

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ
ΥΛΙΚΟΥ»



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΕΝΗΛΙΚΕΣ
ΜΑΘΗΤΕΣ

ΣΤΟΦΟΡΙΑΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Επιβλέποντες Καθηγητές

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

ΒΟΛΟΣ 2008



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 6311/1
Ημερ. Εισ.: 13-06-2008
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ
374.949 5
ΣΤΟ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ
ΥΛΙΚΟΥ»



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΕΝΗΛΙΚΕΣ
ΜΑΘΗΤΕΣ

ΣΤΟΦΟΡΙΑΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Επιβλέποντες Καθηγητές

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

ΒΟΛΟΣ 2008

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

- 1.1 Η έννοια της εκπαίδευσης ενηλίκων.
- 1.2 Η σημασία της εκπαίδευσης ενηλίκων.
- 1.3 Η εκπαίδευση ενηλίκων στην Ελλάδα.
- 1.4 Τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΑΘΗΣΗ – ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

- 2.1 Τι είναι μάθηση. Θεωρίες μάθησης.
- 2.2 Η μάθηση στους ενήλικες.
- 2.3 Η διδακτική των μαθηματικών σε ενήλικες.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- 3.1 Η αξία των πιθανοτήτων
- 3.2 Προβλήματα κατανόησης των εννοιών των πιθανοτήτων
- 3.3 Προτάσεις για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων

ΜΕΡΟΣ Β - ΕΡΕΥΝΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Σκοπός και στόχοι της έρευνας

4.2 Στοιχεία του πληθυσμού

4.3 Η διαδικασία της έρευνας

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

5.1 Το αρχικό ερωτηματολόγιο – Pre-test

5.2 Το 1^ο Φύλλο Εργασίας

5.3 Το 2^ο Φύλλο Εργασίας

5.4 Το 3^ο Φύλλο Εργασίας

5.5 Το 4^ο Φύλλο Εργασίας

ΜΕΡΟΣ Γ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

6.1 Συμπεράσματα από το Pre-test.

6.2 Συμπεράσματα από τις Δραστηριότητες και τα Φύλλα Εργασίας

6.3 Συμπεράσματα από το Post-test.

ΜΕΡΟΣ Ε - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A. ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

A.1 Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα.

A.2 Η έννοια της Πιθανότητας.

A.3 Οι νόμοι των Πιθανοτήτων

A.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα

B. ΤΟ ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ

B.0 Το Αρχικό Ερωτηματολόγιο - Pretest

B.1 Δραστηριότητα § 1.1

B.1 Δραστηριότητα § 1.2

B.1 Δραστηριότητα § 1.3

B.1 Δραστηριότητα § 1.4

B.2 Φύλλο Εργασίας 1

B.2 Φύλλο Εργασίας 2

B.2 Φύλλο Εργασίας 3

B.2 Φύλλο Εργασίας 4

ΜΕΡΟΣ Α

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

1.1 Η έννοια της Εκπαίδευσης Ενηλίκων

Σήμερα, όλο και συχνότερα ακούμε τις φράσεις: «δια βίου μάθηση», «εκπαίδευση ενηλίκων» κλπ. Για να μπορέσουμε όμως να αποσαφηνίσουμε την έννοια της «εκπαίδευσης ενηλίκων», είναι χρήσιμο πρώτα να αναφέρουμε τους ορισμούς των διαφόρων μορφών εκπαίδευσης σε σχέση με τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Οι Coombs P. A. & Ahmed M. (1974) πρότειναν τους παρακάτω γενικούς ορισμούς:

- **Τυπική εκπαίδευση (formal education):** «Ως τυπική εκπαίδευση ορίζεται το ιεραρχημένο, δομημένο και οργανωμένο χρονικά σε βαθμίδες εκπαιδευτικό σύστημα, από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ως το πανεπιστήμιο, που περιλαμβάνει τόσο τις γενικές ακαδημαϊκές σπουδές όσο και τα εξειδικευμένα προγράμματα και θεσμούς ολοκληρωμένης επαγγελματικής και τεχνικής κατάρτισης».
- **Μη-τυπική εκπαίδευση (non formal education):** «Ως μη-τυπική εκπαίδευση ορίζεται η οποιαδήποτε οργανωμένη εκπαιδευτική δραστηριότητα εκτός του τυπικού εκπαιδευτικού συστήματος, που απευθύνεται σε συγκεκριμένους εκπαιδευόμενους και έχει συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους».
- **Άτυπη εκπαίδευση (informal education):** «Ως άτυπη εκπαίδευση ορίζεται η διαδικασία με την οποία κάθε άτομο, σε όλη τη διάρκεια της ζωής του, μαθαίνει και αποκτά στάσεις, αξίες, ικανότητες-δεξιότητες και γνώσεις από την καθημερινή του εμπειρία και από τις επιδράσεις που δέχεται από το περιβάλλον» (την οικογένεια, τη γειτονιά, την εργασία, την ψυχαγωγία, τις κοινωνικές συναναστροφές, την αγορά εργασίας, τα μέσα μαζικής επικοινωνίας κ.α.).

Οι φράσεις «δια βίου μάθηση» και «δια βίου εκπαίδευση» βρίσκονται από καιρό στην καθημερινότητα του πολίτη. Από καιρό όμως, αποτελούν και αντικείμενο συζητήσεων-προβληματισμού για εκπαιδευτικές κοινότητες, ερευνητικές ομάδες αλλά και εθνικούς και διεθνείς οργανισμούς. Από τη σημασία των λέξεων και μόνο, γίνεται φανερό ότι οι παραπάνω φράσεις αφορούν και τους τρεις τύπους εκπαίδευσης (τυπι-

κή, μη τυπική και άτυπη). Επίσης με λίγη εμβάθυνση γίνεται φανερό ότι η «δια βίου μάθηση-εκπαίδευση» είναι έννοια που υπονοεί μια ευελιξία στις ηλικίες των εκπαιδευόμενων, στους χώρους και στο περιεχόμενο της εκπαίδευσης, αλλά και στις τεχνικές διδασκαλίας. Η σύγχυση γύρω από τη σημασία των φράσεων αυτών, ξεκαθαρίστηκε από τη 19η σύνοδο της UNESCO, στο Ναϊρόμπι, το 1976. Εκεί δόθηκε και ο παρακάτω ορισμός:

«Ο όρος δια βίου εκπαίδευση και μάθηση δηλώνει ένα χωρίς όρια σχήμα που αποβλέπει στην αναμόρφωση του υπάρχοντος εκπαιδευτικού συστήματος και στην ανάπτυξη του εκπαιδευτικού δυναμικού έξω απ' αυτό. Η εκπαίδευση και η μάθηση δεν περιορίζεται στη σχολική φοίτηση, πρέπει να επεκτείνονται σε ολόκληρη τη ζωή του ανθρώπου, να περιλαμβάνουν όλες τις δεξιότητες και όλους τους κλάδους της γνώσης, να χρησιμοποιούν όλα τα δυνατά μέσα και να δίνουν την ευκαιρία σε όλους τους ανθρώπους για πλήρη ανάπτυξη της προσωπικότητάς τους. Οι εκπαιδευτικές και οι σχετικές με τη μάθηση διαδικασίες, στις οποίες τα παιδιά, οι νέοι άνθρωποι και οι ενήλικοι όλων των ηλικιών εμπλέκονται στη διάρκεια της ζωής τους σε οποιαδήποτε μορφή, πρέπει να θεωρηθεί ως σύνολο».

Η έννοια της δια βίου μάθησης-εκπαίδευσης είναι ευρύτερη της έννοιας της εκπαίδευσης ενηλίκων, αφού στη δεύτερη, η συμμετοχή των εκπαιδευόμενων περιορίζεται από την ηλικία τους. Προσπάθειες προσδιορισμού της έννοιας έγιναν από δύο μεγάλους διεθνείς οργανισμούς, όπως για παράδειγμα την UNESCO (1976) και τον ΟΟΣΑ (1977).

Σύμφωνα με την UNESCO, με τον όρο εκπαίδευση ενηλίκων εννοείται: «Ολόκληρο το φάσμα των οργανωμένων διαδικασιών, οποιουδήποτε περιεχομένου ή επιπέδου και οποιασδήποτε μεθόδου, είτε αυτές αφορούν αναγνωρισμένες ή ελεύθερες σπουδές είτε συνεχίζουν ή αναπληρώνουν την αρχική εκπαίδευση σε σχολεία, κολέγια και πανεπιστήμια, καθώς και σε σχολές μαθητείας, με την βοήθεια των οποίων άτομα θεωρούμενα ως ενήλικα από την κοινωνία στην οποία ανήκουν, αναπτύσσουν τις ικανότητές τους, πλουτίζουν τις γνώσεις τους, βελτιώνουν την επαγγελματική και τεχνική τους κατάρτιση ή στρέφονται σε νέες κατευθύνσεις και μεταβάλλουν τις στάσεις και τις συμπεριφορές τους προς τη διπλή προοπτική της ολοκληρωμένης προσωπικής τους ανάπτυξης και της συμμετοχής τους σε μια ισορροπημένη και ανεξάρτητη κοινωνική, οικονομική και πολιτιστική ανάπτυξη».

Από την άλλη σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ: «Η εκπαίδευση ενηλίκων αφορά οποιαδήποτε μαθησιακή δραστηριότητα ή πρόγραμμα σκόπιμα σχεδιασμένο από κάποιον εκπαιδευτικό φορέα, για να ικανοποιήσει οποιαδήποτε ανάγκη κατάρτισης ή ενδιαφέρον, που ενδέχεται να πραγματοποιηθεί σε οποιοδήποτε στάδιο της ζωής ενός ανθρώπου, που έχει υπερβεί την ηλικία της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και η κύρια δραστηριότητά του δεν είναι πλέον η εκπαίδευση. Επομένως η έννοια της εκπαίδευσης ενηλίκων, καλύπτει γενικές, επαγγελματικές, μη επαγγελματικές, τυπικές και μη τυπικές σπουδές, καθώς και την εκπαίδευση που έχει συλλογικό σκοπό».

Βέβαια, αυτό που πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι η εκπαίδευση ενηλίκων, από μια άλλη οπτική, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί και μια κριτική στάση απέναντι στη σχολική εκπαίδευση, στο εκπαιδευτικό σύστημα και γενικότερα στη νέα παγκόσμια τάξη πραγμάτων. Είναι πράγματι μια «δεύτερη ευκαιρία» ή μήπως είναι η «μοναδική ευκαιρία»; Μήπως αποτελεί μια διορθωτική παρέμβαση σε ένα αποτυχημένο

εκπαιδευτικό σύστημα, που δεν ανταποκρίθηκε στις σύγχρονες ανάγκες της κοινωνίας και του ανθρώπου; Μήπως αποτελεί μια διορθωτική παρέμβαση σε μια άρρωστη παγκόσμια αγορά εργασίας, που προσπαθεί απεγνωσμένα να λύσει διάφορα προβλήματα της όπως ανεργία, εξειδίκευση κ.α.;

1.2 Η σημασία της εκπαίδευσης ενηλίκων

Τα τελευταία χρόνια οι αναπτυγμένες αλλά και αναπτυσσόμενες κοινωνίες μεταβάλλονται ραγδαία. Οι μεταβολές αυτές που οφείλονται κύρια στη διεθνοποίηση της οικονομίας και στη ταχύτατη ανάπτυξη της τεχνολογίας, της πληροφορικής και των επικοινωνιών, έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία νέων αναγκών αλλά και προβλημάτων. Η ανάγκη για εξειδικευμένο εργατικό δυναμικό, η καταπολέμηση της ανεργίας, η οικονομική μετανάστευση, ο κοινωνικός αποκλεισμός ομάδων ανθρώπων, η αξιοποίηση του ελεύθερου χρόνου είναι μερικά από τα νέα αυτά προβλήματα. Με δεδομένο το σημαντικό ρόλο της γνώσης και της τεχνολογίας στην προώθηση της απασχόλησης αλλά και της κοινωνικής συνοχής, συνάγεται ότι η δια βίου μάθηση-εκπαίδευση έχει σημαντική οικονομική και κοινωνική-πολιτισμική αξία. Η έρευνα έχει δείξει ότι μια ισομερής κατανομή δεξιοτήτων σε όλα τα στρώματα του πληθυσμού έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στη συνολική οικονομική απόδοση (Coulombe, S., Tremblay J., Marchand S., 2004). Στο πλαίσιο αυτό, η εκπαίδευση ενηλίκων, αποτελεί το βασικό σκελετό κάθε σύγχρονου συστήματος δια βίου μάθησης-εκπαίδευσης. Έχει αποστολή τη διαρκή διάχυση σύγχρονων γνώσεων και δεξιοτήτων σε όλους τους πολίτες ανεξάρτητα από ηλικία, επίπεδο εκπαίδευσης, κοινωνικοοικονομική κατάσταση, θρήσκευμα, χώρα καταγωγής και τόπο διαμονής και εργασίας. Κάθε πολίτης θα πρέπει σε οποιαδήποτε περίοδο της ζωής του να μπορεί να αποκτή νέες γνώσεις και δεξιότητες ή να αναβαθμίζει υπάρχουσες. Έτσι σκοπός της εκπαίδευσης ενηλίκων μπορούμε να πούμε ότι είναι η προσωπική και κοινωνική ανάπτυξη των εκπαιδευόμενων, η αύξηση των δυνατοτήτων απασχόλησής τους, η επανασύνδεσή τους με την εκπαίδευση και τα συστήματα κατάρτισης, η ενίσχυση της αυτοεκτίμησής τους ώστε να αποκτήσουν γνώσεις, ικανότητες και στάσεις που θα τους βοηθήσουν στην κοινωνική ένταξη και ανέλιξη.

Στο πλαίσιο αυτό ο ρόλος της εκπαίδευσης ενηλίκων, εκτός από τη συμβολή της στην προσωπική ανάπτυξη και ολοκλήρωση, αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο στα εθνικά μεταρρυθμιστικά προγράμματα των σύγχρονων κρατών. Εντούτοις, με ορισμένες εξαιρέσεις, η εφαρμογή παραμένει πλημμελής. Τα περισσότερα συστήματα εκπαίδευσης και κατάρτισης επικεντρώνονται ακόμη σε μεγάλο βαθμό στην εκπαίδευση και την κατάρτιση νέων, ενώ περιορισμένη είναι η πρόοδος που έχει σημειωθεί όσον αφορά την αλλαγή των συστημάτων προκειμένου να αντικατοπτρίζουν την ανάγκη της δια βίου μάθησης. Πρόσφατη έρευνα (ΟΟΣΑ, 2005) επιβεβαιώνει τη σημασία που έχει η επένδυση στην εκπαίδευση ενηλίκων. Τα δημόσια και ιδιωτικά οφέλη περιλαμβάνουν μεγαλύτερη απασχολησιμότητα, αυξημένη παραγωγικότητα και απασχόληση καλύτερης ποιότητας, μειωμένες δαπάνες σε τομείς όπως τα επιδόματα ανεργίας, οι παροχές κοινωνικής πρόνοιας και οι συντάξεις πρόωρης συνταξιοδότησης, αλλά και αυξημένα κοινωνικά οφέλη που αφορούν τη βελτιωμένη συμμετοχή των

πολιτών, την καλύτερη υγεία, τα χαμηλότερα ποσοστά εγκληματικότητας και τη μεγαλύτερη ευημερία και αυτοπραγμάτωση του ατόμου. Η έρευνα σχετικά με ενήλικες μεγαλύτερης ηλικίας (Schuller T., Preston J. κ.α., 2004) δείχνει ότι εκείνοι που συμμετέχουν στην εκπαίδευση είναι υγιέστεροι, με συνακόλουθη μείωση των δαπανών υπηρεσιών υγείας.

Τα σύγχρονα κράτη δεν μπορούν πλέον να μην έχουν ένα αποτελεσματικό σύστημα εκπαίδευσης ενηλίκων, ενσωματωμένο στη στρατηγική τους για τη δια βίου μάθηση, που να παρέχει στους συμμετέχοντες αυξημένη πρόσβαση στην αγορά εργασίας, καλύτερη κοινωνική ένταξη και να τους προετοιμάζει για την παράταση του ενεργού επαγγελματικού βίου στο μέλλον.

1.3 Η εκπαίδευση ενηλίκων στην Ελλάδα

Η ιδέα της εκπαίδευσης ενηλίκων αναπτύχθηκε στα νεότερα χρόνια, τον 19^ο αιώνα στη Δυτική Ευρώπη παράλληλα με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και της βιομηχανίας και τούτο διότι ο καπιταλισμός ανέτρεψε τις παραδοσιακές παραγωγικές σχέσεις, διέλυσε τις συντεχνίες και δημιούργησε τεράστιες ανάγκες για ειδικευμένο εργατικό δυναμικό. Στην Ελλάδα, το επίσημο κράτος εκδήλωσε το ενδιαφέρον του για την εκπαίδευση ενηλίκων το 1929 και συγκεκριμένα με τον νόμο 4239 του 1929, με σκοπούς κυρίως πολιτικούς και δευτερευόντως εκπαιδευτικούς. Η βασιλική οικογένεια και στη συνέχεια το ελληνικό κράτος οργάνωσαν ένα δίκτυο εκπαίδευσης ενηλίκων που κάλυπτε ολόκληρη την Ελλάδα με στόχο τον έλεγχο και την ιδεολογική χειραγώγηση. Στη συνέχεια και μέχρι τη μεταπολίτευση δημόσιες υπηρεσίες και κρατικοί φορείς οργάνωναν προγράμματα επαγγελματικής κατάρτισης (Βεργίδης, 1999).

Από τη μεταπολίτευση και μέχρι την ένταξη της Ελλάδας στην ΕΟΚ, η εκπαίδευση ενηλίκων αναπτύσσεται κυρίως με κρατική παρέμβαση από δημόσιους φορείς όπως το Ελληνικό Κέντρο Παραγωγικότητας (ΕΛΚΕΠΑ), οι Νομαρχιακές Επιτροπές Λαϊκής Επιμόρφωσης (ΝΕΛΕ), τα Κέντρα Γεωργικής Εκπαίδευσης (ΚΕΓΕ) κ.α. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις οι δραστηριότητες των παραπάνω φορέων διακρίνονται από χαλαρότητα και πολυτυπία, αποτέλεσμα των ελάχιστων και αποσπασματικών σχετικών νομοθετημάτων αλλά και των χαμηλών προϋπολογισμών.

Μετά την ένταξη της Ελλάδας στην ΕΟΚ και μέχρι σήμερα, ο ρόλος της εκπαίδευσης ενηλίκων έχει επαναπροσδιοριστεί και έχει αναβαθμιστεί. Η εισροή κοινωνικών πόρων στους δημόσιους φορείς εκπαίδευσης ενηλίκων έχει σαν αποτέλεσμα την κατακόρυφη ανάπτυξη της δραστηριότητάς τους, την αύξηση της εμβέλειάς τους καθώς επίσης την αναβάθμιση και επέκταση των υποδομών τους. Σημαντικός σταθμός η ίδρυση του Εθνικού Κέντρου Πιστοποίησης Δομών Συνεχιζόμενης Επαγγελματικής Κατάρτισης και Συνοδευτικών Υποστηρικτικών Υπηρεσιών (1997), το γνωστό ΕΚΕΠΙΣ με αρμοδιότητες την ανάπτυξη εθνικού συστήματος πιστοποίησης δομών συνεχιζόμενης επαγγελματικής κατάρτισης και δομών συνοδευτικών και υποστηρικτικών υπηρεσιών, την πιστοποίηση της συνεχιζόμενης επαγγελματικής κατάρτισης, την εναρμόνιση του συστήματος συνεχιζόμενης κατάρτισης με το σύστημα αρχικής επαγγελματικής κατάρτισης, την πιστοποίηση των εκπαιδευτών και των προγραμμάτων

συνεχιζόμενης κατάρτισης. Οι εξελίξεις αυτές είχαν σαν αποτέλεσμα να προστεθούν στους δημόσιους φορείς συνεχιζόμενης κατάρτισης που ήδη λειτουργούσαν, ιδιωτικοί φορείς (περισσότεροι από τους μισούς), οργανισμοί τοπικής αυτοδιοίκησης, ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, κοινωνικοί φορείς κ.α. Στους φορείς αυτούς συμπεριλαμβάνονται τα Κέντρα Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΚΕΚ), Κέντα Ελευθέρων Σπουδών (ΚΣΕ), τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας (ΣΔΕ) καθώς και το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (ΕΑΠ).

Η εκπαίδευση ενηλίκων θεωρείται σήμερα, ως ένα από τα κύρια μέσα για την οικονομική ανάπτυξη και την βελτίωση της ανταγωνιστικότητας, με αποτέλεσμα ένα σημαντικό ποσοστό του ενήλικου πληθυσμού της χώρας μας να συμμετέχει στις δραστηριότητες της συνεχιζόμενης κατάρτισης, που όλο διευρύνονται και αναβαθμίζονται. Σε αρκετές μάλιστα περιπτώσεις στα προγράμματα αυτά εφαρμόζονται καινοτόμες μέθοδοι και πρακτικές και έτσι αναδεικνύεται η ιδιαίτερη φυσιογνωμία και πολυμορφία που χαρακτηρίζει την εκπαίδευση ενηλίκων.

1.4 Τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας Ελλάδα

Από το 1995, η Λευκή Βίβλος της Ευρωπαϊκής Επιτροπής «Διδασκαλία και μάθηση: προς την κοινωνία της γνώσης» είχε στόχο να προωθήσει το θέμα της κοινωνικής ένταξης των νέων και υπογράμμισε την ανάγκη εξεύρεσης νέων τρόπων αντιμετώπισης των ανισοτήτων που δημιουργούν η κοινωνία της πληροφορίας, η παγκοσμιοποίηση και η ανάπτυξη ενός πολιτισμού «της επιστήμης και της τεχνολογίας». Στο κείμενο διατυπώθηκαν πέντε κύριοι στόχοι:

1. Να ενθαρρυνθεί ο ευρωπαίος πολίτης στην κατάκτηση νέων γνώσεων.
2. Το σχολείο να πλησιάσει περισσότερο και να συνεργαστεί με τον κόσμο των επιχειρήσεων.
3. Να καταπολεμηθεί ο κοινωνικός αποκλεισμός.
4. Ο ευρωπαίος πολίτης να χρησιμοποιεί με επάρκεια τρεις γλώσσες που ομιλούνται σε χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης.
5. Η επένδυση στην εκπαίδευση να θεωρείται ισοδύναμη με τις άλλες οικονομικές επενδύσεις.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, και κυρίως της καταπολέμησης του κοινωνικού αποκλεισμού, προτάθηκε από την κ. Cresson, μέλος της Ευρωπαϊκής Επιτροπής, να συμπεριληφθούν τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας στα προτεινόμενα προς τα κράτη-μέλη πειραματικά προγράμματα (experimental projects).

Οι ιδιαιτερότητες των εκπαιδευτικών συστημάτων των χωρών-μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, σε συνδυασμό με τα κοινωνικά χαρακτηριστικά των ομάδων στις οποίες απευθύνονται, διαμορφώνουν διαφορετικά μοντέλα Σ.Δ.Ε σε κάθε χώρα μέλος. Τα Σ.Δ.Ε. θεσμοθετούνται στην Ελλάδα με το νόμο 1997 (άρθρο 5, ν. 2525/1997), στο πλαίσιο που έχουν προδιαγράψει οι διακηρυγμένες αρχές της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Σήμερα στην Ελλάδα λειτουργούν 48 Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας

(ΣΔΕ) που συγχρηματοδοτούνται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο. Τα Ελληνικά Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας είναι μέλη του Ευρωπαϊκού Δικτύου Σχολείων Δεύτερης Ευκαιρίας (www.e2c-europe.org) και η ευθύνη λειτουργίας τους ανήκει στη Γενική Γραμματεία Εκπαίδευσης Ενηλίκων (Γ.Γ.Ε.Ε.).

Τρεις βασικές αρχές προσδιορίζουν την ταυτότητα του προγράμματος των Σ.Δ.Ε.:

Τα εκπαιδευτικά μέσα που αξιοποιούνται για την επίτευξη του βασικού στόχου πρέπει να είναι ευέλικτα ώστε να υποστηρίζουν κάθε εκπαιδευόμενο στην προσπάθειά του. Πρέπει να προσαρμόζονται στις εκπαιδευτικές ανάγκες, προσδοκίες και δεξιότητες κάθε εκπαιδευομένου.

Οι ανάγκες των εκπαιδευομένων προσεγγίζονται στο σύνολό τους και όχι εν μέρει. Για να επιτύχουν στην προσπάθειά τους να εκπαιδευθούν και να καταρτισθούν, οι εκπαιδευόμενοι πρέπει να υποστηριχθούν στην αντιμετώπιση δυσκολιών σε άλλους τομείς, όπως είναι η υγεία, η οικογένεια, ο εργασιακός χώρος, ο άμεσος κοινωνικός περίγυρος

Οι σύνθετες και διαφορετικές εκπαιδευτικές ανάγκες απαιτούν ένα πολυεπίπεδο εκπαιδευτικό και επιστημονικό δυναμικό, εγνωσμένου κύρους και αξίας, ώστε να μπορεί να ανταποκριθεί στην πολυπλοκότητα των καθηκόντων που θα του ανατεθούν. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τις νέες τεχνολογίες, κυρίως όμως να είναι διατεθειμένοι να συμβάλουν στην υλοποίηση καινοτόμων προγραμμάτων.

Στο πλαίσιο των βασικών αρχών τα Σ.Δ.Ε. :

- Συμπράττουν και επιδιώκουν να συνεργάζονται με τους σχετικούς κοινωνικούς φορείς, τόσο για την ευαισθητοποίηση των κοινωνικών ομάδων στις οποίες αναφέρεται το πρόγραμμα των σχολείων, όσο και για την υλοποίηση του προγράμματος σπουδών.
- Ακολουθούν παιδαγωγικές προσεγγίσεις που εστιάζουν στις ατομικές ανάγκες, ενδιαφέροντα και ικανότητες των εκπαιδευομένων.
- Δίνουν έμφαση στην απόκτηση βασικών δεξιοτήτων (γραφή, ανάγνωση και αριθμητικοί υπολογισμοί), αλλά και νέων δεξιοτήτων που απαιτούνται σήμερα (χρήση ξένης γλώσσας και νέων τεχνολογιών).
- Καλλιεργούν κοινωνικές δεξιότητες και βοηθούν τους εκπαιδευομένους να διαμορφώνουν θετικές στάσεις ως ενεργοί πολίτες στο πλαίσιο της τοπικής αλλά και της ευρύτερης κοινωνίας.
- Διαμορφώνουν ένα ευέλικτο πρόγραμμα σπουδών αξιοποιώντας κοινωνικούς χώρους απ' τους οποίους μπορεί να αντληθεί γνώση και εμπειρία (χώροι εργασίας, κοινωνικής συνάθροισης, καλλιτεχνικής δημιουργίας, πολιτιστικών εκδηλώσεων κ.ά.).

Το πρόγραμμα στα Σ.Δ.Ε. είναι ταχύρρυθμο και διαρκεί 18 μήνες, που διακρίνονται σε δύο εννιάμηνες περιόδους (δύο σχολικά έτη). Το εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα καλύπτει 25 ώρες (21 διδακτικές ώρες και 4 ώρες εργαστήρια, διαθεματικά projects) και είναι απογευματινό, από τις 4.30 ή 5.00 έως τις 8.30 ή 9.00. Η επιτυχής ολοκλήρωση της διετούς φοίτησης του εκπαιδευομένου πιστοποιείται με τίτλο ισότιμο με το απολυτήριο του Γυμνασίου.

Το πρόγραμμα σπουδών των Σ.Δ.Ε. διαφοροποιείται σημαντικά από τα αντίστοιχα της τυπικής εκπαίδευσης, κυρίως ως προς τις αρχές, το περιεχόμενο, τη διδακτική μεθοδολογία και την αξιολόγηση των εκπαιδευομένων. Στον πυρήνα του προγράμματος σπουδών των Σ.Δ.Ε. τίθενται οι βασικές γνώσεις-δεξιότητες, όπως ορίζονται στο υπόμνημα για τη Διά βίου μάθηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης (2000). Αυτές είναι η γραφή, η ανάγνωση, οι αριθμητικοί υπολογισμοί, η γνώση μιας ξένης γλώσσας και η χρήση Η/Υ. Η ενίσχυση των εκπαιδευομένων στις παραπάνω δεξιότητες αποτελεί κύριο στόχο του προγράμματος.

Οι εκπαιδευόμενοι διευκολύνονται ώστε να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις διαφορετικών κοινωνικών χώρων και πλαισίων επικοινωνίας. Ο χώρος της εργασίας, ο κόσμος της εικόνας, των Μ.Μ.Ε., της διαφήμισης, ο κόσμος των φυσικών επιστημών, ο χώρος της πολιτικής και του ευρύτερου κοινωνικού προβληματισμού απαιτούν από το σημερινό πολίτη ποικίλες δεξιότητες και ευελιξία στη χρήση τους, ώστε να επικοινωνεί αποτελεσματικά τόσο γραπτά όσο και προφορικά. Γι' αυτό και υιοθετείται η αντίληψη των πολυγραμματισμών, ως βασική αρχή του προγράμματος, σύμφωνα με την οποία ο γραπτός και προφορικός λόγος προσδιορίζεται από τον κοινωνικό χώρο στο πλαίσιο του οποίου αρθρώνεται.

Το πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνει τα παρακάτω αντικείμενα: 1. Ελληνική γλώσσα, 2. Μαθηματικά, 3. Πληροφορική, 4. Αγγλικά, 5. Κοινωνική εκπαίδευση, 6. Περιβαλλοντική εκπαίδευση, 7. Αισθητική αγωγή, 8. Στοιχεία Τεχνολογίας και Φυσικών επιστημών, 9. Προσανατολισμό-Συμβουλευτική σε θέματα επαγγελματικής σταδιοδρομίας. Τα παραπάνω "μαθήματα" δεν περιχαρακώνονται αυστηρά στα όρια του αντίστοιχου επιστημονικού πεδίου, αλλά αξιοποιούν στοιχεία από πολλές επιστήμες. Οι δεξιότητες που βρίσκονται στον πυρήνα του προγράμματος αποτελούν στόχο όλων των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, διατρέχουν δηλαδή όλο το πρόγραμμα σπουδών.

Διδακτική μεθοδολογία

Η διδακτική στα Σ.Δ.Ε. στοχεύει να μετατρέψει τα σχολεία από τόπο μετάδοσης της γνώσης σε τόπο παραγωγής της γνώσης. Η επιδίωξη αυτή προσανατολίζει σε αναζήτηση διδακτικών μεθόδων που εθίζουν τους εκπαιδευομένους στην άμεση και ενεργό εμπλοκή τους στη διαδικασία της μάθησης. Τους εθίζουν σε βιωματικές δημιουργικές ενέργειες και σε ερευνητικό πειραματισμό, στο πλαίσιο των οποίων η παρατήρηση, η μελέτη των δεδομένων, η διαμόρφωση υποθέσεων για τη λύση προβλημάτων, η συζήτηση, ο αναστοχασμός, η κριτική εργασία σε ομάδες οδηγούν εκπαιδευτικούς και εκπαιδευομένους σε αυτοκατανόηση, σε συνεχή αξιολόγηση και σε επανασχεδιασμό των μαθησιακών δραστηριοτήτων. Στις διδακτικές μεθόδους που ενθαρρύνουν τη μαθησιακή αυτή διαδικασία περιλαμβάνονται η ομαδοκεντρική διδασκαλία, ο ελεύθερος διάλογος, ο καταιγισμός ιδεών, η συνεργατική διδασκαλία (team teaching, collaborative teaching), η μέθοδος project κ.ά.

Αναπόφευκτα, η διδακτική μεθοδολογία στα Σ.Δ.Ε. προϋποθέτει μεταρρυθμιστική σχολική οργάνωση και παιδαγωγική πρακτική, όπως: ανοικτό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, ευελιξία του διδακτικού-μαθησιακού χρόνου, ο οποίος παρακολουθεί το ενδιαφέρον και την εξέλιξη της δραστηριότητας των εκπαιδευομένων, κοινωνικός και δημοκρατικός προσανατολισμός της όλης μαθησιακής δραστηριότητας. Συνακόλουθες διδακτικές αρχές είναι η αυτενέργεια, η βιωματική μάθηση, η εποπτεία, η δυνατότητα επιλογής, η συμμετοχή των εκπαιδευομένων στις αποφά-

σεις που αφορούν τη μάθησή τους, η εξατομίκευση (διαφοροποίηση) της διδασκαλίας, η διαθεματικότητα της διδασκαλίας και ο κριτικός στοχασμός.

Τα Σ.Δ.Ε. λειτουργούν με ανοικτά προγράμματα σπουδών, εφόσον, σύμφωνα με τη φιλοσοφία που τα διέπει, η διδασκαλία θεωρείται πράξη επικοινωνίας και όχι προσπάθεια για επίτευξη προκαθορισμένων στόχων. Το πρόγραμμα σπουδών που αναπτύσσει κάθε Σ.Δ.Ε. δεν είναι προϊόν που παράγεται πριν από τη διαδικασία της διδασκαλίας, ούτε δίνεται έτοιμο στους εκπαιδευτικούς για να το εφαρμόσουν.

