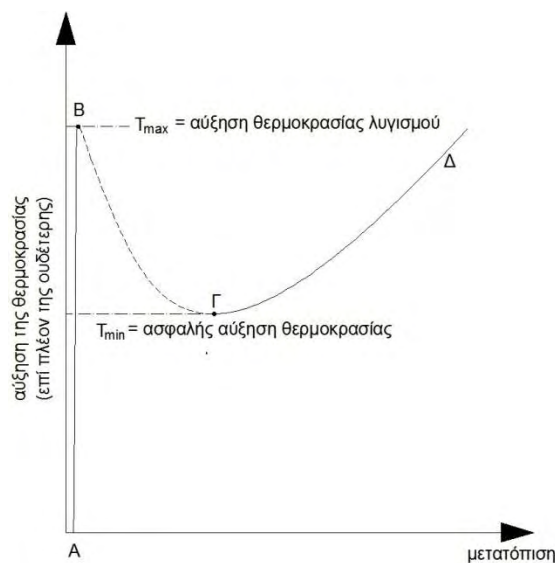
Σε μια συμβατική σιδηροδρομική γραμμή (όπως κατασκευαζόταν πριν 50 και παραπάνω έτη), οι τροχιές συνδέονται μεταξύ τους μηχανικά, αφήνοντας ένα διάκενο – αρμό μεταξύ των άκρων, ώστε να επιτρέπεται η θερμική διαστολή. Αυτοί οι μηχανικοί σύνδεσμοι όμως οδηγούν σε δομική εξασθένιση της τροχιάς και αυξάνουν τόσο το κόστος συντήρησης όσο και την κατανάλωση ενέργειας από το συρμό. Τα προβλήματα αυτά έγιναν ακόμη πιο σοβαρά μετά την έναρξη χρήσης μοντέρνων τραίνων υψηλών ταχυτήτων, με αποτέλεσμα η βιομηχανία σιδηροδρόμων να αναζητήσει σιδηροτροχιές χωρίς αρμό, με αποτέλεσμα την ευρύτερη ανάπτυξη και εφαρμογή των καλούμενων Συνεχώς Συγκολλημένων Σιδηροτροχιών (ΣΣΣ, CWR – continuous welded rail). Λόγω των πολλών πλεονεκτημάτων του το είδος αυτό αποτελεί συνήθη πλέον πρακτική παγκοσμίως, αλλά εκ κατασκευής (το μήκος τους υπερβαίνει τα 200m) εμποδίζεται η αλλαγή του μήκους λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών, οπότε αναπτύσσονται μεγάλα *θερμικά αξονικά φορτία* (Lim et. al 2003, 2008), τα οποία αποτελούν *αίτιο απώλειας της ευστάθειας*. Τα αξονικά (θλιπτικά) αυτά φορτία δίδονται, σε περίπτωση ομοιόμορφης αύξησης της θερμοκρασίας κατά T_0 από τη γνωστή σχέση (που ισχύει για ελαστική απόκριση της δοκού)

$$N_t = EA\alpha T_0 \quad (2.37)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young, A το εμβαδόν της διατομής και των δύο τροχιών της γραμμής και α ο συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής, ίσος για χάλυβα με $\alpha = 1.05 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

Η πραγματική συμπεριφορά σε λυγισμό μιας σιδηροτροχιάς είναι ένα σύνθετο φαινόμενο αλληλεπίδρασης μορφών (καμπτικών εντός επιπέδου, πλευρικών και στρεπτοκαμπτικών). Για να γίνει η ανάλυση ευκολότερη, όμως, οι περισσότερες μελέτες περιορίζονται είτε σε λυγισμό σε κατακόρυφο επίπεδο είτε σε οριζόντιο (πλευρικά), γεγονός που εν πολλοίς επίσης οφείλεται στο ότι η τελική παραμόρφωση μιας σιδηροτροχιάς μετά το λυγισμό χαρακτηρίζεται μόνο από μια κυρίαρχη μορφή

αστοχίας (οριζόντια ή κατακόρυφη). Η τυπική απόκριση μιας σιδηροτροχιάς έναντι θερμοκρασιακών μεταβολών μπορεί να περιγραφεί με όρους τριών τιμών θερμοκρασίας, της «ουδέτερης» θερμοκρασίας, της θερμοκρασίας λυγισμού και της ασφαλούς (αποδεκτής) θερμοκρασίας. «Ουδέτερη» είναι εκείνη η θερμοκρασία για την οποία η τροχιά είναι ελεύθερη από θερμικές τάσεις, και συνήθως ως τέτοια θεωρείται η θερμοκρασία της κατά την τοποθέτηση. Η απόκριση μιας τροχιάς με μια μικρή αρχική γεωμετρική ατέλεια φαίνεται στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17. Τυπική καμπύλη απόκρισης σιδηροτροχιάς σε θερμοκρασιακές μεταβολές (Lim et al. 2003)

Η ως άνω καμπύλη απόκρισης μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις κλάδους, τους AB και ΓΔ που αναπαριστούν ευσταθείς σχηματισμούς ισορροπίας της σιδηροτροχιάς και τον ΒΓ που είναι ασταθής. Το (οριακό) σημείο Β αναπαριστά την αύξηση της θερμοκρασίας πέραν της ουδέτερης τοιαύτης, για την οποία η σιδηροτροχιά καθίσταται ασταθής. Στο σημείο αυτό θα λάβει χώρα ακαριαίος λυγισμός και η κατασκευή θα ισορροπήσει σε απομακρυσμένο ευσταθές σημείο ισορροπίας του κλάδου ΓΔ. Το σημείο Γ αντιστοιχεί στην ασφαλή αύξηση θερμοκρασίας, που



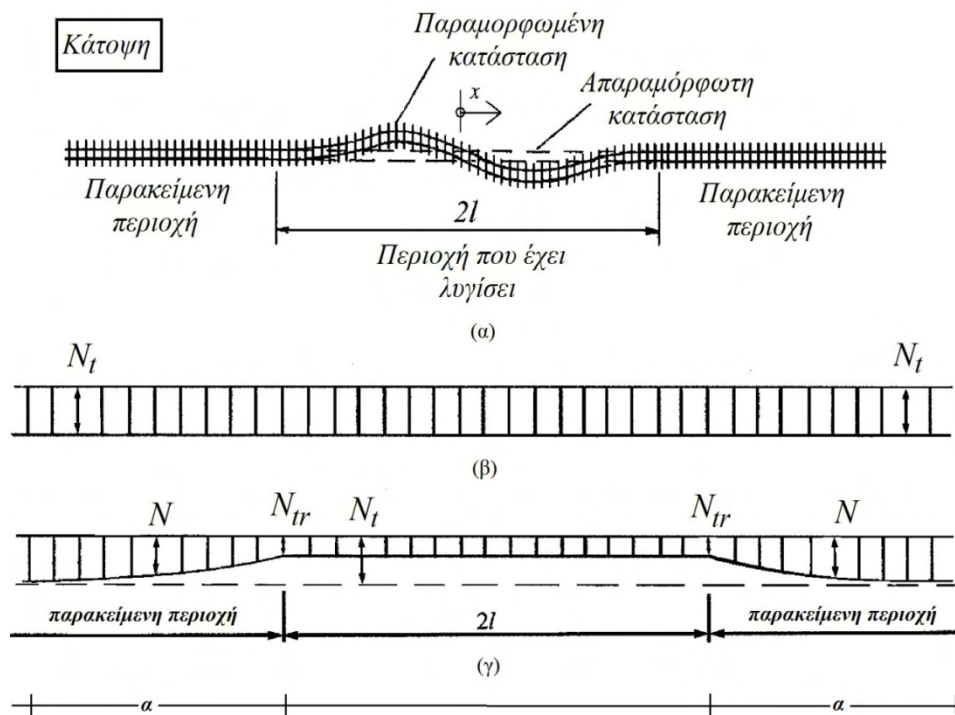
Ενδεικτική φωτογραφία πλευρικού λυγισμού ΣΣΣ

ονομάζεται έτσι επειδή συνδέεται με ένα μοναδικό ευσταθές σημείο ισορροπίας. Συνεπώς είναι ασφαλές η σιδηροτροχιά να εκτίθεται σε οποιαδήποτε αύξηση της θερμοκρασίας μικρότερη της T_{min} χωρίς κίνδυνο λυγισμού, με την προϋπόθεση μη ύπαρξης εξωτερικών δυναμικών επιρροών, όπως π.χ. η κίνηση αμαξοστοιχίας άνωθεν.

Με εξαίρεση την εργασία του Bijl [Bijl, F. (1964), “Buckling force in gapless track calculated in a nonlinear manner.” *DeIngenieur*, 119-123] η έρευνα περί τον λυγισμό των ΣΣΣ χρονολογείται από τα μέσα της δεκαετίας του 70, και αναφέρεται τόσο σε εντός όσο και σε εκτός επιπέδου (πλευρικό) λυγισμό, περισσότερο δε στη δεύτερη εξ αυτών μορφή, καθώς αυτή είναι και η πλέον καταγεγραμμένη διεθνώς στα σιδηροδρομικά δίκτυα, όπως ενδεικτικά φαίνεται στη φωτογραφία. Αντιπροσωπευτικά, ο λυγισμός σιδηροτροχιών σε κατακόρυφο επίπεδο («εντός επιπέδου» όπως κοινά αναφέρεται) μελετήθηκε από τον Kerr (1974) και τους Kerr και Al-Aini (1978). Στην πρώτη από τις εργασίες αυτές, που περιείχε και ανασκόπηση προηγούμενων σχετικών εργασιών αλλά και πειραματικών αποτελεσμάτων, αποκαλύφθηκε ότι οι μέχρι τότε έρευνες επί του φαινομένου μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές ομάδες. Στην μια οι συγγραφείς υπέθεσαν ότι η σιδηροτροχιά είναι μια ελαστική δοκός με συνεχή έδραση επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, πριν αλλά και κατά τον λυγισμό. Στην άλλη ομάδα, υποτέθηκε ότι η τροχιά είναι μια δοκός ομοιόμορφου βάρους, που κείται επί άκαμπτου υποστρώματος, και ότι λυγισμός λαμβάνει χώραν όταν μέρος της δοκού ανυψώνεται από το υπόστρωμα. Στη δεύτερη από τις παραπάνω αναφερθείσες εργασίες, παρουσιάστηκε ανάλυση για τον προσδιορισμό του εύρους της «ασφαλούς» θερμοκρασιακής αύξησης για την αποφυγή λυγισμού σε κατακόρυφο επίπεδο. Η όλη μη γραμμική διατύπωση του προβλήματος βασίστηκε στη θεωρία ελαστικότητας, στην αρχή των δυνατών μετατοπίσεων και στο λογισμό των μεταβολών για την εύρεση των συνθηκών συμβατότητας. Δείχτηκε δε ότι ορισμένοι έντονα μη γραμμικοί όροι μπορεί να αμεληθούν, χωρίς επιρροή στα τελικά αποτελέσματα, με αποτέλεσμα να παραχθούν λύσεις κλειστής μορφής.

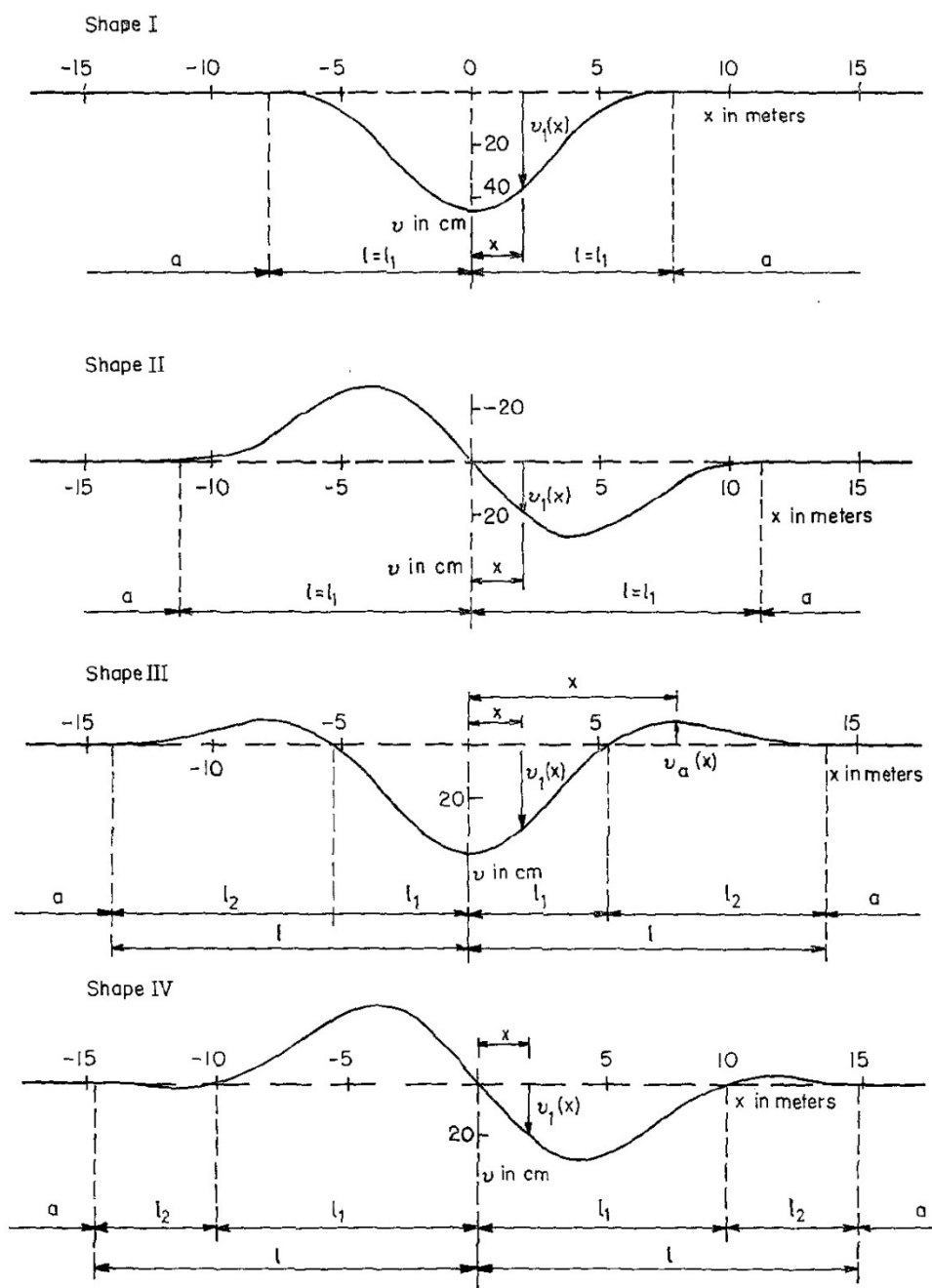
Λόγω της συχνότητας εμφάνισης του φαινομένου σε πραγματικές σιδηροτροχιές, ο εκτός επιπέδου (πλευρικός, σε οριζόντιο επίπεδο) λυγισμός τους έχει αποτελέσει αντικείμενο πολύ περισσότερων εργασιών, και συνήθως λαμβάνει χώραν όταν το σύστημα τροχιών – συνδέσμων αλλά και το έρμα δεν προσδίδουν επαρκή πλευρική αντίσταση για να το αποτρέψουν. Μια άκρως ενδιαφέρουσα

εργασία, που σε μεγάλο βαθμό απετέλεσε σημαντικό έναυσμα για πρακτικές εφαρμογές της Σιδηροδρομικής, είναι αυτή του Kerr (1978), που βελτιώθηκε και επεκτάθηκε αργότερα (Kerr 1980, Grissom και Kerr 2006). Αφορά ανάλυση του πλευρικού λυγισμού (σε οριζόντιο επίπεδο) ΣΣΣ λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών με σκοπό τον υπολογισμό της ασφαλούς αύξησης της θερμοκρασίας προς αποφυγή του φαινομένου αυτού. Σύμφωνα με τις εργασίες αυτές, η παρατηρηθείσα εκτός επιπέδου παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού μιας ευθύγραμμης σιδηροδρομικής γραμμής (δηλ. δύο παράλληλων σιδηροτροχιών) αποτελείται από μια λυγισμένη μορφή (μήκους $2l$ σύμφωνα με το Σχήμα 2.18α), που υπόκειται σε μεγάλες πλευρικές παραμορφώσεις και σε δύο εκατέρωθεν παρακείμενες περιοχές, οι οποίες φαίνεται να παραμορφώνονται μόνο αξονικά. Στη παραμορφωμένη λόγω λυγισμού περιοχή, απελευθερώνεται ένα ποσοστό της απαγορευμένης θερμικής διαστολής, που έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του αξονικού φορτίου σε N_{tr} , που γενικά θεωρείται σταθερή. Στις παρακείμενες περιοχές, λόγω της αντίστασης του έρματος σε αξονικές παραμορφώσεις, η αξονική δύναμη N παύει να είναι σταθερή ($N_{tr} \leq N \leq N_t$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.18β,γ. Κατά συνέπεια, ο θερμοκρασιακού αιτίου πλευρικός λυγισμός μιας μεγάλου μήκους ευθύγραμμης τροχιάς φαίνεται ότι είναι ένα *τοπικό φαινόμενο* (Tvergaard και Needleman 1981).



Σχήμα 2.18. Κατανομή αξονικών θλιπτικών δυνάμεων πριν και μετά το λυγισμό (σημειωτέον ότι σε πραγματικές τροχιές η διάσταση a είναι πολλές φορές μεγαλύτερη της διάστασης $2l$)

Με βάση ενεργειακή ανάλυση και με διαδικασίες του λογισμού των μεταβολών, μελετήθηκαν τέσσερις πιθανές μορφές πλευρικού λυγισμού, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 2.19. Βρέθηκε ότι η 2^η μορφή λυγισμού είναι αυτή που δίνει τις ακριβέστερες προσεγγίσεις της ασφαλούς (αποδεκτής) θερμοκρασιακής μεταβολής (Kerr 1978), με βάση τα χαρακτηριστικά του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας (ποιοτικά ως Σχήμα 2.17).



Σχήμα 2.19. Οι τέσσερις μορφές πλευρικού λυγισμού που μελετήθηκαν (Kerr 1978)

Πιο εξευγενισμένα δισδιάστατα και τρισδιάστατα μοντέλα προσομοίωσης του εν λόγω φαινομένου έχουν επίσης αναφερθεί (El-Ghazaly et al. 1991, Van 1996, Li and Batra 2007, Lim et. al 2003, 2008, Nafis Ahmad et al. 2009) ενώ σε επίπεδο εφαρμογής έχει παραχθεί μια πλειάδα εργασιών που αφορά την κατανόηση του φαινομένου. Οι σχετικές δημοσιεύσεις που προέρχονται από τις ΗΠΑ (Volpe Center 2003) περιέχονται στην παράγραφο Α.1 του Παραρτήματος Α , ενώ στη συνέχεια παρατίθενται συνοπτικά και οι σχετικές δραστηριότητες και το παραχθέν θεωρητικό και πρακτικό αποτέλεσμα σε Ευρωπαϊκό επίπεδο.

Η ραγδαία ανάπτυξη της χρήσης των ΣΣΣ στους Ευρωπαϊκούς Σιδηρόδρομους οδήγησε στην χρηματοδότηση υλοποίηση ενός σημαντικότερου Προγράμματος, με σκοπό την κατανόηση της συμπεριφοράς των ΣΣΣ σε φάση ασφαλούς λειτουργίας, και την παραγωγή κανόνων εφαρμογής για την αποφυγή ανεπιθύμητων φαινομένων λυγισμού λόγω (εκτός άλλων αιτιών) θερμοκρασιακών μεταβολών, τόσο κατά την εγκατάσταση, όσο και κατά την συντήρηση σε βάθος χρόνου. Το πρόγραμμα αυτό οδήγησε στην υλοποίηση και δραστηριοποίηση του Ευρωπαϊκού Ινστιτούτου Έρευνας Σιδηροδρόμων (ERRI, European Rail Research Institute), με έδρα την Ολλανδία, του οποίου οι δραστηριότητες τερματίστηκαν επίσημα τις 30 Ιουνίου του 2004. Παρόλη την ομολογουμένως δύσκολη (ως αδύνατη) προσβασιμότητα των επιστημονικών και πρακτικών αποτελεσμάτων των ερευνών του ERRI, που οδήγησαν επίσης και σε εξειδικευμένο (εμπορικό) λογισμικό, στην παράγραφο Α.2 του Παραρτήματος Α μνημονεύονται δύο επιστημονικές εκθέσεις, το περιεχόμενο των οποίων, όπως άλλωστε και του μέγιστου μέρους της τρέχουσας ενότητας, απέχει κατά πολύ από τους σκοπούς του Πονήματος.

Τέλος, αξιοσημείωτο είναι και το έργο που έχει παραχθεί στην Πολωνία με επικεφαλής ερευνητή τον καθηγητή Roman Bogacz, για θέματα δυναμικής και ευστάθειας αλληλεπίδρασης σιδηροδρόμου και τροχιάς, για προβλήματα επαφής και προσομοίωσης αυτών κλπ. Το σύνολο των δημοσιεύσεων μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα www.ippt.gov.pl/~rbogacz/rbogacz1.html, μερικές των οποίων παρατίθενται ενδεικτικά στην παράγραφο Α.3 του Παραρτήματος Α.

Κεφάλαιο 3

Δοκοί – Στύλοι επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler: Συζευγμένες καταστάσεις αστάθειας και προσομοίωση αλληλεπίδρασης θεμελιωδών μορφών λυγισμού

3.1 Εισαγωγή

Παρόλο που έχουν δημοσιευθεί αρκετές εργασίες σχετικά με την συμπεριφορά σε λυγισμό αξονικά θλιβόμενων δοκών επί ελαστικού εδάφους τύπου Winkler, σύμφωνα και με τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 2, καμιά από αυτές δεν αναφέρεται σε καταστάσεις συζευγμένων μορφών σε περιπτώσεις καθολικού λυγισμού. Σε μια τέτοια περίπτωση για το ίδιο κρίσιμο φορτίο αντιστοιχούν διαφορετικής τάξης μορφές, οπότε υφίσταται ο κίνδυνος απότομης ποιοτικής αλλαγής της απόκρισης, η οποία χαρακτηρίζεται από το λεγόμενο *άλμα μορφών* (*mode jumping*), δηλαδή από ανεπιθύμητη (και εν πολλοίς μη αναμενόμενη) μετάβαση σε παραμορφωμένη κατάσταση υψηλότερης τάξης. Λόγω του γεγονότος αυτού, στο τρέχον Κεφάλαιο πραγματοποιείται:

- Θεωρητική ανάλυση της αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού καθώς και των συζευγμένων μορφών αστάθειας που συνδέονται με μια δοκό – στύλο επί θεμελίωσης τύπου Winkler, με βάση την αρμονική ανάλυση, και
- Προσομοίωση αυτών των φαινομένων συζευγμένων μορφών αστάθειας (coupled instabilities) των δύο πρώτων κανονικών μορφών μέσω ενός διβάθμιου μη γραμμικού μοντέλου με κυβικές μη γραμμικότητες. Μετά από πλήρως μη γραμμική ενεργειακή προσέγγιση και εύρεση των κρίσιμων καταστάσεων και της ευστάθειας αυτών, συσχέτιση των υπεισερχόμενων παραμέτρων με την πραγματική κατασκευή και παραγωγή άμεσων κανόνων απλουστευμένης διαδικασίας σχεδιασμού, χωρίς την ανάγκη ενασχόλησης με το αρχικό προσομοίωμα.

3.2 Δοκός – στύλος επί θεμελίωσης τύπου Winkler:

Ειδικές Λύσεις Συζευγμένων Μορφών Αστάθειας

3.2.1 Γενική περιγραφή

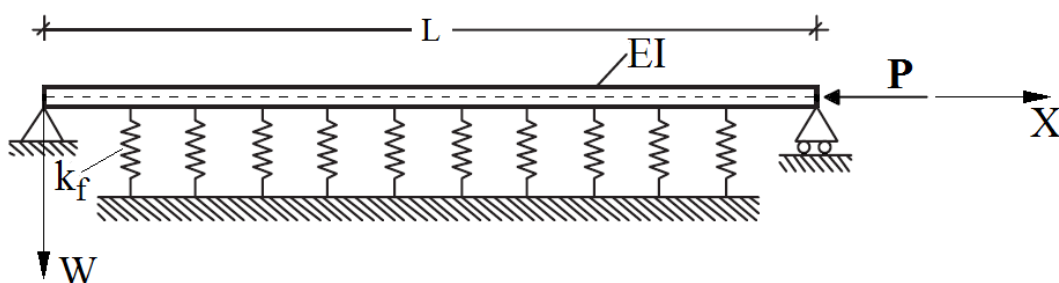
Θεωρούμε μια μεταλλική δοκό επί ελαστικών στηρίξεων μήκους L , καμπτικής αντίστασης EI , εδραζόμενη κατά μήκος μιας ελαστικής θεμελίωσης τύπου Winkler, και στην οποία ασκείται σταθερό αξονικό θλιπτικό

φορτίο P . Δηλώνοντας ως k_f τη σταθερά εδάφους, ως W το βέλος της δοκού και χρησιμοποιώντας μια «ακριβέστερη» προσέγγιση για την καμπυλότητα της δοκού (Kounadis et al 2006), η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα στην παραμορφωμένη κατάσταση γράφεται σε αδιάστατη μορφή ως εξής:

$$w'''' + \lambda w'' + \mu w = -\frac{1}{2}(w''''w'^2 + 6w''w''w' + 2w''^3) \quad (3.1)$$

όπου $x = \frac{X}{L}$, $w = \frac{W}{L}$, $\lambda = \frac{PL^2}{EI}$, $\mu = \frac{k_f L^4}{EI}$. Για συνθήκες απλής στήριξης, όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 3.1, οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$-EIw''(1 + \frac{1}{2}w'^2) = 0 \text{ για } x = 0, 1 \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.1. Απλά στηριζόμενη δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης τύπου Winkler

Οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) περιγράφουν ένα σημαντικά μη γραμμικό, πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων, που αναλύεται ως ακολούθως.

3.2.2 Γραμμική ανάλυση καθολικού λυγισμού

Για μικρές τιμές του βέλους w οι μη γραμμικοί όροι στην εξίσωση (3.1) μπορούν να αμεληθούν, οπότε αυτή γράφεται ως

$$w'''' + \lambda w'' + \mu w = 0 \quad (3.3)$$

Αναζητώντας μια λύση της μορφής $w = Ae^{\rho x}$ καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση

$$\rho^4 + \lambda \rho^2 + \mu = 0 \quad (3.4)$$

η οποία για $\lambda \geq 2\sqrt{\mu}$ επιδέχεται δύο ζεύγη φανταστικών λύσεων

$$\rho_{1,2} = \pm ik, \quad \rho_{3,4} = \pm i\bar{k}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.5)$$

με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$k = \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \mu}}, \quad \bar{k} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \mu}} \quad (3.6a)$$

$$\bar{k}^2 - k^2 = 2\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu} \geq 0, \quad \bar{k}^2 k^2 = \mu, \quad \frac{k}{\bar{k}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\mu}} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu} - 1} \quad (3.6\beta)$$

Πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι τα k, \bar{k} είναι ανεξάρτητα των συνοριακών συνθηκών. Κατά συνέπεια για $\lambda \geq 2\sqrt{\mu}$ υφίστανται δύο περιοδικές (αρμονικές) λύσεις της γραμμικοποιημένης εξίσωσης (3.3). Αν ο λόγος των μηκών κύματος είναι ρητός αριθμός, τότε προκύπτει *διαμορφωμένη (modulated) περιοδικότητα*, ενώ σε διαφορετική περίπτωση θα προκύψει οιονεί περιοδικότητα. Η γενική λύση της εξίσωσης (3.3) είναι:

$$w = q_m \sin kx + q_n \sin \bar{k}x + \bar{q}_m \cos kx + \bar{q}_n \cos \bar{k}x \quad (3.7)$$

όπου $q_m, q_n, \bar{q}_m, \bar{q}_n$ αδιάστατες σταθερές που προσδιορίζονται βάσει των συνοριακών συνθηκών.

Για την περίπτωση της αμφιέριστης ασυμπίεστης δοκού οι συνοριακές συνθήκες είναι $w(0) = w''(0) = w(1) = w''(1) = 0$, οπότε μόνο δύο ημιτονοειδείς όροι (q_m και q_n) εμφανίζονται στην (3.7) και η εξίσωση λυγισμού έχει τη λύση

$$(\bar{k}^2 - k^2) \sin k \sin \bar{k} = 0 \quad (3.8)$$

Επειδή $\bar{k}^2 - k^2 \neq 0$ έπεται ότι, πλην της τετριμμένης λύσης $q_m = q_n = 0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \text{Αν } q_n &= 0 \Rightarrow \sin k = 0 \Rightarrow k = m\pi, \quad m \in \mathbf{N} \\ \text{Αν } q_m &= 0 \Rightarrow \sin \bar{k} = 0 \Rightarrow \bar{k} = n\pi, \quad n \in \mathbf{N} \\ \text{Αν } q_m q_n &\neq 0 \Rightarrow \sin k \sin \bar{k} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Η τελευταία των εξισώσεων (3.9) έχει επίσης λύση της μορφής $\sin k = \sin \bar{k} = 0$, η οποία ισοδυναμεί με $k = m\pi$ και $\bar{k} = n\pi$, όπου m και n φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι δίδουν το πλήθος των ημικυμάτων της μορφής λυγισμού της ράβδου επί του ελαστικού εδάφους. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις συνεπάγονται λύσεις της μορφής $w = q_m \sin \pi x$ (Kounadis et al. 2006), δηλαδή απλής ημιτονοειδούς κυματομορφής. Η 3^η περίπτωση συνεπάγεται σύζευξη δύο ημιτονοειδών κυματομορφών, με διαφορετικά μήκη κύματος αλλά υπό την προϋπόθεση ο λόγος τους να είναι ρητός αριθμός. Πράγματι, αν οι δύο μορφές έχουν m και n ημικύματα επί του αδιαστατοποιημένου μήκους της ράβδου 1, τα μήκη κύματος είναι αντίστοιχα

$2/m$ και $2/n$, οπότε θα ισχύει ότι $k/\bar{k} = m/n$. Επομένως, στην περίπτωση της αμφιέριστης ράβδου, αντίθετα με την περίπτωση άλλων συνοριακών συνθηκών, είναι αδύνατη η ύπαρξη οιονεί περιοδικότητας, η οποία σχετίζεται με άρρητο τον λόγο των μηκών κύματος. Επιλύοντας την χαρακτηριστική εξίσωση (3.4) για $\rho = m\pi$, προκύπτει ότι:

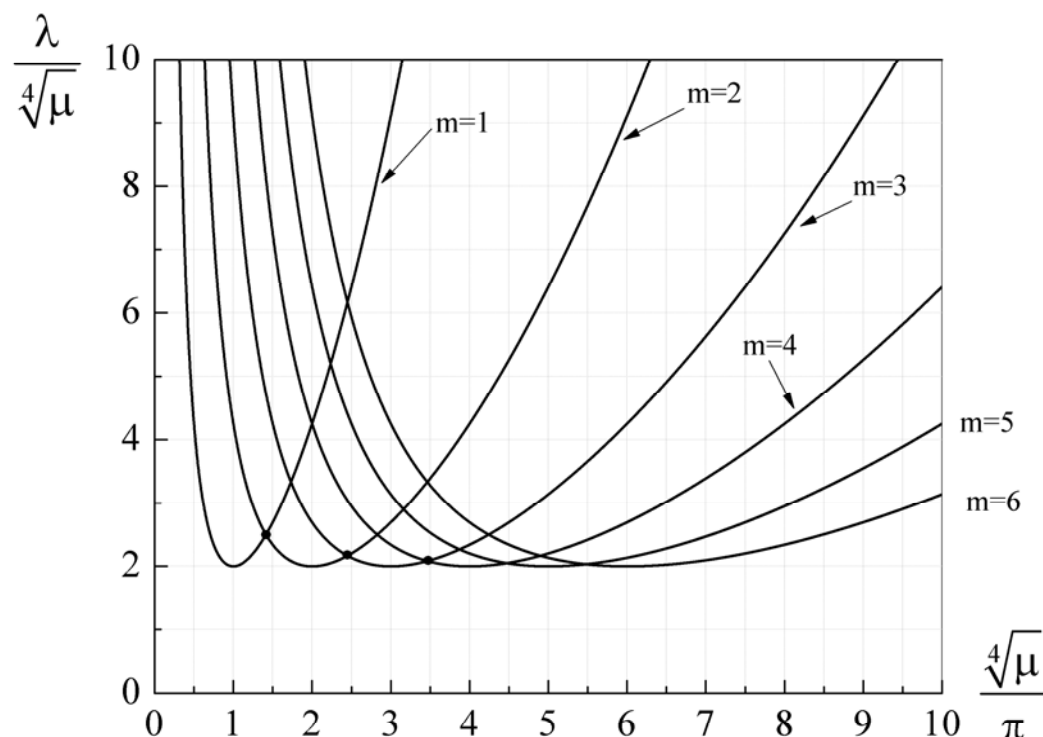
$$\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} = \frac{m^2 \pi^2}{\sqrt{\mu}} + \frac{\sqrt{\mu}}{m^2 \pi^2} = \left(\frac{m\pi}{\sqrt[4]{\mu}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{\mu}}{m\pi} \right)^2 \quad (3.10)$$

όπου $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} = \frac{Pl^2/EI}{\sqrt{K_f l^4/EI}} = \frac{P}{\sqrt{K_f/EI}}$ είναι η παράμετρος του φορτίου και

$\frac{\sqrt[4]{\mu}}{\pi} = \frac{\sqrt[4]{K_f l^4/EI}}{\pi} = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{K_f/EI}$ η παράμετρος του μήκους. Σχεδιάζοντας τη γραφική

παράσταση $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ ως προς $\frac{\sqrt[4]{\mu}}{\pi}$ για διάφορες τιμές του m καταλήγουμε στις καμπύλες

του Σχήματος 3.2, γνωστές και από τον γραμμικό λυγισμό των πλακών.



Σχήμα 3.2. Καμπύλες των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Οι τελείες δίνουν τα κρίσιμα σημεία για λύσεις που περιέχουν 1 και 2, 2 και 3, όπως και 3 και 4 ημικύματα

Προφανώς στην γενική περίπτωση η κρίσιμη κατάσταση είναι διακριτή, εκτός από τις τομές δύο m -καμπυλών, όπου εμφανίζεται ένα σύνθετο σημείο διακλάδωσης (Sophianopoulos et al 2008). Αυτό συμβαίνει μόνο εάν $\frac{\sqrt[4]{\mu}}{\pi} = \sqrt{mn}$, με τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία ίσα με $\frac{\lambda_m}{\sqrt{\mu}} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu}} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$, όπου η (3.7) διαθέτει λύσεις που περιέχουν συζευγμένες ημιτονοειδείς κυματομορφές. Για την απλά εδραζόμενη δοκό η κατάσταση αυτή συνδέεται με $n = m + 1$. Καθόσον η γενική περίπτωση των μη συζευγμένων κυματομορφών έχει αντιμετωπιστεί στη βιβλιογραφία, το παρόν πόνημα επικεντρώνεται στο ειδικό φαινόμενο των συζευγμένων κυματομορφών.

3.2.3 Μη γραμμική έκφραση της ενέργειας – Αρμονική ανάλυση

Όλες οι πιθανές καταστάσεις ισορροπίας μιας αμφιέρειστης δοκού στην μη γραμμική περιοχή, μπορούν να αντιμετωπιστούν μέσω της έκφρασης του βέλους με την χρησιμοποίηση σειρών Fourier της μορφής

$$w = \sum_{a=1}^{\infty} q_a \sin a\pi x = q_a \sin a\pi x \quad (3.11)$$

στην οποία χρησιμοποιείται η σύμβαση άθροισης κατά Einstein με $a \in \mathbb{N}$. Παραγωγίζοντας την (3.11) ως x προς προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$w_{,x} = q_a a\pi \cos a\pi x \quad (3.12\alpha)$$

$$w_{,xx} = -q_a a^2 \pi^2 \sin a\pi x \quad (3.12\beta)$$

$$w_{,x}^2 = q_a q_b ab\pi^2 \cos a\pi x \cos b\pi x \quad (3.12\gamma)$$

$$w_{,x}^4 = q_a q_b q_c q_d abcd\pi^4 \cos a\pi x \cos b\pi x \cos c\pi x \cos d\pi x \quad (3.12\delta)$$

$$w^2 = q_a q_b \sin a\pi x \sin b\pi x \quad (3.12\epsilon)$$

$$w_{,xx}^2 = q_a q_b a^2 b^2 \pi^4 \sin a\pi x \sin b\pi x \quad (3.12\sigma\tau)$$

$$w_{,xx}^2 w_{,x}^2 = q_a q_b q_c q_d a^2 b^2 cd\pi^6 \sin a\pi x \sin b\pi x \cos c\pi x \cos d\pi x \quad (3.12\zeta)$$

$$w_{,xx}^2 w_{,x}^4 = q_a q_b q_c q_d q_e q_f a^2 b^2 cdef\pi^8 \sin a\pi x \sin b\pi x \cos c\pi x \cos d\pi x \cos e\pi x \cos f\pi x \quad (3.12\eta)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το ενεργειακό δυναμικό στην απαραμόρφωτη κατάσταση, προκύπτει αλγεβρική συνάρτηση της μορφής:

$$V(q_a, \lambda) \equiv U - \lambda\Omega = \frac{1}{2!} U_{,ab}(0) q_a q_b + \frac{1}{4!} U_{,abcd}(0) q_a q_b q_c q_d + \frac{1}{6!} U_{,abcdef}(0) q_a q_b q_c q_d q_e q_f - \frac{\lambda}{2!} \Omega_{,ab}(0) q_a q_b \quad (3.13)$$

όπου U η ελαστική ενέργεια και Ω το έργο της εξωτερικής φόρτισης. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.12α-η) προκύπτει

$$U_{,ab}(0) = 0 \text{ για } a \neq b, U_{,aa}(0) = \frac{EI}{2l}(a^4\pi^4 + \mu) \text{ για } a = b, \quad (3.14\alpha)$$

$$\Omega_{,ab}(0) = 0 \text{ για } a \neq b, \Omega_{,aa}(0) = \frac{EI}{2l}a^2\pi^2 \text{ για } a = b, \quad (3.14\beta)$$

$$U_{,abcd} = \frac{12EI\pi^6}{l} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} a^2b^2cdq_aq_bq_cq_d \int_0^1 \sin a\pi x \sin b\pi x \cos c\pi x \cos d\pi x dx \quad (3.14\gamma)$$

$$U_{,abcdef} = \frac{90EI\pi^8}{l} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \sum_{f=1}^{\infty} a^2b^2cdefq_aq_bq_cq_dq_eq_f \times \int_0^1 \sin a\pi x \sin b\pi x \cos c\pi x \cos d\pi x \cos e\pi x \cos f\pi x dx \quad (3.14\delta)$$

Τελικώς, παρατηρούμε ότι οι τετραγωνικές μορφές $U_{,ab}$ και $\Omega_{,ab}$ είναι διαγώνιες μορφές. Κατά συνέπεια οι αρμονικές Fourier παριστάνουν τις ιδιομορφές λυγισμού της δοκού. Τα κρίσιμα φορτία προκύπτουν από τη σχέση:

$$U_{,aa} - \lambda\Omega_{,aa} = \frac{EI}{2l}(a^4\pi^4 - \lambda a^2\pi^2 + \mu) = 0 \quad (3.15)$$

$$\text{με } \lambda_{cr} = m^2\pi^2 + \frac{\mu}{m^2\pi^2} \text{ (1}^\circ \text{ φορτίο λυγισμού με } a=m)$$

Αναπτύσσοντας την (3.15) σε σειρά Taylor περί την κρίσιμη κατάσταση ισορροπίας $(\lambda_{cr}, 0)$ λαμβάνουμε:

$$W = \frac{1}{2!}(U_{,aa} - \lambda_{cr}\Omega_{,aa})q_a^2 + \frac{1}{4!}U_{,abcd}q_aq_bq_cq_d + \frac{1}{6!}U_{,abcdef}q_aq_bq_cq_dq_eq_f - \frac{\lambda - \lambda_{cr}}{2!}\Omega_{,aa}q_a^2 \quad (3.16)$$

οι παράγωγοι ισούνται:

$$W_{,ab}^c = U_{,ab}(0) - \lambda_{cr}\Omega_{,ab}(0) = 0 \text{ για } a \neq b, W_{,mm}^c = U_{,mm}(0) - \lambda_{cr}\Omega_{,mm}(0) = 0 \quad (3.17\alpha,\beta)$$

$$W_{,aa}^c = U_{,aa}(0) - \lambda_{cr}\Omega_{,aa}(0) = \frac{EI}{2l}(a^4\pi^4 + \frac{\mu}{\pi^4})(1 - \frac{a^2}{m^2}) \text{ για } a \neq m \quad (3.17\gamma)$$

$$W_{,ab}^{'c} = -\Omega_{,ab}(0) = 0 \text{ για } a \neq b, W_{,mm}^{'c} = -\Omega_{,mm}(0) = -\frac{EI}{2l}m^2\pi^2 \quad (3.17\delta,\epsilon)$$

$$W_{,aaaa}^c = \frac{3EI}{2l}a^6\pi^6, W_{,baaa}^c = 0 \text{ για } b \neq 3a, W_{,baaa}^c = \frac{27EI}{2l}a^6\pi^6 \text{ για } b = 3a \quad (3.17\sigma\tau,\zeta)$$

$$W_{,bbaa}^c = 3EIa^2b^4\pi^6, W_{,cbaa}^c = -\frac{3EI}{2l}a^2b^2(2a-b)^2 \text{ για } c = 2a-b > 0 \quad (3.17\eta,\theta)$$

$$W_{,cbaa}^c = \frac{3EI}{2l}a^2b^2(2a+b)^2 \text{ για } c = 2a+b \quad (3.17\iota)$$

$$W_{,cbaa}^c = \frac{3EI}{2l} a^2 b^2 (2a-b)^2 \text{ για } c = -2a + b > 0 \quad (3.17\kappa)$$

$$W_{,cbba}^c = -\frac{3EI}{2l} ab^3 (a-2b)^2 \text{ για } c = a - 2b > 0 \quad (3.17\lambda)$$

$$W_{,cbba}^c = \frac{3EI}{2l} ab^3 (a+2b)^2 \text{ για } c = a + 2b \quad (3.17\mu)$$

$$W_{,cbba}^c = \frac{3EI}{2l} ab^3 (a-2b)^2 \text{ για } c = -a + 2b > 0 \quad (3.17\nu)$$

$$W_{,ccba}^c = -\frac{3EI}{32l} ab(a+b)^4 \text{ για } c = \frac{a+b}{2} \quad (3.17\xi)$$

$$W_{,ccba}^c = \frac{3EI}{32l} ab(a-b)^4 \text{ για } c = \pm \frac{a-b}{2} > 0 \quad (3.17\omicron)$$

$$W_{,dcba}^c = -\frac{3EI}{2l} abc^2 d^2 \text{ για } d = a - b - c \text{ ή } d = a + b - c \text{ ή } d = -a + b - c \quad (3.17\pi)$$

$$W_{,dcba}^c = \frac{3EI}{2l} abc^2 d^2 \text{ για } d = a - b + c \text{ ή } d = a + b + c \text{ ή } d = -a - b + c \quad (3.17\rho)$$

$$W_{,aaaaa}^c = \frac{45}{8l} a^8 \pi^8, W_{,baaaaa}^c = \frac{135}{16l} a^6 b^2 \pi^8 \text{ για } b = 3a \quad (3.17\sigma)$$

$$W_{,baaaaa}^c = \frac{45}{16l} a^6 b^2 \pi^8 \text{ για } b = 5a \quad (3.17\tau)$$

Σε όλες τις άνω εκφράσεις το κόμμα συμβολίζει παραγωγή ως προς λ . Δεδομένου ότι οι κυβικοί και οι 5^{ης} τάξης όροι αμελούνται, η τετραγωνική μορφή W διαγωνοποιείται. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει όρος ενέργειας που να περιλαμβάνει περισσότερες από έξι διαφορετικές συνιστώσες και κάθε ειδικού ενδιαφέροντος (εκτοβάθμιος) όρος μπορεί να προσδιοριστεί σαν άθροισμα έξι κυμάτων:

$$w = q_m \sin m\pi x + q_n \sin n\pi x + q_p \sin p\pi x + q_r \sin r\pi x + q_s \sin s\pi x + q_t \sin t\pi x \quad (3.18)$$

όπου $m, n, p, r, s, t \in \mathbf{N}$, για τους οποίους υποθέτουμε $m < n < p < r < s < t$. Η πλήρης ενεργειακή συνάρτηση για το σύνολο των όρων των σχέσεων (3.17) μπορεί συνεπώς να δομηθεί από διαφορετικά σύνολα έξι κυμάτων. Τούτο σημαίνει ότι υφίσταται η πιθανότητα σύζευξης όλων των δυνατών συνδυασμών 1^{ης} έως 6^{ης} μορφής, που απαντάται για πρώτη φορά για πλήρως γραμμική θεμελίωση Winkler, ενώ – όπως έχει ήδη αναφερθεί – κάτι τέτοιο έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία μόνο για μη γραμμικά ελαστική προσομοίωση εδαφικού στρώματος.

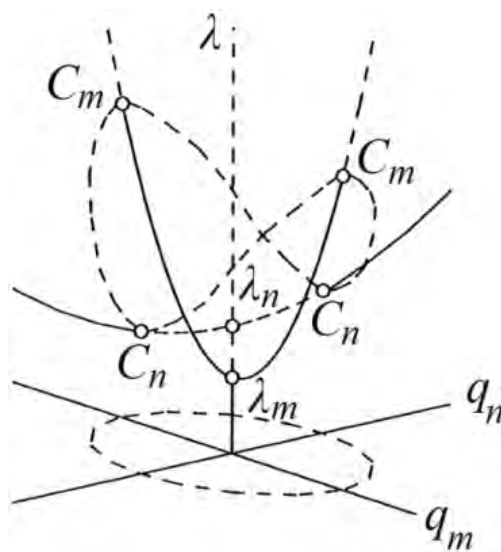
3.2.4 Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Μετά την θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε, χρησιμοποιήθηκε διαδικασία παρόμοια με αυτή των Hunt και Everall (1999) για την μάλλον απλή περίπτωση, όπου η λύση ισορροπίας περιέχει τις ακόλουθες δύο μορφές:

$$w = q_m \sin m\pi x + q_n \sin n\pi x \quad (3.19)$$

όπου $m < n$ βρίσκεται στη «γειτονία» του σημείου διακλάδωσης του Σχήματος 3.2, που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση των $m = 3$ και $n = 4$ ημικυμάτων.

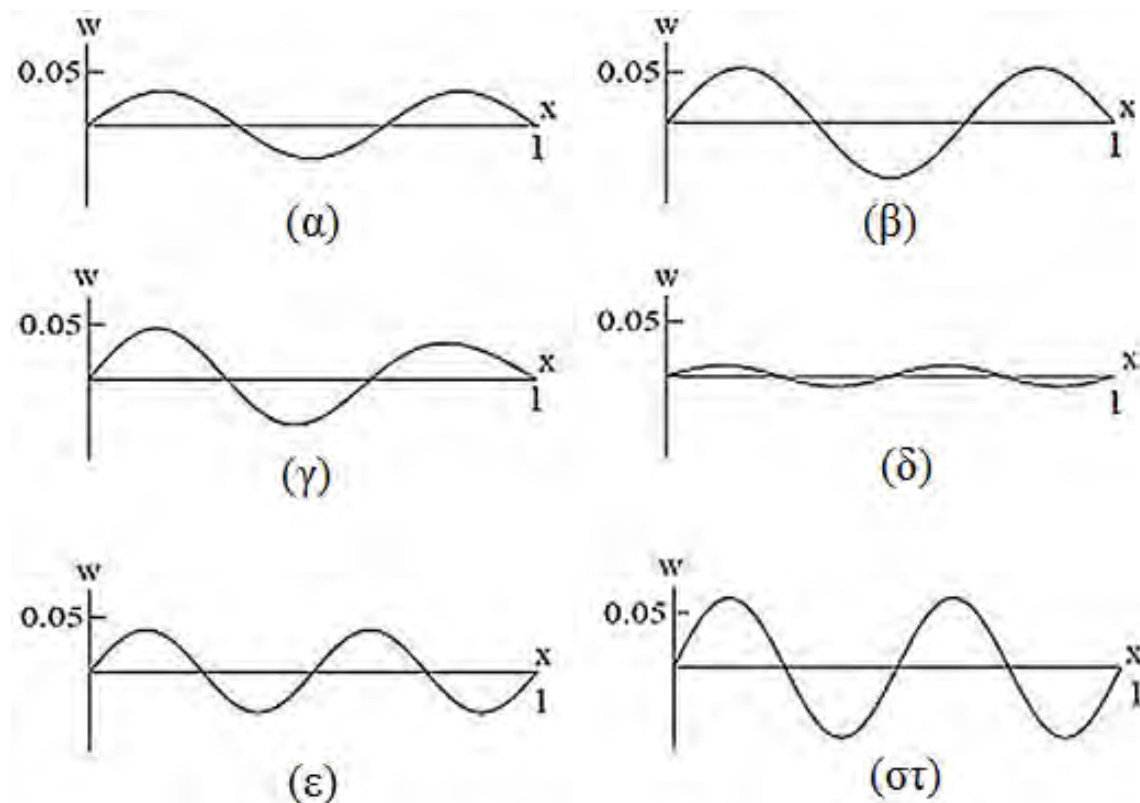
Χρησιμοποιώντας τις q_m και q_n ως γενικευμένες συντεταγμένες, αποκτήθηκε η τρισδιάστατη απεικόνιση των δρόμων ισορροπίας όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.3, που βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με σχετικά αποτελέσματα στη βιβλιογραφία (Hunt and Everall, 2000). Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν το καθιερωμένο πρόγραμμα διακλαδώσεων και προβλημάτων συνέχειας *AUTO* (Doedel 2011).



Σχήμα 3.3. Δρόμοι ισορροπίας για $m = 3$, $n = 4$. Με συμπαγείς γραμμές απεικονίζονται οι ευσταθείς και με διακεκομμένες οι ασταθείς δρόμοι

Ο λυγισμός σε $m = 3$ ημικύματα λαμβάνει χώρα στο κρίσιμο φορτίο λ_m , όπου το σύστημα ακολουθεί τον ευσταθή μη συζευγμένο δρόμο ισορροπίας ($q_n = 0$). Ο μη συζευγμένος δρόμος ισορροπίας $n = 4$ ημικυμάτων τέμνει τον θεμελιώδη δρόμο ισορροπίας στο σημείο $\lambda_n > \lambda_m$, όντας για αυτό το λόγο αρχικά μη ευσταθής σε σχέση με το q_m . Ένας συζευγμένος δρόμος ισορροπίας με q_m και q_n μη μηδενικά, τέμνει τον ανώτερο και τον κατώτερο μη συζευγμένο δρόμο στα

δευτερεύοντα διακλαδικά σημεία C_m και C_n αντίστοιχα, και η προβολή του στο επίπεδο βάσης (q_m, q_n) είναι ένας κλειστός βρόγχος. Ο κάτω μη συζευγμένος δρόμος ισορροπίας χάνει έτσι την ευστάθεια στο C_m , όπου υπό συνθήκες μόνιμων φορτίων, συμβαίνει ένα απότομο άλμα προς τον ανώτερο μη συζευγμένο δρόμο ισορροπίας ($q_m=0$), που έχει γίνει ευσταθής στο C_n . Αυτή είναι μια κλασική περίπτωση του άλματος των μορφών λυγισμού $m=3$ σε $n=4$ ημικύματα. Λύσεις που προέκυψαν σε διαφορετικές θέσεις του Σχήματος 3.3 φαίνονται στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4. Λύσεις σε διαφορετικές περιοχές του Σχήματος 3.3: (α) 1^{ος} ευσταθής δρόμος ισορροπίας, (β) C_m , (γ) ασταθής δρόμος ισορροπίας μεταξύ C_m και C_n , (δ) C_n , (ε), (στ) 2^{ος} ευσταθής δρόμος ισορροπίας

3.3 Προσομοίωση αλληλεπίδρασης θεμελιωδών μορφών

3.3.1 Γενικά στοιχεία

Σύμφωνα με τα ανωτέρω υφίσταται συνεπώς η πιθανότητα σύζευξης μορφών λυγισμού ακόμα και για την απλή περίπτωση δοκού επί γραμμικά ελαστικού εδάφους. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η προσομοίωση της 1:2 σύζευξης μορφών λυγισμού (θεμελιωδών) μέσω ενός μηχανικού μοντέλου δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς αρχικές ατέλειες, με βάση το σκεπτικό της εργασίας των Kounadis et al (2006), για το οποίο έγινε ήδη αναφορά στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Μετά από διεξοδική ανάλυση της συμπεριφοράς σε λυγισμό του μοντέλου και εύρεση των συνθηκών υπό τις οποίες τούτο παρουσιάζει σύζευξη μορφών, τα βασικά του χαρακτηριστικά συσχετίζονται με αυτά της δοκού επί ελαστικού εδάφους μέσω ενεργειακής προσέγγισης και χρήσης συμβολικών μαθηματικών (Sophianopoulos και Papachristou 2010).

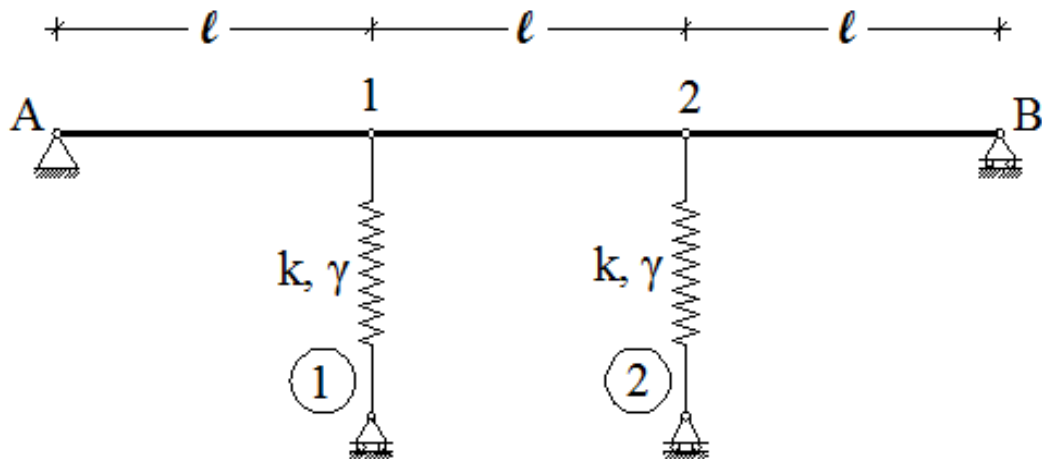
3.3.2 Περιγραφή του προτεινόμενου διβάθμιου μοντέλου

Θεωρούμε το αρχικά τέλει μοντέλο δύο βαθμών ελευθερίας, η απαραμόρφωτη γεωμετρία του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 3.5. Αποτελείται από τρεις αβαρείς ράβδους (άκαμπτους συνδέσμους) ίδιου μήκους ℓ , που συνδέονται με αρθρώσεις μεταξύ τους (χωρίς τριβή), οι οποίες στηρίζονται επί μη γραμμικών ελαστικών ελατηρίων κυβικής μη γραμμικότητας). Τα ελατήρια αυτά, το άλλο άκρο των οποίων δύναται να ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια διεύθυνση, χαρακτηρίζονται από δύο παραμέτρους δυσκαμψίας k και γ , οπότε η αντίδραση ενός εκάστου ισούται με

$$F = kx + \gamma x^3 \quad (3.20)$$

όπου x η αλλαγή του μήκους τους. Η παράμετρος k είναι πάντοτε θετική ενώ η γ μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική, που σημαίνει ελατήρια «σκληρού» ή «μαλακού» τύπου αντίστοιχα.

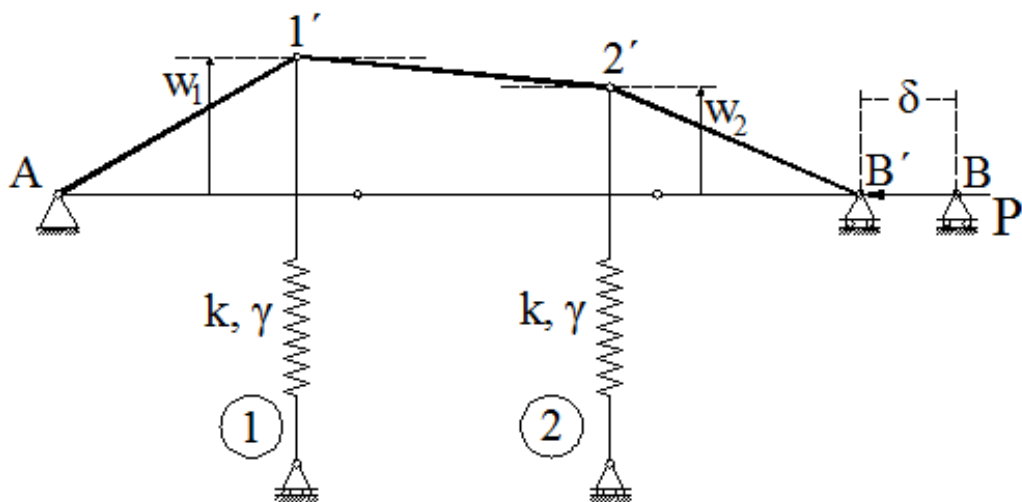
Η επιλογή κυβικής μη γραμμικότητας σύμφωνα με την (3.20) για τον νόμο που διέπει την αντίδραση των ελατηρίων έγινε με γνώμονα το γεγονός ότι η εισαγωγή μιας τέτοιας μορφής μη γραμμικότητας οδηγεί σε συμμετρικά σημεία διακλάδωσης για μονοβάθμια και διβάθμια συστήματα (Kounadis 1987, Varellis and Kounadis 1989, Kounadis et al 2006). Τούτο συνάδει με τη συμπεριφορά του προσομοιωμένου συνεχούς συστήματος της παραγράφου 3.2 του παρόντος Κεφαλαίου, ενώ αν γινόταν επιλογή ελατηρίων τετραγωνικής μη γραμμικότητας, θα οδηγούμεθα σε ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης (Kounadis 1987, Varellis and Kounadis 1989, Gioncu and Ivan 1984) που θα απαγόρευε την αναζητούμενη επιτυχή προσομοίωση.



Σχήμα 3.5. Απαραμόρφωτη γεωμετρία του προτεινόμενου διβάθμιου μοντέλου με ελατήρια κυβικής μη γραμμικότητας

3.3.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Το ως άνω μοντέλο, αν εξασκηθεί στα άκρα του μια σταθερή οριζόντια θλιπτική δύναμη P , θα παραμορφωθεί σύμφωνα με το Σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6. Παραμορφωμένη γεωμετρία του προτεινόμενου μοντέλου λόγω του θλιπτικού φορτίου P

Επιλέγοντας ως γενικευμένες συντεταγμένες τις κατακόρυφες μετατοπίσεις w_1 και w_2 , η συνάρτηση της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος ισούται με:

$$V = U + \Omega \quad (3.21)$$

όπου

$$U = \int_0^{w_1} (kx + \gamma x^3) dx + \int_0^{w_2} (kx + \gamma x^3) dx = \left(k \frac{w_1^2}{2} + \gamma \frac{w_1^4}{4} \right) + \left(k \frac{w_2^2}{2} + \gamma \frac{w_2^4}{4} \right) \quad (3.22)$$

και

$$\Omega = -P\delta = -P \left[3\ell - \sqrt{(\ell^2 - w_1^2)} - \sqrt{(\ell^2 - w_2^2)} - \sqrt{(\ell^2 - (w_2 - w_1)^2)} \right] \quad (3.23)$$

Τελικά, εκ των τριών ανωτέρω σχέσεων λαμβάνουμε

$$V = \left(k \frac{w_1^2}{2} + \gamma \frac{w_1^4}{4} \right) + \left(k \frac{w_2^2}{2} + \gamma \frac{w_2^4}{4} \right) - P \left[3\ell - \sqrt{(\ell^2 - w_1^2)} - \sqrt{(\ell^2 - w_2^2)} - \sqrt{(\ell^2 - (w_2 - w_1)^2)} \right] \quad (3.24)$$

Εισάγοντας τις αδιάστατες παραμέτρους

$$\bar{w}_1 = \frac{w_1}{\ell}, \quad \bar{w}_2 = \frac{w_2}{\ell}, \quad \lambda = \frac{P}{k\ell}, \quad \zeta = \frac{\gamma\ell^2}{k} \quad (3.25)$$

καθώς και τον μετασχηματισμό συντεταγμένων σε συμμετρικές και αντισυμμετρικές παραμορφώσεις της μορφής

$$\bar{w}_1 = w_s + w_a, \quad \bar{w}_2 = w_s - w_a \quad (3.26)$$

το αδιαστατοποιημένο δυναμικό γράφεται ως

$$\bar{V} = w_a^2 + w_s^2 + \frac{1}{2} (w_a^4 + 6w_a^2 w_s^2 + w_s^4) \zeta + \left(-3 + \sqrt{1 - 4w_a^2} + \sqrt{1 - (w_a - w_s)^2} + \sqrt{(-(-1 + w_a + w_s)(1 + w_a + w_s))} \right) \lambda \quad (3.27)$$

Κατά συνέπεια, οι μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν είναι:

$$V_1 = \frac{\partial \bar{V}}{\partial w_s} = 2w_s + \frac{1}{2} (12w_a^2 w_s + 4w_s^3) \zeta + \left(\frac{w_a - w_s}{\sqrt{1 - (w_a - w_s)^2}} + \frac{-2w_a - 2w_s}{2\sqrt{(-(-1 + w_a + w_s)(1 + w_a + w_s))}} \right) \lambda = 0 \quad (3.28)$$

$$V_2 = \frac{\partial \bar{V}}{\partial w_a} = 2w_a + \frac{1}{2} (4w_a^3 + 12w_a w_s^2) \zeta + \left(\frac{-\frac{4w_a}{\sqrt{1 - 4w_a^2}} - \frac{w_a - w_s}{\sqrt{1 - (w_a - w_s)^2}} + \frac{-2w_a - 2w_s}{2\sqrt{(-(-1 + w_a + w_s)(1 + w_a + w_s))}} \right) \lambda = 0 \quad (3.29)$$

ενώ η ορίζουσα ευστάθειας του συστήματος έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \text{Det} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = D \\
& D = 4 \left[\begin{aligned}
& 1 + 6w_a^2\zeta + 6w_s^2\zeta + 9w_a^4\zeta^2 - 18w_a^2w_s^2\zeta^2 + 9w_s^4\zeta^2 \\
& + \left(\frac{2}{(1-4w_a^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s))^{3/2}} \right) \lambda - \frac{6w_a^2\zeta\lambda}{(1-4w_a^2)^{3/2}} \\
& - \frac{3w_a^2\zeta\lambda}{(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}} - \frac{6w_a w_s \zeta \lambda}{(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}} - \frac{6w_s^2\zeta\lambda}{(1-4w_a^2)^{3/2}} \\
& - \frac{3w_s^2\zeta\lambda}{(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}} + \frac{6w_a w_s \sqrt{-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s)}\zeta\lambda}{(-1+w_a+w_s)^2(1+w_a+w_s)^2} \\
& + \frac{3w_a^2(-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s))^{3/2}\zeta\lambda}{(-1+w_a+w_s)^3(1+w_a+w_s)^3} \\
& + \frac{3w_s^2(-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s))^{3/2}\zeta\lambda}{(-1+w_a+w_s)^3(1+w_a+w_s)^3} + \frac{\lambda^2}{(1-4w_a^2)^{3/2}(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}} \\
& + \frac{\lambda^2}{(1-(w_a-w_s)^2)^{3/2}(-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s))^{3/2}} \\
& + \frac{\sqrt{-(-1+w_a+w_s)(1+w_a+w_s)}\lambda^2}{(1-4w_a^2)^{3/2}(-1+w_a+w_s)^2(1+w_a+w_s)^2}
\end{aligned} \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

3.3.4 Ανάλυση λυγισμού για συμμετρική παραμόρφωση

Η θεμελιώδης συμμετρική μορφή παραμόρφωση σχετίζεται με $w_s \neq 0$, $w_a = 0$, οπότε από τις εξισώσεις (3.28) και (3.29) προκύπτει η ακόλουθη αναλυτική έκφραση για τον σχετικό δρόμο ισορροπίας:

$$\lambda^{\text{συμμ}} = \sqrt{1-w_s^2} (1+w_s^2\zeta) \quad (3.31)$$

Ο δρόμος αυτός παρουσιάζει πάντοτε ένα συμμετρικό σημείο διακλάδωσης, οριζόμενο ως C_1 , για φορτίο $\lambda = 1$ (*ανεξάρτητο του ζ*), που προκύπτει αν τεθεί στην (3.31) $w_s = 0$ (δηλαδή στην τομή του δρόμου αυτού με τον τετριμμένο). Στην συνέχεια αναζητούνται συνθήκες για την πιθανή ύπαρξη άλλων τοπικών (ή και καθολικών) μέγιστων ή ελάχιστων της συνάρτησης $\lambda^{\text{συμμ}}$, απαιτώντας τον μηδενισμό της παραγώγου της ως προς w_s . Οι συνθήκες αυτές, προϊόν συμβολικών υπολογισμών στο *Mathematica* είναι:

$$\text{Για } \zeta \geq 0: \left(0 \leq \zeta \leq \frac{1}{2} \wedge w_s = 0 \right) \vee \left(\zeta > \frac{1}{2} \wedge \left(w_s = -\frac{\sqrt{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}}{\sqrt{3}} \vee w_s = 0 \vee w_s = \frac{\sqrt{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}}{\sqrt{3}} \right) \right) \quad (3.32)$$

$$\text{Για } \zeta \leq 0: \left(\zeta < -1 \wedge \left(w_s = -\frac{\sqrt{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}}{\sqrt{3}} \vee w_s = 0 \vee w_s = \frac{\sqrt{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}}{\sqrt{3}} \right) \right) \vee (-1 \leq \zeta \leq 0 \wedge w_s = 0) \quad (3.33)$$

Οι παραπάνω συνθήκες ερμηνεύονται ως εξής:

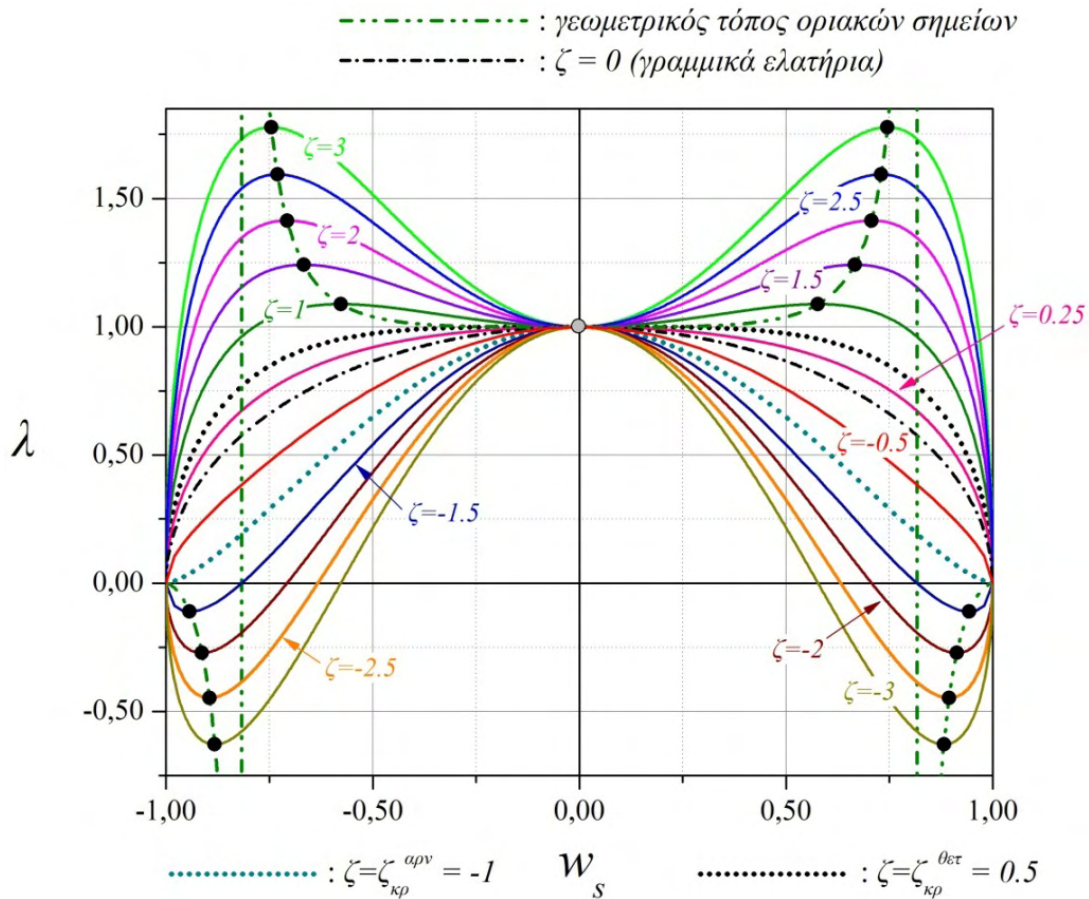
Για $\zeta \geq 0$, που υποδηλώνει ελατήρια «σκληρού» τύπου και ειδικότερα για $0 \leq \zeta \leq \zeta_{\kappa\rho}^{\theta\epsilon\tau} = \frac{1}{2}$, ο δρόμος ισορροπίας της συμμετρικής παραμόρφωσης διαθέτει μόνο ένα καθολικό μέγιστο, το οποίο είναι το προαναφερθέν σημείο διακλάδωσης, που στην περιοχή αυτή είναι ασταθές. Παρά ταύτα, για $\zeta > \zeta_{\kappa\rho}^{\theta\epsilon\tau}$ ο δρόμος εμφανίζει επίσης δύο οριακά σημεία, οριζόμενα ως S_1 και S'_1 , για

$w_s = \pm \frac{\sqrt{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}}{\sqrt{3}}$. Ο γεωμετρικός τόπος των καθολικών αυτών μεγίστων δίδεται από τη σχέση:

$$\lambda_{s,s'} = \frac{2}{9} \sqrt{3 + \frac{3}{\zeta}(\zeta + 1)} > 1 \quad (3.34)$$

ενώ πλέον το συμμετρικό διακλαδικό σημείο έχει καταστεί ευσταθές (τοπικό ελάχιστο).

Αντίθετα, για κάθε αρνητική τιμή της παραμέτρου ζ (δηλαδή για «μαλακού» τύπου ελατήρια) ο δρόμος παρουσιάζει ένα καθολικό μέγιστο, το σημείο διακλάδωσης C_1 , που είναι πάντοτε ασταθές. Αυτό είναι και το μοναδικό κρίσιμο σημείο του σχηματισμού ισορροπίας για $-1 < \zeta \leq 0$. Όμως, για $\zeta < \zeta_{\kappa\rho}^{αρ\nu} = -1$ εμφανίζονται δύο οριακά σημεία (που είναι καθολικά μέγιστα) για φορτία που δίδονται εκ νέου από τη σχέση (3.34). Η μορφή των δρόμων ισορροπίας για τη συμμετρική παραμόρφωση φαίνεται στο Σχήμα 3.7, όπου απεικονίζεται επίσης και ο γεωμετρικός τόπος των οριακών σημείων.



Σχήμα 3.7. Δρόμοι ισορροπίας της θεμελιώδους συμμετρικής παραμόρφωσης του μοντέλου για διάφορες τιμές της παραμέτρου ζ κυβικής μη γραμμικότητας

Παρατηρείται συνεπώς ότι η μεν τιμή του κρίσιμου διακλαδικού σημείου εξαρτάται μόνο από τη γραμμική συνιστώσα του ελατηρίου ενώ η ευστάθεια αυτού από τη μη γραμμική συνιστώσα. Τούτο θαδειχθεί στη συνέχεια ότι ισχύει και για την αντισυμμετρική παραμόρφωση, όπως άλλωστε έχει ήδη τεκμηριωθεί από πολλούς (Κουνάδης 2004).

