

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ  
ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ, ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ  
ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ**

υπό

**Δημόπουλου Δημητρίου**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6353/1  
Ημερ. Εισ.: 27-06-2008  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2008  
ΔΗΜ

Copyright © 2008 Δημόπουλος Δημήτριος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Βλάχος Νικόλαος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γραμμένος Θεοφάνης  
Διδάσκων, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το Θεό που με αξίωσε να φτάσω στο σημείο να ολοκληρώσω τις βασικές σπουδές μου και στάθηκε νοερά δίπλα μου σε κάθε μέρα της ζωής μου. Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση για την επιστημονική καθοδήγησή του και για την υπομονή και επιμονή που υπέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής Καθηγητή κ. Νικόλαο Βλάχο και Δρ. Θεοφάνη Γραμμένο για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ακολούθως να ευχαριστήσω τους γονείς μου Απόστολο και Θεανώ στους οποίους είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων καθώς χωρίς τη δική τους συνεισφορά θα ήταν αδύνατο να ολοκληρώσω τις σπουδές μου όπως επίσης και για όλους τους αγώνες που έκαναν για να με σπουδάσουν. Εν συνεχεία να ευχαριστήσω τη σύντροφό μου Σοφία για την κατανόησή της και την ψυχική ενδυνάμωση που μου προσέφερε σε όλη σχεδόν τη διάρκεια των σπουδών μου. Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την αδερφή μου Θεοδοσία για τη συμπαράστασή της και τους φίλους μου Λουκά, Δημήτρη, Διαμαντή και Χρυσόστομο για όλες τις αξέχαστες στιγμές που περάσαμε ως συμφοιτητές.

Αφιερώνω αυτή την εργασία σε όλους τους δικούς μου ανθρώπους.

Δημόπουλος Δημήτριος



# ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ, ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2008

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

## Περίληψη

Ένα από τα κύρια τεχνικά συστήματα όπου βρίσκει εφαρμογές η μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ) αποτελεί η ροή υγρών μετάλλων στον μανδύα αντιδραστήρων πυρηνικής σύντηξης υπό την παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Τα υγρά μέταλλα χρησιμοποιούνται κυρίως για να παράγουν τρίτιο, το οποίο τροφοδοτεί με καύσιμο τον αντιδραστήρα. Σε αρκετές σχεδιαστικές προτάσεις για την λειτουργία του μανδύα προβλέπονται διατάξεις γεωμετρίας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου για την μεταφορά των υγρών μετάλλων.

Σε συνδυασμό με την παραγωγή θερμότητας λόγω των νετρονίων που ακτινοβολούνται από τον πυρήνα του αντιδραστήρα δημιουργούνται ζώνες ελεύθερης συναγωγής στους αγωγούς που χρειάζεται να μελετηθούν ώστε να προβλεφθεί η συμπεριφορά τους θερμικά (αποφυγή υπέρμετρα υψηλών θερμοκρασιών και κατάλληλη απαγωγή και χρήση της παραγόμενης θερμικής ενέργειας), μαζικά (εύρυθμη μεταφορά του παραγόμενου τριτίου προς τον πυρήνα) αλλά και υδραυλικά, με την έννοια της ελαχιστοποίησης της πτώσης πίεσης. Σε αυτό το ερευνητικό πλαίσιο εντάσσεται η παρούσα διπλωματική εργασία.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει επεκταθεί (βλ. N. A. Pelekasis (2006)) δισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε τετραγωνική κοιλότητα με ελεύθερη συναγωγή παρουσία ισχυρού, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής



πηγής θερμότητας, ώστε να καλυφθούν τρισδιάστατες διαταραχές που εισάγουμε στο σύστημα. Οι λύσεις μόνιμης κατάστασης που προκύπτουν για ελεύθερη συναγωγή σε δισδιάστατη κοιλότητα χρησιμοποιούνται ως βασική λύση.

Επιπλέον, μελετήσαμε την περίπτωση ροής υγρού μετάλλου σε ορθογώνιο αγωγό με εξαναγκασμένη συναγωγή παρουσία κάθετου στη ροή μαγνητικού πεδίου θεωρώντας πλήρως αναπτυγμένη ροή στην αξονική διεύθυνση του προβλήματος και λάβαμε υπόψη μας την οιονεί δισδιάστατη ροή υγρού μετάλλου σε ορθογώνιο αγωγό με ελεύθερη συναγωγή παρουσία ισχυρού, ομογενούς μαγνητικού πεδίου και απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ βαθμίδα θερμοκρασίας θεωρείται παράλληλα στη δύναμη της βαρύτητας. Εν συνεχεία μελετήσαμε την γραμμική ανάλυση ευστάθειας που εφάρμοσαν οι S. Xin & P. Le Quere (2001) σε αγωγό ορθογωνικής διατομής απουσία μαγνητικού πεδίου, όπου και προσπαθήσαμε με κατάλληλη τροποποίηση του κώδικα που διαθέτουμε να αναπαράγουμε τα αποτελέσματα που εξέδωσαν.

Στο πρώτο κεφάλαιο διακρίνουμε τις σχεδιαστικές επιλογές σε αντιδραστήρα εξετάζοντας τις περιπτώσεις ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη και εξαναγκασμένη συναγωγή, ενώ παράλληλα επισημαίνουμε την επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε προβλήματα υδροδυναμικής. Στο δεύτερο κεφάλαιο καταστρώνουμε τα προαναφερθέντα προβλήματα εξετάζοντας τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες που τα περιγράφουν, ενώ επιπλέον εφαρμόσαμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας σε τρισδιάστατες διαταραχές, στο πρόβλημα ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων τύπου Galerkin στις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια επίλυσης των προβλημάτων που εξετάσαμε και εν συνεχεία στο τέταρτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα υπολογιστικά αποτελέσματα μέσω επιλεγμένων διαγραμμάτων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί κατά τη διάρκεια της παρούσης εργασίας και επιπρόσθετα προτείνουμε τρόπους επέκτασης και βελτίωσής της. Εν συντομία αναφέρουμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες από κάποια τιμή του κυματάριθμου και πέρα. Επιπλέον, καθώς ο κυματάριθμος  $k$  αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr μειώνεται χωρίς να βρεθεί ελάχιστη τιμή του  $Gr_{Cr}$ . Στο τέλος έχουμε επισυνάψει τις βιβλιογραφικές αναφορές που έχουν χρησιμοποιηθεί καθ' όλη την έκταση της διπλωματικής εργασίας.



# Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μαγνητοϋδροδυναμική	1
1.2	Σχεδιαστικές επιλογές για αντιδραστήρα σε ροή υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη και ελεύθερη συναγωγή	8
1.3	Επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε κλασικά προβλήματα υδροδυναμικής	16
1.4	Αρχές στάσιμων και οδοντών κυμάτων	20
2	Εισαγωγή	23
2.1	Μορφοποίηση ροής υγρού μετάλλου ελεύθερης συναγωγής σε μόνιμη κατάσταση με θερμοκρασιακό πεδίο κάθετο στη δύναμη της βαρύτητας	23
2.1.1	Συνοριακές Συνθήκες	26
2.2	Ελεύθερη συναγωγή υγρού μετάλλου με βαθμίδα θερμοκρασίας παράλληλα στη δύναμη βαρύτητας.	29
2.3	Μορφοποίηση ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής	33
2.3.1	Συνοριακές Συνθήκες	36
2.4	Γραμμική ανάλυση ευστάθειας στο πρόβλημα ροής υγρού μετάλλου σε ελεύθερη συναγωγή όπου η κλίση του θερμοκρασιακού πεδίου είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας	38
3	Αριθμητική Ανάλυση	42
3.1	Αριθμητική μεθοδολογία προβλήματος μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή	42
3.2	Αριθμητική μεθοδολογία μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή	48
3.3	Αριθμητική μεθοδολογία στην ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή	52
4	Αποτελέσματα	57
4.1	Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή	57
4.2	Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής	66
4.3	Αποτελέσματα προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή	78
5	Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	81
	Βιβλιογραφία	85

# I) Εισαγωγή

## 1.1 Μαγνητοϋδροδυναμική

Η Μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ ή MHD MagnetoHydroDynamics) αποτελεί κλάδο της Φυσικής που εξετάζει την μακροσκοπική αλληλεπίδραση (macroscopic interaction) των ηλεκτρικά φορτισμένων ρευστών με ένα μαγνητικό πεδίο (magnetic field).

Σύμφωνα με τις αρχές της μαγνητοϋδροδυναμικής παράγεται ρεύμα, όταν ένα μαγνητικό πεδίο εφαρμοστεί κατά διεύθυνση κάθετη προς τη ροή ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού. Στην περίπτωση αυτή ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει το αγώγιμο ρευστό με διεύθυνση κάθετη τόσο ως προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου όσο και ως προς τη ροή του ρευστού.

Η ΜΥΔ περιγράφει τη μεικτή περιοχή που συνδυάζει, την κλασσική ρευστομηχανική και την ηλεκτροδυναμική. Αρχικά εφαρμοζόταν σε προβλήματα αστροφυσικής και γεωφυσικής, όπου και σήμερα συνεχίζει να έχει κύριο ρόλο, αλλά βρίσκει εφαρμογή στον τομέα της πυρηνικής σύντηξης.

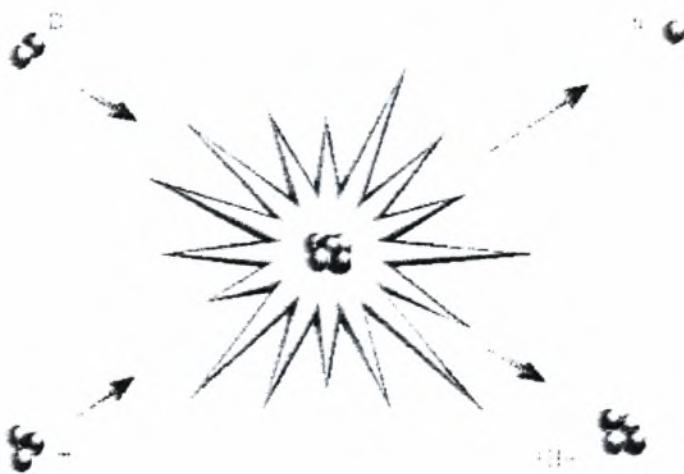
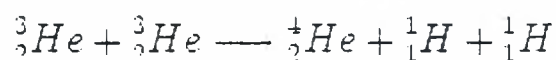
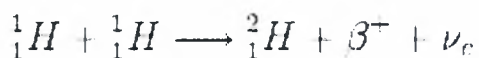
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε σχετικά με τη σύντηξη ότι αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη μελλοντική ενεργειακή λύση, χαρακτηριστικό της οποίας θα είναι τα μεγάλα ενεργειακά αποθέματα ενώ παράλληλα δεν θα υπάρχουν δυσμενείς συνέπειες στο περιβάλλον.

Πυρηνική σύντηξη (συν + τήξη) ονομάζεται η συνένωση ελαφρών πυρήνων με ταυτόχρονη απελευθέρωση ενέργειας.

Η ενέργεια που απελευθερώνεται οφείλεται στο ότι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο στα προϊόντα της σύντηξης είναι μικρότερη από το άθροισμα των ενεργειών σύνδεσης που χαρακτηρίζει κάθε αντιδρών συστατικό της σύντηξης. Κατ' αυτόν τον τρόπο, με τη δημιουργία των προϊόντων στη διαδικασία της σύντηξης υπάρχει ένα "περίσσειμα" ενέργειας, που οφείλεται στη διαφορά των ενεργειών σύνδεσης, και αυτή απελευθερώνεται στο περιβάλλον με μορφή κινητικής ενέργειας στα παραπροϊόντα (πχ σωματίδια β ή νετρίνα ηλεκτρονίου) και με τη μορφή ακτινοβολίας γάμμα.

Πυρηνική σύντηξη μπορούν να δημιουργήσουν μόνον ελαφρά στοιχεία, όπως τα ισότοπα του υδρογόνου δευτέριο και τρίτιο. Με την θέρμανση αερίου υδρογόνου σε υψηλές θερμοκρασίες προκαλούνται συγκρούσεις των πυρήνων των ατόμων του υδρογόνου, με μεγάλη ενέργεια που τελικά αυτοί συνενώνονται δημιουργώντας σταδιακά πυρήνες ενός άλλου στοιχείου (μεταστοιχείωση), του ηλίου, εκλύοντας ταυτόχρονα θερμική ενέργεια και κινητική ενέργεια λόγω των νετρονίων.

Οι πυρηνικές αντιδράσεις που περιγράφουν την εξώθερμη σύντηξη υδρογόνου, αρχικά σε δευτέριο και τελικά σε ήλιο είναι οι ακόλουθες:



Σχήμα 1: Αντίδραση του δευτερίου με τρίτιο

όπου:

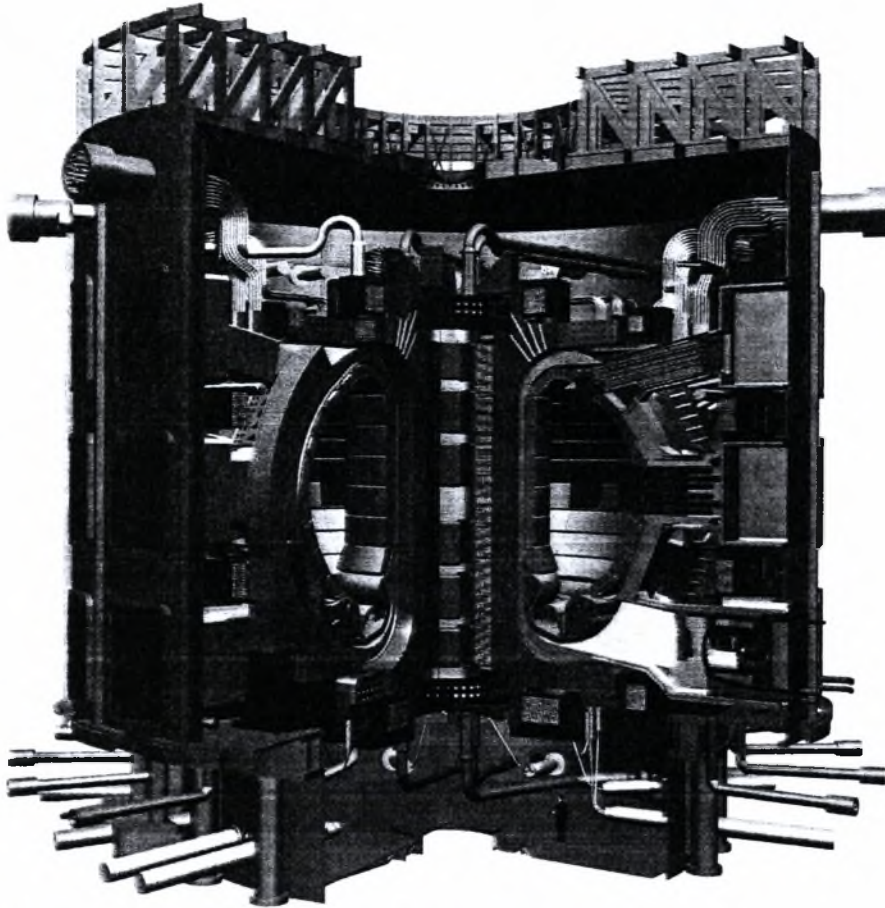
- ${}^1_1\text{H}$  ο πυρήνας του υδρογόνου,
- ${}^2_1\text{H}$  ο πυρήνας του δευτερίου,
- ${}^3_2\text{He}$  το ελαφρύ ισότοπο 3/2 του ηλίου

- ${}^4_2\text{He}$  το ισότοπο 4/2 του ηλίου που συναντάμε και πιο συχνά στο περιβάλλον,
- $\beta^+$  είναι ένα σωματίδιο β (εν προκειμένω ποζιτρόνιο),
- $\nu_e$  είναι το νεutrίνο ηλεκτρονίου,
- $\gamma$  είναι η ακτινοβολία γάμμα.

Τα τελικά προϊόντα των αντιδράσεων είναι ήλιο και νετρόνια. Η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται, από τη σύντηξη ενός γραμμαρίου μίγματος 50% σε δευτέριο και τρίτιο αντίστοιχα, είναι 94000 kWh, δηλαδή ποσότητα ενέργειας που είναι πολλαπλάσια κατά 10,000,000 φορές από την ποσότητα ενέργειας που λαμβάνουμε από καύση ενός γραμμαρίου πετρελαίου.

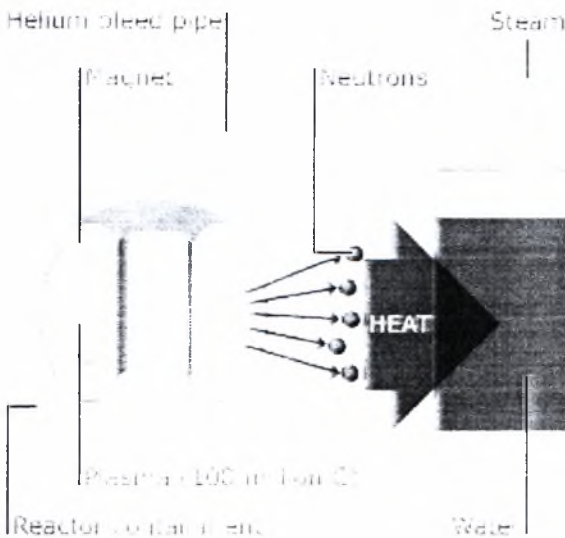
Αντιδράσεις σύντηξης εξελίσσονται συνέχεια στον Ήλιο, καθώς και σε θερμοπυρηνικούς αντιδραστήρες.

Εν συντομία τονίζουμε ότι θερμοπυρηνικός αντιδραστήρας ονομάζεται η διάταξη εκείνη εντός της οποίας παράγεται θερμική ενέργεια μέσω ελεγχόμενης πυρηνικής σύντηξης. Τα αντιδρώντα και τα προϊόντα της αντίδρασης είναι σε μορφή ιονισμένου αερίου που ονομάζεται πλάσμα. Θεωρείται ότι οι θερμοπυρηνικοί αντιδραστήρες βρίσκονται ακόμη σε πειραματικό στάδιο. Το γνωστότερο είδος τέτοιου αντιδραστήρα είναι τα Τόκαμακ (ΤΟΚΑΜΑΚ) όπου τοροειδές μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιείται για τη συγκράτηση του πλάσματος στο εσωτερικό του. Τέτοιοι αντιδραστήρες υπάρχουν αρκετοί διεθνώς. Στην Ευρώπη και συγκεκριμένα στο Cadarache της Γαλλίας το 2008 θα αρχίσει η κατασκευή του αντιδραστήρα ITER. Το έργο αυτό θεωρείται σημαντικό βήμα όσον αφορά τη δημιουργία πρωτότυπων αντιδραστήρων σύντηξης για ασφαλείς, φιλικούς προς το περιβάλλον και οικονομικά βιώσιμους σταθμούς ηλεκτροπαραγωγής.



Σχήμα 2: Σχηματικό διάγραμμα του αντιδραστήρα ITER.

**Thermonuclear reactor**



Σχήμα 3: Συνοπτική αρχή λειτουργίας του θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα

Η λειτουργία ενός θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα στηρίζεται στο γεγονός ότι ισχυρό ηλεκτρικό ρεύμα, που διοχετεύεται, θερμαίνει το εντός του αντιδραστήρα



αέριο υδρογόνο, ενώ ισχυρότατα μαγνητικά πεδία αποτρέπουν την πρόσκρουσή του στα τοιχώματα της σωληνοειδούς διάταξης. Τα εκλυόμενα νετρόνια διέρχονται μέσω του μανδύα που περιβάλλει τον αντιδραστήρα όπου θερμαίνουν το νερό που κυκλοφορεί για την παραγωγή ατμού. Με αυτό τον τρόπο έχουν μεν επιτευχθεί αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης αλλά όχι σε τέτοιο βαθμό που να μπορούν να προσφέρουν εκμεταλλεύσιμο ποσό ενέργειας σε σταθερή βάση. Στον μανδύα κυκλοφορεί παράλληλα υγρό λίθιο το οποίο χρησιμοποιείται για την αναπαραγωγή του τριτίου που είναι ένα από τα αντιδρώντα της πυρηνικής σύντηξης.

Όπως είναι φανερό, στον μανδύα του αντιδραστήρα λαμβάνουν χώρα φαινόμενα μεταφορά θερμότητας, μάζας και ορμής υπό την παρουσία ισχυρότατου μαγνητικού πεδίου. Αποτελεί λοιπόν σημαντική ερευνητική προτεραιότητα να μελετηθούν κλασικά προβλήματα ροής και υδροδυναμικής ευστάθειας υπό το πρίσμα των μαγνητοϋδροδυναμικών αλληλεπιδράσεων. Η κατανόηση τέτοιων προβλημάτων αναμένεται να συμβάλλει τόσο στον βέλτιστο σχεδιασμό αντιδραστήρων σύντηξης αλλά και γενικότερα στην περαιτέρω ανάπτυξη υπάρχουσών εφαρμογών της μαγνητοϋδροδυναμικής.

Η αξιοποίηση των φαινομένων της ΜΥΔ ροής σε τεχνολογικές εφαρμογές μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες οι οποίες παρατίθενται στον Πίνακα 1.

ΜΥΔ σε τεχνικά συστήματα	ΜΥΔ για βελτιστοποίηση διαδικασιών
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Αντλίες ΜΥΔ βασισμένες στην αγωγιμότητα</li> <li>❖ ΜΥΔ αναδευτήρες υγρών μετάλλων βασισμένοι στο μεταβαλλόμενο επιβληθέν μαγνητικό πεδίο</li> <li>❖ Συγκόλληση πλάσματος</li> <li>❖ Συγκόλληση με δέσμες ηλεκτρονίων</li> <li>❖ Επαγωγικοί φούρνοι</li> <li>❖ ΜΥΔ γεννήτριες</li> <li>❖ Περιορισμός του πλάσματος σε αντιδραστήρες σύντηξης</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Έλεγχος μεταφοράς με ΜΥΔ σε <ul style="list-style-type: none"> <li>- συσκευές ανάπτυξης κρυστάλλων</li> <li>- καλύμματα σύντηξης</li> <li>- γαλβανικά λουτρά</li> <li>- ηλεκτρομαγνητική επίπλευση</li> <li>- ομοιογενοποίηση με ΜΥΔ αναδευτήρες.</li> </ul> </li> <li>❖ Τήξη με μετεωρισμό</li> <li>❖ Κατεργασία επιφανειών</li> </ul>

Πίνακας 1: Πεδία εφαρμογών της ΜΥΔ



Οι εξισώσεις που διέπουν τη ΜΥΔ είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes, η αρχή διατήρησης μάζας, οι εξισώσεις του Maxwell και ο νόμος του Ohm. Παρουσιάζουμε τις εξισώσεις αυτές σε διαφορική μορφή στο διεθνές σύστημα SI.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla}) \bar{U} = -(1/\rho) \bar{\nabla} p + g + \nu (\nabla^2 \bar{U}) \quad (1.1)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \quad (1.2)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\rho \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \quad (1.4)$$

$$\bar{j} = \sigma (-\bar{\nabla} \phi + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (1.5)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις πρέπει να επισυνάψουμε την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής, η οποία πηγάζει από τον νόμο του Ohm (για κινούμενο ρευστό βλ. εξίσωση 1.5), τον νόμο του Faraday (βλ. εξίσωση 1.2) και τον νόμο του Ampere (βλ. εξίσωση 1.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{B} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla}) \bar{B} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \bar{B} + (\bar{B} \cdot \bar{\nabla}) \bar{U} \quad (1.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση, η οποία είναι μερική διαφορική εξίσωση, ισχύει στην περιοχή που καταλαμβάνεται από το ρευστό. Σημειώνουμε ότι ο όρος  $\mu_0$  αποτελεί το μαγνητικό ανάλογο της διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon_0$  του κενού χώρου,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\sigma$  είναι η πυκνότητα, το κινηματικό ιξώδες και η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού, αντίστοιχα, ενώ  $R_m$  είναι ο μαγνητικός αριθμός Reynolds και ορίζεται ως εξής:  $R_m = \sigma \mu_0 \nu$ , όπου ο όρος  $(\sigma \mu_0)^{-1}$  δηλώνει την μαγνητική διαχυτότητα του λιθίου και  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Η δύναμη Lorentz ( $\vec{j} \times \vec{B}$ ) κατέχει δεσπόζοντα ρόλο στις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και συνδυάζει τις μηχανικές και ηλεκτροδυναμικές καταστάσεις του συστήματος. Στη φυσική η δύναμη Lorentz είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το σωματίδιο θα αντιληφθεί τη δύναμη λόγω της ύπαρξης του ηλεκτρικού πεδίου, και εξ αιτίας του ρεύματος παρουσία μαγνητικού πεδίου. Ο συνδυασμός τους δίνει την δύναμη Lorentz που ισχύει για σημειακά φορτία στο SI:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (1.7)$$

όπου

- $\vec{F}$  είναι η δύναμη Lorentz,
- $\vec{E}$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο,
- $\vec{B}$  είναι το μαγνητικό πεδίο,
- $q$  είναι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο του σωματιδίου,
- $\vec{U}$  είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.

Κατά συνέπεια, ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο θα επιταχυνθεί στην ίδια διεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$ , αλλά η τροχιά του θα καμπυλωθεί κάθετα και στο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  και στο διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας  $\mathbf{U}$ , σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η δύναμη Lorentz αποτελεί λύση στη διαφορική μορφή του νόμου του Faraday (βλ. εξίσωση 1.2). Ο συγκεκριμένος νόμος χρησιμοποιείται αντί της δύναμης Lorentz στις εξισώσεις του Maxwell. Ο νόμος του Faraday και η εν λόγω δύναμη έχουν την ίδια φυσική ερμηνεία.

Με εφαρμογή του νόμου του Ampere (βλ. εξίσωση 1.3) στην έκφραση της δύναμης Lorentz λαμβάνουμε, έχοντας προηγηθεί οι πράξεις διαφορικού λογισμού :

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu} \vec{B} \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla \left( \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \right) + \frac{1}{\mu} \nabla \bullet (\vec{B}\vec{B}) \quad (1.8)$$

## 1.2 Σχεδιαστικές επιλογές για αντιδραστήρα σε ροή υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη και ελεύθερη συναγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετάται η ροή υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Εξετάζεται η περίπτωση φυσικής συναγωγής, κυρίως, αλλά και εξαναγκασμένης συναγωγής.

Η ροή του υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή σε αντιδραστήρες σύντηξης συνδέεται κυρίως με σχεδιαστικές επιλογές όπου το υγρό λίθιο χρησιμοποιείται για ψύξη αλλά και για την παραγωγή τριτίου (self cooled reactors). Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται μείωση της πτώσης πίεσης κατά μήκος των αγωγών κυκλοφορίας λιθίου.

Η πτώση πίεσης στους αγωγούς κυκλοφορίας λιθίου στον αντιδραστήρα οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις Lorentz, οι οποίες ασκούνται στο κινούμενο ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό, το οποίο έρχεται σε επαφή με το μαγνητικό πεδίο μέσα στον αγωγό. Ιδανική ηλεκτρική μόνωση στο τοίχωμα του αγωγού θα εμπόδιζε τα ρεύματα να διέλθουν το υψηλής αγωγιμότητας τοίχωμα και θα ελαχιστοποιούσε το ρεύμα στο ρευστό και κατ' επέκταση την πτώση πίεσης λόγω της δύναμης Lorentz. Όμως τα τοιχώματα συνήθως έχουν κάποια αγωγιμότητα και είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί η εμφάνιση εστιών ανακυκλοφορίας και η συνεπαγόμενη πτώση πίεσης σαν αποτέλεσμα των ασταθειών που εμφανίζονται.

Όσον αφορά τις MHD ροές σε σημεία διεύρυνσης και στενώσεις, γνωρίζουμε ότι ένα αδιάστατο μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι ο αριθμός Hartmann:

$$Ha = BL \sqrt{\sigma/\eta}$$

όπου :

- B είναι το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής
- L είναι το χαρακτηριστικό μήκος
- $\sigma$  είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα
- $\eta$  είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού

Για μεγάλους αριθμούς Hartmann (όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές, οι οποίες αφορούν τη σύντηξη και λαμβάνει τιμές από  $10^3 - 3 \times 10^4$ ), η κύρια ισορροπία δυνάμεων επέρχεται ανάμεσα σε πίεση και δυνάμεις Lorentz, ενώ οι δυνάμεις

ιζώδους συγκρατώνται από σχετικά λεπτό πάχος συνοριακού στρώματος κατά μήκος των τοιχωμάτων του αγωγού.

Κοντά σε σημείο διεύρυνσης επέρχεται μια έντονη αλληλεπίδραση ανάμεσα στην βασική ροή, η οποία κινείται προς την κατεύθυνση του κυρίως ρεύματος παράλληλα με τον άξονα του αγωγού όπου αμελούμε την εσωτερική τριβή, και στις δευτερεύουσες που αναπτύσσονται κοντά στην διεύρυνση.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση της απότομης διεύρυνσης αναπτύσσεται ένα εσωτερικό στρώμα ανακυκλοφορίας κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών. Το συγκεκριμένο στρώμα έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει ένα σημαντικό ποσό της συνολικής ροής με κατεύθυνση κάθετη στον άξονα του αγωγού. Η τρισδιάστατη ροή κοντά στο σημείο διεύρυνσης οδηγεί σε επιπλέον ηλεκτρικά ρεύματα, τα οποία ουσιαστικά επιφέρουν υψηλότερη πτώση πίεσης.

Από πειραματικά αποτελέσματα έχει διαπιστωθεί η σχέση που εκφράζει την παράμετρο αγωγιμότητας στο τοίχωμα :

$$c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L} \quad (1.9)$$

όπου :

- $\sigma_w$  είναι η αγωγιμότητα του τοιχώματος
- $t_w$  είναι το πάχος τοιχώματος

Σχετικά αποτελέσματα έχουν εκδοθεί από τον Buehler (2003) και επιπρόσθετες λεπτομέρειες περιγράφονται στην Τεχνική Αναφορά FZKA 6904. Τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει μέχρι στιγμής βασίζονται σε ασυμπτωτική προσέγγιση, όπου αμελείται η αδράνεια, και αριθμητική προσέγγιση, όπου μοντελοποιείται η ροή κοντά στις στοιβάδες Hartmann και στις παράλληλες στοιβάδες.

