ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

Λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

Γεωργία Φωτοπούλου

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Υπεύθυνη
Μαρία Αδάμ
Επίκουρος Καθηγήτρια

Λαμία, 2011

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη των λύσεων της μη-γραμμικής εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, όταν A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, Q ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας και s,t φυσικοί αριθμοί. Η εξίσωση απορρέει από τη μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα, που υπάρχουν έως σήμερα στη διεθνή αρθογραφία για την εξίσωση $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, και αναπτύσσονται νέα αποτελέσματα για την αλγεβρική επίλυσή της όταν $s = t$.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στις βασικές έννοιες πινάκων, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στον ορισμό και στις ιδιότητες της αριθμητικής ακτίνας ενός τετραγωνικού πίνακα, έννοια σημαντική από την οποία προκύπτουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια μέθοδος για τον υπολογισμό των λύσεων (Ερμιτιανών και μη-Ερμιτιανών) της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, η οποία βασίζεται στην αλγεβρική επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης Riccati διακριτού χρόνου. Επίσης αποδεικνύεται ότι ο συνολικός αριθμός των λύσεων είναι πεπερασμένος και προσδιορίζεται ο ακριβής αριθμός κάθε είδους λύσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, και διατυπώνεται ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$. Όλες οι Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ υπολογίζονται καθώς και το πλήθος τους. Εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε δίνεται για τον υπολογισμό της μέγιστης θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$. Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας, παρουσιάζεται ο κώδικας σε Matlab που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, και χρησιμοποιείται στα παραδείγματα.

Λέξεις κλειδιά: ιδιοτιμή – ιδιοδιάνυσμα – διαγωνοποίηση πίνακα, αριθμητική ακτίνα, συμπλεκτικός πίνακας, εξίσωση Riccati.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of the solutions of the nonlinear equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, where A is a $n \times n$ nonsingular matrix, Q is a $n \times n$ positive definite matrix and s,t are nature numbers. The equation arises from the modelling of problems which are related with various research areas such as statistics, biology, economic and social sciences. In this thesis are presented the most important theorems, which are in the international bibliography for the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, and are developed new results for its algebraic solution when $s = t$.

In the first chapter are introduced the basic concepts of matrices, with emphasis on the definition and the properties of the numerical radius of a $n \times n$ matrix, which is important in showing the necessary and sufficient conditions for the existence of the solutions of the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$. In the second chapter is presented a method for calculating the solutions (Hermitian and non-Hermitian) of the equation $X + A^* X^{-1} A = Q$, which is based on the algebraic solution of the corresponding Riccati equation of discrete time. It is also proved that the total number of the solutions is finite and the exact number of each type of solutions is formulated. In the third chapter sufficient conditions for the existence of positive definite solutions of the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$ are presented, and is given a necessary and sufficient condition for the existence of Hermitian solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$. All the Hermitian solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ are computed and their exact number. It is given an application of the theory that was developed, for the computation of the maximal positive definite solution of the equation $X^s - A^* X^{-s} A = Q$. In the end of this thesis, is presented the Matlab code, which was developed for the computation of the solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, and it is used in the examples.

Keywords: eigenvalue – eigenvector – spectral decomposition, numerical radius, symplectic matrix, Riccati equation

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

Λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεωργία Φωτοπούλου

Επιβλέπουσα: Μαρία Αδάμ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ………… Οκτωβρίου 2011.

Λαμία, 2011

Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος από τον Οκτώβριο του 2010 έως το Σεπτέμβριο 2011.

Έχοντας ολοκληρώσει την πτυχιακή εργασία μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

Την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα. Μαρία Αδάμ, Επίκουρο Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος, κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια της υλοποίησης της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση της, για την επίλυση διάφορων θεμάτων σε όλη την πορεία της ανάπτυξης και της συγγραφής αυτής της εργασίας.

Τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κ. Βασίλειο Πλαγιανάκο και κ. Παντελή Μπάγκο Επίκουρους Καθηγητές στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος, για τις γόνιμες συζητήσεις μας πάνω σε θέματα που σχετίζονταν με το θέμα της παρούσας πτυχιακής εργασίας καθώς και για τη συμμετοχή τους στην Εξεταστική Επιτροπή, διαβεβαιώνοντάς τους ότι οι παρατηρήσεις τους θα ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν και θα ενσωματωθούν στο τελικό κείμενο.

Το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος και τους διδάσκοντες για το θετικό ακαδημαϊκό κλίμα και την άψογη συνεργασία μας. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Νικόλαο Ασημάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Λαμίας, για την ερευνητική συνεργασία μας σε θέματα που σχετίζονται με την παρούσα εργασία καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια του στην επίλυση των αποριών που προέκυπταν καθ' όλη τη διάρκεια υλοποίησης της εργασίας.

Το συμφοιτητή μου Χρήστο Δέδε, τόσο για την εποικοδομητική βοήθεια που μου παρείχε σε τεχνικά θέματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της εργασίας όσο και για την ψυχολογική υποστήριξή του. Επιπλέον, το μεταπτυχιακό φοιτητή Χρήστο Ξάνθη, για την πολύτιμη συμβολή του στην ανάπτυξη του κώδικα μιας συνάρτησης στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου και στους φίλους μου, οι οποίοι στήριξαν με ποικίλους τρόπους τις σπουδές μου,

φροντίζοντας για την όσο το δυνατόν καλύτερη, πολύπλευρη και ολοκληρωμένη μόρφωση μου.

Λαμία, Οκτώβριος 2011

Γεωργία Φωτοπούλου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Βασικές έννοιες πινάκων 5

1.1 Άλγεβρα πινάκων 5

1.1.1 Βασικοί ορισμοί 5

1.1.2 Είδη πινάκων 7

1.1.3 Πράξεις πινάκων 13

1.1.4 Ιδιότητες άλγεβρας πινάκων 15

1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη και ανάλυση τετραγωνικού πίνακα 17

1.2.1 Χαρακτηριστικά ποσά.. 17

1.2.2 Ανάλυση τετραγωνικού πίνακα 22

1.3 Νόρμες 25

1.3.1 Νόρμες διανυσμάτων 25

1.3.2 Νόρμες πινάκων 27

1.3.3 Ιδιότητες νορμών 28

1.3.4 Ιδιότητες αριθμητικής ακτίνας πίνακα 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Υπολογισμός όλων των λύσεων της εξίσωσης $X + A^*X^{-1}A = Q$ 33

2.1 Εφαρμογές της εξίσωσης 34

2.2 Συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης $X + A^*X^{-1}A = Q$ 39

2.3 Υπολογισμός των λύσεων της $X + A^*X^{-1}A = Q$ 41

2.4 Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $X + A^*X^{-1}A = Q$ 59

2.5 Αλγεβρικός υπολογισμός των λύσεων της $X - A^*X^{-1}A = Q$ 71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Υπολογισμός των Ερμιτιανών λύσεων της
εξίσωσης $X^s + A^*X^{-t}A = Q$ 73

3.1 Βιβλιογραφική ανασκόπηση 74

3.2 Θετικά ορισμένες λύσεις της $X^s + A^*X^{-t}A = Q$ 75

3.2.1 Ικανές συνθήκες ύπαρξης θετικά ορισμένων λύσεων 75

3.2.2 Ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης λύσεων της $X^s + A^*X^{-s}A = Q$ 78

3.2.3 Τύποι για τον υπολογισμό των Ερμιτιανών λύσεων της
$X^s + A^*X^{-s}A = Q$ 81

3.2.4 Πλήθος των λύσεων της $X^s + A^*X^{-s}A = Q$ 90

3.3 Μέγιστη λύση της εξίσωσης $X^s - A^*X^{-s}A = Q$ 95

Συμπεράσματα 101
Βιβλιογραφία 103
Παράρτημα Α 107
Παράρτημα Β 112

Πρόλογος

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετάται η επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, όπου A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, Q είναι ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας και s, t φυσικοί αριθμοί.

Η εξίσωση αυτή εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές ποικίλων ερευνητικών περιοχών, όπως η θεωρία ελέγχου, το στοχαστικό φιλτράρισμα, η στατιστική, κ.α.. [4, 6, 44] και τα τελευταία σαράντα χρόνια μελετάται από πολλούς ερευνητές [2-3, 8, 11-12, 16, 18-19, 21-22, 24-32, 35-36, 41-42, 44-46] . Έχουν διατυπωθεί ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη συμμετρικών, θετικά ορισμένων λύσεων, στη δε περίπτωση ύπαρξης λύσεων έχουν αποδειχθεί αποτελέσματα που δίνουν πληροφορίες για τη φασματική θεωρία των πινάκων A, Q καθώς και των *ακραίων* θετικά ορισμένων *λύσεών της*. Επίσης αρκετά πρόσφατα αναπτύχθηκαν αναδρομικοί αλγόριθμοι υπολογισμού των ακραίων λύσεών της. Στην ειδική περίπτωση που $s = t = 1$ έχουν αναπτυχθεί αλγοριθμικές και αλγεβρικές μέθοδοι υπολογισμού όλων των λύσεων (Ερμιτιανών και μη-Ερμιτιανών).

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας-αρθογραφίας και η επέκταση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και τεχνικών στον υπολογισμό των λύσεων της $X^s + A^* X^{-t} A = Q$. Ειδικότερα για $s = t$, όλες οι Ερμιτιανές λύσεις της μη-γραμμικής εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ υπολογίζονται μέσα από κλειστό τύπο, η μέθοδος βασίζεται στην αλγεβρική επίλυση μιας ισοδύναμης εξίσωσης Riccati. Επίσης, ως εφαρμογή της αλγεβρικής επίλυσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ παρουσιάζεται και ο αλγεβρικός υπολογισμός της μέγιστης λύσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$.

Κάθε κεφάλαιο της πτυχιακής αυτής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε τμήματα τα οποία αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικά αριθμούνται με τρεις αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στο τμήμα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεση του τμήματος. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα πορίσματα, τα λήμματα, οι τύποι και τα παραδείγματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισης.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας πινάκων, ορίζονται τα σημαντικότερα είδη πινάκων και γίνεται αναφορά στην άλγεβρα πινάκων και στις ιδιότητές τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου ορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός τετραγωνικού πίνακα, η ιδιοτιμή και τα ιδιοδιανύσματά του, και δίνεται μια χρήσιμη εφαρμογή τους στο θεώρημα διαγωνοποίησης του πίνακα. Επίσης ορίζονται οι έννοιες νόρμα διανύσματος, νόρμα πίνακα, και παρουσιάζονται οι σημαντικότερες ιδιότητες αυτών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον ορισμό και στις ιδιότητες της αριθμητικής ακτίνας ενός τετραγωνικού πίνακα, έννοια καθοριστική για τη διατύπωση ικανών και αναγκαίων συνθηκών ύπαρξης λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αποδεικνύονται οι ιδιότητες που συνδέουν τη νόρμα πίνακα με την αριθμητική ακτίνα του. Για τη διατύπωση του πρώτου κεφαλαίου έγινε ανασκόπηση στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η μη γραμμική εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$, η οποία είναι ειδικότερη περίπτωση για $s = t = 1$. Αρχικά παρουσιάζονται δύο εφαρμογές της εξίσωσης, η μια σχετίζεται με το χρονικά αμετάβλητο Kalman φίλτρο και η άλλη με πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, που έχει έναν περιορισμό. Και τα δύο παραδείγματα καταλήγουν σε μια εξίσωση Riccati διακριτού χρόνου, η οποία είναι της μορφής $X + A^* X^{-1} A = Q$. Στη συνέχεια διατυπώνεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης Ερμιτιανών θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, η οποία συνθήκη αποδείχθηκε από τους Engwerda, Ran και Rijkeboer [19] και σχετίζεται με την αριθμητική ακτίνα του πίνακα $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$. Οι *ακραίες λύσεις* της εξίσωσης υπολογίζονται με τη χρήση αναδρομικών αλγορίθμων. Μια αλγεβρική μέθοδος παρουσιάζεται, με την οποία υπολογίζονται όλες οι λύσεις (Ερμιτιανές και μη-Ερμιτιανές) της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, ως συνάρτηση των ιδιοδιανυσμάτων ενός συμπλεκτικού πίνακα. Επίσης αποδεικνύεται ότι, όταν υπάρχουν λύσεις, ο συνολικός αριθμός των λύσεων είναι πεπερασμένος και προσδιορίζεται ο ακριβής αριθμός κάθε είδους λύσεων (Ερμιτιανών, πραγματικών μη-Ερμιτιανών).

Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου δίνεται μια εφαρμογή της μεθόδου για τον υπολογισμό των ακραίων λύσεων της εξίσωσης $X - A^* X^{-1} A = Q$, όπου A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και Q θετικά ορισμένος.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η γενικότερη μη γραμμική εξίσωση $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, όπου s, t είναι ακέραιοι αριθμοί. Αρχικά παρουσιάζονται οι συνθήκες που διατύπωσαν οι Duan – Liao [16] και οι Cai – Chen.[11] για την ύπαρξη Ερμιτιανών θετικά ορισμένων λύσεων. Στη συνέχεια αποδεικνύεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, η οποία εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα του πίνακα $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$. Αποδεικνύονται τύποι υπολογισμού όλων των Ερμιτιανών λύσεων καθώς και ο ακριβής πεπερασμένος αριθμός τους, όταν αυτές υπάρχουν. Δίνεται εφαρμογή της θεωρίας επίλυσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ στον υπολογισμό της μέγιστης λύσης της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα, ένας κατάλογος με τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο που πολλά από αυτά είναι χρήσιμα για περαιτέρω μελέτη των προαναφερόμενων εννοιών και εμβάθυνση, καθώς και δυο παραρτήματα. Στο πρώτο δίνεται ο κώδικας σε Matlab υπολογισμού όλων των Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, ο οποίος δημιουργήθηκε στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας για την αριθμητική επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων των Κεφαλαίων 2 και 3. Στο δεύτερο υπάρχει ο κώδικας σε Matlab που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αριθμητικής ακτίνας οποιουδήποτε τετραγωνικού πίνακα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες πινάκων

1.1 Άλγεβρα πινάκων

1.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1

Πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ (σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών ή σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών) ονομάζεται μια διάταξη των mn αριθμών a_{ij} του συνόλου $\mathbb{F}$ σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Οι αριθμοί a_{ij} ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα, τα δε a_{ii} ονομάζονται διαγώνια στοιχεία. Με βάση τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα $(m \times n)$ βρίσκουμε το **μέγεθος** ή τον **τύπο** του πίνακα. Συγκεκριμένα λέμε ότι ο πίνακας A είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Στη συνέχεια, ο πίνακας A συμβολίζεται (a_{ij}), $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ και με $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ σημειώνεται το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Δύο ή περισσότεροι πίνακες που έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών χαρακτηρίζονται ως πίνακες **ιδίου τύπου**.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένοι ειδικού τύπου πίνακες, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία.

- Ένας $1 \times n$ πίνακας λέγεται και **πίνακας-γραμμή**, ενώ ένας $m \times 1$ πίνακας λέγεται και **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα** και για συντομία θα σημειώνεται $\mathbb{F}^m$.
- Εάν όλα τα στοιχεία ενός $m \times n$ πίνακα είναι ίσα με μηδέν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με $0_{m \times n}$ ή απλά με 0.
- Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον πίνακα A, ο πίνακας που προκύπτει ονομάζεται **υποπίνακας** του A.

Ένας **υποπίνακας** του $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, που προκύπτει από τη διαγραφή των k τελευταίων γραμμών και στηλών του A, ονομάζεται **κύριος υποπίνακας** του A για κάθε $1 \le k < n$.

1.1.2 Είδη πινάκων

Ορισμός 1.2

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **σύνθετος** πίνακας ή block πίνακας, αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του A. Οι υποπίνακες αυτοί είναι τέτοιοι ώστε τα στοιχεία-**υποπίνακες**, που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, να έχουν όλα τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία-**υποπίνακες** που βρίσκονται στην ίδια στήλη, να έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία ο σύνθετος πίνακας συμβολίζεται $A=(A_{ij})$, όπου A_{ij} είναι το στοιχείο-υποπίνακας, που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα A και βρίσκεται στην i- γραμμή και j- στήλη του πίνακα A. Η διαμέριση του αρχικού πίνακα γίνεται με την χάραξη κατακόρυφων και οριζόντιων γραμμών, που διαχωρίζουν τις γραμμές και τις στήλες του αρχικού πίνακα.

Για παράδειγμα, έστω ο σύνθετος πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c|ccc} 2 & 1 & 6 & 7 & 12 & 3 \\ \hline 4i & 1+i & 1 & 1 & 7 & 20 \\ -2 & 5 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \end{array}\right),$$

όπου

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}, \quad A_{12}=\begin{pmatrix}6\end{pmatrix}, \quad A_{13}=\begin{pmatrix}7 & 12 & 3\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} 4i & 1+i \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.3

Έστω $A=(a_{ij})$ ένας $m\times n$ πίνακας. Ο $n\times m$ πίνακας (a_{ji}) ονομάζεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται A^T.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.4

Ο $n \times m$ πίνακας $(\overline{a}_{ji})$ ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και συμβολίζεται A^*. Προφανώς $A^* = \overline{A^T} = (\overline{A})^T$.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2i \\ 2-i & 4 & 5-i \end{pmatrix}$, τότε $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2i \\ 2+i & 4 & 5+i \end{pmatrix}$ και

$$A^* = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 3 & 4 \\ -2i & 5+i \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.5

Εάν ένας $m \times n$ πίνακας έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών $(m = n)$, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ συμβολίζεται $M_n(\mathbb{F})$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι τετραγωνικοί.

Ορισμός 1.6

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν για κάθε $i \neq j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο, που δε βρίσκεται στη διαγώνιο, είναι ίσο με μηδέν. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται και ως $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται $I_n = diag(1,1,\ldots,1)$.

Ορισμός 1.7

Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθομοναδιαίος** αν ισχύει:

$$UU^* = U^*U = I,$$

όπου $U^* = \overline{U^T}$.

Συνδυάζοντας τον παραπάνω ορισμό με τον Ορισμό 1.19, είναι φανερό ότι ισχύει

$$U^{-1} = U^*.$$

Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος, επειδή ισχύει

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση που $U \in M_n(\mathbb{R})$ ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος**, δηλαδή για έναν ορθογώνιο πίνακα ισχύει:

$$UU^T = U^TU = I.$$

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.19 με την προηγούμενη ισότητα γίνεται προφανές ότι για έναν ορθογώνιο πίνακα ισχύει

$$U^{-1} = U^T.$$

Ορισμός 1.8

Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **συμμετρικός**, αν για κάθε i, j ισχύει

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισχύει

$$A = A^T.$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.

Ορισμός 1.9

Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **Ερμιτιανός**, αν για κάθε i, j, ισχύει

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji} .$$

Ισοδύναμα ένας πίνακας λέγεται Ερμιτιανός αν και μόνο αν

$$A = A^* .$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 6 & 2-i & -4+i \\ 2+i & 1 & -2 \\ -4-i & -2 & 9 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός.

Ορισμός 1.10

Ένας τετραγωνικός πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **πίνακας μετάθεσης** (permutation matrix), αν τα στοιχεία του είναι 0 ή 1, έτσι ώστε σε κάθε γραμμή και στήλη να υπάρχει ένα μόνο 1.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι πίνακες μετάθεσης.

Ορισμός 1.11

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, που όλα τα στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί ονομάζεται **θετικός** (positive) πίνακας και ο πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται **μη-αρνητικός** (nonnegative) πίνακας.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι θετικός, ενώ $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός.

Ορισμός 1.12

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας. Αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα-πίνακας στήλη $x \in \mathbb{F}^n$ ισχύει

$$x^* A x > 0,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος πίνακας** (positive definite matrix), ενώ όταν ισχύει $x^* A x \geq 0$ ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** (positive semidefinite matrix) ή **μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας** (nonnegative definite matrix).

Στη συνέχεια ένας θετικά ορισμένος (ημιορισμένος) πίνακας A συμβολίζεται $A > 0$ $(A \geq 0)$.

Παράδειγμα 1.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8.6 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος, ενώ ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος ή μη-αρνητικά ορισμένος, (η απόδειξη στηρίζεται στην ιδιότητα (ii) της Πρότασης 1.2). ◊

Ορισμός 1.13

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας. Αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ ισχύει

$$x^* A x < 0,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αρνητικά ορισμένος πίνακας** (negative definite matrix), ενώ όταν ισχύει $x^* A x \leq 0$ ονομάζεται **αρνητικά ημιορισμένος πίνακας** (negative semidefinite matrix).

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

είναι αρνητικά ορισμένος, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

είναι αρνητικά ημιορισμένος.

Αν ο πίνακας δεν είναι θετικά ορισμένος (ημιορισμένος) πίνακας, αρνητικά (ημιορισμένος) ορισμένος πίνακας τότε ονομάζεται **αόριστος πίνακας** .

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι αόριστος.

Ορισμός 1.14

Η **αριθμητική ακτίνα** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ σημειώνεται $r(A)$ και ορίζεται να είναι :

$$r(A) = \max\{|z| : z = x^* Ax, \text{ για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα } x \in \mathbb{C}^n\} \qquad (1.1)$$

Σχόλια 1.1

i) Συνδυάζοντας τους Ορισμούς 1.9, 1.14 γίνεται φανερό ότι η αριθμητική ακτίνα ενός Ερμιτιανού (συμμετρικού) πίνακα σχετίζεται με τις ιδιοτιμές του, (βλέπε παράγραφο 1.3.4, ιδιότητα (i) της Πρότασης 1.4).

ii) Συνδυάζοντας τους Ορισμούς 1.12, 1.14 είναι φανερό ότι η μεγαλύτερη τιμή ενός θετικά ορισμένου πίνακα ταυτίζεται με την αριθμητική ακτίνα. Και όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου (βλέπε παράγραφο 1.3.4, ιδιότητα (ii) της Πρότασης 1.4) αυτή η τιμή σχετίζεται με τις ιδιοτιμές του πίνακα A και μάλιστα ισούται με τη μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του A .

1.1.3 Πράξεις πινάκων

Όπως και στους αριθμούς, έτσι και στους πίνακες υπάρχουν κάποιες βασικές πράξεις που μπορούν να εφαρμοστούν. Αυτές οι πράξεις είναι το άθροισμα πινάκων, ο πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό και ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

Ορισμός 1.15

Έστω $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Ως **άθροισμα** $A+B$ των πινάκων A και B ορίζεται ο πίνακας

$$A+B=(\gamma_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),$$

ο οποίος είναι επίσης του ιδίου τύπου με τους αρχικούς πίνακες και έχει ως στοιχεία τα αθροίσματα των ομόλογων στοιχείων των A και B, δηλαδή

$$A+B=(\gamma_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}).$$

Ορισμός 1.16

Έστω $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $k\in\mathbb{F}$. Το γινόμενο $k\cdot A$ του k επί τον A είναι πίνακας ιδίου τύπου με τον αρχικό πίνακα A, του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τα αντίστοιχα του A με πολλαπλασιασμό τους επί k. Δηλαδή, προκύπτει ο πίνακας $kA=(ka_{ij})$. Ο πολλαπλασιασμός αυτός ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** ή **πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό**.

Σχόλια 1.2

Ειδικά όταν $k=-1$, ο πίνακας $(-1)A$ συμβολίζεται $-A$ και ονομάζεται **αντίθετος** του A. Ως διαφορά δύο πινάκων θεωρείται ο πίνακας $A-B$ και είναι αποτέλεσμα των πράξεων $A+(-1)B$.

Ορισμός 1.17

Έστω $A=(a_{ij})\in M_{f\times m}(\mathbb{F})$ και $B=(b_{st})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε το **γινόμενο**, AB, των πινάκων A και B, είναι ο πίνακας

$$AB=(\gamma_{it})\in M_{f\times n}(\mathbb{F}),$$

==

όπου στη θέση (i, t) υπάρχει το στοιχείο

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kt} = a_{i1} b_{1t} + a_{i2} b_{2t} + \cdots + a_{im} b_{mt}.$$

Σχόλια 1.3

i) Το γινόμενο ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B και ότι το μέγεθος του AB είναι $f \times n$. Έτσι για παράδειγμα, αν A είναι 2×3 και B είναι 3×3, το γινόμενο AB ορίζεται και ο πίνακας AB είναι τύπου 2×3, ενώ το γινόμενο BA **δεν** ορίζεται.

ii) Επίσης, για δύο τετραγωνικούς πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα AB και BA, **δεν ισχύει** πάντα $AB = BA$.

Στην περίπτωση που ισχύει $AB = BA$ οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

Για παράδειγμα, έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Επειδή, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$,

είναι προφανές ότι $AB \neq BA$. Επομένως, οι πίνακες A, B **δεν** είναι αντιμεταθετικοί.

Ορισμός 1.18

Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται η $k-$ **δύναμη** του A ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k-\text{φορές}}, \ k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad A^0 = I_n.$$

Ορισμός 1.19

Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν υπάρχει ένας άλλος πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$, για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες

$$AB = BA = I_n,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αντιστρέψιμος**, ο δε B **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

1.1.4 Ιδιότητες άλγεβρας πινάκων

Από τις πράξεις των πινάκων προέκυψαν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες που είναι αρκετά χρήσιμες στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με πίνακες.

Από τους ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων (Ορισμός 1.15 και 1.16), προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες, όταν $A, B, \Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$.

1) $A + B = B + A$
2) $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$
3) $A + 0_{m\times n} = A$
4) $A - A = 0_{m\times n}$
5) $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$
6) $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$
7) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8) $1A = A$ και $0A = 0_{m\times n}$

Από την πρόσθεση πινάκων, το βαθμωτό πολλαπλασιασμό (πολλαπλασιασμό πίνακα επί αριθμό) και το γινόμενο πινάκων (Ορισμοί 1.15, 1.16, 1.17, αντίστοιχα) προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

1) Έστω $A \in M_{k\times l}(\mathbb{F})$, $B \in M_{l\times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$.
   (προσεταιριστική ιδιότητα)
2) Έστω $A \in M_{l\times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$.
   (αριστερά επιμεριστική ιδιότητα)
3) Έστω $A, B \in M_{l\times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$.
   (δεξιά επιμεριστική ιδιότητα)
4) Έστω $k \in \mathbb{F}$, $A \in M_{l\times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των πράξεων πινάκων (Ορισμοί 1.15, 1.16, 1.17) και τους ορισμούς του ανάστροφου, του αναστροφοσυζυγούς και του αντίστροφου πίνακα (Ορισμός 1.3, 1.4 και 1.9, αντίστοιχα) ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [10, 13, 15, 28, 33, 37]:

1) Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, έχουμε $A = (A^T)^T$ και $A = (A^*)^*$.
2) Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3) Έστω $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Τότε $(kA)^T = kA^T$ και $(kA)^* = \overline{k}A^*$.
4) Έστω $A \in M_{f\times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)^T = B^T A^T$ και $(AB)^* = B^* A^*$.
5) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός.