3.3.5 Ανάλυση λυγισμού για αντισυμμετρική παραμόρφωση

Σε αυτή την περίπτωση παραμόρφωσης ισχύει ότι $w_s = 0$, $w_a \neq 0$ οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη αναλυτική έκφραση του σχετικού δρόμου ισορροπίας:

$$\lambda_{αντισυμμ} = \frac{\sqrt{1-4w_a^2} \sqrt{1-w_a^2} (1+w_a^2 \zeta)}{\sqrt{1-4w_a^2} + 2\sqrt{1-w_a^2}} \quad (3.35)$$

που σχετίζεται πάντοτε με ένα συμμετρικό σημείο διακλάδωσης, το C_2 , για φορτίο ίσο με $\lambda = \frac{1}{3}$ (*εκ νέου ανεξάρτητο του ζ*).

Λόγω της πολυπλοκότητας της 1^{ης} παραγώγου της ανωτέρω συνάρτησης ως προς w_a , οι συνθήκες ύπαρξης ακροτάτων αναζητούνται για $w_a > 0$. Επειδή υφίσταται συμμετρία στο πρόβλημα, θα ισχύουν ισοδύναμες συνθήκες αλλά για ίσες και αντίθετες τιμές του w_a . Χρησιμοποιώντας πάλι συμβολικούς υπολογισμούς βρέθηκε ότι εκτός C_2 , η ύπαρξη επιπρόσθετων ακροτάτων σχετίζεται με την 2^η και 4^η ρίζα του ακόλουθου πολωνύμου:

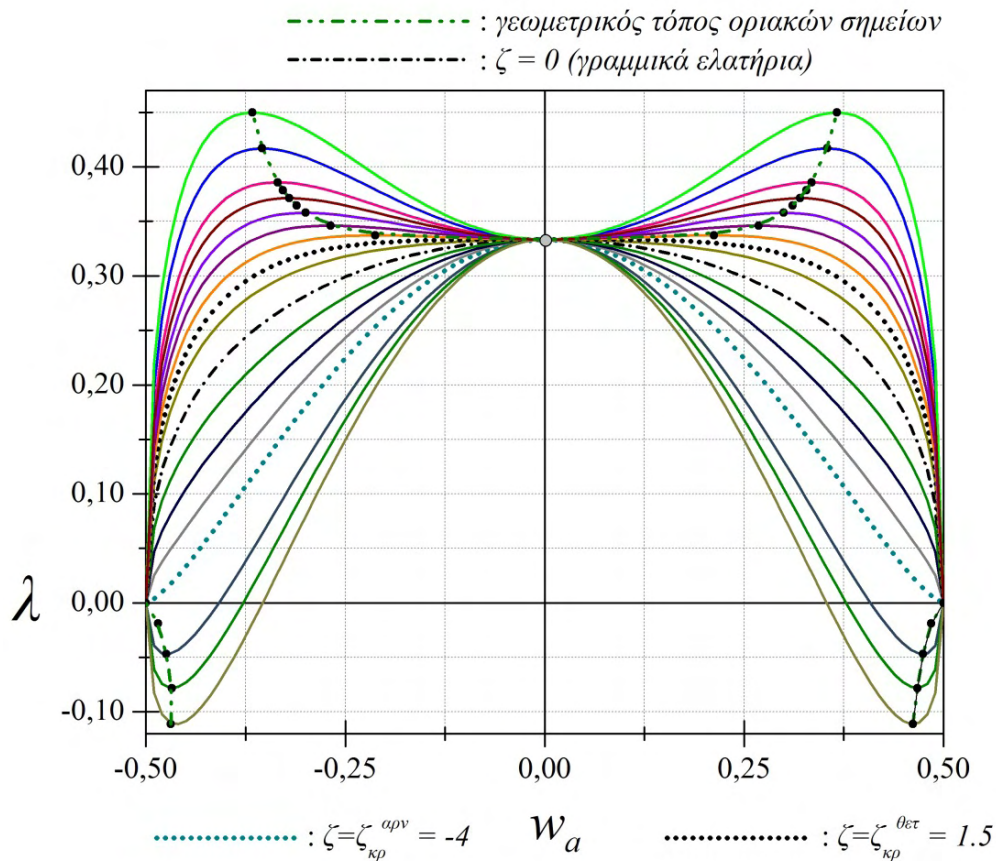
$$G(\rho) = \left\langle \begin{aligned} &240\zeta^2 \rho^8 + (224\zeta - 460\zeta^2) \rho^6 + (285\zeta^2 - 360\zeta + 48) \rho^4 \\ &+ (-60\zeta^2 + 174\zeta - 60) \rho^2 + 4\zeta^2 - 20\zeta + 1 \end{aligned} \right\rangle \quad (3.36)$$

και οι προκύπτουσες συνθήκες είναι:

$$\text{Για } \zeta > 0 : \left(\left(\frac{3}{2} < \zeta < \frac{7}{2} \right) \wedge w_a = \text{Root}[G(\rho), 2] \right) \vee \left(\left(\zeta \geq \frac{7}{2} \right) \wedge w_a = \text{Root}[G(\rho), 4] \right) \quad (3.37)$$

$$\text{Για } \zeta \leq 0 : \zeta < -4 \wedge w_a = \text{Root}[G(\rho), 4] \quad (3.38)$$

Ειδικότερα, για $-4 \leq \zeta \leq 1.5$, ο δρόμος ισορροπίας διαθέτει ένα μόνο ακρότατο, τουτέστιν το συμμετρικό διακλαδικό, που είναι στην περιοχή αυτή ασταθές. Για $\zeta < -4$ ο δρόμος σχετίζεται επίσης με δύο καθολικά ελάχιστα (οριακά σημεία), τα S_2 και S'_2 , για αρνητικές τιμές του φορτίου, ενώ το σημείο διακλάδωσης καθίσταται ευσταθές. Τελικά, για $\zeta > 1.5$, ο δρόμος εμφανίζει δύο καθολικά μέγιστα (οριακά σημεία) για θετικές πλέον τιμές του φορτίου λ και πάλι το σημείο διακλάδωσης γίνεται ευσταθές. Η μορφή των δρόμων της θεμελιώδους αυτής αντισυμμετρικής παραμόρφωσης απεικονίζεται στο Σχήμα 3.8, καθώς και ο γεωμετρικός τόπος των οριακών σημείων.



Σχήμα 3.8. Δρόμοι ισορροπίας της θεμελιώδους αντισυμμετρικής παραμόρφωσης του μοντέλου για διάφορες τιμές της παραμέτρου ζ κυβικής μη γραμμικότητας

Και εδώ επαληθεύεται ο ρόλος της γραμμικής και μη γραμμικής συνιστώσας του ελατηρίου που αναφέρθηκε στο τέλος της προηγούμενης υποπαραγράφου.

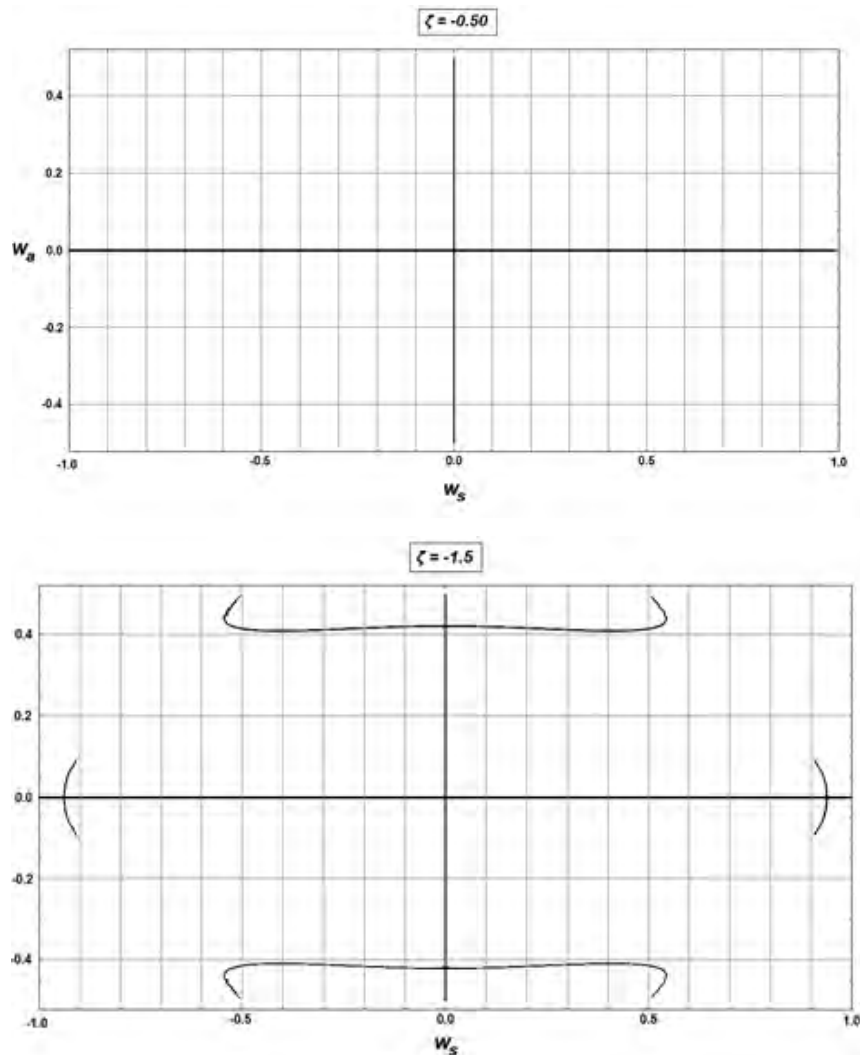
3.3.6 Πιθανή ύπαρξη δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας – ασύμμετρη παραμόρφωση

Στο εδάφιο αυτό αναζητείται η πιθανότητα ύπαρξης δευτερευόντων σχηματισμών ισορροπίας, συσχετιζόμενους με $w_s \neq 0$, $w_a \neq 0$, δηλαδή με απουσία συμμετρίας στην παραμόρφωση, ειδικότερα δε με εκείνους τους δρόμους που διακλαδίζονται από τους ανωτέρω δύο θεμελιώδεις. Τούτο πραγματοποιείται ερευνώντας τη φύση των ριζών της ορίζουσας ευστάθειας του συστήματος, που δίδεται στην έκφραση (3.30), μαζί με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.28) και (3.29), αποκλείοντας τις περιπτώσεις που καταλήγουν στα διακλαδικά σημεία C_1 , C_2 των προηγούμενων υποπαραγράφων.

Μετά από μια σειρά ιδιαίτερα περίπλοκων συμβολικών πράξεων και περιορισμό των λύσεων εντός των αποδεκτών τιμών των γενικευμένων συντεταγμένων, $-1 < w_s < 1$, $-0.5 < w_a < 0.5$, η ύπαρξη δευτερευόντων δρόμων διακλαδιζόμενων από τους πρωτεύοντες περιορίζεται στην εύρεση των συνθηκών υπό τις οποίες η ακόλουθη 5^{ης} τάξης πολωνυμική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές ρίζες:

$$F(\rho) = 4\zeta^2 \rho^5 + (8 - 3\zeta)\rho^4 + (4 - 18\zeta)\rho^3 + (20\zeta - 11)\rho^2 + (12 - 18\zeta)\rho - 4 = 0 \quad (3.39)$$

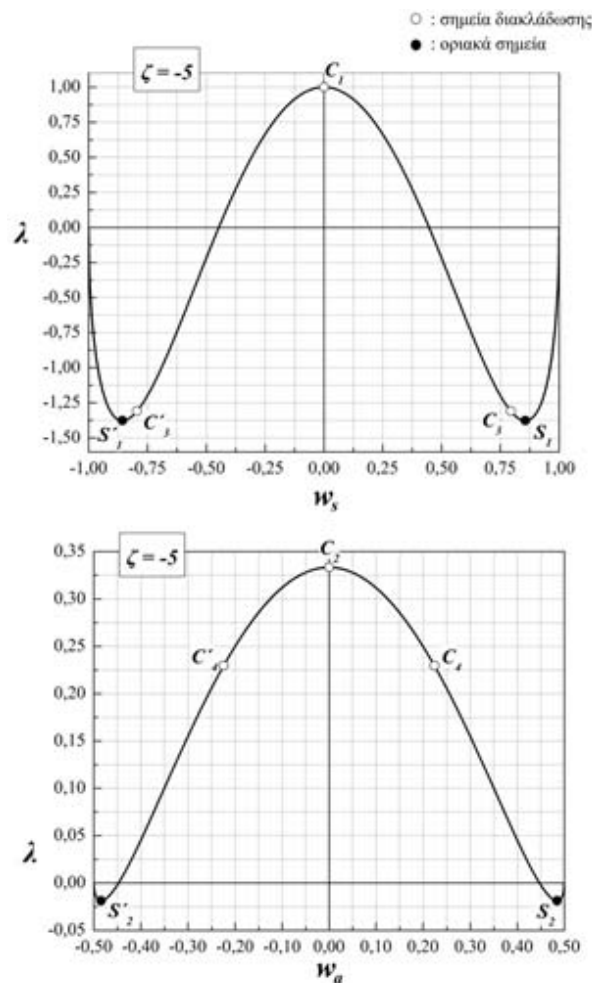
Το αποτέλεσμα οδηγεί στην ικανή και αναγκαία συνθήκη που δίνεται από την ανισότητα $\zeta < -1$. Το εύρημα αυτό είναι άμεσα αντιληπτό από την προβολή των δρόμων ισορροπίας στο επίπεδο (w_s, w_a) και δύο χαρακτηριστικές τιμές του ζ , που δίδονται στο Σχήμα 3.9, ενώ ο σχετικός κώδικας *Mathematica* περιέχεται στο Σχήμα Β.1.1 του Παραρτήματος Β.



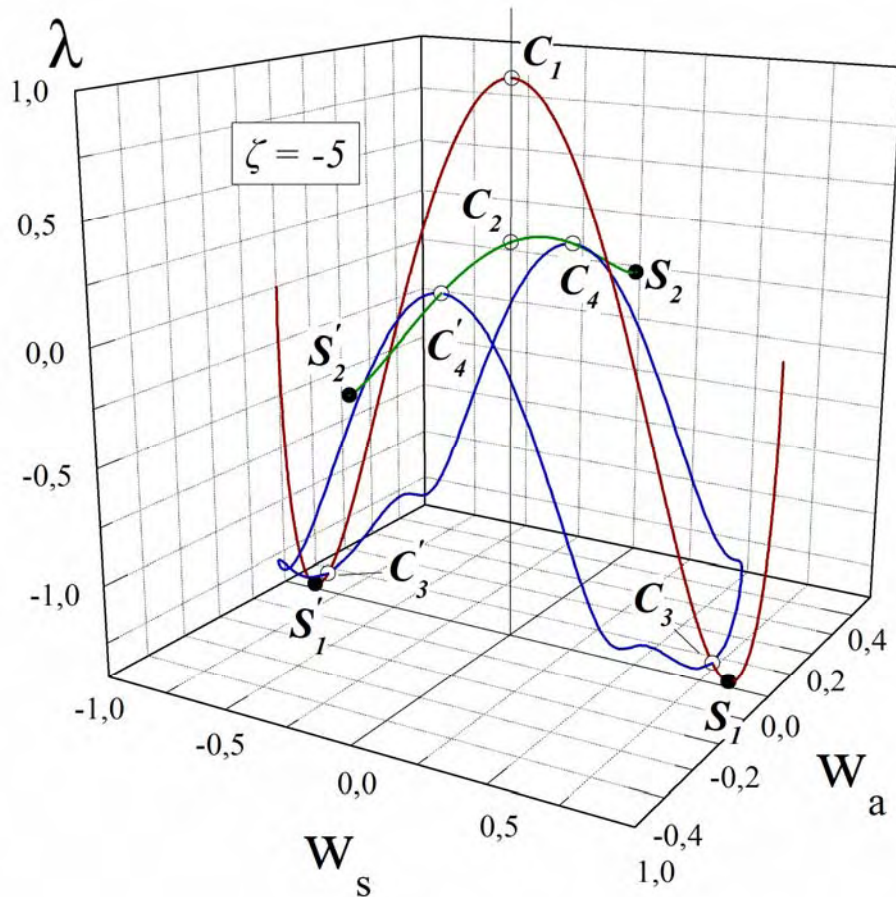
Σχήμα 3.9. Προβολές των δρόμων ισορροπίας του συστήματος στο επίπεδο διαμόρφωσης για δύο χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου αντιστάσεως ζ

3.3.7 Σύζευξη μορφών

Καθώς το ζ μειώνεται από την τιμή -1 , η προσοχή εστιάζεται στο αν οι δευτερεύοντες δρόμοι παύουν να είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, αλλά σχηματίζουν μια κλειστή καμπύλη στο χώρο, οδηγώντας σε σύζευξη των θεμελιωδών (πρωτευουσών) μορφών. Τούτο επιτυγχάνεται μέσω περαιτέρω συμβολικών υπολογισμών, που πραγματοποιούνται σε υψηλότερης τάξης μεταβολές της συνάρτησης συνολικού δυναμικού του συστήματος (δεν εμφανίζονται εδώ για λόγους συντομίας). Βρέθηκε ότι για $\zeta < -4.222$ οι δευτερεύοντες δρόμοι ισορροπίας δεν είναι πλέον ανεξάρτητοι μεταξύ τους αλλά μορφώνουν έναν πλήρως ασταθή κλειστό βρόγχο διακλαδιζόμενο από τους πρωτεύοντες δρόμους, οπότε υπάρχει πιθανότητα αλμάτων μορφών λυγισμού. Τυπικές δισδιάστες και τρισδιάστατες γραφικές αναπαραστάσεις μιας τέτοιας κατάστασης φαίνονται στα Σχήματα 3.10 και 3.11 αντίστοιχα για $\zeta = -5$.



Σχήμα 3.10. Διαγράμματα των θεμελιωδών δρόμων ισορροπίας στο επίπεδο που εμφανίζονται για $\zeta = -5$



Σχήμα 3.11. Τρισδιάστατη αναπαράσταση όλων των δρόμων ισορροπίας του συστήματος για $\zeta = -5$

3.3.8 Συσχετισμός με την απόκριση της πραγματικής κατασκευής

Για να υπάρξει σύζευξη της $1^{\text{ης}}$ ($m = 1$) με τη $2^{\text{η}}$ ($n = 2$) κανονική μορφή λυγισμού (της «πραγματικής» κατασκευής του Σχήματος 3.1) πρέπει να ισχύει ότι $\frac{\sqrt[4]{\mu}}{\pi} = \sqrt{2}$ και ισοδύναμα $\frac{\lambda_{\text{κρισ}}}{\sqrt{\mu}} = 2.5$. Τούτο σημαίνει ότι για μια δοκό επί ελαστικού εδάφους δοθείσης καμπτικής αντιστάσεως (EI) αλλά και γνωστών εδαφικών χαρακτηριστικών (γνωστού k_f) το ανωτέρω φαινόμενο μπορεί να λάβει χώρα μόνο για συγκεκριμένο μήκος της ράβδου $L_{\text{κρισ}}$ το οποίο ισούται με

$$L_{\text{κρισ}} = \sqrt{2} \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k_f}} \quad (3.40)$$

Γενικότερα δε, αν είναι γνωστά δύο εκ των τριών χαρακτηριστικών της δοκού και του ελαστικού εδάφους, δηλ. δύο εκ των L , I , k_f , τότε μόνο για μια μοναδική τιμή του τρίτου θα μπορεί να υπάρξει σύζευξη θεμελιωδών

μορφών (που επίσης ισχύει για οποιαδήποτε τάξης σύζευξη, δηλαδή συνδυασμό m, n με $m \neq n$). Κατά συνέπεια, το αδιάστατο κρίσιμο φορτίο σύζευξης θα ισούται με

$$\lambda_{\kappa\rho\iota\sigma} = 5\pi^2 \approx 49.348 \quad (3.41)$$

και η τιμή του με διαστάσεις θα είναι

$$P_{\kappa\rho\iota\sigma} = \frac{5\pi^2 EI}{L_{\kappa\rho\iota\sigma}^2} \xrightarrow{(3.40)} P_{\kappa\rho\iota\sigma} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{EI}{k_f}} k_f \quad (3.42)$$

Η αντίστοιχη κρίσιμη κατάσταση του διβάθμιου μοντέλου αντιστοιχεί στα θετικά εκείνα φορτία, για τα οποία λαμβάνει χώραν κλειστού βρόγχου διακλάδωση από τους θεμελιώδεις δρόμους, ήτοι για τα φορτία που αντιστοιχούν στα κρίσιμα σημεία C_4, C'_4 . Η τιμή τους, σύμφωνα με την προηγηθείσα ανάλυση εξαρτάται μόνο από την τιμή της παραμέτρου ζ , ενώ μόλις υπολογιστεί (για κάποιο συγκεκριμένο ζ) το κρίσιμο φορτίο λ , άμεσα υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου k , από τη σχέση

$$k = \frac{P_{\kappa\rho\iota\sigma}}{\lambda \ell} \quad (3.43)$$

όπου το $P_{\kappa\rho\iota\sigma}$ λαμβάνεται από την (3.42), ενώ $\ell = L_{\kappa\rho\iota\sigma}/3$. Μετά την εύρεση της τιμής της παραμέτρου k , η παράμετρος γ υπολογίζεται άμεσα από την τελευταία των σχέσεων (3.25). Συμπερασματικά, υφίστανται πέραν του ενός (πρακτικά άπειροι) συνδυασμοί των παραμέτρων k και γ , οι οποίοι δίδουν για το προσομοίωμα το ίδιο κρίσιμο φορτίο σύζευξης θεμελιωδών μορφών με αυτό της δοκού επί ελαστικού εδάφους. Πλην όμως, όπως θα δειχθεί μέσω αριθμητικού παραδείγματος στη συνέχεια, ο συσχετισμός μπορεί να επιτευχθεί μέσω απλών μαθηματικών υπολογισμών, οι δε συμβατοί συνδυασμοί παραμέτρων συνδέονται μεταξύ τους με συνεχείς αναλυτικές συναρτήσεις, προϊόντα διαδικασίας προσαρμογής καμπυλών.

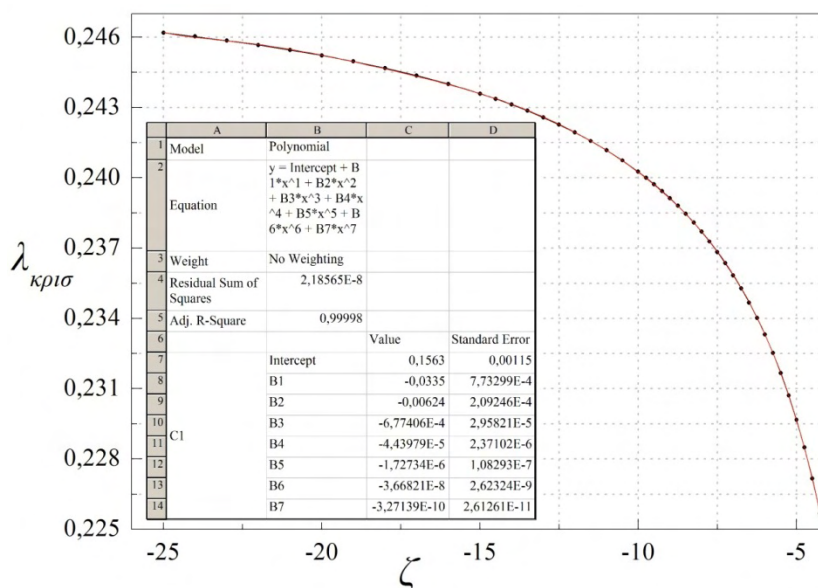
Για τις ανάγκες του τρέχοντος εδαφίου, επιλέγεται αριθμητικό παράδειγμα με τιμές της αντιστάσεως k_f των ελατηρίων Winkler και της καμπτικής αντίστασης της δοκού EI αντλούμενες από την εργασία των Kounadis et al. (2006). Συγκεκριμένα επιλέγεται δοκός επί ελαστικού εδάφους με $k_f = \mathbf{0.08274 \text{ kN/cm}}$ και $EI = \mathbf{16548000 \text{ kNcm}^2}$. Από τη σχέση (3.40) προκύπτει ότι, για να υπάρξει σύζευξη της 1^{ης} με τη 2^η μορφή λυγισμού, θα πρέπει το μήκος της δοκού να ισούται με $L_{\kappa\rho\iota\sigma} = \mathbf{528.531 \text{ cm}}$ (που ισοδυναμεί με $\ell = \mathbf{176.117 \text{ cm}}$), οπότε το σχετικό κρίσιμο φορτίο, από την έκφραση (3.42), βρίσκεται ίσο με $P_{\kappa\rho\iota\sigma} = \mathbf{2925.3 \text{ kN}}$. Στη συνέχεια, για διάφορες τιμές της αδιάστατης παραμέτρου ζ υπολογίζεται αριθμητικά το αντίστοιχο

κρίσιμο φορτίο του μοντέλου, και εξ αυτού οι τιμές των k και γ σύμφωνα με τα ανωτέρω. Οι τιμές αυτές περιέχονται στον Πίνακα 3.1.

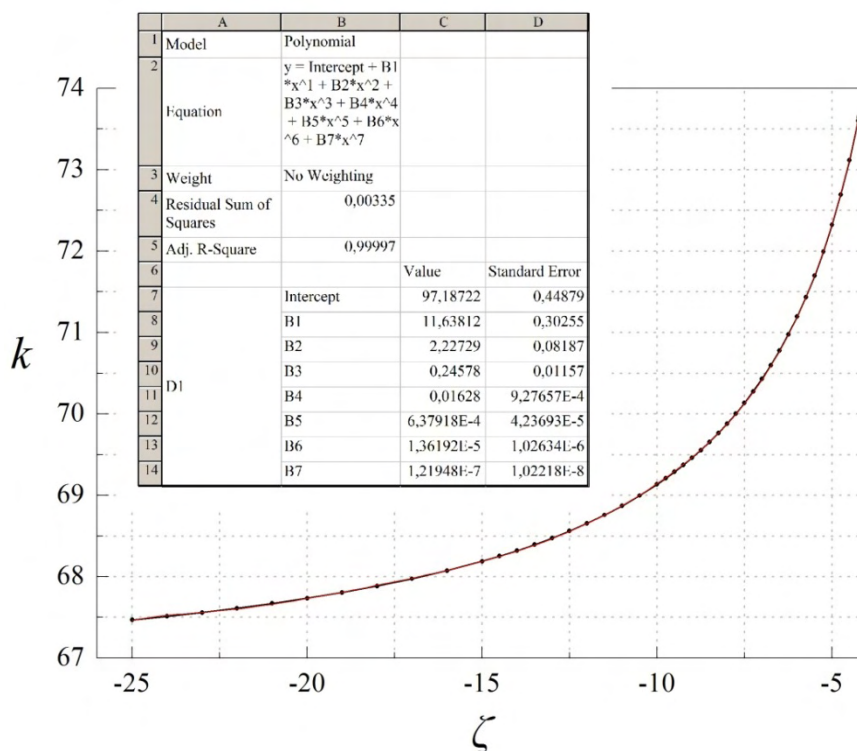
Πίνακας 3.1. Συμβατές τιμές των παραμέτρων k , γ του αριθμητικού παραδείγματος

ζ	$\lambda_{\kappa\rho\iota\sigma} (C_4, C'_4)$	k	γ
-4.223	0.225503	73.6575	-0.0100285
-4.23	0.225548	73.6428	-0.0100431
-4.25	0.225676	73.6011	-0.0100849
-4.5	0.227171	73.1167	-0.0106078
-4.75	0.228491	72.6943	-0.0111325
-5	0.229666	72.3224	-0.0116584
-5.25	0.230718	71.9926	-0.0121855
-5.5	0.231667	71.6977	-0.0127135
-5.75	0.232526	71.4328	-0.0132423
-6	0.233307	71.1937	-0.0137718
-6.25	0.234021	70.9765	-0.0143019
-6.5	0.234677	70.7781	-0.0148324
-6.75	0.235281	70.5964	-0.0153633
-7	0.235839	70.4294	-0.0158946
-7.25	0.236355	70.2756	-0.0164263
-7.5	0.236836	70.1329	-0.0169582
-7.75	0.237283	70.0008	-0.0174905
-8	0.237702	69.8774	-0.0180229
-8.25	0.238093	69.7626	-0.0185556
-8.5	0.23846	69.6553	-0.0190884
-8.75	0.238806	69.5543	-0.0196214
-9	0.23913	69.4601	-0.0201547
-9.25	0.239437	69.371	-0.020688
-9.5	0.239726	69.2874	-0.0212215
-9.75	0.240001	69.208	-0.021755
-10	0.240261	69.1331	-0.0222887
-10.5	0.240742	68.995	-0.0233563
-11	0.241179	68.87	-0.0244242
-11.5	0.241575	68.7571	-0.0254925
-12	0.241938	68.6539	-0.026561
-12.5	0.242271	68.5596	-0.0276297
-13	0.242577	68.4731	-0.0286986
-13.5	0.24286	68.3933	-0.0297677
-14	0.243122	68.3196	-0.0308369
-14.5	0.243366	68.2511	-0.0319062
-15	0.243592	68.1878	-0.0329758
-16	0.244002	68.0732	-0.0351151
-17	0.244364	67.9723	-0.0372545
-18	0.244684	67.8834	-0.0393944
-19	0.244968	67.8047	-0.0415347
-20	0.245225	67.7337	-0.043675
-21	0.245456	67.6699	-0.0458155
-22	0.245667	67.6118	-0.047956
-23	0.245857	67.5596	-0.0500971
-24	0.246033	67.5112	-0.0522378
-25	0.246195	67.4668	-0.0543786

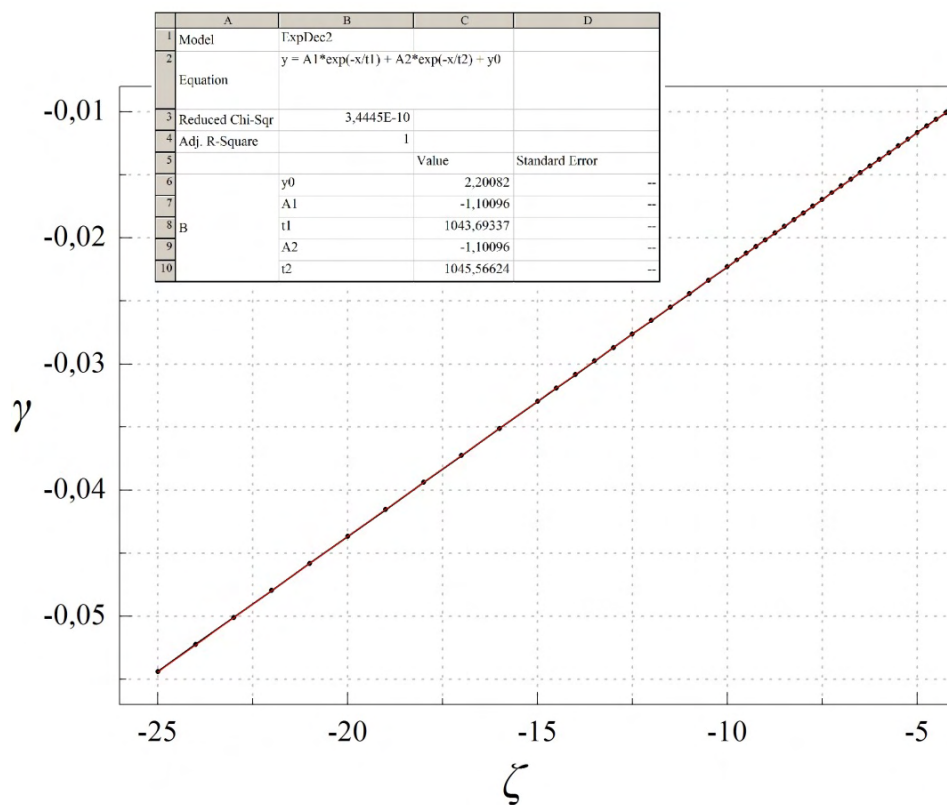
Κατόπιν χαράσσονται οι καμπύλες $(\zeta, \lambda_{\kappa\rho\iota\sigma})$, (ζ, k) , (ζ, γ) καθώς και οι $(\lambda_{\kappa\rho\iota\sigma}, k)$, $(\lambda_{\kappa\rho\iota\sigma}, \gamma)$ συνοδευόμενες από τις αντίστοιχες προσεγγιστικές καμπύλες προσαρμογής, και απεικονίζονται στα Σχήματα 3.12 – 3.16. Για τις τελευταίες δύο καμπύλες, τα χαρακτηριστικά της προσαρμογής δίδονται στα Σχήματα B.1.2 και B.1.3 του Παραρτήματος Β.



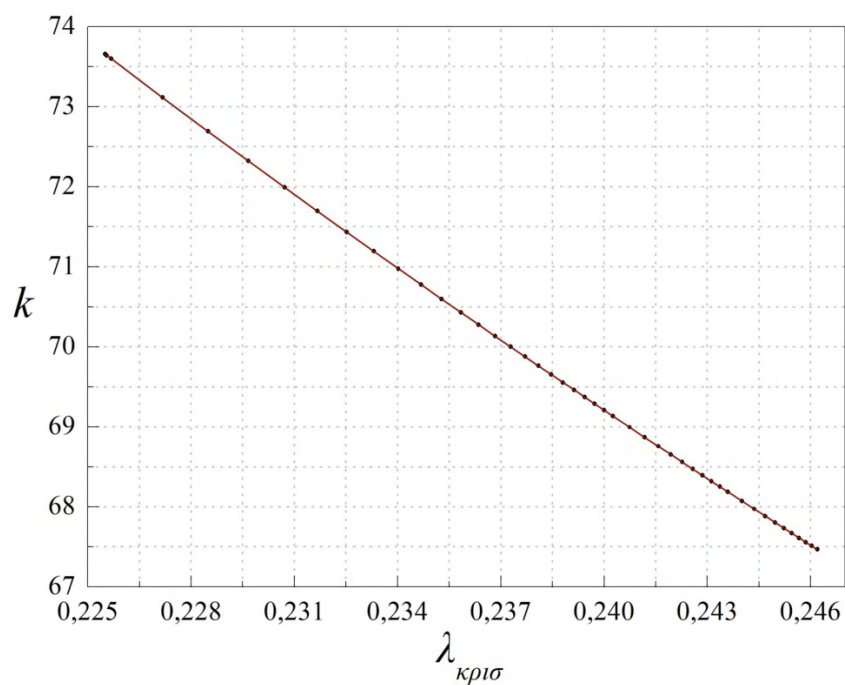
Σχήμα 3.12. Καμπύλη $(\zeta, \lambda_{\kappa\rho\iota\sigma})$ και αντίστοιχη πολωνυμική προσαρμογή 7^{ου} βαθμού



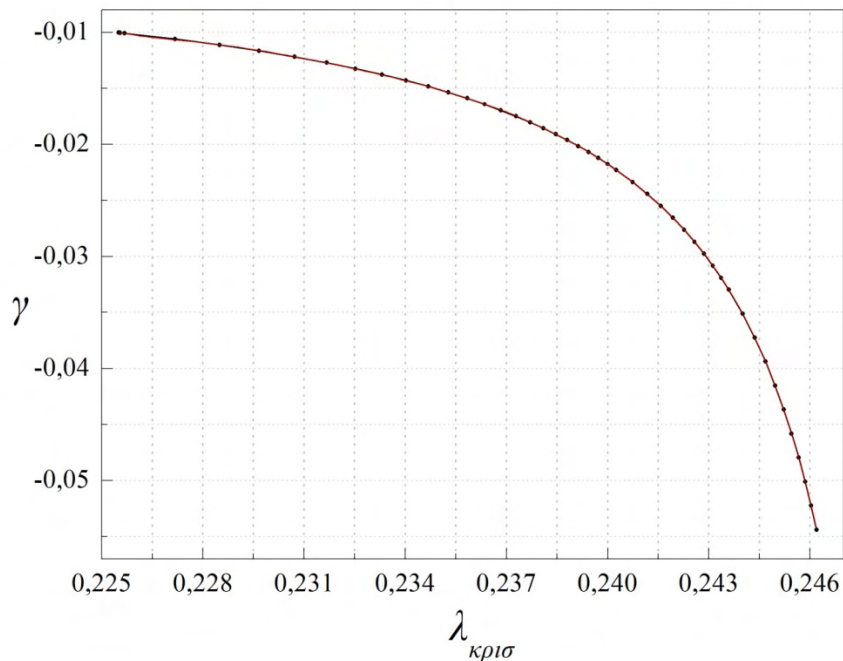
Σχήμα 3.13. Καμπύλη (ζ, k) και αντίστοιχη πολωνυμική προσαρμογή 7^{ου} βαθμού



Σχήμα 3.14. Καμπύλη (ζ, γ) και αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής μορφής φθίνουσας εκθετικής $y = y_0 + A_1 e^{-x/t_1} + A_2 e^{-x/t_2}$



Σχήμα 3.15. Καμπύλη ($\lambda_{\text{κρισ}}, k$) και αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής της μορφής $y = \frac{1}{a+bx}$ (τα χαρακτηριστικά της δίδονται στο Σχήμα B.1.2 του Παραρτήματος Β)



Σχήμα 3.16. Καμπύλη ($\lambda_{\kappa\rho i\varsigma}$, γ) και αντίστοιχη πολυωνυμική προσαρμογή 7ου βαθμού (τα χαρακτηριστικά της δίδονται στο Σχήμα Β.1.3 του Παραρτήματος Β)

3.4 Συμπεράσματα

Από τη έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο τρέχον Κεφάλαιο εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

3.4.1 Αρμονική ανάλυση συνεχούς συστήματος

Για δοκό επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler βρέθηκε μέσω θεωρητικής αρμονικής ανάλυσης ότι για τις κρίσιμες καταστάσεις ύπαρξης σύζευξης μορφών λυγισμού υφίσταται μέχρι 6^{ης} τάξης πιθανή αλληλεπίδραση. Τούτο απαντάται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, ενώ μη γραμμικές αριθμητικές εφαρμογές κατέδειξαν την δυνατότητα συζευγμένων μορφών αστάθειας σχετιζόμενων με συμμετρικά σημεία διακλάδωσης των αντίστοιχων δρόμων ισορροπίας και με πιθανότητα αλμάτων μορφών μέσω κλειστών πλήρως ατελών δευτερευόντων δρόμων στο χώρο διαμόρφωσης.

3.4.2 Προσομοίωμα δύο βαθμών ελευθερίας

Για το διβάθμιο μη γραμμικό μοντέλο με ελατήρια κυβικής μη γραμμικότητας που υιοθετήθηκε, μετά από μετασχηματισμό συντεταγμένων, που οδήγησε σε μελέτη συμμετρικής, αντισυμμετρικής αλλά και ασύμμετρης παραμόρφωσης βρέθηκε ότι:

- Για την περίπτωση συμμετρικής παραμόρφωσης, πέραν του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας υφίσταται πάντοτε και μεταλυγισμικός τοιούτος, ο οποίος σχετίζεται με συμμετρικό σημείο διακλάδωσης για αδιάστατο φορτίο ίσο με 1. Το σημείο αυτό είναι πάντοτε ασταθές για «μαλακού» τύπου ελατήρια ($\zeta < 0$), και είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του δρόμου για $\zeta > -1$. Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου αυτής εμφανίζονται και δύο οριακά σημεία στο δρόμο. Αντίθετα για «σκληρού τύπου» ($\zeta > 0$) ελατήρια και για $\zeta \leq 1/2$ το διακλαδικό σημείο είναι ασταθές χωρίς ο δρόμος να παρουσιάζει άλλα κρίσιμα σημεία. Όμως για $\zeta > 1/2$ το σημείο διακλάδωσης καθίσταται ευσταθές και ο δρόμος εμφανίζει και δύο οριακά σημεία.

- Για την περίπτωση αντισυμμετρικής παραμόρφωσης πέραν του τετριμμένου δρόμου υφίσταται πάντοτε και μεταλυγισμικός σχετιζόμενος εκ νέου με συμμετρικό σημείο διακλάδωσης για φορτίο ίσο με $1/3$. Το σημείο αυτό για $-4 \leq \zeta \leq 1.5$ είναι ασταθές και ο δρόμος δε διαθέτει άλλα κρίσιμα σημεία, ενώ εκτός του διαστήματος αυτού το διακλαδικό σημείο καθίσταται ευσταθές και ο δρόμος εμφανίζει και δύο οριακά σημεία.

- Σε ότι αφορά την ασύμμετρη παραμόρφωση, η έρευνα επικεντρώθηκε στην πιθανότητα ύπαρξης σχηματισμών ισορροπίας διακλαδιζόμενων από τους κύριους δρόμους των προηγούμενων περιπτώσεων. Βρέθηκε ότι για να συμβεί κάτι τέτοιο τα ελατήρια πρέπει να είναι «μαλακού» τύπου και μάλιστα με $\zeta < -1$. Οι δευτερεύοντες αυτοί δρόμοι είναι γενικώς ανεξάρτητοι μεταξύ τους για $\zeta > -4.222$, ενώ για μικρότερες τιμές αυτής της παραμέτρου κυβικής μη γραμμικότητας οι δρόμοι συνδέονται και αποτελούν πλέον κλειστό ασταθή βρόγχο στο χώρο, ο οποίος συνδέει τους δρόμους συμμετρικής και αντισυμμετρικής παραμόρφωσης. Συνεπώς, διαπιστώθηκε για το αναλυθέν προσομοίωμα η πιθανότητα σύζευξης μορφών που σχετίζεται με κίνδυνο αλμάτων (*mode jumping*), που βρέθηκε και για το συνεχές σύστημα.

- Τέλος, η παραπάνω τεκμηριωθείσα διαπίστωση συνδέθηκε άμεσα με την απόκριση του συνεχούς συστήματος μέσω προσαρμογής καμπυλών και προτάθηκαν ικανοποιητικές σχέσεις συσχέτισης υπό μορφή νομογραφημάτων για τον απευθείας υπολογισμό των κρίσιμων καταστάσεων της πραγματικής κατασκευής χωρίς την ανάγκη επίλυσης του προταθέντος διβάθμιου προσομοιώματος.

Κεφάλαιο 4

Εντός επιπέδου ευστάθεια ομοιόμορφων χαλύβδινων δοκών – στύλων με αμετακίνητες στηρίξεις επί ελαστικού εδάφους τύπου Pasternak

4.1 Εισαγωγή

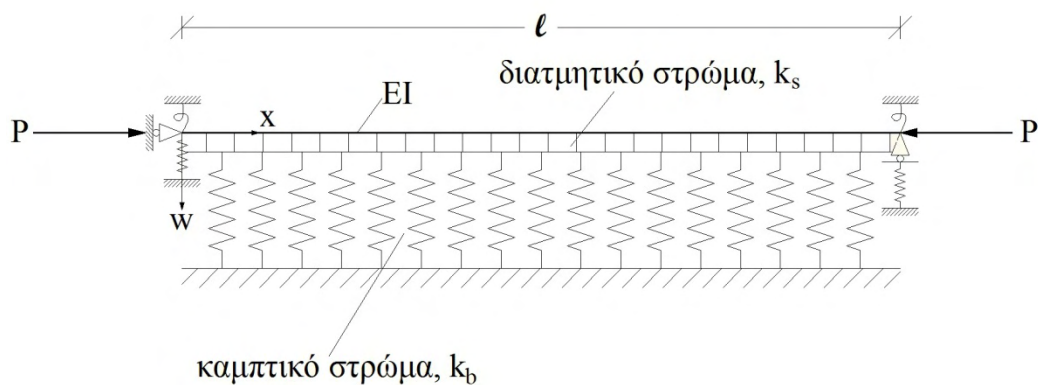
Σύμφωνα με την αναλυτική περιγραφή του μοντέλου Pasternak στο Κεφάλαιο 2 του παρόντος, η συγκεκριμένη προσομοίωση υποθέτει την ύπαρξη διατμητικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων των ελατηρίων (Kerr 1964). Τούτο επιτυγχάνεται μέσω της σύνδεσης των απολήξεων των ελατηρίων (του στρώματος Winkler) σε μια δοκό (ή δίσκο) αποτελούμενη από ασυμπίεστα κατακόρυφα ελατήρια, που παραμορφώνονται μόνο σε εγκάρσια διάτμηση. Αυτή η υπόθεση μαζί με τη θεώρηση του μηχανικής συμπεριφοράς του μοντέλου ή του πραγματικού μέσου καταδεικνύει ότι η θεμελίωση τύπου Pasternak είναι η φυσικότερη επέκταση του μοντέλου Winkler για ομογενείς θεμελιώσεις.

Για αυτό το μοντέλο θεμελίωσης μόνο περιορισμένος αριθμός δημοσιεύσεων, σε ότι αφορά τον λυγισμό δοκών – στύλων, είναι διαθέσιμος στη βιβλιογραφία (Narashima Murthy 1973, Naidu και Rao 1995, El-Musly 2003, Challamel 2011). Οι εργασίες αυτές χρησιμοποιούν διαδικασίες Λογισμού Μεταβολών, αλλά δεν δίδουν καμία σημαντική πληροφορία για τη σύζευξη μορφών ή για αποτελέσματα «πραγματικών» εφαρμογών Μηχανικής. Σε ό,τι ακολουθεί, θα αναλυθεί η απόκριση σε λυγισμό μεταλλικών δοκών – στύλων επί θεμελίωσης τύπου Pasternak, επικεντρώνοντας σε περιπτώσεις σύζευξης μορφών για την αμφιέρειστη και την αμφίπακτη δοκό (χωρίς μείωση του μήκους) για συγκολλητές σιδηροτροχιές.

4.2 Περιγραφή προβλήματος και βασικές μαθηματικές εξισώσεις

4.2.1 Εξισώσεις λυγισμού

Θεωρούμε μία μεταλλική ομοιόμορφη δοκό – στύλο, μήκους L και δυσκαμψίας EI επί θεμελίωσης τύπου Pasternak, η οποία χαρακτηρίζεται από συντελεστή καμπτικού στρώματος k_b και διατμητικού στρώματος k_s , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Η κατασκευή θεωρείται ότι δεν έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και ότι οι μετακινήσεις των άκρων της περιορίζονται κατά τρόπο, που δεν επιτρέπεται η μείωση του μήκους της σε όλα τα στάδια παραμόρφωσης. (Sophianopoulos και Papachristou 2012).



Σχήμα 4.1. Μεταλλική δοκός – στύλος επί θεμελίωσης τύπου Pasternak

Ορίζοντας ως P την αξονική δύναμη που επιδρά στον κεντροβαρικό άξονα της διατομής της δοκού – στύλου, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την απόκριση σε λυγισμό του συστήματος δίδεται από:

$$EIW''''(x) + PW''(x) - k_s W''(x) + k_b W(x) = 0, \text{ όπου } ' = d/dx \quad (4.1)$$

Αυτή συνδέεται με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες που ισχύουν για αμετακίνητες στηρίξεις

$$W(0) = W(\ell) = 0 \quad (4.2)$$

Για την αμφιέρειστη και την αμφίπακτη δοκό αντίστοιχα, οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$W''(0) = W''(\ell) = 0 \quad (4.3\alpha)$$

$$W'(0) = W'(\ell) = 0 \quad (4.3\beta)$$

Εισάγοντας τις παρακάτω αδιάστατες μεταβλητές

$$x = \frac{x}{\ell}, \quad w(x) = \frac{W(x)}{\ell}, \quad \lambda = \frac{P\ell^2}{EI}, \quad \xi = \frac{k_s \ell^3}{EI}, \quad \mu = \frac{k_b \ell^4}{EI}, \quad \sigma = \lambda - \xi \quad (4.4)$$

η εξίσωση λυγισμού (4.1) λαμβάνει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$w''''(x) + \sigma w''(x) + \mu w(x) = 0, \quad ' = d/dx \quad (4.5)$$

και υπόκειται στις παρακάτω αδιαστατοποιημένες συνοριακές συνθήκες

$$w(0) = w(1) = 0 \quad (4.6\alpha)$$

$$w''(0) = w''(1) = 0 \text{ ή } w'(0) = w'(1) = 0 \quad (4.6\beta, \gamma)$$

για την αμφιέρειστη και αμφίπακτη δοκό αντίστοιχα.

4.2.2 Μέθοδος Επίλυσης

Η επίλυση του γραμμικού προβλήματος συννοριακών τιμών δύο σημείων που σχετίζεται με τις σχέσεις (4.5) και (4.6) θα αναζητηθεί μέσω της καθιερωμένης γραμμικής ανάλυσης, επικεντρώνοντας την προσοχή σε περιπτώσεις στις οποίες είναι δυνατή η σύζευξη μορφών. Η εξίσωση λυγισμού (4.5) ικανοποιείται από την ακόλουθη γενική λύση για την καμπτική παραμόρφωση $w(x)$:

$$w(x) = c_1 \sin k_1 x + c_2 \cos k_1 x + c_3 \sin k_2 x + c_4 \cos k_2 x \quad (4.7)$$

όπου

$$k_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \mu}} \quad , \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \mu}} \quad , \quad \frac{\sigma^2}{4} - \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 2\sqrt{\mu} + \xi \quad (4.8)$$

με τις μεταβλητές c_i $i=1,4$ να εξαρτώνται αποκλειστικά από τις συννοριακές συνθήκες.

4.2.3 Αμφιέριστη δοκός - στύλος

Σε αυτή την περίπτωση και λόγω της σχέσης (4.6α), καταλήγουμε ότι $c_2 = c_4 = 0$ οπότε

$$w(x) = c_1 \sin k_1 x + c_3 \sin k_2 x \quad (4.9)$$

που προφανώς αποτελείται από το άθροισμα δύο κυματομορφών.

Οι υπόλοιπες συννοριακές συνθήκες (4.6β) δίνουν την εξής έκφραση για την εξίσωση λυγισμού

$$(k_2^2 - k_1^2) \sin k_2 \sin k_1 = 0 \quad (4.10)$$

Δεδομένου ότι $k_1 \neq k_2$ υπάρχουν δύο διακριτές λύσεις. Η μία συνδέεται με

$$\sin k_1 = 0 \quad (4.11)$$

και τελικώς η γραμμική λύση της εξίσωσης (4.5) αποτελείται από μόνο μία κυματομορφή

$$w(x) = c \sin mx \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

Από την άλλη πλευρά, για $c_1, c_3 \neq 0$ η δεύτερη λύση συνδέεται με την ακόλουθη έκφραση:

$$\sin k_1 = \sin k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = m\pi, k_2 = n\pi \quad , \quad m, n \in \mathbb{N} \quad , \quad m \neq n \quad (4.13)$$

γεγονός που υπονοεί τη σύζευξη δύο ημιτονοειδών κυματομορφών με διαφορετικά πλάτη, δεδομένου ότι ο λόγος m/n είναι ρητός αριθμός.

Μελετώντας την περίπτωση της λύσης μιας μορφής και συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.8) και (4.12) καταλήγουμε:

$$\lambda = m^2 \pi^2 + \frac{\mu}{m^2 \pi^2} + \xi \quad (4.14)$$

Είναι προφανές ότι το κρίσιμο φορτίο $\lambda = \lambda_{\kappa\rho\iota\sigma}$ αντιστοιχεί στην τιμή του $m = m_{\kappa\rho\iota\sigma}$ για την οποία το λ ελαχιστοποιείται. Μια προσέγγιση για το $\lambda_{\kappa\rho\iota\sigma}$ προκύπτει μέσω της συνθήκης $d\lambda/dm$, που δίνει:

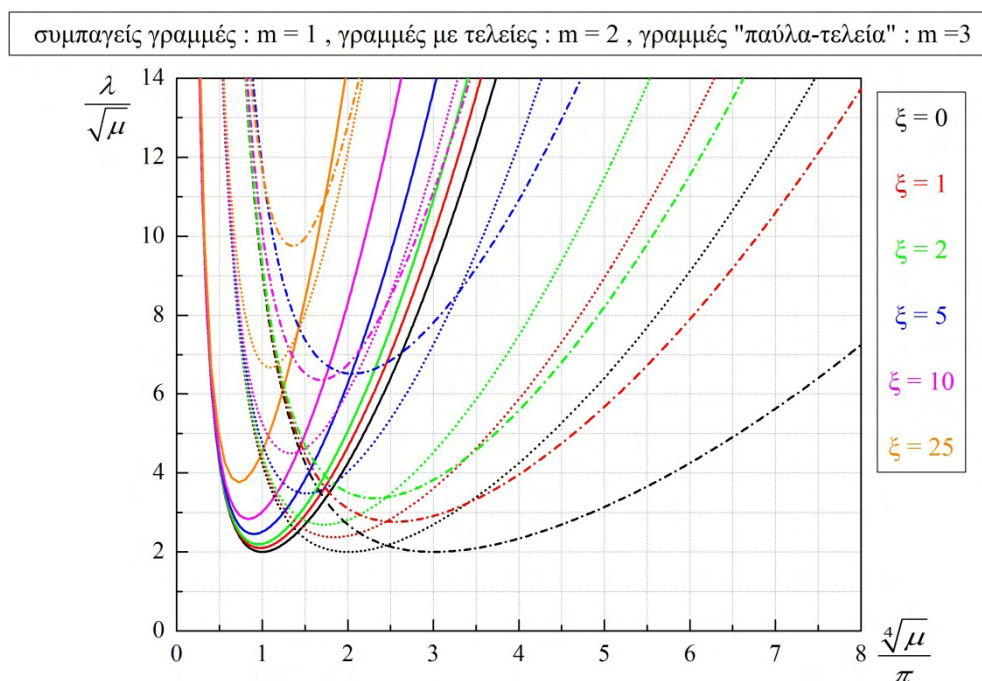
$$\lambda_{\min} = 2\sqrt{\mu} + \xi, m_{\kappa\rho\iota\sigma} = \frac{1}{\pi} \mu^{\frac{1}{4}} \quad (4.15)$$

Για διάφορες τιμές του m καθώς και για την παράμετρο διάτμησης ξ δύνανται να χαραχθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \left(\frac{m}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{m}\right)^2 + \frac{\xi}{(\pi z)^2}, y = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}, z = \frac{\sqrt[4]{\mu}}{\pi} \quad (4.16)$$

Αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.2, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι για δεδομένη τιμή του ξ , καθίσταται εφικτή η σύζευξη μορφών στην τομή των καμπυλών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του m . Τούτο συμβαίνει για:

$$x = \pm\sqrt{mn}, y = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + \frac{\xi}{\pi^2 mn} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\mu} \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + \frac{\xi}{mn\pi^2} \right), m \neq n \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.2. Καμπύλες κρίσιμων φορτίων λυγισμού για την αμφιέριστη δοκό - στύλο

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τις συνοριακές συνθήκες (4.6α,β), η σύζευξη μορφών είναι δυνατή μόνο όταν ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\mu > \frac{\pi^4 m^2 n^2 \xi^2}{(\pi^2 (m-n)^2 + \xi)^2} \quad (4.18)$$

που αποτελεί μια συνθήκη που συσχετίζει άμεσα την ύπαρξη του φαινομένου με τα πραγματικά χαρακτηριστικά δοκού - στύλου και θεμελίωσης.

4.2.4 Αμφίπακτη δοκός - στύλος

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση και ενώ η σχέση (4.7) ισχύει, η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (4.6α) και (4.6γ) οδηγεί στην αντίστοιχη εξίσωση λυγισμού:

$$2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1) + (k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 = 0 \quad (4.19)$$

με k_1, k_2 όπως αυτά ορίζονται στην (4.8).

Η ως άνω ουσιαστικά μη αλγεβρική εξίσωση λυγισμού δεν επιδέχεται λύσεις κλειστής μορφής ως προς το αδιάστατο φορτίο λ , γεγονός που υποδηλώνει την απουσία δυνατότητας συμβολικού υπολογισμού των δυνατών καταστάσεων σύζευξης μορφών. Για το σκοπό αυτό, μόνο αριθμητικές λύσεις είναι δυνατόν να αποκτηθούν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός

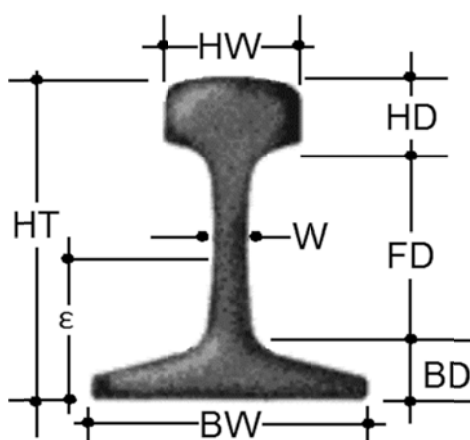
4.3.1 Γενικές θεωρήσεις

Σύμφωνα με τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 2, υπάρχουν αρκετές «πραγματικές» κατασκευές που μπορούν να προσομοιωθούν μέσω μιας δοκού επί ελαστικής θεμελίωσης. Εδώ εστιάζεται η προσοχή στις συγκολλητές σιδηροτροχιές (που έχουν χαρακτηριστικά μηδενικών αρχικών ατελειών και αμετακίνητα άκρα), για συγκεκριμένες ιδιότητες θεμελίωσης, ενώ θεωρείται επίσης ότι υφίσταται ικανή πλευρική δυσκαμψία οπότε περιορίζεται ο πλευρικός λυγισμός σε οριζόντιο επίπεδο. Προσομοιάζεται συνεπώς ο εντός κατακόρυφου επιπέδου λυγισμός επί εδάφους του τύπου που αναλύεται στο παρόν. Τα αριθμητικά αποτελέσματα αναζητήθηκαν με βάση τρεις χαρακτηριστικούς τύπους εδαφών (και αντίστοιχων διατμητικών στρωμάτων), των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες δίνονται στο Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1. Οι τρεις τύποι εδαφών με τις μηχανικές ιδιότητες τους

Τύπος Εδάφους	Περιγραφή	$E (MPa)$	ν	$G (MPa)$
ST1	Χάλικες	20	0.33	7.50
ST2	Αμμοχάλικο	125	0.30	48.10
ST3	Μαλακή άργιλος	10	0.30	3.85

Επιπρόσθετα, επελέγησαν τρεις τύποι μεταλλικών διατομών, εκ των οποίων οι δύο αντιστοιχούν σε συνήθεις διατομές σιδηροτροχιών, με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους να φαίνονται στο Σχήμα 4.3 και τις αντίστοιχες ιδιότητες τους στους Πίνακες 4.2 και 4.3. Η τρίτη διατομή αναφέρεται στην ακραία περίπτωση της μεταλλικής διατομής HEB 450 για λόγους σύγκρισης.



Σχήμα 4.3. Τυπικές διαστάσεις διατομής σιδηροτροχιάς

Πίνακας 4.2. Ιδιότητες και διαστάσεις των υπό εξέταση μεταλλικών δοκών - στύλων

Τύπος Δοκού	Περιγραφή	$A (cm^2)$	$I (cm^4)$	$\ell (cm)$	$\bar{\lambda}$ (λυγηρότητα)
BT1	25 lb ASCE Rail	15.48	104.06	1000	385.7
BT2	115 lb AREA Rail	72.65	2730.48	1000	163.1
BT3	HEB 450	218.00	79890.00	700	36.6

Πίνακας 4.3. Γεωμετρικές ιδιότητες των σιδηροτροχιών BT1, BT2 του Πίνακα 4.2 (σε ίντσες)

Διατομή	HT	BW	HW	W	HD	FD	BD	E
25 lb ASCE Rail	$2^{3/4}$	$2^{3/4}$	$1^{1/2}$	$19/64$	$25/32$	$1^{31/64}$	$31/64$	$1^{15/64}$
115 lb AREA Rail	$6^{5/8}$	$5^{1/2}$	$2^{23/32}$	$5/8$	$1^{11/16}$	$3^{13/16}$	$1^{1/8}$	$2^{7/8}$

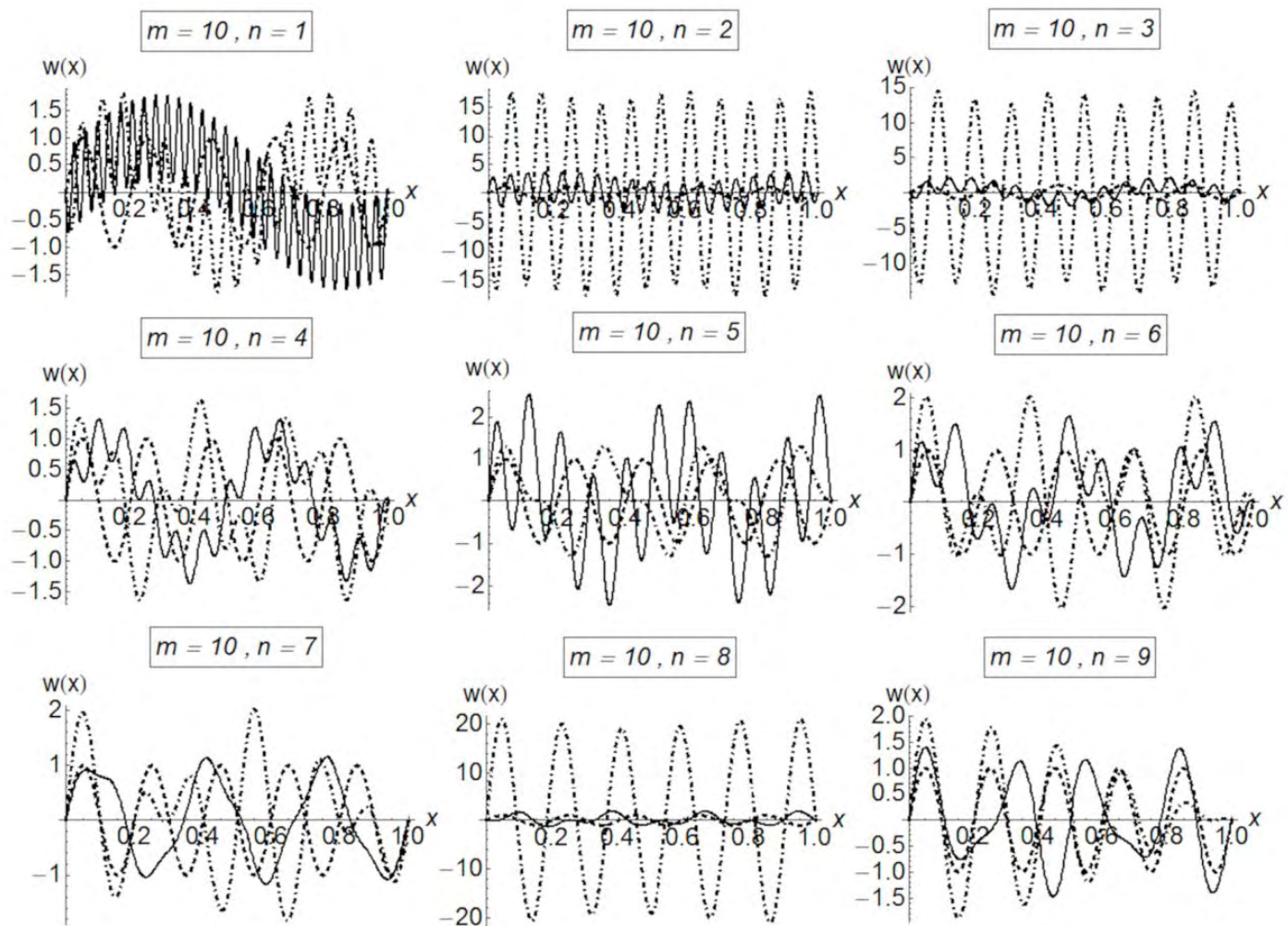
4.3.2 Αμφιέριστη δοκός - στύλος

Σύμφωνα με τα περιεχόμενα της προηγούμενης ενότητας, θα αναζητηθούν αποτελέσματα για έξι (6) χαρακτηριστικούς συνδυασμούς δοκού – στύλου και εδαφικού υποστρώματος, των οποίων οι αδιάστατες παράμετροι περιέχονται στον Πίνακα 4.4 που ακολουθεί.

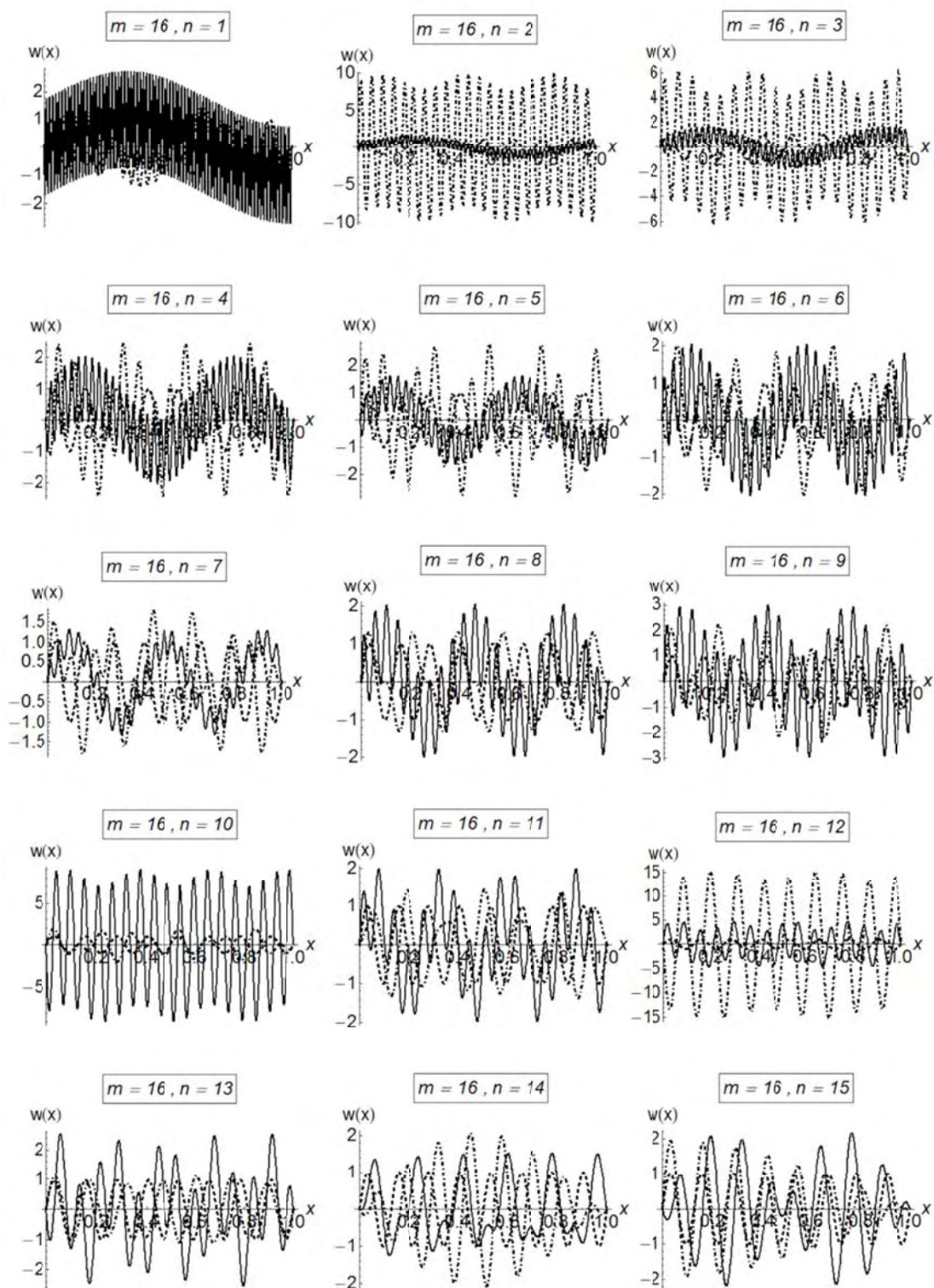
Πίνακας 4.4. Αδιάστατες παράμετροι θεμελίωσης για τις περιπτώσεις δοκών – στύλων που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό των αριθμητικών αποτελεσμάτων

Περίπτωση	μ	ξ
ST1 + BT1	915751.0	2404.0
ST2 + BT1	5723443.0	15410.0
ST1 + BT2	34886.0	183.2
ST2 + BT2	218036.0	1174.1
ST2 + BT3	1789.0	29.5
ST3 + BT3	143.1	2.4

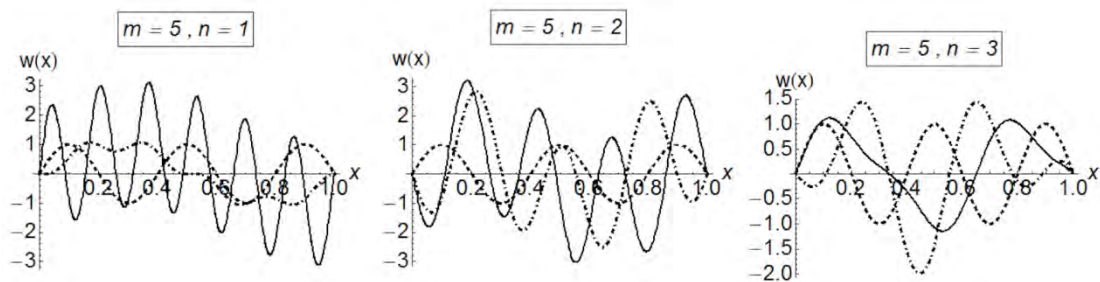
Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν μόνο τις δυνατές περιπτώσεις σύζευξης δοκών των περιπτώσεων του Πίνακα 4.4, υπό μορφή παράστασης της παραμορφωμένης λόγω λυγισμού κατάστασης των Σχημάτων 4.4 έως 4.9, με ή χωρίς αλληλεπίδραση (συνεχής και διακεκομμένη γραμμή παύλας – τελείας αντίστοιχα), για σταθερή τιμή του m . Στα Σχήματα αυτά απεικονίζεται επίσης και η παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού για θεμελίωση τύπου Winkler με διακεκομμένη γραμμή.