Όταν η αναπαραγωγή τριτίου και η απαγωγή θερμότητας από τον αντιδραστήρα γίνονται σε διαφορετικά κομμάτια του μανδύα η ελεύθερη συναγωγή γίνεται πιο σημαντική. Επί του παρόντος υπάρχουν δύο σχεδιαστικές επιλογές προς αυτήν την κατεύθυνση.

Κατά το παρελθόν έχουν θεωρηθεί δύο υποψήφιοι αντιδραστήρες για την ψύξη του λιθίου. Ένας είναι ο ευρωπαϊκός αντιδραστήρας που ψύχει το λίθιο με χρήση νερού (*Water Cooled Lithium Lead blanket*) και έχει μελετηθεί εκτενώς από τους Giancarli et al. (2002) και Fuehterer et al. (2000). Στο συγκεκριμένο αντιδραστήρα το

ψυκτικό υγρό περιορίζεται σε επιμήκη, κάθετα και ορθογώνια τμήματα. παρόμοιας διάταξης με τη γεωμετρία που μελετούμε.

Η θερμότητα απομακρύνεται από τον αντιδραστήρα μέσω της ροής του νερού σε σωλήνες ψύξης οι οποίοι εισάγονται στα ορθογώνια τμήματα. Από θερμικής άποψης, ο μανδύας WCLL έχει εσωτερικές πηγές θερμότητας εξαιτίας της ογκομετρικής θέρμανσης και τοπικών σημείων απορρόφησης θερμότητας στους σωλήνες ψύξης. Η διάταξη αυτή δεν οδηγεί σε ομοιόμορφες θερμοκρασίες σε οριζόντιες διατομές, οι οποίοι επιφέρουν με τη σειρά τους συναγωγή λόγω άνωσης.

Ο δεύτερος αντιδραστήρας χαρακτηρίζεται από την ψύξη του λιθίου με χρήση ηλίου (*Helium Cooled Lithium Lead blanket*). Ο εν λόγω αντιδραστήρας αποτελείται κυρίως από ορθογώνια τμήματα, στα οποία ρέει το υγρό μέταλλο, τα τοιχώματα των οποίων ψύχονται εσωτερικά από τη ροή του ηλίου σε υψηλή πίεση.

Λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία και τις θερμικές συνθηκές επισημαίνουμε ότι ο συγκεκριμένος σχεδιασμός συμβαδίζει ιδανικά με γεωμετρίες στις οποίες απουσιάζουν εσωτερικά εμπόδια στα ορθογώνια τμήματα. ενώ αντίθετα στον αντιδραστήρα WCLL είναι υπαρκτά τέτοιου είδους εμπόδια. Η εσωτερικά εκλυόμενη θερμότητα μεταφέρεται κυρίως μέσω θερμικής διάχυσης στα τοιχώματα του αγωγού, όπου απομακρύνεται από το ήλιο.

Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας, όλοι οι αντιδραστήρες υγρού μετάλλου εκτίθενται σε οριζόντιο και ισχυρό μαγνητικό πεδίο, το οποίο περιορίζει το πλάσμα. Παρουσία μαγνητικού πεδίου η ροή ενός ηλεκτρικά αγώγιμου υγρού μετάλλου θα επάγει ηλεκτρικά ρεύματα, τα οποία αλληλεπιδρούν με το μαγνητικό πεδίο. Συνήθως η ηλεκτρομαγνητική αυτή αλληλεπίδραση παρατηρείται σε ισχυρή διακοπή της κίνησης του ρευστού, ιδιαίτερα στην περιοχή της βασικής ροής που καταλαμβάνει σχεδόν ολόκληρο το ορθογώνιο τμήμα.

Ωστόσο, σε κάποιες υποπεριοχές της ροής, ιδιαίτερα στα αποκαλούμενα παράλληλα στρώματα που βρίσκονται κατά μήκος των ηλεκτρικά αγώγιμων τοιχωμάτων και είναι παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση μπορεί να οδηγήσει τη ροή με υψηλές ταχύτητες.

Οι επιφερόμενες ταχύτητες λόγω άνωσης στην περιοχή της βασικής ροής και επιπλέον οι ταχύτητες που καθοδηγούνται στα παράλληλα τοιχώματα είναι ίδιας ή μεγαλύτερης τάξης μεγέθους με τις αντίστοιχες στην περίπτωση της εξαναγκασμένης συναγωγής που απαιτείται για την ασφαλή εξαγωγή του τριτίου.

Από την πλευρά της ροής ελεύθερης συναγωγής, στον HCLL αντιδραστήρα το ρευστό περιορίζεται σε στενά διάκενα ανάμεσα σε παράλληλη ψύξη των πλακών. Οι ταχύτητες που απαιτούνται για την απομάκρυνση του τριτίου είναι τυπικά μικρές έτσι ώστε η άνοση, η οποία προκαλεί τη συναγωγή θερμότητας, να καθίσταται συγκρίσιμη με την ροή του ρευστού σε εξαναγκασμένη συναγωγή.

Η ιδέα της χρήσης υγρών μετάλλων ως υλικό τροφοδοσίας και απομάκρυνσης σημαντικού κλάσματος θερμότητας από ανεξάρτητη ψύξη του ηλίου προτάθηκε από τους Malang et al., (1993). Οι παραπάνω υπέθεσαν ότι μια ηλεκτρικά μονωμένη επικάλυψη, η οποία θα κάλυπτε τα τοιχώματα του αγωγού θα ελαχιστοποιούσε τις MHD απώλειες πίεσης. Από πειράματα που διενεργήθηκαν διαπιστώθηκε ότι η πτώση πίεσης σε HCLL αντιδραστήρα δεν αποτελεί κρίσιμο θέμα.

Επιπλέον έχει δειχθεί από τους Malang & Schleisiek (1994) ότι, ακόμη και με την τεχνολογία που έχει αναπτυχθεί στον τομέα της αγωγιμότητας, η ροή σε κανάλι επιφέρει πτώση πίεσης στον αντιδραστήρα, η οποία παραμένει εξαιτίας σχεδιαστικών περιορισμών.

Σημειωτέον ότι το κανάλι αποτελείται από μονωμένο στρώμα, το οποίο προστατεύεται από το διαβρωτικό υγρό μέταλλο με χρήση λεπτών φύλλων ανοξειδωτού χάλυβα. Τα φύλλα χάλυβα είναι ηλεκτρικά αγωγίμα, αλλά εφόσον παραμένουν λεπτά η πτώση πίεσης διατηρείται σε αποδεκτά επίπεδα.

Σε εφαρμογή στον HCLL αντιδραστήρα έχει θεωρηθεί τρισδιάστατη μαγνητική συναγωγή υπό την επίδραση ισχυρού, οριζόντιου μαγνητικού πεδίου σε ορθογώνιο μέσο, του οποίου τα τοιχώματα είναι ηλεκτρικά αγωγίμα, ενώ ο αριθμός Hartmann λαμβάνει υψηλές τιμές και αμελείται η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή ή ισοδύναμα ο αριθμός Peclet έχει μικρή τιμή.

Οι τιμές της ταχύτητας σε αγωγούς με υψηλή αγωγιμότητα είναι της τάξεως  $v_0 = \beta \rho_0 g \alpha L / B^2$

όπου :

- $\beta$  είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής
- $\rho_0$  είναι η πυκνότητα αναφοράς
- $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας
- $\alpha$  είναι δείκτης έντασης του θερμοκρασιακού πεδίου
- $B$  είναι η μαγνητική επαγωγή



- $L$  είναι το μήκος κύματος, μετρούμενο κατά την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου

Έχει αναπτυχθεί αριθμητικός κώδικας από τους Molokov & Buehler (2003), ο οποίος περιγράφει το παραπάνω μοντέλο. Ο εν λόγω κώδικας είναι αποτελεσματικός για αυθαίρετη θερμοκρασιακή κατανομή που προκύπτει από θέρμανση του πρώτου τοιχώματος και παράλληλα ογκομετρική θέρμανση, ενώ επιπλέον αντιμετωπίζει αυθαίρετες τιμές αγωγιμότητας των τοιχωμάτων.

Ακόμη, δίνει στο χρήστη τη δυνατότητα να αναλύσει και να βελτιώσει τη ροή του ρευστού με ελεύθερη συναγωγή σε ποικίλους σχεδιασμούς αντιδραστήρων.

Έχουν μελετηθεί οι ιδιότητες της ροής ρευστού σε ελεύθερη συναγωγή εφαρμόζοντας διάφορες θερμοκρασιακές κατανομές σε πειράματα που έχουν διενεργηθεί στα εργαστήρια του Forchungszentrum Karlsruhe (FZK).

Τα αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν έδειξαν ότι οι τρισδιάστατες επιδράσεις περιορίζονται σε τρεις έως τέσσερις τιμές χαρακτηριστικών διαστάσεων της διατομής του αγωγού στην κορυφή και στον πυθμένα του αντιδραστήρα.

Η ροή του ρευστού επηρεάζεται από την αγωγιμότητα του τοιχώματος. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό την βελτιστοποίηση της μορφής της ελεύθερης συναγωγής σε διάφορες εφαρμογές.

Αρχικά σε τέτοιου είδους ροές, το δοχείο του υγρού μετάλλου είχε θεωρηθεί ότι διέθετε κατά κάποιο τρόπο τετραγωνική διατομή, γεγονός που παραπέμπει στη γεωμετρία αντιδραστήρα WCLL.

Όμως, μετά την διενέργεια των πειραμάτων ο σχεδιασμός του HCLL μανδύα επικεντρώνεται στα διάκενα, για παράδειγμα σε ορθογώνιες διατομές με μικρή τιμή του λόγου όψης. Το γεγονός αυτό έχει αντίκτυπο στον υπολογισμό των ρευμάτων.

Η αγωγιμότητα του τοιχώματος περιγράφεται από τον λόγο, (βλ. εξίσωση 1.9), όπου :

- $\sigma_w$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του τοιχώματος
- $t$  το πάχος του τοιχώματος

Έχει παρατηρηθεί ότι η ταχύτητα στη βασική ροή προσεγγίζεται με σχέση της μορφής:  $u/v_0 = Ha \cdot x$ , αν τα τοιχώματα είναι μονωμένα, οπότε η αγωγιμότητα του

τοιχώματος  $c = 0$ . Αυξάνοντας την αγωγιμότητα στα τοιχώματα Hartmann, τα οποία είναι κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, η τιμή της ταχύτητας μειώνεται.

Για σχετικά πλατύ αγωγό διαπιστώθηκαν μικρές τιμές της ταχύτητας ή ακόμη και ταχύτητες, οι οποίες ήταν αντίθετες στη ροή, ενώ αντίθετα η κύρια ροή της μάζας του ρευστού μεταφέρθηκε κοντά στο θερμό τοίχωμα ή ισοδύναμα σε αυτό που αποκαλείται πλευρικό στρώμα (side layer).

Στην περίπτωση, όπου ο λόγος των διαστάσεων της διατομής λάβει μικρότερη τιμή από το πάχος του πλευρικού στρώματος, τότε τα πλευρικά στρώματα συγχωνεύονται και παύει να υπάρχει πλέον η βασική ροή.

Οι πρόσφατες αναλύσεις επικεντρώνονται σε διάκενα με αυθαίρετο προσανατολισμό με κατεύθυνση ροής ομόρροπη της βαρύτητας. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την ανάλυση των ροών σε αντιδραστήρες που έχουν πολοειδή θέση.

Επιπλέον, η ανάλυση που διενεργήθηκε σε εργαστήρια του FZK έχει γίνει εκτεταμένη έτσι ώστε να λαμβάνονται υπόψη τρισδιάστατες εφαρμογές, σε περιπτώσεις όπου το διάκενο του υγρού μετάλλου είναι πολύ λεπτό, όταν συγχωνεύονται παράλληλα συνοριακά στρώματα (Molokov et al, 2003).

Εναλλακτική και συγχρόνως βελτιωμένη πρόταση στη θέση αντί του HCLL μανδύα που παρουσιάστηκε προηγουμένως, αποτελεί ο αντιδραστήρας διπλού ψυκτικού υγρού, για τον οποίο έχει προταθεί η χρήση κράματος καρβιδίου-σιλικόνης ως μονωτικό μέσο. Το υλικό αυτό μοιάζει να είναι συμβατό με το υγρό τροφοδοσίας PbLi.

Στις προηγούμενες μελέτες μανδύων συνήθως τα στοιχεία που απαρτίζουν τον μανδύα εκτεινόταν σε όλο το πολοειδές μήκος. Στον πρόσφατο όμως σχεδιασμό ολόκληρος ο μανδύας διαιρείται σε αριθμό μικρότερων υπομονάδων, οι οποίες είναι πιο εύκολα να απομακρυνθούν με τεχνικές απομάκρυνσης.

Επιπλέον, ο μανδύας ασκεί μικρότερες ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κατά τη διάρκεια των διασπάσεων του πλάσματος, ενώ παράλληλα αναπτύσσει σταδιακά μειωμένες θερμικές τάσεις κατά τη λειτουργία του. Το Σχήμα 4 απεικονίζει τον τρόπο διάταξης των υπομονάδων ενός αντιδραστήρα μορφής Tokamak.

Σε σύγκριση με το σχεδιασμό των μανδύων HCLL & WCLL, ο μεγαλύτερος αριθμός υπομονάδων, συνεπάγεται και μείωση του μήκους τους. Κατά συνέπεια αναμένεται η πτώση πίεσης να είναι μικρότερη σε αυτές.

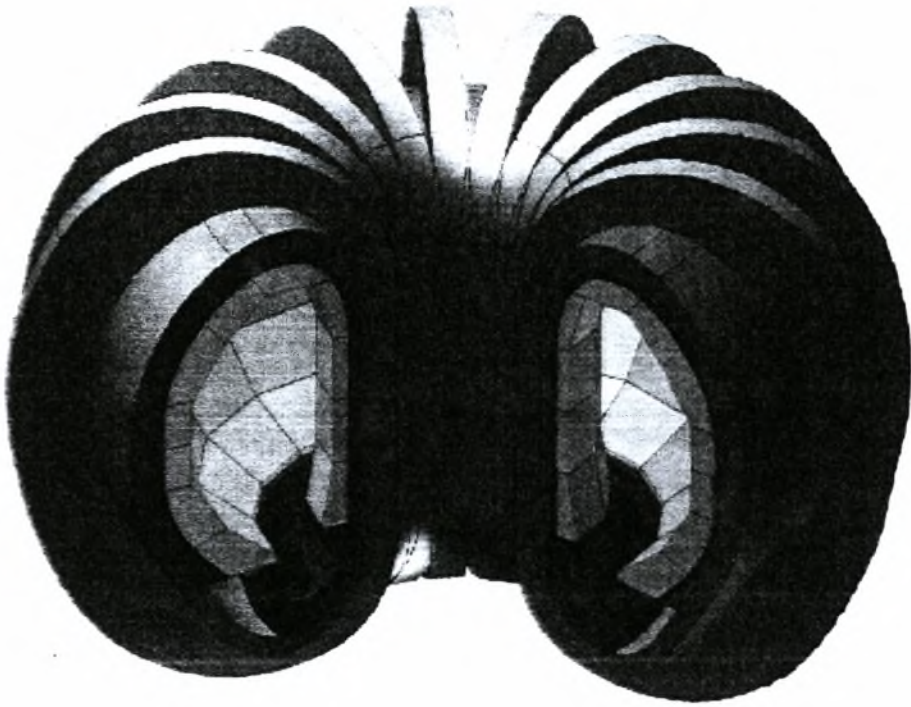
Από την άλλη, ο μεγαλύτερος αριθμός υπομονάδων απαιτεί περισσότερες συνδέσεις στις γραμμές τροφοδοσίας. Οι συνδέσεις αυτές καλούνται σωλήνες

εισόδου και εμφανίζονται πλέον σε μικρότερες διαστάσεις χάρη στο νέο σχεδιασμό, ο οποίος θεωρεί τις γραμμές τροφοδοσίας ως μόνιμες συνιστώσες σε πλήρη λειτουργία, ενώ μόνο οι μικρότερες υπομονάδες θα αντικατασταθούν.

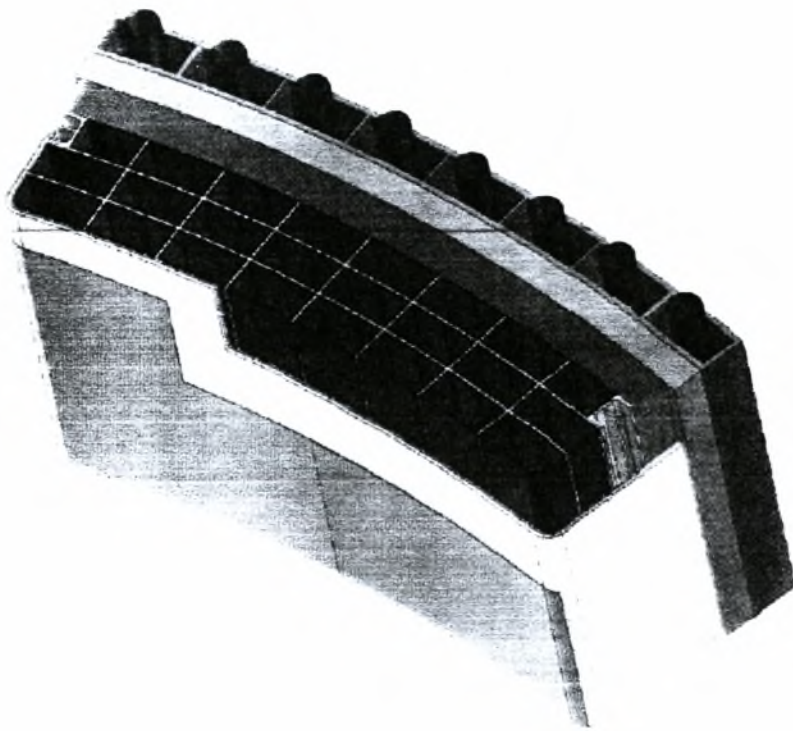
Κάθε υπομονάδα του αντιδραστήρα αποτελείται από αριθμό πολοειδών ορθογώνιων τμημάτων, τα οποία πληρώνονται με το PbLi που λειτουργεί ως υγρό τροφοδοσίας. Όλα τα τοιχώματα του αντιδραστήρα ψύχονται με ήλιο που ρέει σε υψηλή πίεση σε μικρά κανάλια, τα οποία εν συνεχεία ενώνονται στα τοιχώματα.

Η ψύξη των τοιχωμάτων εξασφαλίζει τη θερμοκρασία του τοιχώματος στα επιθυμητά επίπεδα, ακόμη και αν το υγρό τροφοδοσίας βρίσκεται σε υψηλότερες θερμοκρασίες.

Το κύριο ποσό θερμότητας, το οποίο απελευθερώνεται από την πυρηνική ογκομετρική θέρμανση στο υγρό τροφοδοσίας, μεταφέρεται μαζί με τη ροή του υγρού μετάλλου εκτός του αντιδραστήρα με σκοπό την μετατροπή του σε ηλεκτρική ενέργεια.



Σχήμα 4: Οι υπομονάδες του αντιδραστήρα διπλού ψυκτικού υγρού σε διάταξη Tokamak.



Σχήμα 5: Απεικόνιση υπομονάδας του αντιδραστήρα διπλού ψυκτικού υγρού

### 1.3 Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε κλασσικά προβλήματα υδροδυναμικής.

Μία επιπλέον εφαρμογή που προκύπτει με βάση τα παραπάνω, χωρίς κατ'ανάγκη να σχετίζεται με την λειτουργία αντιδραστήρων σύντηξης, αφορά την μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου σε κλασσικά προβλήματα υδροδυναμικής ευστάθειας. Είναι σαφές ότι για τις τεράστιες τιμές του αριθμού  $Ha$  που συναντώνται στα TOKAMAK, τάξεως  $O(10000)$ , η εμφάνιση ασταθειών παρεμποδίζεται. Όμως υπάρχουν εφαρμογές της μαγνητοϋδροδυναμικής σε σχετικά χαμηλότερες τιμές του  $Ha$ ,  $\leq 1000$ , όπου η εμφάνιση ασταθειών αναμένεται να παίξει κεντρικό ρόλο.

Τέτοιες εφαρμογές είναι η ανάπτυξη κρυστάλλων από τήγματα μετάλλων (Munakata & Tanasawa 1990), ο έλεγχος της τύρβης και η ανάμιξη ροών σε μικροκλίμακα με την βοήθεια μαγνητικού πεδίου (Rossi et al. 2006) με στόχο την δημιουργία οριζοντίων δισδιάστατων δομών που αναπτύσσονται παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο κατά το μεγαλύτερο μέρος της διατομής του αγωγού, και η μελέτη διαφόρων πτυχών του φαινομένου dynamo που σχετίζεται με την παραγωγή μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό της Γης (Stieglitz & Muller 2001).

Έτσι τα τελευταία χρόνια υπάρχει αρκετό ενδιαφέρον για την μελέτη κλασσικών υδροδυναμικών προβλημάτων όπως η ροή Taylor-Couette (Willis & Barenghi, 2002) και η μετάβαση σε αγωγό ορθογωνικής ή άλλου είδους διατομής υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου με ιδιαίτερη έμφαση στην συμπεριφορά στο εσωτερικό των στοιβάδων Hartmann και των πλευρικών στρωμάτων που αναπτύσσονται κοντά σε τοιχώματα που είναι κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, (Moresco & Alboussiere, 2004, Lingwood & Alboussiere 1999, Potherat 2007, Ting et al. 1991).

Η υδροδυναμική αποτελεί κλάδο της μηχανικής που εξετάζει την κίνηση των υγρών σε σχέση με τις δυνάμεις που ενεργούν σε αυτά. Βασική προϋπόθεση για τη μελέτη των νόμων της υδροδυναμικής είναι ότι τα υγρά θεωρούνται ασυμπίεστα. Η κίνηση ή ροή ενός υγρού κατά μήκος μιας ορισμένης διαδρομής μπορεί να εμφανίζει μεταβολές της ταχύτητας τόσο τοπικά (μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή σε διάφορα σημεία της μάζας του κινούμενου υγρού), όσο και χρονικά (ένα συγκεκριμένο



"ακλόνητο" σημείο, ως προς τον παρατηρητή, της μάζας του υγρού, σε διάφορες χρονικές στιγμές).

Η ροή των υγρών διακρίνεται σε α) νηματική ή στρωτή, όταν σε κάθε σημείο του πεδίου ροής η ταχύτητα κινήσεως των μορίων του υγρού δεν εξαρτάται από το χρόνο, και σε β) τυρβώδη ή στροβιλώδη, όταν η ταχύτητα ροής είναι συνάρτηση του χρόνου.

Στην πρώτη περίπτωση η αριθμητική τιμή και η διεύθυνση της ταχύτητας ροής είναι σταθερή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα δύο αυτά μεγέθη μεταβάλλονται με το χρόνο. Στη στρωτή ροή η ταχύτητα των στοιχείων του υγρού σε ένα δεδομένο σημείο εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου αυτού.

Το στοιχείο του νερού ενός ποταμού π.χ. θα έχει την ίδια ταχύτητα, όταν θα βρίσκεται σ' ένα δεδομένο σημείο. Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα του υγρού που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από μια δεδομένη τομή παραμένει σταθερή.

Στη νηματική ή στρωτή ροή η κινητική κατάσταση του υγρού περιγράφεται από το νόμο του Bernoulli. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, στην κανονική ροή ενός ιδανικού υγρού το άθροισμα της στατικής και της δυναμικής πίεσης στα διάφορα σημεία της ροής είναι σταθερό.

Ο νόμος αυτός δεν είναι παρά η διατύπωση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας στα υγρά. Από αυτόν προκύπτει και το θεώρημα του Toricelli ως ιδιαίτερη περίπτωση καθώς ισχύει ότι η ταχύτητα εκροής από τον πυθμένα ενός δοχείου, το υγρό περιεχόμενο του οποίου βρίσκεται σε ύψος  $h$  από τον πυθμένα, είναι ίση με την ταχύτητα την οποία θα αποκτούσε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από το ίδιο ύψος.

Ένας επίσης σημαντικός νόμος είναι ο νόμος της συνέχειας: "Η παροχή σε όλα τα σημεία της ροής του υγρού είναι σταθερή, ανεξάρτητα από το εμβαδό της διατομής μέσω της οποίας διέρχεται το υγρό". Η μελέτη της στροβιλώδους ροής περιπλέκεται από τα φαινόμενα της εσωτερικής τριβής των υγρών (ιξώδες). Μαθηματικά ο νόμος της συνέχειας περιγράφεται παρακάτω :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad (1.10)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.11)$$



Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ενδεικτικά εξισώσεις της Υδροδυναμικής:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - g\mathbf{k} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}, \quad (1.12)$$

όπου:

- $\mathbf{u}$  το διάνυσμα της ταχύτητας
- $\boldsymbol{\Omega}$  η γωνιακή ταχύτητα
- $\mathbf{k}$  το μοναδιαίο διάνυσμα με φορά κατακόρυφη
- $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού
- $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας
- $p$  η πίεση που δέχεται το ρευστό
- $\mathbf{F}$  η δύναμη τριβής ανά μονάδα μάζας

Η παραπάνω εξίσωση, που περιγράφει την κίνηση του ρευστού, αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, καθώς η συνολική επιτάχυνση ενός στοιχείου του ρευστού ισούται με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο του ρευστού.

Η επόμενη εξίσωση εκφράζει το γεγονός ότι ο συνδυασμός εσωτερικής, κινητικής και δυναμικής ενέργειας σε δεδομένο όγκο μπορεί να μεταβάλλεται μόνο ως αποτέλεσμα α) της μεταφοράς αυτών των μορφών ενέργειας κατά μήκος των συνόρων του όγκου, β) του έργου των δυνάμεων της πίεσης στο σύνορο, γ) της επίδρασης της εσωτερικής τριβής του ρευστού (ιξώδες).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho \phi + p \right) \mathbf{u} - \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}, \quad (1.13)$$

όπου:

- $\phi = gz$  η δυναμική ενέργεια

Όταν εισάγουμε το μαγνητικό πεδίο τότε οι εξισώσεις που κυριαρχούν σε ασυμπίεστη MHD ροή είναι :

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho \mu_0} (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} \quad (1.14)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.15)$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \lambda \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} + \bar{\nabla} \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (1.16)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.17)$$

όπου:

- $u$  είναι η ταχύτητα του ρευστού
- $B$  είναι το μαγνητικό πεδίο
- $p$  είναι η πίεση
- $\rho$  είναι η πυκνότητα
- $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες
- $\lambda$  είναι η μαγνητική διαχυτότητα
- $\mu_0$  είναι η μαγνητική διαπερατότητα

Οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν το μαγνητικό πεδίο εξαρτώνται από τη φύση του αγωγού, όπως έχει υποδειχθεί προγενέστερα από τον Roberts (1964) ο οποίος προσδιόρισε συνθήκες για αυθαίρετες τιμές της ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Επίσης, οι Donnelly & Ozima (1962) χρησιμοποίησαν στα πειράματα τους υδράργυρο με Perspex και ανοξείδωτα δοχεία.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η επέκταση της παραμετρικής ανάλυσης σε δισδιάστατη ροή ελεύθερης συναγωγής σε τετραγωνική κοιλότητα, παρουσία ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας υπό την επίδραση ισχυρού οριζόντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας, με σκοπό να αντιμετωπιστούν και να καλυφθούν τρισδιάστατες διαταραχές που εφαρμόζονται κατά την  $z$  κατεύθυνση.

Η συγκεκριμένη επέκταση οδηγεί στην αναγνώριση του μηχανισμού της παραγωγής των οιονεί δισδιάστατων δομών σε αγωγούς, όπου λαμβάνει μέρος η συναγωγή Rayleigh – Bernard. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούνται οι U. Burg & U. Muehler (2003), οι οποίοι εξετάζουν τη συναγωγή Rayleigh – Bernard σε στρώματα υγρού μετάλλου υπό την επίδραση οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι παράλληλη στη δύναμη της βαρύτητας.

Στα πειράματα των παραπάνω ερευνητών διαπιστώθηκε η ύπαρξη οιονεί δισδιάστατων περιοδικών δομών όπου η ανακυκλοφορία είναι παράλληλη με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου κάθετα στην αξονική διεύθυνση του αγωγού. Οι δομές αυτές είναι στάσιμες και δεν εμφανίζουν χρονική μεταβολή.

Η δισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας σε παρόμοιες γεωμετρίες δίνει ιδιομορφές τύπου Hopf ως κυρίαρχες αστάθειες οι οποίες, όταν επιτραπούν τρισδιάστατες

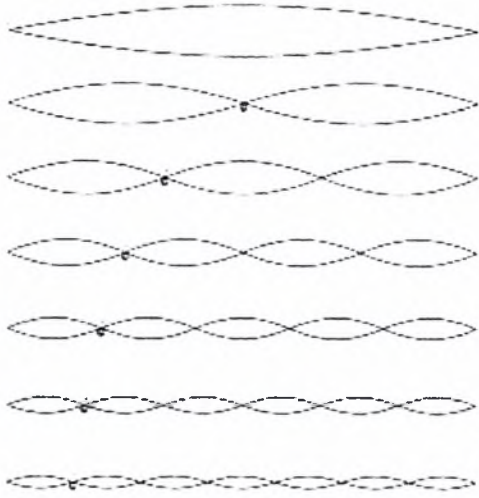
διαταραχές, οδηγούν σε οδεύοντα κύματα κατά μήκος του αγωγού. Στόχο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ταυτοποίηση του κυρίαρχου μηχανισμού αστάθειας της βασικής δισδιάστατης ροής σε κοιλότητα, λόγω ελεύθερης συναγωγής υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, παρουσία τρισδιάστατων διαταραχών. Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχετική ένταση με την οποία αναπτύσσονται στάσιμες δομές έναντι οδευόντων κυμάτων σε αγωγό με διατομή που χαρακτηρίζεται από οριζόντια ή κάθετη βαθμίδα θερμοκρασίας, οριζόντιο, ομογενές μαγνητικό πεδίο και παραγωγή θερμότητας. Οι γενικές αρχές των στάσιμων και των οδευόντων κυμάτων καθώς και κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα παρατίθενται παρακάτω.