1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη και ανάλυση τετραγωνικού πίνακα

1.2.1 Χαρακτηριστικά ποσά

Ορισμός 1.20

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \quad \text{με } x \neq 0 \tag{1.2}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Η τιμή του λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα A και το x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A, αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ.
Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A συμβολίζεται $\sigma(A)$ και ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα.

Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, \text{για κάθε } \lambda_i \in \sigma(A)\} \tag{1.3}$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά μεγέθη** ή **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα A.

Η ισότητα (1.2) γράφεται ισοδύναμα

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα λύνοντας το γραμμικό σύστημα, που προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad \text{με } x \neq 0. \tag{1.4}$$

Επιπλέον, είναι φανερό ότι, για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ ενός τετραγωνικού πίνακα A, πρέπει το γραμμικό σύστημα της (1.4) να έχει μη μηδενική λύση, το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

δηλαδή, πρέπει να ισχύει

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.5)$$

Δηλαδή, όλες οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ του πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.5), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα A. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.5) καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού, το οποίο γράφεται

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0\,, \qquad (1.6)$$

το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A με συντελεστές $b_j \in \mathbb{F}$, $j = 0,1,\dots,n-1$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο $\mathbb{F}$ και μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}\,,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ στο $\mathbb{F}$ με $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i$ να είναι η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i = n\,.$$

Αν για κάποιο i ισχύει $\nu_i = 1$, η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται πολλαπλή.

Αντικαθιστώντας κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή, $\lambda = \lambda_i$, στο σύστημα (1.4) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με $V(\lambda_i)$.

Ορισμός 1.21

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{x \in \mathbb{F}^n : \quad (A - \lambda_i I)x = 0\}$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος**[1], που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένας μη κενό υποσύνολο του $M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^n$.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i, και η διάσταση του υποχώρου $V(\lambda_i)$ είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - rank(A - \lambda_i I),$$

όπου $rank(A - \lambda_i I)$ σημειώνεται ο βαθμός του πίνακα $A - \lambda_i I$.

Ο αριθμός $\dim V(\lambda_i)$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Επίσης μια σημαντική ιδιότητα που αφορά την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και ταυτόχρονα είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα. Δηλαδή

$$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα.}$$

Για τα **χαρακτηριστικά ποσά** ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι βασικότερες **ιδιότητες** διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [10, 15, 23, 28, 33, 37].

Πρόταση 1.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές[2] *του.*

i. *Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.*

ii. *Αν λ, x είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k ισχύει $A^k x = \lambda^k x$, όπου $k \in \mathbb{N}$.*

iii. *Αν λ, x είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-k} είναι λ^{-k} και $x \in \mathbb{F}^n$, όπου $k \in \mathbb{N}$.*

---

[1] Ο ιδιόχωρος είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(A - \lambda_i I)x = 0$.

[2] Οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες

iv. *Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή, αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι διάφορος του μηδενός.*

v. *Οι όμοιοι[3] πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

vi. *Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $\lambda \in \sigma(A)$, τότε $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$.*

Κλείνοντας αυτήν την υποενότητα αναφερόμαστε στις βασικότερες ιδιότητες των χαρακτηριστικών μεγεθών των Ερμιτιανών πινάκων η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε κάποιο από τα συγγράμματα Γραμμικής Άλγεβρας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [15, 28].

Πρόταση 1.2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του.

i. *Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού (συμμετρικού) πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί, κα είναι διαταγμένες στον πραγματικό άξονα, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$.*

ii. *Ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (ημιορισμένος), αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (μη αρνητικές).*

iii. *Ο πίνακας A είναι αρνητικά ορισμένος (ημιορισμένος), αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές.*

iv. *Έστω $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$, $m = 1, 2, \dots, n$ ένας υποπίνακας του A.*

Τότε ο πίνακας A είναι

- *θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν $\det A_m > 0$, για κάθε $m = 1, \dots, n$.*
- *αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν*

$$\det A_1 < 0, \quad \det A_2 > 0, \quad \det A_3 < 0, \dots, \quad (-1)^n \det A > 0.$$

v. *Ο πίνακας $A^* A$ είναι θετικά ημιορισμένος και ισχύει $\lambda_n = \rho(A^* A)$, όταν $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, $\lambda_i \in \sigma(A^* A)$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

---

[3] Βλέπε Ορισμό 1.22.

vi. *Εάν ο Ερμιτιανός πίνακας* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ *έχει* $a_{ii} > 0$, *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε ο* A *είναι θετικά ορισμένος.*

1.2.2 Ανάλυση τετραγωνικού πίνακα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1, x_2, ..., x_n$. Τρία σημαντικά θεωρήματα, που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των χαρακτηριστικών μεγεθών στη μελέτη ποικίλων προβλημάτων επειδή συμβάλλουν στην απλοποίησή τους, διατυπώνονται στη συνέχεια, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [10, 15, 28, 33, 37]. Τα θεωρήματα αναφέρονται στην ανάλυση ενός τυχαίου τετραγωνικού πίνακα A σε μια ισοδύναμη απλοποιημένη μορφή .του (θεώρημα Schur και διαγωνοποίησης) και στην ανάλυση μιας ειδικής κατηγορίας πινάκων, τους Ερμιτιανούς (φασματικό θεώρημα).

Θεώρημα 1.1 (Schur)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει ορθομοναδιαίος[4] πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$ και άνω τριγωνικός πίνακας $T \in M_n(\mathbb{F})$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = UTU^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

Ορισμός 1.22

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος,** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ και ένας διαγώνιος πίνακας Δ έτσι ώστε να ισχύει

$$A = P \Delta P^{-1}. \tag{1.7}$$

Στην περίπτωση που ισχύει η ισότητα (1.7), οι πίνακες A, Δ ονομάζονται **όμοιοι**, και ο πίνακας P ονομάζεται **πίνακας ομοιότητας**.

Στο ακόλουθο θεώρημα, διατυπώνεται ένα ικανό και αναγκαίο κριτήριο διαγωνοποίησης ενός τετραγωνικού πίνακα A και δίνεται και η κατασκευή της διαγώνιας μορφής, η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να αναζητηθεί [15, 33].

---

[4] Βλέπε Ορισμό 1.7.

Θεώρημα 1.2

Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας* A *έχει* n *γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Στη διαγώνια μορφή (1.7) *ο διαγώνιος πίνακας* Δ *είναι*

$$\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του* A *και ο αντιστρέψιμος πίνακας* P *έχει στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του* A, *δηλαδή*

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Σχόλια 1.4

Σημειώνεται ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, συνεπώς αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνοποιήσιμος. Σε περίπτωση όπου οι ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1, **δεν** υπάρχει αντίστοιχη πρόταση ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ιδιοτιμή, γεγονός που δεν εγγυάται την ύπαρξη τετραγωνικού και αντιστρέψιμου πίνακα P που να διαγωνοποιεί τον A.

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός (συμμετρικός) το **φασματικό θεώρημα** εξασφαλίζει την ύπαρξη καθώς και την αντιστρεψιμότητα του P, ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα των πραγματικών ιδιοτιμών του A. η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να αναζητηθεί [10, 15, 28, 33, 37].

Θεώρημα 1.3 (φασματικό θεώρημα)

Για κάθε Ερμιτιανό (συμμετρικό) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ *υπάρχει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας* $U \in M_n(\mathbb{F})$ *και πραγματικός διαγώνιος πίνακας* $\Delta \in M_n(\mathbb{R})$ *με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα* A *έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:*

$$A = U\Delta U^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

Ο ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας U, που αναφέρεται στο φασματικό θεώρημα, κατασκευάζεται από τον πίνακα P, δηλαδή έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A και επιπλέον στα διανύσματα-στήλες του εφαρμόζεται η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης, γνωστή ως μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt, προκειμένου να προκύψει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας.

1.3 Νόρμες

1.3.1 Νόρμες διανυσμάτων

Ορισμός 1.23

Νόρμα ενός **διανύσματος** $x \in \mathbb{F}^n$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{F}^n$, (τριγωνική ανισότητα).

Για το διάνυσμα $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, όπου $x_i \in \mathbb{F}$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ αποδεικνύεται εύκολα ότι η έκφραση

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad , \quad \text{με} \quad p \geq 1 \tag{1.8}$$

ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες του Ορισμού 1.23, οπότε ορίζει μια νόρμα στο χώρο $\mathbb{F}^n \simeq M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, [14, 28, 34].

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πιθανών νορμών για το x. Οι τρεις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες νόρμες είναι:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} \qquad \text{(νόρμα άπειρο)} \tag{1.9}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{(νόρμα ένα)} \tag{1.10}$$

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \text{(Ευκλείδεια νόρμα)} \tag{1.11}$$

Σχόλια 1.5

i) Οι νόρμες (1.9)-(1.11) είναι ειδικές περιπτώσεις της p-νόρμας στην (1.8), θεωρώντας $p \to \infty$, $p = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα.

ii) Εξαιτίας του 1) στη συνέχεια για την Ευκλείδεια νόρμα θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\|x\|_2 = \|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

iii) Εύκολα αποδεικνύεται ότι, για την Ευκλείδεια νόρμα (1.11) του διανύσματος $x \in \mathbb{F}^n$ ισχύει η ισότητα:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} \tag{1.12}$$

1.3.2 Νόρμες πινάκων

Ορισμός 1.24

Νόρμα ενός τετραγωνικού **πίνακα** $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$|||\cdot||| : M_n(\mathbb{F}) \to [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

1) $|||A||| \geq 0$

2) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

3) $|||\lambda A||| = |\lambda|\ |||A|||$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$

4) $|||A+B||| \leq |||A|||+|||B|||$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

5) $|||A\cdot B||| \leq |||A|||\cdot|||B|||$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Κάθε μια από τις παραπάνω νόρμες διανυσμάτων (1.9), (1.10) και (1.11) παράγει μια αντίστοιχη νόρμα για τον πίνακα A:

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\} \quad \text{ή} \quad |||A|||_\Gamma \quad \text{(νόρμα γραμμής)} \tag{1.13}$$

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\} \quad \text{ή} \quad |||A|||_\Sigma \quad \text{(νόρμα στήλης)} \tag{1.14}$$

$$|||A|||_E = \sqrt{\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}|a_{ij}|^2} \quad \text{(Ευκλείδεια νόρμα)} \tag{1.15}$$

Επίσης υπάρχει και μια εξίσου σημαντική νόρμα πίνακα, η οποία όμως δεν προκύπτει από κάποια νόρμα διανύσματος. Αυτή είναι

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}, \tag{1.16}$$

όπου $\rho(A^*A)$ είναι η φασματική ακτίνα (βλέπε (1.3)) του Ερμιτιανού πίνακα A^*A.

Η νόρμα του πίνακα A στην (1.16) στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *φασματική νόρμα* (spectral norm).

==

1.3.3 Ιδιότητες νορμών

Για κάθε πίνακα $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1) $|||A|||_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1}\{\|Ax\|_2\} = \max\limits_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}\{|y^*Ax|\}$.

2) $|||A|||_2 = |||A^*|||_2 = |||A^T|||_2$.

3) $|||A|||_2^2 = |||A^*A|||_2 = |||AA^*|||_2$.

4) *Αν U, V δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες, τότε* $|||A|||_2 = |||UAV|||_2$.

5) $|||A|||_2^2 \le |||A|||_1 \cdot |||A|||_\infty$.

6) $\rho(A) = \sqrt[k]{\lim\limits_{k\to\infty} |||A^k|||}$, *για κάθε νόρμα πίνακα.*

7) $\rho(A) = |||A|||_2$, αν ο A είναι Ερμιτιανός.

8) $|||A|||_2 = |||\,|A|\,|||_2$, *για κάθε νόρμα πίνακα.*

9) $|||A|||^k \le |||A^k|||$, *για κάθε νόρμα πίνακα και* $k \in \mathbb{N}$.

10) $\rho(A) \le |||A|||$, *για κάθε νόρμα πίνακα και για κάθε νόρμα που προέρχεται από κάποια νόρμα διανύσματος* $\|\cdot\|$.

1.3.4 Ιδιότητες αριθμητικής ακτίνας πίνακα

Οι ιδιότητες της αριθμητικής ακτίνας διατυπώνονται παρακάτω, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί στη βιβλιογραφία, [28, 29].

Πρόταση 1.3

Έστω ένας πίνακας $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$.

i. $\rho(A)\le r(A)$.

ii. $r(A)=r(A^*)$.

iii. $r(\hat{A})\le r(A)$ *για κάθε κύριο υποπίνακα* $\hat{A}$ *του* A.

iv. *Έστω* $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ *με* $a_{ij}\ge 0$ *(πραγματικοί και μη-αρνητικοί αριθμοί). Τότε*

$$r(A)=r(H_A)=\rho(H_A),$$

όπου $H_A\equiv\frac{1}{2}(A+A^T)$ *είναι το συμμετρικό μέρος του* A.

v. $r(A)=r(U^*AU)$, *όπου* $U\in M_n(\mathbb{F})$ *ορθομοναδιαίος πίνακας.*

vi. $\frac{1}{2}|||A|||_2\le r(A)\le |||A|||_2$, *όπου* $|||A|||_2$ *ορίζεται στην* (1.16).

vii. *Αν ο πίνακας* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ένας σύνθετος διαγώνιος πίνακας,* $A=diag(A_1,A_2)$, *με* $A_1\in M_m(\mathbb{F})$, $A_2\in M_{n-m}(\mathbb{F})$, *τότε*

$$r(A)=r(A_1\oplus A_2)=\max\{r(A_1),r(A_2)\}.$$

viii. $r(A)\le r(|A|)=\frac{1}{2}\rho(|A|+|A|^T)$, όπου $|A|=(|a_{ij}|)$.

Παράδειγμα 1.2

Έστω ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης την ισότητα στην (1.5)

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & -1 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow \lambda^2-17\lambda+70=0$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 7$ και $\lambda_2 = 10$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.3), η φασματική ακτίνα του A είναι:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|\} = \max\{7,\ 10\} = 10$$

Η αριθμητική ακτίνα του A, υπολογίζεται από τον κώδικα στο Παράρτημα Β, και είναι

$$r(A) = 10.0811,$$

επαληθεύοντας έτσι την ιδιότητα (i) της Πρότασης 1.3, $\rho(A) \le r(A)$. ◊

Παράδειγμα 1.3

Έστω οι πραγματικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

- Σύμφωνα με την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 1.3 το συμμετρικό μέρος του A είναι:

$$H_A = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα H_A είναι οι ρίζες της εξίσωσης την ισότητα στην (1.5)

$$\det\left(H_A - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του H_A είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 1.3 ισχύει

$$r(A) = r(H_A) = \rho(H_A) = \max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|\} = \max\{|-1|,\ 3\} = 3.$$

Επειδή $H_A = H_{A^T}$, ισχύει

$$r(A^T) = r(H_{A^T}) = r(H_A) = r(A).$$

προφανώς επαληθεύεται και η ιδιότητα (ii) της Πρότασης 1.3.

➢ Το συμμετρικό μέρος του B είναι :

$$H_B = \frac{1}{2}(B + B^T) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.15 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα H_B είναι οι ρίζες της εξίσωσης την ισότητα στην (1.5)

$$\det\left(H_B - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 0.3\lambda^2 - 0.0725\lambda - 0.0027 = 0$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του H_B είναι $\lambda_1 = -0.1176$, $\lambda_2 = -0.05$ και $\lambda_3 = 0.4676$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 1.3 ισχύει

$$r(B) = r(H_B) = \rho(H_B) = \max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ \lambda_3\} = 0.4676$$

Ένας κύριος υποπίνακα του B είναι

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

ο οποίος είναι συμμετρικός πίνακας, οπότε ισχύει $H_{\hat{B}} = \hat{B}$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 1.3. μπορούμε να γράψουμε:

$$r(\hat{B}) = r(H_{\hat{B}}) = \rho(H_{\hat{B}}) = \rho(\hat{B}). \qquad (1.17)$$

Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του $H_{\hat{B}} = \hat{B}$ βρίσκουμε

$$\sigma(\hat{B}) = \{\lambda_1 = -0.1,\ \lambda_2 = 0.3\},$$

συνεπώς η φασματική ακτίνα του $\hat{B}$ είναι

$$\rho(\hat{B}) = \max\{|\lambda_1|,\ \lambda_2\} = \max\{0.1,\ 0.3\} = 0.3. \qquad (1.18)$$

Από τις ισότητες στην (1.17) και (1.18) προκύπτει $r(\hat{B}) = 0.3$. Επειδή $r(B) = 0.4676$ είναι φανερό ότι επαληθεύεται η ιδιότητα (iii) της Πρότασης 1.3. ◊

Πρόταση 1.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανός πίνακας και $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$ η ελάχιστη και η μέγιστη ιδιοτιμή του A, αντίστοιχα. Τότε για την αριθμητική του ακτίνα ισχύουν:

i. $r(A) = \max\{|\lambda_{\min}(A)|, |\lambda_{\max}(A)|\}$

ii. *Αν ο $A \in M_n(F)$ είναι θετικά ορισμένος (ημιορισμένος) πίνακας, τότε*

$$r(A) = \lambda_{\max}(A).$$

==

Απόδειξη:

i. Συνδυάζοντας την ιδιότητα (8) της υπο-ενότητας 1.3.3 με τις ιδιότητες (i) και (vi) της Πρότασης 1.3, έχουμε

$$\rho(A) \le r(A) \le ||| A |||_2 = \rho(A)$$

από όπου καταλήγουμε

$$r(A) = \rho(A). \tag{1.19}$$

Θεωρώντας ότι η διάταξη των πραγματικών ιδιοτιμών του Ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι $\lambda_{\min}(A) \equiv \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \equiv \lambda_{\max}(A)$, (ιδιότητα (i) Πρόταση 1.2), προφανώς η (1.19) γράφεται

$$r(A) = \max\{|\lambda_{\min}(A)|, |\lambda_{\max}(A)|\}.$$

ii. Συνδυάζοντας την παραπάνω ιδιότητα (i) με την ιδιότητα (ii) της Πρότασης 1.2 είναι προφανές το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Υπολογισμός όλων των λύσεων της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη λύσεων καθώς και μια μέθοδος υπολογισμού όλων των λύσεων της εξίσωσης

$$X + A^* X^{-1} A = Q \qquad (2.1)$$

όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $Q \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας (βλέπε Ορισμό 1.12). Με A^* σημειώνεται ο αναστροφοσυζυγής πίνακας του A (Ορισμός 1.4) και με $X \in M_n(\mathbb{F})$ σημειώνεται μια λύση της εξίσωσης (2.1).

Η εξίσωση αυτή εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές ποικίλων ερευνητικών πεδίων, όπως η στατιστική, η θεωρία ελέγχου, ο δυναμικός προγραμματισμός, το στοχαστικό φιλτράρισμα, τα κλιμακωτά δίκτυα (ladder networks), τα στοχαστικά φίλτρα, κ. α.. [4, 6, 17, 44].

2.1 Εφαρμογές της εξίσωσης

Την τελευταία εικοσαετία πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί διεξοδικά με την επίλυση της (2.1), [2, 6, 8, 18-19, 22, 25, 36, 44-45] . Έχουν μελετηθεί ιδιότητες σε θεωρητικό επίπεδο, όπως είναι η διατύπωση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων αυτής [2, 18-19] και έχουν προταθεί αλγεβρικές [2, 3, 18-19] και αλγοριθμικές μέθοδοι υπολογισμού των ακραίων λύσεων αυτής [6, 8, 18-19, 25, 36, 44-45]. Οι υπάρχουσες μέθοδοι είναι αναδρομικοί αλγόριθμοι βασισμένοι κυρίως στη επαναληπτική μέθοδο σταθερού σημείου και στις εφαρμογές του αλγορίθμου Newton ή της κυκλικής μεθόδου μείωσης (cyclic reduction).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο παραδείγματα εφαρμογής της εξίσωσης (2.1).

Το πρώτο παράδειγμα αφορά το χρονικά αμετάβλητο Kalman φίλτρο, [4, 5]. Έστω ένα γραμμικό μοντέλο διακριτού χρόνου, το οποίο εκφράζει τη σχέση κατάστασης και μέτρησης και περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις, που ονομάζονται *εξισώσεις χώρου κατάστασης*, στο χρόνο $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F x_k + w_k \\ z_k &= H x_k + v_k \end{aligned}$$

όπου τη χρονική στιγμή k, με $x_k \in \mathbb{R}^n$ σημειώνεται το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος και είναι η είσοδος του συστήματος, με $z_k \in \mathbb{R}^m$ σημειώνεται το διάνυσμα μετρήσεων, με $F \in M_n(\mathbb{R})$ σημειώνεται ο πίνακας μεταφοράς, με $H \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ σημειώνεται ο πίνακας εξόδου, με έξοδο του συστήματος $y_k = Hx_k$, με $w_k \in \mathbb{R}^n$ σημειώνεται ο θόρυβος στην κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή k και με $v_k \in \mathbb{R}^m$ σημειώνεται ο θόρυβος στις μετρήσεις. Υποθέτοντας ότι καθένα από τα σύνολα των θορύβων $\{w_k\}$ και $\{v_k\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία με τιμές ασυσχέτιστες από τη μια χρονική στιγμή στην επόμενη, που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με μηδέν και σταθερή διασπορά, που δίνεται αντίστοιχα για κάθε διαδικασία

$$E[w_k w_k^T] = Q \quad \text{και} \quad E[v_k v_k^T] = R,$$

δηλαδή, $Q \in M_n(\mathbb{R})$ και $R \in M_m(\mathbb{R})$ είναι μη-αρνητικά ορισμένοι πίνακες ως πίνακες διασποράς.

Στον αρχικό χρόνο $k = 0$, το διάνυσμα κατάστασης x_0 είναι ανεξάρτητο των διαδικασιών $\{w_k\}$ και $\{v_k\}$, και είναι μια τυχαία διαδικασία που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή που σημειώνεται $\overline{x}_0$ και με διασπορά P_0, δηλαδή,

$$E[x_0] = \overline{x}_0 \quad \text{και} \quad E[(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^T] = P_0 .$$

Για κάθε $k \geq 0$, σημειώνοντας $Z_k = \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$, το πρόβλημα της εκτίμησης είναι να υπολογιστεί η *εκτίμηση της κατάστασης* τη χρονική στιγμή k δεδομένου του συνόλου των μετρήσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή $k-1$, δηλαδή, η δεσμευμένη μέση τιμή του διανύσματος κατάστασης:

$$x_{k\,|\,k-1} = E[x_k \mid Z_{k-1}]$$

Το *σφάλμα εκτίμησης* (estimation error) ορίζεται να ισούται με τη διαφορά της εκτίμησης $x_{k\,|\,k-1}$ από την πραγματική κατάσταση x_k. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το σφάλμα εκτίμησης, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης. Επομένως, το κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης σχετίζεται με το σφάλμα εκτίμησης και είναι η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος εκτίμησης, δηλαδή της αντίστοιχης διασποράς σφάλματος εκτίμησης που ισούται με

$$P_{k\,|\,k-1} = E[(x_k - x_{k\,|\,k-1})(x_k - x_{k\,|\,k-1})^T \mid Z_{k-1}] .$$

Αρκετές φορές στη βιβλιογραφία οι διασπορές σφάλματος που διαφέρουν κατά ένα χρονικό βήμα, $P_{k|k-1}$ ή $P_{k+1|k}$, αναφέρονται ως διασπορές πρόβλεψης και $P_{k|k}$ ως διασπορές εκτίμησης στο χρόνο k, ορολογία την οποία θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια. Το χρονικά αμετάβλητο Kalman φίλτρο διακριτού χρόνου περιγράφεται αναδρομικά από τις ακόλουθες σχέσεις [5, 7]:

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1|k} = F x_{k|k} \\
&P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T \left(H P_{k|k-1} H^T + R \right)^{-1} H P_{k|k-1} \\
&P_{k+1|k} = F P_{k|k} F^T + Q \\
&K_{k+1} = P_{k+1|k} H^T \left(H P_{k+1|k} H^T + R \right)^{-1} \\
&x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - H x_{k+1|k})
\end{aligned}
$$

με αρχικές τιμές $x_{0|0} = \overline{x}_0$ και $P_{0|-1} = P_0$.

Από τις παραπάνω εξισώσεις του Kalman φίλτρου χρησιμοποιώντας μόνο αυτές που σχετίζονται με τη διασπορά εκτίμησης στο χρόνο k, $P_{k|k}$, και διασπορά πρόβλεψης, $P_{k+1|k}$, προκύπτει η εξίσωση Riccati [7], η οποία έχει τη μορφή της (2.1):

$$
P_{k+1|k} = F P_{k|k-1} F^T + Q - F P_{k|k-1} H^T \left(H P_{k|k-1} H^T + R \right)^{-1} H P_{k|k-1} F^T
$$

Η εξίσωση Riccati, είναι μια μη γραμμική αναδρομική εξίσωση ως προς τη διασπορά πρόβλεψης $P_{k|k-1}$.

Αν το μοντέλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα F βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η διασπορά πρόβλεψης συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή $\overline{P}_p$, η οποία είναι μοναδική και στη βιβλιογραφία ονομάζεται διασπορά πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση. Το φίλτρο μπορεί να συγκλίνει σε μόνιμη κατάσταση ακόμη και όταν το μοντέλο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Σε αυτήν την περίπτωση η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν για τη $|||\cdot|||_2$ νόρμα πίνακα, όπως αυτή ορίζεται στην (1.16), ισχύει

$$
||| P_{k+1|k} - P_{k|k-1} |||_2 < \varepsilon ,
$$

όπου ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός και k είναι ο χρόνος κατά τον οποίο επιτυγχάνεται η μόνιμη κατάσταση.

