



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

Το Στοχαστικό Πρόβλημα του Βέλτιστου Χρονικού Προγραμματισμού

Παρτίδων Παραγωγής σε Διεργασίες Συνεχούς Παραγωγής

υπό
Καλαντζή Γιώργου

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας
2009



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6406/1
Ημερ. Εισ.: 08-12-2009
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2009
ΚΑΛ

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Λυμπερόπουλος Γιώργος, Καθηγητής Στοχαστικών Μεθόδων
Διοίκησης Παραγωγής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Παντελής Δημήτρης, Επίκουρος Καθηγητής Στοχαστικών Προτύπων
Επιχειρησιακής Έρευνας στη Βιομηχανική Διοίκηση, Τμήμα Μηχανολόγων
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Κοζανίδης Γιώργος, Λέκτορας Μεθόδων Βελτιστοποίησης Συστημάτων
Παραγωγής/Υπηρεσιών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Δημήτρη Παντελή και Κοζανίδη Γεωργίου για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ευχαριστώ την συνάδελφο μου Ολυμπία Χατζηκωνσταντίνου για την πολύτιμη βοήθειά της στον προγραμματισμό με Matlab. Ευχαριστώ τους φίλους μου για την ηθική υποστήριξή τους. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Ευριπίδη και Δέσποινα Καλαντζή για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Γιώργος Καλαντζής

Το Στοχαστικό Πρόβλημα του Βέλτιστου Χρονικού Προγραμματισμού Παρτίδων Παραγωγής σε Διεργασίες Συνεχούς Παραγωγής

Καλαντζής Γιώργος

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2009

Επιβλέπων Καθηγητής : Λυμπερόπουλος Γιώργος, Καθηγητής Στοχαστικών Μεθόδων Διοίκησης
Παραγωγής

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία μελετάμε μία εκδοχή του *Στοχαστικού Προβλήματος του Βέλτιστου Χρονικού Προγραμματισμού Παρτίδων Παραγωγής* (Stochastic Economic Lot Scheduling Problem ή SELSP) για ένα εργοστάσιο που πρέπει να παράγει διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων- χρησιμοποιώντας ένα μηχάνημα - για να ικανοποιήσει σταθερή τυχαία ζήτηση για κάθε βαθμίδα. Όταν η μονάδα παραγωγής παράγει μία συγκεκριμένη βαθμίδα, οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές στην παραγωγή είναι από αυτή τη βαθμίδα προς την αμέσως προηγούμενη ή προς την αμέσως επόμενη. Μοντελοποιούμε το SELSP ως μια *Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων* (Markov Decision Process ή MDP) διακριτού χρόνου, με μεταβλητές καταστάσεως το προϊόν για το οποίο είναι στημένο το σύστημα παραγωγής και τα επίπεδα αποθέματος των προϊόντων, και μεταβλητή απόφασεως το προϊόν που θα παραχθεί την επόμενη χρονική περίοδο. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε σε βάθος χρόνου το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος. Για προβλήματα δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε βαθμίδων, μπορούμε να επιλύσουμε αριθμητικά το συνακόλουθο πρόβλημα MDP χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Για προβλήματα με περισσότερες από

τέσσερις βαθμίδες, αναπτύσσουμε μία ευρετική λύση, η οποία βασίζεται στην προσέγγιση του αρχικού πολυβάθμιου προβλήματος με πολλά τριτοβάθμια υποπροβλήματα και επιλύοντας αριθμητικά κάθε υποπρόβλημα χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για περιπτώσεις προβλημάτων δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε βαθμίδων, χρησιμοποιώντας είτε την ακριβή αριθμητική είτε την ευρετική διαδικασία επίλυσης.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	ΕισαγωγήΣφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.
1.1	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	2
1.2	Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας.....	8
Κεφάλαιο 2	Μορφοποίηση προβλήματος και επίλυση του με δυναμικό προγραμματισμό.....	8
Κεφάλαιο 3	Επίλυση προβλήματος με χρήση ευρετικού αλγορίθμου.....	11
Κεφάλαιο 4	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	15
4.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 2 προϊόντων.....	15
4.2	Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 3 προϊόντων.....	19
4.3	Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 4 προϊόντων.....	20
4.4	Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 5 προϊόντων.....	20
4.5	Συμπεράσματα.....	21
Βιβλιογραφία.....		22
Παράρτημα Α Πίνακες.....		24
Παράρτημα Β Διαγράμματα.....		32

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 1	
Πίνακας 2: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 2	
Πίνακας 3: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 3	
Πίνακας 4: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 4	
Πίνακας 5: Αποτελέσματα προβλήματος για δύο προϊόντα για τις περιπτώσεις 1-4... ..	
Πίνακας 6: Αποτελέσματα προβλήματος για δύο προϊόντα για τις περιπτώσεις 5-8... ..	
Πίνακας 7: Αποτελέσματα προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 9-15... ..	
Πίνακας 8: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 16-25.....	
Πίνακας 9: Αποτελέσματα προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 16-25... ..	
Πίνακας 10: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 3 προϊόντα για την περίπτωση 26	
Πίνακας 11: Αποτελέσματα προβλήματος με 3 προϊόντα για τις περιπτώσεις 26	
Πίνακας 12: Αντιστοιχία περιοχών και πολιτικών μεταβάσεως για τα διαγράμματα 14-18.....	
Πίνακας 13: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 4 προϊόντα για τις περιπτώσεις 27 και 28.....	
Πίνακας 14: Αποτελέσματα προβλήματος με 4 προϊόντα για τις περιπτώσεις 27 και 28	
Πίνακας 15: Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 5 προϊόντα για τις περιπτώσεις 29-32.....	
Πίνακας 16: Αποτελέσματα προβλήματος με 5 προϊόντα για τις περιπτώσεις 29-32.....	

Κατάλογος Διαγραμμάτων

- Διάγραμμα 1:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 1 (αριστερά) και 3 (δεξιά), του Πίνακα 5.....
- Διάγραμμα 2:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 4, του Πίνακα 5
- Διάγραμμα 3:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 5 (αριστερά) και 7 (δεξιά), του Πίνακα 6.....
- Διάγραμμα 4:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 8, του Πίνακα 6
- Διάγραμμα 5:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 9 με $CC=2$ (αριστερά) και για την περίπτωση 10 με $CC=10$ (δεξιά), του Πίνακα 7.....
- Διάγραμμα 6:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 11 με $CS=2$ (αριστερά) και για την περίπτωση 12 με $CS=10$ (δεξιά), του Πίνακα 7
- Διάγραμμα 7:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 13 με $CL=2$ (αριστερά) και για την περίπτωση 14 με $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 7.....
- Διάγραμμα 8:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 15 με $X=100$, του Πίνακα 7
- Διάγραμμα 9:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 16 με $CC=1$, $CS=5$, $CL=5$ (αριστερά) και για την περίπτωση 17 με $CC=1$, $CS=10$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για $X=40$
- Διάγραμμα 10:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 18 με $CC=2$, $CS=5$, $CL=5$ (αριστερά) και για την περίπτωση 19 με $CC=5$, $CS=10$, $CL=1$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για $X=40$
- Διάγραμμα 11:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 20 με $CC=5$, $CS=1$, $CL=10$ (αριστερά) και για την περίπτωση 21 με $CC=2$, $CS=10$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για $X=40$
- Διάγραμμα 12:** Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 22 με $CC=10$, $CS=1$, $CL=1$ (αριστερά) και για την περίπτωση 23 με $CC=10$, $CS=5$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για $X=40$

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Ο προγραμματισμός της παραγωγής πολλαπλών προϊόντων, το καθένα με τυχαία ζήτηση, σε μία μοναδική μονάδα παραγωγής με περιορισμένη δυναμικότητα παραγωγής και με σημαντικά κόστη και χρόνους αλλαγής ανάμεσα στα προϊόντα, είναι ένα κλασσικό πρόβλημα στην περιοχή του προγραμματισμού παραγωγής, το οποίο συχνά αναφέρεται ως *Στοχαστικό Πρόβλημα Χρονικού Προγραμματισμού Παρτίδων Παραγωγής* (Stochastic Lot Scheduling Problem ή SLSP). Ο Sox (1999) διακρίνει δύο εκδοχές για το SLSP : το *Στοχαστικό Πρόβλημα του Βέλτιστου Χρονικού Προγραμματισμού Παρτίδων Παραγωγής* (Stochastic Economic Lot Scheduling Problem ή SELSP) και το *Στοχαστικό Πρόβλημα της Επιλογής Μεγέθους Παρτίδων Παραγωγής σε Συστήματα Παραγωγής με Περιορισμένη Δυναμικότητα* (Stochastic Capacitated Lot Sizing Problem ή SCLSP). Το SELSP υποθέτει άπειρο ορίζοντα προγραμματισμού, σταθερή ζήτηση και ταιριάζει καλύτερα σε βιομηχανίες συνεχών διεργασιών, ενώ το SCLSP υποθέτει πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού, επιτρέπει μεταβλητή ζήτηση και είναι καταλληλότερο για συστήματα παραγωγής διακριτών προϊόντων. Τα συστήματα παραγωγής διακριτών προϊόντων χαρακτηρίζονται από ξεχωριστά προϊόντα/υποπροϊόντα τα οποία είναι ευδιάκριτα και απαντώνται συχνά σε βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρονικών υπολογιστών και ηλεκτρονικών προϊόντων, ηλεκτρικού εξοπλισμού και οικιακών συσκευών, μεταφορικού εξοπλισμού, μηχανημάτων, ξύλου, επίπλων κ.α. Από την άλλη οι βιομηχανίες συνεχούς διεργασίας λειτουργούν με συνεχή ροή ύλης, όπως στην περίπτωση των πετρελαιοειδών και των προϊόντων γαιάνθρακα, των μεταλλουργικών προϊόντων, των μη μεταλλικών ορυκτών προϊόντων, των βασικών χημικών, των τροφίμων και ποτών, των προϊόντων χάρτου κ.τ.λ. Γενικά οι βιομηχανίες διεργασιών είναι έντασης κεφαλαίου και εστιάζουν σε παραγωγή υψηλού όγκου και χαμηλής ποικιλίας. Σε μία τυπική βιομηχανία διεργασίας, η γραμμή παραγωγής λειτουργεί συνεχόμενα, και τα διαφορετικά προϊόντα είναι ουσιαστικά παραλλαγές της

ίδιας οικογένειας διαφοροποιούνται κατά ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά, όπως ο βαθμός, η ποιότητα, το μέγεθος, η πυκνότητα κ.τ.λ. Συχνά, οι διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων συσχετίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές είναι από την μία βαθμίδα στην αμέσως υψηλότερη ή χαμηλότερη βαθμίδα στην αλυσίδα. Για παράδειγμα, αν η μονάδα παράγει τρεις βαθμίδες Α, Β και Γ – όπου η Α είναι η χαμηλότερη και η Γ η υψηλότερη - οι επιτρεπτές αλλαγές είναι μεταξύ της Α και της Β, μεταξύ της Β και της Γ, αλλά όχι απευθείας μεταξύ των Α και Γ.

1.1 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η ντετερμινιστική εκδοχή του SELSP, η αποκαλούμενη ELSP, έχει τύχει αξιοσημείωτης προσοχής στην βιβλιογραφία κατά τις τελευταίες δεκαετίες π.χ. οι έρευνες του Elmaghraby, 1978 και του Salomon, 1991. Οι αναλυτικές και ευρετικές λύσεις για το ELSP παράγουν κυκλικά προγράμματα παραγωγής, σύμφωνα με τα οποία όλες οι βαθμίδες παράγονται διαδοχικά σε κύκλο, αρχίζοντας από την χαμηλότερη βαθμίδα, πηγαίνοντας μέχρι την υψηλότερη και επιστρέφοντας πάλι πίσω στην χαμηλότερη. Στο προηγούμενο παράδειγμα με τις τρεις βαθμίδες, ένας ολοκληρωμένος κύκλος παραγωγής όλων των βαθμίδων θα ήταν ο Α-Β-Γ-Β-Α.