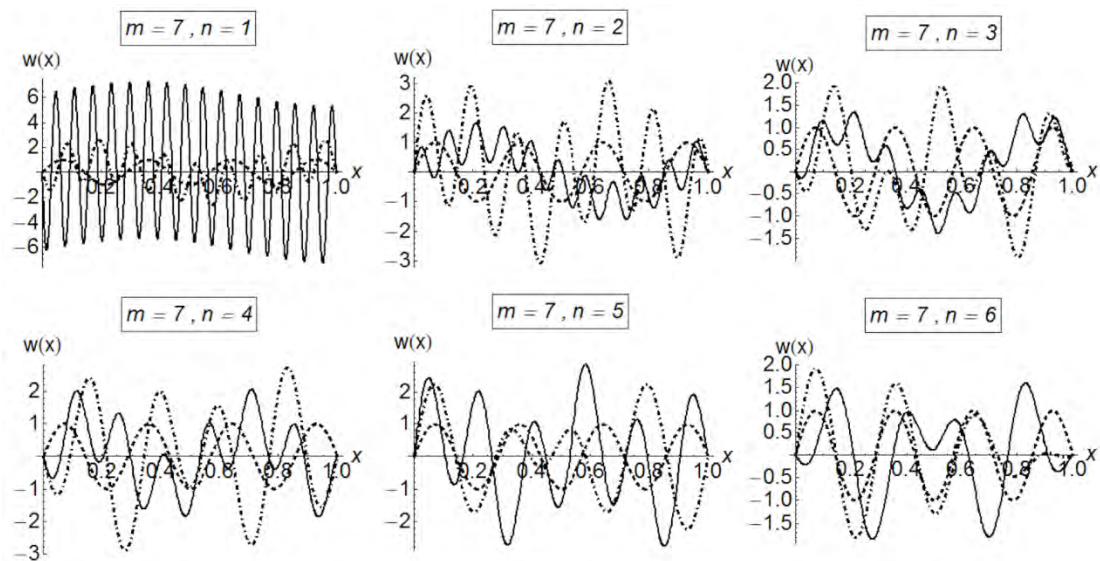
Σχήμα 4.4. Καμπύλες καμπτικής παραμόρφωσης για τη σύζευξη μορφών της περίπτωσης ST1+BT1



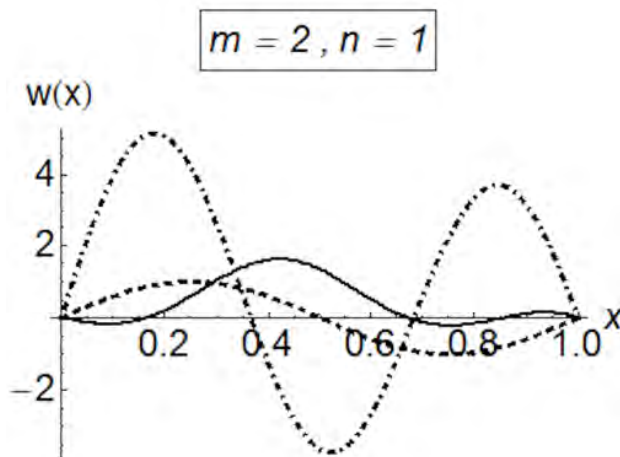
Σχήμα 4.5. Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT1



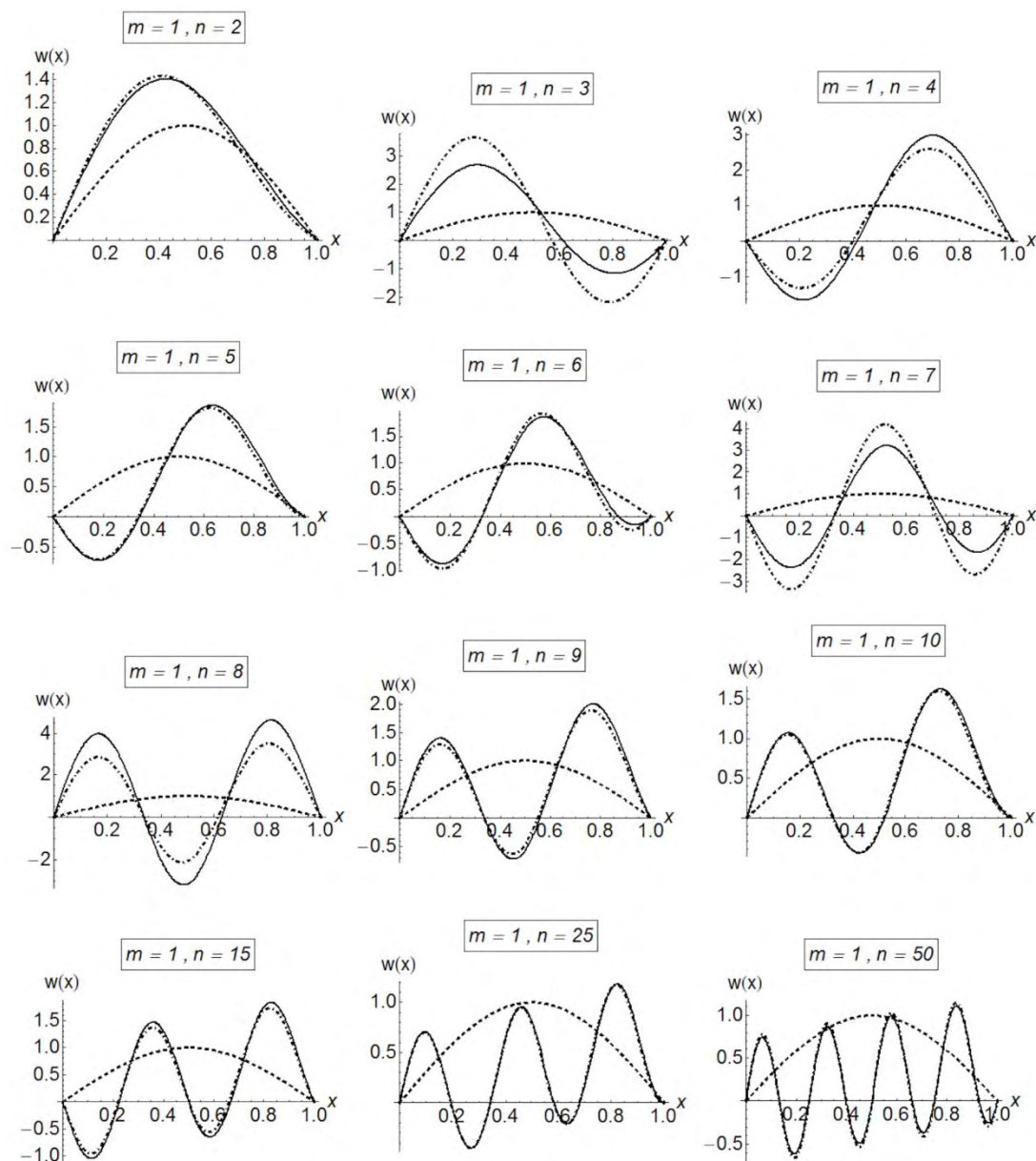
Σχήμα 4.6. Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST1+BT2



Σχήμα 4.7. Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT2



Σχήμα 4.8. Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST2+BT3



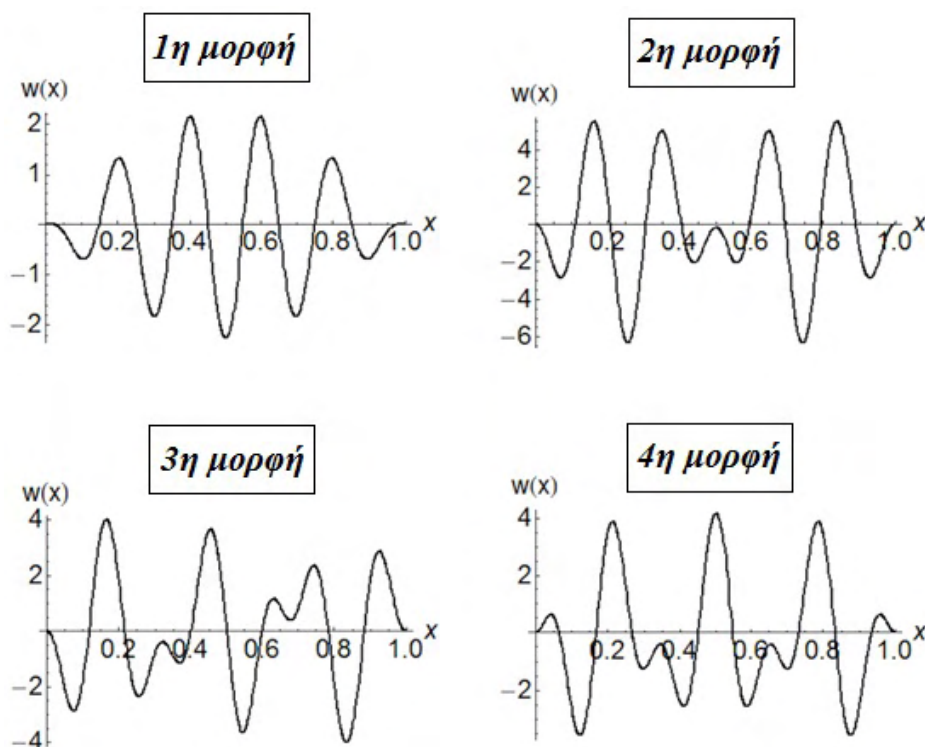
Σχήμα 4.9. Όμοια με το Σχήμα 4.4., αλλά για την περίπτωση ST3+BT3

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι για τις «πραγματικές» κατασκευές που επελέγησαν, μόνο υψηλής τάξης σύζευξη μορφών μπορεί να συμβεί, γεγονός επαρκώς επικίνδυνο για τον σχεδιασμό των κατασκευών, εφόσον τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία έχουν ρεαλιστικές τιμές, δηλαδή αντιστοιχούν σε θερμοκρασιακές μεταβολές αποδεκτών τιμών [§2.3, σχέση (2.37)]. Επιπλέον, η απουσία διατμητικού στρώματος στην προσομοίωση της θεμελίωσης δείχνει να «καθυστερεί» τη σύζευξη μορφών, δεδομένου ότι οι αντίστοιχες συζευγμένες μορφές περιέχουν λιγότερες κυματομορφές και εμφανίζουν «νωρίτερα» ακρότατα. Τούτο γίνεται περισσότερο αντιληπτό για δοκούς – στύλους μεγάλης

λυγηρότητας, ενώ για τη μάλλον ακραία περίπτωση της δοκού HEB, η ύπαρξη διατμητικού στρώματος είναι αμελητέα όταν συμβαίνει η σύζευξη μορφών. Παρά όμως τα ως άνω ενδιαφέροντα θεωρητικά ευρήματα, διαπιστώνεται εύκολα ότι σχετίζονται με κρίσιμα φορτία, τα οποία – σε περίπτωση που θεωρηθούν προερχόμενα από ομοιόμορφη αύξηση της θερμοκρασίας – οδηγούν σε ανεπίτρεπτα μεγάλες τιμές της αύξησης αυτής. Τούτο σημαίνει ότι για τις επιλεγείσες τιμές παραμέτρων προσομοίωσης εδάφους και διαστάσεων δοκών τα φαινόμενα αυτά δεν είναι δυνατόν να εμφανιστούν, οπότε αγνοούνται.

4.3.3 Αμφίπακτη δοκός – στύλος

Για αυτή την περίπτωση επελέγησαν οι παρακάτω μεταβλητές για την αναζήτηση αριθμητικών αποτελεσμάτων: $\mu = 10^6$ και $\xi = 1.4 \times 10^3$. Αυτές αντιστοιχούν σε μια μέτριου μήκους μεταλλική σιδηροτροχιά υψηλής λυγηρότητας επί εδαφικού υποστρώματος τύπου ST1. Οι πρώτες τέσσερις (4) ιδιομορφές λυγισμού υπολογίστηκαν αριθμητικά και δίδονται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10. Ιδιομορφές λυγισμού για την αμφίπακτη δοκό

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η παρουσία διατμητικού στρώματος έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια της συμμετρίας της 1^{ης} περιττής τάξης μορφής (τη 2^η πραγματικής), που γίνεται συμμετρική, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τη 2^η περιττής τάξης, που γίνεται αντισυμμετρική. Λόγω της απουσίας αναλυτικών

λύσεων της γραμμικοποιημένης εξίσωσης λυγισμού, η ενδεχόμενη σύζευξη μορφών δε μπορεί να μελετηθεί. Εν τούτοις, η θεμελιώδης ιδιομορφή περιέχει εννέα (9) ημικύματα τα οποία συγκρινόμενα με τα δέκα (10) που εμφανίζονται στην αντίστοιχη της αμφιέρειστης δοκού επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αριθμητικών λύσεων, με δεδομένη αμεταθετότητα και δυσκαμψία στηρίξεων.

4.4 Συμπεράσματα

Τα πιο σημαντικά συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τα περιεχόμενα του παρόντος Κεφαλαίου είναι τα ακόλουθα:

- Για «πραγματικές» κατασκευές και συνήθεις τιμές παραμέτρων εδαφικών υποστρωμάτων, η προσομοίωση της θεμελίωσης με το μοντέλο Pasternak οδηγεί σε υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις μορφών, που συνδέεται με σύνθετες καμπτικές παραμορφώσεις και επιπρόσθετες μικρού εύρους κυματομορφές με αυξημένες μέγιστες τιμές του βέλους κάμψης για την αμφιέρειστη δοκό. Τούτο είναι ένα πολύ σημαντικό εύρημα για τον σχεδιασμό κατασκευών, αλλά δε συνδέεται με ρεαλιστικές τιμές θλιπτικού φορτίου ή αποδεκτές τιμές του αιτίου εμφάνισης του (θερμοκρασιακή μεταβολή της σιδηροτροχιάς εν προκειμένω) και εν τέλει το όλο φαινόμενο μπορεί να αγνοηθεί.

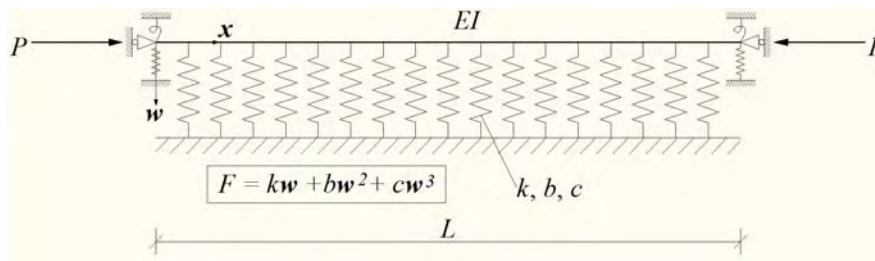
- Για την αντίστοιχη αμφίπακτη δοκό – στύλο, παρόλο που υιοθετήθηκε η γραμμική ανάλυση, η εξίσωση λυγισμού δεν επιδέχεται αναλυτική λύση και μόνο αριθμητικές τοιαύτες μπορούν να εξαχθούν. Η σύζευξη μορφών, ωστόσο, δεν μπορεί να προσδιοριστεί συμβολικά και αν είναι δυνατή η ύπαρξη αυτού του φαινομένου, τούτο μπορεί να αναλυθεί μόνο με μη γραμμική θεωρία λυγισμού.

Κεφάλαιο 5

Καθολική ευστάθεια ομοιόμορφων χαλύβδινων δοκών – στύλων επί ελαστικού εδάφους με μικτή τετραγωνική – κυβική μη γραμμικότητα

5.1 Εξίσωση λυγισμού

Θεωρούμε μία ομοιόμορφη μεταλλική δοκό – στύλο, με ελαστικές στηρίξεις που δεν επιτρέπουν τη μείωση του μήκους της, εδραζόμενη επί μιας ελαστικής θεμελίωσης μικτής τετραγωνικής – κυβικής μη γραμμικότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Ομοιόμορφη μεταλλική δοκός – στύλος επί μιας ελαστικής μη γραμμικής θεμελίωσης τριών παραμέτρων

Ορίζοντας ως $w(x)$ την εντός επιπέδου καμπτική μετατόπιση, η δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα μήκους του στρώματος των ελατηρίων, που προσομοιώνουν τη θεμελίωση, δίδεται από τη σχέση:

$$F = kw + bw^2 + cw^3 \quad (5.1)$$

όπου, ο συντελεστής της γραμμικής δυσκαμψίας k έχει πάντα θετικό πρόσημο (αντιπροσωπεύοντας το τμήμα της θεμελίωσης τύπου Winkler), ενώ οι μη γραμμικοί συντελεστές b και c εισάγουν μια τετραγωνική και κυβική μη γραμμική συμπεριφορά («σκληρού» - «μαλακού» τύπου) αντίστοιχα, και θεωρείται αρχικά ότι μπορούν να είναι αυθαίρετα θετικοί ή αρνητικοί.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πλήρης επαφή της δοκού – στύλου με το εδαφικό υπόστρωμα σε όλο το μήκος της και απαιτούμε η δύναμη που ασκείται από τη θεμελίωση να έχει πάντα το ίδιο πρόσημο με την καμπτική μετατόπιση. Χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες της ισχυρής εντολής **Reduce** που περιέχεται στο λογισμικό *Mathematica*, όπως φαίνεται στο σχετικό κώδικα του Σχήματος B.2.1 του Παραρτήματος B, λαμβάνουμε:

$$k > 0 \wedge w \neq 0 \wedge \frac{wb+k}{w^2} + c > 0 \quad (5.2)$$

Αντικαθιστώντας τα $b = \gamma_1 k$ και $c = \gamma_2 k$ στην ως άνω (5.2) ανισότητα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $k > 0$ όπως επίσης ότι $w^2 > 0$ ζητούμε τελικώς το πολυώνυμο 2^{ης} τάξης $\gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + 1$ να μην έχει πραγματικές ρίζες και να είναι πάντα θετικό για κάθε w , το οποίο αποδίδεται με τη σχέση:

$$\langle \gamma_1 | y \rangle \in \mathbb{R} \wedge \gamma_2 > \frac{\gamma_1^2}{4} \quad (5.3)$$

όπως φαίνεται και στο σχετικό κώδικα *Mathematica* του Σχήματος B.2.2 του Παραρτήματος B.

Αυτό αποδεικνύει ότι το γ_1 μπορεί να έχει είτε αρνητικό είτε θετικό πρόσημο, ενώ το γ_2 πρέπει πάντα να έχει θετικό πρόσημο και να ικανοποιεί την ανωτέρω ανισότητα.

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων που περιγράφει την ευστάθεια της δοκού συνδέεται με την ακόλουθη ουσιαστικά μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (5.4):

$$EIw''''(x) + Pw''(x) + kw(x) + bw^2(x) + cw^3(x) = 0 \quad (' = d / d x) \quad (5.4)$$

η οποία προέρχεται από εφαρμογή γραμμικής σχέσης ροπής - καμπυλότητας. Πρέπει να τονιστεί ότι, ακόμα και στην απλή αυτή περίπτωση, η εξίσωση (5.4) δεν επιδέχεται λύσεις κλειστού τύπου (Polyanin και Zaitsev 1995) και για αυτόν το λόγο θα αναζητηθούν προσεγγιστικές λύσεις.

Στη σχετική βιβλιογραφία (Chen και Baker 2003, Everall και Hunt 1999, Wade et al 2000, Whiting 1997) έχουν αναφερθεί διάφορες προσπάθειες για κατάλληλη αδιαστατοποίηση της εξίσωσης (5.4). Ωστόσο, καμία τους, πλην αυτής που υιοθετείται εδώ (όπως επίσης και στις εργασίες των Li et al 1995, Wang et al 2009, Zhang και Murphy 2005), δεν παρέχει τη δυνατότητα οι αδιάστατοι παράγοντες (α) να είναι τελείως ανεξάρτητοι από το πρόσημο και των δύο μη γραμμικών συντελεστών της θεμελίωσης και (β) να παράσχουν φυσικούς περιορισμούς στα άκρα της δοκού, χωρίς να περιλαμβάνουν κρίσιμες τιμές φορτίου ή άλλες άγνωστες ποσότητες. Σύμφωνα με αυτές τις παρατηρήσεις, εισάγουμε τους ακόλουθους «κλασσικούς» αδιάστατους όρους:

$$x = x / L, \quad w = w / L, \quad \lambda = \frac{PL^2}{EI}, \quad \mu = \frac{kL^4}{EI}, \quad \xi = \frac{bL^5}{EI}, \quad \zeta = \frac{cL^6}{EI} \quad (5.5)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση, η τελική μορφή της εξίσωσης (5.4) είναι:

$$w'''' + \lambda w'' + \mu w + \xi w^2 + \zeta w^3 = 0, \quad (' = d / dx), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.6)$$

Εισάγοντας στην ως άνω εξίσωση τη μη γραμμική σχέση ροπής - καμπυλότητας (Kounadis et al 2006) λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{w''(x)}{\sqrt{1-w'^2(x)}} \right\} + \lambda w'' + \mu w + \xi w^2 + \zeta w^3 = 0, \quad (' = d / dx) \quad (5.7)$$

Έχοντας δε υπόψη πως ισχύει ότι:

$$\frac{w''(x)}{\sqrt{1-w'^2(x)}} \cong \frac{w''(x)}{[1-1/2w'^2(x)]} \cong w''(x) \left[1 + \frac{1}{2} w'^2(x) \right] \quad (5.8)$$

και μετά από επεξεργασία βρίσκουμε

$$w'''' + \lambda w'' + \mu w = -\xi w^2 - \zeta w^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{w''''(x) w'^2(x) + 6w'(x) w''(x) w'''(x) + 2w''^3(x)}{2w''^3(x)} \right] \quad (5.9)$$

που αποτελεί μια ισχυρά μη γραμμική, μη ομογενή διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης.

5.2 Διαδικασία επίλυσης

Αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (5.9) της μορφής:

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (5.10)$$

όπου $w_h(x)$ είναι η αντίστοιχη λύση της ομογενούς εξίσωσης και $w_p(x)$ η ειδική της λύση. Η 1^η είναι ίση με

$$w_h(x) = s_1 \sin(k_1 x) + s_2 \cos(k_1 x) + s_3 \sin(k_2 x) + s_4 \cos(k_2 x) \quad (5.11)$$

στην οποία

$$k_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}}, \quad \lambda \geq 2\sqrt{\mu} \quad (5.12)$$

ενώ οι συντελεστές $s_i, i=1, \dots, 4$ υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες.

Ορίζοντας ως $k_{cr} = n\pi, n \in \mathbb{N}$ την λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος και εφαρμόζοντας μια τεκμηριωμένη προσεγγιστική αναλυτική μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών (Kounadis 1992), το $w_p(x)$ υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$w_p(x) = A\zeta + B \sin(k_{cr} x) + \Gamma \cos(2k_{cr} x) + \Delta \sin(3k_{cr} x) \quad (5.13)$$

Αντικαθιστώντας το $w_p(x)$ στην (5.9), και μετά από συμβολικούς υπολογισμούς βρίσκουμε

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\mu, \quad B = -\frac{k_{cr}^6 + 6\zeta}{8(k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + 2\mu)}, \\ \Gamma &= \frac{\zeta}{32k_{cr}^4 - 8\lambda k_{cr}^2 + 2\mu}, \quad \Delta = \frac{-9k_{cr}^6 + 2\zeta}{8(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

5.2.1 Αμφιέρειστη δοκός - στύλος

Για την περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού, οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0 \quad (5.15)$$

οι οποίες οδηγούν στις ακόλουθες τιμές των συντελεστών s_i του ομογενούς τμήματος της εξίσωσης:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{2k_{cr}^2 \zeta (k_2^2 (4k_{cr}^2 - \lambda) + \mu) \tan \left[\frac{k_1}{2} \right]}{(k_1^2 - k_2^2) \mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)}, \\ s_2 &= -\frac{2k_{cr}^2 \zeta (k_2^2 (4k_{cr}^2 - \lambda) + \mu)}{(k_1^2 - k_2^2) \mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)}, \\ s_3 &= \frac{2k_{cr}^2 \zeta (k_1^2 (4k_{cr}^2 - \lambda) + \mu) \tan \left[\frac{k_2}{2} \right]}{(k_1^2 - k_2^2) \mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)}, \\ s_4 &= \frac{2k_{cr}^2 \zeta (k_1^2 (4k_{cr}^2 - \lambda) + \mu)}{(k_1^2 - k_2^2) \mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

5.2.2 Αμφίπακτη δοκός - στύλος

Δεδομένου ότι οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν σε αυτή την περίπτωση είναι

$$w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0 \quad (5.17)$$

η παρουσία περιττών παραγώγων του w οδηγεί σε δύο σύνολα τιμών για τους s_i , που αντιστοιχούν σε άρτιες και περιττές γραμμικοποιημένες ιδιομορφές (για άρτια και περιττή τιμή του n αντίστοιχα). Αυτές δίδονται στις εκφράσεις (5.18) – (5.25) που ακολουθούν.

Για άρτιες τιμές του n :

$$s_1^{\alpha\rho\tau} = \frac{1}{2} k_{cr}^2 \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) \left(\frac{8k_2 \zeta \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) (\lambda - 4k_{cr}^2)}{\mu \left((k_1 + k_2) \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) + (k_1 - k_2) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) \right) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \frac{k_{cr} \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi)}{(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \left(k_1 \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) - k_2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) \right)} \right) \quad (5.18)$$

$$s_2^{\alpha\rho\tau} = \frac{1}{8} \left(\left(\left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (4k_{cr}^2 - \lambda) (k_1 \sin k_1 \sin k_2 + k_2 \cos k_1 \cos k_2 - k_2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} \right) - k_{cr} + k_2 (\cos k_2 - \cos k_1) \left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (\lambda - 4k_{cr}^2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \sin k_1 \left(\frac{27k_{cr}^6 - 6\xi}{81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu} + \frac{k_{cr}^6 + 6\xi}{k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu} \right) \right) + \frac{8k_{cr}^2 \sin^2\left(\frac{k_1}{2}\right) (k_1 \sin k_2 - k_2 \sin k_1) \left(\frac{27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi}{(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu)} \right)}{(k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1)} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4\zeta}{16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu} - \frac{4\xi}{\mu} \right) \right) \quad (5.19)$$

$$s_3^{\alpha\rho\tau} = \frac{\left(k_{cr}^2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \left(\begin{aligned} & 2 \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) \left(4k_1^2 \zeta \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) (4k_{cr}^2 - \lambda) (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \right) + \\ & k_2 k_{cr} \mu \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi) + \\ & k_1 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \left(-4k_2 \zeta \sin k_2 (4k_{cr}^2 - \lambda) (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) - \right. \\ & \left. k_{cr} \mu (\cos k_2 + 1) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi) \right) \end{aligned} \right) \right)}{(\mu (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu)) ((k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1))} \quad (5.20)$$

$$s_4^{\alpha\rho\tau} = \frac{\left(-k_{cr} \left(k_2 (\cos k_2 - \cos k_1) \left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (4k_{cr}^2 - \lambda) (k_1 \sin k_1 \sin k_2 + k_2 \cos k_1 \cos k_2 - k_2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (\lambda - 4k_{cr}^2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sin k_1 \left(\frac{27k_{cr}^6 - 6\xi}{81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu} + \frac{k_{cr}^6 + 6\xi}{k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{8k_{cr}^2 \sin^2 (k_2 \sin k_1 - k_1 \sin k_2) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda \xi)}{(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu)} \right) \right) \right) \right)}{8((k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1))} \quad (5.21)$$

Για περιττές τιμές του n :

$$s_1^{\pi\rho} = \frac{\left(-\left(k_{cr}^2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \left(2k_2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) - 2k_1 \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) \right) \right) \bullet \right. \\ \left. \left(k_{cr} \mu \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda \xi) - \right. \right. \\ \left. \left. 4k_2 \zeta \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) (4k_{cr}^2 - \lambda) (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \right) \right)}{\left(\mu (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \right) ((k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1))} \quad (5.22)$$

$$s_2^{\pi\rho} = \frac{1}{8} \left(-k_{cr} \left(k_2 (\cos k_2 - \cos k_1) \left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (4k_{cr}^2 - \lambda) (k_1 \sin k_1 \sin k_2 + k_2 \cos k_1 \cos k_2 - k_2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{16k_1 k_{cr} \zeta (\lambda - 4k_{cr}^2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sin k_1 \left(\frac{27k_{cr}^6 - 6\xi}{81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu} + \frac{k_{cr}^6 + 6\xi}{k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{8k_{cr}^2 \cos^2\left(\frac{k_1}{2}\right) (k_2 \sin k_1 - k_1 \sin k_2) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda \xi)}{(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu)} \right) \right) \\ - \frac{1}{8} \left(\frac{4\zeta}{16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu} - \frac{4\zeta}{\mu} \right) \quad (5.23)$$

$$S_3^{\pi\rho} = \frac{\left(\begin{array}{l} k_{cr}^2 \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) \left(2k_2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) - 2k_1 \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) \right) \\ k_{cr} \mu \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi) \\ - 4k_1 \zeta \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) (4k_{cr}^2 - \lambda) (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \end{array} \right)}{\left(\mu (81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu) \right) \left((k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1) \right)} \quad (5.24)$$

$$S_4^{\pi\rho} = \frac{\left(\begin{array}{l} - \frac{16k_1 k_{cr} \zeta (4k_{cr}^2 - \lambda) (k_1 \sin k_1 \sin k_2 + k_2 \cos k_1 \cos k_2 - k_2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} \\ k_{cr} \left(\begin{array}{l} \frac{16k_1 k_{cr} \zeta (\lambda - 4k_{cr}^2)}{\mu (16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu)} + \\ \sin k_1 \left(\frac{27k_{cr}^6 - 6\xi}{81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu} + \frac{k_{cr}^6 + 6\xi}{k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu} \right) + \\ \frac{8k_{cr}^2 \cos^2 (k_1 \sin k_2 - k_2 \sin k_1) (27k_{cr}^8 - 9\lambda k_{cr}^6 + 7\mu k_{cr}^4 + 120\xi k_{cr}^2 - 12\lambda\xi)}{(81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu) (k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + \mu)} \end{array} \right) \end{array} \right)}{8 \left((k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1) \right)} \quad (5.25)$$

5.3 Φορτία λυγισμού και πιθανή σύζευξη μορφών

5.3.1 Αμφιέρεστη δοκός - στύλος

Λόγω της ισχυρά μη γραμμικής φύσης του προβλήματος και του γεγονότος ότι το έδαφος δρα ως εγκάρσιο αρνητικό φορτίο, ο λυγισμός συνδέεται με ασυμπτωτικά μεγάλες παραμορφώσεις. Από τις ως άνω λύσεις, τούτο συμβαίνει μόνο όταν ένας ή και περισσότεροι παρονομαστές τείνουν στο μηδέν ή εάν κάποιος αριθμητής τείνει στο άπειρο. Στην παρούσα περίπτωση υπάρχουν τρεις διακεκριμένοι τύποι παρονομαστών που ορίζονται ως T_r , $r=1,2,3$, που μηδενίζονται όταν το φορτίο είναι ίσο με λ_r , $r=1,2,3$ όπως φαίνεται σε ότι ακολουθεί:

$$T_1 = k_{cr}^4 - \lambda k_{cr}^2 + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = n^2 \pi^2 + \frac{\mu}{n^2 \pi^2} = \lambda_1 \quad (5.26)$$

$$T_2 = 16k_{cr}^4 - 4\lambda k_{cr}^2 + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 4n^2 \pi^2 + \frac{\mu}{4n^2 \pi^2} = \lambda_2 \quad (5.27)$$

$$T_3 = 81k_{cr}^4 - 9\lambda k_{cr}^2 + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 9n^2 \pi^2 + \frac{\mu}{9n^2 \pi^2} = \lambda_3 \quad (5.28)$$

Τα ως άνω φορτία δίνονται σε γενική μορφή ως

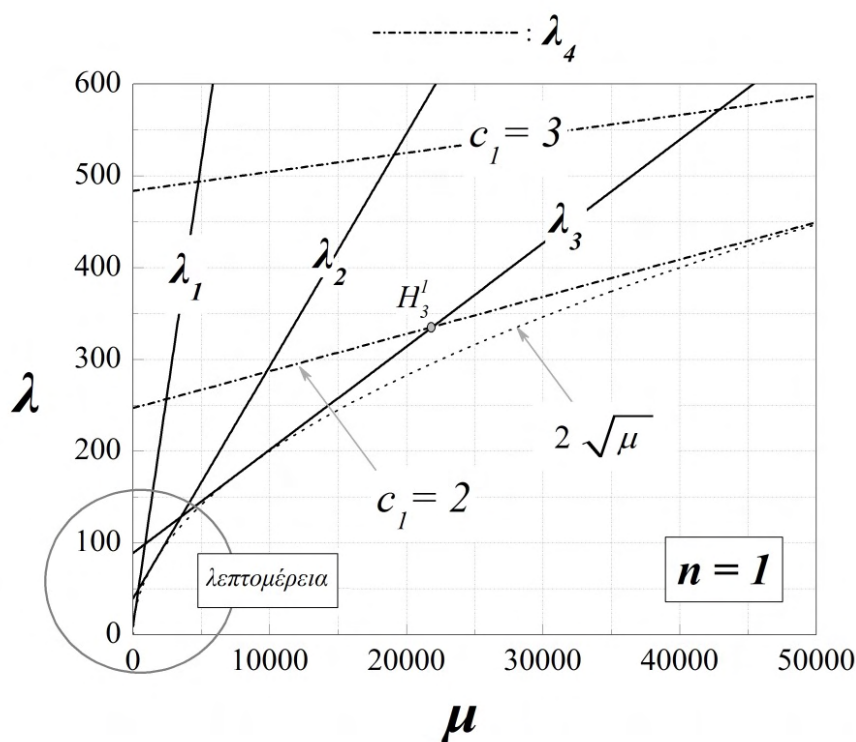
$$\lambda_\sigma = (\sigma k_{cr})^2 + \frac{\mu}{(\sigma k_{cr})^2}, \quad \sigma=1, 2, 3, \quad k_{cr} = n\pi \quad (5.29)$$

Παρά ταύτα, είναι επίσης πιθανό ο παρακάτω αριθμητής να τείνει στο άπειρο:

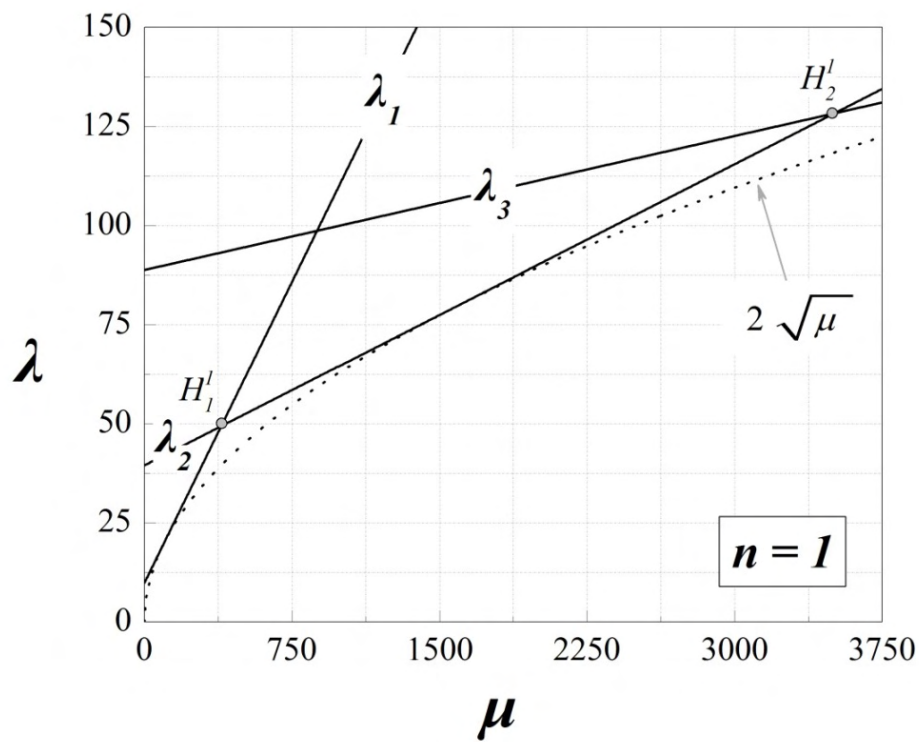
$$(\tan k_1 \vee \tan k_2) \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda = \lambda_4 = (2c_1 + 1)^2 \pi^2 + \frac{\mu}{(2c_1 + 1)^2 \pi^2}, \quad c_1 \in \mathbb{N} \quad (5.30)$$

δίνοντας έτσι μια ακόμη πιθανή κρίσιμη κατάσταση.

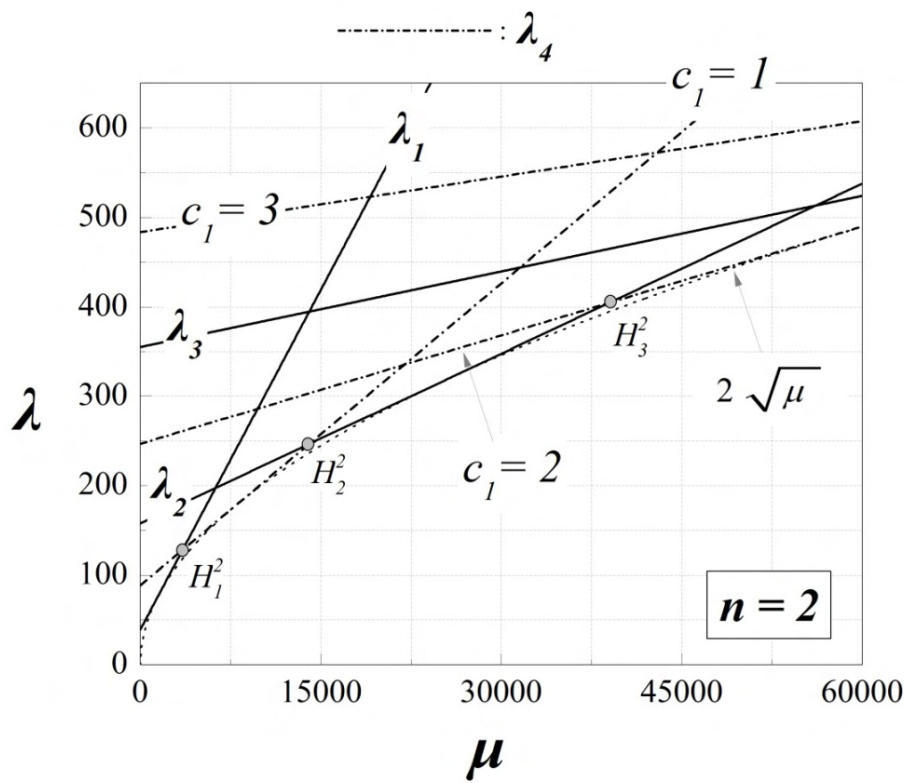
Οι λύσεις που δίνονται στις εκφράσεις (5.29) και (5.30) παρίστανται γραφικά στα Σχήματα 5.2 – 5.5 για $n=1, 2, 3$. Σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις, φαίνονται καθαρά τα σημεία αλληλεπίδρασης που μας ενδιαφέρουν, που εμφανίζονται πριν από οποιοδήποτε άλλο μικρότερο κρίσιμο φορτίο.



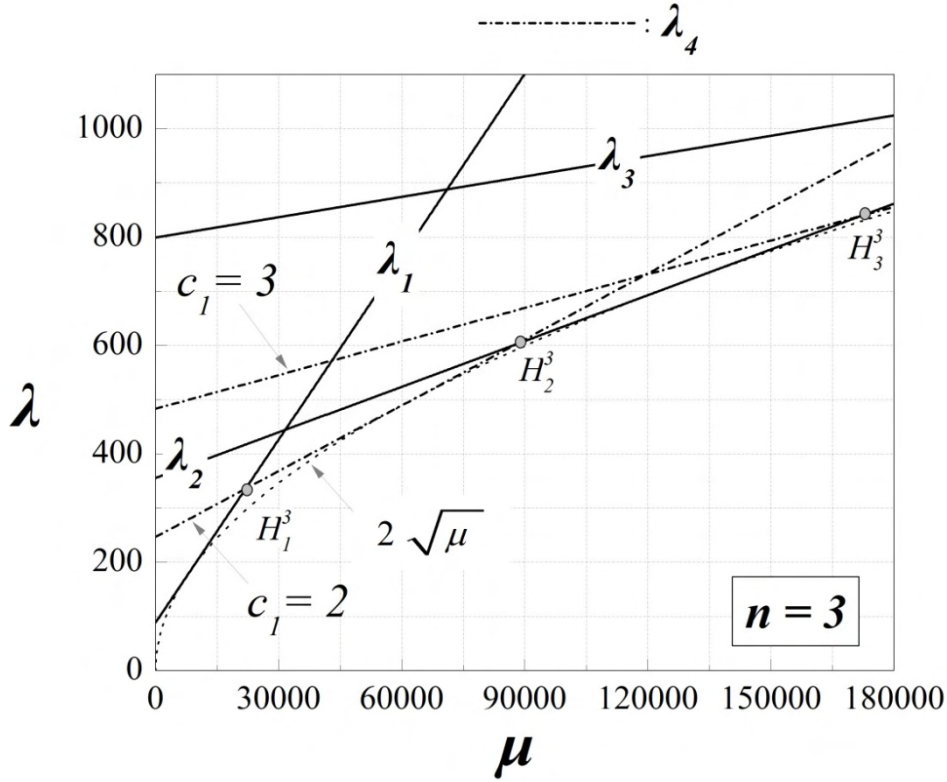
Σχήμα 5.2. Γραφική παράσταση των λύσεων για $n = 1$, αμφιέρειστη δοκός



Σχήμα 5.3. Λεπτομέρεια του Σχήματος 5.2



Σχήμα 5.4. Γραφική παράσταση των λύσεων για $n=2$, αμφιέριστη δοκός



Σχήμα 5.5 Γραφική παράσταση των λύσεων για $n=3$, αμφιέριστη δοκός

Η αλληλεπίδραση μορφών μπορεί να λάβει χώρα όταν δύο ή περισσότερες ευθείες γραμμές – λύσεις που περιγράφονται στις σχέσεις (5.29) και (5.30) τέμνονται. Τούτο μπορεί να συμβεί αν ισχύουν τα κάτωθι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{cr}^{1,2} = 5k_{cr}^2 \\ \mu_{cr}^{1,2} = 4k_{cr}^4 \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{cr}^{1,3} = 10k_{cr}^2 \\ \mu_{cr}^{1,3} = 9k_{cr}^4 \end{cases} \quad (5.32)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{cr}^{2,3} = 13k_{cr}^2 \\ \mu_{cr}^{2,3} = 36k_{cr}^4 \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\lambda_1 = \lambda_4 \Rightarrow \left(c_1 = \frac{n-1}{2} \right) \vee \left(\mu > n^2 \pi^4 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{2n\pi^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (5.34)$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 \Rightarrow \mu > 4n^2 \pi^4 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{4n\pi^2} - \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow \left(c_1 = \frac{1}{2}(3n-1) \right) \vee \left(\mu > 9n^2 \pi^4 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{6n\pi^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (5.36)$$

Οι τελευταίες τρεις σχέσεις είναι αποτέλεσμα συμβολικών υπολογισμών που φαίνονται στο Σχήμα Β.2.3 του Παραρτήματος Β.

Σημειωτέον δε ότι σε αυτήν την περίπτωση μόνο διπλές αλληλεπιδράσεις της μορφής $\lambda_i = \lambda_j$, $i, j = 1-4$, $i \neq j$ είναι δυνατές.

5.3.2 Αμφίπακτη δοκός - στύλος

Σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζονται οι ίδιοι παρονομαστές με έναν επιπρόσθετο που έχει τη μορφή:

$$T_{4a} = k_1 \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2}{2}\right) - k_2 \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2}{2}\right) \quad (5.37)$$

$$T_{4b} = (k_1 + k_2) \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) + (k_1 - k_2) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) \quad (5.38)$$

ή υπό μορφή ενός μόνο όρου

$$T_{4c} = (k_1^2 + k_2^2) \sin k_1 \sin k_2 + 2k_1 k_2 (\cos k_1 \cos k_2 - 1) = \frac{1}{2}(T_{4a} \cdot T_{4b}) \quad (5.39)$$

Αυτή η εξίσωση, που συνδέεται με τον επιπρόσθετο παρονομαστή, δεν επιδέχεται αναλυτική λύση, αλλά μπορεί να λυθεί μόνο αριθμητικά, και στην πραγματικότητα είναι η εξίσωση λυγισμού για μια αμφίπακτη δοκό – στύλο (για το μοντέλο θεμελίωσης Winkler). Ορίζοντας ως $\lambda_{kr}^{\text{αμφίπακτης}}$ ($i=1,2,\dots,n$) τις λύσεις για την (5.39), για να προκύψουν δυνατές αλληλεπιδράσεις μορφών πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (λ_σ από εξίσωση (5.29)):

$$\lambda_{kr}^{\text{αμφίπακτης}} = \lambda_\sigma \Rightarrow \mu_{kr}^{\text{αμφίπακτης}} = \alpha_k \pi^4, \quad k \in \mathbb{N} \quad (5.40)$$

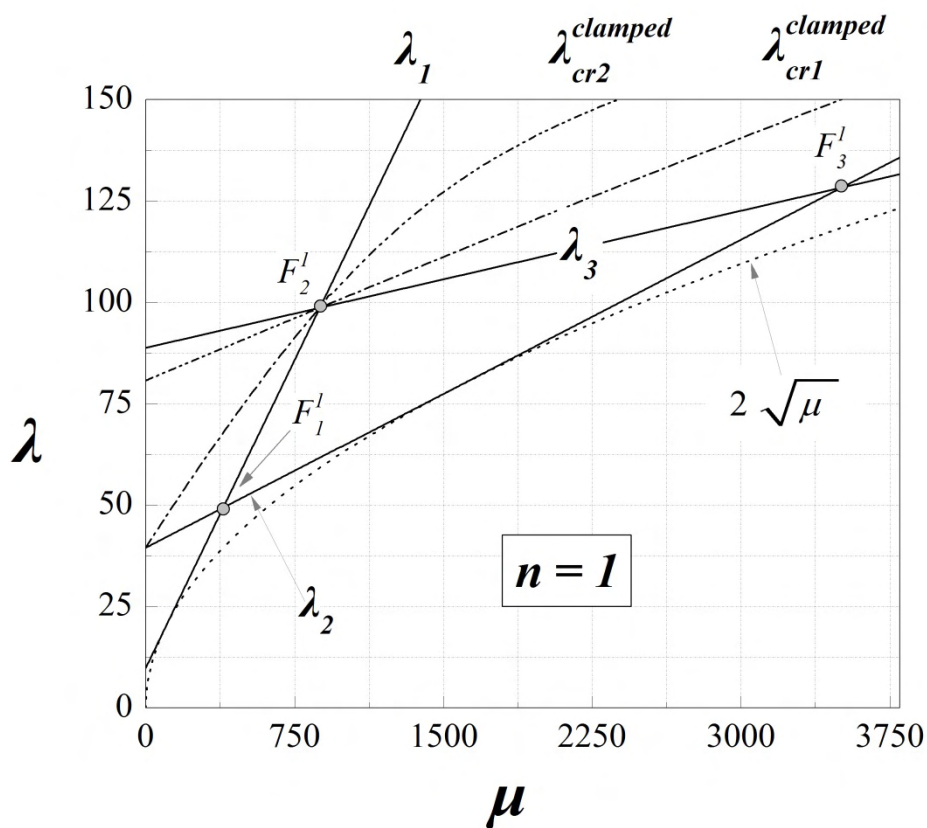
όπου

$$\left\{ \alpha_1 = \left\{ \begin{array}{l} n\sigma \text{ για άρτιο } n \\ 2n\sigma \text{ για περιττό } n \end{array} \right\} \text{ για άρτιο } \sigma \right\} \quad (5.41)$$

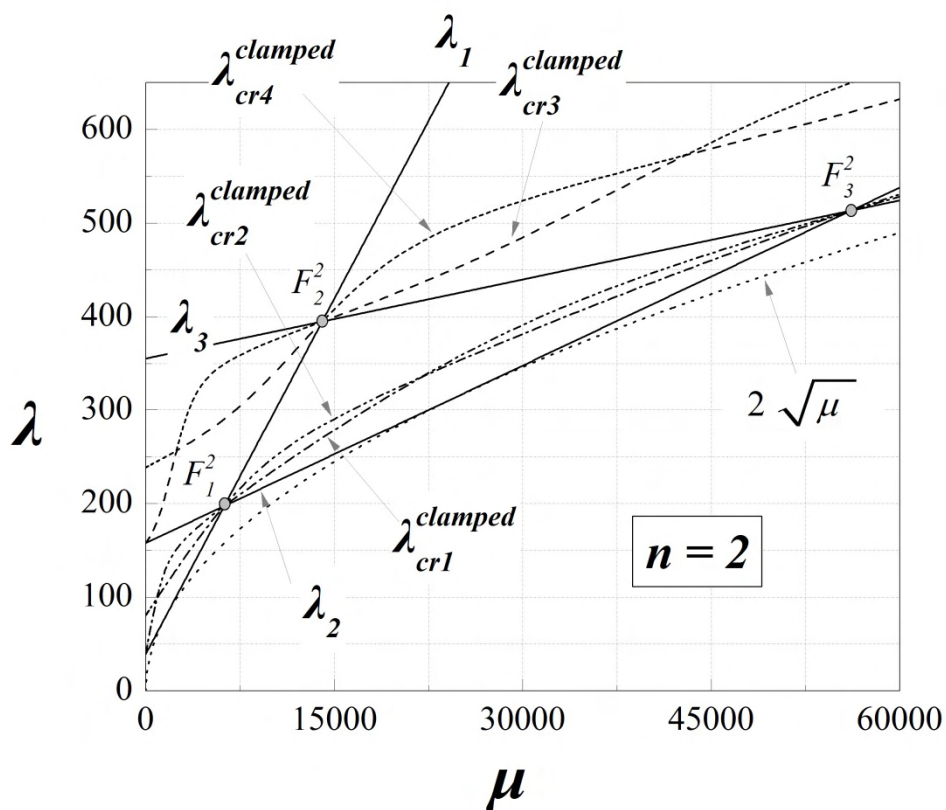
$$\left\{ \alpha_{k+1} = \left(\sqrt{\alpha_k} + 2n\sigma \right)^2 \right.$$

Επίσης, ο όρος του αριθμητή που εμφανίζεται στην προηγούμενη περίπτωση, υπό τη μορφή $\sin(k_1/2)$ ή $\sin(k_2/2)$, και όλα τα σχόλια που προηγήθηκαν για τον απειρισμό του – βλ. εξίσωση (5.30) – ισχύουν.

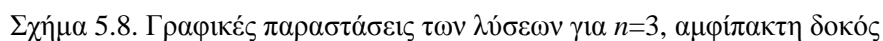
Κατά τον ίδιο τρόπο, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δίδεται η γραφική παράσταση των λύσεων στα Σχήματα 5.6 – 5.8 για $n=1,2,3$. Σημαντικές διπλής ή πολλαπλής μορφής αλληλεπίδρασης δίδονται επίσης σε αυτές τις παραστάσεις.



Σχήμα 5.6. Γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $n=1$, αμφίπακτη δοκός

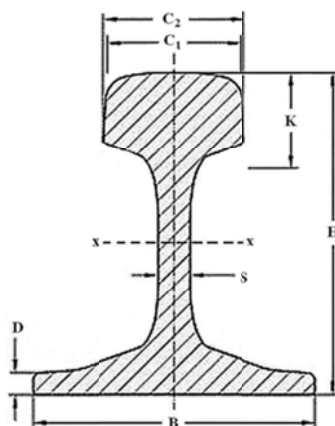


Σχήμα 5.7. Γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $n=2$, αμφίπακτη δοκός



4	a	-0.05	1.50
	b	+0.05	
5	a	-0.05	3.00
	b	+0.05	
6	a	-0.30	0.05
	b	+0.30	
7	a	-0.30	0.20
	b	+0.30	
8	a	-0.30	0.75
	b	+0.30	
9	a	-0.30	1.50
	b	+0.30	
10	a	-0.30	3.00
	b	+0.30	
11	a	-1.00	0.05
	b	+1.00	
12	a	-1.00	0.20
	b	+1.00	
13	a	-1.00	0.75
	b	+1.00	
14	a	-1.00	1.50
	b	+1.00	
15	a	-1.00	3.00
	b	+1.00	

Επιπλέον, προκειμένου να παρουσιαστούν πραγματικές εφαρμογές μεταλλικών δοκών – στύλων που εδράζονται επί του τύπου θεμελίωσης, που αναλύεται στο παρόν Κεφάλαιο, η διατομή που επελέγη για τις δοκούς είναι η *UIC 60 Rail* (διατομή σιδηροτροχιάς), που είναι όμοια με την Ευρωπαϊκού τύπου *60E1* (σύμφωνα με τον EN 13674-1 2011), η γεωμετρία της οποίας δίδεται στο Σχήμα 5.9, και οι ιδιότητες της στον Πίνακα 5.2.



Σχήμα 5.9. Διατομή σιδηροτροχιάς UIC 60

Πίνακας 5.2. Γεωμετρικά στοιχεία της διατομής σιδηροτροχιάς UIC 60

C_1 (mm)	C_2 (mm)	K (mm)	H (mm)	s (mm)	D (mm)	B (mm)	I (cm ⁴)	A (cm ²)
72.0	74.3	37.5	172.0	16.5	11.5	150.0	3055	76.7

Επιπλέον, υιοθετούνται τρεις σημαντικοί χαρακτηριστικοί τύποι εδαφικών υποστρωμάτων, δηλαδή σκληρής αργίλου (Τύπος εδάφους 1, ST1), τυπικών χαλίκων (ST2) και αμμοχάλικου (ST3). Η γραμμική παράμετρος δυσκαμψίας k που συνδέεται με αυτούς τους τύπους εδαφών (σε MPa) λαμβάνεται ίσος με 10, 20 και 125 αντίστοιχα (Worku 2012). Ως τελικό βήμα, συσχετίζεται η αδιάστατη γραμμική παράμετρος αντίστασης μ με το απαιτούμενο μήκος της διατομής σιδηροτροχιάς UIC 60, ούτως ώστε να επιτευχθεί σύζευξη μορφών κρίσιμων καταστάσεων, που να αντιστοιχούν στα σημεία ενδιαφέροντος που περιγράφηκαν νωρίτερα. Το αποτέλεσμα αυτών των συσχετισμών φαίνεται στον Πίνακα 5.3.

Πίνακας 5.3. Σημεία σύζευξης μορφών: Συσχετισμός παραμέτρων εδάφους και δοκού, γεωμετρικών παραμέτρων και συντελεστών φόρτισης

Σημείο σύζευξης μορφών	Κατάταξη**	λ_{cr}	μ_{cr}	L (m)			Λυγηρότητα			$min (P_{cr}/P_y)$
				ST1	ST2	ST3	ST1	ST2	ST3	
H_1^1	1	49.348	389.636	3.98	3.34	2.11	63.06	52.92	33.43	4.34
H_2^1	1	128.305	3506.73	6.89	5.79	3.66	109.17	91.73	58.00	3.67
H_3^1	2	335.567	21917.05	10.89	9.16	5.79	172.55	145.14	91.74	3.94
H_1^2	2	ταυτίζεται με το σημείο H_2^1 στο επίπεδο (μ, λ)								3.67
H_2^2	2	246.74	14026.9	9.74	8.19	5.18	154.33	129.77	82.08	3.63
H_3^2	2	404.564	38963.6	12.57	10.57	6.69	199.17	167.48	106.00	3.57
H_1^3	2	ταυτίζεται με το σημείο H_3^1 στο επίπεδο (μ, λ)								3.94
H_2^3	2	602.046	87668.2	15.40	12.95	8.19	244.01	205.19	129.77	3.54
H_3^3	2	838.916	171829.64	18.22	15.32	9.69	288.70	242.75	153.54	3.52
F_1^1	-	ταυτίζεται με το σημείο H_1^1 στο επίπεδο (μ, λ) – όχι κρίσιμο σημείο***								-
F_2^1	2	98.696	876.682	4.87	4.10	2.59	77.17	64.97	41.04	5.80
F_3^1	-	ταυτίζεται με το σημεία H_2^1 και H_1^2 στο επίπεδο (μ, λ) – όχι κρίσιμο σημείο***								-
F_1^2	2	197.392	6234.18	7.95	6.69	4.23	125.97	106.00	67.02	4.35
F_2^3	2	394.392	14026.9	9.74	8.19	5.18	154.33	129.77	82.08	5.80
F_3^2	2	513.219	56107.6	13.77	11.58	7.33	218.19	183.49	116.14	3.77
F_1^3	2	ταυτίζεται με το σημείο F_2^1 στο επίπεδο (μ, λ)								5.80
F_2^3	2	ταυτίζεται με το σημεία H_3^1 και H_1^3 στο επίπεδο (μ, λ)								3.94
F_3^3	2	ταυτίζεται με το σημείο F_3^2 στο επίπεδο (μ, λ)								3.77
* ο εκθέτης δηλώνει την τιμή του n , ενώ ο δείκτης τον αριθμό του σημείου										
** 1 = Απλό σημείο αλληλεπίδρασης 2 = Υψηλότερης τάξης σημείο αλληλεπίδρασης (σύμφωνα με τη γραφική απεικόνιση των Σχημάτων 5.2 – 5.5 και 5.6 – 5.8 για την αμφιέριστη και αμφίπακτη δοκό αντίστοιχα)										
*** ο αριθμητής απειρίζεται και κάποιος παρονομαστής ισούται με μηδέν, πλην όμως το όριο του w καθώς το λ τείνει στο λ_{cr} είναι πεπερασμένο										

Στον ως άνω Πίνακα, δίδεται επιπλέον στην τελευταία στήλη ο λόγος των $\min(P_{cr} / P_y)$. Το P_{cr} υπολογίστηκε σύμφωνα με την αντίστοιχη αδιάστατη έκφραση (5.5), ενώ το P_y από τη σχέση:

$$P_y = Af_y \quad (5.42)$$

όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής και f_y η τάση διαρροής του χάλυβα.

Το Ευρωπαϊκό Πρότυπο EN 13674-1 (2011) προδιαγράφει σιδηροτροχιές τύπου *Vignole* (flat – bottomed, επίπεδης επιφάνειας έδρασης), ίδιου βάρους 46 kg/m και μεγαλύτερου μάζας (τόσο για συμβατική χρήση όσο και για σιδηροδρόμους υψηλών ταχυτήτων). Προσδιορίζονται εννέα ποιότητες περλιτικού χάλυβα, βασισμένες στην σκληρότητα της επιφάνειας επαφής, η οποία μπορεί να κυμανθεί από 200 HBW έως 440 HBW, ενώ δίδονται παράλληλα πληροφορίες για την ελάχιστη οριακή αντοχή και την ελάχιστη ανθεκτικότητα θραύσης, χωρίς όμως καμία απευθείας πληροφορία για την τάση διαρροής. Οι ποιότητες αυτές περιγράφονται στη Αγγλική ως non-heat treated non-alloy steels, non-heat treated alloy steels, heat-treated non-alloy steels και heat-treated alloy steels. Σήμερα, η συνηθέστερη ποιότητα χάλυβα που χρησιμοποιείται για τις σιδηροτροχιές στην Ευρώπη είναι η **R350HT**, που έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: Εύρος σκληρότητας: 350 – 390 HBW (*Brinell*), Ελάχιστη Ανθεκτικότητα Θραύσης («Δυσθραυστότητα») σε $\text{MPa m}^{1/2}$: 30 – 32, Ελάχιστη Οριακή Αντοχή σε Εφελκυσμό (f_u σε MPa): 1175, Περιγραφή: C – Mn θερμής επεξεργασίας.



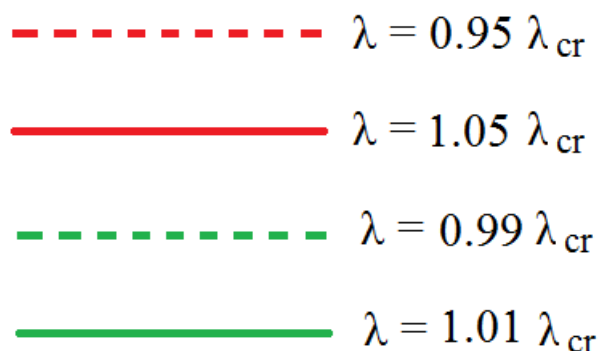
Εντούτοις, η συσχέτιση μεταξύ σκληρότητας και f_y ή f_u για χάλυβες διάφορων ποιοτήτων και χημικής σύνθεσης δεν είναι εύκολη εργασία. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται διάφορες απλοποιητικές σχέσεις (στην πλειονοψηφία τους γραμμικές ή εκθετικές και βασισμένες σε πειραματικά αποτελέσματα), ακριβείς μόνο για χάλυβες χαμηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα. Λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην εργασία των Pavlina και van Tyne 2008 (και στις αναφορές που περιέχονται σε αυτήν). Για τις ανάγκες της παρούσας Διατριβής υιοθετούμε μια

μάλλον συντηρητική τιμή του $f_y \approx 0.5 f_u$ για την επιλεγμένη ποιότητα χάλυβα, και επομένως $f_y = 600$ MPa. Τούτο οδηγεί σε τιμή του $P_y = 76.7 \cdot 60 = 4602$ kN, η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του λόγου που δίνεται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 5.3. Από τα περιεχόμενα του Πίνακα αυτού, είναι σαφές ότι η αιτία δομικής αστοχίας των δοκών σε όλα τα σημεία ενδιαφέροντος είναι η διαρροή του χάλυβα και όχι ο λυγισμός.

5.4.2 Γραφικές παραστάσεις προ- και μεταλυσισμικής

συμπεριφοράς και επί μέρους συμπεράσματα - σχολιασμός

Εστιάζοντας την προσοχή στην αλλαγή της απόκρισης πριν και μετά τις κρίσιμες καταστάσεις, που περιγράφηκαν προηγουμένως, τα αποτελέσματα δίδονται σε μορφή γραφικών παραστάσεων $[x, w(x)]$, για τιμές του αδιάστατου φορτίου λ αρκετά κοντά στην κρίσιμη τιμή του, και φαίνονται στα Σχήματα 5.11 – 5.19 για την περίπτωση της αμφιέριστης δοκού και στα Σχήματα 5.20 – 5.25 για την περίπτωση της αμφίπακτης δοκού αντίστοιχα. Αυτές οι γραφικές παραστάσεις περιέχουν προ- και μεταλυσισμικές μορφές σύμφωνα με το σχόλιο του Σχήματος 5.10.



Σχήμα 5.10. Σχόλιο για τις γραφικές παραστάσεις $[x, w(x)]$ πριν και μετά τις κρίσιμες καταστάσεις

Για να εξαχθούν συμπεράσματα για την επιρροή της μεταβολής του τετραγωνικού όρου (γ_1) στην προ- και μεταλυσισμική απόκριση του συστήματος, συγκρίνονται τα γραφικά αποτελέσματα των παρακάτω ομάδων των περιπτώσεων NFP για κάθε μεμονωμένο σημείο ενδιαφέροντος (δίδονται στον Πίνακα 5.4α), λαμβάνοντας υπόψη επίσης και τα περιεχόμενα των Πινάκων 5.1 και 5.3. Οι ομάδες 1 – 5 αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του γ_1 , ενώ οι ομάδες 6 – 10 σε θετικές τιμές του.

Πίνακας 5.4α. Ομάδες των περιπτώσεων NFP που εξετάστηκαν για την επιρροή του γ_1

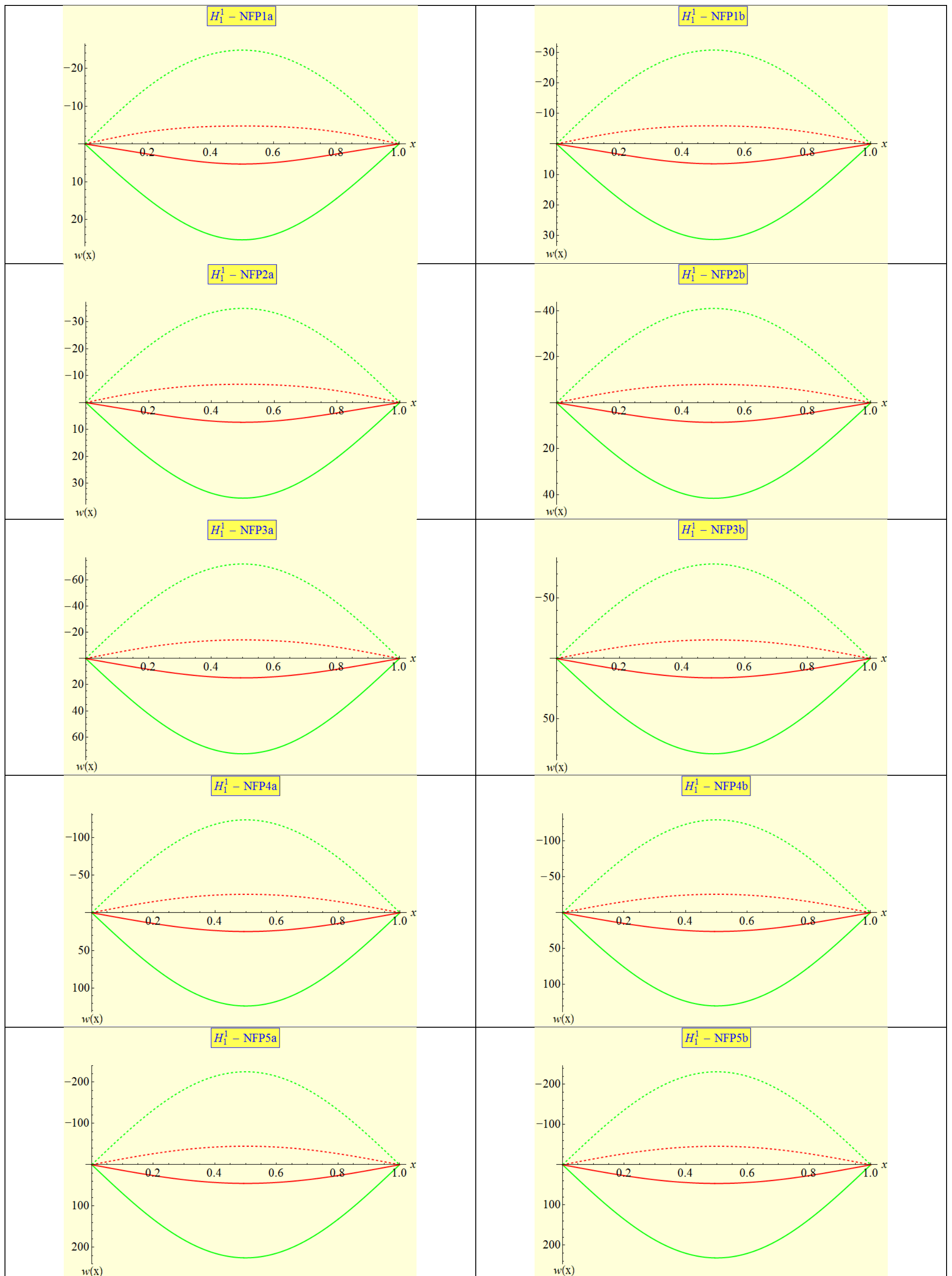
Αριθμός Ομάδας	Αριθμός Περίπτωσης NFP		
1	1a	6a	11a
2	2a	7a	12a
3	3a	8a	13a
4	4a	9a	14a
5	5a	10a	15a
6	1b	6b	11b
7	2b	7b	12b
8	3b	8b	13b
9	4b	9b	14b
10	5b	10b	15b

Όμοια, η επιρροή της μεταβολής του κυβικού όρου γ_2 θα αναζητηθεί συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των ακόλουθων περιπτώσεων NFP, για κάθε κρίσιμο σημείο. Αυτές οι ομάδες δίδονται περιληπτικά στον Πίνακα 5.4β. Οι ομάδες με άρτιο αριθμό αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του γ_1 , και οι ομάδες με περιττό αριθμό σε θετικές τιμές γ_1 .

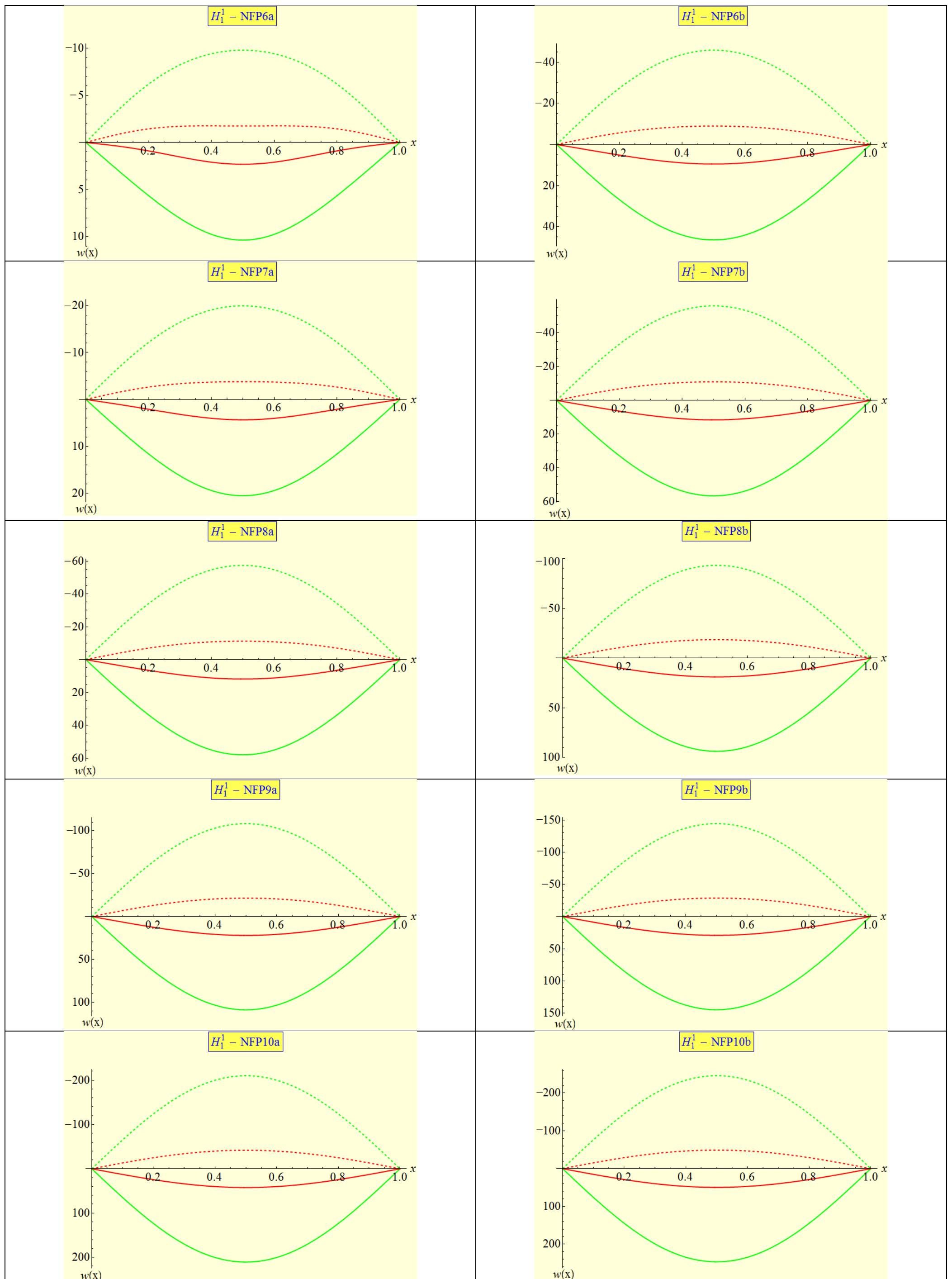
Πίνακας 5.4β. Ομάδες των περιπτώσεων NFP που εξετάστηκαν για την επιρροή του γ_2

Αριθμός Ομάδας	Αριθμός Περίπτωσης NFP
11	1a, 2a, 3a, 4a, 5a
12	1b, 2b, 3b, 4b, 5b
13	6a, 7a, 8a, 9a, 10a
14	6b, 7b, 8b, 9b, 10b
15	11a, 12a, 13a, 14a, 15a
16	11b, 12b, 13b, 14b, 15b

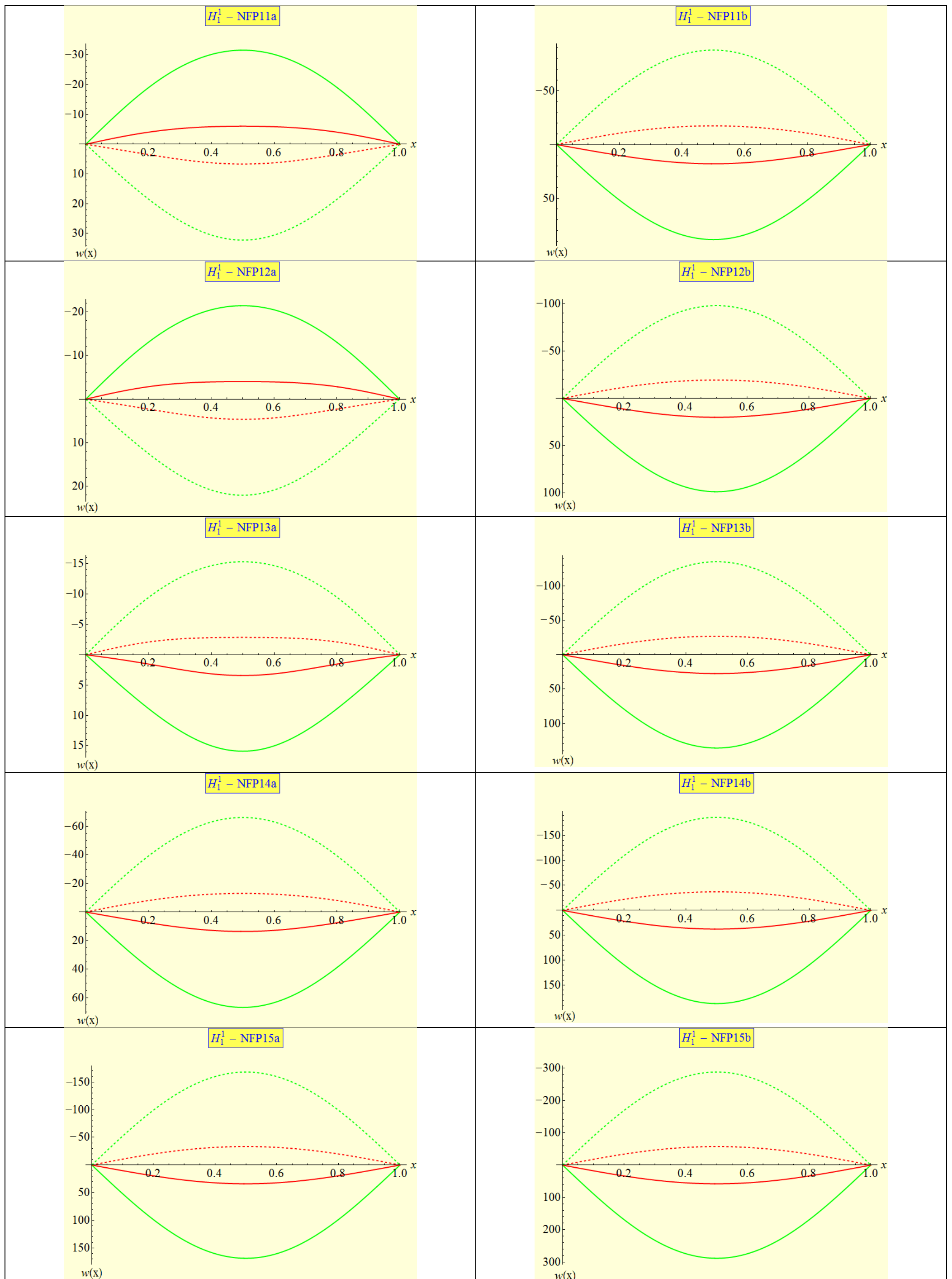
Τα αποτελέσματα – σχόλια για κάθε κρίσιμο σημείο παρατίθενται μετά από το αντίστοιχο Σχήμα.