Η εξίσωση της μόνιμης κατάστασης που προκύπτει είναι

$$
\overline{P}_p = F \overline{P}_p F^T + Q - F \overline{P}_p H^T \left(R + H \overline{P}_p H^T \right)^{-1} H \overline{P}_p F^T
$$

η οποία είναι εξίσωση της μορφής (2.1) και η μοναδική λύση της είναι η διασπορά πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, $\overline{P}_p$. Συνεπώς, ο υπολογισμός της σταθερής τιμής $\overline{P}_p$, που αποτελεί μέτρο απόδοσης του φίλτρου, μπορεί εκ των προτέρων να επιτευχθεί με την επίλυση της εξίσωσης (2.1), δηλαδή, δε χρειάζεται η υλοποίηση των αντίστοιχων εξισώσεων του Kalman φίλτρου.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι από την επιστημονική περιοχή της θεωρίας ελέγχου [18], στην περίπτωση που ισχύει $Q = I$ στην εξίσωση (2.1).
Έστω το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

$$\min_{u[0,\cdot]} \lim_{N\to\infty} J_N$$

τέτοιο ώστε:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 = x$$

με $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και με τον περιορισμό $\lim_{N\to\infty} x_N = 0$, όπου

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

και $Q, R \in M_n(\mathbb{F})$ είναι συμμετρικοί πίνακες.

Επειδή είναι δύσκολο να βρεθούν σαφείς συνθήκες επίλυσης αυτού του προβλήματος, καθοριστικό ρόλο στη λύση του παίζει η επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης Riccati, η οποία έχει τη μορφή της (2.1), στην περίπτωση που ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. Με άλλα λόγια, το παραπάνω πρόβλημα έχει λύση, εάν υπάρχει μια πραγματική λύση $K \in M_n(\mathbb{F})$ της ακόλουθης εξίσωσης

$$K = A^T (K^{-1} + BR^{-1}B^T)^{-1} A + Q,$$

η οποία επιπλέον ικανοποιεί τις δύο ακόλουθες συνθήκες:

i. $R + B^T KB$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας

ii. η φασματική ακτίνα του πίνακα $A + BS$ είναι μικρότερη της μονάδας, $\rho(A + BS) < 1$, όπου $S = -(R + B^T KB)^{-1} B^T KA$.

2.2 Συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης $X + A^{*}X^{-1}A = Q$

Οι Engwerda, Ran και Rijkeboer [19] απέδειξαν ότι, η ύπαρξη μιας θετικά ορισμένης λύσης εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα του πίνακα $Q^{-1/2}AQ^{-1/2}$, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.14.

Θεώρημα 2.1 [19, Theorem 5.2]

Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε η εξίσωση $X + A^{*}X^{-1}A = Q$ έχει μια θετικά ορισμένη λύση $X \in M_n(\mathbb{F})$ αν και μόνο αν

$$r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) \le \frac{1}{2}, \tag{2.2}$$

όπου $r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) = \max\{|x^{*}Q^{-1/2}AQ^{-1/2}x|: \quad x \in \mathbb{C}^n \quad \text{με} \quad x^{*}x = 1\}$.

Παράδειγμα 2.1

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.3 \\ -0.3 & 2.1 \end{pmatrix}.$$

Υπάρχουν θετικά ορισμένες λύσεις X των εξισώσεων $X + A^{*}X^{-1}A = Q$, $X + B^{*}X^{-1}B = Q$;

Οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, επειδή έχουν $\det A = -0.02 \ne 0$, $\det B = 0.02 \ne 0$.

Ο συμμετρικός πίνακας Q έχει $\sigma(Q) = \{1.1092, 2.1908\}$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του είναι θετικές, το οποίο σημαίνει ότι ο Q είναι θετικά ορισμένος πίνακας (ιδιότητα (ii), Πρόταση 1.2). Επομένως, οι πίνακες A, B, Q ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.

- Για την εξίσωση $X + A^{*}X^{-1}A = Q$, επιπλέον απαιτείται ο υπολογισμός της αριθμητικής ακτίνας του πίνακα $Q^{-1/2}AQ^{-1/2}$. Επειδή $Q^{-1/2}AQ^{-1/2}$ έχει στοιχεία πραγματικούς και μη-αρνητικούς αριθμούς,

$$Q^{-1/2}AQ^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.1315 & 0.1706 \\ 0.2989 & 0.3253 \end{pmatrix}$$

==

σύμφωνα με την ιδιότητα της αριθμητικής ακτίνας (βλέπε, υπο-ενότητα 1.3.4, Πρόταση 1.3, ιδιότητα (iv)), η αριθμητική ακτίνα υπολογίζεται

$$r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) = \rho(H_{Q^{-1/2}AQ^{-1/2}})$$

όπου

$$H_{Q^{-1/2}AQ^{-1/2}} = \frac{1}{2}(Q^{-1/2}AQ^{-1/2} + Q^{-1/2}A^T Q^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 0.1315 & 0.2348 \\ 0.2348 & 0.3253 \end{pmatrix}$$

με $\sigma(H_{Q^{-1/2}AQ^{-1/2}}) = \{-0.0256,\ 0.4824\}$ και $\rho(H_{Q^{-1/2}AQ^{-1/2}}) = 0.4824$.

Άρα $r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) = 0.4824 < \frac{1}{2}$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 υπάρχει θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης (2.1).

➢ Για την εξίσωση $X + B^* X^{-1} B = Q$, επιπλέον απαιτείται ο υπολογισμός της αριθμητικής ακτίνας του πίνακα $Q^{-1/2}BQ^{-1/2}$. Επειδή $Q^{-1/2}BQ^{-1/2}$ έχει στοιχεία πραγματικούς και μη-αρνητικούς αριθμούς,

$$Q^{-1/2}BQ^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.1338 & 0.3202 \\ 0.1919 & 0.5205 \end{pmatrix}$$

σύμφωνα με την ιδιότητα της αριθμητικής ακτίνας (βλέπε, υπο-ενότητα 1.3.4, Πρόταση 1.3, ιδιότητα (iv)), η αριθμητική ακτίνα του πίνακα $Q^{-1/2}BQ^{-1/2}$ υπολογίζεται

$$r(Q^{-1/2}BQ^{-1/2}) = \rho(H_{Q^{-1/2}BQ^{-1/2}})$$

όπου

$$H_{Q^{-1/2}BQ^{-1/2}} = \frac{1}{2}(Q^{-1/2}BQ^{-1/2} + Q^{-1/2}B^T Q^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 0.1338 & 0.2560 \\ 0.2560 & 0.5205 \end{pmatrix}$$

με $\sigma(H_{Q^{-1/2}BQ^{-1/2}}) = \{0.0064,\ 0.6480\}$ και $\rho(H_{Q^{-1/2}BQ^{-1/2}}) = 0.6480$.

Άρα $r(Q^{-1/2}BQ^{-1/2}) = 0.6480 > \frac{1}{2}$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 η εξίσωση $X + B^* X^{-1} B = Q$ δεν έχει θετικά ορισμένη λύση. ◊

2.3 Υπολογισμός των λύσεων της $X + A^* X^{-1} A = Q$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία απόδειξης που παρουσιάσθηκε [2] και [19], παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας ιδιότητες αναστροφοσυζυγών και αντιστρέψιμων πινάκων (βλέπε ιδιότητες (4) και (5), υπο-ενότητα 1.1.4) ξεκινώντας από την εξίσωση (2.1) έχουμε τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε μια εξίσωση Riccati. Πράγματι, η εξίσωση (2.1) μπορεί να γραφτεί:

$$X = Q - A^* X^{-1} A \tag{2.3}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.3) στη (2.1) και συνδυάζοντας τις ιδιότητες του αντιστρέψιμου πίνακα A με στοιχειώδη άλγεβρα πινάκων, γράφουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} X &= Q - A^* \left(Q - A^* X^{-1} A \right)^{-1} A \\ &= Q - A^* \left(A^* A^{-*} Q A^{-1} A - A^* X^{-1} A \right)^{-1} A \\ &= Q - A^* \left(A^* (A^{-*} Q A^{-1} - X^{-1}) A \right)^{-1} A \\ &= Q - A^* A^{-1} \left(A^{-*} Q A^{-1} - X^{-1} \right)^{-1} A^{-*} A \\ &= Q + A^* A^{-1} \left(X^{-1} + [-A^{-*} Q A^{-1}] \right)^{-1} \left(A^* A^{-1} \right)^* \end{aligned} \tag{2.4}$$

Συνεπώς, ξεκινώντας από (2.1) καταλήγουμε στην ισοδύναμή της εξίσωση (2.4), η οποία είναι μια εξίσωση Riccati, καθώς μπορεί να γραφεί

$$P = C + F(P^{-1} + G)^{-1} F^* \tag{2.5}$$

όπου

$$F = A^* A^{-1}, \quad C = Q, \quad \mathrm{G} = -A^{-*} Q A^{-1} \tag{2.6}$$

Από την παραπάνω απόδειξη είναι φανερό ότι η εξίσωση (2.1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση Riccati στη (2.5), άρα ο υπολογισμός των λύσεων της (2.1) θα γίνει μέσω του υπολογισμού των λύσεων της (2.5), δηλαδή αν X είναι μια λύση της (2.1) και P μια λύση της (2.5) από την παραπάνω ισοδυναμία ισχύει

$$X = P \tag{2.7}$$

Για να *διατάξουμε* τις λύσεις της (2.1) χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

==

Ορισμός 2.1

Έστω $X_{\min}, X_{\max} \in M_n(\mathbb{F})$ δύο θετικά ορισμένες λύσεις της (2.1). Η $X_{\max}$ ονομάζεται **μέγιστη** λύση της εξίσωσης και η $X_{\min}$ ονομάζεται **ελάχιστη** λύση, αν για κάθε άλλη θετικά ορισμένη λύση $X \in M_n(\mathbb{F})$ της (2.1) ισχύει

$$X_{\max} - X \geq 0 \quad \text{και} \quad X - X_{\min} \geq 0,$$

αντιστοίχως. Η μέγιστη και η ελάχιστη λύση χαρακτηρίζονται **ακραίες** λύσεις.

Όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.1, είναι σίγουρο ότι υπάρχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση της (2.1). Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι:

α) Ποια είναι η διάταξη των ακραίων λύσεων της (2.1); Πώς υπολογίζονται οι ακραίες λύσεις;

β) Υπάρχουν και άλλες θετικά ορισμένες λύσεις εκτός από τις ακραίες, ή οι λύσεις είναι μόνο ακραίες;

γ) Πώς υπολογίζονται όλες οι θετικά ορισμένες λύσεις της (2.1), όταν αυτές υπάρχουν;

δ) Οι λύσεις της (2.1) είναι μόνο θετικά ορισμένοι πίνακες;

Η απάντηση του πρώτου ερωτήματος που σχετίζεται με τη διάταξη των ακραίων λύσεων της (2.1) δίνεται από τους Engwerda, Ran και Rijkeboer [19, Theorem 3.4], όπου αποδεικνύεται ότι, όταν η εξίσωση (2.1) έχει μια θετικά ορισμένη λύση $X \in M_n(\mathbb{F})$, τότε υπάρχει ελάχιστη $X_{\min}$ και μέγιστη $X_{\max}$ λύση για την οποία ισχύει

$$0 < X_{\min} \leq X \leq X_{\max}. \tag{2.8}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο συμβολισμός $X \leq X_{\max}$ σημαίνει ότι $X_{\max} - X \geq 0$ (δηλαδή ο πίνακας $X_{\max} - X$ είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας, Ορισμός 1.12). Αντίστοιχα, ο συμβολισμός $X_{\min} \leq X$ σημαίνει ότι $X_{\min} - X \leq 0$ (δηλαδή ο πίνακας $X_{\min} - X$ είναι ένας αρνητικά ημιορισμένος πίνακας, Ορισμός 1.13).

Επομένως όταν είναι γνωστό ότι υπάρχουν λύσεις της (2.1), το πρόβλημα είναι να βρεθεί μεθοδολογία υπολογισμού των ακραίων λύσεων. Όπως αναφέρθηκε και στην Εισαγωγή του παρόντος Κεφαλαίου, ο υπολογισμός αυτών των λύσεων γίνεται με δύο τρόπους: είτε με την εφαρμογή αναδρομικών αλγορίθμων [8, 18-19, 25, 36, 44-45], είτε άμεσα με αλγεβρικό τρόπο [2, 3, 18-19].

Στην εργασία [19, Παράγραφος 4] ο υπολογισμός των **ακραίων** λύσεων της (2.1) πραγματοποιείται με την εφαρμογή δύο αναδρομικών αλγορίθμων.

- Σύμφωνα με τον πρώτο αλγόριθμο, εάν η εξίσωση (2.1) έχει μια θετικά ορισμένη λύση, $X > 0$, τότε

$$X_n \to X_{\max},$$

όπου οι πίνακες X_n υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$X_{n+1} = I - A^* X_n^{-1} A,$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$, με

$$X_0 = I.$$

- Ενώ σύμφωνα με το δεύτερο αλγόριθμο, εάν η εξίσωση (2.1) έχει μια θετικά ορισμένη λύση, $X > 0$, τότε

$$X_n \to X_{\min},$$

όπου οι πίνακες X_n υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$X_{n+1} = A(I - X_n)^{-1} A^*,$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$, με

$$X_0 = AA^*.$$

Εκτός από τους προαναφερθέντες αλγορίθμους, στις εργασίες [8, 25, 36, 44-45] έχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι, που υπολογίζουν τις ακραίες λύσεις $X_{\min}, X_{\max}$ της εξίσωσης (2.1).

Η ιδέα υπολογισμού των ακραίων λύσεων της (2.1) με αλγεβρικό τρόπο βασίζεται στην ισοδυναμία των εξισώσεων (2.1) και (2.4) ή στην ισοδυναμία των εξισώσεων (2.1) και της εξίσωσης Riccati (2.5), από όπου είναι φανερό ότι οι θετικά ορισμένες λύσεις $X_{\min}$, $X_{\max}$ της (2.1) ταυτίζονται αντίστοιχα με τις θετικά ορισμένες λύσεις $P_{\min}$, $P_{\max}$ της εξίσωσης Riccati (2.5), δηλαδή ισχύει

$$X_{\min} = P_{\min} \quad \text{και} \quad X_{\max} = P_{\max} \tag{2.9}$$

Ωστόσο, είναι γνωστό [2, 21, 38, 39] από τη μεθοδολογία λύσης της εξίσωσης Riccati (2.5) ότι η εξίσωση αυτή έχει μοναδικές ακραίες θετικά ορισμένες λύσεις, οι οποίες υπολογίζονται και με αλγεβρικό τρόπο και όχι μόνο αλγοριθμικά, όπως προαναφέρθηκε. Η αλγεβρική μέθοδος σχετίζεται με τα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός πίνακα που εξαρτάται μόνο από τους πίνακες A, Q.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της αλγεβρικής μεθόδου υπολογισμού των ακραίων λύσεων της (2.1) μέσω της επίλυσης των αντίστοιχων λύσεων της εξίσωσης Riccati, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2

Ένας πίνακας $A \in M_{2n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **συμπλεκτικός** αν ισχύει

$$A^* J A = J, \tag{2.10}$$

όπου $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Σχόλια 2.1

Ως πιο σημαντικές ιδιότητες ενός συμπλεκτικού πίνακα $A \in M_{2n}(\mathbb{F})$ αναφέρουμε τις ακόλουθες, αποδείξεις των οποίων μπορούμε να βρούμε [40]:

i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $|\det A| = 1$ και $A^{-1} = -JA^* J$.

ii) Ο αναστροφοσυζυγής ενός συμπλεκτικού πίνακα A είναι συμπλεκτικός πίνακας. Το γινόμενο δύο συμπλεκτικών πινάκων είναι συμπλεκτικός πίνακας, η δύναμη ενός συμπλεκτικού πίνακα είναι συμπλεκτικός.

iii) Το $0 \notin \sigma(A)$.

iv) Αν $\lambda \in \sigma(A)$, τότε $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι ανά δύο αντίστροφες. Ειδικότερα, αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $\lambda \in \sigma(A)$, τότε $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)$, $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$ και $\frac{1}{\bar{\lambda}} \in \sigma(A)$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι ανά δύο αναστροφοσυζυγείς.

Η αλγεβρική μέθοδος υπολογισμού των ακραίων λύσεων της (2.1) παρουσιάζεται [2, 3, 39] χρησιμοποιώντας $A, Q \in M_n(\mathbb{R})$.

Ο Vaughan στην εργασία [39], χρησιμοποιώντας πίνακες με πραγματικά στοιχεία στην εξίσωση Riccati (2.5), ορίζει έναν πραγματικό συμπλεκτικό πίνακα $V \in M_n(\mathbb{R})$ και χρησιμοποιώντας ορισμένα ιδιοδιανύσματά του V αποδεικνύει ότι υπάρχει μοναδική, μέγιστη θετικά ορισμένη λύση $P_{\max}$ της (2.5), η οποία εξαρτάται από τα επιλεχθέντα ιδιοδιανύσματα του V. Συνδυάζοντας αυτήν τη μεθοδολογία με την ισοδυναμία στη (2.9) προκύπτει η μέγιστη θετικά ορισμένη λύση $X_{\max}$ της (2.1) με αλγεβρικό τρόπο. Στις εργασίες [2, 3], όπου μελετάται η εξίσωση

$$X + A^T X^{-1} A = Q, \quad \text{με} \quad A, Q \in M_n(\mathbb{R}),$$

οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι υπάρχει μοναδική, ελάχιστη θετικά ορισμένη λύση $P_{\min}$ της (2.5). Για τον υπολογισμό της $P_{\min}$ χρησιμοποιούνται τα ιδιοδιανύσματά του συμπλεκτικού πίνακα $V \in M_n(\mathbb{R})$, όπως αυτός ορίστηκε στην [39], που δεν χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της $P_{\max}$. Μέσω της ισοδυναμίας στη (2.9) επιτυγχάνεται ο υπολογισμός της ελάχιστης θετικά ορισμένης λύσης $X_{\min}$ της (2.1) με αλγεβρικό τρόπο.

Επομένως, όταν υπάρχουν λύσεις της (2.1), οι ακραίες λύσεις υπάρχουν και στην περίπτωση πραγματικών πινάκων, υπάρχει αλγεβρικός τρόπος υπολογισμού τους. Τα επόμενα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω είναι, υπάρχουν και άλλες θετικά ορισμένες λύσεις της εξίσωσης (2.1) εκτός από τις ακραίες, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $0 < X_{\min} \le X \le X_{\max}$ στη (2.8) και αν υπάρχουν πώς υπολογίζονται; Υπάρχουν και λύσεις που δεν είναι θετικά ορισμένοι πίνακες; Για να δοθεί απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα χρειάζεται να αξιοποιήσουμε τη μεθοδολογία επίλυσης της εξίσωσης Riccati.

Γενικεύοντας τη θεωρία που αναπτύχθηκε [2, 39] και χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε πίνακα στη (2.5), ορίζουμε τον πίνακα V_h,

$$V_h = \begin{pmatrix} F^{-*} & F^{-*}G \\ CF^{-*} & F + CF^{-*}G \end{pmatrix}$$

στον οποίο αν αντικαταστήσουμε τους πίνακες F, C, G από τις σχέσεις (2.6) καταλήγουμε στον ακόλουθο πίνακα, που εξαρτάται μόνο από τους πίνακες $A, Q \in M_n(\mathbb{F})$ της (2.1):

$$\Phi = \begin{pmatrix} A^{-1}A^* & -A^{-1}QA^{-1} \\ QA^{-1}A^* & A^*A^{-1} - QA^{-1}QA^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις διαπιστώνουμε ότι, για τον πίνακα Φ της (2.11), επαληθεύεται η ισότητα στη (2.10) του Ορισμού 2.2, επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi^* J \Phi &= \begin{pmatrix} AA^{-*} & AA^{-*}Q \\ -A^{-*}QA^{-*} & A^{-*}A - A^{-*}QA^{-*}Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1}A^* & -A^{-1}QA^{-1} \\ QA^{-1}A^* & A^*A^{-1} - QA^{-1}QA^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{-*}Q & -AA^{-*} \\ A^{-*}A - A^{-*}QA^{-*}Q & A^{-*}QA^{-*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1}A^* & -A^{-1}QA^{-1} \\ QA^{-1}A^* & A^*A^{-1} - QA^{-1}QA^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας Φ είναι συμπλεκτικός. Συνδυάζοντας τις ιδιότητες (iii) και (iv) (βλέπε Σχόλια 2.1) για το συμπλεκτικό πίνακα Φ, μπορούμε να γράψουμε τα εξής:

$$\Phi = WLW^{-1} \tag{2.12}$$

όπου

$$L = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

είναι σύνθετος διαγώνιος αντιστρέψιμος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές του Φ και

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

ο πίνακας που περιέχει τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Φ.

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως στην [3], όπου οι συγγραφείς μελετούν την εξίσωση

$$X + A^T X^{-1} A = Q, \quad \text{με} \quad A, Q \in M_n(\mathbb{R}),$$

είμαστε σε θέση να αποδείξουμε έναν αλγεβρικό τρόπο υπολογισμού των λύσεων της (2.1), όταν αυτές υπάρχουν, στο επόμενο θεώρημα.

==

Θεώρημα 2.2

Έστω W ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων στη (2.14) *και ότι οι σύνθετοι πίνακες W_{11}, W_{12}, $W_{21}, W_{22} \in M_n(\mathbb{F})$ του πίνακα W είναι αντιστρέψιμοι και προκύπτουν από οποιαδήποτε εναλλαγή των στηλών του W. Υποθέτουμε ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος και ότι η εξίσωση $X+A^{*}X^{-1}A=Q$ έχει τουλάχιστο μια λύση. Τότε οι λύσεις της $X+A^{*}X^{-1}A=Q$ δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:*

$$X_1 = W_{21}W_{11}^{-1} \tag{2.15}$$

$$X_2 = W_{22}W_{12}^{-1} \tag{2.16}$$

Απόδειξη:

Ξαναγράφοντας την ισότητα (2.12) ως

$$WL = \Phi W,$$

αντικαθιστώντας στην παραπάνω ισότητα τους πίνακες Φ, L, W από τις (2.11), (2.13), (2.14), αντιστοίχως, κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς πινάκων, διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$W_{11}\Lambda_1 = A^{-1}A^{*}(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21}) \tag{2.17}$$

$$W_{21}\Lambda_1 = QA^{-1}A^{*}(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21}) + A^{*}A^{-1}W_{21} \tag{2.18}$$

$$W_{12}\Lambda_2 = A^{-1}A^{*}(W_{12} - A^{-*}QA^{-1}W_{22}) \tag{2.19}$$

$$W_{22}\Lambda_2 = QA^{-1}A^{*}(W_{12} - A^{-*}QA^{-1}W_{22}) + A^{*}A^{-1}W_{22} \tag{2.20}$$

Επειδή όλες οι ιδιοτιμές του συμπλεκτικού πίνακα Φ είναι μη-μηδενικές (βλέπε ιδιότητα (iii), Σχόλια 2.1), είναι προφανές ότι $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$ και $0 \notin \sigma(\Lambda_2)$, συνεπώς οι πίνακες $\Lambda_1, \Lambda_2 \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμοι.

Επιπλέον, από την υπόθεση του θεωρήματος ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και οι πίνακες $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$ είναι αντιστρέψιμοι. Οπότε στη συνέχεια όπου χρησιμοποιούνται οι αντίστροφοι των πινάκων A, $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$ και Λ_1, Λ_2, αυτοί υπάρχουν.

Επίσης, ο αντίστροφος πίνακας της (2.17) ισούται με:

$$\Lambda_1^{-1}W_{11}^{-1} = (W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})^{-1}A^{-*}A \tag{2.21}$$

Πολλαπλασιάζοντας δεξιά τη (2.18) επί $\Lambda_1^{-1} W_{11}^{-1}$ προκύπτει:

$$W_{21}\Lambda_1\Lambda_1^{-1}W_{11}^{-1} = QA^{-1}A^*(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})\Lambda_1^{-1}W_{11}^{-1} + A^*A^{-1}W_{21}\Lambda_1^{-1}W_{11}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στο δεξιό μέρος της παραπάνω ισότητας τον πίνακα $\Lambda_1^{-1} W_{11}^{-1}$ από τη (2.21) έχουμε:

$$\begin{aligned} W_{21}W_{11}^{-1} &= QA^{-1}A^*(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})^{-1}A^{-*}A \\ &\quad + A^*A^{-1}W_{21}(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})^{-1}A^{-*}A \\ &= \mathrm{Q} + A^*A^{-1}\left(W_{21}^{-1}\right)^{-1}(W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})^{-1}A^{-*}A \\ &= \mathrm{Q} + A^*A^{-1}\left((W_{11} - A^{-*}QA^{-1}W_{21})W_{21}^{-1}\right)^{-1}A^{-*}A \end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε:

$$W_{21}W_{11}^{-1} = \mathrm{Q} + A^*A^{-1}\left(W_{11}W_{21}^{-1} - A^{-*}QA^{-1}\right)^{-1}A^{-*}A \tag{2.22}$$

Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία στις ισότητες (2.19) και (2.20) προκύπτει:

$$W_{22}W_{12}^{-1} = Q + A^*A^{-1}\left(W_{12}W_{22}^{-1} - A^{-*}QA^{-1}\right)^{-1}A^{-*}A \tag{2.23}$$

Αντικαθιστώντας τους κατάλληλους πίνακες των ισοτήτων (2.22) και (2.23) από τη (2.6), προκύπτουν

$$W_{21}W_{11}^{-1} = C + F\left(\left(W_{21}W_{11}^{-1}\right)^{-1} + G\right)^{-1}F^*,$$

$$W_{22}W_{12}^{-1} = C + F\left(\left(W_{22}W_{12}^{-1}\right)^{-1} + G\right)^{-1}F^*,$$

από όπου είναι προφανές ότι οι πίνακες $W_{21}W_{11}^{-1}$ και $W_{22}W_{12}^{-1}$ είναι μια λύση της εξίσωσης Riccati στη (2.5). Συνεπώς, συνδυάζοντας την ισότητα στη (2.7) με το παραπάνω αποτέλεσμα είναι φανερό ότι οποιαδήποτε λύση της (2.1) υπολογίζεται από τους τύπους (2.15) και (2.16). □

Σχόλια 2.2

Σε αυτό το σημείο, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι :

i) Οι τύποι (2.15) και (2.16), που δίνουν τις λύσεις της εξίσωσης (2.1), σχετίζονται μόνο με τα ιδιοδιανύσματα του συμπλεκτικού πίνακα Φ και όχι γενικά με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του.

ii) Οι λύσεις, που υπολογίζονται από τη (2.15) και (2.16), είναι μεταξύ τους διαφορετικές, μια και είναι διαφορετικές οι στήλες του W στη (2.14). Από τη μορφή των πινάκων στις (2.15) και (2.16) είναι φανερό ότι αυτοί δεν είναι απαραίτητο να είναι Ερμιτιανοί συνεπώς οι λύσεις δεν είναι αναγκαίο να είναι θετικά ορισμένες.

iii) Οι λύσεις, που υπολογίζονται από τη (2.15), σχετίζονται με τις $n-$πρώτες στήλες του πίνακα W στη (2.14), δηλαδή με τα $n-$ιδιοδιανύσματα του Φ που είναι τοποθετημένα στον πίνακα $\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}$. Οποιαδήποτε εναλλαγή των στηλών αυτών αποτελεί μια λύση για τη (2.1). Οι λύσεις, που υπολογίζονται από τη (2.16), σχετίζονται με τις $n-$τελευταίες στήλες του W στη (2.14), δηλαδή με τα $n-$ιδιοδιανύσματα του Φ που είναι τοποθετημένα στον πίνακα $\begin{pmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{pmatrix}$. Οποιαδήποτε εναλλαγή των $n-$τελευταίων ιδιοδιανυσμάτων του Φ αποτελεί μια λύση για τη (2.1).