Δυστυχώς τα κυκλικά προγράμματα παραγωγής δεν αποδίδουν καλά στο στοχαστικό πρόβλημα για δύο λόγους. Πρώτον, εστιάζουν στην διαστασιολόγηση των παρτίδων και όχι στην δυναμική κατανομή παραγωγικής δυναμικότητας που είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση προβλημάτων με τυχαίες αλλαγές στην ζήτηση. Δεύτερον στο στοχαστικό πρόβλημα τα αποθέματα ετοιμοπαράδοτων προϊόντων δεν αποσκοπούν μόνο στην μείωση του πλήθους των αλλαγών, όπως στην περίπτωση του ντετερμινιστικού προβλήματος, αλλά ως ασφάλεια έναντι της εξάντλησης του στοκ. Στο στοχαστικό πρόβλημα πρέπει να λαμβάνονται ταυτόχρονα υπόψη και η

διαστασιολόγηση παρτίδων αλλά και η κατανομή δυναμικότητας ενώ και η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στον προγραμματισμό(Graves, 1980).

Σε αυτήν την εργασία μελετάμε μία διαφορετική εκδοχή SELSP, σύμφωνα με την οποία μια μονάδα παραγωγής που πρέπει να παράγει διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση με στάσιμη κατανομή για κάθε βαθμίδα, από μια αποθήκη τελικών με πεπερασμένη χωρητικότητα. Η ζήτηση που δεν ικανοποιείται άμεσα από το απόθεμα χάνεται. Οι πρώτες ύλες είναι πάντα διαθέσιμες και η μονάδα παραγωγής παράγει συνεχώς και με σταθερό ρυθμό. Όταν η μονάδα παραγωγής παράγει μία συγκεκριμένη βαθμίδα, οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές στην παραγωγή, είναι από αυτή τη βαθμίδα προς την αμέσως προηγούμενη βαθμίδα ή προς την αμέσως επόμενη. Σε πολλές βιομηχανίες συνηθίζεται να χωρίζεται η ενδιάμεση βαθμίδα που προκύπτει κατά την διάρκεια μιας αλλαγής ως πούμε από την βαθμίδα A στην βαθμίδα B, έτσι ώστε το πρώτο μισό να κατηγοριοποιείται ως A και το δεύτερο ως B, παρόλο που στην πραγματικότητα η ενδιάμεση βαθμίδα του προϊόντος αλλάζει σταδιακά (και όχι απότομα) από την βαθμίδα A στην B. Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι η βαθμίδα που προκύπτει κατά την αλλαγή από A σε B κατηγοριοποιείται ως A και αυτή που προκύπτει κατά την αντίστροφη αλλαγή από A σε B θεωρείται B. Υποθέτοντας το παραπάνω, η ποσότητα των A και B που θα παραχθεί σε μακροχρόνια θα ισούται με αυτήν που θα παραγόταν αν χωρίζουμε την ενδιάμεση βαθμίδα στη μέση. Επίσης υποθέτουμε ότι όλοι οι χρόνοι αλλαγής είναι ντετερμινιστικοί και ίσοι μεταξύ τους. Η δομή του κόστους στο μοντέλο μας περιλαμβάνει ένα κόστος αλλαγής κάθε φορά που η μονάδα παραγωγής ρυθμίζεται για να παράξει μία διαφορετική βαθμίδα. Επίσης για κάθε μονάδα που παράγεται και δεν μπορεί να αποθηκευτεί στην αποθήκη τελικών προϊόντων λόγω έλλειψης χώρου εγείρεται ένα κόστος υπερχειλίσης ανά μονάδα πλεονασματικού προϊόντος. Τέλος όταν το απόθεμα δεν επαρκεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση εγείρεται ένα κόστος χαμένων πωλήσεων ανά

μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης. Οι παραπάνω υποθέσεις είναι ρεαλιστικές και βασίζονται σε ένα πραγματικό πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού παραγωγής μίας βιομηχανίας παραγωγής PET, που παρουσιάστηκε στην εργασία Liberopoulos et al, (2009).

Μοντελοποιούμε το SELSP ως μια *Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων* (Markov Decision Process) διακριτού χρόνου, όπου σε κάθε χρονική περίοδο πρέπει να αποφασίσουμε αν θα ξεκινήσουμε μια αλλαγή σε κάποια γειτονική βαθμίδα ή αν θα διατηρήσουμε την ίδια ρύθμιση στην μονάδα παραγωγής βάσει της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος, που καθορίζεται από την τρέχουσα ρύθμιση της μονάδας παραγωγής και από τα επίπεδα αποθεμάτων όλων των βαθμίδων στην αποθήκη τελικών προϊόντων. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μακροπρόθεσμο προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά περίοδο.

Το SELSP έχει τύχει σημαντικής προσοχής στην βιβλιογραφία, εξαιτίας της θεωρητικής αλλά και πρακτικής του σημασίας. Πολύ περιεκτικές είναι οι σχετικές εργασίες επισκόπησης των Sox (1999) και Winands (2005). Από αυτές τις εργασίες γίνεται προφανές ότι υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για το SELSP. Η μία είναι να αναπτύξουμε ένα κυκλικό πρόγραμμα χρησιμοποιώντας ντετερμινιστικές προσεγγίσεις του στοχαστικού προβλήματος στη συνέχεια αναπτύσσοντας έναν κανόνα ελέγχου για το στοχαστικό πρόβλημα με σκοπό την παρακολούθηση του κυκλικού προγράμματος. Η άλλη προσέγγιση – την οποία και ακολουθούμε - είναι να αναπτύξουμε ένα κανόνα δυναμικού προγραμματισμού που να καθορίζει ποιο προϊόν να παράγουμε βάσει της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος.

Από τις πρώτες δημοσιεύσεις που αντιμετώπισαν το SELSP ως ένα πρόβλημα στοχαστικού ελέγχου διακριτού χρόνου με δυναμική αλληλουχία παραγωγής προϊόντων, ήταν αυτή του Graves (1980). Ο Graves ήταν ο πρώτος που κατάφερε να λύσει ένα πρόβλημα με ένα προϊόν, το οποίο περιλάμβανε το κόστος καθυστερημένης εκπλήρωσης παραγγελιών και το κόστος αλλαγής, χωρίς

όμως να υπολογίζει τους χρόνους αλλαγής, όπου η απόφαση που έπαιρνε για κάθε χρονική περίοδο ήταν ή να αδρανοποιήσει την παραγωγική διαδικασία ή να παράγει. Στη συνέχεια βασίστηκε στα αποτελέσματα του προβλήματος με το ένα προϊόν, για να αναπτύξει έναν ευρετικό αλγόριθμο που θα έλυνε το πρόβλημα με πολλά προϊόντα. Σε αυτόν τον ευρετικό αλγόριθμο, ο προγραμματισμός συγκρίνει τις διαφορετικές τιμές των διαφορετικών προϊόντων που προκύπτουν από τις συναρτήσεις αξίας (value functions) για κάθε ατομικό και σύνθετο προϊόν, σύμφωνα με την ανάλυση ενός προϊόντος χωριστά. Ο Graves εισήγαγε την έννοια του σύνθετου προϊόντος για να αντισταθμίσει πιθανές αντιθέσεις στον προγραμματισμό στο πρόβλημα των πολλών προϊόντων. Η κεντρική θεώρηση είναι ότι το σύνθετο απόθεμα για πολλά προϊόντα θα έπρεπε να υποδεικνύει τις ανάγκες για τρέχουσα παραγωγή, στην περίπτωση που τα αποθέματα μεμονωμένου ατομικού προϊόντος, θεωρούνται οριακά επαρκή αν ιδωθούν μεμονωμένα.

Οι Qiu και Lulu (1995) μελέτησαν ένα πρόβλημα όπου θεωρούσαν ζήτηση που ακολουθούσε την κατανομή Poisson ντετερμινιστική επεξεργασία και χρόνους αλλαγής, και ένα κόστος αλλαγής και κόστος καθυστερημένης εκπλήρωσης παραγγελιών. Μοντελοποίησαν το πρόβλημα σαν μία ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων με σκοπό να αποφασίσουν σε κάθε χρονική στιγμή αναθεώρησης ποιο προϊόν θα έπρεπε να παραχθεί από την μονάδα παραγωγής – εάν υπήρχε κάποιο – με σκοπό να μειώσουν σε βάθος χρόνου το μέσο προσδοκώμενο κόστος. Χρονικές στιγμές αναθεώρησης θεωρούνται αυτές όπου είτε η μονάδα παραγωγής είναι αδρανής και καταφθάνει ζήτηση προς ικανοποίηση, είτε όταν μόλις έχει μεταποιηθεί ένα προϊόν και η μονάδα παραγωγής είναι ελεύθερη. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν διαδοχικές προσεγγίσεις για να δημιουργήσουν σχεδόν βέλτιστες πολιτικές ελέγχου, λύνοντας το πρόβλημα με πεπερασμένο χώρο αποθήκευσης, και υπολόγισαν τα όρια σφάλματος λόγω του περιορισμού. Τέλος παρουσίασαν

αριθμητικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα με δύο προϊόντα και συμπέραναν ότι τα συστήματα με περισσότερα από δύο προϊόντα είναι δύσκολο να επιλυθούν λόγω μεγάλων διαστάσεων.

Οι Vergin και Lee (1978) μελέτησαν απλές δυναμικές ευρετικές αλληλουχίες για το πρόβλημα του SELSP θεωρώντας κόστη αλλαγής αλλά όχι και τους αντίστοιχους χρόνους. Ο ευρετικός αλγόριθμός που ξεχωρίζει από τους υπόλοιπους είναι αυτός που σε κάθε περίοδο αλλάζει την παραγωγή στο προϊόν με τις λιγότερες αναμενόμενες ημέρες που απομένουν μέχρι να εξαντληθεί ή με τις περισσότερες ημέρες καθυστερημένης εκπλήρωσης παραγγελιών, εάν αυτό το προϊόν έχει λιγότερες ημέρες από ένα κρίσιμο αριθμό ημερών που θα υπάρχει ετοιμοπαράδοτο απόθεμα. Αλλιώς, εάν αυτό το προϊόν που παράγεται δεν υπερβαίνει το μέγιστο (σχετικό και απόλυτο) χώρο αποθήκευσης, τότε η παραγωγή του συνεχίζεται την επόμενη περίοδο, διαφορετικά η παραγωγή αδρανοποιείται στην επόμενη περίοδο.

Οι Leachman και Gascon (1998) ανέπτυξαν μια δυναμική, περιοδική, αναθεωρητική πολιτική ελέγχου η οποία καθορίζει ποια προϊόντα θα παραχθούν και σε τι ποσότητες, βασιζόμενοι σε δυναμικά υπολογισμένες ντετερμινιστικές λύσεις του ELSP, που υπολογίστηκαν για μεταβλητή ζήτηση. Η ντετερμινιστική λύση έχει διαφοροποιηθεί για να υπολογίζει εάν δύο ή περισσότερα προϊόντα πρόκειται να εξαντληθούν ή αν υπάρχει καθυστέρηση στην εκπλήρωση των παραγγελιών.

Τέλος, οι Sox και Muckstadt (1997) και οι Karmarkar και Yoo (1994) ανέπτυξαν στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα προγραμματισμού πεπερασμένου χρόνου για το πρόβλημα του SELSP - τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν και σαν SCLSP - με ντετερμινιστική παραγωγή και χρόνους αλλαγής, και χρησιμοποίησαν την χαλάρωση Lagrange για να βρουν βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις για προβλήματα μικρού μεγέθους.

