



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων  
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών



## Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τούρμπο Τεχνικές για Κωδικοποίηση και  
Εξισορρόπηση Καναλιού σε Τηλεπικοινωνιακά  
Συστήματα

Συγγραφέας: Χατζούλης Δημήτριος, ΑΜ:41

Επιβλέπων: Μουστακίδης Γεώργιος, Καθηγητής

Βόλος, Ιούλιος 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4830/1  
Ημερ. Εισ.: 24-09-2007  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
621.382  
ΧΑΤ

Στους γονείς μου.



# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>ix</b>
<b>Περίληψη</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Το Σύστημα Μετάδοσης Δεδομένων . . . . .	3
1.2 Ισοδύναμο Διακριτό Σύστημα . . . . .	6
<b>2 Κωδικοποίηση Καναλιού</b>	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	9
2.2 Κώδικες Block . . . . .	14
2.2.1 Συστηματικοί γραμμικοί block κώδικες . . . . .	15
2.2.2 Πίνακας ισοτιμίας . . . . .	16
2.2.3 Ελάχιστη απόσταση ενός block κώδικα . . . . .	17
2.2.4 Βέλτιστος δέκτης παρουσία AWGN . . . . .	17
2.3 Συνελκτικοί Κώδικες . . . . .	19
2.3.1 Η δομή των $(n, 1)$ συνελκτικών κωδίκων . . . . .	19
2.3.2 Η δομή των $(n, k)$ συνελκτικών κωδίκων . . . . .	22
2.3.3 Συστηματικοί συνελκτικοί κώδικες . . . . .	22
2.3.4 Αναδρομικοί συνελκτικοί κώδικες . . . . .	23
2.3.5 Διαγράμματα καταστάσεων . . . . .	24
2.3.6 Διαγράμματα Trellis . . . . .	25
2.3.7 Αποκωδικοποίηση συνελκτικών κωδίκων . . . . .	27
2.4 Κώδικες Turbo . . . . .	32
2.4.1 Συνελκτικοί σε σειρά κώδικες Turbo . . . . .	35
<b>3 Ισοστάθμιση Καναλιού</b>	<b>41</b>
3.1 Ο Γραμμικός Ισοσταθμιστής . . . . .	42
3.1.1 Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας . . . . .	45
3.2 Ο Ισοσταθμιστής με Επανατροφοδότηση Αποφάσεων . . . . .	49
3.2.1 Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας . . . . .	54
3.3 Βέλτιστος MAP Ισοσταθμιστής . . . . .	59

<b>4</b>	<b>Επαναληπτικές Τεχνικές Ισοστάθμισης &amp; Αποκωδικοποίησης</b>	<b>69</b>
4.1	Ο Βέλτιστος Επαναληπτικός Δέκτης . . . . .	71
4.2	Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-LE . . . . .	72
4.3	Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-DFE . . . . .	77
4.4	Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-CLE . . . . .	80
4.5	Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE . . . . .	84
4.6	Επαναληπτικός δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-SFE . . . . .	87
4.6.1	Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Πειραματικά Αποτελέσματα</b>	<b>93</b>
5.1	Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-CLE . . . . .	95
5.2	Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-GMCLE . . . . .	98
5.3	Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-SFE . . . . .	98
5.4	Συνολικά Αποτελέσματα . . . . .	101
5.5	Συμπεράσματα και Μελλοντικό Έργο . . . . .	104
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>107</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Βασικά στοιχεία ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος. . . . .	4
1.2	Ισοδύναμο διακριτό σύστημα. . . . .	6
2.1	Μοντέλο τηλεπικοινωνιακού συστήματος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση της λειτουργίας του κωδικοποιητή και αποκωδικοποιητή καναλιού. . . . .	10
2.2	Συνελικτικός κώδικας με ρυθμό $R = 1/2$ . . . . .	19
2.3	Συστηματικός συνελικτικός κώδικας με ρυθμό $R = 1/2$ και $G(D) =$ $[1, (1 +_2 D^2) / (1 +_2 D +_2 D^2)]$ . . . . .	23
2.4	Διάγραμμα καταστάσεων για τον συνελικτικό κωδικοποιητή του σχήματος 2.3. . . . .	24
2.5	Trellis διάγραμμα για τον συνελικτικό κώδικα που παράγεται από τον κωδικοποιητή του σχήματος 2.3. . . . .	26
2.6	Συνδεσμολογία των σε σειρά συγχωνευμένων κωδικοποιητών καναλιού. . . . .	33
2.7	Συνδεσμολογία των παράλληλα συγχωνευμένων κωδικοποιητών καναλιού. . . . .	33
2.8	Συνδεσμολογία του αποκωδικοποιητή ενός σε σειρά συγχωνευμένου κώδικα. . . . .	35
2.9	Η δομή του επαναληπτικού αποκωδικοποιητή δύο σε σειρά συγχωνευμένων κωδίκων. . . . .	36
3.1	Γραφική απεικόνιση της λειτουργίας της συνέλιξης που υλοποιεί το ISI κανάλι που έχει μήκος $M = M_1 + M_2 + 1$ . . . . .	60
3.2	Γραφική απεικόνιση της λειτουργίας της συνέλιξης που υλοποιεί το ISI κανάλι της σχέσης (3.73). . . . .	61
3.3	Διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων για το κανάλι της σχέσης (3.73). . . . .	61
3.4	Διάγραμμα Trellis για το κανάλι της σχέσης (3.73). . . . .	62
4.1	Τηλεπικοινωνιακό μοντέλο στο οποίο γίνεται χρήση επαναληπτικών τεχνικών ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. . . . .	70
4.2	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση MAP ισοσταθμιστή. . . . .	71
4.3	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του γραμμικού ισοσταθμιστή. . . . .	73
4.4	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων. . . . .	78

4.5	Δομή του γραμμικού ισοσταθμιστή με τις επιπλέον λειτουργίες που απαιτούνται για χρήση του σε επαναληπτικό δέκτη. . . . .	81
4.6	Ισοδύναμη δομή του γραμμικού ισοσταθμιστή με αυτή του σχήματος 4.5. . .	81
4.7	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση δύο γραμμικών ισοσταθμιστών. . . . .	83
4.8	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση δύο γραμμικών ισοσταθμιστών και μίξη των extrinsic πληροφοριών τους. . . . .	85
4.9	Η δομή του επαναληπτικού δέκτη που χρησιμοποιεί τον ισοσταθμιστή MMSE-SFE. . . . .	89
5.1	Απόκριση συχνότητας των δύο καναλιών που χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα. . . . .	94
	(i) Κανάλι A . . . . .	94
	(ii) Κανάλι B . . . . .	94
5.2	Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-CLE (--◇) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-ο), MMSE-LE (..◁) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	96
	(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	96
	(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	96
	(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	96
	(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	96
5.3	Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-CLE (--◇) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-ο), MMSE-LE (..◁) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	97
	(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	97
	(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	97
	(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	97
	(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	97
5.4	Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE (--◇) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-ο), MMSE-LE (..◁) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	99
	(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	99
	(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	99
	(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	99
	(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	99



5.5 Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-o), MMSE-LE ( $..<$ ) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	100
(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	100
(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	100
(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	100
(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	100
5.6 Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-SFE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-o), MMSE-LE ( $..<$ ) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	102
(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	102
(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	102
(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	102
(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	102
5.7 Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-SFE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-o), MMSE-LE ( $..<$ ) και MMSE-DFE (-.*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελικτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18). . . . .	103
(i) Καμία Επανάληψη . . . . .	103
(ii) 1 Επανάληψη . . . . .	103
(iii) 3 επαναλήψεις . . . . .	103
(iv) 5 επαναλήψεις . . . . .	103
5.8 Απόδοση όλων των επαναληπτικών δεκτών κατά την πέμπτη επανάληψη για τα κανάλια A και B. . . . .	105
(i) Κανάλι A . . . . .	105
(ii) Κανάλι B . . . . .	105



# Περίληψη

Στη παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία γίνεται μία προσπάθεια να αναλυθούν οι τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, οι οποίες από το 1995 που προτάθηκαν έχουν εξελιχθεί σε μία από τις πολλά υποσχόμενες τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, αφού οι απόδοσή τους τις περισσότερες φορές αγγίζει το βέλτιστο δυνατό. Πέραν των κλασικών μεθόδων που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, η ανάλυση μας θα επεκταθεί και σε τρεις νέες τεχνικές χαμηλής πολυπλοκότητας, τις οποίες προτείνουμε στην εργασία αυτή και τις οποίες θα συγκρίνουμε με άλλες ήδη καθιερωμένες τεχνικές ίδιας πολυπλοκότητας.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Μουστακίδη Γεώργιο και επιβλέποντα αυτής της εργασίας, ο οποίος μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με το θέμα αυτό. Η αδιάλειπτη υποστήριξη του καθώς και οι εύστοχες παρατηρήσεις και προτάσεις του ήταν καθοριστικές στην περάτωση της παρούσης εργασίας.

Η εργασία γράφτηκε εξολοκλήρου σε  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}2_{\epsilon}$ , με τη βοήθεια του  $\text{M}\text{i}\text{K}\text{T}_{\text{E}}\text{X}2.4$  και χρησιμοποιώντας τις εφαρμογές  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}\text{n}\text{i}\text{c}\text{C}\text{e}\text{n}\text{t}\text{e}\text{r}$ ,  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}\text{A}\text{i}\text{d}\text{e}$  και  $\text{T}\text{r}\text{X}$ . Οι προσομοιώσεις έγιναν σε  $\text{M}\text{A}\text{T}\text{L}\text{A}\text{B}$  6.5.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η σημερινή εποχή δεν χαρακτηρίζεται αδικώς ως μία μεταβατική εποχή για την κοινωνία. Όλοι βιώσαμε τις τελευταίες δύο δεκαετίες τη σταδιακή αντικατάσταση της καθιερωμένης, μέχρι πρόσφατα, βιομηχανικής κοινωνίας από την αποκαλούμενη κοινωνία της πληροφορίας. Η μετάβαση αυτή, που συνεχίζει να λαμβάνει χώρα ακόμη και σήμερα, προκλήθηκε αλλά και συνοδεύτηκε από μία πληθώρα καινοτόμων εφευρέσεων, που σκοπό είχαν να απλουστεύσουν και να εμπλουτίσουν ταυτόχρονα το τρόπο ζωής των ανθρώπων. Η είσοδος του Internet στα απλά νοικοκυριά και η εξάπλωση του ανά την υφήλιο, η διάδοση της κινητής τηλεφωνίας, μέσω της οποίας ο καθένας μπορεί να επικοινωνήσει από οπουδήποτε με οποιονδήποτε και η οποία έθεσε σε δεύτερη μοίρα την μέχρι τότε κραταιά σταθερή τηλεφωνία, άλλαξαν ριζικά τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι σκέφτονται, λειτουργούν και ζούνε. Η κοινωνία όχι μόνο αποδέχθηκε τις καινοτομίες που επέφερε ο κλάδος της πληροφορικής και των τηλεπικοινωνιών, αλλά σιγά σιγά άρχισε να απαιτεί περισσότερες υπηρεσίες υψηλής ποιότητας που θα διευκόλυναν την ζωή του. Η επικοινωνία των ανθρώπων από απόσταση με τους απλούς συμβατικούς τρόπους, όπως ήταν η φωνή, δεν επαρκούσε και έτσι δημιουργήθηκαν μία πληθώρα υπηρεσιών που υλοποιούσαν πέραν της μετάδοσης φωνής και τη μετάδοση εικόνας, video ή αρχείων (mails, απλά αρχεία κ.α.).

Οι νέες αυτές υπηρεσίες ήταν αναμενόμενο να ενσωματωθούν και στο χώρο της κινητής τηλεφωνίας. Η ενσωμάτωση τους, όμως, δημιούργησε αρκετά προβλήματα, αφού τα μέχρι τότε δίκτυα υποδομής δεν ήταν σχεδιασμένα να υποστηρίξουν τόσες

πολλές υπηρεσίες. Ο λόγος ήταν ότι όλες αυτές οι υπηρεσίες απαιτούσαν υψηλό ρυθμό μετάδοσης δεδομένων, παράγοντας που δεν πληρούταν από τα μέχρι τότε ασύρματα δίκτυα. Δεδομένης δε της υψηλής υποβάθμισης των σημάτων εξαιτίας των ασυρμάτων διαύλων επικοινωνίας το πρόβλημα γινόταν ακόμη μεγαλύτερο.

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι εταιρείες ξόδεψαν αρκετά χρήματα και οι ερευνητές, με τη σειρά τους, αφιέρωσαν πολύ κόπο και χρόνο για να μπορέσουν να λύσουν τα δύο παραπάνω προβλήματα. Η λύση για το πρώτο πρόβλημα δόθηκε από την νεοεισαχθείσα 3G τεχνολογία, η οποία θα βελτιωθεί ακόμη περισσότερο σε λίγα χρόνια από την 4G. Για το δεύτερο πρόβλημα οι *τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*, μίας τεχνικής που αποτελεί παραλλαγή τεχνικής στη θεωρία κωδίκων, χρησιμοποιήθηκαν για να δώσουν μία πολύ καλή λύση.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις *τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*, στην οποία γίνεται μια ενδελεχής προσπάθεια να αναλυθεί και να γίνει κατανοητή η θεωρία που διέπει τις *τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*. Ακόμη, προτείνονται τρεις νέες *τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*, οι οποίες, συγκρινόμενες με άλλες *τεχνικές ίδιας πολυπλοκότητας* που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία, παρουσιάζουν πολύ καλύτερη συμπεριφορά.

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μία ανάλυση και περιγραφή του μοντέλου του τηλεπικοινωνιακού συστήματος που χρησιμοποιείται ως σύστημα αναφοράς για δέκτες που χρησιμοποιούν *τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*. Επίσης θα αναλυθεί το ισοδύναμο διακριτό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξεταστών σε επίπεδο προσομοίωσης οι *τεχνικές επαναληπτικές ισοστάθμισης*.

Στο κεφάλαιο 2 θα γίνει μία ανάλυση των *τεχνικών κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης καναλιού*. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε αρχικά με τους block κώδικες, τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύσουμε θεωρητικά τα κύρια χαρακτηριστικά των κωδίκων γενικά. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρητική ανάλυση των block κωδίκων για να αναλύσουμε με απλό τρόπο τους συνελκτικούς κώδικες, οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά κόρον στις επαναληπτικές *τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης*. Τέλος, θα αναφερθούμε στη θεωρία

της επαναληπτικής κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, που αποτελεί τη βάση της επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης.

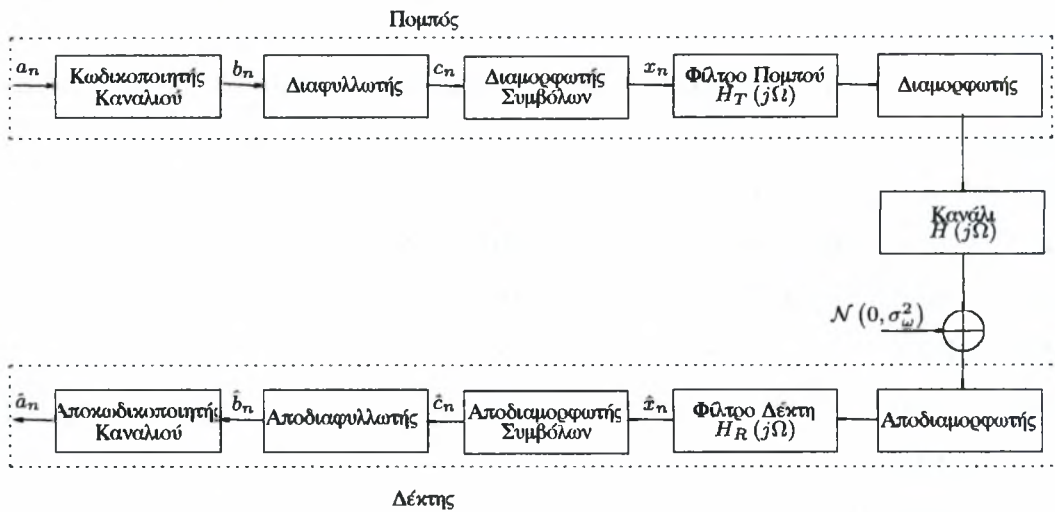
Στο κεφάλαιο 3 θα ασχοληθούμε με τις κυριότερες, σύμφωνα με την διεθνή βιβλιογραφία, τεχνικές ισοστάθμισης και θα αναλύσουμε τον τρόπο λειτουργίας τους με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να μπορούμε να τις εφαρμόσουμε σε δέκτες που χρησιμοποιούν επαναληπτική ισοστάθμιση και αποκωδικοποίηση. Συγκεκριμένα θα αναλύσουμε τον γραμμικό ισοσταθμιστή (MMSE-LE) και τον ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων (MMSE-DFE) που είναι ισοσταθμιστές χαμηλής πολυπλοκότητας και τέλος θα αναλύσουμε και τον βέλτιστο MAP ισοσταθμιστή.

Στο κεφάλαιο 4 θα προσδιορίσουμε, καταρχάς, πως οι τεχνικές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης καναλιού και οι τεχνικές ισοστάθμισης μπορούν να συνδυαστούν σε σχήματα που ονομάζονται *επαναληπτικοί δέκτες τύπου Turbo* και οι οποίοι χρησιμοποιούν τις επαναληπτικές τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. Οι επαναληπτικοί δέκτες τύπου Turbo είναι αυτοί που έχουν πολύ καλύτερη απόδοση από τους απλούς δέκτες που χρησιμοποιούν ισοστάθμιση και αποκωδικοποίηση. Στη συνέχεια του κεφαλαίου 4 θα αναλυθούν τρεις νέοι επαναληπτικοί δέκτες, οι οποίοι χρησιμοποιούν τους τρεις νέους ισοσταθμιστές που προτείνουμε (MMSE-CLE, MMSE-GMCLE και MMSE-SFE), δημιουργώντας έτσι τρεις νέες τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης.

Στο κεφάλαιο 5 θα γίνει μία ενδελεχής ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων, για να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε τόσο τη συμπεριφορά των κλασικών τεχνικών επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης όσο και τη συμπεριφορά των προτεινομένων τεχνικών και να εξετάσουμε που υστερούν και που πλεονεκτούν οι προτεινόμενες τεχνικές.

## 1.1 Το Σύστημα Μετάδοσης Δεδομένων

Η μετάδοση των δυαδικών δεδομένων  $a_n$  πάνω από ένα ασύρματο τηλεπικοινωνιακό κανάλι είναι μία διαδικασία που εμπεριέχει μία σειρά από μετασχηματισμούς (γραμμικούς ή μη) των αρχικών δυαδικών δεδομένων  $a_n$ . Το συνολικό σύστημα μετάδοσης δεδομένων απεικονίζεται στο σχήμα 1.1, το οποίο απαρτίζεται από βασικές



Σχήμα 1.1: Βασικά στοιχεία ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος.

μονάδες οι οποίες χρησιμοποιούνται σχεδόν πάντα σε σενάρια μετάδοσης δεδομένων.

Αρχικά για να μεταδώσουμε τα δεδομένα  $a_n$  πρέπει πρώτα να εφαρμόσουμε τη λειτουργία της κωδικοποίησης καναλιού, η οποία υλοποιείται στο σχήμα 1.1 από τον Ακωδικοποιητή Καναλιού. Η διαδικασία αυτή έχει ως σκοπό να προσθέσει στα προς μετάδοση δεδομένα επιπλέον πληροφορία, πληροφορία η οποία θα χρησιμοποιηθεί για να αύξηση την αξιοπιστία της μετάδοσης. Η διακριτή κωδικοποιημένη πληροφορία στη συνέχεια εισέρχεται στον Διαφυλλωτή, ο οποίος αναδιατάσσει τα δυαδικά δεδομένα  $b_n$  και παράγει τα δυαδικά δεδομένα  $c_n$ . Ο σκοπός ύπαρξης του Διαφυλλωτή είναι να αναδιατάξει τα δεδομένα με τέτοιο τρόπο ώστε γειτονικά δεδομένα πριν την αναδιάταξη να μην δέχονται την ίδια παραμόρφωση από το κανάλι. Μετά τα δεδομένα  $c_n$  αντιστοιχίζονται σε σύμβολα  $x_n$  από τον Διαμορφωτή συμβόλων. Τα διακριτά δεδομένα  $x_n$ , εν συνεχεία, εισέρχονται στο Φίλτρο Πομπού, το οποίο έχει απόκριση συχνότητας  $H_T(j\Omega)$ , και το οποίο στην έξοδο του δημιουργεί ένα αναλογικό σήμα βασικής ζώνης, στο οποίο κάθε σύμβολο αντιστοιχίζεται σε ένα σήμα που διαρκεί για χρονική περίοδο  $T$ . Ο Διαμορφωτής αυτό που κάνει, είναι να μεταφέρει το σήμα στην επιθυμητή προς



μετάδοση ζώνη συχνοτήτων.

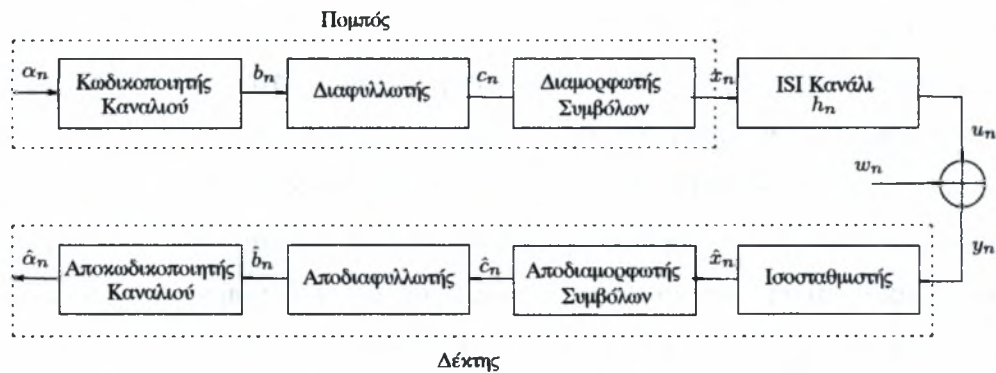
Στη συνέχεια το σήμα που προκύπτει μεταδίδεται πάνω από το ασύρματο κανάλι με απόκριση συχνότητας  $H(j\Omega)$ . Στη φάση αυτή το σήμα υπόκειται σε μία σειρά από μετασχηματισμούς, που έχουν σαν αποτέλεσμα να παραμορφώσουν το σήμα. Οι παραμορφώσεις αυτές οφείλονται στα μη ιδανικά χαρακτηριστικά του καναλιού, τα οποία δημιουργούνται επειδή στη πράξη έχουμε να αντιμετωπίσουμε μη γραμμικά κανάλια, συχνοτικά επιλεκτικά κανάλια, κανάλια με αργή ή γρήγορη εξασθένιση, κανάλια με πολύδρομη μετάδοση και φαινόμενα Doppler. Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι έχουμε να αντιμετωπίσουμε *γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, συχνοτικά επιλεκτικά κανάλια*. Πέραν της παραμόρφωσης εξαιτίας του καναλιού, το σήμα που μεταδόθηκε δέχεται και άλλη μία μορφή παραμόρφωσης, η οποία οφείλεται στα ηλεκτρονικά στοιχεία των κυκλωμάτων. Η παραμόρφωση αυτή μοντελοποιείται ως προσθετικός λευκός Gaussian θόρυβος (AWGN) και θεωρείται ότι προστίθεται στο σήμα μετά την παραμόρφωση που δημιουργεί το κανάλι.

Στον δέκτη αρχίζει η διαδικασία λήψης των δεδομένων, στη οποία θεωρούμε ότι ο δέκτης είναι συγχρονισμένος με τον πομπό, δηλαδή γνωρίζει πότε ακριβώς έρχεται το κάθε δεδομένο και την περίοδο του  $T$ . Στο δέκτη ακολουθεί η διαδικασία της αποδιαμόρφωσης και το σήμα βασικής ζώνης που προκύπτει στην έξοδο του Αποδιαμορφωτή περνάει από το Φίλτρο Δέκτη, το οποίο έχει απόκριση συχνότητας  $H_R(j\Omega)$  και το σήμα που προκύπτει δειγματοληπτείται με περίοδο  $T$ . Για να αποφευχθεί η διασυμβολική παρεμβολή σε συχνοτικά μη-επιλεκτικά κανάλια πρέπει το  $H_T(j\Omega) \cdot H_R(j\Omega)$  να ικανοποιούν το Nyquist κριτήριο, δηλαδή

$$H_T(j\Omega) \cdot H_R(j\Omega) = \text{σταθ.}, |\Omega| < \frac{1}{2T}.$$

Μετά τη δειγματοληψία ακολουθεί ακριβώς η αντίστροφη διαδικασία με αυτή του πομπού. Δηλαδή, γίνεται η αποδιαμόρφωση των συμβόλων  $\hat{x}_n$  και παράγονται τα δυαδικά δεδομένα  $\hat{c}_n$ , τα οποία αναδιατάσσονται στην αρχική τους σειρά από τον αποδιαφυλλωτή, ο οποίος παράγει τα δεδομένα  $\hat{b}_n$  και τέλος λαμβάνει χώρα η διαδικασία της αποκωδικοποίησης καναλιού και της εξαγωγής της εκτίμησης  $\hat{a}_n$  για τα αρχικά δεδομένα μας  $a_n$ .

Στην περίπτωση μη-ιδανικού καναλιού με απόκριση συχνότητας  $H(j\Omega)$  η έξοδος



Σχήμα 1.2: Ισοδύναμο διακριτό σύστημα.

του Φίλτρου Δέκτη έχει απόκριση συχνότητας  $H_T(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \cdot H_R(j\Omega)$ . Από τη στιγμή που δεν είναι ιδανικό το κανάλι, η κρουστική απόκριση  $h(t)$  του καναλιού δημιουργεί διασυμβολική παρεμβολή, η οποία μεταφράζεται σε ισχυρή παραμόρφωση του σήματος που προκύπτει στην έξοδο του Φίλτρου Πομπού. Έτσι, δημιουργείται η ανάγκη χρήσης των ισοσταθμιστών, που σκοπό έχουν να αναιρέσουν (κατά το δυνατόν περισσότερο) τη διασυμβολική παρεμβολή που προκαλείται από το κανάλι.

## 1.2 Ισοδύναμο Διακριτό Σύστημα

Το παραπάνω αναλογικό σύστημα του σχήματος 1.1 μαζί με τον ισοσταθμιστή, ο οποίος δεν αναπαραστάθηκε για να αναδείξει την σημαντικότητα ύπαρξής του, δεν είναι κατάλληλο για να μοντελοποιηθεί σε υπολογιστή. Για το σκοπό αυτό δημιουργείται η ανάγκη αντιστοίχισης των αναλογικών μερών του (Φίλτρο Πομπού, Διαμορφωτής, Κανάλι, Αποδιαμορφωτής, Φίλτρο Δέκτη με δειγματολήπτη) με ένα διακριτό σύστημα, το οποίο φυσικά θα είναι ισοδύναμο με το αναλογικό σύστημα. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε το συνολικό σύστημα Φίλτρο Πομπού, Διαμορφωτή, Καναλιού, Αποδιαμορφωτή, Φίλτρο Δέκτη με δειγματολήπτη στο σχήμα 1.1 σαν ένα μαύρο κουτί, τότε παρατηρούμε ότι αυτό το μαύρο κουτί δέχεται διακριτή είσοδο και εξάγει διακριτή έξοδο. Το μαύρο αυτό κουτί, δηλαδή, μπορεί να αντικατασταθεί με ένα διακριτό

σύστημα. Το διακριτό αυτό σύστημα δείχνεται στο [2] ότι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα FIR φίλτρο  $h_n$  μήκους  $M = M_1 + M_2 - 1$ . Οπότε το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 1.1 μπορεί να μοντελοποιηθεί από το ισοδύναμο διακριτό σύστημα του σχήματος 1.2.

Έτσι, στον πομπό τα αρχικά δυαδικά δεδομένα  $a_n$  κωδικοποιούνται από τον κωδικοποιητή καναλιού και προκύπτουν τα δυαδικά δεδομένα  $b_n$ , τα οποία περνάνε από τον διαφυλλωτή και αναδιατάσσονται σύμφωνα με κάποιο αλγόριθμο στα δεδομένα  $c_n$ . Τα δεδομένα  $c_n$  με τη σειρά τους περνούν από τον διαμορφωτή συμβόλων και παράγονται τα σύμβολα  $x_n$ . Στη συνέχεια της εργασίας θα θεωρούμε πάντα ότι ο διαμορφωτής συμβόλων παράγει σύμβολα σύμφωνα με την BPSK διαμόρφωση, δηλαδή

$$x_n = \begin{cases} 1, & c_n = 1 \\ -1, & c_n = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Τα σύμβολα  $x_n$  διέρχονται με το κανάλι και στη συνέχεια προστίθεται AWGN με μέση τιμή μηδέν και διασπορά  $\sigma_w^2$  (δηλαδή  $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ ) και προκύπτει το δεδομένο  $y_n$ , με

$$\begin{aligned} y_n &= u_n + w_n \\ &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} h_k x_{n-k} + w_n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Στον δέκτη τα δεδομένα  $y_n$  περνούν πρώτα από τον ισοσταθμιστή, ο οποίος υπολογίζει μία εκτίμηση  $\hat{x}_n$  για τα δεδομένα  $x_n$  και στη συνέχεια αποδιαμορφώνονται τα δεδομένα για να αντιστοιχηθούν σε δυαδικά δεδομένα, δηλαδή

$$\hat{c}_n = \begin{cases} 1, & \hat{x}_n \geq 0 \\ 0, & \hat{x}_n < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Εν συνεχεία τα δυαδικά δεδομένα αναδιατάσσονται στην αρχική τους σειρά, από τον αποδιαφυλλωτή, και αποκωδικοποιούνται για να προκύψουν οι εκτιμήσεις  $\hat{a}_n$  για τα αρχικά δεδομένα. Να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό, ότι πολλά τηλεπικοινωνιακά σχήματα δεν συμπεριλαμβάνουν τον αποδιαμορφωτή συμβόλων, με αποτέλεσμα να εισέρχονται στον αποκωδικοποιητή soft πληροφορίες για τα κωδικοποιημένα δεδομένα.



# Κεφάλαιο 2

## Κωδικοποίηση Καναλιού

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση καναλιού είναι μία από τις σημαντικές λειτουργίες ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Σκοπός του κωδικοποιητή είναι η δημιουργία πλεονάζουσας πληροφορίας, την οποία θα χρησιμοποιήσει ο αποκωδικοποιητής, για να αυξήσει την αξιοπιστία του συστήματος. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα αναλύσουμε<sup>1</sup> τους δύο σημαντικότερους τύπους κωδίκων (block και συνελικτικούς) και θα περιγράψουμε τον τρόπο χρήσης τους στην διαδικασία κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης του καναλιού. Τέλος, θα αναφερθούμε στην θεωρία της επαναληπτικής κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, που αποτελεί τη βάση των τεχνικών επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης.

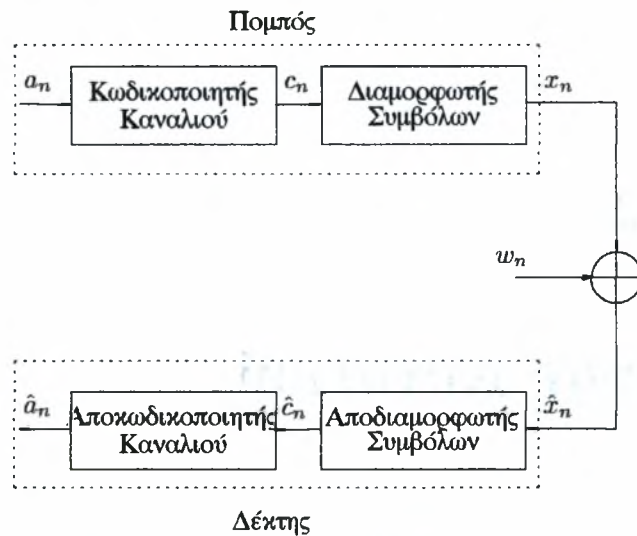
### 2.1 Εισαγωγή

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε το ρόλο που διαδραματίζει ο έλεγχος λαθών μέσω της κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης του καναλιού, παρουσιάζουμε το τηλεπικοινωνιακό μοντέλο του σχήματος 2.1, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Σκοπός του πομπού στο σχήμα 2.1 είναι να μετασχηματίσει την αρχική δυαδική πληροφορία  $a_n$ , σε μία μορφή, η οποία θα είναι ανθεκτική στην επίδραση του θορύβου

---

<sup>1</sup>Η ανάλυση αυτού του κεφαλαίου ακολουθεί την λογική των κεφαλαίων 2 και 3 του [12].



Σχήμα 2.1: Μοντέλο τηλεπικοινωνιακού συστήματος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση της λειτουργίας του κωδικοποιητή και αποκωδικοποιητή καναλιού.

$w_n$ . Ο κωδικοποιητής καναλιού δέχεται στην είσοδο του τα δυαδικά δεδομένα  $a_n$  και εξάγει τα δυαδικά κωδικοποιημένα δεδομένα  $c_n$ . Για κάθε  $k$  τον αριθμό αρχικά δεδομένα  $a_n$  ο κωδικοποιητής παράγει  $n$  τον αριθμό κωδικοποιημένα δυαδικά δεδομένα, με  $n > k$ . Τα  $k$  δυαδικά ψηφία στην είσοδο του κωδικοποιητή καλούνται *μήνυμα εισόδου* και τα  $n$  δυαδικά ψηφία εξόδου ονομάζονται *κωδική λέξη*, ενώ το σύνολο των κωδικών λέξεων που μπορεί να παράγει ένας κωδικοποιητής καλείται *κώδικας*. Αυτή η πλεονάζουσα πληροφορία που δημιουργείται στην έξοδο του κωδικοποιητή, είναι αυτή που χρησιμοποιείται για να ελαχιστοποιήσει τα σφάλματα μετάδοσης. Σκοπός της πλεονάζουσας πληροφορίας είναι να δημιουργηθούν κωδικές λέξεις, που να είναι η μία από την άλλη όσο το δυνατόν διαφορετικές γίνεται. Αυτός είναι και παράγοντας που κάνει το τηλεπικοινωνιακό σύστημα πιο ανθεκτικό σε σφάλματα.

Κάθε κώδικας χαρακτηρίζεται από τον *ρυθμό του κώδικα*  $R = k/n$ , που δίνει μία ποσοτικοποίηση του ποσού πλεονάζουσας πληροφορίας που προστίθεται στα αρχικά μηνύματα. Έτσι, αν τα αρχικά δεδομένα έρχονται στον κωδικοποιητή με ρυθμό  $r_a$  bps,

τότε στην έξοδο του κωδικοποιητή θα παράγονται δεδομένα με ρυθμό  $r_c = r_a/R$  bps. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι το εύρος ζώνης, που χρειαζόμαστε προκειμένου να μεταδώσουμε τα κωδικοποιημένα δεδομένα, είναι μεγαλύτερο από αυτό που χρειαζόμαστε για να μεταδώσουμε τα ακωδικοποίητα δεδομένα. Ακόμη, παρατηρούμε ότι όσο το  $R$  μειώνεται τόσο αυξάνονται οι απαιτήσεις σε εύρος ζώνης. Από την άλλη, όσο μικρότερο είναι το  $R$  τόσο μεγαλύτερη πλεονάζουσα πληροφορία δημιουργείται και τόσο πιο ανθεκτικό γίνεται το τηλεπικοινωνιακό σύστημα σε σφάλματα. Δηλαδή, από τον παραπάνω συλλογισμό, συμπεραίνουμε ότι χρειαζόμαστε κώδικες που το  $R$  τους να είναι αρκούντως μεγάλο και να είναι ταυτόχρονα ανθεκτικοί σε σφάλματα. Τέτοιοι κώδικες έχει πειραματικά διαπιστωθεί ότι είναι οι αναδρομικοί συνελκτικοί κώδικες, που θα αναλύσουμε στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Η έξοδος, λοιπόν, του κωδικοποιητή εισέρχεται στον διαμορφωτή συμβόλων, ο οποίος για κάθε  $\ell$  δυαδικά ψηφία δημιουργεί ένα σύμβολο  $x_n$ , από τα  $M = 2^\ell$  συνολικά σύμβολα που μπορούν να δημιουργηθούν. Δηλαδή, ο διαμορφωτής συμβόλων παράγει σύμβολα με ρυθμό

$$r_x = \frac{r_c}{\ell} = \frac{r_a}{R\ell}, \quad (2.1)$$

που είναι και ρυθμός που απαιτείται για να μεταδώσουμε τα δεδομένα  $x_n$ . Στα σύμβολα αυτά προστίθεται  $w_n$  θόρυβος και έτσι δημιουργούνται τα  $\hat{x}_n = x_n + w_n$ .