#### **1.4 Αρχές στάσιμων και οδευόντων κυμάτων.**

Όσον αφορά το στάσιμο κύμα, πρόκειται για κύμα του οποίου η κίνηση περιορίζεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να δημιουργηθεί είτε διότι το μέσο κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του κύματος είτε επειδή αναδύεται από στάσιμο μέσο ως αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε δύο κύματα που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Στη δεύτερη περίπτωση, δεν υπάρχει γενικά διασπορά της ενέργειας σε κύματα ίσου πλάτους που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, (βλ. Γράφημα 1.4α).

Το στάσιμο κύμα σε γραμμή μετάδοσης αποτελεί κύμα στο οποίο η κατανομή του ηλεκτρικού ρεύματος ή του πεδίου της δύναμης σχηματίζεται από υπέρθεση δύο κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Το αποτέλεσμα είναι σειρές από κόμβους που έχουν μηδενική (nodes) και μέγιστη μετατόπιση (anti-nodes) σε σταθερά σημεία κατά μήκος της γραμμής μετάδοσης, (βλ. Γράφημα 1.4β).

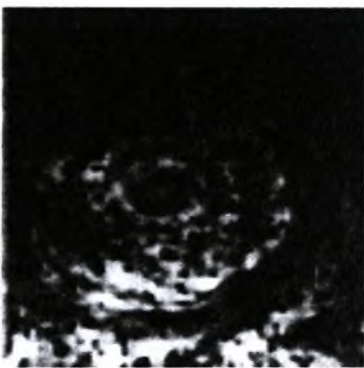
Τέτοιου είδους στάσιμο κύμα μπορεί να σχηματιστεί όταν ένα κύμα διαδίδεται στο ένα άκρο της γραμμής μετάδοσης και ανακλάται στο άλλο άκρο από σύνθετη αντίσταση που δεν έχει τοποθετηθεί σωστά, δηλαδή από ασυνέχεια που δημιουργείται λόγω της ύπαρξης ανοικτού βρόγχου κυκλώματος.



Σχήμα 1.4α: Διάγραμμα ταλάντωσης και στάσιμων κυμάτων σε χορδή. Παρουσιάζονται οι πρώτες 6 αρμονικές.



Γράφημα 1.4β: Διάγραμμα στάσιμου κύματος σε στάσιμο μέσο. Οι κόκκινες κουκίδες αναπαριστούν τους κόμβους του κύματος.



Γράφημα 1.4γ: Το εξαγωνικό σύννεφο που παρουσιάζεται στον βόρειο πόλο του πλανήτη Κρόνου θεωρείται ότι αποτελεί δομή στάσιμου κύματος.

Άλλο παράδειγμα είναι τα στάσιμα κύματα στον ωκεανό τα οποία σχηματίζονται από κύματα με την ίδια περίοδο και διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Μπορεί

να σχηματιστούν σε εστίες θυελλών και αποτελούν πηγή για microbaroms. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι στον τομέα της ακουστικής τα microbaroms είναι ατμοσφαιρικά υποηχητικά κύματα που δημιουργούνται σε θύελλες από μια μη γραμμική αλληλεπίδραση επιφανειακών κυμάτων του ωκεανού και της ατμόσφαιρας. Έχουν περίοδο περίπου 5sec ή 0.2Hz. Εξαιτίας της χαμηλής ατμοσφαιρικής απορρόφησης αυτών των χαμηλών συχνοτήτων, τα microbaroms μπορούν να διαδοθούν σε απόσταση χιλιάδων χιλιομέτρων στην ατμόσφαιρα.

Η εξίσωση στάσιμου κύματος παρουσιάζεται παρακάτω. Δύο κύματα με την ίδια συχνότητα, μήκος κύματος και πλάτος που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις θα αλληλεπιδράσουν και θα δημιουργήσουν στάσιμο κύμα. Για παράδειγμα, ένα αρμονικό κύμα που κινείται προς τα δεξιά και προσκρούσει στο άκρο μιας χορδής θα σχηματίσει στάσιμο κύμα. Το ανακλώμενο κύμα θα πρέπει να έχει ίδια συχνότητα και πλάτος με το αφικνούμενο κύμα.

Υποθέτουμε ότι οι παρακάτω εξισώσεις περιγράφουν τα αρμονικά κύματα:

$$y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t).$$

όπου:

- $y_0$  αποτελεί το πλάτος του κύματος,
- $\omega$  είναι η γωνιακή συχνότητα,
- $k$  είναι ο κυματάριθος.

Η συνισταμένη των δύο κυμάτων θα ισούται με το άθροισμά τους. Εφαρμόζοντας τριγωνομετρική ταυτότητα προκύπτει η παρακάτω εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα:

$$y = 2 y_0 \cos(\omega t) \sin(kx). \quad (4.1)$$

Από την άλλη πλευρά, το οδεύον κύμα αποτελεί διαταραχή κύματος ως προς το χρόνο  $t$  και την απόσταση  $z$ . Περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$y(z, t) = A(z, t) \sin(kz - \omega t + \phi), \quad (4.2)$$

όπου:

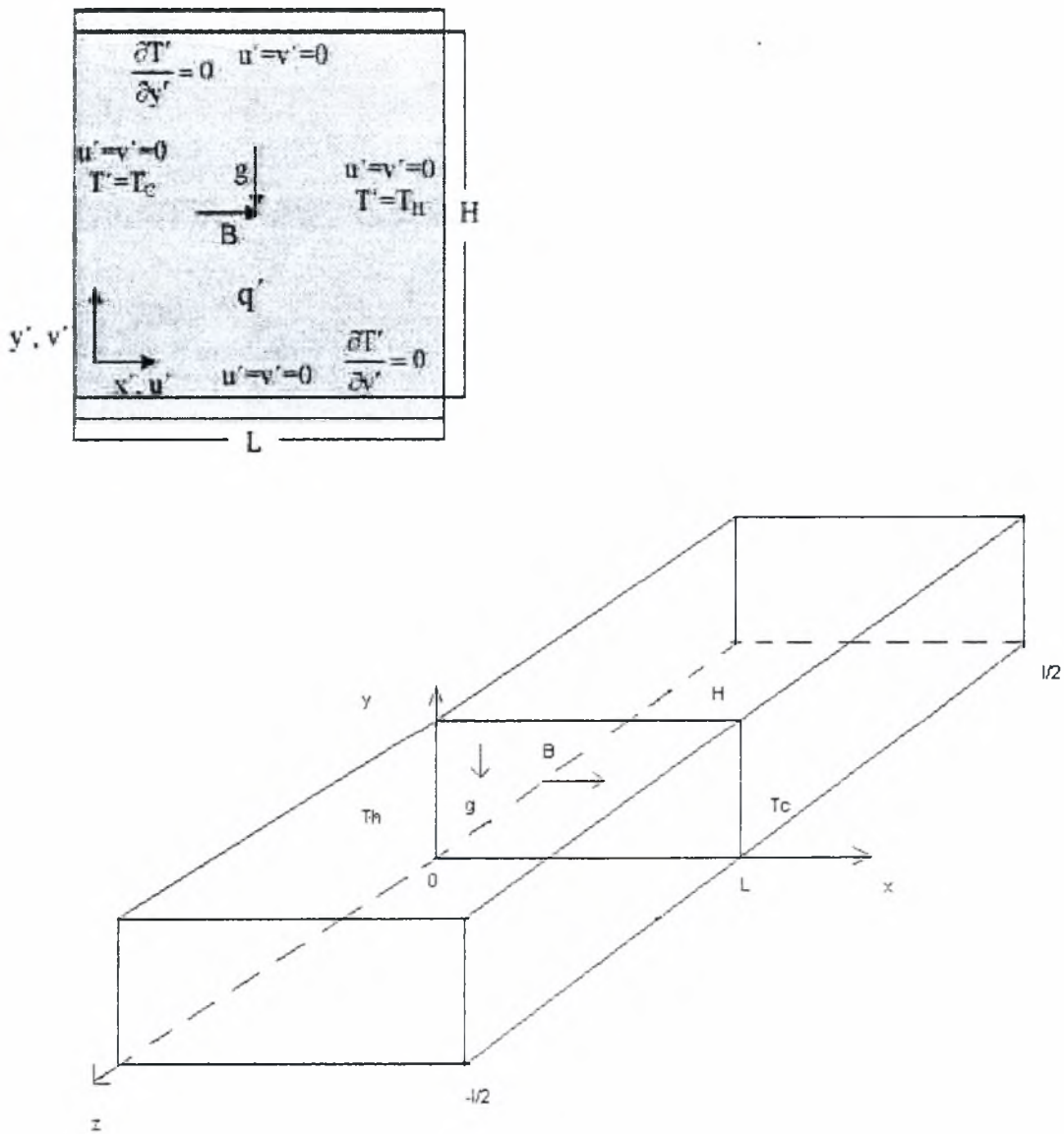
- $\phi$  είναι η φάση του κύματος,
- $A(z, t)$  αποτελεί τη συνάρτηση που περιγράφει το πλάτος του κύματος.

Σημειωτέον ότι η ταχύτητα της φάσης του οδεύοντος κύματος  $v_p$  δίνεται από την εξίσωση:  $v_p = \omega / k = \lambda / f$ .

## II) Κατάστρωση του Προβλήματος

### 2.1 Ελεύθερη συναγωγή υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής με βαθμίδα θερμοκρασίας και ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στη δύναμη βαρύτητας

Θεωρούμε τετραγωνική κοιλότητα, παρουσία ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας και ομογενούς μαγνητικού πεδίου, το οποίο είναι κάθετο στην διεύθυνση της βαρύτητας και παράλληλο σε βαθμίδα θερμοκρασίας  $T_H-T_C$ , βλέπε Σχήμα 6α και 6β.



Γράφημα 6: (α) Διατομή του αγωγού, (β) Τρισδιάστατη διαμόρφωση του προβλήματος.



Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη Boussinesq:  $\beta(T_h - T_c) \ll 1$ , όπου  $\beta$  είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του λιθίου που ρέει στη κοιλότητα. Αναφορικά με την πυκνότητα του ρευστού ισχύει ότι:  $\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_{AV})]$ , όπου  $T_{AV} = (T_h - T_c)/2$ .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στις περισσότερες εφαρμογές όπου απαντάται τέτοιου είδους ροή, τα υγρά διαλύματα μγμάτων λιθίου (όπως για παράδειγμα Pb-17Li) χρησιμοποιούνται ως λειτουργούντα μέσα (operating fluids). Έτσι, παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τις θερμοφυσικές ιδιότητες του λιθίου για να ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές, οι οποίες προσδιορίζουν το παρόν πρόβλημα.

Ο αριθμός Prandtl  $Pr = \nu/\alpha = 0.032$ , όπου  $\alpha$  και  $\nu$  υποδηλώνουν την θερμική διαχυτότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Για το συγκεκριμένο ρευστό ο μαγνητικός αριθμός Reynolds έχει αρκετά μικρή τιμή και κατά συνέπεια η μαγνητική επαγωγή θεωρείται αμελητέα ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι παντού ομογενές στην κοιλότητα. Από το γράφημα 6 γίνεται εμφανές ότι  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ .

Από το νόμο του Ohm λαμβάνουμε για την πυκνότητα του ρεύματος :

$$\mathbf{j}' = \sigma(-\nabla\phi' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \quad (2.1)$$

όπου  $\phi'$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό,  $\sigma$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του λιθίου και  $\mathbf{v}'$  το διάνυσμα της ταχύτητας, το οποίο σε συνδυασμό με την απαίτηση της συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου :  $\nabla \cdot \mathbf{j}' = 0$  δίνει:

$$\nabla^2 \phi' = \omega' \cdot \mathbf{B}' \quad (2.2)$$

όπου  $\omega'$  είναι το διάνυσμα της στροβιλότητας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τονούμενες μεταβλητές έχουν διαστάσεις. Το πεδίο των ταχυτήτων θεωρείται περιοδικό στην  $z$  κατεύθυνση.

Επιλέγουμε το μήκος  $L$  ως χαρακτηριστικό μήκος για κάθε μια από τις πλευρές της κοιλότητας, τη θερμοκρασιακή διαφορά  $\Delta T (= T_h - T_c)$  ως χαρακτηριστική θερμοκρασία και στη συνέχεια αποδίδουμε αδιάστατα τον χρόνο, τις χωρικές συντεταγμένες, την πίεση, την ταχύτητα, τη θερμοκρασία, την ένταση του μαγνητικού πεδίου και το ηλεκτρικό δυναμικό:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{L/g\beta\Delta T}}, \quad x = \frac{x'}{L}, \quad P = \frac{P'}{\rho g \beta \Delta T L} = \frac{p' + \rho_0 g y}{\rho g \beta \Delta T L},$$

$$u = \frac{u'}{\sqrt{g\beta\Delta T L}}, \quad T = \frac{T' - T_{AV}}{T_h - T_{AV}}, \quad B = \frac{B'}{B_0}, \quad \phi = \frac{\phi'}{\sqrt{g\beta\Delta T L B L}}$$

Οι εξισώσεις που ορίζουν το πρόβλημα παρουσιάζονται παρακάτω σε αδιάστατη μορφή:

### Εξίσωση της συνέχειας της μάζας

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0 \quad (2.3)$$

### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην x-κατεύθυνση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην y-κατεύθυνση

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + T - \frac{Ha^2}{Gr_E^{-1/2}} \left( v + \frac{d\phi}{dz} \right) \quad (2.5)$$

### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην z-κατεύθυνση

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2}{Gr_E^{-1/2}} \left( w - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

### Εξίσωση της ενέργειας

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Gr_E^{-1/2} Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Gr_f}{Gr_E^{-1/2}} \quad (2.7)$$

### Αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.8)$$

Στην παραπάνω μορφοποίηση του προβλήματος εμπλέκονται οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι :

$$Gr_E = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}, \quad Ha = \sqrt{\frac{L^2 \sigma B_0^2}{\rho\nu}}, \quad Gr_l = \frac{qL^2}{\Delta T\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad A = \frac{H}{L} = 1, \quad \Lambda = \frac{\ell}{L}$$

Οι αριθμοί  $Gr, Ha$  δηλώνουν την σχέση αλλά και τη σημασία των βαρυτικών δυνάμεων με τις δυνάμεις ιξώδους, και των μαγνητικών δυνάμεων με τις δυνάμεις ιξώδους, αντίστοιχα. Στην εξίσωση (2.5) ο όρος της αδιάστατης θερμοκρασίας  $T$  δηλώνει την άνωση και ο τελευταίος όρος στην ίδια σχέση αποτελεί τη δύναμη Lorentz, ενώ η επίλυση των εξισώσεων (2.3) έως (2.8) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες, μας παρέχουν τη δυναμική κατάσταση του συστήματος. Αντίστοιχα, αν αγνοήσουμε τους χρονομεταβαλλόμενους όρους στις εξισώσεις (2.4)-(2.7) προκύπτουν λύσεις σε μόνιμη κατάσταση για το πρόβλημα που μελετούμε.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η παρουσία της ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας αυξάνει την κίνηση του υγρού μετάλλου, ενώ αντίθετα το μαγνητικό πεδίο επιβραδύνει την κίνηση του ρευστού λόγω της δύναμης Lorentz.

### 2.1.1 Συνοριακές Συνθήκες

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τις οριακές συνθήκες που συνιστούν το πρόβλημα που εξετάζουμε :

$$T(x=0, y) = -1 \quad T(x=1, y) = 1 \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=1) = 0 \quad (a)$$

$$u(x=0, y) = v(x=0, y) = 0 \quad u(x=1, y) = v(x=1, y) = 0 \quad (b)$$

$$u(x, y=0) = v(x, y=0) = 0 \quad u(x, y=A) = v(x, y=A) = 0 \quad (c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x=0, y, z) = -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(x=1, y, z) = c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (d)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=0, z) = -c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=A, z) = c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (e)$$

$\bar{u}, T, \phi$ : περιοδικά στην  $z$  κατεύθυνση, π.χ.  $u(\ell) = u(-\ell)$

όπου  $c_v, c_H$  αποτελούν τους αδιάστατους συντελεστές της θερμικής αγωγιμότητας ως προς τις κάθετες και οριζόντιες πλευρές του αγωγού, αντίστοιχα.

Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται μονωμένα τότε οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet. Στην περίπτωση όπου τα τοιχώματα είναι αγωγίμα. (συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann), τότε το ρεύμα μπορεί να διαπεράσει την διεπιφάνεια μεταξύ του ρευστού και του τοιχώματος.

Παρατηρώντας τη σχέση (α) έχουμε επιβολή θερμοκρασιακής διαφοράς στις οριζόντιες πλευρές του αγωγού και θερμομόνωση στις κάθετες πλευρές του. Η ύπαρξη της μονάδας στη σχέση αυτή προέρχεται από την αδιαστατοποίηση του προβλήματος.

Οι σχέσεις (b), (c) υποδηλώνουν τις συνθήκες μη ολίσθησης που επικρατούν στα τοιχώματα της κοιλότητας για το πεδίο των ταχυτήτων, ενώ οι σχέσεις (d), (e) αφορούν το ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο επάγεται από την κίνηση του υγρού μετάλλου στον αγωγό υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου.

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στις συνθήκες (d), (e) μπορούμε να προχωρήσουμε στους παρακάτω υπολογισμούς οι οποίοι εξηγούν τη μορφή των συγκεκριμένων συνθηκών και να εξάγουμε συμπεράσματα. Στα τοιχώματα δεν υπάρχει κίνηση ρευστού και ως εκ τούτου η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace.

Κατόπιν ολοκλήρωσης κατά μήκος της τρίτης διάστασης των τοιχωμάτων, το πάχος των οποίων είναι μικρό σε σχέση με το μήκος και το ύψος, παίρνουμε την εξίσωση κατανομής του δυναμικού σε απλοποιημένη μορφή. Στην μορφή περιγράφεται η κατανομή της μέσης τιμής του δυναμικού αναφορικά με το πάχος του τοιχώματος, η οποία και δεν διαφέρει από την τιμή επάνω στο σημείο επαφής του υγρού μετάλλου με το τοίχωμα λόγω του μικρού πάχους του τελευταίου. Έτσι προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες (d) και (e) λαμβάνοντας υπόψη και το γεγονός ότι δεν υπάρχει μεταφορά ρεύματος προς το ρευστό που περιβάλλει εξωτερικά το τοίχωμα.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_w = 0 &\Rightarrow \int_{-t}^0 \left( \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial z^2} \right) dx = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=-t}^0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-t}^0 \phi_w dx + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-t}^0 \phi_w dx &= 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=-t} = 0 \right) \\ t \left[ \frac{\partial^2 \bar{\phi}_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_w}{\partial z^2} \right] = - \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= - \frac{c_l}{c_w} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \Rightarrow \text{(αδιαστατοποιώντας)} \\ \frac{\partial^2 \bar{\phi}'_w}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}'_w}{\partial z'^2} = - \frac{c_l L}{t c_w} \frac{\partial \phi'_l}{\partial x'} \Big|_{x=0} &\Rightarrow (\phi'_w(x' = 0, y, z) \approx \bar{\phi}'_w(y, z) = \phi'_l(x' = 0, y, z)) \\ \frac{\partial \phi'_l}{\partial x'} \Big|_{x=0} = -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi'_l}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi'_l}{\partial z'^2} \right) \Big|_{x=0} &\quad (f) \\ \mu \varepsilon \quad c_v = \frac{t c_w}{c_l L} \end{aligned}$$

όπου  $t$  είναι το πάχος του τοιχώματος,  $c_l$ ,  $c_w$  είναι οι ηλεκτρικές αγωγιμότητες του υγρού λιθίου και του τοιχώματος αντίστοιχα,  $\phi_l$ ,  $\phi_w$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό του υγρού μετάλλου στην περιοχή της βασικής ροής και το δυναμικό του τοιχώματος του αγωγού. Οι τόνοι συμβολίζουν αδιάστατες μεταβλητές και οι παύλες πάνω από τις μεταβλητές μέσες τιμές.

Στα σημεία ενώσεως των τοιχωμάτων το ηλεκτρικό δυναμικό θα πρέπει να είναι συνεχές. Από τη στιγμή που θεωρούμε ότι όλα τα τοιχώματα εμφανίζουν καλύτερη αγωγιμότητα σε σύγκριση με τα τοιχώματα Hartmann, τότε το ηλεκτρικό ρεύμα που εγκαταλείπει το τοίχωμα θα πρέπει να εισέρχεται στο παρακείμενο τοίχωμα. Κατά συνέπεια αν θεωρήσουμε ότι τα τοιχώματα  $i$  και  $j$  έχουν κοινό σύνορο  $\Gamma_{ij}$  τότε θα ισχύουν:

$$\phi_i = \phi_j \quad c_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n_i} = -c_j \frac{\partial \phi_j}{\partial n_j}$$

Οι εξισώσεις αυτές λαμβάνουν χώρα κατά μήκος του συνόρου  $\Gamma_{ij}$  στα επίπεδα των τοιχωμάτων  $i, j$  αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι στη διεπιφάνεια τοιχώματος - υγρού μετάλλου θα ισχύει  $\phi_l = \phi_w = \phi$ , ως εκ τούτου η εξίσωση (f) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

Με ανάλογους υπολογισμούς είναι δυνατό να αναπαραχθούν οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες (d), (e) που αφορούν το ηλεκτρικό δυναμικό, όπου ανάλογα με

το αν εφαρμόζεται συνοριακή συνθήκη στις οριζόντιες ή κατακόρυφες πλευρές του αγωγού θα εμφανίζεται στην εξίσωση η αγωγιμότητα του τοιχώματος  $c_v$  ή  $c_H$ , αντίστοιχα.

## 2.2 Ελεύθερη συναγωγή υγρού μετάλλου με βαθμίδα θερμοκρασίας παράλληλα στη δύναμη βαρύτητας

Όταν το μαγνητικό πεδίο δρα στην οριζόντια διεύθυνση και εφόσον οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις είναι πιο ισχυρές συγκρινόμενες με τις αδρανειακές, τότε η ροή υφίσταται αναδιοργάνωση προς την κατεύθυνση των δισδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας που ευθυγραμμίζονται με το μαγνητικό πεδίο, (βλ. Σχήμα 7), λαμβάνοντας υπόψη ότι οι απώλειες Joule είναι αξιοσημείωτα μικρές.

Το φαινόμενο αυτό ανακαλύφθηκε από τον Chandrasekhar (1961) εφαρμόζοντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας σε άπειρο οριζόντιο στρώμα, το οποίο δέχεται θερμότητα από κάτω.

Ο συγκεκριμένος ερευνητής παρατήρησε ότι για μαγνητικό πεδίο που είναι συγγραμμικό με την κατεύθυνση της βαρύτητας, η συναγωγή σε οριακή ευστάθεια θα πάρει την μορφή διαμηκών εστιών ανακυκλοφορίας που ευθυγραμμίζονται με την οριζόντια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, αν και μέρος της συναγωγής προέρχεται μόνο από την κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου.

Ακόμη και με την επιβολή μεγάλων υπερκρίσιμων συνθηκών η δισδιάστατη δομή της ροής διατηρείται όπως αποδείχθηκε πειραματικά από τους Lehnert & Little (1956), Fauve et al. (1981), Fauve et al. (1984) και Kishida & Takeda (1994). Σε περίπτωση που το ρευστό περιοριστεί σε τοιχώματα, τα οποία είναι κάθετα στο μαγνητικό πεδίο οι δίνες, (εν προκειμένω οι εστίες ανακυκλοφορίας λόγω συναγωγής), θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη μη – ολίσθησης στα τοιχώματα Hartmann και αναπτύσσεται μια οιονεί δισδιάστατη ροή.

Στο γράφημα 7α παριστάνεται η γεωμετρία της συναγωγής Rayleigh – Benard και το προβλεφθέν πρότυπο της ροής των οιονεί δισδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας. Ένα καλά ηλεκτρικά αγωγίμο ρευστό, για παράδειγμα υγρό μέταλλο, περιορίζεται ανάμεσα σε δύο οριζόντια τοιχώματα των οποίων η απόσταση είναι  $h$  και θεωρούνται τέλειοι, ηλεκτρικά και θερμικά, μονωτές. Θερμαίνοντας το κάτω τοίχωμα και



ψύχοντας το άνω παρουσιάζεται μια θερμοκρασιακή διαφορά  $\Delta T$ , η οποία είναι παράλληλη στην επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  και σε περίπτωση που η θερμοκρασιακή διαφορά υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, κυριαρχεί η κίνηση της άνωσης λόγω συναγωγής. Η διάταξη αυτή έχει μελετηθεί πειραματικά από τους Burr & Muller (2002)

Στην οριζόντια κατεύθυνση  $z$  το στρώμα θεωρείται απείρου μήκους. Στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ο χώρος όπου κινείται το ρευστό περιορίζεται από δύο λεπτά, ηλεκτρικά αγωγίμα τοιχώματα Hartmann που απέχουν απόσταση  $2b$ , όπου  $b$  είναι το πάχος του υλικού του τοιχώματος και έχει ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\sigma$ . Τα οριζόντια τοιχώματα που ευθυγραμμίζονται με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και τα παρακείμενα συνοριακά στρώματα καλούνται πλευρικά στρώματα (sidewalls).

Σε οιονεί δισδιάστατη MHD ροή η κατανομή της ταχύτητας  $v(x)$  είναι ομοιόμορφη στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στην κυρίως μάζα του ρευστού, η οποία καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος του χώρου όπου κινείται το ρευστό. Στα τοιχώματα Hartmann η ταχύτητα της βασικής ροής ικανοποιεί τη συνθήκη μη – ολίσθησης χάρη στο σχηματισμό λεπτών συνοριακών στρωμάτων Hartmann.

Το γράφημα 7β απεικονίζει τις προβλεπόμενες διαδρομές του ρεύματος σε περιοδική αλληλουχία των περιστρεφόμενων δινών λόγω συναγωγής στο οριζόντιο επίπεδο και σε κάθετο επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Ανάλογα με το είδος της περιστροφής, τα ηλεκτρικά ρεύματα  $j$  στρέφονται ακτινικά προς τα έξω από ή προς την κατεύθυνση των δινών λόγω συναγωγής, όπως διαφαίνεται από την κάθετη τομή της διάταξης στο συγκεκριμένο γράφημα.

Στην περιοχή της βασικής ροής οι δυνάμεις Lorentz έχουν κατεύθυνση αντίθετη από τις κινήσεις που επάγονται λόγω της ελεύθερης συναγωγής, αν και στα τοιχώματα Hartmann η κατεύθυνση τους είναι αντίστροφη και το υγρό μέταλλο επιταχύνεται. Το γεγονός αυτό καθιστά τα στρώματα Hartmann πολύ λεπτά και ως εκ τούτου ρυθμίζουν την πυκνότητα ρεύματος και κατά συνέπεια ελαττώνουν την ταχύτητα στην περιοχή της βασικής ροής, σε συνδυασμό όμως με τα τοιχώματα Hartmann. Η ενέργεια που απομακρύνεται από την περιοχή της βασικής ροής διαχέεται λόγω του φαινομένου Joule στα τοιχώματα Hartmann και λόγω της ιξώδους διάχυσης στα στρώματα Hartmann. Η επίδραση της διάχυσης στα τοιχώματα και στρώματα Hartmann είναι γνωστή ως Hartmann braking και εμφανίζεται στις ροές σε αγωγό (βλ. Sommeria & Moreau (1982), Buehler (1996)).

Η κατάσταση του εν λόγω προβλήματος είναι παρόμοια με αυτήν της προηγούμενης ενότητας με μόνη διαφορά τον λόγο ύψους  $A=H/L$ , που εδώ είναι αρκετά μικρότερος της μονάδας, και τις συνοριακές συνθήκες για την θερμοκρασία στην διατομή του αγωγού οι οποίες εδώ προβλέπουν μόνωση στα κάθετα τοιχώματα και βαθμίδα θερμοκρασίας στα οριζόντια.

Το πρόβλημα αυτό θα μελετηθεί αμέσως μετά το πρόβλημα που περιγράφεται στην ενότητα 2.1 το οποίο μελετάται για να εξακριβωθεί η επίδραση των τρισδιάστατων διαταραχών στα ευρήματα προηγούμενης δισδιάστατης μελέτης, Pelekasis (2006), στην διατομή που απεικονίζεται στο Σχήμα 6α.

Η διατομή που απεικονίζεται στο σχήμα 8 αποτελεί απεικόνιση της διατομής της πειραματικής διάταξης των Burr & Muller και η αριθμητική μελέτη της καλείται να δώσει πρόβλεψη για το είδος της διαταραχής που καταγράφηκε στα πειράματα των τελευταίων αλλά για την επίδραση των πλευρικών στοιβάδων και των στοιβάδων Hartmann στην ευστάθεια του συστήματος.

