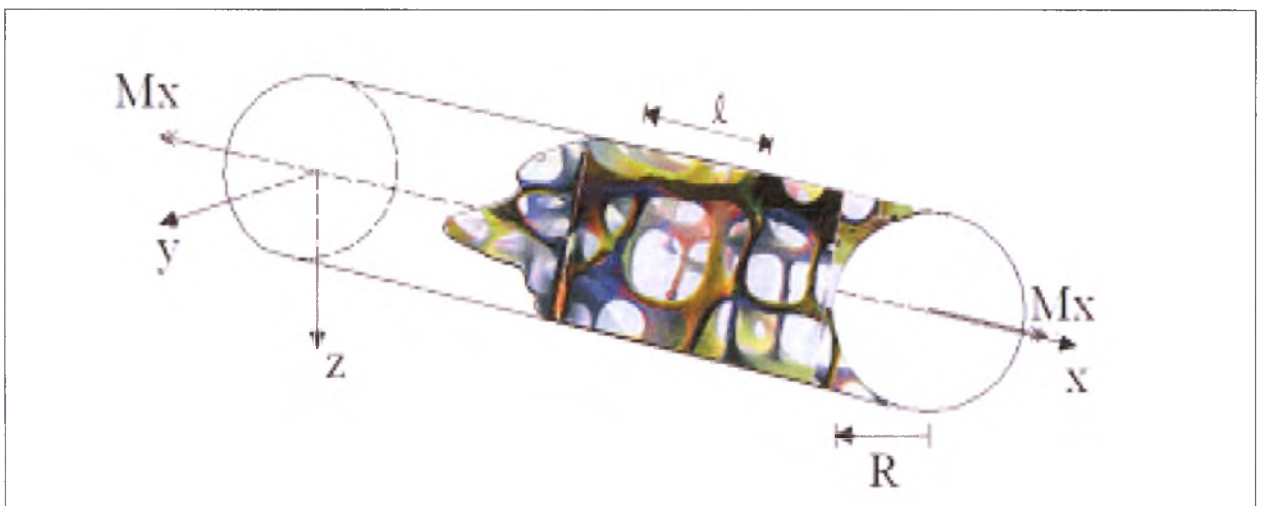




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

“ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ
ΦΟΡΕΩΝ”



Επιμέλεια : Ταγκούλη Μαρία

Επιβλέποντες Καθηγητές : Μπαξεβάνη Ελένη , Γιαννακόπουλος Αντώνιος

ΒΟΛΟΣ , ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6690/1
Ημερ. Εισ.: 15-01-2009
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2008
ΤΑΓ

*Στους γονείς μου,
Σωτήρη και Χρυσούλα*

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές μου κα. Μπαξεβάνη Ελένη και κ. Γιαννακόπουλο Αντώνη για την πολύτιμη βοήθειά τους στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας καθώς και για την υποστήριξή τους, ηθική και ψυχολογική, καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές μου, οι οποίοι υπήρξαν συνοδοιπόροι σε όλη την πορεία της άκρως ενδιαφέρουσας και διασκεδαστικής φοιτητικής μου ζωής.

Τέλος, η πανεπιστημιακή μου πορεία καθώς και η αποπεράτωση της παρούσας εργασίας δεν θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς την αμέριστη συμπαράσταση, υποστήριξη και υπομονή της οικογένειάς μου όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	2
2. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΣΥΜΠΛΑΓΩΝ ΡΑΒΔΩΝ	4
1.1 Εισαγωγή	4
1.2 Κλασσική θεωρία στρέψης τυχούσας διατομής – Μέθοδος Saint-Venant.....	4
1.3 Κλασσική θεωρία στρέψης λεπτότοιχων ορθογωνικών διατομών	14
1.4 Γραμμές ροής των τάσεων στην ορθογωνική διατομή.....	16
1.5 Συμπεράσματα	23
3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΤΥΠΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ MINDLIN (STRAIN GRADIENT)	24
2.1 Εισαγωγή	24
2.2 Στρέψη ορθογωνικής διατομής – Θεωρία Mindlin.....	25
2.3 Συμπεράσματα	36
4. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΤΥΠΟΥ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ KOITER (SPIN GRADIENT)	37
3.1 Εισαγωγή	37
3.2 Στρέψη τυχούσας διατομής – Θεωρία Koiter	38
3.3 Στρέψη ορθογωνικής διατομής – Θεωρία Koiter	53
5. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑ	64
4.1 Εισαγωγή	64
4.2 Στρεπτική δυσκαμψία για ράβδο κυκλικής και ορθογωνικής διατομής κατά Mindlin.....	64
4.3 Στρεπτική δυσκαμψία για ράβδο κυκλικής και ορθογωνικής διατομής κατά Koiter	75
4.4 Συμπεράσματα	87
6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΤΥΠΟΥ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΓΙΑ ΡΑΒΔΟΥΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ KOITER (SPIN GRADIENT)	88
I.1 Εισαγωγή	88
I.2 Στρέψη κυκλικής διατομής.....	88
7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	100

Ο μηχανικός έχει σαν στόχο να μελετήσει και να πραγματοποιήσει κατασκευές οι οποίες υποβάλλονται σε μία ποικιλία φορτίσεων. Φυσικά οι κατασκευές αυτές πρέπει να αντέχουν στα φορτία για τα οποία σχεδιάστηκαν. Δηλαδή πρέπει να αντιδρούν στα επιβαλλόμενα φορτία χωρίς να εμφανίζουν οποιουδήποτε είδους μορφή κατάρρευσης, όπως ρηγματώσεις ή αισθητές μεταβολές της γεωμετρικής τους μορφής. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να κατασκευάζονται από το κατάλληλο υλικό και να έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις. Κάθε κατασκευή ή μηχανή κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε το σύνολό της αλλά και τα επιμέρους τμήματά της, να ανταποκρίνονται κατάλληλα στις επιβαλλόμενες φορτίσεις. Έτσι για παράδειγμα ο άξονας μίας μηχανής θα πρέπει να έχει επαρκή διάμετρο ώστε να μπορεί να παραλάβει την στρεπτική ροπή που επιβάλλει ο κινητήρας.

Το πρόβλημα της στρέψης αποτελεί αναμφίβολα μία από τις κυριότερες αιτίες καταπόνησης των κατασκευών και αυτός είναι και ο λόγος που κάνει επιτακτική την ανάγκη μελέτης του συγκεκριμένου προβλήματος. Το φαινόμενο της στρέψης αφορά κυρίως στην επιβολή ενός ζεύγους αντίθετων ροπών στα άκρα ενός συστήματος ραβδωτού φορέα ο οποίος μπορεί να αποτελείται από μία ή περισσότερες ράβδους.

Στην πορεία της συγκεκριμένης εργασίας θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε όσο καλύτερα, απλούστερα αλλά και ταυτόχρονα αναλυτικότερα, όσο αυτό είναι εφικτό, το φαινόμενο της στρέψης. Οι μηχανικοί ενδιαφέρονται κυρίως για τις μακροσκοπικές ιδιότητες των σωμάτων, στην ανάπτυξη όμως της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε και με τις μικροσκοπικές ιδιότητες, οι οποίες ορίζονται ως οι ιδιότητες του υλικού σε μοριακό ή κρυσταλλικό επίπεδο. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την κλασική θεωρία στρέψης όπως αυτή αναπτύχθηκε από τον Saint-Venant, ώστε να δημιουργήσουμε και μία βάση πάνω στην οποία θα στηριχθούμε για την περαιτέρω ανάπτυξη των θεωριών στρέψης τύπου βαθμίδας οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τους και τις μικροσκοπικές ιδιότητες των υλικών.

Όταν αναφερόμαστε στον όρο “φαινόμενα κλίμακας”, στην ουσία εννοούμε τη συνεισφορά στο φαινόμενο της στρέψης, της μικροδομής ενός συστήματος. Η κλασική θεωρία δικαιολογεί το αποτέλεσμα (μετατόπιση, στροφή) με βάση το αίτιο (δύναμη, ροπή) που προκύπτει από τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας σε συνδυασμό με την επιλογή της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας. Από την άλλη, οι θεωρίες τύπου βαθμίδας συνυπολογίζουν και την συνεισφορά δυνάμεων ή ροπών που ενώ μακροσκοπικά εξισορροποούνται στην πραγματικότητα προσθέτουν στην ελαστική ενέργεια του συστήματος επιπλέον όρους. Οι επιπλέον αυτοί όροι εισάγονται με τη βοήθεια μίας μεταβλητής ℓ , η οποία ονομάζεται εσωτερικό μήκος και συνδέεται ευθέως με την μικροδομή του εκάστοτε υπό εξέταση συστήματος.

Το εσωτερικό μήκος, ℓ , ενός υλικού ίσως να μην είναι εύκολο να το αντιληφθούμε ως έννοια γιατί δεν αποτελεί ένα συγκεκριμένο μέγεθος και γι' αυτό αναφερόμαστε σε αυτόν συχνά με όρους όπως : μέσο μέγεθος κόκκων αδρανούς, μέση απόσταση ινών οπλισμού κλπ. Στην πραγματικότητα το εσωτερικό μήκος κυμαίνεται ανάλογα με το σύστημα το οποίο εξετάζουμε. Έτσι, για παράδειγμα, αν το σύστημα το οποίο εξετάζουμε μακροσκοπικά αποτελεί μία τοιχοποιία, τότε το εσωτερικό μήκος μπορεί να ανάγεται στην κλίμακα των εκατοστών και να αναφέρεται σε ένα τούβλο από το οποίο αποτελείται η τοιχοποιία αυτή. Αντίστοιχα αν το σύστημά μας αποτελεί ένα microchip τότε το εσωτερικό μήκος ανάγεται στην κλίμακα του ενός μορίου.

Οι θεωρίες τύπου βαθμίδας διαφοροποιούνται σύμφωνα με το είδος του υλικού του συστήματος το οποίο εξετάζεται σε στρέψη. Έτσι έχουμε την ανάπτυξη δύο ανεξάρτητων θεωριών, εκείνη που αφορά στη στρέψη συστημάτων από συμπαγή υλικά, όπως για παράδειγμα μέταλλα και κεραμικά, και σε εκείνη που αφορά στη στρέψη συστημάτων από πορώδη υλικά, όπως για παράδειγμα οστά, αφρώδη υλικά και πορώδεις βράχοι. Όταν πρόκειται λοιπόν για συστήματα από συμπαγή υλικά η κατεξοχήν ικανοποιητική θεωρία που προσεγγίζει καλύτερα το

πρόβλημα της στρέψης των συστημάτων αυτών, είναι η θεωρία τύπου ελαστικής βαθμίδας κατά Mindlin [1,2]. Σε αντίθεση όταν πρόκειται για συστήματα από πορώδη υλικά, η αντίστοιχη θεωρία που προσεγγίζει ικανοποιητικά το πρόβλημα της στρέψης των συστημάτων αυτών είναι η θεωρία τύπου βαθμίδας κατά Koiter [3,4]. Η διαφοροποίηση των δύο θεωριών, του Mindlin και του Koiter, έγκειται στο γεγονός ότι για την ανάπτυξή τους η διαδικασία που ακολουθείται βασίζεται σε διαφορετικές τακτικές. Πιο συγκεκριμένα, στη θεωρία του Mindlin χρησιμοποιούνται οι κλίσεις των τροπών, οι πρώτες δηλαδή παράγωγοι των τροπών (strain gradient), ενώ σε αντίθεση η θεωρία του Koiter βασίζεται στις κλίσεις των στροφών (spin gradient).

Καθώς θα εξετάσουμε τις δύο θεωρίες τύπου βαθμίδας θα αντιληφθούμε καλύτερα την επιρροή του εσωτερικού μήκους στην σχετική στρεπτική ακαμψία του συστήματος. Για την ακρίβεια θα συμπεράνουμε πως ο μικρόκοσμος τελικά επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το φαινόμενο της στρέψης. Συστήματα με μικρές διαστάσεις παρουσιάζουν μεγάλη αύξηση της δυσκαμψίας τους, φαινόμενο που όπως θα αποδειχθεί οφείλεται στην συμβολή των δυνάμεων και των ροπών που αναπτύσσονται στη μικροδομή του υλικού

Στην προσπάθεια να μελετήσουμε την σχέση μεταξύ των διαστάσεων, του υλικού και της μικροδομής ενός συστήματος με την σχετική στρεπτική του ακαμψία καταλήξαμε σε μία αναλυτική μέθοδο προσδιορισμού του εσωτερικού μήκους ℓ . Η μέθοδος αυτή μπορεί για οποιοδήποτε υλικό, είτε αυτό είναι συμπαγές και ακολουθεί τη θεωρία στρέψης του Mindlin είτε είναι πορώδες και ακολουθεί τη θεωρία του Koiter, ύστερα από μία σειρά πειραμάτων μέτρησης της στρεπτικής ακαμψίας, με δεδομένες τις διαστάσεις του εξεταζόμενου συστήματος, να προσεγγίσει την τιμή του εσωτερικού μήκους του εν λόγω συστήματος. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε και πειραματικά σε μία μελλοντική επέκταση της ανάπτυξης της μελέτης αυτής, την ισχύ της παραπάνω μεθοδολογίας, καταφέροντας να προσδιορίσουμε το εσωτερικό μήκος ραβδωτών συστημάτων, κυρίως κυκλικών διατομών, διαφόρων υλικών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε πως, λόγω της πλήρους επίλυσης που πετύχαμε, το πρόβλημα του προσδιορισμού του εσωτερικού μήκους αποτελεί ένα αντιστρεπτό πρόβλημα, αν σκεφτούμε πως ξεκινάμε από την εξέταση ενός υλικού σε στρέψη και καταλήγουμε στον προσδιορισμό των μηχανικών σταθερών του υλικού αυτού. Παράλληλα, η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος της στρέψης αποτελεί και μία βάση για την εξέλιξη του πεδίου του σχεδιασμού. Στην προκειμένη περίπτωση μάλιστα η ενασχόλησή μας με τον επιπλέον όρο που προσθέτει η μικροδομή στην ακαμψία του συστήματος, στην εξέταση του φαινομένου της στρέψης, μπορούμε να μιλήσουμε για σχεδιασμό μικροηλεκτρο-μηχανικών συστημάτων MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems), όπως για παράδειγμα μικρογρανάζια και άξονες. Ουσιαστικά δηλαδή καταλήγουμε πως κατά τον σχεδιασμό συστημάτων, τα οποία είναι πολύ πιθανό να καταπονούνται σε στρέψη κατά τη λειτουργία τους, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η μικροδομή του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο το σύστημα γιατί προσφέρει επιπρόσθετη ακαμψία στο σύνολο που εξετάζεται.

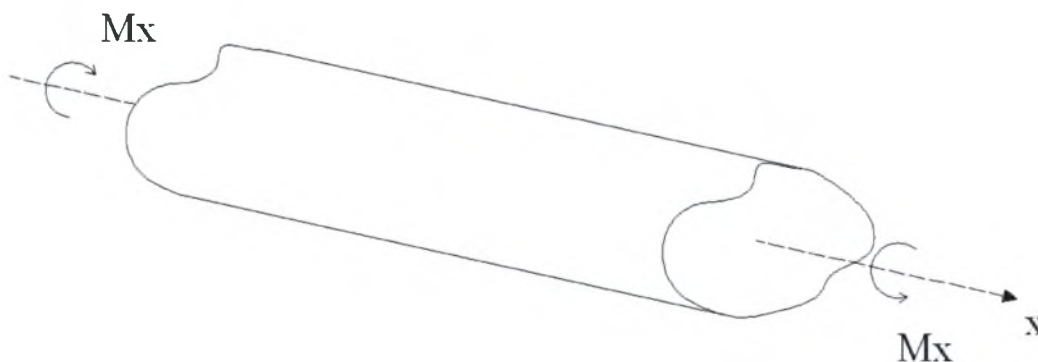
Συνοπτικά, η παρούσα διπλωματική εργασία περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία μικρή ανασκόπηση του προβλήματος της κλασικής θεωρίας της στρέψης συμπαγών ράβδων τυχούσας διατομής. Αναπτύσσεται κυρίως η θεωρία στρέψης κατά τον Saint-Venant τόσο για ράβδους τυχούσας διατομής όσο και για ανοιχτές λεπτότοιχες ορθογωνικές διατομές. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι θεωρίες τύπου βαθμίδας για συμπαγή και πορώδη υλικά αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο θα εξεταστεί η θεωρία στρέψης τύπου ελαστικής βαθμίδας για ράβδους συμπαγών υλικών ορθογωνικής διατομής κατά τον Mindlin. Σε αντιστοιχία στο τρίτο κεφάλαιο θα εξεταστεί η θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας του Koiter για ράβδους από πορώδη υλικά, ορθογωνικής διατομής. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται αναλυτικά η σχέση του εσωτερικού μήκους ℓ με τη σχετική στρεπτική δυσκαμψία μίας ράβδου κυκλικής και μίας ορθογωνικής διατομής σύμφωνα με τις δύο θεωρίες στρέψης τύπου βαθμίδας κατά Mindlin και κατά Koiter.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΡΑΒΔΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μία μικρή ανασκόπηση του προβλήματος της κλασσικής θεωρίας της στρέψης συμπαγών ράβδων τυχούσας διατομής. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε συμπαγείς ράβδους τυχούσας διατομής οι οποίες υποβάλλονται στα άκρα τους σε δύο ίσες και αντίθετες εξωτερικές στρεπτικές ροπές M_x , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.1 Συμπαγής ράβδος τυχούσας διατομής υπό στρέψη γύρω από το διαμήκη άξονα x .

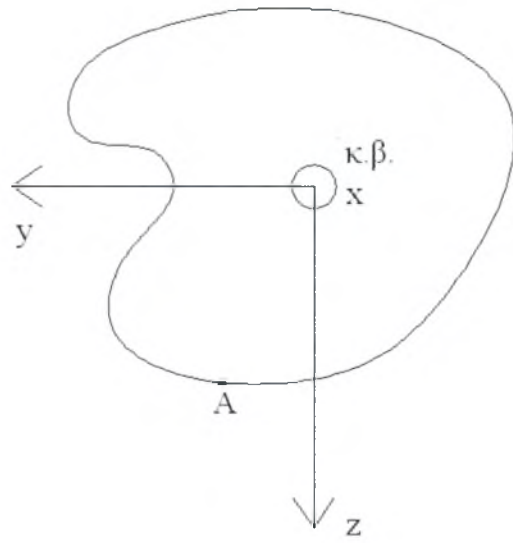
Θα ασχοληθούμε κυρίως με την θεωρία στρέψης που πρώτος ανέπτυξε ο Saint-Venant και σύμφωνα με την οποία οι μη κυκλικές διατομές παρουσιάζουν ένα φαινόμενο ελεύθερης στρέβλωσης της εγκάρσιας, αρχικά επίπεδης, διατομής και εμφανίζουν συστροφή α (γωνία ανά μονάδα μήκους της ράβδου), η οποία λαμβάνεται σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού. Ξεκινώντας με την παραδοχή του πεδίου των μετατοπίσεων υπολογίζουμε τις τροπές και τις αναπτυσσόμενες τάσεις, ώστε ελέγχοντας τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας, τις συνοριακές συνθήκες και τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας να αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης.

1.2 Κλασσική Θεωρία Στρέψης Τυχούσας Διατομής – Μέθοδος Saint-Venant

Ο Saint-Venant με την ανάπτυξη της ημιαντίστροφης μεθόδου, υπήρξε ο πρώτος που έλυσε το πρόβλημα της στρέψης συμπαγών ράβδων τυχούσας διατομής. Η θεωρία του Saint – Venant ακολουθείται από μία σειρά παραδοχές σύμφωνα με τις οποίες ισχύει :

- ☞ Κατά τη στρέψη της ράβδου κάθε διατομή περιστρέφεται σαν στερεός δίσκος στο επίπεδό του γύρω από το κέντρο της διατομής.
- ☞ Συγχρόνως με την περιστροφή, κάθε διατομή στρεβλώνεται και η στρέβλωση αυτή εξαρτάται από τις συντεταγμένες y και z μόνο, ενώ είναι ανεξάρτητη από τη διαμήκη συντεταγμένη x . (η παραδοχή αυτή είναι απολύτως δικαιολογημένη λόγω της ομοιομορφίας κατά τον άξονα x).

Για την εύρεση του πεδίου των μετατοπίσεων θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ το οποίο φαίνεται παρακάτω. Οι άξονες Oy , Oz θεωρούνται ότι ανήκουν στο επίπεδο μιας διατομής της ράβδου που στρέφεται. Ο άξονας Ox συμπίπτει με το διαμήκη άξονα της ράβδου και θεωρείται κεντροβαρικός (κ.β.) :



Σχήμα 1.2 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) σε συμπαγή ράβδο τυχούσας διατομής.

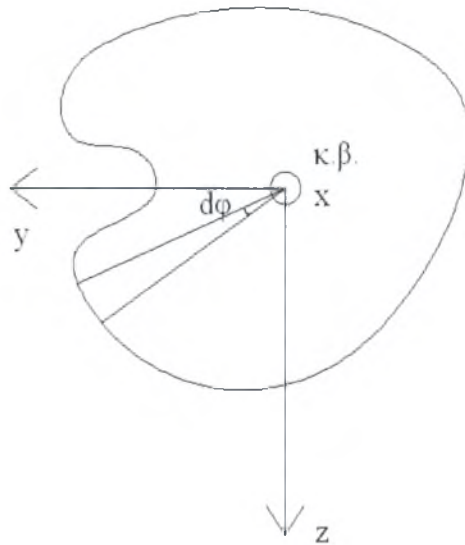
Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο του Saint – Venant, το πεδίο των μετατοπίσεων που αντιστοιχεί στην λύση του προβλήματος είναι ίδιο με εκείνο που χρησιμοποιείται και στη λύση του προβλήματος της στρέψης ράβδων κυκλικής διατομής με μία διαφορά όσον αφορά στη συνισταμένη μετακίνηση κατά x . Έτσι, θεωρούμε ότι οι μετακινήσεις κατά τον άξονα y και z δίνονται από τους τύπους :

$$u_y = -axz \quad \text{και}$$

$$u_z = axy \quad ,$$

όπου a μία παράμετρος η οποία ορίζεται ως $a = \frac{d\theta}{dx}$ και είναι γνωστή ως ανηγμένη στροφή (γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους) ή αλλιώς συστροφή. Η συστροφή σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με την επιπεδότητα των διατομών, κατά την περιστροφή της εκάστοτε διατομής παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της ράβδου (ανεξάρτητη της x) :

$$a = \frac{d\theta}{dx} = \text{σταθερό.}$$



Σχήμα 1.3 Βασική κινηματική παραδοχή του Saint-Venant : κάθε σημείο της διατομής στρέφεται κατά γωνία $d\varphi$.

Για τον ορισμό της μετατόπισης κατά τον άξονα x , σύμφωνα με τον Saint – Venant, υποθέτουμε μία συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία αποτελεί και το επιπλέον στοιχείο που διαχωρίζει τη θεωρία αυτή από τη θεωρία στρέψης της κυκλικής διατομής. Ονομάζουμε λοιπόν συνάρτηση στρέβλωσης, μία συνάρτηση της μορφής $\Phi(y,z)$, η οποία όπως διαπιστώνουμε εξαρτάται μόνο από τη διατομή της ράβδου και όχι από την θέση της διατομής στον άξονα x . Έτσι η μετατόπιση u_x δίνεται ως εξής :

$$u_x = a\Phi(y, z)$$

Συνοψίζοντας, λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις για τα μεγέθη του πεδίου των μετατοπίσεων κατά τους άξονες x , y και z αντίστοιχα.

$$u_x = a\Phi(y, z)$$

$$u_y = -axz \quad \text{και} \quad (1.1)$$

$$u_z = axy$$

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις για τις μετατοπίσεις, οι τροπές προκύπτουν ως εξής :

Ορθές τροπές :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Διατμητικές τροπές :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{και} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Επομένως οι τάσεις μέσω του καταστατικού νόμου του Hooke για ισότροπο και ομογενές σώμα προκύπτουν ως εξής :

Ορθές τάσεις :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0\tag{1.4}$$

Διατμητικές τάσεις :

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \Rightarrow \sigma_{xy} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \\ \sigma_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \Rightarrow \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} \Rightarrow \sigma_{xz} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right),\end{aligned}\tag{1.5}$$

όπου το G δηλώνει το μέτρο διάτμησης του υλικού της ράβδου και δίνεται από τον τύπο $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, όπου

E : το μέτρο ελαστικότητας του Young και

ν : ο λόγος του Poisson και $-1 < \nu < 0,5$

Παρατηρούμε λοιπόν, μέσω των καταστατικών εξισώσεων, ότι η στρεπτική ροπή σε τυχούσα διατομή αναλαμβάνεται πλήρως από τις διατμητικές τάσεις.

Το συμβιβαστό των μετατοπίσεων ικανοποιείται εξαρχής, οπότε το επόμενο βήμα είναι να ελεγχθεί αν το πεδίο των μετακινήσεων που δεχτήκαμε ικανοποιεί επιπλέον τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας, τις συνοριακές συνθήκες και τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας.

Εξισώσεις Ισορροπίας

Οι κλασσικές τοπικές εξισώσεις ισορροπίας χωρίς καθολικές δυνάμεις είναι οι εξής :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{1.6}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις ικανοποιούνται εκ ταυτότητος, σύμφωνα με τις σχέσεις των τάσεων που αποδείχθηκαν παραπάνω, (1.4) και (1.5). Χρησιμοποιώντας λοιπόν την πρώτη από τις εξισώσεις (1.6) και αντικαθιστώντας σε αυτή τους αντίστοιχους τύπους για τις τάσεις (1.5), καθώς παράλληλα απαιτούμε να ισχύει η ισότητά της με το μηδέν, έχουμε :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \Rightarrow \\ G\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) &= 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Παρατηρούμε επομένως ότι η συνάρτηση στρέβλωσης Φ αναγκάζεται να ικανοποιεί την αρμονική εξίσωση που ισχύει σε όλη την περιοχή της διατομής (y,z) .

Συνοριακές Συνθήκες

- *Οριακές συνθήκες στην παράπλευρη επιφάνεια*

Ύστερα από εξέταση των συνθηκών της παράπλευρης επιφάνειας της ράβδου και σύμφωνα με την παραδοχή πως κατά την στρέψη της ράβδου η παράπλευρη επιφάνεια παραμένει αφόρτιστη, ο ελκυστής των τάσεων στην επιφάνεια αυτή θα πρέπει είναι μηδέν. Προκύπτει επομένως η παρακάτω εξίσωση που αποτελεί μία από τις δύο συνοριακές συνθήκες που απαιτεί η αρμονική εξίσωση για την Φ .

$$\{t\} = [\sigma] * \{n\} = 0 \quad \Rightarrow$$

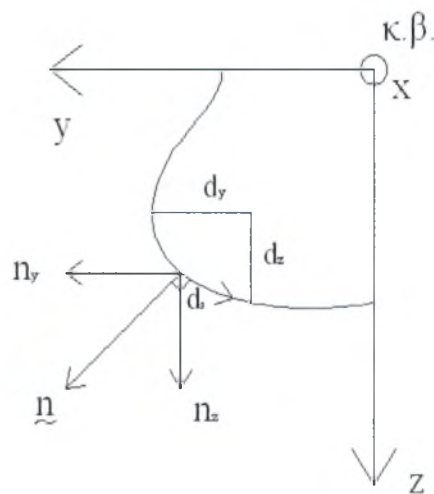
$$\begin{bmatrix} \cancel{\sigma_{xx}} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \cancel{\sigma_{yy}} & \cancel{\sigma_{yz}} \\ \sigma_{zx} & \cancel{\sigma_{zy}} & \cancel{\sigma_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dz/ds \\ -dy/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)n_y + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)n_z = 0 \quad (1.7)$$

όπου το n δηλώνει το μοναδιαίο άνυσμα που είναι κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου και έχει συνιστώσες, οι οποίες προκύπτουν με τη βοήθεια του σχήματος 1.4, ως εξής :

$$n_x = 0 \quad , \quad n_y = \frac{dz}{ds} \quad \text{και} \quad n_z = -\frac{dy}{ds}$$



Σχήμα 1.4 Στοιχειώδες τμήμα ds πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου με συνιστώσες dy και dz .