Στον πομπό, ο αποδιαμορφωτής συμβόλων δημιουργεί μία ακολουθία  $\ell$  δυαδικών ψηφίων από τα δεδομένα  $\hat{x}_n$  που λαμβάνει. Τέλος, τα δεδομένα  $\hat{c}_n$  που παράγονται αποκωδικοποιούνται και προκύπτει η τελική εκτίμηση  $\hat{a}_n$  για τα αρχικά μας δεδομένα.

Όπως προαναφέραμε παραπάνω χρειάζεται να μεταδώσουμε τα δεδομένα μας με ρυθμό  $r_x$  bps. Με δεδομένο, όμως, ότι ο ρυθμός μεταβολής των δεδομένων είναι ανάλογος του εύρους ζώνης που απαιτείται για να μεταδώσουμε τα δεδομένα μας, συμπεραίνουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το  $r_x$  τόσο μεγαλύτερο εύρος ζώνης χρειαζόμαστε. Από την άλλη, κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα έχει περιορισμένο εύρος ζώνης  $B$  εξαιτίας των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που το απαρτίζουν. Η *αποδοτικότητα φάσματος* ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος ορίζεται ως

$$\eta = \frac{r_a}{B} \text{ bps/Hz} \quad (2.2)$$

και παρέχει ένα μέτρο για το βαθμό αξιοποίησης του εύρους ζώνης του συστήματος.

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (2.1) η αποδοτικότητα φάσματος γράφεται

$$\eta = \frac{r_x \ell R}{B} \text{ bps/Hz.} \quad (2.3)$$

Αφού το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι  $r_x$ , συνεπάγεται ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η αποδοτικότητα φάσματος είναι

$$\eta_{max} = \ell R. \quad (2.4)$$

Μία άλλη σημαντική παράμετρος, η οποία χρησιμοποιείται στην μέτρηση της αξιοπιστίας των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων είναι ο ρυθμός εσφαλμένων δυαδικών ψηφίων (BER). Η αποδοτικότητα ενέργειας  $E_a/N_0$ , η οποία δηλώνει την απαραίτητη ενέργεια ανά δυαδικό ψηφίο προς τη μονόπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου, η οποία απαιτείται για να επιτύχουμε συγκεκριμένο ρυθμό εσφαλμένων δυαδικών ψηφίων, είναι μία άλλη σημαντική παράμετρος για τον χαρακτηρισμό των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Ο λόγος σήματος προς θόρυβο  $S/N$  σχετίζεται με την παραπάνω ποσότητα μέσω της σχέσης

$$\frac{S}{N} = \ell R \frac{E_a}{N_0}. \quad (2.5)$$

Για κάθε κανάλι υπάρχει ένα άνω όριο στον ρυθμό με τον οποίο τα δεδομένα μπορούν να διαδοθούν στο κανάλι με αξιοπιστία. Το άνω όριο αυτό, το οποίο σχετίζεται με το λόγο σήματος προς θόρυβο και το εύρος ζώνης του συστήματος, εισήχθη από τον Shannon ο οποίος το ονόμασε χωρητικότητα του καναλιού  $C$ . Για την περίπτωση που έχουμε ενθόρυβο κανάλι, στο οποίο ο θόρυβος είναι Gaussian και λευκός, η χωρητικότητα του καναλιού δίνεται από τον τύπο

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bps.} \quad (2.6)$$

Ο Shannon απέδειξε ότι στην περίπτωση που ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων  $r_a$  είναι μικρότερος από την χωρητικότητα του καναλιού, τότε είναι δυνατόν να σχεδιαστεί ένας κώδικας που να πετυχαίνει όσο μικρό ρυθμό σφαλμάτων θέλουμε. Στην αντίθετη περίπτωση απέδειξε ότι δεν υπάρχει κώδικας που να μπορεί να εγγυηθεί αξιόπιστη μεταφορά δεδομένων.



Έστω, λοιπόν, ότι μεταδίδουμε τα δεδομένα μας με τη μέγιστο δυνατό ρυθμό, που είναι η χωρητικότητα του καναλιού. Τότε η μέγιστη αποδοτικότητα φάσματος της σχέσης (2.4) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \eta_{max} &= \ell R \\
 &= \frac{C}{B} \\
 &= \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \\
 &= \log_2 \left( 1 + \ell R \frac{E_a}{N_0} \right) \\
 &= \log_2 \left( 1 + \eta_{max} \frac{E_a}{N_0} \right). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς  $E_a/N_0$  βρίσκουμε ότι

$$\frac{E_a}{N_0} = \frac{2^{\eta_{max}} - 1}{\eta_{max}}. \tag{2.8}$$

Η σχέση (2.8) χρησιμοποιείται για να συγκριθούν τηλεπικοινωνιακά συστήματα, τα οποία χρησιμοποιούν κάποια κωδικοποίηση, με το τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί τον θεωρητικά βέλτιστο κώδικα. Στην ιδανική περίπτωση που το τηλεπικοινωνιακό σύστημα έχει άπειρο εύρος ζώνης, δηλαδή  $\eta_{max} \rightarrow 0$ , το ελάχιστο  $E_a/N_0$  που μπορούμε να πετύχουμε είναι

$$\lim_{\eta_{max} \rightarrow 0} \frac{E_a}{N_0} = \ln 2 = -1.59 \text{ db}, \tag{2.9}$$

που αποτελεί το κάτω φράγμα, κάτω από το οποίο κανένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι δεν μπορεί να μεταδώσει με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι για το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 2.1 υπάρχουν δύο θεωρήσεις για το τι ακριβώς μορφή πρέπει να είναι η έξοδος του αποδιαμορφωτή συμβόλων. Στην περίπτωση που έχουμε την δημιουργία δυαδικών ψηφίων  $\ell$ , περίπτωση στην οποία η αποκωδικοποίηση ονομάζεται *hard διαδικασία αποκωδικοποίησης*, ο αποκωδικοποιητής δεν λαμβάνει όλη την πληροφορία που θα μπορούσε να λάβει με αποτέλεσμα να έχουμε απώλεια πληροφορίας και περισσότερα σφάλματα στην έξοδο του αποκωδικοποιητή. Στην περίπτωση που η έξοδος του αποδιαμορφωτή συμβόλων είναι μία *soft* εκτίμηση των δυαδικών συμβόλων, τότε

ο αποκωδικοποιητής λαμβάνει μεγαλύτερη πληροφορία στην είσοδο του και εξάγει λιγότερα σφάλματα. Αυτή η διαδικασία αποκωδικοποίησης ονομάζεται *soft διαδικασία αποκωδικοποίησης*.

## 2.2 Κώδικες Block

Ο κωδικοποιητής ενός  $(n, k)$  κώδικα block δέχεται στην είσοδο του  $k$  δυαδικά ψηφία, που αποκαλούνται *μήνυμα εισόδου*, και τα μετασχηματίζει σε μία μεγαλύτερη κωδικοποιημένη ακολουθία εξόδου μήκους  $n$  δυαδικών ψηφίων, η οποία αποκαλείται *κωδική λέξη*. Το σημαντικό χαρακτηριστικό των block κωδίκων είναι ότι η κωδική λέξη εξαρτάται μόνο από τις τιμές του τρέχοντος μηνύματος εισόδου. Γι' αυτό το λόγο, ο block κωδικοποιητής θεωρείται μία συσκευή χωρίς μνήμη. Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι στη γενική περίπτωση, τόσο το μήνυμα εισόδου, όσο και η κωδική λέξη μπορεί να μην αποτελούνται από δυαδικά ψηφία, αλλά στην εργασία αυτή μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση των δυαδικών μηνυμάτων.

Σε ένα  $(n, k)$  block κώδικα, εφόσον τα μηνύματα εισόδου αποτελούνται από  $k$  δυαδικά ψηφία, υπάρχουν  $2^k$  διαφορετικά μηνύματα εισόδου. Από τη στιγμή που υπάρχει μία 1 – 1 αντιστοίχιση των μηνυμάτων εισόδου με τις κωδικές λέξεις, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν  $2^k$  διαφορετικές κωδικές λέξεις από το σύνολο των  $2^n$  λέξεων που μπορούν να δημιουργηθούν από  $n$  δυαδικά ψηφία. Ο ρυθμός του κώδικα, ο οποίος δηλώνει το ποσό της πλεονάζουσας πληροφορίας που προστίθεται στο μήνυμα εισόδου, δίνεται, όπως είπαμε και στην προηγούμενη ενότητα, από τη σχέση  $R = k/n$ .

Ένας  $(n, k)$  block κώδικας καλείται *γραμμικός* αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω προϋποθέσεις

1. Το ψηφίο προς ψηφίο modulo-2 άθροισμα δύο κωδικών λέξεων δημιουργεί μία άλλη κωδική λέξη και
2. ο κώδικας περιέχει τη κωδική λέξη που περιέχει μόνο μηδενικά δυαδικά ψηφία.

Με όρους γραμμικής άλγεβρας, ένας  $(n, k)$  γραμμικός κώδικας block είναι ο  $k$ -διάστατος υποχώρος του διανυσματικού χώρου  $V_n$  που αποτελείται από τα  $2^k$  δυαδικά διανύσματα μήκους  $n$ . Δηλαδή, ένας  $(n, k)$  γραμμικός κώδικας block μπορεί να

δημιουργηθεί από ένα σύνολο  $k$  ανεξάρτητων δυαδικών διανυσμάτων  $\underline{g}_0, \underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{k-1}$  μήκους  $n$ , τα οποία αποτελούν μία βάση για τον υποχώρο και κάθε κωδική λέξη μπορεί να γραφτεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της εν λόγω βάσης. Έτσι, κάθε κωδική λέξη  $\underline{c}$  που αντιστοιχεί στο μήνυμα εισόδου  $\underline{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T$  μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned}\underline{c}^T &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i \underline{g}_i^T \\ &= \underline{a}^T G,\end{aligned}\tag{2.10}$$

όπου ο πίνακας  $G$  διαστάσεων  $k \times n$  καλείται *γεννήτωρ πίνακας* του κώδικα και δίνεται από τον τύπο

$$G = \begin{bmatrix} g_0^T \\ g_1^T \\ \vdots \\ g_{k-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

### 2.2.1 Συστηματικοί γραμμικοί block κώδικες

Ένας γραμμικός *συστηματικός* block κώδικας έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι το μήνυμα εισόδου περιέχεται στη κωδική λέξη. Δηλαδή, η κωδική λέξη, πέραν των  $k$  δυαδικών ψηφίων του μηνύματος εισόδου, περιέχει και  $n - k$  δυαδικά ψηφία ισοτιμίας.

Η μορφή ενός συστηματικού κώδικα φαίνεται στη συνέχεια

$$\underbrace{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}}_{\text{Αρχικό μήνυμα}} \rightarrow \underbrace{c_0, c_1, \dots, c_{n-k-1}}_{\text{bits ισοτιμίας}}, \underbrace{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}}_{\text{Αρχικό μήνυμα}}.$$

Δηλαδή με αναπαράσταση διανυσμάτων γράφεται

$$\underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{a} \end{bmatrix} = \underline{c},$$

όπου  $\underline{p}$  είναι το διάνυσμα των δυαδικών ψηφίων ισοτιμίας. Ο γεννήτωρ πίνακας ενός συστηματικού block κώδικα έχει την ακόλουθη μορφή

$$G = \begin{bmatrix} P & I_k \end{bmatrix},$$

όπου  $I_k$  είναι η ταυτοτική μήτρα διαστάσεων  $k \times k$  και  $P$  είναι μία μήτρα διαστάσεων  $k \times (n - k)$ , η οποία έχει τη μορφή

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,n-k-1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k-1,0} & p_{k-1,1} & \cdots & p_{k-1,n-k-1} \end{bmatrix},$$

με  $p_{ij} \in \{0, 1\}$ .

### 2.2.2 Πίνακας ισοτιμίας

Έστω ότι έχουμε ένα συστηματικό γραμμικό block κώδικα, ο οποίος περιγράφεται από τον γεννήτορα πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} P & I_k \end{bmatrix}.$$

Δοθέντος ενός μηνύματος εισόδου  $\underline{a}$ , η κωδική λέξη παράγεται σύμφωνα με τη σχέση (2.10), δηλαδή

$$\begin{aligned} \underline{c}^T &= \underline{a}^T G \\ \begin{bmatrix} \underline{p}^T & \underline{a}^T \end{bmatrix} &= \underline{a}^T \begin{bmatrix} P & I_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\underline{p}^T = \underline{c}^T P.$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη ιδιότητα των γραμμικών κωδίκων, κατά την οποία  $\underline{p}^T + \underline{p}^T = 0^T$  καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \underline{p}^T + \underline{p}^T &= 0^T \\ \underline{p}^T + \underline{a}^T P &= 0^T \\ \begin{bmatrix} \underline{p}^T & \underline{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} \\ P \end{bmatrix} &= 0^T \\ \underline{c}^T H^T &= 0^T, \end{aligned} \tag{2.11}$$

όπου

$$H = \begin{bmatrix} I_{n-k} & P^T \end{bmatrix},$$

είναι ο πίνακας ισοτιμίας διαστάσεων  $(n - k) \times n$ . Ο πίνακας ισοτιμίας χρησιμοποιείται για να ελέγξει λάθη σε μία κωδική λέξη, αφού για να είναι σωστή η κωδική λέξη  $\underline{c}$  πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (2.11).

### 2.2.3 Ελάχιστη απόσταση ενός block κώδικα

Έστω, πάλι, ότι έχουμε έναν  $(n, k)$  γραμμικό block κώδικα. Το *Hamming βάρος* (ή απλά βάρος) μίας κωδικής λέξης  $\underline{c}$  ορίζεται ως ο συνολικός αριθμός των μη μηδενικών δυαδικών ψηφίων της κωδικής λέξης. Η *Hamming απόσταση*  $d(\underline{c}, \underline{u})$  μεταξύ δύο κωδικών λέξεων  $\underline{c}$  και  $\underline{u}$  ορίζεται ως το πλήθος των δυαδικών ψηφίων στα οποία οι δύο κωδικές λέξεις διαφέρουν. Προφανώς, η Hamming απόσταση μεταξύ δύο κωδικών λέξεων είναι το αποτέλεσμα του στοιχείο προς στοιχείο modulo-2 αθροίσματος των δύο κωδικών λέξεων. Η *ελάχιστη Hamming απόσταση* (ή απλά ελάχιστη απόσταση)  $d_{min}$  ενός κώδικα ορίζεται ως η μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε κωδικών λέξεων του block κώδικα. Σύμφωνα με τη πρώτη ιδιότητα, όμως, των γραμμικών κωδικών το στοιχείο προς στοιχείο modulo-2 άθροισμα δύο κωδικών λέξεων, είναι και αυτό κωδική λέξη. Άρα, η ελάχιστη Hamming απόσταση ενός block κώδικα ισοδυναμεί με το μικρότερο Hamming βάρος των λέξεων. Η σημαντικότητα της παραμέτρου της ελάχιστης απόστασης βρίσκεται στο ότι καθορίζει την ικανότητα να αναγνωρίζει και να διορθώνει τα λάθη ενός block κώδικα.

### 2.2.4 Βέλτιστος δέκτης παρουσία AWGN

Θεωρούμε και πάλι το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 2.1, στο οποίο χρησιμοποιούμε  $(n, k)$  block κώδικα και BPSK διαμόρφωση σήματος, κατά την οποία τα κωδικοποιημένα δυαδικά δεδομένα  $c_i$  αντιστοιχίζονται στα δεδομένα

$$x_i = \begin{cases} 1, & c_i = 1 \\ -1, & c_i = 0. \end{cases}$$

Στα δεδομένα  $x_i$  ο θόρυβος που προστίθεται θεωρούμε ότι είναι AWGN, δηλαδή  $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$  και ο δέκτης λαμβάνει τα δεδομένα

$$\hat{x}_i = x_i + w_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι για κάθε μήνυμα εισόδου  $\underline{a}$  μεγέθους  $k$  παράγεται μία κωδική λέξη  $\underline{c}$  μεγέθους  $n$ . Αν ορίσουμε ως  $\underline{x}$  το διάνυσμα μήκους  $n$  που προκύπτει από την BPSK διαμόρφωση της κωδικής λέξης  $\underline{c}$  και  $\underline{w}$  το διάνυσμα θορύβου μήκους  $n$ , τότε ο δέκτης λαμβάνει το ενθόρυβο διάνυσμα δεδομένων  $\hat{\underline{x}}$ , το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x} + \underline{w}. \quad (2.13)$$

Στον δέκτη ο αποδιαμορφωτής συμβόλων δεν παράγει δυαδικά δεδομένα, αλλά αφήνει την πληροφορία  $\hat{\underline{x}}$  να μπει ως είσοδος στον αποκωδικοποιητή (soft διαδικασία αποκωδικοποίησης). Αν θεωρήσουμε ως  $\mathbb{U}$  το σύνολο των  $2^k$  διαμορφωμένων κωδικών λέξεων, τότε ο βέλτιστος δέκτης είναι αυτός της μέγιστης πιθανοφάνειας, δηλαδή

$$\underline{x}_{opt} = \arg \max_{\underline{x} \in \mathbb{U}} \mathbb{P}(\hat{\underline{x}} | \underline{x}). \quad (2.14)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.13) παρατηρούμε ότι Δοθέντος του διανύσματος  $\underline{x}$ , το  $\hat{\underline{x}} \sim \mathcal{N}(\underline{x}, \sigma_w^2 I_n)$ . Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\underline{x}} | \underline{x}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} e^{-\frac{(\hat{x}_i - x_i)^2}{2\sigma_w^2}} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

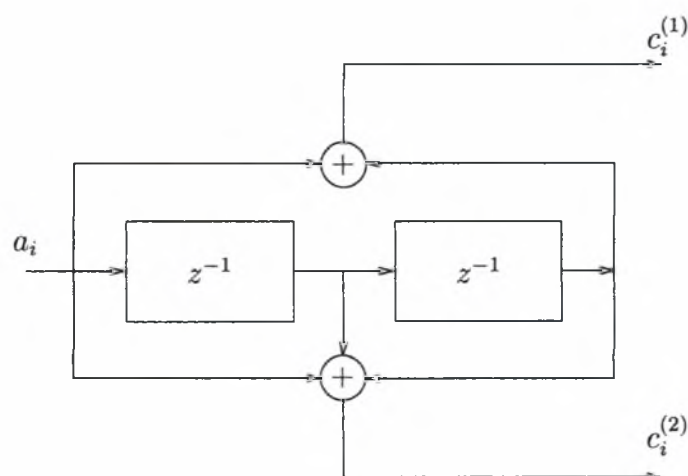
Δηλαδή, η σχέση (2.14) γράφεται

$$\begin{aligned} \underline{x}_{opt} &= \arg \max_{\underline{x} \in \mathbb{U}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2} \\ &= \arg \max_{\underline{x} \in \mathbb{U}} -\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2 \\ &= \arg \min_{\underline{x} \in \mathbb{U}} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Δηλαδή, ο βέλτιστος δέκτης επιλέγει την ακολουθία εκείνη που ελαχιστοποιεί την ευκλείδεια απόσταση

$$d_E^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2. \quad (2.17)$$

Ουσιαστικά επιλέγεται εκείνο το διάνυσμα  $\underline{x}$  από τα συνολικά  $2^k$  το οποίο έχει τη μικρότερη απόσταση από τα δεδομένα  $\hat{\underline{x}}$ . Επιλέγοντας το βέλτιστο  $\underline{x}$ , η διαδικασία εύρεσης του  $\underline{c}$  και  $\underline{a}$  που αντιστοιχούν σε αυτό είναι απλή.



Σχήμα 2.2: Συνελικτικός κώδικας με ρυθμό  $R = 1/2$ .

## 2.3 Συνελικτικοί Κώδικες

Οι συνελικτικοί κώδικες έχουν ευρέως χρησιμοποιηθεί σε τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές, όπως δορυφορικές τηλεπικοινωνίες, κινητή τηλεφωνία, μετάδοση video κ.α. Η δημοφιλία τους έγκειται στη απλότητα των δομών τους και στην δυνατότητα εύκολης υλοποίησης μεθόδων αποκωδικοποίησης. Εν συγκρίσει με τους κώδικες block, πέραν των απλών μεθόδων αποκωδικοποίησης, προσδίδουν μεγαλύτερη αξιοπιστία στο τηλεπικοινωνιακό σύστημα και αυτός είναι ο ουσιαστικός λόγος της ευρείας χρήσης τους στις επαναληπτικές τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε και θα αναλύσουμε τόσο  $(n, 1)$  όσο και τους  $(n, k)$  κώδικες. Θα δώσουμε, όμως, μεγαλύτερη έμφαση στους  $(n, 1)$  συνελικτικούς κώδικες, τους οποίους και θα χρησιμοποιήσουμε στα πειράματά μας.

### 2.3.1 Η δομή των $(n, 1)$ συνελικτικών κωδίκων

Θεωρούμε τον συνελικτικό κώδικα, ο οποίος παράγεται από τον κωδικοποιητή που απεικονίζεται στο σχήμα 2.2. Όπως παρατηρούμε ο κωδικοποιητής αποτελείται από μία σειρά από καταχωρητές, στους οποίους ολισθαίνουν σειριακά τα δεδομένα εισόδου

$a_i$ . Έστω, λοιπόν, ότι ο κωδικοποιητής έχει είσοδο τα δυαδικά δεδομένα

$$\underline{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_t, \dots),$$

όπου  $t$  είναι μία χρονική στιγμή. Η έξοδος του κωδικοποιητή είναι οι δύο ακολουθίες

$$\begin{aligned} \underline{c}^{(1)} &= (\dots, c_{-1}^{(1)}, c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \dots, c_t^{(1)}, \dots) \\ \underline{c}^{(2)} &= (\dots, c_{-1}^{(2)}, c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, \dots, c_t^{(2)}, \dots), \end{aligned}$$

όπου  $c_t^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  είναι τα δυαδικά κωδικοποιημένα δεδομένα που εξάγει ο κωδικοποιητής την χρονική στιγμή  $t$ .

Δηλαδή, με είσοδο  $a_t$  τη χρονική στιγμή  $t$ , η έξοδος του κωδικοποιητή του σχήματος 2.2 είναι η ακολουθία

$$\underline{c}_t = \left( c_t^{(1)}, c_t^{(2)} \right) = \left( a_t +_2 a_{t-2}, a_t +_2 a_{t-1} +_2 a_{t-2} \right),$$

όπου το σύμβολο  $+_2$  συμβολίζει το modulo-2 άθροισμα. Όπως παρατηρούμε, η έξοδος του κωδικοποιητή δεν εξαρτάται μόνο από την παρούσα είσοδο αλλά και από παρελθούσες εισόδους, οι οποίες είναι αποθηκευμένες στους καταχωρητές.

Για να μοντελοποιηθεί η σύνδεση των εξόδων με τους καταχωρητές εισάγουμε την έννοια των γεννητόρων ακολουθιών, που για την κάθε έξοδο του παραδείγματος μας έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{g}^{(1)} &= \left( g_0^{(1)}, g_1^{(1)}, g_2^{(1)} \right) = (1, 0, 1) \\ \underline{g}^{(2)} &= \left( g_0^{(2)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)} \right) = (1, 1, 1), \end{aligned}$$

όπου το πρώτο στοιχείο στις παραπάνω ακολουθίες αντιστοιχεί στο τρέχον δεδομένο εισόδου, το δεύτερο στο δεδομένο του πρώτου από τα αριστερά καταχωρητή κ.ο.κ. Ακόμη το 1 σε κάποια από τις γεννήτορες ακολουθίες  $\underline{g}^{(i)}$  υποδηλώνει ότι το δεδομένο εισόδου ή καταχωρητή συμμετέχει στον υπολογισμό της εξόδου, ενώ το 0 ότι δεν συμμετέχει.

Οι κώδικες αυτοί ονομάστηκαν συνελκτικοί, γιατί η ακολουθίες εξόδου είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης της εισόδου με τις γεννήτορες ακολουθίες. Δηλαδή, στην περίπτωση μας

$$\underline{c}^{(i)} = \underline{a} *_2 \underline{g}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$



όπου το  $*_2$  υποδηλώνει την πράξη της συνέλιξης στην οποία συνέλιξη όλες οι πράξεις γίνονται σε modulo-2.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η πράξη της συνέλιξης μπορεί να αντιστοιχιστεί με την πράξη του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, η προηγούμενη σχέση μπορεί να αντιστοιχιστεί από την

$$c^{(i)}(D) = a(D)g^{(i)}(D), \quad i = 1, 2$$

όπου  $D = z^{-1}$  είναι ο τελεστής καθυστέρησης και

$$\begin{aligned} a(D) &= \dots +_2 a_{-1}D^{-1} +_2 a_0 +_2 a_1D +_2 a_2D^2 +_2 \dots \\ c^{(i)}(D) &= \dots +_2 c_{-1}^{(i)}D^{-1} +_2 c_0^{(i)} +_2 c_1^{(i)}D +_2 c_2^{(i)}D^2 +_2 \dots \\ g^{(i)}(D) &= g_0^{(i)} +_2 g_1^{(i)}D +_2 g_2^{(i)}D^2 +_2 \dots +_2 g_u^{(i)}D^u, \end{aligned}$$

με  $u$  να είναι ο αριθμός των καταχωρητών στον κωδικοποιητή. Για τον κωδικοποιητή του σχήματος 2.2 έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(1)}(D) &= 1 + D^2 \\ g^{(2)}(D) &= 1 + D + D^2. \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα γεννήτορες σε ένα  $(n, 1)$  συνελικτικό κώδικα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ένα διάνυσμα γεννήτορα  $G(D)$ , του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα. Γενικά για ένα  $(n, 1)$  συνελικτικό κώδικα έχουμε

$$G(D) = \left[ g^{(1)}(D) \quad g^{(2)}(D) \quad \dots \quad g^{(n)}(D) \right].$$

Τότε, η διαδικασία κωδικοποίησης γράφεται

$$c(D) = a(D)G(D),$$

με

$$c(D) = \left[ c^{(1)}(D) \quad c^{(2)}(D) \quad \dots \quad c^{(n)}(D) \right].$$

Για την περίπτωση του κωδικοποιητή του σχήματος 2.2 έχουμε ότι

$$G(D) = \left[ g^{(1)}(D) \quad g^{(2)}(D) \right].$$

### 2.3.2 Η δομή των $(n, k)$ συνελικτικών κωδίκων

Η συνελικτικοί  $(n, k)$  κώδικες αποτελούν μία γενίκευση των  $(n, 1)$ , κατά την οποία οι κωδικοποιητές έχουν  $k$  εισόδους και  $n$  εξόδους. Ένας τέτοιος κωδικοποιητής περιγράφεται από έναν γενικό  $k \times n$  γεννήτορα πίνακα με στοιχεία πολυώνυμα ως

$$G(D) = \begin{bmatrix} g_1^{(1)}(D) & g_2^{(1)}(D) & \dots & g_n^{(1)}(D) \\ g_1^{(2)}(D) & g_2^{(2)}(D) & \dots & g_n^{(2)}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(k)}(D) & g_2^{(k)}(D) & \dots & g_n^{(k)}(D) \end{bmatrix},$$

όπου η  $j$  στήλη του  $G(D)$  περιγράφει τα πολυώνυμα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της  $j$ -στης ακολουθίας εξόδου. Πιο συγκεκριμένα αν  $a^{(i)}(D)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  είναι οι ακολουθίες εισόδου στον κωδικοποιητή τότε η  $j$ -στη ακολουθία εξόδου υπολογίζεται από τη σχέση

$$c^{(j)}(D) = \sum_{i=1}^k a^{(i)}(D) g_i^{(j)}(D), \quad j = 1, \dots, n.$$

### 2.3.3 Συστηματικοί συνελικτικοί κώδικες

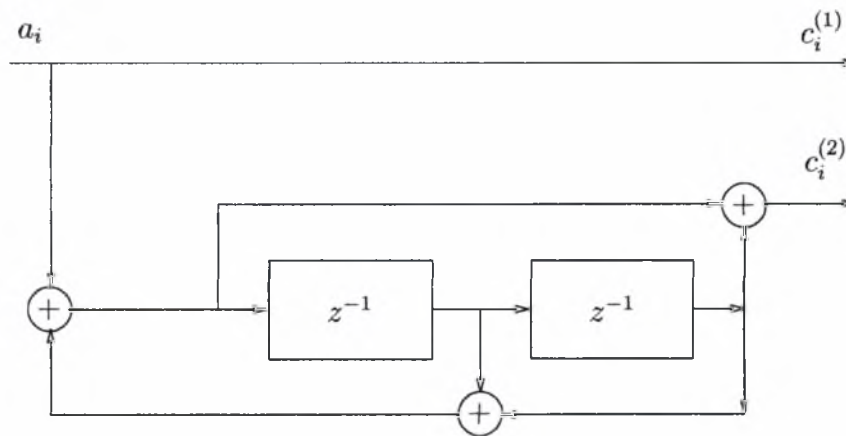
Κατά αντιστοιχία με την ενότητα 2.2.1 οι συστηματικοί συνελικτικοί  $(n, k)$  κώδικες είναι αυτοί που έχουν πίνακα γεννήτορα της μορφής

$$G(D) = \begin{bmatrix} I_k & P(D) \end{bmatrix},$$

όπου  $I_k$  είναι ο  $k \times k$  ταυτοτικός πίνακας και  $P(D)$  είναι ένας πίνακας διαστάσεων  $k \times (n - k)$  με στοιχεία πολυώνυμα. Για την ειδική περίπτωση που έχουμε συστηματικούς συνελικτικούς  $(n, 1)$  κώδικες, τότε αυτοί έχουν διάνυσμα γεννήτορα της μορφής

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1 & P(D) \end{bmatrix},$$

όπου το διάνυσμα  $P(D)$  είναι ένα  $1 \times (n - 1)$  διάνυσμα που περιέχει τα πολυώνυμα των γεννητόρων ακολουθιών. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη ακολουθία εξόδου είναι ίδια με αυτή της ακολουθίας εισόδου, με αποτέλεσμα να απαιτούνται  $n - 1$  στοιχεία μνήμης. Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε ένα συστηματικό συνελικτικό κώδικα με ρυθμό  $R = 1/2$ .



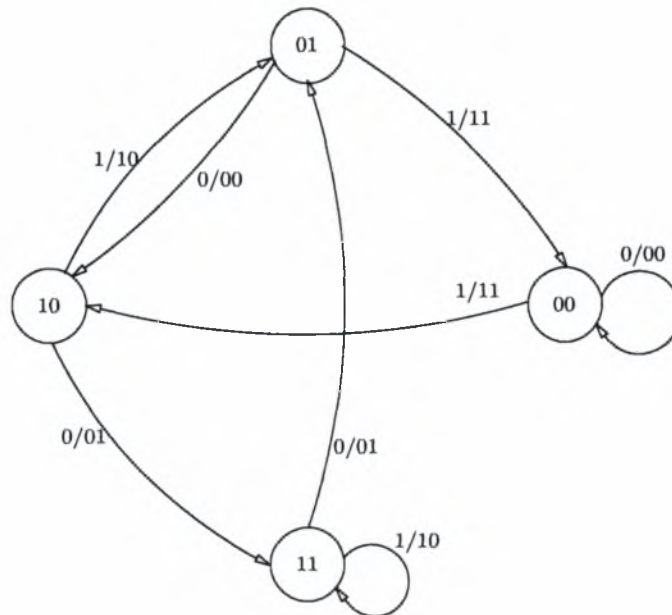
Σχήμα 2.3: Συστηματικός συνελικτικός κώδικας με ρυθμό  $R = 1/2$  και  $G(D) = [1, (1 +_2 D^2) / (1 +_2 D +_2 D^2)]$ .

### 2.3.4 Αναδρομικοί συνελικτικοί κώδικες

Στον κωδικοποιητή του σχήματος 2.2 οι καταχωρητές αποθηκεύουν κάθε χρονική στιγμή τις εισόδους της παρούσας χρονικής στιγμής ή παρελθόντων χρονικών στιγμών. Στη γενική περίπτωση οι καταχωρητές μπορούν να αποθηκεύουν μία τιμή, η οποία να είναι συνάρτηση τόσο των εισόδων όσο και των παρελθουσών τιμών των καταχωρητών του κωδικοποιητή. Στον κωδικοποιητή του σχήματος 2.3 παρατηρούμε ότι η έξοδος  $c_i^{(2)}$  είναι το άθροισμα (modulo-2) του δεύτερου καταχωρητή με το  $a_i +_2 r_1 +_2 r_2$ , όπου  $r_1, r_2$  είναι τα περιεχόμενα των δύο καταχωρητών. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι οι καταχωρητές αποθηκεύουν ένα συνδυασμό της εισόδου με παρελθούσες τιμές των δύο καταχωρητών. Ο κώδικας που παράγεται από τον κωδικοποιητή του σχήματος 2.3 έχει διάλυση γεννήτορα

$$G(D) = \left[ 1 \quad \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \right], \quad (2.18)$$

όπου το κλάσμα δηλώνει τη σχέση εξάρτησης των δεδομένων των καταχωρητών από προηγούμενα στοιχεία των καταχωρητών. Όπως είναι προφανές, τα στοιχεία του διανύσματος γεννήτορα είναι ρητές συναρτήσεις. Οι κώδικες αυτής της μορφής ονομάζονται αναδρομικοί συνελικτικοί κώδικες και είναι αυτοί που κατά κόρον



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα καταστάσεων για τον συνελικτικό κωδικοποιητή του σχήματος 2.3.

χρησιμοποιούνται στις επαναληπτικές τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, γιατί έχει διαπιστωθεί ότι βελτιώνουν την απόδοση και την αξιοπιστία του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Συγκεκριμένα, ο συστηματικός αναδρομικός κώδικας που παράγεται από τον κωδικοποιητή του σχήματος 2.3 και περιγράφεται από το διάλυμα γεννήτορα της σχέσης (2.18) είναι αυτός που θα χρησιμοποιηθεί στα πειράματα του κεφαλαίου 5.

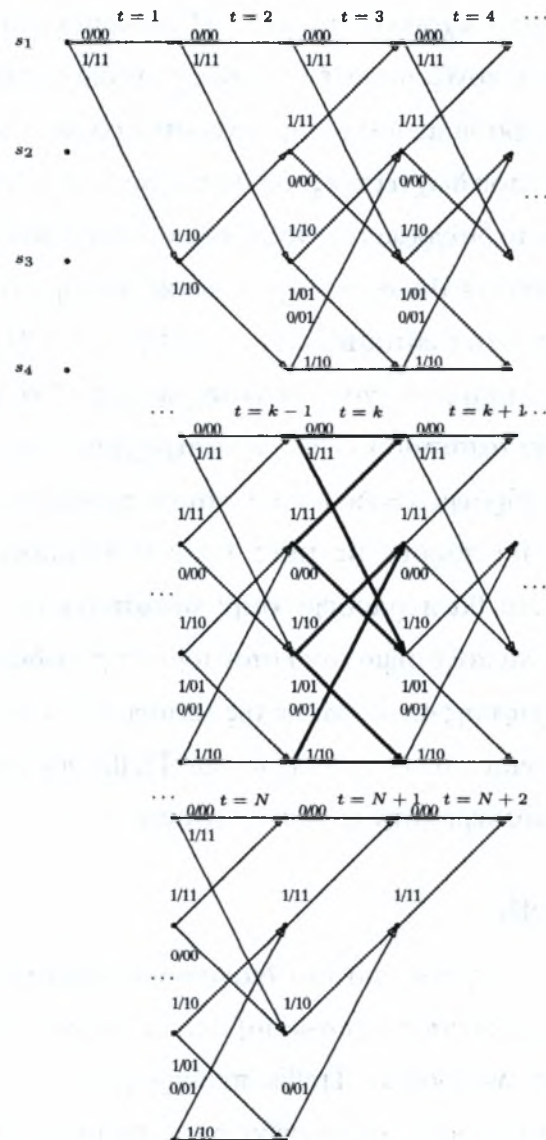
### 2.3.5 Διαγράμματα καταστάσεων

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τις προηγούμενες ενότητες, η έξοδος ενός συνελικτικού κωδικοποιητή εξαρτάται από την είσοδο του και από την τιμή που έχουν οι καταχωρητές την τρέχουσα χρονική στιγμή. Δηλαδή, ένας συνελικτικός κωδικοποιητής μπορεί να περιγραφεί από ένα *διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων*, του οποίου οι καταστάσεις καθορίζονται από τους καταχωρητές του κωδικοποιητή. Έτσι ένας

συνελκτικός κωδικοποιητής με  $K$  καταχωρητές που αποθηκεύουν δυαδικά ψηφία, έχει  $2^K$  δυνατές καταστάσεις. Όταν ο κωδικοποιητής βρίσκεται σε μία κατάσταση, τότε το ποια θα είναι η επόμενη κατάσταση στην οποία θα βρεθεί, καθορίζεται από το δεδομένο εισόδου της τρέχουσας στιγμής. Η κατάσταση σε ένα διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων απεικονίζεται με ένα κύκλο, στον οποίο περιέχονται οι τιμές των καταχωρητών, και η μετάβαση με μία ακμή πάνω στην οποία υπάρχει μία ετικέτα της μορφής "είσοδος/έξοδος", που δείχνει τι έξοδο θα πάρουμε με μία δεδομένη είσοδο. Στο σχήμα 2.4 παρουσιάζεται το διάγραμμα καταστάσεων μεταβάσεων το κωδικοποιητή του σχήματος 2.3. Παρατηρούμε ότι ο εν λόγω κωδικοποιητής, ο οποίος έχει δύο καταχωρητές, έχει τέσσερις δυνατές καταστάσεις  $s_1 = \{00\}$ ,  $s_2 = \{01\}$ ,  $s_3 = \{10\}$ ,  $s_4 = \{11\}$ , οι οποίες δείχνουν την τιμή που έχουν οι καταχωρητές. Για παράδειγμα, αν ο κωδικοποιητής βρίσκεται στην κατάσταση  $s_2$  οι δύο καταχωρητές του έχουν τιμές 0 και 1 αντίστοιχα. Με είσοδο 0 θα πάρουμε έξοδο 0 και 0 και θα περάσουμε στην κατάσταση  $s_3$ , δηλαδή οι καταχωρητές θα πάρουν τις τιμές 1 και 0 αντίστοιχα. Με είσοδο 1 θα πάρουμε έξοδο 1 και 1 και θα περάσουμε στην κατάσταση  $s_1$ . Τα διαγράμματα καταστάσεων μεταβάσεων είναι πολύ σημαντικά στον τομέα της κωδικοποίησης, πρώτον γιατί παρέχουν ένα τρόπο γραφικής απεικόνισης της λειτουργίας του κωδικοποιητή και δεύτερον γιατί χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία των Trellis διαγραμμάτων τα οποία θα εισάγουμε και θα περιγράψουμε στην επόμενη ενότητα.

