

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ  
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΜΕ ΤΗ  
ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ**

**ΛΑΖΑΡΟΣ ΠΑΤΚΑΣ**



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας 2005



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ**  
**ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3930/1  
Ημερ. Εισ.: 18-07-2--6  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
624.177 2  
ΠΑΤ

© 2005 Λάζαρος Πάτκας

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Πενταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος  
(Επιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Βλάχος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τέταρτος Εξεταστής Δρ. Κων/νος Παπαδημητρίου  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Πέμπτος Εξεταστής Δρ. Βασίλειος Μποντόζογλου  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στον παππού Λάζαρο,  
στη γιαγιά Αγάπη  
στον παππού Κυριάκο  
και στη γιαγιά Ευαγγελία

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Καταρχήν θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον κ. Καραμάνο για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφερε τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο σπουδών και για την σχεδόν καθημερινή ενασχόληση με τη μεταπτυχιακή μου εργασία. Ήταν πάντα εκεί όταν τον χρειαζόμουν και με μεγάλη υπομονή και κατανόηση ασχολούνταν με τα προβλήματα που ενέκυπταν. Θα αποτελεί πάντα ένα μεγάλο σχολείο για μένα και θέλω από καρδιάς να του ευχηθώ ότι καλύτερο.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω την υποψήφια δρ. Σωτηρία Χουλιαρά μιας και μοιραζόμενοι για ενάμιση περίπου χρόνο τον ίδιο χώρο εργασίας είχα την ευκαιρία να γνωρίσω μια πολύ αξιόλογη κοπέλα με φοβερό χαρακτήρα, η οποία συνέβαλε στη διαμόρφωση ενός άψογου κλίματος.

Οφείλω επιπλέον ένα μεγάλο ευχαριστώ στον υποψήφιο δρ. Σπύρο Παπασπύρου για τις πολύτιμες γνώσεις που με μετέφερε και οι οποίες σχετίζονται με το θέμα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

Μα πάνω από όλους ευχαριστώ έτσι απλά τους γονείς μου Θανάση και Ζωή και τον αδερφό μου Νίκο...

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ .....	5
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ .....	6
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	<b>10</b>
<b>1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>10</b>
<b>1.1 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ</b> .....	<b>10</b>
<b>1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ</b> .....	<b>12</b>
<b>1.3 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</b> .....	<b>16</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	<b>17</b>
<b>2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</b> .....	<b>17</b>
2.1.1 Δοχείο ορθογωνικού σχήματος .....	17
2.1.2 Τύποι θεώρησης του δυναμικού για την επίλυση του φαινομένου. ....	21
<b>2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ</b> <b>ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ</b> .....	<b>24</b>
2.2.1 Υπολογισμός ιδιοτιμών .....	28
2.2.2 Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων με τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis).....	29

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ..... 33**

### **3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ..... 33**

#### **3.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ..... 34**

3.1.1 Συναρτήσεις Σχήματος – Εξισώσεις Κίνησης ..... 35

3.1.2 Ιδιοσυχνότητες – Ιδιομορφές ..... 36

3.1.3 Εξωτερική διέγερση ..... 40

3.1.4 Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων με τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis) ..... 40

3.1.5 Υπολογισμός δυνάμεων με τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration) ..... 43

#### **3.2 ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ..... 51**

3.2.1 Συναρτήσεις Σχήματος – Εξισώσεις Κίνησης ..... 52

3.2.2 Ιδιοσυχνότητες ..... 53

3.2.3 Εξωτερική διέγερση – Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση – άμεση ολοκλήρωση) ..... 55

#### **3.3 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ (SIMPLIFIED FORMULATION) ..... 58**

3.3.1 Οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο ..... 58

3.3.2 Σφαιρικό δοχείο ..... 59

#### **3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΕ ΗΜΙ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ..... 61**

#### **3.5 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ΥΠΟ ΔΙΑΜΗΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ..... 66**

3.5.1 Συναρτήσεις Σχήματος ..... 67

3.5.2 Ιδιοσυχνότητες ..... 68

3.5.3 Ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος – Σύγκριση ιδιοτιμών ..... 70



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....73**

### **4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ .....73**

#### **4.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ..... 74**

4.1.1 Συναρτήσεις Σχήματος – Εξισώσεις Κίνησης..... 78

4.1.2 Ιδιοσυχνότητες οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας..... 79

4.1.3 Εξωτερική διέγερση – Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση – άμεση ολοκλήρωση)..... 87

#### **4.2 ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ.....95**

4.2.1 Συναρτήσεις Σχήματος – Εξισώσεις Κίνησης..... 97

4.2.2 Ιδιοσυχνότητες σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας..... 99

4.2.3 Εξωτερική διέγερση – Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση) ..... 108

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....112**

### **5 ΔΟΧΕΙΑ ΟΙΟΝΕΙ ΓΕΜΑΤΑ / ΑΔΕΙΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ ..... 112**

#### **5.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΟΝΕΙ ΓΕΜΑΤΟ..... 112**

#### **5.2 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΟΝΕΙ ΑΔΕΙΟ..... 114**

#### **5.3 ΔΟΧΕΙΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΟΙΟΝΕΙ ΑΔΕΙΟ..... 121**

### **ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ..... 123**

### **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ..... 128**

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....</b>	<b>134</b>
------------------------	------------

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των δοχείων πίεσης και δεξαμενών αποθήκευσης υγρών είναι η επιφάνεια του αποθηκευμένου υγρού, η κίνηση της οποίας δεν περιορίζεται από τα τοιχώματα του δοχείου ή της δεξαμενής. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού επιτρέπει τη σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο με την εμφάνιση κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν σχετικά με το φαινόμενο του κυματισμού είναι οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού καθώς και η δυναμική συμπεριφορά της μάζας του ρευστού λόγω εξωτερικής διέγερσης. Στους κυματισμούς που δημιουργούνται αποδεικνύεται ότι η επιφάνεια του υγρού κινείται μόνο κάθετα ως προς τη βάση της δεξαμενής, ενώ τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών, οι οποίες αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Αντίστοιχα οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

Όταν μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος υγρό - δοχείο είναι στην περιοχή ή πολύ περισσότερο ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα μιας εξωτερικής κίνησης, διαταραχής ή διέγερσης που ασκείται πάνω στη κατασκευή, τότε εμφανίζεται το φαινόμενο του συντονισμού και η ευστάθεια του συστήματος επηρεάζεται σημαντικά. Επομένως ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων του φαινομένου του κυματισμού και γενικότερα η μελέτη της απόκρισης του συστήματος υγρό - δοχείο υπό εξωτερική διέγερση αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σημασία.

Το σύστημα ρευστού – δεξαμενής είναι ένα συζευγμένο σύστημα που χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση του ρευστού και της δεξαμενής. Με τον όρο αλληλεπίδραση ρευστού - δεξαμενής εννοείται η συζευγμένη επίλυση του ρευστού σε αλληλεπίδραση με την περιβάλλουσα δεξαμενή. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις στο κέλυφος της δεξαμενής υπολογίζονται με βάση τις υδροδυναμικές πιέσεις του υγρού που περιβάλλεται

από τη δεξαμενή. Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστού – κατασκευής είναι ανάλογη του βαθμού παραμόρφωσης της κατασκευής. Για στατικά φαινόμενα και “μικρές” παραμορφώσεις το πρόβλημα του ρευστού και αυτό της κατασκευής δύνανται να διατυπωθούν χωριστά. Όταν όμως η κίνηση είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, ακόμη και στην περίπτωση της μικρής παραμόρφωσης, η σύζευξη των δύο προβλημάτων είναι απαραίτητη, αφού το ρευστοδυναμικό πρόβλημα μπορεί να μην εξαρτάται από την μικρή παραμόρφωση της κατασκευής, εξαρτάται όμως από τις οριακές συνθήκες, καθώς οι ταχύτητες που αναπτύσσονται στην κατασκευή μεταφέρονται στο ρευστό.

Ένα σημαντικό πρόβλημα αλληλεπίδρασης είναι το φαινόμενο του κυματισμού, η σημασία της μελέτης του οποίου είναι μεγάλη όχι μόνο από ερευνητικής σκοπιάς, αλλά και εξαιτίας ενός μεγάλου αριθμού σημαντικών επιστημονικών και τεχνολογικών εφαρμογών του, που μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν:

■ Δυναμική απόκριση δεξαμενών και δοχείων πίεσης διαφορετικών γεωμετριών (τετραγωνικές, κυλινδρικές, σφαιρικές), λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια της δεξαμενής.

■ Δυναμική απόκριση δεξαμενών πλοίων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από τα θαλάσσια κύματα του αποθηκευμένου υγρού στις δεξαμενές του πλοίου. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας του πλοίου.

■ Δυναμική απόκριση δεξαμενών καυσίμων διαστημικών οχημάτων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από τη μεταβαλλόμενη επιτάχυνση του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.

■ Δυναμική απόκριση δεξαμενών οχημάτων μεταφοράς καυσίμων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την απότομη αλλαγή της πορείας του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης

ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του οχήματος.

■ Δυναμική απόκριση φραγμάτων λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην αντοχή του φράγματος ή να συντελέσουν σε πιθανή υπερχειλίση του.

## 1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο (1.1), με τον όρο “φαινόμενο κυματισμού” εννοείται η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού που περιέχεται στο εσωτερικό δοχείου και προκαλείται από την εξωτερική διέγερση στην οποία υπόκειται το δοχείο. Ανάλογα με την εξωτερική διέγερση και τη γεωμετρία του δοχείου, η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις : η πρώτη κίνηση σχετίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού οπότε έχουμε την δημιουργία κυματισμού στην ελεύθερη του επιφάνεια ενώ η δεύτερη αφορά την κίνηση της μάζα του ρευστού, η οποία ακολουθεί την κίνηση του δοχείου.

Ο Westergaard [47] επίλυσε για πρώτη φορά (1933) το φαινόμενο του κυματισμού υπολογίζοντας την κατανομή των πιέσεων σε φράγμα ορθογωνικής διατομής το οποίο υπόκειντο σε οριζόντια επιτάχυνση. Ο Jacobsen [23] έλυσε το πρόβλημα του κυματισμού σε όρθιο κυλινδρικό δοχείο όπως επίσης και το πρόβλημα ενός κυλινδρικού βάρους που περιβάλλεται από ρευστό, ενώ οι Werner και Sundquist [46] επέκτειναν τη μεθοδολογία του Jacobsen για ορθογωνικό δοχείο, ημι - κυκλικό και τριγωνικό κανάλι καθώς και για σφαίρα.

Η πρώτη ωστόσο ολοκληρωμένη ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού και ο διαχωρισμός σε “ομοιόμορφη” κίνηση (uniform motion) και “κίνηση κυματισμού” (sloshing motion) (αναφορά στο συγκεκριμένο διαχωρισμό γίνεται στην παράγραφο 2.1.2 της παρούσας εργασίας) έγινε από τους Graham και Rodriguez [15], οι οποίοι υπολόγισαν την “ομοιόμορφη” πίεση και την “πίεση κυματισμού” σε ορθογωνική δεξαμενή. Όσον αφορά την πρώτη πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού, αυτή δημοσιεύτηκε από τους Hoskins και Jacobsen [18], οι οποίοι υπολόγισαν πειραματικά την “ωστική” πίεση (αναφορά στο διαχωρισμό “ωστικής” και “επαγωγικής” κίνησης γίνεται στην παράγραφο 2.1.2 της παρούσας εργασίας). Αργότερα οι Jacobsen και Ayre [24] παρουσίασαν εργασία που

επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα των Hoskins και Jacobsen [18]. Ο Lamb [27] στο βιβλίο του "Υδροδυναμική" παρουσίασε τις θεμελιώδεις αρχές των επιφανειακών κυμάτων, στις οποίες βασίζεται και η ρευστομηχανική ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού.

Τη δεκαετία του '60 το πρόβλημα του κυματισμού εμφανιζόταν σε αεροδιαστημικές εφαρμογές και κυρίως στις δεξαμενές καυσίμων των πυραύλων με αποτέλεσμα να ξεκινήσει από τη NASA μια ολοκληρωμένη και σε βάθος ανάλυση του φαινομένου. Οι Abramson et. al. [3] παρουσίασαν πειραματικά αποτελέσματα για τις ιδιοσυχνότητες και τις πιέσεις σφαιρικού δοχείου το οποίο υπόκειται σε εξωτερική διέγερση. Τα αποτελέσματα τους ήταν σε πολύ καλή συμφωνία με εκείνα που είχε παρουσιάσει ο Budiansky [6]. Εν συνέχεια ο Abramson [2] παρουσίασε μια ολοκληρωμένη μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας υπό την επίδραση αρμονικής εξωτερικής διέγερσης. Στην μελέτη αυτή περιλαμβάνονται αναλυτικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα για το φαινόμενο του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας λαμβάνοντας υπόψη και την ελαστικότητα των τοιχωμάτων, ενώ παρουσιάζονται και ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα για την προσομοίωση του φαινομένου του κυματισμού. Η εργασία αυτή αποτελεί μια σημαντική συμβολή στη μελέτη του φαινομένου και περιλαμβάνει όλη την έρευνα στο φαινόμενο αυτό μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '60.

Σημαντικό κίνητρο για τη μελέτη του φαινομένου αποτέλεσε ο αντισεισμικός σχεδιασμός των δοχείων πίεσης και των δεξαμενών αποθήκευσης υγρών. Η μελέτη του φαινομένου για δεξαμενές και δοχεία πίεσης υπό την επίδραση σεισμικής διέγερσης πραγματοποιήθηκε αρχικά από τον Housner [19], [20], ο οποίος παρουσίασε αναλυτική λύση του φαινομένου του κυματισμού για μη - παραμορφώσιμα όρθια κυλινδρικά και ορθογωνικά δοχεία. Η αναλυτική λύση διαχωρίστηκε σε δύο μέρη : το πρώτο μέρος ονομάστηκε "επαγωγική" κίνηση, ενώ το δεύτερο "ωστική" κίνηση. Η αρχή αυτή του διαχωρισμού αποτέλεσε τη βάση για τη σύνταξη των κανονισμών API 650 [4] για κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Οι Veletsos [43], Veletsos και Yang [45], Haroun και Housner [17] καθώς και ο Haroun [16], επέκτειναν τη μεθοδολογία του διαχωρισμού της "επαγωγικής" και "ωστικής" κίνησης ώστε να συμπεριληφθεί σ' αυτήν η ελαστική παραμόρφωση του κελύφους και η αλληλεπίδραση της με το φαινόμενο του κυματισμού. Εν συνέχεια οι Peek [38], Natsiavas [33], Veletsos και Tang [44] καθώς και ο Malhotra [28], μελέτησαν την αποκόλληση απλά εδραζόμενων κατακόρυφων κυλινδρικών δεξαμενών καθώς και την αλληλεπίδραση εδάφους - κατασκευής. Αναφορικά με τη σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών με ειδική θεμελίωση και απλή στήριξη καθώς και με ότι σχετίζεται με τον αντισεισμικό σχεδιασμό αυτών των δεξαμενών, σημαντική είναι η συνεισφορά των εργασιών που παρουσίασαν οι Fisher [11],

Rammerstorfer et. al. [40] καθώς και οι Fisher et. al. [12]. Οι εργασίες αυτές αποτέλεσαν τη βάση για τη σύνταξη των κανονισμών αντισεισμικού σχεδιασμού των κατακόρυφων κυλινδρικών δοχείων στον Eurocode 8 [8]. Αξιοσημείωτη είναι η συνεισφορά των Niwa και Clough [34] καθώς και των Manos και Clough [29] όσον αφορά την πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Οι Rammerstorfer et. al [41] παρουσίασαν μία ολοκληρωμένη μελέτη και εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με τη σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών, περιλαμβάνοντας την αλληλεπίδραση ρευστού - κατασκευής και την αλληλεπίδραση εδάφους - κατασκευής. Σε πρόσφατη εργασία των Ibrahim et. al. [22] παρουσιάζεται μια εκτενέστατη βιβλιογραφική ανασκόπηση που αποτελείται από 1319 αναφορές, οι οποίες αναφέρονται στο μη - γραμμικό φαινόμενο του κυματισμού, σε ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα, σε στοχαστική εξωτερική διέγερση, στην παραμόρφωση του τοιχώματος της δεξαμενής, σε ωστική εξωτερική διέγερση καθώς επίσης και σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας του φαινομένου του κυματισμού.

Πρέπει ωστόσο να σημειωθεί πως οι παραπάνω εργασίες μελετούν το φαινόμενο του κυματισμού σε όρθιες κυλινδρικές και ορθογωνικές δεξαμενές, όμως τα σφαιρικά και τα οριζόντια κυλινδρικά δοχεία έχουν εξίσου σημαντικές εφαρμογές στην χημική και πετροχημική βιομηχανία. Επομένως η μελέτη του φαινομένου του κυματισμού λόγω εξωτερικής διέγερσης έχει πρακτικό ενδιαφέρον για τον υπολογισμό της συνολικής οριζόντιας δύναμης και της αντίστοιχης ροπής ανατροπής. Αξίζει να τονιστεί πως ο αριθμός των θεωρητικών και αριθμητικών εργασιών που αναφέρονται σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία είναι περιορισμένος σε σύγκριση με τον αριθμό των δημοσιεύσεων σε κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Επιπλέον σύγχρονοι κανονισμοί (ENV 1998 API 650 [4], Priestley et.al [39]) αναλύουν με λεπτομέρεια το φαινόμενο του κυματισμού για ορθογωνικά και κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία σε σεισμό, ενώ στην περίπτωση της σφαίρας και του οριζόντιου κυλίνδρου δεν υπάρχει ανάλυση του φαινομένου.

Ο Budiansky [6] εξέτασε το φαινόμενο του κυματισμού σε κυλινδρικό κανάλι και σε σφαίρα χρησιμοποιώντας έναν χωρικό μετασχηματισμό που απεικονίζει την αρχική κυκλική και σφαιρική γεωμετρία σε μία επίπεδη γεωμετρία. Το πεδίο ροής περιγράφεται από ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες επιλύονται με τη μέθοδο Galerkin, ενώ παρουσιάστηκαν και αριθμητικά αποτελέσματα όσον αφορά τις ιδιοσυχνότητες και τις υδροδυναμικές πιέσεις. Οι Moiseev και Petron [32] εφάρμοσαν τη μεθοδολογία του Ritz και υπολόγισαν αριθμητικά τις συχνότητες κυματισμού σε ποικίλες γεωμετρικές δοχείων, μεταξύ αυτών οριζόντιου κυλινδρικού και σφαιρικού. Οι Fox και Kuttler [14], [13] υπολόγισαν το άνω και κάτω όριο των τιμών των συχνότητων του κυματισμού σε ημι - κυκλικό κανάλι -η γεωμετρία του οποίου

είναι το δισδιάστατο ανάλογο του σφαιρικού δοχείου- χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης και τη μεθοδολογία των ενδιάμεσων προβλημάτων. Ωστόσο, η πλειονότητα των τεχνικών σύμμορφης απεικόνισης απαιτούν πολύπλοκους μετασχηματισμούς, ενώ οι μέθοδοι των μιγαδικών μεταβλητών δεν είναι εφαρμόσιμες σε τρισδιάστατες γεωμετρίες. Ο McIver [30] εξέτασε το φαινόμενο του κυματισμού σε οριζόντιο κυλινδρικό και σφαιρικό δοχείο οιασδήποτε πληρότητας επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το τοίχωμα του δοχείου και η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού να ταυτίζονται με τις γραμμές συντεταγμένων. Εν συνεχεία ο McIver επαναδιατύπωσε το πρόβλημα των ιδιοτιμών σε όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες και επιλύθηκαν αριθμητικά. Οι McIver και McIver [31] παρουσίασαν απλές αναλυτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του άνω και κάτω ορίου των συχνοτήτων του κυματισμού σε οριζόντιους κυλίνδρους, τα αποτελέσματα των οποίων ήταν σε πολύ καλή συμφωνία των ορίων που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Ενδιαφέρουσα εργασία αποτελεί επίσης και αυτή του Shankar [42] στην οποία παρουσιάζεται μια απλή αναλυτική μεθοδολογία για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία οιασδήποτε πληρότητας σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας.

Σημειώνεται πως η ανάλυση του κυματισμού σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία οιασδήποτε πληρότητας, απαιτεί υπολογιστική μέθοδο. Ωστόσο για την ειδική περίπτωση σφαίρας και οριζόντιου κυλίνδρου πληρότητας 50% είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια ημι - αναλυτική λύση. Οι Evans και Linton [10] δημοσίευσαν μια ημι - αναλυτική λύση σε μορφή αναπτύγματος σειράς για το πρόβλημα των ιδιοτιμών του φαινομένου του κυματισμού σε σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο ελαχιστοποιώντας το υπολογιστικό έργο. Θεωρώντας αρμονική λύση ως προς τον χρόνο, το δυναμικό της ταχύτητας αναλύεται σε όρους μη - ορθογωνικών χωρικών αρμονικών συναρτήσεων. Εφαρμόζοντας εν συνεχεία τις συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα του δοχείου και στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, η μέθοδος καταλήγει σε ένα ομογενές σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι συχνότητες του κυματισμού.

Βασισμένοι στην ανωτέρω εργασία και επεκτείνοντάς την, οι Paraspyrou et al [35], [36], [37] επίλυσαν μέσω ημι - αναλυτικής μεθόδου το πρόβλημα του κυματισμού για σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο (διαμήκης και εγκάρσια κατεύθυνση) πληρότητας 50% υπό εξωτερική διέγερση με έμφαση στην αντισεισμική απόκριση θεωρώντας τα τοιχώματα τους μη - παραμορφώσιμα.



### 1.3 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία στοχεύει στον προσδιορισμό της δυναμικής απόκρισης οριζόντιων κυλινδρικών και σφαιρικών δοχείων τα οποία υπόκεινται σε τυχαία εξωτερική διέγερση, εφαρμόζοντας μια ημι – αναλυτική μέθοδο μεταβολών. Ειδικότερα εξετάζεται το φαινόμενο του κυματισμού του ρευστού που περιέχεται στο εσωτερικό των προαναφερθέντων δοχείων λόγω της επιβολής οιασδήποτε εξωτερικής διέγερσης κατά την οριζόντια κατεύθυνση.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που υιοθετείται, το άγνωστο δυναμικό της ταχύτητας του κυματισμού εκφράζεται υπό μορφή σειράς μη ορθογωνικών χωρικών συναρτήσεων (εξαιτίας της ιδιαιτερότητας των γεωμετριών των συγκεκριμένων δοχείων), με αποτέλεσμα μέσω της ασθενούς μορφής του προβλήματος, όπως περιγράφεται στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών να καταλήγει σε ένα σύστημα συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Θεωρώντας μηδενική εξωτερική διέγερση και αρμονική λύση ως προς το άγνωστο δυναμικό της ταχύτητας του κυματισμού, υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιομορφές του φαινομένου, ο δε υπολογισμός των υδροδυναμικών δυνάμεων μπορεί να πραγματοποιηθεί προχωρώντας σε άμεση ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης ή εναλλακτικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το φαινόμενο του κυματισμού για την ειδική περίπτωση που τα υπό εξέταση δοχεία είναι πληρότητας 50% σε ρευστό. Η μέθοδος καταλήγει σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με βάση τις οποίες προκύπτουν ημι – αναλυτικές λύσεις για τις ιδιοσυχνότητες, τις μάζες και τις δυνάμεις του φαινομένου του κυματισμού. Τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται από γρήγορη σύγκλιση και ακρίβεια. Θεωρώντας τους δύο πρώτους όρους της λύσης σε μορφή σειράς, προκύπτει μια αρκετά κομψή απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος η οποία και οδηγεί σε λύσεις κλειστής μορφής καλής ακρίβειας. Η γενική περίπτωση οριζόντιων κυλινδρικών και σφαιρικών δοχείων οιασδήποτε πληρότητας ρευστού μελετάται στο τέταρτο κεφάλαιο. Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες, οι μάζες και οι δυνάμεις του φαινομένου του κυματισμού και τα αποτελέσματα εξετάζονται ως προς την ακρίβεια και τη σύγκλιση

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο εξετάζεται λεπτομερώς η συμπεριφορά δοχείων οιονεί άδειων ή γεμάτων σε ρευστό. Ειδική έμφαση δίνεται στη δυναμική απόκριση δοχείων οιονεί άδεια όπου και εφαρμόζεται η θεωρία των ρηχών δεξαμενών. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται επακριβώς οι οριακές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και των αντίστοιχων μαζών.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

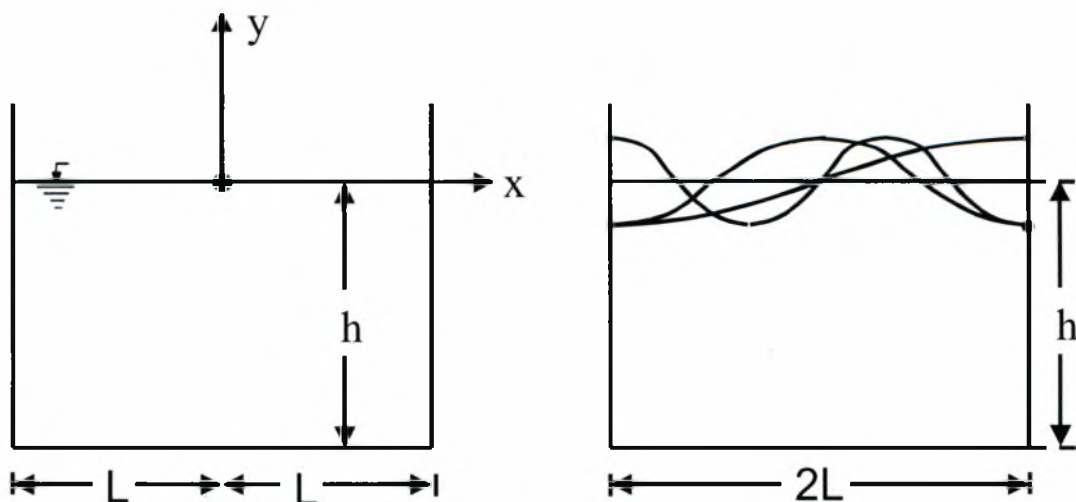
### 2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 2.1 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού βασίζεται στη γενική θεωρία των επιφανειακών κυμάτων [9]. Όταν σε ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας δημιουργηθούν κυματισμοί βαρύτητας στην ελεύθερη του επιφάνεια, η κίνηση του περιγράφεται από τη θεωρία των επιφανειακών κυμάτων.

##### 2.1.1 Δοχείο ορθογωνικού σχήματος

Στο ΣΧΗΜΑ 2-1 απεικονίζονται γραφικά οι κυματισμοί στην ελεύθερη επιφάνεια ρευστού στο εσωτερικό ορθογωνικού δοχείου πλάτους  $2L$  με μέσο βάθος ρευστού  $h$ .



ΣΧΗΜΑ 2-1 : Γραφική απεικόνιση κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια υγρού εντός δοχείου ορθογωνικού σχήματος  $h \times 2L$ .

Με βάση τη θεωρία των επιφανειακών κυμάτων η ροή του ρευστού χαρακτηρίζεται ως αστρόβιλη και ασυμπιεστή ενώ το ρευστό θεωρείται ατρίβες. Το διάνυσμα της ταχύτητας εκφράζεται ως η κλίση του δυναμικού της ταχύτητας, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα του δοχείου είναι  $\partial\Phi/\partial n = 0$  που υποδηλώνουν ότι για ατρίβες ρευστό η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας στο τοίχωμα είναι μηδέν.

Ωστόσο η ιδιαιτερότητα του προβλήματος του κυματισμού είναι η συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού ( $y = \eta$ ) η οποία προκύπτει από το συνδυασμό μιας κινηματικής και μια δυναμικής συνοριακής συνθήκης. Η κινηματική συνθήκη υποδηλώνει ότι κάθε σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται στη ελεύθερη επιφάνεια παραμένει σ' αυτή. Επομένως η αντίστοιχη εξίσωση στην ελεύθερη επιφάνεια  $y - \eta = 0$  είναι :

$$\frac{D}{Dt}(y - \eta) = 0 \quad (2.2)$$

ή ισοδύναμα σε δισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v = 0 \quad (2.3)$$

όπου  $u$  και  $v$  οι συνιστώσες της ταχύτητας ως προς  $x$  και  $y$  αντίστοιχα.

Εκφράζοντας τις συνιστώσες της ταχύτητας συναρτήσει του δυναμικού της, η κινηματική συνοριακή συνθήκη γράφεται στη μορφή :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , y = \eta \quad (2.4)$$

Η δυναμική συνοριακή συνθήκη υποδηλώνει ότι η πίεση είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια ( $y = \eta$ ). Η εφαρμογή της δυναμικής συνοριακής συνθήκης γίνεται μέσω της εξίσωσης Bernoulli :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \nabla \Phi + g \eta = F(t) \quad , y = \eta \quad (2.5)$$

που ισχύει για μη - μόνιμη και αστρόβιλη ροή, λαμβάνοντας υπόψη τις βαρυτικές δυνάμεις μιας και επηρεάζουν σημαντικά τους κυματισμούς της ελεύθερης επιφάνειας.

Σημειώνεται πως στην εξίσωση Bernoulli (2.5),  $p$  είναι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $F(t)$  η εξωτερική, χρονικά μεταβαλλόμενη, δύναμη που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια.

Με βάση τα παραπάνω για την περίπτωση του δοχείου ορθογωνικού σχήματος  $h \times 2L$  (ΣΧΗΜΑ 2-1) η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού έχει ως εξής :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , y = \eta \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \nabla \Phi + g \eta &= F(t) \quad , y = \eta \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0 \quad , y = -h \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0 \quad , x = 0, 2L \end{aligned} \quad (2.6)$$

Εν συνεχεία γραμμικοποιούνται οι μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες θεωρώντας ότι το ύψος των κυματισμών  $\eta(x)$  είναι μικρό σε σχέση με χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος, όπως το μέσο βάθος του ρευστού και το μήκος κύματος του κυματισμού. Επομένως οι ποσότητες  $\partial \eta / \partial x$  και  $\partial \Phi / \partial x$  που εκφράζουν την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας και τη συνιστώσα της ταχύτητας αντιστοίχως είναι μικρές. Συνεπώς το γινόμενο τους  $\partial \Phi / \partial x \cdot \partial \eta / \partial x$  θα είναι πολύ μικρό (δεύτερης τάξης) οπότε μπορούμε να το αγνοήσουμε σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους που είναι πρώτης τάξης. Τότε η κινηματική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \eta, t) \quad (2.7)$$

Αναλύοντας τη συνιστώσα  $\partial \Phi / \partial y$  στο  $y = \eta$  σε σειρά Taylor ως προς το  $y = 0$  και απαλείφοντας τους όρους δεύτερης τάξης προκύπτει η συνοριακή συνθήκη :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \quad , y = 0 \quad (2.8)$$

Η δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή το ρευστό είναι σε ηρεμία και κάθε κίνηση του προκαλείται από τον κυματισμό, ο μη γραμμικός όρος  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \nabla \Phi \nabla \Phi$  μπορεί να αγνοηθεί. Επιπλέον ο όρος  $\partial \Phi / \partial t$  μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Taylor ως προς το  $y = 0$  λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον πρώτο όρο της

σειράς, ενώ  $F(t) = 0$  καθώς δεν ασκείται εξωτερική δύναμη στην ελεύθερη επιφάνεια. Τότε λοιπόν προκύπτει η ακόλουθη συνοριακή σχέση :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0, t) + \frac{p(x, t)}{\rho} + g \eta(x, t) = 0 \quad , y = 0 \quad (2.9)$$

Υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο της τελευταίας εξίσωσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο  $\partial \eta / \partial t$  συναρτήσει του  $\partial \Phi / \partial y$  από την (2.8), οπότε η δυναμική συνοριακή συνθήκη γράφεται :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad (2.10)$$

Τέλος ο όρος  $\partial p(x, t) / \partial t$  είναι μηδέν καθώς η πίεση είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια.

Άρα η τελική μορφή της συνοριακής συνθήκης είναι :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad , y = 0 \quad (2.11)$$

Μετά και τη γραμμικοποίηση για την περίπτωση του δοχείου ορθογωνικής διατομής (ΣΧΗΜΑ 2-1) η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού έχει ως εξής :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) &= 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) &= 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, -h, t) &= 0 \quad , y = -h \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0 \quad , x = 0, 2L \end{aligned} \quad (2.12)$$

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες αποτελεί κλασσικό πρόβλημα ελεύθερης ταλάντωσης. Θεωρώντας λύση  $\Phi = \bar{\Phi} \cdot e^{i\omega t}$  καταλήγουμε στο ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi} &= 0 \\ -\omega^2 \bar{\Phi} + g \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} &= 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} &= 0 \quad , y = -h \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = 0 \quad , x = 0, 2L \quad (2.13)$$

η επίλυσή του οποίου μας δίνει τις ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) και τις ιδιομορφές. Σε γεωμετρικές δοχείου διαφορετικής τις ορθογωνικής, το πρόβλημα υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων κυματισμού δίνεται αντιστοίχως.

Στις περιπτώσεις που ασκείται εξωτερική διέγερση στο δοχείο, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα οριακών τιμών με την εμφάνιση μη ομογενών όρων στις συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα της δεξαμενής. Για την ειδική περίπτωση του δοχείου ορθογωνικής διατομής (ΣΧΗΜΑ 2-1) η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη :

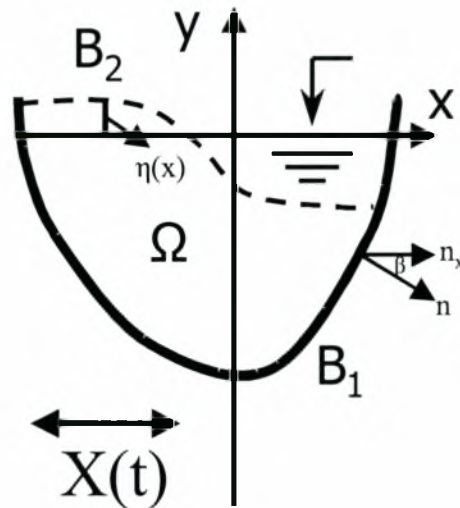
$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) &= 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) &= 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, -h, t) &= 0 \quad , y = -h \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \dot{X}(t) \quad , x = 0, 2L \end{aligned} \quad (2.14)$$

Οι μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος των συνοριακών τιμών διακρίνονται σε αναλυτικές και αριθμητικές. Συνήθεις αναλυτικές μέθοδοι είναι η μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών και η σύμμορφη απεικόνιση. Η μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών εφαρμόζεται σε ορθογωνικά και κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Σε σφαιρικά και σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία το πρόβλημα είναι μη διαχωρίσιμο και εφαρμόζονται συνήθως μέθοδοι σύμμορφης απεικόνισης ή άλλες εξειδικευμένες τεχνικές. Οι υπολογιστικές ωστόσο μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών και στοιχείων ή και των συνοριακών στοιχείων εφαρμόζονται σε όλες τις γεωμετρίες αλλά απαιτούν συνήθως μεγάλο υπολογιστικό κόστος (μνήμη και χρόνο).

## 2.1.2 Τύποι θεώρησης του δυναμικού για την επίλυση του φαινομένου.

Συνήθως για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικοί τρόποι θεώρησης του δυναμικού. Στη θεώρηση τύπου I το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  διαχωρίζεται σε δύο μέρη και ο διαχωρισμός αυτός σχετίζεται άμεσα με τη φυσική του φαινομένου. Στο φαινόμενο του κυματισμού το ρευστό που βρίσκεται στο

εσωτερικό του δοχείου περιλαμβάνει δύο διαφορετικές κινήσεις, ένα μέρος του ρευστού εκτελεί ταλάντωση (κυματισμό), η οποία εκφράζει τη σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο ενώ το υπόλοιπο μέρος του ακολουθεί την κίνηση του δοχείου.



**ΣΧΗΜΑ 2-2 : Γεωμετρική απεικόνιση του πεδίου ορισμού και των συνοριακών συνθηκών δοχείου**

Στη θεώρηση τύπου II το δυναμικό της ταχύτητας διαχωρίζεται επίσης σε δύο μέρη, την “ωστική” και την “επαγωγική” κίνηση, τα οποία έχουν επίσης κάποιο συγκεκριμένο φυσικό νόημα. Προφανώς οι θεωρήσεις τύπου I και II είναι ισοδύναμες δίνουν δηλαδή το ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην επόμενη παράγραφο. Η μαθηματική διατύπωση των δύο προαναφερθέντων τύπων διακριτοποίησης του προβλήματος για το δοχείο που απεικονίζεται στο ΣΧΗΜΑ 2-2 φαίνεται αμέσως παρακάτω.