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.7) τις παραπάνω συνιστώσες του μοναδιαίου, κάθετου στην επιφάνεια της διατομής διανύσματος καταλήγουμε στην παρακάτω συνοριακή συνθήκη :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)\frac{dy}{ds} = 0 \quad (1.8)$$

Ισχύει επίσης σύμφωνα με τον τύπο της κατά κατεύθυνσης παραγώγου :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}n_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}n_z \quad (1.9)$$

Από όπου συνεπάγεται ότι :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad (1.10)$$

- *Οριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου*

Μία επιπλέον συνοριακή συνθήκη που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι η εκάστοτε υπό εξέταση ράβδος θα πρέπει να στηρίζεται σε μία από τις ακραίες διατομές της, είναι η εξής :

$$u_x(0,0,0) = 0 \Rightarrow \Phi(0,0) = 0 \quad (1.11)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα n , κάθετο στις βάσεις της ράβδου έχει συνιστώσες :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x = \pm 1 \\ n_y = 0 \\ n_z = 0 \end{Bmatrix}$$

Επομένως ο ελκυστής των τάσεων λαμβάνει τις παρακάτω τιμές :

$$\begin{aligned} \{t\} &= [\sigma] * \{n\} \Rightarrow \\ \{t\} &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \{t\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \sigma_{yx} \\ \pm \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.12) \end{aligned}$$

Μακροσκοπικές Εξισώσεις Ισοροπίας

Οι μακροσκοπικές εξισώσεις των τεμνουσών δυνάμεων ικανοποιούνται κι αυτές καθώς καταλήγουν σε ένα ολοκλήρωμα της συνοριακής συνθήκης για την παράπλευρη επιφάνεια:

$$Q_y = \iint_{(A)} \sigma_{xy} dydz \Rightarrow$$

$$Q_y = G\alpha \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \frac{dy}{ds} \xrightarrow{(1.8)}$$

$$\underline{Q_y = 0}$$

$$Q_z = \iint_{(A)} \sigma_{xz} dydz \Rightarrow$$

$$Q_z = G\alpha \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \frac{dy}{ds} \xrightarrow{(1.8)}$$

$$\underline{Q_z = 0}$$

όπου (A) ονομάζουμε την συνολική επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της.

Η εξωτερική ροπή στρέψης M_x θα πρέπει να είναι ίση με τη συνισταμένη ροπή των εσωτερικών τάσεων και επομένως δίνεται από τη σχέση :

$$M_x = \iint_{(A)} (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dydz \quad (1.13)$$

όπου επίσης (A) ονομάζουμε την συνολική επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της.

Επίσης, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.5) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις που μας δίνουν τις μη μηδενικές συνιστώσες της διατμητικής τάσης :

$$\sigma_{xy} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \text{ και}$$

$$\sigma_{xz} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right)$$

Συμβολίζοντας ως I_o την πολική ροπή αδρανείας της διατομής, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$I_o = \iint_{(A)} (y^2 + z^2) dydz$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.13) τους τύπους (1.5) λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση για την εξωτερική ροπή στρέψης :

$$M_x = \iint_{(A)} (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dydz \Rightarrow$$

$$M_x = \iint_{(A)} yG\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right) dydz - \iint_{(A)} zG\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right) dydz \Rightarrow$$

$$M_x = G\alpha \left[\iint_{(A)} (y^2 + z^2) dydz + \iint_{(A)} \left(y\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) dydz \right] \Rightarrow$$

$$M_x = G\alpha \left[I_o + \iint_{(A)} \left(y\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) dydz \right] \quad (1.14)$$

Η αξονική δύναμη N και οι καμπτικές ροπές M_y, M_z είναι επίσης μηδενικές, όπως όφειλαν :

$$N = \iint_{(A)} \sigma_{xx} dydz \xrightarrow{(1.4)} N = 0$$

$$M_y = \iint_{(A)} \sigma_{xx} z dydz \xrightarrow{(1.4)} M_y = 0$$

$$M_z = \iint_{(A)} \sigma_{xx} y dydz \xrightarrow{(1.4)} M_z = 0$$

Από τις εξισώσεις (1.9), (1.10) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εφόσον ισχύει η ισότητα

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} n_z = zn_y - yn_z \quad \text{για κάθε } (y,z) \text{ σημείο της περιμέτρου της διατομής,}$$

αντίστοιχα θα ισχύει ότι

$$z = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (1.15) \quad \text{και} \quad y = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.16)$$

Επομένως από την εξίσωση (1.14) θα έχουμε :

$$M_x = G\alpha \left[I_o + \iint_{(A)} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dydz \right]$$

Ονομάζουμε J την παράσταση $I_o + \iint_{(A)} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dydz$, επομένως η παραπάνω παράσταση γίνεται :

$$\boxed{M_x = GJ\alpha} \quad (1.17) \quad \text{και κατά συνέπεια έχουμε :}$$

$$J = I_o + \iint_{(A)} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dydz \quad \xrightarrow{(1.15),(1.16)}$$

$$J = I_o + \iint_{(A)} \left[\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dydz \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{J = I_o - \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dydz} \quad (1.18)$$

Παρατηρούμε ότι το J είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται αποκλειστικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής της εκάστοτε ράβδου που εξετάζουμε.

Επίσης από την εξίσωση (1.18) με τις κατάλληλες πράξεις έχουμε :

$$J = I_o - \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dydz \quad \Rightarrow$$

$$J = \iint_{(A)} (y^2 + z^2) dydz + \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dydz - 2 \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dydz \quad \Rightarrow$$

$$J = \iint_{(A)} \left[y^2 + z^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dydz \quad \Rightarrow$$

$$J = \iint_{(A)} \left[y^2 + z^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dydz \quad \xrightarrow{(1.15),(1.16)}$$

$$J = \iint_{(A)} \left[y^2 + z^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} y - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} z \right] dydz \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{J = \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right)^2 \right] dydz} \quad (1.19)$$

Από την εξίσωση (1.19) συμπεραίνουμε πως το J είναι μία θετική ποσότητα εφόσον αποτελείται μόνο από τετραγωνικές δυνάμεις. Επομένως

$$J > 0$$

Ταυτόχρονα από την εξίσωση (1.18) συμπεραίνουμε πως το J θα είναι πάντοτε μικρότερο από την πολική ροπή αδρανείας της διατομής I_o , εφόσον η ποσότητα

$\iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dydz$ είναι πάντοτε θετική λόγω των τετραγωνικών δυνάμεων, αλλά και αρκετά μικρή. Επομένως

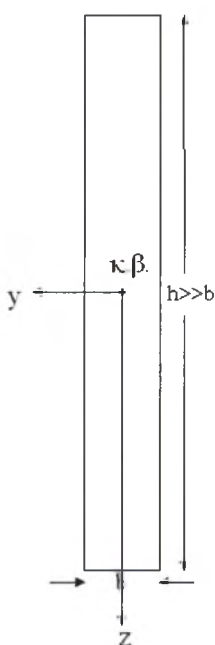
$$J \leq I_o$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε πως

$$0 < J \leq I_o$$

1.3 Κλασσική Θεωρία Στρέψης Λεπτότοιχων Ορθογωνικών Διατομών

Στην περίπτωση της στρέψης λεπτότοιχων ορθογωνικών διατομών οι τύποι που ισχύουν, σύμφωνα με τη θεωρία του Saint – Venant, είναι όμοιοι με εκείνους που ισχύουν και στην κλασσική θεωρία στρέψης των ράβδων συμπαγούς, τυχούσας διατομής που εξετάσαμε παραπάνω.



Σχήμα 1.5 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε συμπαγή ράβδο λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής.

Στην περίπτωση όμως των λεπτότοιχων διατομών η συνιστώσα σ_{xz} της διατμητικής τάσης ισούται με :

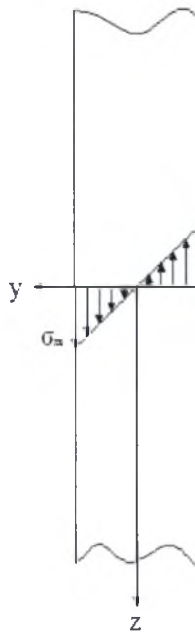
$$\sigma_{xz} = \frac{6M_x}{b^3 h} y \quad , \quad (1.20)$$

όπου

- M_x : η εξωτερική ροπή στρέψης που ασκείται στη ράβδο
- b : το πλάτος της διατομής, και
- h : το ύψος της διατομής όπως φαίνονται στο Σχήμα 1.5

Αντίστοιχα η συνιστώσα της διατμητικής τάσης διαμορφώνει τη μέγιστη τιμή της στα σύνορα $\pm b/2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6 και επομένως θα ισούται με :

$$\max \sigma_{xz} = \frac{3M_x}{b^2 h}$$



Σχήμα 1.6 Κατανομή των διατμητικών τάσεων σ_{xz} που αναπτύσσονται σε μία λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή. Η μέγιστη τιμή της τάσης παρατηρείται στα σύνορα $\pm b/2$.

Γενικά για την μέγιστη τιμή της συνιστώσα της διατμητικής τάσης ισχύει ο παρακάτω τύπος[5] :

$$\max \sigma_{xz} \approx \frac{M_x}{c_2 b^2 h} \quad ,$$

όπου

$$\text{για } 1 \leq h/b \leq 10 \text{ ισχύει : } c_2 = \frac{\left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{h} \tanh \frac{\pi h}{2b} \right]}{\left[1 - \frac{8}{\pi^2 \cosh \frac{\pi h}{2b}} \right]}$$

Από τον παραπάνω τύπο για το c_2 συμπεραίνουμε πως η συγκεκριμένη παράμετρος εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δεδομένης κάθε φορά διατομής.

Στην περίπτωση της λεπτότοιχης διατομής το J δίνεται από τον τύπο [5] :

$$J = c_1 b^3 h \quad , \quad (1.21)$$

όπου

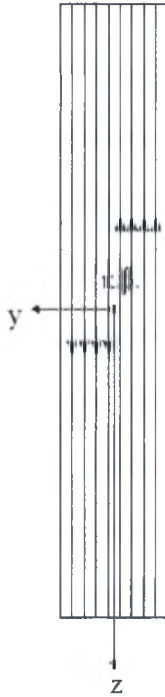
$$c_1 = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{h} \tanh \frac{\pi h}{2b}$$

Η εξωτερική ροπή στρέψης που ασκείται στα άκρα της ράβδου λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής, σύμφωνα με την εξίσωση (1.17) ισούται με $M_x = GJ\alpha$. Βάσει της εξίσωσης (1.21) και θεωρώντας το c_1 ίσο με τη μεγαλύτερη τιμή του, δηλαδή $c_1 = \frac{1}{3}$, καταλήγουμε στην παρακάτω ισότητα που δίνει μία προσεγγιστική τιμή για την εξωτερική στρεπτική ροπή M_x :

$$M_x \approx \frac{1}{3} G\alpha b^3 h \quad (1.22)$$

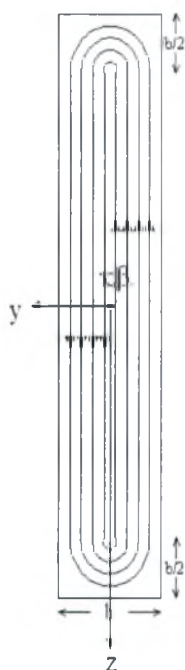
1.4 Γραμμές Ροής Των Τάσεων Στην Ορθογωνική Διατομή

Κάνοντας μία απλοποιητική παραδοχή θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως οι γραμμές ροής των τάσεων στην επιφάνεια της λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής είναι γραμμές ανοιχτές, παράλληλες μεταξύ τους και εκτείνονται από το ένα άκρο της διατομής, $-\frac{h}{2}$, έως το άλλο, $\frac{h}{2}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.7 Απλοποιητική παραδοχή ανοιχτών και παράλληλων μεταξύ τους γραμμών των τάσεων όπως διαμορφώνονται στην επιφάνεια της λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής.

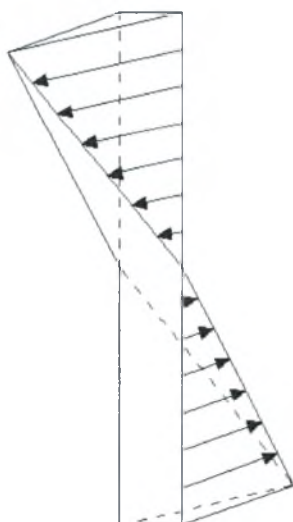
Στην πραγματικότητα όμως οι γραμμές ροής των τάσεων είναι γραμμές κλειστές, παράλληλες μεταξύ τους οι οποίες καμπυλώνουν καθώς πλησιάζουν στα άκρα της διατομής. Πιο συγκεκριμένα η καμπύλωση των γραμμών ροής ξεκινά σε απόσταση $b/2$ από τα άκρα όπως είναι εμφανές στο Σχήμα 1.8. Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης ακολουθεί μετά το σχήμα.



Σχήμα 1.8 Πραγματική μορφή των γραμμών των τάσεων όπως διαμορφώνονται στην επιφάνεια μίας λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής. Αποτελούν κλειστές, παράλληλες μεταξύ τους καμπύλες.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία για τις λεπτότοιχες διατομές η συνάρτηση στρέβλωσης δίνεται ως εξής :

$$\Phi = yz \quad (1.23)$$



Σχήμα 1.9 Στρέβλωση λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής.

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις των τάσεων (1.5) τη συνάρτηση στρέβλωσης σύμφωνα με την εξίσωση (1.23) έχουμε :

$$\sigma_{xy} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \xrightarrow{(1.23)}$$

$$\sigma_{xy} = G\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - z \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{xy} = G\alpha(z - z) \Rightarrow$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

Επίσης,

$$\sigma_{xz} = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \xrightarrow{(1.23)}$$

$$\sigma_{xz} = G\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}(yz) + y \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{xz} = G\alpha(y + y) \Rightarrow$$

$$\sigma_{xz} = 2yG\alpha$$

Τοποθετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα των τάσεων στην εξίσωση (1.13) που μας δίνει την εξωτερική ροπή στρέψης M_x λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$M_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dz dy \Rightarrow$$

$$M_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2y^2 G\alpha dz dy \Rightarrow$$

$$M_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[2y^2 G\alpha z \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \Rightarrow$$

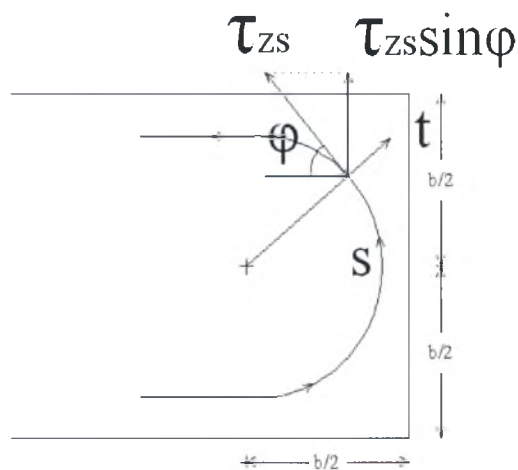
$$M_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[2y^2 G\alpha \frac{h}{2} + 2y^2 G\alpha \frac{h}{2} \right] dy \Rightarrow$$

$$M_x = \left[2Gah \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Rightarrow$$

$$M_x = \frac{2}{3}Gah \left(\frac{b}{2} \right)^3 + \frac{2}{3}Gah \left(\frac{b}{2} \right)^3 \Rightarrow$$

$$M_x = \frac{1}{6}Gahb^3$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω τιμή για την εξωτερική ροπή στρέψης ισούται με το μισό της τιμής που λαμβάνουμε από την εξίσωση (1.22). Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η ροπή που αναλαμβάνεται από τον κορμό της διατομής, σε ύψος $h-b$, είναι η μισή της εξωτερικής ροπής που ασκείται στη ράβδο, $M_x/2$. Θα αποδείξουμε επίσης ότι η τιμή με την οποία ισούται η ροπή που αναλαμβάνεται από το τμήμα των καμπύλων γραμμών τάσεων, με τη βοήθεια βέβαια του Σχήματος 1.9, είναι επίσης $M_x/2$. Έτσι έχουμε [6] :



Σχήμα 1.10 Ακραίο τμήμα, μήκους $(b/2)$, της λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής στο οποίο ξεκινά η καμπύλωση των γραμμών ροής των τάσεων.

Η ροπή που αναλαμβάνεται από το τμήμα των καμπύλων γραμμών τάσεων με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος είναι η εξής :

$$M_x^* = h \int_0^\pi d\phi \int_0^{\frac{b}{2}} \tau_{zs} t \sin \phi dt$$

Με βάση την εξίσωση (1.20) ισχύει ότι : $\tau_{zs} = \frac{6M_x}{b^3 h} t$, άρα η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$M_x^* = h \frac{6M_x}{b^3 h} \int_0^{\frac{b}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{\frac{b}{2}} t^2 dt \Rightarrow$$

$$M_x^* = h \frac{6M_x}{b^3 h} [-\cos \phi]_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} t^2 dt \Rightarrow$$

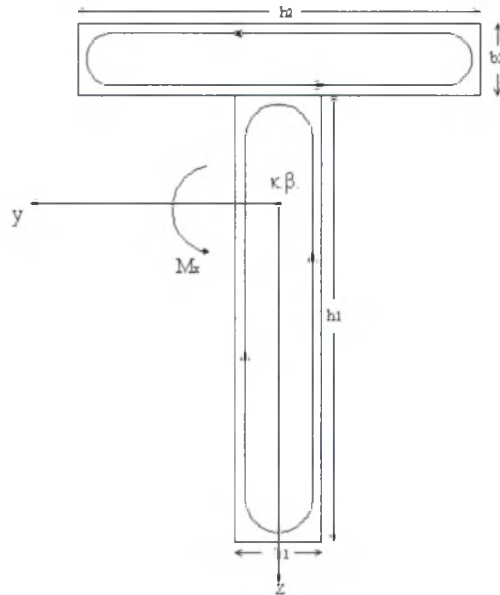
$$M_x^* = h \frac{6M_x}{b^3 h} 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{2}} \Rightarrow$$

$$M_x^* = h \frac{6M_x}{b^3 h} 2 \frac{b^3}{24} \Rightarrow$$

$$M_x^* = \frac{1}{2} M_x$$

Αποδεικνύεται λοιπόν σύμφωνα με τα παραπάνω ότι η εξωτερική ροπή στρέψης αναλαμβάνεται κατά το ήμισυ από τον κύριο κορμό της διατομής, δηλαδή σε ύψος $h - b$, ενώ το υπόλοιπο μισό της τιμής της εξωτερικής ροπής αναλαμβάνεται από τις τάσεις που ακολουθούν τις καμπύλες γραμμές ροής που δημιουργούνται στα άκρα της διατομής σε απόσταση $b/2$ από το κάθε άκρο. Συμπερασματικά μπορούμε να αναφέρουμε το γεγονός ότι ένα πολύ μεγάλο μέρος της ροπής στρέψης, πιο συγκεκριμένα το μισό, αναλαμβάνεται από δύο πολύ μικρά τμήματα της διατομής πράγμα που μας οδηγεί στην κατανόηση της εσφαλμένης αρχικά υπόθεσης των ανοιχτών, παράλληλων γραμμών ροής των τάσεων.

Η ανάλυση επεκτείνεται και σε σύνθετες ανοικτές λεπτότοιχες διατομές οι οποίες αποτελούνται από επιμέρους ευθύγραμμα τμήματα, δεν περιορίζονται δηλαδή από τη μορφή της διατομής, αρκεί αυτή να μπορεί να αναπτυχθεί σε ορθογώνιο. Όταν λοιπόν η λεπτότοιχη διατομή είναι σύνθετη όπως ένα απλό T, Σχήμα 1.11, και δεν είναι δυνατό το ανάπτυγμά της να μετασχηματιστεί σε λεπτό ορθογώνιο, εργαζόμαστε ως εξής :



Σχήμα 1.11 Ανοικτή λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή σχήματος απλού T που υπακούει στους τύπους του Bredt.

Θεωρούμε ότι η ροπή M_x κατανέμεται στα επιμέρους τμήματα (δηλαδή το τμήμα $b_i \times h_i$ παραλαμβάνει ροπή M_{xi}). Όμως η συστροφή a , κάθε τμήματος πρέπει να είναι ίση με τη συστροφή a ($a = a_i$) της διατομής. Οπότε, έχουμε :

$$M_{xi} = \frac{Ga}{3} h_i b_i^3 \quad \text{και} \quad M_x = \sum_{i=1}^2 M_{xi}$$

(θεωρήσαμε ότι το μέτρο διάτμησης G_i είναι ίδιο σε κάθε κλάδο i , εξετάζουμε δηλαδή πρόβλημα διατομών από το ίδιο υλικό. Στην περίπτωση που εξετάζουμε πρόβλημα σύνθετων διατομών π.χ. μπετόν με χάλυβα, λαμβάνουμε το μέτρο διάτμησης διαφορετικό για κάθε κλάδο).

Για να ισχύουν βέβαια οι παραπάνω τύποι θα πρέπει σε κάθε επιμέρους κλάδο να ισχύει $\frac{h_i}{b_i} \geq 10$. Η σχέση για την συστροφή δίνεται ως εξής :

$$a = \frac{M_x}{\sum_{i=1}^2 G I_i} \quad , \quad \text{όπου} \quad I_i = \frac{1}{3} h_i b_i^3$$

1.5 Συμπεράσματα

- ☞ Κατά τον Saint – Venant η συστροφή α παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού τυχούσας διατομής.
- ☞ Κατά την ομοιόμορφη στρέψη μίας ράβδου, η διατομή αυτής μπορεί να στρεβλωθεί ελεύθερα με αποτέλεσμα η στρεπτική ροπή να αναλαμβάνεται πλήρως από τις διατμητικές τάσεις.
- ☞ Η εξίσωση ισορροπίας της κλασσικής θεωρίας κατέληξε στην αρμονική εξίσωση της συνάρτησης στρέβλωσης.
- ☞ Οι γραμμές ροής των τάσεων μιας λεπτής ορθογωνικής διατομής αποτελούν γραμμές κλειστές, παράλληλες μεταξύ τους οι οποίες καμπυλώνουν καθώς πλησιάζουν στα άκρα της διατομής.
- ☞ Η μισή τιμή της εξωτερικής στρεπτικής ροπής που ασκείται στη ράβδο αναλαμβάνεται από τις καμπύλες γραμμές των τάσεων που εκτείνονται σε τμήμα μήκους $\frac{b}{2}$, όπου b το πλάτος της διατομής, ενώ το υπόλοιπο μισό της τιμής της, αναλαμβάνεται από το ευθύγραμμο τμήμα των γραμμών τάσεων που εκτείνεται στο τμήμα του κύριου κορμού της διατομής.
- ☞ Σύνθετες ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές από ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να λυθούν με όμοιο τρόπο.

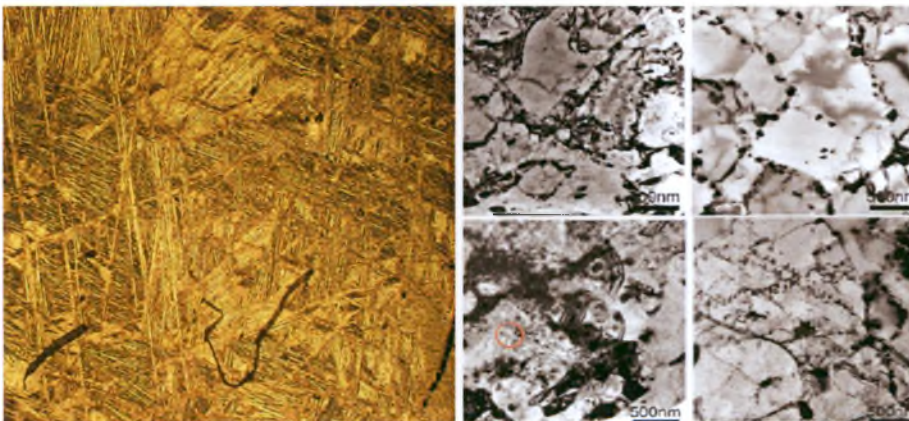
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΤΥΠΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ MINDLIN (STRAIN GRADIENT)

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τη θεωρία στρέψης τύπου ελαστικής βαθμίδας για ράβδους συμπαγών υλικών ορθογωνικής διατομής κατά τον Mindlin. Η κλασική θεωρία που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δικαιολογεί το αποτέλεσμα (μετατόπιση, στροφή) με βάση το αίτιο (δύναμη, ροπή) που προκύπτει από τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας. Από την άλλη, η ελαστική θεωρία κλίσεως συνυπολογίζει και την συνεισφορά δυνάμεων ή ροπών που ενώ μακροσκοπικά εξισορροποούνται προσθέτουν στην ελαστική ενέργεια του συστήματος επιπλέον όρους. Οι επιπλέον αυτοί όροι όπως θα δούμε στη συνέχεια εισάγονται με τη βοήθεια μίας μεταβλητής ℓ που ονομάζεται εσωτερικό μήκος, και έχει να κάνει με την επιπρόσθετη ακαμψία που προσφέρει στο σύνολο της ράβδου η μικροδομή της.

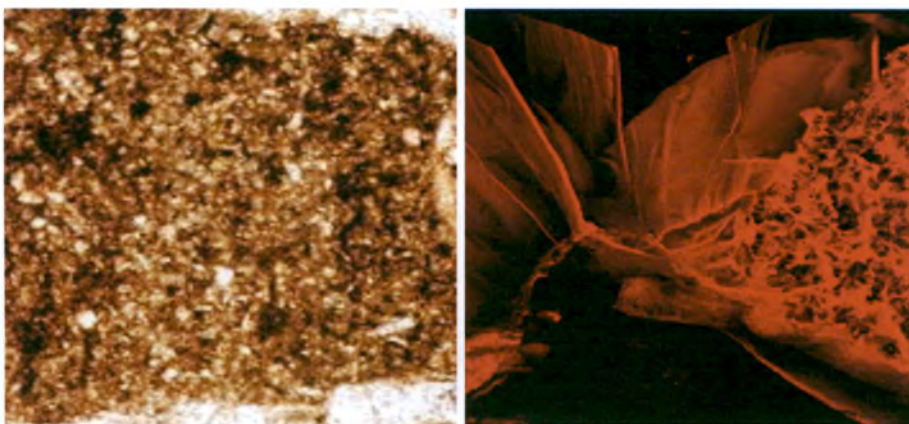
Η θεωρία του Mindlin, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή διαφοροποιείται ως θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας από εκείνη του Koiter, η οποία θα εξεταστεί στη συνέχεια, λόγω του ότι προσεγγίζει κυρίως το πρόβλημα της στρέψης ράβδων οι οποίες αποτελούνται από συμπαγή υλικά, όπως για παράδειγμα τα μέταλλα και τα κεραμικά.