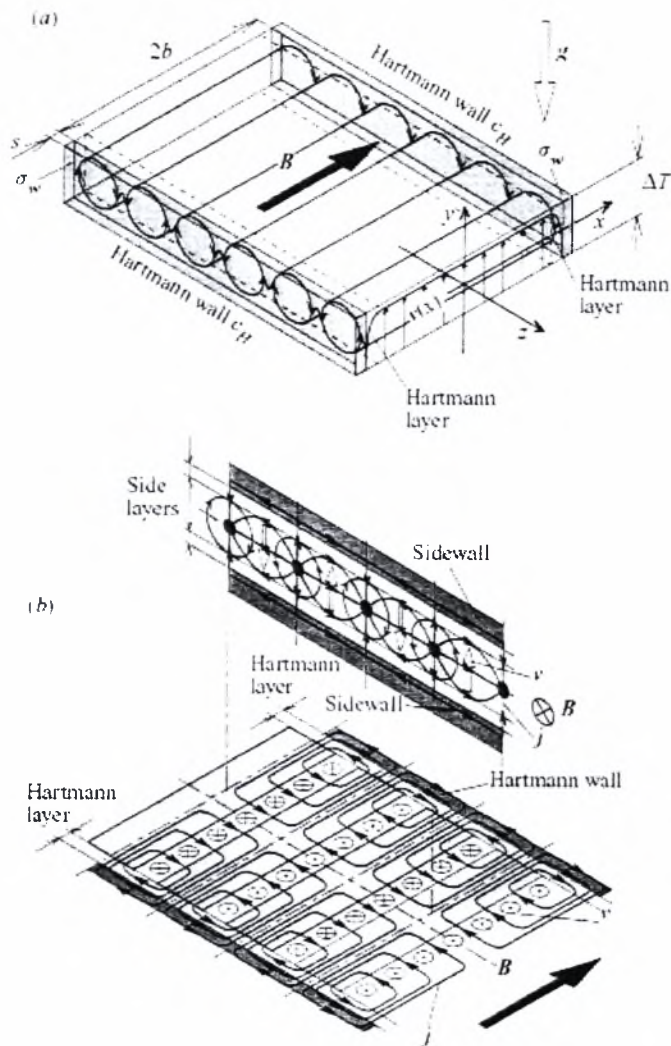
Μια προκαταρκτική ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος που απεικονίζεται στα γραφήματα 7 και 8 έγινε από τους Burr & Muller χρησιμοποιώντας ένα απλό μοντέλο για την συμπεριφορά των στοιβάδων Hartmann. Οι βασικοί άξονες της προσέγγισης των Burr & Muller δίδονται παρακάτω.

Για ομογενή δισδιάστατη ροή υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου μόνο η αγωγιμότητα των τοιχωμάτων Hartmann  $c_H$  επιδρά σημαντικά στη ροή. Σε περίπτωση που υπάρχει τρισδιάστατη ροή, η αγωγιμότητα των πλευρικών τοιχωμάτων  $c_S$  έχει επιπλέον σημαντική επίδραση στη ροή.

Το πεδίο της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$u = 0, \quad v = -\partial_z \psi(y, z)f(x), \quad w = \partial_y \psi(y, z)f(x) \quad (2.9)$$

όπου  $\psi(y, z)$  είναι η δισδιάστατη ροϊκή συνάρτηση και  $f(x)$  η συνάρτηση μορφής, η οποία πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες μη ολίσθησης στα τοιχώματα Hartmann  $f(x = \pm b) = 0$  και τη συμμετρική συνθήκη  $\partial_x f(x = 0) = 0$ .



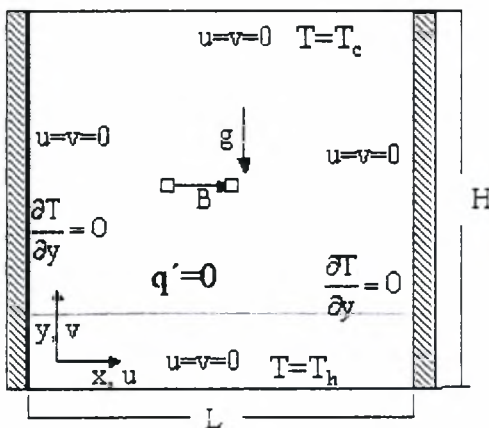
Γράφημα 7: Οιονεί δισδιάστατη MHD ροή σε ισχυρά μαγνητικά πεδία με συναγωγή Rayleigh – Benard. (α) Γεωμετρία και πρότυπο της ροής των εστιών ανακυκλοφορίας λόγω συναγωγής που ευθυγραμμίζονται με το μαγνητικό πεδίο. (β) Κλειστές διαδρομές των ηλεκτρικών ρευμάτων.

Παρατηρώντας τη σχέση (2.9) επισημαίνουμε ότι οι μεταβλητές που εμπλέκονται στη βασική ροή του υγρού μετάλλου θα πρέπει να είναι ομογενείς κατά την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και το πάχος του στρώματος Hartmann να παραμένει ανεξάρτητο από τις συγκεκριμένες μεταβλητές. Οι παραπάνω αυτές απαιτήσεις πληρούνται όταν οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κυριαρχούν στην εξίσωση της διατήρησης της ορμής, για παράδειγμα όταν ο λόγος  $Ra/Q \ll 1$  (οπότε ο αριθμός Chandrasekhar  $Q$  τείνει στο άπειρο) και επίσης όταν  $Pr Q \gg 1$ .

Όταν υπάρχουν πλευρικά τοιχώματα που είναι παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, τότε σχηματίζονται πλευρικά στρώματα και εξαιτίας του περιορισμένου πάχους τους το ηλεκτρικό δυναμικό μεταβάλλεται σημαντικά κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, ιδιαίτερα αν τα πλευρικά τοιχώματα δεν είναι ηλεκτρικά αγωγιμα ή έχουν χαμηλού επιπέδου ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Αν υποθέσουμε ότι τα πλευρικά τοιχώματα είναι ιδανικά από πλευράς ηλεκτρικής αγωγιμότητας τότε οι κλίσεις των δυναμικών εξισώνονται στο συνοριακό στρώμα κατά μήκος αυτών των τοιχωμάτων και το ηλεκτρικό δυναμικό γίνεται ομογενές. Τα ηλεκτρικά ρεύματα εισέρχονται στα πλευρικά τοιχώματα και μπορούν να σταματήσουν μέσω των στρωμάτων Hartmann χωρίς επιπρόσθετη αντίσταση. Κατά συνέπεια έχοντας ιδανικά μονωμένα τέτοιου είδους τοιχώματα ενισχύουν την πεποίθηση για αξιοπιστία της οιονεί δισδιάστατης μορφοποίησης.

Κατάλληλη αριθμητική μελέτη της ευστάθειας του εν λόγω προβλήματος αναμένεται να δώσει με λεπτομέρεια την διαμόρφωση των ρευμάτων και των δινών που δημιουργούνται υπό αυτές τις συνθήκες.



Γράφημα 8: Σχηματικό διάγραμμα της διατομής του αγωγού σε πειράματα των Burr&Mueller.

### 2.3 Μορφοποίηση ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής

Όταν το υγρό μέταλλο ρέει μέσω ενός ορθογώνιου αγωγού διαστάσεων  $b \times L$ , όπου  $b$ ,  $L$  αποτελούν τα μήκη των κάθετων και οριζόντιων πλευρών του αγωγού.

αντίστοιχα, με μεταλλικά τοιχώματα παρουσία ισχυρού, ομογενούς και κάθετου μαγνητικού πεδίου που δρα κατά την κατεύθυνση  $y$ , τότε οι ταχύτητες στα συνοριακά στρώματα που είναι παρακείμενα στις πλευρές, οι οποίες είναι παράλληλες με το μαγνητικό πεδίο, αποκτούν πολύ μεγάλη τιμή σε σύγκριση με τις τιμές που λαμβάνουν οι ταχύτητες οπουδήποτε αλλού στον αγωγό.

Στους αγωγούς αντιδραστήρα σύντηξης, όπου ρέει υγρό λίθιο, οι υψηλές ταχύτητες παρατηρούνται στο συνοριακό στρώμα που βρίσκεται δίπλα στο πρώτο τοίχωμα. Πειράματα που έγιναν στα Εθνικά Εργαστήρια της Argonne έδειξαν ότι η στρωτή, μόνιμη και πλήρως αναπτυγμένη ροή σε αυτά τα στρώματα, όπου αναπτύσσονται υψηλές ταχύτητες, είναι ασταθής για εύρος παραμέτρων που αντιστοιχεί σε πραγματικές συνθήκες αντιδραστήρα.

Η αστάθεια αφορά την μετάβαση από μόνιμη σε περιοδική ροή με μεγάλες διακυμάνσεις της ταχύτητας στο συνοριακό στρώμα. Αυτού του είδους οι αστάθειες ενδεχομένως να εντείνουν τη μεταφορά θερμότητας από το πρώτο τοίχωμα.

Θεωρήσαμε αμελητέο το μήκος εισόδου ή ισοδύναμα την περιοχή της αναπτυσσόμενης ροής, κατά συνέπεια έχουμε πλήρως αναπτυγμένη ροή κατά την αξονική διεύθυνση και θεωρούμε δεδομένη μια σταθερή πτώση πίεσης:  $-dp/dx=C$ . Σε αυτή την περίπτωση υπολογίσαμε αριθμητικά τη βασική ροή.

Σημειωτέον ότι στην πλήρως αναπτυγμένη ροή ο αριθμός Reynolds δεν μεταβάλλεται με την απόσταση, αλλά καθορίζεται από τη διάμετρο του αγωγού και την μέση ταχύτητα της ροής. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέση ταχύτητα της ροής, τόσο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds.

Στην περίπτωση όπου ο ορθογώνιος αγωγός δεν έχει μόνωση τότε η ταχύτητα που επικρατεί στη βασική ροή είναι σταθερή:  $u=u_c=\text{constant}$ . Η ροή παρουσιάζει λεπτά συνοριακά στρώματα ιξώδους εκθετικού τύπου κοντά στα τοιχώματα που είναι κάθετα στο πεδίο, τα οποία ονομάζονται τοιχώματα Hartmann. Τα συγκεκριμένα στρώματα ιξώδους καλούνται στρώματα Hartmann και η τάξη μεγέθους του πάχους τους είναι  $\delta \sim Ha^{-1}$ . Κοντά στα πλευρικά τοιχώματα, τα οποία είναι παράλληλα στις γραμμές του πεδίου αναπτύσσεται διαφορετικό είδος συνοριακού στρώματος. Αυτά ονομάζονται πλευρικά στρώματα και η τάξη μεγέθους του πάχους τους είναι  $\delta \sim Ha^{-1/2}$ . Επιπρόσθετα, η πτώση πίεσης προκύπτει από τη συνθήκη για την ογκομετρική ροή:



$$Q = Q_S + \int_{-b}^b u_c \int_{-1}^1 dy dz = 4b \quad (2.10)$$

όπου  $b$  είναι ίσο με το μισό πλάτος του αγωγού, το οποίο έχει αδιαστατοποιηθεί από το μήκος των τοιχωμάτων Hartmann  $a$ . Επιπλέον, μπορεί να υπολογιστεί η κλίση του πεδίου της πίεσης:

$$C = -\frac{dp}{dx} = c_H K = \frac{1}{\frac{1}{c_H} + 1 + \frac{1}{3c_v b}} \quad (2.11)$$

όπου ο πρώτος όρος στον παρονομαστή πηγάζει από τη βασική ροή και ο δεύτερος όρος από τα πλευρικά στρώματα. Εκτενείς αναφορές που αφορούν τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν γίνει από Walker (1981) και Tillack & McCarthy(1989).

Αν ο ορθογώνιος αγωγός που εξετάζαμε είχε μονωμένο πληρωτικό μέσο τότε επισημαίνουμε ότι από πειράματα που έχουν γίνει έχει διαπιστωθεί ότι ανάμεσα σε πληρωτικό μέσο, το οποίο έχει χαμηλή αγωγιμότητα, και τοίχωμα υπάρχει διάκενο όπου ρέει το υγρό μέταλλο. Συνεπώς, είναι επακόλουθο η ύπαρξη υψηλής πτώσης πίεσης στο διάκενο με τρόπο τέτοιο ώστε ο ρυθμός ροής του ρευστού και των σχετιζόμενων ταχυτήτων να είναι σε χαμηλά επίπεδα στον μονωμένο αγωγό.

Στο παρόν πρόβλημα επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τις εξής μεταβλητές: i) την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού  $\phi$ , ii) την ταχύτητα  $u(y,z)$  και iii) την αδιάστατη πτώση πίεσης  $C$ .

Οι εξισώσεις που συνθέτουν την εξεταζόμενη περίπτωση σε αδιάστατη είναι:

#### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην x-κατεύθυνση

$$\frac{-dp}{dx} + \frac{1}{Ha^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = u - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.12)$$

#### Αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.13)$$



### Εξίσωση της συνέχειας της μάζας

$$\int_0^1 dy \int_0^b u dz = b \quad (2.14)$$

και οι αριθμοί Hartmann, Reynolds δίδονται από τις σχέσεις:

$$Ha = BL\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2}, \quad Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

όπου:

- B η ένταση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου,
- L το χαρακτηριστικό μήκος, το οποίο ισούται με την μισή απόσταση των κάθετων πλευρών,
- $\mu$  το δυναμικό ιξώδες του υγρού μετάλλου,
- $\sigma$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του υγρού μετάλλου,
- $\rho$  η πυκνότητα του υγρού μετάλλου.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μεταβλητές που εμφανίζονται στις εξισώσεις (2.12- 2.14) έχουν προκύψει από αδιαστατοποίηση. Συγκεκριμένα, η x-συνιστώσα της ταχύτητας (u) έχει αδιαστατοποιηθεί διαιρούμενη από τη μέση ταχύτητα U. Έχοντας επιλέξει το μήκος L ως χαρακτηριστικό μήκος, λαμβάνουμε τις παρακάτω αδιάστατες μεταβλητές:

$$L = 2l, z = \frac{z'}{l}, y = \frac{y'}{l}, u = \frac{u'}{U}, p = \frac{p'}{\sigma UB^2 L}, \phi = \frac{\phi'}{UBL}$$

όπου  $\phi$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό και p είναι η πίεση. Τέλος η εξίσωση (2.14) αποτελεί ουσιαστικά μια επιπλέον συνθήκη του προβλήματος έτσι ώστε να υπολογιστεί η αδιάστατη πτώση πίεσης  $C = -dp/dx$ .

#### 2.3.1 Συνοριακές Συνθήκες

Σε αδιάστατη μορφή οι οριζόντιες πλευρές του αγωγού αντιστοιχούν στα επίπεδα  $y = \pm 1$  και οι κατακόρυφες πλευρές στα επίπεδα  $z = \pm b$ , όπου το b αποτελεί το

λόγο διαστάσεων της διατομής, βλέπε γράφημα 9. Οι λόγοι της αγωγιμότητας του τοιχώματος στις οριζόντιες και κάθετες πλευρές αντίστοιχα της διατομής είναι:

$$c_{tb} = \frac{\sigma_w T_{tb}}{\sigma L}, \quad c_{sw} = \frac{\sigma_w T_{sw}}{\sigma L} \quad (2.15)$$

όπου:

- $\sigma_w$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μεταλλικού τοιχώματος,
- $\sigma$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του υγρού μετάλλου,
- $T_{tb}$  το πάχος μίας εκ των δύο οριζόντιων πλευρών της διατομής,
- $T_{sw}$  το πάχος μίας εκ των δύο κατακόρυφων πλευρών της διατομής.

Αγνοούμε το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από τα ηλεκτρικά ρεύματα, στο υγρό μέταλλο και στα τοιχώματα του αγωγού όσο ο μαγνητικός αριθμός Reynolds  $R_m = \mu_p \sigma UL$  έχει μικρή τιμή για αντιδραστήρες που ψύχονται αυτόνομα. Η παράμετρος  $\mu_p$  εκφράζει τη μαγνητική διαπερατότητα του υγρού μετάλλου.

Αν θεωρήσουμε ότι τα τοιχώματα του αγωγού είναι λεπτά και αν αγνοήσουμε όρους τάξης:  $O(T_{tb}^2/L^2)$  και  $O(T_{sw}^2/L^2)$ , τότε οι συνοριακές συνθήκες που έχουμε είναι:

$$\begin{aligned} z = \pm b : u = 0, \quad z = b : j_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = c_v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad z = -b : j_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -c_v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ y = \pm 1 : u = 0, \quad y = 1 : j_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = c_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad y = -1 : j_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -c_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

όπου οι συντελεστές αγωγιμότητας  $c_v$ ,  $c_H$  συμπίπτουν με τις μεταβλητές  $c_{sw}$  και  $c_{tb}$  αντίστοιχα.

Στις ακμές όπου ενώνονται γειτονικά τοιχώματα το ηλεκτρικό δυναμικό είναι συνεχές, γεγονός που επιβάλλει την συνέχεια της πυκνότητας ρεύματος. Π.χ. στο σημείο  $(z,y)=(b,1)$  ισχύει ότι:

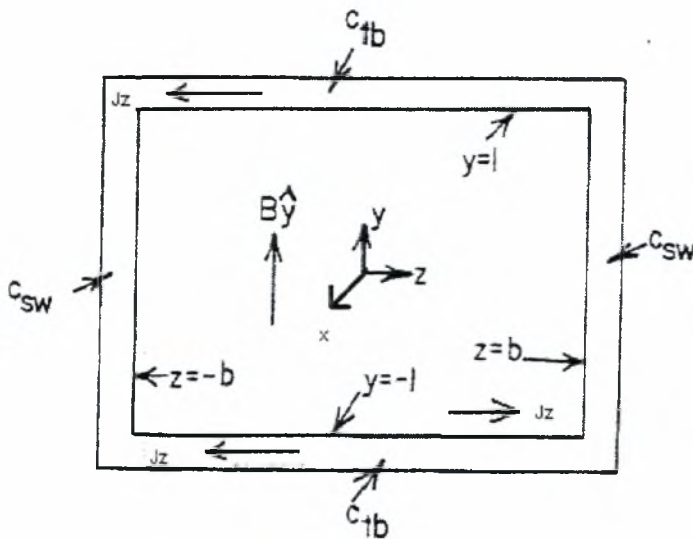
$$-c_v \frac{\partial \phi}{\partial y} = c_H \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.16)$$

Όταν το υγρό μέταλλο ρέει στην θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$ , υπάρχουν ηλεκτρικά ρεύματα στη βασική ροή κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα  $z$ , και στις οριζόντιες πλευρές της διατομής του αγωγού κατά την αρνητική κατεύθυνση του

άξονα  $z$ . Υπάρχουν δύο παράλληλες διαδρομές που ακολουθούν τα ρεύματα έτσι ώστε να ολοκληρωθεί ο ηλεκτρικός βρόγχος:

- (1) πάνω και κάτω στο εσωτερικό των πλευρικών τοιχωμάτων και κατά μήκος του πλευρικού στρώματος,
- (2) άμεσα από την κορυφή ή τη βάση της διατομής διαμέσου του πλευρικού στρώματος στον «πυρήνα» της ροής.

Τα ηλεκτρικά ρεύματα στις διαδρομές (1) και (2) είναι συγκρίσιμα με τον συντελεστή  $c_{sw}$  και τον όρο  $Ha^{-1/2}$ , αντίστοιχα. Η παραδοχή ότι το  $c_{sw}$  παραμένει σταθερό όταν ο αριθμός Hartmann τείνει στο άπειρο, εκφράζει το γεγονός ότι το ρεύμα στη δεύτερη διαδρομή είναι αμελητέο και κατά συνέπεια όλα τα ρεύματα θα ακολουθήσουν την πρώτη διαδρομή.



Γράφημα 9: Διατομή του ορθογώνιου αγωγού

## 2.4 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας στο πρόβλημα ροής υγρού μετάλλου σε ελεύθερη συναγωγή όπου η κλίση του θερμοκρασιακού πεδίου είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας

Ο κύριος κλάδος μόνιμης κατάστασης αναπτύσσεται από τη λύση που λαμβάνουμε για  $Gr=0$ , μέσω απλής συνέχισης στον χώρο των παραμέτρων ο οποίος ορίζεται από τους αριθμούς  $Gr$ ,  $Ha$ ,  $Pr$ . Η μορφή και η ευστάθεια του εν λόγω κλάδου, ο οποίος αφορά διδιάστατη ροή λόγω ελεύθερης συναγωγής σε μόνιμη

κατάσταση, σε δισδιάστατες διαταραχές έχει ήδη εξεταστεί (Pelekasis 2006). Αυτό έγινε αγνοώντας μεταβολές στην αξονική διεύθυνση  $z$  στην μοντελοποίηση του προβλήματος όπως αυτή περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.3)-(2.8). Έτσι βρέθηκε ότι δίνει διακλάδωση τύπου Hopf σε περιοδική λύση όταν ο αριθμός Gr υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο αυξάνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός Ha.

Επιθυμούμε να διερευνήσουμε το ενδεχόμενο ο ίδιος βασικός κλάδος να δίνει τρισδιάστατη αστάθεια για τιμές του Gr μικρότερες αυτών που οδηγούν σε περιοδική λύση, υποβαθμίζοντας έτσι την σημασία της δισδιάστατης ανάλυσης ευστάθειας. Επίσης μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ευστάθεια της βασικής λύσης και την συνακόλουθη ανάπτυξη παράλληλων στοιβάδων και στοιβάδων Hartmann.

Συνεπώς είναι επιθυμητή η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του τρισδιάστατου αγωγού ορθογωνικής διατομής και η επίδρασή της στην ψύξη του παρουσία εσωτερικών πηγών θερμότητας. Άρα σε επόμενο βήμα, εισάγουμε μικρές απειροστές διαταραχές κατά την αξονική διεύθυνση  $z$ , σε όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι η τρισδιάστατη ροή επιδέχεται λύση της παρακάτω μορφής :

$$\begin{aligned}(u, v) &= [u_0(x, y), v_0(x, y)] + \varepsilon [u_1(x, y), v_1(x, y)] e^{st} e^{ikz} \\ T &= T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) e^{st} e^{ikz}, \quad p = p_0(x, y) + \varepsilon p_1(x, y) e^{st} e^{ikz} \\ \phi &= \varepsilon \phi_1(x, y) e^{st} e^{ikz}, \quad w = \varepsilon w_1(x, y) e^{st} e^{ikz}\end{aligned}$$

όπου :

- οι δείκτες 0,1 αντιστοιχούν σε κατάσταση προ και μετά την επιβολή της διαταραχής αντίστοιχα.
- $\varepsilon$  είναι μέτρο του μεγέθους της εφαρμοζόμενης διαταραχής,
- $s$  είναι η ιδιοτιμή, η οποία ουσιαστικά έχει τον κυρίαρχο ρόλο ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς αυξάνεται ο χρόνος  $t$ .

Στο σημείο αυτό επιθυμούμε να τονίσουμε ότι η λύση, που προκύπτει από την μόνιμη κατάσταση του προβλήματος, είναι ασυμπτωτικά ασταθής αν υπάρχει ιδιοτιμή τέτοια ώστε το πραγματικό της μέρος  $s_r$  να είναι θετικό. Αν δεν υπάρχει

τέτοια ιδιοτιμή τότε θεωρούμε ότι η λύση μόνιμης κατάστασης είναι ευσταθής στο εύρος των παραμέτρων που έχουμε μελετήσει.

Κατά την περίπτωση όπου το πραγματικό μέρος  $s_r$  μιας ιδιοτιμής διέρχεται από το μηδέν, έχουμε ουδέτερη ευστάθεια και προκύπτει μια λύση διακλάδωσης. Όσον αφορά το φανταστικό μέρος  $s_i$  μιας ιδιοτιμής, όταν αυτό είναι διάφορο του μηδενός, τότε προκύπτει διακλάδωση Hopf, η οποία οδηγεί σε περιοδική λύση.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τρισδιάστατες διαταραχές στις εξισώσεις (2.3-2.8) που ορίζουν το πρόβλημα, ενώ παράλληλα αγνοούμε τους όρους τάξεως  $O(\varepsilon^2)$  ή μικρότερους όρους, λαμβάνουμε το παρακάτω πρόβλημα ευστάθειας.

### Πρόβλημα Ευστάθειας

$$su_1 + \frac{\partial(u_0 u_1)}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_1 k^2 \right) \quad (2.17)$$

$$sv_1 + \frac{\partial(v_0 v_1)}{\partial y} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - v_1 k^2 \right) + T_1$$

$$-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} (v_1 + ik\phi_1) \quad (2.18)$$

$$sw_1 + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} = -ikP_1 + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - w_1 k^2 \right) - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \left( w_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

$$sT_1 + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{Gr^{-1/2}}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - T_1 k^2 \right) \quad (2.20)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 k^2 \right) = \frac{\partial w_1}{\partial y} - ikv_1 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + ikw_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \pm c_v \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 k^2 \right), \quad x = \pm \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \pm c_H \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 k^2 \right), \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (2.24)$$

$$c_v \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -c_H \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad (2.25)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν πρόβλημα ιδιοτιμών και διακριτοποιούνται έτσι ώστε να λάβουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις  $u_1, v_1, w_1, T_1, P_1, \phi$  οι οποίες εμπεριέχουν την συμπεριφορά της τρισδιάστατης λύσης που προκύπτει όταν η δισδιάστατη βασική λύση γίνει ασταθής. Συνεπώς οι ιδιοσυναρτήσεις είναι πολύ σημαντικές καθώς εμπεριέχουν τα αναγκαία χαρακτηριστικά της λύσης, που προκύπτει από ενδεχόμενη διακλάδωση που οδηγεί στον νέο τρισδιάστατο κλάδο, ο οποίος σημειωτέον θα παρουσιάζει περιοδικότητα στην  $z$  κατεύθυνση. Επιπρόσθετα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να προκύψει μια αξιόπιστη αρχική υπόθεση με σκοπό την εύρεση πλήρους λύσης του εν λόγω τρισδιάστατου κλάδου σε επόμενο βήμα της μελέτης του προβλήματος.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι παρόμοια ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό να προκύψει το πρόβλημα της ευστάθειας για την περίπτωση όπου έχουμε ροή υγρού μετάλλου σε ορθογώνιο αγωγό, παρουσία ομογενούς, ισχυρού μαγνητικού πεδίου και επιβαλλόμενης θερμοκρασιακής διαφοράς, η οποία είναι παράλληλη στη δύναμη της βαρύτητας, Butt & Muller 2002, καθώς οι μόνες διαφορές με το πρόβλημα που μόλις παρουσιάστηκε είναι ότι το θερμοκρασιακό πεδίο είναι κάθετο στη δύναμη της βαρύτητας και επιπλέον υπάρχει ομοιόμορφη εσωτερική πηγή θερμότητας  $q$ .

Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορεί να εξεταστεί και η ευστάθεια του προβλήματος εξαναγκασμένης συναγωγής σε αγωγό ορθογωνικής διατομής. Αυτό επίσης θα γίνει σε μεταγενέστερο στάδιο αφού πρώτα έχει αναλυθεί και κατανοηθεί πλήρως η βασική λύση μόνιμης κατάστασης στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.



### III) Αριθμητική Ανάλυση

#### 3.1 Αριθμητική μεθοδολογία προβλήματος μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων διακριτοποιούμε αριθμητικά τις εξισώσεις (2.3-2.8) με σκοπό τον υπολογισμό της μόνιμης ή της δυναμικής κατάστασης του συστήματος η επίλυση των οποίων μας παρέχει τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις που σχετίζονται με συγκεκριμένη βασική λύση.

Σημειωτέον ότι και στις δύο περιπτώσεις αγνοούμε μεταβολές στην z κατεύθυνση υποθέτοντας δισδιάστατο πεδίο ροής, δηλαδή θεωρούμε ότι η z-συνιστώσα της ταχύτητας w, το ηλεκτρικό δυναμικό φ, είναι ίση με το μηδέν. Κατά συνέπεια για το ηλεκτρικό δυναμικό φ, για το οποίο ισχύει ότι:

$$\sigma \nabla^2 \phi = \vec{\omega} \cdot \vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \xrightarrow{\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0} \sigma \nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}),$$

μπορούμε να πούμε ότι για δισδιάστατη ροή το διάνυσμα στροβιλότητας  $\vec{\omega}$  θα βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα z και συνεπώς θα είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  που είναι παράλληλο με τον άξονα y. Έτσι το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace και ελλείψει πηγών στα σύνορα του αγωγού θα είναι σταθερό και μπορεί να αγνοηθεί.

Οι x και y συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας και η θερμοκρασία προσεγγίζονται με διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Phi_i(x,y)$ , ενώ η πίεση του υγρού λιθίου αναπαριστάται με διγραμμικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Psi_i(x,y)$ . Έχουμε δηλαδή :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ T_i \end{bmatrix} \Phi_i(x,y) \quad , P(x,y) = \sum_{i=1}^M p_i \Psi_i(x,y) \quad (3.1)$$

όπου :

- $u_i, v_i, T_i, p_i$ , είναι οι συντελεστές της αναπαράστασης κατά Lagrange και συμπίπτουν με τις τιμές των αντίστοιχων εξαρτημένων μεταβλητών στα σημεία παρεμβολής,
- $N, M$  αναπαριστούν τον αριθμό των συντελεστών σε κάθε άθροισμα.

Χρησιμοποιούμε την επαναληπτική μέθοδο Galerkin έτσι ώστε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις των υπολοίπων. Οι εξισώσεις (2.4,2.5,2.7) πολλαπλασιάζονται με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Phi_i(x,y)$ , η εξίσωση (2.3) αντίστοιχα με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Psi_i(x,y)$ , και εν συνεχεία ολοκληρώνονται στην επιφάνεια της κοιλότητας.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss στις συγκεκριμένες εξισώσεις, εκτός από την εξίσωση της συνέχειας της μάζας (βλ. σχέση 2.3), οπότε οι παράγωγοι δεύτερης τάξης απαλείφονται.

Η ασθενής μορφή του προβλήματος παρουσιάζεται παρακάτω :

Ασθενής Μορφή

$$\left[ \iint \Psi_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx dy \right] = 0, i=1, M \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ & + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy \\ & - \oint \Phi_i \left[ -P n_x + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right) \right] ds = 0, \quad i=1, N, \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial v_j}{\partial t} \\ & + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy \\ & + \iint \left( \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} v - T \right) \Phi_i dx dy - \oint \Phi_i \left[ -P n_y + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x \right) \right] ds = 0, \\ & i=1, N \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial T_j}{\partial t} \\
& + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (Gr^{-1/2} / Pr) \left( 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \Phi_i Gr^{-1/2} S \right] dx dy \\
& - \oint \Phi_i \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) \right] ds = 0, \quad i = 1, N, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το διαφορικό  $ds$  δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου κατά μήκος της περιμέτρου της κοιλότητας, ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα εμφανίζονται λόγω της εφαρμογής του θεωρήματος της απόκλισης. Οι όροι εντός των αγκυλών των ολοκληρωμάτων γραμμής στις εξισώσεις (3.3, 3.4) αντιστοιχούν στις  $x$  και  $y$  συνιστώσες της δύναμης που ασκείται στα σύνορα της κοιλότητας,  $(-P\bar{I} + \bar{\tau}) \cdot \bar{n}$ , όπου  $\bar{I}$  και  $\bar{\tau}$  εκφράζουν τον μοναδιαίο πίνακα και τον αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων, αντίστοιχα, ενώ το  $\bar{n}$  είναι το ορθομοναδιαίο διάνυσμα στις πλευρές της κοιλότητας.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω των αναγκαίων συνοριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στις πλευρές της κοιλότητας για τις συνιστώσες της ταχύτητας και εξαιτίας των συνθηκών μόνωσης που αφορούν το θερμοκρασιακό πεδίο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στις εξισώσεις (3.3-3.5) δεν θα επηρεάσει την αριθμητική λύση του προβλήματος, (βλ. P. M. Gresho & R. L. Sani (1998)).