Από την (iii) παρατήρηση, Σχόλια 2.2, δημιουργείται το ερώτημα, αν η εναλλαγή των $n-$πρώτων στηλών του W ή η εναλλαγή των $n-$τελευταίων στηλών του W, δίνει διαφορετικές λύσεις για τη (2.1) ή οποιαδήποτε εναλλαγή δίνει την ίδια λύση; Η απάντηση βρίσκεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 2.1

Έστω ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2. *Οι λύσεις που δίνονται από τις* (2.15), (2.16) *της εξίσωσης* (2.1) *είναι ανεξάρτητες από τη μετάθεση των* $n-$*πρώτων στηλών του πίνακα* W *στη* (2.14) *ή των* $n-$*τελευταίων στηλών του* W, *όπου* W *είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του* Φ *στη* (2.11).

===

Απόδειξη:

Έστω ο $n \times n$ πίνακας,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & & & t\text{-στήλη} & & r\text{-στήλη} & & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & \end{array} \\
E_{rt} = & \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ο οποίος είναι όπως ο μοναδιαίος, εκτός από τις στήλες t, r, η t-στήλη εναλλάσσεται με την r –στήλη.

Έστω

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$$

τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Φ στη (2.11), ο οποίος ως συμπλεκτικός παίρνει την μορφή (2.12), δηλαδή,

$$\Phi = WLW^{-1},$$

όπου τα ιδιοδιανύσματα τοποθετούνται ως στήλες στον πίνακα

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_i & \ldots & u_j & \ldots & u_n & u_{n+1} & \ldots & u_k & \ldots & u_l & \ldots & u_{2n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{W}_{11} & \mathrm{W}_{12} \\ \mathrm{W}_{21} & \mathrm{W}_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Αν γίνει εναλλαγή των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, τότε

$$\Phi = \hat{W} L \hat{W}^{-1},$$

όπου η εναλλαγή γίνεται $i \leftrightarrow j$ στήλη και $k \leftrightarrow l$, δηλαδή,

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_j & \dots & u_i & \dots & u_n & u_{n+1} & \dots & u_l & \dots & u_k & \dots & u_{2n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \end{pmatrix}$$

Εάν θεωρήσουμε ότι X_1, X_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης (2.1), από (2.15) και (2.16) αυτές γράφονται

$$X_1 = W_{21} W_{11}^{-1}, \qquad X_2 = W_{22} W_{12}^{-1},$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, επειδή ισχύει

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij} \quad \text{και} \quad E_{kl}^{-1} = E_{kl},$$

οι παραπάνω λύσεις μπορούν να γραφούν

$$X_1 = W_{21} W_{11}^{-1} = W_{21} (E_{ij} E_{ij}^{-1}) W_{11}^{-1} = (W_{21} E_{ij}) \left(W_{11} E_{ij} \right)^{-1} = \hat{W}_{21} \hat{W}_{11}^{-1}$$

και

$$X_2 = W_{22} W_{12}^{-1} = W_{22} (E_{kl} E_{kl}^{-1}) W_{12}^{-1} = (W_{22} E_{kl}) \left(W_{12} E_{kl} \right)^{-1} = \hat{W}_{22} \hat{W}_{12}^{-1}.$$

Συνεπώς, κάθε εναλλαγή των $n-$πρώτων ιδιοδιανυσμάτων που είναι τοποθετημένα στον πίνακα $\begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix}$ δίνει την ίδια λύση για την εξίσωση (2.1), άρα η λύση της (2.1) που υπολογίζεται από τη (2.15) δεν εξαρτάται από τις εναλλαγές των $n-$πρώτων στηλών του W.

Όμοια συμπεράσματα προκύπτουν και με την εναλλαγή των επόμενων n ιδιοδιανυσμάτων που είναι τοποθετημένα στον πίνακα $\begin{pmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{pmatrix}$. □

Αν και στην (i) παρατήρηση (Σχόλια 2.2) τονίστηκε ότι, οι λύσεις της (2.1), όπως αυτές υπολογίστηκαν στο Θεώρημα 2.2, σχετίζονται μόνο με τα ιδιοδιανύσματα του Φ, επειδή είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός πίνακα, διαισθανόμαστε ότι χρειάζεται να διερευνήσουμε τις λύσεις της (2.1) έχοντας διαφορετική τοποθέτηση των ιδιοτιμών του Φ στο σύνθετο πίνακα L της (2.13). Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, μέσα από το επόμενο παράδειγμα, η επιλογή της τοποθέτησης των ιδιοτιμών στον πίνακα L, άρα και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα ομοιότητας W στη (2.14), παίζει καθοριστικό ρόλο.

Παράδειγμα 2.2

Οι λύσεις της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.3 \\ -0.3 & 2.1 \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένοι πίνακες;

Όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 2.1 η εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$ έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση, επειδή ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1, δηλαδή, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος και $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) = 0.4824 < \frac{1}{2}$.

Για να υπολογιστούν οι λύσεις της εξίσωσης, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.

Ο πίνακας Φ στη (2.11) είναι

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -1770 & 540 \\ 1 & 5 & 1095 & -337.5 \\ -1.5 & -8.7 & -2447.5 & 748.25 \\ 2.4 & 12.3 & 2836.5 & -871.75 \end{pmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας τη διαγωνοποίηση του Φ όπως στη (2.12), θεωρούμε ένα διαγώνιο πίνακα L_1 με τις ιδιοτιμές του Φ, όπως στη (2.13), να είναι ο ακόλουθος:

$$L_1 = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4) = diag(-3312.9418,\ -0.0003,\ -1.7297,\ -0.5781)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του Φ, τα οποία αποτελούν τις στήλες του πίνακα ομοιότητας W_1, όπως στη (2.14), που είναι :

$$W_1 = \begin{pmatrix} -0.4125 & 0.9562 & -0.4694 & 0.6119 \\ 0.2558 & -0.2927 & -0.5372 & 0.6208 \\ -0.5707 & -0.0006 & -0.2030 & 0.1409 \\ 0.6623 & -0.0036 & -0.6708 & 0.4693 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

Οι υποπίνακες W_{11}, W_{12}, W_{21} και W_{22}, που προκύπτουν από τον πίνακα W_1, έχουν :

$$\det(\mathrm{W}_{11}) = -0.1239,\ \det(\mathrm{W}_{12}) = 0.0373,\ \det(\mathrm{W}_{21}) = 0.0025,\ \det(\mathrm{W}_{22}) = -7.5218 \cdot 10^{-4}$$

Συνεπώς, όλοι οι υποπίνακες του W_1 είναι αντιστρέψιμοι, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.

Άρα χρησιμοποιώντας τη (2.15) βρίσκουμε μια λύση της $X + A^{*}X^{-1}A = Q$ που είναι:

$$X_1 = W_{21}W_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} -1.35 & -4.4076 \\ 1.5576 & 5.1 \end{pmatrix}$$

και από τη (2.16) υπολογίζουμε

$$X_2 = W_{22}W_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} -1.35 & 1.5576 \\ -4.4076 & 5.1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες X_1 και X_2 **δεν** είναι συμμετρικοί και μάλιστα

$$\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \{-0.0053,\ 3.7553\}.$$

➢ Θεωρώντας άλλη τοποθέτηση των ιδιοτιμών του Φ ως διαγώνια στοιχεία του πίνακα L_2, ως ακολούθως:

$$L_2 = diag(-3312.9418,\quad -1.7297,\quad -0.5781,\quad -0.0003)$$

ο αντίστοιχος πίνακας με τα ιδιοδιανύσματα του Φ είναι :

$$W_2 = \begin{pmatrix} -0.4125 & -0.4694 & 0.6119 & 0.9562 \\ 0.2558 & -0.5372 & 0.6208 & -0.2927 \\ -0.5707 & -0.2030 & 0.1409 & -0.0006 \\ 0.6623 & -0.6708 & 0.4693 & -0.0036 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ \widehat{W}_{21} & \widehat{W}_{22} \end{pmatrix}$$

Οι υποπίνακες $\widehat{\mathrm{W}}_{11}$, $\widehat{\mathrm{W}}_{12}$, $\widehat{\mathrm{W}}_{21}$ και $\widehat{\mathrm{W}}_{22}$, που προκύπτουν από τον πίνακα W_2, έχουν :

$\det(\widehat{\mathrm{W}}_{11}) = 0.3417$, $\det(\widehat{\mathrm{W}}_{12}) = -0.7727$, $\det(\widehat{\mathrm{W}}_{21}) = 0.5173$, $\det(\widehat{\mathrm{W}}_{22}) = -2.2566 \cdot 10^{-4}$

Επειδή όλοι οι υποπίνακες του W_2 είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2, οπότε χρησιμοποιώντας τη (2.15) βρίσκουμε μια λύση της $X + A^{*}X^{-1}A = Q$ που είναι:

$$X_1 = W_{21}W_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.0493 & -0.5389 \\ -0.5389 & 1.7196 \end{pmatrix}$$

και από τη (2.16) υπολογίζουμε

$$X_2 = W_{22} W_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0529 & 0.1749 \\ 0.1749 & 0.5836 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες X_1 και X_2 **είναι** συμμετρικοί πίνακες και μάλιστα ισχύει

$$\sigma(X_1) = \{0.7497,\ 2.0192\} \text{ και } \sigma(X_2) = \{0.0004,\ 0.6360\}$$

οπότε οι πίνακες X_1 και X_2 είναι και θετικά ορισμένοι (Πρόταση 1.2). ◊

Σχόλια 2.3

Στο Παράδειγμα 2.2 ο πραγματικός πίνακας Φ είναι συμπλεκτικός, συνεπώς έχει ιδιοτιμές κατά ζεύγη αντίστροφες (ιδιότητα (iv)-Σχόλια 2.1), οπότε χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι :

- Όταν μια ιδιοτιμή λ_i ανήκει εκτός του μοναδιαίου δίσκου, τότε η $\dfrac{1}{\lambda_i}$ είναι εντός αυτού.
- Στον πίνακα L_1 οι ιδιοτιμές είναι τοποθετημένες ως εξής:

$$L_1 = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4) = diag(\lambda_1,\ \frac{1}{\lambda_1},\ \lambda_3,\ \frac{1}{\lambda_3})$$

και τότε οι αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης (2.1) **δεν** είναι συμμετρικοί πίνακες.

- Ενώ στον πίνακα L_2 οι ιδιοτιμές του πίνακα Φ είναι τοποθετημένες

$$L_2 = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4) = diag(\lambda_1,\ \lambda_3,\ \frac{1}{\lambda_3},\ \frac{1}{\lambda_1})$$

και τότε οι αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης (2.1) είναι συμμετρικοί πίνακες.

Τέλος, χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι αν ισχύει το Θεώρημα 2.1, υπάρχει μια θετικά ορισμένη λύση της (2.1). Κάθε άλλη λύση, που θα υπολογιστεί από τους τύπους (2.15) ή (2.16) μέσω κατάλληλα επιλεγμένων πινάκων L, όπως στη (2.13) και αντίστοιχων πινάκων ομοιότητας W, όπως στη (2.14), αν παρατηρήσουμε ότι η λύση είναι Ερμιτιανή θα είναι και θετικά ορισμένη (βλέπε [19, Corollary 6.2]), σε διαφορετική περίπτωση, οι τύποι (2.15) και (2.16) δίνουν μη-Ερμιτιανές λύσεις. Με αυτόν το σχολιασμό επαληθεύεται η (ii) παρατήρηση στα Σχόλια 2.2, ότι αν υπάρχουν λύσεις της (2.1), αυτές που υπολογίζονται από (2.15) ή (2.16) δεν είναι απαραίτητα Ερμιτιανές (συμμετρικές). Τα αριθμητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος 2.2 και τα Σχόλια 2.3 έδωσαν το έναυσμα για να αναζητήσουμε ένα κριτήριο τοποθέτησης των ιδιοτιμών του Φ στον πίνακα L της (2.13), άρα και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα ομοιότητας W του Φ, ώστε οι λύσεις που υπολογίζονται από (2.15) ή (2.16) να είναι Ερμιτιανές, άρα θετικά ορισμένες [19, Corollary 6.2]. Έτσι οδηγηθήκαμε στην επόμενη επιλογή παραγοντοποίησης του πίνακα Φ.

Η διαγωνοποίηση του συμπλεκτικού πίνακα Φ στη (2.12) μπορεί να είναι

$$\Phi = \widehat{W}\,\widehat{L}\,\widehat{W}^{-1} \tag{2.24}$$

όπου ο πίνακας $\widehat{L}$ περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του Φ κατά τέτοιον τρόπο ώστε :

$$\widehat{L} = \begin{bmatrix} \widehat{\Lambda} & 0 \\ 0 & \widehat{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Στο σύνθετο πίνακα $\widehat{L}$, με $\widehat{\Lambda}$ σημειώνεται ο διαγώνιος πίνακας, ο οποίος περιέχει τις ιδιοτιμές του Φ, που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου δίσκου. Επειδή ο Φ είναι ένας συμπλεκτικός πίνακας, οι ιδιοτιμές του ανά δύο είναι αντίστροφες, (βλέπε ιδιότητα (iv), Σχόλια 2.1), επομένως ο $\widehat{L}$ στη (2.25) είναι καλά ορισμένος.

Επιπλέον, ο πίνακας $\widehat{W}$ ως πίνακας ομοιότητας του Φ, έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του Φ, που αντιστοιχούν στις κατάλληλα αναδιατεταγμένες ιδιοτιμές του πίνακα $\widehat{L}$ στην (2.25) και θα σημειώνεται :

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ \widehat{W}_{21} & \widehat{W}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύονται οι τύποι για τον υπολογισμό των ακραίων λύσεων της (2.1), οι οποίες είναι θετικά ορισμένες λύσεις [19, Theorem 3.4], γενικεύοντας τα γνωστά αποτελέσματα [2, 3, 39], θεωρώντας ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $Q \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Πρόταση 2.2

Έστω η διαγώνια μορφή του Φ *στη* (2.24), με τον *πίνακα των ιδιοτιμών* $\widehat{L}$ να *δίνεται στη* (2.25) *και τον αντίστοιχο πίνακα ιδιοδιανυσμάτων* $\widehat{W}$ *στη* (2.26), όπου *οι σύνθετοι πίνακες* $\widehat{W}_{11}$, $\widehat{W}_{12}$, $\widehat{W}_{21}$, $\widehat{W}_{22}$ *είναι αντιστρέψιμοι. Οι ακραίες λύσεις* $X_{\min}$, $X_{\max}$ *της εξίσωσης* $X + A^{*}X^{-1}A = Q$, *όταν υπάρχουν, δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:*

$$X_{\max} = \widehat{W}_{21}\widehat{W}_{11}^{-1}. \tag{2.27}$$

$$X_{\min} = \widehat{W}_{22}\widehat{W}_{12}^{-1} \tag{2.28}$$

Απόδειξη:

Από την υπόθεση, ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων $\widehat{W}$ στη (2.26) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2, συνεπώς χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\widehat{W}$ από τη (2.15) του Θεωρήματος 2.2 και την Πρόταση 2.1 έχουμε:

$$X_1 = \widehat{W}_{21} \widehat{W}_{11}^{-1}$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με τη μοναδικότητα της μέγιστης θετικά ορισμένης λύσης της (2.1), [19, 38, 39], και τη (2.9) καταλήγουμε στη (2.27). Σύμφωνα με τη (2.16) του Θεωρήματος 2.2 και τα Σχόλια 2.2, μια διαφορετική λύση της (2.1) υπολογίζεται

$$X_2 = \widehat{W}_{22} \widehat{W}_{12}^{-1}.$$

Επειδή η ελάχιστη θετικά ορισμένη λύση της (2.1) είναι μοναδική [19, 38], συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα, τη μοναδικότητα της ελάχιστης λύσης και τη (2.9) συμπεραίνουμε τη (2.28). □

Παράδειγμα 2.3

Έστω η εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8.6 \end{pmatrix}.$$

Υπάρχουν θετικά ορισμένες λύσεις της παραπάνω εξίσωσης; Ποιες είναι οι ακραίες λύσεις της;

Επειδή $\det A = 5 \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας Q είναι συμμετρικός και έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές, επειδή

$$\sigma(Q) = \{2.1338,\ 12.4662\},$$

οπότε ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος (ιδιότητα (ii), Πρόταση 1.2). Επιπλέον σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, χρειάζεται να υπολογισθεί η αριθμητική ακτίνα του πίνακα

$$Q^{-1/2} A Q^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.3069 & -0.1995 \\ 0.1883 & 0.4901 \end{pmatrix},$$

η οποία υπολογίζεται από τον κώδικα στο Παράρτημα Β, και είναι

$$r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) = 0.4907.$$

Επειδή $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) < \frac{1}{2}$ ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1, άρα η εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$ έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση.

Ο πίνακας Φ στη (2.11) είναι

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1.40 & 1.60 & -1.6720 & -0.1520 \\ -0.80 & -0.20 & 1.5440 & -0.4960 \\ 4.40 & 8.60 & -2.5120 & -2.5920 \\ 0.12 & 6.28 & 3.3184 & -3.6256 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαγωνοποίηση του Φ στη (2.24) υπολογίζουμε το διαγώνιο πίνακα $\widehat{L}$, όπως κατασκευάζεται στη (2.25), ο οποίος είναι:

$\widehat{L} = diag(-2.0531 + 0.8506\mathrm{i},\ -2.0531 - 0.8506\mathrm{i},\ -0.4157 + 0.1722\mathrm{i}, -0.4157 - 0.1722\mathrm{i})$

Προφανώς ο πίνακας Φ έχει

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_{1,2}(\Phi) = -2.0531 \pm 0.8506\mathrm{i},\ \lambda_{3,4}(\Phi) = -0.4157 \pm 0.1722\mathrm{i}\},$$

και ισχύει

$$|\lambda_1(\Phi)| = |\lambda_2(\Phi)| = 2.2223 \quad \text{και} \quad |\lambda_3(\Phi)| = |\lambda_4(\Phi)| = 0.45.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του Φ είναι τοποθετημένα ως στήλες στον επόμενο πίνακα :

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} -0.2639 + 0.1316\mathrm{i} & -0.2639 - 0.1316\mathrm{i} & -0.0008 + 0.1369\mathrm{i} & -0.0008 - 0.1369\mathrm{i} \\ 0.3286 - 0.0727\mathrm{i} & 0.3286 + 0.0727\mathrm{i} & 0.3275 - 0.0377\mathrm{i} & 0.3275 + 0.0377\mathrm{i} \\ -0.2358 + 0.3364\mathrm{i} & -0.2358 - 0.3364\mathrm{i} & 0.2453 + 0.1127\mathrm{i} & 0.2453 - 0.1127\mathrm{i} \\ 0.7944 & 0.7944 & 0.8943 & 0.8943 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ \widehat{W}_{21} & \widehat{W}_{22} \end{pmatrix}$$

Οι υποπίνακες $\widehat{W}_{11}$, $\widehat{W}_{12}$, $\widehat{W}_{21}$ και $\widehat{W}_{22}$, που προκύπτουν από τον πίνακα $\widehat{W}$, έχουν:

$\det(\widehat{W}_{11}) = 0.0481\mathrm{i} \neq 0$, $\det(\widehat{W}_{12}) = 0.0896\mathrm{i}$, $\det(\widehat{W}_{21}) = 0.5345\mathrm{i}$, $\det(\widehat{W}_{22}) = 0.2016\mathrm{i}$,

άρα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.

Επομένως, η Πρόταση 2.2 μπορεί να εφαρμοστεί και από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) υπολογίζονται οι ακραίες λύσεις της εξίσωσης, που είναι:

$$X_{\max} = \widehat{W}_{21}\widehat{W}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.8832 & 2.4009 \\ 2.4009 & 4.3460 \end{pmatrix}$$

και

$$X_{\min} = \widehat{W}_{22}\widehat{W}_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.0301 & 0.7516 \\ 0.7516 & 2.7326 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες $X_{\min}, X_{\max}$ είναι θετικά ορισμένοι (Πρόταση 1.2), αφού είναι συμμετρικοί και έχουν θετικές ιδιοτιμές, μια και για αυτούς ισχύει:

$$\sigma(X_{\min}) = \{0.7457,\ 3.0170\}$$

και

$$\sigma(X_{\max}) = \{1.7025,\ 6.5266\}.$$

Επίσης ο πίνακας $X_{\max} - X_{\min}$ είναι θετικά ορισμένος πίνακας, επειδή είναι συμμετρικός,

$$X_{\max} - X_{\min} = \begin{pmatrix} 2.8531 & 1.6493 \\ 1.6493 & 1.6134 \end{pmatrix}$$

και έχει

$$\sigma(X_{\max} - X_{\min}) = \{0.4713,\ 3.9952\}.$$

Κατά συνέπεια, για τις ακραίες λύσεις της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$ επαληθεύεται η (2.8), δηλαδή ισχύει

$$0 < X_{\min} < X_{\max}. \qquad \Diamond$$

2.4 Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$

Όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.3 η εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$, όταν έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση, μπορεί να έχει και άλλες λύσεις, οι οποίες είναι μη-Ερμιτιανές. Το ερώτημα που μελετάται στην παρούσα ενότητα είναι αν το πλήθος των λύσεων είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Είναι ερώτημα το οποίο πρωτοδιατύπωσε ο Zhan στη [44], ο οποίος παρατήρησε ότι η εξίσωση

$$X + X^{-1} = I_2$$

όπου $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{2.29}$$

Αρχικά, χρειάζεται να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα 2.2 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, διότι $r(I_2) = 1 > \frac{1}{2}$.

Ωστόσο, η εξίσωση $X + X^{-1} = I_2$ μπορεί να έχει λύση της μορφής του πίνακα στη (2.29), διότι ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος, αφού ισχύει $\det(X) = 1 \neq 0$, οπότε υπάρχει X^{-1} με

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα X από (2.29) στην εξίσωση διαπιστώνουμε ότι αυτή επαληθεύεται, αφού ισχύει:

$$X + X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Επειδή ο πίνακας X εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν άπειροι στο πλήθος τέτοιοι πίνακες που επαληθεύουν την εξίσωση $X + X^{-1} = I_2$.

Έτσι διαπιστώνεται ότι η εξίσωση $X + X^{-1} = I_2$ έχει άπειρο πλήθος μη-συμμετρικών λύσεων.

Στην παρούσα ενότητα θα καθορίσουμε τον ακριβή αριθμό των σταθερών λύσεων (όχι παραμετρικών, τύπου (2.29)) της εξίσωσης (2.1), όταν είναι γνωστό ότι υπάρχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση, καθώς και θα μελετήσουμε πόσες από αυτές είναι Ερμιτιανές (συμμετρικές) λύσεις και πόσες είναι μη-Ερμιτιανές. Στο επόμενο θεώρημα υπολογίζεται το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της (2.1).

Θεώρημα 2.3

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος και* $Q \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι θετικά ορισμένος, με*

$$r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \le \frac{1}{2}.$$

Έστω ότι οι σύνθετοι πίνακες W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22} *είναι αντιστρέψιμοι, οι οποίοι προκύπτουν από κάθε μετάθεση των στηλών του πίνακα* W *στη* (2.14). *Το πλήθος των λύσεων* (*number of solutions* (*n.s.*)) *της* (2.1) *ισούται με*

$$n.s. = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{2.30}$$

Απόδειξη:

Εφόσον ισχύει $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \le \frac{1}{2}$, η εξίσωση (2.1) έχει μια θετικά ορισμένη λύση, (Θεώρημα 2.1). Επίσης επιλέγοντας τη διαγωνοποίηση του Φ όπως στη (2.12), ο συμπλεκτικός πίνακας Φ έχει $2n$ ιδιοδιανύσματα, τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό όλων των λύσεων από τις ισότητες (2.15) και (2.16), καθώς ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2. Ο αριθμός όλων των δυνατών μεταθέσεων αυτών των ιδιοδιανυσμάτων είναι $(2n)!$. Επειδή ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.1 κάθε λύση έχει πολλαπλότητα n. Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της (2.1) ισούται με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των $2n$ ανά n, δηλαδή:

$$n.s. = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad \square$$

Σχόλια 2.4

Να σημειωθεί ότι στο Θεώρημα 2.3, εάν παραλείψουμε την αντιστρεψιμότητα όλων των υποπινάκων W_{ij}, με $i, j = 1, 2$, οι οποίοι προκύπτουν από τη μετάθεση των n πρώτων με τις n επόμενες στήλες του W στη (2.14), τότε ο πεπερασμένος αριθμός των λύσεων στη (2.30) είναι το ανώτερο όριο για τον αριθμό των λύσεων της (2.1). Ξέρουμε ότι η ύπαρξη των λύσεων της (2.1) εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα,

$$r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) \leq \frac{1}{2},$$

συνεπώς η ύπαρξη των ακραίων λύσεων και η αντιστρεψιμότητα των αντίστοιχων πινάκων $W_{11} \equiv \widehat{W}_{11}$, $W_{12} \equiv \widehat{W}_{12}$ εξασφαλίζονται από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3, συνεπώς οι ακραίες λύσεις υπολογίζονται από τις (2.27) και (2.28). Η αντιστρεψιμότητα όλων των σύνθετων πινάκων W_{ij}, με $i, j = 1, 2$ είναι απαραίτητη για την ύπαρξη όλων των άλλων (όχι ακραίων) λύσεων της (2.1), οι οποίες υπολογίζονται από τις (2.15) και (2.16).