### 2.3.6 Διαγράμματα Trellis

Ένα *διάγραμμα Trellis* παράγεται από ένα διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων αν "διασχίσουμε" το διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων για κάθε δυνατή ακολουθία εισόδου. Ουσιαστικά, ένα διάγραμμα Trellis περιγράφει το πως εξελίσσεται η διαδικασία κωδικοποίησης στο χρόνο, απλά δείχνοντας τις μεταβάσεις, τις εισόδους και τις εξόδους συναρτήσει του χρόνου. Στο σχήμα 2.5 δείχνεται το διάγραμμα Trellis του κωδικοποιητή του σχήματος 2.3. Όπως βλέπουμε από το σχήμα 2.5 θεωρούμε πάντα ότι η διαδικασία της κωδικοποίησης ξεκινάει από την κατάσταση  $s_1$  και τελειώνει σε αυτήν. Έστω για παράδειγμα, στο σχήμα 2.5 ότι έχουμε μία ακολουθία εισόδου  $a$  μεγέθους  $N$  δυαδικών ψηφίων. Πάντα θεωρούμε ότι ο κωδικοποιητής ξεκινάει από την κατάσταση  $s_1$ . Την πρώτη χρονική στιγμή ( $t = 1$ ) ο κωδικοποιητής έχει δύο επιλογές,



Σχήμα 2.5: Trellis διάγραμμα για τον συνελικτικό κώδικα που παράγεται από τον κωδικοποιητή του σχήματος 2.3.

ανάλογα με το τι είσοδο έχει, ή να πάει στην κατάσταση  $s_1$  ή στην  $s_3$ . Την δεύτερη χρονική στιγμή ( $t = 2$ ), ανάλογα με τη κατάσταση που βρίσκεται, πηγαίνει σε μία από τις τέσσερις δυνατές καταστάσεις. Από εκεί και πέρα ο κωδικοποιητής μπορεί να πάει σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις καταστάσεις μπορεί. Γενικά, αν ο συνελικτικός κωδικοποιητής έχει  $K$  καταχωρητές, ξεκινάει πάντα από την κατάσταση  $s_1$  και έχει τη δυνατότητα να μεταβεί σε όλες τις δυνατές  $2^K$  καταστάσεις από τη χρονική στιγμή  $t = K$  και μετά. Γυρνώντας στο παράδειγμα μας και πάλι, για να μπορέσει ο κωδικοποιητής να τερματίσει στην κατάσταση  $s_1$  πρέπει μετά τη χρονική στιγμή  $t = N$ , κατά την οποία τελειώνει η διαδικασία κωδικοποίησης της ακολουθίας εισόδου, να μπουν δύο δεδομένα εισόδου, τα οποία αποκαλούνται *δεδομένα τερματισμού* και τα οποία θα οδηγήσουν τον κωδικοποιητή στην κατάσταση  $s_1$ . Έτσι, ο κωδικοποιητής θα είναι έτοιμος να αποκωδικοποιήσει την επόμενη ακολουθία εισόδου.

### 2.3.7 Αποκωδικοποίηση συνελικτικών κωδίκων

Η αποκωδικοποίηση των συνελικτικών κωδίκων είναι ένα πρόβλημα που απασχόλησε κατά καιρούς τους επιστήμονες. Διάφοροι αλγόριθμοι αποκωδικοποίησης<sup>2</sup> έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς, με το καθένα να έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Ο αλγόριθμος αποκωδικοποίησης των συνελικτικών κωδίκων που χρησιμοποιείται κατά κόρον στις επαναληπτικές τεχνικές ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης είναι ο *βέλτιστος* αλγόριθμος της εκ των υστέρων πιθανότητας (MAP αλγόριθμος), ο οποίος και θα αναλυθεί στη συνέχεια.

#### Ο MAP αλγόριθμος

Θεωρούμε και πάλι το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 2.1, στο δέκτη του οποίου χρησιμοποιούμε soft διαδικασία αποκωδικοποίησης. Στον πομπό στέλνουμε μία ακολουθία  $\underline{a}$  δυαδικών δεδομένων μήκους  $N$ , την οποία κωδικοποιούμε με ένα κωδικοποιητή ρυθμού  $R = 1/n$ , ο οποίος παράγει μία έξοδο μήκους  $nN$ . Στην είσοδο του αποκωδικοποιητή, αφού έχουμε soft διαδικασία αποκωδικοποίησης, έχουμε τα δεδομένα  $\hat{x}$  μήκους  $nN$ . Δηλαδή για κάθε δεδομένο εισόδου  $a_i$  δημιουργείται

---

<sup>2</sup>Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [12] και [15] για να δει λεπτομερή ανασκόπηση των αλγορίθμων αποκωδικοποίησης.

η ακολουθία εξόδου  $\underline{c}^{(i)}$ , που αντιστοιχεί στα δεδομένα  $\underline{x}^{(i)}$  που με τη σειρά τους αντιστοιχούν στα δεδομένα  $\underline{\hat{x}}^{(i)}$  μήκους  $n$ .

Ο συνελικτικός  $(n, 1)$  κωδικοποιητής περιγράφεται από ένα διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων το οποίο έχει  $K$  καταχωρητές, δηλαδή  $2^K$  καταστάσεις. Θεωρούμε ως  $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_{2^K}\}$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του κωδικοποιητή. Ακόμη, θεωρούμε ως  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$  την κατάσταση στην οποία θα μπορούσε να βρίσκεται ο κωδικοποιητής την χρονική στιγμή  $i$ . Επίσης θεωρούμε ότι στα δεδομένα περιλαμβάνονται και τα δεδομένα τερματισμού. Τέλος, θεωρούμε ως  $\mathbb{C}$  το σύνολο όλων των  $2^N$  ακολουθιών εισόδου μήκους  $N$ ,  $\mathbb{C}_{1,i}$  το σύνολο των  $2^N/2$  ακολουθιών εισόδου που έχουν το  $i$ -στο τους δεδομένο ίσο με 1 και  $\mathbb{C}_{0,i}$  το σύνολο των  $2^N/2$  μηνυμάτων εισόδου που έχουν το  $i$ -στο τους δεδομένο ίσο με 0.

Έστω, λοιπόν, ότι λαμβάνουμε τα δεδομένα  $\underline{\hat{x}}$  και θέλουμε να αποφασίσουμε τι είναι τα δεδομένα  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Ο αλγόριθμος της εκ των υστέρων πιθανότητας αποφασίζει σύμφωνα με το κριτήριο

$$L(a_i | \underline{\hat{x}}) = \log \frac{\mathbb{P}(a_i = 1 | \underline{\hat{x}})_{a_i=1}}{\mathbb{P}(a_i = 0 | \underline{\hat{x}})_{a_i=0}} \geq 0.$$

Ουσιαστικά, βρίσκει την εκ των υστέρων πιθανότητα να είναι το  $a_i$  1 και 0 Δοθέντος του διανύσματος  $\underline{\hat{x}}$  και αποφασίζει υπέρ αυτού που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα σύμφωνα με την τιμή του παραπάνω λόγου πιθανοφάνειας. Αλλά, η πιθανότητα  $\mathbb{P}(a_i = c | \underline{\hat{x}})$  με  $c \in \{0, 1\}$  είναι η πιθανότητα να έχουμε στείλει μία ακολουθία  $\underline{a}$ , τέτοια που στην θέση  $i$  της ακολουθίας να έχουμε  $a_i = c$ . Δηλαδή, για την πιθανότητα  $\mathbb{P}(a_i = c | \underline{\hat{x}})$  μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{P}(a_i = c | \underline{\hat{x}}) = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{c,i}} \mathbb{P}(\underline{a} | \underline{\hat{x}}) = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{c,i}} \frac{p(\underline{a}, \underline{\hat{x}})}{p(\underline{\hat{x}})}. \quad (2.19)$$

Έτσι με βάση τη σχέση (2.19) το κριτήριο (λόγος πιθανοφάνειας) του αλγορίθμου MAP γράφεται

$$L(a_i | \underline{\hat{x}}) = \log \frac{\sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{1,i}} \mathbb{P}(\underline{a} | \underline{\hat{x}})}{\sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{0,i}} \mathbb{P}(\underline{a} | \underline{\hat{x}})} = \log \frac{\sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{1,i}} p(\underline{a}, \underline{\hat{x}})_{a_i=1}}{\sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{0,i}} p(\underline{a}, \underline{\hat{x}})_{a_i=0}} \geq 0. \quad (2.20)$$

Το βασικό ερώτημα στη παρούσα φάση είναι το πως βρίσκουμε την πιθανότητα της σχέσης (2.19) με ένα ευφυή τρόπο. Τη λύση δίνει ο αλγόριθμος εμπρός-πίσω διάσχισης (Forward-Backward Algorithm) που εκμεταλλεύεται το Trellis διάγραμμα του



κωδικοποιητή και το γεγονός ότι η κωδικοποίηση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία διαδικασία Markov. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό η πιθανότητα να έχουμε στείλει μία ακολουθία εισόδου  $\underline{a} \in \mathbb{C}_{c,i}$ ,  $c \in (0, 1)$  είναι η πιθανότητα να έχουμε στείλει μία ακολουθία εισόδου τέτοια που κατά την κωδικοποίηση του  $a_i = c$  τη χρονική στιγμή  $i$  να έχει δημιουργηθεί μία μετάβαση στον κωδικοποιητή από την κατάσταση  $s^{(i-1)}$  στην κατάσταση  $s^{(i)}$ . Με πιθανοτικούς όρους είναι το άθροισμα των εκ των υστέρων πιθανοτήτων των ακολουθιών εισόδου που κατά τη κωδικοποίηση του  $i$ -στου τους δεδομένου δημιουργείται μετάβαση με είσοδο  $c$  δοθείσης της ακολουθίας  $\hat{\underline{x}}$ . Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.19) έχουμε

$$P(a_i = c | \hat{\underline{x}}) = \frac{1}{p(\hat{\underline{x}})} \sum_{\underline{a} \in \mathbb{C}_{c,i}} p(\underline{a}, \hat{\underline{x}}) = \frac{1}{p(\hat{\underline{x}})} \sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: a_i = c} p(s^{(i-1)}, s^{(i)}, \hat{\underline{x}}). \quad (2.21)$$

Αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η κωδικοποίηση είναι μία Markov διαδικασία έχουμε ότι

$$p(s^{(i-1)}, s^{(i)}, \hat{\underline{x}}) = \underbrace{p(s^{(i-1)}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1})}_{\alpha_{i-1}(s^{(i-1)})} \cdot \underbrace{p(s^{(i)}, \hat{x}_i | s^{(i-1)})}_{\gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})} \cdot \underbrace{p(\hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{nN} | s^{(i)})}_{\beta_i(s^{(i)})}. \quad (2.22)$$

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση της ποσότητας της σχέσης (2.22) από τον υπολογισμό του  $\gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})$ . Η ποσότητα αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)}) &= p(s^{(i-1)}, \hat{x}_i | s^{(i)}) \\ &= \mathbb{P}(s_i | s_{(i-1)}) \cdot p(\hat{x}_i | s^{(i-1)}, s^{(i)}) \\ &= \mathbb{P}(a_i = c) \cdot p(\hat{\underline{x}}^{(i)} | \underline{x}^{(i)}) \\ &= \mathbb{P}(a_i = c) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} p(\hat{x}_{ni-j} | x_{ni-j}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

αφού τα δεδομένα του  $\underline{x}^{(i)}$  θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η σχέση (2.23) ισχύει μόνο αν υπάρχει μετάβαση από την κατάσταση  $s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}$ , αλλιώς ισούται με μηδέν. Η ποσότητα  $\alpha_{i-1}(s^{(i-1)})$  βρίσκεται αναδρομικά ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση

$$\begin{aligned} \alpha_0(s^{(0)} = s_1) &= 1 \\ \alpha_0(s^{(0)} = s_i) &= 0, \text{ με } s_i \neq s_1 \end{aligned}$$

και στη συνέχεια από τη σχέση

$$\alpha_i (s^{(i)}) = \sum_{\forall s^{(i-1)} \in \mathcal{S}} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)}), \quad (2.24)$$

αν υπάρχει η μετάβαση  $s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}$ , αλλιώς ισούται με μηδέν. Η ποσότητα  $\beta_i (s^{(i)})$  βρίσκεται αναδρομικά ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση

$$\begin{aligned} \beta_N (s^{(N)} = s_1) &= 1 \\ \beta_N (s^{(N)} = s_i) &= 0, \text{ με } s_i \neq s_1 \end{aligned}$$

και στη συνέχεια από τη σχέση

$$\beta_{i-1} (s^{(i-1)}) = \sum_{\forall s^{(i)} \in \mathcal{S}} \beta_i (s^{(i)}) \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)}), \quad (2.25)$$

αν υπάρχει η μετάβαση  $s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}$ , αλλιώς ισούται με μηδέν. Στην πράξη επειδή στον υπολογισμό των δύο παραπάνω ποσοτήτων των σχέσεων (2.24) και (2.25) υπάρχουν προβλήματα υποχειλισης γίνονται κάποιες πράξεις κανονικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα για το  $\alpha_i (s^{(i)})$  έχουμε

Αρχικά:

$$\begin{aligned} \alpha_0 (s^{(0)} = s_1) &= 1 \\ \alpha_0 (s^{(0)} = s_i) &= 0, \text{ με } s_i \neq s_1 \end{aligned}$$

Για  $i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \alpha'_i (s^{(i)}) &= \begin{cases} \sum_{\forall s^{(i-1)} \in \mathcal{S}} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)}), & \text{Αν } \exists s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ &\text{για κάθε } s^{(i)} \in \mathcal{S}. \\ \alpha_i (s^{(i)}) &= \frac{\alpha'_i (s^{(i)})}{\sum_{\forall s^{(i)} \in \mathcal{S}} \alpha'_i (s^{(i)})} \text{ για κάθε } s^{(i)} \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Για το  $\beta_i (s^{(i)})$  έχουμε

Αρχικά:

$$\begin{aligned} \beta_N (s^{(N)} = s_1) &= 1 \\ \beta_N (s^{(N)} = s_i) &= 0, \text{ με } s_i \neq s_1 \end{aligned}$$

Για  $i = N, \dots, 1$ :

$$\beta'_{i-1}(s^{(i-1)}) = \begin{cases} \sum_{\forall s^{(i)} \in \mathbb{S}} \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)}), & \text{Αν } \exists s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$ .

$$\beta_{i-1}(s^{(i-1)}) = \frac{\beta'_{i-1}(s^{(i-1)})}{\sum_{\forall s^{(i-1)} \in \mathbb{S}} \beta'_{i-1}(s^{(i-1)})} \text{ για κάθε } s^{(i)} \in \mathbb{S}. \quad (2.27)$$

Τελικά το MAP κριτήριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$L(a_i | \hat{\underline{x}}) = \log \frac{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}; a_i=1} \alpha_{i-1}(s^{(i-1)}) \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})}{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}; a_i=0} \alpha_{i-1}(s^{(i-1)}) \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})} \quad (2.28)$$

Από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο ότι ο MAP αλγόριθμος αποτελείται από τα τέσσερα εξής βήματα

1. Για  $i = 1, \dots, N$  υπολόγισε τα  $\gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})$  σύμφωνα με τη σχέση (2.23).
2. Για  $i = 0, \dots, N$  υπολόγισε τα  $\alpha_i(s^{(i)})$ , για κάθε  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$  σύμφωνα με τη σχέση (2.26) (εμπρός αναδρομή).
3. Για  $i = N, \dots, 1$  υπολόγισε τα  $\beta_i(s^{(i)})$ , για κάθε  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$  σύμφωνα με τη σχέση (2.27) (πίσω αναδρομή).
4. Υπολόγισε το κριτήριο MAP χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.28).

Πέρα από τον λόγο πιθανοφάνειας της σχέσης (2.28) που πρέπει να υπολογίσουμε για προφανείς λόγους, μερικές φορές χρειάζεται να υπολογίσουμε τον εξής λόγο πιθανοφάνειας

$$L(c_i | \hat{\underline{x}}) = L(x_i | \hat{\underline{x}}), \quad (2.29)$$

για λόγους που θα γίνουν προφανείς στην επόμενη ενότητα. Ουσιαστικά θέλουμε να υπολογίσουμε τον εκ των υστέρων λόγο πιθανοφάνειας για τα δεδομένα εισόδου του αποκωδικοποιητή. Στην αρχή της ανάλυσης της ενότητας αυτής είχε ειπωθεί ότι για κάθε ένα δεδομένο εισόδου  $a_i$  ο κωδικοποιητής παράγει μία ακολουθία  $n$  δεδομένων, την

οποία συμβολίσαμε με  $c^{(i)}$ . Καλούμε  $c_j^{(i)}$ ,  $j = 1, \dots, n$  το  $j$ -στο δεδομένο εξόδου που παράγεται από την κωδικοποίηση του  $a_i$  δεδομένου (ή διαφορετικά το  $ni + j$  δεδομένο εξόδου του αποκωδικοποιητή). Ομοίως ακολουθούμε την ίδια λογική συμβολισμού για την ακολουθία των δεδομένων  $x^{(i)}$ . Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς λογική με τον λόγο πιθανοφάνειας της σχέσης (2.28) καταλήγουμε στο ότι

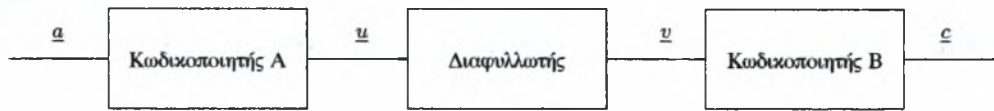
$$\begin{aligned} L\left(c_j^{(i)} | \hat{x}\right) &= L\left(x_j^{(i)} | \hat{x}\right) \\ &= \log \frac{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: c_j^{(i)}=1} \alpha_{i-1}(s^{(i-1)}) \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})}{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: c_j^{(i)}=0} \alpha_{i-1}(s^{(i-1)}) \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

με  $i = 1, \dots, N$  και  $j = 1, \dots, n$ . Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ των σχέσεων (2.28) και (2.30) φαίνεται στα αθροίσματα. Στη πρώτη σχέση αθροίζουμε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε  $a_i = c$ ,  $c = 0, 1$ , ενώ στη δεύτερη αθροίζουμε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε  $c_j^{(i)} = c$ ,  $c = 0, 1$ .

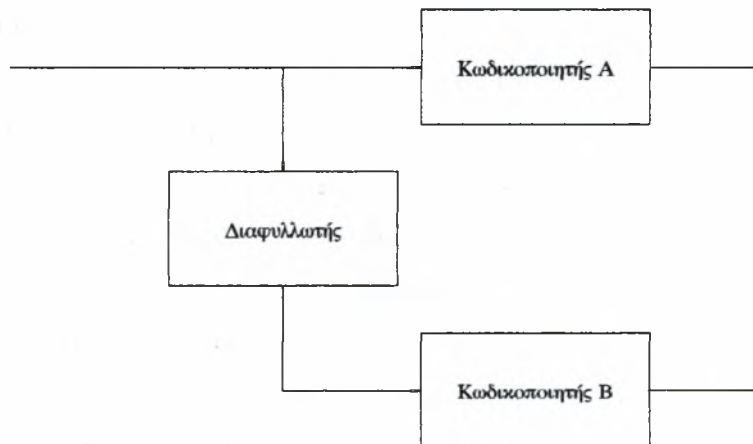
## 2.4 Κώδικες Turbo

Για πολλά χρόνια οι επιστημονική κοινότητα προσπαθούσε να βρει την τεχνική εκείνη της κωδικοποίησης καναλιού που θα πλησίαζε τη βέλτιστη απόδοση (χωρητικότητα του καναλιού), όπως αυτή υπολογίστηκε από τον Shannon. Για το σκοπό αυτό μία πληθώρα κωδίκων, όπως κώδικες block, κώδικες BCH, κώδικες Reed-Solomon, συνελκτικοί κώδικες, προτάθηκαν. Τα αποτελέσματα που έδιναν οι κώδικες αυτοί ήταν ικανοποιητικά, αλλά ήταν μακριά από τα θεωρητικά βέλτιστα. Το 1993 οι Berrou, Glavieux και Thitimajshima [1] απέδειξαν ότι μία κατηγορία τεχνικών κωδικοποίησης καναλιού ήταν ικανή να πετύχει απόδοση πολύ κοντά στο θεωρητικά βέλτιστο. Η τεχνική αυτή, η οποία δημιούργησε την *αρχή της επαναληπτικής μάθησης* (Turbo Principle), εφαρμόστηκε σε μία πληθώρα προβλημάτων. Ένα από τα προβλήματα στο οποίο εφαρμόστηκε είναι στις τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης καναλιού.

Η τεχνικές αυτές που προτάθηκαν στο [1] προβλέπουν τη χρήση δύο ή και περισσότερων κλασικών κωδικοποιητών οι οποίοι συνδέονται σε σειρά ή παράλληλα,



Σχήμα 2.6: Συνδεσμολογία των σε σειρά συγχωνευμένων κωδικοποιητών καναλιού.



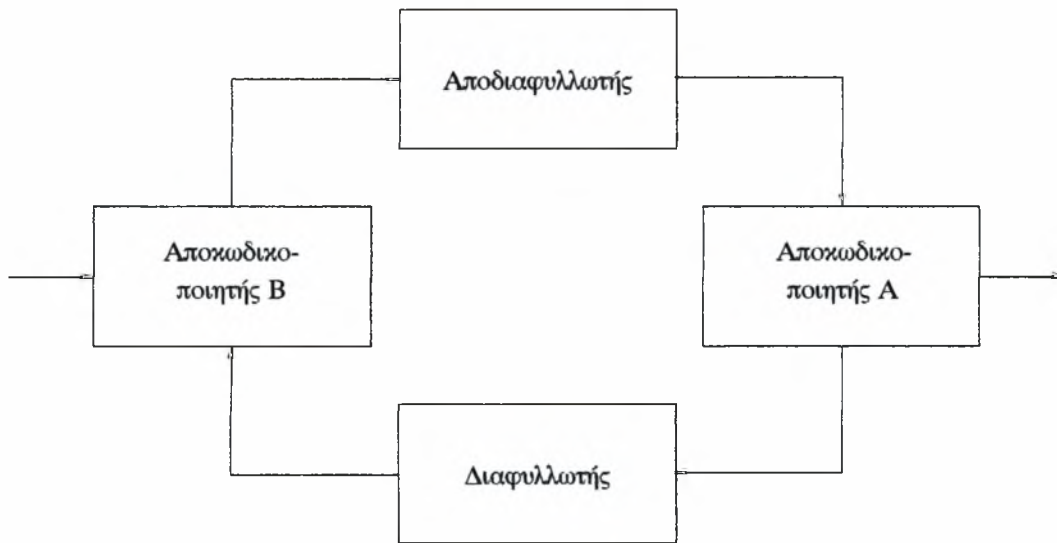
Σχήμα 2.7: Συνδεσμολογία των παράλληλα συγχωνευμένων κωδικοποιητών καναλιού.

ανάμεσα στους οποίους παρεμβάλλεται ένας διαφυλλωτής. Ο τρόπος συνδεσμολογίας των σε σειρά και παράλληλα συγχωνευμένων κωδικοποιητών καναλιού παρουσιάζονται στα σχήματα 2.6 και 2.7 αντίστοιχα. Οι συγχωνευμένοι κωδικοποιητές των σχημάτων 2.6 και 2.7, οι οποίοι ονομάζονται κωδικοποιητές Turbo, παρουσιάζουν μία σειρά πλεονεκτημάτων εν συγκρίσει με τα κλασικά σχήματα κωδικοποιητών, τα οποία είναι

- η δημιουργία σύνθετου κώδικα καναλιού από απλούστερους κώδικες,
- η πολύ καλή ικανότητα διόρθωσης λαθών και
- η δυνατότητα επαναληπτικής αποκωδικοποίησης στο δέκτη.

Όπως είδαμε, ο δέκτης ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι επιφορτισμένος με τη διαδικασία της αποκωδικοποίησης των δεδομένων. Ο βέλτιστος αλγόριθμος αποκωδικοποίησης, που έχει αποδειχθεί ότι είναι ο MAP αλγόριθμος έχει εκθετική πολυπλοκότητα. Η πολυπλοκότητα αυτή εξαρτάται από τον ρυθμό του κώδικα και αυξάνει δραματικά όσο μειώνεται ο ρυθμός του κώδικα, δηλαδή όσο αυξάνει η πλεονάζουσα πληροφορία που μπαίνει στα δεδομένα και αυξάνει την απόδοση του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Το βασικό πλεονέκτημα των αποκωδικοποιητών Turbo είναι ότι εκμεταλλεύονται την ύπαρξη πολλών κωδίκων (άρα και αποκωδικοποιητών). Η επιλογή κωδικών με μεγάλο ρυθμό κώδικα  $R$  οδηγεί σε αποκωδικοποιητές με μικρή πολυπλοκότητα, οι οποίοι συνδυασμένοι στην turbo λογική της αποκωδικοποίησης δίνουν αποτελέσματα πολύ κοντά στην απόδοση του συνολικά βέλτιστου αλγορίθμου.

Η επαναληπτική εφαρμογή των αλγορίθμων αποκωδικοποίησης (Turbo λογική) για την περίπτωση των σε σειρά συγχωνευμένων κωδικοποιητών φαίνεται στο σχήμα 2.8. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ανάδραση της πληροφορίας (με τη μορφή πιθανοτήτων) των αποκωδικοποιητών, όπου η έξοδος του ενός αποτελεί είσοδο στον άλλο. Η πληροφορία αυτή, η οποία περνάει από τους διαφυλλωτή-αποδιαφυλλωτή για να αποσυσχετίσει όσο το δυνατόν περισσότερο τα δεδομένα εξόδου των δύο αποκωδικοποιητών, συγκλίνει για κάποιο λόγο (άγνωστο μέχρι σήμερα) στη βέλτιστη δυνατή πληροφορία που μπορούμε να πάρουμε από τον βέλτιστο αποκωδικοποιητή. Συνήθως οι επιμέρους κώδικες που χρησιμοποιούνται στους κώδικες Turbo είναι συνελκτικοί κώδικες γιατί έχει διαπιστωθεί ότι παρουσιάζουν καλύτερη συμπεριφορά



Σχήμα 2.8: Συνδεσμολογία του αποκωδικοποιητή ενός σε σειρά συγχωνευμένου κώδικα.

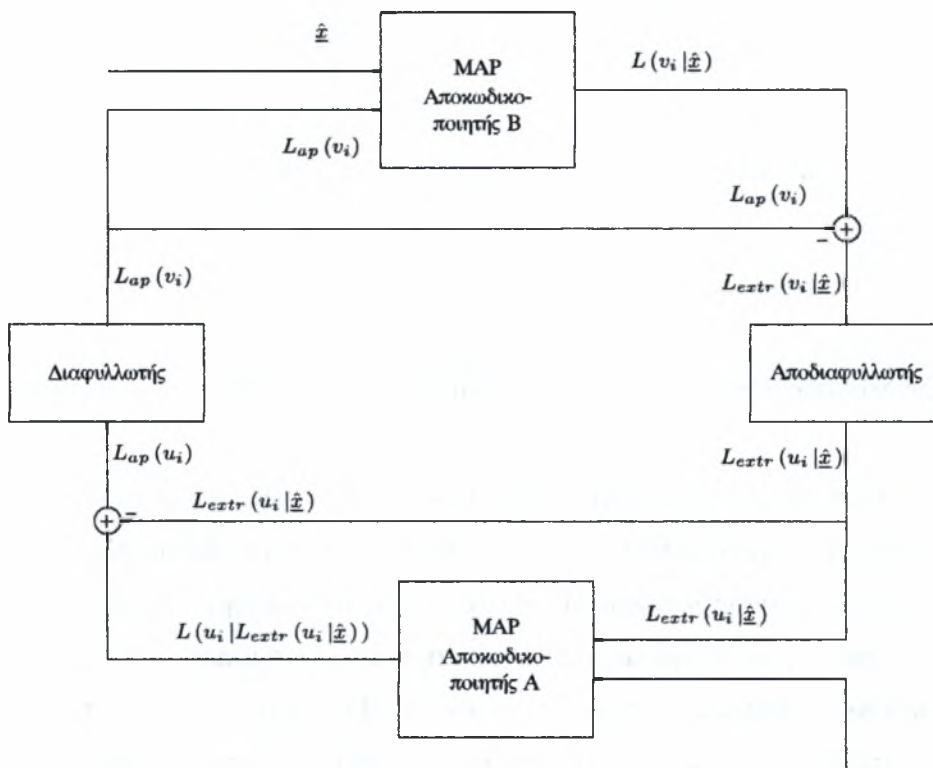
από τους άλλους κώδικες και είναι αυτοί στους οποίους θα επικεντρωθούμε για να αναλύσουμε την επαναληπτική κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση. Στην επόμενη ενότητα θα επικεντρωθούμε στους σε σειρά συγχωνευμένους συνελικτικούς κώδικες Turbo, γιατί η συνδεσμολογία και λογική τους χρησιμοποιείται στις τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. Η συνδεσμολογία κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης για τους σε σειρά συγχωνευμένους συνελικτικούς κώδικες φαίνεται στα σχήματα 2.6 και 2.8 αντίστοιχα.

### 2.4.1 Συνελικτικοί σε σειρά κώδικες Turbo

Θεωρούμε και πάλι την έξοδο του MAP αποκωδικοποιητή της προηγούμενης ενότητας,

$$L(a_i | \hat{x}) = \log \frac{\mathbb{P}(a_i = 1 | \hat{x})}{\mathbb{P}(a_i = 0 | \hat{x})},$$

η οποία με τη βοήθεια της σχέσης (2.19) ξαναγράφεται όπως φαίνεται στη σχέση (2.20). Χρησιμοποιούμε την ισότητα  $p(\underline{a}, \hat{x}) = p(\hat{x} | \underline{a}) \cdot \mathbb{P}(\underline{a})$  και καταλήγουμε στη εξής σχέση



Σχήμα 2.9: Η δομή του επαναληπτικού αποκωδικοποιητή δύο σε σειρά συγχωνευμένων κωδίκων.



για τον λόγο πιθανοφάνειας

$$L(a_i | \hat{x}) = \log \frac{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{1,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \cdot \mathbb{P}(\underline{a})}{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{0,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \cdot \mathbb{P}(\underline{a})}. \quad (2.31)$$

Η πιθανότητα  $\mathbb{P}(\underline{a})$  αποτελεί την a-priori πληροφορία για την ακολουθία των δυαδικών δεδομένων  $\underline{a}$ . Τα δεδομένα της ακολουθίας  $\underline{a}$  θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητα, άρα η παραπάνω πιθανότητα μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbb{P}(\underline{a}) = \prod_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}(a_j).$$

Αν λάβουμε υπόψιν την παραπάνω σχέση, τότε η σχέση (2.31) γράφεται

$$\begin{aligned} L(a_i | \hat{x}) &= \log \frac{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{1,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)}{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{0,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)} \\ &= \log \frac{\mathbb{P}(a_i = 1) \cdot \sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{1,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)}{\mathbb{P}(a_i = 0) \cdot \sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{0,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)} \\ &= \log \frac{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{1,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)}{\sum_{\underline{a} \in \mathcal{C}_{0,i}} p(\hat{x} | \underline{a}) \prod_{j=0, i \neq j}^{N-1} \mathbb{P}(a_j)} + \log \frac{\mathbb{P}(a_i = 1)}{\mathbb{P}(a_i = 0)} \\ &= L_{extr}(a_i | \hat{x}) + L_{ap}(a_i). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Η ποσότητα  $L_{extr}(a_i | \hat{x})$  στην σχέση (2.32) ονομάζεται extrinsic πληροφορία για το δυαδικό ψηφίο  $a_i$  και περιέχει όλη την πληροφορία που έχουν όλα τα δυαδικά δεδομένα της ακολουθίας  $\underline{a}$  πλην του  $a_i$  για το ίδιο το  $a_i$ . Η ποσότητα  $L_{ap}(a_i)$  είναι η a-priori πληροφορία για το δυαδικό δεδομένο. Υπενθυμίζουμε ότι για την περίπτωση του MAP κωδικοποιητή της προηγούμενης ενότητας τα  $\underline{a}$  είναι τα δεδομένα εισόδου,  $\underline{c}$  είναι τα δεδομένα εισόδου και  $\hat{x}$  είναι τα παραμορφωμένα διαμορφωμένα δεδομένα  $\underline{x}$  που λαμβάνει ο δέκτης.

Ένας σε σειρά συγχωνευμένος κωδικοποιητής με δύο επιμέρους συνελκτικούς κωδικοποιητές (όπως στο σχήμα 2.6) έχει ρυθμό κώδικα

$$R = R_1 \cdot R_2,$$

όπου  $R_1$  και  $R_2$  είναι οι ρυθμοί των επιμέρους κωδίκων. Έτσι για να δημιουργήσουμε έναν  $(n, k)$  κώδικα Turbo, θα πρέπει να σχεδιάσουμε αρχικά έναν συνελκτικό κώδικα ρυθμού  $k/p$  και έναν άλλο  $p/n$ . Τέλος, αν οι επιμέρους κώδικες είναι γραμμικοί, τότε και ο κώδικας Turbo θα είναι γραμμικός (όπως αναμενόταν).

Στο σχήμα 2.6 θεωρούμε ότι έχουμε δύο συνελκτικούς κωδικοποιητές. Ο κωδικοποιητής A παίρνει ως είσοδο την ακολουθία  $\underline{u}$  και παράγει ως έξοδο την κωδικοποιημένη ακολουθία  $\underline{v}$ . Τα δεδομένα της ακολουθίας αυτής διαφυλλώνονται και παράγεται η ακολουθία  $\underline{v}$ , η οποία χρησιμοποιείται ως είσοδος στον κωδικοποιητή B, ο οποίος παράγει ως έξοδο την ακολουθία  $\underline{c}$ . Η ακολουθία αυτή μετά, κατά τα γνωστά, διαμορφώνεται στην ακολουθία  $\underline{x}$  και τελικά ο δέκτης παίρνει ως είσοδο στον επαναληπτικό κωδικοποιητή του σχήματος 2.9 τα παραμορφωμένα δεδομένα του  $\hat{\underline{x}}$ .