Σχήμα 5.11. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



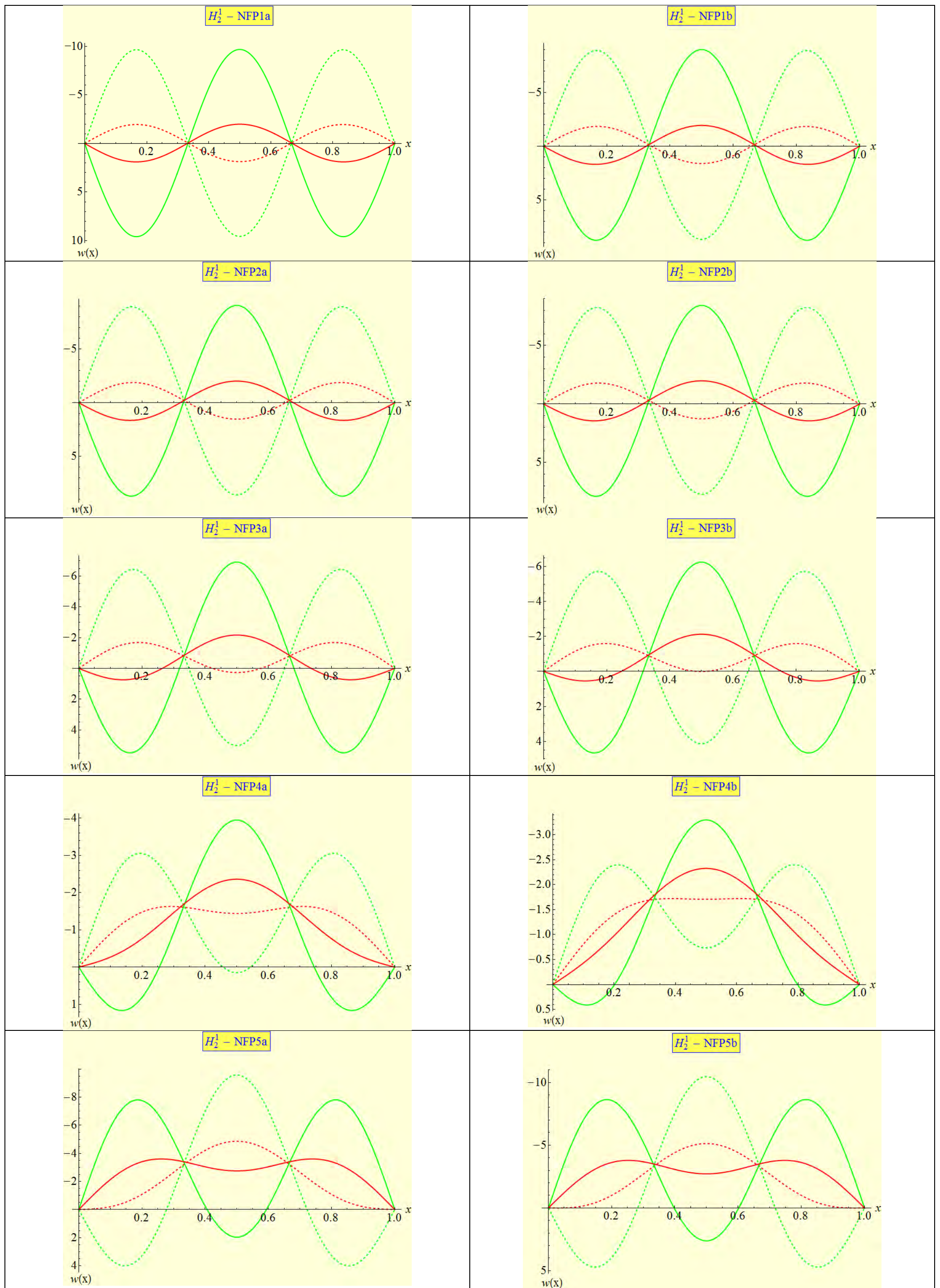
Σχήμα 5.11. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



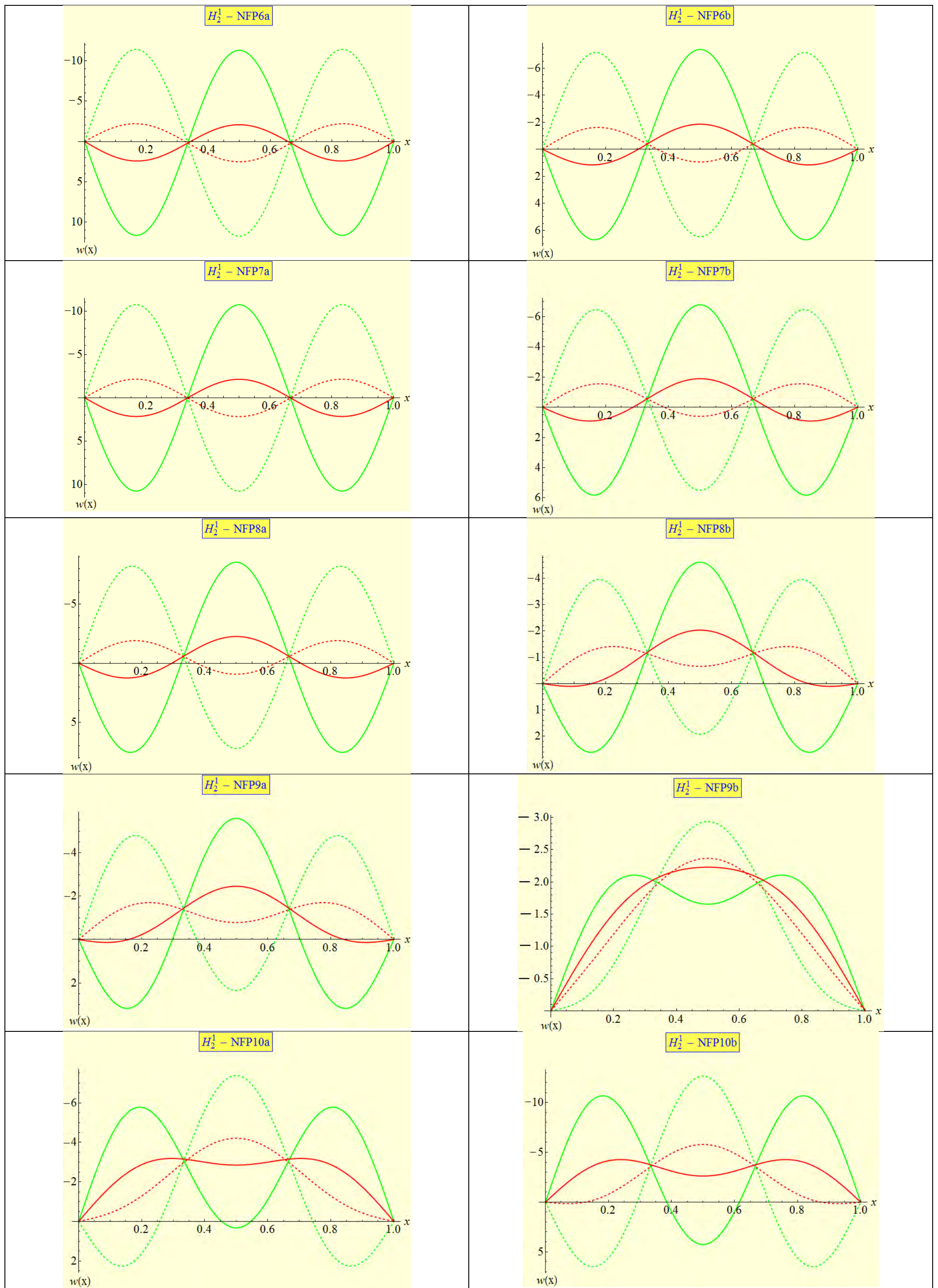
Σχήμα 5.11. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^1

Πίνακας 5.5. Κρίσιμο σημείο $H_1^1 : \lambda_1 = \lambda_2, n = 1$

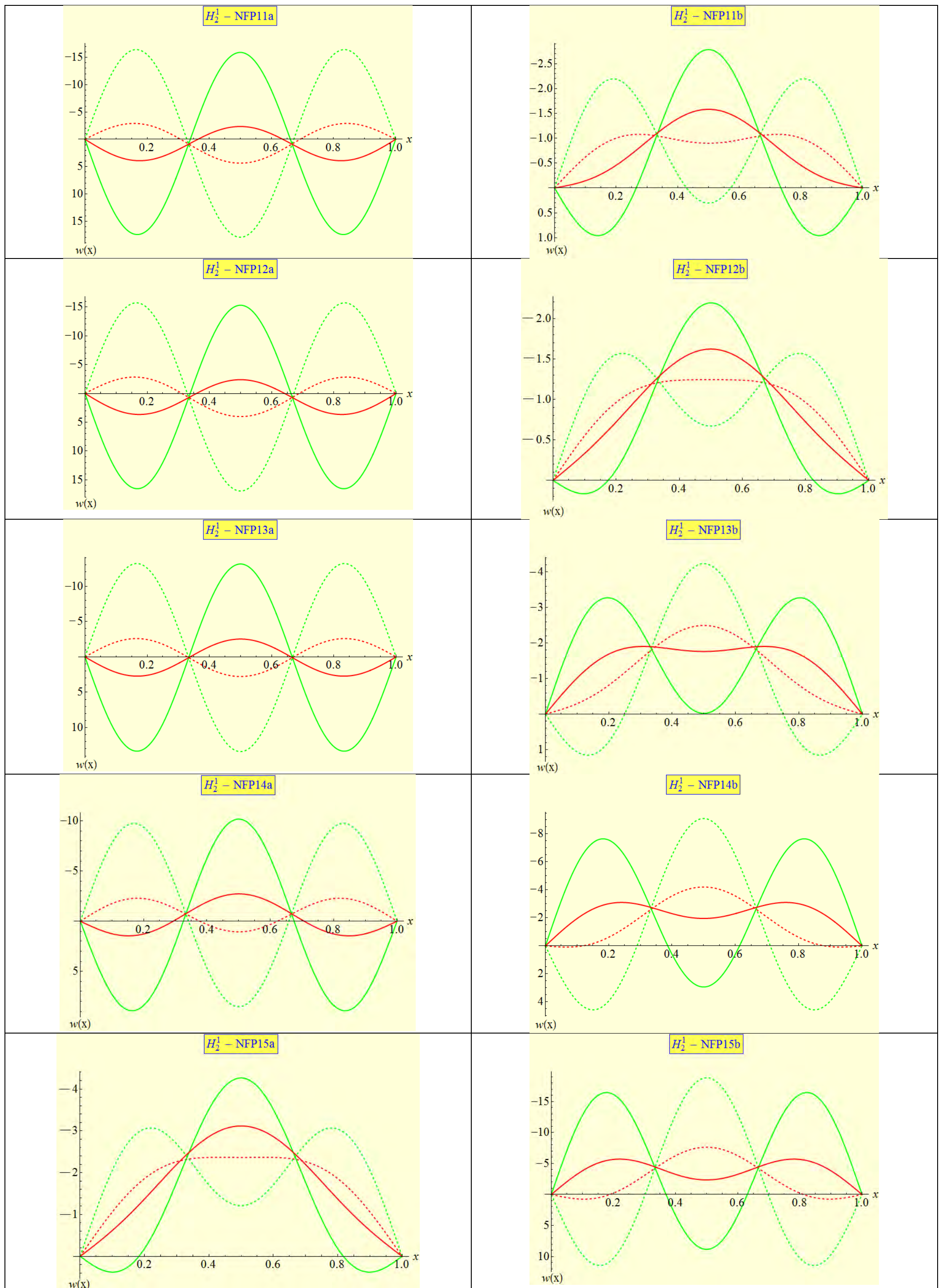
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση απλής κυματομορφής, που αλλάζει πρόσημο στην κρίσιμη κατάσταση. Για απόλυτα μικρές και ενδιάμεσες τιμές του γ_1 η μεταλυγισμική παραμόρφωση είναι θετική, ενώ για απόλυτα μεγάλη τιμή του γ_1 γίνεται αρνητική.
2	Συμπεριφορά παρόμοια με αυτή της Ομάδας 1.
3	Όμοια με την Ομάδα 1, με παραμορφώσεις που γίνονται μικρότερες για απόλυτα μεγαλύτερες τιμές του γ_1 .
4	Όμοια με την Ομάδα 3.
5	Όμοια με τις Ομάδες 3 και 4. Οξύ φαινόμενο.
6	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με μεταλυγισμικές παραμορφώσεις πάντα θετικές. Φαινόμενα που γίνονται οξύτερα όσο αυξάνεται το γ_1 .
7	Απόκριση παρόμοια με εκείνη της Ομάδας 6. Όσο το γ_1 αυξάνεται, το φαινόμενο γίνεται οξύτερο.
8	Όμοια με την Ομάδα 3, αλλά με αυξανόμενη παραμόρφωση όσο αυξάνεται το γ_1 .
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με τις Ομάδες 8 και 9.
11	Παραμόρφωση μιας κυματομορφής, με αλλαγή προσήμου του $w(x)$ στην κρίσιμη κατάσταση, οξύτερο φαινόμενο όσο αυξάνεται το γ_2 (μεγαλύτερα εύρη). Η προλυγισμική συμπεριφορά συνδέεται με αρνητικό w , και η μεταλυγισμική με θετικό w . Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$.
12	Σχεδόν ίδια αποτελέσματα με εκείνα της Ομάδας 11 – ασήμαντα μικρότερη παραμόρφωση.
13	Παραμόρφωση μιας κυματομορφής, με αλλαγή προσήμου $w(x)$ στην κρίσιμη κατάσταση, φαινόμενο που οξύνεται όσο αυξάνεται γ_2 (μεγάλα εύρη). Προλυγισμική συμπεριφορά που συνδέεται με αρνητικό w , και μεταλυγισμική με θετικό w . Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$.
14	Ποιοτικά όμοια απόκριση με εκείνη της Ομάδας 13, αλλά συνδεόμενη με μεγαλύτερες παραμορφώσεις (οξύτερα φαινόμενα).
15	Όμοια με τις Ομάδες 11, 13 εκτός του ότι για μικρές τιμές του γ_2 η προλυγισμική συμπεριφορά συνδέεται με θετικό w και η μεταλυγισμική με αρνητικό w , ενώ το αντίθετο συμβαίνει για μεγαλύτερο γ_2 . Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$.
16	Όμοια με την Ομάδα 15, αλλά με σημαντικά μεγαλύτερες παραμορφώσεις (ακόμα μεγαλύτερες της Ομάδας 14).



Σχήμα 5.12. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.12. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

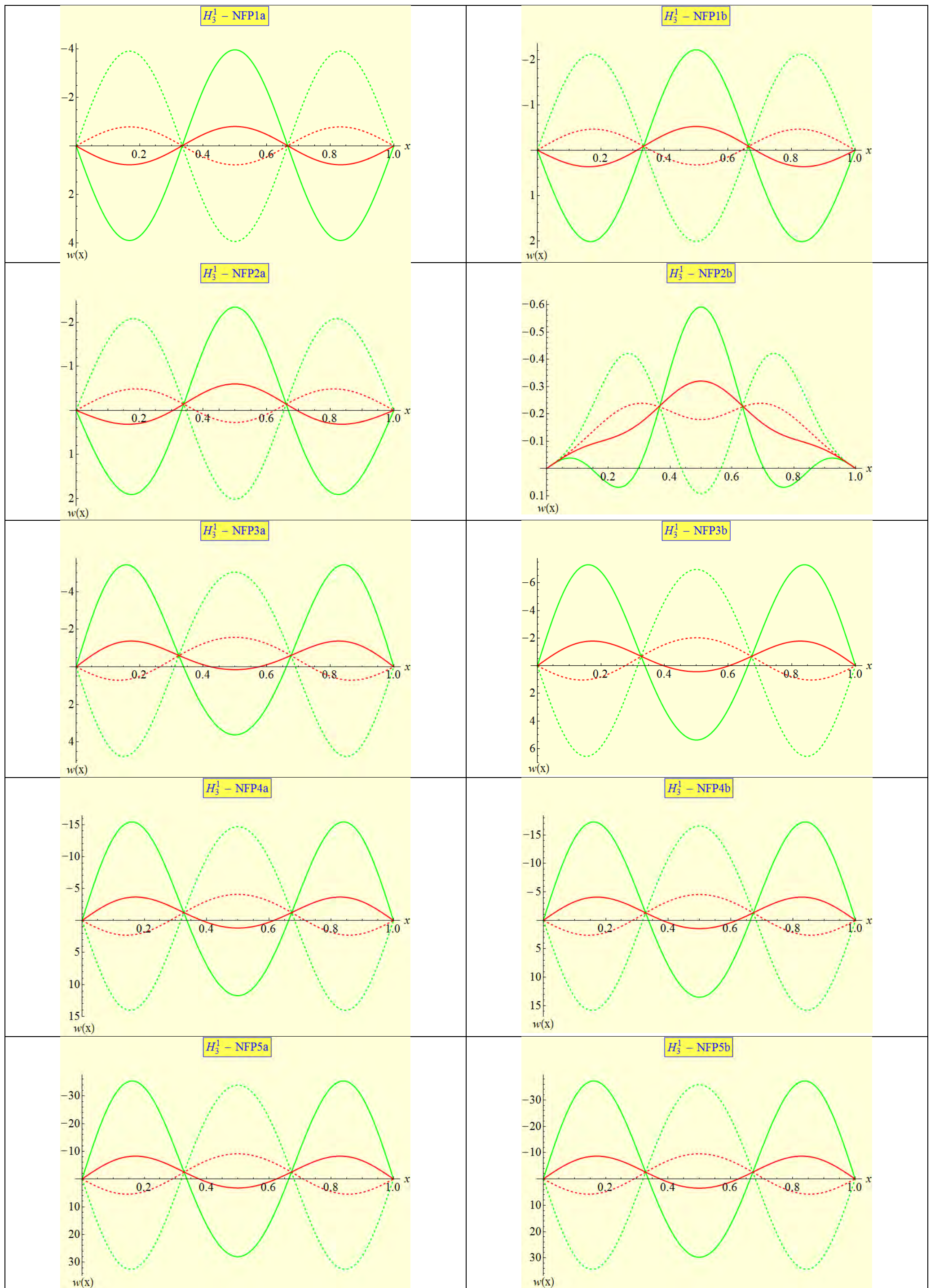


Σχήμα 5.12. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^1

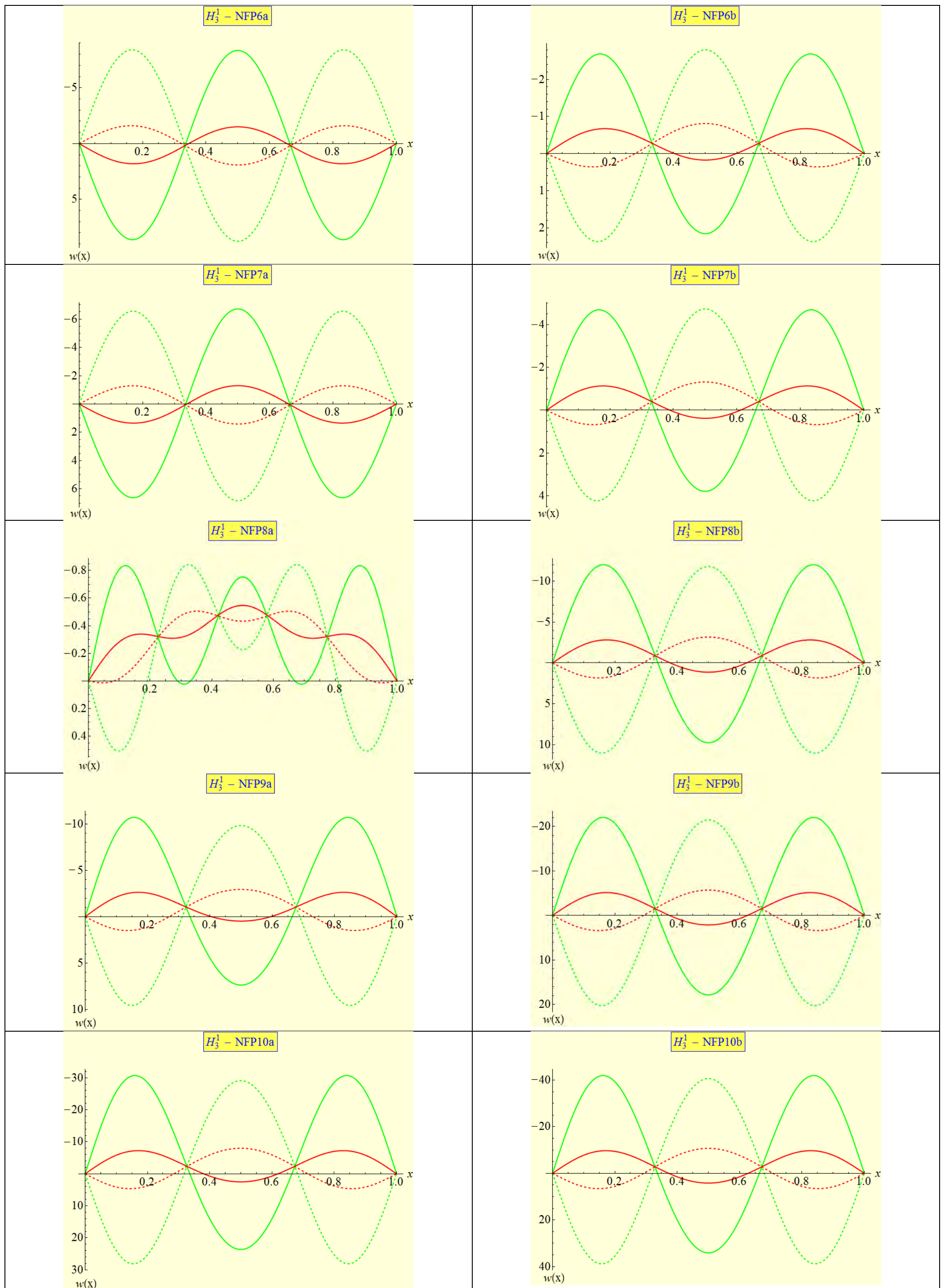
Πίνακας 5.6. Κρίσιμο σημείο $H_2^1 : \lambda_2 = \lambda_3, n = 1$

Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, με αλλαγή προσήμου στην κρίσιμη κατάσταση. Η μεσαία κυματομορφή είναι θετική προ αυτής της κατάστασης και αρνητική μετά (αντίθετη συμπεριφορά για τις υπόλοιπες δύο κυματομορφές). Φαινόμενο οξύτερο όσο αυξάνεται σε απόλυτη τιμή το γ_1 . Συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$.
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Όμοια με τις Ομάδες 1 και 2.
4	Όμοια με τις Ομάδες 1, 2 και 3.
5	Πάντα αρνητική προλυγισμική παραμόρφωση. Μετά την κρίσιμη κατάσταση έχουμε παραμορφώσεις τριών μορφών με το μεσαίο σημείο θετικό για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του γ_1 , που γίνεται όμως αρνητικό για μεγαλύτερες.
6	Προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, με τη μεσαία κυματομορφή να αντιστοιχεί σε αρνητικό w . Όσο το γ_2 αυξάνεται, το φαινόμενο γίνεται οξύτερο. Για μικρές τιμές του γ_1 η προλυγισμική κατάσταση συνδέεται με αρνητικές τιμές του w σε όλο το μήκος της δοκού. Όσο το γ_1 αυξάνεται οι παραμορφώσεις είναι ίδιες με αυτές της ομάδας 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με τις Ομάδες 6 και 7, χωρίς οξεία φαινόμενα όπως αυτών των Ομάδων (μικρότερες τιμές προ- και μεταλυγισμικής παραμόρφωσης).
9	Μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, που γίνεται πιο έντονη για μικρές και μεγάλες τιμές του γ_1 . Για ενδιάμεσες τιμές δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου στην παραμόρφωση, μόνο αλλαγή στο σχήμα. Προλυγισμική παραμόρφωση αρνητική για κάθε γ_1 . Όσο το γ_1 αυξάνεται, το σχήμα αντιστρέφεται.
10	Όμοια με την Ομάδα 2, αλλά με οξύτερα φαινόμενα.
11	Τρεις κυματομορφές εμφανίζονται στην παραμορφωμένη κρίσιμη κατάσταση, με δύο αρνητικές και μία θετική. Το αντίστροφο συμβαίνει μετά την κρίσιμη κατάσταση. Το φαινόμενο είναι πιο ήπιο από αυτό του Πίνακα 5.5. (μικρότερα εύρη). Όσο το γ_2 αυξάνεται και το λ δεν είναι τόσο κοντά στο λ_{cr} η παραμόρφωση τείνει να γίνει αρνητική αλλά με διαφορετικές καμπυλότητες. Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον άξονα $x=\ell/2$.
12	Όμοια αποτελέσματα με αυτά της Ομάδας 11, με ανεπαίσθητα μεγαλύτερες παραμορφώσεις.
13	Όμοια με την Ομάδα 11. Το φαινόμενο παραμένει ήπιο.
14	Όμοια με την ομάδα 13, αλλά συνδεδεμένο με ελαφρώς μικρότερες παραμορφώσεις για μικρές τιμές του γ_2 και μεγαλύτερες για μεγάλες τιμές του γ_2 .
15	Το φαινόμενο που περιγράφηκε για τις Ομάδες 11 και 13 τείνει να γίνει οξύτερο, ενώ για μεγάλες τιμές του γ_2 οι παραμορφώσεις της προ- και μεταλυγισμικής κατάστασης γίνονται αρνητικές σε όλο σχεδόν το μήκος της δοκού. Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον

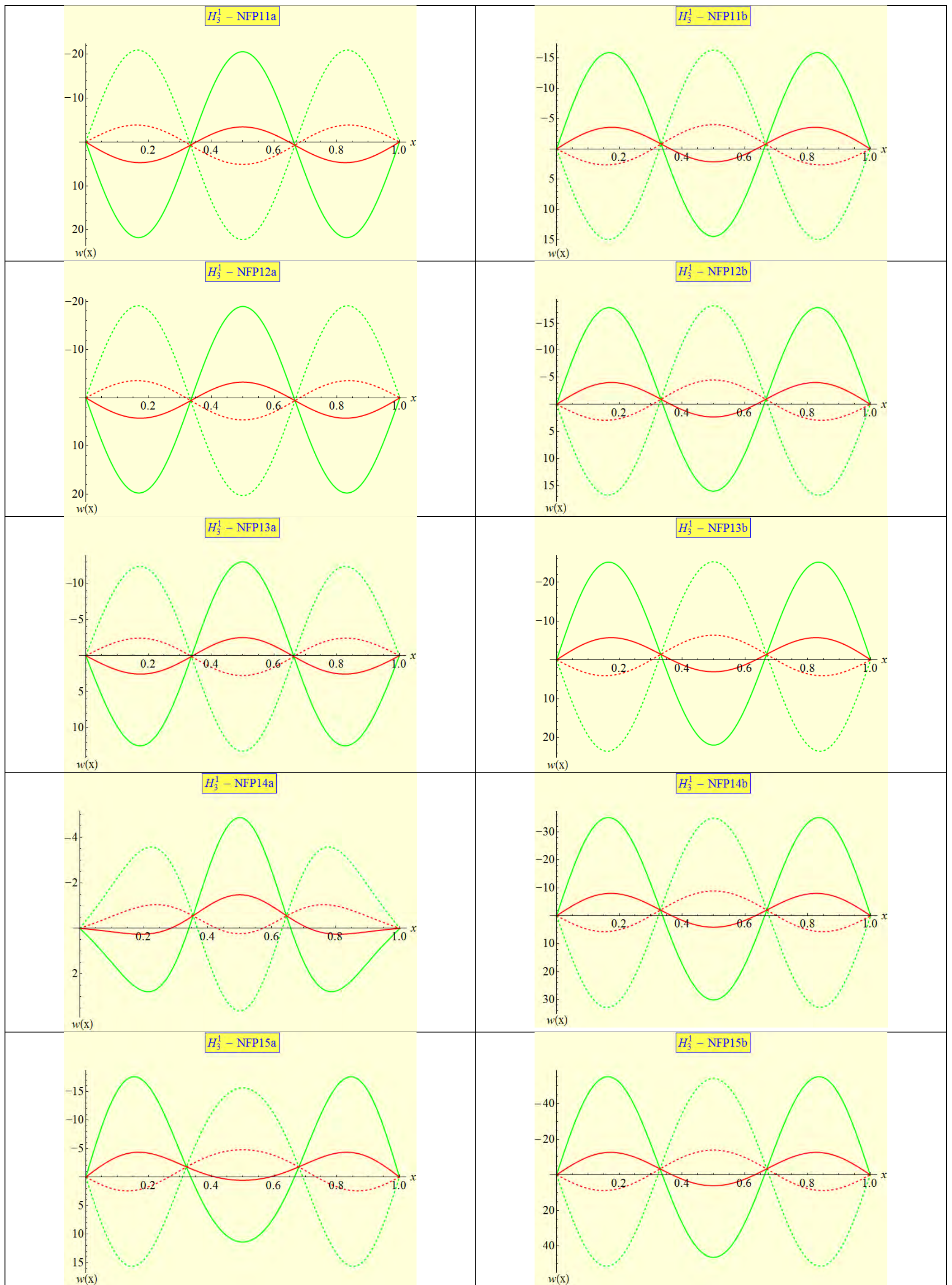
	άξονα $x=\ell/2$.
16	Προ- και μεταλυγισμική απόκριση συνδεδεμένη με τρεις κυματομορφές και εναλλαγές ακρότατων πριν και μετά την κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενα που γίνονται οξύτερα όσο αυξάνεται το γ_2 αντίθετα με την ομάδα 15.



Σχήμα 5.13. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_3^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.13. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

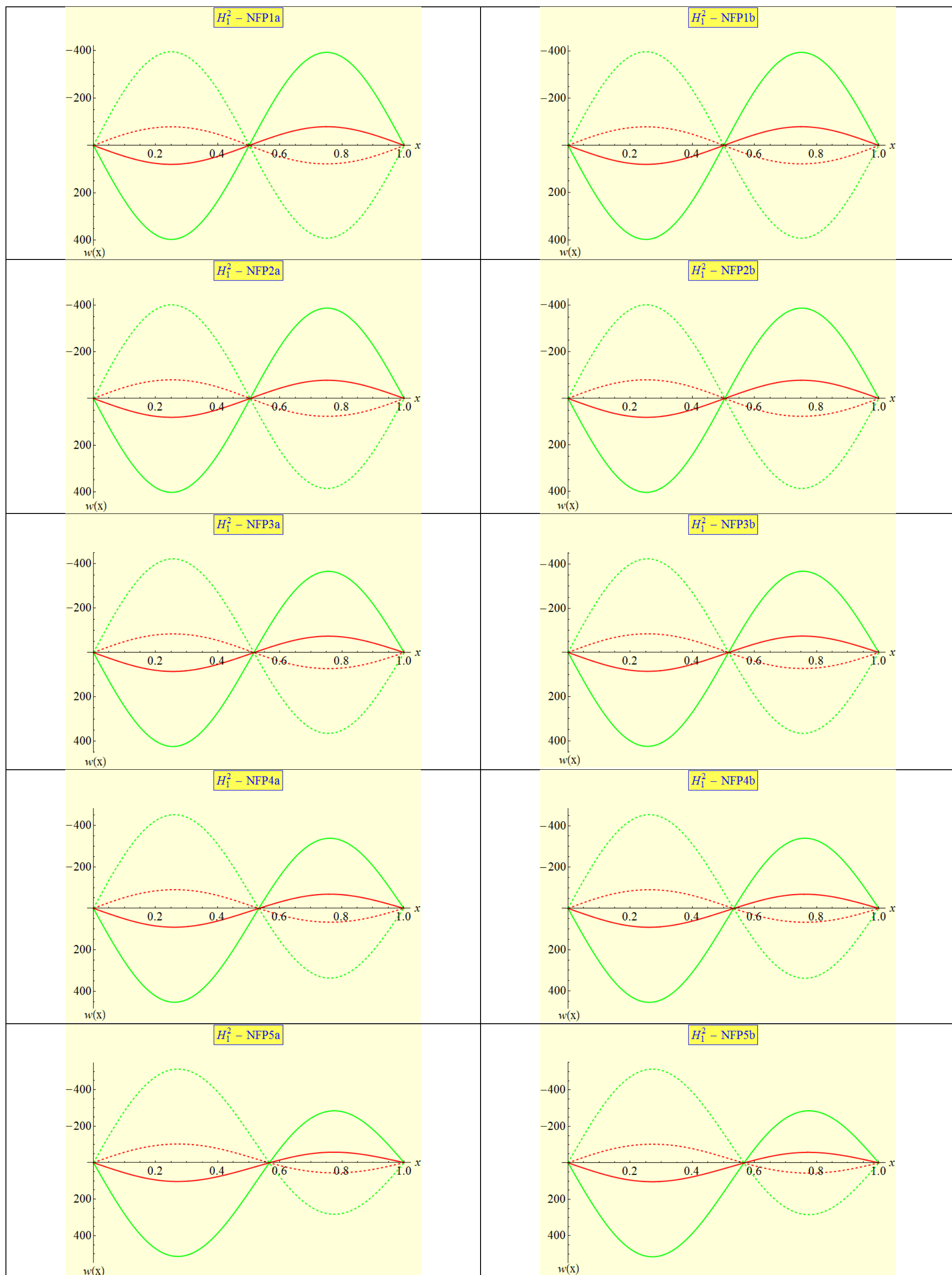


Σχήμα 5.13. Προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^1

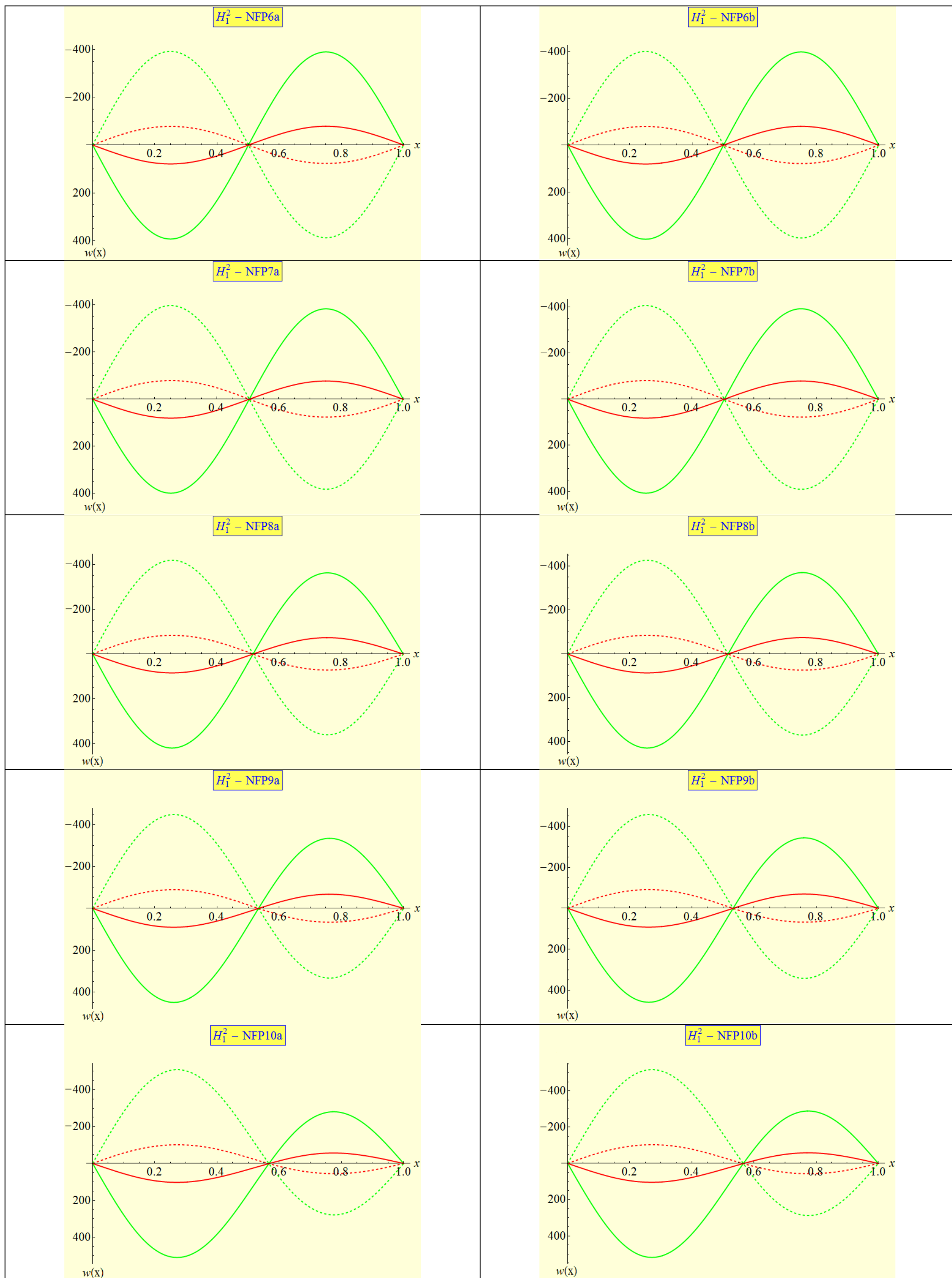
Πίνακας 5.7. Κρίσιμο σημείο $H_3^I : \lambda_3 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 1$

Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Τυπικές παραμορφώσεις προ- και μεταλυσισμικής κατάστασης τριών κυματομορφών, με αλλαγή πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση και συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$. Φαινόμενο που σχετίζεται με αυξανόμενα εύρη όσο το γ_1 αυξάνεται σε απόλυτη τιμή. Η μεσαία κυματομορφή πάντα αρνητική μετά την κρίσιμη κατάσταση.
2	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά οξύτερο φαινόμενο.
3	Τυπική κατάσταση τριών κυματομορφών, εκτός της περίπτωσης των ενδιάμεσων τιμών του γ_1 όπου εμφανίζονται πέντε κυματομορφές. Για την πρώτη περίπτωση, από χαμηλό ως μεγάλο σε απόλυτη τιμή γ_1 η καμπυλότητα διατηρείται (δύο αρνητικές και μια θετική κυματομορφή). Στην κρίσιμη κατάσταση και ανεξάρτητα της τιμής του γ_1 η καμπυλότητα μεταξύ της προ- και μεταλυσισμικής απόκρισης διατηρείται πάντα. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ επίσης διατηρείται.
4	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με μια αρνητική και δύο θετικές κυματομορφές στην μεταλυσισμική κατάσταση.
5	Όμοια με την Ομάδα 1, φαινόμενα οξύτερα.
6	Τυπική απόκριση παραμόρφωσης τριών κυματομορφών, ποιοτικά παρόμοια συμπεριφορά με την Ομάδα 1. Ωστόσο, όσο αυξάνεται το γ_1 η μεσαία κυματομορφή γίνεται θετική.
7	Τυπική απόκριση τριών κυματομορφών για ενδιάμεσα μεγάλες τιμές του γ_1 με θετική μεσαία παραμόρφωση. Για ενδιάμεσες τιμές του γ_1 εμφανίζεται παραμόρφωση πέντε κυματομορφών, με τη μεσαία σημαντικά μεγαλύτερη. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ διατηρείται.
8	Όπως και στην Ομάδα 6, αλλά με μια θετική και δύο αρνητικές μεταλυσισμικές κυματομορφές. Οξύτερα φαινόμενα συγκρινόμενα με αυτά της Ομάδας 6.
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με την Ομάδα 5, αλλά συνδεδεμένο με ελαφρά μεγαλύτερη παραμόρφωση.
11	Συμμετρία παραμορφώσεων ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$. Διαμόρφωση τριών κυματομορφών, με δύο από αυτές να έχουν αρνητικό w και μία θετικό w . Μετά την κρίσιμη κατάσταση έχουμε αναστροφή του πρόσημου του w των κυματομορφών. Τα παραπάνω ισχύουν για μικρές τιμές του γ_2 . Για μεγαλύτερες, δύο προλυσισμικές κυματομορφές είναι θετικές και μια αρνητική. Αντιστροφή πρόσημου συμβαίνει μετά την κρίσιμη κατάσταση. Το φαινόμενο γίνεται οξύτερο όσο αυξάνεται το γ_2 (μεγαλύτερη παραμόρφωση).
12	Ποιοτικά όμοια αποτελέσματα με την Ομάδα 11. Για ενδιάμεσα μικρές τιμές του γ_2 εμφανίζονται πέντε κυματομορφές μετά την κρίσιμη κατάσταση, που μετασχηματίζονται σε τρεις όσο το γ_2 αυξάνεται.
13	Όμοια με την Ομάδα 11. Η περίπτωση $NFP8a$ ειδικότερα συνδέεται με πέντε κυματομορφές και ήπια μετάβαση από την προλυσισμική στην μεταλυσισμική κατάσταση. Αντιστροφή της καμπυλότητας συναντάται όπως και συμμετρία ως

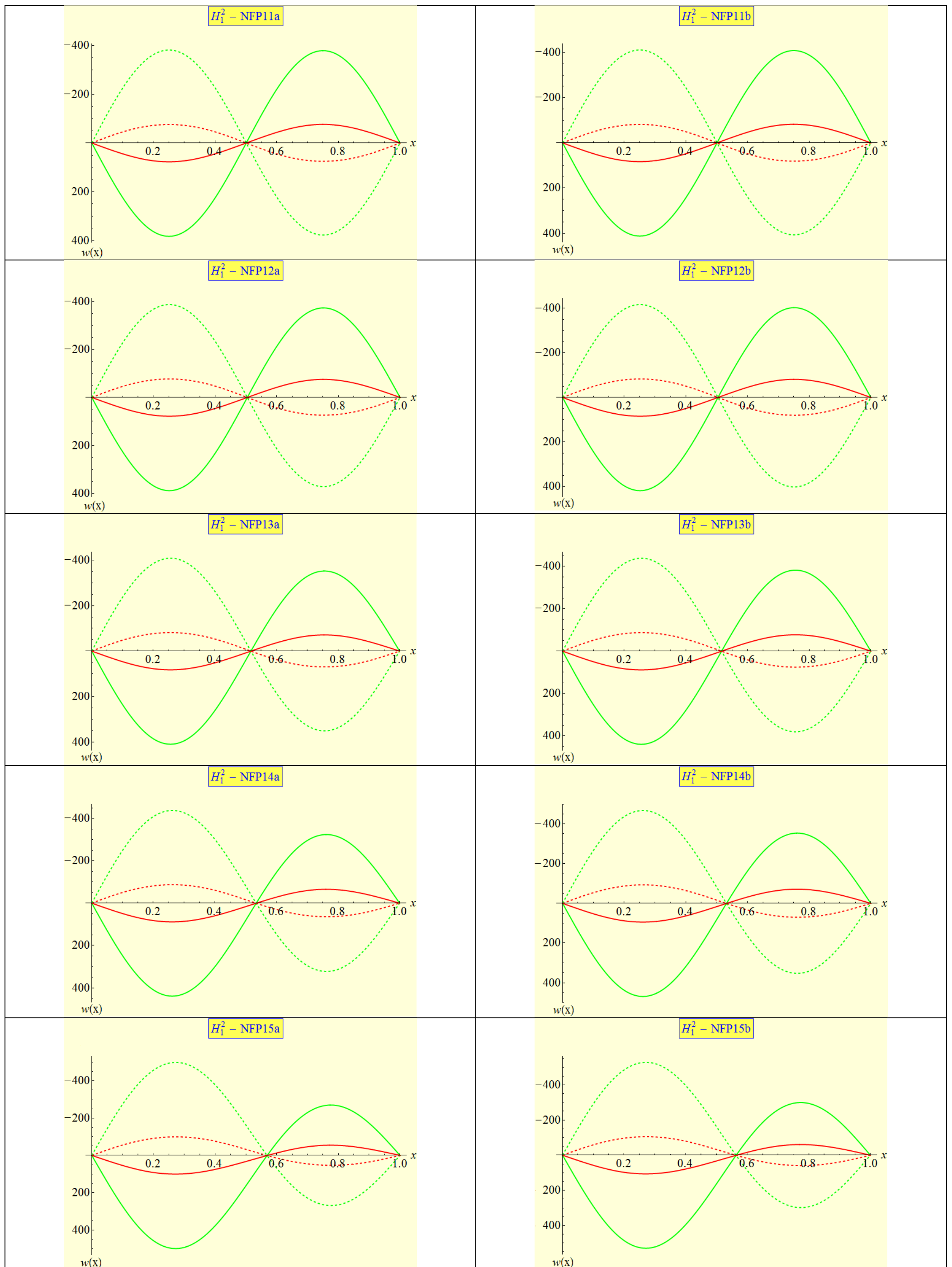
	προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$.
14	Μόνο τρεις κυματομορφές απαντώνται σε σύγκριση με την Ομάδα 13. Για μικρότερες τιμές του γ_2 έχουμε μικρότερη παραμόρφωση από αυτές της Ομάδας 13, για μεγαλύτερες τιμές του γ_2 και αυτές γίνονται μεγαλύτερες.
15	Όμοια με την Ομάδα 11, με μια θετική κυματομορφή στην μεταλυγισμική κατάσταση για μεγάλες τιμές του γ_2 .
16	Όμοια με Ομάδα 15, αλλά χωρίς αλλαγή πρόσημου στην προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση ανεξαρτήτως του γ_2 . Τρεις κυματομορφές, δύο θετικές και μια αρνητική στην προλυγισμική κατάσταση και αντίστροφα για τη μεταλυγισμική για κάθε τιμή του γ_2 .



Σχήμα 5.14. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



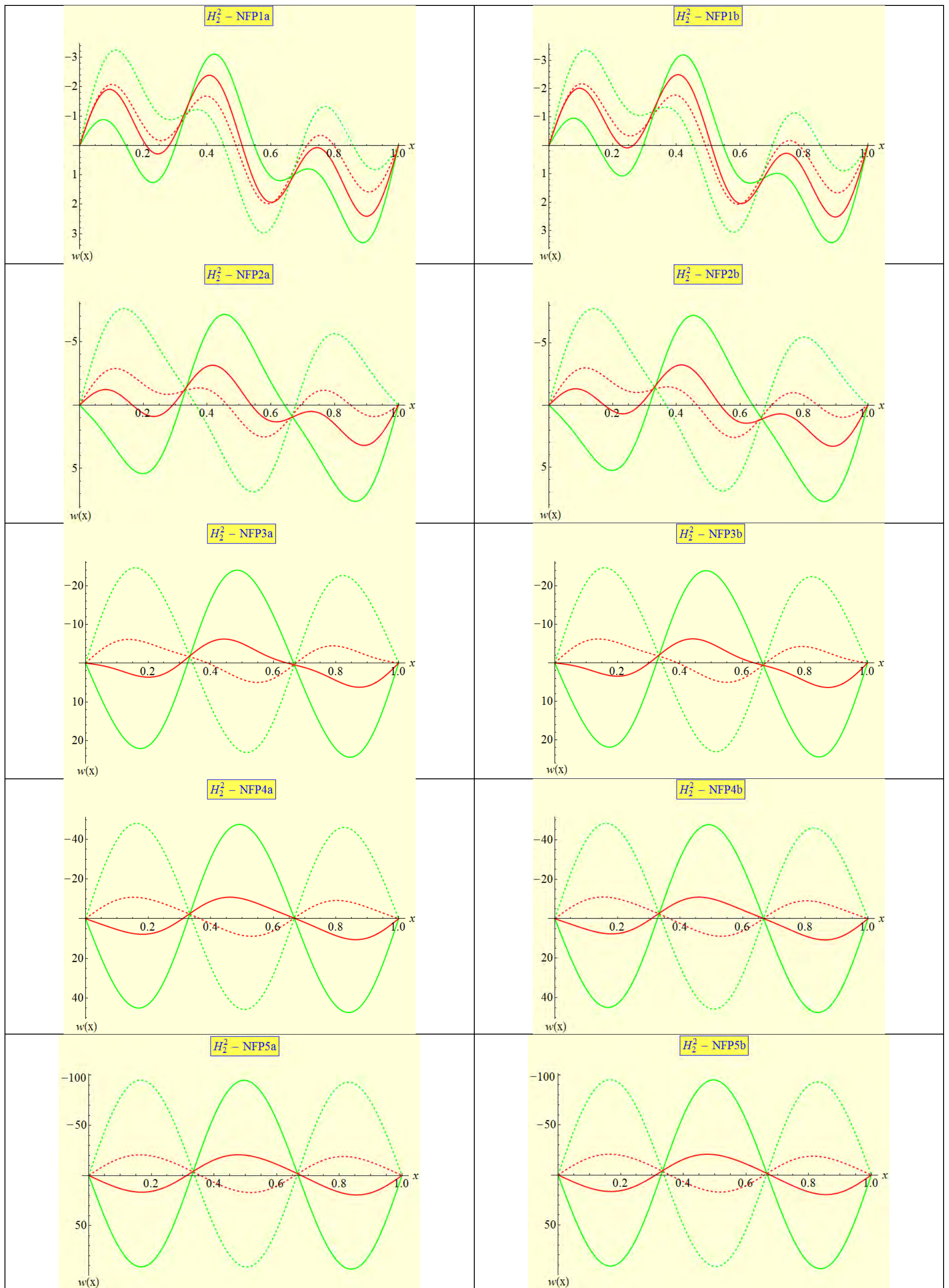
Σχήμα 5.14. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφορείστη δοκό: σημείο H_1^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



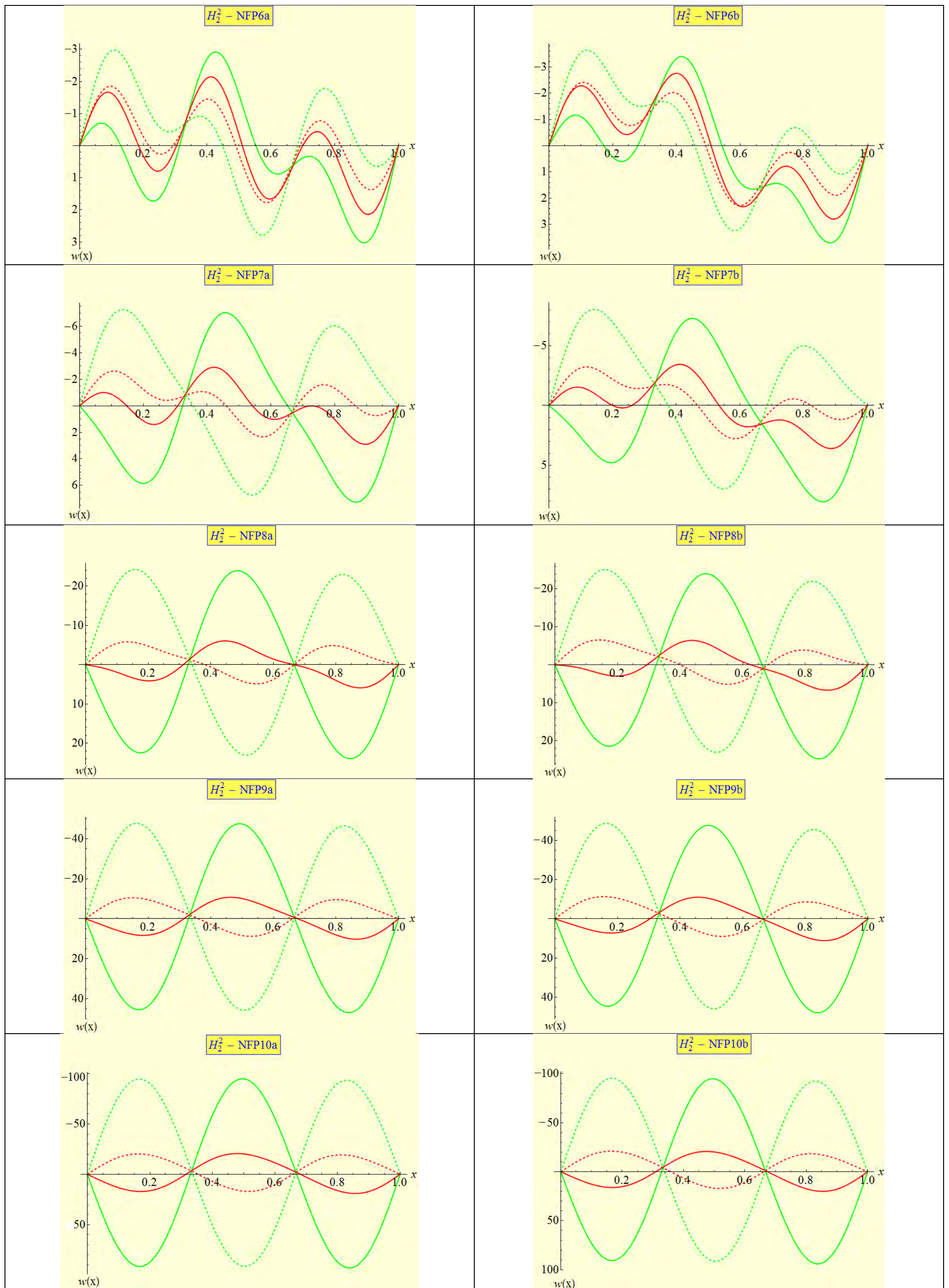
Σχήμα 5.14 Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^2

Πίνακας 5.8. Κρίσιμο σημείο $H_1^2 : \lambda_1 = \lambda_4, c_1 = 1, n = 2$

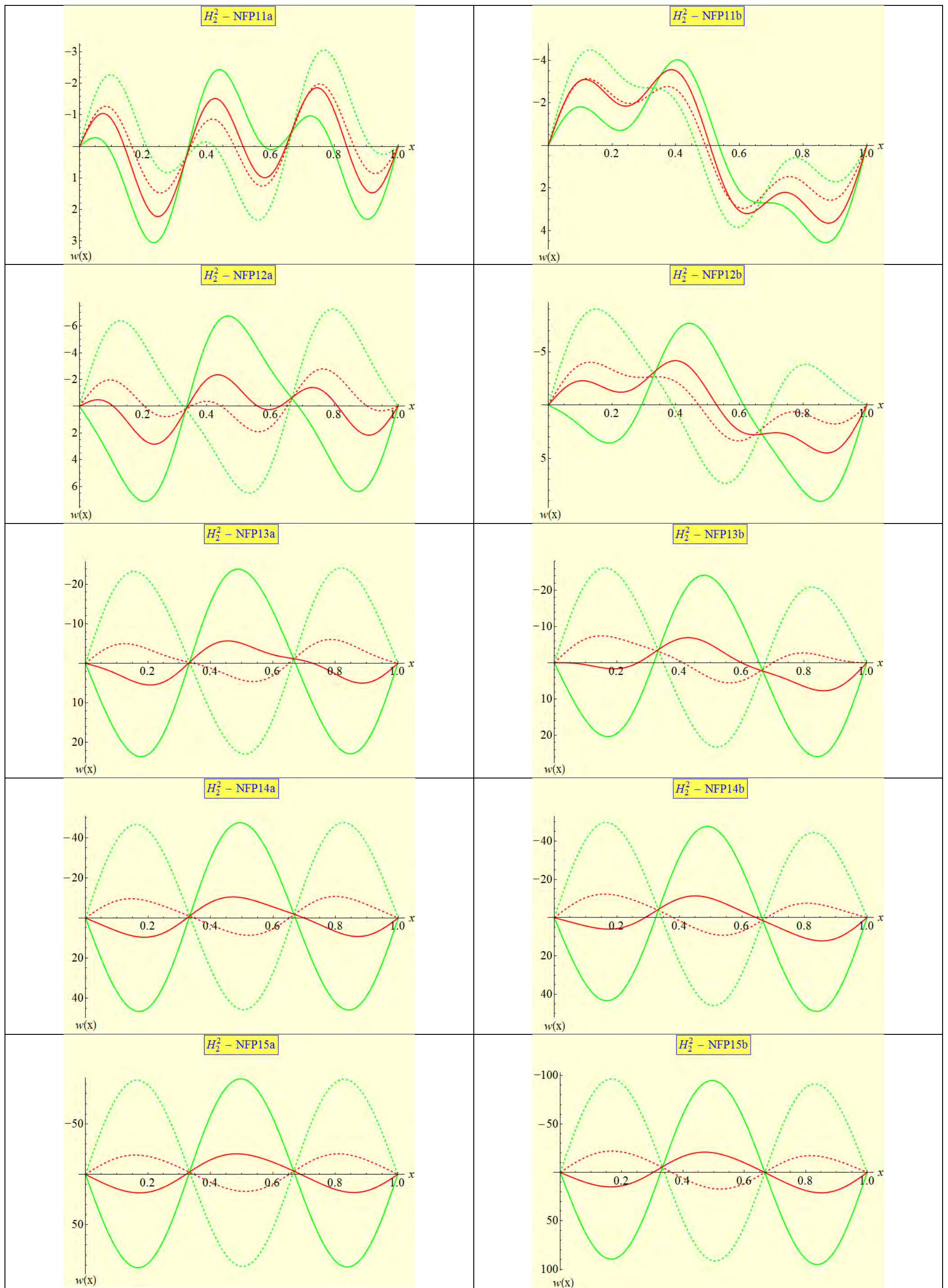
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Τυπική παραμορφωμένη κατάσταση δύο κυματομορφών με συμμετρία ως προς το σημείο $(1/2, 0)$. Αλλαγή πρόσημου παραμόρφωσης στην κρίσιμη κατάσταση. Πολύ οξύ φαινόμενο.
2	Όμοια με την Ομάδα 6.
3	Έντονη απώλεια συμμετρίας, παραμόρφωση δύο κυματομορφών, με μεγαλύτερες τιμές w κοντά στην αρχή, αλλαγή πρόσημου στην κρίσιμη περιοχή, οξεία φαινόμενα.
4	Όμοια με την Ομάδα 3.
5	Όμοια με την Ομάδα 3.
6	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με απώλεια συμμετρίας ως προς σημείο.
7	Όμοια με την Ομάδα 2.
8	Όμοια με την Ομάδα 3.
9	Όμοια με την Ομάδα 3.
10	Όμοια με την Ομάδα 3.
11	Συμμετρία ως προς το σημείο $(x=\ell/2, w=0)$ για μικρές τιμές του γ_2 , που χάνεται όσο αυξάνεται το γ_2 . Παραμόρφωση δύο κυματομορφών με ομοιόμορφη αλλαγή πρόσημου του w μετά την κρίσιμη κατάσταση όσο αυξάνεται το γ_2 . Φαινόμενο οξύ και συνδεδεμένο με πολύ μεγάλες παραμορφώσεις.
12	Όμοια με την Ομάδα 11. Σχεδόν ίδια αλλά με μεγάλη παραμόρφωση.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Όμοια με την Ομάδα 13.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Όμοια με την Ομάδα 15.



Σχήμα 5.15. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίερεστη δοκό: σημείο H_2^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



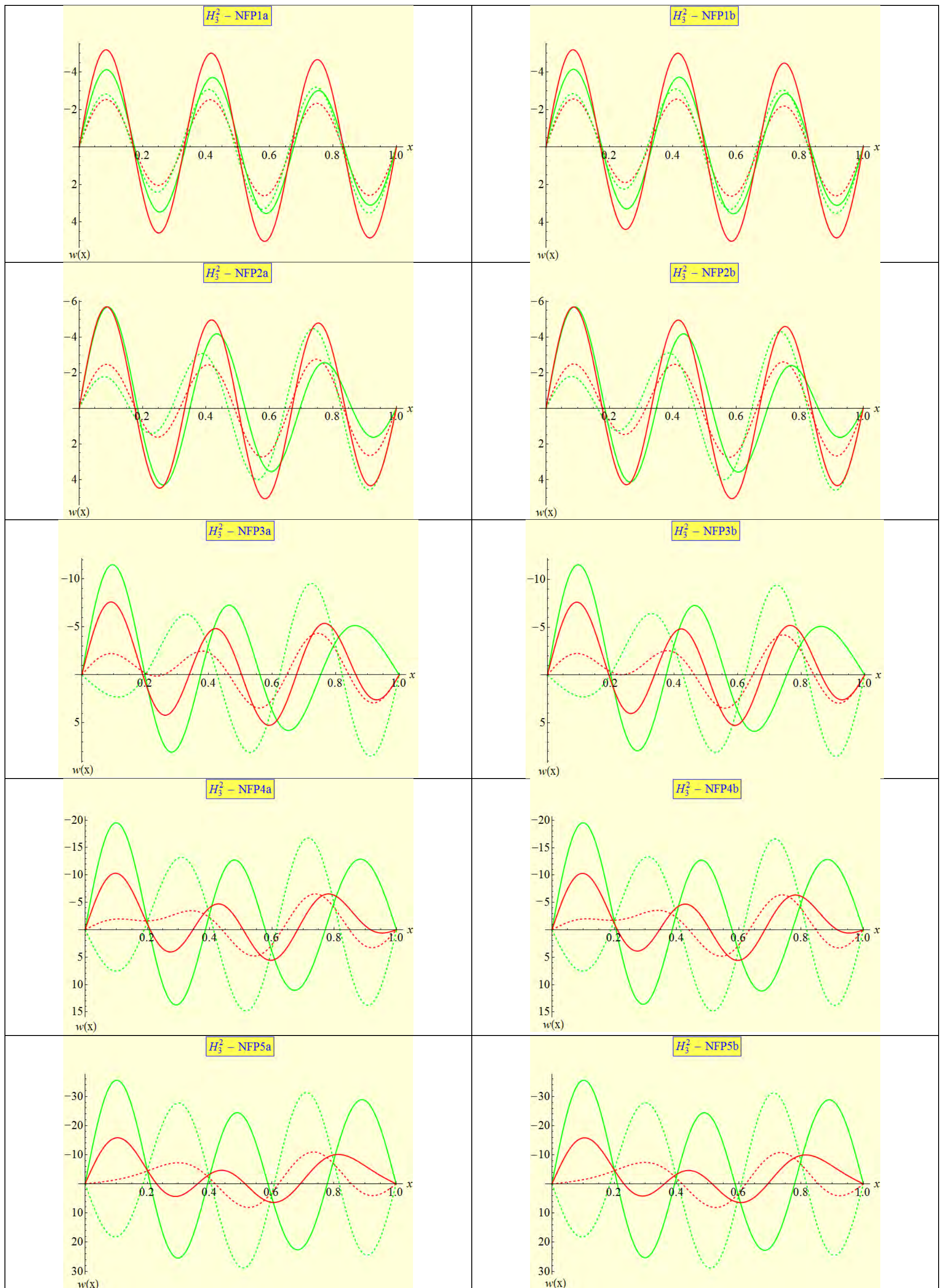
Σχήμα 5.15. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_2^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



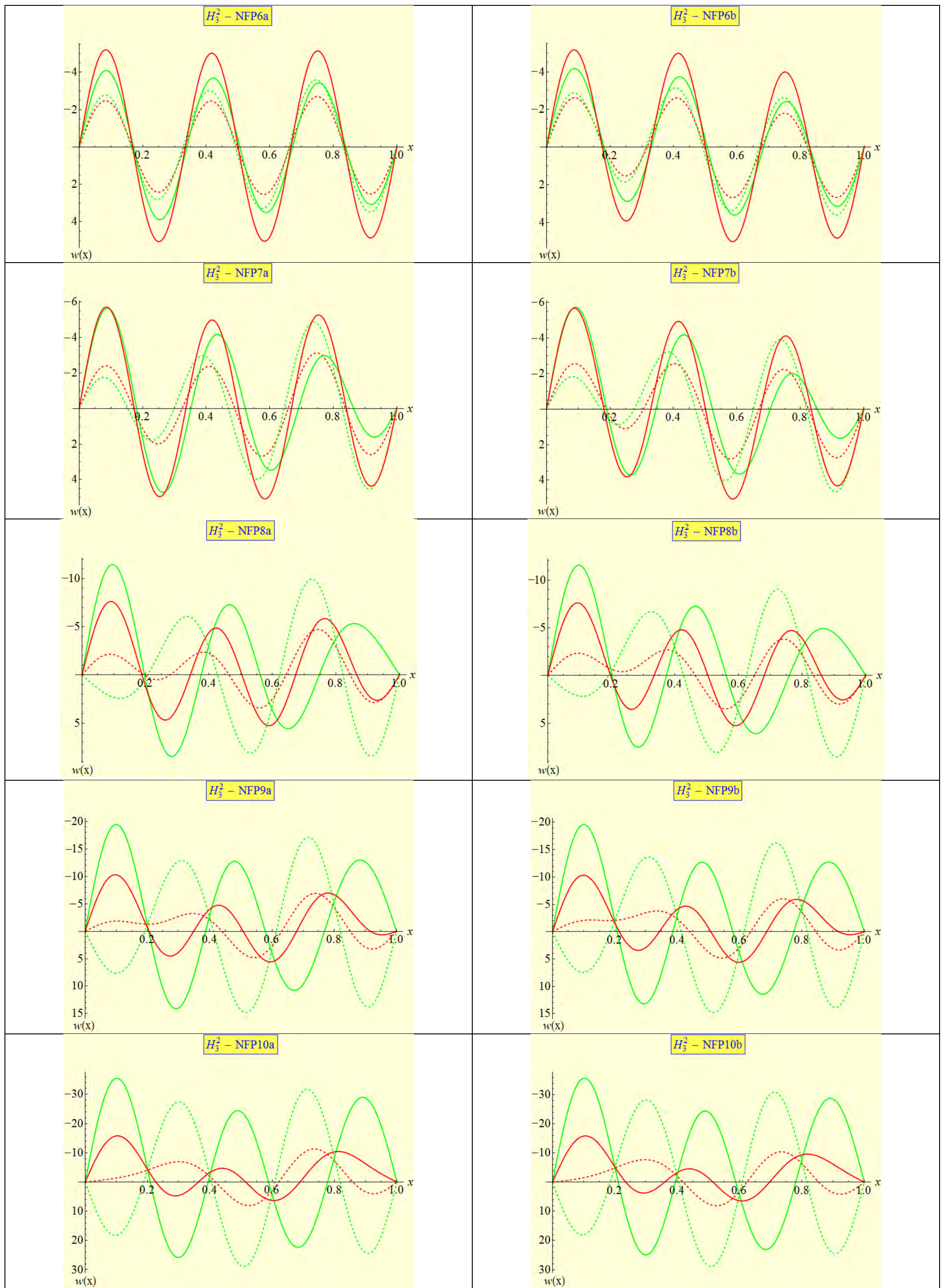
Σχήμα 5.15. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^2

Πίνακας 5.9. Κρίσιμο σημείο $H_2^2 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 1, n = 2$

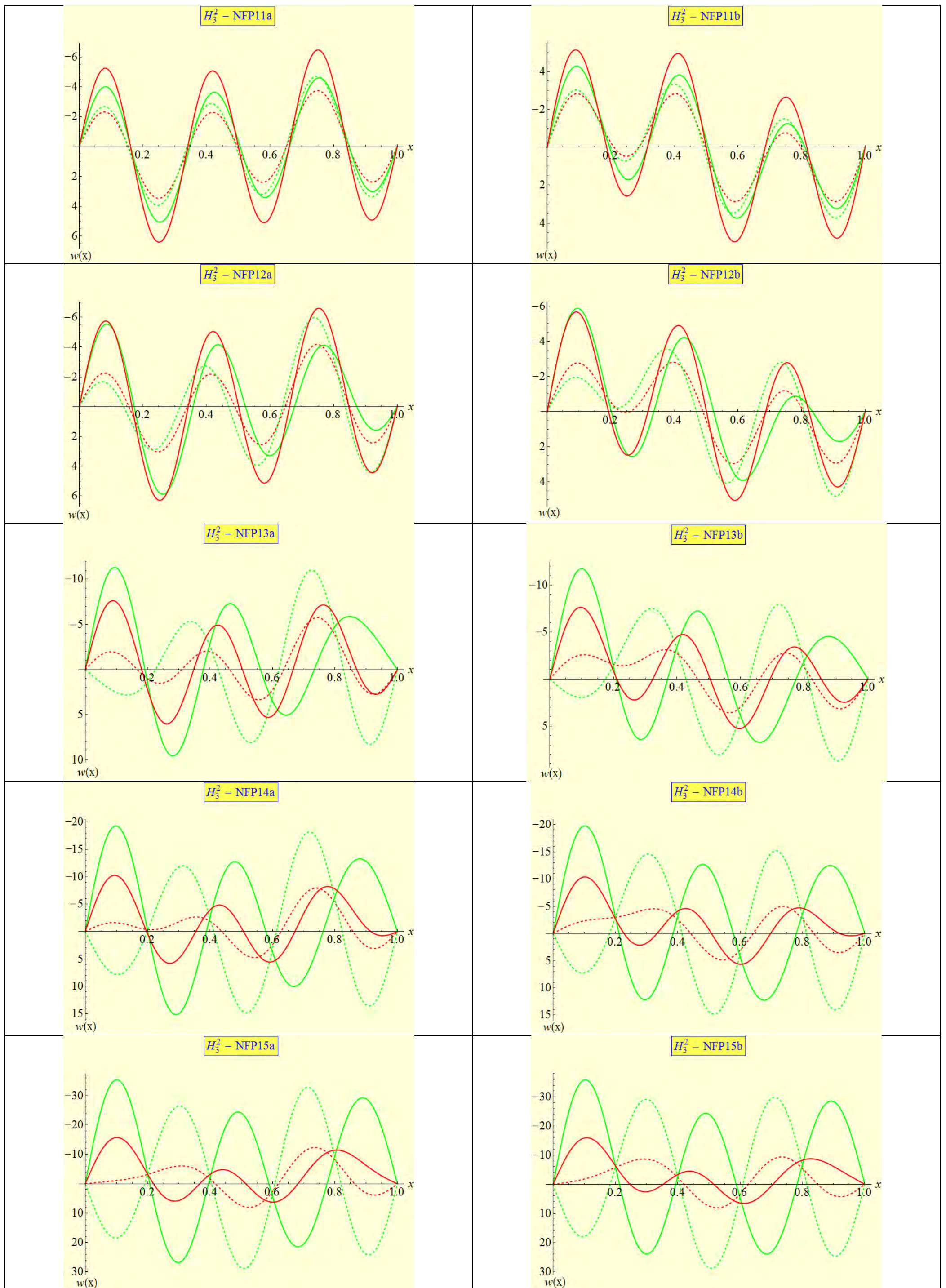
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Σύνθετες παραμορφώσεις έξι κυματομορφών χωρίς εμφανή συμμετρία. Στην κρίσιμη κατάσταση έχουμε μόνο αλλαγή των τιμών των ακρότατων και των θέσεων τους. Όσο αυξάνεται σε απόλυτη τιμή το γ_1 εμφανίζονται μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές ακρότατων.
2	Η σύνθετη παραμορφωμένη κατάσταση έξι κυματομορφών, όπως στην Ομάδα 1, μετασχηματίζεται σε ήπια τριών κυματομορφών. Το πρόσημο του w αλλάζει στην κρίσιμη κατάσταση. Δεν υπάρχει εμφανής συμμετρία.
3	Όμοια με την Ομάδα 2.
4	Όμοια με την Ομάδα 3.
5	Όμοια με την Ομάδα 3, οξύτερο φαινόμενο.
6	Όμοια με τη Ομάδα 1, με τάση για ηπιότερη παραμόρφωση όσο αυξάνεται το γ_1 .
7	Όμοια με την Ομάδα 2.
8	Όμοια με την Ομάδα 3.
9	Όμοια με την Ομάδα 3.
10	Όμοια με την Ομάδα 5.
11	Σύνθετη οιονεί περιοδική προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση κυματομορφών για μικρές τιμές του γ_2 , όπου παρατηρείται αντισυμμετρική βύθιση των καμπυλών παραμορφώσεων για ενδιάμεσες τιμές του w . Όσο το γ_2 αυξάνεται, το σύστημα τείνει να εμφανίσει παραμόρφωση τριών κυματομορφών με συμμετρία σημείου, αλλαγή πρόσημου του w και οξείες παραμορφώσεις. Η μεσαία κυματομορφή στην μεταλυγισμική κατάσταση είναι πάντα αρνητική.
12	Αποτελέσματα σχεδόν όμοια με της Ομάδας 11.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Ποιοτικά όμοια αποτελέσματα με την Ομάδα 13. Για μικρές τιμές του γ_2 παρατηρείται μεγαλύτερη θετική παραμόρφωση και μικρότερη αρνητική (σε σύγκριση με την Ομάδα 13). Όσο το γ_2 αυξάνεται αυτές οι παραμορφώσεις γίνονται πιο ήπιες.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του γ_2 παρατηρείται μια ανύψωση της παραμόρφωσης (προς τα αρνητικά βέλη w) συγκρινόμενα με τα αποτελέσματα της Ομάδας 15. Το φαινόμενο τείνει να εξαφανιστεί όσο το γ_2 αυξάνεται.