Οι Engwerda, Ran, Rijkeboer, μελετώντας την εξίσωση

$$X + A^{*}X^{-1}A = I_n,$$

με $A \in M_n(\mathbb{F})$ έναν αντιστρέψιμο πίνακα, απέδειξαν ότι η ύπαρξη ενός πεπερασμένου πλήθους λύσεων της εξίσωσης (2.1) συνδέεται με τον πίνακα A [19, Corollary 6.6]. Συγκεκριμένα απέδειξαν ότι ο αριθμός των λύσεων εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A^{*} & -A^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Εάν η εξίσωση $X + A^{*}X^{-1}A = I_n$ έχει μια θετικά ορισμένη λύση και εάν η διάσταση του ιδιόχωρου[1] $V(\lambda_i(H))$ ισούται με τη μονάδα ($\dim(V(\lambda_i(H))) = 1$) για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i(H)$ του H με $|\lambda_i(H)| \neq 1$, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός θετικά ορισμένων λύσεων (Hermitian positive definite solutions (h.p.d.n.s)) της (2.1), ο οποίος δίνεται από

$$\text{h.p.d.n.s} = \prod_{j=1}^{m}(n_j + 1), \tag{2.32}$$

[1] Βλέπε Ορισμό 1.21.

όπου m είναι ο αριθμός των $\lambda_i(H) \in \sigma(H)$, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα n_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Επιπλέον, στην ίδια εργασία [19, Proposition 8.2], οι συγγραφείς θεωρώντας την εξίσωση

$$X + A^* X^{-1} A = Q, \quad \text{με} \quad A, Q \in M_n(\mathbb{R}),$$

απέδειξαν ότι ο αριθμός των πραγματικών (συμμετρικών) θετικά ορισμένων λύσεων (real symmetric positive definite solutions (r.p.d.n.s)) ισούται με:

$$\text{r.p.d.n.s} = \prod_{j=1}^{p+q} (n_j + 1), \tag{2.33}$$

όπου p είναι ο αριθμός των πραγματικών ιδιοτιμών, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, q είναι ο αριθμός των κατά ζεύγη μιγαδικών ιδιοτιμών (ο μιγαδικός και ο συζυγής του θεωρείται ένα ζεύγος), οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα n_j, $j = 1, 2, \ldots, p+q$.

Στην [3], οι συγγραφείς αποδεικνύουν αντίστοιχες σχέσεις των (2.32) και (2.33) υπολογίζοντας το πλήθος των θετικά ορισμένων λύσεων μελετώντας την εξίσωση :

$$X + A^T X^{-1} A = Q$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, που αναπτύχθηκε για την εξίσωση $X + A^T X^{-1} A = Q$ στην [3], είμαστε σε θέση να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα.

Αρχικά μετασχηματίζουμε τη (2.1) σε ισοδύναμή της. Επειδή ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος, ορίζεται ο πίνακας $Q^{-1/2}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.1) αριστερά και δεξιά επί $Q^{-1/2}$, έχουμε

$$Q^{-1/2} X Q^{-1/2} + Q^{-1/2} A^* X^{-1} A Q^{-1/2} = I_n,$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Q^{-1/2} X Q^{-1/2} + Q^{-1/2} A^* (Q^{1/2} Q^{-1/2}) X^{-1} (Q^{1/2} Q^{-1/2}) A Q^{-1/2} = I_n$$

Θέτοντας στην τελευταία εξίσωση

$$Z = Q^{-1/2} X Q^{-1/2} \quad \text{και} \quad R = Q^{-1/2} A Q^{-1/2} \tag{2.34}$$

έχουμε

$$Z + R^* Z^{-1} R = I_n, \tag{2.35}$$

όπου ο πίνακας R είναι αντιστρέψιμος, επειδή οι πίνακες A, Q είναι αντιστρέψιμοι. Επειδή ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος είναι προφανές ότι η λύση X της (2.1) προκύπτει από την πρώτη ισότητα στη (2.34) και δίνεται από

$$X = Q^{1/2} Z Q^{1/2}, \tag{2.36}$$

όπου Z είναι η αντίστοιχη λύση της (2.35).

Εφόσον η εξίσωση στη (2.35) είναι της μορφής που μελέτησαν στη [19], σχηματίζοντας τον πίνακα H όπως στην (2.31), σημειώνουμε

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -R^{-1} \\ R^{*} & -R^{-1} \end{pmatrix},$$

και αντικαθιστώντας τον πίνακα R από τη (2.34), καταλήγουμε

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \\ Q^{-1/2}A^{*}Q^{-1/2} & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας H στη (2.37) είναι συμπλεκτικός. Πράγματι, διότι ο πίνακας $H \in M_{2n}(\mathbb{F})$ της (2.37) επαληθεύει τη (2.10) του Ορισμού 2.2, διότι αν θεωρήσουμε τον $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας την αντιστρεψιμότητα του πίνακα A έχουμε:

$$\begin{aligned}
H^{*}JH &= \begin{pmatrix} 0 & Q^{-1/2}AQ^{-1/2} \\ -Q^{1/2}A^{-*}Q^{1/2} & -Q^{1/2}A^{-*}Q^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \\ Q^{-1/2}A^{*}Q^{-1/2} & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q^{-1/2}AQ^{-1/2} & 0 \\ -Q^{1/2}A^{-*}Q^{1/2} & Q^{1/2}A^{-*}Q^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \\ Q^{-1/2}A^{*}Q^{-1/2} & -Q^{1/2}A^{-1}Q^{1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & Q^{1/2}A^{-*}QA^{-1}Q^{1/2} - Q^{1/2}A^{-*}QA^{-1}Q^{1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \\
&= J
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα H στη (2.37) και ακολουθώντας τη μεθοδολογία των αποδείξεων [19, Corollary 6.6, Proposition 8.2], εύκολα αποδεικνύονται οι επόμενες προτάσεις, όπου διατυπώνονται αντίστοιχες σχέσεις των (2.32) και (2.33), οι οποίες αποτελούν γενίκευσή τους και αφορούν το πλήθος των θετικά ορισμένων λύσεων της (2.1).

===

Πρόταση 2.3

Έστω ότι η εξίσωση $X + A^* X^{-1} A = Q$ *έχει μια θετικά ορισμένη λύση, όταν* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος και* $Q \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Εάν* $\dim(V(\lambda_i(H))) = 1$ *για όλες τις ιδιοτιμές* $\lambda_i(H)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ *του H, με* $|\lambda_i(H)| \neq 1$, *τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός λύσεων της* $X + A^* X^{-1} A = Q$.

Αν οι $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots\ldots, \lambda_m(H)$ *είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του H, που βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, *τότε το πλήθος των θετικά ορισμένων λύσεων* (*Hermitian positive definite solutions* (h.p.d.n.s.)) *της* (2.1) *ισούται με* :

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) \tag{2.38}$$

Πρόταση 2.4

Έστω ότι η εξίσωση (2.1) *έχει μια θετικά ορισμένη λύση, όταν* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *είναι αντιστρέψιμος,* $Q \in M_n(\mathbb{R})$ *με* $Q > 0$ *και* H *όπως στη* (2.37). *Αν οι* $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots\ldots, \lambda_p(H)$ *είναι διακεκριμένες, πραγματικές ιδιοτιμές του H, που βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, q είναι ο αριθμός των κατά ζεύγη μιγαδικών ιδιοτιμών του H, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_j, $j = 1, 2, \ldots, p+q$, *τότε το πλήθος των πραγματικών συμμετρικών θετικά ορισμένων λύσεων* (*real symmetric positive definite solutions* (r.p.d.n.s.)) *ισούται με:*

$$\text{r.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{p+q} (n_j + 1)\,. \tag{2.39}$$

Υπενθυμίζεται ότι, στο Θεώρημα 2.3, το πλήθος των λύσεων της (2.1) σχετίστηκε με τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων W της (2.14), πίνακας ομοιότητας του Φ στη (2.12), ο οποίος εξαρτάται μόνο από τους πίνακες A, Q της εξίσωσης (2.1). Επειδή και ο πίνακας H στη (2.37) εκφράζεται μέσω των πινάκων A, Q, στη συνέχεια, αναζητούμε αν υπάρχει αλγεβρική σχέση που συνδέει τους πίνακες Φ, H, και σε περίπτωση θετικής απάντησης είναι σκόπιμο να αναζητήσουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις των (2.38) και (2.39), μελετώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Φ και όχι τις ιδιοτιμές του H, όπως διατυπώθηκε στις Προτάσεις 2.3 και 2.4.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, που αναπτύχθηκε για την εξίσωση $X + A^T X^{-1} A = Q$ στην [3, Theorem 9], είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, όπου υπολογίζεται ο ακριβής αριθμός κάθε είδους λύσης (Ερμιτιανής ή μη-Ερμιτιανής) της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$.

Θεώρημα 2.4

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος,* $Q \in M_n(\mathbb{F})$ *με* $Q > 0$ *και* $\Phi \in M_{2n}(\mathbb{F})$ *είναι ο πίνακας στη* (2.11). *Έστω ότι* $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \le \frac{1}{2}$, *και οι υποπίνακες* $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$ *στη* (2.14) *είναι αντιστρέψιμοι.*

Εάν Φ *είναι ο πίνακας στη* (2.11) *και* $\dim(V(\lambda_i(\Phi))) = 1$ για όλες τις ιδιοτιμές $\lambda_i(\Phi) \in \sigma(\Phi)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, με $|\lambda_i(\Phi)| \ne 1$, *τότε το πλήθος των θετικά ορισμένων λύσεων* (*Hermitian positive definite solutions* (h.p.d.n.s.)) *της* (2.1) *είναι πεπερασμένο. Ο αριθμός των θετικά ορισμένων λύσεων ισούται με :*

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1). \tag{2.40}$$

Ο αριθμός των μη - Ερμιτιανών λύσεων (*number of non – Hermitian solutions* (n.h.n.s.)) *της* (2.1) *είναι :*

$$\text{n.h.n.s.} = \text{n.s.} - \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1). \tag{2.41}$$

Ειδικότερα, εάν A *και* Q *είναι πραγματικοί πίνακες, τότε ανάμεσα στις θετικά ορισμένες λύσεις* (*Hermitian positive definite solutions* (h.p.d.n.s)) *υπάρχουν πραγματικές συμμετρικές* (*real symmetric solutions* (r.p.d.n.s)) *και το πλήθος τους είναι:*

$$\text{r.p.d.n.s.} = \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1) \tag{2.42}$$

Στα παραπάνω, m *είναι ο αριθμός των διακεκριμένων ιδιοτιμών του πίνακα* Φ, *οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_j, $j = 1, 2, \dots, m$, p *είναι ο αριθμός των πραγματικών διακεκριμένων ιδιοτιμών του* Φ, *οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο,* q *ο αριθμός των κατά ζεύγη μιγαδικών ιδιοτιμών του* Φ, *που βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_k, $k = 1, 2, \dots, p+q$, *και* n.s. *είναι ο αριθμός των λύσεων της* (2.1), *που δίνεται στην ισότητα* (2.30).

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα H της (2.37) μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$H^2 = \begin{pmatrix} -Q^{1/2}A^{-1}A^*Q^{-1/2} & Q^{1/2}A^{-1}QA^{-1}Q^{1/2} \\ -Q^{1/2}A^{-1}A^*Q^{-1/2} & -Q^{-1/2}A^*A^{-1}Q^{1/2} + Q^{1/2}A^{-1}QA^{-1}Q^{1/2} \end{pmatrix}$$

Επειδή Q είναι αντιστρέψιμος συμπεραίνουμε ότι ο σύνθετος διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, για τον οποίο ισχύει

$$\begin{pmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & Q^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα H^2 στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{pmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{pmatrix} \left(-H^2\right) \begin{pmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & Q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

κάνοντας τις πράξεις και χρησιμοποιώντας την ισότητα (2.43), διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\Phi = \begin{pmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{pmatrix} \left(-H^2\right) \begin{pmatrix} Q^{-1/2} & 0 \\ 0 & Q^{1/2} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{2.44}$$

όπου Φ είναι ο πίνακας της (2.11). Από τη (2.44) συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες Φ και $-H^2$ είναι όμοιοι (Ορισμός 1.22). Είναι γνωστό ότι όμοιοι πίνακες, όπως οι πίνακες Φ και $-H^2$, έχουν ίδιες ιδιοτιμές (ιδιότητα (v), Πρόταση 1.1), επομένως αν $\lambda_i(\Phi) \in \sigma(\Phi)$ και $\lambda_i(H) \in \sigma(H)$, η σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές των δύο πινάκων είναι:

$$\lambda_i(\Phi) = -\lambda_i^2(H), \quad i = 1, 2, \dots, 2n \tag{2.45}$$

Επιπλέον, από τη (2.45) συμπεραίνουμε ότι η σχέση για τα μέτρα των ιδιοτιμών των πινάκων H,Φ είναι $|\lambda_i(H)| = \sqrt{|\lambda_i(\Phi)|}$. Από την τελευταία ισότητα είναι προφανές ότι ,

$$|\lambda_i(H)| \neq 1 \Leftrightarrow |\lambda_i(\Phi)| \neq 1 \tag{2.46}$$

και

$$|\lambda_i(H)| > 1 \Leftrightarrow |\lambda_i(\Phi)| > 1 \tag{2.47}$$

Επίσης ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_i(H)$ και $-\lambda_i^2(H)$ των πινάκων H και $-H^2$ ταυτίζονται (ιδιότητα (ii), Πρόταση 1.1) από όπου είναι φανερό ότι η διάσταση των αντίστοιχων ιδιοχώρων είναι η ίδια, άρα ισχύει:

$$\dim(V(\lambda_i(H))) = \dim(V(-\lambda_i^2(H))) \tag{2.48}$$

Ακόμη, εάν συνδυάσουμε την ομοιότητα των πινάκων Φ και $-H^2$ με τη (2.48) καταλήγουμε στην ισότητα

$$\dim(V(\lambda_i(\Phi))) = \dim(V(\lambda_i(H))) \tag{2.49}$$

Η υπόθεση του Θεωρήματος 2.4 και η (2.49) δίνουν ότι για τις διαστάσεις των ιδιοχώρων $\lambda_i(\Phi)$, $\lambda_i(H)$ ισχύει:

$$\dim(V(\lambda_i(\Phi))) = \dim(V(\lambda_i(H))) = 1 .$$

Η τελευταία ισότητα και η (2.46) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, το πρώτο μέρος της Πρότασης 2.3 μπορεί να εφαρμοστεί, οπότε υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος λύσεων της (2.1). Επιπλέον, συνδυάζοντας την υπόθεση με τη (2.47), είναι προφανές ότι το δεύτερο μέρος της Πρότασης 2.3 εφαρμόζεται, δηλαδή τα πλήθος των θετικά ορισμένων λύσεων της (2.1) ισούται με

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1),$$

όπου n_j είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_j(\Phi)$ του πίνακα Φ, με $|\lambda_j(\Phi)| > 1$, για κάθε $j = 1,2,\ldots,m$.

Ακόμη, από την (2.45) έχουμε ότι κάθε πραγματική (μιγαδική) ιδιοτιμή $\lambda_i(H)$ του πίνακα H είναι πραγματική (μιγαδική) ιδιοτιμή του πίνακα Φ, αντίστοιχα, και έτσι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.4 και η (2.48) οδηγούν στην εφαρμογή της Πρότασης 2.4, οπότε ο αριθμός των πραγματικών συμμετρικών θετικά ορισμένων λύσεων στη (2.42) προκύπτει άμεσα από τη (2.39).

Επειδή οι υποπίνακες W_{ij}, για κάθε $i, j = 1, 2$, είναι αντιστρέψιμοι, από τη (2.30) υπολογίζεται το πλήθος όλων των λύσεων της (2.1) (Θεώρημα 2.3). Είναι φανερό ότι ο αριθμός των μη – Ερμιτιανών λύσεων της (2.1) στη (2.41) προκύπτει αν συνδυάσουμε (2.30) και τη (2.40). □

Σχόλια 2.5

Η σχέση που συνδέει τις ποσότητες m, p, q του Θεωρήματος 2.4 είναι :

$$m = p + 2q$$

Παράδειγμα 2.4

Να υπολογιστεί το πλήθος και το είδος των λύσεων της μη-γραμμικής εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, όπου A, Q είναι οι πίνακες του Παραδείγματος 2.3, δηλαδή,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8.6 \end{pmatrix}.$$

Από τη (2.11) υπολογίζεται ο πίνακας Φ, και όπως αναφέρθηκε και στο Παράδειγμα 2.3 έχει φάσμα

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_{1,2}(\Phi) = -2.0531 \pm 0.8506\mathrm{i},\ \lambda_{3,4}(\Phi) = -0.4157 \pm 0.1722\mathrm{i}\},$$

και για τις ιδιοτιμές ισχύουν:

$$|\lambda_{1,2}(\Phi)| = 2.2223 \quad \text{και} \quad |\lambda_{3,4}(\Phi)| = 0.45$$

Συνεπώς, ο πίνακας Φ έχει:

- $m = 2$ ιδιοτιμές έξω από το μοναδιαίο δίσκο,
- δεν έχει καμία πραγματική ιδιοτιμή, άρα $p = 0$, και
- έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών έξω από το μοναδιαίο δίσκο, άρα $q = 1$.

Όλες οι ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με τη μονάδα, άρα $n_1 = n_2 = 1$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\widehat{W}$, (βλέπε Παράδειγμα 2.3),

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} -0.2639+0.1316\mathrm{i} & -0.2639-0.1316\mathrm{i} & -0.0008+0.1369\mathrm{i} & -0.0008-0.1369\mathrm{i} \\ 0.3286-0.0727\mathrm{i} & 0.3286+0.0727\mathrm{i} & 0.3275-0.0377\mathrm{i} & 0.3275+0.0377\mathrm{i} \\ -0.2358+0.3364\mathrm{i} & -0.2358-0.3364\mathrm{i} & 0.2453+0.1127\mathrm{i} & 0.2453-0.1127\mathrm{i} \\ 0.7944 & 0.7944 & 0.8943 & 0.8943 \end{pmatrix}$$

όλοι οι 2×2 υποπίνακες $\widehat{W}_{ij}$, $i,j=1,2$, οι οποίοι προκύπτουν από κάθε μετάθεση των στηλών του $\widehat{W}$ είναι αντιστρέψιμοι. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.4 να επαληθεύονται, οπότε από τη (2.40) υπολογίζεται ο αριθμός των θετικά ορισμένων λύσεων, που είναι ίσος με:

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m}(n_j+1) = 4,$$

από τη (2.42) υπολογίζεται ο αριθμός των πραγματικών θετικά ορισμένων λύσεων, που είναι ίσος με :

$$\text{r.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{p+q}(n_j+1) = 2.$$

Επιπλέον, από τη (2.30) του Θεωρήματος 2.3, για $n=2$, υπολογίζονται

$$n.s. = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 6$$

λύσεις της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4 ο αριθμός των μη – Ερμιτιανών λύσεων δίνεται από τη (2.41) και ισούται με

$$\text{n.h.n.s.} = \text{n.s.} - \prod_{j=1}^{m}(n_j+1) = 6-4 = 2.$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\widehat{W}$, υπολογίστηκαν στο Παράδειγμα 2.3 οι δύο ακραίες λύσεις $X_{\min}, X_{\max}$, που είναι πραγματικές συμμετρικές και θετικά ορισμένες λύσεις.

➢ Επίσης κάνοντας κατάλληλη μετάθεση των στηλών του $\widehat{W}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις μη- Ερμιτιανές λύσεις που είναι:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0.8+0.4\mathrm{i} \\ 0.8-0.4\mathrm{i} & 2.9 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0.8-0.4\mathrm{i} \\ 0.8+0.4\mathrm{i} & 2.9 \end{pmatrix}. \qquad \lozenge$$

==

2.5 Αλγεβρικός υπολογισμός των λύσεων της $X - A^{*}X^{-1}A = Q$

Στις προηγούμενες υποενότητες μελετήσαμε την ύπαρξη και τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης (2.1). Στην υπο-ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης

$$X - A^{*}X^{-1}A = Q \tag{2.50}$$

όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$, $Q \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας (Ορισμός 1.12) και με $X \in M_n(\mathbb{F})$ συμβολίζεται μια λύση της εξίσωσης (2.50).

Η επίλυση της (2.50) έχει απασχολήσει πολλούς μελετητές, [2, 3, 9, 20, 36], υπάρχουν αποτελέσματα σε θεωρητικό επίπεδο, όπως είναι η διατύπωση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη θετικά και αρνητικά ορισμένων λύσεών της [20] και έχουν προταθεί αλγεβρικές καθώς και αλγοριθμικές μέθοδοι υπολογισμού των λύσεων αυτής [2, 3, 8, 9, 20, 36].

Οι Ferrante, Levy [20] απέδειξαν ότι πάντα υπάρχει μοναδική θετικά ορισμένη λύση, η οποία είναι η μέγιστη $X_{\max}$ λύση της (2.50), και εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μοναδική αρνητικά ορισμένη λύση, η οποία είναι η ελάχιστη $X_{\min}$ λύση της (2.50).

Επίσης η Meini [36] απέδειξε ότι, εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε η ελάχιστη λύση της εξίσωσης $X - A^{*}X^{-1}A = Q$ συνδέεται με τη μέγιστη λύση της ακόλουθης εξίσωσης,

$$Y - AY^{-1}A^{*} = Q \tag{2.51}$$

και η σχέση που συνδέει τις ακραίες λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων είναι:

$$X_{\min} = Q - Y_{\max} \tag{2.52}$$

Έτσι, από τη (2.52) είναι προφανές ότι η ελάχιστη λύση της (2.50) προκύπτει μέσω της μέγιστης λύσης της (2.51), όπου η εξίσωση στη (2.51) έχει τον ίδιο τύπο εξίσωσης όπως στη (2.50).

Επίσης η σχέση που συνδέει της εξισώσεις τύπου (2.1) και τύπου (2.50), αποδείχθηκε από τους Benner και Fassbender [9], όπου αν X είναι μια λύση της $X - A^* X^{-1} A = Q$, τότε αυτή υπολογίζεται από την ακόλουθη ισότητα

$$X = Z - AQ^{-1}A^* \tag{2.53}$$

όπου Z είναι η λύση της ακόλουθης εξίσωσης,

$$Z + B^* Z^{-1} B = R \tag{2.54}$$

με

$$\begin{aligned} B &= AQ^{-1}A \\ R &= Q + A^* Q^{-1} A + AQ^{-1} A^* \end{aligned}$$

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι η (2.54) είναι εξίσωση τύπου (2.1).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η λύση της εξίσωσης (2.50) μπορεί να προκύψει μέσω της λύσης της εξίσωσης (2.1), αρκεί να υπολογισθούν οι λύσεις της (2.54), αν αυτές υπάρχουν. Το ίδιο μπορεί να συμβεί και στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό των ακραίων λύσεων της (2.50), αυτές μπορούν να υπολογισθούν μέσω των ακραίων λύσεων Z της (2.54), τις οποίες αντικαθιστώντας στη (2.53) θα δώσουν τις ακραίες της (2.50).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Υπολογισμός των Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων $X \in M_n(\mathbb{F})$ της εξίσωσης

$$X^s + A^* X^{-t} A = Q, \tag{3.1}$$

όπου s,t είναι ακέραιοι αριθμοί, $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $Q \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας, και με A^* σημειώνεται ο αναστροφοσυζυγής πίνακας του A.

Στη συνέχεια μελετάται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων $X \in M_n(\mathbb{F})$ της εξίσωσηs

$$X^s + A^* X^{-s} A = Q, \tag{3.2}$$

παρουσιάζεται μια μέθοδος υπολογισμού των λύσεων και δίνεται μια εφαρμογή της αντίστοιχης θεωρίας στον υπολογισμό των ακραίων λύσεων της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$.

3.1 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Την τελευταία δεκαετία αρκετοί ερευνητές ασχολήθηκαν με μια γενικότερη εξίσωση της (2.1), μελέτησαν την εξίσωση της μορφής

$$X + A^*X^{-t}A = Q \ , \tag{3.3}$$

όπου t είναι ένας οποιοδήποτε φυσικός αριθμός [24, 26, 27, 30, 31, 32, 46], αποδεικνύοντας θεωρητικά αποτελέσματα, που σχετίζονται με την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων και τις αλγεβρικές ιδιότητές τους. Επιπλέον στις αντίστοιχες εργασίες προτείνονται μέθοδοι υπολογισμού των ακραίων λύσεων με την εφαρμογή αναδρομικών αλγορίθμων. Γενίκευση της εξίσωσης (3.3) αποτελεί η εξίσωση (3.1), την οποία μελετούν έως σήμερα αρκετοί ερευνητές. Η μελέτη της (3.1) στηρίζεται στην επέκταση αποτελεσμάτων και μεθόδων, που εφαρμόστηκαν στις απλούστερες μορφές εξισώσεων (2.1) και (3.3). Έτσι, υπάρχουν θεωρητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την ύπαρξη και τις ιδιότητες των θετικά ορισμένων λύσεων της (3.1), όταν s,t είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί [11, 16, 35, 41] και όταν $s \geq 1,\ \ 0 < t \leq 1$ ή $0 < s \leq 1,\ t \geq 1$, [12]. Επιπλέον σε αρκετές εργασίες [12, 35, 41, 42] αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού των ακραίων λύσεων προτείνονται και επαναληπτικοί αλγόριθμοι αναπτύσσονται προκειμένου να υπολογιστούν οι θετικά ορισμένες λύσεις της (3.1).