Η λειτουργία του επαναληπτικού αποκωδικοποιητή δύο σε σειρά συνελκτικών κωδίκων φαίνεται στο σχήμα 2.9. Ο MAP αποκωδικοποιητής B, που κάνει αποκωδικοποίηση της πληροφορίας που αντιστοιχεί στον κωδικοποιητή B, παίρνει ως είσοδο την ακολουθία δεδομένων  $\hat{\underline{x}}$  και την a-priori πληροφορία για την δικιά του αρχική ακολουθία δεδομένων  $\underline{v}$ . Αρχικά θεωρούμε ότι η αυτή η a-priori πληροφορία είναι μηδέν. Ο MAP αποκωδικοποιητής B παράγει την soft πληροφορία του λόγου πιθανοφάνειας για κάθε ένα από τα δεδομένα της αρχικής ακολουθίας σύμφωνα με τη σχέση (2.28), δηλαδή παράγει την ποσότητα  $L(v_i | \hat{\underline{x}})$  για κάθε ένα από τα δεδομένα της ακολουθίας  $\underline{v}$ . Στη συνέχεια αφαιρεί την a-priori πληροφορία από την ποσότητα της σχέσης (2.28) και έτσι δημιουργείται η extrinsic πληροφορία για τα δεδομένα  $\underline{v}$ . Το πέρασμα των δεδομένων αυτών από τον αποδιαφυλλωτή έχει σαν αποτέλεσμα να μετασχηματιστεί η πληροφορία  $L_{extr}(v_i | \hat{\underline{x}})$  σε  $L_{extr}(u_i | \hat{\underline{x}})$ . Ο MAP αποκωδικοποιητής A με τη σειρά του, χρησιμοποιώντας μόνο την extrinsic πληροφορία του MAP αποκωδικοποιητή B και θεωρώντας πάντα την a-priori πληροφορία για τα δεδομένα  $\underline{u}$  ίση με μηδέν, υπολογίζει την soft πληροφορία του λόγου πιθανοφάνειας για κάθε ένα από τα δεδομένα της ακολουθίας  $\underline{u}$  και ΟΧΙ της αρχικής ακολουθίας

a. Η πληροφορία αυτή βρίσκεται μέσω της σχέσης (2.30). Από την πληροφορία που παράγεται, αφαιρείται η extrinsic πληροφορία που παράγει ο MAP αποκωδικοποιητής B και έτσι παράγεται η a-priori πληροφορία για τα δεδομένα της ακολουθίας u. Με χρήση του διαφυλλωτή μετασχηματίζεται η a-priori πληροφορία των u στην a-priori πληροφορία των v. Η a-priori πληροφορία που παράχθηκε θα χρησιμοποιηθεί στον MAP αποκωδικοποιητή B ξεκινώντας έτσι μία δεύτερη επανάληψη της διαδικασίας αποκωδικοποίησης (αυτός είναι και ο λόγος που ονομάστηκε και επαναληπτική αποκωδικοποίηση). Στο τέλος, μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων, ο MAP αποκωδικοποιητής A θα υπολογίσει τον λόγο πιθανοφάνειας για τα δεδομένα a και όχι για τα δεδομένα u, πληροφορία που θα χρησιμοποιηθεί για την τελική απόφαση του τι δεδομένα στάλθηκαν. Ο λόγος πιθανοφάνειας για τα δεδομένα a βρίσκεται μέσω της σχέσης (2.28).



## Κεφάλαιο 3

### Ισοστάθμιση Καναλιού

Το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης στα ασύρματα τηλεπικοινωνιακά σύστημα υφίσταται πάντα παραμορφώσεις. Οι παραμορφώσεις αυτές οφείλονται στο θόρυβο που προστίθεται στο σήμα και στα μη ιδανικά χαρακτηριστικά του μέσου μετάδοσης του σήματος (καναλιού). Ο θόρυβος, ο οποίος παράγεται από ηλεκτρονικά κυκλώματα, είναι τυχαίος και εξαιτίας αυτής της τυχαιότητας δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί και να εξαλειφθεί. Από την άλλη, οι παραμορφώσεις που δημιουργούνται στο σήμα εξαιτίας του μη ιδανικού καναλιού μπορούν να αντιμετωπιστούν, αφού είναι εφικτή η εκτίμηση της παραμόρφωσης που προκαλεί το κανάλι και η απαλοιφή της από το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης. Η διαδικασία εκτίμησης της παραμόρφωσης ονομάζεται εκτίμηση καναλιού (channel estimation), η διαδικασία απαλοιφής των παραμορφώσεων ονομάζεται ισοστάθμιση καναλιού (channel equalization) και η διάταξη που χρησιμοποιείται για την ισοστάθμιση καναλιού ονομάζεται Ισοσταθμιστής (Equalizer).

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε στους κυριότερους ισοσταθμιστές που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, όπως ο γραμμικός ισοσταθμιστής (MMSE-LE), ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων (MMSE-DFE) και ο MAP ισοσταθμιστής και θα αναλύσουμε τη λειτουργία τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιούμε το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 1.2.

### 3.1 Ο Γραμμικός Ισοσταθμιστής

Στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή θεωρούμε ότι τα δεδομένα εισόδου στο ISI κανάλι  $x_n$  μπορούν να γραφτούν ως το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης των δεδομένων που λαμβάνει ο δέκτης με ένα φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης  $c_n$  μήκους  $N = N_1 + N_2 + 1$  (FIR φίλτρο). Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\hat{x}_n = \sum_{i=-N_1}^{N_2} c_i y_{n-i} + d_n, \quad (3.1)$$

όπου στη σχέση (3.1)  $c_i$ ,  $i = -N_1, \dots, N_2$  είναι οι συντελεστές του FIR φίλτρου που συνελίσσεται με τα λαμβανόμενα δεδομένα  $y_{n-i}$  του δέκτη και  $d_n$  είναι ένας παράγοντας που αντισταθμίζει την τυχόν μη μηδενική μέση τιμή των  $x_n$ . Από την άλλη γνωρίζουμε από τη σχέση (1.2) ότι κάθε δεδομένο  $y_k$  που λαμβάνει ο δέκτης είναι αποτέλεσμα της συνέλιξης των αρχικών δεδομένων που στέλνει ο πομπός με την κρουστική απόκριση του καναλιού, στο οποίο προστίθεται θόρυβος  $w_k$ . Για το ISI κανάλι θεωρούμε ότι  $M_1 = 0$ , άρα  $M = M_1 + 1 \Rightarrow M_1 = M - 1$ . Δηλαδή η σχέση (1.2) γίνεται

$$y_k = \sum_{j=0}^{M-1} h_j x_{k-j} + w_k. \quad (3.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (3.2), η σχέση (3.1) ξαναγράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \sum_{i=-N_1}^{N_2} c_i \left( \sum_{j=0}^{M-1} h_j x_{n-i-j} + w_{n-i} \right) + d_n \\ &= \sum_{i=-N_1}^{N_2} c_i \sum_{j=0}^{M-1} h_j x_{n-i-j} + \sum_{i=-N_1}^{N_2} c_i w_{n-i} + d_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= [c_{N_2}, \dots, c_0, \dots, c_{-N_1}]^T, \\ \underline{w}_n &= [w_{n-N_2}, \dots, w_n, \dots, w_{n+N_1}]^T, \\ \underline{x}_n &= [x_{n-M-N_2+1}, \dots, x_n, \dots, x_{n+N_1}]^T, \\ \underline{y}_n &= [y_{n-N_2}, \dots, y_n, \dots, y_{n+N_1}]^T, \end{aligned} \quad (3.4)$$

και τη μήτρα

$$H = \begin{bmatrix} h_{M-1} & h_{M-2} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{M-1} & h_{M-2} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{M-1} & h_{M-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

μεγέθους  $N \times N + M - 1$ , τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις σε πιο εύχρηστη μορφή. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, το διάνυσμα  $\underline{y}_n$  γράφεται

$$\underline{y}_n = H \underline{x}_n + \underline{w}_n, \quad (3.6)$$

η σχέση (3.1) γράφεται

$$\hat{x}_n = \underline{c}_n^T \underline{y}_n + d_n \quad (3.7)$$

και η σχέση (3.3) γράφεται

$$\hat{x}_n = \underline{c}_n^T H \underline{x}_n + \underline{c}_n^T \underline{w}_n + d_n. \quad (3.8)$$

Οπότε, σύμφωνα με την γραμμική ισοστάθμιση, προκειμένου να ανακτήσουμε τα αρχικά μας δεδομένα  $x_n$  (κατά προσέγγιση), πρέπει με κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $\underline{c}_n$  του ισοσταθμιστή και τον παράγοντα αντιστάθμισης  $d_n$ . Το πλέον διαδεδομένο και σύννηθες κριτήριο είναι αυτό της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος του πραγματικού δεδομένου  $x_n$  που στάλθηκε σε σχέση με την προσέγγιση  $\hat{x}_n$  που δίνει ως έξοδο ο γραμμικός ισοσταθμιστής<sup>1</sup>. Δηλαδή

$$(\underline{c}_n, d_n) = \underset{\underline{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, d \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \{ |x_n - \hat{x}_n|^2 \}. \quad (3.9)$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί εύκολα να επιλυθεί χρησιμοποιώντας μερικές παραγώγους, από τη στιγμή που δεν υπάρχουν περιορισμοί στο σύνολο των αγνώστων παραμέτρων. Έτσι χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.7) και παραγωγίζοντας τη σχέση (3.9)

<sup>1</sup>Ο γραμμικός ισοσταθμιστής αυτού του τύπου ονομάζεται MMSE-LE.

ως προς τις  $N + 1$  άγνωστες παραμέτρους παίρνουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις.

$$\frac{\partial \mathbb{E} \{ |x_n - \hat{x}_n|^2 \}}{\partial \underline{c}_n} = -2 \mathbb{E} \left\{ \left( x_n - \underline{c}_n^T \underline{y}_n - d_n \right) \underline{y}_n^T \right\} = 0_{1 \times N} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E} \{ |x_n - \hat{x}_n|^2 \}}{\partial d_n} = -2 \mathbb{E} \left\{ x_n - \underline{c}_n^T \underline{y}_n - d_n \right\} = 0. \quad (3.11)$$

Για την εξίσωση (3.11), χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.6), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ x_n \} - \underline{c}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{y}_n \} - d_n &= 0 \\ \mathbb{E} \{ x_n \} - \underline{c}_n^T \mathbb{E} \{ H \underline{x}_n + \underline{w}_n \} - d_n &= 0 \\ \mathbb{E} \{ x_n \} - \underline{c}_n^T H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} &= d_n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Για την εξίσωση (3.10), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6) και (3.12), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ x_n \underline{y}_n^T \} - \underline{c}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{y}_n \underline{y}_n^T \} - d_n \mathbb{E} \{ \underline{y}_n^T \} &= 0_{1 \times N} \\ \mathbf{C}_{x_n, \underline{x}_n} H^T - \underline{c}_n^T (H \mathbf{C}_{\underline{x}_n} H^T + \sigma_w^2 I_N) &= 0_{1 \times N}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{x_n, \underline{x}_n} &= \mathbb{E} \{ x_n \underline{x}_n^T \} - \mathbb{E} \{ x_n \} \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^T \}, \\ \mathbf{C}_{\underline{x}_n} &= \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \underline{x}_n^T \} - \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^T \}, \end{aligned}$$

είναι το διάνυσμα ετεροδιασποράς του  $x_n$  με το  $\underline{x}_n$  και η μήτρα συνδιασποράς του  $\underline{x}_n$  αντίστοιχα. Με δεδομένο ότι δύο διαφορετικά δεδομένα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, δηλαδή

$$\mathbf{C}_{x_i, x_j} = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ \Delta \{ x_i \}, & \text{για } i = j, \end{cases}$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{x_n, \underline{x}_n} &= \Delta \{ x_n \} [0_{1 \times N_2 + M - 1}, 1, 0_{1 \times N_1}] = \Delta \{ x_n \} \underline{u}^T \\ \mathbf{C}_{\underline{x}_n} &= \text{Diag} \left( [\Delta \{ x_{n-M-N_2+1} \}, \dots, \Delta \{ x_n \}, \dots, \Delta \{ x_{n+N_1} \}] \right). \end{aligned}$$

όπου οι συμβολισμοί  $\mathbb{E} \{ x \}$ ,  $\Delta \{ x \}$  δηλώνουν τη μέση τιμή και διασπορά του  $x$  και το  $\text{Diag}(\underline{y})$  με  $\underline{y}$  διάνυσμα διαστάσεων  $A \times 1$  δηλώνει τη μήτρα διαστάσεων  $A \times A$  που



έχει ως κύρια διαγώνιο το διάνυσμα  $\underline{y}$ .

Προφανώς από τη παραπάνω ανάλυση τα βέλτιστα  $\underline{c}_n, d_n$ , τα οποία ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ του  $x_n$  και του  $\hat{x}_n$  είναι τα

$$\begin{aligned}\underline{c}_n &= \Delta \{x_n\} (HC_{\underline{x}_n} H^T + \sigma_\omega^2 I_N)^{-1} H u, \\ d_n &= \mathbb{E} \{x_n\} - \underline{c}_n^T H \mathbb{E} \{\underline{x}_n\}.\end{aligned}$$

Η εκτίμηση  $\hat{x}_n$ , δηλαδή, που δίνει ο γραμμικός ισοσταθμιστής για το δεδομένο  $x_n$  είναι

$$\hat{x}_n = \mathbb{E} \{x_n\} + \Delta \{x_n\} u^T H (HC_{\underline{x}_n} H^T + \sigma_\omega^2 I_N)^{-1} \left[ \underline{y}_n - H \mathbb{E} \{\underline{x}_n\} \right] \quad (3.14)$$

Στην κλασική περίπτωση θεωρούμε τα δεδομένα  $x_n$  ισοπίθανα, άρα  $C_{\underline{x}_n} = I_N$ ,  $\mathbb{E} \{x_n\} = 0$  και  $\Delta \{x_n\} = 1$ . Στη περίπτωση αυτή η εκτίμηση παίρνει τη μορφή

$$\hat{x}_n = u^T H (H H^T + \sigma_\omega^2 I_N)^{-1} \underline{y}_n \quad (3.15)$$

### 3.1.1 Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας

Το κύριο πρόβλημα στον υπολογισμό της προσέγγισης του  $\hat{x}_n$  στη σχέση (3.14) είναι ότι απαιτείται η αντιστροφή μίας μήτρας για κάθε δεδομένο εισόδου  $y_n$  του ισοσταθμιστή. Δηλαδή η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι  $O(N^3)$  ανά δεδομένο εισόδου  $y_n$ . Η πολυπλοκότητα αυτή μπορεί να γίνει  $O(N^2)$  αν χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη μήτρα του προηγούμενου δεδομένου για τον υπολογισμό της αντιστροφής της μήτρας του τρέχοντος δεδομένου. Ο αλγόριθμος θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Έστω λοιπόν ότι

$$A_{n-1} = HC_{\underline{x}_{n-1}} H^T + \sigma_\omega^2 I_N \quad (3.16)$$

$$A_n = HC_{\underline{x}_n} H^T + \sigma_\omega^2 I_N. \quad (3.17)$$

Παρατηρούμε ότι οι μήτρες των σχέσεων (3.16) και (3.17) είναι συμμετρικές, άρα και οι αντίστροφες τους θα είναι συμμετρικές. Ακόμη θεωρούμε ως  $H_1$  τη μήτρα της σχέσης (3.5) μεγέθους  $N - 1 \times N + M - 2$ , και

$$\begin{aligned}\underline{h}_{M-2} &= [h_{M-2}, h_{M-3}, \dots, h_0, 0_{1 \times N-1}]^T, \\ \underline{h} &= [h_{M-1}, \underline{h}_{M-2}^T]^T, \\ \underline{h}_1 &= [0_{1 \times N-1}, h_{M-1}, h_{M-2}, \dots, h_1]^T, \\ \underline{h}_r &= [\underline{h}_1^T, h_0]^T.\end{aligned}$$

Δηλαδή η μήτρα  $H$  της σχέσης (3.5) μπορεί να γραφτεί ως

$$H = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \underline{h}_{M-2}^T \\ 0_{N-1 \times 1} & H_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & 0_{N-1 \times 1} \\ \underline{h}_1^T & h_0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Οι μήτρες συνδιασποράς  $C_{\underline{x}_{n-1}}$  και  $C_{\underline{x}_n}$  δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_{n-1}} &= \text{Diag}([\Delta\{x_{n-M-N_2}\} \Delta\{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta\{x_{n-M-N_2}\} & 0_{1 \times N+M-2} \\ 0_{N+M-2 \times 1} & V \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_n} &= \text{Diag}([\Delta\{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}, \Delta\{x_{n+N_1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} V & 0_{N+M-2 \times 1} \\ 0_{1 \times N+M-2} & \Delta\{x_{n+N_1}\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

με  $V = \text{Diag}([\Delta\{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}])$ .

Η μήτρα  $A_{n-1}$  της σχέσης (3.16) με τη βοήθεια των σχέσεων (3.18) και (3.20) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \sigma_\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times N-1} \\ 0_{N-1 \times 1} & I_{N-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_{M-1} & \underline{h}_{M-2}^T \\ 0_{N-1 \times 1} & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\{x_{n-M-N_2}\} & 0_{1 \times N+M-2} \\ 0_{N+M-2 \times 1} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{M-1} & 0_{1 \times N-1} \\ \underline{h}_{M-2} & H_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 + \underline{h}^T C_{\underline{x}_{n-1}} \underline{h} & (H_1 V \underline{h}_{M-2})^T \\ H_1 V \underline{h}_{M-2} & H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Συμβολίζουμε την μήτρα  $A_{n-1}$  πιο απλά για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & \underline{b}_{n-1}^T \\ \underline{b}_{n-1} & B \end{bmatrix},$$

με  $a_{n-1} = \sigma_\omega^2 + \underline{h}^T C_{\underline{x}_{n-1}} \underline{h}$ ,  $\underline{b}_{n-1} = H_1 V \underline{h}_{M-2}$  και  $B = H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N-1}$ .

Παρατηρούμε ότι το  $B$  είναι και αυτό συμμετρικό, άρα και το  $B^{-1}$  θα είναι συμμετρικό.

Χρησιμοποιώντας το schur's inversion lemma για να βρούμε την αντίστροφη μήτρα της  $A_{n-1}$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
 A_{n-1}^{-1} &= \begin{bmatrix} a_{n-1} & \underline{b}_{n-1}^T \\ \underline{b}_{n-1} & B \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times N-1} \\ 0_{N-1 \times 1} & B^{-1} \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -B^{-1}\underline{b}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(B^{-1}\underline{b}_{n-1})^T \end{bmatrix}}{a_{n-1} - \underline{b}_{n-1}^T B^{-1} \underline{b}_{n-1}} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{n-1}} & -\frac{(B^{-1}\underline{b}_{n-1})^T}{\mu_{n-1}} \\ -\frac{B^{-1}\underline{b}_{n-1}}{\mu_{n-1}} & B^{-1} + \frac{1}{\mu_{n-1}} B^{-1} \underline{b}_{n-1} (B^{-1}\underline{b}_{n-1})^T \end{bmatrix}, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

με  $\mu_{n-1} = a_{n-1} - \underline{b}_{n-1}^T B^{-1} \underline{b}_{n-1}$ .

Αν θεωρήσουμε ότι το  $A_{n-1}^{-1}$  είναι γνωστό και της μορφής

$$A_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} f_{n-1} & \underline{g}_{n-1}^T \\ \underline{g}_{n-1} & G_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

τότε

$$f_{n-1} = \frac{1}{\mu_{n-1}}, \quad (3.25)$$

$$\underline{g}_{n-1} = -\frac{B^{-1}\underline{b}_{n-1}}{\mu_{n-1}}, \quad (3.26)$$

$$G_{n-1} = B^{-1} + \mu_{n-1} \underline{g}_{n-1} \underline{g}_{n-1}^T. \quad (3.27)$$

Έτσι αν είναι γνωστή η μήτρα  $A_{n-1}^{-1}$  τότε η μήτρα  $B^{-1}$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (3.27) με  $O(N^2)$  πράξεις.

Η μήτρα  $A_n$  της σχέσης (3.17) με τη βοήθεια των σχέσεων (3.19) και (3.21) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sigma_\omega^2 \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0_{N-1 \times 1} \\ 0_{1 \times N-1} & 1 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} H_1 & 0_{N-1 \times 1} \\ \underline{h}_1^T & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0_{N+M-2 \times 1} \\ 0_{1 \times N+M-2} & \Delta \{x_{n+N_1}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T & \underline{h}_1 \\ 0_{1 \times N-1} & h_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N-1} & H_1 V \underline{h}_1 \\ (H_1 V \underline{h}_1)^T & \sigma_\omega^2 + \underline{h}_r^T C_{\underline{x}_n} \underline{h}_r \end{bmatrix}. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε την μήτρα  $A_n$  της παραπάνω σχέσης πιο απλά για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$A_n = \begin{bmatrix} B & \underline{b}_n \\ \underline{b}_n^T & a_n \end{bmatrix},$$

με  $a_n = \sigma_\omega^2 + \underline{h}_r^T \mathbf{C}_{\underline{x}_n} \underline{h}_r$ ,  $\underline{b}_n = H_1 V \underline{h}_1$  και  $B = H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N-1}$ . Χρησιμοποιώντας το schur's inversion lemma για να βρούμε την αντίστροφη μήτρα της  $A_n$ , έχουμε

$$\begin{aligned} A_n^{-1} &= \begin{bmatrix} B & \underline{b}_n \\ \underline{b}_n^T & a_n \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0_{N-1 \times 1} \\ 0_{1 \times N-1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -B^{-1} \underline{b}_n \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(B^{-1} \underline{b}_n)^T & 1 \end{bmatrix}}{a_n - \underline{b}_n^T B^{-1} \underline{b}_n} \\ &= \begin{bmatrix} B^{-1} + \frac{1}{\mu_n} B^{-1} \underline{b}_n (B^{-1} \underline{b}_n)^T & -\frac{B^{-1} \underline{b}_n}{\mu_n} \\ -\frac{(B^{-1} \underline{b}_n)^T}{\mu_n} & \frac{1}{\mu_n} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

με  $\mu_n = a_n - \underline{b}_n^T B^{-1} \underline{b}_n$ .

Δηλαδή το  $A_n^{-1}$  είναι της μορφής

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} G_n & \underline{g}_n \\ \underline{g}_n^T & f_n \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Έτσι αν γνωρίζουμε την μήτρα  $A_{n-1}^{-1}$ , υπολογίζουμε από τη σχέση (3.27) το  $B^{-1}$  με  $O(N^2)$  πράξεις, υπολογίζουμε το  $\underline{b}_n = H_1 V \underline{h}_1$  με  $O(N^2)$  πράξεις, υπολογίζουμε το  $B^{-1} \underline{b}_n$  με  $O(N^2)$  πράξεις, τα  $G_n$  και  $\underline{g}_n$  με  $O(N^2)$  πράξεις και τελικά υπολογίζουμε την  $A_n^{-1}$  με  $O(N^2)$  πράξεις. Συγκεντρωτικά οι σχέσεις που δίνουν την αντίστροφη

μήτρα  $A_n^{-1}$  είναι οι εξής

$$\begin{aligned}
 A_{n-1}^{-1} &= \begin{bmatrix} f_{n-1} & \underline{g}_{n-1}^T \\ \underline{g}_{n-1} & G_{n-1} \end{bmatrix}, \\
 B^{-1} &= G_{n-1} - \frac{1}{f_{n-1}} \underline{g}_{n-1} \underline{g}_{n-1}^T, \\
 \underline{b}_n &= H_1 V \underline{h}_1, \\
 \underline{z} &= B^{-1} \underline{b}_n, \\
 a_n &= \sigma_\omega^2 + \underline{h}_r^T C_{\underline{x}_n} \underline{h}_r, \\
 \mu_n &= a_n - \underline{b}_n^T \underline{z}, \\
 f_n &= \frac{1}{\mu_n}, \\
 \underline{g}_n &= -f_n \underline{z}, \\
 G_n &= B^{-1} + \mu_n \underline{g}_n \underline{g}_n^T, \\
 A_n^{-1} &= \begin{bmatrix} G_n & \underline{g}_n \\ \underline{g}_n^T & f_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Έτσι για να υπολογίσουμε τα δεδομένα  $\hat{x}_n$  από τη σχέση (3.14), βρίσκουμε τη μήτρα  $A_1^{-1}$  με τον κλασικό τρόπο αντιστροφής πολυπλοκότητας  $O(N^3)$  και για τα υπόλοιπα  $A_n^{-1}$  με  $n > 1$  χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.31) που υπολογίζονται με πολυπλοκότητα  $O(N^2)$  για κάθε δεδομένο εισόδου  $y_n$  του ισοσταθμιστή.

## 3.2 Ο Ισοσταθμιστής με Επανατροφοδότηση Αποφάσεων

Ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων αποτελείται από δύο FIR γραμμικά φίλτρα, το φίλτρο εμπρός τροφοδότησης  $\underline{f}_n$  μήκους  $N = N_1 + N_2 + 1$  και το φίλτρο πίσω τροφοδότησης  $\underline{b}_n$  μήκους  $L$ . Το πρώτο φίλτρο επεξεργάζεται την λαμβανόμενη από το δέκτη ακολουθία, ενώ το δεύτερο φίλτρο επεξεργάζεται την ακολουθία παρελθόντων δεδομένων, τα οποία ο ισοσταθμιστής έχει εκτιμήσει και για τα οποία υποθέτουμε ότι η εκτίμηση τους είναι σωστή. Η εκτίμηση του ισοσταθμιστή με

επανατροφοδότηση αποφάσεων δίνεται από τη σχέση

$$\hat{x}_n = \sum_{i=-N_1}^{N_2} f_i y_{n-i} + \sum_{j=1}^L b_j x_{n-j}^d + d_n, \quad (3.32)$$

όπου  $x_k^d$  είναι hard εκτίμηση του συμβόλου  $x_k$ , την οποία θεωρούμε ότι είναι και σωστή πάντα, δηλαδή

$$x_k^d = x_k = \begin{cases} 1, & \hat{x}_k \geq 0 \\ -1, & \hat{x}_k < 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν στο να διατυπώσουμε το πρόβλημα σε μία πιο εύχρηστη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{f}_n &= [f_{N_2}, \dots, c_0, \dots, f_{-N_1}]^T, \\ \underline{b}_n &= [b_L, \dots, b_1]^T, \\ \underline{w}_n &= [w_{n-N_2}, \dots, w_n, \dots, w_{n+N_1}]^T, \\ \underline{x}_n &= [x_{n-M-N_2+1}, \dots, x_n, \dots, x_{n+N_1}]^T, \\ \underline{x}_n^d &= [x_{n-L}^d, \dots, x_{n-1}^d]^T, \\ \underline{y}_n &= [y_{n-N_2}, \dots, y_n, \dots, y_{n+N_1}]^T, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω συμβολισμούς η σχέση (3.32) γράφεται ως εξής

$$\hat{x}_n = \underline{f}_n^T \underline{y}_n + \underline{b}_n^T \underline{x}_n^d + d_n, \quad (3.34)$$

με  $\underline{y}_n = H \underline{x}_n + \underline{w}_n$ . Όπως και στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή, πρέπει να επιλέξουμε κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης, προκειμένου να υπολογίσουμε τα  $\underline{f}_n$ ,  $\underline{b}_n$  και  $d_n$ . Το κριτήριο που χρησιμοποιείται και στη περίπτωση του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων, είναι αυτό της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος του δεδομένου  $x_n$  σε σχέση με την εκτίμηση  $\hat{x}_n^2$ . Δηλαδή

$$(\underline{f}_n, \underline{b}_n, d_n) = \underset{\underline{f} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, d \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \{ |x_n - \hat{x}_n|^2 \}. \quad (3.35)$$

<sup>2</sup>Ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων αυτού του τύπου καλείται MMSE-DFE.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.35) (όπως και στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή) ως προς τις  $N+L+1$  άγνωστες παραμέτρους και εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους που προκύπτουν με το μηδέν, καταλήγουμε στις εξής τρεις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ x_n \underline{x}_n^T \} H^T &= \underline{f}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{w}_n \underline{w}_n^T \} + \underline{f}_n^T H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \underline{x}_n^T \} H^T \\ &\quad + \underline{b}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \underline{x}_n^T \} H^T + d_n \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^T \} H^T, \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$\mathbb{E} \{ x_n \underline{x}_n^{dT} \} = \underline{b}_n^T H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \underline{x}_n^{dT} \} + \underline{b}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \underline{x}_n^{dT} \} + d_n \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^{dT} \}, \quad (3.36b)$$

$$\mathbb{E} \{ x_n \} = \underline{f}_n^T H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} + \underline{b}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \} + d_n. \quad (3.36c)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις (3.36a),(3.36b) και (3.36c) καταλήγουμε στην εξής λύση

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{f}_n \\ \underline{b}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n} H^T & H C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} \\ (H C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d})^T & C_{\underline{x}_n^d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_n \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ &= M^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_n \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$d_n = \mathbb{E} \{ x_n \} - \underline{f}_n^T H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} - \underline{b}_n^T \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \}, \quad (3.37b)$$

με

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_n} &= \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \underline{x}_n^T \} - \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^T \} \\ &= \text{Diag} ([\Delta \{ x_{n-M-N_2+1} \}, \dots, \Delta \{ x_n \}, \dots, \Delta \{ x_{n+N_1} \}]), \\ C_{\underline{x}_n^d} &= \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \underline{x}_n^{dT} \} - \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^d \} \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^{dT} \} \\ &= \text{Diag} ([\Delta \{ x_{n-L}^d \}, \dots, \Delta \{ x_{n-1}^d \}]), \\ C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} &= \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \underline{x}_n^{dT} \} - \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} \mathbb{E} \{ \underline{x}_n^{dT} \}, \\ \underline{s}_n &= H (\mathbb{E} \{ \underline{x}_n x_n \} - \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} \mathbb{E} \{ x_n \}) \\ &= \Delta \{ x_n \} H [0_{1 \times N_2+M-1}, 1, 0_{1 \times N_1}]^T = \Delta \{ x_n \} H u. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Η μήτρα  $M$  της σχέσης (3.37a), της οποίας την αντίστροφη ζητάμε, είναι συμμετρική μήτρα. Ομοίως και η αντίστροφη της είναι συμμετρική.

Χρησιμοποιώντας το *schur's inversion lemma* στην εν λόγω μήτρα έχουμε

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\omega}^2 I_N + HC_{\underline{x}_n} H^T & HC_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} \\ (HC_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d})^T & C_{\underline{x}_n^d} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A & D \\ D^T & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Sigma \\ \Sigma^T & E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

όπου στη σχέση (3.39) τα  $\Gamma, \Sigma$  και  $E$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Gamma &= A^{-1} + A^{-1}D(B - D^T A^{-1}D)^{-1} D^T A^{-1} \\ &= (A - DB^{-1}D^T)^{-1} \\ &= \left( \sigma_{\omega}^2 I_N + H \left( C_{\underline{x}_n} - C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} C_{\underline{x}_n^d}^{-1} C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d}^T \right) H^T \right)^{-1}, \\ \Sigma &= -A^{-1}D(B - D^T A^{-1}D)^{-1} \\ &= -\Gamma DB^{-1} \\ &= -\Gamma HC_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} C_{\underline{x}_n^d}^{-1}, \\ E &= (B - D^T A^{-1}D)^{-1}. \end{aligned}$$

Έτσι το γραμμικό σύστημα της σχέσης (3.37a) δίνει τις εξής εκφράσεις για το εμπρός και πίσω φίλτρο του ισοσταθμιστή

$$\begin{aligned} \underline{f}_n &= \Gamma \underline{s}_n \\ &= \Delta \{x_n\} \left( \sigma_{\omega}^2 I_N + H \left( C_{\underline{x}_n} - C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} C_{\underline{x}_n^d}^{-1} C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d}^T \right) H^T \right)^{-1} H u, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_n &= \Sigma^T \underline{s}_n \\ &= -C_{\underline{x}_n^d}^{-1} C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d}^T H^T \Gamma \underline{s}_n \\ &= -C_{\underline{x}_n^d}^{-1} C_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d}^T H^T \underline{f}_n. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Από τη στιγμή που το πίσω φίλτρο τροφοδότησης σχετίζεται με ήδη εκτιμηθέντα δεδομένα  $x_k^d$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο παρελθόντα δεδομένα  $x_k^d$  για το φίλτρο πίσω τροφοδότησης. Οπότε το μήκος του φίλτρου πρέπει να είναι  $L \leq M + N_2 - 1$ . Στην πιο απλή περίπτωση παίρνουμε μήκος πίσω φίλτρου  $L = M + N_2 - 1$ , όπου το διάνυσμα  $\underline{x}_n^d$  είναι το  $\underline{x}_n^d = [x_{n-M-N_2+1}, \dots, x_{n-1}]^T$ , το οποίο θεωρούμε γνωστό



από τις παρελθούσες εκτιμήσεις του ισοσταθμιστή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\mathbf{C}_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\underline{x}_n^d} \\ 0_{N_1+1 \times L} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Τότε τα φίλτρα (εμπρός και πίσω) που περιγράφονται από τις σχέσεις (3.40) και (3.41) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \underline{f}_n &= \Gamma \underline{s}_n \\ &= \Delta \{x_n\} \left( \sigma_\omega^2 I_N + H \left( \mathbf{C}_{\underline{x}_n} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\underline{x}_n^d} & 0_{L \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times L} & 0_{N_1+1 \times N_1+1} \end{bmatrix} \right) H^T \right)^{-1} H u, \\ &= \Delta \{x_n\} \left( \sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z H^T \right)^{-1} H u, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_n &= \Sigma^T \underline{s}_n \\ &= -\mathbf{C}_{\underline{x}_n^d}^{-1} \mathbf{C}_{\underline{x}_n, \underline{x}_n^d}^T H^T \Gamma \underline{s}_n \\ &= -\mathbf{C}_{\underline{x}_n^d}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\underline{x}_n^d} & 0_{L \times N_1+1} \end{bmatrix} H^T \underline{f}_n \\ &= -\begin{bmatrix} I_L & 0_{L \times N_1+1} \end{bmatrix} H^T \underline{f}_n, \end{aligned} \quad (3.44)$$

με  $\mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z = \text{Diag}([0_{1 \times L}, \Delta \{x_n\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1}\}])$ . Από τις σχέσεις (3.34), (3.37b), (3.43) και (3.44) καταλήγουμε στην εξής μορφή της εκτίμησης που εξάγει ο ισοσταθμιστής

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \mathbb{E} \{x_n\} + \underline{f}_n^T \underline{y}_n - \underline{f}_n^T H \mathbb{E} \{\underline{x}_n\} - \underline{f}_n^T H \begin{bmatrix} I_L \\ 0_{N_1+1 \times L} \end{bmatrix} [\underline{x}_n^d - \mathbb{E} \{\underline{x}_n^d\}] \\ &= \mathbb{E} \{x_n\} + \Delta \{x_n\} u^T H^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z H^T \right)^{-1} (\underline{y}_n - H \bar{\underline{x}}_n) \end{aligned} \quad (3.45)$$

με

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_n &= [x_{n-L}^d, \dots, x_{n-1}^d, \mathbb{E} \{x_n\}, \dots, \mathbb{E} \{x_{n+N_1}\}]^T \\ &= [\underline{x}_n^{dT}, \mathbb{E} \{x_n\}, \dots, \mathbb{E} \{x_{n+N_1}\}]^T, \\ \mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z &= \text{Diag}([0_{1 \times L}, \Delta \{x_n\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1}\}]). \end{aligned}$$

Στην κλασσική περίπτωση όπου θεωρούμε τα δεδομένα  $x_n$  ισοπίθανα, δηλαδή  $\mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z = \text{Diag}([0_{1 \times L}, 1_{1 \times N_1+1}])$ ,  $\mathbb{E} \{x_n\} = 0$  και  $\Delta \{x_n\} = 1$ , η σχέση (3.45) παίρνει την γνωστή μορφή

$$\hat{x}_n = u^T H \left( H \mathbf{C}_{\underline{x}_n}^z H^T + \sigma_\omega^2 I_N \right)^{-1} \underline{y}_n \quad (3.46)$$

### 3.2.1 Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας

Και στη περίπτωση του ισοσταθμιστή με ανατροφοδότηση αποφάσεων το κύριο πρόβλημα στον υπολογισμό της προσέγγισης του  $\hat{x}_n$  στη σχέση (3.45) είναι ότι απαιτείται η αντιστροφή μίας μήτρας για κάθε δεδομένο εισόδου  $y_n$  του ισοσταθμιστή. Η πολυπλοκότητα αυτή μπορεί να γίνει  $O(N^2)$ , όπως και στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή, αν χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη μήτρα του προηγούμενου δεδομένου για τον υπολογισμό της αντιστροφής της μήτρας του τρέχοντος δεδομένου. Ο αλγόριθμος θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Έστω λοιπόν ότι

$$A_{n-1} = HC_{\underline{x}_{n-1}^z}H^T + \sigma_\omega^2 I_N \quad (3.47)$$

$$A_n = HC_{\underline{x}_n^z}H^T + \sigma_\omega^2 I_N. \quad (3.48)$$

Παρατηρούμε ότι οι μήτρες των σχέσεων (3.47) και (3.48) είναι συμμετρικές, άρα και οι αντίστροφες τους θα είναι συμμετρικές. Θεωρούμε ακόμη το διάνυσμα  $\underline{x}_n^f = [x_n, \dots, x_{n+N_1}]^T$  μεγέθους  $N_1 + 1 \times 1$ . Άρα η μήτρα  $C_{\underline{x}_n^z}^z$  γράφεται

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_n^z}^z &= \text{Diag}([0_{1 \times L}, \Delta \{ \underline{x}_n^{fT} \}]) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{M+N_2-1 \times M+N_2-1} & 0_{M+N_2-1 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times M+N_2-1} & C_{\underline{x}_n^f} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ομοίως η μήτρα  $C_{\underline{x}_{n-1}^z}^z$  γράφεται

$$C_{\underline{x}_{n-1}^z}^z = \begin{bmatrix} 0_{M+N_2-1 \times M+N_2-1} & 0_{M+N_2-1 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times M+N_2-1} & C_{\underline{x}_{n-1}^f} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Ακόμη γράφουμε τη μήτρα της σχέσης (3.5) στη μορφή

$$H = \begin{bmatrix} H_L & H_R \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

με  $H_L$  και  $H_R$  να είναι μήτρες μεγέθους  $N \times M + N_2 - 1$  και  $N \times N_1 + 1$  αντίστοιχα.

