

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΕΠΙΛΟΓΗΣ**  
**ΜΟΥΣΕΙΟΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

**Πτυχιακή Εργασία της Φοιτήτριας**  
**Ξηντάρα Αλεξάνδρας**

**Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών**  
**στο χώρο του μουσείου**

**- Έρευνα -**

**Επιβλέποντες καθηγητές**

Χρηστίδης Θεόδωρος

Σταυρίδου Ελένη

**ΒΟΛΟΣ 2003**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.:	7869/1
Ημερ. Εισ.:	02-12-2009
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ – ΠΣΕ – ΜΕ
	2003
	ΞΗΝ

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Πρόλογος.....	1
A. Εισαγωγή.....	3
B. Έκθεση Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών.....	4
✓ Παρουσίαση Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού.....	4
✓ Εκθέσεις και Εκπαιδευτικά Προγράμματα .....	6
✓ Σύντομη αναδρομή στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.....	7
✓ Τα μαθηματικά στην περίοδο προ του Ευκλείδη.....	9
✓ Τα ελληνιστικά μαθηματικά.....	10
✓ Ευκλείδης.....	11
✓ Αρχιμήδης.....	13
✓ Απολλώνιος.....	15
✓ Η παρακμή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών.....	16
✓ Σύλληψη ιδέας για μια τέτοιου είδους έκθεση.....	20
✓ Παρουσίαση έκθεσης.....	21
✓ Οι σταθμοί της έκθεσης-Συνοπτική παρουσίαση των θεμάτων και των εκθεμάτων.....	23
Γ. Θέμα μελέτης: «Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών στο χώρο του μουσείου».....	30
✓ Ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο.....	42
✓ Στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τις μαθηματικές έννοιες των εκθεμάτων.....	46

Δ. Μεθοδολογία .....	52
✓ Συλλογή δεδομένων και η ανάλυσή τους.....	52
✓ Περίληψεις ερωτηματολογίων.....	54
✓ Ευρήματα-παρουσίαση αποτελεσμάτων.....	60
✓ Ερμηνεία αποτελεσμάτων.....	63
Ε. Συμπεράσματα.....	64
ΣΤ Βιβλιογραφία.....	66

## ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ομολογώ πώς η ενασχόληση μου με τις μαθηματικές έννοιες στη πτυχιακή μου αυτή εργασία προξένησε αρχικά αμηχανία σε μένα την ίδια, διότι ελάχιστη συμπάθεια έτρεφα, στο γυμνάσιο και στο λύκειο, προς το μάθημα αυτό.

Ωστόσο, ευρισκόμενη στο μουσειακό χώρο του *Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού*, προσφέροντας εθελοντικά τις εργασίες μου, διαπίστωσα εμπράκτως ότι τα μουσεία δεν αποτελούν απλώς εκθετήρια αποστεωμένων μορφών αλλοτινών εποχών, τα οποία ή επισκέπτονται επιτροχάδην σπεύδοντες ημεδαποί και αλλοδαποί περιηγητές προς επιφανειακή τέρψη, ικανοποιώντας τη φιλοπερίεργη ανθρώπινη τάση ή τα επεξεργάζονται ,με την ηρεμία τους, μελετητές του παρελθόντος που τους διακρίνει το φιλέρευνο πνεύμα, για να εξαγάγουν επιστημονικά πορίσματα. Αλλά επίσης παρατήρησα ότι στους μουσειακούς χώρους εκτίθενται και σύγχρονες δράσεις, οι οποίες μπορεί να επενεργήσουν δημιουργικά ή αναδημιουργικά συζευγνύοντας τις προγονικές μορφές με τις σύγχρονες τάσεις και αναζητήσεις.

Σ' αυτό τον αστερισμό του διαστοχασμού κινούμενη - καθώς ατένιζα τα αυθεντικά έργα, που εκτίθενται στο *Ιδρυμα Μείζονος Ελληνισμού* και αποπνέουν μουσειακή αύρα, αλλά και όσα εκεί παρατηρούσα να είναι αντίγραφα – παράγωγα εκμαγείων-αποφάσισα στην καταληκτήρια, στο Πανεπιστήμιο, γραπτή μου εργασία να ερευνήσω – στο μέτρο των δυνατοτήτων μου- με ποιο τρόπο μπορούν να βοηθηθούν στα μαθηματικά μαθητές και μαθήτριες του Δημοτικού Σχολείου από 8 έως 12 ετών. Η ενασχόλησή μου στο χώρο αυτό με την *αξιολόγηση των εκθεμάτων* της έκθεσης με θέμα: « Υπάρχει σε όλα λύση: Ταξίδι στον κόσμο των μαθηματικών» αποτέλεσε για μένα πολύτιμο βοηθό και συνάμα ισχυρό κίνητρο.

Στην έρευνα , λοιπόν, που ακολουθεί εκτίθενται η παρουσίαση του *Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού*, σύντομη αναδρομή στα μαθηματικά, παρουσίαση της έκθεσης των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, *οι στόχοι*, καταγράφεται η *μεθοδολογία* που εφάρμοσα, για να συλλέξω τα *δεδομένα*, να παρουσιάσω τα *ευρήματα* και καταλήξω στα *συμπεράσματα*, επαληθεύοντας ή αναιρώντας τους αρχικούς εκπεφρασμένους στόχους μου.

Γι' αυτό θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Θεόδωρο Χρηστίδη, ο οποίος ευχαρίστως δέχτηκε να αναλάβει το βάρος της καθοδήγησης και της επίβλεψης της έρευνάς μου, να με προφυλάξει από πολλές κακοτοπιές και να με οδηγήσει στο «επιστημονικώς ερευνάν». Καθώς επίσης και την καθηγήτρια κ. Ελένη Σταυρίδου για την πολύτιμη βοήθειά της.

Όμως θα ήταν παράλειψή μου εάν δεν εξέφραζα τις θερμές ευχαριστίες μου προς τη Διδάσκουσα στο *Πρόγραμμα Σπουδών Επιλογής Μουσικοπαιδαγωγικής Εκπαίδευσης* κ. Θεανώ Μουσούρη, η οποία με περισσή φροντίδα με ενθάρρυνε και με παιδαγωγική αγάπη με συμβούλευε, κάθε φορά που τα εμπόδια με αποκαρδίωναν.

Ακόμη, η έρευνα αυτή θα ήταν αδύνατο να πραγματοποιηθεί εάν το *Τδρυμα Μείζονος Ελληνισμού* δε μου επέτρεπε να τη διεξαγάγω και να φωτογραφίσω εκθέματα που με ενδιέφεραν. Για το λόγο αυτό, το ευχαριστώ και του είμαι βαθιά υπόχρεη.

Τέλος, ομολογώ πώς η συνέχεια της εργασίας μου θα αποδείξει την υφολογική μου ανακολουθία. Στην προλογική μου αυτή δήλωση εκτίθεται λόγος συναισθηματικός περισσότερο, ο οποίος καταθέτει το ψυχικό βάρος, ενώ στην έρευνα επιβάλλεται η ακριβολογία και η εκφραστική λιτότητα, η οποία χαρακτηρίζει την επιστημονική ουδετερότητα του γράφουσας. Και απ' αυτή τη σκοπιά νομίζω επιβάλλεται να ιδωθεί.

## **A. ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Σ' αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στο τι θα παρουσιαστεί στην παρακάτω εργασία.

## **B. Έκθεση Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών**

- ❖ Παρουσίαση του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού των εκθέσεων , και των εκπαιδευτικών προγραμμάτων που περιλαμβάνει.
- ❖ Σύντομη αναδρομή στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά και στους κυριότερους εκπροσώπους τους.
- ❖ Η σύλληψη της ιδέας για μια τέτοιου είδους έκθεση
- ❖ Η παρουσίαση της έκθεσης.

## **Γ. Θέμα μελέτης: «Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε περιβάλλον άτυπης μάθησης»**

- ❖ Λίγα λόγια για το πώς διεξάγεται μια αξιολόγηση στο χώρο του μουσείου
- ❖ Φάσεις αξιολόγησης για την έκθεση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών
- ❖ Αποτελέσματα αξιολόγησης
- ❖ Παρουσίαση έρευνας
- ❖ Στόχοι έρευνας
- ❖ Σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών
- ❖ Στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών

## **Δ. Μεθοδολογία**

- ❖ Τρόπος συλλογής των δεδομένων
- ❖ Ανάλυση των δεδομένων
- ❖ Ερμηνεία των αποτελεσμάτων

## **Ε. Συμπεράσματα**

Εδώ γίνεται μια τελική αποτίμηση για το τι μας δίδαξε η συγκεκριμένη έρευνα σε σχέση με τους στόχους τους οποίους είχαν τεθεί.

## **Β. ΕΚΘΕΣΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΙΔΡΥΜΑ ΜΕΙΖΟΝΟΣ ΕΛΛΗΝΙΣΜΟΥ**

### **Παρουσίαση του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού**

Το Ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού( ΙΜΕ)<sup>1</sup> είναι νομικό πρόσωπο ιδιωτικού δικαίου με κοινωφελή, πολιτιστικό μη κερδοσκοπικό χαρακτήρα και εδρεύει στην Αθήνα. Η ίδρυσή του κυρώθηκε το 1993 με νόμο της Βουλής των Ελλήνων. Ιδρύθηκε από την οικογένεια Λαζάρου Δ. Ευφραΐμογλου. Οι δωρεές των ιδιωτών και οι χορηγίες επιχειρήσεων είναι ζωτικής σημασίας για τη λειτουργία του ιδρύματος.

Σκοπός του είναι η διάσωση και η διάδοση της ιστορικής μνήμης και παράδοσης, η συνειδητοποίηση της οικουμενικής διάστασης του Ελληνισμού, καθώς και η προβολή της συμβολής του στην εξέλιξη του πολιτισμού αξιοποιώντας σύγχρονα τεχνολογικά μέσα.

Στόχος του είναι η κατανόηση του παρελθόντος ως σημείου αναφοράς για τη διαμόρφωση του παρόντος και του μέλλοντος να μπορεί να εμπνευστεί και πάλι η σύγχρονη σκέψη από το ελληνικό πνεύμα. Για την πραγματοποίηση αυτού του στόχου δημιουργεί το Πολιτιστικό Κέντρο « Ελληνικός Κόσμος». Είναι παλιά βιομηχανική έκταση 35 στρεμμάτων, στην οδό Πειραιώς 254. Ο « Ελληνικός Κόσμος» είναι ένα πρωτοποριακό « μουσείο», που χωρίς να χρησιμοποιεί πρωτότυπα εκθέματα « ταξιδεύει» τον επισκέπτη με μοναδικό τρόπο στα επιτεύγματα του ελληνισμού. Ακολουθώντας τις σύγχρονες μουσειολογικές αντιλήψεις , το κέντρο επικοινωνεί με τους επισκέπτες του με τρόπο ζωντανό και ελκυστικό μέσα από μόνιμες εκθέσεις και εκπαιδευτικά προγράμματα. Ιδιαίτερο βάρος δίνεται στην αξιοποίηση των τελευταίων τεχνολογικών εξελίξεων της πληροφορικής και τη χρήση οπτικοακουστικών μέσων για την παράθεση μαρτυριών καθώς και διαδραστικών εκθεμάτων κάθε είδους.

Παράλληλα το Ίδρυμα έχει ένα ευρύ πεδίο δραστηριοτήτων: παρουσιάζει την ελληνική ιστορία στο Διαδίκτυο από την εποχή του Λίθου έως σήμερα. Δημιουργεί Τράπεζα Πληροφοριών για το μείζονα ελληνισμό καταγράφει τα γενεολογικά

---

<sup>1</sup> Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το ΙΜΕ και τις δραστηριότητες του δεξ στην ιστοσελίδα: [www.fhw.gr](http://www.fhw.gr)



δένδρα Μικρασιατικών προσφύγων, αναπαριστά σε τρισδιάστατη ψηφιακή μορφή αρχαία μνημεία και χώρους, παράγει ντοκυμαντέρ ιστορικού και γενικότερα πολιτιστικού περιεχομένου. Δραστηριοποιείται στο χώρο των εντύπων και ηλεκτρονικών εκδόσεων, διοργανώνει εκθέσεις και εκπαιδευτικά προγράμματα και τέλος προβάλλει περιηγήσεις πολιτιστικού περιεχομένου μέσω συστημάτων Εικονικής Πραγματικότητας «Κιβωτός» και «Μαγική Οθόνη».

Τέλος, το ίδρυμα έχει προσωπικό το οποίο αποτελείται από αρχαιολόγους, ιστορικούς, αρχιτέκτονες, μουσειολόγους, μουσειοπαιδαγωγούς, μηχανικούς, παραγωγούς οπτικοακουστικών μέσων, δημιουργούς τρισδιάστατων ψηφιακών αναπαραστάσεων. Η δημιουργία του Πολιτιστικού Κέντρου υποστηρίζεται από ένα πολυάριθμο επιτελείο εξωτερικών συνεργατών ειδικών στο σχεδιασμό μουσειακών εκθέσεων.

## Εκθέσεις-Εκπαιδευτικά προγράμματα

Στο πολιτιστικό Κέντρο «Ελληνικός Κόσμος» λειτουργούν δύο εκθέσεις. Η μια αναφέρεται στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά με τίτλο: «Υπάρχει σε όλα λύση: Ταξίδι στο κόσμο των μαθηματικών.» Είναι η νέα μεγάλη έκθεση που παρουσιάζει με απλό και διασκεδαστικό τρόπο την ανάπτυξη των μαθηματικών στον αρχαίο ελληνικό κόσμο. Πλήθος δραστηριοτήτων και διαδραστικών εκθεμάτων μας ταξιδεύουν από τον Πυθαγόρα, το Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Τα μαθηματικά αλλάζουν, αναπτύσσονται και γεννούν τη μαθηματική επιστήμη.

Η δεύτερη μεγάλη έκθεση έχει τίτλο «Κάθε χρόνο τέτοια μέρα...εθνικές Επέτειοι και μνήμη.» Με αφορμή τις εθνικές επετείους της 28<sup>ης</sup> Οκτωβρίου και της 25<sup>ης</sup> Μαρτίου, η έκθεση έχει στόχο τη σύγχρονη προσέγγιση της ιστορίας και επιχειρεί μια διαφορετική «ανάγνωση» ιστορικών θεμάτων πέρα από το σχολικό εγχειρίδιο.

Το Πολιτιστικό Κέντρο, επίσης διοργανώνει και πολλά εκπαιδευτικά προγράμματα τα οποία είναι ζωτικής σημασίας και αποτελούν μια από τις σημαντικές δραστηριότητες του. Οι μουσειοπαιδαγωγοί του ΙΜΕ οργανώνουν και πραγματοποιούν εκπαιδευτικά προγράμματα τα οποία πλαισιώνουν τις δραστηριότητες του «Ελληνικού Κόσμου» είτε λειτουργούν αυτόνομα είτε πραγματοποιούνται σε εορταστικές περιόδους είτε με άλλες αφορμές.

Τέτοια εκπαιδευτικά προγράμματα είναι τα ακόλουθα:

- « Ο χορός της γης: γνωριμία με το φυσικό φαινόμενο του σεισμού»
- « Κάθε χρόνο τέτοια μέρα...Εθνικές επέτειοι. Ιστορική μνήμη».
- « Αναζητώντας το υγρό χρυσάφι»
- « Ο ήρωας ολυμπιονίκης»
- « Καλοκαίρι στην πόλη»

Επίσης, σε συνεργασία με τους «Ερευνητές» πραγματοποιούνται τα ακόλουθα εκπαιδευτικά προγράμματα:

- « Ένα βιβλίο γεννιέται»
- « Οι πρώτοι άνθρωποι»
- « Ανακύκλωση»

## Σύντομη αναδρομή στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Η ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών καλύπτει μια περίοδο 1000 χρόνων, η οποία αρχίζει τον 6<sup>ο</sup> και τον 5<sup>ο</sup> αιώνα στην Ν. Ιωνία και τη Μεγάλη Ελλάδα ( δηλαδή την Κάτω Ιταλία και τη Σικελία), τον 4<sup>ο</sup> π. Χ μετατοπίζεται στην Αθήνα το κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας και τελειώνει ουσιαστικά τον 3<sup>ο</sup> και τον 4<sup>ο</sup> μ. Χ αιώνα στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και στις άλλες σημαντικές πόλεις του ύστερου ελληνιστικού κόσμου. Στη διάρκεια αυτής της περιόδου οι αρχαίοι Έλληνες προσέλαβαν διάφορες μαθηματικές έννοιες και μεθόδους από παλαιότερους πολιτισμούς της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου. Προσέδωσαν όμως στα μαθηματικά έναν τελείως διαφορετικό χαρακτήρα που συνίσταται κυρίως στην αξιωματική παραγωγική συγκρότησή τους, στην οργάνωσή τους δηλαδή με βάση την ιδέα της μαθηματικής απόδειξης η οποία θα αποτελείται από τότε και για πάντοτε το κύριο χαρακτηριστικό τους γνώρισμα. Υπ' αυτή την έννοια είναι δικαιολογημένο να ισχυριστούμε ότι τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν στη αρχαία Ελλάδα.

Λέγοντας, λοιπόν «ελληνικά μαθηματικά» εννοούμε τα μαθηματικά που ανέπτυξαν οι άνθρωποι που μιλούσαν και έγραφαν την ελληνική γλώσσα, ανεξαρτήτως εάν κατοικούσαν εντός ή εκτός των συνόρων της σημερινής Ελλάδας. Υπ' αυτή την έννοια ο επιθετικός προσδιορισμός «ελληνικός» δηλώνει για την ιστορία της επιστήμης κάτι πολύ ευρύτερο.

Από που αντλούμε τις γνώσεις μας για τα ελληνικά μαθηματικά; Τις γνώσεις μας τις αντλούμε πρωτίστως από τα κείμενα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και δευτερευόντως από μια σειρά σχολίων ποικίλου περιεχομένου και αξίας επί των κειμένων αυτών που χρονολογούνται από την ύστερη αρχαιότητα ( 1<sup>ος</sup> –6<sup>ος</sup> μ. Χ αιώνας). Τα σωζόμενα κείμενα ξεπερνούν τις δύο-τρεις δεκάδες, μάλιστα, δε σώζονται στην ελληνική γλώσσα αλλά σε αραβικές μεταφράσεις και αντιπροσωπεύουν ένα πολύ μικρό μέρος του συνόλου της αρχαιοελληνικής μαθηματικής παραγωγής. Σχετικά με τα χειρόγραφα μέσω των οποίων μεταδόθηκαν τα αρχαία κείμενα, είναι όλα αντίγραφα των αυθεντικών κειμένων που συντάχθηκαν σε μεταγενέστερες περιόδους, τα παλαιότερα απ' αυτά ανήκουν στην περίοδο του Μεσαίωνα. Το γεγονός αυτό, το οποίο ισχύει για το σύνολο των κειμένων της αρχαιοελληνικής γραμματείας, είναι ενδεικτικό του είδους των

προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε όταν πρόκειται να μελετήσουμε την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών από τις ίδιες τις πηγές τους. Τα προβλήματα αυτά είναι τελείως διαφορετικά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε όταν μελετάμε λ.χ τα βαβυλωνιακά μαθηματικά<sup>2</sup>. Εκεί, τα κείμενα μας(πήλινες πινακίδες με σφηνοειδή γραφή<sup>3</sup> ) μπορεί να είναι σπασμένα ή εν μέρει κατεστραμμένα, η τεχνική τους ορολογία μπορεί να είναι ασαφής και να κατανοείται συχνά μόνο από τα συμφραζόμενα, ένα πράγμα όμως είναι πέραν πάσης αμφισβήτησης: τα κείμενα είναι των αρχών της 2<sup>ης</sup> π.Χ. χιλιετίας. Στην περίπτωση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών όμως, ακόμα και τα αρχαιότερα κείμενα που διασώζονται είναι αντίγραφα αντιγράφων άλλων αντιγράφων, με όλες τις δυσάρεστες συνέπειες που ενέχονται σε μια τέτοια διαδικασία συνεχούς αντιγραφής, πολύ περισσότερο όταν έχει γίνει από ανθρώπους που συχνά ,μικρή σχέση είχαν με το αντικείμενο που αντέγραφαν ( βυζαντινοί μοναχοί, επαγγελματίες καλλιγράφοι ).Αλλά η παραποίηση των αυθεντικών κειμένων δεν είναι η μόνη συνέπεια της διαδικασίας των επανειλημμένων αντιγραφών. Μια δεύτερη συνέπεια, πολύ σημαντική, είναι ότι από τη διαδικασία αυτή «επιβίωσαν» και διασώθηκαν τελικά μόνο εκείνα τα έργα τα οποία οι επόμενες γενιές θεώρησαν, για τον έναν ή τον άλλο λόγο, ότι έπρεπε να αντιγραφούν και τελικά, να διασωθούν και να παραδοθούν ως τις μέρες μας. Αντίθετα, υπάρχουν πολλά έργα της Αρχαιότητας, τους τίτλους των οποίων γνωρίζουμε από αναφορές σχολιαστών της ύστερης Αρχαιότητας ή Αράβων μαθηματικών του Μεσαίωνα και που δυστυχώς δε διασώθηκαν. Γενικότερα, πάντως αυτή η διαδικασία επιλογής έχει ως αποτέλεσμα η εικόνα που έχουμε σήμερα για τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά να βασίζεται εντέλει σε ένα μικρό μέρος των έργων που γράφτηκαν στην Αρχαιότητα και ουσιαστικά να μη γνωρίζουμε ούτε καν πόσο αντιπροσωπευτική είναι αυτή του εύρους και του περιεχομένου των.

---

<sup>2</sup> Για την ικανοποιητική πανοραμική έκθεση αυτής της τάσης δεξ: Χριστιανίδης Γιάννης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών: Αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά και ελληνικά μαθηματικά*, Ηράκλειο, εκδ. Πανεπιστημιακές Κρήτης, 2003, σ.σ 35-46.

<sup>3</sup> Η σφηνοειδής γραφή των Σουμερίων αποκρυπτογραφήθηκε στα μέσα του περασμένου αιώνα, όμως τα σφηνοειδή μαθηματικά και αστρονομικά κείμενα άρχισαν να μελετώνται σοβαρά, να αποκρυπτογραφούνται και ερμηνεύονται στα τέλη της δεκαετίας 1920-30, χάρη κυρίως στον κορυφαίο αυστριακό ερευνητή της επιστήμης της Μεσοποταμίας Otto Neugebauer.

## Τα μαθηματικά στην περίοδο προ του Ευκλείδη

Η ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις κύριες περιόδους. Η πρώτη περίοδος καλύπτει τον 6<sup>ο</sup> αιώνα και τον 5<sup>ο</sup> π.Χ αιώνα. Οι γνώσεις μας για τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στη διάρκεια αυτής της περιόδου καλύπτονται ουσιαστικά από βαθύ σκοτάδι. Είναι αλήθεια ότι μεταγενέστεροι συγγραφείς τοποθετούν στην περίοδο αυτή τη θεμελίωση της αριθμητικής και γεωμετρίας. Η αληθινή συμβολή του Θαλή, του Πυθαγόρα και των άλλων φιλοσόφων που έζησαν κατά τη διάρκεια αυτών των δύο αιώνων δεν μπορεί να διαπιστωθεί με ακρίβεια μέσα από το πλήθος των θρύλων με τους οποίους περιβλήθηκαν, με τη πάροδο των αιώνων, οι μορφές τους. Είναι εξαιρετικά αμφίβολο μάλιστα εάν ο Θαλής και ο Πυθαγόρας έγραψαν έστω και ένα έργο μαθηματικού περιεχομένου, ενώ ακόμα το περιώνυμο «Πυθαγόρειο θεώρημα» δεν είναι απολύτως σαφές ποια ακριβώς σχέση έχει με τον ίδιο τον Πυθαγόρα. Σήμερα, εξάλλου, είναι βεβαιωμένο ότι το εν λόγω θεώρημα ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους γραφείς των αρχών της 2<sup>ης</sup> χιλιετίας.

Προς το τέλος της πρώτης περιόδου- μετά τα μέσα του 5<sup>ου</sup> αιώνα- τα πράγματα φαίνεται να είναι ευδιάκριτα, μολονότι και πάλι ο ιστορικός ρόλος που φέρονται, με βάση τις περιγραφές των σχολιαστών της ύστερης Αρχαιότητας, να έχουν παίξει ιδίως ορισμένοι από τους οπαδούς του Πυθαγόρα αυτής της εποχής είναι πιθανώς υπερτιμημένος. Πάντως θεωρείται βέβαιο ότι σε αυτή την περίοδο τέθηκαν οι πρώτες βάσεις για την ανάπτυξη των μαθηματικών προς μια κατεύθυνση η οποία θα καταλήξει πολύ αργότερα, στα τέλη του 4<sup>ου</sup> π. Χ αιώνα, στη συγγραφή της περίφημης Ευκλείδειας σύνθεσης ( των Στοιχείων)<sup>4</sup>. Στα μέσα του 5<sup>ου</sup> αιώνα, λοιπόν, ανακαλύφθηκε, πιθανώς από τον Πυθαγόρειο Ίπασο το Μεταποντινό, το φαινόμενο της ασυμμετρίας, το οποίο λίγες δεκαετίες αργότερα μελετήθηκε περαιτέρω από το Θεόδωρο τον Κυρηναίο. Την ίδια περίοδο έγιναν οι πρώτες προσπάθειες οργάνωσης της γεωμετρίας από τον Ιπποκράτη το Χίο, ενώ προς το Τέλος του 5<sup>ου</sup> ή στις αρχές του 4<sup>ου</sup> αιώνα έγιναν τα πρώτα σημαντικά βήματα στη θεωρία των αριθμών από τον επίσης Πυθαγόρειο Αρχύτα τον Ταραντίνο.