Σχήμα 2.1 Μικροδομή μετάλλων. Όπως φαίνεται από τις εικόνες τα υλικά αυτά αποτελούν ένα δείγμα συμπαγών υλικών τα οποία υπακούουν στη θεωρία στρέψης κατά Mindlin.

[Αριστερή εικόνα : www.flickr.com/photos/zhent/579330949/]

[Δεξιά εικόνα : www.jolisfukyu.tokai-sc.jaea.go.jp/.../2007/3_6.html]



Σχήμα 2.2 Μικροδομή κεραμικών υλικών. Όπως φαίνεται από τις εικόνες τα υλικά αυτά αποτελούν ένα δείγμα συμπαγών υλικών τα οποία υπακούουν στη θεωρία στρέψης κατά Mindlin.
 [Αριστερή εικόνα : www.image-geo.info/profile.htm]
 [Δεξιά εικόνα : www.geol.umd.edu/~wzhu/confocal.png]

2.2 Στρέψη Ορθογωνικής Διατομής – Θεωρία Mindlin

Για την εξέταση του προβλήματος της θεωρίας της ελαστικής βαθμίδας υποθέτουμε μία συνάρτηση στρέβλωσης της μορφής $\Phi \approx \Phi_1(y)z$ (2.1) και θεωρούμε ότι η Φ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση ισορροπίας, η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Schrödinger της κβαντικής μηχανικής [7] :

$$(1 - c\nabla^2)\nabla^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2\Phi - c\nabla^4\Phi = 0 \quad (2.2) \quad \text{όπου} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$$

και

$c > 0$ σταθερά η οποία αναφέρεται στη μικροδομή του υλικού και ισούται με

$c = \ell^2$ όπου ℓ το εσωτερικό μήκος (μέγεθος κόκκων αδρανούς κλπ.)

Από την εξίσωση ισορροπίας (2.2) και έχοντας θεωρήσει συνάρτηση στρέβλωσης την $\Phi \approx \Phi_1(y)z$, με την κατάλληλη αντικατάσταση θα έχουμε :

$$\nabla^2\Phi - \ell^2\nabla^4\Phi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] - \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

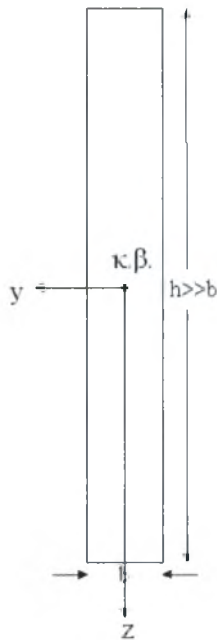
$$\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} z + 0 \right] - \ell^2 \left[\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} z + 0 + 0 \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \ell^2 z \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z \left(\frac{d^2 \Phi_1}{dy^2} - \ell^2 \frac{d^4 \Phi_1}{dy^4} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dy^2} - \ell^2 \frac{d^4 \Phi_1}{dy^4} = 0 \quad (2.3)$$

Η εξίσωση (2.3) δηλώνει πως η συνάρτηση στρέβλωσης Φ αποτελεί μία συνάρτηση εξαρτώμενη μόνο από τη μεταβλητή y , δηλαδή το πάχος της διατομής. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι σύμφωνα με τη θεωρία της βαθμίδας η επιρροή της μεγάλης διάστασης της διατομής, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση το h (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα), θεωρείται αμελητέα συγκρινόμενη με την επιρροή της μικρής διάστασης της διατομής δηλαδή το πλάτος b . Ουσιαστικά δηλαδή θεωρούμε πως η συνάρτηση στρέβλωσης είναι μία μονοδιάστατη συνάρτηση.



Σχήμα 2.3 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε συμπαγή ράβδο λεπτότοιχης ορθογωνικής διατομής. Στην ανάλυση, κυριαρχεί η μεταβλητή y .

Από την εξίσωση (2.3) έχουμε :

$$\frac{d^2\Phi_1}{dy^2} - \ell^2 \frac{d^4\Phi_1}{dy^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \ell^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} = 0$$

Για την περίπτωση όπου το εσωτερικό μήκος μηδενίζεται, $\ell = 0$, η βασική εξίσωση μετατρέπεται ως εξής :

$$\nabla^2\Phi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\Phi_1}{dy^2} = 0$$

Καταλήγουμε δηλαδή στην αρμονική εξίσωση, με την οποία επιστρέφουμε στην κλασσική λύση.

Η γενική λύση της αρμονικής εξίσωσης σε μία διάσταση είναι :

$$\Phi_1 = c_1 + c_2 y$$

όπου c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις του z .

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε :

- *Οριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου*

Σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της διατομής, οι οποίες προκύπτουν από το γεγονός ότι η εκάστοτε υπό εξέταση ράβδος θα πρέπει να στηρίζεται στη μία ακραία διατομή της, έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} u_x(0,0,0) = 0 \Rightarrow \Phi_1(0,0) = 0$$

$$\text{Επομένως για } \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ \Phi_1 = 0 \end{array} \right\} \Phi_1(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

- *Οριακές συνθήκες στην παράπλευρη επιφάνεια*

Ακολουθώντας τις εξισώσεις (1.15) και (1.16) των συνοριακών συνθηκών της κλασικής θεωρίας στρέψης που αναπτύχθηκε στο πρώτο κεφάλαιο λαμβάνουμε :

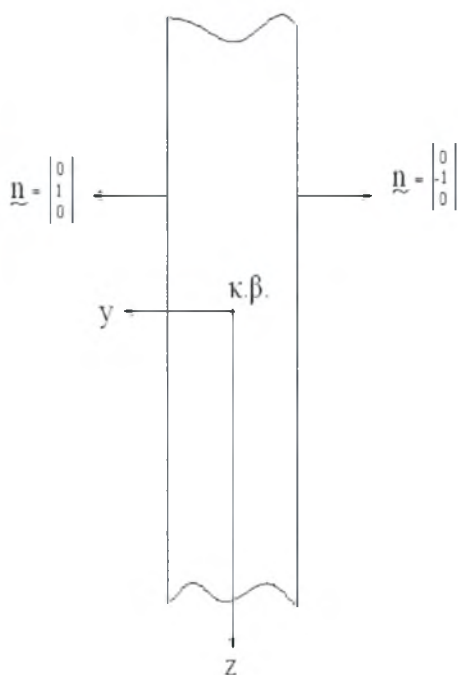
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} n_z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} n_z = zn_y - yn_z$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τη συνάρτηση στρέβλωσης όπως την ορίσαμε σύμφωνα με τη θεωρία της βαθμίδας έχουμε :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} n_y + 0 = zn_y - 0 \quad (2.4)$$

Σύμφωνα με το σχήμα που ακολουθεί και λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τιμές για το μοναδιαίο διάνυσμα ανάλογα με το σύνορο που εξετάζουμε έχουμε :



Σχήμα 2.4 Το μοναδιαίο διάνυσμα \underline{n} κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια της ορθογωνικής ράβδου όπως διαμορφώνονται οι τιμές του για τα δύο σύνορα $y = b/2, -b/2$.

Αριστερό σύνορο

$$\text{Η εξίσωση (2.4) γίνεται : } \frac{\partial}{\partial y} (c_1 + c_2 y)n_y = zn_y \Rightarrow$$

$$c_2 * 1 = z * 1 \Rightarrow$$

$$c_2 = z$$

Δεξί σύνορο

$$\text{Η εξίσωση (2.4) γίνεται : } \frac{\partial}{\partial y} (c_1 + c_2 y)n_y = zn_y \Rightarrow$$

$$c_2 * (-1) = z * (-1) \Rightarrow$$

$$c_2 = z$$

Παρατηρώντας πως τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις λύσεις για τα δύο σύνορα είναι κοινά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η συνάρτηση στρέβλωσης θα είναι της μορφής :

$$\Phi = yz$$

δηλαδή επιστρέφουμε στην κλασική λύση για τις ανοιχτές λεπτότοιχες ορθογωνικές διατομές.

Προσπαθώντας να μορφώσουμε τη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης θεωρούμε δύο πιθανές παραστάσεις της συνάρτησης αυτής και με τις κατάλληλες πράξεις και τροποποιήσεις λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Αρχικά θεωρούμε τη συνάρτηση στρέβλωσης ως μία συνάρτηση της μορφής $\Phi_1 = y^n$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3) έχουμε :

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dy^2} - \ell^2 \frac{d^4 \Phi_1}{dy^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dy^2} (y^n) - \ell^2 \frac{d^4}{dy^4} (y^n) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dy} (ny^{n-1}) - \ell^2 \frac{d^3}{dy^3} (ny^{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$n(n-1)y^{n-2} - \ell^2 n(n-1)(n-2)(n-3)y^{n-4} = 0$$

Επομένως πιθανές λύσεις είναι :

$$n(n-1)y^{n-2} = 0 \quad \rightarrow \quad n = 0,1$$

και ταυτόχρονα

$$cn(n-1)(n-2)(n-3)y^{n-4} = 0 \quad \rightarrow \quad n = 0,1,2,3$$

Εφόσον πρέπει να ισχύουν για κάθε y .

Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι κοινές λύσεις για τη συνάρτηση στρέβλωσης είναι : $n = 0,1$ και άρα οι ιδιο-συναρτήσεις της Φ_1 θα είναι :

$$\begin{array}{l} \text{για } n = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = \text{σταθερά} \\ \text{και} \\ \text{για } n = 1 \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = y \end{array}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας βεβαιώνουν ότι η κλασσική λύση , δηλαδή η $\Phi = yz$, αποτελεί μέρος της νέας λύσης, αν τοποθετήσουμε στην εξίσωση $\Phi_1 = y^n$ τη λύση $n = 1$ και επομένως η εξίσωση (2.1) μετατρέπεται σε $\Phi = yz$.

Κατά τον ίδιο τρόπο θεωρούμε τη συνάρτηση στρέβλωσης μία συνάρτηση εκθετικής μορφής τύπου $\Phi_1 = e^{ny}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3) έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_1}{dy^2} - \ell^2 \frac{d^4\Phi_1}{dy^4} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d^2}{dy^2}(e^{ny}) - \ell^2 \frac{d^4}{dy^4}(e^{ny}) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dy}(ne^{ny}) - \ell^2 \frac{d^3}{dy^3}(ne^{ny}) &= 0 \quad \Rightarrow \\ n^2 e^{ny} - \ell^2 n^4 e^{ny} &= 0 \quad \Rightarrow \\ n^2 e^{ny} (1 - \ell^2 n^2) &= 0 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε y .

Επομένως πιθανές λύσεις είναι :

$$n = 0$$

και

$$1 - \ell^2 n^2 = 0 \Rightarrow n^2 = \frac{1}{\ell^2} \Rightarrow n = \pm \frac{1}{\ell}$$

γνωρίζοντας βέβαια εξ' ορισμού ότι $\ell^2 > 0$.

Καταλήγουμε επομένως στις παρακάτω λύσεις για τις ιδιο-συναρτήσεις της Φ_1 :

$$\text{για } n = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = \text{σταθερά} ,$$

$$\text{για } n = \frac{1}{\ell} \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = e^{y/\ell}$$

και

$$\text{για } n = -\frac{1}{\ell} \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = e^{-y/\ell}$$

Η συνάρτηση στρέβλωσης Φ_1 είναι μία συνάρτηση ομογενής 4^{ου} βαθμού και επομένως θα πρέπει να έχει τέσσερις ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις οι οποίες μπορούν να προκύψουν από τις παραπάνω δοκιμές με τις δύο θεωρούμενες δοκιμαστικές συναρτήσεις $\Phi_1 = y^n$ και $\Phi_1 = e^{ny}$. Υπό αυτή την προϋπόθεση καταλήγουμε σε μία γενική λύση για την συνάρτηση στρέβλωσης της μορφής :

$$\Phi = A_1 + A_2 y + A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} \quad (2.5)$$
 όπου τα A_i αποτελούν συναρτήσεις μόνο του z και μπορούν να έχουν τη μορφή $A_i = az + b$, θεώρηση η οποία προκύπτει από τις συνοριακές συνθήκες, όπως θα δούμε αργότερα, στην εξίσωση (2.9).

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος σύμφωνα με όσα αποδείχθηκαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας της δεσποινίδος Παπαγεωργοπούλου, Αναστασίας-Αθηνάς [7] και αναφέρονται στην παράγραφο 1.2 ως εξισώσεις (1.17) και (1.19) είναι οι εξής :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0 \quad (2.6)$$

Από την οποία κάνοντας την προσεγγιστική παραδοχή του μονοδιάστατου προβλήματος σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω καταλήγουμε πως

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

και αντίστοιχα η εξίσωση αυτή θα πρέπει να ισχύει και για τα δύο σύνορα της ορθογωνικής διατομής :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{y=b/2} = 0 \quad (2.7) \quad \text{και ομοίως στο σύνορο } -b/2$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{y=-b/2} = 0 \quad (2.8)$$

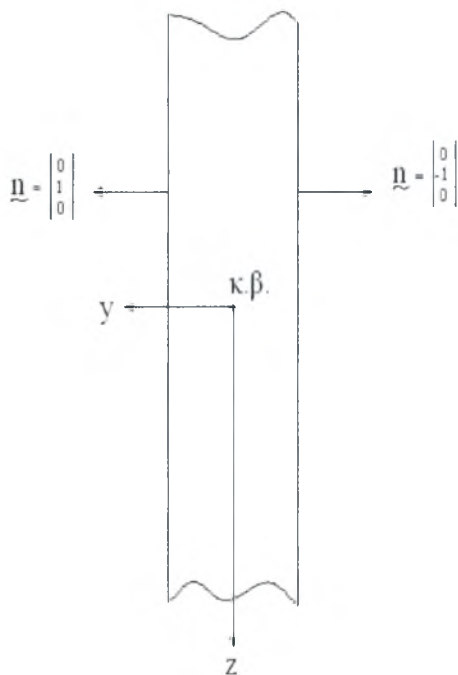
Μία ακόμη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος είναι αυτή η οποία αναφέρεται ως εξίσωση (1.19) στην διπλωματική εργασία της δεσποινίδος Παπαγεωργοπούλου Αναστασίας-Αθηνάς [7] και είναι η εξής :

$$\begin{aligned} & n_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + n_z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) + \ell^2 n_y n_z \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} - \frac{\partial n_z}{\partial z} \right) \\ & + \ell^2 \left(\frac{\partial n_z}{\partial y} - \frac{\partial n_y}{\partial z} \right) - \ell^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial n_y}{\partial y} n_z^2 + (n_y^2 - 2) \ell^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} n_y + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} n_z \right) \\ & + (n_z^2 - 2) \ell^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} n_y + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} n_z \right) - \ell^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \frac{\partial n_z}{\partial z} n_y^2 \\ & + \ell^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \left[n_y n_z \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial n_y}{\partial z} - \frac{\partial n_z}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα λαμβάνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με το σύνορο στο οποίο είναι κάθετο. Έτσι παρατηρώντας και το παρακάτω σχήμα ισχύει

$$y = \left\{ \frac{b}{2} \right. \rightarrow n = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$y = \left\{ -\frac{b}{2} \right. \rightarrow n = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$



Σχήμα 2.5 Το μοναδιαίο διάνυσμα \underline{n} κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια της ορθογωνικής ράβδου όπως διαμορφώνονται οι τιμές του για τα δύο σύνορα $y = \frac{b}{2}, -\frac{b}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.9) τις τιμές του μοναδιαίου διανύσματος καταλήγουμε στην παρακάτω συνοριακή συνθήκη :

$$\begin{aligned}
 (\pm 1) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + (1^2 - 2) \ell^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} (\pm 1) \right) + (0^2 - 2) \ell^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (\pm 1) \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - \ell^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - 2 \ell^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0 \qquad (2.10)
 \end{aligned}$$

Έχοντας καταλήξει σύμφωνα με την εξίσωση (2.5) σε μία γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης ίση με

$$\Phi = A_1 + A_2 y + A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} \quad (2.11)$$

και αντικαθιστώντας την στις επιμέρους συνοριακές συνθήκες που αναφέρονται παραπάνω (2.7),(2.8) και (2.10) λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που ακολουθούν

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = A_3 e^{y/\ell} \frac{1}{\ell^2} + A_4 e^{-y/\ell} \frac{1}{\ell^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\ell^2} \left(A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} \right)$$

Επομένως από την εξίσωση (2.7) για το αριστερό σύνορο έχουμε :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{b/2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ell^2} \left(A_3 e^{b/2\ell} + A_4 e^{-b/2\ell} \right) = 0$$

για $\ell^2 \neq 0, \infty$ ισχύει $A_3 e^{b/2\ell} + A_4 e^{-b/2\ell} = 0 \quad (2.12)$

Ομοίως από την εξίσωση (2.8) για το δεξί σύνορο έχουμε :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{-b/2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ell^2} \left(A_3 e^{-b/2\ell} + A_4 e^{b/2\ell} \right) = 0$$

για $\ell^2 \neq 0, \infty$ ισχύει $A_3 e^{-b/2\ell} + A_4 e^{b/2\ell} = 0 \quad (2.13)$

Γράφοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις (2.12),(2.13) σε μητρωϊκή μορφή, έχουμε :

$$\begin{bmatrix} e^{b/2\ell} & e^{-b/2\ell} \\ e^{-b/2\ell} & e^{b/2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από όπου συμπεραίνουμε πως επειδή οι εκθετικές μορφές δεν μπορούν να πάρουν την τιμή μηδέν οι συντελεστές A_3 και A_4 είναι μηδενικοί, δηλαδή

$$\boxed{A_3 = A_4 = 0}$$

Ουσιαστικά, αν λάβουμε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} e^{b/2\ell} & e^{-b/2\ell} \\ e^{-b/2\ell} & e^{b/2\ell} \end{bmatrix}$ ίση με το μηδέν θα έχουμε :

$e^{2b/2\ell} - e^{-2b/2\ell} = 0$ πράγμα αδύνατο εφόσον όπως αναφέραμε και παραπάνω οι εκθετικές μορφές δεν μπορούν να είναι μηδενικές εκ ταυτότητος.

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (2.10) τη γενική λύση που έχει προκύψει για τη συνάρτηση στρέβλωσης έχουμε :

$$\begin{aligned} & \left[A_2 + \frac{1}{\ell} \left(A_3 e^{y/\ell} - A_4 e^{-y/\ell} \right) - z \right] - \frac{1}{\ell} \left(A_3 e^{y/\ell} - A_4 e^{-y/\ell} \right) \\ & - 2\ell^2 \left[\frac{1}{\ell} \left(e^{y/\ell} \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - e^{-y/\ell} \frac{\partial^2 A_4}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right] = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$A_2 - z = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_2 = z}$$

Επίσης από τη συνοριακή συνθήκη στηρίζεως γνωρίζουμε ότι :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} u_x(0,0,0) = 0 \Rightarrow \Phi(0,0) = 0$$

άρα για κάθε τιμή του ℓ^2 από την εξίσωση (2.11) λαμβάνουμε την τιμή για τον συντελεστή A_1 που είναι :

$$\boxed{A_1 = 0}$$

Συνοψίζοντας και αντικαθιστώντας στη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης (2.11) τις τιμές που βρέθηκαν για τους συντελεστές A_i καταλήγουμε πως $\Phi = yz$ δηλαδή στην κλασσική λύση που έχουμε ήδη μελετήσει. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε έχουν ομαδοποιηθεί στην επόμενη παράγραφο.

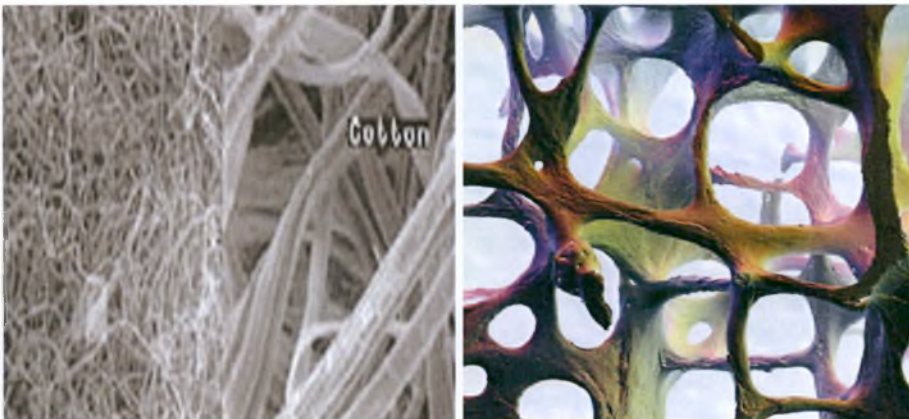
2.3 Συμπεράσματα

- ☞ Η λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή από συμπαγές υλικό, τόσο η ευθύγραμμη όσο και η καμπύλη, φαίνεται να μην επηρεάζεται από την ελαστικότητα τύπου βαθμίδας.
- ☞ Οι λεπτότοιχες διατομές ακολουθούν την κλασσική θεωρία εφόσον δεν παρεμποδίζονται στα άκρα τους.
- ☞ Εάν ενδιαφερόμαστε να μετρήσουμε το μέτρο διάτμησης G του υλικού μιας διατομής, ανεξάρτητα από την επιρροή του εσωτερικού μήκους, τότε για υλικά που δεν εμφανίζουν πορώδες ή για υλικά τα οποία περιέχουν πιο εύκαμπτα εσωτερικά σωματίδια, το πείραμα της στρέψης με κυκλικές ή με λεπτότοιχες διατομές ενδείκνυται, αρκεί ο τρόπος στήριξης στα άκρα να είναι ο ελάχιστος.
- ☞ Πειράματα κόπωσης σε κυλινδρικά δοκίμια από διάφορους τύπους χάλυβα επιβεβαιώνουν την ανυπαρξία φαινομένου κλίμακας στην αντοχή κόπωσης των υλικών αυτών. Δηλαδή οι κλασσικές τάσεις δεν αλλάζουν, όπως υπονοείται από την μη μεταβολή της συνάρτησης στρέβλωσης ($\Phi = 0$ για κυκλικές διατομές).

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας του Koiter για ράβδους από πορώδη υλικά, ορθογωνικής διατομής. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, η θεωρία του Koiter σε αντίθεση με εκείνη του Mindlin ασχολείται κυρίως με την στρέψη ράβδων οι οποίες αποτελούνται από πορώδη υλικά, όπως για παράδειγμα τα οστά, τα αφρώδη υλικά και οι πορώδεις βράχοι. Είναι αλήθεια ότι στη φύση συναντούμε ευρέως υλικά τα οποία κατά κύριο λόγο δεν είναι συμπαγή. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην ανάγκη να ασχοληθούμε περαιτέρω με τη θεωρία στρέψης του Koiter και να την αναπτύξουμε για διατομές οι οποίες δεν είναι κυκλικές. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τη θεωρία αυτή πλήρως για ράβδους μη κυκλικής διατομής, και εν συνεχεία θα την εφαρμόσουμε συγκεκριμένα σε ράβδους ορθογωνικής διατομής.

Μία σύντομη αναφορά στη θεωρία του Koiter για ράβδους κυκλικής διατομής, η οποία θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της αντίστοιχης θεωρίας για την ορθογωνική διατομή, ακολουθεί στο Παράρτημα I.



Σχήμα 2.3 Στην πρώτη εικόνα φαίνεται η μικροδομή ενός πορώδους υλικού όπως το βαμβάκι ενώ στη δεύτερη η μικροδομή ενός ανθρώπινου οστού. Και τα δύο αυτά υλικά υπακούουν στη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας κατά τον Koiter.

[Αριστερή εικόνα : www.fuzbaby.com/articles/diaperarticle_natura...]

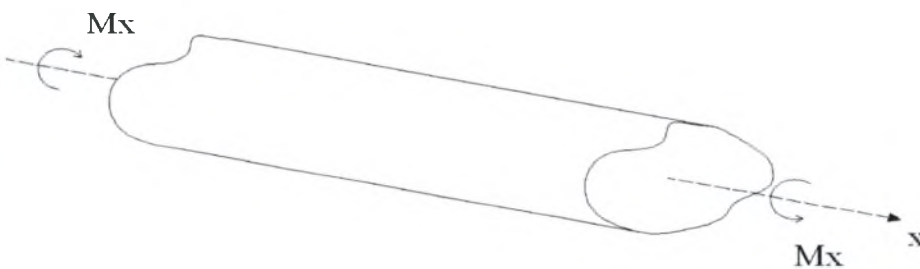
[Δεξιά εικόνα : www.msm.cam.ac.uk/.../tlplib/bones/structure.php]



Σχήμα 2.4 Σφουγγάρια από το υποθαλάσσιο σπήλαιο της Νικουριάς και τον υποθαλάσσιο χώρο της Σύμης. Ένα από τα αφρώδη υλικά που υπακούουν στη θεωρία στρέψης του Koiter.
 [Αριστερή εικόνα : amorgos.pblogs.gr/2007/09/o-polyhrwmos-bythos...]
 [Δεξιά εικόνα : www.sponge.gr/spongelist.htm]

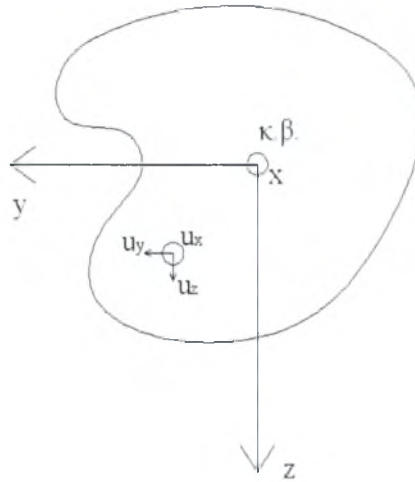
3.2 Στρέψη Τυχούσας Διατομής – Θεωρία Koiter

Λαμβάνουμε τον άξονα x του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτει με το διαμήκη άξονα της δοκού και αντιστοίχως τους άξονες y, z όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 3.1 Πορώδης ράβδος τυχούσας διατομής υπό στρέψη γύρω από το διαμήκη άξονα x .

Η διάταξη του πορώδους θεωρείται ότι είναι ομοιόμορφη και επομένως το υλικό “μακροσκοπικά” είναι ομογενές και ισότροπο.



Σχήμα 3.2 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) σε πορώδη ράβδο τυχούσας διατομής. Η διατομή δεν έχει 'μακροσκοπικά' κενά.

Θεωρούμε τις συνιστώσες των μετατοπίσεων της ίδιας μορφής με εκείνες της κλασσικής θεωρίας στρέψης για ράβδους τυχούσας διατομής, και θα αποδείξουμε ότι αυτή η υπόθεση στην πραγματικότητα ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις ισορροπίας καθώς και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Θεωρούμε επιπλέον μία συνάρτηση στρέβλωσης της μορφής $\Phi = \Phi(y, z)$ και παράλληλα ορίζουμε τη μεταβλητή α που δηλώνει τη συστορόφη της ράβδου σύμφωνα με όσα έχουν ορισθεί στο Κεφάλαιο 1 με βάση την κλασσική θεωρία του Saint-Venant. Επομένως οι συνισταμένες των μετατοπίσεων έχουν ως εξής :

$$u_x = \alpha\Phi(y, z) \quad , \quad u_y = -\alpha xz \quad , \quad u_z = \alpha xy \quad (3.1)$$

Από τις παραπάνω συνισταμένες των μετατοπίσεων υπολογίζουμε το συμμετρικό μητρώο των τροπών ως εξής :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \alpha z \right) = -\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\alpha x + \alpha x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha y \right) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \quad (3.4)$$

Υπολογίζουμε επίσης μέσω των μετατοπίσεων τις συνισταμένες των στροφών (spin-rotation) και στη συνέχεια καταλήγουμε στο διανυσματικό χαρακτήρα των στροφών (spin-rotation vector).