Πιο συγκεκριμένα για την μήτρα  $H_R$  έχουμε ότι

$$H_R = \begin{bmatrix} 0_{N_2 \times N_1+1} & & & & \\ h_0 & 0 & \dots & 0 & \\ h_1 & h_0 & 0 & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \dots & \dots & h_1 & h_0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N_2 \times N_1+1} \\ H'_R \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Οι μήτρες συνδιασποράς  $C_{\underline{x}_{n-1}}$  και  $C_{\underline{x}_n}$  δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_{n-1}} &= \text{Diag}([\Delta\{x_{n-1}\} \Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta\{x_{n-1}\} & 0_{1 \times N_1} \\ 0_{N_1 \times 1} & V \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_n} &= \text{Diag}([\Delta\{x_n\} \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}, \Delta\{x_{n+N_1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} V & 0_{N_1 \times 1} \\ 0_{1 \times N_1} & \Delta\{x_{n+N_1}\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

με  $V = \text{Diag}([\Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1-1}\}])$ .

Έτσι η μήτρες των σχέσεων (3.47) και (3.48) με τη βοήθεια των σχέσεων (3.49), (3.50), (3.51), (3.52), (3.53) και (3.54) γράφονται

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 I_{N_2} & 0_{N_2 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times N_2} & H'_R C_{\underline{x}_{n-1}} H'^T_R + \sigma_\omega^2 I_{N_1+1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 I_{N_2} & 0_{N_2 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times N_2} & H'_R C_{\underline{x}_n} H'^T_R + \sigma_\omega^2 I_{N_1+1} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Χρησιμοποιώντας το schur's inversion lemma για να βρούμε τις αντίστροφες μήτρες των  $A_{n-1}$  και  $A_n$  καταλήγουμε στους εξής τύπους.

$$A_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\omega^2} I_{N_2} & 0_{N_2 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times N_2} & \Gamma_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\omega^2} I_{N_2} & 0_{N_2 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times N_2} & \Gamma_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

με  $\Gamma_{n-1} = H'_R C_{\underline{x}_{n-1}} H'^T_R + \sigma_\omega^2 I_{N_1+1}$  και  $\Gamma_n = H'_R C_{\underline{x}_n} H'^T_R + \sigma_\omega^2 I_{N_1+1}$ . Άρα ουσιαστικά για να βρούμε κάποια σχέση μεταξύ των  $A_{n-1}^{-1}$  και  $A_n^{-1}$  πρέπει να βρούμε μία σχέση μεταξύ των μητρών  $\Gamma_{n-1}^{-1}$  και  $\Gamma_n^{-1}$ .

Για το σκοπό αυτό θα γράψουμε τη μήτρα  $H'_R$  στις εξής δύο μορφές

$$\begin{aligned} H'_R &= \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_0 & 0_{1 \times N_1} \\ \underline{h}_1 & H_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & 0_{N_1 \times 1} \\ \underline{h}_2^T & h_0 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Έτσι η μήτρα  $\Gamma_{n-1}$  χρησιμοποιώντας τη σχέσεις (3.53) και (3.59) γράφεται

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-1} &= \sigma_\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times N_1} \\ 0_{N_1 \times 1} & I_{N_1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_0 & 0_{1 \times N_1} \\ \underline{h}_1 & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \{x_{n-1}\} & 0_{1 \times N_1} \\ 0_{N_1 \times 1} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 & \underline{h}_1^T \\ 0_{N_1 \times 1} & H_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 + \Delta \{x_{n-1}\} h_0^2 & \Delta \{x_{n-1}\} h_0 \underline{h}_1^T \\ \Delta \{x_{n-1}\} h_0 \underline{h}_1 & \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1 \underline{h}_1^T + H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Συμβολίζουμε την μήτρα  $\Gamma_{n-1}$  πιο απλά για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$\Gamma_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & \underline{b}_{n-1}^T \\ \underline{b}_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix},$$

με  $a_{n-1} = \sigma_\omega^2 + \Delta \{x_{n-1}\} h_0^2$ ,  $\underline{b}_{n-1} = \Delta \{x_{n-1}\} h_0 \underline{h}_1$  και  $B_{n-1} = \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1 \underline{h}_1^T + H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N_1}$ . Χρησιμοποιώντας το schur's inversion lemma για τη μήτρα  $\Gamma_{n-1}$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{n-1}^{-1} &= \begin{bmatrix} a_{n-1} & \underline{b}_{n-1}^T \\ \underline{b}_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times N_1} \\ 0_{N_1 \times 1} & B_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1})^T \end{bmatrix}}{a_{n-1} - \underline{b}_{n-1}^T B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1}} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{n-1}} & -\frac{(B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1})^T}{\mu_{n-1}} \\ -\frac{B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1}}{\mu_{n-1}} & B_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\mu_{n-1}} B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1} (B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1})^T \end{bmatrix}, \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

με  $\mu_{n-1} = a_{n-1} - \underline{b}_{n-1}^T B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1}$ .

Αν θεωρήσουμε ότι το  $\Gamma_{n-1}^{-1}$  είναι γνωστό και της μορφής

$$\Gamma_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} f_{n-1} & \underline{g}_{n-1}^T \\ \underline{g}_{n-1} & G_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

τότε

$$f_{n-1} = \frac{1}{\mu_{n-1}}, \quad (3.64)$$

$$\underline{g}_{n-1} = -\frac{B_{n-1}^{-1} \underline{b}_{n-1}}{\mu_{n-1}}, \quad (3.65)$$

$$G_{n-1} = B_{n-1}^{-1} + \mu_{n-1} \underline{g}_{n-1} \underline{g}_{n-1}^T. \quad (3.66)$$

Ακόμη αν θεωρήσουμε ως  $E = H_1 V H_1^T + \sigma_w^2 I_{N_1}$ , τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 B_{n-1} &= E + \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1 \underline{h}_1^T \\
 E &= B_{n-1} - \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1 \underline{h}_1^T \\
 E^{-1} &= (B_{n-1} - \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1 \underline{h}_1^T)^{-1} \\
 E^{-1} &= B_{n-1}^{-1} + \frac{\Delta \{x_{n-1}\} B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1 (B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1)^T}{1 - \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1^T B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1}. \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

Έτσι αν είναι γνωστό το  $\Gamma_{n-1}^{-1}$ , μπορούμε με  $O(N_1^2)$  πράξεις να υπολογίσουμε το  $B_{n-1}^{-1}$  από τη σχέση (3.66) και στη συνέχεια μπορούμε με  $O(N_1^2)$  πράξεις να υπολογίσουμε το  $E^{-1}$  από τη σχέση (3.67). Η μήτρα  $E^{-1}$  θα μας χρησιμεύσει στον υπολογισμό του

$\Gamma_n^{-1}$ , όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η μήτρα  $\Gamma_n$  με τη βοήθεια των σχέσεων (3.54) και (3.60) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \sigma_\omega^2 \begin{bmatrix} I_{N_1} & 0_{N_1 \times 1} \\ 0_{1 \times N_1} & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} H_1 & 0_{N_1 \times 1} \\ \underline{h}_2^T & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0_{N_1 \times 1} \\ 0_{1 \times N_1} & \Delta \{x_{n+N_1}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T & \underline{h}_2 \\ 0_{1 \times N_1} & h_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N_1} & H_1 V \underline{h}_2 \\ (H_1 V \underline{h}_2)^T & \sigma_\omega^2 + \underline{h}_2^T V \underline{h}_2 + \Delta \{x_{n+N_1}\} h_0^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Συμβολίζουμε την μήτρα  $\Gamma_n$  της παραπάνω σχέσης πιο απλά για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} E & \underline{b}_n \\ \underline{b}_n^T & a_n \end{bmatrix},$$

με  $a_n = \sigma_\omega^2 + \underline{h}_2^T V \underline{h}_2 + \Delta \{x_{n+N_1}\} h_0^2$ ,  $\underline{b}_n = H_1 V \underline{h}_2$  και  $E = H_1 V H_1^T + \sigma_\omega^2 I_{N_1}$ . Χρησιμοποιώντας το schur's inversion lemma για να βρούμε την αντίστροφη μήτρα της  $\Gamma_n$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{-1} &= \begin{bmatrix} E & \underline{b}_n \\ \underline{b}_n^T & a_n \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} E^{-1} & 0_{N_1 \times 1} \\ 0_{1 \times N_1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -E^{-1} \underline{b}_n \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(E^{-1} \underline{b}_n)^T & 1 \end{bmatrix}}{a_n - \underline{b}_n^T E^{-1} \underline{b}_n} \\ &= \begin{bmatrix} E^{-1} + \frac{1}{\mu_n} E^{-1} \underline{b}_n (E^{-1} \underline{b}_n)^T & -\frac{E^{-1} \underline{b}_n}{\mu_n} \\ -\frac{(E^{-1} \underline{b}_n)^T}{\mu_n} & \frac{1}{\mu_n} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

με  $\mu_n = a_n - \underline{b}_n^T E^{-1} \underline{b}_n$ .

Δηλαδή το  $\Gamma_n^{-1}$  είναι της μορφής

$$\Gamma_n^{-1} = \begin{bmatrix} G_n & \underline{g}_n \\ \underline{g}_n^T & f_n \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

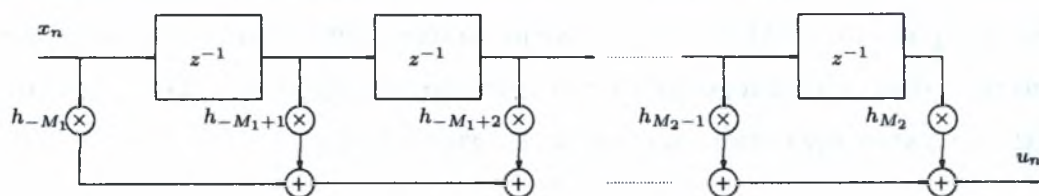
Έτσι αν το  $\Gamma_{n-1}^{-1}$  είναι γνωστό, τότε με  $O(N_1^2)$  πράξεις μπορούμε να υπολογίσουμε το  $E$  και στη συνέχεια με  $O(N_1^2)$  πράξεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $f_n$ ,  $g_n$  και  $G_n$  και τέλος από την σχέση (3.58) μπορούμε να υπολογίσουμε την μήτρα  $A_n^{-1}$ . Συγκεντρωτικά οι σχέσεις που δίνουν την αντίστροφη μήτρα  $A_n^{-1}$  είναι οι εξής

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n-1}^{-1} &= \begin{bmatrix} f_{n-1} & \underline{g}_{n-1}^T \\ \underline{g}_{n-1} & G_{n-1} \end{bmatrix}, \\
B_{n-1}^{-1} &= G_{n-1} - \frac{1}{f_{n-1}} \underline{g}_{n-1} \underline{g}_{n-1}^T, \\
E^{-1} &= B_{n-1}^{-1} + \frac{\Delta \{x_{n-1}\} B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1 (B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1)^T}{1 - \Delta \{x_{n-1}\} \underline{h}_1^T B_{n-1}^{-1} \underline{h}_1}, \\
\underline{b}_n &= H_1 V \underline{h}_2, \\
\underline{z} &= E^{-1} \underline{b}_n, \\
a_n &= \sigma_w^2 + \underline{h}_2^T V \underline{h}_2 + \Delta \{x_{n+N_1}\} h_0^2, \\
\mu_n &= a_n - \underline{b}_n^T \underline{z}, \\
f_n &= \frac{1}{\mu_n}, \\
\underline{g}_n &= -f_n \underline{z}, \\
G_n &= E^{-1} + \mu_n \underline{g}_n \underline{g}_n^T, \\
\Gamma_n^{-1} &= \begin{bmatrix} G_n & \underline{g}_n \\ \underline{g}_n^T & f_n \end{bmatrix} \\
A_n^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_w^2} I_{N_2} & 0_{N_2 \times N_1+1} \\ 0_{N_1+1 \times N_2} & \Gamma_n^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Έτσι για να υπολογίσουμε τα δεδομένα  $\hat{x}_n$  από τη σχέση (3.45), βρίσκουμε τη μήτρα  $A_1^{-1}$  με τον κλασικό τρόπο αντιστροφής πολυπλοκότητας  $O(N_1^3)$  και για τα υπόλοιπα  $A_n^{-1}$  με  $n > 1$  χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.71) που υπολογίζονται με πολυπλοκότητα  $O(N_1^2)$  για κάθε δεδομένο εισόδου  $y_n$  του ισοσταθμιστή.

### 3.3 Βέλτιστος MAP Ισοσταθμιστής

Στην ενότητα 2.3.7 ασχοληθήκαμε με την αποκωδικοποίηση συνελκτικών κωδίκων και συγκεκριμένα αναλύσαμε το MAP αποκωδικοποιητή. Η ανάλυση αυτή στηριζόταν



Σχήμα 3.1: Γραφική απεικόνιση της λειτουργίας της συνέλιξης που υλοποιεί το ISI κανάλι που έχει μήκος  $M = M_1 + M_2 + 1$ .

στο γεγονός ότι η διαδικασία της κωδικοποίησης μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία διαδικασία Markov, η οποία έχει ένα συγκεκριμένο διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων και ένα συγκεκριμένο Trellis διάγραμμα.

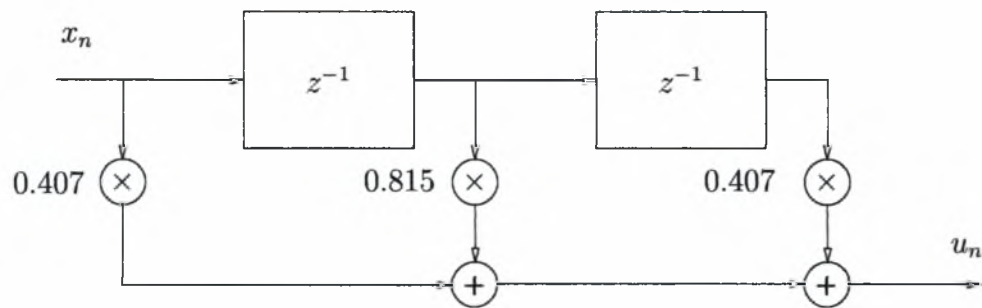
Στο σχήμα 1.2, που περιγράφει το ισοδύναμο διακριτό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, η είσοδος  $x_n$  στο ISI κανάλι μήκους  $M = M_1 + M_2 + 1$  μετασχηματίζεται στην έξοδο

$$u_n = \sum_{k=-M_1}^{M_2} h_k x_{n-k}. \quad (3.72)$$

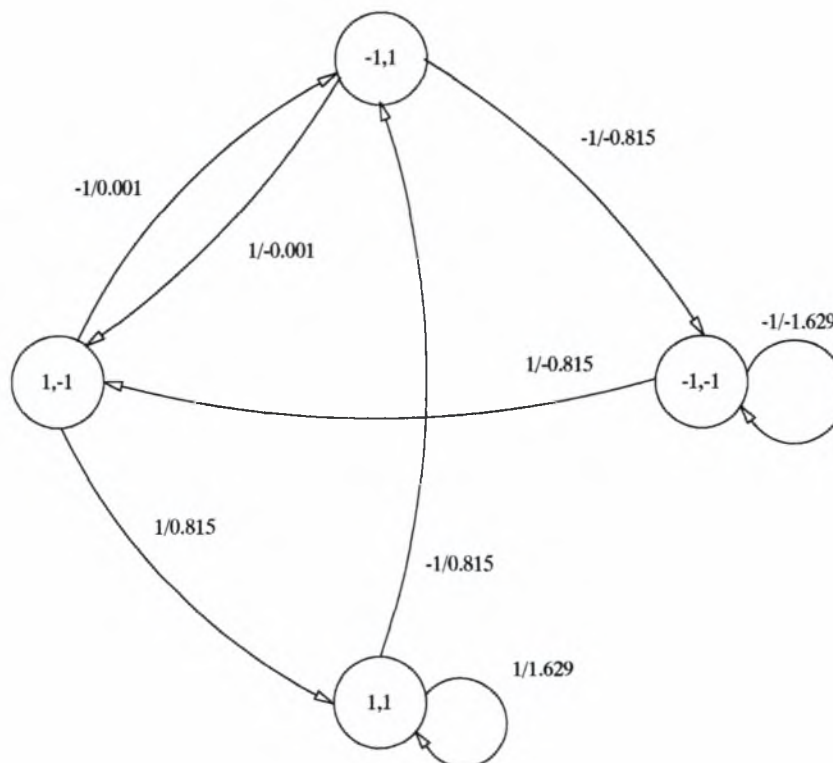
Η σχέση εισόδου και εξόδου του καναλιού μπορεί να μοντελοποιηθεί γραφικά από το σχήμα 3.1. Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε και γραφικά την σχέση της τρέχουσας εισόδου και των παρελθουσών εισόδων με την τρέχουσα έξοδο, σχέση παρόμοια με αυτή των συνελικτικών κωδίκων, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.3. Στο σχήματα αυτό διαφαίνεται η ύπαρξη  $M - 1$  καταχωρητών, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν την κατάσταση ενός καναλιού. Έτσι, δοθείσης της καταστάσεως του καναλιού και της εισόδου  $x_n$  μπορεί να υπολογιστεί η έξοδος του καναλιού  $u_n$  (διαδικασία Markov). Άρα το κανάλι μπορεί να περιγραφεί από ένα διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων και από ένα διάγραμμα Trellis. Για να οπτικοποιήσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω για παράδειγμα, το κανάλι το οποίο έχει κρουστική απόκριση  $h_n$  της μορφής

$$\begin{aligned} h_n &= h_0 \delta[n] + h_1 \delta[n-1] + h_2 \delta[n-2] \\ &= 0.407 \delta[n] + 0.815 \delta[n-1] + 0.407 \delta[n-2] \end{aligned} \quad (3.73)$$

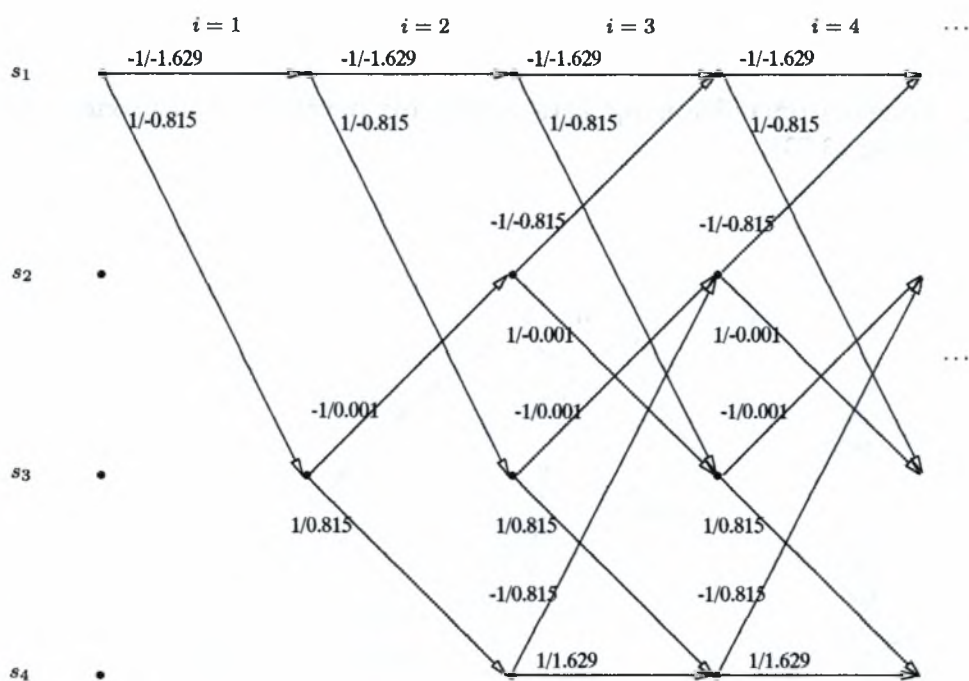




Σχήμα 3.2: Γραφική απεικόνιση της λειτουργίας της συνέλιξης που υλοποιεί το ISI κανάλι της σχέσης (3.73).



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων για το κανάλι της σχέσης (3.73).



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα Trellis για το κανάλι της σχέσης (3.73).

και απεικονίζεται γραφικά από το σχήμα 3.2. Το κανάλι αυτό όπως μπορούμε να δούμε έχει δύο καταχωρητές, άρα το διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων έχει τέσσερις καταστάσεις. Οι τέσσερις δυνατές καταστάσεις είναι  $\mathbb{S} = \{s_1 = \{-1, -1\}, s_2 = \{-1, 1\}, s_3 = \{1, -1\}, s_4 = \{1, 1\}\}$ . Το διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων για το κανάλι αυτό δείχνεται στο σχήμα 3.3. Με βάση το διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων του σχήματος 3.3 δημιουργείται το Trellis διάγραμμα για το κανάλι αυτό, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 3.4. Από τη στιγμή που η λειτουργία του ISI καναλιού του τηλεπικοινωνιακού συστήματος του σχήματος 1.2 μπορεί να περιγραφεί από ένα Trellis διάγραμμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο MAP της ενότητας 2.3.7, με κάποιες τροποποιήσεις φυσικά. Ο MAP ισοσταθμιστής, λοιπόν, λαμβάνει τα δεδομένα  $y_i$ , όπως αυτά περιγράφονται από τη σχέση (1.2), και αποφασίζει ποιο είναι το δεδομένο  $x_i$  που στάλθηκε. Στην παρακάτω ανάλυση θα θεωρήσουμε ότι το κανάλι δέχεται τα δεδομένα  $x_i$  σε ακολουθίες  $\underline{x}$  μήκους  $L$ , άρα και ο MAP ισοσταθμιστής θα λαμβάνει τα δεδομένα σε ακολουθίες  $\underline{y}$  μήκους  $L$ . Η απόφαση για το ποιο είναι το  $x_i$  λαμβάνεται σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου πιθανοφάνειας

$$L(x_i | \underline{y}) = \log \frac{\mathbb{P}(x_i = 1 | \underline{y})}{\mathbb{P}(x_i = -1 | \underline{y})} \underset{x_i = -1}{\overset{x_i = 1}{\geq}} 0. \quad (3.74)$$

Θεωρούμε ως  $\mathbb{X}$  το σύνολο όλων των  $2^L$  ακολουθιών εισόδου μήκους  $L$  του καναλιού,  $\mathbb{X}_{1,i}$  το σύνολο των  $2^{L-1}$  ακολουθιών εισόδου που έχουν το  $i$ -στο τους δεδομένο ίσο με 1 και  $\mathbb{X}_{-1,i}$  το σύνολο των  $2^{L-1}$  μηνυμάτων εισόδου που έχουν το  $i$ -στο τους δεδομένο ίσο με -1. Τότε η εκ των υστέρων πιθανότητα  $\mathbb{P}(x_i = c | \underline{y})$ , με  $c = \{-1, 1\}$  γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_i = c | \underline{y}) &= \sum_{\underline{x} \in \mathbb{X}_{c,i}} \mathbb{P}(\underline{x} | \underline{y}) \\ &= \frac{1}{p(\underline{y})} \sum_{\underline{x} \in \mathbb{X}_{c,i}} p(\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{p(\underline{y})} \sum_{\underline{x} \in \mathbb{X}_{c,i}} p(\underline{y} | \underline{x}) \mathbb{P}(\underline{x}) \quad (3.76)$$

Με δεδομένη τη σχέση (1.2), μπορούμε να γράψουμε ότι  $\underline{y} = H\underline{x} + \underline{w}$ , με  $\underline{w} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 I_L)$ . Δηλαδή  $\underline{y} \sim \mathcal{N}(H\underline{x}, \sigma_w^2 I_L)$ . Άρα η πιθανότητα  $p(\underline{y} | \underline{x})$  ακολουθεί κατανομή Gauss με μέση τιμή  $H\underline{x}$  και μήτρα συνδιασποράς  $\sigma_w^2 I_L$ . Αν επιπλέον

θεωρήσουμε ότι κάθε ακολουθία εισόδου  $\underline{x}$  από τις  $2^L$  δυνατές έχει την ίδια πιθανότητα, τότε  $\mathbb{P}(\underline{x}) = 1/2^L$ . Στην περίπτωση αυτή η σχέση (3.76) γράφεται

$$\mathbb{P}(x_i = c | \underline{y}) = \frac{1}{2^L \cdot p(\underline{y})} \sum_{\underline{x} \in X_{c,i}} p(\underline{y} | \underline{x}) = \frac{1}{2 \cdot p(\underline{y})} \sum_{\underline{x} \in X_{c,i}} \frac{1}{2^{L-1}} p(\underline{y} | \underline{x}) \quad (3.77)$$

Η σχέση (3.77) μας δείχνει ότι η  $\mathbb{P}(x_i = c | \underline{y})$  είναι μία Gaussian μίξη (Gaussian Mixture) πολλαπλασιασμένη με μία ποσότητα, όπου μία Gaussian μίξη είναι μία συνάρτηση  $gm(\underline{y})$  η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$gm(\underline{y}) = \sum_{i=1}^N p_i \phi(\underline{y}; \underline{x}_i, V_i)$$

$$\phi(\underline{y}; \underline{x}_i, V_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^L \det(V_i)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{x}_i)^T V_i^{-1}(\underline{y}-\underline{x}_i)},$$

με  $p_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Δηλαδή πρόκειται για ένα κανονικοποιημένο άθροισμα πιθανοτήτων που ακολουθούν κατανομή Gauss. Από την παραπάνω ανάλυση και θεωρώντας τη σχέση

$$gm_{(c)}(\underline{y}) = \sum_{\underline{x} \in X_{c,i}} \frac{1}{2^{L-1}} p(\underline{y} | \underline{x})$$

$$= \sum_{\underline{x} \in X_{c,i}} \frac{1}{2^{L-1}} \phi(\underline{y}; H\underline{x}, \sigma_\omega^2 I_L),$$

μπορούμε να γράψουμε το λόγο πιθανοφάνειας της σχέσης (3.74) ως

$$L(x_i | \underline{y}) = \log \frac{gm_{(1)}(\underline{y})}{gm_{(-1)}(\underline{y})} \underset{x_i=-1}{\overset{x_i=1}{\geq}} 0. \quad (3.78)$$

Στην περίπτωση που δεν θεωρούμε τα  $\underline{x}$  ισοπίθανα και πάλι μπορεί να γραφτεί ο λόγος πιθανοφάνειας σε παρόμοια με την (3.78) μορφή. Συγκεκριμένα γράφεται

$$L(x_i | \underline{y}) = \log \frac{gm_{(1)}(\underline{y}) \sum_{\underline{x} \in X_{1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})}{gm_{(-1)}(\underline{y}) \sum_{\underline{x} \in X_{-1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})} \underset{x_i=-1}{\overset{x_i=1}{\geq}} 0$$

$$= \log \frac{gm_{(1)}(\underline{y})}{gm_{(-1)}(\underline{y})} + \log \frac{\sum_{\underline{x} \in X_{1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})}{\sum_{\underline{x} \in X_{-1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})} \underset{x_i=-1}{\overset{x_i=1}{\geq}} 0 \quad (3.79)$$

Από την σχέση (3.79) βγαίνει το κύριο συμπέρασμα της μέχρι τώρα ανάλυσης για τον MAP ισοσταθμιστή, συμπέρασμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο σε ένα από τους τρεις αλγορίθμους που θα προταθούν για την επαναληπτική ισοστάθμιση.

**Συμπέρασμα 3.3.1:** Ο λόγος πιθανοφάνειας του MAP ισοσταθμιστή, που είναι ο βέλτιστος ισοσταθμιστής, είναι ο λόγος (σε λογαριθμική κλίμακα πάντα) από δύο Gaussian mixtures συν μία ποσότητα η οποία αποτελείται από a-priori πιθανότητες.

Η σχέση (3.79) μας δίνει μία λύση για το πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο πιθανοφάνειας, αλλά πρακτικά δεν μπορεί να υπολογιστεί. Ο υπολογισμός του απαιτεί τη δημιουργία όλων των δυνατών  $2^L$  διανυσμάτων  $\underline{x}$  μήκους  $L$  και τον υπολογισμό  $2^L$  Gaussian πιθανοτήτων, γεγονός που τον καθιστά πρακτικά μη υπολογίσιμο. Για παράδειγμα αν  $L = 10000$ , απαιτείται να βρούμε όλα τα  $2^{10000}$  δυνατά διανύσματα. Έτσι δημιουργείται και πάλι η χρήση ενός ευφυούς αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος είναι και πάλι ο αλγόριθμος εμπρός-πίσω διάσχισης, ο οποίος διατυπώθηκε στην ενότητα 2.3.7. Για την περίπτωση του MAP ισοσταθμιστή θεωρούμε ως  $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_{2^M-1}\}$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων, στα οποία μπορεί να βρεθεί το ISI κανάλι μήκους  $M = M_1 + M_2 + 1$ . Ακόμη θεωρούμε ως  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$  την κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το κανάλι τη χρονική στιγμή  $i$ . Έτσι από τη σχέση (3.75) έχουμε ότι

$$P(x_i = c | \underline{y}) = \frac{1}{p(\underline{y})} \sum_{\underline{x} \in \mathbb{X}_{c,i}} p(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{p(\underline{y})} \sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=c} p(s^{(i-1)}, s^{(i)}, \underline{y}). \quad (3.80)$$

Αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η έξοδος του καναλιού είναι το αποτέλεσμα μίας Markov διαδικασίας έχουμε ότι

$$p(s^{(i-1)}, s^{(i)}, \underline{y}) = \underbrace{p(s^{(i-1)}, y_1, \dots, y_{i-1})}_{\alpha_{i-1}(s^{(i-1)})} \cdot \underbrace{p(s^{(i)}, y_i | s^{(i-1)})}_{\gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)})} \cdot \underbrace{p(y_{i+1}, \dots, y_L | s^{(i)})}_{\beta_i(s^{(i)})}. \quad (3.81)$$

Η κύρια διαφορά στον υπολογισμό των  $\alpha_i(s^{(i)})$  και  $\beta_i(s^{(i)})$  μεταξύ του MAP αποκωδικοποιητή και ισοσταθμιστή είναι στο Trellis διάγραμμα. Στην περίπτωση του αποκωδικοποιητή προσθέταμε πάντα τα δεδομένα τερματισμού, έτσι ώστε πάντα η διαδικασία κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης να ξεκινάει από την κατάσταση  $s_1 = \{00\}$ . Στην περίπτωση του MAP ισοσταθμιστή κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Η

πρώτη ακολουθία  $\underline{x}$  που στέλνεται ξεκινάει από την κατάσταση  $s_1 = \{-1, -1\}$ , αλλά δεν τελειώνει σε αυτήν και μπορεί να τελειώσει σε οποιαδήποτε κατάσταση  $s^{(L)} \in \mathbb{S}$ . Η επόμενη ακολουθία ξεκινάει από την ακολουθία στην οποία τερμάτισε η προηγούμενη και πάλι μπορεί να τελειώσει σε οποιαδήποτε κατάσταση. Για αυτό το λόγο τα  $\alpha_i(s^{(i)})$  και  $\beta_i(s^{(i)})$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις.

Για το  $\alpha_i(s^{(i)})$  έχουμε

Αρχικά:

$$\alpha_0(s^{(0)} = s_i) = 1, \forall s_i \in \mathbb{S}$$

Για  $i = 1, \dots, L$ :

$$\alpha'_i(s^{(i)}) = \begin{cases} \sum_{\forall s^{(i-1)} \in \mathbb{S}} \alpha_{i-1}(s^{(i-1)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)}), & \text{Αν } \exists s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$ .

$$\alpha_i(s^{(i)}) = \frac{\alpha'_i(s^{(i)})}{\sum_{\forall s^{(i)} \in \mathbb{S}} \alpha'_i(s^{(i)})} \text{ για κάθε } s^{(i)} \in \mathbb{S}. \quad (3.82)$$

Για το  $\beta_i(s^{(i)})$  έχουμε

Αρχικά:

$$\beta_N(s^{(L)} = s_i) = 1, \forall s_i \in \mathbb{S}$$

Για  $i = L, \dots, 1$ :

$$\beta'_{i-1}(s^{(i-1)}) = \begin{cases} \sum_{\forall s^{(i)} \in \mathbb{S}} \beta_i(s^{(i)}) \gamma_i(s^{(i-1)}, s^{(i)}), & \text{Αν } \exists s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε  $s^{(i)} \in \mathbb{S}$ .

$$\beta_{i-1}(s^{(i-1)}) = \frac{\beta'_{i-1}(s^{(i-1)})}{\sum_{\forall s^{(i-1)} \in \mathbb{S}} \beta'_{i-1}(s^{(i-1)})} \text{ για κάθε } s^{(i)} \in \mathbb{S}. \quad (3.83)$$

Παρατηρούμε ότι η κύρια διαφορά των παραπάνω αναδρομικών σχέσεων με τις αναδρομικές σχέσεις (2.26) και (2.27) είναι ότι οι πρώτες έχουν αρχική τιμή 1 για κάθε κατάσταση, που είναι απόρροια του γεγονότος ότι η διαδικασία της συνέλιξης στο κανάλι δεν ξεκινάει και σταματάει στην κατάσταση  $s_1$  για κάθε ακολουθία εισόδου

α. Η ποσότητα  $\gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)})$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)}) &= p (s^{(i-1)}, y_i | s^{(i)}) \\ &= \mathbb{P} (s_i | s_{(i-1)}) \cdot p (y_i | s^{(i-1)}, s^{(i)}) \\ &= \mathbb{P} (x_i = c) \cdot p (y_i | u_i) \\ &= \mathbb{P} (x_i = c) \cdot \phi (y_i; x_i, \sigma_\omega^2), \end{aligned} \quad (3.84)$$

με  $c \in \{-1, 1\}$ . Τελικά το MAP κριτήριο για την ισοστάθμιση υπολογίζεται από τη σχέση

$$L (x_i | \underline{y}) = \log \frac{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)}) \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)})}{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=-1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)}) \gamma_i (s^{(i-1)}, s^{(i)})}. \quad (3.85)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.84) η σχέση (3.85) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{aligned} L (x_i | \underline{y}) &= \log \frac{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)}) \mathbb{P} (x_i = 1) \phi (y_i; x_i, \sigma_\omega^2)}{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=-1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)}) \mathbb{P} (x_i = -1) \phi (y_i; x_i, \sigma_\omega^2)} \\ &= \log \left( \frac{2y_i}{\sigma_\omega^2} \cdot \frac{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)})}{\sum_{s^{(i-1)} \rightarrow s^{(i)}: x_i=-1} \alpha_{i-1} (s^{(i-1)}) \beta_i (s^{(i)})} \right) \\ &\quad + \log \frac{\mathbb{P} (x_i = 1)}{\mathbb{P} (x_i = -1)} \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$= L_{extr} (x_i | \underline{y}) + L_{ap} (x_i). \quad (3.87)$$

Στην σχέση (3.87) το  $L_{ap} (x_i)$  περιέχει όλη την a-priori πληροφορία για το δεδομένο  $x_i$  και το  $L_{extr} (x_i | \underline{y})$  (extrinsic πληροφορία) περιέχει την πληροφορία όλων των άλλων  $x_j$ ,  $j \neq i$  και όλων των  $y_i$  για το  $x_i$ . Η σχέση (3.86) είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην περίπτωση της επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.