Σε αυτήν την εργασία ακολουθούμε τον δρόμο των δημοσιεύσεων που θεωρούν το πρόβλημα του SELSP ως ένα περιοδικό πρόβλημα ελέγχου περιοδικής αναθεώρησης και διακριτού χρόνου, με δυναμική αλληλουχία παραγωγής προϊόντων. Η εργασία σχετίζεται περισσότερο με τις εργασίες του Graves (1980) και των Qui και Lulu (1995). Η διαφορά της είναι ότι θεωρεί μία νέα παραλλαγή του SELSP, όπου οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές είναι από την μία βαθμίδα του προϊόντος στην αμέσως υψηλότερη ή στην αμέσως χαμηλότερη. Αυτό το νέο χαρακτηριστικό καθιστά προβλήματα με μεγάλο αριθμό βαθμίδων επιδεκτικά ευρετικών μεθοδολογιών επίλυσης οι οποίες βασίζονται στην προσέγγιση του αρχικού προβλήματος με πολλά μικρότερα υποπροβλήματα (λιγότερων βαθμίδων), που είναι ευκολότερο να λυθούν υπολογιστικά.

Για προβλήματα δύο και τριών βαθμίδων μπορούμε να λύσουμε αριθμητικά το απορρέον πρόβλημα MDP, χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις και να αποκτήσουμε ενόραση για την βέλτιστη πολιτική ελέγχου. Για τα πολυβάθμια προβλήματα με N βαθμίδες όπου $N > 3$, διασπάμε το αρχικό πρόβλημα σε $(N-2)$ τριτοβάθμια υποπροβλήματα και τα λύνουμε χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε έναν ευρετικό αλγόριθμο που λύνει το συνολικό πρόβλημα. Κάθε τριτοβάθμιο υποπρόβλημα αποτελεί μία προσέγγιση του αρχικού πολυβάθμιου, όπου η μεσαία βαθμίδα του υποπροβλήματος αντιστοιχεί σε κάποια βαθμίδα του αρχικού προβλήματος. Η χαμηλότερη (αριστερή) βαθμίδα στο υποπρόβλημα είναι η σύνθεση όλων των βαθμίδων του αρχικού που προηγούνται της μεσαίας και η υψηλότερη (δεξιά) είναι η αντίστοιχη σύνθεση όλων των βαθμίδων που έπονται της μεσαίας. Για παράδειγμα, εάν το αρχικό πρόβλημα αποτελείται από πέντε βαθμίδες A-B-Γ-Δ-E, μορφοποιούμε τα παρακάτω τριτοβάθμια υποπροβλήματα : A-B-(Γ-Δ-E), (A-B)-Γ-(Δ-E) και (A-B-Γ)-Δ-E, όπου με (Γ-Δ-E) συμβολίζουμε την σύνθετη βαθμίδα που αποτελείται από τις Γ, Δ και E. Αφού λύσουμε όλα τα

υποπροβλήματα, αναπτύσσουμε την ευρετική πολιτική ελέγχου για το αρχικό πολυβάθμιο πρόβλημα συνδυάζοντας τμήματα των βέλτιστων πολιτικών των υποπροβλημάτων.

1.2 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα εργασία περιέχει τις εξής ενότητες : Στην ενότητα 2 περιγράφεται ο στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός και η επίλυση του MDP μοντέλου του πραγματικού πολυβάθμιου προβλήματος. Στην ενότητα 3 παρουσιάζεται ο ευρετικός αλγόριθμος για την επίλυση πολυβάθμιων προβλημάτων, με περισσότερες από τρεις βαθμίδες. Στην ενότητα 4 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για περιπτώσεις προβλημάτων με 2, 3, 4 και 5 βαθμίδες, χρησιμοποιώντας τις ακριβείς αριθμητικές και ευρετικές διαδικασίες λύσεων. Τέλος στην ενότητα 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2 Μορφοποίηση προβλήματος και επίλυση του με δυναμικό προγραμματισμό

Θεωρούμε μία μονάδα παραγωγής που μπορεί να παράγει N διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων, μία κάθε φορά. Οι αλλαγές στις βαθμίδες επιτρέπονται μόνο μεταξύ γειτονικών βαθμίδων. Ο χρόνος είναι διαφοροποιημένος σε περιόδους. Σε κάθε χρονική περίοδο η μονάδα παραγωγής παράγει P μονάδες από την βαθμίδα που είχε στηθεί για να παράγει από την αρχή της περιόδου. Ο χρόνος αλλαγής ισούται με μία χρονική περίοδο. Η ποσότητα που παράγεται αποθηκεύεται σε μία κοινή αποθήκη τελικών προϊόντων με πεπερασμένη χωρητικότητα X μονάδων. Για την πλεονάζουσα ποσότητα που δεν χωράει να αποθηκευτεί λόγω χώρου στον

αποθηκευτικό χώρο εγείρεται ένα κόστος υπερχειλίσης CS ανά μονάδα πλεονασματικού προϊόντος. Στον αποθηκευτικό χώρο μπορούμε να αποθηκεύουμε οποιαδήποτε ποσότητα κάθε βαθμίδας προϊόντος, αρκεί οι συνολικές μονάδες να μην υπερβαίνουν την χωρητικότητα X . Μόλις αποθηκεύεται η παραχθείσα ποσότητα στην αποθήκη τελικών προϊόντων, ένα διάνυσμα τυχαίων ζητήσεων $\mathbf{D} \equiv (D_1, \dots, D_N)$, πρέπει να ικανοποιηθούν από την αποθήκη, όπου το \mathbf{D}_n , $n = 1, \dots, N$, η ζήτηση για την βαθμίδα n . Όλες οι ζητήσεις είναι μία διακριτές τυχαίες μεταβλητές με γνωστές στάσιμες πιθανοτικές κατανομές. Για την ποσότητα της ζήτησης κάθε βαθμίδας n , που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από την αποθήκη τελικών προϊόντων, εγείρεται ένα κόστος χαμένων πωλήσεων CL_n ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης. Σε πολλά πραγματικά προβλήματα το P δεν θεωρείται μεταβλητή ελέγχου για τους σκοπούς του χρονικού προγραμματισμού, επειδή συχνές αλλαγές του P μπορεί να προκαλέσουν αστάθεια στην παραγωγική διαδικασία. Το P μπορεί να αλλάζει σποραδικά, για να συμπίπτει με τη μέση ζήτηση σε περίπτωση που η ζήτηση έχει εποχικότητα ή άλλες μακροχρόνιες μεταβλητές. Για τους σκοπούς του μεσοπρόθεσμου χρονικού προγραμματισμού που μας απασχολεί στην παρούσα εργασία, θεωρούμε ότι το P είναι σταθερό και ίσο με την συνολική αναμενόμενη ζήτηση για όλες τις βαθμίδες.

Διατυπώνουμε το δυναμικό πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού της μονάδας παραγωγής ως ένα πρόβλημα MDP διακριτού χρόνου, όπου η κατάσταση του συστήματος στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{y} \equiv (s, x_1, \dots, x_n)$, όπου με s συμβολίζουμε την βαθμίδα για την οποία είναι ρυθμισμένη να παράγει η μονάδα παραγωγής την τρέχουσα περίοδο και με x_n , $n = 1, \dots, N$, το επίπεδο αποθέματος της βαθμίδας n στην αποθήκη τελικών προϊόντων στην αρχή της περιόδου. Σημειώνεται ότι το $s \in \{1, \dots, N\}$ και το σύνολο των επιτρεπόμενων τιμών επιπέδων αποθεμάτων καθορίζεται από όλους τους ακέραιους x_n , $n = 1, \dots, N$, που ικανοποιούν $0 \leq \sum_n x_n \leq X$. Κατά συνέπεια, το μέγεθος του χώρου καταστάσεων είναι

$\frac{1}{2} \cdot N \cdot X^N$. Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου πρέπει να παρθεί η απόφαση u για το αν θα γίνει κάποια αλλαγή σε γειτονική βαθμίδα ή αν θα αφήσουμε την μονάδα παραγωγής ρυθμισμένη ως έχει. Έτσι η τρέχουσα ρύθμιση είναι για την βαθμίδα s , οι επιτρεπτές αλλαγές ορίζονται από το σύνολο $U(s)$, όπου $U(1) = \{1, 2\}$, $U(N) = \{N-1, N\}$, και $U(s) = \{s-1, s, s+1\}$, $s = 2, \dots, N-1$. Εάν η απόφαση είναι να αρχίσουμε μία αλλαγή ρύθμισης, τότε η αλλαγή είναι σε ισχύ στην αρχή της επόμενης περιόδου. Για κάθε απόφαση μας για αλλαγή στην αρχή μιας περιόδου εγείρεται ένα κόστος αλλαγής CC σε εκείνη την περίοδο.

Ας υποθέσουμε ότι στην αρχή της χρονικής περιόδου η κατάσταση του συστήματος είναι η \mathbf{y} , λαμβάνεται η απόφαση u και πραγματοποιείται η ζήτηση \mathbf{D} . Έστω ότι το κόστος που εγείρεται σε αυτήν την περίοδο είναι το $g(\mathbf{y}, u, \mathbf{D})$ και έστω $\mathbf{y}' \equiv (s', x_1', \dots, x_N')$ η κατάσταση στην οποία θα βρίσκεται το σύστημα στην αρχή της επόμενης περιόδου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $s' = u$ και $x_n' = [x_n + p(\mathbf{y}) \cdot I_{n=s} - D_n]^+$, $n = 1, \dots, N$, όπου με $p(\mathbf{y})$ ορίζουμε την ποσότητα που προστέθηκε στην αποθήκη τελικών προϊόντων αφού η μονάδα παραγωγής παρήγαγε P μονάδες και πριν ικανοποιηθεί η ζήτηση και προκύπτει από τον τύπο $p(\mathbf{y}) \equiv \min\{P, X - \sum_n x_n\}$, όπου το I_a είναι η δυαδική συνάρτηση που παίρνει την τιμή 1 εάν το a είναι αληθές και 0 αν δεν αληθεύει και τέλος $[x]^+ \equiv \max\{0, x\}$. Επιπρόσθετα ισχύει ότι $g(\mathbf{y}, u, \mathbf{D}) = CC \cdot I_{u \neq s} + CS \cdot (P - p(\mathbf{y})) + \sum_n CL_n \cdot [D_n - x_n - p(\mathbf{y}) \cdot I_{n=s}]^+$.

Σκοπός μας είναι να βρούμε μία εξαρτώμενη από την κατάσταση πολιτική $u = \mu(\mathbf{y})$, η οποία να ελαχιστοποιεί το μακροχρόνιο (σε βάθος χρόνου) προσδοκώμενο μέσο κόστος J ανά μονάδα χρόνου. Για να βρούμε την επιθυμητή πολιτική, θα πρέπει να λύσουμε την αποκαλούμενη εξίσωση του Bellman, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως $J + V(\mathbf{y}) = \min_{u \in U(s)} T_u(V(\mathbf{y}))$, όπου $V(\mathbf{y})$ να είναι το διαφορικό κόστος που αρχίζει από την κατάσταση \mathbf{y} , και ο τελεστής $T_u(\cdot)$ ορίζεται σαν

$T_u(V(\mathbf{y})) \equiv E_D\{g(\mathbf{y}, u, \mathbf{D}) + V(\mathbf{y}')\}$. Το σύμβολο \min (minimum) στην εξίσωση του Bellman καθορίζει την βέλτιστη πολιτική $\mu^*(\mathbf{y})$, όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση \mathbf{y} .