Ισχύει η γενική γεωμετρική σχέση για τον υπολογισμό των στροφών : $w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ άρα

$$w_{xx} = w_{yy} = w_{zz} = 0$$

$$w_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} - (-\alpha z) \right) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \right) \quad (3.5)$$

$$w_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [(-\alpha x) - (\alpha x)] = -\alpha x \quad (3.6)$$

$$w_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (\alpha y) \right) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y \right) \quad (3.7)$$

Το μητρώο των στροφών είναι ένα αντισυμμετρικό μητρώο γι' αυτό και ισχύουν οι παρακάτω ισότητες :

$$w_{xy} = -w_{yx} \quad , \quad w_{yz} = -w_{zy} \quad , \quad w_{zx} = -w_{xz}$$

Για την μετατροπή του μητρώου των στροφών σε διανυσματική μορφή ισχύει ο τύπος :

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{jk} \quad (\varepsilon_{ijk} \text{ τανυστής Levi - Civita}) \quad \text{δηλαδή} \quad \omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=x}^z \sum_{k=x}^z \varepsilon_{ijk} w_{jk} . \text{ Η ύπαρξη δυο}$$

ή τριών όμοιων δεικτών δηλώνει ένα διπλό ή τριπλό άθροισμα αντίστοιχα (σύμβαση του Einstein). Επομένως υπολογίζοντας τα παραπάνω αθροίσματα, έχουμε :

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\varepsilon_{ixx} w_{xx}} + \varepsilon_{ixy} w_{xy} + \varepsilon_{ixz} w_{xz} + \varepsilon_{iyx} w_{yx} + \cancel{\varepsilon_{iyy} w_{yy}} \\ + \varepsilon_{iyz} w_{yz} + \varepsilon_{izx} w_{zx} + \varepsilon_{izy} w_{zy} + \cancel{\varepsilon_{izz} w_{zz}} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Γνωρίζοντας πως $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{kkk} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kik} = 0 \\ \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 \end{array} \right\}$, η εξίσωση (3.8) μετατρέπεται ως εξής :

$$\omega_i = -\frac{1}{2} [(\varepsilon_{ixy} - \varepsilon_{iyx}) w_{xy} + (\varepsilon_{ixz} - \varepsilon_{izx}) w_{xz} + (\varepsilon_{iyz} - \varepsilon_{izy}) w_{yz}] \quad (3.9)$$

Η εξίσωση (3.9) για τις διάφορες τιμές του i γίνεται :

Για $i = x$ έχουμε :

$$\omega_x = -\frac{1}{2} [(\varepsilon_{xxy} - \varepsilon_{xyx})w_{xy} + (\varepsilon_{xxz} - \varepsilon_{zxx})w_{xz} + (\varepsilon_{xyz} - \varepsilon_{xzy})w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_x = -\frac{1}{2} [(0-0)w_{xy} + (0-0)w_{xz} + (1-(-1))w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_x = -w_{yz} \xrightarrow{(3.6)}$$

$$\omega_x = \alpha x$$

Για $i = y$ έχουμε :

$$\omega_y = -\frac{1}{2} [(\varepsilon_{yyx} - \varepsilon_{yxy})w_{xy} + (\varepsilon_{yyz} - \varepsilon_{zyy})w_{yz} + (\varepsilon_{yxz} - \varepsilon_{yzx})w_{xz}] \Rightarrow$$

$$\omega_y = -\frac{1}{2} [(0-0)w_{xy} + ((-1)-1)w_{xz} + (0-0)w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_y = w_{xz} \xrightarrow{(3.7)}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y \right)$$

Για $i = z$ έχουμε :

$$\omega_z = -\frac{1}{2} [(\varepsilon_{zxy} - \varepsilon_{zyx})w_{xy} + (\varepsilon_{zxx} - \varepsilon_{xxz})w_{xz} + (\varepsilon_{zyz} - \varepsilon_{zzy})w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2} [(1-(-1))w_{xy} + (0-0)w_{xz} + (0-0)w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_z = -w_{xy} \xrightarrow{(3.5)}$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \right)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τις “καμπυλότητες” των μετατοπίσεων, όπως ονομάζονται οι δεύτερες παράγωγοι των μετατοπίσεων, σύμφωνα με τον τύπο $k_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial j}$ (βαθμίδα των spin).

Έτσι έχουμε :

$$k_{xx} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x) = \alpha \quad (3.10)$$

$$k_{yy} = \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y \right) \right] = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - 1 \right) \quad (3.11)$$

$$k_{zz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \right) \right] = -\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right) \quad (3.12)$$

$$k_{yz} = \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y \right) \right] = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (3.13)$$

$$k_{zy} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \right) \right] = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

$$\text{κατά τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι } k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{zx} = 0. \quad (3.15)$$

Το μητρώο των τάσεων είναι ένα συμμετρικό μητρώο το οποίο σύμφωνα με την θεωρία του Koiter διαμορφώνεται από την σχέση $\sigma_{ij}^s = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$ (3.16) όπου το G δηλώνει το μέτρο διάτμησης του υλικού της ράβδου που δίνεται από τον τύπο $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ όπου

E : το μέτρο ελαστικότητας του Young και

ν : ο λόγος του Poisson και $-1 < \nu < 0,5$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω σχετικά με τις τροπές γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_{kk} = 0$ επομένως η εξίσωση (3.16) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση (3.17) :

$$\sigma_{ij}^s = 2G \varepsilon_{ij} \quad (3.17)$$

Μπορούμε επομένως τώρα να υπολογίσουμε το μητρώο των τάσεων.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.17) τις διάφορες τιμές που μπορούν να πάρουν οι δείκτες i, j και λαμβάνοντας υπόψη ότι το μητρώο των τάσεων είναι συμμετρικό καταλήγουμε :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{xy}^s = \sigma_{yx}^s = 2G\varepsilon_{xy} \xrightarrow{(3.2)}$$

$$\sigma_{xy}^s = \sigma_{yx}^s = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \quad (3.18)$$

$$\sigma_{yz}^s = \sigma_{zy}^s = 2G\varepsilon_{yz} \xrightarrow{(3.3)}$$

$$\sigma_{yz}^s = \sigma_{zy}^s = 0 \quad (3.19)$$

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{zx}^s = 2G\varepsilon_{xz} \xrightarrow{(3.4)}$$

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{zx}^s = G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \quad (3.20)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σύμφωνα με τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας (τόσο κατά Mindlin όσο και κατά Koiter) λαμβάνουμε υπόψη στους υπολογισμούς και έναν επιπρόσθετο όρο, ο οποίος έχει να κάνει με τη μικροδομή του υλικού. Η μικροδομή του υλικού παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αύξηση της δυσκαμψίας του υλικού εφόσον λαμβάνονται υπόψη οι μικρομετακινήσεις στην εσωτερική δομή αυτού. Οι μικρομετακινήσεις αυτές στην εσωτερική δομή του υλικού επιφέρουν τη δημιουργία μικροροπών οι οποίες θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στην ανάπτυξη της θεωρίας στρέψης τύπου βαθμίδας κατά τον Koiter. Οι μικροροπές αυτές στο εσωτερικό της δομής του υλικού συμβολίζονται με m_{ji} και δίνονται από τον τύπο :

$$m_{ji} = 4G\ell^2(k_y + \eta k_{ji}) \quad (3.21)$$

όπου G : το μέτρο διάτμησης του υλικού.

ℓ : το εσωτερικό μήκος (μέγεθος κόκκων αδρανούς κλπ.) όπως έχει ήδη οριστεί.

k_y : οι "καμπυλότητες" των μετατοπίσεων όπως αποδειχθήκαν παραπάνω, και

η : ένας διορθωτικός συντελεστής που λαμβάνει τιμές $-1 < \eta < 1$ και ο οποίος τις περισσότερες φορές λαμβάνεται χάριν ευκολίας ίσος με το μηδέν.

Για τις διάφορες τιμές των i, j οι μικροροπές μέσω της εξίσωσης (3.21) λαμβάνουν τις παρακάτω τιμές :

$$m_{xx} = 4G\ell^2(k_{xx} + \eta k_{xx}) \xrightarrow{(3.10)}$$

$$m_{xx} = 4G\ell^2(1 + \eta)\alpha \quad (3.22)$$

$$m_{yy} = 4G\ell^2(k_{yy} + \eta k_{yy}) \xrightarrow{(3.11)}$$

$$m_{yy} = 4G\ell^2 \left[\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - 1 \right) + \eta \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - 1 \right) \right] \Rightarrow$$

$$m_{yy} = 2G\ell^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - 1 \right) (1 + \eta) \quad (3.23)$$

$$m_{zz} = 4G\ell^2(k_{zz} + \eta k_{zz}) \xrightarrow{(3.12)}$$

$$m_{zz} = 4G\ell^2 \left[-\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right) - \frac{1}{2}\eta\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right) \right] \Rightarrow$$

$$m_{zz} = -2G\ell^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right) (1 + \eta) \quad (3.24)$$

Ομοίως ,

$$m_{yz} = 4G\ell^2(k_{yz} + \eta k_{yz}) \xrightarrow{(3.13),(3.14)}$$

$$m_{yz} = 4G\ell^2 \left[-\frac{1}{2}\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\eta\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Rightarrow$$

$$m_{yz} = 2G\ell^2 \alpha \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.25)$$

$$m_{zy} = 4G\ell^2(k_{zy} + \eta k_{zy}) \xrightarrow{(3.13),(3.14)}$$

$$m_{zy} = 4G\ell^2 \left[\frac{1}{2}\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \eta \left(-\frac{1}{2}\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$m_{zy} = 2G\ell^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.26)$$

κατά τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε, σύμφωνα με την εξίσωση (3.15), ότι

$$m_{xy} = m_{xz} = m_{yx} = m_{zx} = 0 \quad (3.27)$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

Οι εξισώσεις ισορροπίας απουσία μαζικών δυνάμεων είναι οι εξής :

$$\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad (3.28),$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελείται από το κλασσικό μέρος που αντιστοιχεί στον όρο $\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m}$, καθώς και από έναν επιπλέον όρο, $-\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m}$, που περιλαμβάνει το ε_{imn} που είναι γνωστό ως τελεστής Levi-Civita.

Για να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της εξίσωσης (3.28) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει πως η ύπαρξη δυο ή τριών όμοιων δεικτών δηλώνει ένα διπλό ή τριπλό άθροισμα αντίστοιχα (σύμβαση του Einstein). Επομένως έχουμε :

Το κλασσικό μέρος αναπτύσσεται ως εξής :

$$\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m} = \frac{\partial \sigma_{xn}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yn}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zn}^s}{\partial z} \quad (3.29)$$

Το επιπρόσθετο μέρος αναπτύσσεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= \varepsilon_{xxn} m_{xx,xx} + \cancel{\varepsilon_{xzn} m_{yx,yx}} + \cancel{\varepsilon_{xzn} m_{zx,zx}} + \varepsilon_{xyn} m_{xx,xy} + \varepsilon_{xyn} m_{yx,yy} + \varepsilon_{xyn} m_{zx,zy} \\ &+ \varepsilon_{xzn} m_{xx,xz} + \varepsilon_{xzn} m_{yx,yz} + \varepsilon_{xzn} m_{zx,zz} + \varepsilon_{yxn} m_{xy,xx} + \varepsilon_{yxn} m_{yy,yx} + \varepsilon_{yxn} m_{zy,zx} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{yyn} m_{xy,xy}} + \cancel{\varepsilon_{yyn} m_{yy,yy}} + \cancel{\varepsilon_{yyn} m_{zy,zy}} + \varepsilon_{yzn} m_{xy,xz} + \varepsilon_{yzn} m_{yy,yz} + \varepsilon_{yzn} m_{zy,zz} \\ &+ \varepsilon_{zxn} m_{xz,xx} + \varepsilon_{zxn} m_{yz,yx} + \varepsilon_{zxn} m_{zz,zx} + \varepsilon_{zyn} m_{xz,xy} + \varepsilon_{zyn} m_{yz,yy} + \varepsilon_{zyn} m_{zz,zy} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{zzn} m_{xz,xz}} + \cancel{\varepsilon_{zzn} m_{yz,yz}} + \cancel{\varepsilon_{zzn} m_{zz,zz}} \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας όπως έχουμε ήδη αναφέρει πως
$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{kkk} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kik} = 0 \\ \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 \end{array} \right\} , \text{ η τελευταία εξίσωση}$$
 μετατρέπεται για τις επιμέρους τιμές που μπορεί να λάβει ο δείκτης n , ως εξής :

Για $n = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{xx,xy}} + \cancel{\varepsilon_{yxx} m_{yx,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{zx,zy}} + \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{xx,xz}} + \cancel{\varepsilon_{xzy} m_{yx,yz}} + \cancel{\varepsilon_{xzy} m_{zx,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{yxx} m_{xy,xx}} + \cancel{\varepsilon_{yxx} m_{yy,yx}} + \cancel{\varepsilon_{yxx} m_{zy,zx}} + \cancel{\varepsilon_{yzx} m_{xy,xz}} + \cancel{\varepsilon_{yzx} m_{yy,yz}} + \cancel{\varepsilon_{yzx} m_{zy,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{xz,xx}} + \cancel{\varepsilon_{zxy} m_{yz,yx}} + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{zz,zx}} + \cancel{\varepsilon_{zyx} m_{xz,xy}} + \cancel{\varepsilon_{zyx} m_{yz,yy}} + \cancel{\varepsilon_{zyx} m_{zz,zy}} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= (m_{xy,xz} + m_{yy,yz} + m_{zy,zz}) - (m_{xz,xy} + m_{yz,yy} + m_{zz,zy}) \quad (3.30) \end{aligned}$$

Για $n = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{xx,xy}} + \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{yx,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{zx,zy}} + \cancel{\varepsilon_{xzy} m_{xx,xz}} + \cancel{\varepsilon_{xzy} m_{yx,yz}} + \cancel{\varepsilon_{xzy} m_{zx,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{xy,xx}} + \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{yy,yx}} + \cancel{\varepsilon_{xyx} m_{zy,zx}} + \cancel{\varepsilon_{yzy} m_{xy,xz}} + \cancel{\varepsilon_{yzy} m_{yy,yz}} + \cancel{\varepsilon_{yzy} m_{zy,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{zxy} m_{xz,xx}} + \cancel{\varepsilon_{zxy} m_{yz,yx}} + \cancel{\varepsilon_{zxy} m_{zz,zx}} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{xz,xy}} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{yz,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{zz,zy}} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= -(m_{xx,xz} + m_{yx,yz} + m_{zx,zz}) + (m_{xz,xx} + m_{yz,yx} + m_{zz,zx}) \quad (3.31) \end{aligned}$$

Για $n = z$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imz} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= \varepsilon_{xyz} m_{xx,xy} + \varepsilon_{xyz} m_{yx,yy} + \varepsilon_{xyz} m_{zx,zy} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{xx,xz}} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{yx,yz}} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{zx,zz}} \\ &+ \varepsilon_{yxz} m_{xy,xx} + \varepsilon_{yxz} m_{yy,yx} + \varepsilon_{yxz} m_{zy,zx} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{xy,xz}} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{yy,yz}} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{zy,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{xz,xx}} + \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{yz,yx}} + \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{zz,zx}} + \cancel{\varepsilon_{xyz} m_{xz,xy}} + \cancel{\varepsilon_{xyz} m_{yz,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xyz} m_{zz,zy}} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imz} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= (m_{xx,xy} + m_{yx,yy} + m_{zx,zy}) - (m_{xy,xx} + m_{yy,yx} + m_{zy,zx}) \quad (3.32) \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις ισορροπίας (3.28) ,για τις επιμέρους τιμές του δείκτη n , αποδεικνύεται πως ικανοποιούνται εκ ταυτότητας όπως φαίνεται παρακάτω :

Για $n = x$ έχουμε :

$$\frac{\partial \sigma_{mx}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad \xrightarrow{(3.29),(3.30)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}^s}{\partial z} - \frac{1}{2} [(m_{xy,xz} + m_{yy,yz} + m_{zy,zz}) - (m_{xz,xy} + m_{yz,yy} + m_{zz,zy})] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}^s}{\partial z} - \frac{1}{2} (m_{yy,yz} + m_{zy,zz} - m_{yz,yy} - m_{zz,zy}) = 0 \quad \xrightarrow{(3.18),(3.20),(3.23)-(3.26)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(2Gl^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - 1 \right) (1 + \eta) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(2Gl^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(2Gl^2 \alpha \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(-2Gl^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right) (1 + \eta) \right) \right] = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + G\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left[2Gl^2 \alpha (1 + \eta) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} + 2Gl^2 \alpha \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} - \eta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2Gl^2 \alpha \left(\eta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) + 2Gl^2 \alpha (1 + \eta) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} \right] = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - G\alpha l^2 (1 + \eta) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} - G\alpha l^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} - \eta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \\ & \quad + G\alpha l^2 \left(\eta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) - G\alpha l^2 (1 + \eta) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - 2G\alpha l^2 (1 + \eta) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} - G\alpha l^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) \\ & \quad + 2G\alpha l^2 \eta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$G\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - G\alpha l^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$G\alpha\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) - G\alpha\ell^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$G\alpha\nabla^2\Phi - G\alpha\ell^2\nabla^4\Phi = 0 \Rightarrow$$

$$(1 - \ell^2\nabla^2)\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.33)$$

Για $n = y$ έχουμε :

$$\frac{\partial\sigma_{my}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2}\varepsilon_{imy}\frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j\partial x_m} = 0 \quad \xrightarrow{(3.29),(3.31)}$$

$$\frac{\cancel{\partial\sigma_{yy}^s}}{\cancel{\partial x}} + \frac{\cancel{\partial\sigma_{yy}^s}}{\cancel{\partial y}} + \frac{\cancel{\partial\sigma_{yy}^s}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{2}\left[-(m_{xx,xz} + \cancel{m_{yx,yz}} + \cancel{m_{zx,zz}}) + (\cancel{m_{xz,xx}} + m_{yz,yx} + m_{zz,zx})\right] = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(-m_{xx,xz} + m_{yz,yx} + m_{zz,zx}) = 0 \quad \xrightarrow{(3.22),(3.25),(3.24)}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\cancel{2G\alpha\ell^2\left(\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\left(\cancel{-2G\alpha\ell^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} + 1\right)(1+\eta)}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Για $n = z$ έχουμε :

$$\frac{\partial\sigma_{mz}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2}\varepsilon_{imz}\frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j\partial x_m} = 0 \quad \xrightarrow{(3.29),(3.32)}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\cancel{\partial\sigma_{xz}^s}}{\cancel{\partial y}} + \frac{\cancel{\partial\sigma_{xz}^s}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{2}\left[(m_{xx,xy} + \cancel{m_{yx,yy}} + \cancel{m_{xz,zy}}) - (\cancel{m_{xy,xx}} + m_{yy,yx} + m_{zy,zx})\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^s}{\partial x} - \frac{1}{2}(m_{xx,xy} - m_{yy,yx} - m_{zy,zx}) = 0 \quad \xrightarrow{(3.20),(3.22),(3.23),(3.26)}$$

$$\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial x}}\left(\cancel{G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\cancel{\partial x\partial y}}\left(\cancel{4G\alpha\ell^2(1+\eta)}\right) - \frac{\partial^2}{\cancel{\partial y\partial x}}\left(\cancel{2G\alpha\ell^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - 1\right)(1+\eta)}\right) - \frac{\partial^2}{\cancel{\partial z\partial x}}\left(\cancel{2G\alpha\ell^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Παρατηρούμε επομένως ότι οι δύο τελευταίες συνθήκες ισορροπίας του προβλήματος ικανοποιούνται εκ ταυτότητας ενώ αντίστοιχα από την πρώτη συνθήκη παρατηρούμε ότι καταλήγουμε στην εξίσωση ισορροπίας που διέπει τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας ράβδων συμπαγούς ορθογωνικής διατομής κατά Mindlin και είναι γνωστή ως εξίσωση Schrödinger της κβαντικής μηχανικής (3.33). Απομένει λοιπόν να ελέγξουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αυτού.

Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της στρέψης ράβδων πορώδους υλικού τυχούσας διατομής σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter είναι οι εξής :

$$\textcircled{1} \quad \bar{t}_\ell = \sigma_{h\ell} n_h + \frac{1}{2} \varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h \quad (3.34)$$

όπου ως \bar{t} συμβολίζεται ο ελκυστής των τάσεων.

$$\textcircled{2} \quad \bar{q}_h = m_{jh} n_j - (m_{ji} n_j n_i)_{,h} n_h \quad (3.35)$$

όπου ως \bar{q} συμβολίζεται ο ελκυστής των μικροροπών.

Το \underline{n} συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της ράβδου και εξαρτάται από το σχήμα της διατομής. Επομένως :

Χάριν ευκολίας θα μορφώσουμε αρχικά τα αθροίσματα τα οποία εσωκλείονται και στις δύο παραπάνω σχέσεις (3.34) και (3.35) και άρα θα έχουμε :

$$\begin{aligned} m_{ji} n_j n_i &= m_{xx} n_x n_x + m_{xy} n_x n_y + m_{xz} n_x n_z \\ &+ m_{yx} n_y n_x + m_{yy} n_y n_y + m_{yz} n_y n_z \\ &+ m_{zx} n_z n_x + m_{zy} n_z n_y + m_{zz} n_z n_z \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_{ji} n_j n_i &= m_{xx} n_x n_x + m_{yy} n_y n_y + m_{yz} n_y n_z \\ &+ m_{zy} n_z n_y + m_{zz} n_z n_z \end{aligned} \quad (3.36)$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.22)-(3.26) η παράγωγος της παραπάνω παράστασης θα είναι :

$$\begin{aligned} (m_{ji} n_j n_i)_{,k} &= (m_{xx} n_x n_x)_{,k} + (m_{yy} n_y n_y)_{,k} + (m_{yz} n_y n_z)_{,k} \\ &+ (m_{zy} n_z n_y)_{,k} + (m_{zz} n_z n_z)_{,k} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Επίσης έχουμε :

$$m_{jh} n_j = m_{xh} n_x + m_{yh} n_y + m_{zh} n_z \quad (3.38)$$

Επομένως η εξίσωση (3.35) μέσω των εξισώσεων (3.36) και (3.38) γίνεται :

$$\bar{q}_h = (m_{xh}n_x + m_{yh}n_y + m_{zh}n_z) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_h \quad (3.39)$$

Για τις διάφορες τιμές του δείκτη h , η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται ως εξής :

Για $h = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= (\cancel{m_{xx}n_x} + \cancel{m_{yx}n_y} + \cancel{m_{zx}n_z}) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_x \Rightarrow \\ \bar{q}_x &= (m_{xx}n_x) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_x \quad (3.40) \end{aligned}$$

Για $h = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{q}_y &= (\cancel{m_{xy}n_x} + m_{yy}n_y + m_{zy}n_z) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_y \Rightarrow \\ \bar{q}_y &= (m_{yy}n_y + m_{zy}n_z) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_y \quad (3.41) \end{aligned}$$

Για $h = z$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{q}_z &= (\cancel{m_{xz}n_x} + m_{yz}n_y + m_{zz}n_z) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_z \Rightarrow \\ \bar{q}_z &= (m_{yz}n_y + m_{zz}n_z) - (m_{xx}n_xn_x + m_{yy}n_yn_y + m_{yz}n_yn_z + m_{zy}n_zn_y + m_{zz}n_zn_z)n_z \quad (3.42) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε επίσης τους παρακάτω όρους που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση της άλλης συνοριακής συνθήκης (3.34) :

$$\sigma_{hl}n_h = \sigma_{xl}n_x + \sigma_{yl}n_y + \sigma_{zl}n_z \quad (3.43)$$

Επίσης $m_{jk,j} = m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}$ από όπου συνεπάγεται :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h &= \varepsilon_{xkl} [m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,k} + (m_{yz} n_y n_z)_{,k} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,k} + (m_{zz} n_z n_z)_{,k}] n_x \\
&+ \varepsilon_{ykl} [m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,k} + (m_{yz} n_y n_z)_{,k} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,k} + (m_{zz} n_z n_z)_{,k}] n_y \\
&+ \varepsilon_{zkl} [m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,k} + (m_{yz} n_y n_z)_{,k} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,k} + (m_{zz} n_z n_z)_{,k}] n_z \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h &= \varepsilon_{xxl} [m_{xx,x} + m_{yx,y} + m_{zx,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,x} + (m_{yz} n_y n_z)_{,x} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,x} + (m_{zz} n_z n_z)_{,x}] n_x \\
&+ \varepsilon_{xyl} [m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y}] n_x \\
&+ \varepsilon_{xzl} [m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z}] n_x \\
&+ \varepsilon_{yxl} [m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zx,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,x} + (m_{yz} n_y n_z)_{,x} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,x} + (m_{zz} n_z n_z)_{,x}] n_y \\
&+ \varepsilon_{yyl} [m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y}] n_y \\
&+ \varepsilon_{yzl} [m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z}] n_y \\
&+ \varepsilon_{zxl} [m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zx,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,x} + (m_{yz} n_y n_z)_{,x} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,x} + (m_{zz} n_z n_z)_{,x}] n_z \\
&+ \varepsilon_{zyl} [m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y}] n_z \\
&+ \varepsilon_{zzl} [m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z}] n_z \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h &= \varepsilon_{xyl} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y}] n_x \\
&+ \varepsilon_{xzl} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z}] n_x \\
&+ \varepsilon_{yyl} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z}] n_y \\
&+ \varepsilon_{zyl} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \\
&\quad + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y}] n_z \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη συνοριακή συνθήκη (3.34) τις εξισώσεις (3.43) και (3.44) και λαμβάνοντας τις διάφορες τιμές για τον δείκτη ℓ θα έχουμε :

Για $\ell = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_x = & \cancel{\sigma_{xx}n_x} + \cancel{\sigma_{yx}n_y} + \cancel{\sigma_{zx}n_z} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\varepsilon_{xyx} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,y} + (m_{yz}n_yn_z)_{,y}]} \right. \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,y} + (m_{zz}n_zn_z)_{,y}} \parallel n_x} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{xzx} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z}} \parallel n_x} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{yzx} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z}} \parallel n_y} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{zyx} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,y} + (m_{yz}n_yn_z)_{,y}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,y} + (m_{zz}n_zn_z)_{,y}} \parallel n_z \Big] \Rightarrow \\
 \bar{t}_x = & \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z + \frac{1}{2} \left[m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}] \right. \\
 & \left. + (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z} \right] \parallel n_y \\
 & - [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,y} + (m_{yz}n_yn_z)_{,y}]] \\
 & \left. + (m_{zy}n_zn_y)_{,y} + (m_{zz}n_zn_z)_{,y} \right] \parallel n_z \Big] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Για $\ell = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_y = & \cancel{\sigma_{xy}n_x} + \cancel{\sigma_{yy}n_y} + \cancel{\sigma_{zy}n_z} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\varepsilon_{xyy} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,y} + (m_{yz}n_yn_z)_{,y}]} \right. \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,y} + (m_{zz}n_zn_z)_{,y}} \parallel n_x} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{xzy} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z}} \parallel n_x} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{yzy} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z}} \parallel n_y} \\
 & \cancel{+ \varepsilon_{zyy} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,y} + (m_{yz}n_yn_z)_{,y}]} \\
 & \cancel{+ (m_{zy}n_zn_y)_{,y} + (m_{zz}n_zn_z)_{,y}} \parallel n_z \Big] \Rightarrow \\
 \bar{t}_y = & \sigma_{xy}n_x - \frac{1}{2} \left[m_{yz,y} + m_{zz,z} - [(m_{yy}n_yn_y)_{,z} + (m_{yz}n_yn_z)_{,z}] \right. \\
 & \left. + (m_{zy}n_zn_y)_{,z} + (m_{zz}n_zn_z)_{,z} \right] \parallel n_x \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Για $\ell = z$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{i}_z = & \sigma_{xz} n_x + \cancel{\sigma_{yz} n_y} + \cancel{\sigma_{zx} n_z} + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{xyz} \left[m_{yy,y} + m_{zy,z} - \left[(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y} \right] \right] n_x \right. \\ & + \varepsilon_{xzz} \left[m_{yz,y} + m_{zz,z} - \left[(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z} \right] \right] n_x \\ & + \varepsilon_{yzz} \left[m_{yz,y} + m_{zz,z} - \left[(m_{yy} n_y n_y)_{,z} + (m_{yz} n_y n_z)_{,z} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m_{zy} n_z n_y)_{,z} + (m_{zz} n_z n_z)_{,z} \right] \right] n_y \\ & + \varepsilon_{zyz} \left[m_{yy,y} + m_{zy,z} - \left[(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y} \right] \right] n_z \left. \right] \Rightarrow \\ \bar{i}_z = & \sigma_{xz} n_x + \frac{1}{2} \left[m_{yy,y} + m_{zy,z} - \left[(m_{yy} n_y n_y)_{,y} + (m_{yz} n_y n_z)_{,y} \right. \right. \\ & \left. \left. + (m_{zy} n_z n_y)_{,y} + (m_{zz} n_z n_z)_{,y} \right] \right] n_x \end{aligned} \quad (3.47)$$

Για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών απαιτούμε τόσο ο ελκυστής των τάσεων όσο και η δεύτερη εκ των δύο συνθηκών, (3.34),(3.35), να είναι μηδενικές. Κατά συνέπεια λαμβάνουμε όλες εκ των εξισώσεων (3.40)-(3.42) και (3.45)-(3.47) ίσες με το μηδέν.