Σχήμα 5.16. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_3^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



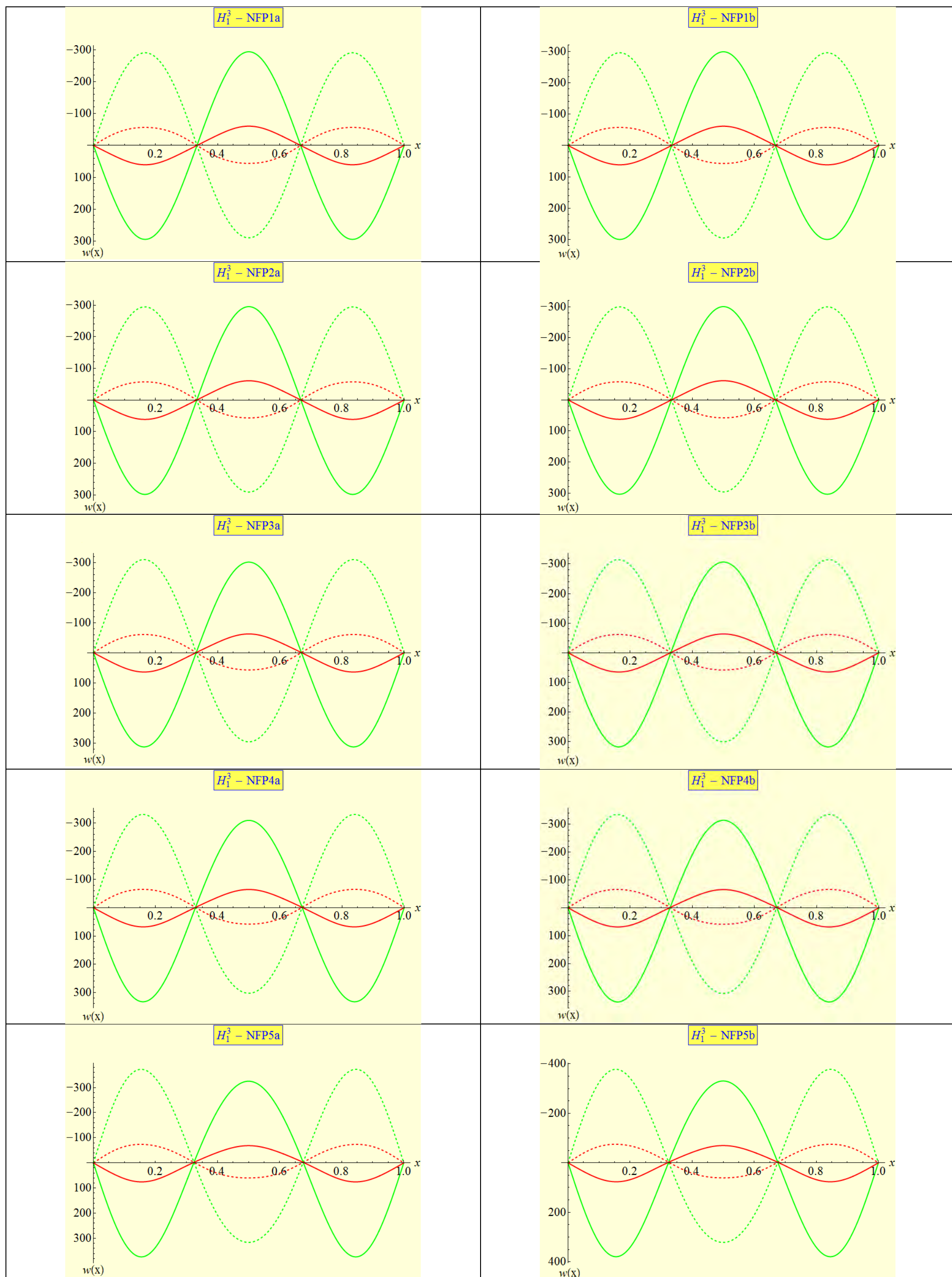
Σχήμα 5.16. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



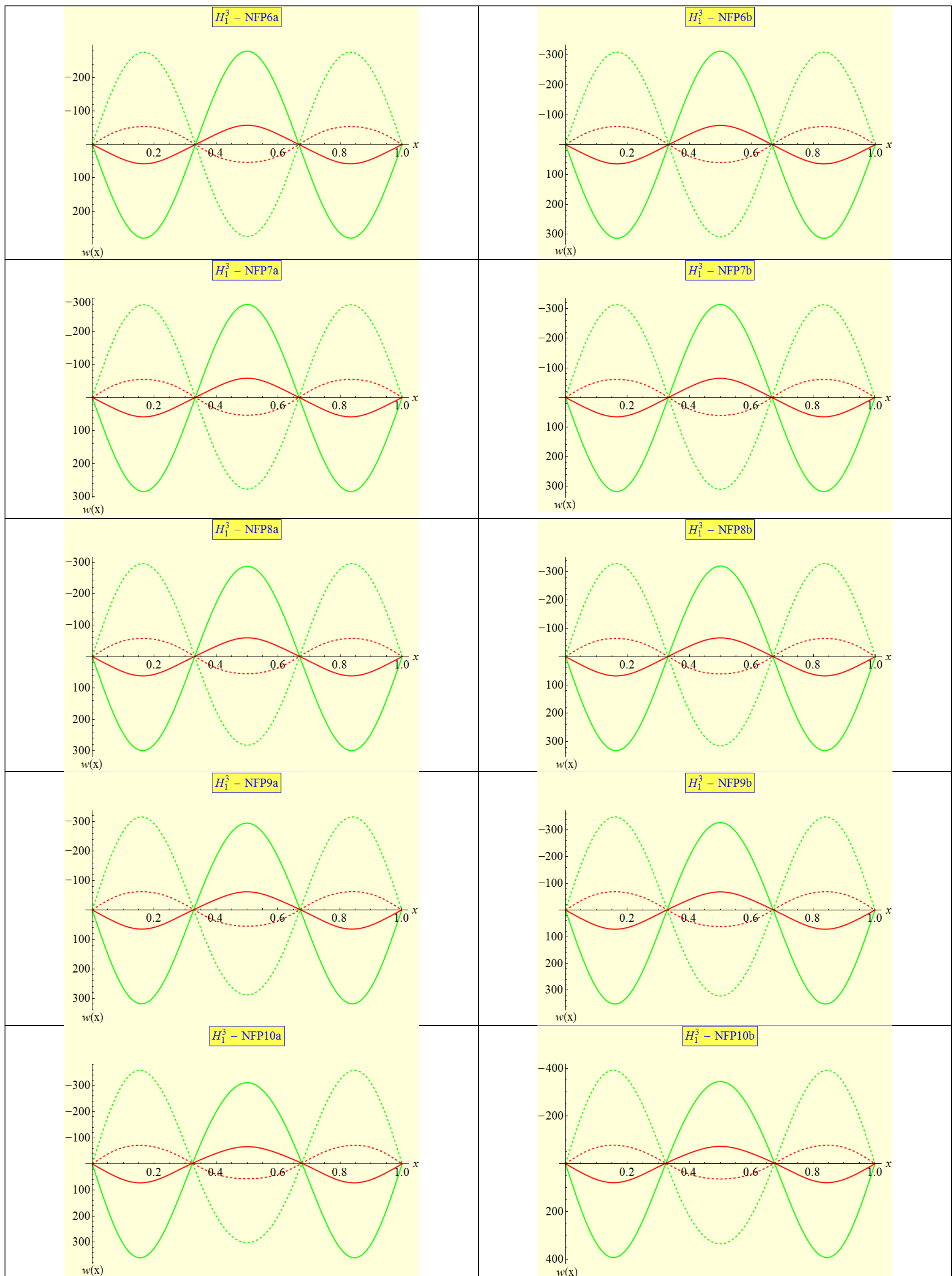
Σχήμα 5.16. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^2

Πίνακας 5.10. Κρίσιμο σημείο $H_3^2 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 2$

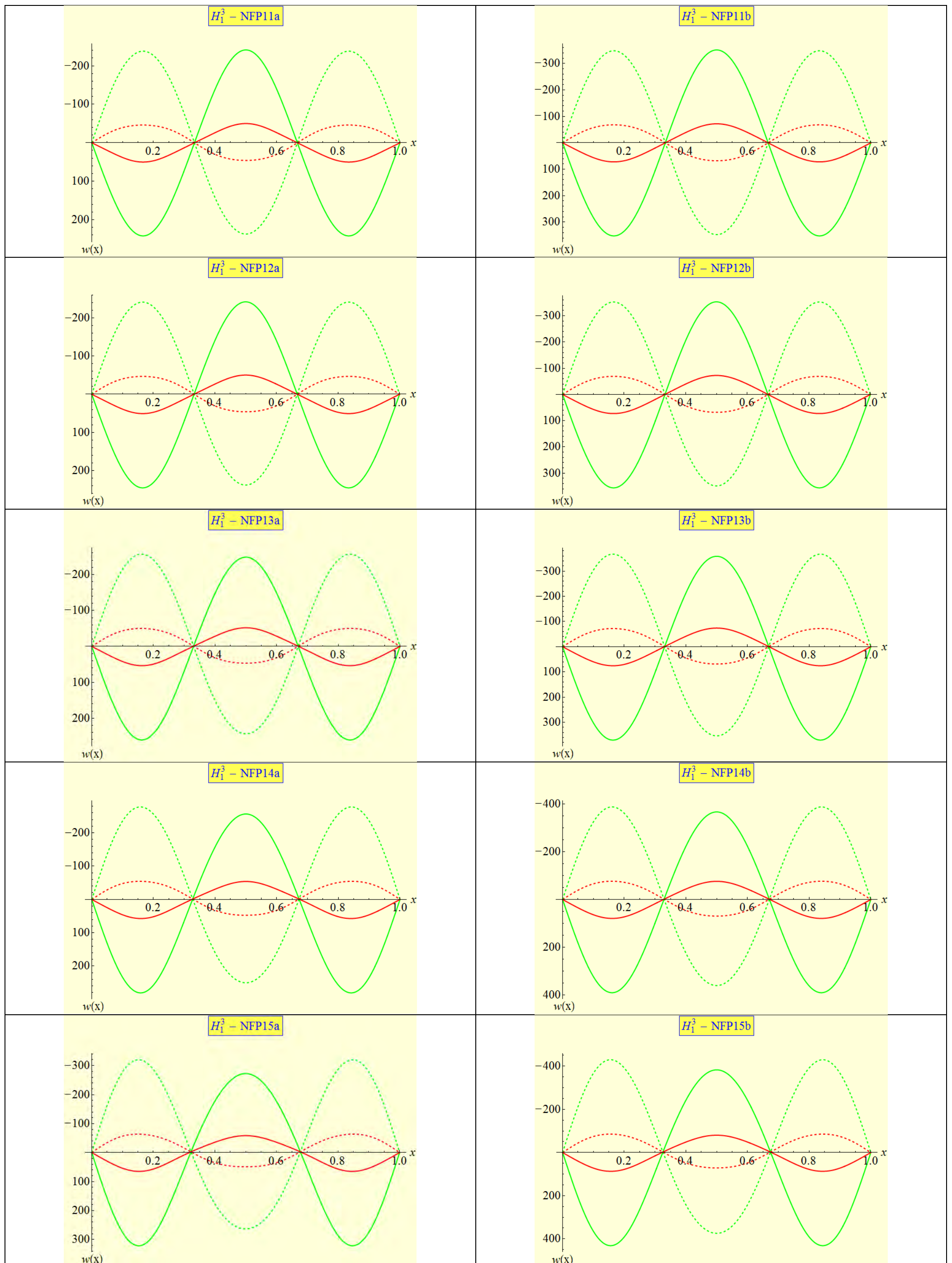
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Απόκριση έξι κυματομορφών χωρίς εμφανή συμμετρία. Μόνο διαφορές στα ακρότατα ενώ αυξάνεται σε απόλυτη τιμή το γ_1 , χωρίς αλλαγή πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση.
2	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με ελαφρά μεγαλύτερη παραμόρφωση.
3	Μη συμμετρική παραμόρφωση πέντε κυματομορφών, με αναστροφή του πρόσημου παραμόρφωσης πολύ κοντά στην κρίσιμη κατάσταση. Μόνο τα ακρότατα επηρεάζονται (όχι σημαντικά) από την αλλαγή του γ_1 .
4	Όμοια με την Ομάδα 3, οξύτερο φαινόμενο.
5	Όμοια με τις Ομάδες 3 και 4 αλλά αρκετά οξύτερο φαινόμενο.
6	Όμοια απόκριση με την Ομάδα 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με την Ομάδα 3.
9	Όμοια με την Ομάδα 4.
10	Όμοια με την Ομάδα 5.
11	Για μικρές τιμές του γ_2 , η προ- και μεταλυγισμική απόκριση συνδέεται με έξι συμμετρικές ως προς σημείο κυματομορφές (δύο διαδοχικές, μια συμμετρική ως προς το σημείο αλληλεπίδρασης $w=0$). Η μετάβαση από $\lambda < \lambda_{cr}$ σε $\lambda > \lambda_{cr}$ περιλαμβάνει μόνο μικρές αλλαγές στο σχήμα και όχι αλλαγή πρόσημου. Αντίθετα, για μεγάλες τιμές του γ_2 εμφανίζονται πέντε κυματομορφές χωρίς καθορισμένη συμμετρία, ενώ η προ- και μεταλυγισμική συμπεριφορά συνδέεται με αλλαγή πρόσημου του βέλους.
12	Όμοια με την Ομάδα 11, με ασήμαντα μικρή διαφορά στην παραμόρφωση.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Συγκριτικά με την απόκριση της Ομάδας 13, εμφανίζεται μια ανύψωση της παραμόρφωσης για μικρές τιμές του γ_2 . Όσο αυξάνεται αυτή η παράμετρος, τα αποτελέσματα γίνονται σχεδόν ίδια.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13 αλλά χωρίς συγκεκριμένη συμμετρία.
16	Συγκριτικά με την Ομάδα 15, εμφανίζονται όμοια φαινόμενα όπως και στην σύγκριση των αποτελεσμάτων των Ομάδων 13/14.



Σχήμα 5.17. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_1^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



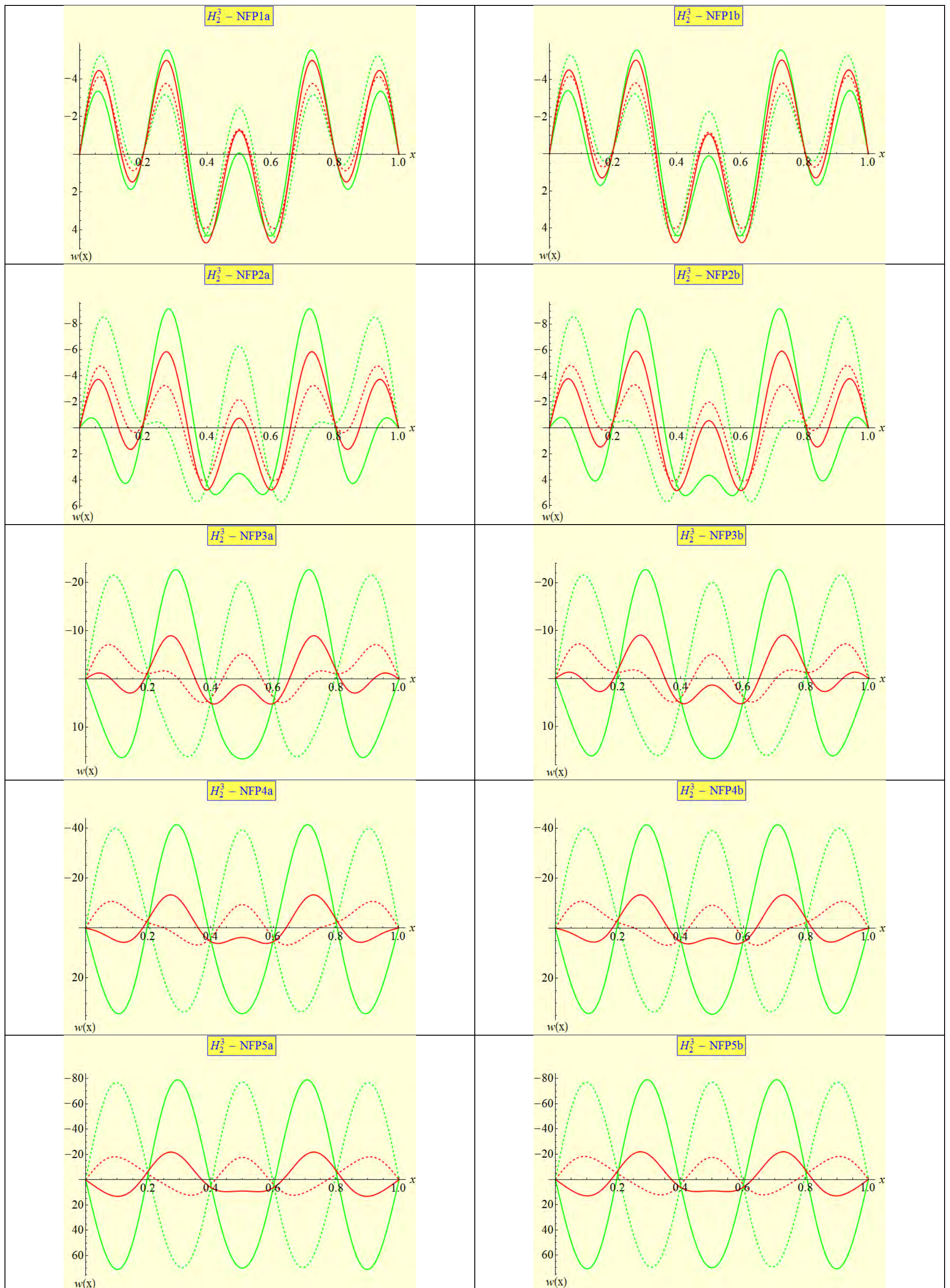
Σχήμα 5.17. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίερεστη δοκό: σημείο H_1^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



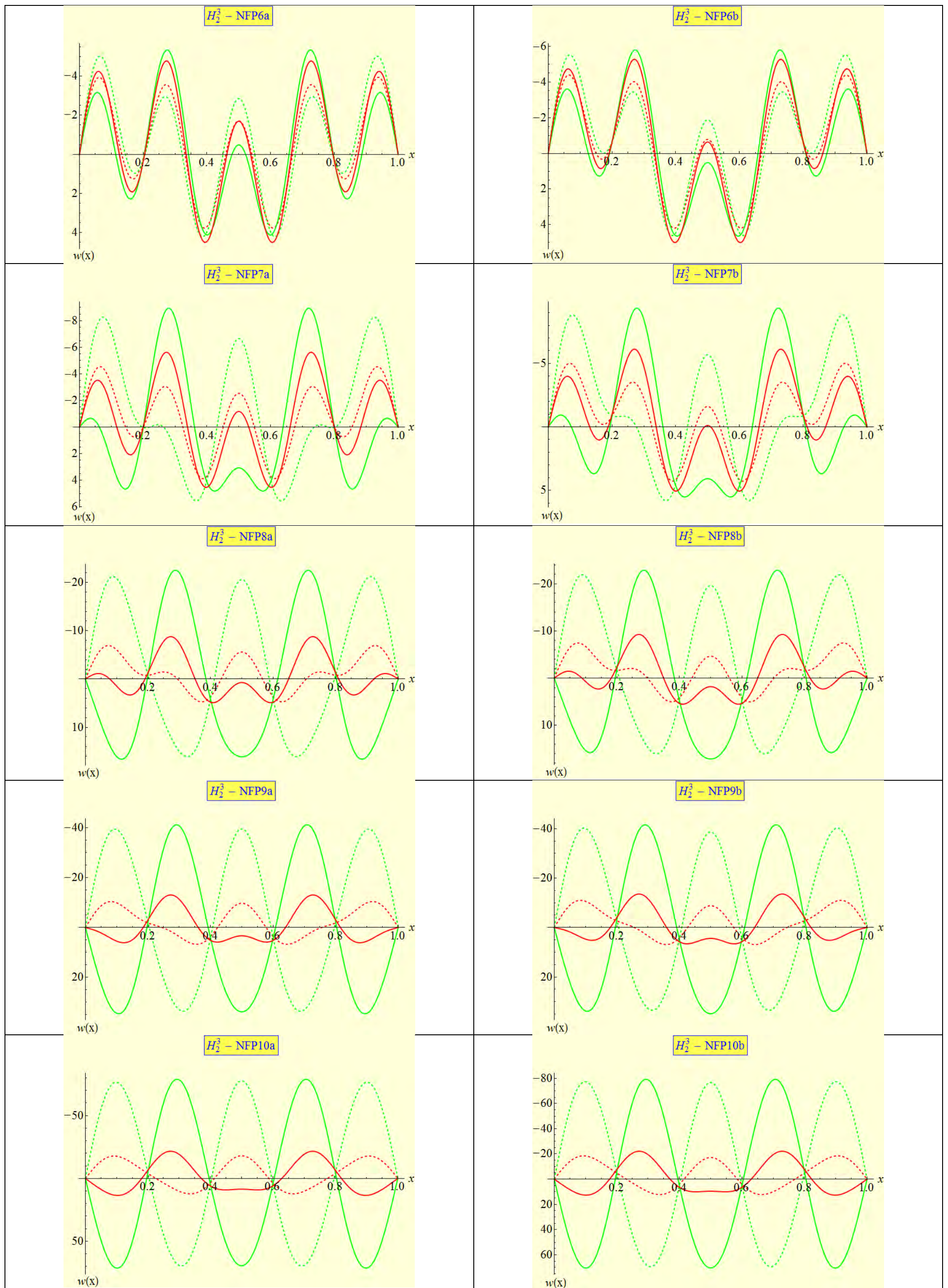
Σχήμα 5.17. Προ- και μεταλογισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_1^3

Πίνακας 5.11. Κρίσιμο σημείο $H_I^3 : \lambda_1 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 3$

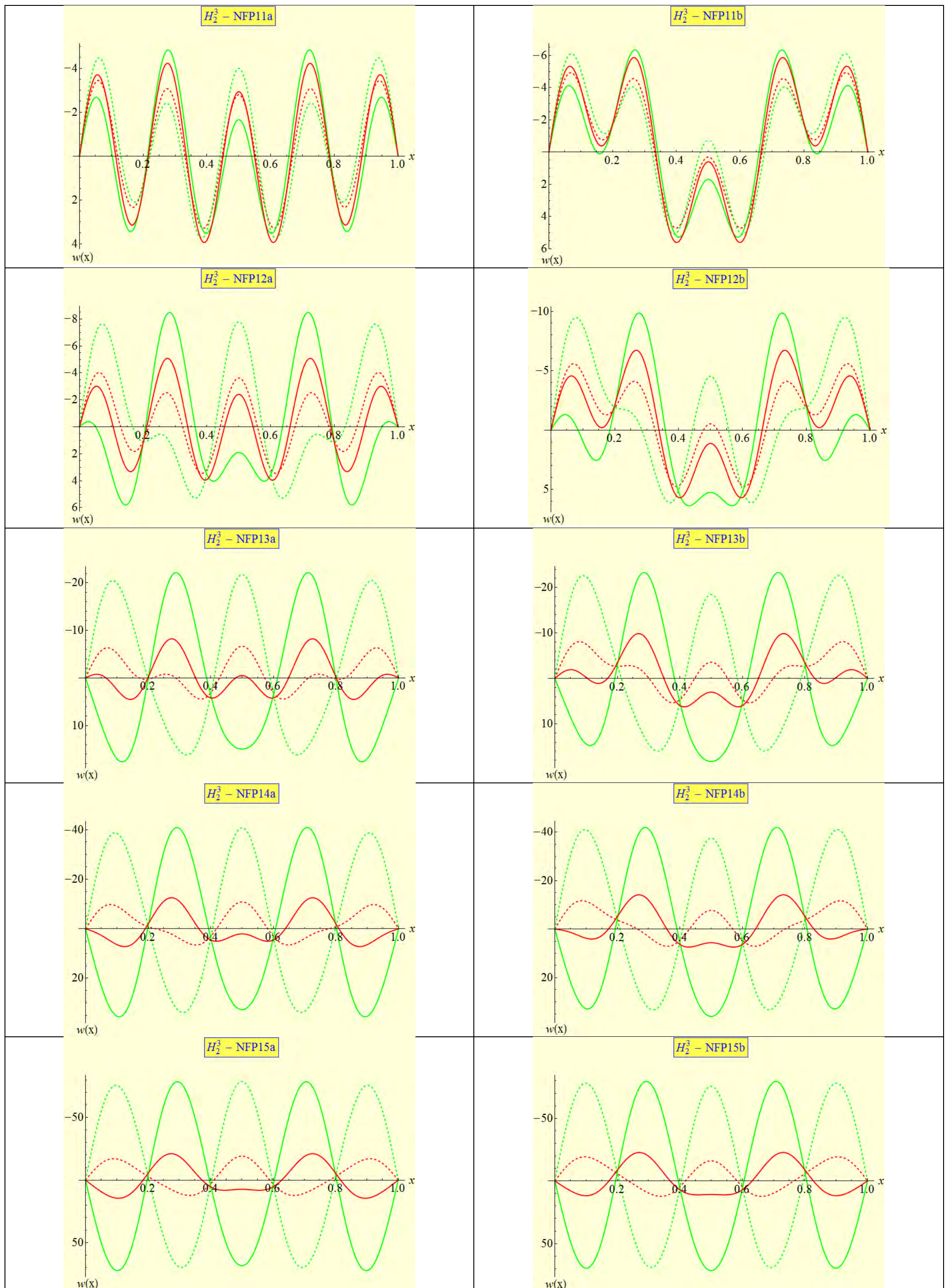
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Τυπική παραμόρφωση τριών κυματομορφών με συμμετρία (ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$) και αλλαγή πρόσημου για το w στην κρίσιμη κατάσταση. Πολύ οξύ φαινόμενο, αλλά χωρίς να επηρεάζεται από την αλλαγή του γ_1 .
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Όμοια με την Ομάδα 1.
4	Όμοια με την Ομάδα 1.
5	Όμοια με την Ομάδα 1.
6	Όμοια με την Ομάδα 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 1.
8	Όμοια με την Ομάδα 1.
9	Όμοια με την Ομάδα 1.
10	Όμοια με την Ομάδα 1.
11	Παραμόρφωση τριών κυματομορφών για κάθε γ_2 , με μία αρνητική και δύο θετικές πριν την κρίσιμη κατάσταση. Αντίθετη μορφή (αλλαγή πρόσημου) μετά την κρίσιμη κατάσταση. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ (κατακόρυφος άξονας) – οξύ φαινόμενο.
12	Σχεδόν όμοια απόκριση με αυτή της Ομάδας 11. Ελαφρά μεγαλύτερη παραμόρφωση για πολύ μεγάλες τιμές του γ_2 .
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Απόκριση όμοια με την Ομάδα 13, με ελαφριά αλλαγή στο μέγεθος της παραμόρφωσης για μικρές και πολύ μεγάλες τιμές του γ_2 .
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Συγκριτικά με την απόκριση της Ομάδας 15, όμοια ποιοτικά αποτελέσματα συνδεδεμένα με μεγαλύτερες παραμορφώσεις.



Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλουργική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_2^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

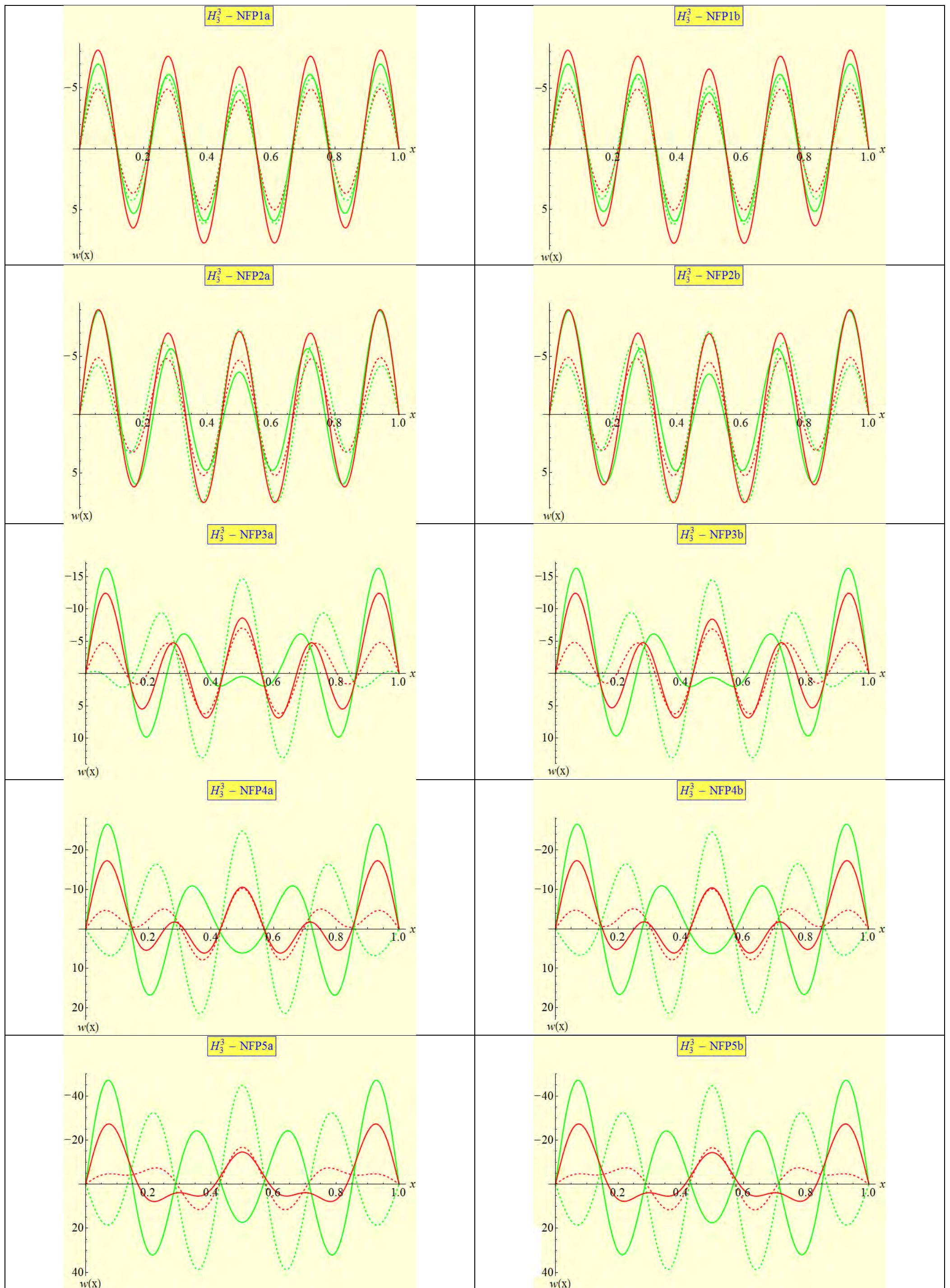


Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_2^3

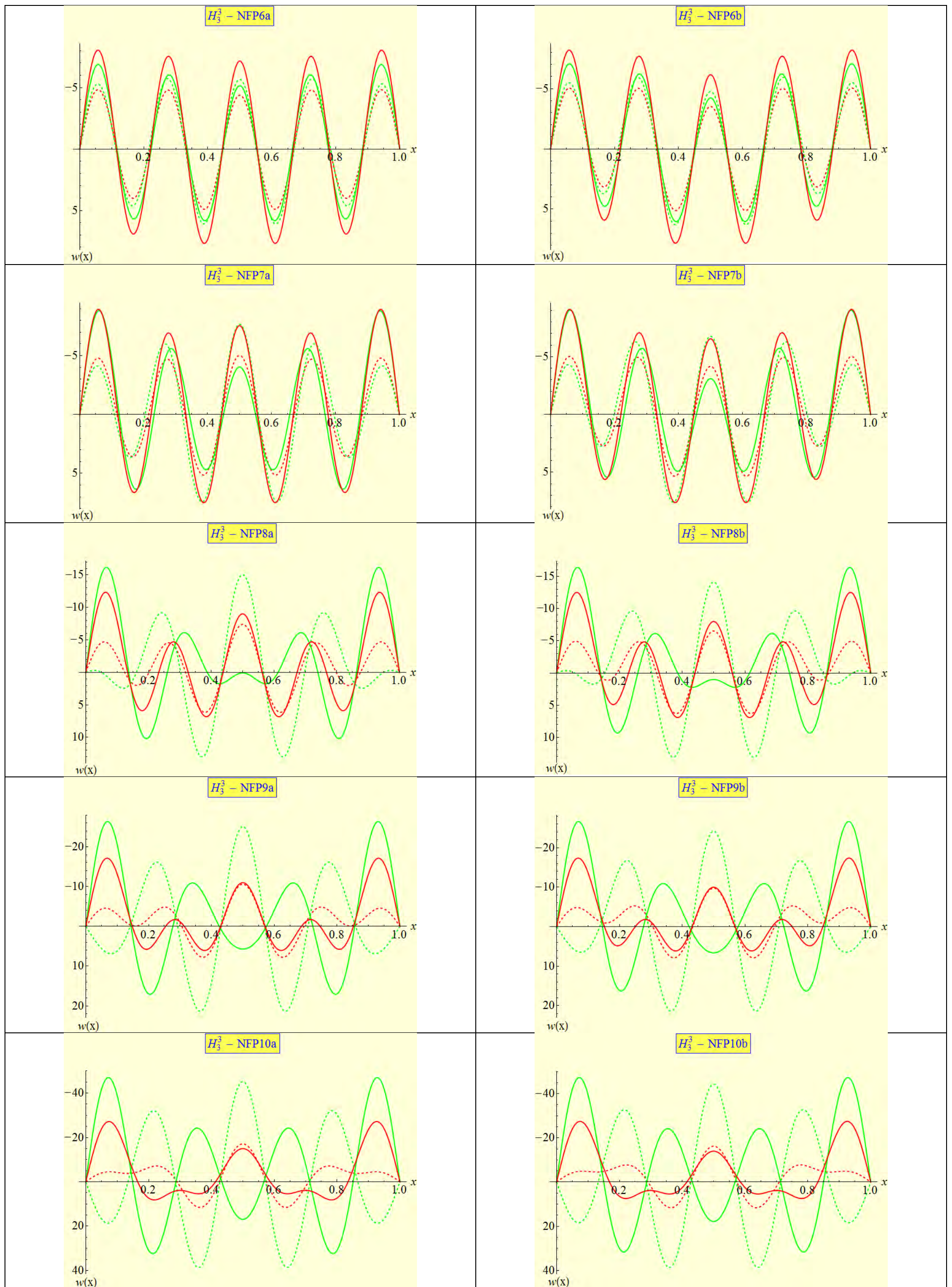
Πίνακας 5.12. Κρίσιμο σημείο $H_2^3 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 2, n = 3$

Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Προ- και μεταλυγισμική απόκριση εννέα κυματομορφών με συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$. Η αύξηση σε απόλυτη τιμή του γ_I απλά χαμηλώνει την κυματομορφή στη γειτονιά του μέσου της δοκού. Το πρόσημο του w δεν επηρεάζεται στην κρίσιμη κατάσταση.
2	Σύνθετη απόκριση εννέα κυματομορφών. Επηρεάζονται μόνο τα ακρότατα μόνο από την αύξηση σε απόλυτη τιμή του γ_I . Χωρίς αλλαγή πρόσημου και συμμετρία όπως στην Ομάδα 1.
3	Ποιοτική μείωση της απόκρισης σε πέντε κυματομορφές, συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$, αλλαγή πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση. Οξεία φαινόμενα, που δεν επηρεάζονται σημαντικά από την αλλαγή στην τιμή του γ_I .
4	Όμοια με την Ομάδα 3, οξύτερο φαινόμενο.
5	Όμοια με την Ομάδα 4, οξύτερο φαινόμενο.
6	Αποτελέσματα ποιοτικά όμοια με αυτά της Ομάδας 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 2, ελαφρά οξύτερα φαινόμενα.
8	Όμοια με την Ομάδα 3, μεσαία κυματομορφή με μεγαλύτερα ακρότατα.
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με την ομάδα 5, οξύτερο φαινόμενο.
11	Για μικρές τιμές του γ_2 οι προ- και μεταλυγισμικές καταστάσεις συνδέονται με εννέα κυματομορφές, με συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$. Όσο το γ_2 αυξάνεται, εμφανίζεται ένας μικρότερος αριθμός κυματομορφών (επτά και μετά πέντε). Για την περίπτωση των εννέα κυματομορφών, η μετάβαση από $\lambda < \lambda_{cr}$ σε $\lambda > \lambda_{cr}$ οδηγεί σε ανύψωση ή βύθιση των κυματομορφών, ενώ για κάθε άλλη περίπτωση οδηγεί αλλαγή του πρόσημου του βέλους κατά μήκος της δοκού. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ διατηρείται. Το φαινόμενο οξύνεται όσο αυξάνεται το γ_2 .
12	Απόκριση σχεδόν όμοια με την Ομάδα 11.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Συγκριτικά με τα αποτελέσματα της Ομάδας 13, υπάρχει ποιοτική ομοιότητα, με ανύψωση των παραμορφώσεων για θετικές κυματομορφές και βύθιση για παραμορφώσεις στην περιοχή κοντά στο μέσον της δοκού για μικρές τιμές του γ_2 .

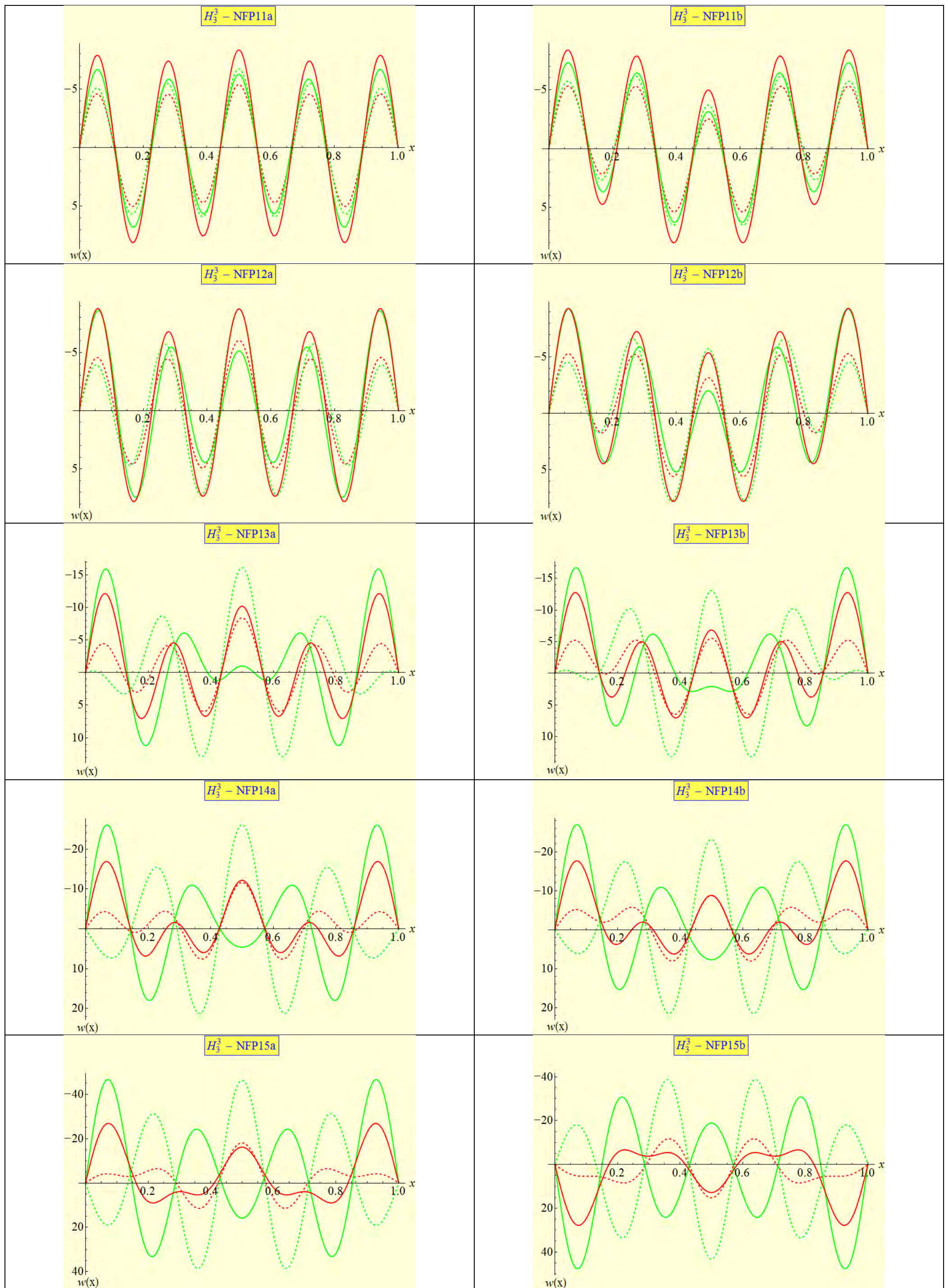
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Όμοια με τα αποτελέσματα που ισχύουν για την Ομάδα 15, αλλά σε σύγκριση με αυτά, εμφανίζονται οι ίδιες αλλαγές όπως ανάμεσα στις Ομάδες 13/14.



Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_3^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



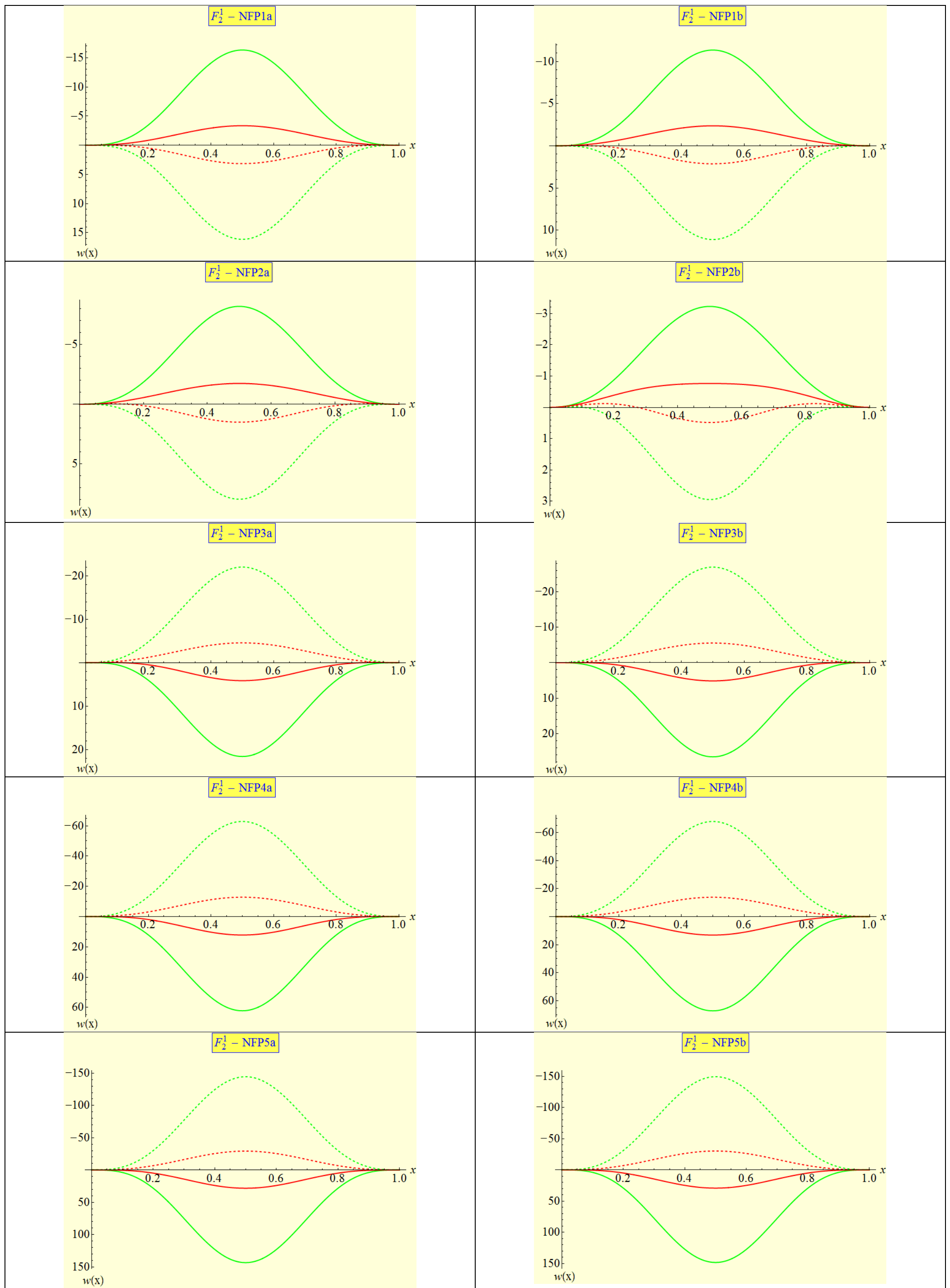
Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέριστη δοκό: σημείο H_3^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



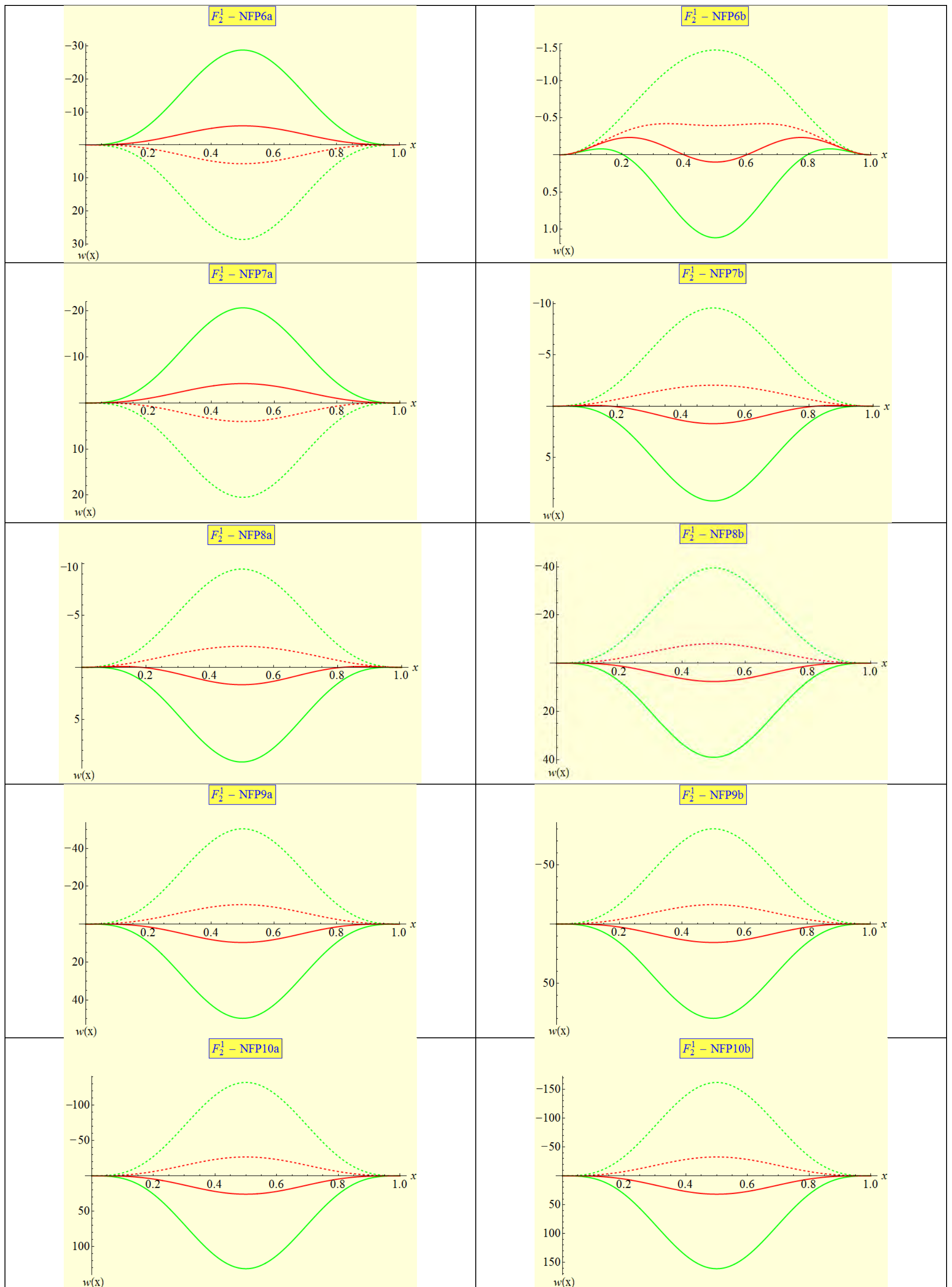
Σχήμα 5.18. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφιέρειστη δοκό: σημείο H_3^3

Πίνακας 5.13. Κρίσιμο σημείο $H_3^3 : \lambda_2 = \lambda_4, c_1 = 3, n = 3$

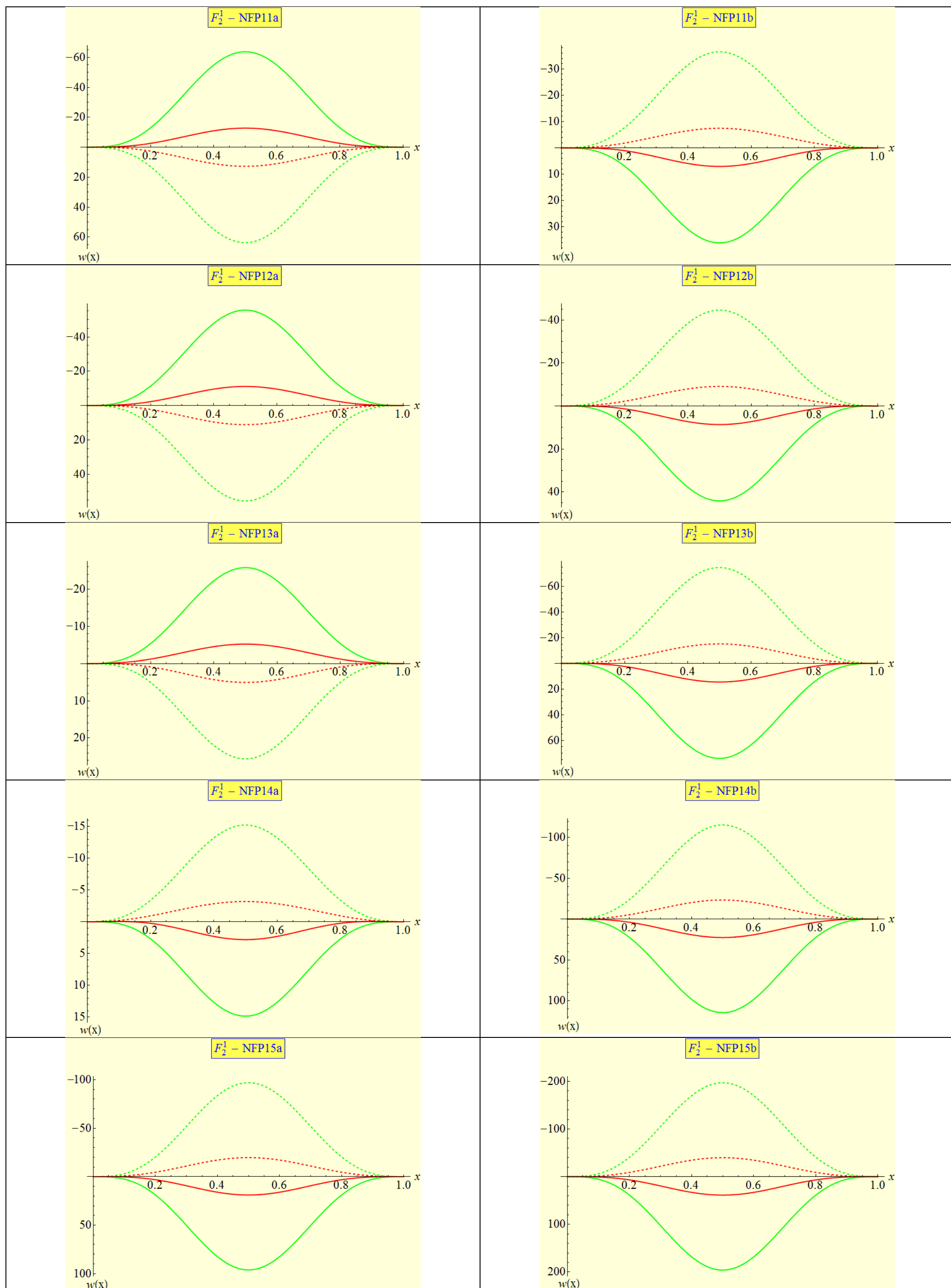
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Παραμόρφωση εννέα κυματομορφών, μη επηρεαζόμενη από την αλλαγή του γ_1 . Ελαφριά αλλαγή στα τοπικά ακρότατα στην κρίσιμη κατάσταση (χωρίς αντιστροφή πρόσημου). Συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$.
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Ελαφρά πιο σύνθετη παραμόρφωση εννέα κυματομορφών (σε σύγκριση με τις Ομάδες 1 και 2). Η συμμετρία διατηρείται. Η μεσαία κυματομορφή με μειωμένα ακρότατα εμφανίζει τάση για αλλαγή πρόσημου, πολύ κοντά στην κρίσιμη κατάσταση. Οξεία φαινόμενα.
4	Παραμόρφωση επτά κυματομορφών (ηπιότερη της Ομάδας 3), με τη συμμετρία να διατηρείται, με εντονότερη τάση για αλλαγή πρόσημου και μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Μικρή επιρροή της μεταβολής του γ_1 , μόνο στα ακρότατα των κυματομορφών.
5	Όμοια με την ομάδα 4, αλλά συνδέεται με αρκετά μεγαλύτερες παραμορφώσεις.
6	Όμοια με την Ομάδα 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με την Ομάδα 3.
9	Όμοια με την Ομάδα 4
10	Όμοια με την Ομάδα 5.
11	Όμοια αλλά εντονότερα φαινόμενα όπως αυτά της αντίστοιχης Ομάδας στον προηγούμενο Πίνακα. Εδώ εμφανίζονται εννέα κυματομορφές για μικρές τιμές του γ_2 και όσο τούτο αυξάνεται έχουμε πάντα 5 κυματομορφές. Η παραμορφωμένη κατάσταση γίνεται ηπιότερη για ενδιάμεσες τιμές του γ_2 (η ίδια παρατήρηση ισχύει για την Ομάδα 11 του Πίνακα 5.12)
12	Απόκριση σχεδόν όμοια με τη αυτή της Ομάδας 11.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Απόκριση σχεδόν όμοια με τη αυτή της Ομάδας 12.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Ποιοτικά ίδια αποτελέσματα με αυτά της Ομάδας 15, με κάποια φαινόμενα ανώψωσης για θετική κυματομορφή κοντά στις στηρίξεις και βύθισης κοντά στο μέσον του ανοίγματος.



Σχήμα 5.19. Προ- και μεταλογισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.19. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίτακτη δοκό: σημείο F_2^1 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

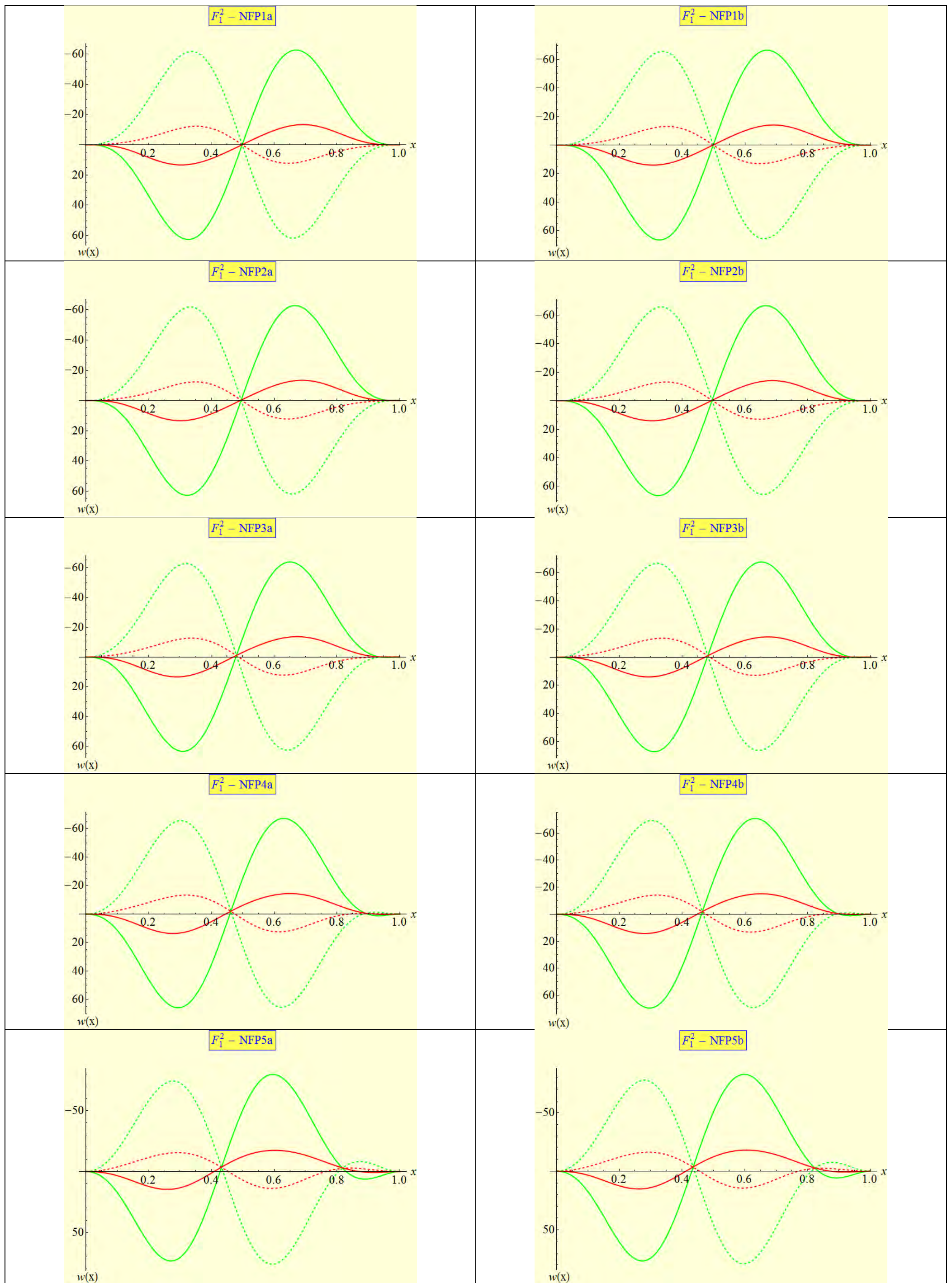


Σχήμα 5.19. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^1

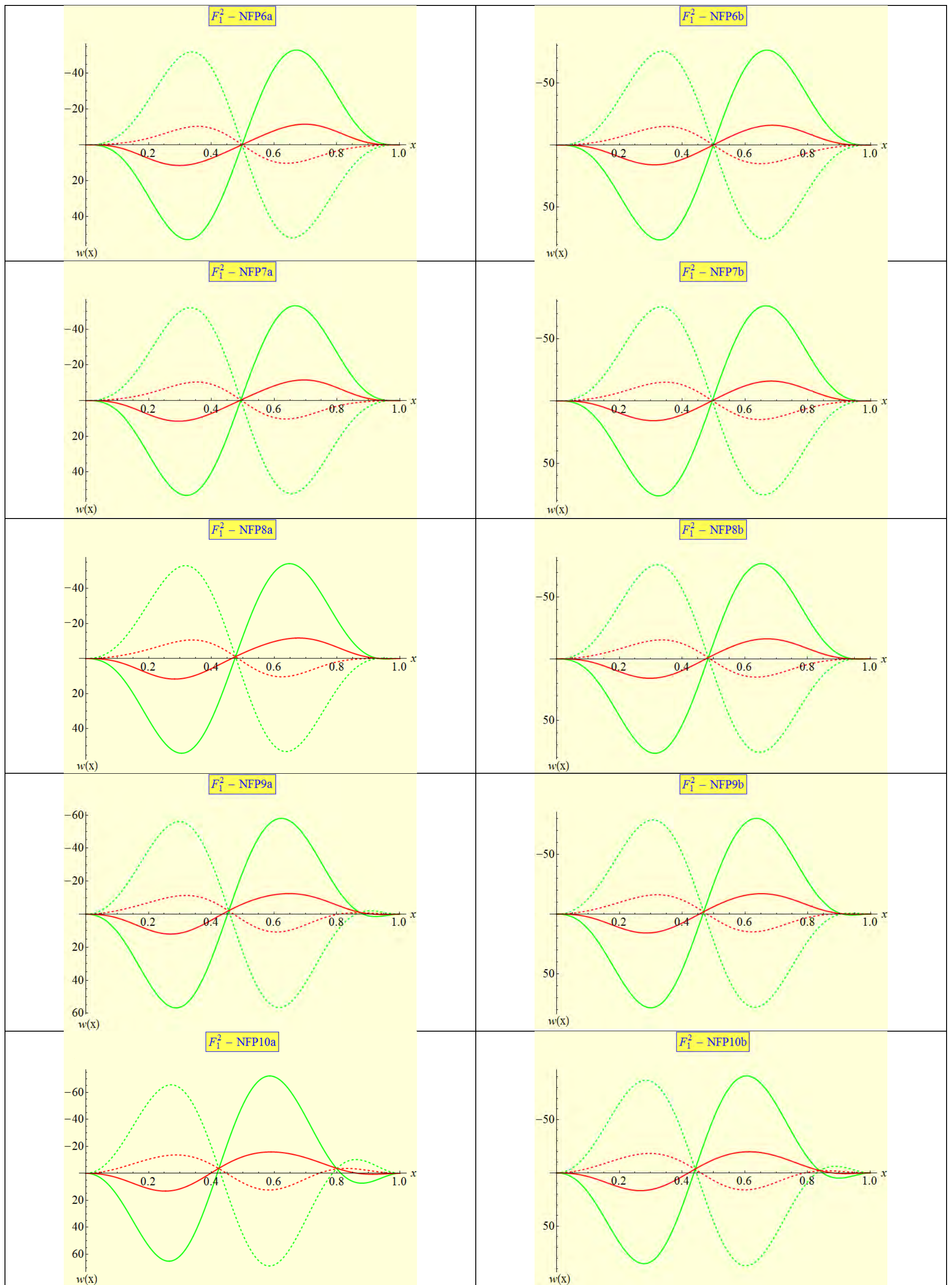
Πίνακας 5.14. Κρίσιμο σημείο $F_2^1 : \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 1$

Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Προ- και μεταλυσισμική απόκριση μιας μορφής, συμμετρική ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ με θετική προλυσισμική παραμόρφωση και αλλαγή πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση. Όσο το γ_1 αυξάνεται σε απόλυτη τιμή παρατηρείται όμοια ποιοτικά συμπεριφορά αλλά οξύτερη.
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του γ_1 παρατηρείται μονή κυματομορφή με μειούμενα τοπικά μέγιστα και προλυσισμική κατάσταση συνδεδεμένη με αρνητικές παραμορφώσεις. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ διατηρείται όπως επίσης και η αντιστροφή του πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση. Για μεγάλες τιμές του γ_2 τα εύρη (μέγιστα) αυξάνονται και η προλυσισμική παραμόρφωση γίνεται θετική.
4	Όπως για τις Ομάδες 1 και 2 αλλά με προλυσισμικές παραμορφώσεις αρνητικές όσο το γ_1 αυξάνεται.
5	Όπως στην Ομάδα 4, αλλά με σχετικά μεγαλύτερες παραμορφώσεις.
6	Προ- και μεταλυσισμική απόκριση μιας μορφής για μικρές και μεγάλες τιμές του γ_1 , ενώ για ενδιάμεσες υπάρχει η τάση για συμπεριφορά τριών κυματομορφών. Ωστόσο, η συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$ καθώς και η αντιστροφή του πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση διατηρούνται πάντα. Η απόκριση τριών κυματομορφών συνδέεται με αρκετά μικρότερη παραμόρφωση συγκριτικά με αυτή της μονής κυματομορφής.
7	Απόκριση μονής κυματομορφής, συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$ και αντιστροφή πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση. Για μικρές τιμές του γ_1 η προλυσισμική παραμόρφωση είναι θετική και γίνεται αρνητική με την αύξηση του γ_1 και συνδέεται με οξεία φαινόμενα.
8	Απόκριση μιας κυματομορφής, συμμετρικής ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$, με αντιστροφή πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση και προλυσισμικές παραμορφώσεις πάντα αρνητικές. Φαινόμενο οξύτερο όσο αυξάνεται το γ_1 .
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με τις Ομάδες 8 και 9.
11	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση μιας μορφής με συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ Για μικρές τιμές του γ_2 η προλυσισμική παραμόρφωση είναι θετική, και γίνεται αρνητική όσο αυτές αυξάνονται. Στην κρίσιμη κατάσταση εμφανίζεται πάντα αντιστροφή στο πρόσημο της παραμόρφωσης. Φαινόμενα οξύτερα όσο αυξάνεται το γ_2 (μεγαλύτερη παραμόρφωση).

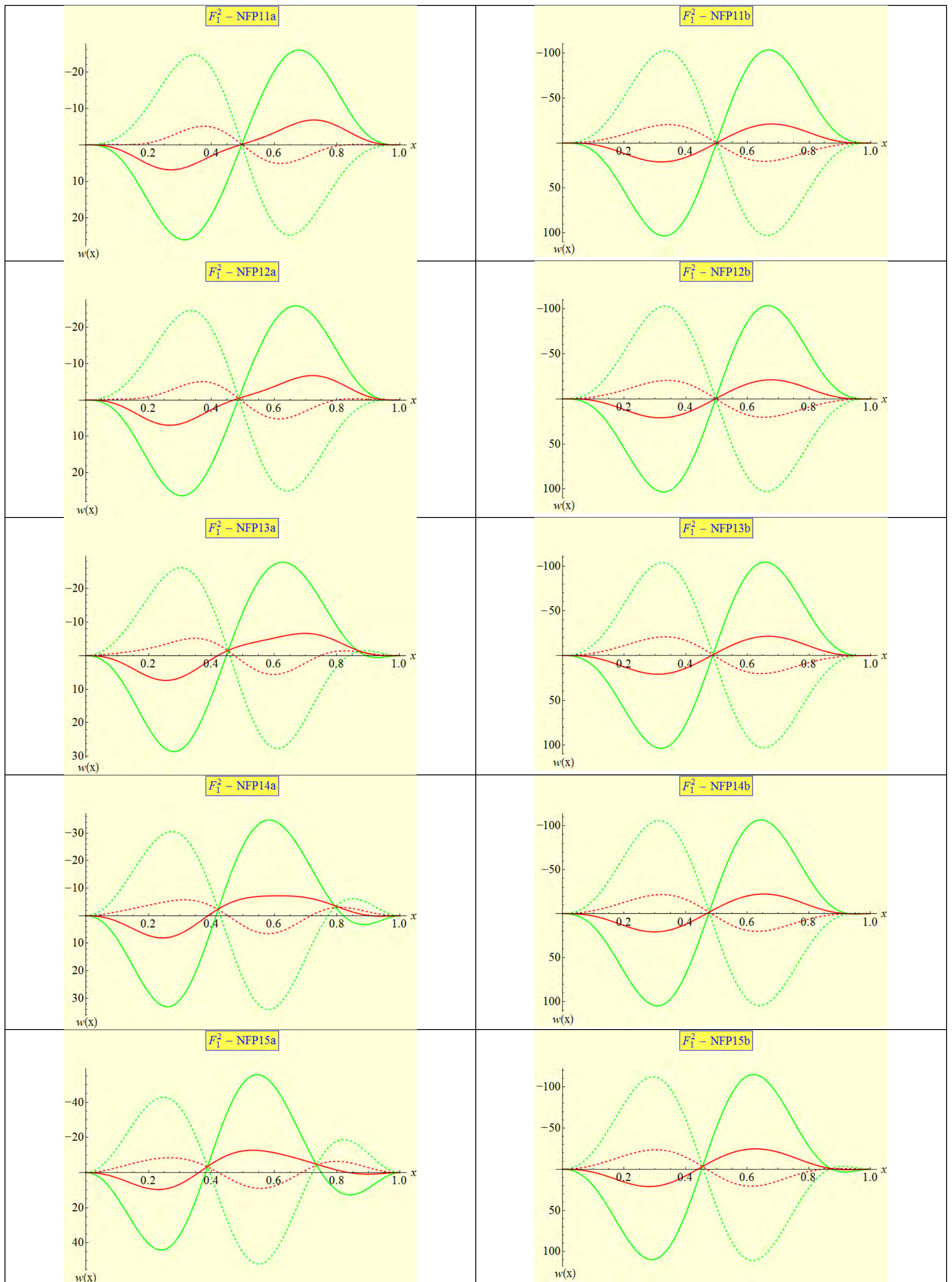
Ομάδα	Παρατηρήσεις
12	Προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση μιας μορφής με συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=\ell/2$. Για μικρές τιμές του γ_2 , οι προλυγισμικές παραμορφώσεις είναι αρνητικές και για μεγαλύτερες θετικές. Η αντιστροφή του πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση γίνεται οξύτερη όσο το γ_2 αυξάνεται. Για συγκεκριμένη τιμή του γ_2 , η προλυγισμική παραμόρφωση μετασχηματίζεται σε τρεις κυματομορφές. Φαινόμενα που γίνονται οξύτερα όσο αυξάνεται η τιμή του γ_2 .
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Παραμόρφωση τριών κυματομορφών για μικρές τιμές του γ_2 που γίνονται μια κυματομορφή όσο αυξάνεται το γ_2 . Η τελευταία συνδέεται με θετική προλυγισμική παραμόρφωση και μεταλυγισμική αρνητική (αντιστροφή του πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση για κάθε γ_2). Συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$. Φαινόμενα που οξύνονται όσο αυξάνεται η τιμή του γ_2 .
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13, εκτός από το γεγονός ότι η προλυγισμική παραμόρφωση είναι αρνητική και για ενδιάμεσες τιμές του γ_2 .
16	Παραμόρφωση μιας μορφής για όλες τις τιμές του γ_2 , με αντιστροφή του πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση. Η προλυγισμική παραμόρφωση είναι πάντα θετική. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x=\ell/2$ διατηρείται. Φαινόμενα οξύτερα όσο το γ_2 αυξάνεται.