Ο υπολογισμός των αγνώστων συντελεστών των εξαρτημένων μεταβλητών, που λαμβάνουν μέρος στην αναπαράσταση του προβλήματος με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, γίνεται μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Newton – Raphson.

Η σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου ελέγχεται μέσω της ευκλείδειας νόρμας. Όταν επιτευχθεί η σύγκλιση και υπολογίσουμε τη λύση μόνιμης κατάστασης, διερευνούμε την ευστάθεια μέσω της λύσης από το πρόβλημα ιδιοτιμών, που προέκυψε με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, εξαιτίας της γραμμικής φύσης του προβλήματος ευστάθειας, εκτός από τον πίνακα μάζας (mass matrix) που πηγάει κατά την διαδικασία της διακριτοποίησης των μεταβατικών όρων, οι οποίοι εμπεριέχουν την ιδιοτιμή  $s$  στο αριστερό μέλος των εξισώσεων (2.17 – 2.21), η διακριτοποίηση των

υπολοίπων όρων (βλ. σχέσεις 2.17 –2.22) αναπαράγει τον Ιακωβιανό πίνακα που αντιστοιχεί στη λύση από την σύγκλιση του προβλήματος.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθούμε στη χρησιμότητα των ιδιοδιανυσμάτων καθώς παρέχουν μια αξιόπιστη αρχική υπόθεση, κατά την προσπάθεια να λάβουμε αριθμητική λύση σε γειτονική περιοχή σημείου διακλάδωσης. Το σημείο διακλάδωσης ευρίσκεται σε θέση μέσα στο εύρος της παραμέτρου που εξετάζεται όπου το φανταστικό μέρος  $s_r$  διέρχεται από το μηδέν.

Ο Ιακωβιανός πίνακας καθώς επίσης και ο πίνακας μάζας έχουν την ιδιότητα ότι είναι πίνακες ζώνης και το γεγονός αυτό συνεπάγεται μείωση του υπολογιστικού κόστους, που απαιτείται κατά την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών. Κατά την προσπάθεια μας να ενσωματώσουμε την ιδιότητα αυτή στον υπολογισμό των ιδιοτιμών προβαίνουμε στην υιοθέτηση της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, η οποία υπολογίζει τις ιδιοτιμές με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος ή κατά απόλυτο τιμή.

Έχουμε κυρίως επικεντρώσει το ενδιαφέρον μας σε ιδιοτιμές των οποίων το πραγματικό μέρος τείνει να μηδενιστεί, οπότε εισάγουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό :

$$sB_{ij}c_{1j} + J_{ij}(c_{0i})c_{1j} = 0 \quad \rightarrow J_{ij}(c_{0i})c_{1j} = -sB_{ij}c_{1j} \quad (3.7)$$

όπου :

- $B_{ij}$  είναι ο πίνακας μάζας,
- $c_{1j}$  είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $s$ ,
- $J_{ij}(c_{0i})$  είναι η λύση που έχει συγκλίνει.
- $J_{ij}$  υποδηλώνει τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα.

Με αυτό τον τρόπο, οι ιδιοτιμές μικρού μέτρου, που προέρχονται από το αρχικό πρόβλημα, τροποποιούνται σε ιδιοτιμές μεγάλου μέτρου στο μετασχηματισμένο πρόβλημα. Στη βιβλιογραφία συναντώνται παρόμοιοι μετασχηματισμοί, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Cayley ο οποίος στηρίζεται στην περίπτωση όπου το φανταστικό μέρος μιας ιδιοτιμής είναι διάφορο του μηδενός σε αστάθεια Horf. Ωστόσο ο μετασχηματισμός της εξίσωσης (3.8) παρήγαγε ακριβή αποτελέσματα στις περιπτώσεις όπου εμφανίζονταν αστάθειες Horf, συνεπώς υιοθετήθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής.

Σημειωτέον ότι οι ιδιοτιμές που διαθέτουν τα μεγαλύτερα μέτρα κινούνται σε υπόχωρο Krylon και μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από το αν είναι γνωστό το σύνολο των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι ένας μικρός αριθμός ιδιοτιμών υπολογίζεται με χρήση της μεθόδου Arnoldi. Ο συγκεκριμένος αριθμός αυξάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση των μεγαλύτερων ιδιοτιμών, οπότε και ο αλγόριθμος σταματά.

Η χρήση της μεθόδου Arnoldi έχει βελτιστοποιηθεί (βλ. Pelekasis (2005)) με συνέπεια ο υπολογιστικός χρόνος του κώδικα, που επιλύει το πρόβλημα που μελετούμε, έχει μειωθεί σημαντικά και κατ' επέκταση ο χώρος που καταλαμβάνει στην μνήμη του υπολογιστή.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται επαναληπτικά έχοντας κάνει μια τυχαία αρχική υπόθεση :  $c_{ii}=c^0_{ii}$ . Η μέθοδος συγκλίνει στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή  $\tau_1$  με ρυθμό ανάλογο του πηλίκου  $\tau_1/\tau_2$  κατά απόλυτο τιμή, όπου  $\tau_2$  είναι η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή και  $\tau = -1/s$ .

Σημαντικό πλεονέκτημα της προσέγγισης είναι ότι η δομή του πίνακα ζώνης μπορεί να αξιοποιηθεί, καθώς ο πίνακας μάζας και ο Ιακωβιανός πίνακας αποτελούν πίνακες ζώνης. Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία του πίνακα μάζας συμπεραίνουμε ότι δεν είναι αναγκαία η αποθήκευση όλου του πίνακα, γεγονός που συνεπάγεται σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση εκτέλεσης του κώδικα που διαθέτουμε αριθμός 200 ιδιοτιμών είναι ικανός για να λάβουμε μια αξιόπιστη εικόνα της δυναμικής του συστήματος που εξετάζουμε.

Επίσης, οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο διακριτοποιούνται μέσω του τραπεζοειδή κανόνα (μέθοδος Runge – Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης) έτσι ώστε να επιτευχθεί καλύτερη υπολογιστική ακρίβεια.

Η υπολογιστική ακρίβεια της συνολικής μεθόδου είναι τάξης  $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$  για τα πεδία των ταχυτήτων, της θερμοκρασίας και του ηλεκτρικού φορτίου. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στις παρακάτω σελίδες προκύπτουν έχοντας χρησιμοποιήσει πλέγμα 40x40 και κυρίως 50x50 διτετραγωνικών στοιχείων κατά την x και y διεύθυνση του προβλήματος.

Όταν τα συνοριακά στρώματα εφάπτονται στις τέσσερις πλευρές της κοιλότητας, τότε ομαδοποιούμε αλγεβρικά τα στοιχεία κατά μέγεθος με σκοπό να εντοπίσουμε τις απότομες μεταβολές των εξαρτημένων μεταβλητών στις συγκεκριμένες περιοχές.

Συγκεκριμένα, κοντά στα τοιχώματα χρησιμοποιήθηκε πιο πυκνό πλέγμα έχοντας την αδιάστατη απόσταση των πλευρών του στοιχείου από το πλησιέστερο τοίχωμα να μεταβάλλεται αλγεβρικά. Για παράδειγμα, όταν ομαδοποιούμε τους κόμβους που βρίσκονται κατά την x κατεύθυνση του προβλήματος έχουμε :

$$x_1 = 0, \quad x_{2I} = \frac{x_{2I-1} + x_{2I+1}}{2}, \quad x_{2I+1} = \left(\frac{I}{N}\right)^{Xfact}$$

$$I = 2, 3, \dots, N/2 \quad (3.8)$$

$$x_{2N+1} = 1, \quad x_{2I} = \frac{x_{2I-1} + x_{2I+1}}{2}, \quad x_{2I-1} = 1 - \left(\frac{N+1-I}{N}\right)^{Xfact}$$

$$I = N, N-1, \dots, N/2+1 \quad (3.9)$$

όπου :

- N ο συνολικός αριθμός των στοιχείων κατά τη x διεύθυνση,
- Xfact ο αριθμός, τον οποίο ορίζουμε να είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα, και οποίος καθορίζει την πυκνωση του πλέγματος κοντά σε κάποιο από τα 4 τοιχώματα της κοιλότητας.

Το χρονικό βήμα εξαρτάται από την περίοδο της λύσης, που προκύπτει σε σημείο διακλάδωσης. Τα αποτελέσματα που θα παραθέσουμε στις επόμενες σελίδες έχουν προκύψει με αδιάστατο χρονικό βήμα  $\Delta t=0.0025$ .

Όμοια αριθμητική ανάλυση μπορεί να υιοθετηθεί για το πρόβλημα που έχει μελετηθεί από τους Burr & Mueller (2002), καθώς σε αυτή την περίπτωση έχουμε ροή υγρού μετάλλου σε ορθογώνιο αγωγό, στον οποίο έχει επιβληθεί θερμοκρασιακή διαφορά στις οριζόντιες πλευρές του αγωγού οπότε είναι παράλληλη στη δύναμη της βαρύτητας, ενώ υπάρχει μόνωση στις κατακόρυφες πλευρές του αγωγού απουσία ομοιόμορφης πηγής εσωτερικής θερμότητας.



### 3.2 Αριθμητική μεθοδολογία προβλήματος μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή

Ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις (2.12)-(2.14) στην διατομή του αγωγού, ενώ ταυτόχρονα τις πολλαπλασιάζουμε με την δοκιμαστική συνάρτηση  $w(y,z)$ . Πρόκειται για μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με άγνωστες μεταβλητές την  $x$  – συνιστώσα της ταχύτητας  $u(y, z)$ , το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi(y,z)$  και την πτώση πίεσης  $C$ .

Οι ουσιαστικές (essential) συνθήκες που απαρτίζουν το πρόβλημα είναι:

$$z = \pm b : u = 0, \quad y = \pm 1 : u = 0 \quad (3.10)$$

και οι αντίστοιχες φυσικές συνθήκες:

$$z = b : j_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = c_v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad z = -b : j_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -c_v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

$$y = 1 : j_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = c_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad y = -1 : j_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -c_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

Λόγω συμμετρίας του προβλήματος θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι αντισυμμετρικό ως προς τον άξονα των  $z$  και συμμετρικό ως προς τον άξονα των  $y$  ενώ το αντίθετο ισχύει για την αξονική ταχύτητα  $u$ . Συνεπώς έχουμε ότι :

$$\phi(z = 0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(z = 0, y) = 0, \quad u(y = 0, z) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(y = 0, z) = 0,$$

και προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το υπολογιστικό πεδίο επιλύουμε μόνο στο ένα τεταρτημόριο της διατομής,  $(0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq b)$  όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ημιαπόσταση μεταξύ των δύο οριζόντιων τοιχωμάτων του αγωγού ως χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος.

Υιοθετούμε την μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων τύπου Galerkin για τον προσδιορισμό της ασθενούς μορφής της εξίσωσης λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες.

$$\begin{aligned}
& \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) C dy + \frac{1}{Ha^2} \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \nabla^2 u dy = \\
& \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) u(y, z) dy - \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} dy \Rightarrow \\
& C \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) dy - \frac{1}{Ha^2} \int_0^b dz \int_0^1 \nabla w \nabla u dy = \\
& \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) u(y, z) dy - \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} dy - \frac{1}{Ha^2} \oint w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS \Rightarrow \\
& -C \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) dy + \frac{1}{Ha^2} \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dy = \\
& - \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) u(y, z) dy + \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} dy + \frac{1}{Ha^2} \oint w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS
\end{aligned}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, που εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών ολοκληρωμάτων στα σύνορα του αγωγού όπου έχουμε την επιβολή ουσιαστικών συνθηκών (βλ. δείκτη  $e$ ), φυσικών συνθηκών (βλ. δείκτη  $N$ ), μικτών ή Robin συνθηκών (βλ. δείκτη  $R$ ):

$$\oint w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Gamma_e} w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_e + \int_{\Gamma_N} w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_N + \int_{\Gamma_R} w(y, z) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_R$$

Στην παρούσα περίπτωση η ταχύτητα είναι γνωστή στα τρία άκρα του υπολογιστικού πεδίου εκτός από την πλευρά  $z=0$  όπου η παράγωγός της μηδενίζεται. Κατά συνέπεια τα ολοκληρώματα στα σύνορα  $\Gamma_R$  και  $\Gamma_N$  είναι ίσα με το μηδέν. Συνεπώς, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν έχει συνεισφορά στην ασθενή μορφή της εξίσωσης.

$$\text{Στη συνέχεια θέτουμε: } u = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i(x, y), \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \Phi_i(x, y), \quad w = \Phi_j(x, y)$$

όπου  $\Phi_i$  είναι οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange και λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί την ασθενή μορφή της εξίσωσης της διατήρησης της ορμής στην  $x$ -κατεύθυνση.

$$\begin{aligned}
& -C \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) dy + \frac{1}{Ha^2} \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] u_j = \\
& - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \Phi_j(y, z) dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] \phi_j + \\
& i = 1, M
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Όμοια ανάλυση εφαρμόζουμε στην εξίσωση της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου (βλ. σχέση 2.13). Έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \nabla^2 \phi dy = \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} dy \Rightarrow \\
& - \int_0^b dz \int_0^1 \nabla w \nabla \phi dy = \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} dy - \oint w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \Rightarrow \\
& \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dy = - \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} dy + \oint w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \Rightarrow \\
& \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dy = - \int_0^b dz \int_0^1 w(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} dy + \\
& \int_{\Gamma_e} w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma_e + \int_{\Gamma_N} w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma_N + \int_{\Gamma_R} w(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma_R
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας την έκφραση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος σημειώνουμε ότι απουσιάζουν μικτές συνθήκες για το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi$  και κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα στο σύνορο  $\Gamma_R$  είναι ίσο με το μηδέν. Στο άκρο  $z=0$  το ηλεκτρικό δυναμικό είναι γνωστό  $\phi(z=0, y)=0$  ενώ στο άκρο  $y=0$  έχουμε συμμετρία  $\partial \phi / \partial y (y=0, z) = 0$ . Στη συνέχεια θέτουμε:

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i(x, y), \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \Phi_i(x, y), \quad w = \Phi_j(x, y)$$

και λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί την ασθενή μορφή της εξίσωσης της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις βάσεις  $\Phi_i$  στο σύνορο  $\Gamma_e$  είναι εκ κατασκευής μηδέν, ενώ  $M$  είναι ο αριθμός των συντελεστών  $\phi_i$  εξαιρουμένων των σημείων όπου έχουμε ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες:

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j + \int_{\Gamma_N} \Phi_i(y, z) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma_N \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j - \int_{z=0} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial z} dy + \int_{z=b} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial z} dy + \int_{y=1} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial y} dz - \int_{y=0} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial y} dz \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j + \int_{z=b} \Phi_i c_V \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy + \int_{y=1} \Phi_i c_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dz \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j + \Phi_i c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 c_V \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \Big|_{z=b} + \Phi_i c_H \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=b} - \int_0^b c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \Big|_{y=1}$$

$i = 1, M$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j$$

$$- \int_0^1 c_V \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \Big|_{z=b} - \int_0^b c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \Big|_{y=1} + \Phi_i \left( c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_H \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{y=1, z=b} - \Phi_i c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{0, z=b} - \Phi_i c_H \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{0, y=1} \rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) dy \right] \phi_j = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^b dz \int_0^1 \Phi_i(y, z) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} dy \right] u_j$$

$$- \int_0^1 c_V \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \Big|_{z=b} - \int_0^b c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \Big|_{y=1}, i = 1, M \quad (3.14)$$

Στην παραπάνω ανάλυση ο όρος  $\int_{y=0} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial y} dz = 0$  διότι το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi$

είναι συμμετρικό ως προς την  $y$  κατεύθυνση. Επίσης ο όρος  $\int_{z=0} \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial z} dy = 0$  δεν

υπαισέρχεται στην ανάλυση διότι το δυναμικό  $\phi$  είναι γνωστό στην πλευρά αυτή και ως εκ τούτου τα  $\Phi_i$  θα μηδενίζονται εκεί. Στην προτελευταία ασθενή μορφή οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται διότι ο μεν πρώτος υπολογίζεται για  $y=0$  όπου  $\partial \phi / \partial y = 0$

ο δε δεύτερος υπολογίζεται για  $z=0$  όπου  $\varphi=0$ . Τέλος ο όρος  $\Phi_i \left( c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_H \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}$  μηδενίζεται λόγω της συνθήκης συνέχειας των ρευμάτων στα σημεία που ενώνονται τα τοιχώματα.

### 3.3 Αριθμητική μεθοδολογία στην ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Οι  $x$ ,  $y$  και  $z$  συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας, η θερμοκρασία και το ηλεκτρικό φορτίο προσεγγίζονται με διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Phi_i(x,y)$ , ενώ η πίεση του υγρού λιθίου αναπαριστάται με διγραμμικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Psi_i(x,y)$ . Έχουμε δηλαδή :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ T_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ T_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \Phi_i(x,y) \quad , P(x,y) = \sum_{i=1}^M p_i \Psi_i(x,y) \quad (3.15)$$

όπου :

- $u_i, v_i, w_i, T_i, p_i, \phi_i$  είναι οι συντελεστές της αναπαράστασης κατά Lagrange και συμπίπτουν με τις τιμές των αντίστοιχων εξαρτημένων μεταβλητών στα σημεία παρεμβολής,
- $N, M$  αναπαριστούν τον αριθμό των συντελεστών σε κάθε άθροισμα.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Galerkin έτσι ώστε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις των υπολοίπων. Οι εξισώσεις (2.17-2.21) πολλαπλασιάζονται με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Phi_i(x,y)$ , η εξίσωση (2.22) αντίστοιχα με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Psi_i(x,y)$ , και εν συνεχεία ολοκληρώνονται στην επιφάνεια της κοιλότητας.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss στις συγκεκριμένες εξισώσεις, εκτός από την εξίσωση της συνέχειας της μάζας, οπότε οι παράγωγοι δεύτερης τάξης απαλείφονται.

Η ασθενής μορφή του προβλήματος παρουσιάζεται παρακάτω :

### Ασθενής Μορφή

$$\left[ \iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] u_j + \left[ \iint \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] v_j + \left[ \iint ik \Psi_i \Phi_j dx dy \right] w_j = 0, i=1, M \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial x} \Phi_j dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} u_0 dx dy \right] u_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} v_0 dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial y} \Phi_j dx dy \right] v_j = - \sum_{j=1}^M \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \Psi_j dx dy \right] P_j \cdot \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] u_j \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial y} dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} v_0 dx dy \right] v_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} u_0 dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial x} dx dy \right] u_j = \sum_{j=1}^M \left[ - \iint \Psi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} dx dy \right] P_j \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] v_j \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ ik \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \phi_j \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] w_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} u_0 dx dy \right] w_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} v_0 dx dy \right] w_j = \sum_{j=1}^M \left[ -ik \iint \Psi_j \Phi_i dx dy \right] P_j \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] w_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] w_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] w_j \right] \\ & - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] w_j - \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] \phi_j \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial x} dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} u_0 dx dy \right] T_j + \\
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} v_0 dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial y} dx dy \right] v_j = \\
& -(Gr^{-1/2} / Pr) \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j \right] \\
& (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^A c_S \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \Big|_{x=0} - \int_0^A c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} (x=1) dy - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} (y=A) dx - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} (y=0) dx + \\
& \Phi_i \left( c_S \frac{\partial \phi}{\partial y} (x=0, y=A) - c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} (x=0, y=A) \right) - \Phi_i \left( c_S \frac{\partial \phi}{\partial y} (x=0, y=0) + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} (x=0, y=0) \right) + \\
& \Phi_i \left( -c_S \frac{\partial \phi}{\partial y} (x=1, y=0) + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} (x=1, y=0) \right) + \Phi_i \left( c_S \frac{\partial \phi}{\partial y} (x=1, y=A) + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} (x=1, y=A) \right) = \\
& = \oint \Phi_i \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = -(c_S \eta - c_H) \oint \Phi_i k^2 \phi dS + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] w_j - \sum_{j=1}^N \left[ ik \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] v_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \phi_j + \\
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] \phi_j + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] \phi_j, \quad i=1, M. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Σχετικά με την παραπάνω μορφοποίηση του προβλήματος πρέπει να τονισθεί ότι το διαφορικό  $dS$  δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου κατά μήκος της περιμέτρου της κοιλότητας. Επιπρόσθετα, όσον αφορά την εξίσωση (3.21), η οποία εμφανίζει μια ιδιαιτερότητα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες εξισώσεις που εμφανίζονται στην ασθενή μορφή του προβλήματος, δίδονται στα παρακάτω λεπτομέρειες σχετικά με την διαδικασία παραγωγής της ασθενούς μορφής.

Στην περίπτωση αυτή απουσιάζουν ουσιαστικές συνθήκες, ενώ οι φυσικές συνθήκες της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} (x=0, y, z) &= -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi \right), & \frac{\partial \phi}{\partial x} (x=1, y, z) &= c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi \right) \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} (x, y=0, z) &= -c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k^2 \right), & \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, y=A, z) &= c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k^2 \phi \right)
\end{aligned}$$

σε συνδυασμό με τις συνθήκες συνέχειας των ρευμάτων στα σημεία σύνδεσης των τοιχωμάτων. Στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες έχει ήδη ληφθεί υπόψη η μορφή της τρισδιάστατης διαταραχής του ηλεκτρικού δυναμικού.

Η εξίσωση (2.21) η οποία προκύπτει από την ανάλυση ευστάθειας της διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, ολοκληρώνεται στη διατομή του αγωγού, ενώ ταυτόχρονα πολλαπλασιάζεται κατά μέλη με την δοκιμαστική συνάρτηση  $h(x,y)$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin και θέτουμε:  $h(x,y) = \Phi_i(x,y)$ , όπου  $\Phi_i$  είναι οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange. Έτσι λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί την ασθενή μορφή της εξίσωσης της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\begin{aligned}
\iint \Phi_i \nabla^2 \phi_1 dA &= \iint k^2 \phi_1 \Phi_i dA + \iint \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i dA - \iint ikv_1 \Phi_i dA \Rightarrow \\
\iint \nabla \cdot (\Phi_i \nabla \phi_1) dA - \iint \nabla \Phi_i \cdot \nabla \phi_1 dA &= \iint k^2 \phi_1 \Phi_i dA + \iint \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i dA - \iint ikv_1 \Phi_i dA \Rightarrow \\
\oint \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS &= \iint \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + k^2 \phi_1 \Phi_i + \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i - ikv_1 \Phi_i \right] dA \Rightarrow \\
\int_0^A \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dy \Big|_{x=1} - \int_0^A \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dy \Big|_{x=0} &+ \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx \Big|_{y=A} - \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx \Big|_{y=0} = \\
\iint \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + k^2 \phi_1 \Phi_i + \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i - ikv_1 \Phi_i \right] dA &\equiv I \Rightarrow \\
I + \int_0^A c_V \Phi_i k^2 \phi_1 dy \Big|_{x=1} + \int_0^A c_V \Phi_i k^2 \phi_1 dy \Big|_{x=0} &+ \int_0^1 c_H \Phi_i k^2 \phi_1 dx \Big|_{y=0} + \int_0^1 c_H \Phi_i k^2 \phi_1 dx \Big|_{y=A} = \\
+ \Phi_i c_V \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Big|_{0,x=1} + \Phi_i c_V \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Big|_{0,x=0} &+ \Phi_i c_H \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{0,y=0} + \Phi_i c_H \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{0,y=A} \\
- \int_0^A c_V \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dy \Big|_{x=1} - \int_0^A c_V \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dy \Big|_{x=0} &- \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx \Big|_{y=A} - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx \Big|_{y=0} \Rightarrow \\
I + \int_0^A c_V \left[ \Phi_i k^2 \phi_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right] dy \Big|_{x=1} &+ \int_0^A c_V \left[ \Phi_i k^2 \phi_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right] dy \Big|_{x=0} \\
+ \int_0^1 c_H \left[ \Phi_i k^2 \phi_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] dx \Big|_{y=A} &+ \int_0^1 c_H \left[ \Phi_i k^2 \phi_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] dx \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνέχεια των ηλεκτρικών ρευμάτων στα σημεία ένωσης των τοιχωμάτων του αγωγού οι γωνιακοί όροι αλληλοαναιρούνται, ως εκ τούτου θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
& \Phi_i c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{0,x=1}^{A,x=1} + \Phi_i c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{0,x=0}^{A,x=0} + \Phi_i c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{0,y=0}^{1,y=0} + \Phi_i c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{0,y=A}^{1,y=A} = \\
& \Phi_i \left[ c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=1,y=A} + \Phi_i \left[ -c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=1,y=0} \\
& + \Phi_i \left[ c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} - c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0,y=A} + \Phi_i \left[ c_V \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_H \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0,y=0} = 0, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (3.23) στην (3.22) παίρνουμε την (3.21) χωρίς τους γωνιακούς όρους, η οποία είναι και η τελική ασθενής μορφή της εξίσωσης διατήρησης φορτίου.

## IV) Αποτελέσματα

### 4.1 Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Θεωρούμε τετραγωνική κοιλότητα με μήκος πλευράς 1cm και θερμοκρασιακή διαφορά τάξεως 1K ανάμεσα στις δύο κάθετες πλάκες, ο αριθμός Gr υπολογίζεται να είναι  $5 \times 10^4$  για υγρό λίθιο στους 300°C περίπου, αν και ο αριθμός Ha λαμβάνει τιμές από 5 έως 500 όταν οι αντίστοιχες τιμές για την ένταση του μαγνητικού πεδίου  $B_0$  είναι 0.1 έως 1T. Οι παραπάνω τιμές των παραμέτρων καθορίζουν το εύρος της παραμετρικής ανάλυσης.

Επιπρόσθετα, λόγω της μεγάλης ποσότητας θερμότητας που απελευθερώνεται σε κάποιες από τις προσομοιώσεις, οι ιδιότητες του ρευστού είναι δυνατό να αποκλίνουν από τις τιμές που αντιστοιχούν στους 300°C. Παρ'όλα αυτά, σαν μια πρώτη προσπάθεια να μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος υπό την επίδραση μεγάλου θερμικού φορτίου αγνοούμε θερμοκρασιακές μεταβολές των θερμοφυσικών ιδιοτήτων που εμπλέκονται στη μορφοποίηση του προβλήματος.

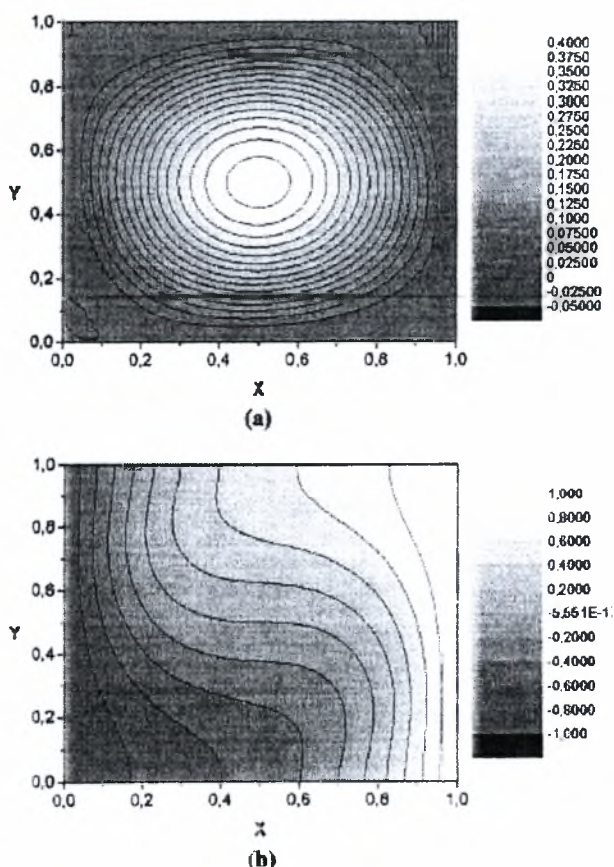
Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί σημαντικό περιορισμό για να επιδρά στην εγκυρότητα της μορφοποίησης του προβλήματος, καθώς ο αριθμός Pr, ψυκτικών υγρών αποτελούμενων κυρίως από λίθιο (π.χ. Pb – 17%Li), προσλαμβάνει σχετικά μικρές τιμές (0.05 έως 0.02) σε θερμοκρασίες που κυμαίνονται από 300°C έως 600°C. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις λύσεις σε μόνιμη κατάσταση για το εύρος των παραμέτρων που ορίσαμε.

Οι καμπύλες που προκύπτουν από ουδέτερη ευστάθεια διαχωρίζουν τις λύσεις μόνιμης κατάστασης από τις περιοδικές, οι οποίες προκύπτουν στο επίπεδο (Gr, S) ως συνάρτηση του αριθμού Ha. Σημειωτέον ότι έχουν χρησιμοποιηθεί πλέγματα 30x30 και 60x60 διτετραγωνικών στοιχείων στα παρακάτω διαγράμματα.

Εξετάστηκε αρχικά η περίπτωση με μηδενική παραγωγή θερμότητας που αντιστοιχεί σε αριθμό  $S=0$  καθώς ο αριθμός Gr αυξάνεται. απουσία μαγνητικού πεδίου. Το θερμοκρασιακό πεδίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του στο δεξιό κατακόρυφο τοίχωμα και η ροική συνάρτηση παρουσιάζει μια εστία ανακυκλοφορίας.