Η δεύτερη περίοδος της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών καλύπτει τον 4<sup>ο</sup> π. Χ αιώνα. Είναι η κρίσιμη περίοδος στην εξέλιξη των ελληνικών μαθηματικών και

<sup>4</sup> « Στοιχεία ή Στοιχείωσις » του Ευκλείδη, το φημισμένο σύγγραμμα στην ιστορία των μαθηματικών και ένα από τα σπουδαιότερα συγγράμματα της παγκόσμιας ιστορίας.



μία από τις πιο κρίσιμες περιόδους γενικά στην ιστορία των μαθηματικών. Την περίοδο αυτή, πάλι στην παραδοσιακή ερευνητική δραστηριότητα των μαθηματικών, που δεν ήταν άλλη από την επίλυση προβλημάτων, αναπτύσσεται και μία άλλη κατεύθυνση, την οποία θα μπορούσαμε να περιγράψουμε χρησιμοποιώντας- αναχρονιστικά ίσως- έναν όρο από τη σύγχρονη επιστημολογία, ως ένα ερευνητικό πρόγραμμα για τη μελέτη της ίδιας της δομής, της εσωτερικής συγκρότησης των μαθηματικών. Το πρόγραμμα αυτό αναπτύσσεται υπό την επίδραση και των φιλοσοφικών σχολών που ακμάζουν στην Αθήνα, δηλαδή στην Ακαδημία του Πλάτωνα και στο Λύκειο του Αριστοτέλη. Καρπός του προγράμματος ήταν να λάβουν τελικά στο τέλος του 4<sup>ου</sup> π. Χ αιώνα, τα μαθηματικά την αξιωματική παραγωγική συγκρότηση την οποία θαυμάζουμε στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

### Τα ελληνιστικά μαθηματικά

Η επόμενη περίοδος της ιστορίας των ελληνικών μαθηματικών καλύπτει τον 3<sup>ο</sup> και τον 2<sup>ο</sup> π. Χ. αιώνα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της περιόδου είναι η μετατόπιση της πνευματικής εστίας του ελληνικού κόσμου από τη Αθήνα στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και σε άλλες πόλεις των ανατολικών περιοχών της αχανούς αυτοκρατορίας που ίδρυσε ο Μέγας Αλέξανδρος.

Η αλλαγή αυτή είναι κάτι περισσότερο πνευματικό από μία απλή εδαφική μετατόπιση. Εκφράζει πρωτίστως μια αλλαγή στο όλο πνευματικό κλίμα. Αλλαγή τόσο βαθιά ώστε οι ιστορικοί αναφέρονται στην περίοδο που εγκαινιάζεται τον 3<sup>ο</sup> π. Χ. αιώνα χρησιμοποιώντας την ονομασία *Ελληνιστική περίοδος*. Στην ελληνιστική περίοδο οι πνευματικοί και πολιτιστικοί δεσμοί μεταξύ Ελλήνων και των λαών που κατοικούν στις κατακτημένες περιοχές αναπτύσσονται, η καλλιέργεια των γραμμάτων και των επιστημών γίνεται αντικείμενο κρατικής μέριμνας, η επιστημονική δραστηριότητα διευρύνεται θεματικά και εξειδικεύεται, ενώ το καλλιεργημένο κοινό στο οποίο απευθύνεται είναι πλέον πολύ πιο περιορισμένο και εντοπίζεται κυρίως στους ειδικούς των βασιλικών και πριγκιπικών αυλών της Αλεξάνδρειας, των Συρακουσών, της Σελεύκειας και των άλλων μεγάλων πόλεων.

Αντιπροσωπευτικά της νέας αυτής πνευματικής ατμόσφαιρας είναι δύο φημισμένα ιδρύματα που θεμελιώθηκαν στην Αλεξάνδρεια από τους πρώτους Πτολεμαίους, το Μουσείο και η Βιβλιοθήκη.

Το Μουσείο, δηλαδή ο Ναός των Μουσών, ιδρύθηκε περί το 280 π. Χ από τον Πτολεμαίο τον Β΄ στο πνεύμα του Λυκείου του Αριστοτέλη και σύντομα συγκέντρωσε στις τάξεις του τους κορυφαίους γραμματικούς, ιστορικούς, ποιητές, μηχανικούς, αρχιτέκτονες, γεωγράφους, αστρονόμους, μαθηματικούς, ανατόμους και φυσιολόγους από ολόκληρο τον κόσμο, έχοντας εξασφαλίσει γενναιόδωρη χρηματοδότηση από τους βασιλικούς θησαυρούς. Αποτελεί το πρώτο παράδειγμα στην ιστορία ανώτατου εκπαιδευτικού και ερευνητικού ιδρύματος που λειτούργησε με δημόσια ή βασιλική δαπάνη, εξακολούθησε δε να λειτουργεί ως τον 5<sup>ο</sup> μ. Χ αιώνα.

Η βιβλιοθήκη, εξάλλου, η οποία είχε ιδρυθεί νωρίτερα από τον Πτολεμαίο τον Α΄, αναπτύχθηκε ταχύτατα και έγινε η μεγαλύτερη βιβλιοθήκη της Αρχαιότητας, περιλαμβάνοντας στο απόγειό της περισσότερους από 700.000 κυλίνδρους παπύρου. Μόνο ο κατάλογος της Βιβλιοθήκης καταλάμβανε το 250 π.Χ 120 κυλίνδρους. Η Βιβλιοθήκη γνώρισε πολλές καταστροφές κατά τη διάρκεια διαφόρων πολέμων, μερικά τμήματά της ωστόσο παρέμειναν ανέπαφα ως τον 4<sup>ο</sup> μ.Χ αιώνα.

Η περίοδος αυτή λαμπρύνεται με την παρουσία τριών από τους μεγαλοφυείς μαθηματικούς όλων των εποχών, του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου.

Στις σελίδες που ακολουθούν θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές πλευρές του έργου αυτών των τριών μαθηματικών.

## 1. Ευκλείδης

Τα *Στοιχεία* ή *Στοιχειώσεις* του Ευκλείδη είναι το πιο φημισμένο σύγγραμμα στην ιστορία των μαθηματικών και μία από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της παγκόσμιας γραμματείας. Είναι το έργο που έχει γνωρίσει τις περισσότερες εκδόσεις από κάθε άλλο έργο εκτός από τη Βίβλο και ένας ολόκληρος κόσμος έμαθε γεωμετρία από αυτό. Το έργο αποτελείται από 13 βιβλία (βιβλία σημαίνει κύλινδροι παπύρου) και στις προτάσεις του πραγματεύεται την κατασκευή και τις ιδιότητες βασικών σχημάτων του επιπέδου και του χώρου, τη θεωρία των αναλογιών, την ασυμμετρία και την ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών, ενώ τρία βιβλία του έργου είναι αφιερωμένα στην θεωρία των αριθμών.

Μεγάλο μέρος του περιεχομένου των *Στοιχειώσεων* οφείλεται σε εργασίες μαθηματικών προγενέστερων του Ευκλείδη και οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν καταβάλει πολλές προσπάθειες για να αναγνωρίσουν την ιστορική καταγωγή των

διαφόρων βιβλίων του έργου. Συγκεκριμένα, πολλά θεωρήματα των τεσσάρων πρώτων βιβλίων ήταν γνωστά στον Ιπποκράτη το Χίο, ενώ ορισμένα από τα αριθμητικά θεωρήματα των βιβλίων VII-X-IX ήταν γνωστά στους Πυθαγόρειους του β' μισού του 5<sup>ου</sup> αιώνα.

Στον Εύδοξο τον Κνίδιο οφείλονται δύο εξαιρετικά σημαντικές θεωρίες που περιέχει η *Στοιχειώσις* και οι οποίες αποτελούν στην πραγματικότητα δύο από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Η πρώτη από τις θεωρίες αυτές είναι η θεωρία των αναλογιών<sup>5</sup> που εκτίθεται στο πέμπτο βιβλίο. Οι ιστορικοί των μαθηματικών πιστεύουν ότι η θεωρία του Ευδόξου εκτόπισε μια παλαιότερη, πιο δύσχρηστη θεωρία αναλογιών, που βασιζόταν στην «ανθυφαίρεση»<sup>6</sup>. Την παλαιότερη αυτή θεωρία είχε επεξεργαστεί, καθώς φαίνεται, στις αρχές του 4<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα ο Θεαίτητος, ένας εξαιρετικά ταλαντούχος μαθηματικός, στον οποίο οφείλονται επίσης η ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών του δεκάτου βιβλίου των *Στοιχείων* και μέρος των περιεχομένων του δεκάτου τρίτου βιβλίου. Η δεύτερη θεωρία του Ευδόξου είναι η λεγόμενη «μέθοδος της εξάντλησης», η οποία χρησιμοποιείται στο δωδέκατο βιβλίο σε ογκομετρικά θεωρήματα (θεωρήματα όπου αποδεικνύονται οι τύποι, όπως θα λέγαμε σήμερα, των όγκων της πυραμίδας και του κώνου).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι μεγάλο μέρος του περιεχομένου των *Στοιχείων* οφείλεται σε εργασίες προγενέστερων του Ευκλείδη μαθηματικών, ιδιαίτερα δε των μαθηματικών του 4<sup>ου</sup> αιώνα. Η συμβολή του ίδιου του Ευκλείδη βρίσκεται στην τελειοποίηση μερικών αποδείξεων, κυρίως όμως έγκειται στην γενική οργάνωση του έργου. Το αποτέλεσμα είναι μια σύνθεση η οποία χαρακτηρίζεται από υψηλό βαθμό μεθοδικότητας και συνέπειας και η οποία αποτέλεσε εφεξής το υπόδειγμα για τη συγγραφή κάθε έργου, όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες.

Τα *Στοιχεία* δεν πρέπει να θεωρούνται ένα είδος μαθηματικής εγκυκλοπαίδειας, στα περιεχόμενα της οποίας εμπεριέχεται το σύνολο των αποτελεσμάτων που παρήγαγαν οι Έλληνες μαθηματικοί μέχρι την εποχή της συγγραφής τους, στα τέλη του 4<sup>ου</sup> π.χ. αιώνα. Αντίθετα, υπάρχουν πολλές μαθηματικές παραδόσεις που αναπτύχθηκαν από τα τέλη του 5<sup>ου</sup> αιώνα και μετά και οι οποίες δεν

<sup>5</sup> Αν (A, B) και (Γ, Δ) είναι ζεύγη ομοειδών μεγεθών, ο λόγος A:B είναι ίσος με τον λόγο Γ:Δ

<sup>6</sup> Μια τεχνική δηλαδή που είναι ισοδύναμη με το να ορίζονται ως ίσοι οι λόγοι A:B και Γ:Δ όταν ταυτίζονται τα αναπλύγματα σε συνεχόμενα κλάσματα.



αντιπροσωπεύονται καθόλου στη σύνθεση του Ευκλείδη, γεγονός που καταδεικνύει ότι το εύρος των ελληνικών μαθηματικών ήταν πολύ πιο πλούσιο από ό,τι το ίδιο το έργο του Ευκλείδη αφήνει να εννοηθεί.

Ιδιαίτερως πρέπει να τονισθεί ότι το έργο του Ευκλείδη ελάχιστα αντιπροσωπευτικό είναι, αφενός μεν, του έντονου ενδιαφέροντος που είχαν επιδείξει οι μαθηματικοί σε όλο το προηγούμενο διάστημα για τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και, αφετέρου, των στρατηγικών (μεθόδων) που είχαν επινοήσει για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων.

Πράγματι, τα κατασκευαστικά προβλήματα που χειρίζεται ο Ευκλείδης είναι μόνο αυτά που επιλύονται με κανόνα και διαβήτη. Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί καταπιάστηκαν και με άλλα προβλήματα, η επίλυση των οποίων δεν είναι δυνατή με πεπερασμένο αριθμό κατασκευών που γίνονται με κανόνα και διαβήτη. Μεταξύ αυτών των προβλημάτων αξίζει να μνημονεύσουμε ιδιαίτερως τα τρία κλασικά προβλήματα του τετραγωνισμού του κύκλου, της τριχοτόμησης μιας τυχούσας γωνίας και του διπλασιασμού του κύβου. Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων οι μαθηματικοί του 4<sup>ου</sup> αιώνα επινόησαν διάφορες μεθόδους, ανάμεσα στις οποίες αξίζει να αναφέρουμε τη χρήση άλλων καμπυλών, εκτός του κύκλου, όπως λ.χ. οι κωνικές τομές και η μέθοδος της ανάλυσης και της σύνθεσης. Όλες αυτές οι έρευνες δεν αντανakλώνται καθόλου στο έργο του Ευκλείδη.

## 2. Αρχιμήδης

Κορυφαία μορφή των μαθηματικών της Ελληνιστικής περιόδου, και στην πραγματικότητα η μεγαλύτερη μαθηματική φυσιογνωμία του αρχαίου κόσμου, ήταν ο Αρχιμήδης (περ. 287-212). Πνεύμα καθολικό, ο Αρχιμήδης διέπρεψε σε όλες τις μαθηματικές επιστήμες (αριθμητική, γεωμετρία, οπτική, αστρονομία), αλλά επίσης στη στατική, την υδροστατική, τη μηχανική και την τεχνολογία. Το ενδιαφέρον του όμως ήταν στραμμένο πρωτίστως στη γεωμετρία. Το πρώτο έργο του ήταν η μικρή πραγματεία με τον τίτλο *Κύκλου μέτρησις*<sup>7</sup>. Σε άλλα έργα του υπολογίζει εμβαδά και όγκους σχημάτων που περικλείονται από καμπύλες γραμμές ή επιφάνειες. Ιδιαίτερως στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* αποδεικνύει, μεταξύ άλλων, δύο πολύ σημαντικά

<sup>7</sup> Στην οποία υπολογίζει την επιφάνεια και την περίμετρο του κύκλου και βρίσκει μια προσεγγιστική τιμή του  $\pi$  του λόγου δηλαδή της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου.

θεωρήματα για τη σφαίρα, ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι τετραπλάσια της επιφάνειας ενός μεγίστου κύκλου αυτής και ότι ο όγκος της είναι τα δύο τρίτα του όγκου του περιγεγραμμένου σε αυτή κυλίνδρου.

Τόσο στο παραπάνω έργο όσο και στις πραγματείες *Τετραγωνισμός παραβολής* και *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών*, ο Αρχιμήδης εφαρμόζει ευρέως τη μέθοδο της εξάντλησης, που είχε επινοήσει ο Εύδοξος, προκειμένου να υπολογίσει τα εμβαδά και τους όγκους ποικίλων καμπυλόγραμμων σχημάτων. Η μέθοδος της εξάντλησης, όμως, είναι μια αποδεικτική μέθοδος, δηλαδή μια μέθοδος η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν ή ο όγκος ενός ορισμένου σχήματος δίνεται από τον ένα ή από τον άλλο τύπο. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου προϋποθέτει, λοιπόν, ότι ο τύπος του εμβαδού ή του όγκου είναι εκ των προτέρων γνωστός.

Η ανακάλυψη του τύπου, όμως είναι ένα τελείως διαφορετικό πρόβλημα. Ο Αρχιμήδης είχε κατανοήσει ότι η ανακάλυψη ενός αποτελέσματος και η απόδειξη της ορθότητας του αποτελέσματος είναι δύο διαφορετικά προβλήματα. Το δεύτερο επιλύεται με την εφαρμογή της μεθόδου της εξάντλησης. Για το πρώτο απαιτείται η επινόηση ειδικής μεθόδου. Ο Αρχιμήδης επινόησε πράγματι μια τέτοια ευρετική μέθοδο και την εκθέτει στην πραγματεία με τον τίτλο *Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη Έφοδος*. Η πραγματεία αυτή περιέχεται σε έναν παλίνψηστο περγαμινό κώδικα του 10ου μ.χ. αιώνα, που ανακαλύφτηκε στην Κωνσταντινούπολη το 1906 από το Δανό μελετητή της αρχαίας ελληνικής επιστήμης J.L. Heiberg. Η μέθοδος συνίσταται στη χρήση της αρχής του ζυγού για την εύρεση της σχέσης μεταξύ των επιφανειών (αντιστοίχως των όγκων) διαφόρων σχημάτων τα οποία θεωρούνται ομογενή βαρέα σώματα, αποτελούμενα από άπειρο αριθμό παραλλήλων γραμμών (αντιστοίχως, επιπέδων τομών).

Στους μαθηματικούς με τους οποίους αλληλογραφούσε ο Αρχιμήδης περιλαμβάνονται ο Κόνων ο Σάμιος και ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος. Ο Κόνων, σύμφωνα με αναφορά του Απολλωνίου, μελέτησε το πρόβλημα του αριθμού των σημείων στα οποία τέμνονται δύο κωνικές καμπύλες, σε μία εργασία του την οποία επέκρινε κάποιος Νικοτέλης από την Κυρήνη.

Ο Ερατοσθένης, ο οποίος διετέλεσε διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας επί Πτολεμαίου του Β', ήταν πολυμαθέστατος επιστήμονας και οι

σύγχρονοί του τον αποκαλούσαν *πένταθλο*. Επειδή όμως σε καμία επιστήμη δεν ήταν ο πρώτος τον αποκαλούσαν επίσης *βήτα* ή *δεύτερο*. Το επιστημονικό έργο του εντοπίζεται πρωτίστως στην αστρονομία και τη γεωγραφία, το σπουδαιότερο δε επίτευγμα του ήταν ο ακριβής υπολογισμός του μήκους της περιφέρειας της γης. Όσον αφορά τα μαθηματικά, ο Ερατοσθένης ανακάλυψε μια μέθοδο για την εύρεση των πρώτων αριθμών, η οποία είναι γνωστή ως *κόσκινο του Ερατοσθένους*, ενώ επινόησε επίσης τον *μεσολάβη*, ένα όργανο με το οποίο επιτυγχάνεται μηχανική λύση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου.

Στους άμεσους διαδόχους του Αρχιμήδη συγκαταλέγονται, εκτός των παραπάνω, και μια σειρά μαθηματικοί που ήκμασαν στα τέλη του 3<sup>ου</sup> και τις αρχές του 2<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα. Μεταξύ αυτών αξίζει να μνημονεύσουμε τον Νικομήδη, ο οποίος επινόησε την κογχοειδή καμπύλη για να λύσει τα προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης της γωνίας. Επίσης τον Διοκλή, ο οποίος έγραψε μια πραγματεία για τις κωνικές τομές με τον τίτλο *Περί πυρίων*, και επινόησε την κισσοειδή καμπύλη και τέλος, τον Ζηνόδωρο, ο οποίος έγραψε ένα σύγγραμμα με τίτλο *Περί ισοπεριμέτρων σχημάτων*.

### 3. Απολλώνιος

Ο τρίτος μεγάλος μαθηματικός της Ελληνιστικής περιόδου ήταν ο Απολλώνιος από την Πέργη της Παμφυλίας (περ. 262-180 π.χ.). Από τα συγγράμματά του διασώθηκαν ένα πλήρως και ένα εν μέρει. Συγκεκριμένα, σώζεται σε αραβική μετάφραση η πραγματεία *Λόγου αποτομή*, ενώ από τα *Κωνικά*<sup>8</sup>, τα οποία περιλάμβαναν οχτώ βιβλία, σώζονται τα τέσσερα πρώτα στην ελληνική γλώσσα και τα τρία επόμενα σε αραβική μετάφραση. Το όγδοο βιβλίο είναι χαμένο, κατά το παρελθόν δε έγιναν δύο προσπάθειες ανακατασκευής του, από τον Άραβα μαθηματικό Ibn al-Haytham και από τον αστρονόμο και μαθηματικό Edmund Halley. Τα χαμένα συγγράμματα του Απολλωνίου ξεπερνούν τα δέκα, ορισμένα δε εξ' αυτών επιχειρήθηκε να ανακατασκευαστούν από Ευρωπαίους μαθηματικούς κατά τον 16<sup>ο</sup> -18<sup>ο</sup> αιώνα με βάση τα σχόλια που περιέλαβε ο Πάππος στη *Μαθηματική Συναγωγή* του.

---

<sup>8</sup> Για περισσότερες πληροφορίες δες: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, *Των Επιστημών και της Τεχνολογίας*, Γ' τάξη Ενιαίου Λυκείου Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1999, σ. σ 63-64

Στα Κωνικά ο Απολλώνιος μεταμόρφωσε ριζικά τη θεωρία περί κωνικών τομών που είχαν επεξεργαστεί οι προ αυτού μαθηματικοί Μέναιχμος, Αρισταίος ο πρεσβύτερος, Ευκλείδης και Αρχιμήδης. Συγκεκριμένα, στην παλαιότερη θεωρία οι τρεις κωνικές τομές παράγονταν δια της τομής ενός ορθού κώνου με ένα επίπεδο κάθετο σε μία γενέτειρα του (και ονομαζόταν, αναλόγως της γωνίας της κορυφής του κώνου, «ορθογωνίου κώνου τομή», αμβλυγωνίου κώνου τομή» και «οξυγωνίου κώνου τομή»), ενώ οι χαρακτηριστικές τους ιδιότητες ( το «σύμπτωμα», κατά την αρχαιοελληνική ορολογία, δηλαδή η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί ένα σημείο για να βρίσκεται επάνω στην καμπύλη) εξάγονταν ως προς τον άξονα της καμπύλης και μια ευθεία κάθετη προς τον άξονα.

Ο Απολλώνιος, όπως αναφέραμε, μετασχημάτισε ριζικά την παλαιά θεωρία. Συγκεκριμένα, όρισε τον πλάγιο κώνο και εισήγαγε πλέον τις κωνικές τομές ως τομές ενός πλάγιου κώνου με ένα επίπεδο κατάλληλα φερόμενο, τις ονόμασε δε με τα ονόματα που και σήμερα χρησιμοποιούμε, δηλαδή παραβολή, υπερβολή και έλλειψη. Αποτέλεσμα του νέου ορισμού των κωνικών τομών είναι η εξαγωγή μιας νέας ομάδας συμπτωμάτων που αντιστοιχούν, σε σύγχρονη ορολογία, στις εξισώσεις του ως προς ένα πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων, όπου ο ένας άξονας είναι μία διάμετρος της καμπύλης και ο άλλος η εφαπτόμενη στο άκρο της διαμέτρου.

### Η παρακμή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών

Από τον 2<sup>ο</sup> π.χ. αιώνα και μετά παρατηρείται μια διαρκώς φθίνουσα παραγωγή νέων ιδεών στα θεωρητικά μαθηματικά και μια παράλληλη μετατόπιση του ενδιαφέροντος είτε προς τους εφαρμοσμένους κλάδους της αστρονομίας, της μηχανικής και της οπτικής είτε προς την κατεύθυνση της συγγραφής σχολιαστικών υπομνημάτων και εξηγήσεων στα μεγάλα έργα του παρελθόντος και στη σύνταξη εκλαϊκευτικών επιτομών και συμπλημάτων. Περνάμε έτσι στην τέταρτη και τελευταία περίοδο της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, την περίοδο της παρακμής. Στη διάρκεια αυτής της περιόδου τα ελληνικά μαθηματικά συνοψίζονται, anthologούνται, σχολιάζονται, για να περάσουν αργότερα στους Άραβες, ώσπου να βρουν τελικά τον δρόμο τους προς την Δυτική Ευρώπη.

Διάφορες ερμηνείες έχουν προταθεί από τους ιστορικούς για τα αίτια της παρακμής, όπως είναι λ.χ οι γενικότερες κοινωνικοοικονομικές συνθήκες, η διακοπή

της προφορικής παράδοσης, η οποία συνόδευε πάντοτε τη μαθηματική εκπαίδευση (και επομένως η διακοπή της μετάδοσης από γενιά σε γενιά των ευρετικών μεθόδων των μαθηματικών), ή το ιδεολογικό υπόβαθρο των φιλοσοφικών και θρησκευτικών κινήματων που αναπτύσσονται την περίοδο αυτή (νεοπλατωνισμός, χριστιανισμός). Πάντως, παρόλο το αρνητικό περιβάλλον που διαμορφώνεται βαθμιαία στον ευρύτερο ελληνορωμαϊκό κόσμο, δε λείπουν παντελώς από την περίοδο αυτή οι αναλαμπές πρωτότυπης δημιουργίας, ακόμα και στα ίδια τα θεωρητικά μαθηματικά. Στα μέσα του 2<sup>ου</sup> π.χ. αιώνα ο Υψικλής, βασιζόμενος σε παλαιότερες έρευνες του Αρισταίου και του Απολλώνιου, έγραψε ένα έργο με θέμα τη σύγκριση των διαστάσεων του εικοσάεδρου και του δωδεκάεδρου, το οποίο μεταδόθηκε ως τις μέρες μας ως δέκατο τέταρτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Τον 2<sup>ο</sup> αιώνα έζησε επίσης ο Θεοδόσιος από την Βιθυνία, του οποίου διασώζεται μια πραγματεία σφαιρικής γεωμετρίας υπό τον τίτλο *Σφαιρικά*, ενώ λίγες δεκαετίες αργότερα ο Ίππαρχος, ο οποίος υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους αστρονόμους του αρχαίου κόσμου, υπολόγισε τον αριθμό των δηλώσεων ενός ορισμένου είδους που θα μπορούσαν να συνταχθούν από ένα σύστημα δέκα αξιωμάτων σύμφωνα με τους κανόνες της Στωικής λογικής. Πρόκειται για ένα από τα ελάχιστα ίχνη ερευνών για τη συνδυαστική που συναντούμε στα μαθηματικά της Αρχαιότητας.