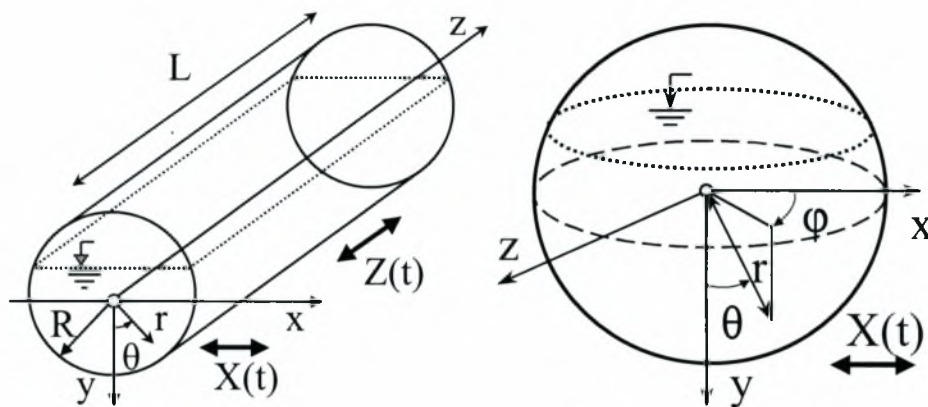
<b>ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ Ι <math>\Phi = \Phi_U + \Phi_S</math></b>	
<b>Ομοιόμορφη κίνηση</b>	<b>Κίνηση Κυματισμού</b>
$\nabla^2 \Phi_U = 0$ στο $\Omega$	$\nabla^2 \Phi_S = 0$ στο $\Omega$
$\frac{\partial \Phi_U}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta$ στο $B_1$	$\frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = 0$ στο $B_1$
$\frac{\partial \Phi_U}{\partial n} = 0$ στο $B_2$	$\frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial t^2}$ στο $B_2$

<b>ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ ΙΙ <math>\Phi = \Phi_I + \Phi_C</math></b>	
<b>Ωστική κίνηση</b>	<b>Επαγωγική κίνηση</b>
$\nabla^2 \Phi_I = 0$ στο $\Omega$	$\nabla^2 \Phi_C = 0$ στο $\Omega$
$\frac{\partial \Phi_I}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta$ στο $B_1$	$\frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = 0$ στο $B_1$
$\Phi_I = 0$ στο $B_2$	$\frac{\partial^2 \Phi_C}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = -g \frac{\partial \Phi_I}{\partial n}$ στο $B_2$



## 2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η γενική διατύπωση του προβλήματος του κυματισμού για δοχεία τυχαίας γεωμετρίας και οιασδήποτε πληρότητας σε ρευστό, τα οποία υπόκεινται σε τυχαία εξωτερική διέγερση (ΣΧΗΜΑ 2-3) καθώς και ο τρόπος επίλυσής του φαινομένου με τη μέθοδο των μεταβολών.



ΣΧΗΜΑ 2-3: Σχηματική απεικόνιση σφαιρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας υπό διέγερση με μετατόπιση  $X(t)$  (δεξιά) καθώς και οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας υπό εγκάρσια  $X(t)$  και διαμήκη διέγερση  $Z(t)$  (αριστερά)

Η κίνηση του ρευστού θεωρείται αστρόβιλη, το ρευστό ατριβές και η ροή ασυμπύεστη με αμελητέα επιφανειακή τάση. Το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της κλίσης του δυναμικού της ταχύτητας η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλο τον όγκο του ρευστού :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.15)$$

Στα τοιχώματα της δεξαμενής το δυναμικό  $\Phi$  της ταχύτητας ικανοποιεί τη συνθήκη :

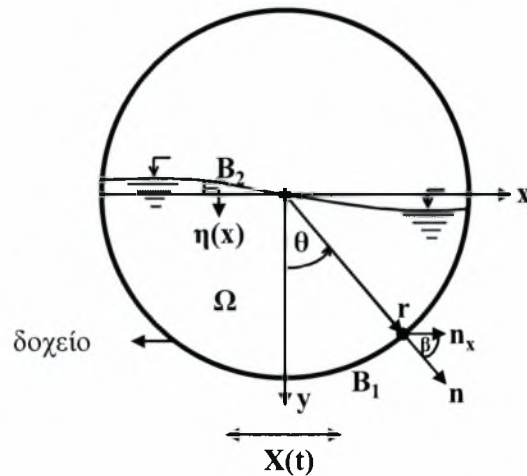
$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta \text{ στο } B_1 \quad (2.16)$$

όπου  $\beta$  η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα  $n$  στο τοίχωμα με τον παράλληλο ως προς τη διέγερση άξονα (στο ΣΧΗΜΑ 2-4 είναι ο άξονας  $x$ ). Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού θεωρείται αρκετά μικρή έτσι ώστε να επιτρέπεται η γραμμικοποίηση του προβλήματος, οπότε το δυναμικό  $\Phi$  της ταχύτητας, υπόκειται στη γραμμικοποιημένη δυναμική (2.17) και κινηματική (2.18) συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g \eta = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \dot{\eta} = 0 \quad (2.18)$$

όπου  $g$  η σταθερά της βαρύτητας ενώ  $\eta(x)$  είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.



**ΣΧΗΜΑ 2-4 :** Γεωμετρική απεικόνιση του πεδίου ορισμού και των συνοριακών συνθηκών του γενικού προβλήματος για δοχείο οιασδήποτε πληρότητας σε ρευστό το οποίο υπόκειται σε τυχαία διέγερση ως προς τον  $x$  άξονα μετατόπισης  $X(t)$

Συνδυασμός των σχέσεων (2.17) και (2.18) οδηγεί στην ακόλουθη μικτή συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_2 \quad (2.19)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  διαχωρίζεται στο δυναμικό της κίνησης του κυματισμού  $\Phi_s$  το οποίο παριστάνει τη σχετική κίνηση του ρευστού μέσα στη δεξαμενή και στο δυναμικό της ομοιόμορφης κίνησης  $\Phi_U$  που αντιστοιχεί σε μια κίνηση άκαμπτου σώματος του ρευστού, η οποία ακολουθεί ακριβώς την κίνηση της πηγής που προκαλεί την εξωτερική διέγερση. Δηλαδή:

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_U \quad (2.20)$$

όπου

$$\Phi_U = \dot{X} x \quad (2.21)$$

Η  $\Phi_U$  ικανοποιεί τόσο την εξίσωση Laplace καθώς και την κινηματική συνοριακή συνθήκη στα τοιχώματα της δεξαμενής (σύνορο  $B_1$ ).

Για το άγνωστο δυναμικό  $\Phi_s$  το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής :

$$\nabla^2 \Phi_s = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_1 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial t^2} \text{ στο } B_2 \quad (2.24)$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος για τη συνάρτηση  $\Phi_s$  είναι :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi_s) \Phi^* d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

όπου  $\Phi^*$  τυχαία αλλά κινηματικά αποδεκτή συνάρτηση.

Με βάση το θεώρημα Green ισχύει :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi_s) \Phi^* d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega + \int_B \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB \quad (2.26)$$

όπου  $B$  είναι το ολικό σύνορο του προβλήματος.

Με τη βοήθεια όμως της (2.26) η (2.25) γίνεται :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega - \int_B \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB = 0 \quad (2.27)$$

Ισχύει όμως ότι  $B = B_1 \cup B_2$ , οπότε η (2.27) γίνεται :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega - \int_{B_1} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_1 - \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_2 = 0 \quad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.23) και (2.24) η (2.28) γίνεται :

$$\int_{B_2} \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - \frac{1}{g} \ddot{X} x \right) \Phi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega = 0 \quad (2.29)$$

ή ισοδύναμα :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} \Phi^* dB_2 = -\frac{\ddot{X}}{g} \int_{B_2} x \Phi^* dB_2 \quad (2.30)$$

Η εξίσωση (2.30) στην οποία καταλήξαμε αποτελεί τη βασική εξίσωση της παρούσας εργασίας την οποία στο εξής θα αναφέρουμε ως **εξίσωση των μεταβολών (variational equation)**.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο διακριτοποίησης κατά Galerkin στην εξίσωση των μεταβολών (2.30). Έτσι λοιπόν για την άγνωστη συνάρτηση  $\Phi_s$  θεωρείται προσεγγιστική λύση σε μορφή σειράς η οποία είναι η εξής :

$$\Phi_s = [N] \dot{q} \quad (2.31)$$

όπου  $\dot{\mathbf{q}}$  το διάνυσμα των άγνωστων χρονικών συναρτήσεων,  $[\mathbf{N}]$  ένας πίνακας γραμμής διάστασης  $N$ , ο οποίος περιλαμβάνει τις αντίστοιχες χωρικές συναρτήσεις και εξαρτάται από την εκάστοτε γεωμετρία, ενώ  $N$  είναι ο αριθμός των όρων της σειράς (truncation size).

Με κατάλληλη παραγωγή της (2.30) προκύπτει :

$$\nabla\Phi_s = [\mathbf{B}]\dot{\mathbf{q}} \quad (2.32)$$

όπου  $[\mathbf{B}]$  ένας πίνακας διαστάσεων  $i \times N$  με το  $i$  να παίρνει τις τιμές 2 ή 3, ανάλογα αν το πρόβλημα είναι δισδιάστατο ή τρισδιάστατο (για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή υπό εγκάρσια διέγερση  $i=2$ , για σφαιρική δεξαμενή  $i=3$  και για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή υπό διαμήκη διέγερση  $i=3$ ). Ο  $[\mathbf{B}]$  περιλαμβάνει ανά γραμμή τις παραγώγους των συναρτήσεων  $[\mathbf{N}]$  ως προς τις διαστάσεις του εκάστοτε προβλήματος.

Όμοια, για την τυχαία συνάρτηση  $\Phi^*$  θεωρούμε ότι ισχύει η ίδια διακριτοποίηση δηλαδή :

$$\Phi^* = [\mathbf{N}]\mathbf{q}^* \quad (2.33)$$

και :

$$\nabla\Phi^* = [\mathbf{B}]\mathbf{q}^* \quad (2.34)$$

όπου  $\mathbf{q}^*$  το διάνυσμα που περιλαμβάνει τυχαίες συναρτήσεις.

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις σχέσεις (2.31), (2.32), (2.33) (2.34) στην (2.30) προκύπτει :

$$\int_{\Omega} (\nabla\Phi^*)^T (\nabla\Phi_s) d\Omega + \frac{1}{g_{B_2}} \int (\Phi^*)^T \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} dB_2 = -\frac{\ddot{X}}{g_{B_2}} \int (\Phi^*)^T x dB_2 \quad (2.35)$$

ή ισοδύναμα :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{q}^*)^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}]\dot{\mathbf{q}} d\Omega + \frac{1}{g_{B_2}} \int (\mathbf{q}^*)^T [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]\ddot{\mathbf{q}} dB_2 = -\frac{\ddot{X}}{g_{B_2}} \int (\mathbf{q}^*)^T [\mathbf{N}]^T x dB_2 \quad (2.36)$$

$$(\mathbf{q}^*)^T \left[ \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega \right] \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{q}^*)^T \left[ \frac{1}{g_{B_2}} \int [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dB_2 \right] \ddot{\mathbf{q}} = -(\mathbf{q}^*)^T \left[ \frac{1}{g_{B_2}} \int [\mathbf{N}]^T x dB_2 \right] \ddot{X} \quad (2.37)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το  $\mathbf{q}^*$  είναι το τυχαίο διάνυσμα καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ης</sup> τάξης :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}]\mathbf{q} = -\mathbf{P}\ddot{X} \quad (2.38)$$

όπου

$$[\mathbf{M}] = \frac{1}{g_{B_2}} \int [\mathbf{N}][\mathbf{N}]^T dB_2 \quad \text{το "μητρώο μάζας"} \quad (2.39)$$

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [(\mathbf{B})][(\mathbf{B})]^T d\Omega \quad \text{το "μητρώο ακαμψίας"} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{g} \int_{B_2} [(\mathbf{N})]^T \mathbf{x} dB_2 \quad \text{το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων"} \quad (2.41)$$

και  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

## 2.2.1 Υπολογισμός ιδιοτιμών

Στην περίπτωση που δεν ασκείται εξωτερική διέγερση, δηλ.  $\ddot{\mathbf{X}}(t) = 0$ , το πρόβλημα του κυματισμού γίνεται πρόβλημα ελεύθερων ταλαντώσεων. Εδώ  $\Phi_{,i} = 0$  και η διατύπωση του προβλήματος για το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi = \Phi_s$  είναι η εξής :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_1 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_2 \quad (2.44)$$

Δεδομένου όμως ότι η  $\Phi = 0$  είναι η προφανής λύση του προβλήματος θεωρείται λύση της μορφής  $\Phi = \bar{\Phi} e^{i\omega t}$

Για τη συνάρτηση  $\bar{\Phi}$  το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή διατυπώνεται ως εξής :

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_1 \quad (2.46)$$

$$-\omega^2 \bar{\Phi} + g \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_2 \quad (2.47)$$

Αναζητούνται οι τιμές των  $\omega$  για τις οποίες η συνάρτηση  $\bar{\Phi}$  έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Η εξίσωση των μεταβολών (2.30) σ' αυτή την περίπτωση γίνεται :

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{\Phi})(\nabla \Phi^*) d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_2} \bar{\Phi} \Phi^* dB_2 = 0 \quad (2.48)$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο των μεταβολών όπως αυτή αναλύθηκε στην παράγραφο 2.2 καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα ομογενών εξισώσεων :

$$\{[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]\} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.49)$$

όπου :

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega \quad (2.50)$$

$$[\mathbf{M}] = \int_{B_2} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dB_2 \quad (2.51)$$

$$\text{και } \lambda = \frac{\omega^2}{g}$$

Η σχέση (2.49) αποτελεί ένα **ιδιοπρόβλημα**, από την επίλυση του οποίου προσδιορίζονται οι τιμές του λόγου  $\lambda = \omega^2/g$  για τις οποίες υπάρχει μη μηδενική λύση για την άγνωστη συνάρτηση  $\Phi_s$ .

Οι τιμές των  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ) ή ισοδύναμα των  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ ) οι οποίες προκύπτουν αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες κυματισμού (sloshing frequencies) ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$  αποτελούν τις μορφές κυματισμού (sloshing modes).

## 2.2.2 Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων με τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis)

Στις εξισώσεις κίνησης (2.38) :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}]\mathbf{q} = -\mathbf{P}\ddot{\mathbf{X}}$$

πραγματοποιούμε την εξής αλλαγή μεταβλητής :

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^N (Y_i \Psi_i) \quad (2.52)$$

όπου  $\Psi_i$  είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $i$  ιδιοτιμή.

Με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιώντας τα όσα γνωρίζουμε για την ανάλυση των ιδιομορφών, το αρχικό συζευγμένο σύστημα των εξισώσεων κίνησης διαγωνοποιείται και καταλήγουμε (λαμβάνοντας υπόψη και τις συνθήκες ορθογωνικότητας των ιδιοδιανυσμάτων), στο ακόλουθο σύστημα των  $N$  ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων οι οποίες και αποτελούν τις ασύζευκτες εξισώσεις κίνησης :

$$M_n \ddot{Y}_n + K_n Y_n = -P_n \ddot{X} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.53)$$

όπου

$$M_n = \Psi_n^T [\mathbf{M}] \Psi_n \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.54)$$

$$K_n = \Psi_n^T [\mathbf{K}] \Psi_n = \omega_n^2 M_n \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.55)$$

$$P_n = \Psi_n^T P \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.56)$$

Οι δυνάμεις του κυματισμού αποτελούν το ολοκλήρωμα των υδροδυναμικών πιέσεων στο τοίχωμα που "βρέχεται" από το υγρό, οπότε :

$$F_S = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} n_x \, dB_1 \quad (2.57)$$

η οποία με βάση την (2.31) γίνεται :

$$F_S = -\rho \int_{B_1} [N] \ddot{\mathbf{q}} n_x \, dB_1 \quad (2.58)$$

Χρησιμοποιώντας στην τελευταία σχέση το μετασχηματισμό της σχέσης (2.52) για το διάνυσμα  $\mathbf{q}$ , καταλήγουμε στην εξής σχέση :

$$F_S = -\rho \sum_{n=1}^N (F_n \ddot{Y}_n) \quad (2.59)$$

όπου :

$$F_n = \Psi_n^T \mathbf{F}_1 \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.60)$$

και :

$$\mathbf{F}_1 = \int_{B_1} [N]^T n_x \, dB_1 \quad (2.61)$$

Επίσης θέτοντας στην (2.59) :

$$Y_n = \alpha_n \frac{P_n}{M_n} \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.62)$$

τότε αυτή γίνεται :

$$F_S = -\sum_{n=1}^N \rho \frac{F_n P_n}{M_n} \ddot{\alpha}_n \quad (2.63)$$

ή εναλλακτικά :

$$F_S = -\sum_{n=1}^N M_{ns} \ddot{\alpha}_n \quad (2.64)$$

Από τη σχέση (2.64) υπολογίζεται η δύναμη του κυματισμού  $F_S$  (sloshing force) και :

$$M_{ns} = \rho \frac{F_n P_n}{M_n} \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.65)$$

είναι η μάζα κυματισμού που αντιστοιχεί στη  $n$  ιδιοτιμή ενώ η συνολική μάζα του κυματισμού  $M_S$  (sloshing mass) είναι το άθροισμα τους για  $n = 1, 2, \dots, N$  .δηλ. :

$$M_s = \sum_{n=1}^N \rho \frac{F_n P_n}{M_n} \quad (2.66)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές  $M_n$  και  $P_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.54) και (2.56) αντίστοιχα ενώ οι  $F_n$  από τις (2.60) και (2.61).

Τα  $\alpha_n$  υπολογίζονται από την εξίσωση του απλού ταλαντωτή :

$$\ddot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = -\ddot{X} \quad , n=1,2,\dots,N \quad (2.67)$$

όπου  $\omega_n$  οι ιδιοτιμές.

Όμοια με τη δύναμη του κυματισμού  $F_s$ , η ομοιόμορφη δύναμη  $F_U$  (uniform force) δίνεται από τη σχέση :

$$F_U = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \Phi_U}{\partial t} n_x dB_1 \quad (2.68)$$

η οποία αντικαθιστώντας το δυναμικό της ομοιόμορφης κίνησης  $\Phi_U$  από την (2.21) γίνεται :

$$F_U = -\rho \int_{B_1} \ddot{X} x n_x dB_1 \quad (2.69)$$

ή ισοδύναμα :

$$F_U = -\rho \ddot{X} \int_{B_1} x n_x dB_1 \quad (2.70)$$

Η (2.70) χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss γίνεται :

$$F_U = -\rho \ddot{X} \int_{\Omega} d\Omega \quad (2.71)$$

ή :

$$F_U = -\rho \ddot{X} \Omega \quad (2.72)$$

όπου  $\Omega$  είναι ο συνολικός όγκος του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο

Άρα καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για την ομοιόμορφη δύναμη (uniform force) :

$$F_U = -M_L \ddot{X} \quad (2.73)$$

όπου  $M_L$  η συνολική μάζα του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο (liquid mass).

Η συνολική δύναμη  $F_T$  (total force) αποτελεί το άθροισμα της δύναμης του κυματισμού  $F_s$  (2.64) και της ομοιόμορφης δύναμης  $F_U$  (2.73) και επομένως :

$$F_T = -\sum_{n=1}^N (M_{ns} \ddot{\alpha}_n) - M_L \ddot{X} \quad (2.74)$$



Στο σημείο αυτό τονίζεται πως ο διαχωρισμός του προβλήματος σε ομοιόμορφη κίνηση και κίνηση κυματισμού αποτελεί την αντίληψη ενός παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται πάνω στο κινούμενο δοχείο, εκφράζει δε τη σχετική κίνηση του κυματισμού ως προς την κίνηση του δοχείου.

Αν θέσω :

$$u_n = a_n + X \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.75)$$

καταλήγω σε μια άλλη έκφραση για τη συνολική δύναμη  $F_T$  (total force) η οποία μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα της ωστικής δύναμης  $F_I$  (impulsive force) και της επαγωγικής δύναμης  $F_C$  (convective force) δηλαδή :

$$F_T = F_I + F_C = -M_I \ddot{X} - \sum_{n=1}^N M_{ns} \ddot{u}_n \quad (2.76)$$

όπου :

$$M_I = M_L - \sum_{n=1}^N M_{ns} \quad \text{η ωστική μάζα} \quad (2.77)$$

Τα  $u_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 (u - X) = 0 \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (2.78)$$

Η διαφορά του συγκεκριμένου διαχωρισμού σε ωστική και επαγωγική κίνηση σε σχέση με τον προηγούμενο (ομοιόμορφη - κυματισμού) είναι πως αφορά έναν ακίνητο, εκτός δοχείου παρατηρητή και εκφράζει την απόλυτη κίνηση του κυματισμού.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%

#### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της μεθόδου των μεταβολών για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά καθώς και σε σφαιρικά δοχεία πληρότητας 50% σε ρευστό. Για την κάθε γεωμετρία ορίζονται οι χωρικές συναρτήσεις της μεθόδου διακριτοποίησης κατά Galerkin και υπολογίζεται το "μητρώο μάζας", το "μητρώο ακαμψίας" καθώς και το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων" των εξισώσεων κίνησης. Οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές του φαινομένου του κυματισμού προσδιορίζονται από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος. Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της εργασίας που παρουσίασε ο McIver [30]. Επιβάλλοντας στα δοχεία εξωτερική εγκάρσια σεισμική διέγερση, υπολογίζονται, με τη μέθοδο της ιδομορφικής ανάλυσης (modal analysis), οι μάζες, καθώς και οι δυνάμεις του φαινομένου του κυματισμού. Ωστόσο εφαρμόζεται και η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration) στις εξισώσεις κίνησης, ως εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των δυνάμεων. Παρουσιάζεται επίσης και η απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος (simplified formulation) για την κάθε γεωμετρία. Εν συνεχεία πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων βάση της παρούσας μεθόδου με τα αντίστοιχα που προκύπτουν κάνοντας χρήση της συγκρίνεται με την ημι-αναλυτική λύσης των Paraspyrou et.al [35], [36]. Τέλος η μέθοδος εφαρμόζεται και σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία (διαμήκης διεύθυνση διέγερσης) για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του φαινομένου του κυματισμού και τη σύγκριση τους με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν θεωρώντας το ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος.

### 3.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Το ρευστό πυκνότητας  $\rho$  περιέχεται στο εσωτερικό οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  και πληρότητας 50% ( $H = R$ ). Τα τοιχώματά του δοχείου θεωρούνται μη παραμορφώσιμα. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $x, y, z$  τοποθετείται στην αρχή του άξονα συμμετρίας του δοχείου, ο άξονας  $y$  είναι κατακόρυφος προς τα κάτω, ενώ η γεωμετρία περιγράφεται ως προς τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r, \theta, z$ .

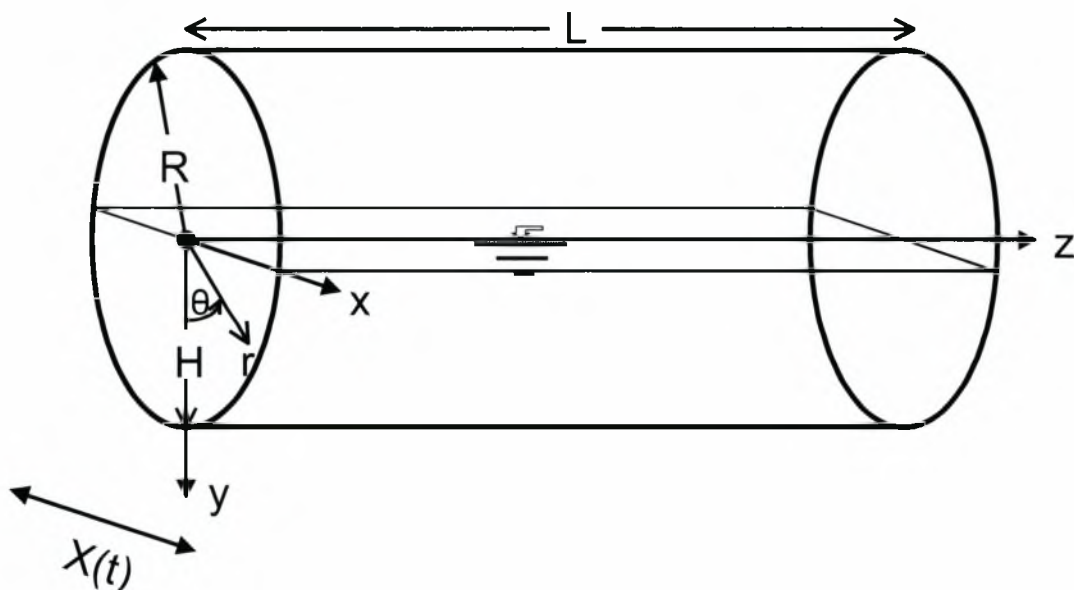
Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής :

$$x = r \sin\theta \quad (3.1)$$

$$y = r \cos\theta \quad (3.2)$$

$$z = z \quad (3.3)$$

Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση στην κατεύθυνση του άξονα  $x$  με μετατόπιση  $X(t)$ . (ΣΧΗΜΑ 3-1). Εξαιτίας του τύπου της γεωμετρικής συμμετρίας του δοχείου καθώς και της μορφής της εξωτερικής διέγερσης η κίνηση του ρευστού περιγράφεται ως προς τις δύο διαστάσεις  $r, \theta$  (ΣΧΗΜΑ 3-2).



ΣΧΗΜΑ 3-1 : Γεωμετρική απεικόνιση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  και πληρότητας 50% ( $H=R$ ), το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον εγκάρσιο άξονα  $x$  με μετατόπιση  $X(t)$

### 3.1.1 Συναρτήσεις Σχήματος - Εξισώσεις Κίνησης

Το πρώτο βήμα της μεθόδου των μεταβολών είναι η εφαρμογή της μεθόδου διακριτοποίησης κατά Galerkin στην εξίσωση των μεταβολών (2.30).

Οι χωρικές συναρτήσεις του πίνακα  $[N]$  (2.31) ορίζονται να είναι οι εξής :

$$N_n = r^n \sin n\theta \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

όπου  $N$  ο αριθμός των όρων της σειράς (truncation size) που είναι και η διάσταση του πίνακα γραμμή  $[N]$ .

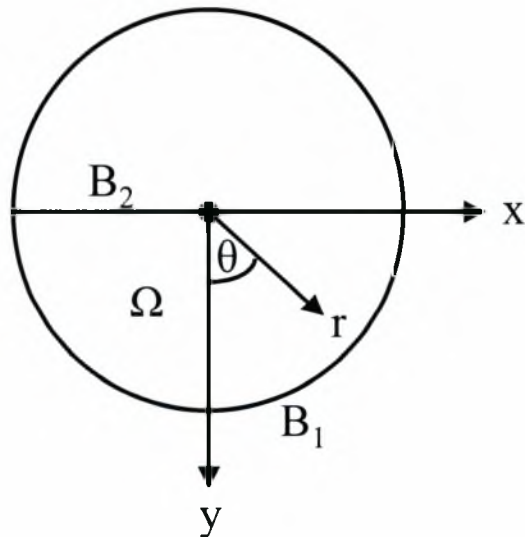
Επειδή το πρόβλημα είναι δισδιάστατο  $(r, \theta)$ , ο  $2 \times N$  στη συγκεκριμένη περίπτωση πίνακας  $[B]$  (2.32) :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

οπότε με βάση την (3.4) οι συναρτήσεις κάθε γραμμής του πίνακα  $[B]$  είναι :

$$B_{1n} = n r^{n-1} \sin n\theta \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

$$B_{2n} = n r^{n-1} \cos n\theta \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$



**ΣΧΗΜΑ 3-2 :** Γεωμετρική απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών και του πεδίου ορισμού του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου, ως προς τις δυο διαστάσεις

Στην ελεύθερη επιφάνεια ( $B_2$ ) του ρευστού όπου  $0 < r < R$ ,  $\theta = \pi/2$  και  $0 < z < L$  είναι:

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = L \int_R^R \dots dr \quad (3.8)$$

Αντίστοιχα στο τοίχωμα του δοχείου ( $B_1$ ) όπου  $r = R$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  και  $0 < z < L$  ισχύει:

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots R d\theta \quad (3.9)$$

ενώ σε όλο τον όγκο του ρευστού ( $\Omega$ ) όπου  $0 < r < R$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  και  $0 < z < L$  είναι:

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = L \int_R^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots r d\theta dr \quad (3.10)$$

Το "μητρώο μάζας" [ $\mathbf{M}$ ] (2.39), το "μητρώο ακαμψίας" [ $\mathbf{K}$ ] (2.40) και το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων"  $\mathbf{P}$  (2.41) των εξισώσεων κίνησης (2.38) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M_{mn} = \frac{2LR^{m+n+1}}{g(m+n+1)} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.11)$$

$$K_{mn} = \begin{cases} \frac{2nmLR^{n+m} \sin\left[\frac{1}{2}(m-n)\pi\right]}{(m-n)(m+n)}, & \text{για } m \neq n \\ \frac{m\pi}{2} L R^{2m}, & \text{για } m = n \end{cases} \quad (3.12)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N$$

$$P_m = \frac{2LR^{m+2}}{g(m+2)} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

όπου  $g = 9.81 \text{m/sec}^2$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

### 3.1.2 Ιδιοσυχνότητες - Ιδιομορφές

Ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ) και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$  (ιδιομορφές) του φαινομένου του κυματισμού, επιτυγχάνεται λύνοντας το ιδιοπρόβλημα (2.49). Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1) παρατίθενται οι τέσσερις πρώτες ιδιοσυχνότητες  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  όπου  $\lambda_n = \omega_n^2 \cdot R/g$ ), συναρτήσεως του αριθμού  $N$  των όρων σειράς (truncation size) για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%. Τα

αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αντίστοιχα της εργασίας του McIver [30], των Evans και Linton [10] καθώς και με τα αποτελέσματα της εργασίας του Budiansky [6].

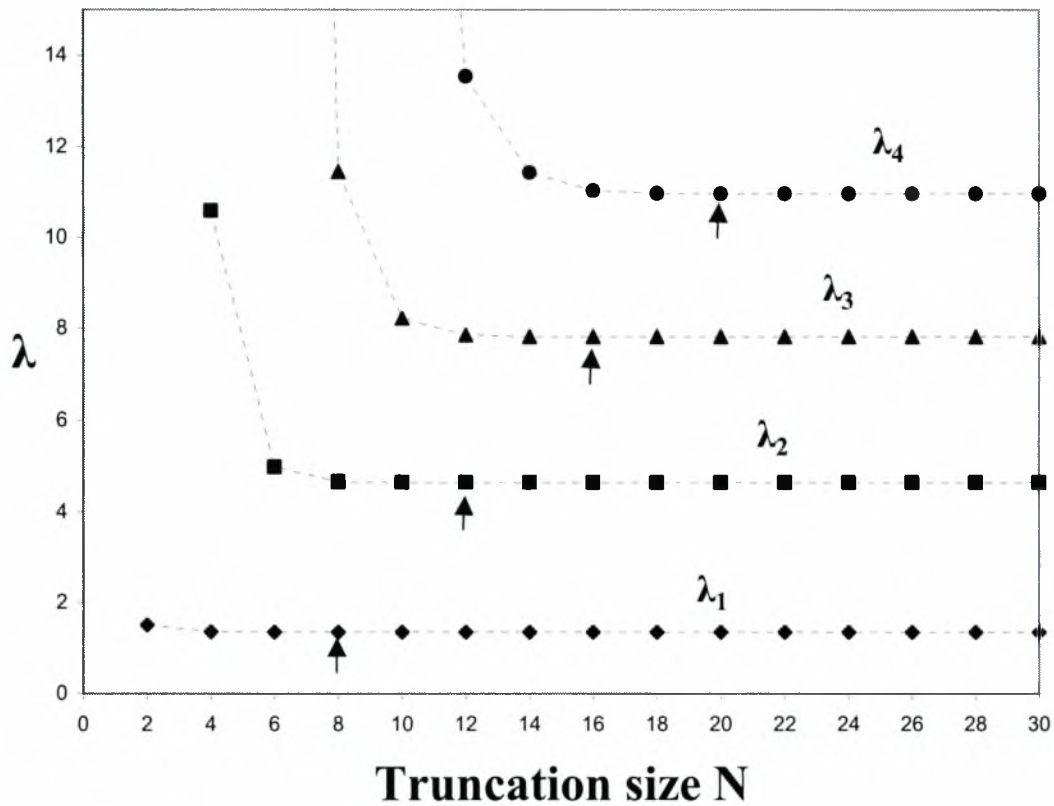
<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	1.5074			
4	1.3569	10.592		
6	1.3558	4.9917	67.632	
8	1.3557	4.666	11.451	558.89
10	1.3557	4.6514	8.225	31.564
12	1.3557	4.6511	7.8578	13.55
14	1.3557	4.6511	7.8221	11.431
16	1.3557	4.6511	7.8199	11.035
18	1.3557	4.6511	7.8199	10.977
20	1.3557	4.6511	7.8199	10.972
30	1.3557	4.6511	7.8199	10.972
<b>McIver [30]</b>	<b>1.3557</b>	<b>4.6511</b>	<b>7.8199</b>	<b>10.972</b>
<b>Evans Linton [10]</b>	<b>1.3557</b>	<b>4.6511</b>	<b>7.8199</b>	<b>10.972</b>
<b>Budiansky [6].</b>	<b>1.36</b>	<b>4.7</b>	<b>7.96</b>	

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1 :** Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50%, συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς (truncation size) – Σύγκριση τόσο με τα αποτελέσματα του McIver [30], με τα αντίστοιχα των Evans και Linton [10] καθώς και με εκείνα του Budiansky [6].

Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα είναι σε απόλυτη συμφωνία τόσο με εκείνα του McIver [30], όσο και με τα αντίστοιχα των Evans και Linton [10] και μάλιστα υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές το οποίο έχει ήδη επιτευχθεί για είκοσι

όρους σειράς ( $N = 20$ ). Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την πολύ γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου.

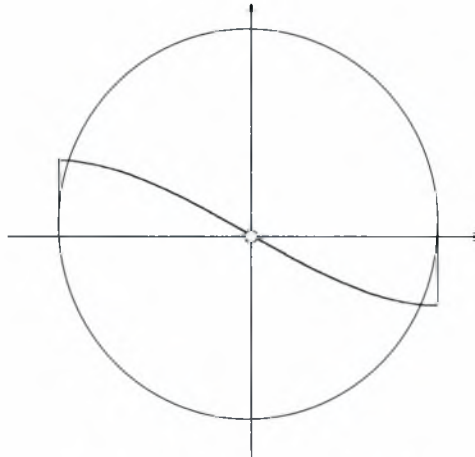
Ακολούθως (ΣΧΗΜΑ 3-3) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1), στην οποία φαίνεται καλύτερα η γρήγορη σύγκλιση των ιδιοτιμών.



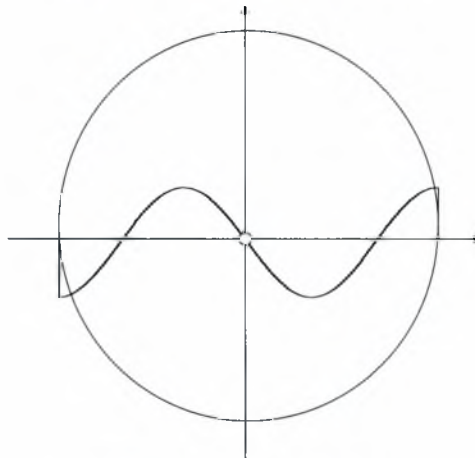
**ΣΧΗΜΑ 3-3 :** Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων τιμών του λόγου  $\lambda = \omega^2 R/g$ . Τα σύμβολα  $\uparrow$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης

Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές του φαινομένου του κυματισμού για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%, οι οποίες αντιστοιχούν στις τρεις πρώτες ιδιοτιμές ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ), απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί (ΣΧΗΜΑ 3-4).

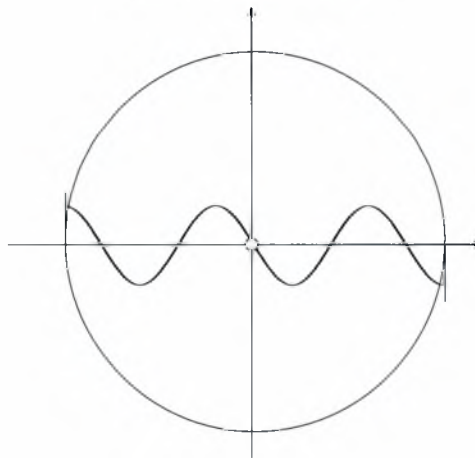
**ΠΡΩΤΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ**



**ΔΕΥΤΕΡΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ**



**ΤΡΙΤΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ**

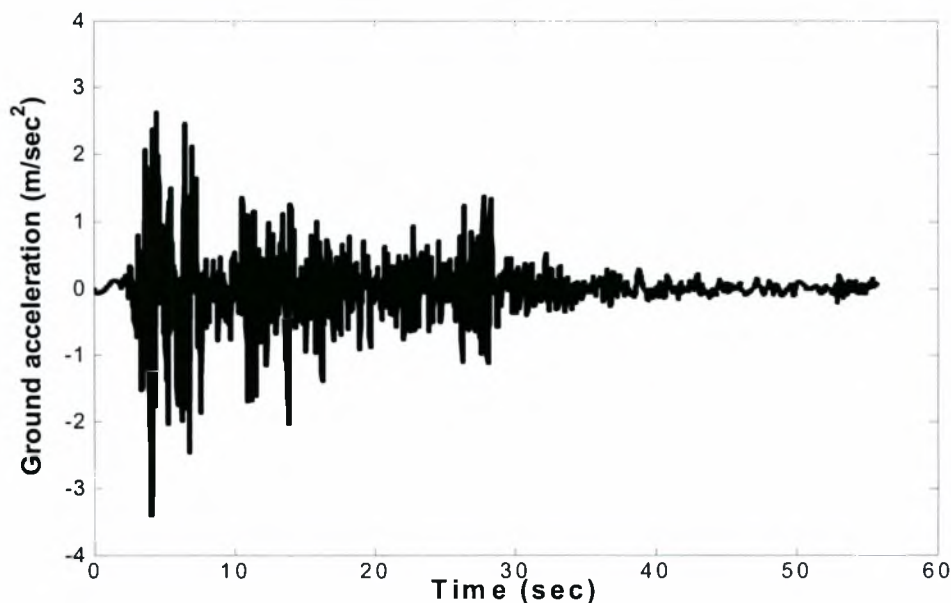


**ΣΧΗΜΑ 3-4 : Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές του φαινομένου του κυματισμού για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%**



### 3.1.3 Εξωτερική διέγερση

Η εξωτερική διέγερση μετατόπισης  $X(t)$  που επιβάλλεται στο οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο όπως αναφέρθηκε είναι τυχαία, επομένως μπορεί να είναι οιαδήποτε. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε σεισμική διέγερση και χρησιμοποιούμε σαν παράδειγμα τον σεισμό του El Centro (1940) το επιταχυνσιογράφημα του οποίου φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 3-5.