Αυτός ο τύπος μόνιμης ροής συνεχίζει να διατηρείται όσο ο αριθμός  $Gr$  αυξάνεται ενώ οι ισοϋψείς της θερμοκρασίας καμπυλώνουν προς τα πάνω υποδεικνύοντας μια τάση του θερμού υλικού να βρίσκεται στο άνω τμήμα της κοιλότητας, (βλ. Σχήμα 10(b)), καθώς εντείνεται η επίδραση της άνωσης. Την ίδια στιγμή η ανακυκλοφορία της δίνης έχει φορά προς τα πάνω (βλ. Σχήμα 10(a)). Η λύση μόνιμης κατάστασης παραμένει ευσταθής σε όλο το εύρος των τιμών που λαμβάνει ο αριθμός  $Gr$ , όπως υποδεικνύεται από το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών το οποίο παραμένει αρνητικό.

Καθώς το ποσό της θερμότητας που απελευθερώνεται ογκομετρικά αυξάνεται, το θερμοκρασιακό πεδίο λαμβάνει μέγιστη τιμή στην κεντρική περιοχή της κοιλότητας και εμφανίζεται δεύτερη εστία ανακυκλοφορίας, (βλ. Σχήμα 11(a) και 11(b)). Το ρευστό ουσιαστικά απομακρύνεται από τα ψυχρότερα κατακόρυφα τοιχώματα και κινείται προς την κατεύθυνση του πυθμένα, ενώ το ρευστό που βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία από το κέντρο της κοιλότητας κινείται προς την κορυφή του αγωγού.

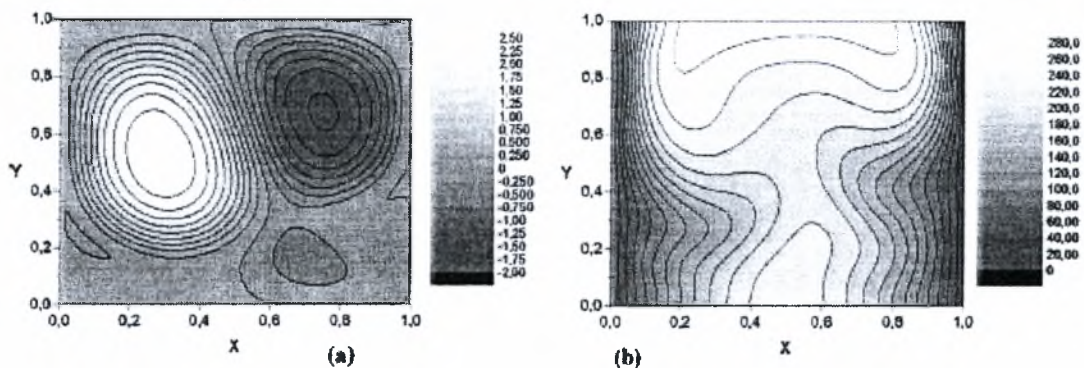


Σχήμα 10: (a) Ροϊκή γραμμή και (b) ισοϋψείς της θερμοκρασίας για την περίπτωση  $Gr=100000$ ,  $S=0$  και  $Ha=0$ .



Όσο ο αριθμός Gr αυξάνεται η δομή αυτής της ροής παραμένει σταθερή σε συνδυασμό με την επίδραση της ανάμιξης των δύο δινών που εντείνεται και της ασυμμετρίας ανάμεσα στο αριστερό και δεξιό τμήμα της κοιλότητας που οξύνεται καθώς η δομή της συνολικής ροϊκής γραμμής κλίνει προς την κατεύθυνση της ψυχρότερης αριστερής πλευράς.

Το γεγονός αυτό εξηγείται από την αυξανόμενη επίδραση της άνωσης στη δομή της ροής, η οποία επίσης έχει αντίκτυπο σε χαμηλότερες θερμοκρασίες που παρατηρούνται στην κοιλότητα όσο ο αριθμός Gr αυξάνεται (βλ. Σχήμα 8(b)). Επιπρόσθετα, όπως απεικονίζεται στη δομή της ροϊκής γραμμής, (βλ. Σχήμα 8(a)), όσο αυξάνεται ο αριθμός Gr ένα μεγαλύτερο μέρος του ρευστού στην κοιλότητα συμμετέχει στην κυκλοειδή κίνηση.



Σχήμα 11: Ισοϋψείς για ροϊκή γραμμή και θερμοκρασία για (a) και (b)  $Gr=6000$ .

Ο Πίνακας 2 απεικονίζει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών, ως προς το πραγματικό μέρος. Στα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχει χρησιμοποιηθεί πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Από τον συγκεκριμένο πίνακα παρατηρούμε ότι έχει επιτευχθεί ακρίβεια δύο ή τριών σημαντικών ψηφίων μέσω της μεθόδου Arnoldi, και ιδιαίτερα για το φανταστικό μέρος που έχει σημασία στις χρονικές κλίμακες που παρουσιάζονται στις δυναμικές προσομοιώσεις του προβλήματος που μελετούμε.

Η πρώτη ιδιοτιμή που τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών αποκτώντας θετικό πραγματικό μέρος και μη μηδενικό φανταστικό μέρος παρατηρείται για  $Gr \approx 5800$ , το οποίο είναι ενδεικτικό αστάθειας Hopf που οδηγεί σε περιοδική λύση. Αυτό απεικονίζεται καλύτερα σε διάγραμμα αστάθειας στο εύρος των παραμέτρων που μελετούμε.



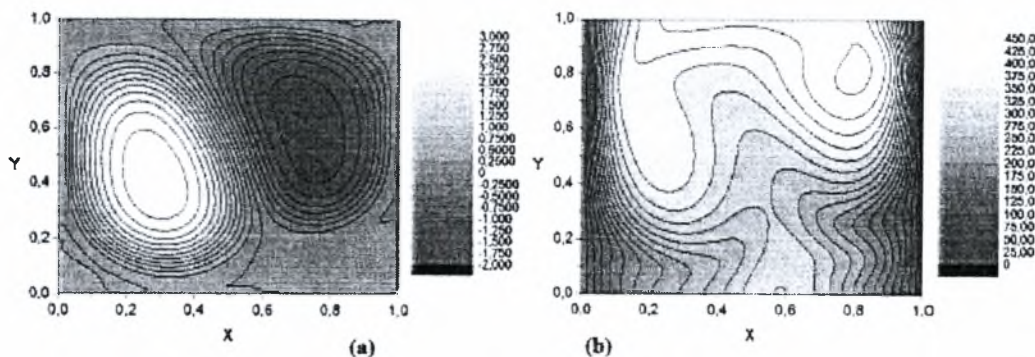
Gr=4 000		Gr=6 000		Gr=8 000		Gr=10 000		Gr=12 000	
Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary
-2.897	±17.264	0.423	±64.044	3.313	±61.935	4.967	±60.041	5.923	±58.200
-3.591	0.0	-1.721	±17.545	-0.716	±17.476	-0.020	±17.222	0.419	±16.889
-3.731	±38.792	-3.024	±37.347	-2.499	0.0	-2.203	0.0	-1.976	0.0
-4.190	±4.240	-2.920	0.0	-2.991	±35.734	-3.110	±34.141	-2.839	0.0
-4.623	±66.564	-3.922	0.0	-3.449	0.0	-3.103	0.0	-3.054	±5.118
-4.637	0.0	-4.006	±4.935	-3.754	±5.277	-3.387	±5.315	-3.245	±32.654

Πίνακας 2: Επίδραση των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών και η σύγκλιση τους με πλέγμα 60 x 60 διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Pr=0.0321$  και  $Ha=0$ .

Καθώς ο αριθμός Gr αυξάνεται, μια επιπλέον ιδιοτιμή της λύσης μόνιμης κατάστασης αποκτά θετικό πραγματικό μέρος και μη μηδενικό φανταστικό μέρος για  $Gr \approx 10000$ . Συνεπώς μια τρίτη ιδιοτιμή τέμνει τον πραγματικό άξονα για  $Gr \approx 13500$ . Σε όλες τις περιπτώσεις οι μιγαδικές ιδιοτιμές προκύπτουν ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η επίδραση της δεύτερης και τρίτης ιδιοτιμής, όπως επίσης και το υπόλοιπο των ασταθών ιδιοτιμών, δεν είναι τόσο σημαντική διότι η λύση μόνιμης κατάστασης είναι ήδη ασταθής. Ωστόσο, επηρεάζουν τη μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος εισάγοντας επιπρόσθετες χρονικές κλίμακες πριν το σύστημα σταθεροποιηθεί τελικά στην περιοδική μόνιμη κατάσταση του. Η ύπαρξη ασταθειών Hopf σε διαφορικές θερμαινόμενες κοιλότητες έχει μελετηθεί εκτενώς από διάφορους ερευνητές (βλ. Burroughs et al. 2004).

Περαιτέρω αύξηση του ποσού της θερμότητας που απελευθερώνεται αποσταθεροποιεί το σύστημα με την έννοια ότι μειώνει την κρίσιμη τιμή του αριθμού  $Gr_{cr}$ , για την οποία η λύση μόνιμης κατάστασης γίνεται για πρώτη φορά ασταθής. Πιο συγκεκριμένα, η παραγωγή θερμότητας είναι γενεσιουργός αιτία μεγάλων θερμοκρασιακών κλίσεων στην κοιλότητα, (βλ. Σχήμα 12(b)), και κατ' επέκταση αυξάνεται η επίδραση της άνωσης στη διάταξη της ροής για δεδομένο αριθμό Gr, (βλ. Σχήμα 12(a)). Συνεπώς επηρεάζει τη συμπεριφορά και την ευστάθεια του συστήματος καθώς αυξάνεται ο αριθμός Gr με την έννοια ότι εισάγει ασυμμετρία και αποσταθεροποιεί το σύστημα. Στην πραγματικότητα, όταν  $S=2 \times 10^5$  τότε η κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr είναι  $Gr_{cr} \approx 2400$ .



Σχήμα 12: Ισοϋνείς για ροική γραμμή και θερμοκρασία για (a) και (b)  $S=2 \times 10^5$ ,  $Ha=0$ .

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα που τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών υπολογίζεται στην κρίσιμη τιμή  $Gr_{cr} \approx 10000$  με παραμέτρους  $S=10^5$  και  $Ha=0$  με χρήση πλέγματος  $60 \times 60$  στοιχείων. Το γεγονός αυτό αντιστοιχεί σε μετατόπιση των εστιών ανακυκλοφορίας. Η μορφή αυτή της ευστάθειας βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες ελεύθερης συναγωγής σε κοιλότητες, (βλ. Burroughs et al. 2004).

Στην πραγματικότητα, σε πρόσφατη μελέτη είχεδειχθεί ότι για κοιλότητα με λόγο διαστάσεων  $A=2$  και σε σχετικά μικρές τιμές του αριθμού  $Pr$  ( $Pr < 0.71$ ), η διαμόρφωση της μόνιμης κατάστασης αρχικά χάνει την ευστάθειά της λόγω της εμφάνισης συμμετρικού mode, ο οποίος ακολουθείται από αντισυμμετρικό mode.

Στην παρούσα μελέτη τα πιο ασταθή ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$ , στο εύρος τιμών όπου  $0 \leq Ha \leq 20$ , αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω. Για την ακρίβεια, για  $Ha \geq 12.5$  τα πιο ασταθή ιδιοδιανύσματα γίνονται πιο συμμετρικά με επιπλέον μικρότερες εστίες ανακυκλοφορίας.

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που παρατηρείται όσο ο αριθμός  $Ha$  αυξάνεται από 15 έως 20 είναι το γεγονός ότι υπάρχει αλλαγή στη σειρά με την οποία οι δύο πιο ασταθείς ιδιοτιμές τέμνουν τον πραγματικό άξονα. Το ιδιοδιάνυσμα που στο διάστημα  $12.5 \leq Ha \leq 15$  είναι το δεύτερο ασταθές αναπτύσσεται γρηγορότερα και όταν ο αριθμός  $Ha$  λάβει την τιμή 20 γίνεται το πιο ασταθές. Αυτό συσχετίζεται με το σημείο ελαχιστοποίησης της συχνότητας της λύσης ταλάντωσης, όπως προβλέπεται από το φανταστικό μέρος της συγκεκριμένης ιδιοτιμής σε ουδέτερη ευστάθεια, το οποίο τώρα λαμβάνει υψηλότερες τιμές.

Καθώς αυξάνουμε τον αριθμό Gr εισάγουμε ασυμμετρία στη λύση μόνιμης κατάστασης και αυτό έχει αντίκτυπο στη διαφορά θερμότητας που απομακρύνεται μέσω των δύο πλευρών της κοιλότητας. Ωστόσο το μεγαλύτερο ποσό απομακρύνεται από την ψυχρότερη αριστερή πλευρά του αγωγού καθώς η διαφορά  $Nu_L - Nu_R = \Delta Nu$  είναι θετική, όπου οι δείκτες L και R δηλώνουν την αριστερή και δεξιά κατακόρυφη πλευρά της κοιλότητας ενώ οι αριθμοί  $Nu_L$  και  $Nu_R$  εκφράζουν το ποσό της θερμότητας που απομακρύνεται σε κάθε μία από τις δύο αυτές πλευρές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα σε ευστάθεια και συμμετρία η οποία έχει παρατηρηθεί και αλλού (βλ. Alboussiere et al. 1996) όπως επίσης και στο πεδίο της ελεύθερης και εξαναγκασμένης συναγωγής. Παρουσιάζοντας διαγραμματικά την επίδραση των πρώτων δύο ιδιοτιμών που γίνονται ασταθείς, μπορούμε να αναγνωρίσουμε την συσχέτιση ανάμεσα στην απώλεια ευστάθειας και τη συμμετρία.

Οι υπολογισμοί των ιδιοτιμών καθορίζονται από την πρώτη διακλάδωση και υποδηλώνουν ότι το πραγματικό μέρος του πιο ασταθούς mode αρχίζει να μειώνεται μετά το σχηματισμό ενός μεγίστου όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση παραβλέπεται από τη δεύτερη πιο ασταθή ιδιοτιμή.

Ο πίνακας 3(a) και (b) απεικονίζει την επίδραση των πιο ασταθών ιδιοτιμών στο κατάλληλο εύρος παραμέτρων όταν ο αριθμός  $Ha$  ισούται με μηδέν και δέκα, αντίστοιχα. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται για την περίπτωση όπου  $Ha=20$  λαμβάνοντας υπόψη ότι η πιο ασταθής ιδιοκατάσταση (eigenmode) είναι τώρα διαφορετική.

Επιπλέον αύξηση του αριθμού Gr μπορεί είτε να σταθεροποιήσει τελείως τον mode που έγινε πρώτη φορά ασταθής,  $Ha=0$ , είτε να επανεργοποιήσει την αστάθεια από τη στιγμή που το πραγματικό του μέρος διέλθει ένα ελάχιστο. Ωστόσο, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν η αύξηση του Gr συνδεόταν με την εμφάνιση των πιο ασταθών ιδιοτιμών, τουλάχιστον στο εύρος των παραμέτρων που εφαρμόσαμε.

(a) $S=10^5$ , $Ha=0$ , $Pr=0.0321$ , $60 \times 60$ biquadratic finite element mesh											
Gr=18 000		Gr=20 000		Gr=25 000		Gr=30 000		Gr=40 000		Gr=60 000	
Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary
7.164	$\pm 52.820$	7.352	$\pm 51.150$	7.177	$\pm 47.360$	5.865	$\pm 45.728$	3.786	$\pm 40.053$	3.237	$\pm 43.47$
3.791	$\pm 82.240$	4.535	$\pm 80.323$	4.731	$\pm 76.011$	3.033	$\pm 71.455$	3.641	$\pm 63.950$	3.136	$\pm 58.0$
0.717	$\pm 15.729$	0.5650	$\pm 15.319$	-0.366	$\pm 1.934$	1.172	$\pm 53.617$	4.038	$\pm 49.900$	2.663	$\pm 29.24$
-1.500	0.0	-1.387	0.0	-0.698	$\pm 14.005$	0.118	$\pm 76.761$	0.732	$\pm 68.821$	2.587	$\pm 62.16$
-2.241	$\pm 3.816$	-1.872	$\pm 3.155$	-0.309	$\pm 39.167$	-0.926	0.0	1.535	$\pm 32.904$	2.510	$\pm 45.05$
-2.403	0.0	-2.275	$\pm 4.500$	-1.053	$\pm 62.823$	-0.155	$\pm 3.571$	-1.229	0.0	-0.620	$\pm 26.91$

(b) $S=10^8$ , $Ha=10$ , $Pr=0.0321$ , $60 \times 60$ biquadratic finite element mesh									
Gr=10 000		Gr=14 000		Gr=20 000		Gr=22 000		Gr=24 000	
Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary	Real	Imaginary
-0.086	$\pm 47.017$	0.676	$\pm 43.952$	0.261	$\pm 39.260$	0.176	$\pm 37.471$	0.251	$\pm 35.677$
				-1.083	$\pm 52.266$	-0.122	$\pm 51.170$	0.482	$\pm 50.208$

Πίνακας 3: (a) Επίδραση των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών με πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Ha=0$  και  $Pr=0.0321$  (b) Επίδραση των τριών μεγαλύτερων ιδιοτιμών με πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Ha=10$ , και  $Pr=0.0321$

Για να εξεταστεί η φύση της προκύπτουσας διακλάδωσης Hopf θα πρέπει κάποιος να καταφύγει είτε στην μη γραμμική ανάλυση είτε να χρησιμοποιήσει δυναμικές προσομοιώσεις. Επιλέξαμε τις δυναμικές προσομοιώσεις στο εύρος των παραμέτρων που καλύφθηκε από την ανάλυση ευστάθειας. Οι περισσότερες από τις προσομοιώσεις έγιναν κοντά στο σημείο διακλάδωσης έτσι ώστε να ορίσουμε την κρισιμότητα της νέας διακλάδωσης, δηλαδή να εξετάσουμε αν η νέα διακλάδωση είναι υπέρ/ υποκρισιμη ( $1^{05}$  δείκτης Lyapunov).

Επιπλέον, η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας χρησιμοποιήθηκε ως παράμετρος της διακλάδωσης έτσι ώστε να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα της θερμικής απομάκρυνσης στις λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές διακλαδώσεις.

Παρά το γεγονός ότι όσο ο Gr αυξάνεται το επίπεδο της συμμετρίας της λύσης μόνιμης κατάστασης μπορεί να διαφοροποιείται, η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας συνεχώς μειώνεται ως αποτέλεσμα της ανακυκλοφορίας, η οποία εμπεριέχει ένα ακόμη μεγαλύτερο μέρος του ρευστού στην κοιλότητα, με εξαίρεση τα πολύ μικρά οριακά στρώματα ιξώδους που αναπτύσσονται κοντά στα τοιχώματα.

Για τιμές του  $Gr < 5800$ , ακόμη και με την επιβολή μεγάλων αρχικών διαταραχών, το σύστημα τελικά αποκαθίσταται στη λύση μόνιμης κατάστασης. Το γεγονός αυτό επεξηγείται από την ευστάθεια της λύσης μόνιμης κατάστασης στο εφαρμοζόμενο εύρος παραμέτρων.

Ένα επίσης σημαντικό χαρακτηριστικό των δυναμικών προσομοιώσεων είναι η επίδραση των διαδοχικών ασταθών ιδιοτιμών. Αυτό γίνεται εμφανές στις προσομοιώσεις με  $Gr \sim O(10^4)$ , όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν δύο ασταθείς ιδιοτιμές όπως φαίνεται στον πίνακα 2 και η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας σχεδόν αμέσως δημιουργεί μια κορεσμένη περιοχή κοντά στην τιμή μόνιμης κατάστασης για  $Gr = 10000$ , αρχίζει να παρουσιάζει συμπεριφορά όμοια με ταλάντωση, η οποία χαρακτηρίζεται από παλμό ανάμεσα στους δύο πρώτους modes που γίνονται ασταθείς.

Η περιοδική διακλάδωση εμφανίζεται στο προσκήνιο ως μια υπερκρίσιμη διακλάδωση από την στατική διακλάδωση και αυτή η δομή διατηρείται καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της αριθμητικής μελέτης.

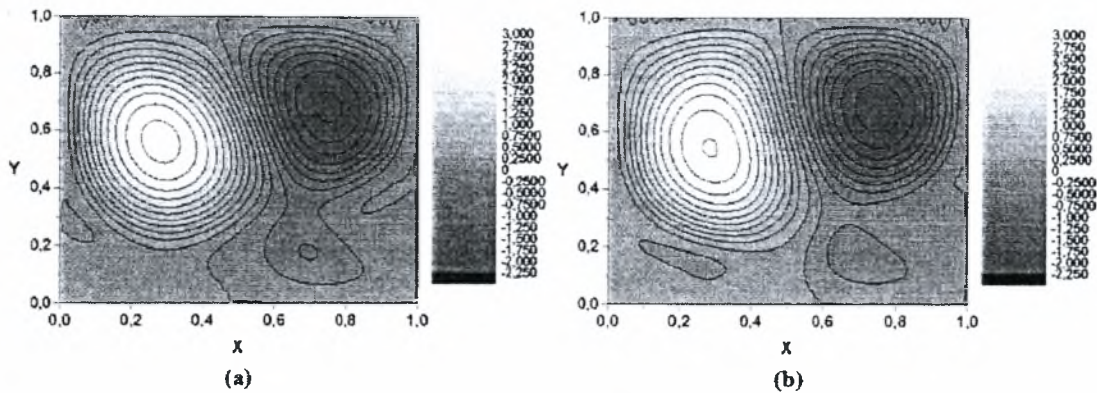
Αποτελεί ενδιαφέρον η φύση της περιοδικής κατάστασης που καθορίζει τη δυναμική του συστήματος. Αν επικεντρώσουμε στη ροϊκή συνάρτηση, παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της κίνησης οι δύο κύριες εστίες ανακυκλοφορίας προσλαμβάνουν περιοδικά μια θέση πιο κοντά στο κέντρο της ροής, (βλ. Σχήμα 13).

Η συμπεριφορά αυτή είχε προβλεφθεί από τη φύση του ιδιοδιανύσματος στο σημείο διακλάδωσης και οδηγεί σε μια πιο αποδοτική ψύξη της κοιλότητας καθώς εντείνει τη μεταφορά θερμότητας υποχρεώνοντας το θερμότερο κεντρικό τμήμα σε κυκλική κίνηση στις κατακόρυφες πλευρές της κοιλότητας, ως μια εναλλακτική βάση κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Επιπρόσθετα, η διαφορά στο ποσό της θερμότητας που απομακρύνεται μέσω των κατακόρυφων πλευρών του αγωγού παρατηρήθηκε να μειώνεται συγκρινόμενη με τη λύση μόνιμης κατάστασης και αυτή η ασυμβατότητα εντείνεται όσο ο αριθμός  $Gr$  αυξάνεται, υποδεικνύοντας παράλληλα το ρόλο της συμμετρίας στην ευστάθεια της περιοδικής διακλάδωσης και την αποδοτικότητα της θερμικής απομάκρυνσης.

Σημειώνουμε ότι θερμαινόμενη τετραγωνική κοιλότητα έχει μελετηθεί από τους Arcidiacono et al. (2001), ενώ η σταθεροποίηση του μαγνητικού πεδίου και η αποσταθεροποίηση της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας, για την περίπτωση τετραγωνικής κοιλότητας, έχει ερευνηθεί από τους Sarris et al. (2005).





Σχήμα 13: Στιγμιότυπα της ροϊκής συνάρτησης στην αρχή και στη μέση της μόνιμης περιοδικής κίνησης για την περίπτωση όπου  $Gr=7000$ ,  $S=10^5$  και  $Ha=0$  με πλέγμα  $30 \times 30$  στοιχείων. Η περίοδος  $T_0 \approx 0.1$

Εξετάστηκε επίσης η φύση της αστάθειας Hopf χρησιμοποιώντας τον αριθμό  $Ha$  ως βασική παράμετρο. Βέβαια για υψηλές τιμές του  $Ha$  η στατική διακλάδωση είναι ευσταθής και καθορίζει τη δυναμική του συστήματος, αν και καθώς ο  $Ha$  μειώνεται κάτω από μια σταθερή κρίσιμη τιμή η οποία εξαρτάται από τον αριθμό  $Gr$ , το σύστημα παρουσιάζει συμπεριφορά ανάλογη των ταλαντώσεων.

Η αιτία της αυξημένης θερμικής απομάκρυνσης μπορεί να συσχετιστεί με την κίνηση του ρευστού στην κοιλότητα όπως προβλέπεται από τη λύση ταλάντωσης, στην οποία οι δύο δίνες ανακυκλοφορίας καταλαμβάνουν μεγαλύτερο μέρος του υγρού μετάλλου που ρέει στην κοιλότητα, εν αντιθέσει με τη λύση σε μόνιμη κατάσταση.

Η περίπτωση για  $Ha=12.5$ ,  $S=10^5$  και  $Gr=55000$  προσομοιώθηκε αριθμητικά με χρήση πλέγματος  $30 \times 30$  στοιχείων. Για τη συγκεκριμένη τιμή του  $Ha$  η δομή των πιο ασταθών ιδιοδιανυσμάτων είναι παρόμοια με την αντίστοιχη που προκύπτει για υψηλές τιμές του  $Ha$ , ενώ παράλληλα να σημειώσουμε ότι επαρκεί πλέγμα  $30 \times 30$  στοιχείων για να μελετηθεί η δυναμική του συστήματος. Ωστόσο για υψηλές τιμές του  $Ha$  είναι απαραίτητη η χρήση πλέγματος  $60 \times 60$  στοιχείων για να εξασφαλιστεί αξιόπιστη περιγραφή της δυναμικής του συστήματος, κατά συνέπεια οι προσομοιώσεις είναι πιο χρονοβόρες.

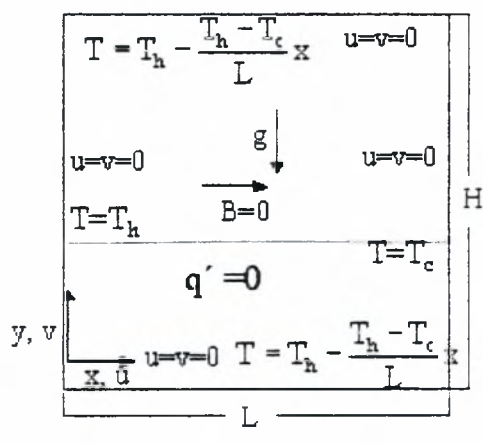
Οι παραπάνω λύσεις για την μόνιμη κατάσταση της κοιλότητας λαμβανόμενης ως διςδιάστατης χρησιμοποιούνται παρακάτω ως βασικές λύσεις για την ανάλυση αστάθειας σε τριςδιάστατες διαταραχές που ακολουθεί.



## 4.2 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής

Η διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με αγωγή οριζόντια τοιχώματα έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Ενδεικτικά αναφέρουμε Henkes & Le Quere (1996), Gelfgat & Tanasawa (1994). Οι περισσότερες από τις μελέτες επικεντρώνονται σε δισδιάστατες βασικές ροές με εφαρμογή δισδιάστατων διαταραχών, ωστόσο στην παρούσα μελέτη εισάγουμε τρισδιάστατες απειροστές διαταραχές.

Επικεντρώσαμε το ενδιαφέρον μας σε μελέτη των Xin & Le Quere (2001) που αφορούσε την χρήση γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας σε διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με θερμικά αγωγή οριζόντια τοιχώματα, μέσα στην οποία η ροή ρευστού γίνεται λόγω ελεύθερης συναγωγής απουσία μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας, (βλ. Σχήμα 14).



Σχήμα 14: Σχηματικό διάγραμμα της διατομής του αγωγού σε μελέτη των S. Xin & P. Le Quere (2001).

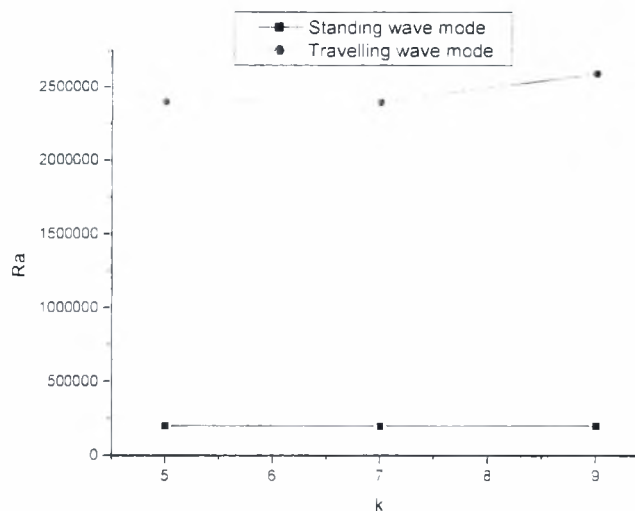
Στην ανάλυση που εφάρμοσαν οι παραπάνω μελετητές, οι αριθμητικοί υπολογισμοί που διεξήγαγαν έδειξαν ότι οι διαταραχές αρχικά μετριάζονται σε συμπεριφορά που προσεγγίζει ταλάντωση όταν ο αριθμός Rayleigh  $Ra = 1.64 \times 10^6$ , αλλά με την πάροδο του υπολογιστικού χρόνου (περίπου 1000 αδιάστατα χρονικά βήματα) διαπίστωσαν ιδιομορφή στάσιμου κύματος που διαρκώς ενισχυόταν. Η επαναληπτική μέθοδος Arnoldi που χρησιμοποίησαν απέδωσε μόνο ένα ζεύγος

ιδιοτιμών που ανήκε στην συγκεκριμένη ιδιομορφή. Η τελευταία εμφανίζεται μόνο για τρισδιάστατες διαταραχές και μάλιστα εμφανίζεται πριν από τις αντίστοιχες Hopf που κυριαρχούν για δισδιάστατες ( $k=0$ ) διαταραχές.