Η αξιολόγηση αυτών των προγραμμάτων σπουδών δεν συνίσταται στον έλεγχο επιτυχίας κάποιων προκαθορισμένων στόχων, αλλά έχει περισσότερο ποιοτικό χαρακτήρα δίνοντας έμφαση στις διαδικασίες της διδασκαλίας και της μάθησης και στις δραστηριότητες που οργανώνονται στην τάξη. Δεν ελέγχεται μόνο το αποτέλεσμα, αλλά αποτιμάται η ίδια η διαδικασία ως προς τη μορφωτική της αξία, τις δυνατότητες δηλαδή που παρέχει στους εκπαιδευόμενους να αξιοποιήσουν και να αναπτύξουν τη δική τους δυναμική. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δίνουμε διαφορετικό προσανατολισμό στη διδακτική πρακτική, καθώς αναζητούμε διδακτικούς τρόπους οι οποίοι δε θα οδηγούν στην πρόσκτηση μιας σχηματοποιημένης και αποκρυσταλλωμένης γνώσης, αλλά στις διαδικασίες συλλογής, οργάνωσης και κριτικής επεξεργασίας των δεδομένων, που καταλήγουν να αξιοποιήσουν και να αναπτύξουν τη γνώση.

Σε αυτό το πλαίσιο, διαφοροποιείται και ο χαρακτήρας αξιολόγησης των εκπαιδευομένων, η οποία συνδέεται άρρηκτα με την αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου, τις διαδικασίες δηλαδή της διδασκαλίας και της μάθησης, και αποσκοπεί αφενός στη διαρκή ανατροφοδότηση της διδασκαλίας με απώτερο στόχο τη βελτίωσή της, και αφετέρου στην πρόοδο των εκπαιδευομένων. Το θέμα της αξιολόγησης στα Σ.Δ.Ε. αποκτά ακόμα μεγαλύτερη βαρύτητα, εφόσον αποτελεί παράγοντα που συνδέεται άμεσα με τη σχολική διαρροή. Έμφαση δίνεται στην ποιοτική - περιγραφική αξιολόγηση, η οποία δεν αποτυπώνει στατικά την τελική επίδοση των εκπαιδευομένων, αλλά απεικονίζει τη δυναμική της πορείας βελτίωσής τους και, όπου είναι δυνατόν, αναφέρει και την ανταπόκρισή τους σε συγκεκριμένες στρατηγικές.

Το γραφείο συμβουλευτικής, στο σχολικό χώρο του κάθε Σ.Δ.Ε., έχει ως στόχο να καλύψει τις ανάγκες των εκπαιδευομένων, που αφορούν την ανάπτυξη προσωπικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων και επηρεάζουν την ατομική, επαγγελματική και κοινωνική τους εξέλιξη. Πλαισιώνεται από το σύμβουλο σταδιοδρομίας και το σύμβουλο ψυχολόγο. Η συμβουλευτική σταδιοδρομίας στο Σ.Δ.Ε. αποτελεί οργανικό κομμάτι του ίδιου του θεσμού. Υπηρετεί το γενικότερο στόχο, που είναι η επανένταξη των εκπαιδευομένων στην κοινωνική και οικονομική ζωή. Οι υπηρεσίες της συμβουλευτικής παρέχονται σε ομαδικό και ατομικό επίπεδο και αποσκοπούν: Να συνδέσουν την εκπαίδευση με την αγορά εργασίας, να ενισχύσουν τις ικανότητες αυτογνωσίας και αυτοεκτίμησης των εκπαιδευομένων, να παρέχουν πληροφόρηση σχετικά με την αγορά εργασίας και τις δυνατότητες επαγγελματικής κατάρτισης, να αναπτύξουν συνεργασία με φορείς υποστηρικτικούς ως προς την απασχόληση.

Η ψυχολογική υπηρεσία λειτουργεί σύμφωνα με το πνεύμα του Σ.Δ.Ε., που είναι να προσεγγίζει τις ανάγκες των εκπαιδευομένων στο σύνολό τους και να εξασφαλίζει ένα ασφαλές, υποστηρικτικό και δημιουργικό περιβάλλον, το οποίο να ευνοεί τη μάθηση και την ανάπτυξη προσωπικών και κοινωνικών δεξιοτήτων. Βοηθά τους εκπαιδευόμενους να αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες που προκύπτουν από την ένταξή τους στο σχολικό περιβάλλον και συνεργάζεται με την ομάδα των εκπαιδευτικών για την κατανόηση των ιδιαίτερων αναγκών και δυνατοτήτων του κάθε εκπαιδευομένου. Α-

κόμη, παρέχει υποστήριξη στους εκπαιδευομένους που αντιμετωπίζουν προβλήματα σε άλλους τομείς της ζωής, όπως η οικογένεια, ο εργασιακός χώρος, οι προσωπικές σχέσεις, και συνεργάζεται με άλλους επαγγελματίες της ψυχικής υγείας, όπου αυτό είναι απαραίτητο.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟΥΣ ΕΝΗΛΙΚΕΣ

2.1 Τι είναι μάθηση - Θεωρίες μάθησης

Δύο είναι οι κύριες απόψεις για το τι είναι μάθηση. Κατά την πρώτη η μάθηση είναι το άθροισμα των γνώσεων που αποκτώνται λόγω αλληλεπίδρασης ερεθίσματος-αντίδρασης, ενώ κατά την δεύτερη η μάθηση είναι μια διαδικασία ανάπτυξης νέων διαισθήσεων και ικανοτήτων, που προέρχονται από την ανασύνθεση μιας προηγούμενης κατάστασης. Συνθέτοντας τις δύο απόψεις μπορούμε να δεχτούμε την έννοια μάθηση με τη σημασία μιας μόνιμης αλλαγής στη συμπεριφορά του ατόμου, η οποία είναι αποτέλεσμα εμπειρίας και πράξης. Με ποιο τρόπο όμως μαθαίνουμε; Ποιες προϋποθέσεις ευνοούν τη μάθηση; Απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα δίνουν οι διάφορες θεωρίες μάθησης. Κάθε θεωρία μάθησης είναι μια ολοκληρωμένη συστηματική άποψη για τη φύση της διαδικασίας αλλαγής της συμπεριφοράς του ατόμου σαν αποτέλεσμα εμπειρίας και πράξης.

Κυρίαρχες θεωρίες μάθησης είναι αυτή του συμπεριφορισμού, η ανακαλυπτική μάθηση και η θεωρία της εποικοδόμησης της γνώσης ή του κονστρουκτιβισμού.

- Ο συμπεριφορισμός υποστηρίζει την άποψη ότι η μάθηση είναι αλλαγή της συμπεριφοράς λόγω των εμπειριών του μαθητή. Πρόδρομος αυτής της σχολής ο I. Pavlov. Βασικοί εκπρόσωποί της οι J.B. Watson, E.L. Thorndike, και B. F. Skinner. Σύμφωνα με τους I.Pavlov και J.Watson, η μάθηση και η απόκτηση της γνώσης είναι αποτέλεσμα συνεξαρτήσεων ανάμεσα στα ερεθίσματα (E) που δέχεται το άτομο από το περιβάλλον του και στις αντιδράσεις του (A). Δεν ενδιαφέρεται για την εσωτερική (τη νοητική) λειτουργία των υποκειμένων αλλά εστιάζει την προσοχή στην ανάλυση των χαρακτηριστικών εισόδου – εξόδου της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Η μάθηση είναι ζήτημα δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ των ερεθισμάτων και των αντιδράσεων. Κατά τους συμπεριφοριστές, το μυαλό του μαθητή είναι άγραφο χαρτί, πάνω στο οποίο ο δάσκαλος μπορεί να εγγράψει τη γνώση. Η γνώση μεταδίδεται από το δάσκαλο και το εγχειρίδιο στο μαθητή. Το διδακτικό μοντέλο που στηρίζεται στη θεωρία του συμπεριφορισμού είναι δασκαλοκεντρικό. Ο δάσκαλος θεωρείται αυθεντία και οι μαθητές οφείλουν να αναπαράγουν τη γνώση όπως αυτή υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια και μεταδίδεται από αυτόν στην τάξη.
- Η ανακαλυπτική θεωρία της μάθησης, σύμφωνα με τον J. Bruner, βασίζεται στην αρχή ότι για να μάθει κάποιος, πρέπει να δράσει σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Αποτέλεσμα αυτής της δράσης είναι η κατάκτηση του αφηρημένου, η ανακάλυψη της γνώσης. Η μάθηση συντελείται μέσω συνεργατικών δραστηριοτήτων, επίλυση

προβλημάτων και ανώτερων λειτουργιών της σκέψης. Το ανακαλυπτικό μοντέλο μάθησης αγνοεί τις ιδέες των μαθητών, θεωρώντας το μυαλό τους ως άγραφο χαρτί. Η γνώση ανακαλύπτεται μέσω της αλληλοεπίδρασης και του πλαισίου στο οποίο συντελείται. Στηρίζεται στην εκμάθηση στρατηγικών και στην άσκηση στις επιστημονικές διαδικασίες, που με την καθοδήγηση του διδάσκοντα μπορεί να οδηγήσει στην ερμηνεία των φαινομένων, στην κατανόηση των εννοιών και των νόμων της φύσης. Η διδακτική προσέγγιση είναι μαθητοκεντρικά προσανατολισμένη, με το δάσκαλο στο ρόλο του καθοδηγητή και του οργανωτή καταστάσεων μάθησης. Οι μαθητές με τη βοήθεια φύλλων εργασίας παρατηρούν, κάνουν μετρήσεις, καταγράφουν και συγκρίνουν δεδομένα. Με τον τρόπο αυτό μετέχουν ενεργά στην οικοδόμηση της δικής τους γνώσης, ανακαλύπτοντας πράγματα για τον εαυτό τους. Το γεγονός ότι εργάζονται σε ομάδες, τους δίνει τη δυνατότητα της αλληλεπίδρασης, η οποία είναι αποτελεσματικότερη στη μάθηση, από την καταλυτική παρουσία ακόμα και του ικανότερου δάσκαλου. Μία από τις ριζοσπαστικές θέσεις του J. Bruner είναι ότι όλα τα θέματα μπορούν να διδαχθούν αποτελεσματικά στα παιδιά ανεξάρτητα από το στάδιο ανάπτυξης τους, αρκεί ο δάσκαλος να χρησιμοποιεί τη γλώσσα που καταλαβαίνει ο μαθητής. Ως συνέπεια αυτού εμφανίστηκε το σπειροειδές πρόγραμμα στην εκπαίδευση σύμφωνα με το οποίο οι έννοιες εισάγονται από νωρίς προσαρμοσμένες στο νοητικό επίπεδο των μαθητών και επαναλαμβάνονται στις μεγαλύτερες τάξεις σε ανώτερο επίπεδο κάθε φορά εμπλουτισμένες ποιοτικά και ποσοτικά με νέα στοιχεία.

- Η θεωρία της εποικοδόμησης της γνώσης (κονστрукτιβισμός) στηρίζεται σε δύο βασικές αρχές (Wheatley 1991). Η πρώτη αρχή δέχεται ότι η γνώση δεν είναι δυνατό να γίνει παθητικά αποδεκτή, αλλά οικοδομείται ενεργητικά από τον άνθρωπο, και η δεύτερη υποστηρίζει ότι η γνωστική λειτουργία είναι προσαρμόσιμη και υπηρετεί την οργάνωση ενός κόσμου, ο οποίος προέρχεται από την εμπειρία και όχι την ανακάλυψη της οντολογικής πραγματικότητας. (Glasserfeld 1987). Επομένως, η γνώση είναι μεταβαλλόμενη και οικοδομείται από τον καθένα χωριστά γι' αυτό είναι υποκειμενική και προϊόν της εννοιολογικής αλλαγής που επέρχεται στο μαθητή λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλεται. Συνεπώς δεν μπορεί να μεταδοθεί. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1978), η μάθηση θεωρείται ως εποικοδόμηση που γίνεται στο πλαίσιο της κοινωνίας της ομάδας. Οι Driver & Oldham (1986) πρότειναν ένα μοντέλο της εποικοδομητικής προσέγγισης στη μάθηση και στη διδασκαλία που περιλαμβάνει τη φάση του προσανατολισμού, της ανάδειξης των ιδεών των μαθητών, της αναδόμησης των ιδεών, της εφαρμογής των νέων ιδεών και της ανασκόπησης. Από τους πρώτους εποικοδομιστές θεωρείται ο Piaget (1929), ο οποίος στις μελέτες του λάμβανε υπόψη τον τρόπο με τον οποίο οικοδομείται η γνώση. Στη νεότερη γενιά των ψυχολόγων, υποστηρικτών της εποικοδόμησης των εννοιών ανήκει, ο Ausubel ο οποίος στα έργα του (1963 και 1968) περιγράφει με λεπτομέρειες τη φύση και το ρόλο των εννοιών και τη σπουδαιότητα των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών στη μάθηση. Ο Ausubel (1968) επισημαίνει ότι «ο πιο σπουδαίος παράγοντας που επηρεάζει τη μάθηση είναι αυτός που ο μαθητής γνωρίζει ήδη. Εξακριβώσέ το και δίδαξέ τον, σύμφωνα με αυτό».

Τα τελευταία χρόνια έχει τονιστεί ο ρόλος της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης (Burton-Dawis, Vygotsky, Brown, κα). Σύμφωνα

με το εποικοδομιστικό (κονστрукτιβιστικό) μοντέλο διδασκαλίας κατά το οποίο οι μαθητές οικοδομούν μόνοι τους τη γνώση, επιβάλλεται η συνεργατικότητα. Ο δάσκαλος οργανώνει τη σχολική εργασία σε ομάδες. Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της ομαδικής εργασίας, σύμφωνα με τους είναι ότι: απελευθερώνει τους μαθητές από την παθητική ακρόαση, σφυρηλατεί την πρωτοβουλία και αναπτύσσει την αυτενέργεια. Ακόμα, οι μαθητές ασκούν την κριτική τους ικανότητα, και αναπτύσσουν την αυτογνωσία και την αυτοκριτική, αφού κάθε στιγμή συγκρίνουν τον εαυτό τους με τους άλλους. Επιπλέον, περιορίζεται ο ανταγωνισμός και ο εγωισμός, αναπτύσσεται η συνεργασία, ο αμοιβαίος σεβασμός, η αλληλεγγύη, η αλληλοβοήθεια και η ανάληψη προσωπικής και συλλογικής ευθύνης και οπλίζονται οι μαθητές με τεχνικές και μεθόδους εργασίας. Τέλος οι αδιάφοροι συμπαρασύρονται στην εργασία αυτοπεριορίζουν την ελευθερία και αυτοβελτιώνονται. (Κανάκης Ι., 1987 και Χρυσοφίδης Κ., 1994).

2.2 Η μάθηση στους ενήλικες

Τα βιώματα, η ηλικία, οι υποχρεώσεις και οι ευθύνες ενός ενήλικα δεν έχουν την ίδια ικανότητα προσαρμογής όπως στην περίπτωση ενός παιδιού ή ενός εφήβου, με αποτέλεσμα να αντιδρούν έντονα όταν έχουν να κάνουν με ένα κλασικό παιδαγωγικό σύστημα. Ο θεωρητικός εκείνος που έφερε την έννοια της εκπαίδευσης ενηλίκων στο προσκήνιο ήταν ο Malcolm Knowles (24 Απριλίου 1913 – 27 Νοεμβρίου 1997). Για τη θεωρία που ανέπτυξε χρησιμοποίησε τον όρο *ανδραγωγική* (andragogy) από τις ελληνικές λέξεις άνδρας και αγωγή σε αντίθεση με τη λέξη παιδαγωγική (pedagogy) που προέρχεται επίσης από τις λέξεις παιδί και αγωγή. Βασίστηκε στις παρακάτω αρχές:

1. Οι ενήλικες πρέπει να συμμετέχουν στον προγραμματισμό και στην αξιολόγηση της εκπαίδευσής τους.
2. Η εμπειρία τους (συμπεριλαμβανομένων και των λαθών) πρέπει να αποτελεί τη βάση των δραστηριοτήτων μάθησης.
3. Οι ενήλικες ενδιαφέρονται να μάθουν θέματα που έχουν άμεση σχέση με την εργασία τους ή την προσωπική τους ζωή.
4. Η μάθηση στους ενήλικες είναι περισσότερο εστιασμένη στο πρόβλημα από ότι προσανατολισμένη στο περιεχόμενο.

Ο Burns R. (1995, σελίδα 233) σημειώνει: «...τα ενήλικα άτομα είναι αυτοκατευθυνόμενα. Αυτή η έννοια είναι η καρδιά της ανδραγωγικής ... επομένως η ανδραγωγική έχει επίκεντρο τον μαθητή, βασίζεται στην εμπειρία του ενήλικα, προσανατολίζεται στην ουσία των προβλημάτων και στην συνεργατικότητα στο πνεύμα μιας ανθρωπιστικής προσέγγισης της μάθησης και της εκπαίδευσης ... όλη η εκπαιδευτική δραστηριότητα ενεργοποιεί τον μαθητή».

Σύμφωνα με τον P. Jarvis (2004), η εκπαίδευση ενηλίκων διαφοροποιείται από αυτήν των παιδιών κύρια γιατί:

1. επιθυμούν να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία,
2. θέλουν να αισθάνονται ότι αντιμετωπίζονται ως ενήλικες στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας,

3. φέρνουν τις δικές τους εμπειρίες, αντιλήψεις εννοιών και ανάγκες στη μαθησιακή διαδικασία,
4. φέρνουν στη μαθησιακή κατάσταση τη δική τους αυτοπεποίθηση, αυτοεκτίμηση και αυτοαντίληψη,
5. μαθαίνουν καλύτερα, όταν δεν απειλείται το έργο τους,
6. έχουν αναπτύξει τους δικούς τους τρόπους μάθησης,
7. μαθαίνουν με διαφορετικούς ρυθμούς,
8. προσέρχονται στη μαθησιακή διαδικασία με διαφορετική φυσική κατάσταση.

Με βάση τα παραπάνω, οι ενήλικοι εκπαιδευόμενοι, πιστεύουν ότι η εκπαίδευσή τους πρέπει να έχει συγκεκριμένο αποτέλεσμα στην άσκηση της εργασίας τους, στην εξέλιξη της καριέρας τους ή στην προσωπική τους ζωή, δεν θεωρούν δεδομένο το κύρος του εκπαιδευτή (ο τελευταίος είναι ένας ενήλικος, ο οποίος έχει μια επαγγελματική δραστηριότητα, όπως ο εκπαιδευόμενος, και δεν είναι αυθεντία), αρνούνται το σύστημα βαθμολόγησης που εφαρμόζεται στο σχολικό περιβάλλον γιατί αυτό συνδέεται συχνά με δυσάρεστες αναμνήσεις και τέλος θέλουν να λαμβάνονται υπόψη οι κεκτημένες γνώσεις τους και η εμπειρία τους. Δεν φτάνουν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα με παντελή έλλειψη γνώσεων και με την επιθυμία να μάθουν τα πάντα, αλλά ως φορείς μιας σύνθετης πραγματικότητας, αναζητώντας τα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν στην πορεία τους. Έτσι οι εκπαιδευόμενοι αποκτούν την αναγκαία αίσθηση του προσωπικού επιτεύγματος, αναπτύσσεται η κριτική τους σκέψη, ενθαρρύνεται η διάθεση τους να συνεχίζουν να μαθαίνουν και μετά το τέλος του συγκεκριμένου προγράμματος και τέλος ενισχύεται η αυτοεκτίμηση τους και η ικανότητα τους να παίξουν πληρέστερο ρόλο στην κοινωνία που ανήκουν. Με άλλα λόγια, ο αυτοπροσδιορισμός των ενηλίκων επηρεάζει καταλυτικά τη μάθησή τους (Knowles, 1975).

Σε ένα πρόγραμμα εκπαίδευσης ενηλίκων θα πρέπει να εφαρμόζονται εκπαιδευτικές πρακτικές που θα τονίζουν την τάση του ενήλικα για αυτοκαθορισμό και κατά συνέπεια για ενεργητική συμμετοχή στην εκπαιδευτική διεργασία στην οποία εμπλέκεται, θα υπογραμμίζουν την ιδιαιτερότητα του τρόπου μάθησης των ενηλίκων συγκριτικά με τον τρόπο μάθησης των παιδιών και των εφήβων και θα βασίζονται στην επίγνωση ότι η βαθύτερη ανάγκη ενός ενήλικα είναι να τον αντιμετωπίζουν σαν ενήλικο σύμφωνα με τον Knowles (1980, 1983). Τέτοιες εκπαιδευτικές πρακτικές είναι:

- το μαθησιακό κλίμα χαρακτηρίζεται από τον αλληλοσεβασμό και την διαδραστικότητα μεταξύ των εκπαιδευομένων του εκπαιδευτή και του διδακτικού υλικού.
- το εκπαιδευτικό πρόγραμμα οικοδομείται με βάση τις ανάγκες των εκπαιδευομένων.
- οι εκπαιδευόμενοι συμμετέχουν ενεργητικά σε όλα τα στάδια της πραγματοποίησης του προγράμματος εκπαίδευσης.
- ο εκπαιδευτής δεν παρουσιάζεται σαν αυθεντία ή σαν μεταφορέας γνώσεων αλλά σαν συντονιστής των ενεργειών
- οι εκπαιδευτικές μέθοδοι που επιλέγονται, προάγουν την αλληλεπίδραση, την ανταλλαγή εμπειριών, την ευρεία πορεία προς την γνώση, την συλλογικότητα και τη συμμετοχή.

Για τις παραπάνω απόψεις του ο Knowles δέχτηκε έντονη κριτική γιατί:

- διαχωρίζει κάθετα τον τρόπο που λειτουργούν και μαθαίνουν οι ενήλικες από τον τρόπο που μαθαίνουν τα παιδιά, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τις μελέτες του Piaget και άλλων.
- οι απόψεις του δεν βασίζονται σε ευρεία βάση ερευνητικών δεδομένων, συνεπώς η εμπειρική τους επαλήθευση είναι ανεπαρκής,
- δίνει μεγάλη έμφαση στις ιδιότητες του ατόμου παραγνωρίζοντας τις επιρροές που εκείνο δέχεται από τον κοινωνικό του περίγυρο.

Σύμφωνα με τον Rogers A. (1999), πολλοί και σημαντικοί ερευνητές της εκπαίδευσης ενηλίκων (Freire, Gagne, Knowles, Mezirow, Rogers) σημειώνουν ότι η μάθηση σε ενήλικες πέρα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, παρουσιάζει και αρκετά εμπόδια. Αυτά τα εμπόδια ο ίδιος ο ερευνητής τα κατέταξε σε τρεις βασικές κατηγορίες (Rogers A., 1999):

- στα εμπόδια που προκύπτουν από την τυχόν κακή οργάνωση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων,
- στα εμπόδια που προκύπτουν από την κατάσταση στην οποία βρίσκονται οι ενήλικοι εκπαιδευόμενοι και τέλος
- στα εσωτερικά εμπόδια που συνδέονται με τους παράγοντες της προσωπικότητας των ενήλικων εκπαιδευόμενων.

Ειδικότερα τα εσωτερικά εμπόδια τα διακρίνει σε δύο κατηγορίες: εμπόδια που σχετίζονται με προϋπάρχουσες γνώσεις, εμπειρίες και στάσεις στις οποίες ο εκπαιδευόμενος προσκολλώνεται και στα εμπόδια που απορρέουν από ψυχολογικούς παράγοντες που έχουν να κάνουν είτε με το άγχος του ενήλικα είτε με τη δομή της προσωπικότητάς του.

Οι εκπαιδευτικές πρακτικές της διδασκαλίας των ενηλίκων και τα εμπόδια που συναντούν στη μάθηση σε συνδυασμό με το ότι έχουν άλλο απόθεμα εμπειριών, άλλους κοινωνικούς ρόλους, άλλο προσανατολισμό απέναντι στη μάθηση και, σε τελική ανάλυση, έχουν μεγαλύτερη δυνατότητα επιλογών και πρωτοβουλιών αναφορικά με τον τρόπο επιλογής και συμμετοχής τους στη μαθησιακή διαδικασία (Κόκκος Α., 1999), υπαγορεύουν ανάλογους τρόπους προσέγγισης και συμπεριφοράς από την πλευρά των εκπαιδευτών. Έτσι ο εκπαιδευτής ενηλίκων οφείλει να παίζει έναν πολυδιάστατο ρόλο. Αυτόν του οδηγού της ομάδας, του εμπνευστή, του συμβούλου, του δάσκαλου, του συνεργάτη (Κόκκος, 2003). Οφείλει να ενισχύει την τάση των εκπαιδευόμενων για αυτοκαθορισμό, προτείνοντας τους να εμπλέκονται ενεργητικά σε όλα τα στάδια του προγράμματος: στον σχεδιασμό, στην στοχοθεσία, στην διδασκαλία, στην δικτύωση με την υπόλοιπη κοινωνία, στην αξιολόγηση.

2.3 Η διδακτική των μαθηματικών σε ενήλικες

Οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας των μαθηματικών, θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι μια στερεή γνώση, αποτελείται από κανόνες και διαδικασίες, έχει παραχθεί και πρέπει οι μαθητές να την αποστηθίσουν. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών κα-

λούνται να γεμίσουν το μυαλό των μαθητών που μοιάζει με μια άγραφη σελίδα (Freire P., 1977). Οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να ακούν την ύλη μέσα από ατέλειωτες και τυποποιημένες παραδόσεις του δάσκαλου, να δέχονται την «αυθεντία» του και στο τέλος να την αποστηθίζουν άκριτα και παθητικά. Έρευνες (NCTM, 1989) δείχνουν ότι αυτοί οι παραδοσιακοί τρόποι διδασκαλίας των μαθηματικών δεν βοηθούν το μαθητή να μάθει ότι θα του χρειαστεί για να αντιμετωπίσει τις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας. Αλλά ούτε και οι ανθρωπιστικοί στόχοι της εκπαίδευσης, που είναι να αναπτύξει ο μαθητής ανεξάρτητη και κριτική σκέψη, ευνοούνται, όταν είναι υποχρεωμένοι να δέχονται τις μαθηματικές γνώσεις που επιβάλλει η αυθεντία του δάσκαλου (Kammil, 1985).

Σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών, υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλά τα αποτελέσματα της προσπάθειας κάποιων μαθηματικών, αλλά και η δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγονται. Με την έννοια αυτή τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων, αλλά και μια διαδικασία (Tympoczek, 1986). Τα μαθηματικά πρέπει να πάψουν να είναι τα μαθηματικά του σχολείου, αλλά τα μαθηματικά των παιδιών (Steffe & Wiegel, 1992), πρέπει όπως έλεγε ο Dewey η μάθηση να πηγάζει από τις εμπειρίες των μαθητών, πρέπει να είναι βιωματική. Χαρακτηριστική είναι μια κινέζικη παροιμία: Ακούω, ξεχνάω. Βλέπω, θυμάμαι. Κάνω, καταλαβαίνω.

Είναι πολύ βασικό τα παραδείγματα να είναι πραγματικά, αλλιώς τα «μέσα» που χρησιμοποιούνται για να απαντήσουν σε «ψεύτικες ερωτήσεις φαίνονται ψεύτικα και αυτά. Επιπλέον τα υπαρκτά παραδείγματα μένουν ευκολότερα στη μνήμη των μαθητών. Ο Green (1983) προτείνει να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στις πειραματικές δραστηριότητες των μαθητών, αρχίζοντας από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, καθώς και να ενθαρρυνθεί η συζήτηση στην τάξη. Η αισθητική προσέγγιση μπορεί να γίνει με ποικίλους τρόπους και μέσα διδασκαλίας, ενισχύοντας έτσι την εκτίμηση των μαθητών απέναντι στην ομορφιά της στατιστικής επιστήμης. Η εργασία των μαθητών με συγκεκριμένα υλικά και αντικείμενα διασφαλίζει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και συσχετίζει τα εποπτικά μέσα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία με τις μαθηματικές έννοιες. Η συσχέτιση αυτή γεφυρώνει το χάσμα ανάμεσα στην αφηρημένη και τη συγκεκριμένη σκέψη και παρέχει το πλαίσιο για καλύτερη κατανόηση. Οι δραστηριότητες πρέπει να συσχετίζουν τις μαθηματικές έννοιες με τις εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή, έτσι ώστε να γίνει η σύνδεση του συγκεκριμένου με το αφηρημένο στάδιο σκέψης. Με αυτόν τον τρόπο διασαφηνίζονται οι έννοιες και διατηρείται το ενδιαφέρον των μαθητών αμείωτο.

Με δεδομένο ότι στην καθημερινότητα του πολίτη η σχέση του ανθρώπου με τα μαθηματικά αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία, οι ενήλικες χρειάζονται όλο και περισσότερες μαθηματικές γνώσεις για να μπορούν να λειτουργήσουν αποτελεσματικότερα στο ρόλο τους ως εργαζόμενοι, ως γονείς και ως πολίτες. Είναι αναγκαίο κάθε ενήλικο άτομο αφενός να έχει ή να μπορεί να αποκτήσει βασικές μαθηματικές ικανότητες και αφετέρου να μπορεί να τις εφαρμόσει σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής του ζωής. Η αυξανόμενη ανάγκη για μαθηματικές ικανότητες-δεξιότητες ενισχύεται και από πρόσφατες έρευνες σε ενήλικους πληθυσμούς, που έδειξαν ότι μεγάλα ποσοστά ενηλίκων δεν έχουν επαρκείς μαθηματικές ικανότητες-δεξιότητες σύμφωνες με τις απαιτήσεις του εικοστού πρώτου αιώνα. Για παράδειγμα πρόσφατη μελέτη διαπίστωσε ότι το 58,6% των Αμερικανών ενηλίκων έχουν μαθηματικές γνώ-

σεις κάτω από το επίπεδο 3, το κατώτατο επίπεδο για την αντιμετώπιση των σημερινών απαιτήσεων (Statistics Canada and OECD, 2005).

Για να χαρακτηρίσουμε όμως αυτές τις ικανότητες των ενηλίκων χρησιμοποιούμε διάφορους όρους όπως «αριθμητισμός» (numeracy), αριθμητισμός ενηλίκων (adult numeracy), μαθηματικά και αριθμητισμός, μαθηματικός γραμματισμός (mathematical literacy) και κριτικός αριθμητισμός (critical numeracy).

Στην έκθεση Crowther (Crowther Report, 1959), χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ο όρος «αριθμητισμός» και ορίστηκε ότι είναι «η ελάχιστη γνώση από μαθηματικά και επιστημονικά αντικείμενα, τα οποία διαθέτει κάποιο άτομο με σκοπό να θεωρηθεί μορφωμένο». Υπάρχουν βεβαίως διαφορετικές απόψεις σχετικά με τη σημασία που αποδίδεται στον όρο του αριθμητικού γραμματισμού (Coben, 2000 - Cockcroft, 1982 - Crowther, 1959 - Gal van Groenestijn, Manly, Schmitt, & Tout, 2003 - Johnston, 1994 - Lindenskov & Wedege, 2001 και Steen, 2001). Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε ένα άτομο ως μαθηματικά εγγράμματο, όταν αφενός κατέχει κάποιες μαθηματικές ικανότητες, οι οποίες του επιτρέπουν να ανταποκρίνεται στις πρακτικές μαθηματικές απαιτήσεις της καθημερινής του ζωής και αφετέρου έχει την ικανότητα να καταλαβαίνει και να εκτιμά τις πληροφορίες που παρουσιάζονται με μαθηματικούς όρους, όπως πίνακες, γραφικές αναπαραστάσεις, ποσοστά, πιθανότητες κλπ. (Λεμονίδης Χ.).

Σύμφωνα με τους L. Ginsburg, M. Manly, M. J. Schmitt, 2006, τρία είναι τα βασικά συστατικά που οριοθετούν και οικοδομούν την έννοια του αριθμητικού γραμματισμού:

1. Το πλαίσιο: η χρήση και ο σκοπός για τον οποίο ένας ενήλικος καλείται να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα με μαθηματικές απαιτήσεις.

Οικογενειακό-προσωπικό – ως γονέας, ως διαχειριστής της οικογενειακής περιουσίας, ως καταναλωτής κ.α.

Εργασιακό – ως εργαζόμενος ικανός να υλοποιήσει τους εργασιακούς του στόχους και να προετοιμαστεί να προσαρμοστεί στις νέες εργασιακές απαιτήσεις.

Εκπαιδευτικό – ως άτομο που ενδιαφέρεται για βαθύτερες μαθηματικές γνώσεις, απαραίτητες για μεταδευτεροβάθμια εκπαίδευση ή κατάρτιση.

Κοινωνικό – ως πολίτης που ερμηνεύει διάφορες κοινωνικές καταστάσεις όπως περιβάλλον, έγκλημα, πολιτική με χρήση μαθηματικών όρων όπως πίνακες, γραφήματα, ποσοστά κ.α.

2. Το περιεχόμενο: η μαθηματική γνώση που είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση διαφόρων στόχων.

Αριθμοί και πράξεις – η δυνατότητα να χειρίζεται αριθμούς, να κάνει πράξεις με αριθμούς και να καταλαβαίνει τη σημασία τους όταν αυτοί αντιπροσωπεύουν καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Άλγεβρα, μοτίβα και συναρτήσεις – η δυνατότητα να αναλύει σχέσεις ανάμεσα σε ποσοτικά μεγέθη, να τροποποιεί, να γενικεύει και να παρουσιάζει ποσοτικά μεγέθη με διαφορετικούς τρόπους και να μπορεί με τη βοήθεια των

ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων να σχεδιάζει μεθόδους επίλυσης εξισώσεων και προβλημάτων.

Χώρος και μέτρηση – η γνώση των ιδιοτήτων σχημάτων και σωμάτων, τρόπους υπολογισμού του μέτρου αυτών των ιδιοτήτων άμεσα ή έμμεσα καθώς και μπορεί να αντιλαμβάνεται το χώρο.