3.3 Στρέψη Ορθογωνικής Διατομής – Θεωρία Koiter

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε την παραπάνω θεωρία στρέψης του Koiter που αναπτύχθηκε για ράβδους τυχούσας διατομής, σε ράβδους ορθογωνικής διατομής.

Στην περίπτωση της ράβδου ορθογωνικής διατομής η παραπάνω θεωρία αναπτύσσεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μέχρι και την μόρφωση των εξισώσεων ισοροπίας. Καταλήγουμε δηλαδή στο γεγονός ότι οι δύο εκ των τριών εξισώσεων ικανοποιούνται εκ ταυτότητος ενώ η τρίτη εξίσωση ισοροπίας καταλήγει στην εξίσωση Schrödinger :

Εξισώσεις Ισοροπίας

$$(1 - \ell^2 \nabla^2) \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.48)$$

Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της στρέψης ράβδων πορώδους υλικού ορθογωνικής διατομής σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter είναι όμοιες με εκείνες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και έχουν ως εξής :

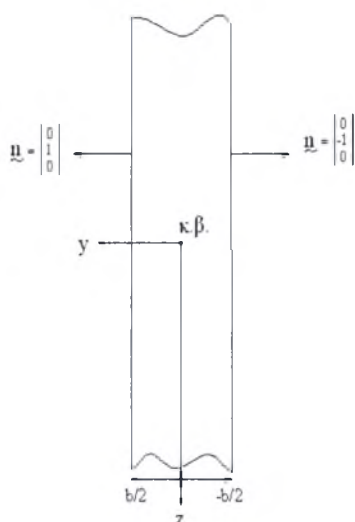
$$\textcircled{1} \quad \bar{t}_\ell = \sigma_{h\ell} n_h + \frac{1}{2} \varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h \quad (3.49) \equiv (3.34)$$

όπου ως \bar{t} συμβολίζεται ο ελκυστής των τάσεων.

$$\textcircled{2} \quad \bar{q}_h = m_{jh} n_j - (m_{ji} n_j n_i)_{,h} \quad (3.50) \equiv (3.35)$$

όπου ως \bar{q} συμβολίζεται ο τανυστής των μικροροπών.

Το \underline{n} συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της ράβδου και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 3.3 Το μοναδιαίο διάνυσμα \underline{n} κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια της ορθογωνικής ράβδου όπως διαμορφώνονται οι τιμές του για τα δύο σύνορα $y = b/2, -b/2$.

Επομένως, σύμφωνα με το Σχήμα 3.3, οι τιμές του μοναδιαίου διανύσματος διαμορφώνονται ως εξής για τα δύο σύνορα :

$$\text{για } y = b/2 \text{ έχουμε : } \underline{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\text{για } y = -b/2 \text{ έχουμε : } \underline{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Χάριν ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις τις οποίες μορφώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τα αθροίσματα τα οποία εσωκλείονται και στις δύο συνοριακές συνθήκες (3.49),(3.50). Ταυτόχρονα θα χρησιμοποιήσουμε και τις τιμές του μοναδιαίου διανύσματος για το εκάστοτε σύνορο. Επομένως έχουμε :

Από την εξίσωση (3.36) :

$$\begin{aligned}
 m_{ji} n_j n_i &= \cancel{m_{xy} n_x n_x} + m_{yy} n_y n_y + \cancel{m_{yz} n_y n_z} \\
 &\quad + \cancel{m_{zy} n_z n_y} + \cancel{m_{zz} n_z n_z} \xrightarrow{(3.51),(3.52)} \\
 m_{ji} n_j n_i &= m_{yy} n_y n_y \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.23) η παράγωγος της παραπάνω παράστασης θα είναι :

$$(m_{ji} n_j n_i)_{,k} = (m_{yy} n_y n_y)_{,k} \tag{3.54}$$

Επίσης από την εξίσωση (3.38) και σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.51),(3.52) έχουμε :

$$\begin{aligned}
 m_{jh} n_j &= \cancel{m_{yh} n_x} + m_{yh} n_y + \cancel{m_{zh} n_z} \Rightarrow \\
 m_{jh} n_j &= m_{yh} n_y \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

Επομένως η μία συνοριακή συνθήκη (3.50) μέσω των εξισώσεων (3.55) και (3.53) γίνεται :

$$\bar{q}_h = (m_{yh} n_y) - (m_{yy} n_y n_y) n_h \tag{3.56}$$

για τις διάφορες τιμές του δείκτη h η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται ως εξής ανάλογα με το σύνορο το οποίο εξετάζουμε :

Για $y = \frac{h}{2}$ ισχύει :

Για $h = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= \cancel{(m_{yx} n_y)} - \cancel{(m_{yy} n_y n_y) n_x} \Rightarrow \\
 \bar{q}_x &= 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Για $h = y$ έχουμε :

$$\bar{q}_y = (m_{yy}n_y) - (m_{yy}n_y)n_y \xrightarrow{(3.51)}$$

$$\bar{q}_y = m_{yy} - m_{yy} \Rightarrow$$

$$\bar{q}_y = 0 \quad \checkmark$$

Για $h = z$ έχουμε :

$$\bar{q}_z = (m_{yz}n_y) - (\cancel{m_{yz}n_y}n_z) \xrightarrow{(3.25)}$$

$$\bar{q}_z = m_{yz} \Rightarrow$$

$$\bar{q}_z = 2G\alpha\ell^2 \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

Απαιτούμε :

$$\bar{q}_z = 0 \Rightarrow$$

$$2G\alpha\ell^2 \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.57)$$

Για $y = -b/2$ ισχύει :

Για $h = x$ έχουμε :

$$\bar{q}_x = (\cancel{m_{yx}n_y}) - (\cancel{m_{yy}n_y}n_x) \Rightarrow$$

$$\bar{q}_x = 0 \quad \checkmark$$

Για $h = y$ έχουμε :

$$\bar{q}_y = (m_{yy}n_y) - (\cancel{m_{yy}n_y n_y})n_y \xrightarrow{(3.51)}$$

$$\bar{q}_y = -m_{yy} + m_{yy} \Rightarrow$$

$$\bar{q}_y = 0 \quad \checkmark$$

Για $h = z$ έχουμε :

$$\bar{q}_z = (m_{yz}n_y) - (\cancel{m_{yz}n_y n_y})n_z \xrightarrow{(3.25)}$$

$$\bar{q}_z = m_{yz} \Rightarrow$$

$$\bar{q}_z = -2G\alpha\ell^2 \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

Απαιτούμε :

$$\bar{q}_z = 0 \Rightarrow$$

$$-2G\alpha\ell^2 \left(\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.58)$$

Παρατηρούμε ότι και από τα δύο σύνορα καταλήγουμε στις ίδιες εξισώσεις δηλαδή

$$\boxed{\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0} \quad (3.59)$$

Υπολογίζουμε επίσης τους παρακάτω όρους που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση της άλλης συνοριακής συνθήκης (3.49) :

Από την εξίσωση (3.43) συνεπάγεται :

$$\sigma_{hl}n_h = \cancel{\sigma_{xl}n_x} + \sigma_{yl}n_y + \cancel{\sigma_{zl}n_z} \Rightarrow$$

$$\sigma_{hl}n_h = \sigma_{yl}n_y \quad (3.60)$$

Επίσης $m_{jk,j} = m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}$ από όπου συνεπάγεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.44) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h &= \varepsilon_{xyz} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - \cancel{(m_{yy} n_y n_y)_{,y}} + \cancel{(m_{yz} n_y n_z)_{,y}} \\ &\quad + \cancel{(m_{zy} n_z n_y)_{,y}} + \cancel{(m_{zz} n_z n_z)_{,y}}] n_x \\ &+ \varepsilon_{xzl} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - \cancel{(m_{yy} n_y n_y)_{,z}} + \cancel{(m_{yz} n_y n_z)_{,z}} \\ &\quad + \cancel{(m_{zy} n_z n_y)_{,z}} + \cancel{(m_{zz} n_z n_z)_{,z}}] n_x \\ &+ \varepsilon_{yxl} [m_{yz,y} + m_{zz,z} - \cancel{(m_{yy} n_y n_y)_{,z}} + \cancel{(m_{yz} n_y n_z)_{,z}} \\ &\quad + \cancel{(m_{zy} n_z n_y)_{,z}} + \cancel{(m_{zz} n_z n_z)_{,z}}] n_y \\ &+ \varepsilon_{zyl} [m_{yy,y} + m_{zy,z} - \cancel{(m_{yy} n_y n_y)_{,y}} + \cancel{(m_{yz} n_y n_z)_{,y}} \\ &\quad + \cancel{(m_{zy} n_z n_y)_{,y}} + \cancel{(m_{zz} n_z n_z)_{,y}}] n_z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{hkl} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h = \varepsilon_{yzl} [(m_{yz,y} + m_{zz,z}) - m_{yy,z}] n_y \quad (3.61)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη συνοριακή συνθήκη (3.49) τις εξισώσεις (3.60) και (3.61) και λαμβάνοντας τις διάφορες τιμές για τον δείκτη ℓ , ανάλογα με το σύνορο το οποίο εξετάζουμε θα έχουμε :

Για $y = \frac{b}{2}$ ισχύει :

Για $\ell = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{t}_x &= \sigma_{yx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yzx} [(m_{yz,y} + m_{zz,z}) - m_{yy,z}] \xrightarrow{(3.18),(3.23)-(3.25)} \\ \bar{t}_x &= G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{1}{2} \left[2G\alpha l^2 \left(\eta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right) - 2G\alpha l^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (1 + \eta) \right. \\ &\quad \left. - 2G\alpha l^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (1 + \eta) \right] \Rightarrow \\ \bar{t}_x &= G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{1}{2} \left[2G\alpha l^2 \left(\eta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \right) - 4G\alpha l^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (1 + \eta) \right] \Rightarrow \\ \bar{t}_x &= G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - G\alpha l^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - G\alpha l^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (2 + \eta) \end{aligned}$$

Απαιτούμε :

$$\bar{t}_x = 0 \Rightarrow$$

$$G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-z\right)-G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}-G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(2+\eta)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-z\right)-\ell^2\left[\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(2+\eta)\right]=0 \quad (3.62)$$

Για $\ell = y$ έχουμε :

$$\bar{t}_y = \cancel{\sigma_{yy}} + \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_{yy}}\left[\cancel{(m_{yz,y} + m_{zz,z})} - m_{yy,z}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\bar{t}_y = 0 \quad \checkmark$$

Για $\ell = z$ έχουμε :

$$\bar{t}_z = \cancel{\sigma_{zz}} + \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_{zz}}\left[\cancel{(m_{yz,y} + m_{zz,z})} - m_{yy,z}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\bar{t}_z = 0 \quad \checkmark$$

Για $y = -\frac{b}{2}$ ισχύει :

Για $\ell = x$ έχουμε :

$$\bar{t}_x = -\sigma_{yx} - \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}\left[(m_{yz,y} + m_{zz,z}) - m_{yy,z}\right] \quad \xrightarrow{(3.18),(3.23)-(3.25)}$$

$$\bar{t}_x = -G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-z\right) - \frac{1}{2}\left[2G\alpha\ell^2\left(\eta\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}-\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) - 2G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(1+\eta) - 2G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(1+\eta)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\bar{t}_x = -G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-z\right) - \frac{1}{2}\left[2G\alpha\ell^2\left(\eta\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}-\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) - 4G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(1+\eta)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\bar{t}_x = -G\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-z\right) + G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} + G\alpha\ell^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2}(2+\eta)$$

Απαιτούμε :

$$\begin{aligned} \bar{t}_x = 0 & \Rightarrow \\ G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - G\alpha \ell^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - G\alpha \ell^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (2 + \eta) = 0 & \Rightarrow \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - \ell^2 \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (2 + \eta) \right] = 0 & \quad (3.63) \end{aligned}$$

Για $\ell = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{t}_y = \cancel{\sigma_{yy}} - \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_{yzy}} \left[\cancel{(m_{yz,y} + m_{zz,z})} - m_{yy,z} \right] & \Rightarrow \\ \bar{t}_y = 0 & \quad \checkmark \end{aligned}$$

Για $\ell = z$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{t}_z = \cancel{\sigma_{yz}} - \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_{yzz}} \left[\cancel{(m_{yz,y} + m_{zz,z})} - m_{yy,z} \right] & \Rightarrow \\ \bar{t}_z = 0 & \quad \checkmark \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως για μία ακόμη φορά και από τα δύο σύνορα καταλήγουμε στις ίδιες εξισώσεις που προκύπτουν από την απαίτηση μηδενισμού του ελκυστή των τάσεων. Επομένως :

$$\boxed{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - \ell^2 \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (2 + \eta) \right] = 0} \quad (3.64)$$

Γενική Λύση Της Συνάρτησης Στρέβλωσης

Έχοντας καταλήξει στο συμπέρασμα ότι σύμφωνα με τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας κατά Koiter η συνάρτηση στρέβλωσης θα πρέπει να ακολουθεί τη γνωστή εξίσωση Schrödinger της κβαντικής μηχανικής, όπως ακριβώς συνέβη και σύμφωνα με τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας κατά Mindlin, θα λάβουμε τη συνάρτηση στρέβλωσης ως μία συνάρτηση της μορφής

$\Phi = A_1 + A_2 y + A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell}$ (3.65), όπου τα A_i αποτελούν συναρτήσεις μόνο του z και μπορούν να έχουν τη μορφή $A_i = az + b$, σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί στην

Παράγραφο 3.2. Έτσι χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στις οποίες καταλήξαμε παραπάνω αλλά και τη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης, θα κατορθώσουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές και να καταλήξουμε στη λύση της συνάρτησης αυτής.

Από την πρώτη συνοριακή συνθήκη (3.59) ισχύουν τα εξής :

$$\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

εφόσον όμως η συνάρτηση στρέβλωσης είναι μία συνάρτηση της μορφής $\Phi = \Phi(y)$, η παραπάνω παράσταση θα γίνει της μορφής :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω παράσταση τη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης (3.65) θα έχουμε :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(A_1 + A_2 y + A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(A_2 + \frac{1}{\ell} A_3 e^{y/\ell} - \frac{1}{\ell} A_4 e^{-y/\ell} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ell^2} A_3 e^{y/\ell} + \frac{1}{\ell^2} A_4 e^{-y/\ell} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ell^2} \left(A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$A_3 e^{y/\ell} + A_4 e^{-y/\ell} = 0 \tag{3.66}$$

Επομένως από την εξίσωση (3.66) για το αριστερό σύνορο $y = b/2$ έχουμε :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{b/2} = 0 \Rightarrow$$

$$A_3 e^{b/2\ell} + A_4 e^{-b/2\ell} = 0 \tag{3.67}$$

Ομοίως από την εξίσωση (3.66) για το δεξί σύνορο $y = -b/2$ έχουμε :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{-b/2} = 0 \Rightarrow$$

$$A_3 e^{-b/2\ell} + A_4 e^{b/2\ell} = 0 \quad (3.68)$$

Γράφοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις (3.67), (3.68) σε μητρωϊκή μορφή έχουμε :

$$\begin{bmatrix} e^{b/2\ell} & e^{-b/2\ell} \\ e^{-b/2\ell} & e^{b/2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

από όπου συμπεραίνουμε πως επειδή οι εκθετικές μορφές δεν μπορούν να πάρουν την τιμή μηδέν οι συντελεστές A_3 και A_4 είναι μηδενικοί, δηλαδή

$$\boxed{A_3 = A_4 = 0}$$

Ουσιαστικά αν λάβουμε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} e^{b/2\ell} & e^{-b/2\ell} \\ e^{-b/2\ell} & e^{b/2\ell} \end{bmatrix}$ ίση με το μηδέν θα έχουμε :

$e^{2b/2\ell} - e^{-2b/2\ell} = 0$ πράγμα αδύνατο εφόσον όπως αναφέραμε και παραπάνω οι εκθετικές μορφές δεν μπορούν να είναι μηδενικές.

Από τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (3.64) ισχύουν τα εξής :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) - \ell^2 \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} (2 + \eta) \right] = 0$$

εφόσον όμως η συνάρτηση στρέβλωσης είναι μία συνάρτηση της μορφής $\Phi = \Phi(y)$, η παραπάνω παράσταση θα γίνει της μορφής :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z - \ell^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω παράσταση τη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης (3.65) και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, $A_3 = A_4 = 0$, θα έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial y}(A_1 + A_2 y) - z - \ell^2 \frac{\partial^3}{\partial y^3}(A_1 + A_2 y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A_2 - z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_2 = z}$$

Από τη συνοριακή συνθήκη στηρίζεως γνωρίζουμε ότι :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} u_x(0,0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(0,0) = 0$$

Άρα για κάθε τιμή του ℓ^2 από την εξίσωση (3.65) λαμβάνουμε την τιμή για τον συντελεστή A_1 που είναι :

$$\boxed{A_1 = 0}$$

Συνοψίζοντας και αντικαθιστώντας στη γενική λύση της συνάρτησης στρέβλωσης (3.65) τις τιμές που βρέθηκαν για τους συντελεστές A_i καταλήγουμε πως $\Phi = yz$ δηλαδή στην κλασική λύση που έχουμε ήδη μελετήσει. Συμπεραίνουμε επομένως πως η λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή πορώδους υλικού, τόσο η ευθύγραμμη όσο και η καμπύλη, δεν επηρεάζεται από την ελαστικότητα τύπου βαθμίδας όπως ακριβώς συμβαίνει και με την ορθογωνική διατομή συμπαγούς υλικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Η κλασική θεωρία δικαιολογεί το αποτέλεσμα (μετατόπιση, στροφή) με βάση το αίτιο (δύναμη, ροπή) που προκύπτει από τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας σε συνδυασμό με την επιλογή της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας. Από την άλλη, η ελαστική θεωρία κλίσεως συνυπολογίζει και την συνεισφορά δυνάμεων ή ροπών που ενώ μακροσκοπικά εξισορροπούνται προσθέτουν στην ελαστική ενέργεια του συστήματος επιπλέον όρους. Οι επιπλέον αυτοί όροι όπως θα δούμε στη συνέχεια εισάγονται με τη βοήθεια της μεταβλητής ℓ που όπως έχουμε ήδη αναφέρει ονομάζεται εσωτερικό μήκος και αφορά τη μικροδομή του εκάστοτε υπό εξέταση συστήματος.

Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τη σχετική στρεπτική δυσκαμψία μίας ράβδου κυκλικής και μίας ορθογωνικής διατομής σύμφωνα με τις δύο θεωρίες στρέψης τύπου βαθμίδας κατά Mindlin και κατά Koiter.

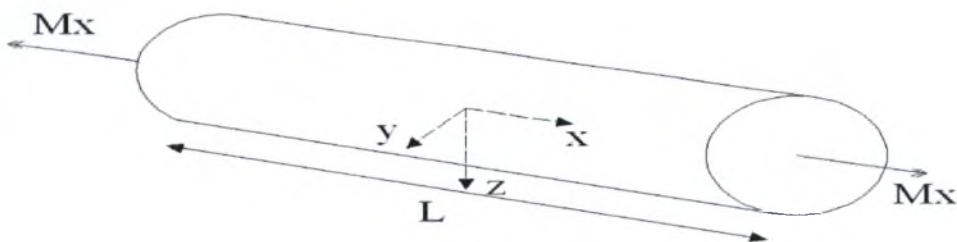
4.2 Στρεπτική δυσκαμψία για ράβδο κυκλικής και ορθογωνικής διατομής κατά Mindlin

Κυκλική διατομή

Ξεκινώντας από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία το έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με την εσωτερική ελαστική ενέργεια του συστήματος του οποίου εξετάζουμε, στην προκειμένη περίπτωση της ράβδου κυκλικής διατομής, ισχύει :

$$W = U \quad (4.1)$$

όπου W : το εξωτερικό έργο που δημιουργεί η στρεπτική ροπή M_x και
 U : η ελαστική ενέργεια του συστήματος.



Σχήμα 4.1 Ράβδος κυκλικής διατομής, μήκους L , η οποία υποβάλλεται σε στρεπτική εξωτερική ροπή M_x .

Το εξωτερικό έργο δίνεται από τον τύπο :

$$W = \frac{1}{2} \alpha L M_x \quad , \quad (4.2)$$

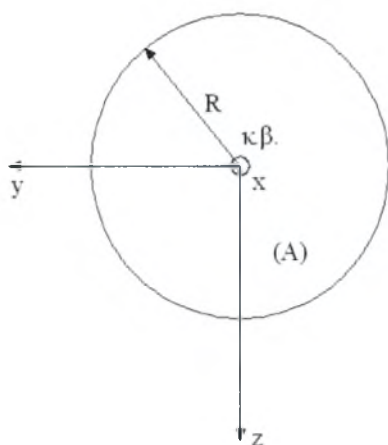
όπου α : η συστροφή της ράβδου που παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της,
 L : το μήκος της ράβδου και
 M_x : η εξωτερική ροπή στρέψης όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Αυτό μπορούμε να ισχυριστούμε αν $\ell < R \ll L$ [8].

Η ελαστική ενέργεια δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y, z) dydzdx \quad , \quad (4.3)$$

όπου e : η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας και
 (A) : όλη η επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της, όπως διακρίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.2 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) μίας κυκλικής διατομής καθώς και η επιφάνεια (A) που περιλαμβάνει όλα τα σημεία της διατομής συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της περιφέρειάς της.

Ολοκληρώνοντας τον παραπάνω τύπο της ελαστικής ενέργειας (4.3) ως προς τη μεταβλητή x έχουμε :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y, z) dydzdx = L \iint_{(A)} e(y, z) dydz \quad (4.4)$$

Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας e σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$e(y, z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2 \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

Παρατηρούμε ότι στο e περιλαμβάνονται δύο όροι : ο κλασικός όρος και ένας όρος που περιγράφει την μικροδομή.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των τροπών, οι οποίες δίνονται παρακάτω, με βάση τα όσα γνωρίζουμε για την κυκλική διατομή

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\alpha z \quad (4.6) \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\alpha y \quad (4.7)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.5), έχουμε :

$$e(y, z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2 \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \right)^2 \right] \xrightarrow{(4.6),(4.7)}$$

$$e(y, z) = \frac{1}{4}G\alpha^2(z^2 + y^2) + G\ell^2 \left[0 + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 \right) + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 \right) + 0 \right] \Rightarrow$$

$$e(y, z) = G\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 [(z^2 + y^2) + 2\ell^2]$$

Ο τύπος της ελαστικής ενέργειας επομένως μετατρέπεται ως εξής :

$$U = GL\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 \iint_{(A)} [(z^2 + y^2) + 2\ell^2] dydz$$

Επαναδιατυπώνοντας τον παραπάνω τύπο βασιζόμενοι σε πολικές συντεταγμένες έχουμε :

$$U = GL\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 \int_0^R [r^2 + 2\ell^2] 2\pi r dr$$

όπου R : η ακτίνα της κυκλικής διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

Η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής :

$$U = 2GL\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 \pi \int_0^R (r^3 + 2\ell^2 r) dr \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} \pi \alpha^2 GL \left[\frac{r^4}{4} + 2\ell^2 \frac{r^2}{2} \right]_0^R \Rightarrow$$

$$U = \pi \alpha^2 GL \left(\frac{R^4}{8} + \ell^2 \frac{R^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$U = \pi \alpha^2 GL \frac{R^4}{8} \left[1 + 4 \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.1) και αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (4.2) και (4.8) για το έργο και την ελαστική ενέργεια αντίστοιχα, θα έχουμε :

$$W = U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \alpha L M_x = \pi \alpha^2 GL \frac{R^4}{8} \left[1 + 4 \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{M_x = \alpha G \frac{\pi R^4}{4} \left[1 + 4 \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right]}$$

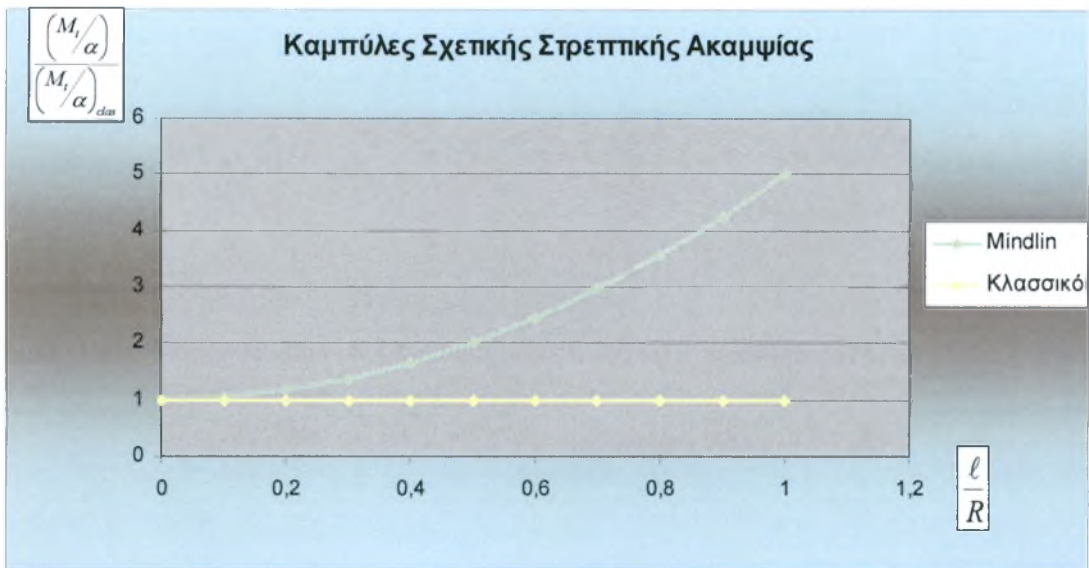
Για την περίπτωση όπου $\ell = 0$, λαμβάνουμε την κλασσική λύση $M_x = \alpha G \frac{\pi R^4}{4}$.