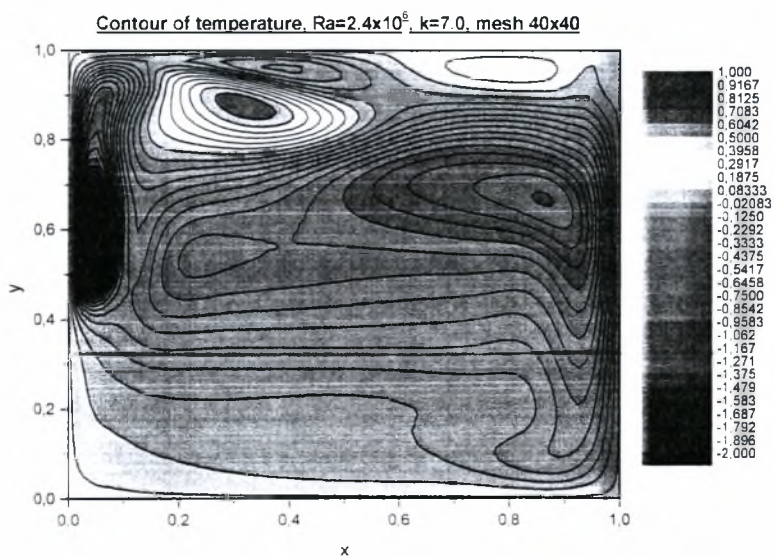
Στη συνέχεια, εισάγοντας τρισδιάστατες απειροστές διαταραχές στο πρόβλημα ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή ο κυματάριθμος  $k$  παίρνει πεπερασμένη τιμή. Όταν ο κυματάριθμος διαιρεθεί με την τιμή  $2\pi$  τότε εκφράζει το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην προκύπτουσα ιδιοτιμή κατά τη διαμήκη κατεύθυνση του αγωγού. Στην περίπτωση όπου ο κυματάριθμος μηδενιστεί αναμένουμε τα αποτελέσματα του τρισδιάστατου προβλήματος να συμπίπτουν με τα αντίστοιχα από την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός αυτό εφαρμόσαμε κάποιους αριθμητικούς ελέγχους έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων από το τρισδιάστατο πρόβλημα.

Προσαρμόσαμε κατάλληλα τον κώδικα που διαθέταμε έτσι ώστε να επιλύει το πρόβλημα που μελετήθηκε από τους Xin & Le Quere (2001) και αναπαράγαμε τα αποτελέσματα που είχαν δημοσιεύσει, ως εκ τούτου κατασκευάσαμε το διάγραμμα ουδέτερης καμπύλης, (βλ. Σχήμα 15), που αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιομορφή στάσιμου κύματος που είχαν διαπιστώσει στη μελέτη τους, καθώς και σε μία από τις ιδιομορφές Hopf που βρήκαν για δισδιάστατη ανάλυση,  $k=0$ , και η οποία εξελίσσεται σε οδεύον κύμα καθώς αυξάνει ο κυματάριθμος  $k$ .

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα εφαρμόζουμε ουσιαστικά μια παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Rayleigh ως προς τον κυματαριθμό  $k$ . Η κρίσιμη τιμή του  $Ra$ , όπως βρέθηκε από τους Xin & Quere (2001) είναι  $10^6$  και αντιστοιχεί για  $k=5$ . Επιπλέον, το γεγονός αυτό εξηγεί το λόγο που σε μελέτη των Henkes & Le Quere (1996) σχετικά με τρισδιάστατες μεταβολές των ροών με ελεύθερη συναγωγή, είχε παρατηρηθεί λύση σε μόνιμη κατάσταση για  $Ra=1.8 \times 10^6$ . Όμως πρέπει να τονισθεί ότι με την παρούσα μεθοδολογία δεν έχει καταστεί ακόμη δυνατόν να υπολογισθεί η κρίσιμη του κυματάριθμου  $k$  για την οποία παρουσιάζεται ο κρίσιμος  $Ra$  για την εμφάνιση του στάσιμου κύματος γίνεται ελάχιστος. Παράλληλα, στο Σχήμα 16 δίδεται η κατανομή της θερμοκρασίας στην κοιλότητα όπως καθορίζεται από την ασταθή ιδιομορφή που αντιστοιχεί στο στάσιμο κύμα.



Σχήμα 15: Διάγραμμα ουδέτερης καμπύλης του ασταθούς mode στάσιμου κύματος με παραμέτρο  $Pr=0.71$  και χρήση πλέγματος  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων κατά την  $x$  και  $y$  διεύθυνση του προβλήματος.



Σχήμα 16: Κατανομή θερμοκρασίας στην κοιλότητα με βάση την ασταθή ιδιομορφή που αντιστοιχεί (α) στο στάσιμο κύμα με παραμέτρο  $Pr=0.71$  και χρήση πλέγματος  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων κατά την  $x$  και  $y$  διεύθυνση του προβλήματος.

### 4.3 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου

Μετά από αριθμητική διερεύνηση του προβλήματος ανάλογη με αυτήν για την περίπτωση χωρίς μαγνητικό πεδίο, ο πίνακας 4 περιέχει ενδεικτική λίστα των ιδιοτιμών που προκύπτουν για δισδιάστατες διαταραχές,  $k=0$ , όταν χρησιμοποιείται ο διαδιάστατος και ο τρισδιάστατος κώδικας. Γίνεται εμφανές ότι τα αποτελέσματα που πηγάζουν από τους δύο κώδικες συμπίπτουν μεταξύ τους. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για τον έλεγχο της σύγκλισης των ιδιοτιμών, τόσο στο παραπάνω παράδειγμα όσο και στα αποτελέσματα που ακολουθούν, χρησιμοποιήσαμε πλέγμα  $40 \times 40$  και  $50 \times 50$  διτετραγωνικών στοιχείων κατά την  $x, y$  κατεύθυνση του προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση 200 ιδιοτιμές είναι ικανές να μας παράσχουν μια αξιόπιστη εικόνα της δυναμικής του συστήματος που μελετούμε.

Πίνακας 4			
Gr = 5000			
2d problem		3d problem	
$\sigma$ .real	$\sigma$ .imag.	$\Sigma$ .real	$\sigma$ .imag.
-3.2324	0	-3.2324	1.74E-12
-4.23809	0	-4.23809	-2.46E-13
-4.12829	4.67284	-5.6514	8.86E-16
-4.12829	-4.67284	-4.12829	4.67284
-8.68942	0	-4.12829	-4.67284
-10.2331	0	-8.68942	-5.83E-13
-11.8478	0	-10.2331	-1.73E-13
-9.1641	12.88375	-11.8478	3.48E-12
-9.1641	-12.8838	-9.1641	12.88375
-2.31865	17.47063	-9.1641	-12.8838
-2.31865	-17.4706	-2.31865	-17.4706
-12.8708	9.60536	-12.8708	9.60536
-12.8708	-9.60536	-12.8708	-9.60536
-16.1158	0	-15.9388	-7.76499
-15.9388	7.76499	-15.9388	7.76499
-15.9388	-7.76499	-19.7256	-2.55914
-19.7256	2.55914	-19.7256	2.55914
-19.7256	-2.55914	-21.3377	6.82E-12
-21.3377	0	-11.6738	-28.3545
-11.6738	28.35446	-11.6738	28.35446

Πίνακας 5			
Ha=0, k=5, cv =0.0, cH =0.0			
Gr = 0.1		Gr = 8000	
σ,real	σ,imag.	σ,real	σ,imag.
16,633	0,74E-09	-33,348	9,456
-76,999	-0,58E-02	-33,586	0,349
-76,999	0,58E-02	-33,586	-0,349
-165,528	-0,23E-09	-33,348	-9,456
-170,631	-0,15E-08	-6,605	51,231
-233,069	0,25E-08	3,312	61,934
-233,049	0,46E-08	-2,773	56,730
-291,325	0,35E-02	-22,503	37,137
-291,325	-0,35E-02	-2,171	-53,943
-326,685	0,195E-07	-6,605	-51,231
-326,669	-0,32E-07	3,312	-61,934
-405,435	0.83E-07	-6,072	56,467
-451,520	0.90E-08	-13,612	48,980
-451,618	0,14E-07	-17,560	45,507
-482,647	-0,19E-08	-9,479	53,807
-487,393	-0,38E-07	-2,773	-56,730
-545,176	0,75E-08	-24,119	38,679
-545,149	-0,11E-07	-28,770	31,787
-599,481	0,57E-08	-7,383	58,630
-701,195	-0,10E-01	-13,368	52,584

Πίνακας 6			
Ha=0, k=7, cv =0.0, cH =0.0			
Gr = 0.1		Gr = 8000	
σ,real	σ,imag.	σ,real	σ,imag.
-1,105	-0,58E-02	-21,206	39,390

-94,736	-0,24E-10	-31,628	24,486
-157,168	0,56E-03	-16,852	45,842
-157,168	-0,56E-03	-2,174	-61,527
-165,528	0,81E-09	0,587	-65,557
-250,791	-0,21E-07	-36,109	-0,20 E-06
-250,774	0,62E-08	-31,807	-28,253
-291,325	0,35E-02	-8,003	-58,981
-291,325	-0,35E-02	-3,482	-64,712
-375,626	-0,64E-08	-31,807	28,253
-375,724	0,14E-07	-37,029	-12,217
-405,435	0,14E-06	-2,174	61,527
-406,750	-0,14E-06	0,587	65,557
-469,283	-0,11E-08	-37,598	-9,891
-469,255	0,19E-07	-37,029	12,217
-487,391	-0,26E-07	-37,598	9,891
-528,203	-0,16E-08	-7,390	-62,261
-599,482	-0,10E-01	-8,003	58,981

Επιπλέον, εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση εξετάζοντας τις κρίσιμες τιμές που λαμβάνει ο αριθμός Gr συναρτήσει του κυματάριθμου  $k$ . Κατά τη διάρκεια της μελέτης αναδύονται δύο ειδών ασταθείς ιδιομορφές. Η μία αντιστοιχεί στην εμφάνιση στάσιμου κύματος (standing wave mode) και χαρακτηρίζεται από μηδενική τιμή του φανταστικού μέρους της ασταθούς ιδιοτιμής ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στην εμφάνιση οδεύοντος κύματος (travelling wave mode), χαρακτηρίζεται από μη μηδενική τιμή του φανταστικού μέρους της ασταθούς ιδιοτιμής και εμφανίζεται με την μορφή ζεύγους συζυγών μιγαδικών αριθμών. Η τελευταία αποτελεί εξέλιξη της διακλάδωσης Hopf που παρατηρήθηκε στην δισδιάστατη ανάλυση, για τρισδιάστατες διαταραχές.

Οι παραπάνω πίνακες 5 και 6 δίνουν ιδιοτιμές του προβλήματος για διάστημα τιμών του Gr,  $0.1 \leq Gr \leq 8000$ , ενώ οι αδιάστατοι συντελεστές ηλεκτρικής αγωγιμότητας  $c_v$  και  $c_H$  κατά τις κατακόρυφες και οριζόντιες πλευρές της κοιλότητας έχουν τεθεί ίσοι με 0 και 0.1, αντίστοιχα. Ο κυματάριθμος λαμβάνει τις τιμές 5 και 7, ενώ παρακολουθείται η εμφάνιση ασταθών ιδιοτιμών με την μεταβολή του Gr σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της δισδιάστατης ανάλυσης. Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνει ο κυματάριθμος  $k$  η ιδιομορφή που αντιστοιχεί στο στάσιμο κύμα



καθίσταται κυρίαρχη ιδιομορφή. Ανάλογο αποτέλεσμα είχε βρεθεί από τους Xin & Quere για το πρόβλημα χωρίς μαγνητικό πεδίο.

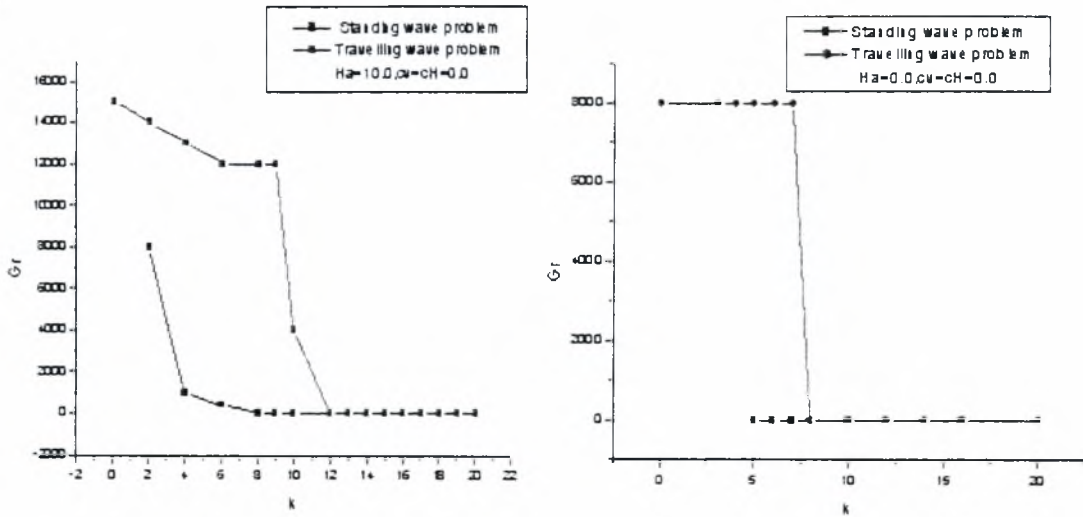
Τα παρακάτω διαγράμματα παριστούν την παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Gr ως προς τον κυματάριθμο k. Παρατηρούμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες. Επιπλέον, καθώς ο κυματάριθμος k αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του Gr μειώνεται. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός Ha αυξάνεται ο Gr λαμβάνει μεγαλύτερες κρίσιμες τιμές, ενώ σε κάθε περίπτωση ο mode στάσιμου κύματος κυριαρχεί στην ανάλυση που εφαρμόσαμε.

Στην περιοχή που ορίζεται κάτω από την καμπύλη του mode στάσιμου κύματος οι δύο modes παραμένουν ευσταθείς ενώ αντίθετα στην περιοχή που ορίζεται πάνω από την καμπύλη του mode οδεύοντος κύματος οι δύο modes παραμένουν ασταθείς. Στο εύρος τιμών του κυματάριθμου  $0 \leq k \leq 20$  (βλ. Σχήμα 17) και  $8 \leq k \leq 20$  (βλ. Σχήμα 18) δεν παρατηρήθηκε κάποιο κυρίαρχο μήκος κύματος που να καθορίζει τη δυναμική του συστήματος μετά την επιβολή των τρισδιάστατων διαταραχών, δηλαδή να υπάρχει τιμή του k τέτοια ώστε ο κρίσιμος αριθμός Gr να αποκτά τοπικό ελάχιστο.

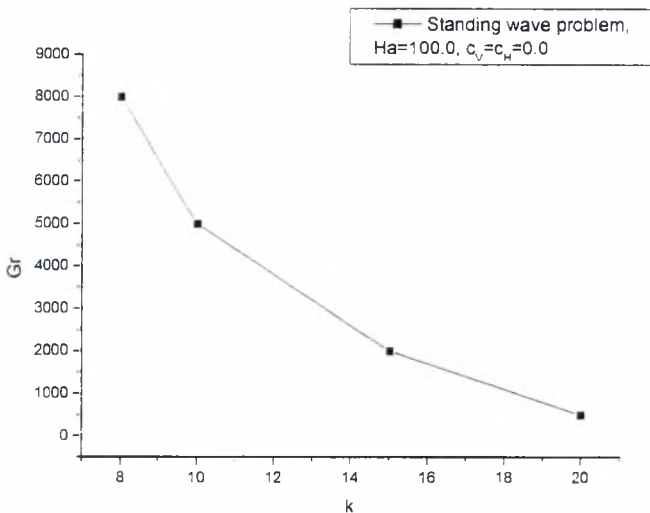
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο Σχήμα 18 δεν παρουσιάζεται η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος καθώς σε αυτή την περίπτωση η κρίσιμη τιμή του  $Gr > 20000$  στο εύρος  $8 \leq k \leq 20$ . Επίσης, δεν μελετήσαμε την περίπτωση ο Gr να λαμβάνει τιμές μικρότερες από 500 στην περίπτωση που ο κυματάριθμος  $15 \leq k \leq 20$ .

Ακόμη, στην τρισδιάστατη ανάλυση η ιδιομορφή στάσιμου κύματος είναι πιο ασταθής σε σχέση με τον Hopf mode, ενώ στην δισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας συμβαίνει το αντίθετο και κατ' επέκταση η ιδιομορφή στάσιμου κύματος εμφανίζεται σε υψηλότερες τιμές του Gr.

Επιπρόσθετα, σε σχετική μελέτη των Burg & Muehler (2002) σε διαφορικό ορθογωνικό αγωγό παρουσία ισχυρού οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας και θερμοκρασιακού πεδίου παράλληλου στη δύναμη της βαρύτητας παρατηρήθηκε, μέσω των πειραμάτων που διεξήγαγαν, ιδιομορφή στάσιμου κύματος που κυριαρχούσε στο πρόβλημα που διερεύνησαν. Ανάλογη συμπεριφορά αναμένουμε και στο υπό εξέταση πρόβλημα.



Σχήμα 17: Διάγραμμα παραμετρικής ανάλυσης κρίσιμης τιμής του  $Gr$  ως προς τον κυματάριθμο  $k$  με παραμέτρους (a)  $Ha=10.0, c_v=c_H=0.0$ , (b)  $Ha=0.0, c_v=c_H=0.0$ .



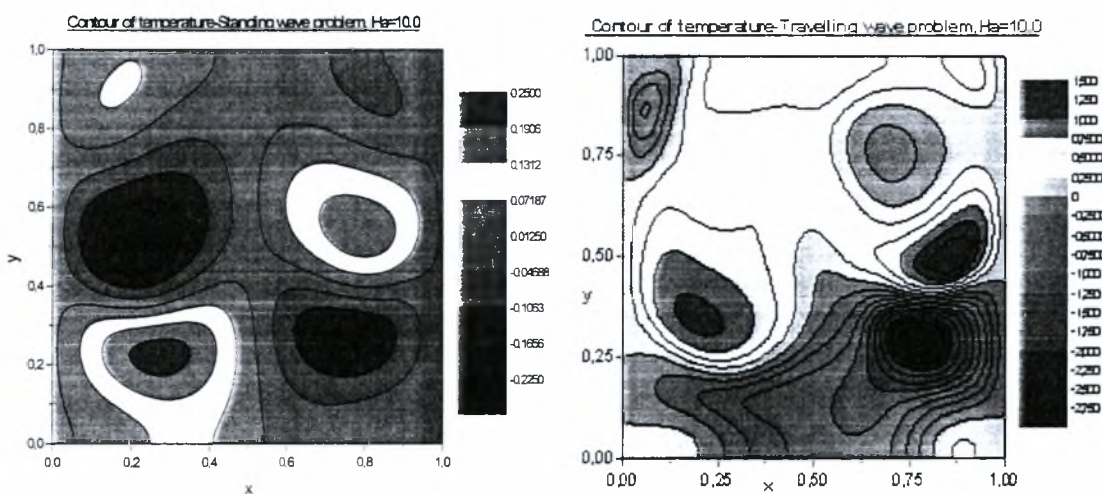
Σχήμα 18: Διάγραμμα παραμετρικής ανάλυσης κρίσιμης τιμής του  $Gr$  ως προς τον κυματαριθμό  $k$  με παραμέτρους  $Ha=100.0, c_v=c_H=0.0$ .

Στα Σχήματα που παραθέτουμε παρακάτω αναπαριστούμε με ισούψεις καμπύλες (contours) τις ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφουν τα πεδία των ταχυτήτων, θερμοκρασίας, πίεσης και ηλεκτρικού φορτίου. Οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν υπολογιστεί αριθμητικά, μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, στα σημεία όπου ο αριθμός  $Gr$  λαμβάνει κρίσιμη τιμή, κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές που έχουν προκύψει από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών είναι ασταθείς (βλ. πίνακες 7, 8).

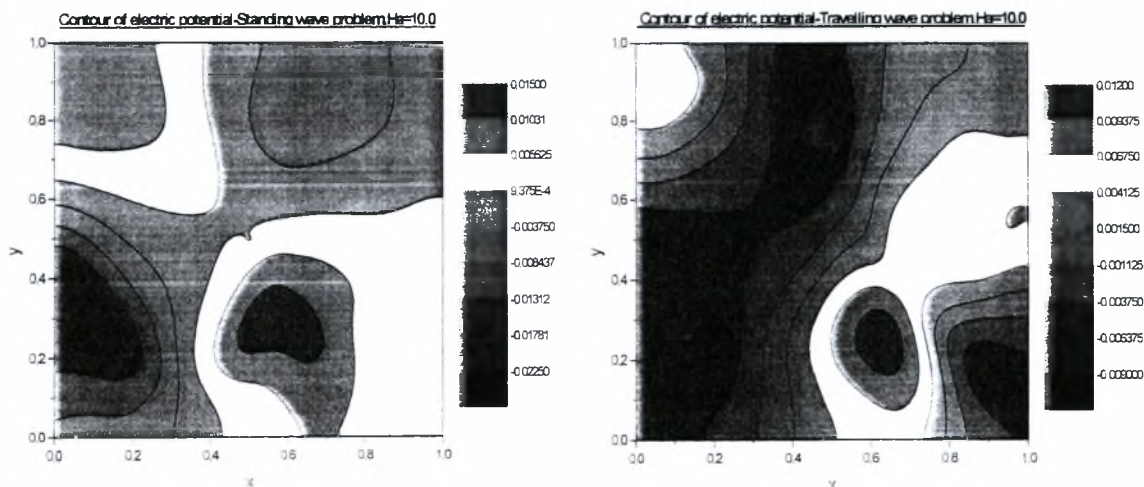
Στα Σχήματα 19 και 20 παριστάνεται η κατανομή της θερμοκρασίας και του ηλεκτρικού δυναμικού με παραμέτρους  $Ha=10.0, c_v=c_H=0.0, Gr=15000$  και  $k=4.0$ .

για τις περιπτώσεις στάσιμου και οδεύοντος κύματος. Σημειωτέον ότι οι δύο modes είναι ασταθείς στο συγκεκριμένο πεδίο παραμέτρων. Ανάλογα διαγράμματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 21 και 22 για την περίπτωση  $Ha=0$ .

Χωρίς να είναι εμφανές από τα εν λόγω διαγράμματα όσο αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$  υπάρχει μια πιο ομοιόμορφη θερμοκρασιακή κατανομή στην διατομή του αγωγού. Στην τρέχουσα ερευνητική προσπάθεια γίνονται προσομοιώσεις για μεγαλύτερες τιμές του αριθμού  $Ha$  ώστε να δειχθεί καλύτερα η επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να ληφθούν υπόψη στην ανάλυση που εφαρμόζουμε αρκετά υψηλότερες τιμές του  $Ha$  έτσι ώστε να διαφανεί η λειτουργία του Hartmann braking effect και η φύση των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν. Στα Σχήματα 24 και 25 παρατίθενται περισσότερες ιδιομορφές για  $Ha=10$ .

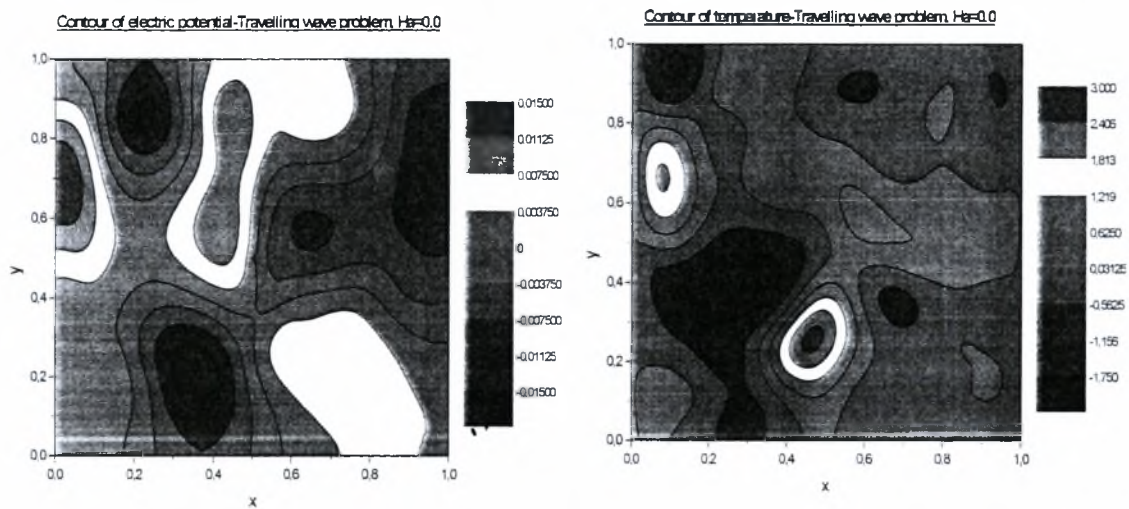


Σχήμα 19: Διάγραμμα ισούψων καμπυλών της θερμοκρασίας για mode (a) στάσιμου κύματος και (b) οδεύοντος κύματος, με παραμέτρους  $Ha=10.0$ ,  $c_v = c_H = 0.0$ ,  $k=4.0$  και  $Gr=15000$ .

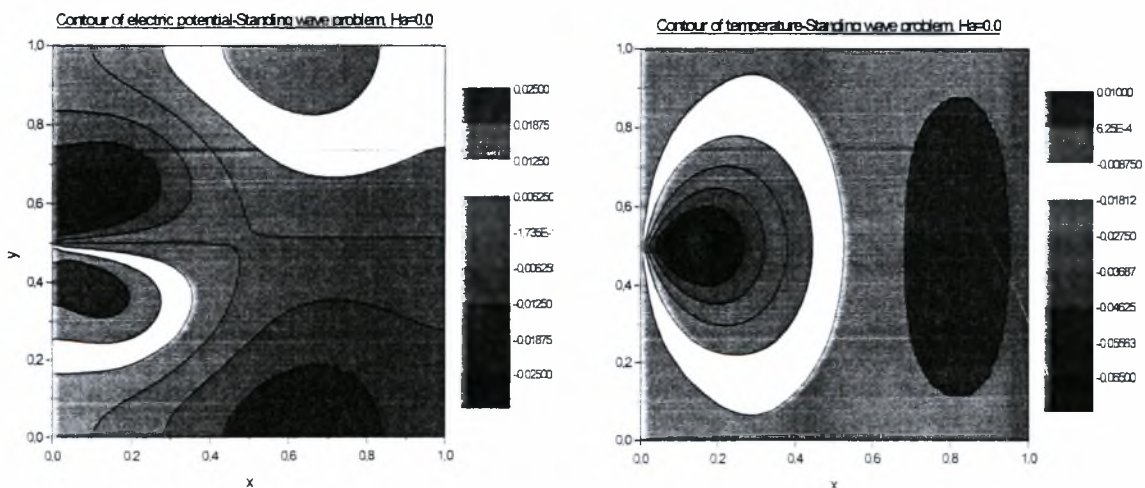




Σχήμα 20: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του ηλεκτρικού δυναμικού για mode (a) στάσιμου κύματος και (b) οδεύοντος κύματος, με παραμέτρους  $Ha=10.0$ ,  $c_V = c_H = 0.0$ ,  $k=4.0$  και  $Gr=15000$ .



Σχήμα 21: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών για mode οδεύοντος κύματος (a) του ηλεκτρικού δυναμικού και (b) της θερμοκρασίας, με παραμέτρους  $Ha=0.0$ ,  $c_V = c_H = 0.0$ ,  $k=5.0$  και  $Gr=8000$ .



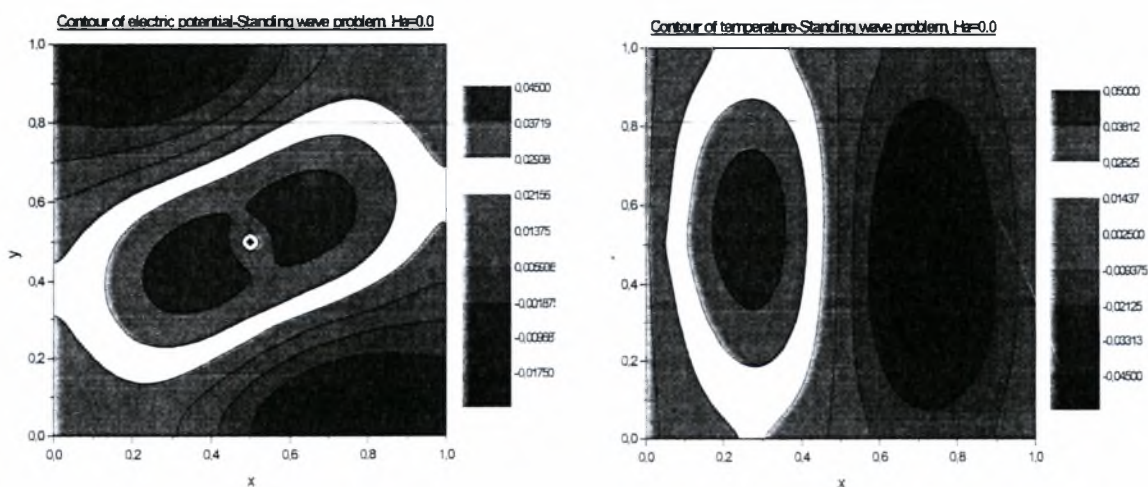
Σχήμα 22: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών για mode στάσιμου κύματος (a) του ηλεκτρικού δυναμικού και (b) της θερμοκρασίας, με παραμέτρους  $Ha=0.0$ ,  $c_V = c_H = 0.0$ ,  $k=5.0$  και  $Gr=0.1$ .