Δεδομένα, στατιστική και πιθανότητες – η δυνατότητα να περιγράφει πληθυσμούς, να χειρίζεται αβέβαιες καταστάσεις, και να παίρνει αιτιολογημένες αποφάσεις.

3. *Οι γνωστικές και συναισθηματικές* διαδικασίες που επιτρέπουν σε ένα άτομο να λύσει ένα πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό συνδέονται τα δύο παραπάνω μέρη, το περιεχόμενο και το πλαίσιο.

Κατανόηση των εννοιών – ένας εσωτερικός και λειτουργικός έλεγχος των μαθηματικών ιδεών.

Προσαρμοσμένος συλλογισμός – η ικανότητα να σκεφτεί λογικά για τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών και των καταστάσεων.

Στρατηγική ικανότητα – η ικανότητα να διατυπώνει μαθηματικά προβλήματα, να τα παρουσιάζει αλλά και να τα λύνει.

Διαδικαστική άνεση – η δυνατότητα να κάνει υπολογισμούς αποτελεσματικά και με ακρίβεια χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι, έξυπνες ιδέες, τεχνικές εκτίμησης καθώς και χρήση υπολογιστή.

Παραγωγική διάθεση – οι πεποιθήσεις, οι στάσεις και τα αισθήματα που συμβάλλουν στη διάθεση και στην προθυμία ενός ατόμου να αποκτά, να χρησιμοποιεί, και να εμμένει στη μαθηματική σκέψη και μάθηση ή σε δραστηριότητες με μαθηματικές απαιτήσεις.

Γίνεται φανερό ότι η διδασκαλία του αριθμητισμού πρέπει να γίνει με αφορμή καταστάσεις που αντλούνται από την καθημερινή ζωή του ενήλικα. Πρέπει οι μαθηματικές έννοιες που θα διδάξουμε να είναι στενά συνδεδεμένες με τις εμπειρίες, την καθημερινότητα και τα ενδιαφέροντα επαγγελματικά ή άλλα του κάθε εκπαιδευόμενου. Μια πρώτη βασική, λοιπόν, αρχή της διδασκαλίας σε ενήλικες είναι να λαμβάνονται υπ' όψη τα προσωπικά δεδομένα, οι ανάγκες και οι προτεραιότητες του κάθε εκπαιδευόμενου ξεχωριστά. Από την άλλη, η ομαδοποίηση των εκπαιδευομένων σε τάξεις αναδεικνύει μια άλλη διάσταση των εκπαιδευτικών αναγκών τους, ως ομάδας. Ακόμη είναι σημαντικό, στα πλαίσια της ομάδας και των διαπροσωπικών σχέσεων, να δημιουργείται φιλικό και θετικό επικοινωνιακό κλίμα, ώστε το έδαφος να είναι πρόσφορο για να εκφραστούν πρωτότυπες ιδέες και γόνιμες αντιπαραθέσεις. Γι' αυτό βασική αρχή της διδασκαλίας και της μεθοδολογίας είναι ο καλός χειρισμός της δυναμικής της ομάδας από τη πλευρά του εκπαιδευτή. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αριθμητικού γραμματισμού, διαμορφώνουν τις εξής πιο ειδικές διδακτικές αρχές:

- Η απόκτηση της γνώσης είναι μια διαδικασία εμπλουτισμού, επεξεργασίας και επαναδόμησης της ήδη υπάρχουσας γνώσης. Έτσι γίνεται το πέρασμα σε νέες και πιο σύνθετες έννοιες. Είναι αναγκαίο οι εκπαιδευόμενοι να ανακαλύπτουν, να αναστοχάζονται, να επανοργανώνουν τη γνώση τους.

- Τα μαθηματικά εκτός από αντικείμενο γνώσης είναι ένα εργαλείο που κατασκευάζεται για να λύνει προβλήματα και να δημιουργεί νέα γνώση. Γι' αυτό, η απόκτηση της γνώσης είναι και μια διαδικασία κατασκευής. Είναι χρήσιμο για τους εκπαιδευόμενους να διαπιστώσουν ότι μπορούν να «κάνουν» εκτός από το να μάθουν μαθηματικά.
- Η γνώση που αποκτιέται, εξαρτάται άμεσα από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτήθηκε. Οι εισαγωγικές δραστηριότητες που προτείνει ο διδάσκων – εκπαιδευτής καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το πόσο επιτυχώς και σε συνδυασμό με την προηγούμενη εμπειρία του, ο εκπαιδευόμενος θα επικοινωνήσει με τη νέα γνώση που θα παραχθεί.

Οι παραπάνω αρχές διδασκαλίας υποστηρίζονται από κατάλληλες εκπαιδευτικές μεθόδους και τεχνικές. Η εξατομικευμένη διδασκαλία, η ομαδοκεντρική διδασκαλία, η μέθοδος σχεδίου δράσης (project), της δημιουργίας φακέλου του εκπαιδευόμενου (portfolio), είναι εκπαιδευτικές μέθοδοι που προσφέρονται για την εξυπηρέτηση των ειδικών εκπαιδευτικών στόχων και των αρχών διδασκαλίας που προαναφέρθηκαν. Για την υλοποίηση κάθε μιας από τις εκπαιδευτικές αυτές μεθόδους μπορεί να χρησιμοποιηθούν τεχνικές όπως η εισήγηση, η συζήτηση, οι ερωταπαντήσεις, η πρακτική άσκηση, η λύση προβλήματος, η μαθηματική αντιμετώπιση καθημερινού προβλήματος, η σχηματική αναπαράσταση μαθηματικού προβλήματος, η μελέτη περίπτωσης (πραγματικό ή σχεδιασμένο περιστατικό όπου εμπλέκονται και μαθηματικά), ο καταιγισμός ιδεών κ.α. Έχει δε παρατηρηθεί ότι στην πράξη, πολλές φορές γίνεται ένας συνδυασμός των εκπαιδευτικών μεθόδων και τεχνικών, άλλοτε προγραμματισμένα και άλλοτε αυθόρμητα. Η επιλογή και οι συνδυασμοί τους που κάθε φορά καθορίζεται: από τον ιδιαίτερο χαρακτήρα της θεματικής ενότητας που διδάσκεται, από τη δυναμική των εκπαιδευομένων, από την προτεραιότητα στους εκπαιδευτικούς στόχους που θέτουν κάθε φορά οι εκπαιδευόμενοι ή ο διδάσκων.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

3.1 Η αξία των πιθανοτήτων

Σήμερα η έννοια της πιθανότητας παίζει σημαντικό ρόλο στην καθημερινότητά μας καθώς χρησιμοποιούμε τις πιθανότητες είτε συνειδητά είτε όχι για τη λήψη σημαντικών ή και ασήμαντων αποφάσεων. Ως κλάδος των μαθηματικών, έχουν τις ρίζες τους στα τυχερά παιχνίδια, καθώς το 1654 οι Fermat και Pascal κλήθηκαν να απαντήσουν στο ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει καθένας από τους δύο παίκτες ενός τυχερού παιχνιδιού με τραπουλόχαρτα της εποχής τους. Έτσι λοιπόν δεν είναι καθόλου περίεργο που τα πιο συνηθισμένα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων σχετίζονται με τραπουλόχαρτα, με ρίψη νομισμάτων, ζαριών καθώς και με πραγματικές καταστάσεις από την καθημερινή μας ζωή. Μάλιστα τέτοιου είδους παραδείγματα είναι χρήσιμα για να μπορέσουν οι μαθητές να ξεπεράσουν αρκετές παρανοήσεις, Shaughnessy, 1992. Εικόνες και διαγράμματα είναι επίσης πολύ χρήσιμα εργαλεία για τις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, Peck, Olsen, και Devore 2001, McCabe, Moore, και Yates 1999, Diezmann και English 2001. Η χρήση τέτοιων εργαλείων ενισχύεται και από χρήση των Η/Υ στην τάξη. Η τεχνολογία μπορεί να προσφέρει νέους τρόπους παρουσίασης και ταυτόχρονα να προσθέσει και αρκετό ενδιαφέρον. Μπορεί βέβαια να έχουμε και αρνητικά αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα χάσιμο χρόνου, για αυτό ο δάσκαλος πρέπει να εκτιμήσει πόσο και σε ποιες ενότητες η τεχνολογία είναι χρήσιμη στους μαθητές στην προσπάθειά τους να μάθουν τη θεωρία των πιθανοτήτων.

3.2 Προβλήματα κατανόησης των εννοιών των πιθανοτήτων

Πέντε έννοιες είναι σημαντικές στη μάθηση των πιθανοτήτων: *η έννοια του δειγματικού χώρου, η πειραματική πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε αντίθεση με τη θεωρητική, η σύγκριση των πιθανοτήτων, η έννοια της ανεξαρτησίας δύο (ή και περισσότερων) ενδεχομένων καθώς και η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας* (Jones & al., 1999b).

1. Η έννοια του δειγματικού χώρου και το μέγεθός του

Οι μαθητές όταν εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, συχνά αγνοούν την εμπλοκή του μεγέθους του δειγματικού χώρου (π.χ. συγκρίνουν την πιθανότητα

να έρθουν 2 κεφαλές σε 3 ρίψεις σε σχέση με την πιθανότητα να έρθουν 200 κεφαλές σε 300 ρίψεις). Αυτού του είδους το λάθος συχνά συνδέεται και με την μη κατανόηση του νόμου των μεγάλων αριθμών, Kahneman and Tversky, 1972. Κατά τον ίδιο τρόπο, μπερδεύονται όταν τους δίνεται μια πληροφορία για την πιθανότητα να επαναληφθεί ένα ενδεχόμενο, σε σχέση με την πιθανότητα να συμβεί το απλό ενδεχόμενο (πιθανότητα 70% βροχοπτώσεων για 10 ημέρες σε σχέση με την πιθανότητα βροχής μιας ημέρας (πχ αύριο), Konold, 1989.

2. Η πειραματική - εμπειρική και η θεωρητική πιθανότητα

Συχνά, οι μαθητές εκτιμούν την πιθανότητα να συμβεί κάποιο ενδεχόμενο και στη συνέχεια πειραματικά βλέπουν ότι έχουν κάνει κάποια παρανόηση και σίγουρα λαθεμένο συλλογισμό. Παρόλα αυτά προτιμούν να αμφισβητούν τα πειραματικά τους δεδομένα που έρχονται σε αντίθεση με τις εκτιμήσεις του, παρά να ανακατασκευάσουν τη σκέψη τους ώστε να την προσαρμόσουν στα πειραματικά δεδομένα, DelMas, Garfield and Chance, 1997). Αυτά τα λάθη κατά την εκτίμηση των πιθανοτήτων γίνονται γιατί χρησιμοποιούν δύο απλοποιημένες τεχνικές: της αντιπροσωπευτικότητας (representativeness) και της διαθεσιμότητας (availability). Με τη χρήση της αντιπροσωπευτικότητας (η παρανόηση αυτή ελαττώνεται με την ηλικία) βλέποντας ότι τα αποτελέσματα ορισμένων ρίψεων ενός νομίσματος είναι [ΚΚΚΓΚΚΚ] εκτιμούν ότι το [Κ] είναι πιθανότερο από το [Γ] στην επόμενη ρίψη. Το ίδιο συμβαίνει και στην πλάνη του παίκτη (gambler's fallacy) με πιθανότερο το [Γ]. Με τη χρήση της διαθεσιμότητας οι μαθητές προβλέπουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου βασισμένοι στην ευκολία με την οποία παραδείγματα αυτού του ενδεχομένου μπορούν να κατασκευάσουν ή να θυμηθούν. Για παράδειγμα εκτιμούν ότι η πιθανότητα βροχής μια ημέρα είναι διαφορετική αν έχουν πρόσφατα υποστεί αρκετές βροχερές ημέρες, Shaughnessy, 1981.

3. Η σύγκριση πιθανοτήτων

Συχνά οι μαθητές, δίνουν μεγαλύτερη πιθανότητα στην τομή δύο ενδεχομένων σε σχέση με το κάθε ενδεχόμενο χωριστά (Kahneman and Tversky, 1983), καθώς επίσης βαφτίζουν ενδεχόμενα ως ισοπίθανα, από την αναφορά τους και μόνο στο δειγματικό χώρο (η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 7 ρίχνοντας 2 ζάρια είναι η ίδια με την πιθανότητα να φέρουμε 2), Lecoutre, 1992.

4. Η έννοια της ανεξαρτησίας

Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνειδητοποιήσουν ότι η εξάρτηση δεν συνεπάγεται την αιτιότητα (η ζωή εξαρτάται από το οξυγόνο, αλλά το οξυγόνο δεν συνεπάγεται ζωή), ότι δύο αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα δεν είναι κατ' ανάγκη και συμπληρωματικά και τη διάκριση ανάμεσα στα αντίθετα ενδεχόμενα και στα αλληλοσυγκρουόμενα ενδεχόμενα, Kelly and Zwiers, 1988.

5. Η δεσμευμένη πιθανότητα

Οι μαθητές, κατά τον υπολογισμό μιας δεσμευμένης πιθανότητας πέφτουν σε τρεις τύπους λαθών: πιστεύουν πως «ο άξονας του χρόνου» περιορίζει ένα ενδεχόμενο από το να είναι υπό συνθήκη ενδεχόμενο (Falk Phenomenon), Falk (1988), συναντούν δυσκολίες να προσδιορίσουν το υπό συνθήκη ενδεχόμενο, Falk (1988), και

μπερδεύουν τη συνθήκη με την αιτιότητα με αποτέλεσμα να υπολογίζουν την $P(B/A)$ ενώ τους ζητείται η $P(A/B)$ (όπως στο πρόβλημα του θετικού test και της ασθένειας), Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C., Hardiman, P., and Cobb, G. (1987). Αν οι μαθητές εξασκηθούν συστηματικά με παραδείγματα παρμένα από την καθημερινή τους ζωή, αυτού του είδους οι παρανοήσεις μπορούν να βελτιωθούν, Shaughnessy, 1992.

3.3 Προτάσεις για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων

Η ιδέα του Piaget (1970) ότι οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών βελτιώνονται με την ηλικία και την κατάλληλη διδασκαλία, έγινε το επίκεντρο αρκετών ερευνητικών προσπαθειών (Fischbein και Gazit, 1984, Fischbein, Pamru και Manzat 1970a, 1970b). Σε δύο έρευνες με δείγματα 3000 και 1600 μαθητές ηλικίας από επτά έως δέκα έξι ετών, ο Green (1982, 1988) διαπίστωσε ότι η δυνατότητά τους να χειριστούν απλά πιθανολογικά προβλήματα βελτιώθηκε και με την αύξηση της ηλικίας αλλά και με την παραδοσιακή διδασκαλία των πιθανοτήτων. Σε προβλήματα όμως που είχαν περισσότερες απαιτήσεις, η βελτίωση είτε με την αύξηση της ηλικίας, είτε με τη διδασκαλία των πιθανοτήτων με παραδοσιακές μεθόδους, έφερε ελάχιστη βελτίωση.

Μετά από αυτήν την έρευνα, ο Green (1987), με σκοπό να βελτιώσει την κατανόηση των πιθανοτήτων από τους μαθητές, πρότεινε η διδασκαλία των πιθανοτήτων να γίνεται με χειροπιαστές δραστηριότητες μέσα στην τάξη. Ο Fischbein που κι αυτός ερευνούσε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βελτιώσουμε την κατανόηση των πιθανοτήτων από τους μαθητές με χρήση των αρχικών αντιλήψεών τους, κατέληξε ότι οι αυτές (οι αρχικές τους αντιλήψεις) μπορούν να επηρεαστούν μέσα από κατάλληλη διδασκαλία. Ο Fischbein (1987) θεωρεί ότι η κατάλληλη διδασκαλία μπορεί να βελτιώσει τις αρχικές ιδέες των μαθητών στις πιθανότητες και κάνει μια διάκριση μεταξύ των αρχικών και δευτερογενών ιδεών. Αρχικές είναι οι ιδέες και τα πιστεύω που έχουν οι μαθητές προτού υποβληθούν στην εκπαιδευτική παρέμβαση και δευτερογενείς τις αναδομημένες γνωστικές πεποιθήσεις που αποδέχονται και χρησιμοποιούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της διδακτικής παρέμβασης αλλά και της εμπειρίας που αποκτούν.

Ο Fischbein πιστεύει ότι αυτό μπορεί να γίνει μέσα από τη διδακτική παρέμβαση με πρακτικές δραστηριότητες και όχι μόνο μέσω λεκτικών εξηγήσεων. Αποδέχεται ότι «οι διαισθήσεις είναι πάντα το προϊόν της προσωπικής εμπειρίας, της προσωπικής συμμετοχής του ατόμου σε μια ορισμένη πρακτική ή θεωρητική δραστηριότητα» (σελ. 213). Προτείνει ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι να καταστήσει τους μαθητές ενήμερους για τα σιωπηρά διαισθητικά πρότυπα που είναι παρόντα στη σκέψη τους (αρχικές ιδέες) και να τους αναπτύξει τη δυνατότητα να ελέγχουν τις αρχικές τους αντιλήψεις τους (και προκαταλήψεις τους) χτίζοντας νέες δευτερογενείς αντιλήψεις (δευτερογενείς ιδέες) σύμφωνες με μια επίσημη δομή. Δηλώνει: «οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών είναι συνήθως τόσο ανθεκτικές που μπορούν να συνυπάρξουν με νέες ανώτερες και επιστημονικά αποδεκτές. Αυτή η κατάσταση πολύ συχνά δημιουργεί ασυνέπειες στις αντιδράσεις των μαθητών ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Ένας μαθητής μπορεί να καταλάβει λογικά και διαισθητικά πως αν πετάξει ένα νόμι-

σμα αρκετές φορές, κάθε αποτέλεσμα έχει την ίδια πιθανότητα. Εντούτοις μπορεί ακόμα να αισθανθεί διαισθητικά, ότι μετά από 3-4 φορές διαδοχικά «ΓΡΑΜΜΑΤΑ», υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρει «ΚΕΦΑΛΗ» στην επόμενη ρίψη» (σελ. 213). Ο Fischbein θεωρεί ότι ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να αναπτύξει στους σπουδαστές την ικανότητα να διακρίνουν μεταξύ των διαισθητικών πεποιθήσεων, των διαισθητικών συναισθημάτων και των τυπικά υποστηριγμένων πεποιθήσεων (σελ. 209).

Οι Borovcnik and Bentz (1991), προτείνουν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία των πιθανοτήτων δημιουργεί πολύ λίγες συνδέσεις μεταξύ των αρχικών ιδεών (αντιλήψεων) του αρχάριου μαθητή και της ευδιάκριτης κωδικοποιημένης μαθηματικής θεωρίας. Προτείνουν ότι η διδασκαλία πρέπει να αρχίσει από τις αρχικές διαισθήσεις των μαθητών, προσπαθώντας να τις αλλάξει και να τις αναπτύξει. Ο Borovcnik (1990) επισημαίνει ότι μια λογική προσέγγιση σκέψης αλλά και μια αιτιώδης προσέγγιση σκέψης είναι συμβατές στο διαισθητικό επίπεδο, και ότι η διδασκαλία πρέπει να αναπτύξει τις δευτερεύουσες διαισθήσεις που διευκρινίζουν πώς η πιθανολογική σκέψη συσχετίζεται με αυτές τις προσεγγίσεις. Ίσως η τρέχουσα διδασκαλία των πιθανοτήτων να δημιουργεί ελάχιστες έως και μηδενικές συνδέσεις με την αιτιοκρατική σκέψη των μαθητών και να μην την βελτιώνει με μια πιθανολογική ερμηνεία.

Οι Pfannkuch και Brown (1996) χρησιμοποίησαν διδακτική παρέμβαση με χρήση κατάλληλων δραστηριοτήτων με σκοπό να έρθουν σε ρήξη με τις αρχικές ιδέες των μαθητών και στη συνέχεια να αυξήσουν την κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας με αρκετή επιτυχία. Σε παρόμοια έρευνα οι Barz (1970) και Shaughnessy (1977) απέδειξαν ότι η διδασκαλία των πιθανοτήτων μέσα από την πρακτική ενασχόληση των μαθητών με κατάλληλες δραστηριότητες οδηγούσαν σε καλύτερες επιδόσεις των μαθητών σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Ο Shaughnessy, 1977 σε μια άλλη μελέτη του στο πώς πρέπει να διδάξουμε την έννοια της πιθανότητας με τρόπο ώστε να αυξηθεί η κατανόηση των μαθητών, έδειξε ότι οι παρερμηνείες-παρανοήσεις των μαθητών μπορούν να διορθωθούν με κατάλληλη καθοδήγηση. Αυτή συνοδεύτηκε από χειροπιαστά πειράματα και δραστηριότητες των μαθητών, μέσα από τις οποίες οι μαθητές μόνοι τους ανακάλυπταν τις αρχές και τους νόμους των πιθανοτήτων.

Οι Falk and Konold (1992) δηλώνουν: «... Στη μάθηση της έννοιας της πιθανότητας, πιστεύουμε ότι ο μαθητής πρέπει να υποβληθεί σε μια επανάσταση στον τρόπο που σκέφτεται ... Συμφωνούμε ότι πρέπει να αρχίσουμε της διαδικασία της εκμάθησης των πιθανοτήτων από τις ακλόνητες βασικές σωστές ιδέες (διαισθήσεις) των μαθητών» (σελ. 151, 152). Ειδικά για ενήλικες μαθητές ο Konold (1995) ισχυρίζεται ότι έχουν ορισμένες έντονα αποθηκευμένες ιδέες για την έννοια της πιθανότητας που, σε πολλές περιπτώσεις, έρχονται σε αντίθεση με την αποδεκτή θεωρία. Η ύπαρξη αυτών των διαισθήσεων μπορεί να εξηγήσει, εν μέρει, γιατί η μάθηση της θεωρίας των πιθανοτήτων είναι ιδιαίτερα προβληματική. Συνοψίζοντας ο ίδιος αποτελέσματα ερευνών του, καταλήγει ότι οι μαθητές και ειδικά οι ενήλικες μαθητές έρχονται στις τάξεις με μερικές βαθιά ριζωμένες αλλά συνήθως ανακριβείς αντιλήψεις-πεποιθήσεις που αποδεικνύονται εξαιρετικά δύσκολο να αλλάξουν γιατί ένας μαθητής μπορεί να κρατήσει πολλαπλάσιες και συχνά αντιφατικές πεποιθήσεις για μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Οι Shaughnessy, 1977 και DelMas and Bart, 1987, πιστεύουν κι αυτοί με τη σειρά τους ότι οι μαθητές με κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορούν να ξεπεράσουν τα

προβλήματά τους στις πιθανότητες. Πρέπει βέβαια να καθοδηγηθούν με κατάλληλα πειράματα, ώστε πρώτα να μαντέψουν το αποτέλεσμα, στη συνέχεια να επαναλάβουν το πείραμα αρκετές φορές ώστε να μαζέψουν δεδομένα και στη συνέχεια με κατάλληλη χρήση των δεδομένων τους να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν την αρχική τους εκτίμηση, Στη συνέχεια το τελικό βήμα είναι να οικοδομήσουν (με τη βοήθεια των δασκάλων) ένα θεωρητικό μοντέλο συνεπές με τα πειραματικά τους δεδομένα.

Όλες οι προηγούμενες αναφορές από τη διεθνή βιβλιογραφία, τονίζουν την αναγκαιότητα οι μαθητές που διδάσκονται τις έννοιες των πιθανοτήτων να συμμετέχουν σε πειράματα, να παίξουν παιχνίδια πιθανοτήτων, να χρησιμοποιήσουν γραφικές αναπαραστάσεις, να προσομοιώσουν πιθανολογικές καταστάσεις στον υπολογιστή τους και προκειμένου να αποκτήσουν ένα εμπειρικό υπόβαθρο για το μέτρο της πιθανότητας. Τέτοιες καλά σχεδιασμένες δραστηριότητες είναι απαραίτητες στη διδασκαλία των πιθανοτήτων για να γενικεύσουν αυτό που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε «Σωκρατική αντιμετώπιση» των νόμων των πιθανοτήτων (Grey, Holmes, Barnett και Constable, 1983, Davidson και Swift, 1988). Αυτές οι δραστηριότητες δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευόμενους καλύτερης ανάλυσης των πιθανολογικών καταστάσεων και παράλληλα την ευχέρεια στην καλύτερη κατανόηση των νόμων των πιθανοτήτων.

Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα, η διδακτική μας παρέμβαση προτείνει μια προσέγγιση στις έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία των πιθανοτήτων, που σκοπό έχει να βοηθήσει τους ενήλικες εκπαιδευόμενους να κατανοήσουν τις παραπάνω έννοιες εργαζόμενοι πάνω σε κατάλληλες δραστηριότητες. Ταυτόχρονα αναπαριστώντας τα διάφορα ενδεχόμενα με εικόνες δείχνουμε στους εκπαιδευόμενους πως μπορούμε ένα διάγραμμα Venn ή ένα δενδροδιάγραμμα να το ενσωματώσουμε σε μια ενιαία διαδικασία επίλυσης πιθανολογικών προβλημάτων. Γεγονός που παρέχει στους μαθητές ένα γραφικό μηχανισμό επίλυσης πιθανολογικών προβλημάτων χωρίς να τους αναγκάζουμε να αποστηθίζουν σύνθετους τύπους. Όλες οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκαν οι εκπαιδευόμενοι, υποστηρίχτηκαν από κατάλληλες για την κάθε περίπτωση εκπαιδευτικές μέθοδοι (κυρίως με την ομαδοκεντρική διδασκαλία, μέθοδος που προσφέρεται για την εξυπηρέτηση των ειδικών εκπαιδευτικών στόχων και των αρχών διδασκαλίας ενήλικων εκπαιδευόμενων). Για την υλοποίηση κάθε μιας από τις εκπαιδευτικές μεθόδους, χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές όπως η εισήγηση, η συζήτηση, οι ερωταπαντήσεις, η πρακτική άσκηση, η λύση προβλήματος, η μαθηματική αντιμετώπιση καθημερινού προβλήματος, η σχηματική αναπαράσταση μαθηματικού προβλήματος, ο καταγιτισμός ιδεών κ.α. Στην πράξη βέβαια, πολλές φορές έγινε από τον διδάσκοντα καθηγητή συνδυασμός των παραπάνω εκπαιδευτικών τεχνικών, άλλοτε προγραμματισμένα και άλλοτε αυθόρμητα.

ΜΕΡΟΣ Β

ΕΡΕΥΝΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Σκοπός αυτής της έρευνας είναι η διερεύνηση των αποτελεσμάτων μιας εναλλακτικής διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων σε ενήλικες μαθητές, που λαμβάνει υπόψη της τις παρανοήσεις-παρερμηνείες των μαθητών που η βιβλιογραφία έχει καταγράψει, με εποικοδομιστικά χαρακτηριστικά. Η μελέτη των αποτελεσμάτων αυτής της έρευνας, θα συμβάλει στην οικοδόμηση χρήσιμης εμπειρίας στο εκπαιδευτικό πλαίσιο της χώρας μας, σχετικά με το αν αυτή η διδακτική πρόταση παρέχει αυξημένες ευκαιρίες μάθησης, ειδικά σε ενήλικες εκπαιδευόμενους. αφού μέχρι τώρα οι έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας είναι ελάχιστες και οι περισσότερες αναφέρονται σε μαθητές της τυπικής εκπαίδευσης. Παράλληλα η έρευνα αυτή είναι χρήσιμη και στους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά και συγκεκριμένα το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων σε μαθητές της τυπικής εκπαίδευσης.

4.2 Στοιχεία του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από τους ενήλικες μαθητές του Β' έτους του Σχολείου Δεύτερης Ευκαιρίας του Βόλου της σχολικής περιόδου 2006-2007. Συγκεκριμένα συμμετείχαν 43 ενήλικες εκπαιδευόμενοι, 7 άνδρες και 36 γυναίκες, που αποτελούσαν και τα τρία τμήματα του Β' έτους του Σχολείου. Η μέση ηλικία όλου του πληθυσμού ήταν 42 ετών, ενώ η μέση ηλικία των γυναικών 44 και των ανδρών 32 αντίστοιχα. Από τους 43 μαθητές οι 23 ήταν εργαζόμενοι (17 γυναίκες και 6 άνδρες), οι 11 άνεργοι (10 γυναίκες και 1 άνδρας) και οι υπόλοιποι 9 συνταξιούχοι (9 γυναίκες

και 0 άνδρες). Συγκεντρωτικά τα στοιχεία των εκπαιδευομένων παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα 1.

	Εργαζόμενοι	Άνεργοι	Συνταξιούχοι	Σύνολο
Γυναίκες (Μέση ηλικία 44)	17	10	9	36
Άνδρες (Μέση ηλικία 32)	6	1	0	7
Σύνολο (Μέση ηλικία 42)	23	11	9	43

4.3 Η διαδικασία της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τη χρονική περίοδο Μαρτίου – Απριλίου του 2007, αφού προηγουμένως προηγήθηκε συνεργασία με τον διευθυντή του Σχολείου καθώς και με τον διδάσκοντα καθηγητή των μαθηματικών των τριών τμημάτων του Β' έτους στους οποίους εξηγήθηκαν οι στόχοι και η σημασία της έρευνας καθώς και η σημασία της δικής τους συμμετοχής. Στα πλαίσια αυτής της συνεργασίας βρέθηκε και το κατάλληλο χρονικό διάστημα στο οποίο θα γινόταν η διδακτική παρέμβαση. Επίσης συμφωνήθηκε και πραγματοποιήθηκε προηγουμένως μια σύντομη ενημέρωση των εκπαιδευομένων σχετικά με την έρευνα. Τους εξηγήθηκαν οι όροι συνεργασίας μαζί τους, τους δόθηκε η διαβεβαίωση ότι υπάρχει απόρρητο των προσωπικών τους στοιχείων καθώς και των απαντήσεων που θα έδιναν και στο τέλος τους ζητήθηκε να απαντούν με ειλικρίνεια και αυθορμητισμό στις ερωτήσεις που θα τους γίνονταν. Όλοι τους δέχτηκαν με μεγάλο ενδιαφέρον και προθυμία.

Στη συνέχεια και σε συνεργασία με τον καθηγητή που θα έκανε τη διδακτική παρέμβαση, συμφωνήθηκαν τα παρακάτω:

1. σε κάθε εκπαιδευόμενο να δοθεί το «Τετράδιο του Μαθητή», τμήμα του έντυπου υλικού που σχεδιάστηκε ειδικά για την έρευνα αυτή, με τη θεωρία του κεφαλαίου.
2. στον ίδιο να δοθεί το «Βιβλίο του Καθηγητή» τμήμα του έντυπου υλικού που σχεδιάστηκε με σκοπό να καθοδηγήσει και να βοηθήσει τον καθηγητή βήμα – βήμα σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας καθώς και τα «Φύλλα Εργασίας» τα οποία θα έδινε σε κάθε μάθημα στους μαθητές.
3. οι εκπαιδευόμενοι να εργάζονται σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων με κοινό θέμα εργασίας. Η επιλογή των μαθητών στις ομάδες θα ήταν η ίδια με αυτή που είχε καθοριστεί από την αρχή της σχολικής χρονιάς.

- να προηγηθούν 2 διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία της έννοιας των συνόλων και των βασικών πράξεών τους, έννοιες που οι εκπαιδευόμενοι δεν είχαν διδαχθεί.
- τέλος η συνολική διάρκεια της διδασκαλίας να είναι 10 ώρες (4 ώρες τη βδομάδα) όπως προέβλεπε το κανονικό πρόγραμμα του Σχολείου, χωρίς καμία αλλαγή χρόνου ή αίθουσας.

Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε βασιζόμενη στις εξής φάσεις:

- Συμπλήρωση αρχικού ερωτηματολογίου (pretest).** Κατά την έναρξη της 10ωρης διδακτικής παρέμβασης και στην αρχή της πρώτης διδακτικής ώρας, οι εκπαιδευόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο (pre-test) που δημιουργήθηκε για να καταγράψει τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι ενήλικες μαθητές όταν καλούνται να υπολογίσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος σε πιθανολογικές καταστάσεις με χρήση οικείων αντικειμένων όπως ζάρια, κέρματα, τραπουλόχαρτα και άλλα, χωρίς να έχουν διδαχτεί προηγουμένως πιθανότητες.
- Διδακτική παρέμβαση.** Η διδασκαλία του κεφαλαίου των πιθανοτήτων έγινε με βάση το έντυπο υλικό που δημιουργήθηκε για το σκοπό αυτό. Το «Τετράδιο του Μαθητή», που αποτελείται από τέσσερις ενότητες:
 - Πείραμα Τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα – Πράξεις με ενδεχόμενα,
 - Η έννοια της Πιθανότητας,
 - Νόμοι των Πιθανοτήτων και
 - Η Δεσμευμένη Πιθανότητα.Στην αρχή κάθε ενότητας, αναφέρονται οι κύριοι στόχοι της, κάτι χρήσιμο για τον διδάσκοντα, αλλά κύρια για τους εκπαιδευόμενους. Κι αυτό γιατί η γνώση των στόχων κάθε ενότητας, επηρεάζει τη στάση τους στην επιλογή της στρατηγικής που ακολουθεί ο διδάσκων. Στη συνέχεια κάθε ενότητα ξεκινά με μια δραστηριότητα που βρίσκεται όσο γίνεται πιο κοντά στα ενδιαφέροντα του εκπαιδευόμενου. Η δραστηριότητα οδηγεί στην εισαγωγή των εννοιών που θα διδαχθούν στη συνέχεια. Ενθαρρύνει τη συνεργασία και την ομαδική εργασία. Με κατάλληλα ερωτήματα δίνει τη δυνατότητα να δημιουργηθεί ένας προβληματισμός ανάμεσα στους εκπαιδευόμενους γύρω από το θέμα που διαπραγματεύονται, αλλά και στο διδάσκοντα τη δυνατότητα να προκαλέσει τη συμμετοχή των μαθητών του στη διαδικασία της μάθησης μέσα στην τάξη, ενθαρρύνοντας τη συνεργασία. Τα συμπεράσματα των δραστηριοτήτων στα οποία θα καταλήξουν οι μαθητές θα οδηγήσουν στο μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας. Το κύριο μέρος της ενότητας περιλαμβάνει τη βασική θεωρία, που πρέπει να μάθει, να συγκρατήσει και να μπορεί να εφαρμόσει ο εκπαιδευόμενος. Ταυτόχρονα περιλαμβάνονται αρκετά λυμένα παραδείγματα που σκοπό έχουν να δώσουν στον ενήλικα εκπαιδευόμενο να μάθει πως πρέπει να αντιμετωπίζει ανάλογα προβλήματα, να διαπιστώσει την ευρύτητα των εφαρμογών που έχουν τα μαθηματικά, να αποκτήσει νέες εμπειρίες επίλυσης προβλημάτων και γενικότερα να διευρύνει τις γνώσεις του.
- Φύλλα Εργασίας.** Τα ερωτηματολόγια (φύλλα εργασίας) που πρέπει οι εκπαιδευόμενοι να συμπληρώνουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας με τη βοή-

θεια και τις οδηγίες του διδάσκοντα. Είναι ερωτήσεις με τις οποίες δίνεται η δυνατότητα στο διδάσκοντα να διαπιστώσει το βαθμό επιτυχίας του μαθήματος, να αναδειχθούν νέες δυσκολίες και παρανοήσεις αλλά και να συζητηθούν διάφορα θέματα που σχετίζονται με το περιεχόμενο της ενότητας. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η πορεία των μαθηματικών γνώσεων που ακολουθείται σε κάθε ενότητα και η οποία καθορίζει και τη διδακτική πορεία του διδάσκοντα, είναι η σύνθεση της επαγωγικής και παραγωγικής πορείας. Η εισαγωγική δραστηριότητα κάθε ενότητας παροτρύνει τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία, που στην προσπάθεια επαλήθευσής της οδηγεί στην διατύπωση ενός νόμου. Η καλή κατανόηση του νόμου μέσω των λυμένων παραδειγμάτων οδηγεί στο στάδιο των εφαρμογών.

4. **Συμπλήρωση τελικού ερωτηματολογίου (Post-test).** Μετά το τέλος της 10ωρης διδακτικής παρέμβασης και ειδικότερα προς το τέλος της σχολικής χρονιάς, οι εκπαιδευόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν στο ίδιο ερωτηματολόγιο (Pre-test) που είχε δημιουργηθεί για να καταγράψει τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι ενήλικες μαθητές όταν καλούνται να υπολογίσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος σε πιθανολογικές καταστάσεις με χρήση οικείων αντικειμένων όπως ζάρια, κέρματα, τραπουλόχαρτα

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

5.1 Το αρχικό ερωτηματολόγιο – Pre-test

1^η Ομάδα Ερωτήσεων (1-3-9)

Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του (Kahneman et al, 1982) όταν οι ερωτηθέντες έρχονται αντιμέτωποι με μια πιθανολογική κατάσταση, συχνά εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, βασιζόμενοι στο πόσο καλά αυτό το ενδεχόμενο αντιπροσωπεύει αυτόν τον πληθυσμό. Αυτή η στρατηγική βασίζεται στην *αντιπροσωπευτικότητα της δοσμένης πληροφορίας (representativeness)*. Ένας τύπος αυτών των στρατηγικών είναι *γνωστή πλάνη του παίκτη (gambler's fallacy)*, όπου κάποιος για παράδειγμα πιστεύει ότι μετά από πέντε συνεχόμενες ΚΕΦΑΛΕΣ που εμφανίζονται κατά τη ρίψη ενός νομίσματος, το επόμενο αποτέλεσμα που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί είτε θα είναι διαφορετικό (negative recency effect) ή θα είναι το ίδιο με τα προηγούμενα (positive recency effect). Και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται να αγνοείται η ανεξαρτησία της κάθε ρίψης του νομίσματος

Η ερώτηση με αριθμό 1, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

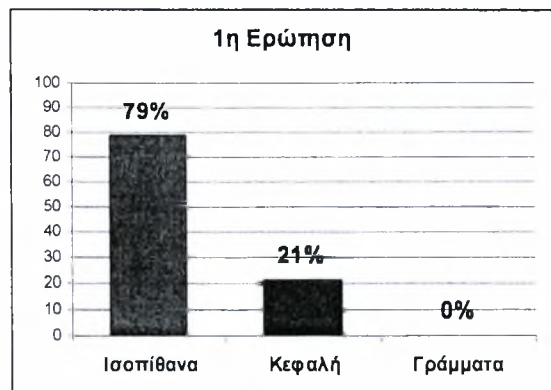
Η Αλέκα έριξε ένα νόμισμα πέντε φορές και πήρε κατά σειρά ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ. Η Αλέκα θα ξαναρίξει το νόμισμα. Είναι _____ .

A) πιθανότερο να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ).

B) πιθανότερο να πάρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Γ) το ίδιο πιθανό να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ) ή ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ). (Σωστή)

Στην ερώτηση αυτή οι εκπαιδευόμενοι απάντησαν σωστά σε μεγάλο ποσοστό (79%). Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι όλοι οι εκπαιδευόμενοι που απάντησαν λάθος (το υπόλοιπο 21%), επέλεξαν ως απάντηση το Α, δηλαδή ότι μετά από πέντε ΚΕΦΑΛΕΣ είναι πιθανότερο να εμφανιστεί και πάλι ΚΕΦΑΛΗ (positive recency effect), καθώς και το ότι ήταν όλες γυναίκες (κάτι που θα το σχολιάσουμε συνολικά και για τις τρεις ερωτήσεις 1,3,9).

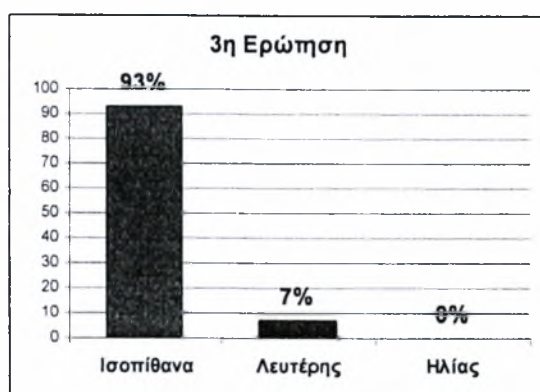


Η ερώτηση με αριθμό 3, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

Στο Τζόκερ πρέπει να επιλέξουμε 5 αριθμούς από ένα σύνολο 45 αριθμών και για Joker 1 αριθμό από ένα σύνολο 20 αριθμών. Ο Ηλίας διάλεξε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και για Joker τον αριθμό 13. Ο Λευτέρης διάλεξε τους αριθμούς 6, 12, 19, 24, 31 και για Joker τον αριθμό 13.

- A. Ο Ηλίας έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει.
- B. Ο Λευτέρης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει.
- Γ. Και οι δύο έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν. (Σωστή)

Με αυτή την ερώτηση εξετάσαμε κατά πόσο οι ενήλικες μαθητές πιστεύουν ότι οι αριθμοί που επιλέγει ο Ηλίας (1, 2, 3, 4, 5) είναι πιο αντιπροσωπευτικοί από τους αριθμούς που επιλέγει ο Λευτέρης (6, 12, 19, 24, 31). Όλοι σχεδόν οι εκπαιδευόμενοι απάντησαν σωστά (93%), εκτιμώντας ότι και οι δύο παίκτες έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν. Όσοι απάντησαν λάθος (το υπόλοιπο 7%), πιστεύουν ότι ο Λευτέρης έχει περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει.

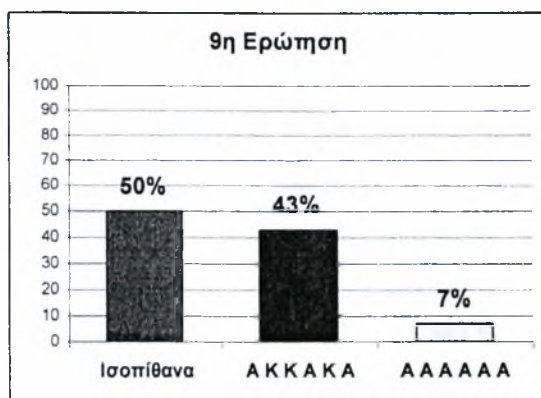


Η ερώτηση με αριθμό 9, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

Διαλέγουμε μια πολύτεκνη οικογένεια με 6 παιδιά. Αν συμβολίσουμε A το αγόρι και K το κορίτσι και αν μια σειρά της μορφής A K A K A K εκφράζει τη σειρά γέννησης των παιδιών, τότε η σειρά A K K A K A έχει _____ πιθανότητες να εμφανιστεί από τη σειρά A A A A A A.

- A. περισσότερες
- B. λιγότερες
- Γ. ίσες

Με την τελευταία ερώτηση αυτής της ομάδας, εξετάσαμε κατά πόσο οι ενήλικες μαθητές πιστεύουν ότι σε μια οικογένεια με έξι παιδιά η σειρά A K K A K A γέννησης των παιδιών της, είναι πιθανότερη από τη σειρά A A A A A A. Εδώ υπήρχε μια σημαντική διαφοροποίηση των απαντήσεων. Μισοί εκπαιδευόμενοι απάντησαν σωστά (50%), ότι δηλαδή και τα δύο ενδεχόμενα είναι ι-



σοπίθανα, αλλά σχεδόν άλλοι τόσοι (43%) απάντησαν ότι η πρώτη σειρά είναι πιθανότερη από τη δεύτερη. Μόνο ένα μικρό ποσοστό (7%) απάντησε ότι πιθανότερη σειρά γέννησης είναι η Α Α Α Α Α Α.

2^η Ομάδα Ερωτήσεων (2-4)

Ένας άλλος τύπος στρατηγικών που σχετίζονται με την αντιπροσωπευτικότητα είναι η *πλάνη του εύρους του δείγματος (effect of sample size)* ή και *νόμος των μικρών αριθμών (Law of small numbers)*, όπου κάποιος για παράδειγμα πιστεύει ότι κάθε δείγμα ενός πληθυσμού πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικής αναλογίας. Γενικά πιστεύεται ότι και σε πολύ μικρά δείγματα πρέπει να φαίνεται η διαδικασία με την οποία τα τυχαία γεγονότα γενικεύονται.

Η ερώτηση με αριθμό 2, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

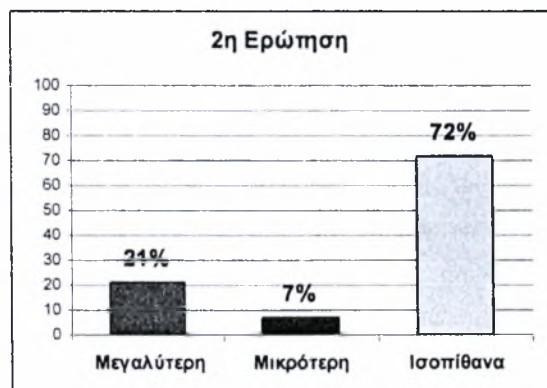
Το να έρθουν 2 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 3 ρίψεις ενός νομίσματος, έχει πιθανότητα να πραγματοποιηθεί _____ το να φέρουμε 200 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 300 ρίψεις.

A. μεγαλύτερη από (Σωστή)

B. μικρότερη από

Γ. ίδια με

Στην ερώτηση αυτή η μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευόμενων απάντησε λανθασμένα (72%) πιστεύοντας ότι επειδή η πιθανότητα να έρθει ΚΕΦΑΛΗ σε μία ρίψη ενός νομίσματος είναι ίση με την πιθανότητα να έρθει ΓΡΑΜΜΑΤΑ, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και όταν το πείραμα εκτελείται είτε 3 είτε 300 φορές. Ελάχιστοι (7%) απάντησαν επίσης λανθασμένα ότι είναι πιθανότερο να φέρουμε 200 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 300 ρίψεις, απ' ότι σε 2 σε 3 ρίψεις. Το υπόλοιπο 21% των εκπαιδευόμενων απάντησε σωστά.



Η ερώτηση με αριθμό 4, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

Στη πόλη μας υπάρχει μία δημόσια μαιευτική κλινική (στο Νοσοκομείο της πόλης) με 100 περίπου γεννήσεις το μήνα και μια ιδιωτική μαιευτική κλινική με 25 περίπου γεννήσεις το μήνα. Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι 50%, υπάρχουν όμως μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι αγόρια και μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι κορίτσια. Και στις δύο κλινικές καταγράφηκαν οι μήνες του χρόνου κατά τους οποίους γεννήθηκαν αγόρια

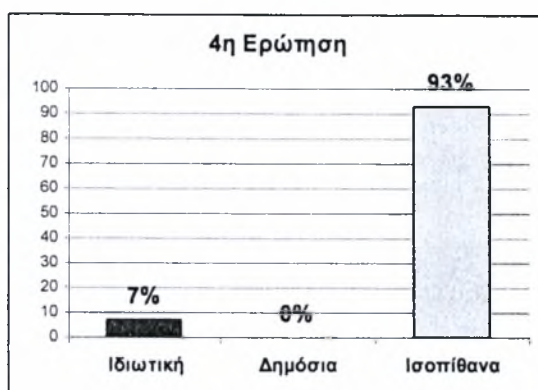
σε ποσοστό μεγαλύτερο του 60% των συνολικών γεννήσεων. Οι μήνες που οι γεννήσεις αγοριών ξεπέρασαν το 60% _____ .

A. ήταν περισσότεροι στη δημόσια κλινική του Νοσοκομείου.

B. ήταν περισσότεροι στην ιδιωτική κλινική.

Γ. ήταν οι ίδιοι και στις δύο κλινικές.

Στην ερώτηση αυτή σχεδόν όλοι οι εκπαιδευόμενοι, απάντησαν και πάλι λανθασμένα (93%) πιστεύοντας ότι και στη μεγάλη δημόσια κλινική και στη μικρή ιδιωτική, οι μήνες όπου καταγράφηκαν γεννήσεις αγοριών άνω του 60% ήταν οι ίδιοι. Κανείς από τους ενήλικες μαθητές (0%) δεν απάντησε υπέρ της δημόσιας κλινικής, ενώ μόνο ελάχιστοι (το 7%) απάντησε σωστά, ότι πιθανότερο είναι να συμβεί το παραπάνω γεγονός στην ιδιωτική κλινική, όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, παρά στη δημόσια.



3^η Ομάδα Ερωτήσεων (5-8)

Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του ένας άλλος τύπος στρατηγικής που σχετίζεται με την αντιπροσωπευτικότητα είναι η *πλάνη που βασίζεται σε δοσμένη πληροφορία (base rate fallacy)*, όπου οι ερωτηθέντες απαντούν επηρεασμένοι από τις δοσμένες πληροφορίες. Παρόμοια με αυτή τη στρατηγική, είναι και η στρατηγική που βασίζεται στη *διαθεσιμότητα της πληροφορίας (availability)*, σύμφωνα με την οποία (Shaughnessy, 1992) η πιθανότητα εμφάνισης ορισμένων ενδεχομένων εκτιμάται βάσει της ευκολίας με την οποία μπορούμε να ανακαλέσουμε στο μυαλό μας συγκεκριμένα περιστατικά ενός γεγονότος. Για παράδειγμα το ενδεχόμενο αύριο να βρέχει στο Βόλο, φαίνεται πιθανότερο σε κάποιον που έχει τις τελευταίες μέρες βρεθεί σε συνεχείς βροχοπτώσεις, από κάποιον που έχει να δει βροχή εδώ και μήνες. Η διαθεσιμότητα της προσωπικής μας εμπειρίας είναι κάτι που επηρεάζει τόσο τη γνώμη μας που μπορεί να βροχή στο Βόλο τη συγκεκριμένη περίοδο να είναι σπάνιο φαινόμενο και όχι κάτι που συμβαίνει με τη συχνότητα που εμείς νομίζουμε.

Η ερώτηση με αριθμό 5, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω:

Οι αναμετρήσεις ΑΕΚ και Παναθηναϊκού έχουν την δική τους ξεχωριστή αίγλη. Σε σύνολο 56 αναμετρήσεων στη διάρκεια του επαγγελματικού πρωταθλήματος, ο Παναθηναϊκός υπερισχύει έχοντας συνολικά 22 νίκες έναντι 16 της ΑΕΚ. Δηλαδή ο Παναθηναϊκός έχει επικρατήσει στο 39% των αναμετρήσεων ενώ έχει ηττηθεί στο 28%.

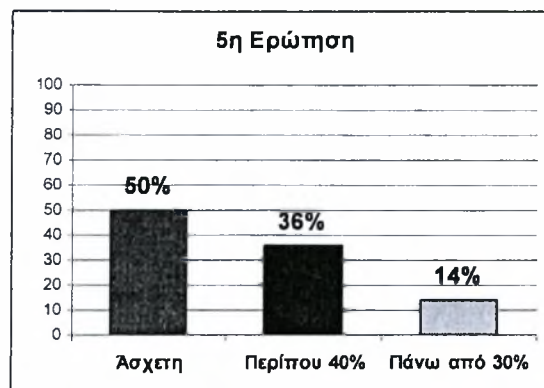
Στο ντέρμπι της Κυριακής η πιθανότητα να νικήσει ο Παναθηναϊκός είναι _____.

A. μεγαλύτερη από 30%.

B. περίπου ίση με 40%.

Γ. άσχετη με τα προηγούμενα (Σωστή).

Στην ερώτηση αυτή οι μισοί εκπαιδευόμενοι (50%) απάντησαν σωστά και δεν παρασύρθηκαν από τις δοσμένες πληροφορίες. Το μεγαλύτερο κομμάτι από τους υπόλοιπους (36%) παρασύρθηκε και απάντησε με βάση τις δοσμένες πληροφορίες και ένα μικρό ποσοστό (14%) απάντησε διαφορετικά. Αξιοσημείωτο είναι ότι κανείς από τους άντρες μαθητές δεν έδωσε την απάντηση B, όπου οδηγούσαν οι δοσμένες πληροφορίες. Αυτό ίσως να οφείλεται ότι όλοι τους σχεδόν ήταν φίλοι του αθλήματος (ποδόσφαιρο).



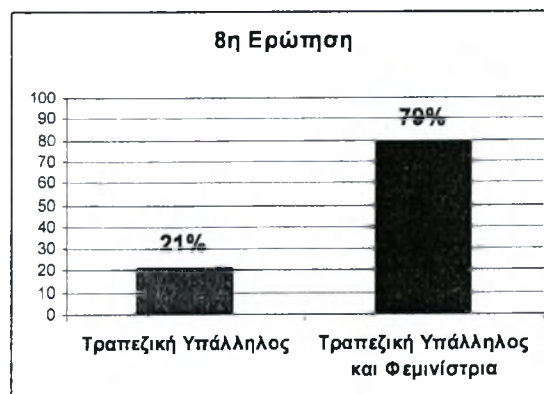
Η ερώτηση με αριθμό 5, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω

Η Αντιγόνη είναι 31 ετών, ειλικρινής και σπούδασε φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για θέματα κοινωνικού ρατσισμού και κοινωνικής δικαιοσύνης. Ποια από τις δύο παρακάτω προτάσεις θεωρείται πιο πιθανή;

A. Η Αντιγόνη είναι τραπεζική υπάλληλος.

B. Η Αντιγόνη είναι τραπεζική υπάλληλος και ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση.

Στην ερώτηση οι περισσότεροι εκπαιδευόμενοι (79%) απάντησαν λανθασμένα. Παρασύρθηκαν από τις δοσμένες πληροφορίες και απάντησαν ότι η Αντιγόνη είναι και τραπεζική υπάλληλος και φεμινίστρια. Οι υπόλοιποι απάντησαν σωστά (21%). Βέβαια στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι ενήλικες μαθητές χρησιμοποίησαν



και τη στρατηγική που ονομάζεται πλάνη της σύζευξης (conjunction fallacy), αλλά αυτή θα τη συζητήσουμε σε επόμενη ομάδα ερωτήσεων.

4^η Ομάδα Ερωτήσεων (7)

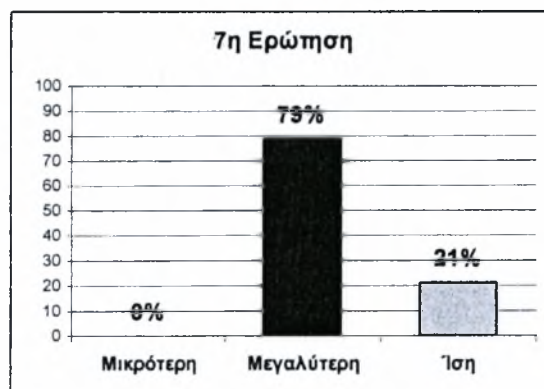
Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του μια άλλη στρατηγική είναι η *πλάνη της σύζευξης (conjunction fallacy)*, που είναι μια κοινή αντίληψη των πιθανοτήτων που βασίζεται στη διαίσθηση και υποστηρίζει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν δύο ενδεχόμενα ταυτόχρονα (αυτό στα μαθηματικά ονομάζεται τομή των δύο ενδεχομένων) είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ένα από τα δύο. Φυσικά το σωστό είναι το αντίθετο.

Η ερώτηση με αριθμό 7, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω

Η πιθανότητα κάποιο άτομο να είναι μεγαλύτερο των 55 ετών και να πάσχει από υπέρταση είναι _____ το να πάσχει απλά από υπέρταση (ανεξάρτητα της ηλικίας του).

A. μεγαλύτερη από B. μικρότερη από Γ. ίση με

Στην ερώτηση αυτή κανένας από τους εκπαιδευόμενους δεν απάντησε σωστά. Οι περισσότεροι από τους ενήλικες (79%) βασίστηκαν στη διαίσθηση και απάντησαν ότι πιθανότερο είναι το άτομο να είναι και μεγαλύτερος των 55 ετών και να έχει και υπέρταση. Οι υπόλοιποι (21%) απάντησαν επίσης λανθασμένα ότι και τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.



5^η Ομάδα Ερωτήσεων (6-10)

Σύμφωνα με τον Kahneman και τους συνεργάτες του η πλέον διαδεδομένη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν πιθανολογικές καταστάσεις, είναι η *υπόθεση των ισοπίθανων ενδεχομένων (equiprobable events ή compound and simple events)*. Μια από τις αιτίες που αυτή η στρατηγική είναι η πλέον διαδεδομένη ανάμεσα στους μαθητές είναι ότι σχεδόν όλες οι πιθανολογικές καταστάσεις που συζητούνται σε μια σχολική τάξη βασίζονται στην υπόθεση του ισοπίθανου αφού σχετίζονται με ζάρια, νομίσματα, χαρτιά κλπ).

Η ερώτηση με αριθμό 6, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω

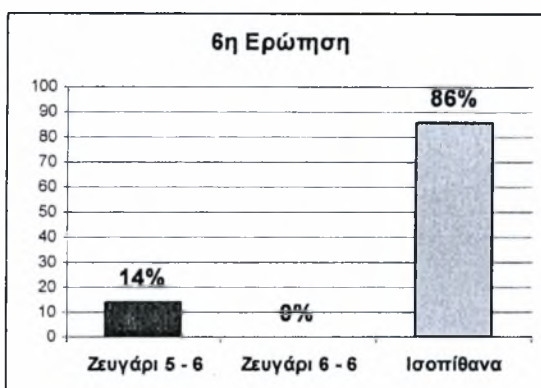
Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια (ένα πράσινο και ένα κόκκινο) ταυτόχρονα. Χωρίς να δώσουμε σημασία στο χρώμα των ζαριών, ποιο από τα παρακάτω έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί;

A. Να πάρουμε το ζευγάρι 5-6 (Σωστό).

B. Να πάρουμε το ζευγάρι 6-6.

Γ. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.

Στην ερώτηση αυτή σχεδόν όλοι οι εκπαιδευόμενοι θεώρησαν ότι τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και απάντησαν ότι τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (86%). Οι υπόλοιποι (14%) επέλεξαν το ζευγάρι 5-6 που είναι και η σωστή απάντηση (Fischbein, 1997). Ακριβώς το ίδιο συνέβη και στην επόμενη ερώτηση (10^η ερώτηση) που ακολουθεί.



Η ερώτηση με αριθμό 10, του αρχικού ερωτηματολογίου ήταν η παρακάτω

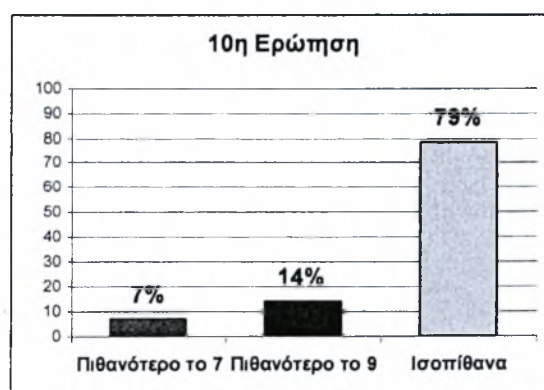
Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 7 είναι _____ με την πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 9.

A. μεγαλύτερη

B. μικρότερη

Γ. ίση

Και στην ερώτηση αυτή όπως και στην προηγούμενη, σχεδόν όλοι οι εκπαιδευόμενοι απάντησαν ότι και τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (79%). Λίγοι απάντησαν ότι πιθανότερο είναι να φέρουμε άθροισμα 9 (14%) και ακόμη λιγότεροι (7%) απάντησαν σωστά ότι πιθανότερο είναι να φέρουμε άθροισμα το 7.



5.2 Το 1^ο Φύλλο Εργασίας

1^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή απαιτεί από τους εκπαιδευόμενους να βρουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από δύο βήματα. Η ερώτηση είναι:

Ένα κουτί περιέχει έξι μπάλες. Τρεις άσπρες, δύο μαύρες και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα άλλη μία φορά (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση). Να σημειώσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Με την ερώτησης αυτή θέλαμε να διερευνήσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να βρίσκουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης καθώς και αν χρησιμοποιούν κάποια στρατηγική για αυτό ή όχι. Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι ένα μεγάλο ποσοστό (50%) έδωσε ολοκληρωμένη απάντηση. Πολλοί εκπαιδευόμενοι επίσης (42%) βρήκαν το δειγματικό χώρο αλλά με λάθη ή παραλείψεις. Τέλος ελάχιστοι (8%) δεν απάντησαν στην ερώτηση. Η μεγάλη πλειοψηφία των ερωτηθέντων (69%) για να μπορέσει να απαντήσει στο ερώτημα χρησιμοποίησε δένδροδιάγραμμα. Οι υπόλοιποι (31%) είτε δεν χρησιμοποίησαν καμία στρατηγική ή τουλάχιστον αυτό δεν έγινε φανερό.

1 ^η Ερώτηση	Ποσοστό	Χρήση στρατηγικής
Σωστή απάντηση	50%	100%
Απάντηση με λάθη	42%	45%
Καμία απάντηση	8%	0%

2^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή είναι συνέχεια της προηγούμενης και απαιτεί από τους εκπαιδευόμενους να βρουν το δειγματικό χώρο του ίδιου πειράματος μόνο που τώρα η επιλογή γίνεται χωρίς επανατοποθέτηση. Η ερώτηση είναι:

Ένα κουτί περιέχει έξι μπάλες. Τρεις άσπρες, δύο μαύρες και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της αλλά δεν την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα άλλη μία φορά (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση). Να σημειώσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Η ερώτηση αυτή δυσκολεύει αρκετά την εύρεση του δειγματικού χώρου χωρίς κάποια στρατηγική (δενδροδιάγραμμα). Επιπλέον υπάρχει ακόμη ένα πρόβλημα. Αν η πρώτη μας επιλογή είναι κόκκινη μπάλα τότε δεν μπορεί η δεύτερη μπάλα να είναι και πάλι κόκκινη γιατί απλά δεν υπάρχει άλλη κόκκινη μπάλα στο κουτί. Από τις απαντήσεις φάνηκε λίγοι εκπαιδευόμενοι (12%) έδωσαν ολοκληρωμένη απάντηση. Η μεγάλη πλειοψηφία (81%) βρήκαν το δειγματικό χώρο αλλά με λάθη ή παραλείψεις. Τέλος ελάχιστοι (8% οι ίδιοι της προηγούμενης ερώτησης) δεν απάντησαν στην ερώτηση. Η μεγάλη πλειοψηφία των ερωτηθέντων (73%) για να μπορέσει να απαντήσει στο ερώτημα χρησιμοποίησε δενδροδιάγραμμα. Παρατηρούμε ότι το ποσοστό αυτό είναι αυξημένο σε σχέση με το αντίστοιχο της προηγούμενης ερώτησης. Αυτό σημαίνει ότι η δυσκολία του προβλήματος ανάγκασε περισσότερους από πριν εκπαιδευόμενους να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική (και συγκεκριμένα δενδροδιάγραμμα). Οι υπόλοιποι (10%) είτε δεν χρησιμοποίησαν καμία στρατηγική ή τουλάχιστον αυτό δεν έγινε φανερό.

2 ^η Ερώτηση	Ποσοστό	Χρήση στρατηγικής
Σωστή απάντηση	12%	100%
Απάντηση με λάθη	81%	90%
Καμία απάντηση	8%	0%

3^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή απαιτεί από τους εκπαιδευόμενους να βρουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από τρία βήματα, υποχρεώνοντας τους όμως να κάνουν χρήση στρατηγικής και συγκεκριμένα δενδροδιαγράμματος (είχε προσχεδιαστεί στο φύλλο εργασίας). Η ερώτηση είναι:

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων (88%) έδωσε ολοκληρωμένη απάντηση. Ελάχιστοι (12%) βρήκαν το δειγματικό χώρο αλλά με λάθη ή παραλείψεις. Τέλος όλοι οι εκπαιδευόμενοι προσπάθησαν, σε αντίθεση με τις προηγούμενες ερωτήσεις όπου ένα 8% δεν έδωσε καμία απάντηση. Παρατηρούμε ότι η αναγκαστική χρήση του προσχεδιασμένου δενδροδιαγράμματος από τους εκπαιδευόμενους είχε σαν αποτέλεσμα το μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων.

3 ^η Ερώτηση	Ποσοστό
Σωστή απάντηση	88%
Απάντηση με λάθη	12%
Καμία απάντηση	0%

4^η και 5^η Ερώτηση

Οι ερωτήσεις αυτές ελέγχουν αν οι εκπαιδευόμενοι έχουν κατανοήσει τι είναι ενδεχόμενο ενός πειράματος και αν αυτό πραγματοποιείται. Οι ερωτήσεις είναι:

Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, τότε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ενδεχόμενα του πειράματος;

- α) $A = \{4, 6, 10\}$ β) $B = \{0, 2, 4, 5\}$
γ) $\Gamma = \{4, 6, 9, 10\}$ δ) $\Delta = \{8\}$

Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα πραγματοποιούνται και ποια όχι;

- α) $A = \{1, 4, 6\}$ β) $B = \{2, 4, 5\}$
γ) $\Gamma = \{4, 5, 6\}$ δ) $\Delta = \{1, 3, 5\}$

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων (96%) έδωσε σωστές απαντήσεις.

	4 ^η Ερώτηση	5 ^η Ερώτηση
Σωστή απάντηση	100%	100%
Λάθος απάντηση	0%	0%
Καμία απάντηση	0%	0%

6^η και 7^η Ερώτηση

Οι ερωτήσεις αυτές ελέγχουν αν οι εκπαιδευόμενοι έχουν κατανοήσει τις έννοιες βέβαιο και αδύνατο ενδεχόμενο. Οι ερωτήσεις είναι:

Ένα κουτί περιέχει κόκκινες και μπλε μπίλιες. Αν επιλέξω μια μπίλια, ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι αδύνατα και ποια όχι;

- α) $A = \text{«Η μπίλια είναι κόκκινη»}$
β) $B = \text{«Η μπίλια είναι μπλε»}$
γ) $\Gamma = \text{«Η μπίλια είναι κίτρινη»}$
δ) $\Delta = \text{«Η μπίλια είναι μπλε ή κόκκινη»}$

Ένας τριψήφιος αριθμός που έχει διαφορετικά ανά δύο τα ψηφία του, σχηματίζεται με τα ψηφία 1, 3, 5, 7. Αν επιλέξω τυχαία έναν αριθμό, ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι βέβαια και ποια όχι;

- α) $A = \text{«Ο αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος του 7531»}$

β) Β= «Ο αριθμός είναι άρτιος»

γ) Γ= «Ο αριθμός είναι περιττός»

δ) Δ= «Ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 1357»

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων (96%) έδωσε σωστές απαντήσεις στην 6^η ερώτηση, ενώ το ποσοστό πέφτει σημαντικά στην 7^η ερώτηση (65%). Η πιθανή αιτία είναι ότι στην 7^η ερώτηση και ειδικότερα τα ερωτήματα α) και δ) απαιτούν καλή γνώση του αριθμητικού μας συστήματος (θέση ψηφίων), όπου και παρατηρούνται πολύ μεγάλα ποσοστά με λανθασμένες απαντήσεις.

	6 ^η Ερώτηση	7 ^η Ερώτηση
Σωστή απάντηση	96%	65%
Λάθος απάντηση	4%	31%
Καμία απάντηση	0%	4%

8^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή ελέγχει αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να ξεχωρίσουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα (ξένα μεταξύ τους) και πότε όχι. Η ερώτηση είναι:

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους;

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω Α το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

β) Επιλέγουμε ένα άτομο. Έστω Α το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

γ) Επιλέγουμε μια γυναίκα. Έστω Α το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 ετών και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη περισσότερο από 30 χρόνια.