Αδιαστατοποιώντας τώρα την σχετική στρεπτική ακαμψία της κυκλικής διατομής, με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου, θα έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)}{\left(\frac{G \pi R^4}{4} \right)} = \left[1 + 4 \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)_{clas.}} = \left[1 + 4 \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

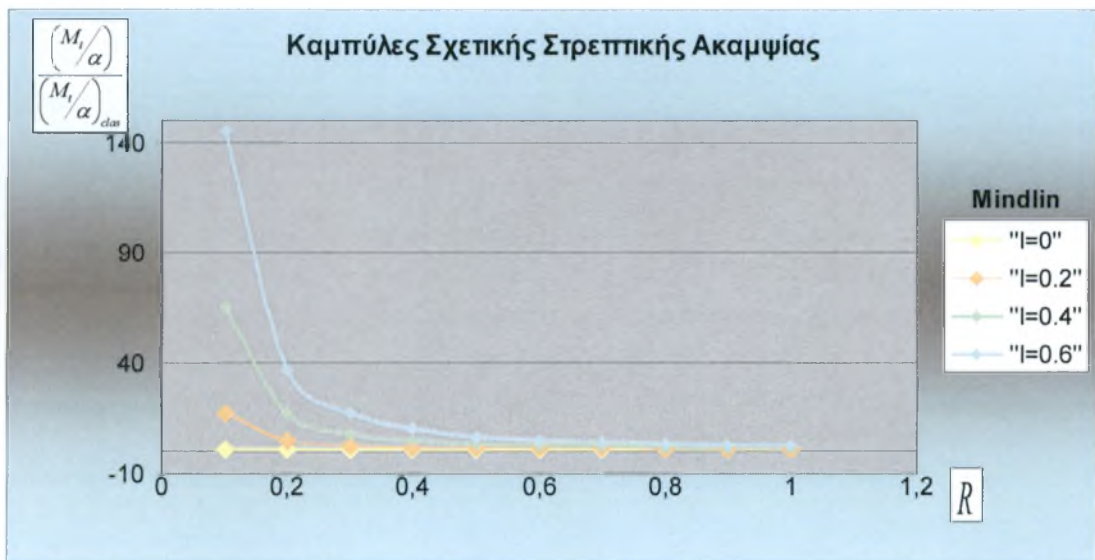
Αποτυπώνοντας την παραπάνω παράσταση σε μία γραφική μορφή, δίνοντας τιμές στο λόγο $\left(\frac{\ell}{R} \right)$ και λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τιμές για την σχετική στρεπτική δυσκαμψία, καταλήξαμε στο παρακάτω γράφημα :



Σχήμα 4.3 Γραφική παράσταση της σχέσης του λόγου $\left(\frac{\ell}{R}\right)$ με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος κυκλικής διατομής, σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin.

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την παράσταση (4.9) με τον παρακάτω τρόπο, και να λάβουμε τη γραφική παράσταση που μας δίνει την σχέση της ακτίνας R της κυκλικής διατομής με την σχετική στρεπτική ακαμψία, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ . Επομένως έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 4\ell^2 \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right]$$



Σχήμα 4.4 Γραφική παράσταση της σχέσης της ακτίνας R με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος κυκλικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ , σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin.

Παρατηρώντας το παραπάνω γράφημα διαπιστώνουμε ότι καθώς η ακτίνα R λαμβάνει όλο και μικρότερες τιμές, για μία σταθερή τιμή του εσωτερικού μήκους ℓ , η σχετική στρεπτική δυσκαμψία του συστήματος που εξετάζουμε αυξάνεται αισθητά. Η προηγούμενη διαπίστωση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο μικρότερη είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής του εξεταζόμενου συστήματος, τόσο πιο έντονη είναι η συνεισφορά της μικροδομής του συστήματος στην ακαμψία αυτού. Παράλληλα συμπεραίνουμε πως για μεγαλύτερες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ , για μία δεδομένη τιμή της ακτίνας της κυκλικής διατομής, οι αντίστοιχες τιμές της σχετικής στρεπτικής ακαμψίας είναι αισθητά μεγαλύτερες.

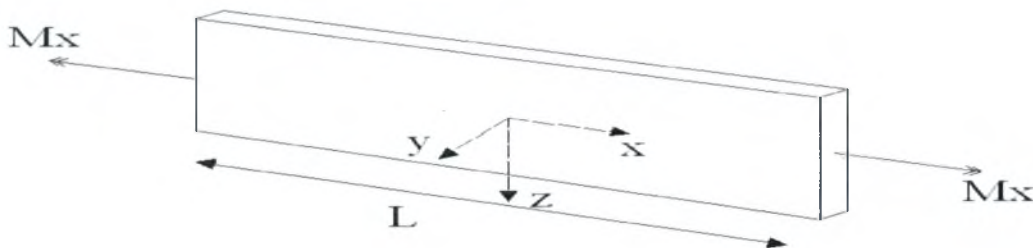
Ταυτόχρονα, εξετάζοντας προσεκτικά το παραπάνω γράφημα θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι μπορούμε με μία πολύ καλή προσέγγιση, να αποφανθούμε για την τιμή που λαμβάνει το εσωτερικό μήκος ℓ . Ουσιαστικά καταλήξαμε στη διατύπωση ενός τρόπου προσδιορισμού του εσωτερικού μήκους ενός συστήματος (δοκός, ράβδος κλπ.) ύστερα από κατάλληλες πειραματικές διαδικασίες οι οποίες θα προσδιορίζουν την στρεπτική ακαμψία της εξεταζόμενης διατομής σαν συνάρτηση της ακτίνας της διατομής. Πρακτικά, τιμές της σχετικής στρεπτικής ακαμψίας της διατομής οι οποίες θα προέρχονται από πειράματα σε ράβδους κυκλικής διατομής από το ίδιο υλικό αλλά με διαφορετική ακτίνα, θα μπορούν να τοποθετηθούν στο παραπάνω γράφημα και να μας δώσουν μία πολύ καλή προσέγγιση του εσωτερικού μήκους ℓ του υλικού του εξεταζόμενου συστήματος.

Ορθογωνική διατομή

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω θα προσπαθήσουμε και εδώ να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα για την περίπτωση ορθογωνικής αυτή τη φορά διατομής, ξεκινώντας επίσης από την αρχή διατήρησης της ενέργειας :

$$W = U \quad (4.10)$$

όπου W : το εξωτερικό έργο που δημιουργεί η στρεπτική ροπή M_x και
 U : η ελαστική ενέργεια του συστήματος.



Σχήμα 4.5 Ράβδος ορθογωνικής διατομής, μήκους L , η οποία υποβάλλεται σε στρεπτική εξωτερική ροπή M_x .

Το εξωτερικό έργο δίνεται ξανά από τον τύπο :

$$W = \frac{1}{2} \alpha L M_x \quad , \quad (4.11)$$

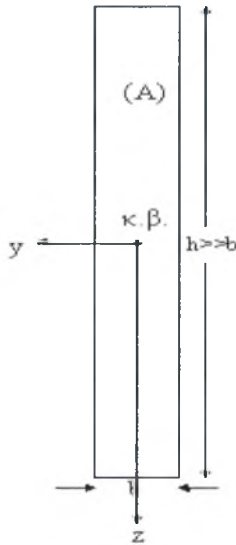
όπου α : η συστροφή της ράβδου που παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της,
 L : το μήκος της ράβδου και
 M_x : η εξωτερική ροπή στρέψης όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Αυτό μπορούμε να ισχυριστούμε αν $\ell < b \ll h \ll L$ [8].

Η ελαστική ενέργεια δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y, z) dy dz dx \quad , \quad (4.12)$$

όπου e : η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας και
 (A) : όλη η επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της, όπως διακρίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.6 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) μίας ορθογωνικής διατομής καθώς και η επιφάνεια (A) που περιλαμβάνει όλα τα σημεία της διατομής συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της περιφέρειάς της.

Ολοκληρώνοντας τον παραπάνω τύπο της ελαστικής ενέργειας (4.12) ως προς τη μεταβλητή x έχουμε :

$$U = \int_0^L \iint_{(A)} e(y, z) dy dz dx = L \iint_{(A)} e(y, z) dy dz \quad (4.13)$$

Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας e σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$e(y, z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2 \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των τροπών, οι οποίες δίνονται παρακάτω, με βάσει τα όσα έχουμε αποδείξει για την ορθογωνική διατομή και θεωρώντας επιπλέον ότι η συνιστώσα της τροπής ε_{xy} είναι σχεδόν μηδενική

$$\varepsilon_{xy} \approx 0 \quad (4.15) \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \quad (4.16)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.14), έχουμε :

$$e(y, z) = G\varepsilon_{zx}^2 + G\ell^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)^2 \xrightarrow{(4.16)}$$

$$e(y, z) = \frac{1}{4} G\alpha^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 G\ell^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right)^2$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 2, η συνάρτηση στρέβλωσης ορθογωνικής διατομής κατά τη θεωρία στρέψης του Mindlin καταλήγει στην κλασσική λύση $\Phi = yz$. Επομένως έχουμε :

$$e(y, z) = \frac{1}{4} \alpha^2 G [(2y)^2 + 4\ell^2]$$

Ο τύπος της ελαστικής ενέργειας επομένως μετατρέπεται ως εξής :

$$U = \frac{1}{4} \alpha^2 GL \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} (4y^2 + 4\ell^2) dy dz \Rightarrow$$

$$U = \alpha^2 GLh \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + \ell^2) dy \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
U &= G\alpha^2 Lh \left[\frac{y^3}{3} + \ell^2 y \right]^{-b/2} \Rightarrow \\
U &= G\alpha^2 Lh \left[\frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 + 2\ell^2 \frac{b}{2} \right] \Rightarrow \\
U &= G\alpha^2 Lh \left(\frac{b^3}{12} + \ell^2 b \right) \Rightarrow \\
U &= \frac{1}{12} G\alpha^2 Lhb^3 \left[1 + 12 \left(\frac{\ell}{b} \right)^2 \right] \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.10) και αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (4.11) και (4.17) για το έργο και την ελαστική ενέργεια αντίστοιχα, θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
W &= U \Rightarrow \\
\frac{1}{2} \alpha L M_x &= \frac{1}{12} G\alpha^2 Lhb^3 \left[1 + 12 \left(\frac{\ell}{b} \right)^2 \right] \Rightarrow \\
\boxed{M_x} &= \alpha G \frac{hb^3}{6} \left[1 + 12 \left(\frac{\ell}{b} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Σχόλιο :

Σύμφωνα με την κλασική λύση όπου " $\ell = 0$ ", η παραπάνω σχέση μας δίνει :

$$\begin{aligned}
M_x &= \alpha G \frac{hb^3}{6} \Rightarrow \\
\alpha &= \frac{6M_x}{Ghb^3}
\end{aligned}$$

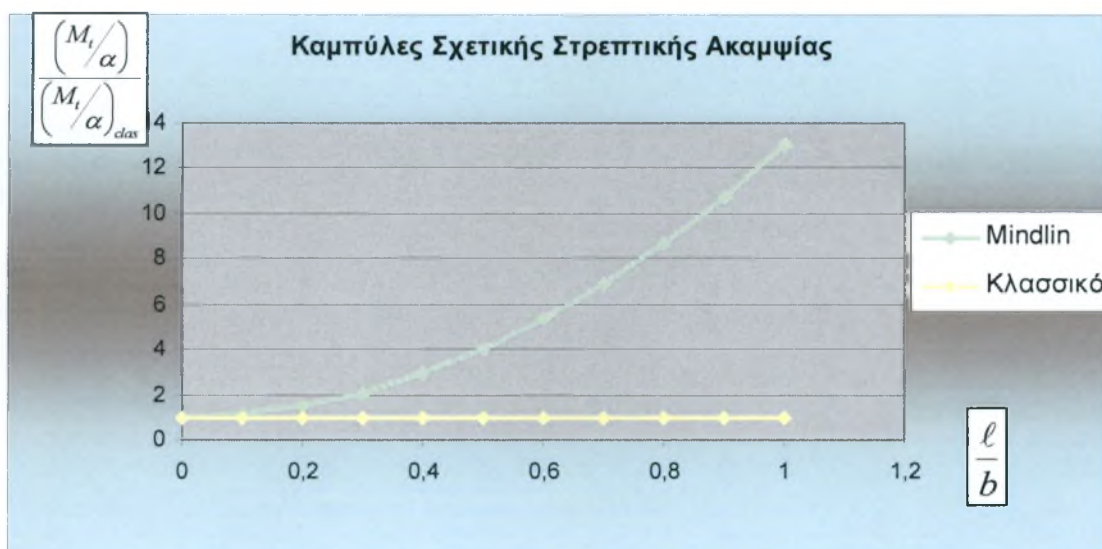
Ο παραπάνω τύπος μας δίνει ακριβώς την τιμή της συστροφής στην οποία είχαμε καταλήξει και στην Παράγραφο 1.4 με τη βοήθεια των μακροσκοπικών εξισώσεων ισορροπίας.

Αδιαστατοποιώντας τώρα την σχετική στρεπτική ακαμψία της ορθογωνικής διατομής, με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου για την στρεπτική ροπή, θα έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)}{\left(G \frac{hb^3}{6} \right)} = \left[1 + 12 \left(\frac{\ell}{b} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 12\left(\frac{\ell}{b}\right)^2\right] \quad (4.18)$$

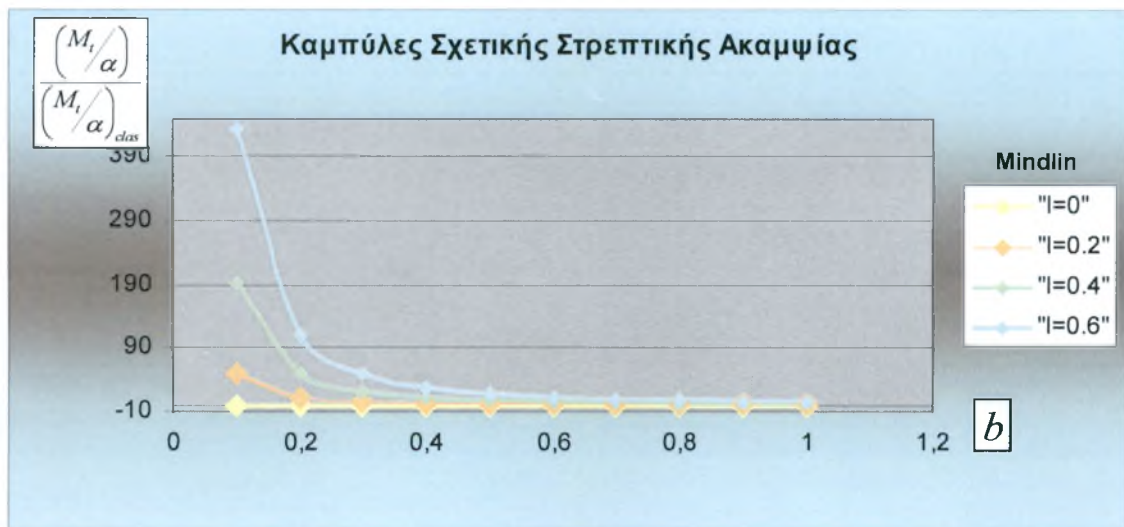
Αποτυπώνοντας την παραπάνω παράσταση σε μία γραφική μορφή, δίνοντας τιμές στο λόγο $\left(\frac{\ell}{b}\right)$ και λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τιμές για την σχετική στρεπτική δυσκαμψία, καταλήξαμε στο παρακάτω γράφημα :



Σχήμα 4.7 Γραφική παράσταση της σχέσης του λόγου $\left(\frac{\ell}{b}\right)$ με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος ορθογωνικής διατομής, σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin.

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την παράσταση (4.18) με τον παρακάτω τρόπο, και να λάβουμε τη γραφική παράσταση που μας δίνει την σχέση του πλάτους b της ορθογωνικής διατομής με την σχετική στρεπτική ακαμψία, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ . Επομένως έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 12\ell^2\left(\frac{1}{b}\right)^2\right]$$



Σχήμα 4.8 Γραφική παράσταση της σχέσης του πλάτους b με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος ορθογωνικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ , σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin.

Σύμφωνα με όσα σχολιάσαμε για τα διαγράμματα που προέκυψαν από τη μελέτη της κυκλικής διατομής και στην περίπτωση της ορθογωνικής διατομής παρατηρώντας το παραπάνω γράφημα διαπιστώνουμε ότι καθώς το πλάτος b λαμβάνει όλο και μικρότερες τιμές, για μία σταθερή τιμή του εσωτερικού μήκους ℓ , η σχετική στρεπτική δυσκαμψία του συστήματος που εξετάζουμε αυξάνεται αισθητά. Η προηγούμενη διαπίστωση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο μικρότερο είναι το πλάτος της ορθογωνικής διατομής του εξεταζόμενου συστήματος, τόσο πιο έντονη είναι η συνεισφορά της μικροδομής του συστήματος στην ακαμψία αυτού. Παράλληλα συμπεραίνουμε πως για μεγαλύτερες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ , για μία δεδομένη τιμή του πλάτους της ορθογωνικής διατομής, οι αντίστοιχες τιμές της σχετικής στρεπτικής ακαμψίας είναι αισθητά μεγαλύτερες.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 4.4 και 4.8 διαπιστώνουμε, παρατηρώντας τις τιμές τις οποίες φαίνεται να λαμβάνει η σχετική στρεπτική δυσκαμψία, ότι το φαινόμενο της κλίμακας είναι αρκετά πιο έντονο στην περίπτωση της ορθογωνικής διατομής σε σχέση με της κυκλικής. Για να είμαστε πιο ακριβείς, ενώ στην κυκλική διατομή, για εσωτερικό μήκος $\ell = 0.2\text{cm}$ και ακτίνα $R = 0.6\text{cm}$ η σχετική στρεπτική ακαμψία δίνει μία τιμή 1.44, στην ορθογωνική διατομή, για την ίδια τιμή του εσωτερικού μήκους και πλάτος $b = 0.6\text{cm}$ η σχετική στρεπτική ακαμψία είναι 2.33.

Ομοίως με την περίπτωση της κυκλικής διατομής, και στην περίπτωση της ορθογωνικής διατομής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα 4.8 ώστε να προσδιορίσουμε το εσωτερικό μήκος ενός συστήματος το οποίο εξετάζουμε, αρκεί να μετρούμε την σχετική στρεπτική ακαμψία μεταβάλλοντας το πάχος b της διατομής.

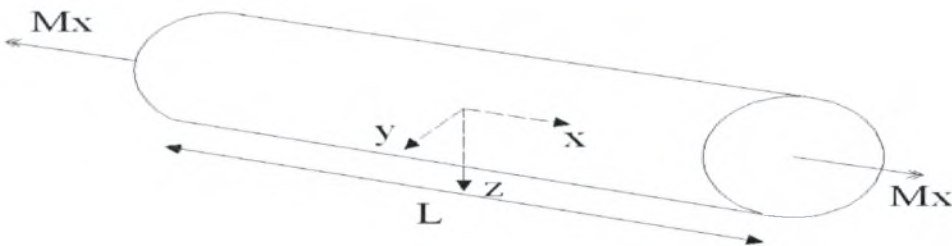
4.3 Στρεπτική δυσκαμψία για ράβδο κυκλικής και ορθογωνικής διατομής κατά Koiter

Κυκλική διατομή

Ξεκινώντας από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία το έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με την εσωτερική ενέργεια του συστήματος του οποίου εξετάζουμε, στην προκειμένη περίπτωση της ράβδου κυκλικής διατομής, ισχύει :

$$W = U \quad (4.19)$$

όπου W : το εξωτερικό έργο που δημιουργεί η στρεπτική ροπή M_x και
 U : η ελαστική ενέργεια του συστήματος.



Σχήμα 4.9 Ράβδος κυκλικής διατομής, μήκους L , η οποία υποβάλλεται σε στρεπτική εξωτερική ροπή M_x .

Το εξωτερικό έργο δίνεται από τον τύπο :

$$W = \frac{1}{2} \alpha L M_x \quad , \quad (4.20)$$

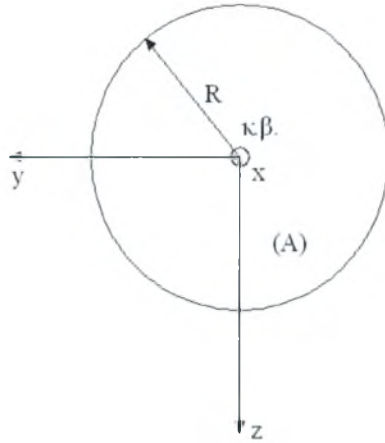
όπου α : η συστροφή της ράβδου που παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της,
 L : το μήκος της ράβδου και
 M_x : η εξωτερική ροπή στρέψης όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Αυτό μπορούμε να ισχυριστούμε αν $\ell < R \ll L$ [9].

Η ελαστική ενέργεια δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y, z) dy dz dx \quad , \quad (4.21)$$

όπου e : η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας και
 (A) : όλη η επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της, όπως διακρίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.10 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) μίας κυκλικής διατομής καθώς και η επιφάνεια (A) που περιλαμβάνει όλα τα σημεία της διατομής συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της περιφέρειάς της.

Ολοκληρώνοντας τον παραπάνω τύπο της ελαστικής ενέργειας **(4.21)** ως προς τη μεταβλητή x έχουμε :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y,z) dydz dx = L \iint_{(A)} e(y,z) dydz \quad (4.22)$$

Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας e σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$e(y,z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2 [k_{ij}k_{ij} + \eta k_{ij}k_{ji}] \quad (4.23)$$

Παρατηρούμε ότι στο e περιλαμβάνονται δύο όροι : ο κλασσικός όρος και ένας όρος που περιγράφει την μικροδομή.

Μορφώνουμε τα αθροίσματα των “καμπυλοτήτων” και έχουμε :

$$k_{ij}k_{ij} = k_{xx}k_{xx} + k_{xy}k_{xy} + k_{zx}k_{zx} + k_{yx}k_{yx} + k_{yy}k_{yy} + k_{yz}k_{yz} + k_{zx}k_{zx} + k_{zy}k_{zy} + k_{zz}k_{zz} \xrightarrow{(I.10)-(I.13)}$$

$$k_{ij}k_{ij} = k_{xx}k_{xx} + k_{yy}k_{yy} + k_{zz}k_{zz} \Rightarrow$$

$$k_{ij}k_{ij} = \alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \Rightarrow$$

$$k_{ij}k_{ji} = \frac{3}{2}\alpha^2 \quad (4.24)$$

Ομοίως,

$$k_{ij}k_{ji} = k_{xx}k_{xx} + k_{xy}k_{yx} + k_{zx}k_{xz} + k_{yx}k_{xy} + k_{yy}k_{yy} \\ + k_{yz}k_{zy} + k_{zx}k_{xz} + k_{zy}k_{yz} + k_{zz}k_{zz} \xrightarrow{(I.10)-(I.13)}$$

$$k_{ij}k_{ji} = \frac{3}{2}\alpha^2 \quad (4.25)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των τροπών, οι οποίες δίνονται παρακάτω, με βάσει τα όσα γνωρίζουμε για την κυκλική διατομή

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\alpha z \quad (4.26) \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\alpha y \quad (4.27)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.23), έχουμε :

$$e(y, z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2[k_{ij}k_{ij} + \eta k_{ij}k_{ji}] \xrightarrow{(4.24)-(4.27)} \\ e(y, z) = \frac{1}{4}G\alpha^2(z^2 + y^2) + \frac{3}{2}G\alpha^2\ell^2(1 + \eta)$$

Ο τύπος της ελαστικής ενέργειας επομένως μετατρέπεται ως εξής :

$$U = G\alpha^2 L \int\int_{(A)} \frac{1}{4} \left[(z^2 + y^2) + \frac{3}{2}\ell^2(1 + \eta) \right] dydz$$

Επαναδιατυπώνοντας τον παραπάνω τύπο βασιζόμενοι σε πολικές συντεταγμένες έχουμε :

$$U = G\alpha^2 L \int_0^R \left[\frac{1}{4}r^2 + \frac{3}{2}\ell^2(1 + \eta) \right] 2\pi r dr$$

όπου R : η ακτίνα της κυκλικής διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10.

Η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής :

$$U = 2G\alpha^2 L\pi \int_0^R \left(\frac{1}{4}r^3 + \frac{3}{2}\ell^2 r(1 + \eta) \right) dr \Rightarrow$$

$$U = 2\pi\alpha^2 GL \left[\frac{r^4}{16} + \frac{3}{4}\ell^2 r^2(1 + \eta) \right]_0^R \Rightarrow$$

$$U = \pi\alpha^2 GL \left(\frac{R^4}{8} + \frac{3}{2} \ell^2 R^2 (1 + \eta) \right) \Rightarrow$$

$$U = \pi\alpha^2 GL \frac{R^4}{8} \left[1 + 12(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \quad (4.28)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.19) και αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (4.20) και (4.28) για το έργο και την ελαστική ενέργεια αντίστοιχα, θα έχουμε :

$$W = U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \alpha L M_x = \pi\alpha^2 GL \frac{R^4}{8} \left[1 + 12(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$M_x = \alpha G \frac{\pi R^4}{4} \left[1 + 12(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right]$$

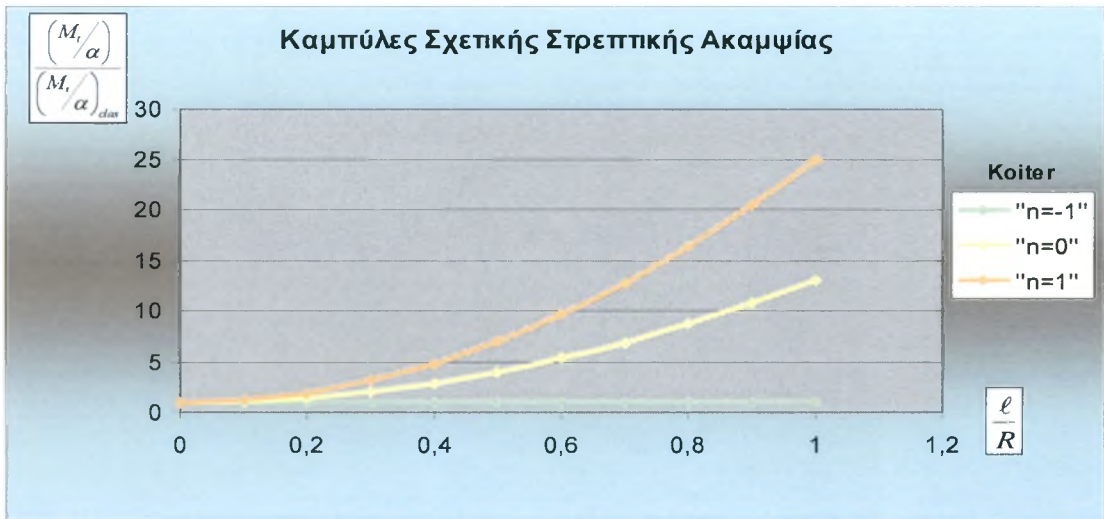
Για την περίπτωση όπου $\ell = 0$, λαμβάνουμε την κλασσική λύση $M_x = \alpha G \frac{\pi R^4}{4}$.