Στον Έρωνα τον Αλεξανδρέα (1<sup>ος</sup> μ.χ. αιώνας) αποδίδεται μεγάλος αριθμός μαθηματικών συγγραμμάτων, πολλά από τα οποία όμως δεν είναι αυθεντικά. Πρόκειται για απλές συλλογές τύπων για τη μέτρηση σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Στον 2<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα τοποθετείται σύμφωνα με νεότερες έρευνες η εποχή του Νικόμαχου του Γερασηνού, συγγραφέα της *Αριθμητικής εισαγωγής*, ενός έργου αριθμητικής. Με την έλευση της παρακμής των επιστημονικών σπουδών το έργο αυτό έγινε το κλασικό σύγγραμμα αριθμητικής και διατηρήθηκε ως τέτοιο σε ολόκληρο τον Μεσαίωνα.

Ο 3<sup>ος</sup> αιώνας έχει να επιδείξει ορισμένες μεμονωμένες, πλην όμως αξιόλογες, μαθηματικές προσωπικότητες, με κορυφαία αυτή του Διόφαντου. Χρονικά προηγείται ο Σερήνος από την Αντινώνη (Αντινοούπολις) της Αιγύπτου, τον οποίο πρόσφατες έρευνες τοποθετούν στις αρχές του 3<sup>ου</sup> αιώνα. Του Σερήνου σώζονται δύο μικρές πραγματείες με τίτλο *Περί κυλίνδρου τομής* και *Περί κώνου τομής*. Στην πρώτη αποδεικνύει ότι για κάθε έλλειψη υπάρχει κύλινδρος που να την παράγει όταν τμηθεί κατάλληλα με επίπεδο, ενώ στην δεύτερη εξετάζει τις τομές ενός πλάγιου κώνου με επίπεδα που περνούν από την κορυφή του. Στα μέσα του τρίτου αιώνα τοποθετείται,



σύμφωνα με την πιθανότερη εκδοχή, η ακμή του Διόφαντου, τα Αριθμητικά [προβλήματα], το έργο του οποίου είναι ίσως εκείνο από την αρχαιότητα που επέδρασε περισσότερο από κάθε άλλο στην διαμόρφωση των νεότερων μαθηματικών. Από τα δεκατρία βιβλία των Αριθμητικών σώζονται δέκα-έξι στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και τέσσερα σε μια μεσαιωνική αραβική μετάφραση του 9<sup>ου</sup> αιώνα. Το έργο είναι μια συλλογή αριθμητικών προβλημάτων (τα περισσότερα των οποίων είναι απροσδιόριστης μορφής) με τις λύσεις τους. Η μέθοδος που συνήθως χρησιμοποιεί ο Διόφαντος<sup>9</sup> για να επιλύσει τα απροσδιόριστα προβλήματα συνίσταται, όπως θα λέγαμε σήμερα, στην αντικατάσταση των αγνώστων συναρτήσει ενός εξ' αυτών, ώστε να προκύψει τελικά μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο. Εκτός από τα Αριθμητικά ο Διόφαντος συνέγραψε ένα έργο *Περί πολυγώνων αριθμών*, του οποίου διασώζεται μικρό μέρος, ενώ στα χαμένα έργα του περιλαμβάνονται τα *Μοριαστικά*, τα *Πορίσματα*, ενδεχομένως δε και μία πραγματεία με τον τίτλο *Αριθμητική στοιχείωσις*.

Η τελευταία αναλαμπή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών σχετίζεται με την εμφάνιση του Πάππου που ήκμασε στην Αλεξάνδρεια στο τέλος του 3<sup>ου</sup> αιώνα. Το σπουδαιότερο έργο του είναι η *Μαθηματική συναγωγή*, αποτελούμενη από οχτώ βιβλία, εκ των οποίων δε διασώζεται το πρώτο και μέρος του δεύτερου. Είναι ένα είδος μαθηματικής εγκυκλοπαίδειας με υλικό που αντλήθηκε από μεγάλο αριθμό έργων, από τα οποία δε σώζονται παρά ελάχιστα. Σε αντίθεση όμως με τα συνήθη σχολιαστικά κείμενα, το σύγγραμμα του Πάππου φανερώνει ανεξαρτησία κρίσεως και πρωτοτυπία. Σε αυτό προτείνονται νέες αποδείξεις, γενικεύονται παλαιότερα αποτελέσματα και παρατίθενται νέα, που αποτελούν προϊόν ερευνητικής εργασίας του ίδιου του συγγραφέα.

Την ίδια περίοδο, τέλος, συναντάμε ορισμένους ελάσσονες συγγραφείς που επέδειξαν κάποιο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, χωρίς όμως να προσκομίσουν καμία νέα ιδέα και γι' αυτό περιοριζόμαστε να μνημονεύσουμε απλώς τα ονόματά τους. Πρόκειται για τον Πορφύριο (τέλος του 3<sup>ου</sup> αιώνα), το σύγχρονό του Ανατόλιο και τον Ιάμβλιχο (πέθανε περί το 330).

Εδώ ολοκληρώνεται η συνοπτική αυτή επισκόπηση της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Όπως είδαμε, το απόγειο της ανάπτυξής τους ήταν οι δύο περίπου αιώνες που μεσολάβησαν από την εποχή του Πλάτωνα μέχρι την εποχή του

---

<sup>9</sup> Βλέπε επίσης Χριστιανίδης Γιάννης, *Οι ερμηνείες της μεθόδου του Διόφαντου*, εκδ. Νεύσις, τ. 3, 1995, σ. σ 109-132.

Απολλώνιου (όψιμος 3<sup>ος</sup> π.Χ. αιώνας). Τα μαθηματικά αυτής κυρίως της περιόδου-τα κλασσικά ελληνικά μαθηματικά-προσείλκυσαν το ενδιαφέρον των μαθηματικών της Αναγέννησης. Αυτά τα μαθηματικά μελέτησαν και αφομοίωσαν (με την προσθήκη, πάντως, του Διοφάντου και του Πάππου) και μέσω αυτών έγινε δυνατή η εκτίναξη και η άνθηση των ευρωπαϊκών μαθηματικών τον 16<sup>ο</sup> και 17<sup>ο</sup> αιώνα. Το ενδιαφέρον, λοιπόν, για τα κλασσικά ελληνικά μαθηματικά είναι διπλό. Αφενός έχουν αφ' εαυτών τεράστιο ενδιαφέρον, καθώς αποτελούν ένα στιλ μαθηματικών ριζικά διαφορετικό από τη μαθηματική δραστηριότητα που γνώριζε μέχρι τότε η ανθρωπότητα και, αφετέρου, έχουν ένα πρόσθετο ενδιαφέρον, γιατί ακριβώς η πρόσληψή τους στη Δυτική Ευρώπη, από την Αναγέννηση και μετά, αποτέλεσε τον καταλύτη και το ερέθισμα για τη ραγδαία ανάπτυξη των νεότερων μαθηματικών τους τελευταίους τέσσερις αιώνες.

## Η σύλληψη της ιδέας για την παρούσα έκθεση

Το Νοέμβριο του 2001, το Ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού δημιούργησε μια ομάδα συνεργατών για να αναπτύξει μια έκθεση με θέμα την ιστορία των ελληνικών μαθηματικών. Η ομάδα αποτελείτο από το προσωπικό του ιδρύματος και από εξωτερικούς συνεργάτες οι οποίοι είναι ιστορικοί, μαθηματικοί, σχεδιαστές εκθέσεων, μουσειοπαιδαγωγοί και κατασκευαστές. Η ομάδα του σχεδιασμού της έκθεσης είχε το υπόβαθρο για να χειριστεί την ιδέα ώστε να γίνει πραγματικότητα.

Η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά βρίσκονται στη βάση της εξέλιξης της επιστήμης και της τεχνολογίας και σχετίζονται άμεσα με πολλές στιγμές της ανθρώπινης δραστηριότητας φαίνεται να κερδίζει έδαφος στην αντίληψη του κοινού. Άλλωστε για πολλούς τα μαθηματικά ήταν μια δυσάρεστη σχολική εμπειρία και ενδεχομένως μπορούν έτσι να βρουν τη θέση τους στη συλλογική συνείδηση ως μια από τις μείζονες δυνάμεις που δημιούργησαν τον σύγχρονο κόσμο.

Στο πλαίσιο του συνεχώς αυξανόμενου ενδιαφέροντος διεθνώς για τα μαθηματικά και την ιστορία τους, εκδόσεις<sup>10</sup>, εκθέσεις και άλλες πολιτιστικές εκδηλώσεις απευθύνονται σε όλο και μεγαλύτερη μερίδα του πληθυσμού και επιχειρούν να αναδείξουν την σημασία των μαθηματικών ανακαλύψεων για τον ανθρώπινο πολιτισμό. Στόχος αυτής της πολιτιστικής δραστηριότητας είναι η απομυθοποίηση της δυσκολίας των μαθηματικών μέσω της μύησης του κοινού στη «μαγεία» της μαθηματικής σκέψης και της δημιουργίας προσβάσεων στο κόσμο λίγων χαρισματικών ανθρώπων, φιλοσόφων και επιστημόνων, οι οποίοι κατά την διάρκεια των αιώνων συνέβαλαν σε κάποιες από τις σημαντικότερες κατακτήσεις του ανθρώπινου πνεύματος.

Το Ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού συμμετέχει σε αυτή την προσπάθεια της καλώς νοούμενης «εκκλαίκευσης» της επιστήμης με την οργάνωση της έκθεσης «Υπάρχει σε όλα λύση: Ταξίδι στον Κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών». Κατ' αυτό τον τρόπο επιχειρεί να προβάλλει μια από τις πιο ενδιαφέρουσες πτυχές του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού.

Η έκθεση του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού με θέμα την ανάπτυξη των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης στον αρχαίο ελληνικό κόσμο-εποχή κατά

<sup>10</sup> Ενδεικτική αυτού του ενδιαφέροντος είναι η βιβλιογραφική παραγωγή των τελευταίων χρόνων και στην Ελλάδα, καθώς και η αύξηση των ειδικών αφιερωμάτων σε ένθετα και εφημερίδων. Βλέπε για παράδειγμα, *Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί*, ένθετο *Ιστορικά* (Ελευθεροτυπία 14/2/2002) και *Αρχαίοι Έλληνες Αστρονόμοι*, ένθετο *Ιστορικά* (Ελευθεροτυπία 2/1/2003)



την οποία τίθενται τα θεμέλια της επιστήμης-επιχειρεί να δείξει την σημασία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών για τον ελληνικό ευρωπαϊκό πολιτισμό. Απευθύνεται κατά κύριο λόγο σε μη ειδικούς επισκέπτες, τους προτείνει ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών και του μαθηματικού τρόπου σκέψης και προσπαθεί να τους εισαγάγει στον κόσμο των ελληνικών μαθηματικών με τρόπο απλό και διασκεδαστικό, κάνοντας ευρεία χρήση προηγμένων τεχνολογικών εφαρμογών. Υιοθετώντας τις σύγχρονες αντιλήψεις για την εμπειρία της επίσκεψης σε μουσεία, η έκθεση προσφέρει πολλαπλά μέσα ερμηνείας, υποστηρίζει πολλούς τρόπους μάθησης<sup>11</sup> και είναι προσβάσιμη σε πολλά επίπεδα (φυσικό, διανοητικό, πολιτιστικό). Αυτό επιτυγχάνεται σε μεγάλο βαθμό με την αξιοποίηση των νέων μέσων (βίντεο, ψηφιακά διαδραστικά εκθέματα, εκθέματα εικονικής πραγματικότητας), ένα τομέα στον οποίο το Ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού διαθέτει αποδεδειγμένη εμπειρία, τεχνογνωσία και άριστη υλικοτεχνική υποδομή.

#### ♦ Στόχοι Έκθεσης

Στο πλαίσιο της ευρύτερης πολιτικής και φιλοσοφίας του Ιδρύματος, η έκθεση είχε εξαρχής δύο βασικούς στόχους-μηνύματα

A) Να αναδείξει τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων ως θεμέλιο της επιστημονικής σκέψης.

B) Να τονίσει ότι τα μαθηματικά είναι για όλους, καθώς

- συμβάλλουν στην προσωπική ανάπτυξη του ατόμου
- αποτελούν διανοητική πρόκληση
- παρέχουν τη δυνατότητα υποβοήθησης σε διάφορες δραστηριότητές μας
- είναι αναπόσπαστο μέρος της ιστορίας και του πολιτισμού μας.

Με την διατύπωση των στόχων η έκθεση θέλει να παρουσιάσει την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης μέσα από μαθηματικές έννοιες. Η προσέγγιση αυτή τη διαφοροποιεί από τις συνήθεις εκθέσεις μαθηματικών στα μουσεία επιστημών σε όλο τον κόσμο. Επίσης την καθιστά πρωτότυπη σε διεθνές επίπεδο και επιτρέπει

---

<sup>11</sup> Αποτελέσματα μελετών σχετικά με τη μάθηση παρουσιάζονται στο βιβλίο της Κουβέλη Αναστασίας, *Η σχέση των μαθητών με το μουσείο, Θεωρητική προσέγγιση, Έρευνα στην Αθήνα και στην Ικαρία, Εκπαιδευτικά Προγράμματα*, Αθήνα 2000, Εθνικό κέντρο Κοινωνικών Ερευνών, σ.σ 53-58.

στον επισκέπτη πολλαπλές αναγνώσεις. Είναι μια έκθεση επιστημών και ιστορίας της επιστήμης και ταυτόχρονα έκθεση ιστορίας και πολιτισμού.

## Οι σταθμοί της έκθεσης-Συνοπτική παρουσίαση θεμάτων και εκθεμάτων.

### Σταθμός 1: Εισαγωγή στην έκθεση –Εισαγωγή στο θέμα- Προελληνικά μαθηματικά Εισαγωγή στην έκθεση<sup>12</sup>

Η περιήγηση<sup>13</sup> στην έκθεση αρχίζει από την ενότητα της εισαγωγής, όπου ο επισκέπτης έχει την ευκαιρία να κατατοπιστεί για τις δυνατότητες που του προσφέρονται και να βρει τις πληροφορίες που ενδεχομένως του χρειάζονται προκειμένου να αξιοποιήσει στο μέγιστο την εμπειρία της επίσκεψής του. Ένα διαδραστικό ψηφιακό έκθεμα «πλοήγησης», δηλαδή μια εξαιρετικά φιλική προς το χρήστη και «έξυπνη» βάση δεδομένων με τα θέματα της έκθεσης και τα εκθέματα, δίνει τη δυνατότητα στον επισκέπτη να ξεκινήσει ενεργά την επίσκεψη του και να αποφασίσει από την αρχή την πορεία του, σύμφωνα με τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντά του.

### Εισαγωγή στο θέμα

Η εισαγωγή στο θέμα επιτυγχάνεται με προβολή και ηχογραφημένη αφήγηση, όπου τα ελληνικά μαθηματικά βρίσκουν τη θέση τους στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης και του πολιτισμού.

### Προελληνικά μαθηματικά

*Είναι κυρίως υπολογιστικά μαθηματικά που σχετίζονται κυρίως με τις διοικητικές ανάγκες της κοινωνίας και τις απαιτήσεις της καθημερινής ζωής.*

Η ενότητα προσφέρει μια σύντομη και διασκεδαστική περιήγηση στον πολιτισμό και τα μαθηματικά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων της 2<sup>ης</sup> και 1<sup>ης</sup> χιλιετίας π. Χ . Μέσα από μια σειρά δραστηριοτήτων, ο επισκέπτης έχει τη δυνατότητα να γνωρίσει τα αριθμητικά συστήματα των δύο αυτών πολιτισμών και με τη βοήθεια ψηφιακού εκθέματος να παρακολουθήσει την αιγυπτιακή πρακτική εκτέλεσης υπολογισμών με τα κλάσματα που ήταν τότε γνωστά στους Αιγυπτίους γραφείς. Τέλος, διαδραστική κατασκευή δίνει την ευκαιρία στον επισκέπτη να ασχοληθεί με μια πρόιμη εκδοχή του «κανόνα της υποτείνουσας στα ορθογώνια τρίγωνα» ( γνωστού σήμερα ως το « Πυθαγόρειο Θεώρημα»), από τους Βαβυλώνιους.

<sup>12</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 1 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>13</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 2 στο παράρτημα φωτογραφιών

## Σταθμός 2: Παρατήρηση και Στοχασμός<sup>14</sup>

*Σε αυτή την πρώτη περίοδο ανάπτυξης των μαθηματικών, τον 6<sup>ο</sup> και 5<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ, η παρατήρηση των ιδιοτήτων σχημάτων και αριθμών καθώς και των μεταξύ τους σχέσεων οδηγεί στη εξαγωγή συμπερασμάτων και στη διατύπωση ενός πρώιμου μαθηματικού λόγου. Τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τη φιλοσοφία.*

Ο Θαλής και οι Ίωνες φιλόσοφοι, ο Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι είναι οι Βασικοί πρωταγωνιστές της ενότητας.

Ένα σύνθετο έκθεμα, που ανακαλύπτει συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα σε εικόνες της φύσης, εισάγει τον επισκέπτη στον προβληματισμό για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Διαδραστικές κατασκευές που αναπαριστούν τρίγωνα και κύκλους προσκαλούν τον επισκέπτη να συμμετάσχει στο παιχνίδι της ανακάλυψης κοινών χαρακτηριστικών και τον ενθαρρύνουν στην έκφραση ενός λόγου με επιχειρήματα. Ψηφιακό έκθεμα εικονογραφεί το θεώρημα του Θαλή για μέτρηση από την ξηρά, της απόστασης ενός πλοίου που βρίσκεται στη θάλασσα.

Στη συνέχεια, ο επισκέπτης μπορεί-εάν θέλει- να προσεγγίσει τις αναζητήσεις των Πυθαγορείων για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους, μέσα από μια σειρά δραστηριοτήτων προσιτών σε όλους, μικρούς και μεγάλους. Ποιοι είναι οι τρίγωνοι και τετράγωνοι αριθμοί των Πυθαγορείων ; Ο επισκέπτης μπορεί να βρει απαντήσεις στο παιχνίδι που του προτείνει ένα διαδραστικό ψηφιακό έκθεμα.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας θα φέρει την ανατροπή στον κόσμο της αρμονίας των Πυθαγορείων και ο επισκέπτης έχει τη δυνατότητα να ανακαλύψει τη σημασία της μέσα από ένα ακόμη ψηφιακό έκθεμα.

Η θεωρία των αριθμών εκφράζεται και στη μουσική. Τα μήκη των χορδών των έγχορδων οργάνων ερμηνεύονται γεωμετρικά ως ευθύγραμμα τμήματα, ενώ τα διαστήματα μεταξύ των οπών των αυλών έχουν γίνει με βάση τη θεωρία των αναλογιών. Ο επισκέπτης θα έχει τη δυνατότητα να δει αναπαραστάσεις αρχαίων μουσικών οργάνων και να δοκιμάσει τις ικανότητές του στο μονόχορδο των Πυθαγορείων!

Ο σταθμός ολοκληρώνεται με προβολή για τον ευρύτερο πολιτισμό ο οποίος αναπτύσσεται στις πόλεις της Ιωνίας και της Κάτω Ιταλίας κατά την περίοδο που καλύπτει η ενότητα.

<sup>14</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 3 στο παράρτημα φωτογραφιών

### Σταθμός 3: Απόδειξη<sup>15</sup>

*Η διαμόρφωση της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης, τον 4<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ., υπήρξε θεμελιώδης για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης.*

Ο σταθμός αναφέρεται στην ανάπτυξη της έννοιας της απόδειξης κατά τη δεύτερη περίοδο της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Τα σημαντικά πρόσωπα του σταθμού είναι ο Πλάτωνας, ο Ευκλείδης και ο Αριστοτέλης. Ο επισκέπτης έχει τη δυνατότητα να προσεγγίζει τις έννοιες του αξιώματος, του θεωρήματος, του παραγωγικού συλλογισμού και της αποδεικτικής μεθόδου μέσα από διαδραστικά εκθέματα, μηχανικά και ψηφιακά, και διαδραστικές κατασκευές.

Ο διάλογος με το διπλασιασμό του τετραγώνου, όπως αναφέρεται στο έργο του Πλάτωνα «Μένων», με πρωταγωνιστή το Σωκράτη και ένα νεαρό δούλο, παραπέμπει στην αποδεικτική διαδικασία, η οποία αναπαριστάται και εικονογραφείται σε διαδραστική κατασκευή. Ο επισκέπτης έχει έτσι την ευκαιρία να παρακολουθήσει τα στάδια που προτείνει ο μεγάλος φιλόσοφος και δάσκαλος και να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα και η απόδειξή του από τον Ευκλείδη αποτελούν το κεντρικό θέμα της ενότητας. Σε διαδραστικό μηχανικό έκθεμα εικονογραφείται παραστατικά η γνωστή διατύπωση του θεωρήματος: σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών. Η απόδειξη του θεωρήματος από τον Ευκλείδη παρουσιάζεται αναλυτικά σε ψηφιακό έκθεμα. Η ενότητα ολοκληρώνεται με το «λογικό δέντρο», δηλαδή διαδραστικό μηχανικό έκθεμα, που αναπαριστά διαγραμματικά τη λογική δομή της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος και εικονογραφεί εύγλωττα τη σημασία του αξιωματικού παραγωγικού συλλογισμού.

Στο σταθμό αυτό, ο επισκέπτης μπορεί να βρει ακόμη ψηφιακό έκθεμα για την απόδειξη της ασυμμετρίας και να γνωρίσει τη μέθοδο που προτείνει ο Ευκλείδης για να αποδείξει την απειρία των πρώτων αριθμών. Στο σταθμό υπάρχει επίσης σύντομη παρουσίαση για την απόδειξη της ασυμμετρίας, όπως την εκθέτει ο Αριστοτέλης στα «Αναλυτικά πρότερα», με τη χρήση της μεθόδου της «εις άτοπον απαγωγής».

Η σύντομη ταινία που προβάλλεται στο σταθμό αναφέρεται κατά κύριο λόγο στην ανάπτυξη των τεχνών και επιστημών που σημειώνεται τον 5<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ στην Αθήνα της Ακαδημίας του Πλάτωνα και του Λυκείου του Αριστοτέλη.

---

<sup>15</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 4 στο παράρτημα φωτογραφιών

### Ανεξάρτητη νησίδα: Ο τετραγωνισμός του κύκλου και άλλες ιστορίες

Ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου και η τριχοτόμηση μιας τυχαίας γωνίας, τα τρία άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας που απασχόλησαν πολλούς από τους σημαντικούς μαθηματικούς της περιόδου, παρουσιάζονται στην ανεξάρτητη αυτή νησίδα, στο κέντρο της έκθεσης με τρόπο απλό και εύληπτο.

### Σταθμός 4: Μέθοδοι και Θεωρίες<sup>16</sup>

*Την ανακάλυψη της απόδειξης ακολουθεί μια πρωτοφανής άνθηση των μαθηματικών, που εκφράζεται με τη διατύπωση μεθόδων και θεωριών στη διάρκεια της τρίτης περιόδου ανάπτυξης των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών.*

Στην Αλεξάνδρεια των Ελληνιστικών χρόνων και κυρίως τον 3<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ, τα ελληνικά μαθηματικά φτάνουν στην ακμή τους. Ο σταθμός πραγματεύεται το έργο τριών από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της Αρχαιότητας: του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη και του Ερατοσθένη.

Στον προβληματισμό των μαθηματικών, οι οποίοι αναζητούν πλέον μεθόδους εύρεσης εμβαδών και όγκων μη τετριμμένων επιπέδων και στερεών σχημάτων. Τα απλά σχήματα δηλαδή το τρίγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, ο κύκλος δίνουν τη θέση τους στην πυραμίδα, τον κύλινδρο, τη σφαίρα, τις κωνικές τομές και τα στερεά εκ περιστροφής.

Στο σταθμό ο επισκέπτης μπορεί να δει το έκθεμα με τις κωνικές τομές του Απολλώνιου και να κάνει χρήση διαδραστικών ψηφιακών εκθεμάτων που αναφέρονται στην ευρετική μηχανική μέθοδο και τη μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη. Διαδραστικό μηχανικό έκθεμα αναπαριστά το πείραμα που τεκμηριώνει την αρχή της υδροστατικής, έτσι όπως τη διατύπωσε ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Αρχαιότητας.