δ) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. Έστω Α το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων (92%, 96%, 92%) έδωσε σωστές απαντήσεις στα (α), (γ) και (δ) ερωτήματα. Μόνο στο (β) ερώτημα υπήρξε μια πτώση του ποσοστού των σωστών

απαντήσεων. Αυτό μάλλον έχει να κάνει με τη φύση της ερώτησης και όχι με την κατανόηση της έννοιας των ασυμβίβαστων ενδεχομένων.

8 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	92%	62%	96%	92%
Απάντηση με λάθη	4%	31%	4%	8%
Καμία απάντηση	4%	8%	0%	0%

9^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή απαιτεί από τους εκπαιδευόμενους να βρουν το συμπληρωματικό ενός ενδεχομένου. Η ερώτηση είναι:

α) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Έστω A το ενδεχόμενο «η ζαριά είναι μικρότερη του 3». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A , δηλαδή το A' ;

β) Ρίχνουμε δυο ζάρια ταυτόχρονα. Έστω B το ενδεχόμενο «το ένα ζάρι είναι άρτιος και το άλλο μικρότερο του 3». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , δηλαδή το B' ;

γ) Από μία τράπουλα 52 φύλλων, τραβάμε ταυτόχρονα δύο φύλλα. Έστω B το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον φύλλο άσσος». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , δηλαδή το B' ;

δ) Από το δεκαπενταμελές ενός γυμνασίου διαλέγουμε τυχαία τρία παιδιά. Έστω Γ το ενδεχόμενο «το πολύ δύο είναι κορίτσια». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Γ , δηλαδή το Γ' ;

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων στο (α) ερώτημα (92%) έδωσε σωστή απάντηση. Στο (β) ερώτημα όμως συνέβη το αντίθετο. Το 92% των απαντήσεων ήταν λάθος, 8% δεν απάντησε και κανείς εκπαιδευόμενος δεν απάντησε σωστά. Αιτία η παρουσία του συνδέσμου «και» στο ενδεχόμενο. Όλοι απάντησαν «το ένα ζάρι είναι περιττός και το άλλο μεγαλύτερο του 3» ή «το ένα ζάρι είναι περιττός και το άλλο μεγαλύτερο ή ίσο του 3». Στο (γ) ερώτημα η παρουσία της λέξης «τουλάχιστον» περιορίζει τις σωστές απαντήσεις (69%), ενώ στο (δ) ερώτημα η παρουσία των λέξεων «το πολύ» ρίχνει κατακόρυφα το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στο 34%. Αυτό δείχνει τη μεγάλη γλωσσική ανεπάρκεια των ενήλικων εκπαιδευόμενων.

9 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	92%	0%	69%	34%
Απάντηση με λάθη	8%	92%	23%	54%
Καμία απάντηση	0%	8%	8%	12%

5.3 Το 2^ο Φύλλο Εργασίας

1^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να εξετάσουμε αν οι ερωτηθέντες μπορούν να επιλέξουν την πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου ανάμεσα σε τέσσερις πιθανές απαντήσεις. Η ερώτηση είναι:

α) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί στην πάνω όψη του ο αριθμός 3;

1/2 1/3 1/4 1/6

β) Μια συνηθισμένη τράπουλα περιέχει 52 χαρτιά. Υπάρχουν τέσσερα είδη: οι κούπες, τα καρό, τα σπαθιά και τα μπαστούνια. Κάθε είδος περιέχει 13 τραπουλόχαρτα. Αν τραβήξουμε ένα τραπουλόχαρτο κατά τύχη, ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε ΑΣΣΟ;

13/52 10/52 4/52 1/52

γ) Ένα βάζο περιέχει 3 κόκκινες και 5 μπλε καραμέλες. Αν πάρουμε από το βάζο τυχαία μία καραμέλα, ποια η πιθανότητα να είναι κόκκινη;

1/3 3/8 5/8 3/5

δ) Το αλφάβητό μας περιέχει 24 γράμματα. Επτά (7) από αυτά είναι φωνήεντα (Α, Ο, Ω, Ε, Ι, Η, Υ) και τα υπόλοιπα δεκαεπτά (17) σύμφωνα. Αν διαλέξουμε ένα από τα γράμματα τυχαία, ποια η πιθανότητα να είναι σύμφωνο;

1/24 7/24 17/24 7/17

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων έδωσε σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. Στα (γ) και (δ) ερωτήματα υπήρξε μια μικρή πτώση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων. Ειδικότερα στο (γ) ερώτημα μερικοί εκπαιδευόμενοι απάντησαν λανθασμένα ότι η πιθανότητα είναι $3/5$, ενώ στο (δ) ερώτημα απάντησαν ότι η πιθανότητα είναι $7/17$. Αυτό μάλλον οφείλεται στην ταυτόχρονη παρουσία των αριθμών 3, 5 και 7, 17 αντίστοιχα.

1 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	100%	92%	88%	81%
Απάντηση με λάθη	0%	8%	12%	19%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%

2^η Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή ελέγχει αν οι εκπαιδευόμενοι μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου με όποιον τρόπο αυτοί επιλέξουν. Η ερώτηση είναι:

2. α) Ρίχνουμε ένα νόμισμα μία φορά. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

β) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα η ζαριά να είναι περιττός (μονός) αριθμός;

γ) Από μια συνηθισμένη τράπουλα τραβάμε ένα χαρτί. Ποια η πιθανότητα να είναι Ρήγας μαύρου χρώματος;

δ) Διαλέγουμε τυχαία ένα γράμμα από τη λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ. Ποια η πιθανότητα να είναι φωνήεν;

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων μπόρεσε να απαντήσει σωστά και στα τέσσερα ερωτήματα. Οι εκπαιδευόμενοι στα (α) και (β) ερωτήματα, χρησιμοποίησαν διάφορους τρόπους έκφρασης για τις απαντήσεις τους, όπως για παράδειγμα «μία στις δύο», «πενήντα-πενήντα», «50%». Στα ερωτήματα (γ) και (δ) υπήρξε μια μικρή πτώση

του ποσοστού των σωστών απαντήσεων. Ειδικότερα, στο (γ) ερώτημα μερικές λανθασμένες απαντήσεις ήταν 1/52, 2/26, ενώ στο (δ) ερώτημα μερικές λανθασμένες απαντήσεις ήταν 5/7, 7/11 κλπ.

2 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	100%	96%	85%	81%
Απάντηση με λάθη	0%	4%	11%	19%
Καμία απάντηση	0%	0%	4%	0%

3,4,5 Ερώτηση

Η ερώτηση αυτή ελέγχει αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να ξεχωρίσουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα (ξένα μεταξύ τους) και πότε όχι. Η ερώτηση είναι:

3. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο νομίσματα στον αέρα. Με χρήση δένδροδιαγράμματος, προσδιορίστε:

α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε 2 ΚΕΦΑΛΕΣ.

β) Ποια η πιθανότητα το ένα νόμισμα να φέρει ΚΕΦΑΛΗ και το άλλο ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

4. Ρίχνουμε δυο ζάρια ταυτόχρονα Με χρήση πίνακα διπλής εισόδου, προσδιορίστε:

α) Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι ίσο με 6;

β) Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 9;

5. Ρίχνουμε τρία νομίσματα στον αέρα. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο δένδροδιάγραμμα, προσδιορίστε:

α) ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 3 ΚΕΦΑΛΕΣ;

β) ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μια ΚΕΦΑΛΗ και δυο ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

Από τις απαντήσεις φάνηκε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων έδωσε σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. Στα (γ) και (δ) ερωτήματα υπήρξε μια μικρή πτώση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων. Ειδικότερα στο (γ) ερώτημα μερικοί εκπαιδευόμενοι απάντησαν λανθασμένα ότι η πιθανότητα είναι 3/5, ενώ στο (δ) ερώτημα απάντησαν ότι η πιθανότητα είναι 7/17. Αυτό μάλλον οφείλεται στην ταυτόχρονη παρουσία των αριθμών 3, 5 και 7, 17 αντίστοιχα.

3 ^η , 4 ^η , 5 ^η Ερώτηση	(3α)	(3β)	(4α)	(4β)	(5α)	(5β)
Σωστή απάντηση	69%	23%	92%	92%	88%	81%
Απάντηση με λάθη	31%	54%	8%	8%	12%	19%
Καμία απάντηση	0%	23%	0%	0%	0%	0%

5.4 Το 3^ο Φύλλο Εργασίας

1^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να βρουν την πιθανότητα ενδεχομένων που προκύπτουν μετά από πράξεις άλλων ενδεχομένων, επιλέγοντας ανάμεσα σε 4 πιθανές απαντήσεις. Η ερώτηση είναι:

α) Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποια η πιθανότητα να μην φέρουμε διπλές;

70% **30/36** 6/36 30%

β) Από μια τράπουλα, τραβάμε τυχαία ένα τραπουλόχαρτο. Ποια η πιθανότητα να είναι φιγούρα (J, Q, K, A) και το χρώμα του να είναι μαύρο (\spadesuit , \clubsuit);

30% 16/52 **8/52** 70%

γ) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα η ζαριά μας να είναι μονός αριθμός ή αριθμός μικρότερος του 5;

70% 30% 4/6 **5/6**

Από τις απαντήσεις που δόθηκαν στα 2 πρώτα ερωτήματα (α) και (β), προκύπτει ότι πάνω από τους μισούς ερωτηθέντες απάντησαν σωστά (30/36). Ενδιαφέρον είναι ότι όλοι σχεδόν από αυτούς που απάντησαν λάθος (34%) στο (α) ερώτημα έδωσαν ως απάντηση την πρώτη επιλογή δηλαδή το 70%. Αυτό δείχνει ότι ακόμη και αυτοί είχαν αίσθηση του μεγέθους της ζητούμενης πιθανότητας. Το ίδιο συνέβη και στο (β) ερώτημα, αλλά σε μικρότερο βαθμό. Αυτοί δηλαδή που απάντησαν λάθος (46%), έ-

δωσαν ως απάντηση το 30%, τιμή που βρίσκεται κοντά στο σωστό αποτέλεσμα (8/52). Αντίθετα, στο (γ) ερώτημα είχαμε πολύ λίγες σωστές απαντήσεις (15%). Οι περισσότεροι απάντησαν λανθασμένα διαλέγοντας την πρώτη επιλογή (70%) για απάντηση. Παρόλα αυτά θετικό και πάλι είναι ότι η απάντηση 70% είναι κοντά στη σωστή (5/6). Σημαντικό ήταν και το ποσοστό των ερωτηθέντων που δεν απάντησε καθόλου (19%), μη μπορώντας προφανώς να επιλέξει κάποια από τις 4 απαντήσεις ως την περισσότερο πιθανή.

1 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)
Σωστή απάντηση	62%	50%	15%
Απάντηση με λάθη	34%	46%	66%
Καμία απάντηση	4%	4%	19%

2^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να υπολογίσουν (και όχι να επιλέξουν) την πιθανότητα της τομής και της ένωσης δύο ενδεχομένων σε ένα πρόβλημα παρμένο από την καθημερινότητά τους. Η ερώτηση είναι:

Το δεκαπενταμελές ενός γυμνασίου αποτελείται από 9 αγόρια και 6 κορίτσια. Από τα 9 αγόρια, 2 είναι της Α' γυμνασίου, 3 της Β' και 4 της Γ' γυμνασίου. Από το 6 κορίτσια 2 είναι της Β' γυμνασίου και 4 της Γ' γυμνασίου. Διαλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη για ταμίας.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να μην είναι μαθητής της Γ' γυμνασίου.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «ο ταμίας να είναι αγόρι» και του ενδεχομένου Β: «ο ταμίας να είναι μαθητής της Β' γυμνασίου».

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να είναι αγόρι και μαθητής της Β' γυμνασίου, δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$.

δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να είναι αγόρι ή μαθητής της Β' γυμνασίου, δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$.

Στις πρώτες ερωτήσεις το μεγαλύτερο μέρος των ερωτηθέντων απάντησε σωστά (ποσοστά 69%, 81% και 73% αντίστοιχα). Αξίζει εδώ να σημειώσουμε την ποικιλία στη μορφή των απαντήσεων. Άλλοι απαντούσαν με κλάσμα, άλλοι με λόγια όπως για παράδειγμα «η πιθανότητα είναι 7 από τους 15» και σχεδόν κανείς με μαθηματικούς συμβολισμούς (να ονομάσει τα ενδεχόμενα, να χρησιμοποιήσει τύπους κλπ). Αυτή η δυσκολία στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων αλλά και τύπων, φάνηκε καθαρά στην τρίτη ερώτηση, όπου το ζητούμενο ήταν η πιθανότητα της ένωσης δύο ενδεχομένων. Εδώ χωρίς χρήση του τύπου τα πράγματα είναι σχεδόν αδύνατα. Πράγματι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έπεσε κατακόρυφα (15%). Απ' αυτούς σχεδόν κανένας δεν χρησιμοποίησε απόλυτα μαθηματική γλώσσα. Η χρήση του τύπου έγινε χωρίς την αναγραφή του, αλλά κατευθείαν με αριθμούς. Απ' αυτούς που απάντησαν λάθος, οι περισσότεροι απαντούσαν με λόγια όπως για παράδειγμα «αφού 9 είναι τα αγόρια και 5 είναι από τη Β' γυμνασίου, η πιθανότητα είναι 14 στους 15». Αυξημένο ήταν και το ποσοστό αυτών που δεν απάντησαν καθόλου.

2^η Ερώτηση	(α)	(βi)	(βii)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	69%	81%	73%	65%	15%
Απάντηση με λάθη	31%	15%	23%	31%	73%
Καμία απάντηση	0%	4%	4%	4%	12%

3^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να υπολογίσουν, όπως και στην προηγούμενη ερώτηση, την πιθανότητα της τομής και της ένωσης δύο ενδεχομένων, αλλά με καθοδήγηση από το ίδιο το πρόβλημα (σε αντίθεση με την προηγούμενη ερώτηση). Η ερώτηση είναι:

Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι.

α) Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «η ζαριά μας να είναι μονός αριθμός», ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου A και ποια η πιθανότητά του $P(A)$;

β) Αν ονομάσουμε B το ενδεχόμενο «η ζαριά μας να είναι μικρότερη του 5», ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου B και ποια η πιθανότητά του $P(B)$;

γ) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου $A \cap B =$ «η ζαριά μας είναι μονός αριθμός **και** μικρότερος του 5» και ποια η πιθανότητά του $P(A \cap B)$;

δ) Να εφαρμόσετε τον προσθετικό νόμο για να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B =$ «η ζαριά μας είναι μονός αριθμός **ή** αριθμός μικρότερος του 5»;

Στα τρία πρώτα ερωτήματα (α), (β) και (γ) όλοι σχεδόν οι ερωτηθέντες απάντησαν σωστά (ποσοστά 92%, 85% και 85% αντίστοιχα). Και εδώ παρατηρήθηκε ποικιλία στη μορφή των απαντήσεων, όπως και στην προηγούμενη ερώτηση, με τη διαφορά ότι αρκετοί προσπάθησαν στις απαντήσεις τους να χρησιμοποιήσουν μαθηματικούς συμβολισμούς, ίσως καθοδηγούμενοι από την εκφώνηση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο ερώτημα που ζητούσε την πιθανότητα της τομής (γ) απάντησε σωστά το 83%, ποσοστό μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ερώτημα της προηγούμενης ερώτησης. Αυτό ίσως να οφείλεται ότι εδώ το ερώτημα είχε να κάνει με τη ρίψη ενός ζαριού, κάτι με το οποίο είναι απόλυτα εξοικειωμένοι όλοι οι εκπαιδευόμενοι. Στο τελευταίο όμως ερώτημα (δ), όπως και στο αντίστοιχο της προηγούμενης ερώτησης, όπου το ζητούμενο ήταν η πιθανότητα της ένωσης δύο ενδεχομένων, η δυσκολία στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων αλλά και τύπων, φάνηκε και πάλι ξεκάθαρα. Είναι γνωστό ότι χωρίς χρήση του τύπου που αναφέρεται στον προσθετικό νόμο, τα πράγματα είναι σχεδόν αδύνατα. Πράγματι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν και πάλι πολύ μικρό (23%), ελαφρά καλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό της προηγούμενης ερώτησης, που μάλλον όπως είπαμε οφείλεται στη φύση του προβλήματος. Και πάλι απ' αυτούς που απάντησαν σωστά ελάχιστοι χρησιμοποίησαν μαθηματική γλώσσα στην απάντησή τους. Ενδιαφέρον και το ότι αυξήθηκε αρκετά το ποσοστό των ερωτηθέντων που δεν απάντησε καθόλου στο ερώτημα (38%), πράγμα αναμενόμενο.

3 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	92%	85%	85%	23%
Απάντηση με λάθη	8%	15%	15%	39%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	38%

4^η Ερώτηση

Με την τελευταία ερώτηση του φύλλου εργασίας θέλουμε να διαπιστώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να υπολογίσουν την πιθανότητα της τομής και της ένωσης ενδεχομένων σε ένα πιο σύνθετο πείραμα, όπως αυτό της ρίψης δύο ζαριών ταυτόχρονα. Επίσης θέλουμε να παροτρύνουμε τους εκπαιδευόμενους να χρησιμοποιήσουν δένδροδιάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου για να έχουν άμεση εικόνα του δειγματικού χώρου του πειράματος, ώστε να βοηθηθούν στο να απαντήσουν στα ερωτήματα της ερώτησης που είναι:

Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα πράσινο και ένα κόκκινο. Με τη βοήθεια δένδροδιαγράμματος ή καλύτερα ενός πίνακα διπλής εισόδου:

α) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το ένα ζάρι 5 και το άλλο ζάρι 6, ανεξάρτητα από το χρώμα των ζαριών.

*β) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το πράσινο ζάρι 5 **και** το κόκκινο ζάρι 6.*

*γ) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το πράσινο ζάρι 5 **ή** το κόκκινο ζάρι 6.*

Στα δύο πρώτα ερωτήματα (α), (β) όλοι σχεδόν οι ερωτηθέντες απάντησαν σωστά (ποσοστά 85% και 92% αντίστοιχα), ενώ στο τρίτο ερώτημα (γ) που ζητούσε την πιθανότητα της ένωσης και πάλι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν εξαιρετικά χαμηλό (23%), όπως και στις προηγούμενες ερωτήσεις. Επίσης σχεδόν όλοι έκαναν τον πίνακα διπλής εισόδου που ζητούσε η εκφώνηση, τον χρησιμοποίησαν στα δύο πρώτα ερωτήματα, αλλά δεν φάνηκε να τους βοηθάει στο τρίτο ερώτημα. Αυξημένο επίσης, σε σχέση με τα δύο προηγούμενα ερωτήματα το ποσοστό που δεν απάντησε καθόλου. Ίσως να τους επηρέασε το γεγονός ότι δεν είχαν καταφέρει να απαντήσουν ούτε στο αντίστοιχο ερώτημα των δύο προηγούμενων ερωτήσεων και να αποδέχτηκαν το γεγονός ότι ούτε και εδώ θα απαντήσουν.

4 ^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)
Σωστή απάντηση	85%	92%	23%
Απάντηση με λάθη	15%	8%	31%
Καμία απάντηση	0%	0%	46%

5.5 Το 4^ο Φύλλο Εργασίας

1^η Ερώτηση

Με την ερώτηση μπορούμε να ελέγξουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να καταλάβουν ότι δύο ενδεχόμενα αν είναι ανεξάρτητα και στη συνέχεια να υπολογίσουν την πιθανότητα της τομής τους. Η ερώτηση είναι:

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

β) Ρίχνουμε ένα νόμισμα στον αέρα τρεις φορές. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε ΚΕΦΑΛΗ και στις τρεις ρίψεις.

γ) Ένα κουτί περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη, την τοποθετούμε πίσω στο κουτί και στη συνέχεια τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «Η πρώτη μπάλα είναι μπλε και η δεύτερη κόκκινη».

δ) Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,03, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.

Οι μισοί από τους ερωτηθέντες (50%) απάντησαν σωστά στο (α) ερώτημα. Οι μισοί περίπου απ' αυτούς γράψαν κατευθείαν το αποτέλεσμα (3/36) χωρίς να εξηγήσουν πως το βρήκαν. Από τους υπόλοιπους άλλοι γράψαν το αποτέλεσμα ως πράξη πολλαπλασιασμού ($\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$) και άλλοι απάντησαν χρησιμοποιώντας φυσική γλώσσα («μία στα έξι να φέρουμε εξάρι, τρεις στις έξι να φέρουμε μονό, άρα η πιθανότητα είναι τρία στα τριάντα έξι»). Απ' αυτούς που απάντησαν λάθος (42%) οι περισσότεροι ανέφεραν ξεχωριστά τις πιθανότητες των δύο ενδεχομένων και σταμα-

τούσαν. Αξιοσημείωτο ότι μερικοί προσθέτανε τις πιθανότητες αντί να τις πολλαπλασιάζουνε ($\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$). Ελάχιστοι αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου.

Στο (β) ερώτημα απάντησε σωστά το 42% των ερωτηθέντων παρά του ότι το πείραμα ήταν απλούστερο από αυτό του προηγούμενου ερωτήματος. Το χαμηλότερο ποσοστό των σωστών απαντήσεων, ίσως να οφείλεται στο ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται τρεις φορές και όχι δύο, όπως πριν. Οι παρατηρήσεις και εδώ είναι όμοιες με του προηγούμενου ερωτήματος. Όμοια και στο (γ) ερώτημα, όπου το ποσοστό των σωστών απαντήσεων επανήλθε σ' αυτό του (α) ερωτήματος. Ίσως γιατί το πείραμα επαναλαμβάνεται μόνο δύο φορές όπως στο πρώτο ερώτημα. Ενδιαφέρον ίσως το γεγονός ότι πολλοί απ' αυτούς που απάντησαν λάθος χρησιμοποιούσαν κλάσματα με παρονομαστή είτε το 8 είτε το 5, αντί του σωστού 13.

Στο τελευταίο ερώτημα όμως τα αποτελέσματα ήταν απρόσμενα. Παρά την απλή μορφή του προβλήματος λίγοι ήταν αυτοί που απάντησαν σωστά. Έγινε φανερό ότι πολλοί από τους ερωτηθέντες μπερδεύτηκαν με την παρουσία της λέξης «τουλάχιστον», αλλά κύρια από το γεγονός ότι για να απαντήσουν σωστά έπρεπε να βρουν την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου της τομής. Η παρουσία της λέξης «ανεξάρτητα» στην εκφώνηση οδήγησε πολλούς να πολλαπλασιάσουν τις πιθανότητες να παρουσιάζει βλάβη ο κάθε κινητήρας ($0,03 \times 0,03 = 0,0009$) αλλά δεν συνέχισαν με την εύρεση του συμπληρωματικού. Αξιοπρόσεκτο τα πολλά λάθη στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων στο αποτέλεσμα).

1^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	50%	42%	54%	23%
Απάντηση με λάθη	42%	46%	38%	54%
Καμία απάντηση	8%	12%	8%	23%

2^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να υπολογίσουν την πιθανότητα της τομής δύο ενδεχομένων τα οποία όμως δεν είναι ανεξάρτητα. Η ερώτηση είναι:

α) Ένα βάζο περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη και στη συνέχεια χωρίς να την αντικαταστήσουμε, τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «Η πρώτη μπάλα είναι μπλε και η δεύτερη κόκκινη».

β) Έχουμε 4 αγόρια και 5 κορίτσια και θέλουμε να σχηματίσουμε μια ομάδα δύο ατόμων για να εκπροσωπήσει το σχολείο μας. Διαλέγουμε δύο απ' αυτούς διαδοχικά. Κάνοντας χρήση του παρακάτω δενδροδιαγράμματος να βρείτε την πιθανότητα να είναι ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

Στο (α) ερώτημα το ποσοστό των σωστών απαντήσεων βρέθηκε στο 50%, όσο περίπου και στο (γ) της προηγούμενης ερώτησης. Από τους ερωτηθέντες που απάντησαν λανθασμένα (46%) ελάχιστοι κατάλαβαν ότι τη δεύτερη φορά στο βάζο έχουμε πλέον 12 και όχι 13 μπάλες. Οι περισσότεροι έγραψαν ότι είχαν γράψει και στο προηγούμενο ερώτημα. Όσοι απ' αυτούς είχαν καταλάβει ότι κάτι είχε αλλάξει στη δεύτερη επιλογή της μπάλας, χρησιμοποίησαν κλάσμα με παρονομαστή το 7 (αφού η πρώτη μπάλα ήταν μπλε) αντί του σωστού 12.

Στο (β) ερώτημα, υπήρχε μια βασική διαφορά. Από την εκφώνηση οι εκπαιδευόμενοι ήταν υποχρεωμένοι να συμπληρώσουν σε ένα δοσμένο δενδροδιάγραμμα τις πιθανότητες για κάθε μια από τις δύο επαναλήψεις του πειράματος. Η αλλαγή στις απαντήσεις ήταν θεαματική. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (65%) παρότι αρκετά μεγαλύτερο, δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Αν στο παραπάνω ποσοστό συμπεριλάβουμε και το ποσοστό των ερωτηθέντων που πλησίασε τη σωστή απάντηση αλλά τελικά έκανε λάθος κύρια σε πράξεις, τότε θα πλησίαζε το 73%.

2 ^η Ερώτηση	(α)	(β)
Σωστή απάντηση	50%	65%
Απάντηση με λάθη	46%	31%
Καμία απάντηση	4%	4%

3^η Ερώτηση

Με την ερώτηση αυτή θέλουμε να εξακριβώσουμε αν οι εκπαιδευόμενοι είναι σε θέση να υπολογίσουν υπό συνθήκη πιθανότητες, καθώς και αν για την εύρεση αυτών των πιθανοτήτων χρησιμοποιούν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική. Η ερώτηση είναι:

α) Από μία τράπουλα 52 φύλλων, τραβάμε ένα φύλλο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι ΑΣΣΟΣ, αν γνωρίζουμε ότι το φύλλο είναι μπαστούνι.

β) Ένα βάζο περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη και χωρίς να την επανατοποθετήσουμε τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη, με δεδομένο ότι η πρώτη ήταν επίσης κόκκινη.

γ) Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

δ) Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 50% των πλοίων από Πειραιά και το 30% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρείτε την πιθανότητα αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Ραφήνα.

Στο πρώτο ερώτημα η ζητούμενη πιθανότητα μπορούσε να υπολογιστεί και με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας αλλά και με τον κλασσικό ορισμό. Αρκετοί εκπαιδευόμενοι απάντησαν σωστά (58%). Απ' αυτούς οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν τον κλασσικό ορισμό και μάλιστα χρησιμοποιώντας τη φυσική και όχι τη μαθηματική γλώσσα. Για παράδειγμα κάποιος έγραψε «όλα τα μπαστούνια είναι 13, ο άσσος μπαστούνι είναι ένας, άρα η πιθανότητα είναι 1/13». Άλλοι πάλι γράψαν κατευθείαν το αποτέλεσμα σε μορφή κλάσματος: 1/13. Λίγοι ήταν οι εκπαιδευόμενοι που χρησιμοποίησαν τον τύπο $P(\text{άσσος}/\text{μπαστούνι}) = \frac{P(\text{άσσος και μπαστούνι})}{P(\text{μπαστούνι})}$ και κατάφεραν να βρουν το σωστό αποτέλεσμα. Το ίδιο βέβαια παρατηρήθηκε και στο ποσοστό αυτών που απάντησαν λάθος (38%). Άλλοι προσπάθησαν με τον κλασσικό ορισμό (για πα-

ράδειγμα κάποιος έγραψε «όλα τα μαστούνια είναι 13, οι άσσοι είναι τέσσερις, άρα η πιθανότητα είναι 4/13» ενώ άλλοι απάντησαν απλά με ένα κλάσμα π.χ. 4/13.

Στο δεύτερο ερώτημα η πιθανότητα μπορούσε να υπολογιστεί πάλι και με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας αλλά και με τον κλασσικό ορισμό. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων (54%), όπως και των λανθασμένων απαντήσεων (42%) ήταν περίπου τα ίδια. Δεν άλλαξαν ούτε οι τρόποι που χρησιμοποιήσαν οι εκπαιδευόμενοι. Από αυτούς που απάντησαν σωστά, πολλοί χρησιμοποίησαν τον κλασσικό ορισμό και τη φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα κάποιος έγραψε «12 όλες οι μπάλες που μείνανε στο βάζο, 4 οι κόκκινες, άρα η πιθανότητα είναι 4/12», ενώ άλλος «η πιθανότητα είναι 4/12». Πολλοί απ' αυτούς σχεδίασαν και δενδροδιάγραμμα, ενώ κανένας δεν σχημάτισε πίνακα. Ίδιες ήταν οι παρατηρήσεις και σ' αυτούς που απάντησαν λανθασμένα. Κάποιος έγραψε «13 όλες οι μπάλες, τρεις κόκκινες αυτές που μείνανε, η πιθανότητα είναι 3/13». Πρέπει κι εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι ίδιοι που δεν απάντησαν στο προηγούμενο ερώτημα (και όχι μόνο το ίδιο ποσοστό), δεν απάντησαν και σ' αυτό το ερώτημα.

Στο τρίτο ερώτημα, είχαμε μια κατακόρυφη πτώση στις σωστές απαντήσεις (12%). Όσοι μάλιστα κατόρθωσαν να απαντήσουν σωστά, το κατάφεραν κάνοντας χρήση είτε δενδροδιαγράμματος (1 στους 5 ερωτηθέντες) είτε ενός πίνακα ποσοστών (4 στους 5). Από αυτούς που απάντησαν λάθος (61%), πολλοί δοκίμασαν και πάλι με κλασσικό ορισμό και φυσική γλώσσα (έγραψε κάποιος: «το 30% του 40%»). Οι περισσότεροι βέβαια προσπάθησαν να κάνουν κάποιο δενδροδιάγραμμα, αλλά απέτυχαν. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός του αυξημένου ποσοστού αυτών που δεν απάντησαν (27%). Σχεδόν όλοι τους είχαν προσπαθήσει να απαντήσουν αλλά τελικά έσβησαν μουτζουρώνοντας ότι είχαν γράψει.

Το τέταρτο ερώτημα ήταν ακριβώς ίδιο με το προηγούμενο με μόνη διαφορά το διαφορετικό σενάριο του προβλήματος (πλοία με καθυστέρηση σ' αυτό το ερώτημα, γυναίκες που καπνίζουν στο προηγούμενο). Ακόμη και τα ποσοστά ήταν τα ίδια. Μόνο που στο ερώτημα αυτό δόθηκε στους εκπαιδευόμενους έτοιμο ένα δενδροδιάγραμμα, στο οποίο έπρεπε να συμπληρώσουν τις πιθανότητες των διαφόρων ενδεχομένων και στη συνέχεια με χρήση αυτού του δενδροδιαγράμματος να απαντήσουν στο ζητούμενο. Παρά του ότι η αύξηση των σωστών απαντήσεων δεν ήταν θεαματική (23% σε σχέση με το 12% του προηγούμενου ερωτήματος), πρέπει να σημειωθεί ότι

το ποσοστό των σωστών απαντήσεων θα ήταν μεγαλύτερο αν δεν υπήρχαν αριθμητικά λάθη στο δένδροδιάγραμμα (κυρίως λάθη σε πολλαπλασιασμούς ποσοστών). Αυτή είναι και η αιτία που το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων παρέμεινε σταθερό. Όσον αφορά στο ποσοστό αυτών που δεν απάντησαν (15%), αυτό μειώθηκε αρκετά. Το γεγονός αυτό οφείλεται ότι όλοι ήταν αναγκασμένοι να ασχοληθούν με τη συμπλήρωση του δένδροδιαγράμματος, ανεξάρτητα αν βρήκαν σωστό αποτέλεσμα ή όχι.

3^η Ερώτηση	(α)	(β)	(γ)	(δ)
Σωστή απάντηση	58%	54%	12%	23%
Απάντηση με λάθη	38%	42%	61%	61%

ΜΕΡΟΣ Γ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

6.1 Συμπεράσματα από το Pre-test

Η έννοια της πιθανότητας είναι μια περιοχή των μαθηματικών όπου η εμφάνιση εσφαλμένων αντιλήψεων και παρανοήσεων (misconceptions) από τους μαθητές είναι πολύ συχνή (Shaughnessy, 1981). Από τη μελέτη των απαντήσεων του δείγματος (όπου ενήλικες μαθητές που δεν έχουν ποτέ τους διδαχθεί πιθανότητες, έρχονται αντιμέτωποι με πιθανολογικές καταστάσεις), γίνεται φανερό ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές που βασίζονται στις πέντε βασικές εσφαλμένες αντιλήψεις-παρανοήσεις που έχουμε προηγουμένως αναφέρει (Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας, Εύρος του δείγματος, Διαθεσιμότητα της πληροφορίας, την Πλάνη της σύζευξης και τέλος την Υπόθεση των Ισοπίθανων), με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η χρήση αυτών των εσφαλμένων αντιλήψεων-παρανοήσεων φαίνεται καθαρά στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί.