Ha=0.0, Pr=0.0321, 50x50 biquadratic finite element mesh							
k=5.0				k=7.0			
Standing wave		Travelling wave		Standing wave		Travelling wave	
Gr <sub>crit</sub> =0.1		Gr <sub>crit</sub> =8000		Gr <sub>crit</sub> =0.1		Gr <sub>crit</sub> =8000	
real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
16.633	0.0	3.311	±61.934	92.527	0.0	0.587	±65.557

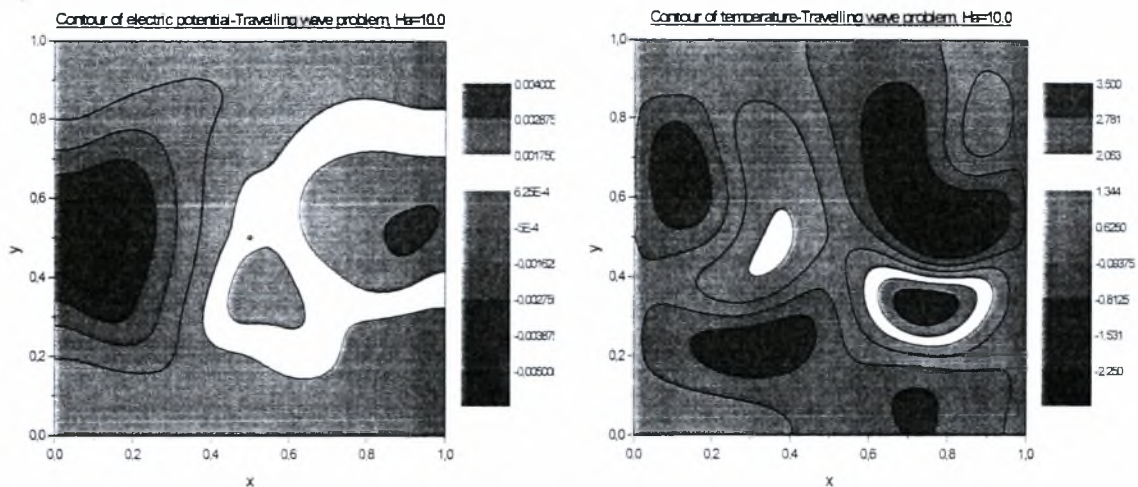
Πίνακας 7: Ασταθείς ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε κρίσιμες τιμές του Gr για modes στάσιμου και οδεύοντος κύματος για Ha=0.0.

Ha=10.0, Pr=0.0321, 50x50 biquadratic finite element mesh							
k=4.0				k=10.0			
Standing wave		Travelling wave		Standing wave		Travelling wave	
Gr <sub>crit</sub> =1000		Gr <sub>crit</sub> =13000		Gr <sub>crit</sub> =0.1		Gr <sub>crit</sub> =4000	
real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
1.584	0.0	0.4525	±16.620	125.159	0.0	0.135	±0.199

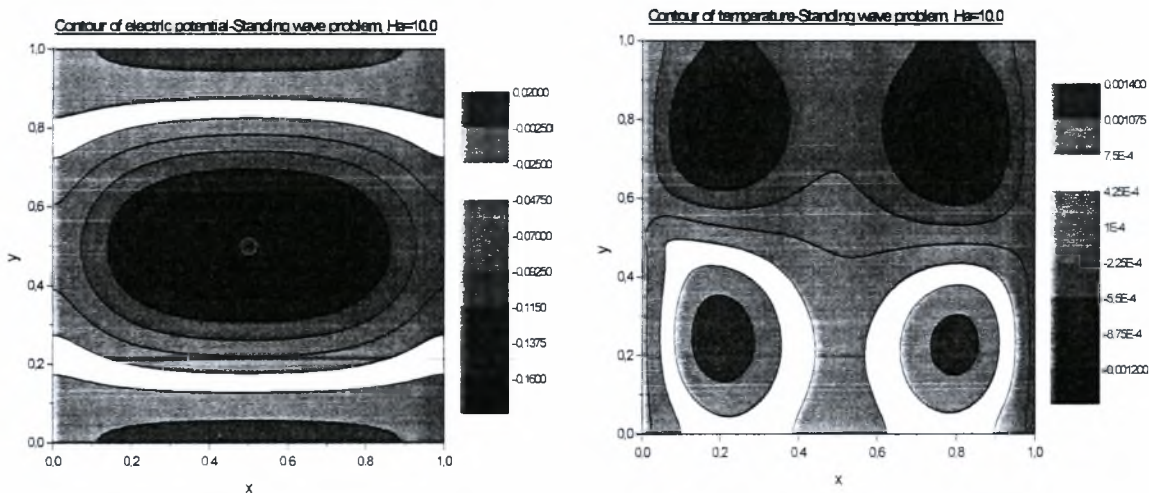
Πίνακας 8: Ασταθείς ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε κρίσιμες τιμές του Gr για modes στάσιμου και οδεύοντος κύματος για Ha=10.0.



Σχήμα 23: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών για mode στάσιμου κύματος (a) του ηλεκτρικού δυναμικού και (b) της θερμοκρασίας, με παραμέτρους Ha=0.0,  $c_v = c_H = 0.0$ , k=7.0 και Gr=0.1.



Σχήμα 24: Διάγραμμα ισοϋψών καμπλών για mode οδεύοντος κύματος (a) του ηλεκτρικού δυναμικού και (b) της θερμοκρασίας, με παραμέτρους  $Ha=10.0$ ,  $c_V = c_H = 0.0$ ,  $k=10.0$  και  $Gr=4000$ .



Σχήμα 25: Διάγραμμα ισοϋψών καμπλών για mode στάσιμου κύματος (a) του ηλεκτρικού δυναμικού και (b) της θερμοκρασίας, με παραμέτρους  $Ha=10.0$ ,  $c_V = c_H = 0.0$ ,  $k=10.0$  και  $Gr=0.1$ .

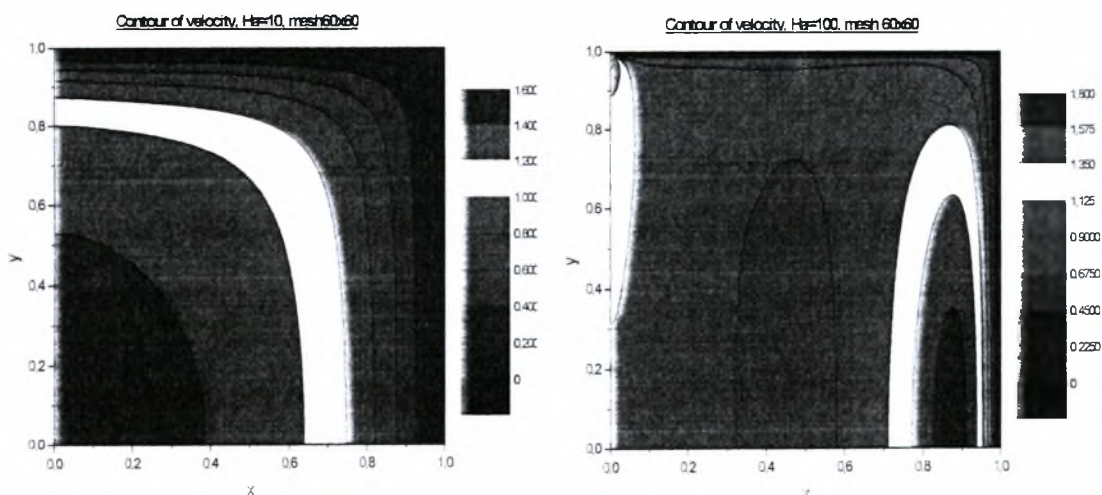


### 4.3 Αποτελέσματα προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με εξαναγκασμένη συναγωγή σε ορθογώνιο αγωγό παρουσία μαγνητικού πεδίου που δρα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση του αγωγού.

Τα διαγράμματα που παραθέτουμε παρακάτω έχουν προκύψει με χρήση 60x60 διτετραγωνικών στοιχείων σε περίπτωση όπου ο αριθμός  $Ha < 100$  καθώς και με υπολογιστικό πλέγμα 80x80 στοιχείων όταν ο συγκεκριμένος αδιάστατος αριθμός υπερβεί το 100. Σε υψηλές τιμές του  $Ha$  ( $> 100$ ) δεν θέτουμε τα στοιχεία ομοιόμορφα αλλά πυκνώνουμε το πλέγμα στα άκρα των τοιχωμάτων του αγωγού. Αξίζει να σημειωθεί ότι για δεδομένο πλέγμα 80x80 στοιχείων και για αριθμό  $Ha > 700$  θα πρέπει να πυκνώσουμε το πλέγμα περισσότερο στα άκρα των τοιχωμάτων του αγωγού σε σχέση με αριθμό  $Ha < 500$  έτσι ώστε να έχουμε υπολογισμό της ταχύτητας και του ηλεκτρικού δυναμικού με ικανοποιητική ακρίβεια, ιδιαίτερα μέσα στις στοιβάδες Hartmann και τις πλάγιες στοιβάδες του αγωγού. Ας σημειωθεί δε ότι το πάχος των στοιβάδων αυτών μεταβάλλεται κατά  $Ha^{-1}$  και  $Ha^{-1/2}$  αντιστοίχως.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις ισοϋψείς καμπύλες της αξονικής  $x$  – συνιστώσας της ταχύτητας  $u(y,z)$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\phi(y,z)$  για  $Ha = 10, 100, 200, 700$  οπότε και η πυκνωση του πλέγματος μεταβάλλεται ανάλογα με την συρρίκνωση των οριακών στοιβάδων που αναπτύσσονται κοντά στα τοιχώματα της διατομής. Στα παρατιθέμενα διαγράμματα η διακριτοποίηση αφορά το ένα τεταρτημόριο της διατομής λόγω των συμμετριών που υπάρχουν κατά τους άξονες  $y$  και  $z$ .

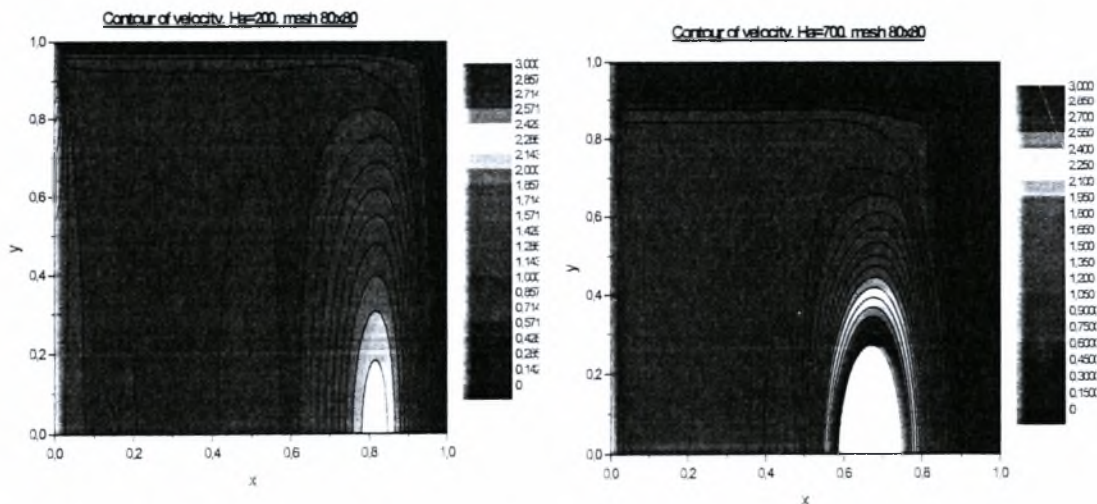


Σχήμα 26: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών της ταχύτητας  $u$  με παραμέτρους (a)  $Ha=10.0$  και (b)  $Ha=100.0$ , πλέγμα  $60 \times 60$  στοιχείων.

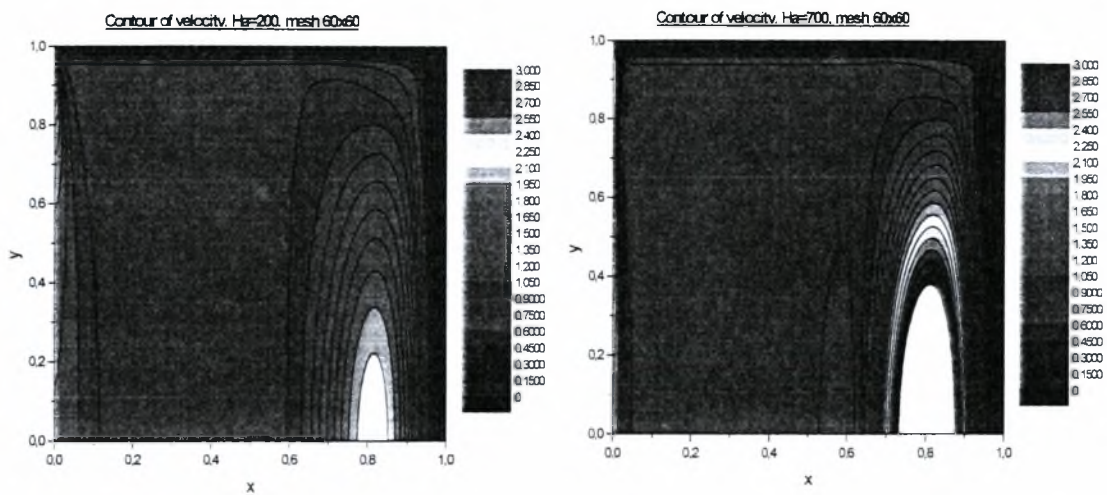
Όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα ισοϋψών της αξονικής ταχύτητας καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$  η αξονική ταχύτητα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιομορφία στο εσωτερικό του αγωγού ενώ αναπτύσσει ζώνες Hartmann μικρού πάχους κοντά στο πάνω τοίχωμα και περιοχές υψηλής ταχύτητας κοντά στο πλάγιο τοίχωμα μέσω των οποίων μεταφέρεται μεγάλο μέρος της ροής.

Αξίζει δε να σημειωθεί ότι με κατάλληλη πύκνωση του πλέγματος και χωρίς αύξηση των στοιχείων που χρησιμοποιούνται μπορεί να αναπαρασταθεί η ροή;  $xfact=yfact=2$  για  $60 \times 60$  στοιχεία και 3 για  $80 \times 80$  στοιχεία. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων για  $60 \times 60$  και  $80 \times 80$  στοιχεία διαπιστώνεται μετά από απλή παρατήρηση των γραφημάτων 24 και 25 καθώς και από την τιμή της πτώσης πίεσης  $C$  που είναι περίπου 0.054 και για τα δύο πλέγματα όταν η αδιάστατη ηλεκτρική αγωγιμότητα στα τοιχώματα είναι  $c_v=c_H=0.07$ . Η ασυμπτωτικά υπολογιζόμενη λύση, εξίσωση (2.11), στο όριο  $Ha \rightarrow \infty$  είναι 0.05.

Ενδιαφέρον έχει επίσης ο υπολογισμός της λύσης για αρκετά πιο μεγάλες τιμές του αριθμού  $Ha$  με την παραπάνω διαδικασία, ώστε να διαφανούν οι δυνατότητες της μεθόδου, καθώς και η ανάλυση ευστάθειας. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα γίνει δυνατή η σύγκριση με παλαιότερες εργασίες που αποδίδουν κυρίαρχο ρόλο στις στοιβάδες  $Ha$  (Lingwood & Alboussiere 1999) ή στις πλάγιες στοιβάδες (Ting et al. 1991) χωρίς όμως να λαμβάνουν ταυτόχρονα υπόψη την επίδραση και των δύο.



Σχήμα 27: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών της ταχύτητας  $u$  με παραμέτρους (a)  $Ha=200.0$  και (b)  $Ha=700.0$ , πλέγμα  $80 \times 80$  στοιχείων



Σχήμα 28: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών της ταχύτητας  $u$  με παραμέτρους (a)  $Ha=200.0$  και (b)  $Ha=700.0$ , πλέγμα  $60 \times 60$  στοιχείων.

## V) Συμπεράσματα & Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκαν οι περιπτώσεις: i) ροής υγρού μετάλλου σε τετραγωνικό αγωγό με ελεύθερη συναγωγή απουσία μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι παράλληλη στη δύναμη της βαρύτητας, ii) ροής υγρού μετάλλου σε αγωγό τετραγωνικής διατομής με ελεύθερη συναγωγή παρουσία ισχυρού, ομογενούς, οριζόντιου μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής ομοιόμορφης πηγής θερμότητας, ενώ παράλληλα υπάρχει βαθμίδα θερμοκρασίας κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας και iii) ροής υγρού μετάλλου σε τετραγωνικό αγωγό με εξαναγκασμένη συναγωγή απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας και μαγνητικό πεδίο που δρα κατά τον θετικό άξονα της  $y$  διεύθυνσης του προβλήματος.

Η ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος (i) μας οδήγησε στην εξαγωγή των παρακάτω συμπερασμάτων:

- Προσαρμόσαμε κατάλληλα τον κώδικα που διαθέταμε έτσι ώστε να επλύει το πρόβλημα που μελετήθηκε από τους S. Xin & P. Le Quere (2001) και κατέστη δυνατή η αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της παραπάνω εργασίας για δισδιάστατες διαταραχές που προβλέπει ασταθείς ιδιομορφές τύπου Hopf.
- Εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Rayleigh ως προς τον κυματάριθμο  $k$  και παρατηρήσαμε ότι προκύπτει ιδιομορφή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα, η οποία γίνεται ασταθής γρηγορότερα από τις ιδιομορφές που αποτελούν συνέχεια των ασταθειών Hopf του δισδιάστατου προβλήματος. Αυτό είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της παραπάνω μελέτης. Όμως δεν κατέστη δυνατή η ανεύρεση τιμής του  $k$  τέτοιας ώστε ο κρίσιμος  $Ra$  να λαμβάνει ελάχιστη τιμή, σε αντίθεση με την παραπάνω μελέτη που το κατόρθωσε αυτό. Η συγκεκριμένη τιμή του  $k$  καθορίζει τη δυναμική του συστήματος και συνεπώς είναι σημαντικό να βρεθεί και με την παρούσα αριθμητική μέθοδο.

Η μελέτη του προβλήματος (ii) εφαρμόζοντας τρισδιάστατες διαταραχές μας οδήγησε στα εξής συμπεράσματα:



- Όταν ο κυματάριθμος  $k$  μηδενιστεί διαπιστώσαμε ότι τα αποτελέσματα του τρισδιάστατου προβλήματος ευστάθειας συμπίπτουν με τα αντίστοιχα από την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος ευστάθειας (Pelekasis 2006).
- Κατά τη διάρκεια της παραμετρικής μελέτης, εξετάζοντας τις κρίσιμες τιμές που λαμβάνει ο αριθμός  $Gr$  συναρτήσει του κυματάριθμου  $k$  αναδύονται δύο ειδών ασταθείς ιδιομορφές. Αυτή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα (standing wave mode) και η οποία χαρακτηρίζεται από μηδενικό φανταστικό μέρος, και αυτή που αντιστοιχεί σε οδεύον κύμα (travelling wave mode) και η οποία χαρακτηρίζεται από μη μηδενικό φανταστικό μέρος και εμφανίζεται με την μορφή συζυγών ιδιοτιμών.
- Παρατηρήσαμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες από κάποια τιμή του κυματάριθμου και πέρα. Επιπλέον, καθώς ο κυματάριθμος  $k$  αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του  $Gr$  μειώνεται χωρίς να βρεθεί ελάχιστη τιμή του  $Gr_{Cr}$ .
- Αύξηση του αριθμού  $Ha$  συνεπάγεται ότι ο  $Gr$  λαμβάνει μεγαλύτερες κρίσιμες τιμές, ενώ σε κάθε περίπτωση αποτελεσμάτων που προέκυψαν διαπιστώθηκε ότι η ιδιομορφή στάσιμου κύματος κυριαρχεί στην ανάλυση που εφαρμόσαμε.
- Στο διάγραμμα παραμετρικής ανάλυσης ( $k-Gr$ ) παρατηρήσαμε ότι στην περιοχή που ορίζεται κάτω από την κρίσιμη καμπύλη της ιδιομορφής στάσιμου κύματος οι δύο ιδιομορφές παραμένουν ευσταθείς, ενώ αντίθετα στην περιοχή που ορίζεται πάνω από την κρίσιμη καμπύλη της ιδιομορφής οδεύοντος κύματος οι δύο ιδιομορφές παραμένουν ασταθείς.
- Δεν διαπιστώθηκε κάποιο κυρίαρχο μήκος κύματος που να καθορίζει τη δυναμική του συστήματος μετά την επιβολή των τρισδιάστατων διαταραχών, δηλαδή δεν υπάρχει τιμή του  $k$  τέτοια ώστε ο κρίσιμος αριθμός  $Gr$  να αποκτά τοπικό ελάχιστο.
- Στην περίπτωση της ιδιομορφής στάσιμου κύματος διαπιστώθηκε μια ομοιόμορφη θερμοκρασιακή κατανομή στη διατομή του αγωγού, με αύξηση του αριθμού  $Ha$  και σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους.



Η μελέτη του προβλήματος βεβαιωμένης συναγωγής, πρόβλημα (iii), κατέδειξε τα παρακάτω ζητήματα

- Είναι δυνατή η περιγραφή της αξονικής πλήρως ανεπτυγμένης ροής για αρκετά υψηλούς αριθμούς  $Ha$ ,  $O(1000)$ , με κατάλληλη πύκνωση του πλέγματος κοντά στις πλάγιες στοιβάδες και τις στοιβάδες Hartmann.
- Επαληθεύονται τα ευρήματα της ασυμπτωτικής μελέτης,  $Ha \rightarrow \infty$ , για το πεδίο ροής και την πτώση πίεσης.
- Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος παρέχει αξιόπιστη βασική λύση για περαιτέρω ανάλυση ευστάθειας της ροής εξαναγκασμένης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου.

Σε επόμενο στάδιο είναι επιθυμητή η διακρίβωση των αποτελεσμάτων των Xin & Quere ώστε να επαληθευθεί η τιμή του κρίσιμου  $k$ . Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστεί η χρήση πυκνότερου πλέγματος γεγονός που ίσως οδηγήσει στον παραλληλισμό του κώδικα.

Όσον αφορά το πρόβλημα (ii), αποτελεί παρόμοια περίπτωση με την μελέτη από τους U. Burr & U. Muehler (2002) της ροής Rayleigh-Bernard σε αγωγό ορθογωνικής διατομής παρουσία μαγνητικού πεδίου. Επιθυμούμε τελικά να προσαρμόσουμε τον υπάρχοντα κώδικα έτσι ώστε να επιλύει την εν λόγω περίπτωση με σκοπό την αναγνώριση του μηχανισμού της παραγωγής των οιονεί δισδιάστατων δομών σε αγωγούς όπου λαμβάνει μέρος η συναγωγή Rayleigh-Benard, οι οποίες έχουν παρατηρηθεί από τους παραπάνω ερευνητές. Επιπλέον, αναμένουμε την εμφάνιση ιδιομορφής στάσιμου κύματος που να καθορίζει τη δυναμική του συγκεκριμένου συστήματος και κατ' επέκταση την περιοδικότητα των δομών που παρατηρούνται πειραματικά.

Σε αυτή την κατεύθυνση και προκειμένου να βελτιωθεί περαιτέρω η παρούσα εργασία προτείνονται οι παρακάτω βελτιώσεις:

- Μελέτη του προβλήματος σε υψηλότερους αριθμούς  $Ha$  έτσι ώστε να διαπιστωθεί το Hartmann braking effect, ανάπτυξη οριακών στρωμάτων Hartmann και πλευρικών στρωμάτων στα τοιχώματα του αγωγού και παράλληλα να κατανοηθεί η φύση των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών.

- Υιοθέτηση πιο πυκνών πλεγμάτων με σκοπό να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στα υπολογιστικά αποτελέσματα και κατ' επέκταση καλύτερη κατανόηση των φαινομένων.
- Χρήση παράλληλου προγραμματισμού έτσι ώστε να περιοριστεί το υπολογιστικό κόστος της αντιστροφής του πίνακα ζώνης που πηγάζει από το πρόβλημα ιδιοτιμών, και να ξεπεραστεί το πρόβλημα αποθήκευσης του πίνακα στη κεντρική μνήμη μέσω ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος κατανεμημένης μνήμης.
- Επέκταση της ανάλυσης ευστάθειας και για την περίπτωση εξαναγκασμένης συναγωγής ώστε να πιστοποιηθεί η σχετική βαρύτητα των στοιβάδων Hartmann (Lingwood & Alboussiere 1999) και των πλευρικών στοιβάδων (Ting et al. 1991) στην εμφάνιση ασταθειών και στην μετάβαση σε τύρβη υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου.

## Βιβλιογραφία

1. T. Munakata & I. Tanasawa, "Onset of oscillatory flow in a Czochralski growth melt and its suppression by magnetic field", *J. Cryst Growth* 106, 566 (1990).
2. L. Rossi, J. C. Vassilicos & Y. Hardalupas, "Multiscale laminar flows with turbulentlike properties", *Phys. Rev. Lett.*, 97, 144501 (2006).
3. R. Stieglitz & U. Muller, "Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo." *Phys. Fluids* 13, 561-564 (2001).
4. A. P. Willis & F. Barenghi, "Hydromagnetic Taylor-Couette flow: numerical formulation and comparison with experiment", *J. Fluid Mech.* **463**, 361-375 (2002).
5. P. Moresco & T. Alboussiere, "Experimental study of the instability of the Hartmann layer", *J. Fluid Mech.* 504, 167- (2004).
6. R. J. Lingwood & T. Alboussiere, "On the stability of the Hartmann layer," *Phys. Fluids* 11, 2058- (1999).
7. A. L. Ting, J. S. Walker, T. J. Moon, C. B. Reed & B. F. Picologlou, "Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid metal magnetohydrodynamic flow", *int. J. Engng Sci.* 29(8) 939-948 (1991).
8. A. Potherat, "Quasi two dimensional perturbations in duct flows under transverse magnetic field", *Phys. Fluids* **19**, 074104 (2007).
9. N. Pelekasis "Bifurcation Diagrams, Linear Stability Analysis and Dynamic Simulations of Free Convection in a Differentially Heated Cavity in the Presence of a Magnetic Field", *Physics of Fluids* 18(3), 1-23, 2006.
10. S. Xin and P. Le Quere, «Linear stability analysis of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls,» *Phys. Fluids* **13**, (2001).
11. L. Buehler and P. Norajitra, «Magnetohydrodynamic flow in the Dual Coolant Blanket,» FZK, (2003).
12. Annual report, «Breeding blanket HCLL blanket concept,» FZK, (2003).
13. U. Burr and U. Muller, «Rayleigh-Benard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field,» *J. Fluid Mechanics* **453**, (2002).
14. A. L. Ting, J. S. Walker, T. J. Moon, C. B. Reed and B. F. Picologlou, «Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in self-cooled liquid-metal blankets,» *Fusion Technology* **19**, (1991).
15. L. Buehler and S. Molokov, «Magnetohydrodynamic flow in ducts with insulating coatings,» Technical report KfK **5103**, (1993).
16. I. E. Sarris, S. C. Kakarantzas, A. P. Grecos and N. S. Vlachos, «MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity,» *Int. J. Heat Mass Transfer* **48**, (2005).
17. G. Labrosse, E. Tric, H. Khallouf and M. Betrouni, «A direct (pseudospectral) solver of the 2D/3D Stokes problem: Transition to unsteadiness of natural-convection flow in a differentially heated cubical cavity,» *Numer. Heat Transfer, Part B* **31**, (1997).
18. R. A. W. M. Henkes and P. Le Quere, «Three-dimensional transition of natural-convection flows,» *J. Fluid Mechanics* **319**, (1996).
19. A. Yu. Gelfgat and I. Tanasawa, «Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method,» *Numer. Heat Transfer, Part A* **25**, (1994).
20. E. A. Burroughs, L. A. Romero, R. B. Lehoucq and A. J. Salinger, «Linear stability of flow in a differentially heated cavity via large-scale eigenvalue calculations,» *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **14**, (2004).
21. T. Alboussiere, J. P. Garandet and R. Moreau. «Asymptotic analysis and symmetry in MHD convection,» *Phys. Fluids* **8**, (1996).

22. S. Arcidiacono, I. Di Piazza and M. Ciofalo, «Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures. II. Square cavity, AR=1,» *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, (2001).
23. S. Molokov and L. Buehler, «Three-dimensional buoyant convection in a rectangular box with thin conducting walls in a strong horizontal magnetic field,» *FZK* **6817**, (2003).
24. M. A. Fuechterer, L. Barleon, L. Giancarli, A. Li Puma, O. V. Ogorodnikova, Y. Poitevin, J. F. Salavy, J. Szczepanski and G. Vella, «Potential and limits of water-cooled Pb-17Li blankets and divertors for a fusion power plant,» *Fusion Engineering and Design* **49-50**, (2000).
25. S. Malang, E. Bojarsky, L. Buehler, H. Deckers, U. Fischer, P. Norajitra and H. Reiser, «Dual coolant liquid metal breeder blanket,» *Fusion Technology*, (1993).
26. S. Malang and K. Schleisiek, «Dual coolant blanket concept,» Technical report KfK **5424**, (1994).
27. S. Chandrasekhar, «Hydrodynamic and hydromagnetic stability,» Dover, (1961).
28. L. Lehnert and N. C. Little, «Experiments on the effect of inhomogeneity and obliquity of a magnetic field inhibiting convection,» *Tellus* **9**, (1956).
29. S. Fauve, C. Laroche and A. Libchaber, «Effect of a horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury,» *J. Physique-Lettres*. **42**, (1981).
30. S. Fauve, C. Laroche, A. Libchaber and B. Perrin, «Chaotic phases and magnetic order in a convective fluid,» *Phys. Rev. Lett.* **52**, (1984).
31. Y. Kishida and K. Takeda, «Suppression of turbulent Benard convection by horizontal D. C. magnetic field,» *Proc. Intl Symp. on Electromagnetic Processing of Materials*, October 25-28, Nagoya, Japan, *ISIJ Rev. Lett.*, (1994).
32. J. Sommeria and R. Moreau, «Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional,» *J. Fluid Mechanics* **118**, (1982).
33. L. Buehler, «Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows,» *J. Fluid Mechanics* **326**, (1996).
34. M. S. Tillack and K. McCarthy, «Flow quantity in side layers for MHD flow in conducting rectangular ducts,» Technical Report UCLA-IFNT-89-01, (1989).
35. P. M. Gresho and R. L. Sani, «Incompressible Flow and the Finite Element Method,» Wiley, (1998).
36. R. J. Donnelly and M. Ozima, *Proc. Roy. Soc. A*, Wiley, **266**, (1962).
37. P. H. Roberts, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **60**, (1964).
38. L. Giancarli, H. Golfier, S. Nishio, R. Raffray, C. Wong and R. Yamada, «Progress in blanket designs using SiCf/SiC composites,» *Fusion Eng. Des.*, **61&62**, (2002).
39. L. Buehler, «Inertialess magnetohydrodynamic flows in expansions and contractions,» *FZKA* **6904**, (2003).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091550