ΣΧΗΜΑ 3-5 : Επιταχυνσιογράφημα του σεισμού του El Centro, 1940 [21]

Στη συνέχεια προχωράμε στον υπολογισμό των μαζών και των δυνάμεων του φαινομένου του κυματισμού. Χρησιμοποιούνται τόσο η μέθοδος της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis) όσο και εκείνη της άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration)

### 3.1.4 Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων με τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis)

Η συνολική μάζα του κυματισμού  $M_s$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.66) :

$$M_s = \sum_{n=1}^N \rho \frac{F_n P_n}{M_n} \quad (3.14)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού που περιέχεται στο οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%.

Οι συντελεστές  $M_n$  και  $P_n$  δίνονται από τις σχέσεις (2.54) :

$$M_n = \Psi_n^T [\mathbf{M}] \Psi_n, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

και (2.56) :

$$P_n = \Psi_n^T \mathbf{P}, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται πως το μητρώο μάζας  $[\mathbf{M}]$  και το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων  $\mathbf{P}$  δίνονται από τις σχέσεις (3.11) και (3.13) αντίστοιχα, ενώ τα ιδιοδιανύσματα  $\Psi_n$  προκύπτουν από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος (παράγραφος 3.1.2).

Οι συντελεστές  $F_n$  δίνονται από τη σχέση (2.60) :

$$F_n = \Psi_n^T \mathbf{F}_1, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

στην οποία το διάνυσμα  $\mathbf{F}_1$  από τη σχέση (2.61) είναι :

$$\mathbf{F}_1 = \int_{B_1} [\mathbf{N}]^T n_x dB_1 \quad (3.18)$$

Στο τοίχωμα του δοχείου  $B_1$ , η συνιστώσα του κάθετου διανύσματος ως προς  $x$  είναι :

$$n_x = \sin\theta \quad (3.19)$$

Η τελική έκφραση για διάνυσμα  $\mathbf{F}_1$  με βάση την (3.18) είναι :

$$F_{1n} = \begin{cases} \frac{LR^{n+1}\pi}{2} & , \text{για } n = 1 \\ LR^{n+1} \left[ \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\pi(n-1)\right]}{(n-1)} - \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\pi(n+1)\right]}{(n+1)} \right] & , \text{για } n > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις (3.15), (3.16) και (3.17) στην (3.14) υπολογίζουμε τη συνολική μάζα του κυματισμού  $M_S$  ή αλλιώς επαγωγική μάζα.

Η ωστική μάζα  $M_I$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.77) :

$$M_I = M_L - \sum_{n=1}^N M_{ns} \quad (3.21)$$

στην οποία  $M_L$  είναι η συνολική μάζα του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο και για την περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% σε ρευστό είναι :

$$M_L = \frac{\rho L \pi R^2}{2} \quad (3.22)$$

Στον παρακάτω πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-2) παρατίθενται τα αποτελέσματα του λόγου της συνολικής μάζας του κυματισμού και της ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του ρευστού στο δοχείο, καθώς και των λόγων των μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα του ρευστού, για την περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% ενώ λαμβάνονται τριάντα όροι σειράς (N = 30)

ΛΟΓΟΙ ΜΑΖΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%					
$\frac{M_{1S}}{M_L}$	$\frac{M_{2S}}{M_L}$	$\frac{M_{3S}}{M_L}$	$\frac{M_{4S}}{M_L}$	$\frac{\sum M_{nS}}{M_L}$	$\frac{M_I}{M_L}$
0.5692	0.0178	0.0041	0.0015	0.5956	0.4054

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-2 :** Λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα του ρευστού, ο λόγος της συνολικής μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα του ρευστού, καθώς και ο λόγος της ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του ρευστού (N=30)

Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι η πολύ μεγάλη συνεισφορά της πρώτης ιδιοτιμής στη συνολική μάζα του κυματισμού, ενώ η επίδραση των υπολοίπων ιδιοτιμών σ' αυτή είναι σχεδόν αμελητέα.

Η συνολική δύναμη  $F_T$  δίνεται από την (2.74) και είναι :

$$F_T = - \sum_{n=1}^N (M_{nS} \ddot{\alpha}_n) - M_L \ddot{X} \quad (3.23)$$

Στη σχέση (3.23) υπενθυμίζουμε ότι οι συντελεστές  $\alpha_n$  υπολογίζονται από τις εξισώσεις του απλού ταλαντωτή :

$$\ddot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = - \ddot{X} \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

όπου N είναι ο αριθμός των όρων της σειράς της λύσης.

Η δύναμη του κυματισμού  $F_S$  από τη σχέση (2.64) είναι :

$$F_S = - \sum_{n=1}^N M_{nS} \ddot{\alpha}_n \quad (3.25)$$

ενώ η ομοιόμορφη δύναμη  $F_U$  από την (2.73) είναι :

$$F_U = - M_L \ddot{X} \quad (3.26)$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων, η εξωτερική διέγερση  $X(t)$  μπορεί να είναι οιαδήποτε. Εμείς στα παραδείγματα που θα εξετάσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού του El Centro που απεικονίζεται στο ΣΧΗΜΑ 3-5.

### 3.1.5 Υπολογισμός δυνάμεων με τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration)

Η εφαρμογή της μεθόδου της άμεσης ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης είναι εφικτή καθώς το "μητρώο μάζας"  $[M]$  και το "μητρώο ακαμψίας"  $[K]$  τα οποία προκύπτουν με τη μέθοδο των μεταβολών είναι συμμετρικά όπως εύκολα διαπιστώνεται από τις (3.11) και (3.12) αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ιδιοτιμές του ιδιοπρόβληματος είναι πραγματικές. Εντούτοις από τη σχέση (3.11), από την οποία και προκύπτουν τα στοιχεία του "μητρώου μάζας"  $[M]$ , γίνεται εύκολα αντιληπτό πως οι ζυγές γραμμές και στήλες του είναι μηδενικές και έτσι οι μισές ιδιοτιμές ( $N/2$  τον αριθμό) που υπολογίζονται από το ιδιοπρόβλημα απειρίζονται (infinite). Οι ιδιοτιμές αυτές δημιουργούν πρόβλημα στον προσδιορισμό της απόκρισης του συστήματος και επομένως των δυνάμεων κυματισμού. Για το λόγο αυτό πραγματοποιείται αναδιάταξη των εξισώσεων κίνησης (2.37) και απαλοιφή των μηδενικών όρων του μητρώου  $[M]$  με τη μέθοδο της στατικής συμπίκνωσης, ώστε να μη συνεισφέρουν οι συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες τελικώς στην απόκριση του συστήματος. Η τελική μητρωική έκφραση των εξισώσεων κίνησης μετά την αναδιάταξη είναι η ακόλουθη :

$$\begin{pmatrix} [M_{aa}] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_a \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{X} \quad (3.27)$$

$$n = 1, 2, \dots, N/2$$

όπου

$$q_a = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \\ \dots \\ \dots \\ q_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

και

$$\mathbf{q}_b = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ \dots \\ \dots \\ q_{2n} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Με τον τρόπο αυτό το συμπυκνωμένο μητρώο μάζας  $[\mathbf{M}_{aa}]$  διάστασης  $N/2 \times N/2$  περιέχει όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του συνολικού μητρώου μάζας  $[\mathbf{M}]$ .

Από τη δεύτερη μητρική εξίσωση της (3.27) προκύπτει :

$$\mathbf{q}_b = -[\mathbf{K}_{bb}]^{-1}[\mathbf{K}_{ba}]\mathbf{q}_a \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας την (3.30) στη πρώτη μητρική εξίσωση της (3.27) καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις κίνησης :

$$[\mathbf{M}']\ddot{\mathbf{q}}_a + [\mathbf{K}']\mathbf{q}_a = \mathbf{F}'\ddot{\mathbf{X}} \quad (3.31)$$

όπου :

$$[\mathbf{M}'] = [\mathbf{M}_{aa}] \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{K}'] = [\mathbf{K}_{aa}] - ([\mathbf{K}_{ab}][\mathbf{K}_{bb}]^{-1}[\mathbf{K}_{ba}]) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_a \quad (3.34)$$

Με εφαρμογή της μεθόδου Newmark [5], η οποία προγραμματίστηκε σε γλώσσα Matlab, υπολογίζεται το διάνυσμα των  $\mathbf{q}_a$  και από την (3.30) το αντίστοιχο διάνυσμα των  $\mathbf{q}_b$ . Επομένως προσδιορίζεται το συνολικό διάνυσμα των άγνωστων χρονικών συναρτήσεων  $\mathbf{q}$ . Η συνολική δύναμη  $F_T$  είναι το ολοκλήρωμα των υδροδυναμικών πιέσεων σε ολόκληρο το τοίχωμα :

$$F_T = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} n_x dB_1 \quad (3.35)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας  $\Phi$  διαχωρίζεται στο δυναμικό της κίνησης του κυματισμού  $\Phi_s$  και στο δυναμικό της ομοιόμορφης κίνησης  $\Phi_U$ , δηλαδή  $\Phi = \Phi_s + \Phi_U$  και βάση των σχέσεων (2.31) και (2.21) γίνεται :

$$\Phi = [\mathbf{N}]\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{X}}x \quad (3.36)$$

ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας την (3.4) :

$$\Phi = \left( \sum_{n=1}^N (r^n \sin\theta \dot{q}_n) \right) + \dot{X} x \quad (3.37)$$

Αντικαθιστούμε την (3.37) στην (3.35) και τελικά καταλήγουμε στην εξής έκφραση για τη συνολική δύναμη  $F_T$  :

$$F_T = F_U + F_S \quad (3.38)$$

όπου η ομοιόμορφη δύναμη  $F_U$  δίνεται από τη σχέση :

$$F_U = -\rho \frac{L \pi R^2}{2} \ddot{X} \quad (3.39)$$

ενώ η δύναμη του κυματισμού  $F_S$  είναι :

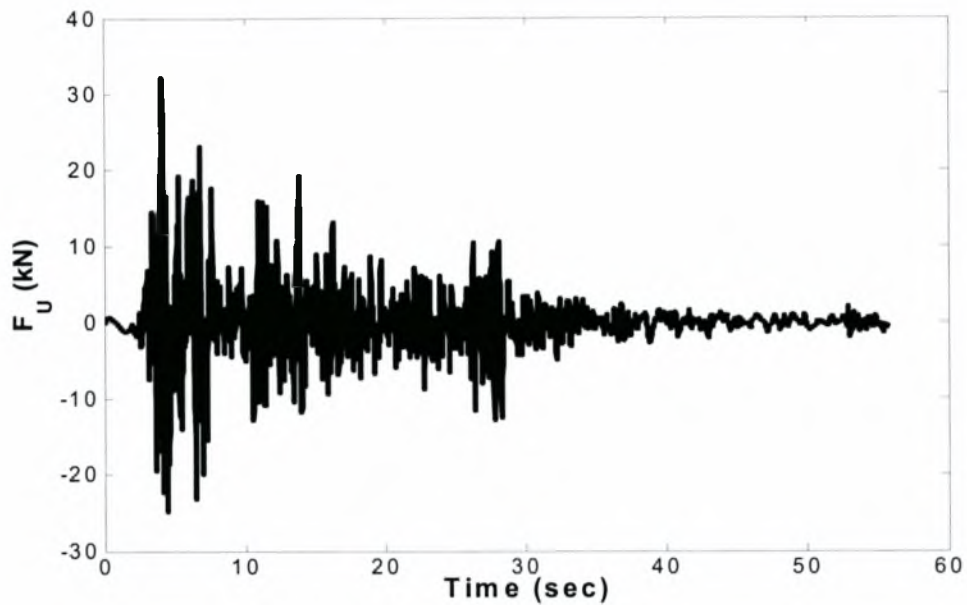
$$F_S = -2\rho L R \sum_{n=1}^N \left\{ R^n \left[ \int_0^{\pi/2} \sin n\theta \sin\theta d\theta \right] \ddot{q}_n \right\} \quad (3.40)$$

όπου

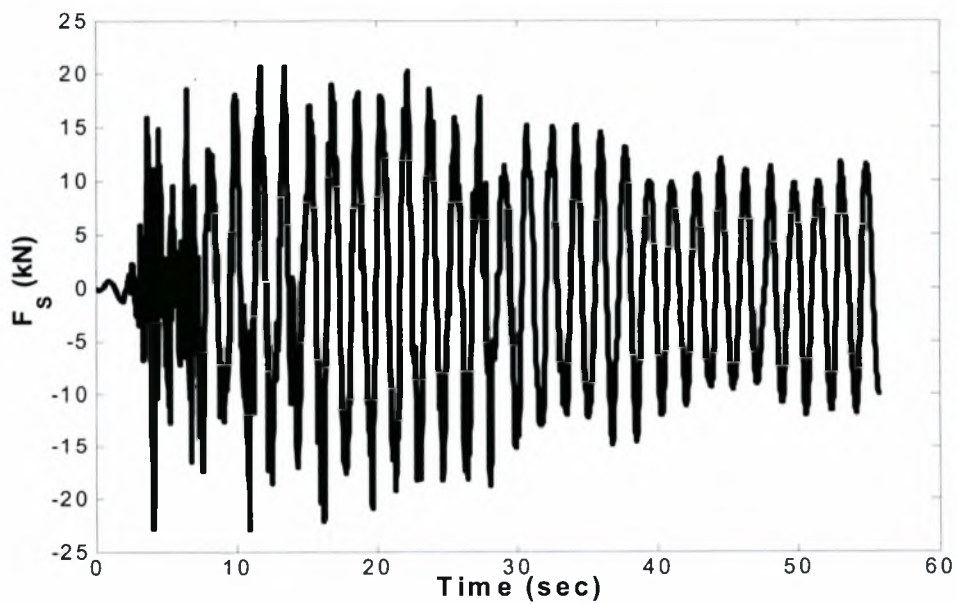
$$\int_0^{\pi/2} \sin n\theta \sin\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & , \text{για } n = 1 \\ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi(n-1)\right)}{2(n-1)} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi(n+1)\right)}{2(n+1)} & , \text{για } n > 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

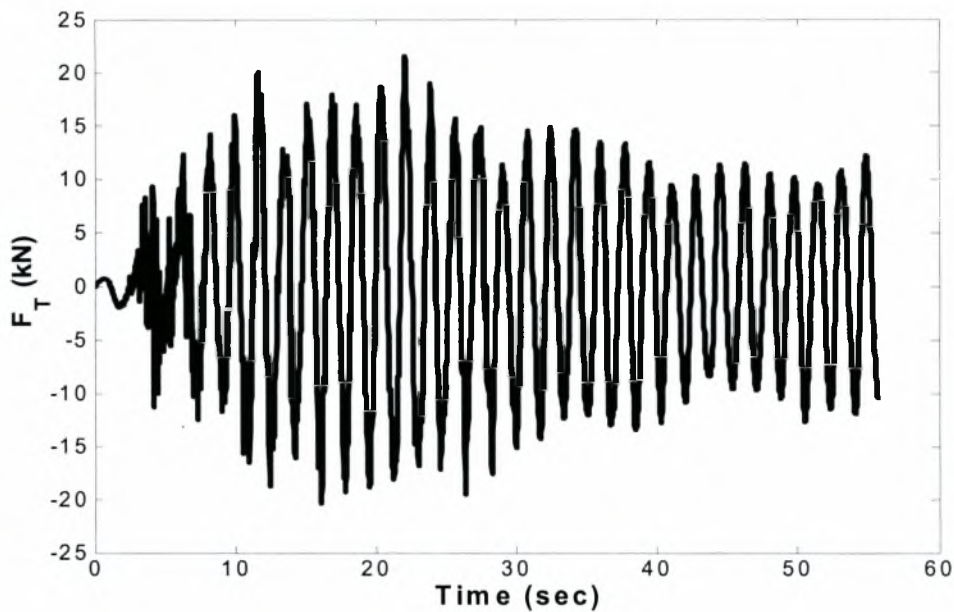
Τα γραφήματα που ακολουθούν περιγράφουν την απόκριση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% σε νερό το οποίο υπόκειται κατά την εγκάρσια διεύθυνση  $x$  στο σεισμό του El Centro (3.1.3). Το δοχείο έχει ακτίνα  $R = 1\text{m}$ , μήκος  $L = 6\text{m}$ , η πυκνότητα του νερού είναι  $\rho = 1000\text{Kg/m}^3$  ενώ στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι είκοσι πρώτοι όροι της σειράς ( $N = 20$ ).



**ΣΧΗΜΑ 3-6 :** Γραφική παράσταση της ομοιόμορφης δύναμης  $F_U$  συναρτήσει του χρόνου



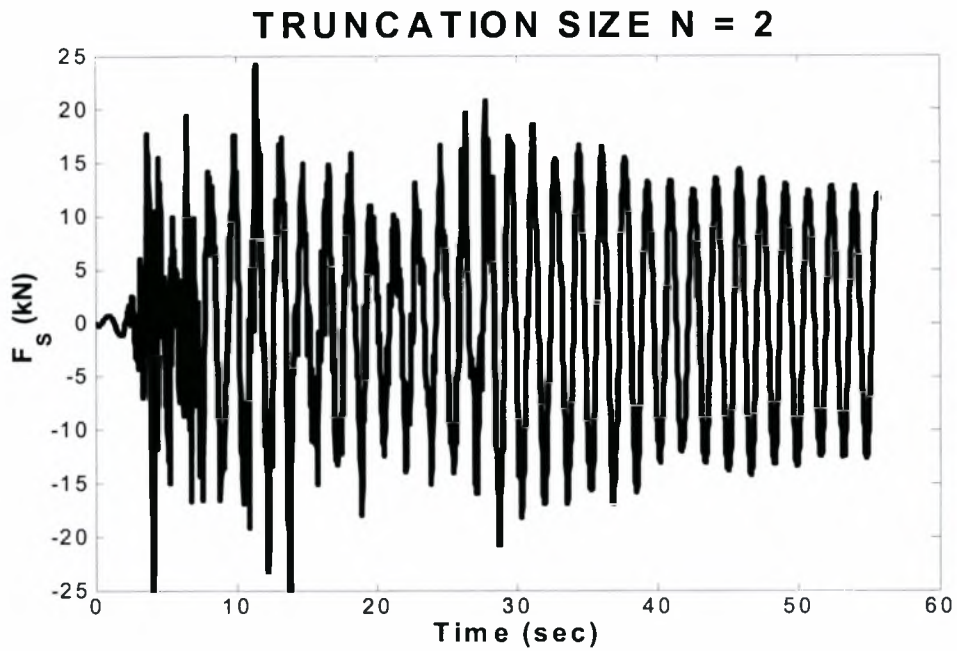
**ΣΧΗΜΑ 3-7 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου.



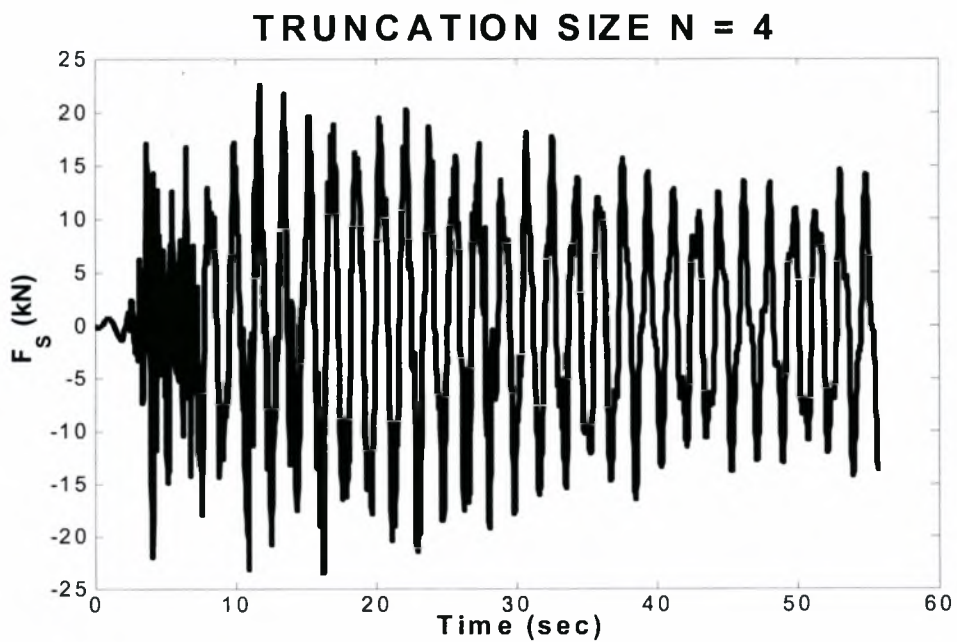
**ΣΧΗΜΑ 3-8 :** Γραφική παράσταση της συνολικής δύναμης  $F_T$  συναρτήσει του χρόνου.

Ακολούθως παρατίθενται τα γραφήματα της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για αυξανόμενο αριθμό όρων σειράς ( $N = 2, 4, 6, 12, 20$ ) στην περίπτωση του ίδιου οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% σε νερό το οποίο υπόκειται κατά την εγκάρσια διεύθυνση στο σεισμό του El Centro (3.1.3). Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των όρων σειράς οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν γεγονός που αποδεικνύει τη σύγκλιση της μεθόδου. Υπενθυμίζεται πως το δοχείο έχει μήκος  $L = 6\text{m}$ , ενώ η πυκνότητα του νερού είναι  $\rho = 1000\text{Kg/m}^3$ .

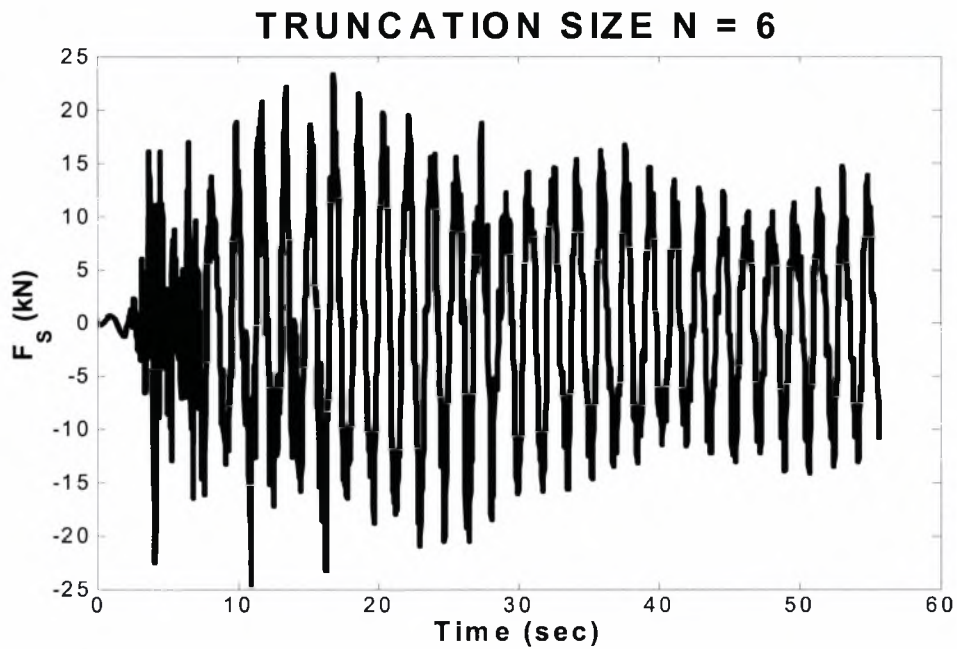




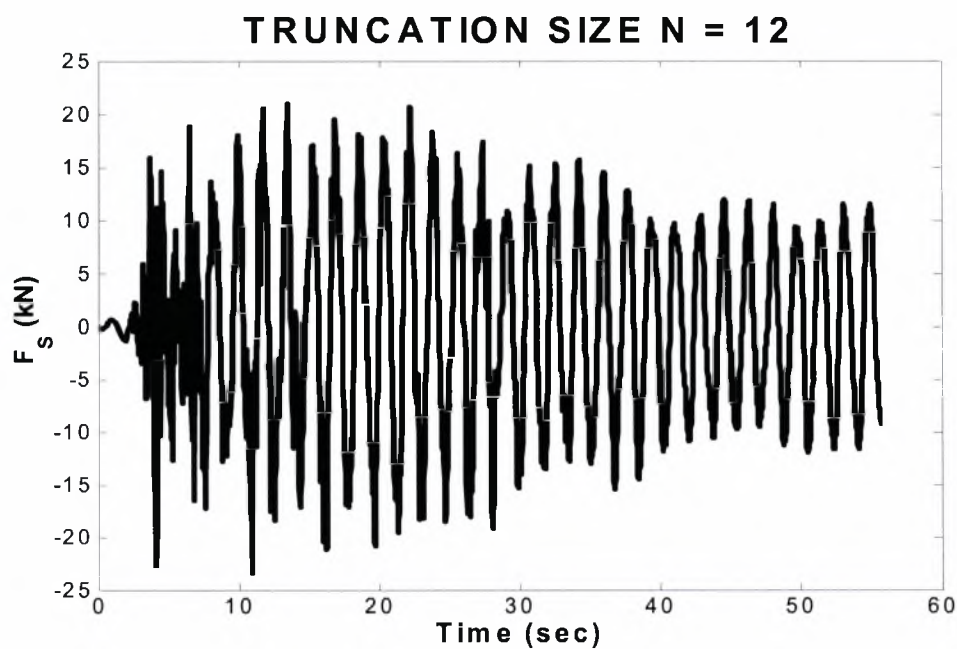
**ΣΧΗΜΑ 3-9 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για δυο όρους σειράς



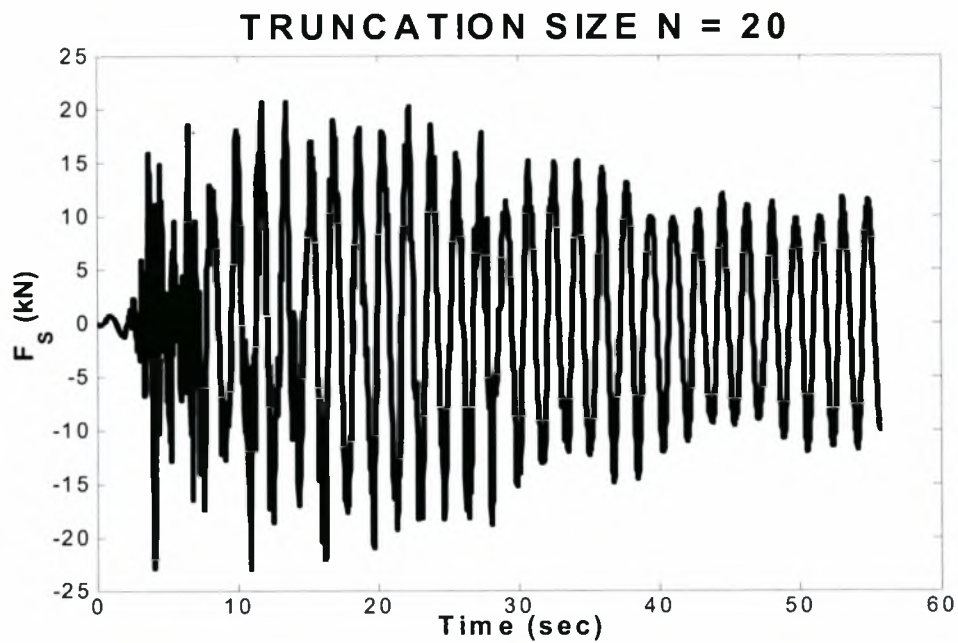
**ΣΧΗΜΑ 3-10 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για τέσσερις όρους σειράς



**ΣΧΗΜΑ 3-11 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για έξι όρους σειράς



**ΣΧΗΜΑ 3-12 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για δώδεκα όρους σειράς



**ΣΧΗΜΑ 3-13 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για είκοσι όρους σειράς.

## 3.2 ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%

Το ρευστό πυκνότητας  $\rho$  περιέχεται στο εσωτερικό σφαιρικού δοχείου ακτίνας  $R$  και πληρότητας 50% ( $H = R$ ) Τα τοιχώματά του δοχείου θεωρούνται μη παραμορφώσιμα. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $x, y, z$  τοποθετείται στο κέντρο του σφαιρικού δοχείου το οποίο είναι και το κέντρο του δίσκου της ελεύθερης επιφάνειας .

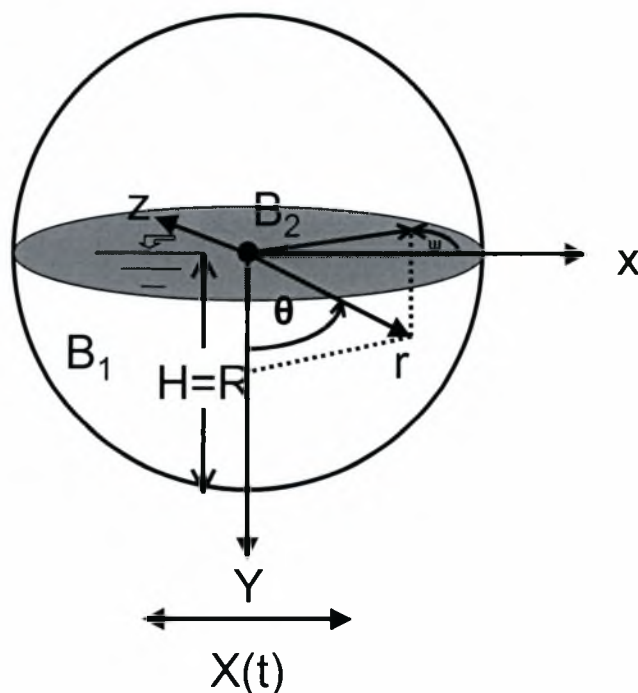
Ο άξονας  $y$  είναι κατακόρυφος προς τα κάτω, ενώ η γεωμετρία περιγράφεται ως προς τις σφαιρικές συντεταγμένες  $r, \theta, \Psi$  οι οποίες συνδέονται με τις αντίστοιχες καρτεσιανές μέσω των σχέσεων :

$$x = r \sin\theta \cos\Psi \quad (3.42)$$

$$y = r \cos\theta \quad (3.43)$$

$$z = r \sin\theta \sin\Psi \quad (3.44)$$

Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση στην κατεύθυνση του άξονα  $x$  με μετατόπιση  $X(t)$ . (ΣΧΗΜΑ 3-14).



**ΣΧΗΜΑ 3-14 :** Γεωμετρική απεικόνιση σφαιρικού δοχείου ακτίνας  $R$  και πληρότητας 50% ( $H=R$ ) το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον άξονα  $x$  με μετατόπιση  $X(t)$

### 3.2.1 Συναρτήσεις Σχήματος - Εξισώσεις Κίνησης

Οι συναρτήσεις  $N_n(r, \theta, \Psi)$  στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου είναι οι εξής :

$$N_n = P_n^{-1}(\mu) r^n \cos \Psi \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.45)$$

$$\mu = \cos \theta \quad (3.46)$$

όπου  $P_n^{-1}(\mu)$  είναι τα πολυώνυμα Legendre πρώτης τάξης και βαθμού  $n$ .

Επειδή το πρόβλημα είναι τρισδιάστατο, ο πίνακας  $[\mathbf{B}]$ , διάστασης  $3 \times N$ , είναι ο εξής :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_n}{\partial \Psi} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Οι συναρτήσεις κάθε μίας από τις τρεις σειρές του πίνακα  $[\mathbf{B}]$  με βάση τη (3.45) είναι :

$$B_{1n} = n P_n^{-1}(\cos \theta) r^{n-1} \cos \Psi \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.48)$$

$$B_{2n} = - \frac{\partial P_n^{-1}(\cos \theta)}{\partial \theta} r^{n-1} \cos \Psi \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.49)$$

$$B_{3n} = - P_n^{-1}(\cos \theta) r^{n-1} \frac{\sin \Psi}{\sin \theta} \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (3.50)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια ( $B_2$ ) του ρευστού όπου  $0 < r < R$ ,  $\theta = \pi/2$  και  $0 < \Psi < 2\pi$

(ΣΧΗΜΑ 3-14) ισχύει :

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \dots r dr d\Psi \quad (3.51)$$

Αντίστοιχα στο τοίχωμα του δοχείου ( $B_1$ ) όπου  $r = R$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  και  $0 < \Psi < 2\pi$  :

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \dots R^2 \sin \theta d\theta d\Psi \quad (3.52)$$

ενώ σε όλο τον όγκο του ρευστού ( $\Omega$ ) όπου  $0 < r < R$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  και  $0 < \Psi < 2\pi$  είναι :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \dots r^2 \sin \theta d\theta dr d\Psi \quad (3.53)$$

Το "μητρώο μάζας"  $[\mathbf{M}]$ , το "μητρώο ακαμψιάς"  $[\mathbf{K}]$  και το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων"  $\mathbf{P}$  των εξισώσεων κίνησης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$M_{mn} = \frac{\pi R^{m+n+2}}{g(m+n+2)} P_m^{-1}(0) P_n^{-1}(0) \quad , m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.54)$$

$$K_{mn} = \frac{\pi R^{m+n+1}}{m+n+1} (n m a_{mn} + b_{mn} + c_{mn}) \quad , m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.55)$$

όπου :

$$a_{mn} = \int_0^1 P_m^{-1}(\mu) P_n^{-1}(\mu) d\mu \quad , m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.56)$$

$$b_{mn} = \int_0^1 \frac{P_m^{-1}(\mu) P_n^{-1}(\mu)}{1-\mu^2} d\mu \quad , m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.57)$$

$$c_{mn} = \int_0^1 \frac{\partial P_m^{-1}(\mu)}{\partial \mu} \frac{\partial P_n^{-1}(\mu)}{\partial \mu} (1-\mu^2) d\mu \quad , m, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.58)$$

και

$$P_m = -\frac{\pi R^{m+3}}{g(m+3)} P_m^{-1}(0) \quad , m = 1, 2, \dots, N \quad (3.59)$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

### 3.2.2 Ιδιοσυχνότητες

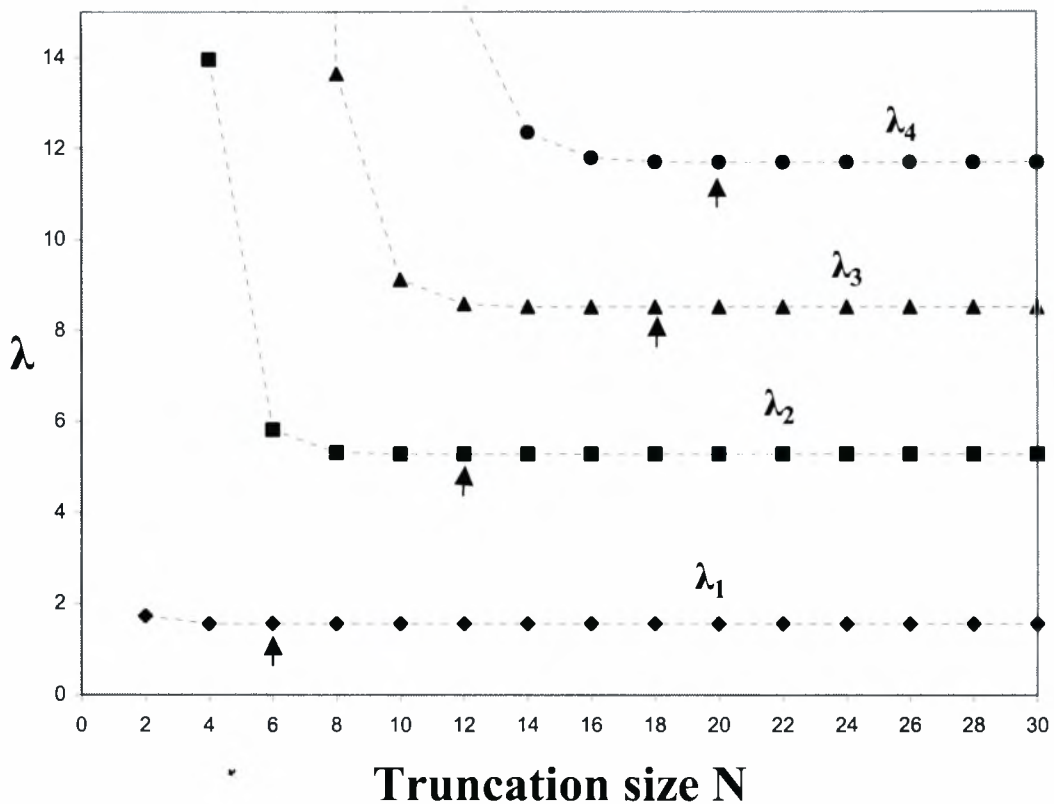
Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος. Το μητρώο  $[K]$  και  $[M]$  υπολογίζονται από τις (3.55) και (3.54) αντιστοίχα. Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1) παρατίθενται οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές, συναρτήσει του αριθμού  $N$  των όρων σειράς (truncation size) για την περίπτωση σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% και τα αποτελέσματα συγκρίνονται τόσο με τα αντίστοιχα της εργασίας του McIver [30], όσο και με εκείνα της εργασίας των Evans και Linton [10].