Σχήμα 5.20. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



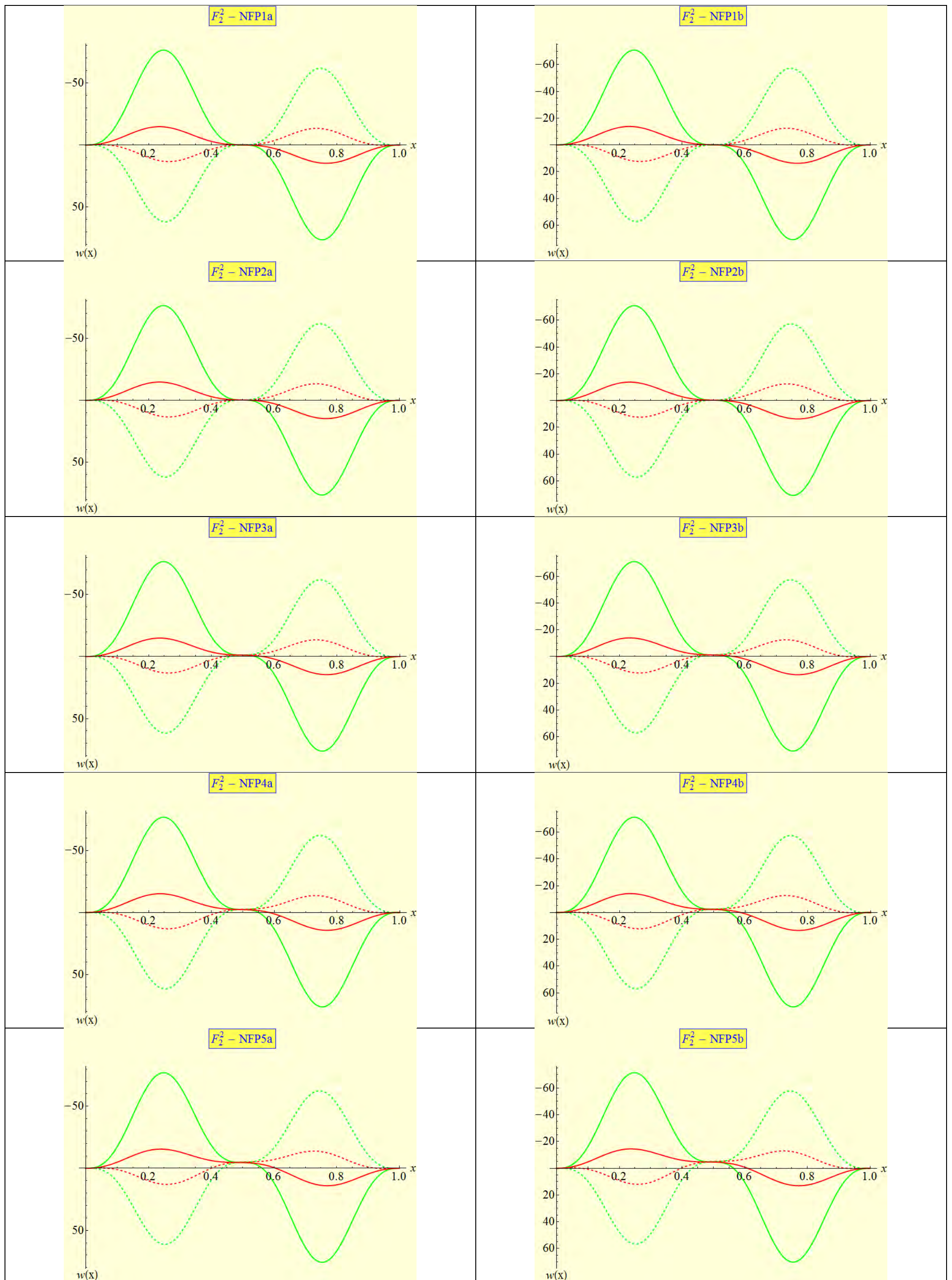
Σχήμα 5.20. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



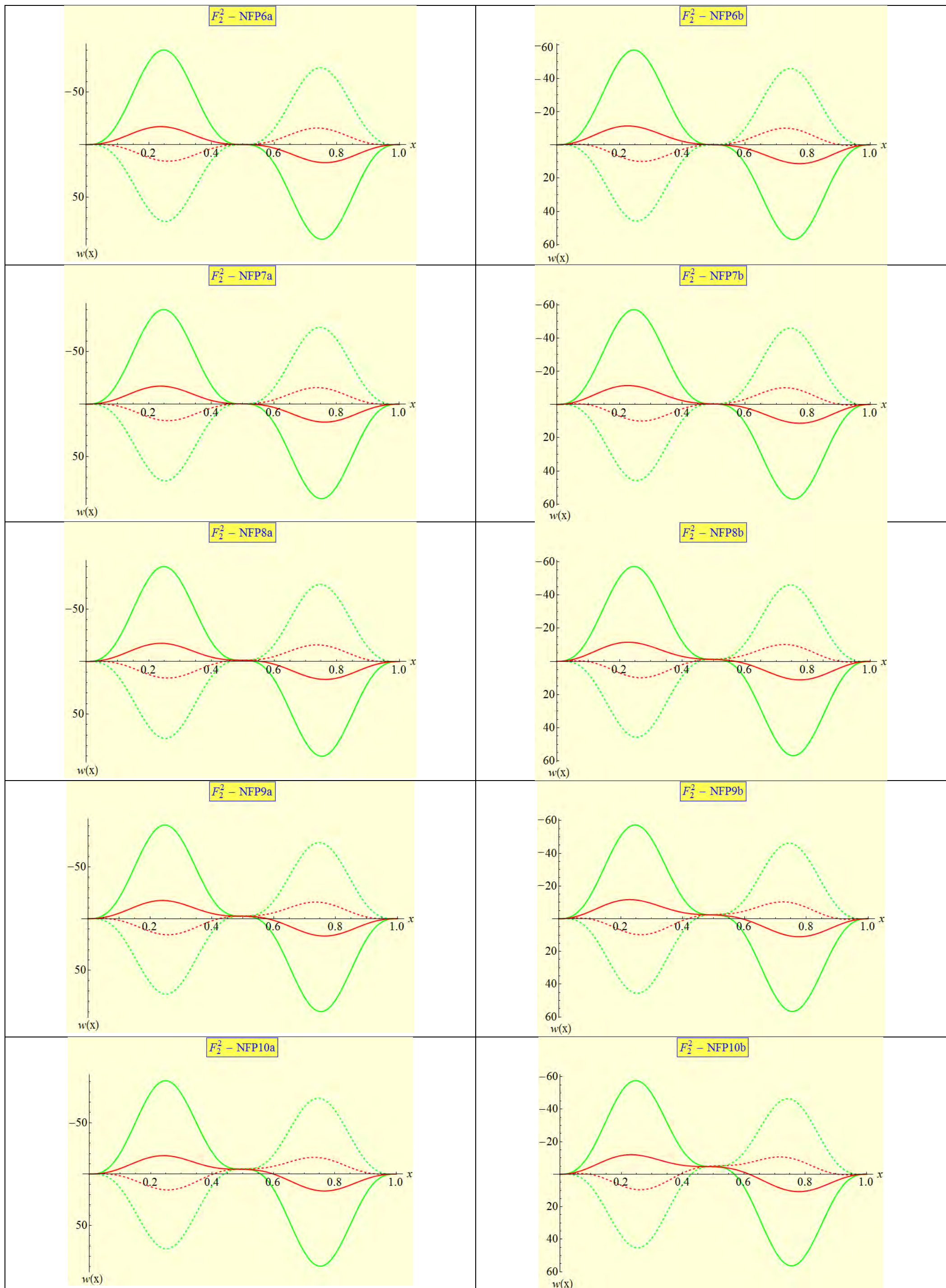
Σχήμα 5.20. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^2

Πίνακας 5.15. Κρίσιμο σημείο $F_1^2 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 2$

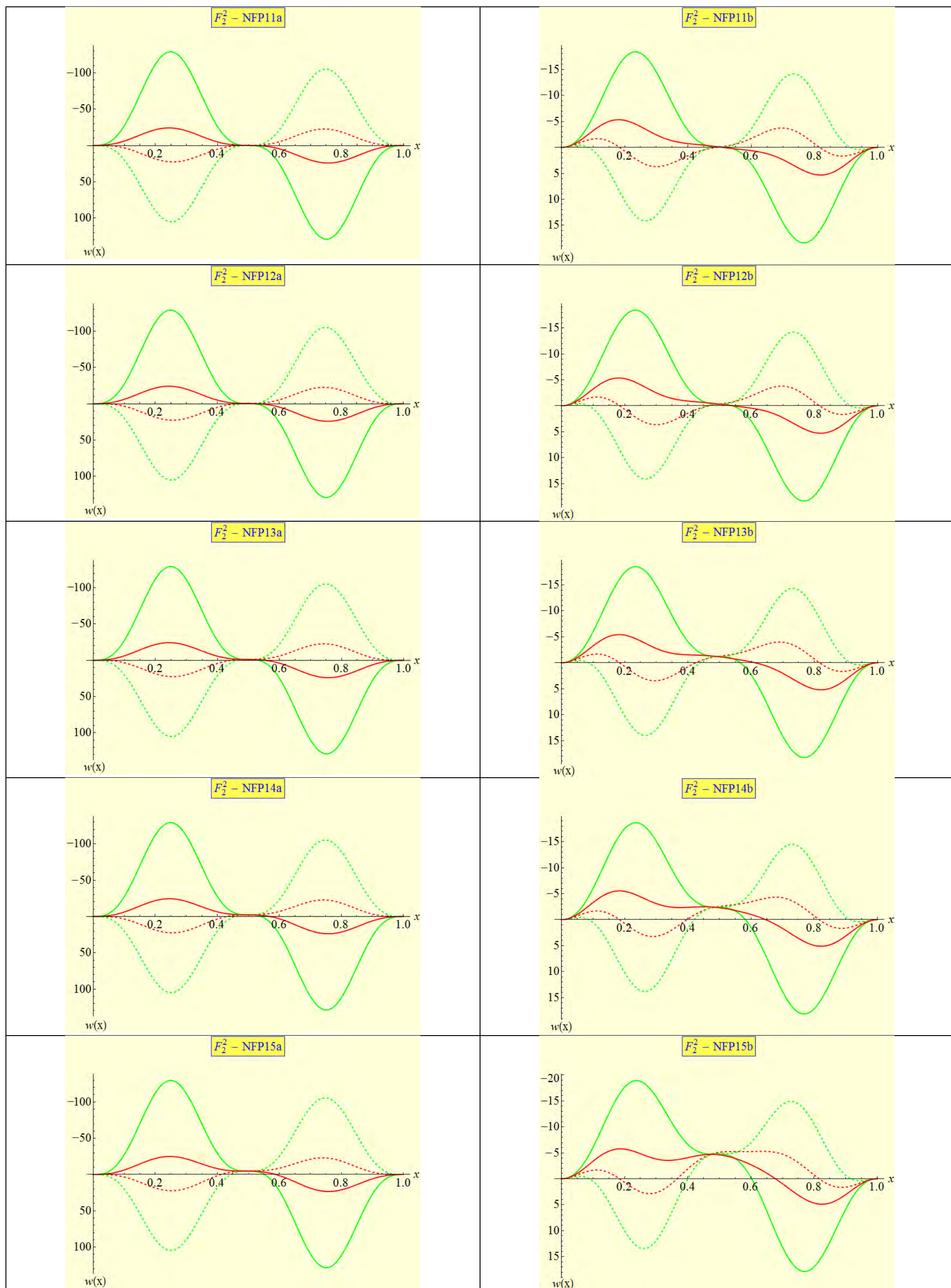
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Απόκριση δύο κυματομορφών, χωρίς εμφανή συμμετρία. Όσο αυξάνεται σε απόλυτη τιμή το γ_1 , τα φαινόμενα γίνονται οξύτερα. Η αλλαγή (αντιστροφή) του πρόσημου του w στην κρίσιμη κατάσταση διατηρείται.
2	Εμφάνιση τρίτης κυματομορφής κοντά στην δεξιά στήριξη της δοκού. Κατά τα λοιπά όμοια με την Ομάδα 1.
3	Όμοια με την Ομάδα 2, αλλά εντονότερα φαινόμενα.
4	Όμοια με την Ομάδα 3, αλλά εντονότερα φαινόμενα.
5	Όμοια με την Ομάδα 4, αλλά εντονότερα φαινόμενα.
6	Αποτελέσματα όμοια με αυτά της Ομάδας 1, με μεγαλύτερη παραμόρφωση αλλά με κάποια «καθυστέρηση» (όσο το γ_1 αυξάνεται) στην έντονη παρουσία της τρίτης κυματομορφής στην δεξιά στήριξη της δοκού. Οξύτερα φαινόμενα.
7	Όμοια με την Ομάδα 2, αλλά συμπεριφορά συνδεδεμένη με μεγαλύτερη παραμόρφωση.
8	Όμοια με την Ομάδα 3, οξύτερα φαινόμενα.
9	Όμοια με την Ομάδα 4, οξύτερα φαινόμενα.
10	Όμοια με την Ομάδα 5, οξύτερα φαινόμενα.
11	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση δύο κυματομορφών για μικρές τιμές του γ_2 . Όσο αυξάνεται αυτή η παράμετρος, μια τρίτη κυματομορφή εμφανίζεται στο άκρο της δοκού (δεξιά στήριξη), έτσι δεν υπάρχει εμφανής συμμετρία. Ωστόσο, για κάθε τιμή του γ_2 , υπάρχει αντιστροφή του πρόσημου του βέλους κάμψης στην κρίσιμη κατάσταση.
12	Όμοια με τα αποτελέσματα της Ομάδας 11.
13	Όμοια με τη Ομάδα 11.
14	Όμοια με τα αποτελέσματα της Ομάδας 13.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13, με εμφανέστερη την παρουσία της τρίτης κυματομορφής.
16	Όμοια με τα αποτελέσματα της Ομάδας 15, αλλά οξύτερα φαινόμενα.



Σχήμα 5.21. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



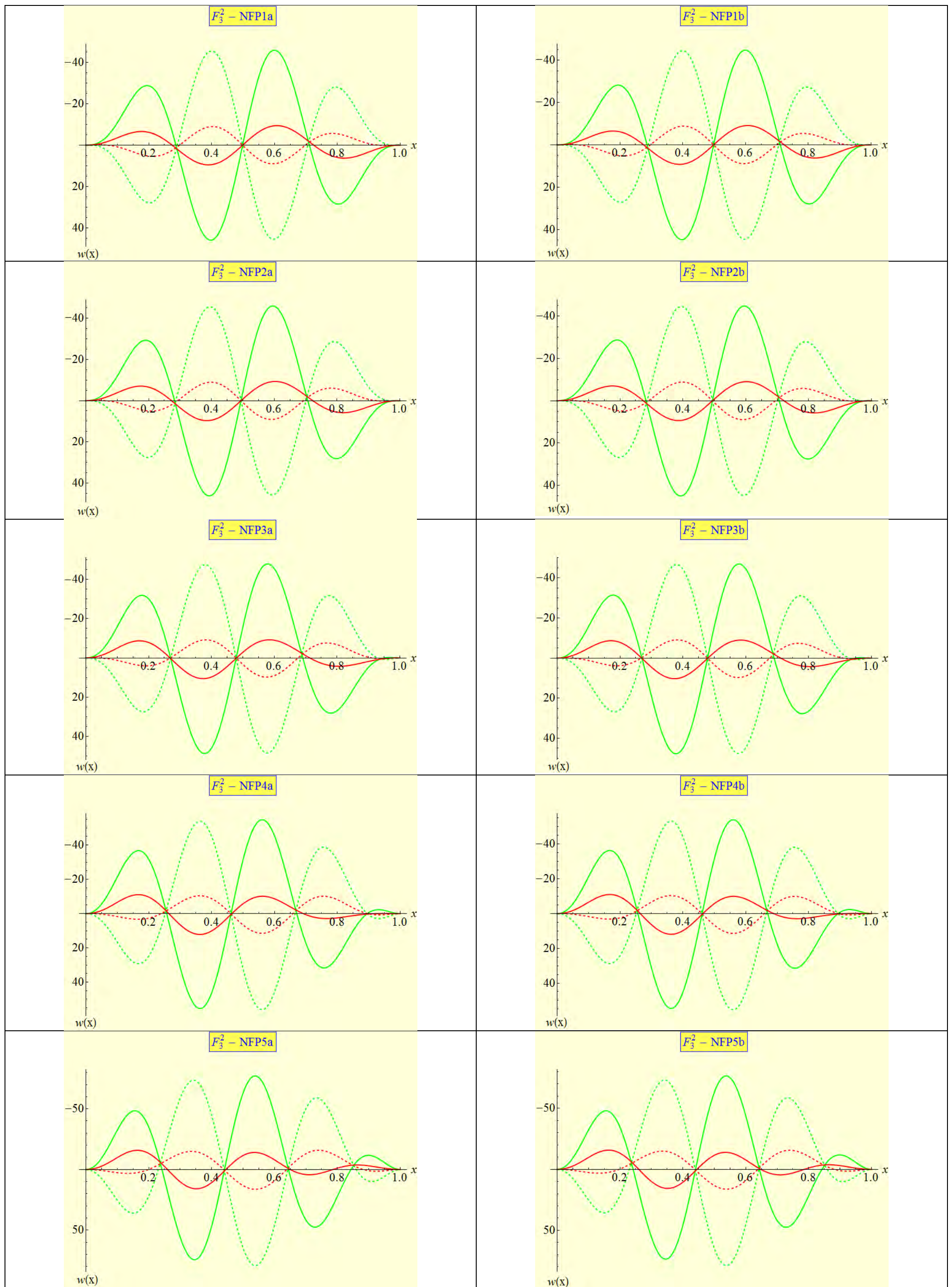
Σχήμα 5.21. Προ- και μεταλογισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



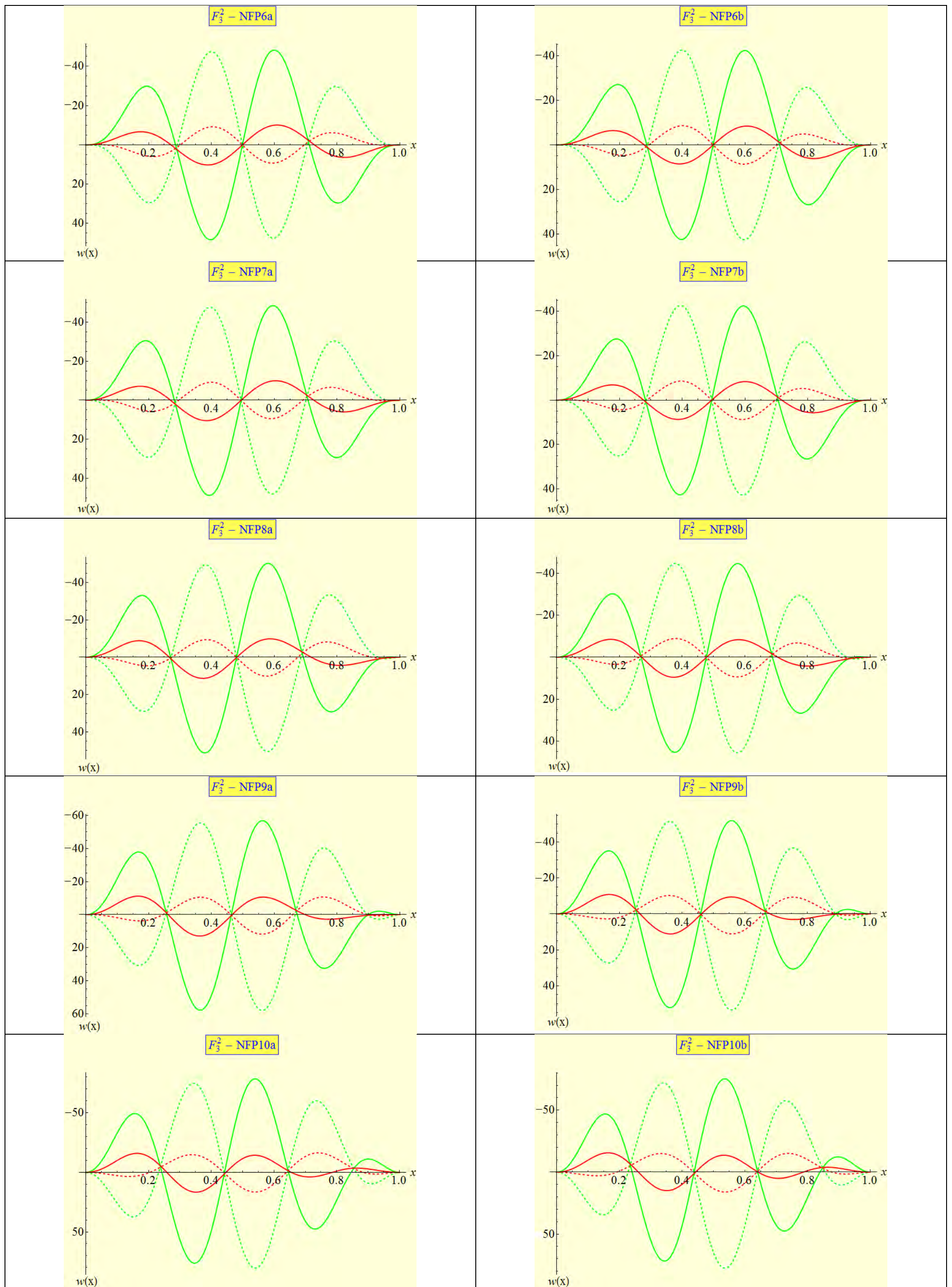
Σχήμα 5.21. Προ- και μεταλλυγισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^2

Πίνακας 5.16. Κρίσιμο σημείο F_2^2 : $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_{cr3}^{αμφ} = \lambda_{cr4}^{αμφ}$, $n = 2$

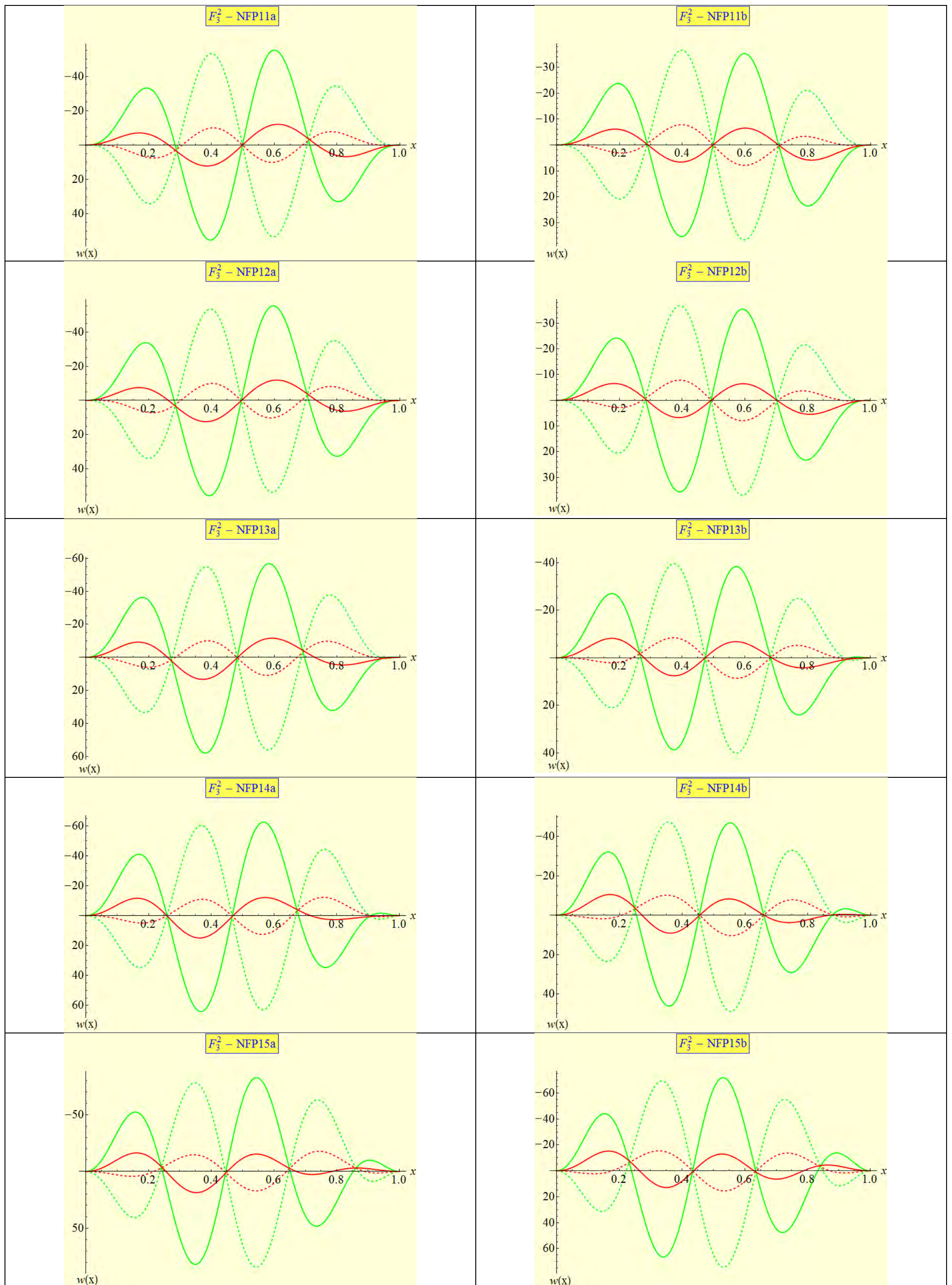
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Παραμόρφωση δύο κυματομορφών με ένα «πλατώ» (μηδενική κλίση) στο σημείο $x=1/2$ και w πολύ κοντά στο μηδέν. Αντιστροφή του πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενα οξύτερα όσο το γ_I αυξάνεται.
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Όμοια με τις Ομάδες 1 και 2, με την περιοχή μηδενικής κλίσης απομακρυσμένη από τον άξονα της δοκού. Οξύτερα φαινόμενα με την αύξηση του γ_I .
4	Όμοια με την Ομάδα 3, αλλά με την περιοχή μηδενικής κλίσης καθαρά να μη συνδέεται με το $w=0$.
5	Όμοια με την Ομάδα 4, οξύτερα φαινόμενα.
6	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με την περιοχή μηδενικής κλίσης σαφώς απομακρυσμένη από το $w=0$. Φαινόμενα ηπιότερα όσο αυξάνεται το γ_I .
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με τις Ομάδες 6 και 7. Περιοχή μηδενικής κλίσης απομακρυσμένη από το $w=0$.
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με την Ομάδα 8.
11	Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση δύο κυματομορφών με οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $x=1/2$, ενώ το βέλος κάμψης σε αυτό το σημείο τείνει προς το μηδέν. Φαινόμενο που γίνεται περισσότερο αντιληπτό όσο το γ_2 αυξάνεται. Η αντιστροφή του πρόσημου του βέλους κάμψης είναι εμφανής εκτός από την περιοχή του προαναφερθέντος σημείου (έχοντας μήκος περίπου ίσο με 0.10). Τα μέγιστα της κυματομορφής μετά την κρίσιμη κατάσταση γίνονται μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα πριν από αυτή την κατάσταση και όχι στο ίδιο σημείο κατά μήκος της δοκού.
12	Όμοια με την Ομάδα 11, οξύτερα φαινόμενα.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Όμοια με την Ομάδα 13, οξύτερα φαινόμενα.
15	Όμοια με τις ομάδες 11 και 13 αλλά με εμφανώς οξύτερα φαινόμενα.
16	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά με την περιοχή μηδενικής κλίσης να απομακρύνεται από το μηδέν με ρυθμό γρηγορότερο όσο αυξάνεται το γ_2 .



Σχήμα 5.22. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



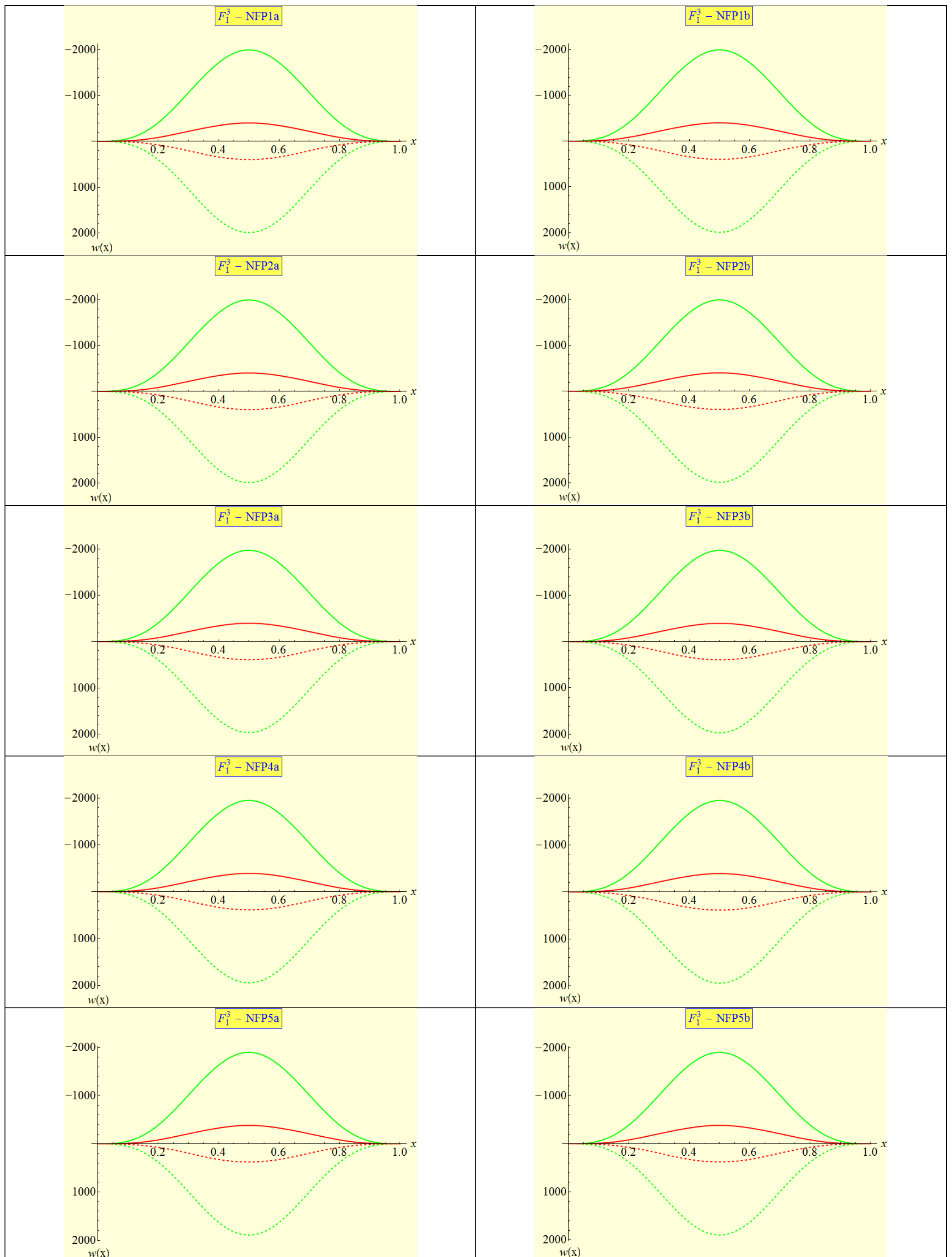
Σχήμα 5.22. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίτακτη δοκό: σημείο F_3^2 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



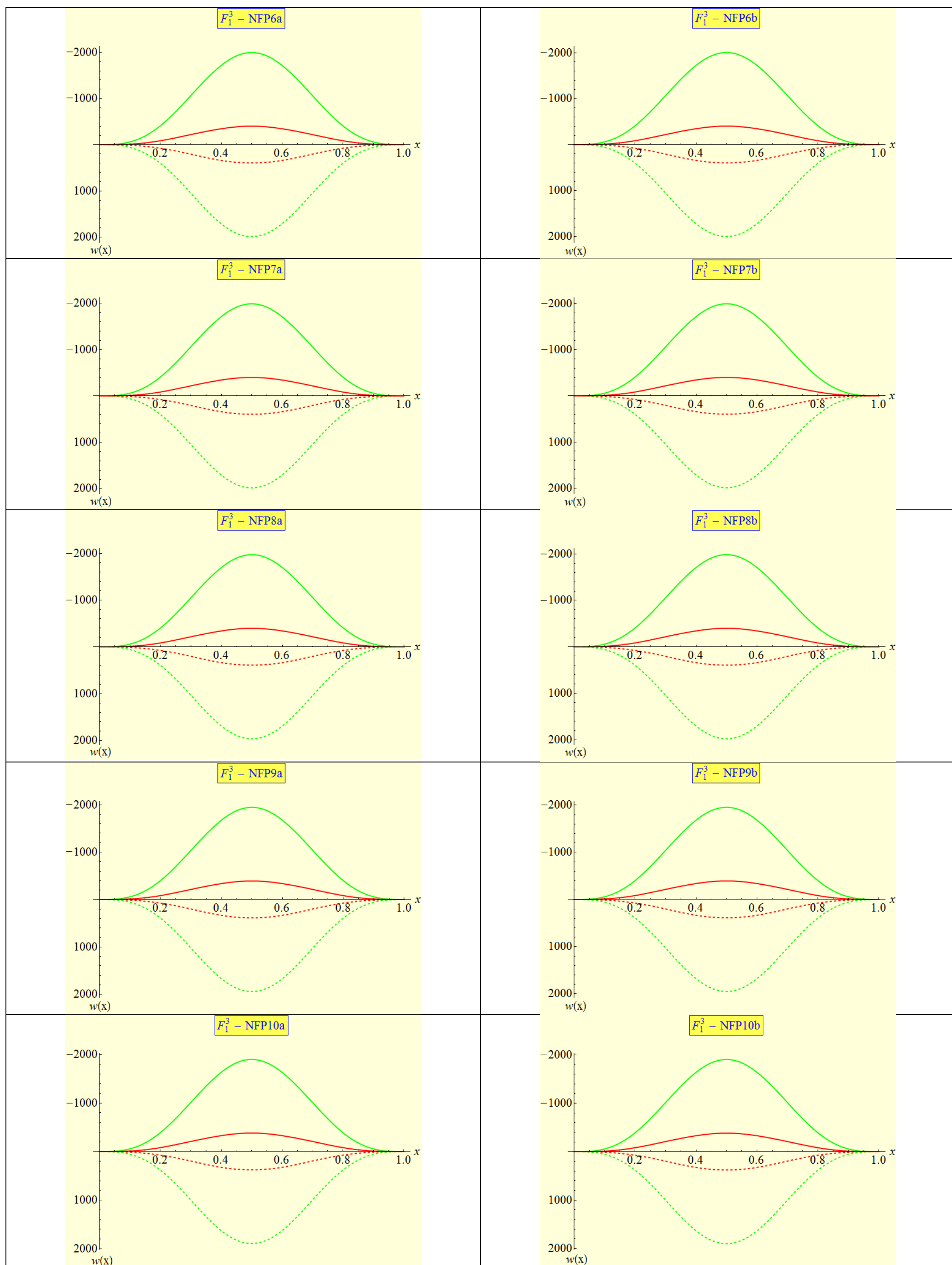
Σχήμα 5.22 Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^2

Πίνακας 5.17. Κρίσιμο σημείο F_3^2 : $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 2$

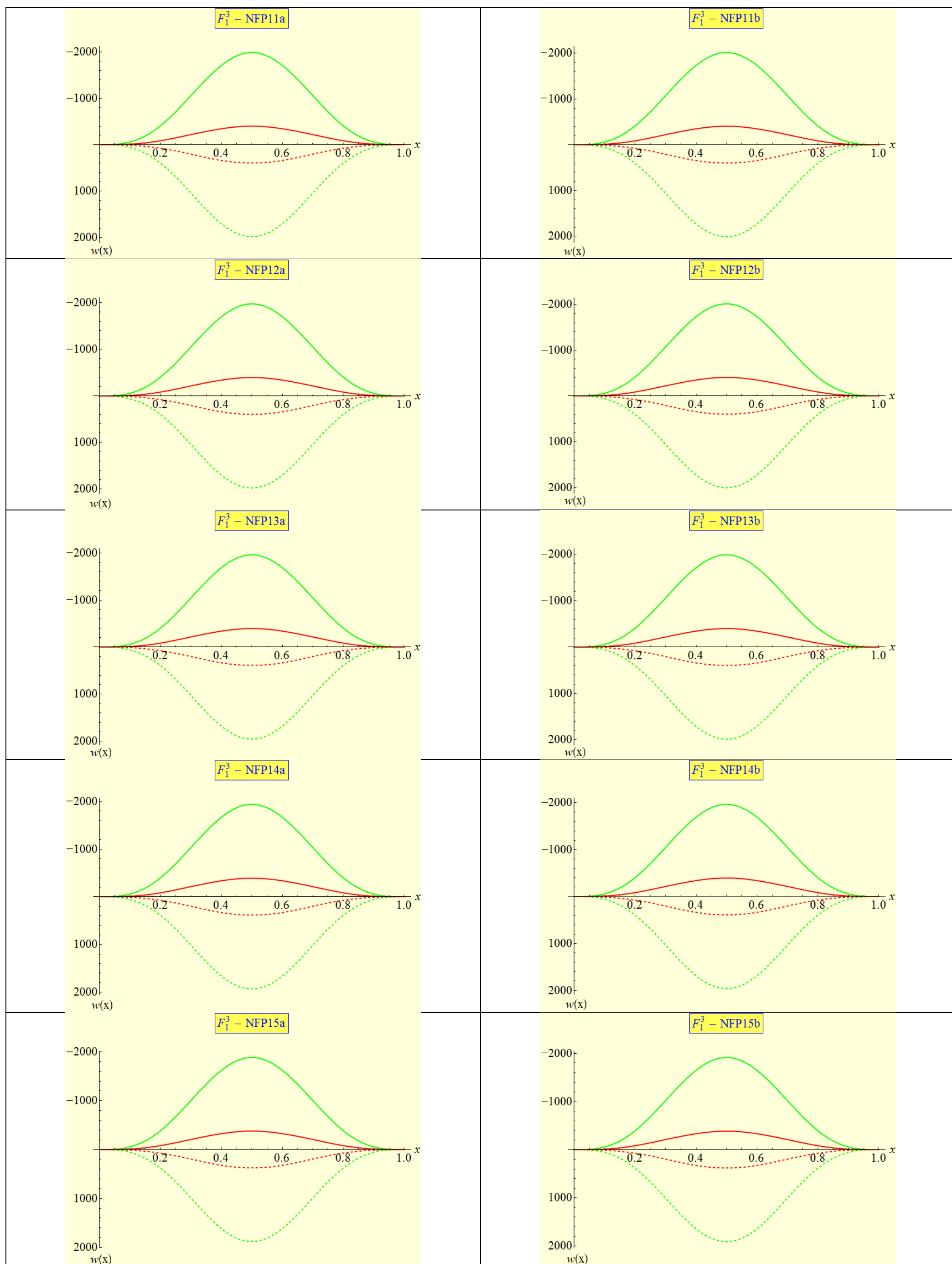
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Παραμόρφωση τεσσάρων κυματομορφών, με αντιστροφή του πρόσημου w στην κρίσιμη κατάσταση. Όσο το γ_2 αυξάνεται σε απόλυτη τιμή, παρατηρείται μόνο μικρή αλλαγή στις τιμές του w αλλά τελικώς η ποιοτική εικόνα παραμένει ίδια.
2	Αποτελέσματα ίδια με την Ομάδα 1.
3	Αντισυμμετρική παραμόρφωση πέντε κυματομορφών, με την πέμπτη κυματομορφή να εμφανίζεται στο δεξί άκρο της δοκού. Κατά τα υπόλοιπα όμοια με την Ομάδα 1 (δηλαδή αντιστροφή πρόσημου και όχι σημαντική επιρροή της αύξησης του γ_2).
4	Όμοια με την Ομάδα 3, αλλά με την πέμπτη κυματομορφή εμφανέστερη.
5	Όμοια με την Ομάδα 4, αλλά με ακόμα πιο εμφανή την πέμπτη κυματομορφή.
6	Όμοια με την Ομάδα 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 2.
8	Όμοια με την Ομάδα 3.
9	Όμοια με την Ομάδα 4.
10	Όμοια με την Ομάδα 5.
11	Παραμόρφωση τεσσάρων κυματομορφών, χωρίς εμφανή συμμετρία και αντιστροφή του πρόσημου της καμπτικής παραμόρφωσης στην κρίσιμη κατάσταση για κάθε γ_2 . Η πρώτη ισχύει για μικρές τιμές του γ_2 , ενώ όσο αυξάνεται η τιμή αυτής της παραμέτρου, εμφανίζεται μια πέμπτη κυματομορφή στο δεξί άκρο της δοκού.
12	Όμοια με την Ομάδα 11.
13	Όμοια με την Ομάδα 11
14	Όμοια με την Ομάδα 13.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Όμοια με την Ομάδα 15.



Σχήμα 5.23. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



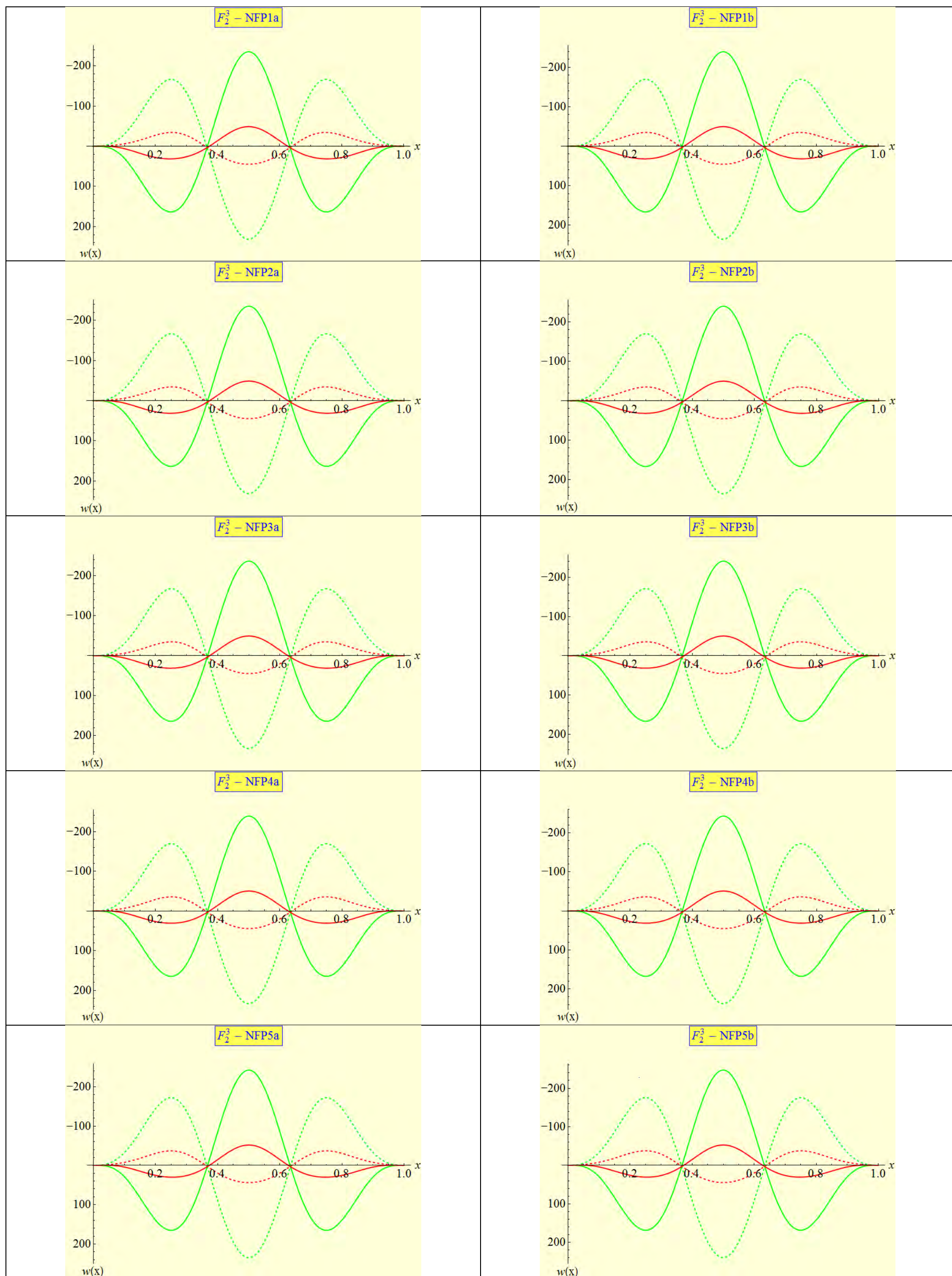
Σχήμα 5.23. Προ- και μεταλυσισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



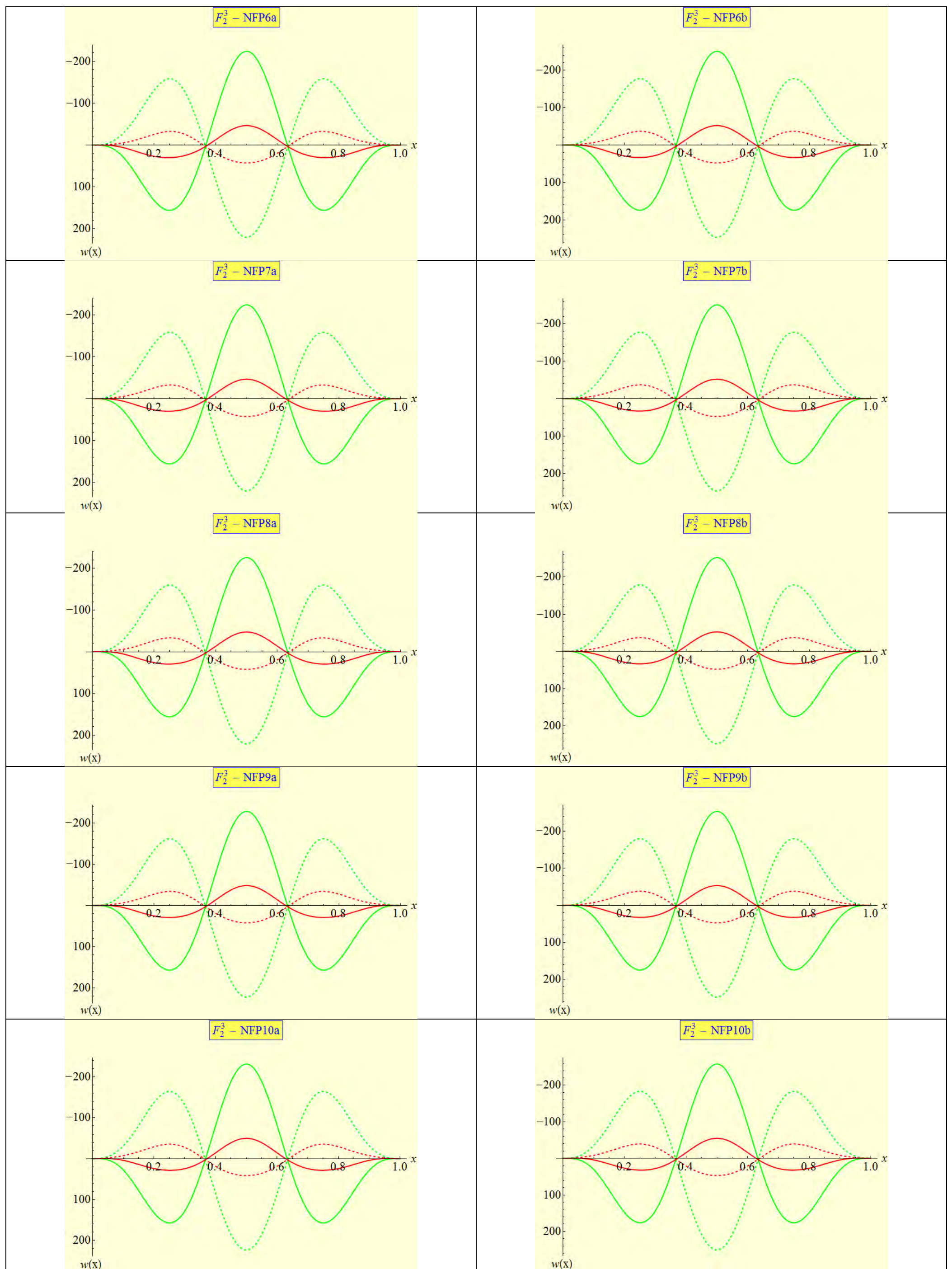
Σχήμα 5.23. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_1^3

Πίνακας 5.18. Κρίσιμο σημείο F_1^3 : $\lambda_1 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 3$

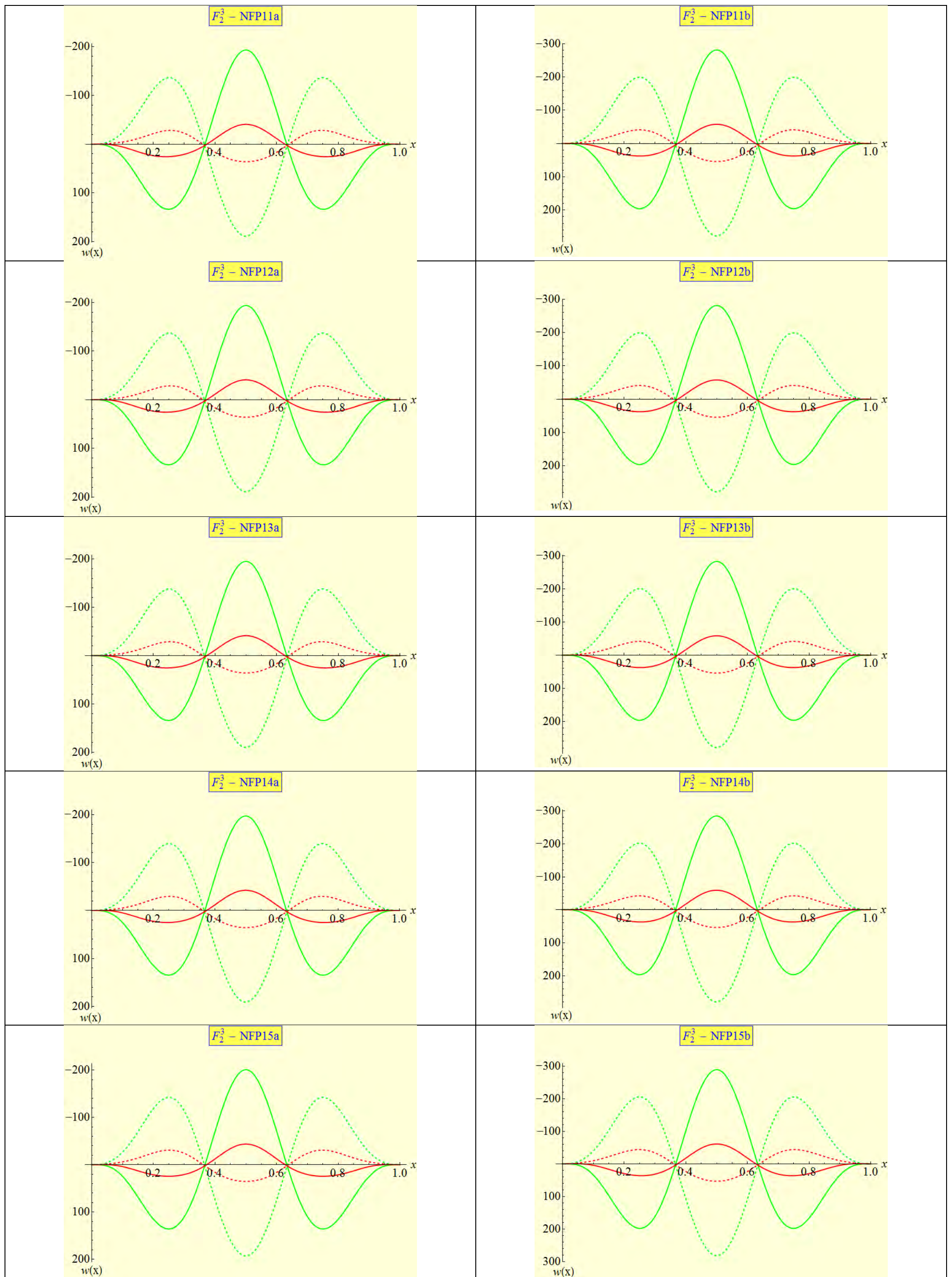
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Πολύ οξεία μονή κυματομορφή με προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση με αντιστροφή πρόσημου w στην κρίσιμη κατάσταση και με συμμετρία ως προς τον άξονα $x=1/2$. Φαινόμενο που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του γ_1 .
2	Όμοια με την Ομάδα 1.
3	Όμοια με την Ομάδα 1.
4	Όμοια με την Ομάδα 1.
5	Όμοια με την Ομάδα 1.
6	Όμοια με την Ομάδα 1.
7	Όμοια με την Ομάδα 1.
8	Όμοια με την Ομάδα 1.
9	Όμοια με την Ομάδα 1.
10	Όμοια με την Ομάδα 1.
11	Πολύ οξεία κυματομορφή με προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση (πάντα αρνητική μεταλυγισμική) με αλλαγή πρόσημου της παραμόρφωσης στην κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενο που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του γ_2 . Συμμετρία ως προς τον άξονα $x=1/2$.
12	Όμοια με την Ομάδα 11.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Όμοια με την Ομάδα 13.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Όμοια με την Ομάδα 15.



Σχήμα 5.24. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



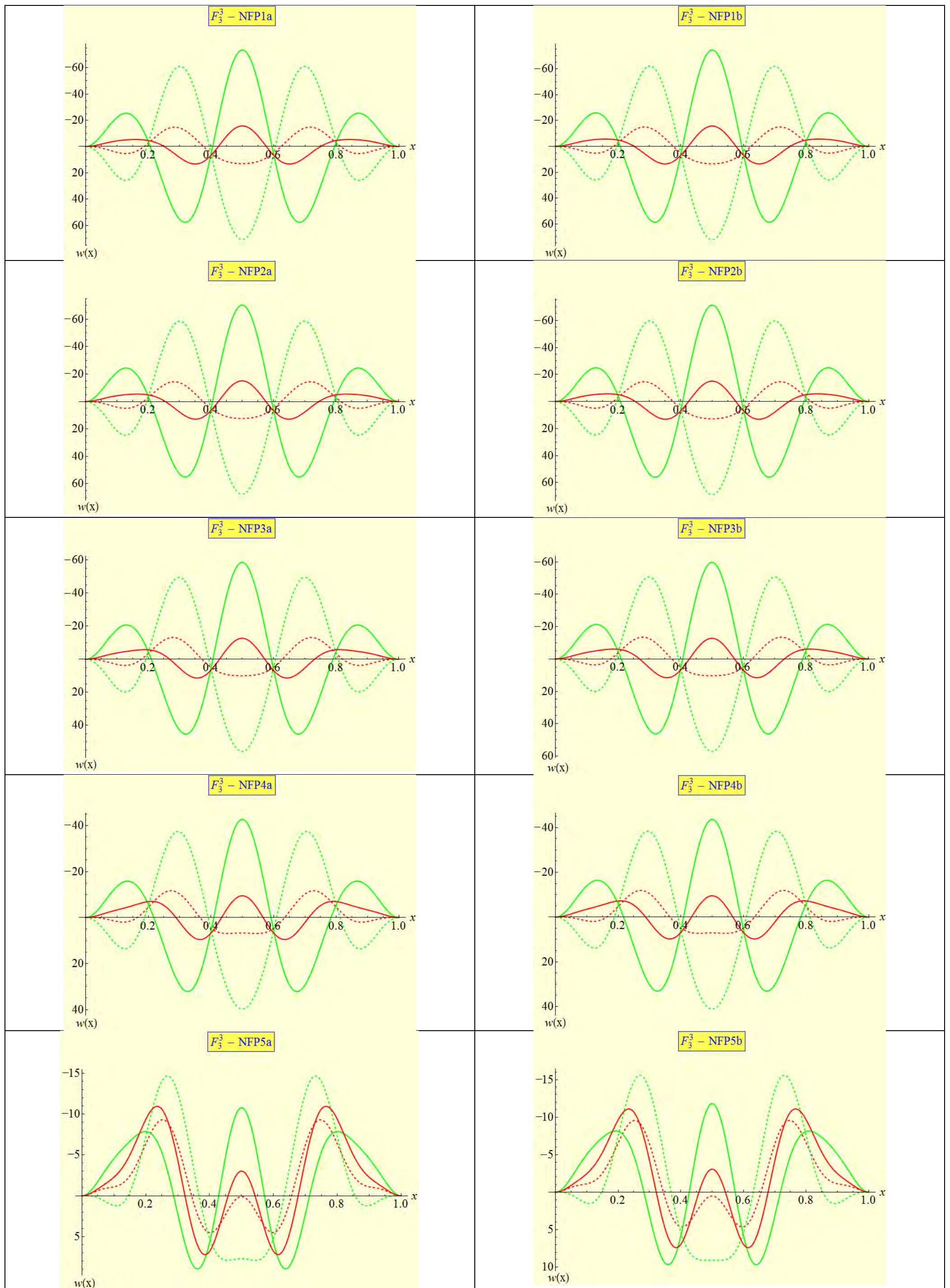
Σχήμα 5.24. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



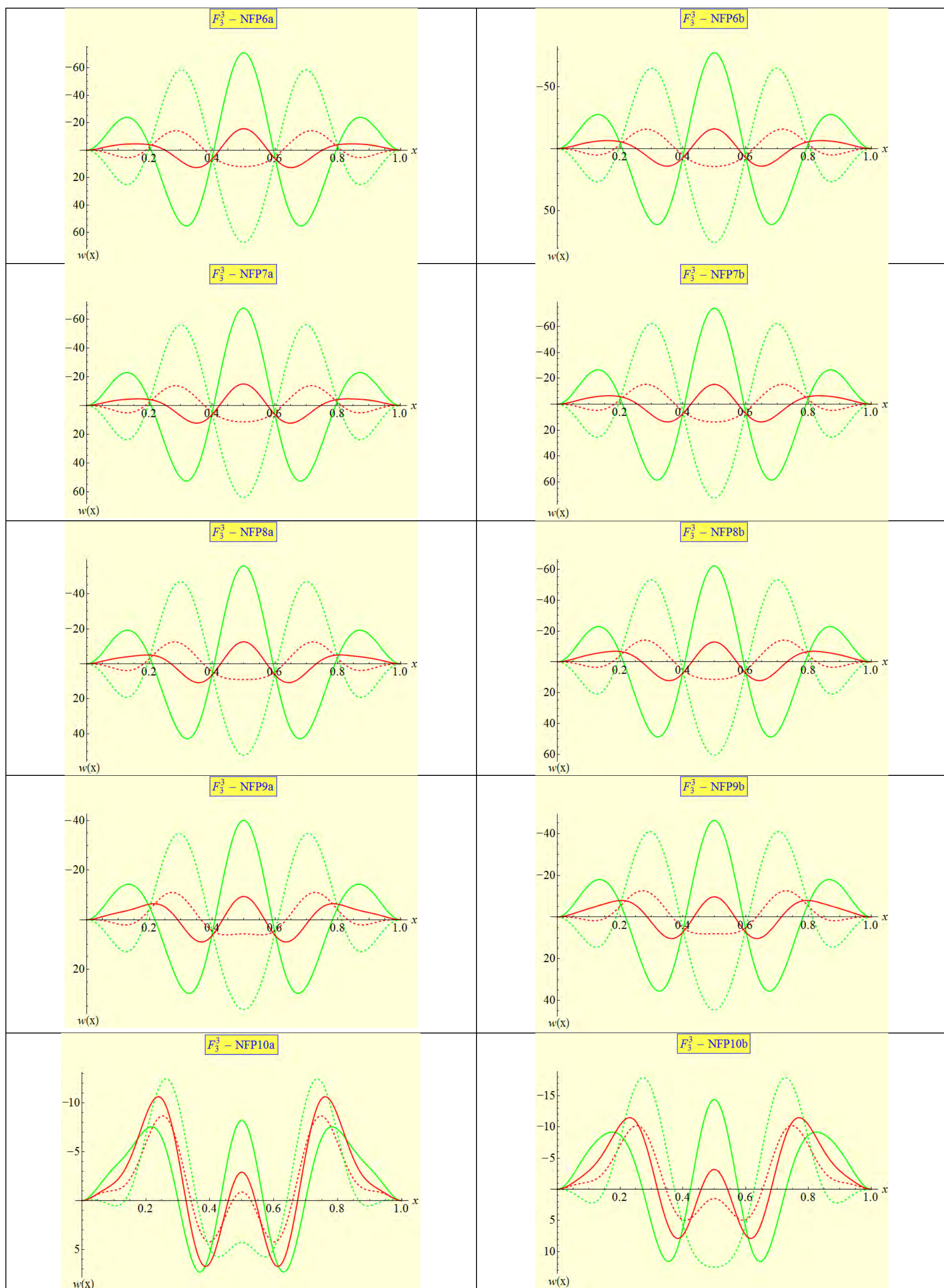
Σχήμα 5.24. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_2^3

Πίνακας 5.19. Κρίσιμο σημείο F_2^3 : $\lambda_1 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 3$

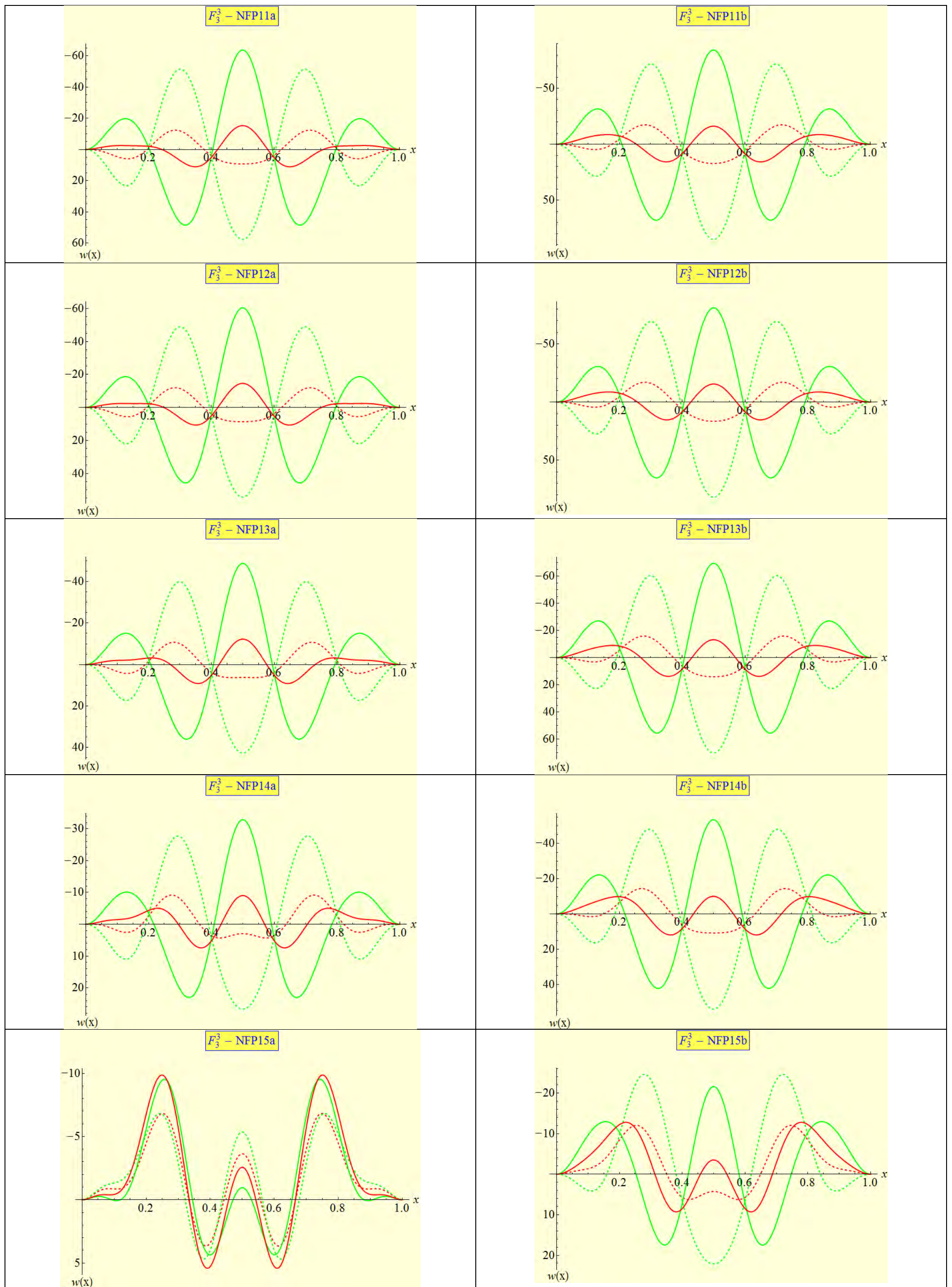
Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Πολύ οξεία προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$. Αλλαγή του πρόσημου του βέλους w στην κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενο που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή της τιμής του γ_1 .
2	Όμοια με την ομάδα 1.
3	Όμοια με την ομάδα 1.
4	Όμοια με την ομάδα 1.
5	Όμοια με την ομάδα 1.
6	Πολύ οξεία προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$. Αλλαγή του πρόσημου του βέλους w στην κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενο που γίνεται οξύτερο όσο αυξάνεται το γ_1 .
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με την Ομάδα 6.
9	Όμοια με την Ομάδα 6.
10	Όμοια με την ομάδα 6.
11	Πολύ οξεία προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση τριών κυματομορφών, συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$. Αλλαγή του πρόσημου του βέλους w στην κρίσιμη κατάσταση. Φαινόμενο που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή της τιμής του γ_2 .
12	Αποτελέσματα ποιοτικά όμοια με αυτά της Ομάδας 11, αλλά συνδεδεμένα με μεγαλύτερη παραμόρφωση.
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Αποτελέσματα ποιοτικά όμοια με αυτά της Ομάδας 13, αλλά συνδεδεμένα με μεγαλύτερη παραμόρφωση.
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13.
16	Αποτελέσματα ποιοτικά όμοια με αυτά της Ομάδας 15, αλλά συνδεδεμένα με μεγαλύτερη παραμόρφωση.



Σχήμα 5.25. Προ- και μεταλογισμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.25. Προ- και μεταλυστική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^3 – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα



Σχήμα 5.25. Προ- και μεταλυσμική παραμόρφωση για την αμφίπακτη δοκό: σημείο F_3^3

Πίνακας 5.20. Κρίσιμο σημείο F_3^3 : $\lambda_2 = \lambda_{cr1}^{αμφ} = \lambda_{cr2}^{αμφ}$, $n = 3$

Ομάδα	Παρατηρήσεις
1	Πολύ οξεία προ- και μεταλυγισμική παραμόρφωση πέντε κυματομορφών, συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$. Αλλαγή του πρόσημου του βέλους w στην κρίσιμη κατάσταση. Όσο αυξάνεται το γ_1 παρατηρείται μικρή αύξηση στην παραμόρφωση.
2	Όμοια με την Ομάδα 1, αλλά χωρίς σημαντική επιρροή του γ_1 .
3	Όμοια με την Ομάδα 2.
4	Όμοια με την Ομάδα 3, αλλά με κάποια ένδειξη σχηματισμού τεσσάρων επιπρόσθετων κυματομορφών (δύο σε κάθε άκρο της δοκού).
5	Παραμόρφωση εννέα κυματομορφών με συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$. Μη εμφανής αλλαγή πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση, μόνο αλλαγή μεγέθους των ακρότατων των κυματομορφών. Φαινόμενο εντονότερο για μεγαλύτερες τιμές του γ_1 .
6	Όμοια αποτελέσματα όπως αυτά της Ομάδας 1. Καμία σημαντική συνέπεια της αλλαγής του γ_1 δεν παρατηρείται.
7	Όμοια με την Ομάδα 6.
8	Όμοια με την Ομάδα 7.
9	Όμοια με την Ομάδα 8.
10	Όμοια με τις Ομάδες 8 και 9.
11	Παραμόρφωση πέντε κυματομορφών για μικρές, ενδιάμεσες και λογικά μεγάλες τιμές του γ_2 , συνδεδεμένη με (α) συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x=1/2$ και (β) αλλαγή του πρόσημου στην κρίσιμη κατάσταση. Παρόλο που η συμμετρία διατηρείται για μεγάλες τιμές του γ_2 , εμφανίζεται μια τάση για μετασχηματισμό σε εννέα κυματομορφές. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν παρουσιάζεται αλλαγή στο πρόσημο, αλλά μόνο αλλαγή μεγέθους τόσο στα ακρότατα της κυματομορφής όσο και αλλαγή στη θέση τους.

12	Όμοια με την Ομάδα 11, εξαιρώντας τον σχηματισμό παραμόρφωσης εννέα κυματομορφών για μεγάλες τιμές του γ_2 .
13	Όμοια με την Ομάδα 11.
14	Όμοια με την Ομάδα 13, με ελαφρά μεγαλύτερη παραμόρφωση όσο αυξάνεται το γ_2 .
15	Όμοια με τις Ομάδες 11 και 13, αλλά με την παρουσία εννέα κυματομορφών για μεγάλες τιμές του γ_2 εντονότερη.
16	Όμοια με την Ομάδα 15, με σημαντικά μεγαλύτερες παραμορφώσεις όσο αυξάνεται το γ_2 .

5.5 Συμπεράσματα

Από τα περιεχόμενα της οικείας παραγράφου (§2.2.2) του Κεφαλαίου 2 και την εν γένει ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η ευστάθεια δοκών – στύλων επί μη γραμμικά ελαστικού εδάφους με συνδυασμένη τετραγωνική και κυβική μη γραμμικότητα έχει ελάχιστα μελετηθεί και είναι επικεντρωμένη σε εντοπισμένο λυγισμό. Επίσης δεν έχουν μέχρι στιγμής δοθεί (εκτός μερικών εξαιρέσεων) οι απαραίτητες σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων μη γραμμικότητας του εδάφους ούτως ώστε η αντίδραση του υποστρώματος να είναι συμβατή με την απαίτηση πλήρους επαφής με τη δοκό, ανεξάρτητα της φοράς του βέλους κάμψης. Στο παρόν Κεφάλαιο όχι μόνον καθορίζονται οι σχέσεις αυτές, αλλά προτείνεται μέθοδος εξέτασης του προβλήματος καθολικού λυγισμού με έμφαση σε περιπτώσεις πιθανής αλληλεπίδρασης μορφών, που δεν έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής στη βιβλιογραφία, συνοδευόμενη από εκτενή αριθμητικά αποτελέσματα με βάση ρεαλιστικές τιμές των παραμέτρων εδάφους και υπερκείμενης κατασκευής. Από την όλη ανάλυση προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Βρέθηκε ότι οι αδιάστατες παράμετροι που σχετίζονται με την τετραγωνική και κυβική μη γραμμική συνιστώσα της θεμελίωσης, γ_1 και γ_2 αντίστοιχα, δεν μπορούν να έχουν οποιοδήποτε πρόσημο, ώστε να εξασφαλίζεται η συμβατότητα αντίδρασης εδάφους – πλήρους επαφής ως άνω. Πιο συγκεκριμένα η γ_1 μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική ενώ η γ_2 μόνο θετική και ικανοποιούσα τη σχέση $\gamma_2 > \frac{\gamma_1^2}{4}$.

- Για τους ανωτέρω αποδεκτούς συνδυασμούς παραμέτρων μη γραμμικότητας θεμελίωσης υπολογίστηκαν, με χρήση μη γραμμική έκφρασης

καμπυλότητας, τα κρίσιμα φορτία καθολικού λυγισμού καθώς και οι συνθήκες εκείνες που πρέπει να πληρούνται για να υπάρξει αλληλεπίδραση δύο ή περισσότερων μορφών τόσο για αμφιέρειστη όσο και για αμφίπακτη δοκό. Η τιμή των κρίσιμων φορτίων δείχτηκε ότι εξαρτάται αποκλειστικά από τη γραμμική συνιστώσα της θεμελίωσης.

- Στη συνέχεια μελετήθηκε η επιρροή της μεταβολής των μη γραμμικών παραμέτρων γ_1 και γ_2 (εντός των αποδεκτών ορίων των τιμών τους) στην ποιοτική αλλαγή της καμπτικής παραμόρφωσης πριν και μετά κάποιες χαρακτηριστικές κρίσιμες καταστάσεις αλληλεπίδρασης, μέσω αριθμητικών εφαρμογών για τυπική δοκό σιδηροτροχιάς εδραζόμενης επί συνήθων εδαφικών τύπων.

- Διαπιστώθηκε ότι για χαμηλής τάξης απλές αλληλεπιδράσεις, η προ- και μεταλυγισμική απόκριση σχετίζεται συνήθως με αντιστροφή του προσήμου του βέλους κάμψης. Επίσης, σε περίπτωση υψηλής τάξης πολλαπλών αλληλεπιδράσεων μπορεί να συμβεί εμφάνιση ή εξαφάνιση μιας ή περισσότερων κυματομορφών καθώς οι παράμετροι μεταβάλλονται. Δε φαίνεται να υπάρχει κάποια συγκεκριμένη επιρροή αυτής της διαφοροποίησης, παρά μόνο για κάθε κρίσιμο σημείο ξεχωριστά. Από ποιοτική οπτική γωνία πάντως, η μεταβολή των μη γραμμικών παραμέτρων είτε μεμονωμένα είτε από κοινού ενδέχεται να οδηγήσει σε αιφνίδιες αλλαγές της καμπτικής παραμόρφωσης πριν και μετά την κρίσιμη κατάσταση.

- Τέλος, αν θεωρηθεί ως αίτιο πρόκλησης φαινομένου του λυγισμού η θερμοκρασιακή μεταβολή, τα κρίσιμα σημεία σύζευξης μορφών που υπολογίστηκαν δεν σχετίζονται με φυσικές (αποδεκτές) θερμοκρασιακές μεταβολές και εν γένει είναι κατά πολύ μεγαλύτερα των φορτίων διαρροής των δοκών.