Το περίφημο «κόσκινο» του Ερατοσθένη για την εύρεση των πρώτων αριθμών παρουσιάζεται σε διαδραστική κατασκευή και διαδραστικό ψηφιακό έκθεμα. Η μέθοδος που επινόησε ο ίδιος για τη μέτρηση της περιφέρειας της γης παρουσιάζεται σε μεγάλη τρισδιάστατη κατασκευή.

Ο επισκέπτης θα έχει ακόμη την ευκαιρία να πάρει μια ιδέα για το έργο του Διόφαντου, μαθηματικού του 3<sup>ου</sup> αιώνα μ. Χ.

<sup>16</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 5 στο παράρτημα φωτογραφιών



Η Αλεξάνδρεια των Ελληνιστικών χρόνων, το περίφημο Μουσείον της και η ανάπτυξη των επιστημών κατά την ίδια περίοδο αποτελούν το θέμα της προβολής που πλαισιώνει τα μαθηματικά θέματα του σταθμού.

#### «Ανάσες»: Χώροι ανάπαυσης και ανεξάρτητων δραστηριοτήτων

Δύο άνετοι χώροι μέσα στην έκθεση προσφέρονται για την ανάπαυση του επισκέπτη που επιθυμεί να κάνει ένα διάλειμμα στην πορεία του. Να διαβάσει μαθηματικά αναγνώσματα πολλών επιπέδων και θεμάτων, να περιηγηθεί σε σχετικούς κόμβους στο Διαδίκτυο, να απασχοληθεί με εκπαιδευτικά παιχνίδια και να απολαύσει τις μουσικές προτάσεις αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών μέσα από διαδραστικά ψηφιακά εκθέματα.

#### Σταθμός 5: Αστρονομία<sup>17</sup>

*Οι αρχαίοι Έλληνες δεν «δαιμονοποιούν» τα φυσικά φαινόμενα. Προσπαθούν να αναπτύξουν θεωρίες που περιγράφουν την κίνηση των ουρανίων σωμάτων και συνάδουν με τις ευρύτερες κοσμολογικές και φιλοσοφικές τους αντιλήψεις. Η αστρονομία των Ελλήνων έφτασε στο απόγειό της κατά τη δεύτερη περίοδο ανάπτυξης της, την περίοδο της μαθηματικής αστρονομίας, όταν επινοούνται ιδιοφυή μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή της φαινόμενης κίνησης των πλανητών.*

Η περιήγηση στο σταθμό αρχίζει με σύντομη αναφορά στις δύο μακραίωνες παραδόσεις που προϋπήρχαν της μαθηματικής αστρονομίας: της παράδοσης της σύνταξης ημερολογίων και της παράδοσης του κοσμολογικού στοχασμού για τη δομή και τη λειτουργία του κόσμου, με παράδειγμα την αστρονομική θεωρία του Φιλόλαου.

Στη συνέχεια, ο επισκέπτης έχει την ευκαιρία να παρακολουθήσει σε ταινία μικρού μήκους τις φαινομενικές κινήσεις των πλανητών και την ερμηνεία τους με βάση τα δύο πιο σημαντικά αστρονομικά μοντέλα της Αρχαιότητας, το μοντέλο του Ευδόξου και τα μοντέλα του Κλαυδίου Πτολεμαίου που αναπτύσσονται αντίστοιχα τον 4<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ. και το 2<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ.

Η ενότητα της αστρονομίας ολοκληρώνεται με μια προβολή, παραγωγή της Εθνικής Χαρτοθήκης, που αναφέρεται στη συμβολή του Κλαυδίου Πτολεμαίου στη γεωγραφία και τη χαρτογραφία.

<sup>17</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 6 στο παράρτημα φωτογραφιών

## Σταθμός 6: Μαθηματικά κάθε μέρα<sup>18</sup>

*Πέρα από την αέναη αναζήτηση του ανθρώπινου πνεύματος για νέες μαθηματικές ανακαλύψεις, υπάρχει η ανάγκη της καθημερινής χρήσης των μαθηματικών, καθώς και εφαρμογής της επιστήμης των μαθηματικών σε τομείς που σχετίζονται άμεσα με τον καθημερινό βίο του ανθρώπου και διευκολύνουν τη ζωή του.*

Στο σταθμό αυτό ο επισκέπτης μπορεί να γνωρίσει τη σημειογραφία των αριθμών στον αρχαίο ελληνικό κόσμο, να κάνει πράξεις με τη χρήση άβακα και να λύσει ένα πρόβλημα , από βυζαντινή ανθολογία προβλημάτων του 15<sup>ου</sup> αιώνα μ. Χ., που αναφέρεται στην κωμικοτραγική ιστορία «γραιάς στο παζάρι».

Εφαρμογές των μαθηματικών στη ναυσιπλοΐα παρουσιάζονται σε ψηφιακή προβολή, παραγωγή της Εθνικής Χαρτοθήκης. Τέλος, ψηφιακό έκθεμα εξηγεί παραστατικά τη χρήση της διόπτρας, οργάνου που επιτρέπει ακριβείς μετρήσεις στην επιφάνεια της γης, μετρά γεωγραφικά πλάτη και μήκη, καθώς και γωνιακές αποστάσεις και το οποίο κατασκεύασε, ένας άλλος επιφανής μαθηματικός της ύστερης Αρχαιότητας, ο Ήρων.

## Σταθμός 7: Ταξίδι στο κόσμο των χειρογράφων<sup>19</sup>

*Τα μαθηματικά κείμενα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών διασώθηκαν και μεταδόθηκαν στην Ευρώπη του Μεσαίωνα είτε μέσω του Βυζαντίου είτε μέσω των Αράβων. Την οικειοποίησή τους από τους Ευρωπαίους επιστήμονες της Αναγέννησης ακολούθησε η υπέρβαση που έφερε η επιστημονική επανάσταση του 16<sup>ου</sup> και του 17<sup>ου</sup> αιώνα.*

Ο επισκέπτης έχει την ευκαιρία να παρακολουθήσει το συναρπαστικό ταξίδι των χειρογράφων των μαθηματικών της Αρχαιότητας μέσα από αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των δύο δρόμων. Το περιεχόμενο των γραπτών του Αρχιμήδη θα φτάσει στη Δυτική Ευρώπη από το Βυζάντιο και τον Κώδικα του Λέοντα του Φιλοσόφου, ενώ τα έργα του Ευκλείδη σώζονται κυρίως χάρη στις μεταφράσεις των Αράβων λογίων του 9<sup>ου</sup> αιώνα μ. Χ.

Ο σταθμός αναφέρεται εν συντομία στις μαθηματικές ανακαλύψεις που συντέλεσαν στην επιστημονική επανάσταση του 16<sup>ου</sup> και του 17<sup>ου</sup> αιώνα, μέσα από μια σύνθεση λέξεων, όρων και συμβόλων που προβάλλονται στο χώρο μέχρι ο επισκέπτης να οδηγηθεί στην έξοδο της

<sup>18</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 7 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>19</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 8 στο παράρτημα φωτογραφιών



έκθεσης. Η εντυπωσιακή παρουσίαση γραμματοσήμων ελληνικών και ξένων, με θέματα και πρόσωπα από τον κόσμο των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, είναι η τελευταία εικόνα που έχει ο επισκέπτης βγαίνοντας από την έκθεση. Τα ελληνικά μαθηματικά αποτελούν τμήμα του παγκόσμιου πολιτισμού.

## Γ. ΘΕΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ: « Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών στο χώρο του μουσείου »

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην επικοινωνία του μουσείου με το κοινό μέσα από εκθέσεις και άλλες δραστηριότητες. Τα μουσεία έχουν την ανάγκη όχι μόνο να ενημερώνουν αλλά και να εξασφαλίζουν την υποστήριξη του κοινού τους για τις υπηρεσίες που προσφέρουν. Η επικοινωνία του μουσείου με το κοινό αποτελεί πια το κέντρο της μουσειακής πρακτικής. Την τελευταία εικοσαετία οι εργαζόμενοι των μουσείων βλέπουν τη δημιουργία εκθέσεων όχι ως αυτοσκοπό αλλά ως μέσο επικοινωνίας με τους επισκέπτες. Τα εκθέματα είναι αφετηρία για την ερμηνεία του θέματος που αντιπροσωπεύουν. Η ερμηνεία των θεμάτων συνδυάζεται με τις προσδοκίες, τις γνώσεις, τα ενδιαφέροντα, τις επιθυμίες και τις ανάγκες των επισκεπτών και στοχεύει να τους βοηθήσει να αποκτήσουν συστατικές γνώσεις και εμπειρίες. Αυτή η στάση έχει επηρεάσει από την αντίληψη ότι η γνώση είναι κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται. Η γνώση<sup>20</sup> κτίζεται και μεταδίδεται μέσα σε κοινωνικό περιβάλλον. Ο ρόλος των επισκεπτών σ' αυτή τη διαδικασία είναι ενεργητικός. Οι επισκέπτες δεν είναι παθητικοί αποδέκτες του μηνύματος του μουσείου αλλά φτιάχνουν τις νοητικές δομές πάνω στις οποίες χτίζουν τη γνώση.

Έρευνα με το κοινό έχει δείξει ότι η μάθηση στο μουσείο διαφέρει ποιοτικά από τη μάθηση στην τυπική εκπαίδευση. Η επίσκεψη δεν είναι υποχρεωτική όπως για παράδειγμα στο σχολείο. Οι επισκέπτες μπορούν να επιλέξουν αν και πότε θα επισκεφθούν μια έκθεση και πόσο χρόνο θα αφιερώσουν σ' αυτήν. Είναι ελεύθεροι να την επισκεφθούν μόνοι τους ή με παρέα και να καθορίσουν το στόχο της επίσκεψης. Το κοινωνικό πλαίσιο της επίσκεψης είναι εξίσου σημαντικό με το περιβάλλον στο οποίο μαθαίνουμε. Η μάθηση και η διασκέδαση είναι απαραίτητα στοιχεία της επίσκεψης.

Το κοινό στα μουσεία αποτελείται από διάφορες κοινωνικές ομάδες. Οι ομάδες των επισκεπτών μπορεί να είναι σχολικές ομάδες, οικογένειες, τουρίστες, άνθρωποι διαφορετικής εθνικής προέλευσης καθώς και ομάδες ανθρώπων με ιδιαίτερες ανάγκες. Κάθε ομάδα έχει τις δικές τις ανάγκες και επισκέπτεται το μουσείο για διαφορετικούς λόγους. Το φαινόμενο λοιπόν της επίσκεψης είναι περίπλοκο και τα δημογραφικά στοιχεία των επισκεπτών είναι μια μόνο από τις όψεις του φαινομένου.

Έτσι, λοιπόν για την έκθεση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών η ομάδα των επιστημόνων που είχε συγκροτηθεί για την υλοποίηση είχε συμπεριλάβει στην πρότασή της

---

<sup>20</sup> Βλέπε: George Hein, Εκπαιδευτικές Θεωρίες, 1998

να γίνει και προκαταρκτική αξιολόγηση ( front-end evaluation)<sup>21</sup> στους επικείμενους τίτλους της έκθεσης, στα προπλάσματα κάποιων εκθεμάτων και στην ανάλυση κάποιων εννοιών όπως: *αρχαία ελληνικά μαθηματικά, απόδειξη, θεωρία, θεώρημα, μέθοδος και αξίωμα* με την μέθοδο των «νοητικών χαρτών».

Η προκαταρκτική αξιολόγηση ολοκληρώθηκε κατά τη διάρκεια της φάσης σχεδιασμού ώστε να δοκιμάσει διάφορους τίτλους που θα επικοινωνούσαν με το θέμα της έκθεσης.

Στην 1<sup>η</sup> φάση της προκαταρκτικής αξιολόγησης για τον τίτλο της έκθεσης δόθηκαν συνολικά έξι τίτλοι οι οποίοι ήταν οι εξής:

- «Ταξίδι στο κόσμο των μαθηματικών»
- «Ο τετραγωνισμός του κύκλου και άλλες ιστορίες: μια έκθεση για τα ελληνικά μαθηματικά»
- « Ο τετραγωνισμός του κύκλου και άλλες ιστορίες»
- « Σχήματα και αριθμοί»
- «Με μαθηματική τέχνη»
- «Ο πρόγονος Χ: Μια έκθεση για τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά»

Από τους παραπάνω τίτλους που προτάθηκαν στους επισκέπτες του ΙΜΕ, υπερίσχυσε ο τίτλος « Ταξίδι στο κόσμο των μαθηματικών». Αυτός φαίνεται να επικοινωνεί καλύτερα με τις έννοιες των μαθηματικών και ήταν αποδεκτός από ανθρώπους διαφόρων ηλικιών. Ήταν επικρατέστερος γιατί έδινε την εντύπωση ότι θα είναι μια έκθεση για μαθητές σχολείου, για μαθηματικούς, για φοιτητές. Τέλος, για να μην είναι «κουραστικός» ο τίτλος θα έμπαινε ως υπότιτλος κάτω από το φιλοσοφικό ερώτημα « Υπάρχει σε όλα λύση;». Και αυτό έγινε για να κεντρίσει το ενδιαφέρον του επισκέπτη.

Στη δεύτερη φάση της προκαταρκτικής αξιολόγησης χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες έννοιες σε σχέση με τα ελληνικά μαθηματικά με τη μέθοδο των «νοητικών χαρτών»<sup>22</sup>. Οι έννοιες είναι οι ακόλουθες : *αρχαία ελληνικά μαθηματικά, θεωρία, θεώρημα, μέθοδος και απόδειξη*.

Η αξιολόγηση των εννοιών πραγματοποιήθηκε στο χώρο του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού.

Η ανάλυση των δεδομένων για τη φράση «*αρχαία ελληνικά μαθηματικά*» έδειξε ότι οι επισκέπτες του ΙΜΕ , διαθέτουν γνώση, πλούσιο λεξιλόγιο αλλά δεν φαίνεται να κατανοούν

<sup>21</sup> Στον ίδιο θεωρητικό άξονα δεσ επίσης: Μουσούρη Θεανώ, « *Ερευνα κοινού και αξιολόγηση στα μουσεία*», *Αρχαιολογία και Τέχνες*, τχ. 72, σ.σ 56-61

<sup>22</sup> Βλέπε σχήμα νούμερο 1 στο παράρτημα

σε βάθος τις έννοιες αυτές. Συγκεκριμένα, οι νοητικές κατηγορίες που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων είναι:

1. Ονόματα μαθηματικών και τόπος προέλευσης

- Αρχαίοι ( Πυθαγόρας, Αρχιμήδης, Ευκλείδης, Θαλής)
- Νεότεροι και σύγχρονοι ( Καραθεοδωρής, Παπασταυρίδης).

2. Μαθηματικές θεωρίες και μαθηματικοί

- γεωμετρία
- λογική
- σύνολα
- άλγεβρα
- τριγωνομετρία

3. Μαθηματικοί όροι

- θεώρημα ( Πυθαγόρειο, Θαλή)
- αρχές
- 

4. Γλώσσα μαθηματικών

- σύμβολα
- αριθμοί
- τύποι
- γραφικές παραστάσεις
- θεωρία
- απόδειξη
- συναρτήσεις
- κλάσματα

5. Πράξεις

- διαίρεση
- πολλαπλασιασμός
- αφαίρεση
- πρόσθεση

## 6. Μέθοδοι

- ανισότητες
- εξισώσεις
- επαλήθευση

## 7. Όργανα

- μέτρηση της γης
- διαβήτη
- χάρακες

## 8. Σχέση μαθηματικών με φιλοσοφία και ιστορία

- σχέση με την αρχαία Ελλάδα και σήμερα

## 9. Μαθηματικά και μουσική

- ο ρόλος των μαθηματικών στη μουσική σύνθεση

## 10. Μαθηματικά και κουλτούρα

- θέματα ισότητας ( άνδρες και γυναίκες στη Πυθαγόρεια Σχολή)
- εθνο-μαθηματικά
- εξέχουσα θέση των μαθηματικών

## 11. Μαθηματικά και θέματα εξελικτικής ψυχολογίας

- μαθηματικά κατάλληλα για διάφορες ηλικιακές κατηγορίες
- προσέλκυση ενδιαφέροντος παιδιών μέσα από σχήματα και χρώματα

## 12. Μαθηματικά και εκπαίδευση

- σχολές: Πυθαγόρεια σχολή
- διάδοση γνώσης: μαθητές Πυθαγόρα. στην αρχαία Ελλάδα ήταν υποχρεωτικό μάθημα.
- σχολικά μαθηματικά σήμερα ( προσωπικοί συσχετισμοί), αρνητικά και θετικά συναισθήματα.

### 13. Μαθηματικά και καθημερινή ζωή

- μέτρηση χρημάτων ,συναλλαγές, συμβάλλουν στην εξέλιξη της ζωής μας

### 14. Εφαρμοσμένα μαθηματικά

- μηχανική
- φυσική
- αστρονομία

### 15. Φύση μαθηματικών

- πολιτισμός
- ιστορία
- αλήθεια
- ταξίδι / αναζήτηση, περιέργεια

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι οι επισκέπτες που ρωτήθηκαν ήταν αρκετά ενημερωμένοι σχετικά με τα μαθηματικά και ήταν ικανοί να τα συγκρίνουν και να τα συσχετίσουν με την καθημερινή ζωή.

Η ανάλυση των δεδομένων για τις υπόλοιπες μαθηματικές έννοιες<sup>23</sup> έδειξαν ότι ένα μικρό μέρος ανθρώπων σχετίζεται με τα μαθηματικά και όλοι οι μαθηματικοί όροι έχουν πολλαπλά νοήματα. Αναλυτικότερα έχουν ως εξής:

Σχετικά με τον όρο « μέθοδος» μόνο μια μικρή ομάδα επισκεπτών συσχέτισε τον όρο με επιστήμες ενώ κανείς δεν αναφέρθηκε στα μαθηματικά. Ακόμη και όσοι αναφέρθηκαν στις επιστήμες δεν φάνηκε να κατανοούν τον όρο σε βάθος. Η συντριπτική πλειοψηφία όσων ρωτήθηκαν αναφέρθηκε σε χρήσεις του όρου στην καθημερινή ζωή.

Στη συνέχεια με τον όρο « απόδειξη» οι μισοί επισκέπτες περίπου είπαν ότι έχει πολλές σημασίες ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται. Ένας πολύ μικρός αριθμός ανέφερε ότι πρόκειται για όρο που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά. Λίγο περισσότερο από τους μισούς επισκέπτες αναφέρθηκαν στις « αποδείξεις λογαριασμών » ή « ταμειακές αποδείξεις».

Με τον όρο « θεώρημα» η συντριπτική πλειοψηφία των επισκεπτών τον συσχέτισαν με τα μαθηματικά: είτε προσπάθησαν να εξηγήσουν τι σημαίνει, είτε αναφέρθηκαν στα συναισθήματά τους για τα σχολικά μαθηματικά. Οι συγκεκριμένοι επισκέπτες φάνηκε να κατανοούν πολύ καλά τον όρο και έδωσαν αρκετά παραδείγματα. Δύο επισκέπτες φάνηκε να

---

<sup>23</sup> Οι οποίες είναι: « θεωρία», « απόδειξη», « θεώρημα», « μέθοδος» και «αξίωμα».

συγχέουν τον όρο « θεωρήμα » με τις έννοιες τις «θεωρίας» και του «αξιώματος», ενώ άλλοι δύο- τα οποία ήταν παιδιά- δεν γνώριζαν τι σημαίνει.

Τέλος με τον όρο « αξίωμα » η ανάλυση έδειξε ότι περίπου οι μισοί επισκέπτες ερμήνευαν τον όρο « αξίωμα » ως διάκριση, ενώ οι υπόλοιποι τον συσχέτισαν με τα μαθηματικά ή με φυσικές επιστήμες. Μόνο ένας ενήλικας επισκέπτης έδωσε τον αποδεκτό ορισμό. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, οι επισκέπτες φάνηκαν να συγχέουν τον όρο με άλλους μαθηματικούς όρους από τις φυσικές επιστήμες.

Βασιζόμενοι σ' αυτά τα ευρήματα, το περιεχόμενο ήταν πλούσιο σε μαθηματικά και κοινωνικοπολιτιστικά συμφραζόμενα. Παρόλα αυτά οι επισκέπτες φάνηκε να είναι οικείοι με τις μαθηματικές έννοιες. Έτσι αποφασίστηκε ότι στο περιεχόμενο της έκθεσης όχι μόνο να εξηγήσουν τις έννοιες και τους όρους των μαθηματικών αλλά να δείξουν με παραδείγματα πώς αυτά χρησιμοποιούνται.

Από την παραπάνω παρουσίαση των δεδομένων καταλαβαίνουμε ότι η προκαταρκτική αξιολόγηση συμπίπτει χρονικά με την αρχική σύλληψη της ιδέας για μια καινούρια έκθεση. Οι πληροφορίες που συλλέγονται βοηθούν τα μέλη της ομάδας εργασίας που αναπτύσσουν την έκθεση να βρουν ένα κοινό σημείο επικοινωνίας με τους επισκέπτες. Επειδή είναι όμως αδύνατον κάθε έκθεμα να καλύπτει τις ανάγκες όλων των επισκεπτών, η ομάδα εργασίας φτιάχνει μεμονωμένα εκθέματα για ομάδες επισκεπτών διαφορετικών ηλικιών, ενδιαφερόντων, εμπειριών και γνώσεων. Οι επιλογές, βέβαια, τέτοιου είδους εξαρτώνται όχι μόνο από το κοινό, στο οποίο απευθύνεται η έκθεση, αλλά και από τους ευρύτερους στόχους του μουσείου και της έκθεσης γενικότερα.

Στο προκαταρκτικό στάδιο της αξιολόγησης το μουσείο μπορεί να συλλέξει πληροφορίες που δίνουν τη δυνατότητα στην ομάδα εργασίας να δει την έκθεση από την σκοπιά των επισκεπτών και να εντοπίσει κενά στην ερμηνεία του θέματος, σημεία που είναι δυσνόητα ή που μπορεί να παρερμηνευτούν. Σ' αυτή τη φάση της έκθεσης μπορούν να αξιολογηθούν τα εξής<sup>24</sup>: το βασικό θέμα της έκθεσης και τι περιλαμβάνει, τον τίτλο της έκθεσης ή τα μεμονωμένα εκθέματα, τα μέσα επικοινωνίας, τα αντικείμενα, τα κείμενα, το οπτικοακουστικό υλικό. Τέτοια στοιχεία είναι πολύτιμα για τη λήψη αποφάσεων στα πρώτα στάδια της μελέτης. Καθοδηγούν την ομάδα εργασίας στην επιλογή του πιο αποτελεσματικού τρόπου παρουσίασης του θέματος ώστε να είναι προσιτό στους επισκέπτες αλλά και να αφήνει περιθώρια για ανάπτυξη και ερμηνεία. Όλα τα παραπάνω βοήθησαν την ομάδα εργασίας του ΙΜΕ για την έκθεση των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών.

<sup>24</sup> Η παραπάνω ανάλυση των δεδομένων που παρουσιάστηκε έχει γίνει από την ομάδα εργασίας του ΙΜΕ , η οποία ήταν υπεύθυνη για την αξιολόγηση της έκθεσης.



Στη συνέχεια περνάμε στο δεύτερο στάδιο της αξιολόγησης, την *διαμορφωτική αξιολόγηση*. Σ' αυτό το στάδιο αξιολογούνται μεμονωμένα εκθέματα ή τμήματα της έκθεσης. Συνήθως χρησιμοποιούνται πολύ πρόχειρες μακέτες εκθεμάτων τις οποίες οι επισκέπτες μπορούν να περιεργαστούν ή και να χρησιμοποιήσουν. Ο βασικός στόχος της διαμορφωτικής αξιολόγησης είναι να διαπιστώσει προβλήματα σχετικά με την κατανόηση και τη χρήση του εκθέματος.

Είναι η πιο δημιουργική φάση στην υλοποίηση μιας έκθεσης. Η ομάδα εργασίας μπορεί να δοκιμάσει διάφορες ιδέες, να δει πώς οι επισκέπτες προσεγγίζουν και κατανοούν ένα θέμα καλύτερα και τι είδους εκθέματα δουλεύουν καλύτερα.

Η ομάδα εργασίας του ΙΜΕ είχε την ευκαιρία να κάνει αξιολόγηση σε δύο είδη εκθεμάτων: τα *μηχανικά* ( Πυθαγόρειο Θεώρημα, Κόσκινο του Ερατοσθένη, Κατά κορυφήν γωνίες, Η διάμετρος του κύκλου) και τα *ψηφιακά* ( Μέθοδος Εξάντλησης, Τρίγωνοι και Τετράγωνοι αριθμοί, Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind). Και στις δύο περιπτώσεις είχε προπλάσματα εκθεμάτων ή καλύτερα μακέτες σε φυσικό μέγεθος.

Στην αξιολόγηση των μηχανικών εκθεμάτων φάνηκε ότι οι επισκέπτες μπορούσαν να ακολουθήσουν τις οδηγίες που τους δίνονταν.