Αδιαστατοποιώντας τώρα την σχετική στρεπτική ακαμψία της κυκλικής διατομής, με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου, θα έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)}{\left(\frac{G \pi R^4}{4} \right)} = \left[1 + 12(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha} \right)_{clas.}} = \left[1 + 12(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 \right] \quad (4.29)$$

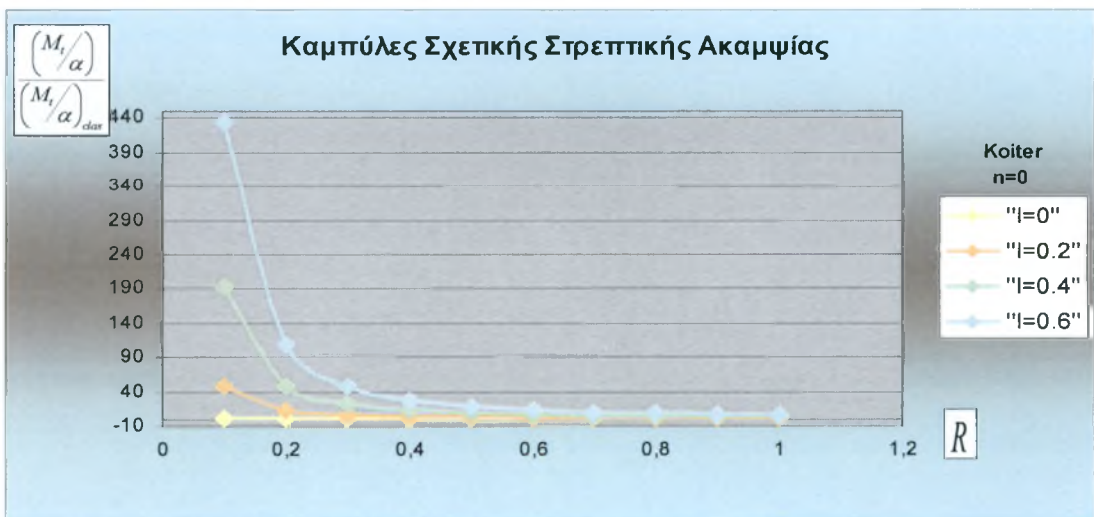
Αποτυπώνοντας την παραπάνω παράσταση σε μία γραφική μορφή, δίνοντας τιμές στο λόγο $\left(\frac{\ell}{R} \right)$ αλλά και στο διορθωτικό συντελεστή η και λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τιμές για την σχετική στρεπτική δυσκαμψία, καταλήξαμε στο παρακάτω γράφημα :



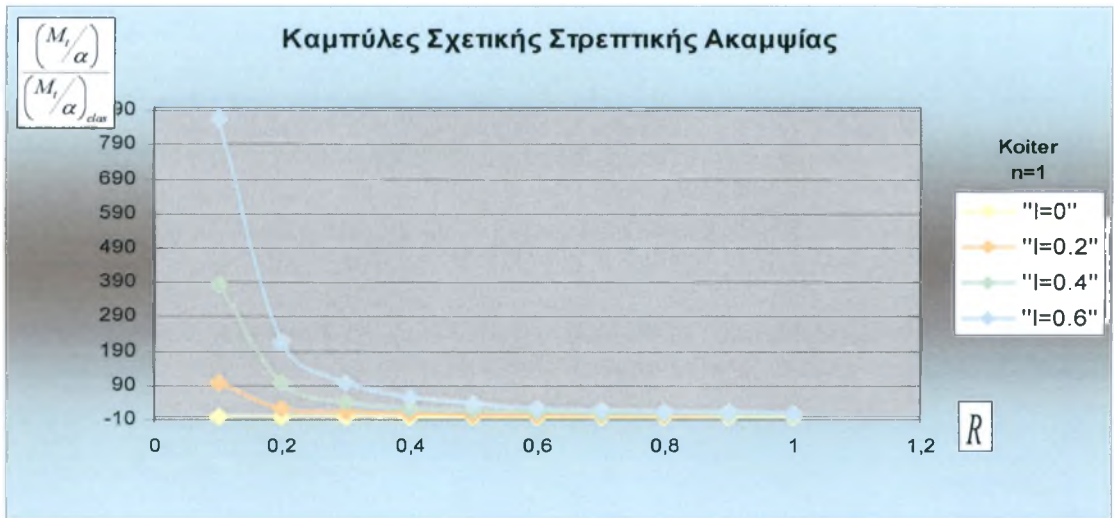
Σχήμα 4.11 Γραφική παράσταση της σχέσης του λόγου $\left(\frac{\ell}{R}\right)$ με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος κυκλικής διατομής, σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την παράσταση (4.29) με τον παρακάτω τρόπο, και να λάβουμε τη γραφική παράσταση που μας δίνει την σχέση της ακτίνας R της κυκλικής διατομής με την σχετική στρεπτική ακαμψία, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ και για δύο διακριτές τιμές του διορθωτικού συντελεστή η , ο οποίος κυμαίνεται $-1 < \eta < 1$. Επομένως έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 12\ell^2(1 + \eta) \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right]$$



Σχήμα 4.12 Γραφική παράσταση της σχέσης της ακτίνας R με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος κυκλικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ και για $\eta = 0$ σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.



Σχήμα 4.13 Γραφική παράσταση της σχέσης της ακτίνας R με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος κυκλικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους l και για $\eta = 1$ σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.

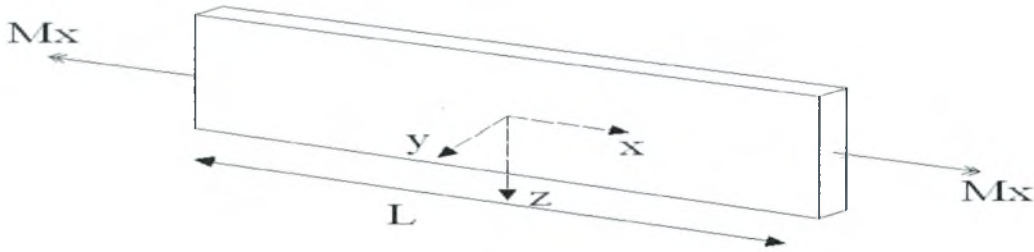
Οι παρατηρήσεις που αφορούν τα παραπάνω γραφήματα συμπίπτουν γενικά με εκείνες που κάναμε για το αντίστοιχο γράφημα της κυκλικής διατομής σύμφωνα με τη θεωρία του Mindlin. Συγκρίνοντας βέβαια τα αντίστοιχα γραφήματα για τις δύο θεωρίες παρατηρούμε πως σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter οι τιμές που λαμβάνουμε για την σχετική στρεπτική ακαμψία είναι σχεδόν διπλάσιες. Η παρατήρηση αυτή στην ουσία σημαίνει πως το φαινόμενο κλίμακας στην περίπτωση συστημάτων από πορώδη υλικά, τα οποία προσεγγίζονται καλύτερα από τη θεωρία του Koiter, είναι αρκετά εντονότερο από την περίπτωση των συμπαγών υλικών. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως η φύση, στην οποία απαντώνται κυρίως πορώδη υλικά, έχει προνοήσει ώστε η μικροδομή των φυσικών υλικών να προσθέτει μεγάλη ακαμψία στο σύνολό τους δηλαδή στην περίπτωση του προβλήματός μας, μεγάλη ακαμψία σε στρέψη.

Ορθογωνική διατομή

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω θα προσπαθήσουμε και εδώ να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα για την περίπτωση ορθογωνικής αυτή τη φορά διατομή, ξεκινώντας επίσης από την αρχή διατήρησης της ενέργειας :

$$W = U \quad (4.30)$$

όπου W : το εξωτερικό έργο που δημιουργεί η στρεπτική ροπή M_x και
 U : η ελαστική ενέργεια του συστήματος.



Σχήμα 4.14 Ράβδος ορθογωνικής διατομής, μήκους L , η οποία υποβάλλεται σε στρεπτική εξωτερική ροπή M_x .

Το εξωτερικό έργο δίνεται από τον τύπο :

$$W = \frac{1}{2} \alpha L M_x \quad , \quad (4.31)$$

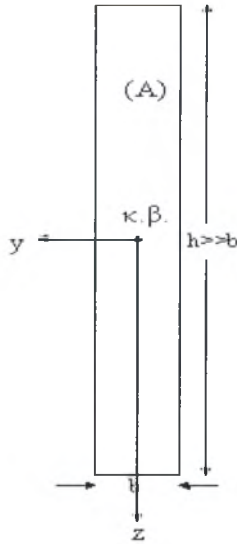
όπου α : η συστροφή της ράβδου που παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της,
 L : το μήκος της ράβδου και
 M_x : η εξωτερική ροπή στρέψης όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Αυτό μπορούμε να ισχυριστούμε αν $\ell < b \ll h \ll L$ [9].

Η ελαστική ενέργεια δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$U = \int_0^L \iiint_{(A)} e(y, z) dydzdx \quad , \quad (4.32)$$

όπου e : η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας και
(A) : όλη η επιφάνεια της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς της, όπως διακρίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.15 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) μίας ορθογωνικής διατομής καθώς και η επιφάνεια (A) που περιλαμβάνει όλα τα σημεία της διατομής συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της περιφέρειάς της.

Ολοκληρώνοντας τον παραπάνω τύπο της ελαστικής ενέργειας (4.32) ως προς τη μεταβλητή x έχουμε :

$$U = \int_0^L \iint_{(A)} e(y,z) dy dz dx = L \iint_{(A)} e(y,z) dy dz \quad (4.33)$$

Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας e σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$e(y,z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2 [k_y k_y + \eta k_y k_{ji}] \quad (4.34)$$

Μορφώνουμε τα αθροίσματα των “καμπυλοτήτων” και έχουμε :

$$k_{ij} k_{ij} = k_{xx} k_{xx} + k_{xy} k_{xy} + k_{zx} k_{zx} + k_{yx} k_{yx} + k_{yy} k_{yy} + k_{yz} k_{yz} + k_{zx} k_{zx} + k_{zy} k_{zy} + k_{zz} k_{zz} \xrightarrow{(3.10)-(3.15)}$$

$$k_{ij} k_{ij} = k_{xx} k_{xx} + k_{yy} k_{yy} + k_{yz} k_{yz} + k_{zy} k_{zy} + k_{zz} k_{zz} \Rightarrow$$

$$k_{ij} k_{ij} = \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 1 \right)^2$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 3, η συνάρτηση στρέβλωσης ορθογωνικής διατομής κατά τη θεωρία στρέψης του Koiter καταλήγει στην κλασσική λύση $\Phi = yz$. Επομένως έχουμε :

$$k_{ij}k_{ij} = \alpha^2 + \alpha^2$$

$$k_{ij}k_{ij} = 2\alpha^2 \quad (4.35)$$

Ομοίως,

$$k_{ij}k_{ji} = k_{xx}k_{xx} + k_{xy}k_{yx} + k_{zx}k_{xz} + k_{yx}k_{xy} + k_{yy}k_{yy} + k_{yz}k_{zy} + k_{zx}k_{xz} + k_{zy}k_{yz} + k_{zz}k_{zz} \xrightarrow{(3.10)-(3.15)}$$

$$k_{ij}k_{ji} = k_{xx}k_{xx} + k_{yy}k_{yy} + 2k_{yz}k_{zy} + k_{zz}k_{zz} \Rightarrow$$

$$k_{ij}k_{ji} = \alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - 1\right)^2 + 2\frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} + 1\right)^2$$

$$k_{ij}k_{ji} = 2\alpha^2 \quad (4.36)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των τροπών, οι οποίες δίνονται παρακάτω, με βάσει τα όσα έχουμε αποδείξει για την ορθογωνική διατομή και θεωρώντας επιπλέον ότι η συνιστώσα της τροπής ε_{xy} είναι σχεδόν μηδενική

$$\varepsilon_{xy} \approx 0 \quad (4.37) \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right) \quad (4.38)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.34), έχουμε :

$$e(y, z) = G(\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + G\ell^2[k_{ij}k_{ij} + \eta k_{ij}k_{ji}] \xrightarrow{(4.35)-(4.38)}$$

$$e(y, z) = \frac{1}{4}G\alpha^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)^2 + 2G\alpha^2\ell^2(1 + \eta) \Rightarrow$$

$$e(y, z) = \frac{1}{4}G\alpha^2(2y)^2 + 2\alpha^2G\ell^2(1 + \eta) \Rightarrow$$

$$e(y, z) = G\alpha^2[y^2 + 2\ell^2(1 + \eta)]$$

Ο τύπος της ελαστικής ενέργειας επομένως μετατρέπεται ως εξής :

$$\begin{aligned}
 U &= G\alpha^2 L \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} [y^2 + 2\ell^2(1+\eta)] dy dz \quad \Rightarrow \\
 U &= G\alpha^2 Lh \int_{-b/2}^{b/2} [y^2 + 2\ell^2(1+\eta)] dy \quad \Rightarrow \\
 U &= G\alpha^2 Lh \left[\frac{y^3}{3} + 2\ell^2(1+\eta)y \right]_{-b/2}^{b/2} \quad \Rightarrow \\
 U &= G\alpha^2 Lh \left[2\frac{b^3}{24} + 4\ell^2(1+\eta)\frac{b}{2} \right] \quad \Rightarrow \\
 U &= G\alpha^2 Lh \left[\frac{b^3}{12} + 2\ell^2(1+\eta)b \right] \quad \Rightarrow \\
 U &= \frac{1}{12} G\alpha^2 Lhb^3 \left[1 + 24(1+\eta)\left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \right] \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.30) και αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (4.31) και (4.39) για το έργο και την ελαστική ενέργεια αντίστοιχα, θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 W &= U \quad \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} \alpha L M_x &= \frac{1}{12} \alpha^2 G L h b^3 \left[1 + 24(1+\eta)\left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \right] \quad \Rightarrow \\
 \boxed{M_x} &= \frac{1}{6} \alpha G h b^3 \left[1 + 24(1+\eta)\left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

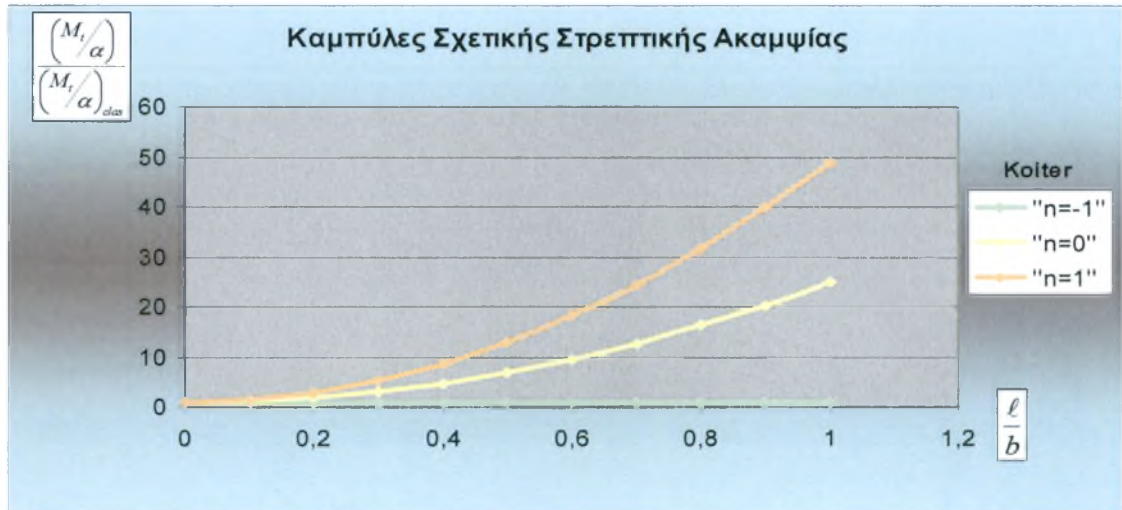
Για την περίπτωση όπου $\ell = 0$, λαμβάνουμε την κλασσική λύση $M_x = \frac{1}{6} \alpha G h b^3$.

Αδιαστατοποιώντας τώρα την σχετική στρεπτική ακαμψία της ορθογωνικής διατομής, με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου, θα έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{1}{6} G h b^3\right)} = \left[1 + 24(1+\eta)\left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \right] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 24(1 + \eta) \left(\frac{\ell}{b}\right)^2 \right] \quad (4.40)$$

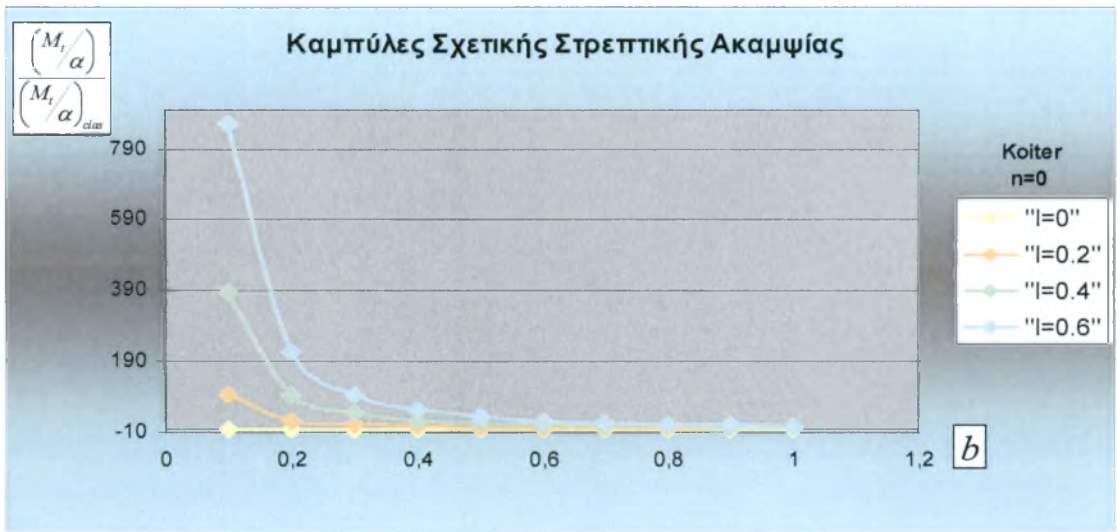
Αποτυπώνοντας την παραπάνω παράσταση σε μία γραφική μορφή, δίνοντας τιμές στο λόγο $\left(\frac{\ell}{b}\right)$ αλλά και στο διορθωτικό συντελεστή η και λαμβάνοντας τις αντίστοιχες τιμές για την σχετική στρεπτική δυσκαμψία, καταλήξαμε στο παρακάτω γράφημα :



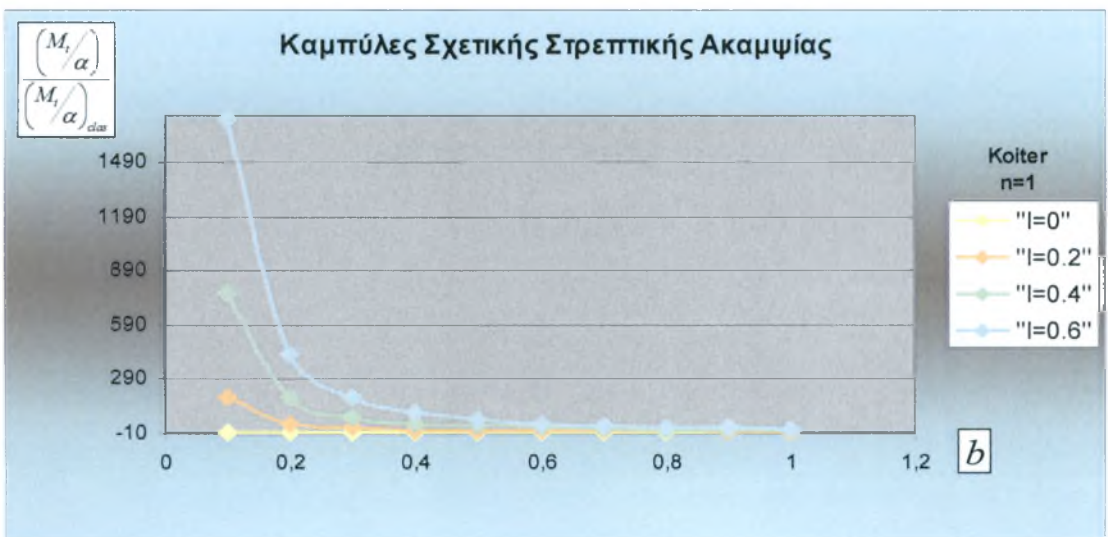
Σχήμα 4.16 Γραφική παράσταση της σχέσης του λόγου $\left(\frac{\ell}{b}\right)$ με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος ορθογωνικής διατομής, σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την παράσταση (4.40) με τον παρακάτω τρόπο, και να λάβουμε τη γραφική παράσταση που μας δίνει την σχέση του πλάτους b της ορθογωνικής διατομής με την σχετική στρεπτική ακαμψία, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους ℓ και για δύο διακριτές τιμές του διορθωτικού συντελεστή η , ο οποίος κυμαίνεται $-1 < \eta < 1$. Επομένως έχουμε :

$$\frac{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)_{clas.}} = \left[1 + 24\ell^2(1 + \eta) \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right]$$



Σχήμα 4.17 Γραφική παράσταση της σχέσης του πλάτους b με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος ορθογωνικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους l και για $\eta = 0$ σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.



Σχήμα 4.18 Γραφική παράσταση της σχέσης του πλάτους b με την σχετική στρεπτική ακαμψία ενός συστήματος ορθογωνικής διατομής, για διάφορες τιμές του εσωτερικού μήκους l και για $\eta = 1$ σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter.

Οι παρατηρήσεις που αφορούν τα παραπάνω γραφήματα συμπίπτουν γενικά με εκείνες που κάναμε για το αντίστοιχο γράφημα της ορθογωνικής διατομής σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter. Παρατηρούμε επίσης ότι το φαινόμενο κλίμακας και σε αυτήν την περίπτωση είναι εντονότερο για την ορθογωνική διατομή σε σχέση με την κυκλική. Συγκρίνοντας βέβαια τα αντίστοιχα γραφήματα για τις δύο ανεξάρτητες θεωρίες παρατηρούμε όπως συνέβη και με την κυκλική διατομή, πως σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter οι τιμές που λαμβάνουμε για την σχετική στρεπτική ακαμψία είναι σχεδόν διπλάσιες από εκείνες που προκύπτουν κατά τον Mindlin. Η παρατήρηση αυτή στην ουσία σημαίνει πως το φαινόμενο κλίμακας στην περίπτωση

συστημάτων από πορώδη υλικά, τα οποία προσεγγίζονται καλύτερα από τη θεωρία του Koiter, είναι αρκετά εντονότερο από την περίπτωση των συμπαγών υλικών.

4.4 Συμπεράσματα

☞ Σε συστήματα κυκλικής διατομής με μικρότερη ακτίνα, η συμβολή του φαινομένου κλίμακας στην ακαμψία του συστήματος αυτού είναι εντονότερη σε σχέση με τα συστήματα μεγαλύτερης ακτίνας. Αντίστοιχα, σε συστήματα ορθογωνικής διατομής με πλάτος μικρότερο, το φαινόμενο κλίμακας είναι πιο ισχυρό από εκείνα με μεγαλύτερο πλάτος.

☞ Συμπερασματικά, συστήματα με μικρές διαστάσεις παρουσιάζονται να είναι αρκετά πιο δύσκαμπτα και κατά συνέπεια έχουν μεγαλύτερη αντοχή (κρίσιμη ελαστική τροπή).

☞ Το φαινόμενο κλίμακας εμφανίζεται αρκετά εντονότερο στην περίπτωση της στρέψης μίας ορθογωνικής διατομής απ' ότι στην περίπτωση μίας κυκλικής διατομής.

☞ Το φαινόμενο κλίμακας εμφανίζεται αρκετά εντονότερο στην περίπτωση της στρέψης συστημάτων από πορώδη υλικά (που υπακούουν δηλαδή στη θεωρία στρέψης κατά Koiter) σε σχέση με εκείνο που εμφανίζεται στην στρέψη συστημάτων από συμπαγή υλικά (τα οποία υπακούουν στη θεωρία στρέψης κατά Mindlin).

☞ Με βάση τις καμπύλες που δημιουργήθηκαν και συνδέουν την ακτίνα μίας κυκλικής διατομής και το πλάτος μίας ορθογωνικής αντίστοιχα διατομής με τη σχετική στρεπτική ακαμψία καταλήξαμε στον προσδιορισμό μίας πειραματικής μεθόδου προσέγγισης της τιμής του εσωτερικού μήκους του εκάστοτε υπό εξέταση συστήματος.

☞ Όσα αποδείχθηκαν για την ορθογωνική λεπτότοιχη διατομή ισχύουν για οποιαδήποτε άλλη ανοιχτή λεπτότοιχη διατομή η οποία αποτελεί ένα συνδυασμό λεπτότοιχων ορθογωνικών διατομών διαφόρων διαστάσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

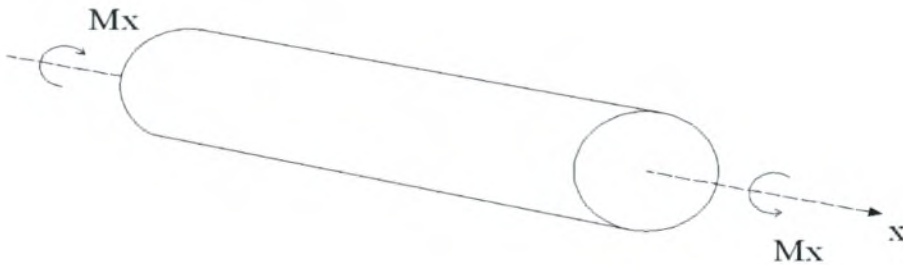
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΤΥΠΟΥ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ ΓΙΑ ΡΑΒΔΟΥΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΚΟΙΤΕΡ (SPIN GRADIENT)

I.1 Εισαγωγή

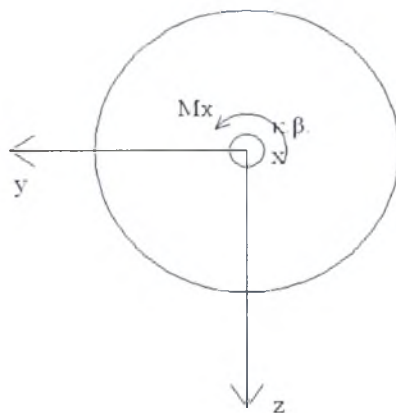
Στο παράρτημα αυτό θα ασχοληθούμε με μία σύντομη αναφορά στη θεωρία στρέψης του Koiter για ράβδους από πορώδη υλικά κυκλικής διατομής, η οποία θα μας βοηθήσει στην κατανόηση της αντίστοιχης θεωρίας του Koiter για ράβδους ορθογωνικής διατομής που αναπτύσσεται στο τρίτο κεφάλαιο. Θα γίνει ουσιαστικά μία σύντομη παράθεση των τύπων που διέπουν τη συγκεκριμένη θεωρία καθώς επίσης και της διαδικασίας που ακολουθείται. Ο παραρτηματικός χαρακτήρας είναι διότι η βασική ανάλυση δίνεται από τον Koiter [4]. Στο παρόν αναπτύσσουμε όλες τις λεπτομέρειες του προβλήματος.

I.2 Στρέψη Κυκλικής Διατομής

Λαμβάνουμε τον άξονα x του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτει με το διαμήκη άξονα της δοκού και αντιστοίχως τους άξονες y, z όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα I.1 Πορώδης ράβδος κυκλικής διατομής υπό στρέψη γύρω από το διαμήκη άξονα x .



Σχήμα I.2 Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) σε πορώδη ράβδο κυκλικής διατομής.