Οι πέντε βασικές παρανοήσεις	Ποσοστό που επηρεάζεται (Protest)
Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας	26%
Εύρος του δείγματος	86%
Διαθεσιμότητα πληροφορίας	65%
Πλάνη της Σύζευξης	90%
Υπόθεση των Ισοπίθανων	90%

Η μόνη εσφαλμένη αντίληψη που με την ενηλικίωση έχει κάπως διορθωθεί είναι αυτή που βασίζεται στην αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας. Αυτό κύρια οφείλεται στο ότι με βάση τις καθημερινές τους εμπειρίες μπορούν ευκολότερα να κατανοήσουν ότι πολλά γεγονότα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και επομένως η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποιο από αυτά δεν αλλάζει όσες φορές κι αν εκτελέσουμε το πείραμα. Οι υπόλοιπες παρανοήσεις που από μαθητές ακόμη είχαν, παραμένουν έντονες και επηρεάζουν την κρίση τους παρά τις πολύ περισσότερες εμπειρίες που τώρα έχουν.

6.2 Συμπεράσματα από τις Δραστηριότητες και τα Φύλλα Εργασίας

1^ο Φύλλο Εργασίας

Μετά από τη διδακτική παρέμβαση σε κάθε ενότητα, οι εκπαιδευόμενοι καλούνταν να απαντήσουν στις ερωτήσεις προσχεδιασμένων Φύλλων Εργασίας. Στο πρώτο Φύλλο Εργασίας, οι ερωτήσεις έχουν να κάνουν με τις εισαγωγικές έννοιες του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων, δηλαδή με τις έννοιες του πειράματος τύχης, του δειγματικού χώρου, του ενδεχομένου, του βέβαιου και του αδύνατου ενδεχομένου καθώς και με την έννοια των ασυμβίβαστων ενδεχομένων. Στις ερωτήσεις που είχαν να κάνουν με τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου διαφόρων πειραμάτων τύχης, παρατηρήθηκε ένα ποσοστό επιτυχίας της τάξης του 62,5%. Πέρα από το αρκετά καλό ποσοστό επιτυχίας, το ευχάριστο ήταν ότι σχεδόν όλοι οι εκπαιδευόμενοι για να πετύχουν το σκοπό τους, χρησιμοποίησαν ορισμένες στρατηγικές (είτε δένδροδιάγραμμα, είτε πίνακα διπλής εισόδου κλπ), γεγονός που φανερώνει την επιτυχία της παρέμβασης. Στις ερωτήσεις που σκοπό είχαν να εξετάσουν αν οι εκπαιδευόμενοι ήταν σε θέση να ξεχωρίσουν πότε ένα ενδεχόμενο είναι βέβαιο και πότε αδύνατο, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έφτασε στο 87%. Το ίδιο περίπου ποσοστό (85,5%) παρατηρήθηκε και στην επόμενη ομάδα ερωτήσεων, που σκοπό είχε να εξετάσει αν οι ερωτηθέντες μπορούν να διακρίνουν αν δύο ενδεχόμενα είναι μεταξύ τους ασυμβίβαστα ή όχι. Η πολύ καλή τους επίδοση, πέρα από τη διδακτική μας παρέμβαση, έχει σίγουρα να κάνει και με την ηλικία, αφού με τις εμπειρίες που διαθέτουν οι ενήλικες εκπαιδευόμενοι, εύκολα μπορούν να προσδιορίσουν αν δύο ενδεχόμενα είναι «ξένα» μεταξύ τους. Η τελευταία ομάδα ερωτήσεων ζητούσε από τους εκπαιδευόμενους να βρουν το συμπληρωματικό διαφόρων ενδεχομένων. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων πλησίασε το 66%, ένα αρκετά καλό ποσοστό που θα μπορούσε να ήταν πολύ μεγαλύτερο, αν οι ερωτηθέντες ήταν περισσότερο εξοικειωμένοι με την άρνηση των φράσεων «τουλάχιστον ένα», «το πολύ δύο», «και». Συνολικά στο 1^ο Φύλλο Εργασίας, μπορούμε να πούμε ότι κατά μέσο όρο είχαμε ένα ποσοστό περίπου 70% σωστών απαντήσεων.

2^ο Φύλλο Εργασίας

Στο δεύτερο Φύλλο Εργασίας, όλες οι ερωτήσεις είχαν να κάνουν με την έννοια της πιθανότητας.. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων οι εκπαιδευόμενοι έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή πιθανότητα διαφόρων ενδεχομένων ανάμεσα σε τέσσερις πιθανές απαντήσεις. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν περίπου

90%. Στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων έπρεπε πλέον να υπολογίσουν και όχι να επιλέξουν την πιθανότητα πραγματοποίησης ορισμένων απλών ενδεχομένων. Κι εδώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έφτασε το 90,5%. Στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων έπρεπε να υπολογίσουν πιθανότητες από σύνθετα πλέον ενδεχόμενα. Εδώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έγινε 69%, ποσοστό που είναι αρκετά μεγάλο για μαθητές γυμνασιακού επιπέδου. Στην τελευταία ομάδα οι εκπαιδευόμενοι έπρεπε να υπολογίσουν πιθανότητες σε προβλήματα όμοια με της προηγούμενης ομάδας με τη διαφορά ότι εδώ τους παρότρυνε η ίδια η εκφώνηση να χρησιμοποιήσουν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική (για παράδειγμα: «με τη χρήση δένδροδιαγράμματος να υπολογίσετε την ...»). Η βελτίωση στο ποσοστό των απαντήσεων φάνηκε αμέσως (84,5% από 69%). Το συμπέρασμα από τις απαντήσεις συνολικά στο δεύτερο Φύλλο Εργασίας ήταν ότι οι ενήλικες εκπαιδευόμενοι μπορούσαν με σχετική άνεση να προσδιορίζουν πιθανότητες διαφόρων απλών αλλά και σύνθετων ενδεχομένων, αλλά και όπου η εμπειρία τους παρέσυρε σε βιαστικές απαντήσεις, με κατάλληλη υπόδειξη ήταν σε θέση να διορθώσουν την απάντησή τους.

3^ο Φύλλο Εργασίας

Στο τρίτο Φύλλο Εργασίας, οι ερωτήσεις είχαν να κάνουν με τους Νόμους των Πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων οι εκπαιδευόμενοι έπρεπε να υπολογίσουν την πιθανότητα των συμπληρωματικών διαφορών ενδεχομένων. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν 65,5%, ποσοστό που θα μπορούσε να ήταν μεγαλύτερο αν δεν είχαμε και πάλι το ίδιο πρόβλημα που είχαμε και σε προηγούμενο φύλλο, δηλαδή όταν για παράδειγμα το αρχικό ενδεχόμενο ήταν ένωση δύο απλούστερων (περιείχε δηλαδή τη λέξη «ή») τότε ελάχιστοι μπορούσαν να βρουν το σωστό συμπληρωματικό ενδεχόμενο και κατά συνέπεια τη σωστή πιθανότητά του. Στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων οι ερωτηθέντες έπρεπε να υπολογίσουν την πιθανότητα της τομής δύο ενδεχομένων. Εδώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν αρκετά καλό 73%. Η χρήση στρατηγικής (κύρια δένδροδιαγράμματος) διευκόλυνε σε μεγάλο βαθμό την εύρεση της σωστής πιθανότητας. Στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων που αφορούσε στην εύρεση της πιθανότητας της ένωσης δύο ενδεχομένων, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έπεσε κατακόρυφα στο 19%. Αιτία αυτής της μεγάλης πτώσης μπορεί να θεωρηθεί αφενός μεν η αναγκαστική χρήση του προσθετικού νόμου των πιθανοτήτων $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ για τον υπολογισμό της πιθανότητας της ένωσης δύο ενδεχομένων και αφετέρου η έλλειψη στρατηγικών για την παράκαμψη του προηγούμενου τύπου και υπολογισμό της πιθανότητας με άλλο τρόπο, κάτι που μπορεί να χρεωθεί ως παράλειψη της διδακτικής μας παρέμβασης.

4^ο Φύλλο Εργασίας

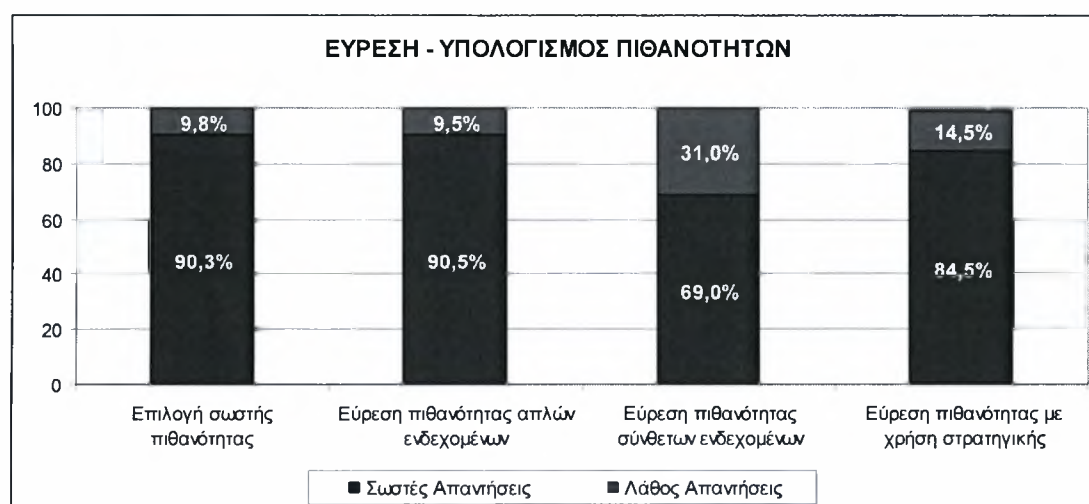
Στο τέταρτο και τελευταίο Φύλλο Εργασίας, οι ερωτήσεις είχαν να κάνουν με δύο πολύ σπουδαίες έννοιες των Πιθανοτήτων. Την έννοια των ανεξάρτητων ενδεχομένων καθώς και με την έννοια της Δεσμευμένης Πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων οι εκπαιδευόμενοι έπρεπε να υπολογίσουν την πιθανότητα της ταυτόχρονης πραγματοποίησης (τομής) δύο ανεξάρτητων ενδεχομένων. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων βρέθηκε στο 47,3%. Ακόμη χαμηλότερο το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (34,3%) στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων που αναφερόταν

στη δεσμευμένη πιθανότητα. Μια πιθανή εξήγηση πέραν των υπολοίπων είναι και το ότι αυτή η ενότητα διδάχτηκε τελευταία και με φοβερή πίεση χρόνου.

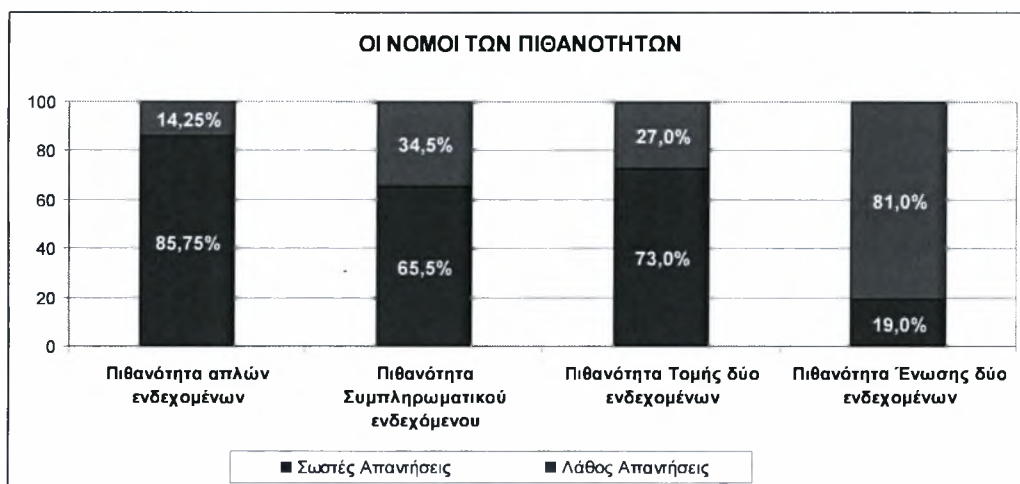
Συγκεντρωτικά όλα τα παραπάνω φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:



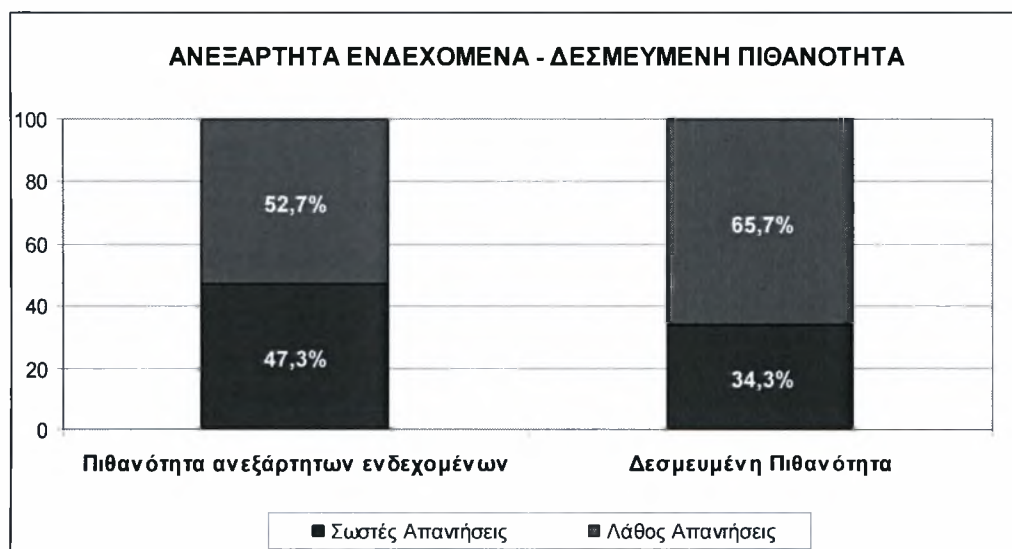
Φύλλο Εργασίας 1



Φύλλο Εργασίας 2



Φύλλο Εργασίας 3



Φύλλο Εργασίας 4

6.3 Συμπεράσματα από το Post-test

Το τελικό ερωτηματολόγιο δόθηκε στους ενήλικες μαθητές, περίπου έξι μήνες μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης. Οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, έδειξαν ότι η παρέμβαση πέτυχε σε μεγάλο βαθμό τους στόχους της. Στρατηγικές που βασίζονται στις πέντε βασικές εσφαλμένες αντιλήψεις-παρανοήσεις που αρχικά είχαν (Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας, Εύρος του δείγματος, Διαθεσιμότητα της πληροφορίας, την Πλάνη της σύζευξης και τέλος την Υπόθεση των ισοπίθανων), χρησιμοποιήθηκαν από αρκετά χαμηλότερο ποσοστό ερωτηθέντων, με αποτέλεσμα σημαντικά λιγότερες λανθασμένες απαντήσεις. Αναλυτικά έχουμε:

1^η Ομάδα Ερωτήσεων (1-3-9) - Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα από το χώρο των πιθανοτήτων, συχνά παρασύρονται από τη γνωστή πλάνη της αντιπροσωπευτικότητας της δοσμένης πληροφορίας. Αυτό σημαίνει ότι εκτιμούν την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί κάποιο ενδεχόμενο ανάλογα με το πόσο καλά το ενδεχόμενο αυτό αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό. Το αρχικό ερωτηματολόγιο Pre-test, όπως και το τελικό Post-test, έδειξε ότι οι ενήλικες μαθητές δεν επηρεάζονται απ' αυτή την πλάνη. Είναι φανερό ότι αυτό οφείλεται στις εμπειρίες τους λόγω ηλικίας, εργασίας, κοινωνίας κλπ, σε αντίθεση με τους αντίστοιχους ανήλικους μαθητές..



2^η Ομάδα Ερωτήσεων (2-4) - Εύρος του δείγματος

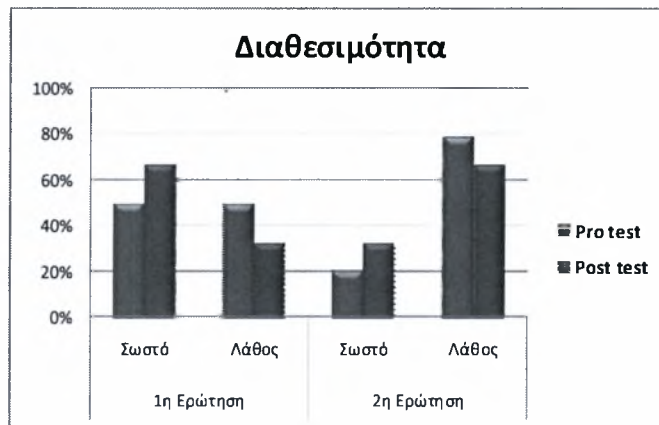
Μια στρατηγική που οδηγεί τους μαθητές σε λανθασμένα συμπεράσματα είναι όπως έχουμε ήδη αναφέρει η *πλάνη του εύρους του δείγματος (effect of sample size)* ή και νόμος των μικρών αριθμών (*Law of small numbers*), όπου κάποιος για παράδειγμα πιστεύει ότι κάθε δείγμα ενός πληθυσμού πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικής αναλογίας. Από τα αποτελέσματα του αρχικού ερωτηματολογίου είχε γίνει φανερό ότι μόλις το 14% των ενήλικων μαθητών είχε μporέσει να μην



επηρεαστεί από τη συγκεκριμένη στρατηγική. Μετά τη διδακτική παρέμβαση, το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά αφενός μεν διπλασιάστηκε (30%), αφετέρου όμως παρέμεινε μικρό. Αυτό δείχνει το πόσο βαθιά ριζωμένη είναι αυτή η πλάνη στους μαθητές.

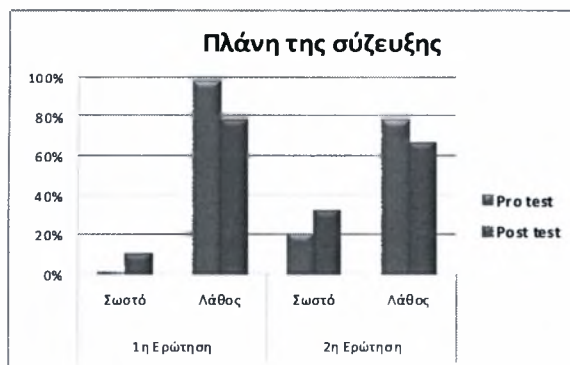
3^η Ομάδα Ερωτήσεων (5-8) - Διαθεσιμότητα πληροφορίας

Τρίτη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι αυτή που βασίζεται στην *πλάνη της δοσμένης πληροφορία (base rate fallacy)*, όπου οι ερωτηθέντες απαντούν επηρεασμένοι από τις δοσμένες πληροφορίες καθώς και στην στρατηγική που βασίζεται στη *διαθεσιμότητα της πληροφορίας (availability)*, σύμφωνα με την οποία η πιθανότητα εμφάνισης ορισμένων ενδεχομένων εκτιμάται βάσει της ευκολίας με την οποία μπορούμε να ανακαλέσουμε στο μυαλό μας συγκεκριμένα περιστατικά ενός γεγονότος. Η αύξηση των σωστών απαντήσεων μετά τη διδακτική παρέμβαση ήταν σημαντική (από 35% σε 53% των ερωτηθέντων). Αυτό δείχνει ότι η διδακτική παρέμβαση που έγινε περιορίσε σε σημαντικό βαθμό την επίδραση αυτής της πλάνης στη σκέψη των ενήλικων μαθητών.



4^η Ομάδα Ερωτήσεων (7-8) - Πλάνη της Σύζευξης

Η τέταρτη πλάνη που επηρεάζει τη σκέψη των μαθητών είναι η *πλάνη της σύζευξης (conjunction fallacy)*. Αυτή όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι μια κοινή αντίληψη των πιθανοτήτων που βασίζεται στη διαίσθηση και υποστηρίζει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν δύο ενδεχόμενα ταυτόχρονα (αυτό στα μαθηματικά ονομάζεται τομή των δύο ενδεχομένων) είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ένα από τα δύο. Φυσικά το σωστό είναι το αντίθετο. Στο αρχικό ερωτηματολόγιο τα αποτελέσματα ήταν ξεκάθαρα.



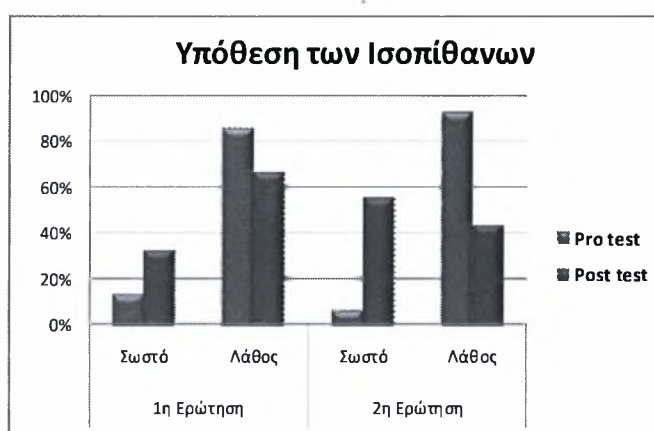
Μόλις ένα 10% των μαθητών μπόρεσε να μην επηρεαστεί από την πλάνη αυτή και να

απαντήσει σωστά τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στο τελικό ερωτηματολόγιο τα αποτελέσματα ήταν καλύτερα. Το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά ανέβηκε στο 22%. Παρόλα αυτά παρέμεινε μικρό. Η πλάνη της σύζευξης αποδείχθηκε ότι είναι πολύ ισχυρή και χρειάζεται πιο εξειδικευμένη διδακτική παρέμβαση.

5^η Ομάδα Ερωτήσεων (6-10) - Υπόθεση των Ισοπίθανων

Η πλέον διαδεδομένη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν πιθανολογικές καταστάσεις, είναι η *υπόθεση των ισοπίθανων ενδεχομένων* (*equiprobable events* ή *compound and simple events*). Μια

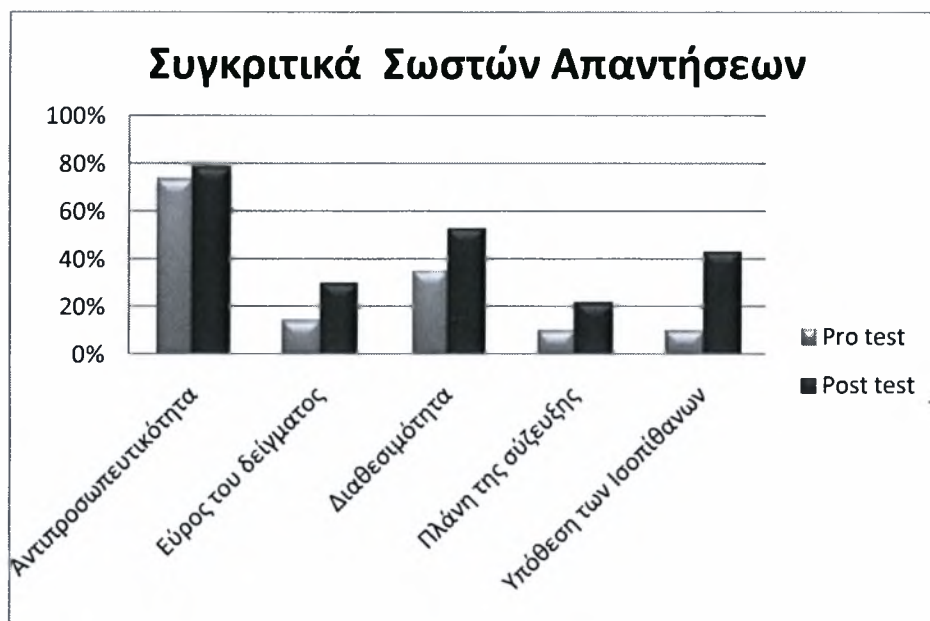
από τις αιτίες που αυτή η στρατηγική είναι η πλέον διαδεδομένη ανάμεσα στους μαθητές είναι ότι σχεδόν όλες οι πιθανολογικές καταστάσεις που συζητούνται σε μια σχολική τάξη βασίζονται στην υπόθεση του ισοπίθανου αφού σχετίζονται με ζάρια, νομίσματα, χαρτιά κλπ). Στο αρχικό ερωτηματολόγιο τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν πολύ χαμηλά. Μόλις το 10% των μαθητών



κατάφερε να απαντήσει σωστά. Μετά όμως τη διδακτική παρέμβαση, παρατηρήθηκε μια σημαντική διαφορά. Στο τελικό ερωτηματολόγιο το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έφτασε το 56%, κάτι που δείχνει την επιτυχία της παρέμβασης στην εξάλειψη αυτής της πλάνης, που ως σημειωθεί ότι είναι και η σημαντικότερη στις σχολικές τάξεις.

Όλα τα παραπάνω φαίνονται συγκεντρωτικά στον πίνακα, αλλά και στο γράφημα που ακολουθεί.

Οι πέντε βασικές παρανοήσεις	Ποσοστό που επηρεάζεται (Pre-test)	Ποσοστό που επηρεάζεται (Post-test)
Αντιπροσωπευτικότητα της πληροφορίας	26%	21%
Εύρος του δείγματος	86%	70%
Διαθεσιμότητα πληροφορίας	65%	47%
Πλάνη της Σύζευξης	90%	78%
Υπόθεση των Ισοπίθανων	90%	56%



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Βεργίδης, Δ., Abrahamsson, K., Davis, R., & Fay, R., 1999, Εκπαίδευση Ενηλίκων: Κοινωνική και οικονομική λειτουργία, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.

Βεργίδης, Δ., 1995, Υποεκπαίδευση: Κοινωνικές, πολιτικές και πολιτισμικές διαστάσεις, Ύψιλον/Βιβλία, Αθήνα.

Κανάκης, Ι., 1987, Η οργάνωση της διδασκαλίας μάθησης σε ομάδες εργασίας. Αθήνα.

Κόκκος, Α., 1999, Αρχές Μάθησης Ενηλίκων, Στο Α. Κόκκος & Α. Λιοναράκης, Ανοικτή και εξ' Αποστάσεως Εκπαίδευση: Σχέσεις Διδασκόντων – Διδασκομένων, τ. Β'.

Κόκκος, Α., 2002, Μελέτη για τον προσδιορισμό των γνώσεων και δεξιοτήτων των εκπαιδευόμενων εκπαιδευτών, Υπουργείο Εργασίας και Κοινωνικών Ασφαλίσεων, Αθήνα.

Κόκκος, Α., 1987, Μελέτη για τη σύσταση Σχολής Στελεχών Λαϊκής Επιμόρφωσης, Γενική Γραμματεία Λαϊκής Επιμόρφωσης, Αθήνα.

Τουμάσης Μ., 1999, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα.

Χρυσοφίδης Κ., 1994, Βιωματική- Επικοινωνιακή Διδασκαλία. Η εισαγωγή της μεθόδου Project στο σχολείο Gutenberg, Αθήνα

Ξένη Βιβλιογραφία

Ausubel, D. P., 1963, The psychology of meaningful verbal learning, New York: Grune and Stratton.

Ausubel, D. P., 1968, Educational psychology: A cognitive view, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Borovcnik, M., and Bentz, H. J., 1991, Empirical Research in Understanding Probability, in Chance Encounters: Probability in Education, eds. R. Kapadia and M. Borovcnik, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Bruner J., 1956, *A Study of Thinking*, J. Wiley, New York.
- Bruner J., 1957, *The relevance of education*, New York: W.W. Norton.
- Burns R., 1995, *The adult learner at work*, Sydney, Business and Professional Publishing.
- Burns S., 1995, Rapid changes require enhancement of adult learning, *HRMonthly* June, pp 16-17.
- CEDEFOP, 1996, *Vocational Training Glossarium*, CEDEFOP, Thessaloniki.
- Coombs, P. A., & Ahmed, M., 1974, *Attacking Rural Poverty: How Non-formal Education Can Help*, John Hopkins University Press, Baltimore.
- Coulombe, S., Tremblay, J.-F., Marchand, S., 2004, *International Adult Literacy Survey: Literacy scores, human capital and growth across fourteen OECD countries*, Statistics Canada, Ottawa, Ontario, Canada, Catalogue no. 89-552-XPE, no. 11, .
- DelMas, R. C., and Bart, W. M., 1987, *The Role of an Evaluation Exercise in the Resolution of Misconception of Probability*, paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, April.
- Dewey J., 1910, *How We Think?* Heath, Boston.
- Dewey J., 1963. *Experience and Education*, Collier-McMillan, London.
- Driver, R. and Oldham, V., 1986, A constructivist approach to curriculum development. *Science Studies in Science Education* 13.
- Falk, R., 1988, *Conditional Probabilities: Insights and Difficulties*, in *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, eds. R. Davidson and J. Swift, Victoria, BC: University of Victoria.
- Falk R., Konold, C., 1992, *The Psychology of Learning Probability*, in *Statistics for the Twenty-First Century, MAA Notes (Number 26)*, eds. F. Gordon and S. Gordon. Washington D.C.: The Mathematics Association of America.
- Fischbein, E., 1987, *Intuition in Science and Mathematics*, Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- Fischbein E., Gazit, A., 1984, *Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions?*, *Educational Studies in Mathematics*.
- Fischbein E., Pampu, I., and Manzat, I., 1970a, *Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children*, *Child Development*.

Fischbein, E., & Schnarch, D., 1997. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1).

Freire, P. – Faundez, A., 1992, *Learning to Question, A Pedagogy of Liberation* (New York : Continuum Publishing).

Freire P. et al, 1997, *Mentoring the Mentor, A critical dialogue with Paulo Freire* (London: Peter Lang Publishing).

Garfield, J., and Ahlgren, A., 1988, Difficulties in learning basic concepts in statistics: Implications for research, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 44-63.

Garfield, J. B., and delMas, R. C., 1989, Reasoning About Chance Events: Assessing and Changing Students' Conception of Probability, in 11th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2), New Brunswick: Rutgers.

Glasserfeld, E., 1987, Learning as constructive activity, In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Green, D. R., 1982, *Probability Concepts in 11-16 Year Old Pupils*, Loughborough University, UK: Centre for Advancement of Mathematical Education in Technology.

Green, D. R., 1987, *Probability Concepts: Putting Research into Practice*, Teaching Statistics.

Green, D. R., 1988, Children's Understanding of Randomness: Report of a Survey of 1600 Children Aged 7-11 Years, in *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, eds. R. Davidson and J. Swift, Victoria, BC: University of Victoria.

Grey, D. R., Holmes, P., Barnett, V. and Constable, G. M. (Eds.), 1983, *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Jarvis, P., 1985, *Adult and Continuing Education: Theory and Practice*, Taylor & Francis.

Kahneman, D., and Tversky, A., 1972, Subjective Probability: A Judgment or Representativeness, *Cognitive Psychology*.

Kahneman, D., and Tversky, A., 1982, On the Study of Statistical Intuitions, *Cognition*.

Knowles M., 1970, *The Modern Practice of Adult Education: Andragogy versus Pedagogy*, Association Press, New York.

- Knowles M., 1998, *The Adult Learner*, Gulf Publishing Company, Houston, Texas
- Konold, C., 1983, *Conceptions About Probability: Reality Between a Rock and a Hard Place*, University of Massachusetts, Dissertation Abstracts International.
- Konold, C., 1989a, *Informal Conceptions of Probability*, Cognition and Instruction.
- Konold, C., 1989b, *An Outbreak of Belief in Independence?*, in *Proceedings of the 11th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2), eds. G. Goldin, C. Maher, and B. Davis. Rutgers, NJ: Rutgers University Press.
- Konold, C., 1991, *Understanding Students' Beliefs About Probability*, in *Radical Constructivism in Mathematics Education*, ed. E. von Glasersfeld, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Li J., 2000. *Chinese students understanding of probability*. Unpublished doctoral dissertation. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.
- Lynda Ginsburg, Myrna Manly, and Mary Jane Schmitt, 2006, *The Components of Numeracy*. National Center for the study of adult learning and literacy, Occasional Paper, December 2006.
- Mezirow J., 1981, *A critical theory of adult learning and education*, Adult Education.
- Pfannkuch, M., and Brown, C. M., 1996, *Building on and Challenging Students' Intuitions About Probability: Can We Improve Undergraduate Learning?*, *Journal of Statistics Education*.
- Rogers A., 1999, *Η Εκπαίδευση Ενηλίκων, Μεταίχμιο, Αθήνα*.
- Rogers A., 2003a, *What is the difference?, A new critique of adult learning and teaching*, NIACE, Leicester.
- Rogers A., 2003b, *What's the difference? Adults Learning*, October.
- Rogers J., 1971, *Adults Learning*, The Open University Press.
- Shaughnessy, J. M., 1976, *A Clinical Investigation of College Students' Reliance Upon the Heuristics of Availability and Representativeness in Estimated the Likelihood of Probabilistic Events*, Dissertation Abstracts International.
- Shaughnessy, J. M., 1977, *Misconceptions of Probability: An Experiment with a Small-Group, Activity-Based, Model-Building Approach to Introductory Probability at the College Level*, Educational Studies in Mathematics.

Shaughnessy, J. M., 1983a, Misconceptions of Probability, Systematic and Otherwise: Teaching Probability and Statistics so as to Overcome Some Misconceptions, in Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, eds. D.R. Grey and P. Holmes, Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Shaughnessy, J. M., 1983b, The Psychology of Inference and the Teaching of Probability and Statistics: Two Sides of the Same Coin?, in Decision Making Under Uncertainty, ed. R. Scholz, Amsterdam: Elsevier Publishers.

Shaughnessy, J. M., 1992, Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions, in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, ed. D.A. Grouws, New York: Macmillan Publishing.

Steffe, L P and Wiegel, H G, 1992, On Reforming Practice in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics.