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%</b>				
N	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	1.7292			
4	1.5618	13.953		
6	1.5602	5.8041	98.334	
8	1.5602	5.3063	13.633	875.49
10	1.5602	5.2764	9.1101	40.322
12	1.5602	5.2756	8.5725	15.179
14	1.5602	5.2756	8.5094	12.344
16	1.5602	5.2756	8.5047	11.788
18	1.5602	5.2756	8.5045	11.695
20	1.5602	5.2756	8.5045	11.684
30	1.5602	5.2756	8.5045	11.684
<b>McIver [30]</b>	<b>1.5602</b>	<b>5.2756</b>	<b>8.5044</b>	<b>11.684</b>
<b>Evans Linton [10].</b>	<b>1.5602</b>	<b>5.2755</b>	<b>8.5044</b>	<b>11.683</b>

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-3 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50%, συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς – Σύγκριση τόσο με τα αποτελέσματα του McIver [30] όσο και με εκείνα των Evans και Linton [10].**

Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα είναι σε απόλυτη συμφωνία τόσο με εκείνα του McIver [30] όσο και με τα αντίστοιχα των Evans και Linton [10]. Μάλιστα υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές το οποίο έχει ήδη επιτευχθεί για είκοσι όρους σειράς (N = 20). Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την πολύ γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50%.

Η γραφική παράσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων απεικονίζεται στο ΣΧΗΜΑ 3-15. που ακολουθεί, όπου και φαίνεται καλύτερα η γρήγορη σύγκλιση των ιδιοτιμών



ΣΧΗΜΑ 3-15 : Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων τιμών του λόγου  $\lambda = \omega^2 R/g$ . Τα σύμβολα  $\blacktriangle$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης

### 3.2.3 Εξωτερική διέγερση – Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση – άμεση ολοκλήρωση)

Η μέθοδος προσδιορισμού των μαζών και των δυνάμεων είναι όμοια με την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% υπό εγκάρσια διέγερση (3.1.4). Στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου η συνιστώσα του κάθετου διανύσματος ως προς  $x$  στο τοίχωμα του δοχείου  $B_1$ , είναι :

$$n_x = \sin\theta \cos\Psi \quad \text{στο } B_1 \quad (3.60)$$

Επομένως η τελική έκφραση για διάνυσμα  $F_1$  με βάση την (3.18) είναι :

$$F_{1m} = \pi R^{m+2} \int_0^1 P_m^{-1}(\mu) \sqrt{(1-\mu^2)} d\mu \quad , m = 1, 2, \dots, N \quad (3.61)$$

ενώ η συνολική μάζα  $M_T$  του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο είναι :



$$M_L = \rho \frac{2\pi R^3}{3} \quad (3.62)$$

Στον παρακάτω πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-4) παρατίθενται τα αποτελέσματα του λόγου της συνολικής μάζας κυματισμού καθώς και της ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του ρευστού για τριάντα όρους σειράς ( $N = 30$ ), καθώς και των λόγων των μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές, προς τη συνολική μάζα του ρευστού, για την περίπτωση σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% σε ρευστό.

<b>ΜΑΖΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%</b>					
$\frac{M_{1s}}{M_L}$	$\frac{M_{2s}}{M_L}$	$\frac{M_{3s}}{M_L}$	$\frac{M_{4s}}{M_L}$	$\frac{\sum M_{ns}}{M_L}$	$\frac{M_I}{M_L}$
0.5797	0.0146	0.0037	0.0015	0.6059	0.3941

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-4 :** Λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα του ρευστού, ο λόγος της συνολικής μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα του ρευστού, καθώς και ο λόγος της ωστικής μάζας προς τη συνολική μάζα του ρευστού ( $N=30$ )

Παρατηρούμε και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου την πολύ μεγάλη συνεισφορά της πρώτης ιδιοτιμής στη συνολική μάζα του κυματισμού, ενώ η επίδραση των υπολοίπων ιδιοτιμών σ' αυτή είναι σχεδόν αμελητέα.

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων μπορεί και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% να εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης αφού τα μητρώα  $[M]$  και  $[K]$  προκύπτουν συμμετρικά. Οι ζυγές γραμμές και στήλες του  $[M]$  είναι και στην περίπτωση αυτή μηδενικές. Επομένως προχωράμε σε αναδιάταξη των εξισώσεων κίνησης και απαλοιφή των μηδενικών όρων του  $[M]$  με τη μέθοδο της στατικής συμπίκνωσης Ακολουθώντας τη διαδικασία όπως και στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου (3.1.5) καταλήγουμε στην εξής έκφραση για τη συνολική δύναμη  $F_T$  :

$$F_T = F_U + F_S \quad (3.63)$$

στην οποία η ομοιόμορφη δύναμη  $F_U$  δίνεται από τη σχέση :

$$F_U = -\rho \frac{2\pi R^3}{3} \ddot{X} \quad (3.64)$$

ενώ η δύναμη του κυματισμού  $F_S$  είναι :

$$F_S = -\pi\rho R^2 \sum_{n=1}^N \left\{ R^n \left[ \int_0^1 P_n'(\mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu \right] \ddot{q}_n \right\} \quad (3.65)$$

### 3.3 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ (SIMPLIFIED FORMULATION)

Η διατύπωση του προβλήματος του κυματισμού και για τις δύο γεωμετρίες που παρουσιάστηκαν απλοποιείται σημαντικά αν στη λύση σε μορφή σειράς για το άγνωστο δυναμικό του κυματισμού  $\Phi_s$  θεωρηθούν μόνο οι δυο πρώτοι όροι ( $N=2$ ). Σ' αυτή την περίπτωση προκύπτει μια προσεγγιστική λύση για το φαινόμενο του κυματισμού και η απόκριση του συστήματος δοχείο – ρευστό περιγράφεται με ένα ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο.

#### 3.3.1 Οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο

Η μέθοδος επίλυσης που υιοθετήσαμε εφαρμόζεται πιο απλά θεωρώντας :

$$\Phi_s = r \sin\theta \dot{q}_1 + r^2 \sin 2\theta \dot{q}_2 \quad (3.66)$$

Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει για τον υπολογισμό του  $q_1(t)$  είναι η εξής :

$$\ddot{q}_1 + \bar{\omega}_1^2 q_1 = -\ddot{X} \quad (3.67)$$

όπου  $\bar{\omega}_1$  η προσέγγιση της πρώτης ιδιοτιμής η οποία είναι :

$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{(9\pi^2 - 32)g}{12\pi R}} = \dots = \sqrt{1.5 \frac{g}{R}} \quad (3.68)$$

Το  $q_2(t)$  υπολογίζεται από τη σχέση :

$$q_2 = -\frac{4}{3\pi R} q_1 \quad (3.69)$$

Η συνολική δύναμη  $F_T$  είναι :

$$F_T = -\bar{M}_I \ddot{X} - \bar{M}_S \ddot{u} \quad (3.70)$$

όπου  $\bar{M}_S$  η προσέγγιση της συνολικής μάζας κυματισμού και  $\bar{M}_I$  η προσέγγιση της ωστικής μάζας, οι οποίες εκφράζονται σαν ποσοστό της συνολικής μάζας  $M_L$  του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο και είναι αντίστοιχα :

$$\bar{M}_S = 0.6398 M_L \quad (3.71)$$

$$\bar{M}_I = 0.3602 M_L \quad (3.72)$$

όπου  $M_L = \rho L \pi R^2 / 2$  .

Το διάνυσμα  $u(t)$  της (3.70) υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\ddot{u} + \tilde{\omega}_1^2(u - X) = 0 \quad (3.73)$$

Υπενθυμίζεται πως η εξωτερική διέγερση  $\ddot{X}(t)$  που επιβάλλεται τόσο στο οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο όσο και στο σφαιρικό δοχείο είναι τυχαία, επομένως μπορεί να είναι οιαδήποτε. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε σεισμική διέγερση και χρησιμοποιούμε σαν παράδειγμα τον σεισμό του El Centro (1940) το επιταχυνσιογράφημα του οποίου φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 3-5

### 3.3.2 Σφαιρικό δοχείο

Το άγνωστο δυναμικό  $\Phi_s$  σ' αυτή την περίπτωση είναι :

$$\Phi_s = P_1^1(\cos\theta)r \cos\Psi \dot{q}_1 + P_2^1(\cos\theta)r^2 \cos\Psi \dot{q}_2 \quad (3.74)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης που προκύπτει για το  $q_1(t)$  είναι η εξής :

$$\ddot{q}_1 + \tilde{\omega}_1^2 q_1 = \ddot{X} \quad (3.75)$$

όπου  $\tilde{\omega}_1$  η προσέγγιση της πρώτης ιδιοτιμής για σφαιρικό δοχείο πληρότητας 50% η οποία είναι :

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{83g}{48R}} = \dots = \sqrt{1.7 \frac{g}{R}} \quad (3.76)$$

Το  $q_2(t)$  υπολογίζεται από τη σχέση :

$$q_2 = -\frac{5}{16R} q_1 \quad (3.77)$$

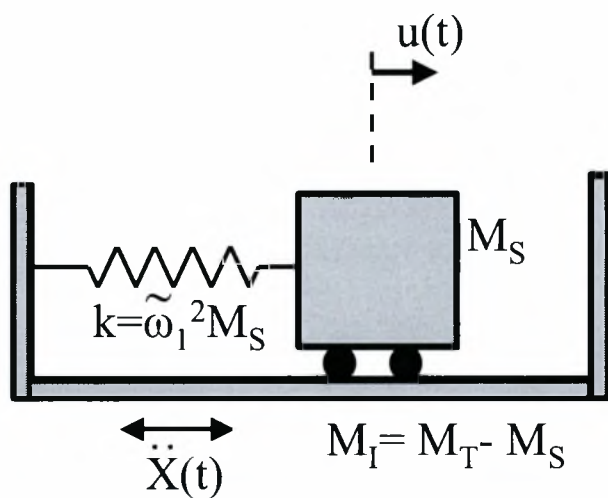
Η συνολική δύναμη δίνεται κατ' αντιστοιχία με το οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο από τη σχέση (3.70). Η προσέγγιση  $\tilde{M}_s$  της συνολικής μάζας κυματισμού και η προσέγγιση  $\tilde{M}_l$  της ωστικής μάζας σαν ποσοστά της συνολικής μάζας  $M_L$  για την περίπτωση του σφαιρικού δοχείου είναι αντίστοιχα :

$$\tilde{M}_s = 0.6484 M_L \quad (3.78)$$

$$\tilde{M}_l = 0.3516 M_L \quad (3.79)$$

όπου  $M_L = 2\pi\rho R^3/3$ .

Το  $u(t)$  υπολογίζεται και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου από τη σχέση (3.73). Το ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο για την περιγραφή της απόκρισης και για τις δύο γεωμετρίες που παρουσιάστηκαν απεικονίζεται στο ΣΧΗΜΑ 3-16 που ακολουθεί



**ΣΧΗΜΑ 3-16 :** Ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο για την περιγραφή της απόκρισης του φαινομένου του κυματισμού

### 3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΕ ΗΜΙ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Επεκτείνοντας την ημι – αναλυτική λύση των Evans και Linton [10], οι Papaspyrou et al [35], [36] εξέτασαν το πρόβλημα του κυματισμού για σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50% τα οποία υπόκεινται σε τυχαία εξωτερική διέγερση. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα που προέκυψαν εφαρμόζοντας τη μέθοδο που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%						
	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
N	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [36]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [36]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [36]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ
2	1.1781	1.5074				
4	1.3684	1.3569	2.7733	10.5920		
6	1.3525	1.3558		4.9917		67.632
8	1.3545	1.3557	4.0474	4.6660		11.451
10	1.3550	1.3557		4.6514		8.225
12	1.3553	1.3557	4.6062	4.6511		7.8578
14	1.3555	1.3557	4.6532	4.6511	6.5356	7.8221
16	1.3555	1.3557	4.6491	4.6511		7.8199
18	1.3556	1.3557	4.6498	4.6511	7.5396	7.8199
20	1.3556	1.3557	4.6501	4.6511	7.9191	7.8199
22		1.3557	4.6503	4.6511	7.8098	7.8199
24		1.3557	4.6505	4.6511	7.8193	7.8199
26		1.3557	4.6506	4.6511	7.8187	7.8199
28		1.3557	4.6507	4.6511	7.8189	7.8199
30	1.3557	1.3557	4.6507	4.6511	7.8191	7.8199
40	1.3557	1.3557	4.6509	4.6511	7.8195	7.8199

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-5 :** Σύγκριση των εργασιών [10] και [36] με την παρούσα μέθοδο ως προς τη σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50%

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%						
N	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [35]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [35]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ	ΕΡΓΑΣΙΕΣ [10], [35]	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ
2	1.3333	1.7292				
4	1.5810	1.5618	2.9741	13.9530		
6	1.5550	1.5602		5.8041		98.334
8	1.5582	1.5602	4.3928	5.3063		13.633
10	1.5590	1.5602		5.2764		9.1101
12	1.5595	1.5602	5.1566	5.2756		8.5725
14	1.5597	1.5602	5.2919	5.2756	6.7591	8.5094
16	1.5599	1.5602	5.2720	5.2756		8.5047
18	1.5599	1.5602	5.2742	5.2756	7.9737	8.5045
20	1.5600	1.5602	5.2744	5.2756		8.5045
22		1.5602	5.2747	5.2756	8.4691	8.5045
24		1.5602	5.2748	5.2756	8.5071	8.5045
26		1.5602	5.2749	5.2756	8.5028	8.5045
28		1.5602	5.2750	5.2756	8.5035	8.5045
30	1.5601	1.5602	5.2751	5.2756	8.5036	8.5045
40	1.5601	1.5602	5.2753	5.2756	8.5040	8.5045

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-6 :** Σύγκριση των εργασιών [10] και [35] με την παρούσα μέθοδο ως προς τη σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50%

Στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ παρατίθενται οι τελικές εξισώσεις κίνησης καθώς και τα αποτελέσματα με βάση την απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος τόσο για οριζόντια κυλινδρικά δοχεία όσο και για σφαιρικά δοχεία με βάση τη μέθοδο των Paraspyrou et al [35], [36].

Σε πρώτη φάση πραγματοποιείται σύγκριση της σύγκλισης των τριών πρώτων ιδιοτιμών τόσο για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50% (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-5) όσο και για σφαιρικό δοχείο (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-6). Τα αποτελέσματα ως προς τα οποία γίνεται η σύγκριση προέρχονται από τις εργασίες των Paraspyrou et al [35], [36]. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν με βάση τη σύγκριση είναι τα ίδια και για τις δύο γεωμετρίες που εξετάζονται.

Στην περίπτωση της παρούσας μεθόδου παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις  $\lambda_1(N)$ ,  $\lambda_2(N)$ ,  $\lambda_3(N)$ , επομένως και η σύγκλιση των ιδιοτιμών, είναι μονοτονικά φθίνουσες γεγονός το οποίο δε συμβαίνει χρησιμοποιώντας την άλλη μεθοδολογία. Αξίζει να σημειωθεί πως η γνησίως φθίνουσα σύγκλιση των ιδιοτιμών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παρούσας εργασίας οφείλεται στο γεγονός ότι η διακριτοποίηση Galerkin που εφαρμόζεται στην εξίσωση των μεταβολών οδηγεί σε μια προσεγγιστική λύση η οποία αποτελεί υπερεκτίμηση της ακριβούς. Επιπλέον η μέθοδος που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία σε σχέση με τη μέθοδο των Paraspyrou et. al. [35], [36] εξασφαλίζει καλύτερη και γρηγορότερη σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών ενώ τονίζεται πως οδηγεί σε συμμετρικά μητρώα στις εξισώσεις κίνησης καθώς και σε πραγματικές ιδιοτιμές. Αντίθετα η μεθοδολογία των Paraspyrou et.al [35], [36] καταλήγει σε μη συμμετρικά μητρώα γεγονός που συνεπάγεται την εμφάνιση και μιγαδικών ιδιοτιμών.

Στη συνέχεια παρατίθενται τα προσεγγιστικά αποτελέσματα (πρώτη ιδιοτιμή-λόγοι μάζας κυματισμού-ωστικής μάζας προς τη συνολική) των δύο μεθόδων (ημι – αναλυτική, παρούσα) που προκύπτουν με βάση την απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος ( $N=2$ ) τόσο για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο (εγκάρσια κατεύθυνση) όσο και για σφαιρικό δοχείο πληρότητας 50%. Οι τιμές συγκρίνονται με την ακριβή λύση που προκύπτει θεωρώντας αρκετά μεγάλο αριθμό όρων σειράς ( $N=30$ ). Τα αποτελέσματα με βάση την ημι - αναλυτική μέθοδο ως προς τα οποία γίνεται η σύγκριση προέρχονται και σ' αυτή την περίπτωση από τις εργασίες των Paraspyrou et.al. [35], [36].

<b>ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%</b>					
PAPASPYROU ET. AL. [36]		ΑΚΡΙΒΗΣ ΛΥΣΗ (N=30)		ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ	
$\tilde{\lambda}_1$		$\lambda_1$		$\tilde{\lambda}_1$	
1.1781		1.3557		1.5074	
$\frac{\tilde{M}_s}{\tilde{M}_L}$	$\frac{\tilde{M}_1}{\tilde{M}_L}$	$\frac{M_s}{M_L}$	$\frac{M_1}{M_L}$	$\frac{\tilde{M}_s}{\tilde{M}_L}$	$\frac{\tilde{M}_1}{\tilde{M}_L}$
0.5000	0.5000	0.5956	0.4054	0.6398	0.3602

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-7 : Σύγκριση της εργασίας των Paraspyrou et.al [36] με την παρούσα μέθοδο ως προς την απόκλιση των αποτελεσμάτων από την ακριβή λύση για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%**



Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής :

**α)** Η απόκλιση της προσεγγιστικής πρώτης ιδιοτιμής από την ακριβή τιμή με βάση την εργασία των Papaspyrou et.al [36] είναι 13.1% ενώ με βάση την παρούσα μέθοδο είναι 11.2%.

**β)** Η απόκλιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα από την ακριβή τιμή με βάση την εργασία των Papaspyrou et.al [36] είναι 16.1% ενώ με βάση την παρούσα μέθοδο είναι 7.4%.

Τα αντίστοιχα συμπεράσματα που προκύπτουν στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου με βάση τις τιμές του αντίστοιχου πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-8) είναι τα εξής :

**α)** Η απόκλιση της προσεγγιστικής πρώτης ιδιοτιμής από την ακριβή τιμή με βάση την εργασία των Papaspyrou et.al [35] είναι 14.5% ενώ με βάση την παρούσα μέθοδο είναι 10.8%.

**β)** Η απόκλιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα από την ακριβή τιμή με βάση την εργασία των Papaspyrou et.al [35] είναι 17.5% ενώ με βάση την παρούσα μέθοδο είναι 7%.

<b>ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%</b>					
<b>ΡΑΡΑΣΠΥΡΟΥ ΕΤ. ΑΛ. [35]</b>		<b>ΑΚΡΙΒΗΣ ΛΥΣΗ (N=30)</b>		<b>ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (N=2)</b>	
$\tilde{\lambda}_1$		$\lambda_1$		$\tilde{\lambda}_1$	
1.3333		1.5602		1.7292	
$\frac{\bar{M}_s}{M_L}$	$\frac{\bar{M}_1}{M_L}$	$\frac{M_s}{M_L}$	$\frac{M_1}{M_L}$	$\frac{\bar{M}_s}{M_L}$	$\frac{\bar{M}_1}{M_L}$
0.5000	0.5000	0.6059	0.3941	0.6484	0.3516

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-8 :** Σύγκριση της εργασίας των Papaspyrou et.al [35] με την παρούσα μέθοδο ως προς την απόκλιση των αποτελεσμάτων από την ακριβή λύση για σφαιρικό δοχείο πληρότητας 50%

Επομένως η επίλυση του φαινομένου του κυματισμού για σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο (εγκάρσια κατεύθυνση) πληρότητας 50% εφαρμόζοντας την απλοποιημένη διατύπωση της παρούσας μεθόδου, δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς λύσης σε σχέση με την ημι – αναλυτική μέθοδο ([35], [36]).

Η τελευταία σύγκριση των δυο μεθόδων αφορά την εφαρμογή της μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration) των εξισώσεων κίνησης για τον υπολογισμό των δυνάμεων του φαινομένου του κυματισμού

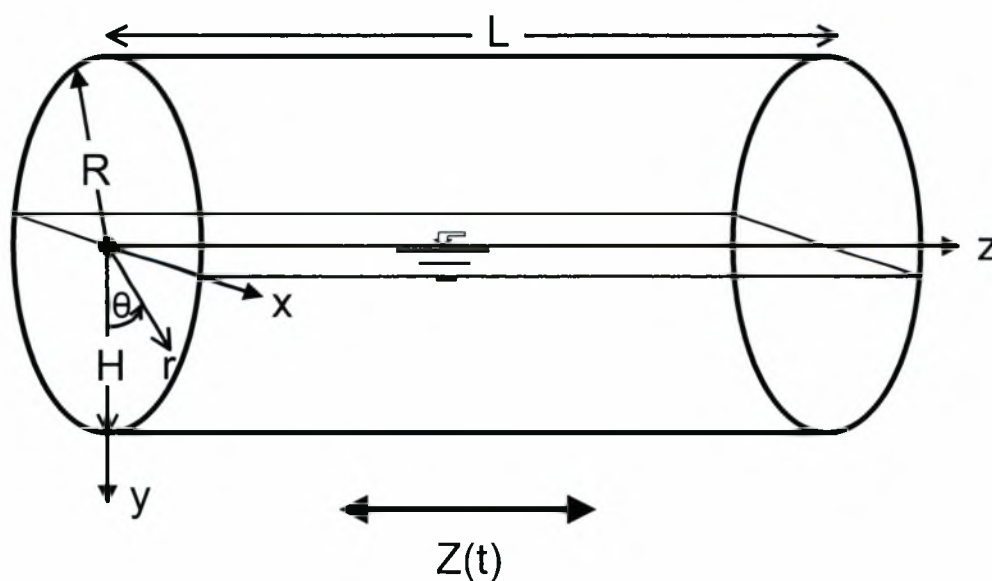
Η επίλυση του φαινομένου του κυματισμού εφαρμόζοντας την ημι – αναλυτική μέθοδο των Paraspyrou et.al [36] [36], καταλήγει σε ένα σύστημα εξισώσεων κίνησης ( αντίστοιχο της εξίσωσης (2.38) ) στο οποίο όμως τα "μητρώα μάζας" και "ακαμψίας" είναι μη – συμμετρικοί πίνακες (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ) .Επομένως η επίλυση του ιδιοπροβλήματος οδηγεί σε μιγαδικές-εκτός των άλλων-ιδιοτιμές, οι οποίες δημιουργούν πρόβλημα στον προσδιορισμό της απόκρισης του συστήματος δοχείο – ρευστό. Κατά συνέπεια δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης για τον προσδιορισμό της απόκρισης.

Αντίθετα όπως έχει ήδη αναφερθεί (παράγραφοι 3.1.5 και 3.2.3) η εφαρμογή της παρούσας μεθόδου στην επίλυση του φαινομένου του κυματισμού οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων κίνησης, στις οποίες τα "μητρώα μάζας" και "ακαμψίας" είναι συμμετρικά. Για την αποφυγή των ιδιοτιμών που λαμβάνουν τιμές "άπειρο", με αποτέλεσμα να δημιουργούν πρόβλημα στον προσδιορισμό της απόκρισης, δεν μπορεί να γίνει εξαρχής άμεση ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης. Όμως με αναδιάταξη των εξισώσεων κίνησης και απαλοιφή των μηδενικών στοιχείων του  $[M]$  με τη μέθοδο της στατικής συμπύκνωσης., προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων κίνησης στο οποίο μπορεί τελικώς να εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης και να προσδιοριστεί η απόκριση του συστήματος.

### 3.5 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% ΥΠΟ ΔΙΑΜΗΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Στην παρούσα παράγραφο, γίνεται εφαρμογή της μεθόδου των μεταβολών σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία (διαμήκης διεύθυνση) για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του φαινομένου του κυματισμού. Σκοπός της συγκεκριμένης εφαρμογής είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις ιδιοτιμές που προκύπτουν αν θεωρήσουμε το ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος, το οποίο θα οριστεί παρακάτω.

Το ρευστό πυκνότητας  $\rho$  περιέχεται στο εσωτερικό οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  και πληρότητας 50% ( $H = R$ ). Τα τοιχώματά του δοχείου θεωρούνται μη παραμορφώσιμα. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $x, y, z$  τοποθετείται στην αρχή του άξονα συμμετρίας του δοχείου, ο άξονας  $y$  είναι κατακόρυφος προς τα κάτω, ενώ η γεωμετρία περιγράφεται ως προς τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r, \theta, z$  οι οποίες συνδέονται με τις αντίστοιχες καρτεσιανές μέσω των σχέσεων (3.1), (3.2), (3.3) της παραγράφου 3.1: Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση στην κατεύθυνση του άξονα  $z$  με μετατόπιση  $Z(t)$ . (ΣΧΗΜΑ 3-17). Εξαιτίας της μορφής της εξωτερικής διέγερσης το πρόβλημα του κυματισμού στην περίπτωση αυτή είναι τρισδιάστατο ( $r, \theta, z$ ).



**ΣΧΗΜΑ 3-17 :** Γεωμετρική απεικόνιση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  και πληρότητας 50% ( $H=R$ ), το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον διαμήκη άξονα  $z$  με μετατόπιση  $Z(t)$ .

### 3.5.1 Συναρτήσεις Σχήματος

Η εξίσωση των μεταβολών (2.30) λόγω της συγκεκριμένης εξωτερικής διέγερσης γίνεται :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s) (\nabla \Phi^*) d\Omega + \frac{1}{g_{B_1}} \int \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} \Phi^* dB_2 = - \frac{\ddot{Z}}{g_{B_2}} \int z \Phi^* dB_2 \quad (3.80)$$

Οι συναρτήσεις  $N_n$  στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου υπό διαμήκη διέγερση είναι οι εξής :

$$N_{(n+1)} = I_n(k_p r) \cos n\theta \cos k_p z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.81)$$

$$k_p = \frac{p\pi}{L}, \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad (3.82)$$

όπου  $I_n(r)$  είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης  $n$ .

Επειδή το πρόβλημα είναι τρισδιάστατο, ο  $3 \times N$  πίνακας  $[B]$  είναι :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Οι συναρτήσεις κάθε μίας από τις τρεις σειρές του πίνακα  $[B]$  με βάση τη (3.81) είναι :

$$B_{1(n+1)} = \frac{\partial [I_n(k_p r)]}{\partial r} \cdot \cos n\theta \cos(k_p z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.84)$$

$$B_{2(n+1)} = -\frac{n}{r} I_n(k_p r) \sin n\theta \cos(k_p z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.85)$$

$$B_{3(n+1)} = -k_p I_n(k_p r) \sin n\theta \sin(k_p z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.86)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια ( $B_2$ ) του ρευστού όπου  $0 < r < R$ ,  $\theta = \pi/2$  και  $0 < z < L$  είναι:

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = \int_R^R \int_0^L \dots dz dr \quad (3.87)$$

ενώ σε όλο τον όγκο του ρευστού ( $\Omega$ ) όπου  $0 < r < R$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  και  $0 < z < L$  είναι :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = \int_0^L \int_{-R}^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots r d\theta dr dz \quad (3.88)$$

### 3.5.2 Ιδιοσυχνότητες

Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών επιτυγχάνεται λύνοντας το ιδιοπρόβλημα (2.49) Το "μητρώο ακαμψίας"  $[K]$  είναι :

$$K_{(m+1)(n+1)}^p = L \left\{ \left[ \delta_{(m+1)(n+1)} \left( \alpha_{(m+1)(n+1)}^p + \gamma_{(m+1)(n+1)}^p \right) \right] + m n \varepsilon_{(m+1)(n+1)} \beta_{(m+1)(n+1)}^p \right\} \quad (3.89)$$

$, m, n = 0, 1, 2, \dots, N$

όπου

$$\alpha_{(m+1)(n+1)}^p = \int_0^{k_p R} \mu \frac{\partial [I_m(\mu)]}{\partial \mu} \frac{\partial [I_n(\mu)]}{\partial \mu} d\mu \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.90)$$

$$\beta_{(m+1)(n+1)}^p = \int_0^{k_p R} \frac{1}{\mu} I_m(\mu) I_n(\mu) d\mu \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.91)$$

$$\gamma_{(m+1)(n+1)}^p = \int_0^{k_p R} \mu I_m(\mu) I_n(\mu) d\mu \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.92)$$

$$\delta_{(m+1)(n+1)} = \int_0^{\pi/2} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.93)$$

$$\varepsilon_{(m+1)(n+1)} = \int_0^{\pi/2} \sin m\theta \sin n\theta d\theta \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.94)$$

$$k_p = \frac{p \cdot \pi}{L} \quad , p = 1, 3, 5 \dots$$

ενώ το "μητρώο μάζας"  $[M]$  είναι :

$$M_{(m+1)(n+1)}^p = \frac{L}{k_p} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) j_{(m+1)(n+1)}^p \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.95)$$

όπου

$$j_{(m+1)(n+1)}^p = \int_0^{k_p R} I_m(\mu) I_n(\mu) d\mu \quad , m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.96)$$

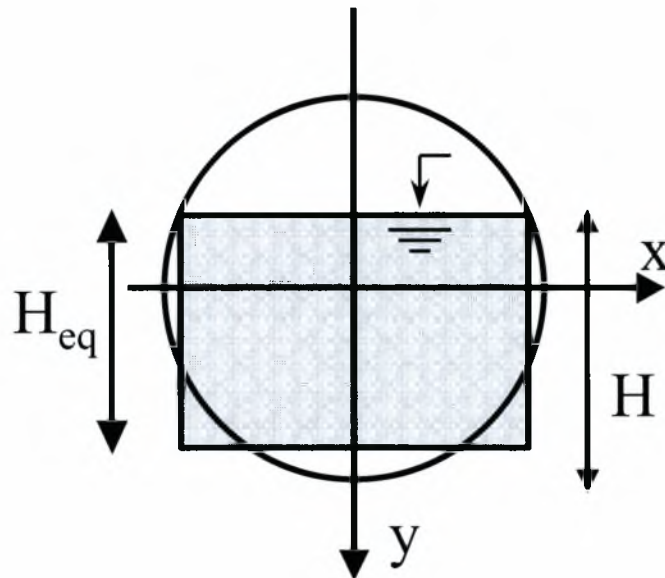
$$k_p = \frac{p \cdot \pi}{L} \quad , p = 1, 3, 5 \dots$$

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50% (ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ)</b>				
<b>(α) L/R=π και ρ=1</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	0.67079			
4	0.64418	4.8628		
6	0.64412	3.254	27.524	
8	0.64412	3.1927	7.6774	198.68
10	0.64411	3.1922	6.4122	18.395
<b>(β) L/R=π και ρ=3</b>				
2	4.5878			
4	2.8889	9.538		
6	2.8697	4.474	44.446	
8	2.8695	4.2571	9.0864	298.44
10	2.8694	4.2519	7.1195	22.058
12	2.8694	4.2518	6.9312	11.352
14	2.8694	4.2518	6.9189	10.083
<b>(γ) L/R=3π και ρ=1</b>				
2	0.08543			
4	0.08509	4.4766		
6	0.08509	3.102	26.093	
8	0.08509	3.0429	6.8254	189.63

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-9 :** Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% (διαμήκης διεύθυνση), συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς για (α) L/R=π και ρ=1, (β) L/R=π και ρ=3, (γ) L/R=3π και ρ=1

### 3.5.3 Ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος - Σύγκριση ιδιοτιμών

Έχει αποδειχθεί πειραματικά (Kobayashi et.al. [26]) πως η απόκριση του συστήματος δοχείο - υγρό για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο υπό διαμήκη διέγερση (ΣΧΗΜΑ 3-17) είναι αντίστοιχη με την απόκριση ενός ισοδύναμου δοχείου ορθογωνικού σχήματος στο οποίο η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού έχει τις ίδιες διαστάσεις με το κυλινδρικό δοχείο και περιέχει τον ίδιο όγκο ρευστού. Η διδιάστατη γεωμετρική απεικόνιση του ισοδύναμου δοχείου ορθογωνικού σχήματος στην περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου το οποίο περιέχει ρευστο τυχαίου βάθους  $H$  φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 3-18 που ακολουθεί.



**ΣΧΗΜΑ 3-18 : Απεικόνιση του ισοδύναμου δοχείου ορθογωνικού σχήματος για τυχαίο βάθος ρευστού  $H$  ως προς τις δυο διαστάσεις.**

Το βάθος  $H_{eq}$  του ρευστού που περιέχεται στο ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικής διατομής (ΣΧΗΜΑ 3-18), μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας απλές γεωμετρικές θεωρήσεις και προκύπτει συναρτήσσει της διαμέτρου  $D = 2R$  του κυλινδρικού δοχείου και του τυχαίου ύψους  $H$  που περιέχεται σ' αυτό :

$$H_{eq}(D, H) = \frac{1}{2} \left( H - \frac{D}{2} \right) + \frac{D^2}{8} \frac{\sin^{-1} \left( \frac{2H - D}{D} \right) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{H(D - H)}} \quad (3.97)$$

Επειδή στην παρούσα εφαρμογή το οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο που εξετάζεται είναι πληρότητας 50% , δηλαδή :

$$H = R \quad (3.98)$$

το βάθος  $H_{eq}$  του ισοδύναμου δοχείου ορθογωνικού σχήματος σε συνάρτηση μόνο της ακτίνας  $R$  του κυλινδρικού δοχείου δίνεται από την εξής σχέση :

$$H_{eq}(R) = \frac{\pi R}{4} \quad (3.99)$$

Σύμφωνα με την ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού για δοχεία ορθογωνικού σχήματος (π.χ Abramson [2]), οι ιδιοσυχνότητες υπολογίζονται με βάση την παρακάτω έκφραση κλειστής μορφής :

$$\lambda_p = \frac{\tilde{\omega}_p^2 R}{g} = \frac{(2p-1)\pi R}{L} \tanh \left[ \frac{(2p-1)\pi H_{eq}}{L} \right], \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.100)$$

Στην τελευταία σχέση  $R$  ,  $L$  είναι η ακτίνα και το μήκος αντίστοιχα του κυλινδρικού δοχείου ως προς το οποίο είναι ισοδύναμο το ορθογωνικό,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, ενώ το ισοδύναμο βάθος ρευστού  $H_{eq}$  προσδιορίζεται από την (3.99) για την ειδική περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% που εξετάζουμε.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ				
	ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%		ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
$L/R = \pi$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
	0.6441	2.8694	0.6558	2.9469
$L/R = 3\pi$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
	0.0851		0.0853	

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3-10 :** Σύγκριση ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου (διαμήκης έννοια) ακτίνας  $R=1m$  και πληρότητας 50% σε ρευστό με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν θεωρώντας το ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος. Εξετάζονται δύο διαφορετικοί λόγοι  $L/R$  του ορθογωνικού δοχείου

Στον παραπάνω πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 3-10) γίνεται σύγκριση των ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου που προκύπτουν με βάση την παρούσα μέθοδο, με τα αντίστοιχα



αποτελέσματα θεωρώντας το ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος.. Η ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου είναι  $R = 1\text{m}$ , έχει πληρότητα 50% σε ρευστό, ενώ χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικοί λόγοι ακτίνας προς μήκος κυλινδρικού δοχείου.

Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα με βάση την παρούσα μέθοδο είναι πολύ κοντά με τα αντίστοιχα που προκύπτουν θεωρώντας την έκφραση κλειστής μορφής της εξίσωσης (3.100) γεγονός το οποίο αποδεικνύει ότι το ισοδύναμο ορθογώνιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό ιδιοτιμών με μεγάλη ακρίβεια.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# 4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της μεθόδου των μεταβολών για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά καθώς και σε σφαιρικά δοχεία οιασδήποτε πληρότητας όπως αυτή παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.2. Στην εξίσωση όμως των μεταβολών :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s)(\nabla \Phi^*) d\Omega + \frac{1}{g_{B_2}} \int \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} \Phi^* dB_2 = - \frac{\ddot{X}}{g_{B_2}} \int x \Phi^* dB_2 \quad (4.1)$$

το ολοκλήρωμα των συναρτήσεων στο συνολικό όγκο  $\Omega$  του ρευστού είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Με βάση το θεώρημα του Green ισχύει :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s)(\nabla \Phi^*) d\Omega = \int_B \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB - \int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi_s) \Phi^* d\Omega \quad (4.2)$$

Από τη διατύπωση του προβλήματος για το άγνωστο δυναμικό  $\Phi_s$  ( εξίσωση (2.22) ) ισχύει ότι :

$$\nabla^2 \Phi_s = 0 \text{ στο } \Omega \quad (4.3)$$

Η σχέση (4.2) με τη βοήθεια της (4.3) γίνεται :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s)(\nabla \Phi^*) d\Omega = \int_B \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB \quad (4.4)$$

και επειδή  $B = B_1 \cup B_2$  από την (4.4) προκύπτει :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_s)(\nabla \Phi^*) d\Omega = \int_{B_1} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_2 \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας την (4.5) στην (4.1) είναι :

$$\int_{B_1} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \Phi^* dB_2 + \frac{1}{g_{B_2}} \int \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} \Phi^* dB_2 = - \frac{\ddot{X}}{g_{B_2}} \int x \Phi^* dB_2 \quad (4.6)$$

Η σχέση (4.6) στην οποία καταλήξαμε αποτελεί τη βασική εξίσωση των μεταβολών η οποία θα χρησιμοποιηθεί στο παρών κεφάλαιο.

Παρόμοια μεθοδολογία χρησιμοποιήθηκε στην εργασία που δημοσίευσαν οι Moiseev και Petrov [32]. Σημειώνεται πως στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάστηκε η επίλυση του ειδικού προβλήματος των ιδιοτιμών και μάλιστα μόνο για σφαιρικά δοχεία τυχαίας πληρότητας, ενώ στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται επίλυση του γενικού προβλήματος οριακών τιμών τόσο σε σφαιρικά καθώς και σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία οιασδήποτε πληρότητας τα οποία υπόκεινται σε τυχαία εξωτερική διέγερση κατά την εγκάρσια κατεύθυνση.

## 4.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

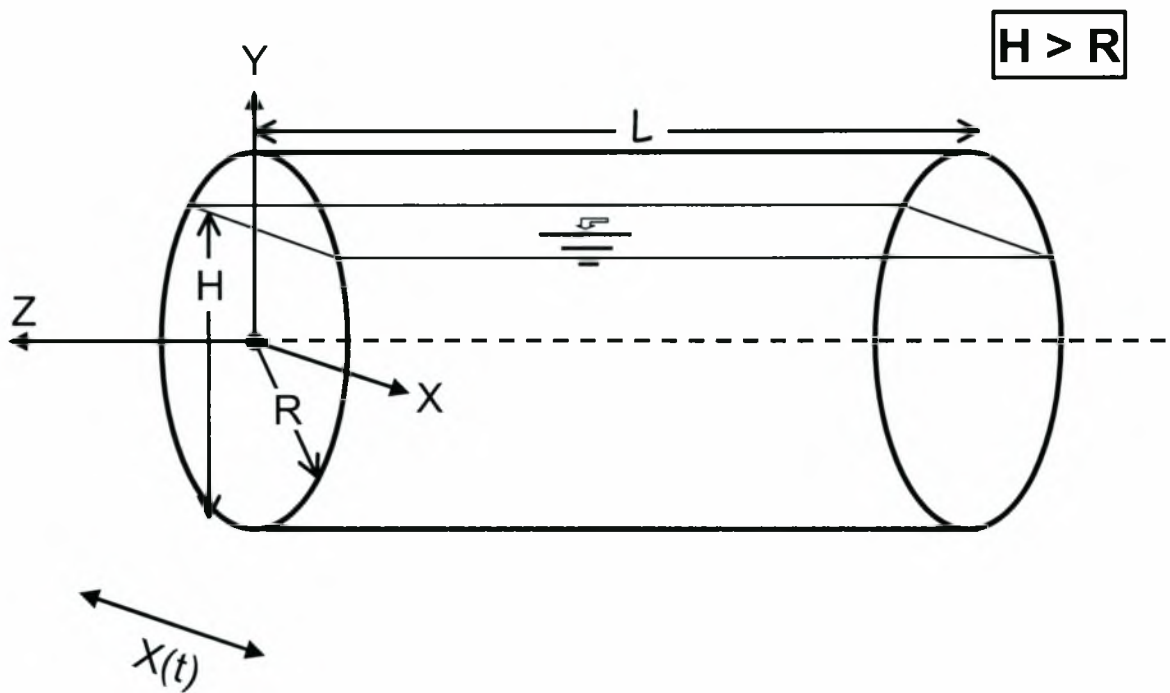
Το ρευστό πυκνότητας  $\rho$  περιέχεται στο εσωτερικό οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  και τυχαίας πληρότητας. Τα τοιχώματά του δοχείου θεωρούνται μη παραμορφώσιμα. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $X, Y, Z$  τοποθετείται στην αρχή του άξονα συμμετρίας του δοχείου, ο άξονας  $Y$  είναι κατακόρυφος προς τα πάνω, ενώ το βάθος του ρευστού είναι  $H$  (ΣΧΗΜΑ 4-1). Σημειώνεται πως η συγκεκριμένη γεωμετρική απεικόνιση είναι για  $H > R$ . Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση στην κατεύθυνση του άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ , ενώ η γεωμετρία περιγράφεται ως προς τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r, \theta, z$ . Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής :

$$X = r \cos \theta \quad (4.7)$$

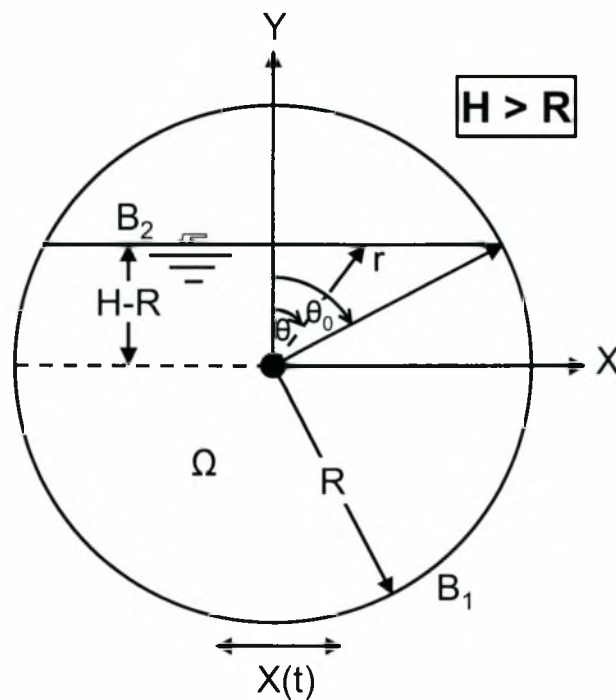
$$Y = r \sin \theta \quad (4.8)$$

$$Z = z \quad (4.9)$$

Εξαιτίας του τύπου της γεωμετρικής συμμετρίας του δοχείου καθώς και της μορφής της εξωτερικής διέγερσης η κίνηση του ρευστού περιγράφεται ως προς τις δύο διαστάσεις  $r, \theta$  (ΣΧΗΜΑ 4-2) όπως άλλωστε και στην ειδική περίπτωση του αντίστοιχου οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% που μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.



ΣΧΗΜΑ 4-1 : Γεωμετρική απεικόνιση οριζώντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  με βάθος ρευστού  $H$  το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον εγκάρσιο άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ . Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε  $H > R$



ΣΧΗΜΑ 4-2 : Γεωμετρική απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών και του πεδίου ορισμού του οριζώντιου κυλινδρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας, ως προς τις δυο διαστάσεις. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε  $H > R$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης των μεταβολών (4.6) λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα :

### Ελεύθερη επιφάνεια $B_2$ του ρευστού

$$r = \frac{H - R}{\cos\theta} \quad (4.10)$$

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = L(H - R) \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{H - R}{R}\right) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \cos\theta \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{H - R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) \quad (4.12)$$

### Τοίχωμα $B_1$ του δοχείου

$$r = R \quad (4.13)$$

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = LR \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{H - R}{R}\right) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (4.15)$$

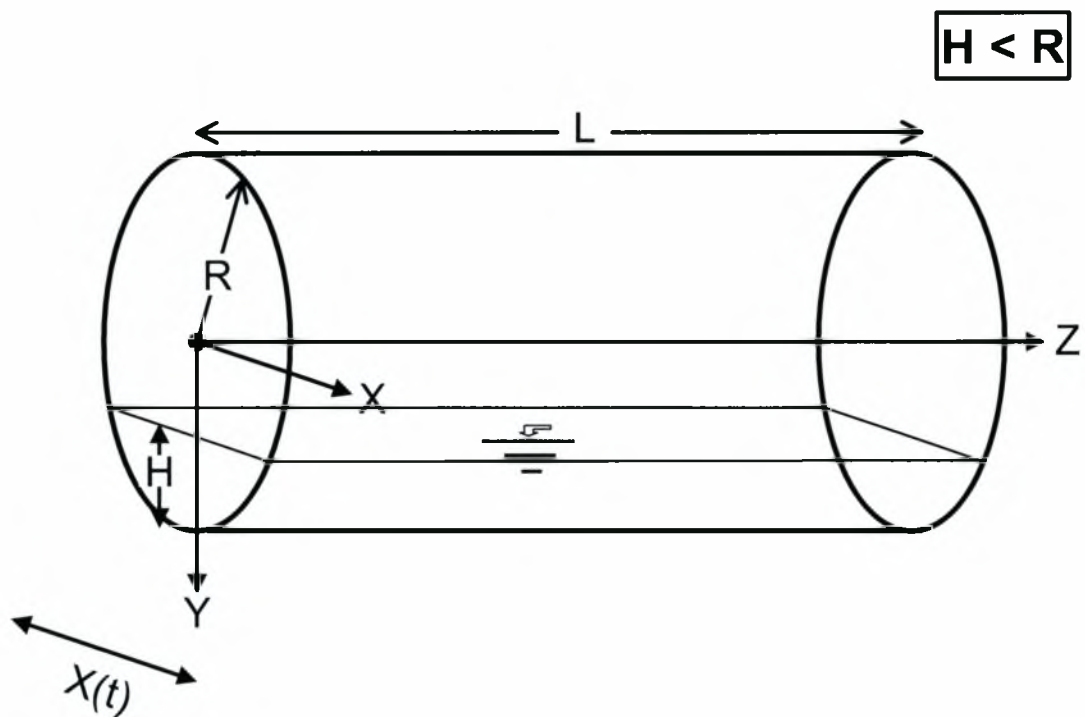
Στην περίπτωση που το βάθος του ρευστού  $H$  είναι μικρότερο της ακτίνας  $R$  ( $H < R$ ) η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $X, Y, Z$  τοποθετείται στην αρχή του άξονα συμμετρίας του δοχείου αλλά αυτή τη φορά ο άξονας  $Y$  είναι κατακόρυφος προς τα κάτω (ΣΧΗΜΑ 4-3). Η κατεύθυνση της εξωτερικής διέγερση είναι του εγκάρσιου άξονα  $X$  και η μετατόπισή της  $X(t)$ . Οι σχέσεις που συνδέουν σ' αυτή την περίπτωση τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις αντίστοιχες κυλινδρικές  $r, \theta$  μιας και το πρόβλημα όπως αναφέρθηκε είναι δισδιάστατο (ΣΧΗΜΑ 4-4) είναι όπως και προηγουμένως οι (4.7) και (4.8) Σ αυτήν την περίπτωση για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης των μεταβολών (4.6) λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα :

### Ελεύθερη επιφάνεια $B_2$ του ρευστού

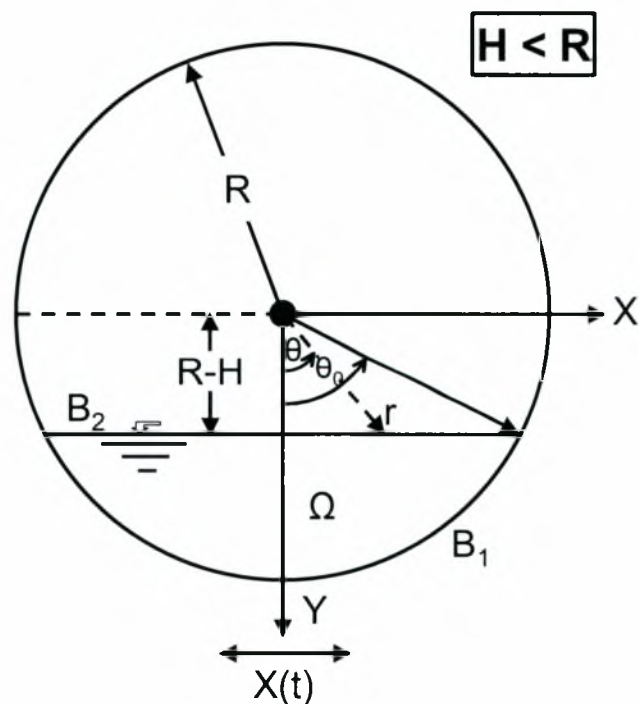
$$r = \frac{R - H}{\cos\theta} \quad (4.16)$$

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = L(R - H) \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{R - H}{R}\right) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial Y} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \cos\theta \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{R - H} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) \quad (4.18)$$



ΣΧΗΜΑ 4-3 : Γεωμετρική απεικόνιση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ακτίνας  $R$ , μήκους  $L$  με βάθος ρευστού  $H$  το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον εγκάρσιο άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ . Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε  $H < R$



ΣΧΗΜΑ 4-4 : Γεωμετρική απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών και του πεδίου ορισμού του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας, ως προς τις δυο διαστάσεις. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε  $H < R$

### Τοίχωμα $B_1$ του δοχείου

$$r = R \quad (4.19)$$

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = LR \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{R-H}{R}\right) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (4.21)$$

## 4.1.1 Συναρτήσεις Σχήματος - Εξισώσεις Κίνησης

Παρομοίως με την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% χρησιμοποιούνται οι ίδιες συναρτήσεις σχήματος δηλαδή :

$$N_n = r^n \sin\theta \quad , n = 1, 2, \dots, N \quad (4.22)$$

όπου  $N$  ο αριθμός των όρων της σειράς (truncation size), ενώ ο πίνακας  $[B]$  δίνεται από την (3.5).

Το "μητρώο μάζας"  $[M]$ , το "μητρώο ακαμψίας"  $[K]$  και το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων"  $P$  των εξισώσεων κίνησης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$M_{mn} = \begin{cases} \frac{2L(H-R)^{n+m+1}}{g} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin n\theta \sin m\theta}{\cos^{m+n+2}\theta} d\theta & , H > R \\ \frac{2L(R-H)^{n+m+1}}{g} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin n\theta \sin m\theta}{\cos^{m+n+2}\theta} d\theta & , H < R \end{cases} \quad (4.23)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N$$

$$K_{mn} = \begin{cases} 2Lm(H-R)^{n+m} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin n\theta \sin(m-1)\theta}{\cos^{m+n+1}\theta} d\theta + 2LR^{n+m} m \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta & , H > R \\ -2Lm(R-H)^{n+m} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin n\theta \sin(m-1)\theta}{\cos^{m+n+1}\theta} d\theta + 2LR^{n+m} m \int_0^{\theta_0} \sin n\theta \sin m\theta d\theta & , H < R \end{cases} \quad (4.24)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N$$

$$P_m = \begin{cases} \frac{2L(H-R)^{m+2}}{g} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin m\theta \sin\theta}{\cos^{m+3}\theta} d\theta & , H > R \\ \frac{2L(R-H)^{m+2}}{g} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin m\theta \sin\theta}{\cos^{m+3}\theta} d\theta & , H < R \end{cases} \quad (4.25)$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

όπου  $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$  η επιτάχυνση της βαρύτητας ενώ και για τις τρεις παραπάνω σχέσεις υπενθυμίζεται ότι :

$$\theta_0 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{H-R}{R}\right) & , \quad H > R \\ \arccos\left(\frac{R-H}{R}\right) & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.26)$$

#### 4.1.2 Ιδιοσυχνότητες οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας

Οι ιδιοσυχνότητες  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ) του φαινομένου του κυματισμού και για την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας υπολογίζονται λύνοντας το κλασσικό ιδιοπρόβλημα (2.49). Το "μητρώο μάζας" και το "μητρώο ακαμψίας" υπολογίζεται από τις (4.23) και (4.24) αντίστοιχα.

Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1) παρατίθενται οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  :

$$h = \frac{H}{R} \quad (4.27)$$

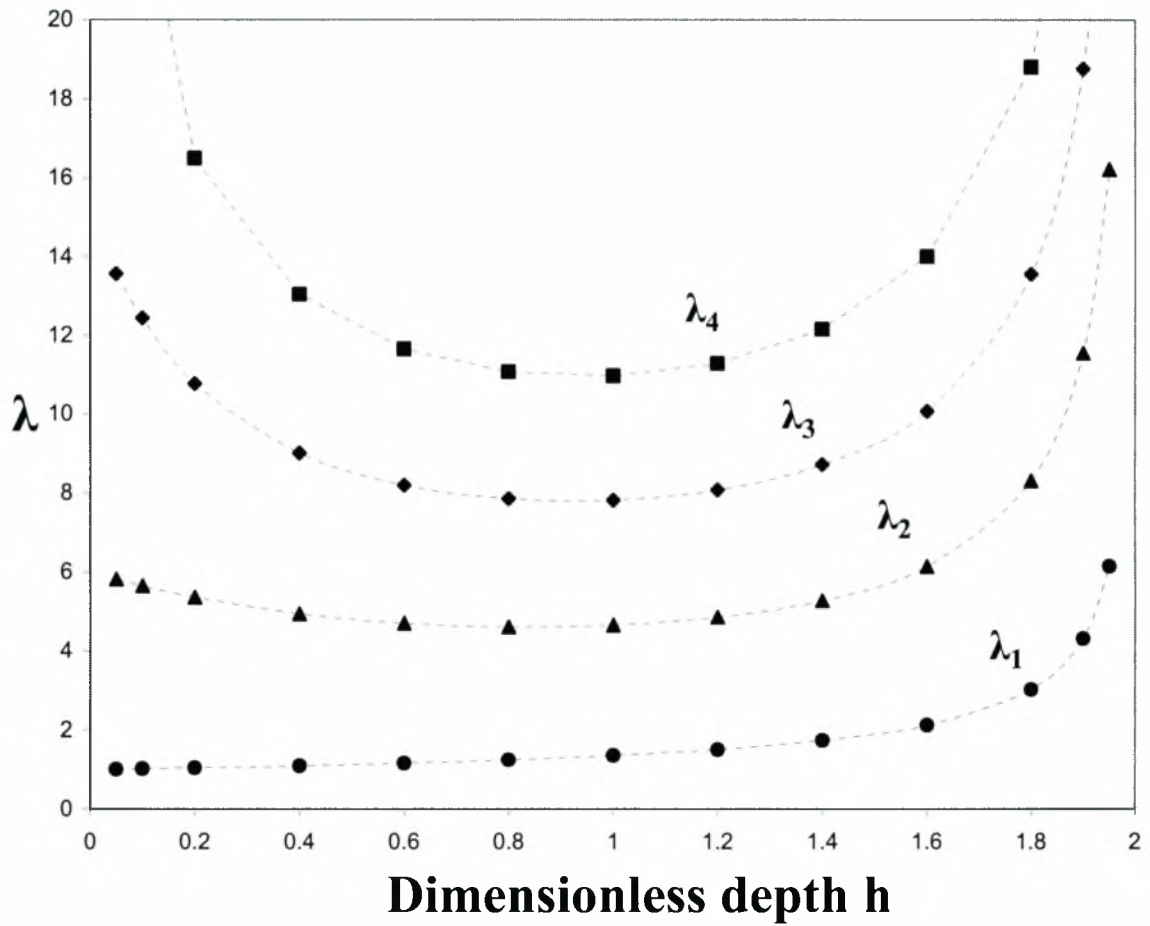
και όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση των τιμών του πίνακα (ΣΧΗΜΑ 4-5) όταν το αδιάστατο βάθος  $h$  τείνει στο μηδέν (δοχείο οιονεί άδειο) η πρώτη ιδιοτιμή τείνει στη μονάδα και οι υπόλοιπες τρεις προσεγγίζουν συγκεκριμένες τιμές όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Στον ίδιο πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1) πραγματοποιείται σύγκριση των τεσσάρων ιδιοτιμών με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του McIver [30] για επιλεγμένες τιμές του αδιάστατου βάθους ρευστού. Παρατηρούμε πως είναι σε πολύ καλή συμφωνία μεταξύ τους, ενώ η αρκετά μεγάλη ακρίβεια όπως και η γρήγορη σύγκλιση των ιδιοτιμών διαπιστώνεται από τα δύο ενδεικτικά παραδείγματα τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια. Στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 70% ( $h = H/R = 1.4$ ) υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις 4 πρώτες ιδιοτιμές (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-2), ενώ η σύγκλιση έχει ήδη επιτευχθεί για είκοσι έξι όρους σειράς ( $N = 26$ ), γεγονός το οποίο φαίνεται καλύτερα στο ΣΧΗΜΑ 4-6. Μελετώντας επιπλέον την περίπτωση που το δοχείο είναι πληρότητας 30% σε ρευστό παρατηρούμε πως υπάρχει και εδώ ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3) και μάλιστα η σύγκλιση είναι ακόμα πιο γρήγορη (ΣΧΗΜΑ 4-7) συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση (πληρότητα 70%) καθώς έχει



επιτευχθεί λαμβάνοντας μόνο δέκα έξι όρους σειράς ( $N=16$ ) στο άθροισμα της προσεγγιστικής λύσης για το άγνωστο δυναμικό  $\Phi_s$ . Το συμπέρασμα που προκύπτει μελετώντας τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών για διάφορες τιμές του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  είναι πως όσο η τιμή του προσεγγίζει τη μηδενική ( $h \rightarrow 0$ ), δηλαδή για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο οιονεί άδειο σε ρευστό, η σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών πραγματοποιείται ολοένα και γρηγορότερα, χρησιμοποιούνται δηλαδή κάθε φορά λιγότεροι όροι σειράς στο άθροισμα, γεγονός το οποίο αποδεικνύεται στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας. Ο λόγος για τον οποίο αναφερόμαστε μόνο στις τρεις ιδιοτιμές είναι γιατί εξετάζοντας τη συμπεριφορά της τέταρτης ιδιοτιμής συναρτήσει του αριθμού όρων σειράς παρατηρούμε πως αυτή παρουσιάζει κάποια προβλήματα αναφορικά με τη σύγκλιση όσο το αδιάστατο βάθος του ρευστού προσεγγίζει τη μηδενική τιμή (δοχείο οιονεί άδειο), όπως άλλωστε παρατηρούμε εξετάζοντας το παράδειγμα του δοχείου πληρότητας 30% (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3).

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ								
h	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ				ΕΡΓΑΣΙΑ P.MCIVER [30]			
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.05	1.0102	5.8149	13.5666					
0.1	1.0209	5.6462	12.4355	23.324				
0.2	1.0438	5.3550	10.7704	16.494	1.0439	5.3550	10.7674	16.180
0.4	1.0970	4.9370	9.0076	13.041	1.0970	4.9370	9.0075	12.984
0.6	1.1627	4.6987	8.1988	11.652	1.1627	4.6987	8.1988	11.649
0.8	1.2461	4.6067	7.8537	11.074	1.2461	4.6067	7.8537	11.074
1.0	1.3557	4.6511	7.8199	10.972	1.3557	4.6511	7.8199	10.972
1.2	1.5075	4.8509	8.0783	11.293	1.5075	4.8509	8.0783	11.293
1.4	1.7346	5.2768	8.7222	12.157	1.7346	5.2768	8.7221	12.157
1.6	2.1237	6.1395	10.0815	14.016	2.1237	6.1393	10.0807	14.014
1.8	3.0215	8.3152	13.5640	18.810	3.0214	8.3139	13.5596	18.800
1.9	4.3115	11.5515	18.7696	25.990				
1.95	6.1519	16.2222	26.2969	36.386				

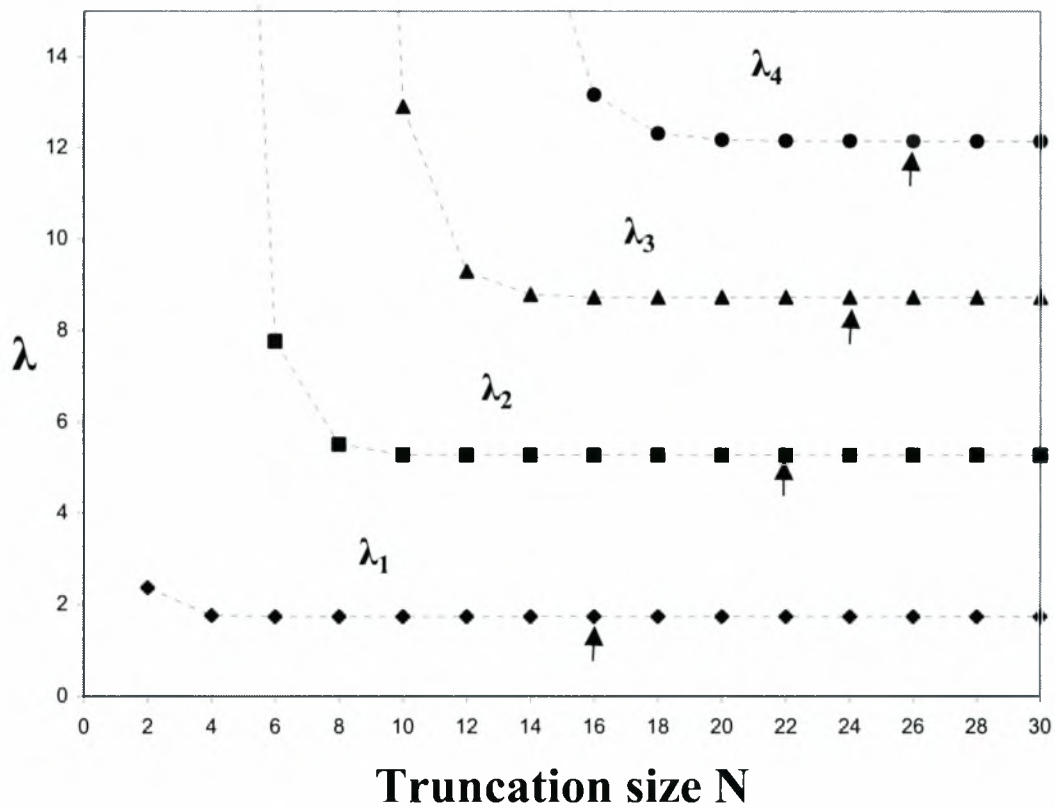
**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1 :** Σύγκριση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους h με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του McIver [30]



**ΣΧΗΜΑ 4-5 :** Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους  $h$  ( $h=H/R$ ) του ρευστού

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 70% ( H=1.4R )</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	2.3635			
4	1.7627	35.715		
6	1.7352	7.7661	797.64	
8	1.7349	5.5079	42.458	24430
10	1.7348	5.2847	12.91	443.26
12	1.7347	5.2774	9.2911	48.028
14	1.7347	5.2773	8.7765	17.809
16	1.7346	5.277	8.7269	13.171
18	1.7346	5.2769	8.7235	12.322
20	1.7346	5.2769	8.7224	12.182
22	1.7346	5.2768	8.7223	12.162
24	1.7346	5.2768	8.7222	12.158
26	1.7346	5.2768	8.7222	12.157
28	1.7346	5.2768	8.7222	12.157
30	1.7346	5.2768	8.7222	12.157
<b>McIver [30]</b>	<b>1.7346</b>	<b>5.2768</b>	<b>8.7221</b>	<b>12.157</b>

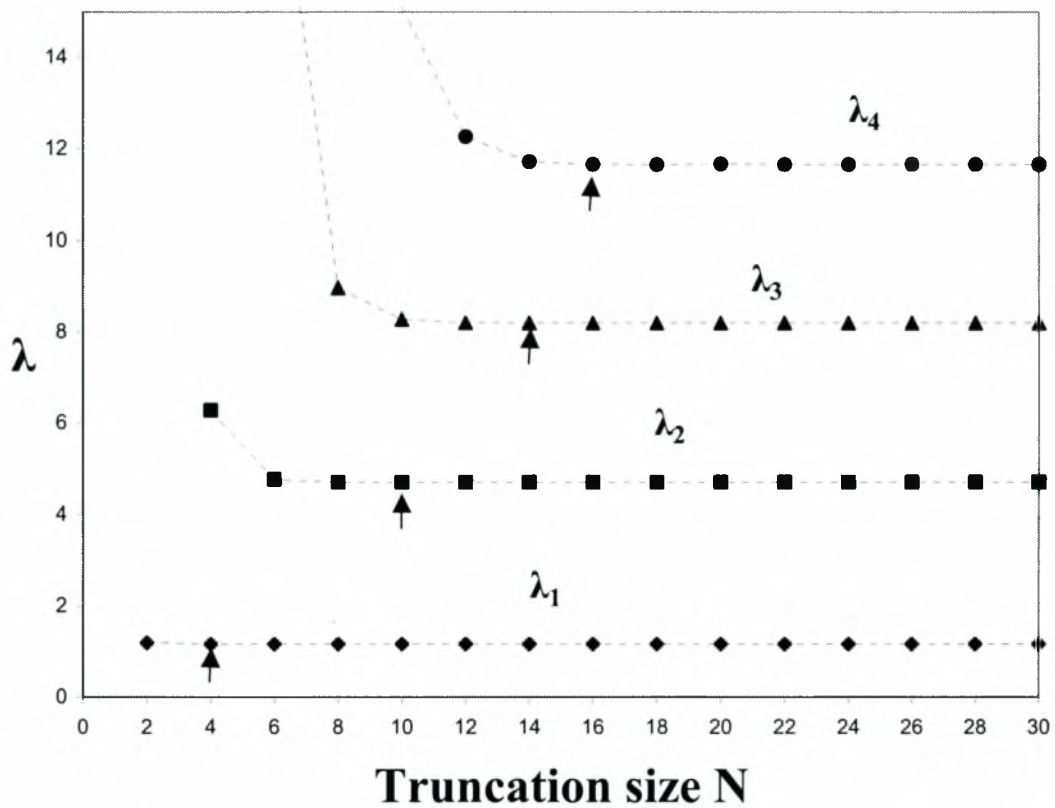
**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-2 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 70% σε ρευστό (H=1.4R) συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς (truncation size) – Σύγκριση με τα αποτελέσματα του McIver [30]**



ΣΧΗΜΑ 4-6 : Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 70% σε ρευστό ( $H=1.4R$ ) συναρτήσει του αριθμού  $N$  των όρων της σειράς (truncation size) – Τα σύμβολα  $\uparrow$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης.

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 30% ( H=0.6R )</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	1.1960			
4	1.1627	6.2776		
6	1.1627	4.7616	19.33	
8	1.1627	4.7001	8.9765	62.344
10	1.1627	4.6987	8.2769	15.126
12	1.1627	4.6987	8.2021	12.261
14	1.1627	4.6987	8.1988	11.721
16	1.1627	4.6987	8.1988	11.656
18	1.1627	4.6987	8.1988	11.654
20	1.1627	4.6987	8.1988	11.662
22	1.1627	4.6987	8.1988	11.653
24	1.1627	4.6987	8.1988	11.652
26	1.1627	4.6987	8.1987	11.650
28	1.1627	4.6987	8.1988	11.655
30	1.1627	4.6987	8.1988	11.652
<b>McIver [30]</b>	<b>1.1627</b>	<b>4.6987</b>	<b>8.1988</b>	<b>11.649</b>

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό (H=0.6R) συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς (truncation size) – Σύγκριση με τα αποτελέσματα του McIver [30]**



ΣΧΗΜΑ 4-7 : Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό ( $H=0.6R$ ) συναρτήσει του αριθμού  $N$  των όρων της σειράς (truncation size) – Τα σύμβολα  $\uparrow$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης.

### 4.1.3 Εξωτερική διέγερση - Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση - άμεση ολοκλήρωση)

Η μέθοδος προσδιορισμού των μαζών και των δυνάμεων παρουσιάστηκε αναλυτικά στην παράγραφο 3.1.4 του προηγούμενου κεφαλαίου όπου εξετάζεται το φαινόμενο του κυματισμού για την ειδική περίπτωση του αντίστοιχου οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50% το οποίο υπόκειται σε εγκάρσια διέγερση.

Η έκφραση για το διάνυσμα  $F_I$  είναι :

$$F_{In} = \begin{cases} 2LR^{n+1} \int_{\theta_0}^{\pi} \sin n\theta \sin\theta d\theta, & H > R \\ 2LR^{n+1} \int_0^{\theta_0} \sin n\theta \sin\theta d\theta, & H < R \end{cases} \quad (4.28)$$

ενώ η συνολική μάζα  $M_L$  που περιέχεται στο δοχείο είναι :

$$M_L = \begin{cases} \rho \frac{R^2}{2} (2\pi - 2\theta_0 + \sin 2\theta_0) L, & H > R \\ \rho \frac{R^2}{2} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0) L, & H < R \end{cases} \quad (4.29)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο

Στην (4.28) υπενθυμίζεται ότι :

$$\theta_0 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{H-R}{R}\right), & H > R \\ \arccos\left(\frac{R-H}{R}\right), & H < R \end{cases} \quad (4.30)$$

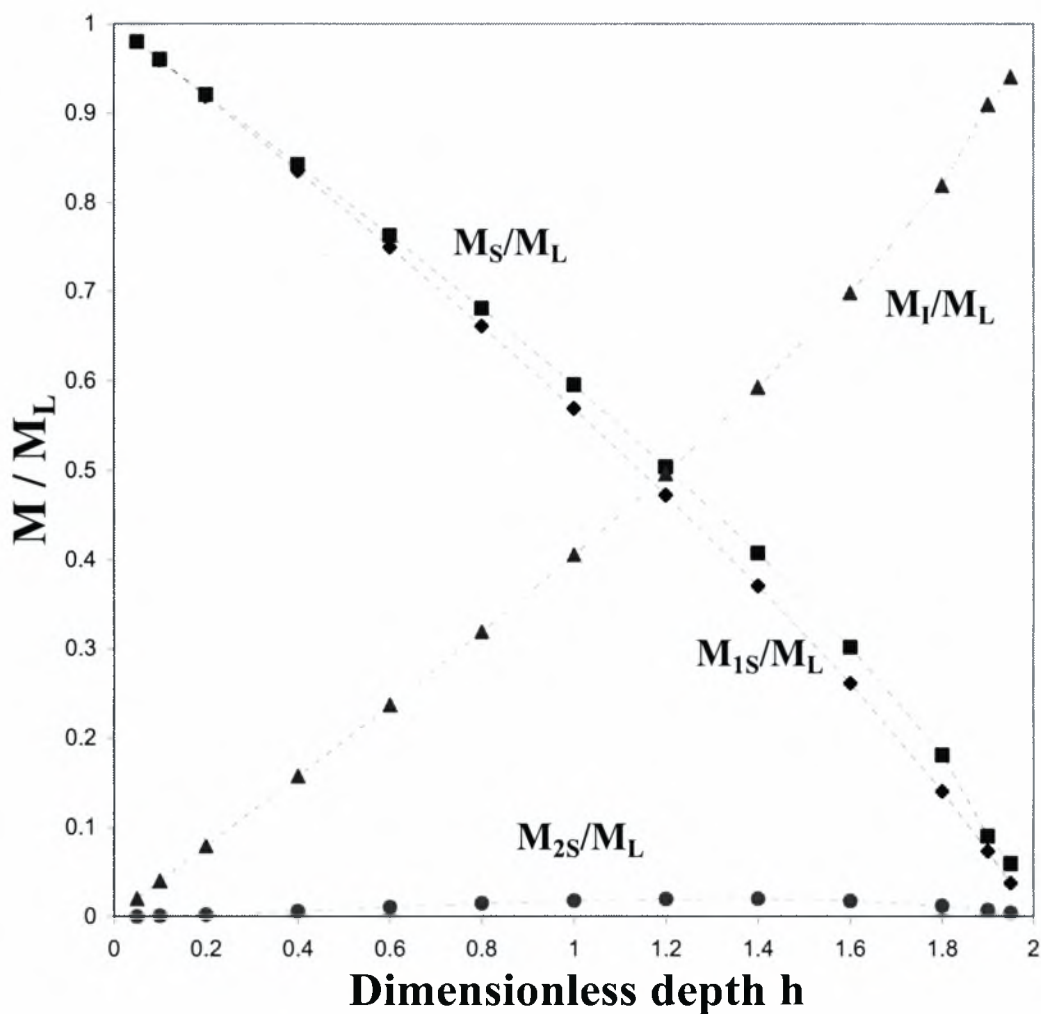
Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-4) παρατίθενται τα αποτελέσματα των λόγων μαζών προς τη συνολική μάζα, συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  για την περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας το οποίο υπόκειται σε τυχαία εγκάρσια εξωτερική διέγερση. Από τη γραφική παράσταση που έπεται (ΣΧΗΜΑ 4-8), όπου απεικονίζονται οι λόγοι συγκεκριμένων μαζών προς τη συνολική, εξάγονται πολύτιμα συμπεράσματα. Καταρχήν παρατηρούμε τη σημαντική συνεισφορά της πρώτης ιδιοτιμής στη συνολική μάζα κυματισμού συγκριτικά με την αντίστοιχη συνεισφορά της δεύτερης και επομένως και των υπολοίπων καθ' όλο το βάθος  $h$  του ρευστού (οι λόγοι των μαζών που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές μετά την δεύτερη προς τη συνολική δεν απεικονίζονται στο γράφημα γιατί είναι σχεδόν μηδενικοί). Όταν δε το  $h$  τείνει στο μηδέν ( $h \rightarrow 0$ ) η συνολική μάζα κυματισμού προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από την μάζα που αντιστοιχεί στην πρώτη



ιδιοτιμή. Ένα επίσης πολύ σημαντικό συμπέρασμα που εξάγεται από το ΣΧΗΜΑ 4-8 είναι πως όσο το αδιάστατο βάθος  $h$  του ρευστού στο δοχείο αυξάνεται, η συνεισφορά της μάζας κυματισμού στη συνολική συνεχώς μειώνεται, ενώ αυξάνεται η αντίστοιχη συνεισφορά της ωστικής μάζας. Ειδικότερα για δοχείο οιονεί άδειο ( $h \rightarrow 0$ ) η συνολική μάζα προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από τη μάζα του ρευστού που εκτελεί τον κυματισμό, ενώ όταν το δοχείο είναι οιονεί γεμάτο ( $h \rightarrow 2$ ) η ωστική μάζα είναι εκείνη που δίνει τη συνολική μάζα του ρευστού στο δοχείο.