Στο κεφάλαιο αυτό, για τις ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\lambda_i(A)$, και επειδή οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί, (βλέπε (i) ιδιότητα, Πρόταση 1.2), θα θεωρούμε ότι αυτές έχουν την ακόλουθη διάταξη επί του πραγματικού άξονα:

$$\lambda_{\min}(A) \equiv \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A) \equiv \lambda_{\max}(A) .$$

Επίσης σύμφωνα με [16, Lemma 3.1] αποδεικνύεται ότι η εξίσωση

$$x^{s+t} - \lambda_{\max}(Q)x^t + \lambda_{\min}(A^*A) = 0 \tag{3.4}$$

έχει δύο θετικές πραγματικές ρίζες, έστω $a_1 < b_2$, και η εξίσωση

$$x^{s+t} - \lambda_{\min}(Q)x^t + \lambda_{\max}(A^*A) = 0 \tag{3.5}$$

έχει δύο θετικές πραγματικές ρίζες, έστω $a_2 < b_1$, για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$0 < a_1 \leq a_2 < \sqrt[s]{\frac{t}{s+t}\lambda_{\min}(Q)} < b_1 \leq b_2 . \tag{3.6}$$

3.2 Θετικά ορισμένες λύσεις της $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

3.2.1 Ικανές συνθήκες ύπαρξης θετικά ορισμένων λύσεων της $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

Οι Liu και Gao [35, Theorem 2.1 και 2.2] απέδειξαν ότι η ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = I_n$ εξαρτάται από τη φασματική νόρμα του πίνακα A (βλέπε σχέση (1.16)) και από τους αριθμούς s,t. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι υπάρχει θετικά ορισμένη λύση της παραπάνω εξίσωσης όταν ισχύει:

$$|||A|||_2^2 < \frac{s}{s+t}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{\frac{t}{s}} \tag{3.7}$$

Οι Duan και Liao [16] γενίκευσαν τα αποτελέσματα των Liu και Gao [35, Theorem 2.1 και 2.2] και τα απέδειξαν για την εξίσωση (3.1), διατυπώνοντας μια συνθήκη ύπαρξης (ή όχι) θετικά ορισμένης λύσης, η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 [16, Theorem 3.1]
Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $Q > 0$ για τους οποίους ισχύει

$$\lambda_{\max}(A^* A) < \frac{s}{s+t}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{\frac{t}{s}} \lambda_{\min}^{\frac{t}{s}+1}(Q) \tag{3.8}$$

όπου $\lambda_{\max}(A^* A)$ είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα $A^* A$ και $\lambda_{\min}(Q)$ είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα Q. Τότε η εξίσωση $X^s + A^* X^{-t} A = Q$

i) *έχει θετικά ορισμένη λύση στο σύνολο* $\varphi_1 = \{X = X^*,\ \text{με}\ \ a_1 I \le X \le a_2 I\}$

ii) *έχει μοναδική θετικά ορισμένη λύση στο σύνολο* $\varphi_2 = \{X = X^*,\ \text{με}\ \ b_1 I \le X \le b_2 I\}$

iii) *δεν έχει θετικά ορισμένη λύση στο σύνολο* $\varphi_3 = \{X = X^*,\ \text{με}\ \ a_2 I \le X \le b_1 I\}$,

όπου a_1, b_2 και a_2, b_1 είναι οι ρίζες των εξισώσεων (3.4) *και* (3.5), *αντίστοιχα.*

Επιπλέον, οι Cai και Chen [11] διατύπωσαν άλλες ικανές συνθήκες για την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της (3.1) και προσδιορίζουν σύνολα μέσα στα οποία ανήκουν αυτές οι λύσεις, τα οποία παρουσιάζονται στο επόμενο θεώρημα.

==

Θεώρημα 3.2 [11, Theorem 2.3]

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας αντιστρέψιμος πίνακας και* $Q > 0$ *οι ιδιοτιμές των πινάκων* A^*A *και* Q *επαληθεύουν και τις δύο ακόλουθες ανισότητες:*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A^*A) &< \frac{s}{s+t}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{\frac{t}{s}} \lambda_{\min}^{\frac{t}{s}+1}(Q) \\ \lambda_{\max}(A^*A) &\le a_1^{t-1}\frac{s}{s+t}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{\frac{1}{s}} \lambda_{\min}^{1+\frac{1}{s}}(Q) \end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου a_1 *είναι η ρίζα της* (3.4) *που ανήκει στο διάστημα* $\left(0,\ \sqrt[s]{\frac{t}{s+t}\lambda_{\min}(Q)}\right)$ *και* $\lambda_{\max}(A^*A)$ ($\lambda_{\min}(A^*A)$) *είναι η μέγιστη(ελάχιστη) ιδιοτιμή του πίνακα* A^*A, *αντίστοιχα, και* $\lambda_{\max}(Q)$ ($\lambda_{\min}(Q)$) *είναι η μέγιστη(ελάχιστη) ιδιοτιμή του πίνακα* Q .

Τότε η εξίσωση $X^s + A^*X^{-t}A = Q$ *έχει μόνο δύο διαφορετικές θετικά ορισμένες λύσεις, μια λύση στο σύνολο*

$$\varphi_1 = \{X = X^*,\ \text{με}\ \ a_1 I \le X \le a_2 I\},$$

και μια λύση στο σύνολο

$$\varphi_2 = \{X = X^*,\ \text{με}\ \ b_1 I \le X \le b_2 I\},$$

όπου a_1, b_2 *και* a_2, b_1 *είναι οι ρίζες των εξισώσεων* (3.4) *και* (3.5), *αντίστοιχα, και επαληθεύουν την* (3.6).

Σχόλια 3.1

i) Τα Θεωρήματα 3.1 και 3.2 παρέχουν τη δυνατότητα εντοπισμού των λύσεων της (3.1) σε σύνολα-διαστήματα, μέσα στα οποία ανήκουν οι θετικά ορισμένες λύσεις της (3.1), όταν αυτές υπάρχουν.

ii) Οι συνθήκες (3.8) και (3.9), που διατυπώνονται στο Θεώρημα 3.1 και 3.2, αντίστοιχα, δεν είναι ικανές και αναγκαίες, είναι μόνο ικανές.

iii) Ακόμη και στην ειδική περίπτωση που $s = t$ η συνθήκη (3.8) γίνεται :

$$\lambda_{\max}(A^*A) < \frac{s}{s+s}\left(\frac{s}{s+s}\right)^{\frac{s}{s}} \lambda_{\min}^{\frac{s}{s}+1}(Q) = \frac{1}{4}\lambda_{\min}^{2}(Q) \tag{3.10}$$

οπότε σύμφωνα με το (i) ή (ii) του Θεωρήματος 3.1 η εξίσωση (3.1) έχει μια θετικά ορισμένη λύση, εάν ισχύει η συνθήκη (3.10). Συνεπώς, σύμφωνα με αυτήν τη συνθήκη η ύπαρξη μιας λύσης της εξίσωσης (3.2) εξασφαλίζεται, όταν η συνθήκη (3.10) ικανοποιείται, αλλά δεν υπολογίζεται η τιμή αυτής της λύσης, παρά μόνο εντοπίζεται το σύνολο-διάστημα μέσα στο οποίο αυτή βρίσκεται. Για αυτόν το λόγο η συνθήκη (3.10), που προκύπτει από τη συνθήκη (3.8) των Duan και Liao, δε δίνει πληροφορίες για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης (3.2).

iv) Στην περίπτωση που $s = t$ η (3.9) γίνεται:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A^*A) &< \frac{s}{s+s}\left(\frac{s}{s+s}\right)^{\frac{s}{s}} \lambda_{\min}^{\frac{s}{s}+1}(Q) = \frac{1}{4}\lambda_{\min}^{\;2}(Q) \\ \lambda_{\max}(A^*A) &\le a_1^{s-1}\frac{s}{s+s}\left(\frac{s}{s+s}\right)^{\frac{1}{s}} \lambda_{\min}^{\;1+\frac{1}{s}}(Q) = a_1^{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{s}+1} \lambda_{\min}^{\;1+\frac{1}{s}}(Q) \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου a_1 είναι η ρίζα του πολυωνύμου $x^{2s} - \lambda_{\max}(Q)x^s + \lambda_{\min}(A^*A) = 0$ στο διάστημα $\left(0,\ \sqrt[s]{\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)}\right)$.

Όπως σχολιάστηκε στο (iii) παραπάνω έτσι και σε αυτό το σημείο έχουμε να σημειώσουμε ότι οι συνθήκες στην (3.11), που προκύπτουν από τις συνθήκες (3.9) των Cai και Chen, εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας λύσης της εξίσωσης (3.2) και «εντοπίζουν» το σύνολο-διάστημα μέσα στο οποίο αυτή ανήκει, χωρίς να προτείνεται ο υπολογισμός τους με αλγεβρικό τρόπο.

3.2.2 Ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης λύσεων της $X^s + A^* X^{-s} A = Q$

Στην προηγούμενη ενότητα διαπιστώσαμε ότι τα Θεωρήματα 3.1 και 3.2 προσδιορίζουν σύνολα στα οποία εντοπίζονται οι θετικά ορισμένες λύσεις της (3.1), όταν αυτές υπάρχουν, και δεν προτείνεται κάποιος αλγεβρικός τρόπος υπολογισμού αυτών των λύσεων. Όπως παρουσιάστηκε [1], για την ειδική περίπτωση που $s = t$ μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων της (3.2). Η ιδέα για να μελετήσουμε την εξίσωση (3.2) στηρίζεται στη θεωρία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (3.2) μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σε εξίσωση τύπου (2.1), αν θέσουμε στην (3.2)

$$Y = X^s \tag{3.12}$$

οπότε προκύπτει :

$$Y + A^* Y^{-1} A = Q \tag{3.13}$$

Έτσι, ακολουθώντας τον αλγεβρικό τρόπο που αναφέρθηκε στην Ενότητα 2.3, επιλύοντας την (3.13) υπολογίζεται ο πίνακας $Y \in M_n(\mathbb{F})$. Στη συνέχεια, επιλύοντας την εξίσωση (3.12) ως προς τον άγνωστο πίνακα $X \in M_n(\mathbb{F})$, που ονομάζεται s-τάξη ρίζα του πίνακα $Y \in M_n(\mathbb{F})$ [28, 43], προκύπτει η λύση της (3.2). Έτσι γίνεται φανερό ότι η ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης (3.2) σχετίζεται με την ύπαρξη s-τάξης ρίζα ενός πίνακα και με την ύπαρξη θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης (2.1), η οποία είναι ειδική περίπτωση της (3.1), όταν ισχύει $s = t = 1$, και εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα κατάλληλου πίνακα (Θεώρημα 2.1). Για να αποδείξουμε το θεώρημα, όπου διατυπώνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης θετικά ορισμένων λύσεων της (3.2), χρειαζόμαστε θεωρία που αναπτύσσεται για την ύπαρξη ριζών ενός τετραγωνικού πίνακα [28, 43]. Συγκεκριμένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1 [28, Theorem 7.2.6]

Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας*[1] *και* $v \geq 1$ *είναι ένας ακέραιος αριθμός. Τότε υπάρχει μοναδικός θετικά ημιορισμένος πίνακας* $B \in M_n(\mathbb{F})$, *τέτοιος ώστε* $B^v = A$.

---

[1] Βλέπε Ορισμό 1.12.

Θεώρημα 3.3

Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας αντιστρέψιμος πίνακας και* $Q \in M_n(\mathbb{F})$ *με* $Q > 0$. *Η εξίσωση* (3.2) *έχει μια θετικά ορισμένη λύση* $X \in M_n(\mathbb{F})$ *αν και μόνο αν για την αριθμητική ακτίνα του* $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$ *ισχύει:*

$$r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.14}$$

Απόδειξη:

Εφόσον η επίλυση της εξίσωσης (3.2) είναι ισοδύναμη με την επίλυση της (3.13) μέσω του μετασχηματισμού (3.12), αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $Y \in M_n(\mathbb{F})$ θετικά ορισμένη λύση της (3.13), τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.1, υπάρχει μοναδική $s-$ τάξης ρίζα του Y, η οποία σημειώνεται X και επιλύει την εξίσωση (3.12) με την ιδιότητα $X > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η ύπαρξη της θετικά ορισμένης λύσης $Y \in M_n(\mathbb{F})$ της (3.13) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα, που πρέπει να ικανοποιεί η αριθμητική ακτίνα στην (3.14), το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη. □

Σύμφωνα με τη (i) της Πρότασης 1.4 και τον ορισμό της φασματικής ακτίνας (βλέπε (1.3)), για έναν Ερμιτιανό πίνακα A ισχύει

$$r(A) = \max\{|\lambda_{\min}(A)|,\ |\lambda_{\max}(A)|\} = \rho(A)$$

και επιπλέον από την ιδιότητα (7) (βλέπε παράγραφο 1.3.3) ισχύει:

$$|||A|||_2 = \rho(A)$$

Έτσι από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει η ισότητα:

$$r(A) = \rho(A) = |||A|||_2 \tag{3.15}$$

Πρόταση 3.1

Έστω ότι $Q^{-1/2} A Q^{-1/2} \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ένας πίνακας με στοιχεία μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Η εξίσωση* (3.1) *έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση αν και μόνο αν*

$$|||Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2}|||_2 \leq \frac{1}{2}, \tag{3.16}$$

όπου $H_A = \dfrac{A + A^*}{2}$.

===

Απόδειξη:

Εφόσον ο H_A είναι ένας Ερμιτιανός πίνακας και $Q^{-1/2} > 0$, συνεπάγεται ότι και ο πίνακας $Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2}$ είναι Ερμιτιανός, οπότε από την (3.15) προκύπτει ότι:

$$||| Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2} |||_2 = \rho\left(Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2}\right) \qquad (3.17)$$

Επιπλέον, από την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 1.3 της παραγράφου 1.3.4 προκύπτει ότι:

$$r\left(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}\right) = \rho\left(H_{Q^{-1/2} A Q^{-1/2}}\right) = \rho\left(\frac{1}{2}\left(Q^{-1/2}\left(A + A^*\right)Q^{-1/2}\right)\right) = \rho\left(Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2}\right).$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση, την (3.17) και την (3.15) στο Θεώρημα 3.3 προκύπτει η (3.16). □

===

3.2.3 Τύποι για τον υπολογισμό των Ερμιτιανών λύσεων της $X^s + A^* X^{-s} A = Q$

Στη συνέχεια, οι τύποι όλων των Ερμιτιανών λύσεων της (3.1) δίνονται από το ακόλουθο Θεώρημα, η ύπαρξη των οποίων εξασφαλίζεται από τη Πρόταση 3.1.

Θεώρημα 3.4

Έστω ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος με $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \leq \frac{1}{2}$ και $Y \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης (3.13). *Για κάθε Y, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος διαγωνοποιεί την Y, και μια Ερμιτιανή λύση $X \in M_n$ της εξίσωσης* (3.2)*, τέτοια ώστε*

i. *εάν $s = 2l + 1$, $l = 0, 1, \ldots$, τότε*

$$X = U diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, \ldots, \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right) U^*, \tag{3.18}$$

ii. *εάν $s = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, τότε*

$$X = U diag\left(\pm\sqrt[s]{\lambda_1(Y)},\ \pm\sqrt[s]{\lambda_2(Y)},\ \ldots,\ \pm\sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right) U^*, \tag{3.19}$$

όπου $\lambda_i(Y) \in \sigma(Y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και $\pm$ στην (3.19) *συμβολίζει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των δύο αλγεβρικών προσήμων στα διαγώνια στοιχεία του* $diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, \ldots, \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right)$.

Απόδειξη:

Εφόσον $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) \leq \frac{1}{2}$, η εξίσωση (3.2) έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση από την Πρόταση 3.1. Επιπλέον, η ίδια συνθήκη εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστο θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης (3.13) σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1. Αυτή η λύση συμβολίζεται με $Y \in M_n(\mathbb{F})$. Σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα για το Y (βλέπε Θεώρημα 1.3), υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε

$$Y = UDU^*, \tag{3.20}$$

όπου $D = diag(\lambda_1(Y), ..., \lambda_n(Y))$ και $\lambda_i(Y) \in \sigma(Y)$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα του $U \in M_n$ και τους τύπους των X, Y από τις (3.18), (3.20), προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
X^s + A^* X^{-s} A = \\
&= \left(U diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, ..., \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right) U^*\right)^s \\
&\quad + A^* \left(U diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, ..., \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right) U^*\right)^{-s} A \\
&= U\left(diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, ..., \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right)\right) U^* \\
&\quad + A^* \left(U^*\right)^{-1} \left(diag\left(\sqrt[s]{\lambda_1(Y)}, \sqrt[s]{\lambda_2(Y)}, ..., \sqrt[s]{\lambda_n(Y)}\right)\right)^{-s} U^{-1} A \\
&= UDU^* + A^* \left(U^*\right)^{-1} D^{-1} U^{-1} A \\
&= Y + A^* Y^{-1} A = Q
\end{aligned}
$$

Ως εκ τούτου, η X στην (3.18) αποτελεί μια λύση της (3.2) και εφόσον $\lambda_i(Y) > 0$, τότε είναι μια θετικά ορισμένη λύση.

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι η X στην (3.19) είναι μια Ερμιτιανή λύση της (3.2). □

Σχόλια 3.2

Κλείνοντας την υπο-ενότητα, παρατηρείται ότι:

i) Το Θεώρημα 3.3 εξασφαλίζει την ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων της (3.2), η οποία εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα του $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$ και το Θεώρημα 3.4 καθορίζει την οριστικότητα αυτών των λύσεων, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το s. Όταν το s είναι περιττός αριθμός, προκύπτουν μόνο θετικά ορισμένες λύσεις και έχουν την μορφή της (3.18), ενώ όταν το s είναι άρτιος αριθμός, τότε ανάμεσα στις (Ερμιτιανές) λύσεις υπάρχουν και αρνητικά ορισμένες καθώς και αόριστες λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο στην (3.19).

ii) Οι Ερμιτιανές λύσεις στην (3.19) είναι γραμμικά εξαρτημένες, εφόσον είναι κατά ζεύγη αντίθετες.

iii) Η συνθήκη για την ύπαρξη των λύσεων της (3.1), η οποία σχετίζεται με την αριθμητική ακτίνα του $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$ στο Θεώρημα 3.3, είναι πιο γενική από τη συνθήκη στο [16, Theorem 3.1], όπως αυτή διαμορφώθηκε στην (3.10), δηλαδή,

$$\lambda_{\max}(A^*A) < \frac{1}{4}\lambda_{\min}^2(Q) \tag{3.21}$$

είτε τις συνθήκες στο [11, Theorem 2.3], όπως αυτές διαμορφώθηκαν στην (3.11), δηλαδή,

$$\lambda_{\min}(A^*A) < \frac{1}{4}\lambda_{\min}^2(Q) \tag{3.22}$$

και

$$\lambda_{\max}(A^*A) \le \frac{a_1^{s-1}}{2}\sqrt[s]{\frac{1}{2}\lambda_{\min}^{s+1}(Q)}, \tag{3.23}$$

όπου a_1 είναι λύση της εξίσωσης $x^{2s} - \lambda_{\max}(Q)x^s + \lambda_{\min}(A^*A) = 0$, η οποία

βρίσκεται στο διάστημα $\left(0, \sqrt[s]{\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)}\right)$. Όταν ισχύει η (3.21) ή

ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.22) και (3.23), τότε ορίζονται σύνολα-διαστήματα πινάκων, όπου ανήκουν κάποιες θετικά ορισμένες λύσεις της εξίσωσης (3.1) χωρίς αυτές να ορίζονται από συγκεκριμένο τύπο. Χαρακτηριστικό είναι το Παράδειγμα 3.2, στο οποίο για $s = 3$ ο πίνακας που προκύπτει έχει Ερμιτιανές λύσεις, παρόλο που μόνο η ανισότητα στην (3.22) επαληθεύεται.

Παράδειγμα 3.1

Να λυθούν οι μη-γραμμικές εξισώσεις $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, όταν $s = 2{,}3$ και

$$A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.4 \\ -0.4 & 2.3 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, με φάσμα

$$\sigma(A) = \{\lambda_1(A) = -0.3179,\ \lambda_2(A) = 0.8179\},$$

και $Q > 0$, με $\sigma(Q) = \{1.0699,\ 2.4301\}$. Αφού $r(Q^{-1/2}AQ^{-1/2}) = 0.4691$ (ο υπολογισμός της αριθμητικής ακτίνας έγινε μέσω του κώδικα που αναπτύσσεται στο Παράρτημα Β), το Θεώρημα 3.3 εξασφαλίζει την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της (3.2) και το Θεώρημα 3.4 καθορίζει την οριστικότητα αυτών των λύσεων από τις (3.18)-(3.19).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 ο υπολογισμός των λύσεων της $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ απαιτεί πρώτα τον υπολογισμό των θετικά ορισμένων λύσεων της (3.13), δηλαδή της εξίσωσης $Y + A^* Y^{-1} A = Q$, ο υπολογισμός των οποίων αναπτύχθηκε στην Ενότητα 2.3 και απαιτεί την κατασκευή του συμπλεκτικού πίνακα Φ στη (2.11) και τον υπολογισμό των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του όπως στη (2.26).

Έτσι, ο πίνακας Φ είναι:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1.1538 & 0.2692 & -15.6805 & 2.3669 \\ 0.0769 & 0.8846 & 1.3905 & -2.6627 \\ 1.3538 & -0.0308 & -18.4882 & 3.8284 \\ -0.2846 & 1.9269 & 9.2012 & -5.9172 \end{pmatrix}$$

με φάσμα

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_1(\Phi) = -19.7683,\ \lambda_2(\Phi) = -2.0634,\ \lambda_3(\Phi) = -0.0506,\ \lambda_4(\Phi) = -0.4846\}$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τις στήλες του πίνακα

$$W = \begin{pmatrix} 0.5686 & -0.3944 & 0.9655 & -0.4954 \\ -0.1045 & -0.5421 & -0.2506 & -0.7263 \\ 0.6915 & -0.1982 & 0.0660 & -0.1333 \\ -0.4331 & -0.7150 & -0.0257 & -0.4574 \end{pmatrix}$$

Οι θετικά ορισμένες λύσεις Y_j της (3.2) υπολογίζονται από την (3.20).

- Όταν $s = 2$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 για κάθε $Y_j > 0$ οι αντίστοιχες

  Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^2 + A^* X^{-2} A = Q$ προκύπτουν από την (3.19) ως εξής:

  για $Y_1 = \begin{pmatrix} 0.0985 & 0.1163 \\ 0.1163 & 0.5504 \end{pmatrix} > 0$, τότε οι Ερμιτιανές λύσεις είναι

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.2927 & 0.1134 \\ 0.1134 & 0.7332 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} -0.2084 & 0.2347 \\ 0.2347 & 0.7038 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} -0.2927 & -0.1134 \\ -0.1134 & -0.7332 \end{pmatrix}, \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 0.2084 & -0.2347 \\ -0.2347 & -0.7038 \end{pmatrix}$$

  για $Y_2 = \begin{pmatrix} 0.1373 & 0.2657 \\ 0.2657 & 1.1258 \end{pmatrix} > 0$, τότε οι Ερμιτιανές λύσεις είναι

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0.3147 & 0.1957 \\ 0.1957 & 1.0428 \end{pmatrix}, \qquad X_6 = \begin{pmatrix} -0.1845 & 0.3213 \\ 0.3213 & 1.0112 \end{pmatrix}$$

$$X_7 = \begin{pmatrix} -0.3147 & -0.1957 \\ -0.1957 & -1.0428 \end{pmatrix}, \quad X_8 = \begin{pmatrix} 0.1845 & -0.3213 \\ -0.3213 & -1.0112 \end{pmatrix}$$

για $Y_3 = \begin{pmatrix} 1.1106 & -0.5740 \\ -0.5740 & 1.0213 \end{pmatrix} > 0$, τότε οι Ερμιτιανές λύσεις είναι

$$X_9 = \begin{pmatrix} 1.0133 & -0.2897 \\ -0.2897 & 0.9682 \end{pmatrix}, \qquad X_{10} = \begin{pmatrix} -0.3674 & 0.9877 \\ 0.9877 & -0.2137 \end{pmatrix}$$

$$X_{11} = \begin{pmatrix} -1.0133 & 0.2897 \\ 0.2897 & -0.9682 \end{pmatrix}, \qquad X_{12} = \begin{pmatrix} 0.3674 & -0.9877 \\ -0.9877 & 0.2137 \end{pmatrix}$$

για $Y_4 = \begin{pmatrix} 1.1319 & -0.4580 \\ -0.4580 & 1.6523 \end{pmatrix}$, τότε οι Ερμιτιανές λύσεις είναι

$$X_{13} = \begin{pmatrix} 1.0454 & -0.1978 \\ -0.1978 & 1.2701 \end{pmatrix}, \qquad X_{14} = \begin{pmatrix} -0.3443 & -1.0067 \\ -1.0067 & 0.7993 \end{pmatrix}$$

$$X_{15} = \begin{pmatrix} -1.0454 & 0.1978 \\ 0.1978 & -1.2701 \end{pmatrix}, \qquad X_{16} = \begin{pmatrix} 0.3443 & 1.0067 \\ 1.0067 & -0.7993 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, παρατηρείται ότι οι Ερμιτιανές λύσεις είναι κατά ζεύγη αντίθετες, και έτσι επαληθεύεται το ii) στα Σχόλια 3.2 και οι αντίστοιχες λύσεις είναι $X_1, X_2, X_5, X_6, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{14}$.