Στο έκθεμα « *Κατά κορυφήν γωνίες*» περισσότεροι από τους μισούς επισκέπτες ανοιγόκλειναν το έκθεμα σε ένδειξη αμηχανίας ενώ κάποιοι άλλοι απλά το κοίταζαν. Αρκετοί ρώτησαν ποια η σκοπιμότητα του εκθέματος ή πώς πρέπει να το χρησιμοποιήσουν. Το ένα τρίτο των επισκεπτών χρειάστηκε ενθάρρυνση για να το χρησιμοποιήσει. Κάποια άτομα το χρησιμοποίησαν ως «σπαθί». Μεγάλος αριθμός επισκεπτών το περιέγραψε ότι έμοιαζε με «χ», με γραμμή, με σταυρό, με έλικα. Μόνο μερικοί επισκέπτες αναφέρθηκαν στις γωνίες που σχηματίζονται και κάποιοι άλλοι είπαν ότι οι γωνίες είναι ίσες. Η εικόνα δεν άλλαξε ιδιαίτερα όταν έμαθαν ότι το έκθεμα προορίζεται για μια έκθεση μαθηματικών. Κάποιοι χρησιμοποίησαν μαθηματικούς όρους-όπως γεωμετρικό όργανο (σχετικό με την τριγωνομετρία) – για να το περιγράψουν. Κάποιοι από τους επισκέπτες πρότειναν να προστεθεί χρώμα στο έκθεμα.

Στο ομοίωμα του εκθέματος « *Το Κόσκινο του Ερατοσθένη*» η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι μισοί επισκέπτες είπαν ότι ο στόχος του εκθέματος είναι να τους μάθει τον πολλαπλασιασμό, ενώ κάποιοι επισκέπτες είπαν ότι δείχνει τους αριθμούς. Μόνο τέσσερις είπαν ότι δείχνει ποιοι είναι πρώτοι αριθμοί ενώ ένας απ' αυτούς γνώριζε ότι το έκθεμα



στηρίζεται στον « Πίνακα του Ερατοσθένη». Οι απαντήσεις δεν άλλαξαν πολύ όταν ενημερώθηκαν ότι το έκθεμα θα βρίσκεται σε έκθεση για τα μαθηματικά.

Για το έκθεμα η « *Διάμετρος του κύκλου*» από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε το εξής: ότι όλοι οι επισκέπτες φάνηκαν αμήχανοι και να μην είναι σίγουροι πώς να το χρησιμοποιήσουν. Κάποια άτομα διπλώσαν τον κύκλο στη μέση κατόπιν ενθάρρυνσης. Περισσότερο από τα δύο τρίτα είπαν ότι μοιάζει με μισοφέγγαρο, γέλιο ή τη γη. Ενώ μόνο τέσσερα άτομα είπαν ότι δείχνει πώς φτιάχνεται ένα ημικύκλιο από τον κύκλο, όταν έμαθαν ότι αναφέρεται στη σχέση κύκλου- ημικυκλίου ενώ ένας απ' αυτούς χρησιμοποίησε τον όρο « διάμετρος».

Τέλος, με το έκθεμα « *Ραβδί* » ( Πυθαγόρειο Θεώρημα). Η συντριπτική πλειοψηφία των επισκεπτών μπορούσαν να ακολουθήσουν τις οδηγίες και να κάνουν υπολογισμούς χωρίς κανένα πρόβλημα. Οι ενήλικοι επισκέπτες που πήραν μέρος στην αξιολόγηση ήταν σε θέση να το εφαρμόσουν με τη βοήθεια των οδηγιών. Όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να ακολουθήσουν τη λογική της άσκησης και να παρατηρήσουν ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών ισούται με 100 όσο το τετράγωνο της υποτείνουσας, παρότι δεν γνώριζαν το θεώρημα.

Σχετικά, με την αξιολόγηση των ψηφιακών εκθεμάτων ο στόχος τους ήταν να δείξουν εάν τα εκθέματα ανταποκρίνονται στους στόχους του προγράμματος, δηλαδή:

- αν το κοινό είχε προβλήματα με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών
- τι νόημα βγάζουν οι επισκέπτες από αυτά
- αν αναγνωρίζουν τα εργονομικά προβλήματα

Ένας αριθμός αλληλεπιδραστικών εκθεμάτων σε μακέτα με υπολογιστή δόθηκαν στο κοινό με τις οδηγίες τους για να δοκιμάσουν σαν μέρος της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Σ' αυτή τη φάση της αξιολόγησης περικλείονται τρία αλληλεπιδραστικά εκθέματα σε υπολογιστή τα οποία είναι τα εξής:

- Η μέθοδος της εξάντλησης ( πώς οι Έλληνες μαθηματικοί προσπαθούσαν να μετρήσουν τον εμβαδόν του κύκλου).
- Τρίγωνοι και τετράγωνοι αριθμοί ( πώς οι περιγραφικοί αριθμοί χρησιμοποιούνταν από τους Πυθαγόρειους)
- Ο πάπυρος Rhind <sup>25</sup>( το τέταρτο πρόβλημα του πάπυρου Rhind και η λύση του)

---

<sup>25</sup> Για περισσότερες πληροφορίες δες: Χριστιανίδης Γιάννης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών Αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά και ελληνικά μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003, σ.σ 14-15.

Είκοσι επισκέπτες ερωτήθηκαν για να δοκιμάσουν ο καθένας τις μακέτες των εκθεμάτων. Ένας αξιολογητής προσκαλούσε ομάδες επισκεπτών ή μεμονωμένους επισκέπτες για να χρησιμοποιήσει τη μακέτα του εκθέματος, παρατηρώντας τι έκαναν.

Η αξιολόγηση των αλληλεπιδραστικών εκθεμάτων σε υπολογιστή έδειξε ότι μεγάλος αριθμός παιδιών δεν γνώριζαν για να χρησιμοποιούν το « ποντίκι» του υπολογιστή. Έτσι σαν αποτέλεσμα αφής αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν οι οθόνες αφής. Οι επισκέπτες, βέβαια, δεν ήταν σίγουροι ποια μέρη της οθόνης ήταν ενεργά, καθώς τα ενεργά μέρη δεν ήταν άμεσα ορατά και επίσης δεν ήταν σίγουροι ποιος ήταν ο σκοπός των εκθεμάτων. Τα ενεργά μέρη φτιάχτηκαν έτσι ώστε να είναι αντιληπτά από τους επισκέπτες δηλαδή όταν τα ακουμπούσαν θα έκαναν ένα ήχο και θα ήταν φωτισμένα. Επίσης, έχουν συστηθεί εισαγωγικές οθόνες οι οποίες ξεκάθαρα εξηγούν το σκοπό του εκθέματος και τι πρέπει να κάνουν οι επισκέπτες. Ιδιαίτερα για το έκθεμα « Τρίγωνοι και τετράγωνοι αριθμοί» εισήχθηκε μια δοκιμαστική οθόνη που τους έδινε παραδείγματα για το ποιος είναι ο πρώτος και ο δεύτερος αριθμός και πώς πρέπει να το χρησιμοποιήσουν μόνοι τους.

Τέλος, η αξιολόγηση προσδιόρισε την αναγκαιότητα να αναθέσουν στο προσωπικό της έκθεσης να υποστηρίζει τους επισκέπτες στη εξερεύνησή τους στα αλληλεπιδραστικά εκθέματα και να αυξάνει την διάθεση τους για μάθηση διαβάζοντας βιβλία για μαθηματικά τα οποία είναι διαθέσιμα στα σημεία «ανάσες» της έκθεσης.

Στις προηγούμενες σελίδες παρουσιάστηκε η αξιολόγηση που έγινε πριν « στηθεί» η έκθεση. Αυτό έγινε ώστε η έκθεση να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν περισσότερο στις ανάγκες του κοινού και τα εκθέματα να είναι όσο το δυνατόν καλύτερα για να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις των επισκεπτών.

Η παρακάτω έρευνα που ακολουθεί είναι μια άτυπη έρευνα. Αναφέρεται σε μεμονωμένα εκθέματα της έκθεσης σε παιδιά ηλικίας 8-12 ετών.

Κατ' αρχήν για να ξεκινήσει αυτή η έρευνα ακολουθήθηκε το εξής πλάνο:

- Επιλογή εκθεμάτων
- Οι στόχοι και οι μαθηματικές έννοιες που πηγάζουν από τα εκθέματα
- Ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο
- Οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τις μαθηματικές έννοιες των εκθεμάτων
- Οι στόχοι της άτυπης έρευνας

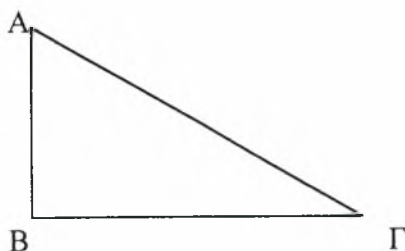
## Επιλογή εκθεμάτων

Για την άτυπη έρευνα επιλέχθηκαν από την ερευνήτρια τα ακόλουθα εκθέματα:

- Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind <sup>26</sup> Σταθμός 1
- Κόσκινο του Ερατοσθένη<sup>27</sup> Σταθμός 4
- Πυθαγόρειο Θεώρημα<sup>28</sup> Σταθμός 1
- Ισότητα κατά κορυφήν γωνιών<sup>29</sup> Σταθμός 2
- Διπλασιασμός του τετραγώνου<sup>30</sup> Σταθμός 3

## Στόχοι και μαθηματικές έννοιες εκθεμάτων

Το κάθε έκθεμα έχει κάποιο μήνυμα το οποίο προσπαθεί να αντιληφθεί ο επισκέπτης. Έτσι, λοιπόν, βλέποντας ο επισκέπτης στο *Σταθμό 1- Εισαγωγή* – τα εκθέματα Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind και το Πυθαγόρειο Θεώρημα πρώτα απ' όλα αντιλαμβάνεται ότι αναφέρονται στα προελληνικά μαθηματικά. Συγκεκριμένα με το έκθεμα Πυθαγόρειο Θεώρημα θέλει να δείξει ότι οι Έλληνες μαθηματικοί επηρεάστηκαν από την προϋπάρχουσα γνώση των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και επινόησαν μαθηματικά που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα καθώς και τη λύση του «πυθαγόρειου θεωρήματος» από τους Βαβυλώνιους. Αναλυτικότερα, γνωρίζουμε ότι το μήκος του ραβδιού ( που είναι ίδιο με το ύψος του τοίχους). Καθώς, το ραβδί μετακινείται, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ.



Θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο έχει μετακινηθεί η κάτω πλευρά του ραβδιού δηλαδή η πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Γνωρίζουμε το μήκος του ραβδιού ( π.χ.10 εκ.) δηλαδή την πλευρά ΑΓ, και μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΒ καθώς γνωρίζουμε ότι το ραβδί

<sup>26</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 9 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>27</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 10 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>28</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 11 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>29</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 12 στο παράρτημα φωτογραφιών

<sup>30</sup> Βλέπε φωτογραφία νούμερο 13 στο παράρτημα φωτογραφιών

μετακινήθηκε 4 εκ. άρα  $AB = 6$  εκ. Χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να υπολογίσουμε την πλευρά  $BΓ$  ως εξής:

$$AΓ = 10 \text{ εκ}$$

$$AB = 6 \text{ εκ } (10 - 4 = 6)$$

$$BΓ = ;$$

$$10^2 = 6^2 + \chi^2$$

$$100 = 36 + \chi^2$$

$$100 - 36 = \chi^2$$

$$64 = \chi^2$$

$$\chi = 8$$

Το έκθεμα Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind στοχεύει να αντιληφθεί ο επισκέπτης την έννοια της αριθμητικής η οποία καλύπτει την ανάγκη επίλυσης προβλημάτων καθημερινής ζωής καθώς και να του δοθεί η ευκαιρία να κάνει αριθμητικές πράξεις.

Στη συνέχεια στο *Σταθμό 2- Παρατήρηση-* με το έκθεμα Ισότητα κατά κορυφήν γωνιών παρουσιάζονται τα γεωμετρικά σχήματα και η έννοια της γεωμετρίας. Άλλωστε, μια από τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, κατά τον Θαλή, είναι ότι οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες. Κατά κορυφήν είναι οι γωνίες που βρίσκονται η μια απέναντι απ' την άλλη. Αναλυτικότερα, σ' αυτό το σταθμό της έκθεσης ο επισκέπτης αντιλαμβάνεται ότι:

- Τα γεωμετρικά σχήματα έχουν ιδιότητες
- Τα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων συνδέονται με σχέσεις
- Η γεωμετρία είναι η επιστήμη που τα μελετά
- Η μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων γεννάται τον 6<sup>ο</sup> αιώνα
- Για την χάραξη των γεωμετρικών σχημάτων χρειάζονται όργανα και μέθοδοι

Παρατηρώντας, λοιπόν, τους Σταθμούς 1 και 2 της έκθεσης ο επισκέπτης καταλαβαίνει ότι η γεωμετρία ως μέτρηση να προϋπάρχει από τους Βαβυλώνιους.

Στο *Σταθμό 3 – Απόδειξη-* ο επισκέπτης μέσα από τα εκθέματα ποικίλων μορφών, παρακολουθεί πώς διαμορφώνεται η έννοια της απόδειξης που είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Ως παράδειγμα αναφέρεται το έκθεμα «Διπλασιασμός του τετραγώνου» το οποίο είναι εμπνευσμένο από απόσπασμα από τον

πλατωνικό διάλογο «Μένων», όπου ο Σωκράτης δίνει οδηγίες για την κατασκευή σε ένα νεαρό δούλο ( απόδειξη γεωμετρική και όχι αριθμητική).

Με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα, βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την πλευρά του μεγάλου τετραγώνου με την πλευρά ενός οποιουδήποτε από τα δύο μικρά τετράγωνα. Δηλαδή το τετράγωνο της πλευράς του μεγάλου τετραγώνου είναι ίσο με Διπλάσιο του τετράγωνου της πλευράς του μικρού τετραγώνου.

Συμπερασματικά, από τον Σταθμό 3 ο επισκέπτης αποκομίζει ότι:

- Η μαθηματική απόδειξη είναι διαδικασία με την οποία πειθόμαστε και πείθουμε για την αλήθεια μιας πρότασης.
- Η μαθηματική απόδειξη είναι αξιωματική και παραγωγική μέθοδος
- Η απόδειξη γεννάται στην κλασσική περίοδο.

Τέλος, στο Σταθμό 4- *Μέθοδοι και Θεωρίες* παρατηρούμε το έκθεμα « Το κόσκινο του Ερατοσθένη». Στόχος του είναι να δείξει ένα εύκολο τρόπο να βρει κανείς τους πρώτους αριθμούς. Πρώτοι αριθμοί είναι όσοι αριθμοί διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τον αριθμό 1.

## Ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο

Κύριος σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου είναι σε πρώτο επίπεδο κατανόηση του κόσμου των αριθμών και η απόκτηση της ικανότητας εκτέλεσης των πράξεων, η κατανόηση του περιβάλλοντος φυσικού χώρου με την παρατήρηση, περιγραφή και μέτρηση, ώστε το παιδί να καταστεί σταδιακά ικανό να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Ο σκοπός αυτός επιδιώκεται με την ενεργητική οικοδόμηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, την ανάπτυξη της ικανότητας του παιδιού να μαθηματικοποιεί « καταστάσεις προβλήματος», να επιλύει προβλήματα, να αιτιολογεί τα συμπεράσματά του, να χρησιμοποιεί μαθηματικό συμβολισμό, να εφαρμόζει αλγόριθμους και διαδικασίες, να εκτελεί λογιστικές πράξεις και να υπολογίζει το αποτέλεσμα.

Κατά την επιλογή και οργάνωση της ύλης και των δραστηριοτήτων που συγκροτούν ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών, οι βασικές παράμετροι που προσδιορίζουν τον προσανατολισμό και αποτελούν το βασικό πλαίσιο αναφοράς είναι οι ακόλουθες:

- Η ανάγκη για ένα ευέλικτο πρόγραμμα σπουδών, που όχι μόνο επιτρέπει, αλλά και ενθαρρύνει τη σχολική μονάδα ως σύνολο και τον κάθε δάσκαλο ξεχωριστά να αναπτύσσουν πρωτοβουλίες και κάνουν τις δικές τους παρεμβάσεις και επιλογές, με βάση τα πραγματικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου σχολείου και της ομάδας των παιδιών για τα οποία προορίζεται το πρόγραμμα σπουδών.
- Η εν γένει εμπειρία από την εφαρμογή των υφισταμένων προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, τα σχετικά πορίσματα έρευνας και γενικότερα τα αξιολογικά συμπεράσματα και οι πεποιθήσεις που φαίνεται να έχουν γίνει κοινή συνείδηση ανάμεσα σε βασικούς φορείς της ελληνικής κοινωνίας ( τους εκπαιδευτικούς, τους γονείς, τους ανθρώπους του πνεύματος και φυσικά την παιδαγωγική κοινότητα).
- Οι σύγχρονες αντιλήψεις αναφορικά με τη φύση και τη μάθηση των μαθηματικών ( τι είναι και πώς μαθαίνονται τα μαθηματικά), δηλαδή τα τελευταία πορίσματα της επιστήμης και της διδακτικής των μαθηματικών, της παιδαγωγικής επιστήμης γενικά, καθώς επίσης και της γνωστικής ψυχολογίας και της ψυχολογίας μάθησης.



- Τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών που ισχύουν σήμερα σε άλλες εκπαιδευτικά προηγμένες χώρες του κόσμου και ειδικότερα στις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης και στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής.
- Οι νέες συνθήκες ζωής που επηρεάζουν άμεσα τόσο το μαθησιακό περιβάλλον της τάξης όσο και το περιβάλλον της οικογένειας και σχετίζονται με τους στόχους του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, όπως είναι για παράδειγμα η ραγδαία εξάπλωση του ηλεκτρονικού υπολογιστή και η άμεση πρόσβαση στα ηλεκτρονικά μέσα ενημέρωσης.
- Ο διαθέσιμος χρόνος για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ενώ οι πιο πάνω παράγοντες οριοθετούν και κατευθύνουν το σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών, η πραγματική επιλογή του περιεχομένου και συγκρότησή του αποσκοπεί στην πραγμάτωση των σκοπών της διδασκαλίας των μαθηματικών. Οι σκοποί αυτοί θα μπορούσαν να συνοψιστούν όπως φαίνεται πιο κάτω:

- Η ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης του παιδιού, ώστε να αποκτήσει ευρύτητα και λειτουργικότητα της μνήμης, της προσοχής και της ικανότητας για ακρίβεια, γενίκευση και αφαίρεση.
- Η ανάπτυξη βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων και διαδικασιών, που επιτρέπουν στο παιδί να αντιμετωπίζει πρακτικά και νοητικά προβλήματα.
- Η ανάπτυξη της ικανότητας του παιδιού να αιτιολογεί, να επικοινωνεί στα μαθηματικά και δια των μαθηματικών, και να χρησιμοποιεί ποικίλες στρατηγικές καθώς και τη σύγχρονη τεχνολογία για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
- Η κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, η ανάπτυξη των δεξιοτήτων εκτέλεσης των πράξεων στο σύνολο των φυσικών και των κλασματικών και δεκαδικών αριθμών, η κατανόηση και σχηματοποίηση απλών προβλημάτων αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής δομής, η κατανόηση των ιδιοτήτων βασικών στερεών και επιπέδων σχημάτων και η ικανότητα μετρήσεων, υπολογισμών.
- Η ικανότητα συλλογής, ταξινόμησης και παρουσίασης δεδομένων, καθώς και η ικανότητα μετάφρασης και αποκωδικοποίησης στοιχείων.
- Η ευαισθητοποίηση αναφορικά με τη σημασία των μαθηματικών και της συμβολής τους στην κοινωνική και οικονομική ανάπτυξη σε όλη την ιστορική διαδρομή της ανθρωπότητας και συνακόλουθα η ανάπτυξη θετικών στάσεων προς τα μαθηματικά.

Ως προς τη διάταξη της ύλης, του προγράμματος σπουδών αυτή θα ακολουθήσει το σπειροειδές μοντέλο, έτσι ώστε να δίνεται η δυνατότητα επανόδου στις ίδιες έννοιες σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα, σε προωθημένο κάθε φορά επίπεδο και έκταση. Με τη διάταξη αυτή υλοποιείται μια πολύ βασική παιδαγωγική αρχή, σύμφωνα με την οποία η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από τη διαμόρφωση «γνωστικών σχημάτων», τα οποία εμπλουτίζονται και επεκτείνονται, αναδιαμορφώνονται και αποκτούν προοδευτικά περισσότερες διασυνδέσεις.

Η οργάνωση της ύλης που θα προταθεί δεν αναμένεται να διαχωρίζει το περιεχόμενο σε θεματικές ενότητες, π.χ. Αριθμητική –Γεωμετρία-Στατιστική, αλλά αντίθετα θα επιδιώκει τη μέγιστη δυνατή διαπλοκή και σύνδεση των διαφόρων θεματικών εννοιών που συναποτελούν τα μαθηματικά, δηλαδή της Αριθμητικής με τη Γεωμετρία και τη Στατιστική, ώστε να προκύπτει ένα ενιαίο και συνεκτικό σύνολο μαθηματικών.

Βασικό στοιχείο για την ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών είναι να ληφθεί πρόνοια ώστε η εισαγωγή των νέων εννοιών και διαδικασιών να γίνεται μέσα από ελκυστικά προβλήματα από τη ζωή των μαθητών, έτσι ώστε να υπάρχει συγκεκριμένο κίνητρο και ταυτόχρονα να αναπτύσσονται εμπειρίες που καθοδηγούν στη δημιουργία και οργάνωση των σχετικών νοητικών σχημάτων. Στο επίπεδο του Δημοτικού Σχολείου η μάθηση των μαθηματικών δεν πρέπει να έχει τυπικό χαρακτήρα που συχνά προκαλεί άγχος, αλλά να επέρχεται κατά το δυνατό αβίαστα και ευχάριστα μέσα από δραστηριότητες που έχουν το στοιχείο του παιχνιδιού. Μέσα από το παιχνίδι οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να κατανοούν πολλές μαθηματικές έννοιες, ενώ ταυτόχρονα θα αναπτύσσουν θετικές στάσεις προς τα μαθηματικά. Στις δραστηριότητες που θα σχεδιαστούν αναμένεται ότι τα παιδιά θα έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιούν ποικιλία διδακτικών μέσων. Από τα πιο απλά π.χ. ξυλάκια και σπόρους, ως τα πιο σύνθετα, όπως είναι ο υπολογιστής τσέπης και ο ηλεκτρονικός υπολογιστής.

Είναι σημαντικό να αναπτυχθεί ένα πρόγραμμα σπουδών, με συνοχή και συνέπεια, που να συντελεί στην οικοδόμηση των μαθηματικών από τον ίδιο το μαθητή μέσα από καλά διαβαθμισμένες ευχάριστες δραστηριότητες, χωρίς μαθησιακά άλματα από τη μια τάξη στην άλλη και χωρίς υπερβολικές επικαλύψεις, μέσα από το οποίο να επιτυγχάνεται προοδευτικά η υλοποίηση των σκοπών της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι μαθητές θα εμπλακούν σε δραστηριότητες και θα αποκτήσουν εμπειρίες οι οποίες:

- Διευκολύνουν την ανάπτυξη της ικανότητας του παιδιού να επιλύει μαθηματικά προβλήματα.

- Παρέχουν μια συνολική προοπτική της δομής των μαθηματικών καθώς και των διασυνδέσεων μεταξύ των επιμέρους θεμάτων.
- Ενεργοποιούν διάφορα μαθησιακά μοντέλα, μέσα από τις ποικίλες διδακτικές στρατηγικές και με τη χρήση μέσων και υλικών.
- Υπογραμμίζουν τον κοινωνικό και συμμετοχικό χαρακτήρα της μάθησης, μέσα από συνεχή αλληλεπίδραση, προφορική και γραπτή επικοινωνία, συζήτηση και παρατήρηση.
- Λειτουργούν μέσα σ' ένα κλίμα αμοιβαίου σεβασμού της προσωπικότητας του παιδιού και ίσης μεταχείρισης.
- Αξιοποιούν τη σύγχρονη τεχνολογία ως εργαλείο μάθησης και σκέψης.
- Αξιολογούν τη διαδικασία διδασκαλίας και τα αποτελέσματά της, με πολλαπλά μέσα και λαμβάνοντας υπόψη διάφορες πηγές πληροφόρησης.

Ανεξάρτητα από το περιεχόμενο της ενότητας, οι δραστηριότητες θα έχουν μόνιμα στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος την ανάπτυξη της ικανότητας του παιδιού να επιλύει προβλήματα, να κάνει υπολογισμούς και απλές πράξεις από μνήμης, να εκτιμά το αποτέλεσμα κατά προσέγγιση και αξιολογεί τη λογικότητά του.

Σε όλες τις ενότητες περιεχομένου και σε όλες τις τάξεις, οι δραστηριότητες ενδείκνυται να είναι οργανωμένες σε τρία επίπεδα, που θα μπορούσαν να αποδοθούν με την περιγραφή του J. Bruner<sup>31</sup>: το χειριστικό, το εικονικό και το συμβολικό.