Tversky, A., and Kahneman, D., 1980, Causal Schemas in Judgment Under Uncertainty, in Progress in Social Psychology, ed. M. Fischbein, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Tversky, A., and Kahneman, D., 1983, Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgement, Psychological Review.

UNESCO, 1976, Recommendation on the Development of Adult Education – Nairobi Conference, UNESCO, Paris.

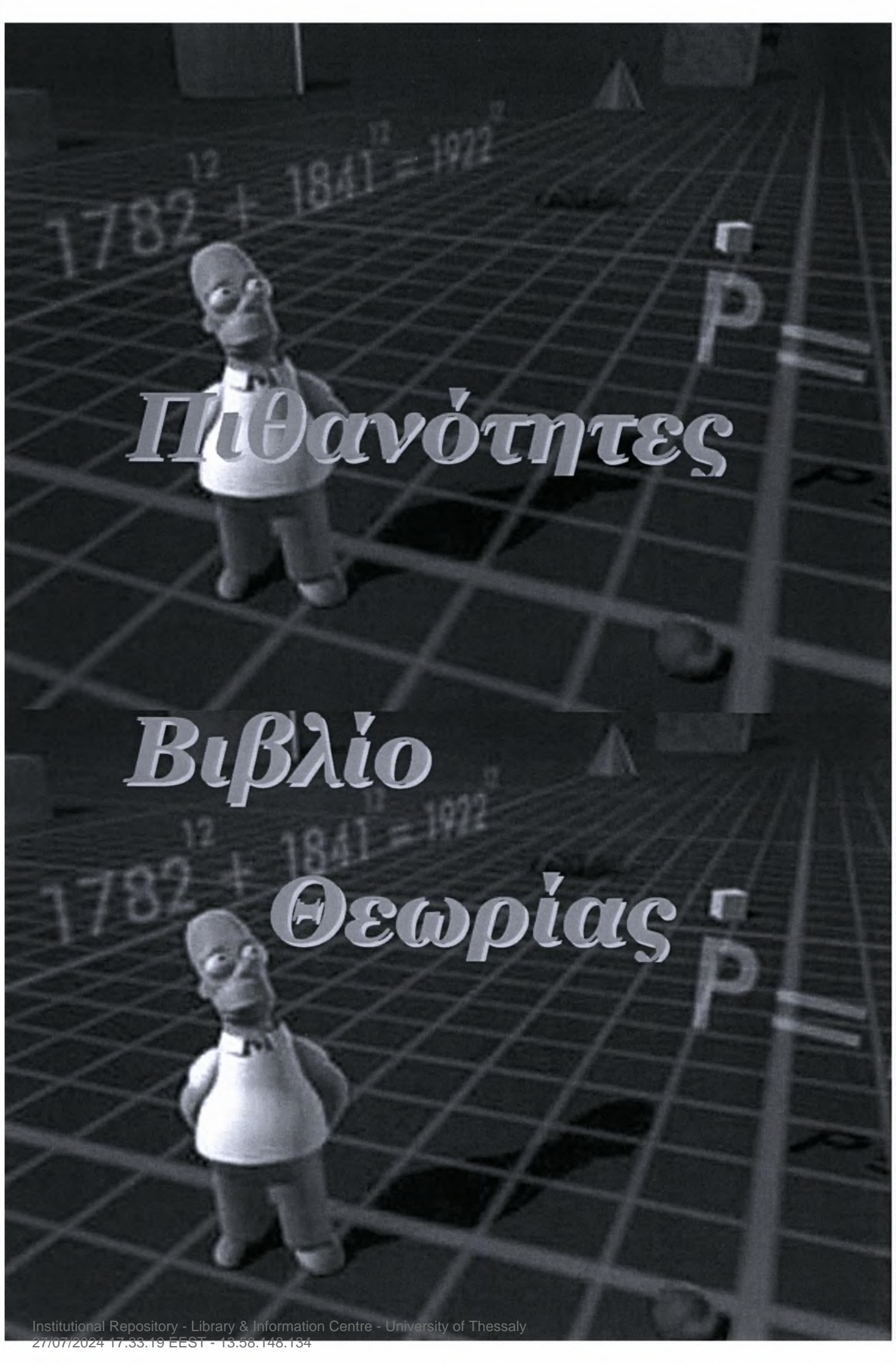
Vygotsky, L., 1978, Mind in Society - The Development of Higher Psychological Processes. Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, and Ellen Soubberman (eds). Harvard University Press, Massachusetts, USA.

Wheatley, G H, 1992, The Role of Reflection in Mathematics Learning, Educational Studies in Mathematics.

WHEATLEY, G.H., 1991, Constructivist perspectives on Science and Mathematics learning, Science Education.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λευκή σελίδα



Πιθανότητες

Βιβλίο

Θεωρίας

ΛΕΥΚΗ ΣΕΛΙΔΑ

1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

Ελπι κή ή Ξ έββ οι ηή γραφέραν ή η Β λ η



- καη Βλ ί η η κα η λ Βαρα η ί ί η
- καη Βλ ί η η η λ κα η ή η λ ραν Ξ ί η Βή ί η κ ί η
λ Β ραν ή η η ί η Ξ α η κα η ή Βλ ί η κα η ή η κη Βή ο
ή Β λ ί η
- κα η φ λ ί η η κα η κ λ ρ λ κ ή κ ί η λ Β ραν ή η
ν ί ί η ν λ η Βα ραν ή ή λ να η ν λ η λ κα η
α ή η Ξ α η ν λ η κα η η
- κα η κ β Β λ ί η η Β λ ί η ρ λ να η κ λ ή ρ κ β κ η
Ξ α φ ί η Ξ α η η ή α η κ λ ρ λ κα η ή κ να η α ο γ ρ
α ο να η



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα με σιγουριά; Σε καθένα πείραμα από τα παραπάνω που δεν μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμά του, μπορείτε να βρείτε τα δυνατά του αποτελέσματα;

- α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια είναι η ένδειξή του;
- β) Μετράμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει.
Ποια θα είναι η ένδειξη του θερμομέτρου;
- γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Ποια θα είναι η πάνω όψη του;
- δ) Επιλέγουμε τυχαία έναν άρτιο αριθμό και τον διαιρούμε με το 2. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσής;
- ε) Επιλέγουμε στην τύχη έναν τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2. Ποιος θα είναι ο αριθμός αυτός;
- στ) Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές. Ποιο θα είναι το άθροισμα των ενδείξεων;

Πείραμα - Πείραμα Τύχης

Όταν λέμε ότι κάνουμε ένα **πείραμα** εννοούμε μια διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί (θεωρητικά) άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες ουσιαστικά συνθήκες, και στο τέλος της οποίας παρατηρούμε ορισμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα:

- η ρίψη ενός νομίσματος με δύο όψεις,
- η ρίψη ενός συμμετρικού ζαριού,
- ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο μέσα σ' ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα,
- το ύψος των παιδιών ενός παιδικού σταθμού ή
- ο αριθμός των γεννήσεων σε μια περιοχή της χώρας για ένα δοσμένο χρονικό διάστημα,

μπορούν να θεωρηθούν πειράματα.

Τα πειράματα μπορούν να χωρισθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα **αιτιοκρατικά ή καθοριστικά** (deterministic) και τα λεγόμενα **πειράματα τύχης** (random).

Αιτιοκρατικά λέγονται τα πειράματα εκείνα τα οποία έχουν ένα δυνατό αποτέλεσμα, που είναι γνωστό πως θα συμβεί, πριν ακόμα εκτελεστεί το πείραμα, και έτσι είναι φυσικό να μην παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Παράδειγμα ενός τέτοιου πειράματος είναι το εξής: Εάν κάποιος τοποθετήσει ένα ποτήρι με νερό σε περιβάλλον θερμοκρασίας κάτω των 0° Κελσίου τότε το νερό θα γίνει πάγος (αποτέλεσμα μοναδικό και γνωστό εκ των προτέρων).



Πειράματα τύχης λέγονται εκείνα τα πειράματα τα οποία έχουν περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό το αποτέλεσμα πριν από την εκτέλεση του πειράματος (είναι βέβαια γνωστό ότι το αποτέλεσμα θα ανήκει σε ένα σύνολο δυνατών απο-



τελεσμάτων, σύνολο το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων) π.χ. όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα με δύο όψεις (κεφαλή-γράμματα) ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι κεφαλή ή γράμματα το ποιο όμως θα είναι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, σε μια ρίψη, δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό πριν εκτελέσουμε το πείραμα. Με τέτοιου είδους πειράματα ασχολείται κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Δειγματικός Χώρος

Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων των πειραμάτων που θεωρούμε στις πιθανότητες είναι ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος πριν από την πραγματοποίηση του πειράματος. Το σύνολο αυτό των δυνατών αποτελεσμάτων ονομάζεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω , και το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται με $N(\Omega)$.

Γενικά

Δειγματικός Χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο δειγματικός χώρος εξαρτάται και από τους συγκεκριμένους σκοπούς του πειράματος. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με δειγματικούς χώρους που το πλήθος των στοιχείων τους είναι πεπερασμένο και οι οποίοι ονομάζονται διακριτοί. Δίνουμε στη συνέχεια ορισμένα παραδείγματα πειραμάτων και αντίστοιχων δειγματικών χώρων.

Παράδειγμα 1: Στο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των δυο δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή:

$\Omega = \{\text{Κεφαλή, Γράμματα}\}.$



Παράδειγμα 2: Στο πείραμα της ρίψεως ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των έξι δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.



Παρατήρηση: Υπάρχουν πολλοί δειγματικοί χώροι για το ίδιο πείραμα τύχης, αλλά συνήθως ένας δειγματικός χώρος δίνει τις περισσότερες πληροφορίες. Π.χ. για την ρίψη ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ένας άλλος θα μπορούσε να είναι και ο $\Omega = \{\text{περιττός, άρτιος}\}$. Προφανώς ο δεύτερος δειγματικός χώρος δεν μπορεί να προσδιορίσει αν το αποτέλεσμα διαιρείται με 2.

Παράδειγμα 3: Αν τώρα υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο συμμετρικά ζάρια ένα πράσινο και ένα κόκκινο και μας ενδιαφέρει η κατανομή των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών, τότε ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από τα παρακάτω 36 αποτελέσματα:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$\Omega = \{1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6\}$

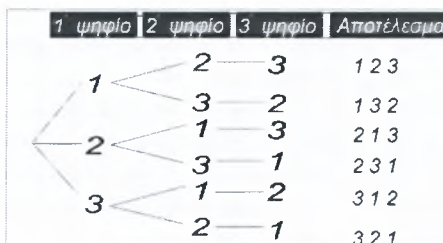
Παράδειγμα 4: Αν πάλι στην ρίψη δύο συμμετρικών ζαριών, ενδιαφερόμαστε για το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών, ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Παρατήρηση: Προσοχή στο πως ορίζεται ένα πείραμα τύχης. Τα δύο παραπάνω πειράματα (της ρίψης των ζαριών) φαίνεται ότι είναι ίδια αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Έχουν διαφορετικούς δειγματοχώρους.

Εύρεση Δειγματικού Χώρου

Έστω ότι θέλουμε να σχηματίσουμε έναν τριψήφιο αριθμό με διαφορετικά ανά δύο τα ψηφία του που θα αποτελείται μόνο από τα 1, 2, 3. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος μπορεί να βρεθεί εύκολα κάνοντας ένα σχήμα όπως φαίνεται δίπλα.



Πράγματι εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\Omega = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

Ένα τέτοιο σχήμα όπως το παραπάνω, που μοιάζει με δένδρο, το ονομάζουμε **δενδροδιάγραμμα**. Είναι φανερό ότι η μορφή του σχήματος που θα κάνουμε (για να μας βοηθήσει να βρούμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης) περιορίζεται μόνο από τη φαντασία μας.



Ας κάνουμε τώρα ένα δεύτερο πείραμα. Ας υποθέσουμε ότι κάθε μαθητής στο Γυμνάσιό σας, πρέπει να πάρει και ένα μάθημα επιλογής. Η Μαρία πρέπει να επιλέξει πρώτη ανάμεσα στα Αρχαία και στην Ιστορία, ενώ στη συνέχεια ο Κώστας ανάμεσα στα Μαθηματικά, Φυσική και Χημεία ενώ. Σημειώνουμε την επιλογή τους. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Για να

Κώστας	Μαθηματικά	Φυσική	Χημεία
Μαρία			
Αρχαία	(Α,Μ)	(Α,Φ)	(Α,Χ)
Ιστορία	(Ι,Μ)	(Ι,Φ)	(Ι,Χ)

απαντήσουμε στην ερώτηση, σχεδιάζουμε τον διπλανό πίνακα. Είναι πλέον εύκολο να σημειώσουμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{AM, A\Phi, AX, IM, I\Phi, IX\}$.

Ένας τέτοιος πίνακας λέγεται **πίνακας διπλής εισόδου**.

Ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Σε σκακιστικούς αγώνες πριν από αρκετά χρόνια, βρέθηκαν αντιμέτωποι δύο μεγάλοι σκακιστές, ο Ανατόλι Κάρποβ και ο Ρόμπερτ Φίσερ. Ο Φίσερ θα έχανε τον τίτλο του παγκόσμιου πρωταθλητή αν έκανε 2 ισοπαλίες (Ι) ή 1 ήττα (Η), ενώ θα διατηρούσε τον τίτλο του με δύο νίκες (Ν). Μπορείτε να βρείτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για τον Φίσερ;

Ας ρίξουμε δύο νομίσματα ταυτόχρονα. Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$. Το σύνολο $A = \{ΚΚ\}$, είναι ένα υποσύνολο του Ω , και ονομάζεται ενδεχόμενο του πειράματος και πιο συγκεκριμένα το ενδεχόμενο «ήρθαν δύο κεφαλές». Όμοια ένα άλλο ενδεχόμενο του πειράματος είναι το $B = \{ΚΓ, ΓΚ\}$, δηλαδή το ενδεχόμενο «ένα ακριβώς νόμισμα δείχνει γράμματα».

Ας δούμε τώρα ένα άλλο πείραμα. Ας ρίξουμε ένα νόμισμα αλλά τώρα τρεις φορές. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

Το ενδεχόμενο «ήρθαν δύο κεφαλές» είναι το σύνολο

$A = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$,

ενώ το ενδεχόμενο το «φέρνουμε δύο φορές συνεχόμενα κεφαλή», είναι

το $B = \{ΚΚΓ, ΓΚΚ\}$

Γενικά

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται **ενδεχόμενο ή γεγονός** του πειράματος.

Ας ρίξουμε και πάλι ένα νόμισμα δύο φορές. Αν το πρώτο νόμισμα έρθει «ΚΕΦΑΛΗ» και το δεύτερο πάλι «ΚΕΦΑΛΗ», τότε μπορούμε να πούμε ότι το ενδεχόμενο $A = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΓ\}$ **πραγματοποιείται**. Το ενδεχόμενο A επίσης πραγματοποιείται αν το έρθει $ΚΓ$, δηλαδή το πρώτο νόμισμα «ΚΕΦΑΛΗ» και το δεύτερο «ΓΡΑΜΜΑΤΑ» ή ακόμη και $ΓΓ$. Για το λόγο αυτό οι περιπτώσεις να έρθει $ΚΚ$ ή $ΚΓ$ ή $ΓΓ$ λέγονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A .

Απλό, βέβαιο, αδύνατο ενδεχόμενο

Ας ρίξουμε τώρα ένα ζάρι μία φορά. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το ενδεχόμενο $A = \{4\}$, έχει ένα και μόνο στοιχείο και για αυτό ονομάζεται απλό ή στοιχειώδες ή και βασικό ενδεχόμενο του πειράματος. Γενικά κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω με ένα και μόνο στοιχείο, ονομάζεται **απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο**.



Από την άλλη μεριά το ενδεχόμενο «ήρθε μονοψήφιος αριθμός» πραγματοποιείται σε κάθε περίπτωση (αν ρίξουμε ένα ζάρι). Για το λόγο αυτό το ονομάζουμε **βέβαιο ενδεχόμενο**. Επίσης και ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι κι αυτός ένα ενδεχόμενο (αφού $\Omega \subseteq \Omega$) που πραγματοποιείται σε κάθε περίπτωση. Επομένως ο Ω είναι βέβαιο ενδεχόμενο σε κάθε πειράματα. Αν όμως σκεφτούμε το ενδεχόμενο «να έρθει διψήφιος αριθμός», τότε το συγκεκριμένο ενδεχόμενο δεν θα πραγματοποιηθεί ποτέ (αφού ρίχνουμε μόνο ένα ζάρι). Για το λόγο αυτό το ονομάζουμε **αδύνατο ενδεχόμενο**. Είναι φανερό ότι το κενό σύνολο \emptyset , είναι ενδεχόμενο κάθε πειράματος αφού $\emptyset \subseteq \Omega$ που φυσικά ποτέ δεν πραγματοποιείται. Επομένως το κενό σύνολο είναι επίσης ένα αδύνατο ενδεχόμενο σε κάθε πείραμα.

Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω , επομένως κάθε ενδεχόμενο είναι ένα σύνολο. Μπορούμε λοιπόν κάθε ενδεχόμενο να το παριστάνουμε με διάγραμμα Venn.

Έτσι όπως έχουμε τις πράξεις μεταξύ συνόλων, έχουμε και τις αντίστοιχες **πράξεις μεταξύ ενδεχομένων**. Έτσι έχουμε:

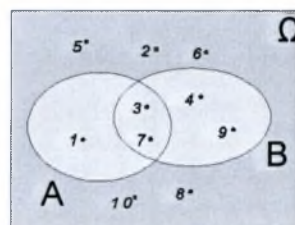


▼ **Ένωση** δύο ενδεχομένων A και B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cup B$, που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A **ή** το B δηλαδή όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα και B.

Για παράδειγμα αν υπάρχουν 10 λαχνοί αριθμημένοι από το 1 ως το 10 και τραβήξουμε ένα λαχνό τυχαία,

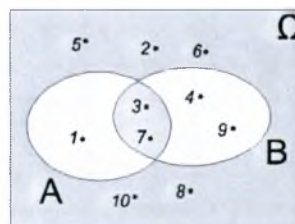
τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Αν $A = \{1, 3, 7\}$ και $B = \{3, 4, 7, 9\}$ δύο ενδεχόμενα του πειράματος, τότε η ένωσή τους είναι $A \cup B = \{1, 3, 7, 4, 9\}$.



▼ **Τομή** δύο ενδεχομένων A και B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cap B$, που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το A **και** το B, δηλαδή όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα.

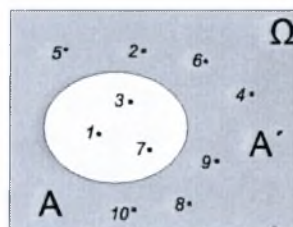
Για παράδειγμα στο προηγούμενο πείραμα η τομή των A και B είναι το ενδεχόμενο $A \cap B = \{3, 7\}$.



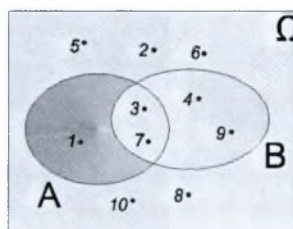


ν **Συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω), ονομάζεται το ενδεχόμενο A' που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A , δηλαδή όταν **όχι** A .

Για παράδειγμα στο προηγούμενο πείραμα $A' = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

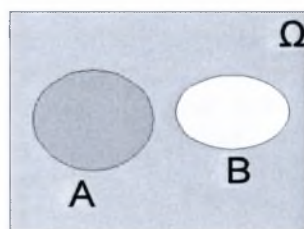


ν **Διαφορά** των ενδεχομένων A και B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A-B$ που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Στο προηγούμενο λοιπόν παράδειγμα, όπου $A = \{1, 3, 7\}$ και $B = \{3, 4, 7, 9\}$, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι $A-B = \{1\}$.



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Ας κάνουμε τώρα ένα άλλο πείραμα. Ας υποθέσουμε ότι τραβάμε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα με 52 χαρτιά. Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «το φύλλο είναι σπαθί» και B το ενδεχόμενο «το φύλλο είναι κούπα», τότε είναι φανερό ότι τα ενδεχόμενα A και B , δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα (δεν μπορεί το φύλλο μας να είναι ταυτόχρονα και σπαθί και κούπα). Είναι φανερό ότι τα σύνολα A και B δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή η τομή τους $A \cap B$ είναι το κενό σύνολο \emptyset .



Γενικά

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** αν $A \cap B = \emptyset$.

Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα γράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή (φυσική μας) γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$

1.2 Η έννοια της Πιθανότητας



: Υάρχοχουονλί δάΥηχεΥ γμνι γηχατκλάκ ύγ

- Ε ργγί κχλ ,σΥργγζλ,δυ ώΥγάρΥκψιγρόπάηγΥ Π
ρόαΥ ρω ήχι άφχεΥι ΥήλνδάΥηχεΥ ι κ ύλώχσΥ
χλϊδι χσθ
- Ε ργγί κχλ ,σΥργγζλ,δυ ώΥγάρΥκψιγρόπάηγΥ Π
ρόαΥ ρω ήχι άφχεΥι ΥήλνδάΥηχεΥιυογδδύχσΥ
χλϊδι χσθ



Κάθε ημέρα, οι άνθρωποι καλούνται να πάρουν αποφάσεις βασισμένες είτε σε στατιστικά δεδομένα είτε σε πιθανότητες. Η έννοια της πιθανότητας έχει γίνει πλέον μέρος της καθημερινής μας ζωής. Χρησιμοποιούμε πιθανότητες όταν ντυνόμαστε κάθε πρωί για να πάμε στη δουλειά μας, εκτιμώντας με το νου μας ποια είναι η πιθανότητα για βροχή, για χιόνι για καιρό ζεστό ή κρύο. Ψηφοφορίες, διαφημιστικά μηνύματα, ιατρικοί κίνδυνοι, καιρικά φαινόμενα, τυχερά παιχνίδια και άλλα χρησιμοποιούν επίσης τις πιθανότητες.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ρίχνουμε δυο ζάρια ταυτόχρονα. Μπορείτε να βρείτε ποιο από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι πιθανότερο;

(Α) το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7.

(Β) το άθροισμα των ενδείξεων είναι 9.

Προσπαθήστε να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Η σχετική συχνότητα ως πιθανότητα

Για να βρούμε το ποσοστό των νοικοκυριών που έχουν πάρει δάνειο, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Επιλέγουμε διάφορα δείγματα και εξετάζουμε τα νοικοκυριά ως προς αυτή την ιδιότητα. Σε κάθε δείγμα βρίσκουμε και το αντίστοιχο ποσοστό. Αν συνεχίσουμε με μεγαλύτερα δείγματα θα παρατηρήσουμε ότι το ποσοστό των νοικοκυριών που έχουν πάρει δάνειο, αρχίζει και σταθεροποιείται γύρω από κάποιον αριθμό¹. Γι' αυτό λέμε ότι η **πιθανότητα** κάποιο νοικοκυριό, που επιλέγεται τυχαία, να έχει πάρει δάνειο είναι αυτό το ποσοστό.



Γενικά

Εμπειρικός Ορισμός (εκ των υστέρων, a posteriori): Για να βρούμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A , τότε εκτελούμε το πείραμα n φορές με n «πολύ μεγάλο» και αν k είναι οι φορές που συνέβη το ενδεχόμενο A , τότε λέμε ότι η πιθανότητα $P(A)$ να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A δίνεται από

$$\text{τον τύπο } P(A) = \frac{k}{n} \text{ ή καλύτερα το } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}.$$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω εμπειρικός ορισμός χρησιμοποιείται συνήθως όταν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης δεν είναι «εξ ίσου πιθανά».

Κλασσικός ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα. Γνωρίζουμε ότι οι δυνατές περιπτώσεις είναι «κεφαλή» και «γράμματα». Επειδή δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος για το αντίθετο, θεωρούμε ότι και οι δύο δυνατές περιπτώσεις έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, είναι όπως λέμε **ισοπίθανες**. Αν λοιπόν συμ-

¹ Ότι αυτό θα συμβαίνει πάντοτε προκύπτει από τον «**Νόμο των μεγάλων αριθμών**».

βολίσουμε με $P(\kappa)$ την πιθανότητα να έρθει «κεφαλή» και $P(\gamma)$ την πιθανότητα να έρθουν «γράμματα» τότε $P(\kappa) = P(\gamma)$ και επειδή γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων είναι 1 (δηλαδή 100%), πρέπει:

$$P(\kappa) = P(\gamma) = 1/2.$$

Γενικά

Κλασσικός ορισμός (εκ των προτέρων, a priori): Αν Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα και A ένα ενδεχόμενο του πειράματος, τότε ορίζουμε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A είναι ίση με $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$.

Παρατήρηση: Οι δυο παραπάνω ορισμοί έχουν σοβαρά μειονεκτήματα γιατί οι εκφράσεις «πολύ μεγάλο» και «ισοπίθانا» είναι ασαφείς. Τα μειονεκτήματα αυτά θα παρακάμψει ο αξιωματικός ορισμός της έννοιας της πιθανότητας, που στην παρούσα φάση δεν θα δοθεί.

Όπως φαίνεται από τους παραπάνω ορισμούς η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, εκφράζεται από έναν δεκαδικό αριθμό ανάμεσα στο 0 και το 1. Πιθανότητα ίση με το μηδέν σημαίνει ότι το ενδεχόμενο είναι αδύνατο, ενώ πιθανότητα ίση με 1 σημαίνει ότι το ενδεχόμενο είναι βέβαιο. Είναι φανερό ότι η πιθανότητα μπορεί να εκφραστεί επίσης ως κλάσμα ή ως ποσοστό. Για παράδειγμα η πιθανότητα να φέρουμε ΓΡΑΜΜΑΤΑ κατά τη ρίψη ενός νομίσματος είναι $1/2$ ή 0,5 ή 50%.



Παράδειγμα 1^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, κάθε αριθμός από τους 1, 2, 3, 4, 5, 6 έχει τις ίδιες πιθανότητες να εμφανιστεί. Επομένως ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Η πιθανότητα λοιπόν να εμφανιστεί ένας από τους παραπάνω αριθμούς είναι ίση με $1/6$. Για παράδειγμα η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το απλό ενδεχόμενο $A = \text{«φέρνω τρία»}$ είναι ίση με $P(A) = 1/6$ ή και $P(5) = 1/6$.



Παράδειγμα 2^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, ποια η πιθανότητα να φέρουμε άρτιο αριθμό;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ανάμεσα στους αριθμούς 1 έως και 6, υπάρχουν τρεις (3) άρτιοι αριθμοί οι: 2, 4 και 6. Επομένως αν A το ενδεχόμενο «φέρνω άρτιο αριθμό», τότε

$$A = \{2, 4, 6\}$$

με $N(A) = 3$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = 3/6 = 1/2$.



Παράδειγμα 3^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, ποια η πιθανότητα να φέρουμε πρώτο αριθμό;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ανάμεσα στους αριθμούς 1 έως και 6, υπάρχουν τέσσερις πρώτοι αριθμοί. Οι 1, 2, 3 και 5. Επομένως αν A το ενδεχόμενο «φέρνω πρώτο αριθμό», τότε

$$A = \{1, 2, 3, 5\}$$

με $N(A) = 4$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = 4/6 = 2/3$.



Παράδειγμα 4^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, ποια η πιθανότητα να φέρουμε αριθμό μεγαλύτερο του 4;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ανάμεσα στους αριθμούς 1 έως και 6, υπάρχουν δύο αριθμοί μεγαλύτεροι του 4. Οι 5 και 6. Επομένως αν A το ενδεχόμενο «φέρνω αριθμό μεγαλύτερο του 4», τότε

$$A = \{5, 6\}$$

με $N(A) = 2$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = 2/6 = 1/3$.



Παράδειγμα 5^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, ποια η πιθανότητα να φέρουμε κάποιον αριθμό από το 1 έως και το 6;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Αν A το ενδεχόμενο «φέρνω κάποιον αριθμό από το 1 έως και το 6», τότε

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

με $N(A) = N(\Omega) = 6$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = 6/6 = 1$.



Παράδειγμα 7^ο: Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, ποια η πιθανότητα να φέρουμε τον αριθμό 7;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Είναι φανερό ότι το 7 δεν είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου. Άρα το ενδεχόμενο $A = \{\text{φέρνω } 7\}$ είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί, άρα έχει πιθανότητα $P(A) = P(7) = 0$.



Παράδειγμα 8^ο: Αν τραβήξουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα με 52 χαρτιά, ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε:

α) τον άσσο σπαθί; β) μία κούπα; γ) ένα δεκάρι;

Απάντηση: Ο δειγματικός χώρος του παραπάνω πειράματος είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα χαρτιά της τράπουλας, δηλαδή $N(\Omega)=52$.

α) το ενδεχόμενο $A=$ «τραβάμε άσσο σπαθί» περιέχει μόνο ένα στοιχείο, δηλαδή $N(A)=1$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A)=1/52$.

β) το ενδεχόμενο $B=$ «τραβάμε μία κούπα» περιέχει όλα τα χαρτιά της τράπουλας που είναι κούπες, δηλαδή 13 χαρτιά. Άρα $N(A)=13$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B)=13/52=1/4$.

1.3 Οι νόμοι των Πιθανοτήτων



: Υάρχοχουονλί δάΥχεΥ γμνι γηχατκλύκ ύγ

- ε ργγί κχλ ,αΥργΥζ,λ,δυ ύΥγάρΥκψιγρόπάηγΥ Π
ρόαΥ ρω ήχι άφχεΥι ΥπάΥζ,χνιμ ύΥγπάΥκψιγΠ
ρόπάηγαΥχεΥδει κοάλί ι γπιύχοσΥχεθ
- ε ργΥζ,λ,δυ ύΥγάρΥκψιγρόπάηγΥ ρόαΥ ρω ήχι ώΠ
ρχεΥ ΥπάΥζ,χνιμ ύΥγχεΥκλχδμ πιύχοσφρόι χεθ



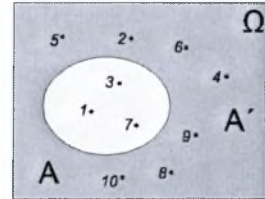
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^η

Στο γυμνάσιό μας, το 60% των μαθητών παρακολουθεί τα μαθήματα των Αγγλικών. Το 35% παρακολουθεί μαθήματα Γαλλικών και το 15% παρακολουθούν μαθήματα και των δύο γλωσσών.

- A)** Αν επιλέξουμε έναν μαθητή τυχαία να υπολογίσετε την πιθανότητα να παρακολουθεί μαθήματα από μία τουλάχιστον ξένη γλώσσα.
- B)** Αν επιλέξουμε έναν μαθητή τυχαία να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην παρακολουθεί μαθήματα από καμία ξένη γλώσσα.

1. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο του πειράματος. Από τον ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι παρακάτω βασικές ιδιότητες: **$0 \leq P(A) \leq 1$** και **$P(\Omega) = 1$** .

2. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο του πειράματος. Η πιθανότητα του **συμπληρωματικού** του ενδεχομένου A , δηλαδή η πιθανότητα του A' είναι ίση με:



$$P(A') = 1 - P(A)$$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^η

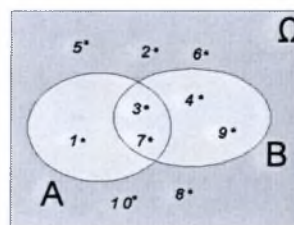
Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Να βρείτε την πιθανότητα ένα πλοίο να φτάσει στο νησί με καθυστέρηση.

3. Έστω τώρα Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A και B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του πειράματος, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$, τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι **ανά δύο ασυμβίβαστα** τότε ισχύει και πάλι ο προσθετικός νόμος: $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

4. Αν υποθέσουμε τώρα ότι τα ενδεχόμενα *δεν είναι ασυμβίβαστα*, δηλαδή αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε όταν προσθέτουμε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$, η πιθανότητα της τομής δηλαδή η $P(A \cap B)$ προστίθεται δύο φορές. Για να ισοφαρίσουμε αυτή την διπλή πρόσθεση, η πιθανότητα της τομής πρέπει να αφαιρεθεί μια φορά. Έτσι έχουμε:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

5. Αν υποθέσουμε τώρα ότι για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει $A \subseteq B$, τότε είναι φανερό ότι: $P(A) \leq P(B)$.