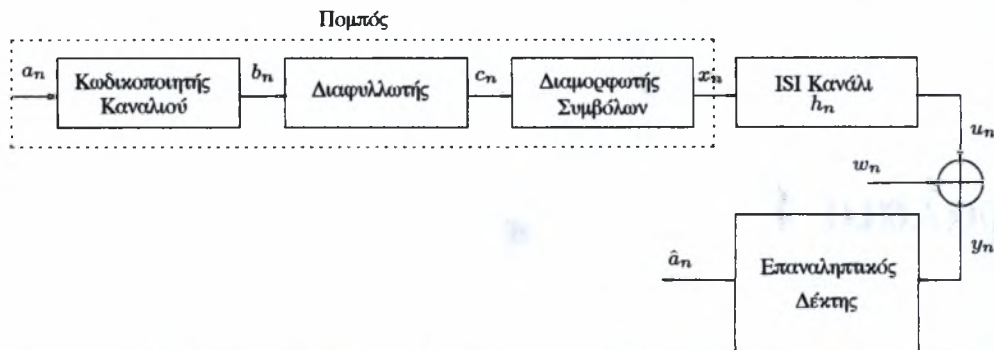


## Κεφάλαιο 4

# Επαναληπτικές Τεχνικές Ισοστάθμισης & Αποκωδικοποίησης

Στην ενότητα των Turbo κωδίκων του κεφαλαίου 2 επιλέξαμε να αναλύσουμε μόνο τους σε σειρά συγχωνευμένους συνελικτικούς κώδικες, γιατί η λογική και δομή τους είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην επαναληπτική ισοστάθμιση και αποκωδικοποίηση. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται η λογική των συγχωνευμένων συνελικτικών κωδίκων, εξηγήθηκε εμμέσως στην ενότητα 3.3, όπου όλη η ανάλυση του ισοσταθμιστή MAP έγινε θεωρώντας το ισοδύναμο διακριτό κανάλι ως ένα πεπερασμένο αυτόματο Markov. Τη διαπίστωση αυτή χρησιμοποίησαν οι Douillard et al [3] για διατυπώσουν την άποψη ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ισοδύναμο διακριτό κανάλι ως τον συνελικτικό κωδικοποιητή B ρυθμού  $R = 1$  στο σχήμα 2.6. Με δεδομένη την άποψη αυτή, έγινε δυνατή η χρήση επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, όπου τον ρόλο του MAP αποκωδικοποιητή B στο σχήμα 2.9 πήρε ο MAP ισοσταθμιστής.

Ο επαναληπτικός δέκτης που χρησιμοποιούσε επαναληπτική ισοστάθμιση και αποκωδικοποίηση είχε εξαιρετική συμπεριφορά, η οποία άγγιζε τη βέλτιστη συμπεριφορά. Το κύριο μειονέκτημα του, όμως, ήταν η μεγάλη πολυπλοκότητα, ιδίως για κανάλια με μεγάλο μήκος  $M$ . Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση της BPSK διαμόρφωσης απαιτούνται  $O(2^{M-1})$  πράξεις από τον MAP ισοσταθμιστή και  $O(2^u)$  πράξεις από τον MAP αποκωδικοποιητή ανά δεδομένο  $x_i$  ανά επανάληψη, όπου  $u$  το πλήθος των στοιχείων μνήμης του αποκωδικοποιητή. Με δεδομένο ότι το  $u$  τις

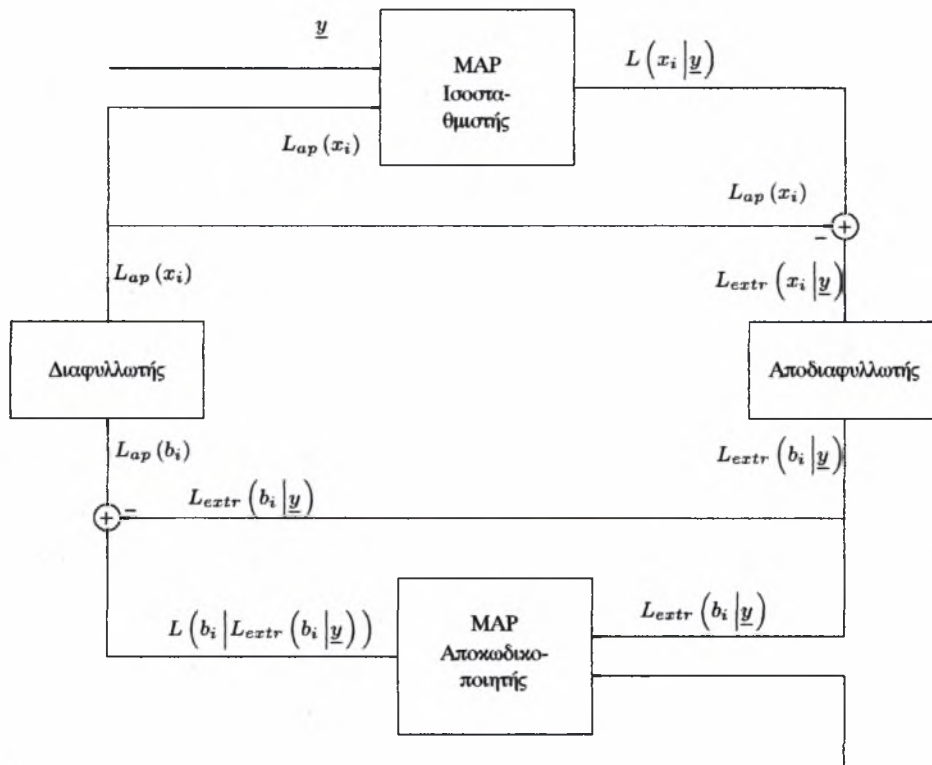


Σχήμα 4.1: Τηλεπικοινωνιακό μοντέλο στο οποίο γίνεται χρήση επαναληπτικών τεχνικών ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης.

περισσότερες φορές είναι μικρό, το κύριο πρόβλημα της πολυπλοκότητας προέρχεται από τον MAP ισοσταθμιστή, ιδίως για μεγάλα  $M$ . Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν ισοσταθμιστές μικρότερης πολυπλοκότητας, όπως ο γραμμικός ισοσταθμιστής και ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων [12] πολυπλοκότητας  $O(N^2)$ . Στην ίδια εργασία προτάθηκαν και ισοσταθμιστές γραμμικής πολυπλοκότητας που, όμως, για κανάλια με μεγάλη συχνοτική επιλεκτικότητα είχαν πολύ κακή συμπεριφορά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τη δομή των τεχνικών επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, όταν χρησιμοποιείται ο MAP ισοσταθμιστής, ο γραμμικός ισοσταθμιστής και ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων. Τέλος, θα προτείνουμε τρεις νέους αλγορίθμους ισοστάθμισης που αν χρησιμοποιηθούν σε επαναληπτικούς δέκτες παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση από αυτή του γραμμικού ισοσταθμιστή και του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων.

Στο σχήμα 4.1 δίνεται το τηλεπικοινωνιακό μοντέλο στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. Τα αρχικά δυαδικά δεδομένα  $a_n$  κωδικοποιούνται από ένα συνελικτικό κωδικοποιητή ρυθμού  $R$  και έτσι δημιουργούνται τα  $b_n$ . Ο διαφυλλωτής αναδιατάσσει τα δεδομένα και δημιουργεί τα δεδομένα  $c_n$ , τα οποία διαμορφώνονται με BPSK διαμόρφωση στα  $x_n$ . Τα δεδομένα  $x_n$  περνάνε από το κανάλι και μετά την προσθήκη θόρυβου ο δέκτης λαμβάνει



Σχήμα 4.2: Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση MAP ισοσταθμιστή.

τα δεδομένα  $y_n$ . Ο επαναληπτικός δέκτης τελικά κάνει μία εκτίμηση  $\hat{a}_n$  για τα αρχικά δεδομένα. Η ακριβής μορφή του επαναληπτικού δέκτη θα οπτικοποιηθεί στις επόμενες ενότητες.

## 4.1 Ο Βέλτιστος Επαναληπτικός Δέκτης

Ο βέλτιστος επαναληπτικός δέκτης είναι αυτός που χρησιμοποιεί τον MAP ισοσταθμιστή, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Όπως βλέπουμε από το σχήμα αυτό ο MAP ισοσταθμιστής παίρνει ως είσοδο μία ακολουθία δεδομένων  $\underline{y}$  και την a-riori πληροφορία για τα δεδομένα  $\underline{x}$  που αντιστοιχούν στα δεδομένα  $\underline{y}$  (αρχικά θεωρούμε την a-riori πληροφορία μηδενική). Ο MAP ισοσταθμιστής εξάγει τον λόγο

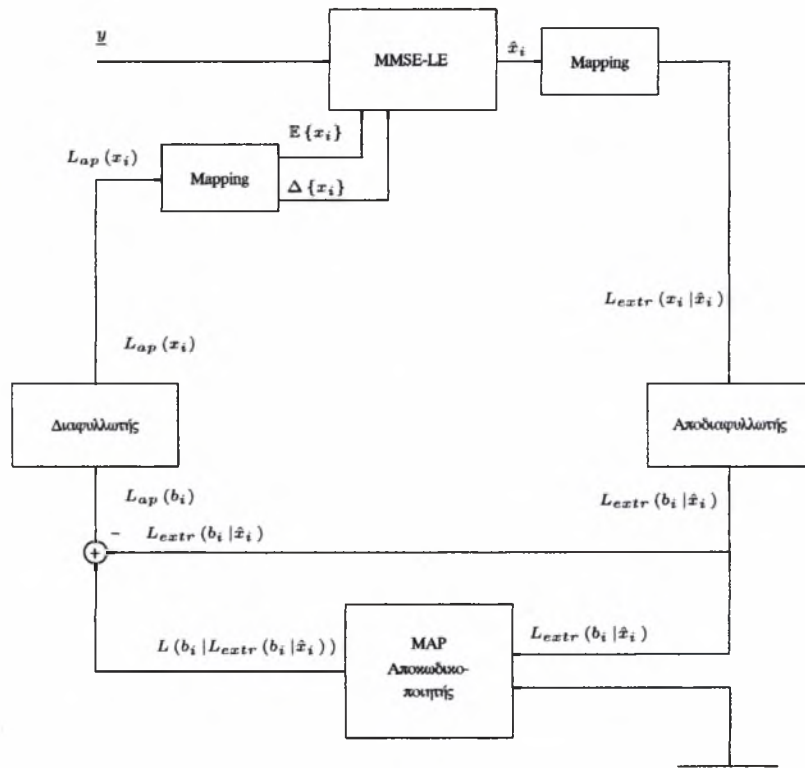
πιθανοφάνειας για τα δεδομένα  $x_i$  σύμφωνα με τη σχέση (3.86). Στη συνέχεια από αυτή τη πληροφορία αφαιρείται η a-priori πληροφορία και δημιουργείται η extrinsic πληροφορία, η οποία αναδιατάσσεται και μετασχηματίζεται στην extrinsic πληροφορία για τα δεδομένα εξόδου  $b_i$  του κωδικοποιητή. Η πληροφορία αυτή (αφού μετασχηματιστεί σε πιθανότητες) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του λόγου πιθανοφάνειας των  $b_i$  από τον αποκωδικοποιητή, σύμφωνα με τη σχέση (2.30) και με τις απαραίτητες αλλαγές στους συμβολισμούς εισόδου και εξόδου (αντί για  $x, b$  και αντί για  $\hat{x}, y$ ) του αποκωδικοποιητή. Να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι η extrinsic πληροφορία αφού μετασχηματιστεί σε πιθανότητα, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των  $\gamma$  στη σχέση (2.23). Από τον λόγο πιθανοφάνειας αυτό αφαιρείται η extrinsic πληροφορία εισόδου του αποκωδικοποιητή για να παραχθεί η a-priori πληροφορία για τα δεδομένα  $b_i$ , που μετά τον διαφυλλωτή μετασχηματίζεται στην a-priori πληροφορία για τα δεδομένα  $x_i$ . Η διαδικασία αυτή, αφού γίνει για όλη την ακολουθία δεδομένων, επαναλαμβάνεται κάποιες φορές και μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων ο αποκωδικοποιητής παράγει το λόγο πιθανοφάνειας για τα αρχικά δεδομένα  $a_i$  σύμφωνα με τη σχέση (2.28). Ο λόγος αυτός χρησιμοποιείται για να αποφασιστεί τι στάλθηκε.

## 4.2 Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-LE

Στην ενότητα 3.1 αναλύσαμε τον γραμμικό ισοσταθμιστή και αποδείξαμε ότι η έξοδος του δίνεται από τη σχέση (3.14) την οποία επαναλαμβάνουμε

$$\hat{x}_n = \mathbb{E}\{x_n\} + \Delta\{x_n\} u^T H (H C_{\underline{x}_n} H^T + \sigma_\omega^2 I_N)^{-1} [\underline{y}_n - H \mathbb{E}\{\underline{x}_n\}].$$

Στη παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε την a-priori γνώση της μέσης τιμής και της διασποράς για τα δεδομένα  $x_i$ , με  $i = n - M - N_2 + 1, \dots, N_1 + 1$ , που λαμβάνουν χώρα στον παραπάνω τύπο. Η a-priori αυτή γνώση στον επαναληπτικό δέκτη που χρησιμοποιεί τον γραμμικό ισοσταθμιστή προέρχεται από την a-priori πληροφορία  $L_{ap}(x_i)$ . Πιο συγκεκριμένα η μέση τιμή και διασπορά των  $x_i$  βρίσκεται από τις εξής



Σχήμα 4.3: Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του γραμμικού ισοσταθμιστή.

σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{x_i\} &= \sum_{x \in \{-1,1\}} x \cdot \mathbb{P}(x_i = x) \\
 &= \mathbb{P}(x_i = 1) - \mathbb{P}(x_i = -1) \\
 &= \frac{e^{L_{ap}(x_i)}}{1 + e^{L_{ap}(x_i)}} - \frac{1}{1 + e^{L_{ap}(x_i)}} \\
 &= \tanh\left(\frac{L_{ap}(x_i)}{2}\right), \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\{x_i\} &= \sum_{x \in \{-1,1\}} |x - \mathbb{E}\{x_i\}|^2 \cdot \mathbb{P}(x_i = x) \\
 &= 1 - \mathbb{E}\{x_i\}^2 \\
 &= 1 - \tanh^2\left(\frac{L_{ap}(x_i)}{2}\right). \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Έτσι δοθείσης της πληροφορίας  $L_{ap}(x_i)$  από τον αποκωδικοποιητή μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές και διασπορές για τα δεδομένα  $x_i$  που συμμετέχουν στη σχέση (3.14) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1) και (4.2).

Στην ενότητα 3.3 μιλήσαμε για τον βέλτιστο MAP ισοσταθμιστή και για την έννοια της extrinsic πληροφορίας, η οποία extrinsic πληροφορία περιέχει όλη την πληροφορία των άλλων δεδομένων για το τρέχον δεδομένο  $x_n$ . Στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή, ο ισοσταθμιστής παράγει τις εκτιμήσεις  $\hat{x}_n$  και μέσω αυτών των εκτιμήσεων δημιουργείται η extrinsic πληροφορία που θα σταλθεί στον αποκωδικοποιητή. Στην έξοδο του ισοσταθμιστή έχουμε, λοιπόν, τις εκτιμήσεις  $\hat{x}_n$ , οπότε ο λόγος πιθανοφάνειας της σχέσης (3.74) μπορεί πλέον να υπολογιστεί δοθέντων των  $\hat{x}_n$  και όχι των δοθέντων των  $y$ . Δηλαδή

$$L(x_n | \underline{y}) \approx L(x_n | \hat{x}_n) = \log \frac{\mathbb{P}(x_n = 1 | \hat{x}_n)}{\mathbb{P}(x_n = -1 | \hat{x}_n)} \tag{4.3}$$

Από την σχέση (4.3) μπορούμε να γράψουμε για τη extrinsic πληροφορία ότι

$$\begin{aligned}
 L_{extr}(x_n | \hat{x}_n) &= L(x_n | \hat{x}_n) - L_{ap}(x_n) \\
 &= \log \frac{\mathbb{P}(x_n = 1 | \hat{x}_n)}{\mathbb{P}(x_n = -1 | \hat{x}_n)} - \log \frac{\mathbb{P}(x_n = 1)}{\mathbb{P}(x_n = -1)} \\
 &= \log \frac{p(\hat{x}_n | x_n = 1)}{p(\hat{x}_n | x_n = -1)}. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Στην εργασία [5] αποδεικνύεται ότι για την έξοδο ενός MMSE ισοσταθμιστή η πιθανότητα  $p(\hat{x}_n | x_n = 1)$  ακολουθεί Gaussian κατανομή με μέση τιμή  $\mu_n = \mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\}$  και διασπορά  $\sigma_n^2 = C_{\hat{x}_n | x_n = 1}$ . Ομοίως η πιθανότητα  $p(\hat{x}_n | x_n = -1)$  ακολουθεί Gaussian κατανομή με μέση τιμή  $\mu_n = -\mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\}$  και διασπορά  $\sigma_n^2 = C_{\hat{x}_n | x_n = 1}$ . Έτσι η extrinsic πληροφορία έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} L_{extr}(x_n | \hat{x}_n) &= \log \frac{p(\hat{x}_n | x_n = 1)}{p(\hat{x}_n | x_n = -1)} \\ &= \frac{2\hat{x}_n \mu_n}{\sigma_n^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Από τη σχέση (4.5) παρατηρούμε ότι η εκτίμηση  $\hat{x}_n$  συμμετέχει στον υπολογισμό της extrinsic πληροφορίας. Η extrinsic πληροφορία, όμως, για το δεδομένο  $x_n$  περιέχει όλη την πληροφορία των δεδομένων  $x_i$  με  $i \neq n$  για το δεδομένο  $x_n$ . Δηλαδή η extrinsic πληροφορία δεν περιέχει καμία πληροφορία για το  $x_n$ . Έτσι δημιουργείται η ανάγκη αποσυσχέτισης της εκτίμησης  $\hat{x}_n$  από το δεδομένο  $x_n$ . Η λύση σε αυτό το πρόβλημα δόθηκε στην εργασία [8], στην οποία κατά τον υπολογισμό του  $\hat{x}_n$ , απαλείφουμε τη μέση τιμή  $\mathbb{E}\{x_n\}$  και διασπορά  $\Delta\{x_n\}$  από τον τύπο (3.14). Δηλαδή η σχέση (3.14) γίνεται

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \underline{s}^T (\sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n} H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T)^{-1} \left[ \underline{y}_n - H \mathbb{E}\{\underline{x}_n\} + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right] \\ &= \underline{s}^T A_n'^{-1} \left[ \underline{y}_n - H \mathbb{E}\{\underline{x}_n\} + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right] \\ &= \underline{c}_n^T \left[ \underline{y}_n - H \mathbb{E}\{\underline{x}_n\} + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

με  $\underline{s} = H u$ ,  $A_n' = \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n} H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T$  και  $\underline{c}_n = A_n'^{-1} \underline{s}$ . Με δεδομένη την σχέση (4.6) η μέση τιμή  $\mu_n = \mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\}$  και διασπορά  $\sigma_n^2 = C_{\hat{x}_n | x_n = 1}$  δίνεται

από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mathbb{E} \{ \hat{x}_n | x_n = 1 \} \\ &= \underline{c}_n^T \mathbb{E} \left\{ \underline{y}_n - H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} + \mathbb{E} \{ x_n \} \underline{s} | x_n = 1 \right\} \\ &= \underline{c}_n^T \underline{s},\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \mathbf{C}_{\hat{x}_n | x_n = 1} \\ &= \underline{c}_n^T \mathbf{C}_{\underline{y}_n | x_n = 1} \underline{c}_n \\ &= \underline{c}_n^T (\sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n} H^T - \Delta \{ x_n \} \underline{s} \underline{s}^T) \underline{c}_n \\ &= \underline{c}_n^T \underline{s} (1 - \underline{s}^T \underline{c}_n)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Έτσι η extrinsic πληροφορία της σχέσης (4.5) με την βοήθεια των σχέσεων (4.6), (4.7) και (4.8)

$$L_{extr}(x_i | \hat{x}_n) = \frac{2 \underline{c}_n^T \left[ \underline{y}_n - H \mathbb{E} \{ \underline{x}_n \} + \mathbb{E} \{ x_n \} \underline{s} \right]}{1 - \underline{s}^T \underline{c}_n}.\quad (4.9)$$

Στο σχήμα 4.3 βλέπουμε την δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του γραμμικού ισοσταθμιστή. Η a-priori πληροφορία που παράγεται από τον αποκωδικοποιητή χρησιμοποιείται για την εύρεση των  $\mathbb{E} \{ x_i \}$  και  $\Delta \{ x_i \}$  (Mapping) και στη συνέχεια, αφού ο ισοσταθμιστής δημιουργήσει τις προσεγγίσεις  $\hat{x}_n$ , υπολογίζεται μέσω της σχέσης (4.9) η extrinsic πληροφορία (Mapping). Στη συνέχεια η διαδικασία είναι η κλασική που αναλύθηκε και στην προηγούμενη ενότητα.

Στην ενότητα 3.1.1 είχαμε διατυπώσει έναν αλγόριθμο υπολογισμού της μήτρας  $A_n = \sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n} H^T$  με πολυπλοκότητα  $O(N^2)$ . Με τις αλλαγές που έγιναν στην εκτίμηση του  $\hat{x}_n$  πρέπει να γίνει αναδιατύπωση του αλγορίθμου. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι γνωρίζουμε τη μήτρα  $A_{n-1}^{-1} = (\sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_{n-1}} H^T)^{-1}$ . Χρησιμοποιούμε όπως και στη κλασική περίπτωση τον αλγόριθμο που διατυπώνεται από τις σχέσεις (3.31) και υπολογίζουμε την μήτρα  $A_n^{-1} = (\sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n} H^T)^{-1}$  με  $O(N^2)$  πράξεις. Έχουμε όμως ότι

$$\begin{aligned}A'_n &= \sigma_\omega^2 I_N + H \mathbf{C}_{\underline{x}_n} H^T + (1 - \Delta \{ x_n \}) \underline{s} \underline{s}^T \\ &= A_n + (1 - \Delta \{ x_n \}) \underline{s} \underline{s}^T\end{aligned}\quad (4.10)$$



Άρα με χρήση του matrix inversion lemma η αντίστροφη μήτρα της  $A'_n$  είναι

$$\begin{aligned} A_n'^{-1} &= (A_n + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T)^{-1} \\ &= A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) A_n^{-1} \underline{s} \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Πρακτικά ζητάμε το  $\underline{c}_n^T = \underline{s}^T A_n'^{-1}$ , το οποίο σύμφωνα με τη σχέση (4.11) ισούται με

$$\begin{aligned} \underline{c}_n^T &= \underline{s}^T A_n'^{-1} \\ &= \underline{s}^T A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) (\underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}) \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

το οποίο υπολογίζεται με  $O(N^2)$  πράξεις.

### 4.3 Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-DFE

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το σχήμα 4.4 η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή επανατροφοδότησης αποφάσεων είναι όμοια με αυτή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του γραμμικού ισοσταθμιστή του σχήματος 4.3. Οπότε η λογική λειτουργίας του δέκτη του σχήματος 4.4 είναι η ίδια με αυτή του σχήματος 4.3. Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό την έξοδο  $\hat{x}_n$  του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων, η οποία δίνεται από τη σχέση (3.45)

$$\hat{x}_n = \mathbb{E} \{x_n\} + \Delta \{x_n\} u^T H^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^z H^T \right)^{-1} \left( \underline{y}_n - H \underline{\hat{x}}_n \right).$$

Και στη περίπτωση αυτή δημιουργείται η ανάγκη εύρεσης της μέσης τιμής  $\mathbb{E} \{x_i\}$  και διασποράς  $\Delta \{x_i\}$  των  $x_i$  που συμμετέχουν στη σχέση (3.45). Η τιμές για τη μέση τιμή και διασπορά δίδονται και στην περίπτωση του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων μέσω της a-priori πληροφορίας  $L_{ap}(x_i)$  από τις σχέσεις (4.7) και (4.8) αντίστοιχα.

Ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων παράγει τις εκτιμήσεις  $\hat{x}_n$  και μέσω αυτών προσπαθεί να προσδιορίσει την extrinsic πληροφορία, οπότε μπορούμε και εδώ να πούμε ότι η extrinsic πληροφορία του ισοσταθμιστή δίνεται από τη σχέση (4.4). Ο ισοσταθμιστής με επανατροφοδότηση αποφάσεων είναι ισοσταθμιστής τύπου MMSE,



δηλαδή μπορούμε και εδώ να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας [5] και να γράψουμε την extrinsic πληροφορία στη μορφή της σχέσης (4.5). Βέβαια η μέση τιμή  $\mu_n$  και η διασπορά  $\sigma_n^2$  διαφέρουν από τη μέση τιμή και διασπορά της σχέσης (4.5) του γραμμικού ισοσταθμιστή. Δηλαδή και στον ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων η εκτίμηση  $\hat{x}_n$  συμμετέχει στον υπολογισμό της extrinsic πληροφορίας. Άρα δημιουργείται η ανάγκη να αποσυσχετιστεί η εκτίμηση  $\hat{x}_n$  από το δεδομένο  $x_n$ . Η λύση σε αυτό το πρόβλημα δόθηκε στην εργασία [8], και πάλι, στην οποία κατά τον υπολογισμό του  $\hat{x}_n$ , απαλείφεται η μέση τιμή  $\mathbb{E}\{x_n\}$  και διασπορά  $\Delta\{x_n\}$  από τη σχέση (3.45). Έτσι η σχέση (3.45) γίνεται

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= \underline{s}^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^z H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \right)^{-1} \left[ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right] \\ &= \underline{s}^T A_n'^{-1} \left[ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right] \\ &= \underline{f}_n^T \left[ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right]\end{aligned}\quad (4.13)$$

με  $\underline{s} = H u$ ,  $A_n' = \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^z H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T$  και  $\underline{f}_n = A_n'^{-1} \underline{s}$ . Με δεδομένη την σχέση (4.13) η μέση τιμή  $\mu_n = \mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\}$  και διασπορά  $\sigma_n^2 = C_{\hat{x}_n | x_n = 1}$  δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\} \\ &= \underline{f}_n^T \mathbb{E}\left\{ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} | x_n = 1 \right\} \\ &= \underline{f}_n^T \underline{s},\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= C_{\hat{x}_n | x_n = 1} \\ &= \underline{f}_n^T C_{\underline{y}_n | x_n = 1} \underline{f}_n \\ &= \underline{f}_n^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^z H^T - \Delta\{x_n\} \underline{s} \underline{s}^T \right) \underline{f}_n \\ &= \underline{f}_n^T \underline{s} \left( 1 - \underline{s}^T \underline{f}_n \right)\end{aligned}\quad (4.15)$$

Έτσι η extrinsic πληροφορία της σχέσης (4.5) με την βοήθεια των σχέσεων (4.13), (4.14) και (4.15) γράφεται

$$L_{extr}(x_n | \hat{x}_n) = \frac{2 \underline{f}_n^T \left[ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right]}{1 - \underline{s}^T \underline{f}_n}.\quad (4.16)$$

Στην ενότητα 3.2.1 είχαμε διατυπώσει έναν αλγόριθμο υπολογισμού της μήτρας  $A_n = \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_n}^z H^T$  με πολυπλοκότητα  $O(N^2)$ . Με τις αλλαγές που έγιναν στην εκτίμηση του  $\hat{x}_n$  πρέπει να γίνει αναδιατύπωση του αλγορίθμου. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι γνωρίζουμε τη μήτρα  $A_{n-1}^{-1} = \left( \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_{n-1}}^z H^T \right)^{-1}$ . Χρησιμοποιούμε όπως και στη κλασική περίπτωση τον αλγόριθμο που διατυπώνεται από τις σχέσεις (3.71) και υπολογίζουμε την μήτρα  $A_n^{-1} = \left( \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_n}^z H^T \right)^{-1}$  με  $O(N^2)$  πράξεις. Έχουμε όμως ότι

$$\begin{aligned} A'_n &= \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_n}^z H^T + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \\ &= A_n + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

Άρα από το matrix inversion lemma έχουμε

$$\begin{aligned} A_n'^{-1} &= \left( A_n + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \right)^{-1} \\ &= A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) A_n^{-1} \underline{s} \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

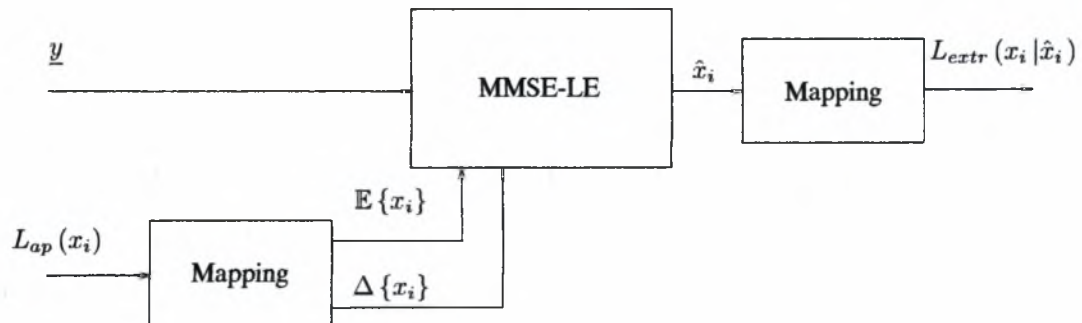
Πρακτικά ζητάμε το  $\underline{f}^T = \underline{s}^T A_n'^{-1}$ , το οποίο σύμφωνα με τη σχέση (4.18) ισούται με

$$\begin{aligned} \underline{f}^T &= \underline{s}^T A_n'^{-1} \\ &= \underline{s}^T A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) (\underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}) \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

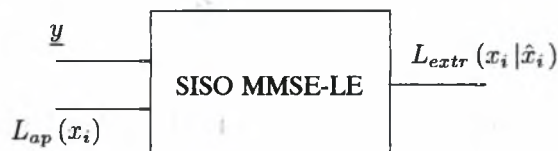
το οποίο υπολογίζεται με  $O(N^2)$  πράξεις.

## 4.4 Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-CLE

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας θα αντικαταστήσουμε τη δομή του γραμμικού ισοσταθμιστή μαζί με τις επιπλέον λειτουργίες (Mapping) που απαιτούνται για χρήση του σε επαναληπτικό δέκτη, και οποίος δείχνεται στο σχήμα 4.5, με το πιο συνοπτικό ισοδύναμο σχήμα 4.6. Στις επόμενες ενότητες θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον γραμμικό ισοσταθμιστή γιατί εξάγει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από τον ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 4.5: Δομή του γραμμικού ισοσταθμιστή με τις επιπλέον λειτουργίες που απαιτούνται για χρήση του σε επαναληπτικό δέκτη.



Σχήμα 4.6: Ισοδύναμη δομή του γραμμικού ισοσταθμιστή με αυτή του σχήματος 4.5.

Στην ενότητα 3.3 όπου αναλύσαμε τον βέλτιστο ισοσταθμιστή MAP, αποδείξαμε (Συμπέρασμα 3.3.1) ότι ο λόγος πιθανοφάνειας στην έξοδο του ισοσταθμιστή είναι ο λόγος μίας Gaussian μίξης(σε λογαριθμική κλίμακα) και δίνεται από τη σχέση (3.79). Άρα η extrinsic πληροφορία  $L_{extr}(x_i | \underline{y})$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 L_{extr}(x_i | \underline{y}) &= L(x_i | \underline{y}) - L_{ap}(x_i) \\
 &= \log \frac{gm_{(1)}(\underline{y}) \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}_{1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})}{gm_{(-1)}(\underline{y}) \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}_{-1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})} - \log \frac{\mathbb{P}(x_i = 1)}{\mathbb{P}(x_i = -1)} \\
 &= \log \frac{gm_{(1)}(\underline{y})}{gm_{(-1)}(\underline{y})} + \log \frac{\mathbb{P}(x_i = -1) \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}_{1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})}{\mathbb{P}(x_i = 1) \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}_{-1,i}} \mathbb{P}(\underline{x})} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (4.20) ότι η extrinsic πληροφορία στο βέλτιστο ισοσταθμιστή είναι ο λόγος Gaussian μίξεων συν μία ποσότητα πιθανοτήτων ανεξάρτητη της a-priori πληροφορίας του  $x_i$ . Από το συμπέρασμα αυτό εξάγεται και το πρώτο μειονέκτημα των μεθόδων επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης που αναλύθηκαν στις ενότητες 4.2 και 4.3. Είδαμε στις ενότητες αυτές ότι ο λόγος πιθανοφάνειας στην έξοδο των δύο ισοσταθμιστών (γραμμικού και ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων) είναι ο λόγος δύο Gaussian πυκνοτήτων πιθανότητας αντί για το λόγο Gaussian μίξεων (που είναι το βέλτιστο). Έτσι αν βάλουμε την ίδια a-priori πληροφορία στον MAP ισοσταθμιστή και στους γραμμικό και με επανατροφοδότηση αποφάσεων ισοσταθμιστές, ο MAP ισοσταθμιστής θα την αξιοποιήσει καλύτερα (λόγω των Gaussian μίξεων) και θα εξάγει καλύτερη extrinsic πληροφορία από ότι οι δύο ισοσταθμιστές χαμηλής πολυπλοκότητας. Από την παραπάνω ανάλυση μπορεί κανείς να βρει δύο λύσεις για να μπορέσουν οι ισοσταθμιστές χαμηλής πολυπλοκότητας να δημιουργήσουν καλύτερη extrinsic πληροφορία. Η πρώτη λύση είναι να εξάγουν οι ισοσταθμιστές extrinsic πληροφορία που να είναι Gaussian μίξη και η δεύτερη λύση είναι να λαμβάνουν a-priori πληροφορία η οποία να προσφέρει μεγαλύτερο ποσό πληροφορίας για τα δεδομένα.

Η δεύτερη λύση που μόλις αναφέρθηκε υλοποιείται με χρήση δύο γραμμικών ισοσταθμιστών αντί για ενός όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7. Το νέο επαναληπτικό σχήμα ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης, που απεικονίζεται στο σχήμα 4.7, προήλθε

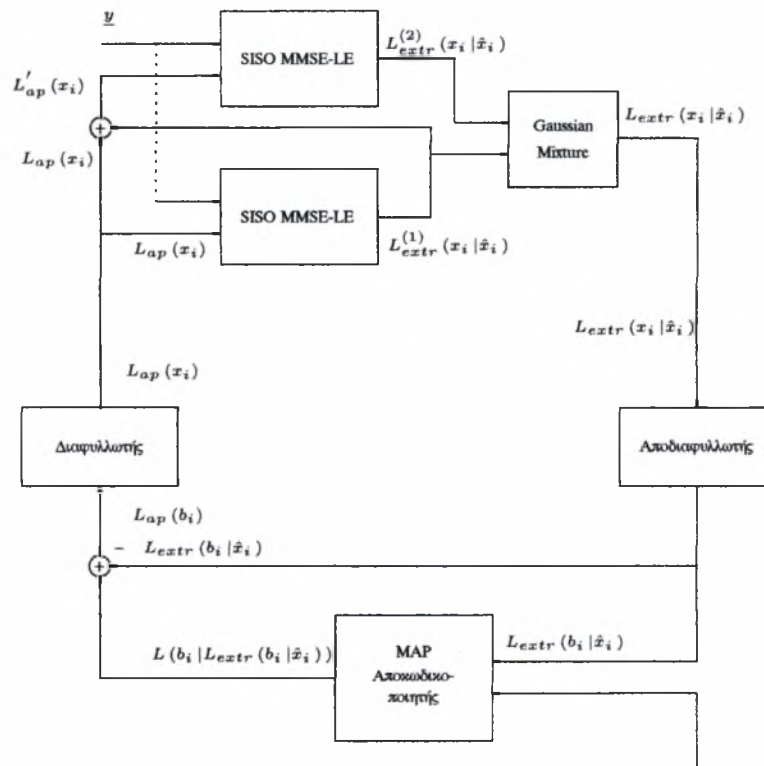


από πειραματικά αποτελέσματα τα οποία έδειχναν ότι ο γραμμικός ισοσταθμιστής από μόνος του χωρίς τη χρήση κωδικοποιητή και αποκωδικοποιητή στο τηλεπικοινωνιακό σύστημα έχει την ιδιότητα να βελτιώνει τα αποτελέσματα του αν του δώσουμε ως a-priori πληροφορία την έξοδο του (σε μορφή extrinsic λόγου πιθανοφάνειας). Δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε ένα Turbo σχήμα χωρίς κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση, όπου η extrinsic έξοδος του γραμμικού ισοσταθμιστή μπαίνει ως a-priori είσοδος στον ισοσταθμιστή, τότε η έξοδος του γραμμικού ισοσταθμιστή με το πέρασ κάποιων επαναλήψεων βελτιώνεται. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται στο σχήμα 4.7. Στο σχήμα αυτό η a-priori πληροφορία  $L_{ap}(x_i)$  του αποκωδικοποιητή εισέρχεται ως a-priori είσοδο στον πρώτο γραμμικό ισοσταθμιστή. Η extrinsic έξοδος  $L_{extr}^{(1)}(x_i|\hat{x}_i)$  του ισοσταθμιστή αυτού προστίθεται με την a-priori πληροφορία του αποκωδικοποιητή για να βελτιώσει έτσι την a-priori πληροφορία του δεύτερου γραμμικού ισοσταθμιστή δημιουργώντας την  $L'_{ap}(x_i)$ , δίνοντας του έτσι μεγαλύτερο ποσό πληροφορίας για τα δεδομένα  $x_i$ . Η extrinsic πληροφορία  $L_{extr}^{(2)}(x_i|\hat{x}_i)$  του δεύτερου ισοσταθμιστή στέλνεται στον αποκωδικοποιητή για να συνεχιστεί η λειτουργία του επαναληπτικού δέκτη. Τον συνδυασμένο αυτό ισοσταθμιστή που χρησιμοποιείται στον επαναληπτικό δέκτη του σχήματος 4.7 τον καλούμε MMSE-CLE.