ΛΟΓΟΙ ΜΑΖΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΣΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ						
h	$\frac{M_{1S}}{M_L}$	$\frac{M_{2S}}{M_L}$	$\frac{M_{3S}}{M_L}$	$\frac{M_{4S}}{M_L}$	$\frac{\sum M_{nS}}{M_L}$	$\frac{M_I}{M_L}$
0.05	0.97994	0.000154	0.0000006	0.0000000	0.98009	0.01991
0.1	0.95974	0.000577	0.0000079	0.0000004	0.96032	0.03968
0.2	0.91895	0.002010	0.0000821	0.0000115	0.92105	0.07895
0.4	0.83566	0.006113	0.0006170	0.0001524	0.84264	0.15736
0.6	0.74989	0.010585	0.0016235	0.0004958	0.76310	0.23690
0.8	0.66125	0.014636	0.0028551	0.0009891	0.68110	0.31890
1.0	0.56916	0.017797	0.0040544	0.0015392	0.59547	0.40543
1.2	0.47276	0.019669	0.0050013	0.0020323	0.50407	0.49593
1.4	0.37077	0.019790	0.0054773	0.0023499	0.40753	0.59247
1.6	0.26115	0.017534	0.0052114	0.0023401	0.30165	0.69835
1.8	0.14032	0.011849	0.0037700	0.0017673	0.18100	0.81900
1.9	0.07361	0.007076	0.0023414	0.0011258	0.09045	0.90955
1.95	0.03793	0.003948	0.0013389	0.0006539	0.05940	0.94060

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-4 :** Λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα, ο λόγος της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα καθώς και ο λόγος της ωστικής προς τη συνολική μάζα συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού h



ΣΧΗΜΑ 4-8 : Γραφική παράσταση του λόγου διαφόρων μαζών προς τη συνολική συναρτήσσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$ . Απεικονίζονται οι λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα, ο λόγος της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα καθώς και ο λόγος της ωστικής προς τη συνολική μάζα

Ο εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των δυνάμεων με εφαρμογή της μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το δοχείο είναι τυχαίας πληρότητας καθώς τα μητρώα ακαμψίας και μάζας είναι συμμετρικά, ενώ δε χρειάζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση να προχωρήσουμε σε εφαρμογή της μεθόδου στατικής συμπίκνωσης (παράγραφος 3.1.5) .

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.1.5 καταλήγουμε τελικά στην εξής έκφραση για τη συνολική δύναμη  $F_T$  :

$$F_T = F_U + F_S \quad (4.31)$$

όπου η ομοιόμορφη δύναμη  $F_U$  δίνεται από τη σχέση :

$$F_U = \begin{cases} -\rho \frac{R^2}{2} (2\pi - 2\theta_0 + \sin 2\theta_0) L \ddot{X} & , \quad H > R \\ -\rho \frac{R^2}{2} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0) L \ddot{X} & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.32)$$

ενώ η δύναμη του κυματισμού  $F_S$  είναι :

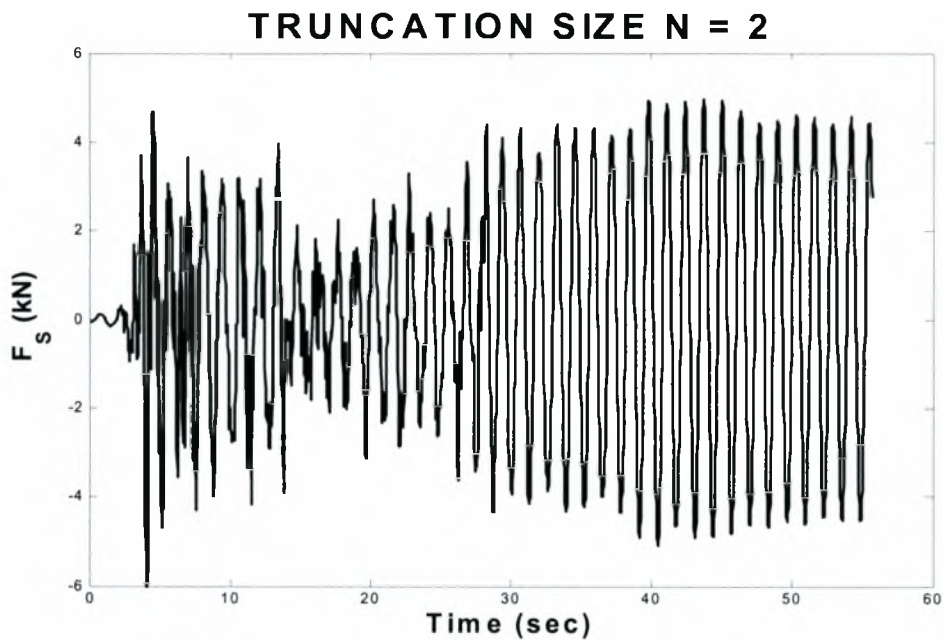
$$F_S = \begin{cases} -2\rho L \sum_{n=1}^N \left\{ R^{n+1} \left[ \int_{\theta_0}^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] \ddot{q}_n \right\}, & H > R \\ -2\rho L \sum_{n=1}^N \left\{ R^{n+1} \left[ \int_{\theta_0}^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] \ddot{q}_n \right\}, & H < R \end{cases} \quad (4.33)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

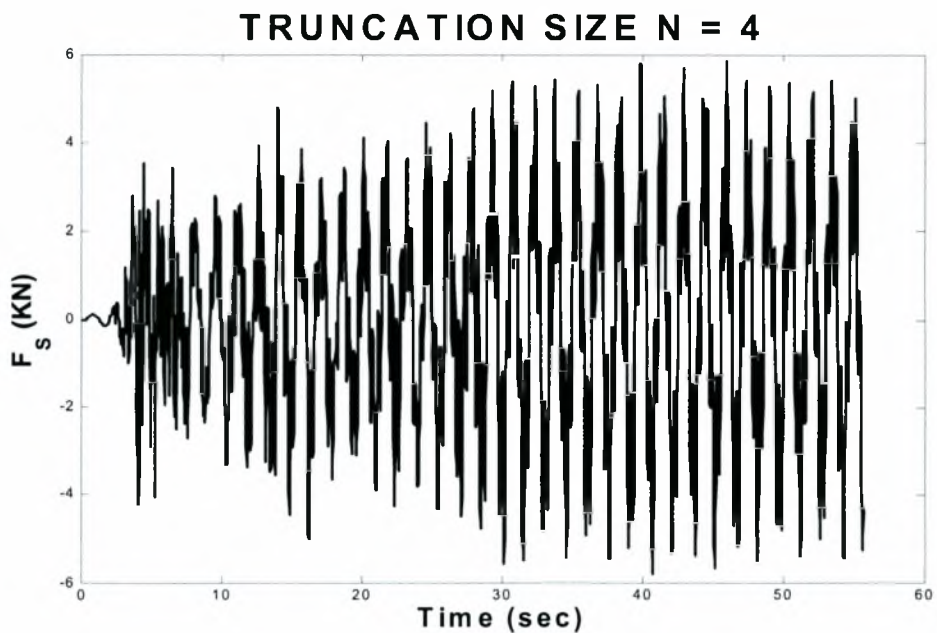
όπου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αναλυτικά και :

$$\theta_0 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{H-R}{R}\right) & , \quad H > R \\ \arccos\left(\frac{R-H}{R}\right) & , \quad H < R \end{cases}$$

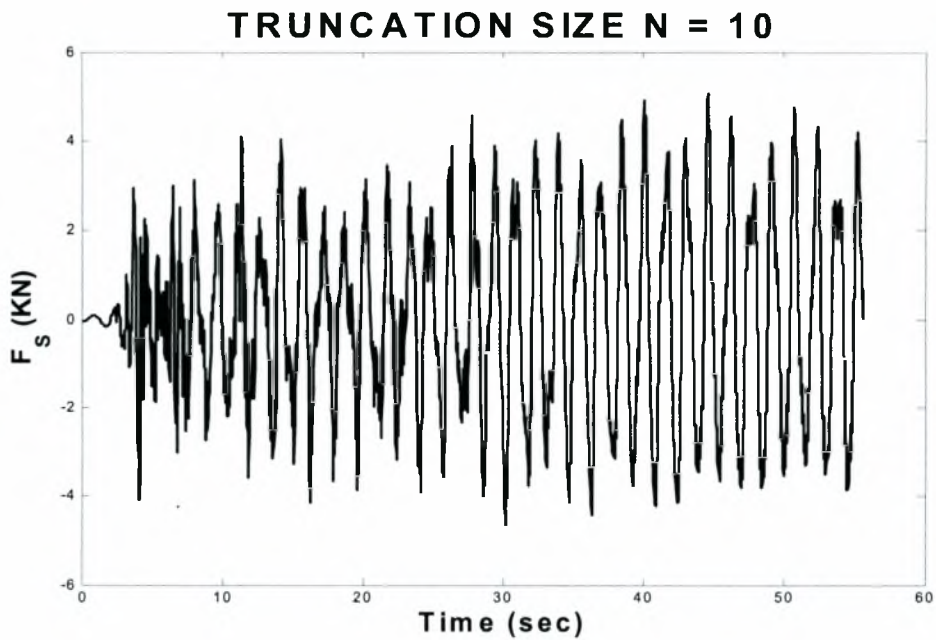
Ακολούθως παρατίθενται τα γραφήματα της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου για αυξανόμενο αριθμό όρων σειράς ( $N = 4, 8, 10, 20, 30, 40$ ) στην περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 70% σε νερό το οποίο υπόκειται κατά την εγκάρσια διεύθυνση στο σεισμό του El Centro (3.1.3). Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των όρων σειράς οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν γεγονός που αποδεικνύει τη σύγκλιση της μεθόδου. Σημειώνεται πως οι υπολογισμοί έγιναν για δοχείο μήκους  $L = 6m$  ενώ υπενθυμίζεται πως η πυκνότητα του νερού είναι  $\rho = 1000 \text{Kg/m}^3$  .



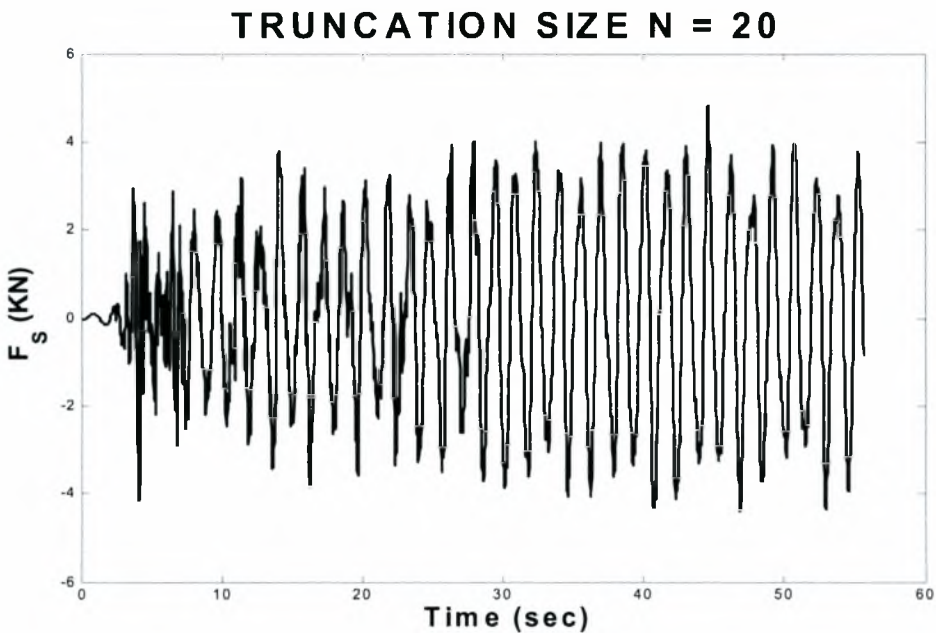
**ΣΧΗΜΑ 4-9 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου για δύο όρους σειράς



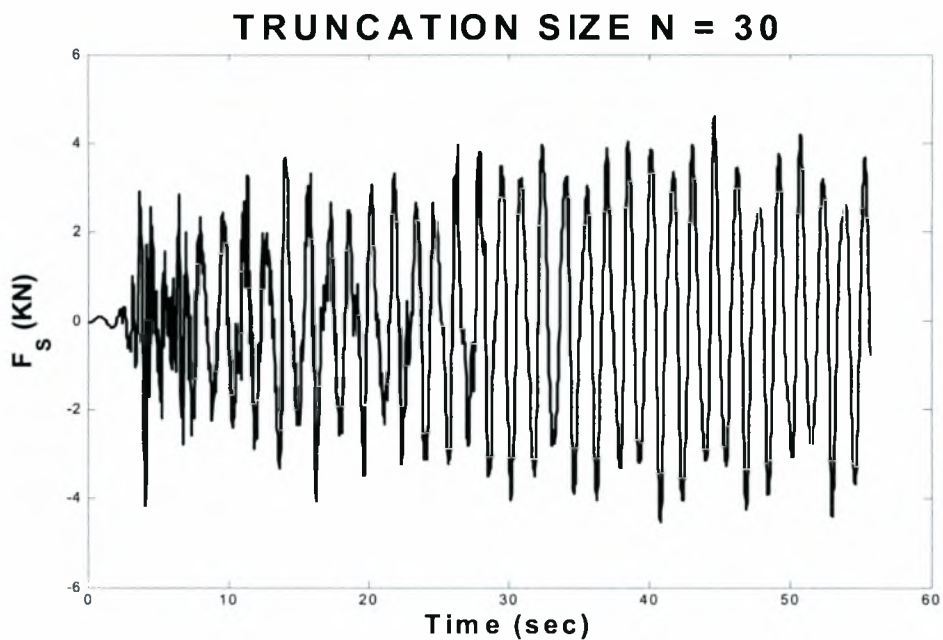
**ΣΧΗΜΑ 4-10 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου για τέσσερις όρους σειράς



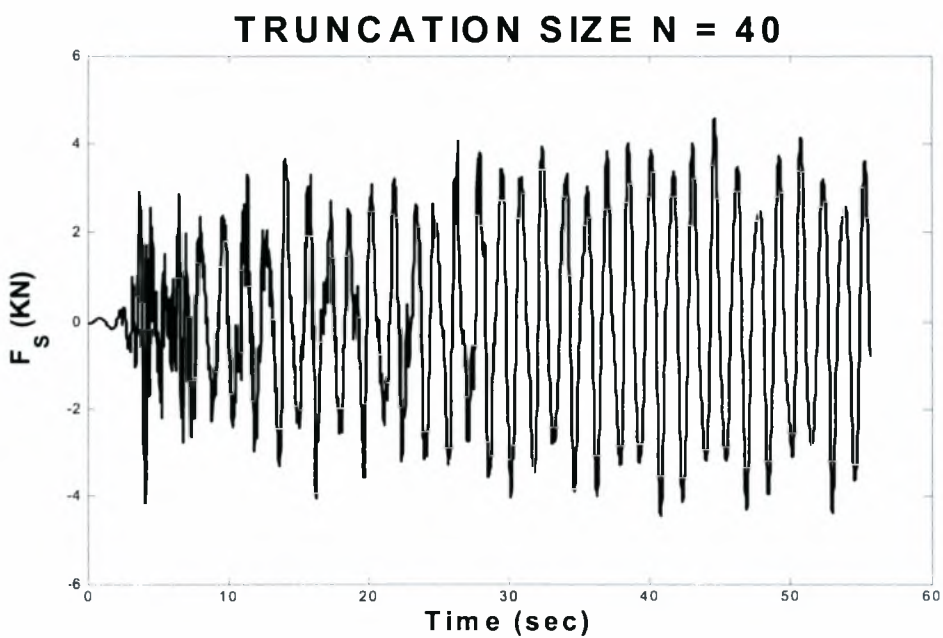
ΣΧΗΜΑ 4-11 : Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου για δέκα όρους σειράς



ΣΧΗΜΑ 4-12 : : Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_S$  συναρτήσει του χρόνου για είκοσι όρους σειράς



**ΣΧΗΜΑ 4-13 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για τριάντα όρους σειράς



**ΣΧΗΜΑ 4-14 :** Γραφική παράσταση της δύναμης κυματισμού  $F_s$  συναρτήσει του χρόνου για σαράντα όρους σειράς.

## 4.2 ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ

Το ρευστό πυκνότητας  $\rho$  περιέχεται στο εσωτερικό σφαιρικού δοχείου ακτίνας  $R$  και τυχαίας πληρότητας. Τα τοιχώματά του δοχείου θεωρούνται μη παραμορφώσιμα. Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $X, Y, Z$  τοποθετείται στο κέντρο του σφαιρικού δοχείου το οποίο είναι και το κέντρο του δίσκου της ελεύθερης επιφάνειας. Ο άξονας  $Y$  είναι κατακόρυφος προς τα πάνω, το βάθος του ρευστού είναι  $H$  και η γεωμετρική απεικόνιση του δοχείου φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 4-15, η οποία σημειώνεται πως είναι για  $H > R$ . Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση στην κατεύθυνση του εγκάρσιου άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ , ενώ η γεωμετρία περιγράφεται ως προς τις σφαιρικές συντεταγμένες  $r, \theta, \Psi$ . Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις αντίστοιχες σφαιρικές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες :

$$Y = r \cos\theta \quad (4.34)$$

$$X = r \sin\theta \cos\Psi \quad (4.35)$$

$$Z = r \sin\theta \sin\Psi \quad (4.36)$$

Στο ΣΧΗΜΑ 4-15 απεικονίζονται επίσης γεωμετρικά τόσο οι συνοριακές συνθήκες καθώς και το πεδίο ορισμού του προβλήματος ως προς τις δυο διαστάσεις.

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης των μεταβολών (4.6) στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας, με  $H > R$ , λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα :

### Ελεύθερη επιφάνεια $B_2$ του ρευστού

$$r = \frac{H - R}{\cos\theta} \quad (4.37)$$

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = 2\pi (H - R)^2 \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{H - R}{R}\right) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \cos\theta \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{H - R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) \quad (4.39)$$

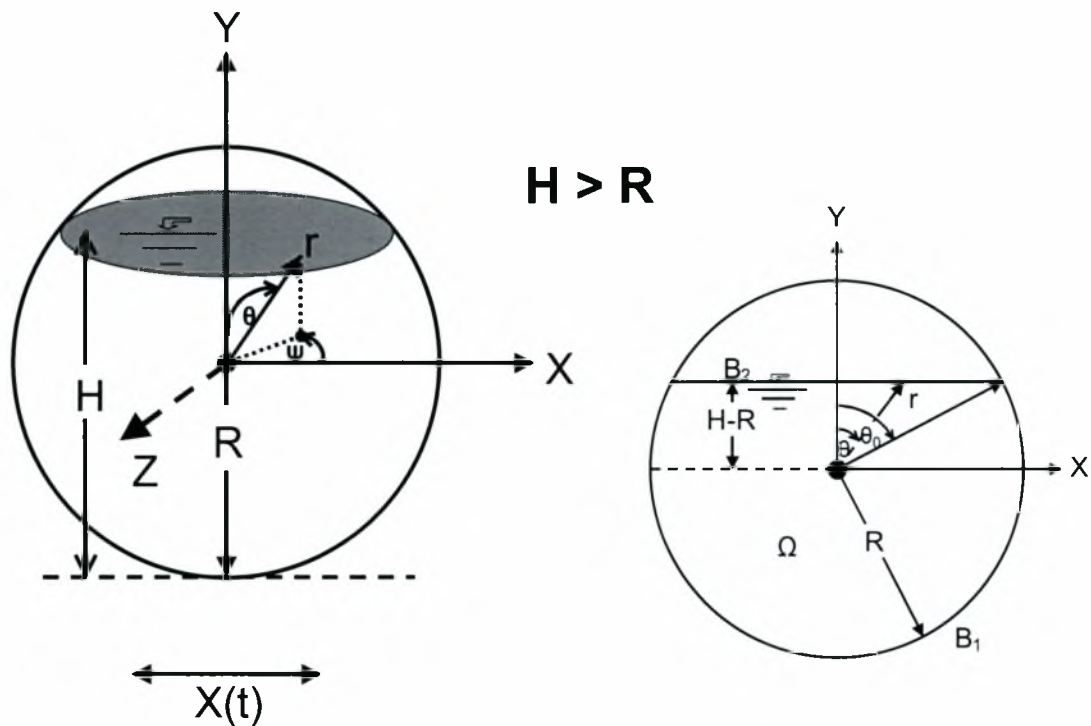
### Τοίχωμα $B_1$ του δοχείου

$$r = R \quad (4.40)$$

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots \sin\theta d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{H - R}{R}\right) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (4.42)$$





**ΣΧΗΜΑ 4-15 (αριστερά) :** Γεωμετρική απεικόνιση σφαιρικού δοχείου με βάθος ρευστού  $H$  το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον εγκάρσιο άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ , (δεξιά) : Γεωμετρική απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών και του πεδίου ορισμού του σφαιρικού δοχείου ως προς τις δυο διαστάσεις. Οι απεικονίσεις αντιστοιχούν σε  $H > R$

Εν συνεχεία εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποία το βάθος του ρευστού  $H$  είναι μικρότερο της ακτίνας  $R$  ( $H < R$ ). Η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $X, Y, Z$  τοποθετείται όπως και πριν στο κέντρο του σφαιρικού δοχείου με τον άξονα όμως  $Y$  να είναι κατακόρυφος προς τα κάτω (ΣΧΗΜΑ 4-16). Η κατεύθυνση της εξωτερικής διέγερση είναι του εγκάρσιου άξονα  $X$  και η μετατόπισή της  $X(t)$ , ενώ οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις αντίστοιχες σφαιρικές συντεταγμένες είναι και σ' αυτή την περίπτωση οι ίδιες ( (4.34), (4.35) και (4.36) )

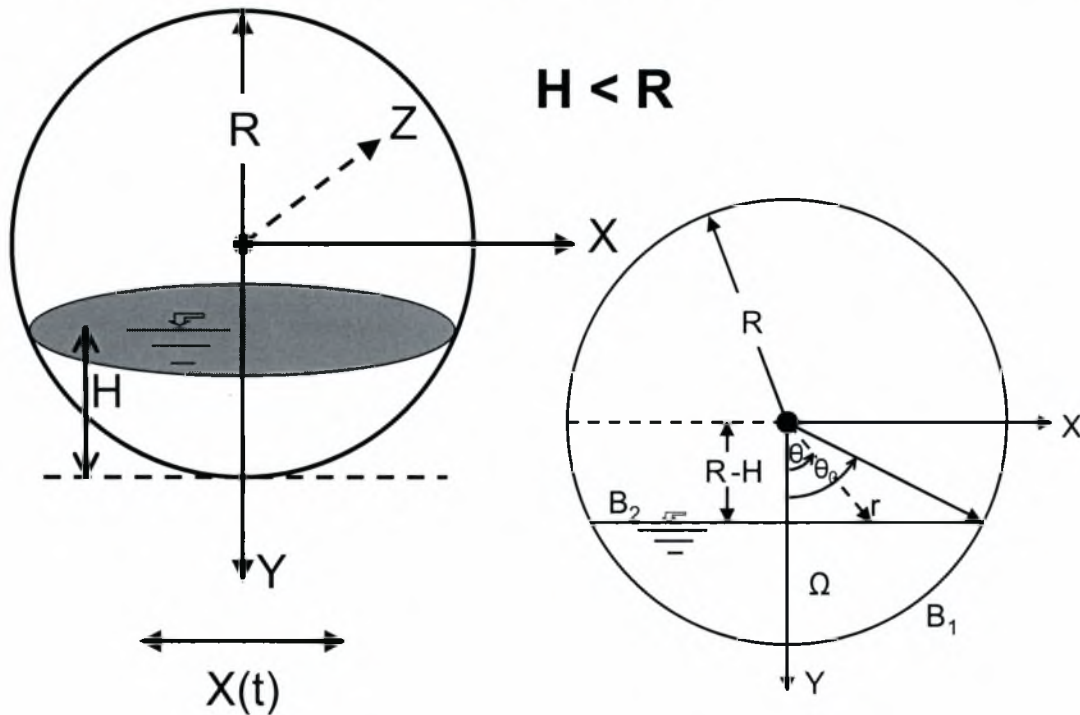
Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης των μεταβολών (4.6) στην περίπτωση αυτή ( $H < R$ ) λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα :

#### Ελεύθερη επιφάνεια $B_2$ του ρευστού

$$r = \frac{R - H}{\cos\theta} \quad (4.43)$$

$$\int_{B_2} \dots dB_2 = 2\pi(R - H)^2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \dots \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{R - H}{R}\right) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \quad \text{όπου} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \cos\theta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{R-H} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (4.45)$$



**ΣΧΗΜΑ 4-16** (αριστερά) : Γεωμετρική απεικόνιση σφαιρικού δοχείου με βάθος ρευστού  $H$  το οποίο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση ως προς τον εγκάρσιο άξονα  $X$  με μετατόπιση  $X(t)$ , (δεξιά) : Γεωμετρική απεικόνιση των συνοριακών συνθηκών και του πεδίου ορισμού του σφαιρικού δοχείου ως προς τις δυο διαστάσεις. Οι απεικονίσεις αντιστοιχούν σε  $H < R$

### Τοίχωμα $B_1$ του δοχείου

$$r = R \quad (4.46)$$

$$\int_{B_1} \dots dB_1 = 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta_0} \dots \sin\theta d\theta \quad \text{όπου} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{R-H}{R}\right) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (4.48)$$

## 4.2.1 Συναρτήσεις Σχήματος - Εξισώσεις Κίνησης

Οι συναρτήσεις σχήματος  $N_n(r, \theta, \Psi)$  είναι αυτές που χρησιμοποιήθηκαν και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% δηλαδή :

$$N_n = P_n^1(\mu) r^n \cos\Psi, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.49)$$

$$\mu = \cos\theta \quad (4.50)$$

όπου  $P_n^1(\mu)$  είναι τα πολυώνυμα Legendre πρώτης τάξης και βαθμού  $n$ , ενώ υπενθυμίζεται πως  $N$  είναι ο αριθμός των όρων της σειράς (truncation size). Ο πίνακας  $[\mathbf{B}]$  δίνεται από την (3.47). Το "μητρώο μάζας"  $[\mathbf{M}]$ , το "μητρώο ακαμψίας"  $[\mathbf{K}]$  και το "διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων"  $\mathbf{P}$  των εξισώσεων κίνησης στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$M_{mn} = \begin{cases} \frac{(H-R)^{n+m+2}}{g} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_n^1(\mu)P_m^1(\mu)}{\mu^{n+m+3}} d\mu & , \quad H > R \\ \frac{(R-H)^{n+m+2}}{g} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_n^1(\mu)P_m^1(\mu)}{\mu^{n+m+3}} d\mu & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.51)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N$$

$$K_{mn} = \begin{cases} (m+1)(H-R)^{n+m+1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_n^1(\mu)P_{m-1}^1(\mu)}{\mu^{n+m+3}} d\mu + mR^{n+m+1} \int_1^{\gamma} P_n^1(\mu)P_m^1(\mu) d\mu & , \quad H > R \\ -(m+1)(R-H)^{n+m+1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_n^1(\mu)P_{m-1}^1(\mu)}{\mu^{n+m+3}} d\mu + mR^{n+m+1} \int_{\gamma}^1 P_n^1(\mu)P_m^1(\mu) d\mu & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.52)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N$$

$$P_m = \begin{cases} \frac{(H-R)^{m+3}}{g} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_m^1(\mu)\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^{m+4}} d\mu & , \quad H > R \\ \frac{(R-H)^{m+3}}{g} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P_m^1(\mu)\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^{m+4}} d\mu & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.53)$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

όπου  $g = 9.81 \text{m/sec}^2$  η επιτάχυνση της βαρύτητας ενώ και για τις τρεις παραπάνω σχέσεις σημειώνεται ότι :

$$\alpha = \gamma = \frac{H-R}{R} \text{ και } \beta = 1 \quad , \quad H > R \quad (4.54)$$

$$\alpha = \gamma = \frac{R-H}{R} \text{ και } \beta = 1 \quad , \quad H < R$$

## 4.2.2 Ιδιοσυχνότητες σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας

Οι ιδιοσυχνότητες  $\lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ) του φαινομένου του κυματισμού στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας υπολογίζονται ως γνωστόν λύνοντας το ιδιοπρόβλημα (2.49) στο οποίο το "μητρώο μάζας" υπολογίζεται από τη σχέση (4.51) ενώ το "μητρώο ακαμψίας" από την (4.52).

Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-5) παρατίθενται οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές σφαιρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας συναρτήσεως του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  το οποίο όπως και στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου τυχαίας πληρότητας δίνεται από τη σχέση :

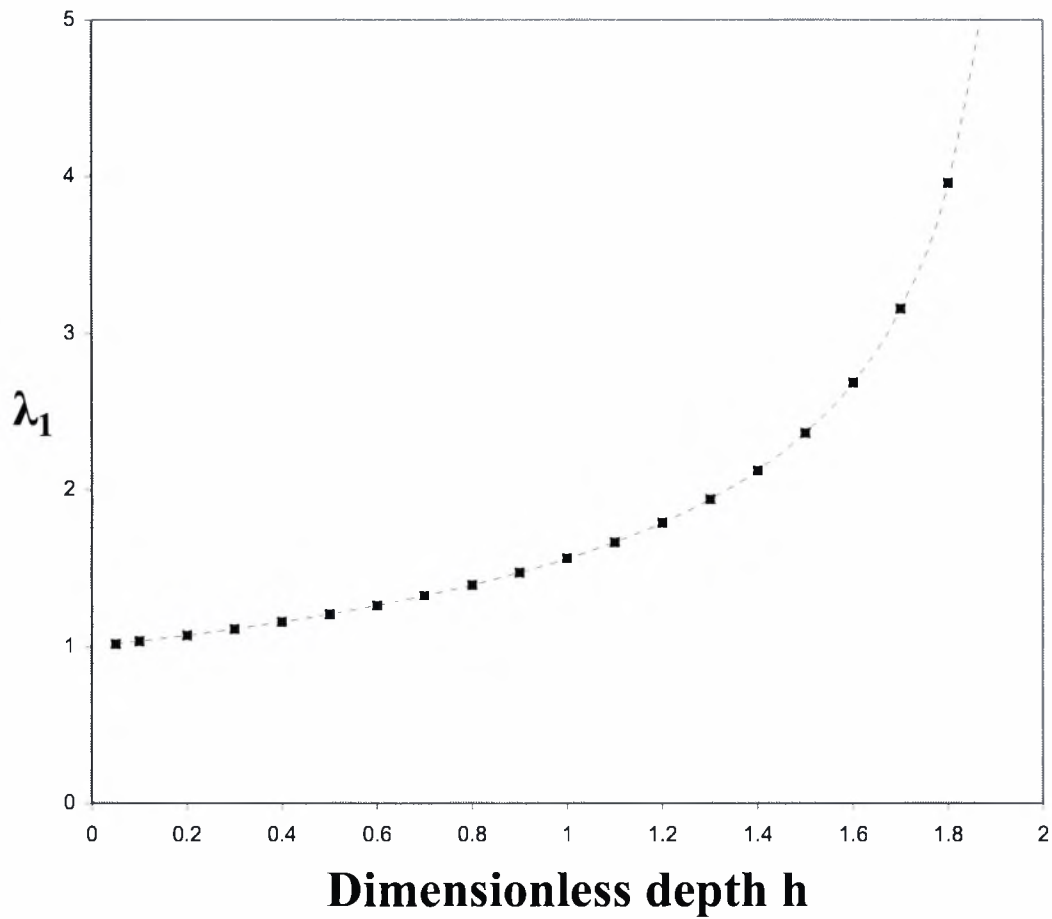
$$h = \frac{H}{R} \quad (4.55)$$

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση που έπεται (ΣΧΗΜΑ 4-17) όταν το αδιάστατο βάθος  $h$  τείνει στο μηδέν (δοχείο οιονεί άδειο) η πρώτη ιδιοτιμή τείνει στη μονάδα ενώ στην αμέσως επόμενη γραφική παράσταση (ΣΧΗΜΑ 4-18) απεικονίζονται και οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές συναρτήσεως του αδιάστατου βάθους  $h$ . Στον ίδιο πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-5) πραγματοποιείται σύγκριση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών με τις αντίστοιχα τιμές που προκύπτουν από την εργασία του McIver [30] για επιλεγμένες τιμές του αδιάστατου βάθους ρευστού. Η αρκετά μεγάλη ακρίβεια καθώς και η γρήγορη σύγκλιση των ιδιοτιμών διαπιστώνεται από τα δύο ενδεικτικά παραδείγματα που παρατίθενται στη συνέχεια.. Στην πρώτη περίπτωση, όπου το σφαιρικού δοχείου είναι πληρότητας 70% ( $h = H/R = 1.4$ ), υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις 4 πρώτες ιδιοτιμές (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-6), ενώ η σύγκλιση έχει ήδη επιτευχθεί για είκοσι τέσσερις όρους σειράς ( $N = 24$ ), γεγονός το οποίο φαίνεται καλύτερα στο ΣΧΗΜΑ 4-19. Μελετώντας επιπλέον την περίπτωση του δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό παρατηρούμε πως υπάρχει και εδώ ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-7) και μάλιστα η σύγκλιση είναι ακόμα πιο γρήγορη (ΣΧΗΜΑ 4-20) συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση (πληρότητα 70%) καθώς έχει επιτευχθεί με είκοσι μόνο όρους σειράς ( $N = 20$ ). Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου, έτσι και για σφαιρικό δοχείο πληρότητας 30%, τονίζεται πως η συμπεριφορά της τέταρτης ιδιοτιμής συναρτήσεως του αριθμού όρων σειράς παρουσιάζει κάποια προβλήματα αναφορικά με τη σύγκλιση και γενικά τούτο συμβαίνει όσο το αδιάστατο βάθος του ρευστού προσεγγίζει τη μηδενική τιμή (δοχείο οιονεί

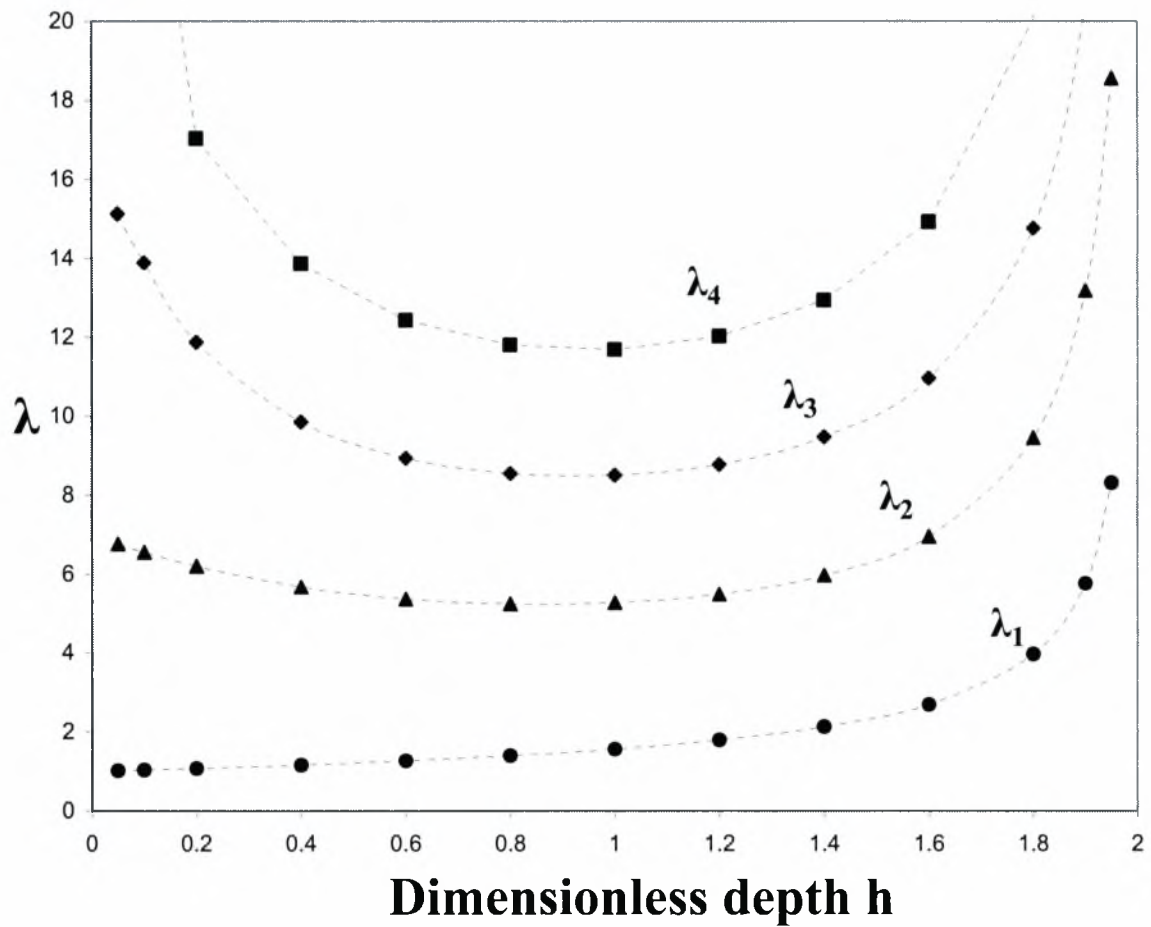
άδειο). Το συμπέρασμα πάντως που προκύπτει και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου μελετώντας τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών για διάφορες τιμές του αδιάστατου βάρους ρευστού  $h$  είναι πως όσο η τιμή του προσεγγίζει τη μηδενική ( $h \rightarrow 0$ ), δηλαδή το δοχείο είναι οιονεί άδειο, η σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών πραγματοποιείται ολοένα και γρηγορότερα, χρησιμοποιούνται δηλαδή κάθε φορά λιγότεροι όροι σειράς στο άθροισμα..