*Επίπεδο I:* στο αρχικό επίπεδο οι έννοιες, οι δεξιότητες και τα προβλήματα εισάγονται με δραστηριότητες που βασίζονται στο χειρισμό πραγματικών αντικειμένων και υλικών.

*Επίπεδο II:* στο επόμενο επίπεδο, οι δραστηριότητες αποσκοπούν στη σύνδεση και μεταφορά από το συγκεκριμένο στο εικονικό, όπου τα παιδιά χειρίζονται εικόνες, σχήματα και άλλες οπτικές αναπαραστάσεις.

*Επίπεδο III:* στο πιο προχωρημένο επίπεδο, οι δραστηριότητες κατευθύνονται στο συμβολικό και το αφηρημένο, όπου τα παιδιά χειρίζονται σύμβολα, ιδέες και έννοιες.

Η αναφορά μας στους «σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο» επιδιώκει να εντοπίσει τους επιμέρους στόχους, με τους οποίους μπορεί να συνδεθεί η έρευνά μας και συγκεκριμένα: το παιδί μέσα από την επίσκεψη της έκθεσης στο αναφερόμενο μουσείο μαθαίνει να παρατηρεί και κατ' ακολουθία να οικοδομεί μέσα του τις μαθηματικές έννοιες με την ευχάριστη αυτή δραστηριότητα και στη συνέχεια να κατανοεί

<sup>31</sup> Βλέπε επίσης: Ιωάννης Χριστιάς, *Θεωρία και Μεθοδολογία της Διδασκαλίας*, εκδ. Γρηγόρης, Αθήνα 1992, σ.σ 77-82

τον περιβάλλοντα πολιτιστικό χώρο παρατηρώντας έτσι από «το εικονικό στο συμβολικό επίπεδο», όπως καταγράφει τα τρία επίπεδα ο J. Bruner.

## Στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τις μαθηματικές έννοιες των εκθεμάτων

Για να γίνει αυτή η έρευνα επιλέχθηκαν παιδιά ηλικίας από 8-12 ετών. Τα παιδιά στο σχολείο διδάσκονται μαθηματικές έννοιες ανά τάξη. Στην περίπτωση μας τα παιδιά είναι από τη Γ' τάξη έως τη ΣΤ' τάξη του δημοτικού σχολείου. Μας ενδιαφέρουν οι μαθηματικές έννοιες της γεωμετρίας και της αριθμητικής. Παραθέτουμε τώρα το περιεχόμενο και τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών στις τέσσερις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου που μας ενδιαφέρουν για να γίνει η σύνδεση με τον τρόπο που οι μαθητές, που πήραν μέρος στην έρευνά μας, προσέγγισαν τα εκθέματα χρησιμοποιώντας και τις γνώσεις που είχαν αποκτήσει στο σχολείο.

### **Γ' τάξη**

#### **• Αριθμητική**

Με κατάλληλες δραστηριότητες οι μαθητές αναμένεται να καταστούν ικανοί να εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ τριψήφιων και τετραψήφιων αριθμών. Εκτελούν νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις. Μετατρέπουν οριζόντιες προσθέσεις και αφαιρέσεις σε κατακόρυφες και τις λύνουν τελικά με τον αλγόριθμο που έχει επικρατήσει πολιτισμικά στη χώρα μας. Σταθεροποιούν τη γνώση της προπαίδειας. Εισάγονται σε οριζόντιες γραπτές διαιρέσεις. Εκτελούν διαιρέσεις με μονοψήφιο διαιρέτη. Χρησιμοποιούν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους για την πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό στη διεύρυνση προβλημάτων διαιρέσης. Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες έρχονται σε επαφή με απλές κλασματικές μονάδες όπως  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ .

#### **• Γεωμετρία**

Περιγράφουν, αναπαράγουν και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά. Με τη βοήθεια οργάνων χαράσσουν γεωμετρικά σχήματα. Μετρούν τις διαστάσεις χρησιμοποιώντας αυθαίρετες και συμβατικές μονάδες μέτρησης. Παρατηρούν και αναπαράγουν γεωμετρικά στερεά ( κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τετράγωνη πυραμίδα) και τα αναπτύγματά τους. Κατανοούν τις έννοιες έδρα, κορυφή, ακμή και ηγν έννοια της ορθής γωνίας.

## Δ' τάξη

### • Αριθμητική

Ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων. Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μια κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και πολλαπλά προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα. Να διατυπώνουν το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000.000. Αναγνωρίζουν την αξία θέσης των ψηφίων ( μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες). Σχηματίζουν την προσθετική και πολλαπλασιαστική σύνθεση ενός φυσικού αριθμού.

Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού και τις διαδικασίες επαλήθευσης αυτών των πράξεων.

Εκτελούν ευκλείδειες διαιρέσεις δύο ακεραίων με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην ακέραια μονάδα.

Συγκρίνουν και διατάσσουν κλασματικές μονάδες και δεκαδικά κλάσματα, καθώς πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών.

### • Γεωμετρία

Εισάγονται διαισθητικά στην έννοια του εμβαδού ( τετραγωνάκια). Χαράσσουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων και υπολογίζουν περιμέτρους απλών σχημάτων όπως : τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, ρόμβο.

Περιγράφουν και κατασκευάζουν συνήθη γεωμετρικά στερεά ( κύβο, ορθογώνιο, παραλληλεπίπεδο, κύλινδρο, τετραγωνική πυραμίδα). Αναγνωρίζουν σχήματα μέσα από ένα σύνθετο σχήμα.

Εφαρμόζουν τις συνήθειες τεχνικές χάραξης παραλλήλων και καθέτων με κανόνα και γνώμονα. Κατανοούν τις έννοιες της απόστασης ( απόσταση σημείου από ευθεία και απόσταση παραλλήλων ευθειών).



## Ε' τάξη

- Αριθμητική

Ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων.

Αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000.000.000. Κατανοούν την προσθετική και πολλαπλασιαστική σύνθεση ενός ακέραιου αριθμού.

Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και τις διαδικασίες επαλήθευσης αυτών των πράξεων.

Ονομάζουν και γράφουν δεκαδικούς. Εφαρμόζουν τους αλγόριθμους των πράξεων στους δεκαδικούς αριθμούς.

Χρησιμοποιούν τα πολλαπλάσια του 2 και του 5. Εκτελούν τις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, κλασμάτων και πολλαπλασιασμού κλάσματος με ακέραιο.

- Γεωμετρία

Εισάγονται στην έννοια της γωνίας, τα είδη γωνιών, τη μέτρηση, σύγκριση και κατασκευή γωνιών. Ονομάζουν και κατασκευάζουν τρίγωνα και μαθαίνουν τις απλές ιδιότητες τους. Χαράσσουν τα ύψη ενός τριγώνου. Κατασκευάζουν αναπτύγματα κύβου, ορθογωνίου, παραλληλεπιδέδου, τριγωνικής και τετραγωνικής πυραμίδας.

## ΣΤ' τάξη

- Αριθμητική

Ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων.

Ονομάζουν, γράφουν και συγκρίνουν φυσικούς αριθμούς και δεκαδικούς αριθμούς. Εκτελούν πράξεις σε αριθμητικές παραστάσεις φυσικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.

- Γεωμετρία

Συμπληρώνουν τις γνώσεις τους για την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων. Όπως, επίσης, για τον όγκο και την επιφάνεια γνωστών στερεών (κύβο, ορθογώνιο, παραλληλεπίπεδο, πυραμίδα, ορθό πρίσμα και κύλινδρο). Μετρούν, συγκρίνουν και κατασκευάζουν γωνίες. Χρησιμοποιούν κανόνα και διαβήτη για την κατασκευή ευθύγραμμων σχημάτων και κύκλο. Υπολογίζουν μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου (κατά προσέγγιση). Μέσα από δραστηριότητες επεκτείνουν τις γνώσεις τους σχετικά με τη συμμετρία ως προς τον άξονα.

### Στόχοι έρευνας

Στην έρευνά μας θέσαμε εξ αρχής περιορισμένους στόχους, καθώς οι περιορισμοί αυτοί επεβλήθησαν από τις συνθήκες διεξαγωγής της δηλαδή η έρευνα έγινε τους καλοκαιρινούς μήνες και υπήρχε περιορισμένος αριθμός παιδιών καθώς και κάποια παιδιά αντιμετώπιζαν με δισταγμό τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου. Είναι όμως μια πρωτογενής έρευνα, η οποία, εκτός από τα ίδια τα πορίσματα και ευρήματα που παρέχει, αναδεικνύει και καινούρια θέματα, τα οποία μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενα μελλοντικών ερευνών.

- Πώς καταλαβαίνουν τα παιδιά τις μαθηματικές έννοιες που εμπεριέχουν τα εκθέματα;

Κάθε έκθεμα εμπεριέχει μια μαθηματική έννοια (κυρίως τα εκθέματα που έχουν επιλεγεί για την έρευνα αφορούν τις έννοιες της γεωμετρίας και της αριθμητικής). Μας ενδιαφέρει εάν τα παιδιά τις αντιλαμβάνονται και τις κατανοούν.

- Εξασκούν την παρατήρηση και τη λογική σκέψη;

Βλέποντας τα εκθέματα τα παιδιά μάς ενδιαφέρει αν τα παρατηρούν, αν έχουν τη δυνατότητα αυτή και αν μπορούν να «δραστηριοποιήσουν» τη λογική τους σκέψη.

- Ποιο έκθεμα κεντρίζει περισσότερο το ενδιαφέρον τους :

Μ' αυτό το στόχο θέλουμε να δούμε ποιο έκθεμα- απ' αυτά που έχουν επιλεγεί- τους κεντρίζει περισσότερο το ενδιαφέρον και τα κάνει να περνάνε ευχάριστα χρησιμοποιώντας το.

- Ποιο είναι το πιο εύχρηστο:

Δηλαδή πιο τους φάνηκε πιο εύκολο στη χρήση. Μ' αυτό θέλουμε να δούμε αν τα παιδιά δυσκολεύονται στο να χρησιμοποιήσουν και ίσως μας προτείνουν και κάποιο τρόπο για να βελτιωθούν τα εκθέματα.

## Δ. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### • Συλλογή δεδομένων και η ανάλυσή τους

Με βάση τους στόχους τους οποίους είχαμε θέσει για να γίνει η έρευνα, αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του ερωτηματολογίου για τη συλλογή των δεδομένων.

Πρώτα- πρώτα, για να γίνει η έρευνα αυτή επελέγησαν κάποια μεμονωμένα εκθέματα τα οποία είναι τα εξής:

- Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind
- Πυθαγόρειο Θεώρημα
- Ισότητα κατά κορυφήν γωνιών
- Το κόσκινο του Ερατοσθένη
- Ο διπλασιασμός του τετραγώνου

Πριν ξεκινήσει η διαδικασία συλλογής δεδομένων με το ερωτηματολόγιο, φωτογραφήθηκαν τα επιλεγμένα εκθέματα. Η πορεία που ακολουθήθηκε για να γίνει η έρευνα ήταν η εξής:

Τα παιδιά παρακολούθησαν πρώτα την έκθεση, στο τέλος στην έξοδο της έκθεσης τα περίμενε η ερευνήτρια. Τα προσέγγιζε και τους έδειχνε τις φωτογραφίες. Αυτά τις κοίταζαν και διάλεγαν ένα έκθεμα αυτό δηλαδή που τους άρεσε περισσότερο. Στη συνέχεια τους δινόταν το ερωτηματολόγιο το οποίο το απαντούσαν με τη βοήθεια της ερευνήτριας.

Οι αρχές στις οποίες βασίζεται η διατύπωση του συγκεκριμένου ερωτηματολογίου<sup>32</sup>- που δόθηκε στα παιδιά-είναι οι εξής: έχει γλώσσα απλή και κατανοητή, σαφήνεια των εννοιών, και απαιτείται μικρό χρονικό διάστημα για τη συμπλήρωσή του. Προφανώς, όλα παραπάνω σημεία, αποτελούν επιθυμητά χαρακτηριστικά για κάθε ερωτηματολόγιο και αποκτούν ιδιαίτερη σημασία όταν πρόκειται για παιδιά.

Στην περίπτωση του ερωτηματολογίου μας οι ερωτήσεις ήταν πολύ συγκεκριμένες και είχαν συνδυαστεί με τους στόχους που είχαν δοθεί στην αρχή της έρευνας, αναλυτικότερα:

- οι ερωτήσεις 1 και 2 αφορούν στο ποιο έκθεμα τους τράβηξε την προσοχή
- οι ερωτήσεις 3, 4 και 5 είναι σχετικές με τις μαθηματικές έννοιες.
- οι ερωτήσεις 6 και 7 αφορούν χρήσεις των εκθεμάτων

<sup>32</sup> Βλέπε ερωτηματολόγιο στο παράρτημα.

Μετά τη διεξαγωγή της έρευνας πεδίου, η ερευνήτρια κατέγραφε τις εξής πληροφορίες: ποιο έκθεμα άρεσε περισσότερο, πώς το χρησιμοποιούσαν, τι πιστεύουν ότι δείχνει το έκθεμα, αν ήθελαν να μάθουν κάτι για το έκθεμα, αν ήταν εύχρηστο και τέλος αν χρειάζεται κάποια βελτίωση. Τα ευρήματα που παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες περιλαμβάνουν ποιοτικές περιγραφές των δεδομένων, δηλαδή για να παρουσιαστούν τα δεδομένα έγινε μια μικρή περίληψη των απαντήσεων των ερωτηματολογίων, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Η παρουσίαση ξεκινά με τους επισκέπτες που ήταν στην προκειμένη περίπτωση είναι παιδιά ηλικίας 8-12 ετών και συνεχίζει με την ανάλυση των ερμηνευτικών στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν.

## Περίληψεις ερωτηματολογίων

### 1<sup>η</sup> συνέντευξη.8/6/2003

κορίτσι 8 ετών, της άρεσε το έκθεμα του Πάπυρου Rhind γιατί μοίραζε τα ψωμιά. Για να το χρησιμοποιήσει πατούσε συνέχεια επόμενο και μετά το κοίταγε. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει πώς να μοιράζει κανείς δίκαια ένα πράγμα σε πολλούς ανθρώπους. Θα ήθελε το έκθεμα να είναι ακόμα πιο εύκολο και δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθεί το έκθεμα.

### 2<sup>η</sup> συνέντευξη.8/6/2003

κορίτσι 11 ετών, της άρεσε το έκθεμα του Πάπυρου Rhind γιατί χώριζε τα ψωμιά. Για να το χρησιμοποιήσει πατούσε συνέχεια επόμενο και διάβαζε τις οδηγίες και σκεφτόταν την λύση. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει τη δίκαιη μοιρασιά του ψωμιού. Δεν θέλει να μάθει κάτι άλλο γι' αυτό το έκθεμα και ήταν πανεύκολο στη χρήση του. Σχετικά με τη βελτίωση θα ήθελε να έχει περισσότερες πράξεις για να κάνουν μόνα τους τα παιδιά.

### 3<sup>η</sup> συνέντευξη. 8/6/2003

κορίτσι 12 ετών, της άρεσε το έκθεμα του Πάπυρου Rhind γιατί είχε το πρόβλημα. Για να το χρησιμοποιήσει διάβαζε τις οδηγίες και πατούσε επόμενο, στη συνέχεια έκανε τη διαίρεση. Πιστεύει ότι θέλει να μιλήσει για τα κλάσματα. Δεν θέλει να μάθει κάτι άλλο για το έκθεμα και ήταν εύκολο να το χρησιμοποιήσει. Δεν θέλει βελτίωση είναι πολύ καλό.

### 4<sup>η</sup> συνέντευξη. 8/6/2003

κορίτσι 12 ετών, της άρεσε το έκθεμα του Πάπυρου Rhind γιατί ήταν με τον υπολογιστή. Της άρεσε το πρόβλημα και η πράξη γιατί ήταν 6 άνδρες που ήθελαν να διαιρέσουν το ψωμί, έκανε τη διαίρεση και υπολόγιζε με τα κλάσματα. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει τη χρησιμότητα των κλασμάτων. Δεν ήθελε να μάθει κάτι άλλο για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση και δεν πιστεύει ότι χρειάζεται βελτίωση, είναι καλό.



#### 5<sup>η</sup> συνέντευξη, 8/6/2003

κορίτσι 10 ετών, Της άρεσε το έκθεμα με τον Πάπυρο Rhind και το Κόσκινο του Ερατοσθένη. Από τον Πάπυρο της άρεσε που ήταν σε υπολογιστή και από το Κόσκινο που ήταν σαν παιχνίδι. Και στα δύο ακολούθησε τις οδηγίες. Στον Πάπυρο το έκθεμα ήθελε να δείξει τη διαίρεση και στο Κόσκινο τους αριθμούς. Θα ήθελε να μάθει κάτι για τα εκθέματα αλλά δεν ξέρει. Ήταν εύκολα στη χρήση και τέλος δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθούν.

#### 6<sup>η</sup> συνέντευξη, 23/6/2003

αγόρι 9 ετών, του άρεσε το Κόσκινο του Ερατοσθένη δηλ. αυτό με τα πούλια. Του άρεσαν τα χρώματα, για να το χρησιμοποιήσει διάβασε τις οδηγίες και έβαζε τα πούλια όπως έπρεπε. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει τους αριθμούς. Ήταν εύκολο στη χρήση και δεν χρειάζεται βελτίωση,

#### 7<sup>η</sup> συνέντευξη, 23/6/2003

κορίτσι 9 ετών, της άρεσε αυτό με τον υπολογιστή δηλ. ο Πάπυρος Rhind. Της άρεσαν τα χρώματα και που κουνιούνταν τα ψωμάκια. Το χρησιμοποίησε διαβάζοντας τις οδηγίες και έλυσε το πρόβλημα. Δεν απάντησε στο τι ήθελε να δείξει το έκθεμα, στη χρήση ήταν εύκολο και τέλος δεν γνωρίζει πώς θα μπορούσε να βελτιωθεί.

#### 8<sup>η</sup> συνέντευξη, 23/6/2003

αγόρι 11 ετών, του άρεσε το έκθεμα με τη γωνία γιατί μπορούσε να το ακουμπήσει. Στην αρχή το παρατήρησε και ύστερα κούνησε τις γωνίες. Το έκθεμα ήθελε να δείξει τις ίσες γωνίες. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα και ήταν πανεύκολο στη χρήση και πιστεύει ότι δεν χρειάζεται βελτίωση.

#### 9<sup>η</sup> συνέντευξη, 23/6/2003

κορίτσι 11 ετών, της άρεσε το έκθεμα με το ραβδί γιατί μπορούσε να το αγγίξει. Διάβασε την ταμπέλα δίπλα στο έκθεμα και προσπάθησε να δει τι γίνεται με βάση αυτά που διάβαζε. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει τι είναι ορθή γωνία. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση.

10<sup>η</sup> συνέντευξη, 23/6/2003

αγόρι 10 ετών, του άρεσε αυτό το μεγάλο έκθεμα που μοιάζει με τάβλι και που ήταν σαν παιχνίδι. Έκανε ότι έλεγε το πινακάκι δίπλα και βρήκε τη λύση, πιστεύει ότι ήθελε να δείξει κάτι με τους αριθμούς. Δεν ήθελε να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση και δεν ξέρει αν χρειάζεται βελτίωση.

11<sup>η</sup> συνέντευξη, 29/6/2003

κορίτσι 12 ετών, της άρεσε το έκθεμα ο Διπλασιασμός του τετραγώνου γιατί είχε πορτοκαλί χρώμα. Διάβασε τις οδηγίες και προσπάθησε να φτιάξει το τετράγωνο. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει πώς να διπλασιάζεται το τετράγωνο. Δεν ήθελε να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν αρκετά εύκολο στη χρήση και δεν νομίζει ότι πρέπει να βελτιωθεί γιατί είναι πολύ καλό.

12<sup>η</sup> συνέντευξη, 29/6/2003

αγόρι 11 ετών, του άρεσε το έκθεμα με τον Πάπυρο Rhind γιατί ήταν σε υπολογιστή και έδειχνε πώς κόβονταν τα ψωμιά. Διάβασε τις λεζάντες στην οθόνη του υπολογιστή και έκανε τις πράξεις που ζητούσε. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει πώς να μοιράζονται τα ψωμιά ισότιμα. Θα ήθελε να μάθει πώς έφτιαξαν το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση και πιστεύει πώς χρειάζεται βελτίωση.

13<sup>η</sup> συνέντευξη, 29/6/2003

κορίτσι 9 ετών, της άρεσε το έκθεμα Κατά κορυφήν γωνίες γιατί μπορούσε να το ακουμπά και να το κουνά. Για να το χρησιμοποιήσει κούνησε τα 2 ξυλάκια και μετά το κοιτούσε. Πιστεύει ότι θέλει να δείξει κάτι που είναι ίσο (δεν θυμάται καλά). Ήταν πανεύκολο στη χρήση και πιστεύει ότι δεν θέλει βελτίωση.

14<sup>η</sup> συνέντευξη, 29/6/2003

αγόρι 10 ετών, του άρεσε το έκθεμα το Κόσκινο του Ερατοσθένη γιατί είχε έντονα χρώματα. Διάβασε τις οδηγίες και προσπάθησε να κάνει αυτό που έλεγε. Πιστεύει ότι θέλει να δείξει τους αριθμούς (βοηθήθηκε από τον πατέρα). Δεν ήθελε να μάθει κάτι για το έκθεμα, στη χρήση ήταν έτσι και έτσι και δεν θέλει βελτίωση.

15<sup>η</sup> συνέντευξη, 29/6/2003

κορίτσι 12 ετών, της άρεσε το έκθεμα με το Πυθαγόρειο θεώρημα γιατί είχε το ραβδί το οποίο μπορούσε να κουνήσει. Προσπάθησε να κάνει μέτρηση, έκανε πρόσθεση και ακολούθησε τις οδηγίες. Πιστεύει ότι το έκθεμα θέλει να δείξει πώς να υπολογίζει κάποιος τις πλευρές του τετραγώνου. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν αρκετά εύκολο στη χρήση και δεν χρειάζεται βελτίωση.

16<sup>η</sup> συνέντευξη, 30/6/2003

κορίτσι 8 ετών, της άρεσε τα έκθεμα Κατά κορυφήν γωνίες γιατί ήταν πάνω σε πορτοκαλί τετράγωνο και είχε τα δύο ξυλάκια που μπορούσε να τα κουνήσει. Διάβασε τις οδηγίες δίπλα στο κουτάκι και πιστεύει ότι θέλει να δείξει αν είναι ίσα τα ξυλάκια. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση και δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθεί.

17<sup>η</sup> συνέντευξη, 30/6/2003

αγόρι 11 ετών, του άρεσε το έκθεμα με τον Πάπυρο Rhind γιατί είναι σε υπολογιστή και του έκανα εντύπωση τα ανθρωπάκια και τα ψωμάκια. Διάβασε τις οδηγίες αριστερά στον υπολογιστή που εμφανίζονται και πατούσε επόμενο αφού έκανε τις πράξεις. Πιστεύει ότι ήθελε να δείξει τη σημασία της ισότητας. Θα ήθελε να μάθει με ποιον τρόπο έφτιαξαν αυτό το πρόγραμμα, ήταν εύκολο στη χρήση και δεν νομίζει ότι μπορεί να βελτιωθεί.

18<sup>η</sup> συνέντευξη, 30/6/2003

κορίτσι 11 ετών, της άρεσε το έκθεμα με το Πυθαγόρειο θεώρημα γιατί μπορούσε να κουνήσει το ραβδί. Διάβασε τις πληροφορίες δίπλα στο έκθεμα και πιστεύει ότι θέλει να δείξει αν είναι ίσα κάποια σημεία του τετραγώνου. Δεν απάντησε αν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν αρκετά εύκολο στη χρήση και δεν απάντησε αν θα μπορούσε να βελτιωθεί.

19<sup>η</sup> συνέντευξη, 30/6/2003

κορίτσι 11 ετών, της άρεσε το έκθεμα το Κόσκινο του Ερατοσθένη γιατί έχει πολλά χρώματα. Πρώτα διάβασε την πινακίδα δίπλα στο έκθεμα και έπειτα κάλυπτε με τα πούλια τους αριθμούς που έπρεπε. Ήθελε να δείξει ποιοι είναι οι

πρώτοι αριθμοί. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν αρκετά εύκολο στη χρήση και δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθεί.

20<sup>η</sup> συνέντευξη, 6/7/2003

αγόρι 12 ετών, του άρεσε το έκθεμα με τις Κατά κορυφήν γωνίες γιατί μπορείς να το ακουμπάς. Στην αρχή κούνησε τα δυο ξυλάκια και προσπάθησε να δει τι θέλει να δείξει. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση του και δεν ξέρει να θέλει βελτίωση.

21<sup>η</sup> συνέντευξη, 6/7/2003

αγόρι 11 ετών, του άρεσε το έκθεμα ο Διπλασιασμός του τετραγώνου γιατί μπορούσε να φτιάξει το τετράγωνο. Έπαιρνε τα κομμάτια και έφτιαχνε δίπλα το άλλο τετράγωνο. Πιστεύει ότι θέλει να δείξει πώς από δύο τετράγωνα βγαίνει ένα. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα, στη χρήση ήταν εύκολο και δεν απάντησε να χρειάζεται κάποια βελτίωση.