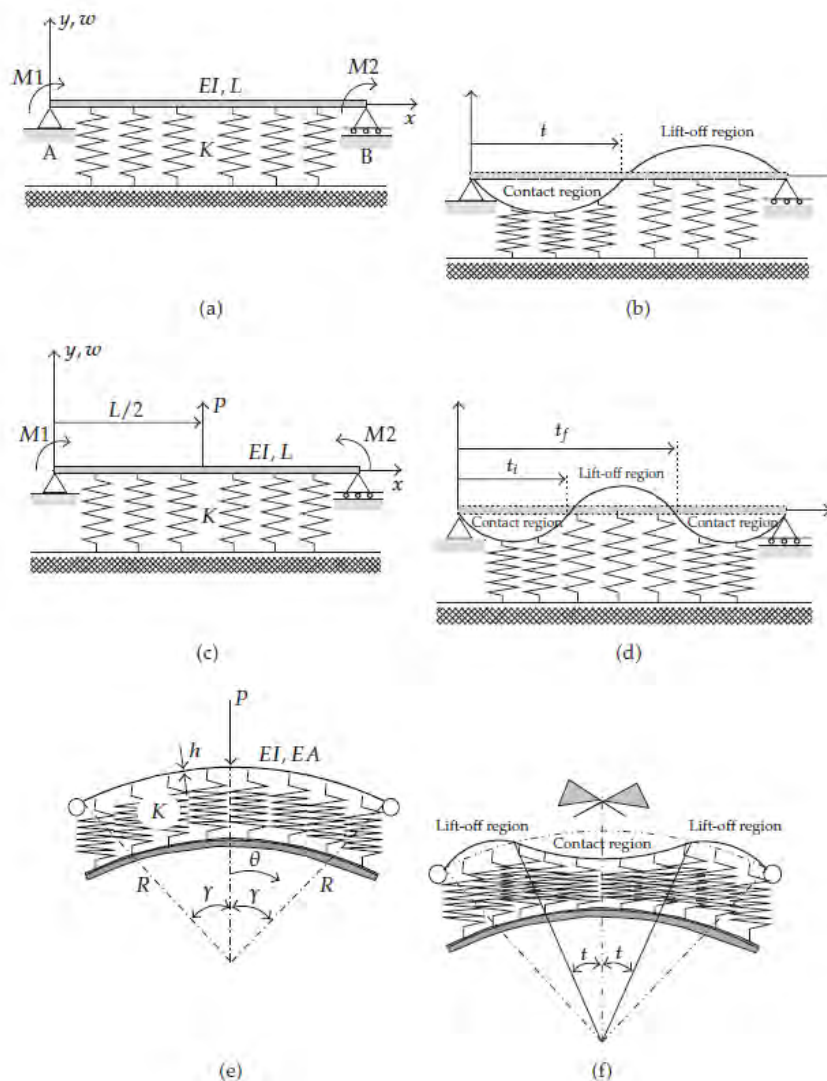
Κεφάλαιο 6

Λυγισμός δοκών επί ελαστικού εδάφους θεωρώντας ασυνεχή (ασύνδετη) επαφή

6.1 Εισαγωγικά

Τα περιεχόμενα όλων των προηγούμενων Κεφαλαίων, καθώς και η πλειονότητα των βιβλιογραφικών αναφορών, με αντικείμενο τον λυγισμό δοκών εδραζόμενων επί διάφορων τύπων ελαστικών θεμελιώσεων, βασίζονται στην υπόθεση ότι υπάρχει συνεχής επαφή μεταξύ της δοκού (σε όλο το μήκος της) και του εδαφικού υποστρώματος. Τούτο σημαίνει ότι το έδαφος αντιδρά αντίθετα από την καμπτική παραμόρφωση παραμόρφωση, ανεξαρτήτως του πρόσημου αυτής. Στην πραγματικότητα όμως, το έδαφος αντιδρά μόνο όταν υφίσταται πίεση από την υπερκείμενη δοκό, που μπορεί να προέλθει είτε από ένα εγκάρσιο φορτίο κατά μήκος της (Conway και Farnham 1970) είτε από καμπτικές ροπές επιβαλλόμενες στις στηρίξεις (άκρα), ή ακόμα από την ίδια τη δοκό λόγω (παραμόρφωσης) λυγισμού (χωρίς να αποκλείεται ο συνδυασμός και των δύο δράσεων). Για τον πρώτο τύπο δράσης, μόνο ένας μικρός αριθμός σχετικών εργασιών έχει δημοσιευτεί, καθεμία από τις οποίες αντιμετωπίζει το πρόβλημα με διαφορετική προσέγγιση. Εδώ πρέπει να αναφερθεί η εργασία Cakiroglu και Cakiroglu (1991), στην οποία διερευνήθηκαν προβλήματα συνεχούς και ασυνεχούς επαφής για λωρίδες επί ημι-άπειρης έκτασης επιπέδου μέσω μετασχηματισμών Fourier και χρήσης εξισώσεων Navier. Σε αυτήν την εργασία δόθηκε έμφαση στο εύρος των εφαρμογών που έχουν τα προβλήματα ασυνεχούς επαφής, όπως π.χ. σιδηροτροχιές, εσχάρες θεμελίωσης, συνεχείς δοκοί θεμελίωσης σε διαδρόμους κύλισης, δεξαμενές υγρών επί εδάφους και σιλό αποθήκευσης σιτηρών. Ο Kerr σε προηγούμενη εργασία (Kerr 1979), εξέτασε την ασύνδετη επαφή μεταξύ ελαστικών και άκαμπα - ελαστικών μέσων και ειδικότερα την δημιουργία κοιλώματος σε έναν ελαστικό ημίχωρο από ένα άκαμπτο κύλινδρο και μια άκαμπτη σφαίρα καθώς και την ασυνεχή επαφή μεταξύ μιας πλάκας και ενός ελαστικού ημιχώρου, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά ενεργειακή προσέγγιση στο πρόβλημα. Προσφάτως (Zhang 2008), αναλύθηκε το πρόβλημα της επαφής χωρίς εφελκυστική ένταση μιας πεπερασμένης δοκού επί θεμελίωσης τύπου Reissner με ασυνεχή επαφή, στην οποία ασκείται σημειακό φορτίο, λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες συμβατότητας. Με ένα παρόμοιο πρόβλημα

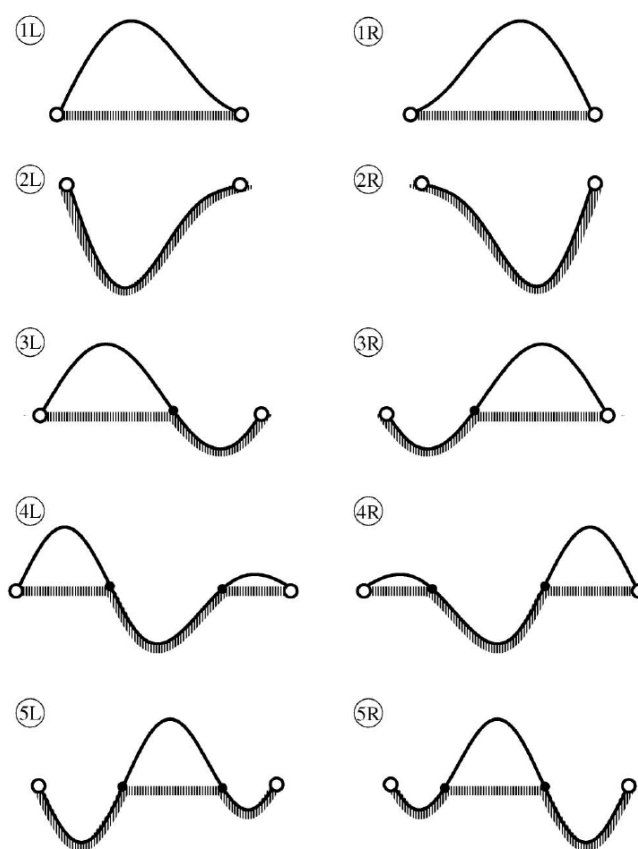
(επαφή δοκού με θεμελίωση δύο παραμέτρων χωρίς εφελκυστική ένταση) ασχολήθηκαν οι Nobili και Lanzoni (2011). Δύο εντελώς διαφορετικές προσεγγίσεις υιοθετήθηκαν για το πρόβλημα δομικών στοιχείων σε μονομερή επαφή με ελαστική θεμελίωση (Silveira et al. 2008). Το πρόβλημα της επαφής διατυπώθηκε είτε ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων για τη διακριτοποίηση της κατασκευής και της ελαστικής θεμελίωσης, είτε μέσω της μεθόδου Ritz. Το όλο πρόβλημα αντιμετωπίστηκε τελικά ως βέλτιστος σχεδιασμός υπό περιορισμούς, αλλά οι περιπτώσεις απώλειας επαφής, που απεικονίζονται στο Σχήμα 6.1, δεν περιελάμβαναν την δράση αξονικής θλίψης στην κατασκευή που εδράζεται επί της ελαστικής θεμελίωσης.



Σχήμα 6.1. Δομικά στοιχεία με περιορισμούς μονόπλευρης επαφής και αντίστοιχοι τύποι παραμόρφωσης (Silveira et al. 2008)

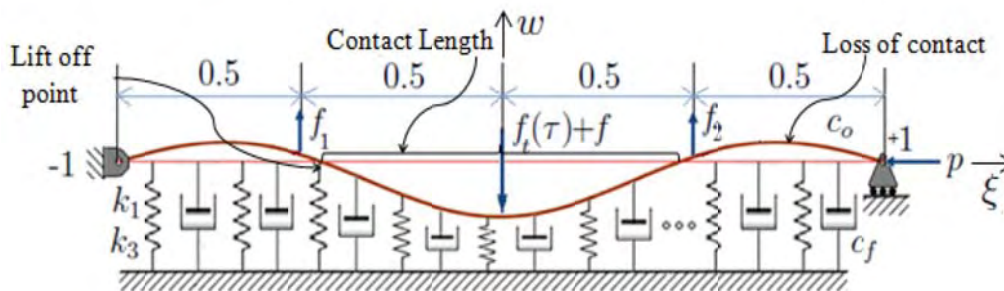
Παρόλο που οι ανωτέρω εργασίες περιέχουν πολύτιμες πληροφορίες για την ασυνεχή επαφή μεταξύ δοκού και θεμελίωσης, σε καμία από αυτές εξετάζεται η επίδραση του αξονικού θλιπτικού φορτίου είτε μεμονωμένα είτε σε συνδυασμό με άλλους τύπους φόρτισης.

Από την άλλη μεριά, μια ήδη λυγισμένη δοκός, της οποίας η καμπτική παραμόρφωση είναι περιορισμένη μέσω μιας εύκαμπτης επιφάνειας που είναι επίπεδη πριν την παραμόρφωση, στην οποία επιβάλλεται σημειακό εγκάρσιο φορτίο θεωρείται ως ένα σημαντικό πρόβλημα της Μηχανικής, που προκύπτει όταν π.χ. ένα όχημα κινείται επί ανυψωμένου οδοστρώματος λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών (Chen και Wu 2011). Υπό τις συνθήκες αυτές βρέθηκε ότι οι αντίστοιχες στατικές παραμορφώσεις μπορεί να ακολουθήσουν πέντε χαρακτηριστικές μορφές (τύπους): χωρίς επαφή, με πλήρη επαφή, με μονόπλευρη επαφή, με αμφίπλευρη επαφή και με μεμονωμένη επαφή περί το μέσον της δοκού. Αυτοί οι τύποι επαφής φαίνονται στο Σχήμα 6.2, όπου το L αναφέρεται στην παρουσία του σημειακού φορτίου στο αριστερό μισό της δοκού και το R στην παρουσία του σημειακού φορτίου στο δεξί μισό της δοκού.



Σχήμα 6.2. Οι πέντε βασικοί τύποι παραμόρφωσης (Chen και Wu 2011)

Η μόνη σχετική συνεισφορά, που συνδυάζει την ταυτόχρονη επίδραση αξονικού φορτίου και εγκάρσιας φόρτισης σε μια ομογενή αμφιέριστη δοκό επί μη γραμμικά βισκοελαστικής θεμελίωσης τύπου Winkler με μονόπλευρη (ασυνεχή) επαφή δόθηκε από τους Bhattiprolu et al. (2011). Η σχετική παραμόρφωση απεικονίζεται στο Σχήμα 6.3 (με αδιάστατες μεταβλητές), απ' όπου καθίσταται εύκολα αντιληπτό ότι το μήκος της περιοχής που βρίσκεται σε επαφή εξαρτάται από τη θέση του εγκάρσιου φορτίου κατά μήκος της δοκού.



Ορίζοντας γενικώς ως $F_f(w)$ την δύναμη που ασκείται από τη θεμελίωση (η οποία επενεργεί μόνο στην περιοχή που υπάρχει επαφή, διότι το έδαφος αντιδρά μόνο σε κατακόρυφη πίεση), τροποποιώντας κατά τι την παραπάνω σήμανση, θεωρώντας την αρχή των αξόνων στην αριστερή στήριξη (δηλαδή από 0 έως 1) και την καμπτική παραμόρφωση ως $w(\zeta)$ με θετική φορά προς τα κάτω, η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης λυγισμού μπορεί να γραφτεί ως:

όπου ο κάτω δείκτης ζ υποδηλώνει την παραγώγιση ως προς ζ , ενώ $H(\zeta)$ είναι η βοηθητική συνάρτηση επαφής, που ορίζεται ως:

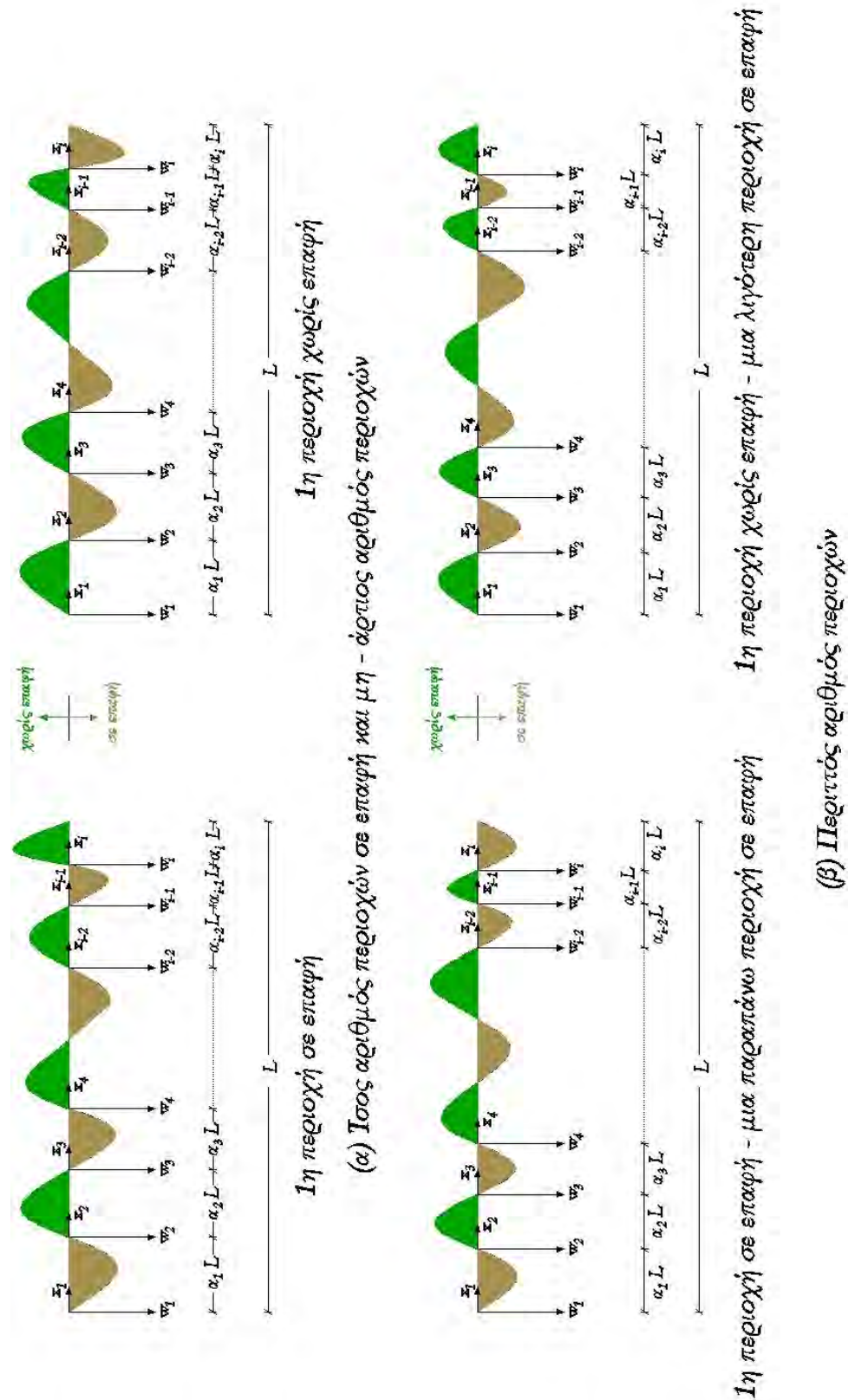
165

Οι εξισώσεις (6.1) και (6.2) σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες αποτελούν ένα πολύ σύνθετο πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων, που επιδέχεται μόνο αριθμητικής λύσης. Αυτός είναι και ο σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου.

6.2 Παρουσίαση του προβλήματος και μαθηματική διατύπωση

Θεωρούμε μια ελαστικά στηριζόμενη δοκό Euler - Bernoulli, σταθερής διατομής, στην οποία ασκείται θλιπτικό αξονικό φορτίο και η οποία εδράζεται επί εδάφους που προσομοιώνεται ως ελαστικό μέσο. Το έδαφος – θεμελίωση αντιδρά μόνο όταν συμπιεστεί από την επαφή του με τη δοκό, που ισορροπεί στην παραμορφωμένη μορφή λόγω λυγισμού. Με γενικούς όρους, τούτο σημαίνει ότι υφίσταται ασυνεχής επαφή μεταξύ της δοκού και της θεμελίωσης, η οποία σχετίζεται με διαδοχικές περιοχές επαφής και μη επαφής κατά μήκος της δοκού. Στην κατάσταση του λυγισμού, θεωρούμε ότι υπάρχουν συνολικά i περιοχές της δοκού, εκ των οποίων κάποιες βρίσκονται σε επαφή και οι υπόλοιπες όχι. Εφόσον κάθε περιοχή που βρίσκεται σε επαφή ακολουθείται από μια περιοχή που δε βρίσκεται σε επαφή και αντίστροφα, και αμελώντας την περίπτωση $i=1$ (πλήρης επαφή ή καθόλου επαφή), δύο σημαντικές παραμορφωμένες καταστάσεις πρέπει να θεωρηθούν. Η πρώτη σχετίζεται με την παρουσία ίσων σε αριθμό τέτοιων περιοχών, που δηλώνονται ως c και n αντιστοίχως για τις οποίες ισχύει ότι $c = n = i/2$. Αυτή η θεώρηση πρέπει να διαιρεθεί σε δύο υποπεριπτώσεις, με βάση την κατάσταση της πρώτης περιοχής, δηλαδή εάν βρίσκεται σε επαφή ή όχι. Από την άλλη πλευρά, η δεύτερη θεώρηση, όπου υπάρχει μονός συνολικός αριθμός περιοχών (επαφής και μη επαφής), πρέπει να χωριστεί σε δύο υποπεριπτώσεις, που εξαρτώνται από το αν υπάρχει μια περισσότερη ή μια λιγότερη περιοχή σε επαφή, δηλαδή από το αν η $1^{\text{η}}$ περιοχής βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος ή όχι. Εάν αυτή η περιοχή είναι σε επαφή, τότε και η τελευταία περιοχή είναι σε επαφή και συνεπώς $c = n + 1 \leftrightarrow c = \frac{i+1}{2}, n = \frac{i-1}{2}$. Όμοια, αν η $1^{\text{η}}$ περιοχή δεν είναι σε επαφή το ίδιο ισχύει και για την τελευταία και τελικώς $c = n - 1 \leftrightarrow c = \frac{i-1}{2}, n = \frac{i+1}{2}$. Εάν L είναι η απόσταση μεταξύ των στηρίξεων της δοκού, που θεωρούνται ακλόνητες, τότε το μήκος της κάθε περιοχής δηλώνεται ως $\alpha_j L$, $j = 1, 2, \dots, i$, όπου α_j είναι θετικοί συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν. Είναι εμφανές ότι $L = \sum_{j=1}^i \alpha_j$, ενώ στα σημεία που χάνεται η επαφή θεωρούμε την καμπτική παραμόρφωση ίση με μηδέν. Οι δύο δυνατές κύριες

παραμορφωμένες καταστάσεις της δοκού (και των υποδιαιρέσεων τους) μαζί με την σήμανση προσήμων φαίνονται στο Σχήμα 6.4.



Σχήμα 6.4. Πιθανές παραμορφωμένες καταστάσεις μιας λυγισμένης δοκού θεωρώντας ασύνδετη (ασυνεχή) επαφή με το εδαφικό υπόστρωμα

Έτσι, η δοκός αποτελείται από i τμήματα, των οποίων η αδιάστατη καμπτική παραμόρφωση δίδεται ως $w_i(x_i)$. Τα τμήματα σε μη επαφή, n τον αριθμό, ικανοποιούν τον διαφορικό τελεστή που συνδέεται με τη γνωστή εξίσωση λυγισμού μιας ελαστικά εδραζόμενης δοκού χωρίς εγκάρσια φόρτιση:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_n[.] &= \frac{d^4[.]}{dx_n^4} + \sqrt{\lambda} \frac{d^2[.]}{dx_n^2} \\ \text{με } \begin{cases} n = 2, 4, \dots, i & \text{για την 1η περιοχή σε επαφή} \\ n = 1, 3, \dots, i-1 & \text{για την 1η περιοχή σε μη επαφή} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.3\alpha)$$

όπου

$$\lambda = \frac{PL^2}{EI} \quad (\text{αδιάστατο φορτίο}) \quad (6.3\beta)$$

Από την άλλη πλευρά, τα c σε αριθμό τμήματα της δοκού (που βρίσκονται σε επαφή), ικανοποιούν τον διαφορικό τελεστή που συνδέεται με τον λυγισμό μιας ελαστικά εδραζόμενης δοκού επί ελαστικού εδάφους, θεωρώντας συνεχή επαφή. Η μορφή αυτού του ειδικού διαφορικού τελεστή, που ορίζεται ως $\mathbf{L}_c[.]$, εξαρτάται από το μοντέλο της θεμελίωσης π.χ. για το μοντέλο Pasternak ή Wieghardt model, έχει την μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_c[.] &= \frac{d^4[.]}{dx_c^4} + (\lambda - \delta) \frac{d^2[.]}{dx_c^2} + \beta[.] \\ \text{με } \begin{cases} c = 1, 3, \dots, i-1 & \text{για την 1η περιοχή σε επαφή} \\ c = 2, 4, \dots, i & \text{για την 1η περιοχή σε μη επαφή} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.4\alpha)$$

όπου για το μοντέλο του Pasternak,

$$\lambda = \frac{P\ell^2}{EI}, \quad \delta = \frac{k_s\ell^3}{EI}, \quad \beta = \frac{k_b\ell^4}{EI} \quad (6.4\beta)$$

ενώ, για το μοντέλο Wieghardt (Smith 1969, Rutta και Elishakoff 2006),

$$\lambda = \frac{P\ell^2}{EI}, \quad \delta = \frac{\ell^2}{2abEI}, \quad \beta = \frac{b\ell^4}{2aEI} \quad (6.4\gamma)$$

Στις εξισώσεις (6.4β) και (6.4γ) k_s , k_b , a και b είναι σταθερές που εξαρτώνται από τις μηχανικές ιδιότητες της ελαστικής θεμελίωσης. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα Κεφάλαια του παρόντος πονήματος που εξετάζονται με λεπτομέρεια τα άνω αναφερόμενα μοντέλα (Κεφάλαια 2 και 4).

Προφανώς, υπάρχουν τέσσερις συνοριακές συνθήκες (δύο σε κάθε στήριξη της δοκού), $2(i-1)$ συνθήκες μηδενικής καμπτικής παραμόρφωσης στα

σημεία απώλειας της επαφής, όπως και $3(i-1)$ συνθήκες συνέχειας της δοκού, δηλαδή $i-1$ ισότητες στροφής, $i-1$ σχέσεις ισοροπίας ροπών και $i-1$ σχέσεις ισοροπίας τεμνουσών. Τελικώς ο αριθμός των συνολικών προς ικανοποίηση συνθηκών είναι $5(i-4)+4 = 5i-1$. Οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις που περιγράφουν τις παραμορφωμένες καταστάσεις των τμημάτων της δοκού ($i-1$ σε αριθμό), τα μήκη τους (δηλαδή οι τιμές $a_j, j=1,2,\dots,i-1$) και η τιμή του κρίσιμου φορτίου. Τούτο αποτελεί ένα καλά δομημένο Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών της Μηχανικής (Kerr 1976), του οποίου η λύση θα μας απασχολήσει παρακάτω.

6.3 Προτεινόμενη τεχνική επίλυσης

Έστω ότι η αδιάστατη παραμόρφωση του κάθε τμήματος της δοκού δίνεται κατά προσέγγιση από ένα $4^{\text{ης}}$ τάξης πολυώνυμο («βασική» συνάρτηση)

$$w_i(x_i) = A_i x_i^4 + B_i x_i^3 + \Gamma_i x_i^2 + \Delta_i x_i + E_i \quad (6.5)$$

που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες και συνθήκες συμβατότητας που συζητήθηκαν παραπάνω. Προφανώς οι συντελεστές $A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i, E_i$ είναι γραμμικώς εξαρτημένοι, και κάποιος από αυτούς, π.χ. ο A_i , θεωρείται αυθαίρετα ίσος με τη μονάδα, χωρίς απώλεια της γενικότητας. Εφαρμόζοντας τις $5i-1$ συνθήκες οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό μη ομογενές σύστημα τάξης $5i-1$, το οποίο μπορεί να επιλυθεί συμβολικά και να παραχθούν εκφράσεις για τους υπόλοιπους συντελεστές, που θα αποτελούν συναρτήσεις των μεταβλητών $a_j, j=1,2,\dots,i-1$, που είναι ακόμα άγνωστες.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμοστεί η μέθοδος Galerkin για κάθε τμήμα της δοκού με την κατάλληλη επιλογή διαφορικού τελεστή. Απαιτείται συνεπώς να ισχύει γενικά ότι

$$\int_0^{a_i} \mathbf{L}_{c \text{ ή } n}[w_i(x_i)] w_i(x_i) dx_i = 0 \quad (6.6)$$

Το προϊόν μιας εκάστης των (6.6) θα είναι μια αλγεβρική εξίσωση ως προς λ , προς επίλυση. Κατά αυτόν τον τρόπο οι i εξισώσεις από την (6.6) θα δώσουν i εξισώσεις ως προς λ , όντας η καθεμία μια μη γραμμική εξίσωση των a_i , αλλά για το ίδιο φορτίο (αυτό του λυγισμού). Τελικώς θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα $i-1$ μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς $a_j, j=1,2,\dots,i-1$, όταν δε αυτό επιλυθεί θα προκύψουν διάφορες τιμές για τα a_j . Οι αποδεκτές εξ αυτών θα είναι θετικές και μικρότερες της μονάδας. Επιπλέον, οι τελικές παραμορφωμένες καταστάσεις πρέπει να έχουν τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 6.4, υπονοώντας ότι οι δύο

εναπομείνουσες λύσεις της κάθε βασικής εξίσωσης (εκτός $x = 0$ και $x = a_i$) πρέπει να είναι είτε φανταστικές είτε πραγματικές που δεν ανήκουν στο διάστημα $0 < x < a_i$. Με άλλα λόγια, και καθώς το 4^{ης} τάξης πολυώνυμο που αντιπροσωπεύει κάθε $w_i(x_i)$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή,

$$w_i(x_i) = x_i(x - a_i)f(x_i), \quad f(x_i) = s_1 x_i^2 + s_2 x_i + s_3 \quad (6.7)$$

κάθε πολυώνυμο 2^{ης} τάξης $f(x_i)$ πρέπει να έχει ή αρνητική διακρίνουσα ή να έχει πραγματικές λύσεις εκτός του διαστήματος $[0, a_i]$. Μπορεί κανείς να προβεί σε συμβολικούς υπολογισμούς – προκειμένου να ελεγχθούν τα ανωτέρω – για κάθε τιμή του i , αρχίζοντας με $i = 2$. Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι, δοθείσης και της φύσης του προβλήματος που προσεγγίζεται, η περίπτωση που θεωρεί παραπάνω από δύο περιοχές δεν φαίνεται να είναι πραγματοποιήσιμη, αφού δεν υπάρχει εγκάρσιο φορτίο που να εξαναγκάζει τη δημιουργία περιοχής επαφής. Από ενεργειακής πλευράς, εάν η επαφή χαθεί τότε το τμήμα που δεν είναι σε επαφή θα λυγίσει με τον πιο εύκολο τρόπο π.χ. σε απλή κυματομορφή. Προφανώς, κάθε περιοχή που βρίσκεται σε επαφή θα λυγίσει εξ' ορισμού με τον ίδιο τρόπο. Ως εκ τούτου, εικάζεται ότι μόνο η απλούστερη μορφή επαφής ($i = 2$) θα παράγει αποδεκτά αποτελέσματα και η απόδειξη τούτου δίνεται σε ότι ακολουθεί για την περίπτωση της αμφιέριστης και της αμφίπακτης δοκού.

Για την αμφιέριστη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές (μία σε επαφή και μία χωρίς), η διαδικασία υπολογισμού των συντελεστών των δύο βασικών εξισώσεων φαίνεται στο Σχήμα B.3.1 του Παραρτήματος B, που περιέχει τον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε στο *Mathematica*.

Χρησιμοποιώντας τις άνω εκφράσεις, η απόδειξη ότι πάντα προκύπτουν αποδεκτές τιμές για τα a δίδεται με τον ίδιο τρόπο στο Σχήμα B.3.2 του Παραρτήματος B.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την αμφίπακτη δοκό δίδονται στα Σχήματα B.3.3 και B.3.4 του Παραρτήματος B.

Στην περίπτωση της αμφίπακτης δοκού, οι προσεγγιστικές συναρτήσεις σχήματος συνδέονται με διπλή ρίζα (στις στηρίξεις της δοκού), αλλά πάλι τα αποτελέσματα είναι πάντα αποδεκτά.

Για λόγους συντομίας, η επαγωγική απόδειξη¹ ύπαρξης μη αποδεκτών αποτελεσμάτων για παραπάνω από δύο περιοχές δεν παρατίθεται (η έκταση του σχετικού κώδικα είναι απαγορευτική). Πλην όμως, παρατίθεται το βήμα εκείνο, που αφορά μια αμφιέρειστη δοκό υποθέτοντας τρεις περιοχές. Ο κώδικας του *Mathematica* για τον υπολογισμό των μεταβλητών των εξισώσεων σχήματος δίδονται στο Σχήμα B.3.5, ενώ η απόδειξη στο Σχήμα B.3.6 του Παραρτήματος Β.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η προτεινόμενη τεχνική οδηγεί στην περαιτέρω ανάλυση της περίπτωσης $i=2$. Έτσι υποθέτουμε μόνο δύο περιοχές, μια σε επαφή και μια σε μη επαφή και προχωρούμε λύνοντας το πρόβλημα δύο φορές. Η λύση που θα δώσει το μικρότερο φορτίου λυγισμού θα είναι και η λύση του προβλήματος.

6.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται για μια μεταλλική δοκό – στύλο και τύπους εδαφών που έχουν εξεταστεί στο Κεφάλαιο 4, για μια ελαστική θεμελίωση τύπου Pasternak, για συνθήκες απλής έδρασης αλλά και πάκτωσης.

6.4.1 Αμφιέρειστη δοκός - στύλος

Για αυτήν την περίπτωση η εφαρμογή των συνθηκών για την υπόθεση των δύο περιοχών, εφόσον αναζητείται μόνο το μήκος της πρώτης περιοχής, το οποίο ας υποθεθεί ότι είναι ίσο με α , οδηγεί στις ακόλουθες τιμές των μεταβλητών $A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i, E_i, i = 1,2$ των προσεγγιστικών συναρτήσεων σχήματος (όπως φαίνονται στο Σχήμα 6.5.):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1, \quad B_1 = -4\alpha, \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Delta_1 = 3\alpha^2, \quad E_1 = 0 \\ A_2 &= \frac{\alpha^2(\alpha+4)}{(\alpha-1)^3}, \quad B_2 = \frac{10\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \quad \Gamma_2 = -6\alpha^2, \quad \Delta_2 = -5\alpha^3, \quad E_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Εάν η 1^η περιοχή είναι σε επαφή τότε η μέθοδος Galerkin δίνει τα εξής αποτελέσματα:

$$\lambda_1 = \frac{4(47\alpha^4\beta+1323)}{1917\alpha^2} + \delta \quad (6.9\alpha)$$

$$\lambda_2 = \frac{7056(\alpha+4)^2(7\alpha+3)^2}{(\alpha-1)^4(\alpha(213\alpha+164)+48)^2} \quad (6.9\beta)$$

¹ Courant, R. and Robbins, H. "The Principle of Mathematical Induction" and "Further Remarks on Mathematical Induction." §1.2.1 and 1.7 in *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd ed. Oxford, England: Oxford University Press, pp. 9-11 and 18-20, 1996.
Apostol, T. M. "The Principle of Mathematical Induction." §I 4.2 in *Calculus*, 2nd ed., Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Waltham, MA: Blaisdell, p. 34, 1967.

Εάν η 1^η περιοχή είναι σε μη επαφή τότε οι αντίστοιχες εκφράσεις έχουν τη μορφή:

$$\lambda_1 = \frac{38416}{5041\alpha^4} \quad (6.10\alpha)$$

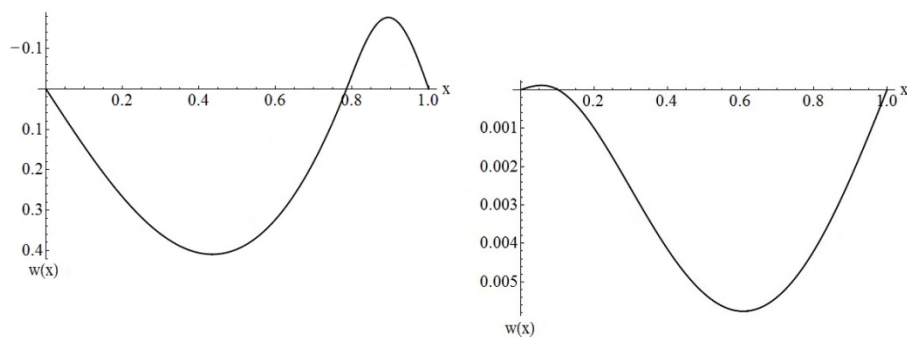
$$\lambda_2 = \frac{\left(\begin{array}{l} (\alpha(376\alpha+323)+76)(\alpha-1)^4\beta \\ +18(\alpha(213\alpha+164)+48)(\alpha-1)^2\delta \\ +1512(\alpha+4)(7\alpha+3) \end{array} \right)}{18(\alpha-1)^2(\alpha(213\alpha+164)+48)} \quad (6.10\beta)$$

Ζητώντας $\lambda_1 = \lambda_2$ και υιοθετώντας πλήρως τις ιδιότητες των δοκών και των τύπων των εδαφών που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4 (βλ. Πίνακα 4.4) οι τιμές του α καθώς και οι τιμές των αντίστοιχων φορτίων λυγισμού δίνονται στον Πίνακα 6.1. Χάριν σύγκρισης η τελευταία στήλη του Πίνακα περιέχει τις τιμές των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, υποθέτοντας συνεχή επαφή, σύμφωνα με την εξίσωση (4.10).

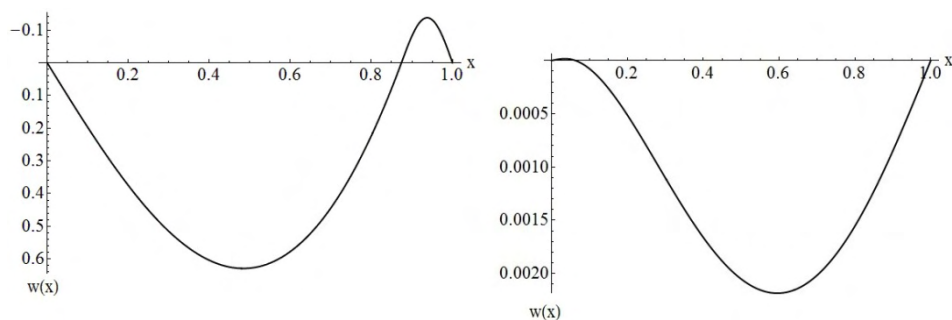
Πίνακας 6.1. Αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για την αμφιέριστη δοκό

Περίπτωση	β	δ	α	λ_{cr}	Ελάχιστο φορτίου λυγισμού για συνεχή επαφή
ST1 + BT1	915751	2404	0.785268*	57788*	95198.8
			0.101555	71646.2	
ST2 + BT1	5723443	15410	0.874244*	444415*	595326
			0.0632278	476830	
ST1 + BT2	34886	183.2	0.090768*	546.455*	3727.76
			0.243622	2163.38	
ST2 + BT2	218036	1174.1	0.657052*	10411.8*	23275.6
			0.147001	16320	
ST2 + BT3	1789	29.5	0.0746828	525.423	220.633
			0.493842*	128.13*	
ST3 + BT3	143.1	2.4	0.0728198	523.069	26.7687
			0.567716*	73.362*	
1 ^η περιοχή σε επαφή, 1 ^η περιοχή σε μη επαφή					
*= κρίσιμο φορτίο και τελική μορφή φορέα για ασύνδετη επαφή					

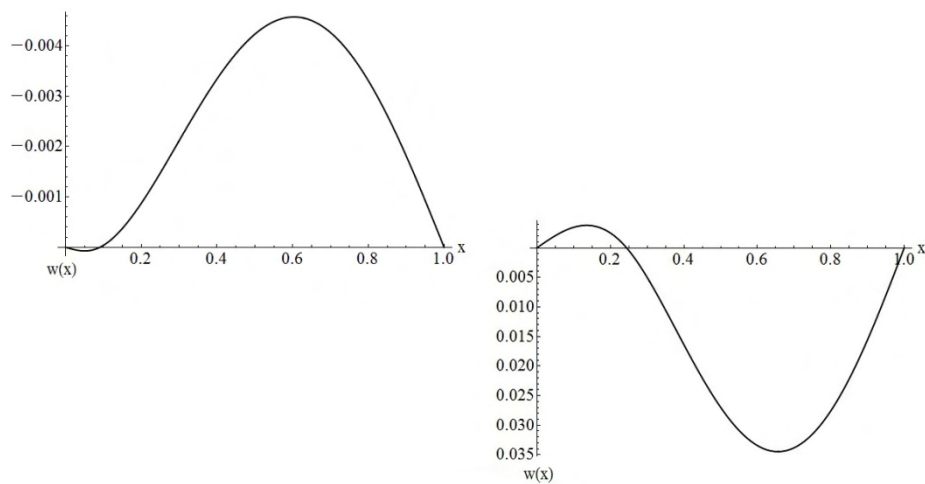
Οι μορφές της λυγισμένης δοκού – στύλου που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις που περιγράφονται παραπάνω αναπαρίστανται γραφικά στα Σχήματα 6.5 – 6.10, στα οποία οι καμπύλες στα αριστερά αντιπροσωπεύουν την 1^η περιοχή σε επαφή ενώ οι καμπύλες δεξιά την 1^η περιοχή σε μη επαφή.



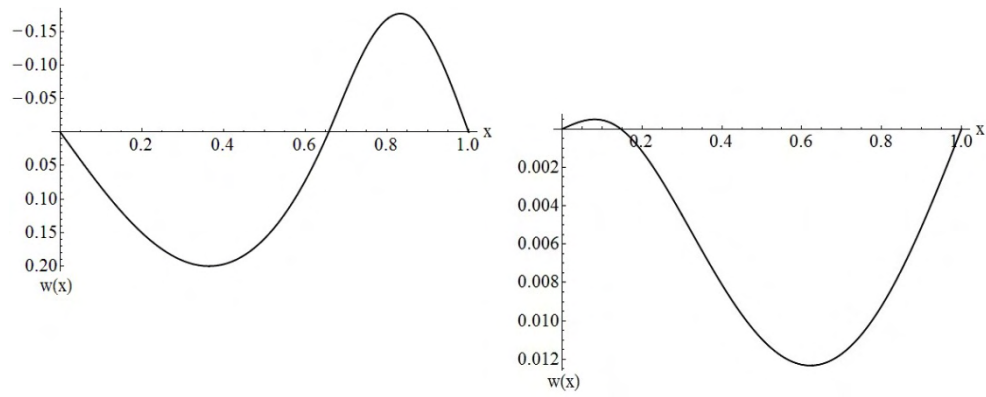
Σχήμα 6.5. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT1, αμφιέρειστη δοκός



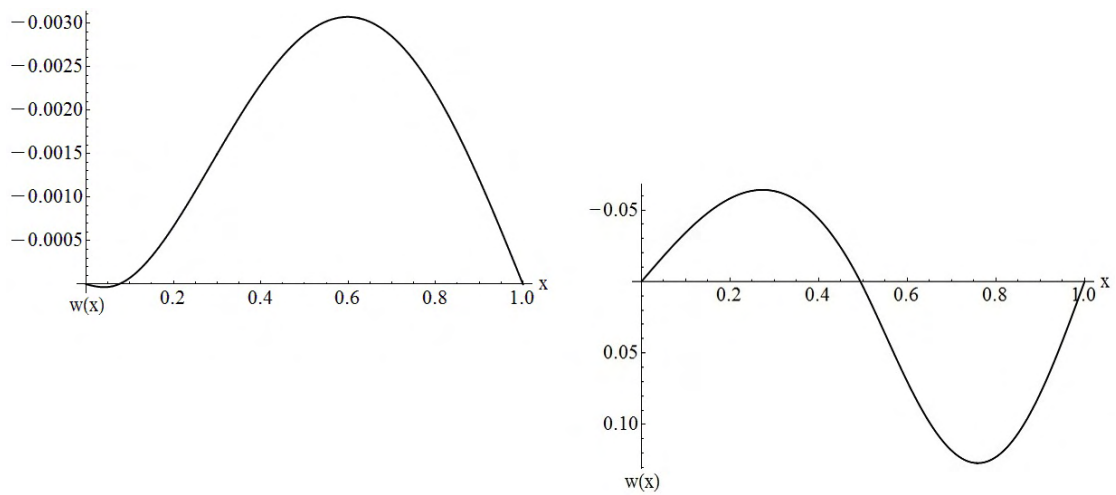
Σχήμα 6.6. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT1, αμφιέρειστη δοκός



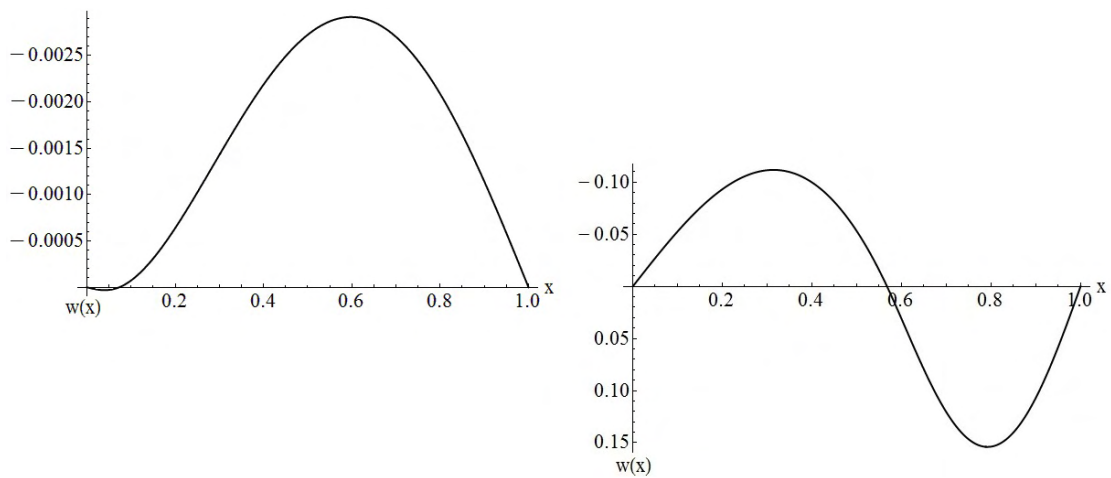
Σχήμα 6.7 Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT2, αμφιέρειστη δοκός



Σχήμα 6.8 Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT2, αμφιέριστη δοκός



Σχήμα 6.9. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT3, αμφιέριστη δοκός



Σχήμα 6.10. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST3 + BT3, αμφιέριστη δοκός

6.4.2 Αμφίπακτη δοκός - στύλος

Ομοίως, το αποτέλεσμα για την εκτίμηση των παραμέτρων των συναρτήσεων σχήματος είναι (βλ. Σχήμα B.3.3):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1, \quad A_2 = \frac{\alpha^2(\alpha+3)}{(\alpha-1)^3}, \quad B_1 = -4\alpha, \quad B_2 = \frac{6\alpha^2}{(\alpha-1)^2} \\ \Gamma_1 &= 3\alpha^2, \quad \Gamma_2 = -3\alpha^2, \quad \Delta_2 = -2\alpha^3, \quad \Delta_1 = E_1 = E_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Για την 1^η περιοχή σε επαφή έχουμε:

$$\lambda_1 = \frac{17\alpha^2\beta}{216} + \frac{7}{\alpha^2} + \delta \quad (6.12\alpha)$$

$$\lambda_2 = \frac{196(\alpha+3)^2(2\alpha+1)^2}{(\alpha-1)^4(\alpha(4\alpha+3)+1)^2} \quad (6.12\beta)$$

ενώ για την 1^η περιοχή σε μη επαφή

$$\lambda_1 = \frac{49}{\alpha^4} \quad (6.13\alpha)$$

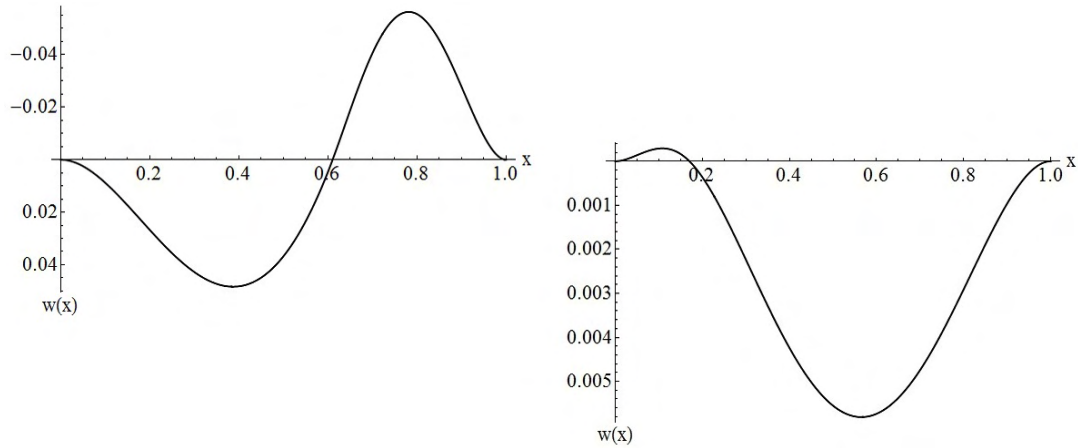
$$\lambda_2 = \frac{\left(\alpha(\alpha((\alpha(\alpha(34\alpha-103)+81)+26)-44)\beta + 108((\alpha(4\alpha-5)-1)\delta+28)) - 3(\beta-36(\delta+98))) + 9(\beta+12(\delta+42)) \right)}{108(\alpha-1)^2(\alpha(4\alpha+3)+1)} \quad (6.13\beta)$$

Για $\lambda_1 = \lambda_2$ και για τις ίδιες περιπτώσεις δοκών και τύπων εδαφών που συζητήθηκαν ανωτέρω, τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 6.2. Η τιμή του κρίσιμου φορτίου για πλήρη επαφή, προκύπτει αριθμητικά από την εξίσωση (4.10).

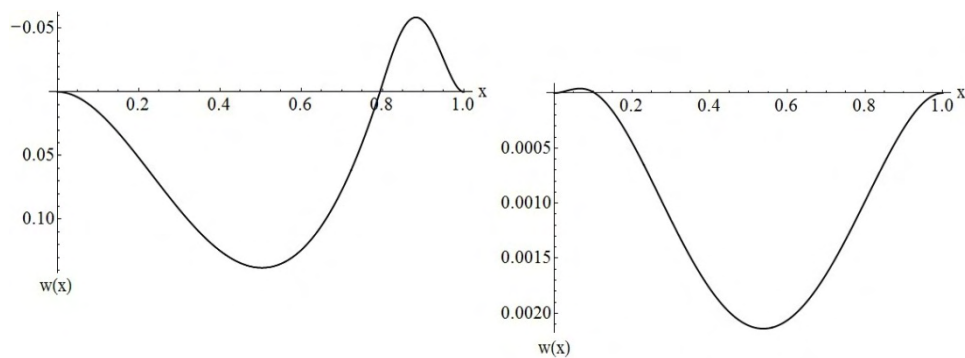
Πίνακας 6.2. Αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για την αμφίπακτη δοκό

Περίπτωση	β	δ	α	λ_{cr}	Ελάχιστο φορτίο λυγισμού για συνεχή επαφή
ST1 + BT1	915751	2404	0.610356*	29272.5*	4356.58
			0.170145	58468.2	
ST2 + BT1	5723443	15410	0.793653*	299157*	20347.5
			0.104103	417194	
ST1 + BT2	34886	183.2	0.0610332	2072.6	591.164
			0.445488*	1244.09*	
ST2 + BT2	218036	1174.1	0.0872815*	2223.7*	2273.58
			0.251825	12184.2	
ST2 + BT3	1789	29.5	0.0587228	2059.93	146.479
			0.657117*	262.80*	
ST3 + BT3	143.1	2.4	0.0583567	2057.93	52.6051
			0.672675*	238.05*	
1 ^η περιοχή σε επαφή, 1 ^η περιοχή σε μη επαφή					
*= κρίσιμο φορτίο και τελική μορφή φορέα για ασύνδετη επαφή					

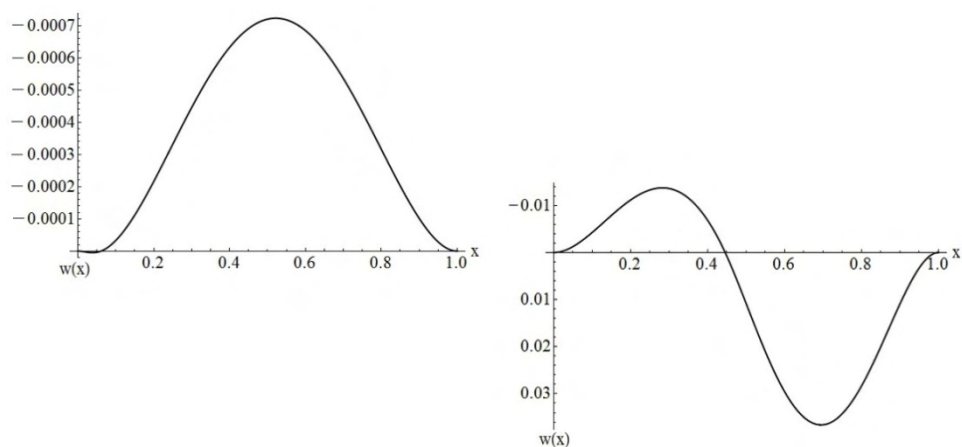
Η γραφική αναπαράσταση αυτών των αποτελεσμάτων δίνονται στα Σχήματα 6.11 – 6.16, με το αριστερό μέρος και το δεξί μέρος να αντιπροσωπεύουν την περίπτωση της 1^{ης} περιοχής σε επαφή και σε μη επαφή αντίστοιχα.



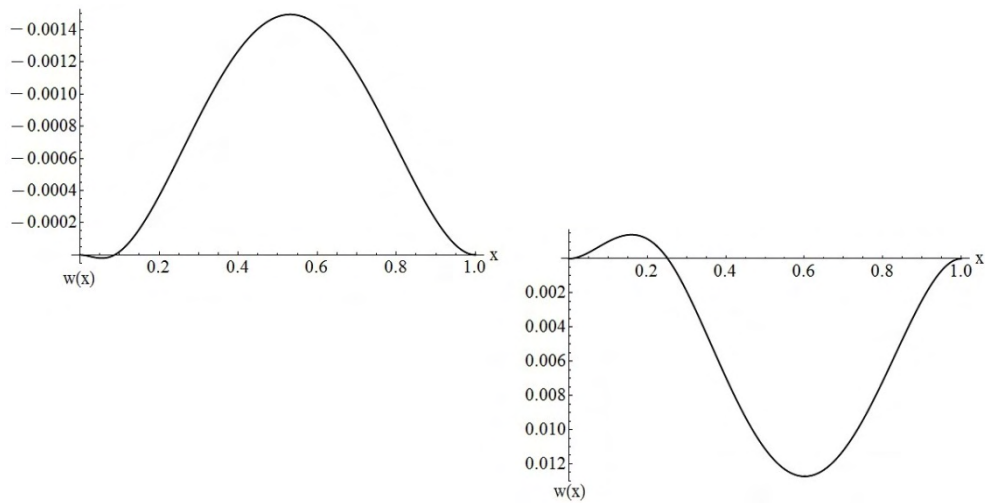
Σχήμα 6.11. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT1, αμφίπακτη δοκός



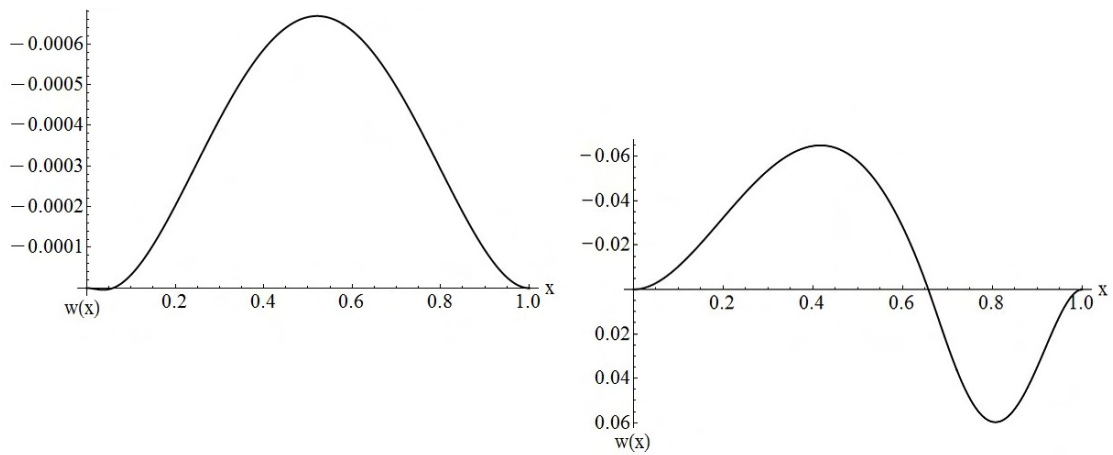
Σχήμα 6.12 Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT1, αμφίπακτη δοκός



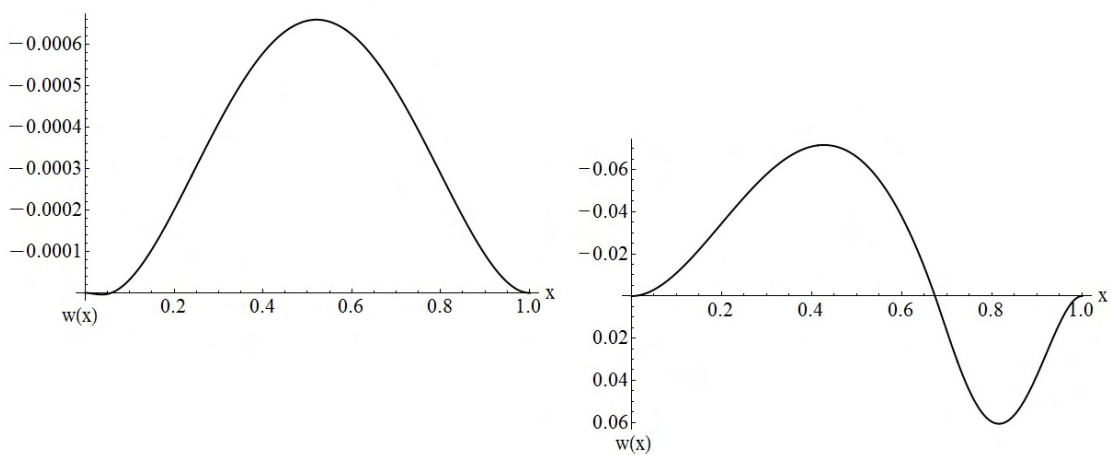
Σχήμα 6.13. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST1 + BT2, αμφίπακτη δοκός



Σχήμα 6.14. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT2, αμφίπακτη δοκός



Σχήμα 6.15. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST2 + BT3, αμφίπακτη δοκός



Σχήμα 6.16. Παραμορφωμένη κατάσταση λυγισμού της περίπτωσης ST3 + BT3, αμφίπακτη δοκός

6.5 Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα που αναφέρονται κατωτέρω σχετίζονται άμεσα με την ακόλουθη διαπίστωση:

Ο τύπος εδάφους 1 (ST1) αντιπροσωπεύει ένα μέτρια σκληρό έδαφος από χάλικες, ο ST2 ένα πολύ σκληρό έδαφος από αμμοχάλικο και ο ST3 ένα μαλακό αργιλικό έδαφος. Αντίστοιχα, ο τύπος δοκού 1 (BT1) είναι μια πολύ εύκαμπτη δοκός χαμηλής καμπτικής αντίστασης, ο BT2 είναι επίσης μεγάλης λυγηρότητας (αλλά όχι τόσο μεγάλης όσο ο BT1) και μέτριας καμπτικής αντίστασης EI, ενώ ο BT3 είναι μεγάλης καμπτικής αντίστασης και μικρής λυγηρότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη την ανωτέρω διαπίστωση καθώς και την ουσία του φυσικού προβλήματος, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προτεινόμενη επαγωγική ανάλυση (βάσει της μεθόδου Galerkin) έχουν ως εξής:

- Η μοναδικά ενεργειακά αλλά και φυσικά αποδεκτή καμπτική υποχώρηση της δοκού επί ελαστικού υποστρώματος δύο παραμέτρων, ανεξαρτήτως ποιότητας εδάφους και στηρίξεων, σχετίζεται με μία περιοχή σε επαφή και μία χωρίς επαφή. Το αν η πρώτη βρίσκεται σε επαφή ή η δεύτερη (καθώς αμφότερες οι δυνατότητες υφίστανται) εξαρτάται από το συνδυασμό δοκού και παραμέτρων εδάφους και γενικώς αντιστοιχεί σε διαφορετικά κρίσιμα φορτία. Στις συνήθεις περιπτώσεις λυγηρών δοκών το μικρότερο κρίσιμο φορτίο συνδέεται με την πρώτη περιοχή σε επαφή με το υπόστρωμα.

- Πλην όμως, και σε άμεση συσχέτιση με τις συνοριακές συνθήκες (ήτοι το είδος των στηρίξεων της δοκού) η υιοθέτηση πλήρους επαφής με το υπόστρωμα (που έχει μέχρι στιγμής πραγματοποιηθεί στη διεθνή σχετική βιβλιογραφία), σε αντίθεση με την προτεινόμενη (και φυσικά παρατηρούμενη) ασυνεχή επαφή, υφίσταται σημαντική διαφορά μεταξύ των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.

Αναλυτικότερα:

- Για την αμφιέριστη δοκό – στύλο, πέραν της εξαίρεσης που αναφέρθηκε στην υποπαράγραφο 6.4.1, τα κρίσιμα φορτία λυγισμού πλήρους επαφής βρέθηκαν μεγαλύτερα αυτών της ασυνεχούς γεγονός το οποίο σημαίνει ότι η προταθείσα διαδικασία οδηγεί σε πλέον ρεαλιστικά αποτελέσματα, σε αντίθεση με τα μέχρι στιγμής αποδεκτά δεδομένα.

- Για την αμφίπακτη δοκό –στύλο, τα κρίσιμα φορτία που συνδέονται με ασυνεχή επαφή είναι πάντα μικρότερα (σε μεγάλη ή μικρή κλίμακα) από εκείνα στα οποία υποθέτουμε πλήρη επαφή. Τούτο συνάδει με τις αρχές της ελαστικής ευστάθειας, κατά τις οποίες τα φορτία λυγισμού βασίζονται στις συνοριακές συνθήκες και όχι στην εγκάρσια φόρτιση. Σημειωτέον δε ότι ανεξάρτητα πλήρους ή μερικής επαφής, η επαφή εξ' ορισμού είναι ένα είδος εγκάρσιας φόρτισης.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

7.1 Συνολικά Συμπεράσματα

Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 1 αλλά και το πλήρες κείμενο των υπολοίπων Κεφαλαίων (3 – 6), τα συμπεράσματα τα οποία εξάγονται από την παρούσα Διατριβή και τα οποία αποτελούν νέα ευρήματα επί του σχετικού επιστημονικού πεδίου έχουν ως ακολούθως:

7.1.1 Κεφάλαιο 3^ο: Αρμονική ανάλυση συνεχούς συστήματος

Για δοκό επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler βρέθηκε μέσω θεωρητικής αρμονικής ανάλυσης ότι για τις κρίσιμες καταστάσεις ύπαρξης σύζευξης μορφών λυγισμού υφίσταται μέχρι 6^{ης} τάξης πιθανή αλληλεπίδραση. Τούτο απαντάται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, ενώ μη γραμμικές αριθμητικές εφαρμογές κατέδειξαν την δυνατότητα συζευγμένων μορφών αστάθειας σχετιζόμενων με συμμετρικά σημεία διακλάδωσης των αντίστοιχων δρόμων ισορροπίας και με πιθανότητα αλμάτων μορφών μέσω κλειστών πλήρως ατελών δευτερευόντων δρόμων στο χώρο διαμόρφωσης.

7.1.2 Κεφάλαιο 3^ο: Προσομοίωμα δύο βαθμών ελευθερίας

Για το διβάθμιο μη γραμμικό μοντέλο με ελατήρια κυβικής μη γραμμικότητας που υιοθετήθηκε, μετά από μετασχηματισμό συντεταγμένων, που οδήγησε σε μελέτη συμμετρικής, αντισυμμετρικής αλλά και ασύμμετρης παραμόρφωσης βρέθηκε ότι:

- Για την περίπτωση συμμετρικής παραμόρφωσης, πέραν του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας υφίσταται πάντοτε και μεταλυγισμικός τοιούτος, ο οποίος σχετίζεται με συμμετρικό σημείο διακλάδωσης για αδιάστατο φορτίο ίσο με 1. Το σημείο αυτό είναι πάντοτε ασταθές για «μαλακού» τύπου ελατήρια ($\zeta < 0$), και είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του δρόμου για $\zeta > -1$. Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου αυτής εμφανίζονται και δύο οριακά σημεία στο δρόμο. Αντίθετα για «σκληρού τύπου» ($\zeta > 0$) ελατήρια και για $\zeta \leq 1/2$ το διακλαδικό σημείο είναι ασταθές χωρίς ο δρόμος να παρουσιάζει άλλα κρίσιμα σημεία. Όμως για $\zeta > 1/2$ το σημείο διακλάδωσης καθίσταται ευσταθές και ο δρόμος εμφανίζει και δύο οριακά σημεία.

- Για την περίπτωση αντισυμμετρικής παραμόρφωσης πέραν του τετριμμένου δρόμου υφίσταται πάντοτε και μεταλυγισμικός σχετιζόμενος εκ νέου με συμμετρικό σημείο διακλάδωσης για φορτίο ίσο με $1/3$. Το σημείο αυτό για $-4 \leq \zeta \leq 1.5$ είναι ασταθές και ο δρόμος δε διαθέτει άλλα κρίσιμα σημεία, ενώ εκτός του διαστήματος αυτού το διακλαδικό σημείο καθίσταται ευσταθές και ο δρόμος εμφανίζει και δύο οριακά σημεία.

- Σε ότι αφορά την ασύμμετρη παραμόρφωση, η έρευνα επικεντρώθηκε στην πιθανότητα ύπαρξης σχηματισμών ισορροπίας διακλαδιζόμενων από τους κύριους δρόμους των προηγούμενων περιπτώσεων. Βρέθηκε ότι για να συμβεί κάτι τέτοιο τα ελατήρια πρέπει να είναι «μαλακού» τύπου με $\zeta < -1$. Οι δευτερεύοντες αυτοί δρόμοι είναι γενικώς ανεξάρτητοι μεταξύ τους για $\zeta > -4.222$, ενώ για μικρότερες τιμές αυτής της παραμέτρου κυβικής μη γραμμικότητας οι δρόμοι συνδέονται και αποτελούν πλέον κλειστό ασταθή βρόγχο στο χώρο, ο οποίος συνδέει τους δρόμους συμμετρικής και αντισυμμετρικής παραμόρφωσης. Συνεπώς, διαπιστώθηκε για το αναλυθέν προσομοίωμα η πιθανότητα σύζευξης μορφών που σχετίζεται με κίνδυνο αλμάτων (*mode jumping*), που βρέθηκε και για το συνεχές σύστημα.

- Τέλος, η παραπάνω τεκμηριωθείσα διαπίστωση συνδέθηκε άμεσα με την απόκριση του συνεχούς συστήματος μέσω προσαρμογής καμπυλών και προτάθηκαν ικανοποιητικές σχέσεις συσχέτισης υπό μορφή νομογραφημάτων για τον απευθείας υπολογισμό των κρίσιμων καταστάσεων της πραγματικής κατασκευής χωρίς την ανάγκη επίλυσης του προταθέντος διβάθμιου προσομοιώματος.

7.1.3 Κεφάλαιο 4^ο

- Για «πραγματικές» κατασκευές και συνήθεις τιμές παραμέτρων εδαφικών υποστρωμάτων, η προσομοίωση της θεμελίωσης με το μοντέλο Pasternak οδηγεί σε υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις μορφών, που συνδέεται με σύνθετες καμπτικές παραμορφώσεις και επιπρόσθετες μικρού εύρους κυματομορφές με αυξημένες μέγιστες τιμές του βέλους κάμψης για την αμφιέρειστη δοκό. Τούτο είναι ένα πολύ σημαντικό εύρημα για τον σχεδιασμό κατασκευών, αλλά δε συνδέεται με ρεαλιστικές τιμές θλιπτικού φορτίου ή αποδεκτές τιμές του αιτίου εμφάνισης του (θερμοκρασιακή μεταβολή της σιδηροτροχιάς εν προκειμένω) και εν τέλει το όλο φαινόμενο μπορεί να αγνοηθεί.

- Για την αντίστοιχη αμφίπακτη δοκό – στύλο, παρόλο που υιοθετήθηκε η γραμμική ανάλυση, η εξίσωση λυγισμού δεν επιδέχεται αναλυτική λύση και μόνο αριθμητικές τοιαύτες μπορούν να εξαχθούν. Η σύζευξη μορφών, ωστόσο, δεν μπορεί να προσδιοριστεί συμβολικά και αν είναι δυνατή η ύπαρξη αυτού του φαινομένου, τούτο μπορεί να αναλυθεί μόνο με μη γραμμική θεωρία λυγισμού.

7.1.4 Κεφάλαιο 5^ο

Από τα περιεχόμενα της οικείας παραγράφου (§2.2.2) του Κεφαλαίου 2 και την εν γένει ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η ευστάθεια δοκών – στύλων επί μη γραμμικά ελαστικού εδάφους με συνδυασμένη τετραγωνική και κυβική μη γραμμικότητα έχει ελάχιστα μελετηθεί και είναι επικεντρωμένη σε εντοπισμένο λυγισμό. Επίσης δεν έχουν μέχρι στιγμής δοθεί (εκτός μερικών εξαιρέσεων) οι απαραίτητες σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων μη γραμμικότητας του εδάφους ούτως ώστε η αντίδραση του υποστρώματος να είναι συμβατή με την απαίτηση πλήρους επαφής με τη δοκό, ανεξάρτητα της φοράς του βέλους κάμψης. Δεν καθορίζονται μόνο οι σχέσεις αυτές, αλλά προτείνεται μέθοδος εξέτασης του προβλήματος καθολικού λυγισμού με έμφαση σε περιπτώσεις πιθανής αλληλεπίδρασης μορφών, που δεν έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής στη βιβλιογραφία, συνοδευόμενη από εκτενή αριθμητικά αποτελέσματα με βάση ρεαλιστικές τιμές των παραμέτρων εδάφους και υπερκείμενης κατασκευής. Από την όλη ανάλυση προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Βρέθηκε ότι οι αδιάστατες παράμετροι που σχετίζονται με την τετραγωνική και κυβική μη γραμμική συνιστώσα της θεμελίωσης, γ_1 και γ_2 αντίστοιχα, δεν μπορούν να έχουν οποιοδήποτε πρόσημο, ώστε να εξασφαλίζεται η συμβατότητα αντίδρασης εδάφους – πλήρους επαφής ως άνω. Πιο συγκεκριμένα η γ_1 μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική ενώ η γ_2 μόνο θετική και ικανοποιούσα τη σχέση $\gamma_2 > \frac{\gamma_1^2}{4}$.

- Για τους ανωτέρω αποδεκτούς συνδυασμούς παραμέτρων μη γραμμικότητας θεμελίωσης υπολογίστηκαν, με χρήση μη γραμμική έκφρασης καμπυλότητας, τα κρίσιμα φορτία καθολικού λυγισμού καθώς και οι συνθήκες εκείνες που πρέπει να πληρούνται για να υπάρχει αλληλεπίδραση δύο ή περισσότερων μορφών τόσο για αμφιέρειστη όσο και για αμφίπακτη δοκό. Η τιμή

των κρίσιμων φορτίων δείχτηκε ότι εξαρτάται αποκλειστικά από τη γραμμική συνιστώσα της θεμελίωσης.

- Στη συνέχεια μελετήθηκε η επιρροή της μεταβολής των μη γραμμικών παραμέτρων γ_1 και γ_2 (εντός των αποδεκτών ορίων των τιμών τους) στην ποιοτική αλλαγή της καμπτικής παραμόρφωσης πριν και μετά κάποιες χαρακτηριστικές κρίσιμες καταστάσεις αλληλεπίδρασης, μέσω αριθμητικών εφαρμογών για τυπική δοκό σιδηροτροχιάς εδραζόμενης επί συνήθων εδαφικών τύπων.

- Διαπιστώθηκε ότι για χαμηλής τάξης απλές αλληλεπιδράσεις, η προ- και μεταλυγισμική απόκριση σχετίζεται συνήθως με αντιστροφή του προσήμου του βέλους κάμψης. Επίσης, σε περίπτωση υψηλής τάξης πολλαπλών αλληλεπιδράσεων μπορεί να συμβεί εμφάνιση ή εξαφάνιση μιας ή περισσότερων κυματομορφών καθώς οι παράμετροι μεταβάλλονται. Δε φαίνεται να υπάρχει κάποια συγκεκριμένη επιρροή αυτής της διαφοροποίησης, παρά μόνο για κάθε κρίσιμο σημείο ξεχωριστά. Από ποιοτική οπτική γωνία πάντως, η μεταβολή των μη γραμμικών παραμέτρων είτε μεμονωμένα είτε από κοινού ενδέχεται να οδηγήσει σε αιφνίδιες αλλαγές της καμπτικής παραμόρφωσης πριν και μετά την κρίσιμη κατάσταση.

- Τέλος, αν θεωρηθεί ως αίτιο πρόκλησης φαινομένου του λυγισμού η θερμοκρασιακή μεταβολή, τα κρίσιμα σημεία σύζευξης μορφών που υπολογίστηκαν δεν σχετίζονται με φυσικές (αποδεκτές) θερμοκρασιακές μεταβολές και εν γένει είναι κατά πολύ μεγαλύτερα των φορτίων διαρροής των δοκών.