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ								
h	ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ				ΕΡΓΑΣΙΑ P.MCIVER [30]			
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.05	1.0170	6.7726	15.1315	30.020				
0.1	1.0347	6.5638	13.8911	26.757				
0.2	1.0723	6.2008	11.8764	17.032	1.0723	6.2008	11.8821	17.359
0.4	1.1583	5.6742	9.8543	13.866	1.1583	5.6742	9.8551	13.869
0.6	1.2625	5.3683	8.9418	12.421	1.2625	5.3683	8.9418	12.423
0.8	1.3924	5.2406	8.5509	11.800	1.3924	5.2406	8.5509	11.800
1.0	1.5602	5.2756	8.5045	11.684	1.5602	5.2756	8.5044	11.684
1.2	1.7882	5.4930	8.7793	12.021	1.7882	5.4930	8.7793	12.021
1.4	2.1232	5.9729	9.4763	12.938	2.1232	5.9728	9.4762	12.938
1.6	2.6864	6.9574	10.9566	14.918	2.6864	6.9571	10.9557	14.916
1.8	3.9595	9.4551	14.7598	20.033	3.9593	9.4535	14.7548	20.022
1.9	5.7615	13.1776	20.4520	27.702				
1.95	8.3121	18.5527	28.6891	38.816				

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-5 :** Σύγκριση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους h με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του McIver [30]



**ΣΧΗΜΑ 4-17 :** Γραφική παράσταση της πρώτης ιδιοτιμής σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους  $h$ .

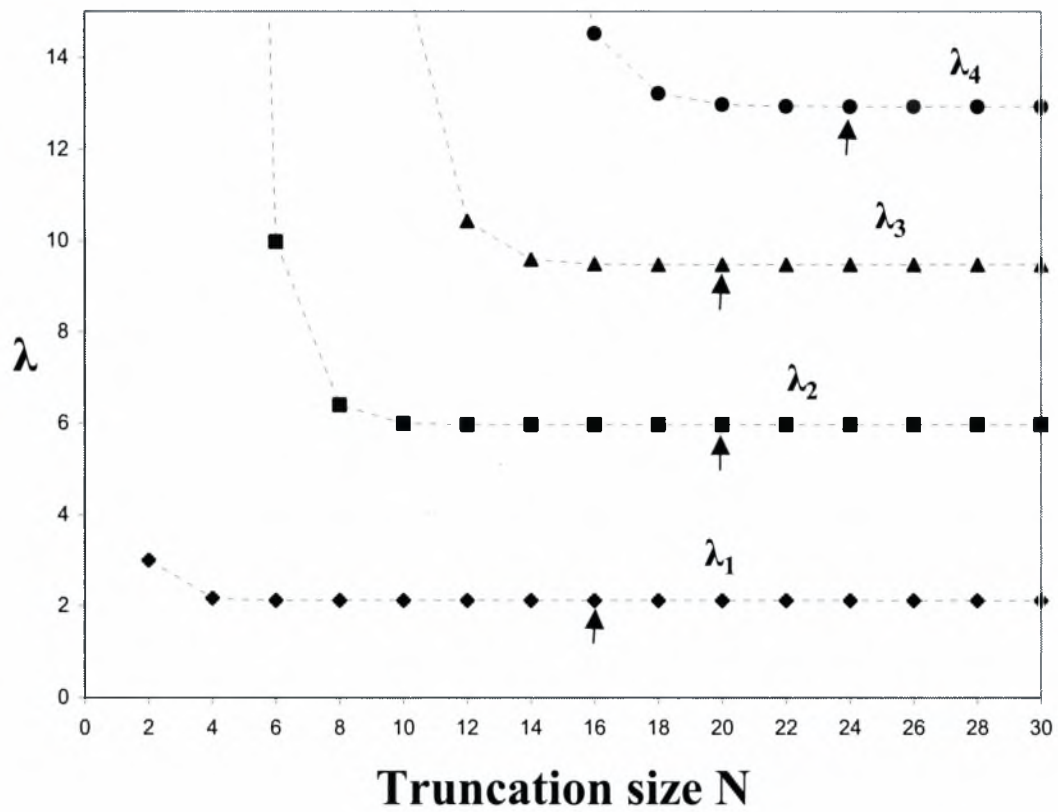


**ΣΧΗΜΑ 4-18 :** Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών σφαιρικού δοχείου οιασδήποτε πληρότητας συναρτήσει του αδιάστατου βάθους  $h$  ( $h=H/R$ ) του ρευστού



<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 70% ( H=1.4R )</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	2.9971			
4	2.1729	57.207		
6	2.1240	9.976	1499.1	
8	2.1236	6.3997	64	50041
10	2.1234	5.9966	15.992	769.47
12	2.1233	5.9737	10.435	68.635
14	2.1233	5.9735	9.5896	21.409
16	2.1232	5.9731	9.4866	14.523
18	2.1232	5.9730	9.4785	13.226
20	2.1232	5.9729	9.4767	12.985
22	2.1232	5.9729	9.4765	12.947
24	2.1232	5.9729	9.4764	12.939
26	2.1232	5.9729	9.4764	12.938
28	2.1232	5.9729	9.4763	12.938
30	2.1232	5.9729	9.4763	12.938
<b>McIver [30]</b>	<b>2.1232</b>	<b>5.9728</b>	<b>9.4762</b>	<b>12.938</b>

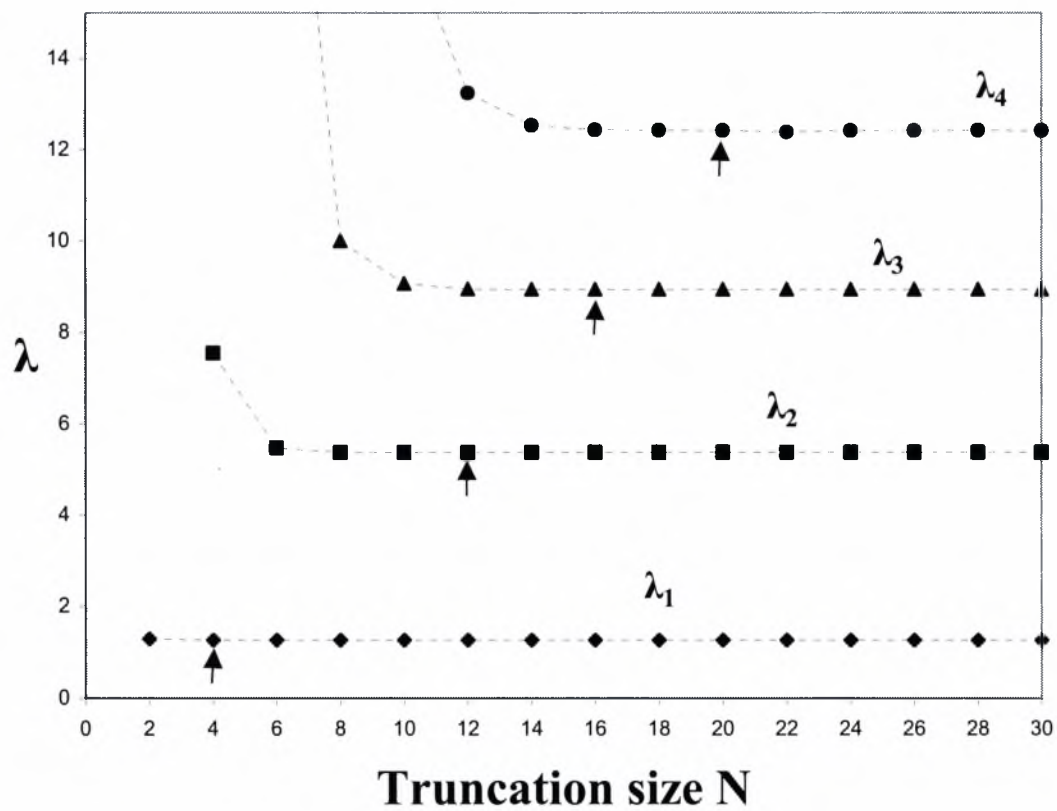
**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-6 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές σφαιρικού δοχείου πληρότητας 70% σε ρευστό (H=1.4R) συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς (truncation size) – Σύγκριση με τα αποτελέσματα του McIver [30]**



**ΣΧΗΜΑ 4-19 :** Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών σφαιρικού δοχείου πληρότητας 70% σε ρευστό ( $H=1.4R$ ) συναρτήσει του αριθμού  $N$  των όρων της σειράς (truncation size) – Τα σύμβολα  $\uparrow$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης.

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 30% ( H=0.6R )</b>				
<b>N</b>	$\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 R}{g}$	$\lambda_2 = \frac{\omega_2^2 R}{g}$	$\lambda_3 = \frac{\omega_3^2 R}{g}$	$\lambda_4 = \frac{\omega_4^2 R}{g}$
2	1.2929			
4	1.2625	7.5492		
6	1.2625	5.4689	23.813	
8	1.2625	5.3716	9.9975	79.811
10	1.2625	5.3684	9.0650	16.836
12	1.2625	5.3683	8.9486	13.246
14	1.2625	5.3683	8.9420	12.534
16	1.2625	5.3683	8.9418	12.434
18	1.2625	5.3683	8.9418	12.431
20	1.2625	5.3683	8.9418	12.420
22	1.2625	5.3683	8.9418	12.387
24	1.2625	5.3683	8.9418	12.424
26	1.2625	5.3683	8.9418	12.423
28	1.2625	5.3683	8.9418	12.426
30	1.2625	5.3683	8.9418	12.423
<b>McIver [30]</b>	<b>1.2625</b>	<b>5.3683</b>	<b>8.9418</b>	<b>12.423</b>

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-7 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές σφαιρικού δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό (H=0.6R) συναρτήσει του αριθμού N των όρων της σειράς (truncation size) – Σύγκριση με τα αποτελέσματα του McIver [30]**



**ΣΧΗΜΑ 4-20 :** Γραφική παράσταση των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών σφαιρικού δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό ( $H=0.6R$ ) συναρτήσει του αριθμού  $N$  των όρων της σειράς (truncation size) – Τα σύμβολα  $\uparrow$  αντιστοιχούν στις τιμές της σύγκλισης

### 4.2.3 Εξωτερική διέγερση - Υπολογισμός μαζών και δυνάμεων (ιδιομορφική ανάλυση)

Ο προσδιορισμός των μαζών και των δυνάμεων με τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης για την περίπτωση του σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.2.3. Στη γενική περίπτωση που το δοχείο είναι τυχαίας πληρότητας ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Η έκφραση για το διάνυσμα  $F_i$  είναι :

$$F_{in} = \begin{cases} \pi R^{n+2} \int_{-1}^{\gamma} P_m^{-1}(\mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu, & H > R \\ \pi R^{n+2} \int_{\gamma}^1 P_m^{-1}(\mu) \sqrt{1-\mu^2} d\mu, & H < R \end{cases} \quad (4.56)$$

ενώ η συνολική μάζα  $M_L$  που περιέχεται στο δοχείο είναι :

$$M_L = \begin{cases} \rho \frac{\pi}{3} (2R - H)^2 (R + H) & , \quad H > R \\ \rho \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H) & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.57)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού που περιέχεται στο δοχείο.

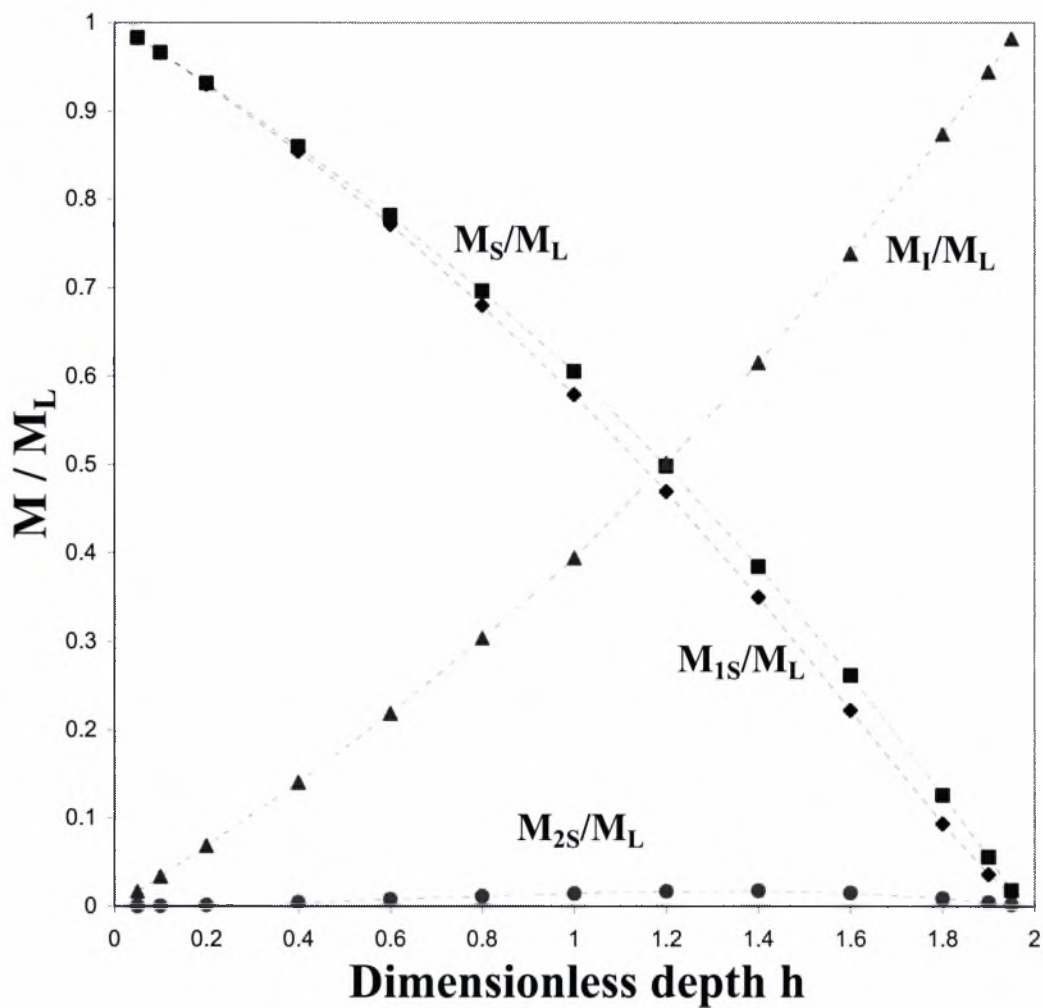
Στη (4.56) υπενθυμίζεται ότι :

$$\gamma = \begin{cases} \frac{H - R}{R} & , \quad H > R \\ \frac{R - H}{R} & , \quad H < R \end{cases} \quad (4.58)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί (ΠΙΝΑΚΑΣ 4-8) παρατίθενται τα αποτελέσματα των λόγων μαζών προς τη συνολική μάζα, συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  για την περίπτωση σφαιρικού οιασδήποτε πληρότητας το οποίο υπόκειται σε τυχαία εγκάρσια εξωτερική διέγερση ενώ στο ΣΧΗΜΑ 4-21 που ακολουθεί απεικονίζεται η γραφική παράσταση του λόγου διαφόρων μαζών προς τη συνολική συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  στο δοχείο.

ΛΟΓΟΙ ΜΑΖΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ						
h	$\frac{M_{1S}}{M_L}$	$\frac{M_{2S}}{M_L}$	$\frac{M_{3S}}{M_L}$	$\frac{M_{4S}}{M_L}$	$\frac{\sum M_{nS}}{M_L}$	$\frac{M_I}{M_L}$
0.05	0.98315	0.000102	0.0000005	0.0000000	0.98326	0.01674
0.1	0.96594	0.000387	0.0000064	0.0000003	0.96634	0.03366
0.2	0.93038	0.001374	0.0000667	0.0000104	0.93184	0.06816
0.4	0.85437	0.004341	0.0005155	0.0001406	0.85947	0.14053
0.6	0.77117	0.007850	0.0013969	0.0004640	0.78136	0.21864
0.8	0.67990	0.011396	0.0025337	0.0009401	0.69619	0.30381
1.0	0.57969	0.014576	0.0037169	0.0014976	0.60594	0.39406
1.2	0.46981	0.016874	0.0047195	0.0020190	0.49844	0.50156
1.4	0.35009	0.017526	0.0052523	0.0023532	0.38440	0.61560
1.6	0.22222	0.015419	0.0048997	0.0022806	0.26162	0.73838
1.8	0.09363	0.009185	0.0031036	0.0014989	0.12608	0.87392
1.9	0.03655	0.004387	0.0015438	0.0007635	0.05586	0.94414
1.95	0.01364	0.001851	0.0006696	0.0003361	0.01810	0.98190

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4-8 :** Λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα, ο λόγος της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα καθώς και ο λόγος της ωστικής προς τη συνολική μάζα συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού h



**ΣΧΗΜΑ 4-21 :** Γραφική παράσταση του λόγου διαφόρων μαζών προς τη συνολική συναρτήσει του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$ . Απεικονίζονται οι λόγοι μαζών κυματισμού που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες ιδιοτιμές προς τη συνολική μάζα, ο λόγος της μάζας κυματισμού προς τη συνολική μάζα καθώς και ο λόγος της ωστικής προς τη συνολική μάζα

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν μελετώντας το άνωθεν γράφημα είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα του οριζώντιου κυλινδρικού δοχείου. Σαν πρώτο συμπέρασμα επομένως τονίζεται και στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου η σημαντική συνεισφορά της πρώτης ιδιοτιμής στη συνολική μάζα κυματισμού συγκριτικά με τις υπόλοιπες καθ' όλο το αδιάστατο βάθος  $h$

του ρευστού (οι λόγοι των μαζών που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές μετά την δεύτερη προς τη συνολική δεν απεικονίζονται στο γράφημα γιατί είναι σχεδόν μηδενικοί). Όταν δε το  $h$  τείνει στο μηδέν ( $h \rightarrow 0$ ) η συνολική μάζα κυματισμού προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από την πρώτη ιδιοτιμή. Ένα επίσης πολύ σημαντικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι πως όσο το αδιάστατο βάθος  $h$  του ρευστού στο δοχείο αυξάνεται, η συνεισφορά της μάζας κυματισμού στη συνολική συνεχώς μειώνεται, ενώ αυξάνεται η αντίστοιχη συνεισφορά της ωστικής μάζας. Ειδικότερα για οιονεί άδειο ( $h \rightarrow 0$ ) η συνολική μάζα προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από τη την κίνηση της μάζας του ρευστού που σχετίζεται με τον κυματισμό, ενώ στην αντίστοιχη περίπτωση που το δοχείο είναι οιονεί γεμάτο ( $h \rightarrow 2$ ) η μάζα του ρευστού που αντιστοιχεί στην ωστική κίνηση είναι εκείνη που δίνει τη συνολική μάζα της κίνησης του ρευστού στο δοχείο.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## 5 ΔΟΧΕΙΑ ΟΙΟΝΕΙ ΓΕΜΑΤΑ / ΑΔΕΙΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η συμπεριφορά οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου ως προς τις ιδιοτιμές, για δοχείο οιονεί γεμάτο και οιονεί άδειο σε ρευστό. Εξετάζεται επίσης και η περίπτωση του δοχείου ορθογωνικής διατομής οιονεί άδειου σε ρευστό.

### 5.1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΟΝΕΙ ΓΕΜΑΤΟ

Στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί γεμάτου σε ρευστό, το βάθος του ρευστού  $H$  προσεγγίζει το  $2R$ , επομένως το αδιάστατο βάθος  $h = H/R$  τείνει στο δύο ( $h \rightarrow 2$ ), ενώ η γωνία  $\theta_0$  τείνει στο μηδέν ( $\theta_0 \rightarrow 0$ ).

Για μικρές γωνίες ( $\theta_0 \rightarrow 0$ ) από την τριγωνομετρία [1] ισχύουν τα εξής :

$$\int_0^{\theta_0} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \frac{mn}{3} \theta_0^3 & \text{για } m \neq n \\ \frac{n^2}{3} \theta_0^3 & \text{για } m = n \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\cos \theta_0 \approx 1 \quad (5.2)$$

Επομένως για  $H \rightarrow 2R$  και  $\theta_0 \rightarrow 0$  από την (4.23) το "μητρώο μάζας" γίνεται :

$$M_{mn} = \begin{cases} \frac{2LR^{n+m+1}}{g} \frac{mn}{3} \theta_0^3, & \text{για } m \neq n \\ \frac{2LR^{2n+1}}{g} \frac{n^2}{3} \theta_0^3, & \text{για } m = n \end{cases} \quad (5.3)$$

ενώ από την (4.24) η τελική έκφραση για το "μητρώο ακαμψίας" είναι :

$$K_{mn} = \begin{cases} -2LR^{n+m} \frac{mn}{3} \theta_0^3, & \text{για } m \neq n \\ -2LR^{2n} \frac{n^2}{3} \theta_0^3 + 2LR^{2n} \frac{n\pi}{2}, & \text{για } m = n \end{cases} \quad (5.4)$$

Από τις σχέσεις (5.3) και (5.4) συγκρίνοντας τα στοιχεία των πινάκων  $[M]$  και  $[K]$  παρατηρούμε πως τα διαγώνια στοιχεία του  $[K]$  είναι πολύ μεγαλύτερα τόσο των υπολοίπων στοιχείων του ίδιου του  $[K]$  όσο και όλων των στοιχείων του πίνακα  $[M]$

$$K_{ii} \gg M \quad (5.5)$$

Στο όριο δηλαδή όπου  $H \rightarrow 2R$ , ή ισοδύναμα  $h \rightarrow 2$ , ο πίνακας  $[K]$  γίνεται διαγώνιος, ενώ τα στοιχεία του πίνακα  $[M]$  τείνουν στο μηδέν. Επομένως είναι προφανές πως όλες οι ιδιοτιμές του ιδιοπροβλήματος τείνουν στο άπειρο δηλαδή :

$$\lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{όταν} \quad h \rightarrow 2 \quad (5.6)$$

όπως άλλωστε φαίνεται από τον ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1 και το ΣΧΗΜΑ 4-5 της παραγράφου 4.1.2 για τις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές του.

Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγει και ο Budiansky [6] εφαρμόζοντας μεθοδολογία ολοκληρωτικών εξισώσεων. Οδηγείται εκτός των άλλων και σε μια προσεγγιστική σχέση για την πρώτη ιδιοτιμή. Η σχέση αυτή προσαρμοσμένη στους συμβολισμούς της παρούσας εργασίας είναι η εξής :

$$\lambda_1 \approx \frac{2.094}{\sqrt{1-(h-1)^2}} \quad (5.7)$$

Ακολούθως παρατίθεται ένας συγκριτικός πίνακας της πρώτης ιδιοτιμής του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου για συγκεκριμένες τιμές του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  οι οποίες προσεγγίζουν το δύο, με βάση τόσο την άνωθεν σχέση (5.7) του Budiansky [6] όσο και την παρούσα μέθοδο που εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

<b>ΠΡΩΤΗ ΙΔΙΟΤΙΜΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΟΝΕΙ ΓΕΜΑΤΟΥ</b>		
<b>h</b>	<b>BUDIANSKY [6]</b>	<b>ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΘΟΔΟΣ</b>
<b>1.8</b>	<b>3.4900</b>	<b>3.0215</b>
<b>1.9</b>	<b>4.8040</b>	<b>4.3115</b>
<b>1.95</b>	<b>6.7062</b>	<b>6.1519</b>
<b>1.99</b>	<b>14.8440</b>	<b>13.9798</b>

**ΠΙΝΑΚΑΣ 5-1 :** Συγκριτικός πίνακας της πρώτης ιδιοτιμής οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί γεμάτου σε ρευστό με βάση τόσο τον τύπο του Budiansky [6] όσο και την παρούσα μέθοδο.

Από την μελέτη του παραπάνω πίνακα (ΠΙΝΑΚΑΣ 5-1) παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων ως προς την πρώτη ιδιοτιμή είναι σχετικά κοντά. Τονίζεται πως οι τιμές με βάση και τις δύο μεθόδους που συγκρίνονται στον παραπάνω πίνακα είναι προσεγγιστικές.

## 5.2 ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΟΙΟΝΕΙ ΑΔΕΙΟ

Αναφορικά με την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί άδειου σε ρευστό και με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1.2 του προηγούμενου κεφαλαίου, είναι φανερό πως οι τρεις πρώτες ιδιοτιμές  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  συγκλίνουν πολύ γρήγορα, ενώ παρατηρούνται προβλήματα στη σύγκλιση των ιδιοτιμών  $\lambda_n$  με  $n > 3$ .

Αρχικά, όπως και στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου (5.1) υπολογίζουμε τα στοιχεία των πινάκων  $[M]$  και  $[K]$  με στόχο τη μεταξύ τους σύγκριση και την εξαγωγή πολύτιμων συμπερασμάτων ως προς τις ιδιοτιμές.

Στην περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί άδειου, το βάθος  $H$ , άρα και το αδιάστατο βάθος  $h$  του ρευστού τείνουν στο μηδέν ( $H, h \rightarrow 0$ ) ) Επίσης και η γωνία  $\theta_0$  προσεγγίζει τη μηδενική τιμή ( $\theta_0 \rightarrow 0$ ) επομένως ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση οι σχέσεις (5.1) και (5.2).

Κατά συνέπεια για  $H \rightarrow 0$  και  $\theta_0 \rightarrow 0$  από την (4.24) το "μητρώο μάζας" γίνεται :

$$M_{mn} = \frac{2LR^{n+m+1}}{g} \frac{mn}{3} \theta_0^3 \quad (5.8)$$

ενώ η τελική έκφραση για το "μητρώο ακαμψίας" με βάση την (4.24) είναι :

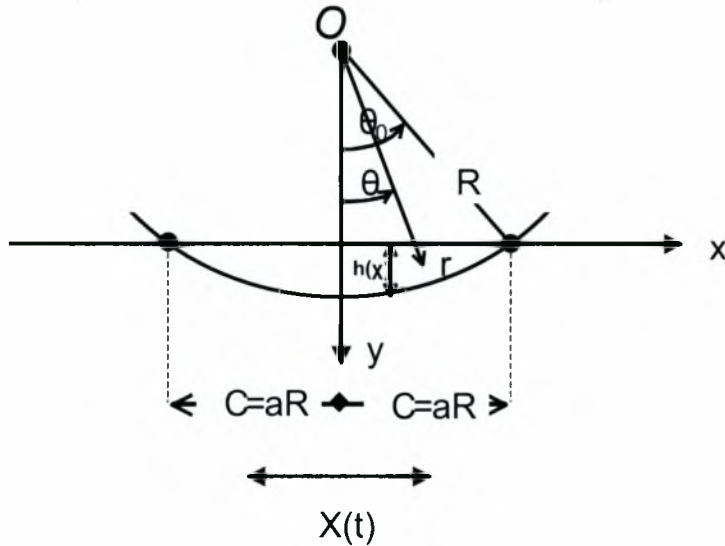
$$K_{mn} = 2L \frac{mn}{3} \theta_0^3 \quad (5.9)$$

Επομένως είναι προφανές πως όσο το βάθος του ρευστού προσεγγίζει τη μηδενική τιμή ( $h \rightarrow 0$ ), δηλαδή το δοχείο είναι οιονεί άδειο σε ρευστό, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων  $[K]$  και  $[M]$  είναι όμοια. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως μια τουλάχιστον εκ των ιδιοτιμών του ιδιοπροβλήματος προσεγγίζει τη μονάδα ( $\lambda \rightarrow 1$ ).

Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ρηχών δεξαμενών (Lamb [27], Budiansky [6]), προσαρμοσμένη βέβαια στα δεδομένα της παρούσας εργασίας, αποδεικνύεται πως μόνο η προαναφερθείσα ιδιοτιμή που προσεγγίζει τη μονάδα, η οποία όπως θα δούμε παρακάτω είναι και η πρώτη ( $\lambda_1 \rightarrow 1$ ), συνεισφέρει εξολοκλήρου στη συνολική μάζα του ρευστού και επομένως λαμβάνεται υπόψη.

## ΘΕΩΡΙΑ ΡΗΧΩΝ ΔΕΞΑΜΕΝΩΝ (Lamb [27], Budiansky [6])

Η γεωμετρική απεικόνιση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου το οποίο οιονεί άδειο σε ρευστό και στο οποίο εφαρμόζεται η συγκεκριμένη θεωρία, φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 5-1.



ΣΧΗΜΑ 5-1 : Οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο οιονεί άδειο στο οποίο εφαρμόζεται η θεωρία των ρηχών δεξαμενών

Οι υποθέσεις που πραγματοποιούνται είναι οι εξής δύο:

**A)** Η συνάρτηση  $h(x)$  του βάθους του ρευστού θεωρείται παραβολική, δηλαδή :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2R}(C^2 - x^2) \\ &= \frac{C^2}{2R}(1 - \xi^2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

και :

**B)** η συνάρτηση του δυναμικού της ταχύτητας  $\Phi$  θεωρείται ανεξάρτητη της κατεύθυνσης  $y$ , δηλαδή :

$$\Phi = \Phi(x, t) \quad (5.11)$$

έτσι ώστε :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (5.12)$$

και :

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.13)$$

Ο όγκος του ρευστού στο δοχείο είναι :

$$\Omega = \int_{-c}^c h(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{C^3}{2R} (1-\xi^2) d\xi = \frac{2C^3}{3R} \quad (5.14)$$

Η μάζα του ρευστού είναι :

$$M_L = \rho \Omega = \rho \frac{2C^3}{3R} \quad (5.15)$$

Η εξίσωση των μεταβολών :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi)(\nabla \Phi^*) d\Omega + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Phi^* dB_2 = -\frac{\ddot{X}}{g} \int_{B_2} x \Phi^* dB_2 \quad (5.16)$$

γίνεται :

$$\int_{-c}^c h(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{d\Phi^*}{dx} dx + \frac{1}{g} \int_{-c}^c \ddot{\Phi} \Phi^* dx = \frac{\ddot{X}}{g} \int_{-c}^c x \Phi^* dx \quad (5.17)$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στον πρώτο όρο της (5.17) προκύπτει η εξίσωση του Euler :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{1}{g} \ddot{\Phi} = \frac{\ddot{X}}{g} x, \quad -C < x < C \quad (5.18)$$

με  $\Phi(0) = 0$  και  $\Phi(C) = \text{πεπερασμένος αριθμός}$

## Ιδιοτιμές και Ιδιομορφές

Θέτοντας  $X = 0$  και  $\Phi = \tilde{\Phi} e^{i\omega t}$  η εξίσωση του Euler (5.18) γίνεται :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2}{g} \tilde{\Phi} = 0 \quad (5.19)$$

στην οποία αν θέσουμε  $\xi = \frac{x}{C}$  και  $h(x) = \frac{C^2}{2R} (1-\xi^2)$  προκύπτει :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{d\tilde{\Phi}}{d\xi} \right] + \left( \frac{\omega^2 R}{g} \right) \tilde{\Phi} = 0 \quad (5.20)$$

Η εξίσωση (5.20) αποτελεί ένα κλασσικό πρόβλημα τύπου Sturm – Louiville. Μπορούμε βέβαια να την γράψουμε και ως εξής :

$$(\xi^2 - 1)\Phi'' + 2\xi\Phi' - 2\lambda\Phi = 0, \quad (\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\xi}, \quad -1 < \xi < 1 \quad (5.21)$$

με  $\Phi(0) = 0$

όπου :

$$\lambda = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (5.22)$$

Η (5.21) αποτελεί την εξίσωση Legendre και επομένως :

$$\lambda_n = 2n^2 - n \quad \text{οι ιδιοτιμές} \quad (5.23)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

και :

$$\Phi_n = P_{2n-1}(\xi) \quad \text{οι ιδιομορφές} \quad (5.24)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Σημειώνεται πως εξαιτίας της συνθήκης  $\Phi(0) = 0$  θεωρούνται μόνο τα πολυώνυμα Legendre που ο αριθμός του βαθμού τους είναι μονός ( σχέσεις (5.27), (5.28) ).

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ορθογωνικότητας των ιδιομορφών :

$$\int_{-1}^1 P_{2n-1}(\xi) P_{2m-1}(\xi) d\xi = \delta_{mn} \frac{2}{4n-1} \quad (5.25)$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi^2) P'_{2n-1}(\xi) P'_{2m-1}(\xi) d\xi = \frac{\omega_n^2 R}{g} \delta_{mn} \frac{2}{4n-1} \quad (5.26)$$

Οι εκφράσεις των πολυωνύμων Legendre είναι οι εξής :

$$\begin{aligned} P_1(\xi) &= \xi & P_0(\xi) &= 1 \\ P_3(\xi) &= \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi) & P_2(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) \\ P_5(\xi) &= \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) & P_4(\xi) &= \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

και προκύπτουν από τον επαναληπτικό τύπο :

$$P_{n+1}(\xi) = \frac{2n+1}{n+1} \xi P_n(\xi) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\xi) \quad (5.28)$$

Παρακάτω παρατίθεται ένας πίνακας των τριών πρώτων ιδιοτιμών οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου για συγκεκριμένες τιμές του αδιάστατου βάθους ρευστού  $h$  οι οποίες προσεγγίζουν τη μηδενική. Παρατηρούμε πως για δοχείο οιονεί άδειο οι τιμές πλησιάζουν τις αντίστοιχες που προκύπτουν με βάση τη σχέση (5.23) της θεωρία των ρηχών δεξαμενών που παρουσιάστηκε παραπάνω.