## 4.5 Επαναληπτικός Δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε μία υλοποίηση για τη δεύτερη λύση που βελτιώνει την απόδοση του γραμμικού ισοσταθμιστή. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μία υλοποίηση τόσο για την πρώτη λύση που είναι να εξάγουν οι ισοσταθμιστές extrinsic πληροφορία, η οποία να είναι Gaussian μίξη, όσο και για τη δεύτερη λύση. Το τροποποιημένο αυτό σχήμα του επαναληπτικού δέκτη φαίνεται στο σχήμα 4.8. Αν καλέσουμε  $L_{extr}^{(1)}(x_i|\hat{x}_i)$  την extrinsic έξοδο του πρώτου ισοσταθμιστή και  $L_{extr}^{(2)}(x_i|\hat{x}_i)$





Σχήμα 4.8: Η δομή του επαναληπτικού δέκτη με χρήση δύο γραμμικών ισοσταθμιστών και μίξη των extrinsic πληροφοριών τους.

την extrinsic έξοδο του δεύτερου ισοσταθμιστή, τότε αυτές δίνονται από τις σχέσεις

$$L_{extr}^{(1)}(x_i | \hat{x}_i) = \log \frac{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = 1)}{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1)}, \quad (4.21)$$

$$L_{extr}^{(2)}(x_i | \hat{x}_i) = \log \frac{p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = 1)}{p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)}. \quad (4.22)$$

Άρα μπορούμε να δημιουργήσουμε μία Gaussian μίξη από τις παραπάνω πιθανότητες ως εξής

$$L_{extr}(x_i | \hat{x}_i) = \log \frac{\pi_1^{(1)} p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = 1) + \pi_1^{(2)} p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = 1)}{\pi_{-1}^{(1)} p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + \pi_{-1}^{(2)} p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)}, \quad (4.23)$$

με

$$\pi_1^{(1)} + \pi_{-1}^{(1)} = 1$$

$$\pi_1^{(2)} + \pi_{-1}^{(2)} = 1$$

$$\pi_1^{(1)} + \pi_1^{(2)} = 1$$

$$\pi_{-1}^{(1)} + \pi_{-1}^{(2)} = 1.$$

Μία λογική τιμή για τις παραπάνω ποσότητες  $\pi_1^{(2)}, \pi_{-1}^{(1)}, \pi_1^{(2)}, \pi_{-1}^{(2)}$  είναι η τιμή 0.5, η οποία υποδηλώνει ότι δίνουμε την ίδια βαρύτητα στα αποτελέσματα και των δύο ισοσταθμιστών. Έτσι η extrinsic ποσότητα της σχέσης (4.23) γίνεται

$$\begin{aligned} L_{extr}(x_i | \hat{x}_i) &= \log \frac{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = 1) + p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = 1)}{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)} \\ &= \log \frac{2 - (p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1))}{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)} \\ &= \log \left( \frac{2}{p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)} - 1 \right). \quad (4.24) \end{aligned}$$

Με δεδομένη όμως τη σχέση  $p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) + p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = 1) = 1$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.21) καταλήγουμε στο ότι

$$p(\hat{x}_i^{(1)} | x_i = -1) = \frac{1}{1 + e^{L_{extr}^{(1)}(x_i | \hat{x}_i)}}.$$

Ομοίως για την  $p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1)$  έχουμε ότι

$$p(\hat{x}_i^{(2)} | x_i = -1) = \frac{1}{1 + e^{L_{extr}^{(2)}(x_i|\hat{x}_i)}}.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$L_{extr}(x_i|\hat{x}_i) = \log\left(\frac{2}{\frac{1}{1+e^{L_{extr}^{(1)}(x_i|\hat{x}_i)}} + \frac{1}{1+e^{L_{extr}^{(2)}(x_i|\hat{x}_i)}}} - 1\right) \quad (4.25)$$

Με χρήση της σχέσης (4.25) υπολογίζουμε την νέα βελτιωμένη extrinsic ποσότητα, την οποία στέλνουμε στον αποκωδικοποιητή, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 4.8. Τον συνδυασμένο αυτό ισοσταθμιστή που χρησιμοποιείται στον επαναληπτικό δέκτη του σχήματος 4.8 τον καλούμε MMSE-GMCLE.

## 4.6 Επαναληπτικός δέκτης με χρήση του Ισοσταθμιστή MMSE-SFE

Τα δύο νέα σχήματα για τον επαναληπτικό δέκτη, όπως αναλύθηκαν στις ενότητες 4.4 και 4.5 παρουσιάζουν ένα μειονέκτημα. Απαιτούν για κάθε επανάληψη του δέκτη τη χρήση δύο ισοσταθμιστών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι διπλάσια η πολυπλοκότητα των συνδυασμένων ισοσταθμιστών σε σχέση με αυτή του απλού γραμμικού ισοσταθμιστή. Ο αλγόριθμος που θα αναλυθεί στη συνέχεια αναιρεί το πρόβλημα της πολυπλοκότητας, ενώ ταυτόχρονα προσπαθεί να υλοποιήσει τη λογική του συνδυασμένου ισοσταθμιστή MMSE-CLE της ενότητας 4.4. Στην ενότητα 4.4 είδαμε ότι ο πρώτος ισοσταθμιστής παίρνει την a-priori πληροφορία από τον αποκωδικοποιητή, και παράγει extrinsic πληροφορία. Η πληροφορία αυτή προστίθεται με την a-priori πληροφορία του αποκωδικοποιητή και η πληροφορία  $L'_{ap}(x_i)$  που προκύπτει χρησιμοποιείται ως a-priori πληροφορία για τον δεύτερο ισοσταθμιστή.

Ο γραμμικός ισοσταθμιστής, γενικά, όταν θέλει να υπολογίσει την εκτίμηση του δεδομένου  $\hat{x}_n$  χρησιμοποιεί πληροφορία για κάποια παρελθοντικά, αλλά και για κάποια μελλοντικά δεδομένα. Στη περίπτωση του συνδυασμένου ισοσταθμιστή MMSE-CLE, για την εκτίμηση του δεδομένου  $\hat{x}_n$  από τον δεύτερο ισοσταθμιστή χρησιμοποιείται η νέα αυτή a-priori πληροφορία τόσο για μελλοντικά όσο και για παρελθοντικά δεδομένα.

Αν χρησιμοποιούσαμε μόνο ένα ισοσταθμιστή, όπως στη περίπτωση του σχήματος 4.6, τότε όταν θα θέλαμε να εκτιμήσουμε το δεδομένο  $\hat{x}_n$ , θα είχαμε διαθέσιμη την a-πριοι πληροφορία από τον κωδικοποιητή για τα μελλοντικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε στην εκτίμηση και την νέα a-πριοι πληροφορία για τα παρελθοντικά δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι ο αποκωδικοποιητής στέλνει την a-πριοι πληροφορία  $L(x_i)$  στον ισοσταθμιστή για κάθε ένα από τα δεδομένα  $x_i$ . Ο ισοσταθμιστής ξεκινάει τη λειτουργία του υπολογίζοντας την εκτίμηση του  $x_1$  και στη συνέχεια τη ποσότητα  $L_{extr}(\hat{x}_1|x_1)$ . Στη συνέχεια ανανεώνει την a-πριοι πληροφορία για το  $x_1$  σύμφωνα με το τύπο  $L_{ap}^s(x_1) = L_{ap}(x_1) + L_{extr}(\hat{x}_1|x_1)$ . Όταν ο ισοσταθμιστής θα υπολογίσει την εκτίμηση του  $x_2$  θα χρειαστεί την a-πριοι πληροφορία για τα δεδομένα  $x_i$ , με  $i = \max\{1, n - M - N_2 + 1\}, \dots, n + N_1$ , μέσα στα οποία είναι και το  $x_1$ . Η πληροφορία όμως για το  $x_1$  είναι η ανανεωμένη a-πριοι πληροφορία. Θα υπολογιστεί, έτσι, η εκτίμηση για το  $x_2$ , θα γίνει η ίδια διαδικασία με το  $x_1$  και θα συνεχιστεί ο αλγόριθμος μέχρι να εκτιμηθούν όλα τα δεδομένα. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε πάντα η ανανεωμένη πληροφορία θα υπάρχει σε παρελθοντικά δεδομένα. Έτσι μέσω αυτής της επανατροφοδότησης πληροφορίας δημιουργήσαμε έναν νέο αλγόριθμο ισοστάθμισης τον οποίο αποκαλούμε MMSE-SFE. Αν καλέσουμε  $L_{ap}^s(x_i)$  την ανανεωμένη a-πριοι πληροφορία για το δεδομένο  $x_i$ ,  $\mathbb{E}_s\{x_i\}$  την ανανεωμένη μέση τιμή και  $\Delta_s\{x_i\}$  την ανανεωμένη διασπορά, τότε η εκτίμηση του δεδομένου  $x_n$  μέσω αυτού του αλγορίθμου δίνεται από τη σχέση

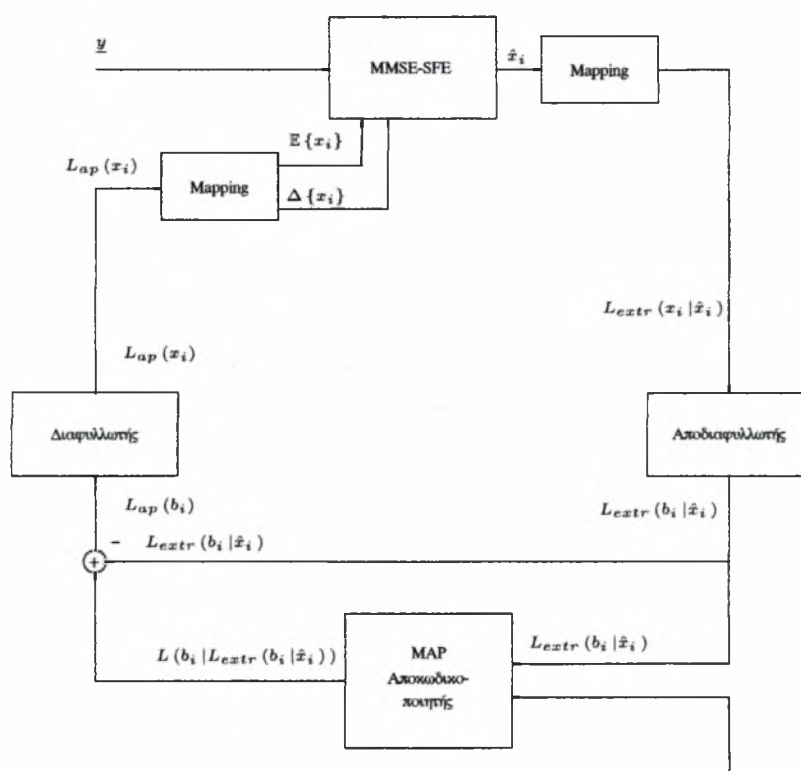
$$\hat{x}_n = \mathbb{E}\{x_n\} + \Delta\{x_n\} u^T H^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^s H^T \right)^{-1} \left( \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n \right) \quad (4.26)$$

με

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}_n &= [\mathbb{E}_s\{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \mathbb{E}_s\{x_{n-1}\}, \mathbb{E}\{x_n\}, \dots, \mathbb{E}\{x_{n+N_1}\}]^T \\ C_{\underline{x}_n}^s &= \text{Diag}([\Delta_s\{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta_s\{x_{n-1}\}, \Delta\{x_n\}, \dots, \Delta\{x_{n+N_1}\}]). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4.26) παρατηρούμε το πως ακριβώς η ανανεωμένη τιμή της a-πριοι πληροφορίας για τα παρελθοντικά δεδομένα επηρεάζει τη τιμή της εκτίμησης του  $\hat{x}_n$  του  $x_n$ .

Η extrinsic πληροφορία όπως και στη περίπτωση του γραμμικού ισοσταθμιστή και του ισοσταθμιστή με επανατροφοδότηση αποφάσεων δίνεται από τη σχέση (4.5) αφού



Σχήμα 4.9: Η δομή του επαναληπτικού δέκτη που χρησιμοποιεί τον ισοσταθμιστή MMSE-SFE.

και στη περίπτωση αυτού του ισοσταθμιστή θεωρούμε ότι η εκτίμηση  $\hat{x}_n$  ακολουθεί Gaussian κατανομή (ουσιαστικά πρόκειται για ισοσταθμιστή τύπου MMSE). Έτσι και πάλι δημιουργείται η ανάγκη αποσυσχέτισης του  $\hat{x}_n$  από το  $x_n$ , αφού το  $\hat{x}_n$  λαμβάνει χώρα στον υπολογισμό της extrinsic πληροφορίας. Ακολουθώντας τη λογική του γραμμικού ισοσταθμιστή η αποσυσχέτιση γίνεται απαλείφοντας τη μέση τιμή  $\mathbb{E}\{x_n\}$  και διασπορά  $\Delta\{x_n\}$  από τη σχέση (4.26). Άρα η σχέση (4.26) γίνεται

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= \underline{s}^T \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^s H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \right)^{-1} \left( \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right) \\ &= \underline{s}^T A_n'^{-1} \left( \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right) \\ &= \underline{c}^{bT} \left( \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right)\end{aligned}\quad (4.27)$$

με  $\underline{s} = H u$ ,  $A_n' = \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^s H^T + (1 - \Delta\{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T$  και  $\underline{c}^b = A_n'^{-1} \underline{s}$ .

Η μέση τιμή και διασπορά στη σχέση υπολογισμού της extrinsic πληροφορίας της σχέσης (4.5) δίνονται στη περίπτωση του MMSE-SFE ισοσταθμιστή από τις σχέσεις.

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mathbb{E}\{\hat{x}_n | x_n = 1\} \\ &= \underline{c}_n^{bT} \mathbb{E}\left\{ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} | x_n = 1 \right\} \\ &= \underline{c}_n^{bT} \underline{s},\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= C_{\hat{x}_n | x_n = 1} \\ &= \underline{c}_n^{bT} C_{\underline{y}_n | x_n = 1} \underline{c}_n^b \\ &= \underline{c}_n^{bT} \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^s H^T - \Delta\{x_n\} \underline{s} \underline{s}^T \right) \underline{c}_n^{bT} \\ &= \underline{f}_n^T \underline{s} \left( 1 - \underline{s}^T \underline{f}_n \right)\end{aligned}\quad (4.29)$$

Έτσι η extrinsic πληροφορία της σχέσης (4.5) με την βοήθεια των σχέσεων (4.27), (4.28) και (4.29) γράφεται

$$L_{extr}(x_n | \hat{x}_n) = \frac{2 \underline{c}_n^{bT} \left[ \underline{y}_n - H \underline{\bar{x}}_n + \mathbb{E}\{x_n\} \underline{s} \right]}{1 - \underline{s}^T \underline{c}_n^b}.\quad (4.30)$$

Έτσι υπολογίζοντας την extrinsic πληροφορία από τη σχέση (4.30), αυτή στέλνεται στον αποκωδικοποιητή, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9, για να συνεχιστεί η επαναληπτική λειτουργία του δέκτη.

### 4.6.1 Λύση χαμηλότερης πολυπλοκότητας

Το κύριο πρόβλημα στον υπολογισμό της εκτίμησης  $\hat{x}_n$  είναι ότι απαιτείται η αντιστροφή της μήτρας  $A'_n$ , αντιστροφή η οποία στοιχίζει  $O(N^3)$  πράξεις. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με τον εξής αλγόριθμο.

Έστω λοιπόν οι μήτρες

$$A_{n-1} = \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_{n-1}}^s H^T \quad (4.31)$$

$$A_n = \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_n}^s H^T \quad (4.32)$$

και το ζητούμενο είναι να εξάγουμε μία σχέση μεταξύ της  $A_{n-1}^{-1}$ , την οποία θεωρούμε γνωστή, και της  $A_n^{-1}$  την οποία ζητάμε. Αν αντί της μήτρας  $A_n$  είχαμε τη μήτρα  $Q_n$

$$Q_n = \sigma_\omega^2 I_N + HC_{\underline{x}_n}^s H^T \quad (4.33)$$

με  $C_{\underline{x}_n}^s = \text{Diag}([\Delta_s \{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta_s \{x_{n-2}\}, \Delta \{x_{n-1}\}, \Delta \{x_n\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1}\}])$  (αντί για  $\Delta_s \{x_{n-1}\}$  έχουμε  $\Delta \{x_{n-1}\}$ ), τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη μήτρα  $Q_n^{-1}$  από τη μήτρα  $A_{n-1}^{-1}$  με τον αλγόριθμο της ενότητας 3.1.1 που περιγράφεται από τις σχέσεις (3.31) και ο οποίος απαιτεί  $O(N^2)$  πράξεις. Αυτό γίνεται γιατί η μήτρες  $C_{\underline{x}_n}^s$  και  $C_{\underline{x}_{n-1}}^s$  μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\begin{aligned} C_{\underline{x}_{n-1}}^s &= \text{Diag}([\Delta_s \{x_{n-M-N_2}\} \Delta_s \{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \\ &\quad \Delta_s \{x_{n-2}\}, \Delta \{x_{n-1}\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1-1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_s \{x_{n-M-N_2}\} & 0_{1 \times N+M-2} \\ 0_{N+M-2 \times 1} & V \end{bmatrix}, \\ C_{\underline{x}_n}^s &= \text{Diag}([\Delta_s \{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta_s \{x_{n-2}\}, \\ &\quad \Delta \{x_{n-1}\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1-1}\}, \Delta \{x_{n+N_1}\}]) \\ &= \begin{bmatrix} V & 0_{N+M-2 \times 1} \\ 0_{1 \times N+M-2} & \Delta \{x_{n+N_1}\} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

με  $V = \text{Diag}([\Delta_s \{x_{n-M-N_2+1}\}, \dots, \Delta_s \{x_{n-2}\}, \Delta \{x_{n-1}\}, \dots, \Delta \{x_{n+N_1-1}\}])$ .

Στη συνέχεια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^{\prime s} H^T \\
 &= \sigma_\omega^2 I_N + H \left( C_{\underline{x}_n}^{\prime s} - C_{\underline{x}_n}^s \right) H^T + H C_{\underline{x}_n}^s H^T \\
 &= A_n + H \left( C_{\underline{x}_n}^{\prime s} - C_{\underline{x}_n}^s \right) H^T, \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4.34) προκύπτει ότι

$$A_n = Q_n - (\Delta \{x_{n-1}\} - \Delta_s \{x_{n-1}\}) H e_{M+N_2-1} e_{M+N_2-1}^T H^T, \tag{4.35}$$

όπου  $e_{M+N_2-1}$  το διάνυσμα μήκους  $N + M - 1$  που έχει παντού μηδενικά εκτός από τη θέση  $M + N_2 - 1$  που έχει τη τιμή 1. Αν καλέσουμε  $\eta = H e_{M+N_2-1}$ , τότε με τη βοήθεια του matrix inversion lemma και της σχέσης (4.35) η μήτρα  $A_n^{-1}$  ισούται με

$$\begin{aligned}
 A_n^{-1} &= (Q_n - (\Delta \{x_{n-1}\} - \Delta_s \{x_{n-1}\}) \eta \eta^T)^{-1} \\
 &= Q_n^{-1} + \frac{(\Delta \{x_{n-1}\} - \Delta_s \{x_{n-1}\}) Q_n^{-1} \eta \eta^T Q_n^{-1}}{1 - (\Delta \{x_{n-1}\} - \Delta_s \{x_{n-1}\}) \eta^T Q_n^{-1} \eta}. \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

Έτσι υπολογίζουμε τη μήτρα  $A_n^{-1}$  με  $O(N^2)$  πράξεις. Εμείς όμως χρειαζόμαστε τη μήτρα  $A_n^{\prime -1}$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 A_n^{\prime -1} &= \left( \sigma_\omega^2 I_N + H C_{\underline{x}_n}^s H^T + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T \right)^{-1} \\
 &= (A_n + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s} \underline{s}^T)^{-1} \\
 &= A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) A_n^{-1} \underline{s} \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}. \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

Στην πράξη αυτό που χρειαζόμαστε είναι το  $\underline{c}_n^{bT} = \underline{s}^T A_n^{\prime -1}$ , άρα έχουμε ότι

$$\underline{c}_n^{bT} = \underline{s}^T A_n^{-1} - \frac{(1 - \Delta \{x_n\}) (\underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}) \underline{s}^T A_n^{-1}}{1 + (1 - \Delta \{x_n\}) \underline{s}^T A_n^{-1} \underline{s}}. \tag{4.38}$$

Έτσι με δεδομένη τη μήτρα  $A_{n-1}^{-1}$  υπολογίζουμε τη μήτρα  $Q_n^{-1}$  με χρήση των σχέσεων (3.31) με  $O(N^2)$  πράξεις, στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μήτρα  $A_n^{-1}$  από τη σχέση (4.36) με  $O(N^2)$  πράξεις και τελικά υπολογίζουμε το διάνυσμα  $\underline{c}_n^b$  από τη σχέση (4.38) με  $O(N^2)$  πράξεις. Δηλαδή ο συνολικός αλγόριθμος απαιτεί  $O(N^2)$  πράξεις για κάθε δεδομένο.



# Κεφάλαιο 5

## Πειραματικά Αποτελέσματα

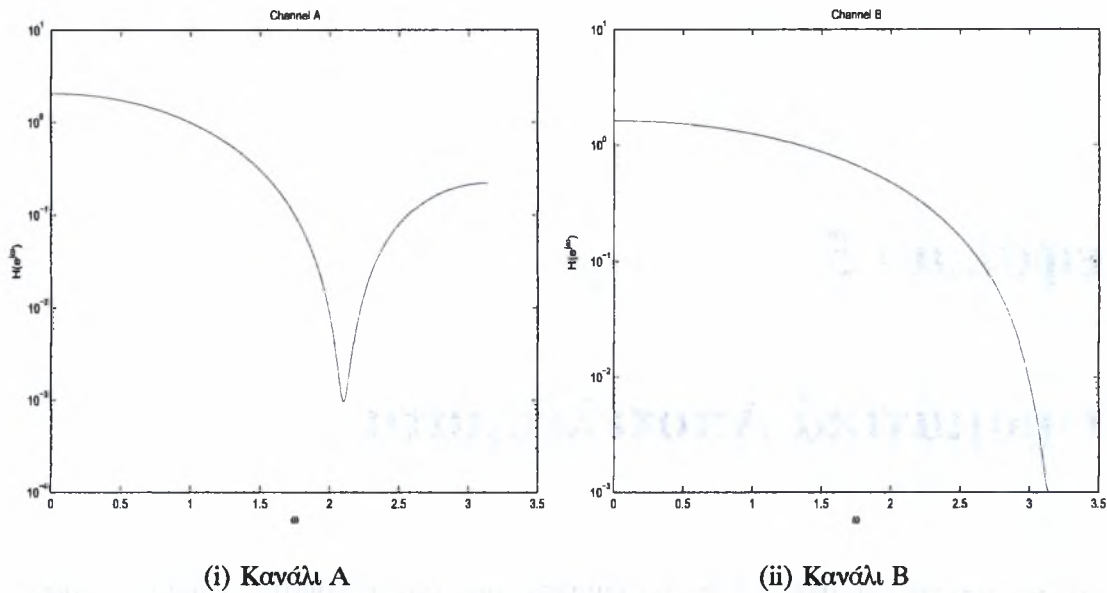
Για να πραγματοποιήσουμε τα πειραματικά μας αποτελέσματα, χρησιμοποιήσαμε το τηλεπικοινωνιακό σύστημα του σχήματος 4.1. Τα δεδομένα  $a_n$  στην είσοδο του αποκωδικοποιητή θεωρήσαμε ότι είναι δυαδικά ψηφία, τα οποία εισέρχονται στον κωδικοποιητή σε ακολουθίες των 100000 δυαδικών ψηφίων. Ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός που δίνεται από τη σχέση (2.18) και έχει το Trellis διάγραμμα του σχήματος 2.5. Δηλαδή, τα δεδομένα  $b_n$  είναι δυαδικά δεδομένα τα οποία εξέρχονται από τον κωδικοποιητή σε ακολουθίες των 200000 δυαδικών ψηφίων, αφού ο ρυθμός του κώδικα της σχέσης 2.5 είναι  $R = 1/2$ . Ο Διαφυλλωτής στη συνέχεια αναδιατάσσει τα δεδομένα τυχαία και παράγει τα δεδομένα  $c_n$ , ενώ ο διαμορφωτής δεδομένων δημιουργεί δεδομένα σύμφωνα με την BPSK διαμόρφωση, δηλαδή

$$x_n = \begin{cases} 1, & c_n = 1 \\ -1, & c_n = 0. \end{cases}$$

Στα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν δύο κανάλια με συντελεστές

$$h_A = \begin{bmatrix} 0.227 & 0.46 & 0.688 & 0.46 & 0.227 \end{bmatrix},$$
$$h_B = \begin{bmatrix} 0.407 & 0.815 & 0.407 \end{bmatrix},$$

όπου το κανάλι με συντελεστές  $h_A$  το ονομάζουμε κανάλι A και το κανάλι με συντελεστές  $h_B$  το ονομάζουμε κανάλι B. Στο σχήμα 5.1 παραθέτουμε την απόκριση συχνότητας του καναλιού A και B. Παρατηρούμε ότι το κανάλι A είναι ένα



(i) Κανάλι Α

(ii) Κανάλι Β

Σχήμα 5.1: Απόκριση συχνότητας των δύο καναλιών που χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα.

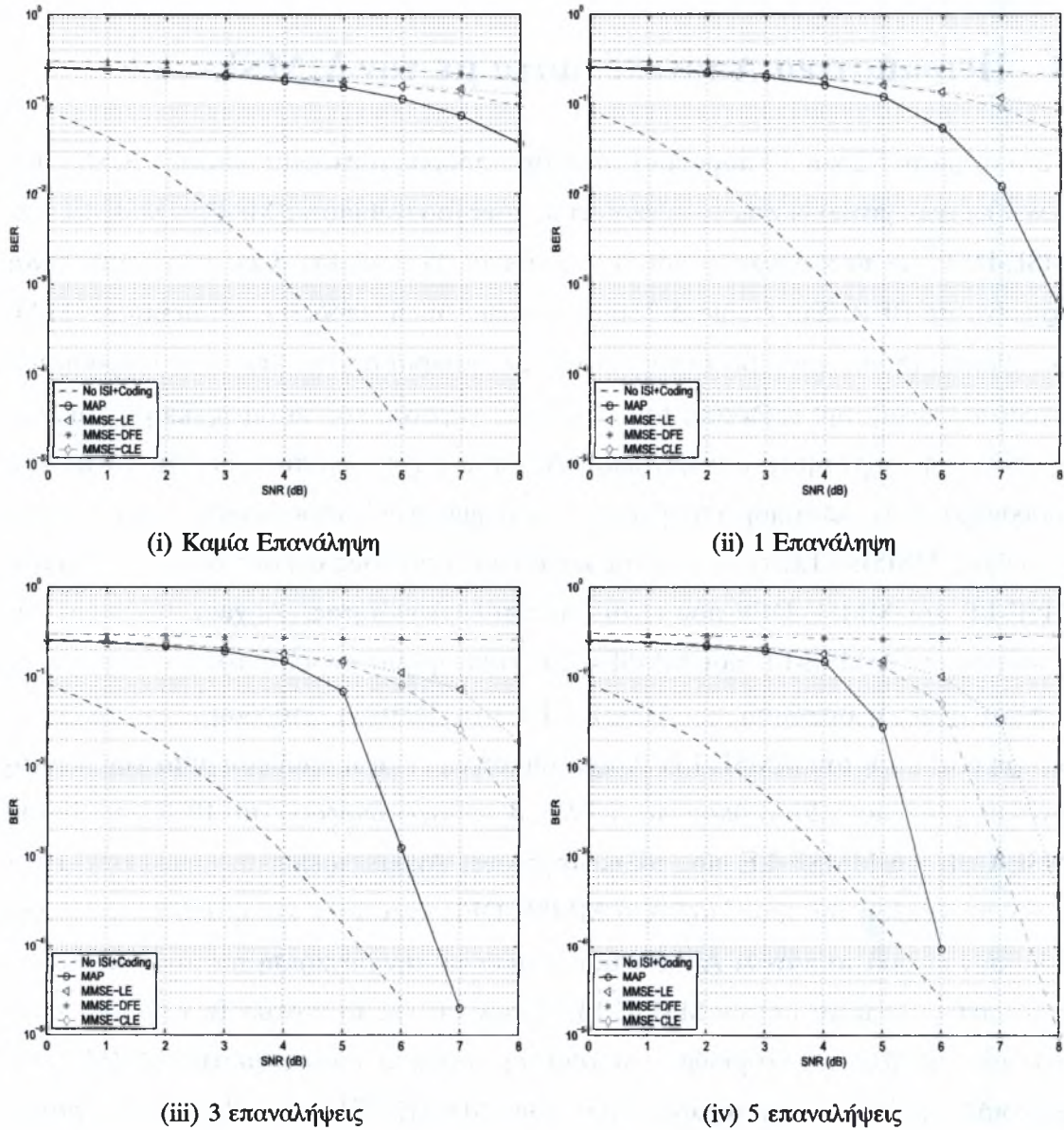
χαμηλοπερατό κανάλι το οποίο αποσβένει σχετικά γρήγορα, ενώ το κανάλι Β είναι ένα χαμηλοπερατό κανάλι το οποίο αποσβένει πιο αργά από το κανάλι Α. Περιμένουμε, δηλαδή, οι ισοσταθμιστές να έχουν πολύ καλύτερη συμπεριφορά στην περίπτωση του καναλιού Β από ότι στο κανάλι Α. Στη συνέχεια προστίθεται θόρυβος AWG στα δεδομένα  $u_n$  στην έξοδο του καναλιού, ο οποίος έχει μέση τιμή μηδέν και διασπορά  $\sigma_w^2$ . Ο Επαναληπτικός δέκτης του σχήματος 4.1 υλοποιήθηκε με χρήση των ισοσταθμιστών MAP, MMSE-LE, MMSE-DFE, MMSE-CLE, MMSE-GMCLE και MMSE-SFE. Ο αποκωδικοποιητής του καναλιού προφανώς είναι ο MAP αποκωδικοποιητής.

Μέτρο απόδοσης των επαναληπτικών δεκτών είναι ο ρυθμός δυαδικών σφαλμάτων (BER), ο οποίος υπολογίστηκε στα πειράματα συναρτήσει του λόγου σήματος προς θόρυβο SNR (σε λογαριθμική κλίμακα). Τα πειράματα αφορούν τις 5 πρώτες επαναλήψεις των δεκτών και για κάθε επανάληψη έγιναν 100 πειράματα υπολογισμού του BER με αρχικές ακολουθίες δεδομένων  $a_n$  μεγέθους 100000 δυαδικών ψηφίων (συν τα δεδομένα τερματισμού), από τα οποία πάρθηκε ο μέσος όρος του BER. Τέλος, να σημειώσουμε ότι για τους ισοσταθμιστές χαμηλής πολυπλοκότητας (όλους πλην του MAP) θεωρήσαμε ότι  $N_1 = 5, N_2 = 9$  για την περίπτωση του καναλιού Α και

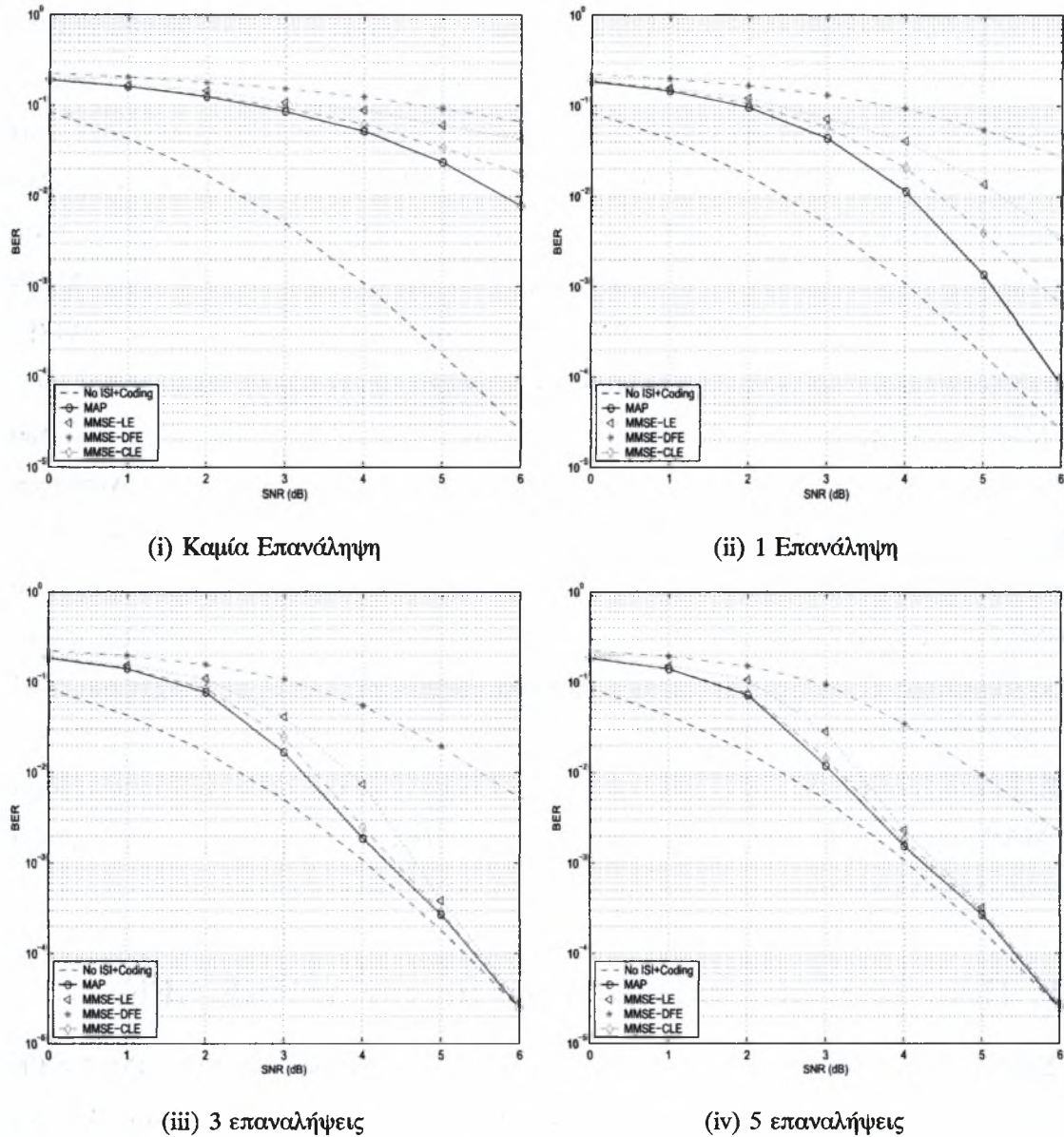
$N_1 = 3, N_2 = 6$  για την περίπτωση του καναλιού B.