- Όταν $s = 3$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 για κάθε $Y_j > 0$ οι αντίστοιχες Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$ προκύπτουν από την (3.18) ως εξής:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0.0985 & 0.1163 \\ 0.1163 & 0.5504 \end{pmatrix}, \qquad X_1 = X_{\min} = \begin{pmatrix} 0.4361 & 0.0962 \\ 0.0962 & 0.8100 \end{pmatrix} \text{ (ελάχιστη λύση)}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0.1373 & 0.2657 \\ 0.2657 & 1.1258 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0.4516 & 0.1533 \\ 0.1533 & 1.0219 \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1.1106 & -0.5740 \\ -0.5740 & 1.0213 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0.9993 & -0.1950 \\ -0.1950 & 0.9689 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 1.1319 & -0.4580 \\ -0.4580 & 1.6523 \end{pmatrix}, \quad X_4 = X_{\max} = \begin{pmatrix} 1.0262 & -0.1260 \\ -0.1260 & 1.1693 \end{pmatrix}$$ (μέγιστη λύση)

Επειδή

$$X_{\max} - X_{\min} = \begin{pmatrix} 0.5901 & -0.2222 \\ -0.2222 & 0.3593 \end{pmatrix},$$

και

$$\sigma(X_{\max} - X_{\min}) = \{0.2243,\ 0.7251\}$$

είναι φανερό ότι ο συμμετρικός πίνακας $X_{\max} - X_{\min}$ είναι θετικά ορισμένος, άρα από Πρόταση 1.4 (ii) ισχύει

$$X_{\max} - X_{\min} > 0 \Rightarrow X_{\max} > X_{\min} > 0,$$

το οποίο επαληθεύει ότι ισχύει $0 < X_{\min} < X_{\max}$. ◊

Παράδειγμα 3.2

Να λυθεί η μη-γραμμική εξίσωση $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$ με

$$A = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.13 & 0.12 \\ 0.20 & 0.34 & 0.12 \\ 0.11 & 0.17 & 0.10 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1.20 & -0.30 & 0.10 \\ -0.30 & 2.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

Σε αυτό το παράδειγμα, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με

$$\sigma(A) = \{\lambda_1(A) = 0.5660,\ \lambda_2(A) = 0.1602,\ \lambda_3(A) = 0.0337\},$$

ο Q είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας με

$$\sigma(\mathrm{Q}) = \{\lambda_{\min}(Q) = 0.5882,\ \lambda_2(Q) = 1.1538,\ \lambda_{\max}(Q) = 2.2080\},$$

και το φάσμα του πίνακα A^*A είναι

$$\sigma(A^*A) = \{\lambda_{\min}(A^*A) = 0.0010,\ \lambda_2(A^*A) = 0.0297,\ \lambda_{\max}(A^*A) = 0.3241\}.$$

- Από τις προηγούμενες τιμές του φάσματος είναι ξεκάθαρο ότι

$$\lambda_{\max}(A^*A) > \frac{1}{4}\lambda_{\min}^2(Q),$$

δηλαδή η ανισότητα στην (3.8) δεν ικανοποιείται, και ως εκ τούτου το Theorem 3.1 των Duan και Liao στην [16] δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Επιπλέον, η ανισότητα στην (3.22) *επαληθεύεται* αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες σε αυτή, αφού ισχύει

$$\lambda_{\min}(A^* A) < \frac{1}{4}\lambda_{\min}^2(Q).$$

Όμως η ανισότητα στην (3.23) *δεν επαληθεύεται*, διότι η πραγματική ρίζα της εξίσωσης

$$x^6 - \lambda_{\max}(Q)x^3 + \lambda_{\min}(A^* A) = 0$$

είναι $a_1 = 0.0761$, για την οποία ισχύει

$$a_1 \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{4}\lambda_{\min}(Q)}\right)$$

αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.23) είναι φανερό ότι ισχύει

$$\lambda_{\max}(A^* A) > \frac{a_1^2}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\lambda_{\min}^4(Q)}.$$

Ως εκ τούτου το Theorem 2.3 των Cai και Chen στο [11] δεν μπορεί να εφαρμοστεί διότι *δεν επαληθεύονται* και οι δυο συνθήκες του.

- Επιπλέον, τα στοιχεία του πίνακα $Q^{-1/2}AQ^{-1/2}$ είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, αφού

$$Q^{-1/2}AQ^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.2886 & 0.1118 & 0.1087 \\ 0.1606 & 0.1724 & 0.0758 \\ 0.0965 & 0.1226 & 0.1124 \end{pmatrix},$$

οπότε εφαρμόζοντας την (3.16) της Πρότασης 3.1 ισχύει

$$r(Q^{-1/2}H_A Q^{-1/2}) = |||Q^{-1/2}H_A Q^{-1/2}|||_2 = 0.4392 \le 0.5.$$

Συνεπώς η Πρόταση 3.1 εγγυάται την ύπαρξη των θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$, ο υπολογισμός των οποίων γίνεται μέσω του πίνακα W, ο οποίος υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο Παράδειγμα 3.1, και είναι :

$$W = \begin{pmatrix} -0.3171 - 0.0474i & -0.3171 + 0.0474i & 0.5649 & 0.7575 & 0.4478 - 0.1199i & 0.4478 + 0.1199i \\ -0.0623 + 0.0577i & -0.0623 - 0.0577i & 0.3301 & 0.4120 & -0.7160 & -0.7160 \\ 0.7578 & 0.7578 & 0.3325 & 0.4008 & 0.4792 + 0.2065i & 0.4792 - 0.2065i \\ -0.2840 - 0.0737i & -0.2840 + 0.0737i & 0.4438 & 0.2044 & 0.0072 - 0.0019i & 0.0072 + 0.0019i \\ 0.1114 + 0.1340i & 0.1114 - 0.1340i & 0.4464 & 0.2018 & -0.0065 + 0.0010i & -0.0065 - 0.0010i \\ 0.4464 + 0.0064i & 0.4464 - 0.0064i & 0.2551 & 0.1149 & -0.0016 + 0.0007i & -0.0016 - 0.0007i \end{pmatrix}$$

Οι θετικά ορισμένες λύσεις υπολογίζονται από την (3.18) και είναι οι εξής:

$$X_1 = X_{\min} = \begin{pmatrix} 0.4388 & 0.1899 & 0.1149 \\ 0.1899 & 0.4160 & 0.1630 \\ 0.1149 & 0.1630 & 0.2083 \end{pmatrix}, \quad \text{(ελάχιστη λύση)}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0.5602 & 0.31333 & 0.1862 \\ 0.31333 & 0.5414 & 0.2355 \\ 0.1862 & 0.2355 & 0.2502 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0.6373 & 0.1286 - 0.0644i & -0.1748 + 0.0867i \\ 0.1286 + 0.0644i & 0.4645 & 0.2128 - 0.1185i \\ -0.1748 - 0.0867i & 0.2128 + 0.1185i & 0.6880 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0.6373 & 0.1286 + 0.0644i & -0.1748 - 0.0867i \\ 0.1286 - 0.0644i & 0.4645 & 0.2128 + 0.1185i \\ -0.1748 + 0.0867i & 0.2128 - 0.1185i & 0.6880 \end{pmatrix},$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0.7760 & 0.2570 - 0.0653i & -0.1102 + 0.0929i \\ 0.2570 + 0.0653i & 0.5835 & 0.2727 - 0.1124i \\ -0.1102 - 0.0929i & 0.2727 + 0.1124i & 0.7186 \end{pmatrix},$$

$$X_6 = \begin{pmatrix} 0.7760 & 0.2570 + 0.0653i & -0.1102 - 0.0929i \\ 0.2570 - 0.0653i & 0.5835 & 0.2727 + 0.1124i \\ -0.1102 + 0.0929i & 0.2727 - 0.1124i & 0.7186 \end{pmatrix},$$

$$X_7 = \begin{pmatrix} 0.8241 & -0.2260 & -0.0688 \\ -0.2260 & 1.1677 & -0.0135 \\ -0.0688 & -0.0135 & 0.8053 \end{pmatrix},$$

$$X_8 = X_{\max} = \begin{pmatrix} 0.9947 & -0.1149 & 0.0131 \\ -0.1149 & 1.2415 & 0.0398 \\ 0.0131 & 0.0398 & 0.8447 \end{pmatrix}, \quad \text{(μέγιστη λύση)}$$

Οι πραγματικές συμμετρικές λύσεις είναι

$$X_1, X_2, X_7, X_8,$$

και, με τον ίδιο τρόπο όπως στο Παράδειγμα 3.1, επαληθεύεται ότι ισχύει

$$0 < X_{\min} \leq X \leq X_{\max},$$

για κάθε θετικά ορισμένη λύση X. ◊

3.2.4 Πλήθος των λύσεων της $X^s + A^* X^{-s} A = Q$

Επιπλέον, από [2, 3], όταν $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, η ύπαρξη ενός πεπερασμένου αριθμού θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης (3.13) εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα Φ.

Στη συνέχεια, $V(\lambda_i(\Phi))$ συμβολίζει τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i(\Phi)$ και $\dim(V(\lambda_i(\Phi)))$ συμβολίζει τη διάστασή του.

Θεώρημα 3.5

Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας,* Φ *είναι ο πίνακας στην* (2.11) *και ότι η εξίσωση* (3.2) *έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση. Εάν* $\dim(V(\lambda_i(\Phi))) = 1$ *για κάθε ιδιοτιμή* $\lambda_i(\Phi)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ *του* Φ, *με* $|\lambda_i(\Phi)| \neq 1$, *τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός Ερμιτιανών λύσεων* (*Hermitian solutions* (h.s.)) *της* (3.1). *Πιο συγκεκριμένα, όταν* s *είναι ένας άρτιος αριθμός, τότε ο αριθμός των λύσεων ισούται με*

$$\text{h.s.} = 2^n \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1), \tag{3.24}$$

και όταν s *είναι ένας περιττός αριθμός, τότε ο αριθμός των θετικά ορισμένων λύσεων* (*Hermitian positive definite solutions* (h.p.d.n.s.)) *ισούται με*

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) \tag{3.25}$$

Εάν A, Q *είναι πίνακες με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τότε ανάμεσα στον αριθμό των λύσεων* (h.s.) *και στον αριθμό των θετικά ορισμένων λύσεων* (h.p.d.n.s.) *υπάρχουν πραγματικές συμμετρικές λύσεις* (*real symmetric solutions* (r.s.s.)) *ή πραγματικές θετικές συμμετρικές λύσεις* (*real positive symmetric solutions* (r.p.s.s.)) *της* (3.2) *με*

$$\text{r.s.s.} = 2^n \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1), \quad \text{για } s = 2l,\ l = 1, 2, \ldots \tag{3.26}$$

$$\text{r.p.s.s.} = \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1), \quad \text{για } s = 2l+1, \ l = 0,1,... \tag{3.27}$$

όπου m είναι ο αριθμός των ιδιοτιμών του Φ*, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_j, $j = 1,2,\dots,m$*, p είναι ο αριθμός των πραγματικών ιδιοτιμών του* Φ*, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, q είναι ο αριθμός των κατά ζεύγη μιγαδικών ιδιοτιμών, οι οποίες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα* n_j, $j = 1,2,\dots,p+q$.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $X \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια θετικά ορισμένη λύση της (3.1). Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, κάθε θετικά ορισμένη λύση $X \in M_n(\mathbb{F})$ της (3.1) σχετίζεται με μια θετικά ορισμένη λύση $Y \in M_n(\mathbb{F})$ της (3.2) μέσω της (3.12). Ως εκ τούτου, ο μοναδικός συμπλεκτικός πίνακας Φ στην (3.15) αντιστοιχεί και στις δύο εξισώσεις (3.2) και (3.1). Έτσι, όταν $s = 2l+1$, τότε ο συνολικός αριθμός των θετικά ορισμένων (ή πραγματικών θετικών συμμετρικών) λύσεων είναι ο ίδιος όπως στο [3, Theorem 9] και δίνεται από τις σχέσεις (3.25) και (3.27) αντίστοιχα. Ενώ όταν $s = 2l$, τότε ο συνολικός αριθμός των Ερμιτιανών (ή πραγματικών συμμετρικών) λύσεων δίνεται από τις σχέσεις (3.24) και (3.26) αντίστοιχα, καθώς ο αριθμός των Ερμιτιανών λύσεων (h.s.) και οι πραγματικές συμμετρικές λύσεις (r.s.s.) εξαρτώνται από όλες τις μεταθέσεις του προσήμου + ή − στην s−τάξη ρίζα των ιδιοτιμών του $Y \in M_n(\mathbb{F})$, (βλέπε πως προκύπτει ο τύπος για τις X στην (3.19)) . □

Σχόλια 3.3

- **i)** Είναι φανερό ότι για $s = 1$, ο αριθμός των λύσεων στην (3.25) και (3.27) είναι ο ίδιος όπως στο [3, Theorem 9].
- **ii)** Υπενθυμίζεται ότι οι Ερμιτιανές λύσεις στην (3.19) είναι γραμμικά εξαρτημένες σύμφωνα με το (ii) στα Σχόλια 3.2. Συνεπώς, όταν το s είναι ένας άρτιος αριθμός, ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων Ερμιτιανών λύσεων ισούται με

$$\text{h.s.} = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1), \tag{3.28}$$

και ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων πραγματικών συμμετρικών λύσεων της (3.2) για $s = 2l,\ l = 1,2,\ldots$ ισούται με

$$\text{r.s.s.} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1) \tag{3.29}$$

Παράδειγμα 3.3

Να υπολογιστεί το πλήθος των Ερμιτιανών λύσεων των εξισώσεων $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, όταν $s = 2{,}3$, με $A,\ Q$ τους πίνακες του Παραδείγματος 3.1.

Αφού $r(Q^{-1/2} A Q^{-1/2}) = 0.4691$, το Θεώρημα 3.3 εξασφαλίζει την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της (3.2) και το Θεώρημα 3.4 καθορίζει την οριστικότητα των λύσεων σύμφωνα με τις (3.18)-(3.19).

Το φάσμα του πίνακα Φ από το Παράδειγμα 3.1 είναι

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_1(\Phi) = -19.7683,\ \lambda_2(\Phi) = -2.0634,\ \lambda_3(\Phi) = -0.0506,\ \lambda_4(\Phi) = -0.4846\}$$

με

$$|\lambda_1(\Phi)| = 19.7683,\ |\lambda_2(\Phi)| = 2.0634,\ |\lambda_3(\Phi)| = 0.0506, |\lambda_4(\Phi)| = 0.4846 .$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο πίνακας Φ έχει $m = p = 2$ πραγματικές ιδιοτιμές έξω από το μοναδιαίο δίσκο, η αλγεβρική πολλαπλότητα των οποίων είναι $n_1 = n_2 = 1$, και $q = 0$ (όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί). Συνεπώς, ο αριθμός των Ερμιτιανών λύσεων συμπίπτει με τον αριθμό των πραγματικών συμμετρικών λύσεων όπως εύκολα διαπιστώνεται από τους τύπους (3.24) και (3.26) (περίπτωση $s = 2l$) είτε (3.25) και (3.27) (περίπτωση $s = 2l + 1$) του Θεωρήματος 3.5.

- Συγκεκριμένα για $s = 2$ το πλήθος των αντίστοιχων λύσεων υπολογίζεται από τις (3.24) και (3.26) και είναι:

  $$\text{h.s.} \equiv \text{r.s.s.} = 2^2 \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) = 16,$$

  οι δε λύσεις υπολογίστηκαν αναλυτικά στο Παράδειγμα 3.1.

- Ενώ για $s = 3$ το πλήθος των αντίστοιχων λύσεων υπολογίζεται από τις (3.25) και (3.27) και είναι ίσο με

$$\text{h.p.d.s.} \equiv \text{r.s.s.} = \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1) = 4$$

και οι αντίστοιχες λύσεις είναι X_1, X_2, X_3, X_4 όπως δόθηκαν στο Παράδειγμα 3.1.

Επιπλέον, παρατηρείται ότι οι Ερμιτιανές λύσεις είναι κατά ζεύγη αντίθετες, και έτσι επαληθεύεται το (ii) στα Σχόλια 3.2, το οποίο δίνει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί το (ii) Σχόλια 3.3, από όπου προκύπτει ότι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων, δίνεται από τις (3.28) ή (3.29), είναι

$$\text{h.s.} \equiv \text{r.s.s.} = 2\prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) = 8,$$

και οι αντίστοιχες λύσεις είναι $X_1, X_2, X_5, X_6, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{14}$. ◊

Παράδειγμα 3.4

Να υπολογιστεί το πλήθος των Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$ με A, Q τους πίνακες του Παραδείγματος 3.2.

Τα στοιχεία του πίνακα $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$ είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί

$$Q^{-1/2} A Q^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.2886 & 0.1118 & 0.1087 \\ 0.1606 & 0.1724 & 0.0758 \\ 0.0965 & 0.1226 & 0.1124 \end{pmatrix},$$

και όπως αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 3.2 επειδή επαληθεύεται η (3.16) με $|||Q^{-1/2} H_A Q^{-1/2}|||_2 = 0.4392$, η Πρόταση 3.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$. Κατασκευάζουμε το συμπλεκτικό πίνακα Φ, όπως στη (2.11) και υπολογίζουμε ότι το φάσμα του πίνακα είναι

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_{1,2}(\Phi) = -204.227 \pm 57.086\mathrm{i},\ \lambda_3(\Phi) = 2.835,\ \lambda_4(\Phi) = -0.352,$$
$$\lambda_{5,6}(\Phi) = -0.0045 \pm 0.0013\mathrm{i}\},$$

με

$$|\lambda_{1,2}(\Phi)| = 212.0557, \quad |\lambda_3(\Phi)| = 2.8351, \quad |\lambda_4(\Phi)| = 0.3527, \quad |\lambda_{5,6}(\Phi)| = 0.0047 .$$

Επομένως, ο πίνακας Φ έχει:

- $p = 1$ πραγματική ιδιοτιμή
- $q = 1$ ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών, και συνολικά

- $m = 3$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα Φ, που βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1.

Επειδή οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.5 ικανοποιούνται, ο αριθμός των Ερμιτιανών λύσεων υπολογίζεται από την (3.25) και είναι ίσος με :

$$\text{h.p.d.n.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) = 8$$

οι δε λύσεις είναι: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$, όπως αυτές δόθηκαν στο Παράδειγμα 3.2.

Ο αριθμός των πραγματικών συμμετρικών λύσεων υπολογίζεται από την (3.27) και είναι ίσος με :

$$\text{r.p.s.s.} = \prod_{k=1}^{p+q} (n_k + 1) = 4 .$$

Οι πραγματικές συμμετρικές λύσεις είναι X_1, X_2, X_7, X_8, όπως αυτές δόθηκαν στο Παράδειγμα 3.2. ◊

3.3 Μέγιστη λύση της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$

Οι Ferrante και Levy [20] απέδειξαν ότι, όταν ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος και ο $Q > 0$, πάντα υπάρχουν ακραίες λύσεις της εξίσωσης $X - A^* X^{-1} A = Q$, και μάλιστα μοναδική μέγιστη θετικά ορισμένη λύση και μοναδική ελάχιστη αρνητικά ορισμένη λύση. Σε αυτήν την ενότητα μελετώνται οι Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης

$$X^s - A^* X^{-s} A = Q \tag{3.30}$$

και αποδεικνύεται ότι σχετίζονται με τη μέγιστη λύση μιας εξίσωσης της μορφής (3.13). Για να καταλήξουμε στην προαναφερθείσα μορφή χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2 (Αντιστροφής Πίνακα)

Για τους πίνακες $K, L, M, N \in M_n(\mathbb{F})$, με K, M να είναι αντιστρέψιμο πίνακες ισχύει:

$$(K + LMN)^{-1} = K^{-1} - K^{-1}L(M^{-1} + NK^{-1}L)^{-1} NK^{-1}$$

Η εξίσωση (3.30), χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2, μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} X^s &= Q + A^* X^{-s} A \\ &= Q + A^* (X^s)^{-1} A \\ &= Q + A^* \left(Q + A^* X^{-s} A\right)^{-1} A \\ &= Q + A^* [Q^{-1} - Q^{-1} A^* \left(X^s + AQ^{-1} A^*\right)^{-1} AQ^{-1}] A \\ &= Q + A^* Q^{-1} A - A^* Q^{-1} A^* \left(X^s + AQ^{-1} A^*\right)^{-1} AQ^{-1} A \end{aligned}$$

Θέτοντας στην τελευταία ισότητα

$$B = AQ^{-1} A \tag{3.31}$$

$$C = Q + A^* Q^{-1} A + AQ^{-1} A^* \tag{3.32}$$

$$Y = X^s + AQ^{-1} A^* \tag{3.33}$$

καταλήγουμε

$$Y + B^* Y^{-1} B = C \tag{3.34}$$

Προφανώς η εξίσωση (3.34) είναι της μορφής της (3.13). Ο πίνακας B στην (3.31) είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας καθώς

$$\det B = (\det A)^2 (\det Q)^{-1} \neq 0.$$

Επιπλέον, ο πίνακας C στην (3.32) είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας σαν άθροισμα θετικά ορισμένων πινάκων (αφού οι πίνακες $A^* Q^{-1} A$ και $AQ^{-1}A^*$ είναι θετικά ορισμένοι).

Ως εκ τούτου, είναι προφανές ότι οι λύσεις της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$ στην (3.30) μπορούν να προκύψουν από τις λύσεις της (3.34), που σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 η ύπαρξη των λύσεών της εξαρτάται από την αριθμητική ακτίνα του πίνακα $C^{-1/2} B C^{-1/2}$.

Ξαναγράφοντας την (3.33) ως

$$X^s = Y - AQ^{-1}A^*,$$

αποδεικνύεται ότι η επίλυση της (3.30) σχετίζεται με την ύπαρξη της s–τάξης ρίζα του πίνακα $Y - AQ^{-1}A^*$.

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζονται συνθήκες και τύποι για τις λύσεις της εξίσωσης (3.30).

Θεώρημα 3.6

Έστω ότι ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$ στην (3.31) *είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας $C \in M_n(\mathbb{F})$ στην* (3.32) *είναι θετικά ορισμένος και ισχύει $r(C^{-1/2} B C^{-1/2}) \leq \frac{1}{2}$. Τότε,*

i. *υπάρχει μια θετικά ορισμένη λύση $Y \in M_n(\mathbb{F})$ της* (3.34).

ii. *Εάν $Y_{\max} \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μέγιστη λύση της* (3.34) *με $\lambda_{\min}(Y_{\max}) > \lambda_{\max}(AQ^{-1}A^*)$, τότε ο πίνακας*

$$\Psi \equiv Y_{\max} - AQ^{-1}A^* \tag{3.35}$$

είναι θετικά ορισμένος και η μοναδική μέγιστη λύση $X_{\max} \in M_n(\mathbb{F})$ της εξίσωσης (3.30) *έχει τη μορφή*

$$X_{\max} = U diag(\sqrt[s]{\lambda_1(\Psi)}, \sqrt[s]{\lambda_2(\Psi)}, \ldots, \sqrt[s]{\lambda_n(\Psi)}) U^*, \tag{3.36}$$

όπου $\lambda_i(\Psi) \in \sigma(\Psi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και $U \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας, ο οποίος διαγωνοποιεί τον Ψ.

Επιπλέον, εάν $s = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, τότε υπάρχουν 2^n Ερμιτιανές λύσεις $X \in M_n(\mathbb{F})$ της (3.30) *συμπεριλαμβάνοντας τη μέγιστη λύση, οι οποίες* *προκύπτουν από την* (3.36) *χρησιμοποιώντας τους* 2^n *συνδυασμούς των προσημασμένων* $\sqrt[s]{\lambda_i(\Psi)}$, *με* $\lambda_i(\Psi) \in \sigma(\Psi)$.

Απόδειξη:

i. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση για την αριθμητική ακτίνα του πίνακα $C^{-1/2} B C^{-1/2}$ και το Θεώρημα 3.3 για $s = 1$, είναι προφανές ότι η εξίσωση (3.34) έχει τουλάχιστο μια θετικά ορισμένη λύση.

ii. Επειδή ο πίνακας $Y_{\max}$ είναι Ερμιτιανός, και ο πίνακας Ψ είναι Ερμιτιανός, διότι ισχύει:

$$\Psi^* \equiv (Y_{\max} - AQ^{-1}A^*)^* = Y_{\max}^* - (AQ^{-1}A^*)^* = Y_{\max} - AQ^{-1}A^* = \Psi$$

Επιπλέον, επειδή $Q > 0 \Rightarrow Q^{-1} > 0$ μπορούμε για οποιοδήποτε διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ να γράψουμε

$$x^* A Q^{-1} A^* x = y^* Q^{-1} y > 0,$$

άρα ο πίνακας $AQ^{-1}A^*$ είναι θετικά ορισμένος (Ορισμός 1.12).

Ο πίνακας $Y_{\max}$ είναι επίσης θετικά ορισμένος ως μέγιστη λύση της (3.34).

Οπότε η οριστικότητα των πινάκων $Y_{\max}$, $AQ^{-1}A^*$ μας επιτρέπει να γράψουμε κατά αύξουσα σειρά τις ιδιοτιμές τους ως εξής:

$$0 < \lambda_{\min}(Y_{\max}) \le \ldots \le \lambda_{\max}(Y_{\max}), \qquad 0 < \lambda_{\min}(AQ^{-1}A^*) \le \ldots \le \lambda_{\max}(AQ^{-1}A^*)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Weyl [28, Theorem 4.3.1] εξαιτίας της μορφής του πίνακα Ψ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\lambda_{\min}(Y_{\max}) - \lambda_{\max}(AQ^{-1}A^*) \le \lambda_{\min}(Y_{\max} - AQ^{-1}A^*) \le \lambda_{\min}(Y_{\max}) - \lambda_{\min}(AQ^{-1}A^*) \quad (3.37)$$

Συνδυάζοντας την υπόθεση $\lambda_{\min}(Y_{\max}) > \lambda_{\max}(AQ^{-1}A^*)$ με το αριστερό σκέλος της ανισότητας στην (3.37) έχουμε

$$\lambda_{\min}(\Psi) = \lambda_{\min}(Y_{\max} - AQ^{-1}A^*) \ge \lambda_{\min}(Y_{\max}) - \lambda_{\max}(AQ^{-1}A^*) > 0,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\Psi > 0$.

Εφόσον η υπόθεση του Λήμματος 3.1 ικανοποιείται από τον Ψ, υπάρχει μια θετικά ορισμένη λύση της $X^s = \Psi$, η οποία συμβολίζεται $X_{\max} \in M_n(\mathbb{F})$. Χρησιμοποιώντας τον ορθογώνιο πίνακα $U \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος προκύπτει από την διαγωνοποίηση του Ψ, και τη μορφή των λύσεων $X_{\max}$ από την (3.36), διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται η εξίσωση

$$X_{\max}^s = \Psi \,.$$

Επιπλέον, η $X_{\max}$ είναι η μέγιστη λύση της (3.30) εξαιτίας της μοναδικότητας της μέγιστης $Y_{\max}$ της (3.34).