Λύνουμε την εξίσωση του Bellman με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Δηλώνουμε με $V_k(\mathbf{y})$ την τιμή της διαφορικού κόστους στην επανάληψη k και αρχικές συνθήκες $V_0(\mathbf{y}) = 0 \forall \mathbf{y}$. Οι τιμές της $(k + 1)$ ης επανάληψης, λαμβάνονται από την προηγούμενη επανάληψη μέσω του αναδρομικού τύπου $V_{k+1}(\mathbf{y}) = T(V_k(\mathbf{y})) - T(V_k(\hat{\mathbf{y}}))$, με $T(V_k(\mathbf{y})) = \min_{u \in U(s)} T_u(V_k(\mathbf{y}))$ και $\hat{\mathbf{y}}$ να είναι μία αυθαίρετα επιλεγμένη ειδική κατάσταση. Επίσης το διαφορικό κόστος της ειδικής κατάστασης μηδενίζεται σε κάθε επανάληψη. Υποθέτοντας ότι το επαναληπτικό σχήμα συγκλίνει σε κάποιες τιμές $V(\mathbf{y})$, τότε μέσω του αναδρομικού τύπου αυτές οι τιμές θα πρέπει να επαληθεύουν τον τύπο $T(V(\hat{\mathbf{y}})) + V(\mathbf{y}) = T(V(\mathbf{y}))$. Συγκρίνοντας αυτήν την εξίσωση και την εξίσωση του Bellman διαπιστώνουμε ότι $J = T(V(\hat{\mathbf{y}}))$.

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, σε κάθε επανάληψη υπολογίζουμε τις μέγιστες και τις ελάχιστες διαφορές, $V_k^U = \max_{\mathbf{y}} \{V_k(\mathbf{y}) - V_{k-1}(\mathbf{y})\}$ και $V_k^L = \min_{\mathbf{y}} \{V_k(\mathbf{y}) - V_{k-1}(\mathbf{y})\}$. Η διαδικασία τερματίζεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη $|V_k^U - V_k^L| < \varepsilon \cdot T(V_k(\hat{\mathbf{y}}))$, όπου ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός.

Κεφάλαιο 3 Επίλυση προβλήματος με χρήση ευρετικού αλγορίθμου

Παρόλο που η ακριβής μέθοδος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να καθορίσει επακριβώς την βέλτιστη πολιτική για όσες βαθμίδες επιθυμούμε, αυτό καθίσταται υπολογιστικά αδύνατο για περισσότερες από τρεις βαθμίδες. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε μία ευρετική διαδικασία που προσεγγίζει οποιοδήποτε πολυβάθμιο (με περισσότερες από τρεις βαθμίδες) πρόβλημα, λύνοντας τα τριτοβάθμια υποπροβλήματα που προκύπτουν με την ακριβή αριθμητική μέθοδο και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά τους για να

δημιουργήσουμε μία ευρετική πολιτική για το αρχικό πολυβάθμιο πρόβλημα. Η ευρετική διαδικασία λειτουργεί ως εξής. Έστω S το αρχικό πολυβάθμιο πρόβλημα. Για κάθε βαθμίδα n , $n = 2, \dots, N - 1$, δημιουργούμε το αντίστοιχο τριτοβάθμιο υποπρόβλημα που συμβολίζουμε με S_n , όπου η μεσαία βαθμίδα είναι η n , η προηγούμενη βαθμίδα αποτελεί μία σύνθεση των βαθμίδων που βρίσκονται χαμηλότερα της n , (βαθμίδες $1, \dots, n - 1$), και η επόμενη βαθμίδα αποτελεί μία σύνθεση των βαθμίδων που βρίσκονται υψηλότερα της n , (βαθμίδες $n + 1, \dots, N$). Οπότε τα υποπροβλήματα S_n αποτελούν μία προσέγγιση του αρχικού προβλήματος S . Προσδιορίζουμε την κατάσταση του συστήματος κάθε υποπροβλήματος με το διάνυσμα $\mathbf{y}_n = (s_n, w_n, x_n, z_n)$, με $s_n \in \{1, 2, 3\}$ και τα w_n, z_n να δηλώνουν τα συνολικά επίπεδα της αποθήκης για την χαμηλή και την υψηλή σύνθετη βαθμίδα αντίστοιχα και ισούνται με $w_n \equiv x_1 + \dots + x_{n-1}$ και $z_n \equiv x_{n+1} + \dots + x_N$. Με την ίδια λογική προκύπτουν οι κατανομές των ζητήσεων για κάθε υποπρόβλημα S_n , καθώς η κατανομή ζήτησης της μεσαίας βαθμίδας ταυτίζεται με την κατανομή ζήτησης της βαθμίδας n του αρχικού προβλήματος, η κατανομή ζήτησης της χαμηλότερης βαθμίδας ταυτίζεται με την κατανομή του αθροίσματος των ζητήσεων των βαθμίδων $1, \dots, n - 1$ του αρχικού προβλήματος και η κατανομή ζήτησης της υψηλότερης βαθμίδας ταυτίζεται με την κατανομή του αθροίσματος των ζητήσεων των βαθμίδων $n + 1, \dots, N$ του αρχικού προβλήματος. Χρησιμοποιούμε την ακριβή μέθοδο για να υπολογίσουμε την βέλτιστη πολιτική των υποπροβλημάτων S_n , συμβολίζοντας την με $\mu_n^*(\mathbf{y}_n)$. Στην συνέχεια μορφοποιούμε την ευρετική πολιτική του πολυβάθμιου προβλήματος, που συμβολίζεται με $\mu(\mathbf{y})$, χρησιμοποιώντας τμήματα των βέλτιστων πολιτικών των υποπροβλημάτων, σύμφωνα με τα παρακάτω : $\mu(1, x_1, \dots, x_N) = \mu_2^*(1, \hat{w}_2, x_2, \hat{z}_2)$, $\mu(N, x_1, \dots, x_N) = \mu_{N-1}^*(3, \hat{w}_{N-1}, x_{N-1}, \hat{z}_{N-1})$, και $\mu(n, x_1, \dots, x_N) = \mu_n^*(2, \hat{w}_n, x_n, \hat{z}_n)$, $n = 2, \dots, N - 1$, όπου τα \hat{w}_n και \hat{z}_n συμβολίζουν τα συνολικά επίπεδα που βρίσκονται στην αποθήκη την χαμηλής και υψηλής σύνθετης βαθμίδας, αντίστοιχα και αντιπροσωπεύουν με κάποιο σύνθετο τρόπο τις δικές τους

συνιστώσες, οι οποίες δίνονται από τα $\bar{w}_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$ και $\bar{z}_n = h(x_{n+1}, \dots, x_n)$, για μία κατάλληλη συνάρτηση h , η οποία θα προσδιοριστεί στη συνέχεια.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\bar{w}_2 = x_1$ και $\bar{z}_{N-1} = x_N$, αφού για αυτές τις περιπτώσεις η σύνθετη βαθμίδα αντιπροσωπεύει μία μοναδική βαθμίδα του αρχικού προβλήματος. Εξετάζουμε το \bar{w}_n , $n > 2$, καθώς το \bar{z}_n προκύπτει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Η προφανής επιλογή για να καθορίσουμε το συνολικό επίπεδο στην αποθήκη της σύνθετης βαθμίδας, που αποτελείται από τις βαθμίδες $1, \dots, n - 1$, είναι να αθροίσουμε τα επίπεδα στην αποθήκη κάθε βαθμίδας, δηλαδή $\bar{w}_n = w_n$. Το παραπάνω είναι λογικό όσον αφορά τον υπολογισμό πιθανού κόστους υπερχειλίσης (CS), αλλά μπορεί να υποεκτιμηθεί η πιθανότητα των χαμένων πωλήσεων (LS), ειδικά όταν μία ή περισσότερες συνιστώσες της σύνθετης βαθμίδας βρίσκονται πολύ χαμηλά σε σχέση με τις υπόλοιπες. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι το εργοστάσιο έχει στηθεί για να παράγει την βαθμίδα 4 και ότι τα επίπεδα στη αποθήκη των βαθμίδων 1-4 είναι $x_1 = x_2 = 15$, $x_3 = 0$ και $x_4 = 6$. Για το υπο-πρόβλημα S_4 , το επίπεδο του αποθέματος του ενδιάμεσου προϊόντος θα είναι $x_4 = 6$, και το συνολικό απόθεμα του ισοδύναμου προϊόντος που προηγείται του προϊόντος 4 θα ισούται με $w_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 30$. Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική του υπο-προβλήματος S_4 πιθανόν να μην επιτρέψει αλλαγή στο προηγούμενο ισοδύναμο προϊόν εξαιτίας του ότι το επίπεδο του αποθέματος του ενδιάμεσου προϊόντος 4 ισούται με 6 μονάδες και είναι μικρότερο από το συνολικό επίπεδο αποθέματος του ισοδύναμου προϊόντος που προηγείται αυτού (30 μονάδες). Ο ευρετικός αλγόριθμος αποτυγχάνει στη συγκεκριμένη περίπτωση να δει ότι παρόλο που το άθροισμα των αποθεμάτων των προϊόντων που αποτελούν το ισοδύναμο προϊόν είναι σχετικά υψηλό ένα από τα προϊόντα που το αποτελούν, το x_3 , είναι ίσο με μηδέν, και εκτός αν η παραγωγή αλλάξει στο προϊόν 3, ένα υψηλό κόστος διατήρησης αποθέματος επέρχεται στην τρέχουσα και στην επόμενη χρονική περίοδο. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την κατάσταση ψάχνουμε ένα συνολικό επίπεδο

αποθέματος \hat{w}_n , για το ισοδύναμο προϊόν το οποίο αποτελείται από τα προϊόντα $1, \dots, n-1$ και το οποίο θα επιφέρει την ίδια τιμή στο προσδοκώμενο κόστος χαμένων πωλήσεων με εκείνη που θα υπολογιστεί αθροίζοντας τα προσδοκώμενα κόστη χαμένων πωλήσεων των επιμέρους προϊόντων του ισοδύναμου προϊόντος. Το άθροισμα των κοστών των χαμένων πωλήσεων των επιμέρους προϊόντων δίνεται από τη σχέση $LS = E[D_1 - x_1]^+ + \dots + E[D_{n-1} - x_{n-1}]^+$. Το προσδοκώμενο κόστος χαμένων πωλήσεων του ισοδύναμου προϊόντος για το δεδομένο επίπεδο αποθέματος w είναι ίσο με $E[(D_1 + \dots + D_{n-1}) - w]^+$. Επομένως \hat{w}_n είναι η τιμή του w που κάνει τις παραπάνω εκφράσεις του LS να πάρουν όσο το δυνατό πιο κοντινή τιμή.

Για να υπολογιστεί η παραπάνω σχέση θα πρέπει να βρεθεί η κατανομή της ζήτησης του ισοδύναμου προϊόντος μέσω της αθροιστικής κατανομής των ζητήσεων των επιμέρους προϊόντων. Στη περίπτωση αυτή εξαιτίας της υψηλής υπολογιστικής πολυπλοκότητας είναι προτιμότερη η εξής εναλλακτική προσέγγιση.

Προσεγγίζουμε το άθροισμα των προσδοκώμενων χαμένων πωλήσεων για τα επιμέρους προϊόντα μέσω της σχέσης $LS = [E(D_1) - x_1]^+ + \dots + [E(D_{n-1}) - x_{n-1}]^+$. Εάν όλα τα επίπεδα αποθεμάτων x_i είναι αρκετά υψηλά έτσι ώστε $LS = 0$, θέτουμε $\hat{w}_n = w_n$. Εναλλακτικά, ορίζουμε $\hat{e}_n = [E(D_1) + \dots + E(D_{n-1})] - LS$, και θέτουμε \hat{w}_n να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των \hat{e}_n και w_n , για παράδειγμα., $\hat{w}_n = \alpha \hat{e}_n + (1 - \alpha)w_n$, το οποίο στρογγυλοποιείται στο κοντινότερο ακέραιο, για $0 \leq \alpha \leq 1$.

Κεφάλαιο 4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα προβλημάτων 2, 3, 4 και 5 προϊόντων χρησιμοποιώντας για την επίλυσή τους τον ακριβή και τον ευρετικό αλγόριθμο, που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες.