7.1.5 Κεφάλαιο 6^ο

Τα συμπεράσματα που αναφέρονται κατωτέρω σχετίζονται άμεσα με την ακόλουθη διαπίστωση:

Ο τύπος εδάφους 1 (ST1) αντιπροσωπεύει ένα μέτρια σκληρό έδαφος από χάλικες, ο ST2 ένα πολύ σκληρό έδαφος από αμμοχάλικο και ο ST3 ένα μαλακό αργιλικό έδαφος. Αντίστοιχα, ο τύπος δοκού 1 (BT1) είναι μια πολύ εύκαμπτη δοκός χαμηλής καμπτικής αντίστασης, ο BT2 είναι επίσης μεγάλης λυγηρότητας (αλλά όχι τόσο μεγάλης όσο ο BT1) και μέτριας καμπτικής αντίστασης EI, ενώ ο BT3 είναι μεγάλης καμπτικής αντίστασης και μικρής λυγηρότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη την ανωτέρω διαπίστωση καθώς και την ουσία του φυσικού προβλήματος, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προτεινόμενη επαγωγική ανάλυση (βάσει της μεθόδου Galerkin) έχουν ως εξής:

- Η μοναδικά ενεργειακά αλλά και φυσικά αποδεκτή καμπτική υποχώρηση της δοκού επί ελαστικού υποστρώματος δύο παραμέτρων, ανεξαρτήτως ποιότητας εδάφους και στηρίξεων, σχετίζεται με μία περιοχή σε επαφή και μία χωρίς επαφή. Το αν η πρώτη βρίσκεται σε επαφή ή η δεύτερη (καθώς αμφότερες οι δυνατότητες υφίστανται) εξαρτάται από το συνδυασμό δοκού και παραμέτρων εδάφους και γενικώς αντιστοιχεί σε διαφορετικά κρίσιμα φορτία. Στις συνήθεις περιπτώσεις λυγερών δοκών το μικρότερο κρίσιμο φορτίο συνδέεται με την πρώτη περιοχή σε επαφή με το υπόστρωμα.

- Πλην όμως, και σε άμεση συσχέτιση με τις συνοριακές συνθήκες (ήτοι το είδος των στηρίξεων της δοκού) η υιοθέτηση πλήρους επαφής με το υπόστρωμα (που έχει μέχρι στιγμής πραγματοποιηθεί στη διεθνή σχετική βιβλιογραφία), σε αντίθεση με την προτεινόμενη (και φυσικά παρατηρούμενη) ασυνεχή επαφή, υφίσταται σημαντική διαφορά μεταξύ των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.

Αναλυτικότερα:

- Για την αμφιέριστη δοκό – στύλο, πέραν της εξαίρεσης που αναφέρθηκε στην υποπαράγραφο 6.4.1, τα κρίσιμα φορτία λυγισμού πλήρους επαφής βρέθηκαν μεγαλύτερα αυτών της ασυνεχούς γεγονός το οποίο σημαίνει ότι η προταθείσα διαδικασία οδηγεί σε πλέον ρεαλιστικά αποτελέσματα, σε αντίθεση με τα μέχρι στιγμής αποδεκτά δεδομένα.

- Για την αμφίπακτη δοκό – στύλο, τα κρίσιμα φορτία που συνδέονται με ασυνεχή επαφή είναι πάντα μικρότερα (σε μεγάλη ή μικρή κλίμακα) από εκείνα στα οποία υποθέτουμε πλήρη επαφή. Τούτο συνάδει με τις αρχές της ελαστικής ευστάθειας, κατά τις οποίες τα φορτία λυγισμού βασίζονται στις συνοριακές συνθήκες και όχι στην εγκάρσια φόρτιση. Σημειωτέον δε ότι ανεξάρτητα πλήρους ή μερικής επαφής, η επαφή εξ' ορισμού είναι ένα είδος εγκάρσιας φόρτισης.

7.2 Περιορισμοί και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Η όλη ανάλυση της παρούσας Διατριβής βασίστηκε αφενός μεν στη θεωρία Euler – Bernoulli, αφετέρου δε στην παραδοχή ότι οι στηρίξεις είναι αρθρωτές ή πακτωμένες χωρίς δυνατότητα οριζόντιας μετακίνησης πέραν δε τούτων

δεν συμπεριλήφθηκε στην ανάλυση η παρουσία εγκάρσιων φορτίων επί των δοκών αλλά ούτε αρχικών ατελειών. Τα ανωτέρω αποτελούν τους υφιστάμενους περιορισμούς της Διατριβής, οπότε – σύμφωνα και με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση του Κεφαλαίου 2 προτείνονται τα ακόλουθα βήματα για μελλοντική έρευνα επί του τρέχοντος επιστημονικού πεδίου:

- Διεύρυνση της ανάλυσης σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko για δοκούς με γενικότερης μορφής ελαστικές στηρίξεις.

- Εφαρμογή περαιτέρω εξευγενισμένων μεθόδων μη γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας και χρήση πλέον εξειδικευμένων μαθηματικών εργαλείων (ακριβούς όσο και αριθμητικής) επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων λυγισμού, προκειμένου να προκύψουν πιο ακριβείς λύσεις και μεγαλύτερη εις βάθος κατανόηση των υπό εξέταση προβλημάτων, και τέλος

- Διενέργεια πειραμάτων ικανοποιητικής κλίμακας, ιδία σε ότι αφορά των εντός κατακόρυφου επιπέδου λυγισμό σιδηροτροχιών επί ελαστικού εδάφους, προκειμένου να παραχθούν αποτελέσματα τα οποία θα μπορούν να αποτελέσουν μέτρο σύγκρισης τόσο των ευρημάτων του παρόντος Πονήματος όσο και των προτεινόμενων μελλοντικών διεργασιών.

Βιβλιογραφία

- [1] Winkler, E. (1867): *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, Prague.
- [2] Wierghardt, K. (1922): “Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage”, *ZAMM* 2, 165 – 184.
- [3] Hetenyi, M. (1946): *Beams on elastic foundations*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [4] Pasternak, P.L. (1954): *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two-constants*, Moscow, USSR: Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture [in Russian].
- [5] Reissner, E. (1958): “A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation”, *Journal of Applied Mechanics* (ASME) 25, 144–145.
- [6] Kerr, A.D. (1964): “Elastic and Viscoelastic Foundation Models”, *Journal of Applied Mechanics* (ASME) 31, 491 – 498.
- [7] Kerr, A.D. (1965): “A study of a new foundation model”, *Acta Mechanica* 1(2), 135 – 147.
- [8] Reissner, P.L. (1967): “Note on the formulation of the problem of the plate on an elastic foundation”, *Acta Mechanica* 4(1), 88 – 91.
- [9] Ylinen, A., Mikkola, M. (1967): “A Beam on a Wieghardt-Type Elastic Foundation”, *International Journal of Solids and Structures* 3(4), 617 – 633.
- [10] Smith, T.E. (1969): “Buckling of a Beam on a Wieghardt-Type Elastic Foundation”, *ZAMM* 49(11), 641 – 645.
- [11] Conway, H.D., Farnham, K.A. (1970): “Bending of a Finite Beam in Bonded and Unbonded Contact with an Elastic Foundation”, *International Journal of Mechanical Sciences* 12, 997 – 1055.
- [12] Rice, J.E. (1972): “Crack Stability of an Adhesive Layer”, *Journal of the Franklin Institute* 294(1), 1 – 11.
- [13] Narashima Murthy, G.K. (1973): “Buckling of beams supported by Pasternak foundation”, *Journal of the Engineering Mechanics Division* (ASCE) 99, 565 – 579.
- [14] El Naschie, M.S. (1974): “Exact Asymptotic Solution for the Initial Post-Buckling of a Strut on Linear Elastic Foundation”, *ZAMM* 54, 677 – 683.

- [15] Kerr, A.D. (1974): “On the stability of the railroad track in the vertical plane”, *Rail International* 2.
- [16] Anderson, G.L. (1976): “The influence of a Wiegardt type elastic foundation on the stability of some beams subjected to distributed tangential forces”, *Journal of Sound and Vibration* 44(1), 103 – 118.
- [17] Kerr, A.D. (1976): “On the Derivation of Well Posed Boundary Value Problems in Structural Mechanics”, *International Journal of Solids and Structures* 12(1), 1 – 11.
- [18] Jones, R., Xenophontos, J. (1977): “The Vlasov Foundation Model”, *International Journal of Mechanical Science* 19(6), 317 – 323.
- [19] Kerr, A.D. (1978): “Analysis of Thermal Track Buckling in the Lateral Plane”, *Acta Mechanica* 30, 17 – 50.
- [20] Kerr, A.D., El-Aini, Y.M. (1978): “Determination of Admissible Temperature Increases to Prevent Vertical Track Buckling”, *Journal of Applied Mechanics (ASME)* 45(3), 565 – 573.
- [21] Kerr, A.D. (1979): “On the Unbonded Contact between Elastic and Elastic-Rigid Media”, *Acta Mechanica* 33(1-2), 135 – 146.
- [22] Kerr, A.D. (1980): “An Improved Analysis for Thermal Track Buckling”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 15, 99 – 114.
- [23] Tvergaard, V., Needleman, A. (1981): “On Localized Thermal Track Buckling”, *International Journal of Mechanical Sciences* 23(10), 577 – 587.
- [24] Horvath, J.S. (1983a): “New subgrade model applied to Mat foundations”, *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)* 109(12), 1567 – 1587.
- [25] Horvath, J.S. (1983b): “Modulus of subgrade reaction: new perspective”, *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)* 109(12), 1591 – 1596.
- [26] Gioncu, V., Ivan M. (1984): *Theory of Critical and Postcritical Behavior of Elastic Structures*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania
- [27] Kerr, A.D. (1984): “On the formal development of elastic foundation models”, *Ingenieur-Archiv* 54(6), 455 – 464.
- [28] Elishakoff, I. (1985): “Reliability approach to the random imperfection sensitivity of columns”, *Acta Mechanica* 55(1-2), 151 – 170.
- [29] Naidu, N.R., Rao, G.V. (1995): “Stability behavior of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation”, *Computers & Structures* 57(3), 551 – 553.

- [30] Eisenberg, M., Yankelevsky, D.Z., Clastornik, J. (1986): "Stability of Beams on Elastic Foundation", *Computers & Structures* 24(1), 135 – 139.
- [31] Yankelevsky, D.Z., Eisenberg, M. (1986): "Analysis of a Beam Column on Elastic Foundation", *Computers & Structures* 23(3), 351 – 356.
- [32] Kounadis, A.N. (1987): "Material-Dependent Stability Conditions in the Buckling of Nonlinear Elastic Bars", *Acta Mechanica* 67, 209 – 228.
- [33] Vallabhan, C.V.G., Das, Y.C. (1988): "Parametric study of beams on elastic foundations", *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE) 114 (12), 2072 – 2082.
- [34] Panayotounakos, D.E. (1989): "Non-Linear and Buckling Analysis of Bars Lying on an Elastic Foundation", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 24(4), 295 -307.
- [35] Varelis, I. and Kounadis, A.N. (1989): "The effects of material nonlinearity and compressibility in the buckling of nonlinear elastic systems", *Ingenieur - Archiv* 60, 20 – 30.
- [36] Cakiroglu, O.A., Cakiroglu, F.L. (1991): "Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane", *International Journal of Engineering Science* 29(1), 99 – 111.
- [37] El-Ghazaly, H.A., Sherbourne, A.N. and Arrabi, F. (1991): "Strength and Stability of Railway Tracks – II. Deterministic Finite Element Analysis", *Computers & Structures* 39(1/2), 23 – 45.
- [38] Razaqpur, A.G. and Shah, K.R. (1991): "Exact Analysis of Beams on Two-Parameter Elastic Foundations", *International Journal of Solids and Structures* 27(4), 435 – 454.
- [39] Sheinman, M., Adan, M. (1991): "Imperfection sensitivity of a beam on a nonlinear elastic foundation", *International Journal of Mechanical Sciences* 33(9), 753 – 760.
- [40] Vallabhan, C.V.G., Das, Y.C. (1991a): "Modified Vlasov model for beams on elastic foundations", *Journal of Geotechnical Engineering* (ASCE) 117 (6), 956 – 966.
- [41] Vallabhan, C.V.G., Das, Y.C. (1991b): "A refined model for beams on elastic foundations", *International Journal of Solids and Structures* 27 (5), 629 – 637.
- [42] Horvath, J.S. (1993): "Beam-Column-Analogy for Soil-Structure Interaction Analysis", *Journal of Geotechnical Engineering* (ASCE) 119(2), 358 – 364.

- [43] Kounadis, A.N. (1992): “An efficient and simple approximate technique for solving non-linear initial and boundary – value problems”, *Computational Mechanics* 9(3), 221 – 231.
- [44] Budkowska, B.B., Szymczak, C. (1992): “Sensitivity Analysis of Thin-Walled I-Beams Resting on Elastic Foundation”, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE) 118(6), 1239 – 1248.
- [45] Hunt, G.W., Wadee, M.K., Shiacolas, N. (1993): “Localized Elasticae for the strut on the linear foundation”, *Journal of Applied Mechanics* (ASME) 60, 1033 – 1038.
- [46] Astapov, N.S., Kornev, V.M. (1994): “Post-buckling Behavior of an Ideal Bar on an Elastic Foundation”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 35(2), 286 – 296.
- [47] Li, Y.W., Elishakoff, I., Starnes, J.H. and Shinozuka, M. (1995): “Nonlinear Buckling of a Structure with Random Imperfection and Random Axial Compression by a Conditional Simulation Technique”, *Computers & Structures* 56(1), 59 – 64.
- [48] Naidu, N.R., Rao, G.V. (1995): “Stability Behaviour of Uniform Columns on a Class of Two Parameter Elastic Foundation”, *Computers & Structures* 57(3), 551 – 553.
- [49] Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F. (1995): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [50] Wu, B. (1995): “Influence of shear deformation on the buckling of elastically supported beams”, *Archive of Applied Mechanics* 65, 133 – 141.
- [51] Lee, S.H., Waas, A.M. (1996): “Initial post-buckling behavior of a finite beam on an elastic foundation”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 31(3), 313 – 328.
- [52] Van, M.A. (1996): “Buckling analysis of continuous welded rail track”, *HERON* 41(3), 175 – 186.
- [53] Κουνάδης, Α.Ν. (1997): *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευσταθείας, β' έκδοση*, Συμμεών, Αθήνα.
- [54] Whiting, A.I.M. (1997): “A Galerkin procedure for localized buckling of a strut on a nonlinear elastic foundation”, *International Journal of Solids and Structures* 34(6), 727 – 739.

- [55] Everall, P.R., Hunt, G.W. (1999): “Quasi-periodic buckling of an elastic structure under the influence of changing boundary conditions”, *Proceedings of the Royal Society of London A* 455, 3041 – 3051.
- [56] Hunt, G.W., Everall, P.R. (1999): “Arnold tongues and mode-jumping in the supercritical post-buckling of an archetypal elastic structure”, *Proceedings of the Royal Society of London A* 455, 125 – 140.
- [57] Everall, P.R., Hunt, G.W. (2000): “Mode jumping in the buckling of struts and plates: a comparative study”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 35(6), 1067 – 1079.
- [58] Wadee, M.K., Higuchi, Y., Hunt G.W. (2000): “Galerkin Approximations to Static and Dynamic Localization Problems”, *International Journal of Solids and Structures* 22(1), 3015 – 3029.
- [59] Wadee, M.A. (2000): “Effects of periodic and localized imperfections on struts on nonlinear foundations and compression sandwich panels”, *International Journal of Solids and Structures* 37(8), 1191 – 1209.
- [60] Wadee, M.K., Higuchi, Y., Hunt, G.W. (2000): “Galerkin approximations to static and dynamic localization problems”, *International Journal of Solids and Structures* 37(22), 3015 – 3029.
- [61] Dutta, S.C., Roy, R. (2002): “A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system”, *Computers and Structures* 80(20-21), 1579 – 1594.
- [62] Wadee, M.K., Coman, C.D., Bassom, A.P. (2002): “Solitary wave interaction phenomena in a strut buckling model incorporating restabilisation”, *Physica D* 163(1-2), 26 – 48.
- [63] Chen, G., Baker, G. (2003): “Rayleigh-Ritz analysis for localized buckling of a strut on a softening foundation by Hermite functions”, *International Journal of Solids and Structures* 40(26), 7463 – 7474.
- [64] El-Mously, M. (2003): “A Timoshenko-beam-on-Pasternak- foundation analogy for cylindrical shells”, *Journal of Sound and Vibration* 261, 635 – 652.
- [65] Lim, N.-H., Park, N.-H., Kang, Y.-J. (2003): “Stability of continuous welded rail track”, *Computers & Structures* 81, 2219 – 2236.
- [66] Volpe National Transportation System Center (2003): “Track Buckling Research”, <http://www.volpe.dot.gov/sdd/docs/buckling.pdf>.

- [67] Κουνάδης, Α.Ν. (2004): *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευσταθείας, με Στοιχεία από την Θεωρίαν Καταστροφών, β' έκδοση*, Συμεών, Αθήνα.
- [68] Wang, Y.H., Tham, L.G., Cheung, Y.K. (2005): "Beams and plates on elastic foundations: a review", *Prog. Struct. Engng Mater.* 7, 174 – 182.
- [69] Zhang, Y., Murphy, K.D. (2005): "Secondary buckling and tertiary states of a beam on a non-linear elastic foundation", *International Journal of Non-linear Mechanics* 40(6), 795 – 805.
- [70] Avramidis, I.E, Morfidis, K. (2006): "Bending of beams on three-parameter elastic foundation", *International Journal of Solids and Structures* 43(2), 357 – 375.
- [71] Grissom, G.T., Kerr, A.D. (2006): "Analysis of lateral track buckling using new frame-type equations", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 48, 21 – 32.
- [72] Kounadis, A.N., Mallis, J., Sbarounis, A.[†] (2006): "Postbuckling analysis of columns on an elastic foundation", *Archive of Applied Mechanics* 75(6-7), 395 – 404.
- [73] Rutta, G.C., Elishakoff, I. (2006): "Buckling of a column on a Wiegardt foundation", *Z. Angew. Math. Mech (ZAMM)* 86(8), 617 – 627.
- [74] Simitses, G.J, Hodges, D.H. (2006): *Fundamentals of Structural Stability*, Elsevier Inc.
- [75] Li, S.-R. and Batra, R.C. (2007): "Thermal Buckling and Postbuckling of Euler-Bernoulli Beams Supported on Nonlinear Elastic Foundation", *AIAA Journal* 45(3), 712 – 720.
- [76] Galambos, T.V., Surovek, A.E. (2008): *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [77] Lim, N.-H., Han, S.-Y., Han, T.-H. and Kang, Y.-J. (2008): "Parametric Study on Stability of Continuous Welded Rail Track – Ballast Resistance and Track Irregularity", *Steel Structures* 8, 171 – 181.
- [78] Pavlina, E.J., Van Tyne, C.J. (2008): "Correlation of Yield Strength and Tensile Strength with Harness for Steels", *Journal of Materials Engineering and Performance* 17, 888 – 893.
- [79] Silveira, R.A.M., Pereira W.L.A., Goncalves, P.B. (2008): "Constrained and Unconstrained Optimization Formulations for Structural Element in Unilateral

Contact with an Elastic Foundation”, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2008, Article ID 786520.

- [80] Sophianopoulos, D.S., Sbarounis, A., Papachristou, K.S. (2008): “Steel Beam – Columns on Elastic Foundation: Coupled Instability Modes”, *Proceedings of the 6th National Conference on Metal Structures*, Ioannina, Greece, 2 – 4 October, pp. 282 – 288.
- [81] Zhang, Y. (2008): “Tensionless contact of a finite beam resting on Reissner foundation”, *International Journal of Mechanical Sciences* 50(6), 1035 – 1041.
- [82] Teodoru, I.-B. (2009): “Beams on Elastic Foundation, the simplified continuum approach”, *Bul. Inst. Polit. Iași LV(LIX) 4*, 37 – 45.
- [83] Nafis Ahmad, S.S., Kumar Mandal, N., Chattopadhyay, G. (2009): “A comparative study of track buckling parameters of continuous welded rail”, *Proceedings of the International Conference on Mechanical Engineering (ICME 2009)*, 26 – 28 December, Dhaka, Nagladesh, AM-14, pp. 1 – 6.
- [84] Wang, X., Elishakoff, I., Qiu, Z., Ma, L. (2009): “Comparisons of probabilistic and two nonprobabilistic methods for uncertain imperfection sensitivity of a column on a nonlinear mixed quadratic-cubic foundation”, *Journal of Applied Mechanics (ASME)* 76, 011007-1 – 011007-8.
- [85] Challamel, N., Meftah, S.A., Bernard, F. (2010): “Buckling of elastic beams on non-local foundation: A revisiting of Reissner model”, *Mechanics Research Communications* 37(5), 472 – 475.
- [86] Coman, C.D. (2010): “Localized elastic buckling: non-linearities versus inhomogeneities”, *IMA Journal of Applied Mathematics* 75, 461 – 474.
- [87] Sophianopoulos, D.S., Papachristou, K.S. (2010): “Steel Beam-Columns on Winkler Foundation: Simulation of Fundamental Mode – Coupling”, *Proceedings of the 9th HSTAM Congress on Mechanics*, Limassol, Cyprus, 12 – 14 July, pp. 649 – 657.
- [88] Teodoru, I.-B, Musat, V. (2010): “The Modified Vlasov Foundation Model: An Attractive Approach for Beams Resting on Elastic Supports”, *Electronic Journal of Geotechnical Engineering (EJGE)* 15C.
- [89] Bhattiprolu, U., Bajaj, A. and Davis, P. (2011): “Response of a beam on a non-linear tensionless viscoelastic foundation”, *Proceedings of ENOC 2011 (7th European Nonlinear Dynamics Conference)*, Rome, Italy, 24 – 29 July 2011.

- [90] Challamel, N. (2011): “On the post-buckling of elastic beams on gradient foundation”, *Comptes Rendus Mecanique* 339(6), 396 – 405.
- [91] Chen, J-S, Wu, H-H (2011): “Response of a Buckled Beam Constrained by a Tensionless Elastic Foundation”, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 137(6), 383 – 389.
- [92] AUTO-07p, Version 0.8 (2011): “Software of Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations”, E. Doedel, Concordia University, Canada.
- [93] EN 13674-1 (2011): Railway Applications – Track –Rail – Part 1: Vignole railway rails 46 kg/m and above, European Committee for Standardization, Brussels.
- [94] Kameswara Rao, N.S.V. (2011): *Foundation Design: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Singapore.
- [95] Nobili, A., Lanzoni, L. (2011): “On the contact problem of beams resting on tensionless two-parameter foundations”, *Proceedings of the XX AMIETA Congress*, Bologna, Italy, 12 – 15 September.
- [96] Sophianopoulos, D.S., Papachristou, K.S. (2012): “In-plane stability of uniform steel beam-columns on a Pasternak foundation with zero end-shortening”, *Archive of Applied Mechanics*, Special Issue 82, 1653 – 1662.
- [97] Worku, A. (2012): “Calibrated Analytical Formulas for Foundation Model Parameters”, *International Journal of Geomechanics (ASCE)*, doi:10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000214.

Παράρτημα Α

Επιπρόσθετη Βιβλιογραφία επί της Συμπεριφοράς Σιδηροτροχιών

A.1 Δημοσιεύσεις για τον λυγισμό σιδηροτροχιών στις ΗΠΑ

Στο εδάφιο αυτό παρατίθενται τα στοιχεία των δημοσιεύσεων με αντικείμενο τον λυγισμό σιδηροτροχιών, όπως ελήφθησαν από την ιστοσελίδα¹ του John A. Volpe National Transportation Systems Center των ΗΠΑ (Research and Innovation Technology Administration, Washington DC).

- A.1.1. Kish, A., Samavedam, G., Jeong, D., "The Neutral Temperature Variation of Continuous Welded Rails", AREA Bulletin 712, 1987.
- A.1.2. Kish, A., Samavedam, G., "Longitudinal Force Measurement in Continuous Welded Rail from Beam Column Deflection Response", AREA Bulletin 712, 1987.
- A.1.3. Kish, A., "Recent Results In Track Buckling Research", Proceedings of the Ninety-Ninth Annual Conference of the Roadmasters and Maintenance of Way Association of America, September 21-23, 1987.
- A.1.4. Samavedam, G., Kish, A., Thurston, M., Jeong, D., "Recent Advances in track Buckling Mechanics" Applied Mechanics Rail Transportation Symposium, AMD, Volume 96, RTD, Vol. 2, 1988.
- A.1.5. Kish, A., Coltman, M., "New Techniques for Rail Longitudinal Force Measurement and Rail Restraint Capacity Evaluations", AREA Bulletin 727, 1990.
- A.1.6. Kish, A., Samavedam, G., "Analyses of Phase III Dynamic Buckling Tests", DOT/FRA/ORD - 89/08, February 1990.
- A.1.7. Kish, A., Samavedam, G., "Dynamic Buckling of CWR Track: Theory, Tests and Safety Concepts", Proceedings, TRB Track Lateral Stability Conference, TRR 1289, May 1990.
- A.1.8. Kish, A., "Track Buckling Fundamentals and Preventive Measures", Monograph for Shortline and Regional Railroads, 1990.
- A.1.9. Samavedam, G., Kish, A., "CWR Track Buckling Safety Assurance from Rail Force and Lateral Resistance Measurements", Proceedings, TRB Track Lateral Stability Conference, TRR 1289, May 1990.
- A.1.10. Kish, A., Samavedam, G., "Dynamic Buckling Test Analyses of a High Degree CWR Track", DOT/FRA/ORD - 90/13, February 1991, Final Report.
- A.1.11. Thomson, D., Samavedam, G., Mui, W., Kish, A., "Field Testing of High Degree Revenue Service Track for Buckling Safety Assessment", DOT/FRA/ORD 92/-02, May 1992, Final Report.
- A.1.12. Kish, A., Schoengart, J., Samavedam, G., Kalay, S., Hazel, A., "Rail Longitudinal Force Measurement Evaluation Studies Using The Track Loading Vehicle", AREA Bulletin, No. 742, Vol. 94, October 1993.

¹ <http://www.volpe.dot.gov/coi/pis/pubs-buckle.html>

- A.1.13. Samavedam, G., Kish, A., Purple, A., Schoengart, J., "Parametric Analysis and Safety Concepts of CWR Track Buckling", DOT/FRA/ORD-93/26, Final Report, December 1993.
- A.1.14. Kish, A., Clark, D., Thompson, W. "Recent Investigations on The Lateral Stability of Wood and Concrete Tie Tracks", AREA Bulletin, Vol. 96, Bulletin 752, October 1995.
- A.1.15. Kish, A., "The Straight Story on Track Buckling", Short Line Network, Southern Pacific Short Line Relations, Volume 5, Issue 2, Summer 1995.
- A.1.16. Samavedam, G., Kanaan, A., Pietrak, J., Kish, A., Sluz, A. "Wood Tie Track Resistance Characterization and Correlations Study", DOT/FRA/ORD -94/07, Final Report, January 1995.
- A.1.17. Kish, A., Samavedam, G., Read, D. "Track Buckling Models and Verification Testing" Proceedings of the World Congress on Railway Research, page 439-445, June, 1996.
- A.1.18. Kish, A., Samavedam, G., "CWR-BUCKLE" Version 2.0, Software and User's Guide, 1996.
- A.1.19. Samavedam, G., Blader, F., Thomson, D., "Track Lateral Shift: Fundamentals and State Of-The-Review", DOT/FRA/ORD-96/03.
- A.1.20. Kish, A., Samavedam, G., Wormley, D., "Recent Investigations on Track Lateral Shift Limits for High Speed Rail Applications", Proceedings of World Congress on Railway Research, Volume B, pp. 41-50, November 1997
- A.1.21. Samavedam, G., Blader, F., Wormley, D., Snyder, M., Thomson, D., "Analyses of Track Shift Under High Speed Vehicle-Track Interaction", DOT/FRA/ORD-97/02, March 1997.
- A.1.22. Samavedam, G., Gomes, J., Kish, A., Sluz, A., "Investigations on CWR Longitudinal Restraint Behavior in Winter Rail Break and Summer Destressing Operations", DOT/FRA/ORD-97/1, May 1997, Final Report.
- A.1.23. Kish, A., Mui, W., Samavedam, G., Gomes, J., "CWR-BUCKLE - Industry Version", Software and User's Guide, May 1998.
- A.1.24. Kish, A., Samavedam, G., Sluz, A., "Optimal Destressing and Readjustment of CWR", Presented at AREMA Technical Conference, September 1998.
- A.1.25. Kish, A., Samavedam, G., Wormley, D., "Fundamentals of Track Lateral Shift for High-Speed Rail Applications", Presented to ERRI Interactive Conference on "Cost Effectiveness and Safety Aspects of Railway Track", 8-9 December 1998, Paris.
- A.1.26. Harrison, H., Sluz, A., Clark, D., "Monitoring CWR Longitudinal Force Behavior Using Remote Sensing Technology", Proceedings of the International Conference on Innovations in the Design & Assessment of Railway Track", 2-3 December 1999, Delft University of Technology, The Netherlands.
- A.1.27. Kish, A., Samavedam, G., "Risk Analysis Based CWR Track Buckling Safety Evaluations", Proceedings of the International Conference on Innovations in the Design & Assessment of Railway.
- A.1.28. Samavedam, G., Sluz, A., Kish, A., "The Effect of Realignment on Track Lateral Stability", Presented at AREMA Technical Conference, September 1999.
- A.1.29. Sluz, A., Kish, A., Clark, D., "Factors Affecting Neutral Temperature in CWR", Presented at AREMA Technical Conference, September, 1999.
- A.1.30. Kish, A., Mui, W., "CWR-SAFE", Software and User's Guide, February 2001.

- A.1.31. Kish, A., Mui, W., "TREDA Track Residual Deflection Analysis", Software and User's Guide, March 2001.
- A.1.32. Kish, A., Samavedam, G., Wormley, D., "New Track Shift Safety Limits for High-Speed Rail Applications", Proceedings of World Congress on Railway Research, Cologne, Germany, November 2001.
- A.1.33. Kish, A., "New Track Shift Limits for High-Speed Rail" in French, German and English, Schienen der Welt Rail International, August-September, 2001, pp 36-41.
- A.1.34. Sluz, A., Clark, D., "Remote Monitoring of Longitudinal Rail Forces on Heavily Used Revenue Service Track", Presented to Annual TRB Conference, January 2001.
- A.1.35. Kish, A., Samavedam, G., "Slow Order Policy Rationale and Applicability for CWR Track Buckling Derailment Mitigation", August of 2002, in FRA review.
- A.1.36. Kish, A., Samavedam, G., "Theory and Application of "CWR-SAFE", Draft Report, December 2002.
- A.1.37. A. Kish, T. Sussmann, M. Trosino, "Effects of Maintenance Operations on Track Buckling Potential", Proceedings of International Heavy Haul Association, May 2003.
- A.1.38. T. Sussmann, A. Kish, M. Trosino, "Investigation of the Influence of Track Maintenance on the Lateral Resistance of Concrete Tie Track", Transportation Research Board Conference, January 2003.

A.2 Αντιπροσωπευτικές Δημοσιεύσεις του ERRI

για τον λυγισμό Συνεχώς Συγκολλημένων Σιδηροτροχιών²

- A.2.1. ERRI D202-RP3, Improved knowledge of forces in CWR track (including switches) - *Theory of CWR track stability*, European Rail Research Institute, Utrecht, February 1995.
- A.2.2. ERRI D202-RP12, Improved knowledge of forces in CWR track (including switches) - *Final report*, European Rail Research Institute, Utrecht, February 1999.

A.3 Αντιπροσωπευτικές Δημοσιεύσεις του Πολωνού

Καθηγητή – Ακαδημαϊκού R. Bogacz

και των συνεργατών του³

- A.3.1. R. Bogacz, T. Krzyzynski, K. Popp, On modelling the railway track for high-speed trains, Proc. World Congress on Railway Research, Paris 1994, pp. 1051-1053.
- A.3.2. R. Bogacz, T. Krzyzynski, K. Popp, On dynamics of railway tracks modelled as periodic system, Proc. Miniconference on Vehicle Dynamics, Budapest 1994.
- A.3.3. R. Bogacz, T. Krzyzynski and K. Popp, On dynamics of two-dimensional model of railway track including periodic distribution of sleepers, Proc.12 Scientific Conference "Rail Vehicle", Rydzyna, September 1996, pp. 37-42, (in Polish).

² List of Reports & Technical Documents (Former ERRI):

http://www.uic.org/download.php/rapporttechnique/rapporttechnique_en.pdf

³ <http://www.ippt.gov.pl/~rbogacz/rbogacz1.html>

- A.3.4. R. Bogacz, Cz. Bajer, Simulation of contact problems in railway engineering. In: Simulation in Research and Development, Eds. R. Bogacz and Z. Kolodzinski, Warsaw 1998, pp. 29-38.
- A.3.5. Cz. Bajer, R. Bogacz, Dynamic contact problems in railway engineering. Proc. 13th European Simulation Multiconference, Warszawa, 1-4 June 1999, pp. 473-477.
- A.3.6. R. Bogacz and Cz. Bajer, On modelling of contact problems in railway engineering. In Recent Advances in Applied Mechanics, J.T. Katsikadelis, D.E. Beskos and E.E. Gdoutos, Eds., Nat. Techn. Univ. of Athens, Greece, 2000, pp. 77-86.
- A.3.7. R. Bogacz, W. Czyżula, P. Tokaj. Experimental investigation and simulation of the system rail vehicle/track with influence of sleeper types. Simulation in R&D.2010, pp.14-17.
- A.3.8. R. Bogacz, K. Frischmuth, On some new aspects of contact dynamics with application in railway engineering, J. Theor. and Appl. Mech., 50.1, Warsaw 2012. pp. 119-130.

Παράρτημα Β

Αναλυτικές Πληροφορίες Λογισμικού

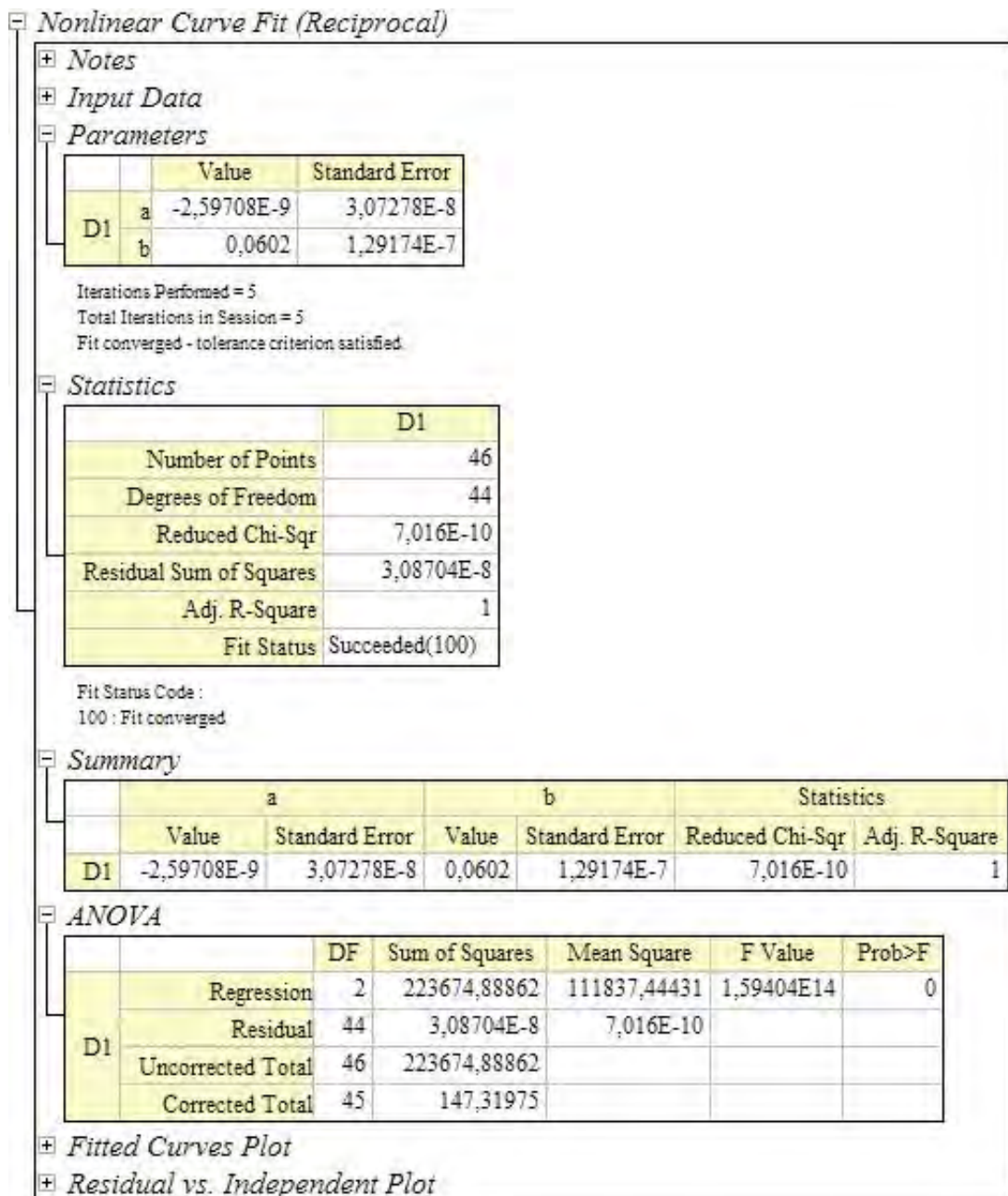
Στο παρόν Παράρτημα παρέχονται υπό μορφή Σχημάτων τόσο οι κώδικες των προγραμμάτων *Mathematica* που χρησιμοποιήθηκαν στην Διατριβή όσον και αναλυτικά αποτελέσματα προσαρμογής καμπυλών μέσω του εξειδικευμένου λογισμικού *Origin Pro*. Οι πληροφορίες αυτές δίδονται ανά Κεφάλαιο, όπου προβλέπεται.

B.1 Αναλυτικές Πληροφορίες Κεφαλαίου 3

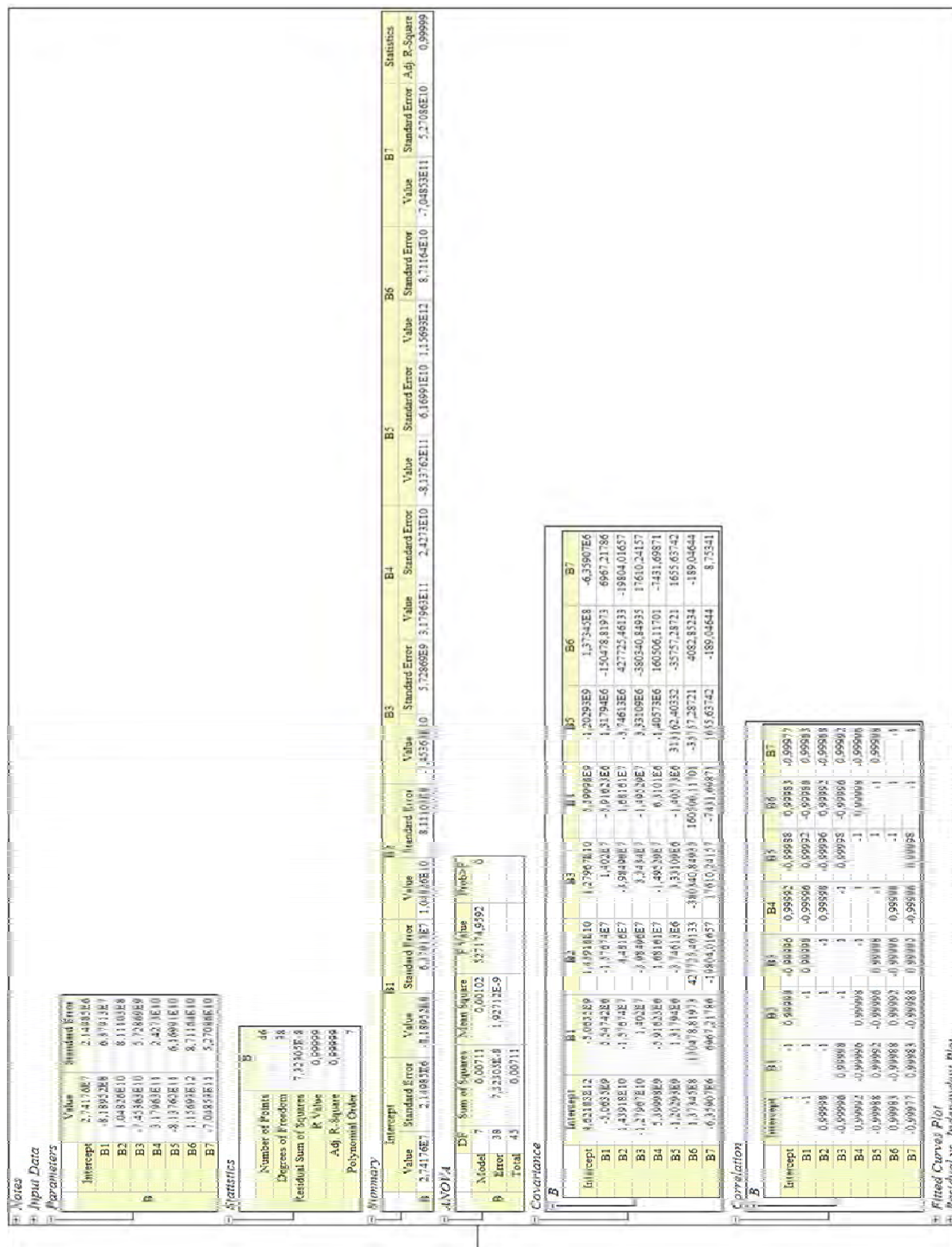
εξισώσεις
ισορροπίας

$$\text{ClearAll}[\zeta, \lambda, ws, wa, Q1, Q2, A1, B1]$$
$$Q1 = \frac{1}{2} \zeta (12 wa^2 ws + 4 ws^3) + \lambda \left(\frac{wa - ws}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{-2 wa - 2 ws}{2 \sqrt{-(wa + ws - 1)(wa + ws + 1)}} \right) + 2 ws;$$
$$Q2 = \frac{1}{2} \zeta (4 wa^3 + 12 wa ws^2) + \lambda \left(-\frac{4 wa}{\sqrt{1 - 4 wa^2}} + \frac{-2 wa - 2 ws}{2 \sqrt{-(wa + ws - 1)(wa + ws + 1)}} \right) - \frac{wa - ws}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + 2 wa;$$
$$A1 = \text{Solve}[Q1 = 0, \lambda];$$
$$B1 = Q2 /. A1;$$
$$A2 = \text{Solve}[Q2 = 0, \lambda];$$
$$B2 = Q1 /. A2;$$
$$\text{ContourPlot}[B1 = 0, \{ws, -1, 1\}, \{wa, -.5, .5\}, \text{FrameLabel} \rightarrow \text{Automatic}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$$

Σχήμα Β.1.1 Κώδικας *Mathematica* για την γραφική παράσταση των προβολών των δρόμων ισορροπίας του Σχήματος 3.9



Σχήμα Β.1.2 Χαρακτηριστικά της καμπύλης προσαρμογής του Σχήματος 3.15 (*Origin Pro*)



Σχήμα Β.1.3 Χαρακτηριστικά της καμπύλης προσαρμογής του Σχήματος 3.16 (Origin Pro)

B.2 Αναλυτικές Πληροφορίες Κεφαλαίου 5

```
In[4]:= ClearAll[F, μ, ξ, ζ, w]
F = μ * w + ξ * w^2 + ζ * w^3;
FullSimplify[Reduce[Sign[F] == Sign[w] && μ > 0 && w ≠ 0, ζ, Reals] // TraditionalForm]
Out[6]/TraditionalForm=
```

$$\mu > 0 \bigwedge w \neq 0 \bigwedge \frac{w\xi + \mu}{w^2} + \zeta > 0$$

Σχήμα B.2.1 Κώδικας *Mathematica* για την εξασφάλιση πλήρους επαφής μεταξύ δοκού – στύλου και θεμελίωσης

```
In[1]:= ClearAll[F, μ, ξ, ζ, w, U, RW, eq, γ]
F = μ * w + ξ * w^2 + ζ * w^3;
Clear[γ1]
ξ = γ1 * μ;
Clear[γ2]
ζ = γ2 * μ;
RW =  $\frac{w\xi + \mu}{w^2} + \zeta$ ;
U = FullSimplify[RW / μ]
eq = γ2 * y^2 + γ1 * y + 1;
Reduce[eq > 0 && γ1^2 - 4γ2 < 0, y] // TraditionalForm
Reduce[eq < 0 && γ1^2 - 4γ2 < 0, y] // TraditionalForm
Out[8]= γ2 +  $\frac{1 + \gamma_1 w}{w^2}$ 
Out[10]/TraditionalForm=
```

$$(\gamma_1 | y) \in \mathbb{R} \bigwedge \gamma_2 > \frac{\gamma_1^2}{4}$$

```
Out[11]/TraditionalForm=
False
```

Σχήμα B.2.2 Κώδικας *Mathematica* που δίνει τις απαραίτητες συνθήκες για πλήρη επαφή μεταξύ δοκού και θεμελίωσης

```

ClearAll[λ, λ1, λ2, λ3, λ4, μ, n, c1]
λ1 = (n * π)^2 + μ / (n * π)^2;
λ2 = 4 * (n * π)^2 + μ / (4 * (n * π)^2);
λ3 = 9 * (n * π)^2 + μ / (9 * (n * π)^2);
λ4 = 16 * (n * π + π/2)^4 + μ / (4 * (n * π + π/2)^2);
Reduce[λ1 == λ4 && c1 ∈ Integers && n ∈ Integers && n > 0 && c1 > 0, c1, Reals] //
TraditionalForm
Reduce[λ2 == λ4 && c1 ∈ Integers && n ∈ Integers && n > 0 && c1 > 0, c1, Reals] //
TraditionalForm
Reduce[λ3 == λ4 && c1 ∈ Integers && n ∈ Integers && n > 0 && c1 > 0, c1, Reals] //
TraditionalForm

```

Out[8]/TraditionalForm=

$$\left(c_1 \in \mathbb{Z} \wedge c_1 \geq 1 \wedge n = 2c_1 + 1 \wedge c_1 = \frac{n-1}{2} \right) \vee \left((n \mid c_1) \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 1 \wedge \mu > \pi^4 n^2 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi^2 |n|} - \frac{1}{2} \right)$$

Out[7]/TraditionalForm=

$$(n \mid c_1) \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 1 \wedge \mu > 4\pi^4 n^2 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{4\pi^2 |n|} - \frac{1}{2}$$

Out[8]/TraditionalForm=

$$\left(c_1 \in \mathbb{Z} \wedge c_1 \geq 0 \wedge n = 2c_1 + 1 \wedge c_1 = \frac{1}{2}(3n-1) \right) \vee \left((n \mid c_1) \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 1 \wedge \mu > 9\pi^4 n^2 \wedge c_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{6\pi^2 |n|} - \frac{1}{2} \right)$$

Σχήμα B.2.3 Συμβολικοί υπολογισμοί για την αλληλεπίδραση μορφών της αμφιέρειστης δοκού

B.3 Αναλυτικές Πληροφορίες Κεφαλαίου 6

```

ClearAll[A1, A2, B1, B2, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2, E1, E2, w1, w2, w1t, w2t, w1tt,
w2tt, α, R1, R2, R3, R4, S1, S2, x, J1]
Print[Style["Pinned - Pinned Beam - Column", Bold, Blue, 24]]
Print[
Style["4th Order Polynomial Galerkin Approximation - Two Regions Assumed",
Bold, Blue, 24]]
Print[
Style["The expressions for the flexural deflection at its region are:",
Bold, Blue, 20]]
Print[Style["w1=A1*x^4+B1*x^3+Γ1*x^2+Δ1*x", Bold, Blue, 18]]
Print[Style["w2=A2*x^4+B2*x^3+Γ2*x^2+Δ2*x", Bold, Blue, 18]]

A1 = 1;
w1 = A1 * x^4 + B1 * x^3 + Γ1 * x^2 + Δ1 * x;
w2 = A2 * x^4 + B2 * x^3 + Γ2 * x^2 + Δ2 * x;
w1t = ∂x w1;
w1tt = ∂x w1t;
w1ttt = ∂x w1tt;
w2t = ∂x w2;
w2tt = ∂x w2t;
w2ttt = ∂x w2tt;

```

Σχήμα B.3.1 Αποτελέσματα για την αμφιέρειστη δοκό θεωρώντας δύο περιοχές (μία σε επαφή και μία χωρίς επαφή) – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

```

R1 = w1 /. x -> α;
R3 = w2tt /. x -> 1 - α;
R4 = w2 /. x -> 1 - α;
S1 = (w1t /. x -> α) - (w2t /. x -> 0);
S2 = (w1tt /. x -> α) - (w2tt /. x -> 0);
R2 = (w1ttt /. x -> α) - (w2ttt /. x -> 0);
FullSimplify[Solve[{R1 == 0, R3 == 0, R4 == 0, S1 == 0, S2 == 0, R2 == 0, J1 == 0},
  {B1, B2, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2, A2}]] // TraditionalForm
Print[
  Style[
    "A1 = 1 , B1 = -4 α , Γ1 = 0 , Δ1 = 3 α3 , A2 =  $\frac{\alpha^2 (\alpha + 4)}{(\alpha - 1)^3}$  , B2
      =  $\frac{10 \alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$  , Γ2 = -6 α2 , Δ2 = -5 α3", Bold, Blue, 18]]

```

Pinned - Pinned Beam - Column

4th Order Polynomial Galerkin

Approximation - Two Regions Assumed

The expressions for the flexural deflection at its region are:

$$w_1 = A_1 x^4 + B_1 x^3 + \Gamma_1 x^2 + \Delta_1 x$$

$$w_2 = A_2 x^4 + B_2 x^3 + \Gamma_2 x^2 + \Delta_2 x$$

$$\left\{ \left\{ \Delta_1 \rightarrow 3 \alpha^3, \Delta_2 \rightarrow -5 \alpha^3, B_1 \rightarrow -4 \alpha, \Gamma_1 \rightarrow 0, B_2 \rightarrow \frac{10 \alpha^2}{(\alpha - 1)^2}, \Gamma_2 \rightarrow -6 \alpha^2, A_2 \rightarrow \frac{\alpha^2 (\alpha + 4)}{(\alpha - 1)^3} \right\} \right\}$$

$$A_1 = 1, B_1 = -4 \alpha, \Gamma_1 = 0, \Delta_1 = 3 \alpha^3, A_2 = \frac{\alpha^2 (\alpha + 4)}{(\alpha - 1)^3}, B_2 = \frac{10 \alpha^2}{(\alpha - 1)^2}, \Gamma_2 = -6 \alpha^2, \Delta_2 = -5 \alpha^3$$

Σχήμα Β.3.1 Αποτελέσματα για την αμφιέρειστη δοκό θεωρώντας δύο περιοχές (μία σε επαφή και μία χωρίς επαφή)

```

ClearAll[w1, w2, x1, x2, α, A1, A2, B1, B2, Γ2, Δ1, Δ2, rf1, rf2,
  root1, root2]
Print[Style["Pinned - Pinned Beam - Column", Bold, Blue, 24]]
Print[
  Style[
    "4th Order Polynomial Galerkin Approximation - Two
      Regions Assumed", Bold, Blue, 24]]
Print[Style["Proof for existence of acceptable deformation",
  Bold, Blue, 20]]
(A1 = 1);
A2 =  $\frac{\alpha^2 (4 + \alpha)}{(-1 + \alpha)^3}$ ; (B1 = -4 α); B2 =  $\frac{10 \alpha^2}{(-1 + \alpha)^2}$ ; (Γ2 = -6 α2);
(Δ1 = 3 α3);
(Δ2 = -5 α3);

```

Σχήμα Β.3.2 Απόδειξη για την αμφιέρειστη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

```

Print[Style["Factoring the 1st polynomial", Bold, Magenta, 20]];
w1 = Factor[A1 x1^4 + B1 x1^3 + A1 x1];
Print[
Style[
"Equation  $x_1^2 - 3 x_1 \alpha - 3 \alpha^2$  must contain no roots between
0 and  $\alpha$ ", Bold, Magenta, 20]];
(rf1 = x1^2 - 3 x1  $\alpha$  - 3  $\alpha^2$ ); FullSimplify[Solve[rf1 == 0, x1]];
Print[
Style[
"These roots are  $x_1 = \frac{1}{2} (-3 + \sqrt{21}) \alpha = -0.791288 \alpha < 0$ 
and  $\frac{1}{2} (3 + \sqrt{21}) \alpha > \alpha$ ", Bold, Magenta, 18]]];
Print[Style["This is always true", Bold, Red, 18]];
Print[Style["This is always true", Bold, Red, 18]];
Print[Style["Factoring the 2nd polynomial", Bold, Magenta, 20]];
w2 = Factor[A2 x2^4 + B2 x2^3 + r2 x2^2 + A2 x2];
(rf2 = -6 x2 + 4 x2^2 - 5  $\alpha$  + 7 x2  $\alpha$  + x2^2  $\alpha$  + 10  $\alpha^2$  - x2  $\alpha^2$  - 5  $\alpha^3$ );
Print[
Style[
"Equation  $-6 x_2 + 4 x_2^2 - 5 \alpha + 7 x_2 \alpha + x_2^2 \alpha + 10 \alpha^2 - x_2 \alpha^2 - 5 \alpha^3$ 
must contain no roots between 0 and  $1 - \alpha$ ", Bold,
Magenta, 20]]; FullSimplify[Solve[rf2 == 0, x2]];
Print[
Style[
"These roots are  $x_2 = -\frac{(-1 + \alpha) (6 - \alpha + \sqrt{(2 + 3 \alpha) (18 + 7 \alpha)})}{2 (4 + \alpha)}$ 
and  $\frac{(-1 + \alpha) (-6 + \alpha + \sqrt{(2 + 3 \alpha) (18 + 7 \alpha)})}{2 (4 + \alpha)}$ ", Bold, Magenta, 18]]];
root1 = -\frac{(-1 + \alpha) (6 - \alpha + \sqrt{(2 + 3 \alpha) (18 + 7 \alpha)})}{2 (4 + \alpha)};
root2 = \frac{(-1 + \alpha) (-6 + \alpha + \sqrt{(2 + 3 \alpha) (18 + 7 \alpha)})}{2 (4 + \alpha)};
Print[Style["The Reduce Command shows that this is always true",
Bold, Red, 18]]; N[Reduce[root1 < 1 -  $\alpha$  && root1 > 0 &&  $\alpha$  > 0 &&  $\alpha$  < 1, R]]
N[Reduce[root2 < 1 -  $\alpha$  && root2 > 0 &&  $\alpha$  > 0 &&  $\alpha$  < 1, R]]

```

Pinned - Pinned Beam - Column

4th Order Polynomial Galerkin

Approximation - Two Regions Assumed

Proof for existence of acceptable deformation

Σχήμα Β.3.2 Απόδειξη για την αμφιέρειστη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

Factoring the 1st polynomial

Equation $x_1^2 - 3x_1\alpha - 3\alpha^2$

must contain no roots between 0 and α

These roots are $x_1 = \frac{1}{2} (-3 + \sqrt{21})$

$\alpha = -0.791288$ $\alpha < 0$ and $\frac{1}{2} (3 + \sqrt{21}) \alpha > \alpha$

This is always true

Factoring the 2nd polynomial

Equation $-6x_2 + 4x_2^2 - 5\alpha + 7x_2\alpha + x_2^2\alpha + 10\alpha^2 - x_2$

$\alpha^2 - 5\alpha^3$ must contain no roots between 0 and $1 - \alpha$

These roots are $x_2 = -\frac{(-1 + \alpha) \left(6 - \alpha + \sqrt{(2 + 3\alpha)(18 + 7\alpha)} \right)}{2(4 + \alpha)}$

and $\frac{(-1 + \alpha) \left(-6 + \alpha + \sqrt{(2 + 3\alpha)(18 + 7\alpha)} \right)}{2(4 + \alpha)}$

The Reduce Command shows that this is always true

False

False

Σχήμα Β.3.2 Απόδειξη για την αμφιέρειστη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές

```
ClearAll[A1, A2, B1, B2, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2, E1, E2, w1, w2, w1t, w2t, w1tt,
w2tt, α, R1, R2, R3, R4, S1, S2, J1, x]
Print[Style["Fixed - Fixed Beam - Column", Bold, Blue, 24]]
Print[
Style["4th Order Polynomial Galerkin Approximation - Two Regions Assumed",
Bold, Blue, 24]]
Print[
Style["The expressions for the flexural deflection at its region are:",
Bold, Blue, 20]]
A1 = 1;
w1 = A1 * x^4 + B1 * x^3 + Γ1 * x^2 + Δ1 * x;
w2 = A2 * x^4 + B2 * x^3 + Γ2 * x^2 + Δ2 * x;
w1t = ∂xw1;
w1tt = ∂xw1t;
w1ttt = ∂xw1tt;
w2t = ∂xw2;
w2tt = ∂xw2t;
w2ttt = ∂xw2tt;
R1 = w1 /. x → α;
```

Σχήμα Β.3.3 Αποτελέσματα για την αμφίπακτη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές – συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

```

R3 = w2t /. x -> 1 - α;
R4 = w2 /. x -> 1 - α;
J1 = w1t /. x -> 0;
S1 = (w1t /. x -> α) - (w2t /. x -> 0);
S2 = (w1tt /. x -> α) - (w2tt /. x -> 0);
R2 = (w1ttt /. x -> α) - (w2ttt /. x -> 0);
FullSimplify[Solve[{R1 == 0, R3 == 0, R4 == 0, S1 == 0, S2 == 0, R2 == 0, J1 == 0},
  {B1, B2, Γ2, Δ1, Δ2, A2, Γ1}]] // TraditionalForm
Print[
  Style[
    "A1 = 1 , B1 = -4 α , Γ1 = 3 α2 , Δ1 = 0 , A2 =  $\frac{\alpha^2 (3 + \alpha)}{(-1 + \alpha)^3}$  , B2 =  $\frac{6 \alpha^2}{(-1 + \alpha)^2}$  , Γ2 = -3 α2 , Δ2 = -2 α3 ", Bold, Blue, 18]]

```

Fixed - Fixed Beam - Column

4th Order Polynomial Galerkin Approximation - Two Regions Assumed

The expressions for the flexural deflection at its region are:

$$\left\{ \left\{ \Gamma_1 \rightarrow 3\alpha^2, \Delta_1 \rightarrow 0, B_1 \rightarrow -4\alpha, B_2 \rightarrow \frac{6\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \Gamma_2 \rightarrow -3\alpha^2, \Delta_2 \rightarrow -2\alpha^3, A_2 \rightarrow \frac{\alpha^2(\alpha+3)}{(\alpha-1)^3} \right\} \right\}$$

$$A_1 = 1, B_1 = -4\alpha, \Gamma_1 = 3\alpha^2, \Delta_1 = 0$$

$$, A_2 = \frac{\alpha^2(3+\alpha)}{(-1+\alpha)^3}, B_2 = \frac{6\alpha^2}{(-1+\alpha)^2}, \Gamma_2 = -3\alpha^2, \Delta_2 = -2\alpha^3$$

Σχήμα Β.3.3 Αποτελέσματα για την αμφίπακτη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές

```

ClearAll[w1, w2, x, α, A1, A2, B1, B2, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2, rf, root]
A1 = 1;
A2 =  $\frac{\alpha^2 (3 + \alpha)}{(-1 + \alpha)^3}$ ;
B1 = -4 α;
B2 =  $\frac{6 \alpha^2}{(-1 + \alpha)^2}$ ;
Γ2 = -3 α2;
Γ1 = 3 α2;
Δ1 = 0;
Δ2 = -2 α3;
w1 = Factor[A1 * x4 + B1 * x3 + Γ1 * x2 + Δ1 * x]
w2 = Factor[A2 * x4 + B2 * x3 + Γ2 * x2 + Δ2 * x]
rf = 3 x + 2 α + x α - 2 α2;
FullSimplify[Solve[rf == 0, x]]
root =  $\frac{2 (-1 + \alpha) \alpha}{3 + \alpha}$ ;
N[Reduce[root > 0 && α > 0 && α < 1, R]]

```

$$x^2 (x - 3 \alpha) (x - \alpha)$$

$$\frac{x \alpha^2 (-1 + x + \alpha)^2 (3 x + 2 \alpha + x \alpha - 2 \alpha^2)}{(-1 + \alpha)^3}$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{2 (-1 + \alpha) \alpha}{3 + \alpha} \right\} \right\}$$

False

Σχήμα Β.3.4 Απόδειξη για την αμφίπακτη δοκό, θεωρώντας δύο περιοχές

```

ClearAll[A1, A2, A3, B1, B2, B3, Γ1, Γ2, Γ3, Δ1, Δ2, Δ3, E1, E2, E3, w1,
w2, w3, w1t, w2t, w3t, w1tt, w2tt, w3tt, w1ttt, w2ttt, w3ttt, α1, α2,
C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12, C13, C14, C15, x]
A1 = 1;
w1 = A1 * x^4 + B1 * x^3 + Γ1 * x^2 + Δ1 * x + E1;
w2 = A2 * x^4 + B2 * x^3 + Γ2 * x^2 + Δ2 * x + E2;
w3 = A3 * x^4 + B3 * x^3 + Γ3 * x^2 + Δ3 * x + E3;
w1t = ∂xw1;
w1tt = ∂xw1t;
w1ttt = ∂xw1tt;
w2t = ∂xw2;
w2tt = ∂xw2t;
w2ttt = ∂xw2tt;
w3t = ∂xw3;
w3tt = ∂xw3t;
w3ttt = ∂xw3tt;
C1 = w1 /. x -> 0;
C2 = w1 /. x -> α1;
C3 = w2 /. x -> 0;
C4 = w2 /. x -> α2;
C5 = w3 /. x -> 0;
C6 = w3 /. x -> (1 - α1 - α2);
C7 = w1tt /. x -> 0;
C8 = w3ttt /. x -> (1 - α1 - α2);
C9 = (w1t /. x -> α1) - (w2t /. x -> 0);
C10 = (w2t /. x -> α2) - (w3t /. x -> 0);
C11 = (w1tt /. x -> α1) - (w2tt /. x -> 0);
C12 = (w1ttt /. x -> α2) - (w3ttt /. x -> 0);
C13 = (w1ttt /. x -> α1) - (w2ttt /. x -> 0);
C14 = (w2ttt /. x -> α2) - (w3ttt /. x -> 0);
FullSimplify[
Solve[{C1 == 0, C2 == 0, C3 == 0, C4 == 0, C5 == 0, C6 == 0, C7 == 0, C8 == 0, C9 == 0,
C10 == 0, C11 == 0, C12 == 0, C13 == 0, C14 == 0},
{A2, A3, B1, B2, B3, Γ1, Γ2, Γ3, Δ1, Δ2, Δ3, E1, E2, E3}]]

```

$$\left\{ \left\{ A2 \rightarrow \frac{-10 \alpha_1^3 + 2 (5 - 8 \alpha_1) \alpha_1 \alpha_2 - 5 (1 + \alpha_1) \alpha_2^2 + 5 \alpha_2^3}{\alpha_2^3}, \right. \right. \\
B2 \rightarrow \frac{15 \alpha_1^3 + 22 \alpha_1^2 \alpha_2 + 5 \alpha_1 (-2 + \alpha_2) \alpha_2 - 5 (-1 + \alpha_2) \alpha_2^2}{\alpha_2^2}, E2 \rightarrow 0, \Delta 1 \rightarrow 3 \alpha_1^3, \\
E1 \rightarrow 0, \Delta 2 \rightarrow -5 \alpha_1^3, E3 \rightarrow 0, \Gamma 2 \rightarrow -6 \alpha_1^2, \Delta 3 \rightarrow -5 (2 \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_2 (-1 + \alpha_1 + \alpha_2), \\
B1 \rightarrow -4 \alpha_1, \Gamma 1 \rightarrow 0, \Gamma 3 \rightarrow 6 \alpha_2 (-2 \alpha_1 + \alpha_2), A3 \rightarrow \frac{(2 \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_2}{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2)^2}, B3 \rightarrow 0 \left. \right\} \left. \right\}$$

Σχήμα Β.3.5 Αποτελέσματα για την αμφιέρειστη δοκό, θεωρώντας τρεις περιοχές

```

ClearAll[w1, w2, w3, x, α1, α2, A1, A2, A3, B1, B2, B3, Γ1, Γ2, Γ3, Δ1, Δ2, Δ3, E1,
  E2, E3, β, δ, λ3, λ1, λ2, f1, f2, f, rf1, rf2, rf3, x1, x2, zz3, x3, x4, dsc]
w1 = A1 * x^4 + B1 * x^3 + Γ1 * x^2 + Δ1 * x + E1;
w2 = A2 * x^4 + B2 * x^3 + Γ2 * x^2 + Δ2 * x + E2;
w3 = A3 * x^4 + B3 * x^3 + Γ3 * x^2 + Δ3 * x + E3;
A1 = 1;
A2 = 
$$\frac{-10 \alpha_1^3 + 2 (5 - 8 \alpha_1) \alpha_1 \alpha_2 - 5 (1 + \alpha_1) \alpha_2^2 + 5 \alpha_2^3}{\alpha_2^3};$$

B2 = 
$$\frac{15 \alpha_1^3 + 22 \alpha_1^2 \alpha_2 + 5 \alpha_1 (-2 + \alpha_2) \alpha_2 - 5 (-1 + \alpha_2) \alpha_2^2}{\alpha_2^2};$$

E2 = 0;
Δ1 = 3 α1^3;
E1 = 0;
Δ2 = -5 α1^3;
E3 = 0;
Γ2 = -6 α1^2;
Δ3 = -5 (2 α1 - α2) α2 (-1 + α1 + α2);
B1 = -4 α1;
Γ1 = 0;
Γ3 = 6 α2 (-2 α1 + α2);
A3 = 
$$\frac{(2 \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_2}{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2)^2};$$

B3 = 0;
w1 = Factor[A1 * x^4 + B1 * x^3 + Γ1 * x^2 + Δ1 * x + E1]
w2 = Factor[A2 * x^4 + B2 * x^3 + Γ2 * x^2 + Δ2 * x + E2]
w3 = Factor[A3 * x^4 + B3 * x^3 + Γ3 * x^2 + Δ3 * x + E3]
rf1 = x^2 - 3 x α1 - 3 α1^2;
rf2 = 10 x^2 α1^3 - 10 x^2 α1 α2 + 16 x^2 α1^2 α2 - 5 x α1^3 α2 + 5 x^2 α2^2 + 5 x^2 α1 α2^2 - 6 x α1^2 α2^2 -
  5 α1^3 α2^2 - 5 x^2 α2^3;
rf3 = 5 + x + x^2 + 10 α1 - x α1 - 5 α1^2 + 10 α2 - x α2 - 10 α1 α2 - 5 α2^2;
Solve[rf1 == 0, x];
Print["Additional Roots of w1"]
x1 = 
$$\frac{1}{2} (3 \alpha_1 - \sqrt{21} \alpha_1)$$

x2 = 
$$\frac{1}{2} (3 \alpha_1 + \sqrt{21} \alpha_1)$$

Print["Both outside the interval [0,α] according to the outcome of the Reduce Command"]
Reduce[x1 < 0 && α1 > 0, α1]
Reduce[x2 > α1 && α1 > 0, α1]
Print["Additional Roots of w3"]
Solve[rf3 == 0, x]
zz3 = -19 - 42 α1 + 21 α1^2 - 42 α2 + 42 α1 α2 + 21 α2^2;
Print["Both imaginary since their discriminant is negative"]
Reduce[zz3 >= 0 && α1 > 0 && α1 < 1 && α2 > 0 && α2 < 1, Reals]
Print["Additional Roots of w2"]
Solve[rf2 == 0, x]
x3 =

$$\left( \frac{5 \alpha_1^3 \alpha_2 + 6 \alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_1^{3/2} \alpha_2 \sqrt{225 \alpha_1^3 - 200 \alpha_1 \alpha_2 + 380 \alpha_1^2 \alpha_2 + 100 \alpha_2^2 + 136 \alpha_1 \alpha_2^2 - 100 \alpha_2^3}}{2 (10 \alpha_1^3 - 10 \alpha_1 \alpha_2 + 16 \alpha_1^2 \alpha_2 + 5 \alpha_2^2 + 5 \alpha_1 \alpha_2^2 - 5 \alpha_2^3)} \right);$$

x4 = 
$$\left( \frac{5 \alpha_1^3 \alpha_2 + 6 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^{3/2} \alpha_2 \sqrt{225 \alpha_1^3 - 200 \alpha_1 \alpha_2 + 380 \alpha_1^2 \alpha_2 + 100 \alpha_2^2 + 136 \alpha_1 \alpha_2^2 - 100 \alpha_2^3}}{2 (10 \alpha_1^3 - 10 \alpha_1 \alpha_2 + 16 \alpha_1^2 \alpha_2 + 5 \alpha_2^2 + 5 \alpha_1 \alpha_2^2 - 5 \alpha_2^3)} \right);$$

Print["x3 is always outside the interval [0,α2]"]
N[Reduce[x3 > 0 && x3 < α2 && α1 > 0 && α2 > 0 && α1 < 1 && α2 < 1 && 1 - α1 - α2 > 0,
  {α1, α2}, Reals]] // TraditionalForm
Print["but x4 is always inside, thus unacceptable results are produced"]
N[Reduce[x4 > 0 && x4 < α2 && α1 > 0 && α2 > 0 && α1 < 1 && α2 < 1 && 1 - α1 - α2 > 0, ,
  {α1, α2}, Reals]] // TraditionalForm

```

Σχήμα Β.3.6 Απόδειξη για την αμφιέριστη δοκό, θεωρώντας τρεις περιοχές – *συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα*

$$x (x - \alpha 1) (x^2 - 3 x \alpha 1 - 3 \alpha 1^2)$$

$$- \frac{1}{\alpha 2^3} x (x - \alpha 2) (10 x^2 \alpha 1^3 - 10 x^2 \alpha 1 \alpha 2 + 16 x^2 \alpha 1^2 \alpha 2 - 5 x \alpha 1^3 \alpha 2 + 5 x^2 \alpha 2^2 + 5 x^2 \alpha 1 \alpha 2^2 - 6 x \alpha 1^2 \alpha 2^2 - 5 \alpha 1^3 \alpha 2^2 - 5 x^2 \alpha 2^3)$$

$$- \frac{1}{(-1 + \alpha 1 + \alpha 2)^2} x \alpha 2 (-2 \alpha 1 + \alpha 2) (-1 + x + \alpha 1 + \alpha 2) (-5 + x + x^2 + 10 \alpha 1 - x \alpha 1 - 5 \alpha 1^2 + 10 \alpha 2 - x \alpha 2 - 10 \alpha 1 \alpha 2 - 5 \alpha 2^2)$$

Additional Roots of w1

$$\frac{1}{2} (3 \alpha 1 - \sqrt{21} \alpha 1)$$

$$\frac{1}{2} (3 \alpha 1 + \sqrt{21} \alpha 1)$$

Both outside the interval $[0, \alpha]$ according to the outcome of the Reduce Command

$$\alpha 1 > 0$$

$$\alpha 1 > 0$$

Additional Roots of w3

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(-1 + \alpha 1 + \alpha 2 - \sqrt{-19 - 42 \alpha 1 + 21 \alpha 1^2 - 42 \alpha 2 + 42 \alpha 1 \alpha 2 + 21 \alpha 2^2} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(-1 + \alpha 1 + \alpha 2 + \sqrt{-19 - 42 \alpha 1 + 21 \alpha 1^2 - 42 \alpha 2 + 42 \alpha 1 \alpha 2 + 21 \alpha 2^2} \right) \right\} \right\}$$

Both imaginary since their discriminant is negative

$$\text{False}$$

Additional Roots of w2

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{\left(5 \alpha 1^3 \alpha 2 + 6 \alpha 1^2 \alpha 2^2 - \alpha 1^{3/2} \alpha 2 \sqrt{225 \alpha 1^3 - 200 \alpha 1 \alpha 2 + 380 \alpha 1^2 \alpha 2 + 100 \alpha 2^2 + 136 \alpha 1 \alpha 2^2 - 100 \alpha 2^3} \right)}{2 (10 \alpha 1^3 - 10 \alpha 1 \alpha 2 + 16 \alpha 1^2 \alpha 2 + 5 \alpha 2^2 + 5 \alpha 1 \alpha 2^2 - 5 \alpha 2^3)} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{\left(5 \alpha 1^3 \alpha 2 + 6 \alpha 1^2 \alpha 2^2 + \alpha 1^{3/2} \alpha 2 \sqrt{225 \alpha 1^3 - 200 \alpha 1 \alpha 2 + 380 \alpha 1^2 \alpha 2 + 100 \alpha 2^2 + 136 \alpha 1 \alpha 2^2 - 100 \alpha 2^3} \right)}{2 (10 \alpha 1^3 - 10 \alpha 1 \alpha 2 + 16 \alpha 1^2 \alpha 2 + 5 \alpha 2^2 + 5 \alpha 1 \alpha 2^2 - 5 \alpha 2^3)} \right\} \right\}$$

x3 is always outside the interval $[0, \alpha 2]$

$$\text{False}$$

but x4 is always inside, thus unacceptable results are produced

$$\text{True}$$

Σχήμα Β.3.6 Απόδειξη για την αμφιέρειστη δοκό, θεωρώντας τρεις περιοχές