Είναι εμφανές ότι όταν $s = 2l,\ l = 1, 2, \ldots$, χρησιμοποιώντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των διαγώνιων πινάκων που προκύπτουν μετά από την αλλαγή των προσήμων στις $\sqrt[s]{\lambda_i(\Psi)}$ στον τύπο των λύσεων στην (3.36), όλες οι Ερμιτιανές λύσεις της (3.30) παράγονται, ο συνολικός αριθμός των οποίων ισούται με 2^n. □

Σχόλια 3.4

- **i.** Η λύση της (3.30) δεν εξαρτάται μόνο από την επιλυσιμότητα της (3.34), αλλά και από την οριστικότητα του πίνακα Ψ στην (3.35). Έτσι αναζητώντας θετικά ορισμένες ή γενικότερα Ερμιτιανές λύσεις της (3.30) απαιτείται επιπλέον $\Psi > 0$, όπου Ψ δίνεται στο Θεώρημα 3.6.
- **ii.** Για τον υπολογισμό της $Y_{\max}$ στο (ii) του Θεωρήματος 3.6 χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ο τύπος (2.27) της Πρότασης 2.2.

Παράδειγμα 3.5

Να λυθούν οι μη-γραμμικές εξισώσεις $X^s - A^* X^{-s} A = Q$, όταν $s = 2,3$ και $A,\ Q$ οι πίνακες του Παραδείγματος 3.1.

Από τις (3.31), (3.32) υπολογίζονται οι πίνακες B, C, που είναι:

$$B = \begin{pmatrix} 0.0692 & 0.0615 \\ 0.0362 & 0.4077 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 1.3431 & -0.3038 \\ -0.3038 & 3.1242 \end{pmatrix}$$

με $\det B = 0.0260 \neq 0$ και $\sigma(C) = \{1.2927,\ 3.1746\}$.

Επίσης από τους B, C υπολογίζεται ο πίνακας

$$C^{-1/2} B C^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.0580 & 0.0457 \\ 0.0331 & 0.1354 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι πίνακας με στοιχεία μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2

$$r(C^{-1/2} B C^{-1/2}) = ||| C^{-1/2} H_B C^{-1/2} |||_2 = 0.1521,$$

όπου H_B είναι το Ερμιτιανό μέρος του πίνακα B.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6 επαληθεύονται, συνεπώς, από το (i) του Θεωρήματος 3.6 εξασφαλίζεται η ύπαρξη των θετικά ορισμένων λύσεων της (3.34), οι οποίες υπολογίζονται από το Θεώρημα 2.2 και τη σχέση (2.15).

Ο συμπλεκτικός πίνακας Φ στη (2.11), που προκύπτει όταν χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες B, C της εξίσωσης $Y + B^* Y^{-1} B = C$, είναι:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.9399 & -0.3980 & -358.4165 & 83.9248 \\ 0.0676 & 1.0353 & 54.1264 & -29.6114 \\ 1.2418 & -0.8492 & -496.7917 & 121.6471 \\ -0.0744 & 3.3555 & 278.4050 & -117.0730 \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει φάσμα

$$\sigma(\Phi) = \{\lambda_1(\Phi) = -570.3769,\ \lambda_2(\Phi) = -41.4867,\ \lambda_3(\Phi) = -0.0241,\ \lambda_4(\Phi) = -0.0018\}$$

και πίνακα W από τη (2.14) με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$W = \begin{pmatrix} -0.5195 & -0.2505 & -0.5237 & 0.9660 \\ 0.0917 & -0.3146 & -0.8499 & -0.2586 \\ -0.7242 & -0.2364 & -0.0137 & 0.0021 \\ 0.4440 & -0.8845 & -0.0567 & -0.0030 \end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$|\lambda_1(\Phi)| = 570.3769,\ |\lambda_2(\Phi)| = 41.4867,16\ |\lambda_3(\Phi)| = 0.0241,\ |\lambda_4(\Phi)| = 0.0018,$$

ο πίνακας Φ έχει $m = p = 2$ πραγματικές ιδιοτιμές έξω από το μοναδιαίο δίσκο, με αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = n_2 = 1$, και $q = 0$ (επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί).

Από τις (2.40) και (2.42) του Θεωρήματος 2.4, ο αριθμός των Y_j ισούται με

$$\text{h.p.d.n.s.} = \text{r.p.s.s.} = \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1) = 4,$$

και από τη (2.15) προκύπτουν οι ακόλουθες θετικά ορισμένες λύσεις Y_j της εξίσωσης $Y + B^* Y^{-1} B = C$:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0.0056 & 0.0127 \\ 0.0127 & 0.0589 \end{pmatrix},\quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0.1677 & 0.6179 \\ 0.6179 & 2.3193 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1.2599 & -0.7603 \\ -0.7603 & 0.5353 \end{pmatrix},\quad Y_4 = \begin{pmatrix} 1.3386 & -0.3144 \\ -0.3144 & 3.0618 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, η $Y_4 = Y_{\max}$ είναι η μόνη θετικά ορισμένη λύση από τις παραπάνω, η οποία δίνει

$$\Psi_4 = Y_{\max} - AQ^{-1}A^* = \begin{pmatrix} 1.2540 & -0.3875 \\ -0.3875 & 2.6914 \end{pmatrix} > 0$$

καθώς $\sigma(\Psi_4) = \{1.1561,\ 2.7892\}$.

- Για $s = 2$, σύμφωνα με το (ii) του Θεωρήματος 3.6 η μέγιστη λύση της εξίσωσης $X^2 + A^* X^{-2} A = Q$ υπολογίζεται από την (3.36) και ισούται με

$$X_{\max} = \begin{pmatrix} 1.1109 & -0.1412 \\ -0.1412 & 1.6345 \end{pmatrix}.$$

Οι άλλες τρεις διαφορετικές Ερμιτιανές λύσεις που υπάρχουν και προκύπτουν από κάθε εναλλαγή των προσήμων στα διαγώνια στοιχεία των διαγώνιων πινάκων που υπάρχουν στον τύπο (3.36) και είναι οι εξής:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -0.9108 & -0.6515 \\ -0.6515 & 1.5057 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1.1109 & 0.1412 \\ 0.1412 & -1.6345 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0.9108 & 0.6515 \\ 0.6515 & -1.5057 \end{pmatrix}$$

- Για $s = 3$, η θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης $X^3 + A^* X^{-3} A = Q$ υπολογίζεται από την (3.36) και ισούται με

$$X = \begin{pmatrix} 1.0710 & -0.0850 \\ -0.0850 & 1.3862 \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

Συμπεράσματα

Η μελέτη των λύσεων της μη γραμμικής εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, Q είναι ένας θετικά ορισμένος και s,t είναι φυσικοί αριθμοί ήταν το θέμα που μας απασχόλησε στην παρούσα πτυχιακή εργασία.

Παρουσιάστηκαν τα σημαντικότερα θεωρήματα που αναφέρονται στη διεθνή αρθογραφία και σχετίζονται με την ύπαρξη των θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$ καθώς επίσης αναπτύχθηκαν οι αλγόριθμοι που αναφέρονται στον υπολογισμό των ακραίων λύσεων της εξίσωσης όταν $s = t = 1$.

Η έννοια της αριθμητικής ακτίνας αποδείχθηκε η πιο σημαντική καθώς από αυτή διατυπώνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, Q είναι ένας θετικά ορισμένος και s είναι φυσικός αριθμός. Συγκεκριμένα, όταν η αριθμητική ακτίνα του πίνακα $Q^{-1/2} A Q^{-1/2}$ είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή 0.5 τότε και μόνο τότε η εξίσωση $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ έχει Ερμιτιανές λύσεις.

Στη συνέχεια αναπτύχθηκε μια αλγεβρική μέθοδος για τον υπολογισμό όλων των λύσεων (Ερμιτιανών και μη-Ερμιτιανών) της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, η οποία βασίζεται στην αλγεβρική λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Riccati. Αυτή η μέθοδος δίνει όλες τις λύσεις της εξίσωσης Riccati ως συνάρτηση των ιδιοδιανυσμάτων ενός συμπλεκτικού πίνακα, ο οποίος εξαρτάται από τους πίνακες A και Q της εξίσωσης. Συνδυάζοντας τις Ερμιτιανές λύσεις με το φασματικό θεώρημα δόθηκε κλειστός τύπος που υπολογίζει όλες τις Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$.

Επίσης αποδείχθηκε ότι, το πλήθος των ιδιοτιμών του συμπλεκτικού πίνακα που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου δίσκου, το πλήθος των πραγματικών ή μιγαδικών ιδιοτιμών του και η πολλαπλότητά τους καθορίζουν το πλήθος των θετικά ορισμένων, των Ερμιτιανών και των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$.

Σύμφωνα με τους τύπους που υπολογίζουν τις λύσεις αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος, γραμμένος σε κώδικα για Matlab, που υπολογίζει το πλήθος των λύσεων καθώς και τις Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$.

Εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε για την επίλυση $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ δόθηκε στον υπολογισμό της μέγιστης θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$.

Βιβλιογραφία

[1] M. Adam, N. Assimakis and G. Fotopoulou, On the Hermitian solutions of the matrix equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, (2011).

[2] M. Adam, N. Assimakis and F. Sanida, Algebraic solutions of the matrix equations $X + A^T X^{-1} A = Q$ and $X - A^T X^{-1} A = Q$, *International Journal of Algebra*, **2**(11), (2008), 501–518.

[3] M. Adam, N. Assimakis, G. Tziallas and F. Sanida, Riccati Equation Solution Method for the Computation of the Solutions of $X + A^T X^{-1} A = Q$ and $X - A^T X^{-1} A = Q$, *The Open Applied Informatics Journal*, **3**, (2009), 22–33.

[4] W.N. Anderson, G.B. Kleindorfer, A.R. Kleindorfer and M. Woodroofe, Consistent estimates of the parameters of a linear system, *The Annals of Mathematical Statistics*, **40**(6), (1969), 2064-2075.

[5] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Filtering*, Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall inc., 1979.

[6] W.N. Anderson, Jr. T.D. Morley and G.E. Trapp, Positive solutions to $X = A - BX^{-1}B^*$, *Linear Algebra Appl.*, **134**, (1990), 53–62.

[7] Ν. Ασημάκης, Φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Αράκυνθος, Αθήνα, 2009.

[8] N. Assimakis, F. Sanida, and M. Adam, Recursive solutions of the matrix equations $X + A^T X^{-1} A = Q$ and $X - A^T X^{-1} A = Q$, *Applied Mathematics Science*, **2**(38), (2008), 1855–1872.

[9] P. Benner and H. Fassbender, On the solution of the rational matrix equation $X = Q + LX^{-1}L^*$, *EURASIP Journal of Advances in Signal Processing*, **2007**(Article ID 21850), (2007), 1–10.

[10] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1997.

[11] J. Cai and G. Chen, Some investigation on Hermitian positive definite solutions of the matrix equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **430**, (2009), 2448–2456.

[12] J. Cai and G. Chen, On the Hermitian positive definite solutions of nonlinear matrix equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, *Applied Mathematics and Computation*, **217**, (2010), 117–123.

[13] T. Carter, R.Tapia and A. Papakonstantinou, *Linear Algebra-An Introduction to Linear Algebra for Pre-Calculus Students*, Rice University, 1995.

[14] Χ. Δέδες, *Μη αρνητικοί Πίνακες*, Πτυχιακή εργασία, Λαμία, 2011.

[15] Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα. Θεωρία και εφαρμογές*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2008.

[16] X. Duan and A. Liao, On the existence of Hermitian positive definite solutions of the matrix equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **429**, (2008), 673–687.

[17] J. Ehlgena, Nonrecursive Solution Method for the Linear Quadratic Optimal Control Problem with a Singular Transition Matrix, *Computational Economics*, **13**, 1999, 17–23.

[18] J.C. Engwerda, On the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^T X^{-1} A = I$, *Linear Algebra and Applications*, **194**, (1993), 91–108.

[19] J.C. Engwerda, A.C.M. Ran and A.L. Rijkeboer, Necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^* X^{-1} A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **186**, (1993), 255–275.

[20] A. Ferrante and B.C. Levy, Hermitian solutions of the equation $X = Q + NX^{-1}N^*$, *Linear Algebra and Applications*, **247**, (1996), 359–373.

[21] K. Gallivan, X. Rao and P. Van Dooren, Singular Riccati equations Stabilizing large-scale systems, *Linear Algebra and Applications*, **415**, (2006), 359–372.

[22] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Matrices and Indefinite Scalar Product, Operator Theory: Advances and Applications*, OT8. Birkhäuser Verlag: Basel, 1983.

[23] G. Golub and C.V. Loan, *Matrix Computations,* The Johns Hopkins University Press, London, 3rd edition, 1996.

[24] X. Guo, On Hermitian positive definite solution of nonlinear matrix equation $X + A^* X^{-2} A = Q$, *Journal of Computational Mathematics*, **23**, (2005), 513–526.

[25] C.H. Guo and P. Lancaster, Iterative solution of two matrix equations, *Mathematics of Computation*, **68**(228), (1999), 1589–1603.

[26] V.I. Hasanov, Positive definite solutions of the matrix equations $X \pm A^{*}X^{-q}A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **404**, (2005), 166–182.

[27] V.I. Hasanov and I.G. Ivanov, Solutions and perturbation estimates for the matrix equations $X \pm A^{*}X^{-n}A = Q$, *Applied Mathematics and Computation*, **156**, (2004), 513–525.

[28] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[29] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[30] I.G. Ivanov, Perturbation analysis for solutions of $X \pm A^{*}X^{-n}A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **395**, (2005), 313–331.

[31] I.G. Ivanov, On the positive definite solutions of the family of matrix equations $X + A^{*}X^{-n}A = Q$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **193**, (2006), 277–301.

[32] I.G. Ivanov, V.I. Hasanov and B.V. Minchev, On matrix equation $\mathrm{X} \pm \mathrm{A}^{*}X^{-2}A = I$, *Linear Algebra and Applications*, **326**, (2001), 27–44.

[33] Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήνα 1989.

[34] Ι. Καρακίτσος, *Θεωρία Πινάκων και Εφαρμογές*, Πτυχιακή εργασία, Λαμία, 2008.

[35] X.G. Liu and H. Gao, On the positive definite solutions of the matrix equations $X^{s} \pm A^{*}X^{-t}A = I_{n}$, *Linear Algebra and Applications*, **368**, (2003), 83–97.

[36] B. Meini, Efficient computation of the extreme solutions of $X + A^{*}X^{-1}A = Q$ and $X - A^{*}X^{-1}A = Q$, *Mathematics of Computation*, **71**(239), (2001), 1189–1204.

[37] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

[38] A.C.M. Ran and L. Rodman, Stable Hermitian Solutions of Discrete Algebraic Riccati Equations, *Mathematics of Control Signals Systems*, **5**, (1992),165–193.

[39] D.R. Vaughan, A nonrecursive algebraic solution for the discrete Riccati equation, *IEEE Transaction Automatic Control*, (1970), 597–599.

[40] D. Wainberg, On some properties of the Symplectic and Hamiltonian matrices, *Proceedings International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics* - ICTAMI 2004, (2004), 442–448.

[41] X. Yin, S. Liu and L. Fanga, Solutions and perturbation estimates for the matrix equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, *Linear Algebra and Applications*, **431**(9), (2009), 1409–1421.

[42] Y. Yueting, The iterative method for solving nonlinear matrix equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, *Applied Mathematics and Computation*, **188**, (2007), 46–53.

[43] B. Yuttanan and C. Nilrat, Roots of Matrices, Songklanakarin J. Sci. Technol., **27**(3), (2005), 659–665.

[44] X. Zhan, Computing the external positive definite solutions of a matrix equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, **17**(5), (1996), 1167–1174.

[45] X. Zhan and J. Xie, On the matrix equation $X + A^T X^{-1} A = I$, *Linear Algebra and Applications*, **247**, (1996), 337–345.

[46] Y. Zhang, On Hermitian positive definite solutions of matrix equation $X + A^* X^{-2} A = I$, *Linear Algebra and Applications*, **372**, (2003), 295–304.

Παράρτημα Α

Ο κώδικας σε Matlab που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, παρουσιάζεται παρακάτω. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι:

- η μεταβλητή A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας,
- η μεταβλητή Q είναι ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας και
- η μεταβλητή s είναι ένας φυσικός αριθμός.

```
function [hps]=sisont(A,Q,s)
```

```
[m,n]=size(A);
```

(Οι τιμές των m,n αντιστοιχούν στον αριθμό γραμμών και στηλών του πίνακα A, αντίστοιχα)

```
a=inv(A')*A;
c=Q;
b=-inv(A')*Q*inv(A);
F=[inv(a) inv(a)*b; c*inv(a) a'+c*inv(a)*b];
```

(Δημιουργία του συμπλεκτικού πίνακα F)

```
[W,L]=eig(F);
```

(Υπολογισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα F)

```
La=diag(L);
```

(Διαγωνοποίηση του πίνακα των ιδιοτιμών)

```
laab=abs(La);
```

(Υπολογισμός της απόλυτης τιμής του πίνακα La)

==

(Ταξινόμηση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα F κατά απόλυτη τιμή)

```
for i=1:2*n
Lvector(i)=L(i,i);
end;
[Lvectorsort,Isort]=sort(Lvector);
LS=zeros(2*n,2*n);
for i=1:2*n
    LS(i,i)=Lvectorsort(2*n+1-i);
end;
WS=[];
for i=1:2*n
   j=Isort(2*n+1-i);
   w=W(:,j:j);
   WS=[WS w];
end;
```

(Υπολογισμός όλων των λύσεων ((2*n)!))

```
YPSOLS=[];
[items]=placeItem(2*n);
```

(ο κώδικας για την συνάρτηση placeItem παρατίθεται παρακάτω)

```
[N,M]=size(items);
for i=1:N
   WHELP=[];
   for j=1:2*n
      k=items(i,j);
      WHELP=[WHELP WS(:,k:k)];
   end;
   WHELP=WHELP(:,1:n)
   Y=WHELP(n+1:2*n,:)*inv(WHELP(1:n,:));
   YPSOLS=[YPSOLS Y];
end;
```

(Υπολογισμός των πολλαπλών λύσεων)

```
[NH,MH]=size(YPSOLS);
YSOLS=[];
YSOLS=YPSOLS(:,1:n);
[N,M]=size(YSOLS);
for i=2:MH/n
   Y=YPSOLS(:,(i-1)*n+1:i*n);
   multiple=0;
   for j=1:M/n
       if norm ( Y-YSOLS(:,(j-1)*n+1:j*n),1 ) < 10^-4
         multiple=multiple+1;
      end;
   end;
      if multiple==0
         YSOLS=[YSOLS Y];
```

```
        [N,M]=size(YSOLS);
     end;
  end;

  possol=0;
 for j=1:1:(M/N);
    sl=N*j-(N-1);
    sr=N*j;
     Yj=YSOLS(:,sl:sr);
     j
     eigenYj=eig(Yj);
```

(Έλεγχος εάν οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί)

```
  if   abs(eigenYj)-abs(real(eigenYj)) == 0 &
       abs(eigenYj)-(real(eigenYj)) == 0
        possol=possol+1;
        Yj
        [evYj,evalueYj]=eig(Yj);
        Z=evalueYj^(1/s);
        XJZps=evYj*Z*evYj';
```

(Εναλλαγή προσήμων στα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα Z μέσω της συνάρτησης `signs(Z)`)

```
     Anew=signs(Z);
```

(ο κώδικας για την συνάρτηση signs(Z) παρατίθεται παρακάτω)

```
 [Kr, Kc]=size(Anew);
for z=1:1:(Kc/Kr);
    pl=Kr*z-(Kr-1);
    pr=Kr*z;
     Tz=Anew(:,pl:pr);
end
end
 end

hps=possol;
```

(Έλεγχος του s εάν είναι άρτιος ή περιττός αριθμός)

```
if mod(s,2) == 0
 rizes=hps*2^(n)
else
 rizes=hps
end
```

➢ Κώδικας για την συνάρτηση placeItem:

```
function [items] = placeItem(N)
    global totItems;
   global items;
   totItems=0;
   items=[];
   placeAnItem(1,1,N);


function placeAnItem(position, indexes, N)
    global totItems;
    global items;


    if position == 1
    for i=1:N
        indexes(i)=0;
    end;
    end;

    for i=1:N
        for j=1:N
        if indexes(j) >= position
            indexes(j)=0;
        end;
    end;


    if indexes(i)== 0
        indexes(i)=position;

        if position==N
            totItems=totItems+1;
            items(totItems,1:N)=indexes;
        else
             placeAnItem(position+1, indexes, N);
        end;

        end;
    end;
```

➢ Κώδικας για την συνάρτηση signs(Z):

```
function Anew=signs(A)

sizeA = size(A)
layer = 1;
for i=1:sizeA(1,2)
    K = nchoosek(1:sizeA(1,2),i);
    sizeK = size(K);
    for rowK=1:sizeK(1,1)
        Anew(:,:,layer) = A;
        for colK=1:i
            Anew(K(rowK,colK),K(rowK,colK),layer) =
                               - A(K(rowK,colK),K(rowK,colK);
        end
        layer = layer + 1;
    end
end
```

Παράρτημα Β

Ο κώδικας σε Matlab που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία για τον υπολογισμό της αριθμητικής ακτίνας ενός πίνακα, παρουσιάζεται παρακάτω. Η αριθμητική ακτίνα του πίνακα A είναι η μέγιστη απόσταση του συνόρου του αριθμητικού πεδίου του πίνακα A, δηλαδή η μέγιστη $|x^{*}Ax|$ των σημείων του επιπέδου για οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα x. Η χάραξη του συνόρου του αριθμητικού πεδίου γίνεται με προσεγγίσεις από πολύγωνα, εσωτερικά από πολύγωνο p και εξωτερικά από πολύγωνο q.

```
function [ra]=mfield3a(A)

[n,m]=size(A);
```

(Αναθέτουμε στις μεταβλητές m, n ως τιμές τον αριθμό γραμμών και στηλών του πίνακα αντίστοιχα)

```
e1=1;
        r=2;
        p=[];
        q=[];
        i=sqrt(-1);
        while  e1>0.001
                r=2*r;
                d=(2*pi)/r;
                for  k=1:r
                       B=(cos(k*d)+i*sin(k*d))*A;
                       H=0.5*(B+B');
                       [X,L]=eig(H);
                       g=diag(real(L));
                       for  c=1:n
                                if  g(c)==max(g)
                                       l(k)=g(c);
                                       IV(:,k)=X(:,c);
                                end
                       end
                end
                l(k+1)=l(1);
                for k=1:r
                      p(k)=IV(:,k)'*A*IV(:,k);
                      f=(l(k)*cos(d)-l(k+1))/sin(d);
                      q(k)=(cos(k*d)-
i*sin(k*d))*(l(k)+(i*f));
                end
        p(r+1)=p(1);
        q(r+1)=q(1);
        s1=0;
```

```
        s2=0;
                for  k=1:r
                        s1=s1+q(k)'*q(k+1);
                        s2=s2+p(k)'*p(k+1);
                end
        e1=0.5*imag(s2-s1);
        plot(p,'k');
        end
 hold on
```

`ra=max(abs(p))` (Υπολογισμός της αριθμητικής ακτίνας)

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη των λύσεων της μη-γραμμικής εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, όταν A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, Q ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας και s,t φυσικοί αριθμοί. Η εξίσωση απορρέει από τη μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα, που υπάρχουν έως σήμερα στη διεθνή αρθογραφία για την εξίσωση $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, και αναπτύσσονται νέα αποτελέσματα για την αλγεβρική επίλυσής της όταν $s = t$.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στις βασικές έννοιες πινάκων, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στον ορισμό και στις ιδιότητες της αριθμητικής ακτίνας ενός τετραγωνικού πίνακα, έννοια σημαντική από την οποία προκύπτουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια μέθοδος για τον υπολογισμό των λύσεων (Ερμιτιανών και μη-Ερμιτιανών) της εξίσωσης $X + A^* X^{-1} A = Q$, η οποία βασίζεται στην αλγεβρική επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης Riccati διακριτού χρόνου. Επίσης αποδεικνύεται ότι ο συνολικός αριθμός των λύσεων είναι πεπερασμένος και προσδιορίζεται ο ακριβής αριθμός κάθε είδους λύσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη θετικά ορισμένων λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, και διατυπώνεται ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη Ερμιτιανών λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$. Όλες οι Ερμιτιανές λύσεις της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ υπολογίζονται καθώς και το πλήθος τους. Εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε δίνεται για τον υπολογισμό της μέγιστης θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης $X^s - A^* X^{-s} A = Q$. Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας, παρουσιάζεται ο κώδικας σε Matlab που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, και χρησιμοποιείται στα παραδείγματα.

Λέξεις κλειδιά: ιδιοτιμή – ιδιοδιάνυσμα – διαγωνοποίηση πίνακα, αριθμητική ακτίνα, συμπλεκτικός πίνακας, εξίσωση Riccati.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of the solutions of the nonlinear equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, where A is a $n \times n$ nonsingular matrix, Q is a $n \times n$ positive definite matrix and s, t are nature numbers. The equation arises from the modelling of problems which are related with various research areas such as statistics, biology, economic and social sciences. In this thesis are presented the most important theorems, which are in the international bibliography for the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$, and are developed new results for its algebraic solution when $s = t$.

In the first chapter are introduced the basic concepts of matrices, with emphasis on the definition and the properties of the numerical radius of a $n \times n$ matrix, which is important in showing the necessary and sufficient conditions for the existence of the solutions of the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$. In the second chapter is presented a method for calculating the solutions (Hermitian and non-Hermitian) of the equation $X + A^* X^{-1} A = Q$, which is based on the algebraic solution of the corresponding Riccati equation of discrete time. It is also proved that the total number of the solutions is finite and the exact number of each type of solutions is formulated. In the third chapter sufficient conditions for the existence of positive definite solutions of the equation $X^s + A^* X^{-t} A = Q$ are presented, and is given a necessary and sufficient condition for the existence of Hermitian solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$. All the Hermitian solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$ are computed and their exact number. It is given an application of the theory that was developed, for the computation of the maximal positive definite solution of the equation $X^s - A^* X^{-s} A = Q$. In the end of this thesis, is presented the Matlab code, which was developed for the computation of the solutions of the equation $X^s + A^* X^{-s} A = Q$, and it is used in the examples.

Keywords: eigenvalue – eigenvector – spectral decomposition, numerical radius, symplectic matrix, Riccati equation