4.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 2 προϊόντων

Αρχικά επιλύσαμε ένα πρόβλημα 2 προϊόντων ($N=2$), θεωρώντας σταθερά τα $P=5$, $X=70$, $e=0.005$, $CS=2$, $CL=2$ και $CC=1$ και μεταβάλλοντας τις κατανομές των ζητήσεων των δύο προϊόντων. Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι ίδιο και για τα δύο προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL$). Οι διάφορες κατανομές των ζητήσεων για τα δύο προϊόντα, φαίνονται στους Πίνακες 1-4.

Ο Πίνακας 5 δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που απαιτούνται μέχρι να συγκλίνει ο επαναληπτικός αλγόριθμος της ακριβούς λύσης, k_c , για κριτήριο σύγκλισης $e=0.005$, και το βέλτιστο μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J , για όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Δεν προέκυψαν αποτελέσματα για την Περίπτωση 2 (Ντετερμινιστική ζήτηση), καθώς ο αλγόριθμος δεν κατάφερε να συγκλίνει, οπότε δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Από τον Πίνακα 5 βλέπουμε πόσο ευαίσθητο είναι το πρόβλημα ως προς κάθε μία από τις διαφορετικές κατανομές των ζητήσεων για τα δύο προϊόντα.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η βέλτιστη πολιτική χωρίζει τον αποθεματικό χώρο σε διάφορες περιοχές, όπου η κάθε μία χαρακτηρίζεται και από μία διαφορετική πολιτική αλλαγής ή μη της ρύθμισης της μονάδας παραγωγής. Για διευκόλυνση, θεωρούμε την θαλασσί περιοχή a, την κεραμιδί περιοχή b την πράσινη c και την πορτοκαλί d. Συμβολίζοντας με $\mu^*(s, R)$ την βέλτιστη πολιτική όταν η μηχανή είναι ρυθμισμένη να παράγει το προϊόν s και τα επίπεδα αποθέματος ανήκουν στην περιοχή R, τότε $\mu^*(1, a) = \mu^*(2, a) = 1$, $\mu^*(1, b) = \mu^*(2, b) = 2$, $\mu^*(1, c) = 1$, $\mu^*(2, c) = 2$, $\mu^*(1, d) = 2$, $\mu^*(2, d) = 1$. Έτσι, η βέλτιστη πολιτική διαμορφώνεται ως εξής, ανάλογα με την κατάσταση του συστήματος : Όταν τα επίπεδα αποθέματος είναι μέσα στην περιοχή a, γίνεται αλλαγή ρύθμισης για να παραχθεί το προϊόν 1, όταν είναι στην περιοχή b, γίνεται αλλαγή για να παραχθεί το προϊόν 2, όταν είναι στην περιοχή c, δεν πραγματοποιείται καμία αλλαγή ρύθμισης, ενώ όταν είναι στην περιοχή d, γίνεται αλλαγή ρύθμισης από το τρέχον προϊόν – όποιο και αν είναι αυτό - στο άλλο προϊόν. Μια τυπική εξέλιξη της ρύθμισης της μονάδας παραγωγής όταν τα επίπεδα αποθέματος είναι μέσα και γύρω από την Περιοχή d, είναι να αλλάζει κάθε χρονική περίοδο η μονάδα από το ένα προϊόν στο άλλο. Όταν τα επίπεδα αποθέματος είναι στην περιοχή c, παράγεται το προϊόν 1 για αρκετές διαδοχικές περιόδους μέχρι όταν τα επίπεδα αποθεμάτων περάσουν το όριο μεταξύ των περιοχών c και b και έπειτα γίνεται αλλαγή ρύθμισης για να παράγεται το προϊόν 2 μέχρι τα επίπεδα αποθεμάτων του συγκεκριμένου προϊόντος να περάσουν το όριο μεταξύ των περιοχών c και a.

Τα διαγράμματα 1 και 2 μας δείχνουν την βέλτιστη πολιτική μετάβασης ως μία συνάρτηση των αποθεμάτων x_1 και x_2 , για τις περιπτώσεις 1-4 του Πίνακα 5.

Στη συνέχεια επιλύσαμε ένα πρόβλημα 2 προϊόντων ($N=2$), θεωρώντας $P=5$, $X=50$, $e=0.001$, $CS=1$, $CL=1$ και $CC=1$, για τις προαναφερθείσες κατανομές ζήτησεων των δύο προϊόντων, οι οποίες φαίνονται στους Πίνακες 1-4. Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι ίδιο και για τα δύο προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL$).

Ο Πίνακας 6 δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση, k_c , με κριτήριο σύγκλισης $e=0.001$, και το βέλτιστο μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J , για όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Πάλι δεν προέκυψαν αποτελέσματα για την Περίπτωση της Ντετερμινιστική ζήτησης (Περίπτωση 6), καθώς ο αλγόριθμος δεν κατάφερε να συγκλίνει, οπότε δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Από τον Πίνακα 6 βλέπουμε πόσο ευαίσθητο είναι το πρόβλημα ως προς κάθε μία από τις διαφορετικές κατανομές των ζήτησεων για τα δύο προϊόντα.

Τα διαγράμματα 3 και 4 δείχνουν την βέλτιστη πολιτική μετάβασης ως συνάρτηση των αποθεμάτων x_1 και x_2 , για τις περιπτώσεις 5-8 του Πίνακα 6.

Στη συνέχεια, επιλύσαμε διάφορες παραλλαγές της περίπτωσης 5 για το πρόβλημα 2 προϊόντων, μεταβάλλοντας είτε τις παραμέτρους κόστους, CS , CL , και CC , είτε την χωρητικότητα του χώρου αποθήκευσης των προϊόντων, X , και κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους, αφού μεταβάλαμε μία παράμετρο κατά περίπτωση. Για τις περιπτώσεις $CC=2$, $CC=10$, $CS=2$, $CS=10$, $CL=2$, $CL=10$, μεταβάλλαμε ένα από τα CC , CS και CL κάθε φορά, αρχικά διπλασιάζοντάς το και στη συνέχεια δεκαπλασιάζοντάς το. Στην περίπτωση $X=100$ μεταβάλαμε την χωρητικότητα του χώρου αποθήκευσης των προϊόντων X , από 50 σε 100. Για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις θεωρούμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι ίδιο και για τα δύο προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL$). Ο Πίνακας 7 δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση, k_c , με κριτήριο σύγκλισης $e=0.001$,

και το βέλτιστο μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J , για όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις.

Από τον πίνακα 7 βλέπουμε πόσο ευαίσθητη είναι η περίπτωση 5 ως προς κάθε μία από τις παραμέτρους της, καθώς εμείς μεταβάλλουμε τις τιμές τους.

Τα διαγράμματα 5, 6, 7 και 8 μας δείχνουν την βέλτιστη πολιτική μετάβασης ως μία συνάρτηση των αποθεμάτων x_1 και x_2 , για τις περιπτώσεις 9-15, του Πίνακα 7.

Συνεχίζοντας την μελέτη περιπτώσεων που αφορούν το πρόβλημα των δύο προϊόντων, επιλύσαμε περιπτώσεις προβλημάτων για διαφορετικές τιμές της χωρητικότητας του χώρου αποθήκευσης των προϊόντων X ($X=40,60,80,100$) και για διάφορους συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων κόστους CS , CL , και CC (1,2,5,10). Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι ίδιο και για τα δύο προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL$). Όλες οι περιπτώσεις επιλύθηκαν για σταθερά $P=5$, $e=0.001$ και για σταθερές κατανομές ζήτησεων για τα δύο προϊόντα, οι οποίες φαίνονται στον Πίνακα 8.

Στον Πίνακα 9 φαίνεται ο αριθμός των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση, k_c και το βέλτιστο μακροχρόνιο μέσο κόστος, J , για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Από τα αποτελέσματα μπορούμε να διαπιστώσουμε όσο αυξάνεται το X , αυξάνεται και το k_c , ενώ το J μειώνεται, κάτι το αναμενόμενο. Επιπρόσθετα όσο αυξάνονται οι παράμετροι κόστους αυξάνεται και το βέλτιστο μακροχρόνιο μέσο κόστος, J .

Τα διαγράμματα 9-13 μας δείχνουν την βέλτιστη πολιτική μετάβασης ως μία συνάρτηση των αποθεμάτων x_1 και x_2 , για τις περιπτώσεις 16-25 και για $X=40$.

Σημειώνεται ότι η περιοχή c είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση 18 σε σύγκριση με την περίπτωση 16, υποδεικνύοντας ότι στην περίπτωση 18 το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής ορίζει να παράγονται μεγαλύτερες παρτίδες των δύο προϊόντων με λιγότερο συχνές αλλαγές, επειδή το

κόστος αλλαγής στην περίπτωση 18 είναι διπλάσιο από εκείνο της περίπτωσης 16. Η διόγκωση της περιοχής c στην περίπτωση 18 είναι εις βάρος του μεγέθους της περιοχής d , η οποία περιορίζεται. Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι ο χώρος αποθήκευσης είναι πάνω-κάτω συμμετρικός για τα δύο προϊόντα με λίγο μεγαλύτερου μεγέθους περιοχή εκείνη του προϊόντος 1, επειδή το προϊόν 1 έχει υψηλότερη ζήτηση απ' ό,τι το προϊόν 2.

4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 3 προϊόντων

Στη συνέχεια επιλύσαμε μία περίπτωση του προβλήματος τριών προϊόντων ($N=3$) χρησιμοποιώντας τον ακριβή αλγόριθμο επίλυσης, όπου θεωρήσαμε ότι η παραγωγή μπορεί να μεταβαίνει σε γειτονικές βαθμίδες προϊόντων (προηγούμενες ή επόμενες). Επίσης θεωρήσαμε $e=000.8$, $X=115$, $P=6$, $CS=2$, $CL=2$ και $CC=1$, για τις κατανομές των ζητήσεων των τριών προϊόντων, οι οποίες φαίνονται στον Πίνακα 10, που ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι το ίδιο και για τα τρία προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL_3 = CL$).

Στον Πίνακα 11 φαίνεται ο αριθμός των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση k_c και το βέλτιστο μακροχρόνιο μέσο κόστος, J , για την περίπτωση 26.

Τα διαγράμματα 14-18 μας δείχνουν την βέλτιστη πολιτική μετάβασης ως μία συνάρτηση των αποθεμάτων x_1 και x_3 , για την περίπτωση 26 και για $X=40$.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η βέλτιστη πολιτική παίρνει διάφορες τιμές χωρίζοντας τον αποθεματικό χώρο σε διάφορες περιοχές, όπου η κάθε μία χαρακτηρίζεται και από μία διαφορετική πολιτική μετάβασης. Για διευκόλυνση θεωρήσαμε τις περιοχές που προκύπτουν από $a-1$ και τις αντιστοιχήσαμε με τις βέλτιστες πολιτικές μετάβασης, όπως φαίνονται στον πίνακα 12 που ακολουθεί.

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 4 προϊόντων

Στη συνέχεια επιλύσαμε δύο περιπτώσεις του προβλήματος τεσσάρων προϊόντων ($N=4$) χρησιμοποιώντας τον ακριβή αλγόριθμο επίλυσης. Στην περίπτωση 27 θεωρήσαμε ότι η παραγωγή μπορεί να μεταβαίνει μόνο σε γειτονικές βαθμίδες προϊόντων (προηγούμενες ή επόμενες), ενώ στην περίπτωση 28 ότι μπορεί να μεταβαίνει σε οποιαδήποτε βαθμίδα προϊόντος. Επιλύσαμε τις δύο περιπτώσεις για τις κατανομές των ζητήσεων που φαίνονται στον Πίνακα 13 και θεωρήσαμε τις υπόλοιπες μεταβλητές $e=0.001$, $X=30$, $P=6$, $CS=1$, $CL=1$ και $CC=1$. Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι το ίδιο και για τα τέσσερα προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL_3 = CL_4 = CL$).

Στον Πίνακα 14 φαίνεται ο αριθμός των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση, k_c και το βέλτιστο μακροχρόνιο μέσο κόστος, J , για τις περιπτώσεις 27 και 28.