Θεωρούμε τις συνιστώσες των μετατοπίσεων της ίδιας μορφής με εκείνες της κλασσικής θεωρίας στρέψης για ράβδους κυκλικής διατομής, και θα αποδείξουμε ότι αυτή η υπόθεση στην πραγματικότητα ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις ισορροπίας καθώς και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος [4]. Θεωρούμε επιπλέον ότι η μεταβλητή α δηλώνει τη συστροφή της ράβδου. Επομένως οι συνισταμένες των μετατοπίσεων έχουν ως εξής :

$$u_x = 0 \quad , \quad u_y = -\alpha z \quad , \quad u_z = \alpha y \quad (I.1)$$

Από τις παραπάνω συνισταμένες των μετατοπίσεων υπολογίζουμε τις συνισταμένες των τροπών ως εξής :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-\alpha z) = -\frac{1}{2} \alpha z \quad (I.2)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\alpha x + \alpha x) = 0 \quad (I.3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \alpha y \quad (I.4)$$

Υπολογίζουμε επίσης μέσω των μετατοπίσεων τις συνισταμένες των στροφών (spins-rotation) και στη συνέχεια καταλήγουμε στο διανυσματικό χαρακτήρα των στροφών (spins-rotation vector).

Ισχύει η γενική γεωμετρική σχέση για τον υπολογισμό των στροφών : $w_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$ άρα

$$w_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 - (-\alpha z)) = \frac{1}{2} \alpha z \quad (I.5)$$

$$w_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [(-\alpha x) - (\alpha x)] = -\alpha x \quad (I.6)$$

$$w_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 - (\alpha y)) = -\frac{1}{2} \alpha y \quad (I.7)$$

Το μητρώο των στροφών είναι ένα αντισυμμετρικό μητρώο γι' αυτό και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

$$w_{xy} = -w_{yx} \quad , \quad w_{yz} = -w_{zy} \quad , \quad w_{xz} = -w_{zx}$$

Για την μετατροπή του μητρώου των στρεφών σε διανυσματική μορφή ισχύει ο τύπος :

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{jk} \quad \text{δηλαδή} \quad \omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=x}^z \sum_{k=x}^z \varepsilon_{ijk} w_{jk} . \text{ Η ύπαρξη δυο ή τριών όμοιων δεικτών}$$

δηλώνει ένα διπλό ή τριπλό άθροισμα αντίστοιχα (σύμβαση του Einstein). Επομένως υπολογίζοντας τα παραπάνω αθροίσματα έχουμε :

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\varepsilon_{ixx} w_{xx}} + \varepsilon_{ixy} w_{xy} + \varepsilon_{ixz} w_{xz} + \varepsilon_{iyx} w_{yx} + \cancel{\varepsilon_{iyy} w_{yy}} \\ + \varepsilon_{iyz} w_{yz} + \varepsilon_{izx} w_{zx} + \varepsilon_{izy} w_{zy} + \cancel{\varepsilon_{izz} w_{zz}} \end{array} \right\} \quad (I.8)$$

Γνωρίζοντας πως
$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{kkk} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kik} = 0 \\ \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 \end{array} \right\} \text{ η εξίσωση (I.8) μετατρέπεται ως εξής :}$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{ixy} - \varepsilon_{iyx}) w_{xy} + (\varepsilon_{ixz} - \varepsilon_{izx}) w_{xz} + (\varepsilon_{iyz} - \varepsilon_{izy}) w_{yz} \right] \quad (I.9)$$

Η εξίσωση (I.9) για τις διάφορες τιμές του i γίνεται :

Για $\underline{i = x}$ έχουμε :

$$\omega_x = -\frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{xxy} - \varepsilon_{xyx}) w_{xy} + (\varepsilon_{xxz} - \varepsilon_{zxx}) w_{xz} + (\varepsilon_{xyz} - \varepsilon_{zxy}) w_{yz} \right] \Rightarrow$$

$$\omega_x = -\frac{1}{2} \left[(0-0)w_{xy} + (0-0)w_{xz} + (1-(-1))w_{yz} \right] \Rightarrow$$

$$\omega_x = -w_{yz} \xrightarrow{(I.6)} \rightarrow$$

$$\omega_x = \alpha x$$

Για $\underline{i = y}$ έχουμε :

$$\omega_y = -\frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{yyx} - \varepsilon_{yxy}) w_{xy} + (\varepsilon_{yyz} - \varepsilon_{zyy}) w_{yz} + (\varepsilon_{yxz} - \varepsilon_{zyx}) w_{xz} \right] \Rightarrow$$

$$\omega_y = -\frac{1}{2} \left[(0-0)w_{xy} + ((-1)-1)w_{xz} + (0-0)w_{yz} \right] \Rightarrow$$

$$\omega_y = w_{xz} \xrightarrow{(I.7)} \rightarrow$$

$$\omega_y = -\frac{1}{2} \alpha y$$

Για $i = z$ έχουμε :

$$\omega_z = -\frac{1}{2} [(\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{yx})w_{xy} + (\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{zx})w_{xz} + (\varepsilon_{yz} - \varepsilon_{zy})w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2} [(1 - (-1))w_{xy} + (0 - 0)w_{xz} + (0 - 0)w_{yz}] \Rightarrow$$

$$\omega_z = -w_{xy} \xrightarrow{(1.5)}$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2}\alpha z$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις “καμπυλότητες” των μετατοπίσεων, όπως ονομάζονται οι δεύτερες παράγωγοι των μετατοπίσεων, σύμφωνα με τον ισχύοντα τύπο $k_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial j}$.

Έτσι έχουμε :

$$k_{xx} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x) = \alpha \quad (I.10)$$

$$k_{yy} = \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\alpha y\right) = -\frac{1}{2}\alpha \quad (I.11)$$

$$k_{zz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}\alpha z\right) = -\frac{1}{2}\alpha \quad (I.12)$$

$$\text{κατά τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι } k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{yz} = k_{zx} = k_{zy} = 0. \quad (I.13)$$

Το μητρώο των τάσεων είναι ένα συμμετρικό μητρώο το οποίο σύμφωνα με την θεωρία του Koiter διαμορφώνεται από την σχέση $\sigma_{ij}^s = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$ (I.14) όπου το G

δηλώνει το μέτρο διάτμησης του υλικού της ράβδου που δίνεται από τον τύπο $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ όπου

E : το μέτρο ελαστικότητας του Young και

ν : ο λόγος του Poisson

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω σχετικά με τις τροπές γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_{kk} = 0$ επομένως η εξίσωση (I.14) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση (I.15) :

$$\sigma_{ij}^s = 2G\varepsilon_{ij} \quad (I.15)$$

Μπορούμε επομένως τώρα να υπολογίσουμε το μητρώο των τάσεων.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (I.15) τις διάφορες τιμές που μπορούν να πάρουν οι δείκτες i, j και λαμβάνοντας υπόψη ότι το μητρώο των τάσεων είναι συμμετρικό καταλήγουμε :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{xy}^s = \sigma_{yx}^s = 2G\varepsilon_{xy} \quad \xrightarrow{(I.2)} \rightarrow$$

$$\sigma_{xy}^s = \sigma_{yx}^s = -G\alpha z \quad (I.16)$$

$$\sigma_{yz}^s = \sigma_{zy}^s = 2G\varepsilon_{yz} \quad \xrightarrow{(I.3)} \rightarrow$$

$$\sigma_{yz}^s = \sigma_{zy}^s = 0 \quad (I.17)$$

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{zx}^s = 2G\varepsilon_{xz} \quad \xrightarrow{(I.4)} \rightarrow$$

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{zx}^s = G\alpha y \quad (I.18)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σύμφωνα με τη θεωρία στρέψης τύπου βαθμίδας (τόσο κατά Mindlin όσο και κατά Koiter) λαμβάνουμε υπόψη στους υπολογισμούς και έναν επιπρόσθετο όρο, ο οποίος έχει να κάνει με τη μικροδομή του υλικού. Η μικροδομή του υλικού παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αύξηση της δυσκαμψίας του υλικού εφόσον λαμβάνονται υπόψη οι μικρομετακινήσεις στην εσωτερική δομή αυτού. Οι μικρομετακινήσεις αυτές στην εσωτερική δομή του υλικού επιφέρουν τη δημιουργία μικροροπών οι οποίες θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στην ανάπτυξη της θεωρίας στρέψης τύπου βαθμίδας κατά τον Koiter. Οι μικροροπές αυτές στο εσωτερικό της δομής του υλικού συμβολίζονται με m_{ji} και δίνονται από τον τύπο :

$$m_{ji} = 4G\ell^2(k_{ij} + \eta k_{ji}) \quad (I.19)$$

όπου G : το μέτρο διάτμησης του υλικού.

ℓ : το εσωτερικό μήκος (μέγεθος κόκκων αδρανούς κλπ.) όπως έχει ήδη οριστεί.

k_{ij} : οι ‘‘καμπυλότητες’’ των μετατοπίσεων όπως αποδειχθήκαν παραπάνω, και

η : ένας διορθωτικός συντελεστής που λαμβάνει τιμές $-1 < \eta < 1$ και ο οποίος τις περισσότερες φορές λαμβάνεται χάριν ευκολίας ίσος με το μηδέν.

Για τις διάφορες τιμές των (i, j) οι μικροροπές μέσω της εξίσωσης (I.19) λαμβάνουν τις παρακάτω τιμές :

$$m_{xx} = 4G\ell^2(k_{xx} + \eta k_{xx}) \xrightarrow{(I.10)}$$

$$m_{xx} = 4G\ell^2(1 + \eta)\alpha \quad (I.20)$$

$$m_{yy} = 4G\ell^2(k_{yy} + \eta k_{yy}) \xrightarrow{(I.11)}$$

$$m_{yy} = 4G\ell^2(1 + \eta)\left(-\frac{1}{2}\alpha\right) \Rightarrow$$

$$m_{yy} = -2G\ell^2(1 + \eta)\alpha \quad (I.21)$$

Λόγω της ισότητας των σχέσεων (I.11) και (I.12) δηλαδή $k_{yy} = k_{zz}$, καταλήγουμε ότι

$$m_{yy} = m_{zz} = -2G\ell^2(1 + \eta)\alpha \quad (I.22)$$

κατά τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε, σύμφωνα με την εξίσωση (I.13), ότι

$$m_{xy} = m_{xz} = m_{yx} = m_{yz} = m_{zx} = m_{zy} = 0 \quad (I.23)$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

Οι εξισώσεις ισορροπίας απουσία μαζικών δυνάμεων είναι οι εξής :

$$\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad (I.24),$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελείται από το κλασσικό μέρος που αντιστοιχεί στον όρο $\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m}$,

καθώς και από έναν επιπλέον όρο, $-\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m}$, που περιλαμβάνει τη μεταβλητή ε_{imn} η οποία είναι γνωστή ως τελεστής Levi-Civita.

Για να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της εξίσωσης (I.24) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει πως η ύπαρξη δυο ή τριών όμοιων δεικτών δηλώνει ένα διπλό ή τριπλό άθροισμα αντίστοιχα (σύμβαση του Einstein). Επομένως έχουμε :

Το κλασικό μέρος αναπτύσσεται ως εξής :

$$\frac{\partial \sigma_{mn}^s}{\partial x_m} = \frac{\partial \sigma_{xn}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yn}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zn}^s}{\partial z} \quad (I.25)$$

Το επιπρόσθετο μέρος αναπτύσσεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = & \cancel{\varepsilon_{xxn} m_{xx,xx}} + \cancel{\varepsilon_{xxn} m_{yx,yx}} + \cancel{\varepsilon_{xxn} m_{zx,zx}} + \varepsilon_{xyn} m_{xx,xy} + \varepsilon_{xyn} m_{yx,yy} + \varepsilon_{xyn} m_{zx,zy} \\ & + \varepsilon_{xzn} m_{xx,xz} + \varepsilon_{xzn} m_{yx,yz} + \varepsilon_{xzn} m_{zx,zz} + \varepsilon_{yxn} m_{xy,xx} + \varepsilon_{yxn} m_{yy,yx} + \varepsilon_{yxn} m_{zy,zx} \\ & + \cancel{\varepsilon_{yjn} m_{xy,xy}} + \cancel{\varepsilon_{yjn} m_{yy,yy}} + \cancel{\varepsilon_{yjn} m_{zy,zy}} + \varepsilon_{yzn} m_{xy,xz} + \varepsilon_{yzn} m_{yy,yz} + \varepsilon_{yzn} m_{zy,zz} \\ & + \varepsilon_{zxn} m_{xz,xx} + \varepsilon_{zxn} m_{yz,yx} + \varepsilon_{zxn} m_{zz,zx} + \varepsilon_{zyx} m_{xz,xy} + \varepsilon_{zyx} m_{yz,yy} + \varepsilon_{zyx} m_{zz,zy} \\ & + \cancel{\varepsilon_{zjn} m_{xz,xz}} + \cancel{\varepsilon_{zjn} m_{yz,yz}} + \cancel{\varepsilon_{zjn} m_{zz,zz}} \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας όπως έχουμε ήδη αναφέρει πως $\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{kkk} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kik} = 0 \\ \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \\ \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = -1 \end{array} \right\}$, η τελευταία εξίσωση

μετατρέπεται για τις επιμέρους τιμές που μπορεί να λάβει ο δείκτης n , ως εξής :

Για $n = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = & \cancel{\varepsilon_{xix} m_{xx,xy}} + \cancel{\varepsilon_{xix} m_{yx,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xix} m_{zx,zy}} + \cancel{\varepsilon_{xix} m_{xx,xz}} + \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{yx,yz}} + \cancel{\varepsilon_{xzx} m_{zx,zz}} \\ & + \varepsilon_{yxx} m_{xy,xx} + \varepsilon_{yxx} m_{yy,yx} + \varepsilon_{yxx} m_{zy,zx} + \varepsilon_{yzx} m_{xy,xz} + \varepsilon_{yzx} m_{yy,yz} + \varepsilon_{yzx} m_{zy,zz} \\ & + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{xz,xx}} + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{yz,yx}} + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{zz,zx}} + \varepsilon_{zyx} m_{xz,xy} + \varepsilon_{zyx} m_{yz,yy} + \varepsilon_{zyx} m_{zz,zy} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = & (m_{xy,xz} + m_{yy,yz} + m_{zy,zz}) - (m_{xz,xy} + m_{yz,yy} + m_{zz,zy}) \quad (I.26) \end{aligned}$$

Για $n = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = & \varepsilon_{xyx} m_{xx,xy} + \varepsilon_{xyx} m_{yx,yy} + \varepsilon_{xyx} m_{zx,zy} + \varepsilon_{xzy} m_{xx,xz} + \varepsilon_{xzy} m_{yx,yz} + \varepsilon_{xzy} m_{zx,zz} \\ & + \cancel{\varepsilon_{jxy} m_{xy,xx}} + \cancel{\varepsilon_{jxy} m_{yy,yx}} + \cancel{\varepsilon_{jxy} m_{zy,zx}} + \varepsilon_{jzy} m_{xy,xz} + \varepsilon_{jzy} m_{yy,yz} + \varepsilon_{jzy} m_{zy,zz} \\ & + \varepsilon_{zxy} m_{xz,xx} + \varepsilon_{zxy} m_{yz,yx} + \varepsilon_{zxy} m_{zz,zx} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{xz,xy}} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{yz,yy}} + \cancel{\varepsilon_{xyy} m_{zz,zy}} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = & -(m_{xx,xz} + m_{yx,yz} + m_{zx,zz}) + (m_{xz,xx} + m_{yz,yx} + m_{zz,zx}) \quad (I.27) \end{aligned}$$

Για $n = z$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{imz} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= \varepsilon_{xyz} m_{xx,xy} + \varepsilon_{xyz} m_{yx,yy} + \varepsilon_{xyz} m_{zx,zy} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{xx,xz}} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{yx,yz}} + \cancel{\varepsilon_{xzz} m_{zx,zz}} \\ &+ \varepsilon_{yxz} m_{xy,xx} + \varepsilon_{yxz} m_{yy,yx} + \varepsilon_{yxz} m_{zy,zx} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{xy,xz}} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{yy,yz}} + \cancel{\varepsilon_{yzz} m_{zy,zz}} \\ &+ \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{xz,xx}} + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{yz,yx}} + \cancel{\varepsilon_{zxx} m_{zz,zx}} + \cancel{\varepsilon_{zjz} m_{xz,xy}} + \cancel{\varepsilon_{zjz} m_{yz,yy}} + \cancel{\varepsilon_{zjz} m_{zz,zy}} \Rightarrow \\ \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= (m_{xx,xy} + m_{yx,yy} + m_{zx,zy}) - (m_{xy,xx} + m_{yy,yx} + m_{zy,zx}) \quad (I.28) \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις ισορροπίας (I.24) για τις επιμέρους τιμές του δείκτη n , αποδεικνύεται πως ικανοποιούνται εκ ταυτότητας όπως φαίνεται παρακάτω :

Για $n = x$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{mx}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imx} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= 0 \quad \xrightarrow{(I.25),(I.26)} \\ \frac{\partial \cancel{\sigma_{xx}^s}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\sigma_{yx}^s}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\sigma_{zx}^s}}{\partial z} - \frac{1}{2} [(m_{xy,xz} + m_{yy,yz} + m_{zy,zz}) - (m_{xz,xy} + m_{yz,yy} + m_{zz,zy})] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \cancel{\sigma_{yx}^s}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\sigma_{zx}^s}}{\partial z} - \frac{1}{2} (m_{yy,yz} - m_{zz,zy}) &= 0 \quad \xrightarrow{(I.16),(I.28),(I.21),(I.22)} \\ \frac{\partial}{\partial y} (\cancel{G\alpha z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\cancel{G\alpha y}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (4G\ell^2(1+\eta)\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} (\cancel{2G\ell^2(1+\eta)\alpha}) \right] &= 0 \Rightarrow \\ \underline{0 = 0} \quad \checkmark & \end{aligned}$$

Για $n = y$ έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{my}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imy} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} &= 0 \quad \xrightarrow{(I.25),(I.27)} \\ \frac{\partial \cancel{\sigma_{xy}^s}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\sigma_{yy}^s}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\sigma_{zy}^s}}{\partial z} - \frac{1}{2} [-(m_{xx,xz} + m_{yx,yz} + m_{zx,zz}) + (m_{xz,xx} + m_{yz,yx} + m_{zz,zx})] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \cancel{\sigma_{xy}^s}}{\partial x} + \frac{1}{2} (m_{xx,xz} - m_{zz,zx}) &= 0 \quad \xrightarrow{(I.16),(I.20),(I.22)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-G\alpha z) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (4G\ell^2(1+\eta)\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (-2G\ell^2(1+\eta)\alpha) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Για $n = z$ έχουμε :

$$\frac{\partial \sigma_{mz}^s}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imz} \frac{\partial^2 m_{ji}}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad \xrightarrow{(I.25),(I.28)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial z} - \frac{1}{2} [(m_{xx,xy} + m_{yx,yy} + m_{xz,zy}) - (m_{xy,xx} + m_{yy,jx} + m_{zy,zx})] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} - \frac{1}{2} (m_{xx,xy} - m_{yy,jx}) = 0 \quad \xrightarrow{(I.18),(I.20),(I.21)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (G\alpha y) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x \partial y} (4G\ell^2(1+\eta)\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (-2G\ell^2(1+\eta)\alpha) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Παρατηρούμε επομένως ότι και οι τρεις συνθήκες ισορροπίας του προβλήματος ικανοποιούνται εκ ταυτότητας και άρα απομένει να ελέγξουμε μόνο τις συνοριακές συνθήκες αυτού.

Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της στρέψης ράβδων πορώδους υλικού κυκλικής διατομής σύμφωνα με τη θεωρία του Koiter είναι οι εξής :

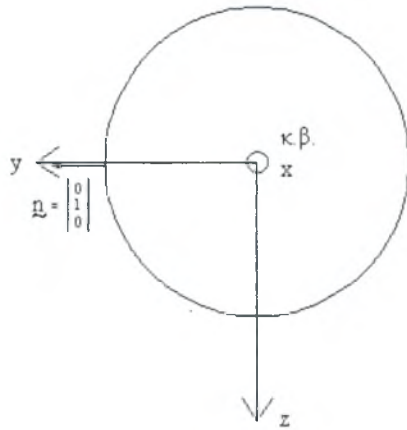
$$\textcircled{1} \quad \bar{t}_\ell = \sigma_{h\ell} n_h + \frac{1}{2} \varepsilon_{hk\ell} (m_{jk,j} - (m_{ji} n_j n_i)_{,k}) n_h \quad (I.29)$$

όπου ως \bar{t} συμβολίζεται ο ελκυστής των τάσεων.

$$\textcircled{2} \quad \bar{q}_h = m_{jh} n_j - (m_{ji} n_j n_i) n_h \quad (I.30)$$

όπου ως \bar{q} συμβολίζεται ο ελκυστής των μικροροπών.

Λαμβάνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της ράβδου στο σημείο $z = 0$ οπότε οι συνιστώσες της τιμής του διαμορφώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα I.3 Μοναδιαίο διάνυσμα \underline{n} που ασκείται κάθετα στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου. Λόγω αξονοσυμμετρίας, αρκεί το παρόν \underline{n} .

Χάριν ευκολίας θα μορφώσουμε αρχικά τα αθροίσματα τα οποία εσωκλείονται και στις δύο παραπάνω σχέσεις (I.29) και (I.30) και άρα θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 m_{ji} n_j n_i &= \cancel{m_{xx} n_x n_x} + \cancel{m_{xy} n_x n_y} + \cancel{m_{xz} n_x n_z} \\
 &+ \cancel{m_{yx} n_y n_x} + m_{yy} n_y n_y + \cancel{m_{yz} n_y n_z} \\
 &+ \cancel{m_{zx} n_z n_x} + \cancel{m_{zy} n_z n_y} + \cancel{m_{zz} n_z n_z} \quad \Rightarrow \\
 m_{ji} n_j n_i &= m_{yy} * 1 * 1 \quad \Rightarrow \\
 m_{ji} n_j n_i &= m_{yy} \tag{I.31}
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (I.22) η παράγωγος της παραπάνω παράστασης θα είναι μηδενική :

$$(m_{ji} n_j n_i)_{,k} = 0$$

Επίσης έχουμε :

$$\begin{aligned}
 m_{jh} n_j &= \cancel{m_{xh} n_x} + m_{yh} n_y + \cancel{m_{zh} n_z} \quad \Rightarrow \\
 m_{jh} n_j &= m_{yh} * 1 \quad \Rightarrow \\
 m_{jh} n_j &= m_{yh} \tag{I.32}
 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (I.30) μέσω των εξισώσεων (I.31) και (I.32) γίνεται :

$$\bar{q}_h = m_{yh} - m_{yy}n_h$$

Για τις διάφορες τιμές του δείκτη h , η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται ως εξής :

Για $h = x$ έχουμε :

$$\bar{q}_x = m_{yx} - \cancel{m_{yy}n_x} \xrightarrow{(I.23)}$$

$$\bar{q}_x = 0 \quad \checkmark$$

Για $h = y$ έχουμε :

$$\bar{q}_y = m_{yy} - m_{yy}n_y \Rightarrow$$

$$\bar{q}_y = 0 \quad \checkmark$$

Για $h = z$ έχουμε :

$$\bar{q}_z = m_{yz} - \cancel{m_{yy}n_z} \xrightarrow{(I.23)}$$

$$\bar{q}_z = 0 \quad \checkmark$$

Υπολογίζουμε επίσης τους παρακάτω όρους που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση της άλλης συνοριακής συνθήκης (I.29) :

$$\sigma_{hl}n_h = \sigma_{xl}n_x + \sigma_{yl}n_y + \sigma_{zl}n_z \Rightarrow$$

$$\sigma_{hl}n_h = \sigma_{yl} * 1 \Rightarrow$$

$$\sigma_{hl}n_h = \sigma_{yl} \quad (I.33)$$

Επίσης $m_{jk,j} = m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}$ από όπου συνεπάγεται :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{hkl} m_{jk,j} n_h &= \varepsilon_{xkl} (\cancel{m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}}) n_x \\ &+ \varepsilon_{ykl} (m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}) n_y \\ &+ \varepsilon_{zkl} (\cancel{m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}}) n_z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{hkl} m_{jk,j} n_h = \varepsilon_{ykl} (m_{xk,x} + m_{yk,y} + m_{zk,z}) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{hkl} m_{jk,j} n_h = \varepsilon_{yx\ell} (m_{xx,x} + m_{yx,y} + m_{zx,z}) + \varepsilon_{yy\ell} (m_{xy,x} + m_{yy,y} + m_{zy,z}) + \varepsilon_{yz\ell} (m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z}) \quad (I.34)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη συνοριακή συνθήκη (I.29) τις εξισώσεις (I.33) και (I.34) και λαμβάνοντας τις διάφορες τιμές για τον δείκτη ℓ θα έχουμε :

Για $\underline{\ell = x}$ έχουμε :

$$\bar{t}_x = \sigma_{yx} + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{yxx} (m_{xx,x} + m_{yx,y} + m_{zx,z}) + \varepsilon_{yxx} (m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z}) \right] \xrightarrow{(I.16)}$$

$$\bar{t}_x = -G\alpha z$$

Θεωρώντας όμως ότι το $z = 0$ σύμφωνα με την αρχική μας παραδοχή ότι το μοναδιαίο διάνυσμα \underline{n} ασκείται κάθετα στην κυκλική διατομή στο σημείο $z = 0$, η παραπάνω παράσταση γίνεται:

$$\bar{t}_x = 0 \quad \checkmark$$

Για $\underline{\ell = y}$ έχουμε :

$$\bar{t}_y = \sigma_{yy} + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{yyx} (m_{xx,x} + m_{yx,y} + m_{zx,z}) + \varepsilon_{yyx} (m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z}) \right] \Rightarrow$$

$$\bar{t}_y = 0 \quad \checkmark$$

Για $\underline{\ell = z}$ έχουμε :

$$\bar{t}_z = \sigma_{yz} + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{yzz} (m_{xx,x} + m_{yx,y} + m_{zx,z}) + \varepsilon_{yzz} (m_{xz,x} + m_{yz,y} + m_{zz,z}) \right] \xrightarrow{(I.17)}$$

$$\bar{t}_z = 0 \quad \checkmark$$

Παρατηρούμε επομένως πως και οι δύο συνοριακές συνθήκες (I.29),(I.30) ικανοποιούνται εκ ταυτότητος για όλες τις τιμές των επιμέρους δεικτών.

- [1] Mindlin, R. D. (1964) Micro-structure in linear elasticity, Arch. Ratl. Mech. Anal. 16, 51-78.
- [2] Ru, C. Q. and Aifantis, E. C. (1993) A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity, Acta Mech. 101, 59-68.
- [3] Koiter, W. T. (1964) Couple stresses in the theory of elasticity, I and II, Proc. K. Ned. A Kad. Wet. B67, 17-44.
- [4] Nakamura, S. and Lakes, R. S.(1995) Finite element analysis of Saint-Venant and effects in micropolar elastic solids, Eng. Comput. 12, 571-587.
- [5] Sokolnikoff, I. S., Mathematical Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill, 1956.
- [6] Leone Corradi dell' Acqua, Meccanica delle strutture, Mc Graw-Hill, Milan, 1992.
- [7] Παπαγεωργοπούλου Αναστασία-Αθηνά, Θεωρία Στρέψης με Ελαστικότητα Βαθμίδας και Εφαρμογές σε Λεπτότοιχες Διατομές και στο DNA, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2008.
- [8] Gianna Karoulos, A.E., Amanatidou, E. and Aravas, N. (2006) A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle, Int. J. Solids Structures 43, 3875-3894.
- [9] Berglund, K. (1977) Generalization of Saint-Venant's principle to micropolar continua, Arch. Ratl. Mech. Anal. 64, 317-326.