22<sup>η</sup> συνέντευξη, 6/7/2003

κορίτσι 9 ετών, της άρεσε το έκθεμα με τον Πάπυρο Rhind γιατί έχει χρώμα, την βοήθησε ο πατέρας της και διάβαζαν τις λεζάντες στον υπολογιστή και έκανε τη διαίρεση. Πιστεύει ότι θέλει να δείξει πώς μοιράζεται το ψωμί. Δεν ήθελε να μάθει κάτι για το έκθεμα, ήταν εύκολο στη χρήση και δεν απάντησε στην ερώτηση αν χρειάζεται βελτίωση.

23<sup>η</sup> συνέντευξη, 7/7/2003

αγόρι 12 ετών, του άρεσε το έκθεμα της Ισότητας των κατά κορυφήν γωνιών γιατί μπορούσες να το ακουμπήσεις και να το κουνήσεις. Στην αρχή κούνησε τα δύο ξύλα και είδε ότι σχηματίζονται διάφορα είδη σταυρών ή χι. Πιστεύει ότι το έκθεμα ήθελε να δείξει ότι οι γωνίες είναι ίσες. Δεν θέλει να μάθει κάτι για το έκθεμα και ήταν πολύ εύκολο στη χρήση του και δεν νομίζει ότι χρειάζεται βελτίωση.

24<sup>η</sup> συνέντευξη, 7/7/2003

κορίτσι 8 ετών, της άρεσε το έκθεμα το Κόσκινο του Ερατοσθένη γιατί τα πούλια ήταν χρωματιστά. Έβαζε τα πούλια πάνω στους αριθμούς. Δεν ήξερε πολύ καλά αλλά πιστεύει ότι το έκθεμα θέλει να δείξει ποιοι είναι οι ζυγοί και ποιοι οι μονοί αριθμοί. Θα ήθελε να μάθει πώς έφτιαξαν αυτό το έκθεμα, ήταν αρκετά εύκολο στη χρήση του και δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθεί.

25<sup>η</sup> συνέντευξη, 7/7/2003

κορίτσι 11 ετών, της άρεσε το έκθεμα με τον Πάπυρο Rhind γιατί ήταν σε υπολογιστή και έμοιαζε με ηλεκτρονικό παιχνίδι. Πατούσε συνέχεια επόμενο και διάβαζε το πρόβλημα. Πιστεύει ότι το έκθεμα ήθελε να δείξει πώς να μοιράζει κανείς ισότιμα το ψωμί. Θα ήθελε να μάθει αν ήταν εύκολο να κατασκευαστεί, ήταν εύκολο στη χρήση του και δεν ξέρει αν θα μπορούσε να βελτιωθεί.

## Ευρήματα - παρουσίαση αποτελεσμάτων

25 παιδιά πήραν μέρος στην άτυπη έρευνα των μεμονωμένων εκθεμάτων, εκ των οποίων τα 16 ήταν κορίτσια και τα 9 αγόρια ηλικίας από 8 έως 12 ετών. Τα 15 παιδιά ήταν μεμονωμένοι επισκέπτες που είχαν επισκεφθεί το ΙΜΕ και τα υπόλοιπα 10 ήταν από τις καλοκαιρινές δραστηριότητες που διεξάγει το ΙΜΕ και ήταν ενταγμένα σ' αυτές τις ομάδες.

10 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το έκθεμα « Το πρόβλημα με το πάπυρο Rhind».

Στην ερώτηση τι τους άρεσε στο έκθεμα 5 απάντησαν ότι τους άρεσε που μοιράζονταν τα ψωμιά, 1 παιδί απάντησε ότι του άρεσε το πρόβλημα, 3 απάντησαν ότι τους άρεσε που ήταν σε υπολογιστή, σε 2 άρεσαν τα χρώματα και σε 1 του άρεσε γιατί του θύμιζε ηλεκτρονικό παιχνίδι.

Στην ερώτηση πώς το χρησιμοποίησαν 5 απάντησαν ότι συνέχεια πατούσαν επόμενο και στη συνέχεια προχωρούσαν στη λύση του προβλήματος. Άλλα 5 παιδιά διάβαζαν πρώτα τις οδηγίες και έπειτα έλυναν το πρόβλημα. Ενώ μόνο 1 πατούσε επόμενο και μετά κοιτούσε τι θα γίνει.

Στην ερώτηση τι θέλει να δείξει το έκθεμα 6 παιδιά απάντησαν ότι θέλει να δείξει τη δίκαιη μοιρασιά του ψωμιού, 2 απάντησαν ότι ήθελε να δείξει τη χρησιμότητα των κλασμάτων, 1 είπε ότι θέλει να δείξει τη διαίρεση ενώ 1 δεν απάντησε.

Στην ερώτηση αν θέλουν μάθουν κάτι για το έκθεμα 4 απάντησαν ότι δεν ήθελαν να μάθουν κάτι για το έκθεμα, 1 ήθελε να μάθει αλλά δεν ήξερε τι ακριβώς, 2 δεν απάντησαν καθόλου, 2 ζήτησαν να μάθουν πώς το έφτιαξαν και 1 ήθελε να μάθει αν ήταν εύκολο στη κατασκευή του.

Στην ερώτηση αν ήταν εύκολο να το χρησιμοποιήσουν 9 παιδιά απάντησαν ότι πολύ εύκολο στη χρήση ενώ 1 απάντησε ότι θα ήθελε να είναι ακόμα πιο εύκολο.

Στην ερώτηση αν χρειάζεται βελτίωση το έκθεμα 6 παιδιά απάντησαν ότι δεν ξέρουν, 1 ότι χρειάζεται περισσότερες πράξεις, 1 απάντησε ότι δεν θέλει, 1 δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση και 1 ότι χρειάζεται βελτίωση.



6 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το έκθεμα το « **Κόσκινο του Ερατοσθένη**».

Στην ερώτηση τι τους άρεσε στο έκθεμα , 4 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το χρώμα το οποίο είχε και 2 ότι ήταν σαν παιχνίδι και συγκεκριμένα το ένα από αυτά είπε το παρομοίασε με το τάβλι.

Στην ερώτηση πώς το χρησιμοποίησαν, 5 απάντησαν ότι διάβασαν τις οδηγίες που είχε δίπλα στο έκθεμα ενώ 1 ότι απλά τοποθετούσε τα πούλια.

Στην ερώτηση τι θέλει να δείξει το έκθεμα, 1 απάντησε ότι θέλει να δείξει ποιοι είναι οι μονοί και ζυγοί αριθμοί, 4 απάντησαν γενικά ότι θέλει να δείξει κάτι με τους αριθμούς ενώ μόνο 2 απάντησαν σωστά ότι θέλει να δείξει τους πρώτους αριθμούς.

Στην ερώτηση αν θέλουν να μάθουν κάτι για το έκθεμα 1 απάντησε ότι κάτι θέλει να μάθει αλλά δεν ξέρει, 1 δεν απάντησε καθόλου, 3 δεν ήθελαν να μάθουν κάτι ενώ 1 ήθελε να μάθει πώς το έφτιαξαν.

Στην ερώτηση αν ήταν εύκολο να χρησιμοποιήσουν 5 παιδιά απάντησαν ότι ήταν πολύ εύκολο ενώ 1 ότι ήταν λίγο δύσκολο.

Στην ερώτηση αν το έκθεμα. χρειάζεται βελτίωση, 5 απάντησαν ότι δεν ξέρουν ενώ 1 απάντησε ότι δεν θέλει βελτίωση.

5 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το έκθεμα των « **Κατά κορυφήν γωνιών**».

Στην ερώτηση τι τους άρεσε στο έκθεμα 4 απάντησαν ότι τους άρεσε γιατί μπορούσες να το ακουμπήσεις και να το κουνήσεις ενώ 1 του άρεσε το πορτοκαλί χρώμα.

Στην ερώτηση πώς το χρησιμοποίησαν το έκθεμα 2 απάντησαν ότι κούνησαν τα δύο ξυλάκια και τα παρατηρούσαν ενώ 3 ότι απλά τα κούνησαν.

Στην ερώτηση τι θέλει να δείξει το έκθεμα 1 δεν απάντησε καθόλου, 1 είπε ότι σχηματίζονταν διάφορα είδη σταυρού και χ, 1 απάντησε ότι τα ξυλάκια ήταν ίσια, 1 είπε ότι μάλλον ήθελε να δείξει κάτι που είναι ίσιο ενώ μόνο 1 απάντησε σωστά ότι οι γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.

Στην ερώτηση αν θέλουν να μάθουν κάτι για το έκθεμα, 4 απάντησαν ότι δεν θέλουν ενώ 1 δεν απάντησε καθόλου.

Στην ερώτηση αν το έκθεμα ήταν εύκολο στη χρήση και τα 5 παιδιά απάντησαν πώς ήταν εύκολο.

Στην ερώτηση αν το έκθεμα χρειάζεται κάποια βελτίωση 3 παιδιά απάντησαν ότι δεν χρειάζεται ενώ 2 απάντησαν ότι δεν ξέρουν αν χρειάζεται βελτίωση.

3 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το έκθεμα με το « **Πυθαγόρειο θεώρημα** » .

Στην ερώτηση τι τους άρεσε στο έκθεμα και τα 3 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε γιατί μπορούσαν να κουνήσουν το ραβδί.

Στην ερώτηση πώς χρησιμοποίησαν το έκθεμα, 2 απάντησαν ότι διάβασαν τη λεζάντα δίπλα στο έκθεμα και προσπάθησε να δει τι γίνεται ενώ το 1 απάντησε ότι προσπάθησε να κάνει τη μέτρηση, έκανε πρόσθεση και ακολούθησε τις οδηγίες.

Στην ερώτηση τι θέλει να δείξει το έκθεμα 1 απάντησε ότι θέλει να δείξει ότι κάποια σημεία του τετραγώνου είναι ίσια, 1 απάντησε ότι το έκθεμα θέλει να δείξει πώς να υπολογίζει κανείς τις πλευρές του τετραγώνου και 1 είπε ότι ήθελε να δείξει τι είναι ορθή γωνία.

Στην ερώτηση αν θέλουν να μάθουν κάτι για το έκθεμα τα 2 απάντησαν ότι δεν θέλουν να μάθουν κάτι ενώ το 1 δεν απάντησε καθόλου.

Στην ερώτηση αν ήταν εύκολο στη χρήση του το έκθεμα και τα 3 παιδιά απάντησαν ότι ήταν εύκολο.

Στην ερώτηση αν χρειάζεται βελτίωση το έκθεμα 2 δεν απάντησαν καθόλου και 1 είπε ότι δεν χρειάζεται βελτίωση.

2 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε το έκθεμα « **Ο διπλασιασμός του τετραγώνου** ».

Στην ερώτηση τι τους άρεσε περισσότερο στο έκθεμα 1 απάντησε ότι του άρεσε το πορτοκαλί χρώμα ενώ 1 ότι του άρεσε που μπορούσε να φτιάξει το τετράγωνο.

Στην ερώτηση πώς χρησιμοποίησαν το έκθεμα το 1 απάντησε διάβαζε τις οδηγίες και προσπαθούσε να φτιάξει το τετράγωνο ενώ το άλλο έπαιρνε τα κομμάτια και έφτιαχνε δίπλα το τετράγωνο χωρίς να διαβάσει τις οδηγίες.

Στην ερώτηση τι θέλει να δείξει το έκθεμα το 1 απάντησε πώς να διπλασιάζεται το τετράγωνο ενώ το άλλο είπε πώς από δύο τετράγωνα βγαίνει ένα.

Στην ερώτηση αν θέλουν να μάθουν κάτι για το έκθεμα και τα 2 απάντησαν ότι δεν θέλουν.

Στην ερώτηση αν ήταν εύκολο στη χρήση και τα 2 παιδιά απάντησαν ότι ήταν αρκετά εύκολο.

Στην ερώτηση αν το έκθεμα χρειάζεται βελτίωση το 1 απάντησε ότι δεν χρειάζεται βελτίωση γιατί είναι πολύ καλό και το άλλο δεν απάντησε καθόλου.

## Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Με βάση την παραπάνω ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτουν οι εξής κατηγορίες:

### Υπολογιστής

- 8 παιδιά απάντησαν ότι τους άρεσε να ασχολούνται με υπολογιστή

### Οδηγίες – λεζάντες

- 9 παιδιά πριν χρησιμοποιήσουν το έκθεμα διάβαζαν τις λεζάντες

### Χρώματα

- 7 παιδιά εντυπωσιάστηκαν από τα χρώματα των εκθεμάτων

### Ευκολία χρήσης των εκθεμάτων

- 24 παιδιά απάντησαν ότι ήταν εύκολο να χρησιμοποιήσουν τα εκθέματα

### Κατανόηση μαθηματικών εννοιών

- 8 παιδιά κατάλαβαν τι θέλει να δείξει το έκθεμα με βάση τις μαθηματικές έννοιες.

### Τρόποι βελτίωσης των εκθεμάτων

- 1 παιδί πρότεινε τρόπο βελτίωση

## ΣΤ΄ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τελειώνοντας αυτή την έρευνα στόχος μας ήταν να δούμε αν τα παιδιά μέσα σε μια τέτοιου είδους έκθεση κατανοούν και τις τους αρέσει περισσότερο.

Τα περισσότερα παιδιά ξεχώρισαν το έκθεμα « Πρόβλημα με τον πάπυρο Rhind» γιατί τους άρεσε πρώτα απ' όλα που ήταν σε υπολογιστή. Άλλωστε δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η τεχνολογία σήμερα κεντρίζει το ενδιαφέρον των παιδιών. Συγκεκριμένα, μέσα από το έκθεμα αυτό προσπάθησαν να λύσουν ένα πρόβλημα και να καταλάβουν την ισομερή μοιρασιά.

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο κατά τη διάρκεια της έρευνας -όπως παρατηρήθηκε- ήταν η διαδικασία με τις φωτογραφίες των εκθεμάτων. Αυτό τράβηξε το ενδιαφέρον των παιδιών και είχε καλύτερα αποτελέσματα ώστε να απαντήσουν στο ερωτηματολόγιο.

Με βάση λοιπόν την ανάλυση των δεδομένων βλέπουμε ότι τα παιδιά για να χρησιμοποιήσουν τα εκθέματα διάβαζαν τις οδηγίες. Απ' αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι τα παιδιά δεν αδιαφορούσαν για τις λεζάντες- οδηγίες δίπλα στο έκθεμα..

Στη συνέχεια, στην ερώτηση το τι θέλει να δείξει το έκθεμα τα παιδιά αντιλαμβάνονται τι παρουσιάζει το έκθεμα και γίνεται μια προσπάθεια να καταλάβουν και μάλιστα-αρκετές φορές - αυτά που απαντούν συνδυάζονται με όσα έχουν διδαχθεί στο σχολείο.

Έπειτα , για το αν θέλουν να μάθουν κάτι για το έκθεμα τα περισσότερα παιδιά απαντούσαν αρνητικά ή δεν απαντούσαν καθόλου στην ερώτηση.

Τέλος, αν είναι εύκολο στη χρήση τα περισσότερα παιδιά απάντησαν θετικά για περισσότερα εκθέματα. Αυτό αποδεικνύει ότι το ΙΜΕ έφτιαξε εκθέματα τα οποία είναι προσιτά και εύχρηστα σχεδόν για όλες τις ηλικίες. Επίσης, στην ερώτηση αν τα εκθέματα χρειάζονται βελτίωση πολλά παιδιά απάντησαν ότι δεν ξέρουν , ίσως και αυτό να είναι ένα αντικείμενο μιας νέας έρευνας που θα μπορούσε να προτείνεται με ποιους τρόπους μπορεί να βελτιωθεί κάποιο έκθεμα. Αν συνδυάσουμε τα ευρήματα της έρευνας με τους στόχους που θέσαμε, καθώς και με τους γενικότερους αντίστοιχους (στόχους) που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών του Δημοτικού Σχολείου, οδηγούμαστε ,επιπλέον, σε γενικευτικά συμπεράσματα.

Συμπερασματικά, αυτή η έρευνα δείχνει πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν, να κατανοήσουν, να ασχοληθούν με τα διαφορετικά εκθέματα μιας έκθεσης ως εξής:

Από τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο, που θέτει το πρόγραμμα σπουδών κατά τάξη, και με βάση τα ερωτήματα της έρευνάς μας προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Κατά γενική ομολογία , οι ερωτώμενοι μαθητές και μαθήτριες εντυπωσιάστηκαν από τα εκθέματα των μαθηματικών του μουσείου. Και αυτό, βέβαια, συνιστά τη βάση πάνω στην οποία λειτούργησαν και άλλες παράμετροι μάθησης.
2. Ο εντυπωσιασμός από τα εκθέματα *είλκυσε την προσοχή τους και παρατήρησαν με ακρίβεια τα μαθηματικά εκθέματα.*
3. Διδάχθηκαν έμμεσα και άκοπα με ποιο τρόπο λειτουργούσε το μηχάνημα και οδηγήθηκαν, με φυσικό τρόπο, στην αναζήτηση της λύσης.
4. Αντλήθηκαν τη χρησιμότητα των κλασμάτων και της διαίρεσης, κατά την διανομή του ψωμιού, και τους εντυπώθηκε η *δίκαιη μοιρασιά.*
5. Σχεδόν, ομόφωνα, τα παιδιά ομολόγησαν ότι ήταν εύκολη η *χρησιμοποίηση του εκθέματος.*
6. Επίσης, *κατανόησαν τη σκοπιμότητα των εκθεμάτων.*
7. Ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών/ τριων *δεν κατάλαβε αν το έκθεμα θέλει βελτίωση.*
8. Γενικά, *η επίσκεψη στο χώρο του μουσείου, η επαφή με τα εκθέματα και η εμπλοκή τους στη λειτουργία τους συνιστά τη βιωματική διδασκαλία ( μέθοδος project) έξω από το χώρο του σχολείου.*  
Οι μαθητές /τριες, βέβαια, *δεν αντιλαμβάνονται ότι είναι διδασκαλία , γεγονός που ενδέχεται να τους προκαλέσει κάποια δυσάρεστα συναισθήματα , και έτσι μαθαίνουν με άλλο τρόπο.*
9. Και τα πέντε μαθηματικά εκθέματα *ερέθισαν σε σημαντικό βαθμό το νου των μαθητών, στις ακόλουθες παραμέτρους:*
  - ✓ στην προσπάθεια να αποκωδικοποιήσουν τη σκοπιμότητά τους
  - ✓ στην εξοικείωση με τη χρήση τους
  - ✓ στη διαδοχική, λογική επεξεργασία ( πρώτα διάβασμα λεζάντας και μετά χρήση του εκθέματος)
10. Ένας σημαντικός αριθμός μαθητών (30%) *εντυπωσιάστηκε με τα χρώματα των εκθεμάτων .*
11. Σχεδόν όλοι οι μαθητές *δεν πρότειναν τρόπους βελτίωσης των εκθεμάτων, γεγονός που δηλώνει ότι η πρώτη επαφή με αυτά είναι ικανή να κεντρίσει τη σκέψη των μαθητών, αλλά απαιτείται περισσότερος χρόνος, για προέκταση της σκέψης ( προτάσεις τρόπων βελτίωσης).*

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική

1. Αναστασία Κουβέλη, *Η σχέση των μαθητών με το μουσείο- Θεωρητική προσέγγιση. Έρευνα στην Αθήνα και στην Ικαρία, Εκπαιδευτικά προγράμματα*, Αθήνα 2000, Εθνικό Κέντρο Κοινωνικών Ερευνών.
2. Γιώργος Κόκκινος, Ευγενία Αλεξάκη (επιμέλεια), *Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στη Μουσειακή Αγωγή*, εκδόσεις Μεταίχμιο, σ.σ 77-92.
3. Γιάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, Αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά και ελληνικά μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.
4. Γιάννης Χριστιανίδης, *Οι ερμηνείες του Διόφαντου*, εκδόσεις Νεύσις, τ. 3. 1995, σ.σ.109-132.
5. Εφημ. ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ, ένθετο «Ιστορικά», τ.χ 122, 14/2/2002
6. Θεανώ Μουσούρη, 1999, « Έρευνα κοινού και Αξιολόγηση στα Μουσεία, Αρχαιολογία και Τέχνες, τεύχος 72, σ.σ 56-61.
7. Θεανώ Μουσούρη , « Μουσεία για όλους; Προγράμματα προσέγγισης στο Διεθνή χώρο», Αρχαιολογία και Τέχνες, τεύχος 73, σ.σ 65-69.
8. Ιωάννης Χριστιάς, *Θεωρία και Μεθοδολογία της Διδασκαλίας*, Αθήνα 1992, εκδόσεις Γρηγόρης, σ.σ 77-82.
9. Ματούλα Σκαλτσά, *Η Μουσειολογία στον 21ο αιώνα- θεωρία και Πράξη, Πρακτικά Διεθνούς Συμποσίου( Θεσσαλονίκη, 21-24 Νοεμβρίου 1997)*, Θεσσαλονίκη 2001, εκδόσεις Εντευκτηρίου.
10. Ματούλα Σκαλτσά, *Για τη Μουσειολογία και τον πολιτισμό*, Θεσσαλονίκη 1999, εκδόσεις Εντευκτηρίου.
11. Μάρλεν Μούλιου, Αλέξάνδρα Μπούνια, « Μουσειακές εκθέσεις: Ερμηνευτικές προσεγγίσεις στη Μουσειακή Θεωρία και Πρακτική» Αρχαιολογία και Τέχνες, τεύχος 70, σ.σ 53-58.
12. Παιδαγωγικό Ινστιτούτου- Ενιαίο Λύκειο, *Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΕΠΠΣ)*, Αθήνα 1998, σ.σ 141-155.

13. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο: *Των Επιστημών και της Τεχνολογίας*, Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου, Αθήνα 1999, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

### Ξενόγλωσση

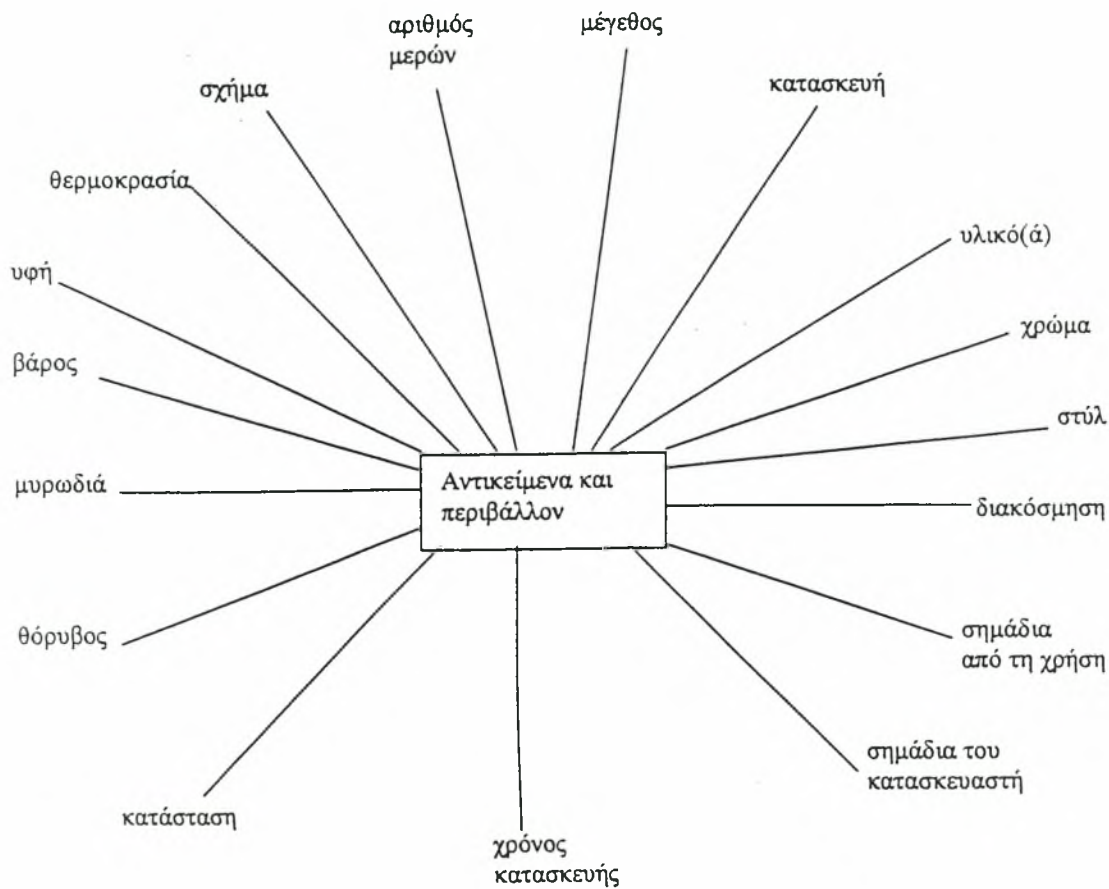
1. Eilean Hooper- Greenhill, *Museum and Gallery Education*, 1991, Leicester University Press, σ.σ 99-114.
2. Eilean Hooper- Greenhill, *The Educational Role of the Museum*, London 1994, σ.σ 47-60
3. Theano Mousouri, Alexandra Niforidou, Andromagi Gazi, “ *Front- end and Formative Evaluation of an Exhibition on Greek Mathematics*”, Current Trends In Audience Research and Evaluation, vol.17, AAM Committee on Audience Research and Evaluation.