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι στην περίπτωση 28, ο αλγόριθμος συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα καθώς και ότι το μακροχρόνιο μέσο κόστος, J , μειώνεται σημαντικά, εξαιτίας της δυνατότητας του μηχανήματος να αλλάζει την παραγωγή σε οποιοδήποτε προϊόν.



4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των 5 προϊόντων

Τέλος επιλύσαμε τέσσερις περιπτώσεις ενός προβλήματος πέντε προϊόντων ($N=5$) χρησιμοποιώντας τον ευρετικό αλγόριθμο επίλυσης. Για την εφαρμογή του ευρετικού αλγορίθμου χρησιμοποιήσαμε την γρηγορότερη εναλλακτική μέθοδο η οποία προσεγγίζει το άθροισμα των προσδοκώμενων χαμένων πωλήσεων κάθε ανεξάρτητου προϊόντος, η οποία περιγράφεται στο τέλος της ενότητας 3, για τιμές $0 \leq \alpha \leq 0.6$ με βήμα 0.1. Επιλύσαμε τις περιπτώσεις 29-32 για τις κατανομές των ζητήσεων που φαίνονται στον Πίνακα 15 και θεωρήσαμε τις υπόλοιπες μεταβλητές

$e=000.1$, $X=20$, $P=6$, $CS=1$, $CL=1$ και $CC=1$. Υποθέτουμε ότι το κόστος χαμένων πωλήσεων είναι το ίδιο και για τα τέσσερα προϊόντα ($CL_1 = CL_2 = CL_3 = CL_4 = CL_5 = CL$).

Τα αποτελέσματα των περιπτώσεων 29-32 φαίνονται στον πίνακα 16, ο οποίος δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση, k_c , το βέλτιστο μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J , και τον συνολικό υπολογιστικό χρόνο, CPU, ο οποίος απαιτείται για την επίλυση των υποπροβλημάτων με 3 προϊόντα και όχι ο χρόνος που απαιτείται για την αποτίμηση της ευρετικής πολιτικής, για κάθε τιμή του a , για τις περιπτώσεις 29-32.

Από τα αποτελέσματα των παραπάνω περιπτώσεων 29-32, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση, k_c και το μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J εξαρτώνται από την μορφή της κατανομής ζήτησης. Είναι η μορφή της κατανομής της ζήτησης των βαθμίδων, που καθορίζει τις αλλαγές μεταξύ των βαθμίδων που πρέπει να παραχθούν μέχρι να ικανοποιηθεί η ζήτηση. Έτσι αν βαθμίδες με την μεγαλύτερη ζήτηση εμφανίζονται στα άκρα της κατανομής απαιτούνται αλλαγές διαμέσου των άλλων βαθμίδων εγείροντας έτσι μεγαλύτερα κόστη αλλαγών, όπως στις περιπτώσεις 30 και 31. Αντίθετα στις περιπτώσεις 29 και 32 η βαθμίδα με την μεγαλύτερη ζήτηση βρίσκεται στο κέντρο της κατανομής δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα.

4.5 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε μία νέα εκδοχή του SELSP προβλήματος στην οποία το μοντελοποιήσαμε ως μια *Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων* (Markov Decision Process). Για προβλήματα δύο τριών και τεσσάρων βαθμίδων λύσαμε αριθμητικά το απορρέον πρόβλημα MDP, χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις και αποκτήσαμε ενόραση για την επιρροή των παραμέτρων του

προβλήματος και για την δομή της βέλτιστη πολιτικής αλλαγών, η οποία χωρίζει τον αποθεματικό χώρο σε διάφορες περιοχές, όπου η κάθε μία χαρακτηρίζεται και από μία διαφορετική πολιτική αλλαγής ή μη της ρύθμισης της μονάδας παραγωγής.

Για τα πολυβάθμια προβλήματα με N βαθμίδες όπου $N > 4$, διασπάσαμε το αρχικό πρόβλημα σε $(N-2)$ τριτοβάθμια υποπροβλήματα και τα λύσαμε χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Στη συνέχεια αναπτύξαμε έναν ευρετικό αλγόριθμο που λύνει το συνολικό πρόβλημα. Χρησιμοποιήσαμε τον ευρετικό αλγόριθμο επίλυσης σε προβλήματα πέντε βαθμίδων ($N=5$). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο αριθμός των επαναλήψεων των διαδοχικών προσεγγίσεων που γίνονται μέχρι να γίνει η σύγκλιση, k_c και το μακροχρόνιο αναμενόμενο μέσο κόστος, J εξαρτώνται από την μορφή της κατανομής της ζήτησης.

Είναι εύκολο για τον ευρετικό αλγόριθμο να επιλύσει προβλήματα με περισσότερες από πέντε βαθμίδες, όμως είναι αδύνατο να συγκρίνουμε την απόδοσή της πολιτικής αλλαγής που αποδίδει σε σχέση με την πολιτική αλλαγής του ακριβούς αλγόριθμου επίλυσης επειδή καθίσταται αδύνατο να ξεκινήσουμε την επαναληπτική μέθοδο για να βρούμε την πολιτική του ακριβούς αλγόριθμου, καθώς ο αποθεματικός χώρος αυξάνεται δραματικά και δεν υπάρχει αρκετή διαθέσιμη μνήμη στον υπολογιστή για να τον αποθηκεύσει.

Υπάρχουν πολλές πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα σε συνέχεια της παρούσας εργασίας, όπως περαιτέρω αριθμητική διερεύνηση, ανάπτυξη ευρετικών αλγορίθμων για γρήγορη επίλυση, κτλ.

Βιβλιογραφία

[1]Elmaghraby, S.E. 1978. The economic lot scheduling problem (ELSP): Review and extensions. Management Science 24 (6) 587-598.

- [2]Graves, S.C. 1980. The multi-product production cycling problem. *AIIE Transactions* 12 (3) 233-240.
- [3]Karmarkar, U.S., J. Yoo. 1994. The stochastic dynamic product cycling problem. *European Journal of Operational Research* 73 360-373.
- [4] G. Liberopoulos, Kozanidis, G., O. Hatzikonstantinou. 2009. Production scheduling of a multi-grade PET resin production plant. *Computers and Chemical Engineering* (in press).
- [5]Leachman, R.C., A. Gascon. 1988. A heuristic scheduling policy for multi-item, single-machine production systems with time-varying, stochastic demands. *Management Science* 34 (3) 377-390.
- [6]Salomon, M. 1991. Deterministic lotsizing models for production planning. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [7]Sox, C.R., P.L. Jackson, A. Bowman, J.A. Muckstadt. 1999. A review of the stochastic lot scheduling problem. *International Journal of Production Economics* 62 (3) 181-200.
- [8]Sox, C.R., J.A. Muckstadt. 1997. Optimization-based planning for the stochastic lot-sizing problem. *IIE Transactions* 29 (5) 349-357.
- [9]Qiu, J., R. Loulou. 1995. Multiproduct production/inventory control under random demands. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (2) 350-356.
- [10]Winands, E.M.M., I.J.B.F. Adan, G.J. van Houtum. 2005. The stochastic economic lot scheduling problem: A survey. Working paper. Beta Research School for Operations Management and Logistics, Technical University of Eindhoven.

Παράρτημα Α Πίνακες

	Pr(D _n =i)							
n \ i	0	1	2	3	4	5	6	E(D _n)
1	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143	0.143	3
2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0	0	2

Πίνακας 1 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 1

	Pr(D _n =i)							
n \ i	0	1	2	3	4	5	6	E(D _n)
1	0	0	0	1	0	0	0	3
2	0	0	1	0	0	0	0	2

Πίνακας 2 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 2

	Pr(D _n =i)							
n \ i	0	1	2	3	4	5	6	E(D _n)
1	0.1	0.133333	0.166667	0.2	0.166667	0.133333	0.1	3
2	0.1	0.225	0.35	0.225	0.1	0	0	2

Πίνακας 3 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 3

	$Pr(D_n=i)$							
$n \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	$E(D_n)$
1	0.175	0.15	0.125	0.1	0.125	0.15	0.175	3
2	0.266667	0.183333	0.1	0.183333	0.266667	0	0	2

Πίνακας 4 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για την περίπτωση 4

Περίπτωση	Κατανομή	k_c	J
1	Ισοπίθανη	506	0.3086
2	Ντετερμινιστική ζήτηση	-	-
3	Άνω τριγωνική	652	0.2523
4	Κάτω τριγωνική	438	0.3471

Πίνακας 5 : Αποτελέσματα προβλήματος για δύο προϊόντα για τις περιπτώσεις 1-4

Περίπτωση	Κατανομή	k_c	J
5	Ισοπίθανη	283	0.2818
6	Ντετερμινιστική ζήτηση	-	-
7	Άνω Τριγωνική	350	0.2378
8	Κάτω Τριγωνική	250	0.3116

Πίνακας 6 : Αποτελέσματα προβλήματος για δύο προϊόντα για τις περιπτώσεις 5-8

Περίπτωση		k_c	J
9	CC=2	235	0.3795
10	CC=10	419	0.9588
11	CS=2	296	0.366
12	CS=10	452	0.9749
13	CL=2	360	0.3664
14	CL=10	474	0.9759
15	X=100	1276	0.1328

Πίνακας 7 : Αποτελέσματα προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 9-15

	Pr($D_n=i$)							
$n \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	E(D_n)
1	0.1	0.15	0.15	0.2	0.15	0.15	0.1	3
2	0.15	0.15	0.4	0.15	0.15	0	0	2

Πίνακας 8 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 16-25

Περίπτωση	Παράμετροι Κόστους			X = 40		X = 60		X = 80		X = 100	
	CC	CS	CL	k _c	J	k _c	J	k _c	J	k _c	J
16	1	5	5	186	0.9824	474	0.618	895	0.4503	1447	0.354
17	1	10	10	188	1.7454	472	1.0965	891	0.7985	1444	0.6277
18	2	5	5	179	1.1640	448	0.7342	844	0.5354	1367	0.421
19	5	10	1	181	1.6842	437	1.0682	806	0.7806	1286	0.6146
20	5	1	10	211	1.6933	515	1.074	956	0.7848	1538	0.6178
21	2	10	10	186	1.9648	474	1.2361	895	0.9006	1447	0.7079
22	10	1	1	340	1.1409	369	0.7536	408	0.5587	588	0.4445
23	10	5	10	168	2.7141	411	1.7277	761	1.2644	533	0.9962
24	1	10	5	225	1.3610	555	0.855	1032	0.6228	1659	0.4896
25	1	5	10	253	1.3679	632	0.8593	1184	0.626	1908	0.4921

Πίνακας 9 : Αποτελέσματα προβλήματος με 2 προϊόντα για τις περιπτώσεις 16-25

n \ i	Pr(D _n =i)											E(D _n)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.167	0.143	0.321	0.154	0.102	0.06	0.025	0.011	0.014	0.003	0	2.321
2	0.5	0.166	0.107	0.082	0.06	0.03	0.022	0.014	0.003	0.011	0.005	1.419
3	0.154	0.265	0.295	0.072	0.066	0.052	0.044	0.014	0.027	0.003	0.008	2.28

Πίνακας 10 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 3 προϊόντα για την περίπτωση 26

Περίπτωση		k _c	J
26	Αλλαγή σε γειτονικό προϊόν	533	0.4522

Πίνακας 11 : Αποτελέσματα προβλήματος με 3 προϊόντα για τις περιπτώσεις 26 και 27

Περιοχή	Πολιτική μετάβασης, όταν παράγω το προϊόν 1	Πολιτική μετάβασης, όταν παράγω το προϊόν 2	Πολιτική μετάβασης, όταν παράγω το προϊόν 3
a	1	1	2
b	1	1	3
c	1	2	2
d	1	2	3
e	1	3	2
f	1	3	3
g	2	1	2
h	2	1	3
i	2	2	2
j	2	2	3
k	2	3	2
l	2	3	3