<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΟΙΟΝΕΙ ΑΔΕΙΟΥ</b>			
<b>h</b>	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
<b>0.05</b>	1.0102	5.8149	13.567
<b>0.04</b>	1.0081	5.8506	13.893
<b>0.03</b>	1.0061	5.8870	14.187
<b>0.02</b>	1.0040	5.9240	14.451
<b>Budiansky [6]</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>15</b>
<b>Lamb [27]</b>			

**ΠΙΝΑΚΑΣ 5-2 : Οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές οριζόντιου κυλινδρικού δοχείο οιονεί άδειου – Σύγκριση με τα αποτελέσματα της θεωρίας των ρηχών δεξαμενών.**

### **Εξωτερική διέγερση**

Ξεκινώντας από την εξίσωση των μεταβολών (5.17) και θεωρώντας :

$$\Phi = \sum_n \dot{q}_n P_{2n-1}(\xi) \quad (5.29)$$

$$\Phi^* = \sum_n \dot{q}_n^* P_{2n-1}(\xi) \quad (5.30)$$

καταλήγουμε, λόγω της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών (5.26) και για τυχαίους συντελεστές  $\dot{q}_n^*$  σε ένα σύστημα ασύζευκτων εξισώσεων, κάθε μια εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μια ιδιομορφή :

$$m_n \ddot{q}_n + \omega_n^2 m_n q_n = -\gamma_n \ddot{X} \quad (5.31)$$

όπου :

$$m_n = \frac{1}{g} \int_{-c}^c P_{2n-1}^2 \left( \frac{x}{C} \right) dx \quad (5.32)$$

και :

$$\gamma_n = \frac{1}{g} \int_{-c}^c P_{2n-1} \left( \frac{x}{C} \right) x dx \quad (5.33)$$

Σημειώνεται πως το  $\gamma_n$  μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\gamma_n = \frac{C^2}{g} \int_{-1}^1 P_{2n-1}(\xi) \xi d\xi = \frac{C^2}{g} \int_{-1}^1 P_1(\xi) P_{2n-1}(\xi) d\xi \quad (5.34)$$

και εξαιτίας της ορθογωνικότητας είναι :

$$\gamma_n = 0 \quad \text{για } n > 2 \quad (5.35)$$

Το βασικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι πως οι ανώτερες ιδιομορφές ( $n \geq 2$ ) δε συνεισφέρουν τελικώς στην απόκριση του συστήματος. Η εξίσωση κίνησης που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιομορφή είναι :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -C \ddot{X} \quad (5.36)$$

Θέτοντας :

$$\alpha_1 = \frac{q_1}{C} \quad (5.37)$$

προκύπτει :

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_1^2 \alpha_1 = -\ddot{X} \quad (5.38)$$

Η συνολική δύναμη είναι :

$$F_T = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (n e_x) dB_1 - M_L \ddot{X} \quad (5.39)$$

Η δύναμη που αντιστοιχεί στην κίνηση του κυματισμού είναι :

$$F_S = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (n e_x) dB_1 \quad (5.40)$$

Ισχύουν όμως τα εξής

$$n_x = n e_x = \sin\theta \quad (5.41)$$

$$dB_1 = R d\theta \quad (5.42)$$

ενώ στο  $B_1$  :

$$x = R \sin\theta \quad (5.43)$$

$$dx = R \cos\theta d\theta = R d\theta \quad (5.44)$$

Με βάση τις (5.41), (5.42), (5.43) και (5.44) η (5.40) γίνεται:

$$F_S = -\rho \int_{-C}^C \sum_n \ddot{q}_n P_{2n-1} \frac{x}{R} dx \quad (5.45)$$

Συμπερασματικά :

$$F_S = -\frac{\rho C^2}{R} \int_{-1}^1 \left( \sum_n \ddot{q}_n P_{2n-1} \right) \xi d\xi \quad (5.46)$$



και επειδή από τις σχέσεις (5.27) ξέρουμε ότι:

$$P_1(\xi) = \xi \quad (5.47)$$

η (5.46) γίνεται :

$$F_s = -\rho \frac{C^2}{R} \ddot{q}_1 \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi \quad (5.48)$$

Επομένως η έκφραση για την  $F_s$  είναι :

$$F_s = -\rho \frac{2C^2}{3R} \ddot{q}_1 \quad (5.49)$$

και η τελική έκφραση για τη συνολική δύναμη  $F_T$  με βάση τις (5.15), (5.39), (5.40) και (5.49) είναι η εξής :

$$F_T = -\frac{M_L}{C} \ddot{q}_1 - M_L \ddot{X} \quad (5.50)$$

ή ισοδύναμα λόγω της (5.37):

$$F_T = -M_L \ddot{a}_1 - M_L \ddot{X} \quad (5.51)$$

Επομένως από την (5.51) γίνεται σαφές πως μόνο η πρώτη ιδιομορφή του κυματισμού συνεισφέρει στη συνολική μάζα του ρευστού, ενώ οι υψηλότερες - της πρώτης - ιδιομορφές ( $n \geq 2$ ) αν και αντιστοιχούν σε κάποιες ιδιοτιμές (σχέση (5.23) ), ωστόσο έχουν μηδενική συνεισφορά στη συνολική μάζα και επομένως δε λαμβάνονται υπόψη.

Η λύση σε μορφή σειράς που θεωρούμε είναι η εξής :

$$\Phi = \sum_n \dot{q}_n r^n \sin n\theta \quad (5.52)$$

Για  $n=1$ :

$$\Phi = \dot{q}_1 r \sin\theta = \dot{q}_1 x = \frac{\dot{q}_1}{C} \xi \quad (5.53)$$

και επειδή όπως έχει ήδη αναφερθεί  $P_1(\xi) = \xi$  τελικά :

$$\Phi = \dot{q}_1 \frac{1}{C} P_1(\xi) \quad (5.54)$$

Με άλλα λόγια, ο πρώτος όρος της αρμονικής λύσης είναι μια συνάρτηση πανομοιότυπη με την πρώτη ιδιομορφή του κυματισμού, γεγονός το οποίο εξηγεί την πολύ γρήγορη σύγκλιση της λύσης σε μορφή σειράς (5.52) αναφορικά με την πρώτη ιδιοτιμή

## 5.3 ΔΟΧΕΙΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΟΙΟΝΕΙ ΑΔΕΙΟ

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να παρατηρηθεί πως η δυναμική συμπεριφορά του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου που εξετάστηκε προηγουμένως, είναι σημαντικά διαφορετική από εκείνη του αντίστοιχου δοχείου ορθογωνικού σχήματος που οιονεί άδειου σε ρευστό και μελετάται στην παρούσα παράγραφο.

Η λύση του φαινομένου του κυματισμού στην περίπτωση ορθογωνικού δοχείου προκύπτει εύκολα θεωρώντας στην εξίσωση (5.17) τη συνάρτηση  $h(x)$  του βάθους του ρευστού σταθερή :

$$h(x) = h \quad (5.55)$$

Επομένως η εξίσωση των μεταβολών γίνεται :

$$h \int_{-c}^c \Phi' \Phi'' dx + \frac{1}{g} \int_{-c}^c \ddot{\Phi} \Phi' dx = -\frac{\ddot{X}}{g} \int_{-c}^c x \Phi' dx \quad (5.56)$$

Θεωρώντας :

$$\Phi = \sum_n A_n(t) \sin \frac{n \pi x}{C} \quad (5.57)$$

$$\Phi' = \sum_m B_m \sin \frac{m \pi x}{C} \quad (5.58)$$

η σχέση (5.56) γίνεται :

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m h \int_{-c}^c \frac{A_n n m \pi^2}{C^2} B_m \cos \frac{n \pi x}{C} \cos \frac{m \pi x}{C} dx + \sum_n \sum_m \frac{1}{g} \int_{-c}^c \ddot{A}_n B_m \sin \frac{n \pi x}{C} \sin \frac{m \pi x}{C} dx \\ = -\frac{1}{g} \sum_m \int_{-c}^c x \sin \frac{m \pi x}{C} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Λόγω των σχέσεων ορθογωνικότητας των ημιτονοειδών συναρτήσεων και επειδή οι συντελεστές  $B_n$  θεωρούνται τυχαίοι, καταλήγουμε και σ' αυτή την περίπτωση σε ένα σύστημα ασύζευκτων εξισώσεων για τους άγνωστους συντελεστές  $A_n(t)$ , κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μια ιδιομορφή και είναι της μορφής :

$$\left( h \int_{-c}^c \frac{n^2 \pi^2}{C^2} \cos^2 \frac{n \pi x}{C} dx \right) A_n + \left( \frac{1}{g} \int_{-c}^c \sin^2 \frac{n \pi x}{C} dx \right) \ddot{A}_n = -\frac{1}{g} \int_{-c}^c x \sin \frac{n \pi x}{C} dx \quad (5.60)$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{n^2 \pi^2}{C} h\right) A_n + \frac{C}{g} \ddot{A}_n = \left(\frac{C^2}{g n^2 \pi^2} 2(-1)^{m+1}\right) \ddot{X}(t) \quad (5.61)$$

Επομένως από την (5.61) συμπεραίνουμε πως οι ιδιοτιμές δοχείου ορθογωνικού σχήματος άδειο σε ρευστό, προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση :

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 g h}{C^2} \quad (5.62)$$

Η σχέση (5.61) μπορεί να γραφεί και ως εξής :

$$M_n \ddot{A}_n + \omega_n^2 M_n A_n = \gamma_n \ddot{X}(t) \quad (5.63)$$

όπου

$$M_n = \frac{C}{g} \quad (5.64)$$

$$\gamma_n = \frac{2}{g} \frac{C^2}{n^2 \pi^2} \sin n\pi \quad (5.65)$$

Για τον προσδιορισμό της μάζας του κυματισμού τα στοιχεία του διανύσματος  $F_i$  υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση :

$$F_{in} = \rho \int_{B_i} \Psi_n n_x dx = 2\rho h \sin n\pi \quad (5.66)$$

Επομένως η μάζα κυματισμού που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιομορφή είναι :

$$M_{ns} = \frac{F_n \gamma_n}{M_n} = \rho \frac{2C^2}{g n^2 \pi^2} (\sin^2 n\pi) 2h \frac{g}{C} = \left[ \frac{8}{(2m-1)^2 \pi^2} \right] M_L \quad (5.67)$$

Καθίσταται επομένως σαφές με βάση την (5.67) πως στην περίπτωση δοχείου ορθογωνικού σχήματος το οποίο είναι οιονεί άδειο σε ρευστό, οι ψηλότερες ιδιομορφές συνεισφέρουν στη συνολική μάζα του ρευστού και επομένως λαμβάνονται υπόψη στον προσδιορισμό της απόκρισης του συστήματος. Από έναν απλό υπολογισμό διαπιστώνουμε πως το ποσοστό συνεισφοράς των πέντε πρώτων ιδιομορφών στη συνολική μάζα του κυματισμού  $M_S = \sum_n M_{ns}$  είναι 96%.

# ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά και σφαιρικά δοχεία τυχαίας πληρότητας σε ρευστό, εφαρμόζοντας μια μέθοδο μεταβολών.

Στο πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο γίνεται μια λεπτομερής ανάλυση του φαινομένου όπου αναφέρονται οι κυριότερες επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές του. Παρουσιάζεται μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση ενώ διατυπώνεται ο στόχος και η δομή της εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο και με βάση τη γενική θεωρία των επιφανειακών κυμάτων παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος για δοχείο ορθογωνικού σχήματος ενώ η φυσική του φαινομένου εξηγείται χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς τρόπους θεώρησης του άγνωστου δυναμικού της ταχύτητας κυματισμού. Εν συνεχεία παρουσιάζεται η γενική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού για δοχεία τυχαίας πληρότητας σε ρευστό τα οποία υπόκεινται σε τυχαία εξωτερική διέγερση καθώς και ο τρόπος επίλυσης του φαινομένου με τη μέθοδο των μεταβολών.

Συγκεκριμένα το δυναμικό της ταχύτητας διαχωρίζεται στο δυναμικό της κίνησης του κυματισμού το οποίο παριστάνει τη σχετική κίνηση του ρευστού μέσα στη δεξαμενή και στο δυναμικό της ομοιόμορφης κίνησης που αντιστοιχεί σε μια κίνηση άκαμπτου σώματος, η οποία ακολουθεί ακριβώς την κίνηση της πηγής που προκαλεί την εξωτερική διέγερση. Με βάση την ασθενή μορφή του προβλήματος για το άγνωστο δυναμικό της ταχύτητας του κυματισμού καταλήγουμε στην εξίσωση των μεταβολών όπου εφαρμόζεται η διακριτοποίηση κατά Galerkin. Το αποτέλεσμα είναι το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών να καταλήγει σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, οι οποίες αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης. Ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων και των αντίστοιχων ιδιομορφών του κυματισμού επιτυγχάνεται θεωρώντας μηδενική εξωτερική διέγερση και αρμονική λύση, ενώ οι συμμετέχουσες μάζες και οι δυνάμεις του φαινομένου υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ιδιομορφικής ανάλυσης. Η άμεση ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού των δυνάμεων του κυματισμού.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το φαινόμενο του κυματισμού στην ειδική περίπτωση που τα δοχεία είναι πληρότητας 50% σε ρευστό. Τονίζεται πως στη λύση που θεωρείται σε μορφή σειράς οι χωρικές συναρτήσεις, τόσο για οριζόντια κυλινδρικά δοχεία (εγκάρσια και

διαμήκους διεύθυνσης διέγερσης) όσο και για σφαιρικά, είναι μη ορθογωνικές εξαιτίας της ιδιαιτερότητας των γεωμετριών των συγκεκριμένων δοχείων. Με εφαρμογή της μεθόδου που υιοθετήθηκε καταλήγουμε σε ημι – αναλυτικές λύσεις για τις ιδιοσυχνότητες, τις μάζες και τις δυνάμεις του φαινομένου οι οποίες διακρίνονται για την πολύ γρήγορη τους σύγκλιση και τη μεγάλη τους ακρίβεια.

Συγκεκριμένα για την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου παρατηρούμε πως οι ιδιοσυχνότητες είναι σε απόλυτη συμφωνία με τα αποτελέσματα τόσο του McIver [30], όσο και με τα αντίστοιχα των Evans και Linton [10] και μάλιστα υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές θεωρώντας μόλις τους είκοσι πρώτους όρους της σειράς. Για τον υπολογισμό δε των δυνάμεων εφαρμόζεται η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης λόγω της συμμετρικότητας των μητρώων  $[M]$  και  $[K]$  αλλά και της δυνατότητας εφαρμογής της μεθόδου στατικής συμπύκνωσης εξαιτίας της ιδιαιτερότητας του "μητρώου μάζας". Παρατηρούμε πως η μορφή των γραφημάτων της δύναμης του κυματισμού συναρτήσει του χρόνου, είναι η ίδια, από τους δώδεκα όρους σειράς και μετά γεγονός που επιβεβαιώνει τη γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου.

Στην περίπτωση του σφαιρικού δοχείου πληρότητας 50% τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι παρόμοια. Πιο συγκεκριμένα καταλήγουμε και στην περίπτωση αυτή σε ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων των τεσσάρων πρώτων ιδιοτιμών σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του McIver [30] καθώς και των Evans και Linton [10]. Η ακρίβεια μάλιστα αυτή χαρακτηρίζεται και από πολύ γρήγορη σύγκλιση μιας και οι είκοσι πρώτοι όροι της σειράς αρκούν για να επιτευχθεί.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος και για τις δύο γεωμετρίες θεωρώντας στη λύση σε μορφή σειράς για το δυναμικό του κυματισμού μόνο τους δύο πρώτους όρους. Το αποτέλεσμα είναι να προκύψουν προσεγγιστικές λύσεις για την πρώτη ιδιοτιμή καθώς και για τις μάζες και τις δυνάμεις του φαινομένου του κυματισμού, ενώ η απόκριση του συστήματος περιγράφεται με ένα ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο.

Ακολούθως η παρούσα μέθοδος συγκρίνεται με ημι – αναλυτική λύση (Evans και Linton [10], οι Papaspyrou et al [35], [36]) και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι τα ίδια και για τα δύο υπό εξέταση δοχεία (οριζόντιο κυλινδρικό -σφαιρικό). Σε πρώτη φάση πραγματοποιείται σύγκριση της σύγκλισης των τριών πρώτων ιδιοτιμών από την οποία φαίνεται πως εφαρμογή της παρούσας μεθόδου οδηγεί σε μονοτονική σύγκλιση. Μάλιστα η σύγκλιση είναι γνησίως φθίνουσα και τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η διακριτοποίηση κατά Galerkin που εφαρμόζεται στην εξίσωση των μεταβολών οδηγεί σε μια προσεγγιστική

λύση για τις ιδιοσυχνότητες η οποία και αποτελεί υπερεκτίμηση της ακριβούς. Ένα ακόμα συμπέρασμα με βάση τη συγκεκριμένη σύγκριση είναι πως η σύγκλιση των τριών πρώτων ιδιοτιμών εφαρμόζοντας την παρούσα μέθοδο είναι γρηγορότερη σε σχέση με άλλες μεθόδους προηγούμενων εργασιών.

Μια δεύτερη σύγκριση που πραγματοποιείται αφορά την απόκλιση των αποτελεσμάτων από την ακριβή λύση θεωρώντας και στις δύο υπό σύγκριση μεθοδολογίες την απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος. Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι πως η εφαρμογή της παρούσας μεθόδου δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης κατά τον υπολογισμό τόσο της πρώτης ιδιοτιμής όσο και της μάζας του κυματισμού.

Η τελευταία σύγκριση αφορά τη δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των δυνάμεων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί κατά την εφαρμογή της παρούσας μεθόδου τούτο είναι εφικτό λόγω της συμμετρικότητας των πινάκων  $[M]$  και  $[K]$ .

Το τρίτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας ολοκληρώνεται με την εφαρμογή της μεθόδου μεταβολών σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πληρότητας 50%, στα οποία η εξωτερική διέγερση ασκείται κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Οι ιδιοσυχνότητες του φαινομένου του κυματισμού συγκρίνονται με τις τιμές που προκύπτουν θεωρώντας το ισοδύναμο δοχείο ορθογωνικού σχήματος και παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους.

Η γενική περίπτωση της τυχαίας πληρότητας σε ρευστό των οριζόντιων κυλινδρικών και σφαιρικών δοχείων εξετάζεται στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται είναι παρόμοια με εκείνη των οι Moiseev και Petrov [32] με τη διαφορά ότι η στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάστηκε η επίλυση του ειδικού προβλήματος των ιδιοτιμών και μάλιστα μόνο για σφαιρικά δοχεία τυχαίας πληρότητας. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στην παρούσα εργασία για τις ιδιοσυχνότητες, τις μάζες και τις δυνάμεις του φαινομένου του κυματισμού χαρακτηρίζονται και στη γενική περίπτωση της τυχαίας πληρότητας από την πολύ γρήγορη σύγκλιση και τη μεγάλη τους ακρίβεια. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται από τα δύο ενδεικτικά παραδείγματα που παρατίθενται τόσο για οριζόντιο κυλινδρικό, όσο και για σφαιρικό δοχείο και είναι τα ίδια για κάθε γεωμετρία. Σημειώνεται πως η σύγκριση γίνεται με βάση την εργασία του McIver [30].

Συγκεκριμένα για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο και στην περίπτωση της πληρότητας 70% σε ρευστό παρατηρούμε πως υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές, ενώ η σύγκλιση έχει επιτευχθεί για είκοσι έξι όρους σειράς. Μελετώντας επιπλέον την περίπτωση που το δοχείο είναι πληρότητας 30% σε ρευστό παρατηρούμε πως υπάρχει και εδώ ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές και μάλιστα η

σύγκλιση είναι ακόμα πιο γρήγορη συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση (πληρότητα 70% ) καθώς έχει επιτευχθεί λαμβάνοντας μόνο δέκα έξι όρους σειράς στο άθροισμα της προσεγγιστικής λύσης.

Αντίστοιχα για σφαιρικό δοχείο και για την περίπτωση της πληρότητας 70% σε ρευστό, διαπιστώνουμε πως υπάρχει ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις 4 πρώτες ιδιοτιμές, ενώ η σύγκλιση έχει ήδη επιτευχθεί για είκοσι τέσσερις όρους σειράς. Μελετώντας επιπλέον την περίπτωση του δοχείου πληρότητας 30% σε ρευστό παρατηρούμε πως υπάρχει και εδώ ταύτιση πέντε σημαντικών ψηφίων στις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές και μάλιστα η σύγκλιση είναι ακόμα πιο γρήγορη συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση (πληρότητα 70% ) καθώς έχει επιτευχθεί με είκοσι μόνο όρους σειράς.

Διαπιστώνουμε επίσης πως η συμπεριφορά της τέταρτης ιδιοτιμής συναρτήσεως του αριθμού όρων σειράς παρουσιάζει κάποια προβλήματα αναφορικά με τη σύγκλιση και γενικά τούτο συμβαίνει όσο τα δοχεία οιονεί άδεια σε ρευστό.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν μελετώντας την επίδραση του βάθους του ρευστού στις ιδιοσυχνότητες και στις μάζες κυματισμού, είναι τα ίδια, τόσο για οριζόντια κυλινδρικά, όσο και για σφαιρικά δοχεία.

Αναφορικά με την περίπτωση των ιδιοτιμών παρατηρούμε πως όταν το αδιάστατο βάθος  $h$  του ρευστού στα δοχεία τείνει στο μηδέν (δοχεία οιονεί άδεια), η πρώτη ιδιοτιμή τείνει στη μονάδα και οι υπόλοιπες τρεις φαίνεται να προσεγγίζουν συγκεκριμένες τιμές. Όταν δε τα δοχεία οιονεί γεμάτα σε ρευστό και οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές, τόσο στην περίπτωση των οριζόντιων κυλινδρικών όσο και σε εκείνη των σφαιρικών δοχείων, φαίνεται να τείνουν στο άπειρο.

Μελετώντας την επίδραση του βάθους του ρευστού στις συμμετέχουσες μάζες προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα :

- Η συνεισφορά της πρώτης ιδιομορφής στη συνολική μάζα του κυματισμού είναι πολύ σημαντική συγκριτικά με την αντίστοιχη συνεισφορά των υπολοίπων ιδιομορφών καθ' όλο το βάθος του ρευστού και για τα δύο υπό εξέταση δοχεία. Οριακά δε για οιονεί άδεια δοχεία, η συνολική μάζα του κυματισμού προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από τη μάζα που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή
- Όσο το βάθος του ρευστού στα δοχεία αυξάνεται η συνεισφορά της μάζας κυματισμού στη συνολική συνεχώς μειώνεται, ενώ αυξάνεται η αντίστοιχη συνεισφορά της ωστικής μάζας. Ειδικότερα στην περίπτωση που τα δοχεία είναι οιονεί άδεια, η συνολική μάζα προέρχεται σχεδόν εξολοκλήρου από τη μάζα του ρευστού που εκτελεί τον κυματισμό, ενώ για δοχεία οιονεί γεμάτα, η μάζα του

ρευστού που αντιστοιχεί στην ωστική μάζα είναι εκείνη που δίνει τη συνολική μάζα του ρευστού.

Αναφορικά με την περίπτωση των δυνάμεων η γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου επιβεβαιώνεται εξετάζοντας την περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 70% σε ρευστό το οποίο υπόκειται κατά την εγκάρσια διεύθυνση στο σεισμό του El Centro [21]. Παρατηρούμε πως η μορφή των γραφημάτων της δύναμης του κυματισμού συναρτήσει του χρόνου μετά τους είκοσι όρους σειράς παραμένει ακριβώς η ίδια.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας εξετάζεται η συμπεριφορά δοχείων οιονεί γεμάτων και οιονεί άδειων σε ρευστό. Στην περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί γεμάτου σε ρευστό αποδεικνύεται πως όλες οι ιδιοτιμές του προβλήματος τείνουν στο άπειρο. Επιπλέον γίνεται και μια σύγκριση της παρούσας μεθόδου με την εργασία του Budianski [6] όσον αφορά την πρώτη ιδιοτιμή, από όπου φαίνεται ότι τα αποτελέσματα είναι σχετικά κοντά.

Στη συνέχεια εξετάζεται η συμπεριφορά του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου οιονεί άδειου σε ρευστό. Εφαρμόζοντας τη θεωρία των ρηχών δεξαμενών (Lamb [27], Budiansky [6]), προκύπτουν δύο πολύ βασικά συμπεράσματα :

- Μόνο η πρώτη ιδιομορφή κυματισμού συνεισφέρει στη συνολική μάζα του ρευστού, ενώ οι υψηλότερες ιδιομορφές, αν και αντιστοιχούν σε κάποιες ιδιοτιμές, ωστόσο έχουν μηδενική συνεισφορά στη συνολική μάζα και επομένως δε λαμβάνονται υπόψη στον προσδιορισμό της απόκρισης του συστήματος.
- Ο πρώτος όρος της αρμονικής λύσης είναι μια συνάρτηση πανομοιότυπη με την πρώτη ιδιομορφή του κυματισμού, γεγονός το οποίο εξηγεί την πολύ γρήγορη σύγκλιση της λύσης σε μορφή σειράς αναφορικά με την πρώτη ιδιοτιμή.

Τέλος παρατηρείται πως η δυναμική συμπεριφορά του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου είναι σημαντικά διαφορετική από εκείνη του αντίστοιχου δοχείου ορθογωνικού σχήματος οιονεί άδειου σε ρευστό. Και τούτο γιατί στην περίπτωση αυτή, το ποσοστό συνεισφοράς των πέντε πρώτων ιδιομορφών στη συνολική μάζα του κυματισμού προκύπτει να είναι το 96%.



# BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, 10<sup>th</sup> Edition, Dover, New York, NY.
- [2] Abramson, H. N. (1966), *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, Southwest Research Institute, NASA SP-106, Washington, DC.
- [3] Abramson, H. N., Chu, W.-H., Garza, L. R. (1963), "Liquid Sloshing in Spherical Tanks.", *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 2, pp. 384-389.
- [4] American Petroleum Institute (1995), "Seismic Design of Storage Tanks - Appendix E", *Welded Steel Tanks for Oil Storage*, API Standard 650, Washington, D.C.
- [5] Bathe, K. J. (1982), *Finite Element Procedures In Engineering Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- [6] Budiansky, B. (1960), Sloshing of Liquids in Circular Canals and Spherical tanks, *Journal of Aero/Space Sciences*, Vol. 27, No. 3, pp. 161-173.
- [7] Chu, W. H. (1964), Fuel Sloshing in a Spherical tank Filled to an Arbitrary Depth, *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 11, pp. 1972-1979.
- [8] Comite Europeen de Normalization (1998), "Silos, tanks and pipelines Part 4", *Eurocode 8, Design of structures for earthquake resistance*, CEN ENV-1998, Brussels.
- [9] Currie, I.G. (1974), "Fundamental Mechanics of Fluids", McGraw-Hill, Inc.
- [10] Evans, D. V. and Linton, C. M. (1993), "Sloshing Frequencies", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 46, pp. 71-87.
- [11] Fisher, F. D. (1979), "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 587-601.
- [12] Fisher, F. D., Rammerstorfer, F. G. and Scharf, K. (1991), "Earthquake Resistant Design of Anchored and Unanchored Liquid Storage Tanks Under Three-Dimensional

- Earthquake Excitation”, *Structural Dynamics – Recent Advances*, editor: G.I. Schueller, Berlin, Springer, pp. 317-371.
- [13] Fox, D. W. and Kutler, J. R. (1983), “Sloshing Frequencies”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 34, pp. 669-696.
- [14] Fox, D. W. and Kutler, J. R. (1981), “Upper and Lower Bounds for Sloshing Frequencies by Intermediate Problems”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 32, pp. 667-682.
- [15] Graham, E. W. and Rodriguez, A. M. (1952), “Characteristics of Fuel Motion which Affect Airplane Dynamics”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 3, pp. 381-388.
- [16] Haroun, M. A. (1983), “Vibration Studies and Tests of Liquid Storage Tanks”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 179-206.
- [17] Haroun, M. A. and Housner, G. W. (1981), “Earthquake Response of Deformable Liquid Storage Tanks”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 48, pp. 411-417.
- [18] Hoskins, L. M. and Jacobsen, L. S. (1934), “Water Pressure in a Tank Caused by a Simulated Earthquake”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 24, pp. 1-32.
- [19] Housner, G. W. (1957), “Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 47, pp. 15-35.
- [20] Housner, G. W. (1963), “The Dynamic Behavior of Water Tanks”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 53, No. 2, pp. 381-387.
- [21] [Http : // www.vibrationdata.com / elcentro.htm](http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm)
- [22] Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N. and Ikeda, T. (2001), “Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics”, *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol. 54, No. 2, pp. 133-177.

- [23] Jacobsen, L. S. (1949), "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 39.
- [24] Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S. (1951), "Hydrodynamic experiments with Rigid Cylindrical Tanks Subjected to Transient Motions", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 41, No. 4.
- [25] Karamanos, S. A. (2004), "Sloshing Effects on the Seismic Design of Horizontal-Cylindrical and Spherical Vessels", *Steel Tanks 2003, Pressure Vessel and Piping Conference*, PVP ASME, PVP - Vol. 486-1, pp. 225-231, San Diego, CA.
- [26] Kobayashi, N., Mieda, T., Shibata, H. and Shinozaki, Y. (1989), A Study of the Liquid Slosh Response in Horizontal Cylindrical Tanks, *J. Press. Vessel Tech.*, ASME, Vol. 111, No. 1, pp. 32-38.
- [27] Lamb, H. (1945), *Hydrodynamics*, Dover, New York.
- [28] Malhotra, P. K. (1995), "Base Uplifting Analysis of Flexibly Supported Liquid-Storage Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, No. 12, pp. 1591-1607.
- [29] Manos, G. C. and Clough, R. W. (1982), "Further Study of the Earthquake Response of a Broad Cylindrical Liquid-Storage Tank Model", *Report No. UCB/EERC-82/7*, University of California, Berkeley.
- [30] McIver, P. (1989), "Sloshing Frequencies for Cylindrical and Spherical Containers Filled to an Arbitrary Depth", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 201, pp. 243-257.
- [31] McIver, P. and McIver, M. (1993), "Sloshing Frequencies of Longitudinal Modes for a Liquid Contained in a Trough", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 252, pp. 525-541.
- [32] Moiseev, N. N. and Petrov, A. A. (1966), "The Calculation of Free Oscillations of a Liquid in a Motionless Container", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 91-154.

- [33] Natsiavas, S. (1988), “An Analytical Model for Unanchored Fluid-Filled Tanks Under Base Excitation”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 55, pp. 648-653.
- [34] Niwa, A. and Clough, R. W. (1982), “Buckling of Cylindrical Liquid-Storage Tanks Under Earthquake Excitation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 107-122.
- [35] Papaspyrou, S., Valougeorgis, D. and Karamanos, S. A. (2003), Refined Solutions of Externally Induced Sloshing in Half-Full Spherical Containers, *J. Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 12, pp. 1369-1379.
- [36] Papaspyrou, S., Valougeorgis, D and Karamanos, S. A. (2004) “Response of half full horizontal cylinders under transverse excitation”, *Journal of fluids and Structures*, 19, pp. 985-1003.
- [37] Papaspyrou, S., Valougeorgis, D and Karamanos, S. A. (2004), “Sloshing effects in half full horizontal cylindrical vessels under longitudinal excitation” *Journal of Applied Mechanics*, 71, pp. 255-265.
- [38] Peek, R. (1988), “Analysis of Unanchored Liquid Storage Tanks Under Lateral Loads”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 1087-1100.
- [39] Priestley, M. J. N. (Chairman & Editor), Davidson, B. J., Honey, G. D., Hopkins, D. C., Martin, R., J., Ramsey, G., Vessey, J. V. and Wood, J. H. (1986), *Seismic Design of Storage Tanks*, Recommendations of a Study Group of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering.
- [40] Rammerstorfer, F. G., Fisher, F. D. and Scharf, K. (1988), “A Proposal for the Earthquake Resistant Design of Tanks – Results from the Austrian Project”, *Proc. 9th World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan*, Vol. VI, pp. 715-720.

- [41] Rammerstorfer, F. G., Fisher, F. D. and Scharf, K. (1990), “Storage Tanks Under Earthquake Loading”, *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol. 43, No. 11, pp. 261-283.
- [42] Shankar, P. N. (2003), “A simple method for studying low-gravity sloshing frequencies”, *Proceedings of Royal Society of London*, 459, pp: 3109-3130.
- [43] Veletsos, A. S. (1974), “Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks”, *Proceedings of the 5th World Conference in Earthquake Engineering, Rome, Italy*, Vol. 1, pp. 630-639.
- [44] Veletsos, A. S. and Tang, Y. (1990), “Soil-Structure Interaction Effects for Laterally Excited Liquid Storage Tanks”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 473-496.
- [45] Veletsos, A. S. and Yang, J. Y. (1977), “Earthquake Response of Liquid Storage Tanks”, *2nd Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Raleigh, NC, pp. 1-24.
- [46] Werner, P. W. and Sundquist, K. J. (1949), “On Hydrodynamic Earthquake Effects”, *Transactions, American Geophysical Union*, Vol. 30, No. 5, pp. 636-657.
- [47] Westergaard, H. M. (1933), “Water Pressures on Dams During Earthquakes”, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, Vol. 98, pp. 418-433.
- [48] Κλιάφα, Β., (2003), “Δυναμική φόρτιση σε ορθογώνιες δεξαμενές λόγω κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας στη διάρκεια αρμονικής εξωτερικής διέγερσης”, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας.
- [49] Παπασπύρου, Σ., (Διδακτορική διατριβή σε εξέλιξη) ‘Αναλυτική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία με αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής’
- [50] Πλατύρραχος, Μ., (2004), “Δυναμική φόρτιση σε κυλινδρικές δεξαμενές λόγω κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας στη διάρκεια αρμονικής εξωτερικής διέγερσης”,

Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σε πρόσφατες εργασίες οι Paraspyrou et al [35], [36], επίλυσαν μέσω ημι - αναλυτικής μεθόδου το πρόβλημα του εξωτερικά επιβαλλόμενου κυματισμού σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πληρότητας 50% . Η μεθοδολογία βασίστηκε στη λύση του προβλήματος των ιδιοτιμών των Evans & Linton [10] και επεκτάθηκε ώστε να εξεταστούν οι επιδράσεις του κυματισμού λόγω της κίνησης των δοχείων. Στο παρόν παράρτημα παρατίθενται οι τελικές εξισώσεις κίνησης καθώς και τα αποτελέσματα με βάση την απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος τόσο για οριζόντια κυλινδρικά δοχεία (εγκάρσια διεύθυνση διέγερσης) όσο και για σφαιρικά δοχεία με βάση των μεθοδολογία των Paraspyrou et al [35], [36].

## A) Οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50%

Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ης</sup> τάξης που προκύπτει είναι το εξής :

$$[\bar{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{q}} + [\bar{\mathbf{K}}] \mathbf{q} = -\bar{\gamma} \ddot{X} \quad (1.1)$$

όπου  $[\bar{\mathbf{M}}]$  είναι ένας μη συμμετρικός πίνακας,  $[\bar{\mathbf{K}}]$  ένας διαγώνιος πίνακας και  $\bar{\gamma}$  ένα διάνυσμα, με στοιχεία :

$$\bar{M}_{sn} = \frac{2n(-1)^{n+s}}{n^2 - (s-1/2)^2} R^{2n-1} \quad n=1,2,3\dots \text{ και } s=1,2,3\dots \quad (1.2)$$

$$\bar{K}_{nn} = (2n-1)\pi g R^{2n-2} \quad n=1,2,3\dots \quad (1.3)$$

$$\bar{\gamma}_s = \frac{8(-1)^{s+1}}{3+4s-4s^2} R \quad s=1,2,3\dots \quad (1.4)$$

και

$$\mathbf{q} = [q_1(t) \quad q_3(t) \quad q_5(t) \quad \dots]^T \quad (1.5)$$

### Απλοποιημένη διατύπωση

Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει για τον υπολογισμό του  $q_l(t)$  είναι η εξής :

$$\ddot{q}_l + \omega_s^2 q_l = -\ddot{X} \quad (1.6)$$

όπου  $\tilde{\omega}_l$  η προσέγγιση της πρώτης ιδιοτιμής η οποία είναι :

$$\omega_s = \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} \quad (1.7)$$

Το  $q_2(t)$  υπολογίζεται από τη σχέση :

$$q_2 = -\left(\frac{3\pi}{16R}\right)q_1 \quad (1.8)$$

Η συνολική δύναμη  $f_T$  είναι :

$$f_T = -m_I \ddot{X} - m_S \ddot{u} \quad (1.9)$$

όπου

$$m_S = \frac{m_L}{2} \quad (1.10)$$

η προσέγγιση της μάζας κυματισμού και

$$m_I = \frac{m_L}{2} \quad (1.11)$$

η προσέγγιση της ωστικής μάζας.

## **B) Σφαιρικό δοχείο πληρότητας 50%**

Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων  $2^{ns}$  τάξης που προκύπτει είναι το εξής :

$$[\bar{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{q}} + [\bar{\mathbf{K}}] \mathbf{q} = -\bar{\gamma} \ddot{X} \quad (1.12)$$

όπου  $[\bar{\mathbf{M}}]$  είναι ένας μη συμμετρικός πίνακας,  $[\bar{\mathbf{K}}]$  ένας διαγώνιος πίνακας και  $\bar{\gamma}$  ένα διάνυσμα, με στοιχεία :

$$\bar{M}_{sn} = \frac{2n}{2n+1} \frac{R^{2n-1}}{g} \int_0^1 P_{2n}^1(\mu) P_{2s-1}^1(\mu) d\mu \quad n=1,2,3,\dots \text{ και } s=1,2,3,\dots \quad (1.13)$$

$$\bar{K}_{nn} = (2n-1) \frac{4n^2 - 2n}{4n-1} R^{2n-2} \quad n=1,2,3,\dots \quad (1.14)$$

$$\bar{\gamma}_s = \frac{2R}{3g} \int_0^1 P_2^1(\mu) P_{2s-1}^1(\mu) d\mu \quad s=1,2,3,\dots \quad (1.15)$$

και

$$\mathbf{q} = [q_1(t) \quad q_3(t) \quad q_5(t) \quad \dots]^T \quad (1.16)$$

### **Απλοποιημένη διατύπωση**

Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει για τον υπολογισμό του  $q_1(t)$  είναι η εξής :



$$\ddot{q}_1 + \omega_s^2 q_1 = \ddot{X} \quad (1.17)$$

όπου  $\tilde{\omega}_s$  η προσέγγιση της πρώτης ιδιοτιμής η οποία είναι :

$$\omega_s = \sqrt{\frac{4g}{3R}} \quad (1.18)$$

Το  $q_2(t)$  υπολογίζεται από τη σχέση :

$$q_2 = -\left(\frac{4}{9R}\right)q_1 \quad (1.19)$$

Η συνολική δύναμη  $f_T$  είναι :

$$f_T = -m_I \ddot{X} - m_S \ddot{u} \quad (1.20)$$

όπου

$$m_S = \frac{m_L}{2} \quad (1.21)$$

η προσέγγιση της μάζας κυματισμού και

$$m_I = \frac{m_L}{2} \quad (1.22)$$

η προσέγγιση της ωστικής μάζας.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074898