### Ιστοσελίδες

1. [www. ime. gr](http://www.ime.gr)
2. [www. fhw.gr](http://www.fhw.gr)
3. [www. nctm.org/ standards/navigations.htm](http://www.nctm.org/standards/navigations.htm)



# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



Σχήμα 1 Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες μας τις αισθήσεις (αφή, όραση, ακοή, οσμή και – μερικές φορές – γεύση) για να μελετήσουμε τα αντικείμενα. (Πηγή: Hooper-Greenhill, 1992: σημειώσεις από διαλέξεις.)

## ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Με συγχωρείτε, γειά σας. Με λένε...και σπουδάζω στο Πανεπιστήμιο του Βόλου. Κάνω μια εργασία για την έκθεση των μαθηματικών και θα με ενδιέφερε πολύ να μάθω ποια εκθέματα άρεσαν περισσότερο στα παιδιά.. Θα μπορούσα να τα ρωτήσω μερικές ερωτήσεις;

1. Μπορείς να ρίξεις μια ματιά στις φωτογραφίες και να μου πείς ποιό έκθεμα σου άρεσε περισσότερο;  
*{κοιτάζει τις φωτογραφίες και διαλέγει ένα έκθεμα}*

2. Τι ήταν αυτό που σου άρεσε από αυτό το έκθεμα;

3. Θυμάσαι πώς χρησιμοποίησες το έκθεμα;

3β. Και μετά τι έκανες;

4. Τι νομίζεις ότι θέλει να δείξει αυτό το έκθεμα;

5. Θα ήθελες να μάθεις κάτι άλλο για αυτό το έκθεμα;

6. Ήταν εύκολο να το χρησιμοποιήσεις;

7. Πως νομίζεις ότι θα μπορούσε να βελτιωθεί;

8. Πόσο χρονών είσαι;

Αγόρι

Κορίτσι

Ημερομηνία

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΩΝ





Φωτογραφία νούμερο 2

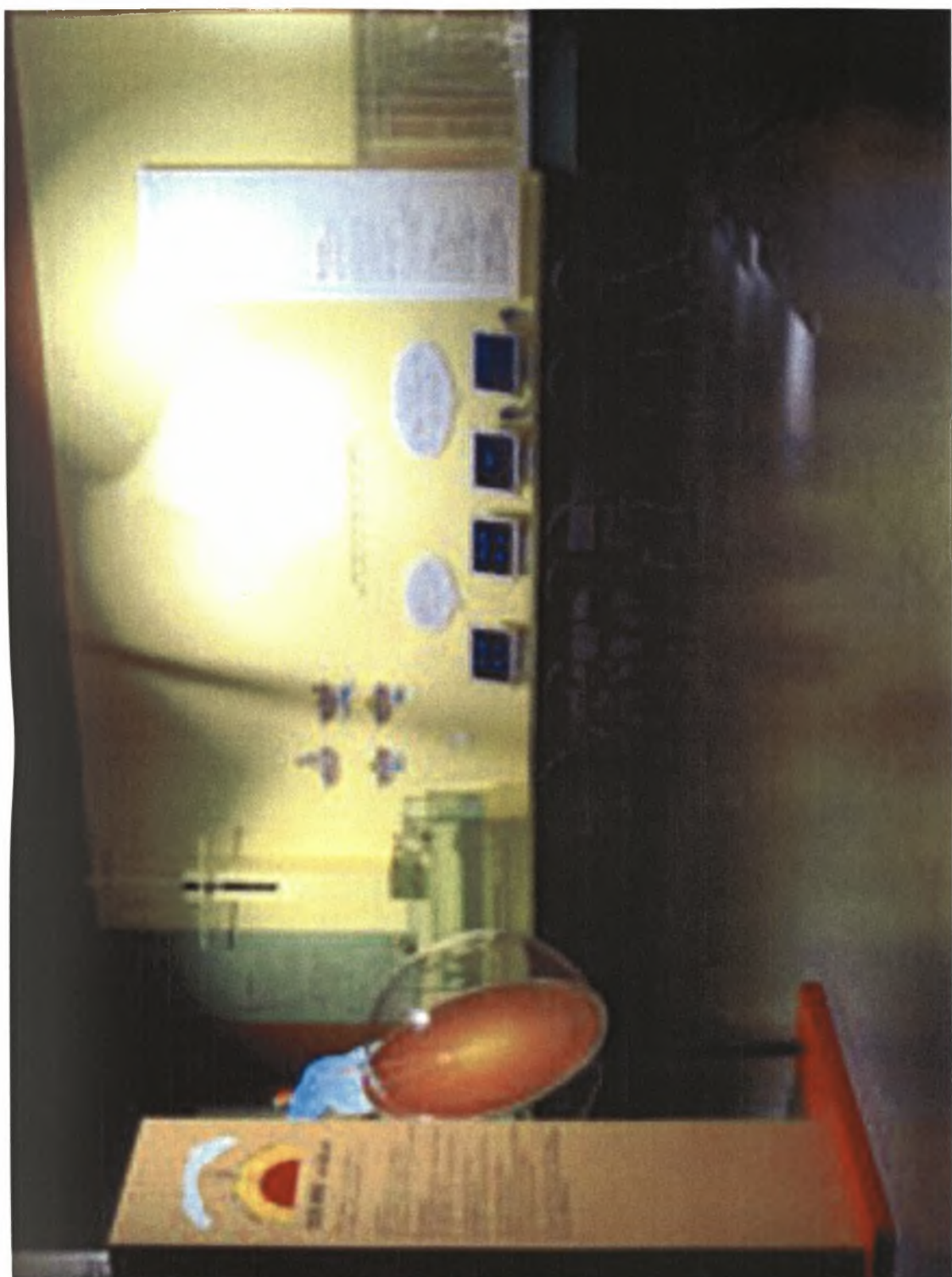








Φωτογραφία νούμερο 4



Φωτογραφία νούμερο 5



Φωτογραφία νούμερο 6



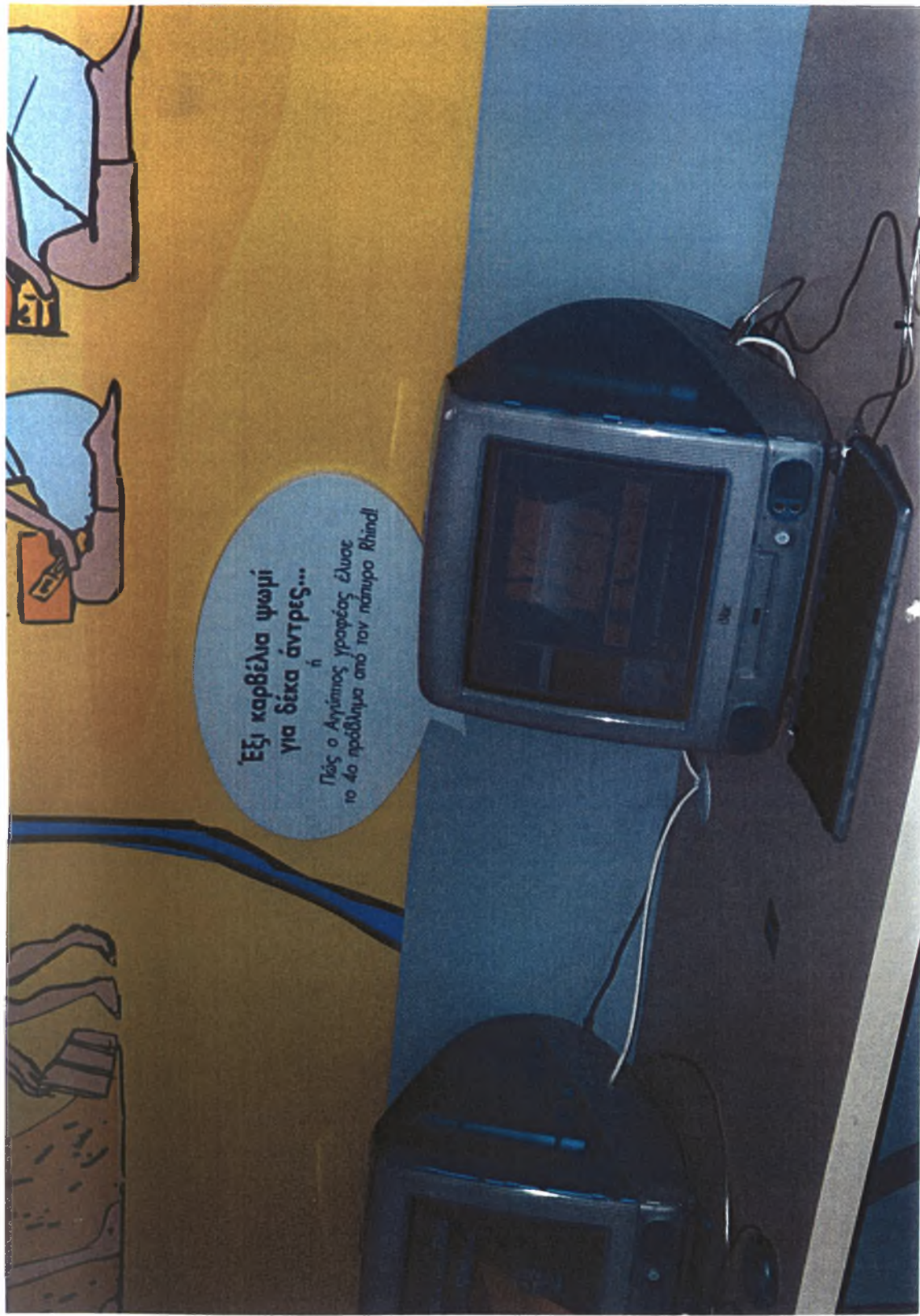


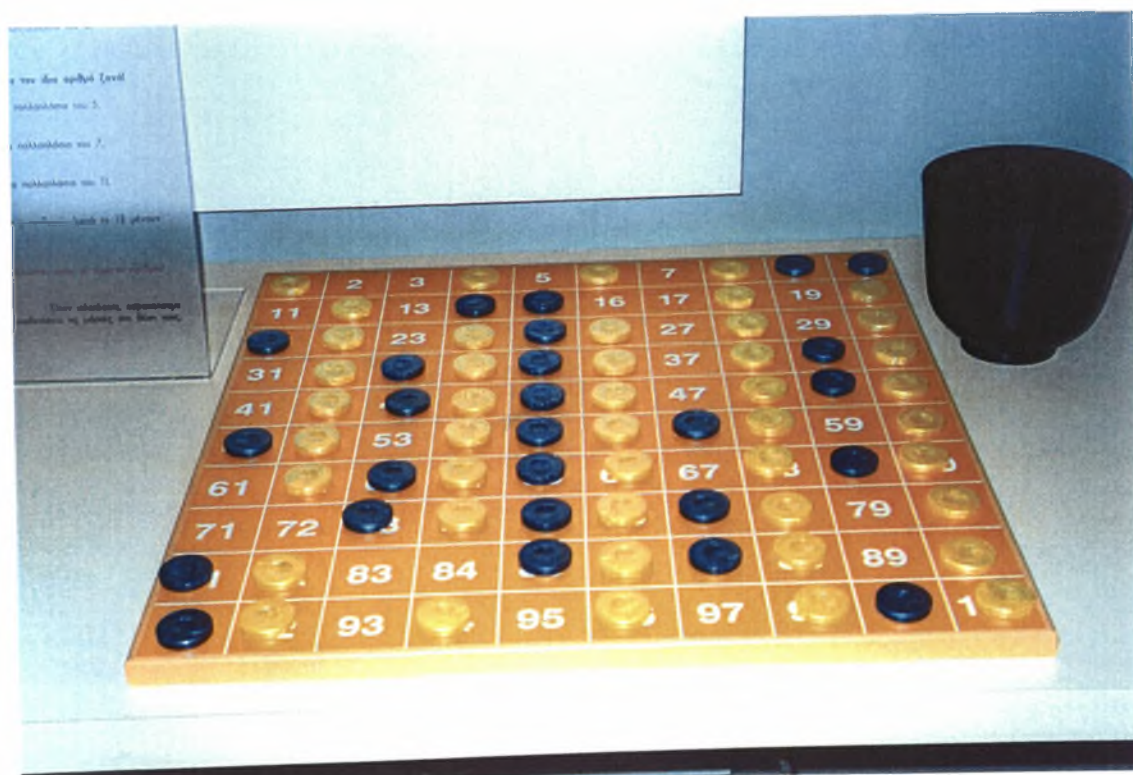
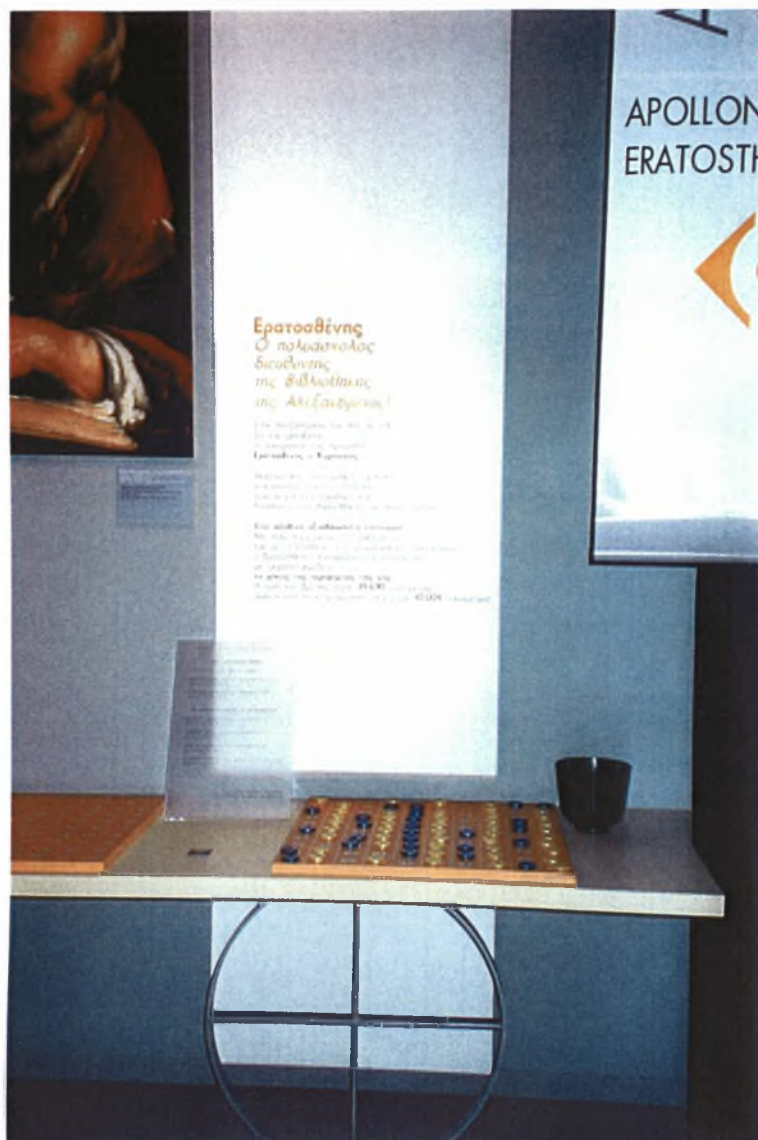
Φωτογραφία νούμερο 7



Φωτογραφία νούμερο 8









Το επάνω άκρο γλιστράει προς τα κάτω...  
Πόσο απομακρύνεται το κάτω άκρο;

Οι Βαβυλώνιοι και το θεώρημα του Πυθαγόρα

Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να υπολογίσουν τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου επειδή γνώριζαν τον κανόνα του πυθαγόρειου θεωρήματος, χωρίς να το έχουν αποδείξει.

Τι λέει το πυθαγόρειο;

Στα ορθογώνια τριγώνια το τετράγωνο που σχηματίζεται από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία είναι ίσο με τα τετράγωνα που σχηματίζονται από τις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία.

Ας αντιμετωπίσουμε τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου με τον τρόπο που έδειξε η απεικόνιση οι Βαβυλώνιοι.

1. Το άνω άκρο του τριγώνου και το μήκος του ραβδίου που ακουμπά πάνω στην οριζόντια είναι 50 εκατοστά.  
2. Δίπλα του αυθαίου του ραβδίου στα 30 εκατοστά.  
3. Σε ποιο σημείο βρίσκεται τώρα το επάνω άκρο, αν μετακινηθείτε να 30 μτ. τον οριζόντιο άξονα;  
4. Αν μετακινηθείτε να 40 μτ. τον οριζόντιο άξονα;  
5. Τώρα προσθέστε τους δύο αριθμούς.  
6. Αν μετακινηθείτε να 30 μτ. τον οριζόντιο άξονα;  
7. Τι παρατηρείτε;

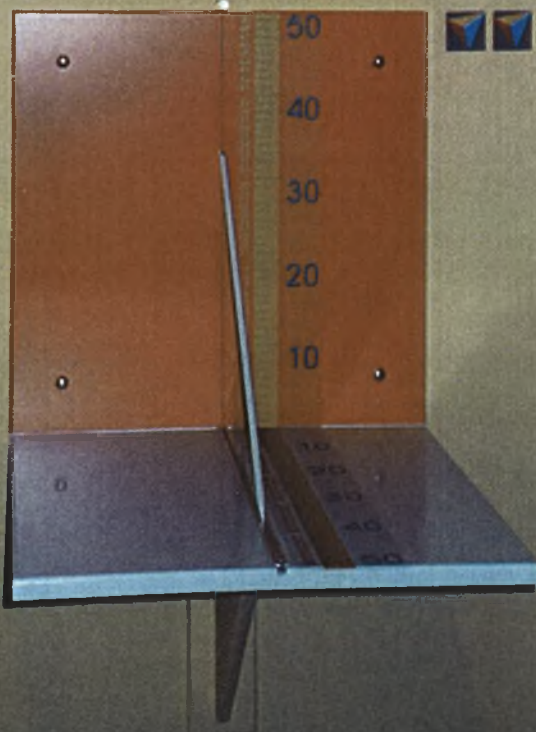
Δίπλα του αυθαίου στα 40 και μετακινηθείτε να 30 μτ. οριζόντιο άξονα.  
8. Δίπλα του αυθαίου στα 30 και μετακινηθείτε να 40 μτ. οριζόντιο άξονα.  
9. Δίπλα του αυθαίου στα 40 και μετακινηθείτε να 30 μτ. οριζόντιο άξονα.  
10. Τι παρατηρείτε;

Παρατηρούμε ότι η μέση του ραβδίου μένει πάντα σταθερή, 50 εκ.

Σε ποιο σημείο και να θέλατε τον αυθαίο, ο αυθαίος παραμένει σταθερός.

Στις παρατηρήσεις, όταν μετακινηθείτε, οι αυθαίοι και οι ραβδοί είναι κατακόρυφοι όλοι.

Δείτε τον αυθαίο του αυθαίου του αυθαίου στο άνω 3.



Αποδεί  
πολλοί  
Οι πηγ  
στη Με

Το κείμενο  
είναι γραμ  
πάνω σε μι  
Έχουν σωθ  
πάνω απ

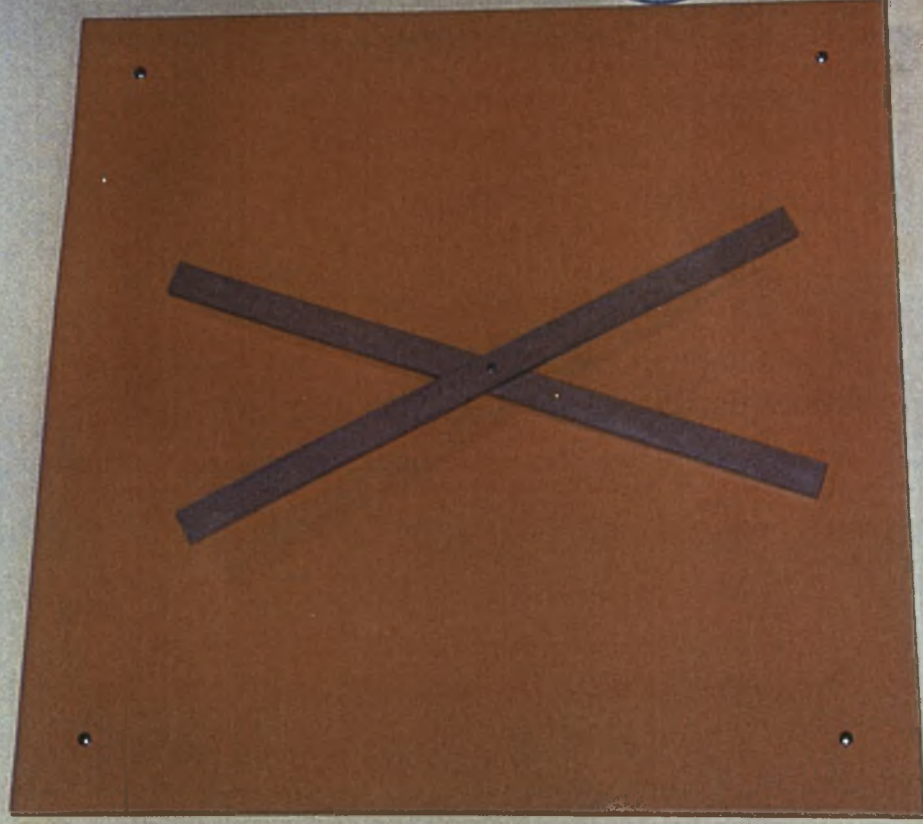
Από αυτές  
και χωρίζον  
1. Κείμενο  
2. Πίνακες  
3. Κείμενο  
με τις λέ

Τα περισσότε  
ανήκουν στη  
Έχουν μελε  
και σήμερα  
σε πολλά μ

ύο!

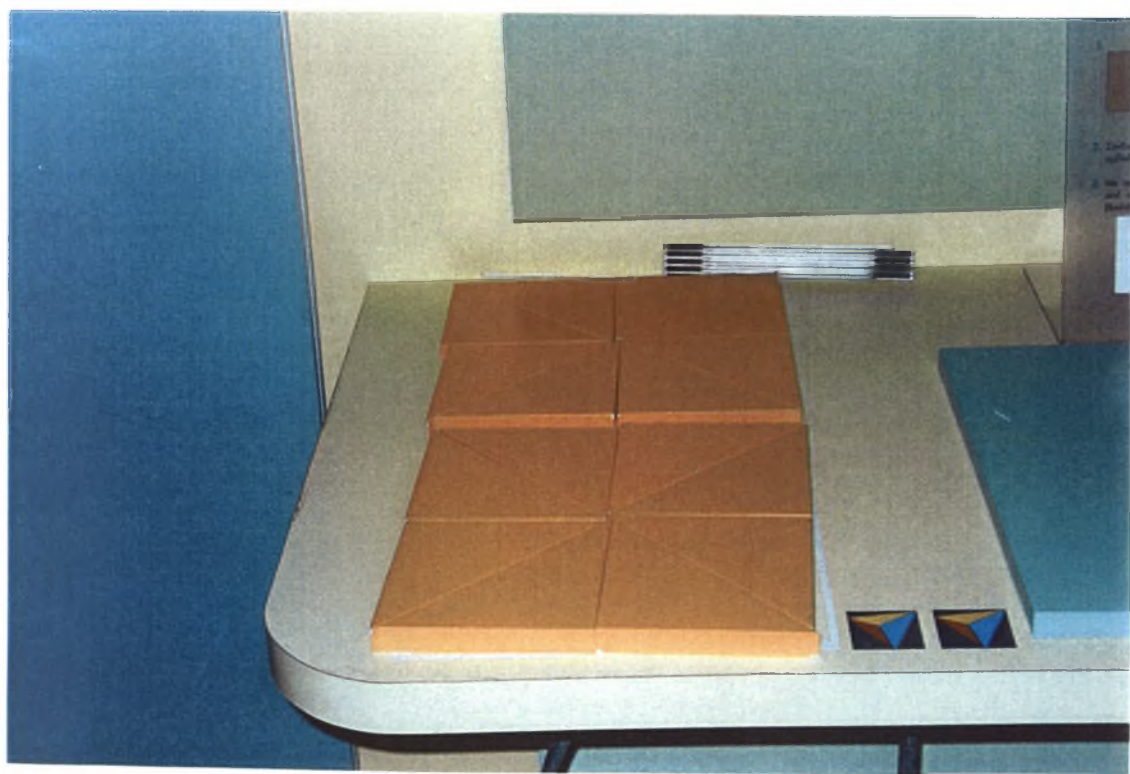
...του Θαλή...

Η γωνία στο προσκίνητο!



1. Παρατηρήστε τις γωνίες που σχηματίζονται από αυτό το δίο σκέλετο. Τι συμπεράσματα βγάξετε.  
Οι από κορυφών γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες ανά δύο.
2. Αν μετακινήσετε το δίο σκέλετο, τι παρατηρείτε για τις νέες γωνίες που σχηματίζονται.  
Οι από κορυφών γωνίες εξακολουθούν να είναι ίσες.







ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000102101