Πίνακας 12 : Αντιστοιχία περιοχών και πολιτικών μεταβάσεως για τα διαγράμματα 14-18

	Pr(D _n =i)				
<i>n \ i</i>	0	1	2	3	E(D _n)
1	0.05	0.2	0.45	0.3	2
2	0.25	0.5	0.25	0	1
3	0.05	0.2	0.45	0.3	2
4	0.25	0.5	0.25	0	1

Πίνακας 13 : Κατανομές ζητήσεων προβλήματος με 4 προϊόντα για τις περιπτώσεις 27 και 28

Περίπτωση		<i>k_c</i>	J
27	Αλλαγή σε γειτονικό προϊόν	187	1.1835
28	Αλλαγή σε οποιοδήποτε προϊόν	72	0.8368

Πίνακας 14 : Αποτελέσματα προβλήματος με 4 προϊόντα για τις περιπτώσεις 27 και 28

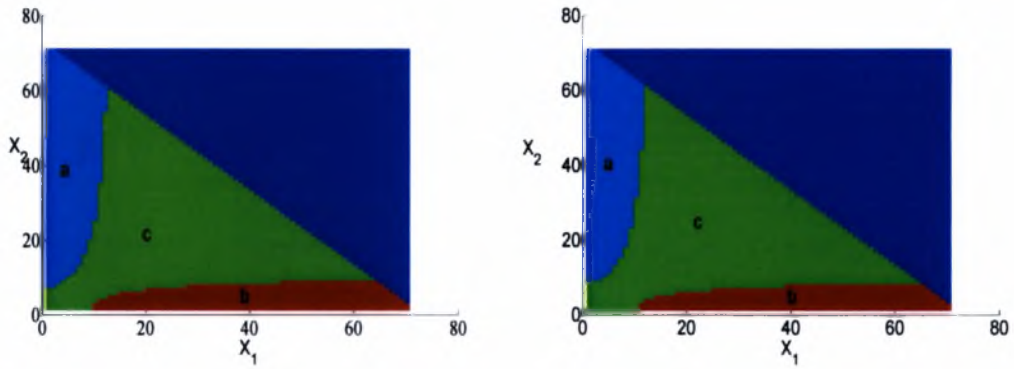
Περίπτωση	Pr(D _n =i)					E(D _n)
	n \ i	0	1	2	3	
29	n \ i	0	1	2	3	E(D _n)
	1	0.25	0.5	0.25	0	1
	2	0.25	0.5	0.25	0	1
	3	0.05	0.2	0.45	0.3	2
	4	0.25	0.5	0.25	0	1
	5	0.25	0.5	0.25	0	1
30	n \ i	0	1	2	3	E(D _n)
	1	0.25	0.25	0.25	0.25	1.5
	2	0.25	0.25	0.5	0	1.25
	3	0.65	0.25	0.05	0.05	0.5
	4	0.25	0.25	0.5	0	1.25
	5	0.25	0.25	0.25	0.25	1.5
31	n \ i	0	1	2	3	E(D _n)
	1	0.25	0.25	0.25	0.25	1.5
	2	0.4	0.5	0.05	0.05	0.75
	3	0.25	0.25	0.25	0.25	1.5
	4	0.4	0.5	0.05	0.05	0.75
	5	0.25	0.25	0.25	0.25	1.5
32	n \ i	0	1	2	3	E(D _n)
	1	0.4	0.5	0.05	0.05	0.75
	2	0.25	0.25	0.5	0	1.25
	3	0.05	0.2	0.45	0.3	2
	4	0.25	0.25	0.5	0	1.25
	5	0.4	0.5	0.05	0.05	0.75

Πίνακας 15 : Κατανομές ζήτησεων προβλήματος με 5 προϊόντα για τις περιπτώσεις 29-32

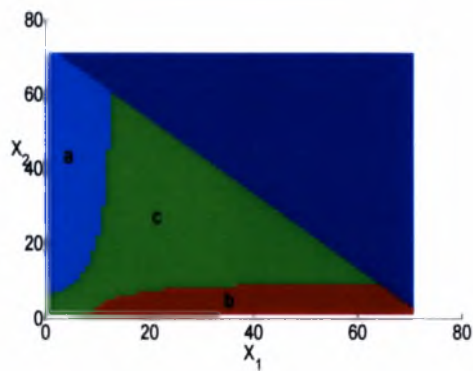
Περίπτωση	a	J	k_c	CPU
29	0	3.4153857	67	50.75
	0.1	3.4516035	69	50.94
	0.2	3.8164454	136	116.09
	0.3	4.8394511	179	162.19
	0.4	5.1561999	167	134.28
	0.5	5.2195097	219	171.62
	0.6	5.2941609	260	243.38
30	0	4.9167862	98	87.88
	0.1	5.2442886	106	80.16
	0.2	5.5567039	115	84.26
	0.3	5.9335925	124	87.15
	0.4	6.2444406	128	92.03
	0.5	6.658457	135	110.48
	0.6	7.341638	134	104.57
31	0	4.2953	66	60.62
	0.1	4.4701	80	73.98
	0.2	4.8902	130	120.28
	0.3	5.8271	167	154.81
	0.4	6.3572	157	145.48
	0.5	6.7479	146	135.39
	0.6	7.0100	169	156.17
32	0	3.100079	44	27.60
	0.1	3.0348085	50	31.44
	0.2	3.0809072	67	42.13
	0.3	3.1511415	89	55.88
	0.4	3.2079092	95	59.68
	0.5	3.328586	93	58.59
	0.6	3.660216	126	79.50

Πίνακας 16: Αποτελέσματα προβλήματος με 5 προϊόντα για τις περιπτώσεις 29-32

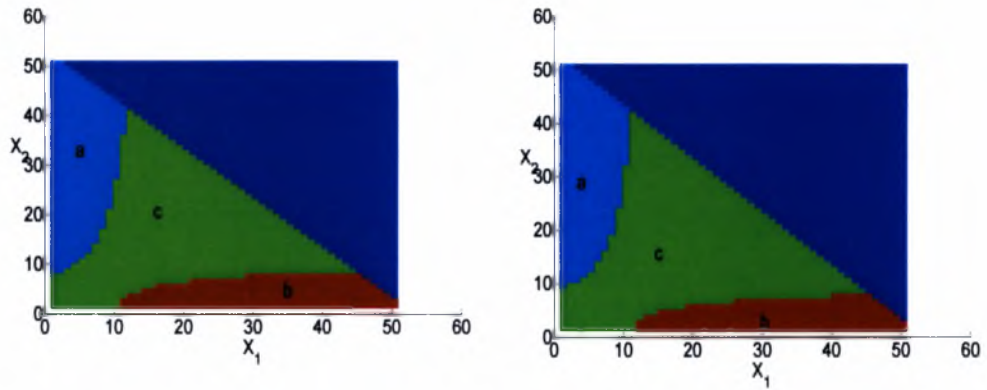
Παράρτημα Β Διαγράμματα



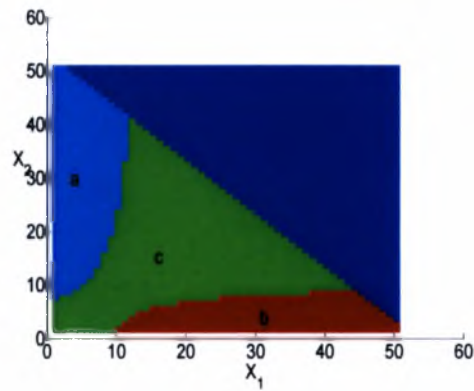
Διάγραμμα 1 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 1 (αριστερά) και 3 (δεξιά), του Πίνακα 5



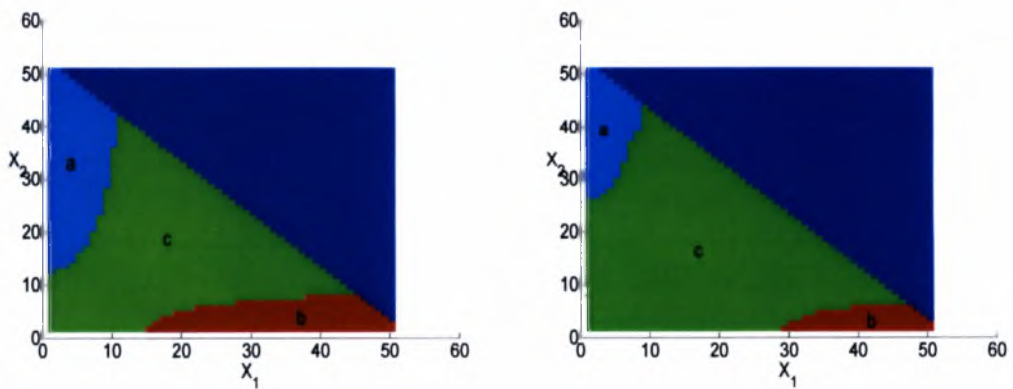
Διάγραμμα 2 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 4, του Πίνακα 5



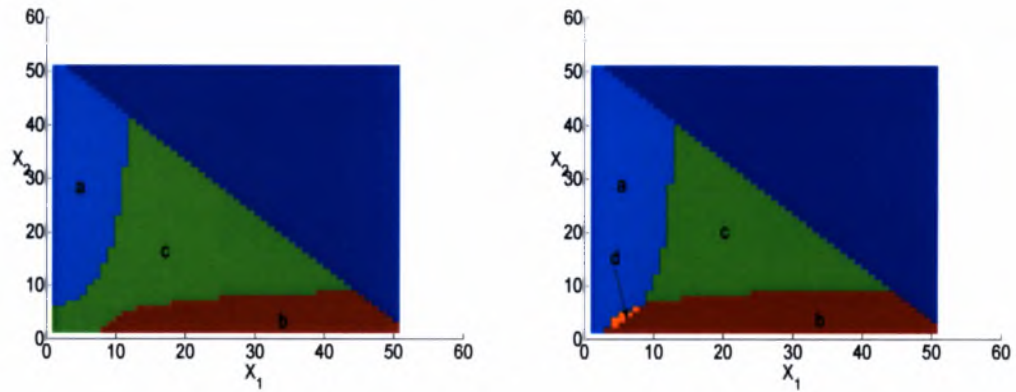
Διάγραμμα 3 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 5 (αριστερά) και 7 (δεξιά), του Πίνακα 6



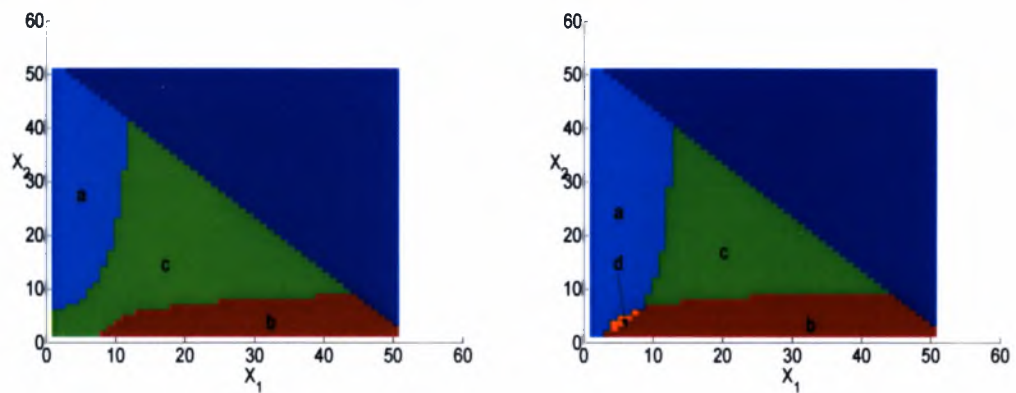
Διάγραμμα 4 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 8, του Πίνακα 6