1.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα



: Υπάρχοχουονλί δάγχεΥ γμνι γηχατκλάκ ύγ

ε ργγί κχλ ,αΥργζλ,δυ ώΥπάΥω δι ει άράΥκύΠ
μγρόπάπγΥ ρόαΥ ρω ήχι άρχεθ

ε ργγζώλ ώΥκχύΥ ρω ήοι ργΥοάέχρηγύγρ Π
ς. λπάπγΥγύβγγί κχλ ,αΥργζλ,δυ ώΥπάΥκύΠ
μγρόπάπγΥ ρόαΥ ρω ήχι άρχεΥί ΥήλνδάΥγχεΥ
κχοογκογδύδπύχσφρόι χεθ



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το 5% του πληθυσμού μιας πόλης της Ινδίας πάσχει από AIDS. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης του ιού, είναι αξιόπιστο κατά 95%, πράγμα που σημαίνει ότι αν ένα άτομο είναι ασθενής, το τεστ θα βγει θετικό στο 95% των περιπτώσεων, ενώ αν δεν είναι ασθενής το τεστ θα βγει αρνητικό επίσης στο 95% των περιπτώσεων. Αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός της πόλης είναι 100.000 και επιλέξουμε κάποιο άτομο, μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι ασθενής με δεδομένο ότι το τεστ είναι θετικό;

Η ερώτηση «Καπνίζετε;» δόθηκε σε 100 άτομα, άντρες και γυναίκες. Οι απαντήσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΝΤΡΕΣ	19	41	60
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	12	28	40
ΣΥΝΟΛΟ	31	69	100

Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «το άτομο καπνίζει» και B το ενδεχόμενο «είναι άντρας», τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες

$$P(A) = \frac{31}{100} = 0,31 = 31\%, \quad P(B) = \frac{60}{100} = 0,6 = 60\% \text{ ή ακόμη και την πιθανότητα}$$

να «είναι και άντρας και καπνίζει» δηλαδή του ενδεχομένου $A \cap B$, που όπως

$$\text{φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα είναι } P(A \cap B) = \frac{19}{100} = 0,19 = 19\% .$$

Αν όμως θελήσουμε να βρούμε την πιθανότητα το άτομο να καπνίζει γνωρίζοντας ότι είναι άντρας, τότε αφού πλέον γνωρίζουμε ότι «είναι άντρας» το σύνολό μας περιορίζεται από 100 σε 60, αφού 60 είναι όλοι οι άντρες. Απ' αυτούς

$$\text{οι 19 καπνίζουν, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι } \frac{19}{60} = 0,317 = 31,7\% .$$

Η τελευταία πιθανότητα που υπολογίσαμε ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** ή **υπό συνθήκη πιθανότητα**, αφού γνωρίζαμε ήδη ότι το άτομο ήταν άντρας.

Από τη στιγμή που δίνεται ότι το ενδεχόμενο B πραγματοποιείται, έχουμε πλέον νέο δειγματικό χώρο, το σύνολο B. Επομένως δυνατά αποτελέσματα είναι τα στοιχεία του συνόλου B και ευνοϊκά τα στοιχεία του συνόλου $A \cap B$. Έτσι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A ενώ γνωρίζουμε ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B, συμβολίζεται με **$P(A/B)$** , δίνεται από τον

$$\text{τύπο } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Γενικά

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A και B δύο ενδεχόμενα του πειράματος. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, ενώ γνωρίζουμε ότι έχει πραγματοποιηθεί το B, ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** και συμβολίζεται με $P(A/B)$ και είναι ίση με $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Από τον προηγούμενο ορισμό, προκύπτουν αμέσως οι παρακάτω ισότητες $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$, που εκφράζουν τον **πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων**.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Ας πάρουμε για παράδειγμα το ρίξιμο ενός ζαριού δύο φορές. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να φέρω οποιονδήποτε αριθμό στη δεύτερη ζαριά, δεν επηρεάζεται από το τι έχω φέρει στην πρώτη ζαριά.

Γενικά

Δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης ονομάζονται **ανεξάρτητα**, όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν αλλάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.

Όταν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενός δεν αλλάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B, είτε έχει πραγματοποιηθεί το A είτε όχι, παραμένει πάντα ίδια, δηλαδή $P(B/A) = P(B)$. Επομένως οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

A και B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα χ

$$\chi \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\chi \quad P(A/B) = P(A)$$

$$\chi \quad P(B/A) = P(B).$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων συμπεραίνουμε ότι για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα έχουμε $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται και ως ορισμός των ανεξάρτητων ενδεχομένων.

Γενικά

Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ανεξάρτητα**, αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Παρατήρηση 1: Δύο δοκιμές ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ανεξάρτητες, όταν το αποτέλεσμα της μιας δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης. Συνήθως θεωρούμε ότι οι επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις ενός τυχαίου πειράματος είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη, όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός ζαριού, ενός νομίσματος, η τυχαία επιλογή από ένα σύνολο (πχ τράπουλα, κάλπη,..) κλπ.

Παρατήρηση 2: Είναι φανερό ότι είναι τελείως διαφορετικές οι έννοιες ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δύο ασυμβίβαστα (ξένα μεταξύ τους) ενδεχόμενα δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα, γιατί αν ένα από τα δύο ενδεχόμενα πραγματοποιηθεί, τότε το άλλο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

ΣΧΟΛΙΟ

Με την ισότητα $P(A|B)=P(A)P(B)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στην πράξη, όμως, η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων ή ισχύει από μόνη της, λόγω της φύσης του πειράματος ή έχει περιληφθεί στις υποθέσεις κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει κάποια φαινόμενα. Για παράδειγμα, είναι εύλογο να δεχτούμε ότι είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα A : «ο συμπλέκτης του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση» και B : «η μπαταρία του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση». Αντιθέτως, είναι λάθος να δεχτούμε ως ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα A : «Ένα άτομο είναι μανιώδης καπνιστής» και B : «Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια των πνευμόνων».

ΛΕΥΚΗ ΣΕΛΙΔΑ



Πιθανότητες



Τετράδιο

Μαθητή

ΛΕΥΚΗ ΣΕΛΙΔΑ

Αρχικό Ερωτηματολόγιο (Pretest)

Να υπογραμμίσετε ή να κυκλώσετε το σωστό

Φύλλο (ΑΝΔΡΑΣ/ΓΥΝΑΙΚΑ) **Ηλικία** (20-30/30-40/40-50/50-60/60++)

Απασχόληση (ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΣ/ΑΝΕΡΓΟΣ/ΣΥΝΤΑΞΙΟΥΧΟΣ)

1. Η Αλέκα έριξε ένα νόμισμα πέντε φορές και πήρε κατά σειρά ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ - ΚΕΦΑΛΗ.

Η Αλέκα θα ξαναρίξει το νόμισμα. Είναι _____ .

A) πιθανότερο να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ).

B) πιθανότερο να πάρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).

Γ) το ίδιο πιθανό να πάρει ΚΕΦΑΛΗ (Κ) ή ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).



2. Το να έρθουν 2 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 3 ρίψεις ενός νομίσματος, έχει _____

πιθανότητα από το να φέρουμε 200 ΚΕΦΑΛΕΣ σε 300 ρίψεις.

A. μεγαλύτερη

B. μικρότερη

Γ. ίδια

3. Στο Τζόκερ πρέπει να επιλέξουμε 5 αριθμούς από ένα σύνολο 45 αριθμών και για Joker 1 αριθμό από ένα σύνολο 20 αριθμών. Ο Ηλίας διάλεξε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και για Joker τον αριθμό 13. Ο Λευτέρης διάλεξε τους αριθμούς 6, 12, 19, 24, 31 και για Joker τον αριθμό 13.

A. Ο Ηλίας έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει.



- Β. Ο Λευτέρης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει.
 Γ. Και οι δύο έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν.

4. Στη πόλη μας υπάρχει μία δημόσια μαιευτική κλινική (στο Νοσοκομείο της πόλης) με 100 περίπου γεννήσεις το μήνα και μια ιδιωτική μαιευτική κλινική με 25 περίπου γεννήσεις το μήνα. Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι 50%, υπάρχουν όμως μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι αγόρια



και μήνες όπου πάνω από το 50% των γεννήσεων είναι κορίτσια. Και στις δύο κλινικές καταγράφηκαν οι μήνες του χρόνου κατά τους οποίους γεννήθηκαν αγόρια σε ποσοστό μεγαλύτερο του 60% των συνολικών γεννήσεων. Οι μήνες όπου οι γεννήσεις αγοριών ξεπέρασαν το 60% _____ .

- Α. ήταν περισσότεροι στη δημόσια κλινική του Νοσοκομείου.
 Β. ήταν περισσότεροι στην ιδιωτική κλινική.
 Γ. ήταν οι ίδιοι και στις δύο κλινικές.

5. Οι αναμετρήσεις ΑΕΚ και Παναθηναϊκού έχουν την δική τους ξεχωριστή αίγλη. Σε σύνολο 56 αναμετρήσεων στη διάρκεια του επαγγελματικού πρωταθλήματος, ο Παναθηναϊκός υπερισχύει έχοντας συνολικά 22 νίκες έναντι 16 της ΑΕΚ. Δηλαδή ο Παναθηναϊκός έχει επικρατήσει στο 39% των αναμετρήσεων ενώ έχει ηττηθεί στο 28%. Στο ντέρμπι της Κυριακής η πιθανότητα να νικήσει ο Παναθηναϊκός _____ .



- Α. είναι μεγαλύτερη από 30%
 Β. είναι περίπου ίση με 40%
 Γ. άσχετη με τα προηγούμενα

6. Υποθέτουμε ότι κάποιος ρίχνει δύο ζάρια ταυτόχρονα. Χωρίς να δώσουμε σημασία στη διάταξη, ποιο από τα παρακάτω έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί;

- A. Να πάρουμε το ζευγάρι 5-6.
- B. Να πάρουμε το ζευγάρι 6-6.
- Γ. Και τα δύο έχουν την ίδια πιθανότητα.



7. Η πιθανότητα κάποιο άτομο να είναι μεγαλύτερο των 55 ετών και να πάσχει από υπέρταση είναι _____ το να πάσχει απλά από υπέρταση (ανεξάρτητα της ηλικίας του).

- A. μεγαλύτερη από
- B. μικρότερη από
- Γ. ίση με



8. Η Αντιγόνη είναι 31 ετών, ειλικρινής και σπούδασε φιλοσοφία. Ως φοιτήτρια ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για θέματα κοινωνικού ρατσισμού και κοινωνικής δικαιοσύνης. Ποια από τις δύο παρακάτω προτάσεις θεωρείται πιο πιθανή;

- A. Η Αντιγόνη είναι τραπεζική υπάλληλος.
- B. Η Αντιγόνη είναι τραπεζική υπάλληλος και ενεργό μέλος σε μια φεμινιστική οργάνωση.



9. Διαλέγουμε μια πολύτεκνη οικογένεια με 6 παιδιά.

Αν συμβολίσουμε A το αγόρι και K το κορίτσι και αν μια σειρά της μορφής A K A K A K εκφράζει τη σειρά γέννησης των παιδιών, τότε η σειρά A K K A K A έχει _____ πιθανότητες να εμφανιστεί από τη σειρά A A A A A A.

- A. περισσότερες
- B. λιγότερες
- Γ. ίσες



10. Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 7 είναι _____ με την πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι ίσο με 9.

A. μεγαλύτερη

B. μικρότερη

Γ. ίση



Δραστηριότητα § 1.1

Σε ορισμένα από τα παρακάτω πειράματα μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα με απόλυτη ακρίβεια, ενώ σε άλλα όχι. Στα πειράματα που μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα, να το σημειώσετε. Στα πειράματα που δεν μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα, να προσπαθήσετε να σημειώσετε όλα τα δυνατά του αποτελέσματα.

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια θα είναι η ένδειξή του;



.....
.....

β) Μετράμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει. Ποια θα είναι η ένδειξη του θερμομέτρου;

.....
.....

γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Ποια θα είναι η πάνω όψη του;



.....
.....

δ) Επιλέγουμε τυχαία έναν άρτιο αριθμό και τον διαιρούμε με το 2. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης;

.....
.....

ε) Επιλέγουμε στην τύχη έναν τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2. Ποιος θα είναι ο αριθμός αυτός;

.....
.....

στ) Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές. Ποιο θα είναι το ζεύγος των ενδείξεων;

.....
.....



Δραστηριότητα § 1.2

Ρίξτε δύο κανονικά ζάρια 36 φορές.

A. Χρησιμοποιείτε τον παρακάτω πίνακα και σημειώστε στη στήλη «συχνότητα εμφάνισης» πόσες φορές εμφανίστηκε καθένα από τα αθροίσματα 1 – 12 και των δύο ζαριών. Στη συνέχεια συμπληρώστε την επόμενη στήλη, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πειραματικής πιθανότητας.



αριθμός	συχνότητα εμφάνισης	πειραματική πιθανότητα (%)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

B. Ποια αθροίσματα δείχνουν πιθανότερο να εμφανιστούν; Συζητήστε μεταξύ σας και σημειώστε αν συμφωνείτε ή όχι καθώς και τους λόγους για τους οποίους συμφωνείτε ή όχι.

.....

.....

.....

.....

Γ. Χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, προσπαθήστε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

άθροισμα	πιθανοί συνδυασμοί	Η πιθανότητα εκφρασμένη ως		
		κλάσμα	δεκαδικός	ποσοστό
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Δ. Συγκρίνοντας τις πειραματικές πιθανότητες που είχατε βρει με τις θεωρητικές που βρήκατε προηγούμενα, τι παρατηρείτε; Μήπως μπορείτε να εξηγήσετε τις διαφορές στα αποτελέσματα που παρατηρούνται; Μπορείτε να κάνετε μια πρόταση, ώστε οι πειραματικές πιθανότητες να βελτιωθούν με σκοπό να προσεγγίσουν τις θεωρητικές;

.....

.....

.....

.....

.....

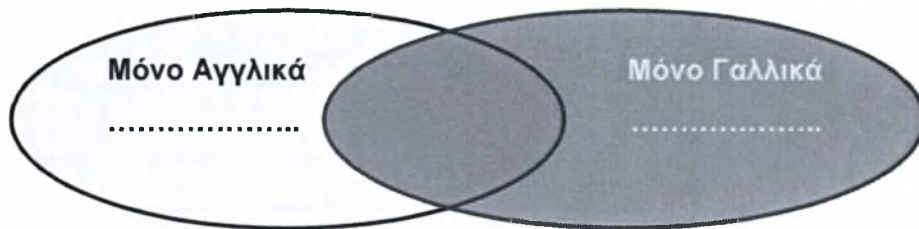
.....

Δραστηριότητα § 1.3

1^η Δραστηριότητα

Στο γυμνάσιό μας, το 60% των μαθητών παρακολουθεί τα μαθήματα των Αγγλικών. Το 35% παρακολουθεί μαθήματα Γαλλικών και το 15% παρακολουθούν μαθήματα και των δύο γλωσσών.

A) Να συμπληρώσετε το παρακάτω διάγραμμα του Venn.



B) Αν επιλέξουμε έναν μαθητή τυχαία να υπολογίσετε την πιθανότητα να παρακολουθεί μαθήματα από μία τουλάχιστον ξένη γλώσσα.

.....

.....

.....

.....

Γ) Αν επιλέξουμε έναν μαθητή τυχαία να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην παρακολουθεί μαθήματα από καμία ξένη γλώσσα.

.....

.....

.....

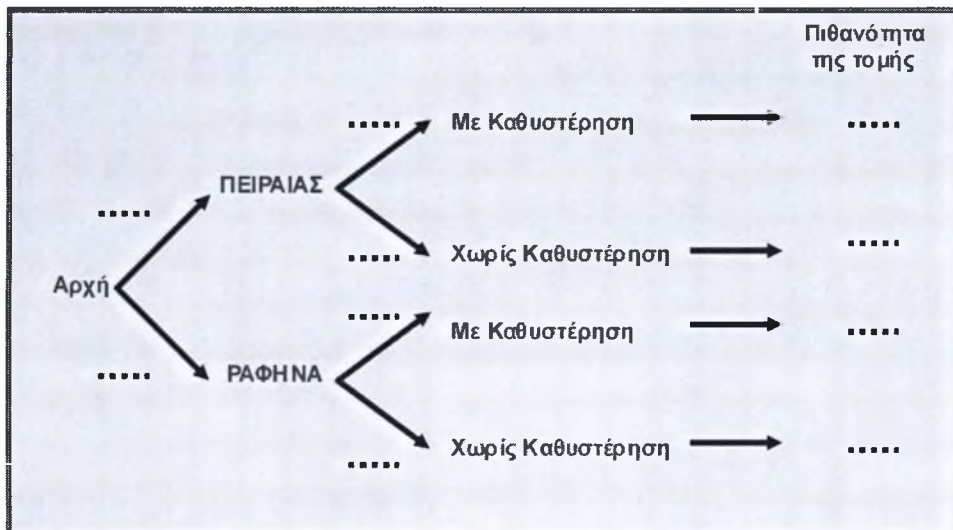
.....

2^η Δραστηριότητα

Σε ένα νησί φθάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί.



A) Να συμπληρώσετε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα με τις πιθανότητες που λείπουν.



B) Να βρείτε την πιθανότητα ένα πλοίο να φτάσει στο νησί με καθυστέρηση.

.....

.....

.....

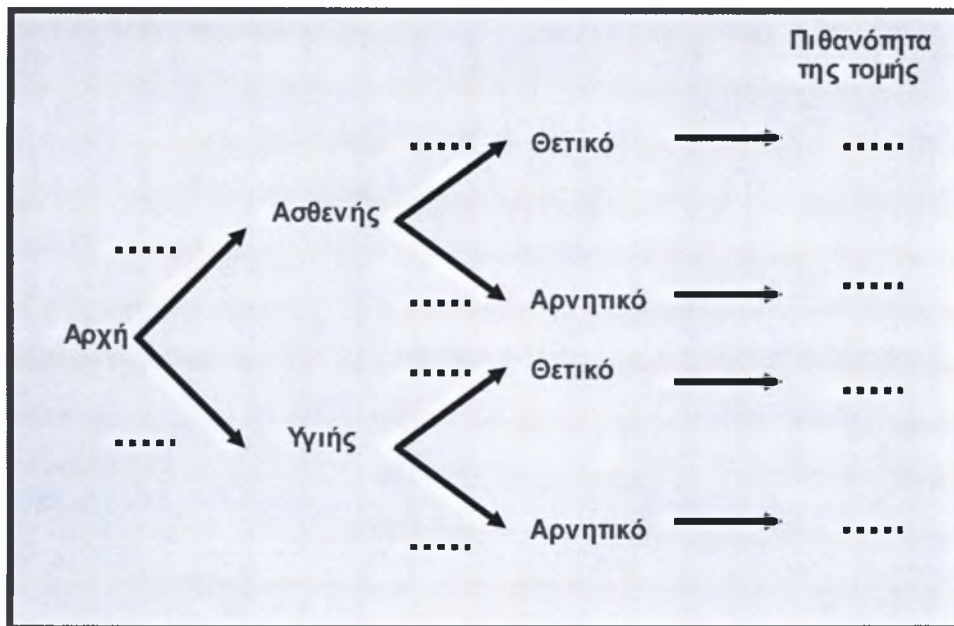
.....

Δραστηριότητα § 1.4

Το 10% ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει από την ασθένεια) 5%.



A) Να συμπληρώσετε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα με τις πιθανότητες πραγματοποίησης καθενός ενδεχομένου:



Β) Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα του παρακάτω πίνακα με τα κατάλληλα ποσοστά (επί τοις χιλίοις), σύμφωνα με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα:

Ποσοστά %	Θετικό test	Αρνητικό test	Σύνολα
Είναι ασθενής			
Είναι υγιής			
Σύνολα			1000

Γ) Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο να πάσχει πράγματι από την ασθένεια αυτή.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Δ) Η πιθανότητα $P(\text{πάσχει από την ασθένεια} / \text{θετικό τεστ})$ είναι ίση με την πιθανότητα $P(\text{θετικό τεστ} / \text{πάσχει από την ασθένεια})$; Μπορείτε να το σχολιάσετε;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ΛΕΥΚΗ ΣΕΛΙΔΑ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣΘ

Φύλλο εργασίας § 1.1

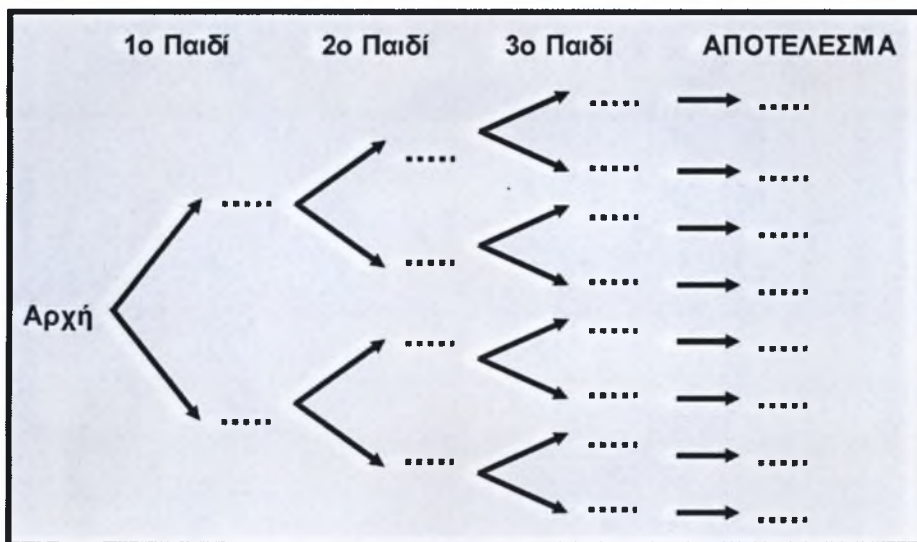
1. Ένα κουτί περιέχει έξι μπάλες. Τρεις άσπρες, δύο μαύρες και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα άλλη μία φορά (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση). Να σημειώσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Ένα κουτί περιέχει έξι μπάλες. Τρεις άσπρες, δύο μαύρες και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της αλλά *δεν την ξαναβάζουμε* στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα άλλη μία φορά (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες **χωρίς επανατοποθέτηση**). Να σημειώσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.



.....

4. Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, τότε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ενδεχόμενα του πειράματος;

- α) $A = \{4, 6, 10\}$ β) $B = \{0, 2, 4, 5\}$
 γ) $\Gamma = \{4, 6, 9, 10\}$ δ) $\Delta = \{8\}$

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα πραγματοποιούνται και ποια όχι;

- α) $A = \{1, 4, 6\}$ β) $B = \{2, 4, 5\}$
 γ) $\Gamma = \{4, 5, 6\}$ δ) $\Delta = \{1, 3, 5\}$



6. Ένα κουτί περιέχει κόκκινες και μπλε μπίλιες. Αν επιλέξω μια μπίλια, ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι αδύνατα και ποια όχι;

- α) $A = \text{«Η μπίλια είναι κόκκινη»}$
- β) $B = \text{«Η μπίλια είναι μπλε»}$
- γ) $\Gamma = \text{«Η μπίλια είναι κίτρινη»}$
- δ) $\Delta = \text{«Η μπίλια είναι μπλε ή κόκκινη»}$



7. Ένας τριψήφιος αριθμός που έχει διαφορετικά ανά δύο τα ψηφία του, σχηματίζεται με τα ψηφία 1,3,5,7. Αν επιλέξω τυχαία έναν αριθμό, ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι βέβαια και ποια όχι;

- α) $A = \text{«Ο αριθμός μας είναι μικρότερος ή ίσος του 7531»}$
- β) $B = \text{«Ο αριθμός μας είναι άρτιος»}$
- γ) $\Gamma = \text{«Ο αριθμός μας είναι περιττός»}$
- δ) $\Delta = \text{«Ο αριθμός μας είναι μεγαλύτερος του 1357»}$

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

.....

β) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

.....

γ) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

.....

δ) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

.....

9. Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο $A = \text{«η ζαριά είναι μικρότερη του 3»}$, ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A , δηλαδή το A' ;



β) Ρίχνουμε δυο ζάρια ταυτόχρονα. Έστω B το ενδεχόμενο «το ένα ζάρι είναι άρτιος και το άλλο μικρότερο του 3». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , δηλαδή το B' ;

γ) Από μία τράπουλα 52 φύλλων, τραβάμε ταυτόχρονα δύο φύλλα. Έστω B το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον φύλλο άσσος». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , δηλαδή το B' ;

δ) Από το δεκαπενταμελές ενός γυμνασίου διαλέγουμε τυχαία τρία παιδιά. Έστω B το ενδεχόμενο «το πολύ δύο είναι κορίτσια». Ποιο είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , δηλαδή το B' ;

Φύλλο εργασίας § 1.2

1. α) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί στην πάνω όψη του ο αριθμός 3;

- 1/2
 1/3
 1/4
 1/6



β) Μια συνηθισμένη τράπουλα περιέχει 52 χαρτιά. Υπάρχουν τέσσερα είδη: οι κούπες, τα καρό, τα σπαθιά και τα μπαστούνια ♠, ♦, ♣, ♥. Κάθε είδος περιέχει 13 τραπουλόχαρτα. Αν τραβήξουμε ένα τραπουλόχαρτο κατά τύχη, ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε το πέντε καρό;

- 13/52
 10/52
 4/52
 1/52



γ) Ένα βάζο περιέχει 3 κόκκινες και 5 μπλε καραμέλες. Αν πάρουμε από το βάζο τυχαία μία καραμέλα, ποια η πιθανότητα να είναι κόκκινη;

- 1/3
 3/8
 5/8
 3/5



δ) Το αλφάβητό μας περιέχει 24 γράμματα. Επτά (7) από αυτά είναι φωνήεντα (Α, Ο, Ω, Ε, Ι, Η, Υ) και τα υπόλοιπα δεκαεπτά (17) σύμφωνα. Αν διαλέξουμε ένα από τα γράμματα τυχαία, ποια η πιθανότητα να είναι σύμφωνο;

- 1/24
 7/24
 17/24
 7/17



2. α) Ρίχνουμε ένα νόμισμα μία φορά. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

.....



β) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα η ζαριά να είναι περιττός (μονός) αριθμός;

.....



γ) Από μια συνηθισμένη τράπουλα τραβάμε ένα χαρτί. Ποια η πιθανότητα να είναι Ρήγας μαύρου χρώματος;

.....



δ) Διαλέγουμε τυχαία ένα γράμμα από τη λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.

Ποια η πιθανότητα να είναι φωνήεν;

.....



3. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο νομίσματα στον αέρα.

α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε 2 ΚΕΦΑΛΕΣ.

β) Ποια η πιθανότητα το ένα νόμισμα να φέρει ΚΕΦΑΛΗ και το άλλο ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

4. Ρίχνουμε δυο ζάρια ταυτόχρονα.

α) Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι ίσο με 6;

β) Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 9;

5. Ρίχνουμε τρία νομίσματα στον αέρα. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο δένδρο-διάγραμμα, προσδιορίστε:

α) ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 3 ΚΕΦΑΛΕΣ;

β) ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μια ΚΕΦΑΛΗ και δυο ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

Φύλλο ερνασίας § 1.3

1. α) Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα. Ποια η πιθανότητα να μην φέρουμε διπλές;

- 70%
 30/36
 6/36
 30%



β) Από μια τράπουλα, τραβάμε τυχαία ένα τραπουλόχαρτο. Ποια η πιθανότητα να είναι φιγούρα (J, Q, K, A) και το χρώμα του να είναι μαύρο (♠, ♣);

- 4/52
 16/52
 8/52
 1/52



γ) Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Ποια η πιθανότητα η ζαριά μας να είναι μονός αριθμός ή αριθμός μικρότερος του 5;

- 3/6
 2/6
 4/6
 5/6



2. Το δεκαπενταμελές ενός γυμνασίου αποτελείται από 9 αγόρια και 6 κορίτσια. Από τα 9 αγόρια, 2 είναι της Α' γυμνασίου, 3 της Β' και 4 της Γ' γυμνασίου. Από το 6 κορίτσια 2 είναι της Β' γυμνασίου και 4 της Γ' γυμνασίου. Διαλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη για ταμιά.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να μην είναι μαθητής της Γ' γυμνασίου.

.....

.....

.....

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «ο ταμίας να είναι αγόρι» και του ενδεχομένου Β: «ο ταμίας να είναι μαθητής της Β' γυμνασίου».

.....

.....
.....

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να είναι αγόρι και μαθητής της Β' γυμνασίου, δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$.

.....
.....
.....

δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο ταμίας να είναι αγόρι ή μαθητής της Β' γυμνασίου, δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$.

.....
.....
.....

3. Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι.

α) Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «η ζαριά μας να είναι μονός αριθμός», ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου A και ποια η πιθανότητά του;

.....
.....
.....

β) Αν ονομάσουμε B το ενδεχόμενο «η ζαριά μας να είναι μικρότερη του 5», ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου B και ποια η πιθανότητά του $P(B)$;

.....
.....
.....

γ) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του ενδεχομένου $A \cap B =$ «η ζαριά μας είναι μονός αριθμός και μικρότερος του 5» και ποια η πιθανότητά του $P(A \cap B)$;

.....
.....
.....

δ) Να εφαρμόσετε τον προσθετικό νόμο για να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B =$ «η ζαριά μας είναι μονός αριθμός ή αριθμός μικρότερος του 5»;

.....
.....
.....

4. Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα πράσινο και ένα κόκκινο. Με τη βοήθεια δένδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου:



α) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το ένα ζάρι 5 και το άλλο ζάρι 6, ανεξάρτητα από το χρώμα των ζαριών.

.....
.....
.....

β) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το πράσινο ζάρι 5 και το κόκκινο ζάρι 6.

.....
.....
.....

γ) να βρείτε την πιθανότητα να έρθει το πράσινο ζάρι 5 ή το κόκκινο ζάρι 6.

.....
.....
.....

Φύλλο ερwanσίας § 1.4

1. α) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

.....
.....
.....

β) Ρίχνουμε ένα νόμισμα στον αέρα τρεις φορές. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε ΚΕΦΑΛΗ και στις τρεις ρίψεις.

.....
.....
.....

γ) Ένα κουτί περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη, την τοποθετούμε πίσω στο κουτί και στη συνέχεια τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «Η πρώτη μπάλα είναι μπλε και η δεύτερη κόκκινη».



.....
.....
.....

δ) Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,03, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.

.....
.....
.....

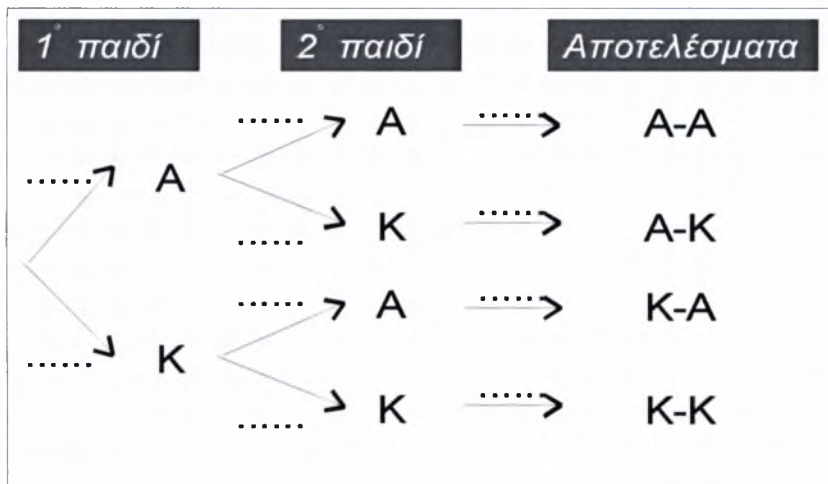
2. α) Ένα βάζο περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη και στη συνέχεια χωρίς να την αντικαταστήσουμε, τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «Η πρώτη μπάλα είναι μπλε και η δεύτερη κόκκινη».

.....

.....

.....

β) Έχουμε 4 αγόρια και 5 κορίτσια και θέλουμε να σχηματίσουμε μια ομάδα δύο ατόμων για να εκπροσωπήσει το σχολείο μας. Διαλέγουμε δύο απ' αυτούς τυχαία. Κάνοντας χρήση του παρακάτω δενδροδιαγράμματος να βρείτε την πιθανότητα να είναι ένα αγόρι και ένα κορίτσι.



.....

.....

.....

.....

.....

3. α) Από μία τράπουλα 52 φύλλων, τραβάμε ένα φύλλο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι ΑΣΣΟΣ, αν γνωρίζουμε ότι το φύλλο είναι μπαστούνι.



.....
.....
.....
.....
.....

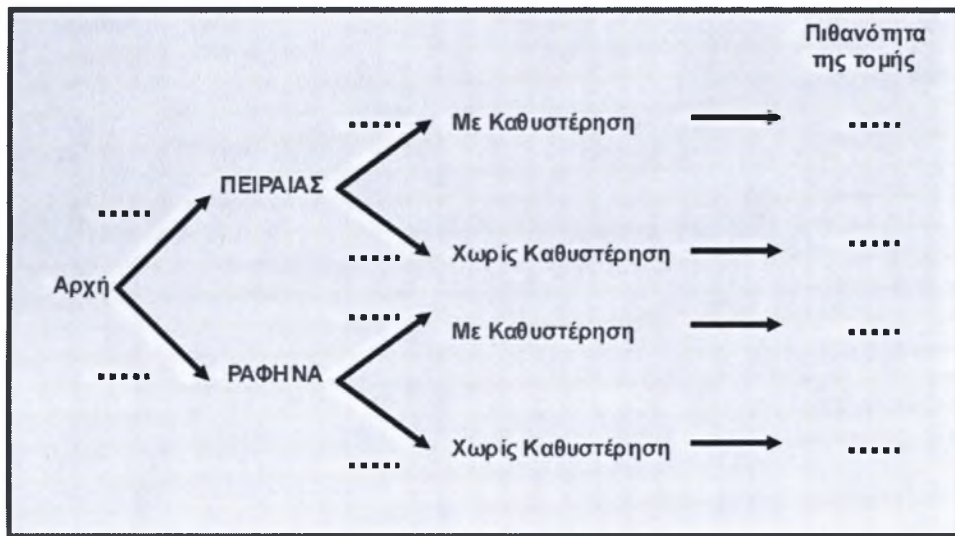
β) Ένα βάζο περιέχει **8 μπλε** μπάλες και **5 κόκκινες**. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη και χωρίς να την επανατοποθετήσουμε τραβάμε και μια δεύτερη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη, με δεδομένο ότι η πρώτη ήταν επίσης κόκκινη.

.....
.....
.....
.....
.....

γ) Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

.....
.....
.....
.....
.....

δ) Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρείτε την πιθανότητα αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά (πρώτα να συμπληρώσετε το παρακάτω δένδροδιάγραμμα).



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



00400009 1525