## 5.1 Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-CLE

Στα σχήματα 5.2 και 5.3 παρουσιάζουμε την απόδοση του ισοσταθμιστή MMSE-CLE σε έναν επαναληπτικό δέκτη, εν συγκρίσει με τους ισοσταθμιστές MAP, MMSE-LE και MMSE-DFE για τα κανάλια A και B αντίστοιχα. Η απόδοση όπως προείπαμε είναι μετρημένη σε BER. Στο σχήμα 5.2 παρατηρούμε ότι η απόδοση του δέκτη με MAP ισοσταθμιστή (που είναι ο βέλτιστος) είναι πολύ μακριά από τη βέλτιστη απόδοση του συστήματος χωρίς την επίδραση του καναλιού, γεγονός που παρατηρήσαμε και από την απόκριση συχνότητας του καναλιού A, όπου είχαμε διαπιστώσει ότι το κανάλι παρουσιάζει πολύ απότομη απόσβεση. Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε λοιπόν ότι ο αλγόριθμος MMSE-CLE είναι αρκετά καλύτερος από τους άλλους δύο αλγορίθμους MMSE-LE και MMSE-DFE που είναι ίδιας πολυπλοκότητας. Αρχικά, βλέπουμε ότι η απόδοση του MMSE-LE και MMSE-CLE είναι η ίδια περίπου αλλά όσο περνάνε οι επαναλήψεις η σύγκλιση του MMSE-CLE στη βέλτιστη απόδοση είναι πολύ πιο γρήγορη από αυτή του MMSE-LE. Χαρακτηριστική είναι η απόδοση μετά την πέμπτη επανάληψη (σχήμα 5.2(iv)) όπου για  $SNR = 7$  υπάρχει διαφορά στο BER μεταξύ του MMSE-CLE και MMSE-LE μίας τάξης μεγέθους. Ακόμη πρέπει να σημειώσουμε ότι για την περίπτωση του καναλιού A ο MMSE-DFE έχει πολύ κακή απόδοση και για αυτό, όσον αφορά το κανάλι A, θα επικεντρώσουμε την σύγκριση των ισοσταθμιστών που προτείνουμε μόνο με τον MMSE-LE. Όσον αφορά το κανάλι B, το οποίο είναι πιο ομαλό κανάλι, παρατηρούμε ότι από την αρχή ο ισοσταθμιστής MMSE-CLE παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά από τους MMSE-DFE και MMSE-LE. Επίσης, από την τρίτη κιόλας επανάληψη ο αλγόριθμος MMSE-CLE, αγγίζει την βέλτιστη απόδοση του MAP ισοσταθμιστή, ενώ ο MMSE-LE έχει διαρκώς μεγαλύτερο BER από τον MMSE-CLE. Τέλος, παρατηρούμε ότι στην πέμπτη επανάληψη ο MMSE-CLE είναι ελαφρώς καλύτερος από τον MMSE-LE, αλλά αυτό συμβαίνει γιατί και οι δύο έχουν πλησιάσει τη βέλτιστη απόδοση (ο MMSE-CLE έχει πλησιάσει τη βέλτιστη απόδοση στην τρίτη επανάληψη).



Σχήμα 5.2: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-CLE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP ( $-o$ ), MMSE-LE ( $..<$ ) και MMSE-DFE ( $-.*$ ). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).



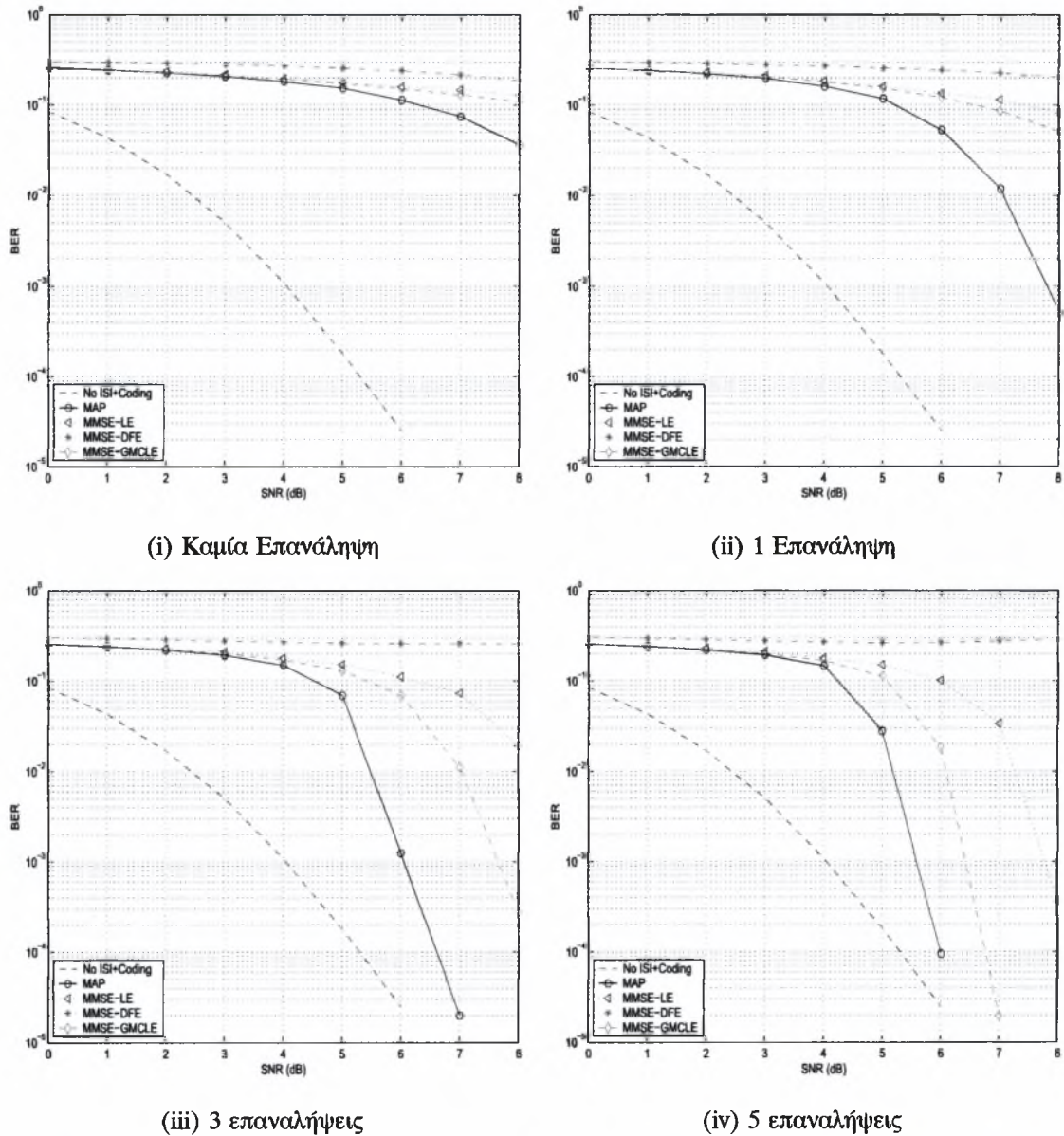
Σχήμα 5.3: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-CLE ( $- \diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP ( $- \circ$ ), MMSE-LE ( $.. \triangleleft$ ) και MMSE-DFE ( $- . *$ ). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).

## 5.2 Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-GMCLE

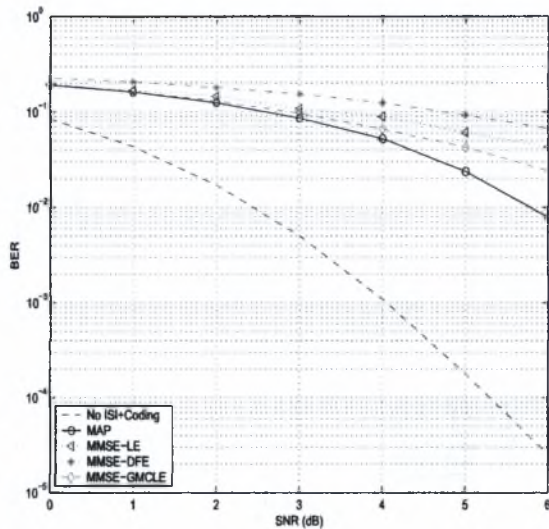
Στα σχήματα 5.4 και 5.5 παρουσιάζουμε την απόδοση του ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE σε ένα επαναληπτικό δέκτη εν συγκρίσει με τους ισοσταθμιστές MAP, MMSE-LE και MMSE-DFE για τα κανάλια A και B αντίστοιχα. Στα σχήματα αυτά βλέπουμε την επίδραση που έχει η χρήση Gaussian μίξης στον ισοσταθμιστή. Πιο συγκεκριμένα για το κανάλι A παρατηρούμε ότι οι MMSE-GMCLE και MMSE-LE αρχικά έχουν την ίδια απόδοση, αλλά ο MMSE-GMCLE συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα στη βέλτιστη απόδοση με το πέρας των επαναλήψεων, σύγκλιση που είναι πιο γρήγορη και από του MMSE-CLE (αναμενόμενο αφού ο MMSE-GMCLE είναι μία βελτιωμένη εκδοχή του MMSE-CLE). Χαρακτηριστική είναι η απόδοση στην πέμπτη επανάληψη, όπου η διαφορά του MMSE-GMCLE με τον MMSE-LE είναι τρεις τάξης μεγέθους για  $SNR = 7$ , δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη διαφορά που παρουσίαζε ο MMSE-CLE. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο ισοσταθμιστής αυτός να πλησιάζει την βέλτιστη απόδοση του MAP ισοσταθμιστή με πολύ λίγες επαναλήψεις. Για το κανάλι B παρατηρούμε ότι εξ αρχής ο MMSE-GMCLE έχει πολύ καλύτερη απόδοση από τους MMSE-LE και MMSE-DFE. Χαρακτηριστικό είναι ότι στην πρώτη επανάληψη και για  $SNR = 6$  έχει διαφορά από τον MMSE-LE μίας τάξης μεγέθους και δύο τάξεων μεγέθους από τον MMSE-DFE. Επίσης και αυτός, όπως και ο MMSE-CLE αγγίζει την βέλτιστη συμπεριφορά του MAP ισοσταθμιστή από την τρίτη επανάληψη κιόλας, ενώ ο MMSE-LE την αγγίζει στην πέμπτη επανάληψη.

## 5.3 Πειραματικά Αποτελέσματα με τον MMSE-SFE

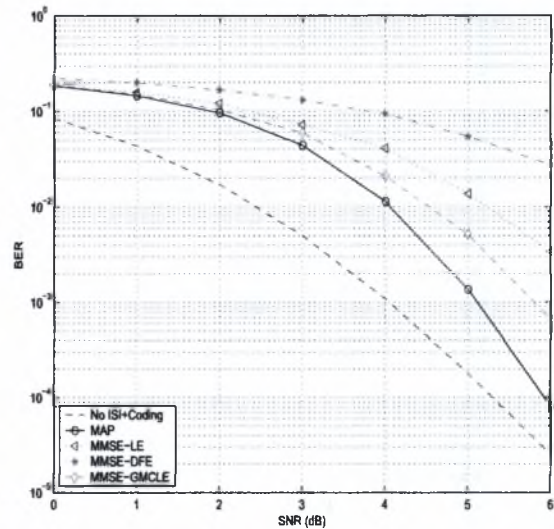
Στα σχήματα 5.6 και 5.7 παρουσιάζουμε την απόδοση του ισοσταθμιστή MMSE-SFE σε ένα επαναληπτικό δέκτη εν συγκρίσει με τους ισοσταθμιστές MAP, MMSE-LE και MMSE-DFE για τα κανάλια A και B αντίστοιχα. Για το κανάλι A παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος έχει παρόμοια συμπεριφορά με τον αλγόριθμο MMSE-GMCLE, δηλαδή αρχικά έχει το ίδιο BER με τον αλγόριθμο MMSE-LE και με το πέρας των επαναλήψεων αυξάνει τόσο η ταχύτητα σύγκλισης του, που στην πέμπτη επανάληψη και για  $SNR = 7$  η διαφορά του από τον MMSE-LE είναι δύο τάξεων μεγέθους. Βέβαια να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η απόδοση του είναι μεν στα επίπεδα του MMSE-GMCLE, αλλά



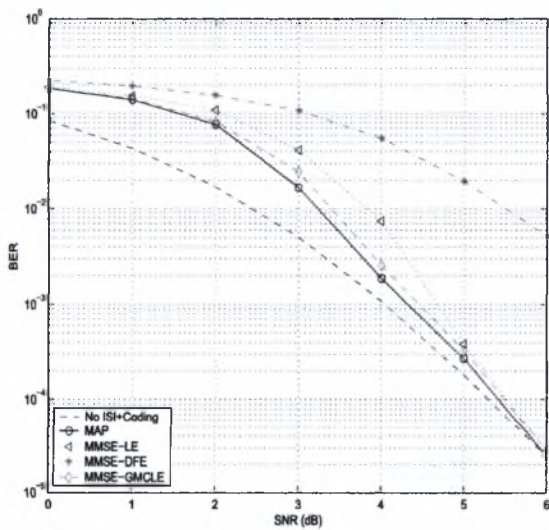
Σχήμα 5.4: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP ( $-o$ ), MMSE-LE ( $.. \triangle$ ) και MMSE-DFE ( $-.*$ ). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).



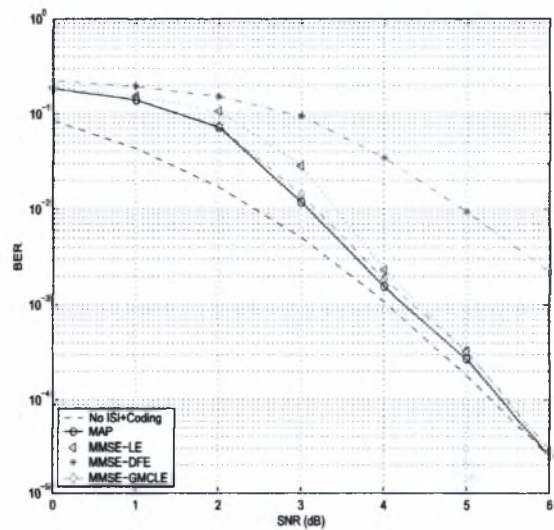
(i) Καμία Επανάληψη



(ii) 1 Επανάληψη



(iii) 3 επαναλήψεις



(iv) 5 επαναλήψεις

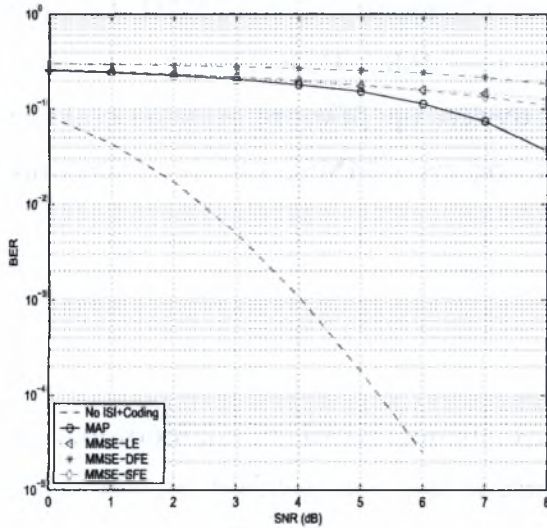
Σχήμα 5.5: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-GMCLE (--◇) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP (-○), MMSE-LE (..◁) και MMSE-DFE (-.\*). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).



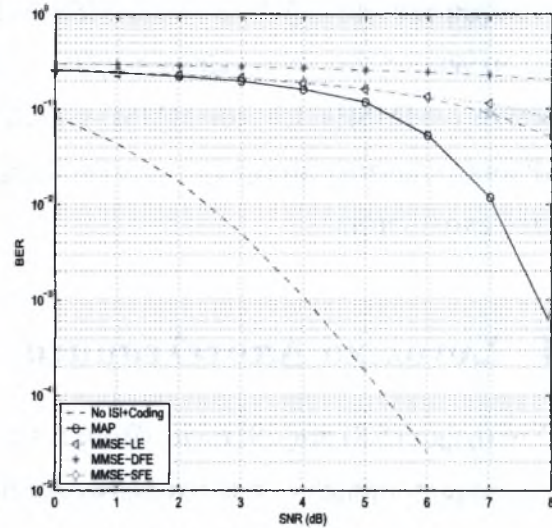
είναι ελαφρώς χειρότερη. Για το κανάλι B παρατηρούμε ότι ο MMSE-SFE είναι πολύ καλύτερος από τους MMSE-LE και MMSE-DFE. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη επανάληψη και για  $SNR = 6$  ο MMSE-SFE έχει διαφορά από τον MMSE-LE μίας τάξης μεγέθους και δύο τάξεων μεγέθους από τον MMSE-DFE. Επίσης και αυτός, όπως και ο MMSE-CLE και MMSE-GMCLE αγγίζει την βέλτιστη συμπεριφορά του MAP ισοσταθμιστή από την τρίτη επανάληψη κιόλας, ενώ ο MMSE-LE την αγγίζει στην πέμπτη επανάληψη.

## 5.4 Συνολικά Αποτελέσματα

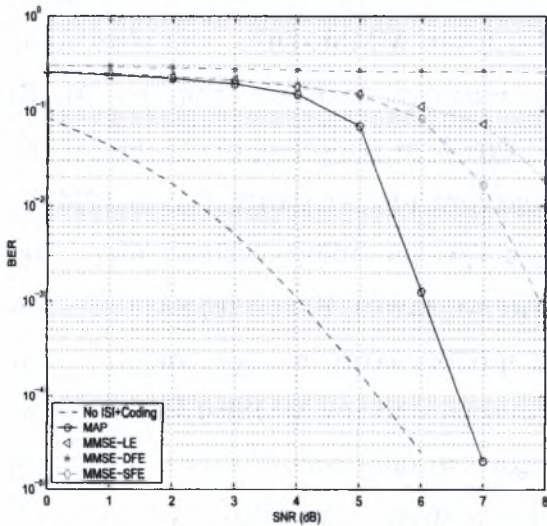
Στο σχήμα (5.8) παραθέτουμε όλους τους αλγορίθμους επαναληπτικής ισοστάθμισης που χρησιμοποιήθηκαν σε επαναληπτικούς δέκτες τόσο για το κανάλι A (σχήμα 5.8(i)) όσο και για το κανάλι B (σχήμα 5.8(ii)) για την πέμπτη επανάληψη. Παρατηρούμε στο σχήμα 5.8(i) ότι για το κανάλι A και οι τρεις ισοσταθμιστές που προτείνουμε έχουν πολύ καλύτερη συμπεριφορά από τους MMSE-LE και MMSE-DFE, που είναι ίδιας πολυπλοκότητας με τους προτεινόμενους. Την καλύτερη απόδοση (πλην του MAP) παρουσιάζει ο MMSE-GMCLE, ο MMSE-SFE έχει λίγο χειρότερη συμπεριφορά και τη χειρότερη συμπεριφορά από τους προτεινόμενους ισοσταθμιστές έχει ο MMSE-CLE, ο οποίος παρόλο που είναι ο χειρότερος έχει μία τάξη μεγέθους μικρότερο BER από τον MMSE-LE για  $SNR = 7$ . Για το κανάλι B παρατηρούμε ότι και οι τρεις αλγόριθμοι έχουν παρόμοια απόδοση, η οποία είναι στα όρια της βέλτιστης απόδοσης και έχουν ελαφρώς καλύτερη συμπεριφορά από τον MMSE-LE. Επίσης να σημειώσουμε ότι και οι τρεις αλγόριθμοι αγγίζουν το όριο του βέλτιστου στην τρίτη επανάληψη, ενώ ο MMSE-LE στην πέμπτη επανάληψη. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθούμε στον ισοσταθμιστή MMSE-DFE και στο λόγο για τον οποίο δεν έχει τη συμπεριφορά που αναμέναμε, σύμφωνα με τα όσα ξέρουμε για την απόδοση του σε μη επαναληπτικούς δέκτες. Η κακή απόδοση του οφείλεται στο ότι δεν ακολουθεί τη λογική λειτουργίας των επαναληπτικών δεκτών. Οι επαναληπτικοί δέκτες στηρίζονται στη διαρκή ανακύκλωση-επανατροφοδότηση μίας soft πληροφορίας από τον αποκωδικοποιητή στον ισοσταθμιστή και αντίστροφα. Ακόμη είδαμε ότι η ανακύκλωση-επανατροφοδότηση της soft πληροφορίας μεταξύ του ίδιου του ισοσταθμιστή έχει πολύ



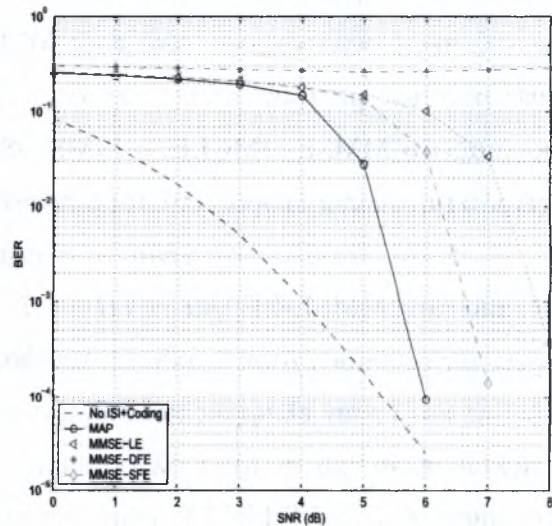
(i) Καμία Επανάληψη



(ii) 1 Επανάληψη

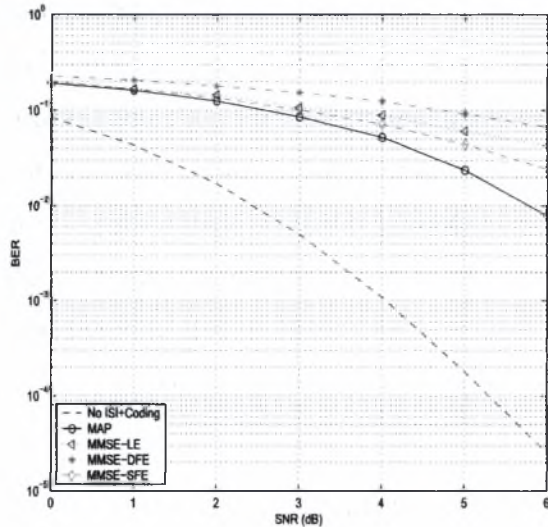


(iii) 3 επαναλήψεις

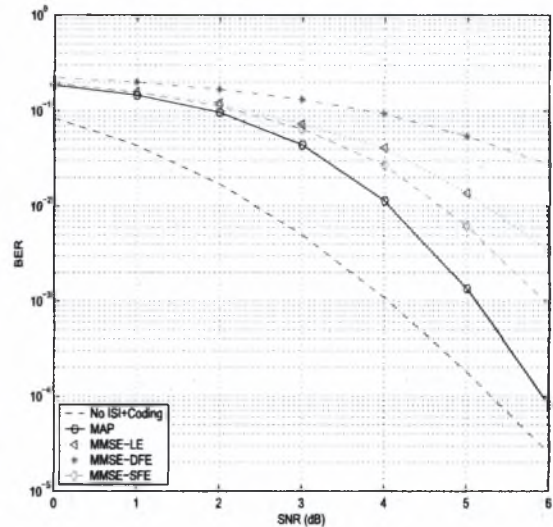


(iv) 5 επαναλήψεις

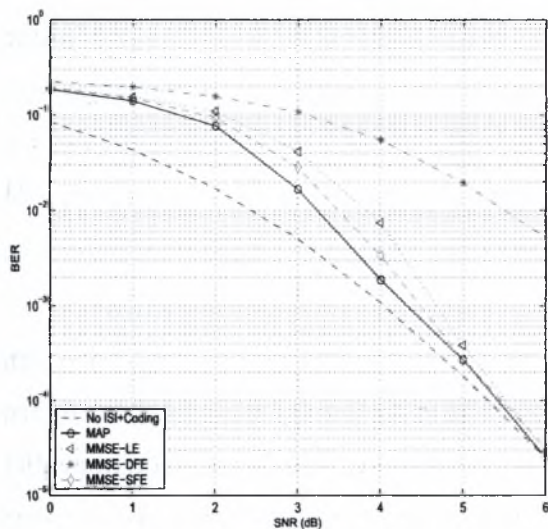
Σχήμα 5.6: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-SFE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP ( $-o$ ), MMSE-LE ( $.. \triangle$ ) και MMSE-DFE ( $-.*$ ). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι A και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).



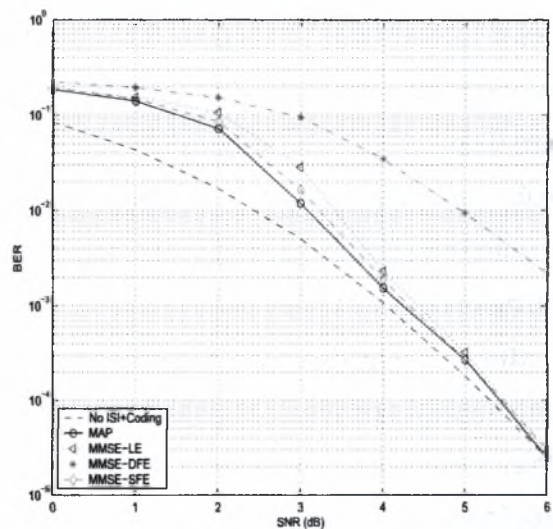
(i) Καμία Επανάληψη



(ii) 1 Επανάληψη



(iii) 3 επαναλήψεις



(iv) 5 επαναλήψεις

Σχήμα 5.7: Απόδοση του επαναληπτικού δέκτη με χρήση του ισοσταθμιστή MMSE-SFE ( $--\diamond$ ) εν συγκρίσει με αυτούς που χρησιμοποιούν τους ισοσταθμιστές MAP ( $-o$ ), MMSE-LE ( $..<$ ) και MMSE-DFE ( $-.*$ ). Το κανάλι που χρησιμοποιήθηκε είναι το κανάλι B και ο συνελκτικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της σχέσης (2.18).

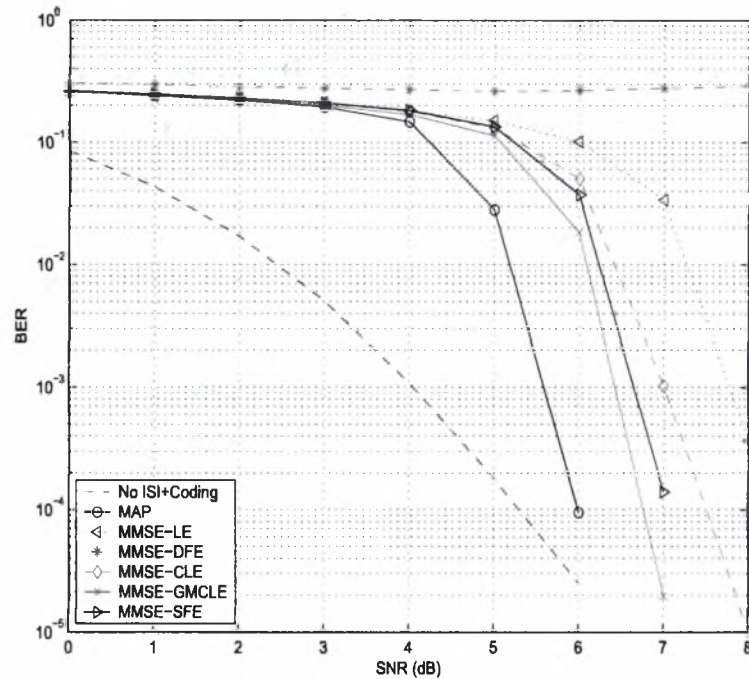
θετικά αποτελέσματα. Ο MMSE-DFE, λοιπόν, κάνει ακριβώς το αντίθετο, με την έννοια ότι στηρίζει όλη την λειτουργία του στην επανατροφοδότηση μίας hard πληροφορίας. Η hard πληροφορία είναι αυτή τον οδηγεί σε πολύ κακή απόδοση με το πέρας των επαναλήψεων, ενώ αρχικά ο ισοσταθμιστής έχει πολύ καλή απόδοση. από την άλλη η soft πληροφορία είναι αυτή που οδηγεί στην πολύ καλή απόδοση τους υπόλοιπους ισοσταθμιστές. Για να το κατανοήσουμε αυτό μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τον MMSE-SFE ισοσταθμιστή σαν μία εκδοχή του MMSE-DFE ισοσταθμιστή, όπου αντί να γίνεται επανατροφοδότηση hard εκτιμήσεων των δεδομένων, γίνεται soft επανατροφοδότηση δεδομένων. Βλέπουμε, λοιπόν, πως αυτή η soft πληροφορία βελτιώνει την απόδοση του ισοσταθμιστή σε σχέση με την hard πληροφορία.

## 5.5 Συμπεράσματα και Μελλοντικό Έργο

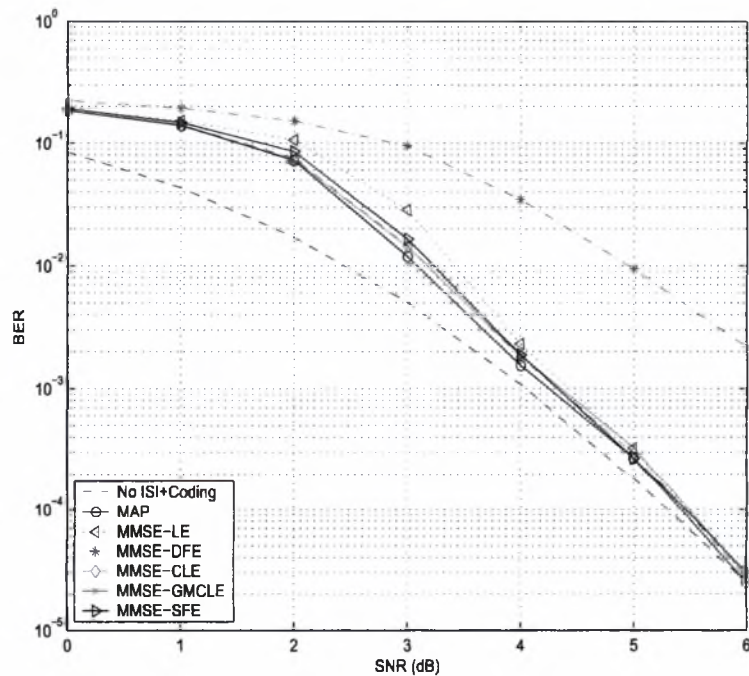
Στην παρούσα εργασία προσπαθήσαμε καταρχάς να εξηγήσουμε όσο πιο κατανοητά γίνεται την σύνθετη λειτουργία των κλασικών επαναληπτικών τεχνικών ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης. Βασιζόμενοι στη λειτουργία των κλασικών αυτών τεχνικών, προτείναμε τρεις νέους ισοσταθμιστές πολυπλοκότητας  $O(N^2)$ , οι οποίοι έχουν σαφώς καλύτερη απόδοση από τους κλασικούς ισοσταθμιστές ίδια πολυπλοκότητας. Η εργασία αυτή και τα αποτελέσματά της θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε διάφορες επιστημονικές κατευθύνσεις.

Μια κατεύθυνση στην οποία θα μπορούσε να επεκταθεί η εργασία αυτή, είναι στη δημιουργία ισοσταθμιστών γραμμικής πολυπλοκότητας, οι οποίοι θα στηρίζονται στη λογική λειτουργίας των τριών ισοσταθμιστών που προτάθηκαν, έτσι ώστε να διερευνηθεί η απόδοση τους εν συγκρίσει με άλλους ισοσταθμιστές γραμμικής πολυπλοκότητας που έχουν προταθεί στην διεθνή βιβλιογραφία. Μία άλλη κατεύθυνση στην οποία θα μπορούσε να κινηθεί αυτή η εργασία είναι στην δημιουργία τεχνικών εκτίμησης καναλιού, οι οποίες θα εκμεταλλεύονται τη δομή των επαναληπτικών δεκτών που προτάθηκαν στην εργασία αυτή για να επιτύχουν ταχύτερη σύγκλιση της εκτίμησης καναλιού. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε η χρήση τους στο τομέα της τυφλής εκτίμησης καναλιού.

Η κύρια όμως κατεύθυνση στην οποία θα έπρεπε να κινηθεί κάποιος θα ήταν



(i) Κανάλι A



(ii) Κανάλι B

Σχήμα 5.8: Απόδοση όλων των επαναληπτικών δεκτών κατά την πέμπτη επανάληψη για τα κανάλια A και B.

στην καθαρά θεωρητική ερμηνεία της Turbo λογικής. Από το 1993 όταν προτάθηκε η επαναληπτική κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση [1] και από το 1995 όταν προτάθηκε η τεχνική της επαναληπτικής ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης [3] δεν έχει ακόμη δοθεί θεωρητική εξήγηση και ερμηνεία του λόγου σύγκλισης της απόδοσης των δεκτών που ακολουθούν αυτή την Turbo λογική στη βέλτιστη δυνατή απόδοση. Ερμηνεία, από την οποία ίσως εξαχθούν μη επαναληπτικοί αλγόριθμοι ισοστάθμισης και αποκωδικοποίησης χαμηλής πολυπλοκότητας που θα έχουν τη βέλτιστη δυνατή συμπεριφορά. Το μέλλον θα αποδείξει του λόγου το αληθές...

# Βιβλιογραφία

- [1] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo codes", in ICC '93, Geneva, Switzerland, May 1993, pp 1064-1070.
- [2] J. Proakis and M. Salehi, "Communication Systems Engineering", Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1994.
- [3] C. Douillard et al, "Iterative correction of intersymbol interference: Turbo equalization", European Trans. on Telecommunications., vol. 6, pp. 507-511, September-October 1995.
- [4] J.G. Proakis, "Digital Communications", McGraw-Hill, New York, third edition, 1995.
- [5] H. V. Poor, S. Verdu, "Probability of error in MMSE multiuser detection", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-43, pp. 858-871, May 1997.
- [6] Robert J. McEliece, David J. C. MacKay and Jung-Fu Cheng, "Turbo Decoding as an Instance of Pearl's 'Belief Propagation' Algorithm", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 16, No. 2, February 1998.
- [7] X. Wang and H. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA", IEEE Trans. on Comm., vol. 47, no. 7, pp. 1046-1061, 1999.
- [8] M. Tuchler, "Iterative Equalization using Priors", Master's thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, May 2000.

- [9] Tom Richardson, "The Geometry of Turbo-Decoding Dynamics", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 46, No. 1, January 2000.
- [10] M. Tuchler, R. Koetter and A. Singer, "Iterative Correction of ISI via Equalization and Decoding using Priors", in Proc. Intern. Symp. on Information Theory, Sorrento, Italy, p. 194, July 2000.
- [11] C. Laot, A. Glavieux, and J. Labat, "Turbo Equalization: Adaptive Equalization and Channel Decoding Jointly Optimized", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. SAC-19, pp. 1744-1752, Sept. 2001.
- [12] B. Vucetic, J. Yuan, "Turbo Codes, Principles and Applications", Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [13] M. Tuchler and J. Hagenauer, "Linear time and frequency domain Turbo equalization", in Proc. 53rd Vehicular Technology Conf. (Spring), Rhodes, Greece, pp. 1449-1453, May 2001.
- [14] H. E. Gamal and A. R. Hammons, "Analyzing the Turbo Decoder Using the Gaussian Approximation", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 47, No. 2, February 2001.
- [15] L. Hanzo, T. H. Liew, B. L. Yeap, "Turbo Coding, Turbo Equalisation and Space-Time Coding for Transmission over Fading Channels", John Wiley & Sons, 2002.
- [16] R. Otnes and M. Tuchler, "Soft Iterative channel estimation for Turbo equalization: comparison of channel estimation algorithms", in Proc. Intern. Conf. on Communications Systems, Singapore, Nov 2002.
- [17] J. R. Montalvao Filho, B. Dorizzi and J. C. Mota, "Channel Estimation by Symmetrical Clustering", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No 6, pp. 1459-1469, June 2002.
- [18] David J. C. MacKay, "Turbo Codes are Low Density Parity Check Codes", whitepaper, July 2002.



- [19] M. Tuchler, R. Koetter and A. Singer, "Turbo equalization: principles and new results", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 50, pp. 754-767, May 2002.
- [20] M. Tuchler, A. Singer and R. Koetter, "Minimum Mean Squared Error Equalization using A-priori Information", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, pp. 673-683, March 2002.
- [21] Yannis Kopsinis and Sergios Theodoridis, "An Efficient Low-Complexity Technique for MLSE Equalizers for Linear and Nonlinear Channels", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, No. 12, December 2003.
- [22] T.A. Myrvoll, and F.K. Soong, "Optimal Clustering of Multivariate Normal Distributions using Divergence and its Application to HMM Adaptation", *Proc. ICASSP*, pp. 552-555, 2003.
- [23] R. Otnes and M. Tuchler, "On iterative estimation, equalization and decoding", in *Proc. Intern. Conf. on Communications*, Anchorage, USA, May 2003.
- [24] Lihai Liu and Li Ping, "An Extending Window MMSE Turbo Equalization Algorithm", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 11, November 2004.
- [25] Δημήτριος Αμπελιώτης, "Επαναληπτικές Τεχνικές Ισοστάθμισης Καναλιού τύπου Turbo", Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πάτρα, Σεπτέμβριος 2004.