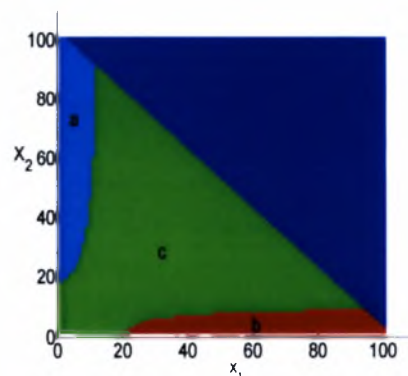
Διάγραμμα 5 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 9 με $CC=2$ (αριστερά) και για την περίπτωση 10 με $CC=10$ (δεξιά), του Πίνακα 7



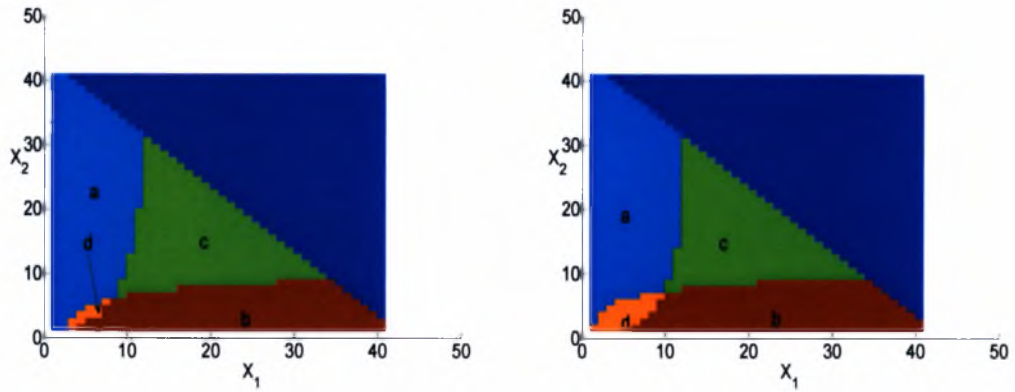
Διάγραμμα 6 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 11 με CS=2 (αριστερά) και για την περίπτωση 12 με CS=10 (δεξιά), του Πίνακα 7



Διάγραμμα 7 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 13 με CL=2 (αριστερά) και για την περίπτωση 14 με CL=10 (δεξιά), του Πίνακα 7

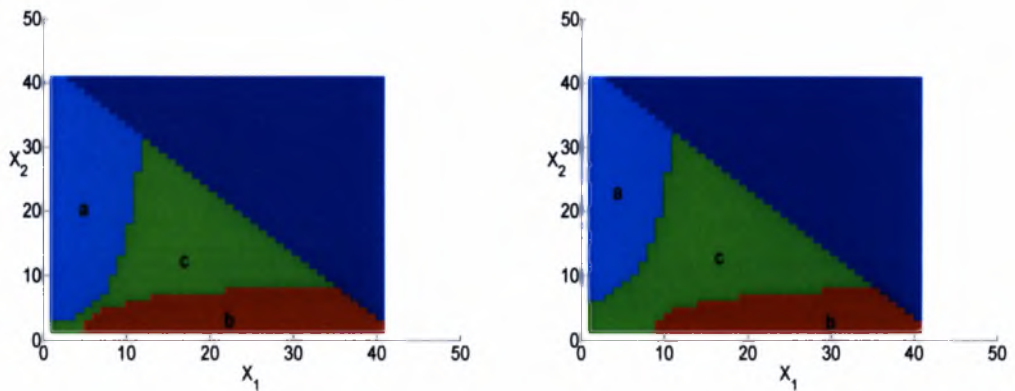


Διάγραμμα 8 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 15 με X=100, του Πίνακα 7



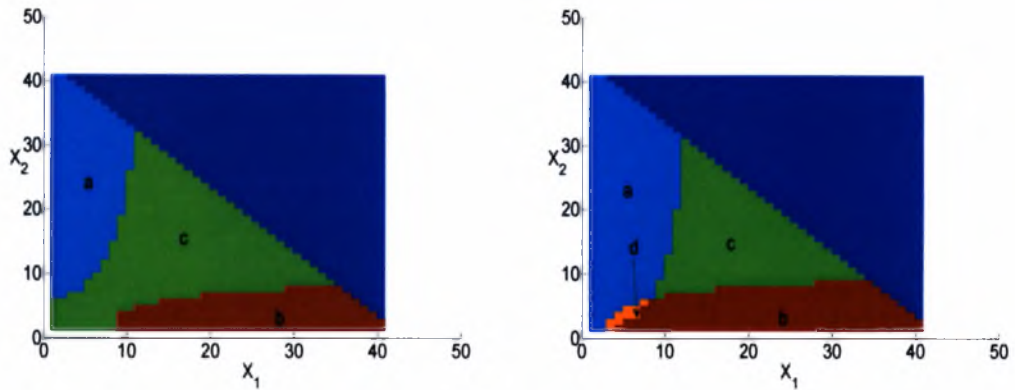
Διάγραμμα 9 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 16 με $CC=1, CS=5, CL=5$ (αριστερά) και για την περίπτωση 17 με $CC=1, CS=10, CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για

$X=40$



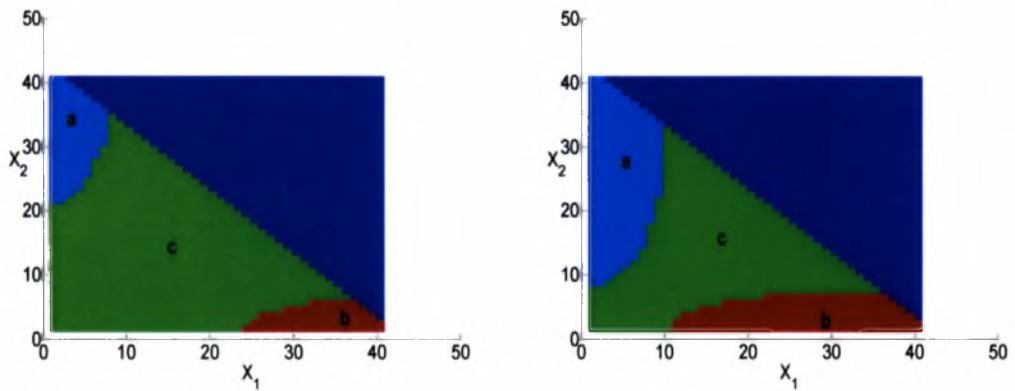
Διάγραμμα 10 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 18 με $CC=2, CS=5, CL=5$ (αριστερά) και για την περίπτωση 19 με $CC=5, CS=10, CL=1$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για

$X=40$



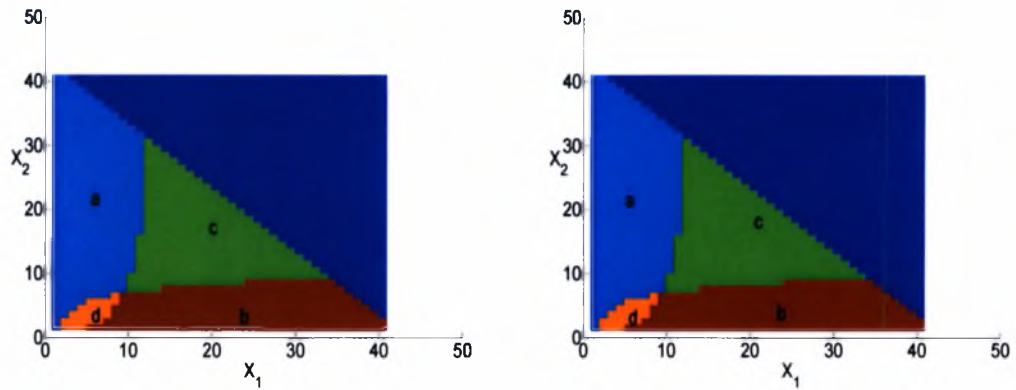
Διάγραμμα 11 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 20 με $CC=5$, $CS=1$, $CL=10$ (αριστερά) και για την περίπτωση 21 με $CC=2$, $CS=10$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για

$X=40$



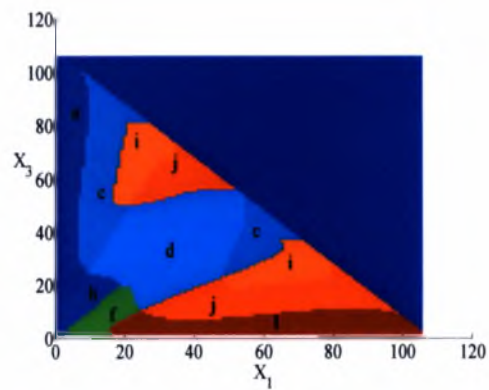
Διάγραμμα 12 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 22 με $CC=10$, $CS=1$, $CL=1$ (αριστερά) και για την περίπτωση 23 με $CC=10$, $CS=5$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για

$X=40$



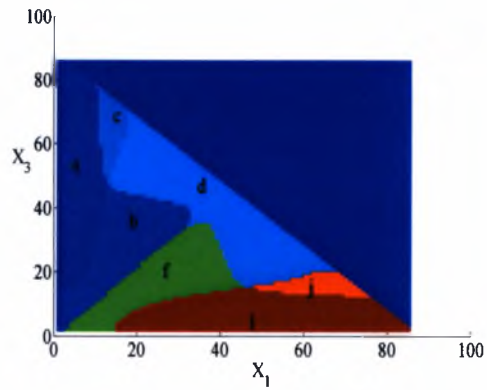
Διάγραμμα 13 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 24 με $CC=1$, $CS=10$, $CL=5$ (αριστερά) και για την περίπτωση 25 με $CC=1$, $CS=5$, $CL=10$ (δεξιά), του Πίνακα 9, για

$$X=40$$

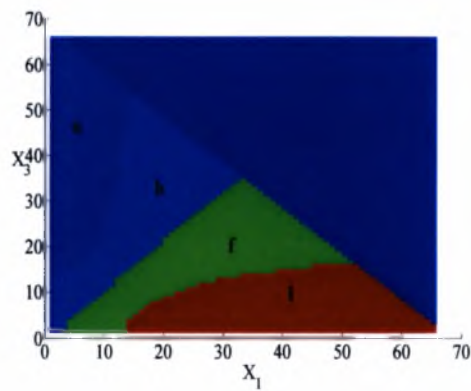


Διάγραμμα 14 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 26, του Πίνακα 11, για

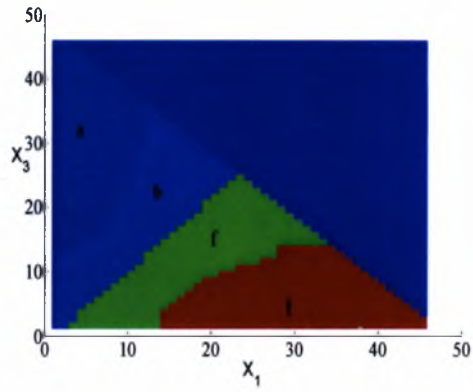
$$X_2=10$$



Διάγραμμα 15 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 26, του Πίνακα 11, για $X_2=30$

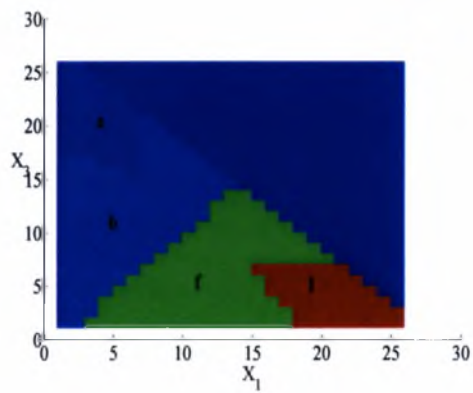


Διάγραμμα 16 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 26, του Πίνακα 11, για $X_2=50$



Διάγραμμα 17 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 26, του Πίνακα 11, για

$$X_2=70$$



Διάγραμμα 18 : Βέλτιστη πολιτική μετάβασης για την περίπτωση 26, του Πίνακα 11, για

$$X_2=90$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000102429



